

Entropie et complexité locale des systèmes dynamiques différentiables

David Burguet

▶ **To cite this version:**

David Burguet. Entropie et complexité locale des systèmes dynamiques différentiables. Mathématiques [math]. Ecole Polytechnique X, 2008. Français. NNT : . tel-00347444

HAL Id: tel-00347444
https://pastel.hal.science/tel-00347444

Submitted on 15 Dec 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de doctorat de l'Ecole Polytechnique
Spécialité : Systèmes dynamiques

Entropie et complexité locale des systèmes dynamiques différentiables

---

Présentée par : David Burguet
Manuscrit en date du 4 décembre 2008

Composition du jury :

François Ledrappier	Rapporteur
Jérome Buzzi	Directeur de thèse
François Blanchard	Examinateur
Gilles Courtois	Examinateur
Sylvain Crovisier	Examinateur
Philippe Thieullen	Examinateur

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Jérome Buzzi, qui m'a fait découvrir l'entropie des systèmes dynamiques et qui a guidé mes premiers pas dans le monde de la recherche avec une disponibilité et une confiance indéfectibles.

Merci aux rapporteurs : Tomasz Downarowicz, François Ledrappier, Sheldon Newhouse. Merci à Philippe Thieullen, Sylvain Crovisier, Gilles Courtois et François Blanchard d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je tiens à remercier chaleureusement Mike Boyle et Tomasz Downarowicz. Mike Boyle m'a invité à Washington durant trois semaines, qui furent très intensives. Cette visite fut le point de départ d'un travail en collaboration avec Kevin Mcgoff, qui, je l'espère, en emmènera d'autres. Tomasz Downarowicz m'a accueilli à Wroclaw en avril. Je lui suis vivement reconnaissant pour son intérêt constant pour mes travaux et pour ses suggestions toujours pertinentes, qui ont su les faire progresser. Je voudrais aussi remercier Michel Coste pour ses conseils en géométrie semi-algébrique.

Merci à tous les matheux qui ont, un instant, partagé mes démons mathématiques. Merci au C.M.L.S. dans son ensemble pour m'avoir permis d'effectuer cette thèse dans d'excellentes conditions. Pensée particulière à mes collègues et amis thésards.

J'en profite pour saluer mes amis beaucerons et ma famille. Je remercie tout particulièrement mes parents pour leur soutien dans l'accomplissement d'une passion bien singulière et pour les après-midis ensoleillées à La Bascule.

Mes dernières pensées vont à Irène. Elles me laissent sans voix...

Table des matières

0.1 Entropie . . . 9
0.2 Structure d'entropie . . . 10
0.3 Théorie de Yomdin-Gromov . . . 10
0.4 Extensions symboliques . . . 12
0.5 Résumé des chapitres . . . 14
0.6 Perspectives, questions ouvertes et conjectures . . . 15
0.6.1 Principes variationnels . . . 15
0.6.2 Entropie k dimensionnelle . . . 16
0.6.3 Caractérisation des structures d'entropie pour les applications $\mathcal{C}^r$ . . . 16

1 Formalisme fonctionnel **18**
1.1 Fonctions semi-continues . . . 18
1.1.1 Limites décroissantes de fonctions s.c.s. . . . 19
1.1.2 Enveloppe semi-continue supérieure d'une fonction . . . 20
1.1.3 Projetée d'une application s.c.s. . . . 20
1.1.4 Théorème de séparation . . . 20
1.2 Candidats . . . 21
1.2.1 Superenveloppe d'un candidat . . . 21
1.2.2 Suite transfinie associée à un candidat . . . 23
1.2.3 Ordre d'accumulation . . . 26
1.2.4 Exemples de candidats avec un ordre d'accumulation arbitrairement grand . . . 29
1.2.5 Restriction d'un candidat . . . 34
1.2.6 Relevé d'un candidat . . . 34
1.2.7 Equivalence . . . 36
1.3 Cadre affine . . . 37
1.3.1 Théorèmes usuels . . . 37
1.3.2 Fonctions s.c.s. affines et concaves . . . 38
1.3.3 Barycentre et (sous-)harmonicité . . . 39
1.4 Simplexe de Choquet . . . 39
1.4.1 Recouvrement continu affine . . . 39
1.4.2 Superenveloppe affine . . . 40
1.4.3 Projetées de fonctions affines . . . 40
1.4.4 Décomposition extrémale . . . 40
1.5 Simplexe de Bauer . . . 40
1.5.1 Décomposition extrémale . . . 41
1.5.2 Suite transfinie . . . 42
1.5.3 Superenveloppes . . . 42
1.6 Décomposition extrémale sur un Choquet . . . 43

2 Structure d'entropie **46**
2.1 Généralités sur l'entropie . . . 46
2.1.1 Entropie topologique . . . 46
2.1.2 Entropie mesurée . . . 48
2.1.3 Entropie de queue . . . 49
2.1.4 Entropie k dimensionnelle . . . 55
2.2 Partitions essentielles et topologiques . . . 56
2.2.1 Capacité orbitale . . . 56
2.2.2 Partitions essentielles . . . 58
2.2.3 Partitions topologiques . . . 59
2.2.4 Cas de la dimension 1 . . . 63
2.3 Candidats d'entropie et théorème de réalisation . . . 65
2.4 Exemples de candidats d'entropie . . . 65
2.4.1 Entropie relativement à une suite raffinantes de partitions . . . 65
2.4.2 Entropie d'une famille de fonctions . . . 66
2.4.3 Entropie à la Katok . . . 67
2.4.4 Entropie modifiée à la Bowen . . . 68
2.4.5 Entropie à la Brin-Katok . . . 68
2.4.6 Entropie locale à la Newhouse . . . 69
2.4.7 Entropie à la Misiurewicz . . . 69
2.5 Quelques résultats de comparaison des candidats . . . 70
2.5.1 Comparaison des candidats $\mathcal{H}^{Bow}$ et $\mathcal{H}^{Kat}_{\sigma}$ . . . 70
2.5.2 Comparaison des candidats d'entropie Katok et Brin-Katok . . . 71
2.5.3 Comparaison des candidats Newhouse et Brin-Katok . . . 72
2.6 Structure d'entropie . . . 73
2.7 Exemples de structures d'entropie . . . 74
2.7.1 Cadre des homéomorphismes . . . 74
2.7.2 Cadre des applications . . . 75
2.8 Principe variationnel pour l'entropie de queue . . . 77
2.8.1 Cas de l'intervalle . . . 79
2.8.2 Conséquences du principe variationnel . . . 79

3 Le lemme algébrique de Yomdin-Gromov **81**
3.1 Introduction . . . 81
3.2 Technical tools . . . 82
3.2.1 Triangular maps . . . 82
3.2.2 $(\mathcal{C}^{\alpha}, K)$ maps . . . 83
3.2.3 Composition of $(\mathcal{C}^{\alpha}, 1)$ maps . . . 83
3.3 Real semi-algebraic geometry . . . 84
3.3.1 Semi-algebraic sets and maps . . . 84
3.3.2 Tarski's Principle . . . 85
3.3.3 Continuous structure of semi-algebraic sets . . . 85
3.3.4 $\mathcal{C}^{\alpha}$-resolution of semi-algebraic sets and Nash maps . . . 87
3.3.5 (α, M)-adapted sequence . . . 88
3.4 Statements . . . 89
3.5 Case of dimension 1 . . . 92
3.6 Proof of Proposition 3 . . . 93
3.7 Une autre version du lemme algébrique . . . 97
3.8 Estimées quantitatives pour les fonctions semi-algébriques . . . 98
3.8.1 Degré pour les fonctions semi-algébriques . . . 98
3.8.2 Nombre de composante connexes . . . 101

4 Applications dynamiques de la théorie de Yomdin-Gromov **102**
4.1 Reparamétrisation contractante des boules de Bowen . . . 102
4.2 Entropie de queue des applications $\mathcal{C}^r$ . . . 106
4.3 Entropie k dimensionnelle d'un produit d'applications $\mathcal{C}^\infty$ . . . 111
4.3.1 Réduction au cas polynômial . . . 112
4.3.2 Définition des (n, ϵ) cellules . . . 113
4.3.3 Entropie et (n, ϵ) cellules . . . 114
4.3.4 Recouvrement par des (n, ϵ) cellules . . . 116
4.3.5 Conclusion des preuves des théorèmes 4.3.5 et 4.3.2 : . . . 118

5 Extensions symboliques **120**
5.1 Problématique . . . 120
5.2 Théorèmes des extensions symboliques . . . 121
5.3 Cas asymptotiquement h-expansif . . . 123
5.4 Minoration de h_{sex} . . . 124
5.5 Résultats $\mathcal{C}^r$ . . . 126
5.5.1 Conjecture principale . . . 126
5.5.2 Exemples $\mathcal{C}^r$ de Downarowicz-Newhouse pour les difféomorphismes . . . 127
5.5.3 Exemples $\mathcal{C}^r$ sur l'intervalle . . . 128
5.5.4 Extensions symboliques de $\mathcal{C}^r([0,1])$ selon T. Downarowicz et A.Maass . . . 141
5.6 Dynamiques $\mathcal{C}^\infty$ et affines par morceaux . . . 143
5.6.1 Entropie d'extension symbolique pour les applications continues $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux . . . 143
5.6.2 Définitions et propriétés générales des applications affines par morceaux . . . 144
5.6.3 Cas des homéomorphismes affines par morceaux du plan . . . 145
5.6.4 Un exemple affine par morceaux du plan avec $h_{sex} \neq h$ . . . 145
5.6.5 Estimation de h_{sex} pour les applications continues affines par morceaux du plan . . . 147

A Appendices **153**
A.1 Dynamique symbolique associée à une partition . . . 153
A.2 Extension naturelle . . . 153
A.3 Théorème de Shanon-Macmillan-Breimann . . . 153

Bibliographie **154**

Table des notations

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long de ce manuscrit :

δ_x	mesure de dirac en x
f s.c.s. (resp. s.c.i.)	f fonction semi-continue supérieurement (resp. semi-continue inférieurement)
$\widetilde{f}$	enveloppe semi-continue supérieure de f
$\widehat{f}$	défaut de semi-continuité supérieure de f
$f^{[K]}$	projeté d'une application $f : M \to \mathbb{R}$ par une surjection continue $\pi : M \to K$
$ex(K)$	ensemble extrémal d'un convexe K
f^{aff}	prolongement affine à K d'une fonction réelle f définie sur l'ensemble extrémal de K
1_E	fonction indicatrice de l'ensemble E
$r(x)$	ordre d'accumulation topologique d'un point x dans un compact donné
$\coprod_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_k$	compactification des candidats $\mathcal{H}_k$
$\mathcal{H}_1^{\times p}$	p^{eme} puissance normalisée du candidat $\mathcal{H}$
$\mathrm{ocap}(C)$	capacité orbitale d'un borélien C
$\overline{A}$	adhérence de A
$\overset{o}{A}$	intérieur de A
$B(x, n, \epsilon)$	boule de Bowen de centre x, d'ordre n et de rayon ϵ
$\mathcal{U}^n$ (resp. P^n)	n^{eme} itéré du recouvrement ouvert U (resp. de la partition P)
$diam(Y)$	diamètre de Y
$\pi_{nat} : (\overline{X}, \overline{T}) \to (X, T)$	extension naturelle de (X, T)
$h_{top}(T)$	entropie topologique de T
$h^*(T)$	entropie de queue de T
δ_x	mesure de Dirac au point x
$h_k(T)$	entropie k dimensionnelle de T
$\mathcal{P}(M)$	ensemble des mesures de probabilité boréliennes supportées par M
x_μ	barycentre d'une mesure $\mu \in \mathcal{P}(K)$ avec K convexe
$\mathcal{M}(X, T)$	ensemble des mesures de probabilité boréliennes T invariantes
$\mathcal{M}_e(X, T)$	sous-ensemble de $M(X, T)$ des mesures ergodiques
$h(\mu)$	entropie dite métrique (ou de Kolmogorov-Sinaï) d'une mesure invariante μ
$\|f\|_\infty$	norme infinie usuelle, i.e. supremum de f
$\|f\|_r$	supremum des dérivées partielles d'ordre $\leq r$ de $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$
$\|\!\|\!\|f\|\!\|\!\|_r$	norme des dérivée d'ordre $\leq r$ de $f : (M, \|\|\|_M) \to (N, \|\|\|_N)$
$\|\|\|_2$	norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^d$
$\partial^\beta f$	dérivée partielle d'ordre $\beta \in \mathbb{N}^d$ d'une fontion f définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^d$
TM	fibré tangent d'une variété M
$deg(A)$	degré d'un ensemble semi-algébrique
$deg(f)$	degré d'une fonction semi-algébrique
$deg^*(f)$	degré fonctionnel d'une fonction semi-algébrique
$\chi(\mu)$	exposant de Lyapounov maximal d'une mesure ergodique μ
$\chi^+(\mu)$	maximum de $\chi(\mu)$ et de 0

Σ_p^+	le décalage sur l'ensemble des suites à p symboles indexées par $\mathbb{N}$
h_{ext}^{π}	entropie associée à une extension symbolique π
$h_{sex}(T)$	entropie d'extension symbolique de T
$\mathcal{H} \simeq \mathcal{G}$	equivalence de deux candidats $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$
$h_{sex}(\mu)$	entropie d'extension symbolique d'une mesure invariante μ
$\lim \mathcal{H}$	limite d'un candidat $\mathcal{H}$
$u_{\alpha}^{\mathcal{H}}$	α^{eme} terme de la suite tranfinie associée au candidat $\mathcal{H}$
$\alpha^{\mathcal{H}}$	ordre d'accumulation du candidat $\mathcal{H}$
u_{α}	α^{eme} terme de la suite tranfinie associée à une structure d'entropie de (X,T)
$u = u_1$	premier terme de la suite transfinie associé à une structure d'entropie
α	ordre d'accumulation de (X,T)
$E\mathcal{H}$	plus petite superenveloppe du candidat $\mathcal{H}$
$Mult(Y)$	multiplicité de Y
h_{mult}	entropie de multiplicité

Introduction

L'entropie estime le nombre d'orbites distinctes d'un système dynamique calculé à une certaine échelle. On s'intéresse dans cette thèse aux propriétés de continuité et aux propriétés asymptotiques de cette quantité lorsque l'échelle décroît vers zéro. Celles-ci sont reliées à l'existence d'un codage de la dynamique par un alphabet fini.

Nous considérons le cas des systèmes dynamiques de classe $\mathcal{C}^r$ définis sur une variété compacte. Nous cherchons à décrire de façon précise ces systèmes dynamiques du point de vue de l'entropie. Plus l'ordre de régularité r de la dynamique est grand, plus la convergence de l'entropie est forte et plus ses propriétés de continuité sont riches.

Dans la suite de l'introduction, nous rappelons tout d'abord la notion d'entropie en systèmes dynamiques. Puis nous présentons les différents thèmes abordés dans cette thèse : les structures d'entropie, la théorie de Yomdin-Gromov et enfin la théorie des extensions symboliques. Nous énoncerons nos résultats au fur et à mesure de la présentation.

0.1 Entropie

Un système dynamique est la donnée d'une application continue T d'un espace métrisable compact X dans lui-même. L'orbite future d'un point x de X est l'ensemble des images de x par les itérés de T :

$$x, Tx, T^2x, ..., T^nx, ...$$

L'entropie topologique $h_{top}(T)$ compte le nombre d'orbites distinctes (Définition p. 46). Plus précisément le nombre d'orbites de longueur n que l'on peut différencier à l'échelle ϵ est de l'ordre de $e^{nh_{top}(T)}$ pour des échelles ϵ arbitrairement petites. **L'entropie de queue** $h^*(T)$, parfois appelée entropie locale, mesure l'entropie apparaissant à des échelles arbitrairement petites (Définition p. 50). On a toujours $0 \leq h^*(T) \leq h_{top}(T)$.

On appelle mesure invariante toute mesure de probabilité borélienne μ satisfaisant $\mu \circ T^{-1} = \mu$. Les orbites se répartissent suivant de telles mesures : si $x \in X$, tout point d'accumulation pour la topologie faible * de la suite $(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \delta_{T^k x})_{n\in\mathbb{N}}$ est une mesure invariante. Une mesure μ invariante est dite ergodique si tout borélien de X invariant par T est de μ mesure totale ou de μ mesure nulle. On note $\mathcal{M}(X,T)$ l'ensemble des mesures invariantes et $\mathcal{M}_e(X,T) \subset \mathcal{M}(X,T)$ le sous-ensemble des mesures ergodiques. De façon analogue à l'entropie topologique, on peut définir **l'entropie dite métrique ou de Kolmogorov-Sinai** (Définition p. 48) $h(\mu)$ d'une mesure invariante $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$ en comptant le nombre d'orbites distinctes vues par la mesure μ.

L'entropie topologique et l'entropie métrique sont reliées par le principe variationnel suivant :

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}(X,T)} h(\mu) = \sup_{\mu\in\mathcal{M}_e(X,T)} h(\mu) = h_{top}(T)$$

Les mesures invariantes μ vérifiant $h(\mu) = h_{top}(T)$ sont dites maximales ou d'entropie maximale. Elles reflètent toute la dynamique topologique du point de vue de l'entropie. Mais de telles mesures n'existent pas toujours, même pour des systèmes dynamiques différentiables. Cependant lorsque T est de classe $\mathcal{C}^\infty$, S. Newhouse a montré l'existence de mesures maximales en s'appuyant sur la théorie de Yomdin.

0.2 Structure d'entropie

L'entropie métrique analyse plus finement la complexité d'un système dynamique que l'entropie topologique. La notion de structure d'entropie est un outil encore plus précis, qui détermine en particulier l'entropie métrique, et donc l'entropie topologique, mais aussi l'entropie de queue.

On peut calculer l'entropie métrique de plusieurs façons différentes comme limite d'une suite croissante de fonctions réelles définies sur l'ensemble des mesures de probabilité invariantes (de telles suites seront appelées des candidats d'entropie) : à l'aide de partitions, avec la formule de Katok, avec la formule de Brin-Katok, avec une formule de Misiurewicz ponctuelle pour l'entropie de queue... La théorie des structures d'entropie introduite par T. Downarowicz permet d'unifier la plupart de ces approches. Les **structures d'entropie** (Définition p. 73) sont des candidats d'entropie remarquables, dont les propriétés de convergence reflètent la dynamique topologique. On verra par exemple que l'entropie à la Katok est une structure d'entropie, mais ce n'est pas le cas de l'entropie à la Misiurewicz. La suite constante égale à la fonction entropie est une structure d'entropie si et seulement si l'entropie de queue est nulle.

Si $\mathcal{H} = (h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une structure d'entropie, alors la fonction $u : \mathcal{M}(X,T) \to \mathbb{R}$ définie par $u = \lim_{k\to+\infty} \widetilde{h - h_k}$ vérifie le principe variationnel suivant ($\widetilde{f}$ désigne la plus petite fonction semi-continue supérieurement plus grande que f) :

Théorème 0.2.1 (Downarowicz, D.B. p. 77) *Soit X un espace métrisable compact et $T : X \to X$ une application continue d'entropie topologique finie, alors*

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}(X,T)} u(\mu) = \lim_{k\to+\infty} \|h - h_k\|_\infty = h^*(T)$$

De plus il existe une mesure $\mu \in \overline{\mathcal{M}_e(X,T)}$ telle que $u(\mu) = h^*(T)$.

T. Downarowicz a montré ce théorème dans le cadre des homéomorphismes. Nous donnons une preuve élémentaire de ce principe variationnel et nous l'étendons au cadre des endomorphismes. Nous généralisons aussi certaines structures d'entropie obtenues par T.Downarowicz dans le cadre des homéomorphismes :

Théorème 0.2.2 (D.B. p.75) *Les candidats d'entropie à la Katok et à la Newhouse sont des structures d'entropie aussi dans le cadre des endomorphismes.*

0.3 Théorie de Yomdin-Gromov

Y. Yomdin a introduit des outils de géométrie semi-algébrique pour majorer la complexité dynamique locale des applications de classe $\mathcal{C}^r$. L'approche de Y. Yomdin s'appuie sur un résultat de reparamétrisation d'ensembles semi-algébriques, que nous rappelons maintenant.

Un ensemble semi-algébrique est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$ défini par des égalités et des inégalités polynômiales. On peut, comme pour les polynômes, définir une notion de degré qui estime la complexité algébrique d'un ensemble semi-algébrique. Le lemme algébrique de Yomdin-Gromov affirme que l'on peut borner la complexité différentielle d'un ensemble semi-algébrique par sa complexité algébrique :

Théorème 0.3.1 (Gromov p.97) *Soient r, l et d des entiers positifs. Pour tout ensemble semi-algébrique $A \subset]0,1[^d$ de dimension l, il existe un entier N et des applications continues semi-algébriques $\phi_1, ..., \phi_N :]0,1[^l \to]0,1[^d$, telles que :*
- *ϕ_i est réelle analytique pour $i = 1, ..., N$;*
- *$\|\phi_i\|_r := \max_{\beta:|\beta|\leq r} \|\partial^\beta \phi_i\|_\infty \leq 1$ pour $i = 1, ..., N$;*
- *$\bigcup_{i=1}^N \phi_i(]0,1[^l) = A$.*

De plus N et $deg(\phi_i)$ sont bornés par une fonction de $deg(A)$, d et r.

Nous montrons ce théorème au chapitre 4. A.Wilkie et J.Pila ont obtenu simultanément une preuve dans un contexte o-minimal [52]. Aucune preuve complète n'avait été produite auparavant. Y. Yomdin avait cependant établi une version plus faible du théorème précédent, mais suffisante pour les applications dynamiques [58].

Au moyen du théorème précédent, Y.Yomdin obtient par interpolation pôlynomiale une estimée de la complexité dynamique locale d'une application $\mathcal{C}^r$ et en déduit la conjecture de Shub (qui affirme que la croissance homologique est majorée par l'entropie topologique) pour les applications $\mathcal{C}^\infty$. J.Buzzi montre, en suivant les travaux de Y.Yomdin, que l'entropie de queue $h^*(T)$ vérifie l'inégalité $h^*(T) \leq \frac{dR(T)}{r}$ pour une application $T : M \to M$ de classe $\mathcal{C}^r$ définie sur une variété compacte M de dimension d, où $R(T) := \max(\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|DT^n\|, 0)$ pour une norme riemmanienne $\|\|$ quelconque de M. En particulier, l'entropie de queue d'un système dynamique $\mathcal{C}^\infty$ est nulle. En suivant cette approche, nous montrons un résultat un peu plus précis :

Théorème 0.3.2 (D.B. p.108) *Soit M une variété $\mathcal{C}^r$ compacte et $T : M \to M$ une application de classe $\mathcal{C}^r$. Si μ est une mesure ergodique, on note $\chi(\mu)$ son exposant de Lyapounov maximal. Enfin on note χ_+^{aff} le **prolongement harmonique** (Définition p. 40) de $\chi_+ := \max(\chi, 0)$ sur $\mathcal{M}(M, T)$.*

Alors pour tout $\mu \in \mathcal{M}(M, T)$, on a :

$$u(\mu) \leq \frac{d\chi_+^{aff}(\mu)}{r} \tag{1}$$

Enfin nous établissons avec une approche semi-algébrique nouvelle une formule pour **l'entropie k dimensionnelle** (Définition p. 55) d'un produit d'applications $\mathcal{C}^\infty$. Pour tout entier $d \geq 1$, on note $\Lambda_d := \{f : [0,1]^d \to [0,1]^d \text{ de classe } \mathcal{C}^\infty\}$.

Théorème 0.3.3 (D.B. p. 112) *Soient $f_1, ..., f_n \in \bigcup_{d\geq 1} \Lambda_d$, alors*

$$h_1(f_1 \times ... \times f_n) = \max_{i=1,...,n} h_1(f_i)$$

Théorème 0.3.4 (D.B. p. 111) *Soient $f \in \Lambda_1$ et $g \in \Lambda_d$, alors pour tout $k = 1, ..., d$:*

$$h_k(f \times g) = \max(h_{top}(f) + h_{k-1}(g), h_k(g)) \tag{2}$$

Corollaire 0.3.5 *Le produit d'une application $f \in \Lambda_1$ d'entropie non nulle et d'une application $g \in \Lambda_d$ **entropie-dilatante** (Définition p. 55) est entropie-dilatant.*

J. Buzzi a montré la formule (2) pour un produit fini d'applications $\mathcal{C}^\infty$ de l'intervalle. De plus, pour tout $r \in \mathbb{N}$, il a exhibé un exemple de produit d'applications de l'intervalle de classe $\mathcal{C}^r$, pour lequel la formule (2) ne s'applique pas.

0.4 Extensions symboliques

Le décalage sur l'espace des suites indexées par $\mathbb{Z}$ à valeurs dans $\{1, ..., K\}$ est défini comme suit :

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \{1, ..., K\}^{\mathbb{Z}},\ \sigma((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$$

On appelle sous-décalage la dynamique induite par σ sur un sous-ensemble fermé invariant de $\{1, ..., K\}^{\mathbb{Z}}$.

On dit que $((Y, S), \pi)$ (l'application π est parfois implicite) est une extension de (X, T) si $\pi : Y \to X$ est une application continue surjective telle que $\pi \circ S = T \circ \pi$. L'extension (Y, S) "contient plus d'information" que (X, T) : l'entropie de (Y, S) est plus grande que celle de (X, T). Si (Y, S) est un sous-décalage, alors (Y, S) est appelée une **extension symbolique**. Nous insistons sur le fait qu'il s'agit de sous décalages généraux ; a priori ils ne sont pas de type fini.

Considérons un système dynamique (X, T) d'entropie topologique finie. Admet-t-il une extension symbolique ? Cette extension est-elle proche de (X, T) du point de vue de l'entropie ? Cette question fut soulevée par J. Auslander à la fin des années 80. Une condition nécessaire évidente à l'existence d'une extension symbolique de (X, T) est la finitude de l'entropie topologique de T. M. Boyle répond négativement à la première question en construisant un système dynamique zéro dimensionnel d'entropie topologique finie sans extension symbolique.

Dans [12], M. Boyle et T. Downarowicz ont développé un formalisme fonctionnel très élégant qui permet de relier ce problème aux propriétés asymptotiques des structures d'entropie. Rappelons en les grandes lignes (voir Chapitre 5 pour une présentation plus détaillée).

Si $\pi : (Y, S) \to (X, T)$ est une extension symbolique, on considère la fonction $h^{\pi}_{ext} : \mathcal{M}(X, T) \to \mathbb{R}$ définie par $h^{\pi}_{ext}(\mu) := \sup_{\substack{\nu\in\mathcal{M}(Y,S)\\ \pi^*\nu=\mu}} h(\nu)$. Alors **la fonction d'entropie d'extension symbolique** $h_{sex} : \mathcal{M}(X, T) \to \mathbb{R}$ est définie comme suit :

$$h_{sex}(\mu) := \inf_{\pi:(Y,S)\to(X,T)} h^{\pi}_{ext}(\mu)$$

où l'infimum porte sur toutes les extensions symboliques (Y, S) de (X, T) (si (X, T) n'a pas d'extension symbolique, on pose $h_{sex} \equiv +\infty$).

Enfin **l'entropie topologique d'extension symbolique** $h_{sex}(T)$ est l'infimum des entropies topologiques des extensions symboliques de (X, T) :

$$h_{sex}(T) = \inf_{\pi:(Y,S)\to(X,T)} h_{top}(S)$$

T. Downarowicz et M. Boyle [12] réduisent le problème d'existence d'extensions symboliques à des propriétés de convergence des structures d'entropie. Expliquons plus en détail leur principal résultat. Soit $\mathcal{H} = (h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une structure d'entropie. On peut définir la suite transfinie (i.e. indexée par les ordinaux) suivante.

On pose tout d'abord $u_0 = 0$. Puis on distingue les cas d'un ordinal successeur et d'un ordinal limite :

- si α est un ordinal successeur :

$$u_\alpha := \lim_{k\to+\infty} \widetilde{u_{\alpha-1} + h} - h_k$$

- si α est un ordinal limite :

$$u_\alpha := \widetilde{\sup_{\gamma<\alpha} u_\gamma}$$

Cette suite est stationnaire à partir d'un ordinal α^*, appelé **l'ordre d'accumulation** de (X,T). Le principal résultat de [12] peut être énoncé de la façon suivante :

$$h_{sex} = h + u_{\alpha^*}$$

M. Boyle et T. Downarowicz [12] prouvent aussi le principe variationnel suivant :

$$h_{sex}(T) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(X,T)} h_{sex}(\mu)$$

Dans le cas où l'entropie de queue est nulle, M.Boyle, D.Fiebig et U.Fiebig ont montré qu'il existait une extension symbolique $\pi : (Y,S) \to (X,T)$, telle que $h(\pi^*\nu) = h(\nu)$ pour tout $\nu \in \mathcal{M}(Y,S)$. C'est en particulier le cas des applications $\mathcal{C}^\infty$.

S. Newhouse et T. Downarowicz ont conjecturé que si $T : M \to M$ est une application de classe $\mathcal{C}^r$ sur une variété compacte M de dimension d, alors

$$h_{sex}(T) \leq \frac{drR(T)}{r-1}$$

Ils construisent de plus des exemples de difféomorphismes avec une entropie topologique d'extension symbolique non nulle, où cette borne est atteinte.

Récemment, T. Downarowicz et A. Maass ont montré cette conjecture dans le cadre des applications de l'intervalle. Ils prouvent aussi dans ce cadre que pour tout entier n :

$$\|u_n\|_\infty \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{R(T)}{r^k}$$

et pour tout ordinal α :

$$\|u_\alpha\|_\infty \leq \frac{R(T)}{r-1}$$

Nous exhibons au chapitre 6 des applications de l'intervalle pour lesquelles ces bornes sont optimales dans le sens suivant.

Théorème 0.4.1 (D.B. p. 132) *Pour tout entier $r \geq 2$,*

1. *Il existe une application $\mathcal{C}^r$ de l'intervalle g telle que pour tout entier n :*

$$\|u_n\|_\infty = \sum_{k=1}^{n} \frac{\log \|g'\|_\infty}{r^k} > 0$$

et

$$\|u_{\alpha^*}\|_\infty = \frac{\log \|g'\|_\infty}{r-1}$$

2. *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une application $\mathcal{C}^r$ de l'intervalle g avec $2 \leq \|g'\|_\infty \leq 3$ telle que*

$$h_{sex}(g) \geq (1-\epsilon)\frac{r \log \|g'\|_\infty}{r-1}$$

M. Boyle et T. Downarowicz ont montré dans [12] que l'ordre d'accumulation α^* d'un système dynamique est un ordinal dénombrable. Nous nous sommes intéressés à construire des exemples avec un ordre d'accumulation dénombrable arbitrairement grand.

Théorème 0.4.2 (D.B. p. 32) *Pour tout ordinal dénombrable β, il existe un système dynamique zéro dimensionnel d'ordre d'accumulation plus grand que β.*

Enfin, nous considérons le problème des extensions symboliques dans le cadre des applications continues affines par morceaux du plan.

Théorème 0.4.3 (D.B. p. 150) *Soit (X, T, P) une application continue affine par morceaux du plan. Pour toute mesure invariante μ, on a :*

$$h_{sex}(\mu) \leq h(\mu) + \sum_{p \in \mathcal{P}} \mu(p) h_{mult}(p)$$

où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points périodiques dont l'orbite rencontre un sommet d'une partition itérée P^n pour $n \in \mathbb{N}$ et $h_{mult}(y) := \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \sharp\{A \in P^n : y \in \overline{A}\}$ pour $y \in X$.

0.5 Résumé des chapitres

Chapitre 1

Nous commençons par introduire le formalisme fonctionnel de M.Boyle et T.Downarowicz, qui nous sera utile pour présenter la théorie des structures d'entropie et la théorie des extensions symboliques. Nous avons essayé de faire la synthèse la plus complète possible des outils fonctionnels employés dans ces théories dynamiques. Il y a dans cette partie peu de résultats nouveaux. On construit toutefois des exemples de structure d'entropie avec un ordre d'accumulation arbitrairement grand (Théorème 0.4.2).

Chapitre 2

Dans ce chapitre nous commençons par rappeler les notions d'entropie topologique, d'entropie métrique et d'entropie de queue. Bien sûr il ne s'agit pas d'un exposé exhaustif ni même représentatif du sujet.

La seconde partie de ce chapitre est consacrée à la notion de partitions essentielles due à E. Lindenstrauss et B. Weiss. Nous formulons un principe variationnel pour l'entropie conditionnelle relative à des partitions essentielles. Nous introduisons ensuite une nouvelle classe de partitions : les partitions topologiques.

On appelle candidat d'entropie une suite croissante de fonctions positives définies sur l'ensemble des mesures de probabilités boréliennes invariantes de (X, T) ayant pour limite la fonction entropie métrique. Nous présentons quelques candidats d'entropie. Excepté le candidat à la Brin-Katok $\mathcal{H}^{BK-}$, ces candidats font partie d'une longue liste de candidats introduits par T. Downarowicz dans [31].

On donne alors des nouveaux résultats de comparaison entre ces candidats. La nouveauté de ces résultats vient du fait que l'on se passe de l'hypothèse d'inversibilité qui permettait de travailler avec des partitions essentielles [31].

Puis nous rappelons la notion de structure d'entropie introduite par T. Downarowicz. Il s'agit d'une classe d'équivalence remarquable de candidats d'entropie, dont les propriétés asymptotiques sont reliées entre autres à l'existence d'extensions symboliques.

Enfin, dans la dernière partie de ce chapitre, on donne une preuve élémentaire du principe variationnel pour l'entropie de queue (Théorème 0.2.1) à partir du principe variationnel conditionnel pour les partitions essentielles obtenu précédemment.

Chapitre 3

Nous donnons dans un premier temps une preuve complète et élémentaire du lemme algébrique de Y. Yomdin et M. Gromov (Théorème 0.3.1), qui n'avait pas été démontré jusqu'à présent. Celle-ci va paraître à Israel Journal of Mathematics. Dans un travail simultané, A. Wilkie et J. Pila ont

obtenu [52] une preuve indépendante dans un cadre o-minimal. Nous n'avons pas jugé nécessaire de reprendre la rédaction de la preuve, que nous présentons donc sous la forme d'un article.

Dans un second temps nous énonçons une version du lemme algébrique différente de la version initiale de M. Gromov. Enfin, nous présentons quelques résultats quantitatifs concernant le degré des fonctions semi-algébriques, ainsi que le nombre de composantes connexes d'ensembles semi-algébriques, qui nous seront utiles dans le chapitre suivant pour établir une formule pour l'entropie k dimensionnelle d'un produit d'applications $\mathcal{C}^\infty$.

Chapitre 4

Dans ce chapitre, nous rappelons tout d'abord en suivant la présentation de M. Gromov dans son séminaire Bourbaki et de J. Buzzi dans sa thèse comment le lemme algébrique permet de re-paramétrer par des contractions semi-algébriques les boules de Bowen et de borner l'entropie de queue $h^*(T)$ d'une application $T : M \to M$ de classe $\mathcal{C}^r$ définie sur une variété compacte M de dimension d, comme suit : $h^*(T) \leq \frac{dR(T)}{r}$. Nous obtenons en fait un nouveau résultat plus précis. On montre que $u(\mu) \leq \frac{d\chi_+^{aff}(\mu)}{r}$ pour toute mesure invariante μ (Théorème 0.3.2). Rappelons que $h^*(T) = \sup_{\mu \in M(X,T)} u(\mu)$.

Enfin nous généralisons un résultat de J.Buzzi [24] sur l'entropie k dimensionnelle d'un produit d'une application $\mathcal{C}^\infty$ de $[0,1]$ avec une application $\mathcal{C}^\infty$ de $[0,1]^d$ (Théorème 0.3.4). Nous obtenons une formule pour le produit d'applications $\mathcal{C}^\infty$ de dimension quelconque uniquement pour le cas de l'entropie unidimensionnelle (Théorème 0.3.3). Ces résultats sont obtenus à partir des estimées quantitatives de la partie précédente.

Chapitre 5

Dans ce chapitre nous rappelons tout d'abord la problématique des extensions symboliques. Puis nous énonçons les résultats principaux de M. Boyle et T. Downarowicz [12]. Après avoir évoqué le cas asymptotiquement h expansif, nous évoquons le cas des dynamiques des applications de classe $\mathcal{C}^r$. Nous rappelons brièvement les exemples de S.Newhouse et T.Downarowicz et donnons les principales idées du théorème de T.Downarowicz et A.Maass sur les extensions symboliques d'une application $\mathcal{C}^r$ de l'intervalle. Puis nous exhibons les premiers exemples d'applications $\mathcal{C}^r$ de l'intervalle, qui montrent que la borne obtenue par T.Downarowicz et A.Maass est optimale (Théorème 0.4.1). Enfin nous majorons l'entropie d'extension symbolique en fonction de l'entropie de multiplicité pour les applications affines par morceaux du plan (Théorème 0.4.3).

0.6 Perspectives, questions ouvertes et conjectures

Nous concluons cette introduction par une liste de questions prolongeant les travaux présentés dans cette thèse.

0.6.1 Principes variationnels

Pour tout ordinal α, le supremum $\sup_{\mu \in \mathcal{M}(X,T)} u_\alpha$ est un invariant topologique, i.e. si deux systèmes dynamiques (X,T) et (Y,S) sont topologiquement conjugués alors $\sup_{\mu \in \mathcal{M}(X,T)} u_\alpha = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(Y,S)} u_\alpha$. Pour $\alpha = 1$ cette quantité coïncide avec l'entropie de queue d'après le principe variationnel (Théorème 0.2.1).

Question 0.6.1 *Peut-on définir, pour tout ordinal α, le supremum $\sup_{\mu \in \mathcal{M}(X,T)} u_\alpha$ de façon purement topologique, en le formulant comme l'entropie de queue avec des recouvrements de (n,ϵ) boules de Bowen ?*

0.6.2 Entropie k dimensionnelle

Pour établir les théorèmes 0.3.3 et 0.3.4, on utilise un argument de connexité propre à la dimension 1. La formule pour l'entropie dimensionnelle se généralise-t-elle en toute dimension ? On peut aussi s'interroger sur l'existence d'une telle formule pour des applications définies sur des variétés compactes quelconques.

Question 0.6.2 *Soient M et N des variétés compactes de dimension respective p et q. On considère $f : M \to M$ et $g : N \to N$ des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$. A-t-on pour tout $0 \leq k \leq p+q$:*

$$h_k(f \times g) = \max_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}^2 \\ l+m=k}} (h_l(f) + h_m(g)) \ ?$$

0.6.3 Caractérisation des structures d'entropie pour les applications $\mathcal{C}^r$

Le théorème de réalisation de T.Downarowicz et J.Serafin (Théorème 2.3.2) caractérisent les structures d'entropie des systèmes dynamiques continus. Dans le cadre $\mathcal{C}^r$, beaucoup de questions restent ouvertes :

Simplexe de Choquet des mesures invariantes

Il est bien connu que l'ensemble des mesures de probabilité invariantes d'un système dynamique est un simplexe de Choquet. D'après le théorème de réalisation de T.Downarowicz et J.Serafin, tout simplexe de Choquet peut-être réalisé comme l'ensemble des mesures invariantes d'un système dynamique continu.

Question 0.6.3 *Quels sont les simplexes de Choquets réalisés par des dynamiques de classe $\mathcal{C}^r$ avec $r \in \mathbb{N}$? de classe $\mathcal{C}^\infty$?*

Borne supérieure de u et h_{sex} pour les applications de classe $\mathcal{C}^r$

Le théorème 0.3.2 met en évidence une certaine rigidité des structures d'entropie pour les applications de classe $\mathcal{C}^r$. On peut chercher à préciser cette rigidité en bornant les fonctions u, u_α, h_{sex}. Tout d'abord on aimerait améliorer l'inégalité (1) du théorème 0.3.2 comme suit :

Question 0.6.4 *Peut-on remplacer dans l'inégalité (1) le terme $d\chi+$ par la somme $\sum_{i=1}^{d} \chi_{i+}$ des exposants de Lyapounov positif ?*

Pour les autres termes de la suite transfinie, nous précisons la conjecture de T.Donwnarowicz et S.Newhouse de la façon suivante :

Conjecture 0.6.5 *Soit M une variété compacte de dimension d et $T : M \to M$ une application de classe $\mathcal{C}^r$ et soit $\mu \in \mathcal{M}(M,T)$, alors pour tout ordinal α :*

$$u_\alpha(\mu) \leq \frac{(\sum_{i=1,\dots,d} \chi_{i+})^{aff}(\mu)}{r-1}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$, le terme $u_n(\mu)$ est borné plus précisément comme suit :

$$u_n(\mu) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{(\sum_{i=1,\dots,d} \chi_{i+})^{aff}(\mu)}{r^k} < \frac{(\sum_{i=1,\dots,d} \chi_{i+})^{aff}(\mu)}{r-1}$$

Cette conjecture a été démontrée par T.Downarowicz et A.Maass (Théorème 5.5.15) dans le cas des applications de l'intervalle. La preuve utilise de façon fondamentale la notion de branches monotones.

Ordre d'accumulation

Toujours dans la perspective de caractériser les structures d'entropie pour les applications de classe $\mathcal{C}^r$, on peut se demander si tous les ordinaux dénombrables sont réalisés comme ordre d'accumulation d'un système dynamique de classe $\mathcal{C}^r$. En généralisant les exemples du théorème 0.4.1, nous espérons montrer :

Conjecture 0.6.6 *Pour tout ordinal α, il existe une application de l'intervalle de classe $\mathcal{C}^r$ dont l'ordre d'accumulation égal à α.*

Chapitre 1

Formalisme fonctionnel

Nous commençons par introduire un formalisme fonctionnel, qui nous sera utile pour présenter la théorie des structures d'entropie et la théorie des extensions symboliques. Nous avons essayé de faire une synthèse complète des outils fonctionnels employés dans ces théories dynamiques. Il y a dans cette partie peu de résultats nouveaux : beaucoup sont empruntés à M. Boyle et T. Downarowicz [12], [31]. On construit toutefois des exemples de candidat avec un ordre d'accumulation dénombrable arbitrairement grand.

L'entropie métrique d'un système dynamique, définie sur le simplexe de Choquet des mesures de probabilité invariantes, compte le nombre d'orbites que l'on distingue à des échelles arbitrairement petites et s'obtient ainsi comme limite croissante de fonctions affines. On est donc amené à étudier les propriétés asymptotiques d'un point de vue topologique et affine de telles suites de fonctions définies sur un simplexe de Choquet.

Dans ce chapitre, on considère un espace métrisable compact M non vide. Nous rappelons tout d'abord dans le premier paragraphe quelques propriétés élémentaires des fonctions semi-continues supérieurement. On appelle candidat une suite croissante de fonctions réelles définie sur M. Le second paragraphe est consacré aux propriétés asymptotiques des candidats dans un cadre purement topologique. Nous construisons des exemples de candidats d'ordre d'accumulation dénombrable arbitrairement grand. Dans les paragraphes suivants, on étudie les candidats définis sur des compacts munis de structures de plus en plus riches : on suppose tout d'abord que M est un convexe, puis un simplexe de Choquet et enfin un simplexe de Bauer. Dans le cadre affine, on s'intéressera particulièrement à comparer un candidat avec sa restriction à l'ensemble extrémal.

Dans le chapitre suivant, on rappellera le théorème de réalisation de T. Downarowicz et J. Serafin (Théorème 2.3.2), qui permet de réaliser les exemples abstraits présentés dans cette partie comme des exemples dynamiques.

1.1 Fonctions semi-continues

Nous rappelons tout d'abord certaines propriétés élémentaires des applications semi-continues, en particulier celles relatives à la convergence monotone de fonctions semi-continues. Ensuite, nous définissons l'enveloppe semi-continue supérieure et la projetée d'une application et présentons les liens entre ces deux notions. Nous terminons ce paragraphe par un théorème de séparation.

Dans ce paragraphe, M désigne un compact métrisable non vide.

Définition 1.1.1 *Une fonction $f : M \to \mathbb{R}$ est dite* ***semi-continue supérieurement*** *si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :*

1. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \ : \ f(x) \geq \alpha\}$ est compact ;*
2. $\limsup_{y \to x} f(y) \leq f(x)$ *;*
3. *il existe une suite de fonctions continues $(f_n : M \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$, telle que $f = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$;*
4. *il existe une suite décroissante de fonctions continues $(f_n : M \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$, telle que $f = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$.*

Une fonction $f : M \to \mathbb{R}$ est dite semi-continue inférieurement, si $-f$ est semi-continue supérieurement.

On notera s.c.s. (resp. s.c.i.) pour semi-continue supérieurement (resp. pour semi-continue inférieurement).

Exemple 1.1.2 *Si F (resp. U) est un fermé (resp. ouvert) de M, alors la fonction indicatrice 1_F de F (resp. 1_U de U) est une fonction s.c.s. (resp. s.c.i.).*

Il est élémentaire que :

Proposition 1.1.3 *Toute fonction s.c.s. (resp. s.c.i.) $f : M \to \mathbb{R}$ est bornée supérieurement (resp. inférieurement) et atteint son maximum (resp. son minimum).*

Nous énonçons maintenant différentes propriétés des fonctions s.c.s. (celles-ci se transposent aisément aux cas des fonctions s.c.i.).

1.1.1 Limites décroissantes de fonctions s.c.s.

La semi-continuité supérieure est préservée par passage à l'infimum. Cette propriété sera souvent utilisée par la suite, ainsi que la propriété (4) de la proposition 1.1.4 suivante, qui affirme que l'on peut intervertir le supremum sur M et la limite en n d'une suite décroissante $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions s.c.s. définies sur M.

Proposition 1.1.4
1. *La limite d'une suite uniformément convergente de fonctions s.c.s. est elle-même s.c.s. ;*
2. *L'infimum d'une famille quelconque de fonctions s.c.s. est une fonction s.c.s. ;*
3. *Soit g une fonction s.c.i. et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions s.c.s. convergeant vers une fonction $f < g$, alors il existe N tel que pour tout $n > N$, $f_n < g$. En particulier, une suite décroissante de fonctions s.c.s. convergeant simplement vers une fonction continue est uniformément convergente ;*
4. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions s.c.s., alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in M} f_n(x) = \sup_{x\in M} \lim_{n\to+\infty} f_n$$

Les propriétés (1), (2) et (3) sont bien connues. La dernière correspond à la proposition 2.4 de [12]. Nous rappelons rapidement la preuve de celle-ci.

Preuve de la propriété (4) de la proposition 1.1.4 :
L'inégalité $\lim_n \sup_{x\in M} f_n(x) \geq \sup_{x\in M} \lim_n f_n$ est triviale. Supposons par l'absurde que $\lim_n \sup_{x\in M} f_n(x) > \sup_{x\in M} \lim_n f_n$. Alors d'après la propriété (3) de la proposition 1.1.4, il existe un entier N tel que pour tout $p > N$, on a $f_p < \lim_n \sup_{x\in M} f_n(x)$. Mais la fonction f_p étant s.c.s., elle atteint son maximum. La suite $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ étant décroissante, on a de plus $\sup_{x\in M} f_p(x) \geq \lim_n \sup_{x\in M} f_n(x)$. On obtient donc une contradiction. □

1.1.2 Enveloppe semi-continue supérieure d'une fonction

L'enveloppe semi-continue supérieure $\widetilde{f}$ d'une fonction bornée supérieurement $f : M \to \mathbb{R}$ est la plus petite fonction s.c.s. plus grande que f, soit :

$$\widetilde{f} := \inf\{g : g \text{ s.c.s. et } g \geq f\}$$

On vérifie aisément que $\widetilde{f} : M \to \mathbb{R}$ est définie par $\widetilde{f}(x) := \limsup_{y \to x} f(y)$. On note $\widehat{f} := \widetilde{f} - f$ le défaut de semi-continuité supérieure de f. Si $f : M \to \mathbb{R}$ est une fonction non bornée supérieurement, on pose par convention $\widetilde{f} = \widehat{f} = +\infty$.

Remarquez que si f et g sont deux fonctions réelles définies sur M, alors $\widetilde{f+g} \leq \widetilde{f} + \widetilde{g}$ et $\widehat{f+g} \leq \widehat{f} + \widehat{g}$.

1.1.3 Projetée d'une application s.c.s.

Rappelons tout d'abord la notion de projetée. Soit $\pi : M \to K$ une surjection continue entre deux espaces métrisables compacts M et K et soit f une fonction réelle définie sur M. Alors **la fonction projetée de** f **par** π est la fonction notée $f^{[K]}$ (ou parfois $f^{[\pi:M\to K]}$) de K dans $\mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$ définie par :

$$\forall x \in K,\ f^{[K]}(x) := \sup_{\pi(y)=x} f(y)$$

Si f est une fonction de K dans $\mathbb{R}$, on note πf **la fonction relevée de** f **par** π, i.e. la fonction de M dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall x \in M,\ \pi f(x) := f(\pi(x))$$

Proposition 1.1.5 *1. Soit f une fonction réelle définie sur K, alors $(\pi f)^{[K]} = f$;*
2. Soit f une fonction réelle définie sur M, alors $\pi(f^{[K]}) \geq f$.

La preuve est immédiate. En général l'inégalité de l'assertion (2) est stricte. Considérons par exemple l'application $\pi : \{0,1\} \to \{0\}$ et l'application $f : \{0,1\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. alors $f^{[\{0\}]} \equiv 1$ et donc $\pi(f^{[\{0\}]}) \equiv 1 \neq f$.

Observons que pour tout réel α, on a $\{f^{[K]} \geq \alpha\} = \pi(\{f \geq \alpha\})$. On en déduit facilement la proposition suivante :

Proposition 1.1.6 *(Remarque 2.6 de [12]) Si $f : M \to \mathbb{R}$ est s.c.s. , alors $f^{[K]}$ l'est aussi. En particulier, pour toute fonction $f : M \to \mathbb{R}$, on a $\left(\widetilde{f}\right)^{[K]} \geq \widetilde{f^{[K]}}$.*

Enfin, la projetée d'une composition est donnée par la formule suivante :

Proposition 1.1.7 *Soient $\psi : N \to M$ et $\pi : M \to K$ des surjections continues entre des espaces métrisables compacts N, M et K. Alors pour toute fonction réelle f définie sur N et pour tout $x \in K$, on a : $f^{[K]}(x) := \sup_{\pi\circ\psi(y)=x} f(y) = \sup_{\pi(z)=x}\left(\sup_{\psi(y)=z} f(y)\right)$, c'est à dire :*

$$f^{[\pi\circ\psi:N\to K]} = \left(f^{[\psi:N\to M]}\right)^{[\pi:M\to K]}$$

1.1.4 Théorème de séparation

Nous énonçons un théorème de séparation, qui est utile pour établir le théorème 1.2.9.

Théorème 1.1.8 *(Théorème 7.6 de [4]) Soient f, h deux fonctions réelles définies sur M telles que h est s.c.s., f est s.c.i. et $h \leq f$, alors il existe une fonction continue g telle que $h \leq g \leq f$.*

1.2 Candidats

Nous rappelons maintenant la notion de candidat, ainsi que les objets asymptotiques associés : les superenveloppes et la suite transfinie des $(u_\alpha)_\alpha$. L'ordre d'accumulation est un ordinal qui estime l'échelle à laquelle "s'accumule" un candidat. Nous construisons des exemples de candidat avec un ordre d'accumulation dénombrable arbitrairement grand. Enfin nous étudions ces objets vis à vis de la restriction et du relèvement par une surjection continue.

Définition 1.2.1 *Soit M un espace métrisable compact non vide. Un **candidat** de M est une suite croissante de fonctions $\mathcal{H} = (h_k : M \to \mathbb{R})_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant simplement vers une limite bornée $h := \lim_{k\to+\infty} h_k$, appelée la limite du candidat $\mathcal{H}$. De plus, on impose par convention : $h_0 \equiv 0$.*

Un candidat $\mathcal{H} := (h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est dit à différence s.c.s. si pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $h_{k+1} - h_k$ est s.c.s. Remarquons que les fonctions h_k sont alors elles-mêmes s.c.s. puisque $h_0 \equiv 0$.

On notera parfois aussi $\lim \mathcal{H} = h$ la limite du candidat $\mathcal{H}$.

On pourrait se passer de l'hypothèse bornée (sur h) mais on évite ainsi certaines conventions. Cette hypothèse est justifiée par le fait, que l'on s'intéressera par la suite uniquement à des systèmes dynamiques d'entropie finie.

On cherche à décrire la convergence de la suite définissant un candidat de façon précise. Dans un premier temps, on pourrait par exemple distinguer les candidats suivant que la convergence est uniforme ou pas. En fait on va associer à un candidat plusieurs objets qui caractérisent de manière beaucoup plus fine la convergence de $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vers h.

1.2.1 Superenveloppe d'un candidat

Nous rappelons dans ce paragraphe la notion de superenveloppe et certaines de ses propriétés. Dans la théorie des extensions symboliques, les superenveloppes sont les projetés de l'entropie métrique des extensions symboliques (Théorème 5.2.1).

Définition 1.2.2 *Soit un candidat $\mathcal{H} := (h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de M. Une fonction $E : M \to \mathbb{R}$ est une **superenveloppe** de $\mathcal{H}$ si $E \geq h$ et si pour tout $x \in M$, on a $\lim_{k\to+\infty} \widehat{E - h_k}(x) = 0$ (ou de façon équivalente, $\lim_{k\to+\infty} \widetilde{E - h_k} = E - h$). Enfin on considère la fonction $E \equiv +\infty$ comme une superenveloppe de $\mathcal{H}$.*

Lemme 1.2.3 *(Lemme 2.1.4 de [31]) Soit $E \neq +\infty$ une superenveloppe de $\mathcal{H}$, alors la fonction $E - h$ est s.c.s.*

Preuve : Clairement pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\widehat{E - h} \leq \widetilde{E - h_k} - (E - h)$ et donc

$$\widehat{E - h} \leq \lim_{k\to+\infty} \left(\widetilde{E - h_k} - (E - h_k)\right) = \lim_{k\to+\infty} \widehat{E - h_k} = 0$$

□

On peut définir plus simplement la notion de superenveloppe dans le cas des candidats à différences s.c.s. :

Lemme 1.2.4 *(Lemme 2.1.6 de [31]) Soit $\mathcal{H}$ un candidat à différences s.c.s., une fonction $E : M \to \mathbb{R}$ est une superenveloppe si et seulement si $E - h_k$ est s.c.s. pour tout entier k. En particulier, toute superenveloppe E de $\mathcal{H}$ est s.c.s.*

Preuve : Supposons que E est une superenveloppe et montrons que $E - h_k$ est alors s.c.s. (l'implication réciproque est triviale). On a $\widetilde{E - h_k} \leq \widetilde{E - h_l} + h_l - h_k$ puisque $h_l - h_k$ est s.c.s. En passant à la limite en l, on obtient $\widetilde{E - h_k} \leq E - h + h - h_k = E - h_k$ car E est une superenveloppe. □

On note $E\mathcal{H}$ la plus petite superenveloppe de $\mathcal{H}$, i.e. $E\mathcal{H} = \inf_E E$, l'infimum portant sur les superenveloppes E de $\mathcal{H}$. S'il n'existe pas de superenveloppes finies, alors $E\mathcal{H} = +\infty$.

Lemme 1.2.5 *(Lemme 2.1.5 de [31]) $E\mathcal{H}$ est elle-même une superenveloppe.*

PREUVE : C'est clair si $E\mathcal{H} \equiv +\infty$. Supposons $E\mathcal{H} \neq +\infty$. Soient $\epsilon > 0$ et $x \in X$. Considérons une superenveloppe E de $\mathcal{H}$ telle que $(E - E\mathcal{H})(x) < \epsilon$. Alors

$$\lim_{k\to+\infty} \widehat{E\mathcal{H} - h_k}(x) \leq \lim_{k\to+\infty} \left(\widetilde{E - h_k}(x) - (E\mathcal{H} - h_k)(x)\right) \leq \lim_{k\to+\infty} \widehat{E - h_k}(x) + (E - E\mathcal{H})(x) < \epsilon$$

□

La fonction $E\mathcal{H}$ est un premier outil pour mesurer la convergence de $\mathcal{H}$. La convergence uniforme est caractérisée dans le lemme suivant. D'un point de vue dynamique, on en déduira que toute application dont l'entropie de queue est nulle admet une extension symbolique principale (Théorème 5.3.1).

Lemme 1.2.6 *(Proposition 3.2 de [12]) La convergence de la suite $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est uniforme si et seulement si $E\mathcal{H} = h$.*

PREUVE : Supposons que $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers h et montrons que $E\mathcal{H} = h$. Il suffit de vérifier que h est une superenveloppe de $\mathcal{H}$. Cela résulte immédiatement de l'inégalité suivante : $\widehat{h - h_k} \leq \sup_{x\in M}(h - h_k)(x)$.

Réciproquement supposons que $E\mathcal{H} = h$; en particulier, h est une superenveloppe, i.e. $\lim_{k\to+\infty} \widehat{h - h_k} = 0$. Or h étant la limite de la suite $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$, on a : $\lim_{k\to+\infty} \widehat{h - h_k} = \lim_{k\to+\infty} \widetilde{h - h_k} = 0$. Enfin, en appliquant la propriété (4) de la proposition 1.1.4 à la suite décroissante de fonctions s.c.s. $(\widetilde{h - h_k})_{k\in\mathbb{N}}$, on obtient $\lim_{k\to+\infty} \sup_{x\in M}(h - h_k)(x) = \sup_{x\in M} \lim_{k\to+\infty} \widetilde{h - h_k}(x) = 0$. □

Cependant $E\mathcal{H}$ ne diffère pas de h du point de vue générique :

Lemme 1.2.7 *(Proposition 3.3.1 de [12]) Supposons $E\mathcal{H} \neq +\infty$, alors $E\mathcal{H} = h$ sur un ensemble résiduel.*

PREUVE : Soit $\epsilon > 0$, alors $E_\epsilon := \{E\mathcal{H} - h \geq \epsilon\}$ est un fermé d'intérieur vide. En effet si U est un ouvert de M inclus dans E_ϵ, la fonction $E\mathcal{H} - \epsilon 1_U$ est alors une superenveloppe de $\mathcal{H}$ (la fonction -1_U est s.c.s. puisque U est ouvert), ce qui contredit la minimalité de $E\mathcal{H}$. On conclut la preuve du lemme en remarquant que $\{E\mathcal{H} \neq h\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_{1/n}$. □

Nous donnons maintenant une première caractérisation de la plus petite superenveloppe dans le cas où $\mathcal{H}$ est à différence s.c.s.

Définition 1.2.8 *Soit $\mathcal{H} := (h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un candidat à différence s.c.s., un **recouvrement continu** de $\mathcal{H}$ est une suite $\mathcal{G} := (g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues de M dans $\mathbb{R}^+$ telle que $g_k \geq h_{k+1} - h_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et telle que $\Sigma\mathcal{G} := \sum_{k=0}^{+\infty} g_k$ converge simplement.*

A l'aide du théorème de séparation 1.1.8, on montre facilement le théorème suivant :

Théorème 1.2.9 *(Théorème 2.18 de [12]) $E\mathcal{H} = \inf_{\mathcal{G}} \widetilde{\Sigma\mathcal{G}}$, où l'infimum porte sur tous les recouvrements continus de $\mathcal{H}$. De plus, il existe un recouvrement continu $\mathcal{G}$ tel que $\sup_{x\in M} \Sigma\mathcal{G} = \sup_{x\in M} E\mathcal{H}$.*

Nous rappelons maintenant l'exemple 2.20 de M. Boyle et T. Downarowicz [12], pour lequel il n'existe pas de superenveloppes bornées, c'est à dire $E\mathcal{H} \equiv +\infty$.

Exemple 1.2.10 *Soit M un compact métrisable sans point isolé et séparable (par exemple l'intervalle $[0,1]$). Soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de M dense dans M. Posons $\mathcal{H} := (h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ avec $h_k := h_{k-1} + 1_{q_k}$ pour tout $k \geq 1$. C'est un candidat de M à différences s.c.s. Clairement $\lim \mathcal{H} \leq 1$. Considérons maintenant $\mathcal{G} := (g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un recouvrement continu de $\mathcal{H}$. Pour tout k, il existe un voisinage ouvert U_k de q_k tel que pour tout $x \in U_k$, $g_k(x) \geq 1/2$. Montrons que $\Sigma\mathcal{G}$ n'est pas borné supérieurement. Il suffit de montrer que pour tout entier l, il existe un point x_l de M, tel que x_l rencontre au moins l voisinages ouverts U_k. En effet, on a alors $\Sigma\mathcal{G}(x_l) \geq l/2$. On raisonne par récurrence sur l. Par hypothèse de récurrence, il existe des entiers $n_1, ..., n_l$, tel que $x_l \in \bigcap_{i=1}^{l} U_{n_i}$. La suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant dense, il existe $n_{l+1} > n_l$, tel que $q_{n_{l+1}} \in \bigcap_{i=1}^{l} U_{n_i}$ et on a donc $\bigcap_{i=1}^{l+1} U_{n_i} \neq \emptyset$.*

On a considéré au lemme 1.2.6 un candidat $\mathcal{H} = (h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tel que la suite $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément. Si on suppose de plus que $\mathcal{H}$ est à différence s.c.s. alors la limite h de $\mathcal{H}$ est elle-même s.c.s. par convergence uniforme (propriété (1) de la Proposition 1.1.4). Cependant la continuité de h n'entraîne pas en général $E\mathcal{H} = h$ comme le montre l'exemple 2.19 de M.Boyle et T.Downarowicz [12], que nous rappelons maintenant. La plus petite superenveloppe d'un candidat $\mathcal{H}$ est donc liée aux propriétés de convergence de la suite définissant $\mathcal{H}$ et non, uniquement, aux propriétés de continuité de la limite de $\mathcal{H}$.

Exemple 1.2.11 *Soit $M := \{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} - \{0\}\} \bigcup \{0\}$, muni de la topologie induite par la distance euclidienne sur $[0,1]$. On considère le candidat $\mathcal{H} := (h_k)_{k\in\mathbb{N}}$, avec $h_1 = 1_0$ et $h_k = h_{k-1} + 1_{1/k}$ pour $k \geq 2$. Clairement $h \equiv 1$ et donc h est en particulier continue. Cependant tout recouvrement continu $\mathcal{G} := (g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{H}$ vérifie $\widetilde{\Sigma\mathcal{G}}(0) \geq 2$. Donc $E\mathcal{H}(0) \geq 2$ et $E\mathcal{H} \neq h$.*

1.2.2 Suite transfinie associée à un candidat

La construction suivante due à T.Downarowicz et M.Boyle utilise les ordinaux. Elle permet de calculer la plus petite superenveloppe en se passant des superenveloppes.

Pour une introduction aux ordinaux, nous renvoyons à [9], [36] ou encore aux notes de cours de P. Dehornoy [27]. Toutefois nous rappelons rapidement certaines propriétés élémentaires des ordinaux.

Si α est un ordinal, $\alpha \bigcup \{\alpha\}$ est un ordinal appelé le successeur de α et est noté $\alpha + 1$. Si α est un ordinal successeur, on notera $\alpha - 1$ l'ordinal dont le successeur est α. Tout ensemble non vide A d'ordinaux admet une borne supérieure $\bigcup A$ qui est aussi un ordinal. Lorsque $A := (\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'ordinaux, on notera * $\lim_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k = \bigcup A$. Un ordinal est dit limite si $\lambda = \bigcup \lambda$. Les ordinaux se partagent en ces deux catégories : les ordinaux successeurs et les ordinaux limites. On note ω le premier ordinal de cardinal infini. L'addition, la multiplication et l'exponentiation des entiers s'étendent aux ordinaux. Cependant l'addition et la multiplication ne sont plus commutatives : $1 + \omega = \omega \neq \omega + 1$ et $2.\omega = \omega \neq \omega.2$. Terminons par quelques remarques sur la cardinalité des ensembles ordinaux. L'ordinal ω est dénombrable comme l'ordinal ω^2. Il en est de même de l'ordinal ω^ω car celui-ci s'écrit comme une union dénombrable d'ensembles dénombrables. Mais il existe cependant des ordinaux de cardinal non dénombrable.

Considérons un candidat $\mathcal{H}$. On définit par récurrence la suite $(u_\alpha)_\alpha$ indexée par les ordinaux de la façon suivante.

On pose tout d'abord $u_0 = 0$. Puis on distingue les cas d'un ordinal successeur et d'un ordinal limite :

– si α est un ordinal successeur, alors on définit

$$u_\alpha = \lim_{k\to+\infty} u_{\alpha-1} \widetilde{+ h} - h_k$$

∗. Lorsqu'on munit les ordinaux de la topologie de l'ordre, on retrouve la notion usuelle de limite

– si α est un ordinal limite, alors on définit

$$u_\alpha = \widetilde{\sup_{\gamma<\alpha} u_\gamma}$$

La suite $(u_\alpha)_\alpha$ indexée par les ordinaux est appelée la **suite transfinie** associée au candidat $\mathcal{H}$. Pour éviter les confusions, on utilisera parfois la notation $u_\alpha^{\mathcal{H}}$.

Pour tout ordinal α, ou bien $u_\alpha \equiv +\infty$ ou bien u_α est une fonction s.c.s. comme infimum de fonctions s.c.s. d'après la proposition 1.1.4. De plus, $\alpha \mapsto u_\alpha$ est croissante. Clairement si $u_\alpha = u_{\alpha+1}$, alors pour tout $\beta > \alpha$, $u_\beta = u_\alpha$. Comme on le verra dans la section suivante, il existe un ordinal dénombrable $\alpha_{\mathcal{H}}$, tel que $u_{\alpha_{\mathcal{H}}} = u_{\alpha_{\mathcal{H}}+1}$ et donc $u_\beta = u_{\alpha_{\mathcal{H}}}$ pour tout $\beta > \alpha_{\mathcal{H}}$.

Cependant ce résultat n'est pas vrai ponctuellement : $u_{\alpha+1}(x) = u_\alpha(x)$ n'entraine pas en général $u_\alpha(x) = u_\beta(x)$ pour tout $\beta > \alpha$. On verra en effet dans l'exemple 1.2.35, que $u_1(x) = 0$ n'entraine pas $u_\omega(x) = 0$. Toutefois, on a :

Proposition 1.2.12 *Soit $\mathcal{H} := (h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un candidat de M. Soient α un ordinal et $x \in M$. Si u_α est continue en x et si $u_\alpha(x) = u_{\alpha+1}(x)$, alors $u_{\alpha+n}(x) = u_\alpha(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier si $u_1(x) = 0$, alors $u_n(x) = 0$ pour tout entier n.*

Remarquons tout d'abord que si u_α est continue en x et si $u_\alpha(x) = u_{\alpha+1}(x)$, alors $(\widetilde{u_{\alpha+1} - u_\alpha})(x) = 0$. La proposition 1.2.12 ci-dessus est alors une conséquence triviale du lemme suivant :

Lemme 1.2.13 *Soit α un ordinal, alors la suite $(\widetilde{u_{\alpha+n+1} - u_{\alpha+n}})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.*

Preuve : Soit un α un ordinal et n un entier. On a pour tout entier k,

$$\widetilde{u_{\alpha+n+1} + h} - h_k \leq \widetilde{u_{\alpha+n+1} - u_{\alpha+n}} + \widetilde{u_{\alpha+n} + h} - h_k$$

En passant à la limite quand k tends vers l'infini, on obtient $\widetilde{u_{\alpha+n+2} - u_{\alpha+n+1}} \leq \widetilde{u_{\alpha+n+1} - u_{\alpha+n}}$ puis en passant à l'enveloppe semi-continue supérieure $\widetilde{u_{\alpha+n+2} - u_{\alpha+n+1}} \leq \widetilde{u_{\alpha+n+1} - u_{\alpha+n}}$ □

La suite $(u_\alpha)_\alpha$ étant une suite décroissante de fonctions s.c.s., on a d'après la propriété (4) de la Proposition 1.1.4 et la propriété de croissance de la suite définissant un candidat :

Proposition 1.2.14 *Soit $\mathcal{H} := (h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un candidat de M, alors pour tout ordinal α,*

$$\sup_{x\in M} u_{\alpha+1}(x) = \lim_{k\in\mathbb{N}} \lim_{l\in\mathbb{N}} \sup_{x\in M} (u_\alpha + h_l - h_k)(x)$$

et si α est un ordinal limite,

$$\sup_{x\in M} u_\alpha(x) = \sup_{\beta<\alpha} \sup_{x\in M} u_\beta(x)$$

En particulier, $\sup_{x\in M} u_1(x) = \lim_{k\in\mathbb{N}} \lim_{l\in\mathbb{N}} \sup_{x\in M} (h_l - h_k)(x)$.

Nous montrons dans la proposition suivante que la suite tranfinie des u_α est sous-additive. Cette propriété élémentaire, qui n'apparaît pas dans les travaux de M.Boyle et T.Downarowicz, nous a incité à travailler avec les ordinaux indécomposables dans la construction des exemples présentés au théorème 1.2.35.

Proposition 1.2.15 *Soit α, β deux ordinaux, alors pour tout $x \in M$:*

$$u_{\alpha+\beta}(x) \leq u_\alpha(x) + u_\beta(x) \tag{1.1}$$

PREUVE : On fixe un ordinal α et on montre par récurrence sur β que $u_{\alpha+\beta}(x) \leq u_\alpha(x) + u_\beta(x)$ pour tout x dans M. C'est clairement vrai pour $\beta = 0$. Il est évident qu'il suffit de considérer le cas où $u_\alpha \neq +\infty$. Supposons l'hypothèse de récurrence soit vérifiée pour tout $\gamma < \beta$ et montrons l'assertion pour β. On distingue deux cas, suivant que β est un ordinal limite ou non. Supposons tout d'abord que β n'est pas un ordinal limite. On a alors

$$u_{\alpha+\beta} = \lim_{k\to+\infty} \widetilde{u_{\alpha+\beta-1} + h} - h_k$$

Soit, par hypothèse de récurrence et puisque la fonction u_α est s.c.s. :

$$u_{\alpha+\beta} \leq u_\alpha + \lim_{k\to+\infty} \widetilde{u_{\beta-1} + h} - h_k = u_\alpha + u_\beta$$

Si β est un ordinal limite, alors $\alpha + \beta$ aussi et :

$$u_{\alpha+\beta} = \widetilde{\sup_{\gamma<\beta} u_{\alpha+\gamma}}$$

et donc par hypothèse de récurrence et par semi-continuité supérieure de u_α :

$$u_{\alpha+\beta} \leq u_\alpha + \widetilde{\sup_{\gamma<\beta} u_\gamma} = u_\alpha + u_\beta$$

□

Remarquons que dans l'inégalité (1.1), le terme de droite est commutatif en α et β contrairement au terme de gauche. En particulier si $\mathcal{H}$ est un candidat de M avec $u_{\omega+1}(x) \neq u_{1+\omega}(x) = u_\omega(x)$ pour un point $x \in M$, alors on a l'inégalité stricte : $u_{1+\omega}(x) < u_1(x) + u_\omega(x)$. Un tel exemple de candidat sera exhibé après le théorème 1.2.35.

La suite des $(u_\alpha)_\alpha$ ne dépend pas de la valeur du candidat en un point :

Lemme 1.2.16 *Soit $E \subset M$ une union finie de points de M. Considérons $\mathcal{H} := (h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\mathcal{G} := (g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux candidats de M dont les valeurs diffèrent uniquement sur E, i.e. $h_k(x) = g_k(x)$ pour tout $x \notin E$. Alors pour tout ordinal α, on a :*

$$u_\alpha^{\mathcal{H}} = u_\alpha^{\mathcal{G}}$$

PREUVE : Remarquez tout d'abord que si deux fonctions coïncident sur un ouvert alors leurs enveloppes semi-continues supérieures coïncident aussi sur cet ouvert. L'ensemble $M - E$ étant ouvert, on en déduit facilement que $u_\alpha^{\mathcal{H}}(x) = u_\alpha^{\mathcal{G}}(x)$ pour tout $x \in M - E$ et tout ordinal α.

On montre maintenant par récurrence sur α que $u_\alpha^{\mathcal{H}}(x) = u_\alpha^{\mathcal{G}}(x)$ pour $x \in E$.

Si α est un ordinal successeur, on a :

$$u_\alpha^{\mathcal{H}}(x) = \lim_{k\to+\infty} \widetilde{u_{\alpha-1}^{\mathcal{H}} + h} - h_k$$

par hypothèse de récurrence, il vient :

$$u_\alpha^{\mathcal{H}}(x) = \lim_{k\to+\infty} \widetilde{u_{\alpha-1}^{\mathcal{G}} + h} - h_k$$

$$u_\alpha^{\mathcal{H}}(x) = \lim_{k\to+\infty} \max\left(\lim_{y\to x,\ y\notin E} (u_{\alpha-1}^{\mathcal{G}} + h - h_k)(y), (u_{\alpha-1}^{\mathcal{G}} + h - h_k)(x) \right)$$

Puis les fonctions h_k et g_k coïncidant en dehors de E, on a :

$$u_\alpha^{\mathcal{H}}(x) = \max\left(\lim_{k\to+\infty} \lim_{y\to x,\ y\notin E} (u_{\alpha-1}^{\mathcal{G}} + g - g_k)(y), u_{\alpha-1}^{\mathcal{G}}(x) \right) = u_\alpha^{\mathcal{G}}(x)$$

Le cas où α est un ordinal limite est trivial.

□

Enfin nous terminons ce paragraphe par une remarque élémentaire : la fonction u_1 borne le défaut de semi-continuité supérieure de la limite du candidat.

Proposition 1.2.17 *(Proposition 5.1.3 de [31])*
Soit $\mathcal{H} = (h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un candidat s.c.s., i.e. pour tout entier k, la fonction h_k est s.c.s., alors

$$\widetilde{h} - h \leq u_1$$

PREUVE : Pour tout entier k, on a $\widetilde{h} \leq \widetilde{h - h_k} + h_k$. On obtient le résultat voulu en prenant la limite quand k tends vers l'infini. □

1.2.3 Ordre d'accumulation

Nous avons observé que la suite transfinie associée à un candidat était croissante. Mais cette suite ne croît pas indéfiniment :

Théorème 1.2.18 *(Théorème 3.3 de [12]) Soit $\mathcal{H}$ un candidat et $(u_\alpha)_\alpha$ la suite transfinie associée, alors il existe un ordinal dénombrable α tel que :*

$$\forall \beta \geq \alpha,\ u_\beta = u_\alpha \tag{1.2}$$

L'ordre d'accumulation *$\alpha_\mathcal{H}$ du candidat $\mathcal{H}$ est le plus petit ordinal α vérifiant (1.2).*

PREUVE : Notons d_0 une métrique sur M qui en fait un espace compact. On munit $[0, +\infty]$ de la métrique $d_1(x, y) = |arctan(x) - arctan(y)|$. L'ensemble $[0, +\infty]$ muni de cette métrique d_1 est alors un espace compact. L'ensemble $K_\alpha := \{(x, y) \in M \times [0, +\infty],\ y \leq u_\alpha(x)\}$ est compact et $\alpha \mapsto K_\alpha$ est croissante pour l'inclusion. Notons D la métrique de Hausdorff sur l'ensemble H des compacts de $(M \times [0, +\infty], \max(d_0, d_1))$, rappelons que (H, D) est alors compact. Si $\alpha < \beta < \gamma$, alors $D(K_\alpha, K_\beta) \leq D(K_\alpha, K_\gamma)$. Pour tout $\epsilon > 0$, l'ensemble des ordinaux $E_\epsilon := \{\alpha,\ D(K_\alpha, K_{\alpha+1}) > \epsilon\}$ est fini. En effet, sinon il existe une suite strictement croissante $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E_\epsilon^{\mathbb{N}}$ et on a donc d'après la remarque précédente, $D(K_{\alpha_n}, K_{\alpha_m}) > \epsilon$ pour tout $n \neq m$, ce qui contredit la compacité de (H, D). La borne supérieure α de $\bigcup_{\epsilon>0} E_\epsilon$ est donc dénombrable et pour tout $\beta > \alpha + 1$, on a $K_{\alpha+1} = K_\beta$ et donc $u_\beta = u_{\alpha+1}$. □

On peut relier la plus petite superenveloppe de $\mathcal{H}$ et $u_{\alpha_\mathcal{H}}$. Le point de vue des superenveloppes et celui de la suite transfinie se rejoignent en effet de la façon suivante :

Proposition 1.2.19 *Soit $\mathcal{H}$ un candidat de M,*

$$u_{\alpha_\mathcal{H}} = E\mathcal{H} - h$$

PREUVE : M. Boyle et T. Downarowicz (Théorème 3.3 de [12]) énoncent ce résultat dans le cadre d'un candidat à différence s.c.s. Dans le cas plus général d'un candidat quelconque, leur preuve s'adapte facilement comme suit.

Montrons tout d'abord que $u_\alpha \leq E\mathcal{H} - h$ pour tout ordinal α. Clairement on peut supposer $E\mathcal{H} \neq \infty$. C'est trivial pour $\alpha = 0$. On raisonne par récurrence ; supposons l'inégalité vérifiée pour tout $\beta < \alpha$. Lorsque α n'est pas un ordinal limite, on a pour tout entier k :

$$E\mathcal{H} - h_k = E\mathcal{H} - h + h - h_k \geq u_{\alpha-1} + h - h_k$$

donc en passant aux enveloppes semi-continues supérieures

$$\widetilde{E\mathcal{H} - h_k} \geq u_{\alpha-1}\widetilde{+ h} - h_k$$

Puis en faisant tendre k vers $+\infty$, on obtient, puisque $E\mathcal{H}$ est une superenveloppe de $\mathcal{H}$ d'après le lemme 1.2.5,

$$E\mathcal{H} - h \geq u_\alpha$$

Dans le cas où α est un ordinal limite, la fonction $E\mathcal{H} - h$ étant s.c.s. d'après le lemme 1.2.3, on a :

$$u_\alpha = \widetilde{\sup_{\beta<\alpha} u_\beta} \leq \widetilde{E\mathcal{H} - h} = E\mathcal{H} - h$$

Maintenant montrons que $u_{\alpha+1} = u_\alpha \Leftrightarrow u_\alpha = E\mathcal{H} - h$. Cela conclut facilement la preuve de la proposition.

Supposons tout d'abord que $u_\alpha = E\mathcal{H} - h$, on a

$$u_\alpha + h - h_k = E\mathcal{H} - h_k$$

et donc

$$u_{\alpha+1} = \lim_{k\to+\infty} \widetilde{E\mathcal{H} - h_k}$$

et $E\mathcal{H}$ étant une superenveloppe toujours d'après le lemme 1.2.5, on obtient :

$$u_{\alpha+1} = E\mathcal{H} - h$$

Supposons maintenant que $u_{\alpha+1} = u_\alpha$. Pour montrer que $u_\alpha + h \geq E\mathcal{H}$, il suffit de montrer que $u_\alpha + h$ est une superenveloppe, i.e. $\lim_{k\to+\infty} u_\alpha \widetilde{+ h} - h_k - (u_\alpha + h - h_k) = 0$. Mais par définition de $u_{\alpha+1}$, on a clairement : $\lim_{k\to+\infty} u_\alpha \widetilde{+ h} - h_k - (u_\alpha + h - h_k) = u_{\alpha+1} - u_\alpha$. □

Remarque 1.2.20 *Dans le cas où $\mathcal{H}$ est à différences s.c.s. et $E\mathcal{H} \neq +\infty$, alors $E\mathcal{H}$ est s.c.s. d'après le lemme 1.2.4. La fonction h s'écrit alors comme la différence de deux fonctions s.c.s. En particulier, h a un $\mathcal{G}_\delta$ dense de points de continuité. La réciproque est fausse. Si l'on modifie le candidat $\mathcal{H} = (h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de l'exemple 1.2.10, en posant pour tout entier k non nul, $h'_k = 1_C + h_k$, où C est le complémentaire dans $[0,1]$ de la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors le candidat $\mathcal{H}' := (h'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie $\lim \mathcal{H}' \equiv 1$ (en particulier $\lim \mathcal{H}'$ est continue) et $E\mathcal{H} = +\infty$.*

D'un point de vue dynamique, ceci entraine que l'entropie métrique d'un système dynamique admettant une extension symbolique admet un $\mathcal{G}_\delta$ dense de points de continuités.

Il est en général difficile de calculer l'ordre d'accumulation associé à un candidat. La proposition suivante donne cependant un critère qui permet de borner supérieurement l'ordre d'accumulation. Ce résultat nouveau permet de mieux comprendre les candidats ayant un grand ordre d'accumulation.

Proposition 1.2.21 *Soit $\mathcal{H}$ un candidat de M. Soit $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'ordinaux et notons $\alpha = \lim_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k$. Si la suite $(u_{\alpha_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est uniformément convergente, alors $u_\alpha = u_{\alpha+1}$, c'est à dire $\alpha_{\mathcal{H}} \leq \alpha$.*

Preuve : La suite des u_α étant croissante, on a : $\lim_{k\to+\infty} u_{\alpha_k} = \sup_{\beta<\alpha} u_\beta$. Soit $\epsilon > 0$. Par convergence uniforme de la suite $(u_{\alpha_k})_{k\in\mathbb{N}}$, il existe un entier N tel que pour tout $n > N$, on a :

$$u_{\alpha_n} > \sup_{\beta<\alpha} u_\beta - \epsilon$$

Soit en prenant l'enveloppe semi-continue supérieure : $u_{\alpha_n} > u_\alpha - \epsilon$. Puis $u_{\alpha_n+1} = \lim_{k\to+\infty} u_{\alpha_n} \widetilde{+ h} - h_k \geq \lim_{k\to+\infty} u_\alpha \widetilde{+ h} - h_k - \epsilon = u_{\alpha+1} - \epsilon$. Mais $\lim_{k\in\mathbb{N}}(\alpha_k + 1) = \alpha$ et donc $u_\alpha \geq u_{\alpha+1} - \epsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, on obtient $u_\alpha = u_{\alpha+1}$.

□

Remarque 1.2.22 *La condition de convergence uniforme est suffisante mais non nécessaire : nous verrons après le théorème 1.2.35 un exemple avec un ordre d'accumulation égale† à ω, où la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas uniforme.*

†. Rappelons que ω désigne le premier ordinal infini

Lien avec l'ordre d'accumulation topologique

Rappelons la notion d'ordre d'accumulation topologique. Soit M un compact métrisable. On note M_1 le complémentaire dans M des points isolés de M : i.e. $M_1 := \{x \in K,\ \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (M-\{x\})^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow{n\to+\infty} x\}$. Par récurrence, on définit pour tout ordinal α, l'ensemble $M_{\alpha+1}$ comme le complémentaire dans M_α des points isolés de M_α et si β est un ordinal limite, $M_\beta = \bigcap_{\alpha<\beta} M_\alpha$.

Un point x de M est dit d'ordre transfini si il existe un ordinal γ, tel que $x \notin M_\gamma$; l'ordre d'accumulation $r(x)$ de x est alors le plus grand ordinal α tel que $x \in M_\alpha$. Autrement dit les points d'ordre α sont les points isolés de M_α. Il est bien sûr possible qu'aucun point de M ne soit d'ordre transfini, c'est par exemple le cas de $M = [0,1]$. Cependant si M est un compact dénombrable alors tout point de M est d'ordre transfini dénombrable.

Dans [12], les auteurs donnent plusieurs estimées de la plus petite superenveloppe d'un candidat en fonction de l'ordre d'accumulation topologique, comme par exemple la proposition 1.2.25 que nous rappelons à la fin de ce paragraphe. Le résultat nouveau suivant relie l'ordre d'accumulation d'un candidat de M avec l'ordre d'accumulation topologique de M.

Proposition 1.2.23 *Soit $\mathcal{H}$ un candidat de M et $x \in M$ un point d'ordre transfini α. Alors*

- *si $\alpha \in \mathbb{N}$, on a pour tout ordinal $\beta > \alpha$,*

$$u_\beta(x) = u_\alpha(x)$$

- *si $\alpha \notin \mathbb{N}$, on a pour tout ordinal $\beta > \alpha$,*

$$u_\beta(x) = u_{\alpha+1}(x)$$

Remarque 1.2.24 *Après le théorème 1.2.35, on donnera un exemple $\mathcal{H}$ de candidat défini sur un compact, dont tous les points ont un ordre d'accumulation topologique inférieur ou égal à ω, tel que l'ordre d'accumulation du candidat $\mathcal{H}$ est $\omega+1$.*

Preuve :

On peut clairement supposer que $u_\alpha \neq +\infty$. On raisonne par récurrence sur les ordinaux α.

Considérons tout d'abord le cas $\alpha = 0$. Les points $x \in M$ d'ordre topologique $r(x) = 0$ sont les points isolés de M. Donc toute fonction réelle f définie sur M vérifie $\widetilde{f}(x) = f(x)$. En particulier pour tout entier l, on a $\widetilde{h - h_l}(x) = (h - h_l)(x)$ et pour tout ordinal limite β, on a $u_\beta(x) = \widetilde{\sup_{\gamma<\beta}} u_\gamma(x) = \sup_{\gamma<\beta} u_\gamma(x)$. On en déduit facilement que $u_\beta(x) = 0$ pour tout ordinal β.

Supposons la proposition vraie pour tout ordinal $< \alpha$ et montrons que pour tout x d'ordre topologique $r(x) = \alpha$ et pour tout $\beta > \alpha$, on a $u_\beta(x) = u_{\alpha+1-\epsilon(\alpha)}(x)$ avec $\epsilon(\alpha) = 1$ si α est fini et $\epsilon(\alpha) = 0$ sinon. On raisonne de nouveau par récurrence, celle-ci portant maintenant sur β. Nous distinguons deux cas selon que β est ordinal limite ou non.

Supposons tout d'abord que β n'est pas un ordinal limite.

$$u_\beta(x) = \lim_{k\to+\infty} u_{\beta-1}\widetilde{+h} - h_k(x)$$

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de $M - \{x\}$ convergeant vers x, alors $\limsup_{n\in\mathbb{N}} r(x_n) < r(x) = \alpha$. Donc

$$u_{\beta-1}\widetilde{+h} - h_k(x) = \max\left(\limsup_{x'\to x,\ r(x')<\alpha} (u_{\beta-1}+h-h_k)(x'), (u_{\beta-1}+h-h_k)(x)\right)$$

soit par hypothèses de récurrence,

$$u_{\beta-1}\widetilde{+h} - h_k(x) = \max\left(\limsup_{x'\to x,\ r(x')<\alpha}(u_{\alpha-\epsilon(\alpha)}+h-h_k)(x'), (u_{\alpha+1-\epsilon(\alpha)}+h-h_k)(x)\right)$$

$$u_{\beta-1}\widetilde{+h} - h_k(x) = \max\left(u_{\alpha-\epsilon(\alpha)}\widetilde{+h} - h_k(x), (u_{\alpha+1-\epsilon(\alpha)}+h-h_k)(x)\right)$$

et en passant à la limite en k,

$$u_\beta(x) = u_{\alpha+1-\epsilon(\alpha)}(x)$$

On considère maintenant le cas où β est un ordinal limite.

$$u_\beta(x) = \widetilde{\sup_{\gamma<\beta} u_\gamma}(x)$$

$$u_\beta(x) = \max\left(\limsup_{x'\to x,\ r(x')<\alpha}\left(\sup_{\gamma<\beta} u_\gamma(x')\right), \sup_{\gamma<\beta} u_\gamma(x)\right)$$

soit par hypothèses de récurrence,

$$u_\beta(x) = \max\left(\limsup_{x'\to x,\ r(x')<\alpha} u_{\alpha-\epsilon(\alpha)}(x'), u_{\alpha+1-\epsilon(\alpha)}(x)\right) = u_{\alpha+1-\epsilon(\alpha)}(x)$$

□

D'après la propriété de sous-additivité (Proposition 1.2.15), on a $u_n(x) \leq nu_1(x)$ pour tout entier n. D'après la proposition ci-dessus et la Proposition 1.2.19, on en déduit :

Proposition 1.2.25 *(Proposition 3.10 de[12]) Soit $\mathcal{H}$ un candidat de M, alors*

$$E\mathcal{H}(x) \leq h(x) + r(x)u_1(x)$$

1.2.4 Exemples de candidats avec un ordre d'accumulation arbitrairement grand

Pour tout ordinal dénombrable α, on construit un candidat d'ordre d'accumulation plus grand que α.

Nous travaillons avec une classe particulière d'ordinaux : les ordinaux indécomposables. L'utilisation des ordinaux indécomposables est ici motivée par la propriété de sous-additivité de la suite transfinie (Proposition 1.2.15) comme nous l'expliquerons plus en détails au théorème 1.2.35.

Définition 1.2.26 *[9],[36] Un ordinal α est dit **indécomposable** s'il n'existe pas de décomposition non triviale*‡ *de α sous la forme $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ avec $\alpha_2 \leq \alpha_1$.*

Par exemple le premier ordinal de cardinal infini, ω, est indécomposable. L'ordinal ω^2 est aussi indécomposable. Mais pour tout entier $k \neq 0, 1$, l'ordinal $\omega.k$ n'est clairement pas indécomposable. Remarquez aussi que les ordinaux indécomposables sont nécessairement des ordinaux limites. Les ordinaux indécomposables sont en fait caractérisés de la façon suivante :

Proposition 1.2.27 *[36] Un ordinal $\alpha \neq 0$ est un ordinal indécomposable si et seulement si il existe un ordinal β tel que $\alpha = \omega^\beta$.*

En particulier suivant que β est un ordinal successeur ou limite, on a l'alternative suivante :

Corollaire 1.2.28 *Soit α un ordinal indécomposable, alors*

‡. par décomposition triviale on entend $\alpha = \alpha + 0$

- *ou bien il existe un ordinal indécomposable $\widetilde{\alpha}$, tel que $\alpha = \widetilde{\alpha}.\omega$;*
- *ou bien $\alpha = \bigcup\{\gamma \ : \gamma$ indécomposable et $\gamma < \alpha\}$.*

On peut décomposer tout ordinal comme une somme finie d'ordinaux indécomposables. Cette écriture est appelée la forme normale de Cantor (ou écriture en base ω) d'un ordinal :

Proposition 1.2.29 *Soit α un ordinal, il existe un entier n et des ordinaux indécomposables $\alpha_1 \geq ... \geq \alpha_n$ tels que*

$$\alpha = \alpha_1 + ... + \alpha_n$$

Nous allons utiliser dans la suite le procédé de compactification suivant :

Définition 1.2.30 *Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces topologiques compacts, le compactifié de l'union disjointe $\coprod_{n\in\mathbb{N}} M_n$ des M_n en un point noté 0 est l'ensemble $X = \coprod_{n\in\mathbb{N}} M_n \coprod\{0\}$ muni de la topologie engendrée par les ouverts de M_n et les ensembles $X - M_n$ pour tout entier n. Cette topologie fait de X un espace compact.*

Nous étendons ce procédé de compactification aux candidats.

Définition 1.2.31 *Soit $(\mathcal{H}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de candidats. Notons M_k le domaine de définition de $\mathcal{H}_k$, i.e. $\mathcal{H}_k$ est un candidat de M_k. Le **candidat compactifié** $\coprod_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_k$ est le candidat $(h_l)_{l\in\mathbb{N}}$ de $\coprod_{n\in\mathbb{N}} M_n \coprod\{0\}$ coïncidant avec $\mathcal{H}_k$ sur M_k pour tout entier k et vérifiant $h_l(0) = 0$ pour tout entier l.*

On relie maintenant le supremum de u_α pour le candidat compactifié $\coprod_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_k$ avec le supremum des $u_\alpha^{\mathcal{H}_k}$.

Lemme 1.2.32 *Soit $(\mathcal{H}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de candidats. Pour tout entier k, on note h^k la limite du candidat $\mathcal{H}_k$. On suppose que la suite $(\|h^k\|_\infty)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Le candidat compactifié $\coprod_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_k$ vérifie alors pour tout ordinal β :*

$$\|u_\beta\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} \|u_\beta^{\mathcal{H}_k}\|_\infty$$

et

$$u_\beta(0) = \limsup_{k\to+\infty} \|u_\beta^{\mathcal{H}_l}\|_\infty$$

Preuve : Pour tout entier k, l'ensemble M_k est ouvert dans le compactifié $\coprod_{n\in\mathbb{N}} M_n \coprod\{0\}$. En particulier, le candidat compactifié vérifie : $u_\beta(x) = u_\beta^{\mathcal{H}_k}(x)$ pour tout ordinal β et tout $x \in M_k$. Il suffit donc de montrer que $u_\beta(0) = \limsup_{k\to+\infty} \|u_\beta^{\mathcal{H}_l}\|_\infty$. Remarquons tout d'abord que $u_\beta(0) \geq \lim_{k\to+\infty} \|u_\beta^{\mathcal{H}_l}\|_\infty$ par semi-continuité supérieure de u_β. Montrons l'inégalité inverse. Si β est un ordinal successeur on a $u_\beta(0) \leq u_{\beta-1}(0) + u_1(0)$ par sous additivité de la suite transfinie $(u_\alpha)_\alpha$. Notons h la limite du candidat compactifié. On a $u_1(0) \leq \widetilde{h}(0) \leq \lim_{k\to+\infty} \|h^k\|_\infty = 0$ et donc

$$u_\beta(0) = u_{\beta-1}(0)$$

Si β est un ordinal limite, alors pour tout entier k :

$$\begin{aligned} u_\beta(0) &\leq \sup_{l\geq k} \sup_{\gamma<\beta} \max\left(\|u_\gamma^{\mathcal{H}_l}\|_\infty, u_\gamma(0)\right) \\ &\leq \sup_{l\geq k} \max\left(\|u_\beta^{\mathcal{H}_l}\|_\infty, \sup_{\gamma<\beta} u_\gamma(0)\right) \end{aligned}$$

On conclut facilement la preuve du lemme en raisonnant par récurrence sur β. □

Un compact pointé est la donnée d'un couple (M, m), où M est un espace compact et m un point de M. Un candidat pointé est un candidat défini sur un espace compact pointé. Nous définissons maintenant le produit de deux candidats pointés :

Définition 1.2.33 *Soient $\mathcal{H} := (h_l)_{l\in\mathbb{N}}$ et $\mathcal{G} := (g_l)_{l\in\mathbb{N}}$ deux candidats pointés respectivement de (M, m) et (N, n). **Le candidat pointé produit** $\mathcal{H}\times\mathcal{G} = (f_l)_{l\in\mathbb{N}}$ de $(M\times N, (m, n))$ est défini par :*
- *$f_l(x, n) = h_l(x)$ pour tout $l \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in M$;*
- *$f_l(x, y) = g_l(y)$ pour tout $l \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in M$ et tout $y \in N - \{n\}$.*

Si (M, m) est un compact pointé et p un entier non nul, alors pour tout candidat $\mathcal{H}$ de (M, m), on note $(\mathcal{H})^{\times p}$ le candidat pointé $\mathcal{H}\times(\mathcal{H}\times(...\times\mathcal{H}))$ de (M^p, m^p), où on a multiplié p fois $\mathcal{H}$ avec lui-même à gauche (m^p désigne l'élément $(m, ..., m)$ de M^p). Ce candidat est appelé la p^{eme} puissance du candidat $\mathcal{H}$.

Nous étudions maintenant certaines propriétés de la puissance d'un candidat, qui nous seront utiles pour la construction d'exemples avec un ordre d'accumulation arbitrairement grand (Théorème 1.2.35).

Lemme 1.2.34 *Soit (M, m) un compact pointé. Fixons α un ordinal limite. On considère $\mathcal{H} := (h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un candidat pointé de (M, m), tel que :*
- *$\|u_\gamma\|_\infty \leq 1$ pour tout ordinal γ ;*
- *$u_\alpha(m) = 1$ et $u_\beta(m) = 0$ pour tout ordinal $\beta < \alpha$.*

Alors pour tout entier p non nul, le candidat $\mathcal{H}^{\times p}$ vérifie :
- *$\|u_\gamma\|_\infty \leq p$ pour tout ordinal γ ;*
- *$\|u_{\alpha.k}\|_\infty \leq k$ pour tout entier k ;*
- *$u_{\alpha.p}(m^p) = p$ et $u_\beta(m^p) = 0$ pour tout ordinal $\beta < \alpha$.*

Preuve :

On raisonne par récurrence sur p. Le cas $p = 1$ suit trivialement de la propriété de sous-additivité de la Proposition 1.2.15. Supposons le lemme vrai pour p et montrons le pour $p+1$. On notera $(u^p_\alpha)_\alpha$ la suite transfinie associée au candidat $\mathcal{H}^{\times p} = (h^p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et h^p sa limite. Par définition de la puissance p^{eme}, on a les relations suivantes pour tout entier k :
- $h^{p+1}_k(x, m^p) = h_k(x)$ pour tout $x \in M$;
- $h^{p+1}_k(x, y) = h^p_k(y)$ pour tout $x \in M$ et tout $y \in M^p$, $y \neq m^p$.

Pour tout $(x, y) \in M\times M^p$, on a donc $(h^{p+1} - h^{p+1}_k)(x, y) \leq (h - h_k)(x) + (h^p - h^p_k)(y)$. On en déduit facilement que pour tout ordinal γ, on a $u^{p+1}_\gamma(x, y) \leq u_\gamma(x) + u^p_\gamma(y)$. Par hypothèse de récurrence, on obtient donc que $\|u^{p+1}_\gamma\|_\infty \leq p + 1$ pour tout ordinal γ.

D'après la propriété de sous-additivité (Proposition 1.2.15), on a $\|u_{\alpha.k}\|_\infty \leq k\|u_\alpha\|_\infty$. De plus, α étant un ordinal limite, $\|u_\alpha\|_\infty = \sup_{\beta<\alpha}\|u_\beta\|_\infty$. Il suffit donc de montrer que $\|u_\beta\|_\infty \leq 1$ pour tout $\beta < \alpha$. On fixe un ordinal $\beta < \alpha$ et montrons que $u_\beta(x, y) \leq 1$ pour tout $(x, y) \in M\times M^p$. On distingue deux cas :
- On suppose que $y \neq m^p$. Si $\mathcal{V}$ est un voisinage ouvert de y ne rencontrant pas m^p, alors $M\times\mathcal{V}$ est un voisinage ouvert de (x, y) tel que $h^{p+1}_k(x', y') = h^p_k(y')$ pour tout $(x', y') \in M\times\mathcal{V}$. On en déduit que $u^{p+1}_\alpha(x, y) = u^p_\alpha(y) \leq 1$;
- On suppose que $y = m^p$. Soit $\beta < \alpha$ un ordinal. Puisque $u^p_\beta(m^p) = 0$, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}_\epsilon \subset M^p$ de m^p tel que $u^p_\beta < \epsilon$ sur $\mathcal{V}_\epsilon$ (rappelons que la fonction u^p_β est s.c.s.). Maintenant, pour tout $(x', y') \in M\times\mathcal{V}_\epsilon$, on a $u^{p+1}_\beta(x', y') \leq u_\beta(x') + u^p_\beta(y') < u_\beta(x') + \epsilon$. Ceci étant vrai pour tout ϵ, on obtient que $u^{p+1}_\beta(x, m^p) = u_\beta(x) \leq 1$.

Il reste à montrer que $u^{p+1}_{\alpha.(p+1)}(m^{p+1}) = p + 1$. Fixons un point x de M. Pour tout $y \in M^p - \{m^p\}$, on a $h^{p+1}_k(x, y) = h^p_k(y)$. D'après le lemme 1.2.16 et par hypothèse de récurrence, on a alors $u^{p+1}_{\alpha.p}(x, m^p) \geq u^p_{\alpha.p}(m^p) = p$. Or $\|u^{p+1}_{\alpha.p}\|_\infty \leq p$. On a donc $u^{p+1}_{\alpha.p}(x, m^p) = p$ pour tout $x \in M$. On en

déduit facilement que $u_{\alpha.p+\beta}(x, m^p) \geq u_\beta(x) + p$ pour tout $\beta < \alpha$ et finalement $u^{p+1}_{\alpha.(p+1)}(m^{p+1}) = p+1$. □

On normalise le candidat $\mathcal{H}^{\times p}$ en le divisant par p et on note $\mathcal{H}_1^{\times p} := (\frac{h_k^p}{p})_{k\in\mathbb{N}}$ le candidat ainsi obtenu.

Nous définissons maintenant par récurrence sur les ordinaux indécomposables dénombrables α une famille E_α de candidats pointés. Tout d'abord E_1 est réduit au candidat $\mathcal{H} = (h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}-\{0\}}\{\frac{1}{n}\}\bigcup\{0\}$ pointé en 0 (M étant muni de la topologie usuelle) défini par $h_k(\frac{1}{n}) = 1$ si $k \leq n$ et $h_k(\frac{1}{n}) = 0$ sinon et $h_k(0) = 0$ pour tout entier k.

Soit α un ordinal indécomposable dénombrable. Supposons que l'on a défini, les familles E_β, pour tout ordinal indécomposable $\beta < \alpha$. Définissons maintenant E_α. On distingue les deux cas suivants qui correspondent à l'alternative présentée au Corollaire 1.2.28 :

Premier cas : l'ordinal indécomposable α s'écrit sous la forme $\alpha = \lim_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k$, où $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante d'ordinaux indécomposables. Alors E_α est l'ensemble des candidats compactifiés de la forme $\coprod_{n\geq p} \mathcal{H}^{\alpha_k}$ pointé en un point noté 0_α, où p est un entier et $\mathcal{H}^{\alpha_k} \in E_{\alpha_k}$ pour tout entier k.

Second cas : l'ordinal indécomposable α s'écrit sous la forme $\lim_{k\in\mathbb{N}} \widetilde{\alpha}.k$, où $\widetilde{\alpha}$ est un ordinal indécomposable. Alors E_α est l'ensemble des candidats compactifiés de la forme $\coprod_{n\geq p}(\mathcal{H}^{\widetilde{\alpha}})_1^{\times p}$ pointé en un point noté 0_α, où p est un entier et $\mathcal{H}^{\widetilde{\alpha}} \in E_{\widetilde{\alpha}}$.

Théorème 1.2.35 *Soit $\epsilon > 0$ et soient $\alpha > \beta$ deux ordinaux indécomposables dénombrables. Alors il existe un candidat $\mathcal{H} \in E_\alpha$ pointé en 0_α, tel que :*

1. $\|\lim \mathcal{H}\|_\infty \leq \epsilon$;
2. $\|u^{\mathcal{H}}_\beta\|_\infty \leq \epsilon$;
3. $\|u_\gamma\|_\infty \leq 1$ *pour tout ordinal* γ ;
4. $u_\chi(0_\alpha) = 0$ *pour tout ordinal* $\chi < \alpha$ *et* $u_\alpha(0_\alpha) = 1$.

Remarquons que la condition α indécomposable est nécessaire. En effet supposons que α n'est pas indécomposable alors il existe des ordinaux $0 \neq \alpha_2 < \alpha_1$ tels que $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Mais d'après la propriété de sous-additivité de la suite transfinie (Proposition 1.2.15), on a l'inégalité $u_\alpha \leq u_{\alpha_1} + u_{\alpha_2}$. Donc si les fonctions u_β pour $\beta < \alpha$ s'annule en un même point alors u_α s'annule aussi en ce point. L'assertion (3) du théorème ci-dessus ne peut donc être vérifiée. C'est cette remarque qui nous a motivés à travailler avec les ordinaux indécomposables.

Preuve : On raisonne par récurrence sur l'ordinal indécomposable dénombrable α. On distingue deux cas :

Premier cas : L'ordinal indécomposable α s'écrit sous la forme $\alpha = \lim_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k$ où $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante d'ordinaux indécomposables. Par hypothèse de récurrence, il existe pour tout entier k non nul un candidat $\mathcal{H}^{\alpha_k} \in E_{\alpha_k}$ pointé en 0_{α_k} vérifiant :

- $\|\lim \mathcal{H}^{\alpha_k}\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{k}$;
- $\|u^{\mathcal{H}^{\alpha_k}}_{\alpha_{k-1}}\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{k}$;
- $\|u^{\mathcal{H}^{\alpha_k}}_\gamma\|_\infty \leq 1$ pour tout ordinal γ ;
- $u_\chi(0_{\alpha_k}) = 0$ pour tout ordinal $\chi < \alpha_k$ et $u_{\alpha_k}(0_{\alpha_k}) = 1$.

Soit $\beta < \alpha$ un autre ordinal indécomposable, il existe un entier n tel que $\beta < \alpha_n$. Le candidat compactifié $\coprod_{k>n} \mathcal{H}^{\alpha_k}$ vérifie alors (on établit les points 1, 2 et 4 à l'aide du lemme 1.2.32) :

1. $\|u_\beta\|_\infty = \sup_{k>n} \|u^{\mathcal{H}^{\alpha_k}}_\beta\|_\infty \leq \sup_{k>n} \|u^{\mathcal{H}^{\alpha_k}}_{\alpha_n}\|_\infty \leq \sup_{k>n} \|u^{\mathcal{H}^{\alpha_k}}_{\alpha_{k-1}}\|_\infty \leq \epsilon$;
2. $\|u_\gamma\|_\infty = \sup_{k>n} \|u^{\mathcal{H}^{\alpha_k}}_\gamma\|_\infty \leq 1$ pour tout ordinal γ ;

3. $\| \lim \left(\coprod_{k>n} \mathcal{H}^{\alpha_k} \right) \|_\infty = \sup_{k \geq n} \| \lim \mathcal{H}^{\alpha_k} \|_\infty \leq \epsilon$;
4. Pour tout ordinal $\chi < \alpha$, il existe un entier n, tel que $\alpha_n > \chi$. On a alors :

$$u_\chi(0_\alpha) \leq \lim_{k \to +\infty} \sup_{l \geq k} \| u_{\alpha_n}^{\mathcal{H}^{\alpha_l}} \|_\infty \leq \lim_{k \to +\infty} \sup_{l \geq k} \| u_{\alpha_{l-1}}^{\mathcal{H}^{\alpha_l}} \|_\infty \leq \lim_{k \to +\infty} \frac{\epsilon}{k} = 0$$

Enfin

$$u_\alpha(0_\alpha) \geq \lim_{k \to +\infty} u_{\alpha_k}(0_{\alpha_k}) = 1$$

Second cas : L'ordinal α s'écrit sous la forme $\alpha = \lim_{k \in \mathbb{N}} \widetilde{\alpha}.k$ où $\widetilde{\alpha}$ est indécomposable.

Remarquons que si β est un ordinal indécomposable tel que $\beta < \alpha$, alors $\beta \leq \widetilde{\alpha}$. Il suffit donc de considérer le cas $\beta = \widetilde{\alpha}$.

Soit p un entier tel que $\frac{1}{p} < \epsilon$. Soit $\mathcal{H}^{\widetilde{\alpha}} \in E_{\widetilde{\alpha}}$ vérifiant :

– $\| \lim \mathcal{H}^{\widetilde{\alpha}} \|_\infty \leq 1$;
– $\| u_\gamma \|_\infty \leq 1$ pour tout ordinal γ ;
– $u_\chi(0_\alpha) = 0$ pour tout ordinal $\chi < \widetilde{\alpha}$ et $u_{\widetilde{\alpha}}(0_{\widetilde{\alpha}}) = 1$.

Considérons le candidat compactifié $\coprod_{k>p} (\mathcal{H}^{\widetilde{\alpha}})_1^{\times p}$. D'après les lemmes 1.2.34 et 1.2.32, ce candidat vérifie :

1. $\| u_{\widetilde{\alpha}} \|_\infty \leq \sup_{k>p} \| u_{\widetilde{\alpha}}^{(\mathcal{H}^{\widetilde{\alpha}})_1^{\times k}} \|_\infty \leq \frac{1}{p} < \epsilon$;
2. $\| u_\gamma \|_\infty = \sup_{k>p} \| u_\gamma^{(\mathcal{H}^{\widetilde{\alpha}})_1^{\times k}} \|_\infty \leq 1$ pour tout ordinal γ ;
3. $\| \lim \coprod_{k>p} (\mathcal{H}^{\widetilde{\alpha}})_1^{\times p} \|_\infty = \sup_{k \geq p} \| \lim (\mathcal{H}^{\widetilde{\alpha}})_1^{\times p} \|_\infty \leq \frac{1}{p} < \epsilon$;
4. $u_{\widetilde{\alpha}.m}(0) \leq \lim_{k \to +\infty} \sup_{l \geq k} \| u_{\widetilde{\alpha}.m}^{(\mathcal{H}^{\widetilde{\alpha}})_1^{\times l}} \|_\infty \leq \lim_{k \to +\infty} \frac{m}{k} = 0$ pour tout entier m. Enfin $u_\alpha(0_\alpha) = \lim_{k \to +\infty} u_{\widetilde{\alpha}.k}^{(\mathcal{H}^{\widetilde{\alpha}})_1^{\times k}}(0_{\widetilde{\alpha}.k}) = 1$.

□

On obtient ainsi, pour tout ordinal indécomposable α, un exemple de candidat dont l'ordre d'accumulation est supérieur à α d'après le point (4) de l'énoncé du théorème précédent. Nous conjecturons que tout ordinal dénombrable peut être réalisé comme ordre d'accumulation d'un candidat. Pour prouver cela, il suffirait de montrer que les éléments de E_α sont exactement d'ordre α et que l'ordre du produit de deux candidats est la somme des ordres de ces deux candidats. On pourrait alors conclure en utilisant la forme normale de Cantor d'un ordinal.

Nous examinons maintenant plus en détails le cas $\alpha = \omega$. Rappelons que $\mathcal{H}^1 = (h_k)_{k \in \mathbb{N}} \in E_1$ est le candidat de $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} \{\frac{1}{n}\} \coprod \{0\}$ défini par $h_k(\frac{1}{n}) = 1$ si $k \leq n$ et $h_k(\frac{1}{n}) = 0$ sinon et $h_k(0) = 0$ pour tout entier k. Le candidat compactifié $\coprod_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} (\mathcal{H}^1)^{\times n} := (g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\coprod_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} M^n \coprod \{0_\omega\}$ est d'ordre d'accumulation exactement ω. En effet pour tout $x \in M^n$, on a $u_\gamma(x) = u_n(x)$ pour tout ordinal $\gamma \geq n$ d'après la proposition 1.2.23 (l'ordre d'accumulation topologique de tout point de M^n est au plus n). De plus $u_{\alpha+1}(0_\omega) = u_\alpha(0_\omega)$, car $g - g_k$ est continue en 0_ω et $(g - g_k)(0_\omega) = 0$. Remarquez aussi que pour tout entier n, on a $\| \sup_{k \in \mathbb{N}} u_k - u_n \|_\infty = 1$, car $u_n(0_l) = \frac{n}{l}$ pour $l \geq n$ et $u_l(0_l) = 1$. En particulier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas uniformément convergente. La condition d'uniforme convergence dans la proposition 1.2.21 n'est donc pas nécessaire (Remarque 1.2.22).

Enfin nous considérons une variante du compactifié $\coprod_{n \in \mathbb{N}} (\mathcal{H}^1)^{\times n} := (g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en posant $g_k(0_l) = 1$ si $k \geq l$ et $g_k(0_l) = 0$ sinon. D'après le lemme 1.2.16, ce changement n'affecte les valeurs de la suite transfinie $(u_\alpha)_\alpha$ qu'en 0_ω. On calcule facilement $u_1(0_\omega) = u_\omega(0_\omega) = 1$ et $u_{\omega+1}(0_\omega) \geq \lim_{k \to +\infty} \limsup_{l \to +\infty} (u_\omega + h - h_k)(0_l) = 2$. L'ordre d'accumulation du candidat compactifié modifié est donc supérieure ou égale à $\omega + 1$, puis exactement égale à $\omega + 1$ d'après la Proposition 1.2.23. Cet exemple justifie la remarque 1.2.24.

Dans les deux paragraphes suivants, on relie la suite transfinie et les superenveloppes d'un candidat $\mathcal{H}$ de M avec celles de sa restriction à un sous-ensemble compact K de M et celles de son relèvement par une surjection continue $\pi : M' \to M$. Ces résultats nous permettrons, dans un cadre affine, de comparer les propriétés de convergence d'un candidat avec celles de sa restriction à l'ensemble extrémal.

1.2.5 Restriction d'un candidat

Si $K \subset M$ et f est une fonction définie sur M, on notera $f_{/K}$ la restriction de f à K.

Définition 1.2.36 *Soit $\mathcal{H} := (h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un candidat de M. Soit $K \subset M$ un compact. On appelle **restriction du candidat** $\mathcal{H}$ à K le candidat noté $\mathcal{H}_K$ défini par $\mathcal{H}_K := ((h_k)_{/K})_{k\in\mathbb{N}}$.*

Proposition 1.2.37 *Avec les les notations ci-dessus :*

1. *pour tout ordinal α, $u_\alpha^{\mathcal{H}_K} \leq (u_\alpha^{\mathcal{H}})_{/K}$;*
2. *si E est une superenveloppe de $\mathcal{H}$, $E_{/K}$ est une superenveloppe de K ;*
3. *$E(\mathcal{H}_K) \leq (E\mathcal{H})_{/K}$.*

Preuve : (1) et (2) viennent du fait que si $f : M \to \mathbb{R}$, alors $\widetilde{f_{/K}} \leq \widetilde{f}_{/K}$. (3) se déduit facilement de (1) ou (2). □

Les inégalités des assertions (1) et (3) de la proposition précédente peuvent être strictes. Remarquons par exemple que si K est réduit à un point, alors $u_\alpha^{\mathcal{H}_K} \equiv 0$ pour tout ordinal α.

1.2.6 Relevé d'un candidat

Soient M, K deux espaces métriques compacts et $\pi : M \to K$ une application continue surjective. Si f est une fonction de K dans $\mathbb{R}$, rappelons que πf est la fonction définie sur M par $\pi f(x) = f(\pi x)$.

Définition 1.2.38 *Soit $\mathcal{H} := (h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un candidat de K. Le **candidat relevé** de $\mathcal{H}$ noté $\pi\mathcal{H}$ est le candidat de M défini par $\pi\mathcal{H} := (\pi h_k)_{k\in\mathbb{N}}$.*

Proposition 1.2.39 *Avec les notations précédentes,*

1. *$\lim(\pi\mathcal{H}) = \pi \lim(\mathcal{H})$;*
2. *pour tout ordinal α, on a $u_\alpha^{\pi\mathcal{H}} \leq \pi u_\alpha^{\mathcal{H}}$;*
3. *pour tout ordinal α, on a $(u_\alpha^{\pi\mathcal{H}})^{[K]} = u_\alpha^{\mathcal{H}}$, en particulier $\alpha_{\mathcal{H}} \leq \alpha_{\pi\mathcal{H}}$;*
4. *si E est une superenveloppe de $\mathcal{H}$, alors πE est une superenveloppe de $\pi\mathcal{H}$. En particulier, $E(\pi\mathcal{H}) \leq \pi E\mathcal{H}$;*
5. *si $\mathcal{H}$ est à différence s.c.s. et si E est une superenveloppe de $\pi\mathcal{H}$, alors la projetée $E^{[K]}$ est une superenveloppe de $\mathcal{H}$;*
6. *$(E\pi\mathcal{H})^{[K]} = E\mathcal{H}$;*
7. *si on suppose de plus π ouverte, alors $u_\alpha^{\pi\mathcal{H}} = \pi u_\alpha^{\mathcal{H}}$ et donc $\alpha_{\pi\mathcal{H}} = \alpha_{\mathcal{H}}$ et $E(\pi\mathcal{H}) = \pi(E\mathcal{H})$.*

Preuve : (1) Le premier point est trivial.

(2) L'inégalité est triviale pour $\alpha = 0$. Supposons l'inégalité vérifiée pour tout $\beta < \alpha$. Considérons tout d'abord le cas d'un ordinal successeur α. Par continuité de π et par hypothèse de récurrence, on a :

$$\pi(h - \widetilde{h_k}) + u_{\alpha-1}^{\pi\mathcal{H}} \leq \pi\left(h - \widetilde{h_k + u_{\alpha-1}^{\mathcal{H}}}\right)$$

soit en passant à la limite en k,

$$u_\alpha^{\pi\mathcal{H}} \leq \pi u_\alpha^{\mathcal{H}}$$

Si α est un ordinal limite, on a par hypothèse de récurrence,

$$\sup_{\beta<\alpha} u_\beta^{\pi\mathcal{H}} \leq \pi\left(\sup_{\beta<\alpha} u_\beta^{\mathcal{H}}\right)$$

puis par continuité de π,

$$\widetilde{\sup_{\beta<\alpha} u_\beta^{\pi\mathcal{H}}} \leq \pi\left(\widetilde{\sup_{\beta<\alpha} u_\beta^{\mathcal{H}}}\right)$$

c'est à dire

$$u_\alpha^{\pi\mathcal{H}} \leq \pi u_\alpha^{\mathcal{H}}$$

(3) En prenant l'application projetée dans l'inégalité précédente, on obtient pour tout α transfini : $(u_\alpha^{\pi\mathcal{H}})^{[K]} \leq u_\alpha^{\mathcal{H}}$. Supposons l'égalité $(u_\beta^{\pi\mathcal{H}})^{[K]} = u_\beta^{\mathcal{H}}$ établie pour tout $\beta < \alpha$. On suppose tout d'abord que α n'est pas un ordinal limite. On a :

$$(u_\alpha^{\pi\mathcal{H}})^{[K]} = \left(\lim_{k\to+\infty}\left(u_{\alpha-1}^{\pi\mathcal{H}} \widetilde{+\pi(h-h_k)}\right)\right)^{[K]}$$

D'après la propriété (4) de la proposition 1.1.4, on peut intervertir le passage à la projetée et la limite en k :

$$\left(\lim_{k\to+\infty}\left(u_{\alpha-1}^{\pi\mathcal{H}} \widetilde{+\pi(h-h_k)}\right)\right)^{[K]} = \lim_{k\to+\infty}\left(\left(u_{\alpha-1}^{\pi\mathcal{H}} \widetilde{+\pi(h-h_k)}\right)^{[K]}\right)$$

Puis d'après la proposition 1.1.6, on a $\left(\widetilde{f}\right)^{[K]} \geq \widetilde{f^{[K]}}$ pour toute fonction $f : M \to \mathbb{R}$. Donc

$$\lim_{k\to+\infty}\left(\left(u_{\alpha-1}^{\pi\mathcal{H}} \widetilde{+\pi(h-h_k)}\right)^{[K]}\right) \geq \lim_{k\to+\infty}\left((u_{\alpha-1}^{\pi\mathcal{H}})^{\widetilde{[K]}} + h - h_k\right)$$

Or par hypothèse de récurrence, $(u_{\alpha-1}^{\pi\mathcal{H}})^{[K]} = u_{\alpha-1}^{\mathcal{H}}$. Finalement on obtient donc

$$(u_\alpha^{\pi\mathcal{H}})^{[K]} \geq \lim_{k\in\mathbb{N}}\left(u_{\alpha-1}^{\mathcal{H}} \widetilde{+h} - h_k\right) = u_\alpha^{\mathcal{H}}$$

Considérons maintenant le cas où α est un ordinal limite. Toujours d'après la proposition 1.1.6,

$$\left(\widetilde{\sup_{\beta<\alpha} u_\beta^{\pi\mathcal{H}}}\right)^{[K]} \geq \left(\widetilde{\sup_{\beta<\alpha} u_\beta^{\pi\mathcal{H}}}\right)^{[K]}$$

De plus par interversion des supremums (celui en α et celui définissant $^{[K]}$) et par hypothèse de récurrence,

$$\left(\sup_{\beta<\alpha} u_\beta^{\pi\mathcal{H}}\right)^{[K]} = \sup_{\beta<\alpha}\left(\left(u_\beta^{\pi\mathcal{H}}\right)^{[K]}\right) = \sup_{\beta<\alpha} u_\beta^{\mathcal{H}}$$

On conclut donc que $\left(u_\alpha^{\pi\mathcal{H}}\right)^{[K]} \geq u_\alpha^{\mathcal{H}}$.

(4) Soit $E : M \to \mathbb{R}$. Par continuité de π, on a $\pi(\widetilde{E-h_k}) - \pi(E-h_k) \leq \pi\left(\widetilde{E-h_k} - (E-h_k)\right)$ et donc si E est une superenveloppe $\mathcal{H}$, alors πE est une superenveloppe de $\pi\mathcal{H}$.

(5) Supposons $\mathcal{H}$ à différences s.c.s. Remarquons que π étant continue, $\pi\mathcal{H}$ est aussi à différences s.c.s. Soit E une superenveloppe de $\pi\mathcal{H}$, alors on peut écrire $E^{[K]} - h_k = (E - \pi h_k)^{[K]}$. La fonction $E - \pi h_k$ étant s.c.s., il en va de même de $E^{[K]} - h_k$ d'après la proposition 1.1.6, ce qui prouve (5).

(6) On peut déduire (6) de l'étude des superenveloppes (Propriétés (4) et (5)) dans le cas où $\mathcal{H}$ est à différences s.c.s. ou bien à partir de la suite transfinie u_α (Propriété (3)) de façon générale. Faisons-le tout d'abord en utilisant les superenveloppes lorsque $\mathcal{H}$ est à différences s.c.s. : il suit clairement de (4) que $E(\pi\mathcal{H}) \leq \pi(E\mathcal{H})$ et donc en prenant les projetées, $(E(\pi\mathcal{H}))^{[K]} \leq E\mathcal{H}$. L'inégalité inverse suit trivialement de (5). Montrons maintenant (6) dans le cadre général à l'aide de l'étude de la suite transfinie. D'après (3), on a $\left(u_\alpha^{\pi\mathcal{H}}\right)^{[K]} = u_\alpha^{\mathcal{H}}$. En passant au supremum en α, puis par interversion des suprema (celui en α et celui définissant $^{[K]}$), on a $\left(\sup_\alpha u_\alpha^{\pi\mathcal{H}}\right)^{[K]} = \sup_\alpha u_\alpha^{\mathcal{H}}$, soit d'après la proposition 1.2.19, $(E(\pi\mathcal{H}) - \pi h)^{[K]} = E\mathcal{H} - h$. De plus on observe facilement que $(E(\pi\mathcal{H}) - \pi h)^{[K]} = (E(\pi\mathcal{H}))^{[K]} - h$. On conclut donc que $(E(\pi\mathcal{H}))^{[K]} = E\mathcal{H}$.

(7) Supposons maintenant π ouverte. On raisonne par récurrence sur α. Le cas $\alpha = 0$ est trivial. On suppose $u_\beta^{\pi\mathcal{H}} = \pi(u_\beta^{\mathcal{H}})$ pour tout $\beta < \alpha$ et montrons $u_\alpha^{\pi\mathcal{H}} \geq \pi(u_\alpha^{\mathcal{H}})$, l'inégalité inverse ayant déjà été établie en (2). Supposons tout d'abord que α n'est pas un ordinal limite. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $x \in M$, π étant ouverte et surjective, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}}$ convergeant vers x, telle que $\pi\left(\widetilde{u_{\alpha-1}^{\mathcal{H}} + h} - h_k\right)(x) = \lim_{n\to+\infty} \pi(u_{\alpha-1}^{\mathcal{H}} + h - h_k)(x_n)$. Mais alors par hypothèse de récurrence : $\pi\left(\widetilde{u_{\alpha-1}^{\mathcal{H}} + h} - h_k\right)(x) \leq \pi(\widetilde{u_{\alpha-1}^{\mathcal{H}} + h} - h_k)(x) = (\widetilde{u_{\alpha-1}^{\pi\mathcal{H}} + \pi(h - h_k)})(x)$. En passant à la limite en k, on obtient $u_\alpha^{\pi\mathcal{H}} \geq \pi(u_\alpha^{\mathcal{H}})$. Supposons que α est un ordinal limite. Soit $x \in M$, π étant ouverte et surjective, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}}$ convergeant vers x, telle que $\pi\left(\widetilde{\sup_{\beta<\alpha} u_\beta^{\mathcal{H}}}\right)(x) = \lim_{n\to+\infty}(\sup_{\beta<\alpha} \pi u_\beta^{\mathcal{H}})(x_n)$, et donc par hypothèse de récurrence, $\pi\left(\widetilde{\sup_{\beta<\alpha} u_\beta^{\mathcal{H}}}\right)(x) \leq \left(\widetilde{\sup_{\beta<\alpha} u_\beta^{\pi\mathcal{H}}}\right)(x)$, i.e. $\pi u_\alpha^{\mathcal{H}} \leq u_\alpha^{\pi\mathcal{H}}$.

□

En général, si π n'est pas ouverte, on peut avoir $u_\alpha^{\pi\mathcal{H}}(x) < \pi u_\alpha^{\mathcal{H}}(x)$. Considérons par exemple la surjection continue $\pi : [0,1] \to \mathbb{S}^1$ définie par $\pi(x) = e^{2i\pi x}$ et le candidat $\mathcal{H} := (h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{S}^1$ défini par $h_{k+1} = h_k + 1_{e^{\frac{i\pi}{k+1}}}$ pour tout entier k. On a $u_1^{\mathcal{H}}(1) = 1$ et donc $\left(\pi u_1^{\mathcal{H}}\right)(1) = 1$. Mais $u_1^{\pi\mathcal{H}}(1) = 0$, car $\pi h_{k+1} = \pi h_k + 1_{\frac{1}{2(k+1)}}$ pour tout entier k. Remarquons que $E\mathcal{H} = u_1^{\mathcal{H}} + h$, $E(\pi\mathcal{H}) = u_1^{\pi\mathcal{H}} + \pi h$ et $\pi h(1) = h(1)$. Donc on a aussi $E(\pi\mathcal{H}) \neq \pi(E\mathcal{H})$.

1.2.7 Equivalence

Dans [31], T. Downarowicz introduit un préordre sur les candidats pour comparer leurs propriétés asymptotiques. Rappelons qu'un préordre est une relation binaire réflexive et transitive. On munit l'ensemble des candidats de M du préordre suivant :

Définition 1.2.40 *Soient $\mathcal{H} = (h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\mathcal{G} = (g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux candidats de M,*
$\mathcal{H} \succeq \mathcal{G}$ si pour tout $\gamma > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que $h_l > g_k - \gamma$.

On définit alors une relation d'équivalence $\simeq$ sur l'ensemble des candidats :

Définition 1.2.41 *On dit que deux candidats $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ de M sont **équivalents** et on note $\mathcal{H} \simeq \mathcal{G}$, si $\mathcal{H} \succeq \mathcal{G}$ et $\mathcal{G} \succeq \mathcal{H}$.*

Deux candidats équivalents ont les mêmes propriétés asymptotiques :

Proposition 1.2.42 *(Théorème 2.3.2 de [31]) Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ deux candidats équivalents, alors*

1. $\lim \mathcal{H} = \lim \mathcal{G}$;
2. *pour tout ordinal* α, $u_\alpha^{\mathcal{H}} = u_\alpha^{\mathcal{G}}$;
3. $\alpha_{\mathcal{H}} = \alpha_{\mathcal{G}}$;
4. E *est une superenveloppe de* $\mathcal{H}$ *ssi* E *est une superenveloppe de* $\mathcal{G}$;
5. $E\mathcal{H} = E\mathcal{G}$.

PREUVE : (1), (2) et (4) sont des conséquences triviales de la définition de la relation d'équivalence $\simeq$. Le point (3) (resp. (5)) se déduit de façon évidente de (2) (resp. 4). □

Nous donnons maintenant un critère permettant de comparer deux candidats.

Proposition 1.2.43 *Soient* $\mathcal{H} = (h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *et* $\mathcal{G} = (g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *deux candidats de* M. *Supposons qu'il existe une famille* $\mathcal{C} := (c_{m,n} : M \to \mathbb{R}^+)_{m,n\in\mathbb{N}}$ *de fonctions s.c.s. décroissante en* n, *i.e.* $\forall m \in \mathbb{N}$, $c_{m,n+1} \leq c_{m,n}$ *telle que* $g_m - h_n \leq c_{m,n}$ *et* $\lim_{n\to+\infty} c_{m,n} = 0$. *Alors* $\mathcal{H} \succeq \mathcal{G}$.

PREUVE : Fixons $\gamma > 0$ et $m \in \mathbb{N}$. On a $g_m - h_n \leq c_{m,n}$ pour tout entier n. La suite de fonctions $(c_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fonctions s.c.s. convergeant vers 0. D'après la Proposition 1.1.4 (3), cette convergence est uniforme et donc il existe N tel que pour tout $n > N$, on a $c_{m,n} < \gamma$, c'est à dire $h_n > g_m - \gamma$. □

1.3 Cadre affine

On étudie dans ce paragraphe les objets introduits précédemment lorsque le compact M est muni d'une structure affine. Nous rappelons tout d'abord quelques théorèmes usuels d'analyse convexe. Puis nous donnons des propriétés élémentaires des fonctions semi-continues concaves (ou convexes). Après avoir rappelé la notion de fonction harmonique, on étudie la suite transfinie et les superenveloppes d'un candidat dans un cadre affine.

On suppose dans cette section que M est un compact convexe métrisable d'un espace vectoriel topologique localement convexe E. Un candidat $\mathcal{H} := (h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de M est dit affine si les fonctions h_k sont affines. Rappelons que l'ensemble extrémal d'un ensemble convexe F est le sous ensemble noté $ex(F)$ de F défini comme suit : $ex(F) = F - \{\lambda y + (1-\lambda)z \ : \ y \neq z \in F \text{ et } \lambda \in]0,1[\}$. Enfin si C est un sous-ensemble de E, l'enveloppe convexe de C, notée $conv(C)$, est le plus petit ensemble convexe contenant C.

1.3.1 Théorèmes usuels

Nous rappelons dans ce paragraphe trois résultats classiques d'analyse convexe. Le premier est un corollaire du théorème de séparation de Hahn-Banach et le second est le théorème bien connu de Krein-Milman. Nous terminons ce paragraphe en énonçant le théorème de Carathéodory, qui donne une description des compacts convexes de dimension finie.

Le théorème de Hahn-Banach est un théorème de séparation dans le cadre affine. On énonce ici un corollaire du théorème de Hahn-Banach, qui permet de séparer deux points distincts de M par une fonction affine continue :

Théorème 1.3.1 *[51] Soit* M *un compact convexe d'un espace vectoriel topologique localement convexe. Soient* a, b *deux éléments distincts de* M. *Il existe une application affine continue de* $f : M \to \mathbb{R}$ *telle que* $f(a) = 0$ *et* $f(b) = 1$.

Le théorème de Krein-Milman relie M et son ensemble extrémal $ex(M)$:

Théorème 1.3.2 *[51] Soit* M *un compact convexe d'un espace vectoriel topologique localement convexe, alors :*

$$\overline{conv(ex(M)} = M$$

Le théorème de Carathéodory caractérisent les compacts convexes de dimension finie :

Théorème 1.3.3 *[51] Soit M un compact convexe de $\mathbb{R}^n$, alors tout point de M s'écrit comme une combinaison linéaire de au plus $n+1$ points et $M = conv(ex(M))$.*

Corollaire 1.3.4 *Si M est un compact de $\mathbb{R}^n$, alors $conv(M)$ est compacte.*

Remarquons que le théorème et le corollaire précédents sont faux en dimension infinie :

Exemple 1.3.5 *Considérons le compact convexe $M = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}},\ \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \leq 1\}$, où $(\mathbb{R}^+)^n$ est muni de la topologie produit. L'ensemble extrémal $ex(M)$ de M est formé de la suite nulle, notée 0, et des suites de Kronecker δ_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Rappelons que les suites de Kronecker sont définies par $(\delta_n)_p = 1$ si $p = n$ et $(\delta_n)_p = 0$ sinon. L'ensemble $ex(M)$ est clairement compact. Cependant l'enveloppe convexe $conv(ex(M))$ de M est le sous-ensemble de M formé des suites nulles à partir d'un certain rang, qui n'est pas compact. On en déduit donc que $conv(ex(M)) \neq M$.*

1.3.2 Fonctions s.c.s. affines et concaves

Les propriétés affines et les propriétés de semi-continuité d'une fonction "se conjuguent bien" :

Théorème 1.3.6 *(Thèorème 21.22 de [25]) Toute fonction affine s.c.s est une limite décroissante de fonctions continues affines.*

Théorème 1.3.7 *(Théorème 21.18 de [25]) Si h est une fonction s.c.s. concave, alors $h = \inf_g g$, où l'infimum porte sur toutes les fonctions g affines continues telles que $g > h$.*

Proposition 1.3.8 *Si f est concave, alors $\widetilde{f}$ est concave.*

Preuve : Soient $x, y \in M$ et soit $\lambda \in [0,1]$. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites à coefficients dans M convergeant respectivement vers x et y, alors la suite $(\lambda x_n + (1-\lambda)x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda x + (1-\lambda)y$. On en déduit que $\limsup_{z\to\lambda x+(1-\lambda)y} f(z) \geq \limsup_{z'\to x,\ z''\to y} f(\lambda z' + (1-\lambda)z'')$. Puis par concavité de f, on obtient

$$\limsup_{z\to\lambda x+(1-\lambda)y} f(z) \geq \limsup_{z'\to x} \lambda f(z') + (1-\lambda) \limsup_{z''\to y} f(z'')$$

c'est à dire $\widetilde{f}(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$. □

En général la fonction $\widetilde{f}$ peut être strictement concave même si f est affine, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 1.3.9 *Considérons la variante suivante du compact convexe présenté à la fin du paragraphe précédent : $M = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [-1,1] \times [0,1]^{\mathbb{N}-\{0\}},\ \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \leq 1\}$, muni de la topologie produit. La fonction $f : M \to \mathbb{R}$ définie par $f((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est affine. On a $\widetilde{f}(0) = \lim_{n\to+\infty} f(\delta_n) = 1$ et $\widetilde{f}(\delta_0) = -\widetilde{f}(-\delta_0) = 1$. En particulier $1 = \widetilde{f}(0) > \frac{1}{2}(\widetilde{f}(\delta_0) + \widetilde{f}(-\delta_0)) = 0$.*

On en déduit facilement de la Proposition 1.3.8 la proposition suivante :

Proposition 1.3.10 *Soit $\mathcal{H} = (h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un candidat affine. Alors pour tout ordinal α, la fonction u_α est concave. En particulier, $E\mathcal{H}$ est concave.*

En général, u_α et $E\mathcal{H}$ ne sont pas des fonctions affines comme nous le verrons à l'exemple 1.6.4. On établit aussi facilement la proposition suivante :

Proposition 1.3.11 *(Proposition 2.7 de [12]) Si $\pi : M \to K$ est une surjection affine entre deux ensembles convexes, et si f est une fonction réelle affine définie sur M, alors $f^{[K]}$ est concave.*

1.3.3 Barycentre et (sous-)harmonicité

Soit μ une mesure borélienne de probabilité sur M. Soient x_i^n des éléments de M tels que μ est limite $*$ faible de $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{x_i^n}$. Par compacité et convexité de M, il existe, quitte à extraire une sous suite, un élément $x_\mu \in M$ tel que $x_\mu = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$. Alors on a pour toute fonction affine continue $f : M \to \mathbb{R}$, $f(x_\mu) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(x_i^n) = \int f d\mu$. D'après le théorème de séparation de Hahn-Banach (Théorème 1.3.1), le point x_μ est unique et la fonction $\mu \mapsto x_\mu$ est continue. Le point x_μ est appelé le **barycentre de la mesure** μ, et la fonction $\mu \mapsto x_\mu$ la fonction barycentre, notée $bar : \mathcal{P}(M) \to M$.

Définition 1.3.12 *Une fonction borélienne $f : M \to \mathbb{R}$ est dite **harmonique** (resp. sous-harmonique, resp. sur-harmonique) si pour toute mesure de probabilité borélienne μ, on a :*

$$\int f d\mu = (resp.\ \leq, resp.\ \geq) f(x_\mu)$$

Clairement, toute fonction harmonique est affine. Par définition, les fonctions affines continues sont harmoniques. Les fonctions affines s.c.s. (resp. s.c.i.) sont aussi harmoniques, car elles sont limites monotones de fonctions s.c.s. (resp. s.c.i.) (Théorème 1.3.6). De façon similaire, les fonctions concaves s.c.s. sont sous-harmoniques d'après le Théorème 1.3.7.

Un candidat $\mathcal{H} := (h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est dit harmonique, si les fonctions h_k sont harmoniques. Remarquez que si $\mathcal{H}$ est un candidat harmonique, alors $\lim \mathcal{H}$ est aussi harmonique par convergence monotone.

Corollaire 1.3.13 *Soit $\mathcal{H}$ un candidat harmonique. Alors $E\mathcal{H}$ est une application concave sous-harmonique.*

Preuve : D'après la Proposition 1.3.10, la fonction $u_{\alpha_\mathcal{H}} = E\mathcal{H} - h$ est une application concave. La fonction $u_{\alpha_\mathcal{H}}$ étant s.c.s., $E\mathcal{H} - h$ est sous-harmonique. Mais la fonction h est harmonique et on conclut donc que $E\mathcal{H}$ est sous-harmonique. □

1.4 Simplexe de Choquet

On dit que M est un **simplexe de Choquet** si pour tout $x \in M$, il existe une unique mesure de probabilité borélienne μ_x supportée par $ex(M)$ de barycentre x. De facon équivalente, la fonction barycentre $\mu \mapsto x_\mu$ est une bijection entre l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes supportées par $ex(M)$ et M.

Rappelons que l'ensemble des mesures invariantes d'un système dynamique est un compact convexe dont l'ensemble extrémal coïncide avec l'ensemble des mesures ergodiques. C'est un simplexe de Choquet d'après le théorème de décomposition ergodique [57].

Dans ce cadre, on commence par rappeler un théorème de séparation qui nous permettra de caractériser la plus petite superenveloppe au moyen de recouvrements continus affines. Par ailleurs, pour calculer la plus petite superenveloppe d'un candidat affine, il nous suffit de considérer les superenveloppes affines. On termine ce paragraphe en introduisant le prolongement affine d'une fonction définie sur l'ensemble extrémal.

1.4.1 Recouvrement continu affine

Lorsque M est un simplexe de Choquet, nous disposons du théorème de séparation suivant :

Proposition 1.4.1 *(Théorème 2.11 de [12]) Soient $h < f$ deux fonctions définies sur M, telles que h est affine s.c.s. et f est s.c.i., alors il existe une application affine continue g telle que $h < g < f$.*

Un recouvrement continu affine est un recouvrement continu constitué de fonctions affines. On a un résultat analogue au théorème 1.2.9 dans le cas des recouvrements affines. Celui-ci se déduit du théorème de séparation précédent.

Théorème 1.4.2 *(Proposition 4.1 de [12])*
Soit $\mathcal{H}$ un candidat affine à différence s.c.s., alors $E\mathcal{H} = \inf_{\mathcal{G}} \widetilde{\Sigma\mathcal{G}}$, où l'infimum porte sur les recouvrements continus affines.

1.4.2 Superenveloppe affine

On note $E_A\mathcal{H}$ l'infimum des superenveloppes affines de $\mathcal{H}$.

Théorème 1.4.3 *(Théorème 4.3 de [12])*
Soit $\mathcal{H}$ un candidat affine, alors $E_A\mathcal{H} = E\mathcal{H}$ et $\inf_{E_A} \sup_{x\in M} E_A(x) = \sup_{x\in M} E\mathcal{H}(x)$, où l'infimum porte sur les superenveloppes affines de $\mathcal{H}$. Par contre, l'infimum n'est pas forcément atteint contrairement au recouvrement simplement continues (voir Exemple 4.7 de [12]).

1.4.3 Projetées de fonctions affines

Nous avons rappelé à la Proposition 1.3.11, que la projetée d'une application affine est concave. Pour les simplexes de Choquet, on montre au moyen du théorème de Radon-Nikodym :

Proposition 1.4.4 *(Proposition 2.7 de [12]) Soit $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction affine et $\pi : M \to K$ une surjection affine continue entre deux simplexes de Choquet, telle que π préserve les points extrémaux (i.e. $\pi(ex(M)) \subset ex(K)$), alors $f^{[K]}$ est affine.*

1.4.4 Décomposition extrémale

Soit M un simplexe de Choquet et f une application s.c.s. affine, alors par définition de μ_x,

$$f(x) = \int_{ex(M)} f_{/ex(M)} d\mu_x$$

Si on se donne une fonction borélienne bornée $g : M \to \mathbb{R}$, on peut lui associer naturellement un prolongement affine à M, $g^{aff} : M \to \mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$g^{aff}(x) = \int_{ex(M)} g d\mu_x$$

L'affinité résulte immédiatement de l'injectivité de l'application $x \mapsto \mu_x$. Par contre, si g est continue (resp. s.c.s.), l'application g^{aff} n'est pas forcément continue (resp. s.c.s.). La fonction g^{aff} est appelée le **prolongement affine** ou prolongement harmonique de g.

Cependant dans le cas où f est convexe, on a le résultat suivant dû à T.Downarowicz et A.Maass.

Théorème 1.4.5 *Soit M un simplexe de Choquet et soit f une fonction convexe s.c.s. sur M alors $\left(f_{/ex(M)}\right)^{aff}$ est aussi s.c.s. et $\left(f_{/ex(M)}\right)^{aff} \geq f$.*

1.5 Simplexe de Bauer

On dit que M est un **simplexe de Bauer** si $ex(M)$ est compact et si l'application $\mu \mapsto x_\mu$ est injective.

En fait un simplexe de Bauer est de Choquet : la surjectivité de l'application $\mu \mapsto x_\mu$ résulte de la compacité de $ex(M)$, comme le montre le raisonnement suivant. D'après le théorème de Krein-Milman (Théorème 1.3.2), M est l'adhérence de l'enveloppe convexe de son ensemble extrémal. En particulier, tout point $x \in M$ s'écrit sous la forme : $x = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^n$, avec $x_i^n \in ex(M)$. Soit μ une limite faible de $(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{x_i^n})_{n\in\mathbb{N}}$ dans l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes supportées par $ex(M)$, qui est compact par compacité de $ex(M)$. Clairement le barycentre de μ est x.

Remarquons que si M est un simplexe de Bauer, alors l'application $x \mapsto \mu_x$ est continue : c'est la fonction inverse de l'application continue $\mu \mapsto x_\mu$ bijective entre les deux espaces compacts $\mathcal{P}(ex(M))$ et M.

Proposition 1.5.1 *Soit M un simplexe de Choquet et soit $C \subset ex(M)$ un compact. Alors $\overline{conv(C)}$ est un simplexe de Bauer d'ensemble extrémal C.*

PREUVE : Il suffit de vérifier que $ex\left(\overline{conv(C)}\right) = C$, puisque, M étant un simplexe de Choquet et $C \subset ex(M)$, l'application barycentre définie sur C est injective. Clairement $C \subset ex\left(\overline{conv(C)}\right)$ toujours parce que $C \subset ex(M)$. Montrons l'inclusion inverse. Soit $x \in \overline{conv(C)}$, on écrit la décomposition extrémale de x dans M : $x = \int_{ex(M)} y d\mu_x(y)$. On montre facilement, en écrivant x comme limite de barycentres de points de C, que la mesure μ_x est supportée par C. Si μ_x est atomique, alors $x \in C$. Sinon on peut écrire μ_x sous la forme $\mu_x = \lambda\nu_1 + (1-\lambda)\nu_2$, où $\lambda \in]0,1[$ et ν_i sont des mesures supportées par C. On a alors $x = \lambda\int_C y d\nu_1 + (1-\lambda)\int_C y d\nu_2$. Les deux éléments du terme de droite appartiennent à $\overline{conv(C)}$ et donc $x \notin ex\left(\overline{conv(C)}\right)$. □

Dans $\mathbb{R}^n$, l'enveloppe convexe de $n+1$ points engendrant $\mathbb{R}^n$ (i.e. n'appartenant pas à un même hyperplan) est un simplexe de Bauer. Nous donnons maintenant un exemple plus général comprenant des exemples de dimension infinie.

Proposition 1.5.2 *Si K est un compact, alors $\mathcal{P}(K)$, l'ensemble des mesures de probabilités à support dans K, est un simplexe de Bauer.*

PREUVE : En effet, les points extrémaux de $\mathcal{P}(K)$ sont les mesures de dirac en les points de K et l'application $K \to ex(\mathcal{P}(K))$, définie par $x \mapsto \delta_x$, est un homéomorphisme. De plus, l'application barycentre de $\mathcal{P}(ex(\mathcal{P}(K)))$ dans $\mathcal{P}(K)$ est l'application induite sur les mesures de probabilités par l'inverse de l'homéomorphisme précédent. On en déduit que $\mathcal{P}(K)$ est un simplexe de Bauer. □

Nous exhibons maintenant un exemple de simplexe de Choquet, qui n'est pas un simplexe de Bauer :

Exemple 1.5.3 *Montrons que le compact convexe M de l'exemple 1.3.9 est un simplexe de Choquet et non de Bauer. Rappelons que M était défini par $M = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [-1,1]\times[0,1]^{\mathbb{N}-\{0\}},\ \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \leq 1\}$. L'ensemble extrémal de M est formé des suites de Kronecker δ_n pour $n \in \mathbb{N}$ et de $-\delta_0$. La suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la suite nulle, qui n'appartient pas à l'ensemble extrémal de M. Celui-ci n'est n'est donc pas compact. En particulier M n'est pas un simplexe de Bauer. Montrons maintenant que M est un simplexe de Choquet. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M$ la suite u s'écrit trivialement de façon unique sous la forme $u = \sum_{n\in\mathbb{N}-\{0\}} a_n\delta_n + a_0^+\delta_0 - a_0^-\delta_0$ avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = 1$. On vérifie en effet que $a_n = u_n$ pour $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $a_0^+ = \frac{1+u_0-\sum_{n\geq 1} u_n}{2}$ et $a_0^- = \frac{1-\sum_{n\geq 0} u_n}{2}$.*

1.5.1 Décomposition extrémale

Rappelons que si M est un simplexe de Bauer, alors $\mathcal{P}(ex(M))$ est compact et l'application $\mu \mapsto x_\mu$ est donc une application bijective continue entre les deux espaces compacts $\mathcal{P}(ex(M))$ et M ; elle est donc bicontinue. L'application g^{aff} définie p. 40 est alors continue (car $x \mapsto \mu_x$ est

continue) et on obtient ainsi une bijection entre les fonctions continues (respectivement s.c.s.) sur $ex(M)$ et les fonctions affines continues (respectivement s.c.s.) sur M.

Si f est une fonction harmonique, alors l'enveloppe semi-continue supérieure de f est harmonique :

Proposition 1.5.4 *Soit M un simplexe de Bauer et $f : M \to \mathbb{R}$ une application harmonique, alors $\widetilde{f}$ est harmonique et $\left(\widetilde{f}\right)_{/ex(M)} = \widetilde{f_{/ex(M)}}$.*

Preuve : L'application f étant affine, $\widetilde{f}$ est une application concave d'après la Proposition 1.3.8. Mais les applications concaves s.c.s. sont sous-harmoniques, donc $\widetilde{f}$ est sous-harmonique. Aussi le simplexe M étant un simplexe de Bauer, la fonction $\left(\widetilde{f_{/ex(M)}}\right)^{aff}$ est s.c.s. De plus par harmonicité de f, on a $f(x) = \int_{ex(M)} f d\mu_x \leq \int_{ex(M)} \widetilde{f_{/ex(M)}} d\mu_x = \left(\widetilde{f_{/ex(M)}}\right)^{aff}(x)$. Donc $\widetilde{f}(x) \leq \int_{ex(M)} \widetilde{f_{/ex(M)}} d\mu_x \leq \int_{ex(M)} \widetilde{f} d\mu_x$, i.e. $\widetilde{f}$ est sur-harmonique. Finalement $\widetilde{f}$ est donc harmonique et $\widetilde{f_{/ex(M)}} = \left(\widetilde{f}\right)_{/ex(M)}$. □

1.5.2 Suite transfinie

On déduit de la proposition précédente que la suite transfinie associée à un candidat harmonique défini sur un simplexe de Bauer est formée de fonctions harmoniques.

Proposition 1.5.5 *Si $\mathcal{H}$ est un candidat harmonique d'un simplexe de Bauer, alors u_α est harmonique pour tout ordinal α. En particulier $E\mathcal{H}$ est harmonique. De plus, on a $\left(u_\alpha^{\mathcal{H}}\right)_{/ex(M)} = u_\alpha^{\mathcal{H}_{ex(M)}}$ et donc aussi $(E\mathcal{H})_{/ex(M)} = E(\mathcal{H}_{ex(M)})$.*

Preuve : On raisonne par récurrence sur α. Le cas $\alpha = 0$ est trivial. On suppose que u_β est harmonique pour tout $\beta < \alpha$. Considérons tout d'abord le cas où α n'est pas un ordinal limite. La fonction $u_{\alpha-1} + h - h_k$ étant harmonique, il en est de même de $\widetilde{u_{\alpha-1} + h} - h_k$ d'après la proposition 1.5.4 et donc aussi de u_α en passant à la limite en k, par convergence monotone. De plus toujours d'après la proposition 1.5.4 et par hypothèse de récurrence, on a $\left(\widetilde{u_{\alpha-1}^{\mathcal{H}} + h} - h_k\right)_{/ex(M)} = \widetilde{u_{\alpha-1}^{\mathcal{H}_{ex(M)}} + (h - h_k)_{/ex(M)}}$. En passant à la limite en k, on en déduit que $\left(u_\alpha^{\mathcal{H}}\right)_{/ex(M)} = u_\alpha^{\mathcal{H}_{ex(M)}}$.

Supposons maintenant que α est un ordinal limite. L'application $\sup_{\beta<\alpha} u_\beta$ est harmonique par convergence monotone et donc il en est de même pour $u_\alpha := \widetilde{\sup_{\beta<\alpha} u_\beta}$. Enfin on montre comme précédemment à l'aide de la proposition 1.5.4 et par hypothèse de récurrence que : $\left(u_\alpha^{\mathcal{H}}\right)_{/ex(M)} = u_\alpha^{\mathcal{H}_{ex(M)}}$.

□

1.5.3 Superenveloppes

On relie maintenant les superenveloppes affines d'un candidat harmonique défini sur un simplexe de Bauer avec les superenveloppes de la restriction de ce candidat à l'ensemble extrémal du simplexe de Bauer.

Proposition 1.5.6 *(Paragraphe 2.6-2.7 de [13]) Soit $\mathcal{H}$ un candidat harmonique d'un simplexe de Bauer M. Si E est une superenveloppe de $\mathcal{H}_{ex(M)}$, alors E^{aff} est une superenveloppe affine de $\mathcal{H}$.*

Il existe une bijection entre les superenveloppes affines de $\mathcal{H}$ et les superenveloppes de $\mathcal{H}_{/ex(M)}$. En particulier, $E\mathcal{H}$ est harmonique et $(E\mathcal{H})_{/ex(M)} = E\mathcal{H}_{ex(M)}$. §

PREUVE : On montre tout d'abord que si E est une superenveloppe de $\mathcal{H}_{ex(M)}$, alors E^{aff} est une superenveloppe affine de $\mathcal{H}$; puis nous en déduisons que $E\mathcal{H}$ est harmonique et $(E\mathcal{H})_{/ex(M)} = E\mathcal{H}_{ex(M)}$.

(1) Soit E une superenveloppe de $\mathcal{H}_{ex(M)}$. Pour tout $x \in M$, on a $(E^{aff} - h_k)(x) = \int_{ex(M)}(E - h_k)d\mu_x$. Puis la fonction $x \mapsto \int_{ex(M)} \widetilde{E - h_k}d\mu_x$ étant s.c.s., on a $\widetilde{E^{aff} - h_k}(x) \leq \int_{ex(M)} \widetilde{E - h_k}d\mu_x$. La fonction E étant une superenveloppe de $\mathcal{H}_{ex(M)}$, on obtient par convergence monotone $\lim_{k\to+\infty} \widetilde{E^{aff} - h_k}(x) \leq \int_{ex(M)}(E - h)d\mu_x$ puis par harmonicité de $\mathcal{H}$, $\lim_{k\to+\infty} \widetilde{E^{aff} - h_k}(x) = (E^{aff} - h)(x)$.

(2) D'après la proposition 1.2.37(2) et le point (1) précédent, il existe une correspondance entre les superenveloppes affines de $\mathcal{H}$ et les superenveloppes de $\mathcal{H}_{ex(M)}$. En particulier $\big((E\mathcal{H})_{/ex(M)}\big)^{aff} \geq \big(E(\mathcal{H}_{ex(M)})\big)^{aff} \geq E\mathcal{H}$, c'est à dire que $E\mathcal{H}$ est sur-harmonique. Mais d'après la proposition 1.3.13, la fonction $E\mathcal{H}$ est toujours sous-harmonique. □

Nous terminons ce paragraphe sur l'étude des candidats définis sur un simplexe de Bauer par la remarque suivante qui permet d'étendre les exemples topologiques présentés dans les sections précédentes dans un cadre affine.

Remarque 1.5.7 *On peut transposer tous les exemples (Exemple 1.2.10, Exemple 1.2.11 et Théorème 1.2.35) topologiques précédents de candidats $\mathcal{H}$ définis sur un espace compact métrisable M dans le cadre affine en étendant les candidats $\mathcal{H}$ sur le simplexe de Bauer $\mathcal{P}(M)$ par prolongement harmonique (rappelons que $ex(\mathcal{P}(M))$ est homéomorphe à M). D'après les propositions 1.5.6 et 1.5.5, la suite transfinie et les superenveloppes associées à ce nouveau candidat affine s'obtiennent par prolongement affine.*

Fort des résultats obtenus dans le cadre d'un simplexe de Bauer, nous revenons maintenant à l'étude de la décomposition extrémale sur un simplexe de Choquet :

1.6 Décomposition extrémale sur un Choquet

Lorsque g est une fonction réelle positive définie sur l'ensemble extrémal d'un simplexe de Choquet et à support compact, on montre que le prolongement affine g^{aff} de g est s.c.s. en se ramenant au cadre des simplexes de Bauer.

Proposition 1.6.1 *Si M est un simplexe de Choquet et si $g : ex(M) \to \mathbb{R}^+$ est une fonction s.c.s. positive à support compact dans $ex(M)$, alors g^{aff} est s.c.s.*

PREUVE : Notons $C \subset ex(M)$ le support de g. D'après la Proposition 1.5.1, l'ensemble $\overline{conv(C)}$ est un simplexe de Bauer dont l'ensemble extrémal est C. Alors $(g^{aff})_{/\overline{conv(C)}} = (g_{/C})^{aff}$ est s.c.s. Soit $x \in M$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de M convergeant vers x tels que $\lim_{n\to+\infty} g^{aff}(x_n) = \widetilde{g^{aff}}(x)$. On va montrer que $g^{aff}(x) \geq \lim_{n\to+\infty} g^{aff}(x_n)$. On peut supposer que $\mu_{x_n}(C) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, car sinon $\widetilde{g^{aff}}(x) = 0$. On peut aussi supposer que $\mu_{x_n}(C) \neq 1$ car sinon $x, x_n \in \overline{conv(C)}$ et nous avons déja remarqué que $(g^{aff})_{/\overline{conv(C)}}$ est s.c.s.

On écrit alors μ_{x_n} sous la forme suivante : $\mu_{x_n} = \lambda_n\mu^C_{x_n} + (1 - \lambda_n)\mu^{M-C}_{x_n}$, avec $\lambda_n = \mu_{x_n}(C)$ et $\mu^C_{x_n}(.) = \frac{\mu_{x_n}(.\bigcap C)}{\mu_{x_n}(C)}$ et de même $\mu^{M-C}_{x_n}(.) = \frac{\mu_{x_n}(.\bigcap M-C)}{\mu_{x_n}(M-C)}$. Pour tout entier n, on considère $y_n \in$

§. Remarquons que nous avons déjà montré ce fait en utilisant les suites transfinies dans la proposition précédente 1.5.5.

$\overline{conv(C)}$ le barycentre de $\mu_{x_n}^C$. Remarquons alors que $g^{aff}(x_n) = \lambda_n g^{aff}(y_n)$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que les suites $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes. Notons $y \in \overline{conv(C)}$ la limite de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et λ la limite de la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a $x = \lambda y + (1-\lambda)z$ avec $z \in M$ et donc

$$g^{aff}(x) = \lambda g^{aff}(y) + (1-\lambda) g^{aff}(z) \geq \lambda g^{aff}(y)$$

De plus par semi-continuité supérieure de $(g^{aff})_{/\overline{conv(C)}}$:

$$\lambda g^{aff}(y) \geq \lim_{n\to+\infty} \lambda_n g^{aff}(y_n) = \lim_{n\to+\infty} g^{aff}(x_n) = \widetilde{g^{aff}}(x)$$

Donc g^{aff} est s.c.s. □

En particulier, lorsque M est un simplexe de Choquet, il y a une bijection entre les fonctions s.c.s. positives sur un compact $C \subset ex(M)$ et les fonctions affines s.c.s. positives sur M dont la restriction à $ex(M)$ est à support dans C.

En général si $g : C \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, la fonction g^{aff} n'est pas continue. Avec les notations de l'exemple 1.3.9, la fonction $g = 1_{\delta_0} + 1_{-\delta_0}$ est continue sur son support $\{\delta_0, -\delta_0\}$, qui est compact dans $ex(M)$. Mais g^{aff} n'est pas continue : $g^{aff}(0) = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} g^{aff}(\delta_n) = 0$.

On relie maintenant la suite transfinie et les superenveloppes d'un candidat harmonique défini sur un simplexe de Choquet avec celles de sa restriction à la clôture de l'ensemble extrémal.

Soit M un simplexe de Choquet et $\mathcal{H}$ un candidat harmonique de M. Soit $\pi : \mathcal{P}\left(\overline{ex(M)}\right) \to M$ l'application barycentre. Cette application est affine, continue et surjective. On vérifie aisément que le candidat $\pi\mathcal{H}$ est aussi harmonique (en effet $\mu_{\pi x} = \pi^* \mu_x$).

D'après la proposition 1.2.39, $E\mathcal{H} = (E(\pi\mathcal{H}))^{[M]}$ et pour tout ordinal α, on a $u_\alpha^{\mathcal{H}} = \left(u_\alpha^{\pi\mathcal{H}}\right)^{[M]}$. Mais $\mathcal{P}(\overline{ex(M)})$ étant un simplexe de Bauer, on a d'après les propositions 1.5.6 et 1.5.5 : $E(\pi\mathcal{H}) = \left(E\left((\pi\mathcal{H})_{ex(\mathcal{P}(\overline{ex(M)}))}\right)\right)^{aff}$ et $u_\alpha^{\pi\mathcal{H}} = \left(u_\alpha^{(\pi\mathcal{H})_{ex(\mathcal{P}(\overline{ex(M)}))}}\right)^{aff}$. Or $(\pi\mathcal{H})_{ex(\mathcal{P}(\overline{ex(M)}))}$ coïncide avec la restriction du candidat $\pi\left(\mathcal{H}_{\overline{ex(M)}}\right)$ défini sur le simplexe de Bauer $\mathcal{P}\left(\overline{ex(M)}\right)$ à $ex\left(\mathcal{P}\left(\overline{ex(M)}\right)\right)$. Finalement, on a donc :

Théorème 1.6.2 (Proposition 2.7 de [13] pour l'égalité (1.3)) *Avec les notations précédentes,*

$$E\mathcal{H} = \left(\left(E\left(\pi(\mathcal{H}_{\overline{ex(M)}})\right)\right)^{aff}\right)^{[M]} \tag{1.3}$$

et pour tout ordinal α :

$$u_\alpha^{\mathcal{H}} = \left(\left(u_\alpha^{\pi(\mathcal{H}_{\overline{ex(M)}})}\right)^{aff}\right)^{[M]} \tag{1.4}$$

En fait l'égalité (1.3) diffère de celle de la Proposition 2.7 de [13], que nous n'avons pas réussi à prouver. Celle-ci s'écrit sous la forme $E\mathcal{H} = \left(\left(\pi E\left(\mathcal{H}_{\overline{ex(M)}}\right)\right)^{aff}\right)^{[M]}$. En général comme nous l'avons vu après la proposition 1.2.39, on a seulement $E(\pi\mathcal{H}) \leq \pi E\mathcal{H}$ ...

On déduit en particulier du théorème précédent :

Corollaire 1.6.3 *Avec les notations précédentes, on a :*

$$\sup_{x\in M} E\mathcal{H}(x) = \sup_{x\in\overline{ex(M)}} E\mathcal{H}(x)$$

et pour tout ordinal α :

$$\sup_{x\in M} u_\alpha^{\mathcal{H}}(x) = \sup_{x\in\overline{ex(M)}} u_\alpha^{\mathcal{H}}(x)$$

PREUVE : Montrons le pour la plus petite superenveloppe, la preuve pour la suite transfinie étant complètement analogue. D'après le théorème précédent, on obtient facilement en prenant le supremum pour $x \in M$:

$$\sup_{x\in M} E\mathcal{H}(x) = \sup_{y\in\mathcal{P}(\overline{ex(M)})} E(\pi(\mathcal{H}_{\overline{ex(M)}}))(y)$$

puis d'après la Proposition 1.2.39 (6),

$$\sup_{x\in M} E\mathcal{H}(x) = \sup_{y\in\overline{ex(M)}} \left(E(\pi(\mathcal{H}_{\overline{ex(M)}}))\right)^{[\overline{ex(M)}]}(y) = \sup_{y\in\overline{ex(M)}} E(\mathcal{H}_{\overline{ex(M)}})(y)$$

et enfin d'après la Proposition 1.2.37 (3),

$$\sup_{x\in M} E\mathcal{H}(x) = \sup_{y\in\overline{ex(M)}} E(\mathcal{H}_{\overline{ex(M)}})(y) \leq \sup_{y\in\overline{ex(M)}} E\mathcal{H}(y)$$

□

Cependant le supremum de $E\mathcal{H}$ n'est pas atteint en général sur $ex(M)$ comme le montre l'exemple 4.8 de M. Boyle et T. Downarowicz [12] que nous rappelons maintenant :

Exemple 1.6.4 *On considère le simplexe de Choquet (mais pas de Bauer) de l'exemple 1.3.9 : $M = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [-1,1]\times[0,1]^{\mathbb{N}-\{0\}},\ \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \leq 1\}$. Rappelons que δ_n désigne la suite de Kronecker au point n. On pose $h_1 = 1^{aff}_{\{\delta_0,-\delta_0\}}$. On a donc $h_1(0) = 1$. Rappelons que h_1 est s.c.s. mais n'est pas continue. En revanche on vérifie facilement que $1^{aff}_{\delta_n}$ est continue pour tout $n \geq 1$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $h_{n+1} := h_n + 1^{aff}_{\delta_n}$. La fonction $h_{n+1} - h_n$ est continue pour tout entier $n \geq 1$. De plus le candidat $\mathcal{H} = (h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est à différences s.c.s. En particulier la fonction $E\mathcal{H} - h_m$ est s.c.s. pour tout entier $m \geq 1$ d'après le Lemme 1.2.4 et on a donc :*

$$E\mathcal{H} - h_m \geq \widetilde{h - h_m}$$

Mais puisque $h_{n+1} - h_n$ est continue pour tout entier $n \geq 1$, on en déduit que

$$\widetilde{h - h_m} + h_m - h_k = \widetilde{h - h_k}$$

est une fonction s.c.s. pour tout entier $k \geq m \geq 1$. Donc $\widetilde{h - h_m} + h_m$ est une superenveloppe de $\mathcal{H}$ puis

$$E\mathcal{H} = \widetilde{h - h_m} + h_m \tag{1.5}$$

Donc $E\mathcal{H}(0) = \widetilde{h - h_1}(0) + h_1(0) = 2$ mais $E\mathcal{H}_{/ex(M)} = 1$. En effet, pour tout entier p, on a $\widetilde{h - h_{p+1}}(\delta_p) = 0$ et $h_{p+1}(\delta_p) = 1$ et on a aussi $\widetilde{h - h_1}(-\delta_0) = 0$ et $h_0(-\delta_0) = 1$.

Remarquez que $h \equiv 1$ et qu'en passant à la limite quand m tends vers $+\infty$ dans l'égalité 1.5 on obtient $E\mathcal{H} = u_1 + h$. Donc on a aussi $u_1(0) = 1$ et $u_1(x) = 0$ pour tout $x \in ex(M)$.

Chapitre 2

Structure d'entropie

Dans ce chapitre nous commençons par rappeler les notions d'entropie topologique, d'entropie métrique et d'entropie de queue. Bien sûr, il ne s'agit pas d'un exposé exhaustif ni même représentatif du sujet.

La seconde partie de ce chapitre est consacrée à la notion de partitions essentielles due à E. Lindenstrauss et B. Weiss. Nous formulons un principe variationnel pour l'entropie conditionnelle relative à des partitions essentielles. Nous introduisons ensuite une nouvelle classe de partitions : les partitions topologiques.

On appelle candidat d'entropie une suite croissante de fonctions positives définies sur l'ensemble des mesures de probabilités boréliennes invariantes de (X, T) ayant pour limite la fonction entropie métrique. Nous présentons quelques candidats d'entropie. Excepté le candidat à la Brin-Katok $\mathcal{H}^{BK-}$, ces candidats font partie d'une longue liste de candidats introduits par T. Downarowicz dans [31].

On donne alors des nouveaux résultats de comparaison entre ces candidats. La nouveauté de ces résultats vient du fait que l'on se passe de l'hypothèse d'inversibilité qui permettait de travailler avec des partitions essentielles [31].

Puis nous rappelons la notion de structure d'entropie introduite par T. Downarowicz. Il s'agit d'une classe d'équivalence remarquable de candidats d'entropie, dont les propriétés asymptotiques sont reliées, entre autres, à l'existence d'extensions symboliques, comme on le rappellera au chapitre 6.

Enfin, dans la dernière partie de ce chapitre, on donne une preuve élémentaire du principe variationnel pour l'entropie de queue à partir du principe variationnel conditionnel pour les partitions essentielles obtenu précédemment. Cette preuve a fait l'objet d'un article qui va paraître à Ergodic Theory and Dynamical Systems [16].

2.1 Généralités sur l'entropie

On considère un espace métrique compact (X, d) et T une application continue de X dans lui-même.

2.1.1 Entropie topologique

L'entropie topologique compte le nombre d'orbites distinctes du système dynamique (X, T). Cette quantité introduite par R. Adler, A. Konheim et M. McAndrew [1] peut être définie de façon purement topologique avec des recouvrements ouverts. Dans le cadre d'un espace métrique, il existe deux approches possibles pour calculer l'entropie topologique : les ensembles couvrants et les ensembles séparés. Ces formulations dans le cadre métrique sont dues à R. Bowen.

Recouvrements ouverts

On appelle **recouvrement ouvert** de X une famille finie d'ensembles ouverts de X, qui recouvre X (i.e. la réunion de ces ouverts est l'ensemble X tout entier). Si $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert, pour tout entier n, on note $\mathcal{U}^n$ le recouvrement ouvert défini par $\mathcal{U}^n := \{U_0 \bigcap T^{-1}U_1 \bigcap ... \bigcap T^{-(n-1)U_{n-1}} : U_0, ..., U_{n-1} \in \mathcal{U}\}$. La suite $(\min \sharp\{\mathcal{F} \ : \ \mathcal{F} \subset \mathcal{U}^n \text{ et } \mathcal{F} \text{ recouvre } X\})_{n\in\mathbb{N}}$ est clairement sous-multiplicative et on peut donc définir :

Définition 2.1.1 *Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de X. L'entropie $h_{top}(T,\mathcal{U})$ de T relative à $\mathcal{U}$ est définie comme suit :*

$$h_{top}(T,\mathcal{U}) := \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \min\{\sharp\mathcal{F} \ : \ \mathcal{F} \subset \mathcal{U}^n \text{ et } \mathcal{F} \text{ recouvre } X\}$$

L'entropie $h_{top}(T)$ de T est le supremum de $h_{top}(T,\mathcal{U})$ sur tous les recouvrements ouverts $\mathcal{U}$ de X :

$$h_{top}(T) = \sup_{\mathcal{U}} h_{top}(T,\mathcal{U})$$

Ensembles (n,ϵ) couvrants

On rappelle maintenant l'approche "métrique" de l'entropie avec les ensembles (n,ϵ) couvrants :

Définition 2.1.2 *Soient $x \in X$, $\epsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. La boule de Bowen de centre x de rayon ϵ d'ordre n, notée $B(x,n,\epsilon)$, est définie comme suit :*

$$B(x,n,\epsilon) := \{y \in X \ : \ d(T^k(x), T^k(y)) < \epsilon, \ k = 0, ..., n-1\}$$

C'est la boule de centre x et de rayon ϵ pour la distance d_n de M définie par $d_n(y,z) = \max_{k=0,...,n-1} d(T^k(y), T^k(z))$ pour tout $y, z \in M$.

Définition 2.1.3 *Soient $E \subset S \subset X$, l'ensemble E est appelé un **ensemble (n,ϵ) couvrant** de S si*

$$S \subset \bigcup_{x\in E} B(x,n,\epsilon)$$

On note $r(n,\epsilon,S)$ le cardinal minimal d'un ensemble (n,ϵ) couvrant de S.

Définition 2.1.4 *Soient $S \subset X$ et $\epsilon > 0$, l'entropie topologique de S à l'échelle ϵ est définie comme suit*

$$h_{top}(S,\epsilon) := \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log r(n,\epsilon,S)$$

La quantité $h_{top}(S,\epsilon)$ compte donc le nombre d'orbites issues de S de longueur n à l'échelle ϵ. L'**entropie topologique** est la quantité obtenue lorsqu'on fait tendre cette échelle vers 0 :

$$h_{top}(S) := \lim_{\epsilon\to 0} h_{top}(S,\epsilon)$$

Ensembles (n,ϵ) séparés

On rappelle maintenant la définition de l'entropie topologique au moyen des ensembles (n,ϵ) séparés.

Définition 2.1.5 *Soient $E \subset S \subset X$, l'ensemble E est appelé un* ***ensemble*** (n,ϵ) ***séparé*** *de S si*

pour tout $x, y \in E$, il existe $0 \leq k \leq n-1$, tel que $d(T^k(x), T^k(y)) > \epsilon$.

Un ensemble E est donc (n,ϵ) séparé, s'il est ϵ séparé pour la métrique d_n. On note $s(n,\epsilon,S)$ le cardinal maximal d'un ensemble (n,ϵ) séparé de S. On peut définir l'entropie topologique d'un sous ensemble S de X comme suit :

$$h_{top}(S) = \lim_{\epsilon \to 0} \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log s(n,\epsilon,S)$$

Coïncidence des différentes définitions

Remarquons tout d'abord que :
- si $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert de diamètre $diam(\mathcal{U}) := \min_{U \in \mathcal{U}} diam(U)$ alors pour tout entier n les éléments de $\mathcal{U}^n$ sont inclus dans une $(n, diam(\mathcal{U}))$ boule de Bowen ;
- si $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert de nombre de Lebesgue $Leb(\mathcal{U})$ alors toute $(n, Leb(\mathcal{U}))$ boule de Bowen est incluse dans un élément de $\mathcal{U}^n$.

En résumé, on a :

$$r(n, diam(\mathcal{U}), X) \leq \min\{\sharp\mathcal{F} \ : \ \mathcal{F} \subset \mathcal{U}^n \text{ et } \mathcal{F} \text{ recouvre } X\} \leq r(n, Leb(\mathcal{U}), X)$$

Les définitions de l'entropie topologique avec les recouvrements ouverts et avec les ensembles (n,ϵ) couvrants coïncident donc.

On vérifie aussi facilement que :

$$s(n, 2\epsilon, S) \leq r(n,\epsilon,S) \leq s(n,\epsilon,S)$$

On obtient donc la même quantité si on calcule l'entropie à partir des ensembles (n,ϵ) séparés ou à partir des ensembles (n,ϵ) couvrants.

2.1.2 Entropie mesurée

On rappelle maintenant la définition de l'entropie dite mesurée, métrique ou de Kolmogorov-Sinai d'une mesure à partir de partitions.

Entropie relative à une partition

Dans la suite on entend par partition de X toute partition finie de X en ensembles boréliens. Le diamètre $\mathrm{diam}(P)$ d'une partition P est le maximum des diamètres des éléments de P. Soient P et Q deux partitions de X, on dit que P est plus fine que Q, si tout élément de P est inclus dans un élément de Q. Une suite de partitions $\mathcal{P} = (P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est dite **raffinante** si $\lim_{k \to +\infty} \mathrm{diam}(P_k) = 0$ et si P_{k+1} est plus fine que P_k pour tout entier k.

Si P est une partition et n un entier, on note P^n la n^{eme} partition itérée définie par :

$$P^n = \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}P = \{A_0 \bigcap T^{-1}A_1 ... \bigcap T^{-(n-1)}A_{n-1} \ : \ A_1, ..., A_{n-1} \in P\}$$

On définit l'entropie $H_\mu(Q)$ d'une mesure de probabilité borélienne μ relativement à la partition Q comme suit :

$$H_\mu(Q) := -\sum_{\substack{A\in Q,\\ \mu(A)\neq 0}} \mu(A)\log\mu(A)$$

Il résulte de la propriété de concavité du log que si P et Q sont deux partitions de X alors $H_\mu(P\bigvee Q) \leq H_\mu(P) + H_\mu(Q)$. De plus si μ est une mesure T invariante, $H_\mu(T^{-i}Q) = H_\mu(Q)$. En particulier, dans ce cas, la suite $(H_\mu(Q^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est sous additive et on peut donc définir :

$$h(\mu, Q) := \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} H(\mu, Q^n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} H(\mu, Q^n)$$

On définit **l'entropie $h(\mu)$ de μ** comme suit :

$$h(\mu) := \sup_Q h(\mu, Q)$$

où le supremum porte sur toutes les partitions de X.

L'entropie de μ peut aussi être calculée à l'aide de partitions dont le diamètre tend vers zéro :

Proposition 2.1.6 *[57] Soit (X,T) un système dynamique et soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de partitions telle que $\lim_{k\to+\infty} diam(P_k) = 0$, alors on a pour tout $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$:*

$$h(\mu) = \lim_{k\to+\infty} h(\mu, P_k)$$

Entropie conditionnelle

On considère deux partitions P et Q de X et μ une mesure de probabilité borélienne, on définit **l'entropie conditionnelle** de μ pour la partition P conditionnellement à la partition Q comme suit :

$$H_\mu(P|Q) = \sum_{\substack{A\in Q,\\ \mu(A)\neq 0}} \mu(A) H_{\mu_A}(P)$$

où μ_A est la mesure de probabilité induite sur A par μ, i.e. $\mu_A(B) = \frac{\mu(A\bigcap B)}{\mu(A)}$ pour tout borélien B.

Toujours par des propriétés de concavité, on peut montrer que la suite $(H_\mu(P^n|Q^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est sous additive lorsque μ est une mesure de probabilité invariante. On peut donc définir :

$$h(\mu, P|Q) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} H_\mu(P^n|Q^n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} H(\mu, P^n|Q^n)$$

On montre facilement que $h(\mu, P\bigvee Q) = h(\mu, Q) + h(\mu, P|Q)$, en particulier si P est plus fine que Q, on a $h(\mu, P) = h(\mu, P\bigvee Q) = h(\mu, Q) + h(\mu, P|Q)$.

Rappelons finalement que l'entropie conditionnelle relativement à deux partitions définit une application affine de $\mathcal{M}(X,T)$ [57].

2.1.3 Entropie de queue

L'entropie de queue a été introduite par M. Misiurewicz [45] en utilisant des recouvrements ouverts sous le nom d'entropie topologique conditionnelle. Elle estime l'entropie apparaissant à des échelles arbitrairement petites. J. Buzzi utilise cette notion sous le nom d'entropie locale. Cette dernière terminologie "entropie de queue" est due à T. Downarowicz et se justifie très naturellement par le principe variationnel [31] associé qui montre que l'entropie de queue est égale au défaut de

non-uniformité de la convergence de la fonction entropie calculée à des échelles de plus en plus petites (Théorème 2.8.1).

On rappelle dans ce paragraphe la définition de l'entropie de queue à partir des recouvrements ouverts puis des boules de Bowen. On énonce ensuite quelques propriétés élémentaires de l'entropie de queue. Enfin on montre pour les dynamiques de l'intervalle, en suivant l'approche de M. Misiurewicz dans [46], qu' il existe des fers à cheval de taille arbitrairement petite d'entropie proche de l'entropie de queue.

Avec les recouvrements ouverts

Si $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont deux recouvrements ouverts de X et $x \in X$, on définit :

$$H(n, \mathcal{V}|x, \mathcal{U}) := \max_{U_x^n} \log \min\{\sharp\mathcal{F} : \mathcal{F} \subset \mathcal{V}^n \text{ et } \mathcal{F} \text{ recouvre } U_x^n\}$$

où le maximum porte sur tous les éléments U_x^n de la partition itérée $\mathcal{U}^n$ contenant x.

On définit aussi, toujours par un argument de sous-additivité :

$$h(\mathcal{V}|\mathcal{U}) := \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sup_{x\in X} H(n, \mathcal{V}|x, \mathcal{U}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} H(\mathcal{V}^n|\mathcal{U}^n)$$

avec

$$H(\mathcal{V}|\mathcal{U}) := \max_{U\in\mathcal{U}} \log \min\{\sharp\mathcal{W} \ : \ \mathcal{W} \subset \mathcal{V} \text{ et } \mathcal{W} \text{ recouvre } U\}$$

Enfin **l'entropie de queue** $h^*(T)$ de T est la quantité suivante :

$$h^*(T) := \inf_{\mathcal{U}} \sup_{\mathcal{V}} h(\mathcal{V}|\mathcal{U})$$

les suprema portant sur tous les recouvrements ouverts finis $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ de X.

Avec les ensembles (n, ϵ) couvrants

Soient $\epsilon, \delta > 0$ et $x \in X$, on définit :

$$H(n, \delta|x, \epsilon) := \log r(n, \delta, B(x, n, \epsilon))$$

$$h(\delta|\epsilon) := \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sup_{x\in X} H(n, \delta|x, \epsilon)$$

$$h^*(T) := \lim_{\epsilon\to 0} \lim_{\delta\to 0} h^*(\delta|\epsilon)$$

Comme pour l'entropie topologique, nous vérifions que ces deux définitions coïncident. Plus précisément, nous établissons facilement les inégalités suivantes :

$$h(diam(\mathcal{V})|Leb(\mathcal{U})) \leq h(\mathcal{V}|\mathcal{U}) \leq h(Leb(\mathcal{V})|diam(\mathcal{U})) \tag{2.1}$$

On peut en fait intervertir le supremum en $x \in X$ ou en $U^n \in \mathcal{U}^n$ avec la lim sup en n. Formulons ceci plus précisément avec les définitions suivantes :

$$\underline{h}(\delta|\epsilon) := \sup_{x\in X} \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} H(n, \delta|x, \epsilon) \text{ et } \underline{h}(\mathcal{V}|\mathcal{U}) := \sup_{x\in X} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} H(n, \mathcal{V}|x, \mathcal{U})$$

$$\underline{h}^*(T) := \lim_{\epsilon\to 0} \lim_{\delta\to 0} \underline{h}^*(\delta|\epsilon) = \inf_{\mathcal{U}} \sup_{\mathcal{V}} \underline{h}(\mathcal{V}|\mathcal{U})$$

les deux termes de droites de la dernière égalité coïncidant d'après (2.1). On a clairement les inégalités suivantes :

$$\underline{h}(\mathcal{V}|\mathcal{U}) \leq h(\mathcal{V}|\mathcal{U}) \text{ et } \underline{h}(\delta|\epsilon) \leq h(\delta|\epsilon)$$

et donc

$$\underline{h}^*(T) \leq h^*(T)$$

Proposition 2.1.7 *[Bowen](Proposition 2.2 de [11])*

$$\underline{h}^*(T) = h^*(T)$$

Dans la suite on établira cette proposition comme conséquence d'un principe variationnel dû à T. Downarowicz (Théorème 2.7.9).

La notion suivante due à M.Misiurewicz généralise les notions plus fortes d'expansivité et de h-expansivité [11].

Définition 2.1.8 (M. Misiurewicz) *[43] Un système dynamique est dit asymptotiquement h-expansif si son entropie de queue est nulle.*

Les applications de l'intervalle monotones par morceaux (avec un nombre fini de morceaux) sont asymptotiquement h-expansives. Nous rappellerons aussi que les dynamiques de classe $\mathcal{C}^\infty$ sont asymptotiquement h-expansives (Corollaire 4.2.6).

Propriétés de l'entropie de queue

On montre facilement que l'entropie de queue est invariante par conjugaison topologique tout comme l'entropie topologique.

Nous énonçons maintenant les formules suivantes pour l'entropie de queue d'un produit direct et d'une puissance. Ces formules sont analogues à celles vérifiées par l'entropie topologique et s'établissent sans difficulté.

Lemme 2.1.9 *Soit $n \in \mathbb{N}$,*

$$h^*(T^n) = nh^*(T)$$

Lemme 2.1.10 *Soient (X,T) et (Y,S) deux systèmes dynamiques, alors*

$$h^*(T \times S) = h^*(T) + h^*(S)$$

Nous relions maintenant l'entropie de queue de (X,T) avec l'entropie de queue de son extension naturelle $(Y,\overline{T})$ (L'extension naturelle d'un système dynamique est définie en appendice).

Lemme 2.1.11 $h^*(T) = h^*(\overline{T})$

Preuve :

Nous allons montrer les deux points suivants :

- Toute boule de Bowen pour $\overline{T}$ est contenue dans le relevé d'une boule de Bowen pour T de même ordre et de même rayon.
- Tout relevé d'une boule de Bowen pour T est recouvert par N boules de Bowen pour $\overline{T}$ de même ordre et de rayon quintuple, avec N dépendant uniquement du rayon.

Supposons les deux points ci-dessus vérifiés et montrons $h^*(T) = h^*(\overline{T})$. Soit $\epsilon > \delta > 0$, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Soit $x = (x_p)_{p\in\mathbb{Z}} \in \overline{X}$ et soit E_δ un ensemble (n,δ) couvrant de $B_T(x_0, n, \epsilon)$ avec $\sharp E_\delta = r(n, \delta, B_T(x_0, n, \epsilon))$. D'après le premier point, nous avons

$$B_{\overline{T}}(x, n, \epsilon) \subset \pi^{-1} B_T(x_0, n, \epsilon) \subset \bigcup_{y\in E_\delta} \pi^{-1} B_T(y, n, \delta)$$

puis en utilisant le second point pour chaque $y \in E_\delta$, il existe $Z_y \subset \overline{X}$ avec $\sharp Z_y \leq N$ tel que

$$\pi^{-1} B_T(y, n, \delta) \subset \bigcup_{z\in Z_y} B_{\overline{T}}(z, n, 5\delta)$$

Finalement nous obtenons

$$r(n, 5\delta, B_{\overline{T}}(x, n, \epsilon)) \leq N r(n, \delta, B_T(x_0, n, \epsilon))$$

et donc $h^*(\overline{T}) \leq h^*(T)$.

Etablissons maintenant l'autre inégalité. Considérons $x_0 \in X$. D'après le second point, il existe $E \subset \overline{X}$ avec $\sharp E \leq N$, tel que :

$$B_T(x_0, n, \epsilon) \subset \pi \bigcup_{x\in E} B_{\overline{T}}(x, n, 5\epsilon)$$

et puis en utilisant le premier point, nous avons :

$$r(n, \delta, B_T(x_0, n, \epsilon)) \leq N \sup_{z\in\overline{X}} r(n, \delta, B_{\overline{T}}(z, n, 5\epsilon))$$

et donc $h^*(T) \leq h^*(\overline{T})$.

Nous montrons maintenant les deux points. Le premier suit aisément de la définition de la distance $\overline{d}$. Vérifions le second point. Soit $\epsilon > 0$, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ et $(x_p)_{p\in\mathbb{Z}} \in Y$. Note $N := [-\log_2(\epsilon)] + 2$. Considérons un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X de diamètre inférieur à ϵ. Pour chaque $U := (U_1, ..., U_{2N}) \in \mathcal{U}^{2N}$, posons $A_U := \{(x_p)_{p\in\mathbb{Z}} \in Y \ : \ \forall l \in [\![-N, -1]\!],\ x_l \in U_{l+N+1}$ et $\forall l \in [\![n, n+N-1]\!],\ x_l \in U_{l+N-n+1}\} \bigcap \pi^{-1} B_T(x_0, n, \epsilon)$. Pour chaque $U \in \mathcal{U}^{2N}$ avec $A_U \neq \emptyset$, on choisit $y^U = (y_l^U)_{l\in\mathbb{Z}} \in A_U$. Montrons que $\pi^{-1} B_T(x_0, n, \epsilon) \subset \bigcup_{U\in\mathcal{U}^{2N},\ A_U\neq\emptyset} B_{\overline{T}}(y^U, n, 5\epsilon)$. Soit $y = (y_l)_{l\in\mathbb{Z}} \in \pi^{-1} B_T(x_0, n, \epsilon)$. Il existe $U \in \mathcal{U}^{2N}$ tel que $d(y_l^U, y_l) < \epsilon$ pour $l \in [\![-N, -1]\!] \bigcup [\![n, n+N-1]\!]$. Puisque $y^U, y \in \pi^{-1} B_T(x_0, n, \epsilon)$ nous avons $d(y_l^U, y_l) < 2\epsilon$ pour $l \in [\![0, n-1]\!]$. Finalement nous obtenons pour tout $q \in [\![0, n-1]\!]$:

$$\begin{aligned} \overline{d}(\overline{T}^q y^U, \overline{T}^q y) &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{d(y_{i+q}^U, y_{i+q})}{2^{|i|}} \\ &= \sum_{i+q\in[\![-N, n+N-1]\!]} \frac{d(y_{i+q}^U, y_{i+q})}{2^{|i|}} + \frac{1}{2^{N-1}} < 5\epsilon \end{aligned}$$

□

Entropie de queue pour les applications de l'intervalle

Dans le cas des applications de l'intervalle, l'entropie topologique est caractérisée par les fers à cheval [46]. Ce résultat est dû à M.Misiurewicz. Nous montrons en adaptant la preuve de M. Misiurewicz qu'il existe un résultat analogue pour l'entropie de queue des applications de l'intervalle.

Plus précisément il existe des fers à cheval de taille arbitrairement petite et d'entropie proche de l'entropie de queue.

Nous rappelons tout d'abord la notion de fer à cheval pour les applications de l'intervalle et nous énonçons le théorème de M.Misiurewicz.

Définition 2.1.12 *Soit f une application de l'intervalle. Une famille $J = (J_1, ..., J_p)$ d'intervalles fermés disjoints est appelé un p* ***fer à cheval*** *pour f si $J_k \subset f(J_i)$ pour tout $(i,k) \in [\![1,p]\!]^2$.*

Nous notons $H_J := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}J$ le compact maximal invariant associé à J et (Σ_p^+, σ) le décalage sur l'ensemble $\Sigma_p^+ := \{1, ..., p\}^{\mathbb{N}}$ des suites indexées par $\mathbb{N}$ à p symboles . L'application $\pi : (H_J, f) \to (\Sigma_p^+, \sigma)$, définie par $(\pi(x))_k = q$ si $f^k(x) \in J_q$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, est une semi-conjugaison. En particulier $h_{top}(f) \geq \log p$.

En fait les fers à cheval caractérisent l'entropie topologique des applications continues de l'intervalle :

Théorème 2.1.13 *(Misiurewicz)[46],[3] Soit f une application continue de l'intervalle d'entropie $h_{top}(f) > 0$ alors pour tout $h < h_{top}(f)$ il existe un p fer à cheval pour f^N avec $\frac{\log(p)}{N} > h$.*

Nous montrons le résultat analogue suivant pour l'entropie de queue. On adapte la preuve de M. Misiurewicz présentée dans [54] :

Théorème 2.1.14 *Soit f une application continue de l'intervalle dont l'entropie de queue est non nulle. Pour tout $0 < h < h^*(f)$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe un fer à cheval J avec $h_{top}(H_J) \geq h$ et $diam(f^n J) < \epsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Preuve : On suit la preuve du théorème de M. Misiurewicz pour l'entropie des applications continues de l'intervalle. On va travailler avec l'entropie de queue définie à partir de recouvrements ouverts.

On suppose tout d'abord $h^*(f) > h > 3$. Soient $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ des recouvrements ouverts de $[0,1]$, tels que $h(\mathcal{V}|\mathcal{U}) > h > 3$. On peut supposer que $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont constitués d'intervalles ouverts. Si Q est une collection de sous-ensembles disjoints de $[0,1]$ et W un ouvert de $[0,1]$, on note $\sharp(Q|W)$ le nombre d'éléments de Q rencontrant W. Soit P une partition de $[0,1]$ en intervalles plus fine que $\mathcal{V}$ et $\mathcal{U}$. On a alors $h(P|\mathcal{U}) := \limsup_{n\to+\infty} \sup_{U^n\in\mathcal{U}^n} \frac{\log \sharp(P^n|U^n)}{n} \geq h(\mathcal{V}|\mathcal{U}) > h > 3$.

Pour tout $A \in P$, tout $Q \subset P$ et tout entier n, on note Q_A^n la collection de sous ensembles de A, définie par $Q_A^n := \{A \bigcap f^{-1}B \ : \ B \in Q^{n-1}\}$. On considère $\mathcal{F} := \{A \in P \ : \ \limsup_{n\to+\infty} \sup_{U^n\in\mathcal{U}^n} \frac{\log \sharp(P_A^n|U^n)}{n} = h(P|\mathcal{U})\}$. On va tout d'abord montrer que $h(\mathcal{F}_A|\mathcal{U}) = h(P|\mathcal{U})$ pour tout $A \in \mathcal{F}$. En écrivant tout élément de P_A^n sous la forme $\left(\bigcap_{i=0}^{k-1} f^{-i}A_i\right) \cap \left(\bigcap_{j=k}^{n-1} f^{-j}A_j\right)$ avec $A_0 = A, A_1, ..., A_{k-1} \in \mathcal{F}$ et $A_k \notin \mathcal{F}$, puis en regroupant les éléments de P_A^n suivant cet instant k, on obtient :

$$\sup_{U^n\in\mathcal{U}^n} \sharp(P_A^n|U^n) \leq \sum_{k=1}^{n} \left[\sup_{U^k\in\mathcal{U}^k} \sharp(\mathcal{F}_A^k|U^k) \sum_{A\notin\mathcal{F}} \sup_{U^{n-k}\in\mathcal{U}^{n-k}} \sharp(P_A^{n-k}|U^{n-k}) \right]$$

Or il est bien connu que si on considère deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, alors $\limsup_{n\to+\infty} \frac{\log\left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}\right)}{n} = \max(\limsup_{n\to+\infty} \frac{\log a_n}{n}, \limsup_{n\to+\infty} \frac{\log b_n}{n})$. En appliquant ceci à l'inégalité précédente, on obtient pour tout $A \in \mathcal{F}$:

$$h(P|\mathcal{U}) = h(\mathcal{F}_A|\mathcal{U}) \tag{2.2}$$

Une n-chaîne d'intervalles de P est une suite de n intervalles non vides de la forme suivante :

$$(A_0, A_1 \bigcap f(A_0), ..., A_{n-1} \bigcap ... \bigcap f^{n-1}(A_0))$$

avec $A_i \in P$ pour tout $i = 0, ..., n$. A une telle n-chaîne d'intervalles de P, on peut associer un intervalle $J_{A_0,...A_{n-1}}$ tel que pour $0 \leq i \leq n-1$ on a $f^i(J_{A_0,...,A_{n-1}}) \subset A_i$ et $f^{n-1}(J_{A_0,...,A_{n-1}}) = A_{n-1} \bigcap ... \bigcap f^{n-1}(A_0)$ (Lemme 1.4.3 de [54]). Si E est une collection de n-chaînes d'intervalles de P de premier terme A_0, tel que $A_0 \subset f^n(J)$ pour tous les intervalles J associés à ces n-chaînes, alors les intervalles J forment un $\sharp E$ fer à cheval pour f^n.

Pour $A, B \in \mathcal{F}$ et $U^n = \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}U_i \in \mathcal{U}^n$, on considère le nombre $c(A, B, U^n)$ de chaînes d'intervalles $(A_0, A_1 \bigcap fA_0, ..., A_{n-1} \bigcap ... \bigcap f^{n-1}A_0)$ telles que :
- $A_0 = A$ et $A_i \in \mathcal{F}$ pour tout $i = 0, ..., n-1$;
- $A_i \subset U_i$ pour tout $i = 0, ..., n-1$;
- $B \subset f^n(J_{A_0,...,A_{n-1}})$.

On définit alors $c(A, B, n) := \sup_{U^n \in \mathcal{U}^n} c(A, B, U^n)$. Clairement $c(A, B, n) \times c(B, C, m) \leq c(A, C, n+m)$. Nous allons montrer qu'il existe $A_0 \in \mathcal{F}$, tel que $c(A_0, A_0, n) > h^n$. On obtiendra ainsi un $[h^n]+1$ fer à cheval pour f^n.

Fixons $U^{n+1} \in \mathcal{U}^{n+1}$. On peut écrire U^{n+1} sous la forme $U^{n+1} := U^n \bigcap f^{-n}U_n$, avec $U^n = \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}U_i \in \mathcal{U}^n$ et $U_n \in \mathcal{U}$. Pour tout $J_{A_0,...,A_{n-1}}$, il existe au plus deux éléments de $\mathcal{F}$ qui rencontre le bord de $f^n(J_{A_0,...,A_{n-1}})$ car l'ensemble $f^n(J_{A_0,...,A_{n-1}})$ est un intervalle. On a donc :

$$\begin{array}{c} \sum_{B\in\mathcal{F},\ B\subset U_n} c(A, B, U^n) \\ \sum_{B\in\mathcal{F},\ B\subset U_n} \sharp\{(A_0, ..., A_{n-1}) \in \mathcal{F}^n \mid A_0 = A, A_i \subset U_i, B \subset f^n(J_{A_0,...,A_{n-1}})\} \\ \sum_{B\in\mathcal{F},\ B\subset U_n} \sharp\{(A_0, ..., A_{n-1}) \in \mathcal{F}^n \mid A_0 = A, A_i \subset U_i, B \bigcap f^n(J_{A_0,...,A_{n-1}}) \neq \emptyset\}) \\ -2\sharp\{(A_0, ..., A_{n-1}) \in \mathcal{F}^n \mid A_0 = A, A_i \subset U_i\} \end{array} \begin{array}{l} = \\ \geq \end{array}$$

Mais observons que $\sum_{B\in\mathcal{F}, B\subset U_n} \sharp\{(A_0, ..., A_{n-1}) \in \mathcal{F}^n \mid A_0 = A, A_i \subset U_i, B \bigcap f^n(J_{A_0,...,A_{n-1}}) \neq \emptyset\}$ est exactement $\sharp\{(A_0, ..., A_n) \in \mathcal{F}^{n+1} \mid A_0 = A, A_i \subset U_i\}$. Donc en passant au sup en U^{n+1}, on obtient :

$$\sup_{U_n\in\mathcal{U}} \sum_{B\in\mathcal{F}, B\subset U_n} c(A, B, n) \geq \sup_{U^{n+1}\in\mathcal{U}^{n+1}} \sharp(\mathcal{F}_A^{n+1}|U^{n+1}) - 2 \sup_{U^n\in\mathcal{U}^n} \sharp(\mathcal{F}_A^n|U^n)$$

Notons $a_n := \sup_{U^n\in\mathcal{U}^n} \sharp(\mathcal{F}_A^n|U^n)$. D'après l'égalité (2.2), on a $\limsup_{n\to+\infty} \frac{\log a_n}{n} > h > 3$. De plus $a_{n+1} \leq \sharp\mathcal{F} \times a_n$. C'est un exercice simple (Lemme 4.2.4 de [54]) d'en déduire que pour tout entier N, il existe $n > N$ tel que $a_n > h^n$ et $a_{n+1} \geq 3a_n$. En appliquant ceci à l'inégalité précédente, on conclut que pour tout entier N, il existe $n > N$ tel que :

$$\sup_{U_n\in\mathcal{U}} \sum_{B\in\mathcal{F}, B\subset U_n} c(A, B, n) \geq a_{n+1} - 2a_n \geq a_n > h^n$$

En particulier, il existe $B \in \mathcal{F}$ tel que $c(A, B, n) > \frac{h^n}{\sharp\mathcal{F}}$.
Pour tout $A \in \mathcal{F}$, il existe donc un élément $\phi(A)$ de $\mathcal{F}$ tel que

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log c(A, \phi(A), n) \geq h$$

L'application $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ a un point périodique, que l'on note A_0 et d'après les estimées précédentes, $\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log c(A_0, A_0, n) \geq h$. Ceci montre le théorème pour $h^*(f) \geq 3$.

Etudions maintenant le cas général en considérant une itérée de f. Soit $\epsilon > 0$. Soit $m \in \mathbb{N}$, tel que $h^*(f^m) = mh^*(f) > 3$. Par uniforme continuité de f^m, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout ensemble F

de diamètre $< \delta$ et pour tout $i = 0, ..., m-1$, le diamètre de $f^i(F)$ est $< \epsilon$. On applique le théorème à f^m et δ : pour tout réel $h < h^*(f)$, il existe un entier N et un fer à cheval H pour f^{mN} avec $h_{top}(H, f^m) > mh$ et $\mathrm{diam}(f^{nm}H) < \delta$ pour tout entier n. Clairement $h_{top}(H, f) = \frac{h_{top}(H, f^m)}{m} > h$. Enfin d'après le choix de δ, on a $\mathrm{diam}(f^n H) < \epsilon$ pour tout entier n. □

Remarque 2.1.15 *On déduit facilement du théorème 2.1.13 de M.Missiurewicz que l'entropie topologique est une fonction s.c.i. sur l'ensemble $\mathcal{C}([0,1])$ des applications continues de l'intervalle muni de la topologie de la convergence uniforme. Cependant il est faux que l'entropie de queue est une application s.c.i. sur $\mathcal{C}([0,1])$. En effet on peut construire une application de l'intervalle avec une entropie de queue non nulle en construisant des fers à cheval s'accumulant sur un point fixe. On crée pour cela une suite de zig-zags de plus en plus petits au voisinage d'un point (Voir Proposition 5.5.8). Une telle application est une limite uniforme d'applications monotones par morceaux (avec un nombre fini de morceaux). Or les applications monotones par morceaux ont une entropie de queue nulle.*

Question 2.1.16 *Pour les difféomorphismes $\mathcal{C}^{1+\alpha}$ de surface, A. Katok [37] a prouvé qu'il existait un compact hyperbolique d'entropie arbitrairement proche de l'entropie topologique. On peut alors se demander si ce résultat peut se transposer encore à l'entropie de queue. Formulons plus précisément notre question. Soit M une surface compacte et $f : M \to M$ un difféomorphisme $\mathcal{C}^{1+\alpha}$, existe-t-il, pour tout $\epsilon > 0$ et tout $h < h^*(T)$, un compact hyperbolique K tel que que $h_{top}(K) > h$ et $diam(f^n K) < \epsilon$ pour tout entier n ?*

2.1.4 Entropie k dimensionnelle

Soit M une variété compacte $\mathcal{C}^\infty$ de dimension d et $T : M \to M$ une application continue.

Définition 2.1.17 *Pour tout $0 \leq k \leq d$, **l'entropie k dimensionnelle** de T, notée $h_k(T)$, est définie comme suit :*

$$h_k(T) = \sup_\sigma h_{top}(\sigma)$$

où le supremum porte sur les applications $\sigma :]0,1[^k \to M$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Remarquons que $h_d(T) = h_{top}(T)$.

Munissons M d'une structure riemannienne et notons Σ_s l'ensemble des applications $\sigma :]0,1[^k \to M$ de classe $\mathcal{C}^s$ avec $\|\sigma\|_s := \max_{0 \leq t \leq s} \sup_{x \in]0,1[^k} \|D^t \sigma\|_x < 1$, où $\|\|_x$ est la norme subordonée à la norme $\|\|_2$ de $\mathbb{R}^k$ et à la norme $\|\|_{\sigma(x)}$ de $T_{\sigma(x)}M$. J. Buzzi [24] a montré que l'on peut intervertir, dans le cas $\mathcal{C}^\infty$, le supremum en σ avec les autres passages à la limite dans la définition de l'entropie k dimensionnelle, c'est à dire : si T est de classe $\mathcal{C}^\infty$ alors

$$h_k(T) = \lim_{s \to +\infty} \lim_{\epsilon \to 0} \limsup_{n \to +\infty} \sup_{\sigma \in \Sigma_s} \frac{1}{n} \log r(n, \epsilon, Image(\sigma))$$

Le concept suivant a été introduit et étudié par J. Buzzi dans [22] :

Définition 2.1.18 *Avec les notations précédentes, l'application T est dite entropie-dilatante si*

$$h_{d-1}(T) < h_d(T) = h_{top}(T)$$

2.2 Partitions essentielles et topologiques

Les partitions essentielles sont des partitions remarquables sous deux points de vue. D'une part l'entropie relative à une telle partition est s.c.s. D'autre part ces partitions diffèrent peu du point de vue dynamique d'un recouvrement ouvert : ce sont des partitions dites topologiques. Ces deux propriétés sont exploitées de façon essentielle dans notre preuve du principe variationnel pour l'entropie de queue [16].

Nous commençons par quelques rappels sur la capacité orbitale d'un ensemble. Cette notion a été étudiée par E. Lindenstrauss et B. Weiss dans [42] et [41]. Puis nous rappelons la notion de partitions essentielles, leurs propriétés élémentaires ainsi que les résultats d'existence de suites raffinantes de partitions essentielles. On explique aussi, en suivant l'approche de T.Downarowicz, comment l'existence d'un telle suite de partitions permet de construire une extension zero-dimensionnelle principale. Ensuite nous introduisons la notion de partitions topologiques et nous relions l'entropie combinatoire de ces partitions à l'entropie topologique. Nous prouvons aussi un principe variationnel pour l'entropie conditionnelle relative à des partitions essentielles. Nous terminons ce paragraphe en étudiant le problème d'existence des partitions topologiques dans le cas simple de la dimension 1.

2.2.1 Capacité orbitale

Soit C un sous-ensemble de X. Notons 1_C la fonction caractéristique de l'ensemble C. La suite $(\sup_{x\in X}\sum_{i=0}^{n-1} 1_C(T^i x))_{n\in\mathbb{N}}$ est sous-additive et donc la suite $(\frac{1}{n}\sup_{x\in X}\sum_{i=0}^{n-1} 1_C(T^i x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et de plus

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sup_{x\in X}\sum_{i=0}^{n-1}1_C(T^i x)=\inf_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}\sup_{x\in X}\sum_{i=0}^{n-1}1_C(T^i x)$$

On peut donc définir la quantité suivante :

Définition 2.2.1 *La **capacité orbitale** $ocap(C)$ d'un sous-ensemble C de X est définie comme suit :*

$$ocap(C):=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sup_{x\in X}\sum_{i=0}^{n-1}1_C(T^i x)$$

On relie maintenant la capacité orbitale d'un sous-ensemble de C avec la mesure $\mu(C)$ pour les mesures invariantes μ.

Lemme 2.2.2 *[41] Pour tout borélien C de X, on a*

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}(X,T)}\mu(C)\leq ocap(C)$$

De plus, si C est fermé,

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}(X,T)}\mu(C)=ocap(C)$$

Preuve :

Soit μ une mesure de probabilité invariante et C un borélien de X. On a clairement par invariance de la mesure μ :

$$\mu(C)=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\mu(T^{-i}C)$$

$$\mu(C)=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int_X 1_C(T^i x)d\mu(x)\leq\frac{1}{n}\sup_{x\in X}\sum_{i=0}^{n-1}1_C(T^i x)$$

En particulier, on a

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}(X,T)} \mu(C) \leq \mathrm{ocap}(C)$$

On peut aussi invoquer le théorème ergodique. En effet on a tout d'abord d'après le théorème de décomposition ergodique, $\sup_{\mu\in\mathcal{M}(X,T)} \mu(C) = \sup_{\mu\in\mathcal{M}_e(X,T)} \mu(C)$, où $\mathcal{M}_e(X,T)$ désigne l'ensemble des mesures ergodiques. Enfin d'après le théorème ergodique de Birkhoff, si μ est une mesure ergodique, alors pour μ presque tout x :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} 1_C(T^i x) = \mu(C)$$

et donc $\mathrm{ocap}(C) \geq \mu(C)$.

Supposons maintenant C fermé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $x_n \in X$, tel que :

$$\sum_{i=0}^{n-1} 1_C(T^i x_n) = \sup_{x\in X} \sum_{i=0}^{n-1} 1_C(T^i x)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mu_n := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^{k*}\delta_{x_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \delta_{T^k x_n}$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $\mu_n \to \mu \in \mathcal{M}(X,T)$. L'ensemble C étant fermé, on a par convergence * faible de μ_n vers μ :

$$\limsup_{n\to+\infty} \mu_n(C) \leq \mu(C)$$

Or

$$\limsup_{n\to+\infty} \mu_n(C) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sup_{x\in X} \sum_{i=0}^{n-1} 1_C(T^i x) = \mathrm{ocap}(C)$$

□

Lemme 2.2.3 *[41] Soit C un sous-ensemble fermé de X. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage U de C tel que $ocap(U) \leq ocap(C) + \epsilon$.*

Preuve : Nous présentons deux preuves : la première est due à Lindenstrauss et utilise le point de vue "fréquence", i.e. la définition de $\mathrm{ocap}(C)$ comme étant la fréquence maximale de passage dans C, la seconde, qui m'a été suggérée par T.Downarowicz, utilise un point de vue mesuré à l'aide du lemme précédent.

(1) Soit $\epsilon > 0$ et soit $N \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{1}{N}\sup_{x\in X}\sum_{i=0}^{N-1} 1_C(T^i x) \leq \mathrm{ocap}(C) + \epsilon$. Autrement dit l'intersection des ensembles $C, T^{-1}C, ..., T^{[-N(\mathrm{ocap}(C)+\epsilon)]-1}C$ est vide. L'ensemble C étant fermé, il existe un voisinage ouvert U de C tel que les ensembles $U, T^{-1}U, ..., T^{[-N(\mathrm{ocap}(C)+\epsilon)]-1}U$ soient encore disjoints, c'est à dire

$$\frac{1}{N} \sup_{x\in X} \sum_{i=0}^{N-1} 1_U(T^i x) \leq \mathrm{ocap}(C) + \epsilon$$

Par sous additivité de la suite $\left(\sup_{x\in X}\sum_{i=0}^{n-1} 1_C(T^i x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, on conclut que

$$\mathrm{ocap}(U) \leq \frac{1}{N} \sup_{x\in X} \sum_{i=0}^{N-1} 1_U(T^i x) \leq \mathrm{ocap}(C) + \epsilon$$

(2) Notons $C_n := \{x \in X,\ d(x,C) \leq \frac{1}{n}\}$. Pour tout entier n, la fonction $f_n : \mathcal{M}(X,T) \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(\mu) := \mu(C_n)$ est s.c.s. car C_n est fermé. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers $f : \mathcal{M}(X,T) \to \mathbb{R}$, définie par $f(\mu) := \mu(C)$. D'après la proposition 1.1.4 (3), on a

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}(X,T)} \mu(C) = \lim_{n\to+\infty} \sup_{\mu\in\mathcal{M}(X,T)} \mu(C_n) = \lim_{n\to+\infty} \sup_{\mu\in\mathcal{M}(X,T)} \mu(\overset{o}{C_n})$$

c'est à dire d'après le lemme précédent :

$$\mathrm{ocap}(C) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{ocap}(\overset{o}{C_n})$$

Il suffit donc de prendre $U := \overset{o}{C_n}$ pour n assez grand. □

2.2.2 Partitions essentielles

Nous rappelons maintenant la notion de partitions essentielles et les résultats de E. Lindenstrauss et B. Weiss concernant l'existence de telles partitions.

Définition 2.2.4 *Une partition P est dite **essentielle** si l'une des trois conditions équivalentes suivantes est vérifiée :*

1. *Les bords des éléments de P ont une capacité orbitale nulle ;*
2. *Les bords des éléments de P sont de mesure μ nulle pour tout $\mu \in \mathcal{M}_e(X,T)$;*
3. *Pour tout $A \in P$, le sous ensemble $\mathcal{M}(X,T)$ de l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des mesures de probabilité boréliennes de X est inclus dans l'ensemble des points de continuité de la fonction $f_A : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}^+$ définie par $f_A(\mu) = \mu(A)$ pour tout $\mu \in \mathcal{P}(X)$.*

Remarque 2.2.5 *Si Q et P sont deux partitions essentielles, alors la fonction $\mu \mapsto H_\mu(P|Q)$ de $\mathcal{P}(X)$ dans $\mathbb{R}^+$ est continue. On en déduit que la fonction $\mu \mapsto h(\mu, P|Q) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} H_\mu(P^n|Q^n)$ de $\mathcal{M}(X,T)$ dans $\mathbb{R}^+$ est s.c.s. Cependant cette dernière propriété est plus faible que le caractère essentielle de la partition (Condidérer par exemple $T = Id_{\mathbb{S}^1}$ et deux partitions non triviales du cercle $\mathbb{S}^1$).*

Une partition est dite **clopen** si tous les éléments de cette partition sont à la fois des ouverts et des fermés de X ou de façon équivalente si la frontière de cette partition est vide. En particulier une partition clopen est une partition essentielle. Si X est zero-dimensionnel alors (X,T) admet une suite raffinante de partitions clopen, donc essentielles. Cependant l'existence de suite raffinante de partitions essentielles est en général beaucoup plus difficile à obtenir.

Existence de partitions essentielles

Clairement, le cercle $\mathbb{S}^1$ pour la dynamique triviale, $T = Id$, n'admet pas de partitions essentielles non triviales. Les deux théorèmes suivants nous assurent l'existence d'une suite raffinante de partitions essentielles sous certaines hypothèses.

Théorème 2.2.6 *(E. Lindenstrauss [40]) Soient X un espace métrique compact de dimension topologique finie et T un homéomorphisme de X d'entropie finie tel que l'ensemble des points périodiques est de dimension zero, alors il existe une suite raffinante de partitions essentielles.*

Dans le cas de la dimension 0, ce théorème est trivial d'après le commentaire précédent. Ca l'est aussi dans le cas de la dimension 1. En effet si P est une partition en intervalles, alors le bord de P est constitué d'un nombre fini de points. Or un point est chargé par une mesure ergodique invariante si et seulement si ce point est périodique et cette mesure est la mesure périodique correspondante.

Théorème 2.2.7 *(E. Lindenstrauss, Theorem 6.2 [41]) Si T est un homéomorphisme de X d'entropie finie admettant un facteur minimal infini (c'est à dire non réduit à une orbite périodique), alors il existe une suite raffinante de partitions essentielles.*

On ne sait pas si ce théorème est encore vrai dans le cas non-inversible. De plus, on espère pouvoir remplacer la condition du facteur minimal non trivial par la nullité de la dimension des points périodiques comme dans le cas de la dimension finie (Théorème 2.2.6).

La condition d'un facteur minimal infini semble difficile à employer. On utilisera essentiellement le corollaire suivant qui nous donne pour tout homéomorphisme d'entropie finie une extension préservant l'entropie (extension principale, voir paragraphe suivant) admettant une suite raffinante de partitions essentielles :

Corollaire 2.2.8 *Soit α un nombre irrationnel. Notons $R_\alpha : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ la rotation du cercle d'angle α. On suppose que T est un homéomorphisme de X. Alors $\left(X \times \mathbb{S}^1, T \times R_\alpha\right)$ admet une suite raffinante de partitions essentielles.*

Partitions essentielles et extension zero-dimensionnelle principale

Un système dynamique (Y, S) est une extension de (X, T) s'il existe une application continue $\pi : Y \to X$ telle que $\pi \circ S = T \circ \pi$ et telle que l'application $\pi^* : M(Y, S) \to \mathcal{M}(X, T)$ induite par π est surjective. Cette extension est dite **principale** si $h(\pi^*\mu) = h(\mu)$ pour tout $\mu \in M(Y, S)$.

Soit $\mathcal{P} := (P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite raffinante de partitions. Considérons l'extension symbolique $(\pi, \Sigma_\mathcal{P})$ associée à $\mathcal{P}$ (cf Appendice A). Si l'orbite de $x \in X$ ne rencontre pas les bords des partitions de $\mathcal{P}$, alors x admet un unique antécédent pour cette extension. Donc si les partitions P_k sont essentielles, alors π est un isomorphisme mesuré, en particulier π induit un homéomorphisme sur les ensembles de mesures invariantes et π est une extension principale.

On en déduit donc d'après le corollaire 2.2.8 et le théorème A.2.1 de l'Appendice A :

Théorème 2.2.9 *(Proposition 7.8 de [12]) Tout système dynamique d'entropie topologique finie admet une extension zero dimensionnelle principale.*

2.2.3 Partitions topologiques

On définit ici une nouvelle famille de partitions : les **partitions topologiques**. Celles-ci "diffèrent peu d'un recouvrement ouvert d'un point de vue dynamique" :

Définition 2.2.10 *On dit qu'une partition P est topologique si pour tout $\alpha > 0$, il existe $\Delta > 0$, tels que pour tout $\delta < \Delta$,*

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \sup_{x\in X} \sharp \left\{ A \in P^n \ : \ A \bigcap B(x, n, \delta) \neq \emptyset \right\} < \alpha$$

Le lemme suivant est le point clé de notre preuve du principe variationnel pour l'entropie de queue. Il nous permettra de relier l'entropie combinatoire conditionnelle relative à des partitions essentielles et l'entropie de queue (Proposition 2.2.14).

Lemme 2.2.11 *Les partitions essentielles sont topologiques.*

Preuve : Soit P une partition essentielle. Par définition, on a $\mathrm{ocap}(\partial P) = 0$. Soit $\alpha > 0$. D'après le lemme 2.2.3, il existe un ouvert $U \supset \partial P$, tel que $\mathrm{ocap}(U) < \frac{\alpha}{\log(\sharp P)}$. Considérons le recouvrement

ouvert $\mathcal{V} := \{U, \overset{o}{A} : \ A \in P\}$ et notons $\epsilon_{\mathcal{V}}$ le nombre de Lebesgue de ce recouvrement ouvert. Pour tout $x \in X$ et $\delta < \epsilon_{\mathcal{V}}$, la boule de centre x et de rayon δ est soit incluse dans U soit incluse dans un $\overset{o}{A}$ avec $A \in P$. En particulier la boule de centre x de rayon δ rencontre plusieurs éléments de P si et seulement si $x \in U$. On en déduit que le nombre d'éléments de P^n rencontrés par la boule de Bowen centrée en x d'ordre n et de rayon δ est au plus de $(\sharp P)^{\sum_{k=0}^{n} 1_U(T^k(x))}$. En prenant le supremum pour $x \in X$ puis la limite supérieure logarithmique en n, on obtient :

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \sup_{x\in X} \sharp\{A \in P^n \ : \ A \bigcap B(x,n,\delta) \neq \emptyset\} \leq \mathrm{ocap}(U) \log(\sharp P) < \alpha$$

□

Dans le cas de la dimension finie, l'existence de suite raffinantes de partitions essentielles est reliée à la dimension des points périodiques. Dans le cas des partitions topologiques, nous conjecturons qu'il existe en toute dimension une suite raffinante de partitions topologiques. On montrera facilement la conjecture dans le cas de la dimension un (Voir p. 63).

Entropie combinatoire relativement à des partitions

Nous donnons ici une première illustration de la notion de partitions topologiques. Rappelons que l'on peut définir **l'entropie combinatoire** $h(T,P)$ de T par rapport à la partition P comme suit [34] :

$$h(T,P) := \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \sharp P^n$$

Il s'agit de l'entropie de la dynamique symbolique Σ_P engendrée par la partition P (Cf Appendix A).

Trivialement, on a $h(T,P) \geq h_{top}(T, \mathrm{diam}(P))$.

Mais en général cette quantité peut être strictement plus grande que l'entropie topologique. Considérons par exemple une dynamique Nord-Sud sur la sphère S^2 avec doublement de la latitude. Alors l'entropie topologique est nulle alors que l'entropie combinatoire d'une partition constituée de deux hémisphères séparés par un méridien est égale à $\log 2$ (remarquons que cette partition n'est pas essentielle, car le dirac au pôle sud est une mesure invariante chargeant le bord de la partition). Ce "phénomène" permet aussi de construire des exemples affines par morceaux d'entropie topologique strictement plus petite que l'entropie de multiplicité (Définition 5.6.2). Toutefois, si P est une triangulation de X de valence r, alors $h(T,P) \leq h_{top}(T) + \log(r)$.

Dans le cas où la partition considérée est topologique, on a :

Proposition 2.2.12 *Soit P une partition topologique, alors*

$$h(T,P) \leq h_{top}(T)$$

Preuve : Soit $\alpha > 0$. La partition P étant topologique, il existe $\Delta > 0$, tel que pour tout $\delta < \Delta$, toute boule de Bowen de rayon δ et d'ordre n grand rencontre au plus $e^{\alpha n}$ éléments de P^n. Donc $h_{top}(T,\delta) \geq h(T,P) - \alpha$. En faisant tendre δ, puis α vers 0, on obtient : $h_{top}(T) \geq h(T,P)$. □

La proposition précédente associée à l'inégalité $h(T,P) \geq h_{top}(T, \mathrm{diam}(P))$ donne le corollaire suivant :

Corollaire 2.2.13 *Si $\mathcal{P} := (P_k)_{K\in\mathbb{N}}$ est une suite raffinante de partitions topologiques, alors*

$$h_{top}(T) = \lim_{k\to+\infty} h(T, P_k)$$

Entropie combinatoire conditionnelle

Si P et Q sont deux partitions de X, on peut, par un argument de sous additivité, définir **l'entropie combinatoire conditionnelle** de P sachant Q comme suit :

$$h(T,P|Q) := \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \sup_{A\in Q^n} \sharp\{B \in P^n, A\bigcap B \neq \emptyset\}$$

Soit $\mathcal{P} := (P_k)_k$ une suite raffinante de partitions. On définit l'entropie de queue relativement à cette suite de partitions de la façon suivante :

$$h^*(T,\mathcal{P}) = \lim_{k\to+\infty} \lim_{l\to+\infty} h(T,P_l|P_k)$$

Proposition 2.2.14 *Si $\mathcal{P}$ est une suite raffinante de partitions topologiques, alors $h^*(T) = h^*(T,\mathcal{P})$.*

Preuve :

Soit $\epsilon > 0$. Par définition des partitions topologiques, pour tout entier k, il existe $\delta_k > 0$ tel que :

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sup_{x\in X} \log \sharp\{A \in P_k^n,\ B(x,n,\delta_k)\bigcap A \neq \emptyset\} < \epsilon$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on obtient facilement les inégalités suivantes :

$$\sup_{x\in X} r(n,\mathrm{diam}(P_l),B(x,n,\delta_k)) \leq \sup_{x\in X} \sharp\{A \in P_k^n,\ B(x,n,\delta_k)\bigcap A \neq \emptyset\} \times \sup_{A\in P_k^n} \sharp\{B \in P_l^n,\ B \subset A\}$$

$$\sup_{A\in P_k^n} \sharp\{B \in P_l^n,\ B \subset A\} \leq \sup_{x\in X} \sharp\{A \in P_l^n,\ B(x,n,\delta_l)\bigcap A \neq \emptyset\} \times \sup_{x\in X} r\left(n,\delta_l,B(x,n,\mathrm{diam}(P_k))\right)$$

Puis en prenant la limite logarithmique en n, on a :

$$h(\mathrm{diam}(P_l)|\delta_k) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \sup_{x\in X} r(n,\mathrm{diam}(P_l),B(x,n,\delta_k)) \leq h(T,P_l|P_k) + \epsilon$$

$$h(T,P_l|P_k) \leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \sup_{x\in X} r\left(n,\delta_l,B(x,n,\mathrm{diam}(P_k))\right) + \epsilon = h(\delta_l|\mathrm{diam}(P_k)) + \epsilon$$

Enfin en faisant tendre l puis k vers $+\infty$, on obtient $|h^*(T) - h^*(T,\mathcal{P})| \leq \epsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, on conclut que :

$$h^*(T,\mathcal{P}) = h^*(T)$$

□

Entropie combinatoire et entropie mesurée

Nous comparons l'entropie combinatoire avec l'entropie mesuré. Soient P et Q deux partitions de X. Considérons $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$. Rappelons que pour tout entier n,

$$H_\mu(P^n|Q^n) = \sum_{\substack{A\in Q^n,\\ \mu(A)\neq 0}} \mu(A) H_{\mu_A}(P^n)$$

avec $\mu_A(.) = \frac{\mu(A\bigcap .)}{\mu(A)}$.

Or, par un argument classique de concavité, $H_{\mu_A}(P^n) \leq \log \sharp\{B \in P^n, B\bigcap A \neq \emptyset\}$. On obtient donc

$$\frac{1}{n}H_\mu(P^n|Q^n) \leq \frac{1}{n}\sup_{A\in Q^n}\log\sharp\left\{B\in P^n,\ B\bigcap A\neq\emptyset\right\}$$

puis en prenant la limite quand n tend vers $+\infty$:

$$h(\mu,P|Q) \leq h(T,P|Q) \tag{2.3}$$

Théorème 2.2.15 *Soient P et Q deux partitions essentielles, telles que P est plus fine que Q, alors*

$$\max_{\mu\in\mathcal{M}(X,T)} h(\mu,P|Q) = \max_{\mu\in\mathcal{M}_e(X,T)} h(\mu,P|Q) = h(T,P|Q)$$

Preuve :

Justifions tout d'abord l'égalité $\max_{\mu\in\mathcal{M}(X,T)} h(\mu,P|Q) = \max_{\mu\in\mathcal{M}_e(X,T)} h(\mu,P|Q)$. L'entropie conditionnnelle $h(.,P|Q)$ définie sur $\mathcal{M}(X,T)$ est une application affine s.c.s. d'après la remarque 2.2.5. Donc cette fonction est harmonique et atteint son maximum en une mesure ergodique.

Montrons maintenant que $\max_{\mu\in\mathcal{M}(X,T)} h(\mu,P|Q) = h(T,P|Q)$. D'après l'inégalité précédente (2.3), il suffit de montrer qu'il existe une mesure invariante μ telle que $h(\mu,P|Q) = h(T,P|Q)$. On s'appuie sur les idées de M. Misiurewicz utilisées dans sa courte preuve du principe variationnel pour l'entropie topologique [44]. Avant cela nous rappelons sans preuve deux lemmes classiques. Commençons par la propriété de concavité de l'entropie conditionelle.

Lemme 2.2.16 *[57] Soit $\lambda\in[0,1]$ et soient μ,ν deux mesures de probabilité. Soient P,Q deux partitions. Alors*

$$H_{\lambda\mu+(1-\lambda)\nu}(P|Q) \geq \lambda H_\mu(P|Q) + (1-\lambda)H_\nu(P|Q)$$

L'entropie conditionnelle satisfait aussi la propriété de sous-additivité suivante :

Lemme 2.2.17 *[57] Soient A,B,C,D des partitions, alors*

$$H_\mu(A\vee B|C\vee D) \leq H_\mu(A|C) + H_\mu(B|D)$$

Revenons à la preuve du théorème 2.2.15.

Fixons $l>k\in\mathbb{N}$. Soit A_n un élément de Q^n, tel que $\sharp\{B\in P^n,\ B\subset A_n\} = \max_{A\in Q^n}\sharp\{B\in P^n,\ B\subset A\}$. Puis posons $\mathcal{A}_n := \{B\in P^n,\ B\subset A_n\}$. On choisit arbitrairement $x_B\in B$ pour tout $B\in\mathcal{A}_n$. Considérons les deux mesures de probabilité suivantes μ_n et ν_n :

$$\mu_n := \frac{1}{\sharp\mathcal{A}_n}\sum_{B\in\mathcal{A}_n}\delta_{x_B}$$

$$\nu_n := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}T^{*k}\mu_n$$

Toute limite faible de $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est clairement T-invariante. Quitte à extraire une sous suite de $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut supposer, que $\nu_n\to\eta\in\mathcal{M}(X,T)$ quand $n\to+\infty$.

Puisque la mesure μ_n est supportée par $A_n\in Q^n$, nous avons :

$$H_{\mu_n}(P^n|Q^n) = H_{\mu_n}(P^n) \tag{2.4}$$

Il existe au plus un x_B dans un élément donné de P^n. Donc $\mu_n(B) = \frac{1}{\sharp\mathcal{A}_n}$ ou $\mu_n(B)=0$ pour tout $B\in P^n$. On en déduit :

$$H_{\mu_n}(P^n) = \log(\sharp\mathcal{A}_n) \tag{2.5}$$

Pour $0 \leq j < m < n$, nous coupons l'intervalle d'entiers $(0, n)$ en $[\frac{n}{m}] - 2$ sous intervalles de longueur m : $(j, j+m-1)$, ..., $(j+km, j+(k+1)m-1)$,... avec au plus $3m$ termes restants.

D'après le lemme 2.2.17, nous avons :

$$H_{\mu_n}(P^n|Q^n) \leq \sum_{k=0}^{[\frac{n}{m}]-2} H_{\mu_n}\left(\bigvee_{i=j+km}^{j+(k+1)m-1} T^{-i}P \Big| \bigvee_{i=j+km}^{j+(k+1)m-1} T^{-i}Q\right) + 3m\log(\sharp P)$$

$$H_{\mu_n}(P^n|Q^n) \leq \sum_{k=0}^{[\frac{n}{m}]-2} H_{T^{*j+km}\mu_n}(P^m|Q^m) + 3m\log(\sharp P)$$

En sommant sur j pour $0 \leq j < m$, nous obtenons :

$$mH_{\mu_n}(P^n|Q^n) \leq \sum_{k=0}^{n-1} H_{T^{*k}\mu_n}(P^m|Q^m) + 3m^2\log(\sharp P)$$

L'entropie conditionnelle étant concave (Lemma 2.2.16), on a :

$$mH_{\mu_n}(P^n|Q^n) \leq nH_{\nu_n}(P^m|Q^m) + 3m^2\log(\sharp P)$$

Alors en combinant avec (2.4) et (2.5), nous obtenons :

$$\frac{H_{\nu_n}(P^m|Q^m)}{m} \geq \frac{\log(\sharp\mathcal{A}_n) - 3m\log(\sharp P)}{n}$$

Puisque les partitions P et Q sont essentielles, la fonction $\mu \mapsto H_\mu(P^m|Q^m)$ est continue. Donc en prenant la limite quand n tend vers l'infini, on obtient :

$$\frac{H_\eta(P^m|Q^m)}{m} \geq \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log \sup_{A\in Q^n}\{B \in P^n,\ B \subset A\} = h(T, P|Q) \tag{2.6}$$

puis en prenant la limite quand m tend vers l'infini :

$$h(\eta, P|Q) \geq h(T, P|Q)$$

□

2.2.4 Cas de la dimension 1

Nous examinons dans le cas de la dimension 1 les propriétés de semi-continuité de l'entropie conditionnelle relative à des partitions topologiques. Nous montrons aussi l'existence de suites raffinantes de partitions topologiques.

On suppose désormais que $X = \mathbb{S}^1$ ou $X = [0, 1]$.

Proposition 2.2.18 *Si P et Q sont des partitions topologiques en intervalles de X, alors la fonction $h(., P|Q)$ de $\mathcal{M}(X, T)$ dans $\mathbb{R}$ est s.c.s.*

Preuve :

Soit $\alpha > 0$. Les partitions P et Q étant topologiques, la boule de Bowen $B(p, n, \delta)$ d'un point périodique p est un voisinage ouvert de p rencontrant au plus $e^{\alpha n}$ éléments de $P^n \cup Q^n$ pour δ assez petit et n assez grand. Si un élément A de $P^n \cup Q^n$ a un bord qui est un point périodique, alors l'orbite périodique de ce point rencontre $\partial P \cup \partial Q$. Notons E l'ensemble des éléments de $P^n \cup Q^n$ rencontrant une boule de Bowen $B(p, n, \delta)$ avec p un point périodique dont l'orbite rencontre $\partial P \cup \partial Q$.

Nous notons aussi E' le sous-ensemble de $P^n \vee Q^n$ des éléments de la forme $A \bigcap B$ avec $A, B \in E$. Remarquons que tout élément de $(P^n \vee Q^n - E') \bigcup (P^n - E)$ ne contient pas de points périodiques dans son bord. Puisque les partitions P et Q sont en intervalles, on a $\sharp E \leq 2(\sharp P + \sharp Q)Le^{\alpha n}$, où L est le maximum des périodes des points périodiques appartenant au bord de P ou de Q. Pour n suffisament grand, on obtient alors pour tout $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$:

$$H_\mu(P^n|Q^n) = \sum_{A \in P^n \vee Q^n} -\mu(A)\log\mu(A) - \left(\sum_{A \in Q^n} -\mu(A)\log\mu(A)\right)$$

$$|H_\mu(P^n|Q^n) - \left(\sum_{A \in P^n \vee Q^n - E'} -\mu(A)\log\mu(A) - \left(\sum_{A \in Q^n - E} -\mu(A)\log\mu(A)\right)\right)| \leq 2\alpha n + 2\log(2(\sharp P + \sharp Q)L)$$

La fonction $\mu \mapsto \sum_{A \in P^n \vee Q^n - E'} -\mu(A)\log\mu(A) - \left(\sum_{A \in Q^n - E} -\mu(A)\log\mu(A)\right)$ est continue en μ, car les éléments de $P^n \vee Q^n - E'$ et de $Q^n - E$ ne contiennent pas de points périodiques dans leur bord. On en déduit que $\widetilde{H_\cdot(P^n|Q^n)} \leq 5\alpha n$ pour n suffisament grand. Donc $\widetilde{h(.,P|Q)} \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\widetilde{H(.,P^n|Q^n)} \leq h(.,P|Q) + 5\alpha$. Ceci étant vrai pour tout $\alpha > 0$, on conclut que $h(.,P|Q)$ est s.c.s. □

Remarque 2.2.19 *De la même façon, on peut se passer de l'hypothèse essentielle (utilisée uniquement en (2.6)) dans la preuve du théorème 2.2.15 ; i.e. si P et Q sont deux partitions topologiques en intervalles de X avec P plus fine que Q, alors* $\max_{\mu\in\mathcal{M}(X,T)} h(\mu,P|Q) = h(T,P|Q)$.

Question 2.2.20 *Y a-t-il un analogue de la Proposition 2.2.18 en dimension supérieure ?*

Dans le cas de la dimension 1, il existe toujours une suite raffinante de partitions topologiques :

Proposition 2.2.21 *Soit $X = \mathbb{S}^1$ ou $X = [0,1]$ et soit T une application continue de X dans lui-même. Alors (X,T) admet une suite raffinante $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de partitions topologiques en intervalles.*

Preuve :

On travaille tout d'abord avec $X = \mathbb{S}^1$. D'après le théorème de Baire, si l'ensemble des points périodiques de T de période n est d'intérieur vide pour tout entier n alors l'ensemble des points périodiques de T est lui aussi d'intérieur vide. On en déduit que, pour tout $\alpha > \beta > 0$, il existe une partition P en intervalles telle que :

- $\partial P = E_1 \bigcup E_2$ tels que E_1 est de capacité orbitale nulle (i.e. ne rencontrant pas les points périodiques) et il existe un entier n, tel que tout $x \in E_2$ est dans l'intérieur des points périodiques de période n ;
- $\alpha < \mathrm{diam}(A) < \beta$ pour tout $A \in P$.

Soit $\gamma > 0$ et soit un ouvert $U \supset E_1$, tel que $\mathrm{ocap}(U) < \gamma$. Soit $\delta_1 := d(E_1, X - U)$. Soit $\delta_2 := \max\{\alpha, f^n_{/B(E_2,\alpha)} = Id\}$. Soit $x \in X$. On pose $\delta := \frac{\min(\alpha,\delta_1,\delta_2)}{2}$. La boule de centre $T^k x$ et de rayon δ rencontre au plus 2 éléments de P puisque $\delta < \alpha$. Si elle rencontre exactement deux éléments de P, alors $B(T^k x, \delta) \subset U$ ou bien $T^n_{/B(T^k x,\delta)} = Id$. Le premier cas arrive avec une fréquence plus petite que γ, car $\mathrm{ocap}(U) < \gamma$. Quant au second cas, observons que si $T^n_{/B(y,\delta)} = Id$, alors pour tout entier m, la boule de Bowen $B(y, nm, \delta)$ coïncide avec la boule de Bowen $B(y,n,\delta)$ et rencontre donc au plus 2^n éléments de P^{mn}. On en déduit facilement que P est une partition topologique.

Dans le cas de l'intervalle, certes les deux extrémités 0 et 1 peuvent être des points périodiques isolés, mais les boules de centre 0 et 1 et de rayon δ (avec δ comme ci-dessus) ne rencontrent qu'un élément de P. □

2.3 Candidats d'entropie et théorème de réalisation

Dans cette partie, nous relions le formalisme fonctionnel introduit dans le chapitre précédent avec l'entropie des systèmes dynamiques.

Définition 2.3.1 *Soit (X,T) un système dynamique d'entropie topologique finie. Un **candidat d'entropie** est un candidat du compact $\mathcal{M}(X,T)$, dont la limite est la fonction entropie métrique.*

Il est bien connu que l'ensemble $\mathcal{M}(X,T)$ des mesures de probabilité boréliennnes invariantes par T est un simplexe de Choquet, dont les points extrémaux sont les mesures ergodiques. On sait aussi que l'entropie métrique bien que n'étant a priori ni s.c.s. ni s.c.i. est une fonction harmonique [57]. Le théorème suivant est fondamental : il permet de réaliser de façon dynamique les exemples "formels" du chapitre précédent.

Avant d'énoncer le théorème nous rappelons tout d'abord la notion de limite inverse. Soit $(X_k,T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de systèmes dynamiques munie d'une suite d'applications continues surjectives $(\pi_{k+1}:X_{k+1}\to X_k)_{k\in\mathbb{N}}$. On appelle limite inverse de $(X_k,T_k,\pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ l'ensemble $\varprojlim_{k\in\mathbb{N}}(X_k,T_k) := \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\in X_0\times ...\times X_k\times ... \mid \pi_{k+1}(x_{k+1})=x_k\}$ muni de la plus petite topologie rendant les applications $\pi_k\circ\phi_k$ continues, où ϕ_k est la projection du produit $X_1\times ...\times X_k\times ...$ sur le k^{eme} facteur X_k.

Enfin on appelle sous décalage la dynamique induite par un décalage complet à alphabet fini sur un sous ensemble invariant fermé.

Théorème 2.3.2 *(Downarowicz, Serafin)[Théorème 3 de [33]]*

Soit M un simplexe de Choquet et $\mathcal{F}:=(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un candidat affine de M à différences s.c.s. Alors il existe un système dynamique zéro dimensionnel (X,T), qui est une limite inverse de sous-shifts $(X,T)=\varprojlim_{k\in\mathbb{N}}(X_k,S)$, et un homéomorphisme affine $a:\mathcal{M}(X,T)\to M$ tel que $f_k\circ a(\mu)=h(\phi_k^*\mu)$ pour tout $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$.

En particulier tout simplexe de Choquet est homéomorphe au compact des mesures invariantes d'un système dynamique zéro dimensionnel.

Question 2.3.3 *Quels sont les simplexes de Choquet (resp. les candidats) que l'on peut réaliser par des dynamiques plus régulières, i.e. de classe $\mathcal{C}^r$ avec $r\in\overline{\mathbb{N}}$?*

2.4 Exemples de candidats d'entropie

Présentons quelques candidats d'entropie. Excepté la modification du candidat à la Brin-Katok $\mathcal{H}^{BK-}$, les autres candidats font partie d'une longue liste de candidats introduits par T. Downarowicz dans [31].

2.4.1 Entropie relativement à une suite raffinantes de partitions

Nous commençons par le candidat "historique". On considère une suite raffinante $\mathcal{P}:=(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de partitions de X. Nous noterons $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$ le candidat défini par $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}:=(h(.,P_k))_{k\in\mathbb{N}}$. La suite $\mathcal{P}$ étant raffinante, on a :

- pour tout entier k, la partition P_{k+1} est plus fine que la partition P_k, et donc $h(.,P_{k+1})\geq h(.,P_k)$;
- le diamètre de P_k décroît vers 0 quand $k\to+\infty$, ce qui entraîne d'après la Proposition 2.1.6 : $\lim_{k\to+\infty}h(.,P_k)=h$.

Le candidat $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$ est donc bien un candidat d'entropie.

2.4.2 Entropie d'une famille de fonctions

Le candidat suivant a été introduit par T. Downarowicz [31]. Il présente des propriétés de continuité très agréables et permet de définir la notion de structure d'entropie de façon intrinsèque (indépendamment des choix dans la Définition 2.6.1).

Définition

Soit $f : X \to [0,1]$ une fonction. On note A_f la partition de $X \times [0,1]$ définie par $A_f := \{(x,t) \ : f(x) \leq t\} \coprod \{(x,t) \ : f(x) > t\}$. Si $\mathcal{F}$ désigne une famille de fonctions de X dans $[0,1]$, alors on note $A_{\mathcal{F}}$ la partition de $X \times [0,1]$ définie par $A_{\mathcal{F}} := \bigvee_{f \in \mathcal{F}} A_f$. Si $S : X \to X$ est une application de X dans lui-même, alors pour tout entier k, on a $S^{-k} A_f = A_{f \circ S^k}$. On définit l'entropie de μ relativement à $\mathcal{F}$ par

$$h(\mu, \mathcal{F}) := h_{T \times Id, X \times \mathbb{S}^1}(\mu \times \lambda, A_{\mathcal{F}})$$

Propriétés de semi-continuité supérieure

Supposons que $f : X \to [0,1]$ est une application continue. Alors $\partial A_f \subset \Gamma_f := \{(x,t) \in X \times [0,1], \ f(x) = t\}$. D'après le théorème de Fubini, $\mu \times \lambda(\Gamma_f) = 0$ et donc $\mu \times \lambda(\partial A_f) = 0$ pour toute mesure de probabilité invariante μ. On en déduit que si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux familles de fonctions continues de X dans $[0,1]$, telles que $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ alors la fonction $h(., \mathcal{F}) - h(., \mathcal{G}) : \mathcal{M}(X,T) \to \mathbb{R}^+$ est une fonction s.c.s.

Suite raffinante de familles de fonctions

On munit $X \times [0,1]$ de la distance produit $D((x,t),(y,s)) := \max\{d(x,y), |t-s|\}$. On dit que $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite raffinante de familles de fonctions si $(A_{\mathcal{F}_n} \bigcap (X \times [0,1[))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite raffinante de partitions de $X \times [0,1[$. Si $\mathcal{F}_n$ est une suite raffinante de familles de fonctions, alors la suite $(h(\mu, \mathcal{F}_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers la fonction entropie métrique (observez que $\mu \times \lambda(X \times \{1\}) = 0$). La suite $\mathcal{H}^{fun} := (h(\mu, \mathcal{F}_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc un candidat d'entropie.

Existence de suites raffinantes de familles de fonctions continues

Nous construisons dans ce paragraphe une suite raffinante de famille de fonctions continues. Pour tout entier $q \in \mathbb{N}^*$, nous allons exhiber une famille de fonctions continue $\mathcal{G}_q$ telle que $\operatorname{diam}\left(A_{\mathcal{G}_q} \bigcap (X \times [0,1[)\right) \leq \frac{1}{q}$. La suite $(\mathcal{F}_q)_{q \in \mathbb{N}^*}$ avec $\mathcal{F}_q := \bigcup_{p \in [1,q]} \mathcal{G}_q$ est alors une suite raffinante de familles de fonctions continues (on prend l'union pour s'assurer que la suite de partitions $A_{\mathcal{F}_q}$ est de plus en plus fine). Tout d'abord, pour tout entier $0 \leq k \leq q$, on note g_k la fonction constante égale à $\frac{k}{q}$. Remarquons que $\{(x,t) \ : g_k(x) \leq t\} \bigcap \{(x,t) \ : g_{k+1}(x) > t\} = X \times [\frac{k}{q}, \frac{k+1}{q}[$. Ensuite, par compacité de X, il existe un sous ensemble fini E_q de X, tel que $\bigcup_{z \in E_q} B(z, \frac{1}{2q}) = X$. D'après le théorème d'Urysohn, pour tout $z \in E_q$, il existe une fonction continue $f_z : X \to [0,1]$ tel que $f_z(x) = 0$ pour tout $x \in B(z, \frac{1}{2q})$ et $f_z(x) = 1$ pour tout $x \in B(z, \frac{1}{q})^c$. Clairement $X \times [0,1[= \bigcup_{z \in E_q} \{(x,t) \ : f_z(x) \leq t\}$ et pour tout $z \in E_q$, on a $\{(x,t) \ : f_z(x) \leq t\} \bigcap (X \times [0,1[) \subset B(z, \frac{1}{q}) \times [0,1[$. D'après les remarques précédentes, il est clair que $\mathcal{G}_q := \{g_k, \ k \in [0,q]\} \bigcup \{f_z, \ z \in E_q\}$ convient.

Suites de partitions et suite de fonctions

Une suite raffinante de partitions induit naturellement une suite raffinante de familles de fonctions de X dans $[0,1]$. En effet, à une partition P, on associe la famille de fonctions $\mathcal{F}_P := \{1_U, \ U \in P\}$. De plus par définition, cette correspondance préserve l'entropie : $h(., \mathcal{F}_P) = h(., P)$.

Enfin lorsque l'on suppose que X est zéro-dimensionnel, une suite de partitions $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite raffinante de partitions clopen si et seulement si $(\mathcal{F}_{P_k})_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite raffinante de familles

de fonctions continues. En effet, $U \subset X$ est un clopen si et seulement si la fonction indicatrice 1_U de U est continue.

A partir de maintenant, on considère une suite raffinante de familles de fonctions continues $(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et on note $\mathcal{H}^{fun}$ le candidat $\mathcal{H}^{fun} := (h(.,\mathcal{F}_k))_{k\in\mathbb{N}}$.

2.4.3 Entropie à la Katok

Dans son célèbre article [37], A.Katok donne une formule pour l'entropie métrique d'une mesure ergodique μ, analogue à la formule de Bowen pour l'entropie topologique : on compte le nombre d'orbites à une précision donnée, aux yeux de μ.

Soient $\epsilon > 0$, $1 > \sigma > 0$, et μ une mesure ergodique, on définit

$$h_\sigma^{Kat}(\mu,\epsilon) := \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \min\{\sharp C \mid \mu(\bigcup_{x\in C} B(x,n,\epsilon)) > \sigma\}$$

Alors, on a :

Théorème 2.4.1 (Katok) *[37] Pour tout $1 > \sigma > 0$, et pour toute mesure ergodique μ :*

$$\lim_{\epsilon\to 0} h_\sigma^{Kat}(\mu,\epsilon) = h(\mu)$$

L'entropie h_σ^{Kat} est initialement définie pour les mesures ergodiques, on l'étend par harmonicité sur le simplexe de Choquet des mesures invariantes.

Soit $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite strictement décroissante de réels positifs tendant vers 0. On définit alors le candidat $\mathcal{H}_\sigma^{Kat} := (h_\sigma^{Kat}(.,\epsilon_k))_{k\in\mathbb{N}}$. On déduit du théorème de convergence monotone et du théorème 2.4.1 que le candidat $\mathcal{H}_\sigma^{Kat}$ a pour limite la fonction entropie métrique h ; c'est donc un candidat d'entropie.

On vérifie facilement l'inclusion $B_T(x,\epsilon,mn) \subset B_{T^m}(x,\epsilon,n)$ entre les boules de Bowen pour T et T^m. On en déduit la proposition suivante :

Proposition 2.4.2 *Avec les notations précédentes, on a pour tout $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$, tout $\epsilon > 0$ et tout $m \in \mathbb{N}$:*

$$h_\sigma^{Kat}(\mu,\epsilon,T^m) \leq m h_\sigma^{Kat}(\mu,\epsilon,T)$$

Remarque 2.4.3 *En général, l'inégalité précédente est stricte.*

Considérons $(\{0,1\}^{\mathbb{N}},\sigma,\mu)$ le décalage à deux symboles muni de la mesure de Bernoulli et de la distance $d(x,y) = \Sigma_{k\in\mathbb{N}} \frac{|x_k - y_k|}{2^k}$.

Soit $0 < \epsilon < 1$. Notons $m := [\log_2(\epsilon^{-1})] + 1$. Toute boule de Bowen de rayon ϵ et d'ordre n pour σ^{2m} est de μ mesure $\frac{1}{2^{mn}}$. Donc pour tout $\sigma \in]0,1[$, on a $h_\sigma^{Kat}(\mu,\epsilon,\sigma^{2m}) = m\log 2 \neq 2m h_\sigma^{Kat}(\mu,\epsilon,\sigma) = 2m\log 2$.

Nous profitons de ce dernier résultat pour faire un apparté concernant l'entropie des mesures T et T^m invariantes. Il suit de la Proposition 2.4.2 et du Théorème 2.4.1 que pour tout $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$ et tout $m \in \mathbb{N}$, on a $h(\mu,T^m) = mh(\mu,T)$. Nous relions maintenant l'entropie d'une mesure T^m invariante μ à l'entropie de la mesure T invariante associée $\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} T^{*k}\mu$:

Lemme 2.4.4 *Pour tout $m \in \mathbb{N} - \{0\}$ et tout $\mu \in \mathcal{M}(X,T^m)$,*

$$h(\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} T^{*k}\mu, T) = \frac{1}{m} h(\mu,T^m)$$

PREUVE : Fixons un entier m non nul. L'entropie métrique étant une fonction harmonique, il suffit de montrer que $h(T^{*k}\mu, T^m) \geq h(\mu, T^m)$ pour tout $\mu \in \mathcal{M}_e(X, T^m)$ et tout $k = 0, ..., m-1$. Soit μ une mesure T^m ergodique et soit $\epsilon > 0$. Pour tout $\delta > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$ considérons $C_{\delta,n} \subset X$ tel que $T^{*k}\mu(\bigcup_{x \in C_{\delta,n}} B_{T^m}(x, n, \delta)) > \frac{1}{2}$ et $\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \sharp C_{\delta,n} = h^{Kat}_{1/2}(T^{*k}\mu, \delta, T^m)$. Par uniforme continuité de T, il existe $\delta_0 > 0$ tel que pour tout $\delta < \delta_0$ et tout $x \in X$, on a $B_{T^m}(x, n, \delta) \subset B_T(x, n, \epsilon)$. Puis remarquons que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, on a $r_T(n, 2\epsilon, T^{-k}B_T(x, n, \epsilon)) \leq r_T(k, \epsilon, X)$. On a donc $r_{T^m}(n, 2\epsilon, T^{-k}B_{T^m}(x, n, \delta)) \leq r_T(n, 2\epsilon, T^{-k}B_T(x, n, \epsilon)) \leq r_T(k, \epsilon, X)$. On en déduit que pour $\delta < \delta_0$:

$$h^{Kat}_{1/2}(T^{*k}\mu, \delta, T^m) \geq h^{Kat}_{1/2}(\mu, 2\epsilon, T^m)$$

Enfin en faisant tendre δ puis ϵ vers 0, on obtient

$$h(T^{*k}\mu, T^m) \geq h(\mu, T^m)$$

□

2.4.4 Entropie modifiée à la Bowen

Ce candidat introduit par T. Downarowicz s'inspire de la définition de Bowen de l'entropie topologique.

Soient $\epsilon > 0$, $1 > \sigma > 0$ et μ une mesure ergodique, on définit :

$$h^{Bow}_\sigma(\mu, \epsilon) := \inf_{F, \mu(F) > \sigma} \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \min\{\sharp C \mid C \subset F,\ C \text{ ensemble } \ (n, \epsilon) \ \text{ séparé}\}$$

Par ergodicité, cette quantité ne dépend pas de σ (voir Identité 6.4.2 de [31]) et est donc notée simplement $h^{Bow}(\mu, \epsilon)$.

Soit $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite strictement décroissante de réels convergeant vers 0. On obtient par extension harmonique un candidat de $\mathcal{M}(X, T)$, $\mathcal{H}^{Bow} := (h^{Bow}(., \epsilon_k))_{k\in\mathbb{N}}$. Nous montrerons au théorème 2.5.1 que les candidats $\mathcal{H}^{Bow}$ et $\mathcal{H}^{Kat}_\sigma$ sont équivalents. Deux candidats équivalents ayant même limite, il s'en suit que $\lim \mathcal{H}^{Bow} = h$ et le candidat $\mathcal{H}^{Bow}$ est donc bien un candidat d'entropie.

2.4.5 Entropie à la Brin-Katok

M. Brin et A. Katok [15] relient l'entropie métrique d'une mesure ergodique μ à la décroissance en temps de la μ-mesure des boules de Bowen autour de presque tout point.

Soient $\epsilon > 0$ et μ une mesure ergodique. Pour $x \in X$, on note :

$$h^{BK+}(x, \mu, \epsilon) := \limsup_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} \log(\mu(B(x, \epsilon, n)))$$

$$h^{BK-}(x, \mu, \epsilon) := \liminf_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} \log(\mu(B(x, \epsilon, n)))$$

Puisque $B(x, n, \epsilon) \subset T^{-1}B(Tx, n-1, \epsilon)$, la fonction $h^{BK+}(., \mu, \epsilon)$ (resp. $h^{BK-}(., \mu, \epsilon)$) est sous-invariante et est donc par ergodicité presque partout égale à une constante, que l'on note $h^{BK+}(\mu, \epsilon)$ (resp. $h^{BK-}(\mu, \epsilon)$).

Théorème 2.4.5 (Brin,Katok) *[15] Soit μ une mesure ergodique, alors*

$$\lim_{\epsilon\to 0} h^{BK+}(\mu, \epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0} h^{BK-}(\mu, \epsilon) = h(\mu)$$

On considère le candidat $\mathcal{H}^{BK+} := (h^{BK+}(., \epsilon_k))_{k\in\mathbb{N}}$, obtenu par prolongement harmonique sur $\mathcal{M}(X, T)$. On définit de même le candidat $\mathcal{H}^{BK-}$.

Les candidats $\mathcal{H}^{BK+}$ et $\mathcal{H}^{BK-}$ ont pour limite la fonction entropie métrique h d'après le Théorème 2.4.5 et par convergence monotone.

2.4.6 Entropie locale à la Newhouse

Ce candidat a été introduit par S.Newhouse dans [48], puis repris par T.Downarowicz [31], lequel remplaça uniquement l'hypothèse F compact par F borélien. Par régularité des mesures de probabilité, ce changement n'affecte pas la valeur du candidat. C'est le candidat utilisé par T.Downarowicz et A.Maass dans la preuve du théorème Antarctique (Théorème 5.5.16).

Définition 2.4.6 *Soit $x \in X$, $\epsilon > 0$, $\delta > 0$, $n \in \mathbb{N}$ et $F \subset X$ un ensemble borélien, on définit :*

$$H(n,\delta|x,F,\epsilon) := \log \max\{\sharp E \ : \ E \subset F \bigcap B(x,n,\epsilon) \text{ et } E \text{ ensemble } (n,\delta) \text{ séparé}\}$$

$$H(n,\delta|F,\epsilon) := \sup_{x\in F} H(n,\delta|x,F,\epsilon)$$

$$h(\delta|F,\epsilon) := \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} H(n,\delta|F,\epsilon)$$

$$h(X|F,\epsilon) := \lim_{\delta\to 0} h(\delta|F,\epsilon)$$

Soit μ une mesure ergodique, on définit :

$$h^{New}(X|\mu,\epsilon) := \lim_{\sigma\to 1} \inf_{F,\ \mu(F)>\sigma} h(X|F,\epsilon)$$

On considère le candidat $\mathcal{H}^{New} = (h_k^{New})_{k\in\mathbb{N}} := (h - h^{New}(X|.,\epsilon_k))_{k\in\mathbb{N}}$ obtenu par prolongement harmonique sur $\mathcal{M}(X,T)$. En fait $\mathcal{H}^{New}$ est un candidat d'entropie (c'est à dire $\lim \mathcal{H}^{New} = h$ ou encore $\lim_{\epsilon\to 0} h^{New}(X|.,\epsilon) = 0$) mais ce n'est pas complètement trivial (on le montrera en le comparant avec d'autres candidats (Théorème 2.5.4)). On peut aussi définir une notion similaire en remplaçant les boules de Bowen par des recouvrements ouverts. On obtient ainsi un candidat équivalent.

2.4.7 Entropie à la Misiurewicz

Le candidat de Misiurewicz est une formulation mesurée de l'entropie topologique locale de Misiurewicz [45]. Nous rappelons la formulation du candidat de Misiurewicz utilisant les recouvrements ouverts :

Candidat de Misiurewicz avec les recouvrements ouverts

Soient $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ deux recouvrements ouverts de X. Soit μ une mesure ergodique. Rappelons que pour tout $x \in X$, on a défini dans le paragraphe sur l'entropie de queue p.50 :

$$H(n,\mathcal{V}|x,\mathcal{U}) := \log \max\{\sharp\mathcal{F},\ \mathcal{F} \subset \mathcal{V}^n \text{ et } \mathcal{F} \text{ recouvre } U_x^n\}$$

où le maximum porte sur tous les éléments U_x^n du recouvrement itéré $\mathcal{U}^n$ contenant x. On a clairement $H(n+m,\mathcal{V}|x,\mathcal{U}) \leq H(n,\mathcal{V}|x,\mathcal{U}) + H(m,\mathcal{V}|T^n x,\mathcal{U})$. D'après le théorème sous-additif ergodique, on peut donc définir pour μ presque tout x :

$$h(\mathcal{V}|x,\mathcal{U}) := \lim_{n\to+\infty} \frac{H(n,\mathcal{V}|x,\mathcal{U})}{n}$$

$$h(\mathcal{V}|\mu,\mathcal{U}) := \int h(\mathcal{V}|x,\mathcal{U}) d\mu(x)$$

$$h^{Mis}(\mu,\mathcal{U}) := \sup_{\mathcal{V}} h(\mathcal{V}|\mu,\mathcal{U})$$

le supremum portant sur tous les recouvrements ouverts $\mathcal{V}$ de X.

Soit $(\mathcal{U}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de recouvrements ouverts telle que le diamètre de U_k tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$. On définit le candidat à la Misiurewicz comme suit : $\mathcal{H}^{Mis} := (h - h^{Mis}(.,\mathcal{U}_k))_{k\in\mathbb{N}}$.

Candidat de Misiurewicz avec les boules de Bowen

On peut aussi présenter le candidat de Misiurewicz au moyen des boules de Bowen. Soit $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ et soit $x \in X$, on définit avec les notations introduites p.50 :

$$h(\delta|x,\epsilon) := \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} H(n,\delta|x,\epsilon)$$

$$h(\delta|\mu,\epsilon) := \int h(\delta|x,\epsilon) d\mu(x)$$

$$h^{Mis}(\mu,\epsilon) := \lim_{\delta\to 0} h(\delta|\mu,\epsilon)$$

Soit $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels convergeant vers 0. On définit le candidat à la Misiurewicz comme suit : $\mathcal{H}^{Mis} := (h - h^{Mis}(.,\epsilon_k))_{k\in\mathbb{N}}$. On montre facilement en comparant boules de Bowen et recouvrements ouverts que l'on obtient en candidat équivalent au candidat de Misiurewicz obtenu à partir des recouvrements ouverts.

Nous verrons que le candidat de Misiurewicz n'est pas en général un candidat d'entropie, i.e. $\lim \mathcal{H} \neq h$.

2.5 Quelques résultats de comparaison des candidats

Nous présentons ici quelques résultats nouveaux de comparaison de candidats dans le cadre des endomorphismes.

2.5.1 Comparaison des candidats $\mathcal{H}^{Bow}$ et $\mathcal{H}^{Kat}_\sigma$

Théorème 2.5.1 *Soit $\sigma \in]0,1[$, les candidats $\mathcal{H}^{Bow}$ et $\mathcal{H}^{Kat}_\sigma$ sont équivalents.*

Preuve :

On montre tout d'abord que $\mathcal{H}^{Bow} \succeq \mathcal{H}^{Kat}_\sigma$. Soit μ une mesure ergodique. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\epsilon > 0$. Soit F un borélien de μ mesure plus grande que σ. Si $C \subset F$ est un ensemble (n,ϵ) séparé de cardinal maximal, alors $F \subset \bigcup_{x\in C} B(x,n,\epsilon)$. On en déduit que $h^{Bow}(\mu,\epsilon) \geq h^{Kat}_\sigma(\mu,\epsilon)$.

On montre maintenant que $\mathcal{H}^{Kat}_\sigma \succeq \mathcal{H}^{Bow}$. Fixons $\epsilon > 0$. Soit α arbitrairement petit et μ une mesure ergodique.

Notons A_n une union de (n,ϵ) boules de Bowen de μ mesure $> \sigma$ de cardinal minimal. Par définition de l'entropie à la Katok, il existe $K \in \mathbb{N}$, tel que A_n est une union d'au plus $exp\left(n(h^{Kat}_\sigma(\mu,\epsilon)+\alpha)\right)$ (n,ϵ) boules de Bowen pour $n \geq K$.

Notons $A := \limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Clairement, $\mu(A) > \sigma$. Soit $M \in \mathbb{N}$, tel que $\mu(\bigcup_{k=0}^{M} T^{-k}A) > 1-\alpha$. Soient L, $N \in \mathbb{N}$, tels que $L \geq N \geq \max\left(\frac{M}{\alpha}, K\right)$ et tels que $B := \bigcup_{k=0}^{M} T^{-k}(\bigcup_{N\leq n\leq L} A_n)$ vérifie $\mu(B) > 1-\alpha$. Notons $B_n := \{x \in X \mid \forall k > n, \frac{\sharp\{0\leq l\leq k | f^l(x)\notin B\}}{k} \leq \alpha\}$. D'après le théorème de Birkhoff, il existe P, tel que $\mu(B_P) > \sigma$.

On considère maintenant une orbite issue de B_P de longueurs $n \geq P + \frac{L}{\alpha}$. Nous la découpons en segments d'orbite disjoints de longueur $k \in [\![N, L]\!]$ et contenus dans un des recouvrements A_k, plus un reste constitué des "temps d'attente" entre ces segments qui sont inclus dans les trois catégories suivantes :

- en dehors de B : cela correspond à une fréquence $\leq \alpha$ par définition de B_P et car $n \geq P$;
- dans B mais en attente de durée $\leq M$ de $\bigcup_{N \leq n \leq L} A_n$, ce qui est encore négligeable car $M \leq \alpha N$;
- passage dans le dernier A_k avec $k \in [\![N, L]\!]$, si on en est pas sorti au temps n. La proportion du temps occupé par ce passage est encore $\leq \alpha$, car $k \leq L \leq \alpha n$.

On obtient ainsi un recouvrement de B_P par des $(n, 2\epsilon)$ boules de Bowen de cardinal au plus $exp(n(h_\sigma^{Kat}(\mu, \epsilon) + \phi(\alpha))$, où $\phi(t) \to 0$ quand $t \to 0$. Enfin si D est un sous-ensemble de B_P, qui est $(n, 4\epsilon)$ séparé, il existe au plus un élément de D par $(n, 2\epsilon)$ boule de Bowen. On conclut donc que

$$h^{Bow}(\mu, 4\epsilon) \leq h_\sigma^{Kat}(\mu, \epsilon)$$

□

2.5.2 Comparaison des candidats d'entropie Katok et Brin-Katok

Théorème 2.5.2

$$\mathcal{H}_{3/4}^{Kat} \succeq \mathcal{H}^{BK-}$$

Preuve : Nous allons montrer que $\mathcal{H}_{3/4}^{Kat} \succeq \mathcal{H}^{BK-}$. Soit $\epsilon > 0$ et soit μ une mesure ergodique. Il existe un ensemble F de mesure $\mu(F) > \frac{3}{4}$ satisfaisant la propriété suivante. Pour tout $\gamma > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > M$ et tout $x \in F$:

$$-\frac{1}{n} \log \mu(B(x, n, 2\epsilon)) \geq h^{BK-}(\mu, 2\epsilon) - \gamma$$

Soit $\mathcal{B}^{\epsilon,n} := \bigcup_{y \in C^{\epsilon,n}} B(y, n, \epsilon)$ une collection de (n, ϵ) boules de Bowen de μ mesure $> 3/4$, de cardinal minimal. Notons $E^{\epsilon,n} := \{y \in C^{\epsilon,n},\ B(y, n, \epsilon) \cap F \neq \emptyset\}$; on a $\mu(\bigcup_{y \in E^{\epsilon,n}} B(y, n, \epsilon)) > 1/2$. A tout $y \in E^{\epsilon,n}$ on associe un $z \in F$, tel que $z \in B(y, n, \epsilon) \cap F$. Alors $\mu(\cup_z B(z, n, 2\epsilon)) > 1/2$. On a donc :

$$\sharp \mathcal{C}^{\epsilon,n} \times \sup_{z \in F} \mu(B(z, n, 2\epsilon)) \geq 1/2$$

donc

$$\frac{\log \sharp \mathcal{C}^{\epsilon,n}}{n} \geq \inf_{z \in F} \frac{-\log \mu(B(z, n, 2\epsilon))}{n} - \frac{\log 2}{n}$$

Puis par définition de F, on obtient en prenant la limite logarithmique en n :

$$h_{3/4}^{Kat}(\mu, \epsilon) \geq h^{BK-}(\mu, 2\epsilon)$$

□

On a aussi la domination suivante :

Théorème 2.5.3

$$\mathcal{H}^{BK+} \succeq \mathcal{H}_{1/2}^{Kat}$$

Preuve : Soit $\epsilon, \gamma > 0$ et μ une mesure ergodique, notons $A_n = \{x \in X,\ \mu(B(x, n, \epsilon)) \geq e^{-n(h^{BK+}(\mu,\epsilon)+\gamma)}\}$. Par définition de h^{BK+}, on a $\lim_{n \to +\infty} \mu(A_n) = 1$. Soit n un entier assez grand de sorte que $\mu(A_n) > 1/2$.

On choisit x_1 arbitrairement dans A_n, puis $x_2 \in A_n$ tel que $B(x_2,n,\epsilon) \cap B(x_1,n,\epsilon) = \emptyset$ ... puis $x_{i+1} \in A_n$ tel que $B(x_{i+1},n,\epsilon) \bigcap \left(\bigcup_{k=1,\dots,i} B(x_k,n,\epsilon)\right) = \emptyset$.

Les boules de Bowen ainsi définies étant disjointes et de volume minoré, le processus s'arrête pour $i =: I_n$. On obtient ainsi $\sharp I_n$ boules de Bowen disjointes de volume "grand", on a donc

$$\sharp I_n \times e^{-n(h^{BK+}(\mu,\epsilon)+\gamma)} \leq 1$$

Par ailleurs, par définition de I_n, on a aussi $A_n \subset \bigcup_{k=1,\dots,I_n} B(x_k, 2\epsilon, n)$. Donc

$$h^{BK+}(\mu,\epsilon) + \gamma \geq \limsup_{n\to+\infty} \frac{\log \sharp I_n}{n} \geq h^{Kat}_{1/2}(\mu, 2\epsilon)$$

Ceci étant vrai pour tout $\gamma > 0$, on obtient $h^{BK+}(\mu,\epsilon) \geq h^{Kat}_{1/2}(\mu, 2\epsilon)$.

□

2.5.3 Comparaison des candidats Newhouse et Brin-Katok

Théorème 2.5.4

$$\mathcal{H}^{New} \succeq \mathcal{H}^{BK-}$$

Preuve :

Soit μ une mesure ergodique, $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ et $\sigma \in]0,1[$. Il existe un ensemble F^σ_k de mesure $\mu(F^\sigma_k) > 1 - \frac{1}{4^k} \times 3(1-\sigma)$ satisfaisant la propriété suivante. Pour tout $\gamma > 0$, il existe $M_k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > M_k$ et tout $x \in F^\sigma_k$:

$$-\frac{1}{n} \log \mu(B(x,n,\epsilon_k)) \geq h^{BK-}(\mu,\epsilon_k) - \gamma$$

$$-\frac{1}{n} \log \mu(B(x,n,\epsilon_k)) \leq h^{BK+}(\mu,\epsilon_k) + \gamma$$

Notons $F^\sigma := \bigcap_{k\in\mathbb{N}-\{0\}} F^\sigma_k$. On vérifie facilement que

$$\mu\left((F^\sigma)^c\right) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu\left((F^\sigma_k)^c\right) < 1 - \sigma$$

et donc

$$\mu(F) > \sigma$$

Soient $l > k$ deux entiers, tels que $\epsilon_l < \frac{\epsilon_k}{2}$ et soit $x \in F$. Considérons un ensemble $(2\epsilon_l, n)$ séparé E inclus dans $F \bigcap B(x,n,\frac{\epsilon_k}{2})$ de cardinal maximal. Par définition de l'entropie à la Newhouse $H(n, 2\epsilon_l | x, F, \frac{\epsilon_k}{2}) = \log \sharp E$. L'ensemble E étant $(2\epsilon_l, n)$ séparé, les boules de Bowen $B(z,n,\epsilon_l)$ pour $z \in E$ sont disjointes. De plus ces boules de Bowen sont incluses dans $B(x,n,\epsilon_k)$, car $E \subset B(x,n,\frac{\epsilon_k}{2})$ et $\epsilon_l < \frac{\epsilon_k}{2}$. On en déduit que :

$$H(n, 2\epsilon_l | x, F, \frac{\epsilon_k}{2}) + \inf_{z\in F} \log \mu(B(z,n,\epsilon_l)) \leq \log \mu(B(x,n,\epsilon_k))$$

Rappelons que par définition $H(n, 2\epsilon_l | F, \frac{\epsilon_k}{2}) = \sup_{x\in F} H(n, 2\epsilon_l | x, F, \frac{\epsilon_k}{2})$. On obtient donc en passant au supremum pour $x \in F$:

$$H(n, 2\epsilon_l | F, \frac{\epsilon_k}{2}) + \inf_{z\in F} \log \mu(B(z,n,\epsilon_l)) \leq \sup_{z\in F} \log \mu(B(z,n,\epsilon_k))$$

En prenant la limite logarithmique en n, on a :

$$h(2\epsilon_l | F, \frac{\epsilon_k}{2}) + \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \inf_{z\in F} \log \mu(B(z,n,\epsilon_l)) \leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sup_{z\in F} \log \mu(B(z,n,\epsilon_k))$$

$$h(2\epsilon_l|F,\frac{\epsilon_k}{2}) \leq \left(\limsup_{n\to+\infty} -\frac{1}{n}\inf_{z\in F}\log\mu(B(z,n,\epsilon_l))\right) - \left(\liminf_{n\to+\infty} -\frac{1}{n}\sup_{z\in F}\log\mu(B(z,n,\epsilon_k))\right)$$

puis par définition de F :

$$h(2\epsilon_l|F,\frac{\epsilon_k}{2}) \leq h^{BK+}(\mu,\epsilon_l) - h^{BK-}(\mu,\epsilon_k) + 2\gamma$$

En prenant la limite quand $l \to +\infty$, puis quand $\sigma \to 1$, on obtient :

$$h^{New}(X|\mu,\frac{\epsilon_k}{2}) \leq h(\mu) - h^{BK-}(\mu,\epsilon_k)$$

□

2.6 Structure d'entropie

Soit T une application continue d'un espace métrisable compact X dans lui-même d'entropie finie. D'après la proposition 2.2.9, un tel système dynamique admet une extension zéro dimensionnelle principale. Nous considérons maintenant une famille particulière de candidats sur $\mathcal{M}(X,T)$:

Définition 2.6.1 *Soient (X',T') une extension zéro-dimensionelle principale de (X,T) et $\mathcal{P} = (P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite raffinante de partitions clopen de X'. Une **structure d'entropie** $\mathcal{H} = (h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un candidat de (X,T), tel que le candidat relevé $\pi\mathcal{H}$ de $\mathcal{M}(X',T')$ est équivalent au candidat $\mathcal{H}_{\mathcal{P}} = (h(.,P_k))_{k\in\mathbb{N}}$.*

Lemme 2.6.2 *(Théorème 7.0.1 (1) de [31]) Cette définition ne dépend ni du choix de l'extension principale zéro dimensionnelle, ni du choix de la suite raffinante de partitions essentielles de cette extension.*

PREUVE : Il suffit pour montrer cela d'exhiber un candidat $\mathcal{H}$ de (X,T) tel que $\pi\mathcal{H} \simeq \mathcal{H}_{\mathcal{P}}$ pour toute extension zéro-dimensionnelle principale et pour toute suite raffinante de partitions essentielles $\mathcal{P}$. On va montrer que c'est le cas de $\mathcal{H}^{fun} := (h(.,\mathcal{F}_k))_{k\in\mathbb{N}}$, où $(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite raffinante de familles de fonctions continues. Soit $\pi : (X',T') \to (X,T)$ une extension zéro-dimensionnelle principale et soit $\mathcal{P} := (P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite raffinante de partitions clopen de Y. Pour tout entier k, on note $\pi\mathcal{F}_k := \{f\circ\pi,\ f\in\mathcal{F}_k\}$. On applique la Proposition 1.2.43 avec les suites de fonctions $\pi\mathcal{H}^{fun} = (h(.,\pi\mathcal{F}_k))_{k\in\mathbb{N}}$, $\mathcal{H}^{\mathcal{P}}$ et $\mathcal{C} := (h(.,(\pi\mathcal{F}_n)\bigcup\mathcal{F}_{P_m}) - h(.,\pi\mathcal{F}_n))_{m,n\in\mathbb{N}}$. Remarquons que π étant principale, $\lim\pi\mathcal{H}^{fun} = \lim\mathcal{H}^{\mathcal{P}} = h$ et donc $\lim_{n\to+\infty} c_{m,n} \leq h - \lim\pi\mathcal{H}^{fun} = 0$. On déduit donc que $\pi\mathcal{H}^{fun} \succeq \mathcal{H}^{\mathcal{P}}$. L'autre inégalité s'obtient en inversant les rôles de $(\mathcal{F}_{P_k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\pi\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}}$. □

Remarque 2.6.3 *Deux structures d'entropie sont uniformément équivalentes et tout candidat, qui est équivalent à une structure d'entropie, est aussi une structure d'entropie. En d'autres termes, l'ensemble des structures d'entropie est une classe d'équivalence pour la relation d'équivalence $\simeq$ sur les candidats.*

D'après la remarque précédente et la proposition 1.2.42, la suite transfinie $(u_\alpha^{\mathcal{H}})_\alpha$ et l'ordre d'accumulation $\alpha_{\mathcal{H}}$ sont indépendants du choix d'une structure d'entropie. Nous utilisons les notations suivantes :

Notations 2.6.4 *Pour tout ordinal γ, on note simplement u_γ la fonction $u_\gamma^{\mathcal{H}}$ pour toute structure d'entropie $\mathcal{H}$. De même, α^* désigne l'ordre d'accumulation $\alpha_{\mathcal{H}}$ de toute structure d'entropie $\mathcal{H}$ et est appelé **l'ordre d'accumulation** de (X,T).*

Les structures d'entropies sont préservées par les extensions principales :

Proposition 2.6.5 *Soit $\pi : (Y,S) \to (X,T)$ une extension principale de (X,T) alors $\mathcal{H}$ est une structure d'entropie de (X,T) si et seulement si $\pi\mathcal{H}$ est une structure d'entropie de (Y,S)*

PREUVE : Soit $\psi : (X',T') \to (Y,S)$ une extension zéro-dimensionnelle principale de (Y,S), alors $\pi \circ \psi$ est une extension zéro-dimensionnelle principale de (X,T). D'après le lemme 2.6.2, il suffit de considérer une seule extension zero-dimensionnelle principale pour montrer qu'un candidat est une structure d'entropie. Donc $\mathcal{H}$ est une structure d'entropie si et seulement si $(\pi \circ \psi)\mathcal{H} = \psi(\pi\mathcal{H})$ est équivalent à $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$, où $\mathcal{P}$ est une suite raffinante de partitions clopen de (X',T'), c'est à dire si et seulement si $\pi\mathcal{H}$ est une structure d'entropie. □

Dans [31], T.Downarowicz définit une structure d'entropie comme précédemment (Définition 2.6.1) dans le cas où T est un homéomorphisme. Dans le cas où l'application est non inversible, il définit une structure d'entropie comme un candidat $\mathcal{H}$ de $\mathcal{M}(X,T)$ s'écrivant sous la forme $\mathcal{H} = \pi_{nat}^{-1}\mathcal{G}$ avec $\mathcal{G}$ une structure d'entropie de l'extension naturelle $(\overline{X},\overline{T})$ de (X,T) (Cf Appendice B). La définition de T.Downarowicz et la notre coïncident. En effet, l'extension naturelle étant principale, on a d'après la Proposition 2.6.5 :

Corollaire 2.6.6 *Soit $\pi_{nat} : (\overline{X},\overline{T}) \to (X,T)$ l'extension naturelle de (X,T), alors $\mathcal{H}$ est une structure d'entropie de (X,T) si et seulement si $\pi_{nat}\mathcal{H}$ est une structure d'entropie de $(\overline{X},\overline{T})$.*

2.7 Exemples de structures d'entropie

Dans [31], T. Downarowicz travaille principalement dans le cadre des homéomorphismes. Il a souvent recours à l'existence de partitions essentielles pour le produit de la dynamique avec une rotation irrationnelle du cercle. Or rappelons que ce résultat n'a été établi par E. Lindenstrauss et B. Weiss que dans le cas des homéomorphismes. Nous résumons dans un premier temps une partie des résultats obtenus par T. Downarowicz dans le cadre des homéomorphismes, puis nous déduisons de nouvelles structures d'entropie pour les applications au moyen des résultats de comparaison obtenus précédemment.

2.7.1 Cadre des homéomorphismes

On suppose tout au long de ce paragraphe que $T : X \to X$ est un homéomorphisme. Concernant les candidats d'entropie $\mathcal{H}^{BK+}$, $\mathcal{H}^{New}$, $\mathcal{H}^{Bow}$ et $\mathcal{H}^{Kat}$, T. Downarowicz [31] montre :

Théorème 2.7.1 (Downarowicz) *[31] Les candidats $\mathcal{H}^{BK+}$, $\mathcal{H}^{New}$, $\mathcal{H}^{Bow}$ et $\mathcal{H}_{\sigma}^{Kat}$, pour tout $1 > \sigma > 0$, sont des structures d'entropie.*

En fait, en reprenant les travaux de Downarowicz, il n'est pas difficile de montrer :

Corollaire 2.7.2 *Le candidat $\mathcal{H}^{BK-}$ est une structure d'entropie.*

PREUVE : Il est clair que $\mathcal{H}^{BK+} \succeq \mathcal{H}^{BK-}$. De plus l'argument (Lemme 7.1.10(1) de [31]) pour montrer que $\mathcal{H}^{BK+} \succeq \mathcal{H}^{ref}$ s'applique aussi à $\mathcal{H}^{BK-}$. □

Examinons maintenant le cas du candidat de Misiurewicz. Remarquons tout d'abord que $\mathcal{H}^{Mis}$ n'est pas en général un candidat d'entropie, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 2.7.3 *Soit (X,T) un homéomorphisme du plan affine par morceaux d'entropie positive (voir définition p. 144). Notons $\widehat{X} \subset \mathbb{R}^3$ la pyramide de base $X \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ et de sommet $S = (0,0,1)$. On prolonge T par $\widehat{T}$ sur $\widehat{X}$ de façon affine en fixant S. En particulier $\widehat{T}$ préserve la coordonnée en z. Notons δ_S la mesure de dirac en S. Pour tout entier k, on note U_k le voisinage $U_k := \{z > 1 - \frac{1}{k}\}$*

de S et on considère un recouvrement ouvert $\mathcal{U}_k$ de $\widehat{X}$ tel que le diamètre de $\mathcal{U}_k$ est égal à $diam(U_k)$. Remarquons alors que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$h^{Mis}(\delta_S, \mathcal{U}_k) \geq \sup_{\mathcal{V}} \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \max\{\sharp \mathcal{F} \subset \mathcal{V}^n \text{ et } \mathcal{F} \text{ recouvre } U_k\} = h_{top}(T) > 0$$

En particulier $\lim(\mathcal{H}^{Mis}) \neq h$. On en déduit que $\mathcal{H}^{Mis}$ n'est pas une structure d'entropie.

Pour le candidat de Misiurewicz, T. Downarowicz obtient cependant les résultats suivants :

Théorème 2.7.4 (Downarowicz) *[31] Soit X un espace métrisable compact et soit $T : X \to X$ un homéomorphisme, alors le candidat $\mathcal{H}^{Mis}$ vérifie :*
- $\mathcal{H} \succeq \mathcal{H}^{Mis}$ pour toute structure d'entropie $\mathcal{H}$;
- $u_1^{\mathcal{H}^{Mis}} = u_1$.

T. Downarowicz construit aussi un exemple d'homéomorphisme avec $u_2^{\mathcal{H}^{Mis}} > u_2$. Remarquons enfin que l'égalité $u_1^{\mathcal{H}^{Mis}} = u_1$ entraine d'après le principe varaitionnel que l'on rappellera dans le paragraphe suivant (Théorème 2.8.1) que $\sup_{\mu \in \mathcal{M}(X,T)} u_1^{\mathcal{H}^{Mis}}(\mu) = h^*(T)$.

Enfin concernant le candidat associé à une suite raffinante de partitions $\mathcal{P}$, on a :

Théorème 2.7.5 (Downarowicz) *[31] Soit X un espace métrisable et soit $T : X \to X$ un homéomorphisme. Considérons $\mathcal{P}$ une suite raffinante de partitions de X. Alors $\mathcal{H}_\mathcal{P} \succeq \mathcal{H}$ pour toute structure d'entropie $\mathcal{H}$. Il existe des exemples où $\mathcal{H} \succeq \mathcal{H}_\mathcal{P}$ est faux pour toute structure d'entropie $\mathcal{H}$.*

Cependant dans le cas où les partitions sont essentielles, on obtient une structure d'entropie :

Théorème 2.7.6 *Si $\mathcal{P} = (P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite raffinante de partitions essentielles alors, $\mathcal{H}_\mathcal{P}$ est une structure d'entropie.*

PREUVE : En effet chaque partition P_k se relève en une partition clopen O_k dans l'extension principale zéro-dimensionnelle associée à $\mathcal{P}$ (cf appendix A) à un ensemble près de mesure μ nulle pour tout $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$. Il s'ensuit que $\pi \mathcal{H}_\mathcal{P} = \mathcal{H}_\mathcal{O}$ avec $\mathcal{O} = (O_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Par définition, $\mathcal{H}^\mathcal{P}$ est donc une structure d'entropie. □

2.7.2 Cadre des applications

Résultats connus

Théorème 2.7.7 (Downarowicz) *[31] Le candidat $\mathcal{H}^{BK+}$ est une structure d'entropie pour les applications et $\mathcal{H} \succeq \mathcal{H}^{New}$ pour toute structure d'entropie $\mathcal{H}$.*

En fait l'argument de T. Downarowicz (Claim 10.0.6 de [31]) pour montrer que $\mathcal{H}^{BK+}$ s'applique tout aussi bien à $\mathcal{H}^{BK-}$.

Conséquences des comparaisons de candidats obtenues précédemment

Théorème 2.7.8 *Les candidats $\mathcal{H}^{BK+}$, $\mathcal{H}^{BK-}$, $\mathcal{H}^{New}$ et $\mathcal{H}_\sigma^{Kat}$, pour tout $1 > \sigma > 0$, sont des structures d'entropie.*

Dans [29], T.Downarowicz et A.Maass travaillent avec le candidat de Newhouse pour établir l'existence d'extensions symboliques pour les applications de l'intervalle de classe $\mathcal{C}^r$. Le théorème précédent nous assure que ce candidat est bien une structure d'entropie.

Candidat de Misiurewicz

Théorème 2.7.9 *Dans le cadre des applications non inversibles, on a encore :*
- $\mathcal{H} \succeq \mathcal{H}^{Mis}$ *pour toute structure d'entropie* $\mathcal{H}$ *;*
- $u_1^{\mathcal{H}^{Mis}} = u_1$.

Preuve :

Puisque le théorème est vrai dans le cadre des homéomorphismes (Théorème 2.7.4), il suffit de montrer que $\mathcal{H}^{Mis}$ reste inchangé en passant à l'extension naturelle. Plus précisément si $\pi_{nat} : (\overline{X}, \overline{T}) \to (X, T)$ désigne l'extension naturelle de (X, T), nous allons montrer que $\pi_{nat}\mathcal{H}_X^{Mis} \simeq \mathcal{H}_{\overline{X}}^{Mis}$. Admettons-le et vérifions l'affirmation du théorème 2.7.9. Rappelons que $\mathcal{H}$ est une structure d'entropie de (X, T) si et seulement si $\pi_{nat}\mathcal{H}$ est une structure d'entropie de $(\overline{X}, \overline{T})$ (Corollaire 2.6.6). Donc on a

$$\pi_{nat}\mathcal{G} \simeq \mathcal{H} \succeq \mathcal{H}_{\overline{X}}^{Mis} \simeq \pi_{nat}\mathcal{H}_X^{Mis}$$

pour toute structure d'entropie $\mathcal{H}$ de $(\overline{X}, \overline{T})$ et toute structure d'entropie $\mathcal{G}$ de (X, T). On en déduit trivialement que $\mathcal{G} \succeq \mathcal{H}_X^{Mis}$ pour toute structure d'entropie $\mathcal{G}$ de (X, T). Enfin d'après la proposition 1.2.39, on a $u_1^{\mathcal{F}} = \left(\pi_{nat}\left(u_1^{\pi_{nat}\mathcal{F}}\right)\right)^{[\mathcal{M}(X,T)]}$ pour tout candidat $\mathcal{F}$ de $\mathcal{M}(X, T)$. On a donc :

$$u_1^{\mathcal{H}_X^{Mis}} = \left(\pi_{nat}\left(u_1^{\pi_{nat}\mathcal{H}_X^{Mis}}\right)\right)^{[\mathcal{M}(X,T)]}$$

Les deux candidats $\pi_{nat}\mathcal{H}_X^{Mis}$ et $\mathcal{H}_{\overline{X}}^{Mis}$ étant équivalents, ils ont même u_1 d'après la Proposition 1.2.42 :

$$\left(\pi_{nat}\left(u_1^{\pi_{nat}\mathcal{H}_X^{Mis}}\right)\right)^{[\mathcal{M}(X,T)]} = \left(\pi_{nat}\left(u_1^{\mathcal{H}_{\overline{X}}^{Mis}}\right)\right)^{[\mathcal{M}(X,T)]}$$

Puis d'après le Théorème 2.7.4, on a pour toute structure d'entropie $\mathcal{H}$ de $(\overline{X}, \overline{T})$:

$$\left(\pi_{nat}\left(u_1^{\mathcal{H}_{\overline{X}}^{Mis}}\right)\right)^{[\mathcal{M}(X,T)]} = \left(\pi_{nat}\left(u_1^{\mathcal{H}}\right)\right)^{[\mathcal{M}(X,T)]}$$

Enfin d'après le Corollaire 2.6.6 et en appliquant de nouveau la Proposition 1.2.39, on a pour toute structure d'entropie $\mathcal{G}$ de (X, T) :

$$\left(\pi_{nat}\left(u_1^{\mathcal{H}}\right)\right)^{[\mathcal{M}(X,T)]} = \left(\pi_{nat}\left(u_1^{\pi_{nat}\mathcal{G}}\right)\right)^{[\mathcal{M}(X,T)]} = u_1^{\mathcal{G}} = u_1$$

On conclut que $u_1^{\mathcal{H}^{Mis}} = u_1$. Il nous reste donc à montrer que $\pi\mathcal{H}_X^{Mis} \simeq \mathcal{H}_{\overline{X}}^{Mis}$.

Soit $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$. Soit $(\mathcal{U}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de recouvrements ouverts de X tel que $\mathrm{diam}(U_k) \to 0$ quand k tend vers l'infini. Soit $\mathcal{V}$ un recouvrement ouvert de X, il est clair que $H(n, \mathcal{V}|x, \mathcal{U}_k) = H(n, \overline{\mathcal{V}}|\overline{x}, \overline{\mathcal{U}_k})$, où $\overline{\mathcal{U}_k}$ et $\overline{\mathcal{V}}$ désignent respectivement les relevés à l'extension naturelle des recouvrements $\mathcal{U}_k$ et $\mathcal{V}$. Mais à priori, le diamètre de $\overline{\mathcal{U}_k}$ ne tend pas vers 0. Par contre c'est le cas du recouvrement $\overline{\mathcal{U}'_k} := \overline{T}^k(\overline{\mathcal{U}_k}^{2k})$.

Montrons que pour tout $\overline{x} \in \overline{X}$, on a : $h(\overline{\mathcal{V}}|\overline{T}^k\overline{x}, \overline{\mathcal{U}'_k}) = h(\overline{\mathcal{V}}|\overline{x}, \overline{\mathcal{U}_k})$. Soit $\mathcal{F}_n \subset \overline{\mathcal{V}}^n$ recouvrant $(\overline{\mathcal{U}'_k}^n)_{\overline{x}} = \overline{T}^k((\overline{\mathcal{U}_k}^{2k+n})_{\overline{T}^{-k}\overline{x}})$, alors $\overline{T}^{-k}\mathcal{F}_n$ recouvre $(\overline{\mathcal{U}_k}^{2k+n})_{\overline{T}^{-k}\overline{x}}$. Or puisque $\mathcal{F}_n \subset \overline{\mathcal{V}}^n$, la collection d'ouverts $\overline{T}^{-k}\mathcal{F}_n$ s'écrit comme une union de au plus $\sharp\mathcal{V}^{2k} \times \sharp\mathcal{F}_n$ éléments de $\overline{\mathcal{V}}^{2k+n}$. On conclut que $h(\overline{\mathcal{V}}|\overline{x}, \overline{\mathcal{U}'_k}) \geq h(\overline{\mathcal{V}}|\overline{T}^{-k}\overline{x}, \overline{\mathcal{U}_k})$ pour tout $\overline{x} \in \overline{X}$ ou encore $h(\overline{\mathcal{V}}|\overline{T}^k\overline{x}, \overline{\mathcal{U}'_k}) \geq h(\overline{\mathcal{V}}|\overline{x}, \overline{\mathcal{U}_k})$ pour tout $\overline{x} \in \overline{X}$.

Réciproquement, soit $\mathcal{G}_{2k+n} \subset \mathcal{V}^{2k+n}$ recouvrant $(\overline{\mathcal{U}_k})^n_{\overline{x}}$. Donc $\overline{T}^k(\mathcal{G}_{2k+n})$ recouvre $\overline{T}^k(\overline{\mathcal{U}_k}^{2k+n}) = (\overline{\mathcal{U}'_k}^n)_{\overline{T}^k\overline{x}}$. Clairement $\overline{T}^k(\mathcal{G}_{2k+n})$ est inclus dans une union de au plus $\sharp\mathcal{G}_{2k+n}$ éléments de $\mathcal{V}^n$. On

conclut que $h(\overline{\mathcal{V}}|\overline{T}^k\overline{x},\overline{\mathcal{U}'_k}) \leq h(\overline{\mathcal{V}}|\overline{x},\overline{\mathcal{U}_k})$.

On conclut par invariance de μ, que

$$h(\overline{\mathcal{V}}|(\pi^*_{nat})^{-1}(\mu),\overline{\mathcal{U}'_k}) = h(\overline{\mathcal{V}}|(\pi^*_{nat})^{-1}(\mu),\overline{\mathcal{U}_k}) = h(\mathcal{V}|\mu,\mathcal{U}_k)$$

De la même façon, on montre que : $h(\overline{T}^p\overline{\mathcal{V}}^{2p}|(\pi^*_{nat})^{-1}(\mu),\overline{\mathcal{U}'_k}) = h(\overline{\mathcal{V}}|(\pi^*_{nat})^{-1}(\mu),\overline{\mathcal{U}'_k})$ pour tout entier p. Finalement, en prenant le supremum sur les recouvrements ouverts $\mathcal{V}$ de X, on obtient pour tout entier p :

$$\sup_{\mathcal{V}} h(\overline{T}^p\overline{\mathcal{V}}^{2p}|(\pi^*_{nat})^{-1}(\mu),\overline{\mathcal{U}'_k}) = h^{Mis}(\mu,\mathcal{U}_k)$$

Si $\mathcal{W}$ et $\mathcal{W}'$ de $\overline{X}$ sont deux recouvrements ouverts, tels que le diamètre de $\mathcal{W}$ est strictement inférieur au nombre de Lebesgue de $\mathcal{W}'$ alors pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de $\overline{X}$, on a clairement : $h(\mathcal{W}'|(\pi^*_{nat})^{-1}(\mu),\mathcal{U}) \leq h(\mathcal{W}|(\pi^*_{nat})^{-1}(\mu),\mathcal{U})$. Puisque $\inf\{\mathrm{diam}(\overline{T}^p\overline{\mathcal{V}}^{2p}) \ : \ \mathcal{V}$ recouvrement ouvert de X et $p \in \mathbb{N}\} = 0$, on conclut que :

$$h^{Mis}((\pi^*_{nat})^{-1}(\mu),\overline{\mathcal{U}'_k}) = h^{Mis}(\mu,\mathcal{U}_k)$$

Il s'en suit que : $\mathcal{H}^{Mis}_X \simeq \pi^{-1}_{nat}\mathcal{H}^{Mis}_{\overline{X}}$ ou encore π^*_{nat} étant un homéomorphisme : $\pi\mathcal{H}^{Mis}_X \simeq \mathcal{H}^{Mis}_{\overline{X}}$.

□

Suites raffinantes de partitions de l'intervalle

Dans ce dernier paragraphe, nous montrons que le candidat associé à toute suite raffinante de partitions topologiques en intervalles de $[0,1]$ est une structure d'entropie.

Proposition 2.7.10 *Soit T une application de l'intervalle et $\mathcal{P}$ une suite raffinante de partitions topologiques en intervalles de $[0,1]$, alors $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$ est une structure d'entropie.*

PREUVE : Il suffit de montrer que $\mathcal{H}^{\mathcal{P}}$ et $\mathcal{H}^{fun}$ sont équivalents. Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite raffinante de partitions topologiques en intervalles et $(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite raffinante de famille de fonctions continues. D'après la proposition 1.2.43, il suffit de remarquer que les fonctions $h(.,\mathcal{F}_n \bigcup \mathcal{F}_{P_m}) - h(.,\mathcal{F}_{P_m})$ et $h(.,\mathcal{F}_n \bigcup \mathcal{F}_{P_m}) - h(.,\mathcal{F}_{P_m})$ sont s.c.s. Ces propriétés de semi-continuité s'établissent de façon analogue à la Proposition 2.2.18. □

2.8 Principe variationnel pour l'entropie de queue

Nous énonçons maintenant le principe variationnel pour l'entropie de queue, qui est dû à T. Downarowicz dans le cadre des homéomorphismes. La preuve initiale est relativement complexe. Elle utilise des résultats fins sur le candidat de Misiurewicz ainsi que le principe variationnel de Ledrappier-Walters pour l'entropie d'une extension.

Théorème 2.8.1 (Downarowicz, D.B.) *Soit X un espace métrisable compact et $T : X \to X$ une application continue d'entropie topologique finie, alors*

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}(X,T)} u(\mu) = h^*(T)$$

De plus il existe une mesure $\mu \in \overline{\mathcal{M}_e(X,T)}$ telle que $u(\mu) = h^*(T)$.

La dernière affirmation n'a que peu d'intérêt dynamique. Tout d'abord la fonction u étant s.c.s., elle atteint son supremum sur le compact $\mathcal{M}(X,T)$. Enfin dans beaucoup de cas dynamiques, la clôture des mesures ergodiques correspond à l'ensemble des mesures invariantes. C'est par exemple le cas sous l'hypothèse de spécification qui entraîne que les mesures périodiques sont denses dans les mesures invariantes [28]. L'affirmation est donc tautologique sous cette hypothèse.

Remarque 2.8.2 *En général la fonction u n'atteint pas son maximum sur les mesures ergodiques. Il est également faux que $\sup_{\mu\in\mathcal{M}_e(X,T)} u(\mu) = h^*(T)$. Voir Exemple 1.6.4 et Théorème 2.3.2.*

Cas où (X,T) admet une suite raffinante de partitions essentielles

On suppose tout d'abord que (X,T) admet une suite raffinante de partitions essentielles, $\mathcal{P} := (P_k)_{k\in\mathbb{N}}$. D'après le théorème 2.7.6, le candidat $\mathcal{H}^{\mathcal{P}}$ est une structure d'entropie. Il suffit donc de montrer le principe variationnel pour l'entropie de queue pour le candidat $\mathcal{H}^{\mathcal{P}}$.

D'après le théorème 2.2.15, on a, pour tout $l > k \in \mathbb{N}$, le principe variationnel suivant :

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}(X,T)} h(\mu, P_l|P_k) = h(T, P_l|P_k) \tag{2.7}$$

Mais les partitions essentielles étant topologiques (Lemme 2.2.11), on peut calculer l'entropie de queue à partir des entropies combinatoires (Proposition 2.2.14) :

$$\lim_{k\to+\infty}\lim_{l\to+\infty} h(T, P_l|P_k) = h^*(T) \tag{2.8}$$

Enfin d'après la Proposition 1.2.14 :

$$\lim_{k\to+\infty}\lim_{l\to+\infty}\sup_{\mu\in\mathcal{M}(X,T)} h(\mu, P_l|P_k) = \sup_{\mu\in\mathcal{M}(X,T)} u(\mu) \tag{2.9}$$

On obtient le principe variationnel pour l'entropie de queue en combinant les trois égalités (2.7), (2.8) et (2.9).

Preuve du principe variationnel dans le cas général

Soit X un espace métrisable compact et $T : X \to X$ une application continue d'entropie topologique finie. D'après le corollaire 2.2.8, le produit de l'extension naturelle $(\overline{X}, \overline{T})$ de (X,T) avec une rotation irrationnelle du cercle $(R_\theta, \mathbb{S}^1)$ admet une suite raffinante de partitions essentielles.

On a donc d'après le cas précédent :

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}(\overline{X}\times\mathbb{S}^1,\overline{T}\times R_\theta)} u(\mu) = h^*(\overline{T}\times R_\theta) \tag{2.10}$$

D'après la formule pour l'entropie de queue d'un produit (Lemme 2.1.10) et de l'entropie de queue de l'extension naturelle (Lemme 2.1.11) on a aussi :

$$h^*(\overline{T}\times R_\theta) = h^*(T) \tag{2.11}$$

De plus l'extension $\pi : (\overline{X}\times\mathbb{S}^1, \overline{T}\times R_\theta) \to (X,T)$ étant principale, si $\mathcal{H}$ est une structure d'entropie de $\overline{T}\times R_\theta$, alors le candidat projeté $\pi\mathcal{H}$ est une structure d'entropie de T d'après la Proposition 2.6.5. Enfin d'après la Proposition 1.2.39, on a la relation $(u^{\pi\mathcal{H}})^{[\mathcal{M}(X,T)]} = u^{\mathcal{H}}$ et en

particulier, par surjectivité de π^*, on a $\sup_{\mu\in\mathcal{M}(X,T)} u^{\pi\mathcal{H}}(\mu) = \sup_{\mu\in\mathcal{M}(X\times\mathbb{S}^1,T\times R_\theta)} u^{\mathcal{H}}(\mu)$. On en déduit que :

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}(X,T)} u(\mu) = \sup_{\mu\in\mathcal{M}(\overline{X}\times\mathbb{S}^1,\overline{T}\times R_\theta)} u(\mu) \tag{2.12}$$

On obtient donc en combinant les égalités précédentes (2.10), (2.11) et (2.12) :

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}(X,T)} u(\mu) = h^*(T)$$

2.8.1 Cas de l'intervalle

La preuve du principe variationnel pour l'entropie de queue est élémentaire dans le cas où il existe une suite raffinante de partitions essentielles. Dans le cas général, on fait appel au théorème d'existence de partitions essentielles de E. Lindenstrauss. Dans le cas de l'intervalle, on peut contourner l'emploi du Corollaire 2.2.8.

En effet on a vu précédemment qu' il existait des suites raffinantes de partitions topologiques en intervalles (Proposition 2.2.21) et que le candidat d'entropie associé était une structure d'entropie (Proposition 2.7.10). D'après la Remarque 2.2.19, on peut appliquer le principe variationnel pour l'entropie conditionnelle 2.2.15 à un tel candidat. On en déduit le principe variationnel pour l'entropie de queue comme ci-dessus (combinaison de (2.7), (2.8) et (2.9)).

2.8.2 Conséquences du principe variationnel

L'entropie de queue est une borne supérieure du défaut de semi-continuité supérieure de l'entropie métrique. Ce résultat est connu depuis longtemps : on peut raisonnablement l'attribuer à M. Misiurewicz et S. Newhouse. On peut le montrer sans avoir recours à des partitions essentielles. Cependant nous le voyons ici comme une conséquence triviale du principe variationnel pour l'entropie de queue :

Théorème 2.8.3 (Misiurewicz, Newhouse) *Soit (X,T) un système dynamique d'entropie finie, alors*

$$\widetilde{h} - h \leq h^*(T)$$

Preuve : D'après la Proposition 1.2.17, on a $\widetilde{h} - h \leq u$. On conclut en appliquant le principe variationnel pour l'entropie de queue (on utilise uniquement l'inégalité la plus simple : $u(\mu) \leq h^*(T)$). □

Remarque 2.8.4 *Il n'y a pas de principe variationnel entre ces deux quantités : il existe un système dynamique (X,T), tel que $\sup_{\mu\in\mathcal{M}(X,T)}(\widetilde{h}-h)(\mu) < h^*(T)$ (voir Exemple 1.2.11 et Théorème 2.3.2).*

La Proposition 2.1.7, qui affirmait que l'on pouvait intervertir le supremum en x et la limite en n dans la définition de l'entropie de queue ($\underline{h}^*(T) = h^*(T)$), peut aussi se voir comme un corollaire du principe variationnel.

Preuve de la Proposition 2.1.7 : D'après le principe variationnel pour l'entropie de queue et d'après le théorème 2.7.9, on a $\sup_{\mu\in\mathcal{M}(X,T)} u_1^{Mis}(\mu) = h^*(T)$. Il suffit de remarquer $\sup_{\mu\in\mathcal{M}(X,T)} u_1^{Mis}(\mu) \leq \underline{h}^*(T)$. D'après la proposition 1.2.14, on a $\sup_{\mu\in\mathcal{M}(X,T)} u_1(\mu) = \lim_{k\to+\infty} \sup_{\mu\in\mathcal{M}(X,T)} h_k^{Mis}(\mu)$. Or en utilisant le candidat de Misiurewicz défini avec les boules de Bowen, on a avec les notations des pages 50 et 70 : $h^{Mis}(\mu,\epsilon_k) = \lim_{\delta\to 0}\int h(\delta|x,\epsilon_k)d\mu \leq \lim_{\delta\to 0}\underline{h}(\delta|\epsilon_k)$ et donc

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}(X,T)} u_1^{Mis}(\mu) \leq \lim_{k\to+\infty}\lim_{\delta\to 0}\underline{h}(\delta|\epsilon_k) = \underline{h}^*(T)$$

□

Enfin on déduit facilement du principe variationnel pour l'entropie de queue le théorème suivant dû à F. Ledrappier [39], qui montre l'invariance de l'entropie de queue par une extension principale :

Théorème 2.8.5 (Ledrappier [39]) *Soit (X,T) un système dynamique d'entropie finie, et soit $\pi : (Y,S) \to (X,T)$ une extension principale de (X,T) d'entropie finie, alors*

$$h^*(T) = h^*(S)$$

PREUVE : Soit $\mathcal{H}$ une structure d'entropie de (X,T). L'extension $\pi : (Y,S) \to (X,T)$ étant principale, le candidat $\pi\mathcal{H}$ de (Y,S) est aussi une structure d'entropie d'après la proposition 2.6.5. De plus d'après la proposition 1.2.39, on a la relation : $(u_1^{\pi\mathcal{H}})^{[\mathcal{M}(X,T)]} = u_1^{\mathcal{H}}$ puis par surjectivité de π^* : $\sup_{\mu\in M(Y,S)} u_1^{\pi\mathcal{H}} = \sup_{\mu\in\mathcal{M}(X,T)} u_1^{\mathcal{H}}(\mu)$. On déduit alors facilement du principe variationnel pour l'entropie de queue que $h^*(T) = h^*(S)$. □

Chapitre 3

Le lemme algébrique de Yomdin-Gromov

Dans ce chapitre, nous donnons dans un premier temps une preuve complète du lemme algébrique de Yomdin et Gromov. Cette preuve va paraître à Israel Journal of Mathematics [18]. Nous n'avons pas jugé nécessaire de reprendre la rédaction de cette preuve, que nous présentons donc sous la forme d'un article.

Dans un second temps nous énonçons une version du lemme algébrique différente de la version initiale présentée par Gromov.

Enfin, nous présentons quelques résultats quantitatifs concernant le degré des fonctions semi-algébriques, ainsi que le nombre de composantes connexes d'ensembles semi-algébriques.

A Proof of Yomdin-Gromov's Algebraic Lemma

David Burguet,
CMLS - CNRS UMR 7640
Ecole polytechnique
91128 Palaiseau Cedex France
(e-mail : burguet@math.polytechnique.fr)

Abstract : Following the analysis of differentiable mappings of Y. Yomdin, M. Gromov has stated a very elegant "Algebraic Lemma" which says that the "differentiable size" of an algebraic subset may be bounded in terms only of its dimension, degree and diameter - regardless of the size and specific values of the underlying coefficients. We give a complete and elementary proof of Gromov's result.

3.1 Introduction

A semi-algebraic set is a subset of some $\mathbb{R}^d$ defined by a finite number of polynomial inequalities and equalities. Its degree is the sum of the total degrees of the polynomials involved. A semi-algebraic map is a map whose graph is a semi-algebraic set and the degree of the map is the degree of the set. Necessary definitions and basic properties of real semi-algebraic geometry are recalled in the third section.

Y. Yomdin [60] developed many tools around "quantitative Sard Lemmas" involving the differentiable size of semi-algebraic sets. M. Gromov observed that one of these tools could be refined to give the following very elegant statement :

Theorem 3.1.1 *(Yomdin-Gromov's algebraic Lemma) Let r, l and d be positive integers. For any semi-algebraic compact subset $A \subset [0,1]^d$ of dimension l, there exist an integer N and continuous semi-algebraic maps $\phi_1, ..., \phi_N : [0,1]^l \to [0,1]^d$, such that :*
- *ϕ_i is analytic on $]0,1[^l$;*
- *$\|\phi_i\|_r := \max_{\beta:|\beta|\leq r} \|\partial^\beta \phi_{i/]0,1[^l}\|_\infty \leq 1$;*
- *$\bigcup_{i=1}^N \phi_i([0,1]^l) = A$.*

Moreover N and $deg(\phi_i)$ are bounded by a function of $deg(A)$, d and r.

In his Séminaire Bourbaki [35], M. Gromov gives many ideas but stops short of a complete proof. In [59],[58], Y. Yomdin used a weaker version of the previous theorem. In this initial form, the parametrizations omitted a subset covered with at most $C\log(1/\alpha)$ cubes of radius α, for arbitrarily small $\alpha > 0$. This version was sufficient for the dynamical applications presented in [59],[58].

By using polynomial Taylor's approximation, this theorem gives estimates of the local complexity of smooth maps. Yomdin used it to compare the topological entropy and the "homological size" for $\mathcal{C}^r$ maps. S. Newhouse [48] showed, using Pesin's theory, how this gives, for $\mathcal{C}^\infty$ smooth maps, upper-semicontinuity of the metric entropy and therefore the existence of invariant measures with maximum entropy. J. Buzzi [23] observed that in fact Y. Yomdin's estimates give a more uniform result called asymptotic h-expansiveness, which was shown by M. Boyle, D. Fiebig and U. Fiebig [14] to be equivalent to the existence of principal symbolic extensions for $\mathcal{C}^\infty$ smooth maps. The dynamical consequences of the above theorem are still developing in the works of M. Boyle, T. Downarowicz, S. Newhouse and others [32],[12].

The theorem is trivial for $d = 1$: the semi-algebraic subsets of $[0,1]$ are the finite unions of subintervals of $[0,1]$. We deal with the 2-dimensional case as suggested by M. Gromov. This simple and instructive case is the subject of section 5. We prove the general case by induction using the notion of $(\mathcal{C}^\alpha, K)$ triangular maps introduced in section 2. The induction steps are of three types :
- we consider a semi-algebraic map defined on a semi-algebraic set of higher dimension and we bound the first derivative in the first coordinate.
- fixing the dimension of the semi-algebraic set, we bound the derivatives of the next higher order wrt the first coordinate.
- fixing the dimension of the semi-algebraic set and the order of derivation, we bound the next partial derivative for a total order on $\mathbb{N}^d$.

As I was completing the submission of this paper, I learnt that A. Wilkie had written a proof of the same theorem [52]. I am grateful to M. Coste for this reference.

3.2 Technical tools

Yomdin-Gromov's Lemma is proved by controlling the derivatives one after the other. This is made possible by the notion of triangular maps, which already appears in Y.Yomdin's works [58].

3.2.1 Triangular maps

Definition 3.2.1 *A map $\psi :]0,1[^l \to]0,1[^d$ is <u>triangular</u> if $l \leq d$ and if*

$$\psi = (\psi_1(x_1, ..., x_l), ..., \psi_{d-l+1}(x_1, ..., x_l), \psi_{d-l+2}(x_2, ..., x_l), ..., \psi_{d-l+k}(x_k, ..., x_l), ..., \psi_d(x_l)),$$

for a family of maps $(\psi_i :]0,1[^{min(l,d+1-i)} \to]0,1[)_{i=1,...,d}$.

Fact 3.2.2 *If $\psi :]0,1[^m \to]0,1[^p$ and $\phi :]0,1[^n \to]0,1[^m$ are triangular, then so is $\psi \circ \phi :]0,1[^n \to]0,1[^p$.*

3.2.2 $(\mathcal{C}^\alpha, K)$ maps

First we introduce the following order on $\mathbb{N}^d$ used for the induction in the proof of Yomdin-Gromov's algebraic Lemma.

Definition 3.2.3 *$\mathbb{N}^d$ is endowed with the order $\preceq$, defined as follows : for $\alpha = (\alpha_1, ...\alpha_d)$, $\beta = (\beta_1, ...\beta_d) \in \mathbb{N}^d$, $\alpha \preceq \beta$ if $(\alpha = \beta)$ or $(|\alpha| := \sum_i \alpha_i < |\beta|)$ or $(|\alpha| = |\beta|$ and $\alpha_k \leq \beta_k$, where $k := \max\{l \leq d \ : \ \alpha_l \neq \beta_l\})$.*

In fact, $\alpha \preceq \beta$ iff $(|\alpha|, \alpha_d, \alpha_{d-1}, ..., \alpha_1)$ precedes $(|\beta|, \beta_d, \beta_{d-1}, ..., \beta_1)$ in the usual lexicographic order.

Definition 3.2.4 *Let $K \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \in \mathbb{N}^d - \{0\}$. Let $A \subset \mathbb{R}^d$ be an open set. A map $f : A \to \mathbb{R}^k$ is a $(\mathcal{C}^\alpha, K)$ map, if $f := (f_1, ..., f_k)$ is a $\mathcal{C}^{|\alpha|}$ map and if $\|f\|_\alpha := \max_{\beta \preceq \alpha, 1 \leq i \leq k} \|\partial^\beta f_i\|_\infty \leq K$.*

If $\alpha = (0, 0..., r)$ (i.e. ; all the partial derivatives of f of order up to r are bounded by K), we write $(\mathcal{C}^r, K)$ and $\|.\|_r$ instead of $(\mathcal{C}^{(0,...,0,r)}, K)$ and $\|.\|_{(0,...,0,r)}$.

3.2.3 Composition of $(\mathcal{C}^\alpha, 1)$ maps

The two following lemmas deal with the composition of $(\mathcal{C}^\alpha, 1)$ maps :

Lemma 3.2.5 *For all $d, r \in \mathbb{N}^*$, there exists a real number $K = K(d, r)$, such that if $\psi, \phi :]0,1[^d \to]0,1[^d$ are two $(\mathcal{C}^r, 1)$ maps, then $\psi \circ \phi$ is a $(\mathcal{C}^r, K)$ map.*

Proof : It follows directly from the formula of Faa-di-bruno for the higher derivatives of a composition, which we recall for completeness : let $\psi, \phi :]0,1[^d \to]0,1[^d$ be two $\mathcal{C}^r$ maps and let $(h_1, ..., h_r) \in (\mathbb{R}^d)^r$, we have [†] :

$$D^r(\psi \circ \phi)(x)(h_1, ..., h_r) = \sum_{1 \leq q \leq r} \sum_{i_1, ..., i_q} \sigma_q(i_1, ..., i_q) D^q \psi(\phi(x))(D^{i_1}\phi(x)(h_1, ..., h_{i_1}), ..., D^{i_q}\phi(x)(h_{r-i_q+1}, ..., h_r))$$

where the second sum is over all non zero integers $i_1, ..., i_q$ satisfying $\Sigma_{k=1}^q i_k = r$. □

We shall need the following adaptation of Lemma 1 to triangular maps.

Lemma 3.2.6 *For all $d, r \in \mathbb{N}^*$, there exists a real $K = K(r, d)$ such that if $\psi, \phi :]0,1[^d \to]0,1[^d$ are two $(\mathcal{C}^\alpha, 1)$ maps with $|\alpha| = r$ and if ϕ is a triangular map, then $\psi \circ \phi$ is a $(\mathcal{C}^\alpha, K)$ map.*

We introduce some notations for the proof of Lemma 3.2.6. Let $(e_i)_{i=1,...,d}$ be the canonical basis of $\mathbb{R}^d$. For $i = 1, ..., d$, $V_i \subset \mathbb{R}^d$ is the vector space generated by $e_1, ..., e_i$.

For $\alpha \in \mathbb{N}^d$ with $|\alpha| = r$, $v^\alpha := (\underbrace{e_1, ..., e_1}_{\alpha_1}, ..., \underbrace{e_d, ..., e_d}_{\alpha_d}) \in (\mathbb{R}^d)^r$ and $V^\alpha := \underbrace{V_1 \times ... \times V_1}_{\alpha_1} \times ... \times \underbrace{V_d \times ... \times V_d}_{\alpha_d} \subset (\mathbb{R}^d)^r$. Observe that, for a $\mathcal{C}^r$ map $f :]0,1[^d \to]0,1[^d$, we have $\partial_\alpha f(x) = D^r f(x)(v^\alpha)$.

Fact 3.2.7 *Let $1 \leq k \leq d$ be an integer. Let $f := (f_1, ..., f_d) :]0,1[^d \to]0,1[^d$ be a $\mathcal{C}^1$ triangular map. Then for all $x \in]0,1[^d$, $\partial_{x_k} f(x) \in V_k$.*

Proof : Let $l > k$ be an integer. The map f being triangular, $f_l(x) = f_l(x_l, ..., x_d)$ and therefore we have $\partial_{x_k} f_l = 0$. □

†. $\sigma_q(i_1, ..., i_q) = \prod_{0 \leq k \leq q-1} \binom{r-1-\Sigma_{l=1}^k i_l}{r-\Sigma_{l=1}^{k+1} i_l}$

Fact 3.2.8 *Let $f :]0,1[^d \to]0,1[^d$ be a $\mathcal{C}^r$ map. Let $\alpha \in \mathbb{N}^d$ with $|\alpha| = r$ and $w \in V^\alpha$. Then $D^r f(x)(w) = \Sigma_{\beta \preceq \alpha} w_\beta \partial_\beta f(x)$, where w_β is a polynomial in the coordinates of w, of which the coefficients depend only on r and d. If $w := (v_1, ..., v_d) \in (\mathbb{R}^d)^r$, we have $w_\alpha = \prod_{i=1,...,d} v_{i,i}^{\alpha_i}$, where $v_{i,i}$ denotes the i^{th} coordinate of v_i.*

PROOF : For $w \in \underbrace{\{e_1\} \times ... \times \{e_1\}}_{\alpha_1} \times ... \times \underbrace{\{e_1, e_2, ..., e_d\} \times ... \times \{e_1, e_2, ..., e_d\}}_{\alpha_d} \subset V_\alpha$, it results from the definition of the order $\preceq$. We conclude the proof by multilinearity. □

Lemma 3.2.6 is easily implied by the following fact :

Fact 3.2.9 *Let $\alpha \in \mathbb{N}^d$ with $|\alpha| = r$. Let $\psi, \phi :]0,1[^d \to]0,1[^d$ be two $\mathcal{C}^r$ maps. We assume also, that ϕ is a triangular map. Then $\partial_\alpha(\psi \circ \phi)(x) = \partial_\alpha \psi(\phi(x)) \prod_{i=1,...,d} (\partial_{x_i} \phi_i(x))^{\alpha_i} + R(\partial_\beta \psi, \partial_\gamma \phi \ : \ \beta \prec \alpha, \ \gamma \preceq \alpha)$, where R is a polynomial depending only on r and d.*

PROOF : Let $(v_1, ..., v_d) := v_\alpha$. Using the formula of Faa-di-bruno, we only have to consider the general term $D^q \psi(\phi(x))(D^{i_1} \phi(x)(v_1, ..., v_{i_1}), ..., D^{i_q} \phi(x)(v_{r-i_q+1}, ..., v_r))$ for some non zero integers $i_1, ..., i_q$ satisfying $\Sigma_{k=1}^q i_k = r$. We have only to study the two following cases (only derivatives of ψ and ϕ of order $< r$ are involved in the other terms) :

- $q = 1$ and $i_1 = r > 1$: the corresponding term is $D\psi(\phi(x))(D^r \phi(x)(v)) = D\psi(\phi(x))(\partial_\alpha \phi(x))$. Therefore this term contains also only derivatives of ψ of order $\prec \alpha$ and derivatives of ϕ of order $\preceq \alpha$.
- $q = r$ and $i_1 = i_2 = ... = i_q = 1$: the corresponding term is $D\psi(\phi(x))(\underbrace{\partial_{x_1} \phi, ..., \partial_{x_1}}_{\alpha_1} \phi, ..., \underbrace{\partial_{x_d} \phi, ..., \partial_{x_d}}_{\alpha_d} \phi)$.

  By Fact 3.2.7, $(\underbrace{\partial_{x_1} \phi, ..., \partial_{x_1}}_{\alpha_1} \phi, ..., \underbrace{\partial_{x_d} \phi, ..., \partial_{x_d}}_{\alpha_d} \phi) \in V^\alpha$. Then we apply Fact 3.2.8 to get the desired result.

□

3.3 Real semi-algebraic geometry

In this section we recall basic results concerning semi-algebraic sets. We borrow them from [6],[7] and [26].

3.3.1 Semi-algebraic sets and maps

Definition 3.3.1 *$A \subset \mathbb{R}^d$ is a semi-algebraic set if it can be written as a finite union of sets of the form $\{x \in \mathbb{R}^d \mid P_1(x) > 0, ..., P_r(x) > 0, P_{r+1}(x) = 0, ..., P_{r+s}(x) = 0\}$, where $r, s \in \mathbb{N}$ and $P_1, ..., P_{r+s} \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_d]$. Such a formula is called a presentation of A.*

The degree of a presentation is the sum of the total degrees of the polynomials involved (with multiplicities). The degree $deg(A)$ of a semi-algebraic set A is the minimum degree of its presentations.

Remark that the number of polynomials occurring in a presentation of a semi-algebraic set is bounded by the degree of this presentation.

Definition 3.3.2 *$f : A \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ is a semi-algebraic map if the graph $\Gamma_f := \{(x, f(x)) \ : \ x \in A\} \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n$ of f is a semi-algebraic set. The degree $deg(f)$ of a semi-algebraic map f is the degree of its graph Γ_f.*

Definition 3.3.3 *A Nash manifold is a real analytic submanifold of $\mathbb{R}^d$, which is also a semi-algebraic set.*

A Nash map is a map defined on a Nash manifold, which is both analytic and semi-algebraic.

†. Let $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, $\beta \prec \alpha$ iff $\beta \preceq \alpha$ and $\beta \neq \alpha$

3.3.2 Tarski's Principle

Theorem 3.3.4 *(Tarski's principle) Let $A \subset \mathbb{R}^{d+1}$ be a semi-algebraic set and $\pi : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}^d$ the projection defined by $\pi(x_1, ..., x_{d+1}) = (x_1, ..., x_d)$, then $\pi(A)$ is a semi-algebraic set and $deg(\pi(A))$ is bounded by a function of $deg(A)$ and d.*

Proof : See [7] Thm 2.2.1 □

Corollaire 3.3.5 *Any formula combining sign conditions on semi-algebraic functions by conjunction, disjunction, negation and universal and existential real quantifiers defines a semi-algebraic set. Moreover the degree of this semi-algebraic set is bounded by a function of the degrees of the semi-algebraic functions involved in the formula.*

Proof : See [7] Prop 2.2.4 □

Corollaire 3.3.6 *Let $f : A \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ be a semi-algebraic map, then A and $f(A)$ are semi-algebraic sets. Moreover $deg(A)$ and $deg(f(A))$ are bounded by a function of $deg(f), d$ and n.*

Proof : Immediate. □

Corollaire 3.3.7 *If ϕ and ψ are two semi-algebraic maps, such that the composition $\phi \circ \psi$ is well defined, then $\phi \circ \psi$ is a semi-algebraic map. Moreover its degree is bounded by a function of $deg(\phi)$ and $deg(\psi)$.*

Proof : See [7] Prop 2.2.6 □

Corollaire 3.3.8 *Let $r \in \mathbb{N}$. Let $A \subset \mathbb{R}^d$ be a semi-algebraic open set and let $f : A \to \mathbb{R}^n$ be a Nash map. The partial derivatives of f of order r are also semi-algebraic maps of degree bounded by a function of $deg(f)$, d, n and r.*

Proof : See [7] Prop 2.9.1 □

3.3.3 Continuous structure of semi-algebraic sets

We recall now classical results concerning the structure of semi-algebraic sets. The first results deal with stratification and the last ones with decomposition into cells.

Proposition 3.3.9 *For any semi-algebraic subset $A \subset]0,1[^{d+1}$, there exist integers $m, q_1, ..., q_m$, disjoint Nash manifolds $A_1, ..., A_m \subset]0,1[^d$ and Nash maps, $\zeta_{i,1} < ... < \zeta_{i,q_i} : A_i \to]0,1[$, for all $1 \leq i \leq m$, such that :*

- *A coincides with a union of slices of the two following forms $\{(x_1, y) \in]0,1[\times A_i : \zeta_{i,k}(y) < x_1 < \zeta_{i,k+1}(y)\}$ and $\{(\zeta_{i,k}(y), y) : y \in A_i\}$;*
- *the integers m, q_i, $deg(A_i)$, $deg(\zeta_{i,j})$ are bounded by a function of $deg(A)$ and d.*

Proof : This is Thm 2.2.1 in [6] except that there the maps $\zeta_{i,k}$ are only claimed to be continuous. Using Thom's Lemma, we can assume, that $\zeta_{i,k}$ are Nash maps, as noticed in Remark 1 of [26]. □

We let $\mathrm{adh}(H)$ (resp. $\mathrm{int}(H)$, resp. ∂H) denote the closure (resp. the interior, resp. the boundary) of the set $H \subset \mathbb{R}^d$ for the usual topology.

For open semi-algebraic sets, we have the following result :

Corollaire 3.3.10 *For any semi-algebraic open subset $A \subset]0,1[^{d+1}$, there exist integers m, $q_1, ..., q_m$, disjoint semi-algebraic open sets $A_1, ..., A_m \subset]0,1[^d$ and Nash maps, $\zeta_{i,1} < ... < \zeta_{i,q_i} : A_i \to]0,1[$, for all $1 \leq i \leq m$, such that :*

- $\mathrm{adh}(A)$ *coincides with a union of slices of the following form* $\mathrm{adh}(\{(x_1, y) \in]0,1[\times A_i : \zeta_{i,k}(y) < x_1 < \zeta_{i,k+1}(y)\})$;
- *the integers m, q_i, $deg(A_i)$, $deg(\zeta_{i,j})$ are bounded by a function of $deg(A)$ and d.*

Proof : Let $A \subset]0,1[^{d+1}$ be a semi-algebraic open set. We apply Proposition 3.3.9 to A, and keep only the slices of the form $\{(x_1, y) \in]0,1[\times A_i : \zeta_{i,k}(y) < x_1 < \zeta_{i,k+1}(y)\}$, where A_i is an open set. Let us check that the closure of this slices is $\mathrm{adh}(A)$. Let $x \in A$ and let $U \subset A$ be an open neighborhood of x. This neighborhood can't intersect only slices of the form $\{(\zeta_{i,k}(y), y) : y \in A_i\}$ and of the form $\{(x_1, y) \in]0,1[\times A_i : \zeta_{i,k}(y) < x_1 < \zeta_{i,k+1}(y)\}$, where the dimension of A_i is strictly less than d. Indeed such sets have empty interior. We conclude that $x \in \bigcup_{\{i \,:\, A_i \text{ is open}\}} \mathrm{adh}(\{(x_1, y) \in]0,1[\times A_i : \zeta_{i,k}(y) < x_1 < \zeta_{i,k+1}(y)\})$, and then $A \subset \bigcup_{\{i \,:\, A_i \text{ is open}\}} \mathrm{adh}(\{(x_1, y) \in]0,1[\times A_i : \zeta_{i,k}(y) < x_1 < \zeta_{i,k+1}(y)\})$. □

Proposition 3.3.11 *Let $A \subset \mathbb{R}^n$ be a semi-algebraic set. There exist an integer N bounded by a function of $deg(A)$ and connected Nash manifolds $A_1, ..., A_N$ such that $A = \coprod_{i=1}^N A_i$ and $\forall i \neq j$ $(A_i \bigcap \mathrm{adh}(A_j) \neq \emptyset) \Rightarrow (A_i \subset \mathrm{adh}(A_j)$ et $dim(A_i) < dim(A_j))$. ($\coprod$: disjoint union).*

Proof : See [26] Prop. 3.5 p 124 □

Definition 3.3.12 *In the notations of the previous proposition, the <u>dimension</u> of A is the maximum of the dimensions of the Nash manifolds $A_1, ...A_N$.*

In the following corollary, we reparametrize a semi-algebraic set with Nash maps of bounded degree. The point of Yomdin-Gromov's algebraic Lemma is that one can bound the differentiable size of the reparametrizations. The corollary 3.3.14 is a stronger form of Thm 2.3.6 in [7], so we produce a detailed proof.

Definition 3.3.13 . *Let $A \subset]0,1[^d$ be a semi-algebraic set of dimension l. A family of maps $(\phi_i :]0,1[^l \to A)_{i=1,...,N}$ is a <u>resolution</u> of A if :*

- *each ϕ_i is triangular ;*
- *each ϕ_i is a Nash map ;*
- *$A = \bigcup_{i=1}^N \phi_i(]0,1[^l)$ †.*

Let $M \in \mathbb{N}$. A <u>M-resolution</u> of A is a resolution of A, $(\phi_i)_{i=1,...,N}$, such that :

- *$N \leq M$;*
- *$deg(\phi_i) \leq M$.*

Any semi-algebraic set $A \subset]0,1[^d$ admits a resolution, $(\phi_i)_{i=1,...,N}$, with N and $deg(\phi_i)$ bounded by a function of $deg(A)$ and d. In a formal way :

Corollaire 3.3.14 *Given integers d, δ, there exists an integer $M = M(d, \delta)$, such that any semi-algebraic set $A \subset]0,1[^d$ of degree $\leq \delta$ admits a M-resolution.*

Proof : We argue by induction on d. We note $P(d)$ the claim of the above corollary for semi-algebraic subsets of $]0,1[^d$. $P(0)$ is trivial. Assume $P(d)$.

Let $A \subset]0,1[^{d+1}$ be a semi-algebraic set of dimension l. Proposition 3.3.9 gives us integers m, $q_1, ..., q_m$, disjoint Nash manifolds $A_1, ..., A_m \subset]0,1[^d$ and Nash maps, $\zeta_{i,1} < ... < \zeta_{i,q_i} : A_i \to]0,1[$ such that :

†. by convention $]0,1[^0 = \{0\}$

– A coincides with a union of slices of the two following forms $\{(x_1, y) \in]0,1[\times A_i : \zeta_{i,k}(y) < x_1 < \zeta_{i,k+1}(y)\}$ and $\{(\zeta_{i,k}(y), y) : y \in A_i\}$;
– m, q_i, $deg(A_i)$, $deg(\zeta_{i,j})$ are bounded by a function of $deg(A)$ and d.

We note l_i the dimension of A_i ; we have : $l_i \leq l$. Apply the induction hypothesis to $A_i \subset]0,1[^d$: there exists a resolution of A_i, *i.e.* an integer N_i and Nash maps $\phi_{i,1}, ..., \phi_{i,N_i} :]0,1[^{l_i} \to A_i$, such that $A_i = \bigcup_{p=1}^{N_i} \phi_{i,p}(]0,1[^{l_i})$ and N_i, $deg(\phi_i)$ are bounded by a function of $deg(A_i)$ and d, therefore by a function of $deg(A)$ and d.

First, we consider a slice of the form $\{(x_1, y) \in]0,1[\times A_i : \zeta_{i,k}(y) < x_1 < \zeta_{i,k+1}(y)\}$ Observe that the dimension l_i of the Nash manifold A_i is, in this case, strictly less than l. Then, for $1 \leq p \leq N_i$, we define $\psi_{i,k,p} :]0,1[^l \to A$ as follows : $\psi_{i,k,p}(x_1, x_2, ..., x_l) := (x_1(\zeta_{i,k+1} - \zeta_{i,k}) \circ \phi_{i,p}(x_2, ..., x_{l_i+1}) + \zeta_{i,k} \circ \phi_{i,p}(x_2, ..., x_{l_i+1}), \phi_{i,p}(x_2, ..., x_{l_i+1}))$.

Consider now a slice of the form $\{(\zeta_{i,k}(y), y) : y \in A_i\}$. For $1 \leq p \leq N_i$, we define $\psi_{i,k,p} :]0,1[^l \to]0,1[^{d+1}$ as follows : $\psi_{i,k,p}(x_1, ..., x_l) := (\zeta_{i,k} \circ \phi_{i,p}(x_1, ..., x_{l_i}), \phi_{i,p}(x_1, ..., x_{l_i}))$.

The family of maps $\mathcal{F} := (\psi_{i,k,p})_{i,k,p}$ is a M-resolution, with M depending only on d and $deg(A)$:
– each $\psi_{i,k,p}$ is a Nash triangular map ;
– $A = \bigcup_{i,k,p} \psi_{i,k,p}(]0,1[^l)$;
– the cardinal of $\mathcal{F}$ is bounded by $3\sum_{i=1}^{m} q_i N_i$;
– each $deg(\psi_{i,k,p})$ is bounded by a function of $deg(A)$ and d, according to Corollary 3.3.7.

□

A limit of semi-algebraic maps of bounded degree is again a semi-algebraic map :

Corollaire 3.3.15 *Let $(f_n :]0,1[^d \to]0,1[^k)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of continuous semi-algebraic maps of degree $\leq \delta$, such that $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converges uniformly to $f :]0,1[^d \to [0,1]^k$. Then f is a continuous semi-algebraic map of degree bounded by a function of d, k and δ.*

Proof : It's enough to prove the Corollary for $k = 1$.

Let $(f_n :]0,1[^d \to]0,1[)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of semi-algebraic maps of degree $\leq \delta$. For all $n \in \mathbb{N}$, there exists $P_n \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_{d+1}] - \{0\}$ of degree $\leq \delta$, such that $P_n(x_1, ..., x_d, \frac{1}{4} + \frac{1}{2} f_n(x_1, ..., x_d)) = 0$, $\forall x := (x_1, ..., x_d) \in]0,1[^d$. The set $\mathbb{R}[X_1, ..., X_{d+1}]$ of polynomials in $d+1$ variables is endowed with the norm : $\|P\| := \sup_{\alpha\in\mathbb{N}^{d+1}} |a_\alpha|$, for $P := \Sigma_{\alpha\in\mathbb{N}^{d+1}} a_\alpha X^\alpha$. By dividing P_n by $\|P_n\|$, we can choose $\|P_n\| = 1$. Then, by extracting a subsequence, we can assume that $P_n \to P \neq 0$, with $deg(P) \leq \delta$. It's easy to check that $P(x, \frac{1}{4} + \frac{1}{2} f(x)) = 0$. By applying Proposition 3.3.9 to $\{P = 0\} \bigcap]0,1[^{d+1}$ (we consider $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} f_n$ instead of f_n, because $f(x)$ might be on the boundary of $[0,1]^d$) and by continuity of f, we conclude there exists a partition of $]0,1[^d$ into Nash manifolds $(A_i)_{i=1,...,N}$ and Nash maps $\zeta_i : A_i \to]0,1[$ with N and $deg(\zeta_i)$ bounded by a function of δ and d, such that $\Gamma_{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}f} = \bigcup_{i=1,...,N} \Gamma_{\zeta_i}$. In particular, f is a semi-algebraic map of degree bounded by a function of δ and d. □

3.3.4 $\mathcal{C}^\alpha$-resolution of semi-algebraic sets and Nash maps

In this section, we define notions to estimate the differentiable size of semi-algebraic sets and maps.

Definition 3.3.16 *A Nash map $f : A \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ is extendable if f extends continuously on* adh(A).

Notations 3.3.17 *Let $f : A \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ be a extendable Nash map. We note $\widetilde{f}$ the unique continuous extension of f.*

Remark 3.3.18 *This extension is unique by continuity of f. By using Corollary 3.3.5, observe that $\widetilde{f}$ is a semi-algebraic map and that $deg(\widetilde{f})$ is bounded by a function of $deg(f)$.*

Definition 3.3.19 *Let $K \in \mathbb{R}^+$. Let $A \subset]0,1[^d$ be a semi-algebraic set of dimension l. Let $\alpha \in \mathbb{N}^l - \{0\}$. The family of maps $(\phi_i :]0,1[^l \to A)_{i=1...N}$ is a $(\mathcal{C}^\alpha, K)$-resolution of A if :*
- *each ϕ_i is triangular ;*
- *each ϕ_i is a $(\mathcal{C}^\alpha, K)$ extendable Nash map ;*
- *$\mathrm{adh}(A) = \bigcup_{i=1}^N \widetilde{\phi_i}([0,1]^l)$.*

Let $M \in \mathbb{N}$. A $(\mathcal{C}^\alpha, K, M)$-resolution of A is a $(\mathcal{C}^\alpha, K)$-resolution of A, $(\phi_i)_{i=1,...,N}$, such that :
- *$N \leq M$;*
- *$deg(\phi_i) \leq M$.*

Definition 3.3.20 *Let $K \in \mathbb{R}^+$. Let $f_1, ..., f_k : A \to]0,1[$ be semi-algebraic maps, where $A \subset]0,1[^d$ is a semi-algebraic set of dimension l. Let $\alpha \in \mathbb{N}^l - \{0\}$. The family of maps $(\phi_i :]0,1[^l \to A)_{i=1,...,N}$ is a $(\mathcal{C}^\alpha, K)$-resolution of $(f_j)_{j=1,...,k}$ if :*
- *each ϕ_i is triangular ;*
- *each ϕ_i and each $f_j \circ \phi_i$ is a $(\mathcal{C}^\alpha, K)$ extendable Nash map ;*
- *$\mathrm{adh}(A) = \bigcup_{i=1}^N \widetilde{\phi_i}([0,1^l])$.*

Let $M \in \mathbb{N}$. A $(\mathcal{C}^\alpha, K, M)$-resolution of $(f_j)_{j=1,...,k}$, $(\phi_i)_{i=1,...,N}$, is a $(\mathcal{C}^\alpha, K)$-resolution of $(f_j)_{j=1,...,k}$ such that :
- *$N \leq M$;*
- *$deg(\phi_i) \leq M$ and $deg(f_j \circ \phi_i) \leq M$.*

If $\alpha = (0, 0..., r)$, we write $(\mathcal{C}^r, K)$, $(\mathcal{C}^r, K, M)$ instead of $(\mathcal{C}^{(0,...,0,r)}, K)$, $(\mathcal{C}^{(0,...,0,r)}, K, M)$.

Remark 3.3.21 *A $\mathcal{C}^\alpha$-resolution of a semi-algebraic set A is in a obvious way a $\mathcal{C}^\alpha$-resolution of the characteristic function of A.*

To prove Yomdin-Gromov's algebraic Lemma, we take limits of parametrizations of a semi-algebraic set close to A, so that these limits repametrize $\mathrm{adh}(A)$. That's why in the previous definition of a $\mathcal{C}^\alpha$-resolution we reparametrize $\mathrm{adh}(A)$, contrary to the definition 3.3.13 of a resolution.

The following remark is very useful later on :

Lemma 3.3.22 *Given an integer d and a real number N, there is an integer $M = M(N, d)$, such that for any $\alpha \in \mathbb{N}^d - \{0\}$ and for any $(\mathcal{C}^\alpha, N)$ Nash map $f :]0,1[^d \to]0,1[$, there exists a $(\mathcal{C}^\alpha, 1, M)$-resolution of f.*

Proof : We use homothetic reparametrizations of $]0,1[^d$. The details are left to the reader. □

3.3.5 (α, M)-adapted sequence

We will use the following notion to prove Yomdin-Gromov's algebraic Lemma :

Definition 3.3.23 *Let $\alpha \in \mathbb{N}^d - \{0\}$ and $M \in \mathbb{N}$. Let $(f_i : A \to]0,1[)_{i=1,...,k}$ be a family of Nash maps defined on a semi-algebraic open set $A \subset]0,1[^d$. A sequence (α, M)-adapted to $(f_i)_{i=1,...,k}$ is a sequence $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of semi-algebraic sets, such that :*
- *$A_n \subset A$ for each $n \in \mathbb{N}$;*
- *$a_n := \sup_{x\in A} d(x, A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, where $d(x, A_n)$ is the distance between x and A_n ;*
- *$deg(A_n) \leq M$;*
- *$(f_{i/A_n})_{i=1,...,k}$ admits a $(\mathcal{C}^\alpha, 1, M)$-resolution.*

If $\alpha = (0, 0..., r)$, we write (r, M) instead of $((0, ..., 0, r), M)$.

3.4 Statements

Given a family of semi-algebraic functions, we shall first reparametrize them away from their singularities. Then we prove the main theorem.

Proposition 3.4.1 *For any family $(f_i : A \to]0,1[)_{i=1,...,k}$ of Nash maps defined on a semi-algebraic open set $A \subset]0,1[^d$, there exists a (r,M)-adapted to $(f_i)_{i=1,...,k}$, with M depending only on d, r and $\max_i(deg(f_i))$.*

The following proposition follows from the above :

Proposition 3.4.2 *For any family $(f_i : A \to]0,1[)_{i=1,...,k}$ of Nash maps defined on a semi-algebraic open set $A \subset]0,1[^d$, there is a $(\mathcal{C}^r, 1, M)$-resolution of $(f_i)_{i=1,...,k}$, with M depending only on d, r and $\max_i(deg(f_i))$.*

We deduce the following proposition from Proposition 3.3.9 and Proposition 3.4.2 :

Proposition 3.4.3 *For any semi-algebraic set $A \subset]0,1[^d$, there exists a $(\mathcal{C}^r, 1, M)$ resolution of A, with M depending only on d, r and $deg(A)$.*

Now we show how Proposition 3.4.1, Proposition 3.4.2, Proposition 3.4.3 and Yomdin-Gromov's algebraic Lemma follow from the case $k = 1$ of Proposition 3.4.1. In fact we show stronger results, which are used in the induction in the last section.

Notations 3.4.4 *Let $E = \bigcup_{d\geq 1}(\mathbb{N}^d - \{0\}) \times \{d\}$ together with the order :*
$(\beta, e) \ll (\alpha, d)$ if $(e < d)$ or $(e = d$ and $\beta \preceq \alpha)$

We write (r, d) instead of $((0, ..., 0, r), d) \in E$.

The order $\ll$ coincides with the lexicographic order of $(d, |\alpha|, \alpha_d, ..., \alpha_1)$.

Notations 3.4.5 *Fix $(\alpha, d) \in E$ and $k \in \mathbb{N}$. We will write $Q3(\alpha, d, k)$, $Q4(\alpha, d, k)$, $Q5(\alpha, d, k)$ for the following claims :*

$Q3(\alpha, d, k)$: for any family $(f_i : A \to]0,1[)_{i=1,...,k}$ of Nash maps defined on a semi-algebraic open set $A \subset]0,1[^d$, there exists a sequence (α, M)-adapted to $(f_i)_{i=1,...,k}$, with $M \in \mathbb{N}$ depending only on $\max_i(deg(f_i))$.

$Q4(\alpha, d, k)$: for any family $(f_i : A \to]0,1[)_{i=1,...,k}$ of Nash maps defined on a semi-algebraic open set $A \subset]0,1[^d$, there exists a $(\mathcal{C}^r, 1, M)$-resolution of $(f_i)_{i=1,...,k}$, with $M \in \mathbb{N}$ depending only on $\max_i(deg(f_i))$.

$Q5(\alpha, d)$: for any semi-algebraic set $A \subset]0,1[^d$, there exists a $(\mathcal{C}^r, 1, M)$ resolution of A, with $M \in \mathbb{N}$ depending only on $deg(A)$.

In the statements of Proposition 3.4.1 and Proposition 3.4.2, we only need to reparametrize a single Nash map :

Lemma 3.4.6 *The claim $Q4(\alpha, d, 1)$ implies the claim $Q4(\alpha, d, k)$ for all $k \in \mathbb{N}^*$.*

PROOF :

We argue by induction on k. Assume $Q4(\alpha,d,l), \forall l \leq k$: for any l-families $g_1,...,g_l : B \to]0,1[$ of Nash maps of degree $\leq \delta$, with $B \subset]0,1[^d$ a semi-algebraic open set, there is a $(\mathcal{C}^\alpha,1,M)$-resolution of $g_1,...,g_l$, with $M = M(l,\delta)$.

Let $f_1,...,f_{k+1} : A \to]0,1[$ be Nash maps of degree $\leq \delta$, with $A \subset]0,1[^d$ a semi-algebraic open set. In the following, for each $l \leq k$, we note $M_l = M(l,\delta)$. According to the induction hypothesis, there exists $(\phi_i)_{i=1,...,N}$ a $(\mathcal{C}^\alpha,1,M_k)$-resolution of $(f_1,...,f_k)$. By $Q4(\alpha,d)$ for $k=1$, for each i, we can find $(\psi_{i,j})_{j=1,...,N_i}$ a $(\mathcal{C}^\alpha,1,M_1)$-resolution of $f_{k+1}\circ\phi_i$.

According to Lemma 3.2.6, the maps $\phi_i\circ\psi_{i,j}$, of which the number is $\sum_{i=1}^N N_i \leq M_1M_k$, are $(\mathcal{C}^\alpha,K)$ extendable Nash maps, with some $K = K(|\alpha|,d)$. The same holds for the maps $f_p\circ\phi_i\circ\psi_{i,j}$ for all $1 \leq p \leq k$. We control the degree of these Nash maps by applying Corollary 3.3.7. For each i, $(\psi_{i,j})_{j=1,...,N_i}$ being a $(\mathcal{C}^\alpha,1)$-resolution of $f_{k+1}\circ\phi_i$, the maps $f_{k+1}\circ\phi_i\circ\psi_{i,j}$ are $(\mathcal{C}^\alpha,1)$ extendable Nash maps. Moreover, we have in a trivial way : $\mathrm{adh}(A) = \bigcup_{i,j}\widetilde{\phi_i}\circ\widetilde{\psi_{i,j}}([0,1]^d)$. We conclude the proof of $Q4(\alpha,d,k+1)$ by applying Lemma 3.3.22. □

Lemma 3.4.7 *The claim $Q3(\alpha,d,1)$ implies the claim $Q3(\alpha,d,k)$ for all $k \in \mathbb{N}^*$.*

PROOF :

We adapt the above proof for $Q3(\alpha,d)$ as follows (we use the same notations). Let $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence α-adapted to $(f_i)_{i=1,...,k}$. Hence, for all $n \in \mathbb{N}$, there exists $(\phi_j^n)_{j=1,...,N_n}$ a $(\mathcal{C}^\alpha,1)$ resolution of $(f_{i/A_n})_{i=1,...,k}$. For n, j, let $(A_p^{n,j})_{p\in\mathbb{N}}$ be a sequence α-adapted to $f_{k+1}\circ\phi_j^n$.

We use the following remark, which is an easy consequence of the uniform continuity :

Remark 3.4.8 *If $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is a sequence of subsets of $[0,1]^l$ satisfying $\sup_{x\in[0,1]^l} d(x,A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ and $\phi : [0,1]^l \to [0,1]^d$ is a continuous map, then $\sup_{x\in\phi([0,1]^l)} d(x,\phi(A_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.*

According to the above remark for ϕ_j^n, we can choose an integer $p_{j,n}$ for each $n \in \mathbb{N}$ and each $1 \leq j \leq N_n$, such that $\sup_{x\in\phi_j^n([0,1]^d)} d(x,\phi_j^n(A_{p_{j,n}}^{n,j})) < 1/n$. Now, let us show that $B_n := \bigcup_{j=1}^{N_n}\phi_j^n(A_{p_{j,n}}^{n,j})$ defines a sequence α-adapted to $(f_i)_{i=1,...,k+1}$.

Observe that B_n is a semi-algebraic set because each ϕ_j^n is a semi-algebraic map and each $A_p^{n,j}$ is a semi-algebraic set. Moreover N_n, $deg(\phi_j^n)$ and $deg(A_{p_{j,n}}^{n,j})$ and therefore $deg(B_n)$ are bounded by a function of $\max_i(deg(f_i))$, $|\alpha|$ and d. Finally, we have :

$$\sup_{x\in A} d(x,B_n) \leq \sup_{x\in A} d(x,A_n) + \max_{j=1,...,N_n}\Big(\sup_{x\in\phi_j^n([0,1]^d)} d(x,\phi_j^n(A_{p_{j,n}}^{n,j}))\Big) \leq a_n + 1/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

□

Notations 3.4.9 *In the following, we note :*

$Qi(\alpha,d) := Qi(\alpha,d,1) = [\forall k \in \mathbb{N}^*,\ Qi(\alpha,d,k)]$ *for* $i = 3,4$ *and*

$Pi(\alpha,d) := [\forall(\beta,e) \in E$ *with* $(\beta,e) \ll (\alpha,d),\ Qi(\alpha,d)]$ *for* $i = 3,4,5$.

Observe that for $i = 3,4,5$, $Pi(\alpha,d)$ is the claim of Proposition i for all pairs $(\beta,e) \in E$ with $(\beta,e) \ll (\alpha,d)$.

Now we show that Proposition 3.4.3 follows from Proposition 3.4.2 :

Proof of Proposition 3.4.3 ($P4(r,d) \Rightarrow P5(r,d+1)$) :

We only need to prove $P4(r,d) \Rightarrow Q5(r,d+1)$.

Let $A \subset]0,1[^{d+1}$ be a semi-algebraic set of dimension $l \geq 1$.† Under Proposition 3.3.9, it is enough to consider the two following special cases :

- $A \subset]0,1[^{d+1}$ is a semi-algebraic set of the form : $\{(x_1,y) \in]0,1[\times A' : \eta(y) < x_1 < \zeta(y)\}$, where $A' \subset]0,1[^d$ is a Nash manifold of dimension $l-1$ and $\eta, \zeta : A' \to]0,1[$ Nash maps, such that $deg(\eta), deg(\zeta), deg(A')$ depend only on $deg(A)$ and d. By using a M-resolution of A', $(\phi_i :]0,1[^{l-1} \to]0,1[^d)_{i=1,...,N}$, with $M = M(d, deg(A))$ and by considering $\eta \circ \phi_i$ and $\zeta \circ \phi_i$, we can assume that $A' =]0,1[^{l-1}$, with $l \leq d+1$. So we can apply $Q4(r, l-1)$ to (ζ, η) : there exists $(\phi_i)_{i=1,...,N}$ a $(\mathcal{C}^r, 1, M')$-resolution of (ζ, η) with $M' = M'(r, d, deg(A))$. For each i, we define $\psi_i :]0,1[\times]0,1[^{l-1} \to A$ in the following way : $\psi_i(x,y) = (x(\zeta \circ \phi_i - \eta \circ \phi_i)(y) + \eta \circ \phi_i(y), \phi_i(y))$. We control the degree of ψ_i by applying Corollary 3.3.7. Then $(\psi_i)_{i=1,...,N}$ is a $(\mathcal{C}^r, 2)$-resolution of A. We conclude the proof using Lemma 3.3.22.
- A is a semi-algebraic set of the form $\{(\zeta_{i,k}(y), y) : y \in A'\}$. The dimension l of A is strictly less than $d+1$. The decomposition into cells gives us a M-resolution of A, $(\phi_i :]0,1[^l \to A)_{i=1,...,N}$, with $M = M(d, deg(A))$. We conclude the proof, by applying for each i, $Q4(r,l)$ to the coordinates of ϕ_i.

□

Finally we deduce Proposition 3.4.2 from Proposition 3.4.1. In fact we prove : $P3(r+1,d) \Rightarrow P4(r,d)$.

Proof of Proposition 4 ($P3(r+1,d) \Rightarrow P4(r,d)$) :

We argue by induction on d. Assume that for $e < d$, we have $P3(s+1,e) \Rightarrow P4(s,e)$ for all $s \in \mathbb{N}$. Let $r \in \mathbb{N}$. Let us show $P3(r+1,d) \Rightarrow Q4(r,d)$.

Let $f : A \to]0,1[$ be Nash map of degree $\leq \delta$, where $A \subset]0,1[^d$ is a semi-algebraic open set. According to $Q3(r+1,d)$, there exists a $(r+1, M)$-adapted sequence $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ to f with $M = M(r,d,\delta)$. Let $(\phi_i^k)_{i \leq N_k}$ be a $(\mathcal{C}^{r+1}, 1, M)$-resolution of $f_{/A_k}$. For all $k \in \mathbb{N}$, $N_k \leq M$. By extracting a subsequence, we can assume $N_k = N$, for all $k \in \mathbb{N}$. According to the Ascoli theorem, $B(r+1)^{(d+1)N}$ is a compact set in $B(r)^{(d+1)N}$, where $B(r)$ is the closed unit ball of the set of $\mathcal{C}^r$ maps on $]0,1[^d$ onto $\mathbb{R}$, endowed with the norm $\|.\|_r$. By extracting a subsequence from the sequence $(\phi_i^n, f \circ \phi_i^n)_{n \in \mathbb{N}}$, we can assume, that for each $i = 1, ..., N$, $(\phi_i^n)_{n \in \mathbb{N}}$ and $(f \circ \phi_i^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge in $\|.\|_r$ norm to $(\mathcal{C}^r, 1)$ maps. Let ψ_i be the limit of $(\phi_i^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Observe that $f \circ \psi_i = \lim_n f \circ \phi_i^n$ is also a $(\mathcal{C}^r, 1)$ map.

By Corollary 3.3.15, the maps ψ_i and $f \circ \psi_i$ are semi-algebraic maps of degree bounded by a function depending only on r, δ and d. But a priori, these maps are not Nash maps and they are onto $[0,1]^d$. By applying Corollary 3.3.5, we note that $X_i =]0,1[^d - \psi_i^{-1}(\partial[0,1]^d)$ is a semi algebraic set of degree bounded only by a function depending only on r, δ and d.

Let us check that $\bigcup_{i=1,...,N} \psi_i(\mathrm{adh}(X_i)) = \mathrm{adh}(A)$. It is enough to show that $A \subset \bigcup_{i=1,...,N} \psi_i(\mathrm{adh}(X_i))$, because we have $\psi_i(\mathrm{adh}(X_i)) \subset \mathrm{adh}(A)$, for all i, by convergence of ϕ_i^n to ψ_i. Let $x \in A \subset]0,1[^d$, there exists a sequence $x_n \in A_n \subset]0,1[^d$, such that $x_n \to x$. By extracting a subsequence, we can assume that there exist $1 \leq i \leq N$ and a sequence $(y_n \in [0,1]^d)_{n \in \mathbb{N}}$ such that $x_n = \widetilde{\phi_i^n}(y_n)$. By the uniform convergence of ϕ_i^n to ψ_i, we have $\psi_i(y_n) \to x$. We easily conclude that $\bigcup_{i=1,...,N} \psi_i([0,1]^d) = \mathrm{adh}(A)$. But $[0,1]^d - \mathrm{adh}(X_i) \subset \psi_i^{-1}(\partial[0,1]^d)$; therefore $A \subset \bigcup_{i=1,...,N} \psi_i(\mathrm{adh}(X_i))$, because $A \subset]0,1[^d$. Finally $\mathrm{adh}(A) = \bigcup_{i=1,...,N} \psi_i(\mathrm{adh}(X_i))$.

Apply Proposition 3.3.9 to the graph $\Gamma_{\psi_{i/X_i}}$ of ψ_{i/X_i}. There exists a partition of X_i into Nash manifold $(X_i^j)_{j=1,...,P_i}$, such that ψ_{i/X_i^j} is a Nash map onto $]0,1[^d$. Moreover $P3(r+1,d) \Rightarrow P3(r+1, d-1) \Rightarrow P4(r,d-1) \Rightarrow P5(r,d)$. By applying $P5(r,d)$ to each X_i^j, and by composing the maps ψ_i with the $(\mathcal{C}^r, 1)$ Nash map obtained from the $(\mathcal{C}^r, 1)$ resolution of X_i^j, we get a $(\mathcal{C}^r, K, M)$-resolution of f, with $K = K(r,d)$ and $M = M(r, deg(f), d)$. We conclude the proof by applying Lemma 3.3.22.

□

†. The case of dimension 0 is trivial

Finally, Yomdin-Gromov's algebraic Lemma follows from Proposition 3.4.3.

Proof of Yomdin-Gromov's algebraic Lemma : Let A be a semi-algebraic compact subset of $[0,1]^d$. We apply $P5(\alpha, d)$ to $A \bigcap F$ for each open hypercube F, which takes part in the skeleton of $[0,1]^d$. □

Now we only have to prove Proposition 3.4.1 for a single Nash map.

3.5 Case of dimension 1

First we study the case of dimension 1, where we can prove right away Proposition 4. The case of dimension 1 allows us to introduce simple ideas of parametrizations, which will be adapted in higher dimensions.

The semi-algebraic sets of $]0,1[$ are the finite unions of open intervals and points. So it's enough to prove Proposition 4 for A of the form $]a,b[\subset]0,1[$. We recall that a bounded Nash map defined on a open bounded interval I extends continuously on $\mathrm{adh}(I)$ (See [7] Prop 2.3.5).

Proof of $P4(1,1)$ (Case of the first derivative) :

Let $f :]a,b[\to]0,1[$ be a Nash map. We cut the interval $]a,b[$ into a minimal number N of subintervals $(J_k)_{k=1,...,N}$, such that for each k, $\forall x \in J_k$, $|f'(x)| \geq 1$ or $\forall x \in J_k$, $|f'(x)| \leq 1$. The integer N is bounded by a function of $deg(f)$: apply Proposition 3.3.9 to $\{x \in]0,1[: \ |f'(x)| \leq 1\}$ and $\{x \in]0,1[: \ |f'(x)| \geq 1\}$ and use Corollary 3.3.8.

On each interval J_k, we consider the following parametrization ϕ of $\mathrm{adh}(J_k) = [c,d] \subset [0,1]$:

- $\phi(t) = c + t(d-c)$ if $|f'| \leq 1$ and then we have $deg(\phi) = 1$, $deg(f \circ \phi) = deg(f)$.
- $\phi(t) = f^{-1}_{|[c,d]}(f(c) + t(f(d) - f(c)))$ if $|f'| \geq 1$ and then we have $deg(\phi) = deg(f)$ (indeed $deg(f^{-1}) = deg(f)$) and $deg(f \circ \phi) = 1$.

□

Proof of $P4(r,1)$ (Case of higher derivatives) : We argue by induction on r : assume $P4(r,1)$, with $r \geq 1$ and prove $P4(r+1,1)$.

Let $f :]a,b[\subset]0,1[\to]0,1[$ be a Nash map. By considering for all $i = 1, ..., N$ the family $(f \circ \phi_i, \phi_i)$, where $(\phi_i)_{i=1...N}$ is a $(\mathcal{C}^r, 1, M)$ resolution of f (with $M = M(r)$) given by $P4(r,1)$, we can assume that f is a $(C^r, 1)$ Nash map.

We divide the interval $]a,b[$ into a minimal number N of subintervals on which $|f^{(r+1)}|$ is either increasing or decreasing, *ie*, the sign of $f^{(r+1)}f^{(r+2)}$ is constant. Consider the case where $|f^{(r+1)}|$ is decreasing, the increasing case being similar. We reparametrize these intervals from $[0,1]$ with linear increasing maps Φ_i. We define $f_i = f \circ \Phi_i$. Obviously f_i is a $(C^r, 1)$ Nash map and $|f_i^{(r+1)}|$ is decreasing. In the following computations, we note f instead of f_i.

Setting $h(x) = x^2$, we have :

$$(f \circ h)^{(r+1)}(x) = (2x)^{r+1} f^{(r+1)}(x^2) + R(x, f(x), ...f^{(r)}(x))$$

where R is a polynomial depending only on r. Therefore

$$\forall x \in]0,1[\quad |(f \circ h)^{(r+1)}(x)| \leq |(2x)^{r+1} f^{(r+1)}(x^2)| + C(r), \tag{3.1}$$

where $C(r)$ is a function of r.
Furthermore, we have

$$x|f^{(r+1)}(x)| = \int_0^x |f^{(r+1)}(x)|dt \leq |\int_0^x f^{(r+1)}(t)dt| = |f^{(r)}(x) - f^{(r)}(0)| \leq 2 \tag{3.2}$$

Indeed either $f^{(r+1)}(x) = 0$ and then the inequality is trivial or $f^{(r+1)}(x) \neq 0$ and therefore the sign of $f^{(r+1)}(t)$ is constant because $|f^{(r+1)}|$ being decreasing, we have for $t \in]0, x]$: $0 < |f^{(r+1)}(x)| \leq |f^{(r+1)}(t)|$. By combining inequalities (3.1) and (3.2), we obtain :

$$|(f \circ h)^{(r+1)}(x)| \leq C(r) + 2\frac{(2x)^{r+1}}{x^2} \leq C(r) + 2^{r+2}$$

Finally $deg(\Phi_i \circ h) = 2$ and $deg(f \circ h) = 2deg(f)$. We show now that N is bounded by a function of $deg(f)$ and r like in the first step of the proof : we apply Proposition 3.3.9 to the semi-algebraic set $\{x \in]0, 1[: f^{(r+1)}(x)f^{(r+2)}(x) \geq 0\}$ and we use Corollary 3.3.8.

We conclude the proof of $P4(r + 1, 1)$ by applying Lemma 3.3.22.

□

3.6 Proof of Proposition 3

The proof of Proposition 3.4.1 is an induction both on the dimension d and on the order of derivation α.

In the first step we increase the dimension d.

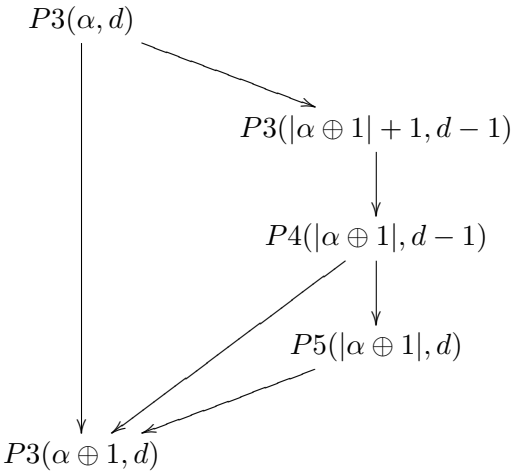
Then, fixing the dimension d, we increase the order of derivation α according to the total order $\preceq$. To be more explicit, let us introduce the following notation :

Notations 3.6.1 *For $\alpha \in \mathbb{N}^d$, we set :*

$$\alpha \oplus 1 := \min\{\beta \in \mathbb{N}^d : \alpha \preceq \beta \ \ and\ \alpha \neq \beta\}$$

We prove $P3(\alpha, d) \Rightarrow P3(\alpha \oplus 1, d)$. We will distinguish two cases : $|\alpha \oplus 1| = |\alpha| + 1$, *ie* $\alpha = (0, ..., 0, s)$, for some $s \in \mathbb{N}$ and $|\alpha \oplus 1| = |\alpha|$.

In fact, we prove in this section Yomdin-Gromov's Lemma by induction. We summarize in the following diagram the different dependences involved in the induction :



Increase of the dimension : $[\forall r \in \mathbb{N}\ P3(r, d)] \Rightarrow P3((1, 0, ..., 0), d + 1)$

Proof :

Let $f : A \subset]0, 1[^{d+1} \to]0, 1[$ a Nash map, defined on a semi-algebraic open set $A \subset \mathbb{R}^{d+1}$. We work on $A_n = \{x \in A : d(x, A_n^c) > 1/n\}$ in order to ensure that f extends continuously on $\mathrm{adh}(A_n)$.

The set A_n is a semi-algebraic open set of degree bounded by a function of $deg(A)$ and d (Corollary 3.3.5). For simplicity, we note A instead of A_n.

We consider the following semi-algebraic open sets : $A_+ = \{x \in A, |\partial_{x_1} f(x)| > 1\}$ and $A_- = \text{int}(\{x \in A, |\partial_{x_1} f(x)| \leq 1\})$. We have $\text{adh}(A) = \text{adh}(A_+) \bigcup \text{adh}(A_-)$. Obviously $\text{adh}(A_+) \bigcup \text{adh}(A_-) \subset \text{adh}(A)$. Let us show $A \subset \text{adh}(A_+) \bigcup \text{adh}(A_-)$. Let $y \in A$. If $y \notin \text{adh}(A_+)$, as A is open, there exists $r > 0$, such that the ball $B(y, r) \subset A \bigcap A_+^c \subset \{x \in A, |\partial_{x_1} f(x)| \leq 1\}$ and thus $y \in A_-$. Remark that $deg(A_+), deg(A_-)$ are bounded by a function of $deg(f)$ according to Corollary 3.3.5.

According to $P3(2,d) \Rightarrow P4(1,d) \Rightarrow P5(1,d+1)$, there exist $(\mathcal{C}^1, 1)$ extendable Nash triangular maps $(\phi_j)_{1 \leq j \leq N}$, such that $\text{adh}(A_-) = \bigcup_{1 \leq j \leq N_-} \widetilde{\phi_j}([0,1]^d)$ and such that N_-, $deg(\phi_j)$ are bounded by a function of $deg(A_-)$, and thus by a function of $deg(f)$. We have $|\partial_{x_1}(f \circ \phi_j)| \leq 1$, so the maps ϕ_i can be used to build a resolution of f.

For A_+, we consider the inverse of f. Observe first, that according to Corollary 3.3.10, we can assume that A_+ is a slice of the following form $\{(x_1, y) \in]0,1[\times A'_+ \ : \zeta(y) < x_1 < \eta(y)\}$, where $A'_+ \subset]0,1[^d$ is a semi-algebraic open set of $\mathbb{R}^d$ and $\zeta, \eta : A'_+ \to]0,1[$ are Nash maps.

Define $D_+ = \{(f(x_1, y), y) : (x_1, y) \in A_+\}$. We define $g : A_+ \to D_+$, $g(x_1, y_1) := (f(x_1, y), y))$. This map g is a local diffeomorphism, by the local inversion theorem. Moreover, g is one to one, because $g(x_1, y) = g(x'_1, y')$ implies $y = y'$, and $f(x_1, y) = f(x'_1, y)$ implies $x_1 = x'_1$, because $|\partial_{x_1} f(x)| \geq 1$ for $x \in A_+$. The map g extends to a homeomorphism $g : \text{adh}(A_+) \to \text{adh}(D_+)$, since f is continuous on $adh(A)$ (Recall that we note $A := A_n$).

Observe that D_+ is a semi-algebraic open set of $\mathbb{R}^{d+1}$. On D_+ we define $\phi : \phi(t, u) := g^{-1}(t, u) = (f(., u)^{-1}(t), u)$. The Nash map $\phi : D_+ \to A_+$ is triangular and $deg(\phi) = deg(f)$. Define $\phi(t, u) = (x_1, y)$. We compute :

$$D\phi(t,u) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\partial_{x_1} f(x_1,y)} & -\frac{1}{\partial_{x_1} f} \nabla_y f(x_1, y) \\ 0 & Id \end{pmatrix}$$

As $(x_1, y) \in A_+$, we have $|\partial_{x_1} \phi(t, u)| = |\frac{1}{\partial_{x_1} f(x_1,y)}| \leq 1$. Furthermore, we check

$$f \circ \phi(t, u) = t.$$

Therefore, ϕ and $f \circ \phi$ are $(\mathcal{C}^{(1,0,...,0)}, 1)$ extendable Nash triangular maps. In order to obtain a resolution, we apply again $P5(1, d+1)$ to D_+. That gives $(C^1, 1)$ extendable Nash triangular maps $\psi_j :]0,1[^{d+1} \to D_+$, $j \leq N_+$, such that N_+, $deg(\psi_j)$ are bounded by a function of $deg(D_+)$, thus by a function of $deg(f)$ and such that $\text{adh}(D_+) = \bigcup_{1 \leq i \leq N_+} \widetilde{\psi_i}([0,1]^{d+1})$. Moreover, by applying Fact 3.2.9, we get :

$$|\partial_{x_1}(\phi \circ \psi_j)| = |\partial_{x_1}(\phi)|.|\partial_{x_1}(\psi_j^1)| \leq 1$$

because ψ_j is triangular. We have also :

$$|\partial_{x_1}(f \circ \phi \circ \psi_j)| = |\partial_{x_1} \psi_j^1| \leq 1,$$

where ψ_j^1 is the first coordinate of ψ_j. The parametrizations $\phi \circ \psi_j :]0,1[^{d+1} \mapsto]0,1[^{d+1}$ are therefore $(\mathcal{C}^{(1,0,...,0)}, 1)$ extendable Nash triangular maps, such that :

- $\text{adh}(A_+) = \bigcup_{j=1}^{N_+} \widetilde{\phi} \circ \widetilde{\psi_j}([0,1]^{d+1})$;
- each $f \circ \phi \circ \psi_j$ is a $(\mathcal{C}^{(1,0,...,0)}, 1)$ Nash map ;
- $deg(\phi \circ \psi_j)$, $deg(f \circ \phi \circ \psi_j)$ are bounded by a function of $|\alpha|, d$, and $deg(f)$ according to Corollary 3.3.7.

Finally, $\{\phi_1, ..., \phi_{N_-}, \phi \circ \psi_1, ..., \phi \circ \psi_{N_+}\}$ is a $(\mathcal{C}^{(1,0,...,0)}, 1)$-resolution of f.

□

Increase of the derivation order : $P3(s,d) \Rightarrow P3((s+1, 0, ..., 0), d)$

PROOF :

Like in the case of dimension $d = 1$, we begin with the following reduction.

Affirmation 3.6.2 *It is enough to show the result for a single* $(\mathcal{C}^s, 1)$ *extendable Nash map* $f : A =]0,1[^d \to]0,1[$.

PROOF OF CLAIM 3.6.2 : Assume $P3((s+1,0,...,0),d)$ for a single $(\mathcal{C}^s,1)$ extendable Nash map $f : A =]0,1[^d \to]0,1[$. The proof of Lemma 3.4.7 implies $P3((s+1,0,...,0),d)$ for any family $(g_i :]0,1[^d \to]0,1[)_{i=1,...,k}$ of $(\mathcal{C}^s,1)$ extendable Nash maps. Let $f : A \subset]0,1[^d \to]0,1[$ a Nash map, defined on a semi-algebraic open set $A \subset]0,1[^1$. By applying $Q3(s,d)$ to f, we obtain a $(\mathcal{C}^s,1)$ resolution $(\phi_i^n)_{i=1,...,N_n}$ of $f_{/A_n}$, with A_n an adapted sequence. We apply $Q3((s+1,0,...,0),d)$ to the family $(f \circ \phi_i^n, \phi_i^n)$ of $(\mathcal{C}^s,1)$ extendable Nash maps defined on $]0,1[^d$. We conclude by constructing a $((s+1,0,...,0),M)$-adapted sequence for f with $M = M(s,d,deg(f))$, like in the proof of Lemma 3.4.7. □

Let $f :]0,1[^d \to]0,1[$ be a $(\mathcal{C}^s,1)$ Nash map.

We cut up $]0,1[^d$ according to the sign of $\frac{\partial^{s+1}f}{\partial x_1^{s+1}}\frac{\partial^{s+2}f}{\partial x_1^{s+2}}$ like in the first step of the proof : $A_+ = \{x \in]0,1[^d, \frac{\partial^{s+1}f}{\partial x_1^{s+1}}(x)\frac{\partial^{s+2}f}{\partial x_1^{s+2}}(x) > 0\}$ and $A_- = \text{int}(\{x \in]0,1[^d, \frac{\partial^{s+1}f}{\partial x_1^{s+1}}(x)\frac{\partial^{s+2}f}{\partial x_1^{s+2}}(x) \leq 0\})$. We have again $\text{adh}(A) = \text{adh}(A_+) \bigcup \text{adh}(A_-)$. In the following, we consider only $A = A_+$, the case of A_- being similar. According to Corollary 3.3.10, we can assume that A is a slice of the following form $\{(x_1,y) \in]0,1[\times A' : \zeta(y) < x_1 < \eta(y)\}$, where $A' \subset]0,1[^{d-1}$ is a semi-algebraic open set and $\zeta, \eta : A' \to]0,1[$ are Nash maps.

Applying the estimate (3.2) obtained in Part 5 to the function $x_1 \mapsto \frac{\partial^{s+1}f}{\partial x_1^{s+1}}(x_1,y)$ (we fix y), we get for $(x_1,y) \in A_+$,

$$|\frac{\partial^{s+1}f}{\partial x_1^{s+1}}(x_1,y)| \leq \frac{2}{|x_1 - \zeta(y)|} \tag{3.3}$$

The induction hypothesis $P3(s,d)$ implies $P3(s+2,d-1)$ and $P3((s+2,d-1)$ implies $P4(s+1,d-1)$. Apply $P4(s+1,d-1)$ to (ζ,η) : there exist $(\mathcal{C}^{s+1},d-1)$ extendable Nash triangular maps $h :]0,1[^{d-1} \to]0,1[^{d-1}$, of which the images of the extensions cover $\text{adh}(A')$, such that $\zeta \circ h$ and $\eta \circ h$ are $(\mathcal{C}^{s+1},d-1)$ Nash maps. Define $\psi :]0,1[\times]0,1[^{d-1} \to A$,

$$\psi(v_1,w) = (\zeta \circ h(w).(1-v_1^2) + \eta \circ h(w).v_1^2, h(w))$$

The maps ψ are triangular, $\|\psi\|_{s+1} \leq 2$ and the images of their continuous extensions cover $\text{adh}(A)$.

In the new coordinates $(v_1,v_2,...,v_d) =: (v_1,w)$, we have :

$$x_1 - \zeta(y) = \zeta \circ h(w).(1-v_1^2) + \eta \circ h(w).v_1^2 - \zeta(h(w)) = v_1^2.(\eta \circ h(w) - \zeta \circ h(w))$$

and therefore the previous estimate (3.3) become :

$$|\frac{\partial^{s+1}f}{\partial x_1^{s+1}}(\psi(v_1,w))| \leq \frac{2}{v_1^2|\eta \circ h(w) - \zeta \circ h(w)|} \tag{3.4}$$

Moreover, applying Fact 4, we get :

$$\frac{\partial^{s+1}(f \circ \psi)}{\partial v_1^{s+1}}(v_1,w) = (2v_1)^{s+1}(\eta \circ h(w) - \zeta \circ h(w))\frac{\partial^{s+1}f}{\partial x_1^{s+1}}(\psi(v_1,w)) + R(\eta \circ h(w) - \zeta \circ h(w), v_1, (\frac{\partial^k f}{\partial x_1^k}(\psi(v_1,w)))_{k \leq s}),$$

where R is a polynomial, which depends only on s and d. Using the last inequality (3.4), the first term is less than 2^{s+2}. Consider the second term. The map f is a $(\mathcal{C}^s,1)$ Nash map, therefore $|\frac{\partial^k f}{\partial x_1^k}| \leq 1$,

for $k \leq s$. Thus $|R(\eta \circ h(w) - \zeta \circ h(w), v_1, (\frac{\partial^k f}{\partial x_1^k}(\psi(v_1, w)))_{k \leq s})|$ is bounded by a function of s and d, and hence $|\frac{\partial^{s+1}(f \circ \psi)}{\partial v_1^{s+1}}|$ also. We apply Lemma 3.2.5 to control the derivatives of lower order than s of $f \circ \psi$. Using Lemma 3.3.22, we can assume that ψ is a $(\mathcal{C}^{s+1}, 1)$ Nash map and $f \circ \psi$ is a $(\mathcal{C}^{(s+1,0,...,0)}, 1)$ Nash map. □

We deal now with the last step of the proof.

Control of the following derivative : $P3(\alpha, d) \Rightarrow P3(\alpha \oplus 1, d)$ with $\alpha \neq (0, ..., 0, s)$

Observe that the condition $\alpha \neq (0, ..., 0, s)$ implies $|\alpha| = |\alpha \oplus 1|$: the order of derivation is fixed.

Proof : Like in Claim 3.6.2, we can assume that $f :]0,1[^d \to]0,1[$ is a $(\mathcal{C}^\alpha, 1)$ Nash map.

Define $A_n =]1/n, 1 - 1/n[^{d-1}$. According to Tarski's principle, $B = \{(x_1, y) \in \text{adh}(A_n) : |\frac{\partial^{\alpha \oplus 1} f}{\partial x^{\alpha \oplus 1}}(x_1, y)| = \sup_{t \in [1/n, 1-1/n]}(|\frac{\partial^{\alpha \oplus 1} f}{\partial x^{\alpha \oplus 1}}(t, y)|)\}$ is a semi-algebraic set of degree bounded by a function of $deg(f)$ and s. By the definition of an adapted sequence, the sup above is finite (Recall that f is not supposed to be analytic in a neighborhood of A, so that we can't work directly with A). According to Proposition 3.3.9, B is covered by sets $(B_i)_{i=1,...,N}$, $B_i = \{(x_1, y) \in]0,1[\times B_i' : \gamma_i(y) < x_1 < \Delta_i(y)\}$ or $B_i = \{(\sigma_i(y), y) \in B_i'\}$, where $B_i' \subset]1/n, 1 - 1/n[^{d-1}$ are semi-algebraic sets of $\mathbb{R}^{d-1}$, such that $\bigcup_{i=1}^N B_i' =]1/n, 1 - 1/n[^{d-1}$ and where $\sigma_i, \gamma_i, \Delta_i : B_i' \to]0,1[$ are Nash maps. In the first case, we set $\sigma_i := 1/2(\Delta_i + \gamma_i)$. Afterwards, we consider only the sets B_i', which are open sets. Observe that for these sets we have $\bigcup \text{adh}(B_i') = [1/n, 1 - 1/n]^{d-1}$.

By using the Tarski's principle and Proposition 3.3.9, we check that N and the degree of σ_i are bounded by a function of $deg(f)$ and $|\alpha|$. Define the Nash map $g_i : B_i' \to]0,1[$, $g_i(y) = \frac{1}{2}\frac{\partial^{(\alpha \oplus 1)_1} f}{\partial x_1^{(\alpha \oplus 1)_1}}(\sigma_i(y), y)$, where $(\alpha \oplus 1)_i$ denotes the i^{th} coordinate of $\alpha \oplus 1$. The map g_i is onto $]0,1[$, because f is a $(\mathcal{C}^\alpha, 1)$ map and $((\alpha \oplus 1)_1, 0, ..., 0) \preceq \alpha$. The induction hypothesis $P3(\alpha, d)$ implies $P3(|\alpha| + 1, d - 1)$ and thus $P4(|\alpha|, d - 1)$, which applied to (σ_i, g_i) gives $(\mathcal{C}^{|\alpha|}, 1)$ extendable Nash triangular maps $h_{i,k} :]0,1[^{d-1} \to B_i'$, such that $g_i \circ h_{i,k}$ and $\sigma_i \circ h_{i,k}$ are $(\mathcal{C}^{|\alpha|}, 1)$ Nash and such that $\bigcup_k \widetilde{h_{i,k}}([0,1]^{d-1}) = adh(B_i')$.

Then, $h_{i,k}$ being triangular, we have according to Fact 4 :

$$2\frac{\partial^{((\alpha \oplus 1)_2, ..., (\alpha \oplus 1)_d)}(g_i \circ h_{i,k})}{\partial x^{((\alpha \oplus 1)_2, ..., (\alpha \oplus 1)_d)}}(y) = \frac{\partial^{\alpha \oplus 1} f}{\partial x^{\alpha \oplus 1}}(\sigma_i \circ h_{i,k}(y), h_{i,k}(y)) \times (\frac{\partial h_{i,k}}{\partial_{x_2}})^{(\alpha \oplus 1)_2} ... (\frac{\partial h_{i,k}}{\partial x_d})^{(\alpha \oplus 1)_d} + R$$

where R is a polynomial, depending only on α, in the derivatives of f of order $\preceq \alpha$ and in the derivatives of $h_{i,k}$ and $\sigma_i \circ h_{i,k}$ of order less than $|\alpha|$. The map $h_{i,k}$ is a $(\mathcal{C}^{|\alpha|}, 1)$ Nash map and by hypothesis f is a $(\mathcal{C}^\alpha, 1)$ Nash map, so that we have $|R| < C(|\alpha|, d)$, where C is a function † of $|\alpha|$ and d.
After all $g_i \circ h_{i,k}$ is a $(\mathcal{C}^{|\alpha|}, 1)$ Nash map. Hence we have

$$|\frac{\partial^{\alpha \oplus 1} f}{\partial x^{\alpha \oplus 1}}(\sigma_i \circ h_{i,k}(y), h_{i,k}(y))(\frac{\partial h_{i,k}}{\partial_{x_2}})^{(\alpha \oplus 1)_2} ... (\frac{\partial h_{i,k}}{\partial x_d})^{(\alpha \oplus 1)_d}| \leq |2\frac{\partial^{((\alpha \oplus 1)_2, ..., (\alpha \oplus 1)_d)}(g_i \circ h_{i,k})}{\partial x^{((\alpha \oplus 1)_2, ..., (\alpha \oplus 1)_d}}| + |R| < C(|\alpha|, d)$$

Define $\phi_{i,k} :]0,1[^d \to]0,1[^d$ by :

$$\phi_{i,k}(x_1, y) = (1/n + b_n x_1, h_{i,k}(y)), \text{ with } b_n := 1 - 2/n.$$

The parametrization $\phi_{i,k}$ is a $(\mathcal{C}^{\alpha \oplus 1}, 1)$ Nash triangular map :

†. In order to simplify the notations, we will denote by C any function of $|\alpha|$ and d

– Using again the triangularity of $h_{i,k}$ and Fact 4, we get : $\frac{\partial^{\alpha\oplus 1}(f\circ\phi_{i,k})}{\partial x^{\alpha\oplus 1}} = \frac{\partial^{\alpha\oplus 1} f}{\partial x^{\alpha\oplus 1}}(1/n+b_n x_1, h_{i,k}(y))\times (b_n)^{(\alpha\oplus 1)_1}(\frac{\partial h_{i,k}}{\partial_{x_2}})^{(\alpha\oplus 1)_2}...(\frac{\partial h_{i,k}}{\partial x_d})^{(\alpha\oplus 1)_d} + S$, where S is a polynomial in $\frac{\partial^\beta f}{\partial x^\beta}$ with $\beta \preceq \alpha$ and in the derivatives of $h_{i,k}$ of order less than $|\alpha|$, S depending only on α. Therefore $|S| < C(|\alpha|, d)$.

Moreover by definition of σ_i, $|\frac{\partial^{\alpha\oplus 1} f}{\partial x^{\alpha\oplus 1}}(1/n+b_n x_1, h_{i,k}(y))\times(\frac{\partial h_{i,k}}{\partial_{x_2}})^{(\alpha\oplus 1)_2}...(\frac{\partial h_{i,k}}{\partial x_d})^{(\alpha\oplus 1)_d}| \leq |\frac{\partial^{\alpha\oplus 1} f}{\partial x^{\alpha\oplus 1}}(\sigma_i\circ h_{i,k}(y), h_{i,k}(y)) \times (\frac{\partial h_{i,k}}{\partial_{x_2}})^{(\alpha\oplus 1)_2}...(\frac{\partial h_{i,k}}{\partial x_d})^{(\alpha\oplus 1)_d}| < C(|\alpha|, d)$,
thus
$|\frac{\partial^{\alpha\oplus 1}(f\circ\phi_{i,k})}{\partial x^{\alpha\oplus 1}}| \leq |\frac{\partial^{\alpha\oplus 1} f}{\partial x^{\alpha\oplus 1}}(1/n + b_n x_1, h_{i,k}(y)) \times (\frac{\partial h_{i,k}}{\partial_{x_2}})^{(\alpha\oplus 1)_2}...(\frac{\partial h_{i,k}}{\partial x_d})^{(\alpha\oplus 1)_d}| + |S| < C(|\alpha|, d)$

– Finally for $\beta \preceq \alpha$, only the derivatives of f of order $\preceq \alpha$ take part in the expression $\frac{\partial^\beta(f\circ\phi_{i,k})}{\partial x^\beta}$, again because of the triangularity of $h_{i,k}$ and Fact 4. Hence $|\frac{\partial^\beta(f\circ\phi_{i,k})}{\partial x^\beta}| < C(|\alpha|, d)$.

Lemma 3.3.22 gives us a $(\mathcal{C}^\alpha, 1, M)$-resolution of $f_{/A_n}$, with $M = M(|\alpha|, d, deg(f))$.

□

3.7 Une autre version du lemme algébrique

Nous donnons maintenant une version plus forte du lemme algébrique (Théorème 3.1.1), qui a l'avantage de s'appliquer à des ensembles semi-algébriques non compacts et qui est une conséquence de la Proposition 3.4.3 de l'article précédent.

Théorème 3.7.1 *(Yomdin-Gromov's algebraic Lemma) Soient r, l et d des entiers positifs. Pour tout ensemble semi-algébrique $A \subset]0,1[^d$ de dimension l, il existe un entier N et des applications continues semi-algébriques $\phi_1, ..., \phi_N :]0,1[^l \to]0,1[^d$, telles que :*
– ϕ_i est réelle analytique pour tout $i = 1, ..., N$;
– $\|\phi_i\|_r := \max_{\beta:|\beta|\leq r} \|\partial^\beta \phi_i\|_\infty \leq 1$ pour tout $i = 1, ..., N$;
– $\bigcup_{i=1}^N \phi_i(]0,1[^l) = A$.
De plus N et $\max_{i=1,...,N} deg(\phi_i)$ sont bornés par une fonction de $deg(A)$, d et r.

Preuve : D'après la Proposition 3.4.3, il existe une $(\mathcal{C}^r, 1, M)$ résolution de A que l'on note Ψ_1 avec M dépendant uniquement $r, d, deg(A)$. On pose $A_1 = A - \bigcup_{\psi\in\Psi_1} \psi(]0,1[^l)$. L'ensemble semi-algébrique A_1 est de degré borné par une constante dépendant uniquement de $r, d, deg(A)$ puisqu'il en est ainsi du cardinal de Ψ_1 et du degré des éléments de Ψ_1. De plus A_1 est de dimension $< dim(A) = l$. En appliquant maintenant la proposition 3.4.3 à A_1, on obtient une résolution Ψ_2 de A_1. On note $A_2 = A_1 - \bigcup_{\psi\in\Psi_2} \psi(]0,1[^d)$... On définit ainsi par récurrence A_i et Ψ_i. Remarquez que $A_{d+1} = \emptyset$ puisque $dim(A_i) \leq dim(A) - i$ pour $i = 1, ..., d+1$. La famille de fonctions $\bigcup_{i=1,...,d+1} \Psi_i$ satisfait les hypothèses du théorème. □

De la même façon, on a l'énoncé fonctionnel suivant :

Théorème 3.7.2 *Pour toute famille $(f_j/A \to]0,1[)_{j=1,...,k}$ d'applications de Nash définies sur un ensemble semi-algébrique ouvert $A \subset]0,1[^d$, il existe un entier N et des applications continues semi-algébriques $\phi_1, ..., \phi_N :]0,1[^l \to A$, telles que :*
– ϕ_i est réelle analytique pour tout $i = 1, ..., N$;
– $\|\phi_i\|_r \leq 1$, $\|f_j \circ \phi_i\|_r \leq 1$ pour tout $i = 1, ..., N$ et tout $j = 1, ..., k$;
– $\bigcup_{i=1}^N \phi_i(]0,1[^l) = A$.
De plus N, $\max_{i=1,...,N} deg(\phi_i)$ et $\max_{\substack{i=1,...,N\\ j=1,...,k}} deg(f_j\circ\phi_i)$ sont bornés par une fonction de $\max_{j=1,...,k}(deg(f_j))$, d et r.

Remarque 3.7.3 *Soit $C \in \mathbb{R}^+$. Quitte à recouvrir $]-C,C[^d$ en cubes de taille unitaire, on peut remplacer la condition $A \subset]0,1[^d$ par $A \subset]-C,C[^d$ dans les théorèmes 3.7.1 et 3.7.2. Le nombre de reparamétrisations dépend alors aussi de C. Autrement dit : "la complexité différentielle d'un ensemble semi-algébrique est bornée par son diamètre et sa complexité algébrique".*

3.8 Estimées quantitatives pour les fonctions semi-algébriques

3.8.1 Degré pour les fonctions semi-algébriques

Nous avons défini dans l'article précédent le degré $deg(f)$ d'une fonction semi-algébrique f, comme étant le degré de son graphe Γ_f. Nous définissons maintenant une notion de degré pour les applications semi-algébriques avec laquelle il est plus facile d'avoir des estimées quantitatives. Celles-ci nous seront utiles pour montrer dans la prochaine section une formule pour l'entropie k dimensionnelle d'un produit.

Définition 3.8.1 *[53] Soient $A \subset]0,1[^d$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une application semi-algébrique. Le* ***degré fonctionnel*** *de f noté $deg^*(f)$ est le degré minimal des polynômes annulateurs de f, c'est à dire des polynômes $P \in \mathbb{R}[X_1,...,X_d,Y] - \{0\}$, tels que $P(x,f(x)) = 0$ pour tout $x \in A$.*

Si $Q :]0,1[^d \to \mathbb{R}$ est un polynôme non constant, on retouve la notion usuelle de degré : $deg^*(Q) = deg(Q)$.

Remarque 3.8.2 *Si f est à valeurs dans $]0,1[$, alors d'après la proposition 3.3.9 appliquée $\{(x,y) \in A \times]0,1[,\ P(x,y) = 0\}$, le degré $deg(f)$ de f au sens de la définition 3.3.2 est borné par une fonction dépendant uniquement du degré fonctionnel $deg^*(f)$ et de d.*

Soit A un anneau commutatif unitaire intègre. Considérons deux éléments P et Q de $A[X]$ de degrés respectifs m et n :

$$P(X) = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i \text{ et } Q(X) = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i$$

Le résultant $Res_X(P,Q)$ est le déterminant de la matrice suivante dite de Sylvester (voir [38] ou [56] pour plus de détails) :

$$\begin{pmatrix}
a_m & 0 & \cdots & 0 & b_n & 0 & \cdots & 0 \\
a_{m-1} & a_m & \ddots & \cdots & b_{n-1} & b_n & \ddots & \vdots \\
\vdots & a_{m-1} & \ddots & 0 & \vdots & b_{n-1} & \ddots & 0 \\
a_0 & \vdots & \ddots & a_m & b_0 & \vdots & \ddots & b_m \\
0 & a_0 & & a_{m-1} & 0 & b_0 & & b_{n-1} \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0
\end{pmatrix}$$

Si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}[X_0,X_1,X_2,...,X_n]$ le résultant Res_{X_0} de P et de Q en X_0 est le déterminant de la matrice de Sylvester associée aux polynômes P et Q vu comme polynôme en X_0 à coefficients dans $\mathbb{R}[X_1,...,X_n]$. En particulier $Res_{X_0}(P,Q) \in \mathbb{R}[X_1,...,X_n]$. Le degré total de $Res_{X_0}(P,Q)$ est borné par le produit des degrés totaux de P et de Q (Théorème 10.9 de [56]). Enfin si P et Q ont une racine commune $(x_0,x_1,...,x_n)$, alors $Res_{X_0}(P)(x_1,...,x_n) = 0$ (Proposition 8.1 de [38]).

La proposition suivante estime le degré fonctionnel d'une composition de fonctions semi-algébriques :

Proposition 3.8.3 *Soient $g_0, g_1, ..., g_d :]0,1[^d \to]0,1[$ des fonctions semi-algébriques alors*

$$deg^*(g_0(g_1, ..., g_d)) \leq \prod_{i=0}^{d} deg^*(g_i)$$

où $g_0(g_1, ..., g_d)$ désigne la fonction qui à $(x_1, ..., x_d) \in]0,1[^d$ associe $g_0(g_1(x_1), ..., g_d(x_d))$.

PREUVE : Pour tout $i \in [\![0, d]\!]$, notons P_i un polynôme annulateur de g_i de degré minimal, i.e. $deg(P_i) = deg^*(g_i)$.

On élimine Y_1 dans $\begin{cases} P_0(Y_1, ..., Y_d, Y) &= 0 \\ P_1(X_1, ..., X_d, Y_1) &= 0 \end{cases}$

Remarquons que pour tout $(x_1, ..., x_d, y_2, ..., y_d)$ dans $]0,1[^{2d-1}$, on a :

$$\begin{cases} P_0(g_1(x_1, ..., x_d), y_2, ...y_d, g_0(g_1(x_1, ..., x_d), y_2, ..., y_d)) &= 0 \\ P_1(x_1, ..., x_d, g_1(x_1, ..., x_d)) &= 0 \end{cases}$$

Les polynômes P_0 et P_1 vu comme éléments de $\mathbb{R}[X_1, ..., X_d, Y_1, ..., Y_d, Y]$ ont donc $(x_1, ..., x_d, g_1(x_1, ..., x_d), y_2, ...y_{d-1}, g_0(g_1(x_1, ..., x_d), y_2, ..., y_d)) \in \mathbb{R}^{2d+1}$ comme racine commune. On en déduit que :

$$Res_{Y_1}(P_1, P_0)(x_1, ..., x_d, g_1(x_1, ..., x_d), y_2, ...y_{d-1}, g_0(g_1(x_1, ..., x_d), y_2, ..., y_d)) = 0$$

De plus le degré total de $Res_{Y_1}(P_1, P_0)$ est borné par $deg(P_1) \times deg(P_0)$. Notons $Q_1 = Res_{Y_1}(P_1, P_0)$.

Puis on élimine Y_2 dans $\begin{cases} Q_1(X_1, ..., X_d, Y_2, ..., Y_d, Y) &= 0 \\ P_2(X_1, ..., X_d, Y_2) &= 0 \end{cases}$

On a maintenant pour tout $(x_1, ..., x_d, y_3, ..., y_d)$ dans $]0,1[^{2d-2}$:

$$Res_{Y_2}(P_2, Q_1)(x_1, ..., x_d, g_1(x_1, ..., x_d), y_3, ...y_{d-1}, g_0(g_1(x_1, ..., x_d), g_2(x_1, ..., x_d), y_3, ..., y_d)) = 0$$

et le degré de $Res_{Y_2}(P_2, Q_1)$ est borné par $deg(P_2) \times deg(P_1) \times deg(P_0)$ et ainsi de suite... on définit par récurrence $Q_i := Res_{Y_i}(P_i, Q_{i-1}) \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_d, Y_{i+1}, ..., Y_d, Y]$ pour $i \leq d-1$. pour tout $(x_1, ..., x_d, y_{i+1}, ..., y_d)$ dans $]0,1[^{2d-i}$:

$$Q_i(x_1, ..., x_d, g_1(x_1, ..., x_d), y_{i+1}, ...y_{d-1}, g_0(g_1(x_1, ..., x_d), ..., g_i(x_1, ..., x_d), y_{i+1}, ..., y_d)) = 0$$

De plus le degré de Q_i vérifie : $deg(Q_i) \leq \prod_{l=0,...,i} deg(P_l)$.

Alors $Q_d := Res_{Y_d}(P_d, Q_{d-1}) \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_d, Y]$ est un polynôme annulateur de $g_0(g_1, ..., g_d)$ i.e. pour tout $(x_1, ..., x_d) \in]0,1[^d$, on a $Q_d(x_1, ..., x_d, g_0(g_1(x_1, ..., x_d), ..., g_d(x_1, ..., x_d))) = 0$. En particulier $deg^*(g_0(g_1, ..., g_d)) \leq deg(Q_d) \leq \prod_{i=0}^{d} deg(P_i) = \prod_{i=0}^{d} deg^*(g_i)$.

□

En composant des polynômes à une variable, on vérifie facilement que l'énoncé de la proposition précédente est optimal pour $d = 1$.

Si $f = (f_1, ..., f_d) :]0,1[^d \to \mathbb{R}^d$ est une application semi-algébrique, on pose $deg^*(f) := \sum_{i=1,...,d} deg^*(f_i)$.

Corollaire 3.8.4 *Soient $f :]0,1[^d \to]0,1[^d$ et $g :]0,1[^d \to]0,1[^d$ deux applications semi-algébriques, alors*

$$deg^*(f \circ g) \leq deg^*(f) deg^*(g)^d$$

Cette estimée du degré de la composition de deux fonctions semi-algébriques est "satisfaisante" d'un point de vue dynamique :

Corollaire 3.8.5 *Si $f_1, ..., f_n$ sont des applications semi-algébriques de $]0,1[^d$ dans $]0,1[^d$ alors*

$$deg^*(f_1 \circ ... \circ f_n) \leq deg^*(f_1) \prod_{i=2}^{n} deg^*(f_i)^d$$

Rappelons que d'après le principe de Tarski, le degré $deg(f \circ g)$ (comme défini à la Définition 3.3.2 dans l'article précédent) est borné par une fonction dépendant uniquement du degré $deg(f)$ de f et du degré $deg(g)$ de g. Si le graphe de f (resp. de g) s'écrit comme une combinaison booléenne de conditions de signe sur m polynômes (resp. n) de degrés p (resp. q), alors le graphe de la fonction composée $f \circ g$ est décrit par une combinaison booléenne de conditions de signes sur $((m+n) \times \max(p,q))^{O(d^2)}$ polynômes de degrés $\max(p,q)^{O(d)}$ d'après le théorème 14.16 of [5]. Ce résultat quantitatif relatif à l'élimination des quantificateurs ne nous permet de conclure que le degré d'une composition de n applications semi-algébriques de degré borné est au plus exponentiel en n. C'est pourquoi, nous avons travaillé avec cette autre notion de degré mieux adaptée au graphe de fonctions semi-algébriques.

Notations 3.8.6 *Soit $f = (f_1, ..., f_d) :]0,1[^d \to \mathbb{R}^d$ une application de Nash. Pour tout $i = 1, ..., d$, nous considérons des polynômes P_i annulateurs de f_i de degré minimal. On note A_f le sous-ensemble algébrique de $]0,1[^d \times \mathbb{R}^d$ défini par :*

$$A_f := \{(x_1, ...x_d, y_1, ..., y_d) \in]0,1[^d \times \mathbb{R}^d \ : \ P_i(x_1, ..., x_d, y_i) = 0, \ \partial_{y_i} P_i(x_1, ..., x_d, y_i) \neq 0 \text{ pour tout } i = 1, ..., d\}$$

Enfin rappelons que le graphe Γ_f de f est défini comme suit : $\Gamma_f := \{(x, f(x)), x \in]0,1[^d\} \subset]0,1[^d \times \mathbb{R}^d$. Dans la suite on note $\pi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ la projection par rapport au second facteur de sorte que $\pi(\Gamma_f)$ coïncide avec l'image de f.

Proposition 3.8.7 *Soit $f :]0,1[^d \to \mathbb{R}^d$ une application de Nash, alors $\Gamma_f \bigcap A_f$ est une union de composantes connexes de A_f. En particulier toute composante connexe de $\Gamma_f \bigcap A_f$ est une composante connexe de A_f.*

Preuve : Rappelons que pour les ensembles semi-algébriques, connexité par arc équivaut à connexité [7]. Soit A une composante connexe de A_f rencontrant le graphe de f . Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe un point $a \in A$ qui n'est pas dans le graphe de f. Soit $\lambda : [0,1] \to A$ un arc continu reliant a à un point du graphe, i.e. $\lambda(0) = a$ et $\lambda(1) \in \Gamma_f$. Soit $t = \inf\{s, \lambda(s) \in \Gamma_f\}$. Par continuité de f, le point $\lambda(t)$ appartient aussi au graphe de f. En particulier, t est strictement positif. Notons $(x, f(x)) = \lambda(t) \in A_f$. Puisque pour tout $i = 1, ..., d$, on a $\partial_{y_i} P_i(x, f_i(x)) \neq 0$, il existe, d'après le théorème d'inversion locale, des voisinages ouverts U de x et V de $f(x)$ et une fonction $g : U \to V$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que

$$[(u, v = (v_1, ..., v_d)) \in U \times V, \ P_i(u, v_i) = 0 \text{ pour tout } i = 1, ..., d] \Leftrightarrow [u \in U, v = g(u)] \qquad (3.5)$$

Par continuité de f, il existe un voisinage ouvert $U' \subset U$ de x tel que pour tout $u \in U'$, $(u, f(u)) \in U \times V$. D'après l'équivalence (3.5) et P_i étant un polynôme annulateur de f_i pour tout $i = 1, ..., d$, les fonctions f et g coïncident sur U'. Mais l'application λ étant continue, il existe $0 \leq s < t$ tel que $\lambda([s,t]) \in U \times V$. Or $\lambda([s,t]) \subset A \subset \{(u, v = (v_1, ..., v_d)) \in]0,1[^d \times]0,1[^d, \ P_i(u, v_i) = 0 \text{ pour tout } i = 1, ..., d\}$. On en déduit donc, toujours d'après l'équivalence (3.5), que $\lambda([s,t]) \subset \Gamma_f$, ce qui contredit la définition de t. □

Remarque 3.8.8 *L'application $f = (f_1, ..., f_d)$ étant une fonction de Nash et le polynôme P_i étant un polynôme annulateur de f_i de degré minimal pour tout $i = 1, ..., d$, l'ensemble semi-algébrique $B_f = \bigcup_{i=1}^{d} \{x \in]0,1[^d,\ \partial_{y_i} P_i(x, f_i(x)) = 0\}$ est de dimension $< d$. En particulier, $Image(f) - \pi(\Gamma_f \bigcap A_f) \subset f(B_f)$ est un ensemble semi-algébrique de dimension $< d$.*

3.8.2 Nombre de composante connexes

Nous rappelons maintenant que le nombre de composantes connexes d'un ensemble semi-algébrique $A \subset \mathbb{R}^d$ est borné par une fonction dépendant uniquement de son degré $deg(A)$ et de d. Plus précisément, on a [60] :

Théorème 3.8.9 *Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble semi-algébrique. Soit $A = \bigcup_{i=1}^{p} \bigcap_{j=1}^{j_i} A_{ij}$ une écriture de A où A_{ij} est un ensemble semi-algébrique élémentaire de la forme $\{p_{ij} > 0\}$ ou $\{p_{ij} \geq 0\}$, avec p_{ij} des polynômes de degré k_{ij}. Posons $k_i = \sum_{j=1}^{j_i} k_{ij}$. Alors le nombre de composantes connexes de A est inférieur ou égal à $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p} k_i (k_i - 1)^{d-1}$.*

Avec les notations 3.8.6, on obtient en appliquant le théorème précédent à $A_f = \{(x_1, ...x_d, y_1, ..., y_d) \in]0,1[^d \times \mathbb{R}^d,\ P_i(x_1, ..., x_d, y_i) = 0\ :\ \partial_{y_i} P_i(x_1, ..., x_d, y_i) \neq 0,\ i = 1, ..., d\}$:

Corollaire 3.8.10 *Soit $f :]0,1[^d \to \mathbb{R}^d$ une application de Nash. Le nombre de composantes connexes de A_f est borné par $C deg^*(f)^d$, où C est une constante dépendant uniquement de d.*

Corollaire 3.8.11 *Soit $f :]0,1[^d \to \mathbb{R}^d$ une application de Nash. Soient A une composante connexe de A_f et $B \subset \mathbb{R}^{d+1}$ un ensemble semi-algébrique alors le nombre de composantes connexes de $(\pi(A) \times \mathbb{R}) \bigcap B$ est borné par $C deg^*(f)^d$ où C est une constante dépendant uniquement de d et du degré de B.*

Preuve : La projection π étant continue et surjective, le nombre de composantes connexes de $(\pi(A) \times \mathbb{R}) \bigcap B$ est borné par le nombre de composantes connexes de $(A \times \mathbb{R}) \bigcap \left(]0,1[^d \times B\right)$. Puisque A est une composante connexe de A_f, ce nombre est aussi borné par le nombre de composantes connexes de $(A_f \times \mathbb{R}) \bigcap \left(]0,1[^d \times B\right)$. On conclut aisément au moyen du Théorème 3.8.9 précédent.

□

Corollaire 3.8.12 *Soit $f :]0,1[^d \to \mathbb{R}^d$ une application de Nash. Soient A une composante connexe de A_f et $P : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ un polynôme, alors le nombre de composantes connexes de $\{t \in [0,1],\ P(t) \in \pi(A)\}$ est borné par $C deg^*(f)^d$, où C est une constante dépendant uniquement de d et du degré de P.*

Preuve : On vérifie de nouveau facilement que le nombre de composantes connexes de $\{t,\ P(t) \in \pi(A)\}$ est borné par le nombre de composantes connexes de $(\mathbb{R} \times \pi(A)) \bigcap \Gamma_P$. Il suffit ensuite d'appliquer le corollaire précédent 3.8.11 à $(\mathbb{R} \times \pi(A)) \bigcap \Gamma_P$.

□

Chapitre 4

Applications dynamiques de la théorie de Yomdin-Gromov

Dans ce chapitre, nous rappelons tout d'abord, en suivant l'exposition de M.Gromov dans son séminaire Bourbaki [35], comment le lemme algébrique permet de reparamétrer par des contractions semi-algébriques les boules de Bowen. Comme l'a remarqué J.Buzzi dans sa thèse [19], on peut alors borner l'entropie de queue $h^*(T)$ d'une application T de classe $\mathcal{C}^r$ définie sur une variété de dimension d de la façon suivante : $h^*(T) \leq \frac{dR(T)}{r}$.

Nous obtenons en fait un résultat nouveau, plus précis. On montre que, $u(\mu) \leq \frac{d\chi_+^{aff}(\mu)}{r}$ pour toute mesure invariante μ, où $\chi(\nu)$ désigne l'exposant de Lyapounov d'une mesure ergodique ν et $\chi_+(\nu) = \max(\chi(\nu), 0)$. Cette dernière inégalité a déjà été démontrée par T.Downarowicz et A.Maass dans le cas des applications de l'intervalle (Théorème 5.5.15) en se passant de la théorie de Y.Yomdin mais en utilisant, de façon très spécifique à la dimension un, les liens entre points critiques et entropie.

Enfin nous généralisons un résultat de J.Buzzi [24] sur l'entropie k dimensionnelle du produit de deux applications $\mathcal{C}^\infty$, dont l'une est définie sur l'intervalle. On obtient une formule pour le produit d'applications $\mathcal{C}^\infty$ de dimension quelconque uniquement pour le cas de l'entropie unidimensionnel. Ces résultats sont obtenus à partir des estimées semi-algébriques quantitatives du chapitre précédent.

4.1 Reparamétrisation contractante des boules de Bowen

En conjugant le lemme algébrique présenté dans le chapitre précédent avec l'interpolation polynômiale, Y. Yomdin obtient une reparamétrisation des boules de Bowen des dynamiques de classe $\mathcal{C}^r$ par des applications semi-algébriques contractantes. On reprend cette approche dans ce paragraphe.

Dans la suite, on considére des entiers r, d et l, qui représentent respectivement l'ordre des dérivées à "contrôler", la dimension de l'espace ambient et la dimension de l'ensemble à reparamétrer.

On définit tout d'abord une nouvelle notion de $\mathcal{C}^r$ résolution qui permet de reparamétrer des applications de classe $\mathcal{C}^r$ et non uniquement des applications de Nash (Définition 3.3.20). Si $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_m) : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est une application de de classe $\mathcal{C}^r$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^m$, on note $\|D^r\sigma\|_\infty = \max\limits_{i=1,...,n} \max\limits_{\beta\in\mathbb{N}^m, |\beta|=r} \sup\limits_{x\in U} |\partial^\beta \sigma_i(x)|$. Rappelons qu'on a alors $\|\sigma\|_r = \max_{1\leq s\leq r} \|D^s\sigma\|_\infty$.

Définition 4.1.1 *Soit S un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$ et soit $\sigma :]-1,1[^l \to \mathbb{R}^d$ une application $\mathcal{C}^r$ avec $\|\sigma\|_r < +\infty$. Une $\mathcal{C}^r$ **résolution** de σ sur S est une famille finie Ψ d'applications Nash $\psi :]-1,1[^l \to$*

$]-1,1[^l$ *telles que :*
- $\|\psi\|_r \leq 1$ *et* $\|\sigma\circ\psi\|_r \leq 1$ *;*
- $S\bigcap Image(\sigma) \subset \bigcup_{\psi\in\Psi} Image(\sigma\circ\psi)$.

On appelle **degré fonctionnel de la $\mathcal{C}^r$ résolution** Ψ le maximum des degrés fonctionnels $deg^*(\psi)$ (cf. Défintion 3.8.1) de ψ pour $\psi\in\Psi$.

Théorème 4.1.2 *Soit $\sigma :]-1,1[^l \to \mathbb{R}^d$ une application $\mathcal{C}^r$ avec $\|\sigma\|_r < +\infty$, alors il existe une $\mathcal{C}^r$ résolution Ψ de σ sur $]-1,1[^d$ de cardinal inférieur à $C\max(\|D^r\sigma\|_\infty^{l/r},1)$ et de degré fonctionnel inférieur à C, où C est une constante dépendant uniquement de r, l et d.*

Preuve : Supposons tout d'abord que $\|D^r\sigma\|_\infty < 1$. Notons $P :]-1,1[^l \to \mathbb{R}^d$ le polynôme de Lagrange de degré $r-1$ de σ en 0. D'après la formule de Lagrange avec reste intégral,

$$\|\sigma - P\|_r \leq C\|D^r\sigma\|_\infty < C \tag{4.1}$$

avec $C = C(r,l,d)$. D'après le Lemme algébrique de Yomdin-Gromov (version fonctionnelle du Théorème 3.7.2 et Remarque 3.7.3), il existe une $\mathcal{C}^r$ résolution Ψ de P sur $]-C-1,C+1[^l$ de cardinal et de degré fonctionnel bornés par $C' = C'(r,l,d)$.

Vérifions que $]-1,1[^d \bigcap Image(\sigma) \subset \bigcup_{\psi\in\Psi} Image(\sigma\circ\psi)$. Soit $x\in]-1,1[^l$ tel que $\sigma(x)\in]-1,1[^d$. D'après l'inégalité (4.1), $P(x)\in]-C-1,C+1[^d$ et donc $x\in\bigcup_{\psi\in\Psi} Image(\psi)$.

De plus $\|\sigma\circ\psi\|_r \leq C''\|\sigma-P\|_r\|\psi\|_r + \|P\circ\psi\|_r < C'''$ avec C'' et C''' dépendant uniquement de r, l et d (Lemme 3.2.5). En composant les applications ψ par des contractions affines de rapports $\frac{1}{C'''}$ au nombre de C'''^l, on obtient une $\mathcal{C}^r$ résolution de σ sur $]-1,1[^d$ de degré fonctionnel au plus C' et de cardinal borné par $C'C'''^l$.

Enfin on se ramène au cas où σ satisfait $\|D^r\sigma\|_\infty < 1$ en composant σ par des contractions affines de rapport $\|D^r\sigma\|_\infty^{-\frac{1}{r}}$ au nombre de $\|D^r\sigma\|_\infty^{\frac{l}{r}}$. □

On généralise la notion de boule de Bowen (Définition 2.1.2) pour des suites de fonctions de la façon suivante. Soit $((X_n,d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques et soit $\mathcal{F} := (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions avec $f_n : X_{n-1}\to X_n$ pour $n\in\mathbb{N}-\{0\}$ et $f_0 = Id_{X_0}$. Pour tout $x\in X_0$, tout $\epsilon>0$ et tout $n\in\mathbb{N}-\{0\}$, on note $B^{\mathcal{F}}(x,n,\epsilon) := \{y\in X_0 \ : \ \forall i=0,...,n-1,\ d_i(f^i(x),f^i(y))<\epsilon\}$ avec $f^j = f_j\circ...\circ f_0$ pour tout $j\in\mathbb{N}$.

On déduit du théorème 4.1.2 l'énoncé dynamique suivant :

Théorème 4.1.3 *Soit $\mathcal{F} = \left(f_k : \mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d\right)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^r$ avec $f_0 = Id_{\mathbb{R}^d}$ et soit $\sigma :]-1,1[^l\to\mathbb{R}^d$ une application $\mathcal{C}^r$ avec $\|\sigma\|_r<+\infty$. On munit $\mathbb{R}^d$ de la norme $\|\|_\infty$.*

Pour tout $n\in\mathbb{N}-\{0\}$, il existe une famille finie Ψ_n d'applications $\psi :]-1,1[^l\to]-1,1[^l$, telle que :
- *ψ est une application de Nash de degré fonctionnel $deg^*(\psi) < C^n$;*
- *$\|\psi\|_r\leq 1$ et $\|f^k\circ\sigma\circ\psi\|_r\leq 1$ pour $k=0,...,n-1$;*
- *$B^{\mathcal{F}}(0,n,1)\bigcap Image(\sigma)\subset\bigcup_{\psi\in\Psi_n} Image(\sigma\circ\psi)$;*
- *$\sharp\Psi_n \leq C^n\|D^r\sigma\|_\infty^{\frac{l}{r}}\prod_{k=1}^{n-1}\max(\|(f_k)_{/]-(2d+1),2d+1[^d}\|_r^{l/r},1)$.*

avec C une constante dépendant uniquement de r, l et d.

Preuve : On raisonne par récurrence sur n. Le cas $n=1$ est une conséquence du théorème précédent appliqué à σ. Supposons construite la famille Ψ_n et considérons un élément ψ_n de Ψ_n. On peut

supposer que l'image de $f^{n-1}\circ\sigma\circ\psi_n$ rencontre $]-1,1[^d$ (sinon l'image de $\sigma\circ\psi_n$ ne rencontre pas $B^{\mathcal{F}}(0,n,1)\supset B^{\mathcal{F}}(0,n+1,1)$). Puisque $\|f^{n-1}\circ\sigma\circ\psi_n\|_1\leq 1$, l'image de $f^{n-1}\circ\sigma\circ\psi_n$ est incluse dans $]-(2d+1),2d+1[^d$. On obtient, en appliquant le Théorème 4.1.2, une $\mathcal{C}^r$ résolution Φ_{ψ_n} de $f^n\circ\sigma\circ\psi_n$ sur $]-1,1[^d$ de cardinal inférieur à $C'\|D^r\left(f^n\circ\sigma\circ\psi_n\right)\|_\infty$ et de degré fonctionnel au plus C' avec $C'=C'(r,l,d)$. Or l'application $f^{n-1}\circ\sigma\circ\psi_n$ étant de norme $|||\,|||_r$ inférieure à 1, on a d'après le Lemme 3.2.5 : $\|D^r\left(f^n\circ\sigma\circ\psi_n\right)\|_\infty\leq C''\|(f_n)_{/]-(2d+1),(2d+1)[^d}\|_r\|f^{n-1}\circ\sigma\circ\psi_n\|_r\leq C''\|(f_n)_{/]-(2d+1),(2d+1)[^d}\|_r$ avec $C''=C''(r,l,d)$.

Soit $x\in B^{\mathcal{F}}(0,n+1,1)\bigcap Image(\sigma)\subset B^{\mathcal{F}}(0,n,1)\bigcap Image(\sigma)$. Il existe $\psi_n\in\Psi_n$ et $y\in]-1,1[^l$ tel que $x=\sigma\circ\psi_n(y)$. De plus puisque $f\circ(f^{n-1}\circ\sigma\circ\psi_n)(y)=f^n(x)\in]-1,1[^d$, il existe $\phi_n\in\Phi_{\psi_n}$ et $z\in]-1,1[^l$ tel que $y=\phi_n(z)$. On a donc $x=\sigma\circ\psi_n\circ\phi_n(z)$ et on obtient finalement :

$$B^{\mathcal{F}}(0,n,1)\bigcap Image(\sigma)\subset\bigcup_{\psi_n\in\Psi_n,\ \phi_n\in\Phi_{\psi_n}} Image(\sigma\circ\psi_n\circ\phi_n)$$

Aussi, d'après le corollaire 3.8.4, on a $deg^*(\psi_n\circ\phi_n)\leq deg^*(\psi_n)deg^*(\phi_n)^d\leq deg^*(\psi_n)C'^d$.

Enfin en appliquant de nouveau le lemme 3.2.5, les applications $\psi_n\circ\phi_n$ et $f^k\circ\psi_n\circ\phi_n$ pour $\psi_n\in\Psi_n$, $\phi_n\in\Phi_{\psi_n}$ et $k\in[\![0,n-1]\!]$ sont des applications de norme $|||\,|||_r$ inférieure à C''. Quitte à composer les applications ϕ par des contractions affines, recouvrant $]-1,1[^l$, de rapport $\frac{1}{C''}$ et en nombre $\leq C''^l$, la famille $\{\psi_n\circ\phi_n\ :\ \psi_n\in\Psi_n,\ \phi_n\in\Phi_{\psi_n}\}$ satisfait les propriétés requises pour Ψ_{n+1} avec $C=\max(C'^d,C'C''^{l+1})$. □

Rappelons que si $f=(f_1,...,f_m)$ est une fonction de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^r$, alors $\|f\|_r:=\max_{i=1,...,m}\max_{\beta\in\mathbb{N}^m,\ |\beta|\leq r}\sup_{x\in\mathbb{R}^m}|\partial^\beta f_i(x)|$ (Définition 3.2.4). Si $f:M\to N$ est une application $\mathcal{C}^r$ entre deux variétés riemanniennes $(M,|||_M)$ et $(N,|||_N)$, alors pour tout entier $r\neq 0$, on définit $\|\!|f|\!\|_r:=\max_{s=1,...,r}\sup_{x\in M}\|\!|D^s_xf|\!\|_x$ où $\|\!|\,|\!\|_x$ est la norme subordonée à $|||\,|||_x$ et $|||\,|||_{f(x)}$, c'est à dire $\|\!|D^s_xf|\!\|_x=\sup_{\substack{(u_1,...,u_s)\in T_xM,\\ \|u_1\|_x=...=\|u_s\|_x=1}}\|D^sf(u_1,...,u_s)\|_{f(x)}$ pour tout $s=1,...,r$.

L'application f est dite $\mathcal{C}^r$ **unitaire** si $\|\!|f|\!\|_r\leq 1$.

Dans le théorème suivant, on reparamète une boule de Bowen de rayon assez petit de sorte que le nombre de reparamétrisations ne dépendent plus que des dérivées premières des fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. De plus on travaille sur des espaces euclidiens généraux.

Théorème 4.1.4 *Soit $\mathcal{E}=(E_n,|||\,|||_n)$ une suite d'espaces vectoriels euclidiens de dimension d. Soient $\epsilon_1>0$ et $\mathcal{F}=(f_n:E_n\to E_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^r$ avec $f_0=Id_{E_0}$, telle que $\sup_{k\in\mathbb{N}}\|\!|(f_k)_{/B_{|||\,|||_k}(0,\epsilon_1)}|\!\|_r<+\infty$. Pour tout $l\in\mathbb{N}$, on munit $]-1,1[^l$ de la norme euclidienne usuelle $|||\,|||_2$.*

Alors il existe un réel $\epsilon_0>0$ dépendant continûment de $\sup_{k\in\mathbb{N}}\|\!|(f_k)_{/B_{|||\,|||_k}(0,\epsilon_1)}|\!\|_r$ satisfaisant la propriété suivante. Pour tout $\epsilon<\epsilon_0$, pour toute application $\sigma:]-1,1[^l\to E_0$ de classe $\mathcal{C}^r$ avec $\|\!|\sigma|\!\|_r<+\infty$ et pour tout $n\in\mathbb{N}-\{0\}$, il existe une famille finie Ψ_n d'applications $\psi:]-1,1[^l\to]-1,1[^l$, telle que :

- *ψ est une application de Nash de degré fonctionnel $deg^*(\psi)<C^n$;*
- *ψ et $f^k\circ\sigma\circ\psi$ sont $\mathcal{C}^r$ unitaires pour $k=0,...,n-1$;*
- *$B^{\mathcal{F}}(0,n,\epsilon)\bigcap Image(\sigma)\subset\bigcup_{\psi\in\Psi_n}Image(\sigma\circ\psi)$;*
- *$\sharp\Psi_n\leq\frac{C^n}{\epsilon^l}\|\!|\sigma|\!\|_r^{\frac{l}{r}}\prod_{k=1}^{n-1}\max(\|\!|(f_k)_{/B_{|||\,|||_k}(0,\epsilon)}|\!\|_1^{l/r},1)$.*

avec C une constante dépendant uniquement de r, l et d.

Preuve : On considère tout d'abord le cas $(E_n,|||\,|||_n)=(\mathbb{R}^d,|||\,|||_2)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Soit $g:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ une application de classe $\mathcal{C}^r$. Notons $\rho_\epsilon:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ l'homothétie de rapport ϵ, c'est à dire $\rho_\epsilon(x):=\epsilon x$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et notons $\epsilon.g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ la conjuguée de F par ρ_ϵ définie par $\epsilon.g := \rho_\epsilon^{-1} \circ g \circ \rho_\epsilon = \epsilon^{-1} g(\epsilon.)$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $1 \leq k \leq r$,

$$D^k(\epsilon.g)(x) = \epsilon^{k-1} D^k g(\epsilon x)$$

En particulier, il existe $\epsilon_0 > 0$ dépendant continûment de $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|(f_k)_{/]-\epsilon_1,\epsilon_1[^d}\|_r < \infty$ tel que pour tout $0 < \epsilon < \epsilon_0$ et tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|(\epsilon.f_k)_{/]-(2d+1),2d+1[^d}\|_r = \|(\epsilon.f_k)_{/]-(2d+1),2d+1[^d}\|_1$$

On pose $\epsilon.\mathcal{F} = (\epsilon.f_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Nous remarquons alors que $B^{\mathcal{F}}(0,n,\epsilon) = \epsilon B^{\epsilon.\mathcal{F}}(0,n,1)$ pour tout $\epsilon > 0$. Puisque $\|\|_\infty \leq \|\|_2 \leq p\|\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^p$ pour tout entier p, on vérifie facilement les propriétés suivantes pour tout $\epsilon > 0$ et tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$:

- La boule de Bowen $B^{\mathcal{F}}_{\|\|_2}(0,n,\epsilon)$ pour la norme $\|\|_2$ est incluse dans la boule de Bowen $B^{\mathcal{F}}_{\|\|_\infty}(0,n,\epsilon)$ pour la norme $\|\|_\infty$;
- si $g = (g_1, ..., g_n) : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est une application de classe $\mathcal{C}^r$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^m$, alors la norme $\|g\|_r$ associée à la norme euclidienne $\|\|_2$ sur $\mathbb{R}^m$ et sur $\mathbb{R}^n$ est bornée par $nm^r\|g\|_r = nm^r \max_{i=1,...,n} \max_{\beta\in\mathbb{N}^d,\ |\beta|\leq r} \sup_{x\in U} |\partial^\beta g_i(x)|$.

Le théorème est alors une conséquence immédiate du théorème 4.1.3 appliqué à la famille de fonctions $\epsilon.\mathcal{F}$ et à $\sigma_\epsilon = \epsilon^{-1}\sigma$.

Enfin revenons au cas euclidien général. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit une base orthonormée $\mathcal{B}_n := (e_1^n, ..., e_d^n)$ de $(E_n, \|\|_n)$. Soit $\phi_n : (\mathbb{R}^d, \|\|_2) \to (E_n, \|\|_n)$ l'isométrie ϕ_n définie par $\phi_n(e_i) = e_i^n$. On est ramené au cas $(\mathbb{R}^d, \|\|_2)$ en considérant la suite $(\phi_{n+1}^{-1} \circ f_n \circ \phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Nous reparamétrons maintenant les boules de Bowen associées à une suite d'applications de classe $\mathcal{C}^r$ définies sur une variété compacte riemannienne.

Théorème 4.1.5 *Soit M une variété $\mathcal{C}^r$ compacte riemanienne et soit $\mathcal{F} = (f_n)_{n\in\mathbb{N}} : M \to M$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^r$, telle que $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|f_k\|_r < \infty$. Pour tout $l \in \mathbb{N}$, on munit $]-1,1[^l$ de la norme $\|\|_2$.*

Il existe un réel $\epsilon_0 > 0$ dépendant continûment de $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|f_k\|_r$ satisfaisant la propriété suivante. Pour tout $\epsilon < \epsilon_0$, pour toute application $\sigma :]-1,1[^l \to M$ de classe $\mathcal{C}^r$ avec $\|\sigma\|_r < +\infty$, pour tout $x \in M$ et pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, il existe une famille finie Ψ_n d'applications $\psi :]-1,1[^l \to]-1,1[^l$, telle que :

- *ψ est une application de Nash de degré fonctionnel $deg^*(\psi) < C^n$;*
- *ψ et $f^k \circ \sigma \circ \psi$ sont $\mathcal{C}^r$ unitaires pour $k = 0, ..., n-1$;*
- *$B^{\mathcal{F}}(x,n,\epsilon) \bigcap Image(\sigma) \subset \bigcup_{\psi\in\Psi_n} Image(\sigma \circ \psi)$;*
- *$\sharp\Psi_n \leq \frac{(D^2C)^n}{\epsilon^l} \|\sigma\|_r^{\frac{l}{r}} \prod_{k=1}^{n-1} \max(\|(f_k)_{/B(f^k x,\epsilon)}\|_1^{l/r}, 1)$.*

avec C une constante dépendant uniquement de r, l, d et D une constante dépendant uniquement de $(M, \|\|_M)$.

Preuve :

Notons R_{inj} le rayon d'injectivité de M et $exp : TM(R_{inj}) \to M$ l'application exponentielle, où $TM(r) := \{(x,u),\ u \in T_xM(r)\}$ et $T_xM(r) := \{u \in T_xM, \|u\|_x < r\}$ pour tout $r \in \mathbb{R}$. Puisque $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|f_k\|_1 < \infty$, la suite $\mathcal{F}$ est uniformément équicontinue : il existe $R < R' < R_{inj}$ tel que $f_k(B(x,R)) \subset B(f_k(x), R')$ pour tout $x \in M$ et tout $k \in \mathbb{N}$.

Soient $x \in M$ et $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, on considère la fonction $h_n : (T_{f^{n-1}(x)}M(R), \|\|_{f^{n-1}(x)}) \to (T_{f^n(x)}M(R'), \|\|_{f^n(x)})$ définie par $h_n := exp_{f^n(x)}^{-1} \circ f_n \circ exp_{f^{n-1}(x)}$ et

notons g_n un prolongement $\mathcal{C}^r$ de h_n à $T_{f^{n-1}(x)}M$. Il existe une constante D dépendant uniquement de $(M, \|\|_M)$ telle que $\|(exp_x)_{/T_xM(R)}\|_1 < D$ et $\|(exp_x^{-1})_{/B_M(x,R')}\|_1 < D$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ et tout $0 < r \leq R$:

$$\|(g_n)_{/T_{f^{n-1}(x)}M(r)}\|_1 \leq D^2 \|(f_n)_{/B_M(f^{n-1}(x),r)}\|_1$$

Enfin on pose $g_0 = Id_{T_xM}$ et on note $\mathcal{G} := (g_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Remarquons alors que par définition de l'application exponentielle, on a alors $B^{\mathcal{F}}(x, n, \epsilon) = B^{\mathcal{G}}(x, n, \epsilon)$ pour $\epsilon \leq R$.

On conclut la preuve en appliquant le théorème précédent à la suite de fonctions $\mathcal{G} := (g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ pour $\epsilon_1 = R$.

□

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de M dans lui-même, alors pour tout entier p on note $(f_{kp}^p)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par $f_{kp}^p := f_{kp+p-1} \circ f_{kp+p-2} \circ ... \circ f_{kp}$. On applique maintenant le théorème précédent à la suite $(f_{kp}^p)_{k\in\mathbb{N}}$ afin de supprimer la constante algébrique dans l'estimée logarithmique en n du nombre de reparamétrisations.

Théorème 4.1.6 *Soit M une variété $\mathcal{C}^r$ compacte riemanienne et soit $\mathcal{F} = (f_n)_{n\in\mathbb{N}} : M \to M$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^r$, telle que $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|f_k\|_r < \infty$. Pour tout $l \in \mathbb{N}$, on munit $]-1, 1[^l$ de la norme $\|\|_2$.*

Pour tout entier p, il existe un réel $\epsilon_0 > 0$ dépendant continûment de $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|f_k\|_r$ satisfaisant la propriété suivante. Pour tout $\epsilon < \epsilon_0$, pour toute application $\sigma :]-1, 1[^l \to M$ de classe $\mathcal{C}^r$ avec $\|\sigma\|_r < +\infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in M$, il existe une famille finie Ψ_n d'applications $\psi :]-1, 1[^l \to]-1, 1[^l$, telle que :

- *ψ est une application de Nash de degré fonctionnel $deg^*(\psi) < C^{\frac{n}{p}}$;*
- *ψ et $f^k \circ \sigma \circ \psi$ sont $\mathcal{C}^r$ unitaires pour $k = 0, ..., n-1$;*
- *$B^{\mathcal{F}}(x, n, \epsilon) \bigcap Image(\sigma) \subset \bigcup_{\psi\in\Psi_n} Image(\sigma \circ \psi)$;*
- *$\sharp\Psi_n \leq \frac{(D^2C)^{\frac{n}{p}}}{\epsilon^l} \|\sigma\|^{\frac{l}{r}} \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\|f_k\|_r^{2pl}\right) \prod_{k=1}^{[n/p]} \max(\|(f_{kp}^p)_{/B(f^{kp}x,\epsilon)}\|_1^{l/r}, 1)$.*

avec C une constante dépendant uniquement de r, l, d et D une constante dépendant uniquement de $(M, \|\|)$.

Preuve : Soit $m \in \mathbb{N}$. Clairement la boule de Bowen d'ordre mp pour $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est incluse dans la boule de Bowen d'ordre m pour $(f_{kp}^p)_{k\in\mathbb{N}}$. On applique le théorème précédent à la suite $(f_{kp}^p)_{k\in\mathbb{N}}$ et on obtient ainsi un reparamétrage Ψ_m^p de la boule de Bowen d'ordre m pour $(f_{kp}^p)_{k\in\mathbb{N}}$. De plus quitte à composer les reparamétrisations $\psi \in \Psi_m^p$ par des homothéties de rapport $(\sup_{k\in\mathbb{N}} \|f_k\|_r)^{-p}$, les applications $f^k \circ \sigma \circ \psi$ sont $\mathcal{C}^r$ unitaires pour tout entier $k < mp$. Ceci conclut la preuve du théorème pour les entiers n multiples de p. On en déduit facilement le cas général en remarquant que $B^{\mathcal{F}}(x, n, \epsilon) \subset B^{\mathcal{F}}(x, \left[\frac{n}{p}\right] p, \epsilon)$. □

4.2 Entropie de queue des applications $\mathcal{C}^r$

Soit M une variété compacte de dimension d et $T : M \to M$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Pour alléger les notations définies p. 104, pour tout entier n et tout $x \in M$, on note $\|D_xT^n\| := \|D_xT^n\|_x$ la norme subordonnée à $\|\|_x$ et $\|\|_{T^nx}$. On écrit aussi $\|DT^n\|_\infty = \|T^n\|_1 = \sup_{x\in M} \|D_xT^n\|$. Rappelons que si ν est une mesure ergodique, la fonction $x \mapsto \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|D_xT^n\|$ est presque partout égale à $\lim_{n\to+\infty} \frac{\int_{x\in M} \log \|D_xT^n\| d\nu(x)}{n}$ d'après le théorème ergodique sous additif. Par sous additivité,

cette dernière quantité est aussi égale à $\inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{\int_{x\in M} \log \|D_x T^n\| d\nu(x)}{n}$. C'est l'exposant de Lyapounov maximal $\chi(\nu)$ de ν. On note $\chi_+ = \max(\chi, 0)$ et $\log_+ = \max(\log, 0)$. La fonction χ_+ est ainsi définie sur l'ensemble $\mathcal{M}_e(M,T)$ des mesures ergodiques T invariante. Rappelons que le prolongement affine d'une fonction définie sur l'ensemble extrémal d'un simplexe de Choquet a été défini p. 40.

Proposition 4.2.1 *Le prolongement affine χ_+^{aff} de χ_+ est une fonction harmonique s.c.s. sur $\mathcal{M}(M,T)$. Pour tout $\mu \in \mathcal{M}(M,T)$, on a :*

$$\chi_+^{aff}(\mu) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{\int_{x\in M} \log_+ \|D_x T^n\| d\mu(x)}{n}$$

Preuve : Si ν est une mesure ergodique, $\chi_+(\nu)$ coïncide avec la limite ν presque sûre de $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log_+ \|D_x T^n\|$, qui toujours d'après le théorème ergodique sous additif est égale à

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{\int_{x\in M} \log_+ \|D_x T^n\| d\nu(x)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\int_{x\in M} \log_+ \|D_x T^n\| d\nu(x)}{n}$$

Pour tout entier n, la fonction $f_n : \mathcal{M}(M,T) \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(\mu) = \frac{\int_{x\in M} \log_+ \|D_x T^n\| d\mu(x)}{n}$ pour tout $\mu \in \mathcal{M}(M,T)$ est continue et affine ; elle est donc aussi harmonique. Remarquons aussi que pour tout $\mu \in \mathcal{M}(M,T)$, la suite $(f_n(\mu))_{n\in\mathbb{N}}$ est sous-additive.

Soit $\mu \in \mathcal{M}(M,T)$, on note M_μ la décomposition ergodique de μ, c'est à dire l'unique mesure de probabilité borélienne supportée par les mesures ergodiques ayant μ pour barycentre (Définition p. 39). On a :

$$\chi_+^{aff}(\mu) := \int_{\mathcal{M}_e(M,T)} \chi_+(\nu)\ dM_\mu(\nu)$$

$$\chi_+^{aff}(\mu) = \int_{\mathcal{M}_e(M,T)} \lim_{n\to+\infty} f_n(\nu)\ dM_\mu(\nu)$$

Clairement $f_n(\nu) \leq \log_+ \|DT\|_\infty$ pour tout $\nu \in \mathcal{M}(M,T)$. On obtient donc par convergence dominée :

$$\chi_+^{aff}(\mu) = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathcal{M}_e(M,T)} f_n(\nu)\ dM_\mu(\nu)$$

puis par harmonicité de f_n :

$$\chi_+^{aff}(\mu) = \lim_{n\to+\infty} f_n(\mu)$$

Enfin par sous-additivité de la suite $(f_n(\mu))_{n\in\mathbb{N}}$, la limite ci dessus est aussi un infimum :

$$\chi_+^{aff}(\mu) = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(\mu)$$

La fonction χ_+^{aff} est donc s.c.s. comme infimum de fonctions continues. Elle est aussi affine par construction. Or les fonctions affines s.c.s. sont harmoniques. □

Dans le cas d'une application $f : [0,1] \to [0,1]$, T. Downarowicz et A. Maass utilisent un argument plus sophistiqué pour montrer la semi-continuité supérieure de χ_+. En effet, dans ce cas, l'exposant d'une mesure ergodique μ vérifie $\chi(\mu) = \int \log |f'| d\mu$. La fonction $\psi_+(\mu) = \max(\int \log |f'| d\mu, 0)$ est une fonction convexe s.c.s. définie sur tout $\mathcal{M}([0,1], f)$. En appliquant la Proposition 1.4.5, on obtient que l'extension harmonique de $\psi_+ \,/\mathcal{M}_e([0,1],f)$ qui n'est rien d'autre que χ_+^{aff}, est s.c.s.

Théorème 4.2.2 *Avec les notations précédentes, on a pour tout $\mu \in \mathcal{M}(M,T)$:*

$$u(\mu) \leq \frac{d\chi_+^{aff}(\mu)}{r}$$

PREUVE : Soit $\alpha > 0$ et $\mu \in \mathcal{M}(M,T)$. Considérons un entier p tel que $\chi_+^{aff}(\mu) \geq \frac{\int_M \log_+ \|D_x(T^p)\| d\mu(x)}{p} - \frac{\alpha}{d}$ et $\frac{\log(D^2C)}{p} < \alpha$, où D et C sont les constantes dans le théorème 4.1.6.

On travaille avec l'entropie à la Misiurewicz (Définition p.70). D'après le Théorème 4.1.6 appliqué à la suite constante égale à T et à un atlas fini Σ de M constitué d'applications $\sigma :]-1,1[^d \to M$ de classe $\mathcal{C}^r$ avec $\|\sigma\|_r < +\infty$, il existe $\epsilon_0 > 0$, tel que pour tout $\epsilon_0 > \epsilon > \delta > 0$ et pour tout $x \in M$:

$$h(\delta|x,\epsilon) \leq \frac{d}{r} \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{[n/p]} \log^+ \left(\sup_{y \in B(T^{ip}x,\epsilon)} \|D_y T^p\| \right) + \frac{\log(D^2C)}{p}$$

En effet, avec les notations du Théorème 4.1.6, si $E_\delta \subset]0,1[^d$ est le réseau de taille $\frac{1}{\delta}$, i.e. l'ensemble des points de $]0,1[^d$ de la forme $\frac{k}{\delta}$ pour $k \in \mathbb{N}$, alors $\bigcup_{\psi \in \Psi_n} \sigma \circ \psi(E_\delta)$ est un ensemble (n,δ) couvrant de $B(x,n,\epsilon)$, car $f^k \circ \sigma \circ \psi$ est $\mathcal{C}^1$ unitaire et donc contractante pour tout $k = 0, ..., n-1$ et tout $\psi \in \Psi_n$.

Si ν est une mesure ergodique pour T^p, le terme $\frac{d}{r} \limsup_{n\to+\infty} \frac{p}{n} \sum_{i=1}^{[n/p]} \log^+ \left(\sup_{y \in B(T^{ip}x,\epsilon)} \|D_y T^p\| \right)$ est égal pour ν presque tout x à $\frac{d}{r} \int_M g_\epsilon(x) d\nu(x)$ d'après le théorème ergodique avec $g_\epsilon(x) := \log^+ \left(\sup_{y \in B(x,\epsilon)} \|D_y T^p\| \right)$. On obtient donc pour ν presque tout x :

$$h(\delta|x,\epsilon) \leq \frac{d \int_M g_\epsilon(x) d\nu(x)}{pr} + \alpha$$

$$\int_M h(\delta|x,\epsilon) d\nu(x) \leq \frac{d \int_M g_\epsilon(x) d\nu(x)}{pr} + \alpha$$

Puis par harmonicité, on a pour tout $\xi \in \mathcal{M}(M,T^p)$ et donc pour tout $\xi \in \mathcal{M}(M,T)$:

$$\int_M h(\delta|x,\epsilon) d\xi(x) \leq \frac{d \int_M g_\epsilon(x) d\xi(x)}{pr} + \alpha$$

De plus l'inégalité ci-dessus étant vérifiée pour δ arbitrairement petit, on en déduit que

$$h^{Mis}(\xi,\epsilon) \leq \frac{d \int_M g_\epsilon(x) d\xi(x)}{pr} + \alpha$$

Enfin la fonction de $\mathcal{M}(M,T)$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\xi \mapsto \int_M g_\epsilon(x) d\xi(x)$ étant continue, on a :

$$\left(\widetilde{h^{Mis}(.,\epsilon)} \right)(\mu) \leq \frac{d \int_M g_\epsilon(x) d\mu(x)}{pr} + \alpha$$

Par convergence monotone, $\int_M g_\epsilon(x) d\mu(x)$ tend vers $\int \log^+ \|D_x(T^p)\| d\mu(x)$, quand ϵ tend vers 0. D'après le choix de p, on obtient donc en passant à la limite : $u_1^{Mis}(\mu) \leq d\frac{\chi_+^{aff}(\mu)}{r} + 2\alpha$. Ceci étant vrai pour tout $\alpha > 0$, on a finalement :

$$u_1^{Mis}(\mu) \leq d\frac{\chi_+^{aff}(\mu)}{r}$$

Rappelons enfin que le candidat de Misiurewicz n'est pas en général une structure d'entropie (Exemple 2.7.3) mais qu'on a toutefois $u_1^{Mis} = u_1 = u$ (Théorème 2.7.9).

□

Question 4.2.3 *Si μ est une mesure ergodique, notons $\chi_1(\mu) \geq ...\chi_d(\mu)$ ses d exposants de Lyapounov. On considère la somme $\sum_{i=1}^{d} \chi_{i+}$ des exposants positifs. Peut-on alors remplacer le terme $d\chi_+^{aff}$ par $\left(\sum_{i=1}^{d} \chi_{i+}\right)^{aff}$ dans la proposition précédente, i.e. a-t-on $u(\mu) \leq \frac{\left(\sum_{i=1}^{d} \chi_{i+}\right)^{aff}(\mu)}{r}$?*

Soient M une variété compacte munie d'une structure riemannienne $\|\|$ et $T : M \to M$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. La suite $(\log_+ \|DT^n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ est clairement sous-additive. On note $R(T) := \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log_+ \|DT^n\|_\infty$. Remarquons que $R(T)$ est en fait indépendant de la structure riemannienne choisie. De plus, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $R(T^p) = pR(T)$. La quantité $R(T)$ est en fait reliée à l'exposant de Lyapounov des mesures ergodiques par le principe variationnel suivant :

Lemme 4.2.4 *Avec les notations ci-dessus,*

$$R(T) = \sup_{\mu\in\mathcal{M}_e(M,T)} \chi_+(\mu)$$

Preuve : Il est clair que $\sup_{\mu\in\mathcal{M}_e(M,T)} \chi_+(\mu) \leq R(T)$. Montrons l'inégalité inverse. On peut supposer que $R(T) > 0$ et donc que $R(T) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|DT^n\|_\infty$. Fixons un entier p. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit $x_n^p \in M$, tel que $\|D_{x_n^p} T^{np}\| = \|DT^{np}\|_\infty$. On considère les suites de mesures de probabilité $(\mu_n^p)_{n\geq 2}$ et $(\nu_n^p)_{n\geq 2}$ définies par $\mu_n^p := \frac{1}{n-1} \sum_{k=0}^{n-2} \delta_{T^{kp}(x_n^p)}$ et $\nu_n^p := \frac{1}{p} \sum_{l=0}^{p-1} T^{*l}\mu_n^p = \frac{1}{(n-1)p} \sum_{k=0}^{(n-1)p-1} \delta_{T^k(x_n^p)}$ pour tout entier $n \geq 2$. Toute limite faible de $(\nu_n^p)_{n\in\mathbb{N}}$ est T-invariante. Pour $p \in \mathbb{N}$ et $l \in [\![0, p-1]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_M \log \|D_y T^p\| d(T^{*l}\mu_n^p)(y) &= \frac{1}{n-1} \sum_{k=0}^{n-2} \log \|D_{T^{kp+l}(x_n^p)} T^p\| \\
&\geq \frac{1}{n-1} \log \|D_{T^l(x_n^p)} T^{(n-1)p}\| \\
&\geq \frac{1}{n-1} \left(\log \|D_{x_n^p} T^{np}\| - \log \|D_{x_n^p} T^l\| - \log \|D_{T^{(n-1)p+l}(x_n^p)} T^{p-l}\| \right) \\
&\geq \frac{1}{n-1} \left(\log \|DT^{np}\|_\infty - 2 \max_{l'\in[\![0,p-1]\!]} \log \|DT^{l'}\|_\infty \right)
\end{aligned}$$

Notons $\mathcal{P}(M)$ l'ensemble des mesures de probabilité de M muni de la topologie faible *. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $(\mu_n^p)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Notons μ^p sa limite et soit $\nu^p = \frac{1}{p} \sum_{l=0}^{p-1} T^{*l}\mu^p \in \mathcal{M}(M,T)$. La fonction $f_p : \mathcal{P}(M) \to \mathbb{R}$ qui à $\xi \in \mathcal{P}(M)$ associe $\int_M \log_+ \|D_y T^p\| d\xi(y)$ étant continue, on obtient en passant à la limite quand n tend vers l'infini :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p} \int_M \log_+ \|D_y T^p\| d\nu^p(y) &\geq \frac{1}{p} \sum_{l=0}^{p-1} \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n-1)p} \left(\log \|DT^{np}\|_\infty - 2 \max_{l'\in[\![0,p-1]\!]} \log \|DT^{l'}\|_\infty \right) \right) \\
&\geq \frac{R(T^p)}{p} = R(T)
\end{aligned}$$

La suite de fonctions $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est sous-additive. En particulier, la suite $(\frac{f_p}{p})_{p\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\inf_{p\in\mathbb{N}} \frac{f_p}{p}$. De plus si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite divergente d'entiers telle que p_n divise p_{n+1} pour tout entier n, la suite $(\frac{f_{p_n}}{p_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Considérons une telle suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

D'après la Proposition 1.1.4 (4) appliquée à la suite de fonctions s.c.s. $(\frac{f_{p_n}}{p_n})_{n\in\mathbb{N}}$ et d'après la Proposition 4.2.1, on a :

$$\begin{aligned}\sup_{\mu\in\mathcal{M}(M,T)} \chi_+^{aff}(\mu) &= \sup_{\mu\in\mathcal{M}(M,T)} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{p_n}\int_M \log_+ \|D_yT^{p_n}\| d\mu(y)\\ &= \lim_{n\to+\infty} \sup_{\mu\in\mathcal{M}(M,T)} \frac{1}{p_n}\int_M \log \|D_yT^{p_n}\| d\mu(y)\\ &\geq R(T)\end{aligned}$$

La fonction χ_+^{aff} étant harmonique, on en déduit que :

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}_e(M,T)} \chi_+(\mu) \geq R(T)$$

□

Le théorème suivant dû à J. Buzzi [19] borne supérieurement l'entropie de queue des applications de classe $\mathcal{C}^r$:

Théorème 4.2.5 (Buzzi) *Soit M une variété compacte de dimension d et soit $T : M \to M$ une application de classe $\mathcal{C}^r$, alors*

$$h^*(T) \leq d\frac{R(T)}{r} \tag{4.2}$$

On peut reprendre directement la preuve du Théorème précédent 4.2.2. Ici nous allons voir l'inégalité (4.2) comme une conséquence du Théorème 4.2.2 et du principe variationnel pour l'entropie de queue.

Preuve : D'après le principe variationnel pour l'entropie de queue (Théorème 2.8.1), on a

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}(M,T)} u(\mu) = h^*(T)$$

Puis d'après le théorème 4.2.2, on a pour toute mesure invariante μ :

$$u(\mu) \leq \frac{d\chi_+^{aff}(\mu)}{r}$$

On conclut finalement d'après le lemme 4.2.4 (on utilise uniquement l'inégalité triviale) que

$$h^*(T) \leq \frac{dR(T)}{r}$$

□

Corollaire 4.2.6 *Soit M une variété $\mathcal{C}^\infty$ compacte de dimension d et soit $T : M \to M$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors*

$$h^*(T) = 0$$

En particulier d'après le théorème 2.8.3, l'entropie métrique $h : \mathcal{M}(M,T) \to \mathbb{R}$ est une fonction s.c.s.

4.3 Entropie k dimensionnelle d'un produit d'applications $\mathcal{C}^\infty$

Nous relions l'entropie k dimensionnelle (Définition 2.1.17) d'un produit d'une application f de classe $\mathcal{C}^\infty$ de l'intervalle et d'une application g de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $[0,1]^d$ en fonction de l'entropie $k-1$ et k dimensionnelle de g et de l'entropie topologique de f. Une telle formule a déjà été établie dans le cas d'un produit d'applications $\mathcal{C}^\infty$ de l'intervalle par J. Buzzi dans [24]. Il existe des contre-exemples à une telle formule pour des applications de classe seulement $\mathcal{C}^r$ (Remarque 3.3 de [24]). Notre technique ne permet cependant pas de montrer "cette convexité des entropies k-dimensionnelles" pour un produit d'hypercubes de dimensions quelconques, excepté dans le cas de l'entropie unidimensionnel.

Nous rappelons tout d'abord la "concavité de l'entropie k dimensionnelle" d'un produit :

Proposition 4.3.1 *Soient $f : [0,1]^p \to [0,1]^p$ et $g : [0,1]^q \to [0,1]^q$ des applications de classe $\mathcal{C}^r$, alors on a pour tout $0 \leq k \leq p+q$:*

$$h_k(f \times g) \geq \max_{\substack{(l,m)\in\mathbb{N}^2 \\ l+m=k}} (h_l(f) + h_m(g))$$

Preuve : Soit un entier $k \leq p+q$ et soit (l,m) un couple d'entiers tel que $l+m=k$. Soient $\sigma_l :]0,1[^l \to]0,1[^p$ et $\sigma_m :]0,1[^m \to]0,1[^q$, telles que $\|\sigma_l\|_r < 1$ et $\|\sigma_m\|_r < 1$. Alors $\sigma_l \times \sigma_m :]0,1[^{l+m} \to [0,1]^{p+q}$ vérifie aussi $\|\sigma_l \times \sigma_m\|_r < 1$. De plus lorsqu'on munit $]0,1[^l,]0,1[^m,]0,1[^{l+m}$ de la norme $\|\|_\infty$, on a $r(n,\epsilon,Image(\sigma_l \times \sigma_m)) = r(n,\epsilon,Image(\sigma_l)) \times r(n,\epsilon,Image(\sigma_m))$. En effet pour tout couple $(x,y) \in [0,1]^p \times [0,1]^q$, on a $B_{\|\|_\infty}((x,y),n,\epsilon) = B_{\|\|_\infty}(x,n,\epsilon) \times B_{\|\|_\infty}(y,n,\epsilon)$. En prenant le supremum sur les applications σ_l et σ_m avec $\|\sigma_l\|_r < 1$ et $\|\sigma_m\|_r < 1$, puis la limite logarithmique quand n tend vers l'infini, et enfin la limite quand ϵ tend vers 0, on obtient :

$$h_k(f \times g) \geq h_l(f) + h_m(g)$$

□

Nous énonçons maintenant nos résultats de "convexité de l'entropie k dimensionnelle" d'un produit :

Théorème 4.3.2 *Soient $f : [0,1] \to [0,1]$ et $g : [0,1]^d \to [0,1]^d$ des applications $\mathcal{C}^\infty$, alors pour tout $k = 1, ..., d$:*

$$h_k(f \times g) = \max(h_{top}(f) + h_{k-1}(g), h_k(g))$$

Corollaire 4.3.3 (Buzzi) *[24] Soient $f_1, ..., f_d$ des applications $\mathcal{C}^\infty$ de l'intervalle telles que $h_{top}(f_1) \geq h_{top}(f_2) \geq ... \geq h_{top}(f_d)$, alors pour tout $1 \leq k \leq d$:*

$$h_k(f_1 \times ... \times f_d) = h_{top}(f_1) + ... + h_{top}(f_k)$$

Preuve du Corollaire 4.3.3 : On raisonne par récurrence sur $d \in \mathbb{N} - \{0\}$. La formule est triviale pour $d = 1$. Supposons la vérifiée à l'ordre d et montrons la à l'ordre $d+1$.

Considérons $f_1, ..., f_{d+1}$ des applications $\mathcal{C}^\infty$ de l'intervalle. D'après le théorème 4.3.2 appliqué à $f = f_1$ et $g = f_2 \times ... \times f_{d+1}$, on a pour tout $k = 1, ..., d$:

$$h_k(f_1 \times ... \times f_{d+1}) = \max(h_{top}(f_1) + h_{k-1}(f_2 \times ... f_{d+1}), h_k(f_2 \times ... \times f_{d+1}))$$

soit par hypothèse de récurrence :

$$h_k(f_1 \times ... \times f_{d+1}) = h_{top}(f_1) + ... + h_{top}(f_k)$$

□

Rappelons qu'une application $f : [0,1]^d \to [0,1]^d$ est dite entropie dilatante [22] si $h_{d-1}(f) < h_{top}(f)$.

Corollaire 4.3.4 *Le produit d'une application $\mathcal{C}^\infty$ de l'intervalle d'entropie non nulle et d'une application $\mathcal{C}^\infty$ entropie dilatante de $[0,1]^d$ est lui aussi entropie dilatant.*

PREUVE : Soient $f : [0,1] \to [0,1]$ une application $\mathcal{C}^\infty$ d'entropie non nulle et $g : [0,1]^d \to [0,1]^d$ une application $\mathcal{C}^\infty$ entropie dilatante, i.e. $h_{d-1}(g) < h_{top}(g)$. D'après le théorème 4.3.2, on a :

$$\begin{aligned} h_d(f \times g) &= \max(h_{top}(f) + h_{d-1}(g), h_{top}(g)) \\ &< h_{top}(f) + h_{top}(g) = h_{top}(f \times g) \end{aligned}$$

C'est à dire $f \times g$ est entropie dilatante.

□

Dans le cas de l'entropie 1 dimensionnelle, on obtient une formule s'appliquant à des dynamiques $\mathcal{C}^\infty$ de dimension quelconque.

Théorème 4.3.5 *Soient $f : [0,1]^p \to [0,1]^p$ et $g : [0,1]^q \to [0,1]^q$ des applications $\mathcal{C}^\infty$, alors :*

$$h_1(f \times g) = \max(h_1(f), h_1(g))$$

La fin de ce chapitre est consacrée à la preuve des Théorèmes 4.3.2 et 4.3.5. Dans un premier temps, on réduit par interpolation polynômiale la preuve des Théorèmes 4.3.2 et 4.3.5 à l'étude de l'entropie k dimensionnelle de l'image d'un polynôme. On introduit ensuite la notion de (n,ϵ) cellules. D'un point de vue dynamique elles jouent le même rôle que les (n,ϵ) boules de Bowen. Ces cellules sont aussi des ensembles semi-algébriques de degré fonctionnel borné. On est ainsi ramené à un contexte purement algébrique et on peut alors estimer le nombre de (n,ϵ) cellules rencontrant l'image de cette application polynômiale au moyen des résultats semi-algébriques quantitatifs obtenus dans le chapitre précédent.

4.3.1 Réduction au cas polynômial

On explique dans ce paragraphe, comment pour estimer l'entropie k dimensionnelle

$$h_k(f) := \lim_{s\to+\infty} \lim_{\epsilon\to 0} \limsup_{n\to+\infty} \sup_{\substack{\sigma:]0,1[^k \to [0,1]^d \ \mathcal{C}^s, \\ \|\sigma\|_s<1}} \frac{1}{n} \log r(n,\epsilon, Image(\sigma))$$

d'une application $f : [0,1]^d \to [0,1]^d$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, on est réduit au cas σ polynômial. Cette réduction est déjà présentée par J.Buzzi dans [23].

Lemme 4.3.6 *Soit $f : [0,1]^d \to [0,1]^d$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ et soit $M \geq 1$ une constante de Lipschitz de f. Pour tout $\alpha > 0$, tout $\epsilon > 0$ et toute application $\sigma :]0,1[^k \to [0,1]^d$ de classe $\mathcal{C}^r$ satisfaisant $\|\sigma\|_r < 1$ avec $r := \left[\frac{k \log M}{\alpha}\right] + 1$, il existe un entier N satisfaisant la propriété suivante.*

Pour tout $n > N$, il existe un entier $K \leq e^{\alpha n}$ et des applications polynômiales $P_1, ..., P_K : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d$ telles que :

- *$deg(P_i) \leq r$ pour tout $i = 1, ..., K$;*
- *$\sup_{s\in\mathbb{N}} \|(P_i)_{/]0,1[^k}\|_s < 1$ pour tout $i = 1, ..., K$;*
- *$r(n,\epsilon, Image(\sigma)) \leq \sum_{i=1}^{K} r(n, \frac{\epsilon}{2}, P_i([0,1]^k) \bigcap [0,1]^d)$.*

PREUVE : Divisons $[0,1]^k$ en $(C\|D^r\sigma\|_\infty)^{\frac{k}{r}}M^{\frac{kn}{r}}$ sous cubes isométriques R de taille au plus $(C\|D^r\sigma\|_\infty)^{-\frac{1}{r}}M^{-\frac{n}{r}}$, où $C = C(\epsilon, r, k)$ est une constante que l'on fixera plus tard. Nous rappelons que $r = \left[\frac{k\log M}{\alpha}\right] + 1$. Pour n grand, on a $(C\|D^r\sigma\|_\infty)^{\frac{k}{r}}M^{\frac{kn}{r}} < e^{\alpha n}$: le nombre de sous cubes obtenus suite au découpage précédent est donc au plus de $e^{\alpha n}$. Soit P le polynôme de Lagrange de σ de degré $r-1$ en le centre q d'un sous cube R. Remarquons que

$$\begin{aligned}\sup_{s\in\mathbb{N}}\|P_{/R}\|_s &= \|P_{/R}\|_{r-1}\\ &\leq \|(P-\sigma)_{/R}\|_{r-1} + \|\sigma_{/R}\|_{r-1}\\ &\leq \mathrm{diam}(R)\|\sigma_{/R}\|_r + \|\sigma_{/R}\|_r\\ &< 2\end{aligned}$$

De plus, pour tous les points u de R, on a en choisissant bien $C = C(\epsilon, r, k)$:

$$\|\sigma(u) - P(u)\| < \frac{\|D^r\sigma\|_\infty}{r!}\|u-q\|^r < \frac{\epsilon}{2}M^{-n}$$

Ceci implique que $\sigma(u)$ appartient à $B(P(u), n, \frac{\epsilon}{2})$. En particulier $r(n,\epsilon,\sigma(R)) \leq r(n, \frac{\epsilon}{2}, P(R)\bigcap[0,1]^d)$. De plus on peut supposer que le diamètre des sous cubes R est inférieur à $\frac{1}{2}$. On conclut alors en composant les polynômes $P : R \to [0,1]^d$ par des contractions affines ϕ définies sur $[0,1]^k$ de rapport $< \frac{1}{2}$ (de sorte que $\|P\circ\phi\|_r < 1$) et envoyant $[0,1]^k$ sur R.

□

Remarquons que les conclusions du Lemme 4.3.6 sont encore satisfaites avec les polynômes $P_i + c$ avec $c \in \mathbb{R}^d$ assez petit.

4.3.2 Définition des (n,ϵ) cellules

Cellules en dimension un

On définit tout d'abord la notion de (n,ϵ) cellule pour les applications $\mathcal{C}^\infty$ de l'intervalle. Soit f une telle application. Il existe des fonctions $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ avec $\lim_{\epsilon\to 0}\alpha(\epsilon) = 0$ et $N : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{N}$ vérifiant la propriété suivante. Pour tout $\epsilon > 0$ et tout entier $n > N(\epsilon)$, il existe un entier $K_{\epsilon,n}$ et des réels $0 = a_1 < a_2 < ... < a_{K_{\epsilon,n}} = 1$, tels que $K_{\epsilon,n} \leq e^{n(h_{top}(f)+\alpha(\epsilon))}$ et tout segment $[a_i, a_{i+1}]$ est inclus dans une (n,ϵ) boule de Bowen pour f.

Pour tout $\epsilon > 0$ et tout $n > N(\epsilon)$, on fixe par un choix arbitraire un tel découpage $([a_i, a_{i+1}])_{i=1,...,K_{\epsilon,n}-1}$ de l'intervalle $[0,1]$. Pour éviter les confusions on notera parfois $\epsilon_0(f) := \epsilon_0$, $\alpha(f,\epsilon) := \alpha(\epsilon)$, $N(f,\epsilon) := N(\epsilon)$.

Définition 4.3.7 *Soit E un sous ensemble de $[0,1]$. Soient $\epsilon \in]0,\epsilon_0[$ et $n > N(\epsilon)$. On appelle (n,ϵ) cellule de E un intervalle de la forme $[a_i, a_{i+1}]$ avec $1 \leq i \leq K_{\epsilon,n} - 1$, tel qu'il existe $x \in E$ vérifiant $[a_i, a_{i+1}]\bigcap B(x,n,\epsilon) \neq \emptyset$.*

Cellules en dimension supérieure

On généralise maintenant la notion de (n,ϵ) cellules en dimension supérieure. Soit d un entier ≥ 2 et soit $f : [0,1]^d \to [0,1]^d$ une application $\mathcal{C}^\infty$. On applique le Théorème 4.1.6 à la fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec p et r arbitrairement grand. On en déduit qu'il existe un réel $\epsilon_0 > 0$ et des fonctions $\alpha :]0,\epsilon_0[\to \mathbb{R}^+$ avec $\lim_{\epsilon\to 0}\alpha(\epsilon) = 0$ et $N :]0,\epsilon_0[\to \mathbb{N}$ vérifiant la propriété suivante. Pour tout $\epsilon \in]0,\epsilon_0[$, tout $x \in [0,1]^d$ et tout $n > N(\epsilon)$, il existe une famille $\Psi_n^{\epsilon,x}$ d'applications semi-algébriques $\psi :]-1,1[^d \to [0,1]^d$, telle que :

– $deg^*(\psi) \leq e^{\alpha(\epsilon)n}$ pour tout $\psi \in \Psi_n^{\epsilon,x}$;

- $f^k \circ \psi$ est ϵ-lipschitzienne pour tout $k = 0, ..., n-1$ et pour tout $\psi \in \Psi_n^{\epsilon,x}$. En particulier, l'image de ψ est incluse dans une (n, ϵ) boule de Bowen ;
- $Image(\psi) \bigcap B(x, n, \epsilon) \neq \emptyset$ et donc $Image(\psi) \subset B(x, n, 2\epsilon)$ pour tout $\psi \in \Psi_n^{\epsilon,x}$;
- $B(x, n, \epsilon) \subset \bigcup_{\psi \in \Psi_n^{\epsilon,x}} Image(\psi)$;
- $\sharp \Psi_n^{\epsilon,x} \leq e^{\alpha(\epsilon)n}$.

Pour tout $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$, tout $x \in [0,1]^d$ et tout $n > N(\epsilon)$, on fixe par un choix arbitraire une telle famille $\Psi_n^{\epsilon,x}$. Comme pour les cellules de dimension un, on notera parfois $\epsilon_0(f) := \epsilon_0$, $\alpha(f, \epsilon) := \alpha(\epsilon)$, $N(f, \epsilon) := N(\epsilon)$.

Définition 4.3.8 *Soit E un sous ensemble fini de $[0,1]^d$. Soient $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$ et $n > N(\epsilon)$. On appelle (n, ϵ) cellule de E les ensembles de la forme $\pi(A)$ avec A une composante connexe* de $\Gamma_\psi \cap A_\psi$ pour $\psi \in \Psi_n^{\epsilon,x}$ et $x \in E$. On note $\mathcal{A}_E$ l'ensemble des (n, ϵ) cellules de E et A_E l'union des (n, ϵ) cellules de E.*

Rappelons qu'une composante connexe de $\Gamma_\psi \cap A_\psi$ est une composante connexe de A_ψ (Proposition 3.8.7). D'après le Corollaire 3.8.10, le nombre de composantes connexes de A_ψ est borné par $Cdeg^*(\psi)^d$ avec $C = C(d)$. On en déduit donc que le nombre de (n, ϵ) cellule de E est borné par $Ce^{\alpha(\epsilon)(d+1)n} \sharp E$.

Remarquons aussi, que si E est un ensemble (n, ϵ) couvrant, alors les (n, ϵ) cellules de E recouvrent $[0,1]^d$ à un ensemble semi-algébrique de dimension $d-1$ près, d'après la remarque 3.8.8. En particulier, on a alors $[0,1]^d = \bigcup_A \overline{A}$, où l'union porte sur les (n, ϵ) cellules A de E, c'est à dire $[0,1]^d = \overline{A_E}$.

On aimerait définir les cellules directement comme les images des applications $\psi \in \bigcup_{x \in E} \Psi_n^{\epsilon,x}$, qui recouvrent tout $[0,1]^d$, dans le cas où E est un ensemble (n, ϵ) couvrant $[0,1]^d$. Cependant nous n'avons pas réussi à estimer de façon satisfaisante le nombre de composantes connexes de l'intersection de tels ensembles avec un ensemble semi-algébrique donné.

On pourrait définir les (n, ϵ) cellules de l'intervalle en appliquant le même procédé. Cependant la définition 4.3.7 présente un avantage qui nous sera utile par la suite : les cellules ainsi définies sont d'intérieur disjoints, contrairement à la définition en dimension supérieure.

Cellule produit

Pour un produit d'applications $\mathcal{C}^\infty$, on introduit des cellules produits :

Définition 4.3.9 *Soient $f : [0,1]^p \to [0,1]^p$ et $g : [0,1]^q \to [0,1]^q$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ et soient E_f et E_g des sous ensembles respectifs de $[0,1]^p$ et $[0,1]^q$. On appelle (n, ϵ) cellule produit de $E_f \times E_g$ tout produit d'une (n, ϵ) cellule de E_f et d'une (n, ϵ) cellule de E_g. On note $\mathcal{A}_{E_f \times E_g}$ l'ensemble des (n, ϵ) cellules produits de $E_f \times E_g$ et $A_{E_f \times E_g}$ l'union des (n, ϵ) cellules produits de $E_f \times E_g$.*

4.3.3 Entropie et (n, ϵ) cellules

On étudie dans ce paragraphe comment obtenir des estimées de l'entropie en comptant les (n, ϵ) cellules associées à un ensemble (n, ϵ) couvrant. Nous considérons une application $f : [0,1]^d \to [0,1]^d$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Lemme 4.3.10 *Il existe un réel $\epsilon_0' > 0$ et une fonction $\alpha' :]0, \epsilon_0'[\to \mathbb{R}^+$ avec $\lim_{\epsilon \to 0} \alpha'(\epsilon) = 0$ et une fonction $N' :]0, \epsilon_0'[\to \mathbb{N}$ vérifiant la propriété suivante. Pour tout sous ensemble J de $[0,1]^d$, tout $\epsilon \in]0, \epsilon_0'[$, tout $n > N(\epsilon)$ et tout ensemble (n, ϵ) couvrant E de $[0,1]^d$ de cardinal minimal, on a :*

$$\sharp \{(n, \epsilon) \text{ cellules de } E \text{ rencontrant } J\} \leq e^{\alpha'(\epsilon)n} r(n, \epsilon, J)$$

∗. A_ψ a été défini au chapitre précédent (Notations 3.8.6)

Pour éviter les confusions, on notera parfois $\epsilon_0'(f) := \epsilon_0'$, $\alpha'(f,\epsilon) := \alpha'(\epsilon)$, $N'(f,\epsilon) = N'(\epsilon)$.

PREUVE : On suppose $d \geq 2$, la preuve étant analogue pour une application de l'intervalle et les cellules associées. On considère $\epsilon \in]0, \frac{\epsilon_0}{4}[$ et un entier $n > N(4\epsilon)$. Soit F un ensemble (n,ϵ) couvrant de J de cardinal minimal. En composant tout élément $\psi \in \Psi_n^{4\epsilon,x}$ par des contractions affines de rapport $\frac{1}{4}$, on obtient, pour tout $x \in F$, une reparamétrisation de $B(x,n,4\epsilon)$ par des applications $\overline{\psi}$, telle que $f^k \circ \overline{\psi}$ est ϵ contractante pour tout $k = 0, ..., n-1$, au nombre de $4^d e^{\alpha(4\epsilon)n}$. En particulier, $\bigcup_{x\in F} B(x,n,4\epsilon)$ est recouvert par des (n,ϵ) boules de Bowen au nombre de $4^d e^{\alpha(4\epsilon)n} r(n,\epsilon,J)$. Notons G l'ensemble des centres de ces (n,ϵ) boules de Bowen.

On considère le sous ensemble E_J de E des points $x \in E$ tels que $B(x,n,2\epsilon) \bigcap J \neq \emptyset$. Montrons que $(E - E_J) \bigcup G$ est un ensemble (n,ϵ) couvrant de $[0,1]^d$. Il suffit de montrer que si $x \in E_J$ alors $B(x,n,\epsilon) \subset \bigcup_{y\in F} B(y,n,4\epsilon)$. Considérons un élément x de E_J. Il existe un élément $y \in F$ tel que $B(x,n,2\epsilon) \bigcap B(y,n,\epsilon) \bigcap J \neq \emptyset$ et donc $B(x,n,\epsilon) \subset B(y,n,4\epsilon)$. Puisque E est de cardinal minimal parmi les ensembles (n,ϵ) couvrants, on a $\sharp E_J \leq \sharp G \leq 4^d e^{\alpha(4\epsilon)n} r(n,\epsilon,J)$.

Rappelons que, pour tout $x \in [0,1]^d$, toute (n,ϵ) cellule de x est incluse dans la boule de Bowen $B(x,n,2\epsilon)$. On en déduit qu'une (n,ϵ) cellule de E rencontrant J est une (n,ϵ) cellule de E_J. Le nombre de (n,ϵ) cellules de E rencontrant J est donc au plus de $Ce^{\alpha(\epsilon)(d+1)n} \times \sharp E_J \leq C4^d e^{(\alpha(4\epsilon)+\alpha(\epsilon)(d+1))n} r(n,\epsilon,J)$. □

Etudions maintenant l'inégalité inverse : nous cherchons à minorer le nombre de cellules rencontrées par un sous ensemble J de $[0,1]^d$ par le cardinal d'un ensemble couvrant de J. Cela pourrait paraître immédiat car toute (n,ϵ) cellule est incluse dans une (n,ϵ) boule de Bowen. Cependant n'oublions pas que les cellules d'un ensemble couvrant recouvrent $[0,1]^d$ à un ensemble de dimension $d-1$ près. On doit donc s'assurer que J n'évite pas les (n,ϵ) cellules.

Lemme 4.3.11 *Soient $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$ et $n > N(\epsilon)$. Soit E un ensemble (n,ϵ) couvrant de $[0,1]^d$. On considère une application polynômiale $S : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d$. Pour tout $e \in \mathbb{R}^+$, il existe $c \in]-e,e[^d$, tel que $S_c := S + c$ vérifie :*

$$r(n, 2\epsilon, S_c([0,1]^k) \cap [0,1]^d) \leq \min \left\{ \sharp\mathcal{F} \ : \ \mathcal{F} \subset \mathcal{A}_E \ et \ S_c([0,1]^k) \cap (\bigcup_{A\in\mathcal{F}} A) = S_c([0,1]^k) \cap A_E \right\}$$

PREUVE : D'après la Proposition 3.3.11, l'ensemble $S([0,1]^k) \cap [0,1]^d$ s'écrit sous la forme $S([0,1]^k) \cap [0,1]^d = \coprod_{i=1}^N A_i$, où A_i est une variété de Nash connexe pour tout $i = 1, ..., N$. De même le bord ∂A d'une cellule s'écrit comme une union finie de variétés de Nash connexes d'intérieur vide. Quitte à translater un peu S on peut supposer que pour tout $i = 1, ..., N$, la variété A_i est transverse aux cellules de E, i.e. $\dim(A_i \bigcap \partial A) < \dim(A_i) \leq d$ pour toute (n,ϵ) cellule A de E. Rappelons que $[0,1]^d = \overline{A_E} = \bigcup_{A\in\mathcal{A}_E} \overline{A}$. On a donc :

$$A_i = \bigcup_{A\in\mathcal{A}_E} A_i \cap \overline{A}$$

$$A_i = \left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}_E} A_i \cap A \right) \cup \left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}_E} A_i \cap \partial A \right)$$

mais puisque $\bigcup_{A\in\mathcal{A}_E} A_i \cap \partial A$ est de dimension $< \dim(A_i)$:

$$\overline{A_i} = \bigcup_{A\in\mathcal{A}_E} \overline{A_i \cap A}$$

et donc

$$\begin{aligned} S([0,1]^k)\cap[0,1]^d &= \bigcup_{i=1}^{N}\bigcup_{A\in\mathcal{A}_E}\overline{A_i\cap A} \\ &= \bigcup_{A\in\mathcal{A}_E}\overline{S([0,1]^k)\cap A} \\ &= \overline{S([0,1]^k)\cap A_E} \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{F}\subset\mathcal{A}_E$ un sous-ensemble de E tel que $S([0,1]^k)\cap(\bigcup_{A\in\mathcal{F}}A) = S([0,1]^k)\cap A_E$. On a alors :

$$\begin{aligned} S([0,1]^k)\cap[0,1]^d &= \overline{S([0,1]^k)\cap A_E} \\ &= \bigcup_{A\in\mathcal{F}}\overline{S([0,1]^k)\cap A} \end{aligned}$$

Toute (n,ϵ) cellule est incluse dans une (n,ϵ) boule de Bowen et donc l'adhérence d'une telle cellule est incluse dans une $(n,2\epsilon)$ boule de Bowen. Ainsi $r(n,2\epsilon,S([0,1]^k)\bigcap[0,1]^d)$ est borné par le cardinal $\mathcal{F}$. □

On peut dans le lemme précédent considérer un produit d'application. On obtient alors les mêmes conclusions en travaillant avec les cellules produits associés à des ensembles (n,ϵ) couvrants.

Lemme 4.3.12 *Soient $f:[0,1]^p\to[0,1]^p$ et $g:[0,1]^q\to[0,1]^q$ des applications $\mathcal{C}^\infty$. Soient $\epsilon\in]0,\min(\epsilon_0(f),\epsilon_0(g))[$ et $n>\max(N(f,\epsilon),N(g,\epsilon))$. Soient $E_f\subset[0,1]^p$ un ensemble (n,ϵ) couvrant de $[0,1]^p$ et $E_g\subset[0,1]^q$ un ensemble (n,ϵ) couvrant de $[0,1]^q$. On considère une application polynômiale $S=(P,Q):\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$. Pour tout $e\in\mathbb{R}^+$, il existe $c\in]-e,e[^{p+q}$, tel que $S_c:=S+c$ vérifie :*

$$r(n,2\epsilon,S_c([0,1]^k)\cap[0,1]^{p+q})\leq\min\left\{\sharp\mathcal{H}\ :\ \mathcal{H}\subset\mathcal{A}_{E_f\times E_g}\ et\ S_c([0,1]^k)\cap(\bigcup_{A\in\mathcal{H}}A)=S_c([0,1]^k)\cap A_{E_f\times E_g}\right\}$$

4.3.4 Recouvrement par des (n,ϵ) cellules

On recouvre l'image d'une application pôlynomiale par les (n,ϵ) cellules produits associées à des ensembles (n,ϵ) couvrants. Nous nous intéressons tout d'abord au cas d'une courbe polynômiale.

Lemme 4.3.13 *Soient $f:[0,1]^p\to[0,1]^p$ et $g:[0,1]^q\to[0,1]^q$ des applications $\mathcal{C}^\infty$ et soient $E_f\subset[0,1]^p$ et $E_g\subset[0,1]^g$. Soient $\epsilon\in]0,\min(\epsilon_0(f),\epsilon_0(g)[$ et $n>\max(N(f,\epsilon),N(g,\epsilon))$. On considère une courbe polynômiale $S=(P,Q):[0,1]\to\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$. Alors on a :*

$$\begin{aligned} \min\left\{\sharp\mathcal{H}\ :\ \mathcal{H}\subset\mathcal{A}_{E_f\times E_g}\ et\ S([0,1])\cap(\bigcup_{A\in\mathcal{H}}A)=S([0,1])\cap A_{E_f\times E_g}\right\}\leq \\ C(p,deg(P))e^{p\alpha(f,\epsilon)n}\times\sharp\{(n,\epsilon)\ cellules\ de\ \ E_f\ rencontrant\ P([0,1])\} \\ +C(q,deg(Q))e^{q\alpha(g,\epsilon)n}\sharp\{(n,\epsilon)\ cellules\ de\ \ E_g\ rencontrant\ Q([0,1])\} \end{aligned}$$

où C est la constante du Corollaire 3.8.12.

Preuve : Notons A_f (resp. A_g) le nombre de (n,ϵ) cellules de E_f (resp. de E_g) rencontrées par l'image de P (resp. de Q). D'après le Corollaire 3.8.12, le nombre de composantes connexes de $\{t\in[0,1]\ :\ P(t)\in C_f\}$ est inférieur à $C(p,deg(P))e^{p\alpha(f,\epsilon)n}$ pour toute (n,ϵ) cellule C_f de E_f. L'ensemble de ces intervalles définit une partition T_f en intervalles de $[0,1]$ de cardinal au plus

$2C(p, deg(P))e^{p\alpha(f,\epsilon)n}A_f + 1$. Observons que pour tout élément J de T_f, ou bien $P(J)$ ne rencontre pas les (n,ϵ) cellules de E_f ou bien il existe une (n,ϵ) cellule de E_f contenant $P(J)$. On définit de même, en remplaçant f par g et P par Q, une partition T_g en intervalles de $[0,1]$ de cardinal au plus $2C(q, deg(Q))e^{q\alpha(g,\epsilon)n}A_g + 1$, telle que pour tout élément J de T_g, ou bien $Q(J)$ ne rencontre pas les (n,ϵ) cellules de E_g ou bien il existe une (n,ϵ) cellule de E_g contenant $Q(J)$.

Considérons un intervalle K élément de la partition jointe $T_f \bigvee T_g$. Ou bien l'ensemble $S(K)$ ne rencontre pas les (n,ϵ) cellules produits de $E_f \times E_g$ ou bien $S(K)$ est inclus dans une (n,ϵ) cellule produit de $E_f \times E_g$. En particulier $S([0,1]) \bigcap A_{E_f \times E_g}$ est recouvert par au plus $\sharp(T_f \bigvee T_g)$ (n,ϵ) cellules produits de $E_f \times E_g$. Or T_f et T_g étant des partitions en intervalles de $[0,1]$, on a $\sharp\left(T_f \bigvee T_g\right) \leq \sharp T_f + \sharp T_g \leq C(p, deg(P))e^{p\alpha(f,\epsilon)n}A_f + C(q, deg(Q))e^{q\alpha(g,\epsilon)n}A_g$.

□

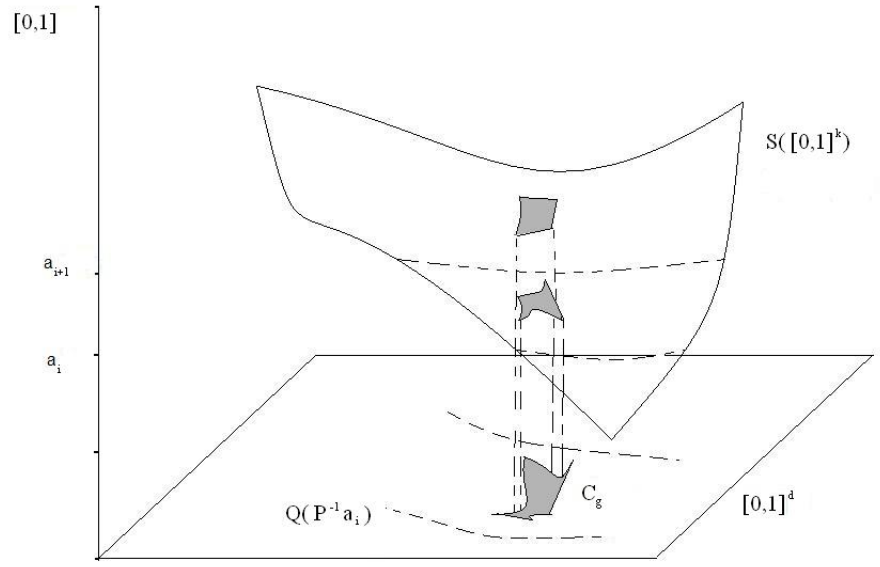
On considère maintenant le cas du produit d'une dynamique de l'intervalle et d'une dynamique de $[0,1]^d$ toutes deux de classe $\mathcal{C}^\infty$. Rappelons que les cellules d'une application de l'intervalle sont des intervalles d'intérieur disjoints.

Lemme 4.3.14 *Soient $f : [0,1] \to [0,1]$ et $g : [0,1]^d \to [0,1]^d$ des applications $\mathcal{C}^\infty$ et soient $E_f \subset [0,1]$ et $E_g \subset [0,1]^d$ des sous-ensembles respectifs de $[0,1]^p$ et $[0,1]^q$. Soient $\epsilon \in]0, \min(\epsilon_0(f), \epsilon_0(g))[$ et $n > \max(N(f,\epsilon), N(g,\epsilon))$. On considère une application polynômiale $S = (P,Q) : [0,1]^k \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. Alors on a :*

$$\begin{aligned}\sharp\Big\{(n,\epsilon) \text{ cellules produit de } E_f \times E_g \text{ rencontrant } S([0,1]^k)\Big\} \leq \\ C(d, deg(S))e^{d\alpha(g,\epsilon)n} \times \sharp\Big\{(n,\epsilon) \text{ cellules de } E_g \text{ rencontrant } Q([0,1]^d)\Big\} \\ + \sum_{b \in \partial\mathcal{A}_{E_f}} \sharp\left\{(n,\epsilon) \text{ cellules de } E_g \text{ rencontrant } Q\left(P^{-1}(\{b\})\right)\right\}\end{aligned}$$

avec C la constante du Corollaire 3.8.12.

Preuve : Soit $S = (P,Q) : [0,1]^k \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ une application polynômiale. On note comme précédemment A_f (resp. A_g) le nombre de (n,ϵ) cellules de E_f (resp. de E_g) rencontrées par l'image de P (resp. Q). Soit C_g une (n,ϵ) cellule de E_g rencontrant l'image de Q. D'après le corollaire 3.8.11, le nombre de composantes connexes de $S([0,1]^k) \bigcap [0,1]^{d+1} \bigcap (C_g \times [0,1])$ est borné par $Ce^{d\alpha(g,\epsilon)n}$ avec $C = C(d, deg(S))$. Rappelons que les (n,ϵ) cellules de E_f sont les intervalles de la forme $[a_i, a_{i+1}]$ avec $1 \leq i \leq K_{\epsilon,n} - 1$. Pour tout $1 \leq i \leq K_{\epsilon,n}$, on note $\mathcal{R}_i$ la collection de (n,ϵ) cellules de E_g rencontrant $Q\left(P^{-1}(\{a_i\})\right)$.



Dessin 1

Soit C_g une cellule de E_g telle que $C_g \notin \bigcup_{i=1,...,K_{\epsilon,n}} \mathcal{R}_i$. Pour tout $i = 1, ..., K_{\epsilon,n}$, l'ensemble $C_g \times \{a_i\}$ séparent $S([0,1]^k) \bigcap (C_g \times [0,1])$ (voir Dessin 1). Donc toute composante connexe de $S([0,1]^k) \bigcap (C_g \times [0,1])$ rencontre au plus une cellule produit de la forme $[a_i, a_{i+1}] \times C_g$ avec $1 \leq i \leq K_{\epsilon,n}$. On en déduit que le nombre de (n,ϵ) cellules produits de $E_f \times E_g$ rencontrant $S([0,1]^k)$ est inférieur à $Ce^{d\alpha(g,\epsilon)n} \times A_g + \sum_{i=1,...,K_{\epsilon,n}} \sharp\mathcal{R}_i$. □

4.3.5 Conclusion des preuves des théorèmes 4.3.5 et 4.3.2 :

Preuve Théorème 4.3.5 : :

Soient $f : [0,1]^p \to [0,1]^p$ et $g : [0,1]^q \to [0,1]^q$ deux applications de classe $\mathcal{C}^\infty$. On considère $\epsilon \in]0, \min(\epsilon_0(f), \epsilon_0'(f), \epsilon_0(g), \epsilon_0'(g))[$ et $n > \max(N(f,\epsilon), N'(f,\epsilon), N(g,\epsilon), N'(g,\epsilon))$. On est tout d'abord réduit d'après le Lemme 4.3.6 à considérer une courbe polynômiale $S = (P,Q) : [0,1] \to \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ de degré indépendant de n. Soient $E_f \subset [0,1]^p$ et $E_g \subset [0,1]^q$ des ensembles (n,ϵ) couvrants de cardinal minimal de $[0,1]^p$ et de $[0,1]^q$ respectivement. On note A_f (resp. A_g) le nombre de (n,ϵ) cellules de E_f (resp. de E_g) rencontrées par l'image de P (resp. Q).

Quitte à translater un peu S, on a, d'après le lemme 4.3.11 :

$$r_{f\times g}(n, 2\epsilon, S([0,1]) \cap [0,1]^{p+q}) \leq \min \left\{ \sharp\mathcal{H} \ : \ \mathcal{H} \subset \mathcal{A}_{E_f \times E_g} \text{ et } S([0,1]^k) \cap (\bigcup_{A\in\mathcal{H}} A) = S([0,1]^k) \cap A_{E_f\times E_g} \right\}$$

Puis on déduit du Lemme 4.3.13 :

$$r_{f\times g}(n, 2\epsilon, S([0,1]) \cap [0,1]^{p+q}) \leq C(p, deg(P)) e^{p\alpha(f,\epsilon)n} A_f + C(q, deg(Q) e^{q\alpha(g,\epsilon)n}) A_g$$

Enfin d'après le Lemme 4.3.10 :

$$\begin{aligned} r_{f\times g}(n, 2\epsilon, S([0,1]) \cap [0,1]^{p+q}) \quad \leq \quad & C(p, deg(P)) e^{(p\alpha(f,\epsilon)+\alpha'(f,\epsilon))n} r_f(n, \epsilon, Image(P)) \\ & + C(q, deg(Q)) e^{(q\alpha(g,\epsilon)+\alpha'(g,\epsilon))n} r_g(n, \epsilon, Image(Q)) \end{aligned}$$

On conclut alors facilement que :

$$h_1(f \times g) \leq \max(h_1(f), h_1(g))$$

□

PREUVE THÉORÈME 4.3.2 :

Soient $f : [0,1] \to [0,1]$ et $g : [0,1]^d \to [0,1]^d$ deux applications de classe $\mathcal{C}^\infty$. On considère $\epsilon \in]0, \min(\epsilon_0(f), \epsilon_0'(f), \epsilon_0(g), \epsilon_0'(g))[$ et $n > \max(N(f,\epsilon), N'(f,\epsilon), N(g,\epsilon), N'(g,\epsilon))$. Comme dans la preuve ci dessus du Théorème 4.3.5, il suffit de considérer $S : (P,Q) : [0,1]^k \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, une application polynômiale de degré indépendant de n. Soient $E_f \subset [0,1]$ et $E_g \subset [0,1]^d$ des ensembles (n,ϵ) couvrants de cardinal minimal de $[0,1]$ et de $[0,1]^d$ respectivement. De plus, on translate légèrement S de sorte que, d'une part, l'image de S est transverse aux hyperplans $\{x = c_i\}$, c'est à dire $\dim(S([0,1]^k) \bigcap \{x = c_i\}) < \dim(S([0,1]^k))$ pour $i = 1, ..., K_{\epsilon,n}$ et que, d'autre part, le Lemme 4.3.12 s'applique, ce dernier point entraînant :

$$r_{f\times g}(n, 2\epsilon, S([0,1]^k) \cap [0,1]^{d+1}) \leq \sharp \left\{ (n,\epsilon) \text{ cellules produits de } E_f \times E_g \text{ rencontrées par } S([0,1]^k) \right\}$$

Puis, en appliquant le Lemme 4.3.14, on obtient :

$$\begin{aligned} r_{f\times g}(n, 2\epsilon, S([0,1]^k) \cap [0,1]^{d+1}) \quad \leq \quad & C(d, deg(S)) e^{d\alpha(g,\epsilon)n} \sharp \left\{ (n,\epsilon) \text{ cellules de } E_g \text{ rencontrant } Q([0,1]^k) \right\} \\ & + \sum_{i=1}^{K_{\epsilon,n}} \sharp \left\{ (n,\epsilon) \text{ cellules de } \ E_g \text{ rencontrant } Q\left(P^{-1}(\{a_i\})\right) \right\} \end{aligned}$$

Enfin d'après le Lemme 4.3.10 :

$$\begin{aligned} r_{f\times g}(n, 2\epsilon, S([0,1]^k) \cap [0,1]^{d+1}) \quad \leq \quad & C(d, deg(S)) e^{(d\alpha(g,\epsilon) + \alpha'(g,\epsilon))n} r_g(n, \epsilon, Q([0,1]^k) \cap [0,1]^d) \\ & + e^{\alpha'(f,\epsilon)n} e^{(h_{top}(f) + \alpha(f,\epsilon))n} \max_{i=1,...,K_{\epsilon,n}} r_g(n, \epsilon, Q(P^{-1}(\{a_i\}))) \end{aligned}$$

Or puisque l'image de S est transverse aux hyperplans de coordonnée de $Q(P^{-1}(\{a_i\}))$, l'ensemble $Q(P^{-1}(\{a_i\}))$ est un ensemble semi-algébrique de dimension $k-1$ et de degré indépendant de n. D'après le lemme algébrique de Yomdin-Gromov (Théorème 3.7.1), on peut reparamétrer celui-ci par N applications de $]0,1[^{k-1}$ dans $[0,1]^p$ de norme $\|\|_s$ inférieure à 1 avec $N = N(s, d, deg(S))$.

On conclut facilement que :

$$h_k(f \times g) \leq \max(h_k(g), h_{top}(f) + h_{k-1}(g))$$

□

Chapitre 5

Extensions symboliques

Dans ce chapitre nous rappelons tout d'abord la problématique des extensions symboliques. Puis nous énonçons les résultats principaux de M. Boyle et T. Downarowicz présentés dans [12]. Après avoir évoqué le cas asymptotiquement h-expansif, nous considérons le cas des dynamiques des applications de classe $\mathcal{C}^r$. Nous rappelons brièvement les exemples de S. Newhouse et T. Downarowicz et donnons les principales idées du théorème de T. Downarowicz et A. Maass sur les extensions symboliques d'une application $\mathcal{C}^r$ de l'intervalle. Nous exhibons des exemples d'applications $\mathcal{C}^r$ de l'intervalle, qui montrent que la borne de l'entropie d'extension symbolique obtenue par T. Downarowicz et A. Maass est optimale. Enfin nous bornons l'entropie d'extension symbolique en fonction de l'entropie de multiplicité pour les applications affines par morceaux du plan.

5.1 Problématique

On dit que (Y, S) est un **sous-décalage** s'il existe $K \in \mathbb{N}^*$, tel que Y est un sous ensemble fermé de $\{0, 1, ..., K\}^{\mathbb{Z}}$ invariant par le décalage S sur Y.

Soit X un espace métrisable compact et $T : X \to X$ une application continue. On dit que (Y, S) est une **extension** s'il existe une application continue $\pi : Y \to X$ telle que $\pi^* : \mathcal{M}(Y, S) \to \mathcal{M}(X, T)$ est surjective [*] et $\pi \circ S = T \circ \pi$. Cette définition est plus faible que la définition usuelle qui impose la surjectivité de l'application π. Avec cette définition plus souple, l'extension naturelle, bien que n'étant pas surjective, est une extension.

Rappelons [57] que si (Y, S) est une extension de (X, T) et $\mu \in \mathcal{M}(Y, S)$, alors $h(\mu) \geq h(\pi^*\mu)$ et donc π^* étant surjective, on a d'après le principe variationnel pour l'entropie topologique, $h_{top}(S) \geq h_{top}(T)$.

Définition 5.1.1 *Une **extension symbolique** (Y, S) d'un système dynamique (X, T) est une extension de (X, T) telle que (Y, S) est un sous-décalage.*

Une première question naturelle est de savoir si une dynamique (X, T) admet une extension symbolique. Dans le cas où une telle extension existe, on peut alors se demander si celle-ci est proche de (X, T) au sens de l'entropie. Par exemple, d'un point de vue topologique, peut on choisir (Y, S) de sorte que $h_{top}(S) = h_{top}(T)$ ou plus généralement quelle est la valeur minimale de $h_{top}(S)$? On introduira aussi une fonction définie sur $\mathcal{M}(X, T)$ pour mesurer comment diffèrent les deux systèmes du points de vue de l'entropie métrique. L'entropie topologique de l'extension étant plus grande que l'entropie topologique du facteur, comme nous venons de le rappeler, une condition nécessaire évidente à l'existence d'extensions symboliques est la finitude de l'entropie topologique.

∗. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera aussi π l'application induite sur les mesures invariantes

Dans certains cadres, on sait montrer l'existence d'extensions symboliques grâce à des arguments de nature géométrique [2] :

- Dans le cas des applications uniformément hyperboliques, la dynamique symbolique associée à une partition de Markov fournit une extension symbolique principale [10].
- Dans le cas des applications monotones par morceaux de l'intervalle, la dynamique symbolique associée à la partition en branche monotones fournit une extension symbolique principale ("il n'y a pas d'entropie dans les branches monotones").

Dans le paragraphe suivant nous rappelons le principal théorème de la théorie des extensions symboliques. Celui-ci relie l'entropie des extensions symboliques d'un système dynamique avec les superenveloppes des structures d'entropie. On rappelle aussi quelques propriétés élémentaires de l'entropie d'extension symbolique établies dans [13].

5.2 Théorèmes des extensions symboliques

Si $\pi : (Y,S) \to (X,T)$ est une extension symbolique, on estime le défaut d'entropie entre (Y,S) et (X,T) à l'aide de la fonction suivante :

$$\begin{array}{rccc} h^{\pi}_{ext} : & \mathcal{M}(X,T) & \to & \mathbb{R} \\ & \mu & \mapsto & \sup_{\nu \in \mathcal{M}(Y,S),\ \pi\nu=\mu} h(\nu) \end{array}$$

C'est la fonction projetée de h induite par l'action de π sur les mesures invariantes.

On peut maintenant énoncer le théorème fondamental de la théorie de Boyle et Downarowicz. Il relie l'entropie d'extension symbolique et les propriétés de convergence des structures d'entropie :

Théorème 5.2.1 *(Théorème 5.5 de [12]) Soit X un espace métrisable compact et $T : X \to X$ une application d'entropie finie. Soit $\mathcal{H}$ une structure d'entropie. On considère une fonction $E : \mathcal{M}(X,T) \to [0,+\infty[$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *E est une superenveloppe affine bornée de $\mathcal{H}$;*
2. *Il existe une extension symbolique $\pi : (Y,S) \to (X,T)$ telle que $E = h^{\pi}_{ext}$.*

Comme on peut s'en douter la partie la plus difficile consiste à montrer que (1) implique (2) : il faut construire explicitement une extension symbolique vérifiant $E = h^{\pi}_{ext}$. L'autre implication résulte facilement de propriétés de continuité de l'entropie pour les sous-décalages. M.Boyle et T.Downarowicz [12] étudient tout d'abord le cas zéro-dimensionnel et montrent ensuite comment on s'y ramène. Ici nous présentons une preuve directe de l'implication (2) $\Rightarrow$ (1) en utilisant la structure d'entropie $\mathcal{H}^{fun}$ et nous expliquons comment on est réduit de façon évidente au cas zéro-dimensionnel pour prouver l'implication inverse (1) $\Rightarrow$ (2) (On évite ainsi le recours au Théorème 7.5 de [12]). Nous ne détaillons pas la preuve de (1) $\Rightarrow$ (2) dans le cas zéro-dimensionnel.

Preuve de l'implication (2) $\Rightarrow$ (1) : On travaille avec la structure d'entropie $\mathcal{H}^{fun}$. Soit $\pi : (Y,S) \to (X,T)$ une extension symbolique de (X,T). Alors

$$(h^{\pi}_{ext} - h_k)(\mu) = \sup_{\nu \in \mathcal{M}(Y,S),\ \pi\nu=\mu} h(\nu) - h^{fun}(\pi\nu, \mathcal{F}_k)$$

$$(h^{\pi}_{ext} - h_k)(\mu) = \sup_{\nu \in \mathcal{M}(Y,S),\ \pi\nu=\mu} h(\nu) - h^{fun}(\nu, (\mathcal{F}_k \circ \pi))$$

Or (Y,S) étant un sous-décalage, pour tout $\nu \in \mathcal{M}(Y,S)$, on a $h(\nu) = h(\nu, P)$ où P est la partition coordonnée zéro. En particulier $h(\nu) = h^{fun}(\nu, \mathcal{F}_P) = h^{fun}(\nu, \mathcal{F}_P \bigcup (\mathcal{F}_k \circ \pi))$ et donc $\nu \mapsto h(\nu) - h^{fun}(\nu, \mathcal{F}_k \circ \pi)$ est s.c.s. sur $\mathcal{M}(Y,S)$ d'après les propriétés de continuité de $\mathcal{H}^{fun}$ établies p. 66. On en déduit que $h^{\pi}_{ext} - h_k$ est s.c.s. comme projetée d'une fonction s.c.s. d'après le Théorème 1.1.6 et affine comme projetée d'une application affine d'après la Proposition 1.4.4. □

Nous montrons maintenant comment on est réduit au cas zéro-dimensionnel pour montrer (1) ⇒ (2).

Preuve de la Réduction de (1) ⇒ (2) au cas zéro dimensionel :

D'après le Théorème 2.2.9, l'application T étant d'entropie finie, il existe une extension zero dimensionnelle principale $\psi : (Z, R) \to (X, T)$. Or d'après la Proposition 2.6.5, un candidat $\mathcal{H}$ de (X, T) est une structure d'entropie si et seulement si $\psi\mathcal{H}$ est une structure d'entropie de (Z, R). Soit E une superenveloppe de $\mathcal{H}$, alors ψE est une superenveloppe de $\psi\mathcal{H}$ d'après la Proposition 1.2.39. Si l'on suppose connu le cas zéro-dimensionnel, il existe une extension symbolique $\pi : (Y, S) \to (Z, R)$ tel que $h^{\pi}_{ext} = \psi E$. Rappelons que d'après la Proposition 1.1.7, la fonction $h^{\psi\circ\pi}_{ext}$ est la projetée de h^{π}_{ext} et donc de ψE par ψ. Or la projetée du relevé est l'identité : $(\psi E)^{[\mathcal{M}(X,T)]} = E$ (Proposition 1.1.5), c'est à dire $h^{\psi\circ\pi}_{ext} = E$. □

Définition 5.2.2 ***L'entropie d'extension symbolique*** $h_{sex} : \mathcal{M}(X, T) \to \mathbb{R}$ *est la fonction définie comme suit*

$$h_{sex} = \inf_{\pi:(Y,S)\to(X,T)} h^{\pi}_{ext}$$

où l'infimum porte sur les extensions symboliques (Y, S) de (X, T). Lorsque (X, T) n'admet pas d'extension symbolique, on pose $h_{sex} \equiv +\infty$.

Il résulte du Théorème 5.2.1 et du Théorème 1.4.3 que :

Corollaire 5.2.3 *Soit X un espace compact métrisable et $T : X \to X$ une application d'entropie finie. Soit $\mathcal{H}$ une structure d'entropie de (X, T). Alors*

$$h_{sex} = E\mathcal{H}$$

De plus, il existe une extension symbolique $\pi : (Y, S) \to (X, T)$ telle que $h_{sex} = h^{\pi}_{ext}$ si et seulement si la fonction h_{sex} est affine.

Il existe des structures d'entropie à différences s.c.s. : c'est le cas de $\mathcal{H}^{fun}$. On en déduit d'après le Lemme 1.2.4 que la fonction h_{sex} est s.c.s.

On peut aussi s'intéresser à la quantité topologique suivante :

Définition 5.2.4 ***L'entropie topologique d'extension symbolique****, notée $h_{sex}(T)$, de (X, T) est le minimum des entropies topologiques des extensions symboliques de (X, T).*

Toujours d'après le Théorème 1.4.3, on a le principe variationnel suivant pour l'entropie d'extension symbolique :

Corollaire 5.2.5 *(Théorème 8.1 de [12]) Soit X un espace compact métrisable et $T : X \to X$ une application d'entropie finie. Alors*

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}(X,T)} h_{sex}(\mu) = h_{sex}(T)$$

De plus d'après le Corollaire 1.6.3, la fonction s.c.s. h_{sex} atteint son maximum sur la clôture des mesures ergodiques.

Nous terminons ce paragraphe en rappelant les formules établies par M. Boyle et T. Downarowicz dans [13] pour l'entropie d'extension symbolique d'un produit direct et d'une puissance :

Proposition 5.2.6 *(Théorème 3.2 de [13]) Soient (X, T) et (X', T') deux systèmes dynamiques d'entropie finie, alors*

$$h_{sex}(T \times T') = h_{sex}(T) + h_{sex}(T')$$

Dans la preuve de ce théorème, M. Boyle et T. Downarowicz montrent que pour tout $(\mu, \nu) \in \mathcal{M}(X,T) \times \mathcal{M}(X',T')$, on a pour tout ordinal α,

$$u_\alpha(\mu \times \nu) \geq u_\alpha(\mu) + u_\alpha(\nu) \tag{5.1}$$

L'entropie d'extension symbolique d'une puissance est donnée par la formule suivante :

Proposition 5.2.7 *(Théorème 3.3 de [13]) Soit (X,T) un système dynamique d'entropie finie. Pour tout entier n, on a :*

$$h_{sex}(T^n) = n h_{sex}(T)$$

On commence par rappeler l'étude des extensions symboliques des dynamiques asymptotiquement h-expansives.

5.3 Cas asymptotiquement h-expansif

Rappelons qu'un système dynamique (X,T) est dit asymptotiquement h-expansif si son entropie de queue $h^*(T)$ est nulle. C'est le cas des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ définies sur une variété compacte (Corollaire 4.2.6). Sous cette hypothèse d'asympotique h-expansivité, on a un résultat très fort :

Théorème 5.3.1 *(Théorème 8.6 de [12]) Soit (X,T) un système dynamique, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *(X,T) est asymptotiquement h-expansif ;*
2. *$E\mathcal{H} = h$ pour toute structure d'entropie $\mathcal{H}$;*
3. *Il existe une extension symbolique principale de (X,T), en particulier $h_{sex} = h$.*

L'implication (1) $\Rightarrow$ (3) a été établie avant le théorème des extensions symboliques par M. Boyle, D. Fiebig, U. Fiebig [14] et indépendamment par T. Downarowicz [30] (dans le cas zéro-dimensionnel). Cependant on peut la voir maintenant comme une conséquence simple du théorème des extensions symboliques et du principe variationnel pour l'entropie de queue.

Preuve : Remarquons tout d'abord que (2) $\Leftrightarrow$ (3) est une conséquence triviale du Corollaire 5.2.3, car la fonction entropie métrique h est affine.

Montrons maintenant (1) $\Leftrightarrow$ (2). D'après le principe variationnel pour l'entropie de queue, (X,T) est asymptotiquement h-expansif si et seulement si $u_1 \equiv 0$. Or cette dernière condition est équivalente à $u_\alpha \equiv 0$ pour tout ordinal non nul α ou encore d'après le Théorème 1.2.19, à $E\mathcal{H} = h$ pour toute structure d'entropie $\mathcal{H}$. □

Les dynamiques de classe $\mathcal{C}^\infty$ définies sur une variété compacte, étant asymptotiquement h-expansives, admettent une extension symbolique principale.

T. Downarowicz et S. Newhouse [32] observent alors que tout difféomorphisme $\mathcal{C}^r$ avec $r \geq 1$, qui est $\mathcal{C}^r$ structurellement stable, admet une extension symbolique principale. En effet si f est un tel difféomorphisme, il existe un voisinage $\mathcal{U}_f$ de f dans $Diff^r(M)$ tel que tout difféomorphisme de $\mathcal{U}_f$ est topologiquement conjugué à f. L'espace $Diff^\infty(M)$ étant dense dans $Diff^r(M)$, le difféomorphisme f est topologiquement conjugué à un difféomorphisme $\mathcal{C}^\infty$, qui admet une extension symbolique principale d'après la remarque précédente. On retrouve en particulier le fait que les Anosov admettent une extension principale.

On peut aussi observer simplement qu'un Anosov est expansif : $\exists \epsilon > 0\ \forall x \neq y\ \exists n \in \mathbb{Z}$ tel que $d(T^n x, T^n y) > \epsilon$. En particulier tout Anosov est asymptotiquement h-expansif et admet donc une

extension symbolique principale.

Pour les difféomorphismes de surfaces, il existe en fait un résultat plus général dû à Pacifico et Vieitez [49] :

Théorème 5.3.2 (Pacifico, Vieitez) *Tout difféomorphisme d'une surface compacte admettant une décomposition dominée† est h-expansif, i.e. il existe $\epsilon > 0$, tel que $h^*(f, \epsilon) = 0$. En particulier un tel difféomorphisme admet une extension symbolique principale.*

5.4 Minoration de h_{sex}

Nous allons donner dans les paragraphes suivants des exemples de dynamiques avec une entropie d'extension symbolique minorée. Pour obtenir une telle minoration, on accumule des fers à cheval à des échelles de plus en plus petites. Cette idée est formalisée dans le lemme suivant. Même si ce lemme n'est pas énoncé explicitement sous cette forme, ce principe est utilisé par S.Newhouse et T.Downarowicz (plus précisément au lemme 6.2 de [32]).

Nous travaillons ici avec le candidat à la Katok $\mathcal{H}^{Kat}_{\frac{1}{2}} := (h^{Kat}_{\frac{1}{2}})(., \epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}} = (h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ introduit au paragraphe 2.4.3. Nous utilisons la notation suivante : $B(x, \infty, \epsilon) := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(x, n, \epsilon) = \{y \in X \ : \ \forall k \in \mathbb{N},\ d(T^k x, T^k y) < \epsilon\}$. Enfin si p est un point périodique, on note $\mathcal{O}(p)$ l'orbite de p et $\gamma_p := \dfrac{1}{\sharp\mathcal{O}(p)} \displaystyle\sum_{q\in\mathcal{O}(p)} \delta_q$ la mesure périodique associée à p.

Lemme 5.4.1 *Soit $f : X \to X$ une application continue définie sur un espace métrisable compact X. Soit μ une mesure de probabilité f-invariante et soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}-\{0\}}$ une suite de réels positifs.*

On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe des points périodiques $(p_{(i_1,...,i_{2k+1})})_{(i_1,...,i_{2k+1})\in\mathbb{N}^{2k+1}}$ et des mesures de probabilité invariantes $(\mu_{(i_1,...,i_{2k})})_{(i_1,...,i_{2k})\in\mathbb{N}^{2k}}$ (on pose par convention $\mathbb{N}^0 = \{\emptyset\}$ et $\mu_\emptyset = \mu$) tels que :

1. *Pour tout $(i_1, ..., i_{2k}) \in \mathbb{N}^{2k}$, les mesures périodiques $\gamma_{p_{(i_1,...,i_{2k+1})}}$ convergent vers $\mu_{(i_1,...,i_{2k})}$ quand i_{2k+1} tend vers $+\infty$;*
2. *Pour tout $(i_1, ..., i_{2k+1}) \in \mathbb{N}^{2k+1}$, les mesures $\mu_{(i_1,...,i_{2k+2})}$ convergent vers $\gamma_{p_{(i_1,...,i_{2k+1})}}$ quand i_{2k+2} tend vers $+\infty$;*
3. *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier $I > 0$ vérifiant :*

$$\forall i_{2k} > I \ \exists x \in X \text{ tel que } \mu_{(i_1,...,i_{2k})}(B(x, \infty, \epsilon)) = 1$$

4. *Pour tout $(i_1, ..., i_{2k}) \in \mathbb{N}^{2k}$, les limites successives $\lim\limits_{i_1\to+\infty}\left(\lim\limits_{i_2\to+\infty} ... \left(\lim\limits_{i_{2k}\to+\infty} h(\mu_{(i_1,...,i_{2k})})\right)...\right)$ sont bien définies et $\lim\limits_{i_1\to+\infty}\lim\limits_{i_2\to+\infty} ... \lim\limits_{i_{2k}\to+\infty} h(\mu_{(i_1,...,i_{2k})}) \geq a_k$.*

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$u_n(\mu) \geq \sum_{l=1}^{n} a_l$$

Preuve :

On introduit tout d'abord les notations suivantes pour tout $1 \leq l \leq k$ et tout $(i_1, ..., i_{2l-1}) \in \mathbb{N}^{2l-1}$:

$$a_{l,k}(i_1, ..., i_{2l-1}) := \lim_{i_{2l}\to+\infty} ... \lim_{i_{2k}\to+\infty} h(\mu_{(i_1,...,i_{2k})})$$

†. Cette notion est plus faible que l'uniforme hyperbolicité. Nous renvoyons à [8] pour une définition précise.

Nous allons montrer que pour tout entier n et tout entier $k \leq n$:

$$u_k(\gamma_{p_{(i_1,...,i_{2(n-k)+1})}}) \geq \sum_{l=n-k+1}^{n} a_{n-k+1,l}(i_1,...,i_{2(n-k)+1}) \tag{5.2}$$

Nous obtenons la conclusion du lemme pour $k = n$. En effet on a alors :

$$\begin{aligned} u_n(\mu) &\geq \lim_{i_1 \to +\infty} u_n(\gamma_{p_{i_1}}) \\ &\geq \lim_{i_1 \to +\infty} \sum_{l=1}^{n} a_{1,l}(i_1) \\ u_n(\mu) &\geq \sum_{l=1}^{n} a_l \end{aligned}$$

Prouvons maintenant l'inégalité (5.2). Fixons un entier n. Tout d'abord l'inégalité est triviale pour $k = 0$. Supposons l'inégalité (5.2) vraie pour $0 \leq k < n$ et montrons la pour $k+1$. Rappelons que par définition, $u_{k+1}(\mu) = \lim_{q \to +\infty} \widetilde{h - h_q} + u_k(\mu)$. Or d'après l'hypothèse (2), les mesures $\mu_{(i_1,...,i_{2k+2})}$ convergent vers la mesure périodique $\gamma_{p_{i_1,...,i_{2k+1}}}$ quand i_{2k+2} tend vers l'infini. On en déduit :

$$u_{k+1}(\gamma_{p_{(i_1,...,i_{2(n-k-1)+1})}}) \geq \lim_{q \to +\infty} \left(\limsup_{i_{2(n-k)} \to +\infty} \left((h - h_q)(\mu_{(i_1,...,i_{2(n-k)})}) + u_k(\mu_{(i_1,...,i_{2(n-k)})}) \right) \right)$$

La fonction u_k est s.c.s. et d'après l'hypothèse (1), les mesures périodiques $\gamma_{p_{(i_1,...,i_{2(n-k)+1})}}$ convergent pour la topologie faible * vers $\mu_{(i_1,...,i_{2(n-k)})}$ quand $i_{2(n-k)+1}$ tend vers l'infini. On a donc :

$$u_k(\mu_{(i_1,...,i_{2(n-k)})}) \geq \limsup_{i_{2(n-k)+1} \to +\infty} u_k(\gamma_{p_{(i_1,...,i_{2(n-k)+1})}})$$

Par hypothèse de récurrence le terme de droite de l'inégalité précédente est plus grand que :

$$\lim_{i_{2(n-k)+1} \to +\infty} \sum_{l=n-k+1}^{n} a_{n-k+1,l}(i_1,...,i_{2(n-k)+1})$$

D'après l'hypothèse (3), pour tout $\epsilon_q > 0$, il existe un entier $I_q > 0$ vérifiant la propriété suivante. Pour tout $i_{2(n-k)} > I_q$, il existe $x \in X$ vérifiant $\mu_{i_1,...,i_{2(n-k)}}(B(x, \infty, \epsilon_q)) = 1$. Donc $h_q(\mu_{i_1,...,i_{2(n-k)}}) = h^{Kat}_{\frac{1}{2}}(\mu_{i_1,...,i_{2(n-k)}}, \epsilon_q) = 0$. On en déduit facilement que :

$$\lim_{q \to +\infty} \left(\limsup_{i_{2(n-k)} \to +\infty} h_q(\mu_{(i_1,...,i_{2(n-k)})}) \right) = 0$$

Finalement on obtient :

$$u_{k+1}(\gamma_{p_{(i_1,...,i_{2(n-k-1)+1})}}) \geq \lim_{i_{2(n-k)} \to +\infty} h(\mu_{(i_1,...,i_{2(n-k)})}) + \limsup_{i_{2(n-k)} \to +\infty} u_k(\mu_{(i_1,...,i_{2(n-k)})})$$

$$\begin{aligned} u_{k+1}(\gamma_{p_{(i_1,...,i_{2(n-k-1)+1})}}) &\geq a_{n-k,n-k}(i_1,...,i_{2(n-k)-1}) \\ &\quad + \lim_{i_{2(n-k)} \to +\infty} \lim_{i_{2(n-k)+1} \to +\infty} \sum_{l=n-k+1}^{n} a_{n-k+1,l}(i_1,...,i_{2(n-k)+1}) \\ &\geq \sum_{l=n-k}^{n} a_{n-k,l}(i_1,...,i_{2(n-k)-1}) \end{aligned}$$

□

Pour simplifier les notations nous utiliserons aussi la forme suivante du lemme précédent :

Lemme 5.4.2 *Soit $f : X \to X$ une application continue définie sur un espace métrisable compact X admettant un point fixe p. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.*

On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe des points périodiques $(p_{(i_1,...,i_{2k})})_{(i_1,...,i_{2k})\in\mathbb{N}^{2k}}$ et des mesures de probabilités invariantes $(\mu_{(i_1,...,i_{2k+1})})_{(i_1,...,i_{2k+1})\in\mathbb{N}^{2k+1}}$ (on pose par convention $\mathbb{N}^0 = \{\emptyset\}$ et $\delta_\emptyset = \delta_p$) tels que :

1. *Pour tout $(i_1, ..., i_{2k+1}) \in \mathbb{N}^{2k+1}$, les mesures périodiques $\gamma_{p_{(i_1,...,i_{2k+2})}}$ convergent vers $\mu_{(i_1,...,i_{2k+1})}$ quand i_{2k+2} tend vers $+\infty$;*
2. *Pour tout $(i_1, ..., i_{2k}) \in \mathbb{N}^{2k}$, les mesures $\mu_{(i_1,...,i_{2k+1})}$ convergent vers $\gamma_{p_{(i_1,...,i_{2k})}}$ quand i_{2k+1} tend vers $+\infty$;*
3. *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier $I > 0$ vérifiant :*

$$\forall i_{2k+1} > I \ \exists x \in X \text{ tel que } \mu_{(i_1,...,i_{2k+1})}(B(x, \infty, \epsilon)) = 1$$

4. *Pour tout $(i_1, ..., i_{2k+1}) \in \mathbb{N}^{2k+1}$, les limites successives $\lim_{i_1\to+\infty}\left(\lim_{i_2\to+\infty}...\left(\lim_{i_{2k+1}\to+\infty} h(\mu_{(i_1,...,i_{2k+1})})\right)...\right)$ sont bien définies et $\lim_{i_1\to+\infty}\lim_{i_2\to+\infty}...\lim_{i_{2k+1}\to+\infty} h(\mu_{(i_1,...,i_{2k+1})}) \geq a_k$.*

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons

$$u_n(\delta_p) \geq \sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

Le lemme 5.4.2 est un cas particulier du lemme 5.4.1 (posez $\mu = \delta_p$ et changez convenablement les indices).

5.5 Résultats $\mathcal{C}^r$

On a vu dans le paragraphe 5.3 correspondant au cas asymptotiquement h-expansif que toute dynamique $\mathcal{C}^\infty$ avait une extension symbolique principale. C'est faux en général pour les dynamiques de classe uniquement $\mathcal{C}^r$. T. Downarowicz et S. Newhouse ont en effet construit des exemples de difféomorphismes $\mathcal{C}^r$ définis sur des variétés de dimension supérieure ou égale à deux n'ayant pas d'extension symbolique principale. Nous construisons des exemples analogues en dimension un. S. Newhouse et T. Downarowicz ont conjecturé que toute application $\mathcal{C}^r$ avait une extension symbolique. Celle-ci a été démontrée récemment par T. Downarowicz et A. Maass dans le cas des applications de l'intervalle.

Dans ce chapitre, nous énonçons tout d'abord la conjecture de S. Newhouse et T. Downarowicz et nous rappelons brièvement leurs exemples $\mathcal{C}^r$. Puis nous détaillons notre construction sur l'intervalle. Enfin on donnera un aperçu de la preuve de T. Downarowicz et A. Maass dans le cas des applications de l'intervalle.

Soit M une variété compacte. Pour tout $r > 1$, on note $Diff^r(M)$ (resp. $\mathcal{C}^r(M)$) l'ensemble des difféomorphismes de M (resp. des endomorphismes) de classe $\mathcal{C}^{[r]}$, dont la différentielle d'ordre r est $r - [r]$ Hölder.

5.5.1 Conjecture principale

T. Downarowicz et S. Newhouse ont énoncé la conjecture suivante pour les applications de classe $\mathcal{C}^r$. Rappelons que $R(T) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log^+ \|DT^n\|_\infty$ avec $\|.\|$ une norme riemannienne quelconque sur M et que χ_+^{aff} désigne le prolongement harmonique $\chi_+ = \max(\chi, 0)$, où χ est l'exposant de Lyapounov maximal (Définition p. 107).

Conjecture 5.5.1 *(Downarowicz, Newhouse)[32] Soit M une variété compacte de dimension d et T un élément de $\mathcal{C}^r(M)$ avec $r > 1$, alors*

$$h_{sex}(T) \leq \frac{rdR(T)}{r-1}$$

En d'autres termes, ils conjecturent que toute dynamique T de classe $\mathcal{C}^r$ admet une extension symbolique (Y_ϵ, S_ϵ) avec $h_{top}(S_\epsilon) \leq \frac{rdR(T)}{r-1} + \epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$. Nous précisons cette conjecture de la façon suivante :

Conjecture 5.5.2 *Soit M une variété compacte de dimension d, soit T un élément de $\mathcal{C}^r(M)$ avec $r > 1$ et soit $\mu \in \mathcal{M}(M,T)$, alors pour tout ordinal α :*

$$u_\alpha(\mu) \leq \frac{d\chi_+^{aff}(\mu)}{r-1}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$, le terme $u_n(\mu)$ est bornée plus précisément comme suit :

$$u_n(\mu) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{d\chi_+^{aff}(\mu)}{r^k} < \frac{d\chi_+^{aff}(\mu)}{r-1}$$

Ce dernier énoncé entraîne la conjecture 5.5.1 précédente de S.Newhouse et T. Downarowicz. En effet d'après l'inégalité de Ruelle et la relation $h_{sex} = h + u_{\alpha^*}$, on a pour tout $\mu \in \mathcal{M}(M,T)$:

$$h_{sex}(\mu) \leq \frac{rd\chi_+^{aff}(\mu)}{r-1}$$

et donc d'après le principe variationnel pour l'entropie d'extension symbolique :

$$h_{sex}(T) \leq \frac{rdR(T)}{r-1}$$

5.5.2 Exemples $\mathcal{C}^r$ de Downarowicz-Newhouse pour les difféomorphismes

Soit M une variété compacte et soit $r \in \mathbb{N}^*$. On munit $Diff^r(M)$ de la topologie de la convergence uniforme des dérivées d'ordre $\leq r$.

Théorème 5.5.3 *[Downarowicz,Newhouse]*

1. *Il existe un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de M, qui n'a pas d'extension symbolique ;*
2. *Pour tout entier $2 \leq r < +\infty$, il existe un ensemble résiduel $\mathcal{R}$ de $Diff^r(M)$, un ouvert $\mathcal{U}$ de $Diff^r(M)$ et une constante $c = c(\mathcal{U}) > 0$ tels que pour tout $f \in \mathcal{R} \bigcap \mathcal{U}$, on a :*

$$h_{sex}(f) > h_{top}(f) + c$$

Expliquons en quelques mots les grandes lignes de la construction. Rappelons tout d'abord quelques notions usuelles de dynamiques différentiables.

Soit f un difféomorphisme d'une surface compacte. Si p est un point périodique hyperbolique, un point q est dit homocline pour p si

$$q \in W^s(p) \bigcap W^u(p) - \mathcal{O}(p)$$

où $W^s(p)$ (resp. $W^u(p)$) désigne la variété stable (resp. instable) de p. Ce point homocline est dit transverse si l'intersection est transverse et tangent sinon. On dira que f a une tangence homocline

si il existe un point homocline tangent pour un point périodique hyperbolique p de f.

Il est facile de voir que si f a une intersection homocline transverse pour un point hyperbolique p alors il existe des fers à cheval arbitrairement proche de p [47]. En particulier l'entropie d'un tel difféomorphisme est non nulle. Pour obtenir une suite de fers à cheval d'entropie minorée, on considère un point périodique ayant des intersections hétéroclines arbitrairement proches d'une tangence homocline. On obtiendra ainsi une suite de fer à cheval d'entropie minoré tendant vers ce point périodique. Si f est un difféomorphisme $\mathcal{C}^r$, les conditions de régularité entrainent que l'entropie de ces fers à cheval ainsi que l'exposant maximal des mesures portées par ces fers à cheval sont inférieures ou égales à $\frac{\chi(p)}{r}$. On montre alors le Théorème 5.5.3 en construisant des fers à cheval d'entropie minorée s'accumulant les uns sur les autres au moyen du lemme 5.4.1 précédent et d'arguments génériques sur l'existence de tangences homoclines.

Remarque 5.5.4 *Dans [13], M.Boyle et T.Downarowicz s'appuient sur l'exemple de M.Misiurewicz de difféomorphismes sans mesure d'entropie maximale [43] pour construire explicitement (contrairement à la construction générique précédente) un difféomorphisme d'une variété de dimension 4, avec $h_{sex}(T) \neq h_{top}(T)$. Nous ne revenons pas sur la construction de cet exemple.*

5.5.3 Exemples $\mathcal{C}^r$ sur l'intervalle

Dans ce paragraphe, nous exposons notre construction d'applications $\mathcal{C}^r$ de l'intervalle avec une grande entropie d'extension symbolique. Ce résultat, rédigé en anglais, fait l'objet de la prépublication [17].

Horseshoe for interval maps

Let us first introduce some notations and definitions.

In our construction we consider horseshoes (Définition 2.1.12) of the following simple form.

Définition 5.5.5 *Let $f : [0,1] \to [0,1]$ be a $\mathcal{C}^r$ interval map and $p, N \in \mathbb{N}$. A **quasi linear** (p,N) **horseshoe** (resp. a **linear** (p,N) **horseshoe**) for f is an ordered[‡] p horseshoe $J = (J_1, ..., J_p)$ for f^N such that :*

- $|J_1| = |J_2| = ... = |J_p|$;
- $f(J_1) = f(J_2) = ... = f(J_p) =: K$;
- *f is increasing on J_i when i is odd and f is decreasing on J_i when i is even ;*
- *f is affine on J_i for all $i = 1, ..., p-1$ (resp. for all $i = 1, ..., p$) ;*
- *there exists $J_i < b_i < J_{i+1}$ such that $f^{(l)}(b_i) = 0$ for $l = 1, ..., r$ and $i = 1, ..., p-1$;*
- *$f^{N-1}_{/K}$ is affine.*

The slope of a quasi linear horseshoe J is defined by $s(J) := \|(f^N_{/J_1})'\|_\infty$.

We will write H^N_J the compact f^N invariant set associated to a (quasi-) linear (p,N) horseshoe $J = (J_1, ..., J_p)$ for f, that is $H^N_J := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-nN} J$, and we denote H_J the compact f invariant set associated, that is $H_J := \bigcup_{k=0,...,N-1} f^k(H^N_J)$.

Remark that if $J = (J_1, ..., J_n)$ is a n horsehoe for f then the collection $(J_1, ..., J_{n-1})$ denoted by J' defines a $(n-1)$ horsehoe for f. To simplify the notations we mean sometimes by J the union of the intervals defining the horseshoe J. We will use the following technical lemma :

‡. If $i < k$ then $x_i < x_k$ for all $(x_i, x_k) \in J_i \times J_k$

Lemma 5.5.6 *Let $f : [0,1] \to [0,1]$ be a $\mathcal{C}^r$ interval map and $J = (J_1, ..., J_p)$ a (p, N) quasi linear horseshoe for f. Then there exists a sequence of periodic points $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in J' with periods $(NP_n)_{n\in\mathbb{N}}$ and a sequence of points $(p'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in J' such that :*

- *the periodic measures γ_{p_n} converge to the measure of maximal entropy of $H_{J'}$;*
- *the sequence $(f(p_n))_{n\in\mathbb{N}}$ is monotone ;*
- *f^{NP_n} is increasing and affine on $[p_n, p'_n]$;*
- *$J_p \subset f^{NP_n}([p_n, p'_n])$.*

Proof : Recall $K = f(J_1) = ... = f(J_p)$. We assume $f^{N-1}_{/K}$ is increasing (one can easily adapt the proof in the decreasing case). We denote $(\{1, ..., p\}^{\mathbb{N}}, \sigma)$ the one-sided shift with p symbols. The map $\pi : (H^N_J, f^N) \to (\{1, ..., p\}^{\mathbb{N}}, \sigma)$ defined by $(\pi(x))_k = q$ if $f^{Nk}(x) \in J_q$ for all $k \in \mathbb{N}$ is a semi-conjugacy. As f^N is expanding on each element of J' the restriction of π on $H^N_{J'}$ is one-to-one and therefore $\pi : (H^N_{J'}, f^N) \to (\{1, ..., p-1\}^{\mathbb{N}}, \sigma)$ is a conjugacy. It is well-known that the periodic measures are dense in $\mathcal{M}((\{1, ..., p-1\}^{\mathbb{N}}, \sigma))$: in particular there exists a sequence $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of periodic points of $(\{1, ..., p-1\}^{\mathbb{N}}, \sigma)$ with periods $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ such that the associated periodic measures converge to the measure of maximal entropy μ of $(\{1, ..., p-1\}^{\mathbb{N}}, \sigma)$. One can also clearly arrange this sequence such that for all $n \in \mathbb{N}$ the integer $\sharp\{k \in [0, P_n - 1],\ (\sigma^k q_n)_0 \text{ is even}\}$ is even. We put $p_n = \pi^{-1}(q_n)$ so that $p_n \in J'$ is a periodic point of f with period NP_n. Moreover f^{NP_n} is increasing near p_n because we assume $f^{N-1}_{/K}$ is increasing and that $\sharp\{k \in [0, P_n - 1],\ (\sigma^k q_n)_0 \text{ is even}\}$ is even. By extracting a subsequence one can also assume that $(f(p_n))_{n\in\mathbb{N}}$ is monotone.

The periodic measures γ_{p_n} converge to $\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f^{*k}\pi^{*-1}\mu \in \mathcal{M}([0,1], f)$ which is a measure of maximal entropy of $H_{J'}$. Indeed, as π is a conjugacy from $(H^N_{J'}, f^N)$ to $(\{1, ..., p-1\}^{\mathbb{N}}, \sigma)$ we have $h(\pi^{*-1}\mu, f^N) = h(\mu, \sigma) = h_{top}(\{1, ..., p-1\}^{\mathbb{N}}, \sigma) = h_{top}(f^N, H^N_{J'})$. Moreover according to Lemma 2.4.4 we have $h(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f^{*k}\pi^{*-1}\mu, f) = \frac{1}{N}h(\pi^{*-1}\mu, f^N) = \frac{1}{N}h_{top}(f^N, H^N_{J'})$. Finally it is easily seen that $h_{top}(f^N, H^N_{J'}) = Nh_{top}(f, H^N_{J'}) = Nh_{top}(f, \bigcup_{k=0}^{N-1} f^k(H^N_{J'})) = Nh_{top}(f, H_{J'})$.

Observe now that f^N is affine on each interval which is a connected component of $\bigcap_{k=0}^{P_n-1} f^{-kN}J'$ because f is affine on each element of J'. Moreover the image by f^{NP_n} of any such interval contains J_i for all $i = 1, ..., p$ because J is a horseshoe for f^N. Let us denote $[p''_n, p'_n]$ the interval containing p_n. As f^{NP_n} is increasing near p_n and as J_p stands at the right of p_n we conclude that $J_p \subset f^{NP_n}([p_n, p'_n])$. □

A model of interval maps with entropy of first order

The question of continuity of the entropy for smooth dynamical systems was studied early on. M. Misiurewicz [43] gave the first examples of $\mathcal{C}^r$ diffeomorphisms defined on a compact manifold of dimension 4 without measures of maximal entropy. Then S.Newhouse [48] proved, using Yomdin's theory, that the entropy function was upper semi-continuous for $\mathcal{C}^\infty$ systems. Counter-examples for interval maps appear much later. In his thesis [19] J.Buzzi built an example of $\mathcal{C}^r$ maps without measure of maximal entropy (see also [55]).

In Misiurewicz's and Buzzi's examples the stategy is the same : you construct "smaller and smaller horseshoes" converging to a fixed point such that their entropies converge increasingly to the topological entropy. By "small horseshoe" J we mean that the orbit of the associated compact invariant set H_J is contained in the ϵ-neighborhood of some periodic orbit for $\epsilon > 0$ small.

In this section we recall the main idea in the example of J.Buzzi, which will be a model of "first order" in our example. We first begin with the following easy lemma, which will be useful in the next constructions :

Lemma 5.5.7 *1. There exists a constant $1 \geq M_1 > 0$ with the following properties. Let $a, b \in [0,1]$. Let $\alpha \in \mathbb{R}^+$ and $c, d \in \mathbb{R}$ with $|c - d| \leq M_1\alpha|a - b|^r$. Then there exists a $\mathcal{C}^\infty$ monotone map $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that :*

- $\|f\|_r := \max_{k=1,...,r} \|f^{(k)}\|_\infty \leq \alpha$;
- $f(a) = c,\ f(b) = d$;
- $f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0$ *for* $k = 1, ..., r$.

2. *There exists a constant* $1 \geq M_2 > 0$ *with the following properties. Let* $a, b \in [0, 1]$. *Let* $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $c \in \mathbb{R}$ *and* $c' \in \mathbb{R}$ *with* $c'(b-a) \geq 0$ *and* $|c'| \leq M_2\alpha|a-b|^{r-1}$. *Then there exists a* $\mathcal{C}^\infty$ *monotone map* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *such that :*
- $\|f\|_r := \max_{k=1,...,r} \|f^{(k)}\|_\infty \leq \alpha$;
- $f(a) = c$, $|f(a) - f(b)| \leq \alpha|a-b|^r$;
- $f'(a) = c'$, $f'(b) = 0$;
- $f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0$ *for* $k = 2, ..., r$.

Proof : (1) We are easily reduce to the case $a < b$ and $c < d$. Let $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a $\mathcal{C}^\infty$ non-decreasing map such that $F(0) = 0$ and $F(1) = 1$ and $F^{(k)}(0) = F^{(k)}(1) = 0$ for $k = 1, ..., r$. Put $M_1 := \min(\frac{1}{\|F\|_r}, 1)$. Fix a, b, c, d, α as in the statement of the lemma (1). We define f as follows

$$f := |c-d|F(|a-b|^{-1}(. - a)) + c$$

Clearly $f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0$ for $k = 1, ..., r$ and $f(a) = c$, $f(b) = d$. Moreover $\|f^{(k)}\|_\infty = |a-b|^{-k}|c-d|\|F^{(k)}\|_\infty \leq \alpha$ for all $k = 1, ..., r$.

(2) We are easily reduce to the case $a < b$ and $c' > 0$. Let $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a $\mathcal{C}^\infty$ non-decreasing map such that $F(0) = 0$, $F(1) = 1$, $F'(0) = 1$, $F'(1) = 0$ and $F^{(k)}(0) = F^{(k)}(1) = 0$ for $k = 2, ..., r$. Put $M_2 := \min(\frac{1}{\|F\|_r}, 1)$. Fix a, b, c, c', α as in the statement of the lemma (2). We define f as follows

$$f := c'|a-b|F(|a-b|^{-1}(. - a)) + c$$

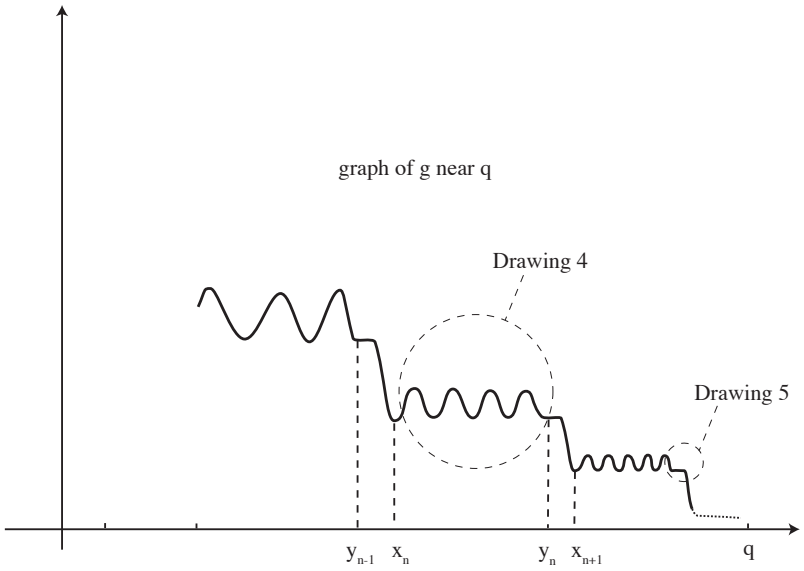
Clearly $f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0$ for $k = 2, ..., r$ and $f(a) = c$, $f'(a) = c'$. We put $d := f(b)$. Moreover $\|f^{(k)}\|_\infty = c'|a-b|^{-k+1}\|F^{(k)}\|_\infty \leq \alpha$ for all $k = 1, ..., r$ and $|f(a) - f(b)| = |\int_{[a,b]} f'(t)dt| \leq c'|a-b|\|F'\|_\infty \leq \alpha|a-b|^r$.

□

We can now explain our model :

Proposition 5.5.8 *Let* $\epsilon > 0$, $\lambda > 1$, $0 \leq p < p' < q' < q \leq 1$ *and let* $f : [0, 1] \to [0, 1]$ *be a* $\mathcal{C}^r$ *interval map, such that* p *is a periodic point of* f *of period* P *and* $f(q) = p$, $f^{(k)}(q) = f^{(k)}(q') = 0$ *for* $k = 1, ..., r$. *We also assume there exists an integer* S *such that :*
- $f^S(p) = p$, *i.e.* S *is a multiple of* P ;
- f^S *is increasing and affine on* $[p, p']$ *with slope* λ ;
- $q \in f^S([p, p'])$.

Then there exists a $\mathcal{C}^r$ *interval map* g *such that* $f = g$ *outside the interval* $]q', q[$, $\|f'\|_\infty = \|g'\|_\infty$ *and* $\|f - g\|_r \leq \epsilon$. *Moreover there exist a strictly increasing sequence of integers* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *a strictly increasing sequence of even integers* $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *a sequence of intervals* $([x_n, y_n])_{n\in\mathbb{N}}$ *and a sequence of linear horseshoes* $(J^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *such that :*
- $f^{(l)}(x_n) = f^{(l)}(y_n) = 0$ *for all* $n \in \mathbb{N}$ *and* $l = 1, ..., r$;
- $J^n \subset [x_n, y_n] \subset [q', q]$ *for all* $n \in \mathbb{N}$ *and* $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = q$;
- J^n *is a linear* $(N_n, ST_n + 1)$ *horseshoe for* g *with slope* $\frac{\lambda^{ST_n}}{n^2(n^2N_n)^{r-1}}$;
- $\lim_{n\to+\infty} h_{top}(J^n) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{\log N_n}{T_n} = \dfrac{\log \lambda}{r}$;
- *Invariant measures supported by* H_{J^n} *converge in the weak star topology to the periodic measure associated to* p *when* n *goes to infinity.*



Drawing 2 : Accumulation of small horsehoes

PROOF :

Let n_0 be large enough such that $q - \frac{1}{n_0} > q'$. For all $n \geq n_0$ we put g equal to a N_n zig zag of height $\frac{1}{n^2(2n^2N_n)^r}$ on $[x_n, y_n] := [q - \frac{1}{n}, q - \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^2}]$ as described on the above picture (Drawing 2).

More precisely for all $i = 0, ..., N_n - 1$ the map g is affine on the interval $J_i^n := [x_n + (i + \frac{1}{4})\frac{1}{3n^2N_n}, x_n + (i + \frac{3}{4})\frac{1}{3n^2N_n}]$ with slope $\frac{(-1)^i}{n^2(3n^2N_n)^{r-1}}$ and $g(J_1^n) = ... = g(J_{N_n}^n) = [a_n, a_n + \frac{1}{2n^2(3n^2N_n)^r}]$. Then according to Lemma 5.5.7 (2), one can extend g on the whole interval $[x_n, y_n]$ such that :

- $g^{(k)}(x_n + i\frac{1}{3n^2N_n}) = 0$ for $k = 1, ..., r$ and for $i = 0, ..., N_n$;
- $\|(g)_{/[x_n,y_n]}\|_r \leq \frac{4^{r-1}}{M_2n^2}$;
- $g(y_n) = g(x_n) \in [a_n - \frac{1}{M_2n^2} \times \frac{1}{(3n^2N_n)^r}, a_n]$.

We choose a_n such that f maps $[a_n, a_n + \frac{1}{2n^2(3n^2N_n)^r}]$ on the expanding part $[p, p']$ of f^S during a time T_n and then comes back on $[x_n, y_n]$, that is $f^{ST_n+1}([a_n, a_n + \frac{1}{2n^2(3n^2N_n)^r}]) \supset [x_n, y_n]$. We choose T_n minimal for this property. This can be done because $q \in f^S([p, p'])$. In this way we obtain for all integers $n > n_0$ a linear horseshoe $J^n = (J_1^n, ..., J_{N_n}^n)$ for g^{ST_n+1}. The condition on T_n is :

$$\frac{1}{n^2} \leq \lambda^{T_n}\frac{1}{2n^2(3n^2N_n)^r} \leq \lambda\frac{1}{n^2} \tag{5.3}$$

and the condition on a_n is :

$$f^{ST_n}(a_n) = x_n$$

that is :

$$\lambda^{T_n}(a_n - p) = x_n - p$$

We deduce from the inequality (5.3) that $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log N_n}{T_n} = \frac{\log \lambda}{r}$. One can also replace N_n by $N_n - 1$ to ensure N_n is even.

By using Lemma 5.5.7(1) one can now extend g in a $\mathcal{C}^r$ way on the whole interval $[x_{n_0}, q]$ such that for all $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned}\|g_{/[y_n,x_{n+1}]}\|_r &\leq \frac{1}{M_1}\left|\frac{g(y_n)-g(x_{n+1})}{(y_n-x_{n+1})^r}\right| \\ &\leq \frac{6^r}{M_1}n^{2r}(a_n-a_{n+1}+\frac{1}{M_2n^2(3n^2N_n)^r}) \\ &\leq \frac{6^r}{M_1}n^{2r}(\lambda^{-T_n}+\frac{1}{M_2n^2(3n^2N_n)^r}) \leq \frac{6^r(1+1/M_2)}{M_1N_n^r}\end{aligned}$$

We extend g in a $\mathcal{C}^r$ way on $[q', x_{n_0}]$ by putting for all $x \in [q', x_{n_0}]$:

$$g(x) = f(q') + \frac{g(x_{n_0})-f(q')}{f(q)-f(q')}\left(f(\frac{q-q'}{x_{n_0}-q'}(x-q')+q') - f(q')\right)$$

One checks easily that $g(q') = f(q')$ and $g^{(k)}(q') = g^{(k)}(x_{n_0}) = 0$ for $k = 1, ..., r$.

We conclude the proof by choosing n_0 large enough such that $\frac{6^r(1+1/M_2)}{M_1N_{n_0}^r} \leq \epsilon$ and $\|(f-g)_{/[q',x_{n_0}]}\|_r \leq \epsilon$.

□

An example with $\|\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n\|_\infty = \frac{\log\|g'\|_\infty}{r-1}$

Following the previous construction of J.Buzzi we are going to build an example of $\mathcal{C}^r$ interval map with $\|\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n\|_\infty = \frac{\log\|g'\|_\infty}{r-1}$.

Theorem 5.5.9 *There exists a $\mathcal{C}^r$ interval map g such that*

$$\|\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n\|_\infty = \frac{\log\|g'\|_\infty}{r-1} > 0$$

We build a collection of $\mathcal{C}^r$ maps $(g_k)_{k\in\mathbb{N}\bigcup\{\infty\}}$ defined on $[0,1]$ fixing 0 and with first derivative bounded by 5. For all $l \in \mathbb{N}$ and for all $(i_1, ..., i_{2l+2}) \in \mathbb{N}^{2l+2}$ there exist points $p_{i_1,...,i_{2l+2}}$, intervals $[x_{i_1,...,i_{2l+1}}, y_{i_1,...,i_{2l+1}}]$, collections of disjoint closed intervals $J_{i_1,...,i_{2l+1}}$, integers $P_{i_{2l+2}}, T_{i_{2l+1}}$ and even integers $N_{i_{2l+1}}$ such that for all $k \in \mathbb{N}\bigcup\{\infty\}$ and all integers $l \leq k$ we have :

- $p_{i_1,...,i_{2l+2}} \in J'_{i_1,...,i_{2l+1}}$ is a periodic point of $g_k^{S_{i_1,...,i_{2l+1}}}$ of period $P_{i_{2l+2}}$;
- $f^{(m)}(x_{i_1,...,i_{2l+1}}) = f^{(m)}(y_{i_1,...,i_{2l+1}}) = 0$ for $m = 1, ..., r$;
- $J_{i_1,...,i_{2l+1}} \subset [x_{i_1,...,i_{2l+1}}, y_{i_1,...,i_{2l+1}}] \subset [x_{i_1,...,i_{2l-1}}, y_{i_1,...,i_{2l-1}}]$ (the last inclusion holds only for $0 \neq l \leq k$) ;
- $J_{i_1,...,i_{2l+1}}$ is a quasi linear $(N_{i_{2l+1}}, S_{i_1,...,i_{2l}}T_{i_{2l+1}}+1)$ horseshoe for g_k and $J_{i_1,...,i_{2k+1}}$ is a linear horseshoe ;
- $\lim_{i_{2l+1}\to+\infty} \|g_{k/[x_{i_1,...,i_{2l+1}}, y_{i_1,...,i_{2l+1}}]}\|_r = 0$.

where the integers $S_{i_1,...,i_m}$ for $m \leq 2k+1$ are defined inductively in the following way : $S_{i_1} = T_{i_1}$, $S_{i_1,...,i_{2l+1}} = S_{i_1,...,i_{2l}} \times T_{i_{2l+1}} + 1$ and $S_{i_1,...,i_{2l+2}} = S_{i_1,...,i_{2l+1}} \times P_{i_{2l+2}}$. Remark that the integer $S_{i_1,...,i_{2l+2}}$ is the period of $p_{i_1,...,i_{2l+2}}$ for g_k.

These periodic points and horseshoes can also be arranged to satisfy the following properties so that one can apply Lemma 5.4.2. To simplify the notations we write $H_{i_1,...,i_{2l+1}}$ instead of $H_{J_{i_1,...,i_{2l+1}}}$ and $H'_{i_1,...,i_{2l+1}}$ instead of $H_{J'_{i_1,...,i_{2l+1}}}$.

For all $k \in \mathbb{N}\bigcup\{\infty\}$ and for all integers $0 \leq l \leq k$, we have :

1. the sequence of periodic measures $(\gamma_{p_{i_1,...,i_{2l+2}}})_{i_{2l+2}\in\mathbb{N}}$ converges to the measure of maximal entropy of $H'_{i_1,...,i_{2l+1}}$ when $i_{2l+2} \to +\infty$ in $\mathcal{M}([0,1], g_k)$;

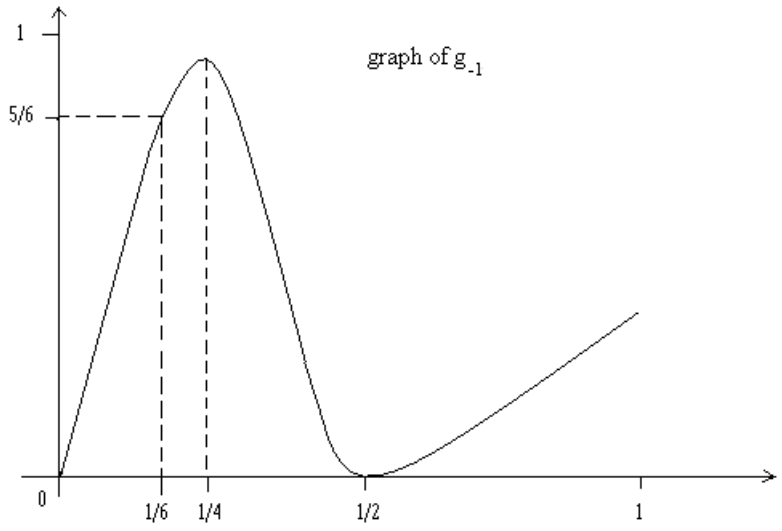
2. Measures supported by $H'_{i_1,...,i_{2l+1}}$ converge to $\gamma_{p_{i_1,...,i_{2l}}}$ when $i_{2l+1} \to +\infty$ in $\mathcal{M}([0,1], g_k)$ (Measures supported by H'_{i_1} converge to δ_0 when $i_1 \to +\infty$) ;
3. for all $\epsilon > 0$ there exists an integer I_k such that :

$$\forall i_{2l+1} > I_k \ \exists x \in [0,1] \text{ s.t. } H'_{i_1,...,i_{2l+1}} \subset B_{g_k}(x, \epsilon, \infty) \ ;$$

4. $\lim\limits_{i_1 \to +\infty} ... \lim\limits_{i_{2l+1} \to +\infty} h(H'_{i_1,...,i_{2l+1}}, g_k) = \dfrac{\log 5}{r^{l+1}}$.

One deduces easily from the above assertions 1-4 that the map g_∞ satisfies the assumptions 1-4 of Lemma 5.4.2. Then by applying this lemma for g_∞, we get : $\| \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n \|_\infty \geq \frac{\log \|g'\|_\infty}{r-1}$. The converse inequality follows from the Theorem 5.5.15 of T. Downarowicz and A. Maass, which will be exposed in the next section.

We explain now the construction of the sequence $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$. We first consider a $\mathcal{C}^r$ interval map g_{-1}, such that $g_{-1}(0) = 0$, $g_{-1}(\frac{1}{2}) = 0$, $\|g'_{-1}\|_\infty = 5$, g_{-1} is affine with slope $\lambda = 5$ on $[0, \frac{1}{6}]$ ($\frac{1}{2} \in g_{-1}([0, \frac{1}{6}]) = [0, \frac{5}{6}]$) and $g^{(k)}_{-1}(\frac{1}{2}) = g^{(k)}_{-1}(\frac{1}{4}) = 0$ for $k = 1, ..., r$. We can assume moreover that $\|(g_{-1})'_{/[\frac{1}{4},1]}\|_\infty < 4$. See Drawing 3.



Drawing 3

One can apply Proposition 5.5.8 to the map g_{-1} with $\epsilon = 1$, $S = 1$, $\lambda = 5$, $p = 0$, $p' = \frac{1}{6}$, $q' = \frac{1}{4}$, $q = \frac{1}{2}$ and get a map g_0 (with $\|g'_0\|_\infty \leq 5$) which admits a sequence of horseshoes $(H_{i_1})_{i_1\in\mathbb{N}}$ and sequences of periodic points $(p_{i_1,i_2})_{i_1,i_2\in\mathbb{N}}$ satisfying all the above required conditions (1), (2), (3), (4) for $k = 0$.

Assume that g_k is already built and define g_{k+1}.

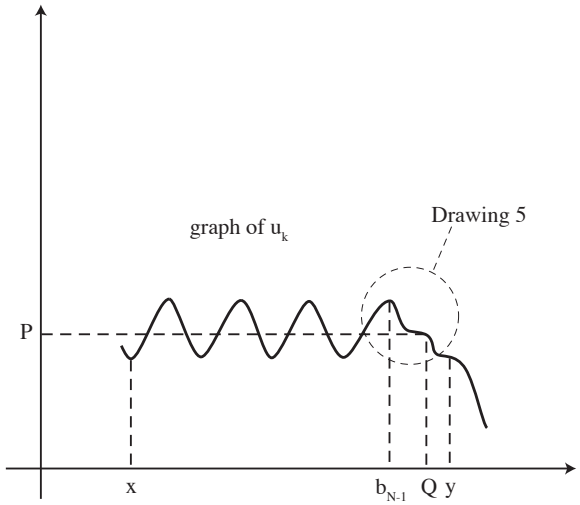
The horseshoes $J_{i_1,...,i_{2k+1}} = (J_1, ..., J_{N_{i_{2k+1}}})$ are linear $(N_{i_{2k+1}}, S_{i_1,...,i_{2k+1}})$ horseshoes for g_k. To get g_{k+1} from g_k we only change g_k on $[x_{i_1,...,i_{2k+1}}, y_{i_1,...,i_{2k+1}}]$ with i_{2k+1} large enough such that the r derivative of g_k on $[x_{i_1,...,i_{2k+1}}, y_{i_1,...,i_{2k+1}}]$ is less than $\frac{M_1^2}{2^{k+r}}$. Let us consider one such horseshoe $J_{i_1,...,i_{2k+1}}$ and we denote it $J = (J_1, ..., J_N)$ (We also use the simplified notations $H := H_J$, $H' := H_{J'}$, $[x, y] := [x_{i_1,...,i_{2l+1}}, y_{i_1,...,i_{2l+1}}]$ and $S := S_{i_1,...,i_{2k+1}}$).

First step : Recall H' is a linear (N, S) horseshoe for g_k. By applying Lemma 5.5.6 there exists a sequence of periodic points $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in J' with periods $(SP_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for g_k and a sequence of points $(p'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in J' such that :

– the periodic measures γ_{p_n} converge to the measure of maximal entropy of $H_{J'}$;
– the sequence $(g_k(p_n))_{n\in\mathbb{N}}$ is monotone ;

– $g_k^{SP_n}$ is increasing and affine on $[p_n, p'_n]$;
– $J_N \subset g_k^{SP_n}([p_n, p'_n])$.

Let P denote the limit of $(g_k(p_n))_{n\in\mathbb{N}}$. On the last branch $J_N \notin J'$ of the horseshoe J we create a tangency of order r with the horizontal line $\{(x', P),\ x' \in [0,1]\}$ at the point $Q = g_k^{-1}(P) \bigcap J_N$ by applying Lemma 5.5.7(1) to g_k on $[b_{N-1}, Q]$ and on $[Q, y]$. We recall $J_{N-1} < b_{N-1} < J_N$ and $f^{(l)}(b_{N-1}) = 0$ for $l = 1, ..., r$. We get a new map u_k. The norm $\|\|_r$ changed only on $[b_{N-1}, y]$ in the following way : $\|(u_k)_{[b_{N-1},y]}\|_r \leq M_1^{-1}\|(g_k)_{[b_{N-1},y]}\|_r$. Indeed $|g_k(b_{N-1}) - g_k(Q)| \leq \|g_k\|_r |b_{N-1} - Q|^r$ and $|g_k(y) - g_k(Q)| \leq \|g_k\|_r |y - Q|^r$. As N is even, the map g_k is non-increasing on J_N according to the fourth item of the definition 5.5.5 of (quasi-) linear horseshoe. Remark that u_k is again non-increasing on J_N and the family of intervals $(J_1, ..., J_N)$ is a quasi linear (N, S) horseshoe for u_k.

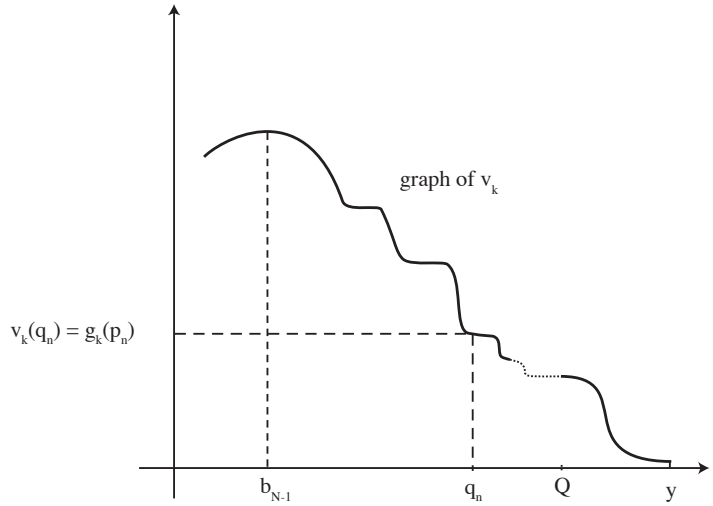


Drawing 4 : first step

Second step : Let us assume the sequence $(g_k(p_n))_{n\in\mathbb{N}}$ is converging increasingly. Let q_n denote the point of J_N such that $u_k(q_n) = u_k(p_n) = g_k(p_n)$. Since u_k is non-increasing on J_N, the sequence q_n is also non-increasing. By extracting a subsequence one can assume that $|q_n - Q| < 2(|q_n - q_{n+1}|)$. Finally we put $q_0 = b_{N-1}$. We create tangencies of order r with the horizontal line $\{(x', g_k(p_n)),\ x' \in [0,1]\}$ at the point q_n by applying again Lemma 5.5.7(1) to $[a, b] = [q_n, q_{n+1}]$ and $[d, c] = [u_k(q_{n+1}), u_k(q_n)]$ for all integers n. This can be done by preserving almost the norm $\|\|_r$ of u_k. In fact

$$|u_k(q_{n+1}) - u_k(q_n)| \leq \|(u_k)_{[x,y]}\|_r |q_n - Q|^r < 2^r \|(u_k)_{[x,y]}\|_r |q_n - q_{n+1}|^r$$

We get a new map which is again $\mathcal{C}^r$ with horizontal tangencies of order r at each point q_n. We denote by v_k this new map ; we have $\|(v_k)_{/[x,y]}\|_r < 2^r M_1^{-1}\|(u_k)_{/[x,y]}\|_r < 2^r M_1^{-2}\|(g_k)_{/[x,y]}\|_r < 1/2^k$.



Drawing 5 : second step

If the sequence $(g_k(p_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converges decreasingly, we can create in the same way horizontal tangencies of order r on $[Q, y]$ accumulating on Q. In the following we assume always $(g_k(p_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converges increasingly. The rest of the construction is completely similar in the decreasing case.

Third step : According to Lemma 5.5.6 there exists p'_n such that $v_k^{SP_n}$ is affine on $[p_n, p'_n]$ with slope λ equal to $s(H)^{P_n}$ and $J_N \subset v_k^{SP_n}([p_n, p'_n])$. By applying Proposition 5.5.8 with $\epsilon = \frac{1}{2^k}$, "$S = SP_n$", $\lambda = s(H)^{P_n}$, $p = p_n$, $p' = p'_n$, $q' = q_n$ and $q = q_{n+1}$, one can create small horseshoes accumulating on p_n for all integers n to get finally g_{k+1}. We have created in this way a sequence of new horseshoes for each $J = J_{i_1,\dots,i_{2k+1}}$. Coming back to the initial notations this sequence of new horseshoes and their associated intervals are denoted $J_{i_1,\dots,i_{2k+3}}$ and $[x_{i_1,\dots,i_{2k+3}}, y_{i_1,\dots,i_{2k+3}}]$. We also denote by $T_{i_{2k+3}}$ and $N_{i_{2k+3}}$ the integers such that $J_{i_1,\dots,i_{2k+3}}$ is a $N_{i_{2k+3}}$ horseshoe for $g_{k+1}^{T_{i_{2k+3}}S_{i_1,\dots,i_{2k+2}}+1}$. Finally p_n and P_n are respectively denoted by $p_{i_1,\dots,i_{2k+2}}$ and $P_{i_{2k+2}}$. It follows easily from the construction that the new horseshoes $J_{i_1,\dots,i_{2k+3}}$ are $(N_{i_{2k+3}}, S_{i_1,\dots,i_{2k+3}})$ linear horseshoes for g_{k+1} and that the previous horseshoes $J_{i_1,\dots,i_{2l+1}}$ for $l < k$ are modified only on their last branch and therefore are again $(N_{i_{2l+1}}, S_{i_1,\dots,i_{2l+1}})$ quasi linear horseshoes for g_{k+1}. By Proposition 5.5.8 the slope of the horseshoe $J_{i_1,\dots,i_{2k+3}}$ is related with the slope of the horseshoe $J_{i_1,\dots,i_{2k+1}}$ in the following way :

$$s(J_{i_1,\dots,i_{2k+3}}) = \frac{s(J_{i_1,\dots,i_{2k+1}})^{T_{i_{2k+3}}}}{i_{2k+3}^2(3i_{2k+3}^2 N_{i_{2k+3}})^{r-1}} \tag{5.4}$$

Notice that the modifications to get g_{k+1} from g_k are made only on the intervals $[x, y] = [x_{i_1,\dots,i_{2k+1}}, y_{i_1,\dots,i_{2k+1}}]$ where the derivatives of order $\leq r$ of g_k are less $\frac{M_1^2}{2^{k+r}}$. Therefore

$$\begin{aligned}
\|g_{k+1} - g_k\|_r &\leq \sup_{[x,y]} \|(g_{k+1} - g_k)_{/[x,y]}\|_r \\
&\leq \sup_{[x,y]} \left(\|g_{k+1\ /[x,y]}\|_r + \|g_{k\ /[x,y]}\|_r\right) \\
&\leq \sup_{[x,y]} \left(\|g_{k+1\ /[x,y]}\|_r + \frac{M_1^2}{2^{k+r}}\right)
\end{aligned}$$

After the second step, we have $\|v_{k\ /[x,y]}\|_r < \frac{1}{2^k}$. Then by having applied Proposition 5.5.8 with $\epsilon = \frac{1}{2^k}$, we get $\|g_{k+1\ /[x,y]}\|_r \leq \frac{1}{2^k} + \|v_{k\ /[x,y]}\|_r < \frac{1}{2^{k-1}}$. We have finally $(M_1 \leq 1)$:

$$\|g_{k+1} - g_k\|_r \leq \frac{1}{2^{k-2}}$$

Therefore the maps g_k converge uniformly in $\mathcal{C}^r$ topology to a $\mathcal{C}^r$ map g_∞. The claims (1),(2) and (3) of p.132 follow easily from the construction. Let us check the item (4).

Computation of a lower bound of the sex entropy of g_∞

One can remark that the Lyapounov exponent $\lambda_{i_1,\dots,i_{2k+2}}$ of the periodic point $p_{i_1,\dots,i_{2k+2}}$ can be written in terms of the slope of $J_{i_1,\dots,i_{2k+1}}$ in the following way :

$$\lambda_{i_1,\dots,i_{2k+2}} = \frac{\log s(J_{i_1,\dots,i_{2k+1}})}{S_{i_1,\dots,i_{2k+1}}}$$

Now let us compute the topological entropy $h_{i_1,\dots,i_{2k+1}}$ of the quasi linear $(N_{i_{2k+1}}, S_{i_1,\dots,i_{2k+1}})$ horseshoe $J_{i_1,\dots,i_{2k+1}}$ and the entropy $h'_{i_1,\dots,i_{2k+1}}$ of the linear $(N_{i_{2k+1}}-1, S_{i_1,\dots,i_{2k+1}})$ horseshoe $J'_{i_1,\dots,i_{2k+1}}$:

$$h_{i_1,\dots,i_{2k+1}} = \frac{\log N_{i_{2k+1}}}{S_{i_1,\dots,i_{2k+1}}}$$

$$h'_{i_1,\dots,i_{2k+1}} = \frac{\log(N_{i_{2k+1}}-1)}{S_{i_1,\dots,i_{2k+1}}}$$

Since $N_{i_{2k+1}}$ grows exponentially, we have by taking the limit in i_{2k+1} :

$$\lim_{i_{2k+1}\to+\infty} h_{i_1,\dots,i_{2k+1}} = \lim_{i_{2k+1}\to+\infty} h'_{i_1,\dots,i_{2k+1}} \tag{5.5}$$

We have the two following relations according to equation (5.3) and to equation (5.4) respectively :

– Each element of $J_{i_1,\dots,i_{2k+1}}$ spends enough time during the expanding and affine part to get a horseshoe (Equation (5.3) p.131) :

$$\frac{1}{3i_{2k+1}^2} \le e^{\lambda_{i_1,\dots,i_{2k}}\times S_{i_1,\dots,i_{2k}} T_{i_{2k+1}}} \times \frac{1}{2i_{2k+1}^2 (3i_{2k+1}^2 N_{i_{2k+1}})^r} \le e^{\lambda_{i_1,\dots,i_{2k}}} \frac{1}{3i_{2k+1}^2}$$

Then we get after a simple computation :

$$\frac{S_{i_1,\dots,i_{2k+1}}-2}{S_{i_1,\dots,i_{2k+1}}}\times\frac{\lambda_{i_1,\dots,i_{2k}}}{r} - \frac{\log(6i_{2k+1})}{S_{i_1,\dots,i_{2k+1}}} \le h_{i_1,\dots,i_{2k+1}} = \frac{\log N_{i_{2k+1}}}{S_{i_1,\dots,i_{2k+1}}} \le \frac{S_{i_1,\dots,i_{2k+1}}-1}{S_{i_1,\dots,i_{2k+1}}}\times\frac{\lambda_{i_1,\dots,i_{2k}}}{r} - \frac{\log(6i_{2k+1})}{S_{i_1,\dots,i_{2k+1}}} \tag{5.6}$$

– The Lyapounov exponent of $p_{i_1,\dots,i_{2k}}$ decreases with k because we spend more and more time (precisely $P_{i_{2k}}$) in the affine part with slope $\frac{1}{i_{2k-1}^2\left(3i_{2k-1}^2 N_{i_{2k-1}}\right)^{r-1}}$ of the horseshoe $J_{i_1,\dots,i_{2k-1}}$ (Equation (5.4) p.135) :

$$e^{\lambda_{i_1,\dots,i_{2k}}\times S_{i_1,\dots,i_{2k}}} = e^{\lambda_{i_1,\dots,i_{2k-2}}\times\left((S_{i_1,\dots,i_{2k-1}}-1)P_{i_{2k}}\right)} \times \left(\frac{1}{i_{2k-1}^2\left(3i_{2k-1}^2 N_{i_{2k-1}}\right)^{r-1}}\right)^{P_{i_{2k}}}$$

and we get therefore :

$$\lambda_{i_1,\dots,i_{2k}} = \frac{(S_{i_1,\dots,i_{2k-1}}-1)P_{i_{2k}}}{S_{i_1,\dots,i_{2k}}}\lambda_{i_1,\dots,i_{2k-2}} - (r-1)h_{i_1,\dots,i_{2k-1}} \tag{5.7}$$

Since $T_{i_{2k+1}}$ (and thus $S_{i_1,...i_{2k+1}}$) increases linearly in i_{2k+1} and $P_{i_{2k}}$ goes to infinity when i_{2k} goes to infinity, we obtain by taking successively the limit in $i_{2k+1}, i_{2k}, ..., i_1$:

$$\lim_{i_1\to+\infty} ... \lim_{i_{2k+1}\to+\infty} h_{i_1,...,i_{2k+1}} = \frac{1}{r} \lim_{i_1\to+\infty} ... \lim_{i_{2k}\to+\infty} \lambda_{i_1,...,i_{2k}}$$

$$\lim_{i_1\to+\infty} ... \lim_{i_{2k}\to+\infty} \lambda_{i_1,...,i_{2k}} = \lim_{i_1\to+\infty} ... \lim_{i_{2k-2}\to+\infty} \lambda_{i_1,...,i_{2k-2}} - (r-1) \lim_{i_1\to+\infty} ... \lim_{i_{2k-1}\to+\infty} h_{i_1,...,i_{2k-1}}$$

By putting $\alpha_k = \lim_{i_1\to+\infty} ... \lim_{i_{2k+1}\to+\infty} h_{i_1,...,i_{2k+1}}$ and $\beta_k = \lim_{i_1\to+\infty} ... \lim_{i_{2k}\to+\infty} \lambda_{i_1,...,i_{2k}}$, we have according to the previous equations :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_k & = & \frac{\beta_k}{r} \\ \beta_k & = & \beta_{k-1} - (r-1)\alpha_{k-1} \end{array} \right.$$

We get $\beta_k = \beta_{k-1} - (r-1)\alpha_{k-1} = \beta_{k-1} - \frac{r-1}{r}\beta_{k-1} = \frac{\beta_{k-1}}{r}$. Moreover β_0 is the Lyapounov exponent of the fixed point 0, which is equal to $\log 5$. Therefore we conclude that $\beta_k = \frac{\log 5}{r^k}$ and $\alpha_k = \frac{\log 5}{r^{k+1}}$, i.e.

$$\lim_{i_1\to+\infty} ... \lim_{i_{2k+1}\to+\infty} h_{i_1,...,i_{2k+1}} = \frac{\log 5}{r^{k+1}}$$

This concludes the proof of Theorem 5.5.9.

An example with $h_{sex}(g) = \frac{r \log \|g'\|_\infty}{r-1}(1-\epsilon)$

For a $\mathcal{C}^r$ interval map g, we have according to the variational principle for the sex entropy (Theorem 2.8.1) and the Theorem 5.5.15 of T.Downarowicz and A.Maass, which implies the conjecture 5.5.2 for interval maps :

$$h_{sex}(g) \leq h_{top}(g) + \frac{\log \|g'\|_\infty}{r-1} \leq \frac{r \log \|g'\|_\infty}{r-1}$$

We prove now that this upperbound is optimal in the following sense :

Theorem 5.5.10 *For all $\epsilon > 0$ there exists a $\mathcal{C}^r$ interval map g with $\|g'\|_\infty \geq 2$ such that :*

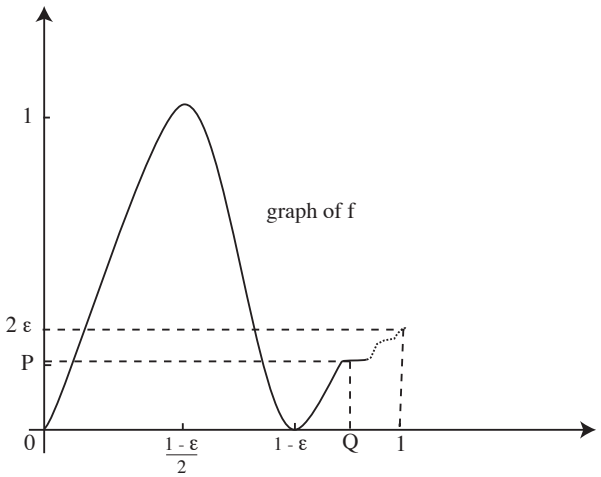
$$h_{sex}(g) \geq (1-\epsilon)\frac{r \log \|g'\|_\infty}{r-1}$$

However we don't know if there exist examples with $h_{sex}(g) = h_{top}(g) + \frac{\log \|g'\|_\infty}{r-1}$.

Proof : We explain the modification of the previous example (Theorem 5.5.9) to get for every $\epsilon > 0$ an example with $\|g'\|_\infty \geq 2$ and $h_{sex}(g) \geq (1-\epsilon)\frac{r \log \|g'\|_\infty}{r-1}$. Let f be a $\mathcal{C}^r$ map with the following properties :

- f is increasing on $[0, \frac{1-\epsilon}{2}] \bigcup [1-\epsilon, 1]$ and decreasing on $[\frac{1-\epsilon}{2}, 1-\epsilon]$;
- $f(0) = f(1-\epsilon) = 0$, $f(\frac{1-\epsilon}{2}) = 1$ and $f(1) = 2\epsilon$;
- f is affine on $[0, \frac{1}{2} - \epsilon]$ (resp. on $[\frac{1}{2} + \epsilon, 1 - \frac{3\epsilon}{2}]$) with slope $\frac{2}{1-\epsilon}$ (resp. $-\frac{2}{1-\epsilon}$).

Clearly this map can be $\mathcal{C}^r$ extended such that $\|f'\|_\infty \leq \frac{2}{1-\epsilon}$.



Drawing 6

The topological entropy of f is greater than $\log 2$, because $([\frac{\epsilon}{2}, \frac{1}{2}-\epsilon], [\frac{1}{2}+\epsilon, 1-\frac{3\epsilon}{2}])$ is a linear $(2,1)$ horseshoe for f. Let μ be a measure of maximal entropy of this horseshoe, there exists a sequence of periodic points $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ such that the associated periodic measures are converging to μ and the sequence $(f(p_n))_{n\in\mathbb{N}}$ is converging to a point $P \in [\frac{\epsilon}{2}, 2\epsilon]$. Then one can apply the same process as in the last example to create quasi linear horseshoes accumulating on $q_n = (f_{/[1-\epsilon,1]})^{-1}(p_n)$ with $\lim_{n\to+\infty} q_n = Q \in f([\frac{\epsilon}{2}, \frac{1}{2} - \epsilon])$, such that the new map g satisfies $u_\omega(\gamma_{p_n}) = \frac{\log\|g'\|_\infty}{r-1}$ without changing $\|g'\|_\infty$ (recall ω is the first infinite ordinal). Then we get :

$$\begin{aligned} h_{sex}(\mu) &\geq h(\mu) + \limsup_{n\to+\infty} u_\omega(\gamma_{p_n}) \\ &\geq \log 2 + \frac{\log\|g'\|_\infty}{r-1} \\ &\geq \frac{r\log\|g'\|_\infty}{r-1} + \log(1-\epsilon) \end{aligned}$$

□

An example with $\sup_{\mu\in\mathcal{M}([0,1],g)}(u_2 - u_1)(\mu) \geq \frac{\log\|g'\|_\infty}{r^2}$

By considering the example of Theorem 5.5.9, the examples of S.Newhouse and T.Downarowicz [32] and the main conjecture 5.5.2, one can wonder if for a $\mathcal{C}^r$ map T defined on a smooth compact manifold M of dimension d we have for all $n \in \mathbb{N}$:

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}(M,T)} (u_{n+1} - u_n)(\mu) \leq d\frac{R(T)}{r^{n+1}} \tag{5.8}$$

If such inequalities hold for some dynamical system (X,T), it implies that the sequence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is uniformly converging. According to Proposition 1.2.21 we have in this case $u_{\omega+1} = u_\omega$ and then the order of accumulation of (X,T) is at most the first infinite ordinal ω. In the following we prove the inequalities (5.8) are false in general :

Theorem 5.5.11 *There exists a $\mathcal{C}^r$ interval map $g : [0,1] \to [0,1]$ such that*

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}([0,1],g)} (u_2 - u_1)(\mu) > \frac{\log\|g'\|_\infty}{r^2}$$

PROOF : We modify the construction of the example of Theorem 5.5.9. Let us explain the main idea : in the previous construction of g_0 one can create horseshoes with entropy $< \frac{\log \|g_0'\|_\infty}{r}$ but with a slope bigger than in the estimates obtained for the example of Theorem 5.5.9. In the next step (construction of g_1), one can use this amount of expansion to get horseshoes with bigger entropy such that $(u_2 - u_1)(\delta_0) > \frac{\log \|g_1'\|_\infty}{r^2}$. We give now more details.

Let $\lambda > r \log 3$. We choose g_{-1} to be a map with three branches of monotonicity (in particular the topological entropy of g_0 is less than $\log 3$) such that g_{-1} is affine with slope $e^\lambda > 1$ on $[0, \frac{5}{6e^\lambda}]$ and $\|g_{-1}'\|_\infty = e^\lambda$. Fix some real a_0 such that $\log 3 < a_0 < \frac{\lambda}{r}$. Then following the construction of g_0, one can build the horseshoes $(J_{i_1})_{i_1 \in \mathbb{N}}$ such that $h_{top}(H_{J_{i_1}}) \leq a_0$ for all integers i_1 and $\lim_{i_1 \to +\infty} h_{top}(H_{J_{i_1}}) \leq a_0$. It follows easily that the tail entropy of g_0 is bigger or equal to a_0.

Let us prove now that the tail entropy of g_0 is equal to a_0. According to the variational principle for the tail entropy for the Katok entropy structure $\mathcal{H}^{Kat}_{\frac{1}{2}} = (h_k)_{k \in \mathbb{N}}$, we have $h^*(g_0) = \lim_{k \to +\infty} \sup_{\nu \in \mathcal{M}(X,T)} (h - h_k)(\nu) = \lim_{k \to +\infty} \sup_{\nu \in \mathcal{M}_e(X,T)} (h - h_k)(\nu)$ the last equality following from the harmonicity of $\mathcal{H}^{Kat}_{\frac{1}{2}}$. Therefore for all $\epsilon > 0$ there exists an integer k and an ergodic measure μ_ϵ such that $(h - h_k)(\mu_\epsilon) > h^*(g) - \epsilon$.

We show now that if x is a typical point for μ_ϵ then x must visit an interval of the form $[x_n, y_n]$, that is $\mu_\epsilon([x_n, y_n]) > 0$ for some integer n. Let $M := [0,1] - \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [x_n, y_n]$. The map $(g_0)_{/M}$ can be extended on $[0,1]$ such that the extension has three branch of monotonicity. Then $\mu_\epsilon(M) = 1$ implies $h(\mu_\epsilon) \leq \log 3$ and therefore $(h - h_k)(\mu_\epsilon) \leq \log 3$. We get a contradiction for ϵ small enough.

Remark also that the topological entropy restricted to $[x_n, y_n]$ is equal to $h_{top}(H_{J_n})$. We conclude that $h(\mu) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} h_{top}(H_{J_n}) = a_0$ and therefore $h^*(g_0) = a_0$.

Now we follow the construction of g_1. According to equation (5.7) the Lyapounov exponents $(\lambda_{i_1,i_2})_{i_2 \in \mathbb{N}}$ of the periodic points $(p_{i_1,i_2})_{i_2 \in \mathbb{N}}$, whose associated measures converge to the measure of maximal entropy of $H_{J'_{i_1}}$, satisfies $\lambda_{i_1,i_2} = \frac{(T_{i_1} - 1)P_{i_2}}{T_{i_1} P_{i_2}} \lambda - (r-1) h_{i_1}$ with $h_{i_1} \to a_0$ when i_1 goes to infinity. Therefore for large i_1, i_2 we obtain the following estimate : $\lambda_{i_1,i_2} \simeq \lambda - (r-1)a_0 > \frac{\lambda}{r}$. Then, following the construction of g_1, one can build the horseshoes $H_{J_{i_1,i_2,i_3}}$ such that their topological entropy is almost equal to $\frac{\lambda_{i_1,i_2}}{r} > \frac{\lambda}{r^2}$. Arguing as above we easily prove that the tail entropy of g_1 is equal to $\max(a_0, \frac{\lambda - (r-1)a_0}{r})$. Put $a_1 := \frac{\lambda - (r-1)a_0}{r} > \frac{\lambda}{r^2}$.

In the following we choose $a_0 = \frac{\lambda}{2r-1}$. Then $a_1 = a_0$. According to Lemma 5.4.2 we have

$$u_2(\delta_0) \geq a_0 + a_1 = 2\frac{\lambda}{2r-1}$$

and

$$u_1(\delta_0) \geq a_0 = \frac{\lambda}{2r-1}$$

Moreover according to the variational principle for the tail entropy and the inequality $u_2 \leq 2u_1$, we get :

$$\sup_{\mu \in \mathcal{M}([0,1], g_1)} u_1(\mu) = h^*(g_1) = \frac{\lambda}{2r-1}$$

$$\sup_{\mu \in \mathcal{M}([0,1], g_1)} u_2(\mu) \leq 2h^*(g_1) = \frac{2\lambda}{2r-1}$$

Therefore we have finally $u_2(\delta_0) = \frac{2\lambda}{2r-1}$ and $u_1(\delta_0) = \frac{\lambda}{2r-1}$. Thus since $r \geq 2$,

$$(u_2 - u_1)(\delta_0) = \frac{\log \|g_1'\|_\infty}{2r-1} > \frac{\|g_1'\|_\infty}{r^2}$$

□

Our argument can be easily adapted to get, for every integer $n \geq 2$, examples with $\sup_{\mu \in \mathcal{M}([0,1],g)} (u_{n+1} - u_n)(\mu) \geq \frac{\log \|g'\|_\infty}{r^{n+1}}$. Indeed one can modify the map g_n of the example of Theorem 5.5.9 in the same way as above such that for all $k = 0, ..., n$:

$$\sup_{\mu \in \mathcal{M}([0,1],g_n)} u_k(\mu) = u_k(\delta_0) = \frac{k \log \|g_n'\|_\infty}{r + n(r-1)}$$

Then one can deduce an exemple of $\mathcal{C}^r$ interval map such that the sequence $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ does not converge uniformly. Indeed one can modify the example of Theorem 5.5.10 in the following way. With the notations of the proof of Theorem 5.5.10 one can follow the above construction to ensure that $u_k(\gamma_{p_n}) = \frac{k \log \|g'\|_\infty}{r+(n(r-1))}$ for all $n \in \mathbb{N}$ and for all $k = 1, ..., n$. We get then

$$\sup_{\mu \in \mathcal{M}([0,1],g)} \left(\sup_{l \in \mathbb{N}} u_l - u_k \right)(\mu) = \frac{\log \|g'\|_\infty}{r-1}$$

Following the strategy of the abstract example (Théorème 1.2.35) with arbitrarily large order of accumulation presented in the first chapter, we hope to prove the following conjecture :

Conjecture 5.5.12 *For any countable ordinal α there exists an example of $\mathcal{C}^r$ interval map with order of accumulation equal to α.*

Higher dimensional examples

By considering product of the previous examples of interval maps, we get examples of any dimension with large sex entropy :

Corollaire 5.5.13 *For any integer d, there exists a $\mathcal{C}^r$ map $T : [0,1]^d \to [0,1]^d$ with non zero topological entropy (in particular $\|DT\|_\infty > 1$) such that :*

$$\| \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n \|_\infty = \frac{d \log \|DT\|_\infty}{r-1}$$

Proof : Such an example has been already built for $d = 1$ (Theorem 5.5.9). Let g be such an interval map. We denote $g_d := \underbrace{g \times ... \times g}_{d\times}$. By the inequality (5.1) p. 123 we have :

$$\| \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n^{g_d} \|_\infty \geq d \| \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n^g \|_\infty$$

Also $\|Dg_d\|_\infty = \|Dg\|_\infty$. This concludes the proof.

□

Similarly by applying Theorem 5.2.6 we obtain :

Corollaire 5.5.14 *For all integer d and all $\epsilon > 0$, there exists a $\mathcal{C}^r$ map $T : [0,1]^d \to [0,1]^d$ with $\|DT\|_\infty \geq 2$ such that :*

$$h_{sex}(T) = (1-\epsilon) \frac{dr \log \|DT\|_\infty}{r-1}$$

5.5.4 Extensions symboliques de $\mathcal{C}^r([0,1])$ selon T. Downarowicz et A.Maass

Nous donnons dans ce paragraphe un bref aperçu de la preuve de la conjecture 5.5.2 dans le cas des applications de l'intervalle :

Théorème 5.5.15 (Downarowicz, Maass) *Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application $\mathcal{C}^r$ de l'intervalle et soit $\mu \in \mathcal{M}([0,1], f)$. Alors pour tout ordinal α, on a :*

$$u_\alpha(\mu) \leq \frac{\chi_+^{aff}(\mu)}{r-1}$$

en fait on a aussi pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n(\mu) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\chi_+^{aff}(\mu)}{r^k}$$

Nous rappelons tout d'abord le théorème Antarctique dû à T. Downarowicz et A. Maass. Ce théorème borne l'entropie locale de Newhouse d'une mesure ergodique ν proche d'une mesure invariante μ en fonction de la différence des exposants de Lyapounov de μ et de ν.

Dans le cas d'une application $\mathcal{C}^1$ de l'intervalle f, l'exposant de Lyapounov $\chi(\nu)$ d'une mesure ergodique ν vérifie $\chi(\nu) = \int_{[0,1]} \log|f'| d\nu$. On étend alors la fonction χ sur $\mathcal{M}([0,1], f)$ en définissant pour tout $\mu \in \mathcal{M}([0,1], f)$:

$$\chi(\mu) = \int_{[0,1]} \log|f'| d\mu$$

Remarquons que la fonction $\chi_+ = \max(\chi, 0) : \mathcal{M}([0,1], f) \to \mathbb{R}^+$ est une fonction convexe s.c.s.

Théorème 5.5.16 *Soit f une application $\mathcal{C}^r$ de l'intervalle avec $r > 1$. Soit μ une mesure de probabilité invariante. Alors pour tout $\gamma > 0$, il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{V}_\mu$ de X et un réel ϵ_μ tels que pour toute mesure ergodique ν vérifiant $d(\nu, \mu) < \epsilon_\mu$, on a :*

$$h^{New}(X|\nu, \mathcal{V}_\mu) \leq \frac{\chi_+(\mu) - \chi_+(\nu)}{r-1} + \gamma$$

La preuve du théorème antarctique s'appuie sur le lemme suivant, qui estime le nombre de branches monotones où la dérivée de f est grande. Nous proposons une preuve alternative à celle de T. Downarowicz et A.Maass dans le cas où r est un entier ≥ 2 :

Lemme 5.5.17 *Soit f une application $\mathcal{C}^r$ de l'intervalle avec $r \geq 2$. Alors il existe une constante $c > 0$, telle que pour tout $s > 0$ le nombre de branches monotones de f sur lesquelles $|f'|$ dépasse s est au plus de $cs^{-\frac{1}{r-1}}$.*

Preuve : On découpe l'intervalle $[0,1]$ en $[b(\|f^{(r)}\|_\infty s)^{-\frac{1}{r-1}}] + 1$ sous intervalles de longueur $< (b\|f^{(r)}\|_\infty s)^{\frac{1}{r-1}}$. Soit I un de ces sous-intervalles, notons P_I le polynôme de Lagrange de degré $r-1$ au centre de I. La constante $b = b(r)$ peut être choisie de sorte que

$$\|f' - P\|_\infty < \frac{s}{2}$$

Alors si J est une branche monotone incluse dans I, sur laquelle $|f'|$ dépasse s (i.e. J est une composante connexe de $\{|f'| > 0\}$ rencontrant $\{|f'| > s\}$), cette branche monotone J contient au moins une composante connexe de $\{|P| > \frac{s}{2}\}$ d'après l'inégalité précédente. Or le nombre de composantes connexes de l'ensemble de $\{|P| > \frac{s}{2}\}$ est clairement borné par $2r$.

On en déduit que le nombre de branches monotones sur lesquelles $|f'|$ excède s est borné par $2r\sharp I$. □

Donnons maintenant les idées principales de la preuve du théorème Antarctique. Le recouvrement ouvert $\mathcal{V}_\mu$ est composé de branches monotones et d'un voisinage ouvert U des points critiques tel que $\int_U \log|f'|d\mu \simeq 0$. On considère ν assez proche de μ de sorte que $\int_{U^c} \log|f'|d\nu \simeq \int_{U^c} \log|f'|d\mu \simeq \chi_+^{aff}(\mu)$. Maintenant dans la définition de $h^{New}(X|\nu, \mathcal{V}_\mu)$, on choisit l'ensemble F de mesure $\nu(F)$ proche de 1 comme l'ensemble où la somme de Birkhoff de $1_U \log|f'|$ est proche de $\int_U \log|f'|d\nu$. Pour estimer $h^{New}(X|\nu, \mathcal{V}_\mu)$ il suffit alors de compter le nombre de branches monotones rencontrées par les points de F (dans une branche monotone, le nombre de points (n, ϵ) séparés est linéaire en n). Si on veut que les points de F rencontrent des branches monotones qui ne sont pas des éléments du recouvrement $\mathcal{V}_\mu$, les points de F doivent visiter U et l'exposant de ν doit donc être plus petit que celui de μ. Le lemme précédent appliqué à f permet de quantifier précisément ce phénomène et d'aboutir à l'énoncé du théorème Antarctique.

Dans le théorème Antarctique, la mesure ν considérée est ergodique. Le théorème suivant, appelé théorème de passage, affirme qu'il suffit d'estimer "l'entropie locale" des mesures ergodiques ν près d'une mesure invariante μ pour avoir une estimation de l'entropie locale pour toutes les mesures invariantes près de μ. Le théorème de passage est énonçé dans [29] au moyen du candidat d'entropie de Newhouse. Il s'étend sans difficulté à une structure d'entropie quelconque.

Théorème 5.5.18 (Downarowicz, Maass) *Soit (X, T) un système dynamique topologique et $\mathcal{H} := (h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une structure d'entropie. Soit $g : \mathcal{M}(X, T) \to \mathbb{R}$ une fonction convexe s.c.s. telle que pour tout $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$ et tout $\gamma > 0$ il existe un entier k et un réel ϵ satisfaisant la propriété suivante. Pour toute mesure ergodique ν avec $d(\mu, \nu) < \epsilon$ on a :*

$$(h - h_k)(\nu) \leq g(\mu) - g(\nu) + \gamma$$

Alors pour pour tout $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$ et tout $\gamma > 0$ il existe un entier k' et un réel ϵ' tels que pour toute mesure invariante ν avec $d(\nu, \mu) < \epsilon'$ on a :

$$(h - h_{k'})(\nu) \leq g^{aff}(\mu) - g^{aff}(\nu) + \gamma$$

On explique maintenant brièvement comment le théorème 5.5.15 résulte du théorème Antarctique et du théorème de passage. On montre par récurrence sur l'ordinal α que :

$$u_\alpha \leq \frac{\chi_+^{aff}}{r-1} \tag{5.9}$$

On initialise tout d'abord la récurrence. Rappelons que $h_k^{New} = h - h^{New}(X|., \mathcal{V}_k)$ avec $(\mathcal{V}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de recouvrements ouverts telle que $\lim_{k\to+\infty} \mathrm{diam}(\mathcal{V}_k) = 0$. D'après l'inégalité de Ruelle, $h - h_k^{New} \leq \chi_+^{aff}$. On déduit alors du théorème Antarctique et du théorème de passage(Théorème 5.5.18), que pour k assez grand et ν proche de μ :

$$(h - h_k^{New})(\nu) = h^{New}(X|\nu, \mathcal{V}_k) \leq \max(\chi_+^{aff}(\nu), \frac{\chi_+^{aff}(\mu) - \chi_+^{aff}(\nu)}{r-1} + \gamma) \leq \frac{\chi_+^{aff}(\mu)}{r} + \gamma$$

On conclut facilement que $u_1(\mu) \leq \frac{\chi_+^{aff}(\mu)}{r}$. On retrouve ainsi le théorème 4.2.2 dans le cas de la dimension un tout en évitant la théorie de Yomdin.

Supposons l'inégalité (5.9) vérifiée pour tout ordinal $< \alpha$ avec α un ordinal successeur. Soit μ une mesure invariante. On a $u_\alpha(\mu) = \lim_{k\to+\infty} h - \widetilde{h_k^{New}} + u_{\alpha-1}(\mu)$. D'après le théorème Antarctique et le théorème de passage, pour tout $\gamma > 0$, on a pour k assez grand et ν proche de μ : $(h - h_k^{New})(\nu) \leq \frac{\chi_+^{aff}(\mu) - \chi_+^{aff}(\nu)}{r-1} + \gamma$. On en déduit donc, par hypothèse de récurrence, que $(h - h_k^{New} + u_{\alpha-1})(\nu) \leq \frac{\chi_+^{aff}(\mu)}{r-1} + \gamma$. Puis on conclut facilement que $u_\alpha(\mu) = \lim_{k\to+\infty} \left(h - \widetilde{h_k^{New}} + u_{\alpha-1}\right)(\mu) \leq \frac{\chi_+^{aff}(\mu)}{r-1}$. La fonction χ_+^{aff} étant s.c.s. le cas où α est un ordinal limite est immédiat.

5.6 Dynamiques $\mathcal{C}^\infty$ et affines par morceaux

Nous étudions dans cette partie la théorie des extensions symboliques pour les applications $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux, puis pour les applications affines par morceaux du plan. Ces dynamiques sont les dynamiques les "plus simples" contenant des exemples non asymptotiquement h-expansifs. Nous bornons leur entropie d'extension symbolique en fonction de l'entropie de multiplicité.

5.6.1 Entropie d'extension symbolique pour les applications continues $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux

Ici on s'intéresse à la théorie des extensions symboliques dans le cas des applications $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux de $\mathbb{R}^d$. On donne une borne supérieure explicite pour l'entropie topologique d'extension symbolique.

Définition 5.6.1 ***Une dynamique par morceaux*** *est la donnée d'un compact $X \subset \mathbb{R}^d$, d'une partition $P := (A_i)_{i=1,...,n}$ de X et d'une application continue $T : X \to X$*

Remarquons que les dynamiques par morceaux, au sens où nous l'entendons, sont globalement continues.

L'entropie de multiplicité $h_{mult}(T)$ d'une dynamique par morceaux (X, T, P) est définie comme suit :

Définition 5.6.2 ***L'entropie de multiplicité*** *de $Y \subset X$ est définie comme suit :*

$$h_{mult}(T, Y) := \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log Mult(P^n, Y)$$

avec $Mult(P^n, Y) := \max_{y\in Y} \sharp\{A \in P^n : y \in \overline{A}\}$

Définition 5.6.3 *Une dynamique par morceaux (X, T, P) est une* ***dynamique $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux*** *si $T_{/A}$ se prolonge en une application $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^d$ pour tout $A \in P$.*

Proposition 5.6.4 *Soit (X, T, P) une dynamique $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux de $\mathbb{R}^d$, alors*

$$h^*(T) \leq h_{mult}(T, X)$$

Preuve :

Soit $\epsilon > 0$ et soit $n_0 \in \mathbb{N}$, tels que :

$$\frac{1}{n_0} \log Mult(P^{n_0}, X) < h_{mult}(T) + \epsilon$$

On considère le système (X, T^{n_0}, P^{n_0}). Soit $\delta_0 > 0$, tel que pour tout $x \in X$, la boule de centre x et de rayon δ_0 rencontre au plus $Mult(P^{n_0}, X)$ éléments de P^{n_0}. Toute boule de Bowen d'ordre n et de rayon δ_0 pour T^{n_0} rencontre au plus $(Mult(P^{n_0}, X))^n$ éléments de P^{nn_0}.

Nous rappelons maintenant le résultat suivant, qui est une conséquence facile du Théorème 4.1.6.

Lemme 5.6.5 *Soit $\epsilon > 0$ et soient $T_0, T_1, ..., T_r$ des applications $\mathcal{C}^\infty$ avec $T_0 = Id$. Alors il existe $\delta_1 > 0$, tel que pour toute application $\sigma : \mathbb{N} \to \{0, ..., r\}$ avec $\sigma(0) = 0$,*

$$\lim_{\beta\to 0} \limsup_{n\to+\infty} \left(\sup_{x\in X} \frac{1}{n} \log\ r_T(n, \beta, B_{T_\sigma}(x, n, \delta_1)) \right) < \epsilon$$

où $B_{T_\sigma}(x, n, \delta_1) = \{y \in X\ :\ d(T_{\sigma(k)} \circ ... \circ T_{\sigma(0)}(y), T_{\sigma(k)} \circ ... \circ T_{\sigma(0)}(x)) < \delta_1,\ k = 0, ..., n-1\}$.

Notons $P^{n_0} = \{A_1, ..., A_r\}$ et $T_k = T^{n_0}_{/A_k}$ pour tout $k = 1, ..., r$. Soit $\delta < \min(\delta_0, \delta_1)$. Avec les notations du lemme précédent, on a :

$$h^*(T^{n_0}, \delta) \leq \lim_{\beta \to 0} \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \sup_{x \in X} \sum_{\sigma} r(n, \beta, B_{T_\sigma}(x, n, \delta))$$

où la somme porte sur les applications $\sigma : \{0, ..., n\} \to \{0, ..., r\}$ telles que $B_{T_\sigma}(x, n, \delta) \neq \emptyset$. Or $\delta < \delta_0$ a été choisi de sorte que le nombre de telles applications σ soit inférieur à $Mult(P^{n_0}, X)^n$. On conclut donc avec le lemme précédent et le lemme 2.1.10 que :

$$h^*(T^{n_0}) = n_0 h^*(T) \leq \log Mult(P^{n_0}, X) + \epsilon \leq n_0 h_{mult}(T, X) + 2n_0\epsilon$$

Ceci étant vrai pour tout ϵ, on obtient finalement :

$$h^*(T) \leq h_{mult}(T, X)$$

□

Théorème 5.6.6 *Soit (X, T, P) une dynamique $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux de $\mathbb{R}^d$, alors*

$$h_{sex}(T) \leq h_{mult}(T, X) + h_{top}(T)$$

PREUVE : On introduit l'extension suivante commune à (X, T, P) et à sa dynamique symbolique (Σ, σ) :

$$\Sigma \ltimes X := \overline{\{(A, x) \in P^{\mathbb{Z}} \times X : \forall n \in \mathbb{N}\ T^n x \in A_n\}}$$

muni de $\overline{T}(A, x) = (\sigma A, Tx)$. Clairement on a : $h_{top}(\overline{T}) \leq h_{top}(T) + h_{mult}(T)$.

D'après le lemme 5.6.5, on a en raisonnant comme dans la preuve de la proposition précédente : $h^*(\overline{T}, \Sigma \ltimes X) = 0$. Donc $(\overline{T}, \Sigma \ltimes X)$ a une extension symbolique principale (Y, S). On a $h_{top}(S) = h_{top}(\overline{T}) \leq h_{mult}(T, X) + h_{top}(T)$. □

5.6.2 Définitions et propriétés générales des applications affines par morceaux

Nous étudions dans la suite l'entropie d'extensions symboliques des applications affines par morceaux. On définit tout d'abord les dynamiques affines par morceaux. On dit que $A \subset \mathbb{R}^d$ est un **polytope** s'il s'écrit comme une union finie d'ensemble de la forme $\{x \in \mathbb{R}^d : f_1(x) = 0, ..., f_r(x) = 0, f_{r+1}(x) > 0, ..., f_{r+s}(x) > 0\}$ avec $r, s \in \mathbb{N}$ et $f_1, ..., f_{r+s}$ des formes affines de $\mathbb{R}^d$. En d'autres termes, un polytope est un ensemble semi-algébrique, qui admet une écriture faisant uniquement intervenir des polynômes de degré 1 (voir Définition 3.3.1). Comme nous l'avons défini, un polytope n'est pas nécessairement convexe, ni connexe.

Définition 5.6.7 *Une dynamique par morceaux (X, T, P) est une **dynamique affine par morceaux** si X est un polytope et P une partition de X en polytopes et si $T_{/A}$ est une application affine pour tout $A \in P$.*

On considère, dans la suite de ce paragraphe, (X, T, P) une dynamique affine par morceaux. Rappelons tout d'abord que sous ces hypothèses :

Proposition 5.6.8 *Pour toute mesure invariante μ, on a $h(\mu) = h(\mu, P)$.*

PREUVE : On note $P = (A_1, ..., A_r)$. Soit μ une mesure invariante de (X, T, P). On partitionne X en un réseau cubique de taille δ. On note Q la partition ainsi obtenue. Quitte à translater un peu Q, on peut supposer que $\mu(\partial Q) = 0$. Notons $\overset{o}{Q}^n := \{\overset{o}{A}_{\sigma(1)} \bigcap ... \bigcap T^{-1}_{(n-1)}(\overset{o}{A}_{\sigma(n)}),\ \sigma : \mathbb{N} \to \{1, ..., r\}\}$, où $T_{(k)} := T_{\sigma(k)} \circ ... \circ T_{\sigma(1)}$.

On a

$$H_\mu(Q^n) \leq H_\mu(P^n) + \max_{B\in P^n} \log \sharp\{A \in \overset{o\ n}{Q},\ A \bigcap B \neq \emptyset\}$$

Or pour tout $B \in P^n$, l'ensemble $\overset{o\ n}{Q} \bigcap B$ est un ensemble semi-algébrique défini par des unions et des intersections de au plus $C(P)n$ demi-plans, où $C(P)$ est une constante dépendant uniquement de P. D'après le Théorème 3.8.9, le nombre de composantes connexes de cet ensemble semi-algébrique est borné par $(C(P)n)^d$ (dans le cas d'un polytope, le Théorème 3.8.9 se démontre en fait par récurrence sur d de façon élémentaire). En particulier,

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \max_{B\in P^n} \log \sharp\{A \in \overset{o\ n}{Q},\ A \bigcap B \neq \emptyset\} = 0$$

et donc $h(\mu, Q) \leq h(\mu, P)$ puis $h(\mu) = h(\mu, P)$. □

Corollaire 5.6.9 *Si P est une partition essentielle, alors $h = h(., P)$ est une application s.c.s. et donc $h_{sex} = h$.*

Considérons une collection P fixée de polytopes disjoints de $\mathbb{R}^d$. L'ensemble des dynamiques affines par morceaux définies sur la partition P s'identifie naturellement à un sous espace de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\sharp P\times(d^2+d)}$, une application affine étant déterminée par sa partie linéaire et l'image d'un point. On transporte ainsi la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^{\sharp P\times(d^2+d)}$ sur l'ensemble des dynamiques affines par morceaux. J. Buzzi a montré que Lebesgue presque toute application dynamique par morceaux sur X a une entropie de multiplicité nulle (Théorème 1 de [20]). D'après la Proposition 5.6.4 et le Théorème 5.3.1, on a donc :

Proposition 5.6.10 *Lebesgue presque tout application affine par morceaux définie sur P est asymptotiquement h-expansif et a donc une extension symbolique principale.*

Nous étudions maintenant le cas spécifique des homéomorphismes affines par morceaux du plan.

5.6.3 Cas des homéomorphismes affines par morceaux du plan

Nous rappelons le fait suivant dû à S.Newhouse (Lemme 2.3 de [21]) :

Proposition 5.6.11 *L'entropie de multiplicité d'un homéomorphisme affine par morceaux du plan est nulle.*

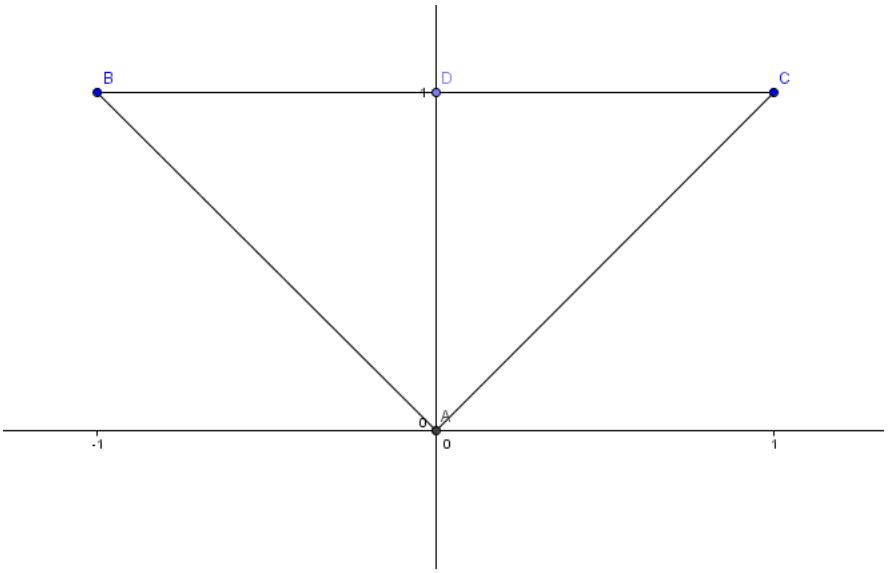
D'après la proposition précédente 5.6.11 et la Proposition 5.6.4, on a :

Corollaire 5.6.12 *Les homéomorphismes affines par morceaux du plan sont asymptotiquement h-expansifs. En particulier, un tel système dynamique admet une extension symbolique principale et $h_{sex} = h$.*

5.6.4 Un exemple affine par morceaux du plan avec $h_{sex} \neq h$

Dans ce paragraphe, nous donnons un exemple de dynamique affine par morceaux du plan, où $h_{sex} \neq h$.

Considérons dans le plan les points de coordonnées $A = (0,0)$, $B = (-1,1)$, $C = (1,1)$ et $D = (0,1)$. On considère l'application affine T fixant A et envoyant les triangles ABD et ADC sur le triangle ABC (c'est à dire $TA = A$, $TD = B$, $TC = C$, $TB = C$). Plus précisément, sur le triangle ABD, l'application T est donnée par $T = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et sur le triangle ADC, par $T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.



On obtient ainsi une dynamique affine par morceaux. Pour tout $y \in [0,1]$, notons $L_y := [-y,y] \times \{y\}$. Pour tout $y \in [0,1]$, remarquons que $T(L_y) = L_y$ et pour $y \neq 0$ l'application $T_{/L_y} : L_y \to L_y$ est conjuguée à l'application $f : [0,1] \to [0,1]$ définie par $f(x) = 1 - 2|x - 1/2|$ qui est d'entropie $\log(2)$. Notons ν_y une mesure d'entropie maximale de $T_{/L_y}$, alors $\lim_{y\to 0} \nu_y \to \delta_0$ et $\lim_{y\to 0} h(\nu_y) = \log(2) > h(\delta_0) = 0$. Puis $u_1(\delta_0) \geq (\widetilde{h} - h)(\delta_0) = \log(2) = h_{top}(T)$. En pariculier $h_{sex} \neq h$. Nous calculons maintenant précisément la suite transifinie $(u_\alpha)_\alpha$.

Nous allons montrer que $u_1(\mu) = \mu(0)\log 2$ pour tout $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$. Par concavité de u_1 (Proposition 1.3.10), on a l'inégalité $u_1(\mu) \geq \mu(0)\log 2$ pour tout $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$. Considérons une structure d'entropie harmonique $\mathcal{H} = (h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (par exemple $\mathcal{H}^{fun}$). Soit μ une mesure invariante. On désintègre μ le long du feuilletage invariant horizontal : il existe une mesure de probabilité ξ sur $[0,1]$ et des mesures $T_{/L_y}$ invariantes μ_y supportées par L_y pour ξ presque tout y, telles que $\mu = \int \mu_y d\nu(y)$. Pour tout $\epsilon > 0$ on obtient par harmonicité de h_k et h :

$$(h - h_k)(\mu) = \int_{y\geq\epsilon} (h - h_k)(\mu_y)d\nu(y) + \int_{y<\epsilon} (h - h_k)(\mu_y)d\nu(y)$$

Soient $\alpha > 0$ et $\epsilon > 0$ tels que $\mu(\{y \leq \epsilon\}) < \mu(0) + \alpha$. On a :

$$(h - h_k)(\mu) \leq \int_{y\geq\epsilon} (h - h_k)(\mu_y)d\nu(y) + \log(2)(\mu(0) + \alpha)$$

$$(h - h_k)(\mu) \leq \sup_{\mu\in M(\{y\geq\epsilon\},T)} (h - h_k)(\mu) + \log(2)(\mu(0) + \alpha)$$

Puis en prenant l'enveloppe semi-continue supérieure et la limite quand k tend vers $+\infty$, on a d'après le principe variationnel pour l'entropie de queue :

$$u_1(\mu) \leq h^*(T_{/\{y\geq\epsilon\}}) + \log(2)(\mu(0) + \alpha)$$

Or $T_{/\{y\geq\epsilon\}}$ est conjugué à $f \times Id_{[0,1]}$. Donc $h^*(T_{/\{y\geq\epsilon\}}) = h^*(f) = 0$ (l'entropie de queue des applications de l'intervalle monotones par morceaux est nulle). De plus l'inégalité précédente étant vérifiée pour tout $\alpha > 0$, on obtient finalement :

$$u_1(\mu) = \log(2)\mu(0)$$

En particulier, u_1 est affine et comme on le verra à la Proposition 5.6.19, ceci entraine que l'ordre d'accumulation de (X,T) est égale à 1. Donc pour tout ordinal α non nul, on a $u_\alpha = u_1$.

5.6.5 Estimation de h_{sex} pour les applications continues affines par morceaux du plan

Dans la suite, on choisit pour structure d'entropie, sauf indication contraire, l'entropie définie à la Katok $\mathcal{H}_\lambda^{Kat}$, avec $\lambda \in]0,1[$ arbitraire. Soit (X,T,P) une dynamique affine par morceaux du plan non nécessairement inversible.

Définition 5.6.13 *On appelle* ***sommet*** *de P^n toute extrémité d'arrêtes de P^n. Notons $\mathcal{S}(n)$, l'ensemble des sommets de P^n. On note $\mathcal{P}(n)$ l'ensemble des points périodiques dont l'orbite rencontre $\mathcal{S}(n)$ et $\mathcal{Q}(n) \subset \mathcal{P}(n)$ l'ensemble des points périodiques dont l'orbite rencontre $\mathcal{S}(n) - \mathcal{S}(n-1)$. Notons $\mathcal{P} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}(n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{S}(n)$.*

Lemme 5.6.14 *Soit $p \in \mathcal{Q}(l)$. Alors pour tout entier n,*

$$Mult(P^n, p) \leq (2\sharp P)^{\frac{n}{l}+1}$$

En particulier,

$$h_{mult}(p) \leq \frac{\log(2\sharp P)}{l}$$

Preuve : Soit $p \in \mathcal{Q}(l)$. Soient $k, m \in \mathbb{N}$ et q un point de l'orbite périodique $\mathcal{O}(p)$ de p. Si un élément $A = A_k \bigcap T^{-kl} A_m$ de $P^{(k+m)l}$ avec $A_k \in P^{kl}$ et $A_m \in P^{ml}$ contient le point q dans son adhérence, alors A_k contient q dans son adhérence et A_m contient le point $T^{kl}q$ dans son adhérence. On en déduit que $\sharp\{A \in P^{(k+m)l},\ q \in \overline{A}\} \leq \sharp\{A \in P^{kl},\ q \in \overline{A}\}\sharp\{A \in P^{ml},\ T^{kl}q \in \overline{A}\}$. Il s'en suit que la suite $(\max_{q\in\mathcal{O}(p)} Mult(P^{nl}, q))_{n\in\mathbb{N}}$ est sous-multiplicative et donc $Mult(P^{lm}, p) \leq \left(\max_{q\in\mathcal{O}(p)} Mult(P^l, q)\right)^m$ pour tout entier m.

Pour conclure la preuve, il suffit de montrer que $Mult(P^l, q) \leq 2\sharp P$ pour tout q dans l'orbite de p. Or par définition de $\mathcal{Q}(l)$, l'orbite de p ne rencontre pas $\mathcal{S}(l-1)$, donc q est dans l'adhérence d'au plus 2 éléments de la partition P^{l-1} et donc d'au plus $2\sharp P$ éléments de la partition P^l. □

La proposition suivante est un point clé dans notre estimation de l'entropie d'extension symbolique des applications affines par morceaux (Théorème 5.6.17).

Proposition 5.6.15 *Soit (X,T,P) une dynamique affine par morceaux du plan. Soit μ une mesure T-invariante. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier k_ϵ et un voisinage $\mathcal{V}_\epsilon$ de μ tels que pour tout $\nu \in \mathcal{V}_\epsilon$:*

$$(h - h_{k_\epsilon})(\nu) \leq \sum_{p\in\mathcal{P}} \mu(p) h_{mult}(p) + \epsilon$$

Preuve :

Soit $\epsilon > 0$. Notons $N := [\frac{1}{\epsilon}] + 1$. On considère un entier $m \geq N$, tel que $\forall p \in \mathcal{S}(N)$ et $\forall n \geq m$:

$$\frac{1}{n}\log(Mult(P^n, p)) \leq h_{mult}(p) + \frac{\epsilon}{\sharp\mathcal{S}(N)} \tag{5.10}$$

A tout $p \in \mathcal{S}(m)$, on associe un réel positif r_p, tel que :
- La boule ouverte $B(p, r_p)$ de centre p et de rayon r_p ne rencontre que les éléments de P^m contenant p dans leur adhérence ;
- $\overline{B}(p, r_p) \bigcap \overline{B}(q, r_q) = \emptyset$ pour $p \neq q \in \mathcal{S}(m)$.

Pour simplifier, on note $B_p := B(p, r_p)$ et $B'_p := B(p, \frac{r_p}{2})$. Nous montrons d'abord le lemme suivant :

Lemme 5.6.16 *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier k_ϵ, tel que pour tout $\nu \in \mathcal{M}(X,T)$,*

$$(h - h_{k_\epsilon})(\nu) \leq \sum_{p\in\mathcal{S}(m)} \nu(B'_p) h_{mult}(p) + \log\sharp P \sum_{p\in\mathcal{S}(m)} \nu(B_p - B'_p) + \epsilon \tag{5.11}$$

Preuve du Lemme 5.6.16 :

On travaille dans un premier temps avec le système itéré (X, T^m, P^m) et on considère une mesure T^m invariante ν.

Supposons tout d'abord ν ergodique. Par ergodicité, il existe F, avec $\nu(F) > 1 - \frac{\lambda}{4}$ et un entier n_1, tels que pour tout $x \in F$, tout $n > n_1$ et tout $p \in \mathcal{S}(m)$:

$$\left| \frac{\sharp\{k < n | T^{mk}(x) \in B'_p\}}{n} - \nu(B'_p) \right| < \frac{\epsilon}{\sharp\mathcal{S}(m)} \tag{5.12}$$

$$\left| \frac{\sharp\{k < n | T^{mk}(x) \in B_p - B'_p\}}{n} - \nu(B_p - B'_p) \right| < \frac{\epsilon}{\sharp\mathcal{S}(m)} \tag{5.13}$$

De plus, par le théorème de Shannon-McMillan-Breiman (voir Appendices) et d'après la Proposition 5.6.8, il existe F' avec $\nu(F') > 1 - \frac{\lambda}{4}$ et un entier n_2, tels que pour tout $x \in F'$ et tout $n > n_2$:

$$\nu(P_x^{mn}) < exp(-nh(\nu, T^m) + n\epsilon) \tag{5.14}$$

Notons $\delta_1 = \frac{\min\{d(D,E)\}}{4}$, où D et E varient parmi les composantes connexes de $(\partial P^m) - \left(\bigcup_{p\in\mathcal{S}(m)} B'_p\right)$ et $\delta_2 = \frac{\min_{p\in\mathcal{S}(m)} r_p}{4}$. Soit $\delta < \min(\delta_1, \delta_2)$ et soit $n > \max(n_1, n_2)$. Considérons $\mathcal{B}_n^{\lambda,\delta} := \bigcup_{y\in C} B_{T^m}(y, n, \delta)$ une union de (n, δ) boules de Bowen pour T^m de mesure ν plus grande que λ. Nous allons maintenant compter le nombre d'éléments de P^{nm} qui recouvrent une boule de Bowen $B_{T^m}(y, n, \delta)$ intersectant F.

On commence par les observations suivantes :

1. Si z est un point de B'_p avec $p \in \mathcal{S}(m)$ alors $B(z, 2\delta) \subset B_p$, car $\delta \leq \delta_2 \leq \frac{p}{4}$. Or B_p ne rencontre que les éléments de P^m contenant p dans leur adhérence. Il en est donc de même de $B(z, 2\delta)$.
2. Si l'on suppose maintenant que z est dans le complémentaire de $\bigcup_{p\in\mathcal{S}(m)} B_p$ alors $B(z, 2\delta) \subset X - (\bigcup_{p\in\mathcal{S}(m)} B'_p)$ toujours car $\delta < \delta_2$. De plus par connexité de la boule, si $B(z, 2\delta)$ rencontre deux éléments de P^m, alors $B(z, 2\delta)$ rencontre la frontière de ces deux éléments. Remarquons que $(\partial P^m) - (\bigcup_{p\in\mathcal{S}(m)} B'_p)$ est une union finie disjointe de segments affines. Chacun de ces segments rencontre au plus deux éléments de P^m. Puisque $\delta < \delta_1$, la boule $B(z, 2\delta)$ rencontre au plus un de ces segments et donc rencontre au plus 2 éléments de P^m.

Soit $y \in C$, tel que la boule de Bowen $B_{T^m}(y, n, \delta)$ rencontre F. Alors il existe $x \in F$ tel que $B_{T^m}(y, n, \delta) \subset B_{T^m}(x, n, 2\delta)$. On compte maintenant le nombre d'éléments de P^{mn} rencontrant la boule de Bowen $B_{T^m}(x, n, 2\delta)$:

$$\sharp\{A \in P^{mn},\ A \bigcap B_{T^m}(x, n, 2\delta) \neq \emptyset\} \leq \prod_{l=0}^{n-1} \sharp\{A \in P^m,\ A \bigcap B(T^{lm}x, 2\delta) \neq \emptyset\}$$

$$\begin{aligned}\sharp\{A \in P^{mn},\ A \bigcap B_{T^m}(x, n, 2\delta) \neq \emptyset\} \quad \leq \quad & \prod_{l<n,\ T^{lm}x\in\bigcup_{p\in\mathcal{S}(m)} B'_p} \sharp\{A \in P^m,\ A \bigcap B(T^{lm}x, 2\delta) \neq \emptyset\} \times \\ & \prod_{l<n, T^{lm}x\in\bigcup_{p\in\mathcal{S}(m)} B_p - B'_p} \sharp\{A \in P^m,\ A \bigcap B(T^{lm}x, 2\delta) \neq \emptyset\} \times \\ & \prod_{l<n, T^{lm}x\notin\bigcup_{p\in\mathcal{S}(m)} B_p} \sharp\{A \in P^m,\ A \bigcap B(T^{lm}x, 2\delta) \neq \emptyset\}\end{aligned}$$

On déduit du point (1) de la discussion précédente et de (5.12) que pour tout $x \in F$:

$$\prod_{l<n,\ T^lx\in\bigcup_{p\in\mathcal{S}(m)} B'_p} \sharp\{A \in P^m,\ A \bigcap B_{T^m}(T^lx, 2\delta) \neq \emptyset\} \leq \prod_{p\in\mathcal{S}(m)} Mult(P^m, p)^{n\nu(B'_p)} (\sharp P)^{mn\epsilon}$$

et d'après le point (2) :

$$\prod_{l<n, T^{lm}x \notin \bigcup_{p\in\mathcal{S}(m)} B_p} \sharp\{A \in P^m,\ A \bigcap B(T^{lm}x, 2\delta) \neq \emptyset\} \leq 2^n$$

enfin d'après (5.13) :

$$\prod_{l<n, T^{lm}x \in \bigcup_{p\in\mathcal{S}(m)} B_p - B'_p} \sharp\{A \in P^m,\ A \bigcap B(T^{lm}x, 2\delta) \neq \emptyset\} \leq (\sharp P)^{mn\left(\epsilon + \sum_{p\in\mathcal{S}(m)} \nu(B_p - B'_p)\right)}$$

On en conclut que pour tout $y \in C$, si la boule de Bowen $B_{T^m}(y, n, \delta)$ intersecte F, alors elle rencontre au plus $(\sharp P)^{mn(2\epsilon + \sum_{p\in\mathcal{S}(m)} \nu(B_p - B'_p))} 2^n \prod_{p\in\mathcal{S}(m)} Mult(P^m, p)^{n\nu(U_p)}$ éléments de la partition itérée $(P^m)^n$. Par ailleurs, on a $\nu(\mathcal{B}_n^{\lambda,\delta} \cap F' \cap F) > \lambda/2$. Par conséquent :

$$\sharp\mathcal{B}_n^{\lambda,\delta} (\sharp P)^{mn(2\epsilon + \sum_{p\in\mathcal{S}(m)} \nu(B_p - B'_p))} 2^n \prod_{p\in\mathcal{S}(m)} Mult(P^m, p)^{n\nu(B'_p)} \sup_{x\in F'} \nu(P_x^{mn}) > \lambda/2$$

Les éléments de la forme P_x^{mn} étant de ν mesures majorées d'après le choix de F' (Inégalité (5.14)), on a :

$$\sharp\mathcal{B}_n^{\lambda,\delta} (\sharp P)^{mn(2\epsilon + \sum_{p\in\mathcal{S}(m)} \nu(B_p - B'_p))} 2^n \prod_{p\in\mathcal{S}(m)} Mult(P^m, p)^{n\nu(B'_p)} > \frac{\lambda}{2} exp(n(h(\nu, T^m) - \epsilon))$$

Donc pour $\epsilon_k < \delta$, on a

$$(h - h_k)(\nu, T^m) < \sum_{p\in\mathcal{P}(m)} \nu(B'_p) \log(Mult(P^m, p)) + m \log(\sharp P)(2\epsilon + \sum_{p\in\mathcal{P}(m)} \nu(B_p - B'_p)) + \log(2) + \epsilon$$

Les fonctions h et h_k étant harmoniques, l'inégalité ci-dessus est vraie pour tout $\nu \in \mathcal{M}(X, T^m)$.

On revient au système initial (X, T, P) et on considère une mesure T-invariante ν.

En particulier ν est T^m invariante. D'après la Proposition 2.4.2, on a $h_k(\nu, T^m) \leq m h_k(\nu, T)$ et aussi $h(\nu, T^m) = m h(\nu, T)$. Puisque $m \geq N \geq \frac{1}{\epsilon}$, on obtient donc (en notant $h(\nu) = h(\nu, T)$ et $h_k(\nu) = h_k(\nu, T)$) :

$$h(\nu) - h_k(\nu) \leq \sum_{p\in\mathcal{S}(m)} \nu(B'_p) \frac{\log(Mult(P^m, p))}{m} + \log \sharp P \sum_{p\in\mathcal{S}(m)} \nu(B_p - B'_p) + (1 + 2\log(\sharp P) + \log(2))\epsilon$$

D'après l'inégalité (5.10) et le lemme 5.6.14, on conclut que pour tout $\nu \in \mathcal{M}(X, T)$:

$$h(\nu) - h_k(\nu) \leq \sum_{p\in\mathcal{S}(N)} \nu(B'_p) h_{mult}(p) + \sum_{p\in\mathcal{S}(m)-\mathcal{S}(N)} \nu(B'_p) \frac{\log(2\sharp P)}{N} + \log \sharp P \sum_{p\in\mathcal{S}(m)} \nu(B_p - B'_p) + (1 + 2\log(\sharp P) + \log(2))\epsilon$$

$$h(\nu) - h_k(\nu) \leq \sum_{p\in\mathcal{S}(m)} \nu(B'_p) h_{mult}(p) + \log \sharp P \sum_{p\in\mathcal{S}(m)} \nu(B_p - B'_p) + (1 + 3\log(\sharp P) + 2\log(2))\epsilon$$

ce qui conclut la preuve du lemme 5.6.16. □

Nous terminons maintenant la preuve de la Proposition 5.6.15. Soit $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$ et soit $\epsilon > 0$. Pour tout $p \in \mathcal{S}(m)$, le rayon r_p de $B_p = B(p, r_p)$ peut être choisi de sorte que :
- $\sum_{p\in\mathcal{S}(m)} |\mu(B'_p) - \mu(p)| < \epsilon$ et $\sum_{p\in\mathcal{S}(m)} \mu(B_p - B'_p) < \epsilon$;
- $\mu(\partial B_p) = \mu(\partial B'_p) = 0$.

Pour tout $p \in \mathcal{S}(m)$, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}_\epsilon$ de μ tel que pour tout $\nu \in \mathcal{V}$, on ait $\sum_{p\in\mathcal{S}(m)} |\nu(B'_p) - \mu(p)| < \epsilon$ et $\sum_{p\in\mathcal{S}(m)} \nu(B_p - B'_p) < \epsilon$. De plus remarquons que $\mu(p) = 0$ pour $p \notin \mathcal{P}$. Enfin on a clairement $h_{mult}(p) \leq \log \sharp P$ pour tout $p \in X$. Donc pour tout $\nu \in \mathcal{V}_\epsilon$, on a d'après le lemme 5.6.16 précédent :

$$h(\nu) - h_{k_\epsilon}(\nu) \leq \sum_{p\in\mathcal{P}(m)} \mu(p) h_{mult}(p) + (2\log\sharp P + 1)\epsilon$$

□

On déduit de la proposition précédente une borne supérieure pour l'entropie d'extension symbolique.

Théorème 5.6.17 *Pour tout mesure invariante μ, on a :*

$$h_{sex}(\mu) \leq h(\mu) + \sum_{p\in\mathcal{P}} \mu(p) h_{mult}(p)$$

Preuve :

Il suffit de montrer que $f(\mu) := h(\mu) + \sum_{p\in\mathcal{P}} \mu(p) h_{mult}(p)$ est une superenveloppe affine pour la structure d'entropie $\mathcal{H}_\lambda^{Kat}$, i.e. le défaut de semi-continuité de $f - h_k$ tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$. Remarquez que les suites $(f - h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\widetilde{f - h_k})_{k\in\mathbb{N}}$ étant convergente, il est suffisant de considérer une sous suite divergente $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $\epsilon > 0$. On note $N = [\frac{1}{\epsilon}] + 1$. Pour tout entier k, on considère une suite $(\nu_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ de mesures invariantes telle que $\nu_n^k \to \mu$ pour la topologie faible * quand n tend vers l'infini et telle que $\lim_{n\to+\infty}(f - h_k)(\nu_n^k) = \widetilde{f - h_k}(\mu)$. Fixons un entier k. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $\nu_n^k(p)$ converge quand n tend vers l'infini pour tout $p \in \mathcal{P}(N)$. Notons $\lambda_p^k := \lim_{n\to+\infty} \nu_n^k(p)$. Puisque ν_n^k converge faiblement vers μ, on a $\lambda_p \leq \mu(p)$. On écrit ν_n^k sous la forme suivante :

$$\nu_n^k = \sum_{p\in\mathcal{P}(N)} \nu_n^k(p)\delta_p + \left(1 - \sum_{p\in\mathcal{P}(N)} \nu_n^k(p)\right) \xi_n^k$$

La suite de mesures $(\xi_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la mesure normalisée de $\mu - \sum_{p\in\mathcal{P}(N)} \lambda_p^k \delta_p$, que l'on [§] note ξ^k. Par compacité de $\mathcal{M}(X,T)$, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $(\xi^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une mesure de probabilité invariante ξ. On peut aussi supposer que $(\lambda_p^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel λ_p pour tout $p \in \mathcal{P}(N)$. On a alors $\mu = \sum_{p\in\mathcal{P}(N)} \lambda_p\delta_p + \left(1 - \sum_{p\in\mathcal{P}(N)} \lambda_p\right) \xi$. Remarquons que pour tout $p \in \mathcal{P}(N)$ on a en particulier :

$$\mu(p) = \lambda_p + (1 - \sum_{p\in\mathcal{P}(N)} \lambda_p)\xi(p) \tag{5.15}$$

Les fonctions h et h_k sont affines. De plus, elles sont nulles sur les mesures périodiques. De plus d'après le lemme 5.6.14, $h_{mult}(p) \leq \epsilon \log(2\sharp P)$ pour $p \in \mathcal{P} - \mathcal{P}(N)$.

On a donc :

§. si $\nu_n^k = \sum_{p\in\mathcal{P}(N)} \nu_n^k(p)\delta_p$ ou bien si $\mu = \sum_{p\in\mathcal{P}(N)} \lambda_p^k\delta_p$, alors on pose $\xi_n^k = \xi_k = \gamma_p$ pour un $p \in \mathcal{S}(N)$ choisi arbitrairement

$$f(\nu_n^k) - h_k(\nu_n^k) \leq \left(1 - \sum_{p\in\mathcal{P}(N)} \nu_n^k(p)\right)(h - h_k)(\xi_n^k) + \sum_{p\in\mathcal{P}(N)} \nu_n^k(p) h_{mult}(p) + \epsilon \log(2\sharp P)$$

D'après la Proposition 5.6.15 appliquée à ξ, il existe un entier k_ϵ vérifiant la propriété suivante. Pour tout entier $k > k_\epsilon$, il existe un entier N_k tel que pour tout $n > N_k$:

$$(h - h_k)(\xi_n^k) \leq \sum_{p\in\mathcal{P}} \xi(p) h_{mult}(p) + \epsilon$$

On en déduit donc pour $k \geq k_\epsilon$:

$$\widetilde{f - h_k}(\mu) \leq \left(1 - \sum_{p\in\mathcal{P}(N)} \lambda_p^k\right)\left(\sum_{p\in\mathcal{P}} \xi(p) h_{mult}(p)\right) + \sum_{p\in\mathcal{P}(N)} \lambda_p^k h_{mult}(p) + (1 + \log(2\sharp P))\epsilon$$

Puis en prenant la limite quand k tend vers l'infini, on a d'après l'égalité (5.15) :

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to+\infty} \widetilde{f - h_k}(\mu) &\leq \left(1 - \sum_{p\in\mathcal{P}(N)} \lambda_p\right) \sum_{p\in\mathcal{P}} \xi(p) h_{mult}(p) + \sum_{p\in\mathcal{P}(N)} \lambda_p h_{mult}(p) + (1 + \log(2\sharp P))\epsilon \\
&\leq \sum_{p\in\mathcal{P}(N)} \mu(p) h_{mult}(p) + \left(1 - \sum_{p\in\mathcal{P}(N)} \lambda_p\right) \sum_{p\in\mathcal{P}-\mathcal{P}(N)} \xi(p) h_{mult}(p) + (1 + \log(2\sharp P))\epsilon
\end{aligned}$$

Enfin d'après le lemme 5.6.14, on a :

$$\sum_{p\in\mathcal{P}-\mathcal{P}(N)} \xi(p) h_{mult}(p) \leq \epsilon \log(2\sharp P)$$

donc on obtient finalement :

$$\lim_{k\to+\infty} \widetilde{f - h_k}(\mu) \leq \sum_{p\in\mathcal{P}} \mu(p) h_{mult}(p) + (2\log(2\sharp P) + 1)\epsilon = (f - h)(\mu) + (2\log(2\sharp P) + 1)\epsilon$$

L'inégalité précédente étant vérifiée pour tout $\epsilon > 0$, on conclut que $\lim_{k\to+\infty} \widetilde{f - h_k} = f - h$, i.e. f est une superenveloppe de le structure d'entropie $\mathcal{H}_\lambda^{Kat}$.

□

On en déduit le corollaire suivant d'après le principe varaitionnel pour l'entropie d'extension symbolique (Corollaire 5.2.5) :

Corollaire 5.6.18 *Soit (X, T, P) une application affine par morceaux du plan. Alors*

$$h_{sex}(T) \leq h_{top}(T) + h_{mult}(T, \mathcal{P})$$

On conjecture que l'ordre d'accumulation d'un système dynamique affine par morceaux a un ordre d'accumulation égale à 1. Dans le cas des applications du plan, nous n'avons réussi à montrer ce résultat uniquement sous l'hypothèse u_1 affine. Nous ne savons pas si cette hypothèse est vérifiée par toutes les dynamiques affines par morceaux du plan.

Proposition 5.6.19 *Si u_1 est une fonction affine, alors l'ordre d'accumulation de (X, T) est au plus* 1.

PREUVE : Nous allons montrer que pour tout entier k, la fonction $u_1 + h - h_k$ est s.c.s. Il en découle clairement que $u_2 = u_1$.

Soit k un entier fixé. Considérons une suite $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de mesures invariantes telle que $\lim_{n\to+\infty} \nu_n = \mu$ et $\lim_{n\to+\infty}(u_1 + h - h_k)(\nu_n) = \widetilde{u_1 + h - h_k}(\mu)$. Comme dans la preuve du théorème précédent, on peut supposer que pour tout $p \in \mathcal{P}(N)$, la suite $(\nu_n(p))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel noté λ_p pour $N = [\frac{1}{\epsilon}] + 1$. On écrit ν_n sous la forme :

$$\nu_n = \sum_{p\in\mathcal{P}(N)} \nu_n(p)\delta_p + (1 - \sum_{p\in\mathcal{P}(N)} \nu_n(p))\xi_n$$

avec ξ_n convergeant vers ξ, la mesure normalisée de $\mu - \sum_{p\in\mathcal{P}(N)} \lambda_p\delta_p$.

Dans la suite de la preuve, on choisit pour structure d'entropie une structure d'entropie affine à différences s.c.s. (par exemple $\mathcal{H}^{fun}$).

Les fonctions h et h_k étant d'une part affines et d'autre part nulles sur les mesures périodiques, on a :

$$\limsup_{n\to+\infty}(h - h_k)(\nu_n) \leq (1 - \sum_{p\in\mathcal{P}(N)} \lambda_p) \limsup_{n\to+\infty}(h - h_k)(\xi_n)$$

Soit $l > k$ un entier, on a par semi-continuité supérieure de $h_l - h_k$:

$$\limsup_{n\to+\infty}(h - h_k)(\nu_n) \quad \leq \quad (1 - \sum_{p\in\mathcal{P}(N)} \lambda_p)(\widetilde{h - h_l}(\xi) + (h_l - h_k)(\xi))$$

Soit en passant à la limite quand l tend vers $+\infty$:

$$\limsup_{n\to+\infty}(h - h_k)(\nu_n) \leq (1 - \sum_{p\in\mathcal{P}(N)} \lambda_p)(u_1(\xi) + (h - h_k)(\xi))$$

Enfin, la fonction u_1 étant affine :

$$\begin{aligned}
\widetilde{u_1 + h - h_k}(\mu) &\leq \limsup_{n\to+\infty} u_1(\nu_n) + \limsup_{n\to+\infty}(h - h_k)(\nu_n) \\
&\leq \left(\sum_{p\in\mathcal{P}(N)} \lambda_p\right) \limsup_{n\to+\infty} \sum_{p\in\mathcal{P}(N)} u_1\left(\frac{\sum_{p\in\mathcal{P}(N)} \nu_n(p)\delta_p}{\sum_{p\in\mathcal{P}(N)} \nu_n(p)}\right) \\
&\quad + \left(1 - \sum_{p\in\mathcal{P}(N)} \lambda_p\right) \limsup_{n\to+\infty} u_1(\xi_n) + \left(1 - \sum_{p\in\mathcal{P}(N)} \lambda_p\right)(u_1(\xi) + (h - h_k)(\xi))
\end{aligned}$$

D'après le Théorème 5.6.17 précédent, on a $u_1(\xi_n) \leq h_{sex}(\xi_n) \leq \sum_{p\in\mathcal{P}} \xi_n(p) h_{mult}(p)$. De plus $\xi_n(p) = 0$ pour tout $p \in \mathcal{P}(N)$. On a donc d'après le lemme 5.6.14 : $u_1(\xi_n) \leq \epsilon \log(2\sharp P)$.

Par semi-continuité supérieure puis par concavité de u_1, on obtient finalement :

$$\begin{aligned}
\widetilde{u_1 + h - h_k}(\mu) &\leq \left(\sum_{p\in\mathcal{P}(N)} \lambda_p\right) u_1\left(\frac{\sum_{p\in\mathcal{P}(N)} \lambda_p\delta_p}{\sum_{p\in\mathcal{P}(N)} \lambda_p}\right) + \left(1 - \sum_{p\in\mathcal{P}(N)} \lambda_p\right)(u_1(\xi) + (h - h_k)(\xi)) + \epsilon \log(2\sharp P) \\
&\leq u_1(\mu) + \left(1 - \sum_{p\in\mathcal{P}(N)} \lambda_p\right)(h - h_k)(\xi) + \epsilon \log(2\sharp P) \\
&\leq (u_1 + h - h_k)(\mu) + \epsilon \log(2\sharp P)
\end{aligned}$$

L'inégalité ci-dessus étant vraie pour tout $\epsilon > 0$, on en déduit que $u_1 + h - h_k$ est s.c.s.

□

Annexe A

Appendices

A.1 Dynamique symbolique associée à une partition

Soit X un espace métrique compact et P une partition de X. Soit T une application continue par morceaux relativement à P.

Définition A.1.1 *La dynamique symbolique induite par (X,T,P) est :*

$$\Sigma := \overline{\{A \in P^{\mathbb{Z}} : \exists x \in X \ \forall\ n \in \mathbb{N}\ T^n x \in A_n\}}$$

muni du décalage.

La dynamique symbolique induite par la partition (X,T,P) n'est pas en général une extension de (X,T).

On considère maintenant une suite raffinante de partitions $\mathcal{P} := (P_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Notons $\Sigma_k \subset P_k^{\mathbb{Z}}$ la dynamique symbolique associé à (X,T,P_k). La dynamique symbolique associée à la suite de partition $\mathcal{P}$ est le compact $\prod_{k\in\mathbb{N}}\Sigma_k \subset \prod_{k\in\mathbb{N}} P_k^{\mathbb{Z}}$ muni du décalage sur chaque coordonnée. L'application $\pi : (\prod_{k\in\mathbb{N}}\Sigma_k, \sigma) \to (X,T)$ donnée par $\pi((A_n^k)_{n\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{N}}) := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_0^k$ définit une extension de (X,T).

A.2 Extension naturelle

Rappelons comment est définie l'extension naturelle $(\overline{X},\overline{T})$ d'un système dynamique (X,T) est définie comme suit. Notons $Y := \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X^{\mathbb{Z}} \ :\ Tx_n = x_{n+1}\}$ et $\pi : Y \to X$ la projection définie par $\pi((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = x_0$. On munit Y de la métrique $\overline{d}((x_n)_{n\in\mathbb{Z}},(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{d(x_n,y_n)}{2^{|n|}}$. L'extension naturelle $\overline{T} : Y \to Y$ de (X,T) est le décalage : $\overline{T}((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$.

Théorème A.2.1 *L'extension naturelle induit un homémorphisme entre $M(X,T)$ et $M(\overline{X},\overline{T})$. De plus cette extension est principale.*

A.3 Théorème de Shanon-Macmillan-Breimann

Nous rappelons ici la version ergodique du théorème de Shanon-Mcmillan-Breiman [50] :

Théorème A.3.1 *Soit $(X,\mathbb{B},\mu)$ un espace mesuré, P une partition mesurable finie, et $T : X \to X$ une application mesurable ergodique. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, on note P_x^n l'élément de la partition itéré P^n contenant x. Alors pour μ presque tout $x \in X$,*

$$-\frac{1}{n}\log\mu(P_x^n) \to h(\mu,P)$$

Bibliographie

[1] R. L. Adler, A. G. Konheim, and M. H. McAndrew. Topological entropy. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 114 :309–319, 1965.

[2] Roy L. Adler. Symbolic dynamics and Markov partitions. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 35(1) :1–56, 1998.

[3] Lluís Alsedà, Jaume Llibre, and Michał Misiurewicz. *Combinatorial dynamics and entropy in dimension one*, volume 5 of *Advanced Series in Nonlinear Dynamics*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, second edition, 2000.

[4] L. Asimow and A. J. Ellis. *Convexity theory and its applications in functional analysis*, volume 16 of *London Mathematical Society Monographs*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], London, 1980.

[5] Saugata Basu, Richard Pollack, and Marie-Françoise Roy. *Algorithms in real algebraic geometry*, volume 10 of *Algorithms and Computation in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2006.

[6] Riccardo Benedetti and Jean-Jacques Risler. *Real algebraic and semi-algebraic sets*. Actualités Mathématiques. [Current Mathematical Topics]. Hermann, Paris, 1990.

[7] J. Bochnak, M. Coste, and M.-F. Roy. *Géométrie algébrique réelle*, volume 12 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[8] Christian Bonatti, Lorenzo J. Díaz, and Marcelo Viana. *Dynamics beyond uniform hyperbolicity*, volume 102 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 2005. A global geometric and probabilistic perspective, Mathematical Physics, III.

[9] Nicolas Bourbaki. *Theory of sets*. Elements of Mathematics (Berlin). Springer-Verlag, Berlin, 2004. Reprint of the 1968 English translation [Hermann, Paris ; MR0237342].

[10] Rufus Bowen. Markov partitions for Axiom A diffeomorphisms. *Amer. J. Math.*, 92 :725–747, 1970.

[11] Rufus Bowen. Entropy-expansive maps. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 164 :323–331, 1972.

[12] Mike Boyle and Tomasz Downarowicz. The entropy theory of symbolic extensions. *Invent. Math.*, 156(1) :119–161, 2004.

[13] Mike Boyle and Tomasz Downarowicz. Symbolic extension entropy : C^r examples, products and flows. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 16(2) :329–341, 2006.

[14] Mike Boyle, Doris Fiebig, and Ulf Fiebig. Residual entropy, conditional entropy and subshift covers. *Forum Math.*, 14(5) :713–757, 2002.

[15] M. Brin and A. Katok. On local entropy. In *Geometric dynamics (Rio de Janeiro, 1981)*, volume 1007 of *Lecture Notes in Math.*, pages 30–38. Springer, Berlin, 1983.

[16] D. Burguet. A direct proof of the tail variational principle and its extension to maps. *Ergodic Theory and Dynamical Systems, A paraître.*

[17] D. Burguet. An example of interval map with large sex entropy. *Preprint, arxiv*, 2008.

[18] D. Burguet. A proof of Yomdin-Gromov lemma. *Israel J. Math.*, 168 :291–316, 2008.

[19] J. Buzzi. PhD thesis, Université, 1995.

[20] J. Buzzi. Absolutely continuous invariant measures for generic multi-dimensional piecewise affine expanding maps. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 9(9) :1743–1750, 1999. Discrete dynamical systems.

[21] J. Buzzi. Maximal entropy measures for piecewise affine surface homeomorphisms. *Preprint, arxiv*, 2007.

[22] J. Buzzi. On entropy expanding maps. *Preprint CMLS*, 20O1.

[23] Jérôme Buzzi. Intrinsic ergodicity of smooth interval maps. *Israel J. Math.*, 100 :125–161, 1997.

[24] Jérôme Buzzi. Ergodicité intrinsèque de produits fibrés d'applications chaotiques unidimensionelles. *Bull. Soc. Math. France*, 126(1) :51–77, 1998.

[25] Gustave Choquet. *Lectures on analysis. Vol. II : Representation theory.* Edited by J. Marsden, T. Lance and S. Gelbart. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969.

[26] M. Coste. Ensembles semi-algébriques. *L.N.M.*, 1982.

[27] P. Dehornoy. *Logique et théorie des ensembles.* http ://www.math.unicaen.fr/ dehornoy/Surveys/DehornoyChap2.pdf, 2007.

[28] Manfred Denker, Christian Grillenberger, and Karl Sigmund. *Ergodic theory on compact spaces.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 527. Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[29] T. Downarowicz and Maass A. $\mathcal{C}^r$ interval maps have symbolic extensions. *Preprint.*

[30] Tomasz Downarowicz. Entropy of a symbolic extension of a dynamical system. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 21(4) :1051–1070, 2001.

[31] Tomasz Downarowicz. Entropy structure. *J. Anal. Math.*, 96 :57–116, 2005.

[32] Tomasz Downarowicz and Sheldon Newhouse. Symbolic extensions and smooth dynamical systems. *Invent. Math.*, 160(3) :453–499, 2005.

[33] Tomasz Downarowicz and Jacek Serafin. Possible entropy functions. *Israel J. Math.*, 135 :221–250, 2003.

[34] Gary Froyland, Oliver Junge, and Gunter Ochs. Rigorous computation of topological entropy with respect to a finite partition. *Phys. D*, 154(1-2) :68–84, 2001.

[35] M. Gromov. Entropy, homology and semialgebraic geometry. *Astérisque*, (145-146) :5, 225–240, 1987. Séminaire Bourbaki, Vol. 1985/86.

[36] M. Holz, K. Steffens, and E. Weitz. *Introduction to cardinal arithmetic.* Birkhäuser Advanced Texts : Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts : Basel Textbooks]. Birkhäuser Verlag, Basel, 1999.

[37] A. Katok. Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (51) :137–173, 1980.

[38] Serge Lang. *Algebra*, volume 211 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, third edition, 2002.

[39] F. Ledrappier. A variational principle for the topological conditional entropy. In *Ergodic theory (Proc. Conf., Math. Forschungsinst., Oberwolfach, 1978)*, volume 729 of *Lecture Notes in Math.*, pages 78–88. Springer, Berlin, 1979.

[40] Elon Lindenstrauss. Lowering topological entropy. *J. Anal. Math.*, 67 :231–267, 1995.

[41] Elon Lindenstrauss. Mean dimension, small entropy factors and an embedding theorem. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (89) :227–262 (2000), 1999.

[42] Elon Lindenstrauss and Benjamin Weiss. Mean topological dimension. *Israel J. Math.*, 115 :1–24, 2000.

[43] M. Misiurewicz. Diffeomorphism without any measure with maximal entropy. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 21 :903–910, 1973.

[44] M. Misiurewicz. A short proof of the variational principle for a Z_+^n action on a compact space. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 24(12) :1069–1075, 1976.

[45] Michał Misiurewicz. Topological conditional entropy. *Studia Math.*, 55(2) :175–200, 1976.

[46] Michał Misiurewicz. Horseshoes for mappings of the interval. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math.*, 27(2) :167–169, 1979.

[47] Sheldon E. Newhouse. Lectures on dynamical systems. In *Dynamical systems (C.I.M.E. Summer School, Bressanone, 1978)*, volume 8 of *Progr. Math.*, pages 1–114. Birkhäuser Boston, Mass., 1980.

[48] Sheldon E. Newhouse. Continuity properties of entropy. *Ann. of Math. (2)*, 129(2) :215–235, 1989.

[49] M.J. Pacifico and J.L. Vieitez. Entropy-expansiveness and domination for surface diffeomorphisms. *Revista Matematica Complutense*, 2008.

[50] William Parry. *Entropy and generators in ergodic theory.* W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969.

[51] Robert R. Phelps. *Lectures on Choquet's theorem*, volume 1757 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2001.

[52] J. Pila and A. J. Wilkie. The rational points of a definable set. *Duke Math. J.*, 133(3) :591–616, 2006.

[53] Rodolphe Ramanakoraisina. Complexité des fonctions de Nash. *Comm. Algebra*, 17(6) :1395–1406, 1989.

[54] S. Ruette. *Chaos for continuous interval maps - a survey of relationship between the various sorts of chaos.* Preprint, http ://www.math.u-psud.fr/ ruette/articles/chaos-int.pdf.

[55] Sylvie Ruette. Mixing C^r maps of the interval without maximal measure. *Israel J. Math.*, 127 :253–277, 2002.

[56] Robert J. Walker. *Algebraic curves.* Springer-Verlag, New York, 1978. Reprint of the 1950 edition.

[57] Peter Walters. *An introduction to ergodic theory*, volume 79 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1982.

[58] Y. Yomdin. C^k-resolution of semialgebraic mappings. Addendum to : "Volume growth and entropy". *Israel J. Math.*, 57(3) :301–317, 1987.

[59] Y. Yomdin. Volume growth and entropy. *Israel J. Math.*, 57(3) :285–300, 1987.

[60] Yosef Yomdin and Georges Comte. *Tame geometry with application in smooth analysis*, volume 1834 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, 2004.

Index

application $\mathcal{C}^r$ unitaire, 104
asymptotiquement h-expansif, 51

barycentre, 39

candidat, 21
candidat d'entropie, 65
capacité orbitale, 56
cellules, 113
compactification d'une suite de candidats, 30

degré fonctionnel d'une fonction semi-algébrique, 98
degré d'un ensemble semi-algébrique (d'une fonction semi-algébrique), 84
dynamique affine par morceaux, 144
dynamique par morceaux, 144
dynamique symbolique, 153

ensemble semi-algébrique, 84
ensembles (n, ϵ) couvrants, 47
ensembles (n, ϵ) séparés, 48
entropie k dimensionnelle, 55
entropie combinatoire, 60
entropie combinatoire conditionnelle, 61
entropie conditionnelle mesurée, 49
entropie d'extension symbolique, 122
entropie de multiplicité, 143
entropie de queue, 49
entropie mesurée, 48
entropie topologique, 46
enveloppe semi-continue supérieure, 20
équivalence de deux candidats, 36
extension, 120
extension principale, 59
extension symbolique, 120

fer à cheval, 53
fonction de Nash, 84
fonction harmonique (sous-., sur-.), 39
fonction projetée par une surjection, 20
fonction relevée par une surjection, 20
fonction semi-algébrique, 84
fonction semi-continue supérieurement, 18

intersection, tangence homocline, 128

multiplicité, 143

ordinal indécomposable, 29
ordinal limite, 23
ordinal successeur, 23
ordre d'accumulation d'un candidat, 26
ordre d'accumulation de (X, T), 73
ordre d'accumulation topologique, 28

partitions essentielles, 58
partitions topologiques, 59
produit et puissance de candidats, 31
prolongement affine (ou harmonique), 40

quasi-linear (linear) horseshoe, 128

relevé d'un candidat, 34
restriction d'un candidat, 34

simplexe de Bauer, 40
simplexe de Choquet, 39
sous-décalage (symbolique), 120
structure d'entropie, 73
suite raffinante de partitions, 48
suite transfinie associée à un candidat, 23
superenveloppe d'un candidat, 21

Titre Entropie des systèmes dynamiques différentiables

Dans ce travail nous nous intéressons aux systèmes dynamiques du point de vue de l'entropie.

Nous rappellons tout d'abord le formalisme des strutures d'entropie introduit par T.Downarowicz. Dans ce cadre on donne en particulier une preuve élémentaire du principe variationnel pour l'entropie de queue et on généralise certaines structures d'entropie aux endomorphismes.

Dans un deuxième temps, nous reprenons l'approche semi-algébrique de Y. Yomdin et M. Gromov pour contrôler la dynamique locale des applications de classe $\mathcal{C}^r$. On présente une preuve complète du lemme algébrique de Gromov, qui est un point clé de la théorie de Yomdin. Aussi nous déduisons de nouvelles applications dynamiques de cette théorie : d'une part nous bornons l'entropie de queue mesurée en fonction de l'exposant de Lyapounov ; d'autre part nous généralisons une formule due à J.Buzzi pour l'entropie k-dimensionnelle d'un produit d'applications de classe $\mathcal{C}^\infty$.

On s'intéresse enfin à la théorie des extensions symboliques due à M.Boyle et T.Downarowicz pour les applications $\mathcal{C}^r$ et affines par morceaux du plan. On exhibe en particulier des exemples de dynamique $\mathcal{C}^r$ de l'intervalle ayant une grande entropie d'extension symbolique. Nous donnerons aussi une borne de l'entropie d'extensions symboliques pour les applications affines par morceaux du plan.

Mots clés :
entropie, extensions symboliques, géométrie semi-algébrique

Title

Key words :
entropy structure, symbolic extension, semi-algebraic geometry