

Identification de paramètres élastoplastiques par des essais statiquement indéterminés : mise en oeuvre expérimentale et validation de la méthode des champs virtuels

Yannick Pannier

▶ **To cite this version:**

Yannick Pannier. Identification de paramètres élastoplastiques par des essais statiquement indéterminés : mise en oeuvre expérimentale et validation de la méthode des champs virtuels. Mécanique [physics.med-ph]. Arts et Métiers ParisTech, 2006. Français. NNT : 2006ENAM0026 . tel-00351682

HAL Id: tel-00351682
https://pastel.hal.science/tel-00351682

Submitted on 9 Jan 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 2006-26 ÉCOLE DOCTORALE 432

École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers
Centre de Châlons-en-Champagne

THÈSE

présentée pour obtenir le titre de

DOCTEUR
de
L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE D'ARTS ET MÉTIERS

Spécialité : Mécanique

par

Yannick PANNIER

Identification de paramètres élastoplastiques par des essais statiquement indéterminés : mise en oeuvre expérimentale et validation de la méthode des champs virtuels

---

soutenue le 26 septembre 2006 devant le jury composé de

Rapporteurs :	M. FRANÇOIS	Professeur, Université de Technologie de Troyes
	F. HILD	Directeur de Recherche CNRS, LMT-ENS de Cachan
Examinateurs :	M. GASPÉRINI	Professeur, Université Paris 13
	M. GRÉDIAC	Professeur, Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand
	F. PIERRON	Professeur, ENSAM de Châlons-en-Champagne
	R. ROTINAT	Maître de Conférences, ENSAM de Châlons-en-Champagne
Invité :	S. AVRIL	Maître de Conférences, ENSAM de Châlons-en-Champagne

---

L'ENSAM est un Grand Établissement dépendant du Ministère de l'Éducation Nationale, composé de huit centres :
AIX-EN-PROVENCE ANGERS BORDEAUX CHÂLONS-EN-CHAMPAGNE CLUNY LILLE METZ PARIS

Remerciements

Cette thèse a été rendue possible grâce au soutien de plusieurs personnes et institutions que je souhaiterais remercier à travers ces quelques lignes.

Je suis très reconnaissant envers la région Champagne-Ardenne pour avoir soutenu financièrement ce projet et envers le centre d'enseignement et de recherche de l'ENSAM de Châlons-en-Champagne pour avoir permis le déroulement de cette thèse dans d'excellentes conditions.

Je remercie vivement Madame Monique GASPÉRINI, professeur à l'université de Paris XIII pour m'avoir fait l'honneur de présider ce jury. Que messieurs François HILD, directeur de recherche CNRS à l'ENS de Cachan et Manuel FRANÇOIS, professeur à l'université de technologie de Troyes soient assurés de ma sincère considération pour avoir accepté de rapporter ce travail. Monsieur Michel Grédiac, professeur à l'université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand est particulièrement remercié pour avoir accepté d'examiner cette thèse et avoir manifesté un intérêt constant pour ce travail. Je souhaite ensuite exprimer ma profonde gratitude à Monsieur Fabrice PIERRON, professeur à l'ENSAM de Châlons en Champagne, pour m'avoir accordé sa confiance et avoir dirigé cette thèse avec clairvoyance. Monsieur René ROTINAT, maître de conférence à l'ENSAM de Châlons en Champagne, est également remercié pour m'avoir apporté son soutien et son expérience durant la thèse. Je remercie chaleureusement Monsieur Stéphane AVRIL, maître de conférence à l'ENSAM de Châlons en Champagne, pour sa très grande disponibilité et son concours permanent durant ces dernières années. Que Mademoiselle Anne HUGUET, enseignante à l'ENSAM de Châlons en Champagne, soit assurée de ma reconnaissance pour avoir contribué à la réussite de ce travail. Je remercie également les techniciens du centre ENSAM de Chalons en Champagne, messieurs Abdel BOUZID, Denis COLOMBI, Joël DLEVAQUE, et Cédric PERSON sans qui ce travail expérimental n'aurait pu avoir lieu. Merci également à Monsieur Philippe SEITIER, enseignant à l'ENSAM de Châlons en Champagne pour m'avoir apporté son aide précieuse.

Je terminerais en exprimant la très grande amitié qui me lie aux personnes qui ont rendu ce périple châlonnais innoubliable, Hocine, Régine, Patrick, Stéphane, BaoQuiao, José, GianLuca, Edoardo, Dominique, Larbi, Anne, Anne-Laure, Martine, Magalie, Laetitia, Sylvie et Florence.

Table des matières

Introduction générale **V**

1 Identification de lois élastoplastiques de métaux à partir d'essais statiquement indéterminés **1**

1.1 Introduction . . . 1
1.2 Essais statiquement déterminés . . . 2
1.3 Essais statiquement indéterminés . . . 6
1.4 Approches par mesures de champs . . . 11
1.5 Évaluation des mesures de champs . . . 16
1.6 Conclusion . . . 17

2 Cadre de travail : le comportement mécanique des matériaux métalliques au-delà de leur limite d'élasticité **19**

2.1 Introduction . . . 19
2.2 Modélisation . . . 19
2.2.1 Relations de comportement . . . 20
2.2.1.1 Loi de Hooke : élasticité linéaire isotrope . . . 21
2.2.1.2 Élastoplasticité isotrope . . . 22
2.2.1.3 Modèle de Voce . . . 26
2.3 Identification des paramètres du modèle . . . 27
2.3.1 Essai de traction normalisé . . . 27
2.3.2 Résultats . . . 28

3 Identification de lois élastoplastiques par la méthode des champs virtuels **31**

3.1 Introduction . . . 31
3.2 Identification des paramètres élastiques . . . 33
3.3 Identification des paramètres plastiques . . . 36
3.3.1 Cas uniaxial . . . 37
3.3.1.1 Calcul des contraintes uniaxiales . . . 37
3.3.1.2 Procédure d'identification . . . 41
3.3.2 Cas multiaxial . . . 43
3.3.2.1 Calcul des contraintes 2D . . . 43
3.3.2.2 Procédure d'identification . . . 47

4 Mesure des champs de déformation plane **51**
4.1 Introduction . . . 51
4.1.1 Classement des méthodes . . . 51
4.1.2 Choix d'une technique . . . 53
4.2 Principe de la méthode de grille . . . 54
4.2.1 Obtention des grilles . . . 54
4.2.2 Aspects géométriques . . . 55
4.2.3 Démodulation de la phase . . . 57
4.2.4 Sélection de pixels valides . . . 59
4.2.5 Région d'intérêt et problèmes de bords . . . 59
4.3 Calcul des déformations . . . 59
4.3.1 Lissage et dérivation . . . 60
4.3.2 Déplacements hors-plan . . . 61

5 Application à un essai uniaxial hétérogène **65**
5.1 Introduction . . . 65
5.2 Simulation de l'essai . . . 65
5.3 Ré-identification des paramètres de la simulation . . . 67
5.3.1 Paramètres élastiques . . . 68
5.3.2 Paramètres plastiques : Modèle de Voce . . . 70
5.4 Résultats expérimentaux . . . 76
5.4.1 Présentation de l'essai . . . 76
5.4.2 Champs mesurés . . . 81
5.4.3 Paramètres élastiques . . . 81
5.4.4 Paramètres plastiques . . . 82
5.5 Discussion . . . 86
5.5.1 Influence des paramètres initiaux . . . 86
5.5.2 Influence du degré du polynôme . . . 87
5.5.3 Influence du choix des champs virtuels . . . 87
5.6 Conclusion . . . 89

6 Application à un essai multiaxial hétérogène **91**
6.1 Introduction . . . 91
6.2 Éprouvettes bi-entaillées . . . 91
6.3 Validation numérique . . . 93
6.3.1 Identification des paramètres élastiques . . . 97
6.3.2 Identification des paramètres plastiques . . . 99
6.4 Validation expérimentale . . . 104
6.4.1 Identification des paramètres élastiques . . . 105
6.4.2 Identification des paramètres plastiques . . . 110

6.5 Discussion des résultats 111
6.5.1 Influence du lissage 115
6.5.2 Influence du choix des champs 116
6.5.3 Choix du modèle 122
6.6 conclusion 123

7 Conclusion générale **125**

Bibliographie **129**

Introduction générale

La caractérisation fine du comportement mécanique des métaux au delà de leur limite d'élasticité constitue une étape préliminaire indispensable à la simulation du comportement de structures en service ou de procédés de mise en forme, notamment parce que les matériaux sont de plus en plus optimisés du point de vue des performances comme lors de l'utilisation de composites à matrices métalliques.

Les essais de caractérisation classiquement utilisés posent des problèmes d'identifiabilité. D'une part, la multiplication des essais est source de dispersion (voir par exemple Harth et al. 2004). Elle présente des contraintes liées à l'approvisionnement de matière et à la durée des essais. D'autre part, ces essais ne sont pas adaptés aux matériaux structuraux, comme ceux possèdant plusieurs couches (les matériaux de rechargement de matrices de forgeage déposés par fusion-soudage par exemple). Dans ce cas, l'impossibilité de concevoir un essai à champs de contrainte homogènes nécessite de pouvoir mesurer les champs de localisation de la plasticité.

En revanche, l'exploitation d'essais à champs hétérogènes permet d'identifier plusieurs paramètres à partir d'un seul essai, ce qui présente un avantage pour caractériser le comportement de matériaux hétérogènes ou anisotropes. Dans ce contexte, l'utilisation d'essais mécaniques statiquement indéterminés (qui n'offrent pas de solution analytique simple) s'avère intéressante car elle permet de concevoir des essais représentatifs du comportement étudié.

La détermination de paramètres pilotant une loi de comportement à partir d'une réponse mécanique mesurée au cours d'un essai statiquement indéterminé constitue un problème inverse. Pour traiter ce problème, il est nécessaire de mettre en oeuvre des techniques de mesure et de résolution adaptées. Les mesures de champ cinématique constituent une information très riche (des milliers voir des millions de points de mesure) et permettent la caractérisation des mécanismes mis en oeuvre lors d'un essai complexe. Une approche pour résoudre le problème inverse et tirer parti des mesures de champ fait appel à la méthode de champs virtuels (MCV, Grédiac 1989).

La MCV a déjà été appliquée pour identifier les paramètres de lois de comportement linéaire (voir chapitre 3). Cette méthode a fait l'objet de nombreux développements afin d'améliorer sa stabilité et sa fiabilité (Grédiac et al. 2002a,b; Avril et al. 2004a). Elle ne fait pas appel à une modélisation par éléments finis de l'essai mécanique traité ce qui présente certains avantages par rapport aux approches basées sur le recalage de ce type de modèle. La MCV a récemment été étendue pour pouvoir traiter l'élastoplasticité (Grédiac et Pierron 2006). Il s'agissait d'une première application à une loi d'écrouissage simple à partir de données simulées. Des développements étaient encore nécessaires pour une application expérimentale et une extension à des lois d'écrouissage plus complexes.

L'objectif de ce travail est de mettre en oeuvre la MCV expérimentalement et d'étudier les paramètres

importants qui influencent le processus d'identification. De nombreux aspects doivent être considérés dans la chaîne qui va des mesures aux paramètres identifiés. Les travaux présentés ici constituent une approche préliminaire en vue d'étendre cette méthode aux comportements élastoplastiques complexes qui ont motivé cette démarche.

Le chapitre 1 présente une revue bibliographique sur l'identification de paramètres pilotant des lois élastoplastiques à partir d'essais statiquement indéterminés et situe ce travail par rapport à d'autres approches. Le chapitre 2 rappelle les équations mathématiques qui régissent la loi de comportement utilisée pour modéliser la réponse mécanique du matériau métallique étudié. Des essais mécaniques de traction uniaxiale ont été réalisés afin de constituer une base de référence pour l'approche par MCV proposée. Le chapitre 3 présente en détails la méthode des champs virtuels appliquée à l'identification des paramètres élastoplastiques ainsi que l'algorithme de calcul des contraintes utilisé. Ensuite, le chapitre 4 expose la technique de mesure de champ cinématique et les différentes étapes de post-traitements nécessaires à une exploitation quantitative des données. Les deux chapitres suivants présentent deux applications expérimentales. La première concerne un essai offrant un état de contrainte quasiment uniaxial dans le but de valider la méthode sur un cas plus simple. La seconde est un essai pleinement multiaxial basé sur la traction d'une éprouvette plane bi-entaillée. Le manuscrit s'achève par une conclusion sur la méthode et les résultats obtenus et offre quelques perspectives sur les développements à venir.

1 Identification de lois élastoplastiques de métaux à partir d'essais statiquement indéterminés

1.1 Introduction

Les simulations par éléments finis du comportement de structures métalliques soumises à des sollicitations diverses nécessitent la connaissance du comportement élastoplastique de ces matériaux. Les applications de ces simulations concernent notamment l'étude de tenue en service de structures métalliques ou des procédés de formage de métaux.

De nombreux travaux ont été menés afin de proposer des méthodes efficaces pour caractériser le comportement élastoplastique des métaux. Les méthodes classiques basées sur la réalisation d'essais statiquement déterminés présentent certaines limites. La caractérisation de comportements élastoplastiques hétérogènes, anisotropes, ou en grandes déformations est difficilement réalisable avec ce type d'essais.

Quelques auteurs (Gelin, Ghouati, et Shahani (1994); Gavrus, Massoni, et Chenot (1996); Mahnken et Stein (1997); Ghouati et Gelin (1998); Yoshida, Urabe, et Toropov (1998); Tillier (1998); Niclas et Bourgeois (2000); Ghouati et Gelin (2001); Yoshida, Uemori, et Fujiwara (2001); Szeliga, Matuszyk, Kuziak, et Pietrzyk (2002); Yoshida, Urabeb, Hinoa, et Toropov (2003); Diot, Gavrus, Guines, et Ragneau (2003)) ont d'abord proposé d'étendre le domaine de validité des essais standards. Leur approche est basée sur le recalage d'une réponse mesurée et d'une réponse issue d'une simulation par éléments finis. Cette approche permet de prendre en compte certains effets de structure ou du matériau qui remettent en cause les hypothèses avancées pour interpréter analytiquement ces essais.

En poussant encore plus loin cette idée, plusieurs auteurs (Mahnken et Stein (1996b, 1997); Mahnken (1999, 2000); Aoki et al. (1997); Meuwissen et al. (1998); Meuwissen (1998); Kajberg et al. (2004)) ont proposé de l'appliquer à des essais statiquement indéterminés plus originaux. Cette approche permet de mettre en oeuvre des essais plus fortement hétérogènes dont la réponse mécanique est plus riche que celle des essais classiques. Une infinité de configurations est alors envisageable. Selon les cas, le type de réponse mesurée diffère. Les premiers travaux concernaient essentiellement des mesures globales, comme l'effort appliqué ou le déplacement d'ensemble de l'éprouvette ainsi que quelques mesures locales (souvent par jauges de déformation).

Lorsque les techniques de mesures de champs ont commencé à se répandre, les réponses mesurées se sont étendues aux champs de déplacement sur une partie de l'éprouvette. La richesse de ces informations a nécessité l'élaboration de procédures efficaces de minimisation pour résoudre le problème inverse posé.

La technique employée consiste à minimiser l'écart entre une grandeur issue d'un calcul par éléments finis et cette même grandeur mesurée. Comme le calcul direct est coûteux en temps de calculs, de nombreux travaux concernent l'amélioration de la procédure de minimisation (voir Hisada (1995); Okada et al. (1999) par exemple).

Des alternatives aux procédures de recalage par éléments finis pour traiter les essais statiquement indéterminés existent, principalement dans le cas de l'élasticité linéaire (Geymonat et Pagano (2002); Grediac et Pierron (2002); Bonnet et al. (2003); Bonnet et Constantinescu (2005)), mais assez peu ont été appliquées au cas de lois non linéaires (Claire et al. (2002); Chalal et al. (2004b)). La méthode des champs virtuels (MCV) a récemment été étendue pour pouvoir traiter l'élastoplasticité par Grédiac et Pierron (2006). Cette méthode tire avantageusement partie des mesure de champs cinématiques mais nécessite encore des développements avant de pouvoir identifier de manière robuste les paramètres de lois non linéaires.

La section suivante présente quelques essais classiquement mis en oeuvre pour caractériser le comportement élastoplastique de métaux et présente les limites auxquels ils sont soumis. Ensuite la section 1.3 expose quelques approches basées sur l'utilisation d'essais statiquement indéterminés et introduit naturellement la section 1.4 qui montre l'intérêt des mesures de champ cinématique dans ce contexte. Enfin un dernier paragraphe avant de conclure rappelle l'importance de l'évaluation des performances des systèmes de mesure de champ.

1.2 Essais statiquement déterminés

L'identification de paramètres pilotant des lois de comportement élastoplastique repose sur la réalisation d'essais mécaniques adaptés aux lois étudiées. Les grandeurs mesurées sont généralement la force et le déplacement qui ne sont pas les grandeurs directement utilisées dans les lois de comportement. Il est donc nécessaire de les convertir en contraintes et déformations. Habituellement, cette conversion repose sur l'hypothèse que la répartition spatiale du champ de contrainte dans une partie des éprouvettes testées est connue *a priori*. De tels essais sont dits *statiquement déterminés* et il existe parfois une solution analytique permettant de relier les efforts appliqués à l'état de contrainte dans une zone de l'éprouvette.

L'exemple le plus simple et le plus utilisé est l'essai de traction uniaxiale sur éprouvettes axisymétriques ou prismatiques dans lequel les états de contrainte et de déformation sont supposés homogènes. La contrainte uniaxiale dans l'éprouvette est estimée à partir de l'effort appliqué divisé par la section de l'éprouvette et la déformation moyenne est mesurée à l'aide d'une extensomètrie locale. Cet essai est régi par des normes (françaises AFNOR NF EN 10002-1 à 10002-5, américaines ASTM E8M-96, ou internationales ISO 6892) qui définissent précisément la conduite de ces essais afin d'écarter les nombreuses sources possibles d'erreurs. L'alignement des axes d'amarrage de l'éprouvette doit ainsi être contrôlé pour assurer une sollicitation de traction pure. Les dimensions et les tolérances géométriques des éprouvettes sont définies de manière à obtenir un état de contrainte uniaxial dans la partie utile de l'éprouvette, etc... Toutes ces précautions ont pour but de garantir un résultat conforme aux hypothèses qui sont faites pour interpréter les courbes force-déplacement. Mais l'hypothèse d'homogénéité n'est

plus valable lorsque la plasticité localise et que le phénomène de striction se manifeste. Différentes méthodes ont été développées (voir par exemple Bridgman 1952; Zhang et al. 1999, 2001) pour prendre en compte et corriger le phénomène de striction et ainsi étendre le domaine de validité de l'essai normalisé.

D'autres essais homogènes sont utilisés pour caractériser les métaux. L'essai de compression sur lopins cylindriques permet de caractériser le comportement plastique en compression qui peut être différent du comportement en traction pour certains matériaux comme les mousses métalliques (voir Dillard 2004), les fontes ou les polymères (Tillier 1998). Théoriquement, l'essai est simple à réaliser puisqu'il suffit de placer l'éprouvette cylindrique entre les deux plateaux d'une presse. En pratique, il présente un certain nombre de difficultés. Les plans d'appuis doivent notamment être parallèles et garantir l'unixialité des efforts. Ensuite, il est difficile de s'affranchir de l'hétérogénéité des déformations due aux frottements des surfaces en contact, provoquant ainsi la forme en tonneau caractéristique des essais de compression. Des moyens existent pour limiter les frottements, notamment en lubrifiant le contact ou en adaptant la forme des éprouvettes.

L'essai de torsion sur tubes minces constitue également un essai où l'état de contrainte supposé homogène est directement relié aux efforts appliqués. Cependant, l'échauffement de l'éprouvette lié à la plasticité engendre la localisation des déformations et met en défaut l'hypothèse d'homogénéité (Gavrus et al. 1996).

Certains comportements élastoplastiques nécessitent également la réalisation d'essais multiaxiaux coûteux afin de prédire les formes particulières des critères de plasticité. Pour pouvoir être interprétés analytiquement, ces essais doivent aussi être statiquement déterminés. Et les montages conçus rivalisent d'ingéniosité et de complexité pour aboutir à un état de contrainte homogène dans une partie de l'éprouvette (voir par exemple Calloch (1997); Rauch (1998); Zouani et al. (1999); Pijlman (2001); Kuwabara et al. (2000)). La figure 1.1 présente quelques montages réalisés à partir d'un système de sollicitation uniaxial ou biaxial. Zouani et al. (1999) proposent un montage de sollicitations biaxiales pour étudier la fatigue de matériaux métalliques à partir d'une simple machine de traction. Il est basé sur la traction-compression d'un disque ayant un profil de section particulier. Les essais sont analysés à l'aide de mesures locales (4 points) avec jauges (radiales et tangentielles) et solution analytique.

Kuwabara et al. (2000) utilisent un dispositif de traction biaxiale pour solliciter une éprouvette cruciforme (voir figure 1.2). Les déformations sont mesurées à l'aide d'une jauge de déformation biaxiale placée au centre de l'éprouvette. Ce dispositif a permis de réaliser des trajets de chargement particuliers avec des changements de direction abruptes. Les surfaces de charges de métaux ont ainsi pu être identifiées dans différentes situations (Kuwabara et al. 2000, 2002. La complexité du dispositif de traction et de l'éprouvette (rainures dans les bras de l'éprouvette pour garantir un état de contrainte uniforme au centre de l'éprouvette) illustre la complexité de ce type d'essais. Ce même dispositif, ainsi que des essais de traction uniaxial est utilisé par Banabic et al. (2003) afin d'identifier les sept coefficients d'un critère d'écoulement non-quadratique.

Une autre difficulté vient s'ajouter lors de l'utilisation d'essais statiquement déterminés. Les modèles décrivant le comportement élastoplastique, viscoplastique et/ou anisotrope de certains matériaux sont pilotés par plusieurs paramètres qui ne peuvent pas toujours être identifiés directement à partir d'un seul

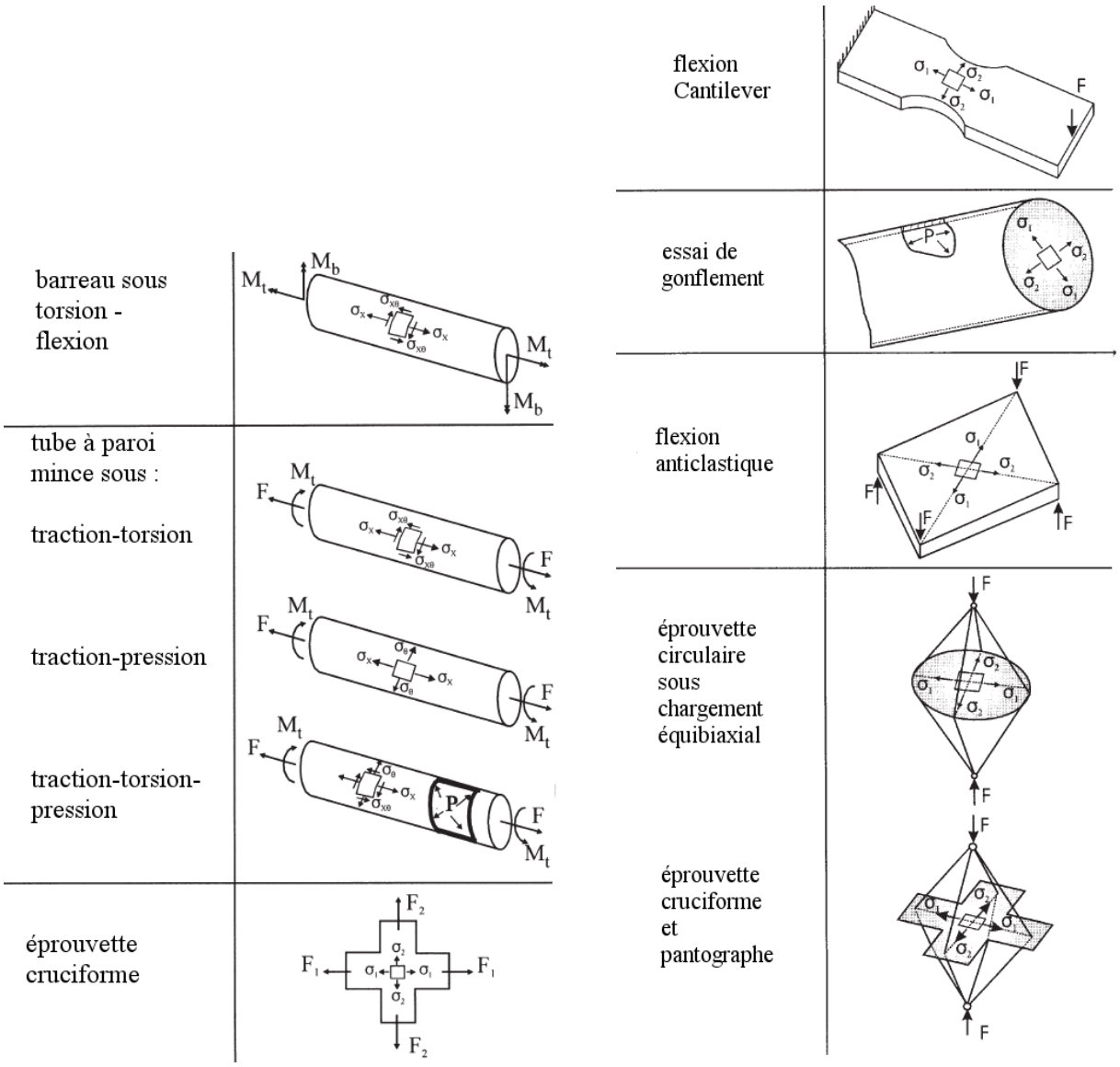


FIG. 1.1: Différents essais biaxiaux. (a) : basés sur un système de sollicitations à deux axes ou plus. (b) : basés sur un système de sollicitation uniaxial. (D'après Zouani et al. (1999))

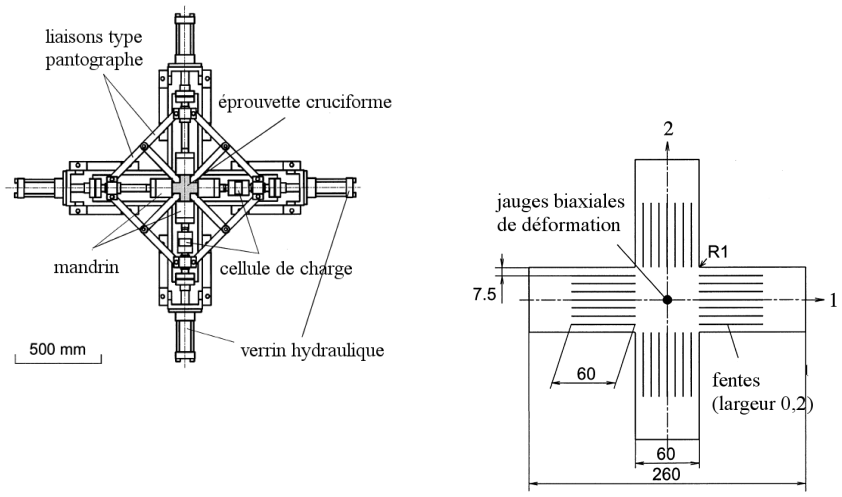


FIG. 1.2: Dispositif de traction biaxiale et éprouvette cruciforme (Kuwabara et al. (2000)).

type d'essai. Ils sont en fait identifiés implicitement à partir d'un ensemble de données issues de différents essais. Une stratégie d'identification adaptée doit alors être développée pour réaliser une identification efficace. De telles stratégies sont souvent basées sur la minimisation d'une fonction coût construite à partir de l'écart quadratique entre un ensemble de données mesurées (déplacements, déformations ...) et ces mêmes données issues de simulations numériques (Mahnken et Stein (1996a); Mahnken (1999); Bruhns et Anding (1999); Yoshida et al. (2003); Harth et al. (2004)). La réalisation de multiples essais conduit à un accroissement de la dispersion des résultats provenant à la fois de la dispersion des propriétés du matériau dans un même lot et des erreurs de mesure. De plus, le coût d'une campagne d'essais est directement lié au nombre d'essais, sans compter les contraintes qui peuvent exister sur le prélèvement de la matière. Un compromis doit donc être trouvé. Harth et al. (2004) ont conduit une étude sur un nombre important d'essais afin de déterminer une combinaison optimale d'essais qui permette d'identifier au mieux les paramètres recherchés. Dans ces travaux, les données issues de onze essais différents ont été introduites dans un processus de minimisation afin d'identifier les neuf paramètres de la loi de comportement considérée. L'introduction de perturbations stochastiques dans le processus de minimisation a permis de déterminer un jeu optimal d'essai, dont le nombre a alors été réduit à cinq.

Enfin, il faut souligner que le comportement des matériaux hétérogènes ne permet pas la réalisation d'essais homogènes. Cela concerne les métaux obtenus en fonderie, par rechargement, ou encore les liaisons soudées. Ces matériaux présentent des gradients de propriétés dus notamment à des vitesses de refroidissement différentes à coeur et en surface. Dans ce cas, une analyse locale du comportement est nécessaire.

Une alternative aux essais homogènes consiste à réaliser des essais mécaniques conduisant à des états de contrainte non uniformes, avec l'idée d'identifier plusieurs paramètres à partir d'un seul essai. Une des

premières applications de cette idée à l'élastoplasticité est d'utiliser des essais de flexion pour identifier le comportement en traction et compression (voir Laws 1981; Mayville et Finnie 1982; Brunet et al. 2001; Zhao et Lee 2004 par exemple). Mais là encore, la forme du champ de contrainte est influencée par les conditions aux limites (forme des appuis, forme du poinçon utilisé pour appliquer l'effort vertical, frottements, etc.), ce qui se répercute sur la valeur des paramètres identifiés.

Il découle de ce qui précède que les essais statiquement déterminés présentent plusieurs limites :

1. leur interprétation est soumise à des conditions très strictes de déroulement de l'essai ;
2. ils ne permettent pas toujours d'activer pleinement les paramètres des lois de comportement ;
3. l'augmentation du nombre d'essais pour caractériser certaines lois favorise la dispersion des résultats ;
4. la mise en oeuvre d'essais multiaxiaux homogènes peut s'avérer délicate et très coûteuse.

Toutes ces raisons ont conduits de nombreux auteurs à proposer des approches alternatives fondées sur l'utilisation d'essais statiquement indéterminés, qui font l'objet des paragraphes suivants.

1.3 Essais statiquement indéterminés

Un essai est dit *statiquement indéterminé* lorsque la distribution des contraintes dans l'éprouvette est inconnue *a priori*. Il peut s'agir d'un essai standard (comme ceux décrits précédemment) pour lequel l'état de contrainte n'est pas celui qui était attendu. Les raisons peuvent être une mauvaise maîtrise des conditions aux limites (déplacement imposé, force de réaction) due à des glissements, des frottements, ou encore à un mauvais alignement des axes de l'éprouvette avec les directions de chargement. Les phénomènes de localisation rencontrés en plasticité peuvent également entraîner une redistribution de l'état de contrainte, la striction d'une éprouvette de traction au delà d'un certain seuil de contrainte en est un exemple. Un essai statiquement indéterminé désigne aussi un essai initialement conçu pour produire un état de contrainte complexe qui ne possède pas de solution analytique. Dans ce cas, la forme de l'éprouvette et les sollicitations sont choisies arbitrairement en fonction du comportement étudié. La grande différence avec l'approche classique est que l'essai n'est plus tenu d'être homogène. Au contraire, l'hétérogénéité est recherchée puisque il est impossible d'obtenir un état de contrainte homogène pour certains matériaux hétérogènes. L'inconvénient est que l'essai est plus difficile à interpréter, puisque l'écart entre le modèle et l'expérience ne peut pas être visualisé simplement sur une courbe contrainte-déformation. En revanche, les champs de déformation hétérogènes contiennent davantage d'informations que les champs homogènes, ce qui rend possible une détermination plus efficace des paramètres ainsi qu'une conception optimisée de essais. Un essai hétérogène permet également d'activer des mécanismes qui ne seraient pas ou peu activés lors d'un essai homogène. En outre, des essais *in-situ* ou proches des conditions d'utilisation du matériau peuvent être envisagés. Pour pouvoir traiter de tels essais, une stratégie adaptée doit être mise en place.

Le problème posé consiste à déterminer la valeur des paramètres qui pilotent un modèle mathématique supposé décrire le comportement du matériau étudié à partir de la réponse mécanique d'un essai stati-

	Problème direct		Problème inverse	
	connu	inconnu	connu	inconnu
Loi de comportement	*			*
Conditions aux limites	*		*	
Grandeurs cinématiques		*	*	

TAB. 1.1: Problème direct et problème inverse en mécanique.

quement indéterminé. Il s'agit là d'un problème inverse dont une procédure de résolution possible est la suivante :

1. Un algorithme de calcul efficace doit permettre de résoudre le problème aux valeurs limites posé, à savoir celui d'une éprouvette de forme arbitraire soumise à un système arbitraire d'efforts. Le comportement du matériau est décrit par un modèle pour lequel un jeu de valeurs initiales des paramètres est donné. La méthode des éléments finis est un des outils permettant de résoudre le problème direct, mais d'autres outils existent. Le tableau 1.1 situe le problème inverse posé par rapport au problème direct.
2. Un certain nombre de grandeurs physiques (déplacement, force, moment, courbure, etc) représentatives du comportement étudié et de l'essai réalisé, doivent être mesurées. La nature globale ou locale de ces mesures dépend des hypothèses avancées pour interpréter l'essai et résoudre le problème inverse.
3. Une méthode doit être mise en place afin de confronter les résultats expérimentaux à la modélisation numérique de l'essai et pour déterminer les paramètres du modèle à partir de ces données. Si le calcul direct est long, cette méthode devra converger rapidement vers les paramètres recherchés.

Le diagramme 1.3 présente le fonctionnement général d'une méthode d'identification par recalage. Il fait apparaître un processus itératif basé sur un jeu de valeurs initiales des paramètres recherchés. Ce jeu de valeurs permet de résoudre le problème direct à l'aide d'une modélisation mathématique de l'essai et de construire une fonction coût traduisant l'écart entre les grandeurs calculées et les grandeurs mesurées. Une procédure est alors mise en place afin de trouver les paramètres qui minimisent cet écart.

L'approche la plus utilisée consiste à réaliser une modélisation de type éléments finis de l'essai puis à minimiser l'écart entre la réponse du modèle et la réponse mesurée expérimentalement en fonction des paramètres recherchés. Le plus souvent, il s'agit de minimiser un (ou plusieurs) écart(s) quadratique(s) entre une grandeur mesurée et cette même grandeur issue des simulations. Cette démarche est par ailleurs utilisée pour optimiser les procédés de mise en forme (voir Picart et al. 1998; Kleinermann et Ponthot 2003; Ponthot et Kleinermann 2006 par exemple). Dans ce cas, les paramètres à optimiser sont des paramètres géométriques ou des variables du procédé de fabrication. Dans le cas de l'identification de paramètres pilotant des lois de comportement, les variables du processus de minimisation sont les paramètres recherchés, et la réponse initiale du modèle est déterminée à partir d'un jeu de paramètres de départ. Le processus de minimisation s'arrête lorsque les paramètres recherchés conduisent à une réponse qui vérifie le critère posé.

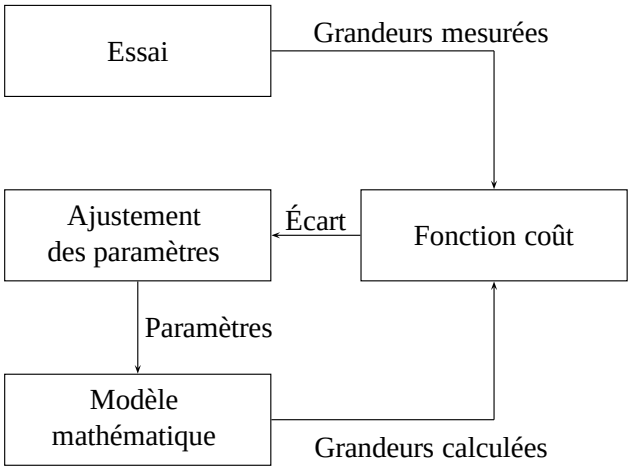


FIG. 1.3: Diagramme de la procédure d'identification par recalage (d'après Hendricks (1991)).

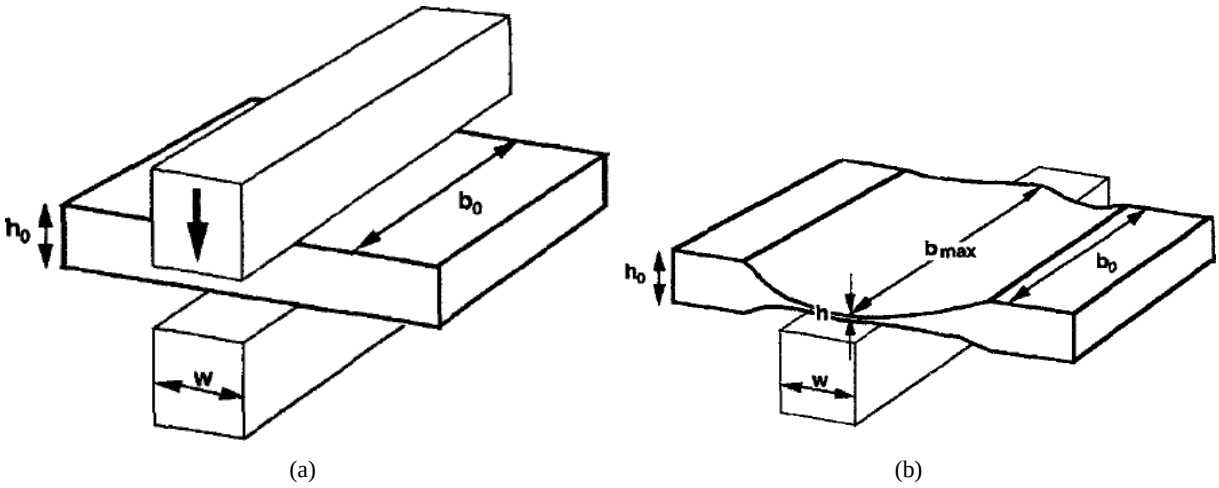
Dans premier temps, les approches de ce type se sont limitées à étendre le domaine d'utilisation des essais standards (voir section 1.2). Le dispositif expérimental est alors quasiment le même, mais le niveau de déformation ou de vitesse de déformation est augmenté.

Ainsi, une des premières applications est l'extension de l'essai de traction aux grandes déformations. Mahnken et Stein (1997) déterminent des paramètres de lois de comportement élastoplastiques à partir d'essais de traction sur éprouvettes axisymétriques, en prenant en compte les phénomènes de localisation qui remettent en cause l'hypothèse d'homogénéité. Plutôt que d'utiliser une correction comme celle suggérée par Bridgman (1952), l'essai est modélisé par éléments finis, la force appliquée et les déplacements en quelques points sont mesurés. Trois paramètres d'écrouissage sont identifiés en minimisant la somme de deux écarts quadratiques au cours du chargement : l'écart entre l'effort global calculé et l'effort mesuré ainsi que l'écart entre les déplacements mesurés et les déplacements simulés sur le contour de la zone de striction. Cette démarche a depuis été adoptée dans plusieurs travaux (Tillier 1998; Ghouati et Gelin 1998, 2001).

Des essais de traction-compression cyclique sur éprouvettes planes ont également été réalisés par Yoshida et al. (2003) afin d'identifier trois paramètres d'un modèle d'écrouissage cinématique en grandes déformations. Des modifications du dispositif expérimental ont été nécessaires pour prévenir le phénomène de flambement des éprouvettes.

Les essais de compression uniaxiale peuvent être conduits à des niveaux de déformation plus importants si le phénomène de bombé des éprouvettes cylindriques est pris en compte à l'aide de simulations par éléments finis (Gelin et al. 1994; Szeliga et al. 2002). Les paramètres de modèles viscoplastiques sont identifiés en minimisant l'écart quadratique entre les courbes force-déplacement vertical mesurées et issues des simulations.

L'essai de bipoinçonnement proposé par Gelin et Ghouati (1996) permet d'approcher les conditions rencontrées lors du laminage de métaux. Il s'agit d'écraser entre deux presses planes un volume prismatique (voir figure 1.4). Ils identifient un modèle viscoplastique à six paramètres à partir de plusieurs essais



(a) (b)

FIG. 1.4: Schéma de l'essai de bipoinçonnement, avant (a) et après (b) déformation (d'après Gelin et Ghouati (1996)).

réalisés à des températures et des vitesses de déformations différentes. Il faut noter que l'identification échoue si les paramètres de départ s'écartent de plus de $20\ \%$ des valeurs de référence.

La modélisation de l'essai de compression d'un lopin cylindrique ou d'un volume prismatique, comme dans l'essai de bipoinçonnement, nécessite l'introduction d'un coefficient de frottement. Les paramètres identifiés dépendent fortement de ce coefficient qui par ailleurs est difficile à mesurer. Diot et al. (2003) ont par conséquent adopté une géométrie d'éprouvette leur permettant de s'affranchir de la connaissance du coefficient de frottement, tandis que Forestier et al. (2002) et Forestier (2004) proposent d'identifier ce coefficient en même temps que les paramètres de la loi de comportement à partir d'un essai optimisé.

Ghouati et Gelin (2001) identifient trois modèles à partir de trois essais. Le premier est un essai de bipoinçonnement. Il est réalisé à trois températures différentes et a permis d'identifier les paramètres d'un modèle viscoplastique en recalant les courbes force-déplacement. Ensuite, des essais de traction sur éprouvettes planes sont conduits à 0°, 45° et 90° afin d'identifier une loi d'écrouissage à trois paramètres et trois coefficients d'anisotropie à partir des réponses force-déformation longitudinale. Enfin, un essai de gonflement hydraulique d'une tôle serrée dans un serre flan conduisant à un état de déformation biaxial est réalisé afin d'identifier les paramètres d'une loi d'écrouissage à partir de la courbe pression-déplacement au sommet.

Gavrus et al. (1996) ont utilisé l'essai de torsion sur éprouvettes pleines pour identifier les paramètres de modèles thermoviscoplastiques en grandes déformations. La modélisation éléments finis de l'essai a permis de prendre en compte la localisation des déformations. Les paramètres du modèle ont été identifiés à partir d'un ensemble d'essais de torsions à différentes vitesses de déformation et différentes températures en minimisant l'écart entre les différentes courbes moment-angle de rotation issues du modèle et de l'expérience. Lam et al. (1998) ont par la suite proposé une méthode permettant de diminuer le nombre d'essais en introduisant une nouvelle fonction coût basée sur la mesure de la vitesse de rotation. Ils identifient alors un modèle viscoplastique en recalant la courbe moment-vitesse de rotation issue d'un seul

essai de torsion.

Fedele et al. (2005) proposent un essai de traction-torsion cyclique sur éprouvettes pleines qui permet de s'approcher des conditions en service du matériau étudié (acier utilisé dans les roues de train) afin d'activer pleinement les paramètres d'un modèle d'écrouissage cinématique. Les courbes utilisées sont celle de l'effort axial en fonction de la déformation longitudinale et celle du moment de torsion en fonction de la rotation par unité de longueur. L'écart entre les réponses simulées et les courbes mesurées est minimisé par un algorithme combinant une méthode du gradient conjugué avec un algorithme génétique.

Niclas et Bourgeois (2000) proposent deux approches inverses pour identifier les paramètres d'une loi d'écrouissage variant dans l'épaisseur à partir d'un essai de flexion 4 points. La première méthode est basée sur le recalage d'un modèle analytique et la mesure des contraintes par rayons X, tandis que la deuxième consiste en un recalage de la courbe moment-courbure issue d'une modélisation par éléments finis de l'essai. La deuxième méthode a donné de meilleurs résultats que la première, mais a nécessité la connaissance a priori d'un certain nombre de données.

Khalfallah et al. (2002) et Khalfallah (2004) identifient des paramètres de lois élastoplastiques anisotropes à partir d'un essai de traction en contraintes planes et de plusieurs essais de traction uniaxiaux sur éprouvettes hors axes. Les essais de traction hors axes sont traités par l'approche classique, seul l'essai en contrainte plane est traité par recalage. L'essai en contrainte plane est simulé par éléments finis et les coefficients d'anisotropie des tôles (coefficients de Lankford) sont déterminés par recalage de la réponse globale de l'éprouvette (courbe force - variation d'épaisseur).

Yoshida et al. (1998) introduisent un essai de flexion cyclique afin d'identifier les 8 paramètres d'un modèle élastoplastique par recalage éléments finis de la courbe force-déformation. À partir des réponses moment-courbure mesurées et simulées d'un essai de traction compression cyclique en grandes déformations et d'un dispositif prévenant le phénomène de flambage, Yoshida et al. (2001) identifient les paramètres d'un modèle de Chaboche-Rousselier. Yoshida et al. (2003) étendent enfin la méthode à la caractérisation du comportement élastoplastique des deux composantes de tôles bi-métalliques par recalage éléments finis des deux essais précédents. La méthode proposée permet un gain de temps considérable étant donné les difficultés rencontrées pour tester chaque composante séparément.

Kajberg et al. (2004) ont identifiés les paramètres d'un modèle élasto-viscoplastique à partir de la réponse force-allongement d'une éprouvette entaillée sollicitée à des vitesses de déformation supérieures à $10^4 s^{-1}$. Dans ce cas, la technique optique utilisée s'est limitée à mesurer l'allongement global de l'éprouvette à partir du contour des entailles. La modélisation éléments finis en déformation plane a permis de calculer la réponse de l'éprouvette à l'allongement mesuré, et les paramètres du modèle ont été identifiés en minimisant l'écart entre l'effort mesuré et l'effort calculé. Les auteurs précisent que l'emploi d'une technique de mesure de champs permettrait une meilleur prise en compte des déformations et réduirait les erreurs.

Allix et Vidal (2002) proposent d'utiliser une méthode d'intégration temporelle optimisée pour réduire le nombre d'itérations lors du calcul direct du modèle éléments finis. Cette méthode a été utilisée avec plusieurs algorithmes de résolution du problème inverse pour identifier les paramètres d'une loi élasto-viscoplastique. Ce papier s'inscrit parmi les travaux qui visent à optimiser le temps de calcul des

méthodes de recalage par éléments finis. Cette méthode est d'autant plus intéressante que le nombre de calculs du problèmes direct est important, y compris pour les méthodes d'optimisation basées sur le calcul du gradient.

Furukawa et al. (2002) proposent d'associer une méthode de minimisation basée sur le calcul du gradient et un algorithme génétique afin d'allier la rapidité de la première méthode à la robustesse de la seconde.

Finalement, les travaux précédents sont principalement basés sur des essais standards dont le domaine d'utilisation a été étendue grâce à l'utilisation de modèles éléments finis. Ces derniers ont permis de prendre en compte des conditions aux limites ou des comportements particuliers favorisant la localisation des déformations. Les réponses mesurées sont souvent les mêmes que pour les essais standards, il s'agit de réponses globales (variation de longueur de l'éprouvette, résultante des efforts appliqués) et quelques fois locales (mesures « ponctuelles » par jauges ou extensomètres). Cette approche suppose une modélisation fidèle de l'essai, puisque le modèle n'est recalé que sur un nombre limité de grandeurs. En effet, les conditions aux limites en déplacement et en efforts sont modélisées mais pas mesurées. Les essais restent donc délicats à maîtriser et les éventuelles erreurs de modélisation se répercutent sur les valeurs des paramètres à identifier.

1.4 Approches par mesures de champs

L'utilisation de mesures optiques de champs cinématiques permet d'envisager des essais plus complexes où la mesure sans contact d'un champ tout entier de déformation est accessible. Le développement important des techniques de mesures de champs est lié à l'essor des capteurs CCD et des techniques de traitement automatisé des images. De nombreuses techniques de mesures de champs existent (Kobayashi 1993; Surrel 2005b) : interférométrie de speckle, corrélation de mouchetis, moiré géométrique ou interférométrique, méthodes de grilles, etc. Par contre, la plupart concernent des mesures dans le plan, ce qui peut dans certains cas limiter les problèmes traités à des problèmes plans (type plaques minces, coques, membranes). Les mesures de champs sont souvent associées à des mesures globales comme la résultante des efforts appliqués. Elles offrent une plus grande liberté dans la conception des essais et plus de souplesse quand à leur déroulement. Elles peuvent ainsi permettre de prendre en compte certains effets parasites, comme des glissements dans les mors, des effets de flexion, etc. Elles permettent également de concevoir la géométrie des éprouvettes en vue d'optimiser la réponse du matériau afin d'identifier plusieurs paramètres à la fois. Il est dès lors possible d'envisager des essais *in situ* ou proches d'un environnement industriel. De plus, le caractère non intrusif et sans contact des méthodes optiques permet la mesure de données cinématiques difficilement accessibles autrement (éprouvette de petites taille, mesures dans une enceinte, etc...)

Cependant, là encore, l'essai devra être modélisé pour pouvoir être simulé, et la mesure des déplacements ou de la distribution des efforts imposés n'est pas toujours réalisée ce qui suppose des hypothèses supplémentaires. Les différents travaux se distinguent par le nombre de paramètres identifiés, liés à la complexité des lois utilisées (anisotropie, non linéarité, couplage température, vitesse, endommagement)

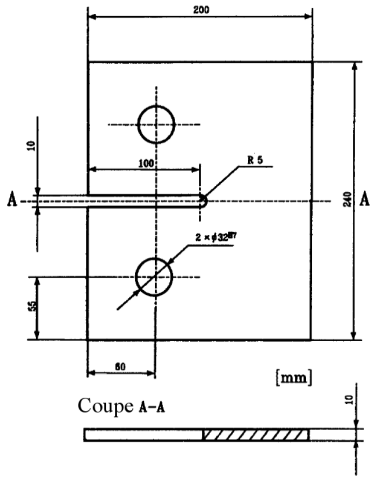


FIG. 1.5: Géométrie de l'éprouvette utilisée par Mahnken et Stein (1996b) pour identifier une loi d'écrouissage.

et par les essais réalisés (traction, compression, flexion,...), mais aussi par la méthode de minimisation employée. En effet, chaque résolution du problème direct peut être très coûteuse en temps de calculs. Plusieurs voies ont donc été explorées pour diminuer les temps de calculs tout en conservant une bonne précision sur les paramètres identifiés. L'utilisation d'algorithmes de recherche directe bien que robustes et efficaces est souvent à exclure car ils nécessitent trop d'itérations. C'est pourquoi beaucoup de travaux sont basées sur l'utilisation d'algorithmes du premier ordre avec calcul du gradient de la fonction coût. Ces algorithmes sont rapides mais sensibles au bruit de mesure et au point de départ, c'est pourquoi dans plusieurs travaux, d'autres techniques sont associées pour améliorer la robustesse du processus de minimisation. Un autre moyen de réduire le temps de calcul est de diminuer le nombre d'itérations lors du calcul du problème direct, c'est pourquoi plusieurs auteurs ont également proposé d'utiliser des schémas d'intégration optimisés.

Une des premières études prenant en compte des mesures locales de déplacements dans la fonction coût à minimiser est celle de Mahnken et Stein (1996b). Un essai de traction est réalisé sur une éprouvette plane en acier, entaillée en son milieu (voir figure 1.5). Les champs de déplacement au voisinage de l'entaille sont mesurés à l'aide d'une grille analysée par corrélation d'image. Les paramètres d'écrouissage et la limite élastique de deux lois de comportement élastoplastique isotrope sont ensuite identifiés en minimisant l'écart quadratique entre les déplacements mesurés et les déplacements simulés en quelques points choisis à la main au cours du chargement. Le processus de minimisation est réalisé par une méthode du premier ordre utilisant les gradients de la fonction coût. La fonction coût est dérivée analytiquement en fonction des paramètres recherchés lors d'une analyse de sensibilité préalable. Cette dérivation est possible car le schéma d'intégration de la loi de comportement est de type Newton-Raphson et conduit à des équations de sensibilité linéaires. Cette méthode présente l'avantage de converger plus rapidement que les méthodes de recherche directe, mais se montre beaucoup moins stable. Elle nécessite de surcroît le calcul des équations de sensibilité pour chaque problème traité. Dans Mahnken et Stein (1997), un essai

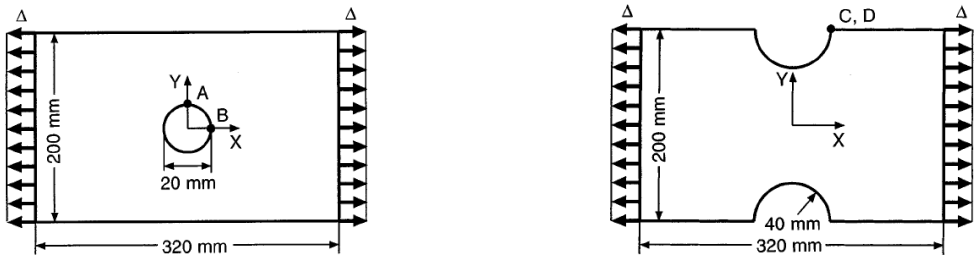


FIG. 1.6: Éprouvettes de traction proposées par Aoki et al. (1997) pour identifier deux paramètres d'un modèle élastoplastique par recalage éléments finis des champs de déplacements.

de traction en grandes déformations sur éprouvette axisymétrique est réalisé. Les champs de déplacement à la surface de l'éprouvette sont mesurés au cours du chargement à l'aide d'une méthode de grille. Trois paramètres d'écrouissage sont identifiés en minimisant la somme de deux écarts quadratiques au cours du chargement : l'écart entre l'effort global calculé et l'effort mesuré ainsi que l'écart entre les déplacements mesurés et les déplacements simulés sur le contour de la zone de striction. La méthode d'identification a ensuite été étendue à un modèle d'endommagement de Gurson par Mahnken (1999). Mahnken (2000) réalise un essai de traction sur éprouvette bi-entaillée. Les champs de déplacement sont mesurés avec une technique de grille. La fonction coût est construite à partir de la somme des écarts quadratiques entre les efforts mesurés et simulés et les champs de déplacement mesurés et simulés. Le processus de minimisation de la fonction coût est toujours réalisé par une méthode du gradient et une analyse de sensibilité adaptée au schéma d'intégration. Six paramètres d'un modèle couplant plasticité et endommagement sont identifiés, mais les paramètres élastiques sont introduits.

Aoki et al. (1997) présentent une méthode d'identification de paramètres d'un modèle de Gurson par recalage éléments finis de champs de déplacement peu après Mahnken et Stein (1996a). Les auteurs introduisent l'utilisation de filtrage de Kalman pour stabiliser l'optimisation. Mais cette méthode n'a été appliquée que sur des champs de déplacement simulés. Elle a par ailleurs permis d'optimiser la configuration d'essai et de proposer finalement une combinaison de deux essais appropriés pour identifier les paramètres recherchés : un essai de traction sur éprouvette plane avec un trou en son milieu et un essai de traction sur éprouvette plane bi-entaillée (voir figure 1.6).

Meuwissen et al. (1998) et Meuwissen (1998) proposent d'identifier plusieurs modèles de plasticité de matériaux métalliques à partir d'un essai plan hétérogène. Trois essais sont utilisés : un essai de traction sur éprouvette plane avec deux entailles décalées (figure 1.7 a) pour identifier les paramètres de critères de plasticité isotrope et orthotrope, un autre essai de traction sur éprouvette plane cette fois-ci trouée (figure 1.7 b) pour identifier les paramètres d'une loi d'écrouissage isotrope ; enfin, un essai de cisaillement cyclique sur éprouvette plane bi-entaillée (figure 1.7 c) pour identifier les paramètres d'une loi d'écrouissage cinématique. La fonction coût est construite à partir de l'écart quadratique entre les quantités mesurées et simulées, c'est à dire la résultante de l'effort appliqué et les champs de déplacement aux endroits où les gradients sont importants (100 à 200 points). L'auteur propose un estimateur faisant intervenir des coefficients de pondération afin de prendre en compte les erreurs de mesures et la dispersion

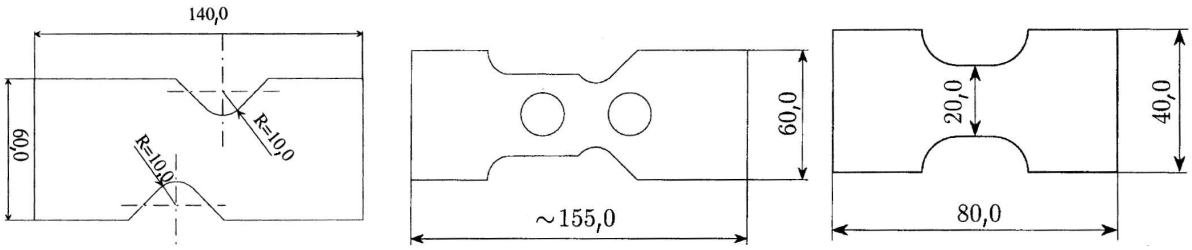


FIG. 1.7: Éprouvettes planes de traction bi-entaillée (a), trouée (b) et de cisaillement (c) utilisées par Meuwissen et al. (1998); Meuwissen (1998) (cotes en mm).

des paramètres. L'approche utilisée pour minimiser la fonction coût est une méthode du premier ordre de type Gauss-Newton. Les gradients de la fonction coût sont déterminés par différences finies et la stabilité de la méthode est testée. L'analyse de sensibilité réalisée lors du calcul des gradients permet d'estimer la sensibilité des paramètres du modèle à l'essai réalisé, offrant ainsi un critère pour juger de la qualité des résultats et de la pertinence du couple modèle/essai.

Afin de réduire le nombre de calcul du problème direct par éléments finis, Okada et al. (1999) emploient une analyse de sensibilité non linéaire proposée par Hisada (1995). En adoptant un schéma d'intégration de Newton-Raphson modifié pour lequel la matrice tangente n'est pas réévaluée, ils parviennent à calculer les gradients de la fonction coût par différences finies à partir d'un seul calcul par éléments finis. La méthode a été testée avec succès sur des résultats simulés.

Kajberg et Lindkvist (2004) réalisent des essais de traction jusqu'à rupture sur éprouvette plane entaillée (voir figure 1.8) afin de faciliter la localisation de la plasticité dans le champ de mesure. Les champs de déplacement sont mesurés par speckle interférométrique (DSP) puis dérivés numériquement. La fonction coût est une somme de résidus au sens des moindres carrés de quantités mesurées et obtenues par simulations par éléments finis. Ces quantités sont les déplacements et la déformation équivalente (entre 600 et 700 points sur une carte) et la résultante de l'effort longitudinal appliqué (10 à 15 pas de chargement). Deux modèles d'écrouissage ont été considérés : un modèle linéaire par morceaux à cinq paramètres et un modèle parabolique à trois paramètres.

Hoc et al. (2003) utilisent des mesures de champs de déformation à l'échelle microscopique pour identifier les paramètres pilotant le comportement élastoplastique d'un monocristal à partir d'un essai de traction sur un polycristal. La réponse mécanique globale et les champs mesurés sont comparés à ceux issus d'une modélisation par éléments finis. Une procédure de minimisation a permis d'identifier les paramètres de quatre types de lois d'écrouissage.

Des alternatives aux procédures de recalage par éléments finis existent dans certains cas. Dans celui de l'élasticité linéaire plusieurs essais ont été analysés grâce à des méthodes telles que l'erreur en relation de comportement ou l'écart à la réciprocité (Bonnet et al. (2003); Bonnet et Constantinescu (2005)), la méthode de l'écart à l'équilibre (Geymonat et Pagano (2002)) ou la méthode des champs virtuels (Grediac et Pierron (2002)). Le classement et la comparaison de ces méthodes constitue un des objectifs

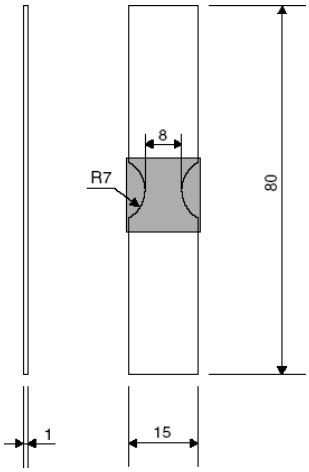


FIG. 1.8: Éprouvette de traction utilisée par Kajberg et Lindkvist (2004) pour identifier un modèle d'écrouissage en grandes déformations.

du groupe de recherche GDR 2519 « Mesures de champs et identification en mécanique des solides » (voir plus bas). Par contre, dans le cas de lois non linéaires, peu d'alternatives au recalage éléments finis ont été proposées. Claire et al. (2002) ont appliqué la méthode de l'écart à l'équilibre pour identifier un champ d'endommagement isotrope à partir d'une mesure de champ de déplacement au cours d'un essai biaxial sur une éprouvette composite en forme de croix. Chalal et al. (2004b) ont utilisé la méthode des champs virtuels pour identifier une variable d'endommagement à partir d'une mesure de champs de déplacement au cours d'un essai de cisaillement de type Iosipescu. Dans le cas de la plasticité, seule la méthode du recalage de modèle éléments finis a été mise en oeuvre (Mahnken et Stein (1996b); Meuwissen et al. (1998); Mahnken (2000); Kajberg et al. (2004)).

La MCV (Grédiac 1989; Grédiac et Vautrin 1990; Grédiac et al. 1999, 2002a,b, 2003) a récemment été étendue par Grédiac et Pierron (2006) pour pouvoir traiter l'élastoplasticité. Le principe de la méthode des champs virtuels non linéaire (MCVNL) est basé sur l'utilisation du principe des travaux virtuels pour générer des équations d'équilibre de la structure testée faisant intervenir les paramètres à identifier, les champs de déformation mesurés à la surface de l'éprouvette et les efforts appliqués. Cette méthode est limitée aux états de contraintes planes, de déformations planes ou de flexion plane. L'intérêt de cette méthode par rapport aux stratégies de recalage par éléments finis est double. Tout d'abord, il n'est pas nécessaire de réaliser un calcul par éléments finis ce qui permet de réduire le temps de calcul. Ensuite, le choix de champs virtuels particuliers rend la méthode insensible à la distribution des efforts ou des déplacements appliqués qui peuvent poser des difficultés dans les approches de recalage par éléments finis. Grédiac et Pierron (2006) ont validé cette méthode sur un cas numérique simple, mais plusieurs aspects restent à examiner en vue d'une application expérimentale, notamment la mise en oeuvre d'une technique stable de mesure de champs cinématiques.

1.5 Évaluation des mesures de champs

Il ressort des travaux utilisant les mesures de champs cinématiques que le bruit de mesure et l'incertitude en général sont un facteur déterminant dans le succès des méthodes d'identification. Bien souvent, les paramètres élastiques sont introduits, ceci est souvent lié à une faible résolution de la méthode optique. Les paramètres des modèles élastoplastiques sont rarement comparés à des paramètres déterminés par une technique de référence, il est donc difficile d'évaluer la qualité des résultats. Il est plus souvent fait mention de la stabilité ou de l'instabilité des résultats. Un des grands enjeux des techniques d'identification basées sur des mesures de champs est d'évaluer leurs performances. Ces dernières sont en grande partie liées aux incertitudes de mesures. L'utilisation quantitative des mesures optiques de champs cinématiques (ou extensomètrie optique) est assez récente et l'absence de critères d'évaluation de leur incertitude freine leur utilisation. C'est pourquoi, assez récemment, quelques groupes de réflexions se sont constitués autour de cette problématique. Au niveau national, un groupe de recherche CNRS (GDR CNRS 2519 : « Mesures de champs et identification en mécanique des solides », 2003-2006 [1]), fédérant une vingtaine de laboratoires français utilisant ces techniques s'est créé en janvier 2003. Il est dirigé par le professeur Michel Grédiac. Ces activités concernent entre autres, l'évaluation des performances des techniques de mesures de champs et de plusieurs méthodes d'identification. Ce groupement a permis de nombreux échanges parmi la communauté française pour une meilleure diffusion des techniques et une systématisation des pratiques d'évaluation des performances. Plusieurs communications autour de ces activités ont eu lieu dans des congrès nationaux et internationaux, et deux articles devraient paraître prochainement dans des revues. L'un concerne l'évaluation des performances des techniques de corrélation d'images, très populaires au niveau national. La démarche proposée pour évaluer et comparer les performances de plusieurs logiciels de corrélation d'image est basée sur le traitement de données simulées et bruitées artificiellement. Le deuxième article concerne la comparaison de plusieurs techniques d'identification de paramètres de lois de comportements élastiques appliquées aux mesures issues de différents essais. Au niveau européen un groupement de laboratoires et d'industriels a également entrepris de qualifier les performances de plusieurs techniques de mesures de champs. Le projet s'intitule SPOTS (« Standardisation project for optical techniques of strain measurement », 2003-2005 [2]), il est coordonné par le professeur Eann Patterson. Les objectifs du projet sont de proposer une méthodologie pour optimiser, évaluer et comparer les performances des techniques de mesures de champs de déformation. La démarche proposée pour l'évaluation des performances est basée sur l'utilisation d'un matériau de référence sollicité dans un montage de référence. Cette démarche a le mérite de fournir une méthodologie générique indépendante du dispositif de mesure et facilement transposable dans un contexte industriel. Elle présente cependant des difficultés car elle superpose les sources d'erreurs. En effet, les performances de l'étalonnage sont conditionnées par la bonne connaissance de la réponse du matériau considéré. Il s'agit en fait de qualifier la performance d'un extensomètre optique par un extensomètre de référence. Le projet a par ailleurs permis de rédiger plusieurs guides de bonne pratique concernant di-

[1] site internet : www.ifma.fr/lami/gdr2519/
[2] site internet : www.opticalstrain.org

verses techniques de mesures optiques de champs cinématiques disponibles sur le site internet du projet (www.opticalstrain.org).

1.6 Conclusion

Les essais statiquement indéterminés ont été proposés par plusieurs auteurs pour identifier les paramètres pilotant le comportement élastoplastique de métaux. Ces essais permettent d'étendre les domaines d'application des essais standards et offrent la possibilité d'étudier des comportements anisotropes et/ou hétérogènes en activant des mécanismes conduisant à des états de contrainte hétérogène. Les procédures mises en place pour caractériser le comportement du matériau étudié à partir de ces essais sont nécessairement plus élaborées que pour les essais classiques. De plus le caractère non linéaire des lois élastoplastiques rend le problème inverse délicat à résoudre. La technique la plus employée consiste à réaliser une modélisation par éléments finis de l'essai mécanique puis à recaler la réponse mesurée avec la réponse issue des simulations. La procédure reste délicate à maîtriser et des problèmes d'identifiabilité des paramètres se posent. L'utilisation de mesures de champs cinématiques a permis d'enrichir la quantité d'information disponible pour résoudre le problème. Elle a également permis d'envisager une nouvelle façon de traiter le problème. C'est ainsi que la méthode des champs virtuels a été proposée comme alternative aux procédures de recalage de modèle éléments finis. Elle est basée sur l'écriture d'équations d'équilibre faisant apparaître les champs de déformation mesurés et les paramètres recherchés. Jusque là réservée à l'identification de modèles linéaires, la MCV a récemment été étendue pour pouvoir traiter des lois élastoplastiques.

L'objectif de ce travail est de mettre en oeuvre la MCVNL expérimentalement et d'étudier les paramètres importants qui influencent le processus d'identification. De nombreux aspects doivent être considérés dans la chaîne qui va des mesures aux paramètres identifiés et les travaux présentés ici constituent une approche préliminaire en vue d'étendre cette méthode aux comportements élastoplastiques complexes qui ont motivé cette démarche.

2 Cadre de travail : le comportement mécanique des matériaux métalliques au-delà de leur limite d'élasticité

2.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter les relations de comportement utilisées pour modéliser le comportement du matériau métallique étudié. Les paramètres pilotant ces lois seront ensuite identifiés à partir d'essais de traction normalisés. Ces résultats serviront de référence pour valider l'approche d'identification basée sur l'utilisation d'essais statiquement indéterminés.

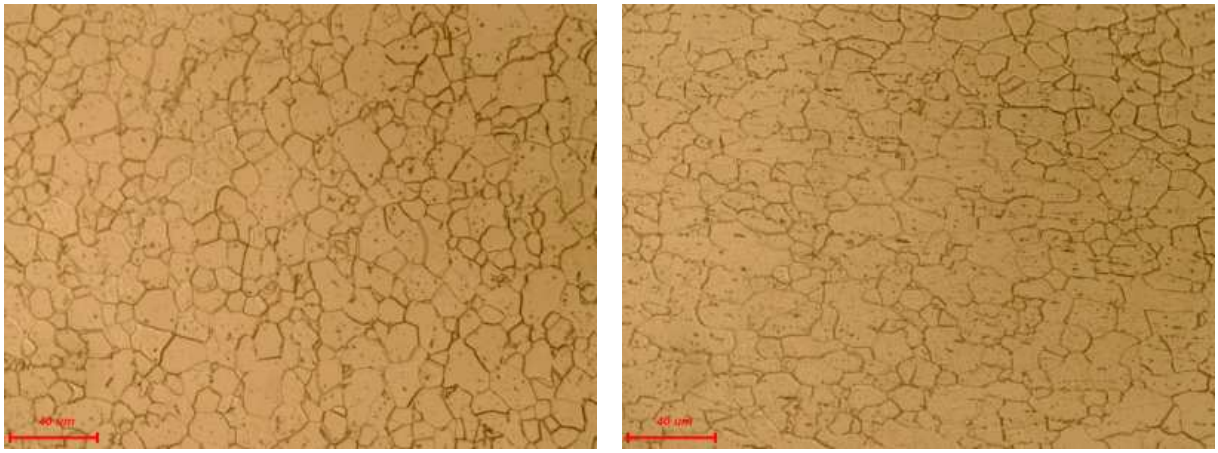
Le matériau étudié est une tôle d'acier brute de laminage dont l'épaisseur est de 2 mm. Il s'agit d'un acier d'usage général dans les ateliers de mise en forme et de construction. L'analyse de la composition chimique de cette tôle a révélé que le taux de carbone était inférieure à $0,02\ \%$ (voir tableau 2.1), ce qui classe ce matériau parmi les aciers à très bas Carbone. Des échantillons ont été observés au microscope optique (voir figure 2.1) et ont révélé une micro-structure homogène composée d'une seule phase ferritique avec de la cémentite aux joints des grains. Par ailleurs, l'observation de la taille des grains permet de supposer un volume élémentaire représentatif de l'ordre de $(0,1\,mm)^3$.

2.2 Modélisation

Le cadre de travail posé est celui du comportement élasto-plastique des matériaux métalliques à température ambiante, en chargement monotone quasi-statique et pour de petites perturbations (HPP). Le matériau est considéré comme un milieu continu homogène pour lequel l'état d'un point matériel est indépendant de celui du point matériel voisin. Le formalisme est en partie emprunté à Lemaitre et Chaboche (1985). Les équations de base définissant le problème mécanique sont :

TAB. 2.1: Composition chimique (hormis le fer) d'un échantillon de tôle (moyenne sur trois mesures effectuées par analyse spéctrométrique).

Élément	Manganèse	Chrome	Aluminium	Nickel	Silicium
% masse	0,234	0,045	0,042	0,031	0,027
Soufre	Phosphore	Carbone	Cuivre	Molybdène	Titane
0,02	0,019	0,017	0,012	<0,010	0,004



(a) (b)

FIG. 2.1: Micro-structure d'un échantillon de la tôle. La photo (a) ne montre pas d'orientation privilégiée des grains dans le plan de la tôle, tandis que dans l'épaisseur (b), les grains sont légèrement écrasés en raison du procédé de laminage.

1. les équations d'équilibre statique en l'absence de forces de volume :

$$\begin{cases} div\boldsymbol{\sigma} = 0 \\ \vec{T} = \boldsymbol{\sigma}.\vec{n} \end{cases} \tag{2.1}$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes de Cauchy, $\vec{T}$ est la densité surfacique de forces s'exerçant sur la frontière du solide considéré et $\vec{n}$ la normale en tous points de cette frontière ;

2. une relation déplacement-déformation en HPP :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left[grad\vec{u} + (grad\vec{u})^T\right] \tag{2.2}$$

où $\vec{u}$ est le déplacement et $\boldsymbol{\varepsilon}$ est le tenseur des déformations linéarisées ;

3. les relations de comportement.

2.2.1 Relations de comportement

On considère une succession d'états d'équilibres à chaque instant (chargement quasi-statique) et des transformations isothermes. La température n'intervient alors que comme un paramètre dont dépendent éventuellement les paramètres des lois de comportement.

Bilan des variables d'état : Parmi les variables d'état, il faut distinguer les variables observables, qui sont accessibles à la mesure et les variables internes.

1. Variable observable : la déformation totale $\boldsymbol{\varepsilon}$ (égale à déformation élastique dans le cas de l'élasticité linéaire).

2. Variables internes : la déformation plastique $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ qui traduit l'histoire des sollicitations mécaniques imposées au matériau ainsi que la déformation élastique $\boldsymbol{\varepsilon}^e$. La déformation plastique cumulée p est suffisante pour décrire le phénomène d'écrouissage isotrope.

Soit Ψ le potentiel d'énergie libre spécifique choisi comme potentiel thermodynamique. Dans le cadre de l'élastoplasticité, les effets élastiques et plastiques sont découplés, ce qui implique :

1. qu'il y a *partition* des déformations en déformations élastiques et en déformations plastiques :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon^e} + \boldsymbol{\varepsilon^p} \tag{2.3}$$

2. que les relations de comportement élastiques et plastiques sont découplées :

$$\Psi = \Psi^e(\boldsymbol{\varepsilon^e}, T) + \Psi^p(\boldsymbol{\varepsilon^p}, T) \tag{2.4}$$

2.2.1.1 Loi de Hooke : élasticité linéaire isotrope

En se limitant aux transformations quasi-statiques isothermes, la variable d'état observable à faire intervenir est la déformation élastique égale à la déformation totale. La linéarité de la loi de comportement impose alors que le potentiel thermodynamique soit une combinaison linéaire du carré du premier invariant du tenseur des déformations $\varepsilon_I^2 = [Tr(\boldsymbol{\varepsilon})]^2$ et du second invariant $\varepsilon_{II} = \frac{1}{2}Tr(\boldsymbol{\varepsilon}^2)$:

$$\Psi = \frac{1}{2\rho}(\lambda\varepsilon_I^2 + 4\mu\varepsilon_{II}) \tag{2.5}$$

Par définition de la variable associée, le tenseur des contraintes dérive du potentiel Ψ pour donner la loi d'élasticité linéaire :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} = \lambda Tr(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.6}$$

où $\mathbf{1}$ est le tenseur identité et λ et μ sont les coefficients de Lamé que l'on relie au module de Young E et au coefficient de Poisson ν au travers des relations suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned} \tag{2.7}$$

avec E positif et $-1 < \nu < \frac{1}{2}$.

Hypothèse des contraintes planes Dans le cas d'une plaque mince chargée dans son plan (Oxy), ce qui est supposé être le cas lors des essais de traction sur éprouvettes planes, le tenseur des contraintes est plan ($\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$) :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

La relation contrainte-déformation en élasticité à deux dimensions s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{E}{(1-\nu^2)} & \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} & 0 \\ \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} & \frac{E}{(1-\nu^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{(1+\nu)} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{array} \right\} \tag{2.9}$$

et $\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})$ (obtenue en posant $\sigma_{zz} = 0$ dans l'équation 2.6), $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$.

2.2.1.2 Élastoplasticité isotrope

On postule un schéma de plasticité indépendante du temps communément admise pour les métaux à température ambiante et l'on se restreint au cas des petites transformations. La théorie de la plasticité fournit les relations mathématiques qui caractérisent la réponse élastoplastique du matériau sous l'effet de sollicitations mécaniques. Elle permet de décrire l'apparition et l'évolution des déformations plastiques (subsistant au repos) dans le matériau.

Comme pour l'élasticité isotherme, la variable d'état est la déformation totale. La plasticité indépendante du temps est basée sur trois notions.

1. Le critère de plasticité définit les limites du domaine d'élasticité du matériau à l'intérieur desquelles toute variation de contrainte n'engendre que des variations de déformation élastique.
2. L'écoulement traduit l'apparition et l'accroissement des déformations plastiques. La loi d'écoulement est la fonction qui détermine le taux de déformations plastiques $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$.
3. L'écrouissage qui désigne l'*évolution* de la frontière du domaine d'élasticité lors de l'écoulement plastique.

Critère de plasticité isotrope Il correspond à un état (*figé*) d'écrouissage isotrope pour lequel la frontière du domaine est invariante par changement de repère. L'équation de la frontière du domaine d'élasticité dépend alors des invariants du tenseur des contraintes et d'une variable d'écrouissage scalaire. L'expérience montre que la plasticité des métaux est indépendante de la pression hydrostatique :

$$\boldsymbol{\sigma}_H = \frac{1}{3} Tr(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1} \tag{2.10}$$

Il est alors suffisant de faire intervenir les invariants du déviateur des contraintes :

$$J_2(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\frac{3}{2} Tr(\boldsymbol{\sigma}'^2)} \tag{2.11}$$

$$J_3(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt[3]{\frac{9}{2} Tr(\boldsymbol{\sigma}'^3)} \tag{2.12}$$

associés au déviateur des contraintes :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_H \tag{2.13}$$

On note $\sigma_{eq} = J_2$ qui est la *contrainte équivalente*. En choisissant la variable seuil de plasticité en traction simple σ_s comme variable d'écrouissage, la forme générale des critères d'écrouissage isotrope en plasticité incompressible est :

$$f(J_2, J_3, \sigma_s) = 0 \tag{2.14}$$

Le critère de *Von Mises*, qui est très employé pour sa commodité d'utilisation par les outils d'analyse numérique, est une forme linéaire obtenue en négligeant l'influence du troisième invariant :

$$f(\sigma_{eq}, \sigma_s) = \frac{1}{2} Tr(\boldsymbol{\sigma}'^2) - \frac{1}{3}\sigma_s^2(p) = 0 \tag{2.15}$$

Dans l'espace des contraintes principales, c'est l'équation d'un cylindre de rayon $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_s$ axé sur la trisectrice du repère (voir Figure 2.2).

Dans le cas d'un état de contrainte plane l'expression du critère de Von Mises donne finalement :

$$f(\sigma_{eq}, \sigma_s) = \sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\sigma_{xy}^2 \; - \; \sigma_s^2 = 0 \tag{2.16}$$

L'écrouissage isotrope Il correspond à une dilatation du domaine d'élasticité identique dans toutes les directions de l'espace des contraintes et le centre du domaine d'élasticité reste inchangé (voir Figure 2.2). La taille du domaine d'élasticité est alors définie par un scalaire noté σ_0 à l'état initial et σ_s à l'état écroui. Une loi d'écrouissage isotrope est gouvernée par une variable scalaire, par exemple la déformation plastique cumulée :

$$p = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(\tau) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(\tau)}d\tau \tag{2.17}$$

La loi d'écrouissage notée $R(p)$ est telle que $R(0) = 0$ et $\sigma_s(p) = \sigma_0 + R(p)$. Un exemple de loi d'écrouissage est la loi d'écrouissage linéaire :

$$R(p) = E_0 p$$

où E_0 est le coefficient d'écrouissage. La loi d'écrouissage utilisée pour modéliser le comportement de la tôle est présentée au paragraphe 2.2.1.3.

L'écoulement plastique L'écoulement a lieu dès lors que deux conditions sont remplies :

1. le point représentatif de l'état de contrainte est situé sur la surface de charge :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, p) = 0 \tag{2.18}$$

2. le schéma de la plasticité classique impose que le point représentatif de l'état de contrainte ne puisse sortir de la surface de charge ($f > 0$ impossible). Pendant l'écoulement continu, on intro-

duit donc la *condition de cohérence* qui s'écrit dans le cas d'un écrouissage isotrope :

$$df = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial p} dp = 0 \tag{2.19}$$

Dans le cadre de la *plasticité associée*, on suppose l'existence d'un potentiel de dissipation et la surface de charge est identifiée à une surface équipotentielle. On suppose de plus que la direction de la vitesse de déformation plastique se fait perpendiculairement à la surface de charge (*propriété de normalité*). Ce qui donne la forme de la *loi d'écoulement* :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}^p} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{2.20}$$

où f est la fonction désignant la surface de charge, $\dot{\lambda}$ est le *multiplicateur plastique* dont on tire l'expression de la condition de cohérence $\dot{f} = 0$.

Formulation de Prandtl-Reuss Á partir des hypothèses précédentes, une loi d'écoulement en régime élastoplastique avec écrouissage isotrope est formulée en contraintes planes (d'après Lemaitre et Chaboche 1985; Sutton et al. 1996).

L'expression du multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$ est recherchée afin d'expliciter la loi d'évolution (équation 2.20). Pour cela, l'expression de f (équation 2.15) est introduite dans la condition de cohérence (équation 2.19). Comme :

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma'} \tag{2.21}$$

$$\frac{\partial f}{\partial p} = -\frac{2}{3}\sigma_s(p)\frac{\partial R(p)}{\partial p} \tag{2.22}$$

la condition de cohérence devient :

$$df = \boldsymbol{\sigma'} : d\boldsymbol{\sigma} - \frac{2}{3}\sigma_s(p)\frac{\partial R(p)}{\partial p} dp = 0 \tag{2.23}$$

Dans le cadre d'une formulation incrémentale, l'incrément de contrainte s'exprime :

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p) \tag{2.24}$$

avec :

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \boldsymbol{\sigma'}\Delta\lambda \tag{2.25}$$

$\boldsymbol{C}$ étant la matrice des rigidités (voir relation 2.9), $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ l'incrément des déformations totales mesurées, $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p$ l'incrément des déformations plastiques et $\Delta\lambda$ le multiplicateur plastique fini. Cette expression fait intervenir l'incrément des déformations dans l'épaisseur $\Delta\varepsilon_{zz}$. Or les déformations hors plans ne sont pas mesurées ici. Elles peuvent néanmoins être exprimées en fonction des seules composantes dans le plan

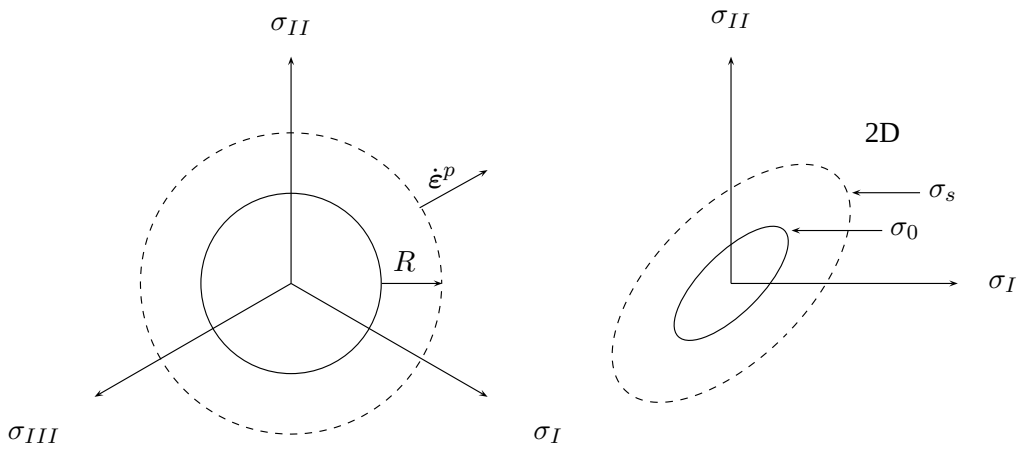


FIG. 2.2: (a) Surface de charge axée sur la trisectrice du repère ($\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$) dans l'espace des contraintes principales, écoulement normal $\dot{\varepsilon}^p$ et écrouissage isotrope R; (b) projection des surfaces de charge initiale et écrouie en contraintes planes ($\sigma_{III} = 0$).

en faisant l'hypothèse d'incompressibilité plastique (communément admise pour la plupart des métaux) :

$$\Delta\varepsilon^p_{xx} + \Delta\varepsilon^p_{yy} + \Delta\varepsilon^p_{zz} = 0 \tag{2.26}$$

La partie élastique est quand à elle donnée par la loi d'élasticité linéaire en contrainte plane :

$$\Delta\varepsilon^e_{zz} = -\frac{\nu}{1-\nu}(\Delta\varepsilon^e_{xx} + \Delta\varepsilon^e_{yy}) \tag{2.27}$$

Finalement, en introduisant l'expression de $\Delta\boldsymbol{\sigma}$(équation 2.24), et en développant le produit tensoriel, la condition de cohérence (équation 2.23) devient :

$$\begin{aligned}\frac{E}{(1-\nu^2)}[(\sigma'_{xx} + \nu\sigma'_{yy})\Delta\varepsilon_{xx} + (\sigma'_{yy} + \nu\sigma'_{xx})\Delta\varepsilon_{yy} + 2(1-\nu)\sigma'_{xy}\Delta\varepsilon_{xy} \\ -\Delta\lambda(\sigma'^2_{xx} + \sigma'^2_{yy} + 2\nu\sigma'_{xx}\sigma'_{yy} + (1-\nu)\sigma'^2_{xy})] \quad = \quad \frac{2}{3}\sigma_s(p)\frac{\partial R}{\partial p}\Delta p\end{aligned} \tag{2.28}$$

En utilisant les relations 2.17 et 2.25 pour exprimer Δp et en réarrangeant cette équation, le multiplicateur plastique s'exprime finalement :

$$\Delta\lambda = \frac{\frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot [(\sigma'_{xx} + \nu\sigma'_{yy})\Delta\varepsilon_{xx} + (\sigma'_{yy} + \nu\sigma'_{xx})\Delta\varepsilon_{yy} + 2(1-\nu)\sigma'_{xy}\Delta\varepsilon_{xy}]}{\frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot (\sigma'^2_{xx} + \sigma'^2_{yy} + 2\nu\sigma'_{xx}\sigma'_{yy} + (1-\nu)\sigma'^2_{xy}) + \frac{4}{9}\sigma_s^2\frac{\partial R}{\partial p}\Delta p} \tag{2.29}$$

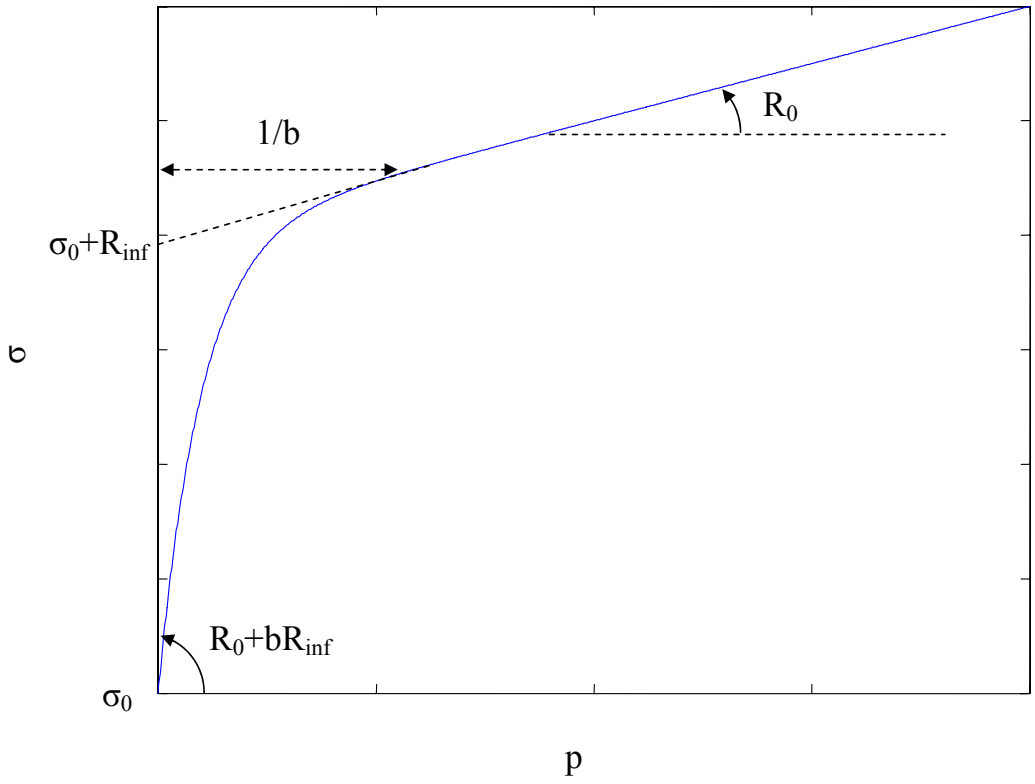


FIG. 2.3: Loi d'écrouissage de Voce : $\sigma_s = \sigma_0 + R_0 p + R_{\text{inf}}[1 - \exp(-bp)]$.

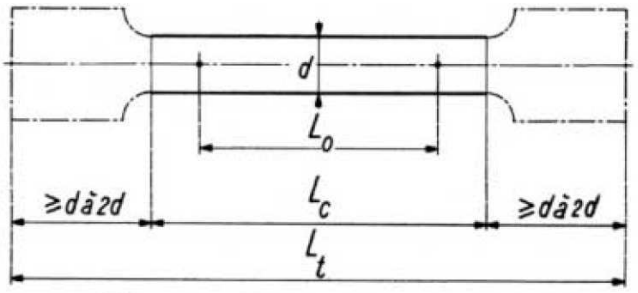
2.2.1.3 Modèle de Voce

Le modèle d'écrouissage utilisé est le modèle isotrope de Voce 1955. Ce modèle a été choisi après observation de la réponse du matériau lors des essais de traction uniaxiale (section 2.3.2). Il exprime lors de l'écoulement, la relation entre la contrainte équivalente de Von Mises σ_s et la déformation plastique cumulée p :

$$\sigma_s = \sigma_0 + R_0 p + R_{\text{inf}}[1 - \exp(-bp)] \tag{2.30}$$

où σ_0 est la limite d'élasticité initiale, R_0 le module d'écrouissage asymptotique, et R_{inf} et b décrivent la partie non linéaire de la courbe lors de l'apparition de la plasticité. La figure 2.3 présente un tracé de cette loi et donne la signification des différents paramètres. L'intérêt de ce modèle est de pouvoir représenter le changement de régime entre la partie linéaire élastique et la courbe d'écrouissage de manière continue grâce à l'utilisation d'une exponentielle. Lors du calcul incrémental, l'expression du multiplicateur plastique nécessite d'écrire la dérivée première de cette loi :

$$\frac{\partial R}{\partial p} = R_0 + bR_{inf}exp(-bp)$$



$L_0 = k\sqrt{S_0}$
$L_c = L_0 + (d/2)$ à $L_0 + 2d$
$L_t \geqslant L_c + 2d$ ou $L_c + 4d$ suivant le mode d'attache
avec S_0 section initiale de l'éprouvette
La forme des têtes d'éprouvettes n'est figurée qu'à titre indicatif.

FIG. 2.4: La norme NF A 03-151 précise la forme et les dimensions de la partie calibrée des éprouvettes de traction.

2.3 Identification des paramètres du modèle

2.3.1 Essai de traction normalisé

L'un des essais les plus pratiqués de caractérisation du comportement élastoplastique de tôles minces est l'essai de traction simple. Il consiste à réaliser, dans une éprouvette plane à section prismatique, un champ de contrainte uniforme uniaxiale de traction et à enregistrer l'allongement résultant. Il est notamment régi par la norme française NF-A-03-151.

Il permet de déterminer les paramètres élastiques et les paramètres d'écrouissage. Il faut pour cela mesurer les déformations axiale et radiale. Dans cette étude, des jauges de déformation placées au centre de l'éprouvette ont été utilisées. Les jauges de déformation sont des résistances électriques collées sur l'éprouvette et dont la variation de résistance électrique est proportionnelle à l'allongement relatif. Ces jauges sont montées sur un pont d'extensométrie. La difficulté rencontrée dans cette mesure est la présence d'un moment de flexion parasite dû au mauvais alignement de l'éprouvette. De ce fait, toutes les fibres externes ne subissent pas le même allongement. Il convient alors de faire la moyenne des différents allongements mesurés sur les deux faces de l'éprouvette.

La norme NF A 03-151 précise la forme et les dimensions de la partie calibrée (figure 2.4). Un moyen d'usiner les éprouvettes planes consiste en un fraisage sur gabarit d'un paquet de bandes rectangulaires découpées à la largeur des têtes d'amarrage. Les bords devront être ébavurés à la toile émeri. Il est nécessaire avant essai de s'assurer de la bonne planéité des éprouvettes.

La machine de traction utilisée est une machine à vis mue par un moteur électrique. La norme précise que la machine doit assurer un effort de traction pur, donc un alignement rigoureux des axes d'amarrage de l'éprouvette. La machine utilisée pour cette étude ne dispose pas de surface de référence permettant de mesurer cet alignement. Il a donc été réalisé en alignant visuellement les éprouvettes avec les axes des mors. Les amarrages utilisés sont de type mors striés plats autoserrants. Un dispositif permet à l'éprouvette de s'orienter librement dans la direction de l'effort. La mesure de la charge se fait à l'aide d'une

	$E\ (GPa)$	ν	$\sigma_0\ (MPa)$	$R_0\ (GPa)$	$R_{inf}\ (MPa)$	$b \times 10^3$
$Sens\ 1$	210 ± 6	$0,298 \pm 0,013$	142 ± 5	$2,36 \pm 0,4$	$50,9 \pm 5,2$	$3,98 \pm 0,8$
$C.V.\ (\%)$	2	3	2	9	6	10
$Sens\ 2$	199 ± 5	$0,284 \pm 0,031$	127 ± 15	$2,46 \pm 0,5$	$56,3 \pm 13,8$	$3,37 \pm 0,74$
$C.V.\ (\%)$	2	6	4	10	12	11

TAB. 2.2: Paramètres identifiés à partir des courbes contrainte-déformation issues des essais de traction normalisés. Les plages de variation ($\pm 2\sigma$: degré de confiance $95\ \%$) sont arrondies au dernier chiffre significatif supérieur. Les coefficients de variation ($\frac{\sigma}{moy} \times 100$) sont arrondis au pourcent supérieur.

cellule placée en série sous la partie supérieure du bâti. La cellule fonctionne dans une gamme de charge allant de 1 à 100 kN. Le signal est numérisé puis synchronisé avec les données mesurées par les jauges. Les éprouvettes sont chargées à vitesse constante égale à $0,2$ mm/min.

2.3.2 Résultats

Six éprouvettes de traction ont été usinées dans la direction de laminage (dénotée sens 1 par la suite) et six autres dans la direction perpendiculaire (sens 2) selon les proportions données par la norme NF-A-03-151 (voir figure 2.5). Les courbes contrainte-déformation longitudinale issues des essais de traction dans les deux directions de la tôle sont reportées dans la figure 2.6. Elles témoignent d'un comportement asymptotique linéaire avec une zone de raccordement non linéaire. Le comportement dans les deux directions de la tôle est différent. Les courbes ont la même allure, les asymptotes sont notamment parallèles mais sont décalées d'une dizaine de méga-pascals. Le modèle d'écrouissage de Voce à quatre paramètres permet de décrire ce type de courbe (voir section 2.2.1.3). Les six paramètres du modèle élastoplastique ont été identifiés dans les deux directions de la tôle. Le module de Young et le coefficient de Poisson ont été identifiés à partir des parties linéaires (entre 10 et $100\ MPa$) des courbes contrainte-déformations axiale et radiale. La limite élastique et les trois paramètres décrivant la courbe d'écrouissage ont été identifiés sur l'ensemble de la courbe contrainte-déformation axiale par minimisation au sens des moindres carrés à partir du module de Young identifié. Le tableau 2.2 présente l'ensemble des résultats de l'identification.

Compte tenu des écarts modérés entre les paramètres identifiés dans les deux directions de la tôle, le matériau est considéré comme étant isotrope en première approximation. De plus, pour limiter l'influence de l'anisotropie du matériau, les éprouvettes utilisées dans les chapitres suivants seront usinées dans le sens 2 de la tôle et les paramètres correspondants seront utilisées comme paramètres de référence.

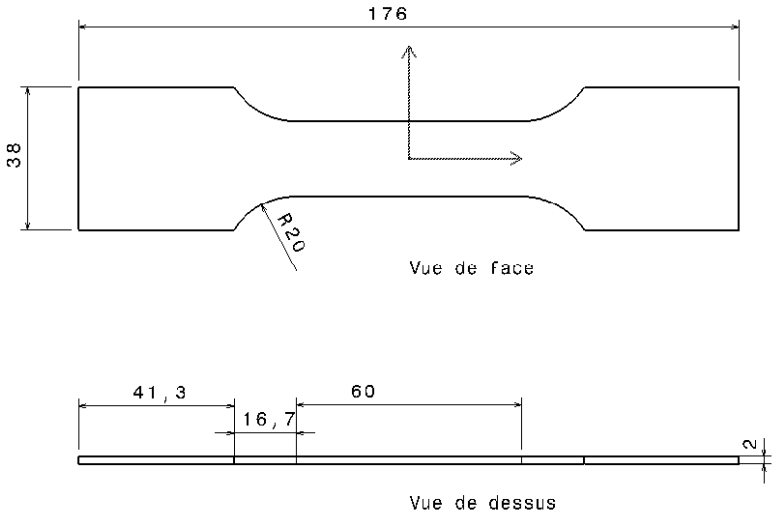


FIG. 2.5: Dimensions des éprouvettes de traction uniaxiale.

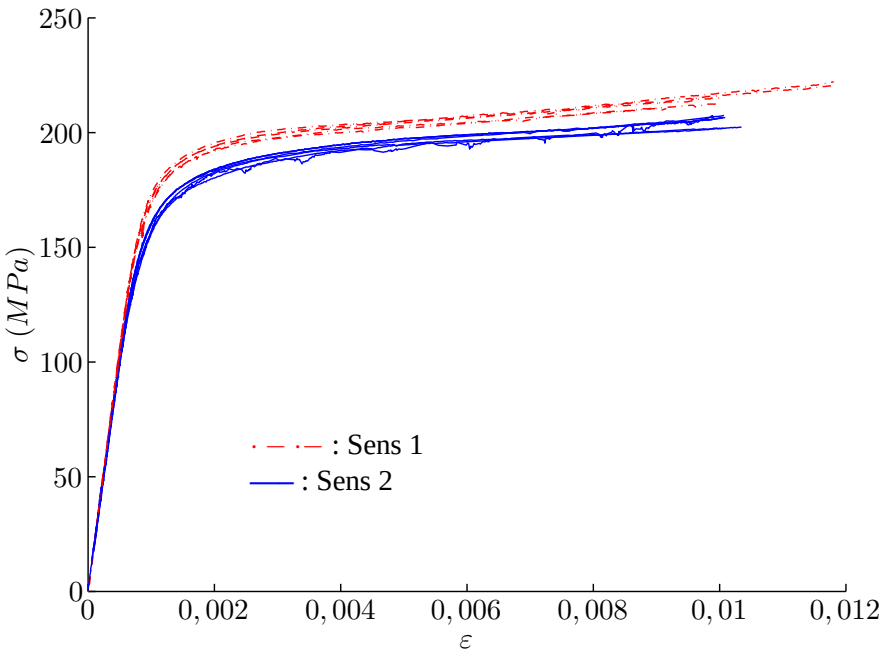


FIG. 2.6: Courbes contrainte-déformation issues des essais homogènes dans les deux directions de la tôle.

3 Identification de lois élastoplastiques par la méthode des champs virtuels

3.1 Introduction

On considère un solide élastoplastique en équilibre. Les relations de base définissant le problème mécanique sont :

1. les relations déformations-déplacements, ici dans le cadre des petites perturbations ;
2. les équations d'équilibre des efforts qui peuvent se traduire par le principe des travaux virtuels ;
3. la loi de comportement qui relie les contraintes aux déformations.

Le problème qui consiste à déterminer les champs de contrainte et de déformation à partir des efforts appliqués et des relations de comportement est généralement qualifié de problème *direct*. La méthode des éléments finis est habituellement utilisée pour résoudre ce problème. Au contraire, le problème qui consiste à déterminer les paramètres de la loi de comportement à partir des champs cinématiques et des efforts appliqués est qualifié de problème *inverse* (voir tableau 3.1).

La méthode des champs virtuels (MCV) est une méthode d'identification de paramètres de lois de comportement à partir de mesures de champs cinématiques. Elle a été utilisée avec succès pour identifier les paramètres de rigidités de flexion de plaques en statique (Grédiac et Vautrin 1990; Grédiac 1996b,a) et en dynamique (Grédiac et Paris 1996; Grédiac et al. 1998). Elle a été proposée pour mesurer l'amortissement d'une plaque en vibration forcée (Giraudeau et Pierron 2005). Elle a permis l'identification dans le plan de propriétés élastiques de matériaux composites (Grédiac et Pierron 1998; Grédiac et al. 1999; Pierron et al. 2000; Moulart et al. 2006). Enfin, elle a servi à caractériser le comportement non linéaire en cisaillement d'un matériau composite (Chalal et al. 2004b,a).

	Problème direct		Problème inverse	
	connu	inconnu	connu	inconnu
Loi de comportement	*			*
Efforts appliqués	*		*	
Champs cinématiques		*	*	

TAB. 3.1: Problème direct et problème inverse en mécanique.

La MCV a été introduite par Grédiac (1989) et repose sur l'écriture du principe des travaux virtuels (PTV). Ce principe s'écrit dans le cas d'un chargement statique et en l'absence de forces de volumes :

$$-\int_V \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon}^\star dV + \int_{S_f} \vec{T}.\vec{v}^\star dS = 0 \tag{3.1}$$

avec $\boldsymbol{\sigma}$le tenseur des contraintes, $\boldsymbol{\epsilon}^\star$ le tenseur des déformations virtuelles associé à $\overrightarrow{v}^\star$ vecteur des déplacements virtuels et $\overrightarrow{T}$ la densité d'efforts surfaciques appliqués sur la surface S_f. Cette équation est vérifiée pour tous champs virtuels $(\boldsymbol{\epsilon}^\star, \overrightarrow{v}^\star)$ cinématiquement admissibles sur le domaine considéré. Elle traduit l'équilibre entre le travail virtuel des efforts intérieurs $W_{int} = -\int_V \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon}^\star dV$ et le travail virtuel des efforts extérieurs $W_{ext} = \int_{S_f} \vec{T}.\vec{v}^\star dS$.

La relation de comportement permet d'exprimer les contraintes en fonction des déformations, dans le cas général on écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\varepsilon})$$

$\boldsymbol{g}$ désigne la loi de comportement fonction des déformations mesurées et des paramètres à identifier. En introduisant cette expression dans le principe des travaux virtuels, l'équation 3.1 devient :

$$-\int_V g(\boldsymbol{\varepsilon}) : \boldsymbol{\epsilon}^\star dV + \int_{S_f} \vec{T}.\vec{v}^\star dS = 0 \tag{3.2}$$

Ainsi pour chaque nouveau champ virtuel introduit, une équation impliquant les paramètres de la loi de comportement et les champs de déformation mesurés sera créée. La méthode des champs virtuels consiste à construire un ensemble d'équations en introduisant plusieurs champs virtuels judicieusement choisis dans l'équation 3.2. Cet ensemble d'équations est utilisé pour extraire les paramètres recherchés de la loi de comportement. Le choix des champs virtuels est déterminant, leur nombre et leur type dépendent de la nature de la loi de comportement $\boldsymbol{g}$. Deux cas présentés dans les deux sections suivantes doivent alors être distingués :

- le premier cas concerne les lois de comportements linéaires comme c'est le cas pour l'élasticité linéaire. Dans ce cas, un nombre de champs virtuels égal au nombre d'inconnues est introduit dans l'équation 3.2 afin d'écrire un système d'équations linéaires indépendantes. L'inversion de ce système conduit directement aux paramètres recherchés pourvu que les champs de déformation mesurés soient suffisamment hétérogènes (Grédiac et al. 2002a,b).
- dans le second cas, les lois de comportement ne dépendent pas linéairement des paramètres recherchés comme en élastoplasticité justement. Il n'est alors pas possible de construire un système d'équations linéaires. Pour autant l'équation 3.2 permet d'écrire des équations non linéaires qui doivent chacune être vérifiées par le jeu de paramètres recherchés. La stratégie d'identification repose alors sur la minimisation d'une fonction coût écrite à partir des équations créées (Grédiac et Pierron 2006).

3.2 Identification des paramètres élastiques

On se place dans les hypothèses posées dans le chapitre 2. Avant l'apparition de la plasticité, le comportement du matériau homogène considéré est élastique linéaire isotrope. L'échantillon testé est supposé être en état de contraintes planes, l'état de contrainte est supposé constant dans l'épaisseur. Dans ce cas, la relation entre contraintes et déformations s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} Q_{xx} & Q_{xy} & 0 \\ Q_{xy} & Q_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{xx-}Q_{xy} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{array} \right\} \tag{3.3}$$

avec $Q_{xx} = \dfrac{E}{(1-\nu^2)}$ et $Q_{xy} = \dfrac{\nu E}{(1-\nu^2)}$.

Les deux paramètres recherchés sont le module de Young E et le coefficient de Poisson ν, mais le système est linéaire en Q_{xx} et Q_{xy}, il sera donc posé avec ces variables. Le matériau est supposé homogène, les paramètres ne dépendent donc pas des coordonnées x, y, z. En introduisant la relation 3.3 dans l'équation 3.2, le principe des travaux virtuels devient :

$$\begin{aligned} eQ_{xx}\int_S(\varepsilon_{xx}\epsilon^\star_{xx}+\varepsilon_{yy}\epsilon^\star_{yy})dS + eQ_{xy}\int_S(\varepsilon_{xx}\epsilon^\star_{yy}+\varepsilon_{yy}\epsilon^\star_{xx})dS & \\ +e(Q_{xx}-Q_{xy})\int_S \varepsilon_{xy}\epsilon^\star_{xy}dS &= \int_{S_f}\vec{T}.\vec{v}^\star dS \end{aligned} \tag{3.4}$$

où e est l'épaisseur de l'éprouvette et S l'aire de la région d'intérêt. Les dépendances en (x, y) des tenseurs et vecteurs ont été omises par souci de concision.

Deux équations indépendantes doivent être construites pour déterminer les deux inconnues. Les champs virtuels choisis doivent être continus en déplacement mais peuvent être discontinus en déformation. Par exemple, dans le cas d'une éprouvette plate testée en traction suivant la direction x (voir figure 3.1), deux champs virtuels simples peuvent être employés.

Le premier champ virtuel, choisi pour sa simplicité, est un champ de déplacement linéaire longitudinal, il est noté $\vec{v}^{\star 1}$ et est tel que :

- avant la région d'intérêt ($x < 0$), $v_x^{\star 1}(x, y) = v_y^{\star 1}(x, y) = 0$,
- dans la région d'intérêt ($0 < x < L$), $v_x^{\star 1}(x, y) = -x$ et $v_y^{\star 1}(x, y) = 0$,
- après la région d'intérêt ($x > L$), $v_x^{\star 1}(x, y) = -L$ et $v_y^{\star 1}(x, y) = 0$ où L est la longueur de la région d'intérêt.

À ce champ de déplacement virtuel correspond un champ de déformation longitudinal constant sur la région considérée noté $\boldsymbol{\epsilon^{\star 1}}$:

- avant la région d'intérêt ($x < 0$), $\epsilon_{xx}^{\star 1}(x, y) = \epsilon_{yy}^{\star 1}(x, y) = \epsilon_{xy}^{\star 1}(x, y) = 0$,
- dans la région d'intérêt ($0 < x < L$), $\epsilon_{xx}^{\star 1}(x, y) = -1$ et $\epsilon_{yy}^{\star 1}(x, y) = \epsilon_{xy}^{\star 1}(x, y) = 0$,
- après la région d'intérêt ($x > L$), $\epsilon_{xx}^{\star 1}(x, y) = \epsilon_{yy}^{\star 1}(x, y) = \epsilon_{xy}^{\star 1}(x, y) = 0$.

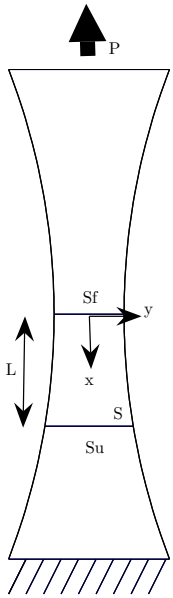
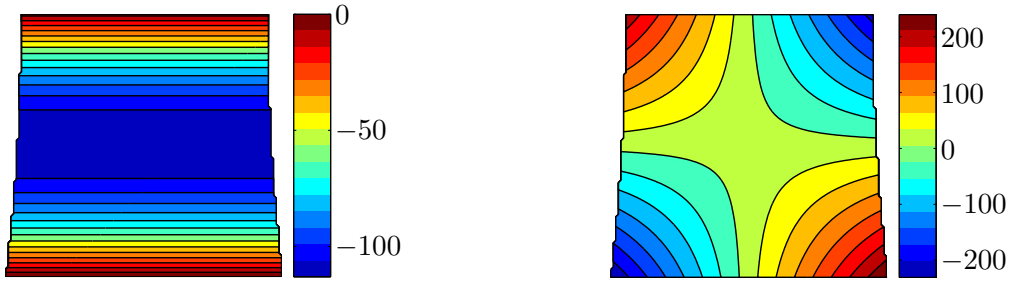


FIG. 3.1: Éprouvette plate d'épaisseur e testée en traction. La région d'intérêt de surface S est délimitée par les bords de l'éprouvette et les deux sections transversales S_u et S_f. Si on considère le sous domaine délimité par la surface S, S_u est la surface sur laquelle les déplacements sont imposés et $S_f$la surface sur laquelle les efforts sont imposés.



(a) $\epsilon^{\star 2}_{yy}$ (b) $\epsilon^{\star 2}_{xy}$

FIG. 3.2: Composantes non nulles du champ de déformation virtuel $\boldsymbol{\epsilon^{\star 2}}$.

En introduisant ce champs dans le principe des travaux virtuels (PTV), l'équation 3.4 devient :

$$\begin{gathered} eQ_{xx}\int_S(\varepsilon_{xx}\epsilon^{\star 1}_{xx})dS + eQ_{xy}\int_S(\varepsilon_{yy}\epsilon^{\star 1}_{xx})dS = \int_{S_f}\vec{T}(L,y,\overrightarrow{n}).\vec{v}^{\star 1}(L,y)dS \\ -eQ_{xx}\int_S\varepsilon_{xx}dS - eQ_{xy}\int_S\varepsilon_{yy}dS = -L\int_{S_f}\vec{T}(L,y,\overrightarrow{n})dS \\ Q_{xx}\int_S\varepsilon_{xx}dS + Q_{xy}\int_S\varepsilon_{yy}dS = \frac{LP}{e} \end{gathered} \tag{3.5}$$

où P représente la résultante de l'effort appliqué. Il s'agit là d'une caractéristique majeure de la méthode puisque le champ introduit ne fait pas intervenir la distribution de l'effort appliqué dans l'équation 3.5, seule la résultante de l'effort appliqué travaille. Or expérimentalement, seule la résultante est mesurée alors que la distribution reste le plus souvent inconnue.

Le deuxième champ de déplacement virtuel (également choisi manuellement) introduit dans l'équation 3.4 a pour expression :

- avant la région d'intérêt ($x > L$), $v^{\star 2}_x(x,y) = v^{\star 2}_y(x,y) = 0$,
- dans la région d'intérêt ($0 < x < L$), $v^{\star 2}_x(x,y) = 0$ et $v^{\star 2}_y(x,y) = xy(x-L)$,
- après la région d'intérêt ($x < 0$), $v^{\star 2}_x(x,y) = v^{\star 2}_y(x,y) = 0$.

Le champ de déformation obtenu par dérivation varie transversalement sur la région considérée, il est noté $\boldsymbol{\epsilon^{\star 2}}$(voir figure 3.2) :

- avant la région d'intérêt ($x > L$), $\epsilon^{\star 2}_{xx}(x,y) = \epsilon^{\star 2}_{yy}(x,y) = \epsilon^{\star 2}_{xy}(x,y) = 0$,
- dans la région d'intérêt ($0 < x < L$), $\epsilon^{\star 2}_{xx}(x,y) = 0$, $\epsilon^{\star 2}_{xy}(x,y) = y(2x-L)$ et $\epsilon^{\star 2}_{yy}(x,y) = x(x-L)$,
- après la région d'intérêt ($x < 0$) : $\epsilon^{\star 2}_{xx}(x,y) = \epsilon^{\star 2}_{yy}(x,y) = \epsilon^{\star 2}_{xy}(x,y) = 0$.

En introduisant ce champs dans le PTV, l'équation 3.4 devient :

$$\begin{gathered} eQ_{xx}\int_S\varepsilon_{yy}\epsilon^{\star 2}_{yy}dS + eQ_{xy}\int_S\varepsilon_{xx}\epsilon^{\star 2}_{yy}dS + e(Q_{xx}-Q_{xy})\int_S\varepsilon_{xy}\epsilon^{\star 2}_{xy}dS = \int_{L_f}\vec{T}(L,y,\overrightarrow{n}).\vec{v}^{\star 2}(L,y)dS \\ Q_{xx}\int_S x(x-L)\varepsilon_{yy}dS + Q_{xy}\int_S\varepsilon_{xx}x(x-L)dS + (Q_{xx}-Q_{xy})\int_S\varepsilon_{xy}y(2x-L)dS = 0 \end{gathered} \tag{3.6}$$

Cette fois-ci l'effort appliqué n'intervient pas puisque le champ virtuel annule la contribution du travail des efforts extérieurs.

Finalement, la combinaison des équations 3.5 et 3.6 conduit au système linéaire :

$$\begin{bmatrix} \int_S \varepsilon_{xx} dS & \int_S \varepsilon_{yy} dS \\ \int_S (x(x-L)\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xy} y(2x-L)) dS & \int_S (\varepsilon_{xx} x(x-L) - \varepsilon_{xy} y(2x-L)) dS \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{xx} \\ Q_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{PL}{e} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

L'inversion du système donne directement Q_{xx} et Q_{xy}, et les paramètres élastiques recherchés sont calculés comme suit :

$$\begin{cases} E &= Q_{xx} - \dfrac{Q_{xy}^2}{Q_{xx}} \\ \nu &= \dfrac{Q_{xy}}{Q_{xx}} \end{cases} \tag{3.8}$$

Les deux champs virtuels choisis permettent d'obtenir simplement les deux paramètres élastiques recherchés. Cette procédure a été appliquée dans les chapitres 5 et 6 sur des champs simulés et expérimentaux.

De la même façon que lors des premiers développements de la méthode (voir Grédiac et Paris 1996; Grédiac 1996a; Grédiac et Pierron 1998; Grédiac et al. 1998; Pierron et al. 2000 par exemple), le choix des champs virtuels a été effectué de manière empirique et n'est donc pas nécessairement optimal du point de vue numérique. En effet, il existe une infinité de champs virtuels cinématiquement admissibles et leur choix conduit à des équations différentes qui n'ont pas la même sensibilité vis à vis des erreurs de mesure. C'est pourquoi une procédure de sélection automatique de ces champs dans le cas élastique a été proposée il y a quelques années (voir Grédiac et al. 2002a,b). Ces champs dits « spéciaux » sont des champs polynomiaux dont le degré maximal et les coefficients sont choisis de manière à découpler les équations. Mais les champs obtenus ne sont toujours pas uniques et il existe encore toute une famille de champs susceptibles de découpler les équations. Avril et al. (2004a) ont alors proposé d'intégrer une analyse statistique lors de la sélection des champs virtuels afin de choisir celui qui minimise l'effet du bruit de mesure. Cette démarche a permis d'améliorer grandement l'incertitude sur les paramètres identifiés dans le cas linéaire. Malgré cela, cette procédure n'a pas été utilisée dans ce travail pour l'identification des paramètres élastiques isotrope car il s'agit d'un problème assez simple avec seulement deux paramètres à identifier.

Par contre, il n'existe pas à présent de procédure automatique de sélection des champs virtuels dans le cas de l'utilisation de la MCV pour identifier les paramètres d'une loi de comportement non linéaire. En effet, comme la paragraphe suivant va le montrer, le problème posé est sensiblement différent et ne conduit pas à un système d'équations linéaires.

3.3 Identification des paramètres plastiques

Après l'apparition de la plasticité, la relation entre contraintes et déformations $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\varepsilon})$ est non linéaire en raison de la présence d'un seuil et d'une relation d'écrouissage qui peut être également non linéaire. Si elles ne sont pas prises en compte, les déformations plastiques engendrent un déséquilibre dans les équations précédentes conduisant à une décroissance apparente des constantes élastiques iden-

tifiées (voir figure 5.6 chapitre 5). D'une manière générale, il n'est donc pas possible de construire un système linéaire fonction des paramètres d'écrouissage à identifier ni donc d'employer la méthode de champs virtuels telle qu'elle est utilisée dans le cas élastique. L'idée proposée par Grédiac et Pierron (2006) pour adapter la MCV au cas élastoplastique et plus généralement aux cas non linéaires, est de construire puis de minimiser une fonction coût dont dépendent les paramètres plastiques à identifier. Cette fonction coût est construite à partir d'un certain nombre d'équations obtenues en introduisant des expressions de champs virtuels différents dans le principe des travaux virtuels. En combinant ces relations avec les champs de déformations totales mesurées tout au long de l'essai, plusieurs équations sont obtenues. Elles sont ensuite normées et combinées pour donner une fonction coût globale à minimiser. Cette fonction coût constitue en fait un moyen de quantifier *l'écart à l'équilibre* de la structure testée, un peu dans le même esprit que la méthode de l'écart à l'équilibre proposée par Claire et al. 2002 en vue d'identifier un champ d'endommagement à partir d'une mesure de champ de déplacement. Puisque chaque champ virtuel donne une expression différente de l'équilibre, il fait intervenir différemment les paramètres à identifier et la combinaison de plusieurs de ces champs améliore la qualité de la fonction coût du point de vue de son unicité (voir Grédiac et Pierron 2006).

Avant d'évaluer l'écart à l'équilibre grâce à la méthode des champs virtuels, il faut pouvoir calculer l'état de contrainte à partir d'un jeu de paramètres d'écrouissage et des champs de déformation mesurés (voir figure 3.3). Le formalisme utilisé est emprunté notamment de Lemaitre et Chaboche (1985) et de Sutton et al. (1996). Dans le cadre des essais réalisés pour appliquer cette méthode, deux cas ont été traités. Le premier cas est une configuration d'essai de traction uniaxiale sur une éprouvette à section lentement variable. Dans ce cas, l'état de contrainte peut être considéré en première approximation comme uniaxial. Une procédure de calcul des contraintes adaptée à ce cas a alors été mise en place. Ensuite une procédure de calcul des contraintes dans le cas 2D (contraintes planes) est présentée, elle est directement inspirée des travaux de Deng et Rosakis (1990) et Sutton et al. (1996).

3.3.1 Cas uniaxial

3.3.1.1 Calcul des contraintes uniaxiales

Cette section présente la procédure utilisée dans le cas d'un état de contrainte uniaxial pour séparer les déformations élastiques et les déformations plastiques à partir des déformations totales mesurées dans le but de calculer les contraintes $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\varepsilon})$. La procédure est basée sur les hypothèses suivantes.

1. Le comportement du matériau est supposé homogène élastoplastique isotrope et les paramètres pilotant la loi de comportement sont connus *a priori.*
2. L'état de contrainte est uniaxial suivant l'axe x :

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$$

la seule composante σ_{xx} du tenseur des contraintes est alors simplement notée σ. Dans ce cas, la contrainte équivalente de Von Mises σ_{eq} vaut : $\sigma_{eq} = |\sigma|$. De même, la déformation plastique

cumulée p vaut directement : $p = \varepsilon^p_{xx}$et sera notée ε^p par la suite. La loi d'élasticité linéaire est donnée en fonction de la déformation élastique longitudinale ε^e_{xx} (notée ε^e par la suite) : $\sigma = E\varepsilon^e$, où E est le module d'Young, et les exposants ^{p} et ^{e} indiquent respectivement une composante plastique et élastique .

3. Le critère de plasticité considéré ici est le critère isotrope de Von Mises qui dans le cas uniaxial est donné par :

$$f(\sigma, \sigma_s) = |\sigma| - \sigma_s = 0$$

où σ_s est le seuil de plasticité calculé à partir du seuil de plasticité initial σ_0 et d'une loi d'écrouissage $R(\varepsilon^p)$:

$$\sigma_s = \sigma_0 + R(\varepsilon^p)$$

4. Une série de mesures du champ de déformation ε_{xx} (noté par la suite ε)est disponible afin de rendre compte de l'histoire du chargement. De plus, le premier champ mesuré est supposé être situé entièrement dans le domaine élastique afin de pouvoir calculer le premier état de contrainte de manière directe à partir des paramètres élastiques.

Dès l'apparition de la plasticité, le calcul d'un nouvel état de contrainte $\sigma(M, t_{j+1})$ en chaque point de mesure M à un instant donné t_{j+1} dépend de l'état de précédent ($\sigma(M, t_j)$, $\varepsilon^p(M, t_j)$, $\sigma_s(M, t_j)$) et de l'incrément de déformation mesuré $d\varepsilon = \varepsilon(M, t_{j+1}) - \varepsilon(M, t_j)$. Quatre cas doivent alors être distingués, selon la nature des déformations mesurées.

- Le premier et le deuxième concernent des déformations uniquement élastiques. Le premier cas est une charge entièrement comprise dans le domaine élastique.
- Le deuxième cas concerne une décharge entièrement comprise dans le domaine élastique.
- Le troisième cas est dit plastique car des déformations irréversibles se propagent du début à la fin de l'incrément de déformation.
- Le quatrième cas est un cas mixte puisque le début de l'incrément de déformation est entièrement élastique jusqu'à atteindre la surface de charge. Au delà, des déformations plastiques doivent être prises en compte.

Selon le cas, l'incrément de contrainte sera calculé de manière directe ou incrémentale. Pour savoir quel cas considérer, un calcul préliminaire est effectué. L'incrément de déformation est supposé être entièrement élastique. Le nouvel état de contrainte fictif qui en découle s'écrit alors :

$$\sigma^T(M, t_{j+1}) = \sigma(M, t_j) + Ed\varepsilon \tag{3.9}$$

Cet état de contrainte fictif est alors comparé au critère de Von Mises à l'instant précédent afin de déterminer si des déformations plastiques ont eu lieu. Ce résultat ainsi que la valeur du critère à l'instant précédent permettent de distinguer les quatre cas suivants :

1. *Charge élastique* : le seuil de plasticité n'est pas atteint à l'instant t_{j+1} :

$$\sigma^T(M, t_{j+1}) < \sigma_s(M, t_j)$$

et l'état de contrainte précédent était déjà élastique :

$$\sigma(M, t_j) < \sigma_s(M, t_j)$$

L'incrément de déformation est purement élastique et le calcul des contraintes se fait de manière directe :

$$\sigma(M, t_{j+1}) = \sigma^T(M, t_{j+1})$$

2. *Décharge élastique* : le seuil de plasticité n'est pas atteint à l'instant t_{j+1} :

$$\sigma^T(M, t_{j+1}) < \sigma_s(M, t_j)$$

et l'état de contrainte précédent vérifiait le critère de plasticité :

$$\sigma(M, t_j) = \sigma_s(M, t_j)$$

l'incrément de déformation est encore purement élastique et le calcul des contraintes se fait de manière directe :

$$\sigma(M, t_{j+1}) = \sigma^T(M, t_{j+1})$$

3. *Cas plastique* : le nouveau niveau de contrainte fictif est supérieur au seuil de plasticité calculé à l'état précédent :

$$\sigma^T(M, t_{j+1}) > \sigma_s(M, t_j)$$

et l'état de contrainte précédent vérifiait le critère de plasticité :

$$\sigma(M, t_j) = \sigma_s(M, t_j)$$

Dans ce cas, la séparation des déformations élastiques et des déformations plastiques est faite sur la totalité de l'incrément de déformation mesuré :

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon(t_{j+1}) - \varepsilon(t_j) = \Delta\varepsilon^e + \Delta\varepsilon^p$$

Pour pouvoir calculer l'incrément de déformation plastique, une procédure adaptée doit être mise en place car l'incrément de déformation ne peut être exprimé de manière explicite en fonction de l'état précédent. L'équation différentielle à résoudre est obtenue à partir de la formulation de Prandtl-Reuss (voir section 2.2.1.2, équation 2.23) de la condition de consistance :

$$\frac{\partial\varepsilon^p}{\partial t} = \frac{\dfrac{\partial\sigma}{\partial t}}{\dfrac{\partial R}{\partial\varepsilon^p}} = \frac{E(\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial t} - \dfrac{\partial\varepsilon^p}{\partial t})}{\dfrac{\partial R}{\partial\varepsilon^p}}$$

$$\frac{\partial \varepsilon^p}{\partial t} = \frac{E\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial t}}{(E + \dfrac{\partial R}{\partial \varepsilon^p})}$$

où $R(\varepsilon^p)$ est l'expression de la loi d'écrouissage isotrope. Cette équation différentielle est résolue par une méthode d'Euler. L'incrément de temps $T = t_{j+1} - t_j$ entre deux états successifs est divisé en N sous-incréments et l'incrément de déformation plastique est calculé pas à pas :

$$\begin{cases} \varepsilon^p(t_{j_{k+1}}) & = & \varepsilon^p(t_{j_k}) + \dfrac{E\left[\varepsilon(t_{j+1}) - \varepsilon(t_j)\right]/N}{E + \dfrac{\partial R}{\partial \varepsilon^p}} \\ \varepsilon^p(t_{j_0}) & = & \varepsilon^p(t_j) \end{cases} \tag{3.10}$$

Dans cette expression, le module tangent de la courbe d'écrouissage $\dfrac{\partial R(\varepsilon^p)}{\partial \varepsilon^p}$est évalué à partir des déformations plastiques à l'instant précédent $\varepsilon^p(t_{j_k})$. Le nombre N doit donc être choisi suffisamment grand pour pouvoir assurer la convergence. *A priori*, les sauts de déformation d'un point à l'autre sont différents. Il a donc été choisi d'imposer plutôt la taille du sous-incrément de déformation. Ainsi, le nombre N est différent d'un point à l'autre. La procédure incrémentale est valable quelle que soit l'expression de la loi d'écrouissage isotrope (elle peut également être formulée pour un écrouissage cinématique). Dans le cas du modèle de Voce (voir 2.2.1.3), l'expression du module tangent de la courbe d'écrouissage vaut :

$$\frac{\partial R}{\partial \varepsilon^p} = R_0 + b\ R_{\text{inf}} \exp(-b\varepsilon^p)$$

Le nouvel état de contrainte est ensuite calculé à partir des déformations élastiques :

$$\sigma(M, t_{j+1}) = \sigma(M, t_j) + E(d\varepsilon - d\varepsilon^p)$$

4. *Cas mixte* : le nouvel état de contrainte est supérieur au seuil de plasticité calculé à l'état précédent :

$$\sigma(M, t_{j+1}) > \sigma_s(M, t_j)$$

mais contrairement au *cas plastique* l'état de contrainte précédent n'atteignait pas le seuil de plasticité :

$$\sigma(M, t_j) < \sigma_s(M, t_j)$$

Dans ce cas, au cours du pas de chargement, une partie de l'incrément de déformation mesurée est purement élastique, c'est celle qui permet d'atteindre le seuil de plasticité :

$$d\varepsilon_a = \frac{\sigma_s(M, t_j) - \sigma(M, t_j)}{E}$$

Le reste de l'incrément de déformation $d\varepsilon_b = d\varepsilon - d\varepsilon_a$ est séparé en partie élastique et partie

plastique :

$$d\varepsilon_b = d\varepsilon_b^e + d\varepsilon_b^p$$

selon la procédure précédente (*Cas plastique*).

Le calcul des contraintes tel qu'il est présenté ici est seulement valable dans un cas uniaxial comme par exemple pour l'essai traité au chapitre 5. Les champs de contrainte simulés (voir figures 5.3 et 5.4) montrent que l'essai est proche d'un essai uniaxial. Pour valider le calcul uniaxial du champ de contrainte sur cet essai, la composante longitudinal du champ de contrainte simulé a été comparée à la composante du champ de contrainte calculée à partir des champs de déformation simulés. Les résultats ont révélés que l'erreur commise sur la composante uniaxiale du champ de contrainte était inférieure à trois pourcent (voir figure 5.5, chapitre 5).

3.3.1.2 Procédure d'identification

Les contraintes calculées à l'aide de l'algorithme précédent doivent vérifier le principe des travaux virtuels. Si tel est le cas, les paramètres introduits au début du calcul seront les paramètres recherchés. Pour atteindre cet objectif, une fonction coût est construite à partir du principe des travaux virtuels (équation 3.2) dans le cas 1D :

$$\mathcal{C}(\sigma_0, R_0, R_{\inf}, b) = \sum_i^n \sum_j^m \left[-\int_V \sigma(t_j)\epsilon_{xx}^{\star i}\, \mathrm{d}V + \int_S \vec{T}(t_j).\vec{v}^{\star i}\, \mathrm{d}S \right]^2 \tag{3.11}$$

où $(\overrightarrow{v}^{\star i}, \boldsymbol{\epsilon}^{\star i})$ est une série de n champs virtuels cinématiquement admissibles et $\sigma(t_j) = g(\boldsymbol{\varepsilon}(t_j))$ est une série de m champs de contraintes uniaxiales calculées à partir des déformations longitudinales mesurées $\boldsymbol{\varepsilon}(t_j)$ à l'instant t_j, des paramètres élastiques E et ν et d'un jeu de valeurs supposées *a priori* des paramètres de la loi plastique (σ_0, R_0, R_{inf} et b dans le cas du modèle de Voce utilisé dans ce travail).

Les champs utilisés pour construire la fonction coût sont basés sur le champ $(\overrightarrow{v}^{\star 1}, \boldsymbol{\epsilon}^{\star 1})$ utilisé pour identifier les paramètres élastiques (voir section 3.2), mais ils sont définis sur une plus petite longueur $\frac{L}{n}$, entre deux abscisses données x_i et x_{i+1} :

- pour $x < x_i$, $u_x^{\star i}(x, y) = 0$ et $u_y^{\star i}(x, y) = 0$
- pour $x_i < x < x_{i+1}$, $u_x^{\star i}(x, y) = x_i - x$ et $u_y^{\star i}(x, y) = 0$
- pour $x > x_{i+1}$, $u_x^{\star i}(x, y) = x_i - x_{i+1}$ et $u_y^{\star i}(x, y) = 0$

La région d'intérêt a ainsi été divisée en n éléments de longueurs égales $x_{i+1} - x_i = \frac{L}{n}$ et d'aire S_i. La fonction coût global est construite à partir de la somme des écarts quadratiques au principe des travaux virtuels définis par chacun de ces n champs virtuels $(\overrightarrow{v}^{\star i}, \boldsymbol{\epsilon}^{\star i})$, et pour chaque pas de chargement t_j :

$$\mathcal{C}(\sigma_0, R_0, R_{\inf}, b) = \sum_i^n \sum_j^m \left[\frac{\frac{P(t_j)L}{en} - \int_{S_i} \sigma(t_j) dS}{\frac{P(t_j)}{el} S_i} \right]^2 \tag{3.12}$$

où e indique l'épaisseur de l'éprouvette et l la largeur moyenne de la section considérée. Le dénominateur

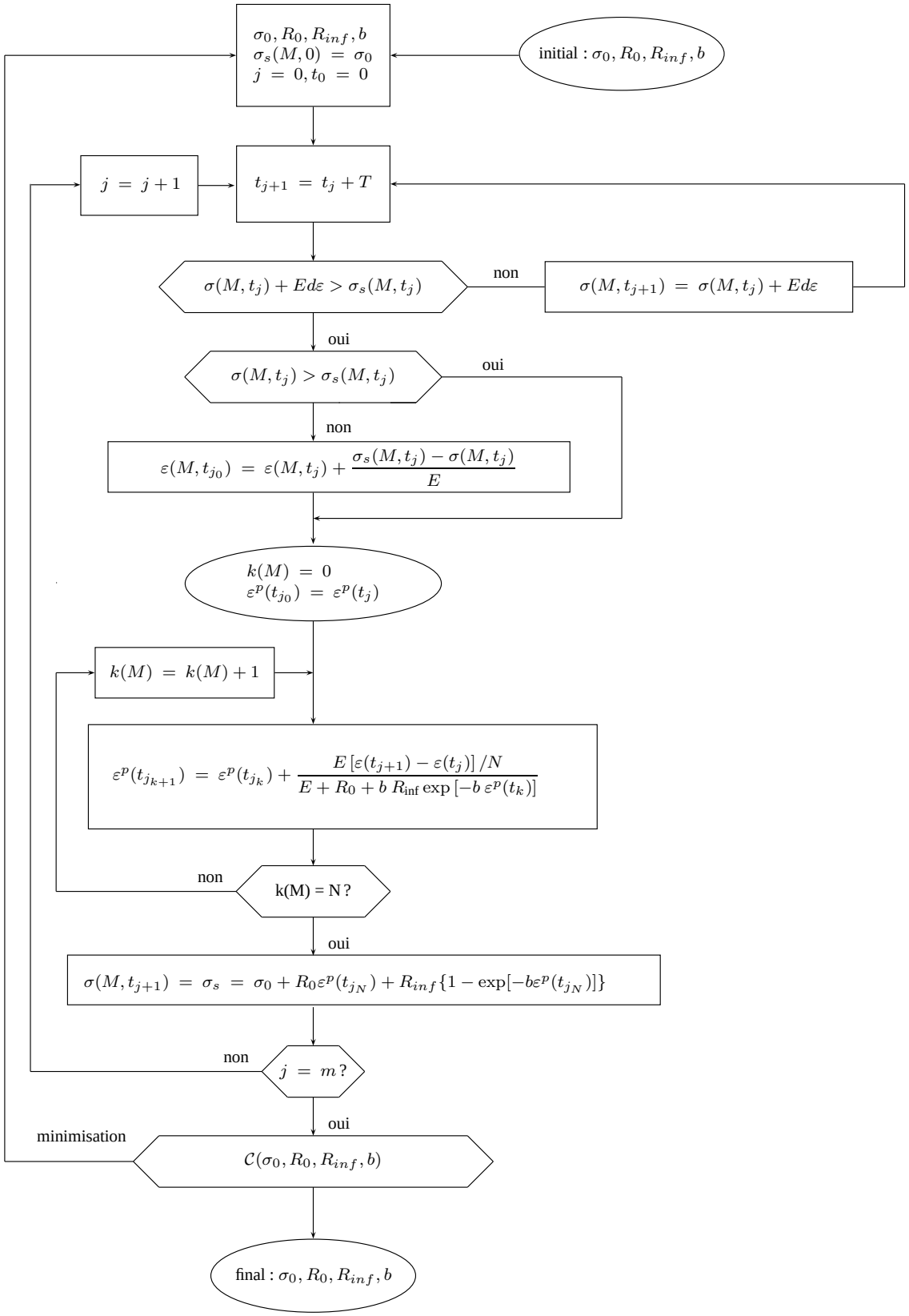


FIG. 3.3: Diagramme de la procédure de calcul des contraintes et de minimisation de l'écart à l'équilibre dans le cas uniaxial.

$\frac{P(t_j)}{el} S_i$ a été introduit afin d'obtenir des grandeurs sans dimensions, dont les poids respectifs seraient les mêmes quelle que soit la largeur de la section considérée ou le niveau de la force appliquée.

Un processus de minimisation est alors utilisé afin de minimiser la fonction coût $\mathcal{C}(\sigma_0, R_0, R_{\inf}, b)$ à partir d'un jeu de paramètres initiaux $\mathcal{C}(\sigma_0^i, R_0^i, R_{\inf}^i, b^i)$. Les cas étudiés dans ce travail ont été traités en utilisant la fonction *fminsearch* du logiciel *Matlab*. L'algorithme utilisé est un algorithme de recherche direct basé sur la méthode du simplex de Nelder-Mead (Lagarias et al. 1998) qui n'utilise ni gradients numériques ni gradients analytiques.

3.3.2 Cas multiaxial

Le cas uniaxial a permis de poser les bases de la méthode, mais le cas plus général en contraintes planes est un champ de contrainte multiaxial. Le cas étudié est encore celui d'un matériau homogène isotrope, l'objectif à plus long terme étant de traiter un matériau anisotrope.

3.3.2.1 Calcul des contraintes 2D

Cette section présente la procédure utilisée pour calculer les champs de contraintes planes à partir des champs de déformations mesurés et de la loi de comportement élastoplastique postulée *a priori*. L'algorithme d'intégration des contraintes est un calcul incrémental tiré des travaux de Sutton et al. (1996). Il est basé sur le calcul du module tangent avec l'hypothèse d'un retour radial et une correction de l'écoulement plastique négatif suggéré par Deng et Rosakis (1990) (voir section 2.2.1.2). Les hypothèses de travail sont les mêmes que dans le cas uniaxial, l'échantillon testé est supposé être en état de contraintes planes $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

Les contraintes sont calculées grâce à la loi d'élasticité de Hooke (équation 3.3) à partir des déformations élastiques.

Le critère de plasticité utilisé est le critère isotrope de Von Mises (voir équation 2.15). Dans le cas d'un état de contrainte plane, celui-ci s'écrit :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_s) = \sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\sigma_{xy}^2 \; - \; \sigma_s^2 = 0 \tag{3.14}$$

Dès l'apparition de la plasticité, le calcul d'un nouvel état de contrainte $\boldsymbol{\sigma}(M, t_{j+1})$ en chaque point de mesure M à un instant donné t_{j+1} dépend de l'état précédent ($\boldsymbol{\sigma}(M, t_j)$, $\boldsymbol{\varepsilon}(M, t_j)$, $\sigma_s(M, t_j)$) et de l'incrément de déformation total mesuré $\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(M, t_{j+1}) - \boldsymbol{\varepsilon}(M, t_j)$. Cinq cas doivent alors être distingués.

Selon le cas, l'incrément de contrainte sera calculé de manière directe ou incrémentale. Pour savoir quel cas considérer, un calcul préliminaire est effectué. L'incrément de déformation est supposé être

entièrement élastique. Le nouvel état de contrainte qui en découle s'écrit alors :

$$\boldsymbol{\sigma}^T(M, t_{j+1}) = \boldsymbol{\sigma}(M, t_j) + \Delta\boldsymbol{\sigma}^T \tag{3.15}$$

où $\boldsymbol{\sigma^T}$ est l'état de contrainte *test*, $\Delta\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{C}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ est l'incrément de contrainte test et $\boldsymbol{C}$ est la matrice des rigidités. Cet état de contrainte fictif est alors introduit dans l'expression du critère de plasticité 3.14. Les différents cas rencontrés sont illustrés sur la figure 3.4.

1. *Charge élastique* : la surface de charge n'est pas atteinte à l'instant t_{j+1} :

   $$f(\boldsymbol{\sigma}^T(M, t_{j+1}), \sigma_s(M, t_j)) \leq 0$$

   et l'état de contrainte précédent était déjà élastique :

   $$f(\boldsymbol{\sigma}(M, t_j), \sigma_s(M, t_j)) < 0$$

   L'incrément de déformation est purement élastique et le calcul des contraintes se fait de manière directe :

   $$\boldsymbol{\sigma}(M, t_{j+1}) = \boldsymbol{\sigma}^T(M, t_{j+1})$$

2. *Décharge élastique* : la surface de charge n'est pas atteinte à l'instant t_{j+1} :

   $$f(\boldsymbol{\sigma}^T(M, t_{j+1}), \sigma_s(M, t_j)) \leq 0$$

   et l'état de contrainte précédent se situait sur la surface de charge :

   $$f(\boldsymbol{\sigma}(M, t_j), \sigma_s(M, t_j)) = 0$$

   L'incrément de déformation est encore purement élastique et le calcul des contraintes se fait de manière directe :

   $$\boldsymbol{\sigma}(M, t_{j+1}) = \boldsymbol{\sigma}^T(M, t_{j+1})$$

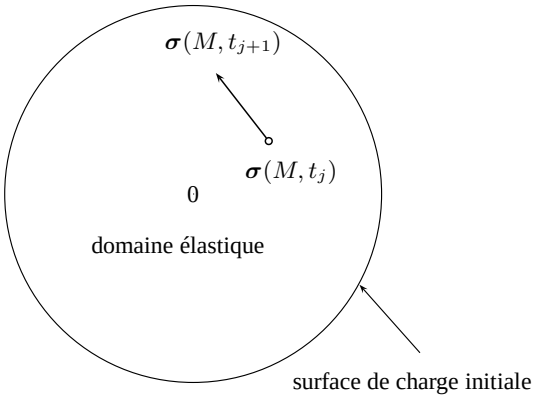
3. *Cas plastique* : l'état de contrainte fictif vérifie le critère de plasticité à l'instant t_{j+1} :

   $$f(\boldsymbol{\sigma}^T(M, t_{j+1}), \sigma_s(M, t_j)) = 0$$

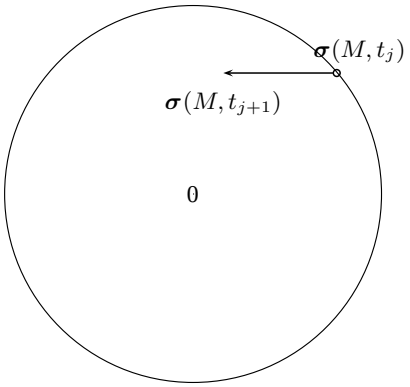
   et l'état de contrainte précédent se situait sur la surface de charge :

   $$f(\boldsymbol{\sigma}(M, t_j), \sigma_s(M, t_j)) = 0$$

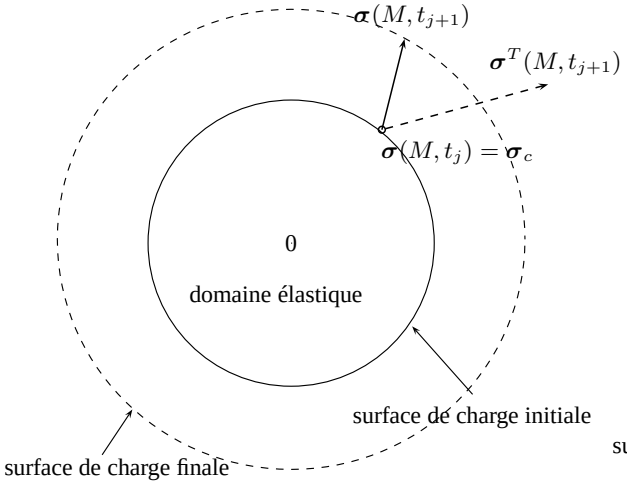
   À ce stade il existe encore deux possibilités. Soit l'incrément de contrainte se dirige vers l'extérieur de la surface de charge (figure 3.4 c), soit il repasse à l'intérieur de la surface de charge pour ressortir à un autre endroit (figure 3.4 d). Dans ce dernier cas, il convient de déterminer pour



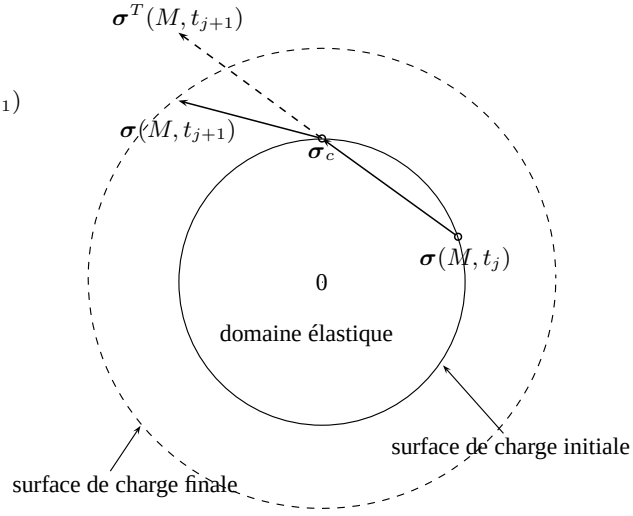
(a) Charge élastique



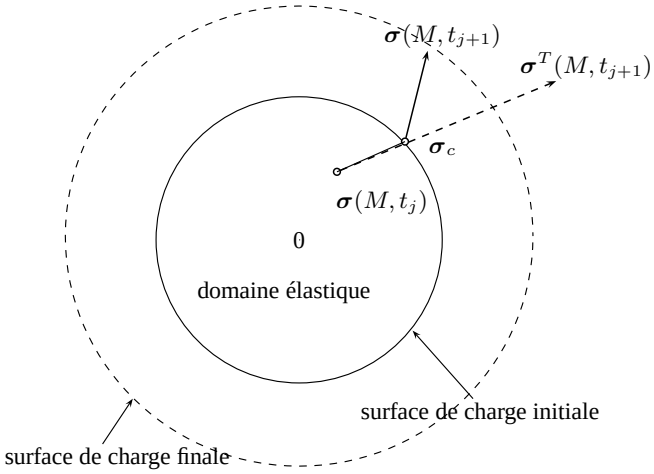
(b) Décharge élastique



(c) Cas plastique pur



(d) Décharge élastique puis plasticité



(e) Charge élastique puis plasticité

FIG. 3.4: Les cinq cas considérés pour le calcul de la plasticité 2D.

quel état de contrainte $\boldsymbol{\sigma}_c$ le contact avec la surface de charge a lieu. Pour déterminer le sens de l'incrément de contrainte, le signe de l'expression suivante est calculé :

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}'^T : \boldsymbol{\sigma}'(M \tag{3.16}$$

a) Si le signe est positif, c'est que l'incrément de contrainte se dirige vers l'extérieur de la surface de charge, le calcul de l'incrément de déformation plastique se fait à partir de l'expression du multiplicateur plastique $\Delta\lambda$ (voir équation 2.29) à travers la loi d'écoulement :

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \Delta\lambda\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}} = \Delta\lambda\boldsymbol{\sigma}' \tag{3.17}$$

L'expression du multiplicateur plastique est obtenue à partir de la condition de consistance (équation 2.19). Comme l'expression du multiplicateur plastique (équation 2.29) dépend de l'histoire des déformations plastiques à travers $\boldsymbol{\varepsilon}^p$, la précision obtenue sur l'état de contrainte final $\boldsymbol{\sigma}^N = \boldsymbol{\sigma}(M, t_{j+1})$ dépend de la taille de l'incrément de déformation mesuré $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$. Dans le but de réduire les erreurs de calculs, la taille de l'incrément de déformation est divisée en un nombre N de sous-incréments $\frac{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}}{N}$. Chaque estimation successive de l'état de contrainte $\boldsymbol{\sigma}^n$ et du multiplicateur plastique $\Delta\lambda$ est calculée à partir de l'état de contrainte précédent. Pour chaque itération, la surface de charge est réévaluée et la répartition de déformations élastiques et plastiques est réalisée. Si la valeur de $\boldsymbol{\sigma}^n$ est exacte, elle doit coïncider avec la surface de charge, c'est-à-dire que $f(\boldsymbol{\sigma}^n, \sigma_s) = 0$. Cependant, dans la plupart des cas, un écart subsiste. Pour corriger cet écart, une méthode inspirée du retour radial est utilisée. Elle consiste à réajuster l'état de contrainte estimé $\boldsymbol{\sigma}^n$ de manière proportionnelle. Pour cela, un paramètre β tel que $\boldsymbol{\sigma}(t + \Delta t) = \beta\boldsymbol{\sigma}^n$ est calculé afin de vérifier l'équation $f(\beta\boldsymbol{\sigma}^n, \sigma_s) = 0$.

b) Si le signe de l'expression 3.16 est négatif, l'incrément de contrainte se dirige vers l'intérieur de la surface de charge, donc une partie de l'incrément de déformation se réduit à une décharge élastique (voir figure 3.4 d). Si l'on suppose que cette décharge élastique est proportionnelle à l'incrément de contrainte test $\Delta\boldsymbol{\sigma}^T$, la détermination du point de contact $\boldsymbol{\sigma}_c = \boldsymbol{\sigma}(M, t_j) + r\Delta\boldsymbol{\sigma}^T$ avec la surface de charge peut être effectuée en trouvant le nombre r vérifiant cette équation :

$$f(\boldsymbol{\sigma}(M, t_j) + r\Delta\boldsymbol{\sigma}^T, \sigma_s(M, t_j)) = 0 \tag{3.18}$$

Le nouvel état de contrainte $\boldsymbol{\sigma}_c$ est alors considéré comme l'état de contrainte initial pour le reste de la procédure et le reste de l'incrément de déformation $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_b = (1 - r)\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ est traité comme précédemment (cas 3 (a)).

4. *Charge élastique puis plasticité* : l'état de contrainte fictif vérifie le critère de plasticité à l'instant t_{j+1} :

$$f(\boldsymbol{\sigma}^T(M, t_{j+1}), \sigma_s(M, t_j)) = 0$$

et l'état de contrainte précédent se situait à l'intérieur de la surface de charge :

$$f(\boldsymbol{\sigma}(M,t_j),\sigma_s(M,t_j)) < 0$$

Dans ce cas, une partie de l'incrément de déformation est purement élastique tandis que le reste est composé à la fois d'une partie élastique et d'une partie plastique. Ce cas est très proche du précédent (cas 3 (b)) car il est également nécessaire de déterminer le point de contact $\boldsymbol{\sigma}_c$ avec la surface de charge. En supposant toujours que la charge élastique est proportionnelle à l'incrément de contrainte test $\Delta\boldsymbol{\sigma}^T$, la détermination du point de contact $\boldsymbol{\sigma}_c = \boldsymbol{\sigma}(M,t_j) + r\Delta\boldsymbol{\sigma}^T$ avec la surface de charge est réalisée en trouvant le nombre r vérifiant l'équation 3.18. Ensuite, le reste de l'incrément de déformation $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_b = (1-r)\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ est traité avec le processus incrémental décrit précédemment (cas 3 (a)).

L'algorithme de calcul des contraintes est validé grâce aux résultats de simulation de l'essai de traction sur éprouvette plane bi-entaillée (voir chapitre 6). Cette procédure est introduite dans la procédure d'identification des paramètres de la loi de comportement qui est présentée dans la section suivante. Le diagramme 3.5 résume le déroulement du calcul des contraintes et son intégration dans le processus d'identification.

3.3.2.2 Procédure d'identification

Cette fois-ci, la fonction coût construite (équation 3.2) pour identifier les paramètres de la loi d'écrouissage peut faire intervenir toutes les composantes du tenseur de contraintes puisque l'essai est multiaxial :

$$\mathcal{C}_i(\sigma_0,R_0,R_{\inf},b) = \sum_i^n \sum_j^m \left[-\int_V \boldsymbol{\sigma}(t_j) : \boldsymbol{\epsilon}^{\star i}\,\mathrm{d}V + \int_S \vec{T}(t_j).\vec{\nu}^{\star i}\,\mathrm{d}S \right]^2 \tag{3.19}$$

où $(\boldsymbol{\epsilon}^{\star i}, \overrightarrow{\nu}^{\star i})$ est une série de n champs virtuels cinématiquement admissibles et $\boldsymbol{\sigma}(t_j) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\varepsilon}(t_j))$ est une série de m champs de contraintes calculés à partir des déformations mesurées $\boldsymbol{\varepsilon}(t_j)$ à l'instant t_j, des paramètres élastiques E et ν et d'un jeu de valeurs supposées *a priori* des paramètres de la loi plastique (σ_0, R_0, R_{inf} et b dans le cas du modèle de Voce utilisé dans ce travail).

La première série de n champs utilisés pour construire la fonction coût est identique aux champs $(\overrightarrow{v}^{\star i}, \boldsymbol{\epsilon}^{\star i})$ utilisés dans le cas uniaxial.

La fonction coût $\mathcal{C}$ est construite à partir de la somme des écarts quadratiques au principe de travaux virtuels définis par chacun de ces n champs virtuels $(\overrightarrow{v}^{\star i}, \boldsymbol{\epsilon}^{\star i})$, et pour chaque pas de chargement t_j :

$$\mathcal{C}(\sigma_0,R_0,R_{\inf},b) = \sum_i^n \sum_j^m \left[\frac{\frac{P(t_j)L}{en} - \int_{S_i}\sigma_{xx}(M,t_j)dS}{\frac{P(t_j)}{el}S_i} \right]^2 \tag{3.20}$$

où e indique l'épaisseur de l'éprouvette et l la largeur moyenne de la section considérée. Par contre, cette

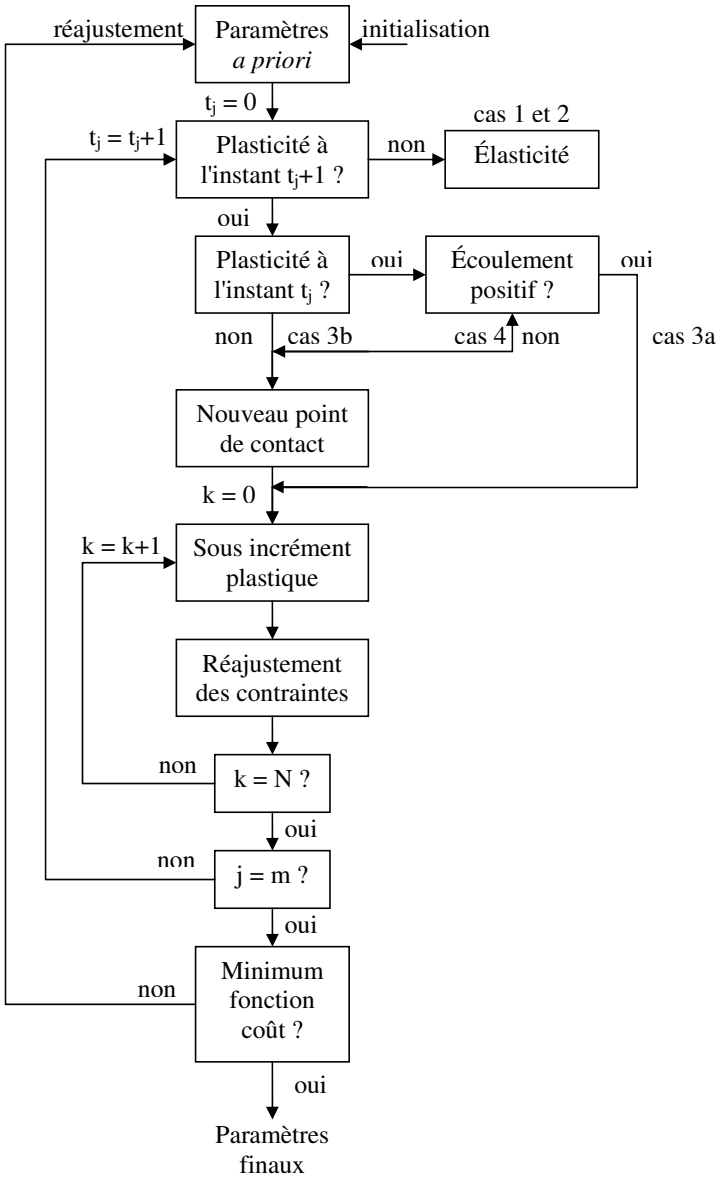


FIG. 3.5: Diagramme de la procédure de minimisation et de calcul des contraintes dans le cas 2D.

fois-ci la contrainte σ_{xx} est calculée en contrainte plane :

$$\sigma_{xx}(M,t_j) = Q_{xx}(\varepsilon_{xx}(M,t_j) - \varepsilon^p_{xx}(M,t_j)) + Q_{xy}(\varepsilon_{yy}(M,t_j) - \varepsilon^p_{yy}(M,t_j))$$

D'autres champs virtuels peuvent être introduits pour enrichir la fonction coût globale. Par exemple, le champ $(\overrightarrow{v}^{\star 2}, \boldsymbol{\epsilon}^{\star 2})$ utilisé pour identifier les paramètres élastiques (voir section 3.2) peut être combiné avec les champs précédents. Ce champ présente l'avantage de faire participer les autres composantes du tenseur des contraintes. Des précautions doivent cependant être prises pour pondérer les contributions des différents champs. Une solution consiste à pondérer les différents écarts au PTV par la valeur atteinte avec le jeu de paramètres initiant la procédure d'identification (voir Grédiac et Pierron 2006). L'utilisation de plusieurs champs peut ainsi contribuer à améliorer l'identifiabilité des paramètres et garantir l'unicité de la solution.

Comme dans le cas uniaxial, la fonction *fminsearch* est utilisée pour minimiser la fonction coût $\mathcal{C}(\sigma_0, R_0, R_{\inf}, b)$ à partir d'un jeu de paramètres initiaux $(\sigma_0^i, R_0^i, R_{\inf}^i, b^i)$.

4 Mesure des champs de déformation plane

4.1 Introduction

Les mesures de champs cinématiques connaissent un grand intérêt en caractérisation mécanique expérimentale. Encore aujourd'hui, les mesures de grandeurs cinématiques sont souvent réalisées ponctuellement à l'aide d'extensomètres, de jauges de déformation, de comparateurs ou encore de capteurs LVDT (linear variable displacement transducer). Les mesures de champs permettent d'avoir accès à toute une cartographie de grandeurs comme le relief, les déplacements, les déformations, les pentes, les courbures etc. Beaucoup de ces techniques existaient déjà auparavant sous une forme analogique, mais elles ont connu un regain d'intérêt suite aux progrès réalisés en acquisition numérique d'images et en traitement automatisé d'images numériques. Ces développements ont été rendus possibles grâce à l'évolution très rapide de la micro-informatique et des capteurs CCD (charge coupled device).

Une grande variété de techniques existe pour mesurer les champs de déplacement (Kobayashi 1993), parmi celles-ci, les techniques optiques présentent l'intérêt d'être sans contact et non intrusives. Quasiment toutes les techniques optiques de mesure de champ cinématique se limitent à des mesures de déplacement en surface. Parmi elles, certaines permettent de mesurer les déplacements dans le plan, tandis que d'autres permettent en plus d'accéder à la composante hors-plan. Ces dernières sont basées soit sur des montages à deux caméras, dits stéréoscopiques, soit sur des systèmes interférométriques sensibles au déplacement hors-plan. Pour obtenir les déformations il peut être nécessaire de dériver numériquement les champs de déplacement. Cette dérivation s'accompagne d'une amplification du bruit de mesure et nécessite presque toujours une opération de lissage des données avant dérivation. Cette opération n'est pas anodine car elle détermine en partie la résolution spatiale de la mesure. Finalement le choix d'une technique, du matériel et des traitements devra être en adéquation avec l'application envisagée. Ce chapitre présente la technique employée pour mesurer les champ de déplacement plan à la surface des éprouvettes testées.

4.1.1 Classement des méthodes

La nature du mesurande permet de distinguer les techniques interférométriques et les techniques non interférométriques. Les premières utilisent la phase d'une onde lumineuse cohérente pour coder la quantité mesurée (déplacement ou déformation). Les secondes regroupent les techniques basées sur l'observation de l'intensité lumineuse réfléchie par un motif présent sur la surface analysée.

La première catégorie de méthode repose sur l'analyse de figures d'interférences 2D. Une source cohérente est utilisée pour éclairer la surface analysée, et les déplacements ou les déformations sont

obtenus en mesurant la différence de phase des franges d'interférence entre un état de référence et un état susceptible d'avoir été modifié. Deux familles de méthode sont utilisées en mécanique expérimentale : l'interférométrie de speckle (ESPI : electronic speckle pattern interferometry) et l'interférométrie sur réseau (IR). Les premières reposent sur la diffusion de la lumière par la surface testée (ayant une rugosité suffisante) et les secondes par la diffraction de la lumière sur un réseau en relief solidaire de la surface analysée.

Dans les deux cas, il existe différentes configurations qui se distinguent par la (ou les) direction(s) d'éclairage et la direction d'observation. Ces directions permettent de définir le vecteur sensibilité qui indique la composante pour laquelle la méthode de mesure est sensible. Il existe ainsi des montages (ESPI ou IR) de mesure de champ de déplacement dans le plan et d'autres de mesure de champ de déplacement hors-plan. Le moiré interférométrique désigne la variante IR qui permet de mesurer les déplacements dans le plan. Il existe également des montages différentiels qui permettent de mesurer directement la dérivée des déplacements (dans le plan ou hors-plan). La version ESPI s'appelle shearographie et la version IR s'appelle interférométrie différentielle sur réseau.

La deuxième catégorie de méthode regroupe les techniques non interférométriques. Dans ce cas, la quantité mesurée est codée dans la variation spatiale d'une intensité lumineuse et non plus dans la phase d'une onde lumineuse. Le principe de ces méthodes est de marquer la surface par un motif afin de calculer la modification (déplacement, pente) de cette signature par traitement d'images. La nature du motif utilisé pour coder l'information spatialement permet de distinguer les techniques basées sur l'utilisation d'un codage aléatoire ou d'un codage périodique.

Les codages aléatoires (ou encore mouchetis) sont obtenus soit par déposition d'une couche de peinture, soit par la texture naturelle du matériau ou encore par granularité laser. Dans le dernier cas (qui désigne la photographie de speckle), l'utilisation d'un laser n'est là que pour marquer la surface et non pour former des franges d'interférence. Les motifs formés dans ce cas (appelés speckle) peuvent être traités par un filtrage optique analogique. Dans tous les cas, la corrélation d'images numériques peut être employée pour traiter le motif aléatoire. Son principe consiste à associer les points homologues en se basant sur la ressemblance de leur voisinage (par le calcul du coefficient de corrélation) puis à en déduire les champs de déplacements. L'utilisation d'une deuxième caméra observant le motif sous un angle différent permet de réaliser un système stéréoscopique. On obtient alors la séréocorrélation d'images qui permet de mesurer les déplacements dans le plan et les déplacements hors-plan des points d'une surface qui peut éventuellement être courbe.

Les codages périodiques sont obtenus soit par transfert d'un réseau sur la surface analysée soit par projection de franges ou réflexion de grille à distance. Le principe de ces méthodes réside dans la modulation de phase du réseau périodique par le champ de déplacement, de relief ou de pente. La démodulation de la phase présente dans les images d'intensité conduit directement au déplacement, relief ou pente recherché. Parmi les méthodes utilisant un réseau périodique, on trouve : la méthode de grille qui permet de mesurer les déplacements plans ; le moiré d'ombre et la projection de frange qui permettent de mesurer le relief ; la déflectométrie qui permet de mesurer les pentes.

4.1.2 Choix d'une technique

Le choix de l'une ou l'autre des techniques de mesure de champ dépend de l'application envisagée. Les critères de choix peuvent être : le coût, la facilité de mise en oeuvre, la taille du champ de mesure, la plage de variation des grandeurs mesurées, la résolution, la résolution spatiale, le temps de réponse ou la sensibilité aux perturbations extérieures. Ces données sont liées en grande partie à la technique choisie, mais aussi à la qualité du matériel utilisé (capteur CCD, optique de formation des images, puissance du laser) et des traitements réalisés pour extraire l'information recherchée (fonction d'interpolation, corrélation, transformée de fourier, analyse de phase, dépliement, lissage, dérivation).

Dans le cas de l'identification de lois de comportements en petites déformations, comme c'est le cas en élastoplasticité des métaux, une attention particulière doit être apportée à la résolution de la technique. La détermination des paramètres élastiques et la détection de l'apparition de la plasticité suppose de pouvoir mesurer des déformations de l'ordre de 10^{-4}. La mesure des déplacement hors-plan n'est pas nécessaire si l'on considère un état de contrainte plane et que l'on fait l'hypothèse d'incompressibilité plastique. Les essais envisagés sont des essais de traction sur éprouvette plate donc une mesure de champ de déplacement dans le plan conviendrait tout à fait. Par ailleurs, la taille du champ de mesure est de quelques centimètres carrés. Trois techniques auraient pu assez simplement être mises en place pour cette application : l'interférométrie de speckle, la corrélation d'images ou la méthode de grille. D'une manière générale, les techniques interférométriques sont les plus sensibles et offrent une meilleure résolution que les techniques en lumière blanche. Cependant, elles présentent l'inconvénient d'être très sensibles aux perturbations de l'environnement extérieur, comme les variations d'indices de l'air, les vibrations. En l'occurrence, l'utilisation d'une machine de traction rend difficile l'utilisation de l'interférométrie de speckle à cause des vibrations provoquées par le moteur de la machine. Les techniques en lumière blanche sont plus robustes à l'environnement extérieur, d'une part parce qu'elles sont moins sensibles et d'autre part parce que l'éclairage est incohérent. Cependant la résolution brute de ces techniques descend difficilement en dessous de 10^{-3}. Cette valeur peut être améliorée en utilisant des traitements adaptés des mesures. Ces traitements peuvent être réalisé si la résolution spatiale de la méthode le permet. C'est pourquoi les techniques en lumière blanche qui disposent d'une bonne résolution spatiale présentent un fort potentiel d'amélioration de la résolution. Parmi les techniques en lumière blanche qui offrent une haute résolution spatiale, il existe la méthode de grille. Cette technique a été appliquée sur des grilles de 1200 traits par millimètres observées sous microscope à haute résolution jusqu'à des grilles de moins d'un trait par millimètre observées avec un objectif photographique. Des pas supérieurs sont envisageables, les seules limitations sont de disposer d'un procédé pour réaliser et transférer les grilles puis d'adapter le système de prise de vue pour une observation dans de bonnes conditions. Un autre avantage de la méthode de grille réside dans la simplicité de sa programmation. Or dans une optique d'identification de paramètres de lois de comportement, il est très important de maîtriser la chaîne de traitements numériques appliqués pour réaliser une mesure. Le gros inconvénient de cette technique est lié à la réalisation puis au transfert des grilles, mais un procédé abordable est disponible pour l'application envisagée. Finalement, pour les différentes raisons évoquées, c'est la méthode de la grille qui sera employée dans ce travail.

4.2 Principe de la méthode de grille

La méthode de la grille (Surrel 1994, 2005a) est une technique de mesure de champs de déplacement dans le plan en lumière blanche. Elle est basée sur l'analyse des images d'une grille solidaire de la surface à analyser. Le caractère optique de la technique se limite à l'acquisition des images puisque le principe de la méthode est uniquement basé sur des considérations géométriques. L'utilisation d'un capteur CCD et de la micro-informatique permet l'acquisition et un traitement automatique des images de la grille par les algorithmes de détection de phase. Les champs de déplacement sont ensuite traités et dérivés numériquement pour conduire aux champs de déformation de la surface analysée. Les paragraphes suivants détaillent les différents aspects du procédé de mesure et des traitements numérique appliqués.

4.2.1 Obtention des grilles

La principe de la méthode est basée sur l'observation d'une grille solidaire de la surface à analyser. L'hypothèse est donc faite que cette grille reproduit fidèlement les déplacements et les déformations de la surface. Plusieurs techniques existent pour dupliquer une grille sur une éprouvette, le choix de l'une ou l'autre dépend du matériau sur lequel la grille doit être déposée ainsi que du pas souhaité de grille. Les grilles peuvent être gravées, transférées, photographiées, imprimées ou encore collées sur la surface à analyser (Parks 1993). Si de nombreuses techniques existent pour réaliser des grilles à haute fréquence spatiale (marquage laser, lithographie, micro érosion, photo électrodéposition, etc ; voir Post 1982), il existe paradoxalement assez peu de techniques adaptées à la fabrication de grilles de basse fréquence spatiale (pas supérieur au millimètre et jusqu'à $100\ \mu m$).

La technique utilisée ici permet d'obtenir des grilles d'une dizaine de traits par millimètre, est peu onéreuse (une dizaine d'euros à comparer à plus d'une centaine d'euros pour des grilles destinées au moiré interférométrique) et de bonne qualité métrologique. Ces grilles sont obtenues par la technique du flashage de films photosensibles et transférées par collage à l'aide d'une résine époxyde de couleur blanche. Les détails de la procédure d'obtention et de collage peuvent être retrouvés dans les travaux de Piro et Grédiac (2004). Pour obtenir un transfert de bonne qualité une préparation préliminaire de la surface est nécessaire. Cette opération est analogue à celle réalisée pour le collage de jauge à fil résistif.

Un fichier écrit directement en langage PostScript permet de garantir la qualité du résultat obtenu par flashage de film en évitant les interventions logiciels qui viendraient modifier les caractéristiques métrologiques de la grille. Le fichier est réalisé de telle façon que les traits de la grille soient équidistants et de largeur égale à la demi-période. Il a été estimé qu'une erreur de 1% sur le pas de la grille provoque une erreur relative d'environ 1% sur la mesure de déplacement.

La résolution des imprimantes jet d'encre et des imprimantes laser atteint environ $700\ dpi$ (dpi : dot per inch), voire $1200\ dpi$. Pour réaliser des grilles d'une dizaine de traits par millimètre de bonne qualité une résolution d'au moins $2540\ dpi$ est nécessaire (10 points par période de $0,1\,mm$). Une flasheuse Heidelberg Recorder 3030 utilisée dans l'imprimerie à grands tirages (procédé CTF : computer to film) permet d'atteindre une résolution de $4877\ dpi$. Cette flasheuse a permis d'obtenir des grilles d'une vingtaine de traits par millimètre, moyennant quelques corrections dans le fichier de commande pour pouvoir

conserver une largeur de trait égale à la demi période.

Les films utilisés pour l'impression des grilles sont différents des transparents utilisés avec les imprimantes jet d'encre ou laser. Il s'agit de films photographiques, composé d'un polymère transparent (d'épaisseur environ $0,1\ mm$) servant de support à une émulsion photosensible. Pour éviter d'apporter une rigidité supplémentaire et pour améliorer le contraste des grilles, ce support est retiré après collage.

La technique du transfert de la grille consiste donc à coller le film photographique côté émulsion sur la surface plane considérée puis à retirer le support transparent après polymérisation de la colle. Cette opération est délicate et peut endommager la grille. Pour certaines applications le film peut être conservé car il protège la grille et évite de l'endommager lors du retrait. Plusieurs films transparents ont été testés mais la plupart n'ont pas permis de transférer l'émulsion photographique en raison d'une trop forte adhésion avec le film transparent. Finalement le film Ferrania AI PO-50 s'est révélé être parfaitement adapté pour transférer aisément l'émulsion.

La colle utilisée pour transférer la grille est une résine époxyde à deux composantes commercialisée sous la dénomination E504 par la société Epotechny. Cette colle a la particularité d'être de couleur blanche assurant ainsi le contraste nécessaire à l'observation des traits noirs de la grille et évitant ainsi l'utilisation de peinture blanche avant collage. Une étude de la réponse mécanique de la colle (Piro et Grédiac 2004) a révélé un comportement similaire à celui de la colle à jauges M200 de la société Vishay Micromesures.

Après polymérisation de la colle (durant environ 39 heures), le retrait du support polymère est rendu possible par le fait que l'adhésion de la colle avec l'émulsion photographique est alors plus forte que celle qui existe avec le film polyester. Une épaisseur homogène de colle inférieure à $0,1\ mm$ est obtenue en exerçant une pression uniforme sur le film durant le processus de polymérisation. Cette épaisseur garanti un cisaillement très faible de la colle et donc une bonne reproduction des déformations de la surface. La rigidité ajoutée est également négligeable compte tenu de celle des éprouvettes en acier de $2\ mm$ d'épaisseur.

4.2.2 Aspects géométriques

Les grilles utilisées ici sont des réseaux de traits croisés perpendiculaires espacés d'une période p et d'épaisseur environ égale à la demi période. L'information (déplacement) recherchée se trouve dans la *modulation* de phase de cette *porteuse* spatiale bidirectionnelle. Les outils de traitement du signal permettent de démoduler cette phase.

On considère un point M de l'espace caractérisé par son vecteur position $\vec{r}(x,y)$ dans le repère cartésien (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$). Dans l'état initial (non déformé), le point M coïncide avec le point matériel M_0 de la grille. L'intensité lumineuse réfléchie au point M venant de M_0 est donnée par :

$$I(M) = I(M_0) = I_0 \left[1 + \gamma \ \text{frng}\left(2\pi \vec{f_x} \cdot \vec{r}\right) \ \text{frng}\left(2\pi \vec{f_y} \cdot \vec{r}\right)\right] \tag{4.1}$$

où :

– I_0 est l'intensité moyenne,

- γ est le contraste compris entre 0 et 1,
- frng est une fonction continue 2π-périodique,
- $\vec{f_x}$ et $\vec{f_y}$ sont les vecteurs fréquence spatial respectivement associés aux lignes verticales et horizontales. Ils sont normaux aux traits de la grille et leurs amplitudes correspondent aux fréquences spatiales de la grille. Si les traits de la grille sont horizontaux (parallèles à $\vec{\imath}$) et verticaux (parallèles à $\vec{\jmath}$), les vecteurs fréquences spatiales s'écrivent respectivement $\vec{f}(0, f_0)$ et $\vec{f}(f_0, 0)$ avec $f_0 = 1/p$.

Lorsqu'un effort est appliqué, le solide se déforme et la grille se déforme également. Dans l'état final (déformé), le point M coïncide avec le point matériel M_1. M_1 est caractérisé dans l'état initial par le vecteur position $\vec{r_1}(x, y)$ dans le repère cartésien de référence et par l'intensité lumineuse réfléchie par ce point, donnée par :

$$I(M_1) = I_0 \left[1 + \gamma \text{ frng}\left(2\pi \vec{f_x} \cdot \vec{r_1}\right) \text{ frng}\left(2\pi \vec{f_y} \cdot \vec{r_1}\right)\right] \tag{4.2}$$

À l'instant final, le point M reçoit l'intensité lumineuse réfléchie par le point M_1. Celle-ci est la même qu'à l'état initial puisqu'il s'agit du même point matériel, solidaire du même morceau de grille et éclairé dans les mêmes conditions (I_0, γ et frng identiques), donc $I(M) = I(M_1)$ à l'état déformé. De plus, la déformation de l'état initial vers l'état final est décrite mathématiquement par le champ de déplacement $\vec{u}(M_1) = \vec{r} - \vec{r_1}$. En conséquence, l'équation 4.2 devient :

$$I(M) = I_0 \left\{1 + \gamma \text{ frng}\left[2\pi \vec{f_x} \cdot (\vec{r} - \vec{u}(M_1))\right] \text{ frng}\left[2\pi \vec{f_y} \cdot (\vec{r} - \vec{u}(M_1))\right]\right\} \tag{4.3}$$

Si la transformation est petite entre les deux images, $\vec{u}(M_1)$ et $\vec{u}(M_0)$ sont égaux. Donc, dans l'état déformé, l'équation précédente peut s'écrire :

$$I(M) = I_0 \left\{1 + \gamma \text{ frng}\left[2\pi \vec{f_x} \cdot (\vec{r} - \vec{u}(M_0))\right] \text{frng}\left[2\pi \vec{f_y} \cdot (\vec{r} - \vec{u}(M_0))\right]\right\} \tag{4.4}$$

Il s'agit de la relation de base de la méthode de grille.

L'image d'intensité obtenue avec un réseau de traits croisés peut être séparée en deux images d'intensité de réseaux de traits unidirectionnels dépendant pour l'une de la phase $\phi_x = 2\pi \vec{f_x} \cdot [\vec{r} - \vec{u}(M_0)]$ et pour l'autre de la phase $\phi_y = 2\pi \vec{f_y} \cdot [\vec{r} - \vec{u}(M_0)]$:

$$I_x(M) = I_{0x} \left\{1 + \gamma_x \text{ frng}\left[2\pi \vec{f_x} \cdot (\vec{r} - \vec{u}(M_0))\right]\right\} \tag{4.5}$$

$$I_y(M) = I_{0y} \left\{1 + \gamma_y \text{ frng}\left[2\pi \vec{f_y} \cdot (\vec{r} - \vec{u}(M_0))\right]\right\} \tag{4.6}$$

En effet, le produit de convolution de l'image par une fenêtre triangulaire de longueur $2N - 1$ pixels dirigée suivant une ligne horizontale (respectivement verticale) permet d'éliminer les traits verticaux (respectivement horizontaux). Ce produit de convolution revient à filtrer les fréquences correspondantes dans l'espace de Fourier. En outre, le filtrage spatial triangulaire sur deux périodes diminue considérablement la sensibilité aux erreurs d'échantillonnage du pas de la grille (Surrel 2005a).

De l'état initial à l'état déformé, les phases ϕ_x et ϕ_y de la fonction frng représentant l'intensité lumi-

neuse enregistrée au point M varient de $\Delta\phi_x = -2\pi\vec{f_x}\cdot\vec{u}(M_0)$ et $\Delta\phi_y = -2\pi\vec{f_y}\cdot\vec{u}(M_0)$ pour les traits horizontaux et verticaux respectivement.

La soustraction des champs de phase permet d'éliminer les aberrations géométriques de l'objectif de prise de vue, puisqu'elles affectent l'état initial et l'état déformé. Deux images sont donc nécessaires pour mesurer le champ de déplacement.

Le paragraphe suivant présente l'algorithme utilisé pour calculer la phase à partir des images d'intensité enregistrées.

4.2.3 Démodulation de la phase

Le terme démodulation de la phase est employé car le réseau périodique est modulé par la grandeur recherchée (déplacements...). La détection de phase ou la démodulation de la phase est le calcul du champ de phase à partir du champ d'intensité. Il existe de nombreuses techniques pour démoduler la phase d'une image de grille (voir par exemple Takeda et al. 1982; Creath 1988; Surrel 1994; Phillion 1997). La technique standard permettant la détection de phase est aujourd'hui le décalage de phase (temporel ou spatial). Cette technique offre une excellente résolution spatiale et s'adapte à la démodulation de figures d'interférence, ou de réseaux périodiques. Il existe deux grandes familles de techniques. La première regroupe les techniques de décalage de phase temporel. Chaque pixel est alors traité indépendamment sur N images consécutives du même état cinématique (N dépendant de l'algorithme employé). Un dispositif doit permettre de réaliser le décalage de phase suffisamment rapidement. Ce décalage peut être réalisé par exemple en déplaçant la caméra dans la direction voulue sur une distance correspondant au décalage recherché. L'incertitude sur le décalage influence directement la résolution atteinte sur la mesure de phase. Durant l'opération de décalage de phase, l'éprouvette ne doit pas bouger et le chargement être stationnaire. Cette technique offre la meilleure résolution spatiale, à savoir un pixel. La deuxième famille regroupe les techniques de décalage de phase spatial. Dans ce cas la phase est extraite sur N pixels contigus à partir d'une seule image. La résolution spatiale de la méthode est alors d'au moins N pixels.

La technique de décalage de phase est utilisée pour générer des équations supplémentaires en vue d'identifier la phase. En effet, l'expression de l'intensité lumineuse d'un point de la grille comporte un grand nombre d'inconnues : les coefficients de Fourier décrivant la fonction frng, l'intensité moyenne, le contraste et la phase recherchée. Dans le cas idéal où la fonction frng est un cosinus, le nombre d'inconnues se réduit à 3. Plus la fonction frng est éloignée d'un cosinus plus le nombre d'harmoniques et donc le nombre d'inconnues augmente. Le décalage de phase permet de générer autant d'équations que nécessaire pour déterminer les inconnues et ainsi éliminer les harmoniques indésirables.

Le décalage de phase utilisé consiste à imposer un décalage de phase constant δ_k à la phase ϕ_x (ou ϕ_y) de l'expression de l'intensité lumineuse. Ces décalages successifs génèrent alors un jeu de plusieurs images I_k qui lorsqu'elles sont combinées permettent de calculer la phase. Ce décalage est réalisé soit par une approche temporelle soit par une approche spatiale. Dans le cas d'une approche temporelle, des décalages de phase constants δ_k sont ajoutés à la phase vue par chaque pixel de la caméra. L'avantage de cette approche est que tous les pixels sont indépendants les uns des autres, donc la résolution spatiale est maximum. Dans le cas d'une approche spatiale, les pixels adjacents au pixel analysé sont utilisés. En

effet, si la grille est échantillonnée par un nombre entier N de pixels par période et que le déplacement est supposé constant sur cette période, la phase détectée par chaque pixel adjacent est décalée d'une fraction de période $\delta_k = \frac{2\pi}{N}$. Par exemple, dans le cas d'une grille échantillonnée à 5 pixels par période, le décalage de phase vaut $\delta_k = \frac{2\pi}{5}$, l'intensité lumineuse I_k du k^e pixel peut s'exprimer en fonction de l'intensité lumineuse du pixel central : $I_k = I(\phi + k\delta_k),\ k = -2, -1, 0, 1, 2$. L'avantage de cette technique est qu'elle permet de calculer la phase à partir d'une seule image. Par contre la résolution spatiale ne peut être inférieure à une période de la grille.

De nombreux algorithmes de décalage de phase existent dans la littérature, il sont apparemment différents et se distinguent par le nombre de décalages utilisés et la façon de les combiner. Surrel (1996) a proposé de regrouper la plupart sous une forme générique grâce à la théorie du polynôme caractéristique. Cette théorie a permis de comparer les performances de plusieurs algorithmes par rapport à différentes sources d'erreurs. Il a ainsi été montré qu'un moyen de réduire les effets d'une mauvaise périodicité de l'échantillonnage et d'une variation de l'intensité moyenne était de doubler les racines du polynôme caractéristique. Sur la base de ces observations, un algorithme est alors proposé équivalent à une transformée de fourier discrète fenêtrée par une fonction triangle (TFD-F). Cet algorithme minimise la sensibilité aux erreurs de calibration du décalage de phase. Cette caractéristique est essentielle étant donné les nombreuses sources d'erreurs qui perturbent les dispositifs de décalage de phase. Notamment dans le cas de la méthode de grille, il est impossible de garantir qu'une période de la grille est échantillonnée par exactement N pixels par période. En effet, même si le réglage du grandissement était parfait, les distorsions de l'objectif et les déformations mêmes de la grille entraînent nécessairement une variation de δ_k. L'équation de l'algorithme TFD-F permettant de calculer la phase à partir de $2N-1$ pixels (soit quasiment deux périodes de grille) est la suivante :

$$\phi = \arctan\left(-\frac{\sum_{k=1}^{N-1} k(I_{k-1} - I_{2N-k-1})\sin(2\pi k/N)}{NI_{N-1} + \sum_{k=1}^{N-1} k(I_{k-1} + I_{2N-k-1})\cos(2\pi k/N)}\right) \tag{4.7}$$

Le choix du nombre N dépend du nombre d'harmoniques présentes dans le signal, autrement dit du profil des traits. L'algorithme TFD-F est insensible aux harmoniques allant jusqu'à l'ordre $N-2$. Dans la pratique un nombre $N = 5$ s'avère être suffisant pour éliminer les harmoniques gênantes si les réglages ont été correctement effectués. La présence d'harmoniques dans le signal de phase se traduit par des ondulations de fréquence multiple de la fréquence fondamentale sur les images de phase. Ces harmoniques sont souvent dues à un profil trop net des traits, dans ce cas il suffit de défocaliser légèrement l'image pour adoucir le contour des traits. Il peut s'agir également d'une saturation de l'intensité lumineuse provoquant un écrêtage des sinusoïdes, dans ce cas il faut réajuster l'éclairage. Un déséquilibre entre la largeur des traits noirs et la largeur des traits blancs peut également entraîner des harmoniques. Dans ce cas, il faut augmenter la valeur de N afin d'augmenter le nombre d'harmoniques filtrés par l'algorithme.

4.2.4 Sélection de pixels valides

Une autre source de problème est qu'il arrive que la grille ne soit pas parfaitement transférée, ce qui se traduit par des « tâches plus claires » dans la zone de mesure. Ces zones apparaissent le plus souvent saturées à la caméra, et les pixels concernés peuvent être écartés simplement en seuillant les niveaux de gris. Cependant, les abords de ces zones ne sont pas forcément saturés à cause des effets d'intégration dus à la taille des pixels et ces pixels perturbent le calcul de la phase.

De plus, l'épaisseur de colle en certains endroits ainsi que la qualité de l'éclairage et des réglages influencent le contraste local. Lors du calcul du polynôme caractéristique, le contraste γ peut être évalué en calculant le module de la combinaison complexe. Les pixels dont le contraste est inférieur à un certain seuil ont donc été écartés.

Le calcul de la phase est réalisé à partir de deux périodes de la grille, ainsi près des pixels manquants comme c'est le cas autour des défauts de grille, le calcul de la phase est erroné. Les pixels distants de moins d'une période de grille des pixels manquants ont donc également été écartés.

4.2.5 Région d'intérêt et problèmes de bords

Le calcul de la phase près des bords de la zone de mesure est également problématique car la grille est nécessairement incomplète. Pour y remédier et garantir le transfert intégral de la grille jusqu'aux bords, un cordon de colle supplémentaire d'environ $1\ mm$ déborde volontairement sur les contours de l'éprouvette. Compte tenu de la faible rigidité de la colle (2 à 3 GPa) et de celle de l'acier, son influence sur la réponse mécanique est négligeable.

Lors du post traitement des données, et avant le calcul de la phase, un masque est appliqué afin de sélectionner uniquement les contours de l'éprouvette recouverte par la grille. Le calcul de la phase est réalisé avec les pixels restants et les valeurs des pixels distants de moins d'une période de grille des bords de l'éprouvette sont écartés.

En tout, un certain nombre de pixels sont écartés, or le calcul des intégrales lors de la procédure d'identification ainsi que la dérivation des champs de phase nécessitent d'interpoler les données manquantes. La technique utilisée ici est présentée au paragraphe 4.3.1.

4.3 Calcul des déformations

Les composantes $u_x(x,y)$ et $u_y(x,y)$ du champ de déplacement sont calculées à partir de différences de phase $\Delta\phi_x$ et $\Delta\phi_y$:

$$u_x(x,y) = -\frac{p}{2\pi}\Delta\phi_x(x,y) \tag{4.8}$$

$$u_y(x,y) = -\frac{p}{2\pi}\Delta\phi_y(x,y) \tag{4.9}$$

Le facteur $\frac{p}{2\pi}$ correspond alors à la sensibilité de la méthode. Les champs de déplacement doivent être

dérivés pour obtenir les champs de déformation.

4.3.1 Lissage et dérivation

La dérivation numérique des champs de déplacement est une étape déterminante pour la procédure d'identification. Il est bien connu que l'opération de dérivation amplifie le bruit présent dans les cartes de phase. En conséquence une procédure de filtrage préalable est nécessaire. Deux techniques de lissages ont été utilisées :

- La première est la convolution de l'image par un noyau gaussien. Cette technique fonctionne bien lorsque le bruit est spatialement décorrélé. Cependant, lorsque le bruit est corrélé sur plusieurs pixels, cette opération tend à étaler le bruit. De plus, en présence de données manquantes, comme cela se produit au niveau des défauts de grille ou encore au niveau des bords, la convolution échoue. Cette technique a donc été abandonnée.
- La deuxième technique consiste à réaliser un lissage polynomial des champs de déplacement. Ceci suppose que les variations spatiales du champs de déplacement soient suffisamment faibles et que le contenu fréquentiel du bruit soit beaucoup plus élevé que celui du signal de phase. Pour déterminer le degré du polynôme plusieurs méthodes ont été employées. La première consiste à déterminer si les résidus de l'estimation sont assimilables au bruit de mesure. Pour cela l'écart type et la moyenne des résidus peuvent être calculés. L'évolution de ces grandeurs donne une indication sur l'adéquation du polynôme avec le champ mesuré mais ne suffit pas pour conclure sur sa validité. En effet, en présence d'un bruit important, les erreurs d'approximation n'influence pas toujours significativement les propriétés statistiques du résidu. La démarche adoptée dans ce travail a plutôt consisté à étudier systématiquement l'influence du degré du polynôme sur le processus d'identification afin de déterminer le degré le plus stable et le plus performant, en utilisant notamment comme référence la simulation des essais réalisés.

Les champs de déplacement u_x et u_y sont approximés par deux polynômes P_x et P_y de degré M définis par les coefficients a_{ij} et b_{ij} :

$$\begin{cases} P_x(x,y) = \sum_{i=0}^{M} \sum_{j=0}^{M} a_{ij}\, x^i\, y^j \\ P_y(x,y) = \sum_{i=0}^{M} \sum_{j=0}^{M} b_{ij}\, x^i\, y^j \end{cases} \tag{4.10}$$

Les coefficients a_{ij} et b_{ij} des polynômes sont calculées en minimisant les écarts quadratiques suivants :

$$\begin{cases} R_x^2 = \frac{1}{pq}\left[\sum_{\mathrm{q}}\sum_{\mathrm{p}} w(x_p,y_q)[P_x(x_p,y_q) - u_x(x_p,y_q)]^2 - \left(\sum_{\mathrm{q}}\sum_{\mathrm{p}} w(x_p,y_q)[P_x(x_p,y_q) - u_x(x_p,y_q)]\right)^2\right] \\ R_y^2 = \frac{1}{pq}\left[\sum_{\mathrm{q}}\sum_{\mathrm{p}} w(x_p,y_q)[P_y(x_p,y_q) - u_y(x_p,y_q)]^2 - \left(\sum_{\mathrm{q}}\sum_{\mathrm{p}} w(x_p,y_q)[P_y(x_p,y_q) - u_y(x_p,y_q)]\right)^2\right] \end{cases} \tag{4.11}$$

où (x_p, y_q) sont les coordonnées des pixels et $w(x_p, y_q)$ est une fonction de pondération.

La minimisation est réalisée deux fois, la première fois la fonction de pondération est nulle là où les données sont manquantes et vaut un partout ailleurs. Les résidus de cette première estimation sont alors calculés et la fonction de pondération est mise à zéro lors de la deuxième minimisation pour tous les pixels où l'écart est supérieur à deux ou trois fois le résidu moyen. De cette manière les pixels trop bruités n'influencent pas la forme du polynôme. Cette technique fonctionne tant que le résidu est assimilable à un bruit de mesure, si le degré du polynôme n'est pas adapté, les pixels écartés correspondent à des zones mal approximées. C'est un cas que l'on rencontre nécessairement lors des études sur l'influence du degré du polynôme (voir section 5.5.2), dans ce cas, l'approximation n'est réalisée qu'une fois.

L'utilisation du polynôme présente également un autre intérêt, celui de pouvoir éliminer les éventuelles franges parasites observées dans le signal. Certaines franges sont liées aux harmoniques, mais d'autre sont liées à des défauts de périodicité de la grille. Ces franges ont une amplitude très faible, mais sont mises en évidence lors de la dérivation d'un signal de faible amplitude. Pour de petits déplacements, ces franges sont automatiquement supprimées lors de la soustraction entre l'état initial et à l'état déformé, mais pour des déplacement plus importants, ces franges n'apparaissent pas au même endroit et s'ajoutent au signal mesuré. Tant que leur fréquence n'approche pas celle du signal, elles peuvent facilement être filtrées par le polynôme.

4.3.2 Déplacements hors-plan

Les aberrations géométriques et les distorsions de l'objectif de prise de vue déforment l'image de la grille et introduisent des déplacements apparents lors de la mesure de phase de la grille dans son état initial. Comme cela a été dit plus haut l'influence de ces aberrations sur l'image déformée peut être éliminée en soustrayant le champ de phase de la grille dans son état initial, pourvu que les déplacements soient suffisamment petits.

Le grandissement transversal des objectifs de prise de vue classiques dépend aussi de la distance de mise au point. Ceci implique que la mesure des déplacements dans le plan est sensible aux mouvements hors-plan qui ont lieu durant le chargement. Cette sensibilité dépend de la distance de mise au point. En première approximation, l'objectif de prise de vue peut être modélisé par une lentille mince. Dans ce cas, la déformation parasite induite par un déplacement hors-plan dz vaut :

$$\varepsilon^{\text{parasite}} = \frac{dz}{z} \tag{4.12}$$

où z est la distance de mise au point. Cette relation montre que la sensibilité au déplacement hors-plan est inversement proportionnelle à la distance de mise au point. Donc dans le cas des objectifs à faible distance de mise au point, la sensibilité au déplacement hors-plan est maximum. Les observations sous microscope sont donc très sensibles à ce phénomène, mais les observations avec des objectifs photographiques sont également affectées. Dans l'application considérée ici, la surface des grilles observées est de quelques centimètres carrés. Les objectifs utilisés sont des objectifs macro photographique de $60\ mm$ de focale, la distance de mise au point est alors comprise entre $100\ mm$ et $200\ mm$. Durant les essais,

il est courant d'observer des déplacements hors-plan de l'éprouvette atteignant $100\ \mu m$ à $200\ \mu m$. Les déformations parasites induites peuvent alors valoir jusqu'à 5×10^{-3} ! Cette valeur n'est pas compatible avec la résolution attendue de la technique puisque les déformations observées lors de l'apparition de la plasticité sont de l'ordre de 1×10^{-3}.

L'utilisation d'un objectif télécentrique permet de résoudre ce problème. Ces objectifs sont conçus pour conserver un grandissement constant sur une plage de distance objet-caméra donnée. Le principe de tels objectifs est de placer un diaphragme de faible ouverture au foyer image de la lentille frontale pour ne laisser passer que les rayons acheminés parallèlement à l'axe optique dans l'espace objet. En effet, ces rayons sont les seuls qui ne sont pas affectés par la distance de mise au point. Une deuxième lentille dont le foyer objet est placée au niveau du diaphragme améliore encore les propriétés de télécentricité. Les inconvénients de l'utilisation de tels objectifs sont nombreux. Le premier est qu'un éclairage important doit être apporté pour compenser la perte de lumière imposée par le diaphragme. Ensuite ces objectifs offrent nécessairement une moins bonne résolution que les objectifs traditionnels. Enfin, chaque objectif ne fonctionne que pour un seul grandissement, ce qui impose d'utiliser un objectif spécifique pour chaque taille de champ de mesure (ou chaque grille de pas différent). Étant donné le coût très élevé de tels objectifs ceci limite fortement leur utilisation. Un objectif zoom semi-télécentrique a été testé pour palier à ce problème. Sa sensibilité a été testée sur une plage de grandissement allant de 0,5 à 1. Ses performances en termes de télécentricité ne sont pas aussi bonnes qu'un objectif télécentrique. Elles ont tout de même permis de gagner jusqu'à un facteur 10 par rapport à un objectif traditionnel mais ont été accompagnées d'une forte détérioration de la qualité de l'image. Finalement ces performances ne sont pas suffisantes pour une application de mesure de petites déformations et limitent son utilisation à des applications de mesures dimensionnelle.

Une autre possibilité pour palier les effets induits par les mouvements hors-plans durant l'essai consiste à mesurer les champs de déplacement sur les deux faces de l'éprouvette. Pour cela, deux systèmes d'acquisition identiques sont utilisés. En particulier, la taille des pixels du capteur CCD et la focale de l'objectif photographique doivent être les mêmes. Les caméras doivent alors être placées en vis à vis et à la même distance de chaque côté de l'éprouvette (voir figure 4.1). Ainsi, puisque les objectifs sont identiques, la sensibilité au déplacement hors-plan est également la même. De cette manière, pour des déplacements hors-plan assez faibles, les déformations apparentes vues par les deux caméras sont égales et de signes opposés : $\varepsilon^{\text{parasite } 1} = -\varepsilon^{\text{parasite } 2}$. En moyennant les déformations mesurées sur les deux faces, les effets des déplacements hors-plan sont éliminés.

Il existe également un autre phénomène qui vient perturber la mesure de la déformation de membrane de l'éprouvette plate en traction. Il s'agit de la flexion hors-plan de l'éprouvette. Elle engendre des déformations positives sur une face et des déformations négatives sur l'autre face qui viennent se superposer aux déformations liées à la traction de l'éprouvette. Ces contributions sont égales et de signe opposés, donc la contribution de la flexion peut être supprimée en calculant la moyenne des déformation mesurées sur les deux faces qui est alors égale à la déformation de membrane :

$$\varepsilon^0 = \frac{\varepsilon^{\text{face } 1} + \varepsilon^{\text{face } 2}}{2} \tag{4.13}$$

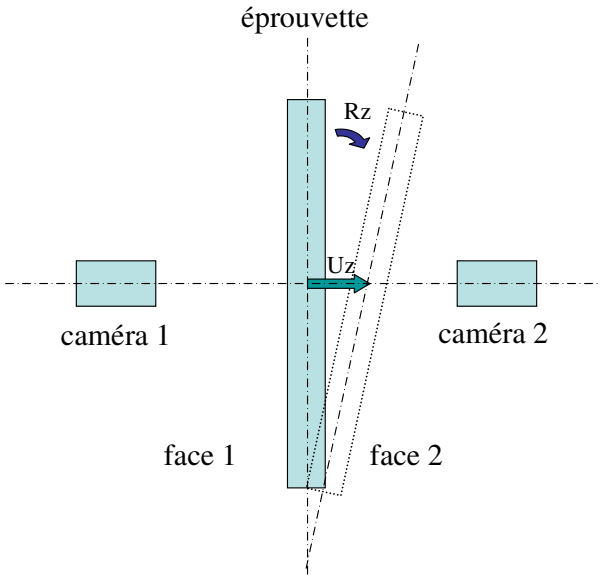


FIG. 4.1: Dispositif à deux caméras et mouvements hors-plan.

Cette opération est d'ailleurs réalisée avec les mesures par jauges lors des essais de traction normalisés.

Une des difficultés de cette technique est la mise en correspondance des deux images. A cet effet, une marque placée sur le côté de l'éprouvette, visible des deux côtés et le contour de l'éprouvette permettent de contrôler l'alignement. Les grandissements sont mesurés de chaque côté grâce à la grille qui est la même des deux côtés. En visualisant un pixel par période de la grille échantillonnée, un moiré apparaît qui permet de contrôler le grandissement et l'alignement en cours de réglage. Si le nombre de franges de moiré et leur orientation sont identiques des deux côtés, le réglage est réussi. L'incertitude sur ce réglage a été estimée à environ 3%.

En conclusion, la moyenne des déformations mesurées sur les deux faces a permis de supprimer à la fois les biais induits par les mouvements hors-plan et la flexion hors-plan.

5 Application à un essai uniaxial hétérogène

5.1 Introduction

Un essai statiquement indéterminé (l'état de contrainte est inconnu a priori) est réalisé afin d'identifier les paramètres de la loi de comportement élastoplastique introduite dans la section 2.2.1.3. Le matériau étudié est celui qui a été caractérisé précédemment (voir tableau 2.2). Pour une première approche visant à valider l'utilisation de la Méthode des Champs Virtuels pour identifier une loi élastoplastique, une configuration quasiment uniaxiale a été choisie. Il s'agit d'un essai de traction sur éprouvette plate à section lentement variable, réalisant ainsi un champ de contrainte quasiment uniaxial variant suivant la direction de traction. Cette configuration a permis de valider le dispositif expérimental (couple essai/mesure) compte tenu de sa simplicité. De plus, dans le cas uniaxial le calcul des contraintes et l'application de la méthode des champs virtuels ont été facilités. C'est une étape essentielle de validation de la procédure avant de passer à un cas multiaxial à géométrie plus complexe.

5.2 Simulation de l'essai

Contrairement aux procédures de recalage par éléments finis (Meuwissen et al. 1998) la simulation de l'essai n'est pas nécessaire pour identifier les paramètres élastoplastiques avec la méthode des champs virtuels. Cependant dans le cadre d'une étude de faisabilité, la simulation préalable de l'essai facilite sa mise au point. Elle présente en outre l'avantage de pouvoir tester plusieurs configurations d'essai mécanique, de faire varier les paramètres géométriques (voir par exemple l'étude de Chalal et al. (2004b) qui ont optimisé la longueur entre appuis d'un essai de cisaillement afin d'améliorer l'identifiabilité des paramètres recherchés) sans avoir à réaliser les montages ni les éprouvettes. Les champs de déformation simulés permettent également d'ajuster la procédure de résolution du problème inverse en testant la méthode d'identification sur un cas modèle où tous les paramètres sont maîtrisés contrairement au cas expérimental. Ceci facilite le choix de champs virtuels pertinents pour construire une fonction coût qui conduise aux paramètres recherchés. Le principe de la méthode utilisée ici a déjà été validé en 2D sur des simulations numériques par Grédiac et Pierron (2006) sur un essai sensiblement différent, ce qui prouve la faisabilité de la procédure.

Dans cette section, l'essai simulé s'approche du cas testé expérimentalement et est présenté dans la section suivante. Les lois de comportements du matériau modèle sont celles utilisées pour modéliser les réponses mesurées lors des essais de traction normalisés (voir section 2.3.2). Ainsi, les paramètres géométriques de l'éprouvette simulée doivent permettre d'aboutir aux dimensions de l'éprouvette qui

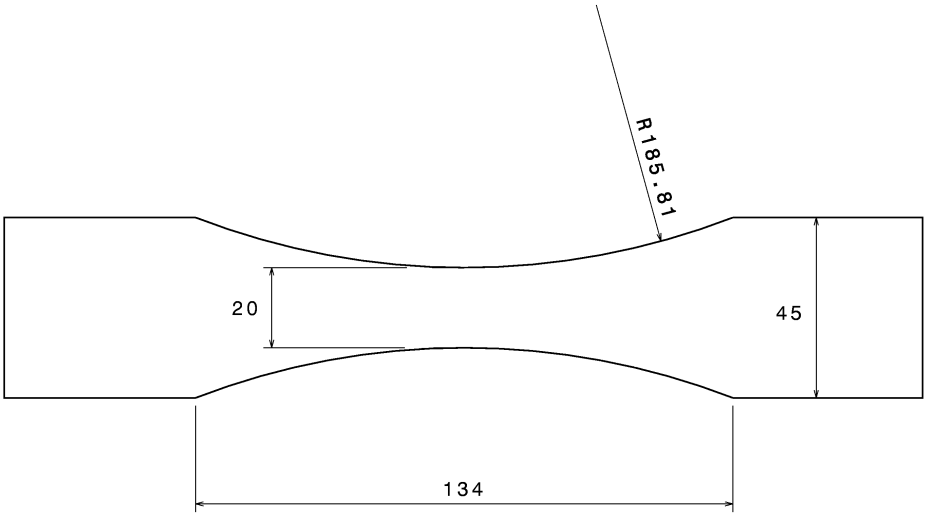


FIG. 5.1: Géométrie de l'éprouvette plane de traction à section variable utilisée pour réaliser un essai quasi uniaxial hétérogène.

sera testée expérimentalement (voir section 5.4). La difficulté consiste à trouver un essai à la fois quasi uniaxial et hétérogène. L'essai mécanique est basé sur un essai de traction car il s'agit d'un dispositif très répandu dans les laboratoires pour la réalisation notamment d'essais normalisés. Une machine de traction offre en outre l'espace nécessaire à l'utilisation de différentes tailles d'éprouvettes ainsi qu'un accès dégagé pour la mesure de champs cinématiques par méthodes optiques. Les éprouvettes sont planes car la technique optique de mesure permet seulement d'accéder aux champs cinématiques dans le plan. Les dimensions de l'éprouvette sont en outre imposées par le dispositif d'amarrage des éprouvettes, par les caractéristiques du capteur d'effort et par la rigidité de l'ensemble de la chaîne cinématique. Les dimensions finalement adoptées ne sont pas issues d'une étude d'optimisation même si les paramètres géométriques affectent l'identifiabilité des paramètres (Arafeh 1995; Magorou et al. 2001; Chalal et al. 2004b; Harth et al. 2004; Bocciarelli et al. 2004; Avril et al. 2004b).

Comme cela a été dit plus haut, une configuration quasi uniaxiale basée sur un essai de traction a été choisie comme première approche. L'éprouvette finale (voir figure 5.1) est plane de 2 mm d'épaisseur. Sa section varie suivant l'équation d'un cercle de rayon 186 mm, la plus petite section (au centre) est de 40 mm^2 et atteint 92 mm^2 aux extrémités (correspondant à la largeur de serrage des mors). Seule une longueur de 22 mm en partant du centre de l'éprouvette a été utilisée pour l'identification correspondant ainsi à une région identique à celle mesurée par la méthode de grille. La moitié de l'éprouvette a été modélisée afin de faciliter le post traitement des données. Une condition de symétrie est imposée sur le bord correspondant à la plus petite section. L'essai est piloté en déplacement pour s'approcher des conditions expérimentales. Un déplacement incrémental de 0,01 mm à 0,3 mm est imposé sur le bord de la plus grande section suivant la direction x. Dans le plan délimité par la région d'intérêt, les deux composantes du vecteur déplacement dans le plan ont été enregistrées pour trente pas de chargement ainsi que la résultante de la force de traction exercée suivant la direction x. Seules ces données ont été

introduites dans le processus d'identification.

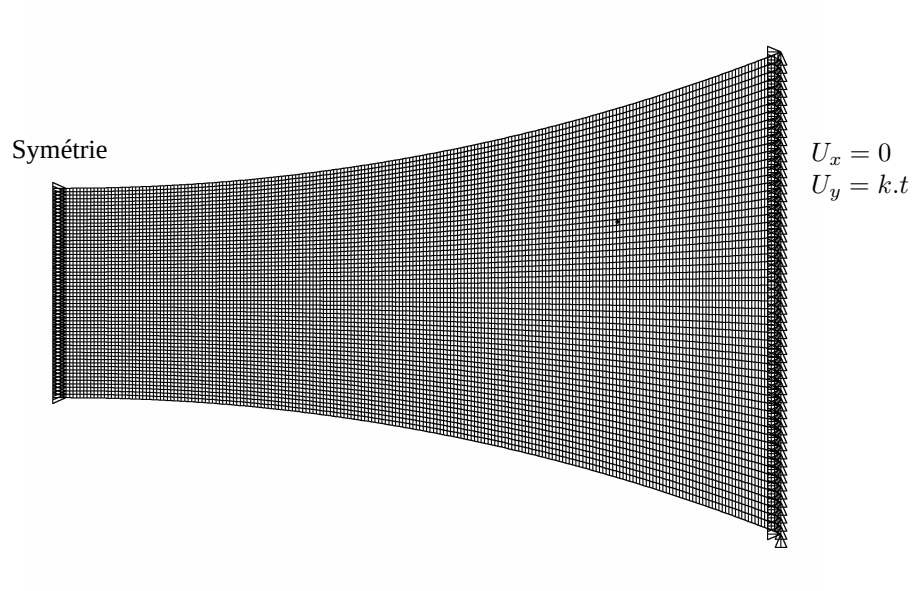


FIG. 5.2: Maillage du modèle utilisé pour simuler l'essai de traction sur éprouvette à section variable, la sélection en pointillés indique la zone utilisée pour l'identification.

Un des intérêts de la simulation dans le cas présent est de pouvoir vérifier l'hypothèse d'uniaxialité qui sera utilisée lors du processus d'identification. La section de l'éprouvette varie lentement, notamment près du centre de l'éprouvette. Les simulations de l'essai de traction sur éprouvette à section variable montrent que la composante longitudinale du tenseur des contraintes est plus de dix fois supérieure aux autres composantes dans la région observée (voir figures 5.3 et 5.4). Ceci justifie *a priori* que les contraintes transversales et de cisaillement soient négligées dans cette étude, et que seule la contrainte longitudinale soit considérée.

5.3 Ré-identification des paramètres de la simulation

Avant de traiter des champs de déformation expérimentaux, la méthode d'identification est testée sur les champs issus des simulations éléments finis. L'objectif est de retrouver les paramètres de loi de comportement introduits dans le calcul par éléments finis à partir des champs cinématiques et de l'effort appliqué. Le cas testé est celui de l'éprouvette à section lentement variable présentée précédemment, le modèle introduit est le modèle élastoplastique isotrope de Voce. Les valeurs numériques des paramètres utilisés sont celles identifiées lors des essais de traction normalisés **??**. Le calcul des contraintes après l'apparition de la plasticité est réalisé sous l'hypothèse d'un état uniaxial comme présenté dans la section 3.3.1.1. La comparaison des valeurs calculées avec celles issues du calcul par éléments finis révèle que l'erreur commise sur la composante uniaxiale du champ de contrainte est inférieure à trois pourcents (voir figure 5.5).

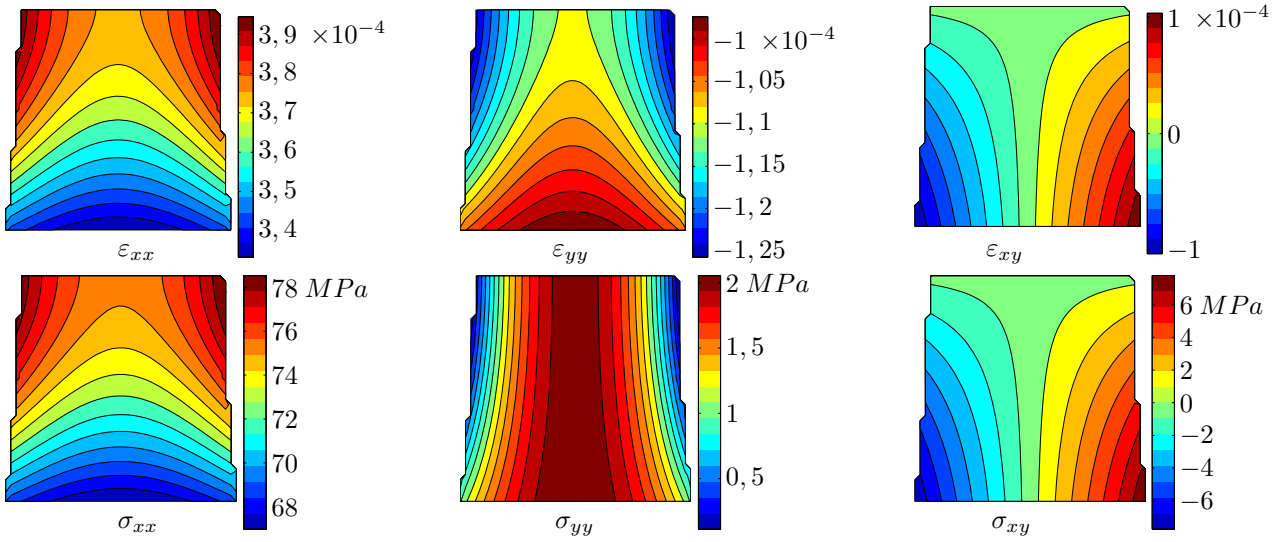


FIG. 5.3: Champs simulés de déformation et de contrainte avant l'apparition de la plasticité (F = 3050N), avec le modèle de Voce (tableau 2.2).

5.3.1 Paramètres élastiques

Le comportement du matériau simulé avant l'apparition de la plasticité est linéaire élastique isotrope. Les deux paramètres élastiques indépendants E et ν sont identifiés à partir des trois composantes du tenseur des déformations dans le plan $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}$ et de la résultante longitudinale des efforts de traction. La méthode utilisée est la méthode des champs virtuels linéaire dans le cas d'un état de contrainte plane telle qu'elle a été présentée au chapitre 3. Deux équations indépendantes sont construites à partir du principe des travaux virtuels. Les deux champs virtuels utilisés sont les champs $(\overrightarrow{v}^{\star 1}, \boldsymbol{\epsilon}^{\star 1})$ et $(\overrightarrow{v}^{\star 2}, \boldsymbol{\epsilon}^{\star 2})$ introduits dans la section 3.2. Le système linéaire ainsi construit est inversé pour obtenir les deux rigidités dans le plan (voir équations 3.7). Les paramètres élastiques sont calculés à partir des relations 3.8. Les tableaux 5.1 et 5.2 présentent les résultats de l'identification sur des champs issus de simulations numériques. Chacun des trois premiers états de chargement permet de construire un système d'équations qui conduit à l'identification de deux paramètres, le résultat final est la moyenne des trois résultats obtenus à chaque état. Comme plusieurs étapes interviennent dans le processus d'identification, il est préférable de valider chaque étape indépendamment. C'est pourquoi la MCV est d'abord testée à partir des champs de déformation issus directement du calcul par éléments finis, en écartant ainsi les sources d'erreurs liées à la dérivation. Les résultats (voir tableau 5.1) sont en parfait accord avec les paramètres de référence, et les très faibles écarts observés sont liés aux approximations numériques. Ensuite, les champs de déformation utilisés pour l'identification sont calculés à partir des champs de déplacement issus du calcul par éléments finis, car expérimentalement, seuls les champs de déplacement sont mesurés. Avant de les dériver, les champs de déplacement sont interpolés par un polynôme dont les variables sont les coordonnées x et y. Le choix du degré du polynôme joue un rôle dans le succès de l'identification. Les résultats (tableau 5.2) montrent qu'en l'absence de bruit, le choix du degré du polynôme a peu d'importance.

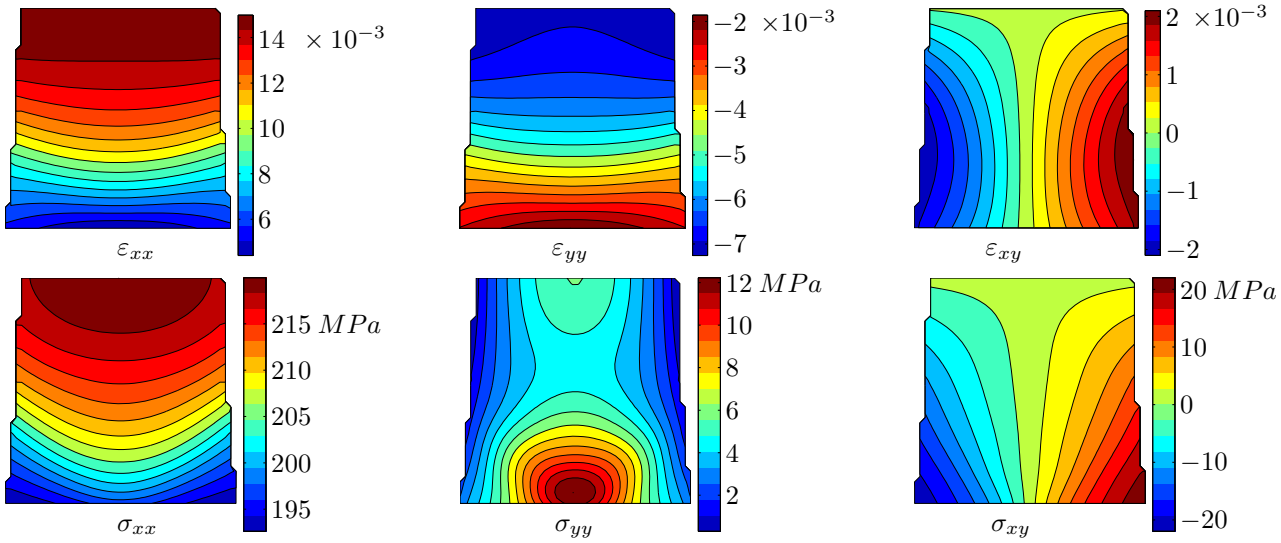


FIG. 5.4: Champs simulés de déformation et de contrainte après apparition de la plasticité (F = 8930 N), avec le modèle de Voce (tableau 2.2)

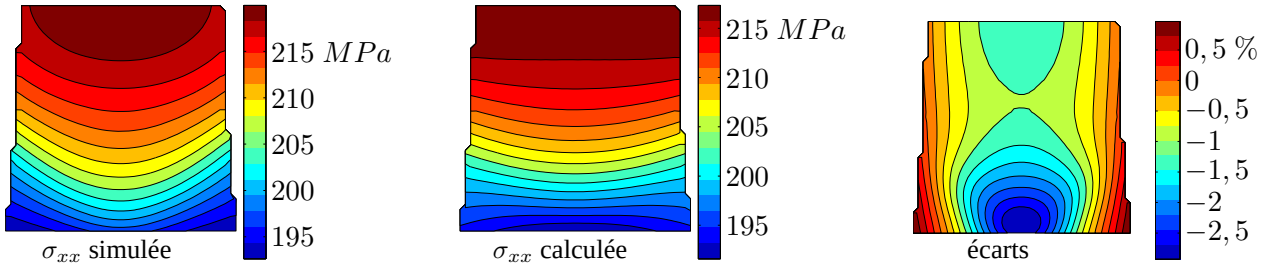


FIG. 5.5: Comparaison d'un champ de contrainte simulé avec un champ de contrainte calculé par la procédure uniaxiale ($F = 8760\ N$, modèle de Voce, paramètres : tableau 2.2).

Même un polynôme de degré deux suffit pour obtenir les paramètres recherchés. Ceci s'explique par les faibles gradients rencontrés dans les champs de déplacement. L'ajout d'un bruit blanc sur les champs de déplacement montre par contre une influence du choix du degré du polynôme. Lorsque le degré du polynôme augmente, la présence de bruit perturbe davantage l'identification. La valeur optimale pour ces champs semble être le degré quatre pour lequel l'écart quadratique est le plus faible. Le coefficient de Poisson est moins bien identifié que le module d'Young. En effet, le coefficient de Poisson identifié est en général très sensible au bruit de mesure. Le choix d'un champ virtuel optimisé selon la procédure de Avril et al. (2004a) aurait certainement permis d'améliorer ce résultat, mais ce point n'a pas été examiné ici.

En menant l'identification directe des paramètres élastiques sur la totalité du chargement, l'évolution des paramètres identifiés nous renseigne sur l'apparition de la plasticité. La présence de déformations irréversibles fait chuter les rigidités identifiées (voir figure 5.6). Comme la variation de section est faible, la plasticité se propage rapidement et les paramètres identifiés varient dès son apparition. Cette obser-

	Référence	Identifié
$E\ (GPa)$	199	199
ν	0,32	0,32

TAB. 5.1: Paramètres élastiques identifiés à partir des champs de déformation issus directement du calcul par éléments finis, (moyenne sur les trois premiers états de chargement).

	Sans ajout de bruit							
	deg. 2	deg. 3	deg. 4	deg. 5	deg. 6	deg. 7	deg. 8	C.V. (%)
$E\ (GPa)$	200	199	199	199	199	199	199	0,2
$C.V.(\times 10^{-3}\ \%)$	3	1,5	0,6	1,1	0,2	0,3	0,2	
ν	0,3	0,321	0,321	0,321	0,321	0,321	0,321	2,5
$C.V.(\times 10^{-3}\ \%)$	2	1,1	1,6	1	0,4	0,8	1	
	Bruit blanc d'écart quadratique $0,5\ \mu m$							
	deg. 2	deg. 3	deg. 4	deg. 5	deg. 6	deg. 7	deg. 8	C.V. (%)
$E(GPa)$	200	198	198	200	201	200	201	0,6
$C.V.(\%)$	0,28	0,76	0,8	1,4	2,1	1,3	2,1	
ν	0,301	0,321	0,323	0,325	0,318	0,329	0,328	2,9
$C.V.(\%)$	0,75	2,4	2,8	4	5,6	5,6	8,6	

TAB. 5.2: Évolution des paramètres élastiques identifiés en fonction du degré du polynôme utilisé pour lisser les déplacements : moyennes et coefficients de variation (C.V. (%)) sur les trois premiers états de chargement (3600 noeuds).

vation permet d'effectuer un tri parmi les cartes mesurées. Les trois premières cartes pour lesquelles les paramètres sont constants sont utilisées pour identifier les paramètres élastiques avec la procédure directe. Les cartes suivantes sont utilisées pour identifier précisément la limite d'élasticité et les paramètres d'écrouissage avec la procédure itérative connaissant les paramètres élastiques.

5.3.2 Paramètres plastiques : Modèle de Voce

Dès l'apparition de la plasticité, la relation contrainte déformation est non linéaire, le modèle isotrope utilisé est celui de Voce 1955 (section 2.2.1.2). Il exprime lors de l'écoulement la relation entre la contrainte équivalente de Von Mises et la déformation plastique équivalente :

$$\sigma_S \ = \ \sigma_0 \ + \ R_0\varepsilon^p \ + \ R_{\text{inf}}[1 - \exp(-b\varepsilon^p)]$$

où σ_0 est la limite d'élasticité initiale, R_0 le module d'écrouissage asymptotique, R_{inf} et b décrivent la partie non linéaire de la courbe lors de l'apparition de la plasticité. Comme la variable ε^p dépend de l'histoire du chargement et n'est pas accessible directement à la mesure, une procédure itérative de calcul des contraintes est mise en oeuvre. Et puisqu'il n'existe pas de relation directe entre les contraintes et les déformations, l'identification est menée avec la méthode des champs virtuels itérative. L'ensemble de la procédure d'identification des quatre paramètres de ce modèle par la méthode des champs virtuels est

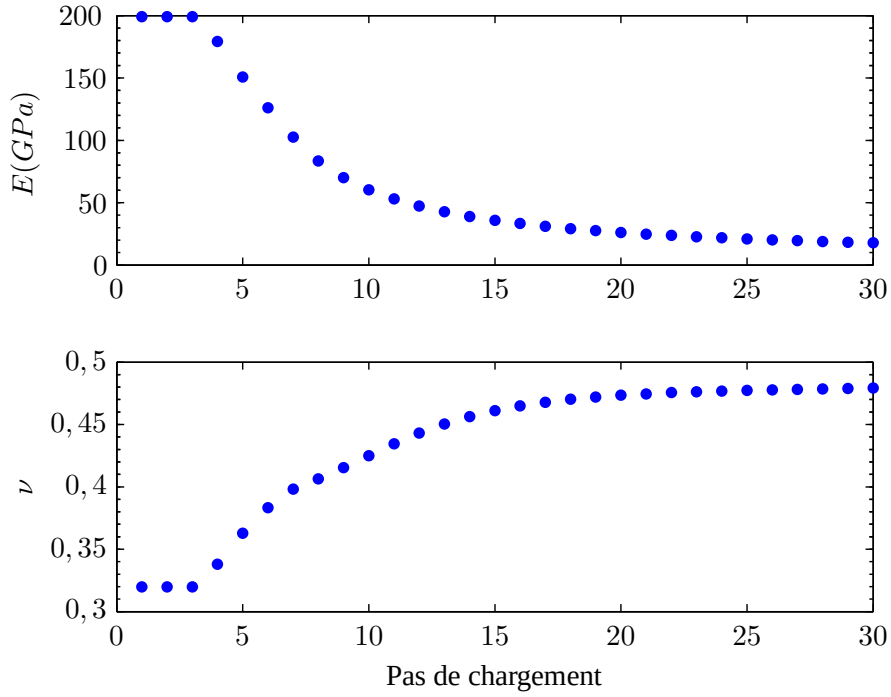


FIG. 5.6: Évolution des paramètres élastiques identifiés avec la MCV sans prise en compte de la plasticité.

décrit en détails dans la section 3.3. Les étapes principales de cette méthode sont (voir le diagramme de la figure 5.7) :

1. introduire les déformations et les efforts mesurés ;
2. supposer un jeu de paramètres *a priori* afin d'initialiser la procédure itérative ;
3. calculer les contraintes à partir des déformations mesurées et du modèle d'écrouissage ;
4. évaluer les équations d'équilibre écrites à partir des différents champs virtuels et calculer la fonction coût ;
5. ré-estimer les paramètres de la loi d'écrouissage afin de minimiser l'écart à l'équilibre ;
6. la procédure s'arrête lorsque la fonction coût et les paramètres recherchés ne varient plus au delà d'un certain seuil.

Le calcul de l'état de contrainte à partir des déformations (mesurées ou simulées) et des quatre paramètres de la loi d'écrouissage nécessite un algorithme de calcul numérique adapté. La procédure utilisée dans ce chapitre se limite au cas uniaxial, elle est présentée dans la section 3.3.1.1. La fonction coût à minimiser traduit l'écart au principe des travaux virtuels. Elle est construite à partir des équations présentées dans la section 3.3.1.2. Les champs utilisés pour construire la fonction coût sont basés sur le champ $(\overrightarrow{v}^{\star 1}, \boldsymbol{\epsilon}^{\star 1})$ utilisé pour identifier les paramètres élastiques (voir section 3.2). Mais ils sont définis sur une plus petite longueur $\frac{L}{n}$, entre deux abscisses données y_i et y_{i+1}. On obtient ainsi au total n champs

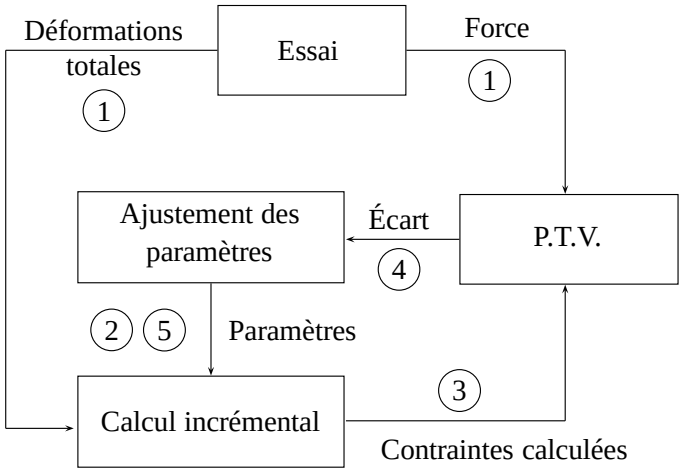


FIG. 5.7: Diagramme de déroulement de la Méthode des Champs Virtuels Non Linéaire (numérotation : voir texte). Les déformations peuvent être mesurées directement ou obtenues par dérivation des déplacements.

	n^o1	n^o2	n^o3	n^o4	n^o5	n^o6
$\sigma_0\ (MPa)$	100	200	200	100	100	100
$R_0\ (GPa)$	1	$0,1$	$0,1$	$0,1$	1	10
$R_{\text{inf}}\ (MPa)$	40	50	10	10	10	100
$b\ (\times 10^3)$	1	1	1	1	$0,1$	1

TAB. 5.3: Jeu de paramètres ayant servi à initier la procédure d'identification des paramètres du modèle de Voce à partir des résultats simulés.

virtuels $(\overrightarrow{v}^{\star i}, \boldsymbol{\epsilon}^{\star i})$. La fonction coût global est construite à partir de la somme des écarts quadratiques au principe de travaux virtuels sur chacune de ces petites sections et pour chaque pas de chargement. La première carte traitée est entièrement élastique pour pouvoir initier le calcul de contraintes. Ici donc, les cartes allant de trois à trente ont été utilisées pour l'identification des paramètres plastiques.

Dans un premier temps, la procédure est menée à partir de champs de déformation issus directement du calcul par éléments finis. Six jeux de paramètres initiaux (tableau 5.3) ont conduit aux mêmes paramètres identifiés (voir tableau 5.4), ce qui semble indiquer qu'il s'agit d'un minimum global. Les écarts relevés avec les valeurs de référence sont inférieurs à $1\ \%$ pour R_0 et b, et autour de $2\ \%$ pour σ_0 et R_{inf}. Ces deux derniers écarts se compensent pour donner un écart de moins de $1\ \%$ sur la limite d'élasticité asymptotique : $\sigma_0 + R_{inf} = 183,2\ MPa$. Cette constatation se confirme graphiquement avec le tracé de la courbe identifiée et de la courbe référence (voir figure 5.8).

Dans le but d'étudier l'influence de l'hypothèse d'uniaxialité sur les résultats, les contraintes ont également été calculées en 2D (voir section 3.3.2). Il ressort des résultats (voir tableau 5.5 et figure 5.9) que globalement les paramètres identifiés sont comparables avec les deux algorithmes de calcul des contraintes, ce qui valide l'hypothèse d'uniaxialité utilisée ici.

	Référence	Identifié	Écart en %
$\sigma_0\ (MPa)$	127	130	$2,4$
$R_0\ (GPa)$	$2,46$	$2,44$	$-0,8$
$R_{inf}\ (MPa)$	$56,2$	$54,9$	$-2,3$
$b\ (\times 10^3)$	$3,37$	$3,4$	$0,8$

TAB. 5.4: Paramètres plastiques identifiés à partir des déformations directement issues du calcul par éléments finis.

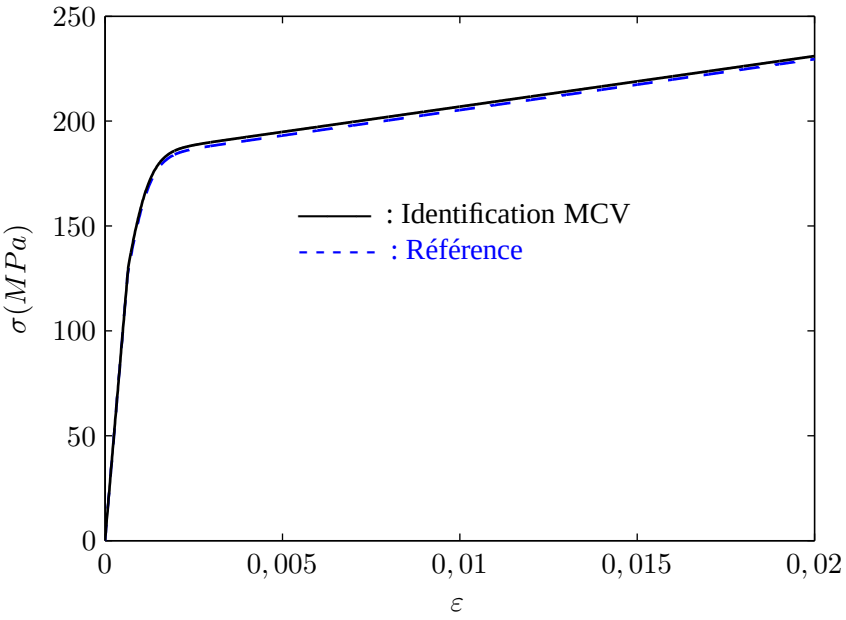


FIG. 5.8: Courbe référence et courbe identifiée avec la MCV à partir des déformations directement issues du calcul par éléments finis.

	Référence	Identifié	Écart en %
$\sigma_0\ (MPa)$	127	127	$-0,1$
$R_0\ (GPa)$	$2,46$	$2,53$	$2,9$
$R_{inf}\ (MPa)$	$56,2$	$56,4$	$0,3$
$b\ (\times 10^3)$	$3,37$	$3,97$	15

TAB. 5.5: Paramètres plastiques identifiés à partir des déformations directement issues du calcul par éléments finis et en utilisant le calcul des contraintes 2D.

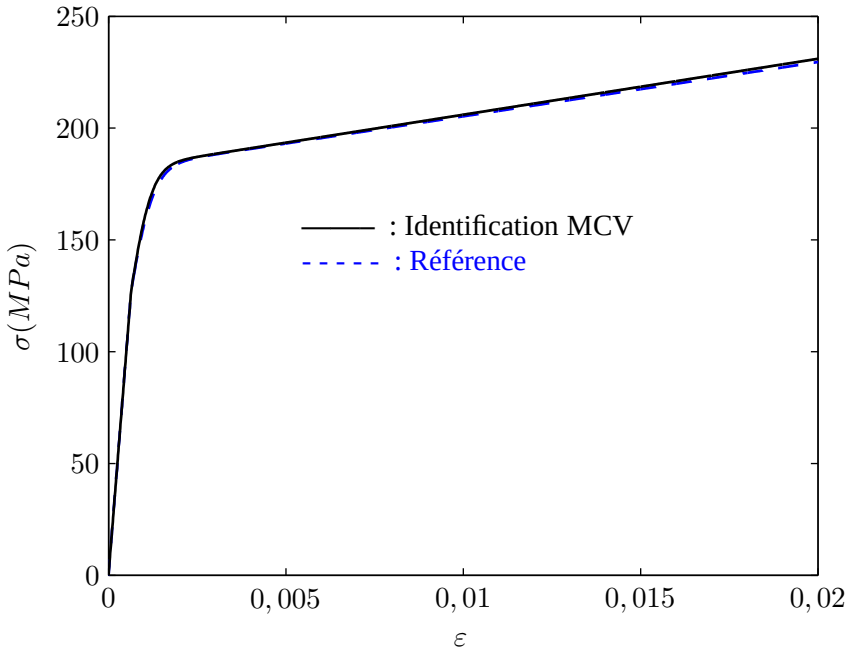


FIG. 5.9: Courbe identifiée à partir des déformations directement issues du calcul par éléments finis et en utilisant la procédure de calcul des contraintes 2D.

L'identification est ensuite menée à partir de champs de déformation calculés à l'aide des polynômes. Pour se rapprocher des conditions expérimentales, un bruit blanc d'écart type $1\ \mu m$ est ajouté sur les déplacements simulés. Cette valeur de bruit ajoutée à 3600 points issus des simulations est représentative du bruit observé expérimentalement sur 12000 points de mesure. La sensibilité des résultats par rapport au degré du polynôme peut être représentée par les écarts quadratiques relatifs des différentes valeurs identifiées. Les résultats montrent une grande sensibilité au degré du polynôme en présence de bruit. Le degré deux est le plus perturbé puisque les valeurs obtenues sont les plus éloignées des valeurs de référence, et que de plus, trois jeux de paramètres initiaux sur six ont conduit à des minima locaux. Le degré trois a également conduit à un autre minimum pour un des jeux de paramètres initiaux. Pour les autres degrés, le minimum inscrit dans le tableau a été atteint pour les six jeux de paramètres initiaux (tableau 5.3). Les valeurs atteintes avec l'utilisation du degré quatre sont les plus proches des valeurs de référence. Tout semble donc indiquer encore une fois, que le degré quatre est le plus approprié pour lisser les données bruitées de cet essai (voir figure 5.10).

La simulation numérique de l'essai a permis de tester l'ensemble du processus d'identification, notamment en mettant en place une technique appropriée pour traiter les champs de déplacement bruités. Cette pré-étude a permis de choisir une géométrie d'éprouvette et une expression de la fonction coût qui mène aux paramètres recherchés ainsi qu'une valeur optimal du degré du polynôme employé pour lisser les déplacements bruités. La section suivante présente les résultats expérimentaux obtenus sur le matériau de référence (voir section 2.3.2) avec la géométrie d'éprouvette qui vient d'être testée numériquement.

	Deg. 2	Deg. 3	Deg. 4	Deg. 5	Deg. 6	Deg. 7	Deg. 8	Moy.	C.V. (%)
$\sigma_0\ (MPa)$	112	124	128	125	121	125	130	123	5
$R_0\ (GPa)$	$2,57$	$2,56$	$2,48$	$2,37$	$2,3$	$2,34$	$2,21$	$2,4$	6
$R_{inf}\ (MPa)$	$72,1$	$60,6$	$56,7$	$61,2$	$66,1$	$61,6$	58	$62,3$	9
$b\ (\times 10^3)$	$8,36$	$5,23$	$3,71$	$3,88$	$4,33$	$4,32$	$4,04$	$4,84$	34

TAB. 5.6: Influence du degré du polynôme sur l'identification des paramètres plastiques à partir des déplacements simulés plus un bruit blanc d'écart type 1 μm ($n = 100$ sections, 3600 points).

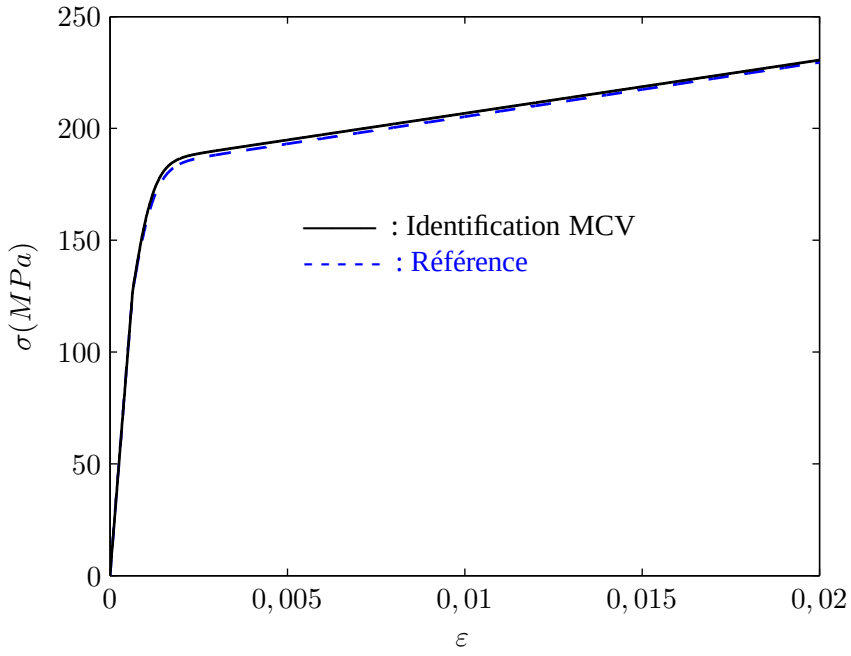


FIG. 5.10: Courbe identifiée à partir de la réponse en déplacement simulée plus un bruit blanc d'écart type 1 μm lissée par un polynôme de degré 4.

5.4 Résultats expérimentaux

5.4.1 Présentation de l'essai

L'éprouvette de traction réalisée est inspirée d'une illustration d'un ouvrage de Lemaitre et Chaboche (1985). Il s'agit à l'origine d'une éprouvette plane de traction conçue pour faciliter la localisation de la rupture. L'intérêt dans le cas présent est de pouvoir observer l'apparition et la propagation progressive de la plasticité. La variation de section dans la région centrale de l'éprouvette est suffisamment faible pour pouvoir considérer un état de contrainte uniaxial et créer en même temps une variation de contrainte dans la longueur de l'éprouvette. Le schéma de la figure 5.11 donne les dimensions de l'éprouvette de traction réalisée ainsi qu'une vue synthétique du montage et des caméras. L'usinage des éprouvettes a consisté en un fraisage d'un empilement de bandes rectangulaires maintenues entre deux brides d'aluminium. La longueur des éprouvettes est choisie dans le sens 2 pour pouvoir comparer les résultats avec ceux obtenus lors des essais de tractions normalisés.

La machine utilisée pour solliciter les éprouvettes en traction est identique à celle utilisée pour les essais de tractions normalisés. Les mors de serrage sont plats et autoserrants. Ils sont assez commodes d'utilisation mais n'offrent pas de bonnes conditions de serrage. La pression exercée sur les talons de l'éprouvette n'est pas uniformément répartie, ce qui entraîne des glissements dans les mors. En particulier, les mors utilisés et la chaîne cinématique en général n'offrent pas de surfaces de référence qui permettent d'aligner l'éprouvette avec l'axe de traction. Ceci entraîne des différences entre les essais réalisés et les essais simulés en considérant des conditions aux limites idéales. Ainsi, dans les procédures d'identification basées sur une résolution du problème direct (recalage de modèle élément fini par exemple), il est souvent nécessaire de prendre en compte des déplacements imposés (théoriques ou mesurés) sur tout ou partie de la frontière du domaine considéré. Dans ce cas, le bruit présent dans les mesures (ou l'erreur commise en considérant un déplacement théorique idéal) entraîne des erreurs dans le calcul de contraintes. Dans le cas de la méthode de champs virtuels, l'introduction de champs virtuels particuliers permet de s'affranchir de la modélisation ou de la mesure des conditions aux limites. Dans le cas présent, où les conditions aux limites sont mal maîtrisées, cette particularité présente un avantage certain par rapport aux techniques classiques de recalage par éléments finis.

Pour limiter les déplacements de l'éprouvette dûs aux rattrapages de jeux en début d'essai, la liaison qui fixe le mors inférieur au bâti est précontrainte en traction au delà de l'effort maximum appliqué à l'aide d'un anneau de serrage (malgré cette précaution, une correction sera appliquée sur les déplacements mesurés pour supprimer une partie des déplacements dûs aux glissements). Le mors du haut est fixé sur une traverse mobile dont le déplacement est piloté par un moteur électrique. Ce type de machine permet de réaliser des essais à de faibles vitesses de déplacements. La vitesse de déplacement imposée au mors supérieur durant l'essai est de 0,05 $mm \cdot min^{-1}$. La résultante des efforts de traction est mesurée par une cellule de charge de capacité 100 kN .

La mesure des champs cinématiques dans le plan est réalisée par la méthode de la grille à deux caméras présentée dans le chapitre 4. Deux réseaux de traits croisés de pas 200 μm ont été transférés sur les deux faces de l'éprouvette afin de mesurer les déplacements sur les deux faces de l'éprouvette et de pouvoir

prendre en compte les effets hors plan. Ce dispositif a permis de mesurer les champs de déplacement dans le plan malgré des déplacements hors plan pouvant atteindre $150\ \mu m$ durant l'essai.

Ces déplacements hors plan sont critiques en début de chargement car les déplacements mesurés sont très faibles. La figure 5.12 montre les déplacements mesurés sur chaque faces en début de chargement, la différence entre les déplacements mesurés sur les deux faces est de quelques pourcents des déplacements mesurés. Mais ce déplacement n'est pas constant et provoque l'ajout d'une déformation parasite. Dans l'exemple de la figure 5.12, la différence entre les déplacements mesurés sur la face 1 et ceux mesurés sur la face 2 varie linéairement de façon positive dans les deux directions x et y. Cela se traduit ici par l'ajout d'une déformation moyenne d'environ 3×10^{-4} dans les deux directions sur la face 1 tandis que sur la face 2, cela correspond à l'ajout d'une déformation négative d'environ -3×10^{-4}. Cette valeur est du même ordre de grandeur que les déformations mesurées, en particulier au début de l'essai. Il est donc absolument nécessaire de prendre en compte cette déformation parasite pour pouvoir identifier les paramètres élastiques et les paramètres pilotant l'apparition de la plasticité.

La surface analysée couvre une longueur de $21\ mm$ dans la direction x en partant du centre de l'éprouvette délimitée par les bords circulaires de l'éprouvette dans l'autre direction. Dix pixels ($N = 10$) ont été utilisés pour échantillonner chaque période de grille de $200\ \mu m$, le grandissement vaut donc $0,05\ pixel \cdot \mu m^{-1}$.

Le bruit de mesure en déplacement est estimé à partir d'une série de mesures d'un déplacement nul. Dans ce cas, la résolution atteinte sur la mesure de déplacement sur une face est égale à l'écart quadratique de la distribution des écarts. Comme le déplacement de membrane est calculé en effectuant la moyenne entre les deux faces, il faut multiplier la résolution obtenue par $\sqrt{2}$. La résolution finalement atteinte en déplacement pour cet essai (voir figure 5.13) est ainsi estimée à environ $1\ \mu m$ pour une résolution spatiale de $380\ \mu m$ ($2N - 1$ pixels utilisés pour le calcul de la phase). Cette résolution peut être améliorée en traitant les mesures afin de diminuer le bruit. La technique employée ici consiste à lisser les champs de déplacement avec un polynôme à deux dimensions (voir section 4.3.1). L'avantage de cette technique par rapport à un lissage local par convolution est de pouvoir interpoler les données manquantes près des bords, au niveau des défauts de collage ou encore aux endroits où le contraste est mauvais. Cette technique a en outre été validée numériquement sur les champs de déplacement issus de simulations par éléments finis (voir section 5.3).

La résolution atteinte en déplacement après un lissage polynomial est estimée à partir du lissage polynomial de la distribution des écarts d'un déplacement nul (voir figure 5.13). La résolution en déplacement obtenue après un lissage polynomial de degré quatre vaut alors environ $0,05\ \mu m$. La résolution en déformation est estimée en dérivant le champ polynomial obtenu. Les champs calculés laissent alors apparaître des singularités qui donnent une idée de la résolution en déformation (voir figure 5.14). L'ordre de grandeur des maxima et des minima observés est de 1×10^{-4}. Ceci permet donc de considérer que la résolution en déformation atteinte ici est de l'ordre de 1×10^{-4}.

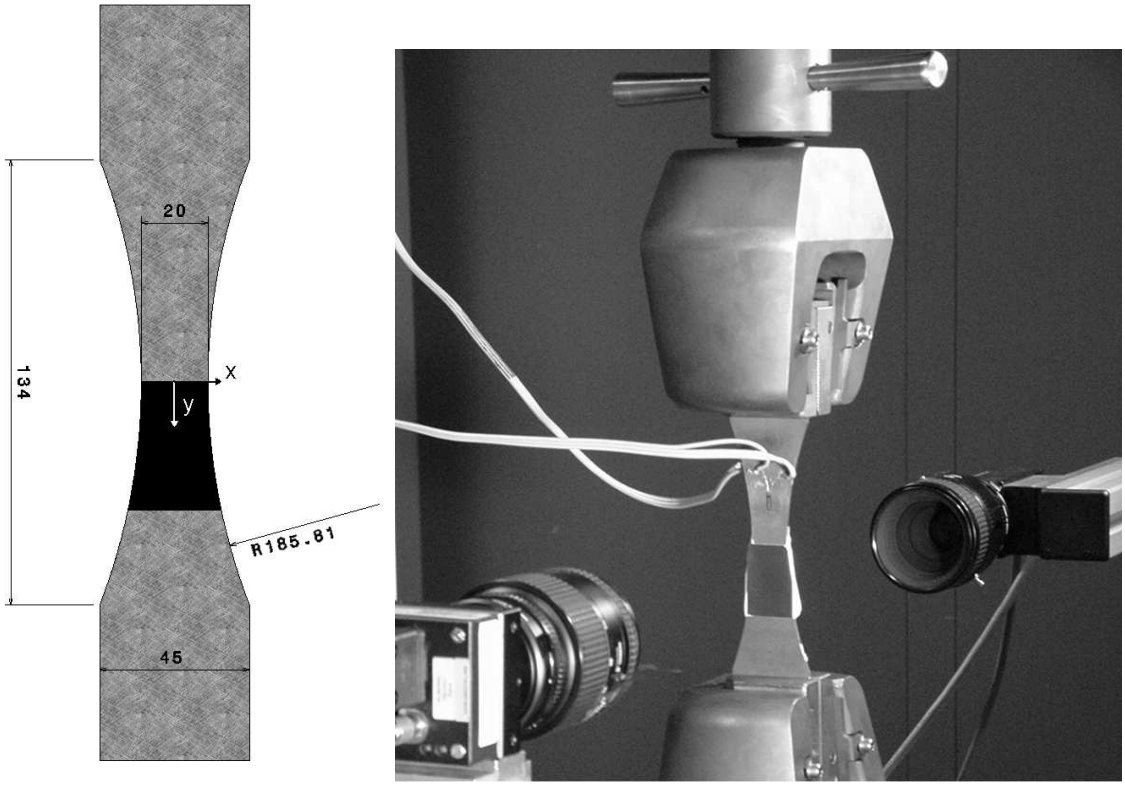


FIG. 5.11: Dispositif d'essai de traction de l'éprouvette plate à section variable.

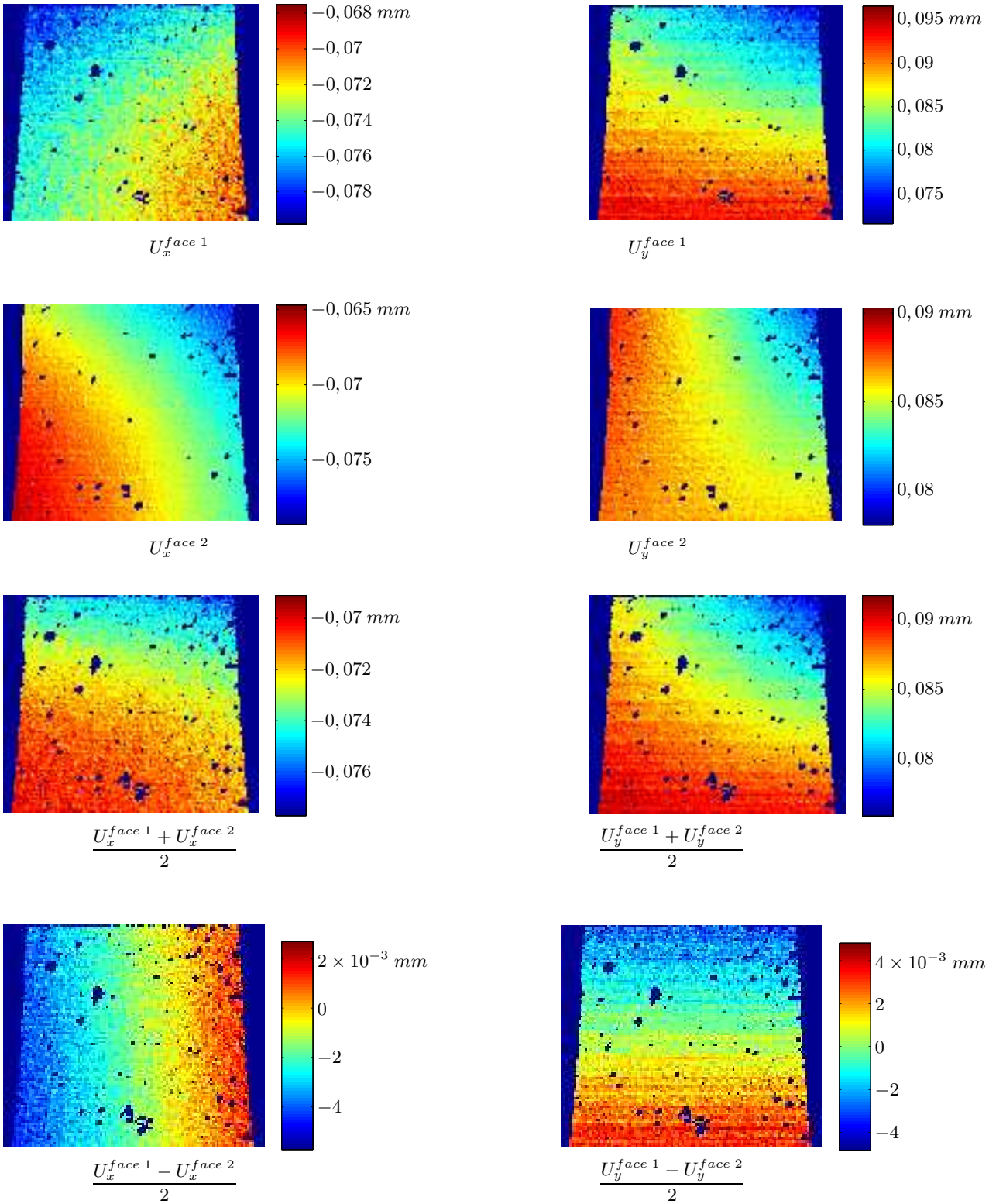


FIG. 5.12: Champs de déplacement mesurés sur les deux faces, moyennes et demi-différences avant l'apparition de la plasticité (3300 N).

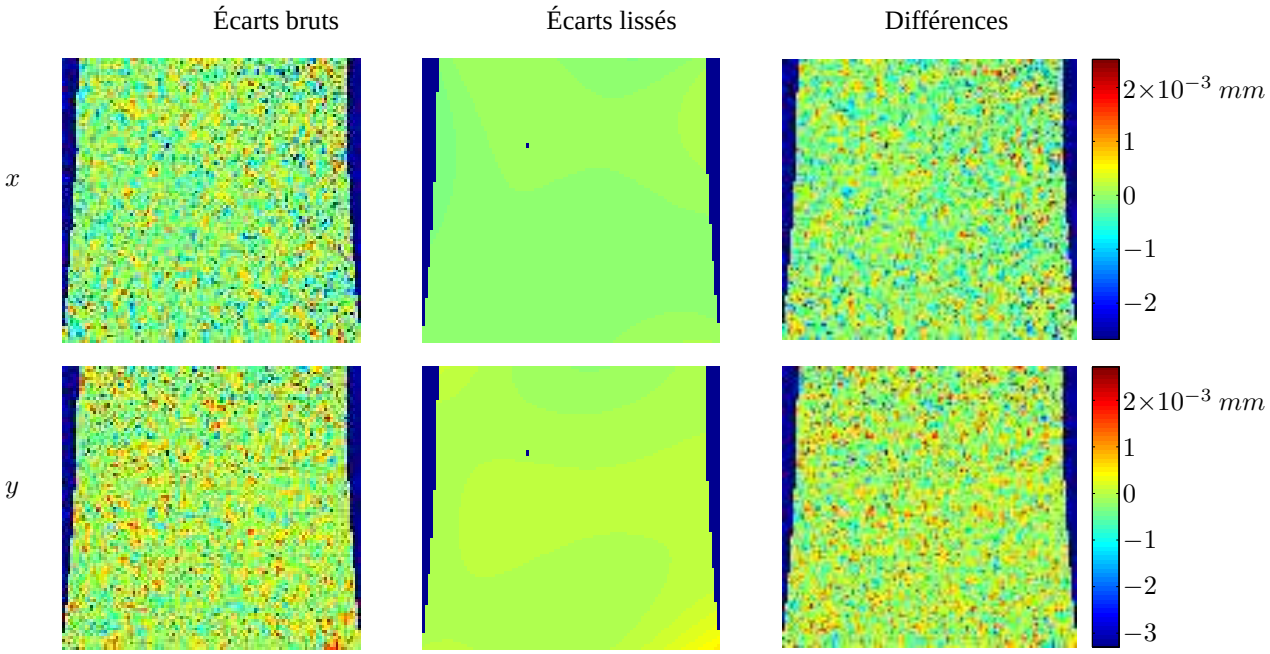


FIG. 5.13: Distributions (x, y) d'écarts entre deux mesures successives du même état cinématique, lissage polynomial de degré quatre de ces distributions et différences entre les deux.

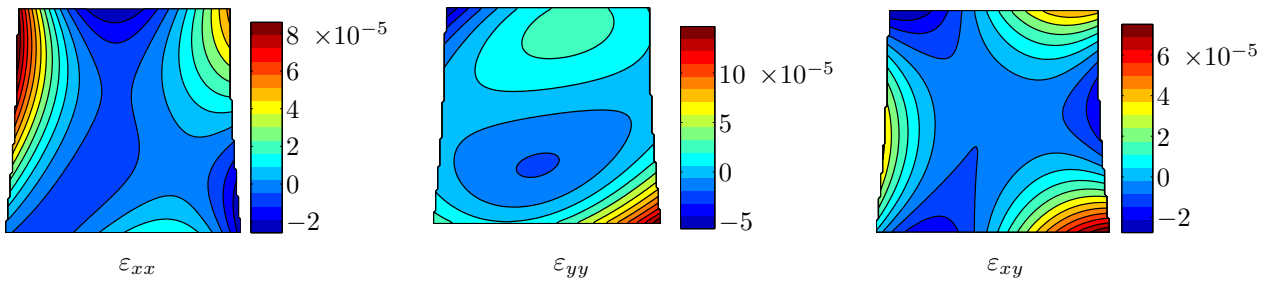


FIG. 5.14: Dérivation des champs polynomiaux de la figure 5.13 afin d'estimer la résolution en déformation.

5.4.2 Champs mesurés

L'éprouvette à section variable a été testée en traction jusqu'à $9700\ N$ ce qui correspond à une contrainte longitudinale moyenne de $243\ MPa$ dans la section centrale de l'éprouvette. Quatre-vingts états successifs ont été enregistrés par pas de trente secondes. Compte tenu de la vitesse de déplacement de la traverse mobile, cette fréquence d'acquisition assure des incréments de déplacements inférieurs à $100\ \mu m$, ce qui permet d'appliquer un dépliement temporel des cartes de phase et évite d'avoir à mettre en oeuvre un algorithme de dépliement spatial. Les champs de déformation sont obtenus après un lissage de degré quatre des champs de déplacement, puis dérivation analytique.

L'observation des champs mesurés révèle un gradient de déformation dans la direction transverse (voir figure 5.16), ce qui n'était pas le cas dans les simulations. Ce gradient de déformation est lié à la présence d'un moment de flexion dans le plan qui se superpose à la traction exercée sur l'éprouvette. Ce moment de flexion engendre des contraintes de traction et de compression longitudinale qui ne remettent cependant pas en cause l'hypothèse d'uniaxialité. Il est très certainement lié à un défaut d'alignement de l'axe de l'éprouvette avec l'axe de traction de la machine ou bien à une répartition non uniforme du serrage des talons de l'éprouvette dans les mors de la machine. Les efforts exercés au niveau des mors ne sont donc pas uniformément répartis sur toute la section et une procédure de recalage par éléments finis aurait pu nécessiter de modéliser ou de mesurer cette répartition afin de calculer la réponse simulée.

La cellule de charge utilisée sur la machine de traction mesure seulement la résultante des efforts appliqués. Dans le cas de la MCV, un choix adéquat des champs virtuels utilisés permet de s'affranchir de la mesure ou de la modélisation de la répartition de efforts appliqués en ne faisant travailler que la résultante des efforts extérieurs (voir chapitre 3). Cet aspect a par ailleurs été vérifié numériquement lors des travaux de Grédiac et Pierron (2006) qui ont montré qu'une répartition linéaire des efforts appliqués n'influençait pas significativement les résultats de l'identification.

5.4.3 Paramètres élastiques

Les paramètres élastiques sont identifiés avec la MCV linéaire directe en utilisant les deux champs virtuels $(\overrightarrow{v}^{\star 1}, \boldsymbol{\epsilon}^{\star 1})$ et $(\overrightarrow{v}^{\star 2}, \boldsymbol{\epsilon}^{\star 2})$ introduits dans la section 3.2 et utilisés avec les simulations dans le paragraphe précédent. En appliquant les équations 3.7 et 3.8 aux quatre-vingts cartes mesurées, on obtient une courbe d'évolution des paramètres élastiques identifiés sans prise en compte de la plasticité. La courbe montre une chute du module d'Young à partir de la douzième carte (voir figure 5.15), ce qui indique qu'au delà de cette carte la relation entre les contraintes et les déformations n'est plus linéaire.

Parmi les douze premières cartes mesurées, les sept premières sont écartées en raison du bruit de mesure qui entraîne une plus grande dispersion des résultats. Les paramètres élastiques sont déterminés en moyennant les résultats obtenus entre la huitième et la douzième carte (voir tableau 5.7). La valeur identifiée pour le module d'Young entre dans l'intervalle de confiance obtenu avec les jauges, même pour des chargements très faibles. En revanche la valeur identifiée pour le coefficient de Poisson est davantage perturbée et sous-estimée d'environ $15\ \%$ par rapport à la valeur de référence. Celui-ci est très sensible aux erreurs de mesure et se montre par conséquent difficile à identifier. L'utilisation d'un champ optimisé

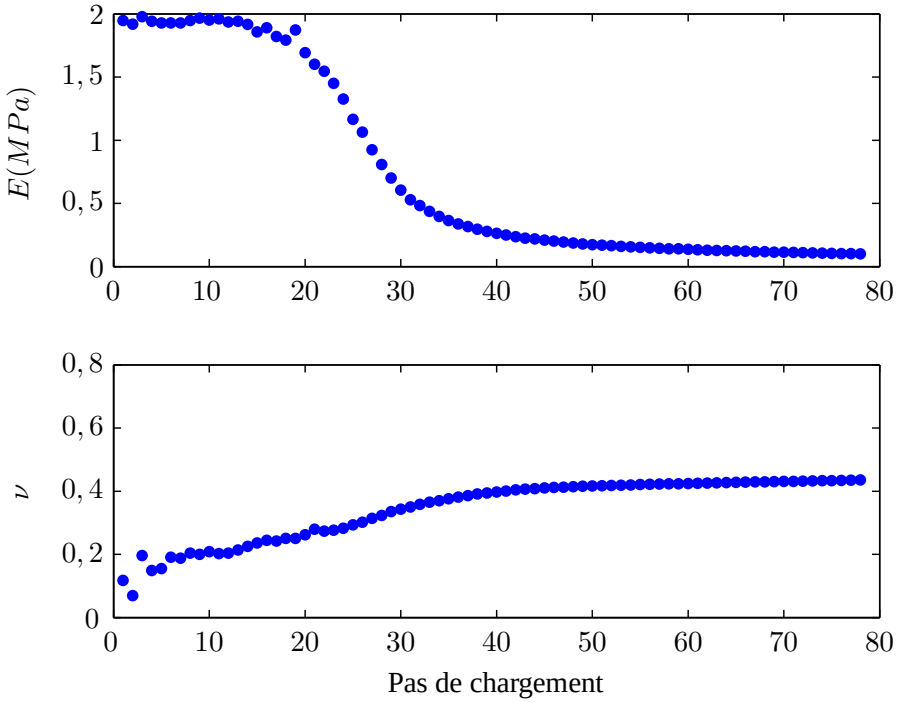


FIG. 5.15: Évolution des paramètres élastiques sans prise en compte de la plasticité.

selon la procédure de Avril et al. (2004a) aurait certainement permis d'obtenir mieux.

L'observation des champs de contrainte calculés à partir des paramètres identifiés confirme la présence d'un effet de flexion dans le plan qui domine le début de l'essai (voir figure 5.16). Elle permet également de vérifier l'hypothèse d'uniaxialité qui sera faite ensuite pour le calcul des paramètres plastiques.

TAB. 5.7: Paramètres élastiques identifiés avec la MCV linéaire à partir des mesures numérotées de 8 à 12 (1355 N à 3296 N).

	Référence		Identifié	
	$E\ (GPa)$	ν	$E(GPa)$	ν
Moyenne	199	0,28	194	0,21
C.V. (%)	2	6	2	8

5.4.4 Paramètres plastiques

L'identification des paramètres plastiques est menée par la procédure utilisée précédemment avec les simulations et décrite en détails dans la section 3.3. Les cartes numérotées de douze (3300 N) à quatre-vingt (9700 N) ont été introduites dans le processus de minimisation ainsi que la résultante des forces mesurée aux instants correspondants. Les paramètres élastiques identifiés précédemment ainsi qu'un jeu initial de quatre paramètres d'écrouissage ont été utilisés pour calculer les contraintes et évaluer les équations d'équilibre écrites pour chaque pas de chargement. Ces paramètres ont été réévalués afin de

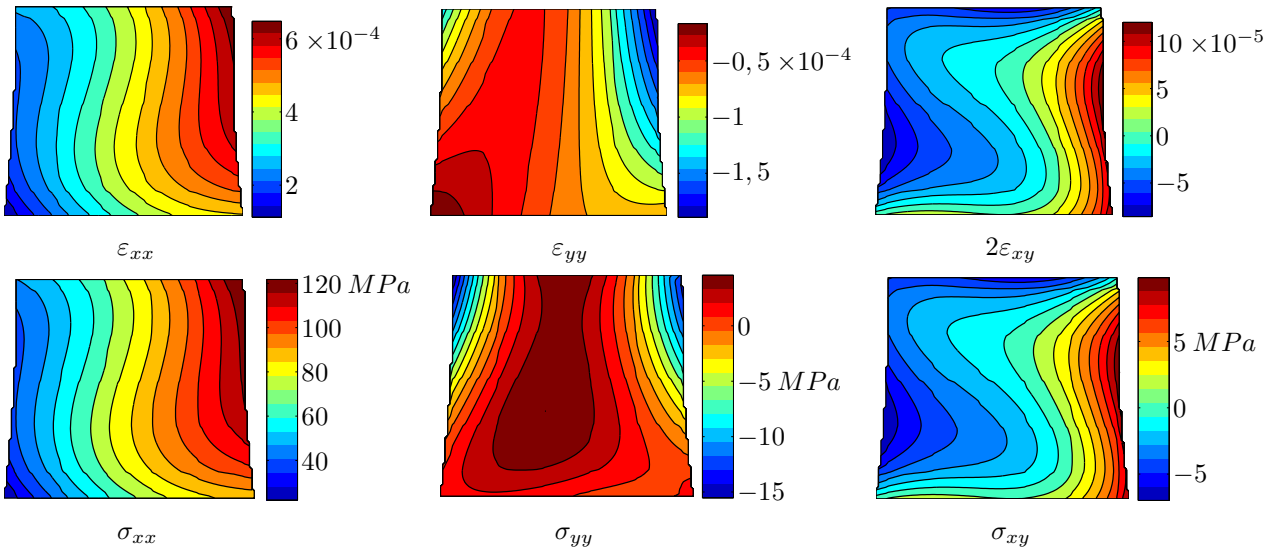


FIG. 5.16: Champs de déformations obtenus après un lissage de degré quatre avant l'apparition de la plasticité (3120 N) et champs de contrainte calculés avec les paramètres élastiques identifiés.

	Référence $\pm 2\sigma$	Initial	Identifié	Sensibilité
$\sigma_0\ (MPa)$	127 ± 15	100	140	1960
$R_0\ (GPa)$	$2,46 \pm 0,49$	$0,2$	$2,19$	180
$R_{inf}\ (MPa)$	$56,2 \pm 13,8$	100	$46,4$	413
$b\ (\times 10^3)$	$3,37 \pm 0,72$	$0,1$	$2,46$	83

TAB. 5.8: Comparaison des valeurs identifiées avec les valeurs de référence et sensibilité de la fonction coût à chacun de paramètres plastiques.

minimiser l'écart à l'équilibre donné par la fonction coût globale. Le critère d'arrêt de la procédure est un seuil de variation de $0,1\ MPa$ sur les paramètres recherchés et sur la fonction coût. Les paramètres utilisés pour obtenir les résultats présentés dans le tableau 5.8 sont :

1. polynôme de degré quatre pour lisser les déplacements.
2. $N = 100$ sections introduites dans la fonction coût présentée dans la section 3.3.
3. jeu de paramètres initiant la procédure : $\sigma_0^i = 100\ MPa$, $R_0^i = 200\ MPa$, $R_{\text{inf}}^i = 100\ MPa$ et $b^i = 100$.

Les résultats (voir tableau 5.8) montrent que tous les paramètres plastiques identifiés respectent l'intervalle de confiance $\pm 2\sigma$ autour des valeurs de référence données par les essais normalisés à l'exception du paramètre b. En outre, le tracé de la réponse identifiée par la MCV et des réponses données par les jauges lors des essais normalisés montre une bonne concordance de la courbe identifiée avec le faisceau de courbes de référence (voir figure 5.17). Le décalage constaté sur le paramètre b s'observe toutefois sur les courbes au niveau du coude qui a tendance a être davantage marqué sur la réponse identifiée.

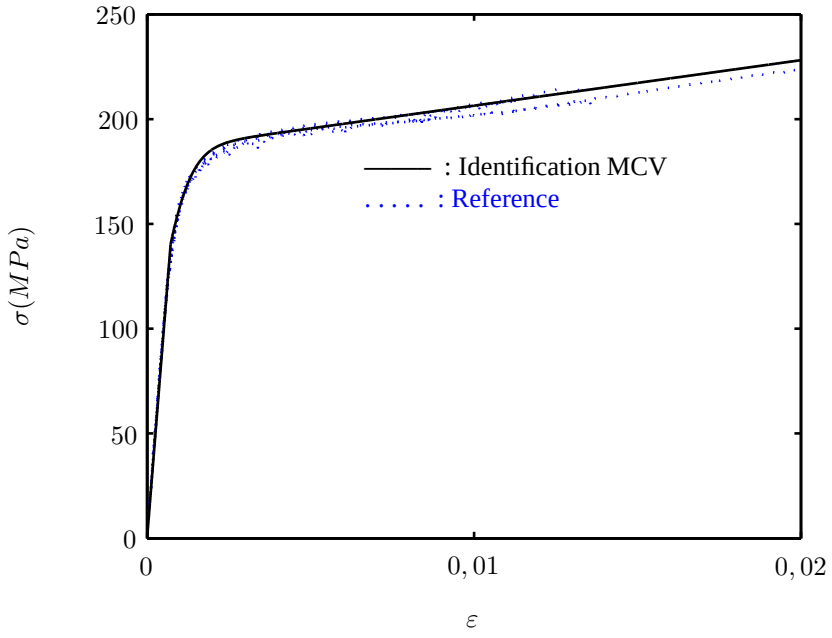


FIG. 5.17: Comparaison des courbes contrainte/déformation issues des essais de référence avec jauges et de la courbe calculée à partir des paramètres identifiés avec la MCV (voir tableau 5.8).

Pour tenter d'expliquer cet écart, les sensibilités de la fonction coût aux différents paramètres ont été calculées autour des valeurs de référence. Pour chacun des paramètres, les trois autres sont fixés à leur valeur de référence, alors que le paramètre étudié varie de plus ou moins cinquante pourcent autour de sa valeur de référence. Ensuite un polynôme de degré deux est utilisé pour interpoler la courbe obtenue et la dérivée seconde est calculée. Cette courbure est alors utilisée comme estimateur de la sensibilité de la fonction coût au paramètre considéré et donne une indication sur son identifiabilité. Pour obtenir une sensibilité sans dimensions qui puisse être comparée pour différents paramètres ou différentes fonctions coûts, la fonction coût et les paramètres sont normalisés. C'est à dire que les valeurs atteintes par la fonction coût sont divisées par la valeur atteinte à partir des paramètres de référence et les paramètres sont divisés par les paramètres de référence. Les résultats (voir tableau 5.8) montrent que le paramètre le mieux identifié est la limite d'élasticité initiale σ_0. Vient ensuite R_{inf} qui ajouté à σ_0 correspond à l'intersection de la droite asymptotique du modèle de Voce avec l'axe des contraintes, puis R_0 qui est la pente de la droite d'écrouissage asymptotique. Le paramètre b qui caractérise la courbure de la zone de transition après l'apparition de la plasticité obtient la plus mauvaise sensibilité, qui est plus de vingt-cinq fois plus basse que celle du paramètre σ_0. Ceci explique pourquoi ce paramètre est moins bien identifié.

Une autre explication pourrait être liée à la triaxialité des contraintes puisque l'analyse est réalisée sous l'hypothèse d'uniaxialité. Mais l'étude préalable réalisée à partir de simulations par éléments finis a révélé que cette hypothèse perturbait peu l'identification (voir figures 5.8 et 5.9).

Enfin, le modèle lui même pourrait être remis en cause. En effet, la superposition de la courbe identifiée au sens des moindres carrés avec le faisceau de réponses mesurées avec les jauges (voir figure 5.19)

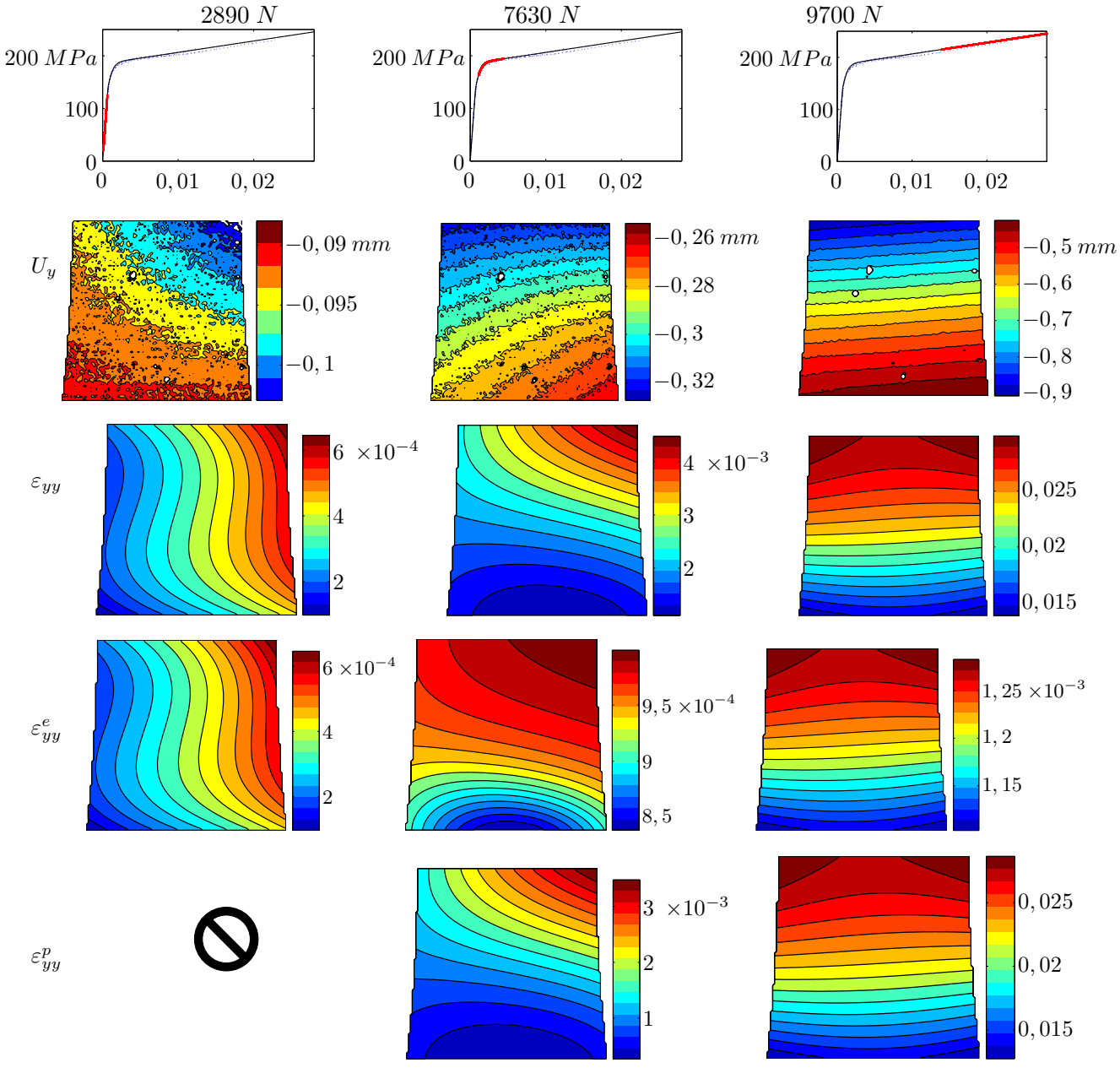


FIG. 5.18: Champs de déplacement mesurés et champs de déformation calculés après un lissage de degré quatre, puis séparation des déformations élastiques et plastiques au cours du chargement à partir des paramètres identifiés (voir tableau 5.8).

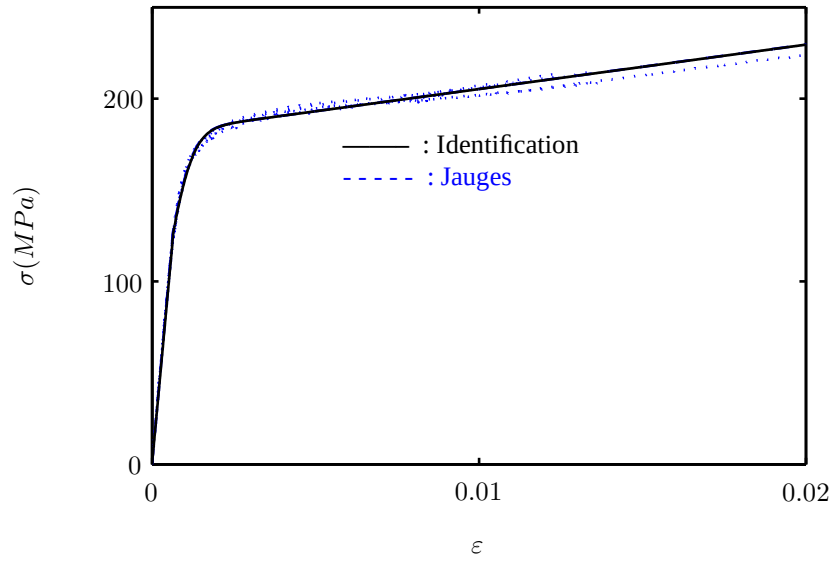


FIG. 5.19: Courbe de Voce identifiée au sens des moindres carrés sur les réponses des jauges.

montre qu'une différence similaire existe au niveau du coude même si elle est moins marquée que sur la réponse identifiée par MCV.

Il faut également souligner que lors des essais homogènes pour lesquels la mesure des déformations est locale, l'apparition de la plasticité n'est détectée qu'à travers une moyenne des contraintes. En effet, la plasticité peut localiser et entraîner une diminution de la contrainte moyenne alors même que la surface couverte par la jauge n'aura pas atteint la limite d'élasticité. Au contraire, dans l'approche par MCV, tous les points dans la région mesurée sont pris en compte et contribuent à la réponse identifiée. Il faut alors considérer avec précaution les essais homogènes avec jauges comme une référence appropriée.

La mise en place de la MCV pour résoudre le problème inverse posé met en oeuvre plusieurs paramètres numériques qui doivent être choisis *a priori* avant de lancer l'optimisation. L'objectif des paragraphes suivants est d'étudier l'influence de quelques uns des ces paramètres sur les paramètres identifiés afin d'évaluer la pertinence des résultats.

5.5 Discussion

5.5.1 Influence des paramètres initiaux

Le choix des paramètres utilisés pour initialiser la procédure de minimisation peut influencer le résultat notamment si la fonction coût possède des minima locaux. Pour se faire une idée de l'unicité de la solution dans le cas présent, trois autres jeux de paramètres initiaux ont été testés (voir tableau 5.9). Chacun conduit exactement au même jeu de paramètres identifiés (moins de $0,1$ % de différence), seul le nombre d'itérations varie du fait de la distance entre les valeurs initiales et finales. Ceci suggère que la fonction coût n'a probablement qu'un seul minimum dans l'intervalle de valeurs balayées. Cependant, en choisissant des valeurs initiales très éloignées qui n'auraient pas de sens physique, l'identification

Paramètre	Identifié	jeu 1	jeu 2	jeu 3	jeu 4
$\sigma_0\ (MPa)$	141	100	200	100	100
$R_0\ (GPa)$	$2,19$	1	$0,1$	1	10
$R_{inf}\ (MPa)$	$46,3$	40	10	10	100
$b\ (\times 10^3)$	$2,46$	1	1	$0,1$	1
Nb itérations	-	334	800	640	369

TAB. 5.9: Jeux de paramètres ayant servis à initier la procédure d'optimisation.

	Degré 2	Degré 3	Degré 4	Degré 5	Degré 6	Degré 7	Moy.	C.V. (%)
$\sigma_0\ (MPa)$	138	140	141	136	137	141	$138,5$	$1,4$
$R_0\ (GPa)$	$2,18$	$2,2$	$2,19$	$2,21$	$2,19$	$2,19$	$2,19$	$0,4$
$R_{inf}\ (MPa)$	$48,3$	$47,1$	$46,3$	$50,9$	50	$46,2$	$48,1$	$4,1$
$b\ (\times 10^3)$	$3,13$	$2,75$	$2,46$	$2,75$	$2,52$	$2,24$	$2,65$	12

TAB. 5.10: Influence du degré du polynôme sur les paramètres identifiés.

peut aboutir à un autre minimum. En particulier, un minimum local a été trouvé en $\sigma_0 = 170\ MPa$, $R_0 = -700\ MPa$, $R_{\text{inf}} = 90\ MPa$ et $b = 60$ menant à une valeur de la fonction coût près de cinq fois supérieure à celle du minimum atteint précédemment. Ce minimum peut facilement être écarté en raison du module d'écrouissage négatif et aurait pu être évité automatiquement en contraignant les valeurs recherchées à être toutes positives par exemple.

5.5.2 Influence du degré du polynôme

Un paramètre important de la procédure est le choix du degré du polynôme utilisé pour lisser les déplacements et pouvoir les dériver. Les résultats d'identifications menées à partir de polynômes de degrés allant de deux à sept sont reportés dans le tableau 5.10, le degré huit ayant abouti à des valeurs absurdes des paramètres identifiés. Le jeu de paramètres initiaux utilisé était le jeu n°1 et le nombre de sections $n = 100$. Les valeurs sont sensibles au degré du polynôme, mais restent proches des valeurs de référence, y compris pour l'approximation de degré deux qui est assez grossière (voir figure 5.20). Les coefficients de variation des valeurs identifiées sont reportés dans le tableau 5.10. Ils traduisent la sensibilité des paramètres au degré du polynôme. Dans l'ensemble ces valeurs sont assez basses comparées aux coefficients de variation observés sur les valeurs de référence (voir tableau 5.8), sauf pour le paramètre b qui se montre le plus sensible, ce qui confirme sa mauvaise identifiabilité.

5.5.3 Influence du choix des champs virtuels

Une étape déterminante dans le succès de la procédure réside dans le choix des champs virtuels qui servent à construire la fonction coût. Pour tester son influence sur les résultats, différentes valeurs de n ont été balayées. Elles vont de $n = 1$ qui correspond à un champ de déformation virtuel uniforme sur toute la surface de l'éprouvette, jusqu'à $n = 100$ qui correspond à la somme de cent champs virtuels définis égaux à un sur une seule ligne de pixels. Le tableau 5.11 montre les résultats obtenus avec les quatre jeux

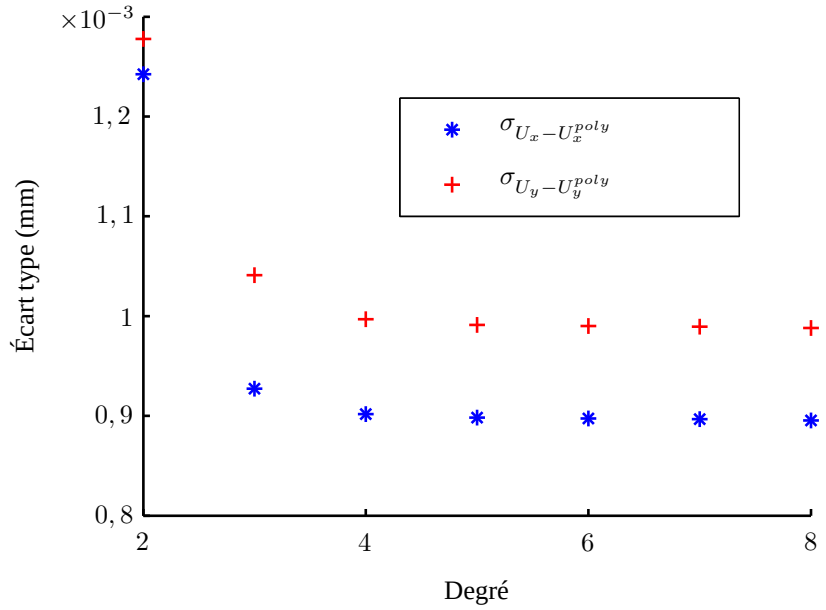


FIG. 5.20: Écarts quadratiques moyens entre le déplacement mesuré et l'approximation polynomiale en fonction du degré du polynôme.

	$N=1$	$N=2$	$N=4$	$N=10$	$N=25$	$N=50$	$N=100$
$\sigma_0\ (MPa)$	138	140	141	141	140	140	140
$R_0\ (GPa)$	$2,23$	$2,2$	$2,19$	$2,19$	$2,19$	$2,19$	$2,19$
$R_{inf}\ (MPa)$	$48,2$	$46,4$	$45,9$	$46,3$	$46,4$	$46,4$	$46,4$
$b\ (\times 10^3)$	$2,8$	$2,52$	$2,45$	$2,46$	$2,46$	$2,46$	$2,47$

TAB. 5.11: Influence du nombre de sections utilisées pour écrire la fonction coût sur les paramètres identifiés.

de paramètres initiaux précédents qui conduisent aux mêmes jeux de paramètres identifiés (sauf pour le jeu initial numéro deux qui conduit au minimum local précédemment évoqué pour $n = 2,\ 4,\ 25,\ 50$). Ils indiquent clairement qu'à part pour le degré deux, le choix des champs influence peu les valeurs identifiées. Ceci est certainement lié au fait que la configuration uniaxiale choisie est simple et ne requière pas de champ virtuel sophistiqué pour extraire l'information recherchée.

5.6 Conclusion

L'étude présentée dans ce chapitre a montré qu'il était possible d'identifier les paramètres d'une loi élastoplastique à partir de mesures de champs de déplacement et d'une procédure d'identification inverse adaptée de la méthode des champs virtuels. Le succès de la procédure dépend directement de la qualité des mesures de champs cinématiques et en particulier de la prise en compte des déplacements hors plan au moyen du dispositif à deux caméras. La résolution en déformation a été atteinte grâce au lissage polynomial des champs de déplacement. Différents paramètres pilotant la procédure d'identification ont été étudiés. Les résultats se sont notamment montrés stables face à la variation du degré des polynômes, des points de départ de la procédure de minimisation ou encore du choix des champs virtuels.

La simplicité de cet essai est liée à son uniaxialité et au fait que les gradients de déformation soient peu prononcés. Ainsi, l'utilisation de champs virtuels simples a suffi à l'extraction des paramètres recherchés. Le prochain chapitre traite un essai plus hétérogène, où la multiaxialité des contraintes devra être prise en compte par la méthode des champs virtuels.

6 Application à un essai multiaxial hétérogène

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, la méthode d'identification est appliquée à un état de contrainte plane. A cet effet, un essai produisant un état de contrainte biaxial hétérogène a été conçu. Le dispositif le plus communément répandu dans les laboratoires d'essai est la machine de traction uniaxiale. Aussi, l'idée est de réaliser une éprouvette de traction ayant une géométrie particulière, afin d'obtenir l'état de contrainte souhaité par effet de structure. L'essai aurait tout aussi bien pu être basé sur un essai de flexion, ou un essai de cisaillement.

Plusieurs géométries basées sur la traction d'une éprouvette plane ont déjà été étudiées dans la littérature (voir Aoki et al. 1997; Meuwissen et al. 1998; Meuwissen 1998; Kajberg et Lindkvist 2004; Grédiac et Pierron 2006). Toutes ces configurations sont a priori utilisables avec la méthode des champs virtuels. La loi de comportement étudiée étant une loi élastoplastique avec écrouissage isotrope, l'essai réalisé doit permettre d'observer progressivement la propagation de la plasticité afin d'impliquer tous les paramètres de la loi de comportement dans la réponse mécanique. Cela implique que les gradients de déformation ne soient pas trop localisés, c'est pourquoi les changements de section devront se faire de manière progressive. Par exemple, dans le cas d'éprouvettes entaillées, les rayons de courbure en fond d'entaille ne doivent pas être trop faibles.

Il existe de plus quelques contraintes sur la géométrie de l'éprouvette puisque le matériau étudié est une tôle de $2\ mm$ d'épaisseur et que la largeur des mors est de $50\ mm$. A partir de ces recommandations plusieurs géométries ont été testées numériquement (voir figure 6.1), en visualisant les champs de contrainte grâce à un logiciel éléments finis, sans aller néanmoins jusqu'à l'identification.

Le choix de la géométrie de l'éprouvette pourrait faire l'objet d'une optimisation avec comme objectif par exemple de maximiser le rapport signal sur bruit ou d'équilibrer la sensibilité de la fonction coût aux différents paramètres à identifier. Ceci pourrait être réalisé au moyen d'une analyse de sensibilité comme cela se fait par ailleurs dans la littérature (voir Meuwissen (1998) par exemple).

6.2 Éprouvettes bi-entaillées

La géométrie retenue est celle d'une éprouvette plane de traction bi-entaillée. Les entailles circulaires sont placées symétriquement par rapport l'axe de traction pour maximiser l'étendue de la plasticité.

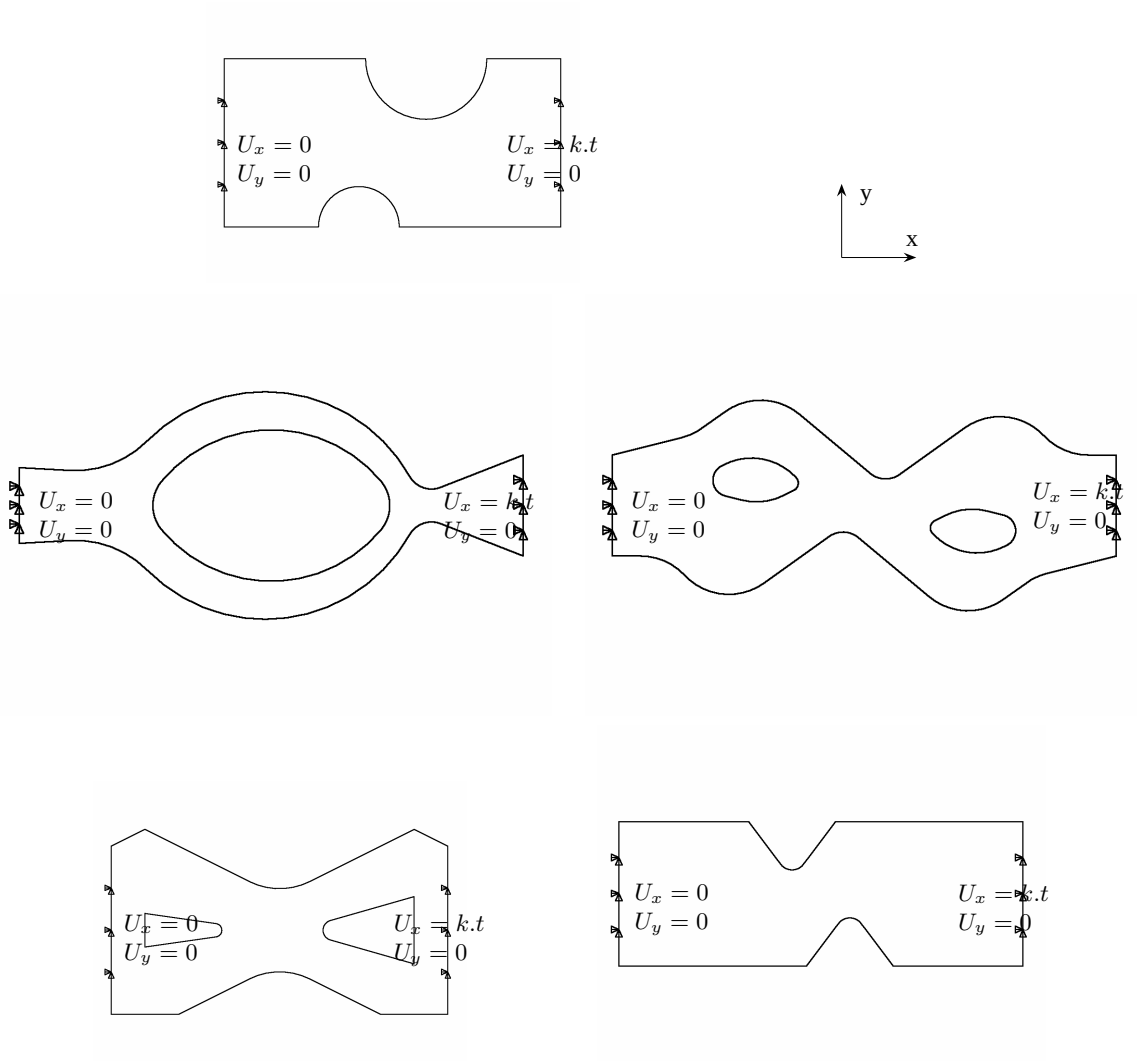


FIG. 6.1: Éprouvettes planes de traction envisagées lors des simulations pour réaliser un état de contrainte plane. La dernière éprouvette a été utilisée par Meuwissen 1998 et Grédiac et Pierron (2006).

Ce type d'éprouvette a déjà été proposée pour identifier les paramètres pilotant un modèle non linéaire notamment par Aoki et al. (1997) et Kajberg et Lindkvist (2004). Le rayon des entailles est ici de $10\ mm$, et la distance entre les fonds d'entaille est de $16\ mm$. L'éprouvette est placée dans un montage de traction, la distance entre les mors est de $90\ mm$. La figure 6.2 présente les dimensions des éprouvettes de traction. Cette géométrie a permis de réaliser un état de contrainte plane étendu et équilibré dans toutes

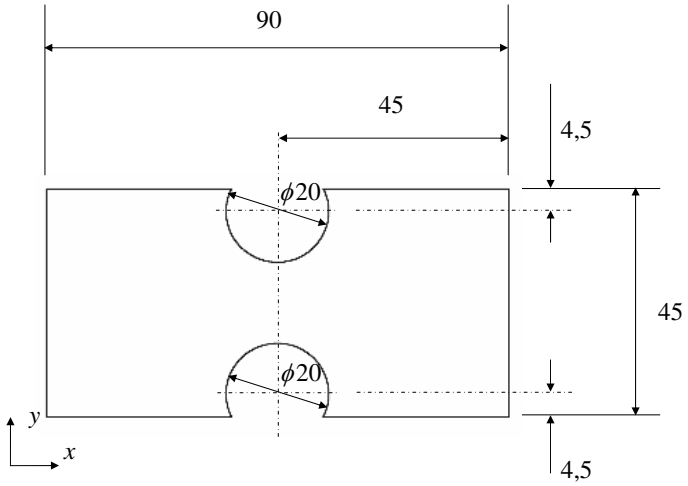


FIG. 6.2: : Géométrie de l'éprouvette de traction plane bi-entaillée. Les dimensions sont en mm et seule la partie entre les mors est représentée.

les directions du champ de mesure (voir figure 6.3).

6.3 Validation numérique

Comme pour le cas précédent (voir chapitre 5), la procédure d'identification a d'abord été testée sur des résultats numériques. A cet effet, une simulation par éléments finis de l'essai a été réalisée sous le logiciel ANSYS afin de simuler des champs de déplacement expérimentaux.

Aucune précaution n'a été prise pour économiser le temps de calcul puisque la simulation n'est réalisée qu'une fois. Le nombre d'éléments est volontairement important afin de faciliter le post traitement des données et l'ajout de bruit dans le but de s'approcher de données expérimentales lors d'une mesure de champ cinématique.

La figure 6.4 présente le maillage du modèle éléments finis. L'éprouvette est maillée entièrement entre les mors ($90\ mm$), mais seule la région entre les entailles est utilisée pour l'identification (voir figure 6.4). Conformément à l'orientation de la figure 6.4, les noeuds du bord gauche sont encastrés tandis que les noeuds du bord droit sont bloqués verticalement afin de simuler le serrage des mors. Un déplacement horizontal total de $0,25\ mm$ est imposé aux noeuds du bord droit par pas de $0,005\ mm$. L'essai est piloté en déplacement plutôt qu'en effort afin de s'approcher des conditions expérimentales. L'effort longitudinal appliqué est calculé en sommant les efforts sur les noeuds du bord droit et vaut $7392\ N$ en fin

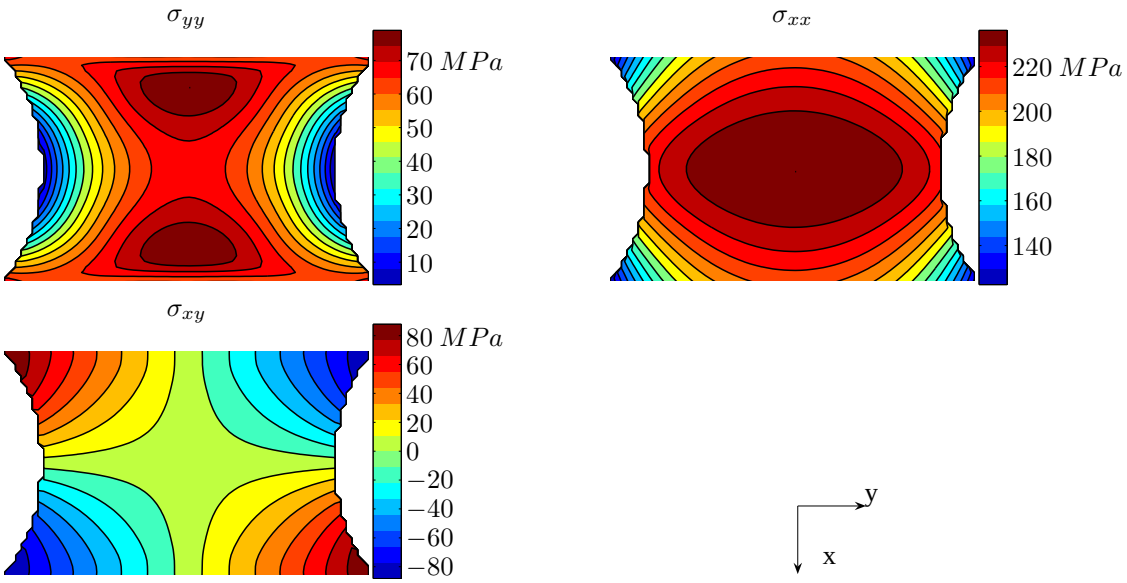


FIG. 6.3: Champ de contraintes entre les entailles issu du calcul par élément fini (points de Gauss) en fin de chargement.

de chargement. La loi de comportement utilisée est le modèle élastoplastique isotrope avec écrouissage isotrope non linéaire de Voce : $\sigma_{eq} = \sigma_0 + R_0\varepsilon^p + R_{\inf}[1 - \exp(-b\varepsilon^p)]$. Les paramètres utilisés sont : $E = 210\ GPa$, $\nu = 0,3$, $\sigma_0 = 127\ MPa$, $R_0 = 2,46\ GPa$, $R_{inf} = 56,2\ MPa$ et $b = 3370$. Les éléments finis utilisés sont du type *PLANE182*, il s'agit d'éléments à quatre noeuds ayant deux degré de liberté par noeud (les translations) et des fonctions de forme linéaires. Ils sont utilisés ici en contrainte plane et plasticité incompressible. Les valeurs aux points de Gauss des déplacements et des déformations dans la région entre les entailles (voir figure 6.4) ainsi que la résultante horizontale des efforts sont exportées à chaque pas dans un fichier ASCII pour pouvoir être traitées par la procédure d'identification. Ces valeurs sont ensuite projetées par approximation linéaire sur une grille régulière de pas $0,2\ mm$ à l'aide de la fonction *griddata* du logiciel Matlab. Ainsi, des traitements identiques pourront être appliqués sur les données simulées (bruit, approximation polynomiale, dérivation, etc.) et sur les données expérimentales.

L'algorithme de calcul des contraintes présenté au chapitre 3 section 3.3.2 est validé grâce aux résultats de simulation. Pour cela, les déformations et les contraintes sont extraites du calcul éléments finis au niveau des points de Gauss. Les paramètres de la loi de comportement sont évidemment les même dans le cas des simulations et de l'algorithme de calcul des contraintes. L'algorithme utilisé pour intégrer la loi est également identique, puisqu'il s'agit d'une procédure incrémentale de Newton Raphson. Seul l'incrément de déformation est différent, puisque dans le logiciel éléments finis, le nombre de sous-incréments entre deux pas successifs est fixé à 10, alors que dans l'algorithme de calcul des contraintes programmé sous Matlab, c'est directement la valeur de l'incrément de déformation qui est fixé à 1.10^{-4}. Les résultats obtenus en fin de chargement sont présentés dans la figure 6.5. Les écarts obtenus sur les contraintes sont inférieures à quelques méga-Pascal ce qui valide l'algorithme pour notre application.

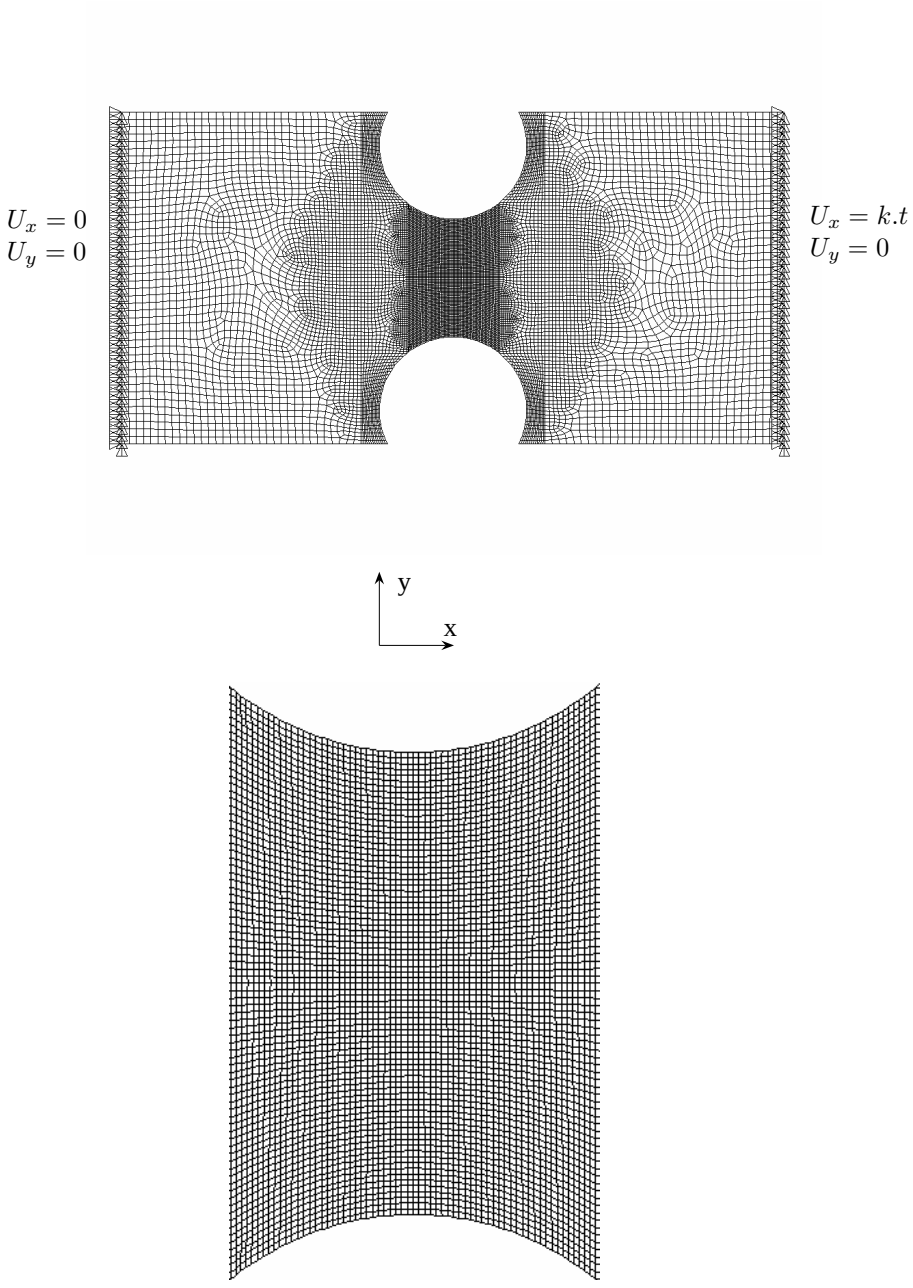


FIG. 6.4: (a) : Modèle éléments finis de l'essai de traction sur éprouvette bi-entaillée (élément PLANE182). (b) : Région utilisée pour l'identification (environ 5000 éléments).

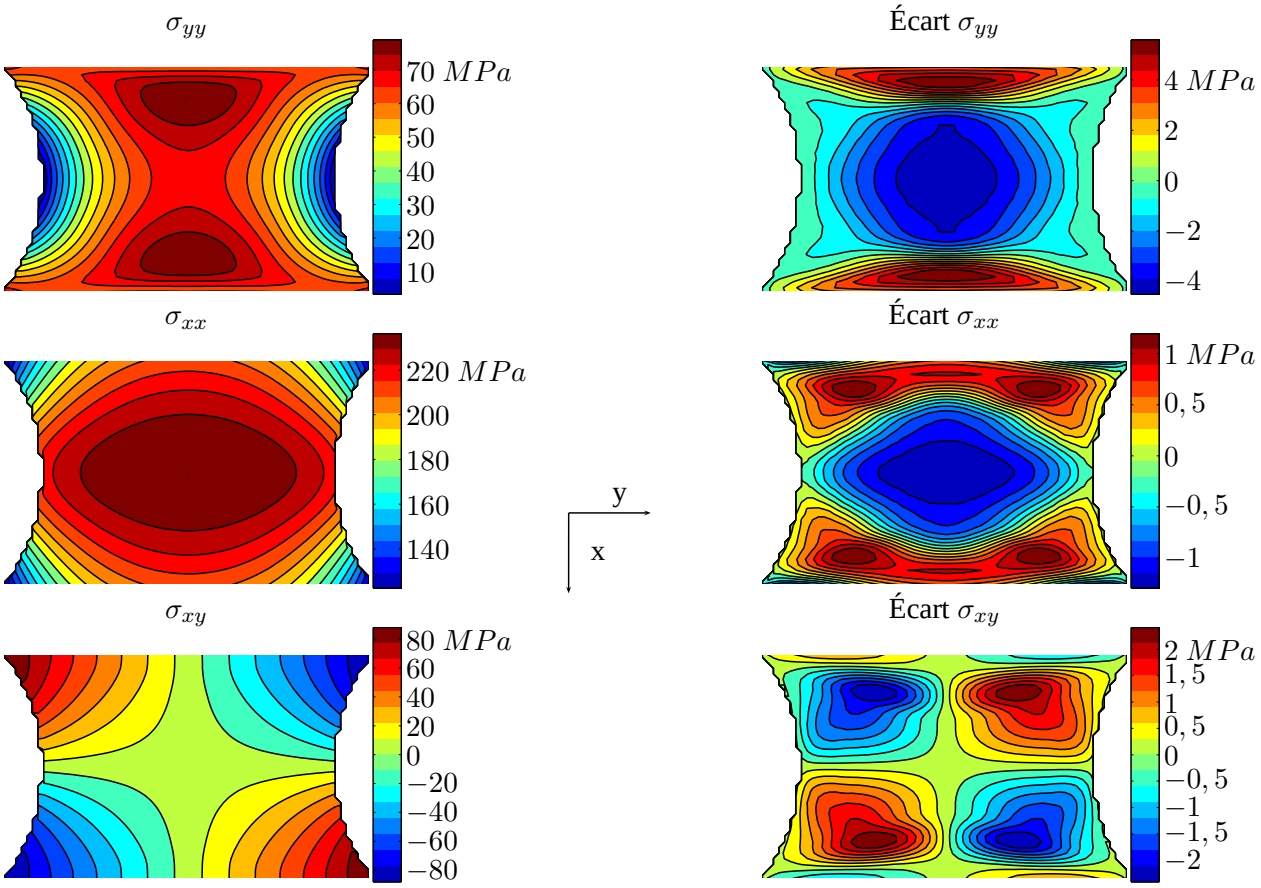


FIG. 6.5: Contraintes calculées avec l'algorithme de calcul de contraintes 2D à partir des déformations directement issues du calcul par éléments finis aux points de Gauss (à gauche) et écarts avec les contraintes directement issues du calcul élément fini aux points de Gauss (à droite).

6.3.1 Identification des paramètres élastiques

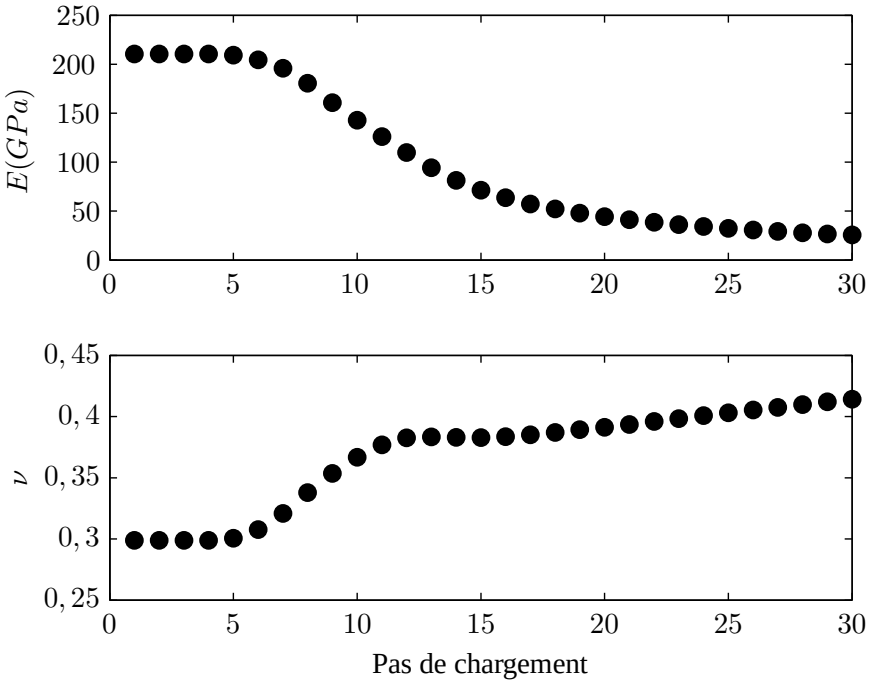


FIG. 6.6: Paramètres élastiques apparents au cours du chargement identifiés avec la MCV linéaire.

Le comportement du matériau simulé avant l'apparition de la plasticité est linéaire élastique isotrope. Comme le montre la figure 6.6, seuls les quatre premiers états de chargement peuvent être utilisés pour calculer les paramètres élastiques. Les deux paramètres élastiques indépendants E et ν ont été identifiés à partir des trois composantes du tenseur des déformations dans le plan, $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}$, et de la résultante longitudinale des efforts de traction. La méthode utilisée est la méthode des champs virtuels linéaire telle qu'elle a été présentée au chapitre 3. Deux équations indépendantes ont été construites à partir du principe des travaux virtuels. Les deux champs virtuels utilisés sont les champs $(\overrightarrow{v}^{\star 1}, \boldsymbol{\epsilon}^{\star 1})$ et $(\overrightarrow{v}^{\star 2}, \boldsymbol{\epsilon}^{\star 2})$ introduits dans la section 3.2. Le système linéaire ainsi construit a été inversé pour obtenir les deux rigidités dans le plan (voir équations 3.7). Les paramètres élastiques ont été calculés à partir des relations 3.8.

Les paramètres élastiques ont d'abord été identifiés à partir des champs de déformation directement issus du calcul élément finis. Les valeurs obtenues avec chacune des cartes sont très proches des valeurs introduites dans le calcul éléments finis (voir tableau 6.1).

Ensuite, dans le but d'étudier l'influence du degré du polynôme et du bruit de mesure, l'identification a été conduite à partir des champs de déplacement filtrés par des polynômes dont les degrés varient de 8 à 15 auxquels a été ajouté un bruit blanc dont l'écart type varie. L'augmentation des coefficients de variation avec le bruit (voir tableau 6.2) montre une sensibilité des valeurs identifiées à l'intensité du bruit. L'influence du choix du degré du polynôme augmente également avec l'intensité du bruit, comme

	Pas 1	Pas 2	Pas 3	Pas 4	$Moyenne$	Réf.	Écart (%)
$E\ (GPa)$	210	210	210	210	210	210	-0,22
ν	0,299	0,299	0,299	0,299	0,299	0,3	0,36

TAB. 6.1: Paramètres élastiques identifiés à partir des déformations directement issues du calcul éléments finis.

Sans ajout de bruit										
	deg. 8	deg. 9	deg. 10	deg. 11	deg. 12	deg. 13	deg. 14	deg. 15	Moy.	$C.V.\ (\%)$
$E(GPa)$	210	210	210	210	210	210	210	210	210	0.05
$C.V.\ (\%)$	3.7e-7	5e-7	4.3e-7	1.2e-6	1.3e-6	8.4e-7	8.3e-7	6.1e-6		
ν	0.299	0.3	0.3	0.301	0.301	0.301	0.301	0.3	0.3	0.13
$C.V.\ (\%)$	1.6	1.5	1.6	1.3	1.3	2.3	2.4	4.1		
Bruit blanc d'écart type $0,1\ \mu m$										
	deg. 8	deg. 9	deg. 10	deg. 11	deg. 12	deg. 13	deg. 14	deg. 15	Moy.	$C.V.\ (\%)$
$E\ (GPa)$	210	209	209	209	209	208	208	209	209	0,18
$C.V.\ (\%)$	1,3	1,5	1,5	1,8	1,8	1,7	1,7	1,7		
ν	0,301	0,307	0,307	0,312	0,311	0,312	0,312	0,314	0,31	1,4
$C.V.\ (\%)$	5	5,2	5,3	5,5	5,4	4,9	5	4,6		
Bruit blanc d'écart type $0,5\ \mu m$										
	deg. 8	deg. 9	deg. 10	deg. 11	deg. 12	deg. 13	deg. 14	deg. 15	Moy.	$C.V.\ (\%)$
$E\ (GPa)$	209	207	207	206	206	205	205	205	206	0.7
$C.V.\ (\%)$	3.3	3.4	3.5	2.2	2.2	3.6	3.5	4		
ν	0.242	0.247	0.247	0.232	0.231	0.257	0.257	0.305	0.252	9.3
$C.V.\ (\%)$	8.5	10	9.6	39	39	27	28	14		

TAB. 6.2: Influence du degré du polynôme sur les paramètres identifiés à partir des quatre premiers états.

le montre l'évolution des valeurs moyennes et des coefficients de variation. Le degré 8 se dégage comme étant le plus adapté pour identifier les paramètres élastiques sur cet essai.

6.3.2 Identification des paramètres plastiques

Lorsque l'état de contrainte local du matériau atteint la surface de charge, le matériau s'écrouit. Le critère isotrope de plasticité adopté ici est celui de Von Mises (voir équation 3.14) et la loi d'écrouissage est de type exponentielle avec asymptote oblique (voir modèle de Voce section 2.2.1.3). L'objectif de cette section est de ré-identifier les quatre paramètres du modèle de Voce introduits dans le modèle éléments finis à partir des seuls champs cinématiques, de la résultante longitudinale des forces appliquées et des paramètres élastiques identifiés précédemment. Pour ce faire, la méthode des champs virtuels non linéaire est associée à un algorithme de calcul des contraintes dans le plan (voir section 3.3.2). Le diagramme 6.7 rappelle le déroulement de la méthode d'identification dont les étapes sont les suivantes (numérotation reportée dans le diagramme) :

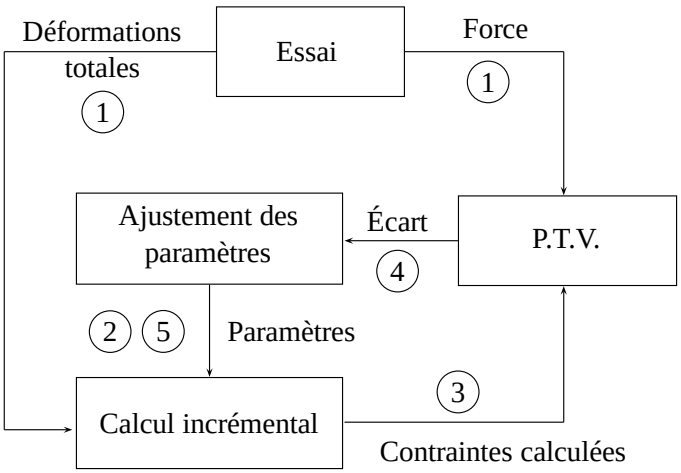


FIG. 6.7: Diagramme de déroulement de la méthode des champs virtuels dans le cas non linéaire. Les déformations peuvent être mesurées directement ou obtenues par dérivation des déplacements.

1. introduire les déformations et les efforts mesurés ;
2. supposer un jeu de paramètres *a priori* afin d'initialiser la procédure itérative ;
3. calculer les contraintes à partir des déformations totales mesurées et du modèle d'écrouissage ;
4. évaluer les équations d'équilibre écrites à partir des différents champs virtuels et calculer la fonction coût ;
5. ré-estimer les paramètres de la loi d'écrouissage afin de minimiser la fonction coût ;
6. la procédure s'arrête lorsque la fonction coût et les paramètres recherchés ne varient plus au delà d'un certain seuil.

La fonction coût $\mathcal{C}(\sigma_0, R_0, R_{\inf}, b)$ a été construite par la méthode des champs virtuels non linéaire (voir section 3.3). Les champs virtuels introduits dans le principe des travaux virtuels sont les mêmes que dans le cas uniaxial, à savoir une série de n champs virtuels $(\overrightarrow{v}^{\star i}, \boldsymbol{\epsilon}^{\star i})$ définis sur une longueur $\frac{L}{n}$, entre deux abscisses données y_i et y_{i+1}basés sur le champ virtuel $(\overrightarrow{v}^{\star 1}, \boldsymbol{\epsilon}^{\star 1})$ utilisé pour identifier les paramètres élastiques (voir section 3.2). La fonction coût global est construite à partir de la somme des écarts quadratiques au principe de travaux virtuels des n champs virtuels $(\overrightarrow{v}^{\star i}, \boldsymbol{\epsilon}^{\star i})$ et pour chaque pas de chargement. La première carte traitée est supposée entièrement élastique pour pouvoir initier le calcul de contraintes, elle devra donc se situer entre la première et la quatrième d'après la courbe présentée dans la figure 6.6.

La validation de la procédure d'identification a été conduite étape par étape. Tout d'abord, la procédure a été menée à partir des champs de déformation issus directement du calcul éléments finis pour un niveau de chargement de $7392\ N$ (30 pas de $0,005\ mm$ pour un déplacement total de $0,15\ mm$). Les valeurs identifiées sont reportées dans le tableau 6.3. Il apparaît que les paramètres σ_0 et R_{inf} sont identifiés avec moins de $1\ \%$ d'erreur. Par contre, le module d'écrouissage R_0 et le paramètre non linéaire b sont moins bien identifiés. Pour expliquer ce résultat les sensibilités de la fonction coût à chacun des paramètres ont été estimées. Pour cela, les valeurs de la fonction coût obtenues en faisant varier chacun des paramètres autour de leur valeur de référence ont été approximées par un polynôme d'ordre deux. Les coefficient correspondant au degré deux permettent d'estimer les sensibilités recherchées. Les valeurs obtenues indiquent que les sensibilités aux paramètres R_0 et b sont largement inférieures aux deux autres (voir figure 6.9). Concernant le paramètre b, cela était déjà le cas lors de l'essai uniaxial, par contre, la sensibilité au paramètre R_0 est comparativement plus faible. La raison est liée au niveau final de chargement.

En effet, le niveau final de déformation atteint doit permettre d'identifier tous les paramètres de la loi de comportement. C'est pourquoi deux niveaux de chargement maximum ont été étudiés ($7392\ N$ et $8023\ N$). Le tableau 6.3 présente les valeurs identifiées des paramètres à partir de 30 et 50 cartes.

	Référence	MCV 30 pas (7392 N)		MCV 50 pas (8023 N)	
		Identifié	Différence %	Identifié	Différence %
$\sigma_0\ (MPa)$	127	127	$-0,2$	127	$-0,1$
$R_0\ (GPa)$	$2,46$	$2,64$	$7,1$	$2,54$	$3,3$
$R_{inf}\ (MPa)$	$56,2$	$55,8$	$-0,7$	$55,9$	$-0,5$
b	3370	3970	18	4000	19

TAB. 6.3: Paramètres plastiques identifiés à partir des champs de déformation directement issus du calcul par éléments finis pour deux niveaux de chargement final.

Il apparaît que les paramètres σ_0, R_{inf} et b sont assez peu influencés par le niveau de chargement. Par contre, le module d'écrouissage R_0 y est beaucoup plus sensible. En effet, l'influence de R_0 sur la réponse mécanique de l'éprouvette augmente avec le niveau de chargement. La figure 6.9 présente l'évolution des sensibilités de la fonction coût aux différents paramètres de la loi d'écrouissage en fonction du pas de chargement. Elle montre clairement que la sensibilité au paramètre R_0 augmente avec le chargement, ce qui explique le résultat du tableau 6.3. Le paramètre b est moins bien identifié avec presque $20\ \%$

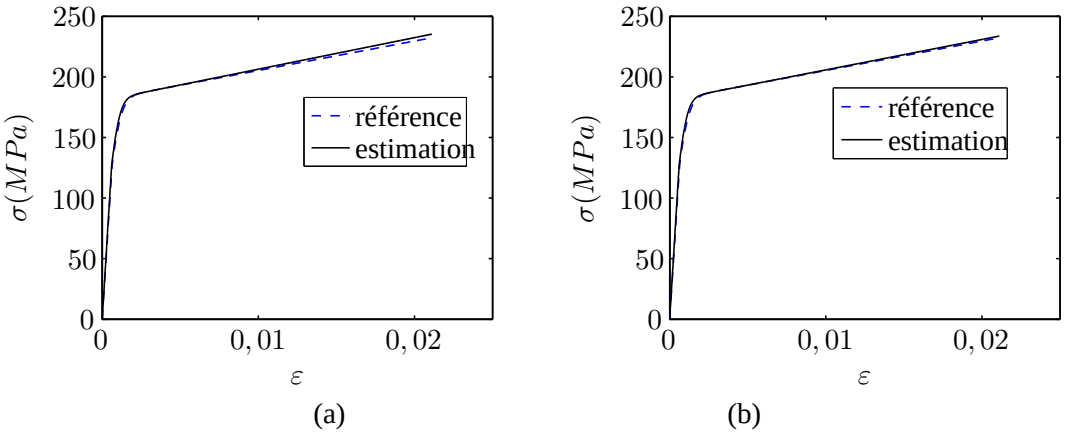


FIG. 6.8: Superposition des courbes uniaxiales de référence et des courbes tracées avec les paramètres identifiés à partir des champs de déformation directement issus du calcul par éléments finis, pour 30 pas (a) et 50 pas (b) de chargement.

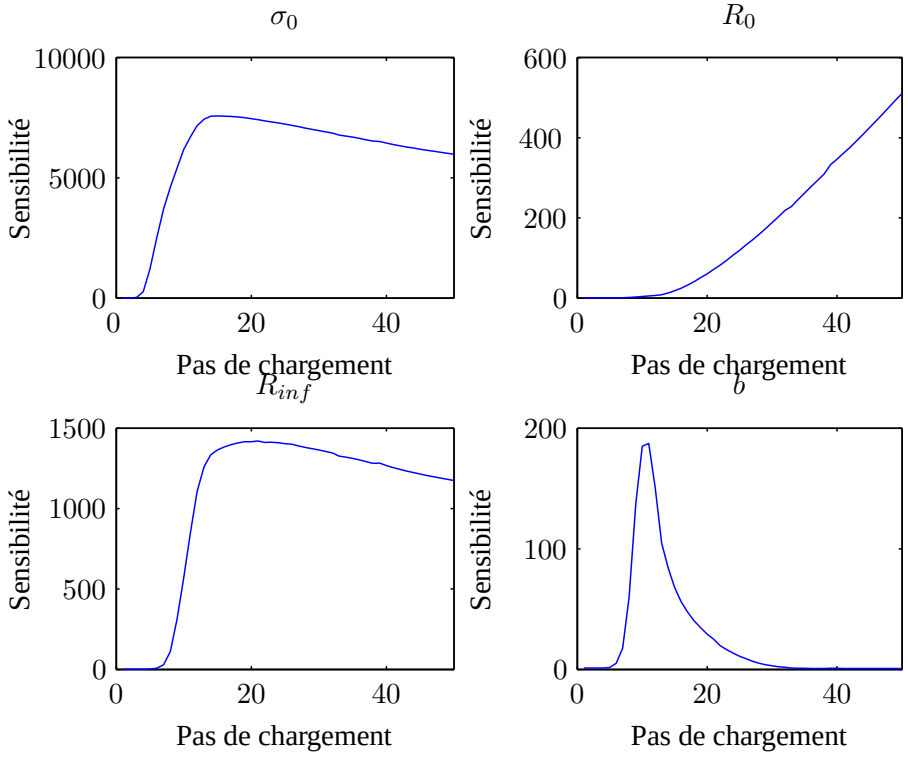


FIG. 6.9: Évolution des sensibilités de la fonction coût aux différents paramètres de la loi d'écrouissage en fonction du pas du chargement.

d'erreur. Ceci est dû à la faible sensibilité de la fonction coût à ce paramètre qui contribue peu à la réponse mécanique de l'éprouvette. La figure 6.9 montre que seuls quelques pas de chargement sont sensibles à ce paramètre, et les valeurs atteintes sont très inférieures aux sensibilités atteintes sur les autres paramètres.

Finalement, malgré les écarts observés sur les valeurs des paramètres, la courbe d'écrouissage identifiée est proche de la courbe de référence (voir figure 6.8). Compte tenu de ces observations, les identifications suivantes ont été entreprises sur un niveau de chargement correspondant à $8023\ N$ (50 cartes).

Pour étudier l'influence du point de départ, plusieurs jeux de paramètres initiaux ont été testés (voir tableau 6.4(a)). Seuls les jeux n^o1,5 et 6 convergent vers le minimum global, les jeux n^o2,3 et 4 conduisent à un minimum local dont la valeur est légèrement supérieure à celle du minimum global. Il semble que la procédure ait du mal à s'éloigner du module d'écrouissage très faible imposé dans ces trois jeux de valeurs de départ. Ce minimum peut facilement être écarté d'une part parce qu'il ne conduit pas à la valeur la plus faible de la fonction coût et ensuite parce qu'il conduit à une loi dont l'écrouissage est quasi nul (voir négatif). Il est également envisageable de contraindre la procédure de minimisation à évoluer dans une plage de valeurs prédéterminées.

	n^o1	n^o2	n^o3	n^o4	n^o5	n^o6
$\sigma_0\ (MPa)$	100	200	200	100	100	100
$R_0\ (GPa)$	1	$0,1$	$0,1$	$0,1$	1	10
$R_{\text{inf}}\ (MPa)$	40	50	10	10	10	100
$b\ (\times 10^3)$	1	1	1	1	$0,1$	1

(a)

	n^o1	n^o2	n^o3	n^o4	n^o5	n^o6
$\sigma_0(MPa)$	127	171	171	171	127	127
$R_0(GPa)$	$2,54$	$0,13$	$-0,03$	$0,25$	$2,54$	$2,54$
$R_{\text{inf}}(MPa)$	$55,9$	$61,5$	$66,5$	$57,9$	$55,9$	$55,9$
b	4001	99	91	104	4001	4001
$\mathcal{C}\ (\times 10^{-6})$	7	$9,8$	$9,9$	$9,8$	7	7
nb itérations	380	267	287	292	508	339

(b)

TAB. 6.4: Étude de convergence de la fonction coût $\mathcal{C}(\sigma_0, R_0, R_{\text{inf}}, b)$. Points de départ (a) et minimums atteints (b) avec des champs de déformation directement issus du calcul EF.

La prochaine étape de validation consiste à introduire l'approximation polynomiale, puis à étudier l'influence sur l'identification du choix du degré du polynôme avec et sans bruit ajouté. Les champs de déplacement issus du calcul élément finis projetés sur un maillage régulier de pas $0,2\ mm$ ont été lissés par un polynôme dont le degré variait de 8 à 15. Les mêmes jeux de paramètres initiaux ont été testés (voir tableau 6.4(a)).

Comme précédemment, et quel que soit l'intensité du bruit ajouté ou le degré du polynôme, les jeux n^o1,5 et 6 convergent vers un minimum global tandis que les trois autres jeux conduisent à un minimum local. Les valeurs correspondantes au minimum global sont reportées dans le tableau 6.5.

En présence d'un bruit modéré ($0,1\ \mu m$), l'influence du degré du polynôme est assez faible, même si l'ensemble des valeurs identifiées a tendance à se rapprocher des valeurs de référence lorsque que l'on augmente le degré du polynôme. À part pour le paramètre b, les valeurs identifiées sont assez proches des valeurs de référence quelque soit le degré. La figure 6.10(a) montre que la réponse uniaxiale tracée à partir des paramètres identifiés avec un polynôme de degré 9 en présence d'un bruit blanc d'écart type $0,1\ \mu m$ est proche de la courbe de référence.

Un bruit blanc d'écart type $0,5\ \mu m$ perturbe davantage l'identification. Cette valeur est élevée car le nombre de pseudo points de mesure est quatre fois moins important qu'expérimentalement. L'influence du bruit de mesure augmente avec le degré du polynôme et le degré 9 entraîne le moins d'écarts avec les valeurs de référence. La figure 6.10(b) compare les réponses uniaxiales obtenues avec les paramètres identifiés et les paramètres de référence.

	Sans bruit ajouté						
	Réf.	Degré 8		Degré 9		Degré 10	
		Ident.	Écart %	Ident.	Écart %	Ident.	Écart %
$\sigma_0\ (MPa)$	127	120	$-5,8$	124	$-2,4$	124	$-2,4$
$R_0\ (GPa)$	2,46	2,32	$-5,5$	2,53	2,8	2,53	2,8
$R_{inf}\ (MPa)$	56,2	65,8	17	59,1	5,1	59,1	5,1
$b\ (\times 10^3)$	3,37	5,36	59	4,62	37	4,62	37

	Bruit blanc d'écart quadratique $0,1\ \mu m$							
Degré	8	9	10	11	12	13	14	15
$\sigma_0\ (MPa)$	120	122	123	126	126	125	125	127
$R_0\ (GPa)$	2,31	2,52	2,51	2,53	2,52	2,51	2,5	2,5
$R_{inf}\ (MPa)$	65,4	61	60,7	57,1	57,5	58	58,4	57,3
$b\ (\times 10^3)$	5,38	5,11	5,12	4,51	4,62	4,74	4,88	4,65

	Bruit blanc d'écart quadratique $0,5\ \mu m$						
Degré	8	9	10	11	12	13	14
$\sigma_0\ (MPa)$	131	132	141	143	141	126	106
$R_0\ (GPa)$	2,03	2,21	2,06	1,91	1,78	1,6	1,41
$R_{inf}\ (MPa)$	59,1	55,8	49,4	49,3	54,1	71,1	95,5
$b\ (\times 10^3)$	4,83	5,49	5,49	5,42	5,78	7,91	10

TAB. 6.5: Évolution des paramètres identifiés en fonction du degré du polynôme utilisé pour lisser les champs de déplacement simulés avec et sans bruit ajouté.

Cette étude numérique montre que cette fois-ci la distribution spatiale des déplacements est plus complexe que dans le cas uniaxial et qu'elle nécessite un polynôme d'un ordre plus élevé pour être représentée correctement. Cependant, l'influence du bruit de mesure augmente avec le degré du polynôme et un compromis semble se dégager pour identifier les paramètres plastiques avec un polynôme de degré 9.

La simulation numérique de l'essai a permis de tester l'ensemble du processus d'identification. La section suivante présente les résultats expérimentaux obtenus sur le matériau de référence (voir section 2.3.2) avec la géométrie d'éprouvette qui vient d'être testée numériquement.

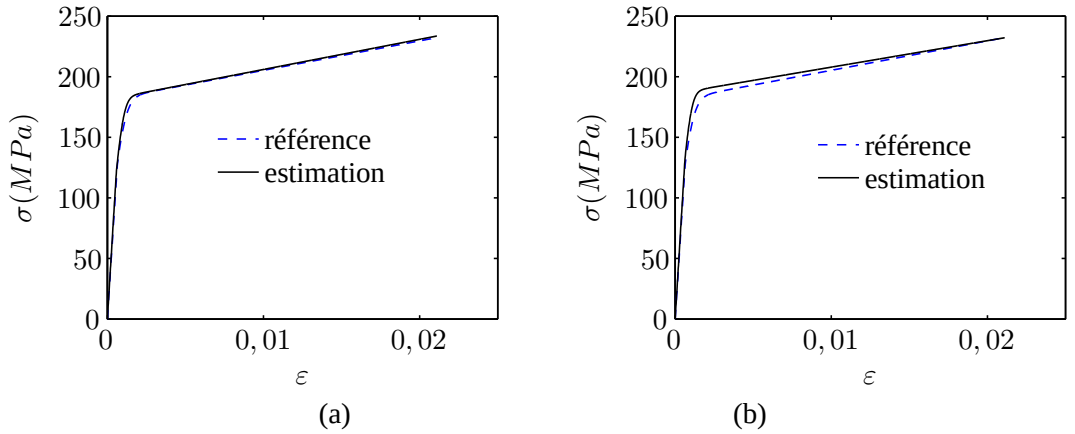


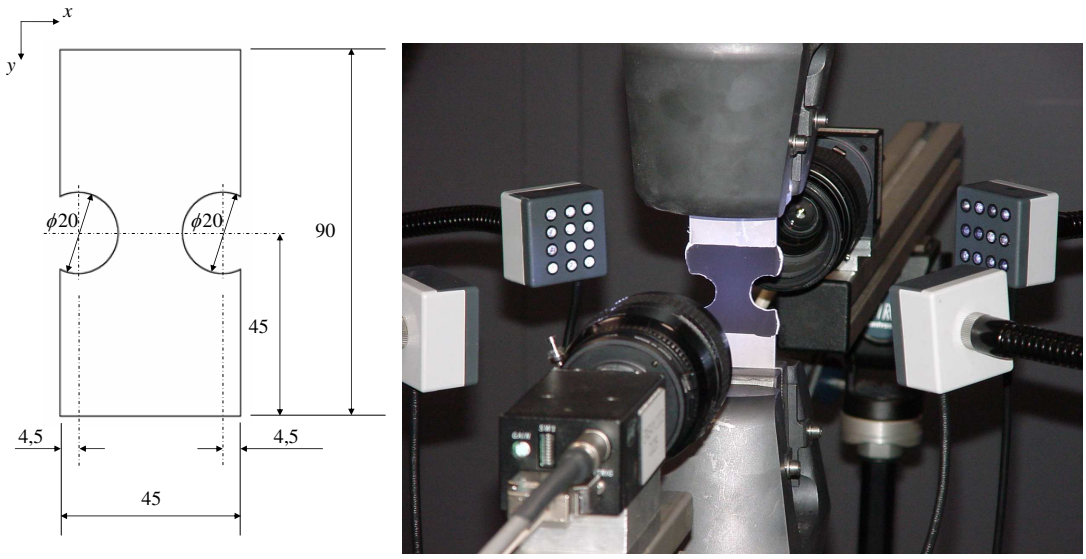
FIG. 6.10: Comparaison des courbes uniaxiales de référence et des courbes tracées à partir des paramètres identifiés avec un polynôme de degré 9 en présence d'un bruit blanc d'écart type $0,1\ \mu m$ (a) et $0,5\ \mu m$ (b).

6.4 Validation expérimentale

Les éprouvettes de traction ont été réalisées dans le même matériau que précédemment afin de pouvoir comparer les résultats obtenus avec ceux issus de l'essai présenté au chapitre précédent. La longueur des éprouvettes est choisie dans le sens 2. Le procédé d'usinage est également le même puisqu'il s'agit du détourage d'un paquet de bandes rectangulaires bridées entre deux morceaux d'aluminium de $15\ mm$ d'épaisseur. Les conditions de coupe sont supposées suffisamment modérées pour ne pas modifier le comportement initial de la tôle.

Le dispositif expérimental et le déroulement de l'essai sont identiques à ceux de l'essai uniaxial hétérogène du chapitre précédent, à savoir une machine de traction électromécanique pilotée en déplacement, un capteur d'effort de $100\ kN$ et un dispositif à deux caméras permettant de mesurer les déformations de membrane entre les entailles. La figure 6.11 présente les dimensions des éprouvettes de traction et une photographie du dispositif expérimental. On peut observer que la grille couvre largement la zone mesurée et que la grille a été transférée au delà des contours de l'éprouvette. L'excédent de colle a été découpé afin de ne laisser dépasser qu'une largeur d'environ $1\ mm$. Compte tenu de la faible rigidité de la colle (2 à 3 GPa) et de celle de l'acier, son influence sur la réponse mécanique de l'éprouvette est négligée.

Six éprouvettes bi-entaillées ont été testées jusqu'à environ $8000\ N$. À peu près cinquante états de chargement ont été enregistrés à chaque fois, incluant les champs de déplacement mesurés entre les entailles sur les deux faces et la résultante des efforts longitudinaux. Les champs de déplacement de membrane ont été calculés en effectuant la moyenne des champs mesurés sur les deux faces puis ont fait l'objet d'une approximation polynomiale. Les champs de déformation ont ensuite été calculés par simple dérivation numérique. Les champs de déformation obtenus après dérivation d'un polynôme de degré 10 sur chacun des six essais sont représentés dans les figures 6.12, 6.13, 6.14, 6.15, 6.16 et 6.17. Ils montrent clairement la présence d'un effet de flexion plane qui domine le début de l'essai, puis tend à s'estomper



(a) (b)

FIG. 6.11: (a) Géométrie (en mm) de l'éprouvette de traction plane bi-entaillée. (b) Dispositif expérimental : éprouvette en traction (distance entre les mors $90\ mm$) munie de grilles de pas $100\ \mu m$ sur les deux faces, caméras alignées et éclairage.

devant la traction à mesure que les déformations plastiques progressent. La plasticité apparaît toujours du même côté avec une très grande similitude entre les essais. Ceci est lié à la procédure (arbitraire) de positionnement des éprouvettes dans le montage qui consiste à les caler sur le bord gauche du mors du bas. Au repos, le mors du haut n'est pas aligné avec l'autre mors. Il tend à s'aligner durant le processus de traction ce qui entraîne un effet de flexion plane.

On peut noter que les champs de déformation au début du chargement sont davantage perturbés par le bruit de mesure notamment la composante transverse qui est proche de la résolution estimée de la technique de mesure. Certaines cartes (essais n°2, 4 et 6) indiquent des localisations du champ de déformation au niveau des bords qui sont certainement des artefacts liés à l'utilisation de polynômes avec des données manquantes. Il est également possible que le masque appliqué lors du traitement d'image ne coïncide pas tout à fait avec les contours de l'éprouvette.

6.4.1 Identification des paramètres élastiques

La figure 6.18 montre l'évolution des paramètres élastiques apparents identifiés avec la MCV linéaire sans prendre en compte la plasticité. Contrairement aux simulations (voir figure 6.6), les paramètres élastiques ne présentent pas vraiment de plateau en début d'essai et se montrent assez perturbés. Ceci est dû au fait que la plasticité localise très tôt, notamment à cause de l'effet de flexion plane. Cependant, comme l'étendue de la plasticité est très limitée au début du chargement, son influence sur la réponse globale de l'éprouvette peut être négligée en première approximation. Il est donc supposé que les trois premiers pas de chargement de chacun des six essais permettent d'identifier les paramètres élastiques.

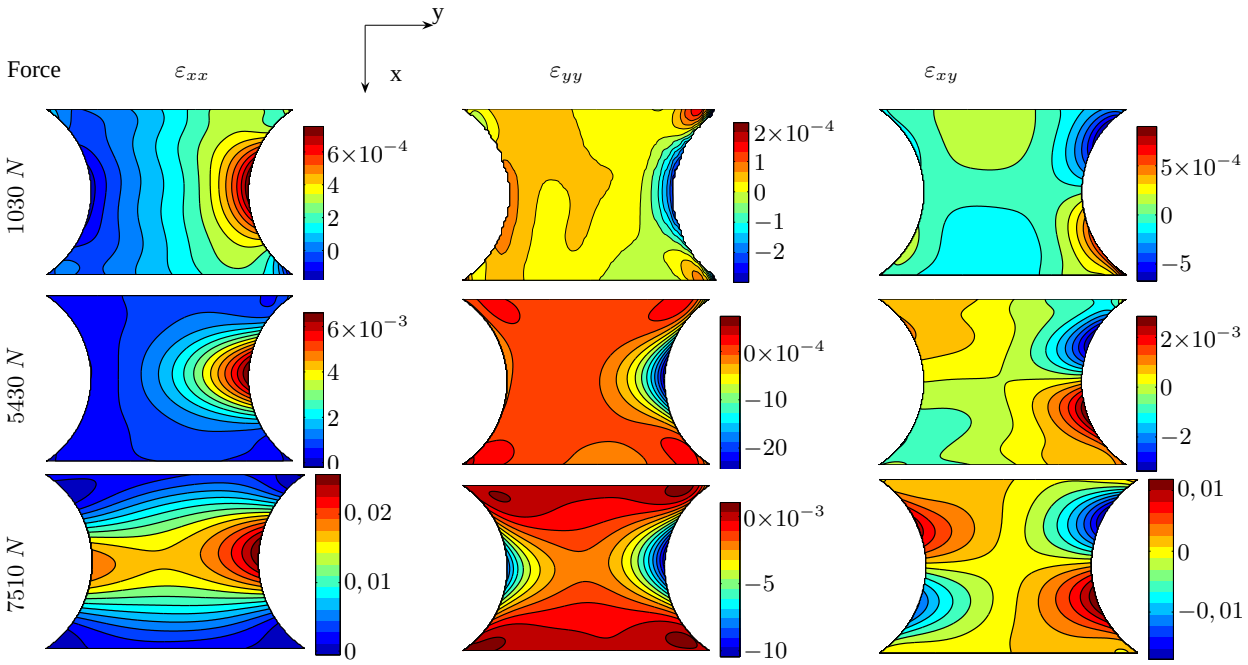


FIG. 6.12: Essai n˚1 : champs de déformation obtenus après dérivation d'un polynôme de degré 10 pour trois pas de chargement.

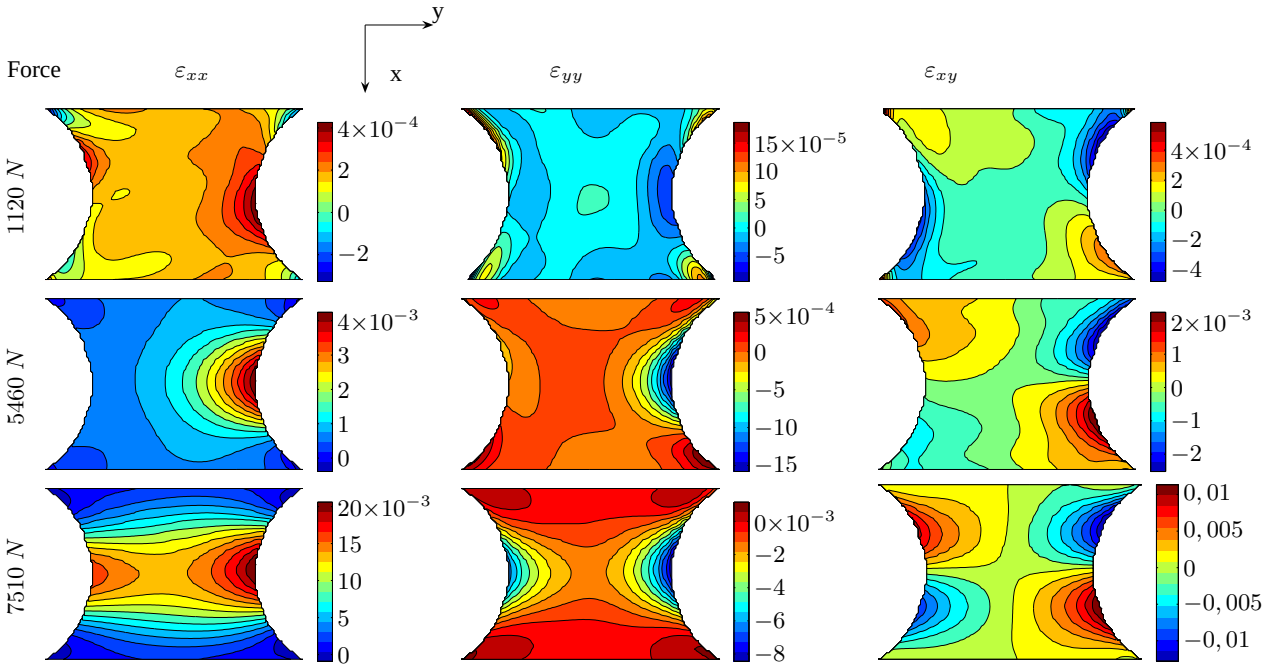


FIG. 6.13: Essai n˚2 : champs de déformation obtenus après dérivation d'un polynôme de degré 10 pour trois pas de chargement.

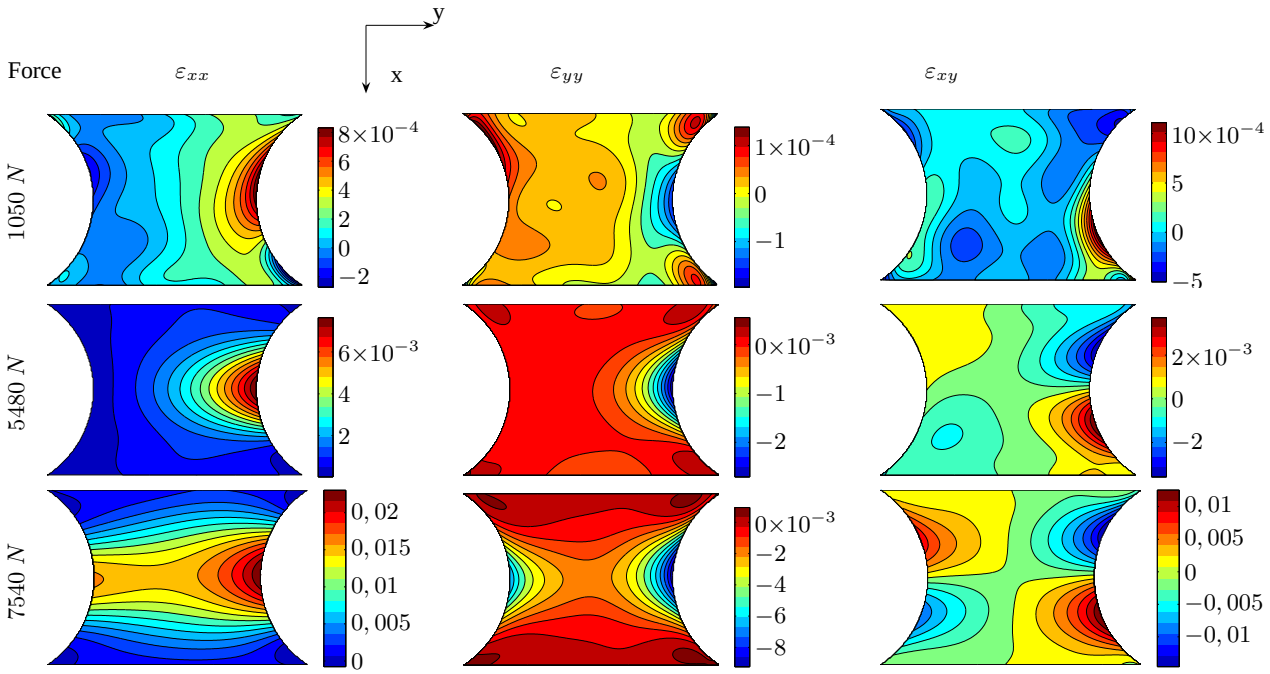


FIG. 6.14: Essai n˚3 : champs de déformation obtenus après dérivation d'un polynôme de degré 10 pour trois pas de chargement.

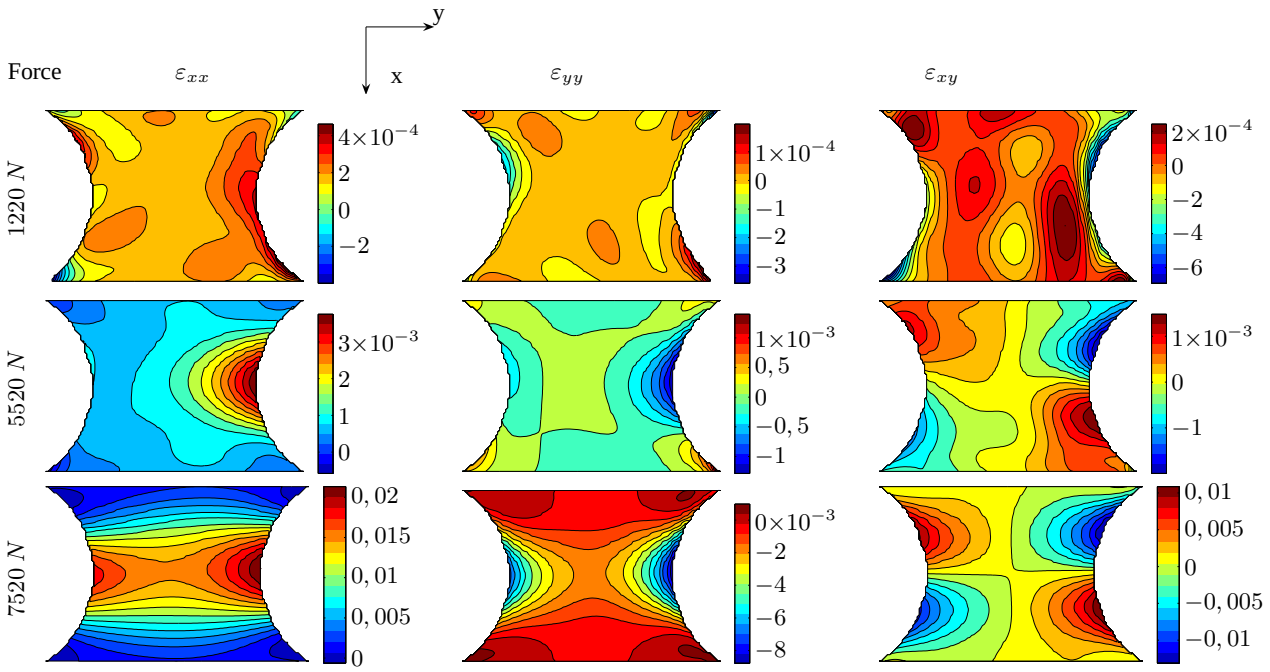


FIG. 6.15: Essai n˚4 : champs de déformation obtenus après dérivation d'un polynôme de degré 10 pour trois pas de chargement.

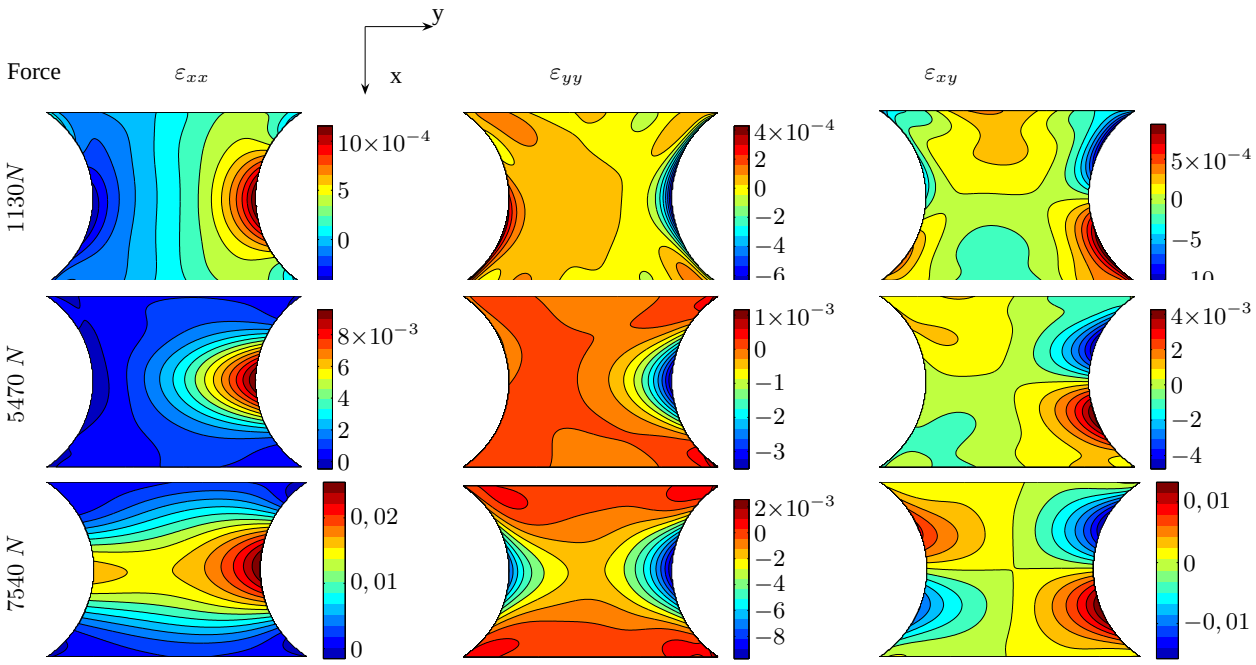


FIG. 6.16: Essai n°5 : champs de déformation obtenus après dérivation d'un polynôme de degré 10 pour trois pas de chargement.

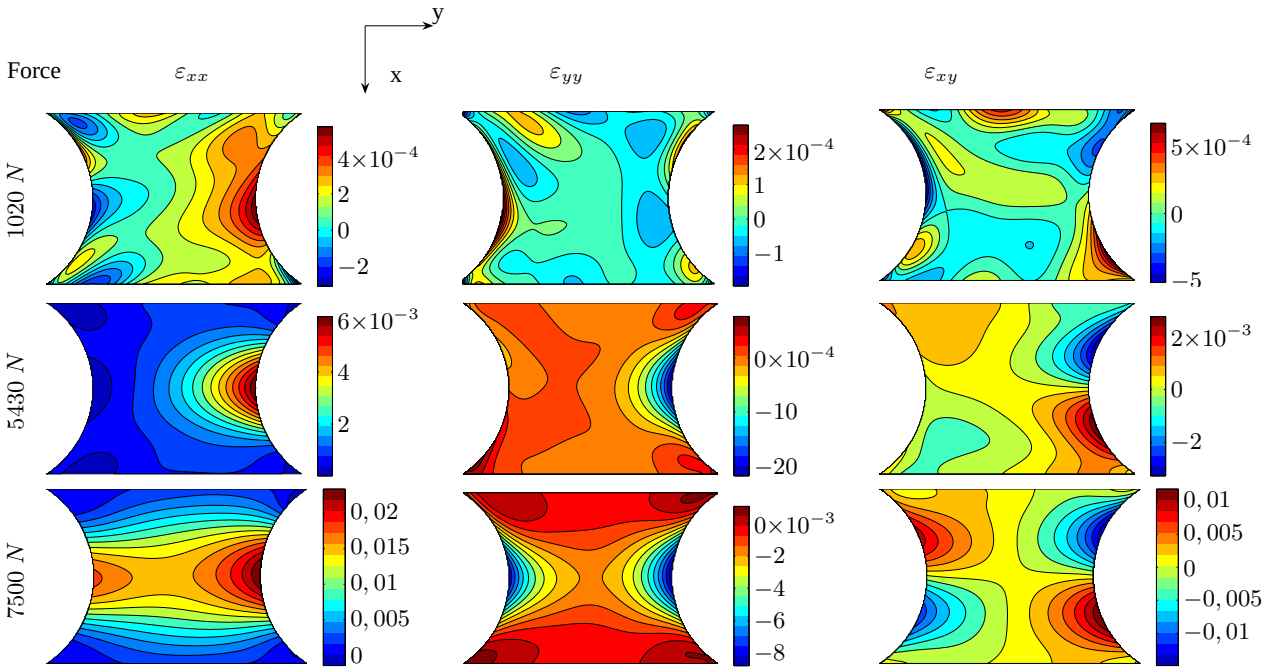


FIG. 6.17: Essai n°6 : champs de déformation obtenus après dérivation d'un polynôme de degré 10 pour trois pas de chargement.

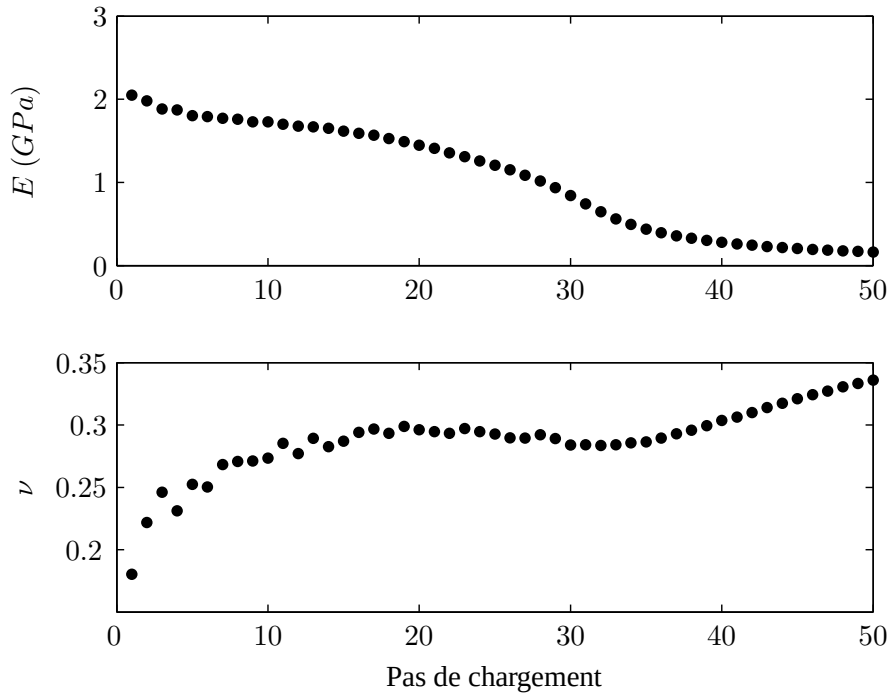


FIG. 6.18: Évolution des paramètres élastiques apparents identifiés au cours du chargement sans prise en compte de la plasticité (essai n^o1, degré 8).

Les valeurs moyennes et coefficients de variation sont calculés à partir de la distribution des 18 ($3\ pas \times 6$ essais) valeurs identifiées (voir tableau 6.6). Il aurait été avantageux de disposer d'un plus grand nombre de cartes au début du chargement. Plusieurs facteurs se sont combinés et ont conduits au faible nombre de cartes avant l'apparition de la plasticité. D'une part, l'essai était piloté en déplacement pour des raisons de simplicité ce qui impliquait une augmentation rapide de la force au début du chargement. D'autre part la vitesse d'acquisition était constante et calculée pour obtenir un nombre raisonnable de cartes à traiter, ce qui a résulté en un faible nombre de mesures dans le domaine élastique. Une solution pour palier ce problème aurait simplement consisté à augmenter la fréquence d'acquisition de manière à être certain de décrire la zone élastique, puis lors d'une phase de post-traitement des données à trier les cartes pertinentes de manière à conserver un nombre raisonnable de cartes à traiter.

Les simulations numériques ont permis de dégager un degré optimal du polynôme utilisé pour lisser les déplacements à savoir le degré 8. Comme les champs expérimentaux sont sensiblement différents des champs simulés, notamment à cause de l'effet de flexion qui n'avait pas été prévu lors des simulations, l'influence sur l'identification du choix du degré du polynôme est réexaminée. Le tableau 6.6 présente l'évolution des paramètres élastiques identifiés à partir de plusieurs degrés de polynôme. Les résultats montrent des valeurs moyennes sensiblement identiques pour les degrés allant de 8 à 11 et des valeurs absurdes pour le degré 12. Les coefficients de variation indiquent quand à eux des valeurs stables pour les degrés allant de 8 à 10, puis augmentent dès le degré 11 et atteignent plusieurs centaines de pourcents pour le degré 12. Les degrés 11 et 12 qui ne sont pas assez stables compte tenu du mauvais rapport signal sur bruit en début d'essai sont donc à écarter. Les valeurs obtenues avec les degrés 8 à 10 coïncident avec la plage de variation des valeurs identifiées lors des essais normalisés. Ces valeurs sont donc introduites

	Degré 8		Degré 9		Degré 10		Degré 11		Degré 12	
	Moy.	$C.V.(\%)$	Moy.	$C.V.(\%)$	Moy.	$C.V.(\%)$	Moy.	$C.V.(\%)$	Moy.	$C.V.(\%)$
$E\ (GPa)$	193	4,9	193	5,4	193	5,5	194	10	857	300
ν	0,22	26	0,24	26	0,24	26	0,24	43	-1,6	500

TAB. 6.6: Évolution des paramètres élastiques identifiés en fonction du degré du polynôme (moyennes et coefficients de variation à partir des trois premières cartes des six essais).

dans le processus d'identification des paramètres plastiques.

6.4.2 Identification des paramètres plastiques

Le calcul de contraintes est réalisé avec l'ensemble des cartes mesurées. La première carte est supposée entièrement élastique pour pouvoir amorcer le calcul de contraintes. Chacun des six essais est mené jusqu'à environ $8000\ N$, le nombre de cartes varie sensiblement d'un essai à l'autre même si la vitesse de déplacement de la traverse est identique. Ceci est en partie dû aux glissements dans les mors qui varient en fonction du niveau de serrage appliqué.

Les champs de déformation expérimentaux étant différents des champs simulés, l'influence du degré du polynôme est réexaminée. Les identifications ont été conduites sur les six essais en balayant les de-

grés 8 à 12. Le tableau 6.7 présente les résultats obtenus. Les degrés 8 à 11 conduisent à des valeurs admissibles tandis que le degré 12 conduit à un jeu de valeurs absurdes. Pourtant, l'étude numérique n'avait pas révélé d'instabilité avant le degré 15. Il semble donc que les champs de déformation et le bruit de mesure soient sensiblement différents du cas numérique. En effet, expérimentalement, d'autres phénomènes perturbent l'utilisation des polynômes comme les données manquantes près des bords, la présence de défauts de grilles, les divers harmoniques du signal, etc.

Les valeurs moyennes identifiées des 4 paramètres avec les degrés allant de 8 à 10 sont assez proches entre elles ce qui indique une bonne stabilité des polynômes. Cependant, à part le module d'écrouissage R_0, les valeurs identifiées sont assez éloignées des valeurs de référence. La limite d'élasticité σ_0 est très inférieure au seuil identifié lors des essais uniaxiaux, cette valeur est d'autant plus gênante qu'elle implique qu'une partie des points dans la première carte supposée élastique soit déjà plastifiée. Au contraire, le paramètre R_{inf} est largement surestimé ce qui entraîne que globalement la somme $\sigma_0 + R_{inf}$ s'écarte seulement d'environ $10\ MPa$ de la valeur identifiée lors des essais uniaxiaux homogènes. En effet, comme le montre la figure 6.19, la position de l'asymptote est pilotée par la somme $\sigma_0 + R_{inf}$. Or, le tracé de la fonction coût (figure 6.24) montre clairement la présence de vallées entre ces deux paramètres. Par conséquent la procédure de minimisation ne parvient pas à séparer correctement ces deux paramètres. Quand au paramètre b, il est largement surestimé ce qui entraîne la quasi disparition de la transition progressive entre les deux parties linéaires de la courbe. En outre, l'erreur commise sur la limite d'élasticité est liée aux erreurs commises sur le paramètre b. En effet, comme le montre la figure 6.19, la tangente qui assure la continuité entre la partie élastique et la partie plastique vaut $R_0 + bR_{inf}$ en $p = 0$. Comme le module d'écrouissage R_0 est très inférieur au module de Young E, c'est le produit bR_{inf} qui doit s'approcher de E pour assurer la continuité. L'erreur commise sur le paramètre b influence donc la valeur identifiée de σ_0.

Les dispersions obtenues sur les paramètres σ_0, R_0 et R_{inf} sont comparables aux dispersions obtenues lors des essais avec jauges, ce qui indique une répétabilité similaire des essais réalisés. Quand aux dispersions importantes obtenues sur le paramètre b, elles sont très certainement liées à la mauvaise identifiabilité de ce paramètre qui a été montrée lors des études numériques.

Finalement, les courbes uniaxiales tracées à partir des paramètres identifiés ont été comparées aux réponses des jauges obtenues lors des essais normalisés (voir figures 6.20 et 6.21). Ces figures montrent que, malgré les écarts importants observés sur la valeur des paramètres, les deux faisceaux de courbes sont assez semblables mais décalés d'une dizaine de méga pascals correspondant à l'écart entre la somme $\sigma_0 + R_{inf}$ identifiée et celle de référence.

6.5 Discussion des résultats

Afin d'expliquer le décalage obtenu entre les faisceaux de courbes (figure 6.20), plusieurs aspects du processus de mesure et d'identification ont été analysés. Le premier aspect concerne la validité de l'utilisation de polynômes pour lisser les champs de déplacements. Le second concerne la construction de la fonction coût à travers le choix des champs virtuels. Et le dernier concerne la pertinence de la loi

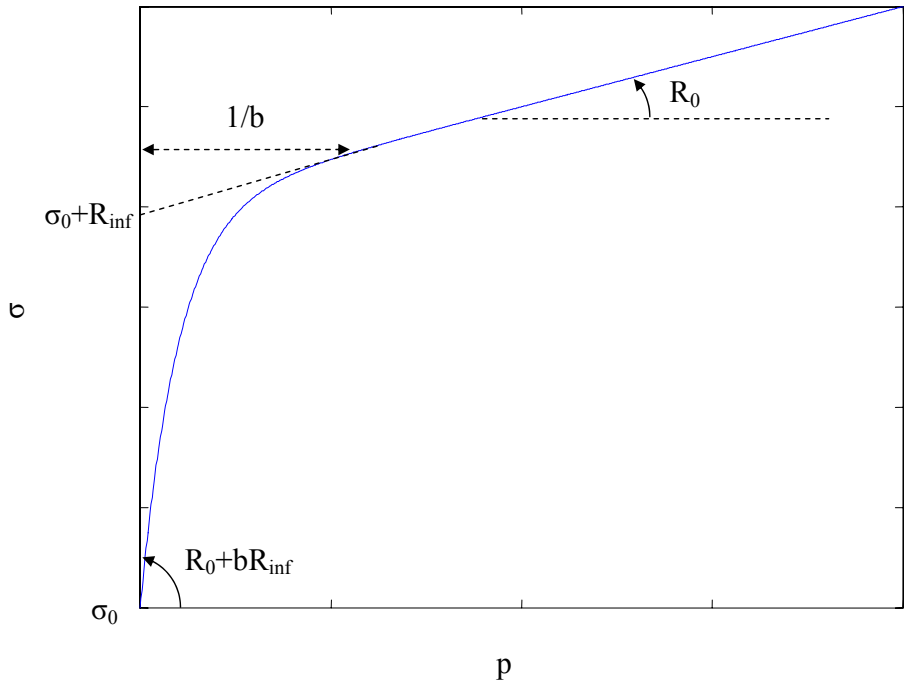


FIG. 6.19: Loi d'écrouissage de Voce : $\sigma = \sigma_0 + R_0 \times p + R_{inf} \times (1 - e^{-b \times p})$.

	Référence	Deg. 8	Deg. 9	Deg. 10	Deg. 11	Deg. 12
	$Moy. \pm 2\sigma$	$Moy. \pm 2\sigma$	$Moy. \pm 2\sigma$	$Moy. \pm 2\sigma$	$Moy. \pm 2\sigma$	$Moy. \pm 2\sigma$
$\sigma_0\ (MPa)$	127 ± 15	$25,6 \pm 32,4$	$28 \pm 35,6$	$27,9 \pm 34,1$	$34,8 \pm 58$	225 ± 387
$R_0\ (GPa)$	$2,46 \pm 0,49$	$2,28 \pm 0,61$	$2,76 \pm 0,51$	$2,85 \pm 0,44$	$3,21 \pm 0,55$	$3,11 \pm 21,7$
$R_inf\ (MPa)$	$56,2 \pm 13,8$	148 ± 37	141 ± 36	140 ± 35	133 ± 55	-102 ± 794
$b\ (\times 10^3)$	$3,37 \pm 0,72$	$8,06 \pm 6,46$	$8,18 \pm 7,55$	$8,92 \pm 8,98$	$33,6 \pm 90$	$7,25 \pm 8,12$

TAB. 6.7: Moyennes et plages de variation des paramètres plastiques identifiés à partir des 6 essais en fonction du degré du polynôme utilisé pour lisser les déplacements.

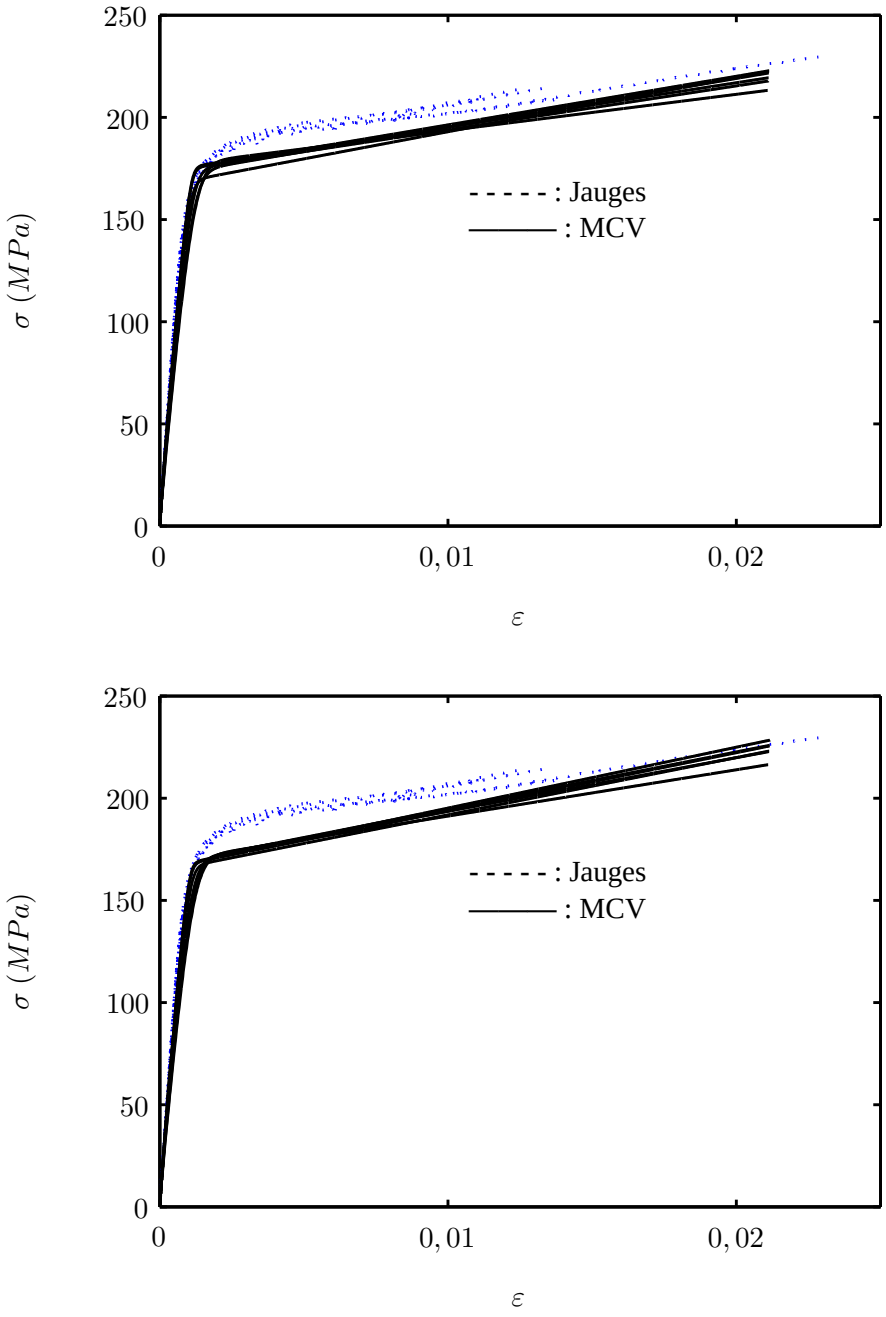


FIG. 6.20: Superposition du faisceau de courbes uniaxiales issues des essais homogènes avec jauges et des courbes calculées à partir des paramètres identifiés sur chacun des six essais sur éprouvette bi-entaillée (de haut en bas, degré 8 et degré 9).

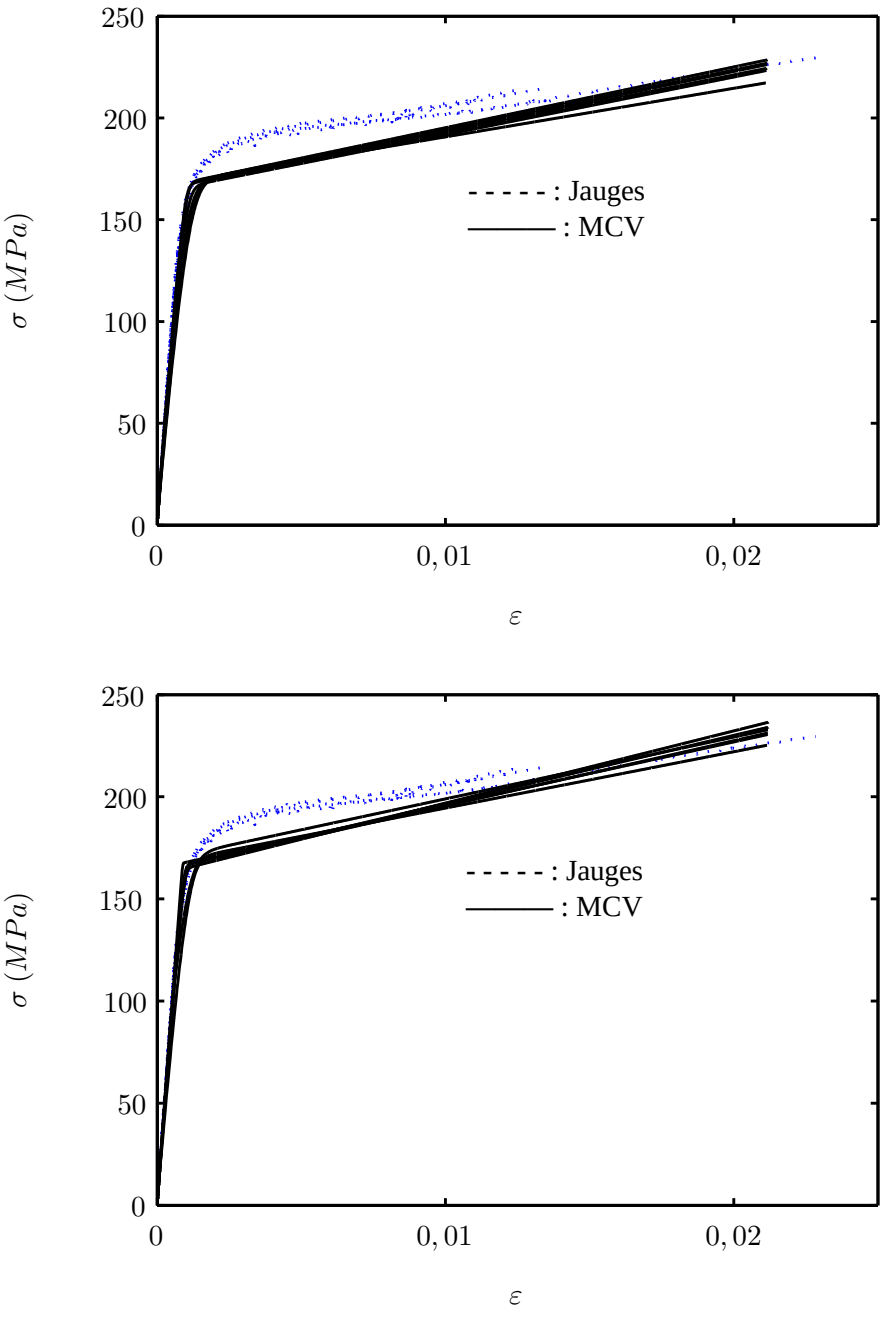


FIG. 6.21: Superposition du faisceau de courbes uniaxiales issues de essais homogènes avec jauges et des courbes calculées à partir des paramètres identifiés sur chacun des six essais sur éprouvette bi-entaillée (de haut en bas, degré 10 et degré 11).

d'écrouissage utilisée pour modéliser le comportement du matériau.

6.5.1 Influence du lissage

L'étude numérique a validé l'utilisation des polynômes pour traiter ce type d'essai. Cependant, compte tenu des importantes entre les champs de déplacements expérimentaux et les champs issus des simulations numériques, la question de la pertinence de l'utilisation de polynômes pour lisser les champs de déplacements peut se poser. Afin d'évaluer l'incidence de ce choix, une autre technique de lissage a été utilisée. Il s'agit d'une technique de lissage basée sur le maillage de la surface analysée avec des éléments triangle de type élément fini ayant une fonction de forme linéaire. La taille des éléments est réglable, ce qui permet de conserver une bonne résolution spatiale si nécessaire tout en lissant ou reconstruisant les données. De plus, les noeuds du maillage coïncident avec les bords de l'éprouvette, ce qui permet de conserver l'information jusqu'aux bords. Les champs de déplacement bruts issus des six essais ont été lissés à l'aide d'éléments triangle d'environ 15 pixels de côté, puis dérivés après avoir assuré la continuité des éléments à l'aide d'une interpolation cubique. Les champs de déformation obtenus (voir figure 6.22) ont été introduits dans la procédure d'identification et les résultats sont reportés dans le tableau 6.8. Les

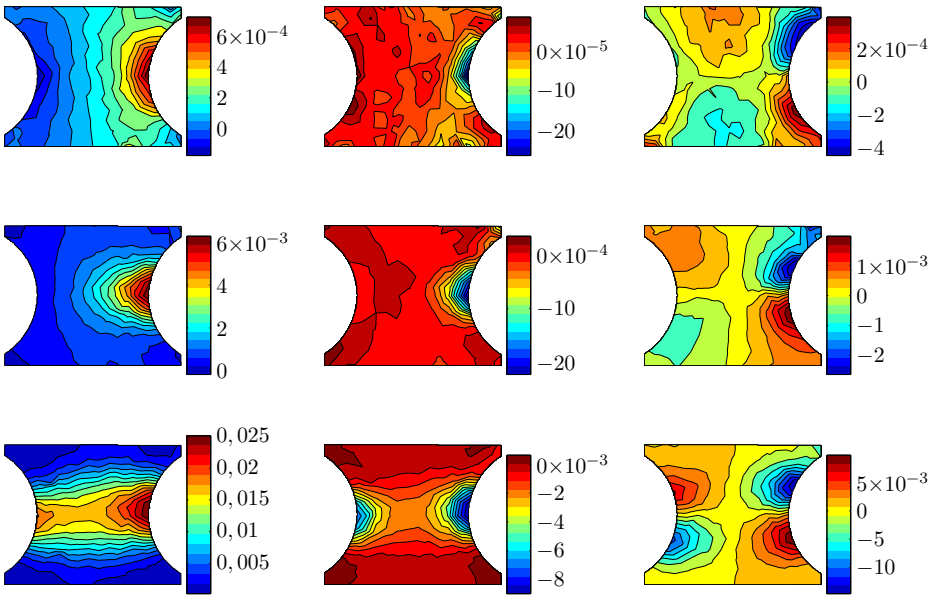


FIG. 6.22: Champs de déformation obtenus après lissage type élément fini de taille 15 pixels de côté au cours du chargement.

champs montrent une bonne coïnicidence avec la distribution et l'amplitude des déformations calculées par approximation polynomiale. Concernant les paramètres identifiés, les paramètresσ_0 et R_{inf} sont plus proches des valeurs identifiées lors des essais de référence. En effet, le rapport entre ces deux valeurs est respecté. Par contre, les intervals de variation des valeurs identifiées sont plus importants, ce qui montre que le lissage local est plus sensible au bruit de mesure. La somme σ_0 + R_{inf} est néanmoins toujours

	Référence	MCV
	$Moy. \pm 2\sigma$	$Moy. \pm 2\sigma$
$\sigma_0\ (MPa)$	127 ± 15	128 ± 39
$R_0\ (GPa)$	$2,46 \pm 0,49$	$1,31 \pm 1,37$
$R_inf\ (MPa)$	$56,2 \pm 13,8$	48 ± 48
$b\ (\times 10^3)$	$3,37 \pm 0,72$	$1 \pm 0,46$

TAB. 6.8: Paramètres plastiques identifiés après dérivation type élément fini.

sous-estimée d'environ 15 MPa. Le lissage pourrait cependant être améliorée en adaptant la taille de la maille aux gradients rencontrés, ici seule une taille d'environ 15 pixels a été testée. La conclusion qui peut cependant être tirée de cette étude préliminaire est que l'utilisation d'un lissage local ou global ne suffit pas à expliquer les écarts observés précédemment entre les deux faisceaux de courbes.

–

6.5.2 Influence du choix des champs

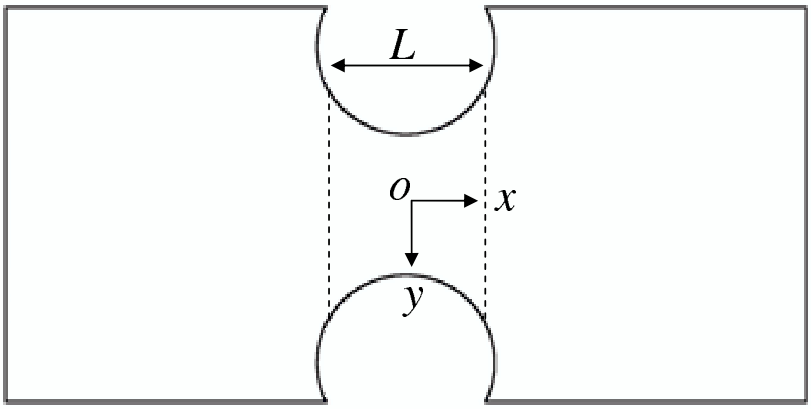


FIG. 6.23: Région d'intérêt et repère orthonormé pour l'écriture des champs virtuels

Il est probable que les écarts observés entre les faisceaux de courbes soient liés à un problème d'identifiabilité. L'identifiabilité des paramètres est directement liée à la construction de la fonction coût et donc du choix des champs virtuels. La fonction coût n'a pas été optimisée comme cela peut être fait en élasticité avec l'utilisation de champs virtuels spéciaux. L'observation de la fonction coût (voir figure 6.24) montre clairement la présence de vallées pour certains paramètres, et pour b l'absence même d'un minimum autour de la valeur de référence. L'augmentation du nombre de champs virtuels permettraient sans doute d'améliorer l'identifiabilité des paramètres pourvu qu'ils soient judicieusement choisis. L'utilisation de champs virtuels permettant de suivre la localisation de la plasticité est sans doute à envisager. En effet, le signal qui décrit la plasticité est présent sur une étendue limitée de la surface mesurée, sur le reste de la surface, seules des déformations élastiques sont présentes, ce qui a tendance à noyer l'information recherchée. L'évolution des champs virtuels au cours du chargement devrait également être

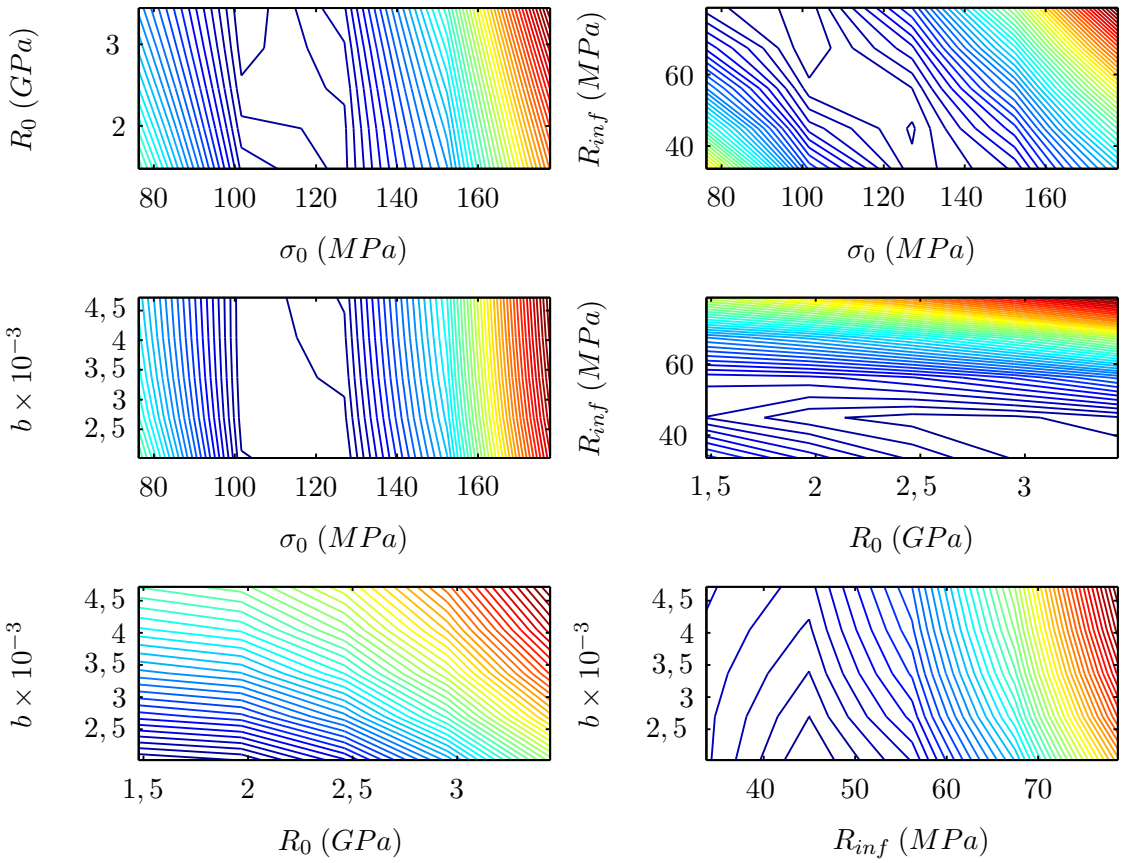


FIG. 6.24: Courbes de niveaux de la fonction coût autour des valeurs de référence pour un de essais.

considéré dans la construction de la fonction coût puisqu'il a été montré précédemment que la sensibilité aux paramètres était liée au pas de chargement.

Cependant, afin de tester la stabilité de la méthode, et sans chercher à optimiser ce choix, plusieurs champs virtuels supplémentaires ont été utilisés. Chaque champ virtuel a permis de construire un résidu d'écart à l'équilibre issu du PTV, faisant intervenir différemment les champs mesurés. L'idée est de faire travailler toutes les composantes planes du tenseur des contraintes, contrairement aux champs précédents qui ne faisaient intervenir que la composante longitudinale. Ils ont été associés aux champs précédents comme suggéré dans le chapitre 3. Les résidus obtenus à partir de chaque champ virtuel ont été normalisés par les valeurs obtenues en introduisant les paramètres de référence. L'influence du point de départ n'a par ailleurs pas été étudiée ici, les valeurs initiales des paramètres étant les valeurs de référence.

Les contraintes imposées pour le choix des champs virtuels sont les conditions d'admissibilité et la non contribution de la distribution des efforts aux frontières du domaine étant donné que seule la résultante est mesurée. Dans la pratique, les conditions d'admissibilité sont remplies dès lors que la fonction analytique est continûment dérivable. Si l'on veut faire travailler la contrainte transverse, la fonction analytique choisie comme champ de déplacement virtuel doit faire apparaître une composante U_y dépendant de la variable y. Cette composante doit être nulle sur la frontière où sont appliqués les efforts afin de ne pas faire travailler la résultante transverse des efforts qui n'est pas mesurée. Par ailleurs, la composante U_x si elle existe doit être constante (ou nulle) sur cette même frontière de manière à ne faire intervenir que la résultante longitudinale des efforts mesurée $P = \int_{S_f} T_x dS$. Finalement, quatre champs supplémentaires ont été choisis.

1. Le premier est identique au champ de déplacement $\vec{v}^{\star 2}$ utilisé en élasticité, il est nul en dehors du domaine considéré ($x < -\frac{L}{2}$ ou $x > \frac{L}{2}$, voir figure 6.23) et vaut $v_x^{\star 2}(x,y) = 0$ et $v_y^{\star 2}(x,y) = y(x - \frac{L}{2})(x + \frac{L}{2})$ dans la région d'intérêt ($-\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}$). Les composantes du champ de déformation virtuelle $\boldsymbol{\epsilon^{\star 2}}$ correspondant valent alors : $\epsilon_{xx}^{\star 2}(x,y) = 0$, $\epsilon_{yy}^{\star 2}(x,y) = (x - \frac{L}{2})(x + \frac{L}{2})$ et $\epsilon_{xy}^{\star 2}(x,y) = xy$ dans l'intervalle $-\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}$. Ce champs est représenté sur la figure 6.25. D'après l'équation 3.19, ce champ virtuel conduit à la fonction coût suivante :

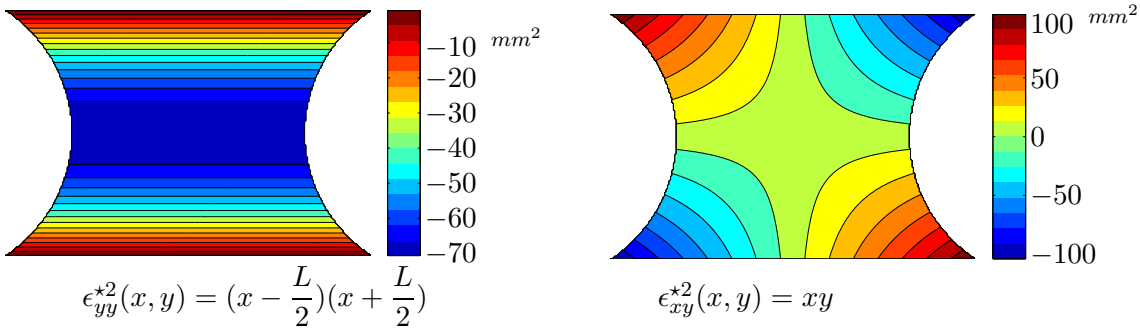


FIG. 6.25: Composantes non nulles du champ de déformation virtuel numéro 2.

$$\mathcal{C}_2(\sigma_0, R_0, R_{\inf}, b) = \sum_j^m \left[\frac{e \int_S \sigma_{yy}(t_j)\ (x - \frac{L}{2})(x + \frac{L}{2})\ \mathrm{d}S + e \int_S \sigma_{xy}(t_j)\ xy\ \mathrm{d}S}{P(t_j)} \right]^2 \quad (6.1)$$

où l'on a divisé l'équation par $P(t_j)$ afin d'homogénéiser les contributions des différents pas de chargement.

2. Le champ précédent pondère uniformément la composante σ_{yy} du champ de contrainte (voir figure 6.25). Comme cette dernière est plus importante dans les entailles, on introduit le champ virtuel $(\vec{v}^{\star 3}, \boldsymbol{\epsilon}^{\star \mathbf{3}})$ tel que dans l'intervalle $[-\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}] : v_x^{\star 3}(x, y) = 0$ et $v_y^{\star 3}(x, y) = y^2(x - \frac{L}{2})(x + \frac{L}{2})$ qui conduit au champ de déformation virtuel $\epsilon_{xx}^{\star 3}(x, y) = 0$, $\epsilon_{yy}^{\star 3}(x, y) = (x - \frac{L}{2})(x + \frac{L}{2})2y$ et $\epsilon_{xy}^{\star 3}(x, y) = xy^2$, et nul en dehors. Comme le montre la figure 6.26, ce champ pondère davantage les contraintes σ_{yy} en fond d'entaille. Ce champ virtuel conduit à la fonction coût suivante :

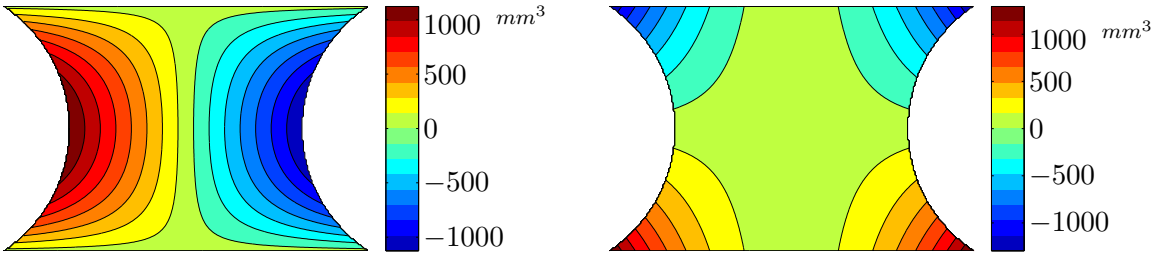
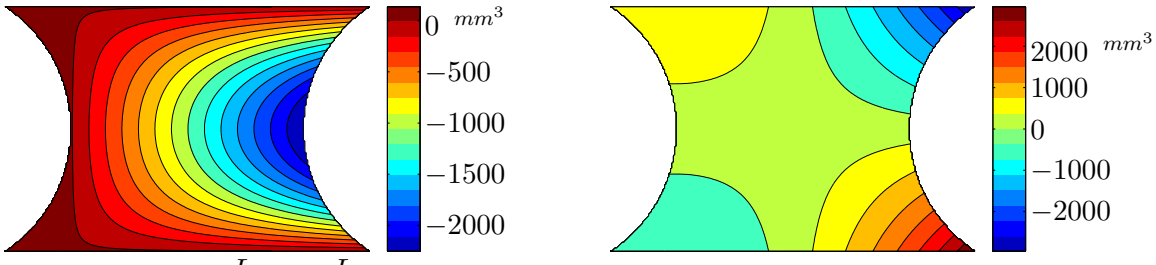


FIG. 6.26: Composantes non nulles du champ de déformation virtuel numéro 3.

$$\mathcal{C}_3(\sigma_0, R_0, R_{\inf}, b) = \sum_j^m \left[\frac{e \int_S \sigma_{yy}(t_j)\ 2y(x - \frac{L}{2})(x + \frac{L}{2})\ \mathrm{d}S + 2e \int_S \sigma_{xy}(t_j)\ xy^2\ \mathrm{d}S}{P(t_j)} \right]^2 \quad (6.2)$$

3. Compte tenu de l'effet de flexion qui a tendance à faire apparaître la plasticité dans l'entaille de droite, il est intéressant d'introduire le champ virtuel $(\vec{v}^{\star 4}, \boldsymbol{\epsilon}^{\star \mathbf{4}})$ tel que dans l'intervalle $[-\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}] : v_x^{\star 4}(x, y) = 0$ et $v_y^{\star 4}(x, y) = (x - \frac{L}{2})(x + \frac{L}{2})y(y + l)$, où l est la largeur entre les entailles. Il conduit au champ de déformation virtuel $\epsilon_{xx}^{\star 4}(x, y) = 0$, $\epsilon_{yy}^{\star 4}(x, y) = (x - \frac{L}{2})(x + \frac{L}{2})(2y + l)$ et $\epsilon_{xy}^{\star 4}(x, y) = xy(y + l)$, et nul en dehors. Comme le montre la figure 6.27, ce champ pondère davantage les contraintes σ_{yy} en fond d'entaille de droite. Il conduit à la fonction coût suivante :

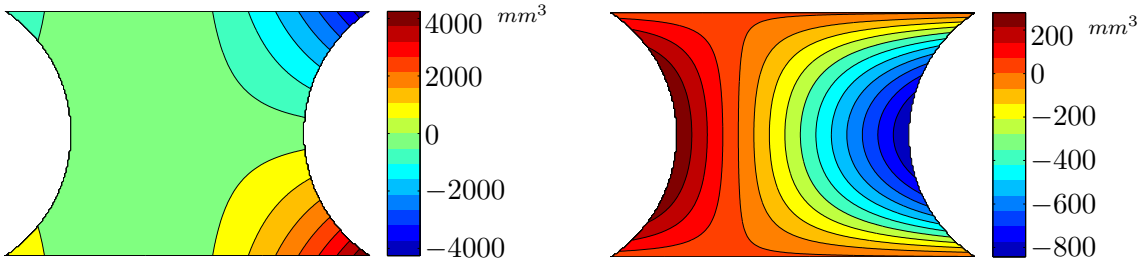
$$\mathcal{C}_4(\sigma_0, R_0, R_{\inf}, b) = \sum_j^m \left[\frac{e \int_S \sigma_{yy}(t_j)\ (2y + l)(x - \frac{L}{2})(x + \frac{L}{2})\ \mathrm{d}S + 2e \int_S \sigma_{xy}(t_j)\ xy(y + l)\ \mathrm{d}S}{P(t_j)} \right]^2 \quad (6.3)$$



$\epsilon^{\star 4}_{yy}(x,y) = (x - \frac{L}{2})(x + \frac{L}{2})(2y + l)$ $\epsilon^{\star 4}_{xy}(x,y) = xy(y + l)$

FIG. 6.27: Composantes non nulles du champ de déformation virtuel numéro 4.

4. Enfin un dernier champ virtuel est introduit, $(\vec{v}^{\star 5}, \boldsymbol{\epsilon}^{\star \mathbf{5}})$ tel que dans l'intervalle $[-\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}]$: $v^{\star 5}_x(x,y) = (x - \frac{L}{2})(x + \frac{L}{2})y(y + \frac{l}{2})$ et $v^{\star 5}_y(x,y) = 0$ qui conduit au champ de déformation virtuel $\epsilon^{\star 5}_{xx}(x,y) = 2xy(y + \frac{l}{2})$, $\epsilon^{\star 5}_{yy}(x,y) = 0$ et $\epsilon^{\star 5}_{xy}(x,y) = \frac{1}{2}(x - \frac{L}{2})(x + \frac{L}{2})(2y + \frac{l}{2})$, et nul en dehors. Comme le montre la figure 6.28, ce champ pondère davantage les contraintes σ_{xx} en fond d'entaille de droite. Il conduit à la fonction coût suivante :



$\epsilon^{\star 5}_{xx}(x,y) = 2xy(y + \frac{l}{2})$ $\epsilon^{\star 5}_{xy}(x,y) = \frac{1}{2}(x - \frac{L}{2})(x + \frac{L}{2})(2y + \frac{l}{2})$

FIG. 6.28: Composantes non nulles du champ de déformation virtuel numéro 5.

$$\mathcal{C}_5(\sigma_0,R_0,R_{\inf},b)=\sum_j^m \left[\frac{e\int_S \sigma_{xx}(t_j)\ 2xy(y+\frac{l}{2})\ \mathrm{d}S + e\int_S \sigma_{xy}(t_j)\ (2y+\frac{l}{2})(x-\frac{L}{2})(x+\frac{L}{2})\ \mathrm{d}S}{P(t_j)} \right]^2 \tag{6.4}$$

Finalement la fonction coût totale $\mathcal{C}_{tot}(\sigma_0, R_0, R_{\inf}, b)$ est construite en sommant les différentes fonctions coût $\mathcal{C}_i(\sigma_0, R_0, R_{\inf}, b)$ divisées par leurs valeurs initiales $\mathcal{C}_i(\sigma^0_0, R^0_0, R^0_{\inf}, b^0)$ afin d'homogénéiser les contributions des différentes fonctions coûts.

$$\mathcal{C}_{tot}(\sigma_0, R_0, R_{\inf}, b) = \sum_i^5 \frac{\mathcal{C}_i(\sigma_0, R_0, R_{\inf}, b)}{\mathcal{C}_i(\sigma^0_0, R^0_0, R^0_{\inf}, b^0)} \tag{6.5}$$

L'identification a été menée à partir des champs de déformation obtenus après un lissage polynomial de degré 9. La fonction coût totale $\mathcal{C}_{tot}$ a été minimisée avec les paramètres de référence comme paramètres initiaux de la procédure. Les résultats sont reportés dans le tableau 6.9 et la figure 6.29. Les résultats

	Référence	MCV Deg. 9
	$Moy. \pm 2\sigma$	$Moy. \pm 2\sigma$
$\sigma_0\ (MPa)$	127 ± 15	$17,1 \pm 40,3$
$R_0\ (GPa)$	$2,46 \pm 0,49$	$2,58 \pm 0,42$
$R_inf\ (MPa)$	$56,2 \pm 13,8$	143 ± 42
$b\ (\times 10^3)$	$3,37 \pm 0,72$	$(4,71 \pm 19,7) \times 10^{12}$

TAB. 6.9: Paramètres identifiés avec la fonction coût $\mathcal{C}_{tot}$ du paragraphe 6.5.2, à partir des champs de déformation obtenu après un lissage polynomial de degré 9 et les paramètres de référence comme point de départ.

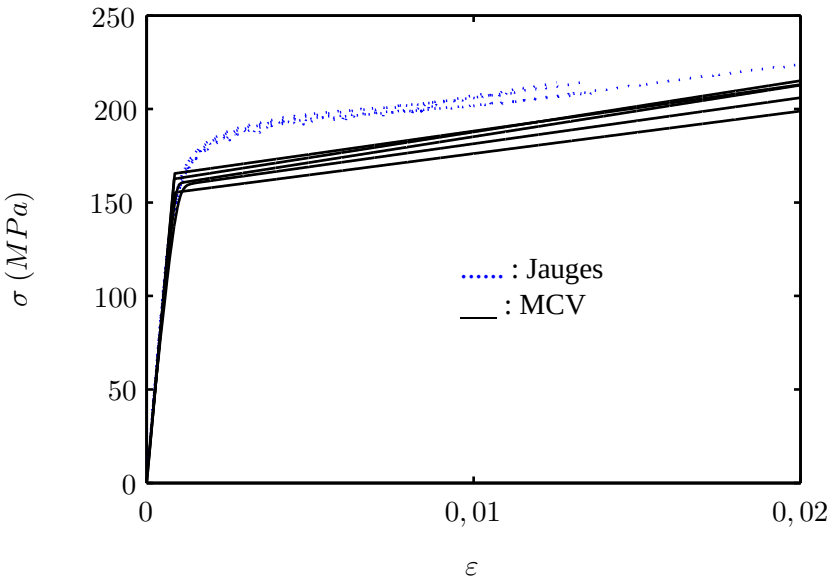


FIG. 6.29: Courbes tracées avec les paramètres identifiés (voir tableau 6.9) à partir de la fonction $\mathcal{C}_{tot}$.

obtenus montrent une plus grande dispersion des valeurs identifiées par rapport à la fonction coût précédente, ce qui indique que la fonction coût construite à partir des champs virtuels supplémentaires est plus sensible au bruit de mesure. Une procédure d'optimisation est donc nécessaire pour affiner ce choix. Le module d'écrouissage est correctement identifié, mais les faisceaux de courbes issus des paramètres identifiés sont toujours décalés d'une dizaine de méga-pascals des réponses des jauges. Il semble donc, que le choix des champs virtuels ne suffise pas à expliquer le décalage évoqué précédemment.

6.5.3 Choix du modèle

Après avoir écarté plusieurs causes possibles d'erreur au cours du processus d'identification, il reste à remettre en cause le choix de la loi utilisée pour modéliser le comportement du matériau.

Les sensibilités plus faibles de la fonction coût par rapport aux paramètres décrivant la transition entre les deux parties linéaires indiquent que ces paramètres ont peu d'influence sur les valeurs prises par la fonction coût. Dans un premier temps, on aurait pu penser qu'en choisissant d'autres champs virtuels pour construire la fonction coût, l'identification aurait pu être améliorée. Pourtant les résultats obtenus au paragraphe précédent conduisent également à une transition quasi instantanée entre les deux parties linéaires. Il est donc raisonnable de penser que le choix du modèle de Voce n'est peut-être pas approprié pour décrire le comportement du matériau.

Une identification a donc été menée avec un modèle d'écrouissage bi-linéaire :

$$\sigma = \sigma_0 + R_0 \times p$$

Ce modèle est moins difficile à identifier que le modèle de Voce, d'une part parce qu'il de possède que deux paramètres et d'autre part parce que ceux-ci sont découplés. Les résultats sont reportés dans le tableau 6.10 et la figure 6.30. Les deux fonctions coûts, obtenues avec différents champs virtuels ont conduits quasiment aux mêmes résultats. La limite d'élasticité est plus faible que celle identifiée avec le modèle de Voce ce qui se traduit par une accentuation du décalage entre les courbes identifiées et le faisceau de référence. Ces résultats montrent clairement que les décalages rencontrés entre les réponses

	Référence	MCV ($\mathcal{C}$)	MCV ($\mathcal{C}_{tot}$)
	$Moy. \pm 2\sigma$	$Moy. \pm 2\sigma$	$Moy. \pm 2\sigma$
$\sigma_0\ (MPa)$	185 ± 15	150 ± 10	151 ± 10
$R_0\ (GPa)$	$2,20 \pm 0,49$	$2,29 \pm 0,28$	$2,27 \pm 0,27$

TAB. 6.10: Paramètres identifiés avec les fonction coût $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_{tot}$ du paragraphe 6.5.2, à partir des champs de déformation obtenu après un lissage polynomial de degré 9 et les paramètres de référence comme point de départ.

mesurées lors des essais normalisés et les essais multiaxaux ne sont pas liés à une mauvaise identification des paramètres pilotant la transition entre le comportement élastique et le comportement plastique du matériau.

Finalement, il semble que la réponse du matériau soit dépendante de la direction de sollicitation ap-

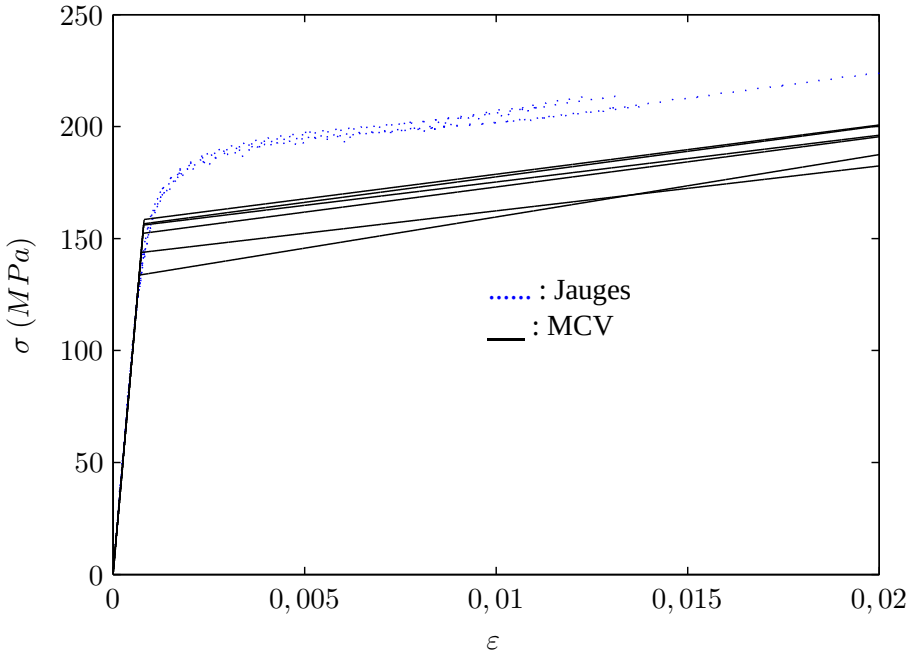


FIG. 6.30: Courbes tracées en supposant une loi d'écrouissage bi-linéaire et à partir des paramètres identifiés (voir tableau 6.10) avec la fonction $\mathcal{C}_{tot}$.

pliquée lors des essais mécaniques. Lors des essais normalisés de traction uniaxiale, la limite d'élasticité mesurée dans la direction de laminage était supérieure d'une dizaine de méga-pascals à celle mesurée dans la direction transverse qui est par ailleurs la direction de traction appliquée lors des essais multiaxiaux. L'hypothèse d'un critère isotrope aurait donc dû conduire à une limite d'élasticité identifiée lors des essais multiaxiaux plus élevée que celle mesurée dans la direction transverse lors des essais normalisés. Or la limite d'élasticité identifiée lors des essais multiaxiaux y'est au contraire inférieure d'une dizaine de méga-pascals. Dès lors, on peut supposer qu'on est en présence d'un phénomène d'écrouissage cinématique. En effet, l'absence de Bandes de Ludërs sur les réponse issues des essais de traction normalisés confirme que le matériau est à l'état brut de laminage. Par conséquent, il est probable que des contraintes résiduelle subsistent dans le matériau, pouvant engendrer un comportement de type écrouissage cinématique. Dans ce cas, les trajets de chargement empruntés lors des essais uniaxiaux normalisés pourraient conduire à des limites d'élasticité différentes et expliquer les écarts observés. Pour pouvoir valider cette hypothèse, il serait nécessaire d'inclure les paramètres caractérisant l'écrouissage cinématique dans la procédure d'identification et vérifier si ils permettent d'expliquer les écarts observés précédemment.

6.6 conclusion

L'essai de traction sur éprouvette plane bi-entaillée a permis de produire un état de contrainte multiaxial en vue d'identifier les paramètres d'une loi de comportement élastoplastique isotrope. La mesure

des champs de déformation a été réalisée à l'aide d'un dispositif à deux caméras et de grilles de pas $100\ \mu m$. Les paramètres élastiques de la loi de comportement du matériau ont d'abord été identifiés par la méthode des champs virtuels linéaire, des champs spéciaux aurait permis d'améliorer l'identification du coefficient de Poisson. Les contraintes élastoplastiques dans le plan de l'éprouvette ont été calculées par un algorithme d'intégration de Newton-Raphson à partir des champs de déformation mesurés, des paramètres élastiques identifiés et d'un jeu de paramètre plastique supposé a priori. La méthode des champs virtuels non linéaire a été utilisée pour construire une fonction coût basée sur le principe des travaux virtuels et l'utilisation de champs virtuels particuliers. Cette fonction coût a été minimisée par un algorithme direct et a conduit à l'identification des quatre paramètres de la loi d'écrouissage. Les valeurs ont été comparées à celles identifiées lors des essais uniaxiaux homogène. Des écarts importants ont été observés sur trois paramètres, alors que le quatrième (le module d'écrouissage) coïncidait avec la valeur précédemment identifiée. Notamment, un décalage d'une dizaine de méga-pascals a été observé entre les réponses des jauges issues des essais de traction uniaxiaux et les faisceaux de courbes issus des paramètres identifiés lors des essais multiaxiaux. Plusieurs aspects ont été analysés pour expliquer ces écarts. Des résultats préliminaires ont montré que l'utilisation du lissage polynomial, le choix des champs virtuels ou l'emploi d'une loi d'écrouissage bi-linéaire ne permettait pas à première vue d'expliquer ces écarts. La nécessité d'augmenter la fréquence d'acquisition des champs de déformation a également été relevée notamment en raison de la sensibilité des paramètres identifiés au pas de chargement. Enfin, l'hypothèse a été avancée compte tenu de l'histoire du matériau, qu'un comportement de type écrouissage cinématique pourrait engendrer les écarts observés. Les variables décrivant l'écrouissage cinématique devraient être introduites dans la procédure d'identification afin de valider cette hypothèse.

7 Conclusion générale

Les présents travaux avaient pour but de mettre en oeuvre expérimentalement la méthode des champs virtuels pour l'identification de paramètres pilotant une loi élastoplastique. Cette approche est une extension de la méthode des champs virtuels proposée par Grédiac (1989) dans le cas d'une loi de comportement linéaire. Elle a été proposée comme alternative aux procédures de recalage par éléments finis, très majoritairement utilisées pour traiter les essais statiquement indéterminés. Cette méthode se distingue notamment par le fait qu'aucune modélisation par éléments finis n'est nécessaire pour traiter les données expérimentales.

Le matériau choisi pour cette étude est un acier avec moins de $0,02$ % de carbone se présentant sous la forme d'une tôle brute de laminage. Des essais de traction sur éprouvette plane à section constante ont permis d'obtenir les courbes contrainte-déformation dans les deux directions de la tôle. Elles ont révélé un comportement élastoplastique asymptotique linéaire caractérisé par une zone de raccordement non linéaire. L'observation de ces courbes a permis de supposer une loi d'écrouissage de type exponentielle à trois paramètres plus la limite élastique. Le comportement du matériau présente une légère anisotropie des limites élastiques dans les deux directions de la tôle, mais l'écrouissage est isotrope. Le matériau a donc été considéré en première approximation comme isotrope.

Le principe de la MCV dans le cas linéaire et dans le cas non linéaire a ensuite été présenté. La MCV linéaire a déjà été appliquée sur de nombreux exemples et a fait l'objet de nombreux développements auparavant. Ici, elle est utilisée sous une forme simple, avec des champs choisis à la main pour identifier deux paramètres élastiques de manière directe. Dans le cas d'une loi élastoplastique, la résolution du problème de manière directe par la MCV n'est plus possible. La méthode qui a été proposée est une méthode de recalage des paramètres à partir d'une fonction d'écart à l'équilibre global de la structure testée (Grédiac et Pierron (2006)). Cette fonction est construite à partir du principe de travaux virtuels en utilisant la MCV. Elle est ensuite introduite dans un processus de minimisation incluant les paramètres élastiques identifiés au préalable, les champs cinématiques mesurés, l'effort appliqué et un jeu de paramètres plastiques de départ. La valeur optimale des paramètres est déterminée à l'aide d'un algorithme de recherche directe. Plusieurs champs virtuels peuvent être utilisés pour construire la fonction coût afin de limiter les minima locaux, mais l'unicité de la solution n'a pas été démontrée. Les champs virtuels sont choisis à la main car aucune procédure de sélection automatique de ces champs n'existe pour le moment dans le cas non linéaire.

L'intégration des équations d'équilibre à partir d'un jeu de paramètres nécessite une procédure de calcul des contraintes. L'algorithme utilisé est celui proposé par Deng et Rosakis (1990). Il s'agit d'une procédure incrémentale basée sur le calcul du module tangent. Deux versions sont présentées : la première

est utilisée pour traiter un état de contrainte uniaxial et la seconde pour traiter un cas multiaxial.

La mesure des champs cinématiques a nécessité la mise en oeuvre d'une technique adaptée au problème traité. La méthode de la grille (voir Surrel 2005a) a été choisie en raison de sa robustesse, de sa facilité d'implémentation et de sa bonne résolution spatiale. Cette méthode est basée sur la détection en lumière blanche des mouvements d'une grille bidirectionnelle solidaire de la surface analysée. La sensibilité au déplacement hors plan dans la configuration optique utilisée induit des déformations parasites incompatibles avec l'application envisagée. La mesure sur les deux faces de l'éprouvette a permis de traiter ce problème ainsi que la flexion hors plan éventuelle. Dans le but de calculer les composantes planes du tenseur des déformations, un lissage préalable est réalisé. La technique employée ici a consisté à approximer les composantes du champ de déplacement par des polynômes 2D sur toute la surface. Les champs de déformation sont alors obtenus par dérivation analytique.

La MCV a été appliquée expérimentalement sur les champs cinématiques issus de plusieurs essais de tractions sur deux types d'éprouvette plane. La première éprouvette possède une section lentement variable ce qui permet de supposer un état de contrainte quasiment uniaxial en première approximation. Cette première application a été choisie pour valider la MCV et la mesure de champ sur un cas plus facile à traiter. Elle a conduit à l'identification de six paramètres de la loi de comportement élastoplastique coïncidant avec les valeurs de référence. La méthode s'est montrée stable vis-à-vis des conditions initiales et du choix du degré des polynômes. La deuxième éprouvette de traction est une éprouvette avec deux entailles circulaires réalisant un état de contrainte plane multiaxial. Une partie des paramètres identifiés présentait des écarts importants avec les valeurs de référence, notamment ceux concernant le positionnement de l'asymptote. Plusieurs facteurs ont été analysés pour tenter d'expliquer ce résultat. L'utilisation d'une autre technique de lissage, l'emploi d'autres champs virtuels ou l'utilisation d'une loi d'écrouissage bi-linéaire n'ont pas permis de corriger ces écarts. L'augmentation de la fréquence d'acquisition pourrait cependant permettre d'améliorer l'identification. Dans ce cas, un choix de champs virtuels évoluant au cours du chargement permettrait une meilleure prise en compte de l'apparition et de la propagation de la plasticité. Enfin, l'hypothèse a été avancée compte tenu de l'histoire du matériau, qu'un comportement de type écrouissage cinématique pourrait engendrer les écarts observés. Les variables décrivant l'écrouissage cinématique devraient être introduites dans la procédure d'identification afin de valider cette hypothèse.

Finalement, l'approche basée sur la MCV pour l'identification de paramètres élastoplastiques à partir de mesures de champs s'avère prometteuse. Plusieurs développements sont encore nécessaires pour améliorer l'identifiabilité des paramètres. Ils concernent non seulement l'optimisation du choix des champs virtuels, mais aussi le choix d'une configuration d'essai optimisée. La détermination de ces paramètres pourrait être réalisée à l'aide d'une analyse de sensibilité. Une étude de convergence permettant de tester l'unicité de la solution serait également souhaitable.

Les perspectives de ce travail à court terme seraient de tester la présence d'écrouissage cinématique dans les essais réalisés au dernier chapitre en identifiant les coordonnées du centre de la surface de charge. La décharge n'a pas été traitée dans ce travail, elle contient des informations qui doivent permettre d'améliorer l'identification des paramètres élastiques qui eux mêmes influencent celle des para-

mètres plastiques. L'utilisation de champs virtuels optimisés serait également souhaitable, notamment pour améliorer l'identification du coefficient de Poisson.

À moyen terme, l'extension de la méthode des champs virtuels aux grandes déformations augmentera l'intérêt de la méthode des champs virtuels pour étudier la plasticité. Expérimentalement, l'utilisation de la corrélation d'image serait une bonne solution pour mesurer des déformations au delà de 10 %. La méthode est également en cours d'application pour identifier des comportements visco-plastiques. Dans ce cas, une attention particulière est accordée à la résolution temporelle de la mesure.

À plus long terme, l'emploi de ce type de technique pourrait permettre de réaliser des essais in-situ, dans des cas où la réalisation d'essais normalisés n'est pas possible. Ces essais pourrait permettre d'approcher d'avantage les conditions d'utilisation des matériaux et permettre une meilleure modélisation du comportement en service des structures. Enfin, ces techniques pourraient être étendues à l'étude des matériaux hétérogènes, pour lesquelles il n'existent pas d'essais normalisés permettant de caractériser leur comportement.

Bibliographie

O. Allix et P. Vidal. A new multi-solution approach suitable for structural identification problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191 : 2727–2758, 2002.

S. Aoki, K. Amaya, M. Sahashi et T. Nakamura. Identification of Gurson´s material constants by using kalman filter. *Computational Mechanics*, 19 : 501–506, 1997.

M.H. Arafeh. *Identification de la loi de comportement élastique de matériaux orthotropes*. Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne, Compiègne, 1995.

S. Avril, M. Grédiac et F. Pierron. Sensitivity of the virtual fields method to noisy data. *Computational Mechanics*, 34(6) : 439–452, 2004a.

S. Avril, F. Pierron et M. Grédiac. Design of suitable testing configurations for identifying mechanical constitutive equations from full-field measurements. In *Xth SEM International Congress on Experimental Mechanics*. Society for Experimental Mechanics, 2004b. 7-10 June in Costa Mesa, California, USA.

D. Banabic, T. Kuwabara, T. Balan, D.S. Comsa et D. Julean. Non quadratic yield criterion for orthotropic sheet metals under plane stress conditions. *International Journal of Mechanical Sciences*, 45 : 797–811, 2003.

M. Bocciarelli, G. Bolzon et G. Maier. Parameter identification in anisotropic elastoplasticity by indentation and imprint mapping. *Mechanics of Materials*, 37(8) : 855–868, 2004.

M. Bonnet, H. D. Bui et A. Constantinescu. Principes variationnels et exploitation de mesures de champs en élasticité : Variational principles and exploitation of field measurements in elasticity. *Mécanique et Industries*, 4 : 687–697, 2003.

Marc Bonnet et Andrei Constantinescu. Inverse problems in elasticity. *Inverse Problems*, 21(2) : R1–R50, 2005. URL `http ://stacks.iop.org/0266-5611/21/R1`.

P.W. Bridgman. *Studies in Large Plastic Flow and Fracture*. McGraw Hill, New York, 1952.

O.T. Bruhns et D.K. Anding. On the simultaneous estimation of model parameters used in constitutive laws for inelastic material behaviour. *International Journal of Plasticity*, 15 : 1311–1340, 1999.

M. Brunet, F. Morestin et S. Godereaux. Nonlinear kinematic hardening identification for anisotropic sheet metals with bending-unbending tests. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 123 : 378–383, 2001.

S Calloch. *Essais triaxiaux non-proportionnels et ingénierie des modèles de plasticité cyclique*. Thèse de Doctorat, ENS de Cachan, 1997.

H. Chalal, S. Avril, F. Pierron et F. Meraghni. Experimental identification of a damage model for composites using the grid technique coupled to the virtual fields method. *Comp. Part A.*, a completer, 2004a.

H. Chalal, F. Meraghni, F. Pierron et M. Grédiac. Direct identification of damage behaviour of composite materials using the virtual fields method. *Composite Part A*, 35 : 841–848, 2004b.

D. Claire, F. Hild et S. Roux. Identification of damage fields using kinematic measurements. *Comptes-Rendus Mécanique*, 330 : 729–734, 2002.

K. Creath. Phase measurement interferometry techniques. In E. Wolf, editor, *Progress in Optics*, volume 26, chapitre 5, pages 349–383. Elsevier, 1988.

X. Deng et A.J. Rosakis. Negative plastic flow and its prevention in elasto-plastic finite element computation. *Finite Elements in Analysis and Design*, 7 : 181–191, 1990.

T. Dillard. *Caractérisation et simulation numérique du comportement mécanique des mousses de nickel : morphologie tridimensionnelle, réponse élastoplastique et rupture*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, Evry, 2004.

S. Diot, A. Gavrus, D. Guines et E. Ragneau. Identification du comportement d'un acier en compression : du quasi-statique au dynamique : Identification of a steel compression behaviour : from quasi static approach to dynamic one. *Mécanique et Industries*, 4(5) : 519–524, 2003.

R. Fedele, M. Filippini et G. Maier. Constitutive model calibration for railway wheel steel through tension-torsion tests. *Computers and Structures*, 83 : 1005–1020, 2005.

R. Forestier. *Développement d´une méthode d´identification de paramètres par analyse inverse couplée avec un modèle éléments finis 3D*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2004.

R. Forestier, E. Massoni et Y. Chastel. Estimation of constitutive parameters using an inverse method coupled to a 3d element software. *Journal of Materials Processing Technology*, 125–126 : 594–601, 2002.

T. Furukawa, T. Sugata, S. Yoshimura et M. Hoffman. An automated system for simulation and parameter identification of inelastic constitutive models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191 : 2235–2260, 2002.

A. Gavrus, E. Massoni et J.L. Chenot. An inverse analysis using a finite element model for identification of rheological parameters. *Journal of Materials Processing Technology*, 60(1-4) : 447–454, 1996.

J.C. Gelin et O. Ghouati. An inverse solution procedure for material parameters identification in large plastic deformations. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 12 : 161–173, 1996.

J.C. Gelin, O. Ghouati et R. Shahani. Modelling the plane strain compression test to obtain constitutive equations of aluminium alloys. *International Journal of Mechanical Science*, 36 : 773–796, 1994.

F. Geymonat, G.and Hild et S. Pagano. Identification of elastic parameters by displacement field measurement. *Comptes-Rendus Mécanique*, 330 : 403–408, 2002.

O. Ghouati et J.C. Gelin. Identification of material parameters directly from metal forming processes. *Journal of Materials Processing Technology*, 80-81 : 560–564, 1998.

O. Ghouati et J.C. Gelin. A finite element-based identification method for complex metallic material behaviours. *Computational Materials Science*, 21 : 57–68, 2001.

A. Giraudeau et F. Pierron. Identification of stiffness and dampingproperties of thin isotropic vibrating-plates usingthe virtual fields method : theory and simulations. *Journal of Sound and Vibration*, 284 : 757–781, 2005.

E. Grediac, M.and Toussaint et F. Pierron. L'identification des propriétés mécaniques de matériaux avec la méthode des champs virtuels, une alternative au recalage par éléments finis. *Comptes-Rendus Mécanique*, 330 : 107–112, 2002.

M. Grédiac. Principe des travaux virtuels et identification. *Comptes Rendus de l´Académie des Sciences*, 309(2) : 1–5, 1989.

M. Grédiac. On the direct determination of invariant parameters governing anisotropic plate bending problems. *International Journal of Solids and Structures*, 33(27) : 3969–3982,, 1996a.

M. Grédiac. The use of heterogeneous strain fields for the characterization of composite materials. *Composites Science and Technology*, 56 : 841–846, 1996b.

M. Grédiac, N. Fournier, P.-A. Paris et Y. Surrel. Direct identification of elastic constants of anisotropic plates by modal analysis : experimental results. *Journal of Sound and Vibration*, 210(5) : 643–659, 1998.

M. Grédiac et P.A. Paris. Direct identification of elastic constants of anisotropic plates by modal analysis : theoretical and numerical aspects. *Journal of Sound and Vibration*, 195(3) : 410–415, 1996.

M. Grédiac et F. Pierron. A T-shaped specimen for the direct characterization of orthotropic materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 41 : 293–309, 1998.

M. Grédiac et F. Pierron. Applying the virtual field method to the identification of elasto-plastic constitutive parameters. *International Journal of Plasticity*, 22(4) : 602–627, 2006.

M. Grédiac, F. Pierron et Y. Surrel. Novel procedure for complete in-plane composite characterization using a single T-shaped specimen. *Experimental Mechanics*, 39(2) : 142–149, 1999.

M. Grédiac, E. Toussaint et F. Pierron. Special virtual fields for the direct determination of material parameters with the virtual fields method. 1–Principle and definition. *International Journal of Solids and Structures*, 39(10) : 2691–2705, 2002a.

M. Grédiac, E. Toussaint et F. Pierron. Special virtual fields for the direct determination of material parameters with the virtual fields method. 2–application to in-plane properties. *International Journal of Solids and Structures*, 39(10) : 2707–2730, 2002b.

M. Grédiac, E. Toussaint et F. Pierron. Special virtual fields for the direct determination of material parameters with the virtual fields method. 3. application to the bending rigidities of anisotropic plates. *International Journal of Solids and Structures*, 40 : 2401–2419, 2003.

M. Grédiac et A. Vautrin. A new method for determination of bending rigidities of thin anisotropic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 57 : 964–968, 1990.

T. Harth, S. Schwan, J. Lehn et F. G. Kollmann. Identification of material parameters for inelastic constitutive models : statistical analysis and design of experiments. *International Journal of Plasticity*, 20 : 1403–1440, 2004.

M.A.N. Hendricks. *Identification of the mechanical behavior of solid materials*. Thèse de Doctorat, Eindhoven University of Technology, 1991.

T. Hisada. Recent progress in nonlinear FEM-based sensitivity analysis. *JSME international journal series A*, 38 : 301–305, 1995.

T. Hoc, J. Crépin, L. Gélébart et A. Zaoui. A procedure for identifying the plastic behaviour of single crystals from the local response of polycrystals. *Acta Materialia*, 51 : 5477–5488, 2003.

J. Kajberg et G. Lindkvist. Characterisation of materials subjected to large strains by inverse modelling based on in-plane displacement fields. *International Journal of Solids and Structures*, 41(13) : 3439–3459, 2004.

J. Kajberg, K.G. Sundin, L.G. Melin et P. Ståhle. High strain rate tensile and viscoplastic parameter identification using micoscopic high-speed photography. *International Journal of Plasticity*, 20 : 561–575, 2004.

A. Khalfallah. *Identification des lois de comportement élastoplastiques par essais inhomogènes et simulations numériques*. Thèse de doctorat, Faculté des Sciences de Tunis, Tunisie, 2004.

A. Khalfallah, H. Bel Hadj Salah et A. Dogui. Anisotropic parameter identification using inhomogeneous tensile test. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 21 : 927–942, 2002.

J.P. Kleinermann et J.P. Ponthot. Parameter identification and shape/process optimization in metal forming simulation. *Journal of Materials Processing Technology*, 139(1-3) : 521–526, 2003.

A. Kobayashi, editor. *Handbook on Experimental Mechanics*. Society for Experimental Mechanics, 2nd rev. édition, 1993.

T. Kuwabara, M. Kuroda, V. Tvergaard et K. Nomura. Use of abrupt strain path change for determining subsequent yield surface : experimental study with metal sheets. *Acta Materiala*, 48 : 2071–2079, 2000.

T. Kuwabara, A. Van Bael et E. Iizuka. Measurement and analysis of yield locus and work hardening characteristics of steel sheets with different r values. *Acta Materiala*, 50 : 3717–3729, 2002.

J.C. Lagarias, J. A. Reeds, M. H. Wright et P. E. Wright. Convergence properties of the nelder-mead simplex method in low dimensions. *SIAM Journal of Optimization*, 9(1) : 112–147, 1998.

Y.C. Lam, S. Khoddam et P.F. Thomson. Inverse computational method for constitutive parameters obtained from torsion, plane-strain and axisymmetric compression tests. *Journal of Materials Processing Technology*, 83 : 62–71, 1998.

V. Laws. Derivation of the tensile stress-strain curve from bending data. *Journal of Materials Science*, 16 : 1299–1304, 1981.

J. Lemaitre et J.L. Chaboche. *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, Paris, 1985.

L. Le Magorou, F. Bos et F. Rouger. Identification of constitutive laws for wood-based panels by means of an inverse method. *Composite Science and Technology*, 62(4) : 591–596, 2001.

R. Mahnken. Aspects on the finite element implementation of the Gurson model including parameter identification. *International Journal of Plasticity*, 15 : 1111–1137, 1999.

R. Mahnken. A comprehensive study of a multiplicative elastoplasticity model coupled to damage including parameter identification. *Computers and Structures*, 74 : 179–200, 2000.

R. Mahnken et E. Stein. Parameter identification for viscoplastic models based on analytical derivatives of a least-squares functional and stability investigations. *International Journal of Plasticity*, 12(4) : 451–476, 1996a.

R. Mahnken et E. Stein. A unified approach for parameter identification of inelastic material models in the frame of the finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 136 : 225–258, 1996b.

R. Mahnken et E. Stein. Parameter identification for finite deformation elasto-plasticity in principal directions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 147(1-2) : 17–39, 1997.

R.A. Mayville et I. Finnie. Uniaxial stress-strain curves from a bending test. *Experimental Mechanics*, 22 : 197–201, 1982.

M.H.H. Meuwissen. *An Inverse Method for the Mechanical Characterisation of Metals*. Thèse de Doctorat, Eindhoven University of Technology, 1998.

M.H.H. Meuwissen, C.W.J. Oomens, F.P.T. Baaijens, R. Petterson et J.D. Janssen. Determination of the elasto-plastic properties of aluminium using a mixed numerical-experimental method. *Journal of Materials Processing Technology*, 75 : 204–211, 1998.

R. Moulart, S. Avril et F. Pierron. Identification of the through-thickness rigidities of a thick laminated composite tube. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 2006.

A. Niclas et L. Bourgeois. An inverse approach to determine the non-linear properties of induction heat-treated steels. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 19 : 69–88, 2000.

H. Okada, Y. Fukui et N. Kumazawa. An inverse analysis determining the elastic-plastic stress-strain relationship using nonlinear sensitivities. *Computer Modeling and Simulation in Engineering*, 4(3) : 176–185, 1999.

V. J. Parks. Geometric moiré. In A. Kobayashi, editor, *Handbook on Experimental Mechanics*, chapitre 6, pages 267–296. Society for Experimental Mechanics, 2nd rev. édition, 1993.

D. W. Phillion. General methods for generating phase-shifting interferometry algorithms. *Applied Optics*, 36(31) : 8098–8115, 1997.

P. Picart, O. Ghouati et J.C. Gelin. Optimization of metal forming process parameters with damage minimization. *Journal of Materials Processing Technology*, 80-81 : 597–601, 1998.

F. Pierron, S. Zhavoronok et M. Grédiac. Identification of the through-thickness properties of thick laminated tubes using the virtual fields method. *International Journal of Solids and Structures*, 37 : 4437–4453, 2000.

H. Pijlman. *Sheet material characterisation by multi-axial experiments*. Thèse de doctorat, University of Twente, The Netherlands, 2001.

J.L. Piro et M. Grédiac. Producing and transferring low-spatial-frequency grids for measuring displacement fields with moiré and grid methods. *Experimental Techniques*, 28(4) : 23–26, 2004.

J.P. Ponthot et J.P. Kleinermann. A cascade optimization methodology for automatic parameter identification and shape/process optimization in metal forming simulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006. in press.

D. Post. Developments in moiré interferometry. *Optical Engineering*, 21(3) : 458–467, 1982.

E.F. Rauch. Plastic anisotropy of sheet metals determined by simple shear tests. *Material Science and Engineering A*, 241 : 179–183, 1998.

Y. Surrel. Moiré and grid methods : a signal processing approach. In Ryszard J. Pryputniewicz et Jacek Stupnicki, editors, *Interferometry '94 : Photomechanics*, volume 2342, pages 213–220. The International Society for Optical Engineering, SPIE, 1994.

Y. Surrel. Design of algorithms for phase measurements by the use of phase-stepping. *Applied Optics*, 35(1) : 51–60, 1996.

Y. Surrel. La technique de la grille et ses applications. *Instrumentation mesure et métrologie*, 4(3-4) : 193–216, 2005a.

Y. Surrel. Les techniques optiques de mesure de champ : essai de classification. *Instrumentation mesure et métrologie*, 4(3-4) : 11–42, 2005b.

M.A. Sutton, Deng X., Liu J. et Yang L. Determination of elastic-plastic stresses and strains from measured surface strain data. *Experimental Mechanics*, 36(2) : 99–112, 1996.

D. Szeliga, P. Matuszyk, R. Kuziak et M. Pietrzyk. Identification of rheological parameters on the basis of various types of plastometric tests. *Journal of Materials Processing Technology*, 125–126 : 150–154, 2002.

M. Takeda, H. Ina et S. Kobayashi. Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry. *Journal of the Optical Society of America A*, 72 : 156–160, 1982.

Y. Tillier. *Identification par analyse inverse du comportement mécanique des polymères solides : applications aux sollicitations multiaxiales et rapides*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1998.

E. Voce. A practical strain–hardening function. *Metallurgia*, 51 : 219–226, 1955.

F. Yoshida, T. Uemori et K. Fujiwara. Elastic–plastic behavior of steel sheets under in-plane cyclic tension–compression at large strain. *International Journal of Plasticity*, 18 : 633–659, 2001.

F. Yoshida, M. Urabe et V.V. Toropov. Identification of material parameters in constitutive model for sheet metals from cyclic bending tests. *International Journal of Mechanical Science*, 40(2-3) : 327–249, 1998.

F. Yoshida, M. Urabeb, R. Hinoa et V. V. Toropov. Inverse approach to identification of material parameters of cyclic elasto-plasticity for component layers of a bimetallic sheet. *International Journal of Plasticity*, 19 : 2149–2170, 2003.

Z.L. Zhang, M. Hauge, J. 0degard et C. Thaulow. Determining material true stress–strain curve from tensile specimens with rectangular cross-section. *International Journal of Solids and Structures*, 36 : 3497–3516, 1999.

Z.L. Zhang, J. Odegard, 0.P. Svik et C. Thaulow. A study on determining true stress–strain curve for anisotropic materials with rectangular tensile bars. *International Journal of Solids and Structures*, 38 : 4489–4505, 2001.

K.M. Zhao et J.K. Lee. Inverse estimation of material properties for sheet metals. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 20 : 105–118, 2004.

A. Zouani, T. Bui-Quoc et M. Bernard. Cyclic stress-strain data analysis under biaxial tensile stress state. *Experimental Mechanics*, 39(2) : 92–102, 1999.

Identification de paramètres élastoplastiques par des essais statiquement indéterminés : mise en oeuvre expérimentale et validation de la méthode des champs virtuels

Résumé :

Ce travail concerne la mise en oeuvre expérimentale de la méthode des champs virtuels (MCV) pour identifier des paramètres pilotant une loi de comportement élastoplastique. La méthode a déjà été validée sur des données simulées, mais plusieurs aspects restaient à analyser pour une application expérimentale. La méthode d'identification est basée sur la minimisation d'une fonction coût traduisant l'écart à l'équilibre de la structure testée. Cette fonction coût est construite à partir du principe des travaux virtuels (pour plusieurs champs virtuels choisis arbitrairement), des champs cinématiques mesurés à la surface de l'éprouvette et de la force de traction appliquée. Dans un premier temps, un essai de traction sur une éprouvette plane à section variable, conduisant à un état de contrainte quasiment uniaxial, a été mis en place. Cette essai a conduit à l'identification des six paramètres d'une loi élastoplastique isotrope. Les valeurs des paramètres identifiés coïncident avec les valeurs de référence identifiées lors d'essais de traction classiques. La stabilité de l'identification vis à vis des paramètres influant a été examinée. Dans un deuxième temps, des essais mécaniques générant des champs de contraintes multiaxiales ont été conduit sur des éprouvettes planes à entailles circulaires. Les paramètres identifiés à partir de ces essais se sont révélés d'avantage éloignés des valeurs de référence. Plusieurs hypothèses ont été évoquées pour expliquer ces écarts, comme une construction non optimale de la fonction coût ou des erreurs lors du choix du modèle décrivant le comportement du matériau.

Identification of elasto-plastic parameters from statically-undetermined tests : experimental application and validation of the virtual field method.

Abstract :

This work deals with the extension of the virtual fields method (VFM) to the identification of elasto-plastic constitutive parameters. Theoretical aspects had already been addressed before this work but the experimental validation remained an issue, that is addressed in this thesis. The VFM principle is based on the minimization of an objective function figuring the deviation from equilibrium in the tested specimen. The deviation from equilibrium is assessed through the principle of virtual work, using several simple virtual fields that involve the resultant load. Stresses are evaluated from measured displacement fields on a part of the specimen by a radial return approach. The experimental validation has been carried out using tensile tests on flat thin specimens with two different geometries. The first one is a dog-bone shape with a slowly varying cross section. This geometry leads to quasi-uniaxial, though heterogeneous, stresses in the middle part of the specimen. The six parameters governing the isotropic elasto-plastic constitutive equations of the materials have been successfully identified in this test and the robustness of the method has been analyzed. The second geometry is with two notches, giving rise to heterogeneous multiaxial stresses during the tensile test, thus more complicated than the ones of the first geometry. Some of the parameters identified with this second geometry deviate from the reference values of the tested material. An analysis of different alleged sources of errors is eventually presented for explaining those discrepancies.