Thèse de doctorat de l'École Polytechnique

Spécialité : Mathématiques

Présentée par **Gabriel RIVIÈRE**

le 25 novembre 2009

pour obtenir le titre de

Docteur de l'École Polytechnique

Sujet de la thèse :

Délocalisation des mesures semi-classiques pour des systèmes dynamiques chaotiques

Doctorat effectué au Centre de Mathématiques Laurent Schwartz

Composition du jury :

Nalini ANANTHARAMAN	Directrice de thèse	Université Paris Sud
Viviane BALADI	Rapporteur	ENS Paris
Patrick GÉRARD	Président du jury	Université Paris Sud
François LEDRAPPIER	Examinateur	University of Notre Dame
Jens MARKLOF	Rapporteur	University of Bristol (excusé)
Stéphane NONNENMACHER	Rapporteur	CEA Saclay
Thierry PAUL	Examinateur	École Polytechnique

Remerciements

Mes premiers remerciements seront pour Nalini Anantharaman. Durant ma thèse (et mon master), elle a patiemment guidé mes premiers pas dans le monde de la recherche. Apprendre et travailler à son contact a été un réel plaisir et je mesure un peu plus chaque jour la chance que j'ai eue. Je lui suis aussi sincèrement reconnaissant de s'être toujours montrée disponible et d'avoir généreusement partagé ses idées et ses connaissances avec moi.

Je remercie Viviane Baladi, Jens Marklof et Stéphane Nonnenmacher d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse et d'avoir sacrifié une grande partie de leur temps à cette tâche. C'est pour moi une grande joie de savoir qu'ils s'intéressent à ce que j'ai pu faire. Merci pour leurs conseils, leur critiques et leur commentaires. Je remercie aussi Stéphane Nonnenmacher pour le rôle particulier qu'il a joué au cours de ces trois années de thèse grâce à ses explications sur le monde semi-classique et ses commentaires sur mon travail (et aussi ses encouragements). Je souhaite aussi remercier Patrick Gérard, François Ledrappier et Thierry Paul de l'intérêt qu'ils portent à mon travail ainsi que de l'honneur qu'ils me font en acceptant de participer à mon jury de thèse.

En organisant un groupe de lecture à Lyon et en donnant son cours de master avec Nalini Anantharaman, Yves Colin de Verdière a contribué à éveiller ma curiosité et mon envie de découvrir la recherche en mathématiques. Je profite de ces quelques lignes pour lui exprimer ma gratitude. Je voudrais aussi adresser un message particulier aux membres de l'ANR résonances et décohérence en chaos quantique. J'ai eu la chance d'apprendre de nombreuses choses à leur contact et je les remercie de leur disponibilité et de leur amitié. Un remerciement spécial à Frédéric Faure. Ce groupe ANR m'a aussi permis de rencontrer Emmanuel Schenck qui débutait en même temps que moi dans le monde de la recherche. Les moments passés en sa compagnie aux différents endroits de la France et du monde resteront un des excellents souvenirs de cette thèse.

Il serait difficile de nommer (sans en oublier) tous les membres du monde mathématique auxquels je suis reconnaissant. Je voudrais tout de même remercier chaleureusement Herbert Koch pour son aide précieuse ainsi que Maciej Zworski pour m'avoir donné la chance de passer deux mois plus qu'agréables au département de mathématiques de Berkeley.

Les membres du CMLS m'ont accueilli parmi eux avec une grande générosité et une grande disponibilité. Je leur suis particulièrement reconnaissant pour ces années passées avec eux et pour tout ce qu'ils m'ont aporté. Les discussions animées le midi et dans la salle café seront aussi un bon souvenir du CMLS. J'en profite aussi pour dire merci (et mon admiration) à ceux qui font vivre ce laboratoire de manière pratique et tout particulièrement à Michèle Lavallette pour sa gentillesse sans bornes. Du côté de l'École Polytechnique, merci à Linda Vary-Guevel. Enfin, merci aux doctorants du CMLS pour leur bonne humeur. Merci en particulier à mes différents 'cobureaux' de me (m'avoir) supporter (-é) et pour nos innombrables discussions. Un merci spécial à David Burguet pour nos discussions *entropiques*.

J'ai eu la chance au long de ma scolarité d'avoir des enseignants exceptionnels qui m'ont donné le goût des études et m'ont tant appris. Je suis conscient que c'est en grande partie grâce à eux que j'en suis là. Je ne les oublie pas et les remercie aussi sincèrement. Je dois aussi beaucoup à mes camarades 'matheux' (ou presque) de Lyon : Clément, Hélène, Joan, Julien, Paul et bien entendu ceux que j'oublie.

Puisque la thèse n'aurait pas pu bien se passer sans des moments de repos salvateurs, j'ai aussi une pensée pour ceux qui m'ont accompagné lors de (trop) nombreuses séances dans les salles obscures.

Merci à mes parents et ma sœur pour leur confiance et pour tout le reste (qui serait trop long à énumérer ici). Merci à Gaëlle à qui je dois aussi tellement pour pouvoir le résumer.

Table des matières

Introduction **9**
Présentation des résultats . . . 12
Entropie des mesures semi-classiques . . . 12
Déviations des mesures semi-classiques . . . 15
Organisation de la thèse . . . 18

1 Systèmes dynamiques et entropie **19**
1.1 Systèmes dynamiques . . . 19
1.2 Entropie d'un système dynamique . . . 22
1.2.1 Une approche 'géométrique' . . . 23
1.2.2 La définition de Kolmogorov-Sinai . . . 24
1.3 Entropie et exposants de Lyapunov . . . 28
1.3.1 Propriété d'Anosov . . . 28
1.3.2 La décomposition d'Oseledets . . . 31
1.3.3 La formule de Ruelle . . . 32
1.4 Reparamétrage d'un système dynamique . . . 33
1.4.1 Flots suspendus d'un automorphisme . . . 34
1.4.2 Reparamétrage des flots . . . 35
1.4.3 Théorèmes d'Abramov . . . 36

2 Quelques éléments d'analyse semi-classique **37**
2.1 Quantification d'un système classique . . . 37
2.1.1 Cadre géométrique classique . . . 37
2.1.2 Procédé de quantification . . . 38
2.1.3 Groupe d'Heisenberg . . . 39
2.2 La phase stationnaire . . . 40
2.3 Quantification des observables . . . 41
2.3.1 Quantification de Weyl . . . 41
2.3.2 Observables admissibles . . . 43
2.3.3 Quantification positive . . . 46
2.4 Théorème d'Egorov et temps d'Ehrenfest . . . 47
2.4.1 Théorème d'Egorov . . . 47
2.4.2 Représentation métaplectique . . . 49
2.5 Passage aux variétés . . . 49

3 Déviations semi-classiques sur le tore **51**
3.1 Mécanique quantique sur le $2d$ tore . . . 51
3.1.1 Construction d'un espace de Hilbert associé au tore . . . 51
3.1.2 Quantification des observables . . . 52
3.1.3 Quantification positive . . . 53
3.1.4 Quantification des matrices symplectiques . . . 54
3.2 Ergodicité quantique pour les applications du tore . . . 55

3.2.1 Présentation du problème . . . 55
3.2.2 Théorème d'ergodicité quantique . . . 58
3.2.3 Contre-exemples . . . 60
3.2.4 Décroissance logarithmique de la variance quantique . . . 62
3.2.5 Convergence en probabilité . . . 65
3.2.6 Convergence presque sûre ? . . . 69
3.2.7 Autres échelles de temps . . . 72

4 Entropie des mesures semi-classiques du chat quantique 73
4.1 Stratégie de la preuve . . . 73
4.2 Incertitude entropique . . . 75
4.2.1 Principe d'incertitude entropique général . . . 75
4.2.2 Cas particulier de partitions de l'identité . . . 76
4.2.3 Applications aux vecteurs propres de $M_\kappa(A)$ . . . 77
4.3 Sous-additivité de l'entropie quantique . . . 77

5 Déviations semi-classiques pour un flot géodésique 81
5.1 Mesures semi-classiques . . . 81
5.1.1 Propriétés générales . . . 82
5.1.2 Mesures semi-classiques pour un flot ergodique . . . 85
5.2 Déviations des solutions de l'équation de Schrödinger . . . 87
5.2.1 Familles orthonormées généralisées . . . 89
5.2.2 Conséquences directes du résultat de déviations . . . 92
5.2.3 Preuve du théorème de déviations . . . 95
5.2.4 Une remarque sur la variance quantique . . . 100

6 Entropie des mesures semi-classiques en dimension 2 103
6.1 Introduction . . . 103
6.1.1 Statement of the main result . . . 105
6.1.2 Heuristic of the proof . . . 106
6.1.3 Extension to nonpositively curved surfaces . . . 107
6.1.4 Organization of the paper . . . 108
6.2 Classical and quantum entropy . . . 108
6.2.1 Kolmogorov-Sinai entropy . . . 108
6.2.2 Quantum entropy . . . 109
6.2.3 Entropy of a special flow . . . 109
6.3 Classical setting of the paper . . . 110
6.4 Outline of the proof . . . 111
6.4.1 Quantum partitions of identity . . . 112
6.4.2 Symbolic interpretation of semiclassical measures . . . 114
6.4.3 Subadditivity of the entropy . . . 115
6.4.4 Application of the Abramov theorem . . . 116
6.5 Partitions of variable size . . . 117
6.5.1 Stopping time . . . 117
6.5.2 Partitions associated . . . 118
6.5.3 Uncertainty principle for eigenfunctions of the Laplacian . . . 122
6.6 Subadditivity of the quantum entropy . . . 125
6.6.1 Pseudo-invariance of the measure of the atoms of the partitions . . . 126
6.6.2 Commutation of pseudodifferential operators . . . 130
6.7 Products of many evolved pseudodifferential operators . . . 133
6.7.1 Definition of $A^{\gamma_1,\cdots,\gamma_l}$ . . . 134
6.7.2 Estimates of the derivatives . . . 136
6.7.3 Estimate of the remainder terms . . . 139
6.8 Appendix A : Pseudodifferential calculus on a manifold . . . 140

6.8.1 Pseudodifferential calculus on a manifold . . . 140
6.8.2 Energy cutoff . . . 141
6.8.3 $\hbar$-expansion for pseudodifferential operators on a manifold . . . 142
6.9 Appendix B : The case of surfaces of nonpositive curvature . . . 146
6.9.1 Surfaces of nonpositive curvature . . . 146
6.9.2 Modifications of the technical assumptions . . . 148
6.9.3 How do we modify the proof ? . . . 148

A Rappels de géométrie riemannienne **153**
A.1 Laplacien sur une variété . . . 153
A.1.1 Métrique sur une variété . . . 153
A.1.2 Définition du Laplacien . . . 153
A.2 Fibré cotangent . . . 154
A.2.1 Mesure de Liouville . . . 154
A.2.2 Flots hamiltoniens . . . 155

B Pression d'un système dynamique **157**
B.1 Définitions et propriétés générales . . . 157
B.2 Opérateurs de transfert et pression topologique . . . 158
B.2.1 Spectre de l'opérateur de Ruelle-Perron-Frobenius . . . 158
B.2.2 Analyticité de la pression topologique . . . 160

C Preuve du théorème d'Abramov **163**

Bibliographie **165**

Introduction

En mécanique quantique, le principe de correspondance de Bohr énonce que *la théorie quantique doit tendre vers la théorie classique* lorsque la constante de Planck $\hbar$ peut être considérée comme petite devant les actions mises en jeu dans le système physique. En quelque sorte, on dit que la théorie classique est bien adaptée pour la description des phénomènes macroscopiques et le principe de correspondance affirme alors que les objets de nature classique peuvent être reconstruits à partir des objets de nature quantique dans la limite $\hbar \to 0^+$. L'une des difficultés pour observer cette correspondance est la différence profonde entre les formalismes classique et quantique [74]. On peut toutefois essayer de remédier à ce problème en introduisant la notion d'*états* et d'*observables* pour pouvoir traiter de manière similaire les objets classiques et quantiques [99]. Pour un système physique, on parle d'état pour la donnée d'un ensemble de paramètres qui déterminent complètement l'evolution du système et on appelle observable toute grandeur que l'on peut mesurer dans cet état. Si on note μ l'état d'un système, on veut que μ soit une forme linéaire sur la famille des observables.

États et observables en mécanique classique

Considérons une variété riemannienne, lisse, compacte, connexe et sans bords M (de dimension finie d). L'évolution d'une particule est entièrement déterminée par la donnée de sa position x dans M et de sa quantité de mouvement ξ dans $T^*_x M$. On appelle alors observable toute fonction lisse des variables (x, ξ). On note $\mathcal{C}^\infty(T^*M)$ cet ensemble et un état est alors la donnée d'une distribution positive μ sur $\mathcal{C}^\infty_o(T^*M)$ (l'ensemble des observables à support compact). Un exemple typique de système de mécanique classique est donné par l'évolution d'une particule sous l'influence de l'Hamiltonien suivant :

$$H(x,\xi) := \frac{\|\xi\|^2_x}{2m} + V(x), \tag{1}$$

où V appartient à $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ et où $\|.\|$ est la métrique riemannienne sur M. L'évolution d'une particule est alors entièrement déterminée par le flot hamiltonien correspondant φ^t_H. De plus, si on fixe l'énergie E d'une particule (que l'on suppose être une valeur régulière de H), on sait alors que celle-ci est préservée au cours de l'évolution par φ^t_H. On note $\Sigma_E := \{(x,\xi) \in T^*M : H(x,\xi) = E\}$ la couche d'énergie associée. Si on suppose que Σ_E est compacte, alors un état μ est tout d'abord la donnée d'une distribution positive (de poids fini) sur Σ_E. À une renormalisation près, un état classique est alors une mesure de probabilité sur Σ_E. De plus, comme l'évolution est donnée par φ^t_H, un état μ doit aussi vérifier une propriété d'invariance par φ^t_H, i.e. $\mu(A) = \mu(\varphi^t_H A)$ pour tout t dans $\mathbb{R}$ et pour tout borélien A. On note $\mathcal{M}(\Sigma_E, (\varphi^t_H))$ l'ensemble des mesures de probabilité φ^t_H-invariantes de Σ_E (ou encore l'ensemble des états classiques associés à l'Hamiltonien H et à la couche d'énergie E).

États et observables en mécanique quantique

Considérons maintenant un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Une observable quantique est la donnée d'un opérateur autoadjoint $\hat{A}$ de $\mathcal{H}$. Un état quantique ρ est un opérateur autoadjoint complètement positif de trace égale à 1 que l'on identifie à une forme linéaire via l'application $\hat{A} \mapsto \mathrm{Tr}(\rho\hat{A})$ [40]. Parmi les états quantiques, on distingue les états quantiques dits 'purs', i.e. ceux de la forme

$\rho := |\psi\rangle\langle\psi|$ (avec ψ un élément de norme 1 de $\mathcal{H}$). Dans ce cas, la forme linéaire associée se récrit $\hat{A} \mapsto \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle_{\mathcal{H}}$. Pour pouvoir étudier la validité du principe de correspondance, il faut commencer par associer à notre système classique un système quantique. Un choix naturel d'espace de Hilbert associé à M est $\mathcal{H} := L^2(M)$. On peut aussi faire intervenir la théorie des opérateurs $\hbar$-pseudo-différentiels [85], [32] qui à toute observable classique a dans $\mathcal{C}^\infty(T^*M)$ (relativement régulière à l'infini) fait correspondre un opérateur $\mathrm{Op}_\hbar(a)$ sur $L^2(M)$. Cette procédure de quantification des observables satisfait différents axiomes fondamentaux [85]. En particulier, elle associe à l'Hamiltonien classique H l'opérateur autoadjoint suivant :

$$\hat{H}_\hbar := \mathrm{Op}_\hbar(H) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V, \tag{2}$$

où Δ est le Laplacien associée à la métrique sur M et où V est l'opérateur de multiplication par $V(x)$. Dans ce cas, l'évolution d'un état pur ψ est donnée par $U_H^t\psi$ où U_H^t est l'opérateur unitaire $e^{-\frac{\imath t\hat{H}_\hbar}{\hbar}}$. Si E est une valeur régulière de H et si Σ_E est compacte, alors on sait que dans un voisinage de la valeur E, le spectre de $\hat{H}_\hbar$ est discret. Un analogue quantique des états classiques localisés sur la couche d'énergie Σ_E est alors la donnée d'un vecteur propre $\psi_\hbar$ de norme 1 vérifiant

$$\hat{H}_\hbar\psi_\hbar = E(\hbar)\psi_\hbar, \tag{3}$$

où $E(\hbar)$ est une valeur propre proche de E. Cet état quantique vérifie des propriétés similaires à l'état classique. Par exemple, la forme linéaire associée à $\psi_\hbar$ vérifie une propriété d'invariance par le propagateur quantique $\langle\psi_\hbar|U_H^{-t}\hat{A}U_H^t|\psi_\hbar\rangle = \langle\psi_\hbar|\hat{A}|\psi_\hbar\rangle$. À un tel état quantique, on peut alors associer un état de nature classique en posant

$$\mu_{\psi_\hbar}(a) := \langle\psi_\hbar|\mathrm{Op}_\hbar(a)|\psi_\hbar\rangle_{L^2(M)}.$$

Le régime semi-classique

Pour $\hbar$ fixé, la distribution $\mu_{\psi_\hbar}$ n'est a priori ni positive, ni localisée sur $\Sigma_{E(\hbar)}$, ni invariante par le flot hamiltonien. On ne peut donc pas exactement interpréter $\mu_{\psi_\hbar}$ comme un état classique associé à $\psi_\hbar$. Par contre, on peut regarder ce que devient cette distribution $\mu_{\psi_\hbar}$ lorsque $\hbar$ devient négligeable devant les autres actions mises en jeu, i.e. lorsque $\hbar \to 0^+$. D'un point de vue mathématique, lorsque l'on regarde cette limite, on transite par un régime dit 'semi-classique' qui est bien décrit par des méthodes asymptotiques comme celle de la phase stationnaire. L'une des propriétés typiques de ce régime est la propriété dite d'Egorov qui montre bien que l'évolution d'une observable quantique $\mathrm{Op}_\hbar(a)$ est analogue à l'évolution de l'observable classique correspondante a lorsque $\hbar \to 0$ [85] :

$$U_H^{-t}\mathrm{Op}_\hbar(a)U_H^t = \mathrm{Op}_\hbar(a \circ \varphi_H^t) + O_t(\hbar). \tag{4}$$

En accord parfait avec le principe de correspondance, on vérifie alors que si l'on se donne une suite de solutions $(\psi_\hbar)_{\hbar\to 0}$ de (3) avec $E(\hbar) \to E$, alors tout point d'accumulation[1] de la suite $(\mu_{\psi_\hbar})_{\hbar\to 0}$ est un élément de $\mathcal{M}(\Sigma_E, \varphi_H^t)$ [54]. D'un point de vue physique, en regardant un état quantique dans la limite $\hbar \to 0$, on a bien retrouvé un état purement classique. On appelle mesure semi-classique un point d'accumulation d'une telle suite, i.e. tout état classique qui peut être reconstruit à partir d'une suite d'états quantiques. On note $\mathcal{M}_{sc}(\Sigma_E, (\varphi_H^t))$ l'ensemble de ces mesures semi-classiques. À titre d'exemple, dans le cas de la sphère standard $M := \mathbb{S}^d$ et de $V \equiv 0$, Jakobson et Zelditch ont prouvé que pour tout $E \neq 0$, $\mathcal{M}_{sc}(\Sigma_E, (\varphi_H^t)) = \mathcal{M}(\Sigma_E, (\varphi_H^t))$ [58] (voir aussi [71]). Ainsi, dans ce cadre, tout état classique de la couche d'énergie Σ_E peut être réalisé comme une limite semi-classique de distributions quantiques $\mu_{\psi_\hbar}$.

Phénomènes de chaos quantique

On peut étudier la limite de validité du principe de correspondance de ce point de vue. Quelle est la forme du sous-ensemble des mesures semi-classiques $\mathcal{M}_{sc}(\Sigma_E, (\varphi_H^t))$ dans l'ensemble des

[1] Pour la topologie faible-$\star$ associée à $\mathcal{C}(\widehat{T^*M})$ (on compactifie chaque fibre de T^*M).

états classiques $\mathcal{M}(\Sigma_E, (\varphi_H^t))$? A-t-on toujours égalité ? Est-ce un sous-ensemble dense ? Peut-il être réduit à un point ? Dans le cas de la sphère, le système classique sous-jacent est en effet particulièrement simple et il est naturel de se demander ce qu'il se passe pour des systèmes plus complexes. Par exemple, un cas opposé à celui de la sphère est celui des variétés riemanniennes à courbure strictement négative pour lesquelles le flot géodésique est particulièrement chaotique (hyperbolicité, ergodicité de la mesure de Liouville). Un des aspects du chaos quantique est l'étude de ce type de questions et de la limite de validité du principe de correspondance de Bohr pour ces systèmes classiques imprévisibles.
Dans un contexte général (chaotique ou non), l'objectif de l'étude du régime semi-classique est d'estimer les restes dans les différentes formules asymptotiques. En effet, dans un développement comme (4), le reste est petit lorsque $\hbar$ tend vers 0 mais dépend tout de même du temps t considéré. Dans le cas particulier de systèmes chaotiques, une étude précise du reste montre que pour un système classique chaotique, celui-ci reste petit en $\hbar$ seulement pour des temps t inférieurs $|\log \hbar|$ [21]. En d'autres termes, la complexité du système classique interfère déjà sur l'estimation des restes pour des temps relativement courts en $\hbar$, ce qui complique l'analyse dite semi-classique du système quantique.
Pour étudier le chaos quantique du point de vue précédent, une hypothèse usuelle sur la dynamique classique est que la désintégration L_E de la mesure de Liouville est ergodique pour le système dynamique (Σ_E, φ_H^t), i.e.

$$\forall a \in \mathcal{C}(\Sigma_E),\ L_E - \text{p.p.},\ \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T a\circ\varphi_H^t(\rho)dt = \frac{1}{L_E(\Sigma_E)}\int_{\Sigma_E} a dL_E.$$

Cette hypothèse exprime le fait que la valeur moyenne d'une observable classique le long d'une trajectoire typique du flot hamiltonien est égale à la valeur moyenne de cette observable sur la couche d'énergie Σ_E. La propriété d'ergodicité du flot classique entraîne une propriété remarquable d'équidistribution des états quantiques correspondants dans la limite semi-classique. Pour énoncer cette propriété, on fixe $\alpha > 0$. On suppose aussi que E est une valeur régulière de H et que Σ_E est compacte. On note alors $I(E,\hbar)$ l'intervalle $]E-\alpha\hbar, E+\alpha\hbar]$ et $N(I(E,\hbar))$ le nombre de valeurs propres (comptées avec leur multiplicité et notées $(E_j(\hbar))_j$) de $H_\hbar$ dans cet intervalle. On se donne alors une famille orthonormée de fonctions propres $(\psi_j(\hbar))_{E_j(\hbar)\in I(E,\hbar)}$ associées. Si L_E est ergodique pour le système dynamique (Σ_E, φ_H^t), on peut alors montrer que pour tout a appartenant à $\mathcal{C}_o^\infty(T^*M)$ et pour tout $\delta > 0$ [54],

$$\lim_{\hbar\to 0}\left(\frac{\sharp\left\{E_j(\hbar)\in I(E,\hbar) : \left|\mu_{\psi_j(\hbar)}(a) - \frac{1}{L_E(\Sigma_E)}\int_{\Sigma_E} a dL_E\right| \geq \delta\right\}}{N(I(E,\hbar))}\right) = 0. \tag{5}$$

Cette propriété est la version semi-classique du théorème d'ergodicité quantique de Shnirelman [95], Zelditch [101] et Colin de Verdière [27]. Cette propriété montre que sous une hypothèse d'ergodicité du flot classique, la majorité des états quantiques (dont l'énergie est localisée autour de E) s'équidistribue sur la couche d'énergie Σ_E dans la limite semi-classique.
Dans le cas où V est égal à 0 et où M est une variété à courbure strictement négative, on est dans la situation du résultat de Shnirelman-Zelditch-Colin de Verdière et on peut donner un corollaire assez parlant de ce résultat. Dans ce cas, il existe une base orthonormée de $L^2(M)$ composée de fonctions propres de Δ que l'on note $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ et qui vérifient $\Delta\psi_j = -\lambda_j^2\psi_j$ avec $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \cdots \lambda_j \leq \lambda_{j+1}\cdots$ et $\lambda_j \to +\infty$ quand j tend vers l'infini. Ainsi, une suite naturelle de paramètres semi-classiques est donnée par la suite $(\lambda_j^{-1})_{j>0}$ et à reparamétrage près, on peut se restreindre au problème[2] de la couche d'énergie $\Sigma_{\frac{1}{2}}$ (pour $m = 1$). Une conséquence immédiate de la propriété (5) est l'existence, pour tout base orthonormée de fonctions propres $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$, de

[2]Dans ce contexte, on peut vérifier que l'ensemble des mesures semi-classiques $\mathcal{M}_{sc}(\Sigma_{\frac{1}{2}}, \varphi_H^t)$ est donné par l'ensemble des points d'accumulation des distributions $a \mapsto \langle\psi_j|\mathrm{Op}_{\lambda_j^{-1}}(a)|\psi_j\rangle$ (pour toute base orthonormée de $L^2(M)$ composée de fonctions propres $(\psi_j)_j$ de Δ).

$S \subset \mathbb{N}$ de densité 1 tel que [27]

$$\forall a \in \mathcal{C}_o^\infty(T^*M),\ \lim_{j\to+\infty, j\in S} \langle \psi_j | \mathrm{Op}_{\lambda_j^{-1}}(a) | \psi_j \rangle = \frac{1}{L_{\frac{1}{2}}\left(\Sigma_{\frac{1}{2}}\right)} \int_{\Sigma_{\frac{1}{2}}} a dL_{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi pour l'Hamiltonien $H(x,\xi) := \frac{\|\xi\|_x^2}{2}$ et pour une variété à courbure strictement négative (et donc particulièrement chaotique), presque tous les états quantiques s'équidistribuent sur la couche d'énergie $\Sigma_{\frac{1}{2}}$. Suivant des intuitions d'ordre arithmétique et en fort contraste avec le principe de correspondance, Rudnick et Sarnak formulent alors la conjecture suivante [86] :

Conjecture 1 (Rudnick-Sarnak)**.** *En courbure strictement négative et pour* $H(x,\xi) := \frac{\|\xi\|_x^2}{2}$,

$$\mathcal{M}_{sc}\left(\Sigma_{\frac{1}{2}}, (\varphi_H^t)\right) = \left\{L_{\frac{1}{2}}\right\},$$

où $L_{\frac{1}{2}}$ *est la désintégration (normalisée) de la mesure de Liouville sur* $\Sigma_{\frac{1}{2}}$.

Cette conjecture est connue sous le nom de Conjecture d'Unique Ergodicité Quantique et reste très largement ouverte dans le cas général [76]. Si cette conjecture est vraie, elle montrera en particulier que le principe de correspondance est plus limité dans le cas chaotique.

Présentation des résultats

Dans ce mémoire, on étudie les mesures semi-classiques dans le cas d'un Hamiltonien de la forme $H(x,\xi) := \frac{\|\xi\|_x^2}{2}$ sur une variété M riemannienne, lisse, compacte, connexe et sans bords (de dimension finie d). Le flot hamiltonien associé à H est alors le flot géodésique $(g^t)_t$ sur T^*M et à reparamétrage près, on peut se limiter à la couche d'énergie $S^*M := \{(x,\xi) : \|\xi\|_x^2 = 1\}$. On note alors $\mathcal{M}_{sc}(S^*M,(g^t))$ l'ensemble des mesures semi-classiques associées, i.e. les points d'accumulation (quand $\hbar \to 0^+$) de la suite de distributions $\mu_{\psi_\hbar}(a) := \langle \psi_\hbar | \mathrm{Op}_\hbar(a) | \psi_\hbar \rangle_{L^2(M)}$ où $\psi_\hbar$ vérifie $-\hbar^2 \Delta \psi_\hbar = \psi_\hbar$.

Entropie des mesures semi-classiques

Afin d'étudier l'ensemble $\mathcal{M}_{sc}(S^*M,(g^t))$, Anantharaman propose dans [3] d'utiliser une grandeur issue de la théorie ergodique : l'entropie de Kolmogorov-Sinai. Cette fonction définie sur $\mathcal{M}(S^*M,(g^t))$ associe à chaque mesure μ un élément de $\mathbb{R}_+$ noté $h_{KS}(\mu,g)$. De manière assez générale, cette grandeur décrit ce que la mesure μ voit de la séparation des points par le flot géodésique, i.e. de la complexité de celui-ci. Par exemple, si μ est portée par une géodésique fermée, l'entropie de Kolmogorov-Sinai $h_{KS}(\mu,g)$ est nulle.

Le cas du Laplacien

Anantharaman prouve alors le résultat suivant sur l'entropie des mesures semi-classiques pour des variétés dont le flot géodésique est Anosov (par exemple en courbure strictement négative) [3] :

$$\forall \mu \in \mathcal{M}_{sc}(S^*M,(g^t)),\ h_{KS}(\mu,g) > 0.$$

Son résultat donne donc une restriction sur l'ensemble des mesures semi-classiques. En particulier, un état semi-classique ne peut pas être concentré sur une orbite périodique du flot géodésique. Poursuivant cette recherche de propriétés entropiques des mesures semi-classiques, elle prouve ensuite avec Nonnenmacher qu'en courbure négative constante ($K \equiv -1$) [7],

$$\forall \mu \in \mathcal{M}_{sc}(S^*M,(g^t)),\ h_{KS}(\mu,g) \geq \frac{d-1}{2},$$

où d est la dimension de M. Cette dernière égalité est à mettre en relation avec l'inégalité de Ruelle qui affirme que dans ce contexte, $h_{KS}(\mu, g) \leq d-1$ pour toute mesure μ appartenant à $\mathcal{M}(S^*M, (g^t))$ [88]. De plus, on a égalité si et seulement si μ est la mesure de Liouville L sur S^*M [67]. Ce résultat ne montre pas l'Unique Ergodicité Quantique mais il prouve en particulier que si μ est un élément de $\mathcal{M}_{sc}(S^*M, (g^t))$ de la forme $tL + (1-t)\mu_\gamma$ (où μ_γ est portée par une géodésique fermée γ), alors $t \geq 1/2$. Poursuivant cette étude en courbure variable [7], ils n'obtiennent pas exactement le même type de bornes (entre autres à cause de la difficulté à étudier les temps longs dans le régime semi-classique). Ils formulent toutefois la conjecture suivante :

Conjecture 2 (Anantharaman-Nonnenmacher)**.** *Soit M une variété riemannienne compacte, connexe, lisse et sans bords de dimension d. Supposons que $(S^*M, (g^t))$ vérifie la propriété d'Anosov. Alors, pour tout μ appartenant à $\mathcal{M}_{sc}(S^*M, (g^t))$, on a*

$$h_{KS}(\mu, g) \geq \frac{1}{2} \int_{S^*M} \sum_{j=1}^{d-1} \chi_j^+(\rho) d\mu(\rho),$$

où les χ_j^+ sont les exposants de Lyapunov strictement positifs de $(S^*M, (g^t), \mu)$.

De nouveau, on peut relier cette inégalité à celle de Ruelle [88] qui affirme que pour tout élément μ de $\mathcal{M}(S^*M, (g^t))$, on a

$$h_{KS}(\mu, g) \leq \int_{S^*M} \sum_{j=1}^{d-1} \chi_j^+(\rho) d\mu(\rho),$$

avec égalité dans le cas Anosov si et seulement si $\mu = L$ [67]. Si cette conjecture est vraie, elle ne suffit pas pour prouver la conjecture d'Unique Ergodicité Quantique et il faut plutôt la voir comme une propriété des mesures semi-classiques dans un contexte chaotique. On rappelle que les variétés à courbure strictement négative (cf. conjecture de Rudnick et Sarnak [89]) vérifient la propriété d'Anosov. Dans le cas particulier de la courbure constante $K \equiv -1$, le premier résultat d'Anantharaman et Nonnenmacher prouve la conjecture. La difficulté pour prouver un résultat de ce type dans un contexte général vient essentiellement du fait qu'on a du mal à contrôler les termes d'erreurs dans les développements asymptotiques du régime semi-classique. Toutefois, en dimension 2, on peut remédier à ce problème et prouver la conjecture (théorème 6.2 du chapitre 6) :

Théorème 3. *Soit M une surface riemannienne compacte, connexe, lisse et sans bords. Supposons que $(S^*M, (g^t))$ vérifie la propriété d'Anosov. Alors, pour tout μ appartenant à $\mathcal{M}_{sc}(S^*M, (g^t))$, on a*

$$h_{KS}(\mu, g) \geq \frac{1}{2} \int_{S^*M} \chi^+(\rho) d\mu(\rho),$$

où χ^+ est l'exposant de Lyapunov strictement positif de $(S^*M, (g^t), \mu)$.

En prouvant ce théorème, on s'aperçoit que l'hypothèse cruciale est celle de l'existence de directions stable et instable dans $T_\rho S^*M$ dépendant continûment du point ρ. Cette propriété est aussi vérifiée par les surfaces à courbure négative ou nulle et on expliquera au paragraphe 6.9.1 du chapitre 6 à quel moment de la preuve du théorème 3 celle-ci intervient. Sans entrer dans les détails [83], on mettra en évidence que notre résultat pourrait être étendu dans le contexte faiblement chaotique des surfaces à courbure négative ou nulle. Ceci autorise a priori les constructions de quasi-modes comme celles de Donnelly [33] sur des géodésiques fermées stables de la surface. On peut aussi noter que sous ces hypothèses, la mesure de Liouville n'est pas a priori ergodique pour le flot géodésique (g^t). Par exemple, le tore est une surface à courbure nulle pour laquelle la mesure de Liouville n'est pas ergodique. On souligne aussi que même si on se limite au cas des surfaces de genre supérieur à 2, la question de l'ergodicité de la mesure de Liouville est toujours ouverte [13], [37]. Ainsi cette propriété entropique des mesures semi-classiques s'avère être un fait assez général qui est vérifié même si on ne sait pas si le système quantique satisfait une propriété

d'ergodicité quantique[3]. L'hypothèse cruciale est en fait l'existence de variétés stables et instables et pour le schéma de preuve qu'on propose, on a besoin que celles-ci dépendent continûment du point base. On peut se demander si cette propriété reste vraie sans cette hypothèse de continuité, par exemple pour des surfaces sans points conjugués [89] ou pour des billards ergodiques [47]. Dans ce dernier cas, une borne entropique serait tout particulièrement intéressante puisqu'elle nous donnerait des informations supplémentaires sur les contre-exemples construits par Hassel dans [53].
Pour finir d'illustrer le théorème 3, comme dans le cas des variétés à courbure constante [7], on note que l'on a le corollaire immédiat suivant :

Corollaire 4. *Supposons que M est une surface à courbure strictement négative. Si μ appartient à $\mathcal{M}_{sc}(S^*M,(g^t))$ et si μ est de la forme $tL+(1-t)\mu_\gamma$ (avec μ_γ une mesure de probabilité portée par une géodésique fermée γ), alors on a*

$$t \geq \frac{\mu_\gamma(\chi^+)}{\mu_\gamma(\chi^+)+L(\chi^+)}.$$

Le cas des applications quantiques du tore

Même en courbure constante, la machinerie développée pour montrer les résultats entropiques précédents est assez complexe (voir [5], [28] ou [103] pour une introduction). Afin de mieux la comprendre, on peut essayer d'étudier des analogues de ces résultats pour des modèles 'jouets' du chaos quantique. Il existe en effet une grande variété de systèmes dynamiques qui, comme le flot géodésique sur S^*M, préservent une forme symplectique et sont de type Anosov. L'un des exemples les plus simples est celui des symplectomorphismes linéaires et hyperboliques A du tore $\mathbb{T}^{2d}$. Dans ce contexte, les états classiques sont donnés par les mesures de probabilité A-invariantes sur $\mathbb{T}^{2d}$. L'espace des phases classique $\mathbb{T}^{2d}$ étant compact, l'espace de Hilbert (canonique) correspondant au niveau N (où N est un entier relié au paramètre semi-classique $\hbar$ par $2\pi\hbar N=1$) est un espace de dimension finie N^d que l'on note $\mathcal{H}_N$. De nouveau, la théorie des opérateurs pseudo-différentiels nous fournit une manière d'associer à chaque observable classique $a\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^{2d})$ un opérateur $\mathrm{Op}_N^{AW}(a)$ que l'on appelle quantification anti-Wick. Cette procédure de quantification vérifie en plus la propriété de positivité suivante :

$$a\geq 0 \Rightarrow \mathrm{Op}_N^{AW}(a)\geq 0.$$

En utilisant la représentation métaplectique pour le groupe symplectique $Sp(2d,\mathbb{Z})$, on peut définir un propagateur quantique $M_N(A)$ agissant sur $\mathcal{H}_N$ et vérifiant la propriété d'Egorov, i.e.

$$\forall a\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^{2d}),\ M_N(A)^{-1}\mathrm{Op}_N^{AW}(a)M_N(A)=\mathrm{Op}_N^{AW}(a\circ A)+O_a(N^{-1}).$$

Dans ce nouveau contexte, le problème des mesures semi-classiques devient l'étude des points d'accumulation (pour $N\to+\infty$) des suites de mesures

$$\mu^N(a):=\langle\psi_N|\mathrm{Op}_N^{AW}(a)|\psi_N\rangle_{\mathcal{H}_N},$$

où ψ_N est un vecteur propre de $M_N(A)$. Tout point d'accumulation d'une telle suite est appelé mesure semi-classique. On note $\mathcal{M}_{sc}(\mathbb{T}^{2d},A)$ leur ensemble. Il est constitué de mesures de probabilité A-invariantes sur le tore. Bouzouina et de Bièvre prouvent un analogue du théorème de Shnirelman dans ce contexte [20]. Précisement, pour toute suite de bases orthonormées $(\psi_N^j)_{j=1}^{N^d}$ de $\mathcal{H}_N$ faites de vecteurs propres de $M_N(A)$, on a

$$\forall a\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^{2d}),\ \forall\delta>0,\ \lim_{N\to+\infty}\frac{\sharp\left\{1\leq j\leq N^d : \left|\mu_j^N(a)-\int_{\mathbb{T}^{2d}}a(\rho)d\rho\right|\geq\delta\right\}}{N^d}=0. \tag{6}$$

La simplicité de ce système permet de faire des calculs explicites et en particulier de construire des suites de vecteurs propres de $M_N(A)$. Ceci permet notamment à de Bièvre, Faure et Nonnenmacher [42] de montrer que dans le cas $d=1$ et pour certaines matrices A de $SL(2,\mathbb{Z})$, la mesure

[3]Une question intéressante à ce sujet serait de déterminer si pour des surfaces sans points conjugués de genre supérieur ou égal à 2, la propriété d'ergodicité quantique peut quand même être prouvée.

$\frac{1}{2}(\delta_0 + \mathrm{Leb})$ est un élément de $\mathcal{M}_{sc}(\mathbb{T}^2, A)$. Ceci a pour conséquence principale que l'Unique Ergodicité Quantique est violée dans ce contexte très spécifique[4]. Par une autre méthode, Kelmer montre aussi dans certains cas que pour $d \geq 2$, l'Unique Ergodicité Quantique est mise en défaut [61]. Toutefois, cela ne nous empêche pas de nous demander si la conjecture d'Anantharaman et de Nonnenmacher est valide pour ce modèle 'jouet'. Pour $d = 1$, la méthode utilisée dans le cas $K \equiv -1$ s'applique directement. Par souci de simplicité, nous avons cherché dans ce mémoire à donner une version légèrement différente de la preuve de ce résultat en utilisant certaines propriétés et symétries spécifiques à ce modèle. On montre donc (théorème 4.1 du chapitre 4) :

Théorème 5. *Soient A une matrice hyperbolique de $SL(2,\mathbb{Z})$ et μ un élément de $\mathcal{M}_{sc}(\mathbb{T}^2, A)$. Alors, on a la borne suivante sur l'entropie métrique de $(\mathbb{T}^2, \mu, A)$:*

$$h_{KS}(\mu, A) \geq \frac{\chi_+}{2},$$

où χ_+ est l'exposant de Lyapunov positif de A.

Le contre-exemple de De Bièvre, Faure et Nonnenmacher montre que cette borne est optimale. On souligne que ce résultat est dans le même esprit que des résultats précédents de Bonechi et de Bièvre [18] et de Faure et Nonnenmacher [43] (voir aussi chapitre 3). La méthode que nous développons ne permet pas pour le moment de montrer la conjecture d'Anantharaman et Nonnenmacher pour $d > 1$ bien que les contre-exemples de Kelmer laissent penser qu'elle reste vraie et optimale. Enfin, on souligne que Brooks a donné une version plus précise de ce résultat dans [25].

Déviations des mesures semi-classiques

Un autre point de vue que l'on peut adopter pour étudier la délocalisation des mesures semi-classiques consiste à estimer la vitesse de convergence vers 0 des quantités (5) pour le Laplacien ou (6) pour les applications quantiques du tore. La propriété d'ergodicité quantique est dans ces deux cas une conséquence de l'ergodicité du système dynamique sous-jacent. Ces deux systèmes dynamiques vérifiant la propriété plus forte de décroissance exponentielle des corrélations [10], [98], Zelditch [102] et Schubert [92] montrent respectivement dans le cas du Laplacien et dans le cas des applications quantiques du tore que la vitesse de convergence vers 0 est de l'ordre de $O(|\log\hbar|^{-p})$ pour tout $p \geq 1$. De nouveau, la clef de ces résultats réside en une analyse du régime semi-classique pour des temps de l'ordre de $|\log\hbar|$. Dans une partie de ce mémoire (chapitres 3 et 5), on a cherché à voir comment les théorèmes de grandes déviations de Kifer [63] utilisés pour des temps de l'ordre de $|\log\hbar|$ permettaient d'améliorer ces aspects des résultats de Zelditch et Schubert. En particulier, on montre que l'on peut obtenir un taux de convergence des quantités (5) ou (6) vers 0 polynômial en $\hbar$. De plus, on a essayé de donner une version de ces résultats pour des mesures semi-classiques légèrement plus générales [72].

Le cas du Laplacien

La définition de la distribution $\mu_{\psi_\hbar}$ est valable pour tout élément $\psi_\hbar$ de $L^2(M)$ et permet de donner une description de cet état en fonction des variables (x,ξ) de position et de quantité de mouvement. On peut introduire une généralisation de ces distributions qui prenne aussi en compte les variables (t, E) de temps et d'énergie[5] . Pour cela, on fixe la variable d'énergie $E > 0$. On commence par se donner une famille d'états $(u_\hbar)_{\hbar>0}$ bornés dans $L^2(M)$ et localisés autour de E, i.e.

$$\lim_{\epsilon_0\to 0}\limsup_{\hbar\to 0}\left\|\left(\mathrm{Id}_{L^2(M)} - \mathbf{1}_{[-\epsilon_0,\epsilon_0]}\left(-\frac{\hbar^2\Delta}{2} - E\right)\right)u_\hbar(\omega)\right\|_{L^2(M)} = 0. \tag{7}$$

[4]La conjecture de Rudnick et Sarnak serait donc bien propre au cas des variétés à courbure négative.

[5]L'étude de cette question a été suggérée par Patrick Gérard et déjà abordée dans un contexte non chaotique (variétés de Zoll) par Macià [72].

Pour t dans $[0,1]$, on définit l'état évolué (au 'temps classique' $t/\hbar$) $u(\hbar,t,x) := \exp\left(\frac{\imath t\Delta}{2}\right) u_\hbar(x)$ et on construit une famille de distributions sur $[0,1]\times T^*M$ en posant[6]

$$\int \theta(t)a(\rho)d\mu_\hbar^E(t,\rho) := \int_0^1 \theta(t)\langle u(\hbar,t)|\mathrm{Op}_\hbar(a)|u(\hbar,t)\rangle_{L^2(M)}dt, \tag{8}$$

pour θ appartenant à $\mathcal{C}^0([0,1])$ et a appartenant à $\mathcal{C}_o^\infty(T^*M)$. Cette famille de distributions permet donc de donner une description en fonction de (x,ξ,t) d'un état $u_\hbar$ (dont l'énergie est localisée autour de E) et pas seulement une distribution en fonction des variables (x,ξ) de l'espace des phases. Enfin, dans le cas d'une fonction propre de Δ, l'évolution par le propagateur quantique est triviale et cette définition coïncide avec la précédente.
Si on considère une famille d'états vérifiant la propriété de localisation (7) et aussi $\lim_{\hbar\to 0}\|u_\hbar\|_{L^2(M)} = 1$, on peut montrer que tout point d'accumulation μ^E des distributions $\mu_\hbar^E$ est de la forme $d\mu_t^E(x,\xi)dt$, où pour presque tout t dans $[0,1]$, μ_t^E est un élément de $\mathcal{M}(\Sigma_E,(g^t))$ avec $\Sigma_E := \left\{(x,\xi) : \frac{\|\xi\|_x^2}{2} = E\right\}$. Ces mesures semi-classiques généralisées ont déjà été étudiées par Macià [72] dans le cas de variétés non chaotiques. Dans un travail en cours avec Nalini Anantharaman [8], nous voulons étudier les propriétés de ces mesures dans le cas de flots géodésiques chaotiques (précisément qui vérifient la propriété d'Anosov). Dans ce mémoire, on présente une version préliminaire de ce travail et en particulier, on donne un analogue du théorème de Shnirelman dans ce contexte ainsi qu'une amélioration de la vitesse de convergence de la quantité (5).
Quitte à reparamétrer notre problème, on peut de nouveau se restreindre au cas $E = \frac{1}{2}$. On fixe $\alpha > 0$. On note $I(\hbar)$ l'intervalle $]1-\alpha\hbar, 1+\alpha\hbar]$ et $N(I(\hbar))$ le nombre de valeurs propres de $-\hbar^2\Delta$ dans cet intervalle. Pour pouvoir donner un analogue du théorème d'ergodicité quantique dans ce contexte, on introduit la notion de famille orthonormée généralisée au voisinage de la couche d'énergie E :

Définition 6. Pour $\hbar > 0$, on considère $(\Omega_\hbar, \mathbb{P}_\hbar)$ un espace de probabilité et $u_\hbar : \Omega_\hbar \to L^2(M)$ une application mesurable. On dit que $(\Omega_\hbar, \mathbb{P}_\hbar, u_\hbar)_{\hbar>0}$ est une suite de familles orthonormées généralisées au voisinage de $E = 1/2$ si on a

- $\lim_{\hbar\to 0}\left\|\left(\mathrm{Id}_{L^2(M)} - \mathbf{1}_{I(\hbar)}(-\hbar^2\Delta - 1)\right)u_\hbar(\omega)\right\|_{L^2(M)} = 0$, uniformément pour ω dans $\Omega_\hbar$;
- pour tout B dans $\mathcal{L}(L^2(M))$:

$$\int_{\Omega_\hbar}\langle u_\hbar(\omega)|B|u_\hbar(\omega)\rangle_{L^2(M)}d\mathbb{P}_\hbar(\omega) = \frac{1}{N(I(\hbar))}\mathrm{Tr}\left(B\mathbf{1}_{I(\hbar)}\left(-\hbar^2\Delta\right)\right);$$

- lorsque $\hbar$ tend vers 0, on a $\|u_\hbar(\omega)\|_{L^2} = 1 + o(1)$, où le reste est uniforme pour ω dans $\Omega_\hbar$.

Cette définition généralise légèrement la notion de familles orthonormées : elle inclut en particulier le cas des fontions propres de Δ. On donnera aussi un autre exemple de telles familles au chapitre 5. Pour un état $u_\hbar(\omega)$, on note $\mu_{\hbar,\omega}$ la distribution définie par l'équation (8). Pour un flot géodésique vérifiant la propriété d'Anosov sur S^*M, on définit aussi le taux maximal d'expansion du flot géodésique

$$\chi_{\max} := \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\log\sup_{\rho\in S^*M}\|d_\rho g^t\|.$$

En utilisant ces définitions, on montre le résultat suivant de déviations des mesures semi-classiques (théorème 5.12 du chapitre 5) :

Théorème 7. *On suppose que $(S^*M,(g^t))$ vérifie la propriété d'Anosov. On fixe une suite de familles orthonormées généralisées $(\Omega_\hbar, \mathbb{P}_\hbar, u_\hbar)_{\hbar>0}$.*

[6] On aurait pu introduire une distribution qui dépende des variables (x,ξ,t,E) mais en faisant le choix d'avoir des états localisés au voisinage de E_0, cette généralisation n'aurait pas particulièrement d'intérêt puisque dans la limite semi-classique, la composante selon E se concentrerait sur δ_{E_0}.

Soient θ appartenant $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}_+)$ et a appartenant à $\mathcal{C}^\infty_o(T^*M,\mathbb{R})$ telle que $\int_{S^*M} a dL = 0$. Alors, pour tout δ dans $\mathbb{R}$, on a

$$\limsup_{\hbar\to 0} \frac{\log\left(\mathbb{P}_\hbar\left(\left\{\omega\in\Omega_\hbar : \mu^{\frac{1}{2}}_{\hbar,\omega}(a\otimes\theta)\geq\delta\right\}\right)\right)}{\frac{|\log\hbar|}{2\chi_{\max}}} \leq H(\delta) := \inf_{s\in\mathbb{R}_+}\left\{-s\delta + P\left(g, sa\int_0^1\theta+\varphi^u\right)\right\},$$

avec $\varphi^u := -\frac{d}{dt}\left(\det\left(d_\rho g^t_{|E^u(\rho)}\right)\right)_{t=0}$ le jacobien instable infinitésimal et $P(g, sa\int\theta+\varphi^u)$ la pression topologique.

La pression topologique $P((g^t),f)$ d'une fonction f par rapport à g^t est une donnée dynamique qui compte le nombre de trajectoires distinctes de g^t par rapport au poids f. La fonction $\delta\mapsto H(\delta)$ est similaire à la transformée de Legendre de la fonction $s\mapsto P((g^t), s\int\theta a+\varphi^u)$ et les propriétés de la pression topologique [100], [78] permettent de vérifier que la fonction $\delta\mapsto H(\delta)$ est continue, concave et strictement négative pour $\delta>0$. Ainsi, dans le cas particulier des fonctions propres de $-\hbar^2\Delta$, on vérifie immédiatement que la quantité (5) tend vers 0 comme un $O(\hbar^{\tilde{H}(\delta)})$ avec $\tilde{H}(\delta)>0$, ce qui améliore la borne logarithmique déduite du résultat sur la variance quantique de Zelditch dans [102].

Le cas des applications quantiques du tore

De nouveau, on peut considérer un problème similaire (mais différent) pour les applications quantiques du tore. Pour cela, on utilise l'existence d'une période quantique $P(N)$ de $M_N(A)$. Pour cette suite d'entiers $P(N)$, on a $M_N(A)^{P(N)} = e^{\imath\alpha_N}\mathrm{Id}_{\mathcal{H}_N}$ et $\lim_{N\to+\infty}P(N)=+\infty$ [60]. Pour un état u_N de $\mathcal{H}_N$, on définit pour a dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^{2d})$ et θ dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{T}^1)$,

$$\mu^N(a) := \frac{1}{P(N)}\sum_{l=0}^{P(N)-1}\theta\left(\frac{l}{P(N)}\right)\langle u_N|M_N(A)^{-l}\mathrm{Op}^{AW}_N(a)M_N(A)^l|u_N\rangle_{\mathcal{H}_N}.$$

Cette définition ressemble à celle utilisée dans le cas du Laplacien (définition (8)) mais elle est bien différente puisqu'on a fait le choix de regarder des échelles de temps de l'ordre de $P(N)$ et non N. On peut vérifier que si $\|u_N\|_{\mathcal{H}_N}$ tend vers 1 quand N tend vers l'infini, alors tout point d'accumulation μ des mesures μ^N est de la forme $d\mu_t(x,\xi)dt$ où pour presque tout t, μ_t est un élément de $\mathcal{M}(\mathbb{T}^{2d},A)$. Dans le chapitre 3, on étudie des propriétés de ces mesures. Les méthodes (et les résultats) ressemblent au cas du Laplacien évoqué plus haut et constituent un bon moyen de comprendre la stratégie de preuve du théorème 7. Toutefois, en faisant le choix de regarder l'échelle de temps $P(N)$, certains aspects du problème diffèrent et on en discutera au chapitre 3. On prouve un analogue du théorème 7 dans ce contexte. Pour cela, on introduit une notion similaire de base orthonormée généralisée et on montre (théorème 3.12 du chapitre 3) :

Théorème 8. *Soit A une matrice hyperbolique de $Sp(2d,\mathbb{Z})$. On fixe une base orthonormée généralisée $(\Omega_N,\mathbb{P}_N,u_N)$ pour tout entier N. Soient θ appartenant à $\mathcal{C}^1(\mathbb{T}^1,\mathbb{R}_+)$ et a appartenant à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^{2d},\mathbb{R})$ telle que $Leb(a)=0$. Soit $(N_k)_k$ une suite strictement croissante d'entiers. On suppose que l'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée :*

$$\theta\equiv 1 \text{ ou } \log N_k = o(P(N_k)) \text{ quand } k\to+\infty.$$

Alors, pour tout δ dans $\mathbb{R}$, on a

$$\limsup_{k\to+\infty}\frac{\log\left(\mathbb{P}_{N_k}\left(\left\{\omega:\mu^{N_k}_\omega(a\otimes\theta)\geq\delta\right\}\right)\right)}{\frac{\log N_k}{2\lambda_+}} \leq H(\delta) := \inf_{s\in\mathbb{R}_+}\left\{-s\delta+P\left(A, sa\int_{\mathbb{T}^1}\theta-\Lambda_+\right)\right\},$$

où Λ_+ est la somme des exposants de Lyapunov positifs de A, où λ_+ est le plus grand des exposants de Lyapunov de A et où $P(A, sa-\Lambda_+)$ est la pression topologique de $(sa-\Lambda_+)$.

De nouveau, l'application $\delta\mapsto H(\delta)$ est concave, continue et vérifie $H(\delta)<0$ pour $\delta>0$. Ainsi, dans le cas des fonctions propres de $M_N(A)$, on peut appliquer ce théorème pour vérifier que la quantité (6) tend vers 0 comme un $O(N^{-\tilde{H}(\delta)})$ avec $\tilde{H}(\delta)>0$.

Organisation de la thèse

Le mémoire est organisé en six chapitres et trois annexes.

Chapitres 1 et 2 Les deux premiers chapitres consistent en des rappels brefs des outils de systèmes dynamiques (chapitre 1) et d'analyse semi-classique (chapitre 2) que l'on utilisera tout au long de la thèse. Ils ne prétendent pas à une originalité particulière et leur rôle essentiel est de fournir une boîte à outils pour le mémoire. Le lecteur expert en système dynamique peut sans problème sauter le chapitre 1 et le lecteur expert en analyse semi-classique le chapitre 2.

Chapitre 3 Ce chapitre est consacré au problème du chaos quantique pour les symplectomorphismes linéaires du tore. On y prouve en particulier le théorème 8 ainsi que d'autres résultats autour de ces questions de déviations des mesures semi-classiques. Ce chapitre est une étude préparatoire au chapitre 5. On y montre le même type de résultats mais dans un contexte différent (et simplifié).

Chapitre 4 Dans ce chapitre, on propose une preuve simplifiée du théorème d'entropie des mesures semi-classiques dans le cas des applications quantiques du tore. Précisément, on donne une preuve du théorème 5. Comparée à [7], notre preuve est nettement simplifiée et peut probablement être adaptée pour des symplectomorphismes avec plusieurs exposants de Lyapunov [84]. Ce chapitre correspond au début du travail [84].

Chapitre 5 Dans ce chapitre, on étudie les solutions de l'équation de Schrödinger en utilisant un analogue des mesures semi-classiques. Notamment, on donne une preuve du théorème 7 sur les déviations des mesures semi-classiques dans ce contexte. Ces résultats sont l'objet d'un travail en cours avec Nalini Anantharaman [8].

Chapitre 6 Ce chapitre est le plus long et contient le résultat principal de ce mémoire. On donne une preuve du théorème 3 sur l'entropie des mesures semi-classiques pour des surfaces de type Anosov. Ce chapitre est la reproduction d'un article [82] qui est en cours de révision pour Duke Mathematical Journal. Dans l'annexe de ce ce chapitre, on discute de l'extension de ce résultat à des surfaces à courbure négative ou nulle [83].

Annexes Les annexes sont consacrées à de (très) brefs rappels de géométrie riemannienne et à deux points particuliers de théorie des systèmes dynamiques.

Chapitre 1

Systèmes dynamiques et entropie

Dans cette thèse, on va s'intéresser essentiellement à des systèmes dynamiques issus de la mécanique hamiltonienne (ou alors préservant la forme symplectique canonique). Le but de ce chapitre est d'exposer (brièvement) les résultats généraux de systèmes dynamiques qu'on utilisera tout au long de cette thèse[1]. Le point central de ce chapitre est de définir une quantité qui estime la complexité d'un système dynamique. Par mesurer la complexité d'un système dynamique, on entend mesurer la vitesse de séparation des trajectoires (ou de manière équivalente le caractère imprévisible de l'évolution). L'entropie fournit une quantité pouvant jouer ce rôle. On verra aussi comment celle-ci est reliée aux coefficients de Lyapunov du système.
Ce chapitre est un bref survol de ces questions. Des ouvrages de référence sur le sujet sont en particulier les livres de Cornfeld-Fomin-Sinai [29] et Walters [100] pour l'aspect théorie ergodique et ceux de Hasselblatt-Katok [52] et Brin-Stuck [24] pour l'aspect systèmes dynamiques différentiables. Les choix d'exemples de systèmes dynamiques sont guidés par ceux que l'on sera amené à rencontrer dans la suite (flots hamiltoniens, difféomorphismes symplectiques du tore).

1.1 Systèmes dynamiques

L'étude des systèmes dynamiques distingue deux grandes catégories : les systèmes dynamiques topologiques et les systèmes dynamiques mesurables. La première catégorie consiste en la donnée de

$$(X, d) \text{ espace métrique compact et } T : X \to X \text{ continue.}$$

On souligne que l'on se restreint au cas d'un espace métrique compact. On notera (X, T) ce système dynamique dit topologique. Un système dynamique mesurable est, lui, la donnée de

$$(X, \mathcal{B}, \mu) \text{ espace de probabilité et } T : X \to X \text{ mesurable telle que } T^\sharp \mu = \mu,$$

où l'on a noté $T^\sharp \mu$ la mesure définie par $T^\sharp \mu(A) = \mu(T^{-1}A)$. On notera (X, T, μ) ce système dynamique dit mesurable. Dans chacune de ces deux familles, on n'a considéré que des applications à temps discret : on parle de sytèmes dynamiques à temps discret. On peut étendre les deux notions précédentes pour des transformations à temps continu. Pour cela, à la place de T, on prend

$$\varphi : \mathbb{R}_+ \times X \to X,\ (t, x) \mapsto \varphi(t, x)$$

qui vérifie la propriété de semi-groupe $\varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x))$ pour tout t, s dans $\mathbb{R}_+$ et tout x dans X. On appelle alors système dynamique topologique à temps continu la donnée de (X, d) et de φ continue. Un système dynamique mesurable à temps continu est, lui, la donnée de $(X, \mathcal{B}, \mu)$ et de φ mesurable telle que $\varphi(t, .)^\sharp \mu = \mu$ pour tout t. On donnera dans le dernier paragraphe 1.4 une manière de passer d'un système à temps discret à un système à temps continu par suspension.

[1] Même si, dans la suite, on va se limiter à un cadre très particulier, on présente ici les outils de systèmes dynamiques de manière assez générale.

Les deux familles (topologique et mesurable) peuvent en fait être reliées : un système dynamique topologique donne naissance à une famille naturelle de systèmes dynamiques mesurables. Pour voir cela, on commence par introduire une notion propre aux systèmes dynamiques mesurables : l'ergodicité. On rappelle rapidement la définition et quelques propriétés importantes (on renvoie le lecteur au chapitre 1 de [100] pour une discussion plus détaillée). On dit qu'une mesure μ est ergodique[2] pour $(X, \mathcal{B}, T)$ si les seuls éléments B de $\mathcal{B}$ qui vérifient $T^{-1}B = B$ sont ceux de mesure 0 ou 1. On vérifie que μ est ergodique si et seulement si pour toute f dans $L^1(\mu)$ vérifiant $f(x) = f \circ T(x)$ presque partout, f est constante presque partout (p.p.). On rappelle aussi que l'on a le théorème ergodique de Birkhoff :

Théorème 1.1 (Théorème ergodique de Birkhoff)**.** *Soient $T : (X, \mathcal{B}, \mu) \to (X, \mathcal{B}, \mu)$ une fonction mesurable et f un élément de $L^1(\mu)$. La quantité $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j x)$ converge μ-presque partout vers une fonction f^* de $L^1(\mu)$ vérifiant $f^* \circ T = f^*$ et $\int_X f d\mu = \int_X f^* d\mu$.*

En particulier, dans le cas d'une mesure ergodique le théorème nous dit que

$$\forall f \in L^1(\mu),\ \mu - \text{p.p.}\ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(x) = \int_X f d\mu.$$

Remarque.

1. Cette égalité nous dit que pour les mesures ergodiques, les moyennes temporelles (le long d'une trajectoire) sont presque sûrement égales à la moyenne spatiale sur tout X. On peut montrer que cette propriété est une définition équivalente de l'ergodicité.
2. Dans le cas où T est inversible, on peut appliquer ce théorème à T^{-1} et vérifier que la fonction $\tilde{f}^*$ invariante par T^{-1} que l'on obtient est égale à f^* μ-presque partout.
3. Cette propriété peut être vue comme une loi des grands nombres dans le cas de l'étude des systèmes dynamiques. On peut aussi définir la notion de mélange (fort) qui dit que pour tous boréliens A et B, les événements A et $T^{-n}B$ deviennent indépendants. Précisément, on dit que (X, T, μ) est mélangeant si pour tous boréliens A et B, $\lim_{n\to+\infty} \mu(A \cap T^{-n}B) = \mu(A)\mu(B)$. On vérifie que cette propriété implique l'ergodicité.

On peut aussi parler d'ergodicité pour les systèmes dynamiques à temps continu. Dans ce cadre, la propriété de Birkhoff (qui permet aussi de définir l'ergodicité) s'écrit :

$$\forall f \in L^1(\mu),\ \mu - \text{p.p.}\ \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f \circ \varphi^t(x) dt = \int_X f d\mu.$$

Considérons maintenant un espace métrique compact (X, d) muni de la σ-algèbre des boréliens $\mathcal{B}(X)$. L'ensemble $\mathcal{M}(X)$ des mesures boréliennes de probabilité sur X est compact pour la topologie faible-$\star$ (théorème 6.5 dans [100]). Si on note $\mathcal{M}(X, T)$ le sous-ensemble des mesures boréliennes de probabilité T-invariante, on a le résultat suivant (théorèmes 6.9 et 6.10 dans [100]) :

Théorème 1.2. *Si T est une transformation continue d'un espace métrique compact (X, d), alors $\mathcal{M}(X, T)$ est un sous-ensemble non vide et compact de $\mathcal{M}(X)$. De plus, $\mathcal{M}(X, T)$ est un ensemble convexe dont les points extrémaux sont exactement les mesures ergodiques de $(X, \mathcal{B}(X), T)$.*

Ce théorème nous dit donc que tout système dynamique topologique fournit automatiquement une famille de mesures invariantes (et par conséquent de systèmes dynamiques mesurables). En plus, parmi ces mesures invariantes, les mesures ergodiques jouent un rôle particulier. En effet, si on note $E(X, T)$ l'ensemble des points extrémaux de $\mathcal{M}(X, T)$ et si on fixe μ un point de $\mathcal{M}(X, T)$, alors il existe une unique mesure de probabilité τ_μ sur l'espace compact métrisable $\mathcal{M}(X, T)$ muni de la tribu des boréliens vérifiant $\tau_\mu(E(X, T))$ et telle que pour toute f continue sur X,

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \int_{E(X,T)} \left(\int_X f(x) de(x) \right) d\tau_\mu(e).$$

[2]Pour motiver cette définition, on remarque que si $B = T^{-1}B$ alors $X \backslash B = T^{-1}(X \backslash B)$. En particulier, si $0 < \mu(B) < 1$, on peut alors se ramener à l'étude de deux systèmes plus simples : celui donné par $T_{|B}$ et celui donné par $T_{|X\backslash B}$.

On l'écrit de manière compacte sous la forme $\mu = \int_{E(X,T)} e d\tau_\mu(e)$. Cette décomposition repose sur un théorème d'analyse fonctionnelle dû à Choquet (voir annexe A dans [52]). On souligne que dans cette définition τ_μ dépend de μ et on renvoie au chapitre 13 de [31] pour une description plus détaillée (et plus concrète) de cette décomposition. En théorie, comprendre les mesures ergodiques, c'est donc comprendre toutes les mesures de probabilité invariantes. On conclut ce premier paragraphe en donnant quelques exemples concrets de systèmes dynamiques.

Les automorphismes linéaires du tore

Un premier exemple de système dynamique est celui des automorphismes linéaires du tore $\mathbb{T}^m := \mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$. Une matrice A de $M(m,\mathbb{R})$ définit un automorphisme du tore si et seulement si A est un élément de $GL(m,\mathbb{Z})$ (groupe des matrices inversibles à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et d'inverse à coefficients dans $\mathbb{Z}$, i.e. $\det(A) = \pm 1$). Pour une matrice A de cette forme, $(\mathbb{T}^m, A)$ définit un système dynamique topologique. Des exemples de mesures invariantes par A sont par exemple les mesures de Dirac portées par les orbites périodiques de A (δ_0 par exemple) et la restriction de la mesure de Lebesgue Leb sur le tore (qu'on peut identifier à la mesure de Haar pour la structure de groupe sur $\mathbb{T}^m$). Pour $(\mathbb{T}^m, A, \text{Leb})$, on a la caractérisation suivante de l'ergodicité (corollaire 1.10 dans [100]) :

$$\text{Leb est ergodique pour } (\mathbb{T}^m, A) \;\Leftrightarrow\; A \text{ n'a aucune valeur propre racine de l'unité.}$$

En particulier, si toutes les valeurs propres ont un module différent de 1 (on parle alors d'automorphismes hyperboliques du tore), la mesure de Lebesgue sera ergodique.

Le flot géodésique d'une variété compacte

Un deuxième exemple qui sera au centre d'une bonne partie de la thèse est celui du flot géodésique sur une variété riemannienne M compacte, connexe, lisse, sans bords et de dimension d. Des rappels plus précis sur la définition d'un flot géodésique (ainsi que ses propriétés) se trouvent dans l'annexe A. Le flot géodésique φ_H^t représente l'évolution d'un point $\rho = (x,\xi)$ de l'espace des phases T^*M sous l'influence de l'Hamiltonien

$$H(x,\xi) := \frac{\|\xi\|_x^2}{2}.$$

Le couple (T^*M, φ_H^t) définit donc un système dynamique topologique à temps continu (d'espace des phases non compact). Une des premières propriétés du flot géodésique est qu'il préserve les couches d'énergie $H = \text{Cste}$. Ainsi, pour $\lambda > 0$, on peut aussi s'intéresser au système dynamique $(\mathcal{E}(\lambda), \varphi_H^t)$ où $\mathcal{E}(\lambda) := H^{-1}(\lambda)$ est bien un espace compact. D'après ce qui précède, il existe donc une famille de systèmes dynamiques mesurables associés. Une mesure naturelle sur T^*M est la mesure de Liouville $dxd\xi$ donnée par la forme symplectique canonique. On peut montrer que la mesure $dxd\xi$ est invariante par le flot géodésique. La mesure $dxd\xi$ n'est pas une mesure de probabilité sur T^*M. Par contre, on peut désintégrer cette mesure selon les couches d'énergie $\mathcal{E}(\lambda)$ pour $\lambda > 0$ afin d'obtenir une famille de mesures de probabilité L_λ à support dans $\mathcal{E}(\lambda)$. Chacune des mesures ainsi définies est aussi φ_H^t-invariante. Pour tout $\lambda > 0$, on a donc défini le système dynamique mesurable à temps continu $(\mathcal{E}(\lambda), \varphi_H^t, L_\lambda)$. Dans la suite, on notera souvent (S^*M, g^t, L) le système dynamique mesurable correspondant à la couche d'énergie $\lambda = 1/2$. Pour $\lambda > 0$ fixé, s'il existe une géodésique périodique γ, on peut aussi prendre comme élément de $\mathcal{M}(\mathcal{E}(\lambda), \varphi_H)$ la mesure de Lebesgue le long de cette géodésique fermée[3].

Le décalage sur les espaces symboliques

Un dernier exemple est celui du décalage sur les espaces symboliques qui est fondamental en théorie des systèmes dynamiques. En effet, pour comprendre le comportement d'un système

[3] On souligne qu'une telle mesure est ergodique.

dynamique, il faut comprendre l'évolution d'un point de l'espace X sous la dynamique T. Plus précisément, on veut comprendre sa trajectoire. Or, comprendre l'évolution d'un point x de X par T, c'est connaître $(x, Tx, T^2x, \cdots)$. Pour cela, on peut (par exemple) se donner une partition $X := \sqcup_{i=1}^{K} P_i$ et on associe alors à x l'élément $\pi(x) = (x_0, x_1, x_2, \cdots)$ de $\Sigma := \{1, \cdots, K\}^{\mathbb{N}}$ où x_i est l'unique indice tel que $T^i x \in P_{x_i}$. Si on note $\sigma((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ le décalage sur Σ, on obtient un nouveau système dynamique relié au premier par la relation $\pi \circ T = \sigma \circ \pi$. Ce codage symbolique de notre système dynamique nous montre qu'une manière de comprendre les trajectoires de T peut consister à se ramener à l'étude d'un système symbolique.
Après cette première observation, on fixe un entier $K \geq 2$ (sans référence à une partition ou à un quelconque système dynamique) et on rappelle quelques propriétés des éléments de $\mathcal{M}(\Sigma)$ (et de $\mathcal{M}(\Sigma, \sigma)$). On note $(\Sigma, \mathcal{B})$ l'espace mesurable muni de la σ-algèbre produit canonique (i.e. associée à la σ-algèbre de l'ensemble des parties $\mathcal{P}(\{1, \cdots, K\})$ de $\{1, \cdots, K\}$). Supposons maintenant qu'on se donne une famille de nombres réels $p_n(\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1})$ (pour tout entier $n \geq 1$ et tout α_i dans $\{1, \cdots, K\}$) vérifiant

$$p_n(\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}) \geq 0,\ \sum_{j=1}^{k} p_1(j) = 1 \text{ et } p_n(\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}) = \sum_{j=1}^{K} p_{n+1}(\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}, j).$$

Si on définit la mesure μ sur les rectangles élémentaires $[\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}] := \{x \in \Sigma : x_0 = \alpha_0, \cdots, x_{n-1} = \alpha_{n-1}\}$ par

$$\mu([\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}]) := p_n(\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}),$$

alors Kolmogorov a montré que μ vérifie les conditions de compatibilité nécessaires pour s'étendre en un élément de $\mathcal{M}(\Sigma)$ [100]. Si en plus les nombres $p_n(.)$ vérifient pour tout entier $n \geq 1$ la propriété

$$p_n(\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}) = \sum_{j=1}^{K} p_{n+1}(j, \alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}),$$

alors la mesure μ définit un élément de $\mathcal{M}(\Sigma, \sigma)$. À titre d'exemple, si on revient à notre point de départ (à savoir le codage du système dynamique (X, T)), on peut associer à tout élément μ de $\mathcal{M}(X, T)$ la famille de nombres réels $p_n(\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}) := \mu(P_{\alpha_0} \cap \cdots T^{-(n-1)} P_{\alpha_{n-1}})$. Par T-invariance de μ, on vérifie que toutes les relations précédentes sont satisfaites et on a bien associé à un élément de $\mathcal{M}(X, T)$ un élément de $\mathcal{M}(\Sigma, \sigma)$. Dans la suite de la thèse (par exemple au regard de la définition de Kolmogorov de l'entropie ou du paragraphe 6.4.2), on verra que cette interprétation symbolique d'un système dynamique s'avèrera utile.

Remarque. On n'a présenté le décalage sur les espaces symboliques que dans le cas de $\Sigma := \{1, \cdots, K\}^{\mathbb{N}}$, on peut étendre nos définitions pour le décalage inversible sur l'espace $\{1, \cdots, K\}^{\mathbb{Z}}$.

1.2 Entropie d'un système dynamique

Maintenant qu'on a introduit la notion de système dynamique, on présente une quantité permettant de caractériser la complexité d'un système dynamique : l'entropie[4]. Il y a de nouveau un point de vue topologique et un point de vue mesurable (qui sont liés). L'idée est de définir un nombre réel positif qui satisfera le principe suivant : 'plus le système dynamique est complexe (chaotique), plus son entropie est élevée'. Dans ce paragraphe, on présentera plusieurs définitions (toutes équivalentes) de cette quantité. L'ordre des définitions n'est pas l'ordre historique[5] : on a préféré partir d'une vision plus géométrique (avec le formalisme de Bowen) et finir avec la définition générale de Kolmogorov Sinai (issue de la théorie de l'information). Il existe encore d'autres définitions et extensions du concept d'entropie que nous ne présenterons pas ici (voir [59], [79] pour plus de références).

[4]On introduit de manière plus générale la notion de pression d'un système dynamique dans l'annexe B.

[5]Pour un résumé de l'histoire de la notion d'entropie, on renvoie le lecteur à l'article [59] de Katok à l'occasion du cinquantenaire de la définition de l'entropie par Kolmogorov.

1.2.1 Une approche 'géométrique'

Dans ce paragraphe, on considère (X,T) un système dynamique topologique (en particulier X est métrique et compact). Pour comprendre la complexité d'un tel système dynamique, on peut étudier à quelle vitesse deux points proches se séparent sous l'action de T. Plus cette vitesse sera élevée, plus on on pourra dire que le système dynamique est complexe. Pour étudier cette séparation des trajectoires, on introduit pour un entier n et un réel $\delta > 0$ fixés la (δ, n)-boule de Bowen :

$$B(x,\delta,n) := \left\{ y \in X : \forall\ 0 \leq k \leq n-1,\ d(T^k x, T^k y) < \delta \right\}.$$

Cette boule représente l'ensemble des points qui restent δ-proches de x jusqu'au temps $n-1$ de l'évolution par T. On fixe maintenant un sous-ensemble fermé F de X : on dit que $E \subset F$ est (δ, n)-séparé si pour x et y appartenant à E, $x \in B(y,\delta,n)$ implique $x = y$. En d'autres termes, E est un ensemble (fini) de points de F qui restent loin l'un de l'autre jusqu'au temps n. On note $s_n(F,\delta)$ le cardinal maximal d'un ensemble (δ,n)-séparé de F. On appelle entropie topologique de (F,T) (chapitre 7 de [100])

$$h_{top}(T,F) := \lim_{\delta \to 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log s_n(F,\delta).$$

C'est un élément de $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ qui décrit le taux de croissance exponentielle du cardinal d'un ensemble (δ,n)-séparé de F. Plus ce nombre est grand, plus les éléments de X sont vite séparés sous l'évolution par T. On appelle entropie topologique de (X,T) la quantité $h_{top}(T,X)$. On remarque qu'on aurait pu prendre le nombre minimum de (δ,n)-boules nécessaires pour recouvrir F (la définition serait alors équivalente). On renvoie le lecteur au chapitre 7 de [100] pour une discussion plus détaillée sur l'entropie topologique.

Exemple. Si on considère une variété riemannienne compacte de dimension d et une transformation lipschitzienne $T : M \to M$ de constante de Lipschitz $C_{Lip}(T)$, alors

$$h_{top}(T,M) \leq \max\{0, d \log C_{Lip}(T)\}.$$

Si $C_{Lip}(T) \leq 1$, alors $d(Tx,Ty) \leq d(x,y)$ pour tout (x,y) dans $M \times M$ et clairement $h_{top}(T,M) = 0$. Supposons donc que $C_{Lip}(T) > 1$ et montrons alors que $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log s_n(M,\delta) \leq d \log C_{Lip}(T)$. Pour cela, on fixe une famille de cartes $\mathcal{C}^1$ sur M : $f_j : B_\infty(0,3) \to M$, $1 \leq j \leq K$ ($B_\infty(0,r)$ est la boule de rayon r pour la norme infinie sur $\mathbb{R}^d$). On suppose aussi que $M \subset \cup_{j=1}^K f_j(B(0,1))$. On choisit $C > 0$ vérifiant $d(f_j(u), f_j(v)) \leq B\|u-v\|_\infty$ pour tout (u,v) dans $B_\infty(0,2) \times B_\infty(0,2)$ et tout $1 \leq j \leq K$. On fixe maintenant $0 < \epsilon < 1$ et on définit un sous-ensemble $E(\delta)$ de $B(0,2)$ de la manière suivante $E(\epsilon) := \epsilon\mathbb{Z}^d \cap B_\infty(0,2)$. Cet ensemble est de cardinal au plus $(4/\epsilon)^d$ et permet de définir un sous-ensemble de M de cardinal au plus $(4/\epsilon)^d$ en posant $F(\epsilon) := \cup_{j=1}^K f_j(E(\epsilon))$. Pour tout entier k et tous points x et y dans $F(\epsilon)$, on a alors $d(T^k x, T^k y) \leq CC_{Lip}(T)^k \epsilon$. On fixe maintenant $\delta > 0$ et $\epsilon = \delta(2CC_{Lip}(T)^n)^{-1}$ et on note $F(n,\delta)$ le sous-ensemble correspondant. Pour tous x et y dans $F(n,\delta)$ et tout $0 \leq k \leq n-1$, on a $d(T^k x, T^k y) \leq \frac{\delta}{2}$. Soit maintenant E un ensemble (δ,n)-séparé. On définit alors une application injective ϕ de E dans $F(n,\delta)$ en prenant $\phi(x)$ un point de $F(n,\delta)$ $\delta/2$-proche de x. En particulier, on a alors $s_n(M,\delta) \leq (4\delta^{-1}2CC_{Lip}(T)^n)^d$, ce qui permet de conclure.

Nous venons de définir la notion d'entropie pour un système dynamique topologique. Une quantité analogue peut-être définie pour un système dynamique mesurable. Dans ce cadre, l'entropie estimera ce que la mesure μ voit de la séparation des éléments de X sous l'action de T. Dans le cas d'un espace métrique X compact et d'une application continue T, une définition possible de l'entropie est donnée par le résultat suivant dû à Brin et Katok [23] :

Théorème 1.3 (Brin-Katok)**.** *Soient (X,T) un système dynamique topologique (à temps discret) et μ un élément de $\mathcal{M}(X,T)$. Alors, on a, pour μ presque tout x,*

$$h_{KS}(\mu,T,x) := \lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} \log \mu\left(B(x,\delta,n)\right) \ \textit{existe.}$$

De plus, $h_{KS}(\mu, T, x)$ est un élément T-invariant de $L^1(\mu)$ qui vérifie μ p.p.

$$h_{KS}(\mu, T, x) = \lim_{\delta \to 0} \liminf_{n \to +\infty} -\frac{1}{n} \log \mu \left(B(x, \delta, n) \right).$$

On appelle entropie de Kolmogorov-Sinai la quantité $h_{KS}(\mu, T) := \int_X h_{KS}(\mu, T, x) d\mu(x)$.

Le théorème précédent nous dit que l'entropie décrit le taux moyen de décroissance exponentielle du μ-volume des (δ, n)-boules de Bowen. Cette définition d'entropie coïncide avec celle que l'on donnera pour un système dynamique mesurable plus général au paragraphe 1.2.2 [23]. On utilise aussi la terminologie entropie métrique. On peut noter que si μ est portée par une orbite périodique de T, alors $h_{KS}(\mu, T) = 0$ et que dans le cas μ ergodique, $h_{KS}(\mu, T, x) = h_{KS}(\mu, T)$ μ-presque partout.
Pour conclure, on voudrait mentionner que ces deux notions d'entropie sont reliées par ce qu'on appelle des principes variationnels. Le premier lien entre ces deux quantités est donné par

$$h_{top}(T, X) = \sup\{h_{KS}(\mu, T) : \mu \in \mathcal{M}(X, T)\}.$$

On peut trouver une preuve de ce résultat dans [100] (chapitre 8). Dans [79] (chapitre 4), on peut aussi trouver une preuve du principe variationnel réciproque suivant (dû à Bowen) :

$$\text{Si } \mu \text{ est ergodique, } \ h_{KS}(\mu, T) = \inf\{h_{top}(T, F) : F \text{ mesurable et } \mu(F) = 1\}.$$

En anticipant sur le caractère affine de l'entropie, on peut noter que cette dernière égalité (combinée avec la représentation intégrale $\mu = \int_{E(X,T)} e d\tau_\mu(e)$) permet de donner une définition alternative (mais peu maniable) de l'entropie métrique en posant $h_{KS}(\mu, T) := \int_{E(X,T)} h_{KS}(e, T) d\tau_\mu(e)$.

1.2.2 La définition de Kolmogorov-Sinai

Dans ce paragraphe, nous allons présenter la construction de Kolmogorov-Sinai de l'entropie d'un système dynamique mesurable. Cette définition est celle que l'on sera le plus souvent amené à manipuler dans la suite. Elle est valable pour un système quelconque (sans hypothèse sur la topologie de X) et dans le cas des éléments de $\mathcal{M}(X, T)$ d'un système dynamique topologique, elle coïncide avec la définition précédente [23]. Pour cette seconde approche de l'entropie, on essaiera d'adopter un point de vue plus 'probabiliste' (voir [62], [100]) et on renvoie le lecteur au chapitre 4 de cette référence pour plus de détails.

Entropie d'une partition

On considère $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace de probabilité. On se donne une partition $\mathcal{P} := \{P_1, \cdots, P_K\}$ de X par des éléments de $\mathcal{B}$. D'un point de vue probabiliste, on peut penser à cette partition comme les événements possibles d'une expérience. De cette manière, $\mu(P_i)$ représente la probabilité de l'événement $\{x \in P_i\}$. On peut essayer de définir une fonction qui mesurera l'incertitude quant à l'issue de l'expérience. C'est cette fonction qu'on appellera entropie : on la notera $H(\mu, \mathcal{P})$. Un bon candidat pour mesurer l'incertitude de l'expérience ne dépendra que du K-uplet $(\mu(P_1), \cdots, \mu(P_K))$. On va essayer de rappeler quels types de bonnes propriétés doit satisfaire cette fonction $H(\mu, \mathcal{P})$.
Pour cela, on définit $\Delta_K := \{(p_1, \cdots, p_K) \in \mathbb{R}^K : p_i \geq 0, \sum_{i=1}^K p_i = 1\}$. On veut construire une fonction (auxiliaire) $\overline{H} : \cup_{K=1}^\infty \Delta_K \to \mathbb{R}$ que l'on pourra utiliser pour définir $H(\mu, \mathcal{P})$ pour toute partition de $(X, \mathcal{B}, \mu)$. On attend de cette fonction qu'elle vérifie entre autres les propriétés suivantes :

- $\overline{H}(p_1, \cdots, p_K) \geq 0$ avec égalité si et seulement si l'un des p_i est égal à 1. Cela impose que si l'issue de l'expérience est certaine, alors l'incertitude sera nulle.
- $\overline{H}_{|\Delta_K}$ est continue et symétrique pour tout $K \geq 1$.
- L'incertitude de l'expérience est maximale dans le cas où tous les événements sont équiprobables. En d'autres termes, $\overline{H}_{|\Delta_K}$ doit atteindre son maximum en $(1/K, \cdots, 1/K)$.

– $\overline{H}(p_1, \cdots, p_K) = \overline{H}(p_1, \cdots, p_K, 0)$ pour tout élément de Δ_K.

On voudrait alors poser $H(\mu, \mathcal{P}) := \overline{H}(\mu(P_1), \cdots, \mu(P_K))$ mais ces différentes conditions seules ne permettent pas d'assurer l'unicité de la fonction H. On va définir une condition supplémentaire qui assurera (modulo constante) l'unicité. On considère deux partitions $\mathcal{P} := \{P_1, \cdots, P_K\}$ et $\mathcal{Q} := \{Q_1, \cdots, Q_L\}$ de X par des éléments de $\mathcal{B}$. On sait que si l'événement $\{x \in Q_j\}$ a eu lieu, alors l'événement $\{x \in P_i\}$ a lieu avec la probabilité $\mu(P_i \cap Q_j)/\mu(Q_j)$. Ainsi, l'incertitude de l'expérience $\mathcal{P}$ connaissant Q_j sera donnée par la quantité $\overline{H}\left(\frac{\mu(P_1 \cap Q_j)}{\mu(Q_j)}, \cdots, \frac{\mu(P_K \cap Q_j)}{\mu(Q_j)}\right)$. On définit alors l'incertitude de l'expérience $\mathcal{P}$ connaissant l'issue de l'expérience $\mathcal{Q}$ comme

$$H(\mu, \mathcal{P}/\mathcal{Q}) := \sum_{j=1}^{L} \mu(Q_j) \overline{H}\left(\frac{\mu(P_1 \cap Q_j)}{\mu(Q_j)}, \cdots, \frac{\mu(P_K \cap Q_j)}{\mu(Q_j)}\right). \tag{1.1}$$

Pour deux partitions $\mathcal{P} := \{P_1, \cdots, P_K\}$ et $\mathcal{Q} := \{Q_1, \cdots, Q_L\}$, on définit la partition raffinée

$$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} := \{P_i \cap Q_j : \ 1 \leq i \leq K, \ 1 \leq j \leq L\}.$$

La dernière condition que l'on impose à notre fonction H est de satisfaire la relation suivante :

$$H(\mu, \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) = H(\mu, \mathcal{Q}) + H(\mu, \mathcal{P}/\mathcal{Q}). \tag{1.2}$$

Cette dernière condition impose que l'incertitude quant à l'issue des deux expériences $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ est égale à la somme de l'incertitude due à l'expérience $\mathcal{Q}$ et de celle de l'expérience $\mathcal{P}$ sachant $\mathcal{Q}$. Sous toutes ces conditions, on peut montrer qu'il existe $\lambda > 0$ telle que

$$\forall \ \mathcal{P} \text{ partition mesurable finie de } (X, \mathcal{B}, \mu), \ H(\mu, \mathcal{P}) = -\lambda \sum_{j=1}^{K} \mu(P_j) \log \mu(P_j),$$

avec la convention $0 \log 0 = 0$ [100]. On choisira d'appeler entropie de la partition $\mathcal{P}$ pour la mesure μ la quantité :

$$H(\mu, \mathcal{P}) := -\sum_{j=1}^{K} \mu(P_j) \log \mu(P_j). \tag{1.3}$$

Du point de vue de la physique statistique, cette définition est bien connue des physiciens, en particulier depuis les travaux de Boltzmann (fin du XIX^e siècle). En effet, si on se donne un système de particules dans un espace de phases X que l'on partitionne avec une partition $\mathcal{P}$ et si l'on note p_i la proportion de particules dans chacun des éléments de la partition, Boltzmann décrit dans ses travaux l'entropie du système de particules (i.e. l'incertitude sur l'état du sytème) par $-\sum_i p_i \log p_i$. D'un point de vue mathématique, la notion développée dans ce paragraphe correspond à une branche de la théorie des probabilités connue sous le nom de théorie de l'information qui remonte aux travaux de Shannon [94] (1948).

On remarque que la fonction $x \mapsto -x \log x$ est continue et strictement concave sur $[0, 1]$. On peut montrer diverses propriétés de cette entropie [100] (chapitre 4). En particulier, pour deux partitions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ de X, on dit que $\mathcal{Q}$ est un raffinement de $\mathcal{P}$ (noté $\mathcal{P} \leq \mathcal{Q}$) si tout élément de $\mathcal{P}$ s'écrit comme réunion d'éléments de $\mathcal{Q}$. En utilisant la propriété de concavité de $x \mapsto -x \log x$ et la propriété (1.2), on peut alors prouver la propriété suivante :

$$\mathcal{P} \leq \mathcal{Q} \Rightarrow H(\mu, \mathcal{P}) \leq H(\mu, \mathcal{Q}). \tag{1.4}$$

En utilisant aussi la concavité et la propriété 1.2, on peut montrer la propriété suivante de sous-additivité :

$$H(\mu, \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \leq H(\mu, \mathcal{P}) + H(\mu, \mathcal{Q}). \tag{1.5}$$

Entropie d'un système dynamique mesurable

La définition (1.3) de l'entropie d'une partition est valable en toute généralité pour un espace de probabilité $(X, \mathcal{B}, \mu)$. On va maintenant considérer le cas particulier d'un système dynamique mesurable (X, μ, T) et définir une quantité qui prend en compte la dynamique. On se donne une partition finie $\mathcal{P} := \{P_1, \cdots, P_K\}$ de X par des éléments de $\mathcal{B}$ et on définit la partition raffinée sous l'action de T

$$\vee_{j=0}^{n-1} T^{-j}\mathcal{P} := \left\{ P_{\alpha_0} \cap T^{-1}P_{\alpha_1} \cdots \cap T^{-(n-1)}P_{\alpha_{n-1}} : \ 1 \leq \alpha_j \leq K \right\}.$$

Cela définit encore une partition de X et les événements associés à l'expérience correspondante sont $\{x \in P_{\alpha_0}, \cdots, T^{n-1}x \in P_{\alpha_{n-1}}\}$. Le principe est qu'on considère l'expérience donnée par $\mathcal{P}$, qu'on la transforme n fois par l'action de T et qu'on définit alors l'incertitude pour l'issue de ces n expériences combinées

$$H_n(\mu, T, \mathcal{P}) := H\left(\mu, \vee_{j=0}^{n-1} T^{-j}\mathcal{P}\right).$$

Sous forme explicite, cela se récrit

$$H_n(\mu, T, \mathcal{P}) = -\sum_{|\alpha|=n} \mu\left(P_{\alpha_0} \cdots \cap T^{-(n-1)}P_{\alpha_{n-1}}\right) \log \mu\left(P_{\alpha_0} \cdots \cap T^{-(n-1)}P_{\alpha_{n-1}}\right).$$

La propriété de sous-additivité (1.5) combinée avec l'invariance de la mesure nous dit que

$$H_{n+m}(\mu, T, \mathcal{P}) \leq H_n(\mu, T, \mathcal{P}) + H\left(\mu, T^{-n} \vee_{j=0}^{m-1} T^{-j}\mathcal{P}\right) = H_n(\mu, T, \mathcal{P}) + H_m(\mu, T, \mathcal{P}).$$

Le fait que la suite $n \mapsto H_n(\mu, T, \mathcal{P})$ soit sous-additive assure l'existence de la limite

$$h_{KS}(\mu, T, \mathcal{P}) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_n(\mu, T, \mathcal{P}) = \inf \frac{1}{n} H_n(\mu, T, \mathcal{P}).$$

Cette quantité représente la limite pour n grand de l'incertitude moyenne (au temps n) de notre expérience. Dans [62], Khinchin appelle cette quantité entropie source (1956). Sous cette forme, les résulats précédents sont contenus dans l'article de Khinchin [62] qui donne une preuve de différents résultats de théorie de l'information annoncés par Shannon. En 1958, Kolmogorov découvre une propriété fondamentale de cette entropie qui va en faire un objet de première importance pour l'étude des systèmes dynamiques [64] :

Théorème 1.4 (Kolmogorov)**.** *Soit $(X, T, \mu, \mathcal{B})$ un système dynamique mesurable. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux partitions finies mesurables de X. On note $\mathcal{B}(\mathcal{P})$ (resp. $\mathcal{B}(\mathcal{Q})$) la sous-σ-algèbre (finie) engendrée par $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{Q}$) et $\vee_{i=0}^{\infty} T^{-i}\mathcal{B}(\mathcal{P})$ la plus petite σ-algèbre contenant tous les $T^{-i}\mathcal{B}(\mathcal{P})$ (resp. $\mathcal{Q}$). Si $\vee_{i=0}^{\infty} T^{-i}\mathcal{B}(\mathcal{P})$ et $\vee_{i=0}^{\infty} T^{-i}\mathcal{B}(\mathcal{Q})$ sont égales (modulo 0) à la σ-algèbre $\mathcal{B}$, alors $h_{KS}(\mu, T, \mathcal{P}) = h_{KS}(\mu, T, \mathcal{Q})$.*

L'importance de ce résultat est qu'il met en évidence le caractère intrinsèque de l'entropie source de Khinchin pour des partitions génératrices. Grâce à ce résultat, l'entropie source définie par la théorie de l'information décrit bien le système dynamique $(X, T, \mu, \mathcal{B})$ indépendamment du choix de la partition $\mathcal{P}$. En 1959, Sinai rend cette notion d'entropie plus maniable en montrant que pour une partition $\mathcal{P}$ vérifiant la propriété du théorème de Kolmogorov, la quantité $h_{KS}(\mu, T, \mathcal{P})$ est égale à la borne supérieure de la quantité $h_{KS}(\mu, T, \mathcal{Q})$ (sur l'ensemble des partitions $\mathcal{Q}$ mesurables et finies). On appelle alors entropie de Kolmogorov-Sinai (ou métrique) du système dynamique mesurable (X, μ, T) la quantité

$$h_{KS}(\mu, T) := \sup\{h_{KS}(\mu, T, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partition mesurable finie de } X\}. \tag{1.6}$$

En particulier, cette quantité est un élément de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$[6].

[6]Dans la suite de la thèse, les systèmes dynamiques que l'on considèrera seront de la forme (M, T) avec M variété riemanienne compacte et T lisse. En particulier, ils sont d'entropie topologique finie (voir l'exemple du paragraphe 1.2.1) et d'après le principe variationnel, $h_{KS}(\mu, T) < +\infty$.

Remarque. Notons que s'il existe des constantes $C > 0$ et $h_0 \geq 0$ telles que, pour tout entier $n \geq 1$ et tout n-uplet $(\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1})$, la probabilité $\mu(P_{\alpha_0} \cap T^{-1}P_{\alpha_1} \cdots \cap T^{-(n-1)}P_{\alpha_{n-1}})$ de l'événement $\{x \in P_{\alpha_0}, \cdots, T^{n-1}x \in P_{\alpha_{n-1}}\}$ est inférieure à Ce^{-nh_0}, alors l'entropie vérifie : $h_{KS}(\mu, T) \geq h_0$. De cette manière, l'entropie décrit le taux moyen de décroissance exponentielle de la probabilité de l'événement $\{x \in P_{\alpha_0}, \cdots, T^{n-1}x \in P_{\alpha_{n-1}}\}$. Plus ce taux sera élevé, plus le comportement de notre système dynamique sera imprévisible.

Cette interprétation est formulée de manière plus précise par le théorème suivant :

Théorème 1.5 (Shannon-McMillan-Breiman)**.** *Soient (X, T, μ) un système dynamique mesurable et $\mathcal{P}$ une partition (de cardinal fini) de X par des éléments de $\mathcal{B}$. Pour $x \in X$, on note $B_n(x)$ l'unique élément de $\vee_{j=0}^{n-1} T^{-j}\mathcal{P}$ auquel appartient x. Alors, on a*

$$\mu \text{ p.p., } \limsup_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log\mu\left(B_n(x)\right) = \liminf_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log\mu\left(B_n(x)\right).$$

On note cette quantité $h(\mu, T, \mathcal{P}, x)$. C'est un élément de $L^1(\mu)$ qui est T-invariant et vérifie

$$h_{KS}(\mu, T, \mathcal{P}) = \int_X h(\mu, T, \mathcal{P}, x) d\mu(x).$$

Ce théorème est l'analogue de celui de Brin et Katok 1.3 : le rôle des (δ, n)-boules est ici joué par les éléments de la partition raffinée. On peut par exemple trouver une preuve de ce théorème dans [77]. Notons que si μ est ergodique alors, on a, μ-presque partout,

$$h_{KS}(\mu, T, \mathcal{P}) = \limsup_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log\mu\left(B_n(x)\right) = \liminf_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log\mu\left(B_n(x)\right).$$

Exemples

Avant d'énoncer quelques propriétés importantes de l'entropie, calculons-la sur deux exemples élémentaires. Pour le premier exemple, supposons que x est un point fixe de T. Du point de vue de δ_x, le système dynamique est réduit à l'identité et son caractère chaotique est nul. On peut utiliser directement les définitions et on trouve que $h_{KS}(\delta_x, T) = 0$. Le même raisonnement permet de montrer que l'entropie de (x, μ, T) est nulle si μ est portée par une orbite périodique de T. On peut considérer l'exemple des mesures de Bernoulli sur Σ. On se donne un couple $(p_1, \cdots, p_K)$ vérifiant $p_i \geq 0$ pour tout i et $\sum_{i=1}^K p_i = 1$. On définit la mesure

$$\mu^\Sigma([\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}]) = p_{\alpha_0} \cdots p_{\alpha_{n-1}}.$$

Toutes les conditions de compatibilité énoncées au paragraphe 1.1 sont vérifiées par cette définition. Cela permet de définir une mesure de probabilité σ-invariante de Σ. Si on prend la partition $\mathcal{P} := \{[i] : 1 \leq i \leq K\}$, alors on trouve

$$H_n(\mu^\Sigma, \sigma, \mathcal{P}) = -n\sum_{i=1}^K p_i \log p_i.$$

Ce qui nous donne alors que $h_{KS}(\mu^\Sigma, \sigma) \geq -\sum_{i=1}^K p_i \log p_i$. On montre qu'il y a égalité en utilisant le fait que $\vee_{i=0}^{+\infty} \sigma - i\mathcal{P}$ engendre la tribu produit sur Σ [100].

Quelques propriétés importantes de l'entropie

Pour conclure cette partie sur l'entropie, on voudrait énoncer quelques propriétés importantes de l'entropie. La première est la suivante :

Proposition 1.6. *Soit (X, μ, T) un système dynamique mesurable. On a*

$$\forall k \geq 1, h_{KS}(\mu, T^k) = k h_{KS}(\mu, T).$$

Si on suppose de plus que T est inversible, on a

$$\forall k \in \mathbb{Z}, h_{KS}(\mu, T^k) = |k| h_{KS}(\mu, T).$$

En particulier, pour T inversible, on a l'égalité $h_{KS}(\mu, T^{-1}) = h_{KS}(\mu, T)$. Une autre propriété importante (théorèmes 8.1 et 8.4 dans [100]) est le caractère affine de l'entropie dans le cas d'applications d'un espace métrique compact :

Théorème 1.7. *Soit (X, T) un système dynamique topologique. Soient μ_1 et μ_2 deux éléments de $\mathcal{M}(X, T)$ et p un réel de $[0, 1]$. On a*

$$h_{KS}(p\mu_1 + (1-p)\mu_2, T) = p h_{KS}(\mu_1, T) + (1-p) h_{KS}(\mu_2, T).$$

De plus, si μ est un élément de $\mathcal{M}(X, T)$ dont la décomposition selon les composantes ergodiques s'écrit $\mu = \int_{E(X,T)} e d\tau_\mu(e)$, alors on a

$$h_{KS}(\mu, T) = \int_{E(X,T)} h_{KS}(e, T) d\tau_\mu(e).$$

Pour conclure, nous voudrions étendre la définition d'entropie d'un système dynamique mesurable à temps discret à un système dynamique à temps continu. On se donne (X, μ, φ) un système dynamique à temps continu et on définit

$$h_{KS}(\mu, \varphi) := h_{KS}(\mu, \varphi^1),$$

où $h_{KS}(\mu, \varphi^1)$ est l'entropie du système dynamique à temps discret (X, μ, φ^1). Cette définition est bien cohérente grâce au théorème suivant dû à Abramov [2], [29] :

Théorème 1.8 (Abramov)**.** *Soit (X, μ, φ) un système dynamique mesurable à temps continu (inversible). Alors, on a*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ h_{KS}(\mu, \varphi^t) = |t| h_{KS}(\mu, \varphi^1),$$

où pour tout t, $h_{KS}(\mu, \varphi^t)$ est l'entropie du système dynamique à temps discret (X, μ, φ^t).

1.3 Entropie et exposants de Lyapunov

L'entropie nous a permis de mesurer le caractère imprévisible (la complexité) d'un système dynamique en évaluant la vitesse de séparation des points sous l'action de la dynamique. On va maintenant définir une classe de systèmes dynamiques de complexité élevée. Pour cela, on va se restreindre à une famille importante de systèmes dynamiques : celle des systèmes différentiables. On introduira la notion d'exposant de Lyapunov. Ceux-ci permettent en particulier de mesurer la vitesse de divergence exponentielle des trajectoires du système dynamique étudié. Leur existence et leur valeur sont directement responsables de la complexité du système.

1.3.1 Propriété d'Anosov

Difféomorphismes d'Anosov

On considère un système dynamique topologique (X, T), où X est donné par une variété riemannienne (que l'on suppose au moins $\mathcal{C}^1$). On suppose de plus que $T : X \to T(X) \subset X$ est un difféomorphisme[7] $\mathcal{C}^1$. On dit qu'un sous-ensemble Λ compact et T-invariant est hyperbolique s'il existe $0 < \lambda < 1$, $C > 0$ et une famille de sous-espaces vectoriels $E^s(x)$ et $E^u(x)$ de $T_x X$ (pour $x \in \Lambda$) vérifiant pour tout $x \in \Lambda$:

[7] Il s'agit d'un cas particulier de l'étude des systèmes dynamiques différentiables.

- $T_xX = E^s(x) \oplus E^u(x)$,
- $\forall v^s \in E^s(x),\ \forall n \geq 0,\ \|d_xT^n v^s\| \leq C\lambda^n \|v^s\|$,
- $\forall v^u \in E^u(x),\ \forall n \geq 0,\ \|d_xT^{-n} v^u\| \leq C\lambda^n \|v^u\|$,
- $d_xTE^s(x) = E^s(T(x))$ et $d_xTE^u(x) = E^u(T(x))$.

L'espace $E^s(x)$ s'appelle le sous-espace stable et $E^u(x)$ le sous-espace instable. On appelle les familles $\{E^s(x) : x \in \Lambda\}$ et $\{E^u(x) : x \in \Lambda\}$ les distributions stables et instables de X. Dans le cas où $X = \Lambda$, on dit que le système dynamique (X, T) vérifie la propriété d'Anosov. Par exemple, un difféomorphisme hyperbolique linéaire du tore $(\mathbb{T}^m, A)$ vérifie la propriété d'Anosov (dans ce cas, $E^s(x)$ est le sous-espace caractéristique correspondant aux valeurs propres de module strictement plus petit que 1). On peut montrer que les sous-espaces $E^s(x)$ et $E^u(x)$ dépendent continûment de x (proposition 5.2.1 dans [24]) et que l'on peut choisir une métrique $\mathcal{C}^1$ adaptée sur M de telle sorte que les conditions d'hyperbolicité sont satisfaites pour les constantes $C' = 1$ et $\lambda' = \lambda + \epsilon < 1$ (proposition 5.2.2 dans [24]). Au sens de l'entropie, ces systèmes dynamiques ont une complexité élevée puisque leur entropie topologique est strictement positive (exercice 5.4.3 dans [24]). La constante λ qui intervient dans la définition d'hyperbolicité est aussi reliée à la vitesse de séparation des points le long des variétés stables et instables. Résumons certaines propriétés de ces variétés stables et instables avec la proposition suivante (proposition 5.10.1 dans [24]) :

Proposition 1.9. *Soit (X, T) un système dynamique topologique $\mathcal{C}^1$ vérifiant la propriété d'Anosov. Il existe $0 < \lambda < 1$ et pour tout $x \in X$ une décomposition $T_xX = E^s(x) \oplus E^u(x)$ satisfaisant les propriétés suivantes :*

- *$d_xTE^s(x) = E^s(T(x))$ et $d_xTE^u(x) = E^u(T(x))$;*
- *$\forall v^s \in E^s(x),\ \forall v^u \in E^u(x),\ \|d_xTv^s\| \leq \lambda\|v^s\|$ et $\|d_xT^{-1}v^u\| \leq \lambda\|v^u\|$.*

Les propriétés suivantes sont alors satisfaites :

- *$W^s(x) := \{y \in X : d(T^n(x), T^n(y)) \to 0,$ quand $n \to \infty\}$ est une variété immergée qui définit la variété stable en x et on a pour la distance d^s le long de la variété stable : $\forall y \in W^s(x),\ d^s(T(x), T(y)) \leq \lambda d^s(x, y)$;*
- *$W^u(x) := \{y \in X : d(T^{-n}(x), T^{-n}(y)) \to 0,$ quand $n \to \infty\}$ est une variété immergée qui définit la variété instable en x et on a pour la distance d^u le long de la variété instable : $\forall y \in W^u(x),\ d^u(T^{-1}(x), T^{-1}(y)) \leq \lambda d^u(x, y)$;*
- *$T(W^s(x)) = W^s(T(x))$ et $T(W^u(x)) = W^u(T(x))$;*
- *$T_xW^s(x) = W^s(x)$ et $T_xW^u(x) = W^u(x)$.*

Finalement, on peut montrer que les difféomorphismes d'Anosov ont un comportement chaotique par rapport à la mesure volume sur la variété X grâce au théorème suivant :

Théorème 1.10 (Anosov)**.** *Soit T un difféomorphisme $\mathcal{C}^2$ vérifiant la propriété d'Anosov. Soit μ une mesure de densité continue par rapport à la mesure volume m de la variété riemannienne et appartenant à $\mathcal{M}(X, T)$. Alors la mesure μ est ergodique pour (X, T).*

Notons que l'existence d'une telle mesure n'est pas forcément vérifiée. On peut trouver une preuve de ce théorème dans le chapitre 6 de [24]. La stratégie générale (due à Hopf) consiste à considérer une fonction f qui est T-invariante et à montrer qu'elle est constante p.p. sur les variétés stables et instables. Il faut ensuite utiliser la structure produit de ces sous-variétés et vérifier qu'on peut appliquer un théorème de type Fubini pour montrer qu'elle est constante p.p. sur X. À cause du manque de régularité de la structure produit [22], ce dernier point nécessite un traitement particulièrement attentif. On souligne que la preuve permet en fait de montrer qu'un difféomorphisme d'Anosov vérifie aussi la propriété plus forte de mélange par rapport à toute mesure T-invariante de densité continue pour la mesure volume.

Propriété d'Anosov pour les flots

Notons qu'il existe un analogue de la propriété d'Anosov dans le cas des flots sur une variété riemannienne X. Pour cela, on considère le système dynamique topologique à temps continu (X, φ^t) où X est une variété riemannienne compacte de classe $\mathcal{C}^\infty$ (par simplicité et comme cela sera toujours le cas dans la suite de la thèse) et φ^t est aussi $\mathcal{C}^\infty$. On suppose que le flot n'a pas de

singularités sur X. Si on note $X(x)$ le vecteur unitaire tangent à l'orbite de φ^t, on dit qu'un sous-ensemble Λ compact et φ-invariant est hyperbolique s'il existe $0 < \lambda < 1$, $C > 0$ et une famille de sous-espaces $E^s(x)$ et $E^u(x)$ de T_xX (pour $x \in \Lambda$) vérifiant pour tout $x \in \Lambda$:

- $T_xX = \mathbb{R}X(x) \oplus E^s(x) \oplus E^u(x)$,
- $\forall v^s \in E^s(x),\ \forall t \geq 0,\ \|d_x\varphi^t v^s\| \leq C\lambda^t \|v^s\|$,
- $\forall v^u \in E^u(x),\ \forall t \geq 0,\ \|d_x\varphi^{-t} v^u\| \leq C\lambda^t \|v^u\|$,
- $d_x\varphi^t E^s(x) = E^s(\varphi^t(x))$ et $d_x\varphi^t E^u(x) = E^u(\varphi^t(x))$.

La différence notable avec les difféomorphismes est que le sous-espace tangent T_xX admet une direction neutre correspondant aux orbites du flot. On dit que le flot vérifie la propriété d'Anosov si $\Lambda = X$. Un exemple de flot de type Anosov est celui du flot géodésique d'une variété à courbure strictement négative [9], c'est-à-dire pour tout $\lambda > 0$, $(\mathcal{E}(\lambda), \varphi_H^t)$ (deuxième exemple du paragraphe 1.1). On souligne que les deux définitions sont similaires mais bien distinctes (en particulier (X, φ^1) n'est pas un difféomorphisme d'Anosov si $(X, (\varphi^t)_t)$ est un flot d'Anosov). Les flots d'Anosov vérifient toutefois le même type de propriétés que les difféomorphismes d'Anosov et en particulier, on peut montrer le résultat suivant d'ergodicité du flot par rapport à la mesure volume :

Théorème 1.11 (Anosov)**.** *Soit $(\varphi^t)_t$ un flot lisse vérifiant la propriété d'Anosov. Soit μ une mesure de densité continue par rapport à la mesure volume m de la variété riemannienne et appartenant à $\mathcal{M}(X, \varphi)$. Alors la mesure μ est ergodique pour (X, φ).*

Il faut cependant souligner que la propriété de mélange n'est pas vérifiée pour les flots d'Anosov (voir le paragraphe 1.4.1).

Un exemple de flot faiblement chaotique

Les systèmes dynamiques topologiques ayant la propriété d'Anosov vérifient toujours une propriété d'ergodicité par rapport à une mesure invariante de densité continue par rapport la mesure volume sur la variété (si celle-ci existe). Ce comportement chaotique vient essentiellement de la propriété plus forte d'uniforme hyperbolicité de notre système dynamique (c'est-à-dire que les constantes dans la définition de l'hyperbolicité sont uniformes sur X). D'une certaine manière, ces systèmes dynamiques sont fortement chaotiques. Mentionnons un exemple de système que l'on qualifiera de faiblement hyperbolique. On reviendra de manière plus détaillée sur cet exemple dans le paragraphe 6.9.1.

On a déjà dit qu'un exemple typique de flot ayant la propriété d'Anosov est celui du flot géodésique $(g^t)_t$ sur le fibré unitaire cotangent S^*M d'une variété à courbure strictement négative. On considère alors le flot dit faiblement hyperbolique (qui partage un certain de nombre de propriétés avec celui-ci) donné par le flot géodésique pour des surfaces à courbure négative ou nulle. Un premier point commun avec le cas Anosov est l'existence de sous-espaces stable et instable $E^s(\rho)$ et $E^u(\rho)$ pour tout point ρ de S^*M (voir paragraphe 6.9.1 pour une définition). Comme dans le cas uniformément hyperbolique, ces sous-espaces dépendent continûment du point ρ et sont préservés par $(d_\rho g^t)$. On souligne que cette propriété de continuité sera utilisée de manière cruciale dans le paragraphe 6.9 et n'est plus vraie si on suppose seulement que la surface est sans points conjugués [12]. Une différence notable avec le cas Anosov est que les sous-espaces $E^s(\rho)$ et $E^u(\rho)$ peuvent être confondus.

Comme dans le cas Anosov, la dilatation et la contraction selon les directions stable et instable sont contrôlées. Pour voir cela, on introduit l'équation de Ricatti le long de la géodésique $\gamma_\rho(t) := \pi g^t(\rho)$ (où $\pi : T^*M \to M$ est la projection sur M)

$$U'(t) + U^2(t) + K(\gamma_\rho(t)) = 0, \tag{1.7}$$

où $K(\gamma_\rho(t))$ est la courbure sectionnelle au point $\gamma_\rho(t)$. On note $U^s(\rho) \leq 0$ la solution stable de l'équation de Ricatti et $U^u(\rho) \geq 0$ la solution instable de l'équation de Ricatti (voir paragraphe 6.9.1 pour plus de détails). À titre d'exemple, si la courbure est constante négative égale à K, alors $U^s(t) = -\sqrt{-K}$ et $U^u(t) = \sqrt{-K}$. De manière générale, ces quantités permettent de contrôler la croissance de $d_\rho g^t$, i.e. il existe $C > 0$ telle que

– $\forall v^s \in E^s(\rho),\ \forall t,\ \|d_\rho g^t v^s\| \leq C \exp\left(\int_0^t U^s(g^r\rho)dr\right)\|v^s\|$,

– $\forall v^u \in E^u(\rho),\ \forall t,\ \|d_\rho g^t v^u\| \leq C \exp\left(\int_0^t U^u(g^r\rho)dr\right)\|v^u\|$.

Les taux de croissance ressemblent au cas hyperbolique à la différence qu'ici on autorise $\lambda = 1$. L'équation de Ricatti (1.7) et les propriétés de croissance de $\|d_\rho g^t v\|$ mettent bien en évidence le fait que le caractère hyperbolique dans le cas du flot géodésique est lié à la courbure de la variété. On souligne que les quantités U^s et U^u sont également bien définies pour des surfaces de type Anosov (elles le sont en fait pour toute surface sans points conjugués[8]). Sous ces hypothèses, on peut se demander ce que devient la propriété d'ergodicité. L'exemple du tore (muni de la métrique plate) nous montre qu'on ne peut pas avoir ergodicité dans le cas général. Un résultat de Hopf (théorème 4.2 dans [89]) nous dit toutefois que la seule métrique sans points conjugués sur le tore de dimension 2 est la métrique plate. On peut alors poser la question de l'ergodicité du flot géodésique pour des surfaces de courbure négative ou nulle de genre supérieur ou égal à 2. À notre connaissance, cette question est toujours ouverte mais on peut montrer un résultat légèrement plus faible. Pour cela, on introduit

$$V := \left\{\rho = (x,\xi) \in S^*M : \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t K_{\gamma_\rho(r)}(g^r\rho, g^r\rho')dr < 0,\ \forall \rho' \in S^*_xM \text{ orthogonal à } \rho\right\},$$

où $K_{\gamma_\rho(r)}$ est la courbure au point $\gamma_\rho(r)$ de M. On peut vérifier que cet ensemble est mesurable et invariant par le flot géodésique g^t. On peut récrire notre condition en fonction de la courbure sectionnelle $K(\gamma_\rho(r))$, i.e.

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t K_{\gamma_\rho(r)}(\rho,\rho')dr = \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t K(\gamma_\rho(r))dr.$$

On sait par le théorème de Birkhoff 1.1 que la quantité $1/t\int_0^t K(\gamma_\rho(r))dr$ admet L p.p. une limite $K^*(\rho)$ quand t tend vers l'infini vérifiant $\int K(\pi\rho)dL(\rho) = \int K^*(\rho)dL(\rho)$. Par le théorème de Gauss-Bonnet [46], on sait alors que pour les surfaces de genre supérieur ou égal à 2, cette quantité est strictement négative. Ainsi, on en déduit que $L(U) > 0$ dans ce cas. Dans [13], on peut trouver une preuve du résultat suivant utilisant la théorie des exposants de Lyapunov développée par Pesin :

Théorème 1.12 (Pesin)**.** *Soit M une surface de courbure négative ou nulle et de genre supérieur ou égal à 2. Alors, V est un ensemble g^t-invariant, dense, ouvert (modulo 0) et de mesure de Liouville strictement positive. De plus, L est ergodique pour le système dynamique (V, g^t).*

1.3.2 La décomposition d'Oseledets

Pour des systèmes dynamiques Anosov, la propriété $h_{top}(T) > 0$ est due à l'existence de coefficients de dilatation : ceux-ci sont responsables de la complexité du système. On va énoncer de manière un peu plus générale l'existence des coefficients de Lyapunov. On peut trouver plus de détails sur ce sujet dans l'article de Barreira et Pesin [13] ou dans le supplément du livre d'Hasselblatt et Katok [52]. Le résultat principal sur les exposants de Lyapunov est le suivant (dans le cas des flots) :

Théorème 1.13 (Oseledets)**.** *Soit (X, φ^t) un système dynamique à temps continu où X est une variété compacte et lisse et où $(\varphi^t)_t$ est $\mathcal{C}^1$. Soit μ un élément de $\mathcal{M}(X,\varphi)$. Alors, pour μ presque tout x dans X, on a existence de la décomposition suivante de l'espace tangent :*

$$T_xX = \bigoplus_{i=1}^{s(x)} E_i(x),$$

où les sous-espaces $E_i(x)$ sont de dimension $k_i(x)$ et vérifient les propriétés suivantes :

[8] En dimension plus grande, ces différentes quantités restent aussi définies mais sont données par des équations matricielles [89] (chapitre 4).

– *pour tout* $1 \leq i \leq s(x)$*, le sous-espace* $E_i(x)$ *est invariant par* $d_x\varphi^t$*, i.e.*

$$d_x\varphi^t E_i(x) = E_i(\varphi^t(x))$$

et dépend de manière mesurable de x *;*

– *pour tout* v *dans* $E_i(x)\backslash\{0\}$*, on a*

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{1}{t} \log \|d_x\varphi^t\| = \chi_i(x);$$

– *si* $\mathbf{v} = (v_1, \cdots, v_{k_i(x)})$ *est une base de* $E^i(x)$*, alors la croissance du volume* $\Gamma^{\mathbf{v}}_{k_i(x)}(t)$ *du parallépipède associé est donné par*

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{1}{t} \log \Gamma^{\mathbf{v}}_{k_i(x)}(t) = \chi_i(x)k_i(x).$$

On appelle exposants de Lyapunov les nombres $\chi_i(x)$*.*

Le théorème s'adapte immédiatement dans le cas des systèmes dynamiques à temps discret. On souligne que les exposants de Lyapunov sont définis presque partout pour la mesure considérée et que dans le cas d'une mesure ergodique, ceux-ci sont constants presque partout par invariance. À titre d'exemple, notons que dans le cas des automorphismes linéaires du tore, les exposants de Lyapunov sont donnés par $\{\log|\lambda| : \lambda \text{ valeur propre de } A\}$. Dans le cas du flot géodésique d'une variété à courbure strictement négative, on a un exposant de Lyapunov nul correspondant à la direction du champ de vecteurs hamiltonien $X_H(\rho)$. De plus, on a $d-1$ exposants strictement positifs correspondant à la direction instable (distincts ou non) : $(\chi_j^+(\rho))_{j=1}^{d-1}$. De même, on a $d-1$ exposants strictement négatifs correspondant à la direction instable (distincts ou non) : $(\chi_j^-(\rho))_{j=1}^{d-1}$.

1.3.3 La formule de Ruelle

Pour finir ce paragraphe, on va relier les exposants que l'on vient de définir à la complexité du système dynamique correspondant. Pour cela, on rappelle l'inégalité dite de Ruelle [88]. Ce théorème donne une borne supérieure de la complexité (l'entropie) de notre système dynamique en fonction de ses exposants de Lyapunov. Précisément, on a :

Théorème 1.14 (Inégalité de Ruelle)**.** *Soit* (X, T, μ) *un système dynamique mesurable où* T *est un difféomorphisme* $\mathcal{C}^1$ *de la variété riemanienne compacte* X *(aussi* $\mathcal{C}^1$*). Alors, on a*

$$h_{KS}(\mu, T) \leq \int_X \sum_{\chi_i(x)>0} k_i(x)\chi_i(x)d\mu(x).$$

On peut trouver une preuve de ce résultat dans [13]. Dans le cas d'un système dynamique satisfaisant la propriété d'Anosov et préservant la mesure de Lebesgue Leb, on peut montrer qu'on a égalité dans l'inégalité précédente si et seulement si $\mu = \text{Leb}$ [67]. Une version précisée de la formule de Ruelle est due à Ledrappier et Young. En effet, ils montrent dans [68] que sous les hypothèses du théorème, l'entropie s'écrit

$$h_{KS}(\mu, T) = \int_X \sum_{\chi_i(x)>0} \gamma_i(x)\chi_i(x)d\mu(x),$$

où γ_i est une fonction mesurable que l'on peut interpréter d'une certaine manière[9] comme la dimension de la mesure μ dans la direction instable $E_i(x)$ et vérifie en particulier que μ-presque partout, $0 \leq \gamma_i(x) \leq \dim E_i(x) = k_i(x)$.

[9]La définition précise de cette fonction est un peu technique et obligerait à une digression trop importante. On renvoie le lecteur à [68] pour plus de détails.

Par définition de l'entropie pour les systèmes dynamiques mesurables à temps continu, ce résultat s'étend immédiatement au cas des flots $\mathcal{C}^1$. On conclut ce paragraphe en mentionnant deux réécritures utiles de la borne supérieure de Ruelle dans le cas des flots géodésiques pour des variétés de dimension 2. Dans ce cas, on a au plus un exposant de Lyapunov strictement positif. On note $\chi^+(\rho)$ le plus grand des exposants de Lyapunov (qui est éventuellement nul). À la métrique de Sasaki induite sur S^*M par la métrique sur M [89] (chapitre 1-paragraphe 5) correspond une forme volume ω (voir annexe A). Dans le cas d'un flot géodésique vérifiant la propriété d'Anosov, on peut restreindre cette forme volume à $E^u(\rho) = d_{g^1\rho}g^{-1}E^u(g^1\rho)$ et à $E^u(g^1\rho)$ (par définition de la propriété d'Anosov). La forme volume sur $E^u(\rho)$ induit alors une forme volume sur $E^u(g^1\rho)$ en prenant la forme $g^{-1*}\omega_{E^u(\rho)}$. Les deux formes volumes sont alors dépendantes et il existe alors un nombre que l'on note $\det(d_{g^1\rho}g^{-1}_{|E^u(g^1\rho)})$ et qui vérifie $g^{-1*}\omega_{E^u(\rho)} = \det(d_{g^1\rho}g^{-1}_{|E^u(g^1\rho)})\omega_{E^u(g^1\rho)}$. On définit ainsi le Jacobien instable $J^u(\rho) := \det(d_{g^1\rho}g^{-1}_{|E^u(g^1\rho)})$ en tout point ρ de la variété S^*M. Le théorème 1.1 de Birkhoff (combiné avec la multiplicativité du Jacobien) nous dit alors que pour tout élément μ de $\mathcal{M}(S^*M, g)$, on a (paragraphe 20.4 dans [52])

$$\mu \text{ p.p., } \chi^+(\rho) = \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n}\log J^u(g^n\rho).$$

On peut donc donner la formulation suivante du théorème de Ruelle :

$$h_{KS}(\mu, g) \leq \left|\int_{S^*M} \log J^u(\rho)d\mu(\rho)\right|.$$

L'avantage de cette écriture est que la fonction $J^u(\rho)$ est définie en tous les points de la variété S^*M et est continue par rapport au point ρ. Dans le cas des surfaces sans points conjugués[10] (de genre quelconque), on peut obtenir aussi le plus grand coefficient de Lyapunov en fonction de la solution U^u de l'équation de Riccati instable :

Théorème 1.15 (Freire-Mañé)**.** *Soient M une surface sans points conjugués et μ un élément de $\mathcal{M}(S^*M, g)$. On a*

$$\mu \text{ p.p., } \chi^+(\rho) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t U^u(g^r\rho)dr.$$

En particulier, la formule de Ruelle s'écrit

$$h_{KS}(\mu, g) \leq \int_{S^*M} U^u(\rho)d\mu(\rho).$$

À nouveau, cette formulation présente l'avantage de dépendre d'une fonction définie partout sur la variété. Par souci de simplicité, on n'a présenté que le cas $d = 2$ mais ces différents résultats s'étendent au cas de la dimension supérieure (avec une définition adaptée dans le cas du théorème de Freire et Mañe).

1.4 Reparamétrage d'un système dynamique

Pour terminer ce chapitre, nous allons rappeler une manière de reparamétrer le temps d'un système dynamique. Ces changements de temps seront notamment utiles dans le chapitre 6 afin de se ramener d'une situation à courbure variable à une situation où les taux de contraction du flot géodésique sont uniformes sur la variété. Dans cette partie, on va donc présenter différentes méthodes de reparamétrage ainsi que leurs conséquences sur les propriétés ergodiques et l'entropie du système considéré. En particulier, le théorème 1.19 (dû à Abramov) donnera une relation entre les entropies de deux systèmes dynamiques liés entre eux par un changement de temps.

[10] On rappelle enfin qu'une surface à courbure négative ou nulle (ou de type Anosov) est un exemple typique de surface sans points conjugués [89].

1.4.1 Flots suspendus d'un automorphisme

On considère dans ce paragraphe un système dynamique mesurable à temps discret (X, T, μ). On suppose aussi que T est inversible et on fixe une fonction mesurable f que l'on suppose uniformément bornée inférieurement par une constante[11] $a > 0$. On veut définir le flot suspendu associé à l'automorphisme T et à la 'fonction toit' f. Pour cela, on définit l'ensemble suspendu correspondant à la fonction $f > 0$

$$\overline{X} := \{(x, s) : x \in X, 0 \leq s < f(x)\}.$$

On munit $\overline{X}$ de la σ-algèbre par restriction de la σ-algèbre sur le produit cartésien $X \times \mathbb{R}$. On définit alors, pour A mesurable, $\overline{\mu}(A) := \frac{1}{\int_X f d\mu} \int \int_A d\mu(x) ds$. On a $\overline{\mu}(\overline{X}) = 1$. On associe à T et f le flot suivant :

Définition 1.16. On appelle flot suspendu de l'automorphisme T construit par la fonction f le flot $(\overline{T}^t)$ inversible qui agit sur $\overline{X}$ de la manière suivante, pour $t \geq 0$:

$$\overline{T}^t(x, s) := \left(T^n x, s + t - \sum_{j=0}^{n-1} f\left(T^j x\right) \right),$$

avec n l'unique entier vérifiant $\sum_{j=0}^{n-1} f\left(T^j x\right) \leq s + t < \sum_{j=0}^{n} f\left(T^j x\right)$.

Pour $t < 0$, on pose, si $s + t > 0$,

$$\overline{T}^t(x, s) := (x, s + t),$$

et sinon,

$$\overline{T}^t(x, s) := \left(T^{-n} x, s + t + \sum_{j=-n}^{-1} f\left(T^j x\right) \right),$$

avec n l'unique entier vérifiant $-\sum_{j=-n}^{-1} f\left(T^j x\right) \leq s + t < \sum_{j=-n+1}^{-1} f\left(T^j x\right)$.

Cette définition permet aussi de construire un semi-flot suspendu à partir de T non inversible. D'une certaine manière, cette suspension permet bien de reparamétrer le système dynamique (X, T) par rapport à la fonction f (pour le système suspendu, on passe de x à Tx en un temps $f(x)$ et non plus en un temps 1). Dans le cas inversible[12], montrons que la mesure $\overline{\mu}$ est $\overline{T}^t$-invariante (la preuve est instructive notamment pour le paragraphe 6.6). Pour cela, on pose $\tilde{X} := X \times \mathbb{R}$. On munit cet ensemble de la mesure $\tilde{\mu} = \frac{1}{\int f d\mu} \mu \times dt$. On fait agir $\tilde{T}^t(x, s) = (x, t + s)$. L'invariance par translation de la mesure de Lebesgues assure que $\{\tilde{T}^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ préserve $\tilde{\mu}$ et on va voir que cela implique la $\overline{T}^t$-invariance de $\overline{\mu}$. Ensuite, pour $k \geq 1$, on pose

$$\tilde{X}_0 := \{(x, s) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leq s < f(x)\} = \overline{X},$$

$$\tilde{X}_k := \left\{ (x, s) \in X \times \mathbb{R} : \sum_{j=0}^{k-1} f(T^j x) \leq s < \sum_{j=0}^{k} f(T^j x) \right\},$$

et, pour $k \leq -2$,

$$\tilde{X}_{-1} := \left\{ (x, s) \in X \times \mathbb{R} : -f(T^{-1} x) \leq s < 0 \right\},$$

$$\tilde{X}_k := \left\{ (x, s) \in X \times \mathbb{R} : -\sum_{j=k}^{-1} f(T^j x) \leq s < -\sum_{j=k+1}^{-1} f(T^j x) \right\}.$$

[11] Les différents résultats de ce paragraphe peuvent être adaptés au cas $f > 0$ [29].

[12] Ceci reste vrai pour T non inversible (voir paragraphe 6.6.1 par exemple).

On a, de cette manière, créé une partition de $\tilde{X}$, à savoir $\tilde{X} = \cup_{k=-\infty}^{k=\infty} \tilde{X}_k$. Pour finir, on définit une famille d'applications bijectives (θ_k) de $\tilde{X}_k$ dans $\tilde{X}_0$. Pour $k = 0$, on prend l'identité. Pour $k \geq 1$, on pose $\theta_k(x,s) = \left(T^k(x), s - \sum_{j=0}^{k-1} f(T^j x)\right)$. Pour $k \leq -1$, on pose $\theta_k(x,s) = \left(T^k(x), s + \sum_{j=k}^{-1} f(T^j x)\right)$. On se donne A un sous-ensemble de $\tilde{X}_0$. On veut montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\overline{\mu}(\overline{T}^t A) = \overline{\mu}(A)$. On commence par écrire $\overline{T}^t A = \cup_{k=-\infty}^{k=\infty} \theta_k(\tilde{X}_k \cap \tilde{T}^t A)$ (qui sont des ensembles disjoints).
Notons maintenant que pour $B := E \times (a,b) \subset \tilde{X}_k$, on a

$$\overline{\mu}\left(\theta_k(B)\right) = \overline{\mu}\left(\left\{(x,t) : x \in T^k E, a - \sum_{j=0}^{k-1} f(T^j x) < t < b - \sum_{j=0}^{k-1} f(T^j x)\right\}\right)$$

$$= \frac{b-a}{\int f d\mu} \mu(\sigma^k E) = \frac{b-a}{\int f d\mu} \mu(E) = \tilde{\mu}(B).$$

On vient d'utiliser ici l'invariance de la mesure sur la base. On peut finalement écrire

$$\overline{\mu}(\overline{T}^t A) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\mu}\left(\theta_k\left(\tilde{X}_k \cap \tilde{T}^t A\right)\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\mu}\left(\tilde{X}_k \cap \tilde{T}^t A\right) = \tilde{\mu}\left(\tilde{T}^t A\right) = \tilde{\mu}(A) = \overline{\mu}(A),$$

ce qui permet de conclure que $(\overline{X}, \overline{T}, \overline{\mu})$ définit un système dynamique mesurable à temps continu. Pour conclure, on remarque que si l'automorphisme de base est associé à une mesure μ ergodique, alors $\overline{\mu}$ est une mesure ergodique pour le flot suspendu $\overline{T}^t$ (on vérifie que la propriété de Birkhoff est satisfaite). Par contre, la propriété de mélange n'est pas préservée. Par exemple, si (X, T, μ) est un système dynamique mélangeant que l'on suspend par la 'fonction toit' $f \equiv 1$, alors le système dynamique suspendu $(\overline{X}, \overline{T}^t, \overline{\mu})$ n'est pas mélangeant (en prenant par exemple $A = B = \{(x,t) : 0 \leq t \leq 1/4\}$). On note aussi que si (X,T) est un difféomorphisme d'Anosov et que si la mesure volume est T-invariante, alors on a construit un flot d'Anosov qui n'est pas mélangeant (pour cette fonction toit particulière).

1.4.2 Reparamétrage des flots

Pour les systèmes dynamiques à temps continu, on peut décrire une procédure de reparamétrage similaire. Pour cela, on fixe (X, φ, μ) un système dynamique mesurable à temps continu et f une fonction de reparamétrage mesurable qui vérifie $f(x) > a$ pour tout x dans X. On définit un nouveau flot $\overline{\varphi}$ en posant pour tout x dans X et tout t dans $\mathbb{R}$,

$$\overline{\varphi}^{\int_0^t f(\varphi^s x) ds}(x) = \varphi^t(x).$$

On peut aussi introduire une nouvelle mesure $\overline{\mu}$ absolument continue par rapport à μ qui vérifie $\frac{d\overline{\mu}}{d\mu} = \frac{f(x)}{\int_X f d\mu}$. De la même manière qu'au paragraphe précédent, on peut montrer le résultat suivant :

Proposition 1.17. *Soient (X, φ, μ) un système dynamique mesurable à temps continu et f une fonction de reparamétrage mesurable qui vérifie $f(x) > a$ pour tout x dans X. Alors $(X, \overline{\varphi}, \overline{\mu})$ est un système dynamique mesurable à temps continu.*

On renvoie le lecteur au paragraphe 10.3 de [29] pour plus de détails sur ce type de reparamétrage.

1.4.3 Théorèmes d'Abramov

On doit à Abramov différents résultats sur l'entropie d'un système dynamique reparamétré. Le plus classique d'entre eux concerne l'entropie d'un automorphisme induit [1]. Précisément, si (X, T, μ) est un système dynamique mesurable (avec T inversible) et si E est un sous-ensemble mesurable de X de mesure strictement positive satisfaisant la condition $\cup_{n=0}^{\infty} T^n E = X$, alors T induit sur E l'automorphisme T_E défini par $T_E(x) = T^{n_E(x)}(x)$ où $n_E(x)$ est le plus petit entier strictement positif k tel que $T^k(x) \in E$ (pour x dans E). On définit la mesure μ_E sur E par $\mu_E(A \cap E) = \mu(A \cap E)/\mu(E)$. On a alors le résultat suivant [1] :

Théorème 1.18 (Abramov)**.** *Soient (X, T, μ) un système dynamique mesurable (avec T inversible) et E un sous-ensemble mesurable de X de mesure strictement positive satisfaisant la condition $\cup_{n=0}^{\infty} T^n E = X$. Alors, (E, T_E, μ_E) est un système dynamique mesurable qu'on appelle système dynamique induit sur E. De plus,*

$$h_{KS}(\mu, T) = h_{KS}(\mu_E, T_E)\mu(E).$$

On admettra ce résultat [1], [31] et on montre en annexe C comment on peut déduire de celui-ci un résultat sur l'entropie des flots suspendus (dû aussi à Abramov). Le théorème sur l'entropie des flots suspendus est le suivant [2] :

Théorème 1.19 (Abramov)**.** *Soient (X, T, μ) un système dynamique mesurable (avec T inversible) et f mesurable vérifiant $f(x) > a > 0$ pour tout x dans X. Avec les notations du paragraphe 1.4.1, on a*

$$\forall t \neq 0,\ h_{KS}(\mu, T) = \frac{1}{|t|} \int_X f(x) d\mu(x) h_{KS}(\overline{\mu}, \overline{T}^t).$$

Pour finir, on peut mentionner l'analogue de ce résultat dans le cas du reparamétrage d'un flot. Avec les notations du paragraphe 1.4.2, on a

$$h_{KS}(\mu, \varphi) = h_{KS}(\overline{\mu}, \overline{\varphi}) \int_X f(x) d\mu(x).$$

Chapitre 2

Quelques éléments d'analyse semi-classique

Une des questions centrales de ce mémoire est de comprendre l'influence du caractère chaotique d'un système dynamique hamiltonien sur son pendant quantique. Pour cela, il faut commencer par définir précisément une procédure permettant d'associer à un système classique (i.e. un espace des phases et une famille d'observables) un système quantique (i.e. un espace de Hilbert et une famille d'opérateurs). Une manière naturelle de faire cela est donnée par les outils d'analyse semi-classique[1]. Ce chapitre est consacré à une présentation (brève et sans preuve) de ceux-ci. On commencera par préciser ce que l'on attend de notre procédure de quantification. Puis, on rappellera le lemme fondamental de l'analyse semi-classique, i.e. le principe de la phase stationnaire. Enfin, on expliquera comment la théorie des opérateurs $\hbar$-pseudo-différentiels fournit une réponse possible au problème de quantification des systèmes hamiltoniens.

2.1 Quantification d'un système classique

2.1.1 Cadre géométrique classique

Les systèmes dynamiques que l'on considère dans le cadre de l'analyse semi-classique sont ceux issus de la mécanique hamiltonienne. Commençons donc par rappeler quelques éléments de base de géométrie symplectique. Celle-ci fournit en effet le cadre géométrique naturel du formalisme hamiltonien. On sait qu'en mécanique classique, l'état d'une particule est entièrement déterminé par sa position et sa vitesse. Le point de vue hamiltonien consiste tout d'abord à préférer décrire la particule en fonction de sa position et de sa quantité de mouvement. Si on appelle M l'espace des positions (où M est une variété riemannienne), l'ensemble des états possibles du système sera alors décrit par l'espace des phases T^*M (fibré cotangent de M). On notera $\rho := (x, \xi)$ un point de T^*M. On appelle famille des observables classiques une famille de fonctions définies sur l'espace des phases (par exemple l'énergie du système).
L'une des particularités des systèmes d'évolution en mécanique hamiltonienne est de préserver la forme symplectique canonique ω sur T^*M (voir annexe A). De manière générale, on appelle transformations symplectiques (ou symplectomorphismes) les difféomorphismes qui préservent ω, c'est-à-dire les transformations $\kappa : T^*M \to T^*M$ satisfaisant

$$\forall \rho \in T^*M,\ \forall X, Y \in T_\rho T^*M,\ \omega(d_\rho \kappa X, d_\rho \kappa Y) := \omega(X, Y).$$

Cette définition s'étend pour les transformations à temps continu. Un cas particulier est le cas des transformations linéaires symplectiques de $\mathbb{R}^{2d}$: c'est un sous-groupe de $GL(2d, \mathbb{R})$ que l'on

[1] Des références complètes sur l'analyse semi-classique sont le cours d'Evans-Zworski [39] et les livres de Robert [85], Dimassi-Sjöstrand [32] et Martinez [73].

note $Sp(2d,\mathbb{R})$. Dans la suite, les systèmes dynamiques que l'on considèrera vérifieront toujours au moins la propriété de préserver la forme symplectique naturelle sur T^*M.
En utilisant la forme symplectique, on va aussi pouvoir définir une opération supplémentaire sur la famille des observables classiques. Pour cela, on associe à tout élément f dans $\mathcal{C}^\infty(T^*M)$ le champ de vecteurs hamiltonien X_f (voir annexe A) et on définit alors le crochet de Poisson de deux observables comme

$$\{f,g\} := \omega(X_f, X_g).$$

Dans le cas de $\mathbb{R}^{2d}$, on rappelle que la forme symplectique est donnée par

$$\omega := \sum_{j=1}^{d} d\xi_j \wedge dx_j.$$

En coordonnées locales, le crochet de Poisson est défini par

$$\{f,g\} := \sum_{j=1}^{d} (\partial_{\xi_j} f)(\partial_{x_j} g) - (\partial_{x_j} f)(\partial_{\xi_j} g).$$

On note aussi que dans le cas de $\mathbb{R}^{2d}$, on a les relations fondamentales de commutation pour les fonctions coordonnées

$$\{x_j, x_k\} = \{\xi_j, \xi_k\} = 0,\ \{x_j, \xi_k\} = \delta_{j,k}. \tag{2.1}$$

Pour finir, si on se donne un Hamiltonien $H : T^*M \to \mathbb{R}$ et si on note φ_H^t le flot associé à l'équation différentielle ordinaire $f' = X_H(f)$, on obtient un symplectomorphisme et l'évolution d'une observable a par ce flot vérifie, pour tout ρ dans T^*M,

$$\frac{d}{dt}\left(a \circ \varphi_H^t(\rho)\right) = \left\{H, a \circ \varphi_H^t\right\}(\rho). \tag{2.2}$$

2.1.2 Procédé de quantification

À un système de mécanique classique, on veut maintenant faire correspondre un système quantique en se fixant un certain nombre d'axiomes dus entre autres à Heisenberg [74], [44]. Pour cela, il faut commencer par choisir un ensemble pour décrire les états quantiques correspondant à l'espace des phases T^*M, par exemple le projectif de $L^2(M)$ (i.e. toutes les droites de $L^2(M)$ passant par 0). Le problème de quantification consiste à construire une application $a \mapsto \mathrm{Op}_\hbar(a)$ de l'ensemble des observables dans l'ensemble des opérateurs de $L^2(M)$ (pour chaque niveau d'énergie $\hbar^{-2}$). On veut que cette application préserve le plus possible la structure des observables classiques. Expliquons rapidement ce que l'on attend de cette procédure de quantification. Par souci de simplicité, on se limite au cas $M = \mathbb{R}^d$.
Pour un état φ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ (de norme 1), la probabilité de trouver une particule dans un borélien B de $\mathbb{R}^d$ est donnée par $\int_B |\varphi(x)|^2 dx$. Pour un borélien B de $\mathbb{R}$, si on note $\Pi_j(B)$ l'opérateur de multiplication par $\mathbf{1}_{\{x_j \in B\}}$, on trouve que la probabilité que x_j appartienne à B est donnée par $\|\Pi_j(B)\varphi\|_{L^2}$. D'après le théorème spectral [80], on sait qu'il existe un unique opérateur autoadjoint Q_j vérifiant pour tout borélien B, $\mathbf{1}_B(Q_j) = \Pi_j(B)$. On l'appelle j-ième opérateur de position. De manière analogue, la probabilité de trouver une particule dans un borélien B de $\mathbb{R}^d$ de l'espace des moments est donnée par $\int_B |\mathcal{F}_\hbar\varphi(\xi)|^2 d\xi$ où $\mathcal{F}_\hbar$ est la transformée de Fourier définie sur la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par

$$\mathcal{F}_\hbar u(\xi) := \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\imath}{\hbar}\langle x,\xi\rangle} u(x) dx.$$

Ceci permet de définir l'opérateur de moment sur l'espace des positions en posant $P_j := \mathcal{F}_\hbar^{-1} Q_j \mathcal{F}_\hbar$. On vérifie que les opérateurs position Q_j et moment P_j se récrivent

$$Q_j(u) := x_j \times u \text{ et } P_j(u) := \frac{\hbar}{\imath}\frac{\partial u}{\partial x_j}. \tag{2.3}$$

Si on note $[A, B] := A \circ B - B \circ A$ le crochet de deux opérateurs, on peut remarquer que ces opérateurs satisfont des relations analogues aux relations classiques (2.1) :

$$[Q_j, Q_k] = [P_j, P_k] = 0,\ [Q_j, P_k] = \frac{\hbar \delta_{j,k}}{\imath} \mathrm{Id}. \tag{2.4}$$

La première condition qu'on attend est que notre procédure de quantification $\mathrm{Op}_\hbar$ associe l'opérateur Q_j à l'observable[2] x_j et l'opérateur P_j à l'observable ξ_j. On veut aussi qu'à l'observable constante $a = c$ corresponde l'opérateur $c\mathrm{Id}$. On voudrait aussi que la structure de l'algèbre des observables $(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2d}), +, \times)$ soit préservée par les opérateurs, i.e.

$$\mathrm{Op}_\hbar(\lambda a + b) = \lambda \mathrm{Op}_\hbar(a) + \mathrm{Op}_\hbar(b),\ \mathrm{Op}_\hbar(a)^2 = \mathrm{Op}_\hbar(a^2) \text{ et } [\mathrm{Op}_\hbar(a), \mathrm{Op}_\hbar(b)] = \frac{\hbar}{\imath} \mathrm{Op}_\hbar(\{a, b\}).$$

Dans [44] (chapitres 1 et 4), l'exemple simple de $a = x_1$ et $b = \xi_1$ permet de voir qu'on ne peut pas espérer que toutes ces propriétés soient satisfaites. Cependant le problème qui nous intéresse plus particulièrement est celui de l'étude du régime semi-classique ($\hbar \to 0$) et nous allons montrer dans la suite de ce chapitre que l'on peut construire un procédé de quantification qui satisfasse presque les différentes propriétés ci-dessus (modulo des termes négligeables en $\hbar$: voir relation (2.10) en particulier).

2.1.3 Groupe d'Heisenberg

Pour conclure ce paragraphe, on voudrait commenter la symétrie entre les relations fondamentales (2.1) (au niveau classique) et (2.4) (au niveau quantique). Pour cela, on introduit l'espace $\mathbb{R}^{2d+1}$ muni des coordonnées $(x, \xi, t) := (x_1, \cdots, x_d, \xi_1, \cdots, \xi_d, t)$ et du crochet de Lie :

$$[(x, \xi, t), (x', \xi', t')] := (0, 0, \omega((x, \xi); (x', \xi'))).$$

Ce crochet fait de $\mathbb{R}^{2d+1}$ une algèbre de Lie qu'on appelle algèbre de Lie d'Heisenberg et que l'on note $\mathbf{h}_d$. Ainsi les observables et les opérateurs positions, moments et constante engendrent, respectivement au niveau classique et au niveau quantique, une algèbre de Lie isomorphe à $\mathbf{h}_d$. On peut identifier le groupe de Lie simplement connexe correspondant à $\mathbf{h}_d$ [44]. Pour cela, on munit $\mathbb{R}^{2d+1}$ de la loi de groupe

$$(x, \xi, t).(x', \xi', t') := \left(x + x', \xi + \xi', t + t' + \frac{1}{2}\omega((x, \xi); (x', \xi')) \right).$$

On appelle alors $(\mathbb{R}^{2d+1}, .)$ groupe d'Heisenberg et on le note $\mathbb{H}_d$.

Représentations du groupe d'Heisenberg

On peut considérer les opérateurs Q_j, P_j et Id comme des opérateurs continus sur la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Ceci va nous permettre de construire une représentation unitaire du groupe d'Heisenberg $\mathbb{H}_d$. Pour $(\rho, t) = (x, \xi, t) \in \mathbb{H}_d$, on définit l'opérateur de translation [44]

$$\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ U_\hbar(\rho, t)u(y) := e^{\frac{\imath}{\hbar}t} e^{\frac{\imath}{\hbar}\omega((x,\xi),(Q,P))} u(y) = e^{\frac{\imath}{\hbar}t} e^{\frac{\imath}{\hbar}\langle y - \frac{x}{2}, \xi\rangle} u(y - x). \tag{2.5}$$

L'opérateur $U_\hbar(\rho, t)$ s'étend en un opérateur unitaire sur $L^2(M)$ (et par dualité en un opérateur continu sur les distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$)[3]. De plus, les opérateurs $U_\hbar(\rho, t)$ vérifient la relation fondamentale

$$U_\hbar(\rho, t) \circ U_\hbar(\rho', t') = U_\hbar\left(\rho + \rho', t + t' + \frac{1}{2}\omega(\rho, \rho') \right).$$

Ceci permet de vérifier que $U_\hbar$ définit une représentation de $\mathbb{H}_d$ dans les opérateurs unitaires de $L^2(\mathbb{R}^d)$ qu'on appelle représentation de Schrödinger de paramètre $\hbar$. Le théorème de Stone-von Neumann assure que ce sont (presque) les seules représentations unitaires irréductibles [44] :

[2] Dans le cas d'une variété générale, on attend que notre procédé de quantification associe à une observable a (ne dépendant que de la position) l'opérateur de multiplication par a.

[3] Dans la suite, on omettra parfois l'indice $\hbar$ dans $U_\hbar(\rho, t)$ lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté et on notera $U_\hbar(\rho) = U_\hbar(\rho, 0)$.

Théorème 2.1 (Stone-von Neumann). *Toute représentation unitaire et irréductible de $\mathbb{H}_d$ est unitairement isomorphe à une et une seule des représentations suivantes :*

- *la représentation de Schrödinger de paramètre $\hbar \neq 0$;*
- *$\chi_{a,b}(\rho, t) := e^{\imath\omega(\rho_0;\rho)}$ (avec $\rho_0 \in \mathbb{R}^{2d}$) agissant sur $\mathbb{C}$.*

2.2 La phase stationnaire

Pour construire une quantification qui satisfasse les propriétés précédentes (au moins partiellement), on va utiliser la théorie des opérateurs pseudo-différentiels. Commençons par rappeler un résultat important pour étudier celle-ci : le principe de la phase stationnaire. Il intervient de manière assez naturelle quand on est amené à étudier la limite semi-classique en mécanique quantique. En effet, le régime semi-classique correspond à la limite où $\hbar$ est négligeable devant les autres actions mises en jeu dans le système physique. On va donc être amené à considérer la limite où $\hbar$ tend vers 0 dans notre système quantique. L'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$ étant l'espace des états quantiques, ceux-ci sont décrits en fonction de la position et par transformation de Fourier on se ramène à une description en fonction de la quantité de mouvement. On rappelle que l'on a défini la $\hbar$-transformée de Fourier, pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\mathcal{F}_\hbar u(\xi) := \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\imath}{\hbar}\langle x,\xi\rangle} u(x)dx.$$

La finalité étant de faire tendre $\hbar$ vers 0, on veut par exemple comprendre le comportement asymptotique de l'intégrale précédente. De manière plus générale, pour $S \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ et $a \in \mathcal{C}_o^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ (l'indice o veut dire que a est à support compact), on veut comprendre le comportement asymptotique quand $\hbar$ tend vers 0 de la quantité

$$I(\hbar) := \int_{\mathbb{R}^m} e^{\frac{\imath}{\hbar}S(x)} a(x)dx.$$

Cette analyse asymptotique est possible grâce au principe de la phase stationnaire. Avant de l'énoncer, on rappelle qu'on dit que x_0 est un point critique de S si $d_{x_0}S = 0$ et dans ce cas, on dit qu'il est non dégénéré si la matrice Hessienne correspondante $(\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j}(x_0))_{i,j}$ est inversible. Notons que cela implique en particulier que le point critique est isolé. Le théorème de la phase stationnaire s'énonce alors de la manière suivante :

Théorème 2.2 (Théorème de la phase stationnaire). *On distingue les deux situations suivantes :*

1. *Si la fonction S n'a aucun point critique dans le support de a alors $I(\hbar) = O(\hbar^\infty)$, i.e. pour tout N dans $\mathbb{N}$, $I(\hbar) = O(\hbar)$.*
2. *Si S admet un unique point critique x_0 (supposé non dégénéré) dans le support de a, alors $I(\hbar)$ admet un développement asymptotique en puissance de $\hbar$:*

$$I(\hbar) \sim (2\pi\hbar)^{\frac{m}{2}} \frac{e^{\frac{\imath\sigma\pi}{4}}}{|\det S"(x_0)|^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{\imath S(x_0)}{\hbar}} \left(A_0(a,x_0) + \hbar A_1(a,x_0) + \cdots + \hbar^k A_k(a,x_0) + \cdots\right),$$

avec $\sigma := n_+ - n_-$ avec (n_+, n_-) la signature de $S"(x_0)$ et $A_0(a,x_0) = a(x_0)$. De plus, pour tout entier k, $A_k(a,x_0)$ est de la forme $A_k(a,x_0) := P_{2k}(D)(a)(x_0)$ où $P_{2k}(D)$ est un opérateur différentiel d'ordre inférieur ou égal à $2k$.

Rappelons brièvement les grandes lignes de la preuve de ce théorème [50], [39]. Dans le premier cas, on considère un point x dans le support de a. On sait qu'il existe un système de coordonnées locales dans un voisinage U_x de x tel que $S(y) = y_1$. On écrit $\mathrm{supp}(a)$ comme réunion finie de tels voisinages et $a = \sum_j a_j$ avec $a_j \in \mathcal{C}_o^\infty(U_j, \mathbb{R})$. Pour tout voisinage U_j et tout entier N, on trouve par intégration par parties

$$\int_{\mathbb{R}^m} e^{\frac{\imath}{\hbar}y_1} a_j(y)|dy| = \left(\frac{\hbar}{\imath}\right)^N \int_{\mathbb{R}^m} e^{\frac{\imath}{\hbar}y_1} \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^N (a_j)(y)|dy|,$$

ce qui permet de conclure dans le premier cas. Supposons maintenant que S a un unique point critique x_0 (que l'on suppose non dégénéré). On commence par appliquer le lemme de Morse qui nous assure l'existence de coordonnées locales $(y_1, \cdots, y_m)$ au voisinage de x_0 satisfaisant $S(y_1, \cdots, y_m) = S(x_0) + \frac{1}{2}S"(x_0)(y)$. On doit donc estimer une quantité de la forme

$$\tilde{I}(\hbar) := \int_{\mathbb{R}^m} e^{\frac{\imath}{2\hbar}S"(x_0)(y)}\tilde{a}(y)|dy|,$$

avec $\tilde{a}(0) = a(x_0)$ en particulier. Pour un entier N fixé, on écrit $\tilde{a}(y) = P_0 + P_1(y) + \cdots + P_{N-1}(y) + R_N(y)$ le développement de Taylor de $\tilde{a}$ à l'ordre N. En particulier, les P_j sont des polynômes homogènes de degré j. Le changement de variable $y = \sqrt{\hbar}z$ nous permet d'écrire pour tout $j \leq N-1$,

$$\tilde{I}_j(\hbar) := \int_{\mathbb{R}^m} e^{\frac{\imath}{2\hbar}S"(x_0)(y)}P_j(y)|dy| = \hbar^{\frac{j+m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{\frac{\imath}{2}S"(x_0)(z)}P_j(z)|dz|.$$

On note qu'une telle intégrale n'est pas absolument convergente mais on lui donne un sens par intégration par parties successives. Pour j impair, cette intégrale est nulle et par conséquent, seuls les termes d'ordre pair apparaissent dans le développement en puissance de $\hbar$. On note que chacun des termes est bien de la forme énoncée dans le théorème (voir [50] ou [39] par exemple). Il reste à vérifier que l'intégrale qui définit le reste d'ordre N a bien un sens et est négligeable par rapport aux autres termes du développement asymptotique. Pour cela, il suffit de noter que le reste de Taylor s'écrit sous la forme $R_N(y) = \sum_{|\alpha|=N} y^\alpha b_\alpha(y)$ et d'appliquer le même changement de variable. On peut aussi montrer que le reste est borné par les dérivées d'ordre au plus $2N + C(m)$ de a, où $C(m)$ ne dépend que de m [50], [39].

2.3 Quantification des observables

Pour quantifier notre système classique (voir paragraphe 2.1.2), on a commencé par associer à l'espace des phases T^*M l'espace de Hilbert $L^2(M)$. On veut maintenant faire correspondre à l'algèbre des observables $(\mathcal{C}^\infty(M), +, \times)$ une algèbre d'opérateurs (munie des lois + et $\circ$) agissant sur $L^2(M)$ (qui vérifie le même type de propriétés dans la limite semi-classique $\hbar \to 0$). Une manière de faire cela est d'utiliser les opérateurs pseudo-différentiels. On suivra la présentation de [32] (chapitre 7) et [39] (chapitre 4).

2.3.1 Quantification de Weyl

Avant de quantifier des classes très générales d'observables $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2d})$, on commence par définir des opérateurs associés à a dans la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$. Pour $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$, on définit la quantification de Weyl de l'observable a agissant sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \mathrm{Op}^w_\hbar(a)u(x) := \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{\imath}{\hbar}\langle x-y|\xi\rangle} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y)dyd\xi. \tag{2.6}$$

L'opérateur $\mathrm{Op}^w_\hbar(a)$ est dit pseudo-différentiel de symbole a (à petit paramètre $\hbar$). On note $U_\hbar(\rho) = U_\hbar(\rho, 0)$ l'opérateur de translation (2.5) pour $t = 0$. Cet opérateur peut aussi s'écrire en fonction de ces opérateurs de translation comme

$$\mathrm{Op}^w_\hbar(a) := \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \hat{a}\,(x_0, \xi_0)\, U_\hbar(2\pi\hbar\xi_0, 2\pi\hbar x_0)dx_0d\xi_0, \tag{2.7}$$

où on a utilisé $\delta_x = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{\imath}{\hbar}\langle x|\xi\rangle}d\xi$ (formule d'inversion de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$) et défini la transformée de Fourier d'une observable :

$$\hat{a}(x_0, \xi_0) := \int_{\mathbb{R}^{2d}} a(x, \xi)e^{2\imath\pi(\langle\xi,\xi_0\rangle - \langle x,x_0\rangle)}dxd\xi.$$

Notons qu'il existe d'autres choix de quantifications[4]. Par exemple, on aurait pu remplacer dans la définition (2.6) le terme $\frac{x+y}{2}$ par $tx+(1-t)y$, avec $t \in [0,1]$ [73]. Dans le cas $t=0$, on parle de quantification standard. On préfèrera cependant utiliser la quantification de Weyl car elle vérifie en particulier la propriété[5]

$$\mathrm{Op}^w_\hbar(a)^* = \mathrm{Op}^w_\hbar(\overline{a}).$$

Si a est à valeurs réelles, l'opérateur $\mathrm{Op}^w_\hbar(a)$ est autoadjoint. Avant d'étendre la définition de la quantification de Weyl à des classes plus grandes d'observables, on peut constater que cette quantification s'étend aux observables $a(x,\xi) = x_j$ et $a(x,\xi) = \xi_j$. Elle vérifie alors les règles de quantification (voir paragraphe 2.1.2) :

$$\forall 1 \leq j \leq d,\ \mathrm{Op}^w_\hbar(x_j) = Q_j,\ \mathrm{Op}^w_\hbar(\xi_j) = P_j \text{ et } \mathrm{Op}^w_\hbar(1) = \mathrm{Id}.$$

Dans le premier cas, on a de nouveau utilisé la formule d'inversion de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Notons que pour $a(x) \in \mathcal{C}^\infty_o(\mathbb{R}^d)$, on trouverait que $\mathrm{Op}^w_\hbar(a)$ est l'opérateur de multiplication par a. En particulier, si on considère l'observable correspondant à l'Hamiltonien (pour $V \in \mathcal{C}^\infty_o(\mathbb{R}^d)$)

$$H_V(x,\xi) = \frac{\|\xi\|^2}{2} + V(x),$$

alors l'opérateur correspondant est l'opérateur de Schrödinger

$$\hat{H}_V(u) := \mathrm{Op}^w_\hbar(H_V)u = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta u + V \times u,$$

où $\Delta := \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ est le Laplacien euclidien.

Composition d'opérateurs

La quantification de Weyl a le caractère linéaire attendu (voir paragraphe 2.1.2). Nous allons maintenant voir que cette procédure de quantification vérifie aussi de bonnes propriétés pour la composition. Tout d'abord, on peut vérifier que ces opérateurs laissent stable l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On peut alors écrire la composition de deux opérateurs $\hbar$-pseudo-différentiels pour a et b dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$ [39] et vérifier que :

$$\mathrm{Op}^w_\hbar(a) \circ \mathrm{Op}^w_\hbar(b) = \mathrm{Op}^w_\hbar(a \sharp b),$$

où $a\sharp b$ est un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ défini de la manière suivante (en posant $\rho = (x,\xi)$) :

$$a\sharp b(\rho) := \frac{1}{(\pi\hbar)^{2d}} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{-\frac{2\imath}{\hbar}\omega(w_1,w_2)} a(\rho+w_1)b(\rho+w_2)dw_1dw_2.$$

On appelle $a\sharp b$ le produit de Moyal de a et b. On peut maintenant appliquer le principe de la phase stationnaire pour obtenir un développement asymptotique de $a\sharp b$.

Théorème 2.3. *Soient a et b appartenant à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On a, pour N entier positif,*

$$a\sharp b(z,\zeta) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \left(\frac{\imath\hbar}{2}\omega(D_x, D_\xi; D_y, D_\eta) \right)^k a(x,\xi)b(y,\eta)_{|x=y=z,\xi=\eta=\zeta} + O(\hbar^{N+1}), \tag{2.8}$$

où le reste est pris dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et où $D_x := \frac{1}{\imath}(\partial_{x_1}, \cdots, \partial_{x_d})$. De plus, si les supports de a et b sont disjoints, on a $a\sharp b = O(\hbar^\infty)$.

[4] Ces différents choix définissent au final le même opérateur sur $L^2(M)$ modulo un $O(\hbar)$ [39].

[5] Elle vérifie aussi une propriété d'Egorov exacte pour les transformations symplectiques linéaires (voir paragraphe 2.4.2).

Notons que pour l'ordre 2, on a l'écriture suivante :

$$a\sharp b = ab + \frac{\hbar}{2\imath}\{a,b\} + O(\hbar^2).$$

Ainsi, en termes d'opérateurs pseudo-différentiels, ces égalités se traduisent de la manière suivante :

$$\mathrm{Op}^w_\hbar(a)\circ\mathrm{Op}^w_\hbar(b) = \mathrm{Op}^w_\hbar(ab) + O(\hbar) \text{ et } [\mathrm{Op}^w_\hbar(a), \mathrm{Op}^w_\hbar(b)] = \frac{\hbar}{\imath}\mathrm{Op}^w_\hbar(\{a,b\}) + O(\hbar^2),$$

où les termes d'erreurs sont pris $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

2.3.2 Observables admissibles

Comme famille des observables (quantifiables), la classe de Schwartz n'est pas totalement satisfaisante. Par exemple, on veut inclure la famille des opérateurs différentiels et pour cela pouvoir définir des opérateurs pseudo-différentiels croissant polynomialement en ξ (on veut quantifier un Hamiltonien du type $H(x,\xi) = \|\xi\|^2$). Pour cela, on pose $\langle\xi\rangle := (1+\|\xi\|^2)^{\frac{1}{2}}$ et $\partial_x^\alpha := \partial_{x_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{x_d}^{\alpha_d}$. Pour m et k réels et $0 \leq \nu < 1/2$, on définit alors la classe de symboles[6] d'ordre m, d'indice k et de paramètre ν

$$S^{m,k}_\nu := \left\{ a_\hbar \in C^\infty(\mathbb{R}^{2d}) : |\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta a_\hbar| \leq C_{\alpha,\beta}\hbar^{-k-\nu|\alpha+\beta|}\langle\xi\rangle^{m-|\beta|} \right\},$$

où les constantes $C_{\alpha,\beta}$ ne dépendent que de α et β et sont uniformes pour $0 < \hbar \leq 1$ et (x,ξ) dans $\mathbb{R}^{2d}$. Dans la suite, pour alléger les notations, on omettra la dépendance en $\hbar$ de $a_\hbar$ et on notera a au lieu de $a_\hbar$ (sauf en cas d'ambiguïté). Cette classe de symboles correspond à la famille d'observables qui seront admissibles pour notre quantification. De manière plus générale, on aurait pu faire dépendre la borne supérieure de x mais dans la suite, on se limitera au cas d'un espace des positions M compact et cette généralisation s'avère donc inutile pour notre étude. Commentons rapidement cette définition. Tout d'abord, on exige que la borne dépende polynomialement de $\langle\xi\rangle$ afin de pouvoir inclure des observables comme l'énergie cinétique dans la classe de symboles. On veut aussi que pour chaque dérivée par rapport à ξ, on perde une puissance de $\langle\xi\rangle$ dans la borne. L'utilité de cette condition apparaîtra un peu plus loin quand on voudra définir des opérateurs pseudo-différentiels sur une variété (paragraphe 6.8.1). En effet, dans ce but, on doit pouvoir effectuer des changements de variable (paragraphe 2.5) sur notre symbole a. En particulier, pour une fonction κ suffisamment régulière, on veut que le symbole $a_\kappa(x,\xi) = a(\kappa(x),(D\kappa(x)^{-1})^T\xi)$ reste dans la même classe que a. Lorsqu'on dérive le symbole a_κ par rapport à x, on voit apparaître des termes en ξ. Le terme en $\langle\xi\rangle^{-|\beta|}$ dans la définition du symbole permet de compenser cette perte en ξ. Enfin, on a autorisé que la borne sur les dérivées de a dépende de $\hbar$. Cette condition vient du développement asymptotique (2.8) de $a\sharp b$. En particulier, la condition $\nu < 1/2$ assure qu'on a bien un développement en puissances croissantes de $\hbar$ (par exemple dans la formule (2.8)). Du point de vue de la mécanique quantique, on peut aussi faire le lien avec le principe d'Heisenberg : celui-ci affirme que le produit de l'incertitude sur x et de l'incertitude sur ξ est de l'ordre de $\hbar$. La perte de dérivées en $\hbar^{-\nu}$ (avec $\nu < 1/2$) est finalement une manière d'interdire les observables qui sont localisées sur des ouverts de taille strictement plus petite que $\sqrt{\hbar}$ en position ou en quantité de mouvement.
Pour finir, on définit les classes de symboles suivantes :

$$S^{m,-\infty} := \cap_{k\leq 0} S^{m,k}_\nu \text{ et } S^{-\infty,k}_\nu := \cap_{m\leq 0} S^{m,k}_\nu.$$

On peut alors montrer que la quantification de Weyl s'étend à des symboles dans la classe générale $S^{m,k}_\nu$ (les cas $k=-\infty$ et $m=-\infty$ sont inclus) pour définir un opérateur (théorème 4.15 dans [39] par exemple), i.e.

$$\forall a \in S^{m,k}_\nu,\ \mathrm{Op}^w_\hbar(a) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

[6] On peut définir des classes de symboles beaucoup plus générales [32], [39].

On dit alors que $\mathrm{Op}_\hbar^w(a)$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre m, d'indice k et de paramètre ν. On note $\Psi_\nu^{m,k}$ l'ensemble de ces opérateurs, i.e.

$$\Psi_\nu^{m,k} := \left\{ \mathrm{Op}_\hbar^w(a) : a \in S_\nu^{m,k} \right\}.$$

Par dualité, un opérateur $\mathrm{Op}_\hbar^w(a)$ de $\Psi_\nu^{m,k}$ agit sur les distributions tempérées. On a alors

$$a(x,\xi) = e^{\frac{\imath}{\hbar}\langle x,\xi\rangle} \mathrm{Op}_\hbar^w(a) e^{\frac{\imath}{\hbar}\langle \bullet,\xi\rangle}.$$

Ceci permet de vérifier le caractère injectif de l'application $\mathrm{Op}_\hbar^w : S_\nu^{m,k} \to \Psi_\nu^{m,k}$. On peut donc retrouver le symbole d'un opérateur pseudo-différentiel en l'appliquant à des fonctions tests convenables. On peut définir l'application symbole principal :

$$\begin{array}{rccc} \sigma_0 : & \Psi_\nu^{m,k} & \to & S_\nu^{m,k}/S_\nu^{m,k-1+2\nu} \\ & \mathrm{Op}_\hbar^w(a) & \mapsto & [a], \end{array}$$

où $[a]$ est la classe de a dans $S_\nu^{m,k}$ modulo $S_\nu^{m,k-1+2\nu}$.

Composition des symboles

On va maintenant voir de quelle manière on peut étendre le développement du produit de Moyal pour cette nouvelle famille de symboles. On a vu que la formule (2.8) faisait apparaître un développement en puissance de $\hbar$ du produit de Moyal $a\sharp b$. De manière assez générale, on peut en fait définir des développements asymptotiques de symboles. On se donne une famille a_j de symboles dans S_ν^{m,k_j} avec $k_{j+1} < k_j$ pour tout j dans $\mathbb{N}$ et un symbole a dans S_ν^{m,k_0}. On dit alors que a est asymptotique à $\sum_j a_j$ (noté $a \sim \sum_j a_j$) si

$$\forall N \geq 0,\ a - \sum_{j=0}^{N} a_j \in S_\nu^{m,k_{N+1}}.$$

On souligne que cette définition ne dit rien sur la convergence de la série $\sum_j a_j$. On peut montrer le théorème suivant sur ces développements asymptotiques [39] :

Théorème 2.4 (Borel)**.** *Soit a_j une suite de symboles dans S_ν^{m,k_j} avec $k_{j+1} < k_j$ pour tout j dans $\mathbb{N}$. On suppose que $k_j \to -\infty$. Alors, il existe un symbole a dans S_ν^{m,k_0} tel que $a \sim \sum_j a_j$. De plus, si $\tilde{a}$ est aussi asymptotique à $\sum_j a_j$, alors $a - \tilde{a}$ est un élément de $S^{m,-\infty}$.*

Ces développements asymptotiques permettent de donner la généralisation pour les classes de symboles $S_\nu^{m,k}$ du théorème 2.3 [39] :

Théorème 2.5. *Soient a appartenant à $S_{\nu_1}^{m_1,k_1}$ et b appartenant à $S_{\nu_2}^{m_2,k_2}$. Alors, en tant qu'opérateurs agissant sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a*

$$Op_\hbar^w(a) \circ Op_\hbar^w(b) = Op_\hbar^w(a\sharp b),$$

avec $a\sharp b$ appartient à $S_{\max(\nu_1,\nu_2)}^{m_1+m_2,k_1+k_2}$. De plus,

$$a\sharp b(z,\zeta) - \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \left(\frac{\imath\hbar}{2} \omega(D_x, D_\xi; D_y, D_\eta) \right)^k a(x,\xi) b(y,\eta)_{|x=y=z,\xi=\eta=\zeta}$$

appartient à la classe $S_{\max(\nu_1,\nu_2)}^{m_1+m_2-N-1,k_1+k_2-(N+1)(1-\nu_1+\nu_2)}$.

Remarque. Ce théorème est une nouvelle fois obtenu grâce au principe de la phase stationnaire. On a vu que les restes dans le développement de la phase stationnaire étaient donnés par un reste dans une formule de Taylor dépendant de dérivées de a (précisément $2N$ dérivées pour le reste d'ordre N). Cette observation permet en fait de trouver que les constantes qui interviennent dans l'estimation des dérivées du reste d'ordre N dans le théorème 2.5 dépendent d'un certain nombre de dérivées de a et b qui croît comme $2N + C(d)$ (où $C(d)$ ne dépend que de d). On peut trouver une formulation plus précise de ce fait dans l'annexe de [21] ou dans le paragraphe 6.8.3 (pour la généralisation au cas d'une variété de cette propriété).

Prolongement des opérateurs pseudo-différentiels à L^2

Pour le moment, on a défini une manière d'associer à une observable un opérateur agissant sur la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Or l'espace des états quantiques que l'on a associé à $\mathbb{R}^d$ est le complété de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ pour la norme $\|.\|_2$, à savoir l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^d)$. Comme les constantes qui interviennent dans la définition de notre classe de symboles sont uniformes, on peut en fait prolonger nos opérateurs en des opérateurs agissant sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. Ce prolongement est donné par le théorème de Calderón-Vaillancourt [39] :

Théorème 2.6 (Calderón-Vaillancourt)**.** *Soit a appartenant à $S^{0,k}_\nu$. Alors, l'opérateur*

$$Op^w_\hbar(a) : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$$

est continu et sa norme vérifie

$$\|Op^w_\hbar(a)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C\hbar^{-k} \sum_{|\alpha|\leq M} \hbar^{\frac{|\alpha|}{2}} \sup|\partial^\alpha a|,$$

où les constantes C et M ne dépendent que de d. En particulier, on a

$$\|Op^w_\hbar(a)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C\hbar^{-k} \sup|a| + O_a(\hbar^{-k+\frac{1}{2}-\nu}).$$

On note que pour tout $-\infty \leq m \leq 0$, on a $S^{m,k}_\nu \subset S^{0,k}_\nu$ et le théorème s'applique donc en particulier à toutes ces familles de symboles (qui sont bornés en $\langle\xi\rangle$). On souligne que le théorème de Calderón-Vaillancourt est valable pour des familles de symboles beaucoup plus générales [32] (chapitre 7). En particulier, les pertes de puissances de $\langle\xi\rangle$ lorsque l'on dérive par rapport à ξ ne jouent aucun rôle pour montrer ce théorème dans $\mathbb{R}^d$.
Étudions maintenant quelques conséquences de ce théorème pour la composition des opérateurs pseudo-différentiels. Considérons a et b deux symboles dans $S^{0,0}_\nu$. D'après le théorème 2.5, on peut écrire

$$a\sharp b \sim \sum_{k\geq 0} \hbar^k (a\sharp b)_k.$$

En particulier, on peut vérifier que chaque symbole $(a\sharp b)_k$ est dans $S^{-k,2k\nu}_\nu$ et la norme de l'opérateur $\mathrm{Op}^w_\hbar(\hbar^k(a\sharp b)_k)$ est alors bornée par $\hbar^{k(1-2\nu)}$. De plus, le théorème de composition 2.5 nous donne la classe des restes d'ordre N. Il existe donc une famille d'opérateurs pseudo-différentiels $(C_k)_{k\geq 0}$ dans $\Psi^{-k,0}_\nu$ vérifiant

$$\forall N \geq 0, \quad \left\| \mathrm{Op}^w_\hbar(a) \circ \mathrm{Op}^w_\hbar(b) - \sum_{k=0}^{N} \hbar^{k(1-2\nu)} C_k \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^d)} = O_{a,b}(\hbar^{(N+1)(1-2\nu)}).$$

Ainsi, on fait correspondre au développement asymptotique de $a\sharp b$ un développement de $\mathrm{Op}^w_\hbar(a) \circ \mathrm{Op}^w_\hbar(b)$ par des opérateurs de norme de plus en plus négligeable (par rapport à $\hbar$).
Si on note $[A, B] := A \circ B - B \circ A$ le crochet de deux opérateurs, la discussion précédente permet de montrer que

$$\|\mathrm{Op}^w_\hbar(a) \circ \mathrm{Op}^w_\hbar(b) - \mathrm{Op}^w_\hbar(ab)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^d)} = O_{a,b}(\hbar^{1-2\nu}) \tag{2.9}$$

$$\text{et} \quad \left\| [\mathrm{Op}^w_\hbar(a), \mathrm{Op}^w_\hbar(b)] - \frac{\hbar}{i}\mathrm{Op}^w_\hbar(\{a, b\}) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^d)} = O_{a,b}(\hbar^{2(1-2\nu)}), \tag{2.10}$$

pour a et b deux symboles dans $S^{0,0}_\nu$ ($(a\sharp b)_0 = ab = (b\sharp a)_0$).

Remarque. Ces estimations permettent alors de dire que les propriétés que l'on attendait de notre procédure de quantification (voir paragraphe 2.1.2) sont presque vérifiées modulo des termes d'erreur petits en $\hbar$. La deuxième estimation nous dit par exemple que la structure d'algèbre de Lie, sans être préservée exactement, est préservée modulo $\hbar^{2(1-2\nu)}$ (par Calderón-Vaillancourt

$\|[\mathrm{Op}^w_\hbar(a), \mathrm{Op}^w_\hbar(b)]\| = o(1)$ et $\|\hbar \mathrm{Op}^w_\hbar(\{a,b\})\| = O(\hbar^{1-2\nu})$). Elle nous aussi dit que les opérateurs $\mathrm{Op}^w_\hbar(a)$ et $\mathrm{Op}^w_\hbar(b)$ commutent dans la limite semi-classique (modulo $\hbar^{(1-2\nu)}$). Ainsi, au niveau du système quantique, l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels $(\Psi^{0,0}_\nu, +, \circ)$ est presque une algèbre commutative dans la limite semi-classique (i.e. elle est commutative modulo $\hbar^{(1-2\nu)}$). L'algèbre correspondante (au niveau classique) est l'algèbre $(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2d}), +, \times)$ qui est commutative.

2.3.3 Quantification positive

Par la symétrie de sa définition, la quantification de Weyl vérifie des propriétés relativement agréables. Pour la suite de la thèse, on voudrait que notre procédé de quantification satisfasse la propriété suivante de positivité :

$$a \geq 0 \Rightarrow \mathrm{Op}_\hbar(a) \geq 0.$$

L'exemple simple de $d = 1$ et du symbole $a(x,\xi) := b(x)\xi^2$ (avec $b \geq 0 \in \mathcal{C}^\infty_o(\mathbb{R} - [0,1])$) permet de voir que cette propriété de positivité n'est pas satisfaite par la quantification de Weyl (prendre par exemple l'état $u(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$). De manière plus générale, l'inégalité de Gårding [39] nous dit cependant que pour tout symbole $a \geq 0 \in S^{0,0}_\nu$, il existe $\hbar_0 > 0$ et $C \geq 0$ telles que

$$\forall 0 < \hbar < \hbar_0,\ \forall u \in \mathcal{C}^\infty_o(\mathbb{R}^d),\ \langle \mathrm{Op}^w_\hbar(a)u, u\rangle \geq -C\hbar^{1-2\nu}\|u\|^2_{L^2}.$$

En d'autres termes, la quantification de Weyl est presque positive (modulo $\hbar^{1-2\nu}$). On peut en fait construire une procédure de quantification qui sera vraiment positive. Pour cela, on définit l'état cohérent centré au point $(0,0)$ de l'espace des phases $\mathbb{R}^{2d}$

$$|0\rangle(x) := \left(\frac{1}{\pi\hbar}\right)^{\frac{d}{4}} e^{-\frac{\|x\|^2}{2\hbar}}.$$

Puis, en utilisant les opérateurs de translation $U_\hbar(\rho, 0)$, on définit l'état cohérent centré au point $\rho \in \mathbb{R}^{2d}$

$$|\rho\rangle := U_\hbar(\rho)|0\rangle. \tag{2.11}$$

Enfin, comme pour la définition de la quantification de Weyl (2.7) par les opérateurs de translation, on définit la quantification anti-Wick d'une observable a [54]

$$\mathrm{Op}^{AW}_\hbar(a) := \int_{\mathbb{R}^{2d}} a(\rho_0)|\rho_0\rangle\langle\rho_0|\frac{d\rho_0}{(2\pi\hbar)^d}. \tag{2.12}$$

Cette procédure de quantification est bien définie pour des observables a appartenant à $\mathcal{C}^\infty_o(\mathbb{R}^{2d})$. Elle est bien positive et elle est reliée à la quantification de Weyl par

$$\mathrm{Op}^{AW}_\hbar(a) = \mathrm{Op}^w_\hbar(a * G_\hbar),$$

où $G_\hbar(x,\xi) := \frac{1}{(\pi\hbar)^d} e^{-\frac{\|x\|^2 + \|\xi\|^2}{\hbar}}$. Sous forme explicite, le symbole total de cet opérateur est donc donné par

$$a * G_\hbar(x,\xi) := a(x,\xi) + \frac{\sqrt{\hbar}}{\pi^d}\int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{-\|u\|^2 - \|v\|^2}\left(\int_0^1 d_{x+t\sqrt{\hbar}u, \xi+t\sqrt{\hbar}v} a.(u,v)dt\right)dudv.$$

En appliquant le théorème de Calderón-Vaillancourt à l'opérateur pseudo-différentiel de symbole $a - a * G_\hbar$, on vérifie immédiatement que

$$\|\mathrm{Op}^w_\hbar(a) - \mathrm{Op}^{AW}_\hbar(a)\|_{L^2} \leq C \sum_{|\alpha|\leq M} \hbar^{\frac{|\alpha|+1}{2}}\|\partial^\alpha da\|. \tag{2.13}$$

En particulier pour a appartenant à $\mathcal{C}^\infty_o(\mathbb{R}^{2d}) \cap S^{-\infty,0}_\nu$, on trouve que $\|\mathrm{Op}^w_\hbar(a) - \mathrm{Op}^{AW}_\hbar(a)\|_{L^2} = O\left(\hbar^{\frac{1}{2}-\nu}\right)$. En écrivant le développement de Taylor à l'ordre 2, on trouverait en fait l'estimation plus précise $\|\mathrm{Op}^w_\hbar(a) - \mathrm{Op}^{AW}_\hbar(a)\|_{L^2} = O\left(\hbar^{1-2\nu}\right)$. Ceci permet de vérifier que pour a dans

$\mathcal{C}_o^\infty(\mathbb{R}^{2d}) \cap S_\nu^{-\infty,0}$, les résultats du paragraphe précédent s'appliquent. Notons aussi que pour a appartenant à $\mathcal{C}_o^\infty(\mathbb{R}^{2d})$, l'opérateur $\mathrm{Op}_\hbar^{AW}(a)$ est un opérateur à trace et sa trace vérifie $(2\pi\hbar)^d \mathrm{tr}(\mathrm{Op}_\hbar^{AW}(a)) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} a(\rho_0) d\rho_0$. On peut montrer que $\mathrm{Op}_\hbar^{AW}(1)$ est bien défini et vérifie la relation de résolution de l'identité

$$\mathrm{Op}_\hbar^{AW}(1) = \mathrm{Id}_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^{2d}} |\rho_0\rangle\langle\rho_0| \frac{d\rho_0}{(2\pi\hbar)^d}.$$

On note enfin que l'on a immédiatement une estimation de la norme de l'opérateur :

$$\forall a \in \mathcal{C}_o^\infty(\mathbb{R}^{2d}),\ \|\mathrm{Op}_\hbar^{AW}(a)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|a\|_\infty.$$

Remarque. On pourrait essayer de définir cette procédure de quantification sur une classe plus large d'observables que $\mathcal{C}_o^\infty(\mathbb{R}^{2d}) \cup \{\mathrm{cste}\}$. Par exemple, si a appartient à la classe $S_0^{0,0}$ et ne dépend que de x, le symbole $a * G_h$ reste dans la classe $S_0^{0,0}$ et l'opérateur pseudo-différentiel associé est toujours bien défini. Par contre, si le symbole dépend de ξ, le symbole $a * G_h$ n'appartient pas à la classe $S_0^{0,0}$ (on n'aurait pas de perte de puissances de $\langle\xi\rangle$ en dérivant par rapport à ξ) et les résultats du paragraphe précédent ne peuvent pas s'appliquer. Toutefois, pour a appartenant à $S_0^{0,0}$, l'équation (2.12) définit bien un opérateur continu sur $L^2(M)$ de norme inférieure à $\|a\|_\infty$. En fait, en utilisant la classe de symboles [32], [39]

$$\tilde{S}_\nu^{m,k} := \left\{ a_\hbar \in C^\infty(\mathbb{R}^{2d}) : |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a_\hbar| \leq C_{\alpha,\beta} \hbar^{-k-\nu|\alpha+\beta|} \langle\xi\rangle^m \right\}, \tag{2.14}$$

on pourrait étendre en particulier le théorème de Calderón-Vaillancourt à ces familles plus grandes de symboles. Par contre, cette classe plus générale de symboles ne vérifierait pas un théorème satisfaisant de changement de variables (paragraphe 2.5) et on ne pourrait pas définir d'analogue de ce calcul pseudo-différentiel sur une variété (pour les raisons évoquées en 2.3.2).

2.4 Théorème d'Egorov et temps d'Ehrenfest

On vient de construire une manière de quantifier un système de mécanique classique défini sur $\mathbb{R}^{2d}$. On va maintenant voir quelles sont les propriétés de cette procédure de quantification pour l'action d'un système dynamique hamiltonien $(\mathbb{R}^{2d}, \varphi_H^t)$ (voir annexe A).

2.4.1 Théorème d'Egorov

Considérons un Hamiltonien $H : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}$ appartenant à la classe de symbole $\Psi_0^{m,0}$ (avec m fini). Le flot Hamiltonien correspondant φ_H^t satisfait la relation (2.2). On peut de manière formelle résoudre l'équation de Schrödinger correspondant à cet Hamiltonien, i.e.

$$\imath\hbar \frac{\partial}{\partial t} u(t) = \mathrm{Op}_\hbar^w(H) u(t).$$

Pour cela, on introduit la famille d'opérateurs unitaires $U_H^t = \exp(-(\imath t/\hbar)\mathrm{Op}_\hbar^w(H))$. L'analogue de la relation (2.2) est alors donné par l'équation d'Heisenberg-von Neumann pour tout symbole a dans $S_\nu^{m',k}$:

$$\frac{d}{dt}\left(U_H^{-t} \mathrm{Op}_\hbar(a) U_H^t\right) = \frac{\imath}{\hbar}\left[\mathrm{Op}_\hbar^w(H), U_H^{-t}\mathrm{Op}_\hbar^w(a)U_H^t\right]. \tag{2.15}$$

Notons pour alléger les notations $a_H^t := a \circ \varphi_H^t$. On peut alors combiner la relation de propagation classique (2.2) et la relation de propagation quantique (2.15) pour trouver

$$\forall t, s \in \mathbb{R},\ \frac{d}{ds}\left(U_H^{-s}\mathrm{Op}_\hbar(a_H^{t-s})U_H^s\right) = U_H^{-s}\left(\frac{\imath}{\hbar}[\mathrm{Op}_\hbar^w(H), \mathrm{Op}_\hbar^w(a_H^{t-s})] - \mathrm{Op}_\hbar\left(\{H, a_H^{t-s}\}\right)\right) U_H^s. \tag{2.16}$$

Par souci de simplicité, considérons maintenant a un symbole dans $\mathcal{C}_o^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ indépendant de $\hbar$. On note $\mathrm{Diff}(a_H^t) := \frac{\imath}{\hbar}[\mathrm{Op}_\hbar^w(H), \mathrm{Op}_\hbar^w(a_H^t)] - \mathrm{Op}_\hbar(\{H, a_H^t\})$. Pour t fixé, on peut vérifier que

l'opérateur est dans la classe $\Psi_0^{-\infty,-1}$ (en utilisant les théorèmes de composition des opérateurs pseudo-différentiels). Le théorème de Calderón-Vaillancourt nous dit alors que la norme de l'opérateur est un $O_{H,t,a}(\hbar)$ (où le reste dépend de t et des dérivées de a). Sous forme intégrée, la dernière égalité s'écrit alors

$$U_H^{-t}\mathrm{Op}_\hbar(a)U_H^t = \mathrm{Op}_\hbar^w\left(a\circ\varphi_H^t\right) + \int_0^t U_H^{-s}\left(\mathrm{Diff}(a_H^{t-s})\right)U_H^s ds.$$

Cette discussion permet de déduire le théorème d'Egorov :

$$\forall t\in\mathbb{R}, U_H^{-t}\mathrm{Op}_\hbar(a)U_H^t = \mathrm{Op}_\hbar^w\left(a\circ\varphi_H^t\right) + O_{L^2,t,a}(\hbar). \tag{2.17}$$

Ainsi la quantification de Weyl relie la propagation quantique à la propagation classique[7] : l'égalité (2.17) dit que modulo $\hbar$, l'une est équivalente à l'autre. On voit que pour montrer ce résultat, tout repose sur le fait que la quantification préserve (modulo $\hbar$) la structure d'algèbre de Lie de l'ensemble des observables (relation (2.10)). On sait qu'on peut avoir un développement à n'importe quel ordre en $\hbar$ du crochet de deux opérateurs pseudo-différentiels et on peut itérer notre raisonnement. De maniére plus générale, on aurait donc pu construire pour tout réel t une suite d'opérateurs pseudo-différentiels $(A_k(t))_k$ dans $\Psi_0^{-\infty,0}$ telle que

$$\forall N\geq 0,\ \forall t\in\mathbb{R},\ \left\|U_H^{-t}\mathrm{Op}_\hbar(a)U_H^t - \sum_{k=0}^N \hbar^k A_k(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^d)} = O_t(\hbar^{N+1}),$$

avec[8] $A_0(t) := \mathrm{Op}_\hbar^w\left(a\circ\varphi_H^t\right)$. Le fait d'avoir ce type de développements à n'importe quel ordre (plus précisément un analogue de ce résultat sur des variétés) sera important pour nous dans la suite (voir paragraphe 6.7 par exemple). Pour le moment, les restes dépendent du temps t considéré. Il sera utile d'estimer l'échelle de temps pour laquelle ce type d'estimation reste vraie, c'est-à-dire déterminer le temps pour lequel l'approximation semi-classique reste valable. Comme la preuve de ce résultat repose sur la composition des opérateurs pseudo-différentiels, la remarque du théorème 2.5 combinée avec le théorème de Calderón-Vaillancourt permet de vérifier que les restes dépendent d'un certain nombre de dérivées de $a\circ\varphi_H^t$ et de H. Pour estimer la dépendance du reste en temps, il faut donc en particulier estimer la croissance des dérivées de φ_H^t en fonction du temps. Pour cela, on peut introduire la quantité

$$\Gamma_H(a) := \sup_{\rho\in\mathrm{supp}(a)} \|\nabla_\rho^2 H\|_\infty,$$

où $\nabla_\rho^2 H$ est la matrice Hessienne de H et où $\|.\|_\infty$ est la norme supérieure sur les coefficients de la matrice. On peut montrer [21] que la croissance des dérivées d'ordre m de φ_H^t est bornée par $C_m e^{mt\Gamma_H(a)}$ sur le support de a. On introduit alors le temps d'Ehrenfest

$$T_E(\hbar) := \frac{|\log\hbar|}{2\Gamma_H(a)}.$$

Tant que $|t|\leq(1-\epsilon)T_E(\hbar)$ (ϵ petit), on trouve finalement que $a\circ\varphi_H^t$ reste dans une bonne classe de symboles (précisément $S^{-\infty,0}_{\frac{1-\epsilon}{2}}$). Modulo une analyse précise de la dépendance des restes en les dérivées de $a\circ\varphi_H^t$ (voir remarque du théorème 2.5), on peut montrer une version faible d'un résultat de Bouzouina et Robert [21] :

Théorème 2.7 (Bouzouina-Robert)**.** *Soient a appartenant à $\mathcal{C}_o^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ indépendante de $\hbar$ et H un Hamiltonien à valeurs réelles appartenant à $S_0^{m,0}$. Alors, il existe une suite d'opérateurs pseudo-différentiels $(A_k(t))_k$ dans $\Psi^{-\infty,0}_{\frac{1-\epsilon}{2}}$ telle que pour tout $0<\epsilon<1$*

$$\forall N\geq 0,\ \forall|t|\leq(1-\epsilon)T_E(\hbar),\ \left\|U_H^{-t}Op_\hbar(a)U_H^t - \sum_{k=0}^N \hbar^{k\epsilon}A_k(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^d)} = O(\hbar^{(N+1)\epsilon}),$$

[7] Cela resterait vrai pour une autre procédure de quantification.

[8] Les formules pour la composition des symboles nous permettent aussi de monter par récurrence que le support du symbole de chaque $A_k(t)$ est inclus dans le support de $a\circ g^t$.

avec $A_0(t) := Op^w_\hbar\,(a \circ \varphi^t_H)$. *De plus, pour tout* k, *le symbole de* $A_k(t)$ *dépend d'au plus* k *dérivées de* $a \circ \varphi^t_H$.

Ce théorème nous dit que l'on peut bien approximer la 'propagation quantique' par la 'propagation classique' tant qu'on reste dans une échelle de temps donnée par le temps d'Ehrenfest. Ce temps donne la limite de validité de l'approximation semi-classique : on voit qu'elle dépend de $\Gamma_H(a)$. Ceci n'est pas totalement satisfaisant si par exemple la norme de la Hessienne varie beaucoup dans le support du symbole a. Dans le chapitre 6, on verra comment on peut essayer d'améliorer ce résultat en introduisant un temps d'Ehrenfest local pour des symboles de petit support dépendant de $\hbar$.

2.4.2 Représentation métaplectique

On vient de voir qu'un flot hamiltonien vérifie une propriété de propagation dite d'Egorov. De manière plus générale, la théorie des opérateurs intégraux de Fourier permet d'associer un propagateur à une transformation symplectique. Ces opérateurs vérifient aussi une propriété d'Egorov. Il existe une famille de transformations symplectiques pour laquelle cette théorie est particulièrement simple. Il s'agit de l'ensemble $Sp(2d,\mathbb{R})$ des transformations linéaires symplectiques. Rappelons brièvement comment quantifier ces transformations grâce à la représentation métaplectique [44] (chapitre 4), [32] (chapitre 7). Pour cela, nous soulignons que la représentation $U_\hbar$ du groupe d'Heisenberg permet de définir une nouvelle représentation en posant $U^A_\hbar(\rho,t) := U_\hbar(A\rho,t)$ (pour $A \in Sp(2d,\mathbb{R})$). D'après le théorème 2.1 de Stone-von Neumann, il existe un unique opérateur $M(A)$ unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^{2d})$ vérifiant la propriété :

$$\forall \rho \in \mathbb{R}^{2d},\ \forall \hbar \neq 0,\ U_\hbar(A\rho) = M(A)U_\hbar(\rho)M(A)^{-1}.$$

On rappelle que l'on a noté $U_\hbar(\rho) := U_\hbar(\rho,0)$. Cet opérateur est défini à une phase près[9]. Par dualité avec $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, cet opérateur se prolonge en un opérateur continu sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. De plus, on a la propriété de multiplicativité : $M(AB) = e^{\imath\varphi(A,B)}M(A)M(B)$, où $\varphi(A,B)$ est un nombre réel [44]. Si on considère maintenant une observable a dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$, on peut utiliser la définition (2.7) de la quantification de Weyl par les opérateurs de translation pour écrire la relation d'Egorov suivante :

$$\mathrm{Op}^w_\hbar(a \circ A) = M(A)^{-1}\mathrm{Op}^w_\hbar(a)M(A). \tag{2.18}$$

Cette relation se prolonge à des observables a dans des classes plus générales de symboles. Pour conclure, on sait que le groupe $Sp(2d,\mathbb{R})$ est engendré par trois familles de matrices [44] :

$$A_B := \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B^{*-1} \end{pmatrix},\ T_C := \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^d} & 0 \\ C & \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^d} \end{pmatrix} \text{ et } J := \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^d} \\ -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^d} & 0 \end{pmatrix},$$

avec $B \in GL(d,\mathbb{R})$ et $C^* = C$. Pour chacune de ces trois familles, on peut donner une formule explicite pour la représentation métaplectique. Pour u appartenant à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$M(A_B)u(x) = |\det B|^{-\frac{1}{2}}u \circ B^{-1}(x),\ M(T_C)u(x) = e^{-\imath\pi xCx}u(x) \text{ et } M(J)u(x) = \imath^{\frac{d}{2}}\mathcal{F}^{-1}(u)(x),$$

avec $\mathcal{F}^{-1}(u)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\imath\pi\langle x,\xi\rangle}u(\xi)d\xi$ la transformée de Fourier inverse.

2.5 Passage aux variétés

Pour terminer ce chapitre sur l'analyse semi-classique, on voudrait rappeler deux choses importantes pour la définition des opérateurs pseudo-différentiels sur une variété décrite au paragraphe 6.8.1. Ce passage aux variétés nécessite tout d'abord d'avoir un théorème de changement de variables pour les opérateurs pseudo-différentiels. Considérons une application de changement

[9] Ceci n'aura pas d'importance pour nous dans la suite.

de coordonnées $\kappa : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ (c'est-à-dire un difféomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$). On définit l'application de tirage en arrière $\kappa^* : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ de la manière suivante :

$$\forall u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d),\ \kappa^* u := u \circ \kappa^{-1}.$$

Cette application se prolonge à $L^2(\mathbb{R}^d)$. On a le théorème suivant de changement de variables [39] (théorème 8.4), [56] (théorème 18.1.17) :

Théorème 2.8 (Changement de variables)**.** *Soit a appartenant à $S^{m,k}_\nu$. Soit $\kappa : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ un difféomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors, l'opérateur $(\kappa^{-1})^* Op^w_\hbar(a)\kappa^*$ appartient à $\Psi^{m,k}_\nu$. De plus, son symbole a_κ admet le développement asymptotique suivant :*

$$a_\kappa\left(\kappa(x),\eta\right) = \sum_{|\alpha|\leq N} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha_\xi a\left(x, \partial\kappa(x)^T\eta\right)\left(\hbar D_y\right)^\alpha \left(e^{\frac{i}{\hbar}\langle\rho_x(y),\eta\rangle}\right)_{|y=x} + O_{S^{m-N-1,k}_\nu}(\hbar^{(N+1)(1-\nu)}),$$

avec $\rho_x(y) := \kappa(y) - \kappa(x) - \partial\kappa(x).(y-x)$.

On note en particulier que les termes d'ordre k du développement asymptotique ne dépendent que de k dérivées de a et que le terme d'ordre 0 est donné par $a(\kappa^{-1}(x), \partial\kappa(x)^T\xi)$. On souligne aussi que $(x,\xi) \mapsto (\kappa^{-1}(x), \partial\kappa(x)^T\xi)$ est la transformation symplectique canonique associée à κ. Dans la définition du paragraphe 6.8.1, on a utilisé la quantification de Weyl pour passer au cas des variétés. On peut aussi utiliser la quantification anti-Wick (2.12) qui vérifie une propriété de positivité. Si on remplace la quantification de Weyl par la quantification anti-Wick dans la définition (6.75) d'un opérateur pseudo-différentiel sur T^*M (avec M variété riemannienne), alors la propriété de positivité est bien vérifiée. Par contre, la classe d'observables sur laquelle la procédure de quantification est bien définie n'est plus la même. En effet, on a vu que l'opérateur $\mathrm{Op}^{AW}_\hbar(a)$ appartient à la famille d'opérateurs pseudo-différentiels qui nous intéressent pour $a \in \mathcal{C}^\infty_o(\mathbb{R}^{2d})$ (ou $a \in S^{0,0}_0$ ne dépendant que de x). En passant aux variétés, on va donc définir une quantification positive $\mathrm{Op}^+_\hbar(a)$ pour une classe restreinte d'observables a :

Proposition 2.9. *Soit a appartenant à $S^{0,0}_0(T^*M)$ de la forme $b(x) + c(x,\xi)$ avec b appartenant à $S^{0,0}_0(T^*M)$ et c appartenant à $\mathcal{C}^\infty_o(T^*M)$. Alors l'opérateur $Op^+_\hbar(a)$ défini par (6.75) en remplaçant la quantification de Weyl par la quantification anti-Wick est un opérateur pseudo-différentiel appartenant à $\Psi^{0,0}_0(M)$ et de symbole principal a. De plus, si $a \geq 0$, alors $Op^+_\hbar(a)$ est un opérateur autoadjoint positif sur $L^2(M)$. Enfin, on a $Op^+_\hbar(1) = Id_{L^2(M)}$.*

Chapitre 3

Déviations semi-classiques sur le tore

Dans ce chapitre, nous présentons un système dynamique élémentaire pour étudier les phénomènes de chaos quantique. Il s'agit du système dynamique $(\mathbb{T}^{2d}, A)$ où A est une matrice ergodique du groupe symplectique $Sp(2d, \mathbb{Z})$. On peut adapter de manière cohérente la procédure de quantification du chapitre précédent pour ce système dynamique. Le caractère élémentaire de ce système permet de simplifier certains aspects de l'étude du chaos quantique.
Le premier paragraphe de ce chapitre est consacré à la présentation générale du modèle étudié [20]. Puis le second paragraphe est consacré à la présentation de différents résultats de délocalisation des états quantiques par le propagateur quantique. En particulier, on démontre un résultat de déviations des états quantiques (théorème 3.12) obtenu à partir d'un théorème de grandes déviations de Kifer [63]. Pour conclure, on discute de l'exemple particulier des états cohérents sur le tore (proposition 3.18).

3.1 Mécanique quantique sur le $2d$ tore

Le système dynamique considéré dans ce chapitre est $(\mathbb{T}^{2d}, A)$ où A est un élément de[1] $Sp(2d, \mathbb{Z}) := \{A \in Gl(2d, \mathbb{Z}) : A^* J A = J\}$ et en particulier préserve la restriction à $\mathbb{T}^{2d}$ de la forme symplectique ω sur $\mathbb{R}^{2d}$. On souligne que pour $d = 1$, $SL(2, \mathbb{Z}) = Sp(2, \mathbb{Z})$.

3.1.1 Construction d'un espace de Hilbert associé au tore

Dans [20], Bouzouina et de Bièvre proposent pour ce système dynamique un analogue des procédures de quantification développées au chapitre précédent. Le principe général est de périodiser les différents objets définis sur $\mathbb{R}$ pour obtenir un système quantique satisfaisant. Dans le cas de $\mathbb{R}^d$, on peut voir un état quantique comme une distribution tempérée $\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Pour définir l'espace de Hilbert correspondant à l'espace des phases $\mathbb{T}^{2d}$, une manière naturelle est d'exiger la même invariance au niveau quantique qu'au niveau classique. Pour cela, on fixe $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2)$ un élément de $[0, 2\pi[^{2d}$ et on veut qu'un état quantique soit une distribution tempérée invariante par les opérateurs de translation[2]

$$\forall (q,p) \in \mathbb{Z}^{2d},\ U_\hbar(q,p)\psi = e^{\frac{\imath}{2\hbar}\langle q,p\rangle} e^{-\imath\langle \kappa_1, q\rangle + \imath\langle \kappa_2, p\rangle}\psi.$$

On autorise κ différent de 0 puisque pour $\alpha \in \mathbb{R}$, ψ et $e^{\imath\alpha}\psi$ représentent le même état quantique. Les états de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ qui vérifient la propriété de périodicité précédente sont appelés états quantiques sur le $2d$-tore. On note l'ensemble de ces états $\mathcal{H}_N(\kappa)$ où N satisfait

$$2\pi\hbar N = 1. \tag{3.1}$$

[1] On rappelle que $J := \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$.

[2] On rappelle que l'on utilise la notation $U_\hbar(\rho) := U_\hbar(\rho, 0)$.

Bouzouina et de Bièvre montrent le résultat suivant [20] :

Proposition 3.1. *Soit κ appartenant à $[0,2\pi[^{2d}$. L'espace $\mathcal{H}_N(\kappa)$ n'est pas réduit à $\{0\}$ si et seulement si $N \in \mathbb{N}^*$.*
Dans ce cas, on a $\dim \mathcal{H}_N(\kappa) = N^d$. De plus, l'espace est préservé par les opérateurs de translation $U_\hbar(\frac{q}{N}, \frac{p}{N})$ si et seulement si $(q,p) \in \mathbb{Z}^{2d}$. Pour j appartenant à $\mathbb{Z}^d$, on définit le vecteur de $\mathcal{H}_N(\kappa)$:

$$e_j^\kappa(x) := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n \in \mathbb{Z}^{2d}} e^{\imath\langle n, \kappa_1\rangle} \delta\left(x - \frac{\kappa_2}{2\pi N} - \frac{j}{N} - n\right).$$

La famille $(e_j^\kappa)_{j\in\{0,\cdots,N-1\}^d}$ forme une base de $\mathcal{H}_N(\kappa)$. Enfin, il existe une unique (à normalisation près) structure d'espace de Hilbert sur $\mathcal{H}_N(\kappa)$ pour laquelle les opérateurs de translation $U_\hbar(\frac{q}{N}, \frac{p}{N})$ sont unitaires pour tout $(q,p) \in \mathbb{Z}^{2d}$. La famille $(e_j^\kappa)_{j\in\{0,\cdots,N-1\}^d}$ est alors une base orthonormée pour cette structure hilbertienne.

Cette proposition nous dit que l'espace des phases classique $\mathbb{T}^{2d}$ correspond à une famille d'espaces de Hilbert. Chacun de ces espaces correspond à un niveau d'énergie N entier qui est relié au paramètre semi-classique $\hbar$ par la relation $2\pi\hbar N = 1$. Comparé au cas d'un espace des phases non compact (par exemple $\mathbb{R}^{2d}$), la situation est simplifié chacun des espaces de Hilbert est de dimension finie (à la différence de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans le cas de $\mathbb{R}^{2d}$).

Remarque. Pour distinguer le cas de $\mathbb{R}^{2d}$ et le cas du tore $\mathbb{T}^{2d}$, on utilisera l'indice $\hbar$ pour le cas réel et κ pour le tore. Par exemple, on notera :

$$U_\kappa\left(\frac{q}{N}, \frac{p}{N}\right) := U_\hbar\left(\frac{q}{N}, \frac{p}{N}\right)_{|\mathcal{H}_N(\kappa)}.$$

Sous la forme de la proposition, la définition du produit scalaire n'est pas très maniable. Afin de simplifier son utilisation, on peut utiliser l'opérateur de projection $S(\kappa)$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{H}_N(\kappa)$ défini par

$$S(\kappa) := \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^{2d}} (-1)^{N\langle n,m\rangle} e^{\imath(\langle\kappa_1,n\rangle - \langle\kappa_2,m\rangle)} U_\hbar(n,m).$$

On peut montrer que cet opérateur est surjectif. Pour deux états $|\phi\rangle$ et $|\phi'\rangle$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on note $|\phi,\kappa\rangle := S(\kappa)|\phi\rangle$ et $|\phi',\kappa\rangle := S(\kappa)|\phi'\rangle$. On peut alors établir une relation entre la structure de Hilbert sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ et celle sur $\mathcal{H}_N(\kappa)$ en vérifiant que

$$\langle\kappa,\phi|\phi',\kappa\rangle_{\mathcal{H}_N(\kappa)} = \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^{2d}} (-1)^{N\langle n,m\rangle} e^{\imath(\langle\kappa_1,n\rangle - \langle\kappa_2,m\rangle)} \langle\phi|U_\hbar(n,m)|\phi'\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{3.2}$$

L'utilisation de la formule de Poisson $\sum_n \delta(x-n) = \sum_k e^{2\imath\pi kx}$ permet de montrer ces différents résultats. Pour finir, les structures d'espaces de Hilbert sur le tore et sur $\mathbb{R}^d$ sont aussi reliées par la décomposition suivante :

$$L^2(\mathbb{R}^d) \cong \int_{[0,2\pi[^{2d}} \mathcal{H}_N(\kappa) d\kappa \text{ et } U_\hbar(\frac{n}{N}, \frac{m}{N}) = \int_{[0,2\pi[^{2d}} U_\kappa(\frac{n}{N}, \frac{m}{N}) d\kappa, \tag{3.3}$$

qui est en fait la décomposition en sous-représentations irréductibles du groupe de Heisenberg discret $\{(\frac{n}{N}, \frac{m}{N}, \phi) : n, m \in \mathbb{Z}^d, \phi \in \mathbb{R}\}$.

3.1.2 Quantification des observables

Maintenant que nous avons associé une famille d'espaces de Hilbert à l'espace des phases $\mathbb{T}^{2d}$, nous pouvons construire une procédure de quantification des observables pour chaque niveau d'énergie N $(= (2\pi\hbar)^{-1})$. On renvoie le lecteur à [20] pour plus de détails.

Pour l'espace des phases $\mathbb{T}^{2d}$, l'ensemble des observables est donné par les fonctions lisses $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^{2d})$

sur le tore (que l'on peut identifier à un sous-ensemble de $\tilde{S}_0^{0,0}$ défini par (2.14)). En particulier, la quantification de Weyl sur $\mathbb{R}^{2d}$ de ces observables est bien définie [32], [39] et vérifie le théorème de Calderón-Vaillancourt. Pour a appartenant à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^{2d})$, la quantification de Weyl peut s'écrire sous la forme d'un analogue discret de (2.7)

$$\mathrm{Op}_\hbar^w(a) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^{2d}} a_{n,m} U_\hbar\left(\frac{m}{N}, \frac{n}{N}\right),$$

avec $a(x,\xi) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^{2d}} a_{n,m} e^{2\imath\pi(\langle n,x\rangle - \langle m,\xi\rangle)}$. Les relations de commutation des opérateurs de translation permettent de vérifier que $U_\hbar(n,m)\mathrm{Op}_\hbar^w(a)U_\hbar(n,m)^* = \mathrm{Op}_\hbar^w(a)$ et alors que

$$\mathrm{Op}_\hbar^w(a)\mathcal{H}_N(\kappa) \subset \mathcal{H}_N(\kappa)$$

(par dualité $\mathrm{Op}_\hbar^w(a)$ est bien défini sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ [39]). Pour distinguer la quantification de Weyl sur $\mathbb{R}^{2d}$ et sur le tore, on note $\mathrm{Op}_\kappa^w(a)$ la restriction de $\mathrm{Op}_\hbar^w(a)$ à $\mathcal{H}_N(\kappa)$. Comme pour l'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$ (relation (3.3)), on a une décomposition des opérateurs :

$$\mathrm{Op}_\hbar^w(a) = \int_{[0,2\pi[^{2d}} \mathrm{Op}_\kappa^w(a) d\kappa. \tag{3.4}$$

Comme $\left\|U_\kappa\left(\frac{m}{N}, \frac{n}{N}\right)\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_N(\kappa))} = 1$, on trouve que pour tout κ la norme de l'opérateur $\mathrm{Op}_\kappa^w(a)$ est bornée par $\sum_{|\alpha|\leq M(d)} |\partial^\alpha a|$ où $M(d)$ ne dépend que de d.

3.1.3 Quantification positive

Comme dans le cas de $\mathbb{R}^{2d}$, on peut préférer travailler avec une quantification positive. On peut définir la périodisée de la quantification anti-Wick. Pour cela, on commence par projeter les états cohérents $|\rho\rangle$ (voir définition (2.11)) sur $\mathcal{H}_N(\kappa)$

$$|\rho,\kappa\rangle := S(\kappa)|\rho\rangle. \tag{3.5}$$

On peut alors introduire l'analogue de la quantification anti-Wick (2.12) d'une observable a appartenant à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^{2d})$ en posant

$$\mathrm{Op}_\kappa^{AW}(a) := \int_{\mathbb{T}^{2d}} a(\rho)|\rho,\kappa\rangle\langle\rho,\kappa| \frac{d\rho}{(2\pi\hbar)^d}.$$

Cette procédure de quantification est positive et vérifie aussi $\mathrm{Op}_\kappa^{AW}(a)^* = \mathrm{Op}_\kappa^{AW}(\overline{a})$. On remarque aussi que $\|\mathrm{Op}_\kappa^{AW}(a)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_N(\kappa))} \leq \|a\|_\infty$. Comme dans le cas de la quantification de Weyl, cet opérateur est relié à son analogue sur $\mathbb{R}^{2d}$ par la représentation intégrale [20]

$$\mathrm{Op}_\hbar^{AW}(a) = \int_{[0,2\pi[^{2d}} \mathrm{Op}_\kappa^{AW}(a) d\kappa.$$

Combinée avec les décompositions (3.3) et (3.4) et le théorème XIII.83 de [81], cette dernière égalité permet de vérifier en utilisant le théorème de Calderón-Vaillancourt sur $\tilde{S}_0^{0,0}$ que $\|\mathrm{Op}_\kappa^w(a) - \mathrm{Op}_\kappa^{AW}(a)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_N(\kappa))} = O_a(N^{-1})$ (voir paragraphe 2.3.3). Enfin, comme sur $\mathbb{R}^{2d}$, la quantification anti-Wick vérifie une propriété de résolution de l'identité [20]

$$\mathrm{Op}_\kappa^{AW}(1) = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}_N(\kappa)} = \int_{\mathbb{T}^{2d}} |\rho,\kappa\rangle\langle\rho,\kappa| \frac{d\rho}{(2\pi\hbar)^d}. \tag{3.6}$$

Remarque. On souligne que $\mathrm{Op}_\kappa^{AW}(a)$ a toujours un sens pour a appartenant à $\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^{2d})$. Dans la suite, pour pouvoir appliquer les outils de calcul pseudo-différentiel (comme le théorème d'Egorov), on sera amené à se limiter au cas a dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^{2d})$.

3.1.4 Quantification des matrices symplectiques

Pour finir d'étudier notre quantification du système dynamique $(\mathbb{T}^{2d}, A)$, il reste à quantifier le symplectomorphisme A et à voir comment il se comporte par rapport à $\mathrm{Op}^w_\kappa(a)$ et $\mathrm{Op}^{AW}_\kappa(a)$. Pour cela, on utilise la représentation métaplectique introduite au paragraphe 2.4.2. On peut montrer le résultat suivant [18] :

Proposition 3.2. *Soit $A \in Sp(2d, \mathbb{Z})$ une matrice* ergodique. *Soit N appartenant à $\mathbb{N}^*$. Alors, il existe au moins un élement $\kappa \in [0, 2\pi[^{2d}$ vérifiant*

$$M(A)\mathcal{H}_N(\kappa) = \mathcal{H}_N(\kappa).$$

On note $M_\kappa(A)$ la restriction de $M(A)$ à $\mathcal{H}_N(\kappa)$. C'est un opérateur unitaire.

Remarque. Dans cette proposition, l'hypothèse que A est *ergodique* signifie qu'aucune valeur propre de A n'est racine de l'unité (voir paragraphe 1.1). Pour prouver la proposition, on utilise seulement le fait que 1 n'est pas valeur propre de A [18] (preuve du lemme 2.2). Dans la suite, on s'intéressera au cas de matrices ergodiques et l'hypothèse d'ergodicité sera par contre cruciale pour les différents résultats obtenus. On note qu'un exemple particulier de matrice ergodique est celui d'une matrice hyperbolique, i.e. dont toutes les valeurs propres sont de module différent de 1.

Pour la suite du chapitre, on fixe l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_N(\kappa)$, où κ est donné par la proposition précédente. On appelle $M_\kappa(A)$ le propagateur quantique. Il joue un rôle analogue à celui joué par $e^{\frac{\imath\hbar\Delta}{2}}$ sur l'espace de Hilbert $L^2(M)$ et ses fonctions propres jouent le rôle des fonctions propres du Laplacien. Notons que

$$M_\kappa(A)^P = e^{\imath\alpha}\mathrm{Id}_{\mathcal{H}_N(\kappa)} \Leftrightarrow \forall \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^{2d},\ U_\kappa\left(A^P\frac{\mathbf{k}}{N}\right) = U_\kappa\left(\frac{\mathbf{k}}{N}\right).$$

Cette dernière propriété est équivalente au fait que pour tout $\mathbf{k}$ dans $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{2d}$, $A^P\mathbf{k} = \mathbf{k} \pmod N$. Comme A est un élément de $SL(2d, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ (qui est un groupe fini), il existe un entier $P(N)$ minimal tel que $A^{P(N)} = \mathrm{Id} \pmod N$. On l'appelle la période quantique de A [60], [30]. On a vu au paragraphe (2.4.2) que le propagateur quantique $M(A)$ pour $\mathbb{R}^{2d}$ satisfaisait une relation exacte d'Egorov (2.18) pour la quantification de Weyl. On en déduit une propriété analogue sur les espaces $\mathcal{H}_N(\kappa)$ [20] :

$$\forall a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^{2d}),\ M_\kappa(A)^{-1}\mathrm{Op}^w_\kappa(a)M_\kappa(A) = \mathrm{Op}^w_\kappa(a \circ A).$$

Ainsi, la relation entre la propagation quantique et la propagation classique est valable pour tout temps tant qu'on n'utilise que la quantification de Weyl (ce qui simplifie grandement les choses). Toutefois, les opérateurs $\mathrm{Op}^{AW}_\kappa(a)$ ne vérifient pas la même propriété et on a seulement le résultat suivant :

Proposition 3.3 (Egorov)**.** *Soit a appartenant à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^{2d})$ et A un élément ergodique de $Sp(2d, \mathbb{Z})$. On a*

$$\forall t \in \mathbb{N},\ M_\kappa(A)^{-t}Op^{AW}_\kappa(a)M_\kappa(A)^t = Op^{AW}_\kappa(a \circ A^t) + O_t(N^{-1}).$$

On note $\lambda_+ := \sup\{\log|\gamma| : \gamma \in Sp(A)\}$. De manière plus uniforme, on a, pour c dans l'intervalle $[0, \frac{1}{2\lambda_+})$, existence de $\epsilon > 0$ tel que

$$\forall |t| \leq c|\log N|,\ M_\kappa(A)^{-t}Op^{AW}_\kappa(a)M_\kappa(A)^t = Op^{AW}_\kappa(a \circ A^t) + O(N^{-\epsilon}). \tag{3.7}$$

Remarque. On souligne que d'après le théorème de Kronecker (2.5 dans [75]), si A est une matrice *ergodique* de $SL(2d, \mathbb{Z})$, alors on a $\lambda_+ > 0$. En particulier, si $d = 1$ et si A est ergodique (A appartenant à $SL(2, \mathbb{Z})$), alors A est hyperbolique.

Preuve. En utilisant la décomposition de $L^2(\mathbb{R}^d)$ le long des espaces $\mathcal{H}_N(\kappa)$ et la propriété d'Egorov exacte pour la quantification de Weyl, on trouve, pour tout t dans $\mathbb{N}$ et tout a dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^{2d})$,

$$\left\| M_\kappa(A)^{-t}\mathrm{Op}_\kappa^{AW}(a)M_\kappa(A)^t - \mathrm{Op}_\kappa^{AW}(a\circ A^t)\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_N(\kappa))} \leq \left\|\mathrm{Op}_\kappa^{w}(a\circ A^t) - \mathrm{Op}_\kappa^{AW}(a\circ A^t)\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d))} + O_a(N^{-1}).$$

On note que le passage à la norme $L^2(\mathbb{R}^d)$ résulte aussi du théorème $XIII-83$ de [81]. En utilisant la relation 2.13, on peut déduire la proposition.□

De nouveau, l'évolution quantique est exactement reliée à l'évolution classique pour des échelles de temps de l'ordre de $\log N$ (échelle de temps d'Ehrenfest). On définit le temps d'Ehrenfest de notre système quantique

$$T_E(N) := \frac{1}{2\lambda_+}\log N. \tag{3.8}$$

Pourquoi étudier ce modèle ?

Pour conclure ce paragraphe, nous voudrions revenir sur l'intérêt de ce modèle. Considérons un Hamiltonien classique $H(x,\xi) := \frac{\|\xi\|_x^2}{2} + V(x)$ sur T^*M, où M est une variété riemannienne compacte (lisse, de dimension finie, sans bords). À cet hamiltonien correspond un opérateur, i.e. $\hat{H}_\hbar := -\frac{\hbar^2\Delta}{2} + V(x)$. Nous avons expliqué dans l'introduction de ce mémoire que nous voudrions comprendre les propriétés spectrales de cet opérateur au voisinage d'une couche d'énergie régulière $\Sigma_E := H^{-1}(\{E\})$ dans la limite semi-classique $\hbar \to 0^+$. Précisément, nous voulons étudier cet opérateur dans la boîte spectrale $(E-\alpha\hbar, E+\alpha\hbar)$ (pour un certain $\alpha > 0$). Si le flot hamiltonien restreint à Σ_E vérifie la propriété d'Anosov (par exemple), alors on sait que la dimension de l'espace $\mathbf{1}(\hat{H}_\hbar)L^2(M)$ est de l'ordre de $\hbar^{1-d}$. Ainsi, d'une certaine manière, le problème qui nous intéresse est de comprendre l'opérateur $\hat{H}_\hbar$ (ou de manière équivalente $e^{-\frac{\imath t\hat{H}_\hbar}{\hbar}}$) sur l'espace de dimension finie $\mathcal{H}_\hbar := \mathbf{1}(\hat{H}_\hbar)L^2(M)$. Le système dynamique $(\mathbb{T}^{2d}, A)$ fournit un exemple simple de système à temps discret qui vérifie la propriété d'Anosov. La procédure que nous venons de décrire permet de lui associer de manière assez naturelle un système quantique $(\mathcal{H}_N(\kappa), M_\kappa(A))$ pour chaque paramètre semi-classique $\hbar$ (qui est alors nécessairement relié à un entier N). On s'attend donc à ce que les propriétés que l'on réussira à montrer pour ce modèle puissent être adaptées pour le modèle plus général d'un Hamiltonen sur T^*M.
Même si ce parallèle entre les deux problèmes n'est pas parfait, nous les voyons comme des problèmes similaires (bien que différents). Les avantages du modèle théorique construit à partir de $(\mathbb{T}^{2d}, A)$ sont divers : les formulations sont explicites, on peut vraiment utiliser des espaces de dimension finie et on peut faire certains calculs concrètement. Nous voyons ce problème comme une façon de tester des méthodes pour pouvoir ensuite les transposer au problème plus général.

3.2 Ergodicité quantique pour les applications du tore

3.2.1 Présentation du problème

Mesures des variables (x,ξ)

Lorsque l'on étudie les applications quantiques du tore, un problème usuel est d'étudier les suites de mesures suivantes :

$$\forall a \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}^{2d}),\ \nu^N(a) := \int_{\mathbb{T}^{2d}} a(\rho)|\langle\varphi^N|\rho,\kappa\rangle_{\mathcal{H}_N(\kappa)}|^2 N^d d\rho,$$

où $(\varphi^N)_N$ est une suite de vecteurs *unitaires* de $\mathcal{H}_N(\kappa)$. On renvoie le lecteur à (3.5) pour une définition des états cohérents $|\rho,\kappa\rangle$. Ces mesures permettent de donner une description de l'état φ^N en fonction des variables de position (x) et d'impulsion (ξ). Dans le cas où les φ^N sont

des vecteurs propres de $M_\kappa(A)$, ces suites de mesures ont déjà été étudiées par de nombreux auteurs [20], [65], [66], [42], [43], [18], [61]. Le théorème d'Egorov permet d'observer que dans ce cas, les points d'accumulation des ν^N sont des mesures de probabilité A-invariantes de $\mathbb{T}^{2d}$. On appelle mesure semi-classique un point d'accumulation d'une telle suite (construite à partir d'une suite vecteurs propres de $M_\kappa(A)$). Dans ce cadre, la question de l'Unique Ergodicité Quantique est de savoir si l'ensemble des mesures semi-classiques (pour une matrice ergodique ou hyperbolique A) est réduit à {Leb}.
Dans le cas $d = 1$ et pour une famille générique de matrices hyperboliques, Kurlberg et Rudnick ont construit à chaque niveau d'énergie N une famille $\mathcal{C}_A^\theta(2N)$ de matrices dont la représentation métaplectique commute avec $M_0(A)$ [65] ($\kappa = 0$ dans leur cas). Ils montrent alors que pour tout N, $N^{1-\epsilon} \ll \sharp\mathcal{C}_A^\theta(2N) \ll N^{1+\epsilon}$ et appellent vecteurs propres de Hecke une base jointe de $M_0(A)$ et des éléments de $\mathcal{C}_A^\theta(2N)$. Cette suite de bases orthonormées vérifie alors assez de symétries pour prouver que, pour toute suite de vecteurs propres de ces bases, la suite ν^N tend vers la mesure de Lebesgue. On dit alors que l'on a Unique Ergodicité Quantique Arithmétique. Dans le cas $d \geq 2$, ce type de résultats a été généralisé par Kelmer [61] qui a montré que l'on a aussi Unique Ergodicité Quantique Arithmétique pour une famille générique de matrices de $Sp(2d, \mathbb{Z})$ vérifiant la propriété supplémentaire de ne préserver aucune sous-variété rationnelle, isotrope et A-invariante du $2d$-tore.
Enfin, dans le cas $d = 1$, Kurlberg et Rudnick ont aussi montré par des méthodes arithmétiques que l'on pouvait construire une sous-suite de densité 1 d'entiers N le long de laquelle les ν^N tendent vers Leb [66]. Leur preuve repose sur le fait que l'ensemble des entiers pour lesquels la période quantique $P(N)$ est courte est de densité 0. Ce résultat dit que l'on a Unique Ergodicité Quantique le long d'une sous-suite d'entiers de densité 1.

Remarque. On rappellera au paragraphe 3.2.3 que malgré ces résultats en faveur de la propriété d'Unique Ergodicité Quantique, l'ensemble des mesures semi-classiques n'est pas réduit à {Leb}.

Remarque. On souligne que $\nu^N(a)$ peut se récrire en fonction de la quantification anti-Wick sous la forme $\langle\varphi^N|\mathrm{Op}_\kappa^{AW}(a)|\varphi^N\rangle_{\mathcal{H}_N(\kappa)}$. On aurait aussi pu utiliser la définition

$$\forall a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^{2d}),\ \tilde{\nu}^N(a) := \langle\varphi^N|\mathrm{Op}_\kappa^w(a)|\varphi^N\rangle_{\mathcal{H}_N(\kappa)}.$$

Cette définition permet de définir une distribution sur le tore mais pas une mesure. Par contre, si φ^N est un vecteur propre de $M_\kappa(A)$, cette distribution est automatiquement A-invariante (en utilisant la propriété d'Egorov exacte pour la quantification de Weyl). D'après le paragraphe, on sait que ces deux quantifications sont 'équivalentes' dans la limite semi-classique, i.e. $\|\mathrm{Op}_\kappa^w(a) - \mathrm{Op}_\kappa^{AW}(a)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_N(\kappa))} = O_a(N^{-1})$. En particulier, les points d'accumulation de ces deux suites de distributions seront les mêmes. Dans la suite, on préfère, par commodité, travailler directement avec des mesures de probabilité au détriment de la propriété d'invariance. On utilisera donc de préférence la quantification anti-Wick.

Mesures des variables (x, ξ, t)

La définition $\langle\varphi^N|\mathrm{Op}_\kappa^{AW}(a)|\varphi^N\rangle_{\mathcal{H}_N(\kappa)}$ utilisée pour construire des mesures semi-classiques décrit un état quantique $\varphi^N \in \mathcal{H}_N(\kappa)$ en fonction de la variable $\rho = (x, \xi)$. Il est naturel de se demander si on peut construire un objet quantique qui prenne aussi en compte la variable temporelle t. Comme nous l'avons déjà mentionné à la fin du paragraphe précédent, l'étude du système quantique $(\mathcal{H}_N(\kappa), M_\kappa(A))$ est un problème théorique qui correspondrait à un système physique très localisé en énergie. Il ne semble donc pas nécessaire d'introduire une variable d'énergie E (voir aussi paragraphe 5.2). Par contre, on peut essayer de construire un objet qui décrit un état quantique φ^N en fonction des variables (x, ξ, t).
Pour cela, rappelons que pour tout entier N, l'application $M_\kappa(A)$ a une période quantique $P(N)$ (voir paragraphe 3.1.4). Ceci signifie qu'il existe α_N vérifiant $M_\kappa(A)^{P(N)} = e^{\imath\alpha_N}\mathrm{Id}_{\mathcal{H}_N(\kappa)}$. Cette période quantique $P(N)$ tend vers l'infini quand N tend vers l'infini [30]. Keating a montré que cette quantité est typiquement d'ordre N [60] (mais elle est seulement supérieure à $4T_E(N)+O(1)$ [30]).

On définit alors la mesure sur $\mathbb{T}^{2d} \times \mathbb{T}^1$ associée à l'état φ^N de $\mathcal{H}_N(\kappa)$

$$\forall b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}^{2d} \times \mathbb{T}^1),\ \mu^N(b) := \int_{\mathbb{T}^1} \int_{\mathbb{T}^{2d}} b(\rho, t) N^d \left| \langle \varphi^N | M_\kappa(A)^{[tP(N)]} | \rho, \kappa \rangle \right|^2 d\rho dt. \tag{3.9}$$

Dans cette définition, le choix de $P(N)$ peut sembler arbitraire. Par exemple, dans le cas de l'équation de Schrödinger sur une variété, un choix assez naturel est de considérer $\frac{1}{\hbar}$(voir paragraphe 5.2), ce qui correpondrait à prendre ici N à la place de $P(N)$. Il n'existe pas vraiment de choix canonique pour ce problème. Nous avons choisi $P(N)$ mais nous aurions pu faire un autre choix d'échelle $\tilde{P}(N)$, avec $\tilde{P}(N) \to +\infty$ dans la limite semi-classique. Les résultats présentés dans cette section sont donc bien spécifiques à ce choix. Certaines complications apparaissent à cause de ce choix (notamment des hypothèses du type $\log N/P(N) \to 0$) mais on y gagne aussi d'autres propriétés. Même si les méthodes développées sont similaires à celles que l'on utilisera au paragraphe 5.2, le problème que nous présentons ici est bien propre aux applications quantiques du tore. Par souci de complétude, nous exposons brièvement au paragraphe 3.2.7 ce que deviennent les résultats pour d'autres choix d'échelles de temps $\tilde{P}(N)$.

Remarque. Pour étudier ces suites de mesures μ^N, il sera utile de pouvoir utiliser les outils fournis par les opérateurs pseudodifférentiels. Pour cela, on note que pour une fonction $a \otimes \theta(\rho, t) := a(\rho)\theta(t)$ (avec a et θ continues), la mesure μ^N peut se récrire

$$\mu^N(a \otimes \theta) := \int_{\mathbb{T}^1} \theta(t) \left(\int_{\mathbb{T}^{2d}} a(\rho) N^d \left| \langle \varphi^N | M_\kappa(A)^{[tP(N)]} | \rho, \kappa \rangle \right|^2 d\rho \right) dt.$$

On souligne que la restriction à ce type de fonctions n'est pas tellement importante puisque toute fonction continue sur $\mathbb{T}^{2d} \times \mathbb{T}^1$ est une limite uniforme de combinaisons linéaires de fonctions de cette forme. Enfin, on vérifie aussi immédiatement que, pour θ dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{T}^1)$, on a

$$\mu^N(a \otimes \theta) = \frac{1}{P(N)} \sum_{l=0}^{P(N)-1} \theta\left(\frac{l}{P(N)}\right) \langle \varphi^N | M_\kappa(A)^{-l} \mathrm{Op}_\kappa^{AW}(a) M_\kappa(A)^l | \varphi^N \rangle_{\mathcal{H}_N(\kappa)} + O_{\theta,a}\left(\frac{\|\varphi^N\|_{\mathcal{H}_N(\kappa)}}{P(N)} \right).$$

Dans la suite, on sera amené à jongler avec ces différentes représentations de la mesure μ^N.

On vient donc de définir une mesure sur $\mathbb{T}^{2d} \times \mathbb{T}^1$ associée à φ^N (elle est de probabilité si $\|\varphi^N\|_{\mathcal{H}_N(\kappa)} = 1$). On souligne que, dans le cas particulier où φ^N est un vecteur propre de $M_\kappa(A)$, la mesure est définie par

$$\mu^N(a \otimes \theta) := \nu^N(a) \times \int_{\mathbb{T}^1} \theta(t) dt. \tag{3.10}$$

On peut donc se restreindre au cas $\theta \equiv 1$ et on est ramené à l'étude usuelle du problème d'ergodicité quantique sur le tore, i.e. comprendre les mesures ν^N (voir paragraphe précédent).

Points d'accumulation des mesures μ^N

Le problème usuel du chaos quantique sur le tore revient à étudier les points d'accumulation des mesures ν^N. Dans ce chapitre, notre but est de décrire les points d'accumulation des mesures μ^N qui sont légèrement plus générales puisqu'elles prennent aussi en compte la variable de temps t dans leur description de l'état quantique φ^N. Pour cela, on commence par montrer la proposition suivante :

Proposition 3.4. *Soit A une matrice ergodique de $Sp(2d, \mathbb{Z})$. Soit $(\varphi^N)_N$ une suite d'éléments de $\mathcal{H}_N(\kappa)$ telle que $\lim_{N\to\infty} \|\varphi^N\|_{\mathcal{H}_N(\kappa)} = 1$. Il existe des points d'accumulation de la suite μ^N correspondante et tout point d'accumulation de la suite $(\mu^N)_N$ est de la forme $d\mu_t(\rho)dt$ où pour presque tout t, μ_t est une mesure de probabilité A-invariante sur le tore $\mathbb{T}^{2d}$.*

Remarque. Dans l'énoncé de cette proposition, on fait l'hypothèse que A est ergodique. Cette hypothèse n'intervient pas directement mais elle est nécessaire pour donner un sens à la restriction de $M(A)$ à $\mathcal{H}_N(\kappa)$ (proposition 3.2). En reprenant la preuve de [18] (lemme 2.2), on pourrait vérifier qu'il suffit de supposer que 1 n'est pas valeur propre de A.

Preuve. La quantité $\mu^N(b)$ est bien définie pour b appartenant à $\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^{2d}\times\mathbb{T}^1)$: c'est une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^{2d}\times\mathbb{T}^1)$. Comme les φ^N sont bornés, on peut extraire de la suite (μ^N) une sous-suite convergente pour la topologie faible-$\star$ (d'après le théorème de Banach-Alaoglu). Soit μ un point d'accumulation des mesures $(\mu^N)_N$ (que l'on ne réindexe pas). On fixe θ appartenant à $\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^1)$ et on définit $\mu^{N,\theta}(a) := \mu^N(a\otimes\theta)$. On vérifie que $\lim_{N\to\infty}\mu^{N,\theta}(1) = \int_0^1\theta(t)dt$. Ceci étant valable pour toute fonction θ, on trouve alors que pour presque tout t, μ_t est une mesure de probabilité. Pour vérifier l'invariance, on écrit pour a appartenant à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^{2d})$

$$\mu^N(a\circ A\otimes\theta) := \frac{1}{P(N)}\sum_{k=0}^{P(N)-1}\int_{\frac{k}{P(N)}}^{\frac{k+1}{P(N)}}\theta(t)\langle\varphi^N|M_\kappa(A)^{-k}\mathrm{Op}_\kappa^{AW}(a\circ A)M_\kappa(A)^k|\varphi^N\rangle_{\mathcal{H}_N(\kappa)}dt.$$

On applique le théorème d'Egorov (proposition 3.3) et on effectue le changement de variable $t' = t + \frac{1}{P(N)}$. La quantité précédente est alors égale à

$$\frac{1}{P(N)}\sum_{k=0}^{P(N)-1}\int_{\frac{k+1}{P(N)}}^{\frac{k+2}{P(N)}}\theta\left(t'-\frac{1}{P(N)}\right)\langle\varphi^N|M_\kappa(A)^{-k-1}\mathrm{Op}_\kappa^{AW}(a)M_\kappa(A)^{k+1}|\varphi^N\rangle_{\mathcal{H}_N(\kappa)}dt' + O_a(N^{-1}).$$

En utilisant le caractère continu de θ et le fait que $\|\varphi^N\|$ est uniformément bornée, on trouve que $\mu^N(a\circ A\otimes\theta) = \mu^N(a\otimes\theta) + o_{a,\theta}(1)$.□

Organisation de la suite du chapitre

Notre but dans la fin de ce chapitre est d'étudier différentes propriétés de ces points d'accumulation. On commencera par étendre des résultats connus dans le cas des points d'accumulation des mesures ν^N à ceux de ces nouvelles mesures μ^N (paragraphes 3.2.2, 3.2.3 et 3.2.4). Puis, on démontrera un résultat de déviations des mesures μ^N au paragraphe 3.2.5 et un résultat de convergence presque sûre au paragraphe 3.2.6.

3.2.2 Théorème d'ergodicité quantique

Le premier résultat que l'on démontre lorsque l'on étudie les mesures ν^N est le théorème d'ergodicité quantique [20]. Ce théorème dit que si l'on considère une suite de bases orthonormées de $\mathcal{H}_N(\kappa)$ composée de vecteurs propres de $M_\kappa(A)$, alors *la plupart* des mesures ν^N associées converge vers la mesure de Lebesgue quand N tend vers l'infini. La première étape de notre étude consiste à étendre ce résultat pour les mesures μ^N.

Remarque. On souligne qu'à partir de maintenant, les hypothèses dynamiques sur A vont être utilisées de manière cruciale et pas seulement pour donner un sens à la restriction de $M(A)$ à $\mathcal{H}_N(\kappa)$ (proposition 3.2).

Bases orthonormées généralisées

Pour parler du phénomène d'ergodicité quantique dans le cadre des mesures μ^N définies par (3.9), on introduit la notion de base orthonormée généralisée de $\mathcal{H}_N(\kappa)$:

Définition 3.5. Soit N appartenant à $\mathbb{N}$. On se donne $(\Omega_N,\mathbb{P}_N)$ un espace de probabilité et une application $\varphi^N : \Omega_N \to \mathcal{H}_N(\kappa)$. On dit que l'application φ^N est une base orthonormée généralisée de $\mathcal{H}_N(\kappa)$ si elle vérifie :

1. pour tout B dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_N(\kappa))$, on a
$$\int_{\Omega_N}\langle\varphi^N(\omega)|B|\varphi^N(\omega)\rangle_{\mathcal{H}_N(\kappa)}\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_N(\omega)}{(2\pi\hbar)^d} = \mathrm{Tr}(B). \tag{3.11}$$
2. $\|\varphi^N(\omega)\|_{\mathcal{H}_N(\kappa)} = 1 + O(N^{-1})$, où la constante est uniforme pour ω dans Ω_N.

Cette propriété généralise légèrement la notion de bases orthonormées. On note $(\Omega_N, \mathbb{P}_N, \varphi^N)$ une telle base orthonormée généralisée et on remarque que pour tout k, $(\Omega_N, \mathbb{P}_N, M_\kappa(A)^k\varphi^N)$ est une base orthonormée généralisée. On définit μ^N_ω comme la mesure donnée par la formule (3.9) et associée à l'état $\varphi^N(\omega)$.
Exemples.

1. Un premier exemple de telles bases est celui où on prend $\Omega_N := \{1, \cdots, N^d\}$, $\mathbb{P}_N := \frac{1}{N^d}\sum_{j=1}^{N^d}\delta_j$ et $(\varphi^N(j))_j$ une base orthonormale de $\mathcal{H}_N(\kappa)$ (par exemple une base de vecteurs propres de $M_\kappa(A)$).
2. Un deuxième exemple est celui donné par la partition de l'espace $\mathcal{H}_N(\kappa)$ par les états cohérents. Précisément, on prend $\Omega_N := \mathbb{T}^{2d}$, $\mathbb{P}_N :=$ Leb et $\varphi^N(\rho) := |\rho, \kappa\rangle$. La relation fondamentale (3.11) est alors une conséquence de la relation (3.6).

Ergodicité quantique

On peut immédiatement généraliser le résultat d'ergodicité quantique de Bouzouina et de Bièvre [20] à ces familles de mesures μ^N :

Théorème 3.6 (Ergodicité Quantique)**.** *Soient A un élément* ergodique *de $Sp(2d, \mathbb{Z})$ et b une observable appartenant à $\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^{2d} \times \mathbb{T}^1)$. On fixe une base orthonormée généralisée $(\Omega_N, \mathbb{P}_N, \varphi^N)$ à chaque niveau d'énergie N. On a alors*

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\Omega_N}\left|\mu^N_\omega(b) - \int_{\mathbb{T}^1}\int_{\mathbb{T}^{2d}} b(\rho,t)d\rho dt\right|^2 d\mathbb{P}_N(\omega) = 0. \tag{3.12}$$

Remarque. Dans le cas de la base orthonormée généralisée formée de vecteurs propres de $M_\kappa(A)$, c'est exactement le résultat de Bouzouina et de Bièvre dans [20].

Preuve. Rappelons brièvement l'argument pour prouver un tel résultat. Sans perte de généralité, on peut supposer que b est de la forme $a\otimes\theta$ avec a appartenant à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^{2d})$ et θ appartenant à $\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^1)$ (par densité, on déduit le cas général). Comme $\mu^N_\omega(1\otimes\theta) = \int\theta(t)dt + O_\theta(N^{-1})$ (uniformément en ω), on peut supposer sans perte de généralité que $\int_{\mathbb{T}^{2d}} a(\rho)d\rho = 0$. On utilise le théorème d'Egorov pour T fixé :

$$\int_{\Omega_N}\left|\mu^N_\omega(a\otimes\theta)d\rho\right|^2 d\mathbb{P}_N(\omega) = \int_{\Omega_N}\left|\mu^N_\omega\left(\frac{1}{T}\sum_{k=0}^{T-1} a\circ A^k\otimes\theta\right)\right|^2 d\mathbb{P}_N(\omega) + o_{T,\theta,a}(1), \text{ quand } N\to+\infty.$$

Puis la convexité de la fonction $x\mapsto x^2$ combinée avec $\|\varphi^N(\omega)\|_{\mathcal{H}_N(\kappa)} = 1 + O(N^{-1})$ et la relation fondamentale (3.11) permettent d'appliquer l'inégalité de Jensen et de trouver

$$\int_{\Omega_N}\left|\mu^N_\omega(a\otimes\theta)d\rho\right|^2 d\mathbb{P}_N(\omega) \le \frac{\int|\theta|^2}{N^d}\mathrm{Tr}\left(\mathrm{Op}^{AW}_\kappa\left(\left|\frac{1}{T}\sum_{k=0}^{T-1} a\circ A^k\right|^2\right)\right) + o_{T,\theta,a}(1) \text{ quand } N\to+\infty.$$

En utilisant la formule (3.2), on vérifie que $\||\rho,\kappa\rangle\|_{\mathcal{H}_N(\kappa)} = 1 + O(N^{-\infty})$. Ceci permet de déduire que, pour toute observable $\tilde{a}$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^{2d})$, $\frac{1}{N^d}\mathrm{Tr}(\mathrm{Op}^{AW}_\kappa(a)) = \int_{\mathbb{T}^{2d}}\tilde{a}(\rho)d\rho + O(\|\tilde{a}\|_\infty N^{-\infty})$. En particulier, on peut montrer que

$$\forall T>0,\ \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^d}\mathrm{Tr}\left(\mathrm{Op}^{AW}_\kappa\left(\left|\frac{1}{T}\sum_{k=0}^{T-1} a\circ A^k\right|^2\right)\right) = \int_{\mathbb{T}^{2d}}\left|\frac{1}{T}\sum_{k=0}^{T-1} a\circ A^k(\rho)\right|^2 d\rho.$$

On trouve alors le résultat en faisant tendre T vers l'infini et en utilisant l'*ergodicité* de la mesure de Lebesgue pour $(\mathbb{T}^{2d}, A)$.□

Ce théorème permet par exemple de déduire le corollaire suivant [54], [20] :

Corollaire 3.7. *Soit A un élément* ergodique *de $Sp(2d,\mathbb{Z})$. Soit $((\varphi_j^N)_{j=1}^{N^d})_N$ une suite de bases orthonormées de $\mathcal{H}_N(\kappa)$. Alors, il existe $E(N) \subset \{1,\cdots,N^d\}$ vérifiant $\lim_{N\to\infty} \frac{\sharp E(N)}{N^d}$ et tel que pour toute observable b appartenant à $\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^{2d}\times\mathbb{T}^1)$ et pour toute application $j : N \in \mathbb{N} \mapsto j(N) \in E(N)$,*

$$\lim_{N\to\infty} \mu^N_{j(N)}(b) = \int_{\mathbb{T}^1}\int_{\mathbb{T}^{2d}} b(\rho,t)d\rho dt,$$

de manière uniforme par rapport à l'application j.

En utilisant le caractère ergodique du système dynamique $(\mathbb{T}^{2d}, A, \text{Leb})$, on réussit donc à prouver l'équirépartition de presque tous les éléments d'une base du niveau d'énergie $\mathcal{H}_N(\kappa)$. La question se pose alors de savoir si tous les éléments d'une suite de bases orthonormées généralisées s'équidistribuent dans la limite $N \to +\infty$. Précisément, est-ce que tous les points d'accumulation des mesures μ^N sont de la forme $dt \times d\rho$? On va rappeler au prochain paragraphe que ce n'est pas le cas et dans les suivants, on étudiera la proportion de mesures μ^N qui s'équidistribuent dans la limite $N \to +\infty$.

3.2.3 Contre-exemples

Le cas $d \geq 2$

Dans le cas $d \geq 2$, Kelmer a montré que pour toute matrice symplectique ergodique A (vérifiant une certaine hypothèse arithmétique) qui préserve une sous-variété invariante, rationnelle et isotrope du $2d$-tore, on peut construire une suite de vecteurs propres convergeant vers la mesure de Lebesgue sur cette sous-variété [61]. Il prouve aussi que cette suite de vecteurs propres peut être choisie parmi les vecteurs propres de Hecke (contredisant ainsi l'Unique Ergodicité Quantique Arithmétique dans ce cadre) : on parle de super-cicatrices ('super-scars'). Sa construction est particulièrement simple dans le cas de matrices $A \in Sp(4d,\mathbb{Z})$ de la forme $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B^{*-1} \end{pmatrix}$ avec B ergodique appartenant à $Sp(2d,\mathbb{Z})$. En effet, dans ce cas, on sait que $M(A)u := u \circ B^{-1}$ (voir paragraphe 2.4.2) et alors on vérifie que $\delta_{x=0}$ est vecteur propre[3] de $M_0(A)$ pour tout N. La mesure μ définie par $\mu(a) = \int_{\mathbb{T}^{2d}} a(0,\xi)d\xi$ est alors une mesure semi-classique de $(\mathbb{T}^{2d}, A)$.

Le cas $d = 1$

Dans le cas $d = 1$, de Bièvre, Faure et Nonnenmacher ont aussi construit des mesures semi-classiques différentes de la mesure de Lebesgue [42]. Leur preuve repose sur l'existence de périodes quantiques courtes, précisément d'une suite d'entiers (N_i) tendant vers l'infini et vérifiant

$$P(N_i) = \frac{2}{\lambda_+}\log N_i + C + O(\frac{1}{N_i}),$$

avec C uniforme. En particulier, pour ces périodes courtes, le nombre de valeurs propres de $M_\kappa(A)$ est borné par $\log N$. L'espace $\mathcal{H}_N(\kappa)$ étant de dimension N, chaque valeur propre a donc une forte multiplicité et de Bièvre, Faure et Nonnenmacher ont construit une suite de vecteurs propres se concentrant sur $\frac{1}{2}(\delta_0 + \text{Leb})$. On peut noter qu'une partie de la mesure semi-classique est localisée sur l'orbite périodique $(x,\xi) = 0$: on parle de cicatrices ('scars'). De manière plus générale, leur preuve permet de montrer que pour toute orbite périodique $P := \{\rho,\cdots,A^{T-1}\rho\}$ (où T est le plus petit entier tel que $\rho = A^T\rho$), la mesure $\frac{1}{2}(\delta_P + \text{Leb})$ est une mesure semi-classique. Le facteur $1/2$ qui apparaît dans ces différents exemples est en fait optimal. En effet, Bonechi et de Bièvre ont d'abord prouvé que la composante ponctuelle d'une mesure semi-classique avait un poids borné par $(\sqrt{5}-1)/2 \simeq 0.62$ [18] puis Faure et Nonnenmacher ont démontré [43] le théorème suivant :

[3] En particulier, contrairement au cas $d = 1$ [66], on ne peut pas (dans le cas général) espérer montrer qu'il existe une sous-suite d'entiers $(N_i)_i$ de densité 1 le long de laquelle on a Unique Ergodicité Quantique.

Théorème 3.8 (Faure-Nonnenmacher)**.** *Soit A une matrice* ergodique *de $Sp(2,\mathbb{Z})$ et μ une mesure semi-classique de $(\mathbb{T}^2, A)$. Soit $\mu = \mu_{pp} + \mu_{sc} + \mu_L$ la décomposition de μ en ses parties purement ponctuelle, singulière continue et absolument continue. On a alors $\mu_L(\mathbb{T}^2) \geq \mu_{pp}(\mathbb{T}^2)$. En particulier,*

$$\mu_{pp}(\mathbb{T}^2) \leq \frac{1}{2}.$$

Ce facteur 1/2 est celui qu'on retrouvera de manière plus générale aux chapitres 4 et 6 lorsqu'on bornera inférieurement l'entropie métrique d'une mesure semi-classique. Le contre-exemple $\frac{1}{2}(\delta_0 + \text{Leb})$ permet donc d'assurer le caractère optimal de notre borne sur l'entropie métrique au chapitre 4.

On ne montrera pas ces différents résultats mais on peut rappeler brièvement la construction de De Bièvre, Faure et Nonnenmacher [42], [41] dans le contexte simplifié de la base orthonormée généralisée $(\mathbb{T}^2, \text{Leb}, |\rho,\kappa\rangle)$. Celle-ci repose en partie sur les résultats de propagation des états cohérents de Bonechi et de Bièvre [17]. On introduit la fonction de corrélation quantique $C(t) := \langle \kappa, 0 | M_\kappa(A)^t | 0, \kappa\rangle$. De manière plus symétrique, cette quantité s'écrit $C(t) := \langle \kappa, 0 | M_\kappa(A)^{-t/2} | M_\kappa(A)^{t/2} | 0, \kappa\rangle$. En utilisant la relation (3.2), on trouve que

$$\langle \kappa, 0 | M_\kappa(A)^t | 0, \kappa\rangle_{\mathcal{H}_N(\kappa)} = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}^2} e^{\imath(\kappa_1 n - \kappa_2 m)} \left\langle 0 \left| M(A)^{-\frac{t}{2}} U_\hbar(n,m) M(A)^{\frac{t}{2}} \right| 0 \right\rangle_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{3.13}$$

On sait qu'une matrice hyperbolique de $Sl(2,\mathbb{Z})$ est diagonalisable en base symplectique. En particulier, il existe Q symplectique et D_γ de la forme $\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} \end{pmatrix}$ telle que $A = QDQ^{-1}$. On sait que, modulo un terme de phase [44] (chapitre 4), $M(A) = M(Q)M(D_\gamma)M(Q)^{-1}$. En utilisant les formules explicites pour la représentation métaplectique (voir paragraphe 2.4.2), on sait que, pour tout f dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $M(D_\gamma) f(x) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} f(\gamma^{-1}x)$. En combinant ces remarques, on vérifie que l'état cohérent $|0\rangle$ s'étire sous l'action de $M(A)^{t/2}$ le long de la variété instable sur un segment de taille $\sqrt{\hbar} e^{\frac{\lambda_+}{2}t}$ (en notant $\gamma := e^{\lambda_+}$). De même, il s'étire sous l'action de $M(A)^{-t/2}$ le long de la variété stable sur un segment de taille $\sqrt{\hbar} e^{\frac{\lambda_+}{2}t}$. Si $|t| \ll 2T_E(N)$, seul le terme $(n,m) = (0,0)$ contribue au produit scalaire dans la relation (3.13) car $\sqrt{\hbar} e^{\frac{\lambda_+}{2}|t|} \ll 1$. On peut estimer que la fonction de corrélation quantique $|C(t)|$ et vérifier qu'elle est de l'ordre de $\sqrt{2} e^{-\frac{\lambda_+}{2}|t|}$ [42].

On peut utiliser ces estimations pour déterminer les points d'accumulation des mesures μ_0^N associées à l'état cohérent $|0,\kappa\rangle$ par la formule (3.9), i.e.

$$\mu_0^N(a\otimes\theta) = \frac{1}{4T_E(N)} \sum_{l=-2T_E(N)}^{2T_E(N)-1} \theta\left(\frac{l}{P(N)}\right) \int_{\mathbb{T}^2} a(\rho) N |\langle \kappa, 0 | M_\kappa(A)^l | \rho, \kappa\rangle|^2 d\rho.$$

En généralisant le raisonnement précédent, on peut estimer de la même manière la fonction de Husimi $\rho \mapsto N|\langle \kappa, 0 | M_\kappa(A)^t | \rho, \kappa\rangle|^2$. On trouve que pour $|t| \ll T_E(N)$, elle est localisée en $(0,0)$ et pour $T_E(N) \ll |t| \ll 2T_E(N)$, elle est équidistribuée sur le tore. Ainsi, selon une sous-suite d'entiers N (associés à des périodes courtes du propagateur quantique), la suite μ_0^N tend vers $(\mathbf{1}_{[-1/4,1/4]}(t)\delta_0 + \mathbf{1}_{[1/4,3/4]}(t)\text{Leb})dt$. Cette construction nous montre donc que les points d'accumulation d'une suite $\mu_{\rho_0}^N$ ne sont pas forcément de la forme $d\rho dt$.

Remarque. En considérant les vecteurs propres $\varphi^N := \frac{1}{P(N)} \sum_{l=-P(N)/2}^{P(N)/2-1} e^{\imath l\theta_N} M_\kappa(A)^l |0,\kappa\rangle$ du propagateur quantique (avec $P(N)\theta_N = \alpha_N[2\pi]$), Faure, Nonnenmacher et de Bièvre montrent que l'on peut étendre ce raisonnement et vérifier que la mesure $\frac{1}{2}(\delta_0 + \text{Leb})$ est une mesure semi-classique (i.e. associée à une suite de vecteurs propres de $M_\kappa(A)$). Le raisonnement précédent ne suffit pas à montrer leur résultat et est bien spécifique à notre base orthonormée généralisée. En effet, dans leur cas, il faut donner une estimation de

$$\langle \varphi^N | \text{Op}_\kappa^{AW}(a) | \varphi^N \rangle_{\mathcal{H}_N(\kappa)} = \int_{\mathbb{T}^2} a(\rho) N \left| \frac{1}{P(N)} \sum_{l=-P(N)/2}^{P(N)/2-1} e^{\imath l\theta_N} \left\langle \kappa, \rho \left| M_\kappa(A)^l \right| 0, \kappa \right\rangle \right|^2 d\rho.$$

3.2.4 Décroissance logarithmique de la variance quantique

Nous venons de voir que dans notre contexte général de bases orthonormées généralisées, on n'a pas forcément équirépartition de tous les éléments de la base. Nous pouvons toutefois nous demander si ce phénomène de cicatrisation est un phénomène rare ou fréquent. Par exemple, dans le cas des mesures μ_ρ^N définies par les états cohérents[4], a-t-on cicatrisation pour un ensemble de mesure nulle ou de mesure positive de $\mathbb{T}^2$? Si ρ appartient à une orbite périodique, la méthode de De Bièvre, Faure et Nonnenmacher permet de montrer que l'on a concentration de la moitié de la mesure sur une orbite périodique pour les périodes courtes. Cet ensemble est dense sur le tore mais de mesure nulle.
Dans la suite de ce chapitre, on va essayer d'estimer plus précisément la proportion des mesures μ_ω^N (dans une certaine base orthonormée généralisée) qui ne s'équirépartissent pas. Par exemple, dans ce paragraphe, nous montrons l'analogue suivant d'un résultat de Zelditch [102] et Schubert [92] :

Proposition 3.9. *Soit A une matrice* hyperbolique *de $Sp(2d,\mathbb{Z})$. On fixe une base orthonormée généralisée $(\Omega_N,\mathbb{P}_N,\varphi^N)$ à chaque niveau d'énergie N, θ appartenant à $\mathcal{C}^1(\mathbb{T}^1)$ et a une observable de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^{2d})$. On a alors, pour tout entier $p\geq 1$,*

$$\int_{\Omega_N}\left|\mu_\omega^N(a\otimes\theta)-\int_{\mathbb{T}^{2d}}a(\rho)d\rho\int_{\mathbb{T}^1}\theta(t)dt\right|^{2p}d\mathbb{P}_N(\omega)=O_{a,\theta,p}\left(\frac{1}{(\log N)^{\frac{p}{2}}}\right).$$

Si $\theta\equiv 1$, on peut remplacer $p/2$ par p dans le reste précédent.

Remarque. Dans le cas de la base orthonormée des vecteurs propres de $M_\kappa(A)$, c'est bien le résultat de Zelditch/Schubert. Dans [92], Schubert a prouvé que pour certaines observables a, il existe des suites de vecteurs propres de $M_\kappa(A)$ adaptées à a telle que la borne sur les moments d'ordre 2 est atteinte pour $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$. On ne peut donc pas espérer améliorer ce résultat.

Par contre, cette proposition nous donne une estimation (que l'on améliorera) sur la proportion d'états $\varphi^N(\omega)$ qui ne sont pas équidistribués. En effet, on peut déduire le corollaire suivant de la proposition 3.9 :

Corollaire 3.10. *Soit A une matrice* hyperbolique *de $Sp(2d,\mathbb{Z})$. On fixe une base orthonormée généralisée $(\Omega_N,\mathbb{P}_N,\varphi^N)$ à chaque niveau d'énergie N. Alors, pour tout b dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^{2d}\times\mathbb{T}^1)$, pour tout p dans $\mathbb{N}$ et pour tout $\delta>0$, on a*

$$\mathbb{P}_N\left(\left\{\omega:\left|\mu_\omega^N(b)-\int_{\mathbb{T}^1}\int_{\mathbb{T}^{2d}}b(\rho,t)d\rho dt\right|\geq\delta\right\}\right)=O_{b,p,\delta}\left((\log N)^{-p}\right). \tag{3.14}$$

Preuve. Soit b appartenant à $\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^{2d}\times\mathbb{T}^1)$. Soient $p\in\mathbb{N}$ et $\delta>0$. Par densité des polynômes trigonométriques dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^{2d}\times\mathbb{T}^1)$, il existe $P(\rho,t)$ de la forme $\sum_{(n,q)\in I}a_{n,q}e^{2\imath\pi(\langle n,\rho\rangle+qt)}$ tel que

$$\forall(\rho,t)\in\mathbb{T}^{2d}\times\mathbb{T}^1,\ |b(\rho,t)-P(\rho,t)|\leq\frac{\delta}{8}.$$

On souligne que I est un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}^{2d}\times\mathbb{Z}$ ne dépendant que de δ et I. D'après la définition d'une base orthonormée généralisée, on sait que $\mu_\omega^N(1\otimes 1)=1+O(N^{-1})$ uniformément pour ω dans Ω_N. En particulier, on en déduit que

$$\mathbb{P}_N\left(\left\{\omega:\left|\mu_\omega^N(b)-\int_{\mathbb{T}^1}\int_{\mathbb{T}^{2d}}b(\rho,t)d\rho dt\right|\geq\delta\right\}\right)\leq\mathbb{P}_N\left(\left\{\omega:\left|\mu_\omega^N(P)-\int_{\mathbb{T}^1}\int_{\mathbb{T}^{2d}}P(\rho,t)d\rho dt\right|\geq\frac{\delta}{2}\right\}\right).$$

Considérons maintenant (n,q) appartenant à I. En appliquant la proposition 3.9 ainsi que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on trouve que

$$\mathbb{P}_N\left(\left\{\omega:\left|\mu_\omega^N(a_{n,p}e^{2\imath\pi(\langle n,\rho\rangle+qt)})-\int_{\mathbb{T}^1}\int_{\mathbb{T}^{2d}}a_{n,q}e^{2\imath\pi(\langle n,\rho\rangle+qt)}d\rho dt\right|\geq\frac{\delta}{4|I|}\right\}\right)=O_{n,q,\delta,I}((\log N)^{-p}).$$

[4]Les mesures μ_ρ^N sont les mesures définies par (3.9) et associées à l'élément $|\rho,\kappa\rangle$ de la base orthonormée généralisée des états cohérents.

On a déjà noté que I ne dépend que de δ et b (c'est aussi le cas des $a_{n,q}$). On déduit donc de ces deux dernières inégalités que

$$\mathbb{P}_N\left(\left\{\omega : \left|\mu_\omega^N(b) - \int_{\mathbb{T}^1}\int_{\mathbb{T}^{2d}} b(\rho,t)d\rho dt\right| \geq \delta\right\}\right) = O_{b,p,\delta}\left((\log N)^{-p}\right).\square$$

Cette borne peut en fait être améliorée en utilisant un résultat de grandes déviations dû à Kifer [63] et c'est ce que nous montrerons au paragraphe 3.2.5. Avant cela, on rappelle la preuve de la proposition 3.9. On procède en deux étapes : on commence par déduire un corollaire simple du théorème d'Egorov (qui sera aussi utile pour la suite) puis on l'utilise ainsi que la décroissance des corrélations pour conclure.

Une remarque préliminaire sur le théorème d'Egorov

Dans la suite, pour simplifier les notations, on note

$$a_T(\rho) := \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{T-1} a\circ A^k(\rho).$$

On suppose que A est ergodique et on note λ_+ le plus grand de ses exposants de Lyapunov (on rappelle que $\lambda_+ > 0$: voir paragraphe 3.1.4). Soit c appartenant à $(0, \frac{1}{2\lambda_+})$. On pose $T(N) := [c\log N]$. On commence la preuve de la proposition 3.9 en démontrant le lemme suivant :

Lemme 3.11. *Soit A une matrice* ergodique *de $Sp(2d,\mathbb{Z})$. Soient a appartenant à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^{2d})$ et θ appartenant à $\mathcal{C}^1(\mathbb{T}^1)$. Soit $\tilde{T}(N)$ une suite d'entiers tels que $\tilde{T}(N) \leq T(N)$ pour N assez grand. Alors, on a :*

$$\left\|\frac{1}{P(N)}\sum_{l=0}^{P(N)-1}\left(\int_{\frac{l}{P(N)}}^{\frac{l+1}{P(N)}}\theta\right) M_\kappa(A)^{-l} Op_\kappa^{AW}\left(a - a_{\tilde{T}(N)}\right) M_\kappa(A)^l\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_N(\kappa))} = O_{a,\theta}(R(N)), \quad (3.15)$$

avec $R(N) := \max\{\tilde{T}(N)/P(N), N^{-\epsilon}\}$ (où $\epsilon > 0$ ne dépend que de c). Dans le cas $\theta \equiv 1$, on peut prendre $R(N) := N^{-\epsilon}$.

Preuve. Pour démontrer ce lemme, on commence par utiliser le théorème d'Egorov 3.3 (comme $\tilde{T}(N) \leq T(N)$) pour récrire que, pour N assez grand,

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{P(N)-1}\left(\int_{\frac{l}{P(N)}}^{\frac{l+1}{P(N)}}\theta\right) M_\kappa(A)^{-l}\mathrm{Op}_\kappa^{AW}\left(a_{\tilde{T}(N)}\right) M_\kappa(A)^l \\
&= \frac{1}{\tilde{T}(N)}\sum_{k=0}^{\tilde{T}(N)-1}\sum_{l=0}^{P(N)-1}\left(\int_{\frac{l}{P(N)}}^{\frac{l+1}{P(N)}}\theta\right) M_\kappa(A)^{-l-k}\mathrm{Op}_\kappa^{AW}(a)\, M_\kappa(A)^{l+k} + O_a(P(N)N^{-\epsilon}),
\end{aligned}$$

où ϵ ne dépend que de c. Fixons maintenant k un entier compris entre 0 et $\tilde{T}(N)$. En utilisant le caractère $\mathcal{C}^1$ de θ, on trouve que :

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{P(N)-1}\left(\int_{\frac{l}{P(N)}}^{\frac{l+1}{P(N)}}\theta\right) M_\kappa(A)^{-l-k}\mathrm{Op}_\kappa^{AW}(a)\, M_\kappa(A)^{l+k} \\
&\qquad = \sum_{l=0}^{P(N)-1}\left(\int_{\frac{l}{P(N)}}^{\frac{l+1}{P(N)}}\theta\right) M_\kappa(A)^{-l}\mathrm{Op}_\kappa^{AW}(a)\, M_\kappa(A)^l + O_\theta(k).
\end{aligned}$$

On note que, si $\theta \equiv 1$, alors le reste est nul dans l'égalité précédente (en utilisant que $P(N)$ est la période de $M_\kappa(A)$). En combinant ces deux égalités, on trouve finalement que

$$\sum_{l=0}^{P(N)-1}\left(\int_{\frac{l}{P(N)}}^{\frac{l+1}{P(N)}}\theta\right) M_\kappa(A)^{-l}\mathrm{Op}_\kappa^{AW}\left(a - a_{\tilde{T}(N)}\right) M_\kappa(A)^l = O_{a,\theta}(\max\{\tilde{T}(N), P(N)N^{-\epsilon}\}).$$

Ceci permet de conclure la preuve du lemme.$\square$

Preuve de la proposition 3.9

On fixe A une matrice *hyperbolique* de $Sp(2d,\mathbb{Z})$. Soient a appartenant à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^{2d})$ et θ appartenant à $\mathcal{C}^1(\mathbb{T}^1)$. Pour montrer la proposition 3.9, il nous faut donner une estimation de

$$\int_{\Omega_N}\left|\mu_\omega^N(a\otimes\theta)-\int_{\mathbb{T}^{2d}}a(\rho)d\rho\int_{\mathbb{T}^1}\theta(t)dt\right|^{2p}d\mathbb{P}_N(\omega).$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que a est une observable vérifiant $\int_{\mathbb{T}^{2d}}a(\rho)d\rho=0$. En effet, le cas d'une observable a quelconque se déduit facilement en considérant $a-\int a$ (puisque $\mu_\omega^N(1\otimes\theta)=\int\theta+O(N^{-1})$ uniformément).
Pour commencer, en utilisant la propriété de partition de l'identité généralisée (3.11) (qui n'utilise aucune propriété dynamique de A), on a, pour tout $\tilde{a}$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^{2d})$ et tout $\tilde{\theta}$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^1)$,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_N}\mu_\omega^N(\tilde{a}\otimes\tilde{\theta})\mathrm{d}\mathbb{P}_N(\omega)&=\frac{\int_{\mathbb{T}^1}\tilde{\theta}}{N^d}\mathrm{tr}(\mathrm{Op}_\kappa^{AW}(\tilde{a}))\\&=\int_{\mathbb{T}^1}\tilde{\theta}(t)dt\int_{\mathbb{T}^{2d}}\tilde{a}(\rho)\langle\kappa,\rho|\rho,\kappa\rangle d\rho=\int_{\mathbb{T}^{2d}\times\mathbb{T}^1}\tilde{a}\otimes\tilde{\theta}(\rho,t)d\rho dt+O(N^{-\infty})\|\tilde{\theta}\|_\infty\|\tilde{a}\|_\infty.\end{aligned}\quad(3.16)$$

On se donne p un entier strictement positif. On reprend ensuite en détail la preuve du théorème d'ergodicité quantique. On écrit l'inégalité suivante, pour un certain $\tilde{T}(N)\leq[c\log N]$:

$$\int_{\Omega_N}|\mu_\omega^N(a\otimes\theta)|^{2p}\mathrm{d}\mathbb{P}_N(\omega)\leq 2^{2p-1}\int_{\Omega_N}\left(|\mu_\omega^N((a-a_{\tilde{T}(N)})\otimes\theta)|^{2p}+|\mu_\omega^N(a_{\tilde{T}(N)}\otimes\theta)|^{2p}\right)\mathrm{d}\mathbb{P}_N(\omega).$$

Enfin, en utilisant le lemme préliminaire 3.11 et la convexité de la fonction $x\mapsto x^{2p}$, cette quantité est bornée par[5]

$$C_{a,\theta}R(N)^{-2p}+\int_{\Omega_N}\mu_\omega^N(2\otimes 1)^{2p-1}\mu_\omega^N(|a_{\tilde{T}(N)}|^{2p}\otimes|\theta|^{2p})\mathrm{d}\mathbb{P}_N(\omega),$$

où $R(N)$ est le reste donné par le lemme 3.11. Par définition d'une base orthonormée généralisée, on a $\|\varphi^N(\omega)\|_{\mathcal{H}_N(\kappa)}=1+o(1)$ uniformément et par conséquent, pour N assez grand, $\mu_\omega^N(1\otimes 1)\leq 2$. En utilisant l'étape (3.16), il reste à estimer la borne

$$\int_{\mathbb{T}^1}|\theta(t)|^{2p}dt\int_{\mathbb{T}^{2d}}4^{2p-1}\left|\frac{1}{\tilde{T}(N)}\sum_{k=0}^{\tilde{T}(N)-1}a\circ A^k(\rho)\right|^{2p}d\rho+O_{a,\theta}(R(N)^{-2p}).$$

Comme A est *hyperbolique*, on peut alors utiliser la décroissance exponentielle des corrélations de $(\mathbb{T}^{2d},A,\mathrm{Leb})$ (chapitre 4.1 dans [10] par exemple) pour écrire que

$$\int_{\mathbb{T}^{2d}}\left|\frac{1}{T(N)}\sum_{k=0}^{\tilde{T}(N)-1}a\circ A^k(\rho)\right|^{2p}d\rho=O_a\left(\frac{1}{\tilde{T}(N)^p}\right).$$

Pour résumer, on a donc montré que

$$\int_{\Omega_N}|\mu_\omega^N(a\otimes\theta)|^{2p}\mathrm{d}\mathbb{P}_N(\omega)=O_{a,\theta}(\tilde{T}(N)^{-p})+O_{a,\theta}(R(N)^{-2p}),$$

où $R(N)$ est le reste donné par le lemme 3.11. Comme on sait que $P(N)\geq C_A\log N$ [30] (avec C_A ne dépendant que de A, on peut déduire la proposition 3.9 en prenant $\tilde{T}(N)=(\log N)^{\frac{1}{2}}$ dans le cas θ quelconque et $\tilde{T}(N)=[c\log N]$ dans le cas $\theta\equiv 1$.□

[5]On note que, par définition, il existe $C>0$ telle que pour tout N et tout ω dans Ω_N, $\|\varphi^N(\omega)\|\leq C$.

3.2.5 Convergence en probabilité

La proposition 3.9 nous a permis de déduire une borne logarithmique sur la proportion d'états d'une base orthonormée généralisée qui ne s'équidistribuent pas (voir équation (3.14)). Dans ce paragraphe, on prouve le résultat principal de ce chapitre et on améliore en particulier cette borne logarithmique. Précisément, on va démontrer le résultat de déviations suivant :

Théorème 3.12. *Soit A une matrice* hyperbolique *de $Sp(2d,\mathbb{Z})$. On fixe une base orthonormée généralisée pour tout entier N. Soient θ appartenant à $\mathcal{C}^1(\mathbb{T}^1,\mathbb{R}_+)$ et a appartenant à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^{2d},\mathbb{R})$ telle que $Leb(a)=0$. Soit $(N_k)_k$ une suite strictement croissante d'entiers. On suppose que l'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée :*

$$\theta \equiv 1 \text{ ou } \log N_k = o(P(N_k)) \text{ quand } k \to +\infty. \tag{3.17}$$

Alors, pour tout δ appartenant à $\mathbb{R}$, on a

$$\limsup_{k\to+\infty} \frac{\log\left(\mathbb{P}_{N_k}\left(\left\{\omega : \mu_\omega^{N_k}(a\otimes\theta)\geq\delta\right\}\right)\right)}{\frac{\log N_k}{2\lambda_+}} \leq H(\delta) := \inf_{s\in\mathbb{R}_+}\left\{-s\delta + P\left(A, sa\int_{\mathbb{T}^1}\theta - \Lambda_+\right)\right\},$$

où Λ_+ est la somme des exposants de Lyapunov positifs de A, où λ_+ est le plus grand des exposants de Lyapunov de A et où $P(A,f)$ est la pression topologique de la fonction continue à valeurs réelles f pour la dynamique A.

Remarque.

1. Dans l'annexe B, on peut trouver un rappel rapide de la définition de la pression topologique. Comme l'entropie topologique, elle mesure la séparation des points par l'application A mais cette fois par rapport à un poids f.
2. Notons que le cas a continue à valeurs réelles se déduit en considérant $\overline{a} = a - \int a$ et en notant que l'on a, pour N assez grand, $|\mu_\omega^N(1\otimes\theta) - \int_{\mathbb{T}^1}\theta(t)dt| = o(1)$, uniformément pour ω. À la différence du résultat sur la variance quantique, on a seulement utilisé la propriété $\|\varphi^N(\omega)\| = 1+o(1)$ pour passer du cas $\mathrm{Leb}(a)=0$ au cas général.
3. Notons que l'hypothèse sur la période intervient à cause de la possibilité d'avoir une période courte et donc d'avoir un reste non négligeable dans le lemme 3.11 si $\tilde{T}(N)$ est de l'ordre de $\log N$. Sans cette hypothèse, la même preuve permet de montrer que, pour tout $0<\nu<1$,

   $$\limsup_{N\to+\infty} \frac{\log\left(\mathbb{P}_N\left(\left\{\omega : \mu_\omega^N(a\otimes\theta)\geq\delta\right\}\right)\right)}{(\log N)^\nu} \leq H(\delta) := \inf_{s\in\mathbb{R}_+}\left\{-s\delta + P\left(A, sa\int_{\mathbb{T}^1}\theta - \Lambda_+\right)\right\}.$$

   Ce résultat améliore aussi la borne (3.14). Notons toutefois que le phénomène de période courte est rare [17], [66], [42], [30].
4. L'hypothèse que θ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ est utilisée de manière cruciale dans la preuve (pour pouvoir appliquer l'inégalité de Jensen au point (3.19)).
5. Notons enfin que l'application $\delta \mapsto H(\delta)$ est similaire à la transformation de Legendre de l'application $s \mapsto P(A, sa-\Lambda_+)$. Elle est concave et continue (comme $f\mapsto P(A,f)$ est continue). En utilisant le principe variationnel de Walters (annexe B), on peut vérifier que $s\mapsto P(A,sf-\Lambda_+)$ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}_+$ et qu'elle satisfait $P(A,-\Lambda_+)=0$. Ceci implique que $H(0)=0$. On sait que la fonction pression est analytique et on sait calculer ses dérivées d'ordre 1 et 2 (voir annexe B.2.2 pour un bref rappel ou [78] pour un contexte plus général). En particulier, on peut vérifier immédiatement que $H(\delta)$ est strictement négative pour $\delta>0$ (voir théorème B.2) et que $H(\delta)=0$ pour $\delta\leq 0$.

Comme pour le corollaire de la proposition 3.9, on peut déduire, par un argument de densité, le corollaire suivant de notre théorème :

Corollaire 3.13. *Soit A une matrice* hyperbolique *de $Sp(2d,\mathbb{Z})$. On fixe une base orthonormée généralisée pour tout entier N. Soit b appartenant à $\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^{2d}\times\mathbb{T}^1,\mathbb{C})$. Soit $(N_k)_k$ une suite strictement croissante d'entiers. On suppose que l'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée :*

$$b \text{ indépendant de } t \text{ ou } \log N_k = o(P(N_k)) \text{ quand } k\to+\infty.$$

Alors, pour tout $\delta > 0$, il existe $\tilde{H}(\delta) > 0$ tel que

$$\mathbb{P}_{N_k}\left(\left\{\omega : \left|\mu_\omega^{N_k}(b) - \int_{\mathbb{T}^1}\int_{\mathbb{T}^{2d}} b(\rho,t)d\rho dt\right| \geq \delta\right\}\right) = O_{b,\delta}\left(N_k^{-\tilde{H}(\delta)}\right).$$

Sans hypothèse particulière sur la période, on améliore aussi la borne (3.14) puisque l'on remplace un $(\log N)^{-p}$ (pour tout $p > 1$) par un $e^{-\tilde{H}(\delta)(\log N)^\nu}$ (pour tout $\nu < 1$). Pour se fixer les idées, on récrit ce corollaire dans le cas de nos deux exemples de bases orthonormées généralisées.

Corollaire 3.14. *Soit A une matrice* hyperbolique *de $Sp(2d,\mathbb{Z})$. Soit $(\varphi_j^N)_{j=1}^{N^d}$ une suite de bases orthonormées des espaces $\mathcal{H}_N(\kappa)$. Pour toute observable a de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^{2d},\mathbb{C})$ et tout $\delta > 0$, il existe $\tilde{H}(\delta) > 0$ tel que*

$$\frac{1}{N^d}\left|\left\{j : \left|\mu_j^N(a\otimes 1) - \int_{\mathbb{T}^{2d}} a(\rho)d\rho\right| \geq \delta\right\}\right| = O_{a,\delta}\left(N^{-\tilde{H}(\delta)}\right).$$

Ce corollaire dit que pour toute base orthonormée, la proportion d'états qui ne sont pas équidistribués est de l'ordre de $N^{-\tilde{H}(\delta)}$. Dans le cas des états cohérents, le corollaire suivant dit que les quantités $\mu_\rho^N(a\otimes 1)$ tendent vers $\mathrm{Leb}(a)$ en probabilité (avec une vitesse de convergence bornée par $N^{-\tilde{H}(\delta)}$) :

Corollaire 3.15. *Soit A une matrice* hyperbolique *de $Sp(2d,\mathbb{Z})$. Pour toute observable a de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^{2d},\mathbb{C})$ et tout $\delta > 0$, il existe $\tilde{H}(\delta) > 0$ tel que*

$$Leb\left(\left\{\rho : \left|\mu_\rho^N(a\otimes 1) - \int_{\mathbb{T}^{2d}} a(\rho')d\rho'\right| \geq \delta\right\}\right) = O_{a,\delta}\left(N^{-\tilde{H}(\delta)}\right).$$

Donnons maintenant une preuve du théorème 3.12. Le point clef est d'utiliser un résultat de grandes déviations [63]. On procède en deux temps. On commence par combiner l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev au théorème d'Egorov pour obtenir une première borne. Puis on majore cette première estimation en fonction de la pression topologique grâce au résultat de Kifer.

Preuve du théorème 3.12

Soient a une observable de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^{2d})$ (on rappelle qu'on suppose $\mathrm{Leb}(a) = 0$) et θ appartenant à $\mathcal{C}^1(\mathbb{T}^{2d},\mathbb{R}_+) - \{0\}$. Pour simplifier les notations, on omet l'indice k dans la suite d'entiers (N_k). On fixe c dans $(0, \frac{1}{2\lambda_+})$ et on commence par utiliser[6] le lemme 3.11 pour $\tilde{T}(N) = T(N) := [c\log N]$

$$\forall\omega\in\Omega_N,\ \mu_\omega^N(a\otimes\theta) = \mu_\omega^N((a - a_{T(N)} + a_{T(N)})\otimes\theta) = \mu_\omega^N(a_{T(N)}\otimes\theta) + o_{\theta,a}(1),$$

où l'on a aussi pris en compte le fait qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout N et tout ω dans Ω_N, $\|\varphi^N(\omega)\| \leq C$. On écrit maintenant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour $\delta\in\mathbb{R}$ et $s\in\mathbb{R}_+$:

$$\mathbb{P}_N\left(\left\{\omega : \mu_\omega^N(a\otimes\theta) \geq \delta\right\}\right) \leq e^{-s\delta T(N)}\int_{\Omega_N}\exp\left(s\mu_\omega^N(T(N)a\otimes\theta)\right)\mathrm{d}\mathbb{P}_N(\omega).$$

On fixe $\delta_0 > 0$. Ainsi, en combinant cette inégalité à la première estimée, on trouve, pour N assez grand,

$$\mathbb{P}_N\left(\left\{\omega : \mu_\omega^N(a\otimes\theta) \geq \delta\right\}\right) \leq e^{(-\delta+\delta_0)sT(N)}\int_{\Omega_N}\exp\left(s\mu_\omega^N\left(\sum_{k=0}^{T(N)-1} a\circ A^k\otimes\theta\right)\right)\mathrm{d}\mathbb{P}_N(\omega). \tag{3.18}$$

[6]Sans hypothèse sur la période ou sur le choix de θ, il aurait fallu se restreindre à des temps $\tilde{T}(N)$ de l'ordre $(\log N)^\nu$ pour pouvoir utiliser le lemme 3.11.

On introduit la notation

$$a_s(n,\rho) := \exp\left(s\sum_{k=0}^{n-1} a\circ A(\rho)\right).$$

En utilisant la convexité de la fonction $x \mapsto e^{sx}$ (et l'inégalité de Jensen), on obtient la majoration qui suit :

$$\mathbb{P}_N\left(\left\{\omega : \mu_\omega^N(a\otimes\theta)\geq\delta\right\}\right) \leq e^{(-\delta+\delta_0)sT(N)}\int_{\Omega_N}\mu_\omega^N\left(a_{s\mu_\omega^N(1\otimes\theta)}(T(N),\bullet)\otimes\theta\right)\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_N(\omega)}{\mu_\omega^N(1\otimes\theta)}. \quad (3.19)$$

On a fait l'hypothèse que $|\mu_\omega^N(1)-1|\leq CN^{-1}$, où C est uniforme. En particulier, pour N assez grand, on a, uniformément pour ω dans Ω_N, $\frac{1}{2}\int\theta \leq \mu_\omega^N(1\otimes\theta)\leq\int\theta+\delta_0/(\|a\|\int\theta)$. Ceci permet de trouver une constante C_θ (ne dépendant que de θ) telle que pour N assez grand, on a

$$\mathbb{P}_N\left(\left\{\omega : \mu_\omega^N(a\otimes\theta)\geq\delta\right\}\right) \leq C_\theta e^{(-\delta+2\delta_0)sT(N)}\int_{\Omega_N}\mu_\omega^N\left(a_{s\int\theta}(T(N),\bullet)\otimes\theta\right)\mathrm{d}\mathbb{P}_N(\omega).$$

En utilisant la propriété (3.16), on vérifie que pour $b\geq 0$, on a

$$\int_{\Omega_N}\mu_\omega^N(b\otimes\theta)d\mathbb{P}_N(\omega)\leq 2\int_{\mathbb{T}^1}\theta(t)dt\int_{\mathbb{T}^{2d}}b(\rho)d\rho,$$

pour N assez grand (indépendamment de b). On trouve alors la borne suivante pour N assez grand :

$$\mathbb{P}_N\left(\left\{\omega : \mu_\omega^N(a\otimes\theta)\geq\delta\right\}\right) \leq 2\tilde{C}_\theta e^{(-\delta+2\delta_0)sT(N)}\int_{\mathbb{T}^{2d}}\exp\left(s\int_{\mathbb{T}^1}\theta(t)dt\sum_{k=0}^{T(N)-1}a\circ A^k(\rho)\right)d\rho. \quad (3.20)$$

Grandes déviations

La manière standard d'estimer la quantité précédente est d'utiliser les résultats de grandes déviations d'un système dynamique *hyperbolique*. Dans [63], Kifer prouve une version généralisée du théorème suivant (théorème 3.2, p.354) :

Théorème 3.16 (Kifer)**.** *Soit f appartenant à $\mathcal{C}^1(\mathbb{T}^{2d},\mathbb{R})$ et A une matrice* hyperbolique *de $Sp(2d,\mathbb{Z})$. Alors, on a*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\log\int_{\mathbb{T}^{2d}}\exp\left(\sum_{k=0}^{T-1}f\circ A^k(\rho)\right)d\rho = P(A, f-\Lambda_+), \quad (3.21)$$

où Λ_+ est la somme des exposants de Lyapunov positifs de A et où $P(A,f-\Lambda_+)$ est la pression topologique de la fonction $f-\Lambda_+$ pour la dynamique A.

Nous énonçons seulement le résultat de Kifer pour le système dynamique qui nous intéresse. Pour notre étude, nous n'avons besoin que d'une borne supérieure et comme l'argument est rapide, nous rappelons dans ce paragraphe la preuve de Kifer dans [63] pour obtenir cette borne. On rappelle que

$$f_s(n,\rho) := \exp\left(s\sum_{k=0}^{n-1}f\circ A(\rho)\right).$$

On reprend la méthode de Kifer dans [63] pour montrer le lemme classique de systèmes dynamiques qui suit. Celui-ci assure qu'on peut prendre une borne supérieure uniforme pour s dans un intervalle I borné pour la borne obtenue en (3.20) :

Lemme 3.17. *Soit f appartenant à $\mathcal{C}^1(\mathbb{T}^{2d},\mathbb{R})$. Soient δ' un réel strictement positif et I un intervalle borné de $\mathbb{R}_+$. Alors, il existe $c_{\delta'}>0$ et $n(\delta')\in\mathbb{N}$ tels que pour tout $n\geq n(\delta')$ et tout s dans I*

$$\int_{\mathbb{T}^{2d}} f_s(n,\rho)d\rho \leq c_{\delta'} e^{(1+s)n\delta' - n\Lambda_+} e^{nP(A,sf)}. \tag{3.22}$$

Preuve. Soit $\varepsilon>0$ petit et soit $E(\varepsilon,n)$ un ensemble (ε,n)-séparé de cardinal maximal de $(\mathbb{T}^{2d},A)$. On a alors l'inégalité suivante :

$$\int_{\mathbb{T}^{2d}} f_s(n,\rho')d\rho' \leq e^{ns\varepsilon\|df\|_\infty} \sum_{\rho\in E(\varepsilon,n)} \mathrm{Leb}\left(B(\rho,\varepsilon,n)\right) f_s(n,\rho).$$

On peut vérifier que pour tout $\varepsilon>0$, il existe une constante c_ε telle que pour tout $n>0$ et pour tout ρ dans $\mathbb{T}^{2d}$, $\mathrm{Leb}\left(B(\rho,\varepsilon,n)\right)e^{n\Lambda_+}\leq c_\varepsilon$ [22] (voir paragraphe de la thèse 1.2.1 pour la définition de $B(\rho,\varepsilon,n)$). Par conséquent, on déduit la borne suivante :

$$\int_{\mathbb{T}^{2d}} f_s(n,\rho)d\rho \leq c_\varepsilon e^{ns\varepsilon\|df\|_\infty} e^{-n\Lambda_+} \sum_{\rho\in E(\varepsilon,n)} f_s(n,\rho). \tag{3.23}$$

Fixons maintenant un entier p satisfaisant la propriété $\varepsilon+2\|f\|_\infty<p\delta'$. Pour q entier assez grand, on a $I\subset[0,q]$ et on écrit $[0,q]$ comme réunion de qp intervalles de taille $1/p$: $\cup_{j=0}^{qp-1}[\frac{i}{p},\frac{i+1}{p}]$. Soit i appartenant à $\{0,\cdots,qp-1\}$. Il existe un entier $n(i,\delta')$ tel que pour tout $n\geq n(i,\delta')$, on a

$$\frac{1}{n}\log\left(P_n\left(A,\frac{i}{p}f,\varepsilon\right)\right)\leq P\left(A,\frac{i}{p}f,\varepsilon\right)+\frac{\varepsilon}{p},$$

où la (ε,n)-pression et la ε-pression sont définies dans l'annexe B. On pose $n(\delta'):=\max_i n(i,\delta')$. Pour s dans I, il existe i appartenant à $\{0,\cdots,2p-1\}$ vérifiant $|s-\frac{i}{p}|\leq 1/p$. On écrit alors

$$\frac{1}{n}\log\left(\sum_{\rho\in E(\varepsilon,n)} f_s(n,\rho)\right)\leq\frac{\|f\|_\infty}{p}+\frac{1}{n}\log\left(P_n\left(A,\frac{i}{p}f,\varepsilon\right)\right)\leq\frac{\varepsilon+\|f\|_\infty}{p}+P\left(A,\frac{i}{p}f,\varepsilon\right).$$

En utilisant la propriété (B.1), on trouve ensuite

$$\frac{1}{n}\log\left(\sum_{\rho\in E(\varepsilon,n)} f_s(n,\rho)\right)\leq\frac{\varepsilon+2\|f\|_\infty}{p}+P\left(A,sf,\varepsilon\right)\leq\frac{\varepsilon+2\|f\|_\infty}{p}+P\left(A,sf\right). \tag{3.24}$$

En combinant (3.23) et (3.24) et en choisissant $\varepsilon\|df\|_\infty=\delta'$, on a finalement montré qu'il existe $c_{\delta'}>0$ et $n(\delta')\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout $n\geq n(\delta')$ et tout $s\in I$,

$$\int_{\mathbb{T}^{2d}} f_s(n,\rho)d\rho \leq c_{\delta'} e^{(1+s)n\delta' - n\Lambda_+} e^{nP(A,sf)}.\square \tag{3.25}$$

Comment conclure ?

On peut conclure en utilisant (3.20) et (3.22). On fixe I un intervalle borné dans $\mathbb{R}_+$ et c appartenant à $(0,1/(2\lambda_+))$. Pour tout δ dans $\mathbb{R}$ et tout $\delta'>0$, on écrit, pour N assez grand et pour s dans I,

$$\mathbb{P}_N\left(\left\{\omega:\mu_\omega^N\left(a\otimes\theta\right)\geq\delta\right\}\right)\leq 2\tilde{C}_\theta c'_\delta e^{(1+s)\delta' T(N)-s(\delta-2\delta_0)T(N)-T(N)\Lambda_+}e^{T(N)P(A,sa)},$$

où $T(N):=[c\log N]$. Ainsi, on peut écrire, pour tout $\delta'>0$ et tout $\delta_0>0$,

$$\limsup_{N\to\infty}\frac{\log\mathbb{P}_N\left(\left\{\omega:\mu_\omega^N\left(a\otimes\theta\right)\geq\delta\right\}\right)}{c\log N}\leq -s\delta+P(A,sa-\Lambda_+)+(1+\sup I)\delta'+2\delta_0\sup I.$$

On en déduit que, pour tout $\delta \in \mathbb{R}$ et tout $s \geq 0$ dans I,

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{\log \mathbb{P}_N\left(\left\{\omega : \mu_\omega^N(a\otimes\theta) \geq \delta\right\}\right)}{c\log N} \leq -s\delta + P(A, sa - \Lambda_+).$$

Ceci étant valable pour tout intervalle borné I de $\mathbb{R}_+$, le théorème 3.12 est prouvé.□

Remarque. On souligne que si $\delta \geq 0$, alors les propriétés de la pression topologique permettent de vérifier que $\inf_{s\in\mathbb{R}_+}\{-s\delta + P(A, sa-\Lambda_+)\} = \inf_{s\in\mathbb{R}}\{-s\delta + P(A, sa-\Lambda_+)\}$.

3.2.6 Convergence presque sûre ?

Pour finir ce chapitre, nous voudrions proposer quelques questions au sujet des mesures $\mu_{\rho_0}^N$ définies pour la base orthonormée généralisée des états cohérents, i.e.

$$\forall b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}^{2d}\times\mathbb{T}^1),\ \mu_{\rho_0}^N(b) := \int_{\mathbb{T}^1}\int_{\mathbb{T}^{2d}} b(t,\rho)N^d\left|\langle\kappa,\rho_0|M_\kappa(A)^{[tP(N)]}|\rho,\kappa\rangle\right|^2 d\rho dt$$

Le corollaire 3.15 permet de constater que l'on a convergence en probabilité des quantités $\mu_{\rho_0}^N(a\otimes 1)$ à vitesse $N^{-\tilde{H}(\delta)}$ (à vitesse $e^{-\tilde{H}(\delta)(\log N)^\nu}$ dans le cas d'une fonction positive θ quelconque). Une question naturelle peut être de se demander si on a convergence presque partout de ces quantités. Une réponse partielle à cette question est donnée par le résultat suivant :

Proposition 3.18. *Soit A une matrice* hyperbolique *de $Sp(2d,\mathbb{Z})$. Il existe $\Omega \subset \mathbb{T}^{2d}$ de mesure de Lebesgue 1 tel que pour tout $\rho_0 \in \Omega$, il existe $S_{\rho_0} \subset \mathbb{N}^*$ de densité 1 vérifiant, pour tout b dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^1\times\mathbb{T}^{2d})$,*

$$\lim_{N\to+\infty, N\in S_{\rho_0}} \int_{\mathbb{T}^1}\int_{\mathbb{T}^{2d}} b(t,\rho)N^d\left|\langle\kappa,\rho_0|M_\kappa(A)^{[tP(N)]}|\rho,\kappa\rangle\right|^2 d\rho dt = \int_{\mathbb{T}^1}\int_{\mathbb{T}^{2d}} b(t,\rho)dtd\rho.$$

De plus, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ est une matrice hyperbolique de $SL(2,\mathbb{Z})$ vérifiant $ab \equiv cd \equiv 0 mod 2$, on peut choisir S_{ρ_0} indépendamment de ρ_0 dans Ω.

Dans la suite, on notera aussi, pour t dans $[0,1]$ et pour (ρ,ρ_0) dans $\mathbb{T}^{2d}\times\mathbb{T}^{2d}$, la fonction de Husimi

$$\mathrm{Hus}_{\rho_0}^N(\rho,t) := N^d\left|\langle\kappa,\rho_0|M_\kappa(A)^{[tP(N)]}|\rho,\kappa\rangle\right|^2.$$

La première partie de la proposition précédente ne repose que sur des propriétés dynamiques de A alors que la seconde partie utilise aussi des résultats de nature arithmétique de Kurlberg et Rudnick [66]. En particulier, pour $d=1$, les résultats de Kurlberg et Rudnick nous disent que l'ensemble S correspond à des entiers N vérifiant $\sqrt{N} \ll P(N)$.

Le cas général $d \geq 1$

La première étape de la preuve consiste à montrer le lemme suivant :

Lemme 3.19. *Soit θ un élément de $\mathcal{C}^1(\mathbb{T}^1,\mathbb{C})$ et soit a un élément de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^{2d},\mathbb{C})$. Alors, il existe $\Omega \subset \mathbb{T}^{2d}$ de mesure de Lebesgue 1 tel que*

$$\forall\rho_0\in\Omega,\ \lim_{E\to+\infty}\frac{1}{E}\sum_{N=1}^{E}\left|\mu_{\rho_0}^N(a\otimes\theta) - \int_{\mathbb{T}^{2d}} a(\rho)d\rho\int_{\mathbb{T}^1}\theta(t)dt\right|^8 = 0.$$

Preuve. On commence par utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et la proposition 3.9 (A est *hyperbolique*), on sait qu'il existe $C>0$ tel que

$$\mathrm{Leb}\left(\left\{\rho_0\in\mathbb{T}^{2d} : \frac{1}{E}\sum_{N=1}^{E}\left|\mu_{\rho_0}^N(a\otimes\theta) - \int_{\mathbb{T}^{2d}} a(\rho)d\rho\int_{\mathbb{T}^1}\theta(t)dt\right|^8 \geq \delta\right\}\right) \leq \frac{C}{\delta E}\sum_{N=2}^{E}\frac{1}{(\log N)^2}.$$

Une comparaison somme-intégrale (et une intégration par partie) donne alors l'existence d'une constante $\tilde{C}$ telle que

$$\text{Leb}\left(\left\{\rho_0 \in \mathbb{T}^{2d} : \frac{1}{E}\sum_{N=1}^{E}\left|\mu^N_{\rho_0}(a\otimes\theta) - \int_{\mathbb{T}^{2d}} a \int_{\mathbb{T}^1}\theta\right|^8 \geq \delta\right\}\right) \leq \frac{C}{\delta E}\int_2^E \frac{dt}{(\log t)^2} \leq \frac{\tilde{C}}{\delta(\log E)^2}.$$

On souligne que $\tilde{C}$ dépend seulement de a et θ. Cette dernière inégalité est alors exactement une loi des grands nombres au sens de la convergence en probabilité. On pose $E(k) := [e^k]$ et on note A_k l'ensemble suivant :

$$A_k := \left\{\rho_0 \in \mathbb{T}^{2d} : \frac{1}{E(k)}\sum_{N=1}^{E(k)}\left|\mu^N_{\rho_0}(a\otimes\theta) - \int_{\mathbb{T}^{2d}} a(\rho)d\rho \int_{\mathbb{T}^1}\theta(t)dt\right|^8 \geq \delta\right\}.$$

On déduit de ce qui précède que $\text{Leb}(A_k) \leq \frac{\tilde{C}}{\delta k^2}$ et le lemme de Borel-Cantelli permet alors de montrer qu'il existe $\Omega \subset \mathbb{T}^{2d}$ tel que $\text{Leb}(\Omega) = 1$ et tel que

$$\forall\ \rho_0 \in \Omega,\ \lim_{k\to\infty}\frac{1}{E(k)}\sum_{N=1}^{E(k)}\left|\mu^N_{\rho_0}(a\otimes\theta) - \int_{\mathbb{T}^{2d}} a(\rho)d\rho \int_{\mathbb{T}^1}\theta(t)dt\right|^8 = 0.$$

Pour conclure, on écrit que pour tout E dans $\mathbb{N}^*$, il existe un unique entier k tel que $E(k) \leq E < E(k+1)$ et par consequent, on a

$$\frac{1}{E}\sum_{N=1}^{E}\left|\mu^N_{\rho_0}(a\otimes\theta) - \int_{\mathbb{T}^{2d}} a\int_{\mathbb{T}^1}\theta\right|^8 \leq \frac{E(k+1)}{E(k)}\frac{1}{E(k+1)}\sum_{N=1}^{E(k+1)}\left|\mu^N_{\rho_0}(a\otimes\theta) - \int_{\mathbb{T}^{2d}} a\int_{\mathbb{T}^1}\theta\right|^8.$$

On en déduit que

$$\forall\ \rho_0 \in \Omega,\ \lim_{E\to\infty}\frac{1}{E}\sum_{N=1}^{E}\left|\mu^N_{\rho_0}(a\otimes\theta) - \int_{\mathbb{T}^{2d}} a(\rho)d\rho \int_{\mathbb{T}^1}\theta(t)dt\right|^8 = 0.\square$$

Soient θ appartenant à $\mathcal{C}^1(\mathbb{T}^1,\mathbb{C})$ et a appartenant à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^{2d},\mathbb{C})$. Un argument classique de diagonalisation (théorème 1.20 dans [100]) permet de déduire du lemme précédent que pour tout ρ_0 dans $\Omega(a,\theta)$, il existe $S(\rho_0,\theta,a)$ de densité 1 vérifiant

$$\lim_{N\to+\infty, N\in S(\rho_0,\theta,a)} \mu^N_{\rho_0}(a\otimes\theta) = \int_{\mathbb{T}^1}\theta(t)dt\int_{\mathbb{T}^{2d}} a(\rho)d\rho.$$

On veut maintenant se débarrasser de la dépendance en θ et en a et généraliser ce résultat à toute fonction continue de $\mathbb{T}^1\times\mathbb{T}^{2d}$. Pour cela, on procède comme dans [27] (partie 5) et on rappelle que toute fonction de $\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^1\times\mathbb{T}^{2d})$ est limite uniforme d'un polynôme trigonométrique sur $\mathbb{T}^1\times\mathbb{T}^{2d}$. En particulier, il existe une famille dénombrable $(b_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^1\times\mathbb{T}^{2d})$ composée d'éléments de la forme $\theta(t)a(\rho)$ telle que toute fonction de $\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^1\times\mathbb{T}^{2d})$ est arbitrairement proche d'une combinaison linéaire des b_k.
On sait aussi que pour chaque entier k et chaque ρ_0 dans $\Omega(b_k)$, on peut trouver $S(\rho_0,b_k)$ de densité 1 vérifiant la propriété attendue. Soit ρ_0 appartenant à $\Omega := \cap_k\Omega(b_k)$. On définit :

$$S_k(\rho_0) := \cap_{p=1}^k S(\rho_0,b_p).$$

Le sous-ensemble $S_k(\rho_0)$ de $\mathbb{N}^*$ est encore de densité 1. Ceci implique qu'il existe un entier $N(k)$ tel que $\frac{1}{N}\sharp\{p\in S_k(\rho_0) : 1\leq p\leq N\} \geq 1-2^{-k}$ pour tout $N\geq N(k)$. On définit $S(\rho_0)$ en posant que $S(\rho_0)\cap[N(k-1),N(k)] = S_k(\rho_0)\cap[N(k-1),N(k)]$. Par construction, ce sous-ensemble est de densité 1 dans $\mathbb{N}^*$ et comme les (b_k) forment une base de $\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^1\times\mathbb{T}^{2d})$, il vérifie

$$\forall b\in\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^1\times\mathbb{T}^{2d}),\ \lim_{N\to+\infty, N\in S(\rho_0)}\mu^N_{\rho_0}(b) = \int_{\mathbb{T}^1}\int_{\mathbb{T}^{2d}} b(t,\rho)d\rho dt.\square$$

Le cas $d = 1$

Pour la deuxième partie de la proposition ($d = 1$), on peut utiliser un argument d'ordre arithmétique de Kurlberg et Rudnick [66] pour se débarrasser de la dépendance en ρ_0. Pour cela, on reprend la preuve et on se restreint au cas d'une matrice hyperbolique $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $SL(2,\mathbb{Z})$ vérifiant $ab \equiv cd \equiv 0 \pmod 2$. Pour une telle matrice, ils montrent que l'on peut prendre $\kappa = 0$ dans la définition de $\mathcal{H}_N(\kappa)$. Pour être plus proche de leurs notations, on remplace dans ce paragraphe tous les indices κ par l'indice N. On se restreint à la famille des observables $a_{\mathbf{n}}(\rho) = e^{2\imath\pi\langle \mathbf{n},\rho\rangle}$ qui est une base de $\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^2)$ et à la base $(\theta_k(t) := e^{2\pi\imath kt})_k$ de $\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^1)$. On fixe un entier k et un élément $\mathbf{n} \neq (0,0)$ dans $\mathbb{Z}^2$. On commence par remplacer la quantification anti-Wick par la quantification de Weyl dans la définition (3.9). Pour montrer notre résultat, il suffit d'étudier la quantité[7]

$$A_{\mathbf{n},k}(\rho_0) := \frac{1}{P(N)} \sum_{l=1}^{P(N)} \theta_k\left(\frac{l}{P(N)}\right) \left\langle N, \rho_0 \left| M_N(A)^{-l} U_\hbar\left(\frac{\mathbf{n}}{N}\right) M_N(A)^l \right| \rho_0, N \right\rangle_{\mathcal{H}_N}.$$

En utilisant la propriété d'Egorov exacte pour la quantification de Weyl, on trouve alors

$$A_{\mathbf{n},k}(\rho_0) := \left\langle N, \rho_0 \left| \frac{1}{P(N)} \sum_{l=1}^{P(N)} \theta_k\left(\frac{l}{P(N)}\right) U_\hbar\left(A^l \frac{\mathbf{n}}{N}\right) \right| \rho_0, N \right\rangle_{\mathcal{H}_N}.$$

Par souci de simplicité, on définit :

$$D_N(\mathbf{n},k) := \frac{1}{P(N)} \sum_{l=1}^{P(N)} \theta_k\left(\frac{l}{P(N)}\right) U_\hbar\left(A^l \frac{\mathbf{n}}{N}\right).$$

On peut estimer la variance d'ordre 4 de la quantité $A_{\mathbf{n},k}(\rho_0)$

$$\begin{array}{rcl} \int_{\mathbb{T}^2} \left|\langle N, \rho_0 \left| D_N(\mathbf{n},k) \right| \rho_0, N\rangle\right|^4 N d\rho_0 & \leq & 4^4 \int_{\mathbb{T}^2} \left\langle N, \rho_0 \left| (D_N(\mathbf{n},k)^* D_N(\mathbf{n},k))^2 \right| \rho_0, N \right\rangle N d\rho_0 \\ & = & \mathrm{tr}((D_N(\mathbf{n},k)^* D_N(\mathbf{n},k))^2). \end{array}$$

On vérifie que $(D_N(\mathbf{n},k)^* D_N(\mathbf{n},k))^2$ est donné par le produit de $P(N)^{-4}$ et d'une somme, sur $1 \leq l_1, l_2, l_3, l_4 \leq P(N)$, de termes de la forme :

$$\gamma_{l_1,l_2,l_3,l_4}(t,k) U_\hbar((A^{l_1} - A^{l_2} + A^{l_3} - A^{l_4})\mathbf{n}),$$

où $\gamma_{l_1,l_2,l_3,l_4}(t,k)$ est de module 1. On utilise alors le fait que la trace de $U_\hbar\left(\frac{\mathbf{n}'}{N}\right)$ est de module N si $\mathbf{n}' \equiv 0 \pmod N$ et 0 sinon. Par conséquent, on s'est ramené au même problème de comptage que celui de Kurlberg et Rudnick dans [66]. En résumé, leur résultat (proposition 8) permet de montrer qu'il existe un sous-ensemble S de $\mathbb{N}^*$ de densité 1 et une constante universelle C tels que, pour tout $\mathbf{n} \neq 0$ et tout entier k,

$$\int_{\mathbb{T}^2} \left|\langle N, \rho_0 \left| D_N(\mathbf{n},k) \right| \rho_0, N\rangle\right|^4 N d\rho_0 \leq C \|\mathbf{n}\|_2^9 \frac{N(\log N)^{14}}{P(N)^4}.$$

On utilise ensuite le théorème 17 de [66] qui dit que le long d'une sous-suite de densité 1, on a $(\log N)^{16}\sqrt{N} \ll P(N)$. On a donc montré qu'il existe S inclus dans $\mathbb{N}^*$ de densité 1 et une constante C telle que, pour tout $\mathbf{n} \neq 0$ et tout entier k,

$$\int_{\mathbb{T}^2} \left|\langle N, \rho_0 \left| D_N(\mathbf{n},k) \right| \rho_0, N\rangle\right|^4 N d\rho_0 \leq C \|\mathbf{n}\|_2^9 \frac{1}{N(\log N)^2}.$$

[7] On note que pour $\mathbf{n}$ dans $\mathbb{Z}^2$, on a $\mathrm{Op}_N^w(a_{\mathbf{n}}) = U_\hbar\left(\frac{\mathbf{n}}{N}\right)$.

On utilise le lemme de Borel-Cantelli pour déduire l'existence de $\Omega_{\mathbf{n},k} \subset \mathbb{T}^2$ de mesure de Lebesgue 1 et satisfaisant

$$\forall \rho_0 \in \Omega_{\mathbf{n},k},\ \lim_{N\to\infty, N\in S} \mu^N_{\rho_0}(a_{\mathbf{n}} \otimes \theta_k) = \int_{\mathbb{T}^2} a_{\mathbf{n}}(\rho)d\rho \int_0^1 \theta_k(t)dt.$$

On sait que S est indépendant de $\mathbf{n}$, k et ρ_0. Comme on a considéré une base de $\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^{2d})$, on peut prendre $\Omega := \cap_{\mathbf{n},k}\Omega_{\mathbf{n},k}$ pour conclure.□

Quelques questions

Ces différents résultats ne semblent pas complètement optimaux. Par exemple, on peut se poser les questions suivantes :

- Si $d \geq 2$ et s'il n'y a pas de sous-variété invariante, rationnelle et isotropique, peut-on généraliser le résultat de Kurlberg et Rudnick et déduire alors qu'on peut choisir S de densité 1 indépendamment de ρ_0 dans Ω ?
- Pour $d \geq 1$ (sans hypothèse arithmétique), a-t-on existence de S de densité 1 dans $\mathbb{N}$ et de $\Omega \subset \mathbb{T}^{2d}$ de mesure 1 tels que pour tout $\rho_0 \in \Omega$ et tout b dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^{2d})$, on ait $\lim_{N\to\infty, N\in S} \int_{\mathbb{T}^1}\int_{\mathbb{T}^{2d}} b(t,\rho)\mathrm{Hus}^N_{\rho_0}(\rho,t)dtd\rho = \int_{\mathbb{T}^1}\int_{\mathbb{T}^{2d}} b(t,\rho)dtd\rho$?
- Si oui, peut-on prendre $\Omega = \mathbb{T}^{2d}$?
- Enfin, est-il possible de ne pas extraire ? Par exemple, pour $d \geq 1$, a-t-on existence de $\Omega \subset \mathbb{T}^{2d}$ de mesure 1 tel que pour tout $\rho_0 \in \Omega$ et tout b dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^{2d})$, on ait $\lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{T}^1}\int_{\mathbb{T}^{2d}} b(t,\rho)\mathrm{Hus}^N_{\rho_0}(\rho,t)dtd\rho = \int_{\mathbb{T}^1}\int_{\mathbb{T}^{2d}} b(t,\rho)dtd\rho$?

3.2.7 Autres échelles de temps

On a déjà mentionné à plusieurs reprises que certaines complications apparaissent car on a fait le choix d'étudier la suite de mesures associée à l'échelle de temps $P(N)$, i.e.

$$\mu^N(a \otimes \theta) := \int_{\mathbb{T}^1} \theta(t) \left(\int_{\mathbb{T}^{2d}} a(\rho) N^d \left| \langle \varphi^N | M_\kappa(A)^{[tP(N)]} | \rho, \kappa \rangle \right|^2 d\rho \right) dt.$$

Or, il n'existe pas vraiment de choix plus naturel qu'un autre pour l'échelle de temps pour ce modèle. On aurait par exemple pu choisir $\tilde{P}(N)$ de l'ordre de N (comme ça sera le cas au chapitre 5). Dans ce dernier paragraphe, on se donne une autre échelle de temps $\tilde{P}(N)$ et on définit

$$\tilde{\mu}^N(a \otimes \theta) := \int_{\mathbb{T}^1} \theta(t) \left(\int_{\mathbb{T}^{2d}} a(\rho) N^d \left| \langle \varphi^N | M_\kappa(A)^{[t\tilde{P}(N)]} | \rho, \kappa \rangle \right|^2 d\rho \right) dt. \tag{3.26}$$

Supposons que $\tilde{P}(N)$ vérifie la propriété $\frac{\log N}{\tilde{P}(N)} \to 0$ quand N tend vers l'infini. Dans ce cas, on peut encore construire un analogue du contre-exemple de Faure, Nonnenmacher et de Bièvre dans le cas de la base orthonormée des états cohérents mais la distribution n'est pas exactement la même que dans le cas $P(N)$. En effet, la distribution limite est, pour cette nouvelle échelle de temps, de la forme $\frac{1}{2}(\delta_0 + \mathrm{Leb})dt$. La proposition 3.9 sur la variance quantique reste valable. Le théorème 3.12 de déviations est vrai sans l'hypothèse ($\log N_k = o(P(N_k))$ ou $\theta \equiv 1$). La première partie du théorème sur la convergence presque sûre des mesures $\tilde{\mu}^N_\rho$ reste vraie. Par contre, on ne peut plus se débarrasser de la dépendance en ρ_0 en utilisant le même argument dans le cas $d = 1$. Enfin, si on suppose en plus que $\tilde{P}(N)$ vérifie la propriété $\tilde{P}(N) > c(\log N)^{\frac{3}{2}}$ (pour un certain $c > 0$), alors on peut prendre p à la place de $p/2$ dans le reste de la proposition 3.9 sur la variance quantique.

Chapitre 4

Entropie des mesures semi-classiques du chat quantique

Dans ce chapitre, A est une matrice hyperbolique de $SL(2,\mathbb{Z})$ et on appellera mesure semi-classique un point d'accumulation des mesures μ^N associées à une suite de vecteurs propres ψ_N de $M_\kappa(A)$ (voir chapitre précédent). On veut montrer comment on peut borner inférieurement l'entropie d'une mesure semi-classique μ dans ce cas. Précisément, on va prouver le théorème suivant [84] :

Théorème 4.1. *Soient A une matrice hyperbolique de $Sp(2,\mathbb{Z})$ et μ une mesure semi-classique . Alors, on a la borne suivante sur l'entropie métrique de $(\mathbb{T}^2,\mu,A)$:*

$$h_{KS}(\mu,A) \geq \frac{\lambda_+}{2},$$

où λ_+ est l'exposant de Lyapunov positif de A.

Grâce aux contre-exemples construits par de Bièvre, Faure et Nonnenmacher (voir paragraphe 3.2.3), on sait que cette borne est optimale. À notre connaissance, il n'existe pas de preuve écrite pour la borne inférieure de l'entropie d'une mesure semi-classique sur le tore et ce chapitre en propose une. La stratégie générale de la preuve est la même que celle adoptée par Anantharaman et Nonnenmacher dans le cas d'une variété à courbure constante dans [7]. Toutefois, la preuve proposée ici est simplifiée par certains aspects. Notamment, dans [7], les auteurs doivent estimer le taux de décroissance exponentielle de la norme d'une certaine partition quantique. Nous n'aurons pas besoin du même type d'estimées et on se servira uniquement de résultats connus sur le taux de décroissance de la fonction de corrélation quantique (voir paragraphe 3.2.3). Ce raccourci permet de simplifier[1] considérablement cet aspect de la preuve de [7].

4.1 Stratégie de la preuve

On considère μ une mesure semi-classique. Sans perte de généralité, on peut supposer que cette mesure semi-classique est associée à une suite de fonctions propres ψ_{N_k} de $M_\kappa(A)$ dans $\mathcal{H}_{N_k}(\kappa)$ avec $(N_k)_k$ une suite strictement croissante d'entiers. Pour alléger les notations, on ne fera pas mention de k dans la suite. On note μ^N la mesure associée au vecteur propre ψ_N (voir formule (3.10) dans le cas $\theta \equiv 1$)

$$\mu^N(a) := \int_{\mathbb{T}^2} a(\rho) N |\langle \psi_N | \rho, \kappa \rangle|^2 d\rho.$$

Pour calculer l'entropie de Kolmogorov-Sinai d'une mesure, on commence par considérer une partition $\mathcal{Q}$ de diamètre inférieur à δ petit[2] telle que μ ne charge pas les bords de la partition [7]

[1] Dans le cas de l'application du boulanger [6], on pouvait déjà observer le même type de simplification.

[2] Le paramètre δ est petit et fixé pour tout le chapitre : il n'a pas vocation à tendre vers 0.

(ou annexe de [3]). On peut lui associer une partition lisse $(P_i)_{i=1}^K$ d'observables de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2,[0,1])$ (de support de diamètre inférieur à 2δ) satisfaisant la propriété de partition de l'identité suivante de $\mathbb{T}^2$:

$$\forall \rho \in \mathbb{T}^2,\ \sum_{i=1}^K P_i^2(\rho) = 1. \tag{4.1}$$

À la différence de la définition (1.6) de Kolmogorov-Sinai, on va donc utiliser une partition lisse de $\mathbb{T}^2$ afin de pouvoir utiliser les outils de calcul pseudo-différentiel. Ces partitions sont fixées pour l'ensemble de ce chapitre. On définit l'entropie quantique du vecteur ψ_N par rapport à cette partition $\mathcal{P}$

$$h_{2m}(\psi_N,\mathcal{P}) := -\sum_{|\alpha|=2m} \mu^N(\mathbf{P}_\alpha^2)\log\mu^N(\mathbf{P}_\alpha^2), \tag{4.2}$$

avec $\mathbf{P}_\alpha := \prod_{j=-m}^{m-1} P_{\alpha_j}\circ A^j$ pour $\alpha := (\alpha_{-m},\cdots,\alpha_{m-1})$. Par souci de symétrie, on a modifié légèrement la fonction d'entropie d'une partition (ce qui aura son utilité par la suite). On vérifie immédiatement que pour m fixé, on a

$$h_{2m}(\mu,\mathcal{P}) := -\sum_{|\alpha|=2m} \mu(\mathbf{P}_\alpha^2)\log\mu(\mathbf{P}_\alpha^2) = \lim_{N\to\infty} h_{2m}(\psi_N,\mathcal{P}). \tag{4.3}$$

Ainsi, pour m fixé, l'entropie quantique que l'on a définie tend dans la limite semi-classique ($N\to\infty$) vers l'entropie usuelle d'une partition raffinée au temps m (à la différence notable qu'on a considéré une partition lisse). En utilisant un principe d'incertitude entropique dû à Maassen et Uffink [70], on montre ensuite le résultat suivant pour tous les entiers n et m positifs (proposition 4.3) :

$$h_{2m}(\psi_N,\mathcal{P}) \geq -\log\sup_{\rho,\rho'\in\mathbb{T}^2}\{N|\langle\kappa,\rho'|M_\kappa(A)^n|\rho,\kappa\rangle|\} - \log\sup_{|\alpha|=2m}\{\mathrm{Leb}(\mathbf{P}_\alpha^2)\}. \tag{4.4}$$

Cette estimation est le point crucial de la preuve et c'est ici que l'on a un raccourci majeur par rapport à la preuve de [7] (ou celle du chapitre 6). En effet, on a seulement besoin d'estimer la fonction de corrélation quantique[3] alors qu'avec la méthode de [7], on aurait eu à estimer une quantité du type $\|\mathrm{Op}_\kappa^w(P_{\alpha_m})M_\kappa(A)\cdots\mathrm{Op}_\kappa^w(P_{\alpha_0})\|$ pour des temps m logarithmiques en N. Avec l'inégalité (4.4), on n'a plus besoin d'avoir une estimée sur la norme d'une telle partition quantique pour des temps m logarithmiques en N (mais seulement sur le volume d'une partition classique). En contrepartie, on doit estimer une fonction de corrélation quantique pour des temps n assez longs pour que $N|\langle\kappa,\rho'|M_\kappa(A)^n|\rho,\kappa\rangle|$ soit minimal. D'après le paragraphe 3.2.3, on sait que pour le temps d'Ehrenfest $n_E(N) = [(1-\epsilon)\frac{\log N}{\lambda_+}]$, la fonction de corrélation quantique $|\langle\rho,\kappa|M_\kappa(A)^n|\rho',\kappa\rangle|$ est de l'ordre de $N^{-1/2-\epsilon}$. Appliquée pour un tel entier n, l'inégalité précédente s'écrit de nouveau

$$\forall m\geq 1,\ h_{2m}(\psi_N,\mathcal{P}) \geq -\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)\log N - \log\sup_{|\alpha|=2m}\{\mathrm{Leb}(\mathbf{P}_\alpha^2)\} + C, \tag{4.5}$$

pour une certaine constante C indépendante de N. Il faut maintenant déterminer l'entier m pour lequel l'inégalité est optimale. Celui-ci va nécessairement dépendre de N et cela pose le problème que la quantité $h_{m(N)}(\psi_N,\mathcal{P})$ n'a aucune raison de tendre vers $h_{KS}(\mu,\mathcal{P})$ dans la limite semi-classique. Il faut donc faire les choses prudemmment et on vérifie que comme l'entropie classique (voir relation (1.5)), l'entropie quantique vérifie une propriété de sous-additivité jusqu'à des temps m de l'ordre du temps d'Ehrenfest (paragraphe 4.3) qui permet de montrer que (corollaire 4.5)

$$\forall\ 1\leq m_0\leq m_E(N) = \left[\frac{n_E(N)}{2}\right],\ \frac{1}{2m_E(N)}h_{2m_E(N)}(\psi_N,\mathcal{P}) \leq \frac{1}{2m_0}h_{2m_0}(\psi_N,\mathcal{P}) + R(m_0,N),$$

où $R(m_0,N)$ est un reste qui tend vers 0 dans la limite semi-classique (à m_0 fixé). En combinant cette dernière inégalité à l'estimation entropique (4.5), on trouve que pour tout entier $m_0>0$ fixé,

[3] L'estimation de l'autre terme découle immédiatement du calcul de l'entropie de la mesure de Lebesgue.

on a l'inégalité entropique suivante :

$$-\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)\lambda_+ - \frac{1}{2m_E(N)}\log \sup_{|\alpha|=2m_E(N)}\{\mathrm{Leb}(\mathbf{P}_\alpha^2)\} \leq \frac{1}{2m_0}h_{m_0}(\psi_N,\mathcal{P}) + R(m_0,N). \qquad (4.6)$$

Il nous reste à minorer la quantité $-\frac{1}{2m_E(N)}\log\sup_{|\alpha|=2m_E(N)}\{\mathrm{Leb}(\mathbf{P}_\alpha^2)\}$. Pour cela, on remarque que, pour α de longueur $2m$,

$$\forall x \in A^{-m}\mathrm{supp}(\mathbf{P}_\alpha^2),\ \mathrm{Leb}(\mathbf{P}_\alpha^2) \leq \mathrm{Leb}(A^{-m}\mathrm{supp}(\mathbf{P}_\alpha^2)) \leq \mathrm{Leb}(B(x,\delta,2m)).$$

Comme dans la preuve du lemme 3.17, on vérifie qu'il existe une constante C_δ telle que pour tout x appartenant à $\mathbb{T}^2$, $\mathrm{Leb}\left(B(x,2\delta,2m)\right) \leq C_\delta e^{-2m\lambda_+}$ [22]. On utilise cette dernière propriété et on fait tendre N vers l'infini dans (4.6). On trouve alors, pour tout entier m_0,

$$\frac{\lambda_+}{2} - \epsilon \leq \frac{1}{2m_0}h_{2m_0}(\mu,\mathcal{P}).$$

Cette dernière inégalité est valable pour tous les lissages $\mathcal{P}$ de la partition $\mathcal{Q}$. La borne inférieure ne dépend pas des dérivées de cette partition et on peut donc remplacer $\mathcal{P}$ par la vraie partition $\mathcal{Q}$. On peut finalement conclure en faisant tendre m_0 vers l'infini puis ϵ vers 0 :

$$\frac{\lambda_+}{2} \leq h_{KS}(\mu,A).\square$$

Les paragraphes qui suivent sont dédiés à la preuve des différents résultats que l'on a admis pour montrer le théorème principal.

4.2 Incertitude entropique

La notion d'entropie quantique apparaît de manière générale dans un article de Maassen et Uffink [70]. On rappelle brièvement leur formalisme et leurs résultats[4]. Puis on verra comment le principe d'incertitude pour cette entropie peut s'appliquer dans le cas vecteurs propres de $M_\kappa(A)$. Le résultat fondamental pour notre étude est donné par la proposition 4.3.

4.2.1 Principe d'incertitude entropique général

On se donne D un entier et $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert muni de la norme $\|.\|$ associée au produit scalaire $\langle .|.\rangle$. On définit sur l'espace $\mathcal{H}^D$ la famille de normes suivante :

$$\forall \Psi = (\psi_1,\cdots,\psi_D) \in \mathcal{H}^D,\ \forall 1 \leq p < \infty,\ \|\Psi\|_p := \left(\sum_{i=1}^D \|\psi_i\|^p\right)^{1/p}.$$

On peut remarquer que la norme 2 munit naturellement $\mathcal{H}^D$ d'une structure d'espace de Hilbert. Pour $p=\infty$, on étend la définition précédente de la manière suivante :

$$\|\Psi\|_\infty := \sup_{1\leq i\leq D}\{\|\psi_i\|\}.$$

On définit alors naturellement l'entropie d'un élément Ψ de $\mathcal{H}^D$ satisfaisant $\|\Psi\|_2 = 1$

$$h(\Psi) := \sum_{i=1}^D \|\psi_i\|^2 \log\|\psi_i\|^2.$$

Considérons maintenant un opérateur $T : \mathcal{H}^D \to \mathcal{H}^D$. Cet opérateur peut être représenté sous forme matricielle $(T_{i,j})_{i,j}$ où les $T_{i,j}$ sont des opérateurs de $\mathcal{H}$. On note $\|T\|_{p,q}$ la norme de l'opérateur vu comme un opérateur de $(\mathcal{H}^D,\|.\|_p)$ dans $(\mathcal{H}^D,\|.\|_q)$. Maassen et Uffink prouvent le théorème d'incertitude entropique suivant [70] :

[4] Ces résultats ont été étendus dans un cadre plus général depuis (voir chapitre 6 de cette thèse pour un rappel de [7]). Pour ce chapitre, on aura seulement besoin de la version simple présentée dans ce paragraphe.

Théorème 4.2 (Principe d'incertitude entropique)**.** *Soit T un opérateur de $\mathcal{H}^D$ de norme $\|T\|_{2,2} = 1$ et soit Ψ un élément de $\mathcal{H}^D$ vérifiant $\|\Psi\|_2 = \|T\Psi\|_2 = 1$. On a alors la relation :*

$$h(\Psi) + h(T\Psi) \geq -2 \log c(T), \tag{4.7}$$

où $c(T) := \sup_{i,j}\{\|T_{i,j}\|\}$.

Preuve. Par souci de complétude, nous rappelons les grandes lignes de la preuve du principe d'incertitude entropique. Tout repose sur un théorème d'interpolation qui dit que la fonction

$$(a, b) \mapsto \log \|T\|_{\frac{1}{a},\frac{1}{b}}$$

est convexe sur l'ensemble $[0, 1]^2$ (théorème d'interpolation de Riesz [35]). On considère alors le point $t(1, 0) + (1 - t)(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Sous les hypothèses du théorème, on a

$$\|T\Psi\|_{\frac{2}{1-t}} \leq \|T\|^t_{1,\infty} \|\Psi\|_{\frac{2}{1+t}}.$$

Le lecteur pourra vérifier que $c(T) \geq \|T\|_{1,\infty}$. On peut alors définir le moment d'ordre r associé à un élément Ψ de norme 1

$$M_r(\Psi) := \left(\sum_{i=1}^{D} \|\psi_i\|^{2+2r} \right)^{\frac{1}{r}}.$$

L'inégalité d'interpolation de Riesz s'écrit alors sous la forme

$$M_{\frac{t}{1-t}}(T\Psi) M_{\frac{-t}{1+t}}(\Psi) \leq c(T)^2.$$

On peut alors conclure en prenant la limite $t \to 0$.□

4.2.2 Cas particulier de partitions de l'identité

On va chercher maintenant à appliquer le principe d'incertitude entropique dans un cadre particulier. On se donne un second espace de Hilbert $\tilde{\mathcal{H}}$ et un opérateur unitaire U sur $\tilde{\mathcal{H}}$. On considère aussi deux familles d'opérateurs $(\tau_i)_{i=1}^D$ et $(\pi_i)_{i=1}^D$ de $\tilde{\mathcal{H}}$ dans $\mathcal{H}$ qui vérifient la propriété suivante de partition de l'identité de $\tilde{\mathcal{H}}$:

$$\sum_{i=1}^{D} \tau_i^\dagger \tau_i = \mathrm{Id}_{\tilde{\mathcal{H}}} \text{ et } \sum_{i=1}^{D} \pi_i^\dagger \pi_i = \mathrm{Id}_{\tilde{\mathcal{H}}},$$

où $\pi_i^\dagger : \mathcal{H} \to \tilde{\mathcal{H}}$ est l'adjoint de π_i. À ces partitions, on fait correspondre l'opérateur T défini par les blocs $\tau_i U \pi_j^\dagger$. En posant $L := (\pi_1^\dagger, \cdots, \pi_D^\dagger)$ et $C := \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_D \end{pmatrix}$, on peut écrire $T = CUL$. On a alors les égalités suivantes :

$$\|T\|^2_{2,2} = \|T^*T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}^D)} = \|(UL)^\dagger UL\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}^D)},$$

où on a utilisé la propriété de partition de l'identité pour écrire $C^\dagger C = \mathrm{Id}_{\tilde{\mathcal{H}}}$. Enfin, on peut écrire

$$\|T\|^2_{2,2} = \|(UL)^\dagger UL\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}^D)} = \|UL(UL)^\dagger\|_{\mathcal{L}(\tilde{\mathcal{H}})} = 1,$$

en utilisant $LL^\dagger = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$. En prenant ψ de norme 1 dans $\tilde{\mathcal{H}}$, on peut définir l'élément suivant de $\mathcal{H}^D$:

$$\Psi := (\pi_1\psi, \cdots, \pi_D\psi).$$

Cet élément est de norme 1 (en utilisant la propriété de partition de l'identité) et on peut vérifier que $T\Psi = (\tau_1 U\psi, \cdots, \tau_D U\psi)$ est aussi de norme 1. Appliqué dans ce contexte, le principe d'incertitude entropique donne alors

$$-\sum_{i=1}^{D} \|\tau_i U\psi\|^2_{\mathcal{H}} \log \|\tau_i U\psi\|^2_{\mathcal{H}} - \sum_{i=1}^{D} \|\pi_i\psi\|^2_{\mathcal{H}} \log \|\pi_i\psi\|^2_{\mathcal{H}} \geq -2 \log \sup_{i,j} \|\tau_i U \pi_j^\dagger\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}. \tag{4.8}$$

4.2.3 Applications aux vecteurs propres de $M_\kappa(A)$

On revient à notre problème et on applique le principe d'incertitude entropique dans le cas d'un vecteur propre ψ_N de $M_\kappa(A)$ pour obtenir un résultat sur l'entropie de la mesure μ^N correspondante. Pour cela, on prend $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{T}^2, \mathbb{C})$ et $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_N(\kappa)$. On fixe un entier n et on pose $U = M_\kappa(A)^n$. Enfin, on se place dans les conditions du paragraphe 4.1 et en combinant l'égalité (4.1) à la partition (3.6) de $\mathcal{H}_N(\kappa)$ par les états cohérents, on trouve

$$\sum_{|\alpha|=2m} \int_{\mathbb{T}^2} \mathbf{P}_\alpha^2(\rho) |\rho, \kappa\rangle\langle\rho, \kappa| N d\rho = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}_N(\kappa)}, \tag{4.9}$$

avec $\mathbf{P}_\alpha := \prod_{j=-m}^{m-1} P_{\alpha_j} \circ A^j$ pour $\alpha := (\alpha_{-m}, \cdots, \alpha_{m-1})$. Pour ρ dans $\mathbb{T}^2$ et ψ dans $\mathcal{H}_N(\kappa)$, on pose $\pi_\alpha \psi(\rho) := \sqrt{N} \mathbf{P}_\alpha(\rho) \langle \rho, \kappa | \psi \rangle$. Ceci définit une application linéaire continue de $\mathcal{H}_N(\kappa)$ dans $L^2(\mathbb{T}^2, \mathbb{C})$ dont la transposée s'écrit pour f dans $L^2(\mathbb{T}^2, \mathbb{C})$, $\pi_\alpha^\dagger f := \int_{\mathbb{T}^2} \sqrt{N} \mathbf{P}_\alpha(\rho) f(\rho) |\rho, \kappa\rangle d\rho$. Elle vérifie bien la relation fondamentale

$$\sum_{|\alpha|=2m} \pi_\alpha^\dagger \pi_\alpha = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}_N(\kappa)}.$$

On peut alors appliquer l'inégalité d'incertitude entropique (4.8) en prenant $\pi_\alpha = \tau_\alpha$ et $U = M_\kappa(A)^n$. On doit estimer la quantité $\|\pi_\alpha M_\kappa(A)^n \pi_\beta^\dagger\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}$. Pour cela, on se donne f dans $L^2(\mathbb{T}^2, \mathbb{C})$ et on écrit

$$\left| \pi_\alpha M_\kappa(A)^n \pi_\beta^\dagger f(\rho) \right|^2 = \left| \int_{\mathbb{T}^2} \mathbf{P}_\alpha(\rho) \langle \kappa, \rho | M_\kappa(A)^n | \rho', \kappa \rangle N \mathbf{P}_\beta(\rho') f(\rho') d\rho' \right|^2.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\left| \pi_\alpha M_\kappa(A)^n \pi_\beta^\dagger f(\rho) \right|^2 \leq \left(\sup_{\rho, \rho' \in \mathbb{T}^2} \{ N |\langle \kappa, \rho' | M_\kappa(A)^n | \rho, \kappa \rangle| \} \right)^2 \mathbf{P}_\alpha^2(\rho) \int_{\mathbb{T}^2} \mathbf{P}_\beta^2(\rho') d\rho' \|f\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2.$$

Ceci nous donne finalement

$$\|\pi_\alpha M_\kappa(A)^n \pi_\beta^\dagger\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} \leq \sup_{\rho, \rho' \in \mathbb{T}^2} \{ N |\langle \kappa, \rho' | M_\kappa(A)^n | \rho, \kappa \rangle| \} \mathrm{Leb}(\mathbf{P}_\alpha^2)^{\frac{1}{2}} \mathrm{Leb}(\mathbf{P}_\beta^2)^{\frac{1}{2}}.$$

L'application du principe d'incertitude entropique permet alors de déduire la proposition suivante :

Proposition 4.3. *Soit ψ_N un vecteur propre de $M_\kappa(A)$. Soient n, m deux entiers positifs. On considère une famille $(P_i)_{i=1}^K$ d'observables de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2, [0,1])$ satisfaisant la propriété de partition de l'identité suivante de $\mathbb{T}^2$:*

$$\forall \rho \in \mathbb{T}^2, \ \sum_{i=1}^K P_i^2(\rho) = 1.$$

Alors, on a

$$-\sum_{|\alpha|=2m} \mu^N(\mathbf{P}_\alpha^2) \log \mu^N(\mathbf{P}_\alpha^2) \geq -\log \sup_{\rho, \rho' \in \mathbb{T}^2} \{ N |\langle \kappa, \rho' | M_\kappa(A)^n | \rho, \kappa \rangle| \} - \log \sup_{|\alpha|=2m} \{ Leb(\mathbf{P}_\alpha^2) \},$$

avec $\mathbf{P}_\alpha := \prod_{j=-m}^{m-1} P_{\alpha_j} \circ A^j$ pour $\alpha := (\alpha_{-m}, \cdots, \alpha_{m-1})$ et $\mu^N(\mathbf{P}_\alpha^2) := \int_{\mathbb{T}^2} \mathbf{P}_\alpha^2(\rho) N |\langle \psi_N | \rho, \kappa \rangle|^2 d\rho$.

4.3 Sous-additivité de l'entropie quantique

Le but de ce paragraphe est de montrer que l'entropie quantique définie par (4.2) vérifie une propriété de sous-additivité tant qu'on reste dans une échelle de temps m semi-classique (i.e. bornée par le temps d'Ehrenfest). Précisément, on montre le théorème suivant :

Théorème 4.4 (Sous-additivité de l'entropie quantique)**.** *On fixe m_0 et r deux entiers positifs. Soit $m_E(N) = [n_E(N)/2]$. Alors, il existe une fonction $R(m_0, r, N)$ qui vérifie :*

– *pour tout q dans $\mathbb{N}$ satisfaisant $qm_0 + r \leq m_E(N)$,*

$$h_{2qm_0+2r}(\psi_N, \mathcal{P}) \leq h_{2r}(\psi_N, \mathcal{P}) + qh_{2m_0}(\psi_N, \mathcal{P}) + (q+1)R(m_0, r, N).$$

– *pour tout m_0 et r dans $\mathbb{N}$, $\lim_{N\to\infty} R(m_0, r, N) = 0$.*

On peut immédiatement déduire le corollaire suivant :

Corollaire 4.5. *Soient $m_E(N) = [n_E(N)/2]$ et m_0 un entier fixé. Alors, on a*

$$\frac{1}{2m_E(N)} h_{2m_E(N)}(\psi_N, \mathcal{P}) \leq \frac{1}{2m_0} h_{2m_0}(\psi_N, \mathcal{P}) + \tilde{R}(m_0, N),$$

où $\tilde{R}(m_0, N)$ est un reste qui vérifie la propriété : $\forall m_0 \in \mathbb{N},\ \lim_{N\to\infty} \tilde{R}(m_0, N) = 0$.

Preuve. On fixe un entier m_0 dans $\mathbb{N}$ et on écrit $m_E(N) = qm_0 + r$ avec $0 \leq r < m_0$. On pose $R(m_0, N) = \sup_{0\leq r<m_0} R(m_0, r, N)$. En utilisant le théorème 4.4, on sait que

$$\frac{1}{2m_E(N)} h_{2m_E(N)}(\psi_N, \mathcal{P}) \leq \frac{q}{2m_E(N)} h_{2m_0}(\psi_N, \mathcal{P}) + \frac{1}{2m_E(N)} h_{2r}(\psi_N, \mathcal{P}) + \frac{q+1}{2m_E(N)} R(m_0, N),$$

où $m_E(N) = qm_0 + r$ avec $0 \leq r < m_0$ et où $R(m_0, N)$ est un reste (ne dépendant que de m_0 et de N) qui vérifie la propriété $\lim_{N\to\infty} R(m_0, N) = 0$ pour m_0 fixé dans $\mathbb{N}$. La quantité $q/m_E(N)$ tend vers $1/m_0$ quand N tend vers l'infini. On pose :

$$\tilde{R}(m_0, N) = \left(\frac{q}{2m_E(N)} - \frac{1}{2m_0} \right) h_{2m_0}(\psi_N, \mathcal{P}) + \frac{1}{2m_E(N)} h_{2r}(\psi_N, \mathcal{P}) + \frac{q+1}{2m_E(N)} R(m_0, N).$$

On note que cette fonction ne dépend bien que de m_0 et N puisque q et r sont uniquement déterminés par la division euclidienne de $m_E(N)$ par m_0. L'entier m_0 étant fixé, on sait que les quantités $h_{2m_0}(\psi_N, \mathcal{P})$ et $h_r(\psi_N, \mathcal{P})$ sont bornées par une quantité ne dépendant que de m_0. Tout ceci permet de vérifier que, pour tout m_0 dans $\mathbb{N}$, on a $\lim_{N\to\infty} \tilde{R}(m_0, N) = 0$.□

Preuve du théorème 4.4

On fixe trois entiers p, n et m. Pour simplifier les notations, on pose $\eta(x) = -x \log x$ et on définit l'entropie quantique tirée en arrière par A^p de la manière suivante :

$$h^p_{2m}(\psi_N, \mathcal{P}) := \sum_{|\alpha|=2m} \eta\left(\mu^N(\mathbf{P}^2_\alpha \circ A^p)\right).$$

On écrit alors en suivant la preuve usuelle de sous-additivité de l'entropie pour des partitions [100]

$$\begin{aligned} h^p_{2(n+m)}(\psi_N, \mathcal{P}) &= -\sum_{|\alpha|=2(n+m)} \mu^N\left(\prod_{j=-m-n}^{n+m-1} P^2_{\alpha_j} \circ A^{j+p}\right) \log \mu^N\left(\prod_{j=-m+n}^{m+n-1} P^2_{\alpha_j} \circ A^{j+p}\right) \\ &+ \sum_{|\alpha|=2(n+m)} \eta\left(\frac{\mu^N\left(\prod_{j=-m-n}^{m+n-1} P^2_{\alpha_j} \circ A^{j+p}\right)}{\mu^N\left(\prod_{j=-m+n}^{m+n-1} P^2_{\alpha_j} \circ A^{j+p}\right)}\right) \mu^N\left(\prod_{j=-m+n}^{m+n-1} P^2_{\alpha_j} \circ A^{j+p}\right). \end{aligned} \tag{4.10}$$

On note que l'égalité précédente correspond en fait à la relation (1.2) du chapitre 1 sur l'entropie d'une partition. Pour majorer cette quantité, on utilise la propriété de partition de l'identité (4.1) pour écrire que, pour tout $(\alpha_{-m+n}, \cdots, \alpha_{n+m-1})$,

$$\sum_{\alpha_{-m-n}, \cdots, \alpha_{-m+n-1}} \mu^N\left(\prod_{j=-m-n}^{n+m-1} P^2_{\alpha_j} \circ A^{j+p}\right) = \mu^N\left(\prod_{j=-m+n}^{n+m-1} P^2_{\alpha_j} \circ A^{j+p}\right). \tag{4.11}$$

Ceci permet de récrire la première somme. Pour la seconde somme, on utilise de nouveau que l'on a une partition de l'identité pour écrire que $\sum_{\alpha_{-m+n},\cdots,\alpha_{m+n-1}} \mu^N\left(\prod_{j=-m+n}^{m+n-1} P^2_{\alpha_j}\circ A^{j+p}\right)=1$. Ceci nous permet d'utiliser la convexité de la fonction η pour trouver que, pour tout $(\alpha_{-m-n},\cdots,\alpha_{-m+n-1})$,

$$\sum_{\alpha_{-m+n},\cdots,\alpha_{m+n-1}} \mu^N\left(\prod_{j=-m+n}^{m+n-1} P^2_{\alpha_j}\circ A^{j+p}\right)\eta\left(\frac{\mu^N\left(\prod_{j=-m-n}^{m+n-1} P^2_{\alpha_j}\circ A^{j+p}\right)}{\mu^N\left(\prod_{j=-m+n}^{m+n-1} P^2_{\alpha_j}\circ A^{j+p}\right)}\right)$$

$$\leq \eta\left(\sum_{\alpha_{-m+n},\cdots,\alpha_{m+n-1}} \mu^N\left(\prod_{j=-m-n}^{m+n-1} P^2_{\alpha_j}\circ A^{j+p}\right)\right)=\eta\left(\mu^N\left(\prod_{j=-m-n}^{-m+n-1} P^2_{\alpha_j}\circ A^{j+p}\right)\right). \quad (4.12)$$

On souligne que l'on s'est servi du fait que l'on a une partition de l'identité (relation (4.1)) pour obtenir la dernière égalité. En se servant des relations (4.11) et (4.12), on peut déduire de l'inégalité (4.10) que

$$\begin{aligned} h^p_{2(n+m)}(\psi_N,\mathcal{P}) &\leq \sum_{|\alpha|=2m}\eta\left(\mu^N\left(\prod_{j=-m+n}^{m+n-1} P^2_{\alpha_j}\circ A^{j+p}\right)\right)\\ &+ \sum_{|\alpha|=2n}\eta\left(\mu^N\left(\prod_{j=-m-n}^{-m+n-1} P^2_{\alpha_j}\circ A^{j+p}\right)\right). \end{aligned}$$

Ce résultat s'écrit de manière plus compacte sous la forme

$$\forall p\in\mathbb{Z},\ \forall n\geq 0,\ \forall m\geq 0,\ h^p_{2(n+m)}(\psi_N,\mathcal{P})\leq h^{n+p}_{2m}(\psi_N,\mathcal{P})+h^{-m+p}_{2n}(\psi_N,\mathcal{P}). \quad (4.13)$$

Fixons maintenant trois entiers m_0, q et r. On écrit $m=qm_0+r$. On peut utiliser l'inégalité (4.13) pour écrire l'inégalité

$$h_{2m}(\psi_N,\mathcal{P})\leq h^r_{2qm_0}(\psi_N,\mathcal{P})+h^{-qm_0}_{2r}(\psi_N,\mathcal{P}).$$

On applique une nouvelle fois l'inégalité (4.13) pour trouver

$$h_{2m}(\psi_N,\mathcal{P})\leq h^{r+m_0}_{2(q-1)m_0}(\psi_N,\mathcal{P})+h^{-(q-1)m_0+r}_{2m_0}(\psi_N,\mathcal{P})+h^{-qm_0}_{2r}(\psi_N,\mathcal{P}).$$

Par une récurrence immédiate, on trouve finalement

$$h_{2m}(\psi_N,\mathcal{P})\leq h^{-qm_0}_{2r}(\psi_N,\mathcal{P})+\sum_{j=1}^{q} h^{-(q+1-2j)m_0+r}_{2m_0}(\psi_N,\mathcal{P}). \quad (4.14)$$

Cette inégalité est valable pour tout triplet d'entiers (q,m_0,r) satisfaisant $m=qm_0+r$.
On fixe m_0 un entier positif et (q,r) dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ vérifiant $qm_0+r\leq m_E(N)$. On rappelle que l'on peut déduire du théorème d'Egorov que, pour tout a dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2)$,

$$\forall\ |t|\leq m_E(N),\ \mu^N\left(a\circ A^t\right)=\mu^N(a)+o_a(1),\ \text{quand } N\to+\infty.$$

On souligne que le reste dans cette égalité tend vers 0 uniformément pour t dans l'intervalle considéré. On utilise cette dernière propriété pour la fonction $\mathbf{P}^2_\alpha$ avec $|\alpha|=2m_0$. En utilisant la continuité de la fonction η, ceci permet d'obtenir

$$\forall\ |t|\leq m_E(N),\ \eta\left(\mu^N\left(\mathbf{P}^2_\alpha\circ A^t\right)\right)=\eta\left(\mu^N(\mathbf{P}^2_\alpha)\right)+o_\alpha(1),\ \text{quand } N\to+\infty.$$

Comme m_0 est fixé, on en déduit alors, par définition de $h^p_{2m_0}(\psi_N,\mathcal{P})$, que

$$\forall\ |p|\leq m_E(N),\ h^p_{2m_0}(\psi_N,\mathcal{P})=h_{2m_0}(\psi_N,\mathcal{P})+o_{m_0}(1),\ \text{quand } N\to+\infty.$$

Dans le cas qui nous intéresse, on a $p=-(q+1-2j)m_0+r$ qui appartient à l'intervalle $[-m_E(N),m_E(N)]$. Comme $|qm_0|\leq m_E(N)$, on peut aussi écrire que $h^{-qm_0}_{2r}(\psi_N,\mathcal{P})=h_{2r}(\psi_N,\mathcal{P})+o_r(1)$ quand N tend vers l'infini. On déduit donc de l'inégalité (4.14) et des relations précédentes sur les $h^p_{2m_0}$ que

$$h_{2(qm_0+r)}(\psi_N,\mathcal{P})\leq h_{2r}(\psi_N,\mathcal{P})+qh_{2m_0}(\psi_N,\mathcal{P})+(q+1)R(m_0,r,N),$$

où $R(m_0,r,N)$ est un reste qui ne dépend que de m_0, r et de N et qui vérifie la propriété

$$\forall\ r\in\mathbb{N},\ \forall\ m_0\in\mathbb{N},\ \lim_{N\to\infty} R(m_0,r,N)=0.\square$$

Chapitre 5

Déviations semi-classiques pour un flot géodésique

Après avoir étudié un modèle simple du chaos quantique, on introduit dans ce chapitre la notion de mesures semi-classiques pour une variété M riemannienne, compacte, connexe, lisse et sans bords. Celles-ci pourraient être définies dans d'autres contextes[1] : Hamiltoniens semi-classiques généraux [54] ; billards ergodiques [47], [104] ; applications quantiques du tore [20], [6], [51]. Dans les deux chapitres qui suivent, on transpose les résultats obtenus aux chapitres précédents pour les applications quantiques du tore. La première partie du chapitre est consacrée à quelques brefs rappels sur le problème d'ergodicité quantique et les lois de Weyl pour les fonctions propres du Laplacien. Dans la deuxième partie de ce chapitre (paragraphe 5.2), on introduit une notion de mesures semi-classiques qui prend aussi en compte les variables d'énergie E et de temps t [72], [8] et comme au chapitre 3, on prouve un résultat de déviations des mesures semi-classiques (théorème 5.12) basé sur les propriétés de grandes déviations d'un flot géodésique sur une variété de type Anosov [63] et on discute le cas de deux exemples.
Pour le reste du chapitre, M est une *variété riemannienne, compacte, lisse, connexe, de dimension d et sans bords.*

5.1 Mesures semi-classiques

On considère $(u_\hbar)_{\hbar\to 0}$ une suite de vecteurs unitaires de $L^2(M)$. En utilisant la quantification positive $\mathrm{Op}^+_\hbar$ introduite par la proposition 2.9, on peut associer à $u_\hbar$ une distribution positive en posant pour tout a appartenant à $S^{0,0}_0(T^*M)$ ne dépendant que de x à l'infini

$$\mu_\hbar(a) := \langle u_\hbar | \mathrm{Op}^+_\hbar(a) | u_\hbar \rangle_{L^2(M)}.$$

On note $\widehat{T^*M}$ le compactifié de T^*M, i.e. l'ensemble $T^*M \cup (M \times \{\infty\})$ (on rajoute un point dans chaque fibre). Pour se donner un voisinage de (x,∞), on se donne $R \geq 0$ et U un voisinage de x dans M : ceci définit naturellement un voisinage de (x,∞) en posant $\overline{U} = U \times \{\infty\} \cup \{(x,\xi) : x \in U, \|\xi\| \geq R\}$. On a ainsi une topologie sur $\widehat{T^*M}$ qui en fait un ensemble compact. Les fonctions pour lesquelles $\mathrm{Op}^+_\hbar$ est bien définie s'étendent de manière unique en des fonctions continues sur $\widehat{T^*M}$ et forment un sous ensemble dense de $\mathcal{C}^0(\widehat{T^*M})$. La distribution $\mu_\hbar$ s'étend en une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}^0(\widehat{T^*M})$ et d'après Schwartz [93], on sait que $\mu_\hbar$ se prolonge en une mesure de Radon positive sur l'ensemble compact $\widehat{T^*M}$. Dans ce contexte, on définit :

Définition 5.1. Soit $(u_\hbar)_{\hbar\to 0}$ une suite de vecteurs unitaires de $L^2(M)$. Toute limite faible μ_0 des mesures $\mu_\hbar$ s'appelle une mesure semi-classique associée à $(u_\hbar)$ (c'est une mesure de probabilité sur $\widehat{T^*M}$).

[1] On pourra consulter [26] pour une introduction aux différents problèmes reliés aux mesures semi-classiques.

Ces mesures semi-classiques donnent une description asymptotique des états $u_\hbar$ en fonction des variables de l'espace des phases (position et impulsion). Notons que si μ_0 est une mesure semi-classique, on peut vérifier que la projection ν_0 de μ_0 sur M est une limite faible des mesures $|u_\hbar|^2 d\mathrm{Vol}_M$. Enfin, on souligne que pour une autre procédure de quantification $\mathrm{Op}_\hbar$ (positive ou non) équivalente dans la limite semi-classique, les points d'accumulation (pour la topologie faible-$\star$ induite par $\mathcal{C}^0(\widehat{T^*M})$) sont exactement les mêmes. En d'autres termes, les mesures semi-classiques sont indépendantes du choix de quantification.

5.1.1 Propriétés générales

Fonctions propres d'un opérateur pseudo-différentiel (elliptique)

On considère maintenant $P_\hbar$ un opérateur pseudo-différentiel de $\Psi_0^{m,0}(M)$ et $(u_\hbar)_{\hbar\to 0}$ une famille de fonctions propres telles que $P_\hbar u_\hbar = 0$. On peut alors montrer le résultat suivant :

Théorème 5.2. *Soit $P_\hbar$ appartenant à $\Psi_0^{m,0}(M)$ et $(u_\hbar)_{\hbar\to 0}$ une famille de fonctions propres de $L^2(M)$ tels que $P_\hbar u_\hbar = 0$. On note p_0 le symbole principal de $P_\hbar$ que l'on suppose à valeurs réelles. Si μ_0 est une mesure semi-classique associée à $(u_\hbar)$, alors*

1. *$supp(\mu_0) \cap T^*M \subset p_0^{-1}(\{0\})$,*
2. *$\mu_0|_{T^*M}$ est invariante par le flot hamiltonien de p_0.*

Si on suppose de plus que $P_\hbar$ est elliptique à l'infini, alors $supp(\mu_0) \subset T^*M$.

Preuve. En considérant $a \geq 0$ dans $\mathcal{C}_o^\infty(T^*M)$ telle que $\mathrm{supp}(a) \subset \{|p_0| \geq C > 0\}$, on vérifie que $\mu_\hbar(a) = \mu_\hbar((a/p_0)p_0) = O(\hbar)$ (en utilisant la composition des opérateurs pseudo-différentiels et le fait que $u_\hbar$ est un état propre de $P_\hbar$). Ainsi, l'intersection du support de toute mesure semi-classique avec T^*M est inclus dans $p_0^{-1}(0)$.
En utilisant la relation d'Egorov (2.17) pour $a \in \mathcal{C}_o^\infty(T^*M)$ et l'Hamiltonien p_0, on sait que

$$\forall t \in \mathbb{R}, U_{p_0}^{-t}\mathrm{Op}_\hbar^+(a)U_{p_0}^t = \mathrm{Op}_\hbar^+\left(a \circ \varphi_{p_0}^t\right) + O_{L^2,t}(\hbar),$$

où $\varphi_{p_0}^t$ est le flot hamiltonien associé à l'Hamiltonien p_0 (voir annexe A). En utilisant que $P_\hbar u_\hbar = 0$, on trouve que toute mesure semi-classique μ_0 vérifie $\mu_0(a) = \mu_0(a \circ \varphi_{p_0}^t)$. Ainsi, les mesures semi-classiques sont invariantes par le flot hamiltonien associé à p_0.
Finalement, si on suppose en plus que $P_\hbar$ est elliptique à l'infini (i.e. $\exists c > 0, |p_0(x,\xi)| \geq c\|\xi\|^m$ pour $\xi \geq R$), on peut prendre a dans $\mathcal{C}^0(\widehat{T^*M})$ égale à 1 au voisinage de l'infini et nulle pour $\|\xi\| \leq 2R$ et on vérifie alors que $a = bp_0$ satisfait $\mu_\hbar(a) = O(\hbar)$.□

Le Laplacien

Dans la suite de la thèse, on va s'intéresser au cas plus particulier de $P_\hbar := -\hbar^2\Delta - 1$. Par abus de langage, on appellera mesure semi-classique un point d'accumulation d'une suite $\mu_\hbar$ associée à une suite de fonctions propres $u_\hbar$ vérifiant $P_\hbar u_\hbar = 0$.
On sait qu'il existe une base orthonormée $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ de $L^2(M)$ composée de fonctions propres de Δ [15] telles que

$$\Delta\psi_j = -\lambda_j^2\psi_j,$$

avec $\lambda_j^2 \leq \lambda_{j+1}^2$ pour tout j dans $\mathbb{N}$ et $0 = \lambda_0^2 < \lambda_1^2$. Ainsi, l'équation $P_\hbar u_\hbar = 0$ admet une solution si et seulement si il existe $j > 0$ tel que $\hbar^{-2} = \lambda_j^2$. L'étude des fonctions propres du Laplacien nous donne naturellement une suite discrète de paramètres semi-classiques $\hbar_j = \lambda_j^{-1}$ adaptés. Le théorème 5.2 nous dit que la famille des mesures semi-classiques est une famille de mesures de probabilité de S^*M invariante par le flot géodésique g^t. On a ainsi construit un sous-ensemble de $\mathcal{M}(S^*M, (g^t))$ à partir des fonctions propres du Laplacien : la suite de cette thèse est consacrée à la description de ce sous-ensemble (et de ces généralisations).

Exemple. À titre d'exemple, on traite le cas des fonctions propres du Laplacien sur le tore $M = \mathbb{T}^d$

muni de la métrique plate. Dans ce cas, une base de fonctions propres de Δ est donnée par $(e^{2\imath\pi\langle n,x\rangle})_{n\in\mathbb{Z}^d}$. Le paramètre semi-classique est alors joué par $(2\pi\|n\|)^{-1}$. En utilisant la formule de la phase stationnaire, on vérifie que

$$\text{quand } \|n\|\to\infty,\ \langle e^{2\imath\pi\langle n,.\rangle}|\mathrm{Op}^+_{(2\pi\|n\|)^{-1}}(a)|e^{2\imath\pi\langle n,.\rangle}\rangle \sim \int_{\mathbb{T}^d} a\left(x,\frac{n}{\|n\|}\right)dx.$$

En particulier, la suite μ_{n_j} a une limite faible si et seulement si $\frac{n_j}{\|n_j\|}$ tend vers un vecteur ξ_0 de la sphère de $\mathbb{R}^d$. Dans ce cas, la mesure semi-classique est la mesure $\mathrm{Leb}_{\mathbb{T}^d}\times\delta_{\xi_0}$. Cette mesure est donc concentrée sur le tore invariant $\mathbb{T}^d\times\{\xi_0\}$ et on voit sur cet exemple l'intérêt de relever les mesures à l'espace des phases $T^*\mathbb{T}^d$. En effet, les fonctions propres sont équidistribuées en position ($|e^{2\imath\pi\langle n,x\rangle}|^2=1$) mais localisées en impulsion. Si on n'avait pas relevé les mesures au fibré cotangent, on n'aurait vu que l'équidistribution en position. Les mesures semi-classiques permettent cette étude simultanée de $u_\hbar$ et de sa "$\hbar$-transformée de Fourier".

Lois de Weyl

Avant de poursuivre, on rappelle différentes versions de la loi de Weyl dans le cas des fonctions propres du Laplacien sur une variété M. On donnera pour chacun des énoncés de loi de Weyl la formulation semi-classique correspondante pour l'opérateur[2] $P_\hbar := -\hbar^2\Delta - 1$.
On fixe une base orthonormée $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ de $L^2(M)$ composée de fonctions propres de Δ telles que

$$\Delta\psi_j = -\lambda_j^2\psi_j,$$

avec $\lambda_j^2\leq\lambda_{j+1}^2$ pour tout j dans $\mathbb{N}$. On note aussi $N(\lambda^2)$ le nombre de valeurs propres $\lambda_j^2\leq\lambda^2$ (comptées avec leur multiplicité). On commence par rappeler une loi de Weyl dite locale due à Hörmander [55] :

Théorème 5.3 (Loi de Weyl locale-Hörmander)**.** *En utilisant les notations précédentes, on a, pour tout y dans M*

$$\sum_{\lambda_j^2\leq\lambda^2}|\psi_j(y)|^2 = \frac{\sigma_d\lambda^d}{(2\pi)^d} + O(\lambda^{d-1}) \text{ quand } \lambda\to+\infty,$$

avec $\sigma_d := \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{d\Gamma(d/2)}$ et un reste uniforme en y. En particulier, on a

$$N(\lambda^2) = \frac{\sigma_d\, Vol_M(M)\lambda^d}{(2\pi)^d} + O(\lambda^{d-1}) \text{ quand } \lambda\to+\infty.$$

Le résultat d'Hörmander est en fait plus général et s'applique à une famille plus grande d'opérateurs pseudo-différentiels elliptiques (d'ordre supérieur ou égal à 2). On peut aussi démontrer directement la deuxième partie du théorème (dite loi de Weyl globale) sans faire appel à la loi locale [50]. On récrit maintenant ce résultat sous une forme semi-classique plus proche des notations que nous avons utilisées jusqu'à présent. Pour cela, on fixe $\alpha>0$ pour la suite de ce chapitre. On note alors $I(\hbar) :=]-\alpha\hbar,\alpha\hbar]$ et $N(I(\hbar))$ le nombre de valeurs propres de $P_\hbar=-\hbar^2\Delta-1$ contenues dans l'intervalle $I(\hbar)$ (comptées avec leur multiplicité). Le résultat précédent implique alors

$$\sum_{\hbar^2\lambda_j^2-1\in]-\alpha\hbar,\alpha\hbar]}|\psi_j(y)|^2 = O(\hbar^{1-d}) \text{ et } N(I(\hbar)) = O(\hbar^{1-d}).$$

Dans le cas de la sphère standard de dimension d, les restes du résultat d'Hörmander sont optimaux et ne peuvent donc pas être améliorés sous ces hypothèses générales. Toutefois, en faisant une hypothèse sur les trajectoires périodiques du flot géodésique, Duistermaat et Guillemin prouvent la loi de Weyl globale suivante [34] :

[2]Pour les résultats dans le cas d'un $\hbar$-opérateur pseudo-différentiel elliptique plus général, on renvoie le lecteur aux chapitres 9 à 11 du livre de Dimassi et Sjöstrand [32].

Théorème 5.4 (Duistermaat-Guillemin)**.** *Sous les hypothèses du théorème 5.3 et en supposant en plus que l'ensemble des trajectoires périodiques de g^t sur S^*M est de mesure de Liouville nulle, on a*

$$N(\lambda^2) = \frac{\sigma_d \, Vol_M(M)\lambda^d}{(2\pi)^d} + o(\lambda^{d-1}) \text{ quand } \lambda \to +\infty.$$

Sous forme semi-classique, ce résultat s'exprime de la manière suivante :

$$N(I(\hbar)) = \frac{\sigma_d \alpha d \mathrm{Vol}_M(M)}{(2\pi\hbar)^d} (\hbar + o(\hbar)) \text{ quand } \hbar \to 0. \tag{5.1}$$

De nouveau, on peut prouver une version locale de cette loi de Weyl globale mais il faut imposer une condition plus forte qui concerne les lacets passant par le point x où l'on veut obtenir notre développement. Ce résultat a été obtenu par Safarov [90] puis par une méthode différente par Sogge et Zelditch [97] (théorème 1.2) :

Théorème 5.5 (Safarov/Sogge-Zelditch)**.** *On se place sous les hypothèses du théorème 5.4. Soit x appartenant à M et tel que l'ensemble $\mathcal{L}_x := \{\xi \in S_x^*M : \ \exists t > 0 : \ \pi \circ g^t(x,\xi) = x\}$ est de mesure nulle*[3]*. On a*

$$\sum_{\lambda_j^2 \leq \lambda^2} |\psi_j(x)|^2 = \frac{\sigma_d \lambda^d}{(2\pi)^d} + o_x(\lambda^{d-1}) \text{ quand } \lambda \to +\infty.$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $V(\varepsilon)$ de x et une constante $\Lambda(\varepsilon)^2$ telle que, pour tout $\lambda > \Lambda(\varepsilon)$ et pour tout y dans $V(\varepsilon)$,

$$\left| \sum_{\lambda_j^2 \leq \lambda^2} |\psi_j(y)|^2 - \frac{\sigma_d \lambda^d}{(2\pi)^d} \right| \leq \varepsilon \lambda^{d-1}.$$

On peut de nouveau donner une écriture semi-classique de cette loi de Weyl locale. Sous les hypothèses du théorème 5.5, on a

$$\sum_{\hbar^2\lambda_j^2 - 1 \in]-\alpha\hbar, \alpha\hbar]} |\psi_j(x)|^2 = \frac{\alpha d \sigma_d}{(2\pi\hbar)^d} (\hbar + o_x(\hbar)) \text{ quand } \hbar \to 0. \tag{5.2}$$

La deuxième partie du théorème nous dit aussi que dans le cas où $\mathcal{L}_x$ est de mesure nulle pour tout x sur la variété[4], alors le reste dans l'égalité (5.2) est uniforme pour x dans M. Il existe encore de nombreuses variantes sur l'étude des restes de la loi de Weyl que nous ne mentionnons pas (voir [14] ou [57] par exemple).
Pour terminer ce paragraphe sur les lois de Weyl, on mentionne que l'on a une version généralisée de la loi de Weyl qui s'écrit [39] :

Théorème 5.6 (Loi de Weyl généralisée)**.** *Soit M une variété riemannienne compacte, lisse, connexe, de dimension d et sans bords. Avec les notations précédentes, on a*

$$\forall a \in \mathcal{C}_o^\infty(T^*M), \ \lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{N(\lambda^2)} \sum_{\lambda_j^2 \leq \lambda^2} \mu_j(a) = \int_{S^*M} a dL,$$

où $\mu_0(a) = \int_{T^*M} a$ et où $\mu_j(a) := \langle \psi_j | Op^+_{\lambda_j^{-1}}(a) | \psi_j \rangle_{L^2(M)}$ pour $j \neq 0$.

[3] Au sens de la mesure induite par la métrique g sur T_x^*M.

[4] Par exemple, c'est le cas pour une variété sans points conjugués où $\mathcal{L}_x$ est dénombrable pour tout x [97] (paragraphe 4).

5.1.2 Mesures semi-classiques pour un flot ergodique

Comme dans les cas des applications quantiques du tore (chapitre 3), l'ajout d'une hypothèse sur la dynamique du flot hamiltonien va permettre de donner une description plus précise du comportement asymptotique moyen des mesures μ_j. Sous l'hypothèse d'ergodicité du flot géodésique par rapport à la mesure de Liouville L sur S^*M, Zelditch et Colin de Verdière ont prolongé des idées de Shnirelman [95]. Ils ont montré (respectivement dans le cas $K \equiv -1$ [101] et dans le cas général [27]) que la 'majorité' des mesures μ_j converge vers L. Précisément, ils prouvent :

Théorème 5.7 (Shnirelman-Zelditch-Colin de Verdière)**.** *Supposons que $(S^*M, L, (g^t))$ est un système dynamique ergodique. Soit $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une base orthonormée de $L^2(M)$ formée de fonctions propres de Δ. Alors, on a*

$$\forall a \in \mathcal{C}_o^\infty(T^*M),\ \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{N(\lambda^2)} \sum_{\lambda_j^2\leq\lambda^2} \left|\mu_j(a) - \int_{S^*M} a dL\right|^2 = 0, \tag{5.3}$$

avec $N(\lambda^2) := \sharp\{j : \lambda_j^2 \leq \lambda^2\}$, $\mu_0(a) = \int_{T^*M} a$ et $\mu_j(a) := \langle\psi_j|Op^+_{\lambda_j^{-1}}(a)|\psi_j\rangle_{L^2(M)}$ pour $j \neq 0$. Il existe alors $S \subset \mathbb{N}$ de densité 1 (i.e. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sharp\{j\in S:0\leq j\leq n-1\}}{n} = 1$) tel que

$$\forall a \in \mathcal{C}_o^\infty(T^*M),\ \lim_{j\to\infty, j\in S} \mu_j(a) = \int_{S^*M} a dL.$$

Ce résultat admet de nombreuses extensions comme dans le cas d'Hamiltoniens plus généraux [54], de billards ergodiques [47], [104] ou encore d'applications ergodiques du tore [20] (voir chapitres précédents). De manière générale, si on peut quantifier un système dynamique symplectique et si celui-ci est ergodique par rapport à sa mesure 'naturelle', alors on aura équidistribution de presque tous les vecteurs propres du propagateur quantique (ici $U = e^{i\hbar\Delta}$). On parle dans ces différents cas d'ergodicité quantique.

Preuve. Rappelons l'argument de ce théorème afin de voir où intervient l'hypothèse d'ergodicité. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\int_{S^*M} a dL = 0$. On commence par fixer $T > 0$ et par appliquer le théorème d'Egorov :

$$\frac{1}{N(\lambda^2)} \sum_{\lambda_j^2\leq\lambda^2} |\mu_j(a)|^2 = \frac{1}{N(\lambda^2)} \sum_{\lambda_j^2\leq\lambda^2} \left(|\mu_j(a_T)|^2 + O_T(\lambda_j^{-1})\right),$$

avec $a_T = \frac{1}{T}\int_0^T a \circ g^t dt$. On peut alors utiliser la convexité de la fonction $x \mapsto x^2$ et le fait que μ_j est une mesure de probabilité pour déduire de l'inégalité précédente

$$\frac{1}{N(\lambda^2)} \sum_{\lambda_j^2\leq\lambda^2} |\mu_j(a)|^2 \leq \frac{1}{N(\lambda^2)} \sum_{\lambda_j^2\leq\lambda^2} \mu_j(|a_T|^2) + \frac{1}{N(\lambda^2)} \sum_{\lambda_j^2\leq\lambda^2} O_T(\lambda_j^{-1}).$$

On utilise alors la loi de Weyl généralisée pour en déduire que

$$\forall T > 0,\ \limsup_{\lambda\to\infty} \frac{1}{N(\lambda^2)} \sum_{\lambda_j^2\leq\lambda^2} |\mu_j(a)|^2 \leq \int_{S^*M} |a_T|^2 (\rho) d\rho.$$

Le théorème de Birkhoff 1.1 permet alors de conclure en faisant tendre T vers l'infini. La deuxième partie du théorème découle d'un argument diagonal [100], [27].□

Conjecture d'Unique Ergodicité Quantique

Avant d'en venir au sujet principal de ce chapitre, nous voudrions faire une petite digression (qui est plus en rapport avec le chapitre suivant) au sujet de la conjecture d'Unique Ergodicité Quantique.

Suite à ce théorème, Colin de Verdière pose dans [27] la question de l'existence d'autres points d'adhérence de la suite (μ_j) que la mesure de Liouville (sous l'hypothèse de l'ergodicité). Par exemple, peut-il exister des mesures semi-classiques portées par une géodésique fermée ou par des ensembles de dimension de Hausdorff plus grande ? Dans le cas de certaines surfaces arithmétiques et d'une base des fonctions propres de Hecke, Rudnick et Sarnak montrent que si le support singulier d'un point d'accumulation ν des $|\psi_n|^2 d\mathrm{Vol}_M$ est inclus dans un nombre fini d'orbites périodiques, alors la mesure ν est absolument continue par rapport à la mesure volume [86]. Ceci les amenène à formuler la conjecture d'Unique Ergodicité Quantique :

Conjecture 5.8 (Rudnick-Sarnak)**.** *Soit M une variété à courbure strictement négative. Alors, L est la seule mesure semi-classique.*

Cette conjecture reste à l'heure actuelle largement ouverte. Si cette conjecture est vraie, elle utilise nécessairement des hypothèses propres à la courbure négative. En effet, les exemples de mesures semi-classiques de De Bièvre-Faure-Nonnenmacher [42] ou de Kelmer [61] (chapitre 3) donnent des exemples de systèmes dynamiques fortement chaotiques (propriété d'Anosov) pour lesquels la conjecture analogue est fausse. De la même manière, la question se pose pour d'autres systèmes dynamiques comme l'application du boulanger sur le tore ou les billards de Bunimovich et dans les deux cas, l'existence d'autres mesures semi-classiques a été mise en évidence (par Anantharaman et Nonnenmacher sur le tore [6], par Hassell sur certains billards ergodiques[5] [53]). En l'état actuel des choses, la question de l'Unique Ergodicité Quantique est donc spécifique au cas des variétés compactes à courbure strictement négative ou alors d'un autre cadre à préciser et qui ne se limite pas à une hypothèse de type Anosov.
Dans le cadre des surfaces compactes à courbure négative constante, une avancée récente en faveur de la conjecture est due aux travaux de Lindenstrauss [69]. Dans ce cas, une surface M est de la forme $\mathbb{H}/\Gamma$ où Γ est un sous-groupe sans torsion de $SL(2,\mathbb{R})$ agissant (par les transformations de Möbius) sur le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H} := \{x + \imath y : y > 0\}$. Pour une base fonctions propres $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $L^2(M)$ composée de fonctions propres de Δ, on considère la suite de mesures $\tilde{\mu}_j = |\psi_j|^2 \mathrm{Vol}_M$. Ces mesures peuvent être relevées en une suite de mesures μ_j sur $X := SL(2,\mathbb{R})/\Gamma$ qui est un revêtement à au plus deux feuillets de S^*M. Le flot géodésique correspond alors à l'action à gauche du groupe à un paramètre $a_t := \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}$, i.e. $a_t.x := a_t x$. On vérifie que tout point d'accumulation des μ_i est a_t-invariant et que tout point d'accumulation des $\tilde{\mu}_j$ est l'image d'un point d'accumulation des μ_j par la projection $\pi : X \to M = SO(2,\mathbb{R})\backslash X$. Dans ce contexte, le problème de l'Unique Ergodicité Quantique revient à déterminer les points d'accumulation possibles des μ_j. Dans toute cette généralité, on ne sait pas répondre à la question mais pour une certaine famille de sous groupes Γ (que nous n'expliciterons pas) [69], Lindenstrauss montre une propriété d'équidistribution des μ_j sur X. En effet, pour une famille de sous groupes Γ de nature arithmétique, on peut introduire une famille d'opérateurs T_p (défini pour un grand nombre d'entiers premiers p) de X dans X^{p+1}. À ces opérateurs correspondent des opérateurs agissant sur $L^2(X)$, préservant $L^2(M)$ et commutant avec Δ et entre eux : on les appelle opérateurs de Hecke. On introduit alors le problème de l'Unique Ergodicité Quantique Arithmétique qui consiste à déterminer les limites possibles des μ_j pour une base orthonormée de fonctions propres jointes de Δ et des T_p (pour les p pour lesquels c'est bien défini). Bourgain et Lindenstrauss montrent alors que tout point d'accumulation μ d'une suite arithmétique de μ_j vérifie

$$h_{KS}(e, a_t) > 0, \text{ pour } \tau_\mu - \text{presque tout } e, \tag{5.4}$$

où $\mu = \int_{E(X,T)} e d\tau_\mu(e)$ est la décomposition ergodique de μ (voir paragraphe 1.1). Lindenstrauss montre ensuite dans [69] qu'une mesure μ sur X qui vérifie une telle propriété et une certaine propriété de récurrence par rapport aux opérateurs T_p agissant sur X est forcément la mesure de Haar sur X. Ceci lui permet en particulier de déduire que, pour une suite de fonctions propres communes du Laplacien et des opérateurs de Hecke, la suite $|\psi_n|^2 d\mathrm{Vol}_M$ tend vers $\frac{1}{\mathrm{Vol}_M(M)}\mathrm{Vol}_M$.

[5] Dans ce cas, le flot n'est toutefois pas de type Anosov.

Toutefois, ce résultat ne permet pas de prouver la conjecture, même en se restreignant au cas des surfaces arithmétiques. En effet, on pourrait avoir des valeurs propres de multiplicité élevée et des bases orthonormées de fonctions propres de Δ qui ne soient pas des fonctions propres de Hecke[6]. De plus, dans le cas des applications quantiques du tore, les contre-exemples de Kelmer fournissent des fonctions propres de Hecke qui ne satisfont pas la propriété d'Unique Ergocité Quantique Arithmétique [61].
Une autre avancée dans l'étude des mesures semi-classiques sur des variétés à courbure négative (sans hypothèse arithmétique) est due aux travaux d'Anantharaman. Dans [3], elle introduit une méthode qui permet d'estimer l'entropie de Kolmogorov-Sinai des mesures semi-classiques dans un contexte plus général et montre en particulier :

Théorème 5.9 (Anantharaman)**.** *Soit M une variété telle que $(S^*M, (g^t))$ vérifie la propriété d'Anosov. Alors, pour toute mesure semi-classique μ, on a*

$$h_{KS}(\mu, g) > 0.$$

Cette propriété est comparable à (5.4) puisqu'elle donne aussi une information sur l'entropie d'une mesure semi-classique μ. Dans le cas du problème arithmétique, ce résultat est moins fort que celui de Bourgain et Lindenstrauss (voir théorème 1.7). Toutefois, le théorème d'Anantharaman est valable en toute généralité (courbure variable). Il montre en particulier qu'une mesure semi-classique ne peut être entièrement portée par une géodésique fermée et limite dans un cadre très général les candidats possibles pour être une mesure semi-classique.
Dans le chapitre 6, on expliquera comment on peut obtenir des bornes inférieures explicites sur l'entropie des mesures semi-classiques qui sont en particulier optimales dans le cas des contre-exemples construits sur le tore. On montrera notamment qu'en dimension 2, on peut obtenir des bornes inférieures sur l'entropie pour des sytèmes faiblement hyperboliques comme les surfaces à courbure négative ou nulle (voir paragraphe 1.3).

5.2 Déviations des solutions de l'équation de Schrödinger

La définition 5.1 permet de donner une description d'un état $u_\hbar$ en fonction des variables (x, ξ) de position et d'impulsion. Dans ce paragraphe, on voudrait généraliser légèrement cette définition[7] pour prendre aussi en compte les variables (t, E) de temps et d'énergie [72]. Même si le problème était un peu différent (dans le choix de l'échelle de temps en particulier), l'étude de l'application quantique au chapitre 3 a permis de mettre en évidence les propriétés que l'on peut attendre pour des hypothèses de type Anosov. La fin de ce chapitre est consacrée à la présentation d'une version préliminaire d'une partie des résultats que l'on veut montrer avec Nalini Anantharaman dans [8].

On fixe une base orthonormée $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ de $L^2(M)$ composée de fonctions propres de Δ telles que

$$\Delta\psi_j = -\lambda_j^2\psi_j,$$

avec $\lambda_j^2 \leq \lambda_{j+1}^2$ pour tout j dans $\mathbb{N}$.On fixe la variable d'énergie $E_0 > 0$. On commence par fixer une famille d'états $(u_\hbar)_{\hbar>0}$ bornés dans $L^2(M)$ et localisés autour de E_0, i.e.

$$\lim_{\epsilon_0\to 0} \limsup_{\hbar\to 0} \left\| \left(\mathrm{Id}_{L^2(M)} - \mathbf{1}_{[-\epsilon_0,\epsilon_0]}\left(-\frac{\hbar^2\Delta}{2} - E_0 \right) \right) u_\hbar \right\|_{L^2(M)} = 0, \tag{5.5}$$

[6] Il est conjecturé que ce genre de phénomènes ne se produit pas.
[7] L'étude de ces mesures semi-classiques généralisées nous a été suggérée par Patrick Gérard.

où l'on a noté $\mathbf{1}_{[-\epsilon_0,\epsilon_0]}\left(-\frac{\hbar^2\Delta}{2}-E_0\right) := \sum_{\hbar^2\lambda_j^2-E_0\in[-\epsilon_0,\epsilon]} |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$. Pour t dans $[0,1]$, on définit l'état évolué[8] au temps t

$$u(\hbar,t,x) := \exp\left(\frac{\imath t\Delta}{2}\right) u_\hbar(x).$$

De manière équivalente, $u(\hbar,t,x)$ est solution de l'équation de Schrödinger sur M suivante :

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2}\Delta u = \imath\hbar\frac{\partial u}{\partial t} \\ u(0,x) = u_\hbar(x) \end{cases} . \tag{5.6}$$

On notera dans le reste du chapitre $U^t := e^{\frac{\imath t\Delta}{2}}$ le propagateur quantique. On définit une famille de distributions sur $[0,1]\times T^*M$ en posant

$$\int \theta(t)a(\rho)d\mu_\hbar(t,\rho) := \int_0^1 \theta(t)\langle u(\hbar,t)|\mathrm{Op}_\hbar^+(a)|u(\hbar,t)\rangle_{L^2(M)}dt, \tag{5.7}$$

pour θ appartenant à $\mathcal{C}^0([0,1])$ et a appartenant à $\mathcal{C}_o^\infty(T^*M)$. On aurait aussi pu introduire une autre fonction pour construire une distribution limite qui dépende vraiment des variables (x,ξ,t,E) mais en faisant le choix d'avoir des états localisés au voisinage de E_0, cette généralisation n'aurait pas particulièrement d'intérêt puisque dans la limite semi-classique, la composante selon E se concentrerait sur δ_{E_0}. Cette famille de distributions permet donc de donner une description en fonction de (x,ξ,t) d'un état $u_\hbar$ (dont l'énergie est localisée autour de E_0) et pas seulement une distribution en fonction des variables (x,ξ) de l'espace des phases. Si on se restreint à une famille d'états vérifiant $\lim_{\hbar\to 0}\|u_\hbar\|_{L^2(M)} = 1$, on peut montrer le résultat suivant [72] :

Théorème 5.10. *Soit $E_0 > 0$. Sous les conditions précédentes, tout point d'accumulation μ des distributions $\mu_\hbar$ est de la forme $d\mu(t,\rho) = dtd\mu_t(\rho)$, où pour presque tout t dans $[0,1]$, μ_t est une mesure de probabilité sur $\left\{\frac{\|\xi\|_x^2}{2} = E_0\right\}$ invariante par le flot géodésique.*

Remarque. Comme dans le cas du théorème 5.2, on peut généraliser ce résultat à un opérateur pseudo-différentiel $P_\hbar$ elliptique à l'infini (en remplaçant $-\frac{\hbar^2\Delta}{2}$ par $P_\hbar$ dans les différentes définitions et en supposant que E_0 est une valeur non dégénérée du symbole principal p_0 de $P_\hbar$).

Preuve. Pour montrer ce résultat, on peut reprendre la preuve du théorème 5.2. La quantification $\mathrm{Op}_\hbar^+$ étant définie pour des éléments de $S_0^{0,0}(T^*M)$ ne dépendant que de x à l'infini, cette distribution s'étend en une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}^0(\widehat{T^*M}\times[0,1])$ et d'après [93], on sait que $\mu_\hbar$ se prolonge en une mesure de Radon positive sur l'ensemble compact $\widehat{T^*M}\times[0,1]$. Elle admet donc bien des points points d'accumulation pour la topologie faible-$\star$. Soit μ un point d'accumulation de la suite $(\mu_\hbar)_{\hbar>0}$ (que l'on ne reparamètre pas). Soit θ appartenant à $\mathcal{C}^0([0,1])$. Dans la suite, on note $a\otimes\theta(\rho,t) := a(\rho)\theta(t)$. Comme $\lim\limits_{\hbar\to 0}\|u_\hbar\|_{L^2(M)} = 1$, on vérifie immédiatement que $\mu_\hbar(1\otimes\theta)$ tend vers $\int_0^1\theta(t)dt$ quand $\hbar$ tend vers 0. Ceci étant valable pour tout θ, on en déduit que pour presque tout t, μ_t est une mesure de probabilité sur $\widehat{T^*M}$.
On peut vérifier que pour presque tout t dans $[0,1]$, la mesure μ_t est à support dans T^*M. Pour cela, on introduit une fonction lisse a qui vaut 1 au voisinage de l'infini et qui vaut 0 pour $\|\xi\|_x^2 \le 4E_0$. On pose $b = a/(\|\xi\|_x^2/2 - E_0)$ et on a lorsque $\hbar$ et ϵ_0 tendent vers 0

$$\mu_\hbar(a\otimes\theta) = \int_0^1\theta(t)\left\langle u(\hbar,t)\left|\mathrm{Op}_\hbar(b)\left(-\frac{\hbar^2\Delta}{2}-E_0\right)\right|\mathbf{1}_{[-\epsilon_0,\epsilon_0]}\left(-\frac{\hbar^2\Delta}{2}-E_0\right)u(\hbar,t)\right\rangle dt + o(1),$$

où on a utilisé le fait que les $(u_\hbar)$ sont localisés autour de E_0 (voir hypothèse (5.5)). On en déduit que pour tout θ, $\mu(a\otimes\theta) = o(1)$ quand ϵ_0 tend vers 0 et alors pour presque tout t, μ_t est à support

[8] En prenant $U^t := e^{\frac{\imath t\Delta}{2}}$, on fait le choix de regarder des états évolués à des temps de l'ordre de $1/\hbar$. Sauf mention du contraire, on pourrait aussi considérer des temps de l'ordre de $\alpha(\hbar)$ avec $|\log\hbar| = o(\alpha(\hbar))$ et obtenir les différents résultats de ce chapitre. Il faudrait par contre remplacer $e^{\frac{\imath t\Delta}{2}}$ par $e^{\frac{\imath\hbar\alpha(\hbar)t\Delta}{2}}$ dans la définition de U^t.

dans T^*M. En reprenant la preuve du point 1 du théorème 5.2 et l'argument précédent, on vérifie que pour presque tout t, μ_t est à support dans $\{\|\xi\|_x^2 = E_0\}$.
La preuve diffère un peu plus de celle du théorème 5.2 lorsqu'il s'agit de montrer la propriété d'invariance par le flot géodésique. Pour cela, on fixe T appartenant à $\mathbb{R}$ et θ continue sur $[0,1]$. On écrit la propriété d'Egorov

$$\mu_\hbar(a \circ g^T \otimes \theta) = \int_0^1 \theta(s)\langle u(\hbar, s+T\hbar)|\mathrm{Op}_\hbar^+(a)|u(\hbar, s+T\hbar)\rangle_{L^2(M)} ds + O_T(\hbar).$$

Par continuité de la fonction θ et par un changement de variables, on déduit de l'égalité précédente la propriété d'invariance par le flot géodésique.□

Dans [72], Macià décrit les propriétés des distributions limites μ_t dans un contexte non chaotique (variétés de Zoll, tore). Dans la fin de ce chapitre, on voudrait décrire des propriétés de ces mesures de probabilité dans le cas d'une variété riemannienne de type Anosov. Comme dans le cas du problème d'ergodicité quantique, on voudrait mettre en évidence que la complexité du système dynamique sous-jacent entraîne que les mesures μ_t ont tendance à être équidistribuées (dans un sens à préciser). L'étude de ces mesures dans un contexte chaotique sont l'objet d'un travail en cours avec Nalini Anantharaman [8] et on en donne ici une version préliminaire. Les résultats que l'on prouve ici sont analogues à ceux démontrés pour les applications quantiques du tore au chapitre 3 : on utilise en particulier des résultats de grandes déviations pour déduire des généralisations du théorème de Shnirelman.

5.2.1 Familles orthonormées généralisées

Dans la fin du chapitre, on fixe $E_0 = \frac{1}{2}$. On note $I(\hbar)$ pour l'intervalle $]-\alpha\hbar, \alpha\hbar]$. On rappelle que l'on a moté $N(I(\hbar))$ le nombre de valeurs propres λ^2 de Δ (comptées avec leur multiplicité) telles que $\hbar^2\lambda^2 - 1 \in I(\hbar)$. Comme dans le chapitre 3, on commence par introduire la notion de familles orthonormées généralisées pour pouvoir étendre le théorème de Shnirelman à des familles plus générales de $L^2(M)$:

Définition 5.11. Pour $\hbar > 0$, on considère $(\Omega_\hbar, \mathbb{P}_\hbar)$ un espace de probabilité et $u_\hbar : \Omega_\hbar \to L^2(M)$ une application mesurable. Pour un état $u_\hbar(\omega)$, on note $\mu_{\hbar,\omega}$ la distribution définie par l'équation (5.7). On dit que $(\Omega_\hbar, \mathbb{P}_\hbar, u_\hbar)_{\hbar>0}$ est une suite de familles orthonormées généralisées si :
- $\lim_{\hbar\to 0} \left\| \left(\mathrm{Id}_{L^2(M)} - \mathbf{1}_{I(\hbar)}(-\hbar^2\Delta - 1)\right) u_\hbar(\omega)\right\|_{L^2(M)} = 0$, uniformément pour ω dans $\Omega_\hbar$;
- pour tout B dans $\mathcal{L}(L^2(M))$,

$$\int_{\Omega_\hbar} \langle u_\hbar(\omega)|B|u_\hbar(\omega)\rangle_{L^2(M)} d\mathbb{P}_\hbar(\omega) = \frac{1}{N(I(\hbar))}\mathrm{Tr}\left(B\mathbf{1}_{I(\hbar)}(-\hbar^2\Delta - 1)\right); \tag{5.8}$$

- lorsque $\hbar$ tend vers 0, on a $\|u_\hbar(\omega)\|_{L^2} = 1 + o(1)$, où le reste est uniforme pour ω dans $\Omega_\hbar$.

On souligne que cette définition est analogue à celle utilisée dans le chapitre 3 (définition 3.5) et que *les trois hypothèses seront utiles pour montrer notre résultat de déviations* (théorème 5.12). On note aussi que si $(\Omega_\hbar, \mathbb{P}_\hbar, u_\hbar)_{\hbar>0}$ est une famille orthonormée généralisée, alors $(\Omega_\hbar, \mathbb{P}_\hbar, U^t u_\hbar)_{\hbar>0}$ est une famille orthonormée généralisée pour tout $t > 0$. On fixe une famille orthonormée $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ de $L^2(M)$ composée de fonctions propres de Δ :

$$\Delta\psi_j = -\lambda_j^2\psi_j,$$

avec $\lambda_j^2 \leq \lambda_{j+1}^2$ pour tout j dans $\mathbb{N}$. De manière plus claire, on peut alors récrire la deuxième condition sous la forme

$$\int_{\Omega_\hbar} \langle u_\hbar(\omega)|B|u_\hbar(\omega)\rangle_{L^2(M)} d\mathbb{P}_\hbar(\omega) = \frac{1}{N(I(\hbar))} \sum_{\hbar^2\lambda_j^2 - 1 \in I(\hbar)} \langle\psi_j|B|\psi_j\rangle.$$

Cette définition est assez restrictive[9] mais on peut tout de même donner deux exemples canoniques de telles familles. Dans la suite, on notera $\mu_{\hbar,\omega}$ la mesure définie par (5.7) et associée à l'état $u_\hbar(\omega)$, i.e.

$$\int \theta(t)a(\rho)d\mu_{\hbar,\omega}(t,\rho) := \int_0^1 \theta(t)\langle u_\hbar(\omega)|U^{-t}\mathrm{Op}_\hbar^+(a)U^t|u_\hbar(\omega)\rangle_{L^2(M)}dt.$$

Exemples.

1. Le premier exemple est celui donné d'une base orthonormale de $\mathbf{1}_{I(\hbar)}(-\hbar^2\Delta - 1)L^2(M)$. Dans ce cas, une base peut être indexée par $\{j : \hbar^2\lambda_j^2 - 1 \in I(\hbar)\}$. On pose alors

$$\Omega_\hbar := \{j : \hbar^2\lambda_j^2 - 1 \in I(\hbar)\},\ \mathbb{P}_\hbar := \frac{1}{N(I(\hbar))}\sum_{\hbar^2\lambda_j^2-1\in I(\hbar)} \delta_j \text{ et } u_\hbar(j) := \psi_j,$$

   où $(\psi_j)_{j\in\Omega_\hbar}$ est une base de $\mathbf{1}_{I(\hbar)}(-\hbar^2\Delta-1)L^2(M)$. On verra plus loin que pour cet exemple, le résultat que l'on va montrer améliore par certains aspects un résultat de Zelditch [102] (voir [91] pour la version semi-classique).

2. Un deuxième exemple est celui des distributions de Dirac dont on a tronqué les fréquences loin de $\hbar^{-2}$. Pour cela, on définit la distribution de Dirac δ_y centrée en $y \in M$, i.e. pour tout f dans $\mathcal{C}^\infty(M)$, $\langle\delta_y|f\rangle := f(y)$. On définit alors

$$\delta_y^\hbar := \left(\frac{\mathrm{Vol}_M(M)}{N(I(\hbar))}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{1}_{I(\hbar)}\left(-\hbar^2\Delta - 1\right)\delta_y.$$

   Cette fonction correspond alors à la distribution de Dirac dont on a tronqué les fréquences loin de $\hbar^{-2}$ et que l'on a renormalisée. En supposant que le flot géodésique sur S^*M est de type Anosov[10], le théorème 5.5 permet de vérifier que $\|\delta_y^\hbar\|_{L^2(M)} = 1 + o(1)$ uniformément en y quand $\hbar$ tend vers 0. On vérifie alors que pour B dans $\mathcal{L}(L^2(M))$:

$$\int_M \langle\delta_y^\hbar|B|\delta_y^\hbar\rangle d\mathrm{Vol}_M(y) = \frac{1}{N(I(\hbar))}\sum_{\lambda_j^2\hbar^2-1\in I(\hbar)} \langle\psi_j|B|\psi_j\rangle.$$

   La famille $(M, \mathrm{Vol}_M/\mathrm{Vol}_M(M), \delta_y^\hbar)_\hbar$ fournit donc une seconde famille orthonormée généralisée.

Résultats de déviations des "mesures semi-classiques généralisées"

Maintenant que l'on a introduit une notion de familles orthonormées généralisées, on va démontrer un résultat similaire à celui démontré pour les applications quantiques du tore (voir théorème 3.12) et du même coup améliorer certains aspects du théorème de Shnirelman. Avant d'énoncer ce résultat nous introduisons quelques notations et résultats sur la pression topologique. Tout d'abord, on définit le Jacobien instable infinitésimal $\varphi^u := -\frac{d}{dt}\left(\det\left(d_\rho g^t_{|E^u(\rho)}\right)\right)_{t=0}$ [22]. On note aussi $P((g^t), a + \varphi^u)$ la pression topologique[11] de la fonction $a + \varphi^u$. En utilisant le principe variationnel (voir annexe B) et le caractère affine de l'entropie, on vérifie que la fonction $f \mapsto P((g^t), f)$ est convexe. On sait aussi que l'application $s \mapsto P((g^t), sa + \varphi^u)$ est analytique réelle sur $\mathbb{R}$ [22], [87]. On peut aussi calculer ses dérivées jusqu'à l'ordre 2 [78] (chapitre 4). En particulier, on a

$$P((g^t), \varphi^u) = 0 \text{ et } \frac{d}{ds}\left(P((g^t)_t, sa + \varphi^u)\right)_{|s=0} = \int_{S^*M} adL.$$

[9] Il est probablement possible de trouver une définition moins restrictive.

[10] En particulier, la variété M n'a pas de points conjugués [89] et $\mathcal{L}_y$ est de mesure nulle pour tout y dans M [97].

[11] Dans le cas des flots, le calcul de la pression topologique se fait en remplaçant les (ε, n)-boules à temps discrets par les (ε, T)-boules de Bowen $B(\rho, \varepsilon, T)$ définies par $\{\rho' \in S^*M : \forall 0 \le t \le T,\ d(g^t\rho, g^t\rho') \le \varepsilon\}$.

De plus, si on suppose que $\int_{S^*M} adL = 0$, la dérivée d'ordre 2 est donnée par

$$\frac{d^2}{ds^2}\left(P((g^t)_t, sa+\varphi^u)\right)_{|s=0} = \sigma^2(a),$$

où $\sigma^2(a) := \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{S^*M}\left(\int_0^T a\circ g^t(\rho)dt\right)^2 dL(\rho)$ est la variance dynamique de la fonction a. Ceci nous permet de déduire que si $\int_{S^*M} adL = 0$ et si $\sigma^2(a) \neq 0$, alors la fonction $s \mapsto P((g^t), sa+\varphi^u)$ est strictement positive pour $s \neq 0$ assez petit (puis pour tout $s \neq 0$ réel par convexité). On définit enfin le taux d'expansion maximal du flot géodésique sur S^*M

$$\chi_{\max} := \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\log \sup_{\rho\in S^*M} \|d_\rho g^t\|.$$

Tout ceci nous permet de formuler le théorème suivant auquel la fin de ce chapitre est consacrée :

Théorème 5.12. *On suppose que $(S^*M, (g^t))$ vérifie la propriété d'Anosov. On fixe $(\Omega_\hbar, \mathbb{P}_\hbar, u_\hbar)_{\hbar>0}$ une suite de familles orthonormées généralisées.*
Soient θ appartenant à $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}_+)$ et a appartenant à $\mathcal{C}_o^\infty(T^*M,\mathbb{R})$ telle que $\int_{S^*M} adL = 0$. Alors, pour tout δ dans $\mathbb{R}$, on a

$$\limsup_{\hbar\to 0} \frac{\log\left(\mathbb{P}_\hbar\left(\{\omega\in\Omega_\hbar : \mu_{\hbar,\omega}(a\otimes\theta)\geq\delta\}\right)\right)}{\frac{|\log\hbar|}{2\chi_{\max}}} \leq H(\delta) := \inf_{s\in\mathbb{R}_+}\left\{-s\delta + P\left((g^t)_t, sa\int_0^1\theta+\varphi^u\right)\right\}.$$

Remarque.
1. L'hypothèse que θ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ est indispensable pour pouvoir appliquer l'inégalité de Jensen dans notre preuve.
2. Notons que le cas a général se déduit en considérant $\overline{a} = a - \int a$ et en notant que $|\mu_{\hbar,\omega}(1\otimes\theta) - \int_0^1\theta(t)dt| = o(1)$, uniformément pour ω dans $\Omega_\hbar$.
3. La fonction $\delta \mapsto H(\delta)$ est similaire à la transformée de Legendre de la fonction $s \mapsto P((g^t)_t, s\int_0^1\theta a+\varphi^u)$. Elle est continue et concave sur $\mathbb{R}$. La discussion préliminaire sur les dérivées de la pression topologique nous permet de vérifier que $H(\delta) = 0$ pour $\delta \leq 0$ et que $H(\delta) < 0$ pour $\delta > 0$.

Cette remarque nous permet de déduire le corollaire suivant :

Corollaire 5.13. *Supposons que $(S^*M, (g^t))$ vérifie la propriété d'Anosov. On fixe une famille orthonormée généralisée $(\Omega_\hbar, \mathbb{P}_\hbar, u_\hbar)_{\hbar>0}$ et une fonction θ de $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C})$. Alors, pour tout $\delta > 0$ et tout $a \in \mathcal{C}_o^\infty(T^*M,\mathbb{C})$, on a*

$$\mathbb{P}_\hbar\left(\left\{\omega\in\Omega_\hbar : \left|\mu_{\hbar,\omega}(a\otimes\theta) - \int_{S^*M} adL\int_0^1\theta(t)dt\right| \geq \delta\right\}\right) = O_{a,\delta,\theta}\left(\hbar^{\tilde{H}(\delta)}\right), \tag{5.9}$$

avec $\tilde{H}(\delta) > 0$ dépendant de a, θ et δ.

La preuve du théorème 5.12 suit les mêmes grandes lignes que celle du théorème 3.12 pour les applications quantiques du tore. On commence par combiner le théorème d'Egorov à une inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Puis, on applique une formule de trace. Enfin, on conclut grâce à un résultat de grandes déviations (voir paragraphe 5.2.3 pour les détails). On peut comparer ce résultat avec la conjecture de la variance quantique [38]. Traduite dans notre contexte, celle-ci dit qu'il existe une constante de nature dynamique $V(a,\theta)$ telle que dans la limite semi-classique [91]

$$\int_{\Omega_\hbar}\left|\mu_{\hbar,\omega}(a\otimes\theta) - \int_{S^*M} adL\int_0^1\theta(t)dt\right|^2 d\mathbb{P}_\hbar(\omega) = (2\pi\hbar)^{d-1}V(a,\theta) + o(\hbar^{d-1}).$$

Si cette conjecture est vraie, elle impliquera aussi en particulier que la borne obtenue dans le corollaire n'est pas optimale puisqu'on devrait trouver en appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\mathbb{P}_\hbar\left(\left\{\omega\in\Omega_\hbar : \left|\mu_{\hbar,\omega}(a\otimes\theta) - \int_{S^*M} adL\int_0^1\theta(t)dt\right| \geq \delta\right\}\right) = O_{a,\delta,\theta}\left(\hbar^{d-1}\right).$$

5.2.2 Conséquences directes du résultat de déviations

Afin d'éclaircir un peu le sens de ces résultats, on commence par en dresser les conséquences pour nos deux exemples de familles orthonormées généralisées.

Le cas des fonctions propres de Δ

Pour commencer, nous voudrions mettre ce résultat en relation avec celui de Zelditch dans [102] (voir aussi [91] de Schubert pour une version semi-classique). En utilisant la propriété de décroissance exponentielle des corrélations d'un flot géodésique de type Anosov, il prouve que la variance quantique tend vers 0 avec un taux de décroissance logarithmique (5.3) en λ. On peut donner une version plus semi-classique de son résultat [91] :

Théorème 5.14 (Zelditch/Schubert)**.** *Supposons que $(S^*M, (g^t))$ vérifie la propriété d'Anosov. Soit $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une base orthonormée de $L^2(M)$ formée de fonctions propres de Δ. On a, pour tout $p \geq 1$*

$$\frac{1}{N(I(\hbar))} \sum_{\lambda_j^2\hbar^2-1\in I(\hbar)} \left| \langle \psi_j | Op_\hbar^+(a)|\psi_j\rangle - \int_{S^*M} a dL \right|^p = O_a(|\log\hbar|^{-\frac{p}{2}}).$$

En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on déduit immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 5.15. *Supposons que $(S^*M, (g^t))$ vérifie la propriété d'Anosov. Soit $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une base orthonormée de $L^2(M)$ formée de fonctions propres de Δ. Alors, on a pour tout $\delta > 0$, tout $a \in \mathcal{C}_o^\infty(T^*M)$ et tout $p \geq 1$,*

$$\frac{1}{N(I(\hbar))} \sharp \left\{ \lambda_j^2\hbar^2 - 1 \in I(\hbar) : \left| \langle \psi_j | Op_\hbar^+(a)|\psi_j\rangle - \int_{S^*M} a dL \right| \geq \delta \right\} = O_{a,\delta,p}(|\log\hbar|^{-\frac{p}{2}}), \quad (5.10)$$

où les valeurs propres sont comptées avec leur multiplicité.

Notre résultat de déviations n'améliore donc pas le résultat sur la variance quantique de Zelditch mais il améliore par contre son corollaire. En effet, le corollaire 5.13 appliqué à notre premier exemple de familles orthonormées généralisées permet de transformer cette dernière borne logarithmique en une borne polynômiale. En effet, pour tout $\delta > 0$ et tout $a \in \mathcal{C}_o^\infty(T^*M)$, on a

$$\frac{1}{N(I(\hbar))} \sharp \left\{ \lambda_j^2\hbar^2 - 1 \in I(\hbar) : \left| \langle \psi_j | \mathrm{Op}_\hbar^+(a)|\psi_j\rangle - \int_{S^*M} a dL \right| \geq \delta \right\} = O_{a,\delta}\left(\hbar^{\tilde{H}(\delta)}\right),$$

avec $\tilde{H}(\delta) > 0$ dépendant de a, θ et δ. Pour finir de commenter cet exemple, on peut utiliser cette dernière égalité pour écrire un résultat plus proche de l'énoncé d'ergodicité quantique donné au paragraphe 5.1. Pour cela, on commence par écrire pour a vérifiant $L(a) = 0$

$$\sharp\left\{0 < \lambda_j^2 \leq \lambda^2 : |\mu_j(a)| \geq \delta\right\} \leq \sum_{n=1}^{[\lambda]} \sharp\left\{\lambda_j^2 n^{-2} - 1 \in I(n^{-1}) : |\mu_j(a)| \geq \delta\right\},$$

en prenant $\alpha = 1$ dans la définition de $I(\hbar)$. On peut aussi noter que pour $\hbar^2\lambda_j^2 - 1$ appartenant à $I(\hbar)$ et $a \in \mathcal{C}_o^\infty(T^*M)$, on a

$$\mathrm{Op}_\hbar(a) = \mathrm{Op}_\hbar(a(.,(\hbar\lambda_j)^{-1}.)) + O_a(\hbar) = \mathrm{Op}_{\lambda_j^{-1}}(a) + O_a(\hbar).$$

La combinaison de ces deux dernières propriétés nous permet alors d'écrire

$$\sharp\left\{0 < \lambda_j^2 \leq \lambda^2 : |\mu_j(a)| \geq \delta\right\} \leq \sum_{n=1}^{[\lambda]} \sharp\left\{\lambda_j^2 n^{-2} - 1 \in I(n^{-1}) : \left|\langle\psi_j|\mathrm{Op}_{n^{-1}}^+(a)|\psi_j\rangle\right| \geq \frac{\delta}{2}\right\}.$$

Une comparaison somme-intégrale permet finalement de déduire le corollaire suivant qui est plus proche de la formulation du théorème de Shnirelman donnée précédemment :

Corollaire 5.16. *Supposons que $(S^*M,(g^t))$ vérifie la propriété d'Anosov. Soit $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une base orthonormée de $L^2(M)$ formée de fonctions propres de Δ. Alors, pour tout $\delta>0$ et tout $a\in\mathcal{C}^\infty_o(T^*M)$, on a*

$$\frac{1}{N(\lambda^2)}\sharp\left\{\lambda_j^2\leq\lambda^2:\left|\mu_j(a)-\int_{S^*M}adL\right|\geq\delta\right\}=O_{a,\delta}(\lambda^{-\tilde{H}(\delta)}),\tag{5.11}$$

où les valeurs propres sont comptées avec leur multiplicité et où $\tilde{H}(\delta)>0$ dépend de a et δ.

Le cas des distributions de Dirac tronquées

Dans le cas de la famille des $(\delta_y^\hbar)_{\hbar>0}$, le corollaire 5.13 du théorème de déviations donne l'existence de $\tilde{H}(\delta)>0$ et $C_\delta>0$ tels que

$$\mathrm{Vol}_M\left(\left\{y\in M:\left|\mu_{\hbar,y}(a\otimes\theta)-\int_{S^*M}adL\int_0^1\theta(t)dt\right|\geq\delta\right\}\right)\leq C_\delta\hbar^{\tilde{H}(\delta)}.$$

En d'autres termes, on a convergence en probabilité avec un taux de convergence en probabilité polynômial en $\hbar$

$$\int_0^1\theta(t)\langle\delta_y^\hbar|U^{-t}\mathrm{Op}_\hbar^+(a)U^t|\delta_y^\hbar\rangle_{L^2(M)}dt\to\int_{S^*M}adL\int_0^1\theta(t)dt\text{ en probabilité.}$$

En prenant une sous-suite adaptée et en appliquant le théorème de Borel-Cantelli, on montre que l'on a convergence pour presque tout y dans M le long de cette sous-suite. Par exemple, on a le résultat suivant :

Corollaire 5.17. *Supposons que $(S^*M,(g^t))$ vérifie la propriété d'Anosov. Soit $\epsilon>0$. On note $\hbar_n:=(1+\epsilon)^{-n}$. Il existe alors Ω_ϵ de mesure 1 dans M telle que pour tout y dans Ω_ϵ, on a,*

$$\forall a\in\mathcal{C}^\infty_o(T^*M),\ \forall\theta\in\mathcal{C}^0([0,1]),\ \lim_{n\to\infty}\mu_{\hbar_n,y}(a\otimes\theta)=\int_{S^*M}adL\times\int_0^1\theta(t)dt.$$

Dans le même esprit que le théorème 3.18, on a aussi le résultat suivant pour la convergence presque sûre :

Proposition 5.18. *Supposons que $(S^*M,(g^t))$ vérifie la propriété d'Anosov. Soit $(\lambda_j^2)_{j\geq1}$ la suite des valeurs propres strictement positives de Δ en prenant en compte leur multiplicité. Alors, pour presque tout y dans M, il existe $S(y)\subset\mathbb{N}$ de densité 1 tel que*

$$\forall a\in\mathcal{C}^\infty_o(T^*M),\ \forall\theta\in\mathcal{C}^0([0,1]),\ \lim_{j\to+\infty,j\in S(y)}\mu_{\lambda_j^{-1},y}(a\otimes\theta)=\int_{S^*M}adL\times\int_0^1\theta dt.$$

Preuve. Soient a appartenant à $\mathcal{C}^\infty_o(T^*M)$ telle que $L(a)=0$ et θ appartenant à $\mathcal{C}^1([0,1])$. On fixe $\lambda^2>0$. Comme dans la preuve du théorème 3.18, on commence par utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour $\delta>0$ et $p\geq1$:

$$\mathrm{Vol}_M\left(\left\{y\in M:\frac{1}{N(\lambda^2)}\sum_{\lambda_j^2\leq\lambda^2}\left|\mu_{\lambda_j^{-1},y}(a\otimes\theta)\right|^p\geq\delta\right\}\right)\leq\frac{1}{\delta N(\lambda^2)}\sum_{\lambda_j^2\leq\lambda^2}\int_M\left|\mu_{\lambda_j^{-1},y}(a\otimes\theta)\right|^p dy.$$

Comme g^t est le flot géodésique sur S^*M et comme il est de type Anosov, il vérifie une propriété de décroissance exponentielle des corrélations pour la mesure de Liouville [98]. On peut alors reprendre la preuve du théorème 5.14 de Zelditch [102] pour obtenir le résultat suivant sur la décroissance de la variance quantique[12] dans le cas de la famille orthonormée généralisée $(M,\mathrm{Vol}_M,\delta_y^\hbar)_{\hbar>0}$ (voir paragraphe 5.2.4) :

$$\int_M|\mu_{\hbar,y}(a\otimes\theta)|^p\,dy=O_{a,\theta,p}(|\log\hbar|^{-\frac{p}{2}}).$$

[12]Notons que si on regardait un problème analogue où on remplacerait U^t par $e^{it\alpha(\hbar)\hbar\Delta/2}$, il faudrait faire l'hypothèse que $c|\log\hbar|^{\frac{3}{2}}<\alpha(\hbar)$ (voir paragraphe 5.2.4).

Notons que l'hypothèse $L(a) = 0$ est indispensable pour obtenir cette estimation sur la variance car on n'a pas exactement des mesures de probabilité mais seulement $\mu_{\omega,\hbar}(1 \otimes 1) = 1 + o(1)$ (voir paragraphe 5.2.4). Ainsi, on trouve

$$\mathrm{Vol}_M\left(\left\{y \in M : \frac{1}{N(\lambda^2)} \sum_{\lambda_j^2 \leq \lambda^2} \left|\mu_{\lambda_j^{-1},y}(a \otimes \theta)\right|^p \geq \delta\right\}\right) \leq \frac{C_{a,\theta,p}}{\delta N(\lambda^2)} \sum_{\lambda_j^2 \leq \lambda^2} |\log \lambda_j|^{-\frac{p}{2}} .$$

On écrit ensuite en utilisant la loi de Weyl due à Hörmander

$$\sum_{4 \leq \lambda_j^2 \leq \lambda^2} |\log \lambda_j|^{-\frac{p}{2}} \leq \sum_{n=2}^{[\lambda]} \sum_{n^2 \leq \lambda_j^2 < (n+1)^2} |\log \lambda_j|^{-\frac{p}{2}} \leq C \sum_{n=2}^{[\lambda]} n^{d-1} |\log n|^{-\frac{p}{2}} .$$

Une comparaison somme-intégrale permet alors de conclure qu'il existe une constante $\tilde{C}_{a,\theta,p} > 0$ telle que

$$\mathrm{Vol}_M\left(\left\{y \in M : \frac{1}{N(\lambda^2)} \sum_{\lambda_j^2 \leq \lambda^2} \left|\mu_{\lambda_j^{-1},y}(a \otimes \theta)\right|^p \geq \delta\right\}\right) \leq \frac{\tilde{C}_{a,\theta,p}}{\delta |\log \lambda|^{\frac{p}{2}}}.$$

Cette dernière égalité est valable pour tout a vérifiant $L(a) = 0$. Pour passer au cas général, on pose $\overline{a} = a - L(a)$. On sait que $\mu_{\lambda_j^{-1},y}(1 \otimes \theta) = \int_0^1 \theta(t)dt + o(1)$ quand λ_j tend vers l'infini. On ne peut donc pas déduire le résultat de variance du cas particulier où $L(a) = 0$ mais on peut par contre déduire que

$$\mathrm{Vol}_M\left(\left\{y \in M : \frac{1}{N(\lambda^2)} \sum_{\lambda_j^2 \leq \lambda^2} \left|\mu_{\lambda_j^{-1},y}(a \otimes \theta) - \int_0^1 \theta(t)dt \int_{S^*M} a dL\right|^p \geq \delta\right\}\right) \leq \frac{2\tilde{C}_{\overline{a},\theta,p}}{\delta |\log \lambda|^{\frac{p}{2}}}.$$

On fixe donc a appartenant à $\mathcal{C}_o^\infty(T^*M)$ (sans hypohèse particulière) et θ appartenant à $\mathcal{C}^1([0,1])$. Comme dans la preuve du théorème 3.18, l'application du théorème de Borel-Cantelli permet de déduire que pour presque tout y dans M, on a

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{N(\lambda^2)} \sum_{\lambda_j^2 \leq \lambda^2} \left|\mu_{\lambda_j^{-1},y}(a \otimes \theta) - \int_0^1 \theta(t)dt \int_{S^*M} a dL\right|^4 = 0.$$

Un argument d'extraction diagonal (théorème 1.20 dans [100]) permet de trouver pour presque tout y dans M un sous-ensemble de densité 1 (dépendant de a, θ et y) vérifiant la propriété que l'on veut montrer. Comme pour le théorème 3.18, on peut se débarrasser de la dépendance en a et θ en utilisant une base.□

Quelques questions Ces deux résultats fournissent donc des exemples de familles de paramètres semi-classiques pour lesquelles on a convergence presque sûre de la suite vers la mesure $dL \times dt$. Toutefois, ces résultats ne semblent pas totalement optimaux et suggèrent les questions suivantes :

- Pour la suite de paramètres semi-classiques donnée par celle des valeurs propres de Δ, on peut se demander si on peut choisir $S(y)$ indépendamment de y. Si oui, peut-on prendre $\Omega = M$?
- Pour la suite de paramètres semi-classiques donnée par celle des valeurs propres de Δ, peut-on prendre $S = \mathbb{N}^*$ pour presque tout y dans M ?
- De manière générale, pour quelles suites de paramètres semi-classiques, a-t-on convergence presque sûre ? Comme pour la convergence en probabilité, peut-on prendre n'importe quelle suite ?

5.2.3 Preuve du théorème de déviations

On fixe maintenant θ appartenant à $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}_+) - \{0\}$ (le cas $\theta \equiv 0$ est immédiat) et a appartenant à $\mathcal{C}_o^\infty(T^*M,\mathbb{R})$ et vérifiant $\int_{S^*M} a dL = 0$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\int_0^1 \theta(t)dt = 1$.

Une remarque préliminaire

Pour commencer, nous voudrions rappeler comment trouver un théorème d'Egorov pour des temps de l'ordre de $|\log\hbar|$ sur une variété compacte M. Tout consiste à appliquer la méthode de Bouzouina et Robert [21] (ou chapitre 2). On rappelle brièvement cet argument qui a déjà été développé sur une variété par Schubert dans [91] ou Anantharaman et Nonnenmacher dans [7].
On introduit le coefficient d'expansion maximal du flot géodésique sur S^*M

$$\chi_{\max} := \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \log \sup_{\rho\in S^*M} \|d_\rho g^t\|.$$

On note $\mathcal{E}^\eta := H^{-1}([1/2-\eta, 1/2+\eta])$ une couche d'énergie pour un certain $\eta > 0$. Sans perte de généralité, on peut supposer que a est à support dans $\mathcal{E}^\eta$ car les $u_\hbar(\omega)$ sont localisés uniformément dans un petit voisinage de S^*M (on utilise ici la première propriété des familles orthonormées généralisées). On déduit de l'invariance de $\mathcal{E}^\eta$ par le flot géodésique que $a\circ g^t$ est à support dans $\mathcal{E}^\eta$ pour tout t. On souligne que, par homogénéité, le taux maximal d'expansion sur $\mathcal{E}^\eta$ est égal $\sqrt{1+2\eta}\chi_{\max}$.
On fixe maintenant $c > 0$ vérifiant $c\chi_{\max} < 1/2$ pour le reste de la preuve. On choisit alors η assez petit pour vérifier $\sqrt{1+2\eta}c\chi_{\max} < 1/2$. On peut trouver χ_a (ne dépendant que de η) telle que $\sqrt{1+2\eta}c\chi_{\max} < c\chi_a < 1/2$ et de telle sorte que les dérivées de $a\circ g^t$ sont controlées de la manière suivante[13] :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \forall \rho\in T^*M,\ \|\partial^\alpha(a\circ g^t)(\rho)\| \le C_{a,\alpha} e^{\chi_a|\alpha||t|}.$$

On définit alors le temps d'Ehrenfest de notre système (qui est fixé jusqu'à la fin de la preuve).

$$T(\hbar) := c|\log\hbar|.$$

En particulier, pour tout $|t| \le T(\hbar)$, le symbole $a\circ g^t$ reste dans une bonne classe de symboles, i.e. $S_\nu^{-\infty,0}(T^*M)$ (avec $\nu := c\chi_a$). Pour prouver le théorème d'Egorov en temps long, on écrit la formule exacte, pour t dans $\mathbb{R}$,

$$U^{-t\hbar}\mathrm{Op}_\hbar(a)U^{t\hbar} - \mathrm{Op}_\hbar(a\circ g^t) = \hbar\int_0^t U^{-s\hbar}(\mathrm{Diff}a^{t-s})U^{s\hbar}ds, \tag{5.12}$$

où $H(x,\xi) = \frac{\|\xi\|_x^2}{2}$ est l'Hamiltonien du système et

$$\mathrm{Diff}a^t := \frac{1}{\hbar}\left(\frac{\imath}{\hbar}\left[-\frac{\hbar^2\Delta}{2}, \mathrm{Op}_\hbar(a\circ g^t)\right] - \mathrm{Op}_\hbar(\{H, a\circ g^t\})\right).$$

On peut utiliser les résultats sur les opérateurs $\hbar$-pseudo-différentiels pour estimer la norme de $\mathrm{Diff}(a_t)$ [32] (voir chapitre 2 pour un rappel succinct). En particulier, d'après les règles de composition des opérateurs pseudo-différentiels, on sait que $\mathrm{Diff}a^t$ est un opérateur pseudo-différentiel de la famille $\Psi_\nu^{-\infty,\nu}(M)$. D'après le théorème 2.6 de Calderón-Vaillancourt, on sait qu'il existe une constante $C_a > 0$ telle que

$$\forall |t| \le c|\log\hbar|,\ \|\mathrm{Diff}a^t\|_{L^2(M)\to L^2(M)} \le C_a\hbar^{-\nu}.$$

On utilise la relation (5.12) pour écrire, pour tout $|t| \le T(\hbar)$,

$$\left\|U^{-t\hbar}\mathrm{Op}_\hbar(a)U^{t\hbar} - \mathrm{Op}_\hbar(a\circ g^t)\right\|_{\mathcal{L}(L^2(M))} = O_a(|t|\hbar^{1-\nu}).$$

[13] Cette propriété vient des propriétés de croissance des dérivées de g^t (ou de manière équivalente des champs de vecteurs de jacobi correspondants [89]).

La quantification positive est construite à partir de la quantification de Weyl (paragraphe 2.3.3). Ceci permet d'appliquer le théorème de Calderón-Vaillancourt (égalité (2.13) du paragraphe 2.3.3 par exemple) pour extraire une constante C'_a telle que pour tout $|t| \leq c|\log\hbar|$, on ait $\|\mathrm{Op}_\hbar(a(t)) - \mathrm{Op}^+_\hbar(a(t))\| \leq C'_a\hbar^{\frac{1}{2}-\nu}$. Finalement, ceci nous donne la version suivante du théorème d'Egorov pour des temps logarithmiques en $\hbar$:

$$\forall |t| \leq c|\log\hbar|,\ \|U^{-t\hbar}\mathrm{Op}^+_\hbar(a)U^{t\hbar} - \mathrm{Op}^+_\hbar(a(t))\|_{L^2(M)\to L^2(M)} = O_a(\hbar^{\frac{1}{2}-\nu}), \tag{5.13}$$

avec c dépendant seulement du support de a (et de M). On déduit de ce résultat le lemme suivant :

Lemme 5.19. *Avec les notations précédentes, pour tout $\delta_0 > 0$, il existe $\hbar_0$ (dépendant de a, θ et δ_0) tel que pour tout $\hbar < \hbar_0$, on a, pour $|T| \leq c|\log\hbar|$,*

$$\left\| \int_0^1 \theta(t)U^{-t}\left(Op^+_\hbar(a) - \frac{1}{T}\int_0^T Op^+_\hbar(a(s))ds\right)U^t dt\right\|_{L^2(M)\to L^2(M)} \leq \delta_0.$$

Preuve. La preuve de ce lemme est une application prudente de la propriété (5.13). Soit T tel que $|T| \leq c|\log\hbar|$ (avec $\nu = c\chi_a < 1/2$). On applique la propriété d'Egorov pour écrire l'égalité suivante :

$$\int_0^1 \theta(t)U^{-t}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{Op}^+_\hbar(a(s))ds\right)U^t dt = \frac{1}{T}\int_0^T\int_0^1 \theta(t)U^{-t-s\hbar}\mathrm{Op}^+_\hbar(a)U^{t+s\hbar}dtds + O_a(\hbar^{\frac{1}{2}-\nu}).$$

On fait le changement de variables $t' = t + s\hbar$ et on écrit alors la continuité de θ sur l'intervalle compact $[0,1]$. Ceci permet d'écrire pour tout $\delta_0 > 0$ qu'il existe $\hbar_0$ (dépendant de a, θ et δ_0) tel que pour tout $\hbar < \hbar_0$, on a

$$\left\| \int_0^1 \theta(t)U^{-t}\left(\mathrm{Op}^+_\hbar(a) - \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{Op}^+_\hbar(a(s))ds\right)U^t dt\right\|_{L^2(M)\to L^2(M)} \leq \delta_0.\square$$

Remarque. Ce résultat se récrit aussi sous la forme suivante, pour $|T| \leq c|\log\hbar|$:

$$\left\| \int_0^1 \theta(t)U^{-t}\left(\mathrm{Op}^+_\hbar(a) - \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{Op}^+_\hbar(a(s))ds\right)U^t dt\right\|_{L^2(M)\to L^2(M)} = o_{a,\theta}(1).$$

Pour montrer l'analogue du résultat de Zelditch sur la décroissance logarithmique de la variance quantique (voir paragraphe 5.2.4), il faut remplacer cette estimation par un $O_{a,\theta}(\hbar^\epsilon)$. C'est possible si on prend θ un peu plus régulière (par exemple $\mathcal{C}^1$).

Application de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

On fixe $\delta \in \mathbb{R}$ et on note

$$\mathbb{P}_\hbar(a\otimes\theta,\delta) := \mathbb{P}_\hbar\left(\{\omega\in\Omega_\hbar : \mu_{\hbar,\omega}(a\otimes\theta) \geq \delta\}\right).$$

On va maintenant combiner le lemme précédent à l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour obtenir une borne sur $\mathbb{P}_\hbar(a\otimes\theta,\delta)$. On fixe pour cela $s \geq 0$ dans un intervalle borné I de $\mathbb{R}_+$ et $T(\hbar) = c|\log\hbar|$ (en utilisant les conventions du paragraphe précédent $c\chi_a < 1/2$). Une application directe de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'écrire

$$\mathbb{P}_\hbar(a\otimes\theta,\delta) := \mathbb{P}_\hbar\left(\{\omega\in\Omega_\hbar : \mu_{\hbar,\omega}(a\otimes\theta) \geq \delta\}\right) \leq e^{-s\delta T(\hbar)}\int_{\Omega_\hbar}\exp\left(sT(\hbar)\mu_{\hbar,\omega}(a\otimes\theta)\right)d\mathbb{P}_\hbar(\omega).$$

On utilise alors le lemme 5.19 pour déduire que, pour $\hbar$ assez petit,

$$\mathbb{P}_\hbar(a\otimes\theta,\delta) \leq e^{-s\delta T(\hbar)}\int_{\Omega_\hbar}\exp\left(s\mu_{\hbar,\omega}\left(\left(\int_0^{T(\hbar)} a(r)dr\right)\otimes\theta\right) + s\delta_0 T(\hbar)\|u_\hbar(\omega)\|^2\right)d\mathbb{P}_\hbar(\omega).$$

En utilisant que $\|u_\hbar(\omega)\| = 1 + o(1)$ uniformément pour ω dans $\Omega_\hbar$, la quantité $e^{s\delta_0 T(\hbar)\|u_\hbar(\omega)\|^2}$ est majorée uniformément par $e^{2s\delta_0 T(\hbar)}$ pour $\hbar$ assez petit. Comme $s \geq 0$, l'application $x \mapsto e^{sx}$ est convexe et on peut alors utiliser l'inégalité de Jensen[14] pour écrire

$$\mathbb{P}_\hbar(a \otimes \theta, \delta) \leq e^{s(-\delta+2\delta_0)T(\hbar)} \int_{\Omega_\hbar} \mu_{\hbar,\omega} \left(\exp\left(s\mu_{\hbar,\omega}(1 \otimes \theta) \left(\int_0^{T(\hbar)} a \circ g^r dr \right) \right) \otimes \theta \right) \frac{d\mathbb{P}_\hbar(\omega)}{\mu_{\hbar,\omega}(1 \otimes \theta)}.$$

En utilisant de nouveau que $\|u_\hbar(\omega)\| = 1 + o(1)$ uniformément pour ω dans $\Omega_\hbar$, on a (en utilisant aussi que $\int \theta = 1$)

$$0 < \frac{1}{2} \leq \mu_{\hbar,\omega}(1 \otimes \theta) \leq 1 + \frac{\delta_0}{\|a\|_\infty},$$

uniformément pour $\hbar$ assez petit. Pour alléger un peu les notations, on introduit le symbole suivant :

$$a_s(T(\hbar), \rho) := \exp\left(s \int_0^{T(\hbar)} a \circ g^r(\rho) dr \right).$$

Ceci nous permet d'écrire

$$\mathbb{P}_\hbar(a \otimes \theta, \delta) \leq 2e^{s(-\delta+3\delta_0)T(\hbar)} \int_{\Omega_\hbar} \mu_{\hbar,\omega} \left(a_s(T(\hbar), \bullet) \otimes \theta \right) d\mathbb{P}_\hbar(\omega).$$

Pour s appartenant à l'intervalle (borné) I, on vérifie que $a_s(T(\hbar), \bullet)$ appartient à la classe $S^{0,k_0}_\nu(T^*M)$ avec $\nu := c\chi_a < 1/2$ (cf. paragraphe précédent) et $k_0 := 2c\sup(I)\|a\|_\infty$. On vérifie aussi que les semi-normes associées à la définition de cette classe de symboles sont uniformes pour s dans l'intervalle (borné) I et que le symbole $a_s(T(\hbar), \bullet)$ est constant au voisinage de l'infini. En particulier, on peut le quantifier en utilisant la quantification $\mathrm{Op}^+_\hbar$ (voir proposition 2.9). Ces différentes remarques nous permettent d'obtenir la majoration suivante pour $\hbar$ assez petit :

$$\mathbb{P}_\hbar(a \otimes \theta, \delta) \leq C_\theta e^{(-\delta+3\delta_0)sT(\hbar)} \int_0^1 \theta(t) \int_{\Omega_\hbar} \langle u_\hbar(\omega) | U^{-t} \mathrm{Op}^+_\hbar(a_s(T(\hbar), \bullet)) U^t | u_\hbar(\omega) \rangle d\mathbb{P}_\hbar(\omega) dt.$$

On rappelle que si $(\Omega_\hbar, \mathbb{P}_\hbar, u_\hbar)$ est une famille orthonormée généralisée alors, pour tout t dans $\mathbb{R}$, $(\Omega_\hbar, \mathbb{P}_\hbar, U^t u_\hbar)$ est encore une famille orthonormée généralisée. Ainsi, en utilisant le point 2 de la définition d'une famille orthonormée généralisée, on obtient la majoration suivante pour $\hbar$ assez petit :

$$\mathbb{P}_\hbar(a \otimes \theta, \delta) \leq \frac{2e^{(-\delta+3\delta_0)sT(\hbar)}}{N(I(\hbar))} \sum_{\lambda_j^2\hbar^2 - 1 \in I(\hbar)} \left\langle \psi_j \left| \mathrm{Op}^+_\hbar \left(a_s(T(\hbar), \bullet) \right) \right| \psi_j \right\rangle, \tag{5.14}$$

pour une famille orthonormée $(\psi_j)_j$ de fonctions propres de Δ.

Estimation de la trace

Pour conclure, il nous faut donc donner une estimation de

$$\sum_{\lambda_j^2\hbar^2 - 1 \in I(\hbar)} \left\langle \psi_j \left| \mathrm{Op}^+_\hbar \left(a_s(T(\hbar), \bullet) \right) \right| \psi_j \right\rangle.$$

Pour estimer cette quantité, on commence par se donner une fonction f qui est $\mathcal{C}^\infty$, à support compact dans un petit voisinage de 1 et à valeurs dans $[0, 1]$. Pour $\hbar$ assez petit, on ne change pas l'expression précédente si l'on introduit l'opérateur $f(-\hbar^2\Delta)$. Puis, on introduit une fonction poids χ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dont la transformée de Fourier est à support compact dans un petit voisinage de 0 ne contenant aucune période des orbites périodiques de (g^t) sur S^*M. On suppose aussi[15] que

[14] On souligne que l'on utilise ici que la procédure de quantification est positive et que θ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

[15] Par exemple, on peut prendre la transformée de Fourier de la fonction à support compact qui vaut 0 en dehors de $]-a, , a[$ et $Ae^{-(x-a)^{-2}-(x+a)^{-2}}$ sinon (avec a assez petit et A assez grand).

$\chi \geq 0$ et qu'elle est supérieure ou égale à 1 sur $[-\alpha, \alpha]$. En se servant du fait que la quantification est positive, ceci permet de borner la quantité précédente par

$$\sum_{\lambda_j^2\hbar^2-1\in I(\hbar)} \left\langle \psi_j \left| \mathrm{Op}_\hbar^+ \left(a_s(T(\hbar),\bullet)\right)\right| \psi_j \right\rangle \leq \sum_{\lambda_j^2} \chi\left(\frac{\hbar^2\lambda_j^2-1}{\hbar}\right) \left\langle \psi_j \left| \mathrm{Op}_\hbar^+ \left(a_s(T(\hbar),\bullet)\right) f(-\hbar^2\Delta)\right| \psi_j \right\rangle. \tag{5.15}$$

L'estimation d'une quantité de ce type repose sur le calcul de la trace d'un opérateur bien choisi. Pour cela, il suffit de remarquer que $2\pi\chi\left(\frac{\hbar^2\lambda_j^2-1}{\hbar}\right) = \int_{\mathbb{R}} e^{\imath\hbar\lambda_j^2 t} e^{-\frac{\imath}{\hbar}t}\hat{\chi}(t)dt$. Ainsi, on doit estimer la quantité

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\imath}{\hbar}t} \mathrm{Tr}\left(\mathrm{Op}_\hbar^+(a_s(T(\hbar),\bullet))U^{t\hbar} f(-\hbar^2\Delta)\right)\hat{\chi}(t)dt.$$

Pour montrer les lois de Weyl, on est souvent amené à estimer des quantités de cette nature [32]. L'argument consiste à donner une expression approchée du noyau de $\mathrm{Op}_\hbar^+(a_s(T(\hbar),\bullet))U^{t\hbar}f(-\hbar^2\Delta)$. Ceci peut se faire en utilisant des résultats de théorie des opérateurs intégraux de Fourier [32] (chapitre 11), [39] (chapitre 10) et de calcul fonctionnel pour les opérateurs pseudo-différentiels [32] (chapitres 8 et 9). Une fois que l'on a donné une expression approchée du noyau (à un ordre arbitraire), on se retrouve avec une intégrale des variables (t, x, ξ). L'expression explicite de la phase permet de vérifier que les points où elle est stationnaire correspondent à la couche d'énergie S^*M et à $t = 0$ [32] (chapitre 11). On peut trouver des références pour ce type de procédure dans divers ouvrages reliés à l'étude de la loi de Weyl ou de ses généralisations. Par exemple, dans son article sur la variance quantique [91], Schubert est amené à faire cette estimation de trace puisqu'il considère exactement le même système. Pour son étude, il n'a besoin que d'un développement asymptotique à l'ordre 1 et ici, nous aurons besoin d'un développement à un ordre arbitrairement grand. On peut reprendre la preuve qu'il propose à un ordre plus grand. Ainsi, en reprenant les arguments de l'ouvrage [32], Schubert montre dans [91] le lemme suivant (proposition 1) :

Lemme 5.20. *On utilise les notations précédentes. Soit χ une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dont la transformée de Fourier est à support compact dans un petit voisinage de 0 ne contenant aucune période des orbites périodiques de (g^t) sur S^*M. Pour tout $N \geq 1$, il existe $C_{a,\chi,N} > 0$ (dépendant de a, de χ, de θ et du choix de $Op_\hbar$) telle que*

$$\sum_{\lambda_j^2} \chi\left(\frac{\hbar^2\lambda_j^2-1}{\hbar}\right) \left\langle \psi_j \left| Op_\hbar^+ \left(a_s(T(\hbar),\bullet)\right)\right| \psi_j \right\rangle \leq \frac{C_{a,\chi,N}}{\hbar^{d-1}} \left(\int_{S^*M} a_s(T(\hbar),\rho)dL(\rho) + \hbar^{N(1-2\nu)-D\nu-k_0}\right),$$

où D ne dépend que de M.

Notons que l'observable $a_s(T(\hbar), x, \xi)$ vérifie la propriété particulière que, pour tout α, la dérivée d'ordre α est de la forme $a_s(T(\hbar), x, \xi)b_\alpha(x, \xi)$. Ainsi, dans chaque terme du dévelopement de la phase stationnaire, on a pu mettre $a_s(T(\hbar), x, \xi)$ en facteur et on peut donc bien extraire une constante $C_{a,N}$ qui vérifie la propriété voulue. Comme s et c varient dans des intervalles bornés, on vérifie aussi que les constantes sont uniformes en s et I. En utilisant la loi de Weyl 5.4, on trouve finalement que, pour tout $N \geq 1$ et $\hbar$ assez petit,

$$\mathbb{P}_\hbar(a\otimes\theta,\delta) \leq C_{a,N,\theta} e^{(-\delta+3\delta_0)sT(\hbar)} \left(\int_{S^*M} a_s(T(\hbar),\rho)dL(\rho) + \hbar^{N(1-2\nu)-D\nu-k_0}\right). \tag{5.16}$$

Il nous reste à estimer la quantité $\int_{S^*M} a_s(T(\hbar),\rho)dL(\rho)$ pour déterminer quel terme contrôle la majoration précédente et c'est maintenant qu'on peut utiliser un argument de grandes déviations.

Grandes déviations

Dans le cas du flot géodésique sur S^*M, Kifer montre [63] (théorème 3.1) :

Théorème 5.21 (Kifer). *Soient (S^*M, g^t) vérifiant la propriété d'Anosov et f appartenant à $\mathcal{C}^1(S^*M)$. Alors, on a*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log \int_{S^*M} \exp\left(\int_0^T f\circ g^t(\rho)dt\right) dL(\rho) = P((g^t), f+\varphi^u), \tag{5.17}$$

où $\varphi^u := -\frac{d}{dt}\left(\det\left(d_\rho g^t_{|E^u(\rho)}\right)\right)_{t=0}$ est le Jacobien instable infinitésimal de $(g^t)_t$ et où $P((g^t), f+\varphi^u)$ est la pression topologique de la fonction $f+\varphi^u$.

De nouveau, nous n'avons besoin que d'une borne supérieure. On peut noter que celle-ci peut-être rendue uniforme en s dans le cas de la fonction sa. La preuve de Kifer dans [63] permet en particulier de montrer le lemme suivant :

Lemme 5.22. *Soient δ' un réel strictement positif et I un intervalle borné de $\mathbb{R}_+$. Alors, il existe $c_{\delta'} > 0$ et $n(\delta', I) \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $n \geq n(\delta', I)$ et tout s dans I,*

$$\int_{S^*M} \exp\left(s\int_0^T f\circ g^t(\rho)\right) dL(\rho) \leq c_{\delta'} e^{(1+s)T\delta'} e^{TP\left((g^t)_t, sf+\varphi^u\right)}. \tag{5.18}$$

Preuve. La preuve est la même que pour le lemme 3.17. La différence vient du fait qu'on considère un flot. En particulier, on doit utiliser les (ε, T)-boules. La croissance de ces boules est contrôlée en fonction du Jacobien instable infinitésimal (lemme 4.2 dans [22]), i.e.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists c_\varepsilon > 0 \text{ telle que } \forall \rho \in S^*M,\ L(B(\rho, \varepsilon, T)) \leq c_\varepsilon e^{\int_0^T \varphi^u(g^t\rho)dt}.$$

Enfin, le reste fonctionne pareil.□

La conclusion

Pour conclure, on combine l'inégalité (5.18) du lemme de Kifer à la borne (5.16) obtenue sur $\mathbb{P}_\hbar(a\otimes\theta, \delta)$:

$$\mathbb{P}_\hbar(a\otimes\theta,\delta) \leq C_{\theta,a,N} e^{(-\delta+3\delta_0)sT(\hbar)} \left(c_{\delta'} e^{(1+s)T(\hbar)\delta'} e^{T(\hbar)P\left((g^t)_t, sa+\varphi^u\right)} + \hbar^{N(1-2\nu)-D\nu-k_0}\right).$$

Pour N assez grand, le reste est bien négligeable devant le terme de grandes déviations. On a alors la majoration suivante :

$$\limsup_{\hbar\to 0} \frac{\log\left(\mathbb{P}_\hbar(a\otimes\theta,\delta)\right)}{c|\log\hbar|} \leq (1+s)\delta' + (-\delta+3\delta_0)s + P\left((g^t)_t, sa+\varphi^u\right).$$

Cette dernière inégalité est valable pour tout $\delta_0 > 0$ et tout $\delta' > 0$. On en déduit l'inégalité suivante valable pour tout $s \geq 0$ dans l'intervalle I :

$$\limsup_{\hbar\to 0} \frac{\log\left(\mathbb{P}_\hbar(a\otimes\theta,\delta)\right)}{c|\log\hbar|} \leq -s\delta + P\left((g^t)_t, sa+\varphi^u\right).$$

En particulier, ceci étant valable pour tout intervalle I borné, on peut de conclure la preuve du théorème de déviations :

$$\forall c \in \left(0, \frac{1}{2\chi_{\max}}\right),\ \limsup_{\hbar\to 0} \frac{\log\left(\mathbb{P}_\hbar(a\otimes\theta,\delta)\right)}{c|\log\hbar|} \leq \inf_{s\in\mathbb{R}_+} \left\{-s\delta + P\left((g^t)_t, sa+\varphi^u\right)\right\}.\square$$

Remarque. On souligne que si $\delta \geq 0$, alors les propriétés de la pression topologique permettent de vérifier que $\inf_{s\in\mathbb{R}_+}\{-s\delta + P((g^t)_t, sa+\varphi^u)\} = \inf_{s\in\mathbb{R}}\{-s\delta + P((g^t)_t, sa+\varphi^u)\}$.

5.2.4 Une remarque sur la variance quantique

Pour conclure ce chapitre, on discute d'un analogue du résultat de Zelditch (théorème 5.14) sur la variance quantique. Pour cela, on commence par fixer θ appartenant à $\mathcal{C}^1([0,1])$ et a appartenant à $\mathcal{C}^\infty_o(T^*M)$ telle que $L(a)=0$. On veut donner une estimation de

$$\int_{\Omega_\hbar} |\mu_{\hbar,\omega}(a\otimes\theta)|^{2p} d\mathbb{P}_\hbar(\omega),$$

pour $p\geq 1$. De nouveau, on commence par appliquer le théorème d'Egorov et grâce à la remarque suivant le lemme 5.19, on trouve[16]

$$\int_{\Omega_\hbar} |\mu_{\hbar,\omega}(a\otimes\theta)|^{2p} d\mathbb{P}_\hbar(\omega) \leq 2^{2p-1}\int_{\Omega_\hbar} |\mu_{\hbar,\omega}(a_{T(\hbar)}\otimes\theta)|^{2p} d\mathbb{P}_\hbar(\omega) + C_{a,\theta,p}\hbar^{2p\epsilon},$$

où l'on définit $a_T := \frac{1}{T}\int_0^T a\circ g^t dt$. On applique ensuite l'inégalité de Jensen à la fonction $x\mapsto x^{2p}$ (en faisant attention que l'on n'a pas exactement des mesures de probabilité). Ceci nous permet de montrer que

$$\int_{\Omega_\hbar} |\mu_{\hbar,\omega}(a\otimes\theta)|^{2p} d\mathbb{P}_\hbar(\omega) \leq 2^{2p-1}\int_{\Omega_\hbar} \mu_{\hbar,\omega}(1\otimes 1)^{2p-1}\mu_{\hbar,\omega}\left(|a_{T(\hbar)}|^{2p}\otimes|\theta|^{2p}\right) d\mathbb{P}_\hbar(\omega) + C_{a,\theta,p}\hbar^{2p\epsilon}.$$

On sait par hypothèse que $\mu_{\hbar,\omega}(1\otimes 1)=1+o(1)$, uniformément pour ω. On a donc, pour $\hbar$ assez petit,

$$\int_{\Omega_\hbar} |\mu_{\hbar,\omega}(a\otimes\theta)|^{2p} d\mathbb{P}_\hbar(\omega) \leq 4^{2p-1}\int_{\Omega_\hbar} \mu_{\hbar,\omega}\left(|a_{T(\hbar)}|^{2p}\otimes|\theta|^{2p}\right) d\mathbb{P}_\hbar(\omega) + C_{a,\theta}\hbar^{2p\epsilon}.$$

On utilise alors la propriété (5.8) des familles orthonormées généralisées pour écrire que

$$\int_{\Omega_\hbar} |\mu_{\hbar,\omega}(a\otimes\theta)|^{2p} d\mathbb{P}_\hbar(\omega) \leq \frac{4^{2p-1}\int_0^1|\theta(t)|^{2p}dt}{N(I(\hbar))}\sum_{\hbar^2\lambda_j^2-1\in I(\hbar)}\langle\psi_j|\mathrm{Op}^+_\hbar(|a_{T(\hbar)}|^{2p})|\psi_j\rangle + C_{a,\theta,p}\hbar^{2p\epsilon}.$$

Comme dans le cas de la preuve du théorème de déviations, on peut utiliser la formule de traces du lemme 5.20 appliqué à $|a_{T(\hbar)}|^{2p}$ au lieu de $a_s(T(\hbar),\bullet)$ (comme dans [91], l'ordre 1 suffit quitte à prendre c assez petit cette fois). On vérifie que $|a_{T(\hbar)}|^{2p}$ est un symbole de la classe $S^{-\infty,\varepsilon}_\nu(T^*M)$ (quelque soit $\varepsilon>0$). On trouve finalement que, pour un certain $\epsilon'>0$ et pour $\hbar$ assez petit,

$$\int_{\Omega_\hbar} |\mu_{\hbar,\omega}(a\otimes\theta)|^{2p} d\mathbb{P}_\hbar(\omega) \leq 4^{2p-1}\int_0^1|\theta(t)|^{2p}dt\int_{S^*M}|a_{T(\hbar)}(\rho)|^{2p}dL(\rho) + C_{a,\theta,\chi,p}\hbar^{\epsilon'}.$$

En utilisant la propriété de décroissance exponentielle des flots géodésiques Anosov [98], on peut déduire la proposition suivante de notre discussion :

Proposition 5.23. *Supposons que (S^*M,g^t) vérifie la propriété d'Anosov. Soit θ appartenant à $\mathcal{C}^1([0,1])$ et a appartenant à $\mathcal{C}^\infty_o(T^*M)$ telle que $L(a)=0$. On a*

$$\int_{\Omega_\hbar} |\mu_{\hbar,\omega}(a\otimes\theta)|^{2p} d\mathbb{P}_\hbar(\omega) = O_{a,\theta,p}(|\log\hbar|^{-p}).$$

On souligne que l'hypothèse $L(a)=0$ est indispensable pour la méthode que nous avons présentée. Ceci vient du fait que l'on a seulement supposé que $\|u_\hbar(\omega)\|=1+o(1)$ et que l'on n'a donc pas exactement des mesures de probabilité. Sans hypothèse supplémentaire, on ne peut a priori montrer que

$$\int_{\Omega_\hbar}\left|\mu_{\hbar,\omega}(a\otimes\theta) - \int_{S^*M} adL\int_0^1\theta(t)dt\right|^{2p} d\mathbb{P}_\hbar(\omega) = o_{a,\theta,p}(1),$$

[16] On note que, par définition, il existe $C>0$ telle que pour tout $\hbar$ et tout ω dans $\Omega_\hbar$, $\|u_\hbar(\omega)\|\leq C$.

pour a quelconque. Par contre, si on fait l'hypothèse plus forte $\|u_\hbar(\omega)\| = 1 + O(|\log\hbar|^{-1})$ (uniformément pour ω), on peut bien conclure pour tout a dans $\mathcal{C}_o^\infty(T^*M)$ et tout θ dans $\mathcal{C}^1([0,1])$ que

$$\int_{\Omega_\hbar} \left| \mu_{\hbar,\omega}(a\otimes\theta) - \int_{S^*M} a dL \int_0^1 \theta(t)dt \right|^{2p} d\mathbb{P}_\hbar(\omega) = O_{a,\theta,p}(|\log\hbar|^{-p}).$$

Cette hypothèse plus forte est bien entendue vérifiée par notre premier exemple de familles orthonormées généralisées. Pour l'exemple de la famille des distributions de Dirac tronquées, il faudrait reprendre l'argument de Bérard pour la loi de Weyl globale [14] et montrer qu'il reste vrai au niveau local pour un flot géodésique Anosov, i.e. $\|\delta_y^\hbar\| = 1 + O(|\log\hbar|^{-1})$ (voir aussi [57]). On souligne enfin que, sous l'hypothèse $\|u_\hbar(\omega)\| = 1 + o(1)$, on peut tout de même conclure de la proposition 5.23 que, pour tout a dans $\mathcal{C}_o^\infty(T^*M)$ et tout θ dans $\mathcal{C}^1([0,1])$,

$$\mathbb{P}_\hbar\left(\left\{\omega : \left|\mu_{\hbar,\omega}(a\otimes\theta) - \int_{S^*M} a dL \int_0^1 \theta(t)dt\right| \geq \delta\right\}\right) = O_{a,\theta,\delta,p}(|\log\hbar|^{-p}).$$

L'argument est le même que dans le théorème de déviations pour passer du cas $L(a) = 0$ au cas général.

Remarque. Notons que ces précautions particulières viennent du fait que $\mu_{\hbar,\omega}$ n'est pas exactement une mesure de probabilité. Si, dans la définition (5.7), on avait remplacé $u_\hbar$ par $u_\hbar/\|u_\hbar\|$, alors on pourrait reprendre la preuve et vérifier que ce problème ne se pose plus. On souligne aussi que si l'on prend $e^{\imath t\alpha(\hbar)\hbar\Delta/2}$ à la place de $e^{\imath t\Delta/2}$ dans notre définition de $\mu_{\hbar,\omega}$, il faut faire l'hypothèse que $c|\log\hbar|^{\frac{3}{2}} < \alpha(\hbar)$ pour pouvoir montrer la proposition 5.23.

Chapitre 6

Entropie des mesures semi-classiques en dimension 2

Dans ce chapitre, nous présentons le résultat principal de cette thèse. Précisément, dans le cas d'une surface riemannienne compacte de type Anosov, nous montrons que l'entropie métrique de toute mesure semi-classique μ est bornée inférieurement par la moitié de la borne supérieure de Ruelle, i.e.

$$h_{KS}(\mu, g) \geq \frac{1}{2} \int_{S^*M} \chi^+(\rho) d\mu(\rho).$$

Cette preuve a fait l'objet d'un article qui est en cours de révision pour Duke Mathematical Journal [82]. Nous n'avons pas jugé utile de la traduire et la présentons sous forme d'un article. Par ailleurs, certains rappels de l'article sont présentés de manière plus développée dans différents chapitres de cette thèse (chapitre 1 pour les rappels de systèmes dynamiques, chapitre 2 pour ceux d'analyse semi-classique et annexe A pour la géométrie). Enfin, nous présentons en annexe de ce chapitre un schéma de preuve (informel) afin d'étendre ce résultat à des surfaces de courbure négative ou nulle [83].

6.1 Introduction

In quantum mechanics, the semiclassical principle asserts that in the high energy limit, one should observe classical phenomena. Our main concern will be the study of this property when the classical system is said to be chaotic.
Let M be a compact $\mathcal{C}^\infty$ Riemannian surface. For all $x \in M$, $T^*_x M$ is endowed with a norm $\|.\|_x$ given by the metric over M. The geodesic flow g^t over T^*M is defined as the Hamiltonian flow corresponding to the Hamiltonian $H(x, \xi) := \frac{\|\xi\|^2_x}{2}$. This last quantity corresponds to the classical kinetic energy in the case of the absence of potential. As any observable, this quantity can be quantized via pseudodifferential calculus and the quantum operator corresponding to H is $-\frac{\hbar^2 \Delta}{2}$ where $\hbar$ is proportional to the Planck constant and Δ is the Laplace Beltrami operator acting on $L^2(M)$.
Our main result concerns the influence of the classical Hamiltonian behavior on the spectral asymptotic properties of Δ. More precisely, our main interest is the study of the measure $|\psi_\hbar(x)|^2 dx$ where $\psi_\hbar$ is an eigenfunction of $-\frac{\hbar^2 \Delta}{2}$ associated to the eigenvalue $\frac{1}{2}$, i.e.

$$-\hbar^2 \Delta \psi_\hbar = \psi_\hbar.$$

This is equivalent to the study of large eigenvalues of Δ. As M is a compact Riemannian manifold, the family $-\hbar^{-2}$ forms a discrete subsequence that tends to infinity. One natural question is to study the (weak) limits of the probability measure $|\psi_\hbar(x)|^2 dx$ as $\hbar$ tends to 0. This means studying the asymptotic behavior of the probability to find a particle in x when the system is in the state $\psi_\hbar$.

In order to study the influence of the Hamiltonian flow, we first need to lift this measure to the cotangent bundle. This can be achieved thanks to pseudodifferential calculus. In fact there exists a procedure of quantization that gives us an operator $\mathrm{Op}_\hbar(a)$ on the phase space $L^2(M)$ for any observable $a(x,\xi)$ in a certain class of symbols. Then a natural way to lift the previous measure is to define the following quantity :

$$\mu_\hbar(a) = \int_{T^*M} a(x,\xi) d\mu_\hbar(x,\xi) := \langle \psi_\hbar, \mathrm{Op}_\hbar(a)\psi_\hbar \rangle_{L^2(M)}.$$

This formula gives a distribution $\mu_\hbar$ on the space T^*M and describes now the distribution in position and velocity.
Let $(\psi_{\hbar_k})$ be a sequence of orthonormal eigenfunctions of the Laplacian corresponding to the eigenvalues $-\hbar_k^{-2}$ such that the corresponding sequence of distributions μ_k on T^*M converges as k tends to infinity to a limit μ. Such a limit is called a semiclassical measure. Using standard facts of pseudodifferential calculus, it can be shown that μ is a probability measure that does not depend on the choice of the quantization $\mathrm{Op}_\hbar$ and that is carried on the unit energy layer

$$S^*M := \left\{ (x,\xi) : H(x,\xi) = \frac{1}{2} \right\}.$$

Moreover, another result from semiclassical analysis, known as the Egorov property, states that for any fixed t,

$$\forall a \in \mathcal{C}_c^\infty(T^*M),\ U^{-t}\mathrm{Op}_\hbar(a)U^t = \mathrm{Op}_\hbar(a \circ g^t) + O_t(\hbar), \tag{6.1}$$

where U^t denotes the quantum propagator $e^{\frac{\imath t\hbar\Delta}{2}}$. Precisely, it says that for fixed times, the quantum evolution is related to the classical evolution under the geodesic flow. From this, it can be deduced that μ is invariant under the geodesic flow. One natural question to ask is what measures supported on S^*M are in fact semiclassical measures. The corresponding question in quantum chaos is : when the classical behavior is said to be chaotic, what is the set of semiclassical measures ? A first result in this direction has been found by Shnirelman [95], Zelditch [101], Colin de Verdière [27] :

Theorem 6.1. *Let (ψ_k) be an orthonormal basis of $L^2(M)$ composed of eigenfunctions of the Laplacian. Moreover, suppose the geodesic flow on S^*M is ergodic with respect to Liouville measure. Then, there exists a subsequence $(\mu_{k_p})_p$ of density one that converges to the Liouville measure on S^*M as p tends to infinity.*

By 'density one', we mean that $\frac{1}{n}\sharp\{p : 1 \leq k_p \leq n\}$ tends to one as n tends to infinity. This theorem states that, in the case of an ergodic geodesic flow, almost all eigenfunctions concentrate on the Liouville measure in the high energy limit. This phenomenon is called quantum ergodicity and has many extensions. The Quantum Unique Ergodicity Conjecture states that the set of semiclassical measures should be reduced to the Liouville measure in the case of Anosov geodesic flow [86]. This question still remains widely open. In fact, in the case of negative curvature, there are many measures invariant under the geodesic flow : for example, there exists an infinity of closed geodesics (each of them carrying naturally an invariant measure). In recent papers, Lindenstrauss proved a particular form of the conjecture, the Arithmetic Quantum Unique Ergodicity [69]. Precisely, he proved that for a sequence of Hecke eigenfunctions of the Laplacian on an arithmetic surface, $|\psi|^2 dx$ converges to the Lebesgue measure on the surface. This result is actually the best-known positive result towards the conjecture.
In order to understand the phenomenon of quantum chaos, many people started to study toy models as the cat map (a typical hyperbolic automorphism of $\mathbb{T}^2$). These dynamical systems provide systems with similar dynamical properties to the geodesic flow on a manifold of negative curvature. Moreover, they can be quantized using Weyl formalism and the question of Quantum Ergodicity naturally arises. For example, Bouzouina and de Bièvre proved the Quantum Ergodicity property for the quantized cat map [20]. However, de Bièvre, Faure and Nonnenmacher proved that in this case, the Quantum Unique Ergodicity is too optimistic [42]. In fact, they constructed a sequence of eigenfunctions that converges to $\frac{1}{2}(\delta_0 + \mathrm{Leb})$, where δ_0 is the Dirac measure on 0 and Leb is the

Lebesgue measure on $\mathbb{T}^2$. Faure and Nonnenmacher also proved that if we split the semiclassical measure into its pure point, Lebesgue and singular continuous components, $\mu = \mu_{\rm pp} + \mu_{\rm Leb} + \mu_{\rm sc}$, then $\mu_{\rm pp}(\mathbb{T}^2) \leq \mu_{\rm Leb}(\mathbb{T}^2)$ and in particular $\mu_{\rm pp}(\mathbb{T}^2) \leq 1/2$ [43]. As in the case of geodesic flow, there is an arithmetic point of view on this problem. Recently, Kelmer proved that in the case of $\mathbb{T}^{2d}$ ($d \geq 2$, for a generic family of symplectic matrices), either there exists isotropic submanifold invariant under the $2d$ cat map or one has Arithmetic Quantum Unique Ergodicity [61]. Moreover, in the first case, he showed that we can construct semiclassical measure equal to Lebesgue on the isotropic submanifold.

6.1.1 Statement of the main result

In recent papers [3], [7], Anantharaman and Nonnenmacher got concerned with the study of the localization of eigenfunctions on M as in the case of the toy models. They tried to understand it via the Kolmogorov-Sinai entropy. This paper is in the same spirit and our main result gives an information on the set of semiclassical measures in the case of a surface M of Anosov type. More precisely, we give an information on the localization (or complexity) of a semiclassical measure :

Theorem 6.2. *Let M be a $\mathcal{C}^\infty$ Riemannian surface and μ a semiclassical measure. Suppose the geodesic flow $(g^t)_t$ has the Anosov property. Then,*

$$h_{KS}(\mu, g) \geq \frac{1}{2} \left| \int_{S^*M} \log J^u(\rho) d\mu(\rho) \right|, \tag{6.2}$$

where $J^u(\rho)$ is the unstable Jacobian at the point ρ.

We recall that the lower bound can be expressed in term of the Lyapunov exponent [13] as

$$h_{KS}(\mu, g) \geq \frac{1}{2} \int_{S^*M} \chi^+(\rho) d\mu(\rho), \tag{6.3}$$

where $\chi^+(\rho)$ is the upper Lyapunov exponent at the point ρ [13]. In order to comment this result, let us recall a few facts about the Kolmogorov-Sinai (also called metric) entropy. It is a nonnegative number associated to a flow g and a g-invariant measure μ, that estimates the complexity of μ with respect to this flow. For example, a measure carried by a closed geodesic will have entropy zero. In particular, this theorem shows that the support of a semiclassical measure cannot be reduced to a closed geodesic. Moreover, this lower bound seems to be the optimal result we can prove using this method and only the dynamical properties of M. In fact, in the case of the toy models some of the counterexamples that have been constructed (see [42], [61], [51]) have entropy equal to $\frac{1}{2} \int_{S^*M} \chi^+(\rho) d\mu(\rho)$. Recall also that a standard theorem of dynamical systems due to Ruelle [88] asserts that, for any invariant measure μ under the geodesic flow,

$$h_{KS}(\mu, g) \leq \int_{S^*M} \chi^+(\rho) d\mu(\rho) \tag{6.4}$$

with equality if and only if μ is the Liouville measure in the case of an Anosov flow [67].
The lower bound of theorem 6.2 was conjectured to hold for any semiclassical measure for an Anosov manifold in any dimension by Anantharaman [3]. In fact, Anantharaman proved that in any dimension, the entropy of a semiclassical measure should be bounded from below by a (not really explicit) positive constant [3]. Then, Anantharaman and Nonnenmacher showed that inequality (6.3) holds in the case of the Walsh Baker's map [6] and in the case of constant negative curvature in all dimension [7]. In the general case of an Anosov flow on a manifold of dimension d, Anantharaman, Koch and Nonnenmacher [5] proved a lower bound using the same method, precisely

$$h_{KS}(\mu, g) \geq \int_{S^*M} \sum_{j=1}^{d-1} \chi_j^+(\rho) d\mu(\rho) - \frac{(d-1)\lambda_{\max}}{2}.$$

where $\lambda_{\max} := \lim_{t\to\pm\infty} \frac{1}{t} \log \sup_{\rho\in S^*M} |d_\rho g^t|$ is the maximal expansion rate of the geodesic flow and the χ_j^+'s are the positive Lyapunov exponents [13]. In particular if $\lambda_{\max}$ is very large, the previous inequality can be trivial. However, they conjectured inequality (6.3) should hold in the general case of manifolds of Anosov type by replacing χ^+ by the sum of nonnegative Lyapunov exponents [7], [5]. Our main result answers this conjecture in the particular case of surfaces of Anosov type and our proof is really specific to the case of dimension 2. Now let us discuss briefly the main ideas of our proof of theorem 6.2.

6.1.2 Heuristic of the proof

The procedure developed in [5] uses a result known as the entropic uncertainty principle [70]. To use this principle in the semiclassical limit, we need to understand the precise link between the classical evolution and the quantum one for large times. Typically, we have to understand Egorov theorem (6.1) for large range of times of order $t \sim |\log\hbar|$ (i.e. have a uniform remainder term of (6.1) for a large range of times). For a general symbol a in $\mathcal{C}_c^\infty(T^*M)$, we can only expect to have a uniform Egorov property for times t in the range of times $[-\frac{1}{2}|\log\hbar|/\lambda_{\max}, \frac{1}{2}|\log\hbar|/\lambda_{\max}]$ [21]. However, if we only consider this range of times, we do not take into account that the unstable jacobian can be very different between two points of S^*M. In this paper, we would like to say that the range of times for which the Egorov property holds depends also on the support of the symbol $a(x,\xi)$ we consider. For particular families of symbol of small support (that depends on $\hbar$), we show that we have a 'local' Egorov theorem with an allowed range of times that depends on our symbol (see (6.64) for example). To make this heuristic idea work, we first try to reparametrize the flow [29] in order to have a uniform expansion rate on the manifold. We define $\overline{g}^\tau(\rho) := g^t(\rho)$ where

$$\tau := -\int_0^t \log J^u(g^s\rho)ds. \tag{6.5}$$

This new flow $\overline{g}$ has the same trajectories as g. However, the 'velocity of motion' along the trajectory at ρ is $|\log J^u(\rho)|$-greater for $\overline{g}$ than for g. We underline here that the unstable direction is of dimension 1 (as M is a surface) and it is crucial because it implies that $\log J^u$ exactly measures the expansion rate in the unstable direction at each point[1]. As a consequence, this new flow $\overline{g}$ has a uniform expansion rate. Once this reparametrization is done, we use the following formula to recover t knowing τ :

$$t_\tau(\rho) = \inf\left\{ s>0 : -\int_0^s \log J^u(g^{s'}\rho)ds' \geq \tau \right\}. \tag{6.6}$$

The number $t_\tau(\rho)$ can be thought of as a stopping time corresponding to ρ. We consider now $\tau = \frac{1}{2}|\log\hbar|$. For a given symbol $a(x,\xi)$ localized near a point ρ, $t_{\frac{1}{2}|\log\hbar|}(\rho)$ is exactly the range of times for which we can expect Egorov to hold. This new flow seems in a way more adapted to our problem. Moreover, we can define a $\overline{g}$-invariant measure $\overline{\mu}$ corresponding to μ [29]. The measure $\overline{\mu}$ is absolutely continuous with respect to μ and verifies $\frac{d\overline{\mu}}{d\mu}(\rho) = \log J^u(\rho)/\int_{S^*M} \log J^u(\rho)d\mu(\rho)$. We can apply the classical result of Abramov

$$h_{KS}(\mu,g) = \left| \int_{S^*M} \log J^u(\rho)d\mu(\rho) \right| h_{KS}(\overline{\mu},\overline{g}).$$

To prove theorem 6.2, we would have to show that $h_{KS}(\overline{\mu},\overline{g}) \geq 1/2$. However, the flow $\overline{g}$ has no reason to be a Hamiltonian flow to which corresponds a quantum propagator $\overline{U}$. As a consequence, there is no particular reason that this inequality should be a consequence of [7]. In the quantum case, there is also no obvious reparametrization we can make as in the classical case. However,

[1] In fact, for the Anosov case, the crucial point is that at each point ρ of S^*M, the expansion rate is the same in any direction, i.e. $dg^{-1}_{|E^u(g^1\rho)}$ is of the form $J^u(\rho)^{\frac{1}{d-1}}v_\rho$ where d is the dimension of the manifold M and v_ρ is an isometry. The proof of theorem 6.2 can be immediately adapted to Anosov manifolds of higher dimensions satisfying this isotropic expansion property (for example manifolds of constant negative curvature).

we will reparametrize the quantum propagator starting from a discrete reparametrization of the geodesic flow and by introducing a small parameter of time η. To have an artificial discrete reparametrization of the geodesic flow, we will introduce a suspension set [29]. Then, in this setting, we will define discrete analogues of the previous quantities (6.5) and (6.6) that will be precised in the paper. It will allow us to prove a lower bound on the entropy of a certain reparametrized flow and then using Abramov theorem [2] deduce the expected lower bound on the entropy of a semiclassical measure.
Finally, we would like to underline that in a recent paper [51], Gutkin also used a version of the Abramov theorem to prove an analogue of theorem 6.2 in the case of toy models with an unstable direction of dimension 1.

6.1.3 Extension to nonpositively curved surfaces

Finally, we would like to discuss other classes of dynamical systems for which it could be interesting to get an analogue of theorem 6.2. For instance, regarding the counterexamples in [53], it would be important to derive an extension of theorem 6.2 to ergodic billiards. A first step in this direction should be to study the case of surfaces of nonpositive curvature. In appendix 6.9 of this article, we would like to discuss briefly how one should try to proceed to extend theorem 6.2 to surfaces of nonpositive curvature. In this setting, one can introduce a new quantity that replaces the unstable Jacobian in our proof. This quantity comes from the study of Jacobi fields and is called the unstable Riccati solution $U^u(\rho)$ [89]. In this setting, it has been shown that the Ruelle inequality can be rewritten as follows [45] :

$$h_{KS}(\mu, g) \leq \int_{S^*M} U^u(\rho) d\mu(\rho).$$

So, a natural extension of theorem 6.2 would be to prove that, for a smooth Riemannian surface M of nonpositive sectional curvature and a semiclassical measure μ

$$h_{KS}(\mu, g) \geq \frac{1}{2} \int_{S^*M} U^u(\rho) d\mu(\rho). \tag{6.7}$$

In particular, this result would show that the support of a semiclassical measure cannot be reduced to a closed unstable geodesic. We underline that our inequality is also coherent with the quasimodes constructed by Donnelly [33]. In fact, his quasimodes are supported on closed stable geodesics (included in flat parts of a surface of nonpositive curvature) and have zero entropy. We can make a last observation on the assumptions on the manifold : it is not known whether the geodesic flow is ergodic or not for the Liouville measure on a surface of nonpositive curvature. The best result in this direction is that there exists an open invariant subset U of positive Liouville measure such that the restriction $g_{|U}$ is ergodic with respect to Liouville [13].
In appendix 6.9, we will explain what are the specific properties of surfaces of nonpositive curvature that can be exploited to get inequality (6.7). However, we will not give the details and postpone them to future works [83]. A crucial property that is used in the proof of theorem 6.2 is that there exist continuous stable and unstable foliations. This property was already at the heart of [3], [7] and [5]. Another property that is crucially used is the fact that Anosov manifolds have no conjugate points. A nice property of manifolds of nonpositive curvature is that these two properties remain true with the notable difference that the stable and unstable manifolds are not anymore uniformly transverse. We will point out out how these properties could be used to prove inequality (6.7). In particular, one can use results about uniform divergence of Jacobi fields [89] to derive the main inequality from [7] (section 3 of this reference). The final difference relies on the introduction of a thermodynamical setting at the quantum level as in [7] and [5] to get better estimates with the uncertainty principle.

Remark. One could also ask whether it would be possible to extend this result to surfaces without conjugate points. In fact, these surfaces also have a stable and unstable foliations (and of course no conjugate points). Moreover, according to Green [49] and Eberlein [36], the Jacobi fields also

satisfy a property of uniform divergence (at least in dimension 2). The main difficulty is that the continuity of the stable and unstable foliations is not true anymore [12] and at this point, we do not see any way of escaping this difficulty.

6.1.4 Organization of the paper

In section 6.2, we briefly recall properties we will need about entropy in the classical and quantum settings. In particular, we recall the version of Abramov theorem we will need. In section 6.3, we describe the assumptions we make on the manifold M and introduce some notations. In section 6.4, we draw a precise outline of the proof of theorem 6.2 and state some results that we will prove in the following sections. Sections 6.5 and 6.6 are devoted to the detailed proofs of the results we admitted in section 6.4. Sections 6.7 and appendix 6.8 are devoted to results of semiclassical analysis that are quite technical and that we will use at different points of the paper (in particular in section 6.6). Finally, in appendix 6.9, we explain which points of the proof need to be adapted if we want to extend the result to the case of nonpositive curvature.

Acknowledgments

First of all, I am very grateful to my advisor Nalini Anantharaman for her time and her patience spent to teach me so many things about the subject. I also thank her for having read carefully preliminary versions of this work and for her support. I would also like to thank warmly Stéphane Nonnenmacher for enlightening explanations about semiclassical analysis and more generally for his encouragement. I am grateful to Herbert Koch for helpful and stimulating suggestions about the application of the entropic uncertainty principle.

6.2 Classical and quantum entropy

6.2.1 Kolmogorov-Sinai entropy

Let us recall a few facts about Kolmogorov-Sinai (or metric) entropy that can be found for example in [100]. Let $(X, \mathcal{B}, \mu)$ be a measurable probability space, I a finite set and $P := (P_\alpha)_{\alpha\in I}$ a finite measurable partition of X, i.e. a finite collection of measurable subsets that forms a partition. Each P_α is called an atom of the partition. Assuming $0 \log 0 = 0$, one defines the entropy of the partition as

$$H(\mu, P) := -\sum_{\alpha\in I} \mu(P_\alpha) \log \mu(P_\alpha) \geq 0. \tag{6.8}$$

Given two measurable partitions $P := (P_\alpha)_{\alpha\in I}$ and $Q := (Q_\beta)_{\beta\in K}$, one says that P is a refinement of Q if every element of Q can be written as the union of elements of P and it can be shown that $H(\mu, Q) \leq H(\mu, P)$. Otherwise, one denotes $P \vee Q := (P_\alpha \cap Q_\beta)_{\alpha\in I,\beta\in K}$ their join (which is still a partition) and one has $H(\mu, P \vee Q) \leq H(\mu, P) + H(\mu, Q)$ (subadditivity property). Let T be a measure preserving transformation of X. The n-refined partition $\vee_{i=0}^{n-1} T^{-i}P$ of P with respect to T is then the partition made of the atoms $(P_{\alpha_0} \cap \cdots \cap T^{-(n-1)}P_{\alpha_{n-1}})_{\alpha\in I^n}$. We define the entropy with respect to this refined partition :

$$H_n(\mu, T, P) = -\sum_{|\alpha|=n} \mu(P_{\alpha_0} \cap \cdots \cap T^{-(n-1)}P_{\alpha_{n-1}}) \log \mu(P_{\alpha_0} \cap \cdots \cap T^{-(n-1)}P_{\alpha_{n-1}}). \tag{6.9}$$

Using the subadditivity property of entropy, we have, for any integers n and m,

$$H_{n+m}(\mu, T, P) \leq H_n(\mu, T, P) + H_m(T^n\sharp\mu, T, P) = H_n(\mu, T, P) + H_m(\mu, T, P). \tag{6.10}$$

For the last equality, it is important to underline that we really use the T-invariance of the measure μ. A classical argument for subadditive sequences allows us to define the following quantity :

$$h_{KS}(\mu, T, P) := \lim_{n\to\infty} \frac{H_n(\mu, T, P)}{n}. \tag{6.11}$$

It is called the Kolmogorov Sinai entropy of (T, μ) with respect to the partition P. The Kolmogorov Sinai entropy $h_{KS}(\mu, T)$ of (μ, T) is then defined as the supremum of $h_{KS}(\mu, T, P)$ over all partitions P of X. Finally, it should be noted that this quantity can be infinite (not in our case thanks to Ruelle inequality (6.4) for instance). Note also that if, for all index $(\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1})$, $\mu(P_{\alpha_0} \cap \cdots \cap T^{-(n-1)} P_{\alpha_{n-1}}) \leq Ce^{-\beta n}$ with C positive constant, then $h_{KS}(\mu, T) \geq \beta$: the metric entropy measures the exponential decrease of the atoms of the refined partition.

6.2.2 Quantum entropy

One can defined a quantum counterpart to the metric entropy. Let $\mathcal{H}$ be an Hilbert space. We call a partition of identity $(\tau_\alpha)_{\alpha \in I}$ a finite family of operators that satisfies the following relation :

$$\sum_{\alpha \in I} \tau_\alpha^* \tau_\alpha = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}. \tag{6.12}$$

Then, one defines the quantum entropy of a normalized vector ψ as

$$h_\tau(\psi) := -\sum_{\alpha \in I} \|\tau_\alpha \psi\|^2 \log \|\tau_\alpha \psi\|^2. \tag{6.13}$$

Finally, one has the following generalization of a theorem from [7] (the proof immediately generalizes to this case), known as the entropic uncertainty principle [70] :

Theorem 6.3. *Let O_β be a family of bounded operators and U a unitary operator of an Hilbert space $(\mathcal{H}, \|.\|)$. Let δ' be a positive number. Given $(\tau_\alpha)_{\alpha \in I}$ and $(\pi_\beta)_{\beta \in K}$ two partitions of identity and ψ a vector in $\mathcal{H}$ of norm 1 such that*

$$\|(Id - O_\beta)\pi_\beta \psi\| \leq \delta'.$$

Suppose both partitions are of cardinal less than $\mathcal{N}$, then

$$h_\tau(U\psi) + h_\pi(\psi) \geq -2 \log\left(c_O(U) + \mathcal{N}\delta'\right),$$

where $c_O(U) = \max\limits_{\alpha \in I, \beta \in K} \left(\|\tau_\alpha U \pi_\beta^* O_\beta\|\right)$, with $\|\tau_\alpha U \pi_\beta^* O_\beta\|$ the operator norm in $\mathcal{H}$.

6.2.3 Entropy of a special flow

In the previous papers of Anantharaman, Koch and Nonnenmacher (see [5] for example), the main difficulty that was faced to prove main inequality (6.2) was that the value of $\log J^u(\rho)$ could change a lot depending on the point of the energy layer they looked at. As was mentioned (see section 6.1.2), we will try to adapt their proof and take into account the changes of the value of $\log J^u(\rho)$. To do this, we will, in a certain way, reparametrize the geodesic flow. Before explaining precisely this strategy, let us recall a classical fact of dynamical system for reparametrization of measure preserving transformations known as the Abramov theorem.
First, let us define a special flow (see [2], [29]). Let $(X, \mathcal{B}, \mu)$ be a probability space, T an automorphism of X and f a measurable function such that $f(x) > a > 0$ for all x in X. The function f is called a roof function. We are interested in the set

$$\overline{X} := \{(x, s) : x \in X, 0 \leq s < f(x)\}. \tag{6.14}$$

$\overline{X}$ is equipped with the σ-algebra by restriction of the σ-algebra on the cartesian product $X \times \mathbb{R}$. For A measurable, one defines $\overline{\mu}(A) := \frac{1}{\int_X f d\mu} \int \int_A d\mu(x) ds$ and $\overline{\mu}(\overline{X}) = 1$.

Definition 6.4. The special flow under the automorphism T, constructed by the function f is the flow $(\overline{T}^t)$ that acts on $\overline{X}$ in the following way, for $t \geq 0$,

$$\overline{T}^t(x, s) := \left(T^n x, s + t - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(T^k x\right)\right), \tag{6.15}$$

where n is the only integer such that $\sum_{k=0}^{n-1} f\left(T^k x\right) \leq s+t < \sum_{k=0}^{n} f\left(T^k x\right)$.

For $t<0$, one puts, if $s+t>0$,

$$\overline{T}^t(x,s) := (x, s+t),$$

and otherwise,

$$\overline{T}^t(x,s) := \left(T^{-n}x, s+t+\sum_{k=-n}^{-1} f\left(T^k x\right)\right),$$

where n is the only integer such that $-\sum_{k=-n}^{-1} f\left(T^k x\right) \leq s+t < -\sum_{k=-n+1}^{-1} f\left(T^k x\right)$.

Remark. A suspension semi-flow can also be defined from an endomorphism.

It can be shown that this special flow preserves the measure $\overline{\mu}$ if T preserves μ [29]. Finally, we can state Abramov theorem for special flows [2] :

Theorem 6.5. *With the previous notations, one has, for all $t \in \mathbb{R}$,*

$$h_{KS}\left(\overline{T}^t, \overline{\mu}\right) = \frac{|t|}{\int_X f d\mu} h_{KS}(T,\mu). \tag{6.16}$$

6.3 Classical setting of the paper

Before starting the main lines of the proof, we want to describe the classical setting for our surface M and introduce notations that will be useful in the paper. We suppose the geodesic flow over T^*M to have the Anosov property. This means that for any $\lambda > 0$, the geodesic flow g^t is Anosov on the energy layer $\mathcal{E}(\lambda) := H^{-1}(\lambda) \subset T^*M$ and in particular, the following decomposition holds for all $\rho \in \mathcal{E}(\lambda)$:

$$T_\rho \mathcal{E}(\lambda) = E^u(\rho) \oplus E^s(\rho) \oplus \mathbb{R} X_H(\rho),$$

where X_H is the Hamiltonian vector field associated to H, E^u the unstable space and E^s the stable space [24]. It can be denoted that in the setting of this article, they are all one dimensional spaces. The unstable Jacobian $J^u(\rho)$ at the point ρ is defined as the Jacobian of the restriction of g^{-1} to the unstable subspace $E^u(g^1\rho)$, i.e.

$$J^u(\rho) := \det\left(dg^{-1}_{|E^u(g^1\rho)}\right).$$

For θ small positive number (θ will be fixed all along the paper), one defines

$$\mathcal{E}^\theta := H^{-1}(]1/2-\theta, 1/2+\theta[).$$

As the geodesic flow is Anosov, we can suppose there exist $0 < a_0 < b_0$ such that

$$\forall \rho \in \mathcal{E}^\theta,\ a_0 \leq -\log J^u(\rho) \leq b_0.$$

Remark. In fact, in the general setting of an Anosov flow, we can only suppose that there exists $k_0 \in \mathbb{N}$ such that $\det\left(dg^{-k_0}_{|E^u(g^{k_0}\rho)}\right) < 1$ for all $\rho \in \mathcal{E}^\theta$. So, to be in the correct setting, we should take g^{k_0} instead of g in the paper. In fact, as $h_{KS}(\mu, g^{k_0}) = k_0 h_{KS}(\mu, g)$ and

$$-\int_{S^*M} \log\det\left(dg^{-k_0}_{|E^u(g^{k_0}\rho)}\right) d\mu(\rho) = -k_0 \int_{S^*M} \log\det\left(dg^{-1}_{|E^u(g^1\rho)}\right) d\mu(\rho),$$

theorem 6.2 follows for $k_0 = 1$ from the case k_0 large. However, in order to avoid too many notations, we will suppose $k_0 = 1$.

We also fix ϵ and η two small positive constants lower than the injectivity radius of the manifold. We choose η small enough to have $(2 + \frac{b_0}{a_0}) b_0 \eta \leq \frac{\epsilon}{2}$ (this property will only be used in the proof of lemma 6.6). We underline that there exists $\varepsilon > 0$ such that if

$$\forall\ (\rho, \rho') \in \mathcal{E}^\theta \times \mathcal{E}^\theta,\ d(\rho,\rho') \leq \varepsilon \Rightarrow |\log J^u(\rho) - \log J^u(\rho')| \leq a_0 \epsilon.$$

Discretization of the unstable Jacobian

As was already mentioned, our strategy to prove theorem 6.2 will be introduce a discrete reparametrization of the geodesic flow. Regarding this goal, we cut the manifold M and precisely, we consider a partition $M = \bigsqcup_{i=1}^{K} O_i$ of diameter smaller than some positive δ. Let $(\Omega_i)_{i=1}^{K}$ be a finite open cover of M such that for all $1 \leq i \leq K$, $O_i \subsetneq \Omega_i$. For $\gamma \in \{1, \cdots, K\}^2$, define an open subset of T^*M

$$U_\gamma := (T^*\Omega_{\gamma_0} \cap g^{-\eta} T^*\Omega_{\gamma_1}) \cap \mathcal{E}^\theta.$$

We choose the partition $(O_i)_{i=1}^{K}$ and the open cover $(\Omega_i)_{i=1}^{K}$ of M such that $(U_\gamma)_{\gamma \in \{1,\cdots,K\}^2}$ is a finite open cover of diameter smaller[2] than ε of $\mathcal{E}^\theta$. Then, we define the following quantity, called the discrete Jacobian in time η

$$J_\eta^u(\gamma) := \sup\{J^u(\rho) : \rho \in U_\gamma\}, \tag{6.17}$$

if the previous set is non empty, e^{-b_0} otherwise. Outline that $J_\eta^u(\gamma)$ depends on η as U_γ depends on η. The definition can seem quite asymmetric as we consider the supremum of $J^u(\rho)$ and not of $J_\eta^u(\rho)$. However, this choice makes things easier for our analysis.
Finally, let $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \cdots)$ be a sequence (finite or infinite) of elements of $\{1, \cdots, K\}$ whose length is larger than 1 and define

$$f_+(\alpha) := -\eta \log J_\eta^u(\alpha_0, \alpha_1) \leq \eta b_0 \leq \frac{\epsilon}{2}, \tag{6.18}$$

where the upper bound follows from the previous hypothesis. We underline that, for $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1)$, we have

$$\forall\ \rho \in U_\gamma,\ |f_+(\gamma) + \eta \log J^u(\rho)| \leq a_0 \eta \epsilon. \tag{6.19}$$

Remark. This last inequality shows that even if our choice for $J_\eta^u(\gamma)$ seems quite asymmetric, it allows to have an explicit bound in η for quantity (6.19) and it will be quite useful. With a more symmetric choice, we would not have been able to get an explicit bound in η for (6.19).

In the following, we will also have to consider negative times. To do this, we define the analogous functions, for $\beta := (\cdots, \beta_{-1}, \beta_0)$ of finite (or infinite) length,

$$f_-(\beta) := f(\beta_{-1}, \beta_0).$$

Remark. Let α and β be as previously (finite or infinite). For the sake of simplicity, we will use the notation

$$\beta.\alpha := (\cdots, \beta_{-1}, \beta_0, \alpha_0, \alpha_1, \cdots).$$

The same obviously works for any sequences of the form $(\cdots, \beta_{p-1}, \beta_p)$ and $(\alpha_q, \alpha_{q+1}, \cdots)$.

6.4 Outline of the proof

Let $(\psi_{\hbar_k})$ be a sequence of orthonormal eigenfunctions of the Laplacian corresponding to the eigenvalues $-1/\hbar_k^{-2}$ such that the corresponding sequence of distributions μ_k on T^*M converges as k tends to infinity to the semiclassical measure μ. For simplicity of notations and to fit semiclassical analysis notations, we will denote $\hbar$ tends to 0 the fact that k tends to infinity and $\psi_\hbar$ and $\hbar^{-2}$ the corresponding eigenvector and eigenvalue. To prove inequality (6.3), we will in particular give a symbolic interpretation of a semiclassical measure and apply the previous results on special flows to this measure.
Let $\epsilon' > 4\epsilon$ be a positive number, where ϵ was defined in section 6.3. The link between the two quantities ϵ and ϵ' will only be used in section 6.7 to define ν. In the following of the paper, the Ehrenfest time $n_E(\hbar)$ will be the quantity :

$$n_E(\hbar) := [(1 - \epsilon')|\log \hbar|]. \tag{6.20}$$

[2] In particular, the diameter of the partition δ depends on θ and ϵ.

We underline that it is an integer time and that, compared with usual definitions of the Ehrenfest time, there is no dependence on the Lyapunov exponent. We also consider a smaller non integer time :

$$T_E(\hbar) := (1-\epsilon)n_E(\hbar). \tag{6.21}$$

6.4.1 Quantum partitions of identity

In order to find a lower bound on the metric entropy of the semiclassical measure μ, we would like to apply the entropic uncertainty principle (theorem 6.3) and see what informations it will give (when $\hbar$ tends to 0) on the metric entropy of the semiclassical measure μ. To do this, we define quantum partitions of identity corresponding to a given partition of the manifold.

Partitions of identity

In section 6.3, we considered a partition of small diameter $(O_i)_{i=1}^K$ of M. We also defined $(\Omega_i)_{i=1}^K$ a corresponding finite open cover of small diameter of M. By convolution of the characteristic functions $\mathbf{1}_{O_i}$, we obtain $\mathcal{P} = (P_i)_{i=1,..K}$ a smooth partition of unity on M i.e. for all $x \in M$,

$$\sum_{i=1}^K P_i^2(x) = 1.$$

We assume that for all $1 \leq i \leq K$, P_i is an element of $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega_i)$. To this classical partition corresponds a quantum partition of identity of $L^2(M)$. In fact, if P_i denotes the multiplication operator by $P_i(x)$ on $L^2(M)$, then one has

$$\sum_{i=1}^K P_i^* P_i = \mathrm{Id}_{L^2(M)}. \tag{6.22}$$

Refinement of the quantum partition under the Schrödinger flow

Like in the classical setting of entropy (6.9), we would like to make a refinement of the quantum partition. To do this refinement, we use the Schrödinger propagation operator $U^t = e^{\frac{it\hbar\Delta}{2}}$. We define $A(t) := U^{-t}AU^t$, where A is an operator on $L^2(M)$. To fit as much as possible with the metric entropy (see definition (6.9) and Egorov property (6.1)), we define the following operators :

$$\tau_\alpha = P_{\alpha_k}(k\eta)\cdots P_{\alpha_1}(\eta)P_{\alpha_0} \tag{6.23}$$

and

$$\pi_\beta = P_{\beta_{-k}}(-k\eta)\cdots P_{\beta_{-2}}(-2\eta)P_{\beta_0}P_{\beta_{-1}}(-\eta), \tag{6.24}$$

where $\alpha = (\alpha_0, \cdots, \alpha_k)$ and $\beta = (\beta_{-k}, \cdots, \beta_0)$ are finite sequences of symbols such that $\alpha_j \in [1, K]$ and $\beta_{-j} \in [1, K]$. We can remark that the definition of π_β is the analogue for negative times of the definition of τ_α. The only difference is that we switch the two first terms β_0 and β_{-1}. The reason of this choice will appear later in the application of the quantum uncertainty principle (see equality (6.40) in section 6.5.3). One can see that for fixed k, using the Egorov property (6.1),

$$\|P_{\alpha_k}(k\eta)\cdots P_{\alpha_1}(\eta)P_{\alpha_0}\psi_\hbar\|^2 \to \mu(P_{\alpha_k}^2 \circ g^{k\eta} \times \cdots P_{\alpha_1}^2 \circ g^\eta \times P_{\alpha_0}^2) \text{ as } \hbar \text{ tends to } 0. \tag{6.25}$$

This last quantity is the one used to compute $h_{KS}(\mu, g^\eta)$ (with the notable difference that the P_j are here smooth functions instead of characteristic functions : see (6.9)). As was discussed in the heuristic of the proof 6.1.2, we will have to understand for which range of times $k\eta$, the Egorov property can be be applied. In particular, we will study for which range of times, the operator τ_α is a pseudodifferential operator of symbol $P_{\alpha_k} \circ g^{k\eta} \times \cdots P_{\alpha_1} \circ g^\eta \times P_{\alpha_0}$ (see (6.25)). In [7] and [5], they only considered $k\eta \leq |\log\hbar|/\lambda_{\max}$ where $\lambda_{\max} := \lim_{t\to\pm\infty} \frac{1}{t}\log\sup_{\rho\in S^*M} |d_\rho g^t|$. This choice was not optimal and in the following, we try to define sequences α for which we can say that τ_α is a pseudodifferential operator.

Index family adapted to the variation of the unstable Jacobian

Let $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \cdots)$ be a sequence (finite or infinite) of elements of $\{1, \cdots, K\}$ whose length is larger than 1. We define a natural shift on these sequences

$$\sigma_+((\alpha_0, \alpha_1, \cdots)) := (\alpha_1, \cdots).$$

For negative times and for $\beta := (\cdots, \beta_{-1}, \beta_0)$, we define the backward shift

$$\sigma_-((\cdots, \beta_{-1}, \beta_0)) := (\cdots, \beta_{-1}).$$

In the paper, we will mostly use the symbol x for infinite sequences and reserve α and β for finite ones. Then, using notations of section 6.3 and as described in section 6.5, index families depending on the value of the unstable Jacobian can be defined as follows :

$$I^\eta(\hbar) := I^\eta(T_E(\hbar)) = \left\{ (\alpha_0, \cdots, \alpha_k) : k \geq 3, \sum_{i=1}^{k-2} f_+\left(\sigma_+^i \alpha\right) \leq T_E(\hbar) < \sum_{i=1}^{k-1} f_+\left(\sigma_+^i \alpha\right) \right\}, \quad (6.26)$$

$$K^\eta(\hbar) := K^\eta(T_E(\hbar)) = \left\{ (\beta_{-k}, \cdots, \beta_0) : k \geq 3, \sum_{i=1}^{k-2} f_-\left(\sigma_-^i \beta\right) \leq T_E(\hbar) < \sum_{i=1}^{k-1} f_-\left(\sigma_-^i \beta\right) \right\}. \quad (6.27)$$

These sets define the maximal sequences for which we can expect to have Egorov property for the corresponding τ_α. The sums used to define these sets are in a way a discrete analogue of the integral in the inversion formula (6.6) defined in the introduction[3]. The sums used to define the allowed sequences are in fact Riemann sums (with small parameter η) corresponding to the integral (6.5). We can think of the time $|\alpha|\eta$ as a stopping time for which property (6.25) will hold (for a symbol τ_α corresponding to α).
A good way of thinking of these families of words is by introducing the sets

$$\Sigma_+ := \{1, \cdots, K\}^{\mathbb{N}} \text{ and } \Sigma_- := \{1, \cdots, K\}^{-\mathbb{N}}.$$

We will see that the sets $I^\eta(\hbar)$ (resp. $K^\eta(\hbar)$) lead to natural partitions of Σ (resp. Σ_-). In the following, it can be helpful to keep in mind picture 6.1. On this figure, we draw the case $K = 4$. The biggest square has sides of length 1. Each square represents an element of $I^\eta(\hbar)$ and each square with sides of length $1/2^k$ represents a sequence of length $k+1$ (for $k \geq 0$). If we denote $C(\alpha)$ the square that represents α, then we can represent the sequences $\alpha.\gamma$ for each γ in $\{1, \cdots, 4\}$ by subdividing the square $C(\alpha)$ in 4 squares of same size. Finally, by definition of $I^\eta(\hbar)$, we can remark that if $\alpha.\gamma$ is represented in the subdivision (for γ in $\{1, \cdots, 4\}$), then $\alpha.\gamma'$ is represented in the subdivision for each γ' in $\{1, \cdots, 4\}$. Families of operators can be associated to these families of

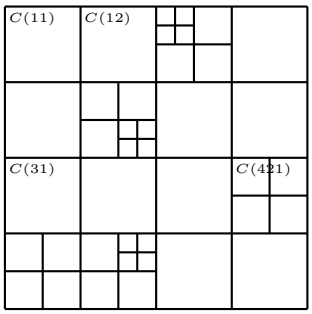


FIG. 6.1 – *Refinement of variable size*

[3]In the higher dimension case mentioned in the footnote of section 6.1.2, we should take $(d-1)T_E(\hbar)$ (where d is the dimension of M) instead of $T_E(\hbar)$ in the definition of $I^\eta(\hbar)$ and $K^\eta(\hbar)$.

index : $(\tau_\alpha)_{\alpha\in I^\eta(\hbar)}$ and $(\pi_\beta)_{\beta\in K^\eta(\hbar)}$. One can show that these partitions form quantum partitions of identity (see section 6.5)

$$\sum_{\alpha\in I^\eta(\hbar)} \tau_\alpha^*\tau_\alpha = \mathrm{Id}_{L^2(M)} \text{ and } \sum_{\beta\in K^\eta(\hbar)} \pi_\beta^*\pi_\beta = \mathrm{Id}_{L^2(M)}.$$

6.4.2 Symbolic interpretation of semiclassical measures

Now that we have defined these partitions of variable size, we want to show that they are adapted to compute the entropy of a certain measure with respect to some reparametrized flow associated to the geodesic flow. To do this, we start by giving a symbolic interpretation of the quantum partitions. Recall that we have denoted $\Sigma_+ := \{1,\cdots,K\}^{\mathbb{N}}$. We will also denote $\mathcal{C}_i$ the subset of sequences $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ such that $x_0 = i$. Define also

$$[\alpha_0,\cdots,\alpha_k] := \mathcal{C}_{\alpha_0}\cap\cdots\cap\sigma_+^{-k}\mathcal{C}_{\alpha_k},$$

where σ_+ is the shift $\sigma_+((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ (it fits the notations of the previous section). The set Σ_+ is then endowed with the probability measure (not necessarily σ-invariant)

$$\mu_\hbar^{\Sigma_+}([\alpha_0,\cdots,\alpha_k]) = \mu_\hbar^{\Sigma_+}\left(\mathcal{C}_{\alpha_0}\cap\cdots\cap\sigma_+^{-k}\mathcal{C}_{\alpha_k}\right) = \|P_{\alpha_k}(k\eta)\cdots P_{\alpha_0}\psi_\hbar\|^2.$$

Using the property (6.12), it is clear that this definition assures the compatibility conditions to define a probability measure

$$\sum_{\alpha_{k+1}} \mu_\hbar^{\Sigma_+}([\alpha_0,\cdots,\alpha_{k+1}]) = \mu_\hbar^{\Sigma_+}([\alpha_0,\cdots,\alpha_k]).$$

Then, we can define the suspension flow, in the sense of Abramov (section 6.2.3), associated to this probability measure. To do this, the suspension set (6.14) is defined as

$$\overline{\Sigma}_+ := \{(x,s)\in\Sigma_+\times\mathbb{R}_+ : 0\leq s < f_+(x)\}. \tag{6.28}$$

Recall that the roof function f_+ is defined as $f_+(x) := f_+(x_0,x_1)$. We define a probability measure $\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}_+}$ on $\overline{\Sigma}_+$ as follows :

$$\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}_+} = \mu_\hbar^{\Sigma_+}\times\frac{dt}{\sum_{\alpha\in\{1,\cdots,K\}^2} f_+(\alpha)\|P_\alpha\psi_\hbar\|^2} = \mu_\hbar^{\Sigma_+}\times\frac{dt}{\sum_{\alpha\in\{1,\cdots,K\}^2} f_+(\alpha)\mu_\hbar^{\Sigma_+}([\alpha])}. \tag{6.29}$$

The semi-flow (6.15) associated to σ_+ is, for time s,

$$\overline{\sigma}_+^s(x,t) := \left(\sigma_+^{n-1}(x), s+t-\sum_{j=0}^{n-2} f_+\left(\sigma_+^j x\right)\right), \tag{6.30}$$

where n is the only integer such that $\sum_{j=0}^{n-2} f_+\left(\sigma_+^j x\right) \leq s+t < \sum_{j=0}^{n-1} f_+\left(\sigma_+^j x\right)$. In the following, we will only consider time 1 of the flow and its iterates and we will denote $\overline{\sigma}_+ := \overline{\sigma}_+^1$.

Remark. It can be underlined that the same procedure holds for the partition (π_β). The only differences are that we have to consider $\Sigma_- := \{1,\cdots,K\}^{-\mathbb{N}}$, $\sigma_-((x_n)_{n\leq 0}) = (x_{n-1})_{n\leq 0}$ and that the corresponding measure is, for $k\geq 1$,

$$\mu_\hbar^{\Sigma_-}([\beta_{-k},\cdots,\beta_0]) = \mu_\hbar^{\Sigma_-}\left(\overline{\sigma}_-^{-k}\mathcal{C}_{\beta_{-k}}\cap\cdots\cap\mathcal{C}_{\beta_0}\right) = \|P_{\beta_{-k}}(-k\eta)\cdots P_{\beta_0}P_{\beta_{-1}}(-\eta)\psi_\hbar\|^2.$$

For $k=0$, one should take the only possibility to assure the compatibility condition, i.e.

$$\mu_\hbar^{\Sigma_-}([\beta_0]) = \sum_{j=1}^{K}\mu_\hbar^{\Sigma_-}([\beta_{-1},\beta_0]).$$

The definition is quite different from the positive case but in the semiclassical limit, it will not change anything as P_{β_0} and $P_{\beta_-1}(-\eta)$ commute. Finally, the "past" suspension set can be defined as

$$\overline{\Sigma}_- := \{(x,s) \in \Sigma_- \times \mathbb{R}_+ : 0 \leq s < f_-(x)\}.$$

Now let α be an element of $I^\eta(\hbar)$. Define

$$\tilde{\mathcal{C}}_\alpha := \mathcal{C}_{\alpha_0} \cap \cdots \cap \sigma_+^{-k}\mathcal{C}_{\alpha_k}. \tag{6.31}$$

This new family of subsets forms a partition of Σ_+ (see picture 6.1). Then, a partition $\overline{\mathcal{C}}_\hbar^+$ of $\overline{\Sigma}_+$ can be defined starting from the partition $\tilde{\mathcal{C}}$ and $[0, f_+(\alpha)[$. An atom of this suspension partition is an element of the form $\overline{\mathcal{C}}_\alpha = \tilde{\mathcal{C}}_\alpha \times [0, f_+(\alpha)[$. For $\overline{\Sigma}^-$ (the suspension set corresponding to Σ_-), we define an analogous partition $\overline{\mathcal{C}}_\hbar^- = ([\beta] \times [0, f_-(\beta)[)_{\beta \in K^\eta(\hbar)}$. Finally, with this interpretation, equality (6.39) from section 6.5.3 (which is just a careful adaptation of the uncertainty principle) can be read as follows :

$$H\left(\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}_+}, \overline{\mathcal{C}}_\hbar^+\right) + H\left(\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}_-}, \overline{\mathcal{C}}_\hbar^-\right) \geq ((1-\epsilon')(1-\epsilon) - c\delta_0)\,|\log\hbar| + C, \tag{6.32}$$

where H is defined by (6.8) and δ_0 is some small fixed parameter. To fit as much as possible with the setting of the classical metric entropy, we would like $\overline{\mathcal{C}}_\hbar^+$ to be the refinement (under the special flow) of an $\hbar$-independent partition. It is not exactly the case but we can prove the following lemma (see section 6.5.2) :

Lemma 6.6. *There exists an explicit partition $\overline{\mathcal{C}}_+$ of $\overline{\Sigma}_+$, independent of $\hbar$ such that $\vee_{i=0}^{n_E(\hbar)-1}\overline{\sigma}_+^{-i}\overline{\mathcal{C}}_+$ is a refinement of the partition $\overline{\mathcal{C}}_\hbar^+$. Moreover, let n be a fixed positive integer. Then, an atom of the refined partition $\vee_{i=0}^{n-1}\overline{\sigma}_+^{-i}\overline{\mathcal{C}}_+$ is of the form $[\alpha] \times B(\alpha)$, where $\alpha = (\alpha_0, \cdots, \alpha_k)$ is a $k+1$-uple such that $(\alpha_0, \cdots, \alpha_k)$ verifies $n(1-\epsilon) \leq \sum_{j=0}^{k-1} f_+\left(\sigma_+^j\alpha\right) \leq n(1+\epsilon)$ and $B(\alpha)$ is a subinterval of $[0, f_+(\alpha)[$.*

This lemma is crucial as it allows to interpret an inequality on the quantum entropy as an inequality on classical entropy. In fact, applying basic properties of H (see section 6.2.1), one finds that

$$H\left(\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}_+}, \overline{\mathcal{C}}_\hbar^+\right) \leq H\left(\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}_+}, \vee_{i=0}^{n_E(\hbar)-1}\overline{\sigma}_+^{-i}\overline{\mathcal{C}}_+\right) = H_{n_E(\hbar)}\left(\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}_+}, \overline{\sigma}_+, \overline{\mathcal{C}}_+\right). \tag{6.33}$$

One can obtain the same lemma for the "past" shift and in particular, it gives an $\hbar$-independent partition $\overline{\mathcal{C}}_-$. To conclude this symbolic interpretation of quantum entropy, with natural notations, inequality (6.32) together with (6.33) give the following proposition :

Proposition 6.7. *With the previous notations, one has the following inequality :*

$$\frac{1}{n_E(\hbar)}\left(H_{n_E(\hbar)}\left(\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}_+}, \overline{\sigma}_+, \overline{\mathcal{C}}_+\right) + H_{n_E(\hbar)}\left(\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}_-}, \overline{\sigma}_-, \overline{\mathcal{C}}_-\right)\right) \geq (1 - \epsilon - c\delta_0) + \frac{C}{n_E(\hbar)}. \tag{6.34}$$

The quantum entropic uncertainty principle gives an information on the entropy of a special flow. Now, we would like to let $\hbar$ tends to 0 to find a lower on the metric entropy of a limit measure (that we will precise in section 6.4.3) with respect to $\overline{\sigma}_+$. However, both $n_E(\hbar)$ and $\mu_\hbar$ depend on $\hbar$ and we have to be careful before passing to the semiclassical limit.

6.4.3 Subadditivity of the entropy

The Egorov property (6.1) implies that $\mu_\hbar^{\Sigma_+}$ tends to a measure μ^{Σ_+} on Σ_+ (as $\hbar$ tends to 0) defined as follows :

$$\mu^{\Sigma_+}([\alpha_0, \cdots, \alpha_k]) = \mu\left(P_{\alpha_k}^2 \circ g^{k\eta} \times \cdots \times P_{\alpha_0}^2\right), \tag{6.35}$$

where k is a fixed integer. Using the property of partition, this defines a probability measure on Σ_+. To this probability measure corresponds a probability measure $\overline{\mu}^{\overline{\Sigma}_+}$ on the suspension set $\overline{\Sigma}_+$. It is an immediate corollary that $\overline{\mu}^{\overline{\Sigma}_+}$ is the limit of the probability measure $\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}_+}$. Moreover, using Egorov one more time, one can check that the measure μ^{Σ_+} is σ_+-invariant and using results about special flows [29], $\overline{\mu}^{\overline{\Sigma}_+}$ is $\overline{\sigma}_+$-invariant. The same works for $\mu_\hbar^{\Sigma_-}$ and $\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}_-}$.

Remark. In the following, we will often prove properties in the case of Σ_+. The proofs are the same in the case of Σ_-.

As $n_E(\hbar)$ and $\mu_\hbar$ depend both on $\hbar$, we cannot let $\hbar$ tend to 0 if we want to keep an information about the metric entropy. In fact, the left quantity in (6.34) does not tend a priori to the Kolmogorov-Sinai entropy. We want to proceed as in the classical case (see (6.10)) and prove a subadditivity property. This will allow to replace $n_E(\hbar)$ by a fixed n_0 (see below) in the left hand side of (6.34). This is done with the following theorem that will be proved in section 6.6 :

Theorem 6.8. *Let $\overline{\mathcal{C}}$ be the partition of lemma (6.6). There exists a function $R(n_0,\hbar)$ on $\mathbb{N}\times(0,1]$ such that*

$$\forall n_0 \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{\hbar\to 0} |R(n_0,\hbar)| = 0.$$

Moreover, for any $\hbar \in (0,1]$ and any $n_0, m \in \mathbb{N}$ such that $n_0 + m \leq n_E(\hbar)$, one has

$$H_{n_0+m}\left(\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}_+}, \overline{\sigma}_+, \overline{\mathcal{C}}_+\right) \leq H_{n_0}\left(\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}_+}, \overline{\sigma}_+, \overline{\mathcal{C}}_+\right) + H_m\left(\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}_+}, \overline{\sigma}_+, \overline{\mathcal{C}}_+\right) + R(n_0,\hbar).$$

The same holds for Σ_-.

This theorem says that the entropy satisfies almost the subadditivity property (see (6.10)) for time lower than the Ehrenfest time. It is an analogue of a theorem from [7] (proposition 2.8) except that we have taken into account the fact that the unstable jacobian varies on the surface and that we can make our semiclassical analysis for larger time than in [7]. The proof of this theorem is the object of section 6.6 and 6.7 (where semiclassical analysis for 'local Ehrenfest time' is performed). Then, one can apply the standard argument for subadditive sequences. Let n_0 be a fixed integer in $\mathbb{N}$ and write the euclidian division $n_E(\hbar) = qn_0 + r$ with $r < n_0$. The previous theorem then implies

$$\frac{H_{n_E(\hbar)}\left(\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}_+}, \overline{\sigma}_+, \overline{\mathcal{C}}_+\right)}{n_E(\hbar)} \leq \frac{H_{n_0}\left(\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}_+}, \overline{\sigma}_+, \overline{\mathcal{C}}_+\right)}{n_0} + \frac{H_r\left(\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}_+}, \overline{\sigma}_+, \overline{\mathcal{C}}_+\right)}{n_E(\hbar)} + \frac{R(n_0,\hbar)}{n_0}.$$

As r stays uniformly bounded in n_0, the inequality (6.34) becomes

$$\frac{1}{n_0}\left(H_{n_0}\left(\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}_+}, \overline{\sigma}_+, \overline{\mathcal{C}}_+\right) + H_{n_0}\left(\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}_-}, \overline{\sigma}_-, \overline{\mathcal{C}}_-\right)\right) \geq (1 - \epsilon - c\delta_0) + \frac{C(n_0)}{n_E(\hbar)} - 2\frac{R(n_0,\hbar)}{n_0}. \quad (6.36)$$

6.4.4 Application of the Abramov theorem

Using inequality (6.36), we can conclude using Abramov theorem (6.16). Making $\hbar$ tend to 0, one finds that (as was mentioned at the beginning of 6.4.3)

$$\frac{1}{n_0}\left(H_{n_0}\left(\overline{\mu}^{\overline{\Sigma}_+}, \overline{\sigma}_+, \overline{\mathcal{C}}_+\right) + H_{n_0}\left(\overline{\mu}^{\overline{\Sigma}_-}, \overline{\sigma}_-, \overline{\mathcal{C}}_-\right)\right) \geq (1 - \epsilon - c\delta_0).$$

The Abramov theorem holds for automorphisms so one can look at the natural extension of (Σ_+, σ_+) and (Σ_-, σ_-). To do this, we introduce $\Sigma' = \{1, \cdots, K\}^{\mathbb{Z}}$ and $\sigma'((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}) := (x_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$. With these notations, the natural extension of (Σ_+, σ_+) is (Σ', σ') and the one of (Σ_-, σ_-) is (Σ', σ'^{-1}). We define then two associated suspension sets

$$\overline{\Sigma}'_+ := \{(x,s) \in \Sigma \times \mathbb{R}_+ : 0 \leq s < f(x_0, x_1)\} \text{ and } \overline{\Sigma}'_- := \{(x,s) \in \Sigma \times \mathbb{R}_+ : 0 \leq s < f(x_{-1}, x_0)\}.$$

We also denote $\overline{\sigma}'_+$ (resp. $\overline{\sigma}'_-$) the suspension flow on $\overline{\Sigma}'_+$ (resp. $\overline{\Sigma}'_-$) associated to the automorphism σ' (resp. σ'^{-1}). Finally, we underline that $\overline{\mathcal{C}}_+$ (resp. $\overline{\mathcal{C}}_-$) can be viewed as partitions of the set $\overline{\Sigma}'_+$ (resp. $\overline{\Sigma}'_-$). This discussion allows us to derive that

$$\frac{1}{n_0}\left(H_{n_0}\left(\overline{\mu}^{\overline{\Sigma}'_+},\overline{\sigma}'_+,\overline{\mathcal{C}}_+\right)+H_{n_0}\left(\overline{\mu}^{\overline{\Sigma}'_-},\overline{\sigma}'_-,\overline{\mathcal{C}}_-\right)\right)\geq(1-\epsilon-c\delta_0)\,. \tag{6.37}$$

In view of section 6.5, we have an exact expression for $\mathcal{C}$ in terms of the functions $(P_i)_i$ (see proof of lemma 6.6). The measure $\overline{\mu}^{\overline{\Sigma}'_+}$ (resp. $\overline{\mu}^{\overline{\Sigma}'_-}$) is $\overline{\sigma}'_+$-invariant (resp. $\overline{\sigma}'_-$-invariant) as μ^Σ is σ-invariant (resp. σ^{-1}-invariant) [29]. In the previous inequality, there is still one notable difference with the metric entropy : we consider smooth partitions of identity $(P_i)_i$ (as it was necessary to make the semiclassical analysis). To return to the classical case, the procedure of [7] can be adapted using the exact form of the partition $\overline{\mathcal{C}}$ (see lemma 6.6). Recall that each P_i is an element of $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega_i)$ and that we considered a partition $M=\bigsqcup_i O_i$ of small diameter δ, where each $O_i\subsetneq\Omega_i$ (see section 6.3). One can slightly move the boundaries of the O_i such that they are not charged by μ (see appendix of [3]). By convolution of the $\mathbf{1}_{O_i}$, we obtained the smooth partition $(P_i)_i$ of identity of diameter smaller than 2δ. The previous inequality does not depend on the derivatives of the P_i. Regarding also the form of the partition $\overline{\mathcal{C}}$ (see lemma 6.6), we can replace the smooth functions P_i by the characteristic functions $\mathbf{1}_{O_i}$ in inequality (6.37). One can let n_0 tend to infinity and find

$$h_{KS}\left(\overline{\mu}^{\overline{\Sigma}'_+},\overline{\sigma}'_+\right)+h_{KS}\left(\overline{\mu}^{\overline{\Sigma}'_-},\overline{\sigma}'_-\right)\geq h_{KS}\left(\overline{\mu}^{\overline{\Sigma}'_+},\overline{\sigma}'_+,\overline{\mathcal{C}}_+\right)+h_{KS}\left(\overline{\mu}^{\overline{\Sigma}'_-},\overline{\sigma}'_-,\overline{\mathcal{C}}_-\right)\geq(1-\epsilon-c\delta_0)\,.$$

Then, using Abramov theorem (6.16), the previous inequality implies that

$$h_{KS}(\mu,g^\eta)+h_{KS}(\mu,g^{-\eta})\geq h_{KS}\left(\overline{\mu}^{\overline{\Sigma}'_+},\overline{\sigma}'_+\right)+h_{KS}\left(\overline{\mu}^{\overline{\Sigma}'_-},\overline{\sigma}'_-\right)\geq(1-\epsilon-c\delta_0)\sum_{\gamma\in\{1,\cdots,K\}^2}f(\gamma)\,\mu^{\Sigma'}([\gamma])\,.$$

After division by η and letting the diameter of the partition δ tends to 0, then ϵ tends to 0 and finally δ_0 to 0, one gets

$$h_{KS}(\mu,g)\geq\frac{1}{2}\left|\int_{S^*M}\log J^u(\rho)d\mu(\rho)\right|.\square$$

Notations

In the following, we have to prove the various results for both Σ_+ and Σ_-. We will always treat the case of Σ_+ and the case of Σ_- can always be deduced using the same methods. For the sake of simplicity, we will forget the notation + for (Σ_+,σ_+,f_+) when there will be no ambiguity and we will use the notation (Σ,σ,f).

6.5 Partitions of variable size

In this section, we define precisely the index families I^η and K^η depending on the unstable jacobian used in section 6.4. These families are used to construct quantum partitions of identity and partitions adapted to the special flow (see section 6.5.2). In the last section, we apply the uncertainty principle to eigenfunctions of the Laplacian for these quantum partitions of variable size.

6.5.1 Stopping time

Let t be a real positive number that will be greater than $2b_0\eta$. Define index families as follows (see section 6.4.1 for definitions of f_+, σ_+, f_- and σ_-) :

$$I^\eta(t):=\left\{\alpha=(\alpha_0,\cdots,\alpha_k):k\geq3,\sum_{i=1}^{k-2}f_+\left(\sigma_+^i\alpha\right)\leq t<\sum_{i=1}^{k-1}f_+\left(\sigma_+^i\alpha\right)\right\},$$

$$K^\eta(t) := \left\{ \beta = (\beta_{-k}, \cdots, \beta_0) : k \geq 3, \sum_{i=1}^{k-2} f_- \left(\sigma_-^i \beta\right) \leq t < \sum_{i=1}^{k-1} f_- \left(\sigma_-^i \beta\right) \right\}.$$

Let x be an element of $\{1, \cdots, K\}^{\mathbb{N}}$. We denote $k_t(x)$ the unique integer k such that

$$\sum_{i=1}^{k-2} f_+ \left(\sigma_+^i x\right) \leq t < \sum_{i=1}^{k-1} f_+ \left(\sigma_+^i x\right).$$

In the probability language, k_t is a stopping time in the sense that the property $\{k_t(x) \leq k\}$ depends only on the $k+1$ first letters of x. For a finite word $\alpha = (\alpha_0, \cdots, \alpha_k)$, we say that $k = k_t(\alpha)$ if α satisfies the previous inequality. With these notations, $I^\eta(t) := \{\alpha : |\alpha| = k_t(\alpha)+1\}$. The same holds for $K^\eta(t)$.

Remark. This stopping time $k_t(\alpha)$ for $t \sim \frac{n_E(\hbar)}{2}$ will be the time for which we will later try to make the Egorov property work. Precisely, we will prove an Egorov property for some symbols corresponding to the sequence α (see (6.64) for example).

6.5.2 Partitions associated

Partitions of identity

Let $\alpha = (\alpha_0, \cdots, \alpha_k)$ be a finite sequence. Recall that we denoted $\tau_\alpha := P_{\alpha_k}(k\eta) \cdots P_{\alpha_0}$, where $A(s) := U^{-s} A U^s$. In [7] and [5], they used quantum partitions of identity by considering $(\tau_\alpha)_{|\alpha|=k}$. In our paper, we consider a slightly different partition that is more adapted to the variations of the unstable jacobian :

Lemma 6.9. *Let t be in $[2b_0\eta, +\infty[$. The family $(\tau_\alpha)_{\alpha \in I^\eta(t)}$ is a partition of identity :*

$$\sum_{\alpha \in I^\eta(t)} \tau_\alpha^* \tau_\alpha = Id_{L^2(M)}.$$

Démonstration. We define, for each $1 \leq l \leq N$ (where $N+1$ is the size of the longest word of $I^\eta(t)$),

$$I_l^\eta(t) := \{\alpha = (\alpha_0, \cdots, \alpha_l) : \exists \gamma = (\gamma_{l+1}, \cdots, \gamma_k),\ N \geq k > l \text{ s.t. } \alpha.\gamma \in I^\eta(t)\}.$$

We recall that we defined $\alpha.\gamma := (\alpha_0, \cdots, \alpha_l, \gamma_{l+1}, \cdots, \gamma_k))$. For $l = N$, this set is empty. We want to to show that for each $2 \leq l \leq N$, we have

$$\sum_{\alpha \in I^\eta(t), |\alpha| = l+1} \tau_\alpha^* \tau_\alpha + \sum_{\alpha \in I_l^\eta(t)} \tau_\alpha^* \tau_\alpha = \sum_{\alpha \in I_{l-1}^\eta(t)} \tau_\alpha^* \tau_\alpha. \tag{6.38}$$

To prove this equality we use the fact that $\sum_{\gamma=1}^K P_\gamma(l)^* P_\gamma(l) = \mathrm{Id}_{L^2(M)}$ to write

$$\sum_{\alpha \in I_{l-1}^\eta(t)} \tau_\alpha^* \tau_\alpha = \sum_{\gamma=1}^K \sum_{\alpha \in I_{l-1}^\eta(t)} \tau_{\alpha.\gamma}^* \tau_{\alpha.\gamma}.$$

We split then this sum in two parts to find equality (6.38). To conclude the proof, we write

$$\sum_{\alpha \in I^\eta(t)} \tau_\alpha^* \tau_\alpha = \sum_{k=2}^N \sum_{\alpha \in I^\eta(t), |\alpha| = k+1} \tau_\alpha^* \tau_\alpha$$

As $t > 2b_0\eta \geq \max_\gamma f(\gamma)$, the set $I_1^\eta(t)$ is equal to $\{1, \cdots, K\}^2$. By induction from N to 1 using equality (6.38) at each step, we find then

$$\sum_{\alpha \in I^\eta(t)} \tau_\alpha^* \tau_\alpha = \mathrm{Id}_{L^2(M)}.$$

□

Remark. A step of the induction can be easily understood by looking at figure 6.2 where each square represents an index over which the sum is made (as it was explained for figure 6.1).

Following the same procedure, we denote $\pi_\beta = P_{\beta_{-k}}(-k\eta)\cdots P_{\beta_0}P_{\beta_{-1}}(-\eta)$ for β in $K^\eta(t)$. These operators follow the relation $\sum_{\beta\in K^\eta(t)} \pi_\beta^*\pi_\beta = \mathrm{Id}_{L^2(M)}$. As was mentioned in section 6.4.1, because of a technical reason that will appear in the application of the entropic uncertainty principle (see (6.40)), the two definitions are slightly different.

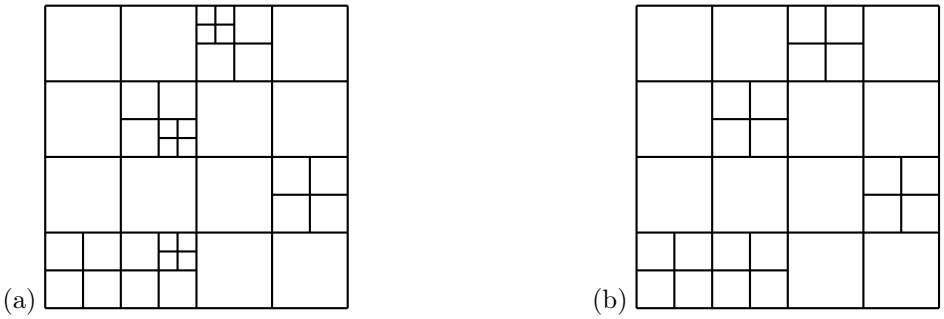


FIG. 6.2 – *A step of the induction*

Partitions of $\{1,\cdots,K\}^{\mathbb{N}}$ associated to $I^\eta(1)$

In this section, we would like to consider some partitions of $\Sigma := \{1,\cdots,K\}^{\mathbb{N}}$ and of $\overline{\Sigma}$ (see (6.28)) associated to the family $I^\eta(1)$. Precisely, we will construct an explicit partition $\overline{\mathcal{C}}$ of $\overline{\Sigma}$ such that its refinement at time n under Σ is linked with the partitions $([\alpha]\times[0,f(\alpha)[)_{\alpha\in I^\eta(n)}$ (see lemma 6.6). In this paragraph, we give an explicit expression for $\overline{\mathcal{C}}$ and in the next one, we prove lemma 6.6 that gives a link between the partition $\vee_{i=0}^{n-1}\overline{\sigma}^{-i}\overline{\mathcal{C}}$ and $([\alpha]\times[0,f(\alpha)[)_{\alpha\in I^\eta(n)}$. Recall that

$$I^\eta(1) := \left\{\alpha=(\alpha_0,\cdots,\alpha_k) : k\geq 3, \sum_{i=1}^{k-2} f\left(\sigma^i\alpha\right) \leq 1 < \sum_{i=1}^{k-1} f\left(\sigma^i\alpha\right)\right\}.$$

For $\alpha\in I^\eta(1)$, it can be easily remarked that $\sum_{j=0}^{k-1} f\left(\sigma^j\alpha\right) > 1$. It means that there exists a unique integer $k'\leq k$ such that :

$$\sum_{j=0}^{k'-2} f\left(\sigma^j\alpha\right) \leq 1 < \sum_{j=0}^{k'-1} f\left(\sigma^j\alpha\right).$$

In the following, k and k' will be often denoted $k(\alpha)=k_1(\alpha)$ and $k'(\alpha)$ to remember the dependence in α. The following lemma can be easily shown :

Lemma 6.10. *Let $\alpha\in I^\eta(1)$. One has $|k(\alpha)-k'(\alpha)|\leq \frac{b_0}{a_0}+1$.*

Démonstration. Suppose $k'+1<k$ (otherwise it is trivial). Write :

$$\sum_{j=1}^{k-2} f\left(\sigma^j\alpha\right) - \sum_{j=0}^{k'-1} f\left(\sigma^j\alpha\right) \leq 1-1 \text{ implies } \sum_{j=k'}^{k-2} f\left(\sigma^j\alpha\right) \leq f\left(\alpha\right).$$

And finally, one finds $(k-2-k'+1)a_0\eta \leq b_0\eta$. □

Let α be an element of $I^\eta(1)$. We make a partition of the interval $[0, f(\alpha)[$ under a form that will be useful (as it is adapted to the dynamics of the special flow). Motivated by the definition of a special flow, let us divide it as follows for $k = k(\alpha)$ and $k' = k'(\alpha)$:

$$I_{k'-2}(\alpha) = [0, \sum_{j=0}^{k'-1} f\left(\sigma^j\alpha\right) - 1[, \cdots I_{p-2}(\alpha) = [\sum_{j=0}^{p-2} f\left(\sigma^j\alpha\right) - 1, \sum_{j=0}^{p-1} f\left(\sigma^j\alpha\right) - 1[, \cdots$$

$$I_{k-2}(\alpha) = [\sum_{j=0}^{k-2} f\left(\sigma^j\alpha\right) - 1, f\left(\alpha\right)[,$$

where $k'(\alpha) \leq p \leq k(\alpha)$. If $k(\alpha) = k'(\alpha)$, one puts $I_{k'-2}(\alpha) = I_{k-2}(\alpha) = [0, f(\alpha)[$.
A partition $\tilde{\mathcal{C}}$ of Σ can be defined. It is composed of the following atoms :

$$\tilde{\mathcal{C}_\gamma} := \mathcal{C}_{\gamma_0} \cap \cdots \cap \sigma^{-k}\mathcal{C}_{\gamma_k},$$

where γ be an element of $I^\eta(1)$. A partition $\overline{\mathcal{C}}$ of $\overline{\Sigma}$ can be constructed starting from the partition $\tilde{\mathcal{C}}$ and the partition of $[0, f(\gamma)[$. An atom of this partition $\overline{\mathcal{C}}$ is defined as

$$\overline{\mathcal{C}} := \left\{\overline{\mathcal{C}}_{\gamma,p} = \tilde{\mathcal{C}_\gamma} \times I_{p-2}(\gamma) : \gamma \in I^\eta(1), \text{ and } k'(\gamma) \leq p \leq k(\gamma)\right\}.$$

We will verify in next paragraph that this partition satisfies the properties of lemma 6.6. The choice of these specific intervals can seem quite artificial but it allows to know the exact action of $\overline{\sigma}$ on each atom of the partition

$$\forall (x,t) \in \overline{\mathcal{C}}_{\gamma,p},\ \overline{\sigma}(x,t) = (\sigma^{p-1}(x), 1 + t - \sum_{j=0}^{p-2} f(\sigma^j x)).$$

If we had only considered the partition made of the atoms $\tilde{C_\gamma} \times [0, f(\gamma)[$, we would not have a precise definition for $\overline{\sigma}(x,t)$.

Proof of the crucial lemma 6.6

In this section, lemma 6.6 is shown and proves in particular that the previous partition $\overline{\mathcal{C}}$ is well adapted to the special flow on $\overline{\Sigma}$. Let $(\gamma_i, p_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ be a family of couples such that $\gamma_i \in I^\eta(1)$ and $k'(\gamma_i) \leq p_i \leq k(\gamma_i)$. Suppose the considered atom is a non empty atom of $\vee_{i=0}^{n-1} \overline{\sigma}^{-i}\overline{\mathcal{C}}$ (otherwise the result is trivial by taking $B(\alpha)$ empty).

We begin by proving the second part of lemma 6.6. Let (x,t) be an element of $\overline{\mathcal{C}}_{\gamma_0,p_0} \cap \cdots \cap \overline{\sigma}^{-(n-1)}\overline{\mathcal{C}}_{\gamma_{n-1},p_{n-1}}$. We denote $k_j = k(\gamma_j)$. The sequence x is of the form $(\gamma_0^0, \cdots, \gamma_0^{k_0}, x')$ and t belongs to $I_{p_0-2}(\gamma_0)$. We recall that for $(x,t) \in \overline{\mathcal{C}}_{\gamma_0,p_0}$:

$$\overline{\sigma}(x,t) = \left(\sigma^{p_0-1}(x), 1 + t - \sum_{j=0}^{p_0-2} f\left(\sigma^j x\right)\right).$$

Necessarily, one has $\gamma_1 = (\gamma_0^{p_0-1}, \cdots, \gamma_0^{k_0}, \gamma_1^{k_0-p_0+2}, \cdots, \gamma_1^{k_1})$. Proceeding by induction, one finds that $x = (\gamma_0^0, \cdots, \gamma_0^{k_0}, \gamma_1^{k_0-p_0+2}, \cdots, \gamma_{n-1}^{k_{n-1}}, x")$. Define then $\alpha = (\gamma_0^0, \cdots, \gamma_0^{k_0}, \gamma_1^{k_0-p_0+2}, \cdots, \gamma_{n-1}^{k_{n-1}})$ and :

$$B(\gamma) := \left\{t \in [0, f(\gamma_0)[: \exists x \ st\ (x,t) \in \overline{\mathcal{C}}_{\gamma_0,p_0} \cap \cdots \cap \overline{\sigma}^{-(n-1)}\overline{\mathcal{C}}_{\gamma_{n-1},p_{n-1}}\right\}.$$

The first inclusion $\overline{\mathcal{C}}_{\gamma_0,p_0} \cap \cdots \cap \overline{\sigma}^{-(n-1)}\overline{\mathcal{C}}_{\gamma_{n-1},p_{n-1}} \subset \tilde{\mathcal{C}}_\alpha \times B(\gamma)$ is clear.
Now we will prove the converse inclusion. Consider (x,t) an element of $\overline{\mathcal{C}}_{\gamma_0,p_0} \cap \cdots \overline{\sigma}^{-(n-1)}\overline{\mathcal{C}}_{\gamma_{n-1},p_{n-1}}$. The only thing to prove is that $(X,t) = ((\gamma_0^0, \cdots, \gamma_0^{k_0}, \gamma_1^{k_0-p_0+2}, \cdots, \gamma_{n-1}^{k_{n-1}}, x'), t)$ is still an element of $\overline{\mathcal{C}}_{\gamma_0,p_0} \cap \cdots \overline{\sigma}^{-(n-1)}\overline{\mathcal{C}}_{\gamma_{n-1},p_{n-1}}$, for every x' in $\{1, \cdots, K\}^{\mathbb{N}}$. We proceed by induction and

suppose (X,t) belongs to $\overline{\mathcal{C}}_{\gamma_0,p_0} \cap \cdots \overline{\sigma}^{-(j-1)}\overline{\mathcal{C}}_{\gamma_{j-1},p_{j-1}}$ for some $j < n$. We have to verify that $\overline{\sigma}^j(X,t)$ belongs to $\overline{\mathcal{C}}_{\gamma_j,p_j}$. As (X,t) belongs to $\overline{\mathcal{C}}_{\gamma_0,p_0} \cap \cdots \overline{\sigma}^{-(j-1)}\overline{\mathcal{C}}_{\gamma_{j-1},p_{j-1}}$, we have

$$\overline{\sigma}^j(X,t) = \left(\sigma^{p_0+\cdots+p_{j-1}-j}(X), j + t - \sum_{i=0}^{p_0+\cdots+p_{j-1}-j-1} f(\sigma^i X) \right).$$

It has already been mentioned that for all i, $(\gamma_i^0, \cdots, \gamma_i^{k_i-p_i+1}) = (\gamma_{i-1}^{p_{i-1}-1}, \cdots, \gamma_{i-1}^{k_i})$ (as the considered atom is not empty). It follows that $\sigma^{p_0+\cdots+p_{j-1}-j}(X)$ belongs to $\tilde{\mathcal{C}}_{\gamma_j}$. We know that $\overline{\sigma}^j(x,t)$ is an element of $\overline{\mathcal{C}}_{\gamma_j,p_j}$ and as a consequence,

$$j + t - \sum_{i=0}^{p_0+\cdots+p_{j-1}-j-1} f(\sigma^i X) = j + t - \sum_{i=0}^{p_0+\cdots+p_{j-1}-j-1} f(\sigma^i x) \in I_{p_j-2}(\gamma_j).$$

By induction, we find that $\overline{\mathcal{C}}_{\gamma_0,p_0} \cap \cdots \cap \overline{\sigma}^{-(n-1)}\overline{\mathcal{C}}_{\gamma_{n-1},p_{n-1}} = \tilde{\mathcal{C}}_\alpha \times B(\gamma)$. For each $0 \leq j \leq n-1$, t belongs to $B(\gamma)$ implies that

$$t \in I_{p_j-2}(\gamma_j) - j + \sum_{i=0}^{p_0+\cdots+p_{j-1}-j-1} f(\sigma^i \alpha).$$

The set $B(\gamma)$ is then defined as the intersection of n subintervals of $[0, f(\gamma_0)[$ and is in fact a subinterval of $[0, f(\gamma_0)[$.

It remains now to prove upper and lower bounds on $\sum_{j=0}^{k-1} f\left(\sigma^j \alpha\right)$. Recall that

$$\alpha = (\gamma_0^0, \cdots, \gamma_0^{k_0}, \gamma_1^{k_0-p_0+2}, \cdots, \gamma_1^{k_1}, \cdots, \gamma_{n-1}^{k_{n-1}}).$$

As $0 \leq f(\gamma) \leq \frac{\epsilon}{2}$ for all γ (finite or infinite subsequence : see inequality (6.18)), we have then

$$\sum_{j=0}^{k-1} f\left(\sigma^j \alpha\right) \leq \sum_{l=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{k_l-2} f\left(\sigma^j \gamma_l\right) + \sum_{j=0}^{k_{n-1}-1} f\left(\sigma^j \gamma_{n-1}\right) \leq n(1+\epsilon).$$

For the lower bound, the same kind of procedure works with a little more care. For γ_0, one has

$$\sum_{j=1}^{k_0-1} f(\sigma^j \alpha) = \sum_{j=1}^{k_0-1} f(\sigma^j \gamma_0) > 1 > 1 - \epsilon.$$

and for $1 \leq l \leq n-1$, one has, using lemma 6.10,

$$\sum_{j=k_{l-1}-p_{l-1}+1}^{k_l-1} f(\sigma^j \gamma_l) > 1 - (k_{l-1} - p_{l-1} + 1) b_0 \eta > 1 - (2 + \frac{b_0}{a_0}) b_0 \eta > 1 - \epsilon,$$

where the relations between ϵ, η, a_0 and b_0 are defined in section 6.3. A lower bound on $\sum_{j=1}^{k-1} f(\sigma^j \alpha)$ is $n(1-\epsilon)$. This achieved the proof of the second part of lemma 6.6.
Recall that we have defined

$$I^\eta(n(1-\epsilon)) := \left\{ (\alpha_0', \cdots, \alpha_k') : k \geq 2, \sum_{j=1}^{k-2} f\left(\sigma^j \alpha'\right) \leq n(1-\epsilon) < \sum_{j=1}^{k-1} f\left(\sigma^j \alpha'\right) \right\}.$$

So we have also proved that there exists α' in $I^\eta(n(1-\epsilon))$ such that

$$\overline{\mathcal{C}}_{\gamma_0,p_0} \cap \cdots \cap \overline{\sigma}^{-(n-1)}\overline{\mathcal{C}}_{\gamma_{n-1},p_{n-1}} \subset \tilde{\mathcal{C}}_{\alpha'} \times [0, f(\gamma_0)[.$$

In other words, $\vee_{i=0}^{n-1}\overline{\sigma}^{-i}\overline{\mathcal{C}}$ is a refinement of the partition $\left(\tilde{\mathcal{C}}_{\alpha'} \times [0, f(\alpha')[\right)_{\alpha' \in I^\eta(n(1-\epsilon))}$ for any integer n. It is slightly stronger than the first part of lemma 6.6 and it concludes the proof of lemma 6.6.□

Remark. As a final comment on this section, we underline again that all the proofs have been written in the case of $\{1, \cdots, K\}^{\mathbb{N}}$ but can be adapted to the case of $\{1, \cdots, K\}^{-\mathbb{N}}$.

6.5.3 Uncertainty principle for eigenfunctions of the Laplacian

In the previous section 6.5.2, we have seen that the partitions of variable size are well adapted to the reparametrized flow (used in the Abramov theorem). Moreover, we have given a proof of lemma 6.6 that gives a link between the different partitions introduced. In this section, we will use the entropic uncertainty principle (theorem 6.3) to derive a lower bound on the classical entropy of $\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}}$ with respect to the partition $\overline{\mathcal{C}}_\hbar := ([\alpha] \times [0, f(\alpha)[)_{\alpha \in I^\eta(\hbar)}$. Precisely, we will prove :

Proposition 6.11. *With the notations of section 6.4, one has*

$$H\left(\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}_+}, \overline{\mathcal{C}}_\hbar^+\right) + H\left(\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}_-}, \overline{\mathcal{C}}_\hbar^-\right) \geq (1-\epsilon')(1-\epsilon)|\log\hbar| - c\delta_0|\log\hbar| + C, \tag{6.39}$$

where H is defined by (6.8) and where $C, c \in \mathbb{R}$ does not depend on $\hbar$.

To prove this result, we will proceed in three steps. First, we will introduce an energy cutoff in order to get the sharpest bound as possible in the entropic uncertainty principle. Then, we will apply the entropic uncertainty principle and derive a lower bound on $H\left(\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}_+}, \overline{\mathcal{C}}_\hbar^+\right) + H\left(\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}_-}, \overline{\mathcal{C}}_\hbar^-\right)$. Finally, we will use sharp estimates from [5] to conclude.

Energy cutoff

Before applying the uncertainty principle, we proceed to sharp energy cutoffs so as to get precise lower bounds on the quantum entropy (as it was done in [3], [7] and [5]). These cutoffs are made in our microlocal analysis in order to get as good exponential decrease as possible of the norm of the refined quantum partition. This cutoff in energy is possible because even if the distributions $\mu_\hbar$ are defined on T^*M, they concentrate on the energy layer S^*M. The following energy localization is made in a way to compactify the phase space and in order to preserve the semiclassical measure.
Let δ_0 be a positive number less than 1 and $\chi_{\delta_0}(t)$ in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$. Moreover, $\chi_{\delta_0}(t) = 1$ for $|t| \leq e^{-\delta_0/2}$ and $\chi_{\delta_0}(t) = 0$ for $|t| \geq 1$. As in [7], the sharp $\hbar$-dependent cutoffs are then defined in the following way :

$$\forall \hbar \in (0,1),\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall \rho \in T^*M, \qquad \chi^{(n)}(\rho, \hbar) := \chi_{\delta_0}(e^{-n\delta_0}\hbar^{-1+\delta_0}(H(\rho) - 1/2)).$$

For n fixed, the cutoff $\chi^{(n)}$ is localized in an energy interval of length $2e^{n\delta_0}\hbar^{1-\delta_0}$ centered around the energy layer $\mathcal{E}$. In this paper, indices n will satisfy $2e^{n\delta_0}\hbar^{1-\delta_0} << 1$. It implies that the widest cutoff is supported in an energy interval of microscopic length and that $n \leq K_{\delta_0}|\log\hbar|$, where $K_{\delta_0} \leq \delta_0^{-1}$. Using then a non standard pseudodifferential calculus (see [7] for a brief reminder of the procedure from [96]), one can quantize these cutoffs into pseudodifferential operators. We will denote $\mathrm{Op}(\chi^{(n)})$ the quantization of $\chi^{(n)}$. The main properties of this quantization are recalled in section 6.8.2. In particular, the quantization of these cutoffs preserves the eigenfunctions of the Laplacian, i.e.

$$\|\psi_\hbar - \mathrm{Op}(\chi^{(n)})\psi_\hbar\| = O(\hbar^\infty)\|\psi_\hbar\|.$$

Applying the entropic uncertainty principle

Let $\|\psi_\hbar\| = 1$ be a fixed element of the sequence of eigenfunctions of the Laplacian defined earlier, associated to the eigenvalue $-\frac{2}{\hbar^2}$.
To get bound on the entropy of the suspension measure, the entropic uncertainty principle should not be applied to the eigenvectors $\psi_\hbar$ directly but it will be applied several times. Precisely, we will apply it to each $P_\gamma\psi_\hbar := P_{\gamma_1}P_{\gamma_0}(-\eta)\psi_\hbar$ where $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1)$ varies in $\{1, \cdots, K\}^2$. In order to apply the entropic uncertainty principle to $P_\gamma\psi_\hbar$, we introduce new families of quantum partitions corresponding to each γ.
Let $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1)$ be an element of $\{1, \cdots, K\}^2$. Introduce the following families of indices :

$$I_\hbar(\gamma) := \{(\alpha') : \gamma.\alpha' \in I^\eta(\hbar)\},$$

$$K_\hbar(\gamma) := \{(\beta') : \beta'.\gamma \in K^\eta(\hbar)\}.$$

Recall that we have defined $\gamma.\alpha' = (\gamma_0, \gamma_1, \alpha')$ in section 6.3. We underline that each sequence α of $I^\eta(\hbar)$ can be written under the form $\gamma.\alpha'$ where $\alpha' \in I_\hbar(\gamma)$. The same works for $K^\eta(\hbar)$. The following partitions of identity can be associated to these new families, for $\alpha' \in I_\hbar(\gamma)$ and $\beta' \in K_\hbar(\gamma)$,

$$\tilde{\tau}_{\alpha'} = P_{\alpha'_n}(n\eta)\cdots P_{\alpha'_2}(2\eta),$$

$$\tilde{\pi}_{\beta'} = P_{\beta'_{-n}}(-n\eta)\cdots P_{\beta'_{-2}}(-2\eta).$$

For analogous reasons as the case of $I^\eta(\hbar)$, the families $(\tilde{\tau}_{\alpha'})_{\alpha'\in I_\hbar(\gamma)}$ and $(\tilde{\pi}_{\beta'})_{\beta'\in I_\hbar(\gamma)}$ form quantum partitions of identity.
Given these new quantum partitions of identity, the entropic principle should be applied for given initial conditions $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1)$ in times 0 and 1. We underline that for $\alpha' \in I_\hbar(\gamma)$ and $\beta' \in K_\hbar(\gamma)$,

$$\tilde{\tau}_{\alpha'}U^{-\eta}P_\gamma = \tau_{\gamma.\alpha'}U^{-\eta} \text{ and } \tilde{\pi}_{\beta'}P_\gamma = \pi_{\beta'.\gamma}, \tag{6.40}$$

where $\gamma.\alpha' \in I^\eta(\hbar)$ and $\beta'.\gamma \in K^\eta(\hbar)$ by definition. In equality (6.40) appears the fact that the definitions of τ and π are slightly different (see (6.23) and (6.24)). It is due to the fact that we want to compose $\tilde{\tau}$ and $\tilde{\pi}$ with the same operator P_γ.
Suppose now that $\|P_\gamma\psi_\hbar\|$ is not equal to 0. We apply the quantum uncertainty principle (6.3) using that

- $(\tilde{\tau}_{\alpha'})_{\alpha'\in I_\hbar(\gamma)}$ and $(\tilde{\pi}_{\beta'})_{\beta'\in K_\hbar(\gamma)}$ are partitions of identity ;
- the cardinal of $I_\hbar(\gamma)$ and $K_\hbar(\gamma)$ is bounded by $\mathcal{N} \simeq \hbar^{-K_0}$ where K_0 is some fixed positive number (depending on the cardinality of the partition K, on a_0, on b_0 and η) ;
- $\mathrm{Op}(\chi^{(k')})$ is a family of bounded bounded operators $O_{\beta'}$ (where k' is the length of β') ;
- the parameter δ' can be taken equal to $\|P_\gamma\psi_\hbar\|^{-1}\hbar^L$ where L is such that $\hbar^{L-K_0} << h^{1/2(1-\epsilon')(1-\epsilon)}$ (see corollary 6.22) ;
- $U^{-\eta}$ is an isometry ;
- $\tilde{\psi_\hbar} := \frac{P_\gamma\psi_\hbar}{\|P_\gamma\psi_\hbar\|}$ is a normalized vector.

Applying the entropic uncertainty principle (6.3), one gets :

Corollary 6.12. *Suppose that $\|P_\gamma\psi_\hbar\|$ is not equal to 0. Then, one has*

$$h_{\tilde{\tau}}(U^{-\eta}\tilde{\psi_\hbar}) + h_{\tilde{\pi}}(\tilde{\psi_\hbar}) \geq -2\log\left(c^\gamma_\chi(U^{-\eta}) + \hbar^{L-K_0}\|P_\gamma\psi_\hbar\|^{-1}\right),$$

where $c^\gamma_\chi(U^{-\eta}) = \max_{\alpha'\in I_\hbar(\gamma),\beta'\in K_\hbar(\gamma)} \left(\|\tilde{\tau}_{\alpha'}U^{-\eta}\tilde{\pi}^*_{\beta'}Op(\chi^{(k')})\|\right).$

Under this form, the quantity $\|P_\gamma\psi_\hbar\|^{-1}$ appears several times and we would like to get rid of it. First, remark that the quantity $c^\gamma_\chi(U^{-\eta})$ can be easily replaced by

$$c_\chi(U^{-\eta}) := \max_{\gamma\in\{1,\cdots,K\}^2}\ \max_{\alpha\in I_\hbar(\gamma),\beta\in K_\hbar(\gamma)} \left(\|\tilde{\tau}_\alpha U^{-\eta}\tilde{\pi}^*_\beta \mathrm{Op}(\chi^{(k')})\|\right), \tag{6.41}$$

which is independent of γ. Then, one has the following lower bound :

$$-2\log\left(c_\chi^\gamma(U^{-\eta})+\hbar^{L-K_0}\|P_\gamma\psi_\hbar\|^{-1}\right)\geq -2\log\left(c_\chi(U^{-\eta})+\hbar^{L-K_0}\right)+2\log\|P_\gamma\psi_\hbar\|^2. \tag{6.42}$$

as $\|P_\gamma\psi_\hbar\|\leq 1$. Now that we have given an alternative lower bound, we rewrite $h_{\tilde\tau}(U^{-\eta}\tilde\psi_\hbar)$ as follows :

$$h_{\tilde\tau}(U^{-\eta}\tilde\psi_\hbar)=-\sum_{\alpha'\in I_\hbar(\gamma)}\|\tilde\tau_{\alpha'}U^{-\eta}\tilde\psi_\hbar\|^2\log\|\tilde\tau_{\alpha'}U^{-\eta}P_\gamma\psi_\hbar\|^2+\sum_{\alpha'\in I_\hbar(\gamma)}\|\tilde\tau_{\alpha'}U^{-\eta}\tilde\psi_\hbar\|^2\log\|P_\gamma\psi_\hbar\|^2.$$

Using the fact that $\psi_\hbar$ is an eigenvector of U^η and that $(\tilde\tau_{\alpha'})_{\alpha'\in I_\hbar(\gamma)}$ is a partition of identity, one has

$$h_{\tilde\tau}(U^{-\eta}\tilde\psi_\hbar)=-\frac{1}{\|P_\gamma\psi_\hbar\|^2}\sum_{\alpha'\in I_\hbar(\gamma)}\|\tau_{\gamma.\alpha'}\psi_\hbar\|^2\log\|\tau_{\gamma.\alpha'}\psi_\hbar\|^2+\log\|P_\gamma\psi_\hbar\|^2.$$

The same holds for $h_{\tilde\pi}(\tilde\psi_\hbar)$ (using here equality (6.40)),

$$h_{\tilde\pi}(\tilde\psi_\hbar)=-\frac{1}{\|P_\gamma\psi_\hbar\|^2}\sum_{\beta'\in K_\hbar(\gamma)}\|\pi_{\beta'.\gamma}\psi_\hbar\|^2\log\|\pi_{\beta'.\gamma}\psi_\hbar\|^2+\log\|P_\gamma\psi_\hbar\|^2.$$

Combining these last two equalities with (6.42), we find that

$$-\sum_{\alpha'\in I_\hbar(\gamma)}\|\tau_{\gamma.\alpha'}\psi_\hbar\|^2\log\|\tau_{\gamma.\alpha'}\psi_\hbar\|^2-\sum_{\beta'\in K_\hbar(\gamma)}\|\pi_{\beta'.\gamma}\psi_\hbar\|^2\log\|\pi_{\beta'.\gamma}\psi_\hbar\|^2\geq -2\|P_\gamma\psi_\hbar\|^2\log\left(c_\chi(U^{-\eta})+\hbar^{L-K_0}\right). \tag{6.43}$$

We underline that this lower bound is trivial in the case where $\|P_\gamma\psi_\hbar\|$ is equal to 0. Using the following numbers :

$$c_\gamma=\frac{f(\gamma)}{\sum_{\gamma'\in\{1,\cdots,K\}^2}f(\gamma')\|P_{\gamma'}\psi_\hbar\|^2}, \tag{6.44}$$

one easily checks that $\sum_{\gamma\in\{1,\cdots,K\}^2}c_\gamma\|P_\gamma\psi_\hbar\|^2=1$. If we multiply (6.43) by c_γ and make the sum over all γ in $\{1,\cdots,K\}^2$, we find

$$-\sum_{\alpha\in I^\eta(\hbar)}c_\alpha\|\tau_\alpha\psi_\hbar\|^2\log\|\tau_\alpha\psi_\hbar\|^2-\sum_{\beta\in K^\eta(\hbar)}c_\beta\|\pi_\beta\psi_\hbar\|^2\log\|\pi_\beta\psi_\hbar\|^2\geq -2\log\left(c_\chi(U^{-\eta})+\hbar^{L-K_0}\right).$$

Finally, we use that $\sum_{\alpha\in I^\eta(\hbar)}c_\alpha\|\tau_\alpha\psi_\hbar\|^2=1$ and $\sum_{\beta\in K^\eta(\hbar)}c_\beta\|\pi_\beta\psi_\hbar\|^2=1$ and derive the following property :

Corollary 6.13. *One has*

$$H\left(\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}_+},\overline{\mathcal{C}}_\hbar^+\right)+H\left(\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}_-},\overline{\mathcal{C}}_\hbar^-\right)\geq -2\log\left(c_\chi(U^{-\eta})+\hbar^{L-K_0}\right)-\log\left(\max_\gamma c_\gamma\right). \tag{6.45}$$

As expected, by a careful use of the entropic uncertainty principle, we have been able to obtain a lower bound on the entropy of the measures $\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}_+}$ and $\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}_-}$.

Exponential decrease of the atoms of the quantum partition

Now that we have obtained the lower bound (6.45), we give an estimate on the exponential decrease of the atoms of the quantum partition. As in [3], [7], [5], one has[4] :

[4]In the higher dimension case mentioned in the footnote of section 6.1.2, we should replace $\hbar^{-\frac{1}{2}}$ (where d is the dimension of M) by $\hbar^{-\frac{d-1}{2}}$ in inequality (6.46).

Theorem 6.14. *[3] [7] [5] For every $\mathcal{K} > 0$ ($\mathcal{K} \leq K_{\delta_0}$), there exists $\hbar_{\mathcal{K}}$ and $C_{\mathcal{K}}$ such that uniformly for all $\hbar \leq \hbar_{\mathcal{K}}$, for all $k + k' \leq \mathcal{K}|\log\hbar|$,*

$$\|P_{\alpha_k} U^\eta P_{\alpha_{k-1}} \cdots U^\eta P_{\alpha_0} U^{3\eta} P_{\alpha'_{k'}} U^\eta \cdots P_{\alpha'_0} Op(\chi^{(k')})\|_{L^2(M)}$$
$$\leq C_{\mathcal{K}} \hbar^{-\frac{1}{2}-c\delta_0} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sum_{j=0}^{k-1} f(\sigma^j\alpha) + \sum_{j=0}^{k'-1} f(\sigma^j\alpha')\right)\right), \tag{6.46}$$

where c depends only on the riemannian manifold M.

Outline that the crucial role of the sharp energy cutoff appears in particular to prove this theorem. In fact, without the cutoff, the previous norm operator could have only be bounded by 1 and the entropic uncertainty principle would have been empty. The previous inequality (6.46) allows to give an estimate on the quantity (6.41) (as it allows us to bound $c_\chi(U^{-\eta})$). In fact, one has, for each $\gamma \in \{1, \cdots, K\}^2$,

$$\|\tilde{\tau}_\alpha U^{-\eta} \tilde{\pi}^*_\beta \mathrm{Op}(\chi^{(k')})\| = \|P_{\alpha_k} U^\eta P_{\alpha_{k-1}} \cdots U^\eta P_{\alpha_2} U^{3\eta} P_{\beta_{-2}} U^\eta \cdots P_{\beta_{-k'}} \mathrm{Op}(\chi^{(k')})\|,$$

where $(\alpha_2, \cdots, \alpha_k) \in I_\hbar(\gamma)$ and $(\beta_{-k'}, \cdots, \beta_{-2}) \in K_\hbar(\gamma)$. Using the definition of the sets $I^\eta(\hbar)$ (6.26) and $K^\eta(\hbar)$ (6.27), one has $k + k' \leq \frac{2}{a_0\eta}|\log\hbar|$. Using theorem (6.14) with $\mathcal{K} = \frac{2}{a_0\eta}$, one has

$$\|\tilde{\tau}_\alpha U^{-\eta} \tilde{\pi}^*_\beta \mathrm{Op}(\chi^{(k')})\| \leq C_{\mathcal{K}} \hbar^{-\frac{1}{2}-c\delta_0} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sum_{j=2}^{k-1} f_+(\sigma_+^j\alpha) + \sum_{j=2}^{k'-1} f_-(\sigma_-^j\beta)\right)\right),$$

where $C_{\mathcal{K}}$ does not depend on $\hbar$ and c is some universal constant. Using again the definition of the sets $I^\eta(\hbar)$ (6.26) and $K^\eta(\hbar)$ (6.27), one has :

$$c_\chi(U^{-\eta}) = \max_{\gamma\in\{1,\cdots,K\}^2} \max_{\alpha\in I_\hbar(\gamma), \beta\in K_\hbar(\gamma)} \left(\|\tilde{\tau}_\alpha U^{-\eta} \tilde{\pi}^*_\beta \mathrm{Op}(\chi^{(k')})\|\right) \leq \tilde{C}_{\mathcal{K}} \hbar^{\frac{1}{2}(1-\epsilon')(1-\epsilon)} \hbar^{-c\delta_0},$$

where $\tilde{C}_{\mathcal{K}}$ does not depend on $\hbar$. The main inequality (6.45) for the quantum entropy can be rewritten using this last bound and it concludes the proof of proposition 6.11.□

6.6 Subadditivity of the quantum entropy

As was mentioned in section 6.4 and proved in section 6.5, the uncertainty principle gives an explicit lower bound on

$$\frac{1}{n_E(\hbar)}\left(H_{n_E(\hbar)}\left(\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}_+}, \overline{\sigma}_+, \overline{\mathcal{C}}_+\right) + H_{n_E(\hbar)}\left(\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}_-}, \overline{\sigma}_-, \overline{\mathcal{C}}_-\right)\right).$$

To prove our main theorem 6.2, we need to show that this lower bound holds also for a fixed n_0 on the quantity

$$\frac{1}{n_0}\left(H_{n_0}\left(\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}_+}, \overline{\sigma}_+, \overline{\mathcal{C}}_+\right) + H_{n_0}\left(\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}_-}, \overline{\sigma}_-, \overline{\mathcal{C}}_-\right)\right).$$

(as we need to let $\hbar$ tend to 0 independently of n to recover the semiclassical measure $\overline{\mu}^\Sigma$: see section 6.4.3). To do this we want to reproduce the classical argument for the existence of the metric entropy (see (6.10)), i.e. we need to prove a subadditivity property for logarithmic time as was given by theorem 6.8. A key point to prove the subadditivity property in the case of the metric entropy is that the measure is invariant under the dynamics (see (6.10)). In our case, invariance of the semiclassical measure under the geodesic flow is a consequence of the Egorov property (6.1) : to prove that subadditivity almost holds (in the sense of the previous theorem), we will have to prove an Egorov property for logarithmic times. We will see that with our choice of 'local' Ehrenfest time, this will be possible and the theorem 6.8 will then hold.
The proof of theorem 6.8 is the subject of this section (and it also uses results from section 6.7).

Remark. In this section, only the case of $\{1,\cdots,K\}^{\mathbb{N}}$ is treated. As was mentioned, the proof of the backward case $\{1,\cdots,K\}^{-\mathbb{N}}$ works in the same way.

Let n_0 and m be two positive integers such that que $m+n_0 \leq T_E(\hbar)$. One has

$$H\left(\vee_{i=0}^{n+n_0-1}\overline{\sigma}^{-i}\overline{\mathcal{C}},\overline{\mu}_{\hbar}^{\overline{\Sigma}}\right) = H\left(\vee_{i=0}^{n-1}\overline{\sigma}^{-i}\overline{\mathcal{C}} \vee \vee_{i=n}^{n_0+n-1}\overline{\sigma}^{-i}\overline{\mathcal{C}},\overline{\mu}_{\hbar}^{\overline{\Sigma}}\right).$$

Using classical properties of the metric entropy, one has (see section 6.2.1)

$$H_{n+n_0}\left(\overline{\sigma},\overline{\mu}_{\hbar}^{\overline{\Sigma}},\overline{\mathcal{C}}\right) \leq H_n\left(\overline{\sigma},\overline{\mu}_{\hbar}^{\overline{\Sigma}},\overline{\mathcal{C}}\right) + H_{n_0}\left(\overline{\sigma},\overline{\sigma}^n\sharp\overline{\mu}_{\hbar}^{\overline{\Sigma}},\overline{\mathcal{C}}\right).$$

Using proposition 6.15 and the continuity of the function $x\log x$ on $[0,1]$, there exists a function $R(n_0,\hbar)$ with the properties of theorem 6.8 such that $H_{n_0}\left(\overline{\sigma},\overline{\sigma}^n\sharp\overline{\mu}_{\hbar}^{\overline{\Sigma}},\overline{\mathcal{C}}\right) = H_{n_0}\left(\overline{\sigma},\overline{\mu}_{\hbar}^{\overline{\Sigma}},\overline{\mathcal{C}}\right) + R(n_0,\hbar)$ and thus

$$H_{n+n_0}\left(\overline{\sigma},\overline{\mu}_{\hbar}^{\overline{\Sigma}},\overline{\mathcal{C}}\right) \leq H_n\left(\overline{\sigma},\overline{\mu}_{\hbar}^{\overline{\Sigma}},\overline{\mathcal{C}}\right) + H_{n_0}\left(\overline{\sigma},\overline{\mu}_{\hbar}^{\overline{\Sigma}},\overline{\mathcal{C}}\right) + R(n_0,\hbar).\square \tag{6.47}$$

So the crucial point to prove this theorem is to show that the measure of the atoms of the refined partition is almost invariant under $\overline{\sigma}$ (proposition 6.15). In the following of this section, A is defined as

$$A = \overline{\mathcal{C}}_{\gamma_0,p_0} \cap \cdots \cap \overline{\sigma}^{-(n_0-1)}\overline{\mathcal{C}}_{\gamma_{n_0-1},p_{n_0-1}}.$$

6.6.1 Pseudo-invariance of the measure of the atoms of the partitions

From this point, our main goal is to show the pseudo invariance of the atoms of the refined partition. More precisely, we show :

Proposition 6.15. *Let m,n_0 be two positive integers such that $m+n_0 \leq T_E(\hbar)$. Consider an atom of the refined partition $A = \overline{\mathcal{C}}_{\gamma_0,p_0} \cap \cdots \cap \overline{\sigma}^{-(n_0-1)}\overline{\mathcal{C}}_{\gamma_{n_0-1},p_{n_0-1}}$. One has :*

$$\overline{\mu}_{\hbar}^{\overline{\Sigma}}\left(\overline{\sigma}^{-m}A\right) = \overline{\mu}_{\hbar}^{\overline{\Sigma}}\left(A\right) + O(\hbar^{(1-2\nu)/6}),$$

with a uniform constant in n_0 and m in the allowed interval. The constant $\nu < 1/2$ is the one defined by theorem 6.18.

This result says that the measure $\overline{\mu}_{\hbar}^{\overline{\Sigma}}$ is almost $\overline{\sigma}$ invariant for logarithmic times. As a consequence, the classical argument (see (6.10)) for subadditivity of the entropy can be applied as long as we consider times where the pseudo invariance holds (see (6.47)).
Let A be as in the proposition. From lemma 6.6, there exists $(\alpha_0,\cdots,\alpha_k)$ and $B(\gamma)$ such that

$$A = \left(\mathcal{C}_{\alpha_0} \cap \cdots \sigma^{-k}\mathcal{C}_{\alpha_k}\right) \times B(\gamma).$$

Still from lemma 6.6, one knows that $B(\gamma)$ is a subinterval of $[0, f(\gamma_0)[$. Moreover, the following property on α holds :

$$n_0(1-\epsilon) \leq \sum_{j=0}^{k-1} f(\sigma^j\alpha) \leq n_0(1+\epsilon). \tag{6.48}$$

The plan of the proof of proposition 6.15 is the following. First, we will give an exact expression in terms of α and $B(\gamma)$ of $\overline{\mu}_{\hbar}^{\overline{\Sigma}}\left(\overline{\sigma}^{-m}A\right)$. Then, we will see how to prove the proposition making the simplifying assumption that all operators $(P_i(k\eta))_{i,k}$ commute. Finally, we will estimate the error term due to the fact that operators do not exactly commute.

Computation of $\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}}(\overline{\sigma}^{-m}A)$

We choose a positive integer m. As a first step of the proof, we want to give a precise formula for the measure of $\overline{\sigma}^{-m}A$. To do this, we have to determine the shape of the set $\overline{\sigma}^{-m}A$. Let us then define

$$\overline{\Sigma}_p^m := \left\{ (x,t) \in \overline{\Sigma} : \sum_{j=0}^{p-2} f(\sigma^j x) \leq m + t < \sum_{j=0}^{p-1} f(\sigma^j x) \right\}.$$

We underline that because $m \geq 1$, we have that $\overline{\Sigma}_p^m$ is empty for $p \leq 3$. One has then $\overline{\Sigma} = \bigsqcup_{p\geq 3} \overline{\Sigma}_p^m$ and as a consequence

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma}^{-m}A &= \bigsqcup_{p\geq 3} \left(\overline{\Sigma}_p^m \cap \overline{\sigma}^{-m}A \right) \\
&= \bigsqcup_{p\geq 3} \left\{ (x,t) \in \overline{\Sigma}_p^m : m + t - \sum_{j=0}^{p-2} f(\sigma^j x) \in B(\gamma), (x_{p-1}, \cdots, x_{p+k-1}) = \alpha \right\}.
\end{aligned}$$

Note that $t \in B(\gamma) - m + \sum_{j=0}^{p-2} f(\sigma^j x)$ together with $(x_{p-1}, \cdots, x_{p+k-1}) = \alpha$ imply that $\sum_{j=0}^{p-2} f(\sigma^j x) \leq m + t < \sum_{j=0}^{p-1} f(\sigma^j x)$. It allows to rewrite

$$\overline{\sigma}^{-m}A = \bigsqcup_{p\geq 3} \left\{ (x,t) \in \Sigma \times \mathbb{R}_+ : 0 \leq t < f(x), t \in B(\gamma) - m + \sum_{j=0}^{p-2} f(\sigma^j x), (x_{p-1}, \cdots, x_{p+k-1}) = \alpha \right\}.$$

Finally, one can write the measure of this suspension set

$$\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}} \left(\overline{\sigma}^{-m}A \right) = \sum_{p\geq 1} \sum_{\substack{|\beta| = p+k \\ (\beta_{p-1}, \cdots, \beta_{p+k-1}) = \alpha}} c_{\beta,\alpha}(m) \| P_{\beta_{k+p-1}}((k+p-1)\eta) P_{\beta_{k+p-2}}((k+p-2)\eta) \cdots P_{\beta_0} \psi_\hbar \|^2,$$

where

$$c_{\beta,\alpha}(m) = \mathrm{Leb} \left(B(\gamma) \cap [m - \sum_{j=0}^{p-2} f(\sigma^j \beta), m - \sum_{j=1}^{p-2} f(\sigma^j \beta)[\right) / \left(\sum_{\gamma' \in \{1,\cdots,K\}^2} f(\gamma') \mu_\hbar^\Sigma([\gamma']) \right).$$

For the sake of simplicity, we will denote λ the normalization constant of the measure, i.e.

$$\lambda^{-1} := \sum_{\gamma' \in \{1,\cdots,K\}^2} f(\gamma') \mu_\hbar^\Sigma([\gamma']).$$

Outline that the previous sum runs a finite number of p with at most $2b_0/a_0$ non zeros terms in each string β (as $c_{\bullet,\alpha}(m)$ is zero except a finite number of times). For simplicity of the following of the proof, we reindex the previous expressions

$$\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}} \left(\overline{\sigma}^{-m}A \right) = \sum_{p\geq 3} \sum_{\substack{|\beta| = p+k \\ (\beta_0, \cdots, \beta_k) = \alpha}} c_{\beta,\alpha}(m) \| P_{\beta_k}((k+p-1)\eta) P_{\beta_{k-1}}((k+p-2)\eta) \cdots P_{\beta_{-p+1}} \psi_\hbar \|^2, \tag{6.49}$$

where $c_{\beta,\alpha}(m) = \lambda \ \mathrm{Leb} \left(B(\gamma) \cap [m - \sum_{j=0}^{p-2} f(\sigma^j \beta), m - \sum_{j=1}^{p-2} f(\sigma^j \beta)[\right)$ with λ defined as previously. Then, to prove proposition 6.15, we have to show that the previous quantity (6.49) is equal to

$$\lambda \ \mathrm{Leb} \left(B(\gamma) \right) \| P_{\alpha_k}(k\eta) \cdots P_{\alpha_0} \psi_\hbar \|_{L^2}^2 + O_{L^2}(\hbar^{(1-2\nu)/6}).$$

If everything would commute...

We will now use our explicit expression for $\overline{\mu}_\hbar^\Sigma\left(\overline{\sigma}^{-m}A\right)$ (see (6.49)) and verify it is equal to $\overline{\mu}_\hbar^\Sigma(A)$ under the simplifying assumption that all the involved pseudodifferential operators commute. In the next section, we will then give an estimate of the error term due to the fact that the operators do not exactly commute. In order to prove the pseudo invariance, denote

$$K_m(\alpha) := \{\beta = (\beta_{-p+1}, \cdots, \beta_k) : (\beta_0, \cdots, \beta_k) = \alpha, c_{\beta,\alpha}(m) \neq 0\}$$

and

$$K_m^{(q)}(\alpha) := \{(\beta_{-q+1}, \cdots, \beta_k) : \exists \gamma = (\gamma_{-p+1}, \cdots, \gamma_{-q}) \text{ s.t. } q < p,\ \gamma.\beta \in K_m(\alpha)\}.$$

With these notations, we can write (6.49) as follows :

$$\overline{\mu}_\hbar^\Sigma\left(\overline{\sigma}^{-m}A\right) = \sum_{\beta\in K_m(\alpha)} c_{\beta,\alpha}(m)\|\tau_\beta\psi_\hbar\|^2 = \sum_{p=3}^{N}\sum_{\beta\in K_m(\alpha):|\beta|=k+p} c_{\beta,\alpha}(m)\|\tau_\beta\psi_\hbar\|^2. \tag{6.50}$$

Recall that by definition (see (6.23)) $\tau_\beta := P_{\beta_k}((k+p-1)\eta)P_{\beta_{k-1}}((k+p-2)\eta)\cdots P_{\beta_{-p+1}}$. For simplicity of notations, let us denote $B(\gamma) = [a, b[$ (where a and b obviously depend on γ). A last notation we define is, for β such that $|\beta| = k+q$ and $\sigma^{q-1}\beta = \alpha$,

$$\overline{c}_{\beta,\alpha}(m) := \lambda \text{ Leb}\left([a, b[\cap[a, m - \sum_{j=1}^{q-2} f(\sigma^j\beta)[\right), \tag{6.51}$$

where λ is the normalization constant of the measure previously defined. Suppose now that all the operators $(P_i(k\eta))_{i,k}$ commute. We have the following lemma :

Lemma 6.16. *If all the operators $(P_i(k\eta))_{i,k}$ commute, then one has, for $2 \leq q \leq N$:*

$$\sum_{\beta\in K_m(\alpha):|\beta|=k+q} c_{\beta,\alpha}(m)\|\tau_\beta\psi_\hbar\|^2 + \sum_{\beta\in K_m^{(q)}(\alpha)} \overline{c}_{\beta,\alpha}(m)\|\tau_\beta\psi_\hbar\|^2 = \sum_{\beta\in K_m^{(q-1)}(\alpha)} \overline{c}_{\beta,\alpha}(m)\|\tau_\beta\psi_\hbar\|^2.$$

Démonstration. Let $2 \leq q \leq N$. Consider β an element of $K_m^{(q-1)}(\alpha)$. Using the property of partition of identity, we have

$$\sum_{\beta\in K_m^{(q-1)}(\alpha)} \overline{c}_{\beta,\alpha}(m)\|\tau_\beta\psi_\hbar\|^2 = \sum_{\gamma=1}^{K}\sum_{\beta\in K_m^{(q-1)}(\alpha)} \overline{c}_{\beta,\alpha}(m)\|P_\gamma(-\eta)\tau_\beta\psi_\hbar\|^2.$$

For each $1 \leq \gamma \leq K$, we have the following property for $\overline{c}_{\gamma.\beta,\alpha}(m)$ (as $f \geq 0$) :

$$\overline{c}_{\beta,\alpha}(m) = \overline{c}_{\gamma.\beta,\alpha}(m) + c_{\gamma.\beta,\alpha}(m).$$

We can write then

$$\sum_{\beta\in K_m^{(q-1)}(\alpha)} \overline{c}_{\beta,\alpha}(m)\|\tau_\beta\psi_\hbar\|^2 = \sum_{\gamma=1}^{K}\sum_{\beta\in K_m^{(q-1)}(\alpha)} (\overline{c}_{\gamma.\beta,\alpha}(m) + c_{\gamma.\beta,\alpha}(m))\|P_\gamma(-\eta)\tau_\beta\psi_\hbar\|^2.$$

Notice that, as we have assumed the operators commute, we have

$$P_\gamma(-\eta)P_{\beta_k}((k+q-2)\eta)\cdots P_{\beta_{-q+2}}\psi_\hbar = P_{\beta_k}((k+q-1)\eta)\cdots P_{\beta_{-q+2}}P_\gamma(-\eta)\psi_\hbar. \tag{6.52}$$

As a consequence, we have

$$\sum_{\beta\in K_m^{(q-1)}(\alpha)} \overline{c}_{\beta,\alpha}(m)\|\tau_\beta\psi_\hbar\|^2 = \sum_{\gamma=1}^{K}\sum_{\beta\in K_m^{(q-1)}(\alpha)} (\overline{c}_{\gamma.\beta,\alpha}(m) + c_{\gamma.\beta,\alpha}(m))\|\tau_\beta P_\gamma(-\eta)\psi_\hbar\|^2.$$

By definition of the different sets K_m and as $\psi_\hbar$ is an eigenfunction of the Laplacian, this last equality allows to conclude the proof of the lemma. □

Proceeding then by induction from N to 1 (see equality (6.50)) and using the previous lemma at each step, we can conclude that if all the operators commute, then

$$\overline{\mu}_{\hbar}^{\overline{\Sigma}}\left(\overline{\sigma}^{-m}A\right)=\overline{\mu}_{\hbar}^{\overline{\Sigma}}\left(A\right).$$

Estimates of the error terms

Regarding to the previous section, we have to see what is exactly the error term we forgot at each step of the recurrence and we have to verify that it is bounded by some positive power of $\hbar$. Precisely, we have to understand what is the error term in equation (6.52) if we do not suppose anymore that all the operators commute. Precisely, the error term we have to take into account in (6.52) is

$$R_{\beta,\gamma,\hbar}=\sum_{j=-q+2}^{k}P_{\beta_k}((k+q-2)\eta)\cdots P_{\beta_{j+1}}((j+q-1)\eta)R^j(\beta,\gamma)P_{\beta_{j-1}}((j+q-3)\eta)\cdots P_{\beta_{-q+2}}\psi_\hbar,$$

where $R^j(\beta,\gamma)=[P_\gamma(-\eta),P_{\beta_j}((j+q-2)\eta)]$ is the bracket of the two operators. We denote $R^j_{\beta,\gamma,\hbar}$ each term of the previous sum. The error term we forgot at each step q of the induction in the previous section is then

$$E(\hbar,q):=\sum_{\gamma=1}^{K}\sum_{\beta\in K_m^{(q-1)}(\alpha)}\left(\langle R_{\beta,\gamma,\hbar},P_\gamma(-\eta)\tau_\beta\psi_\hbar\rangle+\langle\tau_\beta P_\gamma(-\eta)\psi_\hbar,R_{\beta,\gamma,\hbar}\rangle\right). \tag{6.53}$$

So, for each step q of the induction, if we want to prove the pseudo invariance of the measure, a first error term we have to estimate is of the form

$$\sum_{j=-q+2}^{k}\sum_{\gamma=1}^{K}\sum_{\beta\in K_m^{(q-1)}(\alpha)}\overline{c}_{\beta,\alpha}(m)\left\langle R^j_{\beta,\gamma,\hbar},P_\gamma(-\eta)\tau_\beta\psi_\hbar\right\rangle. \tag{6.54}$$

Using Cauchy Schwarz inequality twice and the fact that $0\leq\overline{c}_{\beta,\alpha}(m)\leq\lambda\mathrm{Leb}(B(\gamma))\leq\lambda b_0\eta$, this last quantity is bounded by

$$\lambda b_0\eta\left(\sum_{j=-q+2}^{k}\sum_{\gamma=1}^{K}\sum_{\beta\in K_m^{(q-1)}(\alpha)}\|R^j_{\beta,\gamma,\hbar}\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=-q+2}^{k}\sum_{\gamma=1}^{K}\sum_{\beta\in K_m^{(q-1)}(\alpha)}\|P_\gamma(-\eta)\tau_\beta\psi_\hbar\|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{6.55}$$

The last term of the product is bounded as

$$\sum_{j=-q+2}^{k}\sum_{\gamma=1}^{K}\sum_{\beta\in K_m^{(q-1)}(\alpha)}\|P_\gamma(-\eta)\tau_\beta\psi_\hbar\|^2\leq(k+q)K\sum_{|\beta|=k+q-1}\|\tau_\beta\psi_\hbar\|^2=(k+q)K=O(|\log\hbar|).$$

We also underline that $\lambda b_0\eta$ is bounded by b_0/a_0. As a consequence, the error term (6.55) is bounded by

$$C|\log\hbar|\left(\sum_{j=-q+2}^{k}\sum_{\gamma=1}^{K}\sum_{\beta\in K_m^{(q-1)}(\alpha)}\|R^j_{\beta,\gamma,\hbar}\|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

where C is some positive uniform constant (depending only on the partition and on η). We extend now the definition of $R^j(\beta,\gamma)$ (previously defined as $[P_\gamma(-\eta),P_{\beta_j}((j+q-2)\eta)]$ for β in $K_m^{(q-1)}(\alpha)$) to any word β of length $k+q-1$. If $j+q-1$ letters of β are also the $j+q-1$ first letters of a word β' in $K_m^{(q-1)}(\alpha)$, we take $R^j(\beta,\gamma):=[P_\gamma(-\eta),P_{\beta_j}((j+q-2)\eta)]$. Otherwise, we take $R^j(\beta,\gamma):=\hbar\,\mathrm{Id}_{L^2(M)}$. We define then, for any sequence of length $k+q-1$,

$$R^j_{\beta,\gamma,\hbar}=P_{\beta_k}((k+q-2)\eta)\cdots P_{\beta_{j+1}}((j+q-1)\eta)R^j(\beta,\gamma)P_{\beta_{j-1}}((j+q-3)\eta)\cdots P_{\beta_{-q+2}}\psi_\hbar.$$

In theorem 6.17 from the section 6.6.2, we will prove in particular that, for every β of size $q+k-1$ and for each $-q+2 \leq j \leq k$,

$$\|R^j(\beta,\gamma)P_{\beta_{j-1}}((j+q-3)\eta)\cdots P_{\beta_{-q+2}}\psi_\hbar\|_{L^2(M)} \leq C\hbar^{1-2\nu}\|P_{\beta_{j-1}}((j+q-3)\eta)\cdots P_{\beta_{-q+2}}\psi_\hbar\|_{L^2(M)}, \tag{6.56}$$

where C is a uniform constant for n_0 and m positive integers such that $n_0+m \leq T_E(\hbar)$ and $\nu < 1/2$ (defined in section 6.7). We underline that the bracket $R^j(\beta,\gamma)$ of the two operators can commute (modulo $\hbar^{1-2\nu}$) because we have made a phase space localization thanks to the operator $P_{\beta_{j-1}}((j+q-3)\eta)\cdots P_{\beta_{-q+2}}$. Theorem 6.17 can be applied as $\sum_{j=0}^{k+q-2} f(\sigma^j\beta) \leq (n_0+m)(1+\epsilon) \leq n_E(\hbar)$ (see (6.48) and (6.51)). Using bound (6.56) and the property of partition of identity, we have

$$\sum_{|\beta|=k+q-1} \|R^j_{\beta,\gamma,\hbar}\|^2 = O(\hbar^{2(1-2\nu)}).$$

The error term (6.55) (and as a consequence (6.54)) is then bounded by

$$\tilde{C}|\log\hbar| \left(\sum_{j=-q+2}^{k}\sum_{\gamma=1}^{K}\sum_{|\beta|=k+q-1} \|R^j_{\beta,\gamma,\hbar}\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = O(\hbar^{\frac{1-2\nu}{4}}).$$

Looking at equation (6.53), we see that the other error term for the step q of the induction can be estimated with the same method and is also a $O(\hbar^{\frac{1-2\nu}{4}})$. As the number N of steps in the induction is a $O(|\log\hbar|)$, the error term we forgot in the previous section (due to the fact that the operators do not commute) is a $O(\hbar^{\frac{1-2\nu}{6}})$. This concludes the proof of proposition 6.15.□

6.6.2 Commutation of pseudodifferential operators

In order to complete the proof of the pseudo invariance of the measure (proposition 6.15), we need to prove inequality (6.56). It will be a consequence of (6.58) below. Once we have proved this inequality, the subadditivity property will be completely proved. The exact property we need is stated by the following theorem :

Theorem 6.17. *Let $(\gamma_0,\cdots,\gamma_k)$ be such that*

$$\sum_{j=0}^{k-1} f(\sigma^j\gamma) \leq n_E(\hbar). \tag{6.57}$$

One has :

$$\left\|[P_{\gamma_k}(k\eta), P_{\gamma_0}]\, P_{\gamma_{k-1}}((k-1)\eta)\cdots P_{\gamma_1}(\eta)\psi_\hbar\right\|_{L^2} \leq C\hbar^{1-2\nu}\left\|P_{\gamma_{k-1}}((k-1)\eta)\cdots P_{\gamma_1}(\eta)\psi_\hbar\right\|_{L^2}, \tag{6.58}$$

where $\nu < 1/2$ is defined in section 6.7, C is a constant depending on the partition and uniform in all γ satisfying (6.57).

In this theorem, we underline that there are no particular reasons for the bracket $[P_{\gamma_k}(k\eta), P_{\gamma_0}]$: it will be in fact small thanks to the phase space localization induced by $P_{\gamma_{k-1}}((k-1)\eta)\cdots P_{\gamma_1}(\eta)$. Let γ be a finite sequence as in the previous theorem. Denote $t(\gamma) = \sum_{j=0}^{k(\gamma)-1} f(\sigma^j\gamma)$. This quantity is less than $n_E(\hbar)$ in the setting of theorem 6.17. There exists a unique integer $l(\gamma) < k(\gamma)$ such that

$$\sum_{j=0}^{l(\gamma)-2} f(\sigma^j\gamma) \leq \frac{t(\gamma)}{2} < \sum_{j=0}^{l(\gamma)-1} f(\sigma^j\gamma).$$

In the following, the dependence of l and k in γ will be often omitted for simplicity of notations and will be recalled only when it is necessary. This definition allows to write the quantity we want to bound

$$\left\|[P_{\gamma_k}(k\eta), P_{\gamma_0}]\, P_{\gamma_{k-1}}((k-1)\eta)\cdots P_{\gamma_1}(\eta)\psi_\hbar\right\|_{L^2}$$

in the following way :

$$\left\|[P_{\gamma_k}((k-l+1)\eta), P_{\gamma_0}((-l+1)\eta)]\, P_{\gamma_{k-1}}((k-l)\eta)\cdots P_{\gamma_l}(\eta)P_{\gamma_{l-1}}\cdots P_{\gamma_1}((-l+2)\eta)\psi_\hbar\right\|_{L^2}. \tag{6.59}$$

The reason why we choose to write the quantity we want to bound in (6.58) in the previous form instead of its original form is to have a more symmetric situation for our semiclassical analysis. To prove the bound in theorem 6.17, a class of symbols taken from [32] will be used (see (6.76) for a definition) and results about them are recalled in appendix 6.8. Before starting the proof, using proposition 6.23, we can restrict ourselves to observables carried on a thin energy strip around the energy layer $\mathcal{E}^\theta$. It means that the quantity we want to bound is the following norm :

$$\left\|\left[\hat{P}_{\gamma_k}((k-l+1)\eta), \hat{P}_{\gamma_0}((-l+1)\eta)\right]\hat{P}_{\gamma_{k-1}}((k-l)\eta)\cdots\hat{P}_{\gamma_l}(\eta)\hat{P}_{\gamma_{l-1}}\cdots\hat{P}_{\gamma_{k-1}}((-l+2)\eta)\psi_\hbar\right\|_{L^2}, \tag{6.60}$$

where $\hat{P}_i$ is now equal to $\mathrm{Op}_\hbar(P_i^f)$, where P_i^f is compactly supported in $T^*\Omega_i \cap \mathcal{E}^\theta$ (see proposition 6.23).

Defining cutoffs

If we consider quantity (6.60), we can see that because we consider large times $k\eta$, we can not estimate directly the norm of the bracket $\left[\hat{P}_{\gamma_k}((k-l+1)\eta), \hat{P}_{\gamma_0}((-l+1)\eta)\right]$ as there is no particular reason for $\hat{P}_{\gamma_k}((k-l+1)\eta)$ and $\hat{P}_{\gamma_0}((-l+1)\eta)$ to be pseudodifferential operators to which we can apply the classical rules from semiclassical analysis. However, the quantity we are really interested in is the norm of this bracket on the image of $\hat{P}_{\gamma_{k-1}}((k-l)\eta)\cdots\hat{P}_{\gamma_l}(\eta)\hat{P}_{\gamma_{l-1}}\cdots\hat{P}_{\gamma_{k-1}}((-l+2)\eta)$. So we will introduce some cutoff operators to localize the bracket we want to estimate on the image of $\hat{P}_{\gamma_{k-1}}((k-l)\eta)\cdots\hat{P}_{\gamma_l}(\eta)\hat{P}_{\gamma_{l-1}}\cdots\hat{P}_{\gamma_{k-1}}((-l+2)\eta)$. Then, as was discussed in section 6.1.2, we will have to verify that it defines a particular family of operators for which the Egorov theorem can be applied for large times.
First, we introduce a new family of functions $(Q_i)_{i=1}^K$ such that such that for each $1 \leq i \leq K$, Q_i belongs to $\mathcal{C}^\infty(T^*\Omega_i \cap \mathcal{E}^\theta)$, $0 \leq Q_i \leq 1$ and $Q_i \equiv 1$ on $\mathrm{supp}P_i^f$. We then define two cutoffs associated to the strings $(\gamma_1, \cdots, \gamma_{l-1})$ and $(\gamma_l, \cdots, \gamma_{k-1})$:

$$Q_{\gamma_{k-1},\cdots,\gamma_l} := Q_{\gamma_l} \circ g^{-(k-l)\eta}\cdots Q_{\gamma_{k-1}} \circ g^{-\eta} \tag{6.61}$$

and

$$\tilde{Q}_{\gamma_{l-1},\cdots,\gamma_1} := Q_{\gamma_1} \circ g^{\eta}\cdots Q_{\gamma_{l-1}} \circ g^{(l-1)\eta}. \tag{6.62}$$

The first point of our discussion will be to prove that Egorov theorem can be applied for large times to the pseudodifferential operators corresponding to these two symbols.
We prove the Egorov property for $Q_{\gamma_{k-1},\cdots,\gamma_l}$ for example (the proof works in the same way for the other one). Recall that one has the exact equality, for a symbol a,

$$U^{-t}\mathrm{Op}_\hbar(a)U^t - \mathrm{Op}_\hbar(a(t)) = \int_0^t U^{-s}(\mathrm{Diff}a^{t-s})U^s ds, \tag{6.63}$$

where $a(t) := a \circ g^t$ and $\mathrm{Diff}a^t := \frac{i}{\hbar}[-\frac{\hbar^2\Delta}{2}, \mathrm{Op}_\hbar(a(t))] - \mathrm{Op}_\hbar(\{H, a(t)\})$. Here, we will consider $a := Q_{\gamma_{k-1},\cdots,\gamma_l}$. One has, for $0 \leq t \leq (k-l+1)\eta$,

$$Q_{\gamma_{k-1},\cdots,\gamma_l}(t) := Q_{\gamma_{k-1},\cdots,\gamma_l} \circ g^t = Q_{\gamma_l} \circ g^{-(k-l)\eta+t}\cdots Q_{\gamma_{k-1}} \circ g^{-\eta+t}.$$

There exists a unique integer $1 \leq j \leq (k-l)$ such that $t - j\eta$ is negative and $t - (j-1)\eta$ is nonnegative. This allows us to rewrite

$$Q_{\gamma_{k-1},\cdots,\gamma_l}(t) = \left(Q_{\gamma_l} \circ g^{-(k-l-j)\eta} \cdots Q_{\gamma_{k-j}}\right) \circ g^{-j\eta+t} \left(Q_{\gamma_{k-j+1}} \cdots Q_{\gamma_{k-1}} \circ g^{(j-2)\eta}\right) \circ g^{-(j-1)\eta+t}.$$

Using the last part of theorem 6.18 and its subsequent remark, we know that $Q_{\gamma_l} \circ g^{-(k-l-j)\eta} \cdots Q_{\gamma_j}$ and $Q_{\gamma_{j-1}} \cdots Q_{\gamma_{k-1}} \circ g^{(j-2)\eta}$ are symbols of the class $S_\nu^{-\infty,0}$ (see the appendix for a definition of this class of symbols), where $\nu := \frac{1-\epsilon'+4\epsilon}{2}$. Moreover the constants in the bounds of the derivatives are uniform for the words γ in the allowed set (see theorem 6.18 and proposition 6.20). As $-\eta \leq t - j\eta < 0 \leq t - (j-1)\eta \leq \eta$ and as the class $S_\nu^{-\infty,0}$ is stable by product, we have then that $Q_{\gamma_1,\cdots,\gamma_{k-l}}(t)$ is in the class $S_\nu^{-\infty,0}$, for $0 \leq t \leq (k-l+1)\eta$, with uniform bounds in t and γ in the allowed set. As, in [7], we can verify that $\mathrm{Diff} Q^t_{\gamma_{k-1},\cdots,\gamma_l}$ is in $\Psi_\nu^{-\infty,2\nu-1}$ and then apply the Calderón-Vaillancourt theorem for $\Psi_\nu^{-\infty,2\nu-1}$. As a consequence, there exists a constant C depending only on the family Q_i and on the derivatives of g^s (for $-\eta \leq s \leq \eta$) such that

$$\forall 0 \leq t \leq (k-l+1)\eta, \quad \|\mathrm{Op}_\hbar(Q_{\gamma_{k-1},\cdots,\gamma_l})(t) - \mathrm{Op}_\hbar(Q_{\gamma_{k-1},\cdots,\gamma_l}(t))\|_{\mathcal{L}(L^2(M))} \leq C\hbar^{1-2\nu}. \quad (6.64)$$

As we mentioned it in the heuristic of the proof (section 6.1.2), taking into account the support of the symbol, we have proved a 'local' Egorov property for a range of time that depends on the support of our symbol. Precisely, we have shown that the Egorov property holds until the stopping time defined in section 6.5.1.

Proof of theorem 6.17

Before proving theorem 6.17, we define (in order to have simpler expressions) :

$$\psi_\hbar^\gamma := \hat{P}_{\gamma_{k-1}}((k-l)\eta) \cdots \hat{P}_{\gamma_1}((-l+2)\eta)\psi_\hbar.$$

To prove theorem 6.17, we need to bound quantity (6.60) and precisely to estimate (6.60), we have to estimate

$$(6.60) = \left\| \left[\hat{P}_{\gamma_0}((-l+1)\eta), \hat{P}_{\gamma_k}((k-l+1)\eta)\right] \psi_\hbar^\gamma \right\|_{L^2(M)}. \quad (6.65)$$

Now we want to introduce our cutoff operators $\mathrm{Op}_\hbar(Q_\bullet)$ in the previous expression :

$$\hat{P}_{\gamma_0}((-l+1)\eta)\hat{P}_{\gamma_k}(k-l+1)\eta) = \hat{P}_{\gamma_0}((-l+1)\eta)\left(Id - \left(\hat{P}_{\gamma_k}\mathrm{Op}_\hbar(Q_{\gamma_{k-1},\cdots,\gamma_l})\right)((k-l+1)\eta)\right)$$
$$+ \left(\hat{P}_{\gamma_k}\mathrm{Op}_\hbar(Q_{\gamma_{k-1},\cdots,\gamma_l})\right)((k-l+1)\eta).$$

We will first estimate the norm

$$\left\|\hat{P}_{\gamma_0}((-l+1)\eta)\left(Id - \left(\hat{P}_{\gamma_k}\mathrm{Op}_\hbar(Q_{\gamma_{k-1},\cdots,\gamma_l})\right)((k-l+1)\eta)\right)\psi_\hbar^\gamma\right\|_{L^2(M)}.$$

To do this, we first outline that $\hat{P}_{\gamma_k}$ is in $\Psi^{-\infty,0}(M)$ and $\mathrm{Op}_\hbar(Q_{\gamma_{k-1},\cdots,\gamma_l})$ is in $\Psi_\nu^{-\infty,0}(M)$. Using the standard rules for a product, we know that the previous expression can be transformed as follows :

$$\left\|\hat{P}_{\gamma_0}((-l+1)\eta)\left(Id - \mathrm{Op}_\hbar(P^f_{\gamma_k}Q_{\gamma_{k-1},\cdots,\gamma_l})((k-l+1)\eta)\right)\psi_\hbar^\gamma\right\|_{L^2(M)} + R^1_\gamma(\hbar),$$

where $\|R^1_\gamma(\hbar)\|_{L^2} \leq C\hbar^{1-2\nu}\|\psi_\hbar^\gamma\|_{L^2}$ (where C is independent of $k-l$ as the bounds implied in the derivatives in theorem 6.18 are uniform for words γ in the allowed set : see proposition 6.20). We can apply the strategy of the previous section to prove an Egorov property for the operator $\mathrm{Op}_\hbar(P^f_{\gamma_k}Q_{\gamma_{k-1},\cdots,\gamma_l})$. So, up to a $O_{L^2}(\hbar^{1-2\nu})$, $\mathrm{Op}_\hbar(P^f_{\gamma_k}Q_{\gamma_{k-1},\cdots,\gamma_l})((k-l+1)\eta)$ is equal to the pseudodifferential operator in $\Psi_\nu^{-\infty,0}$

$$\mathrm{Op}_\hbar\left((P^f_{\gamma_k}Q_{\gamma_{k-1},\cdots,\gamma_l}) \circ g^{(k-l+1)\eta}\right)$$

supported in $g^{-\eta}T^*\Omega_{\gamma_l}\cap\cdots\cap g^{-(k-l+1)\eta}T^*\Omega_{\gamma_k}\cap\mathcal{E}^\theta$. Using then theorem 6.18, the following holds :

$$\left(Id-\mathrm{Op}_\hbar\left((P^f_{\gamma_k}Q_{\gamma_{k-1},\cdots,\gamma_l})\circ g^{(k-l+1)\eta}\right)\right)\hat{P}_{\gamma_{k-1}}((k-l)\eta)\cdots\hat{P}_{\gamma_1}((-l+2)\eta)\psi_\hbar=O_{L^2}(\hbar^\infty).$$

Even if the proof of this fact is rather technical, it is intuitively quite clear. In fact, if we suppose that the standard pseudodifferential rules (Egorov, composition) apply, $\hat{P}_{\gamma_{k-1}}((k-l)\eta)\cdots\hat{P}_{\gamma_1}((-l+2)\eta)$ is a pseudodifferential operator compactly supported in $g^{(l-2)\eta}T^*\Omega_{\gamma_1}\cap\cdots\cap g^{(l-k)\eta}T^*\Omega_{\gamma_{k-1}}\cap\mathcal{E}^\theta$. On this set, by definition of the cutoff operators ($Q_i\equiv 1$ on $\mathrm{supp}(P_i)$), $(1-(P^f_{\gamma_k}Q_{\gamma_{k-1},\cdots,\gamma_l})\circ g^{(k-l+1)\eta})$ is equal to 0. As a consequence, we consider the product of two pseudodifferential operators of disjoint supports : it is $O_{L^2}(\hbar^\infty)$. The statement of theorem 6.18 makes this argument work. To conclude the previous lines of the proof, we have

$$\left\|\hat{P}_{\gamma_0}((-l+1)\eta)\left(Id-\left(\hat{P}_{\gamma_k}\mathrm{Op}_\hbar(Q_{\gamma_{k-1},\cdots,\gamma_l})\right)((k-l+1)\eta)\right)\psi^\gamma_\hbar\right\|_{L^2(M)}\leq\tilde{C}\hbar^{1-2\nu}\|\psi^\gamma_\hbar\|_{L^2(M)}. \tag{6.66}$$

Performing this procedure for the other operators, we finally obtain that the only quantity we need to bound to prove theorem 6.17 is the following quantity :

$$\left\|\left[(\hat{P}_{\gamma_k}\mathrm{Op}_\hbar(Q_{\gamma_{k-1},\cdots,\gamma_l}))((k-l+1)\eta),(\hat{P}_{\gamma_0}\mathrm{Op}_\hbar(\tilde{Q}_{\gamma_{l-1},\cdots,\gamma_1}))((-l+1)\eta)\right]\right\|_{\mathcal{L}(L^2(M))}. \tag{6.67}$$

Using the property of the product on $\Psi^{-\infty,0}_\nu$, we know that, up to a $O_{L^2}(\hbar^{1-2\nu})$, the previous quantity is equal to

$$\left\|\left[\mathrm{Op}_\hbar(P^f_{\gamma_k}Q_{\gamma_{k-1},\cdots,\gamma_l})((k-l+1)\eta),\mathrm{Op}_\hbar(P^f_{\gamma_0}\tilde{Q}_{\gamma_{l-1},\cdots,\gamma_1})((-l+1)\eta)\right]\right\|_{\mathcal{L}(L^2(M))}.$$

Using the same method that in the previous section (which uses theorem 6.18), we can prove an Egorov property for the two pseudodifferential operators that are in the previous bracket and show that, up to a $O_{L^2}(\hbar^{1-2\nu})$, the quantity (6.67) is equal to

$$\left\|\left[\mathrm{Op}_\hbar((P^f_{\gamma_k}Q_{\gamma_{k-1},\cdots,\gamma_l})\circ g^{(k-l+1)\eta}),\mathrm{Op}_\hbar((P^f_{\gamma_0}\tilde{Q}_{\gamma_{l-1},\cdots,\gamma_1})\circ g^{(-l+1)\eta})\right]\right\|_{\mathcal{L}(L^2(M))}.$$

Using the pseudodifferential rules in $\Psi^{-\infty,0}_\nu(M)$ (proceeding as in the previous section, the two symbols stay in the good class of symbol using theorem 6.18), we know that the previous bracket is in $\Psi^{-\infty,2\nu-1}_\nu$. Using the Calderón-Vaillancourt theorem, we know that quantity (6.67) is a $O_{L^2}(\hbar^{1-2\nu})$, where the constant depends only on the partition. This concludes the proof of theorem 6.17.□

6.7 Products of many evolved pseudodifferential operators

The goal of this section is to prove a property used in the proof of theorem 6.17. Precisely, the following theorem states that the product of a large number of evolved pseudodifferential operators remains in a good class of pseudodifferential operators provided the range of times is smaller than the 'local' Ehrenfest time. First, recall that using proposition 6.23, we can restrict ourselves to observables carried on a thin energy strip around the energy layer $\mathcal{E}^\theta$. We underline that we do not suppose anymore that this thin energy strip is of size $\hbar^{1-\delta}$: we only need to have a small macroscopic neighborhood of the unit energy layer. Moreover, the class of symbols we will consider will be the class $S^{-\infty,0}_\nu$ (see (6.76) for a precise definition) with $\nu:=\frac{1-\epsilon'+4\epsilon}{2}$ ($<1/2$, see section 6.4).

Theorem 6.18. *Let $(Q_i)_{i=1}^K$ be a family of smooth functions on T^*M such that for each $1\leq i\leq K$, Q_i belongs to $\mathcal{C}^\infty(T^*\Omega_i\cap\mathcal{E}^\theta)$ and $0\leq Q_i\leq 1$. Consider a family of indices $(\gamma_1,\cdots,\gamma_l)$ such that*

$$\sum_{j=1}^{l-1}f(\gamma_{j+1},\gamma_j)\leq\frac{n_E(\hbar)}{2}.$$

Then, for any $1 \leq j \leq l$, one has

$$Op_\hbar(Q_{\gamma_1}) Op_\hbar(Q_{\gamma_2})(-\eta) \cdots Op_\hbar(Q_{\gamma_j})(-(j-1)\eta) = Op_\hbar\left(A^{\gamma_1,\cdots,\gamma_j}\right)(-j\eta) + \mathcal{O}_{L^2}(\hbar^\infty),$$

where $A^{\gamma_1,\cdots,\gamma_j}$ is in the class $S_\nu^{-\infty,0}$. Precisely, one has the following asymptotic expansion :

$$A^{\gamma_1,\cdots,\gamma_j} \sim \sum_{p\geq 0} \hbar^p A_p^{\gamma_1,\cdots,\gamma_j},$$

where $A_p^{\gamma_1,\cdots,\gamma_j}$ is in the class $S_\nu^{-\infty,2p\nu}$ (with the symbols semi norm uniform for γ in the allowed set of sequences and $1 \leq j \leq l$: see proposition 6.20) and compactly supported in $g^{-\eta}T^*\Omega_{\gamma_j} \cap \cdots g^{-j\eta}T^*\Omega_{\gamma_1} \cap \mathcal{E}^\theta$. Finally the principal symbol $A_0^{\gamma_1,\cdots,\gamma_j}$ is given by the following formula :

$$A_0^{\gamma_1,\cdots,\gamma_j} = Q_{\gamma_j} \circ g^\eta \cdots Q_{\gamma_2} \circ g^{(j-1)\eta} Q_{\gamma_1} \circ g^{j\eta}.$$

Remark. We underline that the asymptotic expansion (except for the order 0 term) is not intrinsically defined as it depends on the choice of coordinates on M. We also remark that this theorem holds in particular for the smooth partition of identity we considered previously on the paper. Note also that the the result can be rephrased by saying that $\mathrm{Op}_\hbar(Q_{\gamma_1})(j\eta)\mathrm{Op}_\hbar(Q_{\gamma_2})((j-1)\eta)\cdots \mathrm{Op}_\hbar(Q_{\gamma_j})(\eta)$ is, up to a $\mathcal{O}_{L^2}(\hbar^\infty)$, a pseudodifferential operator of the class $\Psi_\nu^{-\infty,0}$ and of well determined support. As we also have to consider "past" evolution, we mention that we can also suppose $\sum_{j=1}^{l-1} f(\gamma_j,\gamma_{j+1}) \leq \frac{n_E(\hbar)}{2}$. Under this assumption, we would have proved that $\mathrm{Op}_\hbar(Q_{\gamma_1})(-j\eta)\mathrm{Op}_\hbar(Q_{\gamma_2})(-(j-1)\eta)\cdots \mathrm{Op}_\hbar(Q_{\gamma_j})(-\eta)$ is, up to a $\mathcal{O}_{L^2}(\hbar^\infty)$, a pseudodifferential operator of the class $\Psi_\nu^{-\infty,0}$ and of well determined support. These are exactly the properties we used in section 6.6.2.

The plan of the proof is the following. First, we will construct formally $A^{\gamma_1,\cdots,\gamma_j}$ and its asymptotic expansion in powers of $\hbar$. Then, we will check that these different symbols are in a good class. Finally, we will check that these operators approximate the product we considered. For simplicity of notations, we will forget (for a time) the dependence on γ and denote the previous symbol A^j for $l \geq j \geq 1$.

6.7.1 Definition of $A^{\gamma_1,\cdots,\gamma_l}$

In this section, we construct formally the symbol A^j. The way to do it is by induction on j. First, we will see how to define formally A^j from A^{j-1}. Then, using the formulas of the previous section, we will construct the formal order N expansion associated to this A^j. We only construct what the order N expansion should be regarding to the formal formulas.

Definition at each step

To construct A^j, we proceed by induction and at the first step, we consider $\mathrm{Op}_\hbar(Q_{\gamma_1})$ and we write it into the form $Op_\hbar(A^1)(-\eta)$. This means that we have defined formally for $0 \leq t \leq \eta$:

$$\mathrm{Op}_\hbar(A^1(t)) := U^{-t} Op_\hbar(Q_{\gamma_1}) U^t.$$

Using Egorov theorem for fixed time η and the corresponding asymptotic expansion (see section 6.8.3 for explicit formulas of the asymptotic expansion), we prove that, up to a $\mathcal{O}_{L^2}(\hbar^\infty)$, $\mathrm{Op}_\hbar(Q_{\gamma_1})$ is equal to $\mathrm{Op}_\hbar(A^1(\eta))(-\eta)$, where $A^1(\eta)$ is in $S^{-\infty,0}$, given by the asymptotic expansion of the Egorov theorem and supported in $g^{-\eta}T^*\Omega_{\gamma_1} \cap \mathcal{E}^\theta$. We can continue this procedure formally. At the second step, we have

$$\mathrm{Op}_\hbar(Q_{\gamma_1})\mathrm{Op}_\hbar(Q_{\gamma_2})(-\eta) = U^\eta \mathrm{Op}_\hbar(A^1(\eta))\mathrm{Op}_\hbar(Q_{\gamma_2})U^{-\eta}.$$

We want this quantity to be of the form $\mathrm{Op}_\hbar(A^2(\eta))(-2\eta)$. This means that we have defined formally for $0 \leq t \leq \eta$:

$$\mathrm{Op}_\hbar(A^2(t)) := U^{-t}\mathrm{Op}_\hbar(A^1(\eta))\mathrm{Op}_\hbar(Q_{\gamma_2})U^t.$$

Using rules of pseudodifferential operators (see section 6.8.3 and 6.8.3), we can obtain a formal asymptotic expansion for $A^2(\eta)$ (see next section) starting from the expansion of $A^1(\eta)$. One can easily check that this formal expansion is supported in $g^{-\eta}T^*\Omega_{\gamma_2} \cap g^{-2\eta}T^*\Omega_{\gamma_1} \cap \mathcal{E}^\theta$. Following the previous method, we will construct a formal expansion of $A^j(t)$ (for $0 \leq t \leq \eta$) starting from the expansion of $A^{j-1}(\eta)$ (see next section). To do this, we will write at each step $1 \leq j \leq l$,

$$\mathrm{Op}_\hbar(A^j(t)) := U^{-t}\mathrm{Op}_\hbar(A^{j-1}(\eta))\mathrm{Op}_\hbar(Q_{\gamma_j})U^t. \tag{6.68}$$

We also introduce the intermediate operator

$$\mathrm{Op}_\hbar(\overline{A}^j) := \mathrm{Op}_\hbar(A^{j-1}(\eta))\mathrm{Op}_\hbar(Q_{\gamma_j}). \tag{6.69}$$

With this definition, we will have

$$\mathrm{Op}_\hbar(A^j(\eta))(-j\eta) := \left(\mathrm{Op}_\hbar(A^{j-1}(\eta))\mathrm{Op}_\hbar(Q_{\gamma_j})\right)(-(j-1)\eta)\,.$$

Using again rules of pseudodifferential calculus (see section 6.8.3 and 6.8.3), we can obtain a formal asymptotic expansion for $A^j(t)$ (see next section) starting from the expansion of $A^{j-1}(\eta)$. One can easily check that this formal expansion is supported in $g^{-t}\left(T^*\Omega_{\gamma_j} \cap \cdots \cap g^{-j\eta}T^*\Omega_{\gamma_1}\right) \cap \mathcal{E}^\theta$. In the next section, we will use the induction formula (6.68) to deduce the $\hbar$-expansion of $A^j(t)$ from the expansion for the composition of $\mathrm{Op}_\hbar(A^{j-1}(\eta))$ and $\mathrm{Op}_\hbar(Q_{\gamma_j})$ and from the expansion for the Egorov theorem for times $0 \leq t \leq \eta$. At each step $1 \leq j \leq l$ of the induction, we will have to prove that A^j stays in a good class of symbols to be able to continue the induction.

Definition of the order N expansion

We fix a large integer N (to be determined). We study the previous construction by induction up to $\mathcal{O}(\hbar^N)$. From this point, we truncate $A^j(t)$ at the order N of its expansion. First, we see how we construct the symbols $A^j(t)$ by induction. To do this, we use the formulas for the asymptotic expansions for the composition of pseudodifferential operators and for the Egorov theorem (see section 6.8.3 and 6.8.3). Suppose that

$$A^{j-1}(\eta) = \sum_{p=0}^{N} \hbar^p A_p^{j-1}(\eta)$$

is well defined, we have to define the expansion of $A^j(t)$ from the asymptotic expansion of $A^{j-1}(\eta)$, for $0 \leq t \leq \eta$. First, we define :

$$\overline{A}^j := \sum_{p=0}^{N} \hbar^p \overline{A}_p^j, \qquad \text{where } \overline{A}_p^j := \sum_{r=0}^{p} \left(A_{p-r}^{j-1}(\eta) \sharp_M Q_{\gamma_j}\right)_r. \tag{6.70}$$

The symbol $\sharp_M$ represents an analogue on a manifold of the Moyal product (see appendix 6.8.3) : $(a\sharp_M b)_p$ is the order p term in the expansion of the symbol of $\mathrm{Op}_\hbar(a)\mathrm{Op}_\hbar(b)$. Recall from the appendix that $(A_{p-q}^{j-1}\sharp_M Q_{\gamma_j})_q$ is a linear combination (that depends on the local coordinates and on the $(Q_i)_i$) of the derivatives of order less than q of $A_{p-q}^{j-1}(\eta)$. Using proposition 6.24 in appendix 6.8.3, one has the following order $N-p$ expansion, for the symbol of the operator $U^{-t}\mathrm{Op}_\hbar(\overline{A}_p^j)U^t$,

$$\overline{A}_p^j := \sum_{k=0}^{N-p} \hbar^k \overline{A}_{p,k}^j(t),$$

where $\overline{A}_{p,0}^j = \overline{A}_p^j \circ g^t$ and $\overline{A}_{p,k}^j(t) := \sum_{l=0}^{k-1} \int_0^t \left\{H, \overline{A}_{p,l}^j(t-s)\right\}_M^{(k,l)} (g^s(\rho))\, ds$. Then, we can define $A^j(t)$ using these different expansions. Precisley, we define

$$A^j(t) := \sum_{p=0}^{N} \hbar^p A_p^j(t) \text{ where, for } 0 \leq p \leq N,\ A_p^j(t) := \sum_{q=0}^{p} \overline{A}_{p-q,q}^j(t).$$

This construction is the precise way we want to define the asymptotic expansion of the symbol $A^j(t)$ in theorem 6.18. If we want the theorem to be valid, we have to check now that the remainders we forget at each step are negligible (with an arbitrary high order in $\hbar$). To do this, we will first have to control at each step j the derivatives of $A^j(t)$ (see next section).

Remark. The support of $A_p^j(t)$ is included in $g^{-t}\left(T^*\Omega_{\gamma_j}\cap\cdots\cap g^{-(j-1)\eta}T^*\Omega_{\gamma_1}\right)\cap\mathcal{E}^\theta$ as the support of every $\overline{A}_{p,k}^j(t)$ is.

Finally, we underline that, according to our construction, $A_p^j(t)$ can be written as follows :

$$A_p^j(t) := \left(A_p^{j-1}(\eta)Q_{\gamma_j}\right)\circ g^t + \sum_{r=1}^{p}(A_{p-r}^{j-1}\sharp_M Q_{\gamma_j})_r\circ g^t + \sum_{q=1}^{p}\sum_{l=0}^{q-1}\int_0^t\left\{H,\overline{A}_{p-q,l}^j(t-s)\right\}_M^{(q,l)}(g^s(\rho))\,ds. \tag{6.71}$$

For the following, we need to know precisely on how many derivatives of A^{j-1} depends A^j. We analyse the three terms of the previous sum separately :

- the first term is explicit and it depends linearly on A_p^{j-1} ;
- according to appendix 6.8.3, the second term depends linearly on $(\partial^\alpha A_{p-r}^{j-1})_{1\leq r\leq p,|\alpha|\leq r}$;
- according to corollary 6.25, the third term depends linearly on $(\partial^\alpha\overline{A}_{p-q}^j)_{1\leq q\leq p,|\alpha|\leq 2q}$ and consequently, according to appendix 6.8.3, it depends linearly on $(\partial^\alpha A_{p-r}^{j-1})_{1\leq r\leq p,|\alpha|\leq 2r}$.

6.7.2 Estimates of the derivatives

The goal of the first part of this section is to prove the following lemma.

Lemma 6.19. *Let N be a fixed integer. Fix also two integers $0\leq p\leq N$ and $m\leq 2(N-p+1)$. Then, there exists a constant $C(m,p)$ such that for all $j\geq 1$ and for all ρ in the set $g^{-t}\left(T^*\Omega_{\gamma_j}\cap\cdots\cap g^{-(j-1)\eta}T^*\Omega_{\gamma_1}\right)\cap\mathcal{E}^\theta$,*

$$\forall 0\leq t\leq\eta,\ |d^m A_p^j(t,\rho)|\leq C(m,p)j^{m+2p^2+1}|d_\rho g^{t+(j-1)\eta}|^{m+2p}.$$

If ρ is not in this set, the bound is trivially 0 by construction. Here the constant $C(m,p)$ depends only on m, p, the atlas we chose for the manifold and the size of the $(\Omega_\gamma)_\gamma$.

Once this lemma will be proved, we will check that it also tells us that the A_p^j's are in a nice class of symbols.

Proof of lemma 6.19

To make all the previous pseudodifferential arguments work, we will have to obtain estimates on the m-differential forms $d^m A_p^j$, for each $m\leq 2(N+1-p)$. If we have estimates on these derivatives, we will then check that all the asymptotic expansions given by the pseudodifferential theory are valid. To do these estimates, we will have to understand the number of derivatives that appear when we repeat the induction formula (6.68). The spirit of this proof is the same as in [7] (section 3.4) when they iterate the WKB expansion $\mathcal{K}|\log\hbar|$ times. We define a vector $\mathbf{A}^j$ with entries $\mathbf{A}^j_{(p,m)}(t,\rho) := d_\rho^m A_p^j(t)$ (where $0\leq p\leq N$ and $0\leq m\leq 2(N-p+1)$). Precisely, we order it by the following way, for $0\leq t\leq\eta$ and $\rho\in T^*M$,

$$\mathbf{A}^j = \mathbf{A}^j(t,\rho) := \begin{cases}(A_0^j, dA_0^j,\cdots, d^{2(N+1)}A_0^j,\\ A_1^j, dA_1^j,\cdots, d^{2N}A_1^j,\\ \cdots,\\ A_N^j, dA_N^j, d^2A_N^j).\end{cases}$$

The induction formula (6.71) of the previous section can be rewritten under the following form

$$A_p^j(t,\rho) = \left(A_p^{j-1}(\eta)Q_{\gamma_j}\right)\circ g^t(\rho) + L^j(t)(\mathbf{A}^{j-1}(\eta))(\rho), \tag{6.72}$$

where $L^j(t)$ acts linearly on $\mathbf{A}^{j-1}_{(p-q,m)}(\eta)$, where $q \geq 1$ and $m \leq 2q$. We underline that this linear application depends on derivatives of g^s for $0 \leq s \leq \eta$, on the choice of the coordinates and on the maps Q_j. We would also like to have an expression for $d^m_\rho A^j_p(t)$ for $m \leq 2(N+1-p)$. To do this, we start by writing that for an observable a, one has

$$d^m_\rho(a \circ g^t) := \sum_{l \leq m} d^l_{g^t\rho} a.\theta_{m,l}(t,\rho),$$

where $\theta_{m,l}(t,\rho)$ sends $(T_\rho T^*M)^m$ on $(T_{g^t\rho}T^*M)^l$. We can write the explicit form of $\theta_{m,m}$:

$$\theta_{m,m}(t,\rho) := \left(d_\rho g^t\right)^{\otimes m}.$$

Using these relations, we can rewrite the induction formula (6.72) as follows :

$$\mathbf{A}^j(t) = (\mathbf{M}^j_0(t) + \mathbf{M}^j_1(t) + \mathbf{M}^j_2(t))\mathbf{A}^{j-1}(\eta),$$

where an exact expression of $\mathbf{M}^j_0$ is given by

$$\left(\mathbf{M}^j_0\mathbf{A}^{j-1}\right)_{(p,m)}(t,\rho) := Q_{\gamma_j}(g^t\rho) \times \mathbf{A}^{j-1}_{(p,m)}(\eta, g^t\rho).\theta_{m,m}(t,\rho).$$

In particular, $\mathbf{M}^j_0$ is a diagonal matrix. We will not give explicit expression for the two other matrices. We only need to know that the matrix $\mathbf{M}^j_1(t)$ relates $\mathbf{A}^j_{p,m}(t)$ to $(\mathbf{A}^{j-1}_{p,l}(\eta))_{l<m}$ and that the matrix $\mathbf{M}^j_2(t)$ relates $\mathbf{A}^j_p(t)$ to $(\mathbf{A}^{j-1}_q(\eta))_{q<p}$. Iterating the induction formula, one then has :

$$\mathbf{A}^j(t) := \sum_{\epsilon_2,\cdots,\epsilon_j=0}^{2} \mathbf{M}^j_{\epsilon_j}(t)\mathbf{M}^{j-1}_{\epsilon_{j-1}}(\eta)\cdots\mathbf{M}^2_{\epsilon_2}(\eta)\mathbf{A}^1(\eta).$$

From this expression, one can estimate how many terms contributes to the definition of $\mathbf{A}^j_{(p,m)}$. For instance, suppose that $|\{j' : \epsilon_{j'} = 2\}| > p$, the contribution of such a string of matrices to $\mathbf{A}^j_{(p,m)}$ is 0 (using the nilpotence property). We can also give an upper bound on the number of terms of type $\mathbf{M}^*_1$ in string of matrices that contributes to $\mathbf{A}^j_{(p,m)}$. To do this, we underline that the action of a matrix of the type $\mathbf{M}^*_1$ add a block equal to 0 at the begining of every $\mathbf{A}^*_p$ (as it is nilpotent). In particular, consider a given block $\mathbf{A}^*_p$ of the form $(0,\cdots,0,*)$ (where the $(l_0 - 2p'p)$ first terms are equal to 0). After the action of a series of $\mathbf{M}^*_1$ (say l_1) and of $\mathbf{M}^*_0$ (in any order), we get a p-block of the form $(0,\cdots,0,*)$, where the $(l_0 + l_1 - 2p'p)$ first terms are equal to 0. On the other hand, we know that, if $\mathbf{A}^j := \mathbf{M}^j_2(\eta)\mathbf{A}^{j-1}$, then the term of order (p,m) depends only on $(\mathbf{A}^{j-1}_{q,r})_{q\leq p-1, r\leq 2(p-q)+m}$. So after the action of a matrix $\mathbf{M}^*_2$, the p-block is still of the form $(0,\cdots,0,*)$, where now only the $(l_0 + l_1 - 2(p'+1)p)$ first terms are equal to 0. By an immediate induction, we find that the contribution of a string of matrices to $\mathbf{A}^j_{p,m}$ is 0 if $|\{j' : \epsilon_{j'} = 1\}| - 2p\,|\{j' : \epsilon_{j'} = 2\}| > m$.

As a conclusion, the product of matrices that contributes to the expression of $\mathbf{A}^j_{(p,m)}$ can only be non zero if $|\{j' : \epsilon_{j'} = 2\}| \leq p$ and $|\{j' : \epsilon_{j'} = 1\}| \leq m + 2p\,|\{j' : \epsilon_{j'} = 2\}|$. As a consequence, for large j, to be non zero, a string of matrices need to be made of at most $(N+1)^2$ matrices of the form $\mathbf{M}^j_\epsilon$ (for $\epsilon \in \{1,2\}$). Finally, we need to compute the number of string of matrices that contributes to a given $\mathbf{A}^j_{(p,m)}$. To do this, we consider the set of symbols $\{(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_k) : k \leq m + 2p^2,\ \epsilon_j \in \{1,2\}\}$. For a given $(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_k)$ in this set, the number of ways of putting these symbols in a string of length j is bounded by j^k. Moreover, we know that there are at most 2^k sequences of length k. These two remarks implies that the number of string of matrices that contributes to a given $\mathbf{A}^j_{(p,m)}$ is bounded by $\sum_{k=0}^{m+2p^2}(2j)^k$, which is a $\mathcal{O}((2j)^{m+2p^2+1})$.

Then, to estimate the norm of the derivatives of A^j, we should look how the different matrices act. First we study the action of the diagonal matrix. As $0 \leq Q_{\gamma_j} \leq 1$, one has that, for $0 \leq t \leq \eta$ and

for any $\rho \in g^{-t}\left(T^*\Omega_{\gamma_j} \cap \cdots \cap g^{-(j-1)\eta}T^*\Omega_{\gamma_1}\right) \cap \mathcal{E}^\theta$ (otherwise the following quantity is clearly equal to 0),

$$|\mathbf{M}_0^j \mathbf{A}^{j-1}_{(p,m)}(t,\rho)| \leq |d_\rho g^t|^m |\mathbf{A}^{j-1}_{(p,m)}(\eta, g^t(\rho))|.$$

We note that we can iterate this bound and find, for any j and j' in $\mathbb{N}$, we have, for any $0 \leq t \leq \eta$,

$$|\mathbf{M}_0^{j+j'} \cdots \mathbf{M}_0^j \mathbf{A}^{j-1}_{(p,m)}(t,\rho)| \leq |d_\rho g^{t+j'\eta}|^m |\mathbf{A}^{j-1}_{(p,m)}(\eta, g^{t+j'\eta}(\rho))|.$$

Now, using the fact that for every iteration, we consider a fixed interval of time $[0,\eta]$ and the fact that the set of observables $(Q_l)_{l=1}^K$ is fixed, we get that there exists a constant $C(m,p)$ such that, for $\epsilon \in \{1,2\}$,

$$\sup_{0\leq t\leq \eta} \|\mathbf{M}_\epsilon^j \mathbf{A}^{j-1}_{(p,m)}(t)\|_{L^\infty} \leq C(m,p) \max_{m'\leq m} \max_{q\leq p} \|\mathbf{A}^{j-1}_{(q,m')}\|_{L^\infty}.$$

The only thing we need to know is that the constant depends only on m, p, the manifold, η, the coordinate maps and the partition. The difference with the action of the diagonal matrix is that we have constant prefactor that can accumulate and become large (without any precise control on it).
These different observations allow us to prove lemma 6.19. In fact, by construction, the total number of derivatives of g^t that appears in the definition of $\mathbf{A}^j_{(p,m)}(t)$ is bounded by $m+2p$. Moreover, a given string $\mathbf{M}^j_{\epsilon_j}(t)\mathbf{M}^{j-1}_{\epsilon_{j-1}}(\eta)\cdots\mathbf{M}^2_{\epsilon_2}(\eta)$ is made of long string only made of matrices of the form $\mathbf{M}_0^*(\eta)$ and of short strings of matrices of the form $\mathbf{M}_\epsilon^*(\eta)$ (where $\epsilon \in \{1,2\}$). We know that only the long strings made of $\mathbf{M}_0^*(\eta)$ will contribute to a given $\mathbf{A}^j_{(p,m)}(t)$ and as we know that the number of derivatives involved is bounded by $m+2p$, we have, for any $\rho \in g^{-t}\left(T^*\Omega_{\gamma_j} \cap \cdots \cap g^{-(j-1)\eta}T^*\Omega_{\gamma_1}\right) \cap \mathcal{E}^\theta$,

$$\left|\left(\mathbf{M}^j_{\epsilon_j}(t)\mathbf{M}^{j-1}_{\epsilon_{j-1}}(\eta)\cdots\mathbf{M}^2_{\epsilon_2}(\eta)\mathbf{A}^1(\eta)\right)_{(p,m)}(\rho)\right| \leq C'(p,m)|d_\rho g^{t+(j-1)\eta}|^{m+2p}\|\mathbf{A}^1(\eta)\|.$$

Finally, the number of matrices that contributes to the (p,m)-term of the vector $\mathbf{A}^j$ is bounded by $\mathcal{O}((2j)^{m+2p^2+1})$. It gives that, for any $\rho \in g^{-t}\left(T^*\Omega_{\gamma_j} \cap \cdots \cap g^{-(j-1)\eta}T^*\Omega_{\gamma_1}\right) \cap \mathcal{E}^\theta$,

$$|\mathbf{A}^j_{(p,m)}(t,\rho)| \leq \tilde{C}(p,m) j^{m+2p^2+1} |d_\rho g^{t+(j-1)\eta}|^{m+2p} \|\mathbf{A}^1(\eta)\|. \square$$

Class of symbol of each term of the expansion

Using the previous lemma, we want to show that $A_p^j(t)$ is an element of $S_\nu^{-\infty,2p\nu}$. Let ρ be an element of $g^{-t}\left(T^*\Omega_{\gamma_j} \cap \cdots \cap g^{-(j-1)\eta}T^*\Omega_{\gamma_1}\right) \cap \mathcal{E}^\theta$. Using the fact that E^u is of dimension 1, we get that for any positive t, $|d_\rho g^t| \leq J^{u,t}(\rho)^{-1}$, where $J^{u,t}(\rho) := \det\left(dg^{-t}_{|E^u(g^t\rho)}\right)$. Then we can write the multiplicativity of the determinant and get

$$J^{u,t+(j-1)\eta}(\rho) = J^{u,t}(\rho)J^{u,\eta}(g^t\rho)J^{u,\eta}(g^{t+\eta}\rho)\cdots J^{u,\eta}(g^{t+(j-2)\eta}\rho).$$

Remark. Before continuing the estimate, let us underline some property of the Jacobian. Suppose S is a positive integer and $1/\eta$ also (large enough to be in our setting). We have, for all $0 \leq k \leq 1/\eta - 1$,

$$J^u(g^{k\eta}\rho)J^u(g^{1+k\eta}\rho)\cdots J^u(g^{S-1+k\eta}\rho) = J^{u,\eta}(g^{k\eta}\rho)J^{u,\eta}(g^{(k+1)\eta}\rho)\cdots J^{u,\eta}(g^{S+(k-1)\eta}\rho),$$

where $J^u(\rho)$ is the unstable Jacobian in time 1 that appears in the main theorem 6.2. We make the product over k of all these equalities and we get

$$J^u(\rho)^\eta J^u(g^\eta\rho)^\eta \cdots J^u(g^{S-\eta}\rho)^\eta \leq C(\eta)J^{u,\eta}(g\rho)J^{u,\eta}(g^{1+\eta}\rho)\cdots J^{u,\eta}(g^{S-\eta}\rho),$$

where $C(\eta)$ only depends on η and does not depend on S.

Finally, using previous remark and inequality (6.19), the following estimate holds, for ρ in $g^{-t}\left(T^*\Omega_{\gamma_j}\cap\cdots\cap g^{-(j-1)\eta}T^*\Omega_{\gamma_1}\right)\cap\mathcal{E}^\theta$:

$$|d_\rho g^{t+(j-1)\eta}|\leq C(\eta)e^{j\epsilon\eta a_0}J^u_\eta(\gamma_j,\gamma_{j-1})^{-\eta}J^u_\eta(\gamma_{j-1},\gamma_{j-2})^{-\eta}\cdots J^u_\eta(\gamma_2,\gamma_1)^{-\eta}$$

with $C(\eta)$ independent of j. Then, one has

$$|d_\rho g^{t+(j-1)\eta}|\leq C(\eta)e^{l(\gamma)\epsilon\eta a_0}e^{t(\gamma)},$$

where $t(\gamma)=\sum_{j=0}^{l-1}f(\gamma_{j+1},\gamma_j)$. As $t(\gamma)\leq n_E(\hbar)/2$, this last quantity is bounded by $\hbar^{\frac{\epsilon'-1}{2}-\epsilon}$ (as $l(\gamma)a_0\eta\leq n_E(\hbar)/2$). Using lemma 6.19, we want to estimate the m derivatives of the symbol A^j_p. According to the previous paragraph, they can be estimated up to order $2(N+1-p)$. To get a control on an arbitrary order m, we can fix a large $\tilde{N}$ such that $m\leq 2(\tilde{N}-N)$ and use the result of the previous section for this $\tilde{N}$. Finally, we have, for $p<N$, $m\in\mathbb{N}$ and $0\leq t\leq\eta$,

$$|d^mA^j_p(t,x)|\leq\tilde{C}(m,p)\hbar^{(m+2p)(\frac{\epsilon'-1}{2}-2\epsilon)}. \tag{6.73}$$

Here appears the fact that we only apply the backward quantum evolution for times l (we also used the fact that $j=\mathcal{O}(|\log\hbar|)$). In fact, as we want our symbols to be in the class $S^{-\infty,\cdot}_\nu$, we need derivatives to lose at most a factor $\hbar^{-1/2}$ (this would have not been the case if we had considered times of size $n_E(\hbar)$ instead of size $n_E(\hbar)/2$). The previous estimate (6.73) is uniform for all the γ in the allowed set of theorem 6.18.
Finally, to summarize this section, we can write the following proposition :

Proposition 6.20. *Let p and m be elements of $\mathbb{N}$. There exists $C(m,p,(Q_i)_i,\eta)$ (depending on m, p, η, $(Q_i)_{i=1}^K$ and the coordinate charts) such that for all $\gamma=(\gamma_0,\cdots,\gamma_l)$ such that*

$$\sum_{j=0}^{l-1}f(\gamma_{j+1},\gamma_j)\leq\frac{n_E(\hbar)}{2},$$

for all $0\leq j\leq l$ and for all $0\leq t\leq\eta$,

$$|d^mA^{\gamma_1,\cdots,\gamma_j}_p(t,x)|\leq C(m,p,(Q_i)_i,\eta)\hbar^{(m+2p)(\frac{\epsilon'-1}{2}-2\epsilon)}.$$

Then, as the A^j_p are compactly supported, A^j_p is in class $S^{-\infty,2p\nu}_\nu$, where $\nu=\frac{1-\epsilon'+4\epsilon}{2}$.

So, our formal construction allows us to define a family of symbol A^j_p and each of them belongs to $S^{-\infty,p\epsilon}_\nu$. Moreover the constants implied in the bounds of the derivatives are uniform with respect to the allowed sequences. We underline that the same proof would show that the intermediate symbols $\overline{A}^j_p$ (6.70) are also in the same class of symbols.

6.7.3 Estimate of the remainder terms

We are now able to conclude the proof of theorem 6.18 starting from the family we have just constructed. We have to verify that the remainder is of small order in $\hbar$. Fix a large integer N and denote $A^j(\eta):=\sum_{p=0}^N\hbar^pA^j_p(\eta)$. We want to estimate

$$R^j_N=\|\mathrm{Op}_\hbar(Q_{\gamma_1})\cdots\mathrm{Op}_\hbar(Q_{\gamma_j})(-(j-1)\eta)-\mathrm{Op}_\hbar(A^j(\eta))(-j\eta)\|_{\mathcal{L}(L^2(M))}.$$

Using the induction formula (6.68), we write

$$R^j_N\leq\|U^{-\eta}\mathrm{Op}_\hbar(A^{j-1}(\eta))\mathrm{Op}_\hbar(Q_{\gamma_j})U^\eta-\mathrm{Op}_\hbar(A^j(\eta))\|_{\mathcal{L}(L^2(M))}+R^{j-1}_N,$$

where $R_N^{j-1} = \|\mathrm{Op}_\hbar(Q_{\gamma_1})\cdots\mathrm{Op}_\hbar(Q_{\gamma_{j-1}})(-(j-2)\eta) - \mathrm{Op}_\hbar(A^{j-1}(\eta))\|_{\mathcal{L}(L^2(M))}$. We start by giving an estimate on the first term of the previous upper bound. To do this, we first give a bound on

$$R_N^{\mathrm{comp},j} := \|\mathrm{Op}_\hbar(A^{j-1}(\eta))\mathrm{Op}_\hbar(Q_{\gamma_j}) - \mathrm{Op}_\hbar(\overline{A}^j)\|_{\mathcal{L}(L^2(M))}.$$

Using the expansion of $A^{j-1}(\eta)$ and $\overline{A}^j$, this can rewritten

$$R_N^{\mathrm{comp},j} \leq \sum_{p=0}^{N}\hbar^p\left\|\mathrm{Op}_\hbar(A_p^{j-1}(\eta))\mathrm{Op}_\hbar(Q_{\gamma_j}) - \sum_{r=0}^{N-p}\hbar^r\mathrm{Op}_\hbar((A_p^{j-1}\sharp_M Q_{\gamma_j})_r)\right\|_{\mathcal{L}(L^2(M))}.$$

Then, we can use section 6.8.3 and the estimates (6.78), to bound each term of the previous sum as follows :

$$\left\|\mathrm{Op}_\hbar(A_p^{j-1}(\eta))\mathrm{Op}_\hbar(Q_{\gamma_j}) - \sum_{r=0}^{N-p}\hbar^r\mathrm{Op}_\hbar((A_p^{j-1}\sharp_M Q_{\gamma_j})_r)\right\|_{\mathcal{L}(L^2(M))} \leq C_{N,p}\hbar^{(N+1-p)(1-\nu)-2p\nu-(C+C')\nu}.$$

In particular, we find that $R_N^{\mathrm{comp},j} = \mathcal{O}_N(\hbar^{(N+1)(1-2\nu)-(C+C')\nu})$ (as $\nu < 1/2$). We have now to give a bound on $R_N^{\mathrm{Egorov},j} := \|\mathrm{Op}_\hbar(A^j(\eta)) - U^{-\eta}\mathrm{Op}_\hbar(\overline{A}^j)U^\eta\|_{\mathcal{L}(L^2(M))}$. We will now use results on Egorov theorem from section 6.8.3 to get this bound. First, we write the expansion of $\overline{A}^j$ to get

$$R_N^{\mathrm{Egorov},j} \leq \sum_{p=0}^{N}\hbar^p\left\|U^{-\eta}\mathrm{Op}_\hbar(\overline{A}_p^j)U^\eta - \sum_{r=0}^{N-p}\hbar^r\mathrm{Op}_\hbar(\overline{A}_{p,r}^j(\eta))\right\|_{\mathcal{L}(L^2(M))}.$$

According to the rules for Egorov expansion from section 6.8.3 (see estimates (6.81)) and as we know the class $\overline{A}_p^j$ from the last remark of the previous section, we find that each term of the previous sum can be bounded as follows :

$$\left\|U^{-\eta}\mathrm{Op}_\hbar(\overline{A}_p^j)U^\eta - \sum_{r=0}^{N-p}\hbar^r\mathrm{Op}_\hbar(\overline{A}_{p,r}^j(\eta))\right\|_{\mathcal{L}(L^2(M))} \leq C_{N,p}\hbar^{(N+1)(1-\nu)-3p\nu-D\nu}.$$

This implies that $R_N^{\mathrm{Egorov},j} = \mathcal{O}_N(\hbar^{(N+1)(1-2\nu)-D\nu})$ (as $\nu < 1/2$). Finally, it tells us that $R_N^j = R_N^{j-1} + \mathcal{O}_N(\hbar^{(N+1)(1-2\nu)-D'\nu})$, for some fixed integer D'. By induction on j, we find that

$$\left\|\mathrm{Op}_\hbar(Q_{\gamma_1})\cdots\mathrm{Op}_\hbar(Q_{\gamma_j})(-(j-1)\eta) - \mathrm{Op}_\hbar(A^j(\eta))(-j\eta)\right\|_{\mathcal{L}(L^2(M))} = \mathcal{O}_N(j\hbar^{(N+1)(1-2\nu)-D'\nu}).$$

As $j = \mathcal{O}(|\log\hbar|)$ and as $\nu < 1/2$, we find that, for large N, the remainder tends to 0 as $\hbar$ tends to 0. This concludes the proof of theorem 6.18.□

6.8 Appendix A : Pseudodifferential calculus on a manifold

In this appendix, a few facts about pseudodifferential calculus on a manifold and the sharp energy cutoff used in this paper are recalled. Even if most of this setting can be found in [7], it is recalled because it is extensively used in section 6.6.2 and 6.7. The results from the two first sections of this appendix can be found in more details in [96] or [7]. The results of the last section of this appendix are the extension to the case of a manifold of standard results from semiclassical analysis that can be found either in [21], [32] or [39].

6.8.1 Pseudodifferential calculus on a manifold

We start this appendix by recalling some facts of $\hbar$-pseudodifferential calculus that can be found in [32] or in [39]. Recall that we define on $\mathbb{R}^{2d}$ the following class of symbols :

$$S^{m,k}(\mathbb{R}^{2d}) := \left\{a_\hbar(x,\xi)\in C^\infty(\mathbb{R}^{2d}\times(0,1]) : |\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta a_\hbar| \leq C_{\alpha,\beta}\hbar^{-k}\langle\xi\rangle^{m-|\beta|}\right\}.$$

Let M be a smooth Riemannian d-manifold without boundary. Consider a smooth atlas (f_l, V_l) of M, where each f_l is a smooth diffeomorphism from $V_l \subset M$ to a bounded open set $W_l \subset \mathbb{R}^d$. To each f_l correspond a pull back $f_l^* : C^\infty(W_l) \to C^\infty(V_l)$ and a canonical map $\tilde{f}_l$ from T^*V_l to T^*W_l

$$\tilde{f}_l : (x, \xi) \mapsto \left(f_l(x), (Df_l(x)^{-1})^T \xi\right).$$

Consider now a smooth locally finite partition of identity (ϕ_l) adapted to the previous atlas (f_l, V_l). That means $\sum_l \phi_l = 1$ and $\phi_l \in C^\infty(V_l)$. Then, any observable a in $C^\infty(T^*M)$ can be decomposed as follows : $a = \sum_l a_l$, where $a_l = a\phi_l$. Each a_l belongs to $C^\infty(T^*V_l)$ and can be pushed to a function $\tilde{a}_l = (\tilde{f}_l^{-1})^* a_l \in C^\infty(T^*W_l)$. As in [39], define the class of symbols of order m and index k

$$S^{m,k}(T^*M) := \left\{ a_\hbar \in C^\infty(T^*M \times (0,1]) : |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a_\hbar| \leq C_{\alpha,\beta} \hbar^{-k} \langle \xi \rangle^{m-|\beta|} \right\}. \tag{6.74}$$

Then, for $a \in S^{m,k}(T^*M)$ and for each l, one can associate to the symbol $\tilde{a}_l \in S^{m,k}(\mathbb{R}^{2d})$ the standard Weyl quantization

$$\mathrm{Op}_\hbar^w(\tilde{a}_l)u(x) := \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{R^{2d}} e^{\frac{i}{\hbar}\langle x-y,\xi\rangle} \tilde{a}_l\left(\frac{x+y}{2}, \xi; \hbar\right) u(y) dy d\xi,$$

where $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, the Schwartz class. Consider now a smooth cutoff $\psi_l \in C_c^\infty(V_l)$ such that $\psi_l = 1$ close to the support of ϕ_l. A quantization of $a \in S^{m,k}$ is then defined in the following way :

$$\mathrm{Op}_\hbar(a)(u) := \sum_l \psi_l \times \left(f_l^* \mathrm{Op}_\hbar^w(\tilde{a}_l)(f_l^{-1})^*\right)(\psi_l \times u), \tag{6.75}$$

where $u \in C^\infty(M)$. This quantization procedure $\mathrm{Op}_\hbar$ sends (modulo $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$) $S^{m,k}(T^*M)$ onto the space of pseudodifferential operators of order m and of index k, denoted $\Psi^{m,k}(M)$ [32]. It can be shown that the dependence in the cutoffs ϕ_l and ψ_l only appears at order 2 in $\hbar$ (using for instance theorem 18.1.17 in [56]) and the principal symbol map $\sigma_0 : \Psi^{m,k}(M) \to S^{m,k}/S^{m,k-1}(T^*M)$ is then intrinsically defined. Most of the rules (for example the composition of operators, the Egorov and Calderón-Vaillancourt theorems) that holds in the case of $\mathbb{R}^{2d}$ still holds in the case of $\Psi^{m,k}(M)$. Because our study concerns behavior of quantum evolution for logarithmic times in $\hbar$, a larger class of symbols should be introduced as in [32], for $0 \leq \nu < 1/2$,

$$S_\nu^{m,k}(T^*M) := \left\{ a_\hbar \in C^\infty(T^*M \times (0,1]) : |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a_\hbar| \leq C_{\alpha,\beta} \hbar^{-k-\nu|\alpha+\beta|} \langle \xi \rangle^{m-|\beta|} \right\}. \tag{6.76}$$

Results of [32] can be applied to this new class of symbols. For example, a symbol of $S_\nu^{0,0}$ gives a bounded operator on $L^2(M)$ (with norm uniformly bounded with respect to $\hbar$).
As was explained, one needs to quantize the sharp energy cutoff $\chi^{(.)}$ (see section 6.5.3) to get sharp bounds in 6.14. As $\chi^{(0)}$ localize in a strip of size $\hbar^{1-\delta_0}$ with δ_0 close to 0, the m-th derivatives transversally to $\mathcal{E}$ grows like $\hbar^{m(\delta_0-1)}$. As δ_0 is close to 0, $\chi^{(0)}$ does not belongs to the previous class of symbols that allows $\nu < 1/2$. However, as the variations only appears in one direction, it is possible to define a new pseudodifferential calculus for these symbols. The procedure taken from [96] is briefly recalled in [7] (section 5) and introduces a class of anisotropic symbols $S_{\mathcal{E},\nu'}^{-\infty,0}$ (where $\mathcal{E} := S^*M$ and $\nu' < 1$) for which a quantization procedure $\mathrm{Op}_{\mathcal{E},\nu'}$ can be defined. In the next section, we recall briefly a few results about the quantization $\mathrm{Op}_{\mathcal{E},\nu'}(\chi^{(n)})$ of the symbol $\chi^{(.)}$.

6.8.2 Energy cutoff

Let $\chi^{(.)}$ be as in section 6.5.3. Consider $\delta_0 > 0$ and K_{δ_0} associated to it (see section 6.5.3). Taking $\nu' = 1 - \delta_0$, it can be checked that the cutoffs defined in section 6.5.3 belongs to the class $S_{\mathcal{E},\nu'}^{-\infty,0}$ defined in [7]. A pseudodifferential operator corresponding to it can be defined following the nonstandard procedure mentioned above. Using results from [7] (section 5), one has $\|\mathrm{Op}_{\mathcal{E},\nu'}(\chi^{(n)})\| = 1 + O(\hbar^{\nu'/2})$ for all $n \leq K_{\delta_0} |\log \hbar|$. For simplicity of notations, in the paper $\mathrm{Op}(\chi^{(n)}) := \mathrm{Op}_{\mathcal{E},\nu'}(\chi^{(n)})$. In [7], it is also proved that :

Proposition 6.21. *[7] For $\hbar$ small enough and any $n \in \mathbb{N}$ such that $0 \leq n \leq K_{\delta_0}|\log\hbar|$ and for any $\psi_\hbar = -\hbar^2\Delta\psi_\hbar$ eigenstate, one has*

$$\|\psi_\hbar - Op(\chi^{(n)})\psi_\hbar\| = \mathcal{O}(\hbar^\infty)\|\psi_\hbar\|.$$

Moreover for any sequence α and β of length n less than $K_{\delta_0}|\log\hbar|$, one has

$$\left\|\left(1 - Op\left(\chi^{(n)}\right)\right)\tau_\alpha Op\left(\chi^{(0)}\right)\right\| = \mathcal{O}(\hbar^\infty) \qquad \left\|\left(1 - Op\left(\chi^{(n)}\right)\right)\pi_\beta Op\left(\chi^{(0)}\right)\right\| = \mathcal{O}(\hbar^\infty)$$

where τ and π are given by (6.23) and (6.24).

This proposition tells that the quantization of this energy cutoff exactly have the expected property, meaning that it preserves the eigenfunction of the Laplacian. So, in the paper, introducing the energy cutoff $\mathrm{Op}(\chi^{(n)})$ does not change the semiclassical limit. Moreover this proposition implies the following corollary that allows to apply theorem 6.3 in section 6.5.3 :

Corollary 6.22. *[7] For any fixed $L > 0$, there exists $\hbar_L$ such that for any $\hbar \leq \hbar_L$, any $n \leq K_\delta|\log\hbar|$ and any sequence β of length n, the Laplacian eigenstate verify*

$$\left\|\left(1 - Op\left(\chi^{(n)}\right)\right)\pi_\beta\psi_\hbar\right\| \leq \hbar^L\|\psi_\hbar\|.$$

A last property of the quantization of this cutoff that we can quote from [7] (remark 2.4) is that we can restrict ourselves to study observables carried in a thin neighborhood around $S^*M = H^{-1}(1/2)$:

Proposition 6.23. *[7] For $\hbar$ small enough and any $n \in \mathbb{N}$ such that $0 \leq n \leq K_{\delta_0}|\log\hbar|/2$, one has*

$$\forall|\gamma| = n,\ \|\tau_\gamma Op(\chi^{(n)}) - \tau_\gamma^f Op(\chi^{(n)})\| = \mathcal{O}(\hbar^\infty),$$

where $P^f_{\gamma_j} = Op_\hbar(P_{\gamma_j}f)$, f is a smooth compactly supported function in a thin neighborhood of $\mathcal{E}$ and $\tau^f_\gamma = P^f_{\gamma_{n-1}}((n-1)\eta)\cdots P^f_{\gamma_0}$.

6.8.3 $\hbar$-expansion for pseudodifferential operators on a manifold

The goal of this last section is to explain how the usual $\hbar$-expansion of order N for composition of pseudodifferential operators and Egorov theorem can be extended in the case of pseudodifferential calculus on a manifold. Except for terms of order 0, the $\hbar$-expansion will depend on the partition of identity in section 6.8.1. In fact, on a manifold, the formulas for the terms of order larger than 0 on the $\hbar$-expansion will depend on the local coordinates. For simplicity and as it is the case of all the symbols we consider (thanks to the energy cutoff : for example, see proposition 6.23), we now restrict ourselves to symbols supported in $\mathcal{E}^\theta = H^{-1}([1/2-\theta, 1/2+\theta])$. The symbols are now elements of $S^{-\infty,0}_\nu(T^*M)$.

Composition of pseudodifferential operators on a manifold

First, recall that the usual semiclassical theory on $\mathbb{R}^d$ (see [32] or appendix of [21]) tells that the composition of two elements $\mathrm{Op}^w_\hbar(a)$ and $\mathrm{Op}^w_\hbar(b)$ in $\Psi^{-\infty,k}_\nu(\mathbb{R}^d)$ is still in $\Psi^{-\infty,k}_\nu(\mathbb{R}^d)$ and that the support of its essential symbol is included in $\mathrm{supp}(a) \cap \mathrm{supp}(b)$. More precisely, it says that $\mathrm{Op}^w_\hbar(a) \circ \mathrm{Op}^w_\hbar(b) = \mathrm{Op}^w_\hbar(a\sharp b)$, where $a\sharp b$ is in $S^{-\infty,k}_\nu$ and its asymptotic expansion in power of $\hbar$ is given by the Moyal product

$$a\sharp b(x,\xi) \sim \sum_k \frac{1}{k!}\left(\frac{\imath\hbar}{2}\omega(D_x, D_\xi, D_y, D_\eta)\right)^k a(x,\xi)b(y,\eta)|_{x=y,\xi=\eta}, \tag{6.77}$$

where ω is the standard symplectic form. Outline that it is clear that each element of the sum is supported in $\mathrm{supp}(a)\cap\mathrm{supp}(b)$. As quantization on a manifold is constructed from quantization on

$\mathbb{R}^{2d}$ (see definition (6.75)), one can prove an analogue of this asymptotic expansion in the case of a manifold M (except that it will not be intrinsically defined). Precisely, let a and b be two symbols in $S_\nu^{-\infty,0}(T^*M)$. For a choice of quantization $\mathrm{Op}_\hbar$ (that depends on the coordinates maps), one has $\mathrm{Op}_\hbar(a) \circ \mathrm{Op}_\hbar(b)$ is a pseudodifferential operator in $\Psi_\nu^{-\infty,0}(M)$. Its symbol (mod $O(\hbar^\infty)$) is denoted $a\sharp_M b$ and its asymptotic expansion is of the following form :

$$a\sharp_M b \sim \sum_{p\geq 0} \hbar^p (a\sharp_M b)_p.$$

In the previous asymptotic expansion, $(a\sharp_M b)_p$ is a linear combination (that depends on the cutoffs and the local coordinates) of elements of the form $\partial^\gamma a \partial^{\gamma'} b$ with $|\gamma| \leq p$ and $|\gamma'| \leq p$. As a consequence, $(a\sharp_M b)_p$ is an element of $S_\nu^{-\infty,2p\nu}(T^*M)$.

Remark. We know that we have an asymptotic expansion so by definition and using Calderón-Vaillancourt theorem, we know that each remainder is bounded in norm by a constant which is a small power of $\hbar$ (in fact $C\hbar^{(N+1)(1-2\nu)}$ for the remainder of order N). In our analysis, we need to know precisely how these bounds depend on a and b as we have to make large product of pseudodifferential operators (see section 6.7) and to use the composition formula to get Egorov theorem (see next section). The following lines explain how the remainder in the asymptotic expansion in powers of $\hbar$ is bounded by the derivatives of a and b.

In the appendix of [21], they defined the remainder of the order N expansion, in the case of $\mathbb{R}^{2d}$,

$$\hbar^{N+1} R_{N+1}(a,b,\hbar) := a\sharp b - \sum_{p=0}^{N} \hbar^p (a\sharp b)_p$$

and, using a stationary phase argument, they get the following estimates on the remainder, for all γ and all N,

$$|\partial_z^\gamma R_{N+1}(a,b,z,\hbar)| \leq \rho_d K_d^{N+|\gamma|} (N!)^{-1} \sup_{(*)} |\partial_u^{(\alpha,\beta)+\mu} a(u+z)||\partial_v^{(\beta,\alpha)+\nu} b(v+z)|,$$

where $(*)$ means

$$u, v \in \mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}^{2d},\ |\mu| + |\nu| \leq 4d + |\gamma|,\ |(\alpha,\beta)| = N+1,\ \alpha,\beta \in \mathbb{N}^d.$$

Applying Calderón-Vailancourt theorem (see [32]-theorem 7.11), one knows that there exist a constant C and a constant D (depending only on d), such that for a symbol a in $S^{0,0}_{\mathbb{R}^{2d}}(1)$:

$$\|\mathrm{Op}_\hbar^w(a)\|_{L^2} \leq C \sup_{|\alpha|\leq D} \hbar^{\frac{|\alpha|}{2}} \|\partial^\alpha a\|_\infty.$$

Combining this result with the previous estimates on the $R^{(N+1)}$, one finds that

$$\|\mathrm{Op}_\hbar^w(R_{N+1}(a,b,z,\hbar))\|_{L^2} \leq C(d,N) \sup_{(*)} \hbar^{\frac{|\alpha|}{2}} \|\partial^{\beta+\beta'} a\|_\infty \|\partial^{\gamma+\gamma'} b\|_\infty, \tag{6.78}$$

where $(*)$ means

$$|\alpha| \leq C',\ |\beta| \leq N+1,\ |\gamma| \leq N+1 \text{ and } |\beta'| + |\gamma'| \leq C + |\alpha|.$$

The constants C and C' depend only on the dimension d. The same kind of estimates holds on the remainder in the asymptotic expansion for change of variables. As the asymptotic expansion for composition of pseudodifferential operators is obtained from the composition and variable change rules on $\mathbb{R}^{2d}$ [56] (theorem 18.1.17 ; see also [39]-chapter 8), the previous estimates (6.78) hold for semiclassical analysis on a manifold.

Egorov expansion on a manifold

In this section, we want to recall how we prove an Egorov property with an expansion of any order. We follow the proof from [21]. First, for the order 0 term, we write the following exact expression for a symbol a in $S_\nu^{-\infty,0}(T^*M)$,

$$U^{-t}\mathrm{Op}_\hbar(a)U^t - \mathrm{Op}_\hbar(a(t)) = \hbar\int_0^t U^{-s}(R^{(1)}(t-s))U^s ds, \tag{6.79}$$

where $a(t) := a\circ g^t$, $H(\rho) = \frac{\|\xi\|_x^2}{2}$ is the Hamiltonian and

$$R^{(1)}(t-s) := \frac{1}{\hbar}\left(\frac{\imath}{\hbar}\left[-\frac{\hbar^2\Delta}{2}, \mathrm{Op}_\hbar(a(t))\right] - \mathrm{Op}_\hbar(\{H, a(t)\})\right).$$

According to the rules of pseudodifferential calculus described in the previous section, we know that there exists some constants such that

$$\|R^{(1)}(t-s)\|_{\mathcal{L}(L^2(M))} \leq C(M,1)\sup_{0\leq s\leq t, |\alpha|\leq D, |\beta|\leq 1+D+|\alpha|} \hbar^{\frac{|\alpha|}{2}}\|\partial^\beta(a(s))\|_\infty,$$

where D depends only on the dimension of the manifold and $C(M,1)$ depnds on the choice of coordinates on the manifold. We proceed then by induction to recover the terms of higher order. For these higher order terms, we will see terms depending on the local coordinates appear in the expansion and we will obtain expressions as in [21] for the higher order terms of the expansion that will be different from the case of $\mathbb{R}^d$ [21]. However, we do not need to have an exact expression for each term of the expansion : we only need to know on how many derivatives the order p term depends and how the remainder can be bounded at each step. To obtain, the $\hbar$ formal term of the Egorov expansion, we first outline that $R^{(1)}(t-s)$ is a pseudodifferential operator whose asymptotic expansion is given by the composition rules on a manifold (see previous section). One can compute its principal symbol and verify that it is a linear combination (depending on the manifold and on the choice of coordinates) of derivatives of $a\circ g^{t-s} := a_0(t-s)$ of order at most 2. We denote $\{H, a_0(t-s)\}_M^{(1,0)}$ its principal symbol. Then, we can apply the same procedure as in equation (6.79) to get the exact expression

$$\mathrm{Op}_\hbar(a)(t) = \mathrm{Op}_\hbar(a^{(1)}(t)) + \hbar^2\int_0^t U^{-s}R^{(2)}(t-s)U^s ds.$$

where

$$a^{(1)}(t) := a\circ g^t + \hbar\int_0^t (\{H, a_0(t-s)\}_M^{(1,0)})\circ g^s ds.$$

We denote the previous formula in a more compact way

$$a^{(1)}(t) := a_0(t) + \hbar a_1(t),$$

where $a_1(t,\rho) := \displaystyle\int_0^t \{H, a_0(t-s)\}_M^{(1,0)}(g^s(\rho))\, ds$. As was mentioned, this generalized 'bracket' is a linear combination depending on the devivatives of order at most 2 of a_{t-s} (it also depends on H, M and the choice of the quantization procedure). The operator norm of the remainder $R^{(2)}$ is, once more, controlled by the derivatives of $a_0(t)$ and $a_1(t)$. Precisely, one has

$$\|R^{(2)}(t)\|_{\mathcal{L}(L^2(M))} \leq C(M,2)\sup_{(*)}\hbar^{\frac{|\alpha|}{2}}\|\partial^\beta(a_j(s))\|_\infty,$$

where $C(M,2)$ depends on the manifold M (and on the choice of the quantization procedure) and $(*)$ means

$$j\leq 1,\ 0\leq s\leq t,\ |\alpha|\leq D,\ |\beta|\leq 2-j+D+|\alpha|.$$

Suppose the terms of order less than p, i.e. $a_0(t)$, ..., $a_{p-1}(t)$, are constructed. Then, we want to construct the term of order p. There will be several contributions. First, we write that the symbol (up to $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$ of $R^{(1)}(t-s)$ has an asymptotic expansion where the term of order $p-1$ depends on at most $p+1$ derivatives of $a_0(t-s)$. We can apply (6.79) to this term of order $p-1$ and it will provide a symbol in $S_\nu^{-\infty,-p+(p+1)\nu}(T^*M)$ that we denote $\hbar^p\{H,a_0(t-s)\}^{(p,0)}$. Using the same procedure for every a_j (where $j \leq p-1$), we can show finally that for any order N,

$$\mathrm{Op}_\hbar(a)(t) = \mathrm{Op}_\hbar(a^{(N)}(t)) + \hbar^{N+1}\int_0^t U^{-s}R^{(N+1)}(t-s)U^s ds.$$

In the previous formula, $a^{(N)}(t)$ is defined as follows :

$$a^{(N)}(t) := \sum_{p=0}^{N} \hbar^p a_p(t) \text{ where } \ a_0(t) := a\circ g^t$$

and for $1 \leq p \leq N$,

$$a_p(t,\rho) := \sum_{j=0}^{p-1}\int_0^t \{H, a_j(t-s)\}_M^{(p,j)}\left(g^s(\rho)\right) ds,$$

where $\{.,.\}_M^{(p,j)}$ is a generalized 'bracket' of order (p,j) depending on the local coordinates on the manifold (it is the analogue of formula given by theorem 1.2 in [21]). We do not need to have an exact expression for these brackets : we only need to know on how many derivatives it depends. From the previous section, we know how the order p term in the expansion of $a\sharp_M b$ depends linearly on products of the p derivatives of a and b. The term $\{H,a_0(t-s)\}^{(p,0)}$ comes from the order $p-1$ term of the asymptotic expansion of the symbol of $R^{(1)}(t-s)$. According to the rules of composition of pseudodifferential operators on a manifold, it is a linear combination (depending on H and the choice of coordinates) of derivatives of a of order at most $p+1$. More generally, $\{H,a_j(t-s)\}_M^{(p,j)}$ is a linear combination of derivatives of $a_j(t)$ of order at most $p+1-j$. For the remainder term $R^{(N+1)}(s)$ of order N, using the formulas for the composition of pseudodifferential operators, one can control it by the derivatives of the lower terms of the expansion. The previous discussion can be summarized in the following proposition :

Proposition 6.24 (Egorov expansion on a manifold)**.** *Let a be a symbol in $S_\nu^{-\infty,0}(T^*M)$. One has the exact expression for every $N \geq 0$:*

$$Op_\hbar(a)(t) = Op_\hbar(a^{(N)}(t)) + \hbar^{N+1}\int_0^t U^{-s}R^{(N+1)}(t-s)U^s ds. \tag{6.80}$$

In the previous formula, one has

$$a^{(N)}(t) := \sum_{p=0}^{N} \hbar^p a_p(t) \ \textit{where} \ \ a_0(t) := a\circ g^t$$

and for $1 \leq p \leq N$,

$$a_p(t,\rho) := \sum_{j=0}^{p-1}\int_0^t \{H, a_j(t-s)\}_M^{(p,j)}\left(g^s(\rho)\right) ds.$$

For each $0 \leq j \leq p-1$, $\{H,a_j(t-s)\}_M^{(p,j)}$ is a linear combination of derivatives of $a_j(t-s)$ of order at most $p+1-j$ that depends on the choice of coordinates on the manifold. Finally, the norm of $R^{(N+1)}(t)$ satisfies the following bound :

$$\|R^{(N+1)}(t))\|_{L^2} \leq C(M,N)\sup_{(*)} \hbar^{\frac{|\alpha|}{2}}\|\partial^\beta\left(a_p(s)\right)\|_\infty, \tag{6.81}$$

where $C(M,N)$ depends on N and on the manifold M (also on the choice of coordinates) and where $(*)$ means

$$p \leq N,\ 0 \leq s \leq t,\ |\alpha| \leq D,\ |\beta| \leq N+1-p+D+|\alpha|.$$

The constant D depends only on the dimension of the manifold.

Remark. Theorem 1.2 in [21] gives an exact expression of each term of this exact expansion in the case of $\mathbb{R}^{2d}$. We also mention that if a is in the class $S_\nu^{-\infty,0}(T^*M)$, then each term of the expansion a_p is in the class $S_\nu^{-\infty,2p\nu}$.

Finally, we underline that, by an induction argument, one can derive the following corollary :

Corollary 6.25. *Using the notations of proposition 6.24, one has that every $a_p(t)$ depends linearly on the derivatives of order at most $2p$ of a.*

6.9 Appendix B : The case of surfaces of nonpositive curvature

In this appendix, we consider a surface of nonpositive sectional curvature M and show how one could try to adapt the proof of the main inequality (6.2) in this slightly different case (see introduction). We do not pretend to give full details : we just provide an outline of proof and postpone the details to future works [83]. Before starting our discussion, we recall briefly a few facts about surfaces of nonpositive curvature. More details can be found for example in [89] (chapter 3). We recall that this sketch of proof is now specific to nonpositive curvature : on this form, it cannot be extended to any surface without conjugate points. We will mention the points of the proof which use the nonpositivity assumptions.

6.9.1 Surfaces of nonpositive curvature

We define $\pi : S^*M \to M$ the canonical projection $\pi(x,\xi) := x$. The vertical subspace V_ρ at the point $\rho = (x,\xi)$ is the kernel of the application $d_\rho\pi$. We underline that it is in fact the tangent space in ρ of the 1-dimensional submanifold S_x^*M. In the case of a surface, it has dimension 1. We can also define the horizontal subspace in ρ. Precisely, for $Z \in T_\rho S^*M$, we consider a smooth curve $c(t) = (a(t), b(t))$, $t \in (-\epsilon,\epsilon)$, in S^*M such that $c(0) = \rho$ and $c'(0) = Z$. Then, we define the horizontal space $\mathcal{H}_\rho$ as the kernel of the application $\mathbb{K}_\rho(Z) = \nabla_{a'(0)}b(0) = \nabla_{d_\rho\pi(Z)}b(0)$, where ∇ is the Levi-Civita connection. This subspace contains $X_H(\rho)$ the vector field tangent to the Hamiltonian flow. For a surface, this subspace is of dimension 2. We know that we can use these two subspaces to split the tangent space $T_\rho S^*M = \mathcal{H}_\rho \oplus V_\rho$ (it is the usual way to split the tangent space in order to define the Sasaki metric on S^*M [89]). Using this decomposition, we would like to recall an important link between the linearization of the geodesic flow and the Jacobi fields on M. To do this, we underline that to each point ρ in S^*M corresponds a unique unit speed geodesic γ_ρ. Then we define a Jacobi field in ρ (or along γ_ρ) as a solution of the differential equation

$$\mathbb{J}"(t) + R(\gamma_\rho'(t), \mathbb{J}(t))\gamma_\rho'(t) = 0,$$

where $R(X,Y)Z$ is the curvature tensor applied to the vector fields X, Y and Z and $\mathbb{J}'(t) = \nabla_{\gamma_\rho'(t)}\mathbb{J}(t)$. We recall that we can interpret Jacobi fields as geodesic variation vector fields [37]. Precisely, consider a $\mathcal{C}^\infty$ family of curves $c_s : [a,b] \to M$, s in $(-\epsilon,\epsilon)$. We say that it is a $\mathcal{C}^\infty$ variation of $c = c_0$. It defines a corresponding variation vector field $Y(t) = \frac{\partial}{\partial s}(c_s(t))_{|s=0}$ that gives the initial velocity of $s \mapsto c_s(t)$. If we suppose now that c is a geodesic of M, then a $\mathcal{C}^2$ vector field $Y(t)$ on c is a Jacobi vector field if and only if $Y(t)$ is the the variation vector field of a geodesic variation of c (i.e. $\forall s \in (-\epsilon,\epsilon)$, c_s is a geodesic of M). For instance, $\gamma_\rho'(t)$ and $t\gamma_\rho'(t)$ are Jacobi vector fields along γ_ρ.
Consider now a vector (V,W) in $T_\rho S^*M$ given in the coordinates $\mathcal{H}_\rho \oplus V_\rho$. Using the canonical

identification given by $d_\rho\pi$ and $\mathbb{K}_\rho$, there exists a unique Jacobi field $\mathbb{J}_{V,W}(t)$ in ρ whose initial conditions are $\mathbb{J}_{V,W}(0) = V$ and $\mathbb{J}'_{V,W}(0) = W$, such that

$$d_\rho g^t(V,W) = (\mathbb{J}_{V,W}(t), \mathbb{J}'_{V,W}(t))$$

in coordinates $\mathcal{H}_{g^t\rho} \oplus V_{g^t\rho}$ [89] (lemma 1.4). We define N_ρ the subspace of $T_\rho S^*M$ of vectors orthogonal to $X_H(\rho)$ and H_ρ the intersection of this subspace with $\mathcal{H}_\rho$. Using the previous property about Jacobi fields, we know that the subbundle $\mathcal{N}$ perpendicular to the Hamiltonian vector field is invariant by g^t and that we have the following splitting [89] (lemma 1.5) :

$$T_\rho S^*M = \mathbb{R}X_H(\rho) \oplus H_\rho \oplus V_\rho.$$

Obviously, these properties can be extended to any energy layer $\mathcal{E}(\lambda)$ for any positive λ. Following [89] (lemma 3.1), we can make the following construction of two particular Jacobi fields along γ_ρ. We denote $(\gamma'_\rho(t), e(t))$ an orthonormal basis defined along $\gamma_\rho(t)$. Given a positive T and because there are no conjugate points on the manifold M, there exists a unique Jacobi field $\mathbb{J}_T(t)$ such that $\mathbb{J}_T(0) = e(0)$ and $\mathbb{J}_T(T) = 0$. Moreover, $\mathbb{J}_T(t)$ is perpendicular to $\gamma_\rho(t)$ for all t in $\mathbb{R}$ [89] (page 50). As a consequence, $\mathbb{J}_T(t)$ can be identified with its coordinate along $e(t)$ (as $T_{\gamma_\rho(t)}M$ is of dimension 2). A result due to Hopf (lemma 3.1 in [89]) tells us that the limits

$$\lim_{T\to+\infty} \mathbb{J}_T(t) \text{ and } \lim_{T\to-\infty} \mathbb{J}_T(t)$$

exist. They are denoted $\mathbb{J}^s_\rho(t)$ and $\mathbb{J}^u_\rho(t)$ (respectively the stable and the unstable Jacobi field). They satisfy the simplified one dimensional Jacobi equation

$$\mathbb{J}"(t) + K(t)\mathbb{J}(t) = 0,$$

where $K(t) = K(\gamma_\rho(t))$ is the sectional curvature at $\gamma_\rho(t)$. They are never vanishing Jacobi fields with $\mathbb{J}^*_\rho(0) = e(0)$ and for all t in $\mathbb{R}$, they are perpendicular to $\gamma'_\rho(t)$. Moreover, we have $\|\mathbb{J}^{*'}_\rho(t)\| \leq \sqrt{K_0}\|\mathbb{J}^*_\rho(t)\|$ for every t in $\mathbb{R}$ (where $-K_0$ is some negative lower bound on the curvature). Using the previous link between geodesic flow and Jacobi fields, we can lift these subspaces to invariant subspaces $E^s(\rho)$ and $E^u(\rho)$ called the Green stable and unstable subspaces. These subspaces have dimension 1 (in the case of surfaces) and are included in N_ρ. A basis of $E^s(g^t\rho)$ is given by $(\mathbb{J}^s_\rho(t), \mathbb{J}^{s'}_\rho(t))$ in coordinates $H_{g^t\rho} \oplus V_{g^t\rho}$. We can underline that both subspaces are uniformly transverse to V_ρ and that it can happen that they are equal to each other (which was not the case in the Anosov setting). In the case of nonpositive curvature, these subspaces depend continuously in ρ and are integrable as in the Anosov case [37].
In the case where the Green subspaces attached to ρ are linearly independent, a splitting of N_ρ is given by $E^u(\rho) \oplus E^s(\rho)$ and the splitting holds for all the trajectory. For the opposite case, we know that the Green subspaces attached to ρ (and hence to a geodesic γ_ρ) are linearly dependent if and only if the sectional curvature is vanishing at every point of the geodesic γ_ρ [89]. As a consequence, we cannot use the same kind of splitting. However, there exists a splitting of N_ρ that we can use in both cases, precisely $E^u(\rho) \oplus V_\rho$. We would like to mention that the one dimensional Jacobi equation defined earlier gives rise to the Riccati equation

$$U'(t) + U^2(t) + K(t) = 0,$$

where $U(t) = \mathbb{J}'(t)\mathbb{J}(t)^{-1}$ for non vanishing $\mathbb{J}$. Then we define the corresponding unstable Riccati solution associated to the unstable Jacobi field as $U^u_\rho(t) := \mathbb{J}^{u'}_\rho(t)(\mathbb{J}^u_\rho(t))^{-1}$. It is a nonnegative quantity and it describes the growth of the unstable Jacobi field (in dimension 2) as follows :

$$\|\mathbb{J}^u_\rho(t)\| = \|\mathbb{J}^u_\rho(0)\| e^{\int_0^t U^u_\rho(s)ds}.$$

The same works for the stable Jacobi field. Both quantities are continuous[5] with respect to ρ. We underline that, we can use the previous results to obtain the bound $\|d_\rho g^t_{|E^u(\rho)}\| \leq \sqrt{1+K_0} e^{\int_0^t U^u_\rho(s)ds}$.

[5]The continuity in ρ is a crucial property that we will use in our proof. We underline that it is not true if we only suppose the surface to be without conjugate points [12].

So the unstable Riccati solution describe the infinitesimal growth of the geodesic flow along the unstable direction, whereas $J^u(\rho)^{-1}$ used in the previous sections described the growth at time 1. More precisely, as for the unstable Jacobian, Freire and Mañé showed that the unstable Riccati solutions are related to the Lyapunov exponents. In fact, they proved that the Ruelle bound for the entropy of a g-invariant measure μ in the case of nonpositive curvature (precisely for manifolds without conjugate points) [45] is

$$h_{KS}(\mu, g) \leq \int_{S^*M} U^u(\rho) d\mu(\rho).$$

A last point we would like to recall is a result due to Green [49] and to Eberlein in the general case [36]. It asserts that for any positive c there exists a positive $T = T(c)$ such that for any ρ in S^*M and for any nontrivial Jacobi field $\mathbb{J}(t)$ along γ_ρ such that $\mathbb{J}(0) = 0$ and $\|\mathbb{J}'(0)\| \geq 1$, for all t larger than T, we have $\|\mathbb{J}(t)\| \geq c$ (proposition 3.1 [89]). This property of uniform divergence only holds in dimension 2 and as it is crucially used in the following, our proof only works for surfaces of nonpositive curvature. In larger dimensions, the same result holds but without any uniformity in ρ. Finally, all these properties allow to prove the following lemma :

Lemma 6.26. *Let $v = (0, V)$ be a unit vertical vector at ρ. Then for any $c > 0$, there exists $T = T(c) > 0$ (independent of ρ and of v) such that for any $t \geq T$, $\|d_\rho g^t v\| \geq c$.*

We underline that, for $t \geq T$, the angle between $E^u(g^t\rho)$ and $d_\rho g^t v$ is bounded by some $\kappa(c)$ with $\kappa(c)$ arbitrarly small as c tends to infinity.

6.9.2 Modifications of the technical assumptions

Now that our new classical setting is well defined, we explain which modifications should be performed to prove the main inequality 6.7 for surfaces of nonpositive curvature. Instead of the unstable Jacobian, we will use the unstable Riccati solution $U^u(\rho)$. Recall that this quantity is nonnegative and continuous with respect to ρ (as M is of nonpositive curvature [89]). We also fix ϵ_0 a small positive number and define

$$U_0^u(\rho) := \sup\{\epsilon_0, U^u(\rho)\}.$$

The function U_0^u will be used to ensure that the stopping time is finite. The main difference with the case of an Anosov flow is that the function that will appear in the main estimate (6.83) will be slightly different and will be played by the function U^u. We define $f(\gamma)$ and $f_0(\gamma)$ as in section 6.3 i.e.

$$f_{0,+}(\gamma) := \eta \inf\{U_0^u(\rho) : \rho \in U_\gamma\} \text{ and } f_+(\gamma) := \eta \inf\{U^u(\rho) : \rho \in U_\gamma\}.$$

The role of a_0 will be played by ϵ_0. In particular, we can rewrite the continuity of U^u (inequality (6.19)) under the following slightly diferent form using again the small parameter ϵ,

$$\forall \rho \in U_\gamma, \ \left| \int_0^\eta U_\rho^u(s) ds - f_+(\gamma) \right| \leq \eta \epsilon_0 \epsilon. \tag{6.82}$$

We make the extra assumption that the small parameter ϵ used for the continuity is smaller than ϵ_0.

6.9.3 How do we modify the proof ?

First we underline that we can extend theorem 6.14 to surfaces of nonpositive curvature in the following way :

Theorem 6.27. *Let M be a surface of nonpositive sectional curvature. For every $\mathcal{K} > 0$ ($\mathcal{K} \leq C_\delta$), there exists $\hbar_\mathcal{K}$ and $C_\mathcal{K}$ such that uniformly for all $\hbar \leq \hbar_\mathcal{K}$, for all $k \leq \mathcal{K}|\log \hbar|$, for all*

$\alpha = (\alpha_0, \cdots, \alpha_k)$,

$$\|P_{\alpha_k} U^\eta P_{\alpha_{k-1}} \cdots U^\eta P_{\alpha_0} Op(\chi^{(k)})\|_{L^2(M)} \leq C_{\mathcal{K}} \hbar^{-\frac{1}{2}} e^{2k\eta\epsilon_0\epsilon} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k-1} f_+(\sigma_+^j \alpha)\right), \tag{6.83}$$

using the previous notations from section 6.9.2.

We underline that the parameter $\epsilon_0\epsilon$ is a small parameter that we choose to be proportional to ϵ_0 for simplicity (as $k\eta\epsilon_0$ will be bounded by $n_E(\hbar)$ in the following). In [7], the proof of this theorem was based on a WKB expansion. The same proof works : we just mention certain points that need attention. We refer the reader to [7] for the detailed proof. The first point we underline is that they used the fact that an Anosov manifold has no conjugate points. This property remains true in the case of manifolds of nonpositive curvature [37]. The second point is that they used that under the flow a vector V in the vertical space V_ρ tends exponentially fast to the unstable direction. In fact, one only needs the fact that $d_\rho g^t V_\rho$ converges uniformly to $E^u(\rho)$. This modification requires a multiplicative correction factor of order $Ce^{k\eta\delta}$ (with δ arbitrarly small that we will choose equal to $\epsilon_0\epsilon$) that depends on the length of the word α (with C independent of ρ and α). This property holds as was mentioned by lemma 6.26 and works only in dimension 2 for nonpositively curved manifolds. A last point that should be adapted is that the contraction of g^{-1} along $E^u(\rho)$ can be understood in term of the unstable Riccati solution. Using section 6.9.1, we know that, for positive t,

$$|d_\rho g^{-t}_{|E^u(\rho)}| \leq \sqrt{1+K_0}\|\mathbb{J}^u_\rho(-t)\|,$$

and that this quantity behaves like $e^{\int_0^{-t} U^u_\rho(s)ds}$ where $U^u_\rho(s)$ is the unstable Riccati solution in ρ. As the manifold M is compact and of nonpositive curvature, we can use inequality (6.82) to replace $\int_0^{-k\eta} U^u_\rho(s)ds$ by $-\sum_j f(\sigma^j\alpha)$. This modification also introduces a multiplicative correction factor $e^{k\eta\epsilon_0\epsilon}$ that depends on the length of the word α.
In the Anosov case, the functions f_+ and $f_{0,+}$ coincide as they are both bounded from below by the same constant. The fact that $f_{0,+}(\gamma)$ is positive (bounded from below by $\eta\epsilon_0$) allows to define a stopping time by using the sets, for any real number t ($f_{0,+} \geq \epsilon_0$ ensures that we consider finite sequences),

$$I^\eta(t) := \left\{\alpha = (\alpha_0, \cdots, \alpha_k) : k \geq 3, \sum_{i=1}^{k-2} f_{0,+}\left(\sigma_+^i\alpha\right) \leq t < \sum_{i=1}^{k-1} f_{0,+}\left(\sigma_+^i\alpha\right)\right\},$$

As the upper bound in previous theorem can be of order $\hbar^{-\frac{1}{2}}$ (if f_+ is equal to 0 for all the sequence), the lower bound in the uncertainty principle can be empty if we proceed as in the case of an Anosov surface (see section 6.5.3). To solve this complication, we introduce a quantum pressure as in [7] and [5] :

$$p\left(\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}_+}, \overline{\mathcal{C}}_\hbar^+\right) := H\left(\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}_+}, \overline{\mathcal{C}}_\hbar^+\right) - 2\sum_{\alpha\in I^\eta(\hbar)} \overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}_+}\left(\overline{\mathcal{C}}_\alpha^+\right)\log W_\alpha^+. \tag{6.84}$$

In the previous expression, we defined the weights

$$W_\alpha^+ := \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1} f_+(\sigma_+^j\alpha)\right).$$

We underline that this quantity is larger than 1 and that the function that appears is f_+ and not $f_{0,+}$ (see theorem 6.27). In the Anosov case, this complication was not necessary as all W_α^+ were of order $\hbar^{-\frac{1}{2}}$ and the introduction of this correction term was not useful. According to corollary 2.5 from [7], we can rewrite corollary 6.13 as an uncertainty principle for quantum pressures associated to quantum partitions of identity

$$p\left(\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}_+}, \overline{\mathcal{C}}_\hbar^+\right) + p\left(\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}_-}, \overline{\mathcal{C}}_\hbar^-\right) \geq -\log C - (1+\epsilon'+4\epsilon)n_E(\hbar), \tag{6.85}$$

where C is a constant that does not depend on $\hbar$. Then, as in section 6.4.2 and 6.5.2, we can make a symbolic interpretation of this quantum pressure. To do this, we introduce for each atom A of the partition $\vee_{j=0}^{n_E(\hbar)-1}\overline{\sigma}^{-j}\overline{\mathcal{C}}$ (which corresponds to a family $(\gamma_0,\cdots,\gamma_{n_E(\hbar)-1})$) the weights

$$W_A^+ := \prod_{j=0}^{n_E(\hbar)-1} W_{\gamma_j}^+.$$

We also define the refined pressure at time n

$$p_n\left(\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}_+},\overline{\sigma}_+,\overline{\mathcal{C}}^+\right) := H_n\left(\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}_+},\overline{\sigma}_+,\overline{\mathcal{C}}^+\right) - 2\sum_{A\in\vee_{j=0}^{n-1}\overline{\sigma}^{-j}\overline{\mathcal{C}}^+}\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}_+}(A)\log W_A^+.$$

Then, following lemma 6.6 and with obvious adaptation of the notations for the backward side, we can rewrite the lower bound on the quantum pressure as follows :

$$-2\frac{\log C_{\mathcal{K}}}{n_E(\hbar)} - 2\epsilon - (1+\epsilon'+4\epsilon) \leq \frac{1}{n_E(\hbar)}\left(p_{n_E(\hbar)}\left(\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}_+},\overline{\sigma}_+,\overline{\mathcal{C}}_+\right) + p_{n_E(\hbar)}\left(\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}_-},\overline{\sigma}_-,\overline{\mathcal{C}}_-\right)\right).$$

The aditional ϵ that appears is due to the fact that to each atom A corresponds an unique α' (see proof of lemma 6.6) and W_A^+ is not exactly equal to its corresponding weight $W_{\alpha'}^+$. Mimicking the proof for Anosov surfaces, we need to prove the following subadditivity property :

Theorem 6.28. *Let $\overline{C}$ be the partition of lemma 6.6. There exists a function $R(n_0,\hbar)$ on $\mathbb{N}\times(0,1]$ and R independent of n_0 such that*

$$\forall n_0\in\mathbb{N},\qquad \limsup_{\hbar\to 0}|R(n_0,\hbar)| = R.$$

Moreover, for any $\hbar\in(0,1]$ and any $n_0,m\in\mathbb{N}$ such that $n_0+m\leq n_E(\hbar)$, one has :

$$p_{n_0+m}\left(\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}_+},\overline{\sigma}_+,\overline{\mathcal{C}}^+\right) \leq p_{n_0}\left(\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}_+},\overline{\sigma}_+,\overline{\mathcal{C}}^+\right) + p_m\left(\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}_+},\overline{\sigma}_+,\overline{\mathcal{C}}^+\right) + R(n_0,\hbar).$$

As in theorem 6.8, this result came from the almost invariance of the measure $\overline{\mu}_\hbar^{\overline{\Sigma}_+}$ under $\overline{\sigma}_+$ (proposition 6.15). In fact, compared to the Anosov case, the corection term in the pressure also follows a subadditivity property : we can mimick the proof from [7] (section 4.2) based on the invariance of the measure for logarithmic times. So, as in section 6.6, we only have to verify the almost invariance of the measure for logarithmic times. It requires to verify that the proof of theorem 6.18 still works in the case of surfaces of nonpositive curvature. The key point of the proof of theorem 6.18 is that in the allowed range of times $|d_\rho g^t|$ is bounded by some $\hbar^{-\nu}$ (with $\nu<1/2$). We know that to each ρ we can associate a word α of length k (see section 6.7.2 for notations). The range of times we will consider will be $0\leq t\leq k\eta$. To prove previous property in the case of surfaces of nonpositive curvature, we use the splitting of $T_\rho S^*M$ given by $\mathbb{R}X_H(\rho)\oplus E^u(\rho)\oplus V_\rho$. These three subspaces are uniformly transverse so we only have to give an estimate of $\|d_\rho g^t_{E\to T^*_{g^t\rho}M}\|$ when E is one of them. In the case where $E=\mathbb{R}X_H(\rho)$, it is bounded by 1 and in the case where $E=E^u(\rho)$, it is bounded by $\sqrt{1+K_0}e^{\int_0^t U^u_\rho(s)ds}$. In the last case, lemma 6.26 tells us that the spaces $d_\rho g^t V_\rho$ and $E^u(g^t\rho)$ become uniformly close (in direction) to each other. Then, we consider e_0 a unit vector in V_ρ and for $0\leq p\leq k-1$, we define the $e_{p\eta}$ as the unit vector $\frac{d_\rho g^{p\eta}e_0}{\|d_\rho g^{p\eta}e_0\|}$. We can write

$$\|d_\rho g^{k\eta}e_0\| = |\langle d_\rho g^{k\eta}e_0, e_{k\eta}\rangle| = |\langle d_{g^{(k-1)\eta}\rho}g^\eta e_{(k-1)\eta}, e_{k\eta}\rangle\cdots\langle d_\rho g^\eta e_0, e_\eta\rangle|.$$

We also define the corresponding sequence $e^u_{p\eta} := \frac{d_\rho g^{p\eta}e_0^u}{\|d_\rho g^{p\eta}e_0^u\|}$ of unit unstable vectors, where $e_0^u := \frac{(J^u_\rho(0),J^{u'}_\rho(0))}{\|(J^u_\rho(0),J^{u'}_\rho(0))\|}$. From lemma 6.26, we know that $e_{p\eta}$ becomes uniformly close (in ρ) to $e^u_{p\eta}$. So, up to an error term of order $Ce^{k\eta\delta}$ (with C uniform in ρ and δ arbitrarly small), we have

$$\|d_\rho g^{k\eta}e_0\| \leq Ce^{k\eta\epsilon_0\epsilon}|\langle d_{g^{(k-1)\eta}\rho}g^\eta e^u_{(k-1)\eta}, e^u_{k\eta}\rangle\cdots\langle d_\rho g^\eta e^u_0, e^u_\eta\rangle| = Ce^{k\eta\delta}\|d_\rho g^{k\eta}_{|E^u(\rho)}\|.$$

Finally, taking $\delta = \epsilon_0\epsilon$, we have that $\|d_\rho g^{k\eta}\|$ is bounded by $Ce^{k\eta\epsilon_0\epsilon}e^{\int_0^{k\eta} U^u_\rho(s)ds}$ (with C uniform in ρ). For the allowed words, $e^{k\eta\epsilon_0\epsilon}$ is of order $\hbar^{-\epsilon}$ (as $k\eta\epsilon_0 \leq 1/2n_E(\hbar)$). To conclude, we can estimate

$$\left|\int_0^{k\eta} U^u_\rho(s)ds - \sum_{j=0}^{k-1} f_+(\sigma_+^j\alpha)\right| \leq \sum_{j=0}^{k-1}\left|\int_{j\eta}^{(j+1)\eta} U^u_\rho(s)ds - f_+(\sigma_+^j\alpha)\right|.$$

To bound this sum, we can use the continuity of U^u (see inequality (6.82)) to show that this quantity is bounded by $\epsilon|\log\hbar|$. By definition of the allowed words α, we know that $\sum_{j=0}^{k-1} f_+(\sigma^j\alpha) \leq 1/2n_E(\hbar)$. This allows to conclude that $|d_\rho g^t|$ is bounded by some $C\hbar^{-\nu}$ (with C independent of ρ and $\nu < 1/2$).

Now, we can reproduce the subadditivity argument from the outline of the proof, let $\hbar$ tends to 0 and substitute the smooth partitions by true partitions (see section 6.4.4 for details). We have finally

$$-3\epsilon - 1 - \epsilon' - \frac{R}{n_0} \leq \frac{1}{n_0}\left(p_{n_0}\left(\overline{\mu}^{\overline{\Sigma}_+}, \overline{\sigma}_+, \overline{\mathcal{C}}^+\right) + p_{n_0}\left(\overline{\mu}^{\overline{\Sigma}_-}, \overline{\sigma}_-, \overline{\mathcal{C}}_-\right)\right).$$

We can use the multiplicative property of W_A^+ to write

$$\sum_{A\in\vee_{j=0}^{n_0-1}\overline{\sigma}^{-j}\overline{\mathcal{C}}^+} \overline{\mu}^{\overline{\Sigma}_+}(A)\log W_A^+ = \sum_{A_0,\cdots,A_{n_0-1}\in\overline{\mathcal{C}}^+} \overline{\mu}^{\overline{\Sigma}_+}(A_0\cap\cdots\cap\overline{\sigma}_+^{-(n_0-1)}A_{n_0-1})\sum_{j=0}^{n_0-1}\log W_{A_j}^+.$$

After simplification and using the fact that $\overline{\mathcal{C}}^+$ is a partition, we can let n_0 tends to ∞ and apply the Abramov theorem as in the outline of the proof (see section 6.4.4). We find (as $h_{KS}(\mu,g) = h_{KS}(\mu,g^{-1})$)

$$\sum_{\gamma\in\{1,\cdots,K\}^2} f_{0,+}(\gamma)\,\mu^\Sigma([\gamma])\left(-3\epsilon - \frac{1}{2}(1+\epsilon') + 2\sum_{A\in\overline{\mathcal{C}}}\overline{\mu}^{\overline{\Sigma}}(A)\log W_A^+\right) \leq \eta h_{KS}(\mu,g).$$

After simplification, we find that

$$-\sum_{\gamma\in\{1,\cdots,K\}^2} f_{0,+}(\gamma)\,\mu^\Sigma([\gamma])\left(3\epsilon + \frac{1}{2}(1+\epsilon')\right) + \sum_{\gamma\in I^\eta(1)} f_{0,+}(\gamma)\mu^\Sigma([\gamma])\log W_\gamma^+ \leq \eta h_{KS}(\mu,g).$$

At this point of the discussion, we would like to underline that our choice of $I^\eta(1)$ (and of the associated partition $\overline{\mathcal{C}}^+$) was quite arbitrary in the setting of nonpositive curvature. In fact, as was discussed earlier, the unstable Riccati solution measures the growth along the unstable direction at an infinitesimal level whereas the unstable jacobian were describing it in time 1 (see section 6.9.1). So the choice of time 1 was justified for the unstable jacobian while for the Riccati solution, a more appropriate choice would be $1/N_0$ for a large integer N_0 (such that $\epsilon' << 1/N_0 << \epsilon_0$). We can consider the family $I^\eta(1/N_0)$ (and the corresponding partition $\overline{\mathcal{C}}^+_{N_0}$). The previous inequality would have been

$$-\sum_{\gamma\in\{1,\cdots,K\}^2} f_{0,+}(\gamma)\,\mu^\Sigma([\gamma])\left(3\epsilon + \frac{1}{2N_0}(1+\epsilon')\right) + \sum_{\gamma\in I^\eta(1/N_0)} f_{0,+}(\gamma)\mu^\Sigma([\gamma])\log W_\gamma^+ \leq \frac{\eta}{N_0}h_{KS}(\mu,g).$$

With the notations of the outline of the proof (see section 6.4.4), we define for $\rho\in\mathcal{E}^\theta$,

$$F_0(\rho) := \sum_{\gamma\in I^\eta(1/N_0)} f_{0,+}(\gamma)\log W_\gamma^+ \mathbf{1}_{O_{\gamma_0}}(\rho)\cdots\mathbf{1}_{O_{\gamma_k}}\circ g^{k\eta}(\rho).$$

We underline that for each ρ in $\mathcal{E}^\theta$, there exists an unique γ in $I^\eta(1/N_0)$ such that $\mathbf{1}_{O_{\gamma_0}}(\rho)\cdots\mathbf{1}_{O_{\gamma_k}}\circ g^{k\eta}(\rho)$ is non zero (it is then equal to 1). We define

$$X_0 := \left\{\rho\in\mathcal{E}^\theta : \forall 0\leq t\leq\frac{1}{N_0\epsilon_0}, U^u(g^t\rho) > 2\epsilon_0\right\}.$$

We can verify that $F_0(\rho) \geq (1/N_0) \sum_{\gamma_0,\gamma_1} f_{0,+}(\gamma) \mathbf{1}_{X_0}(\rho) \mathbf{1}_{O_{\gamma_0}}(\rho) \mathbf{1}_{O_{\gamma_1}} \circ g^\eta(\rho)$ for all ρ in $\mathcal{E}^\theta$ (we underline that we used the fact that $\epsilon < \epsilon_0$, inequality (6.19) and that $k\eta \leq 1/(N_0\epsilon_0)$). We can substitute this inequality on the previous bound on the entropy, let the diameter of the partition (and θ) tend to 0 and simplify by η. We find then

$$-\left(\frac{1}{2N_0}(1+\epsilon') + 3\epsilon\right) \int_{S^*M} U_0^u(\rho) d\mu(\rho) + \frac{1}{N_0} \int_{S^*M} U_0^u(\rho) \mathbf{1}_{X_0}(\rho) d\mu(\rho) \leq \frac{1}{N_0} h_{KS}(\mu, g).$$

Finally, we let η, ϵ, ϵ' tend to 0 (in this order) and simplify by $1/N_0$. We find the following bound on the entropy

$$-\frac{1}{2} \int_{S^*M} U_0^u(\rho) d\mu(\rho) + \int_{S^*M} U_0^u(\rho) \mathbf{1}_{X_0}(\rho) d\mu(\rho) \leq h_{KS}(\mu, g).$$

We let now N_0 tend to infinity and then ϵ_0 tend to 0 (in this order). We find finally the expected lower bound

$$\frac{1}{2} \int_{S^*M} U^u(\rho) d\mu(\rho) \leq h_{KS}(\mu, g). \square$$

Annexe A

Rappels de géométrie riemannienne

Cette annexe est consacrée à quelques brefs rappels de géométrie riemannienne et hamiltonienne. On ne considère que des variétés différentielles $\mathcal{C}^\infty$ (puisque c'est de toute façon le cadre naturel de l'analyse semi-classique) complètes et sans bords.

A.1 Laplacien sur une variété

Ce premier paragraphe est dédié à la définition du Laplacien sur une variété riemannienne [15] sans référence à la théorie des opérateurs pseudo-différentiels sur une variété.

A.1.1 Métrique sur une variété

On rappelle qu'une variété riemannienne est la donnée d'un couple (M, g) où M est une variété de dimension d et $g : M \to S^2T^*M$ est une section lisse et définie positive du fibré des 2-formes bilinéaires symétriques de M. On appelle g la métrique de la variété. On l'écrit sous forme compacte $g := \sum_{i,j=1}^{d} g_{i,j} dx^i dx^j$ en coordonnées locales (associées à la carte (x_i)). La métrique g permet de définir une mesure canonique sur la variété M. Pour cela, on fixe une carte (U, Φ), i.e. un ouvert U de M et un difféomorphisme Φ dans un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Pour x appartenant à U, on note $|g_{U,\Phi}(x)| := \det(g_{i,j}(\Phi(x)))$ ce qui permet de définir sur $\Phi(U)$ la mesure positive $\mu_{U,\Phi} := |g_{U,\Phi}(x)|^{1/2} dx^1 \cdots dx^d$. On peut ramener cette mesure à une mesure sur U en posant pour f appartenant à $\mathcal{C}_o^0(U)$,

$$\mathrm{vol}_{U,\Phi}(f) := \int_{\Phi(U)} f \circ \Phi^{-1} d\mu_{U,\Phi}.$$

On vérifie que pour deux cartes (U, Φ) et (U', Φ'), on a $\mathrm{vol}_{U,\Phi}(f) = \mathrm{vol}_{U',\Phi'}(f)$ pour toute fonction f dans $\mathcal{C}_o^0(U \cap U')$. Par partition de l'identité, on peut finalement montrer :

Théorème A.1. *Soit (M, g) une variété riemannienne lisse. Il existe une unique mesure vol_g sur M telle que pour toute carte (U, Φ) on a $vol_g = vol_{U,\Phi}$. On l'appelle mesure canonique sur (M, g).*

Si on suppose aussi que la variété M est orientée, on peut vérifier que vol_g est la mesure associée à la forme volume ω_g définie sur la carte (U, Φ) par $\omega_g \circ \Phi^{-1} := \pm |g_{U,\Phi}(x)|^{1/2} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^d$ (avec ± 1 selon que la carte est directe ou non).

A.1.2 Définition du Laplacien

Pour définir le Laplacien sur une variété riemannienne générale, on commence par définir l'application divergence qui à un champ de vecteurs de $\mathcal{X}(M)$ associe un élément de $\mathcal{C}^\infty(M)$. Pour cela, pour tout ξ dans $\mathcal{X}(M)$, on note $\xi \lrcorner \omega_g$ le produit contracté de ξ et ω, i.e. pour toute famille

de champs de vecteurs $X_1, \cdots, X_{d-1}$, $\xi \lrcorner \omega_g(X_1, \cdots, X_{d-1}) := \omega_g(\xi, X_1, \cdots, X_{d-1})$. On appelle alors divergence de ξ appartenant à $\mathcal{X}(M)$ l'application $\mathrm{div}_x\xi$ définie localement par l'égalité

$$\mathrm{div}_x(\xi)\omega_g := d_x(\xi \lrcorner \omega_g).$$

On note maintenant $\sharp$ l'application de T_xM dans T_x^*M

$$\forall v, w \in T_xM,\ v^\sharp(w) := g_x(v, w).$$

On note $(g^{i,j}(x))$ l'inverse de la matrice $(g_{i,j}(x))$. La forme bilinéaire $g_x^* := \sum_{i,j=1}^d g^{i,j}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}$ (toujours dans la carte (x_i)) définit alors une structure euclidienne naturelle sur T_x^*M. On note A^l l'espace des l-formes linéaires sur M à coefficients $\mathcal{C}^\infty$. On définit l'opérateur δ de $A^1(M)$ dans $\mathcal{C}^\infty(M)$ par :

$$\forall \alpha \in A^1(M),\ \delta_x\alpha := \mathrm{div}_x(\alpha_x^\sharp).$$

On vérifie que pour tout f appartenant à $A^0(M)$ et tout α dans $A^1(M)$, on a la relation de dualité suivante :

$$\int_M g_x^*(d_xf, \alpha_x) d\mathrm{vol}_g(x) = \int_M f(x)\delta_x\alpha d\mathrm{vol}_g(x).$$

Tout ceci nous permet finalement de définir le laplacien sur M :

Définition A.2. Le Laplacien noté Δ_g (ou Δ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté) est l'opérateur de $A^0(M)$ dans $A^0(M)$ défini par la relation

$$\forall f \in A^0(M), \Delta_g f := \delta df.$$

En coordonnées locales, si on note $J(x) := \sqrt{g_{i,j}(x)}$, on a la formulation suivante :

$$\Delta_g f := J^{-1} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(J g^{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right).$$

Notons qu'avec ces différentes conventions, le Laplacien est un opérateur négatif. Par dualité, il peut se prolonger à $L^2(M)$ mais ne sera pas un opérateur borné. Pour en terminer avec le Laplacien, on peut montrer que dans le cas d'une variété riemannienne connexe, compacte et sans bords, il existe une base orthonormée de $L^2(M)$ formée de fonctions propres de Δ_g. Celles-ci sont associées à une suite de valeurs propres $0 = -\lambda_0^2 > -\lambda_1^2 \geq \cdots \geq -\lambda_n^2 \geq \cdots$ tendant vers $-\infty$.

A.2 Fibré cotangent

Les systèmes dynamiques que l'on considère dans cette thèse ont la particularité de préserver la forme symplectique canonique de l'espace des phases associé. On rappelle dans ce paragraphe quelques définitions et résultats de géométrie symplectique (chapitre 1 de [32]).

A.2.1 Mesure de Liouville

On considère M une variété différentielle de dimension d et on appelle fibré cotangent de M l'ensemble $T^*M := \bigsqcup_{x \in M} T_x^*M$. C'est une variété différentielle de dimension $2d$. On note π la projection canonique de T^*M sur M et on définit la 1-forme θ sur T^*M

$$\forall \rho := (x, \xi) \in T^*M,\ \forall X \in T_\rho T^*M,\ \theta_\rho(X) := \xi\left(d_\rho\pi.X\right).$$

En coordonnées locales, θ s'écrit $\sum_{i=1}^d \xi^i dx^i$. On peut aussi définir la 2-forme associée

$$\omega := d\theta \text{ et, en coordonnées locales, } \omega := \sum_{i=1}^d d\xi^i \wedge dx^i.$$

Cette 2-forme est non dégénérée (c'est-à-dire que pour tout ρ dans T^*M, ω_ρ est non dégénérée) et vérifie $d\omega = 0$. On dit que (T^*M, ω) est une variété symplectique. On appelle transformations symplectiques (ou symplectomorphismes) les difféomorphismes qui préservent ω, c'est-à-dire les transformations $T : T^*M \to T^*M$ satisfaisant

$$\forall \rho \in T^*M,\ \forall X, Y \in T_\rho T^*M,\ \omega(d_\rho TX, d_\rho TY) := \omega(X, Y).$$

La variété symplectique (T^*M, ω) est automatiquement munie d'une mesure $dxd\xi := \frac{|\omega^{\wedge n}|}{n!}$ (qu'on appelle mesure de Lebesgue ou de Liouville) et d'une orientation $\omega^{\wedge n}$. Les transformations symplectiques préservent cette mesure et cette orientation.

A.2.2 Flots hamiltoniens

On considère maintenant une observable H de $\mathcal{C}^\infty(T^*M, \mathbb{R})$ qu'on appelle hamiltonien. On construit une transformation symplectique naturelle associée à cette observable. Pour cela, on définit le champ de vecteurs hamiltonien X_H de classe $\mathcal{C}^\infty$

$$\forall \rho \in T^*M,\ \forall X \in T_\rho T^*M,\ d_\rho H.X := \omega(X, X_H).$$

On note $\varphi_H^t : T^*M \to T^*M$ le flot associé à ce champs de vecteurs et on l'appelle flot hamiltonien. On vérifie que ce flot est un symplectomorphisme et préserve les couches d'énergie $\{H = \text{cste}\}$. Considérons maintenant $\{H = H_0\}$ une couche d'énergie sur laquelle $dH \neq 0$ (c'est une variété de dimension $2d-1$). On munit cette sous-variété d'un atlas (U, Φ) tel que chaque ouvert U admet un voisinage ouvert U_ε de T^*M vérifiant $U = U_\varepsilon \cap \{H = H_0\}$ et possédant un système de coordonnées locales $(y_1, \cdots, y_{2d-1}, E)$, E variant dans $(H_0 - \varepsilon, H_0 + \varepsilon)$. On pose Φ_ε pour le difféomorphisme associé à U_ε. Pour f appartenant à $\mathcal{C}_o^0(U_\varepsilon)$ et g appartenant à $\mathcal{C}_o^0((H_0 - \varepsilon, H_0 + \varepsilon))$, on caractérise la mesure $L^E_{U,\Phi}$ désintégrée sur la couche d'énergie E par

$$\int_{H_0-\varepsilon}^{H_0+\varepsilon} L^E_{U,\Phi}(f) g(E) dE = \int_{U_\varepsilon} f g dx d\xi.$$

On vérifie que cette définition ne dépend pas du choix de cartes sur $\{H = H_0\}$ et on construit la désintégration L^{H_0} de la mesure de Liouville sur $\{H = H_0\}$ par recollement et en utilisant une partition de l'identité. Par construction, cette mesure est invariante par le flot hamiltonien restreint à la couche d'énergie.

Un exemple particulier

L'Hamiltonien qui nous intéresse tout particulièrement dans cette thèse est celui donné par l'énergie cinétique :

$$H(x, \xi) := \frac{\|\xi\|_x^2}{2},$$

avec la notation $\|\xi\|_x^2 := g_x^*(\xi, \xi)$. Dans ce cas, on notera g^t le flot hamiltonien (ou géodésique) correspondant. D'après ce qui précède, il conserve à la fois la forme symplectique (et donc la mesure de Liouville $dxd\xi$) et les couches d'énergie $\|\xi\|_x = \text{cste}$. Il est alors possible de désintégrer la mesure de Liouville selon chaque couche d'énergie. Dans le cas $\|\xi\|_x = 1$, on note L cette mesure que l'on appelle mesure de Liouville sur S^*M.

Annexe B

Pression d'un système dynamique

B.1 Définitions et propriétés générales

Dans cette annexe, on rappelle la définition de la pression topologique et quelques résultats la concernant [100] (chapitre 9). Cette notion généralise celle de l'entropie topologique. Pour un système dynamique topologique donné (X, T), la pression topologique est une fonction $P(T, .) : \mathcal{C}^0(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ qui est égale à $h_{top}(T)$ pour $f = 0$. Comme l'entropie topologique, cette quantité compte le nombre d'orbites distinctes mais cette fois par rapport à un poids f. Rappelons la construction de cette fonction. On utilisera la notation $S_n f(x) := \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k(x)$. On dira qu'un ensemble F est un ensemble (δ, n)-séparé si pour deux points distincts x et y appartenant à F, y n'appartient pas à $B(x, \delta, n)$. Cet ensemble sera dit maximal si son cardinal est maximal. Pour f appartenant à $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$, $\epsilon > 0$ et n entier, on pose

$$P_n(T, f, \delta) := \sup \left\{ \sum_{x \in F} e^{S_n f(x)} : F \text{ est un ensemble } (\delta, n) \text{ séparé maximal} \right\}.$$

Dans le cas $f = 0$, cette définition coïncide avec celle donnée pour l'entropie topologique[1] au paragraphe 1.2.1. Cette définition attribue maintenant à chaque trajectoire un poids qui dépend de la fonction f. On procède comme dans le cas de l'entropie topologique et on définit

$$P(T, f, \delta) := \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log P_n(T, f, \delta).$$

Pour notre analyse, deux propriétés de cette quantité sont importantes :

$$\delta \mapsto P(T, f, \delta) \text{ est une fonction décroissante et } |P(T, f, \delta) - P(T, g, \delta)| \leq \|f - g\|_\infty. \tag{B.1}$$

On appelle finalement pression topologique la quantité

$$P(T, f) := \lim_{\delta \to 0} P(T, f, \delta).$$

Pour c constante, elle vérifie en particulier la propriété de linéarité $P(T, f + c) = P(T, f) + c$. Enfin, Walters a montré la généralisation du principe variationnel pour l'entropie :

Théorème B.1 (Walters)**.** *Soit (X, T) un système dynamique topologique et f appartenant à $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$. Alors, on a*

$$P(T, f) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(X,T)} \left\{ \int_X f d\mu + h_{KS}(\mu, T) \right\}. \tag{B.2}$$

Par analogie, on appelle pression d'un système dynamique mesurable (X, μ, T) la quantité $\int_X f d\mu + h_{KS}(\mu, T)$.

[1] Comme dans la définition de l'entropie topologique, on aurait pu choisir de regarder des ensembles (δ, n)-recouvrants minimaux : le résultat final serait le même [100].

B.2 Opérateurs de transfert et pression topologique

On rappelle dans ce paragraphe ce que l'on sait sur la régularité de la pression topologique [78] :

Théorème B.2 (Ruelle)**.** *Soit A une matrice hyperbolique appartenant à $Sp(2d,\mathbb{Z})$. Soit a appartenant à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^{2d})$ satisfaisant $Leb(a)=0$. L'application $s\mapsto P(A,sa)$ est analytique réelle. De plus, on a*

$$P(A,0)=\Lambda_+,\ \frac{d}{ds}\left(P(A,sa)\right)_{|s=0}=0 \text{ and } \frac{d^2}{ds^2}\left(P(A,sa)\right)_{|s=0}=\sigma^2(a),$$

avec $\sigma^2(a):=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_{\mathbb{T}^2}\left(\sum_{k=0}^{n-1}a\circ A^k(\rho)\right)^2 d\rho$ la variance de a.

Par souci de simplicité, nous avons énoncé le résultat dans le cas (très) particulier qui nous intéresse pour le théorème 3.12. Ce résultat est beaucoup plus général [78].
Pour montrer un tel résultat dans le cas de systèmes dynamiques symboliques, la méthode standard décrite dans le livre de Parry et Pollicott [78] consiste à utiliser des résultats sur le spectre de l'opérateur de transfert puis à perturber cet opérateur. Ensuite, une manière de se ramener à un système dynamique Anosov quelconque peut être d'utiliser des partitions de Markov.
Pour montrer que la quantité $H(\delta)$ est strictement négative pour $\delta>0$ dans le théorème 3.12, on a en fait seulement besoin d'utiliser la régularité au voisinage de 0 et l'expression des dérivées. Dans la suite de cette annexe, on rappelle comment montrer la régularité au voisinage de 0 et comment calculer les dérivées. Ceci peut se faire (sans codage symbolique) par une étude directe de l'opérateur de Ruelle-Perron-Frobenius de $(\mathbb{T}^{2d},A)$ comme celle de Blank, Keller et Liverani dans [16]. On pourrait aussi utiliser des résultats plus récents et plus forts de Baladi et Tsujii [11] ou Gouëzel et Liverani [48] mais dans notre exemple (très simple), l'analyse spectrale de Blank, Keller et Liverani est suffisante et plus simple à décrire.

B.2.1 Spectre de l'opérateur de Ruelle-Perron-Frobenius

Avant de prouver la proposition B.2, on rappelle quelques propriétés spectrales de l'opérateur de transfert. Dans le cas d'un élément hyperbolique[2] A de $Sp(2d,\mathbb{Z})$, on définit l'opérateur de Ruelle-Perron-Frobenius

$$\forall f\in L^1(\mathbb{T}^{2d},\text{Leb}),\ \mathcal{L}f:=f\circ A^{-1}.$$

Remarque. Notons tout d'abord que la fonction constante 1 est vecteur propre de $\mathcal{L}$ associé à la valeur propre 1. On a vu au paragraphe 1.3.1 que $(\mathbb{T}^{2d},A)$ est un difféomorphisme Anosov (comme A est hyperbolique). On a rappelé en particulier que pour tout $e^{-|\lambda_m|}<\lambda<1$ (où λ_m est l'exposant de Lyapunov de module minimal), il existe une norme adaptée à la constante λ, i.e. :

$$A^{-n}E^u(\rho)=E^u(A^{-n}\rho),\ \|A^{-n}_{|E^u(\rho)}\|\leq\lambda^n,\ A^nE^s(\rho)=E^s(A^n\rho),\ \|A^n_{|E^s(\rho)}\|\leq\lambda^n. \tag{B.3}$$

On fixe cette norme adaptée pour la suite. Notons que dans notre cas particulier, $\dim E^u(\rho)=\dim E^s(\rho)=d$ pour tout ρ appartenant à $\mathbb{T}^{2d}$ et que le feuilletage est $\mathcal{C}^\infty$ (en fait, c'est 'le même' en chaque point). Enfin, les variétés stable et instable sont des 'sous-espaces'.

Dans [16], Blank, Keller et Liverani introduisent une famille d'espaces de Banach pour étudier le spectre de $\mathcal{L}$. Ce sont des espaces de fonctions généralisées définis par des fonctions tests adaptées aux directions stable et instable. Rappelons la définition de ces espaces (on note que les définitions ne sont pas symétriques pour les directions stable et instable). On fixe une constante positive $\eta\leq 1$. Pour $0<\beta<1$ et $\varphi:\mathbb{T}^{2d}\to\mathbb{R}$ une fonction mesurable et bornée, on définit

$$H^s_\beta(\varphi):=\sup_{d^s(x,y)\leq\eta}\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{d^s(x,y)^\beta},$$

[2] L'hypothèse de la préservation la forme symplectique n'est pas utile. On a seulement besoin de prendre un élément de $SL(m,\mathbb{Z})$.

où d^s est la distance le long de la variété instable (ici, la restriction de la distance sur $\mathbb{R}^d$) et où le supremum est pris sur les éléments x et y tels que $y \in W^s(x)\backslash\{x\}$. Ceci définit une norme à laquelle on associe l'ensemble

$$\mathcal{D}_\beta := \{\varphi : \mathbb{T}^{2d} \to \mathbb{R} :\ \varphi \text{ mesurable},\ |\varphi|_\infty \leq 1,\ H^s_\beta(\varphi) \leq 1\}.$$

Cet ensemble définit un bon ensemble de fonctions tests pour lesquelles on contrôle bien la direction stable. Pour g appartenant à $\mathcal{C}^1(\mathbb{T}^{2d}, \mathbb{R})$, on définit alors une norme adaptée à la direction stable

$$\|g\|_s := \sup_{\varphi \in \mathcal{D}_\beta} \int_{\mathbb{T}^{2d}} g(\rho)\varphi(\rho) d\rho.$$

Ensuite, on peut construire une quantité qui sera adaptée à la direction instable et pour cela, on définit une famille de champs de vecteurs adaptés à la direction instable

$$\mathcal{V} := \{v : \mathbb{T}^{2d} \to T\mathbb{T}^{2d} :\ \forall \rho \in \mathbb{T}^{2d},\ v(\rho) \in E^u(\rho)\}.$$

Pour v appartenant à $\mathcal{V}$, on définit une quantité analogue à la précédente

$$H^s_\beta(v) := \sup_{d^s(x,y) \leq \delta} \frac{\|v(x) - v(y)\|}{d^s(x,y)^\beta},$$

où $\|.\|$ est la norme adaptée définie par (B.3). L'ensemble de champs de vecteurs tests correspondant est

$$\mathcal{V}_\beta := \{v \in \mathcal{V} :\ \|v\|_\infty \leq 1,\ H^s_\beta(v) \leq 1\},$$

où $\|v\|_\infty = \sup_\rho \|v(\rho)\|$. Pour g appartenant à $\mathcal{C}^1(\mathbb{T}^{2d}, \mathbb{R})$, on définit la semi-norme adaptée à la direction instable

$$\|g\|_u := \sup_{v \in \mathcal{V}_\beta} \int_{\mathbb{T}^{2d}} d_\rho g.v(\rho) d\rho.$$

On fixe maintenant une constante $b \geq 1$ (qui est définie de manière précise dans [16]). Pour g appartenant à $\mathcal{C}^1(\mathbb{T}^{2d}, \mathbb{R})$, on définit finalement la norme

$$\|g\|_\beta := \|g\|_u + b\|g\|_s.$$

On définit $\mathcal{B}$ comme le complété de $\mathcal{C}^1(\mathbb{T}^{2d}, \mathbb{R})$ pour la norme $\|.\|_\beta$. Elle permet de définir un espace de Banach de fonctions généralisées. Pour terminer, on rappelle que $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T}^{2d}, \mathbb{R})$ définit une forme linéaire bornée sur $\mathcal{C}^1(\mathbb{T}^{2d}, \mathbb{R})$

$$\langle g, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{T}^{2d}} g(\rho)\varphi(\rho) d\rho.$$

Les différentes normes sont reliées de la manière suivante pour $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2, \mathbb{R})$:

$$\|g\|^*_{\mathcal{C}^1} \leq \|g\|_\beta \leq \|g\|_{\mathcal{C}^1}.$$

Pour $g \in \mathcal{B}$, on définit une forme linéaire bornée sur $\mathcal{C}^1(\mathbb{T}^{2d}, \mathbb{R})$ en posant $\langle g, \varphi \rangle := \lim_{n\to\infty} \langle g_n, \varphi \rangle$ où g_n est un élément de $\mathcal{C}^1(\mathbb{T}^{2d}, \mathbb{R})$ et $\lim_{n\to\infty} \|g - g_n\|_\beta = 0$. Dans [16], Blank, Keller et Liverani montrent le théorème suivant pour ces espaces de Banach (lemme 2.2.1 et théorème 1) :

Théorème B.3 (Blank-Keller-Liverani)**.** *Soit A un élément hyperbolique de $Sp(2d, \mathbb{Z})$. Pour tout $\beta \in (0, 1)$, on a*

1. *L'opérateur $\mathcal{L}$ s'étend en un opérateur borné sur $\mathcal{B}$,*
2. *il existe $M > 0$ telle que $\|\mathcal{L}^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B})} \leq M$ pour tout $n \geq 0$,*
3. *pour tout $\sigma > \lambda^\beta$ (où λ est la constante d'Anosov (B.3)), le spectre essentiel de $\mathcal{L} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ est borné par σ.*

Pour notre étude, nous avons aussi besoin de savoir que 1 est l'unique valeur propre sur le cercle unité et qu'elle est de multiplicité 1. Pour cela, on peut utiliser les propriétés dynamiques de $(\mathbb{T}^{2d}, A)$. En effet, considérons g un vecteur propre de $\mathcal{L}$ associé à la valeur propre θ de module 1. On sait que le système dynamique $(\mathbb{T}^{2d}, A)$ vérifie la propriété d'Anosov et en particulier que la mesure de Lebesgue est mélangeante par rapport à A (chapitre 6 de [24]). On écrit alors pour tout φ dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{T}^{2d}, \mathbb{R})$ (en utilisant le point 2 du théorème B.3 et la densité de $\mathcal{C}^1$ dans $\mathcal{B}$)

$$\lim_{n\to\infty} \theta^n \langle g, \varphi\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \mathcal{L}^n g, \varphi\rangle = \langle g, 1\rangle\langle 1, \varphi\rangle.$$

Cela permet de déduire que $\theta = 1$ et que $g = \langle g, 1\rangle 1$. Par conséquent, 1 est la seule valeur propre de module 1 et elle est de multiplicité 1.

Remarque. Dans [16], les auteurs étudient aussi directement les valeurs propres de $\mathcal{L}$ pour un automorphisme linéaire de $\mathbb{T}^2$. Leur méthode peut être étendue au cas $d \geq 1$ et on peut montrer que, pour tout $\beta \in (0, 1)$,

$$\text{valeurs propres}(\mathcal{L}_{|\mathcal{B}_\beta}) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \lambda\} \cup \{1\},$$

où 1 est une valeur propre simple et λ est la constante qu'on a choisie pour définir la norme adaptée (B.3). Combiné avec le théorème précédent, ceci nous dit que, pour tout $\beta \in (0, 1)$,

$$\text{sp}(\mathcal{L}_{|\mathcal{B}_\beta}) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \lambda^\beta\} \cup \{1\}.$$

En fait ces différents résultats fonctionnent pour $A \in SL(m, \mathbb{Z})$ hyperbolique et permettent en particulier de déduire le résultat suivant. On fixe A hyperbolique appartenant à $SL(m, \mathbb{Z})$. On note λ_m son exposant de Lyapunov de module minimal et $\mathcal{L}_A$ l'opérateur de transfert associé. Alors, pour tout $1 > \sigma > e^{-|\lambda_m|}$, il existe un espace de Banach $\mathcal{B}_\sigma$ tel que $\text{sp}(\mathcal{L}_A) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \sigma\} \cup \{1\}$, où 1 est une valeur propre simple associée à la fonction 1.

B.2.2 Analyticité de la pression topologique

Nous sommes maintenant en mesure de prouver la régularité de la pression topologique en appliquant des résultats de théorie de perturbation des opérateurs à l'opérateur de Ruelle-Perron-Frobenius. Pour cela, commençons par citer le résultat suivant de [78] (appendix V).

Théorème B.4. *Soit L un opérateur borné sur un espace de Banach $\mathcal{B}$. Supposons que $sp(L) \subset \{b\} \cup D(0, r)$ avec $r < |b|$ et b une valeur propre simple associée au vecteur propre $v(L)$.*
Alors, pour tout $r < R < |b|$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout opérateur borné L' vérifiant $\|L - L'\| < \eta$, $sp(L') \subset \{b(L')\} \cup D(0, R)$ où $b(L')$ est une valeur propre simple associée à $v(L')$ et $R < |b(L')|$. Les applications $L' \mapsto b(L')$ et $L' \mapsto v(L')$ sont analytiques en L'. De plus, si on note $\Pi(L')$ le projecteur spectral associé à $b(L')$, l'application $L' \mapsto \Pi(L')$ est aussi analytique.

Appliquons ce théorème à $\mathcal{L}$ sur l'espace $\mathcal{B}$ (on fixe $0 < \beta < 1$ pour la fin du paragraphe). On définit l'opérateur de transfert de poids $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^{2d}, \mathbb{R})$ et de paramètre $s \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{L}_{sa} : \mathcal{B} \to \mathcal{B},\ v \mapsto e^{sa} \times \mathcal{L}v.$$

On utilise le théorème de perturbation pour écrire avec les mêmes notations

$$\exists \eta > 0,\ \forall s \in \mathbb{C} \text{ tel que } |s| < \eta, \mathcal{L}_{sa} v(s) := b(s) v(s).$$

Définissons $\tilde{P}(A, sa) := \Lambda_+ + \log b(s)$, où log est le logarithme complexe qu'on choisit à valeurs réelles pour b à valeurs réelles. Le théorème de perturbation nous dit alors que $s \mapsto \tilde{P}(A, sa)$ est analytique dans un voisinage de 0. Comme dans [78] (chapitre 4), on dérive deux fois la quantité

$$\langle \mathcal{L}^n_{sf} v(s), 1\rangle = e^{n\tilde{P}(A,sf) - n\Lambda_+} \langle v(s), 1\rangle.$$

Comme $\int a = 0$, on trouve que

$$\tilde{P}'(0) = 0 \text{ and } \tilde{P}''(0) = \sigma^2(a) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_{\mathbb{T}^{2d}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a \circ A^k(\rho) \right)^2 d\rho.$$

Vérifions maintenant que pour s réel, $\tilde{P}(A, sa) = P(A, sa)$. Pour cela, on écrit, pour s réel,

$$b(s)^n \langle \Pi_s 1, 1\rangle + \langle \mathcal{L}_{sa}^n (\mathrm{Id}_{\mathcal{B}} - \Pi_s)1, 1\rangle = \int_{\mathbb{T}^{2d}} \exp\left(s \sum_{k=0}^{n-1} a \circ A^k(\rho) \right) d\rho,$$

où Π_s est le projecteur spectral de $\mathcal{L}_{sa}$ associé à $b(s)$. En utilisant le théorème de perturbation et le théorème B.3, on sait que le rayon spectral essentiel de $\mathcal{L}_{sa}(\mathrm{Id}_{\mathcal{B}} - \Pi_s)$ est borné par λ' pour un certain $\lambda^\beta < \lambda' < b(s)$. En particulier,

$$|\langle \mathcal{L}_{sa}^n (\mathrm{Id}_{\mathcal{B}} - \Pi_s)1, 1\rangle| = O(\lambda^{''n}) = o(b(s)^n),$$

avec $\lambda' < \lambda'' < b(s)$. Comme $\langle \Pi_0 1, 1\rangle = 1$ et que $s \mapsto \Pi_s$ est analytique d'après le théorème de perturbation, la quantité $\langle \Pi_s 1, 1\rangle$ est non nulle (pour s petit) et on a alors

$$\int_{\mathbb{T}^{2d}} \exp\left(s \sum_{k=0}^{n-1} a \circ A^k(\rho) \right) d\rho \sim b(s)^n \langle \Pi_s 1, 1\rangle \text{ as } n \to +\infty.$$

En combinant ceci au théorème de Kifer (égalité (3.21)), on trouve bien $P(A, sa) = \tilde{P}(A, sa)$ pour s réel et en particulier, $s \mapsto P(A, sa)$ est analytique.□

Annexe C

Preuve du théorème d'Abramov

La preuve du théorème d'Abramov pour les flots suspendus 1.19 repose sur le théorème 1.18 d'Abramov pour les endomorphismes induits. Nous rappelons dans cette annexe de quelle manière. Le lien repose sur le lemme suivant :

Lemme C.1. *Soient (X, T, μ) un système dynamique mesurable (avec T inversible) et ϕ une fonction mesurable. On définit l'automorphisme S de $X_1 := X \times [0,1)$ (muni de $\mu_1 := \mu \times Leb$) de la manière suivante :*

$$S(x,u) := (Tx, u + \phi(x)(mod 1)).$$

Alors, $h_{KS}(\mu_1, S) = h_{KS}(\mu, T)$.

On souligne que par invariance de la mesure de Lebesgue par translation, (X_1, μ_1, S) est bien un système dynamique mesurable. Avant de montrer le lemme, montrons comment il implique le théorème d'Abramov sur les flots suspendus. On se place donc sous les hypothèses du théorème 1.19. Pour $0 < t \leq a$, on définit la fonction mesurable $\phi_t(x) := t - f(x) + [f(x)/t]$ où $[f(x)/t]$ est la partie entière de $f(x)/t$. On définit alors l'automorphisme sur $X_t := X \times [0,t)$

$$S_t(x,u) := (Tx, u + \phi_t(x)(\mathrm{mod} t)).$$

On est dans les conditions d'application du lemme C.1 et on a donc $h_{KS}(\mu_t, S_t) = h_{KS}(\mu, T)$ (où μ_t est normalisée en une mesure de probabilité). On peut vérifier que S_t s'identifie à l'automorphisme induit par $\overline{T}^t$ sur $X_t = X \times [0,t)$. Par le théorème d'Abramov sur les automorphismes induits, on en déduit donc que

$$h_{KS}(\mu, T) = h_{KS}(\mu_t, S_t) = \frac{\int_X f(x) d\mu(x)}{t} h_{KS}(\overline{\mu}, \overline{T}^t).$$

Ceci nous donne le résultat pour $0 < t \leq a$. Pour $t \neq 0$ réel quelconque, on sait qu'il existe un entier n tel que $0 < t/n \leq a$. Ceci combiné avec la proposition 1.6 nous donne le résultat pour t quelconque. Il nous reste donc à prouver le lemme C.1.

Preuve du lemme C.1. On vérifie facilement que $h_{KS}(\mu, T) \leq h_{KS}(\mu_1, S)$ (une partition de X donnant automatiquement une partition de X_1). Pour montrer l'inégalité réciproque, on se donne une suite de partitions $(\mathcal{P}_m)_{m=1}^{\infty}$ qui engendre (mod 0) la tribu des boréliens. On suppose aussi que cette suite est croissante (i.e. $\mathcal{P}_{m+1}$ est un raffinement de $\mathcal{P}_m$ pour tout m). D'après le théorème 1.4 de Kolmogorov-Sinai, on sait alors que $h_{KS}(\mu, T) = \lim_{n\to\infty} h_{KS}(\mu, T, \mathcal{P}_m)$. On note $\overline{\mathcal{P}}_m$ la partition 'verticale' $\{P \times [0,1) : P \in \mathcal{P}_m\}$ de X_1 et $\overline{\mathcal{Q}}_r$ la partition 'horizontale' $\{X \times I_r^i : 0 \leq i < r\}$ de X_1, où $\{I_r^i : 0 \leq i < r\}$ est la partition de $[0,1)$ en r intervalles disjoints de même longueur. En utilisant de nouveau le théorème 1.4 de Kolmogorov-Sinai, on trouve pour toute suite strictement croissante d'entiers m_r

$$\lim_{r\to\infty} h_{KS}\left(\mu_1, S, \overline{\mathcal{P}}_{m_r} \vee \overline{\mathcal{Q}}_r\right) = h_{KS}(\mu_1, S).$$

On fixe $\epsilon > 0$ et on va construire une suite strictement croissante d'entiers m_r (indexés par r) et satisfaisant

$$\forall r \geq 1,\ h_{KS}\left(\mu_1, S, \overline{\mathcal{P}}_{m_r} \vee \overline{\mathcal{Q}}_r\right) \leq h_{KS}(\mu, T, \mathcal{P}_{m_r}) + \epsilon.$$

D'après ce que l'on vient d'expliquer, cela permettra de conclure. Soient n, m et r trois entiers strictement positifs. D'après le théorème 4.7 dans [100], on a existence de la limite suivante :

$$\lim_{m\to\infty} H\left(\mu_1, \vee_{j=0}^{n-1} S^{-j}\overline{\mathcal{Q}}_r | \overline{\mathcal{P}}_m\right) = H\left(\mu_1, \vee_{j=0}^{n-1} S^{-j}\overline{\mathcal{Q}}_r | \overline{\mathcal{B}}\right),$$

où $\overline{\mathcal{B}}$ est la tribu $\{B \times [0,1) : B \in \mathcal{B}\}$ et où, en notant $E(f|\overline{\mathcal{B}})$ l'espérance conditionnelle de f par rapport à la tribu $\overline{\mathcal{B}}$ (chapitre 0 dans [100]), on a défini

$$H\left(\mu_1, \vee_{j=0}^{n-1} S^{-j}\overline{\mathcal{Q}}_r | \overline{\mathcal{B}}\right) := -\int_{X_1} \sum_{A \in \vee_{j=0}^{n-1} S^{-j}\overline{\mathcal{Q}}_r} E(\mathbf{1}_A|\overline{\mathcal{B}}) \log E(\mathbf{1}_A|\overline{\mathcal{B}}) d\mu_1.$$

Cette dernière quantité peut se récrire

$$H\left(\mu_1, \vee_{j=0}^{n-1} S^{-j}\overline{\mathcal{Q}}_r | \overline{\mathcal{B}}\right) = -\int_X \left(\sum_{A \in \vee_{j=0}^{n-1} S^{-j}\overline{\mathcal{Q}}_r} \left(\int_0^1 \mathbf{1}_A(x,u)du\right) \log\left(\int_0^1 \mathbf{1}_A(x,u)du\right)\right) d\mu(x).$$

Or la famille $\{\{x\} \times [0,1) \cap A : A \in \vee_{j=0}^{n-1} S^{-j}\overline{\mathcal{Q}}_r\}$ définit une partition de la fibre verticale $\{x\} \times [0,1)$ en au plus nr intervalles. On en déduit donc (en utilisant que l'entropie d'une partition à K éléments est bornée par $\log K$)

$$\forall n, r \in \mathbb{N}^*,\ \lim_{m\to\infty} H\left(\mu_1, \vee_{j=0}^{n-1} S^{-j}\overline{\mathcal{Q}}_r | \overline{\mathcal{P}}_m\right) \leq \log nr.$$

Pour r fixé, on pose n_r de telle sorte que $\log rn_r \leq (\epsilon n_r)/2$ et on définit un entier m'_r vérifiant pour tout $m \geq m'_r$, $H\left(\mu_1, \vee_{j=0}^{n_r-1} S^{-j}\overline{\mathcal{Q}}_r | \overline{\mathcal{P}}_m\right) \leq \epsilon n_r$. Par récurrence, on définit $m_1 = 1$ et $m_r = \max\{m_{r-1}, m'_r, r\}$. Cela nous donne une suite croissante d'entiers m_r tendant vers l'infini quand r tend vers l'infini. On a alors

$$\forall r \geq 1,\ H\left(\mu_1, \vee_{j=0}^{n_r-1} S^{-j}\overline{\mathcal{Q}}_r | \overline{\mathcal{P}}_{m_r}\right) \leq \epsilon n_r. \tag{C.1}$$

Pour k et r entiers, on utilise la relation (1.1) pour écrire

$$H_{kn_r}\left(\mu_1, S, \overline{\mathcal{Q}}_r \vee \overline{\mathcal{P}}_{m_r}\right) = H_{kn_r}\left(\mu_1, S, \overline{\mathcal{P}}_{m_r}\right) + H\left(\mu_1, \vee_{j=0}^{kn_r-1} S^{-j}\overline{\mathcal{Q}}_r | \vee_{j=0}^{kn_r-1} S^{-j}\overline{\mathcal{P}}_{m_r}\right).$$

En utilisant le fait que la partition $\overline{\mathcal{P}}_m$ est formée d'éléments de la forme $A \times [0,1)$, on peut écrire cette dernière égalité de la manière suivante :

$$\frac{1}{kn_r} H_{kn_r}\left(\mu_1, S, \overline{\mathcal{Q}}_r \vee \overline{\mathcal{P}}_{m_r}\right) = \frac{1}{kn_r}\left(H_{kn_r}\left(\mu, T, \mathcal{P}_{m_r}\right) + H\left(\mu_1, \vee_{j=0}^{kn_r-1} S^{-j}\overline{\mathcal{Q}}_r | \vee_{j=0}^{kn_r-1} S^{-j}\overline{\mathcal{P}}_{m_r}\right)\right).$$

En utilisant la concavité de $x \mapsto -x\log x$, on trouve

$$H\left(\mu_1, \vee_{j=0}^{kn_r-1} S^{-j}\overline{\mathcal{Q}}_r | \vee_{j=0}^{kn_r-1} S^{-j}\overline{\mathcal{P}}_{m_r}\right) \leq \sum_{l=0}^{k-1} H\left(\mu_1, S^{-ln_r} \vee_{j=0}^{n_r-1} S^{-j}\overline{\mathcal{Q}}_r | \vee_{j=0}^{kn_r-1} S^{-j}\overline{\mathcal{P}}_{m_r}\right).$$

Or, pour tout $0 \leq l \leq k-1$, on peut utiliser la concavité de nouveau, l'invariance de μ_1 par S et l'inégalité (C.1) pour montrer que

$$H\left(\mu_1, S^{-ln_r} \vee_{j=0}^{n_r-1} S^{-j}\overline{\mathcal{Q}}_r | \vee_{j=0}^{kn_r-1} S^{-j}\overline{\mathcal{P}}_{m_r}\right) \leq H\left(\mu_1, S^{-ln_r} \vee_{j=0}^{n_r-1} S^{-j}\overline{\mathcal{Q}}_r | S^{-ln_r}\overline{\mathcal{P}}_{m_r}\right) \leq \epsilon n_r.$$

En combinant ces trois dernières inégalités, on trouve, pour tout entier k et r,

$$\frac{1}{kn_r} H_{kn_r}\left(\mu_1, S, \overline{\mathcal{Q}}_r \vee \overline{\mathcal{P}}_{m_r}\right) \leq \frac{1}{kn_r} H_{kn_r}\left(\mu, T, \mathcal{P}_{m_r}\right) + \epsilon.$$

On fait tendre k vers l'infini et on trouve l'inégalité voulue

$$h_{KS}\left(\mu_1, S, \overline{\mathcal{P}}_{m_r} \vee \overline{\mathcal{Q}}_r\right) \leq h_{KS}(\mu, T, \mathcal{P}_{m_r}) + \epsilon,$$

qui permet de conclure.□

Bibliographie

[1] L.M. Abramov *The entropy of a derived automorphism*, Translations of AMS **49**, 162-166 (1966)

[2] L.M. Abramov *On the entropy of a flow*, Translations of AMS **49**, 167-170 (1966)

[3] N. Anantharaman *Entropy and the localization of eigenfunctions*, Ann. of Math. **168**, 435-475 (2008)

[4] N. Anantharaman *Eigenfunctions of the laplacian on negatively curved manifolds : a semi-classical approach*, notes de cours, Clay Institute summer school (Pisa) (2007)

[5] N. Anantharaman, H. Koch, S. Nonnenmacher *Entropy of eigenfunctions*, arXiv :0704.1564, International Congress of Mathematical Physics

[6] N. Anantharaman, S. Nonnenmacher *Entropy of semiclassical measures of the Walsh-quantized baker's map*, Ann. IHP **8**, 37-74 (2007)

[7] N. Anantharaman, S. Nonnenmacher *Half-delocalization of eigenfunctions for the Laplacian on an Anosov manifold*, Ann. Inst. Fourier **57**, 2465-2523 (2007)

[8] N. Anantharaman, G. Rivière *Delocalization of propagated states for Anosov manifolds*, en préparation (2009)

[9] D. Anosov *Geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature*, Tr. Mat. Inst. Steklova **90** (1967)

[10] V. Baladi *Positive Transfer Operators and Decay of Correlations*, Advanced Series in Nonlinear Dynamics, **16**, World Scientific, Singapore (2000)

[11] V. Baladi, M. Tsujii *Anisotropic Hölder and Sobolev spaces for hyperbolic diffeomorphisms*, Ann. Inst. Fourier **57**, 127-154 (2007)

[12] W. Ballmann, M. Brin, K. Burns *On surfaces with no conjugate points*, Jour. Diff. Geom. **25**, 249-273 (1987)

[13] L. Barreira, Y. Pesin *Lectures on Lyapunov exponents and smooth ergodic theory*, Proc. of Symposia in Pure Math. **69**, 3-89 (2001)

[14] P. Bérard *On the wave equation on a compact Riemannian manifold without conjugate points*, Math. Zeit. **155**, 249-276 (1977)

[15] M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet *Le spectre d'une variété riemannienne*, Lect. Notes Math., Springer, Berlin Heidelberg New York (1971)

[16] M. Blank, G. Keller, C. Liverani *Ruelle-Perron-Frobenius spectrum for Anosov maps*, Nonlinearity **15**, 1905-1973 (2002)

[17] F. Bonechi, S. de Bièvre *Exponential mixing and* $|\log \hbar|$ *time scales in quantized hyperbolic maps on the torus*, Comm. in Math. Phys. **211**, 659-686 (2000)

[18] F. Bonechi, S. de Bièvre *Controlling strong scarring for quantized ergodic toral automorphisms*, Duke Math. Jour. **117**, 571-587 (2003)

[19] J. Bourgain, E. Lindenstrauss *Entropy of quantum limits*, Comm. in Math. Phys. **233**, 153-171 (2003)

[20] A. Bouzouina, S. de Bièvre *Equipartition of the eigenfunctions of quantized ergodic maps on the torus*, Comm. in Math. Phys. **178**, 83-105 (1996)

[21] A. Bouzouina, D. Robert *Uniform semiclassical estimates for the propagation of quantum observables*, Duke Math. Jour. **111**, 223-252 (2002)

[22] R. Bowen, D. Ruelle *The ergodic theory of Axiom A flows*, Inv. Math. **29**, 181-202 (1975)

[23] M. Brin, A. B. Katok *On local entropy*, Geometric Dynamics, Lecture Notes in Mathematics **1007**, 30-38 Springer, Berlin (1983)

[24] M. Brin, G. Stuck *Introduction to dynamical systems*, Cambridge University Press (2002)

[25] S. Brooks *On the entropy of quantum limits for toral automorphisms and baker's maps*, à paraître dans Comm. Math. Phys., preprint (2007)

[26] N. Burq *Mesures semi-classiques et mesures de défaut (d'après P. Gérard, L. Tartar et al.)*, Astérisque **245**, 167-196, Séminaire Bourbaki, (1996-1997)

[27] Y. Colin de Verdière *Ergodicité et fonctions propres du Laplacien*, Comm. in Math. Phys. **102**, 497-502 (1985)

[28] Y. Colin de Verdière *Semiclassical measures and entropy (d'après N. Anantharaman et S. Nonnenmacher)*, Astérisque **978**, séminaire Bourbaki, (2006-2007)

[29] I.P. Cornfeld, S.V. Fomin, Y.G. Sinai *Ergodic Theory* Springer-Verlag, New York (1982)

[30] P. Corvaja, Z. Rudnick, U. Zannier *A lower bounds for period of matrices*, Commun. in Math. Phys. **252**, 535-541 (2004)

[31] M. Denker, C. Grillenberger, K. Sigmund *Ergodic Theory on Compact Spaces*, Springer, Berlin-Heidelberg-New-York (1976)

[32] M. Dimassi, J. Sjöstrand *Spectral Asymptotics in the Semiclassical Limit* Cambridge University Press (1999)

[33] H. Donnelly *Quantum unique ergodicity*, Proc. of Amer. Math. Soc. **131**, 2945-2951 (2002)

[34] J. Duistermaat, V. Guillemin *The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics*, Inv. Math. **29**, 115-137 (1975)

[35] N. Dunford, J.T. Schwartz *Linear Operators, Part I*, Interscience, New York (1958)

[36] P. Eberlein *When is a geodesic flow of Anosov type I*, Jour. Diff. Geom. **8**, 437-463 (1973)

[37] P. Eberlein *Geodesic flows in manifolds of nonpositive curvature*, Proc. of Symposia in Pure Math. **69**, 525-571 (2001)

[38] B. Eckhardt, S. Fishman, J.P. Keating, 0. Agam, J. Main, K. Muller, *Approach to ergodicity in quantum wave functions*, Phys. Rev. E **52**, 5893-5903 (1995)

[39] L.C. Evans, M. Zworski *Lectures on semiclassical analysis* (version 0.3) disponible sur http ://math.berkeley.edu/ zworski/semiclassical.pdf (2003)

[40] U. Fano *Description of states in quantum mechanics by density matrix and operators techniques*, Rev. Mod. Phys. **29**, 74-93 (1957)

[41] F. Faure *Aspects topologiques et chaotiques en mécanique quantique*, Thèse d'habilitation (Institut Fourier), http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ faure/articles/index.html (2006)

[42] F. Faure, S. Nonnenmacher, S. de Bièvre *Scarred eigenstates for quantum cat maps of minimal periods*, Comm. in Math. Phys. **239**, 449-492 (2003)

[43] F. Faure, S. Nonnenmacher *On the maximal scarring for quantum cat map eigenstates*, Comm. in Math. Phys. **245**, 201-214 (2004)

[44] G. Folland *Harmonic Analysis in Phase Space*, Princeton University Press, Princeton (1988)

[45] A. Freire, R. Mañé *On the entropy of the geodesic flow for manifolds without conjugate points*, Inv. Math. **69**, 375-392 (1982)

[46] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine *Riemannian Geometry*, 3rd ed. Springer Verlag (2004)

[47] P. Gérard, E. Leichtnam *Ergodic properties of eigenfunctions for the Dirichlet problem*, Duke Math. Jour. **71**, 559-607 (1993)

[48] S. Gouëzel, C. Liverani *Banach spaces adapted to Anosov systems*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **26**, 189-217 (2006)

[49] L. Green *Geodesic instability*, Proc. of Amer. Math. Soc. **7**, 438-448 (1956)

[50] A. Grigis, J. Sjöstrand *Microlocal analysis for differential operators* Cambridge University Press (1994)

[51] B. Gutkin *Entropic bounds on semiclassical measures for quantized one-dimensional maps*, arXiv :0802.3400 (2008)

[52] B. Hasselblatt, A. B. Katok *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Encyclopedia of Mathematics and its applications **54** Cambridge University Press (1995)

[53] A. Hassell *Ergodic billiards that are not quantum unique ergodic. With an appendix by A. Hassell and L. Hillairet*, to appear in Ann. of Math.

[54] B. Hellfer, A. Martinez, D. Robert *Ergodicité et limite semi-classique*, Comm. in Math. Phys. **109**, 313-326 (1987)

[55] L. Hörmander *The spectral function of an elliptic operator*, Acta Math. **121**, 193-218 (1968)

[56] L. Hörmander *The Analysis of Linear Partial Differential Operators III*, Springer-Verlag, Berlin, New York (1985)

[57] D. Jakobson, I. Polterovitch *Estimates from below for the spectral function and for the remainder in local Weyl's law*, GAFA **17**, 806-838 (2007)

[58] D. Jakobson, S. Zelditch *Classical limits of eigenfunctions for some completely integrable systems*, IMA Vol. Appl. **109**, 329-354, Springer New York (1999)

[59] A. Katok *Fifty years of entropy in dynamics : 1958-2007*, Jour. of Modern Dyna. **1**, 545-596 (2007)

[60] J. Keating *Asymptotic properties of the periodic orbits of the cat maps*, Nonlinearity **4**, 277-307 (1990)

[61] D. Kelmer *Arithmetic quantum unique ergodicity for symplectic linear maps of the multidimensional torus*, à paraître dans Ann. of Math.

[62] A.I. Khinchin *Mathematical Foundations of Information Theory*, Dover Publications, New-York (1957)

[63] Y. Kifer *Averaging in dynamical systems and large deviations*, Inv. Math. **110**, 337-370 (1992)

[64] A.N. Kolmogorov *A new metric invariant of transient dynamical systems and automorphisms in Lebesgue spaces*, Dok. Akad. Nauk SSSR **119** 861-864 (1958)

[65] P. Kurlberg, Z. Rudnick *Hecke theory and equidistribution for the quantization of linear maps of the torus*, Duke Math. Jour. **103**, 47-77 (2000)

[66] P. Kurlberg, Z. Rudnick *On quantum ergodicity for linear maps of the torus*, Commun. in Math. Phys. **222**, 201-227 (2001)

[67] F. Ledrappier, L.-S. Young *The metric entropy of diffeomorphisms I. Characterization of measures satisfying Pesin's entropy formula*, Ann. of Math. **122**, 509-539 (1985)

[68] F. Ledrappier, L.-S. Young *The metric entropy of diffeomorphisms II. Relations between entropy, exponents and dimension.*, Ann. of Math. **122**, 540-574 (1985)

[69] E. Lindenstrauss *Invariant measures and quantum unique ergodicity*, Ann. of Math. **163**, 165-219 (2006)

[70] H. Maassen, J.B. Uffink *Generalized entropic uncertainty relations*, Phys. Rev. Lett. **60**, 1103-1106 (1988)

[71] F. Macià *Some Remarks on Quantum Limits on Zoll Manifolds*, Comm. in Part. Diff. Eq. **33**, 1137-1146 (2008)

[72] F. Macià *Semiclassical measures and the Schrödinger flow on Riemannian manifolds*, Nonlinearity **22**, 1003-1020 (2009)

[73] A. Martinez *An Introduction to Semiclassical and Microlocal Analysis*, Springer, New-York (2002)

[74] A. Messiah *Mécanique Quantique*, Dunod, Paris (1995)

[75] W. Narkiewicz *Elementary and Analytic Theory of Algebraic Numbers*, Springer, Berlin-Heidelberg-New-York (2004)

[76] S. Nonnenmacher *Some open questions in "wave chaos"*, Nonlinearity **21**, T113-T121 (2008)

[77] W. Parry *Entropy and Generators in Ergodic Theory*, New-York, W.A. Benjamin (1969)

[78] W. Parry, M. Pollicott *Zeta Functions and the Periodic Structure of Hyperbolic Dynamics*, Astérisque $\mathbf{187-188}$, SMF (1990)

[79] Y. B. Pesin *Dimension Theory in Dynamical Systems : Contemporary Views and Applications*, University of Chicago Press, Chicago (1997)

[80] M. Reed, B. Simon *Analysis of Operators I*, New York : Academic Press (1970)

[81] M. Reed, B. Simon *Analysis of Operators IV*, New York : Academic Press (1978)

[82] G. Rivière *Entropy of semiclassical measures in dimension 2*, hal-00315799 (2008)

[83] G. Rivière *Entropy of semiclassical measures for nonpositively curved surfaces*, hal-00430591 (2009)

[84] G. Rivière *Entropy of semiclassical measures for quantized cat-maps*, en préparation (2009)

[85] D. Robert *Autour de l'Approximation Semi-classique*, Progress in Mathematics **68**, Birkhäuser (1987)

[86] Z. Rudnick, P. Sarnak *The behaviour of eigenstates of arithmetic hyperbolic manifolds*, Comm. in Math. Phys. **161**, 195-213 (1994)

[87] D. Ruelle *Generalized zeta-functions for axiom A basic sets*, Bull. Amer. Math. Soc. **82**, 153-156 (1976)

[88] D. Ruelle *An inequality for the entropy of differentiable maps*, Bol. Soc. Bras. Mat. **9**, 83-87 (1978)

[89] R. O. Ruggiero *Dynamics and global geometry of manifolds without conjugate points*, Ensaios Mate. **12**, Soc. Bras. Mate. (2007)

[90] Y. Safarov, *Asymptotics of a spectral function of a positive elliptic operator without a nontrapping condition*, Func. Anal. Appl **22**, 213-223 (1988)

[91] R. Schubert *Upper bounds on the rate of quantum ergodicity*, Ann. Henri Poincaré **7**, 1085-1098 (2006)

[92] R. Schubert *On the rate of quantum ergodicity for quantised maps*, Ann. Henri Poincaré **9**, 1455-1477 (2008)

[93] L. Schwartz *Théorie des Distributions*, ed. Hermann (1966)

[94] C. Shannon *A mathematical theory of communications*, Bell Systems Technical Journal **27** (1948)

[95] A. Shnirelman *Ergodic properties of eigenfunctions*, Usp. Math. Nauk. **29**, 181-182 (1974)

[96] J. Sjöstrand, M. Zworski *Asymptotic distribution of resonances for convex obstacles*, Acta Math. **183**, 191-253 (1999)

[97] C. Sogge, S. Zelditch *Riemannian manifolds with maximal eigenfunctions growth*, Duke Math. Jour. **114**, 387-437 (2002)

[98] M. Tsujii *Quasi-compactness of transfer operators for contact Anosov flows*, arXiv :0806.0732v2 (2008)

[99] A. Voros *Aspects de la limite semi-classique*, Journées X-U.P.S. **5**, École Polytechnique, 37-48 (1987)

[100] P. Walters *An Introduction to Ergodic Theory*, Springer-Verlag, Berlin, New York (1982)

[101] S. Zelditch *Uniform distribution of the eigenfunctions on compact hyperbolic surfaces*, Duke Math. Jour. **55**, 919-941 (1987)

[102] S. Zelditch *On the rate of quantum ergodicity. I. Upper bounds*, Comm. in Math. Phys. **160**, 81-92 (1994)

[103] S. Zelditch *Local and Global Analysis of Eigenfunctions on Riemannian Manifolds*, prépublication (2008)

[104] S. Zelditch, M. Zworski *Ergodicity of eigenfunctions for ergodic billiards*, Comm. in Math. Phys. **175**, 673-682 (1996)