ECOLE DES MINES
DE PARIS
Collège doctoral

N° attribué par la bibliothèque

|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|

T H E S E

pour obtenir le grade de
Docteur de l'Ecole des Mines de Paris
Spécialité «Mécanique Numérique»

présentée et soutenue publiquement
par
Nicolas RENON

le 23 janvier 2002 à Sophia-Antipolis

Simulation numérique par éléments finis des grandes déformations des sols. Application à la Scarification.

Jury

M. François Sidoroff	Président
M. Bernard Cambou	Rapporteur
M. Jacques Desrues	Rapporteur
M. Michel Bellet	Examinateur
M. Claude Bohatier	Examinateur
M. Michel Grima	Examinateur
M. Patrick Laborde	Directeur de Thèse
M. Pierre Montmitonnet	Directeur de Thèse

Remerciements

Cette thèse s'est déroulée au Centre de Mise en forme des Matériaux de l'Ecole des Mines de Paris. Je remercie Jean Loup Chenot, directeur du CEMEF, de m'avoir accueilli dans son laboratoire.

L'encadrement de ces travaux a été mené par Pierre Montmitonnet du CEMEF et Patrick Laborde du laboratoire MiP, de l'université Paul Sabatier de Toulouse. Je suis sincèrement très reconnaissant de leur soutien durant ces trois années. Je salue la disponibilité, la pertinence, une certaine conception de la science, qui se dégage de la personnalité de Pierre. Mes liens avec Patrick datent de mon DEA à Toulouse. Je le remercie pour m'avoir orienté vers le CEMEF. C'est pour moi une réussite. Sa position m'a permis de prendre un certain recul sur ma thèse. J'ai pu apprécier la très grande convivialité qu'il met dans ses rapports humains.

Je remercie messieurs Bernard Cambou et Jacques Desrues pour avoir assurer la charge de rapporteurs. J'ai pu apprécier leurs visions éclairées et éclairantes en mécanique des sols. Je remercie aussi François Sidoroff d'avoir accepté la présidence de ce Jury.

Je remercie messieurs Michel Bellet et Claude Bohatier. Les nombreuses discussions orientées numériques que nous avons eues, m'ont été d'un grand secours.

Je tiens à remercier monsieur Michel Grima de l'ETAS pour l'esprit constructif et chaleureux qu'il a su donner à nos nombreuses réunions de travail.

Ce travail s'est déroulé au sein d'un groupement de laboratoire intitulé "Sols de Surface". J'exprime toute ma reconnaissance à tous les aventuriers de la mécanique des sols qui le composent. Une mention particulière aux thésards : Cécile Nouguier, Philippe Kolmayer, Olivier Benoît et Antoine Legendre.

Enfin un énorme merci à tous mes collègues des Mines à Sophia : thèsards, permanents et techniciens. Spécial dédicace à : Jean-Ma, Nono (dit la Mulasse), Thomas, Yann (dit le Rouge), Jean-luc, Val, François (dit aussi la Mulasse), JC, Phil, Doriane, Manu (l'anti-catalan), Manue, Matth, Fred (dit le Costeur), Gines. Merci aussi à : Karim, Etienne, Arnaud, Katia, Olivier, Charles, PO, Hugues, Johann, Laurent, Mihaela, Marie-F, Florence, Geneviève, Viviane, Lionel, MYP, Nanard.

A mon épouse, à ma concubine, Cécile, merci d'avoir supporté l'époux, le concubin tout au long de cette tranche de vie bien particulière…

À mon frère.

Table des Matières

Chapitre 1 Modélisation de l'interaction Outil / Sol

1.1 INTRODUCTION 5

1.2 LE MATERIAU 5

1.2.1 DESCRIPTION PHYSIQUE DES SOLS 5
1.2.2 LE SQUELETTE GRANULAIRE 6
1.2.3 LE FLUIDE INTERSTITIEL 6
1.2.4 SPECIFICITE DES SOLS DE SURFACE 8
1.2.5 OUTILS DE CARACTERISATION DES SOLS 8

1.3 MODELISATION DES SOLS 11

1.3.1 MODELISATION MILIEUX CONTINUS 11
1.3.2 MODELISATION MILIEUX DISCRETS 13

1.4 MODELISATION DE LA SCARIFICATION 14

1.4.1 METHODE ELEMENTS FINIS 15
1.4.2 METHODE ELEMENTS DISTINCTS 18

1.5 CONCLUSION : POSITIONNEMENT DE LA THESE 21

Chapitre 2 Lois de Comportement des Sols

2.1 INTRODUCTION 23

2.2 CARACTERISTIQUES DU COMPORTEMENT DU SOL 23

2.3 IDEALISATION ET MODELISATION 25

2.4 ELASTO-PLASTICITE 27

2.4.1 GENERALITES SUR LE COMPORTEMENT ELASTOPLASTIQUE 27
2.4.2 MODELES ELASTIQUES PARFAITEMENT PLASTIQUES POUR LES SOLS 31
2.4.3 MODELES ELASTO-PLASTIQUES AVEC ECROUISSAGE 35
2.4.4 ECRITURE EN GRANDES DEFORMATIONS 48

2.5 CONCLUSIONS.....50

Chapitre 3 Modélisation

3.1 INTRODUCTION 52

3.2 EQUATIONS DE LA MECANIQUE 53

3.2.1 EQUATION D'EQUILIBRE 53
3.2.2 LOI DE COMPORTEMENT 53
3.2.3 CONDITIONS AUX LIMITES 54
3.2.4 LE SYSTEME D'EQUATIONS A RESOUDRE : LE PROBLEME FORT $\wp_F$ 57

3.3 FORMULATION VARIATIONNELLE 58

3.3.1 FORMULATION FAIBLE CONTINU 58
3.3.2 FORMULATION FAIBLE ET CONTACT PENALISE 58
3.3.3 LE PROBLEME INCREMENTAL 60

3.4 SCHEMA D'INTEGRATION TEMPORELLE 62

3.4.1 INTEGRATION DE LA LOI DE COMPORTEMENT 62
3.4.2 INTEGRATION DE LA LOI DE FROTTEMENT 64
3.4.3 CONTACT INCREMENTAL PENALISE 65
3.4.4 NOUVEAU PROBLEME INCREMENTAL 66
3.4.5 FORMULATION INCREMENTALE MIXTE VITESSE PRESSION 67
3.4.6 ALGORITHME DE RESOLUTION 69

3.5 DISCRETISATION SPATIALE 70

3.5.1 DISCRETISATION ELEMENTS FINIS : P1+/P1 70
3.5.2 DISCRETISATION *MINI ELEMENT* 75
3.5.3 EXPRESSION DU MODULE TANGENT GLOBAL ET CONDENSATION 79

3.6 MAILLAGE / REMAILLAGE 82

3.6.1 LE MAILLEUR 82
3.6.2 RAFFINEMENT DE MAILLAGE 85
3.6.3 CRITERE DE REMAILLAGE 85
3.6.4 TRANSPORT 86

3.7 CONCLUSIONS 87

Chapitre 4 Intégration des lois de comportement des Sols

4.1 INTRODUCTION 89

4.2 LES LOIS IMPLEMENTEES 89

4.2.1 MODELES COMPRESSIBLES 89
4.2.1.1 DRUCKER PRAGER NON ASSOCIE [105] 89
4.2.1.2 CAM-CLAY MODIFIE [16] 90
4.2.1.3 CJS ETAT CRITIQUE 90
4.2.2 MODELES INCOMPRESSIBLES 92
4.2.2.1 CJS-TRESCA 92
4.2.2.2 VON MISES 93

4.3 INTEGRATION IMPLICITE 95

4.3.1 DRUCKER PRAGER NON ASSOCIE NON ECROUISSABLE 98
4.3.2 CAM-CLAY 100
4.3.3 CJS ETAT CRITIQUE 104
4.3.4 CJS-TRESCA 110

4.4 RESOLUTION ITERATIVE 112

4.4.1 SOLVEUR ITERATIF 113
4.4.1.1 SOLVEUR SYMETRIQUE : MINRES 116
4.4.1.2 SOLVEURS NON SYMETRIQUES : DIFFERENTES APPROCHES 117
4.4.1.3 STRUCTURE DE DONNEES 120
4.4.2 COMPARAISON 122

4.5 VALIDATION DES LOIS 126

4.5.1 DRUCKER-PRAGER ET CAMCLAY 127
4.5.2 CJS 131
4.5.3 CJS-TRESCA 139

4.6 CONCLUSIONS 141

Chapitre 5 Simulation de la Scarification

5.1 INTRODUCTION 143

5.2 SCARIFICATION D'UN MASSIF PLASTIQUE SEMI-INFINI 143

5.2.1 INFLUENCE DE L'ANGLE DE SCARIFICATION 145
5.2.2 INFLUENCE TAILLE DE DOMAINE / ESPACE INTER-DENT 150
5.2.3 CONCLUSION : SCARIFICATION D'UN MASSIF PLASTIQUE 155

5.3 SCARIFICATION POUR UNE DENT : INFLUENCE DU SOL 155

5.3.1 SOLS FROTTANTS ET COHERENTS :CJS ETAT CRITIQUE 155
5.3.1.1 SCLEROMETRE : DENT A 15° 158
5.3.1.2 ESSAI PLAQUE 164
5.3.1.3 TEMPS DE CALCULS 167
5.3.1.4 INFLUENCE DE PARAMETRES 170
5.3.1.5 CONCLUSION : SCARIFICATION SOLS FROTTANTS 174
5.3.2 SOLS COHERENTS :CJS-TRESCA 175
5.3.3 CONFRONTATION 179
5.3.3.1 CONFRONTATION A L'EXPERIENCE 179
5.3.3.2 CONFRONTATION FLAC3D©/FORGE3® 182
5.3.4 CONCLUSIONS : SCARIFICATION POUR UNE DENT 183

5.4 SCARIFICATION POUR UNE DENT AVEC LAME 183

5.4.1 RESULTATS OUTIL DENT + LAME 185
5.4.2 INFLUENCE DE L'ANGLE DE SCARIFICATION DE LA DENT 190
5.4.3 INFLUENCE DE L'ANGLE D'ETRAVE 192
5.4.4 CONCLUSION 194

5.5 SCARIFICATION MULTI-DENT 195

5.5.1 RESULTATS DES SIMULATIONS 196
5.5.2 INFLUENCE DE L'ANGLE D'ETRAVE SUR L'ECOULEMENT 200
5.5.3 INFLUENCE DES CONFIGURATIONS SUR LA REPARTITION DES EFFORTS .. 201
5.5.4 CONCLUSION 204

5.6 SCARIFICATION MULTI-DENTS AVEC LAME 205

5.7 CONCLUSIONS 208

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES 211

REFERENCES 213

ANNEXE 1 223

ANNEXE 2 225

Introduction

Cadre de la thèse : PEA "Sols de Surface"

Ce travail de thèse se situe dans le cadre du Plan d'Etude Amont *"Sols de Surface"* dont l'objectif est d'étudier le procédé de *Déminage Mécanique*. Ce PEA a été initié par la DGA (Délégation Générale pour l'Armement) et l'ETAS, Etablissements Technique d'Angers.

Le Déminage Mécanique

Le déminage mécanique consiste à labourer, ou scarifier, le sol en surface à l'aide d'un outil spécifique. Cet outil est une lame munie de "dents", qui est fixé au devant d'un pousseur (bouteur ou char). Lorsque le pousseur avance, seules les dents scarifient le sol, la lame permet alors d'évacuer la matière de part et d'autre du pousseur. Ainsi, l'action de l'ensemble pousseur / lame + dents conduit à un écoulement de matière, par lequel les mines sont susceptibles d'être évacuées. C'est une action de déminage à but militaire dans un cadre opérationnel.

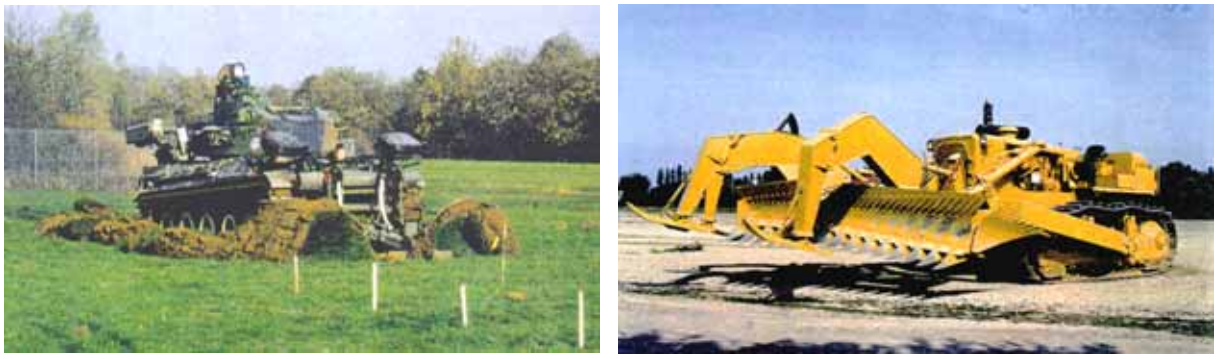


Figure 1 : (à gauche) Déminage mécanique sur un sol cohérent avec couverture herbeuse. (à droite) Lame de déminage Pearson.

Les utilisateurs, de par la très grande diversité de matériaux, sont confrontés à un certain nombre de problèmes. L'écoulement de matière n'assure pas une évacuation suffisamment efficace pour dégager les mines (par exemple "peignage" d'un sol sableux). Ou bien, la résistance mécanique d'un sol argileux associé à un treillis racinaire dense (élément végétal), peut engendrer des efforts que le pousseur ne peut fournir. De plus la capacité du pousseur dépend des propriétés mécaniques du sol, remanié par l'outillage, qui peuvent lui permettre ou non, de transmettre l'effort de poussée (problème de "trafficabilité").

La problématique qui se dégage de l'étude du procédé de déminage justifie la mise en œuvre d'un projet scientifique pour mieux comprendre les mécanismes mis en jeu lors du procédé. Cette étude peut s'articuler autour de deux thèmes :

- ***Le matériau*** : Les sols de surface sont des matériaux mal connus. Une modélisation doit être mise en oeuvre pour définir leurs lois de comportement. D'autre part le cadre opérationnel du déminage nécessite la caractérisation *in situ* du matériau. Il faut alors déterminer les essais mécaniques qui vont permettre d'accéder aux informations les plus représentatives du sol par rapport à la scarification et la trafficabilité.

- ***L'interaction outil/sol*** : Il s'agit de comprendre les mécanismes de déformation du matériau pour un outil complexe (plusieurs dents avec une lame), qui, bien sûr, dépendent de la nature du sol. L'action de déminage conduit à une sollicitation en très grandes déformations du matériau (écoulement de type fluide ou mise en œuvre d'un copeau plastique), et les propriétés de l'interface outil/sol sont à définir.

Pour mener cette étude le PEA "*Sols de Surface*" s'est structuré autour de deux groupes de recherche : un sous-groupe "Expérimental" et un sous-groupe "Modélisation". Le premier a pour tâche la conception et la réalisation d'essais expérimentaux de scarification et de trafficabilité : essais à échelle 1/3 (Université Blaise Pascal de Clermont Ferrand/Lermes), essais en vraie grandeur (LCPC/Centre d'Expérimentation Routière de Rouen) et essais de trafficabilité (Université Joseph Fourier de Grenoble / Irigm). Le deuxième sous-groupe a pour tâche la modélisation de l'interaction outil/sol (Université Montpellier II/Lmgc, Ecole des Mines de Paris/Cemef). L'intersection, *non vide*, entre ces deux groupes de recherche, est dévolue à la caractérisation *in situ*, et à la définition des lois de comportements des sols de surface. Cette tâche a été effectuée au LTDS de l'Ecole Centrale de Lyon (*P.Kolmayer* **Erreur ! Source du renvoi introuvable.**). L'objectif final du PEA est alors de fournir des Abaques, destinées à déterminer, en fonction du type de sol, si l'action de déminage est possible.

La thèse au sein du PEA

L'objectif de la thèse est la mise en œuvre de la simulation tri-dimensionnelle, par élément finis, du procédé de déminage. C'est le code *Forge3®*, développé conjointement par Transvalor S.A. et le Cemef pour la mise en forme des métaux, qui a été choisi comme plate-forme numérique de base (Choix issu du PEA, *Nouguier C.* **Erreur ! Source du renvoi introuvable.**). Ce logiciel permet de prendre en compte les grandes déformations par un système de remaillage automatique. Notre tâche consiste donc à adapter ce code à la scarification des sols en implémentant les lois de comportement issues des travaux du groupement.

Plan de la thèse

Ce manuscrit se structure en cinq chapitres.

Le premier chapitre traite de l'interaction outil/sol. Nous donnons une description physique des sols en dégageant les spécificités liées à leur nature de Surface. Nous abordons ensuite l'aspect modélisation en traitant

l'approche milieux granulaires et l'approche milieux continus. Après avoir établi un "Cahier des Charges" de la modélisation de l'interaction outil/sol, nous donnons le positionnement des travaux de la thèse.

Le deuxième chapitre traite des principales lois de comportements des sols dans le cadre de l'élasto-plasticité. Plusieurs modèles existent afin de prendre en compte la diversité des sols. Nous séparons ces modèles en une famille parfaitement plastique, qui prend en compte essentiellement les paramètres de rupture du matériau, et une famille avec écrouissage, qui décrit plus précisément les relations contraintes/déformations. On remarque que ces modèles peuvent être sensibles à la contrainte moyenne, ont une règle d'écoulement non associée et font intervenir les phénomènes d'écrouissage et d'adoucissement. Enfin nous décrivons le modèle à implémenter dans le code : *CJS Etat Critique*.

Le troisième chapitre aborde la discrétisation temporelle et spatiale des équations de la mécanique telles qu'elles sont données dans le code *Forge3®*. Nous donnons l'algorithme de résolution global associé à l'intégration implicite du comportement hypo-élasto-plastique. L'élément de discrétisation spatiale utilisé par le code est l'élément $P1^+/P1$. Nous donnons la formulation des équations discrétisées dans le cas compressible, ainsi que les répercussions sur la symétrie de la matrice de raideur. Enfin nous terminons en décrivant l'algorithme de génération de maillage et le critère de remaillage.

Le quatrième chapitre est dévolu aux développements réalisés dans le code. Nous traitons donc de l'intégration implicite des lois de comportement compressible et à leur répercussions sur la matrice de raideur. Nous présentons les algorithmes de résolution des *modèles Drucker Prager non associé*, *Cam Clay modifié* et *CJS Etat Critique*. Nous présentons aussi un modèle incompressible basé sur le critère de *Tresca*, applicable aux argiles et limons.
La non symétrie des modules tangents de ces lois sensibles à la pression hydrostatique est abordée, ainsi que le solveur itératif non symétrique implémenté. Enfin nous terminons par la validation de l'implémentation des différents modèles sur des essais triaxiaux, en comparant nos résultats avec ceux, confrontés favorablement à l'expérience de *P. Kolmayer* **Erreur ! Source du renvoi introuvable.**.

Le dernier chapitre traite des simulations de scarification. L'aptitude du logiciel à prendre en compte l'écoulement de matière est examinée pour la scarification avec une seule dent. Nous abordons ensuite la scarification avec les lois de comportement des sols de surface implémentées dans le code. Une étude est menée pour dégager les paramètres d'influence des modèles, et nous confrontons les résultats numériques à l'expérience.
La suite du chapitre est dévolue à la mise en œuvre d'outils complexes dans le cas d'un comportement incompressible. Nous traitons de l'action d'une dent associée à une lame, puis de l'action de systèmes multidents, et enfin nous traitons plusieurs dents associées à une lame. Nous nous approchons

ainsi par étapes du système de déminage réel, qui reste encore hors de portée car trop couteux en temps de calculs.

Chapitre 1 Modélisation de l'interaction Outil / Sol

1.1 INTRODUCTION 5

1.2 LE MATERIAU 5

1.2.1 DESCRIPTION PHYSIQUE DES SOLS 5
1.2.2 LE SQUELETTE GRANULAIRE 6
1.2.3 LE FLUIDE INTERSTITIEL 6
1.2.4 SPECIFICITE DES SOLS DE SURFACE 8
1.2.5 OUTILS DE CARACTERISATION DES SOLS 8

1.3 MODELISATION DES SOLS 11

1.3.1 MODELISATION MILIEUX CONTINUS 11
1.3.2 MODELISATION MILIEUX DISCRETS 13

1.4 MODELISATION DE LA SCARIFICATION 14

1.4.1 METHODE ELEMENTS FINIS 15
1.4.2 METHODE ELEMENTS DISTINCTS 18

1.5 CONCLUSION : POSITIONNEMENT DE LA THESE 21

1.1 Introduction

Dans ce chapitre nous abordons la modélisation de l'interaction outil / sol. Les principales difficultés liées à cette modélisation tiennent : (a) à la complexité du matériau sol d'autant plus importante pour un sol de surface, (b) à des géométries d'interfaces complexes et un frottement sol-métal mal connu, (c) aux grandes déformations et aux écoulements qui peuvent avoir lieu.

Dans la suite nous donnons tout d'abord une description des sols matériaux multi-phasiques, hétérogènes et anisotropes. Pour cela nous nous appuyons sur la description usuelle de la mécanique des Sols. Nous abordons aussi la spécificité liée aux *Sols de Surface* ainsi que leurs outils de caractérisation *in situ*. Ceci nous permet de mettre en avant l'intérêt d'une modélisation numérique de l'interaction Outil / sol.

La structure complexe des sols conduit à deux modélisations possibles : milieu continu ou bien milieu discret. Nous décrivons donc ces deux approches. Enfin nous dégageons les points clés de la problématique de la coupe d'un sol de surface dans une modélisation numérique. Nous examinons les simulations réalisées par éléments finis (milieu continu) ainsi que par éléments distincts (milieu discret), et enfin nous donnons le positionnement de la thèse.

1.2 Le Matériau

Dans cette section nous présentons le matériau Sol dans le cadre classique de la Mécanique des Sols (*F Schlosser* [102]). Nous nous attachons par la suite à décrire les spécificités liées aux Sols de Surface (*P. Kolmayer* [64]).

1.2.1 Description Physique des Sols

Le sol est un mélange complexe. On considère généralement qu'il est constitué de trois phases :

- *La phase solide* ou *squelette granulaire* est un mélange de grains de formes et de tailles diverses (il peut contenir aussi des particules de matières organiques).
- *La phase liquide* est faite d'eau interstielle qui peut circuler librement ou être liée aux grains. L'interaction entre la phase liquide et solide (force de capillarité) peut être très importante dans les Sols fins.
- *La phase gazeuse* contient un mélange d'air et de vapeur d'eau. Elle est inexistante dans le cas d'un sol *saturé* en eau.

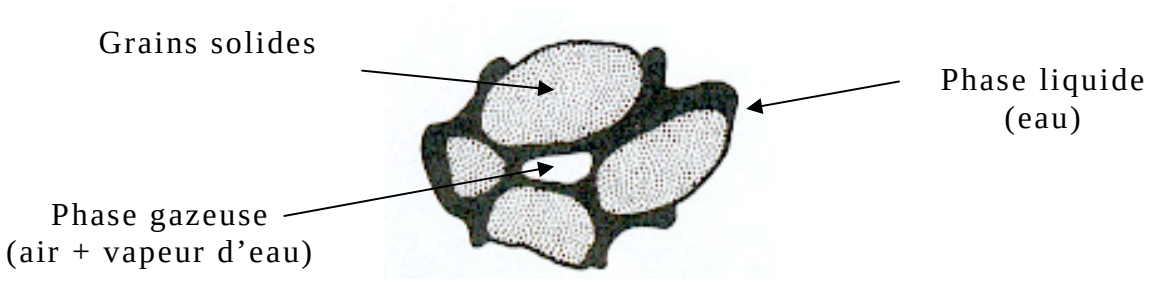


Figure 1.1 : Représentation schématique des trois phases d'un sol : les grains solides, la phase liquide, la phase gazeuse.

La description complète du sol passe par celle de chacun des trois constituants. Dans cette description l'élément végétal (aérien ou souterrain) a été négligé, cette composante sera prise en compte pour les sols de surfaces.

1.2.2 Le squelette granulaire

La phase solide est principalement caractérisée par la forme, la taille et la distribution des diamètres des grains (granulométrie). L'analyse granulométrique permet de déterminer la distribution de la taille des grains, par tamisage pour des tailles moyennes supérieures à 100μm et par sédimentométrie pour des tailles moyennes inférieures à 100μm. La granulométrie permet de scinder les sols en deux grandes classes en fonction du diamètre moyen des grains par rapport à une limite fixée à 80μm. Au dessus de cette limite on parle de *Sols grossiers* (Sables, Graviers) et en dessous de *Sols fins*(Argiles, Limons). Les propriétés des sols grossiers dépendent de la taille des grains et de leur état de compacité (état lâche ou dense). Le comportement d'un sol fin dépend de sa composition minéralogique, sa teneur en eau et de la disposition des grains les uns par rapport aux autres.

Diamètre moyen des grains	*200mm*	*20mm*	*2mm*	*0,2mm*	*0,02mm*	*2μm*
Désignation	Cailloux	Graves ou Graviers	Gros Sable	Sable Fin	Limon	Argile

Table 1.1 :Désignation des Types de Sols en fonction de la taille moyenne des Grains.

1.2.3 Le fluide interstitiel

Le liquide interstitiel est en général assimilé à de l'eau pure, elle peut se présenter principalement sous deux formes : eau libre et eau capillaire (une troisième forme existe on parle alors de double couche = film d'une épaisseur de plusieurs molécules d'eau autour des agrégats solides) :

- *L'eau libre* constitue l'essentiel de l'eau dans les sols grossiers, mais n'en représente qu'une faible partie dans les sols fins. Le terme *libre* signifie qu'elle peut s'écouler sans entrave sous l'action de la pesanteur.

- *L'eau capillaire* existe en présence de la phase gazeuse et se caractérise par la formation de ménisques aux points de contacts entre les grains.

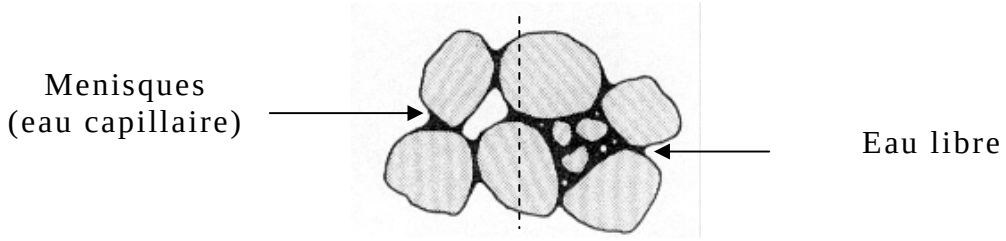


Figure 1.2 : Fluide Interstitiel entre les grains solides : eau libre et eau capillaire.

Une des caractéristiques importantes du sol est alors sa teneur en eau w équation (1.1) et son degré de saturation S_r équation (1.2). Ce dernier indique dans quelle proportion les vides sont remplis d'eau, on parle alors de matériau saturé, $S_r = 100\%$, ou non saturé $S_r < 100\%$. Dans ce cas la pression d'eau est négative et représente l'intensité de l'attraction exercée par le squelette granulaire sur la phase liquide. L'étude d'un sol non saturé s'avère plus complexe, le comportement du sol peut varier selon la nature de la répartition de l'eau dans le squelette solide, qui peut se traduire par une augmentation de la rigidité en limitant le glissement des grains solides par effet de capillarité [60]. Pour l'étude de l'écoulement de l'eau dans un sol, on suppose généralement que l'eau interstitielle est *incompressible* et que la masse d'eau se *conserve*.

La teneur en eau w et le degré de saturation S_r sont donnés par :

$$w = \frac{poids\ de\ l'\ eau}{poids\ des\ grains\ solides} \times 100\ \% \qquad \textbf{(1.1)}$$

$$S_r = \frac{Volume\ de\ l'\ eau}{Volume\ des\ vides} \times 100\ \% \qquad \textbf{(1.2)}$$

On introduit aussi des paramètres sans dimensions définissant l'état de compaction du sol. Il s'agit de *l'indice des vides e* et de la *porosité n* :

$$e = \frac{Volume\ des\ vides\ entre\ les\ grains}{volume\ des\ grains\ solides} \times 100\ \% \qquad \textbf{(1.3)}$$

$$n = \frac{Volume\ des\ vides\ entre\ les\ grains}{volume\ total} \times 100\ \% \qquad \textbf{(1.4)}$$

On peut alors qualifier l'état de compaction du matériau : lâche ou dense (par exemple pour un sable d'Hostun lâche $e = 0,71$ et $n = 0,41$ et dans le cas dense $e = 0,53$ et $n = 0,34$, [73]). L'indice des vides et la porosité (toujours inférieure à 1) sont liés par la relation :

$$n = \frac{e}{1+e} \qquad \textbf{(1.5)}$$

1.2.4 Spécificité des Sols de Surface

Dans le terme Sols de Surface, il est important dans un premier temps de déterminer la zone correspondant à la surface. Cette notion peut être extrêmement variable suivant l'échelle du problème considéré. En tribologie cela correspond à quelques nanomètres et en géologie à plusieurs centaines de mètres. En génie civil le Sol de surface est constitué des premiers mètres de sol, tandis qu'en agriculture on se limite à la couche superficielle située au dessus de la semelle de labour, c'est à dire les cinquante premiers centimètres.

Pour le problème de scarification dans le cadre du déminage la notion de sols de surface est déterminée par l'enfoncement maximal des mines anti-chars et anti-personnelles. Nous considérons alors comme *sol de surface* tout sol non rocheux situé dans les trente premiers centimètres sous la surface et suffisamment meuble pour y insérer une mine. Outre la description générale des sols que nous avons donnée (squelette granulaire et fluide interstitiel), les Sols de surfaces se caractérisent par une forte hétérogénéité dans leur nature, la présence de matière végétale et par un état hydrique généralement non saturé ($S_r < 100\%$). On remarque aussi que ces sols de surface, contrairement aux sols rencontrés en génie civil, ne sont pas soumis à l'action induite par la masse de plusieurs mètres de géomatériau. Pour notre étude nous nous appuyons sur les travaux de P. Kolmayer [64] : l'élément végétal n'est pris en compte que par son réseau racinaire (diamètre, $\phi > 10mm \Rightarrow$ racines, $\phi > 10mm \Rightarrow$ radicelles ; densité), sa partie aérienne est négligée. On considère que l'apport du treillis n'intervient que sur la cohésion du matériau.

1.2.5 Outils de caractérisation des sols

Nous présentons dans la suite les trois outils de caractérisation *in situ*, étudiés dans le cadre du P.E.A.. Les sols étant des matériaux naturels (à l'inverse des alliages métalliques ou des polymères) leur caractérisation mécanique peut/doit se faire en laboratoire (par des essais tri-axiaux, oedométriques, de cisaillement) et *In Situ*. En effet si en laboratoire les données, de teneur en eau, de densité, sont maîtrisées, ce n'est pas le cas dans le milieu naturel. Le matériau est souvent stratifié, son état dépend des conditions climatiques, de la présence de l'élément végétal. Ses caractéristiques évoluent aussi dans l'espace (d'un lieu à un autre). Or c'est ce matériau qui est réellement rencontré en scarification et non celui du laboratoire. C'est pourquoi il existe des outils de caractérisation des sols destinés à prendre en compte l'état réel du matériau à un instant donné et à

recaler les paramètres (angle de frottement interne, cohésion) obtenus en laboratoire.

Ces essais se doivent d'être simples dans leur réalisation et pertinents dans les informations qu'ils peuvent fournir. La simplicité est nécessaire pour pouvoir répéter l'essai et accéder ainsi à des informations non locales. L' interprétation des informations en termes de paramètres mécaniques est l'aspect le plus délicat étant donné la complexité du matériau. *C'est ici que la qualité de la modélisation de l'interaction outil/sol est prépondérante.*

- ***L'essai scissométrique :***

Cet essai consiste à imposer un couple à un "moulinet" constitué de deux plaques formant quatre dièdres orthogonaux et solidaires d'un train de tiges enfoncé à différentes profondeurs. Cet essai s'applique aux matériaux fins purement cohérents et non frottants. Il permet de mesurer une cohésion non drainée ainsi qu'une cohésion résiduelle. Ainsi cet essai simple dans sa réalisation permet d'accéder directement à un paramètre mécanique du matériau. Par contre il n'est utile que pour des sols fins puisque il ne donne aucune information sur l'angle de frottement interne.

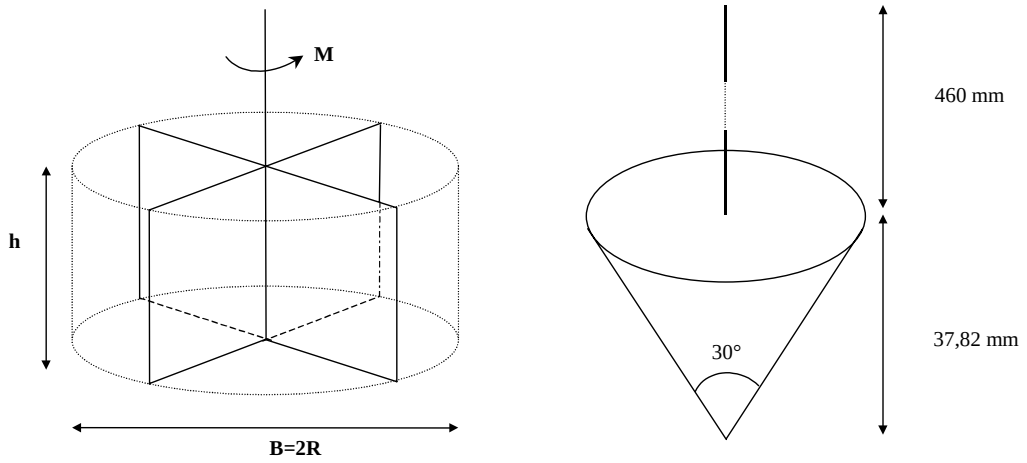


Figure 1.3 : (a) le scissomètre – (b) schéma du pénétromètre statique WES

- ***L'essai pénétrométrique statique***

Cet essai consiste à mesurer la réaction qu'oppose un sol à l'enfoncement d'un cône. Son caractère pratique en fait un outil très répandu en géotechnique. L'emploi généralisé par l'armée américaine a permis la constitution de bases de données caractérisant les sols de surfaces. Cet essai est valable pour tout les types de sols (fins et frottants) et prend en compte la nature stratifiée du sol. Les résultats obtenus sont des courbes enfoncement / résistance de pointe. Plusieurs méthodes existent (expansion de cavité (WES), éléments finis) pour interpréter ces courbes en termes de paramètres mécaniques. Néanmoins ces méthodes ne donnent pas des résultats satisfaisants. Cela provient notamment de la difficulté de distinguer la part d'influence de l'angle de frottement du matériau de celle de l'angle de frottement de l'interface Outil / Sol.

Une modélisation numérique précise de l'interaction outil/sol peut lever la difficulté. L'essai pénétrométrique pourrait alors être l'équivalent de l'essai de dureté pour les métaux.

- ***L'essai Scléromètrique***

Le scléromètre est un outil d'identification des sols de surface spécialement conçu pour leur caractérisation lors de la scarification. Il permet d'obtenir les efforts qui s'exercent sur une dent enfoncée de quelques dizaines de centimètres dans le sol (élancement de la dent : $h = \frac{\text{hauteur}}{\text{largeur}} = 10$). Afin de maintenir une inclinaison constante, la dent est montée sur un bâti lesté. Ce dernier est posé sur des patins et tracté à vitesse constante soit par un treuil pour des vitesses lentes (0,3-0,9 km/h) soit par un bouteur pour des vitesses rapides (3-6-9 km/h). L'effort est mesuré grâce à un barreau dynamomètrique placé sur le cadre tractant l'ensemble du dispositif.

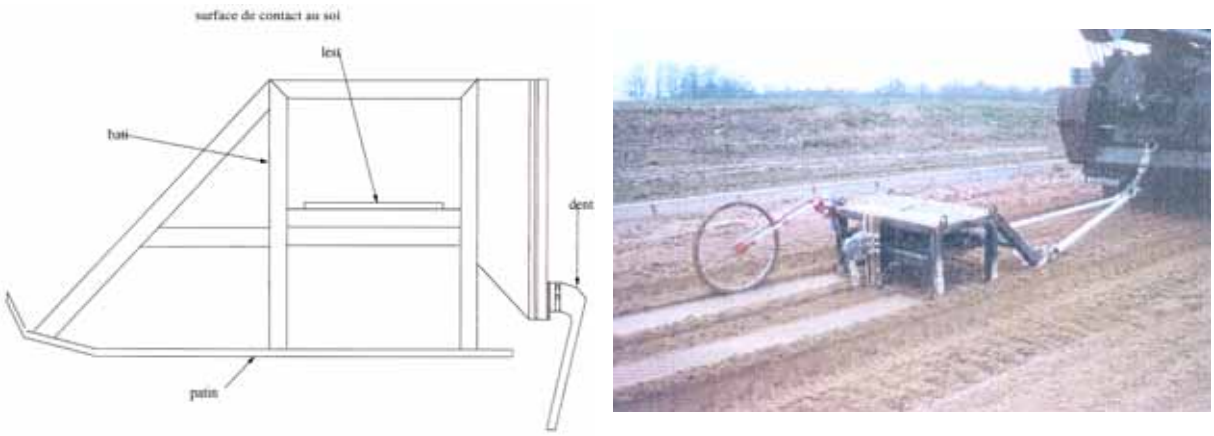


Figure 1.4 : (a) schéma de profil du dispositif scléromètrique (données ETAS) – (b) dispositif global : bâti, câble et bouteur.

Ainsi le scléromètre apparaît comme l'instrument d'étude le mieux adapté à la compréhension de la coupe des sols. Néanmoins sa mise en œuvre reste lourde. Quant à son interprétation, comme nous le verrons à la section 1.4, la modélisation numérique de la coupe d'un sol n'est pas encore satisfaisante.

1.3 Modélisation des Sols

La description des Sols de la section 1.2 nous a permis de saisir leur nature granulaire, multi-phasique et très hétérogènes. Néanmoins leur modélisation s'est d'abord tournée vers une approche milieux continus / milieux poreux. Cette approche apparaît légitime suivant l'échelle (= *taille du milieu étudié / taille des grains*) du problème étudié, comme par exemple en géotechnique pour des problèmes de stabilités, de creusement de tunnels, ([3],[29],[34],[38],[52],[79]). Pour des échelles plus petites, comme ce peut être le cas dans le système outil / sol et donc aussi en scarification (en fonction des outils : dents, lame, lame plus dents), l'approche milieu granulaire semble aussi légitime.
En simulation numérique l'approche continu est dévolue à la Méthode des Eléments Finis (MEF), l'approche granulaire à la Méthodes des Eléments Distincts (MED). Dans la suite nous présentons les deux types de modélisation.

1.3.1 Modélisation Milieux Continus

Dans le cadre de la mécanique des milieux continus, les sols sont modélisés comme des milieux poreux multi-phasiques. Une telle théorie a d'abord été développé par (Biot 1955, [27]) pour des matériaux élastiques, ensuite Prévost [94], l'a étendue pour des matériaux non-linéaires (élastoplastique) et aux grandes déformations.

Pour un tel milieu le tenseur des contraintes est alors scindé en deux contributions : une contribution due au squelette solide (on parle de contraintes effectives) et une contribution isotrope due aux deux autres phases du matériau. Dans le cas d'un sol *saturé* (milieu bi-phasique) on utilise la décomposition suivante de *Terzaghi* (1943) :

$$\sigma = \sigma' + p_l \mathbf{1I} \qquad \textbf{(1.6)}$$

Où σ est le tenseur des contraintes totales, σ' est le tenseur des contraintes effectives et p_l la pression de l'eau dans le sol, appelée *pression interstitielle* (encore notée u sur la figure Figure 1.5). Les contraintes effectives ne sont pas déviatoires.

Dans le cas d'un sol non saturé cette décomposition a été étendue en prenant en compte la pression de l'air dans les pores, on a alors la décomposition suivante (Bishop et *al.*, Croney et *al.*, [28]) :

$$\sigma = \sigma' + \left[p_a - \chi\left(p_a - p_l\right)\right]\mathbf{1I} \qquad \textbf{(1.7)}$$

où p_a est la pression de l'air et χ est un paramètre qui vaut 1 pour un sol saturé et 0 pour un sol sec. La modélisation d'un sol non saturé reste un

problème d'actualité autant d'un point vu expérimental, [44], [60], que numérique[125], [126].

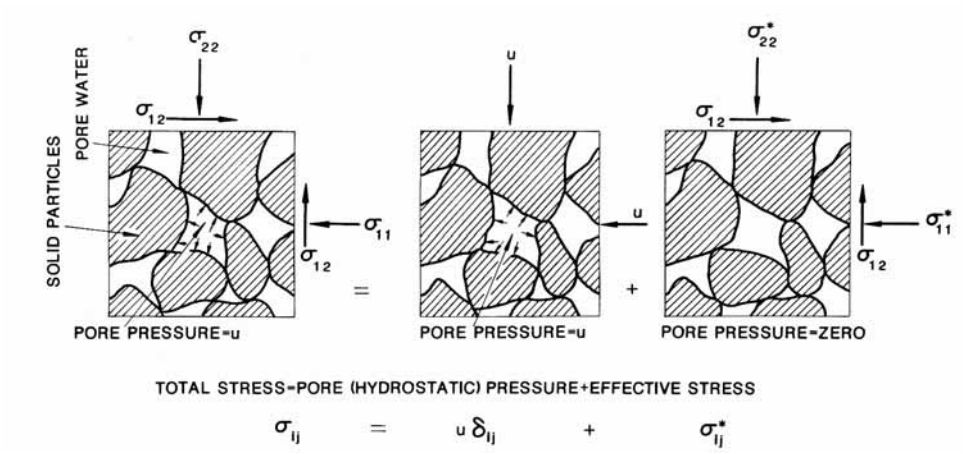


Figure 1.5 : contraintes totales et effectives dans un sol saturé.

Bien que la géométrie des vides et des grains solides soient discrète à l'échelle microscopique, l'écoulement du fluide à travers un milieu poreux est traditionnellement caractérisé en utilisant une approche continue basée sur la *loi de Darcy,* [29],[101],[102].

$$v = -k\,i \qquad \textbf{(1.8)}$$

C'est une loi issue de l'expérience qui exprime que la vitesse d'écoulement de l'eau *v*, et le gradient hydraulique $i = -\nabla\left(\frac{u}{\gamma_w} + z\right)$ *(γ_w poids volumique de l'eau, z cote)* sont proportionnels via le coefficient de perméabilité *k*. Bien que cette loi soit la plus utilisée en pratique d'autres modèles sont développés à partir des équations de Navier-Stokes afin de mieux cerner les phénomènes physiques qui gouvernent l'écoulement du fluide interstitiel [124].

Multiphasique vs. Monophasique

Lorsque l'on se place dans des conditions de drainage libre, c'est à dire que les contraintes totales sont appliquées assez lentement pour que l'eau des pores puisse s'échapper des vides et que l'excès de pression induit soit négligeable. L'état de la pression interstitielle ne dépend que des conditions hydrauliques et est indépendant de la réponse du squelette solide aux charges externes. C'est pourquoi, dans ce cas, une description du sol *mono-phasique* est plus adéquate. Similairement une telle description prévaut aussi pour des cas sans aucun drainage drainage (pas d'écoulement). Pour des cas intermédiaires dans lesquels un écoulement intervient, il y a une interaction entre les différentes phases. C'est souvent dans le cas de sollicitations dynamiques que cette interaction advient, l'eau n'a pas le temps de s'évacuer des vides (phénomènes de succion, de cavitation, qui donnent lieu à une rigidification du squelette granulaire). Dans ce cas c'est alors une formulation multi-phasique qui prévaut.

1.3.2 Modélisation Milieux Discrets

Le sol est modélisé comme un milieu monophasique. Seul le squelette granulaire est pris en compte en modélisant les grains comme un ensemble de solides rigides qui interagissent entre eux (contact avec frottement).

D'un point de vue phénoménologique, l'approche discrète semble plus légitime. La modélisation des sols par éléments distincts permet de mieux saisir les hétérogénéités liées à la forme et aux diamètres des grains solides (voir Table 1.1). Cette approche apparaît licite pour des sols frottants secs où la réaction globale du matériau est seulement régie par les frottements et les contacts entre grains. Par contre pour des sols fins et humide (diamètre grains de l'ordre du micron, table Table 1.1, teneur en eau importante, équation (1.2)), cette approche semble inadaptée. D'une part, un tel matériau est ce qui l'apparente à un milieu continu. D'autre part, étant donné la taille des grains solides, cette approche serait rédhibitoire d'un point de vue numérique (en termes de coût de stockage et de calcul) si le volume global est très supérieur au volume d'un grain.

D'un point de vue numérique l'approche discrète, correspond à la *méthode des élément distincts (MED)*. Elle consiste à résoudre l'équation de la dynamique pour chaque grain, pour accéder aux paramètres de position des grains et aux forces aux points de contacts. Pour représenter les chocs entre les grains on distingue principalement deux approches qui diffèrent dans la gestions des contacts : l'approche *dynamique moléculaire* de P Cundall [33], initiateur de la MED, et l'approche de J.J. Moreau [81] et M. Jean [57].
La différence entre les deux approches tient essentiellement dans la prise en compte des conditions de contact et de frottement entre les grains. Dans l'approche *"Dynamique Moléculaire"* les lois de contact et de frottement sont régularisées. On autorise une pénétration entre les grains, et on suppose que les surfaces des corps en contact ont une certaine élasticité et viscosité. L'approche "*dynamique des contacts*" ne fait appel à aucune régularisation. On introduit la condition de non-pénétration et les contacts sont ponctuels.
Le champ d'application de ce type de modélisation s'étend de la mécanique des sols (génie civil, mécaniques des roches) à la mécanique des poudres (métalliques, céramiques, farines, industrie pharmaceutique).

Dans cette approche milieu granulaire, les données telles que le champs de vitesse et le champs de forces d'interaction (entre les particules) sont discrètes (locales à chaque grain). On peut alors définir la déformation et le concept de contrainte, qui sont des champs continus, par moyenne sur des volumes élémentaires [23].

1.4 Modélisation de la Scarification

Cahier des Charges

La compréhension et l'étude de la coupe d'un sol par des outils rigides passe entre autre, par la mise en œuvre de la modélisation numérique d'une telle sollicitation. Cette modélisation doit être capable de déterminer et d'évaluer, de façon précise, les réactions des sols, champs de déformations, de contraintes, soumis à une sollicitation de coupe. Nous listons ici les facteurs déterminants qui interviennent dans la modélisation de la coupe d'un sol par un outil rigide :

(1) Le domaine d'étude est un ***espace semi infini***.

(2) Le système met en jeu deux matériaux, sol et métal, avec une géométrie d'***interface complexe***.

(3) Le procédé de scarification induit un ***écoulement*** du sol en ***grandes déformations***.

(4) Les ***lois de comportements*** non-linéaires des sols de surface sont à spécifier.

(5) Le frottement à l'interface sol – métal est un paramètre important mal connu.

Le matériau mis en jeu occupe un espace semi-infini. La modélisation doit prendre en compte cette caractéristique soit en simulant explicitement l'aspect infini du domaine, soit en se ramenant à un domaine fini sans perturber le problème. Cette restriction *a priori* est conditionnée par la géométrie et la taille de l'outil mais aussi par l'objectif de l'étude (obtention de l'état stationnaire…).

Le point (2) sous-entend la modélisation du contact unilatéral entre un solide rigide et un solide déformable. Les géométries rencontrées peuvent être complexes et variées. Les outils de traitements de sol sont généralement des Lames ou des Dents (élancements : $h = \frac{\text{hauteur}}{\text{largeur}}$; pour les lames h << 1, pour les dents h >> 1). On peut rencontrer aussi des ensembles à plusieurs dents, et dans le cas du déminage l'association des deux types d'outils (Figure 1.6). Que ce soit pour des outils à une dent ou mixtes (Figure 1.6), c'est une approche tri-dimensionnelle qui est nécessaire.

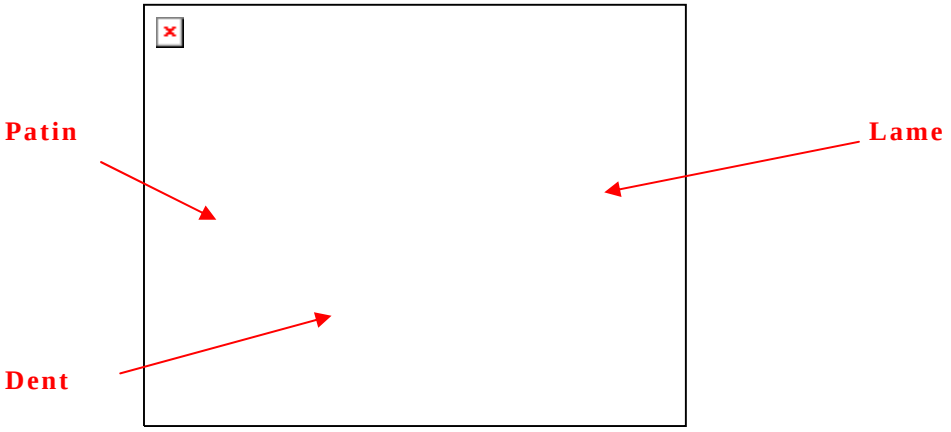


Figure 1.6 : Détail charrue de déminage PEARSON

Le point (3) met en avant les très grandes déformations induites par l'écoulement de matière créé par une sollicitation de scarification. La modélisation doit pouvoir prendre en compte l'écoulement du sol et par la même l'évolution de surfaces libres avec une géométrie complexe. Dans une approche *Lagrangienne* par éléments finis cela consiste à re-construire le maillage du domaine déformé occupé par le sol. Cela pose aussi la question des choix de mesures des tenseurs des contraintes et des déformations (tenseurs de *Kirchoff*, tenseur de *Green-Lagrange*), ainsi que des dérivées objectives.

La structure complexe et diverse des sols assure l' élaboration de nombreuses lois de comportements dans un cadre non-linéaire (visco-élasticité, visco-plasticité, élasto-plasticité). Dans ce cadre, les lois de comportement pour des sols de surface soumis simultanément à de faibles contraintes (surfaces libres) et de grandes déformations, sont difficiles à spécifier, voir [64].

Enfin dans la modélisation de la scarification le frottement à l'interface Sol-Métal, point (5), doit être pris en compte. Comme pour les lois de comportement des Sols de surface, le frottement à l'interface est mal connu, [30].

1.4.1 Méthode Eléments Finis

Dans la littérature, on peut noter que peu d'articles traitent de la simulation numérique de la scarification des sols [83]. L'effort de recherche est essentiellement conduit en agriculture. La majorité des auteurs ont une approche milieu continu et adoptent une discrétisation par élément finis. Les études sont menées sur des outils simples : lames ou dents. La plupart des approches sont en **2D** que ce soit pour une lame, [65] [123], ou pour une dent [47] [82]. Des approches existent aussi en **3D** pour une lame [122][70], et pour une dent [30]. Les vitesses de coupe étudiées peuvent atteindre 55km/h , qui situe alors le problème dans un registre dynamique [65], [122].

Domaine semi-infini

Bien que la plupart des auteurs choisissent de déterminer arbitrairement une taille de domaine supposée suffisamment grande pour ne pas perturber la solution d'autres auteurs prennent en compte l'aspect "infini" du domaine. Par exemple *Liu* [70] dans une approche tri- dimensionnelle utilise des *Fuzzy Element* de *Gawronski* [46] pour modéliser un domaine semi-infini. Plus généralement, hors du cadre de la scarification mais toujours en mécanique des sols, pour des problèmes de stabilité, des *formulations éléments infinis* sont développées [1]. La tendance générale est de déterminer un domaine fini. Le choix de la taille des domaines n'est pas explicité.

Lois de comportements

Les sols étudiés sont des sols rencontrés en agriculture. Ce sont, pour la plupart des sols fins saturés, de type argile [47] [65], ou des mélanges de limon et de sols grossiers [82] [122]. Les sols sont supposés homogènes.

Deux types de relations contraintes-déformations sont utilisés : Elasticité non linéaire, [30] [47] [65] [123] et modèles parfaitement plastiques [122][70] [82](Mohr-Coulomb et Drucker Prager). Le modèle élastique linéaire est destiné aux matériaux fins. Les modèles plastiques sont des modèles classiques en mécanique des sols pour des sols grossiers. Dans le cas élastique le module d'élasticité évolue avec la déformation. Cette évolution est déterminée par corrélation sur des essais triaxiaux standard (*curve fitting* [83]), Figure 1.7 . La mise en œuvre d'un tel modèle est la suivante : La charge totale est appliquée en plusieurs étapes. A chaque étape l'élasticité est linéaire, les résultats en termes de déformation et de déplacements sont cumulés jusqu'à ce que la charge totale soit appliquée. Le module d'élasticité est alors réactualisé au cours de chaque étape à l'aide de l'état de contrainte de l'étape précédente.

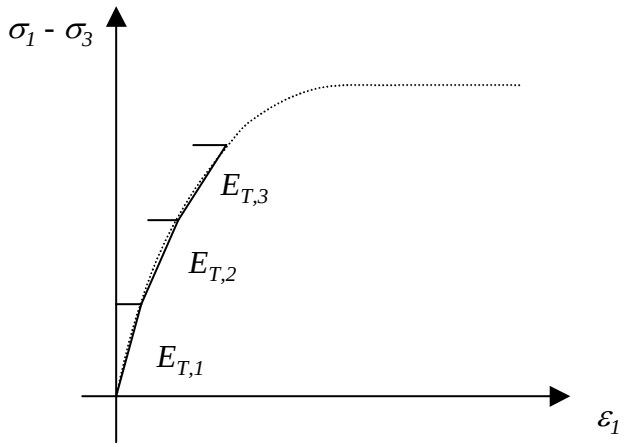


Figure 1.7 : Calcul du module d'élasticité tangent à chaque pas de chargement.

Cet approche permet de saisir l'état de contraintes du matériau mais par contre ne prédit que des déformations réversibles élastiques, qui ne correspondent pas à l'état déformé d'un sol scarifié. Les modèles plastiques permettent, eux, la prédictions de déformations réversibles et irréversibles, et sont plus précis quant à la répartition du champ de contrainte et de déformation.

Contact – Frottement Interface

Les conditions de contact frottant sont prises en compte par l'adjonction d'éléments d'*interface*, [47] [65] [70] [30] [122] [123], tels que *Joint element*, *thin layer element*. Ces éléments ont été initialement développés par DESAI C.S. [37] pour la mécanique des roches. Les conditions aux limites de contact et de frottement ne sont donc pas prises en compte par des méthodes numériques classiques de pénalisations ou de multiplicateurs de Lagrange. La loi de comportements d'interface est abordée de façon analogue à celle de comportement du matériau (Figure 1.7), c'est-à-dire par une modélisation élastique non-linéaire et corrélation sur des essais de frottement [30].
Hors du cadre de la scarification mais toujours dans l'interaction outil / sol, ce type d'éléments d'interface est aussi utilisé pour simuler l'enfoncement de pénétromètre [4].

Grandes Déformations

Bien que la formulation des équations de la mécanique soit en *Lagrangien Réactualisé*, l'aspect grandes déformations et donc l'écoulement de matière n'est pas réellement abordé. Les auteurs s'intéressent essentiellement à la mise en butée de l'outil de coupe et donc à des avancée de quelques millimètres. Les avancées d'outil les plus importantes ayant lieu pour des simulations **2D** l'écoulement latéral n'est pas simulé. Le traitement de l'interface sol-métal par le biais d'éléments d'interface apparaît lourd pour une approche **3D** en grandes déformations. La combinaison d'un outil à géométrie complexe avec un écoulement tri-dimensionnel assure une évolution perpétuelle et complexe de la surface de contact. La mise en œuvre numérique d'éléments d'interface serait alors très lourde.

Par exemple la Figure 1.8 montre le maillage initial utilisé par Gee-Clough [47]. Sur la ligne horizontale en prolongement du bout de l'outil (3) des éléments d'interfaces sont pré-établis pour anticiper l'avancée de la dent. Ceci doit permettre de simuler la séparation sol-sol et la remontée de matière le long de l'outil. Cette approche nuit à la prédictivité du modèle puisqu'il privilégie un mode de réaction du sol au bout de l'outil. D'autre part l'approche 2D ne modélisant pas l'écoulement latéral, la quantité de matière au dessus de l'outil est donc surestimée (bas de la Figure 1.8).

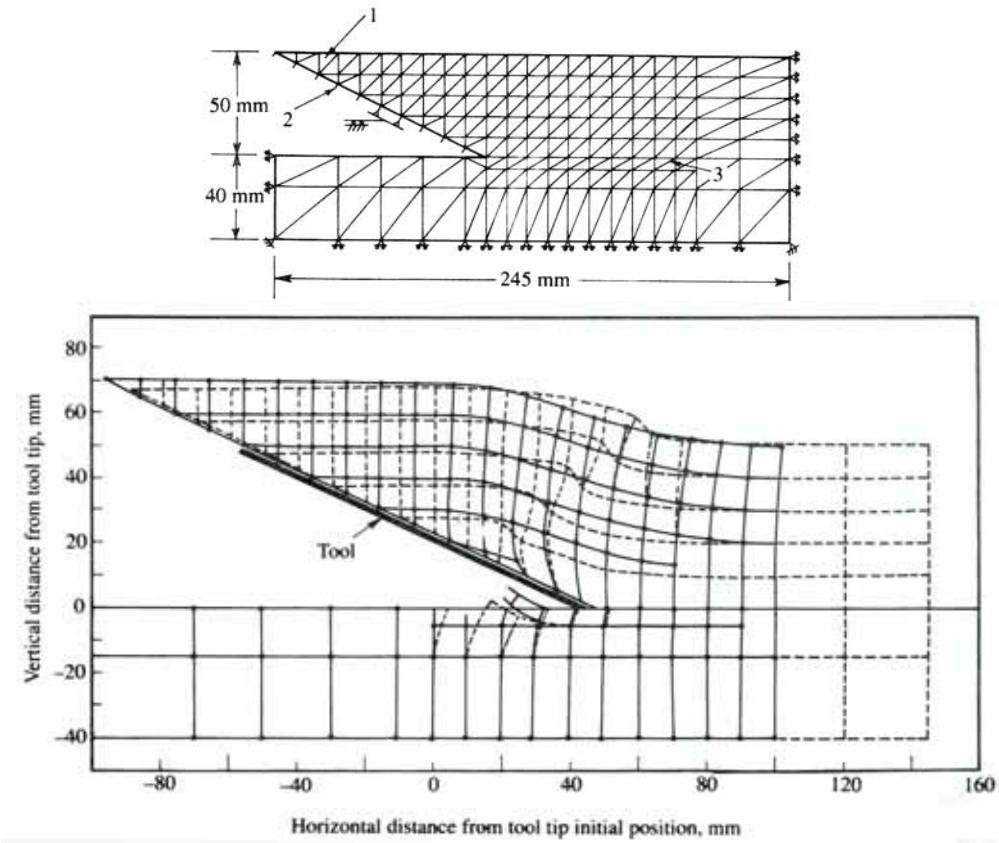


*Figure 1.8 : Maillage initial **2D** (en haut) – Grille de marquage déformée (en bas). D'après Gee-Clough D. [47].*

1.4.2 Méthode Eléments Distincts

Récemment des simulations numériques de l'interaction outil/sol ont été réalisées à l'aide de la *méthode des éléments distinct* (MED), [87] en **2D** et **3D**, [113] en **2D**. Le matériau est alors décrit comme l'assemblage de solides rigides en contacts.

Domaine semi-infini

Dans l'approche granulaire la prise en compte explicite d'un domaine infini n'est pas possible (on ne peut avoir un nombre infini de grains même dénombrable). Il est donc nécessaire de délimiter une taille de domaine. La Figure 1.10 montre un exemple où les conditions de déplacements nuls aux bords sont imposées par des outils rigides statiques plans. Ainsi, au delà d'une certaine avancée on observera l'influence du bord du domaine sur les efforts ainsi que sur le mode d'écoulement.

Lois de comportements

Dans cette modélisation en tant que milieu discret, le terme de loi de comportement, conçu pour des milieux continus, est inadapté. En effet l' approche décrit directement la réponse non linéaire du squelette solide. Le

paramètre de comportement est alors l'angle de frottement interne du matériau. C'est cet angle qui est utilisé pour le frottement entre les grains (frottement de coulomb). Par contre nous avons vu que cette approche discrète n'est pas adaptée pour des géo - matériaux fins (section 1.3.2).

Contact – Frottement Interface

Comme pour la loi de comportement, le contact et le frottement sont intégrés dans la méthode numérique. L'outil rigide peut être considéré comme un grain privilégié dans sa forme, et sa cinématique.

Grandes Déformations - Ecoulement

C'est l'aspect positif de l'approche discrète sur l'approche continue. Bien que le terme déformation n'ait pas de sens dans un milieu discret (on peut néanmoins définir par exemple un *gradient de vitesse moyen* et *un tenseur des déformations moyen* Figure 1.9, [87]), l'écoulement de matière est simulé par le réarrangement des grains solides entre eux suivant la sollicitation.

MED vs. MEF

Ainsi C. Nouguier (approche *dynamique des contacts*) a montré l'apparition d'une re-circulation de grains à l'intérieur du bourrelet devant la lame (Figure 1.10 à droite). Même si l'allure générale reste similaire entre une approche continu et discrète (Figure 1.9 et Figure 1.10 à gauche), ce phénomène n'a pu être mis en évidence par le code élément finis FORGE2® (Figure 1.10 à gauche). Toujours dans l'interaction outil/sol, mais avec des outils vibrants, l'approche discrète a pu mettre en évidence des phénomènes de dislocation et l'apparition de mottes [113].

L'interprétation des résultats issus d'une simulation granulaire, comme la force sur l'outil, dépend, comme pour l'approche continue, de la taille des grains choisie (finesse de discrétisation). Il est aussi possible de déterminer des champs de contraintes et de déformations au niveau local [23].

D'autre part, à ce jour, les géométries d'outils utilisées en 2D et 3D sont simples. Néanmoins les temps de simulations restent longs : 15 jours de calcul sur SUN *ultra Sparc 140 Mhz*, pour une simulation avec 10000 grains en 2D (le temps de calcul comprend la mise en place de l'échantillon : 130 heures, et 20 cm d'avancée d'outil : 250 heures). Des simulations avec des géométries plus complexes, associant lame plus dent, apparaissent, pour l'instant difficiles à réaliser.

L' adaptation de la MED au calcul parallèle apparaît comme une première voie dans l'optimisation des temps de calculs. D'autre part cette modélisation reste un outil d'étude phénoménologique intéressant.

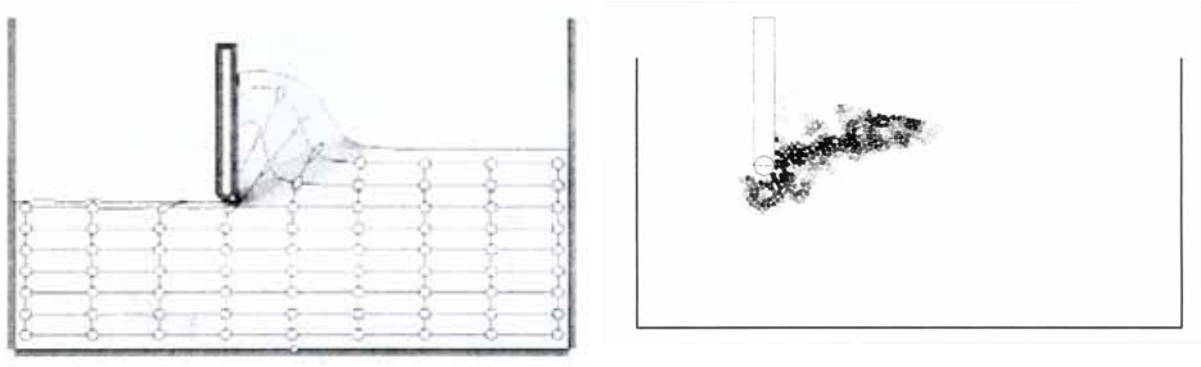


Figure 1.9 : 10 cm d'avancée d'outil : (à gauche) Vues d'une grille de marquage pour un sol modélisé par un milieu continu viscoplastique et carte d'iso-valeurs de la vitesse de déformation généralisée. (à droite) zone de cisaillement dans le matériau granulaire de la pointe de l'outil jusqu'à la surface libre D'après C. Nouguier [113].

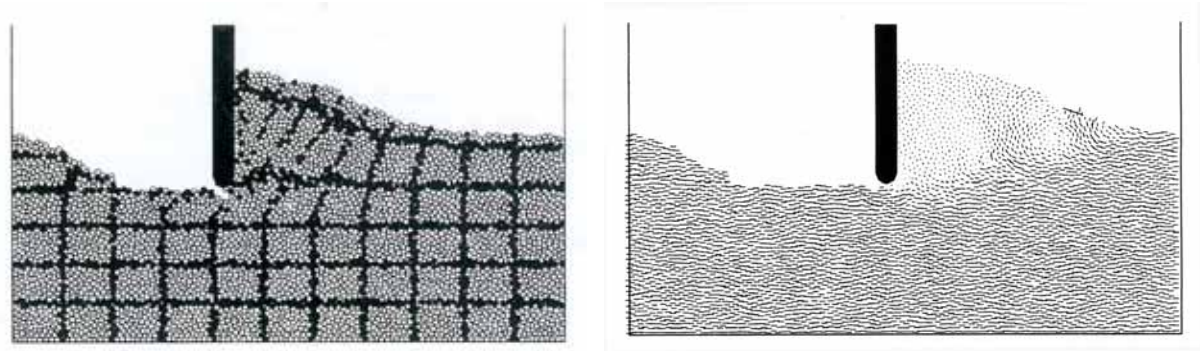


Figure 1.10 : 10 cm d'avancée d'outil :(à gauche) Vues d'une grille de marquage pour un milieu discret sec.(à droite) Mouvement de convection dans la partie frontale du bourrelet : champ de vitesse des grains dans le référentiel de lame. D'après C. Nouguier [113]

1.5 Conclusion : Positionnement de la thèse

Dans ce chapitre nous avons abordé les points clés de la modélisation de l'interaction outil / sol. Après avoir décrit le matériau Sol et défini la spécificité des sols de surfaces, nous avons pu saisir l'intérêt de cette étude outil/sol pour mieux comprendre les réponses des Sols en grandes déformations. La complexité du matériau nous a amené à envisager deux types de modélisations : une idéalisation du Sol en tant que *milieu continu* poreux multi-phasique et une approche monophasique de type *milieu discret*.
Les modélisations éléments finis existantes du système Outil/Sol restent limitées dans la géométrie des outils et la prise en compte de l'écoulement de matière (modélisations essentiellement 2D). Les modélisations granulaires bien que mettant en jeu des outils simples (Lames en 2D et 3D) mettent en œuvre l'écoulement de matière. Ces simulations nécessitent plusieurs jours de calcul, et donc se situent dans le cadre du *Calcul Intensif*. Néanmoins, étant donné les temps de calcul des simulations, les outils complexes couplants lame et dents ne peuvent être abordés.

Dans cette étude nous mettons en œuvre la modélisation de l'interaction Outil/Sol à l'aide de la méthode des éléments finis. Nous adoptons donc une description des sols en tant que milieux continus. Les simulations du système sol/outil nécessitent :

- La prise en compte des conditions de contact unilatéral associée à du frottement avec un outil qui, dans le cas du déminage, est très complexe : (charrue PEARSON est composée de 22 dents et d'une lame en V).

- La prise en compte du comportement fortement non linéaire du matériau.

- La prise en compte de l'écoulement *tri-dimensionnel* de matière et des grandes déformations jusqu'à l'obtention de l'état stationnaire.

La mise en œuvre numérique de ces trois points clés intègre cette étude dans le cadre *Calcul Intensif*.

REFERENCES

[1] ABDEL-FATTAH T.T., HODHOD H.A., AKL A.Y., *"A novel formulation of infinite elements for static analysis"*, Computers and Structures, 77, pp. 371-379, (2000).

[2] ABOUAF M., *"Modélisation de la compaction de poudres métalliques frittées"* Thèse Doct. es sciences, Université scientifique et médicale et ENP de Grenoble, 168 p. (1985).

[3] ABU-FARSAKH M.Y., VOYIADJIS G.Z., *" Computational model for the simulation of the shield tunneling process in cohesive soils"* Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., **22**, pp. 00-22, (1998).

[4] ABU-FARSAKH M.Y., VOYIADJIS G.Z.,TUMAY M.T., *"Numerical analysis of the miniature piezocone penetration tests (PCPT) in cohesive soils"* Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., **22**, pp. 791-818, (1998).

[5] AHADI A., KRENK S., *"Characteristic state plasticity for granular materials Part I : Basic theory"*, International Journal of Solids and Structures, 37, pp 6343-6360 (2000).

[6] AHADI A., KRENK S., *"Characteristic state plasticity for granular materials Part II : Model calibration and results"*, International Journal of Solids and Structures, 37, pp 6361-6380 (2000).

[7] ARNOLD D.N., F. BREZZI, FORTRIN M., "A stable finite elemnt for stokes equations". Calcolo., **21**, 337-344, (1984).

[8] ASAOKA A., NAKANO M., NODA T., *"Soil-Water coupled behaviour of saturated clay near/at critical state"* Soils and foundations, **34,** pp.91-105 (1994).

[9] ASHBY S. F., MANTEUFFEL T. A., SAYLOR P. E., *"A Taxonomy for Conjugate Gradient Methods"* SIAM, J. Numer. Anal., vol. 27, No 6, pp. 1542-1568, (1990).

[10] BABUSKA I., "The finite element method with penalty" Math ; Comp., **27**, 221-228, 1973.

[11] BARBAS A., *"contribution à l'utilisation de la méthode des éléments finis en Mécanique des Sols dans le domaine de l'élasto-plasticité"* Thèse Doct. génie civil, ENPC, 140 p. (1981).

[12] BARDET J.P., *"A Comprehensive Review of Strain Localisation in Elasto-Plastic Soils"*, Computers and Geotechnics, **10**, pp. 163-188,

(1990).

[13] BAUER E., *"Conditions for embedding Casagrande's critical states into hypoplasticity"*, Mech. Cohes.-Frict. Mater., **5**, pp. 125-148, (2000).

[14] BAZANT Z., PIJAUDIER-CABOT G., *"Nonlocal Continuum Damage, Localisation Instability and Convergence"*, Journal of Applied Mechabics, **55**, pp. 287-293, (1988).

[15] BELLET M., *"Finite element analysis of compressible viscoplasticity using a three-field formulation"*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 175, pp. 19-40, (1999).

[16] BORGA R.I., LEE S.R., *"Cam-Clay Plasticity, Part I : Implicit integration of elasto-plastic constitutive relations"* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **78**, pp. 49-72 (1990).

[17] BORGA R.I., LEE S.R., *"Cam-Clay Plasticity, Part II :Implicit integration of contitutive equations based on non-linear elastic stress predictor"* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **88** pp. 225-240 (1991).

[18] BORGA R.I., TAMAGNIGNI C., *"Critical State Model at Finite Strain"* Proceedings of the 11th Conference on Engineering Mechanics, pp. 148-151 (1996).

[19] BOUSSHINE L., CHAABA A., DE SAXCE G., *"Softening in stress-strain for Drucker-Prager non-associated plasticity"* International Journal of Plasticity , **17**, pp. 21-46, (2001).

[20] BRAUDEL H.J., *"Modélisation des grandes transformations élastoplastique d'un solide isotrope par la méthode des éléments finis. Application à la forge à froid des métaux"* Thèse Doct. es sciences, Université de Lyon I, 226 p. (1986).

[21] BREZINSKI C., REDIVO-ZAGLIA M., *"Treatment of near-breakdown in the CGS algorithm"* Numerical Algorithm, vol. 7, pp. 33-73, 1994.

[22] BUCAILLE J.L., *"Simulation numérique de l'indentation et de la rayure des verres organiques",* Thèse de Doctorat, ENSMP, (2001).

[23] CAMBOU B., CHAZE M., DEDECKER F., *"Change of scale in granular materials"* Eur. J. Mech. A/Solids, **19**, pp. 999-1014 (2000).

[24] CAMBOU B., JAFARI, *"Modèles de comportement des sols non cohérents"* Revue française de Géotechnique, **44**, pp. 43-55 (1988).

[25] COUPEZ T., *"Génération de maillage et adaptation de maillage par optimisation locale"* Revue Européenne des éléments finis, **9**, pp. 403-

423, (2000).

[26] COUPEZ T., *"Stable-stabilized finite element for 3D forming calculation"* Communication interne (1995).

[27] COUSSY O., *"Mécanique des Milieux Poreux "* Edition Technip (1991).

[28] CHEN W.F., BALADI G.Y., *"Soil Plasticity : Theory and Implementation"* Developments in Geotechnical Engineering, **38**, Elsevier, New York (1985).

[29] CHEN W.F., MIZUNO E., *"Nonlinear Analysis in Soil Mechanics :Theory and Implementation"* Developments in Geotechnical Engineering, **53**, Elsevier, New York (1990).

[30] CHI L., KUSHWAHA R.L., *"Three-Dimensionnal, finit element interaction between soil and tillage tool"* ASAE, **34,** pp. 361-366 (1991).

[31] CHOPRA M. B., DARGUSH G.F., *"Finite Element Analysis of time Dependent Large-Deformation Problems "* Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., **16**, pp. 101-130, (1992).

[32] COTECCHIA F., CHANDLER R.J., *"A general framework for the mechanical behaviour of clays"*, Géotechnique, **50**, **4**, pp. 431-447, (2000).

[33] CUNDALL P., STRACK O.D.L., *"A discrete method for granular assemblies"*, Géotechnique, **2**, pp. 47-65, (1979).

[34] DE BORST R., VERMEER P.A., *"possibilities and limitations of finite elements for limit analysis"* Géotechnique, **34,** pp. 119-210 (1984).

[35] DE BORST R., *"Robustness in numerical computations of damage evolution in cohesive-frictional material"*, Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, **4,** pp. 27-54 (1997).

[36] DE BORST R., HEERES O. M., *"Performance of low-Order triangular elements during plastic flow"* Engeneering Computations, **16, 1,** pp. 70-87 (1999).

[37] DESAI C.S., ZAMAN M.M., LIGHTNER J.G., SIRIWARDANE H.J., *"Thin layer element for interfaces and joints"*, Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., **8**, pp. 19-43 (1984).

[38] DESSAI C.S., GIOCLA G., *"Modelling and Testing : Implementation of numerical models and their application in practice"* in *"Numerical Methodes and Constitutive Modelling in Geomechanics" Ed. C.S.*, C.I.S.M. Courses and Lectures, **311**, pp.1-168 (1990).

[39] DWORKIN J., *"large stains in cemented granular aggregates elastic-plastic cement"* Mechanics of Materials, **23**, pp. 29-44 (1996).

[40] ETEROVIC A. L., BATHE K., *"A Hyper-Elastic-Based Large Strain Elasto-Plastic Constitutive Formulation with Combined Isotropic-Kinematic Hardening using the Logarithmic stresses and Strain Measures"* Int. J. Numer. Meth. Engrg., **30,** pp. 1099-1114 (1990).

[41] FAMIYESIN O.R., *"Robust Symmetric Formulations for Nonassociated Plasticity Problems"*, Journal of Engineering Mechanics, **125**, **9**, pp. 1070-1080, (1999).

[42] FELIX B., *"La méthode des éléments finis en viscoélasticité et en viscoplasticité. Application à la mécanique des sols"* Rapport de recherche LPC n°123 (1983).

[43] FLETCHER R., *"Conjugate Gradient methods for indefinite systems"*, Lecture Notes Math., **506**, 73-89, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (1976).

[44] FREDLUNG D.G., *"The 1999 R.M. Hardy Lecture : The Implementation of unsaturated soil mechanics into geotechnical engineering"*, Can. Geotech. J., 37, pp. 963-986, (2000).

[45] GAY C., "Contribution à la simulation numérique tridimensionnelle du forgeage à froid", Thèse de Doctorat, ENSMP, (1995).

[46] GAWRONSKI W., *"Fuzzy Elements"* Computers and structures, **10,** pp. 863-865 (1979).

[47] GEE-CLOUGH D., WANG J., KANOK-NUKULCHAI W., *"Deformation and Failure in Wet Clay Soil : Part 3, Finite Element Analysis of Cutting of Wet Clay by Tines"*, J. agric. Engng. Res., **58**, pp.121-131, (1994).

[48] HASHASH Y.M.A., WHITTLE A.J. *"Integration of the modified Cam-Clay Model in non-linear finite element analysis"* Computers and geotechnics, **14,** pp. 59-83 (1992).

[49] HILD P. *"Problèmes de contact unilatéral et maillages éléments finis incompatibles"* Thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier, 1998.

[50] HSI J.P., SMALL J.C., *"Analysis of excavation in an elasto-plastic soil involving drawdown of the water table"* Computers and Geotechnics, **13**, pp.1-19 (1992).

[51] HU Y., RANDOLPH M.F., *"H-adaptaive FE analysis of elasto-plastic non-homogeneous soil with large deformation"*, Computers and Structures, **23**, pp. 61-83, (1998).

[52] HUANG T.K., CHEN W.F., CHAMEAU J.C., *"The application of cap-plasticity-model to embankment problems"* Computers and structures, **44,** pp. 1349-1369 (1992).

[53] ITASCA consulting, *"Documentation de FLAC2D© : strain-softening model"*, User's Manuel, Minneapolis, 1994.

[54] ITSKOV M., *"On the theory of fourth-order tensors and theior applications in computational mechanics"*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **189**, pp. 419-438, (2000).

[55] JAOUEN O., *"Modélisation tridimensionnelle par éléments finis pour l'analyse thermo-mécanique du refroidissement des pièces coulées"* Thèse Doct. Science et Génie des Matériaux, E.N.S.M.P., 1998.

[56] JARUSEK J., ECK C., *"Dynamic contact problems with friction in linear viscoelasticity"*, C. R. Acad. Sci. Paris, **322**, **I**, pp. 467-502, (1996).

[57] JEAN M., MOREAU J.J., *"Unilateraly and dry friction in dynamics of rigid bodies collections"*, Ed. par Curnier, Proceedings of the Contact Mechanics International Symposium, pages 31-48, lausanne, 1992. Presses polytechniques et Universitaires Romandes.

[58] JEREMIE B., *" Line search techniques for elasto-plastic finite element computations in geomechanics"*, Commun. Numer. Meth. Engng, **17**, pp. 115-125 (2000).

[59] KERYVIN V., DESOYER T., HANUS J-L., *"Localisation de la déformation sous sollicitations lentes : une approche dynamique"*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 328, Série II *b*, p. 727-732, (2000).

[60] KHOGO Y., NAKANO M., MIYAZAKI T., *"Theoretical Aspects of Constitutive Modelling for Unsaturated Soils"*, Soils and Foundations, **33**, **4**, pp. 49-63, (1993).

[61] KIOUSIS P.D., VOYADJIS G.Z., *"Lagrangean continuum theory for saturated porous media"* Journal of Engineering Mechanics., **111**, pp. 1277-1288 (1985).

[62] KIOUSIS P.D., VOYADJIS G.Z., TUMAY M.T., *"A Large Stain Theory for the Two-Dimentional Problems in Geomechanics"*, Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., **10**, pp. 17-39 (1986).

[63] KOLMAYER P., *"Rhéologie et modélisation des Sols de surface pour l'interprétation in situ"*, Rapport, ETAS, décembre 1998.

[64] KOLMAYER P., *"Modélisation du comportement Mécanique des Sols de Surface et Identification In Situ"*, Thèse de Doctorat en Génie Civil, Ecole Centrale de Lyon, 170 p., (2001).

[65] KUSHWAHA R.L., SHEN J., *"finite element analysis of dynamic interaction between soil and tillage tool"* ASAE, **37,** pp. 1315-1319 (1992).

[66] LABORDE P., TOSON B., PESQUE J.-J., *"On the consistent tangent operator algorithm for thermo-plastic problems"* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **146,** pp. 215-230 (1997).

[67] LAURSEN T.A., SIMO J.C., *"A continuum-based finite element formulation for the implicit solution of multibody, large deformation frictional contact problems"*, Int. J. Numer. Methods Eng., **36**, pp. 3451-3485, (1993).

[68] LEE E.H., *"Elastic-Plastic deformation at finite strains"* J. Appl. Mech. Trans. ASME, **36**, pp. 1-6 (1969).

[69] LEGENDRE A., BACCONNET C., "*Rapport d'essais de scarification*", LERMES, Ensemble Universitaire des Cézeaux, mai 2001.

[70] LIU Y., HOU Z.M., *"Three dimensionnal nonlinear finite element analysis of soil cutting by narrow blades"* in :Proc. of Int. Conf. On Soil Dynamics, Auburn, Ala. 2 :338-347. Nat. Tillage MachineryLab., Auburn, Ala (1985).

[71] LIU C.H., WONG J.Y., *"Numerical Simulations of tire-soil interaction based on Critical State Soil Mechanics"* Journal of Terramechanics, **33**, pp.209-221 (1997).

[72] MACARI E.J., WEIHE S., ARDUINO P., *"Implicit integration in elastoplastic constitutive models for frctional materials with highly non-linear hardening functions"*, Mech. Cohes.-Frict. Mater., **2**, pp. 1-29, (1997).

[73] MALEKI M., *" Modélisation hiérarchisée du comportement des Sols"*, Thèse de Doctorat en Génie Civil, Ecole Centrale de Lyon, 252 p., (1998).

[74] MARCON A.F., BITTENCOURT E., CREUS G.J., *"On the integration of stresses in large deformation plasticity"* Engineering Computations, **16**, pp 49-69, (1999).

[75] MARIE S. *"Un Modèle de Parallélisation S.P.M.D pour la Simulation Numérique de Procédés de Mise en Forme de Matériaux"*, Thèse de Doctorat, ENSMP, (1997).

[76] McMEEKING R.M., RICE J.R., *"Finite element formulations for problems of large elastic-plastic deformation"* Int. J. Solids struct., **11** pp.601-616 (1975).

[77] MESCHKE G., LIU C., MANG H.A., *"Large strain finite element*

analysis of snow" J. Engrg. Mech., **122,** pp.591-602 (1996).

[78] MIJAR A.R., ARORA J.S., *"Review of Formulations for elastostatic frictional contact problems"*, Struct. Multidisc. Optim., **20**, pp. 167-189, (2000).

[79] MIZUNO E., CHEN W.F., *"plasticity analysis of slope with different flow rules"* Computers and structures, **17**, pp. 375-388 (1983).

[80] MOCELLIN K., *" Contribution à la Simulation Numérique Tridimentionnelle du Forgeage à chaud : Etude du Contact et Calcul Multigrille"* Thèse Doct. Science et Génie des Matériaux, E.N.S.M.P., 1999.

[81] MOREAU J.J., *"Unilateral and dry friction in finite freedom dynamics"*, Ed. par J.J. Moreau & Panagiotopoulos, CISM Courses and Lectures 302 Springer-Verlag Wien New-York), Non-smooth Mechanics and Application, pages 1-82, (1988).

[82] MOUAZEN A.M., *"Modelling the interaction between the Soil and tillage tools"*, Ph. D. Thesis, submitted to the Hungarian Academy of Sciences, Budapest, Hungary, 128 p., (1997).

[83] MOUAZEN A.M., NEMENYI M., *"A review of the finite element modelling techniques of Soil tillage"*, Mathematics and Computers in Simulation, 48, pp. 23-32, (1998).

[84] MROUEH H., SHAHROUR I., *"Use of sparse iterative method for the resolution of three-dimensional soil / structure interaction problems"* Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., vol. 23, pp. 1961-1975, (1999).

[85] NAGTEGAAL J.C., DE JONG J.E., *"Some computational aspects of elastic-plastic larges stain analysis"* Int. J. Numer. Meth. Engrg., **17,** pp. 14-41 (1981).

[86] NAGTEGAAL J.C., *"On the implementation of inelastic constitutive equations with special reference to large deformation problems"* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **33,** pp. 469-484 (1982).

[87] NOUGUIER C., *"Simulation des Interactions Outil-Sol, Application aux Outils de Traitement des Sols"*, Thèse de Doctorat en Mécanique, Génie Mécanique, Génie Civil, Université Montpellier II, 144 p., (1999).

[88] ORTIZ M., POPOV E.P., *"Accuracy and Stability of Integration Algorithms for Elastoplastic Constitutive Relations"* Int. J. Num. Meth. Engrg., **21**, pp. 1561-1576, (1985).

[89] PALMER A.C., *"Speed effects in cutting and ploughing"*, Géotechnique, **49**, **3**, pp. 285-294, (1999).

[90] PERCHAT E., "MINI-élément et factorisation incomplètes pour la parallélisation d'un solveur de Stokes 2D. Application au Forgeage". Thèse de Doctorat, ENSMP, (2000).

[91] PETRYK H., *"Plastic Instability : Criteria and Computational Approaches"* Archives of Computational Methods in Engineering, Vol **4**, **2**, pp 111-151, (1997).

[92] PORAN C.J., RODRIGUEZ J.A., *"Finite element analysis of impact behavior of sand"* Soils and foundations, **32**(4), pp. 68-80 (1992).

[93] POTTS D.M., GENS A., *"A critical assessment of methods of correcting for drift from the yield surface in elastoplastic finite element analysis"* Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., **9,** pp. 149-159 (1985).

[94] PREVOST J.H., "*Mechanics of continuous porous media"* Int. J. Engng Sci., **18**, pp. 787-800 (1980).

[95] PREVOST J.H., *"SHORT COMMUNICATION : Localization of deformations in Elastic-Plastic Solids"* Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech., **11**, pp. 187-196 (1984).

[96] QUIBEL A., FROMENTIN M., *"Essais en vraie grandeur d'un dispositif expérimental de scarification des Sols",* Centre d'Expérimentation Routière, LCPC, Juin 2001.

[97] REGUEIRO R. A., BORJA R.I., *"Plane strain finite element analysis of pressure sensitive plasticity with stong discontinuity"*, Int. J. Solids. Structures, **38**, pp. 3647-3672, (2001).

[98] ROUAINIA M., MUIR WOOD D., *"An implicit constitutive algorithm for finite Cam-clay elasto-plastic model"*, Mech. Cohes.-Frict. Mater., , pp. 469-489, (2000).

[99] RUNESSON V., *"Implicit integration of elastoplastic relations with reference to soils"* Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech., **11**, pp. 315-321 (1987).

[100] RUNESSON K., *"A note on nonassociated plastic flox rules"* International Journal of Plasticity, **5**, pp. 639-658 (1989).

[101] SALENÇON J., *"Théorie de la plasticité pour les applications en mécanique des Sols"*, Eyrolles, (1974).

[102] SCHLOSSER F., "*Element de mecanique des sols*", Presse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, (1983).

[103] SHENG D.,SLOAN S.W., YU H.S. *" Aspects of finite element implementation of critical state models"*, Computational Mechanics, 2000, **26**, **2**, pp 185-196, (2000).

[104] SIDOROFF F., *"Incremental constitutive equation for large strain elastoplasticity"* Int. J. Eng. Sci., **20**, pp. 19-26 (1982).

[105] SIMO J.C., TAYLOR R.L., *"Consistent tangent operator for rate-independent elastoplasticity"* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **48,** pp. 101-118 (1985).

[106] SIMO J.C., JU J-W., PISTER K.S., TAYLOR R.L., *"Assessment of Cap Model : Consistent Return Algorithms and Rate-Dependent Extension"* Journal of Engineering Mechanics, **114**, **2**, pp 191-218, (1988).

[107] SIMO J.C., KENNEDY J.G., GOVINDJEE S. K.S., *"Non-Smooth Multisurface Plasticity and Visco-Plasticity. Loading/Unloading Conditions and Numerical Algorithm"* Int. J. Num. Meth. Engrg., **26**, pp. 2161-2185, (1988).

[108] SIRIWARDANE H.J., DESAI C.S., *"Computational procedures for non linear three dimensional analysis with some advanced constitutive laws"* Int. J. Numer.Anal.Meth. Geomech., **7,** pp.143-171 (1983).

[109] SNITBHAN N., CHEN W.F., *"Elastic-plastic large deformation analysis of soil slopes"* Computers and structures, **9,** pp. 567-577 (1978).

[110] SONNELVED P., "CGS :a fast Lanczos-type solver for nonsymmetric linear systems", SIAM J. Sci. Statist. Comput., 10, 36-52, (1989).

[111] STOLLE D.F.E., VERMEER P.A., BONNIER P.G.,*" Time Integration of a constitutive law for soft clays"*, Commun. Numer. Meth. Engng, **15**, pp. 603-609 (1999).

[112] SZABO L., *"Comments on loss of strong ellipticity in elastoplasticity"*, Int. J. Solids. Structures, **37**, pp. 3775-3806, (2000).

[113] TANAKA H., INOOKU K., NAGASAKI Y., MIYASAKI M., SUMIKAWA O., OIDA A., *"Simulation of Soil Loosening at Subsurface Tillage using Vibrating Type Subsoiler by means of the Distinct Element Method"*, Proceedings of the 8th European Conference of ISTVS, Umeå, Sweden, (2000).

[114] TRAORE K., "*Simulation thermomécanique du laminage circulaire : développement d'une formulation quasi-eulérienne tridimensionnelle sur une architecture parallèle.*", thèse de Doctorat, ENSMP, 2001

[115] VAN DER VORST H. A., "BI-CGSTAB : *A Fast and Smoothly Converging Variant of BI-CG for the Solution of Non-Symmetric Linear Systems"* J. Sci. Stat. Comput., vol. 13, No 2, pp 631-644, (1992).

[116] VAN DER VORST H. A. *"Parallel iterative solution methods for linear systems arising from discretized pde's"*. Technical Report AGARD R-

807, Proc. of Special Course on Parallel Computing in CFD, 1-39, AGARD, Neully-sur-Seine, 1995.

[117] VAN DER VORST H. A., VUIK C., *"The Superlinear Convergence Behaviour of GMRES"* Journal of Computational and Applied Mathematics (North Holland), vol. 48, pp. 327-341, (1993).

[118] VOYIADJIS G.Z., ABU-FARSAKH M.Y., *"Coupled Theory of Mixtures for Clayey Soils"* computers and geotechnics, **20,** pp. 195-222 (1997).

[119] WANG C.H., HU W., SAWYER J.P.G., *"Explicit numerical integration algorithm for a class of non-linear kinematic hardening model"* Computational Mechanics, 2000, Vol **26**, **2**, pp 140-147 (2000).

[120] WANG J., GEE-CLOUGH D., *"Deformation and Failure in Wet Clay Soil : Part 2, Soil Bin Experiments"*, J. agric. Engng. Res., **54**, pp.57-66, (1993).

[121] WRIGGERS P., *"Finite Element Algorithms for Contact Problems"*, Archives of Computational Methods in Engineering, State of the art reviews, **2**, **4**, pp. 1-49, (1995).

[122] XIE X.M., ZHANG D.J., *"An approach to 3-D nonlinear FE simulative method for investigation of soil-tool dynamic system"* in :Proc. of Int. Conf. On Soil Dynamics, Auburn, Ala. 2 :322-327. Nat. Tillage MachineryLab., Auburn, Ala (1985).

[123] YONG R.N., HANNA A.W., *"Finite element analysis of plane soil cutting"* Journal of terramechanics, **14,** pp. 103-125 (1977).

[124] ZHU Y., FOX P.J., MORRIS J.P., *"A pore-scale numerical model for flow through porous media"*, Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., 23, pp. 881-904, (1999).

[125] ZHANG H.W., SANAVIA L., SCHREFLER B.A., *"Gradient-dependent plasticity model and dynamic strain localisation of saturated and partially saturated porous media : one dimensional model"*, Eur. J. Mech. A/Solids, **19**, pp. 503-524, (2000).

[126] ZHANG H.W., SANAVIA L., SCHREFLER B.A., *"Numerical analysis of dynamic strain localisation in initially water saturated dense sand with a modified generalised plasticity model"*, Computers and structures, **79**, pp. 441-459, (2001).

Chapitre 2 Lois de Comportement des Sols

2.1 INTRODUCTION 23

2.2 CARACTERISTIQUES DU COMPORTEMENT DU SOL 23

2.3 IDEALISATION ET MODELISATION 25

2.4 ELASTO-PLASTICITE 27

2.4.1 GENERALITES SUR LE COMPORTEMENT ELASTOPLASTIQUE 27
2.4.2 MODELES ELASTIQUES PARFAITEMENT PLASTIQUES POUR LES SOLS 31
2.4.3 MODELES ELASTO-PLASTIQUES AVEC ECROUISSAGE 35
2.4.4 ECRITURE EN GRANDES DEFORMATIONS 48

2.5 CONCLUSIONS.....50

2.1 Introduction

Dans ce chapitre dévolu aux lois de comportement des sols, nous modélisons le sol en tant que milieu continu. Les contraintes sont les contraintes effectives. Après avoir décrit les caractéristiques des relations contraintes déformations des sols, nous nous intéressons à une idéalisation élasto-plastique du comportement des sols. Nous développons les principaux modèles, parfaitement plastiques, avec écrouissage/adoucissement, et nous donnons les formulations en grandes déformations.

2.2 Caractéristiques du comportement du Sol

La Figure 2.1 décrit quelques courbes typiques correspondant à la relation contraintes déformations lors d'essais triaxiaux. Comme nous pouvons voir pour une argile *normalement consolidée* dans le cas d'un *essai drainé*, la relation qui lie la contrainte déviatoire à la déformation axiale est caractérisée par une courbe non linéaire qui augmente avec un taux plus faible après avoir atteint un certain niveau de contrainte. Dans ce cas, à une augmentation des déformations est associée une augmentation des contraintes : c'est le phénomène d'*écrouissage*. On constate le même comportement pour une argile *surconsolidée* dans un essai *non drainé*.

Les argiles sur consolidées et normalement consolidées respectivement dans un essai non drainé et drainé, ont un comportement similaire et différent de celui mentionné ci dessus. Les deux courbes contraintes-déformations définissent clairement un "pic" pour un niveau de déformation faible. Pour des déformations plus importantes le niveau de contrainte est alors plus faible que celui rencontré au "pic". C'est le phénomène d'*adoucissement*. Les courbes correspondant à un sable dense et lâche conduiront aux mêmes conclusions.

On constate une inversion des tendances des courbes pour le sable ou l'argile, dans le cas non drainé. En effet, ce sont les propriétés mécaniques de l'eau (incompressibilité), qui en étant piégée, donnent une plus grande résistance mécanique au sol.

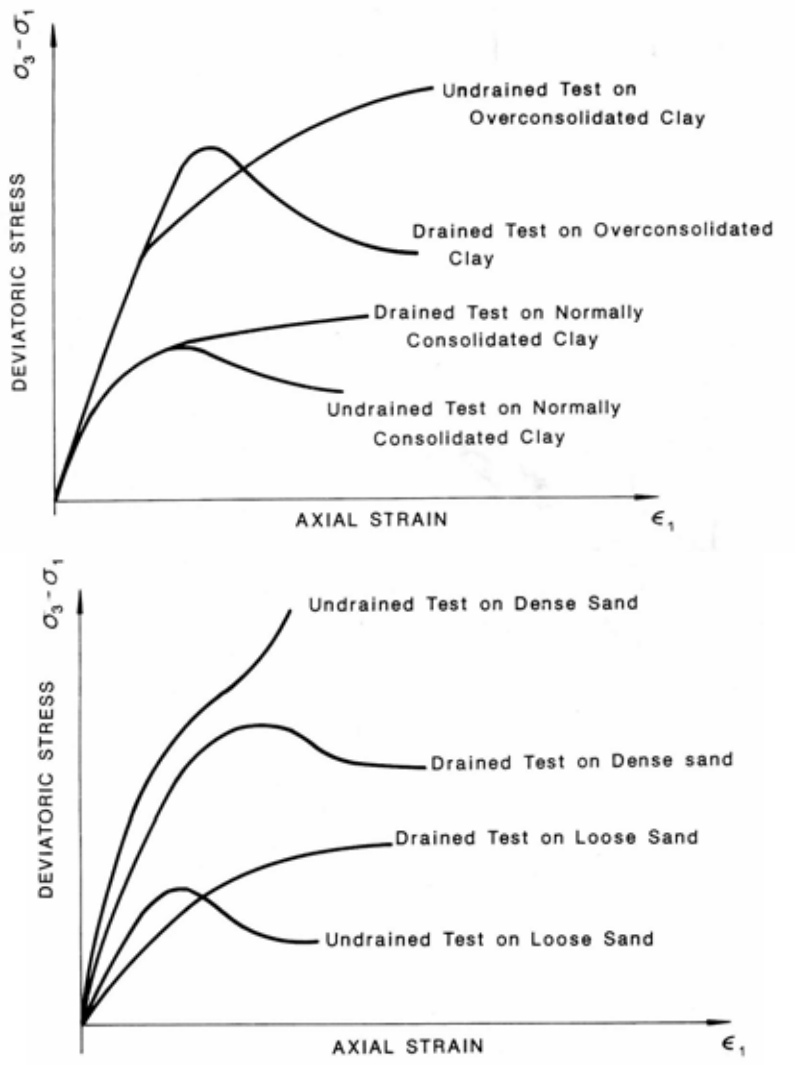


Figure 2.1 : relation contrainte-déformation type pour un sol : (en haut) argile normalement et sur-consolidée – (en bas) sable dense et lâche. D'après W.F. Chen et E. Mizuno [29]

Sur la Figure 2.2 on peut observer en pointillés les courbes correspondant à la variation de volume pour un même sable à différentes densité. Dans le cas du sable lâche on observe une densification du matériau ($\frac{\Delta V}{V} < 0$: ré-enchevêtrement des grains, le volume diminue) et au delà d'un certain niveau de déformation la courbe forme un plateau, la variation de volume est donc nulle. Dans le cas ou l'état du matériau est plus compact on observe trois phénomènes : d'abord une densification densification, suivie d'une *dilatance* ($\frac{\Delta V}{V} > 0$: Dé-enchevêtrement des grains, le volume augmente) et enfin une variation de volume nulle ($\frac{\Delta V}{V} = 0$: ré-arrangements des grains à volume constant).

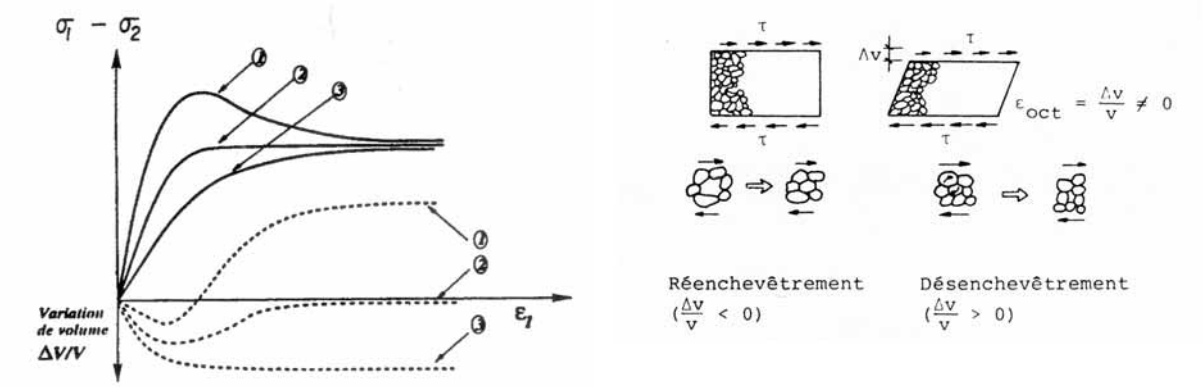


Figure 2.2 : (à gauche) relations contraintes-déformations et variations de volume lors d'un essais triaxial (une seule pression de confinement) sur un sable à différentes compacités : 1 – sable dense, 2 – à densité critique, 3 – sable lâche. (à droite) schéma d'interprétation du ré-arrangement des grains d'après F. Schlosser [102]

Concept d'état critique

Le plateau des courbes contraintes – déformations et variation de volume correspondant est une idéalisation du comportement du matériau : c'est le concept *d'état critique* Figure 2.2. Ce concept dit que lorsque un sol est continuellement cisaillé (grandes déformations) il atteint asymptotiquement un état privilégié pour lequel il se déforme à volume constant. Par exemple pour un sable, quel que soit le niveau de densité initial, après un certain niveau de déformation, on atteint le même niveau de contrainte pour des déformations volumiques nulles.

Etat Caractéristique

L'expérience a pu mettre en évidence l'existence d'un état, appelé *caractéristique*, pour les matériaux denses ou sur-consolidés, correspondant à une variation du volume avant la rupture du matériau. Ceci est mis en évidence par les courbes de variation de volume de la Figure 2.2. Pour les matériaux denses on observe une phase de contraction suivie d'une phase de dilatance. La séparation entre ces deux phases passe par une variation de volume nulle qui correspond à l'*état caractéristique*.

2.3 Idéalisation et Modélisation

Les relations contraintes-deformations types présentées dans la section précédente n'assument pas un comportement linéairement élastique pour un niveau de chargement d'un intérêt pratique. Le comportement des sols apparaît compliqué et varié lorsque ils sont soumis à différentes conditions de sollicitations. Une idéalisation drastique et pertinente doit permettre de développer des modèles mathématiques simples pour des applications

pratiques. Aucun modèle mathématique ne peut prendre en compte la palette de réaction des sols pour n'importe quel type de sollicitation. Chaque modèle est dévolu à une certaine classe de phénomènes et prend en compte les principales caractéristiques de la réponse du matériau. Ce qui est considéré dans cette classe d'application, comme ayant une importance mineure est alors négligé. Ainsi un modèle de comportement atteint ses limites d'application lorsque les éléments de réponse négligés se révèlent essentiels.

Elasticité

Historiquement, la Mécanique des Sols a été basée sur la loi de Hook pour l'analyse des contraintes et des déformations, pour des applications géotechniques comme une masse de sol derrière un mur de soutènement. Dans ce type d'application le sol n'est pas sollicité jusqu'à la rupture. Par la suite des lois hypo- ou hyper-élastiques non linéaires ont été utilisées. Des formulations incrémentales ont même été utilisées pour l'interaction sols / structure (voir chapitre I). Ces modèles ne prédisent que des déformations réversibles, ce qui, d'un point de vue pratique, peut rester valable pour des problèmes de soutènement dans une approche infinitésimale. Cependant le champ de contrainte et de déformation risquent d'être incorrects, d'autant plus lorsque l'on atteint l'état de rupture du matériau et/ou les déformations sont irréversibles.

Plasticité

La théorie de l'écoulement plastique représente une extension nécessaire et correcte des relations contraintes-déformations élastiques pour des problèmes mettant en jeu des déformations irréversibles en addition des déformations réversibles. Cette théorie permet de passer de l'état élastique à l'état limite du matériau. Une idéalisation plastique du sol s'avère correcte pour des problèmes géotechniques tels que la stabilité de talus, ou la capacité de charge d'une fondation. Cette approche s'avère d'autant plus cruciale dans le registre de l'interaction outil / sol qui fait intervenir les notions de grandes transformations (écoulements, déformations irréversibles) et d'état limite du matériau (cisaillement rupture).

Bien que la Plasticité a d'abord été utilisée en Mécanique des Sols, Critère de Mohr Coulomb, elle s'est réellement développée, pour les géo-matériaux, suite au travaux sur la plasticité des métaux. La première grande avancée dans l'extension de la plasticité des métaux à la plasticité des sols a eu lieu avec l'article de Drucker et Prager (1952) *" Soil Mechanic and Plastic Analysis or Limit Design"*. Dans ce papier les auteurs étendent le modèle de *Coulomb* à des problémes tri-dimensionnels de mécanique des sols. Cette théorie n'a alors cessé de se développer pour mieux modéliser le comportement du sol.

Dans la suite nous traitons des différents modèles elasto-plastique en mécanique des sols. Nous nous plaçons dans un premier temps dans le cadre des petites déformations, puis nous donnons les formulations en grandes déformations.

2.4 Elasto-Plasticité

2.4.1 Généralités sur le comportement élastoplastique

Décomposition des déformations

Un corps a un comportement élasto-plastique si au-delà d'un certain seuil de contrainte, il présente des déformations qui ne sont plus totalement *réversibles* (déformations élastiques) mais aussi des déformations *irréversibles* : ce sont les **déformations plastiques**.

On se place dans le cas d'une loi hypo-élastique, qui relie la dérivée temporelle du tenseur des contraintes au tenseur des vitesses de déformations :

$$\dot{\varepsilon}^{el} = E\dot{\sigma} \qquad \textbf{(2.1)}$$

où E est le tenseur d'élasticité d'ordre 4.

On écrit alors les vitesses de déformations totales comme la somme des vitesses de déformations élastiques et plastiques :

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^{el} + \dot{\varepsilon}^{pl} \qquad \textbf{(2.2)}$$

Nous abordons à la section 2.4.4 l'écriture en grandes déformation des lois élasto-plastiques. Nous traitons notamment les différents choix de décomposition des déformations ainsi que le problème de dérivées objectives pour les contraintes.

Le comportement plastique s'appuie sur deux concepts :

- Le *critère de plasticité* qui détermine une hyper-surface privilégiée dans l'espace des contraintes à six dimensions.

- La *règle d'écoulement* plastique qui définit les directions des déformations plastiques.

Le critère de plasticité

Le critère de plasticité f ou *fonction de charge* permet de définir le passage du matériau de l'état élastique à l'état plastique. Le critère de plasticité est une fonction convexe, (*principe du travail maximal de Hill)*, du tenseur des contraintes σ et éventuellement de paramètres d'écrouissage $(\kappa_1, \kappa_2, \ldots)$, que l'on note par le terme générique κ, qui peuvent être soit des scalaires soit des tenseurs.

La fonction critère détermine trois domaines dans l'espace des contraintes à six dimensions :

- $f(\sigma,\kappa)<0$: décrit l'ensemble des états de contraintes purement élastiques du matériau. Les déformations associées sont donc élastiques.
- $f(\sigma,\kappa)=0$: décrit l'ensemble des états de contraintes élasto-plastiques, aux déformations élastiques viennent s'ajouter les déformations plastiques.
- $f(\sigma,\kappa)>0$: décrit un domaine physiquement impossible.

Les paramètres $\kappa_1,\kappa_2,\ldots$, sont des variables internes qui permettent de prendre en compte l'écrouissage et l'adoucissement du matériau. Dans le cas de matériaux écrouissables la charge peut être poursuivie au-delà du domaine de plasticité. La région de l'espace des contraintes définie par $[f(\sigma,\kappa)>0]$ représentant des états de contraintes physiquement impossible, le domaine de plasticité se modifie de manière à ce que l'on ait toujours l'égalité : $f(\sigma,\kappa)=0$. Cette évolution du domaine de plasticité est régie par le ou les paramètres d'écrouissage. En Mécanique des Sols ces paramètres sont reliés à la densité courante du matériau (ou à l'indice des vides ou à l'état de compaction donné par la déformation plastique volumique (ε_v^{pl}), [16][99][108]). Cela exprime le fait que lorsque la matière se densifie elle se durcit (écrouissage), et lorsque elle se dé-densifie (augmentation de volume) elle se radoucit, voir Figure 2.2.

Pour modéliser l'écrouissage on distingue deux tendances :

- Un écrouissage "isotrope" de Taylor et Quinney (1931) qui se traduit par une homothétie de centre O du domaine $[f(\sigma,\kappa)\leq 0]$
- Un écrouissage "cinématique" (Prager 1955-1958) qui se traduit par une translation du domaine $[f(\sigma,\kappa)\leq 0]$

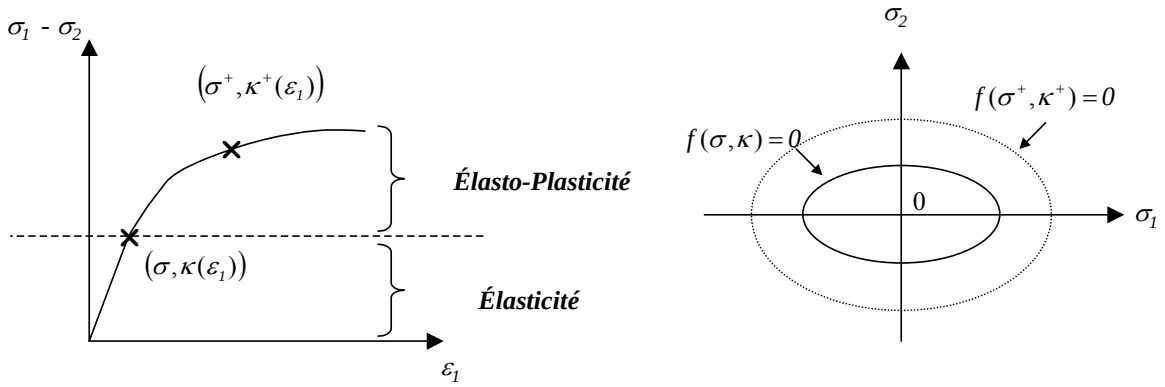


Figure 2.3 : illustration de l'écrouissage isotrope

Dans le cas parfaitement plastique qui ne fait pas intervenir d'écrouissage (pas d'évolution du domaine d'élasticité), on emploie le terme *surface de rupture,* correspondant à la résistance maximale du matériau, dans le cas écrouissable on emploie le terme *surface de charge*.

La règle d'écoulement plastique

Soit σ un état de contraintes appartenant à la surface de charge (i.e. $[f(\sigma,\kappa)=0]$). Soit $d\sigma$ une variation de contraintes, on a alors deux possibilités :

- $\frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma < 0$ La variation de contrainte est dirigée vers l'intérieur du domaine. C'est une décharge élastique, il n'y a pas de déformations plastiques.
- $\frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma \geq 0$ La variation de contrainte est dirigée vers l'extérieur du domaine. C'est un chargement plastique, les déformations plastiques apparaissent.

L*a règle d'écoulement plastique* détermine alors les vitesses de déformations plastiques à l'aide du potentiel plastique *g(σ)*. Elle établit l'existence d'un réel positif $\dot{\lambda}$ (*multiplicateur plastique*) qui lie le tenseur des vitesses de déformations plastiques à la normale au potentiel dans l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux, par la relation :

$$\dot{\varepsilon}^{pl} = \dot{\lambda}\frac{\partial g}{\partial \sigma} \qquad \textbf{(2.3)}$$

La fonction potentiel est de même nature que la fonction critère. Dans le cas ou $g = f$, on dit que la loi d'écoulement est *associée*, sinon elle est dite *non associée*. A l'inverse des métaux, nous verrons dans la suite que les lois élasto-plastiques pour les sols sont souvent non associées pour mieux rendre compte des dilatations du matériau. Nous verrons aussi les répercussions de la non associativité dans l'intégration numérique de ces lois. On remarque que le principe du *travail maximal de Hill* assure la convexité du critère dans l'hypothèse d'une loi associée.

Lorsque la surface définie par le critère *f* ou le potentiel *g* présente des points anguleux, c'est-à-dire des points ou la fonction n'est pas différentiable, on ne peut déterminer *une* normale au critère. Ces points anguleux correspondent à l'intersection de plusieurs surfaces de charges ; on a un formalisme analogue avec plusieurs multiplicateurs plastiques, qui permet de déterminer les directions des déformations plastiques. Il existe aussi un formalisme mathématique qui généralise la notion de dérivée à des applications non différentiables mais convexes, c'est l'opérateur multi-voque *sous-différentiel*.

$$\partial f(x) = \left\{a \in E^* ; f(y) - f(x) \geq a(y-x)\ \forall y \in E\right\} \qquad \textbf{(2.4)}$$

Dans tous les cas, l'amplitude des déformations plastiques est ensuite donnée par le multiplicateur plastique que l'on obtient grâce à la *condition de compatibilité* ou de *consistance*:

$$Df(\sigma,\kappa)(d\sigma,d\kappa) = \frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma + \frac{\partial f}{\partial \kappa} d\kappa \equiv 0 \qquad \textbf{(2.5)}$$

qui signifie que lorsque l'on part d'un état de contrainte plastique et que l'on effectue un chargement on obtient un autre état plastique.

2.4.2 Modèles élastiques parfaitement plastiques pour les sols

Dans la suite on adopte la convention de signe de la mécanique des Sols qui note positivement les contraintes en compression. De ce fait on a notamment l'écriture de la contrainte moyenne suivante : $p = \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\sigma)$.

Quelques notations :

$$I_1 = tr(\sigma)\ ,\ q = \sqrt{\frac{3}{2}}(s_{ij} : s_{ij})^{\frac{1}{2}},\ J_2 = \frac{1}{2}(s_{ij} : s_{ij})$$

$$\varepsilon_v = \frac{1}{3}tr(\varepsilon)\ ,\ \varepsilon_q = \sqrt{\frac{3}{2}}(e_{ij} : e_{ij})^{\frac{1}{2}}$$

où s_{ij} et e_{ij} sont les déviateurs des contraintes et des déformations

Les modèles élastiques parfaitement plastiques sont les plus simples des modèles pour décrire le comportement des sols en prédisant des déformations permanentes sur le palier de la courbe contraintes-déformations. De manière générale pour ces modèles parfaitement plastiques, la surface de charge est confondue avec la surface de rupture du matériau. La loi élastique est de type linéaire. Sur la surface de rupture l'état de contrainte atteint sa valeur limite correspondant à la résistance maximale du matériau.

2.4.2.1 Le critère de Mohr-Coulomb (1773)

Ce critère, qui prend en compte l'influence de la pression hydrostatique, a été introduit avant les premiers critères pour les métaux. Il caractérise la rupture du matériau à l'aide de trois paramètres : l'angle de frottement interne ϕ, la cohésion c, et l'angle de dilatance ψ.

Dans l'espace des contraintes principales $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ avec $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, le critère peut s'écrire sous la forme :

$$f(\sigma) = (\sigma_1 - \sigma_3) - (\sigma_1 + \sigma_3)\sin\phi - 2c\cos\phi = 0 \qquad (2.6)$$

Ce modèle, dans le cas associé, ne prédit que des déformations volumiques dilatantes. La confrontation à l'expérience montre qu'elles sont excessives. Il est alors utilisé dans le cas non associé pour réduire les déformations volumiques. Dans le cas d'une loi non associée, on utilise un potentiel plastique g, qui s'écrit à l'aide de l'angle de dilatance ψ :

$$g(\sigma) = (\sigma_1 - \sigma_3) - (\sigma_1 + \sigma_3)\sin\psi + Const = 0 \qquad (2.7)$$

dans le cas où $\phi = \psi = 0$ (matériaux sans friction interne) on retrouve le critère de *Tresca (1864)*.

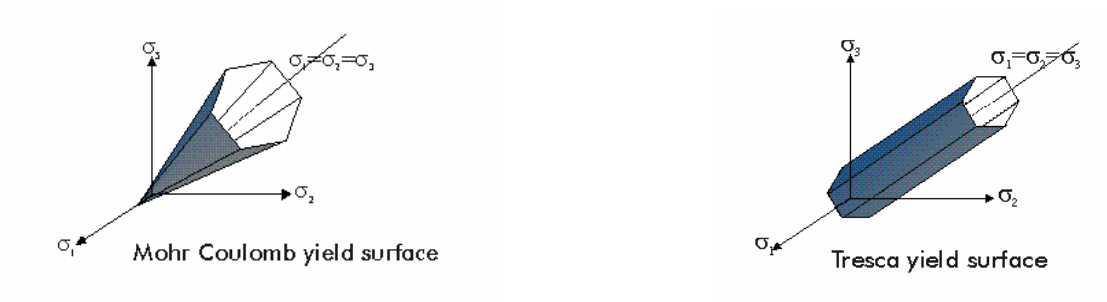


Figure 2.4 : représentation graphique dans l'espace des contraintes principales des critères de Mohr-Coulomb (à gauche) et Tresca (à droite).

Bien que sa forme graphique soit simple, il présente des singularités ou coins qui le classe dans la catégorie des critères non-dérivables (mais sous-différentiables), et ainsi donne lieu à des difficultés dans l'analyse numérique. De plus il néglige l'influence de la contrainte principale intermédiaire. Néanmoins du fait de sa simplicité, du faible nombre de paramètres d'entrée, facilement identifiables, et de sa validité pour de nombreux sols, il reste encore utilisé en simulation numérique pour des problèmes géotechniques de stabilité [34].

2.4.2.2 Le critère de Von Mises (1913)

Le critère de *Von Mises,* contrairement au critère de Mohr-coulomb, prend en compte l'influence de la contrainte intermédiaire σ_2 avec $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, En utilisant le deuxième invariant des contraintes déviatoriques J_2 :

$$f(\sigma) = \sqrt{J_2} - k = 0 \qquad \textbf{(2.8)}$$

Le paramètre *k* représente la résistance maximale du matériau. Il a en général une loi d'écoulement associée et une loi élastique linéaire. Ce modèle très employé pour les métaux, surtout en faisant intervenir l'écrouissage, apparaît inadapté pour les sols puisqu'il ne peut modéliser l'influence de la pression hydrostatique. En effet, pour ce modèle, la résistance du matériau n'augmente pas avec la pression hydrostatique, et les déformations plastiques volumiques sont nulles. Néanmoins dans le cas d'une modélisation mono-phasique pour des sols cohérents, on considère que les déformations volumiques sont nulles [47]. L'emploi de ce critère peut alors être envisagé pour décrire le comportement d'argile saturée dans des conditions non drainées [61]. La nature *partout dérivable* du critère le rend bien adapté aux simulations numériques.

2.4.2.3 Le critère de Drücker-Prager (1952)

On peut considérer le critère de *Drücker-Prager* comme extension du critère de *Von Mises* pour des matériaux frottants. Ce critère relie le premier

invariant et le deuxième invariant des contraintes ensemble avec deux constantes du matériau α et k :

$$f(\sigma) = \sqrt{J_2} + \alpha I_1 - k = 0 \qquad \textbf{(2.9)}$$

Comme pour le critère de *Mohr-Coulomb* la loi d'écoulement est non associée et le potentiel s'écrit :

$$f(\sigma) = \sqrt{J_2} + \beta I_1 + Const = 0 \qquad \textbf{(2.10)}$$

Figure 2.5 : représentation graphique du critère de Drucker Prager et de Von Mises.

Les constantes α et k peuvent être reliées aux constantes c et ϕ du critère de *Coulomb*, pour certaines valeurs le critère de *Drücker-Prager* est tangent intérieurement ou extérieurement au critère de *Coulomb,* Figure 2.6.. On peut alors trouver une relation entre α, k et c,ϕ. Etant donné la nature dérivable de ce critère il a été largement employé dans les simulations numériques [61], [77], [92].

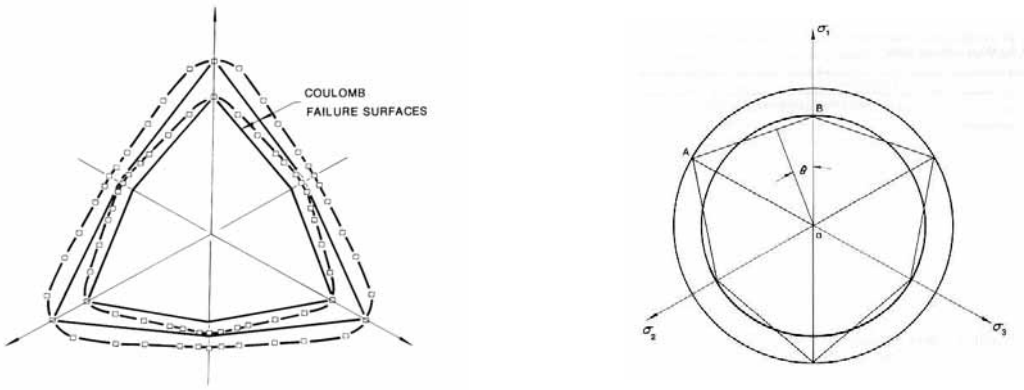


Figure 2.6 : Surfaces de rupture pour un sable de Monterey N°0 dense et lâche dans le plan déviatorique (Lade et Duncan) d'après Chen W. F. et Mizuno E. [29] – (à droite) critère de drucker Prager tangent intérieurement(non passant par les points en compression sur les trois axes) et extérieurement(passant par les points en traction sur les trois axes) au critère de mohr-coulomb.

Sur la Figure 2.6 sont tracés les points de rupture obtenus expérimentalement sur du sable de Monterey par des essais cubiques tri-axiaux. Les points de

rupture ont été examinés pour différentes amplitudes de la contrainte intermédiaire principale $b = (\sigma_2 - \sigma_3)/(\sigma_1 - \sigma_3)$, ($b \in [0,1]$, $0 \geq \sigma_3 \geq \sigma_2 \geq \sigma_1$). On remarque que si les résultats expérimentaux décrivent une courbe fermée "lisse", la forme hexagonale de la trace du critère de coulomb dans le plan déviatoire modélise mieux l'expérience qu'une trace circulaire.

Dans la suite nous présentons un modèle parfaitement plastique qui tend à mieux décrire la dissymétrie du comportement des sols en traction et en compression Figure 2.6. Pour respecter les propriétés de dérivabilité du critère les auteurs font intervenir le *troisième invariant des contraintes*.

2.4.2.4 Le critère de Lade (1975-1977)

Lade et Duncan (1975) ont proposé un critère de rupture à un paramètre, pour des matériaux non cohérents :

$$f(\sigma) = \frac{I_1^3}{I_3} - k = 0 \qquad \textbf{(2.11)}$$

Les résultats expérimentaux montrent que l'angle de frottement interne diminue lorsque la pression hydrostatique augmente. Pour prendre en compte ce résultat, Lade (1977) modifie le modèle comme suit :

$$f(\sigma) = \left(\frac{I_1^3}{I_3} - 27\right)\left(\frac{I_1}{p_a}\right)^m - k = 0 \qquad \textbf{(2.12)}$$

où p_a est la pression atmosphérique et m et k sont des paramètres. Le modèle est non associé, le potentiel a la même forme analytique avec un paramètre *k* différent.

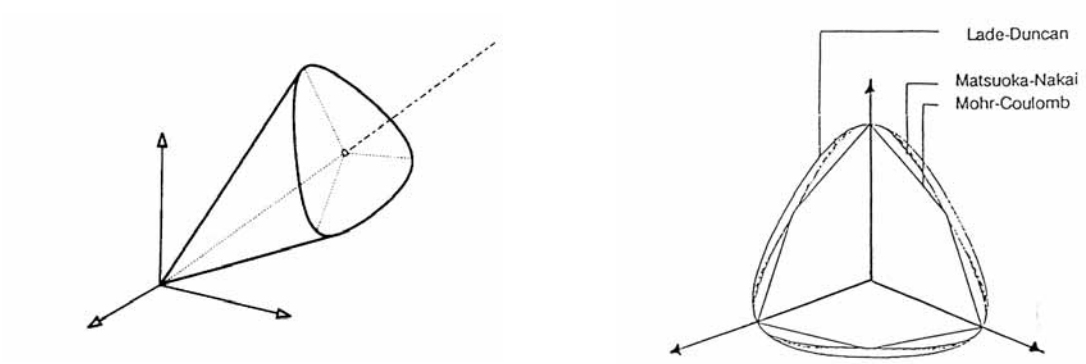


Figure 2.7 : (à gauche) représentation graphique du modèle de Lade-Duncan (1975) – (à droite) comparaison des traces dans le plan déviatoire des critères de Mohr-Coulomb, Lade-Duncan et Matsuka-Nakai ($f(\sigma) = \frac{I_1 I_2}{I_3} - k = 0$ - 1974).

2.4.3 Modèles élasto-plastiques avec écrouissage

Dans le cas des modèles parfaitement plastiques, le matériau est supposé donner une réponse élastique jusqu'à ce qu'il atteigne sa résistance maximale donnée par la surface de rupture. La réalité expérimentale montre que la limite élastique n'est pas fixée à la limite de rupture et évolue en fonction du chargement. Des déformations plastiques non linéaire apparaissent avant d'avoir atteint la surface de rupture. De plus l'expérience montre que pour des sols denses ou sur-consolidés il existe un état du matériau, appelé *caractéristique*, correspondant à une variation de volume nulle avant la rupture. Cet état sépare les états contractants des états dilatants du matériau.

Dans la suite nous présentons des modèles de comportement élastoplastiques avec écrouissage, positifs et négatifs (ramollissement), qui prennent en compte les points soulevés dans le paragraphe ci-dessus.
Ces modèles sont fondés sur la donnée d'une loi élastique, souvent hypo-élastique et non linéaire, d'une surface de charge qui évolue en fonction des variables d'écrouissage (densité initiale, déformation volumique, indice des vides), éventuellement d'un potentiel plastique et de lois d'écrouissages non linéaires. Nous ne traitons ici que des lois d'évolution dans le cas d'un écrouissage isotrope. Ce type d'écrouissage est en général adapté pour des chargement monotone, ce qui est souvent le cas dans l'interaction Outil / Sol (Scléromètre, pénétromètre, scissomètre, ...). Dans le cas de chargements cycliques les modélisateurs font appel à l'écrouissage cinématique.

2.4.3.1 Modèle Cam-Clay (1958-1969)

Le modèle de Cam-Clay a été créé par l'équipe de Mécanique des Sols de l'Université de Cambridge au début des années 60. C'est le premier modèle de mécanique des sols à prendre en compte le concept d'*état critique*. La première version de 1958 a été modifiée en 1965 par Burland. C'est la version modifiée que nous présentons ici. Ce modèle a été introduit pour modéliser les sols avec cohésion, en particulier les argiles. Ce modèle élastoplastique, suppose le sol isotrope, avec un comportement élastique non-linéaire et un écrouissage isotrope.

C'est le plus largement utilisé pour l'analyse par éléments finis non-linéaires de problèmes géotechniques pratiques.

Elasticité

La loi élastique de ce modèle est non linéaire. Les déformations en cisaillement élastiques (réversibles) sont supposées nulles et donc le module de cisaillement élastiques G est infini. Les déformations volumiques élastiques évoluent de façon non linéaire avec la pression hydrostatique et sont indépendantes de l'état de contrainte déviatoire. D'un point de vu numérique il est nécessaire de donner une valeur finie au module de cisaillement élastique. Le choix dépend de la classe d'application simulée et de l'importance des déformations élastiques. Dans le cadre géotechnique pour

des problèmes de stabilité Chen W. F. [29] propose de prendre G ≈ 100×K. D'autres auteurs proposent de coupler le module de cisaillement et de compressibilité via le coefficient de poisson ν. Cette approche peut conduire à un modèle non-conservatif pour des chargement cycliques, [16],[98]. Les auteurs notent que cet état de fait n'est pas primordial si un chargement monotone est considéré, et donc cette approche reste la plus utilisée.

Les paramètres intervenant dans l'évolution du module de gonflement sont :

- L'indice des courbes de *consolidation vierge* λ.
- L'indice des courbes de *gonflement–rechargement* κ.

L'indice λ s'obtient lors d'un essai drainé de compression isotrope, et l'indice κ lors d'un cycle déchargement-rechargement. Dans le plan *(p,e)* on a, avec ln logarithme en base *e* indice des vides :

$$e = e_\lambda - \lambda \ln(p) \qquad \textbf{(2.13)}$$

$$e = e_\kappa - \kappa \ln(p) \qquad \textbf{(2.14)}$$

e_λ et e_κ sont des constantes du matériau. Les courbes idéalisées de consolidation vierge et de gonflement–rechargement sont tracées dans le plan (ln(p), e), Figure 2.8.

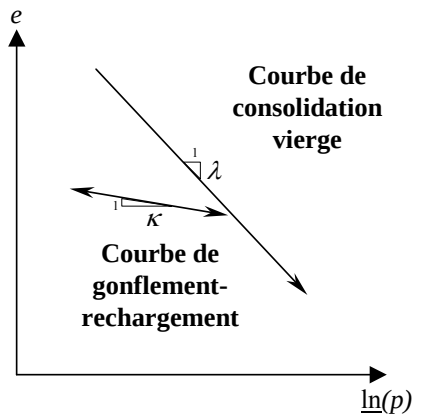


Figure 2.8 : réponse d'un sol idéalisé à la pression hydrostatique.

Le module de gonflement élastique s'écrit alors :

$$K = \frac{1+e}{\kappa} p \qquad \textbf{(2.15)}$$

Dans le cas du couplage le module de cisaillement s'écrit :

$$G = \frac{3K(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \qquad \textbf{(2.16)}$$

Surface de charge

La fonction de charge du modèle est une fonction quadratique de la pression hydrostatique et donc forme une ellipse dans le plan (p,q), avec $q = \sqrt{3J_2}$. Sa forme analytique est donnée par :

$$f(p,q,p_c) = \frac{q^2}{M^2} + p(p - p_c) \qquad \textbf{(2.17)}$$

Où M est un paramètre du modèle que l'on peut relier à l'angle de frottement critique et p_c le paramètre d'écrouissage que l'on peut relier à la densité du matériau. Avec un tel critère on ferme le domaine de plasticité de manière continue et dérivable sur l'axe des pressions.

Loi d'écoulement

La loi d'écoulement du modèle est associée et donc le potentiel g est égal à f. Néanmoins il existe des versions non associées [16],[71].

Loi d'évolution et Etat critique

La loi d'évolution du paramètre p_c est donnée par :

$$\dot{p}_c = \vartheta p_c \dot{\varepsilon}_v^{plast.} \qquad \textbf{(2.18)}$$

Où ϑ est le paramètre d'écrouissage donné par :

$$\vartheta = \frac{1+e}{\lambda - \kappa} \qquad \textbf{(2.19)}$$

λ et κ sont les indices introduits plus haut, et $\dot{\varepsilon}_v^{plas.}(= tr(\dot{\varepsilon}^{plast.}))$ les vitesses de déformations volumiques plastiques.

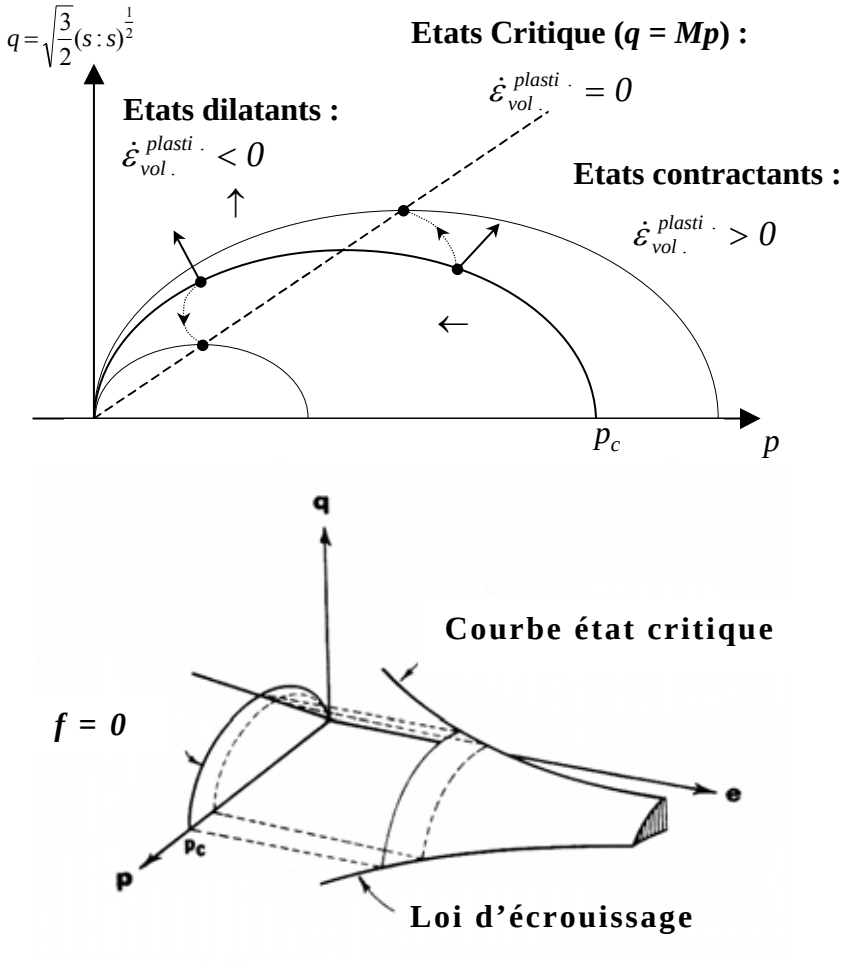


Figure 2.9 : Schéma d'évolution de la surface de charge du modèle Cam-Clay dans le plan (p,q) et dans l'espace (p,q,e).

Pour prendre en compte l'état critique le modèle fonctionne comme suit :

- Lorsque l'on atteint la surface de charge en dessous de la courbe d'état critique (Cas ←, Figure 2.9), le modèle produit des déformations plastiques *contractantes* et la variable p_c augmente. On a alors un durcissement du matériau, écrouissage positif. Cette augmentation a lieu jusqu'à ce que l'état de contrainte vérifie le système :

$$\begin{cases} \dfrac{q^2}{M^2} + p(p - p_c) = 0 \\ q - Mp = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(2.20)}$$

  L'état de contrainte est alors sur la pente d'état critique et au sommet de l'ellipse : le modèle ne prédit plus de déformations volumiques.

- Lorsque l'on atteint la surface de charge au dessus de la courbe d'état critique, le modèle produit des déformations plastiques *dilatantes* et la variable p_c diminue (cas ↑,Figure 2.9). On a alors un ramollissement du matériau, écrouissage négatif ou adoucissement. Cette diminution a lieu jusqu'à ce que l'état de contrainte vérifie le système(2.20).

On remarque que l'écrouissage n'est pas strictement isotrope puisqu'il ne correspond pas à une transformation homothétique de centre O de la surface de charge. On pourrait parler d'un écrouissage mixte isotrope (gonflement) / cinématique (déplacement du centre de l'ellipse).

Dans le cadre de la mécanique des Sols le modèle de Cam-Clay initialement prévu pour les argiles s'est vu généraliser pour des matériaux pulvérulents comme les sables. Il permet une évaluation qualitative du comportement du matériau relativement facile, et les paramètres mis en jeu sont déterminés à partir de tests triaxiaux conventionnels. Néanmoins il ne peut mettre en évidence le pic de contrainte que l'on observe sur des essais tri-axiaux pour des matériaux denses. En fait lors d'un chargement monotone ce modèle prédit soit exclusivement des déformations contractantes soit exclusivement des déformations dilatantes. Ainsi *l'état caractéristique* n'est pas modélisé. C'est pourquoi, bien que conçu pour les sols fins il ne convient pas pour des argiles sur-consolidées [10].

Ce modèle quadratique en pression et dérivable est très largement utilisé pour l'analyse par éléments finis non-linéaires de problèmes géotechniques classiques [3], [31], [50], [93], de l'inter-action Outil / Sol (pénétromètre [4]) et pour modéliser l'interaction Pneu / Neige [77]. Il a été adapté pour la mécanique des poudres, notamment dans une version visco-plastique à seuil pour des problèmes de compaction [2][15].

Suivant le type d'application modélisé, les auteurs adoptent une approche monophasique ou bi-phasique. Pour des problèmes de stabilité à court terme, c'est une approche monophasique qui est utilisée, [16][17][48]. Pour des problèmes à long terme d'excavation ou de creusement de tunnel, où l'eau intervient dans la consolidation du matériau, c'est une approche bi-phasique qui est utilisée [31], [50]. C'est aussi cette approche qui est mise en œuvre lorsque l'objectif est de mieux interpréter les résultats d'outils de caractérisation *in situ*. C'est le cas pour l'étude du *pénétromètre* pour un sol fin saturé mise en œuvre par Voyiadjis G.Z. et Abu-Farsakh M.Y. [4], [118].

Dans la suite nous présentons brièvement les modèles présentant plusieurs surfaces de charges : les *Cap Models*.

2.4.3.2 Cap Model

Ces modèles ont été développés au début des années soixante dix pour les sols pulvérulents. L'idée est de fermer sur l'axe des pressions hydrostatiques, les domaines élastiques issus des modèles parfaitement plastiques (voir section 2.4.2) à l'aide d'une surface de charge supplémentaire : *"Cap"*. Ces modèles reposent donc sur la donnée d'une surface de rupture et d'une surface de charge qui décrit l'écrouissage du matériau. Ces modèles différent suivant la forme des surfaces de charges.

Elasticité

La loi élastique peut être linéaire ou non linéaire. Dans le cas non linéaire le coefficient de gonflement K dépend du premier invariant des contraintes. Le coefficient de cisaillement G dépend du second invariant des contraintes déviatoires et des déformations plastiques volumiques.

$$K = K(I_1) \qquad \textbf{(2.21)}$$

$$G = G(\sqrt{J_2}, \varepsilon_v^{plast.}) \qquad \textbf{(2.22)}$$

Surfaces de charges

La *surface de rupture* est donnée par le critère de Drucker-Prager :

$$f_r = \sqrt{J_2} + \alpha I_1 - k = 0 \qquad \textbf{(2.23)}$$

Ou une version modifiée :

$$f_r = \sqrt{J_2} - [a - b\exp(cI_1)] = 0 \qquad \textbf{(2.24)}$$

Où a, b et c sont des constantes du matériau. Pour cette version le critère de rupture tend vers le critère de *Von Mises* pour les hautes pressions.

Le “Cap” ou surface de charge a la forme d’un quart d’ellipse, donnée par, Figure 2.10 :

$$f_r = [I_1 - L(l)]^2 + R^2 J_2 - [x - L(l)]^2 = 0 \qquad \textbf{(2.25)}$$

Où l est la valeur de I_1 au centre de l’ellipse, R est le rapport des longueurs de l’axe mineur sur l’axe majeur (ultérieurement ce sera le ryaon de surface de charge), x est le paramètre d’écrouissage qui dépend de l’histoire des déformations plastiques (par $\varepsilon_v^{plas.}$). La forme géométrique du Cap évolue suivant le type de sol modélisé, ainsi pour des sables, la surface de charge peut se réduire à un simple plan perpendiculaire à l’axe des pressions [92].

Loi d’écoulement

La loi d’écoulement est choisie associée pour la surface de rupture ainsi que pour la surface de charge. Ceci apparaît contradictoire avec la prédiction excessive de dilatance observée pour les modèles parfaitement plastiques. En fait, pour ce modèle c’est l’évolution du “Cap” qui va gérer la prédiction de dilatance du modèle.

Loi d'évolution et Etat critique

Le paramètre d'écrouissage x est relié aux déformations plastiques volumiques cumulées par la relation non linéaire suivante, Di Maggio et Sandler (1971) :

$$x = \frac{1}{D}\ln(1 + \frac{\varepsilon_v^{plast.}}{W}) \qquad \textbf{(2.26)}$$

Le modèle fonctionne comme suit (Figure 2.10) :

- Si lors d'un chargement on atteint la surface de charge, "Cap", le modèle produit des déformations contractantes, écrouissage/durcissement du matériau, et le cap évolue jusqu'à ce que l'état de contrainte soit à l'intersection du cap et de la surface de rupture, Figure 2.10 cas ←. A ce stade les directions des déformations sont données par la normale au "Cap", qui dans le cas d'un quart d'ellipse est verticale. On se trouve donc à l'état critique puisque la prédiction de déformations volumiques plastiques est nulle.

- Si lors d'un chargement on atteint d'abord la surface de rupture, le modèle prédit des déformations volumiques dilatantes, adoucissement / ramollissement du matériau, et le cap évolue vers l'origine jusqu'à ce que le sommet de l'ellipse du "Cap" coïncide avec l'état de contrainte, Figure 2.10 cas ↑. Les déformations plastiques volumiques sont nulles et donc la dilatance cesse. On se trouve donc à l'état critique.

Les caractéristiques du matériau modélisées sont assez similaires à celles prise en compte par le modèle de *cam-clay* : écrouissage/ densification, ou bien, ramollissement dilatance, le tout aboutissant à l'état critique. Néanmoins les Cap Model semblent plus destinés aux matériaux granulaires et à la mécanique des roches. D'autre part la liberté de choix pour la géométrie du "Cap" permet de modéliser plusieurs types de sols. Néanmoins le calage des paramètres du modèle se fait par essai/erreur sur des essais expérimentaux. Ces modèles ont été utilisés pour des problèmes géotechniques classiques de stabilité de talus pour du sable[28][29] [108], de fondation pour de l'argile [52]. Dans l'interaction Outil/Sol, Xie *et al.*[122] utilisent le cap model pour des sols de culture sablonneux, et Poran et Rodriguez [92]dans l'analyse d'impact dans le sable (code DYNAD2D). Les auteurs ne traitent pas de manière explicite la prise en compte des points singuliers formés notamment par l'intersection des deux surfaces.

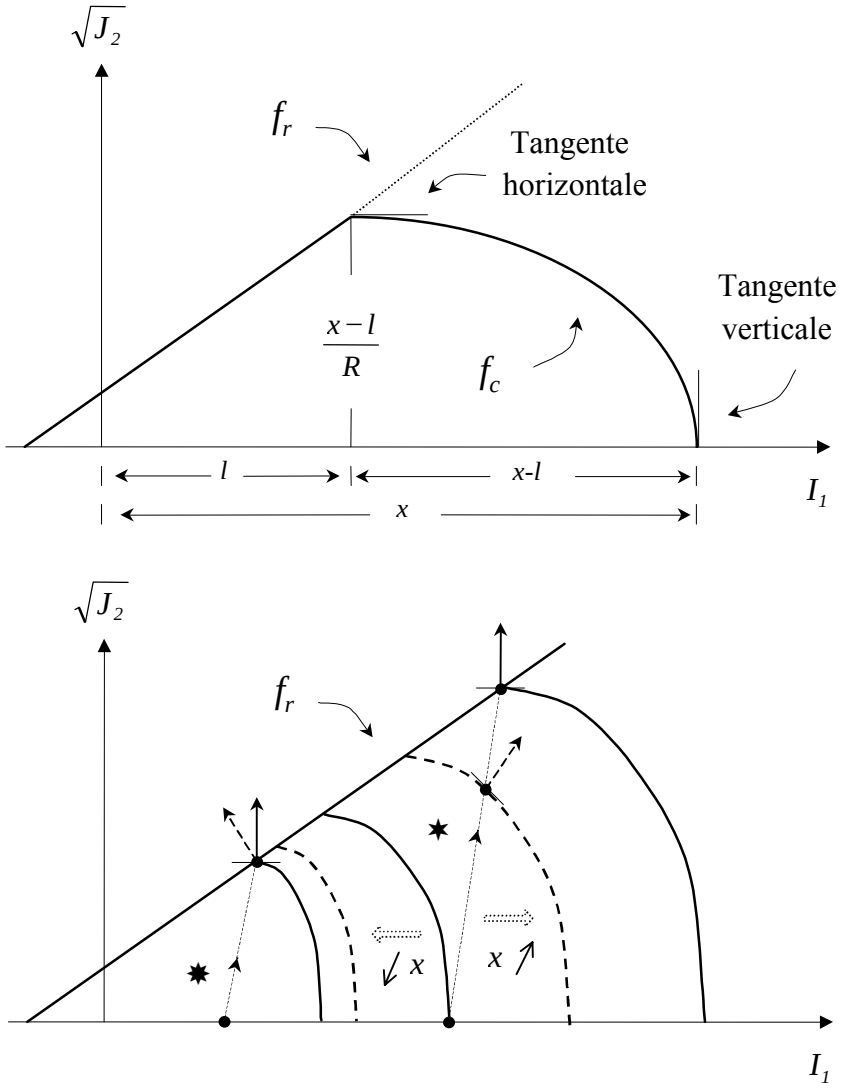


Figure 2.10 : (En haut) représentation graphique dans le plan $\left(I_1, \sqrt{J_2}\right)$ du "cap model" Di Maggio et Sandler (1971) – (En bas) évolution du cap pour deux chargements de type triaxiaux pour deux pressions de confinement différentes.

Dans la suite nous présentons un modèle de comportement de Sol qui prend en compte l'état caractéristique du matériau. C'est le Modèle C.J.S. (Cambou, Jafari, Sidoroff, 1988) développé à l'Ecole Centrale de Lyon [24], [73], à partir d'une approche phénoménologique du comportement macroscopique des matériaux granulaires. Nous présentons une version avec écrouissage isotrope : le modèle CJS 2 Etat Critique [64].

2.4.3.3 C.J.S. 2 Etat Critique

Il s'agit d'un modèle Hypo-Elasto-Plastique à deux surfaces de charges ou mécanismes plastiques (l'un isotrope et l'autre déviatoire), avec un écrouissage mixte en contrainte et en déformation. Comme pour les autres

modèles, on a une décomposition additive des vitesses de déformation en une partie élastique et une partie plastique :

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^{el} + \dot{\varepsilon}^{plas.} \qquad \textbf{(2.27)}$$

Les vitesses de déformation plastiques se décomposent en une partie issue du mécanisme isotrope et une partie issue du mécanisme déviatoire :

$$\dot{\varepsilon}^{plas.} = \dot{\varepsilon}^{iso.\,plas.} + \dot{\varepsilon}^{dev.\,plas.} \qquad \textbf{(2.28)}$$

Finalement on obtient la décomposition des vitesses de déformations suivante :

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^{el} + \dot{\varepsilon}^{iso.\,plas.} + \dot{\varepsilon}^{dev.\,plas.} \qquad \textbf{(2.29)}$$

Mécanisme élastique :

La partie élastique de la loi est de type Hypo-Elastique (relation qui lie la dérivée des contraintes avec les vitesses de déformation) et s'exprime sous la forme générale suivante :

$$\dot{\varepsilon}^{el} = \frac{1}{2G}\dot{s} + \frac{\dot{I}_1}{9K^e}1\mathrm{I} \qquad \textbf{(2.30)}$$

$$G = G_0\left(\frac{I_1}{3p_a}\right)^n \qquad \textbf{(2.31)}$$

$$K^e = K_0^e\left(\frac{I_1}{3p_a}\right)^n \qquad \textbf{(2.32)}$$

où s est le déviateur des contraintes, 1I est le tenseur d'ordre 2 unité, $I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ est le premier invariant des contraintes, le point représente la dérivée temporelle, p_a est une pression de référence égale à 100 kPa, G_0, K_0^e et n sont des paramètres du modèle.

Mécanisme Plastique Isotrope :

- **la surface de charge**

Pour ce mécanisme la surface de charge dans l'espace des contraintes principales est un plan orthogonal à l'axe hydrostatique :

$$f^i = \frac{I_1}{3} - Q = 0 \qquad \textbf{(2.33)}$$

- **Loi d'évolution**

Pour ce mécanisme les lois d'évolution respectent la règle de normalité. Elles s'écrivent comme suit pour l'évolution des déformations plastiques volumiques (loi d'écoulement associée) et de la variable interne q :

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_v^{iso.plas.} &= \lambda^i \frac{\partial f^i}{\partial \sigma} \\ &= \frac{\lambda^i}{3} 1\mathrm{I}\end{aligned} \qquad (2.34)$$

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \lambda^i \frac{\partial f^i}{\partial Q} \\ &= \lambda^i\end{aligned} \qquad (2.35)$$

- **loi d'écrouissage**

Q est la force thermodynamique associée à la variable interne q. La loi d'écrouissage s'écrit :

$$\dot{Q} = K^p \dot{q} = K_0^p \left(\frac{Q}{p_a} \right)^n \dot{q} \qquad (2.36)$$

K_p représente le module de déformation volumique plastique tangent. Il est fonction de la contrainte moyenne et du paramètre K_0^p.

Mécanisme Plastique Déviatoire :

- **la surface de charge**

La surface de charge f^d associée à ce mécanisme est une surface ouverte, convexe, à symétrie ternaire Figure 2.11, définie par l'équation :

$$f^d = s_{II} h(s) - RI_1 = 0 \qquad (2.37)$$

avec

$$h(s) = \left(1 - \gamma \sqrt{54} \frac{\det(s)}{s_{II}^3} \right)^{1/6} \qquad (2.38)$$

Cette fonction h(s) permet de prendre en compte la dissymétrie de la réaction du sol en compression et en traction exposée à la section 2.4.2.3. Elle donne une forme de triangle arrondi à la trace de la surface de charge dans le plan déviatoire en faisant intervenir le troisième invariant des contraintes déviatoires et un paramètre γ, obtenu soit à l'aide d'essais triaxiaux d'extension et de compression, soit à partir de l'angle de frottement interne [64].

- **la loi d'écoulement**

La loi d'écoulement plastique est non associée, l'évolution des déformations plastiques est pilotée par le potentiel plastique g :

$$\dot{\varepsilon}^{dev.plas.} = \lambda^d \frac{\partial g^d}{\partial \sigma} = \lambda^d G \qquad \textbf{(2.39)}$$

Pour déterminer G, direction des déformations plastiques, on s'appuie sur la condition cinématique qui tend à limiter la dilatance du matériau. La condition cinématique s'écrit :

$$G \cdot \tau = 0 \qquad \textbf{(2.40)}$$

où τ est un tenseur tangent à la surface potentielle plastique donné par :

$$\tau_{ij} = \frac{\beta' \frac{s_{ij}}{s_{II}} - \delta_{ij}}{\sqrt{\beta'^2 + 3}} \qquad \textbf{(2.41)}$$

avec

$$\beta' = \beta \cdot \left(\frac{s_{II}}{s_{II}^c} - 1 \right) \qquad \textbf{(2.42)}$$

où β est un paramètre du modèle qui limite la dilatance. Celui ci est déterminé à partir des courbes de variation de volume lors d'essais triaxiaux de compression. Il peut être relié à l'angle de dilatance. Le tenseur τ est une combinaison linéaire de la normale à la surface de charge et de la direction de l'axe des pressions via le paramètre β' fonction de l'état de contrainte et de l'état caractèristique.

Dans l'équation (2.42), $s^c{}_{II}$ représente le deuxième invariant du déviateur des contraintes à l'état caractéristique. Cet état du matériau sépare les états contractants des états dilatants. Dans l'espace des contraintes principales, cet état définit une surface de charge, Figure 2.11 dont l'équation est donnée par :

$$f^c = s_{II}^c h(s) - R_c I_1 = 0 \qquad \textbf{(2.43)}$$

R_c, le rayon moyen de la surface caractéristique, est un paramètre fixe du modèle, indépendant de l'état de densité du matériau. On a :

- Si $R < R_c$ le modèle prédit des déformations plastiques contractantes
- Si $R > R_c$ le modèle prédit des déformations plastiques dilatantes.
- Si $R = R_c$ le modèle prédit des déformations plastiques volumiques nulles.

Ce paramètre s'obtient à partir de l'état de contrainte correspondant au point de variation de volume nul.

La normale à la surface potentielle s'exprime à partir de la normale à la surface de charge comme suit :

$$G_{ij} = \frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{ij}} - \left(\frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{kl}} \tau_{kl} \right) \tau_{ij} \qquad \textbf{(2.44)}$$

- **l'écrouissage**

L'écrouissage est isotrope et est caractérisé par l'évolution de la force thermodynamique R associée à la variable interne $\overline{p}$. Sous sa forme intégrée, la loi d'écrouissage est de nature hyperbolique et s'exprime par :

$$R = \frac{AR_m \overline{p}}{A\overline{p} + R_m} \qquad \textbf{(2.45)}$$

la loi d'évolution de p a été choisie sous la forme :

$$\dot{\overline{p}} = -\lambda^d \frac{\partial f^d}{\partial R} \left(\frac{I_1}{3 p_a} \right)^{-1.5} \qquad \textbf{(2.46)}$$

A et Rm sont des paramètres qui règlent respectivement la pente initiale de l'écrouissage et le rayon moyen maximal de la surface de charge à l'état critique ; p est le flux associé à la force thermodynamique R. On a $p \to +\infty \Rightarrow R \to R_m$.

C'est la loi d'évolution du rayon moyen de la surface de charge associée à la prise en compte de l'état caractéristique qui permet de modéliser le pic de contrainte observé lors d'essais triaxiaux pour des matériaux denses (Figure 2.1). Le modèle peut prendre en compte au cours d'un chargement monotone, une phase de durcissement (écrouissage) suivie d'une phase de ramollissement.

- **Concept d'état critique**

Les expériences sur des essais triaxiaux montrent que comme pour les argiles, le matériau tend vers un état critique caractérisé par une variation de volume nulle et un rapport *norme déviateur / pression hydrostatique* constant et indépendant de la densité initiale. Ce concept est pris en compte par le modèle en faisant varier le rayon moyen R_m de la surface de rupture avec la pression et la densité. Pour des raisons de simplicité on confond le rapport *norme déviateur / pression hydrostatique* à l'état critique avec celui à l'état caractéristique.

$$R_m = R_c + \mu \ln\left(\frac{3p_c}{I_1}\right) \qquad (2.47)$$

La pression critique est liée à la densité du matériau par l'équation :

$$p_c = p_{c0} \exp(c\,\mathrm{tr}(\varepsilon^{pl})) \qquad (2.48)$$

avec

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\varepsilon^{pl}) &= \mathrm{tr}(\varepsilon^{iso.plas.}) + \mathrm{tr}(\varepsilon^{dev.plas.}) \\ &= \varepsilon_v^{iso.plas.} + \varepsilon_v^{dev.plas.}\end{aligned} \qquad (2.49)$$

où p_{c0} est la pression critique correspondant à la densité initiale du matériau et c est un paramètre du modèle. La pression critique p_c et le paramètre c sont de même nature que la variable p_c et le paramètre ϑ pour le modèle de *Cam-Clay*. Le paramètre μ s'obtient à l'aide du rayon de rupture R_{rup}, du rayon caractéristique (assimilé au rayon critique), de la pression hydrostatique et de la pression critique p_c. Le rayon de rupture se détermine à partir de l'état de contrainte correspondant au "pic" de déviateur.

A l'état critique on a : $R_c = R_m$, le rayon moyen de la surface de rupture est égal au rayon moyen de la surface d'état caractéristique (confondue avec l'état critique). La loi d'écrouissage implique que $R = R_m$.

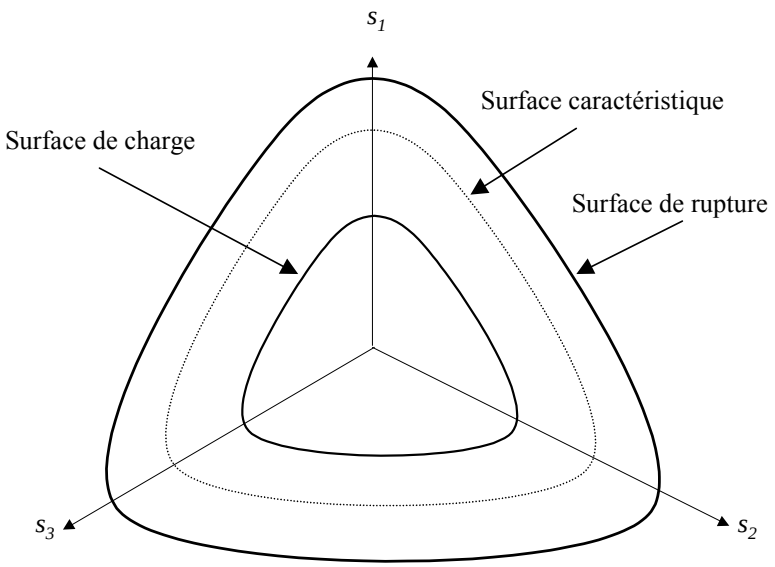


Figure 2.11 : Les différentes surfaces dans le plan des contraintes déviatoire pour le modèle CJS 2.

L'équation (2.48) exprime un couplage unilatéral entre les mécanismes isotrope et déviatoire. En effet lorsque l'on sollicite uniquement le mécanisme isotrope, on crée les déformations plastiques volumiques associées. La variable p_c est alors modifiée, équation (2.48), et donc le rayon moyen de la surface de rupture.

Par contre lorsque l'on sollicite uniquement le mécanisme déviatoire la variable p_c est modifiée, mais il n'y a pas d'évolution de la surface de charge isotrope (*i.e.* : la variable Q est inchangée).

Ce modèle s'est vu implanter dans des codes de géotechniques tel que FLAC2D, ainsi que le code ASTER.

2.4.4 Ecriture en Grandes déformations

Dans ce paragraphe nous donnons les choix de mesure en grandes déformations des notions de contraintes, de dérivée de contraintes, de déformations, de taux de déformation.

Décrire l'évolution d'un solide déformable au cours du temps consiste à connaître à chaque instant l'ensemble des grandeurs physiques caractérisant l'état du système (position points matériels, vitesse, température, masse volumique, déformations, notions de contraintes, ,etc....). Deux approches sont possibles : une description *Lagrangienne* du système, par rapport à la configuration initiale (ou de *référence* à $\underline{t} = 0$), ou une description *Eulerienne* du système par rapport à la configuration courante (à l'instant t). Sous l'hypothèse des petites transformation ces deux descriptions coïncident, on utilise alors les mesures *Euleriennes* que sont le tenseur des contraintes de Cauchy σ, et le tenseur des déformations linéarisé.

En grandes déformations, dans une approche *Lagrangienne*, on utilise pour les contraintes le second tenseur de Piola-Kirchhoff S et le tenseur des déformations de Green Lagrange L.

$$S_{ij} = J \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \frac{\partial X_j}{\partial x_l} \sigma_{kl} \qquad \textbf{(2.50)}$$

$$L_{ij} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \qquad \textbf{(2.51)}$$

où $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$ sont les coordonnées d'un point matériel dans la configuration courante et $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,X_3)$ ses coordonnées dans la configuration initiale. J est le *Jacobien* de la transformation φ ($x=\varphi(X)$) : $J = \det\left(\frac{dx}{dX}\right)$; $\boldsymbol{u(x,t)}=(u_1,u_2,u_3)$ est le champ de déplacement. Les contraintes et les déformations sont évaluées par rapport à la configuration de référence.

Dans une approche *Eulerienne* on utilise le tenseur de Kirchhoff τ et le tenseur de déformations Eulerien e.

$$\tau_{ij} = J\sigma_{ij} \qquad \textbf{(2.52)}$$

$$e_{ij} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \qquad \textbf{(2.53)}$$

Les contraintes et les déformations sont évaluée par rapport à la configuration courante.

Décomposition des déformations et Elasto-plasticité

Sous l'hypothèse des petites déformations et pour une loi hypo-élastique, on utilise une décomposition additive des vitesses de déformations en une partie élastique et une partie plastique :

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^{el} + \dot{\varepsilon}^{pl} \qquad \textbf{(2.54)}$$

Dans le cadre des grandes transformations on rencontre le plus souvent une décomposition additive du tenseur *taux de déformation D* qui est une mesure *eulerienne* de la vitesse de déformation :

$$D = D^{el} + D^{pl} \qquad \textbf{(2.55)}$$

Il existe aussi une décomposition additive du *taux de déformation lagrangien :* $\dot{L}$ [62]. La justification de cette décomposition additive des déformations réside dans l'hypothèse que les déformations élastiques sont petites devant les déformations plastiques.

On peut trouver alors deux types de formulations en grandes déformations des lois élasto-plastiques :

- Une approche purement Eulerienne en utilisant le couple (tenseur de Kirchhoff, tenseur taux de déformation), qui permet un passage direct de la loi en petites déformations à la loi en grandes déformations [31][64] [76] [104]. Cette approche est bien adaptée lors d'un traitement incrémental de problèmes d'évolutions temporels par la technique du *"lagrangien réactualisé"*, pour laquelle la configuration courante est proche de la configuration de référence.

- Une approche purement lagrangienne en utilisant le couple second tenseur de Piola-Kirchhoff, taux de déformation lagrangien qui aboutit à un traitement plus complexe de la loi de comportement [4][62][118].

Dans le cas d'une mesure *Eulerienne* des contraintes se pose le problème du choix d'une dérivée par rapport au temps objective. C'est la dérivée de Jaumann qui est la plus largement utilisée [31] [76] [4][62][118], donnée par :

$$\sigma^J = \dot{\sigma} - W\sigma + \sigma W \qquad \textbf{(2.56)}$$

Où $W = \frac{1}{2}\left(\nabla v - (\nabla v)^t\right)$ *est le taux de rotation.*

En grandes déformations Lee [68] a introduit une décomposition multiplicative des déformations. Le gradient de déformation ($F = \left(\frac{dx}{dX}\right)$) est égal au produit du gradient de déformation élastique avec le gradient de déformation plastique :

$$F = F^{el} F^{pl} \qquad \textbf{(2.57)}$$

A cette décomposition est associée une loi hyper-élastique, qui lie les contraintes aux déformations. Ainsi ne se pose plus le problème de dérivée objective. Dans la mécanique du contact avec sols, on retrouve ce type d'approche pour des applications numériques concernant l'interaction Sol/Pneu, ce qui est logique puisque le comportement est modélisé de par des lois en général hyper-élastiques [71], [77].

2.5 Conclusions

Dans ce chapitre nous avons abordé les principales lois de comportement des sols dans le cadre de l'élastoplasticité. Pour prendre en compte la diversité des sols (voir chapitre 1) de nombreux modèles existent avec différents degrés de complexité.

Les modèles parfaitement plastiques prennent en compte les caractéristiques de base du matériau : l'état de rupture et la sensibilité au premier invariant des contraintes. Ces modèles ne décrivent que des déformations dilatantes et ont une loi d'écoulement non associée (*Mohr-Coulomb*, *Drucker Prager*, *Lade*).

Les modèles plus complexes s'attachent à décrire plus précisément les relations contraintes/déformations issues d'essais triaxiaux. L'état critique du matériau (déformation à volume constant) est modélisé par la prise en compte du durcissement ou du ramollissement du matériau (*Cam Clay*, *Cap Model*).
Enfin une description complète est atteinte lorsque les phases de durcissement et de ramollissement sont modélisées, pour des matériaux denses, au cours d'un chargement monotone (*CJS*).

Ces modèles de comportement, pour décrire correctement les relations contraintes/déformations des sols, font intervenir : la sensibilité au premier invariant des contraintes ainsi qu'au troisième invariant, des lois d'écoulement non associées, l'écrouissage et l'adoucissement du matériau.

REFERENCES

[1] ABDEL-FATTAH T.T., HODHOD H.A., AKL A.Y., *"A novel formulation of infinite elements for static analysis"*, Computers and Structures, 77, pp. 371-379, (2000).

[2] ABOUAF M., *"Modélisation de la compaction de poudres métalliques frittées"* Thèse Doct. es sciences, Université scientifique et médicale et ENP de Grenoble, 168 p. (1985).

[3] ABU-FARSAKH M.Y., VOYIADJIS G.Z., *" Computational model for the simulation of the shield tunneling process in cohesive soils"* Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., **22**, pp. 00-22, (1998).

[4] ABU-FARSAKH M.Y., VOYIADJIS G.Z.,TUMAY M.T., *"Numerical analysis of the miniature piezocone penetration tests (PCPT) in cohesive soils"* Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., **22**, pp. 791-818, (1998).

[5] AHADI A., KRENK S., *"Characteristic state plasticity for granular materials Part I : Basic theory"*, International Journal of Solids and Structures, 37, pp 6343-6360 (2000).

[6] AHADI A., KRENK S., *"Characteristic state plasticity for granular materials Part II : Model calibration and results"*, International Journal of Solids and Structures, 37, pp 6361-6380 (2000).

[7] ARNOLD D.N., F. BREZZI, FORTRIN M., "A stable finite elemnt for stokes equations". Calcolo., **21**, 337-344, (1984).

[8] ASAOKA A., NAKANO M., NODA T., *"Soil-Water coupled behaviour of saturated clay near/at critical state"* Soils and foundations, **34,** pp.91-105 (1994).

[9] ASHBY S. F., MANTEUFFEL T. A., SAYLOR P. E., *"A Taxonomy for Conjugate Gradient Methods"* SIAM, J. Numer. Anal., vol. 27, No 6, pp. 1542-1568, (1990).

[10] BARBAS A., *"contribution à l'utilisation de la méthode des éléments finis en Mécanique des Sols dans le domaine de l'élasto-plasticité"* Thèse Doct. génie civil, ENPC, 140 p. (1981).

[11] BABUSKA I., "The finite element method with penalty" Math ; Comp., **27**, 221-228, 1973.

[12] BARDET J.P., *"A Comprehensive Review of Strain Localisation in Elasto-Plastic Soils"*, Computers and Geotechnics, **10**, pp. 163-188, (1990).

[13] BAUER E., *"Conditions for embedding Casagrande's critical states into hypoplasticity"*, Mech. Cohes.-Frict. Mater., **5**, pp. 125-148, (2000).

[14] BAZANT Z., PIJAUDIER-CABOT G., *"Nonlocal Continuum Damage, Localisation Instability and Convergence"*, Journal of Applied Mechabics, **55**, pp. 287-293, (1988).

[15] BELLET M., *"Finite element analysis of compressible viscoplasticity using a three-field formulation"*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 175, pp. 19-40, (1999).

[16] BORGA R.I., LEE S.R., "*Cam-Clay Plasticity, Part I : Implicit integration of elasto-plastic constitutive relations"* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **78**, pp. 49-72 (1990).

[17] BORGA R.I., LEE S.R., *"Cam-Clay Plasticity, Part II :Implicit integration of contitutive equations based on non-linear elastic stress predictor"* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **88** pp. 225-240 (1991).

[18] BORGA R.I., TAMAGNIGNI C., *"Critical State Model at Finite Strain"* Proceedings of the 11th Conference on Engineering Mechanics, pp. 148-151 (1996).

[19] BOUSSHINE L., CHAABA A., DE SAXCE G., *"Softening in stress-strain for Drucker-Prager non-associated plasticity"* International Journal of Plasticity , **17**, pp. 21-46, (2001).

[20] BRAUDEL H.J., *"Modélisation des grandes transformations élastoplastique d'un solide isotrope par la méthode des éléments finis. Application à la forge à froid des métaux"* Thèse Doct. es sciences, Université de Lyon I, 226 p. (1986).

[21] BREZINSKI C., REDIVO-ZAGLIA M., *"Treatment of near-breakdown in the CGS algorithm"* Numerical Algorithm, vol. 7, pp. 33-73, 1994.

[22] BUCAILLE J.L., *"Simulation numérique de l'indentation et de la rayure des verres organiques",* Thèse de Doctorat, ENSMP, (2001).

[23] CAMBOU B., CHAZE M., DEDECKER F., *"Change of scale in granular materials"* Eur. J. Mech. A/Solids, **19**, pp. 999-1014 (2000).

[24] CAMDOU B., JAFARI, *"Modèles de comportement des sols non cohérents"* Revue française de Géotechnique, **44**, pp. 43-55 (1988).

[25] COUPEZ T., *"Génération de maillage et adaptation de maillage par optimisation locale"* Revue Européenne des éléments finis, **9**, pp. 403-423, (2000).

[26] COUPEZ T., *"Stable-stabilized finite element for 3D forming calculation"* Communication interne (1995).

[27] COUSSY O., *"Mécanique des Milieux Poreux "* Edition Technip (1991).

[28] CHEN W.F., BALADI G.Y., *"Soil Plasticity : Theory and Implementation"* Developments in Geotechnical Engineering, **38**, Elsevier, New York (1985).

[29] CHEN W.F., MIZUNO E., *"Nonlinear Analysis in Soil Mechanics :Theory and Implementation"* Developments in Geotechnical Engineering, **53**, Elsevier, New York (1990).

[30] CHI L., KUSHWAHA R.L., *"Three-Dimensionnal, finit element interaction between soil and tillage tool"* ASAE, **34,** pp. 361-366 (1991).

[31] CHOPRA M. B., DARGUSH G.F., *"Finite Element Analysis of time Dependent Large-Deformation Problems "* Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., **16**, pp. 101-130, (1992).

[32] COTECCHIA F., CHANDLER R.J., *"A general framework for the mechanical behaviour of clays"*, Géotechnique, **50**, **4**, pp. 431-447, (2000).

[33] CUNDALL P., STRACK O.D.L., *"A discrete method for granular assemblies"*, Géotechnique, **2**, pp. 47-65, (1979).

[34] DE BORST R., VERMEER P.A., "*possibilities and limitations of finite elements for limit analysis"* Géotechnique, **34,** pp. 119-210 (1984).

[35] DE BORST R., *"Robustness in numerical computations of damage evolution in cohesive-frictional material",* Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, **4,** pp. 27-54 (1997).

[36] DE BORST R., HEERES O. M., *"Performance of low-Order triangular elements during plastic flow"* Engeneering Computations, **16, 1,** pp. 70-87 (1999).

[37] DESAI C.S., ZAMAN M.M., LIGHTNER J.G., SIRIWARDANE H.J., "*Thin layer element for interfaces and joints",* Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., **8**, pp. 19-43 (1984).

[38] DESSAI C.S., GIOCLA G., *"Modelling and Testing : Implementation of numerical models and their application in practice"* in "*Numerical Methodes and Constitutive Modelling in Geomechanics" Ed. C.S.,* C.I.S.M. Courses and Lectures, **311**, pp.1-168 (1990).

[39] DWORKIN J., "*large stains in cemented granular aggregates elastic-plastic cement"* Mechanics of Materials, **23**, pp. 29-44 (1996).

[40] ETEROVIC A. L., BATHE K., *"A Hyper-Elastic-Based Large Strain Elasto-Plastic Constitutive Formulation with Combined Isotropic-Kinematic Hardening using the Logarithmic stresses and Strain Measures"* Int. J. Numer. Meth. Engrg., **30,** pp. 1099-1114 (1990).

[41] FAMIYESIN O.R., *"Robust Symmetric Formulations for Nonassociated Plasticity Problems"*, Journal of Engineering Mechanics, **125**, **9**, pp. 1070-1080, (1999).

[42] FLETCHER R., *"Conjugate Gradient methods for indefinite systems"*, Lecture Notes Math., **506**, 73-89, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (1976).

[43] FELIX B., *"La méthode des éléments finis en viscoélasticité et en viscoplasticité. Application à la mécanique des sols"* Rapport de recherche LPC n°123 (1983).

[44] FREDLUNG D.G., *"The 1999 R.M. Hardy Lecture : The Implementation of unsaturated soil mechanics into geotechnical engineering"*, Can. Geotech. J., 37, pp. 963-986, (2000).

[45] GAY C., "Contribution à la simulation numérique tridimensionnelle du forgeage à froid", Thèse de Doctorat, ENSMP, (1995).

[46] GAWRONSKI W., *"Fuzzy Elements"* Computers and structures, **10,** pp. 863-865 (1979).

[47] GEE-CLOUGH D., WANG J., KANOK-NUKULCHAI W., *"Deformation and Failure in Wet Clay Soil : Part 3, Finite Element Analysis of Cutting of Wet Clay by Tines"*, J. agric. Engng. Res., **58**, pp.121-131, (1994).

[48] HASHASH Y.M.A., WHITTLE A.J. *"Integration of the modified Cam-Clay Model in non-linear finite element analysis"* Computers and geotechnics, **14,** pp. 59-83 (1992).

[49] HILD P. *"Problèmes de contact unilatéral et maillages éléments finis incompatibles"* Thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier, 1998.

[50] HSI J.P., SMALL J.C., *"Analysis of excavation in an elasto-plastic soil involving drawdown of the water table"* Computers and Geotechnics, **13**, pp.1-19 (1992).

[51] HU Y., RANDOLPH M.F., *"H-adaptaive FE analysis of elasto-plastic non-homogeneous soil with large deformation"*, Computers and Structures, **23**, pp. 61-83, (1998).

[52] HUANG T.K., CHEN W.F., CHAMEAU J.C., *"The application of cap-plasticity-model to embankment problems"* Computers and structures, **44,** pp. 1349-1369 (1992).

[53] ITASCA consulting, *"Documentation de FLAC2D© : strain-softening model"*, User's Manuel, Minneapolis, 1994.

[54] ITSKOV M., *"On the theory of fourth-order tensors and theior applications in computational mechanics",* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **189**, pp. 419-438, (2000).

[55] JAOUEN O., *"Modélisation tridimensionnelle par éléments finis pour l'analyse thermo-mécanique du refroidissement des pièces coulées"* Thèse Doct. Science et Génie des Matériaux, E.N.S.M.P., 1998.

[56] JARUSEK J., ECK C., *"Dynamic contact problems with friction in linear viscoelasticity"*, C. R. Acad. Sci. Paris, **322**, **I**, pp. 467-502, (1996).

[57] JEAN M., MOREAU J.J., *"Unilateraly and dry friction in dynamics of rigid bodies collections"*, Ed. par Curnier, Proceedings of the Contact Mechanics International Symposium, pages 31-48, lausanne, 1992. Presses polytechniques et Universitaires Romandes.

[58] JEREMIE B., *" Line search techniques for elasto-plastic finite element computations in geomechanics"*, Commun. Numer. Meth. Engng, **17**, pp. 115-125 (2000).

[59] KERYVIN V., DESOYER T., HANUS J-L., *"Localisation de la déformation sous sollicitations lentes : une approche dynamique"*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 328, Série II *b*, p. 727-732, (2000).

[60] KHOGO Y., NAKANO M., MIYAZAKI T., *"Theoretical Aspects of Constitutive Modelling for Unsaturated Soils"*, Soils and Foundations, **33**, **4**, pp. 49-63, (1993).

[61] KIOUSIS P.D., VOYADJIS G.Z., "*Lagrangean continuum theory for saturated porous media"* Journal of Engineering Mechanics., **111**, pp. 1277-1288 (1985).

[62] KIOUSIS P.D., VOYADJIS G.Z., TUMAY M.T., "*A Large Stain Theory for the Two-Dimentional Problems in Geomechanics",* Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., **10**, pp. 17-39 (1986).

[63] KOLMAYER P., "*Rhéologie et modélisation des Sols de surface pour l'interprétation in situ*", Rapport, ETAS, décembre 1998.

[64] KOLMAYER P., *"Modélisation du comportement Mécanique des Sols de Surface et Identification In Situ"*, Thèse de Doctorat en Génie Civil, Ecole Centrale de Lyon, 170 p., (2001).

[65] KUSHWAHA R.L., SHEN J., "*finite element analysis of dynamic interaction between soil and tillage tool*" ASAE, **37,** pp. 1315-1319 (1992).

[66] LABORDE P., TOSON B., PESQUE J.-J., *"On the consistent tangent operator algorithm for thermo-plastic problems"* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **146,** pp. 215-230 (1997).

[67] LAURSEN T.A., SIMO J.C., *"A continuum-based finite element formulation for the implicit solution of multibody, large deformation frictional contact problems"*, Int. J. Numer. Methods Eng., **36**, pp. 3451-3485, (1993).

[68] LEE E.H., *"Elastic-Plastic deformation at finite strains"* J. Appl. Mech. Trans. ASME, **36**, pp. 1-6 (1969).

[69] LEGENDRE A., BACCONNET C., "*Rapport d'essais de scarification*", LERMES, Ensemble Universitaire des Cézeaux, mai 2001.

[70] LIU Y., HOU Z.M., *"Three dimensionnal nonlinear finite element analysis of soil cutting by narrow blades"* in :Proc. of Int. Conf. On Soil Dynamics, Auburn, Ala. 2 :338-347. Nat. Tillage MachineryLab., Auburn, Ala (1985).

[71] LIU C.H., WONG J.Y., *"Numerical Simulations of tire-soil interaction based on Critical State Soil Mechanics"* Journal of Terramechanics, **33**, pp.209-221 (1997).

[72] MACARI E.J., WEIHE S., ARDUINO P., *"Implicit integration in elastoplastic constitutive models for frctional materials with highly non-linear hardening functions"*, Mech. Cohes.-Frict. Mater., **2**, pp. 1-29, (1997).

[73] MALEKI M., *" Modélisation hiérarchisée du comportement des Sols"*, Thèse de Doctorat en Génie Civil, Ecole Centrale de Lyon, 252 p., (1998).

[74] MARCON A.F., BITTENCOURT E., CREUS G.J., *"On the integration of stresses in large deformation plasticity"* Engineering Computations, **16**, pp 49-69, (1999).

[75] MARIE S. *"Un Modèle de Parallélisation S.P.M.D pour la Simulation Numérique de Procédés de Mise en Forme de Matériaux"*, Thèse de Doctorat, ENSMP, (1997).

[76] McMEEKING R.M., RICE J.R., "*Finite element formulations for problems of large elastic-plastic deformation"* Int. J. Solids struct., **11** pp.601-616 (1975).

[77] MESCHKE G., LIU C., MANG H.A., *"Large strain finite element analysis of snow"* J. Engrg. Mech., **122,** pp.591-602 (1996).

[78] MIJAR A.R., ARORA J.S., *"Review of Formulations for elastostatic frictional contact problems"*, Struct. Multidisc. Optim., **20**, pp. 167-

189, (2000).

[79] MIZUNO E., CHEN W.F., *"plasticity analysis of slope with different flow rules"* Computers and structures, **17**, pp. 375-388 (1983).

[80] MOCELLIN K., *" Contribution à la Simulation Numérique Tridimentionnelle du Forgeage à chaud : Etude du Contact et Calcul Multigrille"* Thèse Doct. Science et Génie des Matériaux, E.N.S.M.P., 1999.

[81] MOREAU J.J., *"Unilateral and dry friction in finite freedom dynamics"*, Ed. par J.J. Moreau & Panagiotopoulos, CISM Courses and Lectures 302 Springer-Verlag Wien New-York), Non-smooth Mechanics and Application, pages 1-82, (1988).

[82] MOUAZEN A.M., *"Modelling the interaction between the Soil and tillage tools"*, Ph. D. Thesis, submitted to the Hungarian Academy of Sciences, Budapest, Hungary, 128 p., (1997).

[83] MOUAZEN A.M., NEMENYI M., *"A review of the finite element modelling techniques of Soil tillage"*, Mathematics and Computers in Simulation, 48, pp. 23-32, (1998).

[84] MROUEH H., SHAHROUR I., *"Use of sparse iterative method for the resolution of three-dimensional soil / structure interaction problems"* Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., vol. 23, pp. 1961-1975, (1999).

[85] NAGTEGAAL J.C., DE JONG J.E., "*Some computational aspects of elastic-plastic larges stain analysis"* Int. J. Numer. Meth. Engrg., **17,** pp. 14-41 (1981).

[86] NAGTEGAAL J.C., *"On the implementation of inelastic constitutive equations with special reference to large deformation problems"* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **33,** pp. 469-484 (1982).

[87] NOUGUIER C., *"Simulation des Interactions Outil-Sol, Application aux Outils de Traitement des Sols"*, Thèse de Doctorat en Mécanique, Génie Mécanique, Génie Civil, Université Montpellier II, 144 p., (1999).

[88] ORTIZ M., POPOV E.P., *"Accuracy and Stability of Integration Algorithms for Elastoplastic Constitutive Relations"* Int. J. Num. Meth. Engrg., **21**, pp. 1561-1576, (1985).

[89] PALMER A.C., *"Speed effects in cutting and ploughing"*, Géotechnique, **49**, **3**, pp. 285-294, (1999).

[90] PERCHAT E., "MINI-élément et factorisation incomplètes pour la parallélisation d'un solveur de Stokes 2D. Application au Forgeage". Thèse de Doctorat, ENSMP, (2000).

[91] PETRYK H., *"Plastic Instability : Criteria and Computational Approaches"* Archives of Computational Methods in Engineering, Vol **4**, **2**, pp 111-151, (1997).

[92] PORAN C.J., RODRIGUEZ J.A., "*Finite element analysis of impact behavior of sand"* Soils and foundations, **32**(4), pp. 68-80 (1992).

[93] POTTS D.M., GENS A., *"A critical assessment of methods of correcting for drift from the yield surface in elastoplastic finite element analysis"* Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., **9,** pp. 149-159 (1985).

[94] PREVOST J.H., "*Mechanics of continuous porous media"* Int. J. Engng Sci., **18**, pp. 787-800 (1980).

[95] PREVOST J.H., "*SHORT COMMUNICATION : Localization of deformations in Elastic-Plastic Solids"* Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech., **11**, pp. 187-196 (1984).

[96] QUIBEL A., FROMENTIN M., "*Essais en vraie grandeur d'un dispositif expérimental de scarification des Sols",* Centre d'Expérimentation Routière, LCPC, Juin 2001.

[97] REGUEIRO R. A., BORJA R.I., *"Plane strain finite element analysis of pressure sensitive plasticity with stong discontinuity"*, Int. J. Solids. Structures, **38**, pp. 3647-3672, (2001).

[98] ROUAINIA M., MUIR WOOD D., *"An implicit constitutive algorithm for finite Cam-clay elasto-plastic model"*, Mech. Cohes.-Frict. Mater., , pp. 469-489, (2000).

[99] RUNESSON V., "*Implicit integration of elastoplastic relations with reference to soils"* Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech., **11**, pp. 315-321 (1987).

[100] RUNESSON K., "*A note on nonassociated plastic flox rules"* International Journal of Plasticity, **5**, pp. 639-658 (1989).

[101] SALENÇON J., *"Théorie de la plasticité pour les applications en mécanique des Sols"*, Eyrolles, (1974).

[102] SCHLOSSER F., "*Element de mecanique des sols*", Presse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, (1983).

[103] SHENG D.,SLOAN S.W., YU H.S. *" Aspects of finite element implementation of critical state models",* Computational Mechanics, 2000, **26**, **2**, pp 185-196, (2000).

[104] SIDOROFF F., *"Incremental constitutive equation for large strain elastoplasticity"* Int. J. Eng. Sci., **20**, pp. 19-26 (1982).

[105] SIMO J.C., TAYLOR R.L., *"Consistent tangent operator for rate-*

independent elastoplasticity" Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **48,** pp. 101-118 (1985).

[106] SIMO J.C., JU J-W., PISTER K.S., TAYLOR R.L., "*Assessment of Cap Model : Consistent Return Algorithms and Rate-Dependent Extension"* Journal of Engineering Mechanics, **114**, **2**, pp 191-218, (1988).

[107] SIMO J.C., KENNEDY J.G., GOVINDJEE S. K.S., *"Non-Smooth Multisurface Plasticity and Visco-Plasticity. Loading/Unloading Conditions and Numerical Algorithm"* Int. J. Num. Meth. Engrg., **26**, pp. 2161-2185, (1988).

[108] SIRIWARDANE H.J., DESAI C.S., *"Computational procedures for non linear three dimensional analysis with some advanced constitutive laws"* Int. J. Numer.Anal.Meth. Geomech., **7,** pp.143-171 (1983).

[109] SNITBHAN N., CHEN W.F., "*Elastic-plastic large deformation analysis of soil slopes"* Computers and structures, **9,** pp. 567-577 (1978).

[110] SONNELVED P., "CGS :a fast Lanczos-type solver for nonsymmetric linear systems", SIAM J. Sci. Statist. Comput., 10, 36-52, (1989).

[111] STOLLE D.F.E., VERMEER P.A., BONNIER P.G.,*" Time Integration of a constitutive law for soft clays"*, Commun. Numer. Meth. Engng, **15**, pp. 603-609 (1999).

[112] SZABO L., *"Comments on loss of strong ellipticity in elastoplasticity"*, Int. J. Solids. Structures, **37**, pp. 3775-3806, (2000).

[113] TANAKA H., INOOKU K., NAGASAKI Y., MIYASAKI M., SUMIKAWA O., OIDA A., *"Simulation of Soil Loosening at Subsurface Tillage using Vibrating Type Subsoiler by means of the Distinct Element Method"*, Proceedings of the 8th European Conference of ISTVS, Umeå, Sweden, (2000).

[114] TRAORE K., "*Simulation thermomécanique du laminage circulaire : développement d'une formulation quasi-eulérienne tridimensionnelle sur une architecture parallèle.*", thèse de Doctorat, ENSMP, 2001

[115] VAN DER VORST H. A., "BI-CGSTAB : *A Fast and Smoothly Converging Variant of BI-CG for the Solution of Non-Symmetric Linear Systems"* J. Sci. Stat. Comput., vol. 13, No 2, pp 631-644, (1992).

[116] VAN DER VORST H. A. *"Parallel iterative solution methods for linear systems arising from discretized pde's"*. Technical Report AGARD R-807, Proc. of Special Course on Parallel Computing in CFD, 1-39, AGARD, Neully-sur-Seine, 1995.

[117] VAN DER VORST H. A., VUIK C., *"The Superlinear Convergence*

Behaviour of GMRES" Journal of Computational and Applied Mathematics (North Holland), vol. 48, pp. 327-341, (1993).

[118] VOYIADJIS G.Z., ABU-FARSAKH M.Y., *"Coupled Theory of Mixtures for Clayey Soils"* computers and geotechnics, **20,** pp. 195-222 (1997).

[119] WANG C.H., HU W., SAWYER J.P.G., "*Explicit numerical integration algorithm for a class of non-linear kinematic hardening model"* Computational Mechanics, 2000, Vol **26**, **2**, pp 140-147 (2000).

[120] WANG J., GEE-CLOUGH D., *"Deformation and Failure in Wet Clay Soil : Part 2, Soil Bin Experiments"*, J. agric. Engng. Res., **54**, pp.57-66, (1993).

[121] WRIGGERS P., *"Finite Element Algorithms for Contact Problems"*, Archives of Computational Methods in Engineering, State of the art reviews, **2**, **4**, pp. 1-49, (1995).

[122] XIE X.M., ZHANG D.J., *"An approach to 3-D nonlinear FE simulative method for investigation of soil-tool dynamic system"* in :Proc. of Int. Conf. On Soil Dynamics, Auburn, Ala. 2 :322-327. Nat. Tillage MachineryLab., Auburn, Ala (1985).

[123] YONG R.N., HANNA A.W., *"Finite element analysis of plane soil cutting"* Journal of terramechanics, **14,** pp. 103-125 (1977).

[124] ZHU Y., FOX P.J., MORRIS J.P., *"A pore-scale numerical model for flow through porous media"*, Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., 23, pp. 881-904, (1999).

[125] ZHANG H.W., SANAVIA L., SCHREFLER B.A., *"Gradient-dependent plasticity model and dynamic strain localisation of saturated and partially saturated porous media : one dimensional model"*, Eur. J. Mech. A/Solids, **19**, pp. 503-524, (2000).

[126] ZHANG H.W., SANAVIA L., SCHREFLER B.A., *"Numerical analysis of dynamic strain localisation in initially water saturated dense sand with a modified generalised plasticity model"*, Computers and structures, **79**, pp. 441-459, (2001).

Chapitre 3 Modélisation

3.1 INTRODUCTION 52

3.2 EQUATIONS DE LA MECANIQUE 53

3.2.1 EQUATION D'EQUILIBRE 53
3.2.2 LOI DE COMPORTEMENT 53
3.2.3 CONDITIONS AUX LIMITES 54
3.2.4 LE SYSTEME D'EQUATIONS A RESOUDRE : LE PROBLEME FORT $\wp_F$ 57

3.3 FORMULATION VARIATIONNELLE 58

3.3.1 FORMULATION FAIBLE CONTINU 58
3.3.2 FORMULATION FAIBLE ET CONTACT PENALISE 58
3.3.3 LE PROBLEME INCREMENTAL 60

3.4 SCHEMA D'INTEGRATION TEMPORELLE 62

3.4.1 INTEGRATION DE LA LOI DE COMPORTEMENT 62
3.4.2 INTEGRATION DE LA LOI DE FROTTEMENT 64
3.4.3 CONTACT INCREMENTAL PENALISE 65
3.4.4 NOUVEAU PROBLEME INCREMENTAL 66
3.4.5 FORMULATION INCREMENTALE MIXTE VITESSE PRESSION 67
3.4.6 ALGORITHME DE RESOLUTION 69

3.5 DISCRETISATION SPATIALE 70

3.5.1 DISCRETISATION ELEMENTS FINIS : P1+/P1 70
3.5.2 DISCRETISATION *MINI ELEMENT* 75
3.5.3 EXPRESSION DU MODULE TANGENT GLOBAL ET CONDENSATION 79

3.6 MAILLAGE / REMAILLAGE 82

3.6.1 LE MAILLEUR 82
3.6.2 RAFFINEMENT DE MAILLAGE 85
3.6.3 CRITERE DE REMAILLAGE 85
3.6.4 TRANSPORT 86

3.7 CONCLUSIONS 87

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous donnons la discrétisation temporelle et spatiale des équations de la mécanique qui régissent le procédé de scarification. Nous donnons dans un premier temps la formulation du problème *fort* continu, puis sa formulation faible (base de la méthode des éléments finis) et le problème incrémental associé. Nous donnons ensuite le schéma d'intégration temporel appliqué au problème incrémental mixte vitesse/pression ainsi que l'algorithme de résolution global. Enfin nous abordons la discrétisation spatiale du problème par l'élément mixte P1+/P1.

3.2 Equations de la mécanique

3.2.1 Equation d'équilibre

Dans le cadre particulier de l'interaction Outil/Sol, le domaine Ω occupé par le sol est semi infini. On note Γ sa frontière. Les forces liées à la gravité ainsi que les termes d'inertie interviennent significativement [89] : l'influence de la vitesse a été mise en évidence, même pour des vitesses faibles, en scarification. Le domaine Ω évolue au cours du temps et on note $\Omega(t)$ (ou Ω^t) la configuration déformée à l'instant t. L'équilibre dynamique s'écrit, à chaque instant t :

$$Div\sigma + \rho g = \rho \ddot{u} \quad \text{dans } \Omega(t) \qquad \textbf{(3.1)}$$

où σ est le tenseur des contraintes de Cauchy, ρ la masse volumique, g la gravité et $\ddot{u}$ l'accélération.

3.2.2 Loi de Comportement

Nous décrivons les équations qui régissent un comportement hypo-élastique-plastique avec écrouissage. Nous nous plaçons sous l'hypothèse des petites déformations.

On rappelle la décomposition additive des vitesses de déformations en une partie élastique et une partie plastique :

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^E + \dot{\varepsilon}^P \qquad \textbf{(3.2)}$$

avec $\dot{\varepsilon} = \varepsilon(\dot{u}) = \frac{1}{2}\left(\nabla\dot{u} + \nabla\dot{u}^{\mathrm{T}}\right)$.

La loi hypoélastique qui lie la dérivée du tenseur des contraintes au tenseur des vitesses de déformations *élastiques* :

$$\dot{\sigma} = L\dot{\varepsilon}^E \qquad \textbf{(3.3)}$$

Où L est le tenseur l'élasticité d'ordre 4.

En grandes déformations c'est la dérivée des contraintes de *Jaumann* qui est utilisée.

Si f est le critère de plasticité, on détermine le convexe fermé P de plasticité par :

$$P = \{(\sigma, R) \in \mathrm{IR}^6 \times \mathrm{IR}^q : f(\sigma, R) \leq 0\} \qquad \textbf{(3.4)}$$

Où σ est l'état de contrainte et R le vecteur dont les composantes sont les différentes variables d'écrouissage (q ≥ 1).
La loi d'écoulement plastique est donnée, dans le cas non associé par :

$$\dot{\varepsilon}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial h}{\partial \sigma}(\sigma, R) \qquad \textbf{(3.5)}$$

Où $\dot{\lambda}$ est le *multiplicateur plastique* ou *paramètre de consistance plastique*, qui satisfait les *conditions de Kuhn-Tucker* suivantes :

$$\dot{\lambda} \geq 0; \quad f(\sigma, R) \leq 0; \quad \dot{\lambda} f(\sigma, R) \equiv 0 \qquad \textbf{(3.6)}$$

L'évolution de la variable interne R est spécifiée par la loi d'écrouissage :

$$\dot{R} = \dot{\lambda} \Psi(\sigma, R) \qquad \textbf{(3.7)}$$

L'évolution de la force thermomécanique associée à la variable interne *R* :

$$\dot{\kappa} = -\dot{\lambda} \frac{\partial h}{\partial R}(\sigma, R) \qquad \textbf{(3.8)}$$

Compressibilité

Nous avons vu au chapitre précédent que la déformation des sols s'accompagne d'une variation de volume, qui peut être positive (dilatance) ou négative (contraction). Ainsi nous ne sommes plus dans le cas de matériaux incompressible et on a :

$$\mathrm{tr}(\dot{\varepsilon}^E) \neq 0 \quad et \quad \mathrm{tr}(\dot{\varepsilon}^P) \neq 0 \qquad \textbf{(3.9)}$$

3.2.3 Conditions aux limites

On détermine une partition disjointe de la frontière *Γ(t)*, comme suit :

$$\Gamma(t) = \Gamma_D^t \cup \Gamma_N^t \cup \Gamma_C^t \qquad \textbf{(3.10)}$$

Condition de Dirichlet

Sur la partie de la frontière Γ_D^t on a une condition de déplacement ou de vitesse imposée, *condition de Dirichlet*.

$$\dot{u} = v_D \quad \text{sur } \Gamma_D^t \qquad \textbf{(3.11)}$$

Cette condition intervient éventuellement, lors de la restriction du domaine Ω à un domaine fini. On impose alors une vitesse nulle sur cette partie de la frontière $v_D = 0$.

Condition de Neumann

Γ_N est la surface libre du problème, pour laquelle le sol n'est soumis à aucune contrainte. :

$$\sigma n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N^t \tag{3.12}$$

n est la normale sortante au domaine Ω.

Condition de Contact

La partie Γ_C^t représente la zone de contact *potentielle* entre l'outil de scarification, considéré comme un solide rigide impénétrable, et le sol. La condition de contact est de type *unilatéral*, *Condition de Signorini*, (après contact il peut y avoir décollement) :

$$d \geq 0\,; \quad \sigma_n \leq 0; \quad d.\sigma_n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_C^t \tag{3.13}$$

Avec d fonction distance définie par :

$$\begin{aligned} d &= d^o + u_n^o - u_n \quad \left(d \geq 0 \Rightarrow u_n \leq u_n^o\right) \\ u_n &= u.n \\ \sigma_n &= (\sigma n.n)n \end{aligned} \tag{3.14}$$

où u_n^o est le déplacement normal de l'outil et d^o le gap initial.

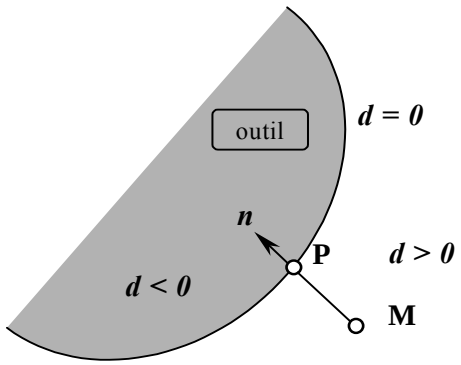


Figure 3.1 : $d = MP.n$, fonction saut du contact

La première inégalité de (3.13) exprime que la distance de tout point de la surface de contact potentielle à l'outil est positive ou nulle : c'est la condition de non pénétration. La deuxième inégalité exprime que la réaction du matériau (σ_n pression de contact) est compressive ou nulle. La dernière

équation est la *condition de complémentarité* qui exprime l'aspect unilatéral du contact :

- Si $d = 0$ (*il y a contact*) et $\sigma_n < 0$
- Sinon $d > 0$ et $\sigma_n = 0$, *il y a décollement et la réaction est nulle*

La surface de contact *potentielle* est connue et englobe la surface de contact *effective* (zone de contact réelle) qui, elle, est une inconnue du problème. La notion de zone de contact potentielle escamote cette difficulté et permet l'écriture variationnelle des *conditions de contact*.

Une formulation du contact unilatéral en vitesse existe aussi. Les équations du contact sont alors écrites sur la surface de contact effective. Le signe de l'état de contrainte à l'instant t détermine *la tendance* à un décollement ou non de matière, et donc aussi la vitesse normale à l'instant t.

Dans l'écriture des équations de contact (3.13) on confond les normales sortantes à l'outil et au domaine Ω (on parle de conditions de contact linéarisées). Cette linéarisation est communément admise dans le cadre des petites transformations. Cette linéarisation n'apparaît plus licite dans le cadre des grandes déformations. Néanmoins nous verrons que la mise en œuvre numérique de ces équations s'effectue dans un schéma itératif temporel, pour lequel, à chaque incrément de temps, on reste dans le cadre des petites transformations.

Frottement

La loi tribologique choisie pour modéliser le frottement est la *loi de Coulomb* :

$$|\sigma_T| \leq \mu |\sigma_n| \quad \text{sur } \Gamma_C^t \qquad \textbf{(3.15)}$$

où la scission de frottement est définie par : $\sigma_T = \sigma n - (\sigma n.n)n$ *et* μ *est le coefficient de frottement de Coulomb.*

Si $d=0$:

$$\begin{aligned} &\text{si } |\sigma_T| < \mu |\sigma_n| \Rightarrow (\dot{u}_T - v_T^o) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_C^t \\ &\text{si } |\sigma_T| = \mu |\sigma_n| \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } (\dot{u}_T - v_T^o) = -\lambda \sigma_T \quad \text{sur } \Gamma_C^t \end{aligned} \qquad \textbf{(3.16)}$$

Où $\dot{u}_T$ *est la vitesse tangentielle,* v_T^o *est la vitesse tangentielle de l'outil,* $v_G = \dot{u}_T - v_T^o$ *est la vitesse de glissement.*

Cette loi exprime que au delà d'un certain seuil la contrainte de frottement est proportionnelle à la vitesse de glissement.

3.2.4 Le système d'équations à résoudre : Le Problème Fort $\wp_f$

Nous pouvons maintenant écrire le problème mécanique d'évolution qui décrit le procédé de scarification.

Trouver le champ de déplacement solution de :

$$\wp_f \begin{cases} \textbf{\textit{Equation d'équilibre dynamique}} : \\ Div\sigma + \rho g = \rho \ddot{u} \text{ dans } \Omega(t) \\ \\ \textbf{\textit{Loi de comportement compressible}} \\ \text{dans } \Omega(t) \\ \\ \textbf{\textit{Condition de Dirichlet}} \text{ sur } \Gamma_D(t) \\ \textbf{\textit{Condition de surface libre}} \text{ sur } \Gamma_N(t) \\ \\ \textbf{\textit{Condition de Contact Unilatéral}} \text{ sur } \Gamma_C(t) \\ \textbf{\textit{Frottement de Coulomb}} \text{ sur } \Gamma_C(t) \\ \\ \textbf{\textit{Conditions Initiales :}} \\ u(x,0) = u_0(x); \quad \dot{u}(x,0) = v_0(x); \quad \sigma(x,0) = \sigma_0(x); \quad R(x,0) = R_0(x); x \in \Omega \end{cases} \tag{3.17}$$

3.3 Formulation variationnelle

3.3.1 Formulation faible continu

Trouver $(u,\sigma,R,\sigma_n,\sigma_T)$ *respectivement le champ de déplacement, l'état de contrainte, la variable interne R, la pression de contact et la scission de frottement tels que, pour presque tout t, on ait :*

$$\dot{u} - v_D \in V_0^t;\ (\sigma,R) \in P;\quad \sigma_n \in C_n;\ \sigma_T \in C_T(\sigma_n) \tag{3.18}$$

Avec

$$\begin{aligned}
&V_0^t = \left\{ w : w = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D^t \right\} \\
&P = \left\{ (\tau,Q) : f(\tau,Q) \le 0 \right\} \\
&E(\sigma,R) = \left\{ (\tau,Q) : h(\tau,Q) \le h(\sigma,R) \right\} \\
&C_n = \left\{ \zeta : \zeta_n \le 0 \quad \text{sur } \Gamma_C^t \right\} \\
&C_T(\sigma_n) = \left\{ \xi : |\xi_T| \le \mu|\sigma_n| \quad \text{sur } \Gamma_C^t \right\}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\int_{\Omega^t} \rho \ddot{u} w \, d\varpi + \int_{\Omega^t} \sigma\varepsilon(w) \, d\varpi = \int_{\Omega^t} \rho g w \, d\varpi + \int_{\Gamma_C^t} \sigma_n \cdot w_n \, d\varpi + \int_{\Gamma_C^t} \sigma_T \cdot w_T \, d\varpi \quad \forall w \in V_0^t \tag{3.20}$$

$$\int_{\Omega^t} \left(L^{-1}\dot{\sigma} - \varepsilon(\dot{u}) \right)(\tau - \sigma) \, d\varpi + \int_{\Omega^t} \dot{\kappa}(Q - R) \, d\varpi \ge 0 \quad \forall (\tau,Q) \in E(\sigma,R) \tag{3.21}$$

$$\int_{\Gamma_C^t} \left(u_n^o - u_n \right)(\zeta_n - \sigma_n) \, dS \ge 0 \quad \forall \zeta \in C_n \tag{3.22}$$

$$\int_{\Gamma_C^t} \left(\dot{u}_T - v_T^0 \right)(\xi_T - \sigma_T) \, dS \ge 0 \quad \forall \xi \in C_T(\sigma_n) \tag{3.23}$$

$$u(x,0) = u_0(x);\quad \dot{u}(x,0) = v_0(x);\quad \sigma(x,0) = \sigma_0(x);\quad R(x,0) = R_0(x);\ x \in \Omega \tag{3.24}$$

3.3.2 Formulation faible et contact pénalisé

L'équation (3.22) est la formulation variationnelle de la condition de contact unilatéral. La pression de contact est alors une inconnue du problème. Dans notre approche la condition de contact est prise en compte par pénalisation.

Pénalisation du contact

La contrainte normale est exprimée en fonction du déplacement via un opérateur O. Cet opérateur fait appel à un coefficient de pénalisation θ et à l'opérateur $[\,.\,]^+ = \max\{0,.\}$. Pour $\theta < +\infty$, la condition de contact est vérifiée de façon approchée (avec une précision de $\frac{1}{\theta}$). Lorsque la condition de non pénétration est violée on exerce une force de réaction proportionnelle à la pénétration. La mise en œuvre numérique pratique nécessite un choix de paramètre judicieux. Pour un coefficient de pénalisation trop grand on a une bonne approximation de la condition de contact, mais un mauvais conditionnement du problème. Le choix d'un coefficient trop petit entraîne une prise en compte du contact non satisfaisante.

Les méthodes de *Lagrangien* ou *Lagrangien Augmenté* autorisent une prise en compte exacte de la condition de contact. La pression de contact devient une inconnue du problème. Dans une discrétisation par éléments finis se pose le problème du choix d'espace fonctionnel correct pour les multiplicateurs de Lagrange (*P.Hild* [50]). Pour une description plus approfondie de l'état de l'art de la problématique du contact, nous proposons par exemple l'article de *P. Wriggers* [121]. Pour une présentation pédagogique des méthodes de *Pénalisation* et de *Lagrangien*, nous proposons l'article de *Mijar A.R. et al.* [78].

Dans le cas pénalisé la contrainte normale est donnée par :

$$\sigma_n = -\theta[-d]^+ \qquad \textbf{(3.25)}$$

Où

$$d = u_n^o - u_n$$

L'équation (3.20) devient alors :

$$\int_{\Omega^t} \rho \ddot{u} w \, d\varpi + \int_{\Omega^t} \sigma \varepsilon(w) \, d\varpi = \int_{\Omega^t} \rho g w \, d\varpi - \theta \int_{\Gamma_C^t} [u_n - u_n^o]^+ w_n \, dS + \int_{\Gamma_C^t} \sigma_T w_T \, dS \quad \forall w \in V_0^t \qquad \textbf{(3.26)}$$

Le problème à résoudre devient :

> *Trouver* (u, σ, R, σ_T) *respectivement le champ de déplacement, l'état contrainte, la variable interne R, et la cission de frottement , solutions pour presque tout t, de* (3.18),(3.21),(3.23),(3.24) *et* (3.26).

3.3.3 Le problème incrémental

Le procédé de Scarification est un procédé non stationnaire au cours du temps. On peut supposer que au delà d'un temps caractéristique T_{carac}, qui dépend de la géométrie de l'outil et de la nature du sol, le procédé devient stationnaire. Néanmoins notre étude porte sur la partie in-stationnaire où la variable temporelle joue un rôle crucial. La mise en œuvre numérique du problème d'évolution nécessite une discrétisation temporelle des équations.

$$[0,T_{carac}] = \bigcup_{i=1,N} [t_i, t_i + \Delta t_i] \qquad (3.27)$$

On adopte une description en *Lagrangien Réactualisé* ou la configuration de référence est la configuration en début d'incrément. Nous utilisons donc le tenseur des déformations linéarisé. Cependant on utilise toujours la dérivée de *Jaumann* du teneur des contraintes de *Cauchy*.

On approche la vitesse et l'accélération à $t+\Delta t$, par :

$$\dot{u}^{t+\Delta t} = \frac{u^{t+\Delta t} - u^t}{\Delta t} \qquad (3.28)$$

$$\ddot{u}^{t+\Delta t} = \frac{\dot{u}^{t+\Delta t} - \dot{u}^t}{\Delta t} \qquad (3.29)$$

L'écriture incrémentale de (3.18) devient alors :

$$\frac{u^{t+\Delta t} - u^t}{\Delta t} - v_D \in V_0^t;\ \left(\sigma^{t+\Delta t}, R^{t+\Delta t}\right) \in P;\ \sigma_T \in C_T^{t+\Delta t} = C_T\left(\sigma_n^{t+\Delta t}\right) \qquad (3.30)$$

Les formes incrémentales des équations d'équilibre (3.20), de comportement (3.21) et de frottement (3.23) sont alors les suivantes :

$$\int_{\Omega^t} \rho \frac{\dot{u}^{t+\Delta t} - \dot{u}^t}{\Delta t} w \, d\varpi + \int_{\Omega^t} \sigma^{t+\Delta t} \varepsilon(w) \, d\varpi = \int_{\Omega^t} \rho g w \, d\varpi - \theta \int_{\Gamma_C^t} \left[-d^{t+\Delta t}\right]^+ w_n \, dS + \int_{\Gamma_C^t} \sigma_T^{t+\Delta t} w_T \, dS \quad \forall w \in V_0^t \qquad (3.31)$$

$$\int_{\Omega^t} \left(L^{-1} \dot{\sigma}^{t+\Delta t} - \varepsilon\left(\frac{u^{t+\Delta t} - u^t}{\Delta t}\right) \right) \left(\tau - \sigma^{t+\Delta t}\right) d\varpi + \int_{\Omega^t} \dot{\kappa}^{t+\Delta t} \left(Q - R^{t+\Delta t}\right) d\varpi = 0 \quad \forall (\tau, Q) \in P \qquad (3.32)$$

$$\int_{\Gamma_C^t} \left(\frac{u_T^{t+\Delta t} - u_T^t}{\Delta t} - v_T^0 \right) \left(\xi_T - \sigma_T^{t+\Delta t}\right) dS \geq 0 \quad \forall \xi \in C_T(\sigma_n^{t+\Delta t}) \qquad (3.33)$$

Le problème incrémental est donné par :

Trouver $\left(u^{t+\Delta t}, \sigma^{t+\Delta t}, R^{t+\Delta t}, \sigma_T^{t+\Delta t}\right) \in \left(V_0^t \times P \times C_T^{t+\Delta t}\right)$ *respectivement le champ de déplacement, l'état contrainte, la variable interne R, et la scission de frottement , solutions à l'instant t+Δt de* (3.31) (3.32) *et*(3.33).

3.4 Schéma d'Intégration Temporelle

Nous traitons dans la suite l'algorithme de résolution en temps du problème incrémental. Nous donnons l'intégration de la loi de comportement, de la loi de frottement ainsi que la condition de contact pénalisée. Ces équations intégrées nous permettent d'aboutir à une formulation mixte Vitesse / Pression.

3.4.1 Intégration de la loi de comportement

La loi de comportement est intégrée de façon purement implicite. Nous écrivons ci-dessous les équations constitutives continues du comportement hypo-élasto-plastiques (section 3.2.2) à l'instant $t+\Delta t$:

Les vitesses de déformations

$$\dot{\varepsilon}^{t+\Delta t} = \varepsilon\left(\dot{u}^{t+\Delta t}\right) \tag{3.34}$$

La loi hypo-élastique :

$$\dot{\sigma}^{t+\Delta t} = L\left(\dot{\varepsilon}^{t+\Delta t} - \dot{\varepsilon}^{P\,t+\Delta t}\right) \tag{3.35}$$

L'écoulement plastique :

$$\dot{\varepsilon}^{P\,t+\Delta t} = \dot{\lambda}^{t+\Delta t}\frac{\partial h}{\partial \sigma}\left(\sigma^{t+\Delta t}, R^{t+\Delta t}\right) \tag{3.36}$$

Les lois d'évolutions de la variable interne et de la force thermo-mécanique associée :

$$\begin{aligned} \dot{\kappa}^{t+\Delta t} &= -\dot{\lambda}^{t+\Delta t}\frac{\partial h}{\partial R}\left(\sigma^{t+\Delta t}, R^{t+\Delta t}\right) \\ \dot{R}^{t+\Delta t} &= \dot{\lambda}^{t+\Delta t}\Psi\left(\sigma^{t+\Delta t}, R^{t+\Delta t}\right) \end{aligned} \tag{3.37}$$

Les conditions de Kuhn-Tucker

$$\dot{\lambda}^{t+\Delta t} \geq 0; \quad f\left(\sigma^{t+\Delta t}, R^{t+\Delta t}\right) \leq 0; \quad \dot{\lambda}^{t+\Delta t} f\left(\sigma^{t+\Delta t}, R^{t+\Delta t}\right) \equiv 0 \tag{3.38}$$

En appliquant un schéma d'Euler implicite on obtient la forme discrète intégrée de ces équations :

L'incrément de déformation totale et l'incrément de déformation plastique :

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon^{t+\Delta t} &= \Delta t\,\varepsilon\left(\dot{u}^{t+\Delta t}\right) = \varepsilon\left(u^{t+\Delta t} - u^{t}\right) \\ \Delta\varepsilon^{P\,t+\Delta t} &= \Delta t\,\dot{\varepsilon}^{P\,t+\Delta t} \end{aligned} \tag{3.39}$$

L'état de contrainte en fin d'incrément :

$$\sigma^{t+\Delta t} = \sigma^{t} + L\left(\Delta\varepsilon^{t+\Delta t} - \Delta\varepsilon^{P\,t+\Delta t}\right) \tag{3.40}$$

L' incrément de déformation plastique est donné par :

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon^{P\,t+\Delta t} &= \Delta t\dot{\varepsilon}^{P\,t+\Delta t} \\ \Delta\lambda^{t+\Delta t} &= \Delta t\dot{\lambda}^{t+\Delta t} \\ \Delta\varepsilon^{P\,t+\Delta t} &= \Delta\lambda^{t+\Delta t}\frac{\partial h}{\partial\sigma}\left(\sigma^{t+\Delta t}, R^{t+\Delta t}\right) \end{aligned} \tag{3.41}$$

La loi non linéaire d'évolution du paramètre d'écrouissage est donné dans une forme générale par :

$$\begin{aligned} \Delta\kappa^{t+\Delta t} &= -\Delta\lambda^{t+\Delta t}\frac{\partial h}{\partial R}\left(\sigma^{t+\Delta t}, R^{t+\Delta t}\right) \\ R^{t+\Delta t} &= H\left(\sigma^{t+\Delta t}, R^{t+\Delta t}, \kappa^{t+\Delta t}\right) \end{aligned} \tag{3.42}$$

Les conditions de *Kuhn et Tucker* discrètes sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta\lambda^{t+\Delta t} &\geq 0; \\ f\left(\sigma^{t+\Delta t}, R^{t+\Delta t}\right) &\leq 0; \\ \Delta\lambda^{t+\Delta t} f\left(\sigma^{t+\Delta t}, R^{t+\Delta t}\right) &\equiv 0. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Les équations (3.40), (3.41), (3.42) et (3.43) déterminent *la loi de comportement incrémentale*. C'est une linéarisation de la loi continue par le schéma d'intégration implicite.

Résoudre la loi de comportement incrémentale consiste à déterminer les variables $\left(\sigma^{t+\Delta t}, R^{t+\Delta t}, \Delta\varepsilon^{P\,t+\Delta t}\right)$ vérifiant les équations (3.40),(3.41),(3.42), à l'aides des conditions de *Kuhn et Tucker* discrètes (3.43). En insérant l'équation (3.41) dans l'équation (3.40) on obtient :

$$\sigma^{t+\Delta t} = \sigma^{t} + L\Delta t\left(\varepsilon\left(\dot{u}^{t+\Delta t}\right)\right) - L\Delta t\left(\dot{\lambda}^{t+\Delta t}\frac{\partial h}{\partial\sigma}\left(\sigma^{t+\Delta t}, R^{t+\Delta t}\right)\right) \tag{3.44}$$

on définit le *prédicteur élastique* comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma^{trial} &= \sigma^{t} + L\Delta t\left(\varepsilon\left(\dot{u}^{t+\Delta t}\right)\right) \\ R^{trial} &= R^{t} \end{aligned} \tag{3.45}$$

Cette résolution s'interprète alors géométriquement comme la re-projection sur le critère de plasticité, dans le cas où $f\left(\sigma^{trial}, R^{trial}\right) > 0$, du prédicteur élastique. Les directions de re-projections dépendent de la normale au potentiel et des coefficients de gonflement et de cisaillement d'élasticité.

On a l'écriture synthétique suivante, où l'état de contrainte est relié à la déformation par un opérateur de projection Proj_P :

$$\sigma^{t+\Delta t} = \mathrm{Proj}_{P=\{(\sigma,R):f(\sigma,R)\leq 0\}}\left(\sigma^t + L\Delta t\left(\varepsilon\left(\dot{u}^{t+\Delta t}\right)\right)\right) \qquad \textbf{(3.46)}$$

La mise en œuvre de cet opérateur nécessite le calcul du multiplicateur plastique à t+Δt. L'obtention de ce multiplicateur permet de résoudre la loi de comportement incrémentale en donnant : le nouvel état de contrainte σ, les déformations plastiques $\Delta\varepsilon^P$ ainsi que la variable d'écrouissage R à l'instant $t+\Delta t$.

Cet opérateur correspond à l'identité lorsque le $f\left(\sigma^{trial},R^{trial}\right)<0$, on est alors dans le cas d'un comportement élastique.

Dans une écriture découplée déviateur/pression on a :

$$\sigma^{t+\Delta t} = s^{t+\Delta t} - p^{t+\Delta t}\mathrm{I} \qquad \textbf{(3.47)}$$

L'état de contrainte déviatoire et la pression en fin d'incrément sont donnés par :

$$\begin{aligned} s^{t+\Delta t} &= s^t + 2G\Delta t\left(e\left(\dot{u}^{t+\Delta t}\right)\right) - 2G\left(\Delta\lambda^{t+\Delta t}\frac{\partial h}{\partial s}\left(s^{t+\Delta t},p^{t+\Delta t},R^{t+\Delta t}\right)\right) \\ p^{t+\Delta t} &= p^t + K\Delta t\,\mathrm{tr}\left(\varepsilon\left(\dot{u}^{t+\Delta t}\right)\right) - K\left(\Delta\lambda^{t+\Delta t}\frac{\partial h}{\partial p}\left(s^{t+\Delta t},p^{t+\Delta t},R^{t+\Delta t}\right)\right) \end{aligned} \qquad \textbf{(3.48)}$$

Dans le cas d'une élasticité non linéaire les paramètres d'élasticité évoluent avec la variable temporelle : $G^{t+\Delta t}, K^{t+\Delta t}$.

3.4.2 Intégration de la loi de Frottement

Nous utilisons en fait une loi de frottement régularisée qui escamote la notion de seuil de glissement. On relie par une relation univoque la contrainte tangentielle à la vitesse de glissement via le coefficient de frottement et la contrainte normale :

$$\sigma_T^{t+\Delta t} = -\mu\left|\sigma_n^t\right|\frac{v_G^{t+\Delta t}}{\sqrt{\left|v_G^{t+\Delta t}\right|^2 + v_{G0}^2}} \qquad \textbf{(3.49)}$$

Où v_{G0} est un terme de régularisation.

L'intégration de cette loi est explicite puisque que l'on utilise la pression normale en début d'incrément. Cette relation à lieu pour les points de la zone

de contact en début d'incrément : Γ_C^t. Le plan tangent à la surface de contact (effective) est celui de début d'incrément.

3.4.3 Contact Incrémental Pénalisé

Le contact étant pénalisé la difficulté est de déterminer la variable pénétration $d = u_n^o - u_n$ à $t+\Delta t$. Sur la surface de contact la pression de contact en fin d'incrément est donnée par :

$$\sigma_n^{t+\Delta t} = -\theta\left[-d^{t+\Delta t}\right]^+ \qquad \textbf{(3.50)}$$

On cherche à exprimer la condition de non pénétration en fin d'incrément $(t+\Delta t)$:

$$d^{t+\Delta t} \geq 0$$

En ce sens le traitement du contact est *implicite* en temps. On cherche alors à déterminer une approximation de la fonction saut. Pour cela on effectue une linéarisation à l'ordre 1 comme suit (*K. Mocellin* [80]) :

$$\begin{aligned} d^{t+\Delta t} &= d^t + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(d^t)\Delta t + O(\Delta t^2) \\ &= d^t + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(M^t P^t \cdot n^t)\Delta t + O(\Delta t^2) \\ &= d^t + \frac{\mathrm{d}\left(P^t - M^t\right)}{\mathrm{dt}} \cdot n^t \Delta t + \left(P^t - M^t\right) \cdot \frac{\mathrm{d}n^t}{\mathrm{dt}} + O(\Delta t^2) \end{aligned} \qquad \textbf{(3.51)}$$

En posant :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}P^t}{\mathrm{dt}} &= v^o \\ \frac{\mathrm{d}M^t}{\mathrm{dt}} &= \dot{u}^t \end{aligned} \qquad \textbf{(3.52)}$$

On a la fonction distance approchée $d_{\text{approx}}^{t+\Delta t}$, donnée par :

$$d_{\text{approx}}^{t+\Delta t} = d^t + \left(v^o - \dot{u}^{t+\Delta t}\right) \cdot n^t \Delta t \geq 0 \qquad \textbf{(3.53)}$$

Pour évaluer cette fonction approchée les données du contact (normales et distance à l'outil) sont calculées à l'instant t (début d'incrément) et supposées constantes sur tout l'incrément. En ce sens la méthode de prise en compte du contact est *explicite*. On approche localement l'outil par un plan.

3.4.4 Nouveau Problème incrémental

Après avoir décrit les intégrations temporelles de la loi de comportement, de la loi de frottement et des conditions de contact, nous obtenons le nouveau problème incrémental suivant :

Trouver le champ de vitesse $\dot{u}^{t+\Delta t} \in V_0^t$, solution à l'instant $t+\Delta t$ de :

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega^t} \rho \frac{\dot{u}^{t+\Delta t} - \dot{u}^t}{\Delta t} w \, d\varpi + \int_{\Omega^t} \sigma^{t+\Delta t}\left(\dot{u}^{t+\Delta t}\right) \varepsilon(w) \, d\varpi = \int_{\Omega^t} \rho g w \, d\varpi \\ &\quad - \theta \int_{\Gamma_C^t} \left[-d_{\text{approx}}^{t+\Delta t}\left(\dot{u}^{t+\Delta t}\right)\right]^+ w_n \, dS + \int_{\Gamma_C^t} \sigma_T^{t+\Delta t}\left(\dot{u}^{t+\Delta t}, \sigma_n^t\right) w_T \, dS \quad \forall w \in V_0^t \end{aligned} \tag{3.54}$$

avec

$$\sigma^{t+\Delta t} = \text{Proj}_{P=\{(\sigma,R):f(\sigma,R)\leq 0\}}\left(\sigma^t + L\Delta t\left(\varepsilon\left(\dot{u}^{t+\Delta t}\right)\right)\right) \tag{3.55}$$

Ainsi nous nous sommes ramené à un problème à une seule inconnue. Néanmoins la complexité de la loi de comportement par le biais de l'opérateur de projection nécessite un traitement particulier dans l'algorithme de résolution. Enfin l'inconnue sur l'incrément de temps est maintenant la vitesse. Cette approche en vitesse nous apparaît plus naturelle étant donné la loi de comportement mise en jeu et la loi de frottement. Cependant les conditions de contact sont initialement écrites en déplacement. Du point de vu incrémental on peut dire que les conditions de contact en vitesse ou en déplacement sont équivalentes.

En vitesse :

$$d_{\text{approx}}^{t+\Delta t} \geq 0 \Leftrightarrow d^t + \left(v^o - \dot{u}^{t+\Delta t}\right) \cdot n^t \Delta t \geq 0$$

En déplacement, en utilisant (3.14) on écrit :

$$d^{t+\Delta t} = d^t + \Delta d^{t+\Delta t} \geq 0$$

$$d^{t+\Delta t} \geq 0 \Leftrightarrow d^t + \left(u^o - u^{t+\Delta t}\right) \cdot n^t \geq 0$$

On a

$$d_{\text{approx}}^{t+\Delta t} \geq 0 \Leftrightarrow d^{t+\Delta t} \geq 0$$

3.4.5 Formulation Incrémentale Mixte Vitesse Pression

L'intégration de la loi de comportement nous a permit d'écrire dans une écriture découplée le nouvel état de contrainte. L'équation (3.48) nous donne le déviateur des contraintes et la pression hydrostatique à $t+\Delta t$:

$$s^{t+\Delta t} = s^t + 2G\Delta t\left(e\left(\dot{u}^{t+\Delta t}\right)\right) - 2G\left(\Delta\lambda^{t+\Delta t}\frac{\partial h}{\partial s}\left(s^{t+\Delta t}, p^{t+\Delta t}, R^{t+\Delta t}\right)\right)$$

$$p^{t+\Delta t} = p^t + K\Delta t\,\mathrm{tr}\left(\varepsilon\left(\dot{u}^{t+\Delta t}\right)\right) - K\left(\Delta\lambda^{t+\Delta t}\frac{\partial h}{\partial p}\left(s^{t+\Delta t}, p^{t+\Delta t}, R^{t+\Delta t}\right)\right)$$

A partir de ce point nous traitons ces deux termes de manière séparée. Bien que l'opérateur soit différent on utilise la même écriture pour désigner l'opérateur de projection spécifique au déviateur des contraintes Proj_P :

$$s^{t+\Delta t} = \mathrm{Proj}_{P=\{(\sigma,R):f(\sigma,R)\leq 0\}}\left(s^t + 2G\Delta t\left(e\left(\dot{u}^{t+\Delta t}\right)\right)\right) \qquad \textbf{(3.56)}$$

Nous récrivons alors l'équation (3.54) comme suit :

$$\int_{\Omega^t}\rho\frac{\dot{u}^{t+\Delta t}-\dot{u}^t}{\Delta t}w\,d\varpi + \int_{\Omega^t}s^{t+\Delta t}\left(\dot{u}^{t+\Delta t}\right)e(w)\,d\varpi - \int_{\Omega^t}p^{t+\Delta t}\mathrm{tr}\left(\varepsilon(w)\right)d\varpi = \int_{\Omega^t}\rho g w\,d\varpi$$
$$-\theta\int_{\Gamma_C^t}\left[-d_{\mathrm{approx}}^{t+\Delta t}\left(\dot{u}^{t+\Delta t}\right)\right]^+ w_n\,dS + \int_{\Gamma_C^t}\sigma_T^{t+\Delta t}\left(\dot{u}^{t+\Delta t},\sigma_n^t\right)w_T\,dS \quad \forall w\in V_0^t \qquad \textbf{(3.57)}$$

$$\int_{\Omega^t} q\left\{\frac{p^{t+\Delta t}-p^t}{K\Delta t} - \left(\mathrm{tr}\left(\varepsilon(\dot{u}^{t+\Delta t})\right) - \mathrm{tr}\left(\dot{\varepsilon}^{P\,t+\Delta t}(\dot{u}^{t+\Delta t})\right)\right)\right\}d\varpi = 0 \quad \forall q\in Q \qquad \textbf{(3.58)}$$

Avec

$$\mathrm{tr}\left(\dot{\varepsilon}^{P\,t+\Delta t}\right) = \left(\dot{\lambda}^{t+\Delta t}\frac{\partial h}{\partial p}\left(s^{t+\Delta t}, p^{t+\Delta t}, R^{t+\Delta t}\right)\right) \qquad \textbf{(3.59)}$$

L'équation (3.58) s'interprète comme la formulation faible de la partie sphérique de la loi de comportement incrémentale. C'est cette équation qui prend en compte la *compressibilité du matériau*.

$$\mathrm{tr}\left(\dot{\varepsilon}^{\,t+\Delta t}\right) \neq 0$$

Pour ce type de formulation les inconnues deviennent la vitesse et la pression à l'instant $t+\Delta t$:

$$Res\left(\dot{u}^{t+\Delta t}, p^{t+\Delta t}, w, q\right) = \begin{pmatrix} \int_{\Omega^t} \rho \frac{\dot{u}^{t+\Delta t} - \dot{u}^t}{\Delta t} w \, d\varpi + \int_{\Omega^t} s^{t+\Delta t}\left(\dot{u}^{t+\Delta t}\right) e(w) \, d\varpi - \int_{\Omega^t} p^{t+\Delta t} \mathrm{tr}\left(\varepsilon(w)\right) d\varpi - \int_{\Omega^t} \rho g w \, d\varpi \\ + \theta \int_{\Gamma_C^t} \left[-d_{\mathrm{approx}}^{t+\Delta t}\left(\dot{u}^{t+\Delta t}\right)\right]^+ w_n \, dS - \int_{\Gamma_C^t} \sigma_T^{t+\Delta t}\left(\dot{u}^{t+\Delta t}, \sigma_n^t\right) w_T \, dS \\ \int_{\Omega^t} q \left\{ \frac{p^{t+\Delta t} - p^t}{K\Delta t} - \left(\mathrm{tr}\left(\varepsilon(\dot{u}^{t+\Delta t})\right) - \mathrm{tr}\left(\dot{\varepsilon}^{P\,t+\Delta t}\right)\right) \right\} d\varpi \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

Le problème à résoudre devient :

Trouver le champ de vitesse et le champ de pression $\left(\dot{u}^{t+\Delta t}, p^{t+\Delta t}\right) \in V_0^t \times Q$, *solution à l'instant* $t+\Delta t$ *de :*

$$Res\left(\dot{u}^{t+\Delta t}, p^{t+\Delta t}, w, q\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall w \in V_0^t, \forall q \in Q \quad (3.61)$$

avec

$$s^{t+\Delta t} = \mathrm{Proj}_{P=\{(\sigma,R):f(\sigma,R)\leq 0\}}\left(s^t + 2G\Delta t\left(e\left(\dot{u}^{t+\Delta t}\right)\right)\right)$$

3.4.6 Algorithme de résolution

La résolution du problème incrémental s'effectue par la méthode de *Newton-Raphson* et le calcul d'un *module tangent global*.

La mise en œuvre de cette résolution s'effectue en deux temps :

- Tout d'abord on intègre la loi de comportement pour un incrément de déformation *donné,* (3.46). On obtient alors l'état de contrainte ainsi que la variable interne, correspondant à cette déformation à $t+\Delta t$.
- On résout alors l'équation (3.54) non linéaire en vitesse $\left(\dot{u}^{t+\Delta t}\right)$ pour un état de contrainte connu. Le champ de vitesse solution correspond alors à l'incrément de déformation *donné*.

En résolvant la loi de comportement on détermine le nouveau déviateur des contraintes ainsi que la nouvelle pression (à l'instant $t+\Delta t$). *Néanmoins seul le déviateur est "injecté" dans l'équation* (3.61) *puisque la pression est une des inconnues du problème.* On retrouve la pression à travers la formulation faible de l'équation de compressibilité.

On écrit :

Algorithme 3.1: Résolution du Problème Incrémental Mixte

1. Données en début d'incrément : $\Delta t, \dot{u}^t, p^t, s^t, R^t, \Delta\varepsilon = \Delta t\dot{\varepsilon}$
   ($\dot{\varepsilon}$ est donnée en début d'incrément)

2. Résolution en $\left(\sigma^{t+\Delta t} = s^{t+\Delta t} - p^{t+\Delta t}\mathrm{II}, \Delta\lambda^{t+\Delta t}\right)$ de la loi de comportement :

$$\sigma^{t+\Delta t} = \mathrm{Proj}_{P=\{(\sigma,R):f(\sigma,R)\leq 0\}}\left(\sigma^t + L\Delta t(\dot{\varepsilon})\right)$$

La re-projection sur le critère permet de déterminer le couple $\left(\sigma^{t+\Delta t} = s^{t+\Delta t} - p^{t+\Delta t}\mathrm{II}, \Delta\lambda^{t+\Delta t}\right)$ *et de résoudre entièrement la loi de comportement :* $R^{t+\Delta t}, \kappa^{t+\Delta t}$.

3. Résoudre en $\left(\dot{u}^{t+\Delta t}, p^{t+\Delta t}\right)$, pour $s^{t+\Delta t}$ connu :

$$Res\left(\dot{u}^{t+\Delta t}, p^{t+\Delta t}, w, q\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall w \in V_0^t, \forall q \in Q \text{ par } \textit{Newton Raphson}$$

4. Réactualisation des données, retour 1

3.5 Discrétisation Spatiale

Nous traitons dans cette partie la discrétisation spatiale du problème incrémental (section 3.4.4). Nous donnons la discrétisation élément finis en P1+/P1, ainsi que la formulation *mini element*. Nous terminons par la présentation du re-mailleur.

Nous avons décrit le domaine Ω occupé par le sol comme un domaine semi-infini (section 3.2). Etant donné le choix de l'élément nous devons déterminer une restriction du domaine Ω. Ce choix induit l'hypothèse forte que la réponse du matériau n'est pas perturbée par le changement des conditions aux limites. Ce point doit être étudié lors de la mise en œuvre numérique. Dans la suite nous notons toujours Ω la restriction du domaine.

3.5.1 Discrétisation Eléments Finis : P1+/P1

Les sections précédentes ont permit de décrire la discrétisation temporelle du problème et on aboutit à la formulation du problème incrémental mixte en vitesse/pression. Nous traitons ici la discrétisation de la variable spatiale par la méthode des éléments finis.

On introduit une *triangulation* éléments finis $\mathcal{E}_h$ de l'espace Ω_h qui est une approximation spatiale discrète du domaine continu Ω.

$$\Omega_h = \bigcup_{\varpi_h \in \mathcal{E}_h} \varpi_h \tag{3.62}$$

L'élément utilisé pour conduire la discrétisation spatiale est l'élément mixte P1+/P1. C'est un tétraèdre ($\Omega_h \subset \mathbb{R}^3$) linéaire. La vitesse et la pression sont interpolées linéairement en fonction des valeurs aux sommets du tétraèdre. Cet élément a d'abord été introduit par *Arnold et al.* [7], pour des écoulements de stokes en 2D. Au laboratoire, *Coupez T* [26] l'a étendu au cas tridimensionnel pour des comportement visco-plastique. Puis il a été repris par *Gay C* [45] dans le cas de comportement élasto-plastique. Enfin *Bellet M* [15] l'a mis en œuvre pour un comportement visco-plastique compressible.

L'exposant + signifie le rajout d'un degré de liberté supplémentaire au centre de l'élément pour l'interpolation de la vitesse. Ce degré de liberté supplémentaire permet à l'élément $P1^+/P1$ de satisfaire la relation de compatibilité de *Brezzi-Babuska* [10] entre les espaces d'interpolation de la vitesse et de la pression.

La fonction d'interpolation des degrés de liberté additionnels en vitesse vaut 1 au centre de l'élément et vaut 0 sur sa frontière (d'ou l'appelation de fonction bulle).

Le champ de vitesse interpolé w_h sur la triangulation P1+/P1 se décompose de manière unique de la manière suivante :

$$w_h = v_h + b_h \quad \text{où } w_h \in \mathcal{W}_h = \mathcal{V}_h \oplus \mathcal{B}_h \tag{3.63}$$

où v_h est la partie linéaire du champ de vitesse et b_h est la partie relative au champ bulle.

$$\mathcal{V}_h = \left\{ v_h : v_h \in \left(C^0(\Omega_h)\right)^3 \text{ et } v_h|_{\varpi_h} \in \left(P1(\varpi_h)\right)^3, \forall \varpi_h \in \mathcal{E}_h \right\} \tag{3.64}$$

où $\left(C^0(\Omega_h)\right)^3$ est l'espace des fonctions continues sur le domaine $\Omega_h \subset \mathrm{IR}^3$. $\left(P1(\varpi_h)\right)^3$ est l'espace de fonctions linéaires sur l'élément $\varpi_h \subset \mathrm{IR}^3$.

$\mathcal{B}_h$ est l'espace de fonctions bulles. Cet espace est inclus dans l'espace des polynômes de degré 4. En 3D la mise en œuvre numérique de tels polynôme devient très lourde. C'est pourquoi *Coupez* [26] a introduit une fonction bulle linéaire par morceaux sur l'élément.

$$\mathrm{B}_h = \left\{ b_h : b_h \in \left(C^0(\Omega_h)\right)^3, b_h = 0 \text{ sur } \partial\varpi_h, \forall \varpi_h \in \mathcal{E}_h, b_h|_{\varpi_h} \in \left(P1(\varpi_h^i)\right)^3, i = 1,..,4 \right\} \tag{3.65}$$

où $\varpi_h^i, i = 1,..,4$ représente, pour tout élément de la triangulation, les sous-tétraèdres dont le centre du tétraèdre est un sommet commun. Cette fonction bulle est donc continue, mais dérivable par morceaux seulement.

Par conséquent le champ de vitesse discret s'écrit, en un point de l'espace $\mathrm{x} \in \Omega_h$:

$$w_h(\mathrm{x}) = \sum_{k=1}^{Nbnoe} N_k^l(\mathrm{x})\mathrm{V}_k + \sum_{j=1}^{Nbelt} N_j^b(\mathrm{x})\mathrm{B}_j \tag{3.66}$$

Où $w_h \in \mathcal{W}_h, N_k^l \in \mathcal{V}_h, k = 1,..,Nbnoe$ sont les fonctions d'interpolations de l'élément linéaire associées aux nœuds k et $N_j^b \in \mathcal{B}_h, j = 1,..,Nbelt$ la fonction bulle associée à l'élément j. Nbnoe et Nbelt sont respectivement le nombre de nœuds et le nombre d'éléments de la triangulation.

Compte tenu des supports des fonctions d'interpolations, le champ de vitesse s'écrit au niveau local (dans l'élément contenant le point x) :

$$w_h(\mathrm{x}) = \sum_{k=1}^{4} N_k^l(\mathrm{x})\mathrm{V}_k + N^b(\mathrm{x})\mathrm{B}$$

Le champ de pression est linéaire et continu :

$$\mathrm{P}_h = \left\{ p_h : p_h \in \left(C^0(\Omega)\right)^3 \text{ et } p_{h|\Omega_e} \in P1(\Omega_e), \forall e \in \mathcal{E} \right\} \tag{3.67}$$

La pression s'exprime en un point de l'espace x par :

$$p_h(\mathrm{x}) = \sum_{k=1}^{Nbnoe} N_k^l(\mathrm{x}) \mathrm{P}_k \tag{3.68}$$

Et donc au niveau local par :

$$p_h(\mathrm{x}) = \sum_{k=1}^{4} N_k^l(\mathrm{x}) \mathrm{P}_k$$

Muni de ces espaces nous pouvons maintenant écrire la discrétisation par éléments finis du problème mixte incrémental. Pour alléger l'écriture du problème discret on utilise les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
\dot{u}_h^{t+\Delta t}(\mathrm{x}) &= w_h(\mathrm{x}) \\
p_h^{t+\Delta t}(\mathrm{x}) &= p_h(\mathrm{x}) \\
s_h^{t+\Delta t}(\mathrm{x}) &= s_h(\mathrm{x}) \\
\sigma_{h_T}^{t+\Delta t}(\mathrm{x}) &= \sigma_{h_T}(\mathrm{x}) \\
\dot{\varepsilon}_h^{P\,t+\Delta t}(\mathrm{x}) &= \dot{\varepsilon}_h^{P}(\mathrm{x})
\end{aligned}$$

Formulation Mixte Discrète

On a alors le problème discrétisé en temps et en espace suivant :

Trouver $(w_h, p_h) \in \mathcal{W}_h \times P_h$, *tels que:*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega_h} \rho \frac{w_h - w_h^t}{\Delta t} w_h^* \, d\varpi + \int_{\Omega_h} s_h(w_h) e(w_h^*) \, d\varpi - \int_{\Omega_h} p_h \nabla . w_h^* d\varpi - \int_{\Omega_h} \rho g w_h^* \, d\varpi \\ \qquad\qquad + \theta \displaystyle\int_{\Gamma_{hC}} \left[-d_{\text{approx}}^{t+\Delta t}(w_h) \right]^+ w_{hn}^* \, dS - \int_{\Gamma_{hC}} \sigma_{hT}(w_h, \sigma_{hn}^t) w_{hT}^* \, dS = 0 \\ \displaystyle\int_{\Omega_h} p_h^* \left\{ \dot{p}_h - \left(\text{tr}(\varepsilon(w_h)) - \text{tr}\left(\dot{\varepsilon}_h^P(w_h, s_h, p_h) \right) \right) \right\} d\varpi = 0 \\ \forall (w_h^*, p_h^*) \in \mathcal{W}_h^0 \times P_h \end{cases} \tag{3.69}$$

où $\mathcal{W}_h^0 = \mathcal{V}_h^0 \oplus \mathrm{B}_h$, $\mathcal{V}_h^0 = \left\{ v_h : v_h \in \left(C^0(\Omega_h) \right)^3, v_h|_{\Gamma_{hD}} = 0, v_h|_{\varpi_h} \in \left(P1(\varpi_h) \right)^3, \forall \varpi_h \in \mathcal{E}_h \right\}$

avec

$$s_h(\mathrm{x}) = \text{Proj}_{P = \{(\sigma, R) : f(\sigma, R) \le 0\}} \left(s^t + 2G\Delta t \left(e(w_h(\mathrm{x})) \right) \right) \tag{3.70}$$

$$\text{pour tout } \mathrm{x} \in \varpi_h, \text{pour tout } \varpi_h \in \mathcal{E}_h$$

Opérateur de Projection Discret

Cette dernière équation témoigne de l'aspect local de l'intégration de la loi de comportement. L'état de contrainte est calculé pour chaque élément de la triangulation aux quatre points d'intégration.

Contact Discret

La condition de non pénétration est écrite aux nœuds de la surface. Chaque nœud est traité indépendamment de son voisin. Le contact ne couple que les composantes du champ de vitesse incrémental d'un même nœud. Dans la matrice de raideur, les outils étant indéformables, la contribution des termes de contact n'apparaît que dans le bloc diagonal global.

Formulation P1⁺/P1

La formulation discrétisée par l'élément P1+/P1 est la suivante :

Trouver $(v_h, b_h, p_h) \in \mathcal{V}_h \times B_h \times P_h$, *tels que:*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega_h} \rho \frac{v_h - v_h^t}{\Delta t} v_h^* \, d\varpi + \int_{\Omega_h} s_h(v_h + b_h) e(v_h^*) \, d\varpi - \int_{\Omega_h} p_h \nabla . v_h^* d\varpi - \int_{\Omega_h} \rho g v_h^* \, d\varpi \\ \qquad \displaystyle + \theta \int_{\Gamma_{hC}} \left[- d_{\text{approx}}^{t+\Delta t}(v_h) \right]^+ v_{hn}^* \, dS - \int_{\Gamma_{hC}} \sigma_{hT}(v_h, \sigma_{hn}^t) v_{hT}^* \, dS = 0 \\ \displaystyle\int_{\Omega_h} \rho \frac{b_h - b_h^t}{\Delta t} b_h^* \, d\varpi + \int_{\Omega_h} s_h(v_h + b_h) e(b_h^*) \, d\varpi - \int_{\Omega_h} p_h \nabla . b_h^* d\varpi - \int_{\Omega_h} \rho g b_h^* \, d\varpi = 0 \\ \displaystyle\int_{\Omega_h} p_h^* \left\{ \dot{p}_h - \left(\text{tr}(\varepsilon(v_h)) + \text{tr}(\varepsilon(b_h)) - \text{tr}\left(\dot{\varepsilon}^P(v_h, b_h, s_h, p_h) \right) \right) \right\} d\varpi = 0 \\ \forall (v_h^*, b_h^*, p_h^*) \in \mathcal{V}_h^0 \times B_h \times \mathrm{P}_h \end{cases} \tag{3.71}$$

avec

$$s_h(\mathrm{x}) = \text{Proj}_{P = \{(\sigma, R) : f(\sigma, R) \le 0\}} \left(s_h^t + 2G\Delta t \left(e(w_h(\mathrm{x})) \right) \right) \tag{3.72}$$

$$\text{pour tout } \mathrm{x} \in \varpi_h, \text{pour tout } \varpi_h \in \mathcal{E}_h$$

Où étant donné la définition de la fonction bulle les termes de bords liés à cette fonction s'annulent.

3.5.2 Discrétisation *mini element*

Proposition :
Le tenseur gradient du vecteur des corrections de vitesses est orthogonal à tout tenseur constant :

$$\int_{\varpi_h} C : \nabla b_h \, dV = 0 \quad \text{pour tout } C \in P0(\varpi_h) \tag{3.73}$$

Preuve [26]*:*

La preuve de la proposition résulte du fait que :

$$\int_{\varpi_h} (\nabla b_h) dV = 0 \tag{3.74}$$

En effet d'après (3.65) on a :

$$\int_{\varpi_h} (\nabla b_h)_{ij} dV = \int_{\varpi_h} \frac{\partial b_{hi}}{\partial x_j} dV = \int_{\varpi_h} B_i \frac{\partial N^b}{\partial x_j} dV = B_i \sum_{k=1}^{4} \int_{\varpi_{hk}} \frac{\partial N^b}{\partial x_j} dV$$

On pose β_i vecteur dont les composantes sont nulles excepté la i^e égale à N^b :
On a alors $\dfrac{\partial N^b}{\partial x_i} = \nabla \cdot \beta_i$

$$B_i \sum_{k=1}^{4} \int_{\varpi_{hk}} \frac{\partial N^b}{\partial x_j} dV = B_i \sum_{k=1}^{4} \int_{\varpi_{hk}} \nabla . \beta_j dV = B_i \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial \varpi_{hk}} \beta_j \cdot n_k dV = 0$$

La fonction d'interpolation bulle s'annule sur le bord de l'élément et est continue sur l'élément. On a $n_k = - n_l$, $k \neq l$, et donc la somme des intégrales de bords des sous tétraèdres est nulle.

Cette proposition nous permet de donner le résultat *local* suivant :

Pour tout $v_h \in \mathcal{V}_h$ on a :

$$\int_{\varpi_h} \nabla v_h : \nabla b_h \, dV = 0 \quad \forall b_h \in B_h \tag{3.75}$$

puisque ∇v_h est constant sur l'élément ϖ_h.
Fin de la preuve

Ce résultat permet de montrer que même si le déviateur des contraintes s_h dépend du champ de vitesse w_h par l'intermédiaire de la loi de comportement, on peut scinder cette dépendance en une partie non linéaire en fonction de v_h et une partie linéaire en fonction b_h ([55]). Pour cela nous reprenons le problème fort (3.17), que nous récrivons en introduisant une variable supplémentaire D comme suit :

$$\begin{cases} \nabla.s\left(\dot{\lambda}(D), e(\dot{u})\right) - \nabla p\left(\dot{\lambda}(D), \mathrm{tr}\left(\varepsilon(\dot{u})\right)\right) + \rho g = 0 \\ D = \varepsilon(\dot{u}) \\ + \text{conditions aux limites} \\ + \text{loi de comportement} \quad \left(\mathrm{tr}\left(\varepsilon(\dot{u})\right) \neq 0\right) \end{cases} \qquad \textbf{(3.76)}$$

Après avoir appliqué la discrétisation temporelle décrite à la section 3.4, nous écrivons la discrétisation spatiale du problème incrémental à l'aide de l'élément P1$^+$/P1 décrit ci–dessus ($w_h \in P1^+(\varpi_h)$ et $p_h \in P1(\varpi_h)$). Pour la variable discrète D_h nous choisissons une interpolation $P0(\varpi_h)$.

La deuxième équation de (3.76) s'écrit sous forme faible discrétisée, au niveau local :

$$\int_{\varpi_h} D_h^* : \left(D_h - e(w_h)\right) dV = 0 \quad \forall D_h^* \in P0(\varpi_h)$$

où $w_h = v_h + b_h \in \mathcal{W}_h = \mathcal{V}_h \oplus \mathcal{B}_h$

En utilisant (3.73), on obtient :

$$\int_{\varpi_h} D_h^* : \left(D_h - \varepsilon(v_h)\right) dV = 0 \quad \forall D_h^* \in P0(\varpi_h)$$

$$\text{car} \int_{\varpi_h} D_h^* : \varepsilon(b_h)\, dV = 0$$

Donc on a, au sens faible l'égalité $D_h = \varepsilon(v_h)$. La variable D ne remplace que partiellement $\varepsilon(v)$ dans (3.76). Un remplacement total conduirait a l'utilisation de l'élément P1/P1 qui ne satisfait pas les conditions de *Brezzi-Babuska* [10].

Ce résultat entraîne que le multiplicateur plastique qui intervient de façon cruciale dans l'opérateur de projection (et donc dans la résolution de la loi de comportement) ne dépend, au sens faible et localement que du champ de vitesse linéaire v_h :

$$\dot{\lambda}(D_h) = \dot{\lambda}(\varepsilon(v_h))$$

Nous récrivons l'équation en déviateur de (3.48) comme suit :

$$s_h^{t+\Delta t}(v_h+b_h)=s_h^t+2G\Delta t(e(v_h+b_h))-2G\left(\Delta t\dot{\lambda}(v_h)^{t+\Delta t}\frac{\partial h}{\partial s}\left(s_h^{t+\Delta t}(v_h+b_h),p^{t+\Delta t},R^{t+\Delta t}\right)\right)$$

$$s_h^{t+\Delta t}(v_h+b_h)=s_h^t+2G\Delta t(e(v_h))-2G\left(\Delta t\dot{\lambda}(v_h)^{t+\Delta t}\frac{\partial h}{\partial s}\left(s_h^{t+\Delta t}(v_h+b_h),p^{t+\Delta t},R^{t+\Delta t}\right)\right)+2G\Delta t(e(b_h))$$

Cette équation représente la projection du prédicteur élastique sur le critère de plasticité dans le plan déviatoire. Pour des critères de plasticité (ou des potentiels) tels que *Von Mises* ou *Drucker Prager* (voir chapitre 2) la reprojection dans le plan déviatoire est radiale. L'expression analytique de la normale en déviatoire est simple, on peut se ramener à :

$$\frac{\partial h}{\partial s}\left(s_h^{t+\Delta t}(v_h+b_h)\right)=s_h^{t+\Delta t}(v_h+b_h)$$

On obtient alors la décomposition additive suivante du déviateur :

$$\begin{cases} s_h^{t+\Delta t}\left(\dot{\lambda}(w_h),e(w_h)\right)=s_h^{v\,t+\Delta t}\left(\dot{\lambda}(v_h),e(v_h)\right)+s_h^{b\,t+\Delta t}\left(\dot{\lambda}(v_h),e(b_h)\right) \\ s_h^{v\,t+\Delta t}\left(\dot{\lambda}(v_h),e(v_h)\right)=\dfrac{s_h^t+2G\Delta te(v_h)}{1+2G\Delta t\dot{\lambda}(v_h)} \\ s_h^{b\,t+\Delta t}\left(\dot{\lambda}(v_h),e(b_h)\right)=\dfrac{2G\Delta te(b_h)}{1+2G\Delta t\dot{\lambda}(v_h)} \end{cases} \qquad \textbf{(3.77)}$$

Le deviateur s_h est alors constant par élément. le terme $s^b{}_h$ est linéaire par rapport au champ bulle.

Lorsque les critères ou les potentiels de plasticité font intervenir le troisième invariant du déviateur des contraintes (*Lade-Duncan*, CJS2EC, *cf.* Chapitre 2), la forme analytique de la normale est alors plus complexe et on ne peut aboutir à la décomposition additive décrite ci-dessus. Néanmoins l'utilisation du troisième invariant permet de donner une symétrie ternaire au domaine de plasticité. On peut alors approcher localement la trace du critère dans le plan déviatoire par une forme circulaire. On retrouve alors une expression de la normale simple pour aboutir à la décomposition additive du déviateur.

En introduisant (3.77) dans (3.71), compte tenu de (3.73), on obtient la dicrétisation par le *mini element* suivante :

$$
\begin{array}{l}
\textit{Trouver } (v_h, b_h, p_h) \in \mathcal{V}_h \times B_h \times P_h, \textit{ tels que:} \\
\left\{
\begin{array}{l}
\displaystyle\int_{\Omega_h} \rho \frac{v_h - v_h^t}{\Delta t} v_h^* \, d\varpi + \int_{\Omega_h} s_h(v_h) e(v_h^*) \, d\varpi - \int_{\Omega_h} p_h \nabla . v_h^* d\varpi - \int_{\Omega_h} \rho g v_h^* \, d\varpi \\
\qquad\qquad + \theta \displaystyle\int_{\Gamma_{hC}} \left[- d_{\text{approx}}^{t+\Delta t}(v_h) \right]^+ v_{hn}^* \, dS - \int_{\Gamma_{hC}} \sigma_{hT}(v_h, \sigma_{hn}^t) v_{hT}^* \, dS = 0 \\
\displaystyle\int_{\Omega_h} \rho \frac{b_h - b_h^t}{\Delta t} b_h^* \, d\varpi + \int_{\Omega_h} s_h(b_h) e(b_h^*) \, d\varpi - \int_{\Omega_h} p_h \nabla . b_h^* d\varpi - \int_{\Omega_h} \rho g b_h^* \, d\varpi = 0 \\
\displaystyle\int_{\Omega_h} p_h^* \left\{ \dot{p}_h - \left(\text{tr}(\varepsilon(v_h)) + \text{tr}(\varepsilon(b_h)) - \text{tr}\left(\dot{\varepsilon}^P(v_h, b_h, s_h, p_h) \right) \right) \right\} d\varpi = 0 \\
\forall (v_h^*, b_h^*, p_h^*) \in \mathcal{V}_h^0 \times B_h \times P_h
\end{array}
\right.
\end{array}
\tag{3.78}
$$

Puisque :

$$
\int_{\varpi_h} s_h^v : \varepsilon(b_h^*) \, dV = \int_{\varpi_h} s_h^b : \varepsilon(v_h^*) \, dV = 0 \quad \forall \varpi_h \in \mathcal{E}_h
$$

3.5.3 Expression du Module Tangent Global et Condensation

Nous avons vu dans la section 3.4.6 que le problème non linéaire discret (3.78) est résolu par une méthode de *Newton Raphson*. Cette méthode conduit à déterminer le module tangent global du système d'équation (3.78). nous donnons ici l'expression de ce module tangent dans le cadre d'une condensation du champ bulle.

On réécrit le système (3.78), qui inclus la discrétisation temporelle et spatiale du problème, comme suit :

Sur l'incrément de temps $[t, t+\Delta t]$, *trouver* $(v_h, b_h, p_h) \in \mathcal{V}_h \times B_h \times P_h$, *solutions à t+Δt du système:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{R}^l(v_h, p_h) = R^{ll} + R^{lp} + R^l = 0 \\ \boldsymbol{R}^b(b_h, p_h) = R^{bb} + R^{bp} + R^b = 0 \\ \boldsymbol{R}^p(v_h, b_h, p_h) = R^{pl} + R^{pb} + R^{ppl} = 0 \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} R^{ll} = \int_{\varpi_h} \rho \frac{v_h}{\Delta t} : v_h^* dV + \int_{\varpi_h} s_h(v_h) : e(v_h^*) dV + \theta \int_{\varpi_h} \left[-d_{\text{approx}}^{t+\Delta t}(v_h) \right]^+ v_{h_n}^* \, dV - \int_{\Gamma_{hC}} \sigma_{hT}(v_h, \sigma_{hn}^t) v_{hT}^* \, dS, \\ R^{lp} = -\int_{\varpi_h} p_h \nabla . v_h^* \, dV, \quad R^l = -\int_{\varpi_h} \rho g . v_h^* \, dV + \int_{\varpi_h} \rho \frac{v_h^t}{\Delta t} . v_h^* dV \\ R^{bb} = \int_{\Omega_h} \rho \frac{b_h}{\Delta t} b_h^* \, d\varpi + \int_{\Omega_h} s_h(b_h) e(b_h^*) \, d\varpi, \quad R^{bp} = -\int_{\Omega_h} p_h \nabla . b_h^* d\varpi, \quad R^b = -\int_{\Omega_h} \rho g b_h^* \, d\varpi + \int_{\Omega_h} \rho \frac{b_h^t}{\Delta t} b_h^* \, d\varpi \\ R^{pl} = -\int_{\Omega_h} p_h^* \mathrm{tr}(\varepsilon(v_h)) \, dV, \quad R^{pb} = -\int_{\Omega_h} p_h^* \mathrm{tr}(\varepsilon(b_h)) \, dV, \quad R^{ppl} = \int_{\Omega_h} p_h^* \left\{ \frac{\dot{p}_h}{K} + \mathrm{tr}(\dot{\varepsilon}^P(v_h, p_h)) \right\} dV \end{cases}$$

Le terme R^{ppl} signifie que l'expression entre accolades fait intervenir, par l'intermédiaire des vitesses de déformations volumiques plastiques, les inconnues que sont le champ de vitesse linéaire ainsi que la pression.

Les matrices de raideurs sont données au niveau de l'élément (les intégrales sont calculées sur l'élément ϖ_h) par :

$$\boldsymbol{K}^{xy} = \frac{\partial R^{xy}}{\partial y}$$

Avec $(xy) = \{(ll);(lp);(bb);(bp);(pb)\}$ et pour les termes liés à la compressibilité :

$$\boldsymbol{K}^{pl} = \frac{\partial R^{pl}}{\partial l} + \frac{\partial R^{ppl}}{\partial l}$$

$$\boldsymbol{K}^{pp} = \frac{\partial R^{ppl}}{\partial p}$$

Non symétrie

On remarque ici que :

$$\left(\boldsymbol{K}^{pl}\right)^{\mathrm{T}} \neq \boldsymbol{K}^{lp}$$

Donc pour des modèles de comportement plastiquement compressible la matrice de raideur du système est ***non symétrique***. D'autre part le terme $\boldsymbol{K}^{ll}$ conduit à déterminer le module tangent de la loi de comportement incrémentale (c'est à dire dérivé l'opérateur de projection par rapport à la vitesse, c'est un opérateur consistant avec la linéarisation induite par le schéma d'intégration, *Simo J.C. et Taylor R.L.* [105]) :

$$\boldsymbol{C}_{v}^{t+\Delta t} = \frac{\partial s_h^v}{\partial \varepsilon(v_h)}$$

Nous verrons au chapitre suivant que ce module tangent, suivant la loi de comportement peut être ***non symétrique.*** Nous avons mis en évidence les *deux termes* sources de non symétrie dans la matrice de raideur globale. Nous abordons plus précisément ce point au chapitre 4.

Condensation de la bulle

A chaque itération de la méthode de *Newton*, le système linéaire à résoudre est le suivant :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}^{ll} & 0 & \boldsymbol{K}^{lp} \\ 0 & \boldsymbol{K}^{bb} & \boldsymbol{K}^{bp} \\ \boldsymbol{K}^{pl} & \boldsymbol{K}^{pb} & \boldsymbol{K}^{pp} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta v \\ \delta b \\ \delta p \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}^{l}(v_h, p_h) \\ \boldsymbol{R}^{b}(b_h, p_h) \\ \boldsymbol{R}^{p}(v_h, b_h, p_h) \end{pmatrix}$$

L'objectif maintenant est d'éliminer les termes liés au champ bulle du système, on écrit :

$$\delta b = -\left(\boldsymbol{K}^{bb}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{R}^{b} + \boldsymbol{K}^{bp}\,\delta p\right)$$

Le système à résoudre devient :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}^{ll} & \boldsymbol{K}^{lp} \\ \boldsymbol{K}^{pl} & \boldsymbol{K}^{pp} - \boldsymbol{K}^{pb}\left(\boldsymbol{K}^{bb}\right)^{-1}\boldsymbol{K}^{bp} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta v \\ \delta p \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}^{l} \\ \boldsymbol{R}^{p} - \boldsymbol{K}^{pb}\left(\boldsymbol{K}^{bb}\right)^{-1}\boldsymbol{R}^{b} \end{pmatrix}$$

Etant donné (3.77), le terme déviatoire s_h^b est linéaire en b_h, il vient donc : $R^{pb} = \boldsymbol{K}^{pb} b_h^t$, $R^{bb} = \boldsymbol{K}^{bb} b_h^t$ et $R^{bp} = \boldsymbol{K}^{bp} p_h^t$, par conséquent les équations $\boldsymbol{R}^b$ et $\boldsymbol{R}^p$ peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \boldsymbol{R}^b = \boldsymbol{K}^{bb} b_h^t + \boldsymbol{K}^{bp} p_h^t + R^b \\ \boldsymbol{R}^p = R^{pl} + \boldsymbol{K}^{pb} b_h^t + R^{ppl} \end{cases}$$

On pose $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{K}^{pb}\left(\boldsymbol{K}^{bb}\right)^{-1} \boldsymbol{K}^{bp}$ et finalement le système à résoudre, localement sur l'élément, devient :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}^{ll} & \boldsymbol{K}^{lp} \\ \boldsymbol{K}^{pl} & \boldsymbol{K}^{pp} - C \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta v \\ \delta p \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \boldsymbol{R}^l \\ R^{pl} + R^{ppl} - Cp_h^t - \boldsymbol{K}^{pb}\left(\boldsymbol{K}^{bb}\right)^{-1} R^b \end{pmatrix} \quad \textbf{(3.79)}$$

On aboutit ainsi à un système linéaire ou les degrés de liberté associés à la bulle n'apparaissent plus. Ceci a été possible grâce à la décomposition additive du déviateur des contraintes, et à la dépendance linéaire de s_h^b par rapport à b_h. Cependant les degrés de liberté sont présents de manière sous-jacente par l'intermédiaire de la matrice $\boldsymbol{C}$. La relation de *Brezzi-Babuska* est donc toujours satisfaite. En terme de temps de calcul l'élimination du champ bulle représente un gain de temps considérable par rapport à la résolution du système issue de la formulation P1+/P1, équation (3.71).

D'autre part, dans cette formulation *mini element* le déviateur des contraintes est constant par élément. Ceci conduit aussi à une diminution des coûts de calcul puisque les intégrales où intervient le déviateur sont calculées au moyen d'une seule contribution au lieu de quatre pour la formulation P1+/P1.

Enfin le système linéaire (3.79) est résolu dans le cas symétrique ou non symétrique par une méthode itérative. Nous développons cet aspect dans le chapitre suivant.

3.6 Maillage / Remaillage

Le code Forge3® adopte une description *Lagrangienne* du problème de scarification. Le maillage éléments finis se déforme pour décrire la réponse du matériau. Dans le cas de sollicitations en grandes déformations les éléments du maillage se déforment jusqu'à devenir *"plats"* : on parle alors de maillage dégénéré, le *Jacobien* de la transformation est nul (perte de bijectivité).

Pour pouvoir prendre en compte les grandes déformations il faut alors reconstruire le maillage à chaque fois que cela est nécessaire. Dans le code Forge3® ce remaillage s'effectue automatiquement à partir d'un critère de qualité de maillage. Dans la suite nous présentons une partie des travaux réalisé par T *Coupez* [25]. Ces travaux décrivent un algorithme de génération et d'adaptation de maillage par une méthode de minimisation de volume. Nous donnons ensuite le critère de remaillage.

3.6.1 Le mailleur

Les éléments du maillage (en volume) sont des tétraèdres (4 sommets (nœuds), 6 arêtes, 4 faces). En 2D les éléments sont des triangles. On construit à partir d'une triangulation de la surface du domaine une *topologie de maillage*.

Une *topologie de maillage* est un ensemble d'éléments (tétraèdres) pour lequel chaque face ou arête est partagée, au plus, par deux éléments.

On obtient une *topologie de maillage* $\boldsymbol{T}$ en reliant un nœud de la triangulation du bord du domaine, à tous les autres (Figure 3.1). On parle de génération de topologie étoilée.

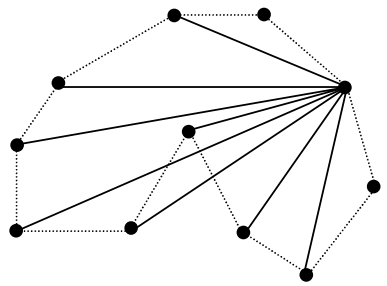


Figure 3.2 : Génération d'une topologie étoilée à partir d'une triangulation du bord du domaine.

Cette topologie n'est pas forcément un maillage et on a :

$$\textit{Volume}\ (\text{topologie de maillage}) = \sum_{T \in \boldsymbol{T}} |T| \geq |\Omega| \qquad \textbf{(3.80)}$$

Où $|\mathrm{T}|$ *représente le volume de l'élément T.*

L'équation (3.80) exprime que le volume d'une *topologie de maillage* est toujours supérieur au volume du domaine Ω (calculé à partir de la triangulation de la surface).

Le principe de l'algorithme est alors de modifier cette topologie de maillage pour obtenir une topologie de maillage telle que son volume soit égal au volume du domaine sans avoir d'éléments "plats":

$$\sum_{\mathrm{T}\in \boldsymbol{T}} |\mathrm{T}| = |\Omega|, \quad avec\, |\mathrm{T}| > 0, \forall \mathrm{T} \in \boldsymbol{T} \tag{3.81}$$

La topologie qui vérifie cette propriété (*i.e.* $|\mathrm{T}| > 0, \forall \mathrm{T} \in \boldsymbol{T}$, pas d'éléments "*plats*") est alors un ***maillage*** du domaine Ω. Ce résultat est démontré dans [25] (*T. Coupez*).

Opérations sur les topologies de maillages

Les modifications s'effectuent localement sur les éléments partageants un même nœud ou une même arête à l'aide du générateur d'étoilement Figure 3.3.

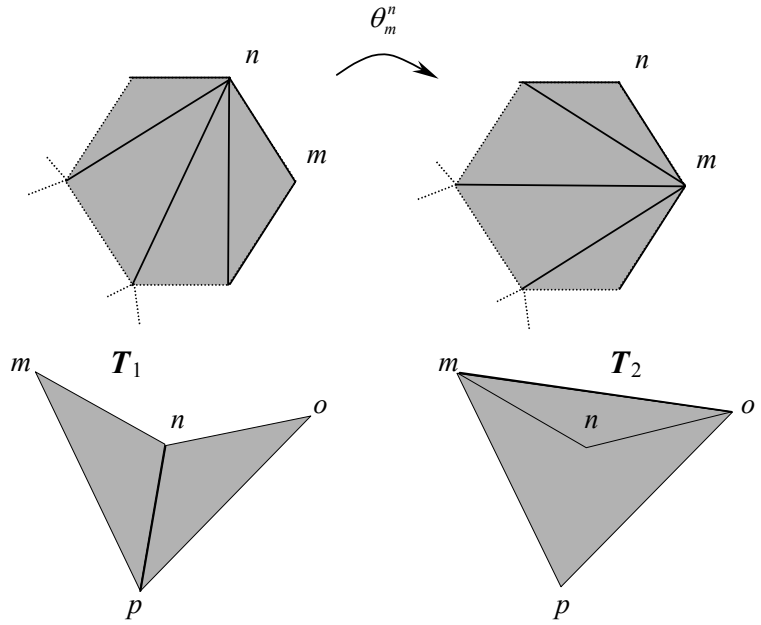


Figure 3.3 : (en haut) l'opérateur local θ change les éléments connectés à n par des éléments connectés par m. (en bas) deux topologies de maillage possibles, $\boldsymbol{T}_1$ *et* $\boldsymbol{T}_2$*, pour le domaine décrit par le quadrilatère (mnop), on inverse les arêtes (np) et (mo).*

Génération de maillage par minimisation du volume

Pour obtenir un maillage il faut trouver la topologie de maillage, définie sur le bord du domaine, minimisant son volume : $Volume(\boldsymbol{T}) = \sum_{\mathrm{T} \in \boldsymbol{T}} |\mathrm{T}|$

Cette définition du volume permet une évaluation locale du volume de la topologie de maillage. On peut alors optimiser localement cette topologie en particulier lors d'opérations comme celle décrite par la Figure 3.3. On remarque que, pour la Figure 3.3 :

$$volume(\boldsymbol{T}_1) > volume(\boldsymbol{T}_2), \quad \text{et } volume(\boldsymbol{T}_1) = volume(\{m, n, o, p\})$$

La topologie de maillage $\boldsymbol{T}_1$ minimise le volume, qui est égal au volume du quadrilatère. On constate que $\boldsymbol{T}_1$ est un maillage alors que $\boldsymbol{T}_2$ ne l'est pas.

Pour trouver la topologie de maillage minimisant son volume, on introduit une ***relation d'ordre*** sur les topologies de maillage à l'aide d'un *critère de qualité* sur la forme des tétraèdres.

La qualité de forme d'un tétraèdre est définie comme le rapport entre le volume de l'élément et la somme de ses arêtes :

$$c(\mathrm{T}) = \frac{|\mathrm{T}|}{h(\mathrm{T})^d}, \quad d = 2,3 \qquad \textbf{(3.82)}$$

La qualité de forme d'un élément est maximale pour un simplex équilatéral et nulle pour un élément plat.

Etant donné une topologie de maillage on classe les éléments par ordre croissant suivant leur qualité de forme. On peut alors définir la relation d'ordre entre topologies:

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{a}} < \boldsymbol{T}_{\mathrm{b}}$$
$$\exists e, \forall i < e, c(\mathrm{a}_i) = c(\mathrm{b}_i), \quad \text{et } c(\mathrm{a}_e) < c(\mathrm{b}_e)$$

La meilleure topologie est celle qui maximise la qualité du plus mauvais élément.

L'algorithme complet consiste à partir du maillage de la surface du domaine, de générer arbitrairement une topologie étoile, que l'on optimise *localement* par des opérations sur les nœuds et sur les arêtes.

On génère ainsi un maillage du domaine mais qui ne contient aucun nœud interne. Sa qualité est souvent mauvaise c'est pourquoi on introduit une opération supplémentaire d'ajout ou de suppression de nœuds toujours à l'aide de l'opérateur d'étoilement.

3.6.2 Raffinement de maillage

La paragraphe précédent nous a permit de générer un maillage d'un domaine Ω à partir d'une triangulation de sa frontière. Néanmoins le maillage obtenu ne vérifie pas de critère de taille de maille. Or la précision d'une simulation numérique dépend en premier lieu de la taille de maille. Par exemple dans le cas du contact pénalisé entre un solide déformable et un solide rigide avec une géométrie d'interface complexe. Pour un respect de la condition de non pénétration satisfaisant on est amené à imposer une carte de maille fine autour de la zone de contact. La prise en compte d'écoulements complexes, associés aux grandes déformations, conduit aussi à déterminer une taille de maille adéquate.

Pour que le mailleur puisse vérifier un critère de taille de maille on introduit une fonction de taille de maille H définie au nœuds du maillage. La taille de maille d'un élément est la moyenne des tailles de maille de ses nœuds :

$$H_{\mathrm{T}} = \sum_{i \in \mathrm{T}} \frac{H_h(i)}{D}; \quad D = 4$$

Le processus d'adaptation consiste à améliorer le maillage tant que la taille de maille courante ne correspond pas à la taille de maille désirée (fonction H). On modifie alors le *critère de forme* (3.82) de la manière suivante:

$$c_H(\mathrm{T}) = \left(\min\left(\frac{\mathrm{h(T)}}{H_{\mathrm{T}}}, \frac{H_{\mathrm{T}}}{\mathrm{h(T)}} \right) \right)^d \cdot c(\mathrm{T}) \qquad \textbf{(3.83)}$$

Où h(T) *est de diamètre de* T.

Dans la pratique cette carte de maille correspond à des zones de l'espace pour lesquelles on alloue une taille de maille. Nous verrons l'application de cette technique de raffinement au chapitre 5.

3.6.3 Critère de remaillage

Lors de la simulation numérique le remaillage est activé lorsque la qualité moyenne du maillage q_{moy} est inférieure à une valeur seuil.

$$q_{moy} = \frac{1}{Card(\boldsymbol{T})} \sum_{\mathrm{T} \in \boldsymbol{T}} c_H(\mathrm{T}) \qquad \textbf{(3.84)}$$

En dessous de ce seuil on remaille le domaine en volume pour une frontière fixe suivant la carte de maille imposée. On remaille ensuite la surface tout en respectant la géométrie. Les opérations de surface se répercutent sur la topologie du maillage volumique. On génère alors des raccordements volumiques pour garder une topologie de maillage.

3.6.4 Transport

Dans une discrétisation spatiale par éléments finis, la configuration du domaine discret Ω, pour notre problème, est la donnée de : la géométrie du domaine, le champ de vitesse et de pression, l'état de contrainte (déviatoire) ainsi que la variable interne (écrouissage). Ces informations sont alors connues aux nœuds ou aux éléments du maillage. Lors du remaillage la géométrie du domaine reste inchangée et c'est la topologie du maillage qui est modifiée. Il faut réaffecter les données de la configuration de l'ancien au nouveau maillage. On parle de *transport* des variables sur la nouvelle configuration.

Dans le cas de la discrétisation $P1^+/P1$ le champ de vitesse et de pression est linéaire sur la discrétisation. On peut alors interpoler de façon exacte ces deux champs sur le nouveau maillage.
Par contre l'état de contrainte et la variable interne sont constants sur l'élément. Ces variables sont donc discontinues sur le domaine discrétisé. Dans le code Forge3® le transport de ces variables s'effectue par élément. On affecte à l'élément du nouveau maillage la valeur de la variable de l'élément, de l'ancien maillage, le plus *proche*.
Cette approche reste valable lorsque le nouveau et l'ancien maillage sont topologiquement proches. Par contre lorsque on doit dé-raffiner une zone du maillage on constate une perte d'information sur ces variables. Pour remédier à ce type de problème une méthode de transport particulaire a été mise au point au laboratoire par *K. Traoré* [114], dans le cadre du laminage d'anneaux.

3.7 Conclusions

Nous avons décrit dans ce chapitre les discrétisations temporelle et spatiale des équations de la mécanique dans le code Forge3®.

Il ressort que le schéma d'intégration temporel global est de type semi-implicite. Outres les inconnues de base que sont la vitesse et la pression (formulation mixte), la loi de comportement est intégrée par un schéma purement implicite. La résolution globale s'effectue en deux temps : résolution des équations de comportement (opérateur de projection), puis résolution de l'équation d'équilibre.

Les termes de frottement (*Coulomb*) et de contact (*pénalisé*) sont semi-implicites. Pour le frottement la loi est régularisée (loi univoque en fonction de la vitesse de glissement) et le seuil est calculé à partir de la contrainte normale en début d'incrément. Pour le contact, la condition de non pénétration est imposée en fin d'incrément, mais les données du contact (normale, distance à l'outil) sont celles du début de l'incrément.

La discrétisation spatiale s'effectue à l'aide du *mini-element* qui est la forme condensée (élimination de la bulle) du P1+/P1. Ce type de discrétisation conduit à la formulation faible de la compressibilité (équation en pression). Il s'avère que, lorsque cette compressibilité n'est plus seulement élastique, la matrice de raideur est non symétrique. Nous avons dégagé deux termes sources de non symétrie : un terme issu de la formulation faible de la compressibilité et un terme issu du module tangent de la loi de comportement. Nous revenons en détail sur ce point dans le chapitre suivant.

Enfin l'algorithme de maillage/remaillage a été décrit, ainsi que le transport des variables d'état associé.

REFERENCES

[1] ABDEL-FATTAH T.T., HODHOD H.A., AKL A.Y., *"A novel formulation of infinite elements for static analysis"*, Computers and Structures, 77, pp. 371-379, (2000).

[2] ABOUAF M., *"Modélisation de la compaction de poudres métalliques frittées"* Thèse Doct. es sciences, Université scientifique et médicale et ENP de Grenoble, 168 p. (1985).

[3] ABU-FARSAKH M.Y., VOYIADJIS G.Z., *" Computational model for the simulation of the shield tunneling process in cohesive soils"* Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., **22**, pp. 00-22, (1998).

[4] ABU-FARSAKH M.Y., VOYIADJIS G.Z.,TUMAY M.T., *"Numerical analysis of the miniature piezocone penetration tests (PCPT) in cohesive soils"* Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., **22**, pp. 791-818, (1998).

[5] AHADI A., KRENK S., *"Characteristic state plasticity for granular materials Part I : Basic theory"*, International Journal of Solids and Structures, 37, pp 6343-6360 (2000).

[6] AHADI A., KRENK S., *"Characteristic state plasticity for granular materials Part II : Model calibration and results"*, International Journal of Solids and Structures, 37, pp 6361-6380 (2000).

[7] ARNOLD D.N., F. BREZZI, FORTRIN M., "A stable finite elemnt for stokes equations". Calcolo., **21**, 337-344, (1984).

[8] ASAOKA A., NAKANO M., NODA T., *"Soil-Water coupled behaviour of saturated clay near/at critical state"* Soils and foundations, **34,** pp.91-105 (1994).

[9] ASHBY S. F., MANTEUFFEL T. A., SAYLOR P. E., *"A Taxonomy for Conjugate Gradient Methods"* SIAM, J. Numer. Anal., vol. 27, No 6, pp. 1542-1568, (1990).

[10] BABUSKA I., "The finite element method with penalty" Math ; Comp., **27**, 221-228, 1973.

[11] BARBAS A., *"contribution à l'utilisation de la méthode des éléments finis en Mécanique des Sols dans le domaine de l'élasto-plasticité"* Thèse Doct. génie civil, ENPC, 140 p. (1981).

[12] BARDET J.P., *"A Comprehensive Review of Strain Localisation in*

Elasto-Plastic Soils", Computers and Geotechnics, **10**, pp. 163-188, (1990).

[13] BAUER E., *"Conditions for embedding Casagrande's critical states into hypoplasticity",* Mech. Cohes.-Frict. Mater., **5**, pp. 125-148, (2000).

[14] BAZANT Z., PIJAUDIER-CABOT G., *"Nonlocal Continuum Damage, Localisation Instability and Convergence",* Journal of Applied Mechabics, **55**, pp. 287-293, (1988).

[15] BELLET M., *"Finite element analysis of compressible viscoplasticity using a three-field formulation"*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 175, pp. 19-40, (1999).

[16] BORGA R.I., LEE S.R., "*Cam-Clay Plasticity, Part I : Implicit integration of elasto-plastic constitutive relations"* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **78**, pp. 49-72 (1990).

[17] BORGA R.I., LEE S.R., *"Cam-Clay Plasticity, Part II :Implicit integration of contitutive equations based on non-linear elastic stress predictor"* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **88** pp. 225-240 (1991).

[18] BORGA R.I., TAMAGNIGNI C., *"Critical State Model at Finite Strain"* Proceedings of the 11th Conference on Engineering Mechanics, pp. 148-151 (1996).

[19] BOUSSHINE L., CHAABA A., DE SAXCE G., *"Softening in stress-strain for Drucker-Prager non-associated plasticity"* International Journal of Plasticity , **17**, pp. 21-46, (2001).

[20] BRAUDEL H.J., *"Modélisation des grandes transformations élastoplastique d'un solide isotrope par la méthode des éléments finis. Application à la forge à froid des métaux"* Thèse Doct. es sciences, Université de Lyon I, 226 p. (1986).

[21] BREZINSKI C., REDIVO-ZAGLIA M., *"Treatment of near-breakdown in the CGS algorithm"* Numerical Algorithm, vol. 7, pp. 33-73, 1994.

[22] BUCAILLE J.L., *"Simulation numérique de l'indentation et de la rayure des verres organiques",* Thèse de Doctorat, ENSMP, (2001).

[23] CAMBOU B., CHAZE M., DEDECKER F., *"Change of scale in granular materials"* Eur. J. Mech. A/Solids, **19**, pp. 999-1014 (2000).

[24] CAMBOU B., JAFARI, *"Modèles de comportement des sols non cohérents"* Revue française de Géotechnique, **44**, pp. 43-55 (1988).

[25] COUPEZ T., *"Génération de maillage et adaptation de maillage par*

optimisation locale" Revue Européenne des éléments finis, **9**, pp. 403-423, (2000).

[26] COUPEZ T., *"Stable-stabilized finite element for 3D forming calculation"* Communication interne (1995).

[27] COUSSY O., *"Mécanique des Milieux Poreux "* Edition Technip (1991).

[28] CHEN W.F., BALADI G.Y., *"Soil Plasticity : Theory and Implementation"* Developments in Geotechnical Engineering, **38**, Elsevier, New York (1985).

[29] CHEN W.F., MIZUNO E., *"Nonlinear Analysis in Soil Mechanics :Theory and Implementation"* Developments in Geotechnical Engineering, **53**, Elsevier, New York (1990).

[30] CHI L., KUSHWAHA R.L., *"Three-Dimensionnal, finit element interaction between soil and tillage tool"* ASAE, **34,** pp. 361-366 (1991).

[31] CHOPRA M. B., DARGUSH G.F., *"Finite Element Analysis of time Dependent Large-Deformation Problems "* Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., **16**, pp. 101-130, (1992).

[32] COTECCHIA F., CHANDLER R.J., *"A general framework for the mechanical behaviour of clays"*, Géotechnique, **50**, **4**, pp. 431-447, (2000).

[33] CUNDALL P., STRACK O.D.L., *"A discrete method for granular assemblies"*, Géotechnique, **2**, pp. 47-65, (1979).

[34] DE BORST R., VERMEER P.A., "*possibilities and limitations of finite elements for limit analysis"* Géotechnique, **34,** pp. 119-210 (1984).

[35] DE BORST R., *"Robustness in numerical computations of damage evolution in cohesive-frictional material",* Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, **4,** pp. 27-54 (1997).

[36] DE BORST R., HEERES O. M., *"Performance of low-Order triangular elements during plastic flow"* Engeneering Computations, **16, 1,** pp. 70-87 (1999).

[37] DESAI C.S., ZAMAN M.M., LIGHTNER J.G., SIRIWARDANE H.J., "*Thin layer element for interfaces and joints",* Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., **8**, pp. 19-43 (1984).

[38] DESSAI C.S., GIOCLA G., *"Modelling and Testing : Implementation of numerical models and their application in practice"* in "*Numerical Methodes and Constitutive Modelling in Geomechanics" Ed. C.S.,* C.I.S.M. Courses and Lectures, **311**, pp.1-168 (1990).

[39] DWORKIN J., "*large stains in cemented granular aggregates elastic-*

plastic cement" Mechanics of Materials, **23**, pp. 29-44 (1996).

[40] ETEROVIC A. L., BATHE K., *"A Hyper-Elastic-Based Large Strain Elasto-Plastic Constitutive Formulation with Combined Isotropic-Kinematic Hardening using the Logarithmic stresses and Strain Measures"* Int. J. Numer. Meth. Engrg., **30,** pp. 1099-1114 (1990).

[41] FAMIYESIN O.R., *"Robust Symmetric Formulations for Nonassociated Plasticity Problems"*, Journal of Engineering Mechanics, **125**, **9**, pp. 1070-1080, (1999).

[42] FELIX B., *"La méthode des éléments finis en viscoélasticité et en viscoplasticité. Application à la mécanique des sols"* Rapport de recherche LPC n°123 (1983).

[43] FLETCHER R., *"Conjugate Gradient methods for indefinite systems"*, Lecture Notes Math., **506**, 73-89, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (1976).

[44] FREDLUNG D.G., *"The 1999 R.M. Hardy Lecture : The Implementation of unsaturated soil mechanics into geotechnical engineering"*, Can. Geotech. J., 37, pp. 963-986, (2000).

[45] GAY C., "Contribution à la simulation numérique tridimensionnelle du forgeage à froid", Thèse de Doctorat, ENSMP, (1995).

[46] GAWRONSKI W., *"Fuzzy Elements"* Computers and structures, **10,** pp. 863-865 (1979).

[47] GEE-CLOUGH D., WANG J., KANOK-NUKULCHAI W., *"Deformation and Failure in Wet Clay Soil : Part 3, Finite Element Analysis of Cutting of Wet Clay by Tines"*, J. agric. Engng. Res., **58**, pp.121-131, (1994).

[48] HASHASH Y.M.A., WHITTLE A.J. *"Integration of the modified Cam-Clay Model in non-linear finite element analysis"* Computers and geotechnics, **14,** pp. 59-83 (1992).

[49] HILD P. *"Problèmes de contact unilatéral et maillages éléments finis incompatibles"* Thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier, 1998.

[50] HSI J.P., SMALL J.C., *"Analysis of excavation in an elasto-plastic soil involving drawdown of the water table"* Computers and Geotechnics, **13**, pp.1-19 (1992).

[51] HU Y., RANDOLPH M.F., *"H-adaptaive FE analysis of elasto-plastic non-homogeneous soil with large deformation"*, Computers and Structures, **23**, pp. 61-83, (1998).

[52] HUANG T.K., CHEN W.F., CHAMEAU J.C., *"The application of cap-plasticity-model to embankment problems"* Computers and structures,

44, pp. 1349-1369 (1992).

[53] ITASCA consulting, *"Documentation de FLAC2D© : strain-softening model"*, User's Manuel, Minneapolis, 1994.

[54] ITSKOV M., *"On the theory of fourth-order tensors and theior applications in computational mechanics",* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **189**, pp. 419-438, (2000).

[55] JAOUEN O., *"Modélisation tridimensionnelle par éléments finis pour l'analyse thermo-mécanique du refroidissement des pièces coulées"* Thèse Doct. Science et Génie des Matériaux, E.N.S.M.P., 1998.

[56] JARUSEK J., ECK C., *"Dynamic contact problems with friction in linear viscoelasticity"*, C. R. Acad. Sci. Paris, **322**, **I**, pp. 467-502, (1996).

[57] JEAN M., MOREAU J.J., *"Unilateraly and dry friction in dynamics of rigid bodies collections"*, Ed. par Curnier, Proceedings of the Contact Mechanics International Symposium, pages 31-48, lausanne, 1992. Presses polytechniques et Universitaires Romandes.

[58] JEREMIE B., *" Line search techniques for elasto-plastic finite element computations in geomechanics"*, Commun. Numer. Meth. Engng, **17**, pp. 115-125 (2000).

[59] KERYVIN V., DESOYER T., HANUS J-L., *"Localisation de la déformation sous sollicitations lentes : une approche dynamique"*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 328, Série II *b*, p. 727-732, (2000).

[60] KHOGO Y., NAKANO M., MIYAZAKI T., *"Theoretical Aspects of Constitutive Modelling for Unsaturated Soils"*, Soils and Foundations, **33**, **4**, pp. 49-63, (1993).

[61] KIOUSIS P.D., VOYADJIS G.Z., "*Lagrangean continuum theory for saturated porous media"* Journal of Engineering Mechanics., **111**, pp. 1277-1288 (1985).

[62] KIOUSIS P.D., VOYADJIS G.Z., TUMAY M.T., "*A Large Stain Theory for the Two-Dimentional Problems in Geomechanics",* Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., **10**, pp. 17-39 (1986).

[63] KOLMAYER P., "*Rhéologie et modélisation des Sols de surface pour l'interprétation in situ*", Rapport, ETAS, décembre 1998.

[64] KOLMAYER P., *"Modélisation du comportement Mécanique des Sols de Surface et Identification In Situ"*, Thèse de Doctorat en Génie Civil, Ecole Centrale de Lyon, 170 p., (2001).

[65] KUSHWAHA R.L., SHEN J., "*finite element analysis of dynamic interaction between soil and tillage tool*" ASAE, **37,** pp. 1315-1319

(1992).

[66] LABORDE P., TOSON B., PESQUE J.-J., *"On the consistent tangent operator algorithm for thermo-plastic problems"* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **146,** pp. 215-230 (1997).

[67] LAURSEN T.A., SIMO J.C., *"A continuum-based finite element formulation for the implicit solution of multibody, large deformation frictional contact problems"*, Int. J. Numer. Methods Eng., **36**, pp. 3451-3485, (1993).

[68] LEE E.H., *"Elastic-Plastic deformation at finite strains"* J. Appl. Mech. Trans. ASME, **36**, pp. 1-6 (1969).

[69] LEGENDRE A., BACCONNET C., "*Rapport d'essais de scarification*", LERMES, Ensemble Universitaire des Cézeaux, mai 2001.

[70] LIU Y., HOU Z.M., *"Three dimensionnal nonlinear finite element analysis of soil cutting by narrow blades"* in :Proc. of Int. Conf. On Soil Dynamics, Auburn, Ala. 2 :338-347. Nat. Tillage MachineryLab., Auburn, Ala (1985).

[71] LIU C.H., WONG J.Y., *"Numerical Simulations of tire-soil interaction based on Critical State Soil Mechanics"* Journal of Terramechanics, **33**, pp.209-221 (1997).

[72] MACARI E.J., WEIHE S., ARDUINO P., *"Implicit integration in elastoplastic constitutive models for frctional materials with highly non-linear hardening functions"*, Mech. Cohes.-Frict. Mater., **2**, pp. 1-29, (1997).

[73] MALEKI M., *" Modélisation hiérarchisée du comportement des Sols"*, Thèse de Doctorat en Génie Civil, Ecole Centrale de Lyon, 252 p., (1998).

[74] MARCON A.F., BITTENCOURT E., CREUS G.J., *"On the integration of stresses in large deformation plasticity"* Engineering Computations, **16**, pp 49-69, (1999).

[75] MARIE S. *"Un Modèle de Parallélisation S.P.M.D pour la Simulation Numérique de Procédés de Mise en Forme de Matériaux"*, Thèse de Doctorat, ENSMP, (1997).

[76] McMEEKING R.M., RICE J.R., "*Finite element formulations for problems of large elastic-plastic deformation"* Int. J. Solids struct., **11** pp.601-616 (1975).

[77] MESCHKE G., LIU C., MANG H.A., *"Large strain finite element analysis of snow"* J. Engrg. Mech., **122,** pp.591-602 (1996).

[78] MIJAR A.R., ARORA J.S., *"Review of Formulations for elastostatic frictional contact problems"*, Struct. Multidisc. Optim., **20**, pp. 167-189, (2000).

[79] MIZUNO E., CHEN W.F., *"plasticity analysis of slope with different flow rules"* Computers and structures, **17**, pp. 375-388 (1983).

[80] MOCELLIN K., *" Contribution à la Simulation Numérique Tridimentionnelle du Forgeage à chaud : Etude du Contact et Calcul Multigrille"* Thèse Doct. Science et Génie des Matériaux, E.N.S.M.P., 1999.

[81] MOREAU J.J., *"Unilateral and dry friction in finite freedom dynamics"*, Ed. par J.J. Moreau & Panagiotopoulos, CISM Courses and Lectures 302 Springer-Verlag Wien New-York), Non-smooth Mechanics and Application, pages 1-82, (1988).

[82] MOUAZEN A.M., *"Modelling the interaction between the Soil and tillage tools"*, Ph. D. Thesis, submitted to the Hungarian Academy of Sciences, Budapest, Hungary, 128 p., (1997).

[83] MOUAZEN A.M., NEMENYI M., *"A review of the finite element modelling techniques of Soil tillage"*, Mathematics and Computers in Simulation, 48, pp. 23-32, (1998).

[84] MROUEH H., SHAHROUR I., *"Use of sparse iterative method for the resolution of three-dimensional soil / structure interaction problems"* Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., vol. 23, pp. 1961-1975, (1999).

[85] NAGTEGAAL J.C., DE JONG J.E., "*Some computational aspects of elastic-plastic larges stain analysis"* Int. J. Numer. Meth. Engrg., **17,** pp. 14-41 (1981).

[86] NAGTEGAAL J.C., *"On the implementation of inelastic constitutive equations with special reference to large deformation problems"* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **33,** pp. 469-484 (1982).

[87] NOUGUIER C., *"Simulation des Interactions Outil-Sol, Application aux Outils de Traitement des Sols"*, Thèse de Doctorat en Mécanique, Génie Mécanique, Génie Civil, Université Montpellier II, 144 p., (1999).

[88] ORTIZ M., POPOV E.P., *"Accuracy and Stability of Integration Algorithms for Elastoplastic Constitutive Relations"* Int. J. Num. Meth. Engrg., **21**, pp. 1561-1576, (1985).

[89] PALMER A.C., *"Speed effects in cutting and ploughing"*, Géotechnique, **49**, **3**, pp. 285-294, (1999).

[90] PERCHAT E., "MINI-élément et factorisation incomplètes pour la parallélisation d'un solveur de Stokes 2D. Application au Forgeage".

Thèse de Doctorat, ENSMP, (2000).

[91] PETRYK H., *"Plastic Instability : Criteria and Computational Approaches"* Archives of Computational Methods in Engineering, Vol **4**, **2**, pp 111-151, (1997).

[92] PORAN C.J., RODRIGUEZ J.A., "*Finite element analysis of impact behavior of sand"* Soils and foundations, **32**(4), pp. 68-80 (1992).

[93] POTTS D.M., GENS A., *"A critical assessment of methods of correcting for drift from the yield surface in elastoplastic finite element analysis"* Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., **9,** pp. 149-159 (1985).

[94] PREVOST J.H., "*Mechanics of continuous porous media"* Int. J. Engng Sci., **18**, pp. 787-800 (1980).

[95] PREVOST J.H., "*SHORT COMMUNICATION : Localization of deformations in Elastic-Plastic Solids"* Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech., **11**, pp. 187-196 (1984).

[96] QUIBEL A., FROMENTIN M., "*Essais en vraie grandeur d'un dispositif expérimental de scarification des Sols",* Centre d'Expérimentation Routière, LCPC, Juin 2001.

[97] REGUEIRO R. A., BORJA R.I., *"Plane strain finite element analysis of pressure sensitive plasticity with stong discontinuity"*, Int. J. Solids. Structures, **38**, pp. 3647-3672, (2001).

[98] ROUAINIA M., MUIR WOOD D., *"An implicit constitutive algorithm for finite Cam-clay elasto-plastic model"*, Mech. Cohes.-Frict. Mater., , pp. 469-489, (2000).

[99] RUNESSON V., "*Implicit integration of elastoplastic relations with reference to soils"* Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech., **11**, pp. 315-321 (1987).

[100] RUNESSON K., "*A note on nonassociated plastic flox rules"* International Journal of Plasticity, **5**, pp. 639-658 (1989).

[101] SALENÇON J., *"Théorie de la plasticité pour les applications en mécanique des Sols"*, Eyrolles, (1974).

[102] SCHLOSSER F., "*Element de mecanique des sols*", Presse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, (1983).

[103] SHENG D.,SLOAN S.W., YU H.S. *" Aspects of finite element implementation of critical state models",* Computational Mechanics, 2000, **26**, **2**, pp 185-196, (2000).

[104] SIDOROFF F., *"Incremental constitutive equation for large strain elastoplasticity"* Int. J. Eng. Sci., **20**, pp. 19-26 (1982).

[105] SIMO J.C., TAYLOR R.L., *"Consistent tangent operator for rate-independent elastoplasticity"* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **48,** pp. 101-118 (1985).

[106] SIMO J.C., JU J-W., PISTER K.S., TAYLOR R.L., "*Assessment of Cap Model : Consistent Return Algorithms and Rate-Dependent Extension"* Journal of Engineering Mechanics, **114**, **2**, pp 191-218, (1988).

[107] SIMO J.C., KENNEDY J.G., GOVINDJEE S. K.S., *"Non-Smooth Multisurface Plasticity and Visco-Plasticity. Loading/Unloading Conditions and Numerical Algorithm"* Int. J. Num. Meth. Engrg., **26**, pp. 2161-2185, (1988).

[108] SIRIWARDANE H.J., DESAI C.S., *"Computational procedures for non linear three dimensional analysis with some advanced constitutive laws"* Int. J. Numer.Anal.Meth. Geomech., **7,** pp.143-171 (1983).

[109] SNITBHAN N., CHEN W.F., "*Elastic-plastic large deformation analysis of soil slopes"* Computers and structures, **9,** pp. 567-577 (1978).

[110] SONNELVED P., "CGS :a fast Lanczos-type solver for nonsymmetric linear systems", SIAM J. Sci. Statist. Comput., 10, 36-52, (1989).

[111] STOLLE D.F.E., VERMEER P.A., BONNIER P.G.,*" Time Integration of a constitutive law for soft clays"*, Commun. Numer. Meth. Engng, **15**, pp. 603-609 (1999).

[112] SZABO L., *"Comments on loss of strong ellipticity in elastoplasticity"*, Int. J. Solids. Structures, **37**, pp. 3775-3806, (2000).

[113] TANAKA H., INOOKU K., NAGASAKI Y., MIYASAKI M., SUMIKAWA O., OIDA A., *"Simulation of Soil Loosening at Subsurface Tillage using Vibrating Type Subsoiler by means of the Distinct Element Method"*, Proceedings of the 8th European Conference of ISTVS, Umeå, Sweden, (2000).

[114] TRAORE K., "*Simulation thermomécanique du laminage circulaire : développement d'une formulation quasi-eulérienne tridimensionnelle sur une architecture parallèle.*", thèse de Doctorat, ENSMP, 2001

[115] VAN DER VORST H. A., "BI-CGSTAB : *A Fast and Smoothly Converging Variant of BI-CG for the Solution of Non-Symmetric Linear Systems"* J. Sci. Stat. Comput., vol. 13, No 2, pp 631-644, (1992).

[116] VAN DER VORST H. A. *"Parallel iterative solution methods for linear systems arising from discretized pde's"*. Technical Report AGARD R-807, Proc. of Special Course on Parallel Computing in CFD, 1-39, AGARD, Neully-sur-Seine, 1995.

[117] VAN DER VORST H. A., VUIK C., *"The Superlinear Convergence Behaviour of GMRES"* Journal of Computational and Applied Mathematics (North Holland), vol. 48, pp. 327-341, (1993).

[118] VOYIADJIS G.Z., ABU-FARSAKH M.Y., *"Coupled Theory of Mixtures for Clayey Soils"* computers and geotechnics, **20,** pp. 195-222 (1997).

[119] WANG C.H., HU W., SAWYER J.P.G., "*Explicit numerical integration algorithm for a class of non-linear kinematic hardening model"* Computational Mechanics, 2000, Vol **26**, **2**, pp 140-147 (2000).

[120] WANG J., GEE-CLOUGH D., *"Deformation and Failure in Wet Clay Soil : Part 2, Soil Bin Experiments"*, J. agric. Engng. Res., **54**, pp.57-66, (1993).

[121] WRIGGERS P., *"Finite Element Algorithms for Contact Problems"*, Archives of Computational Methods in Engineering, State of the art reviews, **2**, **4**, pp. 1-49, (1995).

[122] XIE X.M., ZHANG D.J., *"An approach to 3-D nonlinear FE simulative method for investigation of soil-tool dynamic system"* in :Proc. of Int. Conf. On Soil Dynamics, Auburn, Ala. 2 :322-327. Nat. Tillage MachineryLab., Auburn, Ala (1985).

[123] YONG R.N., HANNA A.W., *"Finite element analysis of plane soil cutting"* Journal of terramechanics, **14,** pp. 103-125 (1977).

[124] ZHU Y., FOX P.J., MORRIS J.P., *"A pore-scale numerical model for flow through porous media"*, Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., 23, pp. 881-904, (1999).

[125] ZHANG H.W., SANAVIA L., SCHREFLER B.A., *"Gradient-dependent plasticity model and dynamic strain localisation of saturated and partially saturated porous media : one dimensional model"*, Eur. J. Mech. A/Solids, **19**, pp. 503-524, (2000).

[126] ZHANG H.W., SANAVIA L., SCHREFLER B.A., *"Numerical analysis of dynamic strain localisation in initially water saturated dense sand with a modified generalised plasticity model"*, Computers and structures, **79**, pp. 441-459, (2001).

Chapitre 4 Intégration des lois de comportement des Sols

4.1 INTRODUCTION 89

4.2 LES LOIS IMPLEMENTEES 89

4.2.1 MODELES COMPRESSIBLES 89
4.2.1.1 DRUCKER PRAGER NON ASSOCIE [105] 89
4.2.1.2 CAM-CLAY MODIFIE [16] 90
4.2.1.3 CJS ETAT CRITIQUE 90
4.2.2 MODELES INCOMPRESSIBLES 92
4.2.2.1 CJS-TRESCA 92
4.2.2.2 VON MISES 93

4.3 INTEGRATION IMPLICITE 95

4.3.1 DRUCKER PRAGER NON ASSOCIE NON ECROUISSABLE 95
4.3.2 CAM-CLAY 95
4.3.3 CJS ETAT CRITIQUE 95
4.3.4 CJS-TRESCA 95

4.4 RESOLUTION ITERATIVE 95

4.4.1 SOLVEUR ITERATIF 95
4.4.1.1 SOLVEUR SYMETRIQUE : MINRES 95
4.4.1.2 SOLVEURS NON SYMETRIQUES : DIFFERENTES APPROCHES 95
4.4.1.3 STRUCTURE DE DONNEES 95
4.4.2 COMPARAISON 95

4.5 VALIDATION DES LOIS 95

4.5.1 DRUCKER-PRAGER ET CAMCLAY 95
4.5.2 CJS 95
4.5.3 CJS-TRESCA 95

4.6 CONCLUSIONS 95

4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous traitons de l'intégrations des lois de comportement dans le code Forge3®. Nous revenons sur les modèles de Drucker Prager, Cam Clay et CJS, pour lesquels nous donnons leurs formulations incrémentales implicite et les algorithmes de résolutions. Ensuite nous donnons les formulations du problème mixte vitesse / pression (voir chapitre 3) ainsi que les répercussions sur la symétrie de la matrice de raideur. Nous traitons des solveur itératifs mis en jeu pour la résolution des systèmes linéaires issus de la méthode de *Newton Raphson*. Nous abordons enfin la validation de ces lois.

Enfin dans ce chapitre nous adoptons la convention qui note les contraintes de compression négativement, la pression est alors notée : $p = -\frac{1}{3}\mathrm{tr}(\sigma)$.

4.2 Les lois implémentées

Dans cette section nous exposons les modèles implémentés dans le code. Nous séparons ces modèles en une famille compressible et une famille incompressible. Dans le cas compressible les deux premiers modèles, *Drucker Prager non associé* et *Cam-Clay modifié*, nous ont permit d'analyser les problèmes numériques liés à la non symétrie des modules tangents (et donc la raideur globale, voir Chapitre3 section 3.5.3) et à l'intégration temporelle de ces lois. Cette implémentation nous a servit de support pour le modèle plus complexe CJSEC.

4.2.1 Modèles Compressibles

4.2.1.1 Drucker Prager Non associé [105]

Le premier modèle implémenté est le modèle de *Drucker Prager* non associé. C'est un modèle parfaitement plastique et nous avons choisi comme potentiel celui associé au critère de *Von Mises*. Ce modèle s'appui sur les caractéristiques du matériau à la rupture et, étant donné le potentiel plastique, *ne prédit pas* de déformation plastiques volumiques.

L'équation du critère de plasticité est donnée par :

$$f(s,p) = \|s\| - \sqrt{\frac{2}{3}}\kappa(p) = 0 \text{ avec } \kappa(p) = \alpha.3p + k \qquad \textbf{(4.1)}$$

L'équation du potentiel plastique est donnée par :

$$g(\sigma) = \|s\| - k \qquad \textbf{(4.2)}$$

Les vitesses de déformations plastiques suivent la loi d'écoulement non associée :

$$\begin{aligned} \dot{e}^P &= \dot{\lambda}\frac{\partial g}{\partial s}(s,p) \\ \mathrm{tr}\left(\dot{\varepsilon}^P\right) &= -\dot{\lambda}\frac{\partial g}{\partial p}(s,p) = 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(4.3)}$$

4.2.1.2 Cam-Clay Modifié [16]

Le modèle de Cam-Clay est un modèle quadratique en pression avec une loi d'écoulement associée. Ce modèle qui prend en compte le concept d'état critique, fait intervenir une variable interne p_c, que l'on peut relier à la densité du matériau, et qui évolue en fonction des déformations volumiques plastiques.

Le critère de plasticité :

$$f(p,q,p_c) = q^2 + M^2 p(p - p_c) = 0 \qquad \textbf{(4.4)}$$

Avec M pente de la droite d'état critique.

La loi d'écoulement est associée et donc les vitesses de déformations plastiques sont données par :

$$\begin{aligned} \dot{e}^P &= \dot{\lambda}\sqrt{\tfrac{3}{2}}\frac{s}{\|s\|} \\ \mathrm{tr}\left(\dot{\varepsilon}^P\right) &= -\dot{\lambda}\left(M^2(2p - p_c)\right) \end{aligned} \qquad \textbf{(4.5)}$$

La loi d' évolution de la variable d'écrouissage est donnée dans une forme intégrée par :

$$p_c = p_{c0}\exp\left(\vartheta\int_0^t \mathrm{tr}\left(\dot{\varepsilon}^P\right)ds\right) \qquad \textbf{(4.6)}$$

Où p_{c0} est la valeur initiale de la variable d'écrouissage et ϑ est un paramètre du modèle.

4.2.1.3 CJS Etat Critique

Ce modèle présente un mécanisme élastique non linéaire et un mécanisme plastique à deux surfaces de charges, l'une déviatoire et l'autre sphérique (*i.e.* fermant le domaine d'élasticité sur l'axe des pressions). Notre étude se restreint à une élasticité linéaire et au mécanisme plastique déviatoire. Le mécanisme sphérique a une influence prépondérante pour des sollicitations purement isotrope. Ce type de sollicitation n'intervient pas lors du procédé de scarification puisqu'il y a toujours une composante de cisaillement. Néanmoins ce mécanisme peut être activé lors d'essais de compression

triaxiaux. Cela dépend de la densité initiale du matériau (variable p_{c0}) ainsi que de la pression de confinement. L'activation de ce mécanisme conduit alors à la prédiction de déformations volumiques plastiques. En négligeant ce mécanisme on peut être conduit à sur ou sous estimé les déformations volumiques.
Ce modèle, en plus du concept d'état critique, prend en compte l'état caractéristique du matériau (séparation des états contractants et des états dilatants).

Le critère de plasticité fait intervenir le *troisième invariant* du déviateur des contraintes par l'intermédiaire de la fonction *h(s)* :

$$f^d = s_{II} h(s) - RI_1 = 0 \qquad \textbf{(4.7)}$$

avec

$$h(s) = \left(1 - \gamma\sqrt{54}\,\frac{\det(s)}{s_{II}^3}\right)^{1/6}$$

Où γ est un paramètre du modèle.

La loi d'écoulement est non associée, et les vitesses de déformations plastiques sont données par :

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}^P &= \dot{\lambda}\, G(\sigma) \\ \dot{\varepsilon}_{ij}^P &= \dot{\lambda}\left\{\frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{ij}} - \left(\frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{kl}}\tau_{kl}\right)\tau_{ij}\right\} \end{aligned} \qquad \textbf{(4.8)}$$

avec

$$\tau_{ij} = \frac{\beta'\dfrac{s_{ij}}{s_{II}} - \delta_{ij}}{\sqrt{\beta'^2 + 3}} \quad \text{et} \quad \beta' = \beta\left(\frac{s_{II}}{s_{II}^c} - 1\right)$$

$$f = s_{II}^c h(s) - R_c I_1 = 0$$

Le paramètre β' faisant intervenir l'état caractéristique du matériau avec R_c rayon moyen de la surface caractéristique.

En développant les termes liés aux directions des déformations plastiques on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{e}^{pl} &= \dot{\lambda}\left(G(\sigma) - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(G(\sigma))\mathrm{II}\right) \\ &= \dot{\lambda}\left(3\left(\frac{h(s) + R\beta'}{\beta'^2 + 3}\right)\frac{s}{s_{II}} + s_{II}\,dev\left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)\right) \\ \mathrm{tr}(\dot{\varepsilon}^{pl}) &= \dot{\lambda}\,\mathrm{tr}(G(\sigma)) \\ &= -\dot{\lambda}\,3\beta'\left(\frac{h(s) + R\beta'}{\beta'^2 + 3}\right) \end{aligned} \qquad \textbf{(4.9)}$$

La force thermomécanique R est reliée à la variable d'écrouissage $\overline{p}$ par l'équation :

$$R = \frac{AR_m \overline{p}}{A\overline{p} + R_m} \tag{4.10}$$

Et les lois d'évolutions de $\overline{p}$ et de R_m, rayon de la surface de rupture, sont données par :

$$\dot{\overline{p}} = \dot{\lambda} 3 (p_a)^{3/2} (p\ )^{-1/2} \tag{4.11}$$

$$R_m = R_c + \mu \ln\left(\frac{p_c}{p}\right) \tag{4.12}$$

On retrouve la variable p_c, qui est de même nature que celle du *Cam-Clay* :

$$p_c = p_{c0} \exp\left(c \int_0^t \mathrm{tr}\left(\dot{\varepsilon}^P\right) ds \right) \tag{4.13}$$

Où p_a est une pression de référence (100kPa), μ et c sont des paramètres du modèle.

4.2.2 Modèles Incompressibles

Nous avons vu que pour des sols fins saturés ou partiellement saturés une modélisation en tant que milieu incompressible était licite. En effet, dans la littérature, lors de la mise en œuvre du modèle de Cam-Clay, les auteurs adoptent une description bi-phasique du milieu. La réponse du squelette solide est alors donnée par le modèle compressible. Néanmoins dans une approche monophasique le milieu est considéré comme incompressible (à la compressibilité élastique prés).

Dans un formalisme identique au modèle CJS état critique, un modèle incompressible a été mis au point (travaux de *P. Kolmayer* [64]) : le modèle CJS-Tresca.

4.2.2.1 CJS-Tresca

Ce modèle indépendant de la pression hydrostatique présente une loi d'écoulement associée. Il prend en compte l'écrouissage et l'adoucissement du matériau.

La partie élastique de la loi de comportement est de type hypo-Elastique linéaire :

$$\dot{\varepsilon}^e = \frac{1}{2G} s + \frac{\dot{I}_1}{9K^e} \mathrm{1I} \tag{4.14}$$

G et K sont des paramètres de cisaillement et de gonflement élastique.

La surface de charge f fait intervenir le *troisième invariant* des contraintes déviatoires :

$$f = s_{II} h(s) - R = 0 \tag{4.15}$$

La force thermomécanique R associée à la variable d'écrouissage $\bar{\varepsilon}$ (déformation plastique généralisée) est interprétée comme la cohésion du matériau. Cette variable est homogène à une contrainte. Ainsi on observe que la dépendance à la pression hydrostatique a disparu. La loi d'écoulement étant associée les vitesses de déformations plastiques sont données par :

$$\begin{aligned} \dot{e}^P &= \dot{\lambda}\left(\hat{n}\, h(s) + \|s\| dev\left(\frac{\partial h}{\partial s} \right) \right) \\ \mathrm{tr}\left(\dot{\varepsilon}^P\right) &= 0 \end{aligned} \tag{4.16}$$

L'évolution de la force thermomécanique R en fonction de la variable d'écrouissage est donnée dans sa forme intégrée par l'équation :

$$R = \frac{A R_{\max} \bar{\varepsilon}}{A \bar{\varepsilon} + R_{\max}} \tag{4.17}$$

avec

$$\bar{\varepsilon} = \int_0^t \sqrt{\tfrac{2}{3} \dot{e}^P : \dot{e}^P} \tag{4.18}$$

où R_{max} est la valeur asymptotique de R, qui évolue de façon décroissante avec $\bar{\varepsilon}$ suivant la loi ci-dessous :

$$R_{max} = R_c + \frac{R_m - R_c}{(1 + b\bar{\varepsilon})^2} \tag{4.19}$$

où b et R_m sont des paramètres qui règlent la décroissance de R_{max}. Le paramètre R_c peut être interprété comme la cohésion critique du matériau. Nous verrons dans ce chapitre que suivant les valeurs des paramètres A, b, R_m, R_c on peut décrire un comportement durcissant (écrouissage positif) ou un comportement ramollissant (adoucissement).

4.2.2.2 Von Mises

Nous décrivons ici le modèle initialement implémenté dans le code Forge3®. Ce modèle associé est conçu pour les métaux et donc est plastiquement

incompressible. L'écrouissage (positif) est pris en compte par une loi puissance et la variable d'écrouissage est la déformation plastique cumulée.

Le critère est donné par :

$$f = \sqrt{\tfrac{3}{2}\|s\|} - \sigma_0(\bar{\varepsilon}) = 0 \qquad \textbf{(4.20)}$$

La contrainte d'écoulement évolue en fonction de la variable d'écrouissage suivant l'équation :

$$\sigma_0(\bar{\varepsilon}) = \sqrt{3}k_0(1 + a\bar{\varepsilon})^n \qquad \textbf{(4.21)}$$

Où k_0 est la contrainte d'écoulement initiale (cohésion), a est un paramètre et n décrit une évolution sous forme de loi puissance.

4.3 Intégration Implicite

Nous avons vu au chapitre précédent que ces lois de comportement hypo-Elastiques-Plastiques sont intégrées par un schéma temporel implicite. Nous revenons sur la forme générale des équations à intégrer puis nous détaillons cette intégration pour les différents modèles présentés

La loi de comportement est intégrée de façon purement implicite. Nous écrivons ci-dessous les équations constitutives continues du comportement hypo-élasto-plastiques à l'instant $t+\Delta t$:

Les vitesses de déformations

$$\dot{\varepsilon}^{t+\Delta t} = \varepsilon\left(\dot{u}^{t+\Delta t}\right) \tag{4.22}$$

La loi hypo-élastique s'écrit dans une forme découplée :

$$\begin{aligned} \dot{s}^{t+\Delta t} &= 2G.\left(\dot{e}^{t+\Delta t} - \dot{e}^{P\,t+\Delta t}\right) \\ \dot{p}^{t+\Delta t} &= -K.\mathrm{tr}\left(\dot{\varepsilon}^{t+\Delta t} - \dot{\varepsilon}^{P\,t+\Delta t}\right) \end{aligned} \tag{4.23}$$

L'écoulement plastique s'écrit à l'aide du potentiel $\varphi(s,p,R)$:

$$\begin{aligned} \dot{e}^{P\,t+\Delta t} &= \left(I_4 - \tfrac{1}{3}\mathrm{II}\otimes\mathrm{II}\right)\left(\dot{\varepsilon}^{P\,t+\Delta t}\right) \\ &= \left(I_4 - \tfrac{1}{3}\mathrm{II}\otimes\mathrm{II}\right)\left(\dot{\lambda}^{t+\Delta t}\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}\left(\sigma^{t+\Delta t}, R^{t+\Delta t}\right)\right) \\ &= \dot{\lambda}^{t+\Delta t}\left(I_4 - \tfrac{1}{3}\mathrm{II}\otimes\mathrm{II}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}\left(\sigma^{t+\Delta t}\right)\right) \\ &= \dot{\lambda}^{t+\Delta t}\left(I_4 - \tfrac{1}{3}\mathrm{II}\otimes\mathrm{II}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\left(s^{t+\Delta t}\right)\frac{\partial s}{\partial\sigma}\left(\sigma^{t+\Delta t}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial p}\left(p^{t+\Delta t}\right)\frac{\partial p}{\partial\sigma}\left(\sigma^{t+\Delta t}\right)\right) \\ &= \dot{\lambda}^{t+\Delta t}\left(I_4 - \tfrac{1}{3}\mathrm{II}\otimes\mathrm{II}\right)\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\left(s^{t+\Delta t}\right)\left(I_4 - \tfrac{1}{3}\mathrm{II}\otimes\mathrm{II}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial p}\left(p^{t+\Delta t}\right)\left(-\tfrac{1}{3}\mathrm{II}\right)\right)\right) \\ &= \dot{\lambda}^{t+\Delta t}\left(\left(I_4 - \tfrac{1}{3}\mathrm{II}\otimes\mathrm{II}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial s}\left(s^{t+\Delta t}, p^{t+\Delta t}, R^{t+\Delta t}\right)\right) \end{aligned} \tag{4.24}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}\left(\dot{\varepsilon}^{P\,t+\Delta t}\right) &= \mathrm{tr}\left(\dot{\lambda}^{t+\Delta t}\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}\left(\sigma^{t+\Delta t},R^{t+\Delta t}\right)\right)\\
&= \dot{\lambda}^{t+\Delta t}\mathrm{tr}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\left(s^{t+\Delta t}\right)\frac{\partial s}{\partial\sigma}\left(\sigma^{t+\Delta t}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial p}\left(p^{t+\Delta t}\right)\frac{\partial p}{\partial\sigma}\left(\sigma^{t+\Delta t}\right)\right)\\
&= \dot{\lambda}^{t+\Delta t}\mathrm{tr}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\left(s^{t+\Delta t}\right)\left(I_4-\tfrac{1}{3}\mathrm{1I}\otimes\mathrm{1I}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial p}\left(p^{t+\Delta t}\right)\left(-\tfrac{1}{3}\mathrm{1I}\right)\right)\\
&= -\dot{\lambda}^{t+\Delta t}\frac{\partial\varphi}{\partial p}\left(s^{t+\Delta t},p^{t+\Delta t},R^{t+\Delta t}\right)
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

On pose :

$$
\dot{x}^{t+\Delta t} = \frac{x^{t+\Delta t}-x^{t}}{\Delta t} \tag{4.26}
$$

En appliquant un schéma d'Euler implicite on obtient la forme discrète intégrée de ces équations :

L'incrément de déformation totale et l'incrément de déformation plastique :

$$
\begin{aligned}
\Delta\varepsilon^{t+\Delta t} &= \Delta t\varepsilon\left(\dot{u}^{t+\Delta t}\right)=\varepsilon\left(u^{t+\Delta t}-u^{t}\right)\\
\Delta\varepsilon^{P\,t+\Delta t} &= \Delta t\dot{\varepsilon}^{P\,t+\Delta t}\\
\Delta\lambda^{t+\Delta t} &= \Delta t\dot{\lambda}^{t+\Delta t}
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta t\dot{e}^{P\,t+\Delta t} &= \Delta t\dot{\lambda}^{t+\Delta t}\left(\left(I_4-\tfrac{1}{3}\mathrm{1I}\otimes\mathrm{1I}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial s}\left(s^{t+\Delta t},p^{t+\Delta t},R^{t+\Delta t}\right)\right)\\
\mathrm{tr}\left(\Delta t\dot{\varepsilon}^{P\,t+\Delta t}\right) &= -\Delta t\dot{\lambda}^{t+\Delta t}\frac{\partial\varphi}{\partial p}\left(s^{t+\Delta t},p^{t+\Delta t},R^{t+\Delta t}\right)
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

L'état de contrainte en fin d'incrément s'écrit à l'aide des équations (4.26)(4.27) :

$$
\begin{aligned}
s^{t+\Delta t} &= s^{t}+2G.\Delta t.\left(\dot{e}^{t+\Delta t}-\dot{e}^{P\,t+\Delta t}\right)\\
p^{t+\Delta t} &= p^{t}-K.\Delta t.\mathrm{tr}\left(\dot{\varepsilon}^{t+\Delta t}-\dot{\varepsilon}^{P\,t+\Delta t}\right)
\end{aligned}
$$

A l'aide des équations (4.26) et (4.27) on a la formulation suivante :

$$
\begin{aligned}
s^{t+\Delta t} &= s^{t}+2G\Delta t\left(e\left(\dot{u}^{t+\Delta t}\right)\right)-2G\Delta t\dot{\lambda}^{t+\Delta t}\left(\left(I_4-\tfrac{1}{3}\mathrm{1I}\otimes\mathrm{1I}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial s}\left(s^{t+\Delta t},p^{t+\Delta t},R^{t+\Delta t}\right)\right)\\
p^{t+\Delta t} &= p^{t}-K\Delta t\,\mathrm{tr}\left(\varepsilon\left(\dot{u}^{t+\Delta t}\right)\right)-K\Delta t\dot{\lambda}^{t+\Delta t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\left(s^{t+\Delta t},p^{t+\Delta t},R^{t+\Delta t}\right)\right)
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

La loi non linéaire d'évolution du paramètre d'écrouissage est donnée dans une forme générale par :

$$\begin{aligned} \Delta\kappa^{t+\Delta t} &= -\Delta t\lambda^{t+\Delta t}\frac{\partial\varphi}{\partial R}\left(\sigma^{t+\Delta t}, R^{t+\Delta t}\right) \\ R^{t+\Delta t} &= H\left(\sigma^{t+\Delta t}, \kappa^{t+\Delta t}\right) \end{aligned} \tag{4.30}$$

Les conditions de *Kuhn et Tucker* discrètes sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta t\dot{\lambda}^{t+\Delta t} &\geq 0; \\ f\left(\sigma^{t+\Delta t}, R^{t+\Delta t}\right) &\leq 0; \\ \Delta t\dot{\lambda}^{t+\Delta t} f\left(\sigma^{t+\Delta t}, R^{t+\Delta t}\right) &\equiv 0. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Les équations (4.29), (4.30) et (4.31) déterminent *la loi de comportement incrémentale*.

Résoudre la loi de comportement incrémentale consiste à déterminer les variables $\left(s^{t+\Delta t}, p^{t+\Delta t}, R^{t+\Delta t}, \dot{\varepsilon}^{P\,t+\Delta t}\right)$ vérifiant les équations (4.29), (4.30), à l'aide des conditions de *Kuhn et Tucker* discrètes (4.31).

$$\begin{aligned} s^{t+\Delta t} &= s^{trial} - 2G\Delta t\dot{\lambda}^{t+\Delta t}\left(\left(I_4 - \tfrac{1}{3}\mathrm{II}\otimes\mathrm{II}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial s}\left(s^{t+\Delta t}, p^{t+\Delta t}, R^{t+\Delta t}\right)\right) \\ p^{t+\Delta t} &= p^{trial} - K\Delta t\dot{\lambda}^{t+\Delta t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\left(s^{t+\Delta t}, p^{t+\Delta t}, R^{t+\Delta t}\right)\right) \end{aligned} \tag{4.32}$$

En définissant le prédicteur élastique comme suit :

$$\begin{aligned} s^{trial} &= s^{t} + 2G\Delta t\left(e\left(\dot{u}^{t+\Delta t}\right)\right) \\ p^{trial} &= p^{t} - K\Delta t\,\mathrm{tr}\left(\varepsilon\left(\dot{u}^{t+\Delta t}\right)\right) \\ R^{trial} &= R^{t} \end{aligned}$$

Nous avons vu que la résolution du système (4.29), (4.30) et (4.31), s'interprète comme la re-projection, dont les directions dépendent du potentiel plastique et des coefficients d'élasticité, du *prédicteur* élastique sur la surface de plasticité.

Dans la suite nous détaillons l'algorithme de re-projection pour les différentes lois implémentées. Ces algorithmes (*Newton* avec *Line search B.Jeremié* [58], *Newton* et *Point Fixe R. Borja et al.*[16] [17], *E. Macari et al.* [72]) consistent généralement à résoudre une équation non linéaire dont l'inconnue est un scalaire. L'existence d'une solution est assurée lorsque l'écrouissage est positif (durcissement), mais ne l'est plus forcement pour un écrouissage négatif (adoucissement). De plus, dans la mise en œuvre numérique, la convergence de ces algorithmes peut dépendre des valeurs des coefficients d'élasticité, plus exactement du rapport entre l'élasticité et le niveau de contrainte. En effet l'élasticité détermine un prédicteur élastique

qui est ensuite reprojeté sur le critère. La “distance” entre le prédicteur et le projeté peut conditionner la tenue de l’algorithme.

4.3.1 Drucker Prager non associé non écrouissable

Les déformations volumiques sont uniquement élastiques :

$$\begin{aligned} \Delta t\dot{e}^{P\,t+\Delta t} &= \Delta t\dot{\lambda}^{t+\Delta t}\left(\frac{s^{t+\Delta t}}{\left\|s^{t+\Delta t}\right\|}\right) \\ \mathrm{tr}\left(\Delta t\dot{\varepsilon}^{P\,t+\Delta t}\right) &= 0 \end{aligned} \tag{4.33}$$

Pour ce modèle l’équation (4.29) a la forme suivante:

$$\begin{aligned} s^{t+\Delta t} &= s^{t} + 2G\Delta t(\dot{e}) - 2G\Delta t\dot{\lambda}^{t+\Delta t}\left(\frac{s^{t+\Delta t}}{\left\|s^{t+\Delta t}\right\|}\right) \\ p^{t+\Delta t} &= p^{t} - K\Delta t\,\mathrm{tr}(\dot{\varepsilon}) = p^{trial} \end{aligned} \tag{4.34}$$

Ainsi la réponse sphérique du modèle, du fait de l’incompressibilité plastique, est purement élastique. Le terme en pression est donc connu.

A la plasticité $\dot{\lambda}^{t+\Delta t} > 0$ et donc :

$$f\left(s^{t+\Delta t}, p^{t+\Delta t}\right) = 0 \tag{4.35}$$

Par cette condition de consistance on obtient directement le multiplicateur plastique :

$$\dot{\lambda}^{t+\Delta t} = \frac{\left\|s^{trial}\right\| - \sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\left(p^{trial}\right)}{2G\Delta t} \tag{4.36}$$

La loi de comportement incrémentale est ainsi entièrement résolue en insérant $\dot{\lambda}^{t+\Delta t}$ dans les équations (4.34) et (4.33).

La formulation mixte du problème incrémental discret est alors la suivante :

Formulation Vitesse pression

Sur l'incrément de temps $[t, t+\Delta t]$ *connaissant* $s_h^{v\,t+\Delta t}$ et $s_h^{b\,t+\Delta t}$, *trouver* $(v_h, b_h, p_h) \in \mathcal{V}_h \times B_h \times P_h$, *solutions à* $t+\Delta t$ *du système:*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega_h} \rho \frac{v_h - v_h^t}{\Delta t} v_h^* \, d\varpi + \int_{\Omega_h} s_h(v_h) e(v_h^*) \, d\varpi - \int_{\Omega_h} p_h \nabla . v_h^* d\varpi - \int_{\Omega_h} \rho g v_h^* \, d\varpi \\ \qquad\qquad \displaystyle + \theta \int_{\Gamma_{hC}} \left[- d_{\text{approx}}^{t+\Delta t}(v_h) \right]^+ v_{hn}^* \, dS - \int_{\Gamma_{hC}} \sigma_{hT}(v_h, \sigma_{hn}^t) v_{hT}^* \, dS = 0 \\ \displaystyle\int_{\Omega_h} \rho \frac{b_h - b_h^t}{\Delta t} b_h^* \, d\varpi + \int_{\Omega_h} s_h(b_h) e(b_h^*) \, d\varpi - \int_{\Omega_h} p_h \nabla . b_h^* d\varpi - \int_{\Omega_h} \rho g b_h^* \, d\varpi = 0 \\ \displaystyle\int_{\Omega_h} p_h^* \{ \dot{p}_h - (\text{tr}(\varepsilon(v_h)) + \text{tr}(\varepsilon(b_h))) \} \, d\varpi = 0 \\ \forall (v_h^*, b_h^*, p_h^*) \in \mathcal{V}_h^0 \times B_h \times P_h \end{cases} \tag{4.37}$$

Non symétrie

Nous avons vu que pour ces modèles sensibles à la pression hydrostatique des termes sources de non symétrie étaient potentiellement activés. Pour ce modèle dont la compressibilité est purement d'ordre élastique, le seul terme de non symétrie est issu du module tangent de la loi de comportement incrémentale :

$$\mathbf{C}_v^{t+\Delta t} = \frac{\partial s_h^v}{\partial \varepsilon(v_h)}$$

Qui est de la forme suivante, d'après *Simo J .C. et Taylor R.L.* [105] :

$$\mathbf{C}_v^{t+\Delta t} = 2G\beta \left[I_4 - \tfrac{1}{3} \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \right] - 2G\beta [\hat{n} \otimes \hat{n}] + K \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\partial \kappa}{\partial p} (p^{t+\Delta t}) \hat{n} \otimes \mathbb{1}$$

avec $\hat{n} = \dfrac{s^{t+\Delta t}}{\left\| s^{t+\Delta t} \right\|}$, $\hat{n} \otimes \hat{n} = [\hat{n}_{ij} \hat{n}_{kl}]$, $\beta = \sqrt{2/3} \dfrac{\kappa(p^{t+\Delta t})}{\left\| s^{trial} \right\|}$

La non symétrie est donnée par le terme $\dfrac{\partial \kappa}{\partial p}(p^{t+\Delta t}) \hat{n} \otimes \mathbb{1}$. Celui ci s'annule lorsque l'angle de frottement interne du matériau est nul (α = 0°). On retrouve le modèle de *Von Mises*.

4.3.2 Cam-Clay

Pour ce modèle associé, écrouissable et quadratique en pression les vitesses de déformations plastiques déviatoires et volumiques sont données par :

$$\begin{aligned} \Delta t\dot{e}^{P\,t+\Delta t} &= \Delta t\dot{\lambda}^{t+\Delta t}\left(3s^{t+\Delta t}\right) \\ \mathrm{tr}\left(\Delta t\dot{\varepsilon}^{P\,t+\Delta t}\right) &= -\Delta t\dot{\lambda}^{t+\Delta t}\left(M^2\left(2p^{t+\Delta t} - p_c^{t+\Delta t}\right)\right) \end{aligned} \tag{4.38}$$

L'équation de comportement incrémentale s'écrit alors :

$$\begin{aligned} s^{t+\Delta t} &= s^t + 2G\Delta t\left(\dot{e}\right) - 2G\Delta t\dot{\lambda}^{t+\Delta t}\left(3s^{t+\Delta t}\right) \\ p^{t+\Delta t} &= p^t - K\Delta t\,\mathrm{tr}\left(\dot{\varepsilon}\right) - K\Delta t\dot{\lambda}^{t+\Delta t}\left(M^2\left(2p^{t+\Delta t} - p_c^{t+\Delta t}\right)\right) \end{aligned} \tag{4.39}$$

Que l'on peut récrire sous la forme suivante

$$\begin{aligned} s^{t+\Delta t} &= \frac{s^{trial}}{1 + 6G\Delta t\dot{\lambda}^{t+\Delta t}} \\ p^{t+\Delta t} &= \frac{p^{trial} + K\Delta t\dot{\lambda}^{t+\Delta t}M^2 p_c^{t+\Delta t}}{1 + M^2 K\Delta t\dot{\lambda}^{t+\Delta t}} \end{aligned} \tag{4.40}$$

ce qui permet de séparer les termes liés au contraintes et les termes liés au multiplicateur plastique et à la variable d'écrouissage de part et d'autre de l'égalité.

La variable d'écrouissage est donnée par :

$$p_c^{t+\Delta t} = p_c^t \exp\left(\vartheta\Delta t\dot{\lambda}^{t+\Delta t}M^2\left(2p^{t+\Delta t} - p_c^{t+\Delta t}\right)\right) \tag{4.41}$$

Et en insérant l'équation en pression de (4.40) dans (4.41), on obtient une équation ne dépendant que de la variable d'écrouissage et du multiplicateur plastique.

$$p_c^{t+\Delta t} = p_c^t \exp\left(\vartheta\Delta t\dot{\lambda}^{t+\Delta t}M^2\left(\frac{2p^{trial} + \left(K\Delta t\dot{\lambda}^{t+\Delta t}M^2 - 1\right)p_c^{t+\Delta t}}{1 + M^2 K\Delta t\dot{\lambda}^{t+\Delta t}}\right)\right) \tag{4.42}$$

A la plasticité $\dot{\lambda}^{t+\Delta t} > 0$ et donc :

$$f\left(q^{t+\Delta t}, p^{t+\Delta t}, p_c^{t+\Delta t}\right) = 0 \tag{4.43}$$

Pour résoudre la loi de comportement on se ramène au système suivant, dont les inconnues sont, étant donné (4.40) et (4.42), $\dot{\lambda}^{t+\Delta t}$ et $p_c^{t+\Delta t}$:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{2}\dfrac{s^{trial} : s^{trial}}{\left(1+6G\Delta t\dot{\lambda}^{t+\Delta t}\right)^2} + M^2\left(\dfrac{p^{trial}+K\Delta t\dot{\lambda}^{t+\Delta t}M^2 p_c^{t+\Delta t}}{1+M^2K\Delta t\dot{\lambda}^{t+\Delta t}}\right)\left(\dfrac{p^{trial}-p_c^{t+\Delta t}}{1+M^2K\Delta t\dot{\lambda}^{t+\Delta t}}\right)=0 \\ p_c^{t+\Delta t} - p_c^t \exp\left(\vartheta\Delta t\dot{\lambda}^{t+\Delta t}M^2\left(\dfrac{2p^{trial}+\left(K\Delta t\dot{\lambda}^{t+\Delta t}M^2-1\right)p_c^{t+\Delta t}}{1+M^2K\Delta t\dot{\lambda}^{t+\Delta t}}\right)\right)=0 \end{cases} \quad \textbf{(4.44)}$$

La nature quadratique en pression et la loi d'écrouissage non linéaire conduit donc à une dépendance non linéaire du système au couple $(p_c, \dot{\lambda})$. On remarque que même dans le cas sans écrouissage où p_c est fixé, la première équation du système (4.44) est non linéaire en $\dot{\lambda}^{t+\Delta t}$.

Pour résoudre ce système nous mettons en œuvre un algorithme basé sur la méthode de Newton. On pose :

$$f\left(\dot{\lambda}^{t+\Delta t}, p_c^{t+\Delta t}\right) = \frac{3}{2}\frac{s^{trial} : s^{trial}}{\left(1+6G\Delta t\dot{\lambda}^{t+\Delta t}\right)^2} + M^2\left(\frac{p^{trial}+K\Delta t\dot{\lambda}^{t+\Delta t}M^2 p_c^{t+\Delta t}}{1+M^2K\Delta t\dot{\lambda}^{t+\Delta t}}\right)\left(\frac{p^{trial}-p_c^{t+\Delta t}}{1+M^2K\Delta t\dot{\lambda}^{t+\Delta t}}\right)$$

$$G\left(\dot{\lambda}^{t+\Delta t}, p_c^{t+\Delta t}\right) = p_c^{t+\Delta t} - p_c^t \exp\left(\vartheta\Delta t\dot{\lambda}^{t+\Delta t}M^2\left(\frac{2p^{trial}+\left(K\Delta t\dot{\lambda}^{t+\Delta t}M^2-1\right)p_c^{t+\Delta t}}{1+M^2K\Delta t\dot{\lambda}^{t+\Delta t}}\right)\right)$$

L'algorithme de résolution (**Algorithme 4.1**), proposé par *Borja* [16], est le suivant :

On applique la méthode de Newton à la première équation de (4.44) en fixant la variable p_c. L'inconnue est donc le multiplicateur plastique. Pour actualiser la valeur du critère à l'itération k, on applique la méthode de Newton à la deuxième équation de (4.44) avec la valeur du multiplicateur plastique à l'itération k : $\dot{\lambda}^k$. On détermine ainsi la valeur de la variable d'écrouissage p_c correspondant à $\dot{\lambda}^k$. Ces deux variables étant connues on peut évaluer la fonction critère correspondante pour la comparer à la tolérance de convergence.

Algorithme 4.1 :Algorithme de Newton pour Calculer le zéro de la fonction scalaire $f\left(\cdot, p_c^{t+\Delta t}\right)$.

1. Initialisation k = 0, $\dot{\lambda}_k^{t+\Delta t} = 0$, $p_{ck}^{t+\Delta t} = p_{ck}^{t}$

2. Calculer $f^k = f(\dot{\lambda}_k^{t+\Delta t}, p_{ck}^{t+\Delta t}) \Rightarrow$ Voir **Algorithme 4.2**

Algorithme 4.2 :Algorithme de Newton pour Calculer le zéro de la fonction scalaire $G\left(\dot{\lambda}^{t+\Delta t}, \cdot\right)$.

1. Initialisation i = 0, $\dot{\lambda}_i^{t+\Delta t} = \dot{\lambda}_k^{t+\Delta t}, p_{ci}^{t+\Delta t} = p_{ck}^{t+\Delta t}$

2. Calculer

$$G^i = p_{ci}^{t+\Delta t} - p_c^t \exp\left(\vartheta \Delta t \dot{\lambda}_i^{t+\Delta t} M^2 \left(\frac{2p^{trial} + \left(K\Delta t \dot{\lambda}_i^{t+\Delta t} M^2 - 1\right) p_{ci}^{t+\Delta t}}{1 + M^2 K \Delta t \dot{\lambda}_i^{t+\Delta t}}\right)\right)$$

3. Si $\left|G^i\right| \leq TOL2$, $p_{ck}^{t+\Delta t} \leftarrow p_{ci}^{t+\Delta t}$ et *fin algorithme* ; **sinon**

4. $p_{ci+1}^{t+\Delta t} = p_{ci}^{t+\Delta t} - \dfrac{G^i}{\dfrac{\partial G^i}{\partial p_c}}$

5. $i \leftarrow i+1$ et retour à 2

3. Si $\left|f^k\right| \leq TOL$, *fin algorithme* ; **sinon**

4. $\dot{\lambda}_{k+1}^{t+\Delta t} = \dot{\lambda}_k^{t+\Delta t} - \dfrac{f^k}{\dfrac{\partial f}{\partial \dot{\lambda}}}$

5. $k \leftarrow k+1$ et retour à 2

La formulation mixte du problème incrémental discret est la suivante

Formulation Vitesse pression

Sur l'incrément de temps $[t, t+\Delta t]$ *connaissant* $s_h^{v\,t+\Delta t}, s_h^{b\,t+\Delta t}$ et $p_c^{t+\Delta t}$, *trouver* $(v_h, b_h, p_h) \in \mathcal{V}_h \times B_h \times P_h$, *solutions à* $t+\Delta t$ *du système:*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega_h} \rho \frac{v_h - v_h^t}{\Delta t} v_h^* \, d\varpi + \int_{\Omega_h} s_h(v_h) e(v_h^*) \, d\varpi - \int_{\Omega_h} p_h \nabla . v_h^* d\varpi - \int_{\Omega_h} \rho g v_h^* \, d\varpi \\ \qquad \displaystyle + \theta \int_{\Gamma_{hC}} \left[- d_{\text{approx}}^{t+\Delta t}(v_h) \right]^+ v_{hn}^* \, dS - \int_{\Gamma_{hC}} \sigma_{hT}(v_h, \sigma_{hn}^t) v_{hT}^* \, dS = 0 \\ \displaystyle\int_{\Omega_h} \rho \frac{b_h - b_h^t}{\Delta t} b_h^* \, d\varpi + \int_{\Omega_h} s_h(b_h) e(b_h^*) \, d\varpi - \int_{\Omega_h} p_h \nabla . b_h^* d\varpi - \int_{\Omega_h} \rho g b_h^* \, d\varpi = 0 \\ \displaystyle\int_{\Omega_h} p_h^* \left\{ \frac{\dot{p}_h}{K} - \left(\text{tr}(\varepsilon(v_h)) + \text{tr}(\varepsilon(b_h)) - \dot{\lambda}(v_h) M^2 (2p_h - p_c) \right) \right\} d\varpi = 0 \\ \forall (v_h^*, b_h^*, p_h^*) \in \mathcal{V}_h^0 \times B_h \times P_h \end{cases} \tag{4.45}$$

Non Symétrie

Pour ce modèle les deux termes sources de non symétrie sont activés. L'une des sources vient de la partie sphérique de la loi de comportement. En effet dans l'équation en pression de (4.45) le multiplicateur plastique dépend de façon non linéaire du champ de vitesse. De plus étant donné la décomposition du déviateur des contraintes, ce multiplicateur ne dépend que du champ de vitesse linéaire v_h (et pas de b_h).

$$R^{lp} = -\int_{\varpi_h} p_h \nabla . v_h^* \, dV, \quad R^{pl} = -\int_{\Omega_h} p_h^* \text{tr}(\varepsilon(v_h)) \, dV, \quad R^{ppl} = \int_{\Omega_h} p_h^* \left\{ \frac{\dot{p}_h}{K} + \dot{\lambda}(v_h) M^2 (2p_h - p_c) \right\} dV$$

$$\boldsymbol{K}^{pl} = \frac{\partial R^{pl}}{\partial l} + \frac{\partial R^{ppl}}{\partial l} \neq \left(\boldsymbol{K}^{lp} \right)^T = \left(\frac{\partial R^{pl}}{\partial p} \right)^T$$

l'indice l représente le champ de vitesse linéaire v_h.

L'autre terme source de non symétrie découle du module tangent de la loi de comportement. D'après *Borja* [16] il est de la forme :

$$\boldsymbol{C}_v^{t+\Delta t} = 2G\beta \left[I_4 - \tfrac{1}{3} \mathrm{I} \otimes \mathrm{I} \right] - 2G\beta \left[\sqrt{\tfrac{2}{3}} (a_5 + a_6 b_2) - \beta \right] \hat{n} \otimes \hat{n} + 2G \sqrt{\tfrac{2}{3}} (a_6 b_1) \hat{n} \otimes \mathrm{I}$$

avec : $\hat{n} = \frac{s}{\|s\|}$; $I = \frac{1}{2}\left\{\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right\}$, $\hat{n} \otimes \hat{n} = [\hat{n}_{ij}\hat{n}_{kl}]$, $\beta = \frac{\|s^{t+\Delta t}\|}{\|s^{trial}\|}$, les termes a_5, a_6, b_1 et b_2 sont détaillés en annexe.

Bien que la loi d'écoulement soit associée, le module tangent est non symétrique du fait de la sensibilité du critère à la pression hydrostatique.

4.3.3 CJS Etat Critique

Pour ce modèle non associé, les vitesses de déformations plastiques déviatoires et volumiques sont données par :

$$\begin{aligned} \Delta t\dot{e}^{P\,t+\Delta t} &= \dot{\lambda}^{t+\Delta t}\left(3\left(\frac{h\left(s^{t+\Delta t}\right) + R^{t+\Delta t}\beta'^{t+\Delta t}}{\left(\beta'^{t+\Delta t}\right)^2 + 3}\right)\hat{n} + s_{II}^{t+\Delta t}dev\left(\frac{\partial h}{\partial s}\left(s^{t+\Delta t}\right)\right)\right) \\ \mathrm{tr}\left(\Delta t\dot{\varepsilon}^{P\,t+\Delta t}\right) &= -\dot{\lambda}^{t+\Delta t}\,3\beta'^{t+\Delta t}\left(\frac{h\left(s^{t+\Delta t}\right) + R^{t+\Delta t}\beta'^{t+\Delta t}}{\left(\beta'^{t+\Delta t}\right)^2 + 3}\right) \end{aligned} \quad \textbf{(4.46)}$$

La définition du potentiel plastique fait intervenir la normale à la surface de charge. On a:

$$\frac{\partial f}{\partial s} = h(s)\hat{n} + s_{II}\frac{\partial h}{\partial s}$$

Avec

$$\frac{\partial h}{\partial s}(s) = -\frac{\gamma\sqrt{54}}{6h(s)^5}\left(\frac{Co(s)}{s_{II}^3} - \frac{3\,\mathbf{det}(s)s}{s_{II}^5}\right)$$

avec Co(s) la co-matrice et det(s) le déterminant de s.

On remarque que *Co(s)* n'est pas un tenseur de trace nulle. L'équation (4.24) exprime que l'on applique l'opérateur $\left(I_4 - \frac{1}{3}\mathrm{II} \otimes \mathrm{II}\right)$ à $\frac{\partial f}{\partial s}$.On a alors :

$$\begin{aligned} \left(I_4 - \tfrac{1}{3}\mathrm{II} \otimes \mathrm{II}\right)\frac{\partial f}{\partial s}(s) &= h(s)\hat{n} + s_{II}\left(I_4 - \tfrac{1}{3}\mathrm{II} \otimes \mathrm{II}\right)\frac{\partial h}{\partial s}(s) \\ &= h(s)\hat{n} + s_{II}dev\left(\frac{\partial h}{\partial s}(s)\right) \end{aligned}$$

L'équation de comportement incrémentale s'écrit alors :

$$s^{t+\Delta t} = s^t + 2G\Delta t(\dot{e}) - 2G\Delta t\dot{\lambda}^{t+\Delta t}\left(3\left(\frac{h(s^{t+\Delta t}) + R^{t+\Delta t}\beta'^{t+\Delta t}}{(\beta'^{t+\Delta t})^2 + 3}\right)\hat{n} + s_{II}^{t+\Delta t} dev\left(\frac{\partial h}{\partial s}(s^{t+\Delta t})\right)\right)$$

$$p^{t+\Delta t} = p^t - K\Delta t\,\mathrm{tr}(\dot{\varepsilon}) - K\Delta t\dot{\lambda}^{t+\Delta t}\, 3\beta'^{t+\Delta t}\left(\frac{h(s^{t+\Delta t}) + R^{t+\Delta t}\beta'^{t+\Delta t}}{(\beta'^{t+\Delta t})^2 + 3}\right) \quad \textbf{(4.47)}$$

Avec $$\beta'^{t+\Delta t} = \beta\left(\frac{R^{t+\Delta t}}{R_c} - 1\right)$$

On remarque ici que l'équation de comportement est non linéaire en $s^{t+\Delta t}$ et $p^{t+\Delta t}$. Cette non linéarité est issue, notamment, de la fonction *h(s)* qui fait intervenir le troisième invariant du déviateur des contraintes. Ainsi on ne peut plus avoir une écriture séparée contraintes/multiplicateur plastique comme pour le modèle de Cam-Clay. La décomposition additive du déviateur des contraintes en une partie dépendant du champ de vitesse linéaire et l'autre du champ de vitesse bulle n'est plus possible. Par contre la dépendance du multiplicateur plastique au champ linéaire uniquement reste vraie.

Remarque :

Lors d'un essai triaxial la fonction *h(s)* ne dépend que du paramètre γ, on a :

$$h(s) = (1-\gamma)^{\frac{1}{6}}$$

La décomposition additive du déviateur des contraintes en une partie dépendant du champ linéaire et une partie du champ bulle est possible. La formulation *mini element* est alors licite.

L'évolution de la force thermomécanique R suivant les variables $\overline{p}, R_m$ et p_c :

$$R^{t+\Delta t} = \frac{AR_m^{t+\Delta t}\overline{p}_{t+\Delta t}}{A\overline{p}_{t+\Delta t} + R_m^{t+\Delta t}} \quad \textbf{(4.48)}$$

L'évolution des variables $\overline{p}$, du rayon moyen de rupture R_m et de la pression critique p_c étant donnée par :

$$\begin{aligned} \overline{p}_{t+\Delta t} &= \overline{p}_t + \Delta t\dot{\lambda}^{t+\Delta t} 3(p_a)^{1/2}(p^{t+\Delta t})^{-3/2} \\ R_m^{t+\Delta t} &= R_c + \mu \ln\left(\frac{p_c^{t+\Delta t}}{p^{t+\Delta t}}\right) \\ p_c^{t+\Delta t} &= p_c^t \exp\left(c\,\mathrm{tr}\left(\Delta t\dot{\varepsilon}_{t+\Delta t}^P\right)\right) \end{aligned} \quad \textbf{(4.49)}$$

A la plasticité $\dot{\lambda}^{t+\Delta t} > 0$ et donc :

$$f(s^{t+\Delta t}, p^{t+\Delta t}, \dot{\lambda}^{t+\Delta t}) = h(s^{t+\Delta t})s_{II}^{t+\Delta t} - 3R^{t+\Delta t}(\dot{\lambda}^{t+\Delta t})p^{t+\Delta t} = 0 \quad \textbf{(4.50)}$$

Pour résoudre la loi de comportement incrémentale il nous faut déterminer les trois inconnues que sont le déviateur des contraintes, la pression et le multiplicateur plastique $\dot{\lambda}^{t+\Delta t}$ à l'instant $t+\Delta t$.

Pour cela on doit résoudre le système d'équations non linéaires suivant :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{S}\left(s^{t+\Delta t}, p^{t+\Delta t}, \dot{\lambda}^{t+\Delta t}\right) \\ P\left(s^{t+\Delta t}, p^{t+\Delta t}, \dot{\lambda}^{t+\Delta t}\right) \\ f\left(s^{t+\Delta t}, p^{t+\Delta t}, \dot{\lambda}^{t+\Delta t}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(4.51)}$$

avec :

$$\mathbf{S}\left(s^{t+\Delta t}, p^{t+\Delta t}, \dot{\lambda}^{t+\Delta t}\right) = s^{t+\Delta t} - s^{trial} + 2G\Delta t\dot{\lambda}^{t+\Delta t}\left(3\left(\frac{h\left(s^{t+\Delta t}\right) + R^{t+\Delta t}\beta'^{t+\Delta t}}{\left(\beta'^{t+\Delta t}\right)^2 + 3}\right)\hat{n} + s_{II}^{t+\Delta t} dev\left(\frac{\partial h}{\partial s}\left(s^{t+\Delta t}\right)\right)\right)$$

$$P\left(s^{t+\Delta t}, p^{t+\Delta t}, \dot{\lambda}^{t+\Delta t}\right) = p^{t+\Delta t} - p^{trial} + K\Delta t\dot{\lambda}^{t+\Delta t}\, 3\beta'^{t+\Delta t}\left(\frac{h\left(s^{t+\Delta t}\right) + R^{t+\Delta t}\beta'^{t+\Delta t}}{\left(\beta'^{t+\Delta t}\right)^2 + 3}\right)$$

Les deux dernières équations du système (4.51) sont des fonctions scalaires respectivement en pression et en multiplicateur. La première est une fonction tensorielle en déviateur.

Pour résoudre ce système (**Algorithme 4.4**) nous nous sommes inspirés de l'algorithme développé pour le Cam-Clay. Nous avons appliqué la méthode de Newton à la troisième équation du système (4.51) en fixant le déviateur et la pression. L'évaluation du critère se fait en appliquant une deuxième méthode de Newton au système formé par les deux premières équations de (4.51) .

Algorithme 4.3 :Algorithme de Newton pour Calculer le zéro de la fonction scalaire *f(s,p,.)*.

1. **Initialisation** k = 0, $\dot{\lambda}_k^{t+\Delta t} = 0, s_k^{t+\Delta t} = s^{trial}, p_k^{t+\Delta t} = p^{trial}$

2. **Calculer** $f^k = f\left(s^{t+\Delta t}, p^{t+\Delta t}, \dot{\lambda}^{t+\Delta t}\right) \rightarrow$ voir ***algorithme 2.4***

Algorithme 4.4 :Algorithme de Newton pour Calculer le zéro du système formé par les fonctions *P(.,.,λ)* et ***S****(.,.,λ)*.

1. **Initialisation** i = 0, $\dot{\lambda}_i^{t+\Delta t} = \dot{\lambda}_k^{t+\Delta t}, s_i^{t+\Delta t} = s_k^{t+\Delta t}, p_i^{t+\Delta t} = p_k^{t+\Delta t}$

2. **Calculer**

$$\boldsymbol{S}^i = s_i^{t+\Delta t} - s^{trial} + 2G\Delta t\dot{\lambda}_i^{t+\Delta t}\left(3\left(\frac{h\left(s_i^{t+\Delta t}\right) + R^{t+\Delta t}\left(\dot{\lambda}_i^{t+\Delta t}\right)\beta_i'^{t+\Delta t}}{\left(\beta_i'^{t+\Delta t}\right)^2 + 3}\right)\hat{n} + s_{II_i}^{t+\Delta t} dev\left(\frac{\partial h}{\partial s}\left(s_i^{t+\Delta t}\right)\right)\right)$$

$$P^i = p_i^{t+\Delta t} - p^{trial} + K\Delta t\dot{\lambda}_i^{t+\Delta t}\, 3\beta_i'^{t+\Delta t}\left(\frac{h\left(s_i^{t+\Delta t}\right) + R^{t+\Delta t}\left(\dot{\lambda}_i^{t+\Delta t}\right)\beta_i'^{t+\Delta t}}{\left(\beta_i'^{t+\Delta t}\right)^2 + 3}\right)$$

3. **Si** $\sqrt{\left(\left|G^i\right| + \left|P^i\right|\right)^2} \leq TOL2$, $s_k^{t+\Delta t} \leftarrow s_i^{t+\Delta t}, p_k^{t+\Delta t} \leftarrow p_i^{t+\Delta t}$ et *fin algo ;* **sinon→4**

4. **Résoudre** le système linéaire :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial s} & \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial s} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta s \\ \delta p \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} G^i \\ P^i \end{pmatrix}$$

(ici nous prenons bien en compte la dérivé seconde de h(s))

5. $\begin{matrix} s_{i+1}^{t+\Delta t} = s_i^{t+\Delta t} + \delta s \\ p_{i+1}^{t+\Delta t} = p_i^{t+\Delta t} + \delta p \end{matrix}$ (**actualisation** du *déviateur et de la pression*)

6. *i*← *i+1* et retour à 2

3. **Si** $\left|f^k\right| \leq TOL$, *fin algorithme*; **sinon**

4. $\dot{\lambda}^{k+1} = \dot{\lambda}^k - \frac{f^k}{\frac{\partial f}{\partial \dot{\lambda}}}$ (**actualisation** du *multiplicateur plastique*)

5. **Actualisation** des variables d'écrouissage

6. *k*← *k+1* et retour à 2

Formulation vitesse pression

Sur l'incrément de temps $[t, t+\Delta t]$ *connaissant* $s_h^{v\,t+\Delta t}, s_h^{b\,t+\Delta t}$ *et* $R^{t+\Delta t}$, *trouver* $(v_h, b_h, p_h) \in \mathcal{V}_h \times B_h \times P_h$, *solutions à* $t+\Delta t$ *du système:*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega_h} \rho \frac{v_h - v_h^t}{\Delta t} v_h^* \, d\varpi + \int_{\Omega_h} s_h(v_h) e(v_h^*) \, d\varpi - \int_{\Omega_h} p_h \nabla . v_h^* d\varpi - \int_{\Omega_h} \rho g v_h^* \, d\varpi \\ \qquad\qquad \displaystyle + \theta \int_{\Gamma_{hC}} \left[- d_{\text{approx}}^{t+\Delta t}(v_h) \right]^+ v_{hn}^* \, dS - \int_{\Gamma_{hC}} \sigma_{hT}(v_h, \sigma_{hn}^t) v_{hT}^* \, dS = 0 \\ \displaystyle\int_{\Omega_h} \rho \frac{b_h - b_h^t}{\Delta t} b_h^* \, d\varpi + \int_{\Omega_h} s_h(b_h) e(b_h^*) \, d\varpi - \int_{\Omega_h} p_h \nabla . b_h^* d\varpi - \int_{\Omega_h} \rho g b_h^* \, d\varpi = 0 \\ \displaystyle\int_{\Omega_h} p_h^* \left\{ \frac{\dot{p}_h}{K} - \left(\mathrm{tr}(\varepsilon(v_h)) + \mathrm{tr}(\varepsilon(b_h)) - \dot{\lambda}(v_h) 3 \beta'^{t+\Delta t} \left(\frac{h(s_h(v_h)) + R^{t+\Delta t} \beta'^{t+\Delta t}}{(\beta'^{t+\Delta t})^2 + 3} \right) \right) \right\} d\varpi = 0 \\ \forall (v_h^*, b_h^*, p_h^*) \in \mathcal{V}_h^0 \times B_h \times P_h \end{cases} \tag{4.52}$$

Non Symétrie

On se retrouve dans le même contexte que pour le Cam-Clay où les deux termes sources de non-symétrie sont activés :

$$R^{lp} = -\int_{\varpi_h} p_h \nabla . v_h^* \, dV, \quad R^{pl} = -\int_{\Omega_h} p_h^* \mathrm{tr}(\varepsilon(v_h)) \, dV,$$

$$R^{ppl} = \int_{\Omega_h} p_h^* \left\{ \frac{\dot{p}_h}{K} + \dot{\lambda}(v_h) 3 \beta'^{t+\Delta t} \left(\frac{h(s_h(v_h)) + R^{t+\Delta t} \beta'^{t+\Delta t}}{(\beta'^{t+\Delta t})^2 + 3} \right) \right\} dV$$

Et donc

$$\boldsymbol{K}^{pl} = \frac{\partial R^{pl}}{\partial l} + \frac{\partial R^{ppl}}{\partial l} \neq \left(\boldsymbol{K}^{lp} \right)^T$$

Le module tangent de ce modèle est donc non symétrique. Il est en effet sensible à la pression hydrostatique et non associé. Un autre terme de non symétrie est issu de la prise en compte du troisième invariant du déviateur des contraintes. Plus précisément du terme $\frac{\partial}{\partial s}\left(dev\left(\frac{\partial h}{\partial s} \right) \right)$, équation (4.47) :

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(dev\left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)\right)=\alpha\beta\left[\frac{Dev(Co(s))\otimes Co(s)}{s_{II}^{\ 3}}-3\frac{\mathbf{det}(s)}{s_{II}^{\ 4}}\left(\hat{n}\otimes Co(s)+Dev(Co(s))\otimes\hat{n}\right)+9\frac{\mathbf{det}(s)^2}{s_{II}^{\ 5}}\hat{n}\otimes\hat{n}\right]$$
$$+\psi\left[\frac{CO^{Dev}(s)}{s_{II}^{\ 3}}-\frac{Dev(Co(s))\otimes\hat{n}}{s_{II}^{\ 4}}-3\frac{\hat{n}\otimes Co(s)}{s_{II}^{\ 4}}-3\frac{\mathbf{det}(s)}{s_{II}^{\ 5}}\left[I-5\hat{n}\otimes\hat{n}\right]\right]$$

Avec : $CO^{Dev}(s)=\left(\frac{\partial Dev(Co(s))}{\partial s}\right)_{ijkl}$, $\alpha=-5\left(\frac{\gamma^2 54}{36h(s)^5}\right)$, $\beta=h(s)^6$, $\psi=-\left(\frac{\gamma\sqrt{54}}{6h(s)^5}\right)$

De plus, la forme analytique du module tangent consistant est difficile à obtenir. Nous avons choisi de ne pas prendre en compte ce terme dans l'évaluation du module tangent. Par contre, il est clair que ce terme est pris en compte dans l'**Algorithme 4.3**, pour l'intégration de la loi de comportement. Les répercussions apparaissent uniquement sur les directions de descentes de la méthode de Newton Globale.

La module tangent a la forme suivante :

$$\boxed{\mathbf{C}_v^{t+\Delta t}=2G\xi_{t+\Delta t}\left(I-\tfrac{1}{3}\mathrm{1I}\otimes\mathrm{1I}\right)+2G\left(c_{t+\Delta t}-\xi_{t+\Delta t}\right)\hat{n}\otimes\hat{n}+2G\left(K\theta_{t+\Delta t}\right)\hat{n}\otimes\mathrm{1I}}$$

4.3.4 CJS-Tresca

Ce modèle est incompressible et associé. L'intégration du modèle est plus simple que CJS et les répercussions sur la matrice de raideur du système sont différentes.

L'incrément de déformation plastique est donné par une loi d'écoulement associée :

$$\begin{aligned} \Delta t\dot{e}^{P\,t+\Delta t} &= \Delta t\dot{\lambda}^{t+\Delta t}\left(h\left(s^{t+\Delta t}\right)\hat{n} + s_{II}^{t+\Delta t} dev\left(\frac{\partial h}{\partial s}\left(s^{t+\Delta t}\right)\right)\right) \\ \mathrm{tr}\left(\Delta t\dot{\varepsilon}^{P\,t+\Delta t}\right) &= 0 \end{aligned} \tag{4.53}$$

Les déformations plastiques volumiques sont nulles. L'équation de comportement incrémentale est donnée par :

$$\begin{aligned} s^{t+\Delta t} &= s^{t} + 2G\Delta t\left(\dot{e}^{\mathrm{approx}}\right) - 2G\Delta t\dot{\lambda}^{t+\Delta t}\left(h\left(s^{t+\Delta t}\right)\hat{n} + s_{II}^{t+\Delta t} dev\left(\frac{\partial h}{\partial s}\left(s^{t+\Delta t}\right)\right)\right) \\ p^{t+\Delta t} &= p^{t} - K\Delta t\,\mathrm{tr}\left(\dot{\varepsilon}^{\mathrm{approx}}\right) \end{aligned} \tag{4.54}$$

On remarque que comme pour le *Drucker Prager non associé* la partie sphérique de la loi est donnée par la réponse élastique du matériau. La réponse en pression est connue : $p^{t+\Delta t} = p^{trial}$.

Les lois d'évolutions donnent :

$$\begin{aligned} R^{t+\Delta t} &= \frac{AR_{\boldsymbol{max}}^{t+\Delta t}\bar{\varepsilon}^{t+\Delta t}}{A\bar{\varepsilon}^{t+\Delta t} + R_{\boldsymbol{max}}^{t+\Delta t}} \\ R_{\boldsymbol{max}}^{t+\Delta t} &= R_c + \frac{R_m - R_c}{\left(1 + b\bar{\varepsilon}^{t+\Delta t}\right)^2} \end{aligned} \tag{4.55}$$

L'incrément de déformation plastique généralisé est donné par :

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}^{t+\Delta t} &= \int_0^{t+\Delta t} \sqrt{\tfrac{2}{3}\dot{e}^{P} : \dot{e}^{P}} \\ \bar{\varepsilon}^{t+\Delta t} &= \bar{\varepsilon}^{t} + \Delta\bar{\varepsilon}^{t+\Delta t} \\ \Delta\bar{\varepsilon}^{t+\Delta t} &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sqrt{\tfrac{2}{3}\dot{e}^{P} : \dot{e}^{P}} \\ \Delta\bar{\varepsilon}_{n+1} &= \Delta t\sqrt{\tfrac{2}{3}\dot{e}^{P\,t+\Delta t} : \dot{e}^{P\,t+\Delta t}} \end{aligned} \tag{4.56}$$

A la plasticité $\dot{\lambda}^{t+\Delta t} > 0$ et donc :

$$f(s^{t+\Delta t},\dot{\lambda}^{t+\Delta t}) = h\left(s^{t+\Delta t}\right)s_{II}^{t+\Delta t} - R^{t+\Delta t}\left(\dot{\lambda}^{t+\Delta t}\right) = 0 \qquad \textbf{(4.57)}$$

Pour résoudre la loi de comportement incrémentale il nous faut déterminer les deux inconnues que sont le déviateur des contraintes et le multiplicateur plastique $\dot{\lambda}^{t+\Delta t}$ à l'instant $t+\Delta t$.

Pour cela on doit résoudre le système d'équations non linéaires suivant :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{S}\left(s^{t+\Delta t},p^{t+\Delta t},\dot{\lambda}^{t+\Delta t}\right) \\ f\left(s^{t+\Delta t},p^{t+\Delta t},\dot{\lambda}^{t+\Delta t}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(4.58)}$$

avec :

$$\boldsymbol{S}\left(s^{t+\Delta t},p^{t+\Delta t},\dot{\lambda}^{t+\Delta t}\right) = s^{t+\Delta t} - s^{trial} + 2G\Delta t\dot{\lambda}^{t+\Delta t}\left(\left(s^{t+\Delta t}\right)\hat{n} + s_{II}^{t+\Delta t}dev\left(\frac{\partial h}{\partial s}\left(s^{t+\Delta t}\right)\right)\right)$$

Le système est alors résolu par **Algorithme 4.3** en enlevant les termes correspondant à la pression.

En négligeant les termes issus de $\frac{\partial^2 h}{\partial s^2}$, le module tangent de ce modèle incompressible et associé est alors **symétrique**.

4.4 Résolution Itérative

La mise en œuvre de l'algorithme de *Newton-Raphson* conduit à résoudre à chaque itération de la méthode un système linéaire :

$$Ax = b \tag{4.59}$$

avec $A \in \mathrm{IR}^{N \times N}, x \in \mathrm{IR}^{N}, b \in \mathrm{IR}^{N}$. *où N est le nombre de degrés de libertés du problème discrétisé.*

Dans une discrétisation *mini element*, étant donné la condensation de la bulle, on a *trois* degrés de liberté par nœuds en vitesse et *un* en pression. Dans le cadre d'un calcul intensif ce nombre devient très important comme nous pouvons le voir sur la Figure 4.1.

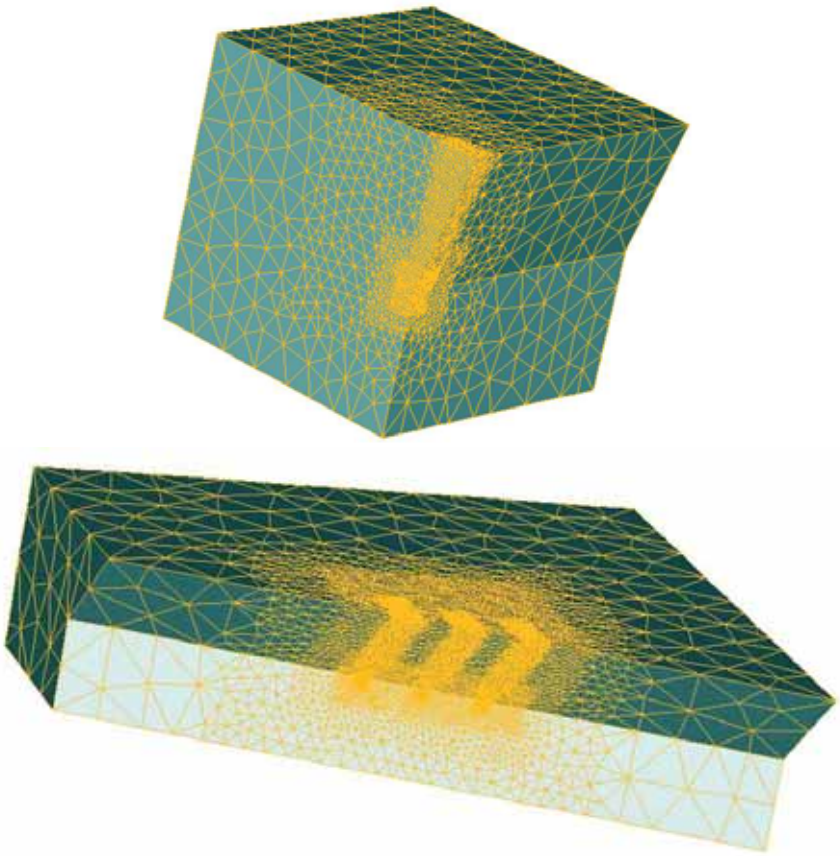


Figure 4.1 : Exemples de Maillages pour une et trois dents de scarification. (En haut) maillage initial pour une dent faisant un angle de 75° par rapport à l'horizontale : 3089 nœuds, 10921 tétraèdres, 12356 ddl. (En bas) Maillage initial pour 3 dents à 45° avec un angle d'étrave de 45° : 10154 nœuds, 39499 tétraèdres, 43684 ddl.

Il est alors crucial de choisir une méthode de résolution de systèmes linéaires efficace en terme de rapport coût de calcul/précision. A cet égard les méthodes de résolutions itératives se sont montrées plus performantes que les directes. De plus ces approches permettent une parallélisation simple et efficace (*S. Marie* [75]). C'est donc un solveur itératif qui est utilisé par le code Forge3®.

Au cours de la section 4.3 nous avons mis en évidence la sensibilité de la raideur, en termes de symétrie, aux types de lois implémentées. Cette structure symétrique ou non, dépend de la partie sphérique et du module tangent de la loi de comportement. Lorsque la compressibilité du matériau est purement élastique et que la surface de charge est indépendante de la pression hydrostatique la matrice est symétrique. C'est le cas standard du code Forge3® et donc le solveur est adapté à une résolution de système symétrique. Dans le cas plastique compressible et/ou non associé et/ou sensible à la pression hydrostatique la matrice de raideur est non symétrique, il faut donc implémenter un solveur adapté.
Dans la suite nous présentons donc différents algorithmes de résolution de systèmes linéaires. Le lecteur pourra trouver une analyse et une classification de ces méthodes dans Ashby et al. [9]. On trouvera une description pédagogique de ces algorithmes dans [117].

4.4.1 Solveur itératif

Le problème est de résoudre (4.59) sans inverser la matrice A. Une méthode itérative consiste alors à construite une suite de vecteur x_k, qui tend vers la solution x de (4.59) lorsque $r_k = b - Ax_k$ tend vers zéro.

Ces méthodes s'appuient sur des méthodes de descente qui à l'aide d'une direction de pente p_k et d'un scalaire α_k, déterminent à l'itération suivante le nouveau vecteur et le résidu associé :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \alpha_k p_k \\ r_{k+1} &= r_k - \alpha_k A p_k \\ p_{k+1} &= r_k + \beta_k p_k \end{aligned} \qquad \textbf{(4.60)}$$

La détermination des paramètres α_k et β_k est alors intimement liée au propriétés de la matrice A : symétrie, définie positive ou non.

Dans le cas où A est symétrique et définie positive on applique l'algorithme du *Gradient Conjugué*. Celui ci détermine le nouvel itéré en minimisant une fonctionnelle quadratique (strictement convexe car A est définie positive) induite par A et b, sur un sous espace de IR^N :

$$\min_{x \in K^{i+1}(A;r_0)} \left(\tfrac{1}{2} x^{\mathrm{T}} A x - b^{\mathrm{T}} x\right) \qquad \textbf{(4.61)}$$

Avec $K^{i+1}(A;r_0)$ espace vectoriel (ou espace affine) de dimension $i+1$ (espace de *Krylov*) dont les vecteurs résidus (ou gradients) $\{r_0,\ldots,r_i\}$ forment une base orthogonale. On a $K^i(A;r_0)\subset K^{i+1}(A;r_0)$ avec $i\leq N-1$, et la méthode converge vers la solution en au plus N itérations.

La symétrie de la matrice permet d'écrire une relation de récurrence à trois termes sur les résidus. On peut alors construire aisément les espaces de *Krylov* associés à ces résidus. La mise en œuvre de l'algorithme du Gradient Conjugué, et donc la détermination des paramètres de la méthode, repose implicitement sur cette relation. D'autre part, à l'aide de (4.60), on peut caractériser cette méthode en écrivant :

$$r_{k+1}=P^{k+1}(A)r_0 \qquad \textbf{(4.62)}$$

Où $P^{k+1}(A)$ *est un polynôme de degré (k+1).*

Lorsque les propriétés de positivité ou de symétrie sont mises en défaut les méthodes tendent à suivre une approche similaire quant à la minimisation d'une fonctionnelle et la construction des espaces de *Krylov*.

Pré-conditionnement

Pour améliorer la convergence de ces méthodes on pré-conditionne le système (4.59) par une matrice M. Le problème devient alors $M^{-1}Ax=M^{-1}b$. Le choix de la matrice de pré-conditionnement est dicté par trois critères :

- Le conditionnement (rapport plus grande valeur propre sur plus petite valeur propre) du système pré-conditionné doit être meilleur que le système original.
- La construction de M doit être peu coûteuse par rapport à celle de A.
- Le système $My=z$ doit être très facile à résoudre.

De nombreux types de préconditionnement ont été mis au point. Les travaux au laboratoire ([90], [114]) ont pu mettre en évidence la performance du pré-conditionneur Cholesky Incomplet dans le cas symétrique. Néanmoins nous avons utilisé dans les cas symétriques et non symétriques un pré-conditionnement par bloc diagonal. Ce pré-conditionnement apparaît efficace surtout dans le cas d'un contact pénalisé nodal. Il est facile à mettre en œuvre dans le cas symétrique et non symétrique, et la résolution de $My=z$ est très peu coûteuse.

Algorithme 4.5 : Méthode du Gradient Conjugué préconditionné

$r_0 = b$ *résidu initial*

$p_0 = M^{-1} r_0$ *pente initiale*

Tant que $\|r_k\| \geq \varepsilon_{iter} \|r_0\|$ **répète** :

$$\alpha_k = \frac{(r_k, M^{-1} r_k)}{(p_k, A p_k)}$$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$$

réactualisation

$$r_{k+1} = r_k - \alpha_k A p_k$$

$$\beta_k = -\frac{(r_{k+1}, M^{-1} r_{k+1})}{(r_k, M^{-1} r_k)}$$

$$p_{k+1} = M^{-1} r_{k+1} + \beta_k p_k$$

direction de descente

$$k = k+1$$

Fin Tant que

Fin Algorithme

Nous détaillons dans la suite les algorithmes mis en œuvre dans le cas où la matrice est symétrique non définie positive, et dans le cas général non symétrique.

4.4.1.1 Solveur Symétrique : MINRES

Ce solveur s'applique pour des systèmes linéaires symétriques non définis positifs. De façon analogue au Gradient Conjugué, la méthode du résidu minimal MINRES repose sur la minimisation d'une fonctionnelle d'erreur :

$$\min_{x \in K^{i+1}} E(r(x)) = (b - Ax, b - Ax) \qquad \textbf{(4.63)}$$

Où E est strictement convexe lorsque A est symétrique non définie positive (car A^2 est symétrique définie positive).

Algorithme :

La méthode consiste à calculer la pente de l'itéré suivant par combinaison linéaire de r_{k+1} et p_k. On détermine alors un paramètre optimal de descente β_k et on pose :

$$p_{k+1} = M^{-1} r_{k+1} + \beta_k p_k \qquad \textbf{(4.64)}$$

L'algorithme s'arrête lorsque la norme du résidu est suffisamment petite.

L'algorithme du résidu minimal préconditionné est alors :

Algorithme 4.6 : Méthode du résidu minimal préconditionné

$r_0 = b$ — *résidu initial*

$p_0 = M^{-1} r_0$ — *pente initiale*

$z_0 = A\, p_0$

Tant que $\|r_k\| \geq \varepsilon_{iter} \|r_0\|$ **répète** :

$$\alpha_k = \frac{(r_k, M^{-1} z_k)}{(M^{-1} z_k, z_k)}$$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$$

$$r_{k+1} = r_k - \alpha_k z_k$$

réactualisation

$$\beta_k = -\frac{(AM^{-1} r_{k+1}, M^{-1} z_k)}{(M^{-1} z_k, z_k)}$$

$$p_{k+1} = M^{-1} r_{k+1} + \beta_k p_k$$

$$z_{k+1} = AM^{-1} r_{k+1} + \beta_k z_k$$

direction de descente

$k = k+1$

Fin Tant que

Fin Algorithme

En termes de coût de calcul cet algorithme nécessite à chaque itération 3 produits scalaires, 2 étape de pré-conditionnement, et 1 produit matrice vecteur.

C'est cet algorithme de résolution que nous utilisons pour les lois incompressibles Von Mises et CJS-Tresca.

4.4.1.2 Solveurs non symétriques : différentes approches

La perte de symétrie conduit à la mise en défaut de la propriété de récurrence à trois termes entre les résidus. Elle conduit aussi à la perte d'orthogonalité entre les résidus. On recense alors principalement trois approches qui tendent à maintenir une relation d'orthogonalité entre les résidus (*Van der Vorst H.A.* [117]):

1. Résoudre l'équation normale $A^T Ax = A^T b$ avec la méthode du Gradient Conjugué ($A^T A$ est symétrique et définie positive).

2. Construire explicitement une base de vecteurs orthogonaux des sous-espaces de Krylov.

3. Construire une base des espaces de Krylov par une relation de récurrence bi-orthogonale à 3 termes.

La première approche est peu utilisée, surtout pour des calculs intensifs, étant donné le surcoût dû au produit matriciel $A^T A$. La deuxième approche est la méthode du Résidu Minimal Généralisé (GMRES), qui est une extension de MINRES. GMRES minimise la fonctionnelle d'erreur (4.63) et donc converge théoriquement vers la solution x. Néanmoins la mise en œuvre numérique est lourde. En effet la construction explicite d'une base orthogonale nécessite le stockage de nombreux vecteurs et donc implique une occupation mémoire importante.

La troisième approche permet d'obtenir aisément une base pour chaque espace de *Krylov* mais n'assure pas, d'un point de vue théorique, la convergence du procédé itératif vers la solution. Les méthodes suivant cette approche sont du type Bi-*Gradient Conjugué (Fletcher R.* [110]*)*.

Dans le cas non symétrique on a :

$$(Ax, y) = (x, A^{\mathrm{T}} y) = 0 \qquad \textbf{(4.65)}$$

On peut alors obtenir une base de vecteurs $r_0,\ldots,r_i$ de $K^{i+1}(A;r_0)$, telle que $r_j \perp K^{j-1}(A^{\mathrm{T}};\hat{r}_0)$. Si $\{\hat{r}_j\}$ est une base de $K^i(A^{\mathrm{T}};\hat{r}_0)$ on a la relation de *bi-orthogonalité* :

$$(r_k, \hat{r}_j) = 0 \quad \text{pour} \quad k \neq j \qquad \textbf{(4.66)}$$

L'algorithme est alors le suivant :

Algorithme 4.7 : Méthode du Bi-Gradient Conjugué

$r_0 = \hat{r}_0 = b$ *résidus initiaux*

$p_0 = M^{-1} r_0$

$\hat{p}_0 = \left(M^{\mathrm{T}}\right)^{-1} \hat{r}_0$ *pentes initiales*

Tant que $\|r_k\| \geq \varepsilon_{iter} \|r_0\|$ **répète** :

$$\alpha_k = \frac{\left(\hat{r}_k, M^{-1} r_k\right)}{\left(\hat{p}_k, A p_k\right)}$$

$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$ *réactualisation de l'itéré*

$r_{k+1} = r_k - \alpha_k A p_k$

$\hat{r}_{k+1} = \hat{r}_k - \alpha_k A^{\mathrm{T}} \hat{p}_k$ *réactualisation des 2 résidus*

$$\beta_k = \frac{\left(\hat{r}_{k+1}, M^{-1} r_{k+1}\right)}{\left(\hat{r}_k, M^{-1} r_k\right)}$$

$p_{k+1} = M^{-1} r_{k+1} + \beta_k p_k$

$\hat{p}_{k+1} = \left(M^{\mathrm{T}}\right)^{-1} \hat{r}_{k+1} + \beta_k \hat{p}_k$ *2 directions de descente*

$k = k+1$

Fin Tant que

Fin Algorithme

En termes de coût de calcul cet algorithme nécessite par itération, 3 produits scalaires, 3 étapes de pré-conditionnement, un produit matrice vecteur avec A, un produit matrice vecteur avec A^{T}. Pour optimiser la convergence des améliorations successives ont été apportées à cette méthode.

On peut écrire les deux suites de résidus comme suit : $r_j = P_j(A) r_0$ et $\hat{r}_j = P_j\left(A^{\mathrm{T}}\right) \hat{r}_0$. La relation de bi-orthogonalité donne :

$$\left(r_i, \hat{r}_j\right) = \left(P_i(A) r_0, P_j\left(A^{\mathrm{T}}\right) \hat{r}_0\right) = \left(P_i(A) P_j(A) r_0, \hat{r}_0\right) = 0 \quad \text{pour} \quad i < j \qquad \textbf{(4.67)}$$

Sonnelved [43], a observé que l'on peut construire les vecteurs $\tilde{r}_j = P_j^2(A) r_0$ en utilisant la dernière expression du produit scalaire pour déterminer les paramètres de Bi-CG. C'est la méthode CG-S (Conjugate Gradient-Square). On évite ainsi le produit matrice vecteur avec A^{T} (même si le nombre d'opération algébrique est semblable), et on constate une meilleure convergence de l'algorithme.

Enfin à partir de CG-S on peut obtenir une méthode avec une convergence plus lisse. L'idée est d'écrire :

$$r_i = Q_i(A)P_i(A)r_0 \qquad \textbf{(4.68)}$$

Avec $Q_i(B) = (I - \omega_1 B)(I - \omega_2 B)\cdots(I - \omega_i B)$.

Le choix du paramètre ω_j à l'itération j est alors déterminé en minimisant r_j suivant ω_j. Cette méthode est appelée bi-gradient Conjugué Stabilisé (Bi-CGSTAB), Van der Vorst H.A. [115]. L'algorithme est le suivant :

Algorithme 4.8 : Méthode du Bi-Gradient Conjugué Stabilisé

$r_0 = \bar{r}_0 = b$

$p_0 = r_0$

Tant que $\|r_k\| \geq \varepsilon_{iter}\|r_0\|$ **répète** :

$$\alpha_k = \frac{(\bar{r}_0, r_k)}{(\bar{r}_0, AM^{-1}p_k)}$$

$\bar{r}_{k+1} = r_k - \alpha_k AM^{-1}p_k$ *réactualisation résidu*

$x_{k+1} = x_k + \alpha_k M^{-1}p_k$ *réactualisation de l'itéré*

Si $\|\bar{r}_k\| \leq \varepsilon_{iter}\|r_0\|$ **alors Fin Tant que** ; **sinon**

$$\omega_k = \frac{(AM^{-1}\bar{r}_{k+1}, \bar{r}_{k+1})}{(AM^{-1}\bar{r}_{k+1}, AM^{-1}\bar{r}_{k+1})}$$

$x_{k+1} = x_k + \alpha_k M^{-1}p_k + \omega_k M^{-1}\bar{r}_{k+1}$ *réactualisation de l'itéré*

$r_{k+1} = \bar{r}_{k+1} - \omega_k AM^{-1}p_k$ *réactualisation résidu*

$$\beta_k = \frac{(\bar{r}_0, r_{k+1})}{(\bar{r}_0, r_k)}\frac{\alpha_k}{\omega_k}$$

$p_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k(p_k - \omega_k AM^{-1}p_k)$ *direction de descente*

$k = k+1$

Fin Tant que

Fin Algorithme

En termes de coût de calcul cet algorithme nécessite par itération, 5 produits scalaires, 2 étapes de pré-conditionnement, 2 produits matrice vecteurs avec A seulement.

La méthode que nous avons choisie est Bi-CGSTAB (Bi-*Gradient Conjugué Stabilisé*). Les arguments en faveur de ce choix sont doubles. D'une part c'est une méthode qui présente une convergence plus lisse de la suite x_i vers la solution x que celle de Bi-CG (*Bi-Gradient Conjugué*). D'autre part sa mise en œuvre numérique est moins lourde que pour GMRES. Cet algorithme a été

utilisé avec succès pour des problèmes tri-dimensionnels d'interaction sol/structure par *H. Mroueh* et *I. Shahrour* [84].

4.4.1.3 Structure de données

Dans le code Forge3® on ne stocke que les termes non nuls de la matrice de raideur *A*. C'est un stockage de type *Morse*. De plus, le code n'étant conçu que pour des problèmes non symétriques on ne stocke que les termes non nuls de la triangulaire supérieure de la matrice.
Pour pouvoir implémenter l'algorithme Bi-CGSTAB dans Forge3® nous avons adapté ce stockage au cas non symétrique, et par voie de conséquence le produit matrice vecteur.

$$\left(Ar^k\right)_e = \left(\sum_{j=1}^{N} A_{ij} r_j^k\right)_e = \left(\sum_{1 \le j \le N \,/\, A_{ij} \ne 0} A_{ij} r_j^k\right)_e \quad \text{avec } 1 \le e \le N$$

On définit une structure de donnée morse par

- *N* : dimension de la matrice ;
- Un **stockage primaire** : un tableau *A* de dimension le nombre de coefficients non nuls de *A* contenant tous les éléments non nuls rangés ligne après ligne ;

- Un **stockage secondaire** constitué par :
  - Un tableau d'entier *pc* (**p**ointeur de **c**olonne dans la matrice)
    - Dimension : nombre de coefficients non nuls de *A*
    - *pc(i)* : indice de colonne du coefficient de la matrice stocké en *A(i)*
  - un tableau d'entiers *pl* (**p**ointeur de **l**igne dans la matrice) :
    - dimension *N* ;
    - *pl(i)* : adresse dans *A* du dernier terme de la ligne *i*. Dans le cas symétrique c'est l'adresse du terme diagonal de la ligne *i*.

L'algorithme du **produit matrice vecteur** est donné par :

Algorithme 4.9 : Produit Matrice Vecteur A non symétrique

Initialisations :

Y=0 *initialisation du produit matrice vecteur*

Répète : boucle sur les composantes i

Répète : boucle pour j = pl(i-1)+1

$$Y(i) = Y(i) + A(j) \times x(pc(j))$$

Jusqu'à j = pl(i)

Jusqu'à dimension N

Fin Algorithme

Dans le cas où A est symétrique le stockage diffère par le pointeur de ligne *pl(i)*. En effet la matrice étant symétrique *pl(i)* contient l'adresse dans A du terme diagonal de la ligne *i*.

Algorithme 4.10 : Produit Matrice Vecteur A symétrique

Initialisations :

Y=0 *initialisation du produit matrice vecteur*

Répète : boucle sur les composantes i

Répète : boucle pour j = pl(i-1)

$$Y(i) = Y(i) + A(j) \times x(pc(j))$$

$$Y(pc(j)) = Y(pc(j)) + A(j) \times x(pc(j))$$ *partie symétrique*

Jusqu'à j = pl(i) –1

$$Y(i) = Y(i) + A(\mathrm{pl}(i)) \times x(pc(pl(j)))$$ *terme diagonal*

Jusqu'à dimension N

fin algorithme

4.4.2 Comparaison

Bien que les matrices de raideur issues de lois compressibles soient non symétriques, il est toujours possible de symétriser cette matrice pour bénéficier du contexte du code et d'une résolution symétrique moins coûteuse. Cette approche peut être interprétée comme une régularisation du problème : la matrice étant symétrique on peut la considérer comme une matrice *Hessienne*. L'équation (4.59) peut être considérée comme l'équation d'*Euler* d'une fonctionnelle convexe. L'existence d'au moins une solution est alors garantie.

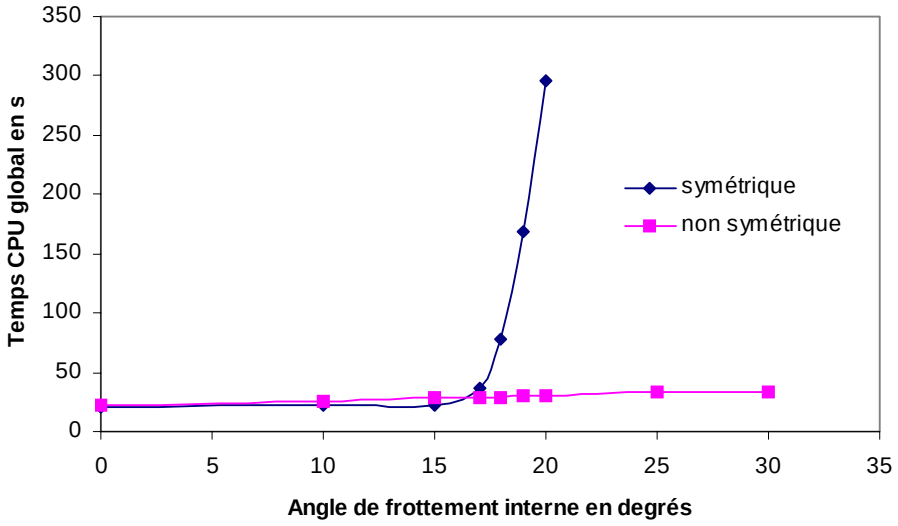
Néanmoins, du point de vue de l'algorithme de *Newton-Raphson,* symétriser la matrice de raideur conduit à modifier les directions de descentes. En effet on est amené notamment à symétriser le module tangent des lois de comportement, qui n'est plus la "dérivée exacte" de la loi. La question est alors de quantifier les répercussions sur la convergence de l'algorithme de Newton Raphson.

Nous avons donc comparé les approches "matrice symétrisée" et "matrice non symétrique" pour la loi de *Drucker Prager non associée* sur un essai d'écrasement simple. Cette loi permet de confiner la non-symétrie globale exclusivement au module tangent de la loi. De plus cette non symétrie augmente avec l'angle de frottement interne.

Le maillage utilisé est un cube de 0,5 m de coté, composé de 168 nœuds et 530 tétraèdres. L'écrasement est conduit pour 20% de déformation axiale. Les paramètres d'élasticité sont E=8 MPa pour le module de Young, et ν=0,3 pour le coefficient de poisson. Nous avons choisi une cohésion de 40 kPa.

Les tolérances de convergence respectivement pour l'algorithme de Newton et les solveurs itératifs, sont $\varepsilon_{NR} = 10^{-6}$ et $\varepsilon_{Sol} = 10^{-10}$. Les simulations ont été réalisées sur machine SUN E450 processeur Sun UltraSparc-II, 400 Mhz.

Convergence de Newton Raphson



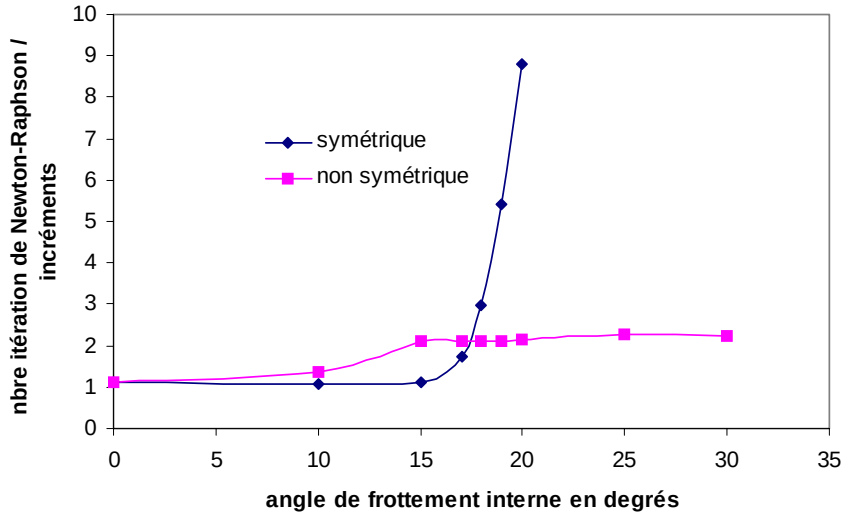


Figure 4.2 :Comparaison "raideur symétrisée (Solveur MINRES)" / "raideur non symétrique (Solveur Bi-CGSTAB)" (en haut) comparaison des temps de résolutions globaux pour un essai d'écrasement. (en bas) Comparaison du nombre moyen d'itérations de Newton Raphson par incréments.

On constate qu'à partir d'une certaine valeur d'angle de frottement, la symétrisation a une influence néfaste sur la convergence de *Newton Raphson*. Cela se traduit par une augmentation du nombre d'itération moyen par incréments (pour $\alpha \geq 17°$). Pour $\alpha \geq 19°$, pour certains incréments, la convergence a lieu pour une tolérance de $\varepsilon_{NR} \times 10$ après 30 itérations de Newton. Dans le cas non symétrique la convergence a toujours lieu pour ε_{NR}, et le nombre d'itérations moyen par incréments se stabilise autour de 2 quel que soit l'angle de frottement.

Néanmoins pour $\alpha \leq 15°$ l'approche Module symétrisé est plus performante en temps, et dans l'algorithme de Newton, ce qui est plus surprenant. On peut voir ici une influence de la régularisation par symétrisation pour des systèmes faiblement non symétriques.

La Figure 4.2 nous a permis de mettre en évidence la dépendance de l'approche par symétrisation à la donnée rhéologique caractéristique qu'est l'angle de frottement interne. Ainsi dans le cadre d'un calcul intensif nous devons opter pour une résolution non symétrique. Il est alors intéressant de quantifier en termes de temps CPU le poids d'une résolution non symétrique.

Résolution non symétrique et temps CPU

Nous avons comparé (Table 4.1) les temps de calculs globaux entre une résolution symétrique et une résolution non symétrique. Dans les deux cas l'angle de frottement interne est nul et donc la matrice de raideur est symétrique. Etant donné la structure de l'algorithme Bi-CGSTAB, nous saisissons ici le surcoût numérique du produit matrice vecteur qui nécessite deux fois plus d'opérations dans le cas non symétrique.

Les calculs ont été effectués sur SUN E450 processeur Sun UltraSparc-II, 400 Mhz. Nous avons porté sur la Table 4.1 le temps de calcul global des simulations ainsi que le temps de résolution moyen par incréments. L'augmentation des temps de calculs avec le nombre de nœuds est différente suivant le type de résolution. Dans le cas symétrique, pour deux fois plus de nœuds ont a un temps de calcul deux fois plus long. Dans le cas non symétrique pour la même augmentation du nombre de nœuds on a un temps de calcul qui a triplé.
Pour le premier maillage l'augmentation du temps de calcul de la résolution non symétrique est d'un facteur 1,35 , alors que pour le second maillage (deux fois plus de nœuds) le facteur d'accroissement est de 1,76. Plus le nombre de nœuds augmentent et plus le surcoût d'une résolution non symétrique augmente par rapport à une résolution symétrique.

	MINRES		**BI-CGSTAB**	
	CPU Total	**CPU Résolution /incréments**	**CPU Total**	**CPU Résolution /incréments**
2505 *Nœuds (10020 d.d.l.)*	**471s**	**8s**	**640s**	**12s**
4915 *Nœuds (19660 d.d.l.)*	**1082s**	**19s**	**1905s**	**37**

Table 4.1 : Temps de calculs globaux pour deux maillages (2505 et 4915 nœuds) avec un angle de frottement nul.

Nous avons comparé les résultats (Table 4.2) pour le maillage à 2505 nœuds avec un angle de frottement de 17°. Par rapport au cas à 0°, la tendance s'inverse. Les temps de calculs les plus longs ont lieu pour un module

symétrisé. En effet on constate sur la Figure 4.3 une augmentation très nette du nombre d'itérations de Newton Raphson par incréments dans le cas symétrisé par rapport à une résolution non symétrique. Pour l'incrément 7, plus de 90 itérations ont été nécessaire pour atteindre la convergence, alors que dans le cas non symétrique seules 11 itérations ont suffit. Dans la suite le nombre d'itérations dans le cas non symétrique se stabilise à 10 par incrément, pour le module symétrisé ce nombre fluctue entre 10 et 20. Ceci montre bien le manque de robustesse de l'approche module symétrisé pour des rhéologies plastiquement compressibles.

2505 *Nœuds(10020 d.d.l.) Frottement interne=**17°***	**MINRES**	**BI-CGSTAB**
CPU Total	**6232s**	**3827s**
CPU / incréments	**134s**	**75s**

Table 4.2 : Temps de calculs pour module tangent symétrisé (MINRES) et non symétrique (Bi-CGSTAB) avec un angle de frottement interne de 17°.

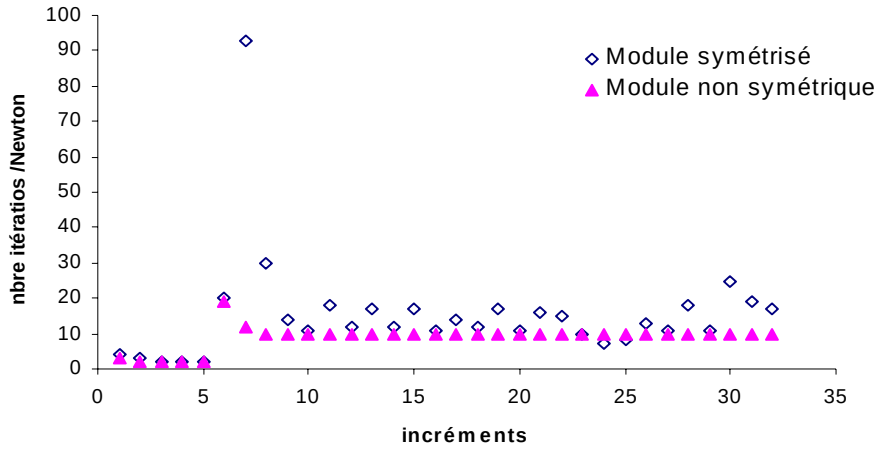


Figure 4.3 : Comparaison des itérations de Newton Raphson par incréments pour un module symétrisé et non symétrique. Angle de frottement :17°, maillage :2050 nœuds.

4.5 Validation des Lois

Dans cette section nous abordons la validation de l'implémentation des lois de comportements que nous venons d'introduire. Nous présentons tout d'abord le modèle de *Drucker Prager non associée* et le modèle Cam-Clay. On peut alors comparer les différences entre un comportement parfaitement plastique et un comportement avec écrouissage et adoucissement. Ensuite nous abordons le modèle CJS2EC destiné au matériau pulvérulent qui prend en compte l'état caractéristique du matériau, en nous intéressant plus particulièrement aux répercussions numériques dues à l'adoucissement. Enfin nous terminons par le modèle pour les sols fins CJS-Tresca.

Pour valider nos implémentations nous avons comparé les résultats obtenus avec ceux issus du Code de Mécanique des Sols FLAC2D©([53]). Cette comparaison s'effectue sur des essais tri-axiaux de compression, dont nous décrivons maintenant le principe :

Essai triaxial de compression

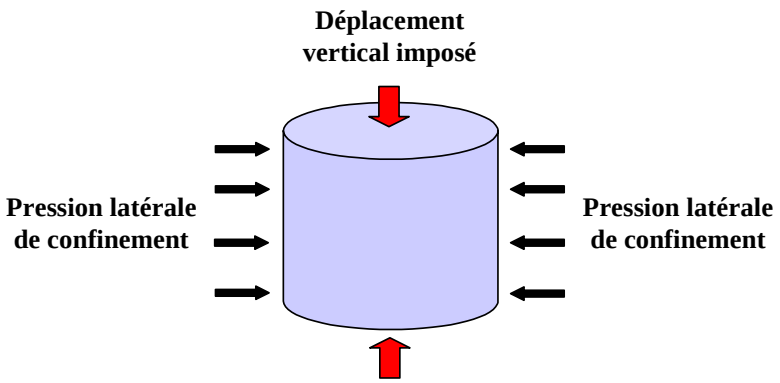


Figure 4.4 :Schéma de l'essai triaxial de compression avec pression de confinement sur une éprouvette cylindrique.

L'essai triaxial de compression se déroule de la manière suivante : un échantillon de forme cylindrique, préalablement confiné à une certaine pression, est écrasé à vitesse constante sous l'action d'une force verticale. Lors de l'action de cette force, une pression latérale constante est appliquée normalement aux parois.

Pour pouvoir mettre en œuvre cet essai, nous avons adapté le code Forge3® de façon à ce qu'il puisse prendre en compte des conditions aux limites de type *Neumann* sur les parois latérales du cylindre. D'autre part le déplacement vertical est imposé par l'action d'un solide rigide plan qui vient écraser l'échantillon. Le contact est sans frottement. Ainsi le problème est mono-dimensionnel, et la solution est homogène en contraintes et déformations.
Lors des simulations nous avons pris un cylindre d'un élancement de 1. Etant donné la symétrie du problème seul 1/8ième du cylindre est maillé. Le maillage

est constitué de 45 nœuds et de 102 tétraèdres. Le critère de convergence pour la méthode de *Newton Raphson* Globale est de $\varepsilon_{NR} = 10^{-6}$, le solveur itératif est Bi-CGSTAB. La tolérance de la convergence des algorithmes d'intégrations des lois de Cam-Clay et CJS2EC (**Algorithme 4.1** et **Algorithme 4.3**) est de $\varepsilon_{local} = 10^{-12}$.

Imposition d'une pression

Sur la Figure 4.5 on observe la conséquence de l'imposition d'une pression du point de vue numérique, sur le bord d'un échantillon cylindrique. Initialement on part d'un état de contrainte déviatoire non nul qui diminue jusqu'à s'annuler. Lorsque l'état de contrainte s'annule la pression est alors homogène dans tout le domaine et égale à la pression imposée initialement sur le bord. C'est à partir de ce stade que l'essai d'écrasement proprement dit commence. Cette initialisation fait intervenir le mécanisme élastique.

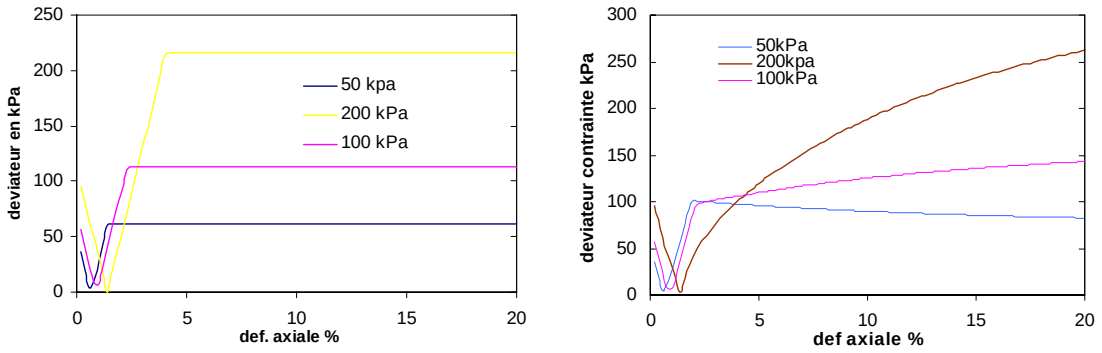


Figure 4.5 : Conséquence de l'imposition d'une pression sur des courbes d'essais tri-axiaux.

Dans la suite nous avons omis cette phase dans les courbes issues des essais d'écrasement.

4.5.1 Drucker-Prager et Camclay

Pour valider ces deux modèles nous avons conduit les essais pour trois pressions de confinement : 50 kPa, 100 kPa et 200 kPa.

α = 25°	k = 4,226 kPa	E = 8 Mpa	ν = 0,3

Table 4.3 : Paramètres Drucker Prager non associé.

M = 1,02	Pc = 200 kPa	λ = 0,2	κ = 0,05	E=8 Mpa	ν = 0,3

Table 4.4 : Paramètres du Modèle Cam-Clay.

Résultats en Déformations

Les graphes des Figure 4.6 et Figure 4.7 décrivent l'évolution du volume de l'échantillon lors de l'essai triaxial.

Pour *Drucker-Prager* on observe une augmentation rapide de la déformation volumique en fonction de la déformation axiale, qui correspond à la contraction élastique du matériau (Figure 4.6). Les paliers correspondent, eux, à l'atteinte de l'état plastique, étant donné que le potentiel plastique est de type incompressible, équation (4.2), il n'y a plus de nouvelles déformations volumiques. En outre les déformations volumiques totales, qui ne sont générées que par le mécanisme élastique, restent faibles. On observe que ces paliers augmentent avec la pression de confinement. En effet le critère de plasticité étant linéairement sensible à la pression hydrostatique, équation (4.1), le domaine élastique est d'autant plus long que la pression initiale est élevée.

Les résultats donnés par Forge3® sont en bon accords avec ceux donnés par FLAC2D. Néanmoins on observe une légère augmentation des déformations volumiques (2.10^{-2} %) avec Forge3®. Ceci est du à la formulation faible de l'incompressibilité.

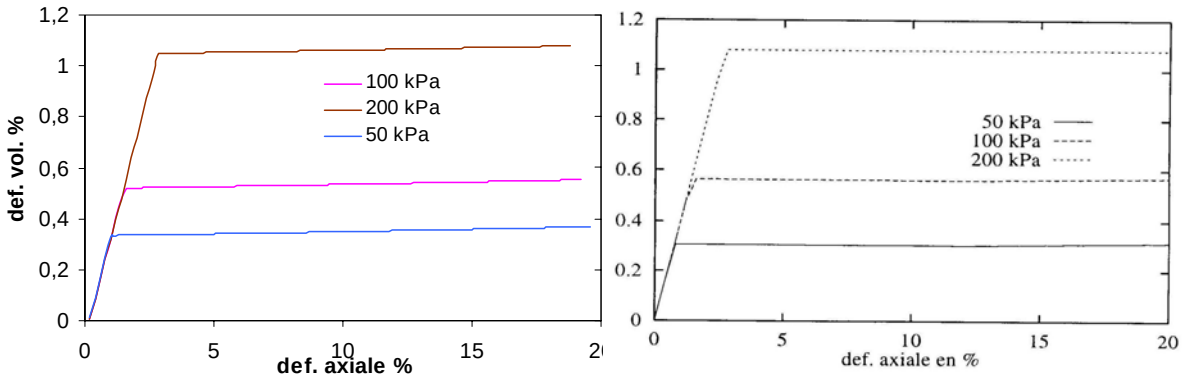


Figure 4.6 : Evolution du volume pour le modèle Drucker Prager non associé.(à gauche) résultats avec Forge3®, .(à droite) résultats avec FLAC2D.

Pour le modèle de Cam Clay (Figure 4.7), la phase élastique est toujours présente, mais les déformations plastiques volumiques sont non nulles et bien plus importantes. Il s'avère que pour une pression de confinement de 200 kPa la phase élastique n'est plus présente. Ce modèle prend en compte l'écrouissage, équation (4.6), et donc pour 100kPa et 200kPa de pression de confinement, on observe une densification du matériau (la variable p_c = 200kPa, pour des pressions supérieures à ½ p_c on a durcissement). Ce modèle prédit aussi le ramollissement du matériau et pour une faible pression de confinement (50kpa) on observe une dé-densification du matériau, (pour des pressions inférieures à ½ p_c on a ramollissement). Enfin la prise en compte de l'état critique (déformation à volume constant) se traduit par une stabilisation

asymptotique des courbes. Cette stabilisation est plus visible pour les pressions de 50 kPa et 100 kPa étant donné la “proximité” de la variable p_c. Pour 200 kPa le plateau d’état critique sera atteint pour une plus grande déformation axiale.

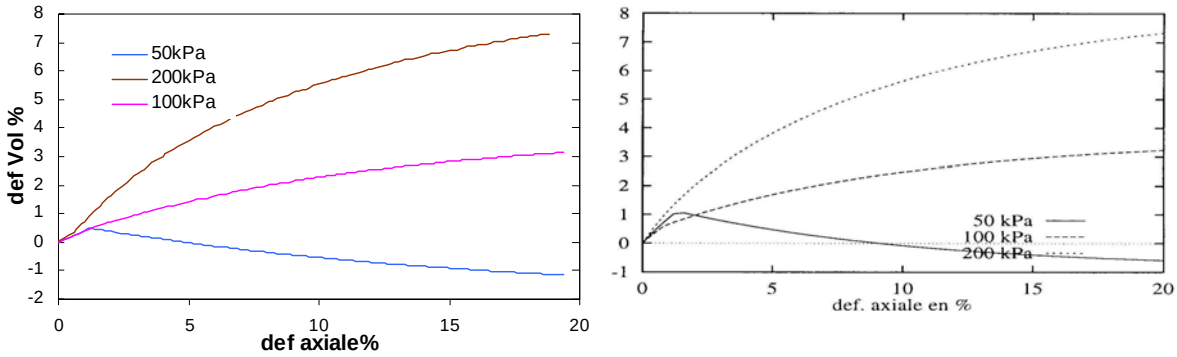


Figure 4.7 : Evolution du volume pour le modèle Cam-Clay.(à gauche) résultats avec Forge3®, .(à droite) résultats avec FLAC2D.

Pour ce modèle on constate un bon accord des résultats avec FLAC2D pour des pressions de confinement de 100 kPa et 200kPa. On constate une sur-évaluation des déformations dilatantes avec Forge3®, et une différence de 0,5% dans les valeurs finales pour une pression de confinement de 50kPa. Ceci est du à l’élasticité linéaire dans le modèle implémenté dans Forge3®. En effet pour FLAC2D© la phase élastique, non linéaire, prédit davantage de déformations, ce qui explique que le niveau final de déformation soit moins important. En fait la prédiction des déformations plastiques dilatantes est la même dans les deux cas.

Résultats en Contraintes

Sur les Figure 4.8 et Figure 4.9 on constate que les graphes qui décrivent l’évolution des contraintes ont une allure similaire à ceux en déformations. On observe le comportement parfaitement plastique du modèle de Drucker Prager : palier plastique après la phase élastique qui dépend de l’état de pression initial. Pour le modèle de Cam Clay on observe le durcissement du matériau avec l’augmentation du niveau de contrainte, et inversement son adoucissement avec une baisse des contraintes. Les résultats donnés par le code Forge3®, sont en excellent accord avec ceux du logiciel de mécanique des sols FLAC2D.

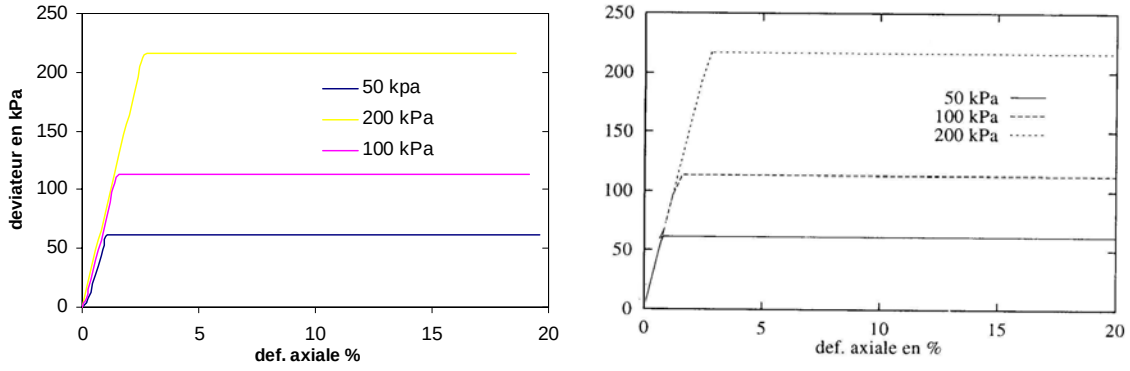


Figure 4.8 : Evolution du déviateur($q=\sqrt{\frac{3}{2}s:s}$) des contraintes pour le modèle Drucker Prager non associé.(à gauche) résultats avec Forge3®, .(à droite) résultats avec FLAC2D.

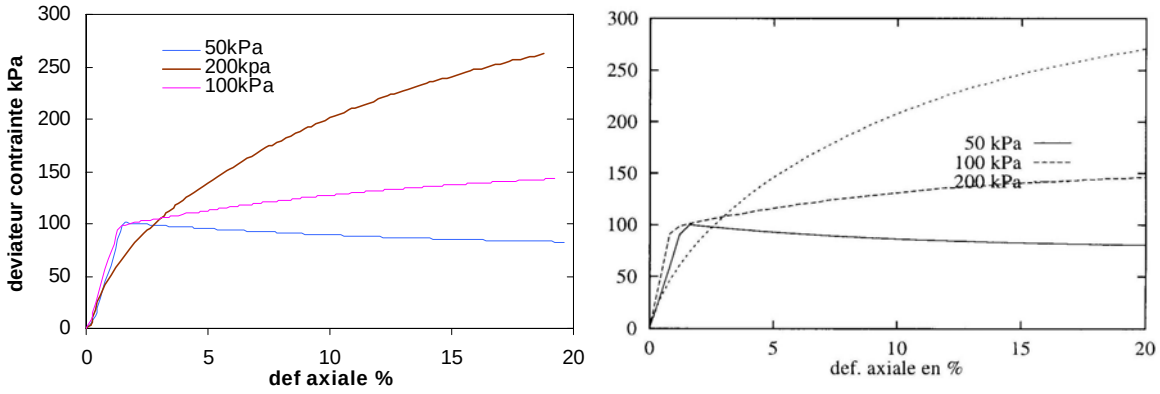


Figure 4.9 : Evolution du déviateur des contraintes ($q=\sqrt{\frac{3}{2}s:s}$) pour le modèle Cam-Clay.(à gauche) résultats avec Forge3®, .(à droite) résultats avec FLAC2D

4.5.2 CJS

Nous présentons dans cette section les résultats obtenus avec le modèle CJS Etat Critique implémenté dans Forge3®, que nous comparons avec ceux obtenus avec FLAC2D.
Les simulations ont été conduites pour un jeu de paramètres correspondant à un Sable d'Hostun lâche (indice des vides : e_0 = 0,71) et dense (indice des vides : e_0 = 0,53). L'ensemble des paramètres utilisés est décrit dans la Table 4.5.

Paramètres	**Sable lâche e_0 = 0,71**	**Sable dense e_0 = 0,53**	**Sable lâche Forge3**	**Sable dense Forge3**
K_0^e	50.10^3 kPa	80.10^3 kPa	50.10^3 kPa	80.10^3 kPa
G_0	40.10^3 kPa	50.10^3 kPa	40.10^3 kPa	50.10^3 kPa
n	**0,6**	**0,6**	**0**	**0**
β	2,2	2,2	2,2	2,2
A	$0,11.10^{-3}$	$0,4.10^{-3}$	$0,11.10^{-3}$	$0,4.10^{-3}$
γ	0,845	0,845	0,845	0,845
R_c	*0,265*	*0,265*	*0,265*	*0,265*
$\boldsymbol{K_0^p}$	**50.10^3 kPa**	**80.10^3 kPa**	**0**	**0**
c	30	30	30	30
P_{co}	750 kPa	8.10^3 kPa	750 kPa	8.10^3 kPa
μ	0,03	0,03	0,03	0,03

Table 4.5 : paramètres CJS2EC pour un sable d'Hostun Dense et Lâche ([63]) et Paramètres activés dans le code Forge3®.

Le paramètre n correspondant à l'élasticité non linéaire du modèle. Les coefficients d'élasticité évoluent en fonction de la pression hydrostatique suivant une loi puissance (paramètre n). Dans le cas Forge3® cette élasticité est linéaire (n = 0) et les modules de cisaillement et de gonflement d'élasticité sont constants. De plus seul le mécanisme déviatoire est activé, donc $\boldsymbol{K_0^p}$ = 0.

Le paramètre β, équation (4.8), pilote les déformations volumiques du matériau (contractions, dilatations), et le paramètre A, équation (4.10) la pente initiale de l'écrouissage. On remarque qu'il est plus élevé dans le cas du matériau dense. Le paramètre γ, équation (4.7), détermine la forme de "triangle arrondi" du critère (vu en coupe orthogonale à l'axe des pressions).

La densité initiale du matériau est reliée au paramètre P_{c0}, et son évolution est pilotée par les déformations volumiques plastiques et le paramètre c, équation (4.13). Enfin, le rayon maximal de la surface de charge évolue en fonction de la densité, du paramètre fixe μ, équation (4.12), et de l'angle de frottement interne à l'état critique Rc.

Résultats Contraintes - Déformations

Les Figure 4.10 et Figure 4.11 présentent respectivement les résultats pour l'évolution de l'état de contrainte et pour l'évolution des déformations volumiques, lors d'essais tri-axiaux pour trois pressions de confinement 100kPa, 300kpa et 800 kpa.

Du manière générale, on constate que le modèle décrit correctement l'évolution de la relation contrainte-déformation pour le matériau dense et lâche (Figure 4.10). Dans le cas du matériau dense on observe une évolution rapide des contraintes jusqu'à un "pic", puis un adoucissement (diminution du niveau de contrainte) pour atteindre l'état critique du matériau. L'évolution des déformations volumiques correspond bien à cette évolution avec une densification du matériau suivie d'une forte dilatance (Figure 4.11).

Pour le matériau lâche on constate une évolution strictement monotone croissante du niveau de contrainte pour atteindre asymptotiquement l'état critique du matériau. En terme de déformation on observe une densification beaucoup plus importante (puisque le matériau est lâche) et une dilatance plus réduite que dans le cas dense. On vérifie bien que l'état critique est indépendant de la densité, puisque pour chaque pression de confinement les niveaux de contraintes des deux matériaux, dense et lâche, convergent vers la même limite (Figure 4.10).

Ainsi au cours d'un chargement monotone ce modèle décrit le durcissement et l'adoucissement du matériau, ce qui n'était pas le cas du modèle de Cam-Clay modifié (pas de prise ne compte de l'état carctéristique).

On remarque qu'en termes de déformations volumiques les courbes CJS EC données par FLAC ne décrivent pas parfaitement le comportement expérimental, surtout lorsque le matériau est lâche (Figure 4.11). En revanche la description de la réponse en contrainte est elle très bonne (Figure 4.10).

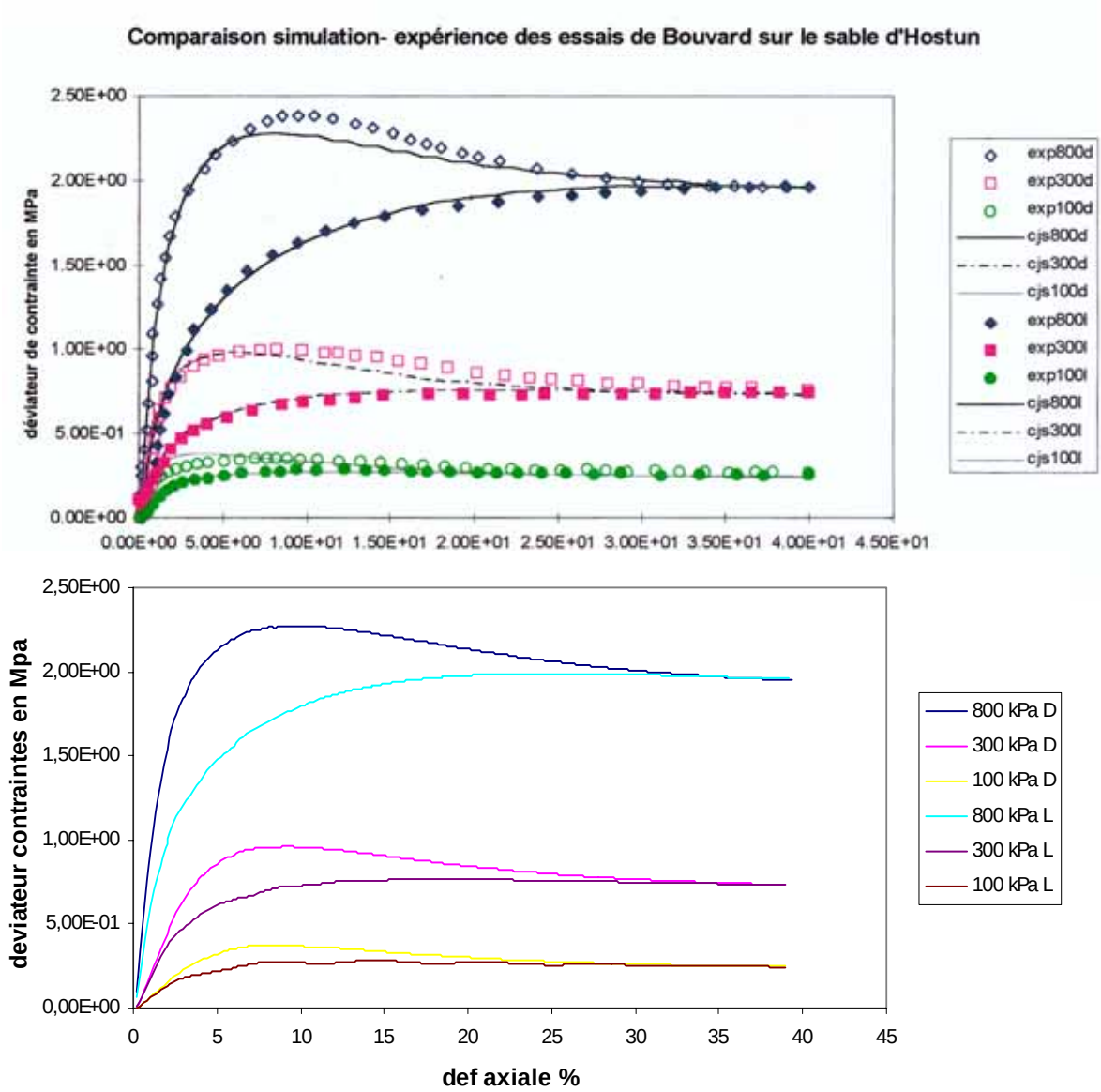


Figure 4.10 : Courbes Contraintes-Déformations d'essais triaxiaux pour trois pressions de confinement 100 kPa, 300 kPA et 800 kPa. (En haut) Comparaison simulation FLAC2D – expérience sur les essais Bouvard sur du sable d'Hostun ([63], [73]). (En bas) Courbes issues de Forge3®.

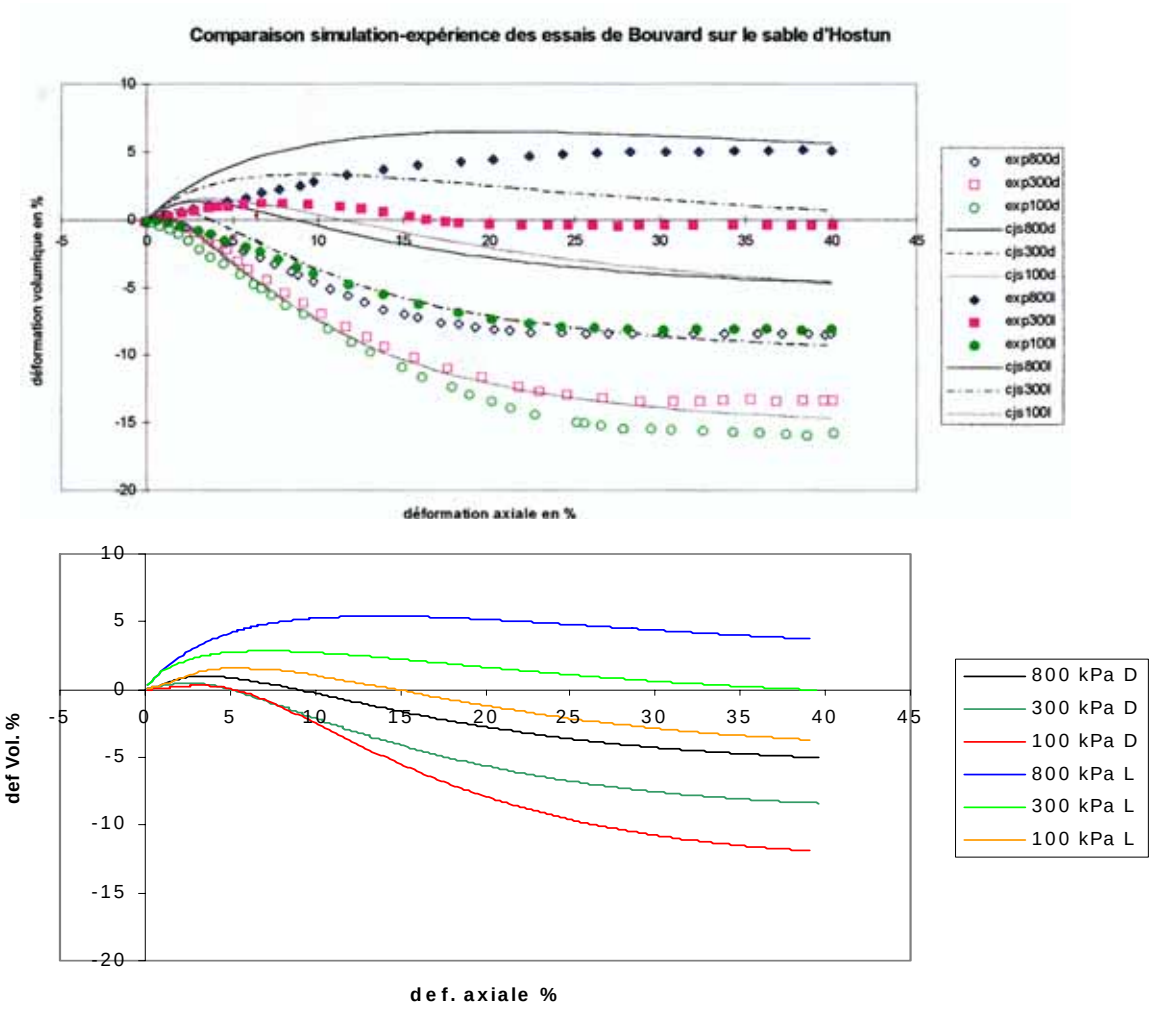


Figure 4.11 : Courbes de variation de volume en fonction de la déformation axiale pour trois pressions de confinement 100 kPa, 300 kPA et 800 kPa. (En haut) Comparaison simulation FLAC2D – expérience sur les essais Bouvard sur du sable d'Hostun ([63], [73]). (En bas) Courbes issues de Forge3®.

Adoucissement et Régularisation

Pour ce modèle nous avons rencontré des problèmes de convergence de la méthode de *Newton Raphson* globale dans les phases de fort ramollissement du matériau dense (Figure 4.10). En effet des oscillations apparaissent dans la phase de décroissance des contraintes. Nous avons même constaté que pour un pas de temps de 2.10^{-3} nous n'obtenions plus la convergence de l'algorithme de Newton Global, l'algorithme diverge et la simulation ne peut plus se poursuivre (Figure 4.12).
Un premier remède est de diminuer le pas de temps ce qui a pour effet de rendre le problème moins non-linéaire. On observe alors que pour un pas de temps de 1.10^{-3} des oscillations, plus faibles en amplitude, ont toujours lieu.

Cependant l'algorithme de résolution global converge toujours et la simulation peut aller à son terme.
Une autre possibilité est de régulariser le problème en activant les termes d'inertie. Ceux ci ne changent pas la réponse du matériau. Les contributions des termes d'inertie interviennent essentiellement sur la diagonale de la matrice de raideur. Cela a pour effet positif d'atténuer la perte d'ellipticité de l'opérateur tangent, et d'augmenter le poids numérique de la diagonale par rapport aux termes extra-diagonaux. Ainsi pour un pas de temps de 2.10^{-3} la simulation peut aller à son terme, l'algorithme de résolution converge. Néanmoins ont observe des oscillations d'une amplitude supérieure à celle pour un pas de temps de 1.10^{-3}.
Ainsi pour éviter l'apparition d'oscillations nous avons cumulé "linéarisation" et régularisation, en diminuant le pas de temps et en activant les termes d'inertie.

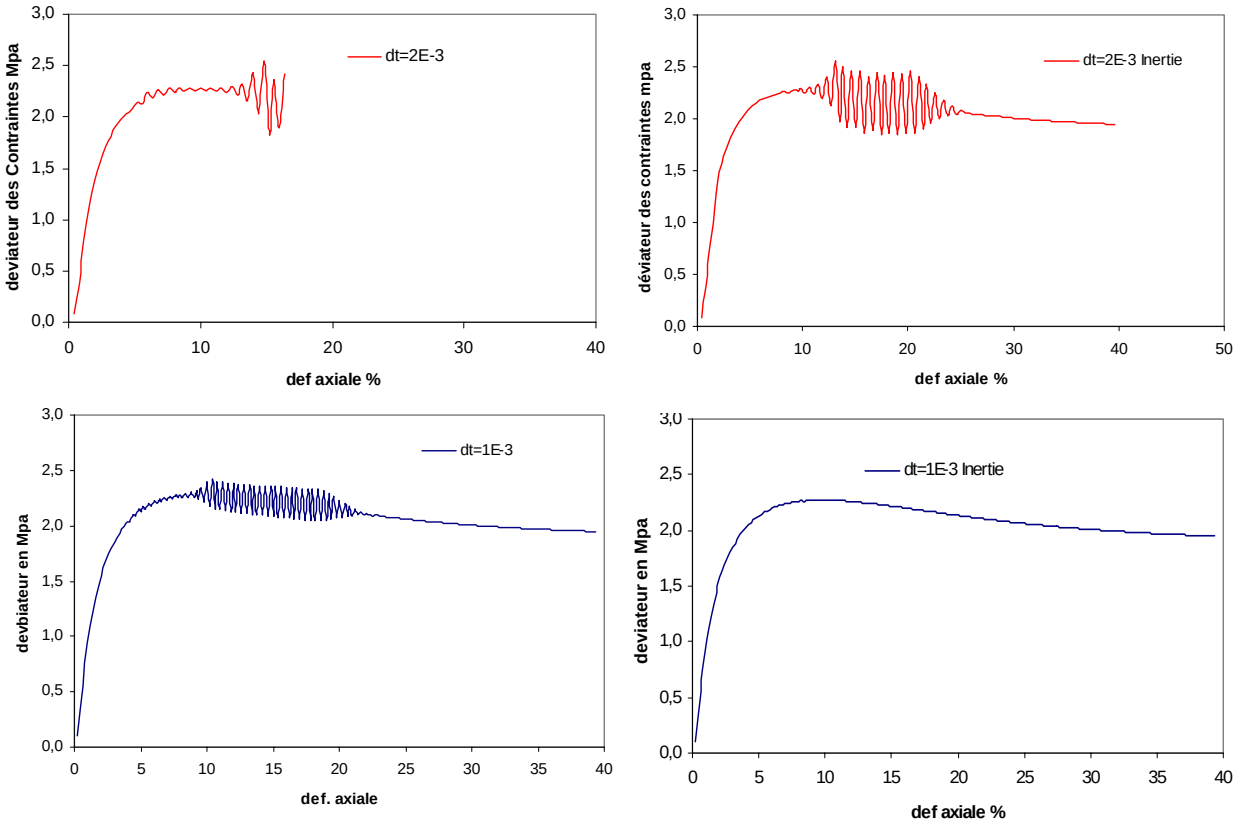


Figure 4.12 : Oscillation dans la phase d'adoucissement. Sable dense pression de confinement de 800 kPa. En haut à gauche, divergence pour $\Delta t=2.10^{-3}$. En haut à droite, oscillations même après prise en compte de l'inertie, $\Delta t=2.10^{-3}$. En bas à gauche : oscillations après linéarisation avec $\Delta t=1.10^{-3}$. En bas à droite : plus d'oscillation avec $\Delta t=1.10^{-3}$ et prise en compte de l'inertie.

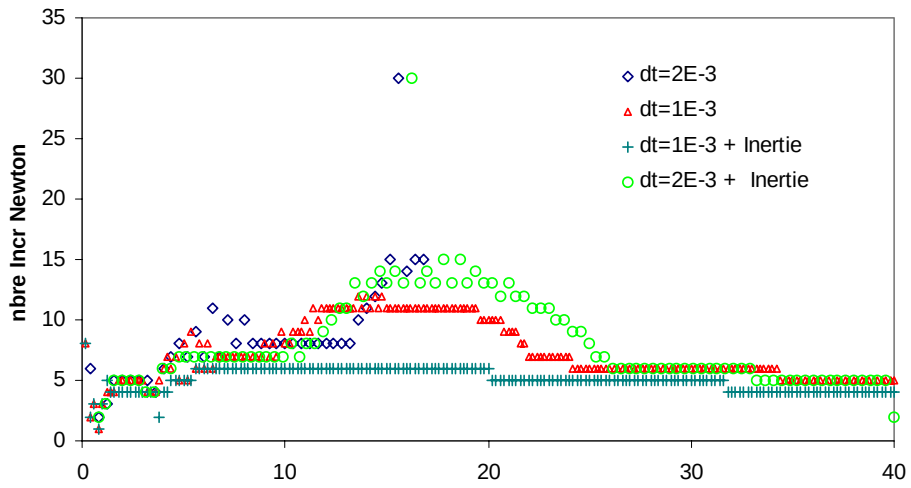


Figure 4.13 : Evolution des itérations de Newton raphson Global en fonction des incréments de déformations.

Adoucissement : Influence du module de Young

Nous avons constaté que l'algorithme d'intégration des équations locales de comportement ne converge plus pour des pressions de 300 kPa et 100 kPa lors de la phase d'adoucissement pour le matériau dense. Ce n'était pas le cas pour la pression de confinement à 800 kPa. Nous avons alors examiné l'influence du module de Young. La Figure 4.14 montre les courbes obtenues, avec une pression latérale de 300 kPa, pour deux modules de Young E = 50 Mpa et E = 25 Mpa. Le pas de temps est Δt=1.10^{-3} et l'inertie est prise en compte. Il s'avère que pour E =50 Mpa l'intégration locale a toujours lieu (convergence de l'algorithme) mais on constate alors des oscillations pour la réponse en contrainte. Pour E =25 Mpa on évite ces fluctuations. En fait plus on réduit le module de Young et plus la variable initiale de la méthode de *Newton locale* est au voisinage de la solution.

Néanmoins, en modifiant le module de Young, on modifie évidemment la loi de comportement. On constate alors principalement des différences dans la pente initiale des courbes de la Figure 4.14. Avec un module de *Young* faible le taux d'accroissement de la courbe est moins élevé et le "pic" de contrainte a lieu pour une déformation axiale plus importante. Cependant, lorsque on poursuit la déformation, les courbes sont confondues. En modifiant le module de Young on ne modifie la réponse du matériau que pour les premiers incréments de déformation. On ne modifie pas non plus de manière significative la valeur du pic de contrainte.

En diminuant la pente d'écrouissage on atteint l'état caractéristique pour une déformation axiale plus importante. Ainsi la quantité de déformations volumiques contractantes est plus importante. Par contre l'allure des courbes (de contraintes) après l'état critique étant similaire, l'influence sur la dilatance est moins significative.

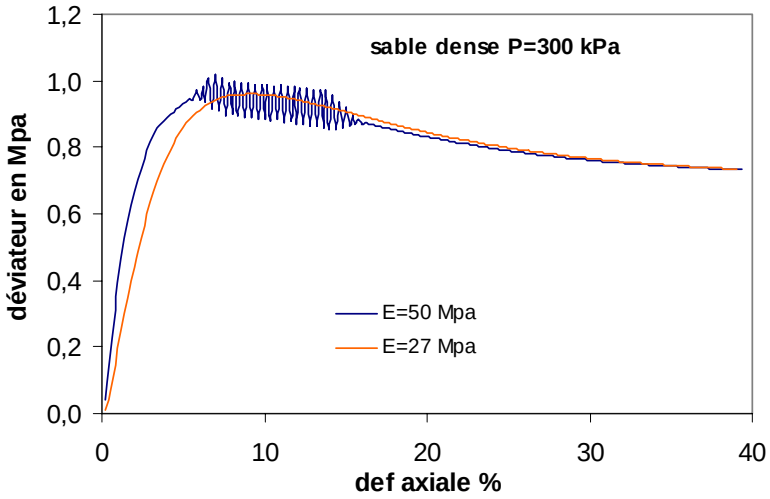


Figure 4.14 : Influence du module de Young sur les courbes contraintes déformation. Sable dense, pression de confinement 300 kPa.

Confrontation Forge3 – FLAC2D

On constate que pour une pression de confinement de 800kPa les résultats en termes de contraintes et de déformations obtenus avec Forge3 correspondent bien à ceux obtenus avec FLAC2D (Figure 4.10 et Figure 4.11).

Pour 300kPa et 100 kPa nous avons pris comme module de Young respectivement E =27 Mpa et E=9 Mpa (suite au problèmes de convergence locale décrits plus haut). Nous observons donc des différences dans les courbes de contraintes pour les premiers incréments de déformation. Le pic de contrainte pour les matériaux dense est identique mais décalé sur l'axe des abscisses par rapport à FLAC2D. Néanmoins les valeurs de contraintes au delà de 20% de déformation axiale sont les mêmes. En termes de déformations les déformations volumiques sont sous estimées pour une pression de 100kPa. (Ceci est du à un module de Young plus faible, voir plus haut). Pour 300 Kpa les résultats sont semblables.

Evolution des paramètres du modèle

Les graphes de la Figure 4.15 et Figure 4.16 représentent l'évolution du paramètre p_c (que l'on peut lier à la densité) et du rayon moyen de la surface de rupture et de la surface de charge *Rm* et *R*.

L'évolution de p_c suit celle du volume, avec une phase de densification et de dilatance qui dépendent de la densité initiale et des pressions de confinement. On constate que pour le cas dense les pentes de décroissance entre 7% et 10% de déformation axiale, sont plus importantes pour de faibles pressions de confinement (Figure 4.15). Pour 800 kPa on a une pente de -0,63 ; pour 300 et 100 kPa on a -0,77 et -0,9.

L'évolution des variables *Rm* et *R* nous permet de saisir le contrôle du rayon moyen de rupture sur le rayon moyen de la surface de charge. On constate

bien que pour une sollicitation longue ces valeurs se confondent avec le rayon d'état critique *Rc=0,265* (confondues avec le rayon caractéristique).
Tant que $R < Rc$ le modèle prédit des déformations plastiques contractantes, lorsque $R > Rc$ le modèle prédit des déformations plastiques dilatantes.

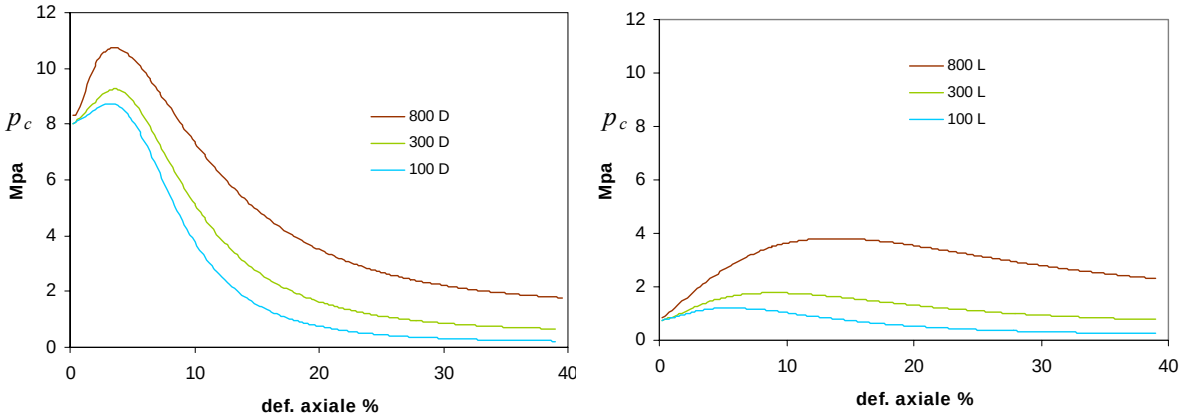


Figure 4.15 : Evolution du paramètre Pc pour le sable dense (à gauche) et le sable lâche (à droite) à une pression de confinement de 800 kPa.

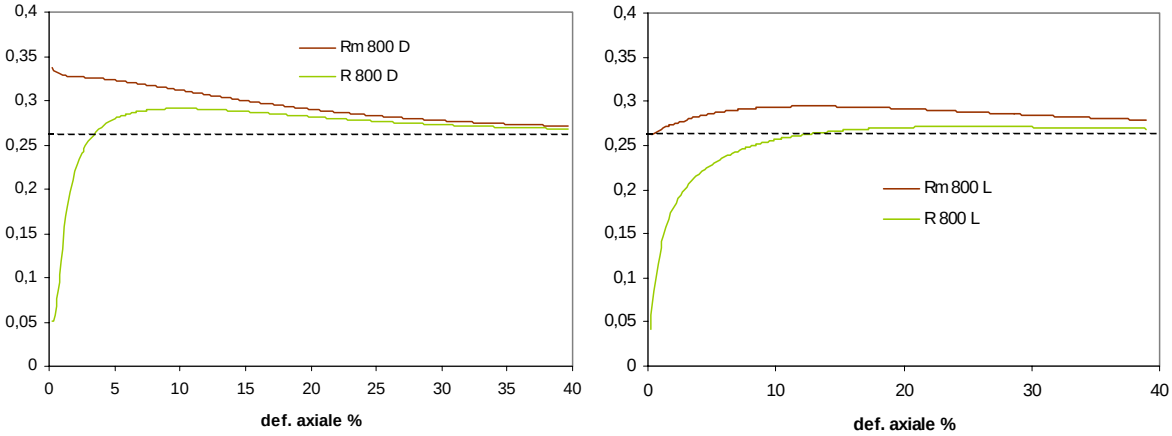


Figure 4.16 : Evolution du rayon moyen de rupture Rm et du rayon moyen de la surface de charge R, pour le sable dense (à gauche) et le sable lâche (à droite) à une pression de confinement de 800 kPa.

4.5.3 CJS-Tresca

Pour le modèle CJS-TRESCA2 les paramètres mis en jeu sont listés dans le tableau ci-dessous

	A (Mpa)	b	Rm (kPa)	Rc (kPa)	E (Mpa) (module de Young)	ν (coefficient de poisson)
Adoucissement	27,5	120	75	15	8	0,3
Ecrouissage	5	120	30	15	8	0,3

Table 4.6 : Paramètres CJS-Tresca dans le cas avec adoucissement et avec écrouissage positif.

La Figure 4.17 montre l'évolution du déviateur des contraintes dans le cas écrouissable et dans le cas avec adoucissement. Dans les deux cas on observe une augmentation très rapide du niveaux de contrainte en fonction de la déformation. Pour le comportement écrouissable on tend asymptotiquement vers la cohésion critique *Rc*. Pour le comportement avec ramollissement on atteint d'abord un "pic" deux fois supérieur à *Rc*, puis, le niveau de contrainte diminue progressivement vers cette valeur. On observe que les résultats de Forge3 correspondent à ceux donnés par FLAC. La Figure 4.18 décrit l'évolution du rayon de la surface de charge *R* et du paramètre *Rmax* dans le cas adoucissant et écrouissable.

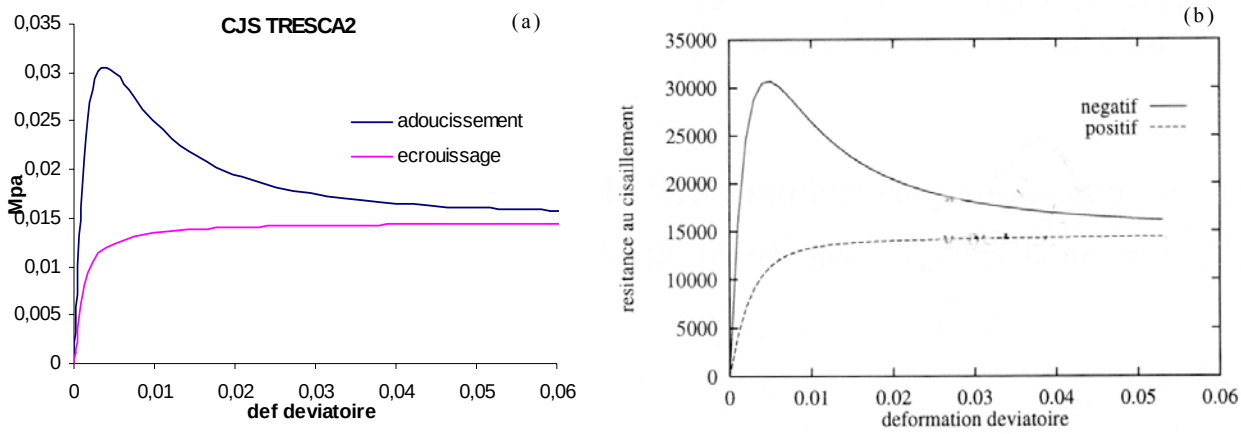


Figure 4.17 : Confrontation Forge® / FLAC2D© pour CJS-Tresca. A gauche résultats Forge, à droite résultats FLAC2D.

Pour ce modèle nous n'avons pas rencontré de problèmes de convergence, que ce soit au niveau global ou local, dans le cas adoucissant ou avec écrouissage.

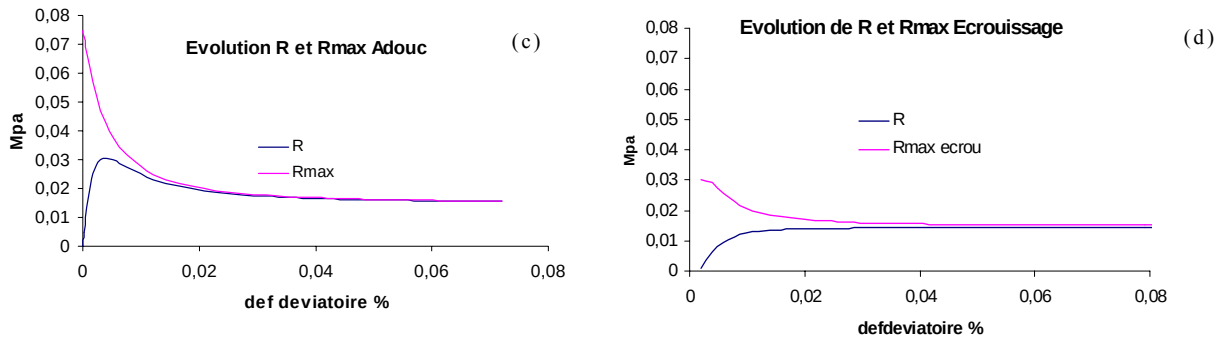


Figure 4.18 :Evolution des paramètres de CJS TRESCA. A droite cas avec adoucissement. A gauche cas avec écrouissage positif.

4.6 Conclusions

Dans ce chapitre nous avons traité l'implémentation de lois de comportement des Sols. Nous avons abordé trois modéles compressibles: *Drucker Prager non associé*, *Cam Clay modifié* et *CJS Etat Critique* et un modèle incompressible *CJS Tresca*.

Pour chaque modèle nous avons décrit la forme des équations discrétisées dans le code, et nous avons mis en évidence, le cas échéant les termes de non symétries. Le modèle de *Drucker Prager non associé*, dont les termes de symétrie confinés au module tangent, nous a permit de montrer la nécessité d'une résolution non symétrique des systèmes linéaires associés au *Newton Global*. L'intégration du modèle de *Cam Clay* avec compressiblité plastique et prise en compte de l'état critique nous a servi d'intermédiare pour l'intégration du modèle *CJS EC*. Pour ce modèle complexe (écrouissage, adoucissement, état critique, état caractéristique) l'algorithme de résolution est alors découplé entre la résolution des équations de comportement (en vitesse et pression) et la résoluiton de la condition de consistance (multiplicateur plastique, variables d'écrouissage).

Nous avons ensuite valider l'implémentation de ces modèles par comparaison avec le code FLACD2D© sur des essais triaxiaux. Les résultats sont en bon accords avec ceux donnés par FLAC2D©.
Cependant des difficultés de convergence sont alors apparus dans l'algorithme de *Newton* Global et l'intégration de *CJS état critique,* au niveau des phases d'adoucissement. Pour y remédier nous avons diminué le pas de temps et activer les termes d'inertie (ce qui, dans ce cas, ne modifie pas la réponse du matériau). Pour assurer la convergence de l'algorithme d'intégration local, nous avons du diminuer le module d'élasticité pour les faibles pressions de confinement.

Les difficultés de mise en œuvre numérique de ces modèles complexes restent un problème d'actualité [58], [73].

REFERENCES

[1] ABDEL-FATTAH T.T., HODHOD H.A., AKL A.Y., *"A novel formulation of infinite elements for static analysis"*, Computers and Structures, 77, pp. 371-379, (2000).

[2] ABOUAF M., *"Modélisation de la compaction de poudres métalliques frittées"* Thèse Doct. es sciences, Université scientifique et médicale et ENP de Grenoble, 168 p. (1985).

[3] ABU-FARSAKH M.Y., VOYIADJIS G.Z., *" Computational model for the simulation of the shield tunneling process in cohesive soils"* Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., **22**, pp. 00-22, (1998).

[4] ABU-FARSAKH M.Y., VOYIADJIS G.Z.,TUMAY M.T., *"Numerical analysis of the miniature piezocone penetration tests (PCPT) in cohesive soils"* Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., **22**, pp. 791-818, (1998).

[5] AHADI A., KRENK S., *"Characteristic state plasticity for granular materials Part I : Basic theory"*, International Journal of Solids and Structures, 37, pp 6343-6360 (2000).

[6] AHADI A., KRENK S., *"Characteristic state plasticity for granular materials Part II : Model calibration and results"*, International Journal of Solids and Structures, 37, pp 6361-6380 (2000).

[7] ARNOLD D.N., F. BREZZI, FORTRIN M., "A stable finite elemnt for stokes equations". Calcolo., **21**, 337-344, (1984).

[8] ASAOKA A., NAKANO M., NODA T., *"Soil-Water coupled behaviour of saturated clay near/at critical state"* Soils and foundations, **34,** pp.91-105 (1994).

[9] ASHBY S. F., MANTEUFFEL T. A., SAYLOR P. E., *"A Taxonomy for Conjugate Gradient Methods"* SIAM, J. Numer. Anal., vol. 27, No 6, pp. 1542-1568, (1990).

[10] BABUSKA I., "The finite element method with penalty" Math ; Comp., **27**, 221-228, 1973.

[11] BARBAS A., *"contribution à l'utilisation de la méthode des éléments finis en Mécanique des Sols dans le domaine de l'élasto-plasticité"* Thèse Doct. génie civil, ENPC, 140 p. (1981).

[12] BARDET J.P., *"A Comprehensive Review of Strain Localisation in*

Elasto-Plastic Soils", Computers and Geotechnics, **10**, pp. 163-188, (1990).

[13] BAUER E., *"Conditions for embedding Casagrande's critical states into hypoplasticity",* Mech. Cohes.-Frict. Mater., **5**, pp. 125-148, (2000).

[14] BAZANT Z., PIJAUDIER-CABOT G., *"Nonlocal Continuum Damage, Localisation Instability and Convergence",* Journal of Applied Mechabics, **55**, pp. 287-293, (1988).

[15] BELLET M., *"Finite element analysis of compressible viscoplasticity using a three-field formulation"*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 175, pp. 19-40, (1999).

[16] BORGA R.I., LEE S.R., "*Cam-Clay Plasticity, Part I : Implicit integration of elasto-plastic constitutive relations"* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **78**, pp. 49-72 (1990).

[17] BORGA R.I., LEE S.R., *"Cam-Clay Plasticity, Part II :Implicit integration of contitutive equations based on non-linear elastic stress predictor"* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **88** pp. 225-240 (1991).

[18] BORGA R.I., TAMAGNIGNI C., *"Critical State Model at Finite Strain"* Proceedings of the 11th Conference on Engineering Mechanics, pp. 148-151 (1996).

[19] BOUSSHINE L., CHAABA A., DE SAXCE G., *"Softening in stress-strain for Drucker-Prager non-associated plasticity"* International Journal of Plasticity , **17**, pp. 21-46, (2001).

[20] BRAUDEL H.J., *"Modélisation des grandes transformations élastoplastique d'un solide isotrope par la méthode des éléments finis. Application à la forge à froid des métaux"* Thèse Doct. es sciences, Université de Lyon I, 226 p. (1986).

[21] BREZINSKI C., REDIVO-ZAGLIA M., *"Treatment of near-breakdown in the CGS algorithm"* Numerical Algorithm, vol. 7, pp. 33-73, 1994.

[22] BUCAILLE J.L., *"Simulation numérique de l'indentation et de la rayure des verres organiques",* Thèse de Doctorat, ENSMP, (2001).

[23] CAMBOU B., CHAZE M., DEDECKER F., *"Change of scale in granular materials"* Eur. J. Mech. A/Solids, **19**, pp. 999-1014 (2000).

[24] CAMBOU B., JAFARI, *"Modèles de comportement des sols non cohérents"* Revue française de Géotechnique, **44**, pp. 43-55 (1988).

[25] COUPEZ T., *"Génération de maillage et adaptation de maillage par*

optimisation locale" Revue Européenne des éléments finis, **9**, pp. 403-423, (2000).

[26] COUPEZ T., *"Stable-stabilized finite element for 3D forming calculation"* Communication interne (1995).

[27] COUSSY O., *"Mécanique des Milieux Poreux "* Edition Technip (1991).

[28] CHEN W.F., BALADI G.Y., *"Soil Plasticity : Theory and Implementation"* Developments in Geotechnical Engineering, **38**, Elsevier, New York (1985).

[29] CHEN W.F., MIZUNO E., *"Nonlinear Analysis in Soil Mechanics :Theory and Implementation"* Developments in Geotechnical Engineering, **53**, Elsevier, New York (1990).

[30] CHI L., KUSHWAHA R.L., *"Three-Dimensionnal, finit element interaction between soil and tillage tool"* ASAE, **34,** pp. 361-366 (1991).

[31] CHOPRA M. B., DARGUSH G.F., *"Finite Element Analysis of time Dependent Large-Deformation Problems "* Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., **16**, pp. 101-130, (1992).

[32] COTECCHIA F., CHANDLER R.J., *"A general framework for the mechanical behaviour of clays"*, Géotechnique, **50**, **4**, pp. 431-447, (2000).

[33] CUNDALL P., STRACK O.D.L., *"A discrete method for granular assemblies"*, Géotechnique, **2**, pp. 47-65, (1979).

[34] DE BORST R., VERMEER P.A., "*possibilities and limitations of finite elements for limit analysis"* Géotechnique, **34,** pp. 119-210 (1984).

[35] DE BORST R., *"Robustness in numerical computations of damage evolution in cohesive-frictional material",* Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, **4,** pp. 27-54 (1997).

[36] DE BORST R., HEERES O. M., *"Performance of low-Order triangular elements during plastic flow"* Engeneering Computations, **16, 1,** pp. 70-87 (1999).

[37] DESAI C.S., ZAMAN M.M., LIGHTNER J.G., SIRIWARDANE H.J., "*Thin layer element for interfaces and joints",* Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., **8**, pp. 19-43 (1984).

[38] DESSAI C.S., GIOCLA G., *"Modelling and Testing : Implementation of numerical models and their application in practice"* in "*Numerical Methodes and Constitutive Modelling in Geomechanics" Ed. C.S.,* C.I.S.M. Courses and Lectures, **311**, pp.1-168 (1990).

[39] DWORKIN J., "*large stains in cemented granular aggregates elastic-*

plastic cement" Mechanics of Materials, **23**, pp. 29-44 (1996).

[40] ETEROVIC A. L., BATHE K., *"A Hyper-Elastic-Based Large Strain Elasto-Plastic Constitutive Formulation with Combined Isotropic-Kinematic Hardening using the Logarithmic stresses and Strain Measures"* Int. J. Numer. Meth. Engrg., **30,** pp. 1099-1114 (1990).

[41] FAMIYESIN O.R., *"Robust Symmetric Formulations for Nonassociated Plasticity Problems"*, Journal of Engineering Mechanics, **125**, **9**, pp. 1070-1080, (1999).

[42] FELIX B., *"La méthode des éléments finis en viscoélasticité et en viscoplasticité. Application à la mécanique des sols"* Rapport de recherche LPC n°123 (1983).

[43] FLETCHER R., *"Conjugate Gradient methods for indefinite systems"*, Lecture Notes Math., **506**, 73-89, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (1976).

[44] FREDLUNG D.G., *"The 1999 R.M. Hardy Lecture : The Implementation of unsaturated soil mechanics into geotechnical engineering"*, Can. Geotech. J., 37, pp. 963-986, (2000).

[45] GAY C., "Contribution à la simulation numérique tridimensionnelle du forgeage à froid", Thèse de Doctorat, ENSMP, (1995).

[46] GAWRONSKI W., *"Fuzzy Elements"* Computers and structures, **10,** pp. 863-865 (1979).

[47] GEE-CLOUGH D., WANG J., KANOK-NUKULCHAI W., *"Deformation and Failure in Wet Clay Soil : Part 3, Finite Element Analysis of Cutting of Wet Clay by Tines"*, J. agric. Engng. Res., **58**, pp.121-131, (1994).

[48] HASHASH Y.M.A., WHITTLE A.J. *"Integration of the modified Cam-Clay Model in non-linear finite element analysis"* Computers and geotechnics, **14,** pp. 59-83 (1992).

[49] HILD P. *"Problèmes de contact unilatéral et maillages éléments finis incompatibles"* Thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier, 1998.

[50] HSI J.P., SMALL J.C., *"Analysis of excavation in an elasto-plastic soil involving drawdown of the water table"* Computers and Geotechnics, **13**, pp.1-19 (1992).

[51] HU Y., RANDOLPH M.F., *"H-adaptaive FE analysis of elasto-plastic non-homogeneous soil with large deformation"*, Computers and Structures, **23**, pp. 61-83, (1998).

[52] HUANG T.K., CHEN W.F., CHAMEAU J.C., *"The application of cap-plasticity-model to embankment problems"* Computers and structures,

44, pp. 1349-1369 (1992).

[53] ITASCA consulting, *"Documentation de FLAC2D© : strain-softening model"*, User's Manuel, Minneapolis, 1994.

[54] ITSKOV M., *"On the theory of fourth-order tensors and theior applications in computational mechanics",* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **189**, pp. 419-438, (2000).

[55] JAOUEN O., *"Modélisation tridimensionnelle par éléments finis pour l'analyse thermo-mécanique du refroidissement des pièces coulées"* Thèse Doct. Science et Génie des Matériaux, E.N.S.M.P., 1998.

[56] JARUSEK J., ECK C., *"Dynamic contact problems with friction in linear viscoelasticity"*, C. R. Acad. Sci. Paris, **322**, **I**, pp. 467-502, (1996).

[57] JEAN M., MOREAU J.J., *"Unilateraly and dry friction in dynamics of rigid bodies collections"*, Ed. par Curnier, Proceedings of the Contact Mechanics International Symposium, pages 31-48, lausanne, 1992. Presses polytechniques et Universitaires Romandes.

[58] JEREMIE B., *" Line search techniques for elasto-plastic finite element computations in geomechanics"*, Commun. Numer. Meth. Engng, **17**, pp. 115-125 (2000).

[59] KERYVIN V., DESOYER T., HANUS J-L., *"Localisation de la déformation sous sollicitations lentes : une approche dynamique"*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 328, Série II *b*, p. 727-732, (2000).

[60] KHOGO Y., NAKANO M., MIYAZAKI T., *"Theoretical Aspects of Constitutive Modelling for Unsaturated Soils"*, Soils and Foundations, **33**, **4**, pp. 49-63, (1993).

[61] KIOUSIS P.D., VOYADJIS G.Z., "*Lagrangean continuum theory for saturated porous media"* Journal of Engineering Mechanics., **111**, pp. 1277-1288 (1985).

[62] KIOUSIS P.D., VOYADJIS G.Z., TUMAY M.T., "*A Large Stain Theory for the Two-Dimentional Problems in Geomechanics",* Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., **10**, pp. 17-39 (1986).

[63] KOLMAYER P., "*Rhéologie et modélisation des Sols de surface pour l'interprétation in situ*", Rapport, ETAS, décembre 1998.

[64] KOLMAYER P., *"Modélisation du comportement Mécanique des Sols de Surface et Identification In Situ"*, Thèse de Doctorat en Génie Civil, Ecole Centrale de Lyon, 170 p., (2001).

[65] KUSHWAHA R.L., SHEN J., "*finite element analysis of dynamic interaction between soil and tillage tool*" ASAE, **37,** pp. 1315-1319

(1992).

[66] LABORDE P., TOSON B., PESQUE J.-J., *"On the consistent tangent operator algorithm for thermo-plastic problems"* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **146,** pp. 215-230 (1997).

[67] LAURSEN T.A., SIMO J.C., *"A continuum-based finite element formulation for the implicit solution of multibody, large deformation frictional contact problems"*, Int. J. Numer. Methods Eng., **36**, pp. 3451-3485, (1993).

[68] LEE E.H., *"Elastic-Plastic deformation at finite strains"* J. Appl. Mech. Trans. ASME, **36**, pp. 1-6 (1969).

[69] LEGENDRE A., BACCONNET C., "*Rapport d'essais de scarification*", LERMES, Ensemble Universitaire des Cézeaux, mai 2001.

[70] LIU Y., HOU Z.M., *"Three dimensionnal nonlinear finite element analysis of soil cutting by narrow blades"* in :Proc. of Int. Conf. On Soil Dynamics, Auburn, Ala. 2 :338-347. Nat. Tillage MachineryLab., Auburn, Ala (1985).

[71] LIU C.H., WONG J.Y., *"Numerical Simulations of tire-soil interaction based on Critical State Soil Mechanics"* Journal of Terramechanics, **33**, pp.209-221 (1997).

[72] MACARI E.J., WEIHE S., ARDUINO P., *"Implicit integration in elastoplastic constitutive models for frctional materials with highly non-linear hardening functions"*, Mech. Cohes.-Frict. Mater., **2**, pp. 1-29, (1997).

[73] MALEKI M., *" Modélisation hiérarchisée du comportement des Sols"*, Thèse de Doctorat en Génie Civil, Ecole Centrale de Lyon, 252 p., (1998).

[74] MARCON A.F., BITTENCOURT E., CREUS G.J., *"On the integration of stresses in large deformation plasticity"* Engineering Computations, **16**, pp 49-69, (1999).

[75] MARIE S. *"Un Modèle de Parallélisation S.P.M.D pour la Simulation Numérique de Procédés de Mise en Forme de Matériaux"*, Thèse de Doctorat, ENSMP, (1997).

[76] McMEEKING R.M., RICE J.R., "*Finite element formulations for problems of large elastic-plastic deformation"* Int. J. Solids struct., **11** pp.601-616 (1975).

[77] MESCHKE G., LIU C., MANG H.A., *"Large strain finite element analysis of snow"* J. Engrg. Mech., **122,** pp.591-602 (1996).

[78] MIJAR A.R., ARORA J.S., *"Review of Formulations for elastostatic frictional contact problems"*, Struct. Multidisc. Optim., **20**, pp. 167-189, (2000).

[79] MIZUNO E., CHEN W.F., *"plasticity analysis of slope with different flow rules"* Computers and structures, **17**, pp. 375-388 (1983).

[80] MOCELLIN K., *" Contribution à la Simulation Numérique Tridimentionnelle du Forgeage à chaud : Etude du Contact et Calcul Multigrille"* Thèse Doct. Science et Génie des Matériaux, E.N.S.M.P., 1999.

[81] MOREAU J.J., *"Unilateral and dry friction in finite freedom dynamics"*, Ed. par J.J. Moreau & Panagiotopoulos, CISM Courses and Lectures 302 Springer-Verlag Wien New-York), Non-smooth Mechanics and Application, pages 1-82, (1988).

[82] MOUAZEN A.M., *"Modelling the interaction between the Soil and tillage tools"*, Ph. D. Thesis, submitted to the Hungarian Academy of Sciences, Budapest, Hungary, 128 p., (1997).

[83] MOUAZEN A.M., NEMENYI M., *"A review of the finite element modelling techniques of Soil tillage"*, Mathematics and Computers in Simulation, 48, pp. 23-32, (1998).

[84] MROUEH H., SHAHROUR I., *"Use of sparse iterative method for the resolution of three-dimensional soil / structure interaction problems"* Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., vol. 23, pp. 1961-1975, (1999).

[85] NAGTEGAAL J.C., DE JONG J.E., "*Some computational aspects of elastic-plastic larges stain analysis"* Int. J. Numer. Meth. Engrg., **17,** pp. 14-41 (1981).

[86] NAGTEGAAL J.C., *"On the implementation of inelastic constitutive equations with special reference to large deformation problems"* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **33,** pp. 469-484 (1982).

[87] NOUGUIER C., *"Simulation des Interactions Outil-Sol, Application aux Outils de Traitement des Sols"*, Thèse de Doctorat en Mécanique, Génie Mécanique, Génie Civil, Université Montpellier II, 144 p., (1999).

[88] ORTIZ M., POPOV E.P., *"Accuracy and Stability of Integration Algorithms for Elastoplastic Constitutive Relations"* Int. J. Num. Meth. Engrg., **21**, pp. 1561-1576, (1985).

[89] PALMER A.C., *"Speed effects in cutting and ploughing"*, Géotechnique, **49**, **3**, pp. 285-294, (1999).

[90] PERCHAT E., "MINI-élément et factorisation incomplètes pour la parallélisation d'un solveur de Stokes 2D. Application au Forgeage".

Thèse de Doctorat, ENSMP, (2000).

[91] PETRYK H., *"Plastic Instability : Criteria and Computational Approaches"* Archives of Computational Methods in Engineering, Vol **4**, **2**, pp 111-151, (1997).

[92] PORAN C.J., RODRIGUEZ J.A., "*Finite element analysis of impact behavior of sand"* Soils and foundations, **32**(4), pp. 68-80 (1992).

[93] POTTS D.M., GENS A., *"A critical assessment of methods of correcting for drift from the yield surface in elastoplastic finite element analysis"* Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., **9,** pp. 149-159 (1985).

[94] PREVOST J.H., "*Mechanics of continuous porous media"* Int. J. Engng Sci., **18**, pp. 787-800 (1980).

[95] PREVOST J.H., "*SHORT COMMUNICATION : Localization of deformations in Elastic-Plastic Solids"* Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech., **11**, pp. 187-196 (1984).

[96] QUIBEL A., FROMENTIN M., "*Essais en vraie grandeur d'un dispositif expérimental de scarification des Sols",* Centre d'Expérimentation Routière, LCPC, Juin 2001.

[97] REGUEIRO R. A., BORJA R.I., *"Plane strain finite element analysis of pressure sensitive plasticity with stong discontinuity"*, Int. J. Solids. Structures, **38**, pp. 3647-3672, (2001).

[98] ROUAINIA M., MUIR WOOD D., *"An implicit constitutive algorithm for finite Cam-clay elasto-plastic model"*, Mech. Cohes.-Frict. Mater., , pp. 469-489, (2000).

[99] RUNESSON V., "*Implicit integration of elastoplastic relations with reference to soils"* Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech., **11**, pp. 315-321 (1987).

[100] RUNESSON K., "*A note on nonassociated plastic flox rules"* International Journal of Plasticity, **5**, pp. 639-658 (1989).

[101] SALENÇON J., *"Théorie de la plasticité pour les applications en mécanique des Sols"*, Eyrolles, (1974).

[102] SCHLOSSER F., "*Element de mecanique des sols*", Presse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, (1983).

[103] SHENG D.,SLOAN S.W., YU H.S. *" Aspects of finite element implementation of critical state models",* Computational Mechanics, 2000, **26**, **2**, pp 185-196, (2000).

[104] SIDOROFF F., *"Incremental constitutive equation for large strain elastoplasticity"* Int. J. Eng. Sci., **20**, pp. 19-26 (1982).

[105] SIMO J.C., TAYLOR R.L., *"Consistent tangent operator for rate-independent elastoplasticity"* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **48,** pp. 101-118 (1985).

[106] SIMO J.C., JU J-W., PISTER K.S., TAYLOR R.L., "*Assessment of Cap Model : Consistent Return Algorithms and Rate-Dependent Extension"* Journal of Engineering Mechanics, **114**, **2**, pp 191-218, (1988).

[107] SIMO J.C., KENNEDY J.G., GOVINDJEE S. K.S., *"Non-Smooth Multisurface Plasticity and Visco-Plasticity. Loading/Unloading Conditions and Numerical Algorithm"* Int. J. Num. Meth. Engrg., **26**, pp. 2161-2185, (1988).

[108] SIRIWARDANE H.J., DESAI C.S., *"Computational procedures for non linear three dimensional analysis with some advanced constitutive laws"* Int. J. Numer.Anal.Meth. Geomech., **7,** pp.143-171 (1983).

[109] SNITBHAN N., CHEN W.F., "*Elastic-plastic large deformation analysis of soil slopes"* Computers and structures, **9,** pp. 567-577 (1978).

[110] SONNELVED P., "CGS :a fast Lanczos-type solver for nonsymmetric linear systems", SIAM J. Sci. Statist. Comput., 10, 36-52, (1989).

[111] STOLLE D.F.E., VERMEER P.A., BONNIER P.G.,*" Time Integration of a constitutive law for soft clays"*, Commun. Numer. Meth. Engng, **15**, pp. 603-609 (1999).

[112] SZABO L., *"Comments on loss of strong ellipticity in elastoplasticity"*, Int. J. Solids. Structures, **37**, pp. 3775-3806, (2000).

[113] TANAKA H., INOOKU K., NAGASAKI Y., MIYASAKI M., SUMIKAWA O., OIDA A., *"Simulation of Soil Loosening at Subsurface Tillage using Vibrating Type Subsoiler by means of the Distinct Element Method"*, Proceedings of the 8th European Conference of ISTVS, Umeå, Sweden, (2000).

[114] TRAORE K., "*Simulation thermomécanique du laminage circulaire : développement d'une formulation quasi-eulérienne tridimensionnelle sur une architecture parallèle.*", thèse de Doctorat, ENSMP, 2001

[115] VAN DER VORST H. A., "BI-CGSTAB : *A Fast and Smoothly Converging Variant of BI-CG for the Solution of Non-Symmetric Linear Systems"* J. Sci. Stat. Comput., vol. 13, No 2, pp 631-644, (1992).

[116] VAN DER VORST H. A., VUIK C., *"The Superlinear Convergence Behaviour of GMRES"* Journal of Computational and Applied Mathematics (North Holland), vol. 48, pp. 327-341, (1993).

[117] VAN DER VORST H. A. *"Parallel iterative solution methods for linear*

systems arising from discretized pde's". Technical Report AGARD R-807, Proc. of Special Course on Parallel Computing in CFD, 1-39, AGARD, Neully-sur-Seine, 1995.

[118] VAN DER VORST H. A., BARRET R., BERRY M., CHAN T.F., DEMMEL J., DONATO J. M., DONGARRA J., EIJKHOUT V., POZO R., ROMINE C., *"Templates for the Solution of Linear Systems : Building Blocks for Iterative Methods" http://www.netlib. org/templates/Templates.html. (1994)*

[119] VOYIADJIS G.Z., ABU-FARSAKH M.Y., *"Coupled Theory of Mixtures for Clayey Soils"* computers and geotechnics, **20,** pp. 195-222 (1997).

[120] WANG C.H., HU W., SAWYER J.P.G., "*Explicit numerical integration algorithm for a class of non-linear kinematic hardening model"* Computational Mechanics, 2000, Vol **26**, **2**, pp 140-147 (2000).

[121] WRIGGERS P., *"Finite Element Algorithms for Contact Problems"*, Archives of Computational Methods in Engineering, State of the art reviews, **2**, **4**, pp. 1-49, (1995).

[122] XIE X.M., ZHANG D.J., *"An approach to 3-D nonlinear FE simulative method for investigation of soil-tool dynamic system"* in :Proc. of Int. Conf. On Soil Dynamics, Auburn, Ala. 2 :322-327. Nat. Tillage MachineryLab., Auburn, Ala (1985).

[123] YONG R.N., HANNA A.W., *"Finite element analysis of plane soil cutting"* Journal of terramechanics, **14,** pp. 103-125 (1977).

[124] ZHU Y., FOX P.J., MORRIS J.P., *"A pore-scale numerical model for flow through porous media"*, Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., 23, pp. 881-904, (1999).

[125] ZHANG H.W., SANAVIA L., SCHREFLER B.A., *"Gradient-dependent plasticity model and dynamic strain localisation of saturated and partially saturated porous media : one dimensional model"*, Eur. J. Mech. A/Solids, **19**, pp. 503-524, (2000).

[126] ZHANG H.W., SANAVIA L., SCHREFLER B.A., *"Numerical analysis of dynamic strain localisation in initially water saturated dense sand with a modified generalised plasticity model"*, Computers and structures, **79**, pp. 441-459, (2001).

Chapitre 5 Simulation de la Scarification

5.1 INTRODUCTION 143

5.2 SCARIFICATION D'UN MASSIF PLASTIQUE SEMI-INFINI 144

5.2.1 INFLUENCE DE L'ANGLE DE SCARIFICATION 146
5.2.2 INFLUENCE TAILLE DE DOMAINE / ESPACE INTER-DENT 151
5.2.3 CONCLUSION : SCARIFICATION D'UN MASSIF PLASTIQUE 156

5.3 SCARIFICATION POUR UNE DENT : INFLUENCE DU SOL 156

5.3.1 SOLS FROTTANTS ET COHERENTS :CJS ETAT CRITIQUE 156
5.3.1.1 SCLEROMETRE : DENT A 15° 159
5.3.1.2 ESSAI PLAQUE 164
5.3.1.3 TEMPS DE CALCULS 164
5.3.1.4 INFLUENCE DE PARAMETRES 164
5.3.1.5 CONCLUSION : SCARIFICATION SOLS FROTTANTS 164
5.3.2 SOLS COHERENTS :CJS-TRESCA 164
5.3.3 CONFRONTATION 164
5.3.3.1 CONFRONTATION A L'EXPERIENCE 164
5.3.3.2 CONFRONTATION FLAC3D©/FORGE3® 164
5.3.4 CONCLUSIONS : SCARIFICATION POUR UNE DENT 164

5.4 SCARIFICATION POUR UNE DENT AVEC LAME 164

5.4.1 RESULTATS OUTIL DENT + LAME 164
5.4.2 INFLUENCE DE L'ANGLE DE SCARIFICATION DE LA DENT 164
5.4.3 INFLUENCE DE L'ANGLE D'ETRAVE 164
5.4.4 CONCLUSION 164

5.5 SCARIFICATION MULTI-DENT 164

5.5.1 RESULTATS DES SIMULATIONS 164
5.5.2 INFLUENCE DE L'ANGLE D'ETRAVE SUR L'ECOULEMENT 164
5.5.3 INFLUENCE DES CONFIGURATIONS SUR LA REPARTITION DES EFFORTS .. 164
5.5.4 CONCLUSION 164

5.6 SCARIFICATION MULTI-DENTS AVEC LAME 164

5.7 CONCLUSIONS 164

5.1 Introduction

Ce chapitre traite des simulations de scarification avec le code *Forge3®*.

La premier partie traite de la scarification d'un massif plastique (loi incompressible) pour une dent. Nous faisons varier l'angle de scarification et comparons les modes d'écoulements obtenus. Une étude sur la validation de la restriction du domaine semi-infini est menée et nous abordons l'aspect interaction entre les dents.

La deuxième partie est consacrée aux simulations avec les lois de comportement des Sols introduites au chapitre précédent. Pour le modèle compressible CJS état critique nous mettons en œuvre des simulations de scarification pour une dent et pour un essai d'enfoncement de plaque. Pour le modèle incompressible CJS Tresca nous conduisons des simulations pour l'action d'une dent. Nous cherchons à mettre en évidence les paramètres d'influence de ces modèles. Enfin nous abordons l'aspect confrontation avec l'expérience.

La suite du chapitre concerne la mise en œuvre d'outils complexes de scarification : une dent avec une lame, des systèmes multi-dents et un système multi-dent avec une lame. Le comportement est incompressible.
L'influence de paramètres géométriques comme l'angle d'étrave ou de scarification est examinée, ainsi que l'interaction entre les dents.

5.2 Scarification d'un massif plastique semi-infini

L'objectif de cette section est double. D'une part nous traitons du problème lié à la discrétisation d'un domaine infini (voir chapitre 1) dans le cas particulier de la scarification. D'autre part nous examinons l'aptitude du code à rendre compte des écoulements induits par la scarification ainsi que le coût en termes de temps de calcul des simulations.

Choix de l'outillage

Nous avons concentré nos efforts sur l'étude du labourage d'un massif plastique par une dent. La profondeur de scarification est de 30 cm et la largeur de l'outil est de 3 cm. Ceci correspond aux données géométriques d'une dent de déminage. Nous avons choisi trois angles d'attaque de dents : 0° (dent droite), 15° (dent du scléromètre) et 45° (ordre de grandeur de l'angle d'attaque des dents de déminage). La vitesse d'avancée est de 0,2 m/s. Etant donné la symétrie du procédé, seule une demi-dent est simulée : largeur 1,5cm (w=1,5cm).

Domaines discrétisés

Les maillages de ces domaines doivent remplir le cahier des charges suivant :

- Discrétiser un grand volume.
- Assurer la prise en compte correcte de la condition de contact (contact nodal pénalisé).
- Permettre la prise en compte d'une évolution complexe de la surface libre (écoulements de matière).
- Taille de maillage optimale.

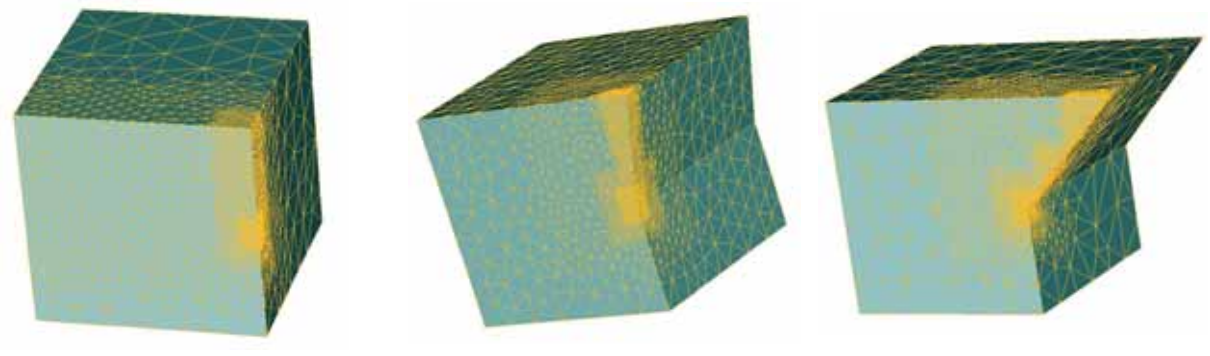


Figure 5.1 : Maillages pour les différentes dents : Dent 0° : 2400 nœuds et 7528 tétraèdres ; Dent 15° : 3089 nœuds et 10921 tétraèdres et Dent à 45° : 3162 nœuds et 11272 tétraèdres.

Pour obtenir ce compromis (minimiser le nombre de nœuds tout en maximisant le respect du contact et de l'écoulement) nous avons utilisé un raffinement de maillage *a priori*. On impose une taille de maille à une zone parallélépipédique de l'espace. Cette "boite" peut suivre le déplacement de

l'outil (boite Lagrangienne) ou bien être fixe (boite Eulérienne). Lors du remaillage on tient compte de ces tailles de mailles.

Pour tous les maillages, la plus petite taille de maille h_{min} est égale à w/3. Pour la dent à 0° trois "boîtes" de remaillages Lagrangiennes ont été utilisées, pour la dent à 15° quatre et pour la dent à 45° cinq (Figure 5.1). Nous avons choisi d'adapter la forme des domaines à l'inclinaison des dents, de manière à ce que dés l'initialisation, la dent est en contact sur toute la profondeur de scarification.

Conditions au limites

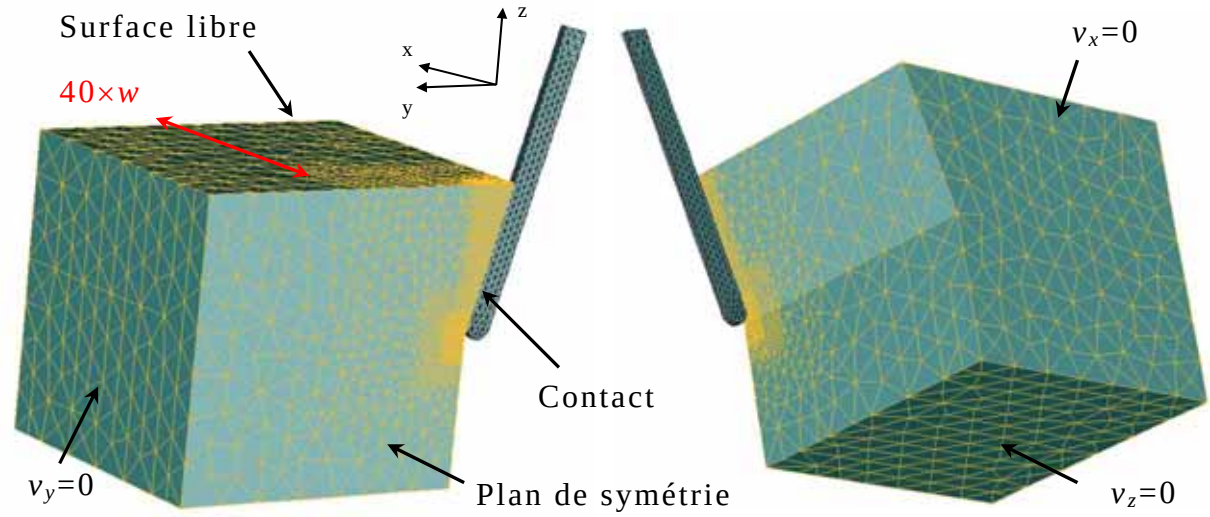


Figure 5.2 :Conditions aux limites. Configuration initiale pour la dent à 15°

Rhéologie

Comportement elasto-plastique incompressible avec écrouissage :

Les paramètres élastiques $E = 70Mpa; v = 0{,}3$

Le critère de *Von Mises* :

$$f = \sqrt{\tfrac{3}{2}\|s\|} - \sigma_0(\bar{\varepsilon}) = 0; \quad \sigma_0(\bar{\varepsilon}) = \sqrt{3}k_0(1 + a\bar{\varepsilon})^n$$

$$k_0 = 1{,}55Mpa; a = 1{,}389; n = 0{,}514$$

frottement

Le frottement utilisé est le frottement de Coulomb tronqué. Au delà d'un certain seuil la scission de frottement est égale à une fraction de la contrainte d'écoulement.

- Coefficient de Coulomb : μ = 0.1
- m_{barre} = 0.3 (coefficient qui limite la scission de frottement aux fortes pressions de contact)

5.2.1 Influence de l'angle de Scarification

Modes d'écoulements

Les simulations mettent en évidence deux types d'écoulements radicalement différents suivant l'angle d'attaque de l'outil de scarification. Pour des angles forts (15° et 0°) on assiste à la formation d'un copeau frontal au devant de l'outil ainsi qu'à des bourrelets latéraux le long du sillon creusés par l'avancée de la dent (Figure 5.3 et Figure 5.4). La dent à 45° quant à elle conduit à un écoulement sous forme de bourrelet. La matière remonte le long de l'outil et s'écoule de part et d'autre de celui-ci (Figure 5.5). Dans ce cas une avancée de 30 cm ne permet pas de rendre compte de bourrelets latéraux. Pour une avancée supérieure la matière remonte au delà de l'outil.

On remarque que l'inclinaison de l'outil conditionne la quantité de matière extraite du massif (Figure 5.6). Pour les dent à 0° et 15° la matière est sollicitée dans un voisinage proche de l'outil, alors que la dent à 45° sollicite le matériau sur une zone qui s'étend largement autour de celui-ci. On observe aussi cette influence pour la dent à 75° qui conduit à la formation d'un copeau et de bourrelets latéraux plus importants que pour la dent à 0°. Pour cette dent nous avons du ajouter une boite de raffinement de maillage supplémentaire au niveau du copeau (Figure 5.4). En effet, étant donné la faible taille du copeau (proche d'un copeau d'usinage des métaux), il a été nécessaire d'ajouter une boite de raffinement pour pouvoir "passer " la simulation (Figure 5.4). Ceci montre que bien qu'un raffinement de maillage *a priori* soit un outil puissant pour simuler de grandes déformations (évolution complexe de la surface libre), son utilisation implique une anticipation des écoulements de matière. Nous sommes donc dans une approche essai/erreur.

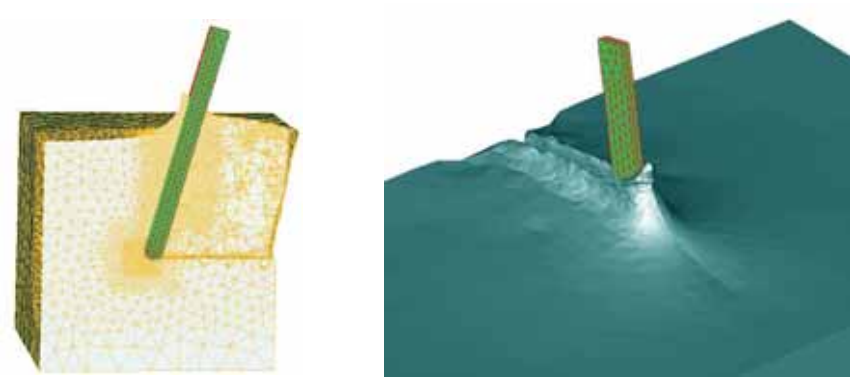


Figure 5.3 : configuration déformée pour la dent à 15° - Avancée 31cm - 6738 nœuds 23514 tétraèdres - 138 remaillages – 28h de Calculs (SUN E450 processeur Sun UltraSparc-II, 400 Mhz).

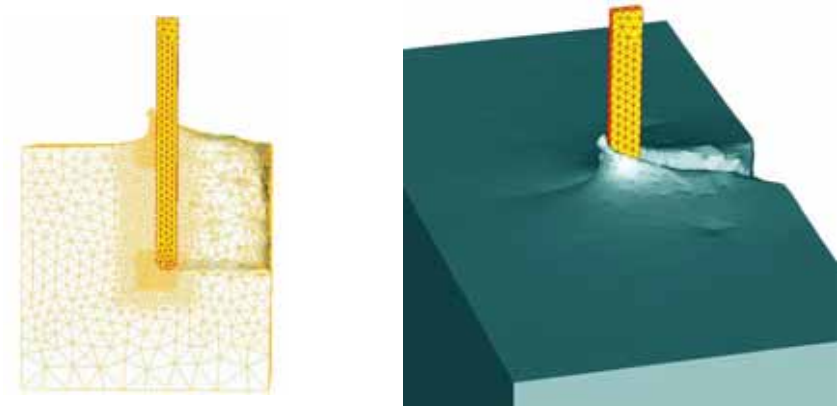


Figure 5.4 : configuration déformée pour la dent à 0° - Avancée 31cm - 4981 nœuds 17403 tétraèdres - 141 remaillages – 29h de Calculs (SUN E450 processeur Sun UltraSparc-II, 400 Mhz).

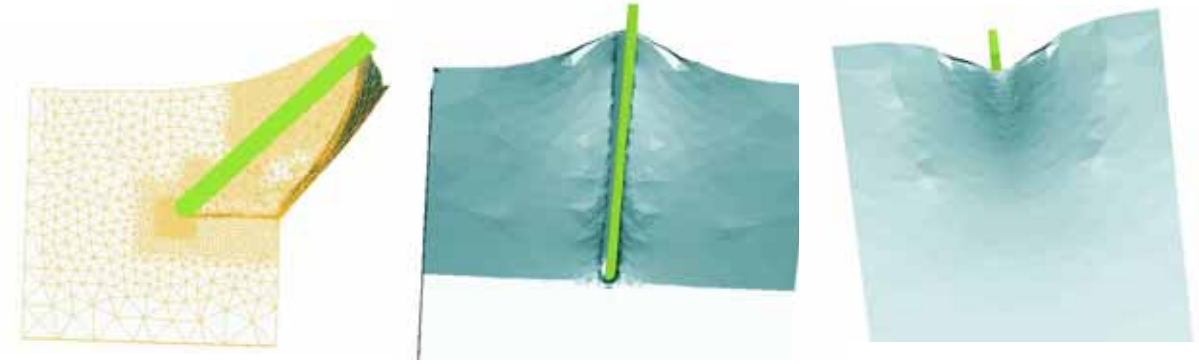


Figure 5.5 : configuration déformée pour la dent à 45° - Avancée 31cm - 5876 nœuds 18133 tétraèdres - 127 remaillages – 26h de Calculs (SUN E450 processeur Sun UltraSparc-II, 400 Mhz).

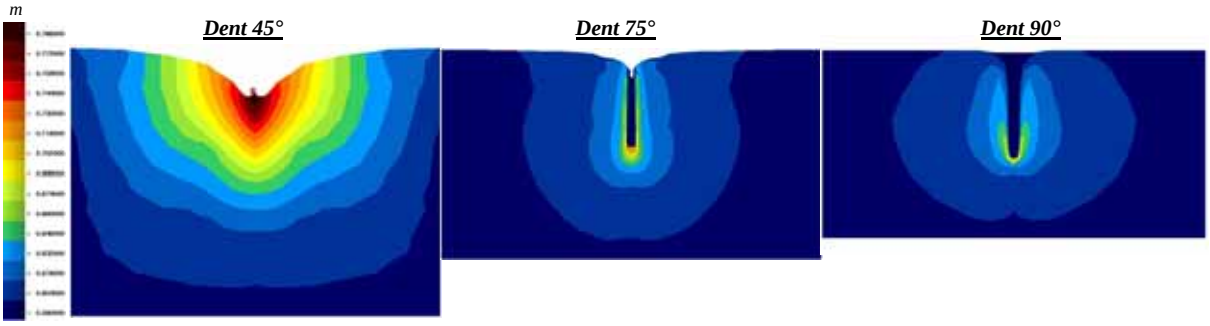


Figure 5.6 : Carte de niveaux (cote z) respectivement pour les trois dents 45°, 15° et 0°- avancée de 30cm.

Temps de Calculs

Le tableau ci-dessous décrit les temps de calculs pour chaque dent modélisée. On constate que ces simulations se placent dans le cadre du *Calcul Intensif* avec plus d'un jour de calcul (machine SUN E450 processeur Sun UltraSparc-II, 400 Mhz) pour réaliser une avancée de 30 cm.

Globalement les temps de calculs et la tenue des algorithmes sont semblables pour chaque type de dent. Le temps de résolution moyen par incrément est inférieur à 300s. On remarque que 66% du temps de calcul est dévolu au remaillage. Le temps de remaillage est non seulement lié au nombre de nœuds du maillage, mais aussi à la complexité géométrique du volume à remailler. Ainsi pour un nombre de nœuds supérieur le temps de remaillage pour la dent à 45° est inférieur à celui pour la dent à 0°.

L'algorithme de *Newton Raphson* converge en moyenne en huit itérations par incréments avec un pas de temps moyen de $4{,}2.10^{-3}$ pour chaque simulation. Pour la dent à 15° le nombre d'itération en moyenne est de 6,9, mais on constate alors un temps de résolution global des systèmes linéaires plus grand.

Avancée Outillage = 31 cm			
	Dent 45°	**Dent 75°**	**Dent 90°**
Durée totale de la simulation	***25h 56mn 33s***	***28h 44mn 33s***	***29h 10 mn***
CPU moyen / Incréments	***260s***	***286s***	***290s***
Δt moyen	$4{,}2.10^{-3}$	$4{,}2.10^{-3}$	$4{,}2.10^{-3}$
Nbre itération Newton Raphson / Incréments	***8,7***	***6,9***	***8,6***
CPU MINRES / incr	***90s***	***113s***	***98s***
Maillage Initial	***3162 nœuds***	***3089 nœuds***	***2400 nœuds***
	11272 tétraèdres	***10921 tétraèdres***	***7528 tétraèdres***
Maillage Final	***5876 nœuds***	***6738 nœuds***	***4981 nœuds***
	18133 tétraèdres	***23514 tétraèdres***	***17403 tétraèdres***
Nbre remaillages	***127***	***138***	***141***
CPU moyen/remaillage	***481s***	***470s***	***519s***

Table 5.1 : Temps de calculs pour les trois types de dents

Contraintes et déformations

La Figure 5.7 décrit la répartition de la contrainte équivalente, au delà du seuil initial de plasticité, pour la dent à 45° et 15°. L'écrouissage étant positif on constate que le maximum de contrainte a lieu très près de la dent, plus précisément le long de l'arête formée par la partie frontale et latérale de la dent. C'est là aussi que se produit le maximum de déformation (variable $\dot{\bar{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{2}{3}\dot{e}^{pl} : \dot{e}^{pl}}$, Figure 5.8). On peut alors conclure que ce type de sollicitation s'apparente à une sollicitation de coupe du matériau.

C'est la dent à 45° qui conduit aux plus grandes déformations : le maximum de déformation cumulée peut atteindre des pics à 29 pour une avancée de 30 cm. L'action de la dent à 15° conduit à une déformation cumulée moins élevée (et donc un niveau de contrainte plus bas). On atteint des valeurs maximales autour de 8, localisées au niveau de l'action de l'outil sur le flanc interne bourrelet latéral.

D'autre part on observe que la zone de plastification reste proche de l'outil (pour les deux angles). On n'observe pas de bandes de cisaillement allant de la base de l'outil vers la surface libre, comme c'est le cas pour des simulations éléments finis (rhéologie visco-plastique incompressible) ou éléments distincts en 2D (voir chapitre I). On peut voir ici l'apport de la simulation 3D qui en autorisant l'écoulement latéral de matière évite la création de cette bande de cisaillement. Néanmoins l'observation expérimentale montre l'apparition de mécanisme de ruptures à partir du tiers supérieur de la dent (prés de la surface pour des pressions de confinement faible ou nulle). La loi d'écrouissage ne permet pas la modélisation de ce phénomène.

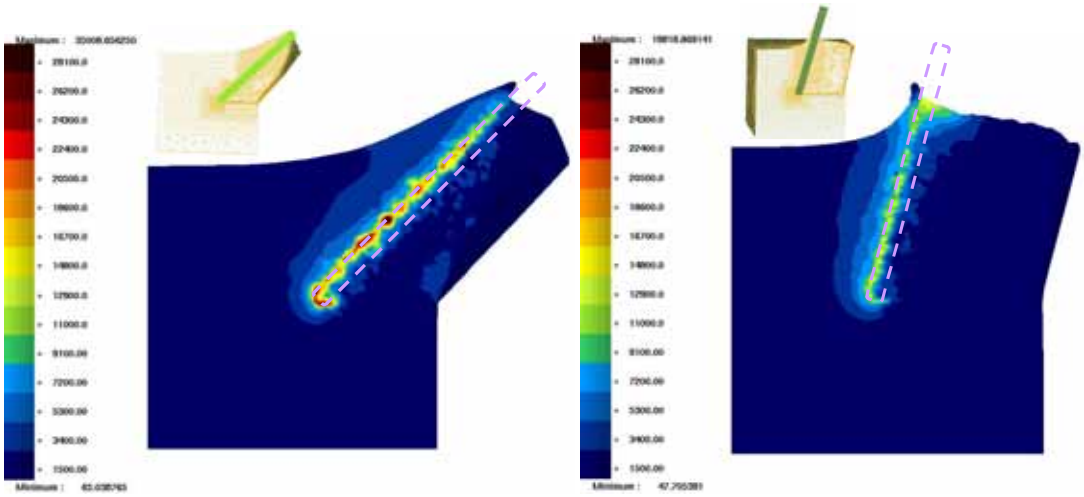


Figure 5.7 : Carte Contraintes équivalente $\left(\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} s : s}\right)$ *pour outil 45° et 15°.*

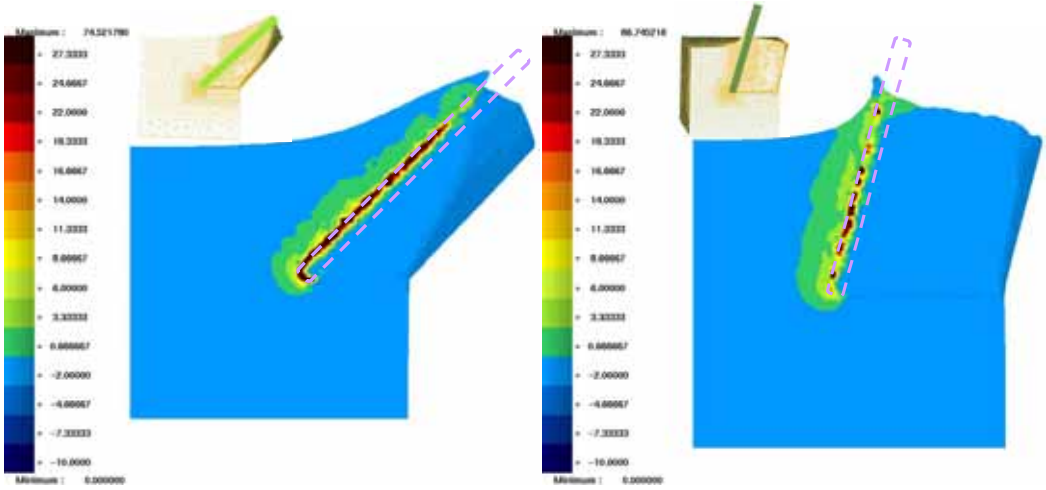


Figure 5.8 : Carte Taux de déformation $\left(\dot{\bar{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{3}{2}\dot{e}:\dot{e}}\right)$ *pour outil 45° et 15°.*

Evolution des efforts

Le premier graphe de la Figure 5.9 décrit l'évolution des efforts verticaux et horizontaux pour les trois angles de scarification étudiés en fonction de l'avancement de l'outil. Alors que le signal d'effort pour les dents à 0° et 15° est stationnaire ou quasi stationnaire, la réponse pour la dent à 45° continue de croître après 25cm d'avancée. De plus c'est cette dent qui conduit aux efforts horizontaux et verticaux les plus grands. Ceci est cohérent avec les observations précédemment réalisées sur le mode d'écoulement et les niveaux de contraintes.
On remarque que c'est la dent droite (0°) qui atteint le plus rapidement un signal stationnaire (10 cm), avec la présence d'un "pic" pour les efforts horizontaux, alors que pour les autres dispositifs l'évolution du signal est monotone. On peut noter ici que la stationnarité est en partie liée à la nature de l'écoulement frontal. En effet pour la dent droite, la faible remontée de matière le long de l'outil conduit à la mise en œuvre d'un écoulement frontal limité.

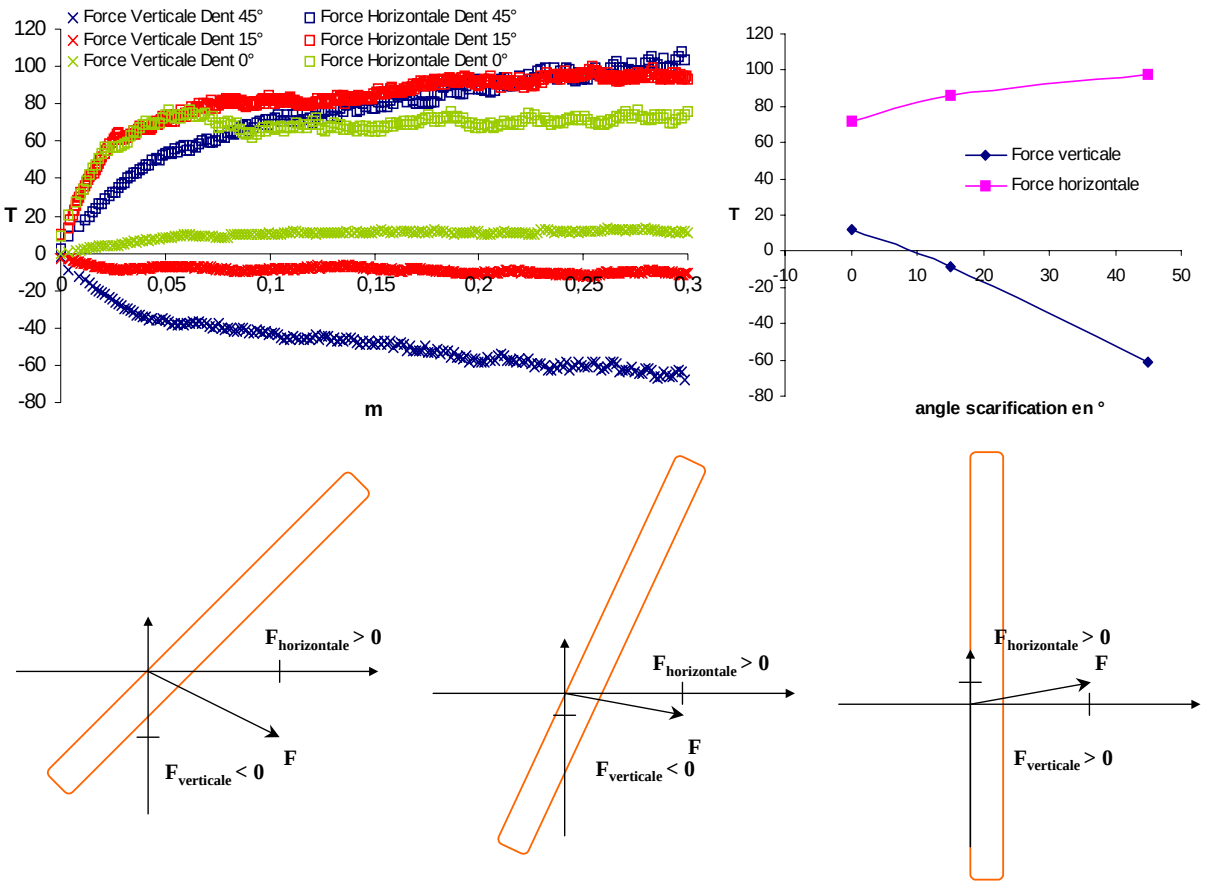


Figure 5.9 :Evolution et orientation des efforts pour les trois outils de scarification en fonction de l'avancée de l'outil.

Une autre remarque importante concerne la direction de la force exercée sur l'outil. On assiste à un changement dans la direction de la force en fonction de l'angle de scarification. Pour 45° et 15° la force est dirigée vers le bas, l'outil a tendance à "s'enfoncer". Néanmoins, pour 0°, la circulation de matière le long de l'outil couplée au frottement conduit à une force dirigée vers le haut qui a tendance à élever la dent.

5.2.2 Influence taille de domaine / Espace Inter-dent

Pour modéliser un domaine semi-infini nous avons choisi l'option qui consiste à déterminer un domaine suffisamment grand afin de ne pas perturber la solution du problème. Néanmoins cette étude nous donne aussi une indication qualitative sur l'interaction entre plusieurs dents (pour un dispositif en râteau). En effet nous avons imposé sur le bord latéral du domaine la condition $v_x = 0$ qui correspond à un plan de symétrie. Nous pouvons donc déduire des simulations l'action de plusieurs dents (en râteau). Nous nous intéressons principalement aux répercussions sur les modes d'écoulements et l'évolution des efforts

	Domaine 1	Domaine 2	Domaine 3
Largeur	$17/3 \times w$ (8,5 cm)	$20 \times w$ (30 cm)	$40 \times w$ (60 cm)

Table 5.2 : Trois tailles de domaines

Cette condition en vitesse n'est pas équivalente, au sens strict, à une condition de *Dirichlet* sur le champ de vitesse et donc sur toute ses composantes. Néanmoins pour des domaines "larges" (domaines 2 et 3) cette condition $v_x = 0$, peut être considérée comme une approximation correcte de la condition $v = 0$. Pour le domaine le plus étroit ce n'est plus le cas. Cependant la taille de ce domaine correspond à un espace inter-dent "type" pour un outil de déminage. L'information que l'on obtient est donc reliée à l'interaction entre les dents.

Influence sur l'écoulement

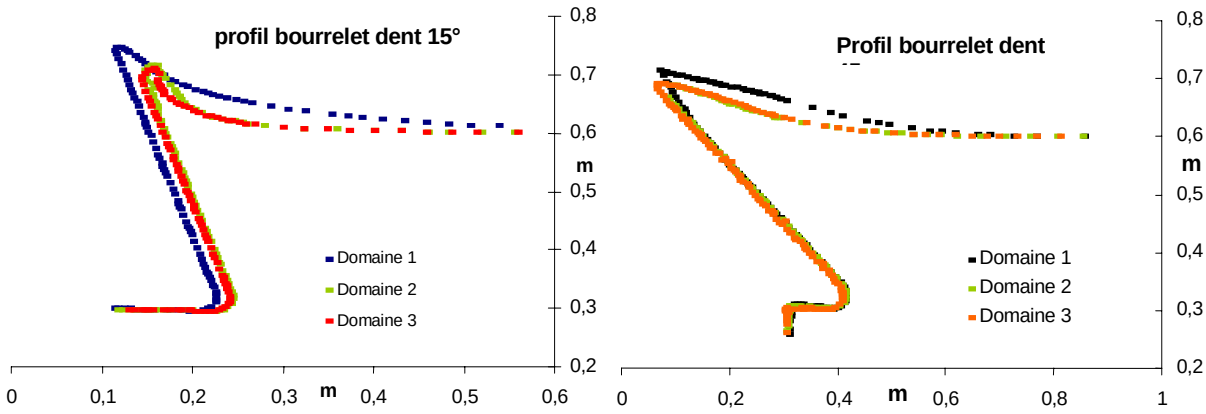


Figure 5.10 : Comparaison des profils d'écoulement (dans le plan de symétrie du problème) pour les trois domaines étudiés – à gauche dent 15°, à droite dent 45°.

L'observation des profils d'écoulement montre qu'ils ne sont pas, ou peu, perturbés dans le cas des deux plus grands domaines (domaine 2 et 3), et ce quelle que soit l'inclinaison de la dent (Figure 5.10). On a toujours un copeau pour des angles de scarification forts et un bourrelet pour la dent à 45°, les profils étant quasiment confondus.

Par contre l'influence devient significative pour le plus petit domaine. Dans le cas de la dent à 15°, l'écoulement latéral de matière se voit restreint par la proximité du bord latéral. En conséquence, la matière remonte plus haut, sur et au devant de l'outil. De plus pour une avancée équivalente aux domaines 2 et 3, on n'obtient pas la formation d'un copeau. Celui-ci apparaîtra pour une avancée bien plus grande de l'outil.

Pour la dent à 45° le plus petit domaine conduit à un écoulement radicalement différent. Dans cette configuration on constate un "décollement" de matière à partir de la hauteur initiale de la surface du massif (Figure 5.10). Sur 30 cm de profondeur la matière est en contact avec l'outil qui déforme le domaine. Au delà, la matière, qui n'est plus en contact avec l'outil, est simplement poussée dans le sens de scarification. Il est alors frappant de constater que ce mode d'écoulement a lieu pour toute la largeur du domaine. La Figure 5.11 permet de comparer, sur une coupe parallèle au plan de symétrie, les composantes du champ de vitesse pour les domaines 1 et 3. Cette coupe se situe à 8,5cm du milieu de la dent, ce qui correspond au bord latéral du domaine 1.

On observe pas de contribution de la composante latérale du champ de vitesse pour le domaine 1, alors que pour le domaine 3 elle met en évidence une circulation de matière. Celle ci est évacuée sur les côtés au devant de la dent, puis effectue un "retour" vers le sillon de la dent. Donc pour le domaine 1 cette circulation n'a pas lieu. Les autres composantes sont plus importantes dans la configuration 1 ce qui montre que la matière est entraînée par l'outil dans la direction de scarification, sur toute la largeur du domaine.

On met ainsi en évidence la modification de l'écoulement de matière par l'interaction potentielle des dents entre elles, quelles que soient leurs inclinaisons, suivant leur espacement (en l'occurrence pour un espace inter-dent d'outil de déminage). Il s'avère que cette influence est beaucoup plus marquée pour une inclinaison de dent de 45°, puisque qu'elle sollicite la matière sur une plus grande largeur. Le mode d'écoulement propre à chaque dent disparaît alors, pour laisser place à un écoulement propre à un ensemble de dent (Figure 5.12).

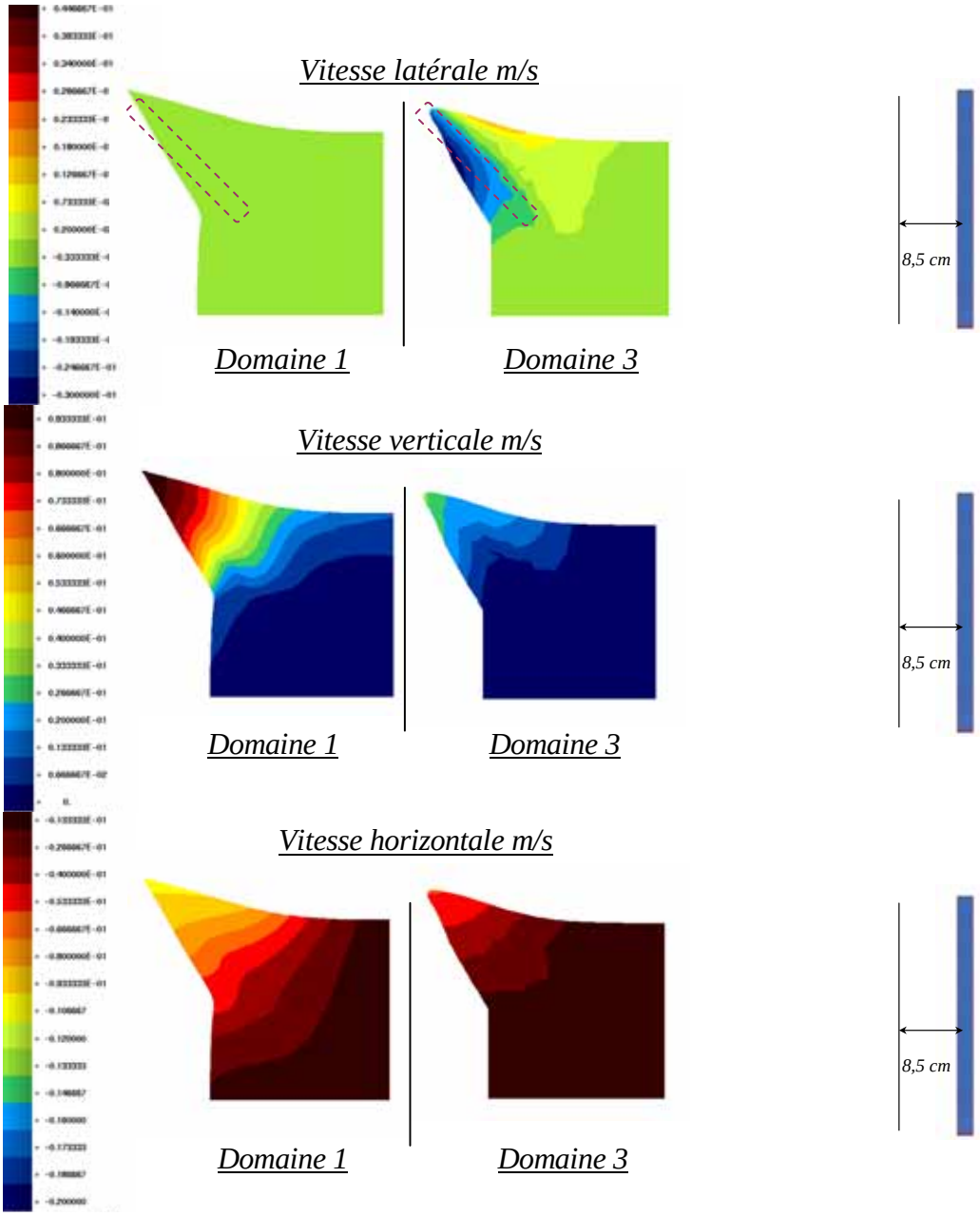


Figure 5.11 : Coupe du massif déformé, parallèle au plan de symétrie, à 8,5 cm du milieu de la dent. A gauche pour le domaine 3 (plus large domaine) à droite domaine 1 (plus étroit domaine).

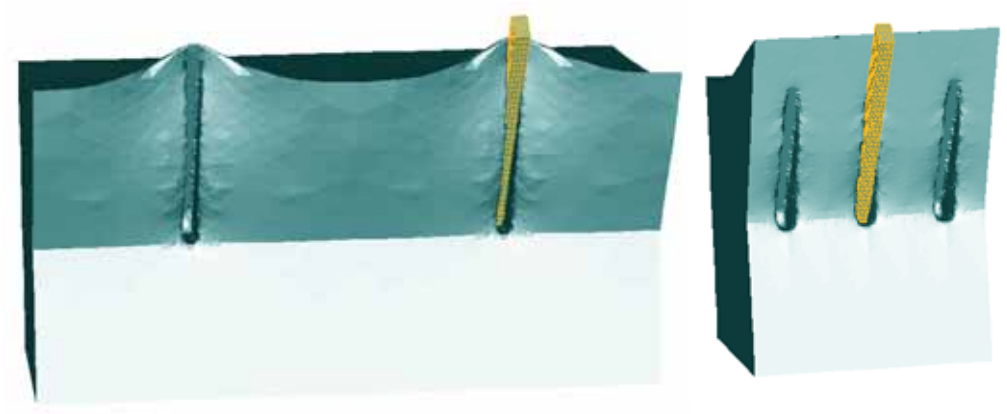


Figure 5.12 :Effet de groupe – influence de l'espace inter-dent – à gauche espace inter-dent de 60 cm, à droite de 17 cm.

Influence sur les efforts

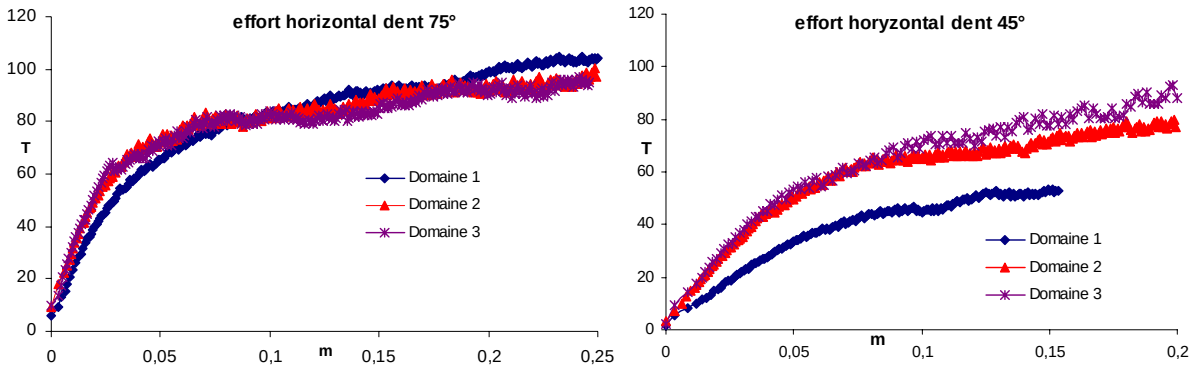


Figure 5.13 : Comparaison des efforts pour les trois domaines, pour 75° et 45° d'angle de scarification.

L'influence de la taille des domaines sur l'évolution des efforts est différente suivant l'inclinaison de la dent. Pour une dent à 15° on constate une évolution très similaire de la résistance à l'avancement pour chaque domaine. Elle apparaît plus importante pour le plus petit domaine ce qui est consistant avec le mode d'écoulement mis en évidence plus haut. Pour les deux plus grands domaines, les courbes sont quasiment superposées. On conclut donc, à la lumière des observations sur l'écoulement, que pour ce type d'outil le domaine 2 correspond à une bonne approximation d'un domaine semi infini.

Pour la dent à 45°, l'évolution est différente entre d'une part les domaines 2 et 3 et le domaine 1. En effet le domaine 1 conduit à une résistance à l'avancement nettement inférieure à celle pour les autres configurations. Ici encore, ceci apparaît cohérent avec le mode d'écoulement mis en évidence plus haut. En effet dans ce cas la sollicitation de coupe est moins importante puisque une partie (non négligeable) du massif est "poussée" sans être scarifiée. Donc les efforts exercés sur une dent se trouvent délestés par l'action des dents voisines.

Cependant si on raisonne en termes de largeur de scarification pour un dispositif à plusieurs dents, il apparaît que, plus l'espace inter-dent est grand et moins l'effort global est important, mais on évacue alors une quantité de matière moindre (Figure 5.12).
Enfin on constate des efforts supérieurs pour le domaine 3 par rapport au domaine 2 au delà d'une avancée de 10 cm. Ainsi pour ce type de dent à 45°, bien que les profils d'écoulements soient similaires (Figure 5.10), le domaine 2 ne peut être considéré comme une bonne approximation d'un domaine semi-infini.

Nous reviendrons plus en détail sur l'action d'un dispositif à plusieurs dents à la section 5.5)

5.2.3 Conclusion : Scarification d'un massif plastique

Nous avons mis en évidence dans cette section l'aptitude du code Forge3® à prendre en compte les grandes déformations issues de la scarification.

Nous avons pu saisir l'influence de l'inclinaison de la dent sur le mode d'écoulement de matière, dans le cas d'un matériau incompressible. Pour des dents inclinées à 0° et 15°, on observe la formation d'un copeau au devant de l'outil, alors que pour 45° c'est un écoulement latéral qui prédomine avec la formation d'un bourrelet. D'autre part l'observation de l'état de contrainte et de la déformation montre que la sollicitation de scarification est semblable à une sollicitation de coupe.

Ces simulations ont mis en évidence l'aspect très intensif des calculs, lorsque seulement une dent est simulée : 1 jour de calcul pour 30 cm d'avancée de l'outil et environ 130 remaillages.

On a pu saisir aussi l'interaction entre les dents au niveau de l'écoulement des efforts. Lorsque l'espace interdent se réduit, dans une configuration en rateau, la proximité des dents diminue l'évacuation latérale de matière. On constate la disparition de l'écoulement propre à chaque dent. La résistance à l'avancement pour une dent au sein du système en râteau, est alors inférieure à celle pour une dent seule. Nous reviendrons sur ce point à la section 5.5.

5.3 Scarification pour une dent : influence du sol

L'objectif de cette section est de mettre en évidence les paramètres d'influence des modèles lors de sollicitations en grandes déformations.

5.3.1 Sols frottants et cohérents :CJS Etat Critique

Choix de l'outillage

Nous avons focalisé notre étude sur l'action d'une dent à 15 : dent du Scléromètre. Les données géométriques et de profondeur de scarification sont celles décrites au début de la section 5.2. La vitesse d'avancée est de 1 m/s Nous avons choisi un outil cylindrique. Ceci atténue les problèmes liés à des géométries d'outils avec des angles saillants dans le cadre d'un contact pénalisé. D'autre part, nous avons mis en œuvre la simulation d'un essai d'enfoncement de plaque. L'outil est un cylindre de rayon 5cm que l'on enfonce dans la direction de son axe de révolution. Etant donné la symétrie du problème, seul un quart du procédé est simulé. La vitesse d'avancée est de 1 m/s.

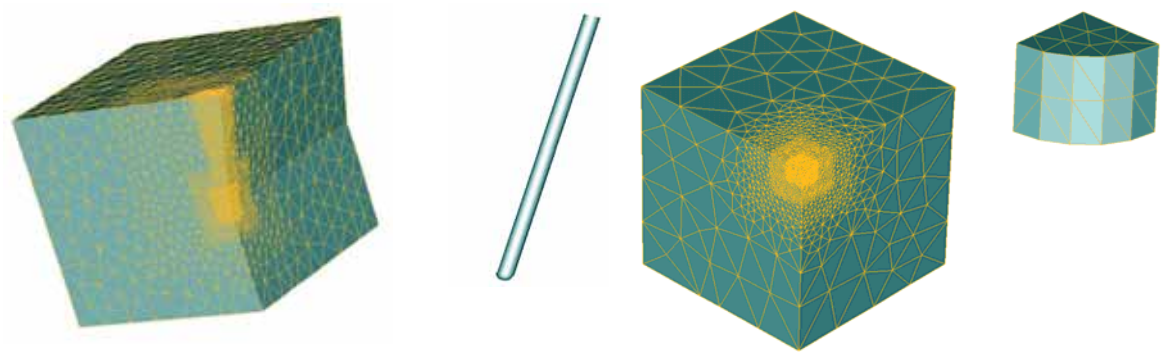


Figure 5.14 : Maillage dent sclérométrique (voir section 5.2, domaine 2), dent cylindrique. Maillage de l'essai d'enfoncement (cube de 60 cm de cotés, 3213 nœuds et 12454 tétraèdres), ¼ de l'outil.

Rhéologie : CJS Etat Critique

Nous avons regroupé dans le tableau ci-dessous les différents types de comportements mis en jeu lors des simulations. Le cas 1 correspond à un comportement avec un écrouissage positif qui prédit exclusivement des déformations plastiques contractantes, mais qui prend en compte le concept d'état critique. Le cas 2 est identique au cas 1 à la différence qu'il ne prédit pas de déformations plastiques volumiques.
Les deux derniers cas représentent un comportement parfaitement plastique et donc ne prennent pas en compte l'état critique. Le cas 3 prédit des déformations exclusivement dilatantes et le cas 4 des déformations volumiques nulles.

Paramètres	**Cas 1**	**Cas 2**	**Cas 3**	**Cas 4**
K_0^e	6.6610^3 kPa	6.6610^3 kPa	6.6610^3 kPa	6.6610^3 kPa
G_0	3.0710^3 kPa	3.0710^3 kPa	3.0710^3 kPa	3.0710^3 kPa
β	0,9	0	0,03	0
A	$0,11.10^{-3}$	$0,11.10^{-3}$	0	0
γ	0	0	0	0
R_c	*0,265*	*0,265*	*0,265*	*0,265*
Cohésion	*69,28 kPa*	*69,28 kPa*	*69,28 kPa*	*69,28 kPa*

Table 5.3 : Paramètres CJS2EC mis en œuvre lors des simulations.

Pour cette étude nous avons choisi de ne pas activer le frottement sol-dent . Les calculs ont été réalisés sur machine SUN E450 processeur UltraSparc-II 400 Mhz. La tolérance de l'algorithme de Newton est de $\varepsilon_{NR} = 10^{-5}$.

5.3.1.1 Scléromètre : dent à 15°

Nous décrivons dans la suite les résultats obtenus pour le scléromètre (dent à 15°) pour la rhéologie correspondant au cas 1 de la Table 5.3. Ce comportement prédit exclusivement des déformations plastiques contractantes avec un écrouissage positif et la prise en compte de l'état critique.

Contraintes et déformations

La Figure 5.15 décrit l'évolution de la zone de plastification lors de l'avancée de l'outil. Cette zone s'étend d'autant plus loin de l'outil que l'on approche de la surface libre. Plus l'outil avance et plus cette plastification s'étend. Cependant étant donné la cohésion élevée du matériau cette expansion reste limitée.

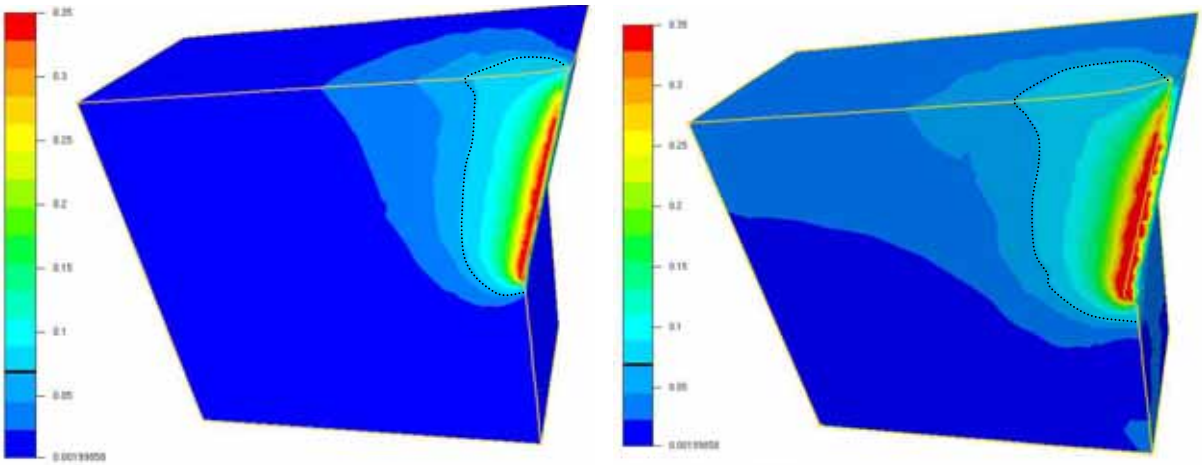


Figure 5.15 : Scléromètre : carte contraintes équivalente (seuil initial de plasticité à 69,68 kPa). (à gauche) avancée de 0,79 cm – (à droite) avancée de 2,19cm

L'action de l'outil densifie le matériau pratiquement sur toute la profondeur de scarification et engendre de fortes pressions autour de celui-ci (Figure 5.16 et Figure 5.17). C'est donc dans cette région que l'on rencontre l'état de contrainte le plus élevé.

Cette densification apparaît licite lorsque le matériau est confiné (pour une profondeur comprise entre –30cm et –10cm), elle devient irréaliste lorsque l'on atteint la surface libre. L'observation macroscopique de l'expérience montre l'apparition de plan de rupture pour des sols frottants ou de mottes pour des sols cohésifs. En tout état de cause c'est un comportement, dans l'approche milieux continus, dilatant qui prévaut près de la surface libre. Le modèle CJS Etat Critique rend compte de ce phénomène en prédisant un ramollissement du matériau couplé à sa dé-densification. Cependant nous avons vu au chapitre précédent les difficultés numériques rencontrées lors des phases d'adoucissement. Ces problèmes de convergence ont été rencontrés, pour un cas homogène, que ce soit au niveau local avec l'intégration des

équations de comportement, ou au niveau de l'algorithme de *Newton Raphson*. Ainsi nous n'avons pu mettre en œuvre ce comportement dans les simulations du procédé de scarification.

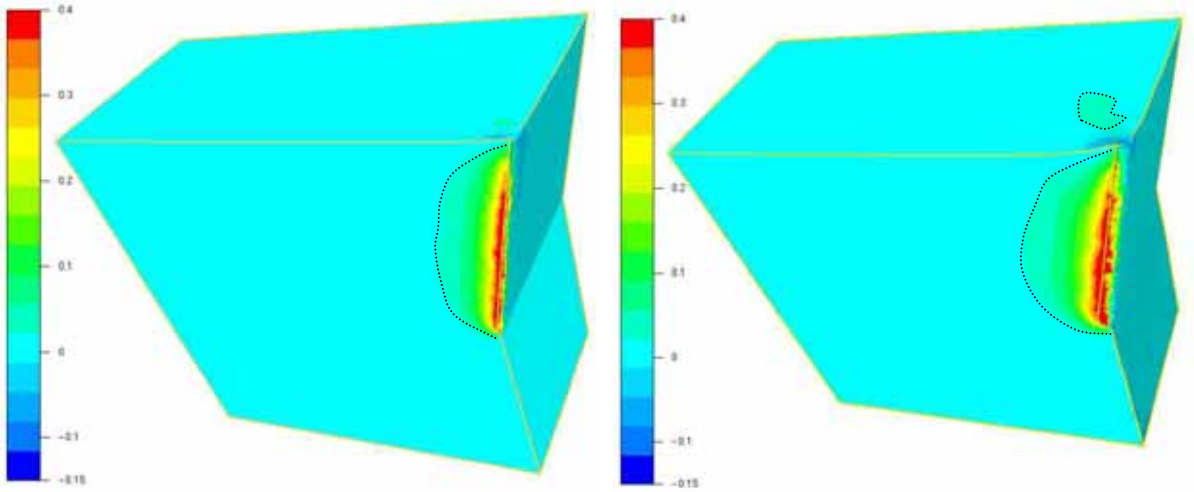


Figure 5.16 : Scléromètre (dent 15°) : carte de pression. (à gauche) avancée de 0,79 cm – (à droite) avancée de 2,19cm.

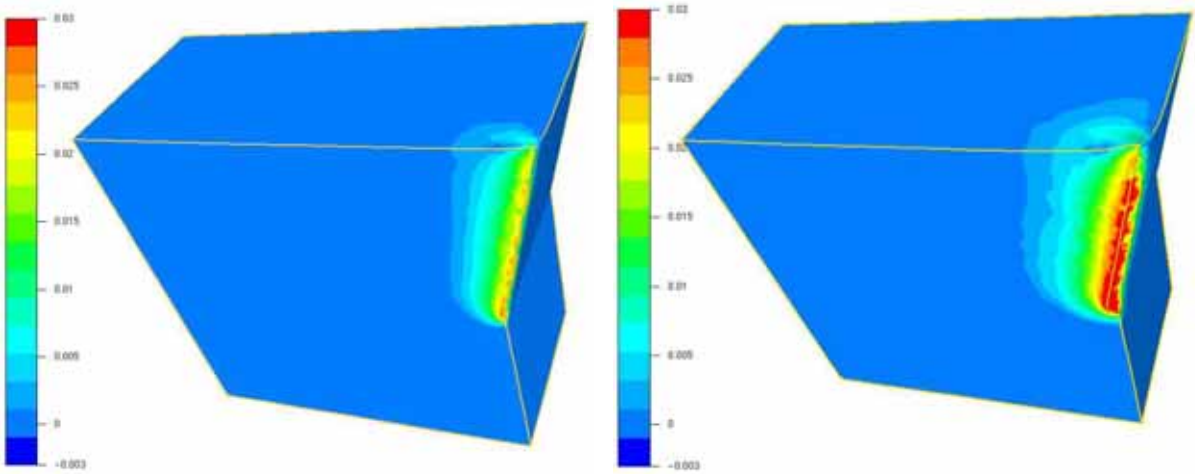


Figure 5.17 : Scléromètre (dent 15°) : carte de la déformation plastique volumique cumulée $\left(\int_0^t tr\left(\dot{\varepsilon}^{plas}\cdot\right)ds\right)$*. (à gauche) avancée de 0,79 cm – (à droite) avancée de 2,19 cm*

Etat Critique

L'observation de la variable *R* (qui détermine la sensibilité de la surface de charge à la contrainte moyenne) nous permet de situer l'état du matériau par rapport à l'état critique. On constate que, étant donné la sollicitation de coupe subie, le matériau atteint très rapidement l'état critique au voisinage de l'outil (zone rouge de la Figure 5.18). A ce stade les déformations se font à

volume constant, le maximum de déformations volumiques n'excède pas alors +5%.

On constate d'autre part une zone située sur la surface libre au devant de l'outil pour laquelle la variable *R* est nulle. Celle ci correspond aux zones de tractions mises en évidence par la Figure 5.16. Pour ces zones de tractions nous avons choisi d'annuler la sensibilité à la contrainte moyenne : on a $R = 0$. En traction le comportement est donc parfaitement plastique et incompressible (plastiquement) avec un seuil égal à la cohésion. Ceci permet d'éviter, lors de l'intégration des équations locales, la re-projection sur le sommet du cône de plasticité. On évite ainsi les problèmes numériques liés à un déviateur des contraintes nul. Cette approche induit une résistance mécanique du matériau en traction qui ne peut se justifier que par la présence de l'élément végétal et de son treillis racinaire. Sans l'élément végétal cette approche conduit à surestimer les efforts induits par le matériau.

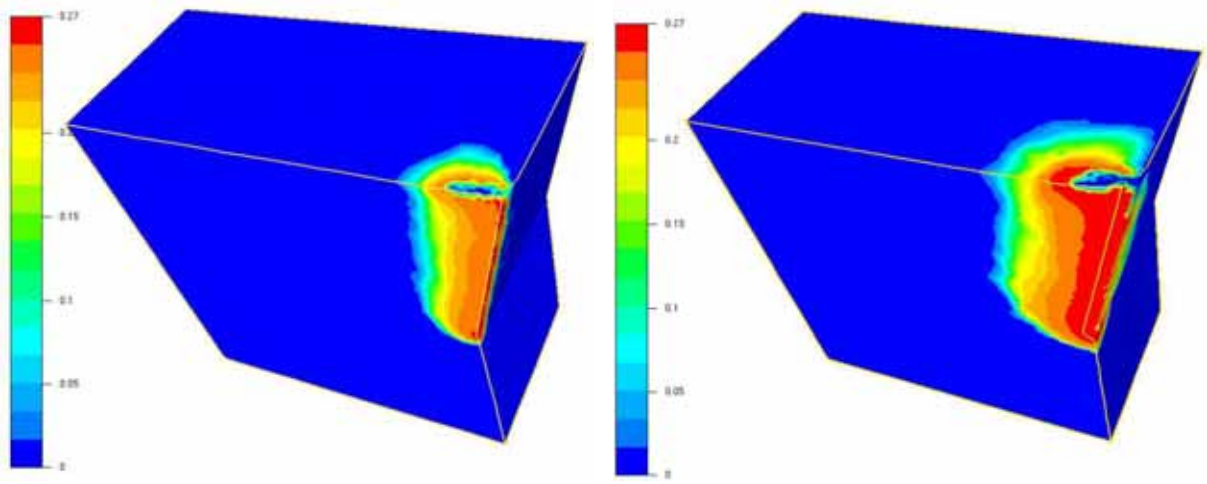


Figure 5.18 : Scléromètre : Evolution de la variable d'écrouissage R, la valeur maximum est de 0,265 (angle de frottement à l'état critique. (à gauche) avancée de 0,79 cm – (à droite) avancée de 2,19 cm

Champ de Vitesse

L'observation des composantes du champ de vitesse nous permet de saisir le mode d'écoulement de la matière. D'une manière générale les composantes horizontale et verticale indiquent que plus on se rapproche de la surface libre, plus le volume de matière sollicité est grand. La composante horizontale de la vitesse (négative étant donné le sens de scarification choisi) est maximale le long de l'outil puis diminue progressivement dans le massif. La composante verticale montre bien la remontée de matière due à l'inclinaison de la dent et atteint son maximum à la jonction entre la surface libre et la dent. La composante latérale montre que la matière est poussée de part et d'autre de la dent sur les cotés.

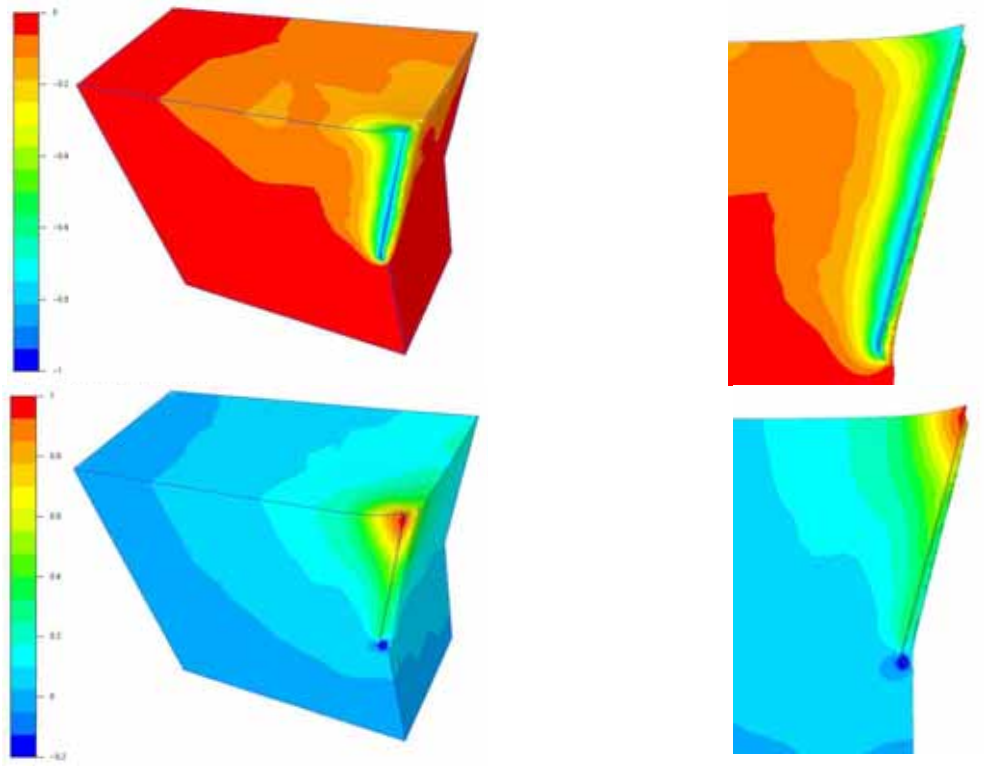


Figure 5.19 : Composantes du champ de vitesse- (en haut) composante horizontale – (en bas) composante verticale.

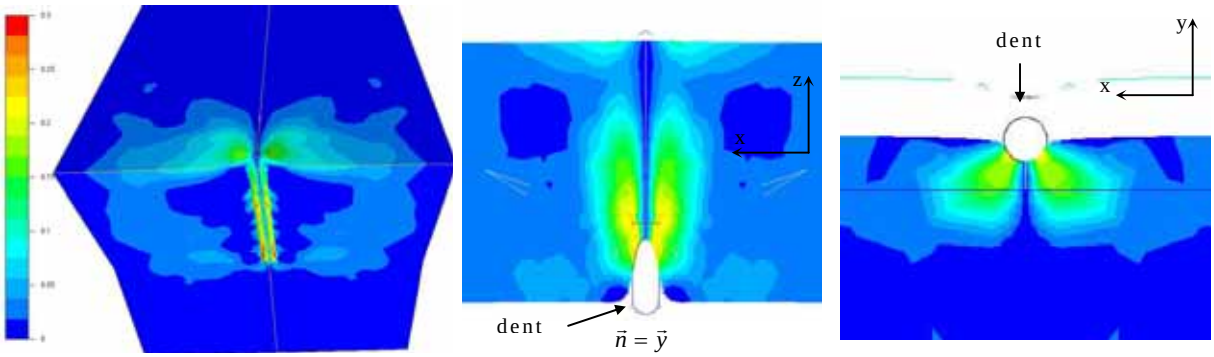


Figure 5.20 : Composante latérale : (à gauche) massif symétrisé – (au milieu) coupe orthogonale, normale = direction de scarification – (à gauche) coupe orthogonale, normale selon l'axe z.

Efforts

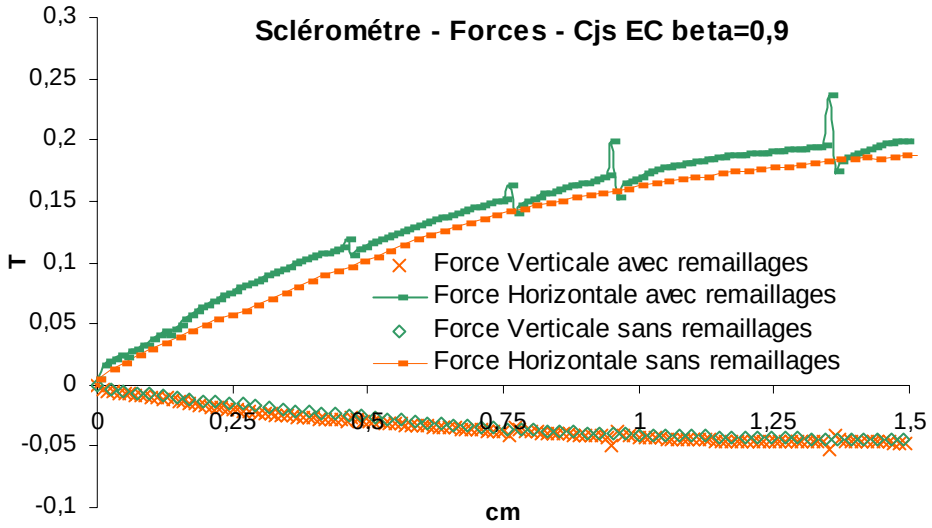


Figure 5.21 : Evolution des efforts pour le scléromètre. Influence du remaillage.

L'évolution des efforts montre que la force exercée sur l'outil est dirigée vers le bas (composante verticale négative) comme nous l'avons vu pour un matériau incompressible à la section précédente. On remarque que sur une avancée limitée de 1,5 cm le signal des efforts a tendance à se stabiliser. Bien que l'écoulement soit loin d'être stationnaire, l'état de contrainte du matériau au plus près de l'outil, qui a atteint l'état critique, est lui quasi stationnaire.

D'autre part le graphe de la Figure 5.21 nous permet de saisir l'influence des remaillages sur le signal d'efforts. On peut remarquer dans un premier temps, que sans remaillage nous avons pu simuler jusqu'à 1,5 cm d'avancée (ce qui correspond à la largeur de l'outil et à dix fois la plus petite taille de maille), la simulation s'arrêtant lorsque le maillage a dégénéré.

Rhéologie 1 : Influence du remaillage pour le scléromètre		
	Avec remaillage	**Sans remaillage**
Avancée	***1,68cm***	***1,68 cm***
Temps CPU total hors remaillage	***17h 20mn***	***3h 16mn***
Δt initial	$2,5.10^{-4}$	$2,5\ 10^{-4}$
Δt moyen	$2,46.10^{-4}$	$2,5\ .10^{-4}$
Maillage Initial	***3162 nœuds***	***3162 nœuds***
Maillage Final	***4817 nœuds***	***3162 nœuds***
Nbre itération Newton Raphson / Incréments	***25***	***12***
CPU BICGSTAB / incr	***743s***	***176s***

Table 5.4 : Influence du remaillage sur la convergence.

L'influence du remaillage se traduit par un "saut" du signal d'effort juste après remaillage. On constate que après ce saut discontinu, le signal repart d'une valeur inférieure à la valeur avant remaillage.

Ce saut se traduit par des difficultés de convergence de *Newton-Raphson* juste après le remaillage. En effet, nous avons vu au chapitre 3 que, après remaillage, il est nécessaire de transporter sur la nouvelle configuration discrétisée, outre les inconnues que sont la pression et la vitesse, l'état de contrainte (déviatoire) et les variables d'écrouissage (déformation plastique volumique cumulée...). Ces variables étant discontinues par éléments leur transport sur le nouveau domaine discrétisé conduit à une configuration du système hors équilibre. Typiquement, certains éléments auparavant à plasticité, ne le sont plus après remaillage.

D'autre part la reconstruction du domaine discrétisé modifie la zone de contact. Ainsi la pénétration des nœuds dans l'outil est modifiée et donc les forces nodales de répulsion liées à la pénalisation.

Après remaillage, on constate donc une augmentation du résidu initial de *Newton-Raphson* par rapport à un incrément sans remaillage (cette augmentation peut aller jusqu'à un facteur 100). Il est alors plus difficile à l'algorithme de converger pour la tolérance voulue, dans certains cas la convergence n'a pas lieu. La stratégie du code est alors de réinitialiser la méthode par un comportement purement élastique, ou de diminuer le pas de temps (≈ 30%). Un remède serait, systématiquement après remaillage, de chercher l'état d'équilibre pour un pas de temps infinitésimal.

Cependant l'obtention de l'état d'équilibre (avec ou sans modification du pas de temps) se fait pour un état de contrainte qui ne correspond pas à l'histoire du matériau avant remaillage. C'est le rapport E/q (Module de Young / deviateur des contraintes) qui détermine au bout de combien d'incréments (de déformation) on retrouve l'histoire "correcte" du matériau. Ainsi on constate sur le graphe de la Figure 5.21 que, entre deux remaillages on a une augmentation progressive pour rejoindre le niveau d'effort "réel".

5.3.1.2 Essai plaque

Dans la suite nous décrivons l'évolution des variables d'état ainsi que des efforts d'enfoncement pour l'essai plaque. La rhéologie est la même que précédemment : cas 1 de la Table 5.3, comportement prédisant exclusivement des déformations plastiques contractantes avec un écrouissage positif et la prise en compte de l'état critique.

Contraintes et déformations

Les simulations d'enfoncement montrent bien l'apparition d'une zone morte sous l'outil plaque. Les zones de fortes contraintes décrivent une surface conique qui s'étend à partir du bord de la plaque en profondeur et englobent la zone morte. Comme pour le scléromètre les fortes contraintes correspondent aux fortes pressions. L'observation des composantes σ_{zz} et σ_{yz} du tenseur des contraintes montre que ce cône de matière est mis en compression, donc se densifie (Figure 5.23). Cette région densifiée cisaille le matériau au fur et à mesure que l'outil s'enfonce, composante σ_{yz} Figure 5.22.

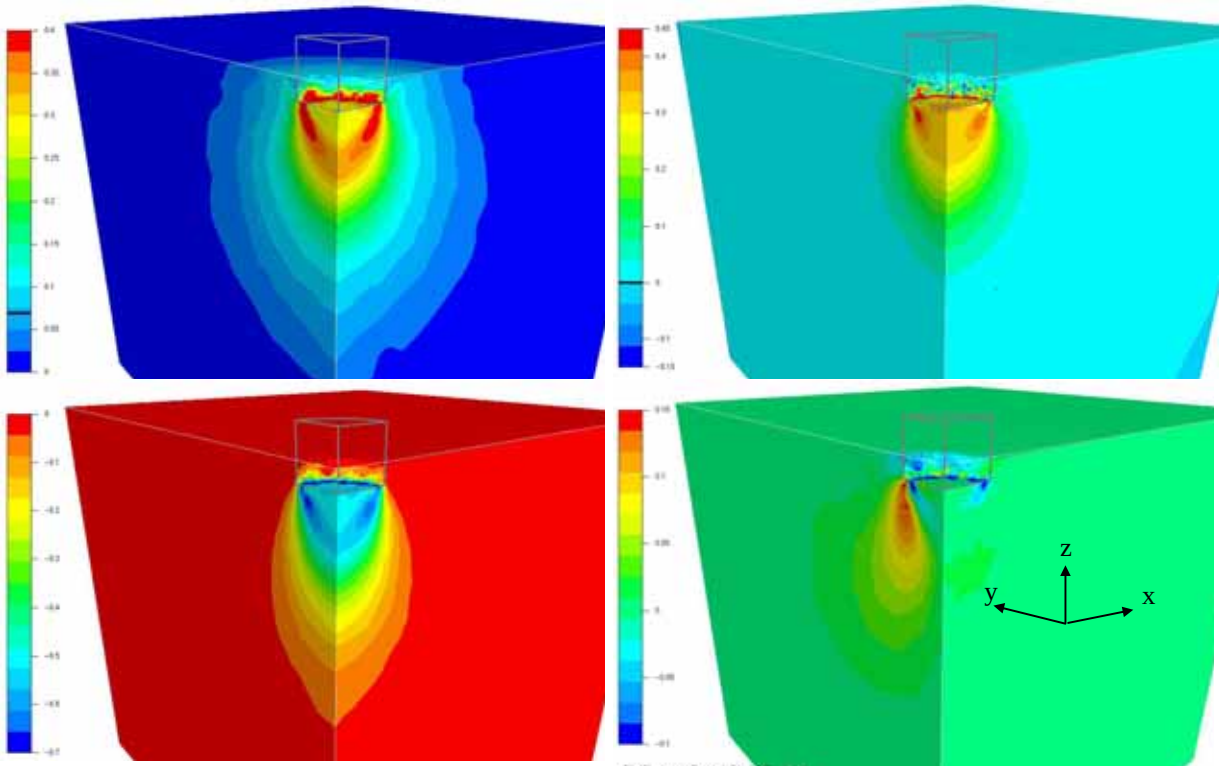


Figure 5.22 : essai plaque enfoncement de 1,7cm : carte de contrainte équivalente (seuil initial de plasticité à 69,68 kPa). (en haut à gauche) champ de pression. (en bas à droite) composante σ_{zz} (en bas à gauche) composante σ_{yz}.

L'observation des déformations plastiques volumiques confirme la présence d'une zone peu dense sous la plaque(<1%). Les zones de fortes densification se situent au bord de l'outil qui vient cisailler fortement la matière, cependant, de par la prise en compte par le modèle de l'état critique cette densification n'excède pas 6%.

Etat Critique

On constate que la matière située dans les zones de fortes contraintes décrites plus haut a atteint l'état critique ou un état proche de l'état critique. Comme pour la dent ceci a lieu pour un enfoncement modeste de 1,7 cm de l'outil dans le massif.

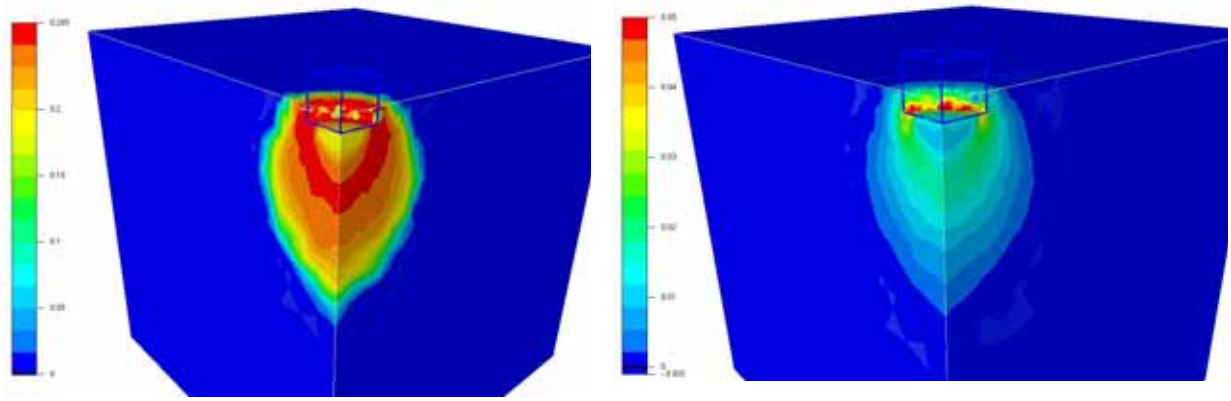


Figure 5.23 : essai plaque enfoncement de 1,7cm : (à gauche) : Evolution de la variable d'écrouissage R. (à droite) déformations plastiques volumiquse cumulées.

Efforts

L'évolution des efforts montrent que sur 1,5 cm d'enfoncement le signal tend à se stabiliser. Ceci montre que même si la zone de plastification s'étend dans le massif à mesure que la plaque s'enfonce, l'état de contrainte au plus près de l'outil, atteint un état proche de l'état stationnaire, pour un enfoncement relativement faible.

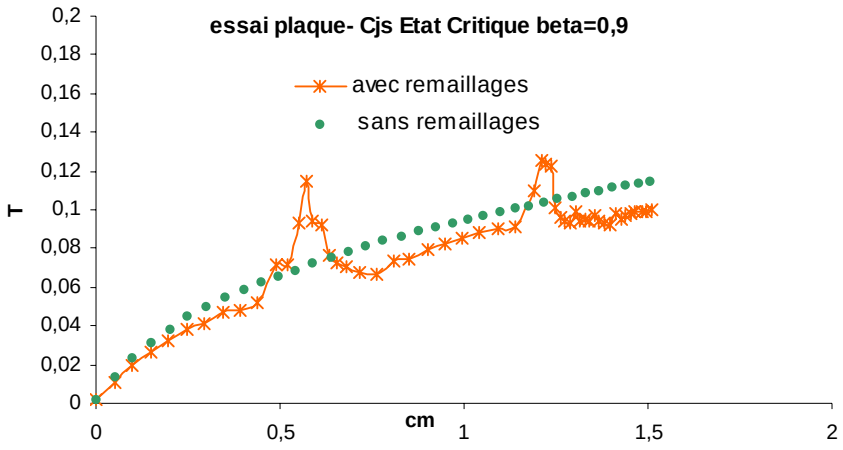


Figure 5.24 : Evolution de la résistance à l'avancement pour la rhéologie 1 (écrouissage positif et déformations contractantes, effort pour ¼ d'outil). Influence du remaillage sur le signal.

L'allure de la courbe d'efforts avec remaillage montre des perturbations d'un type différent de celui pour la dent. Après remaillage l'effort augmente au cours des incréments de calculs suivants pour atteindre un "pic" puis diminue pour reprendre des valeurs cohérentes.

Ceci est dû d'une part à une géométrie de l'outil avec des angles aigus (90°), et d'autre part à l'emploi d'un pas de temps initial plus grand. Pour ce type de géométrie, la pénétration d'un outil après remaillage peut être plus importante que dans le cas d'un outil lisse comme la dent cylindrique. Ainsi on exerce brutalement sur un nœud du système une force de répulsion proportionnelle à sa pénétration. Ceci conduit à un système mal conditionné et d'ailleurs on observe que les incréments suivant le remaillage ne convergent pas même après réinitialisation. De plus la convergence des incréments après remaillage est d'autant plus difficile à obtenir que le pas de temps est grand.

A ce titre on constate que l'espacement entre les différents points de la courbe tend à ce réduire au delà de 1,25 cm d'avancée. Ceci traduit le fait que pour assurer la convergence de l'algorithme de *Newton* on a diminué le pas de temps.

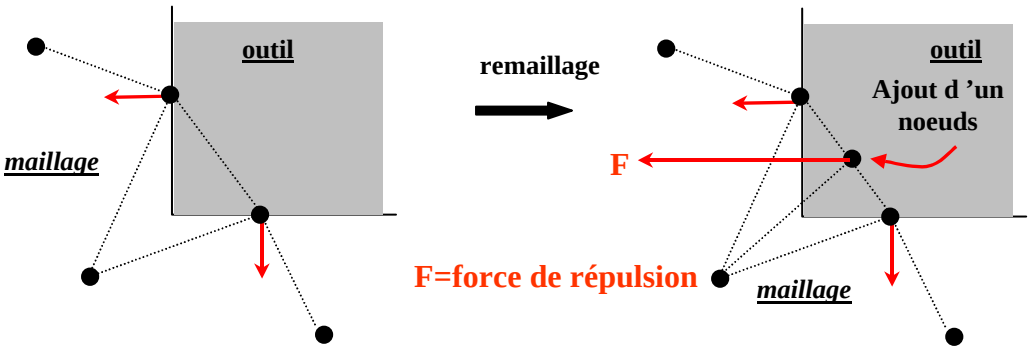


Figure 5.25 : schéma d'interprétation de la pénétration des nœuds après remaillage.

5.3.1.3 Temps de Calculs

La Table 5.5 résume les temps de calcul nécessaires pour réaliser une avancée de 1,68 cm pour la dent et un enfoncement de 1,5 cm pour la plaque. Il apparaît clairement que les temps de calculs sont beaucoup plus longs dans le cas compressible que dans le cas incompressible. Avec le critère de *Von Mises* (voir section 5.2) pour un temps de calcul équivalent on obtient une avancée d'outil dix fois plus importante.

	Scléromètre :Cas 1 (écrouissage positif+ déformations contractantes)	**Plaque :Cas 1** (écrouissage positif+ déformations contractantes)
Temps CPU total	***18h 42mn***	***14h 26mn 33s***
Avancée	***1,68 cm***	***1,5 cm***
CPU moyen / Incréments	***1020s***	***787s***
Δt initial	$2{,}5.10^{-4}$	5.10^{-4}
Δt moyen	$2{,}46.10^{-4}$	$2{,}28.10^{-4}$
Nbre itération Newton Raphson / Incréments	***25***	***19***
CPU BICGSTAB / incr	***743s***	***409s***
Maillage Initial	***3162 nœuds***	***3213 nœuds***
	11272 tétraèdres	***12454 tétraèdres***
Maillage Final	***4817 nœuds***	***3683 nœuds***
	17853 tétraèdres	***14570 tétraèdres***
Nombre de remaillages	***9***	***14***

Table 5.5 : Comparaison temps de calculs et tenue des algorithmes pour la rhéologie 1 pour les deux types de sollicitations : scarification et enfoncement.

Nous avons mis en évidence au Chapitre 4 l'augmentation du temps de calcul due à une résolution des systèmes linéaires. Nous avons vu aussi l'influence du remaillage dans le cas compressible, sur la convergence de l'algorithme de *Newton* global (Table 5.4). Néanmoins nous n'avons pas observé une telle influence pour un comportement incompressible pour un type d'outil équivalent. Cependant nous avons observé, dans le cas incompressible, pour une dent à 75° mais avec une face latérale quatre fois plus longue (donc une surface de contact plus grande), un signal d'effort très bruité.

Cette différence, en termes d'influence du remaillage, semble liée à la prise en compte de la pression moyenne par la rhéologie compressible. Que le comportement détermine ou non des déformations plastiques volumiques (ceci dépend du choix du potentiel plastique) la sensibilité reste présente au niveau de la surface de charge et donc du module tangent de la loi de comportement.

Nous constatons que le champ de pression à l'interface outil / matière est très bruité, et cela, pour une rhéologie compressible ou incompressible. Or pour ce dernier comportement la pression (linéaire par la discrétisation $P1^+/P1$) est une variable transparente qui, dans ce cas, n'intervient pas de façon prépondérante dans les directions de descentes de l'algorithme de Newton. Il en va tout autrement en compressible. L'état de contrainte étant constant par éléments, de grandes variations de pressions (qui peuvent aller de la traction à la compression pour un même élément) induisent des sauts de contraintes discontinus importants.

L'origine d'un champ de pression bruité à l'interface est, en partie, liée à l'aspect pénalisé du contact. L'écoulement de matière à l'interface de contact pour une géométrie très élancée du type de la dent ($h = \frac{\text{hauteur}}{\text{largeur}} = 10$) induit une évolution permanente des forces de répulsions de contact. De nouveaux nœuds viennent en contact et d'autres nœuds quittent la zone de contact : *contact unilatéral*.
D'autre part, le comportement compressible va durcir le matériau dans les zones de "hautes pressions", qui, comparativement, dans les zones de "hautes pressions", sera plus mous. Ainsi la déformation s'y concentre ce qui par effet boule de neige alimente l'aspect bruité du champ de pression.

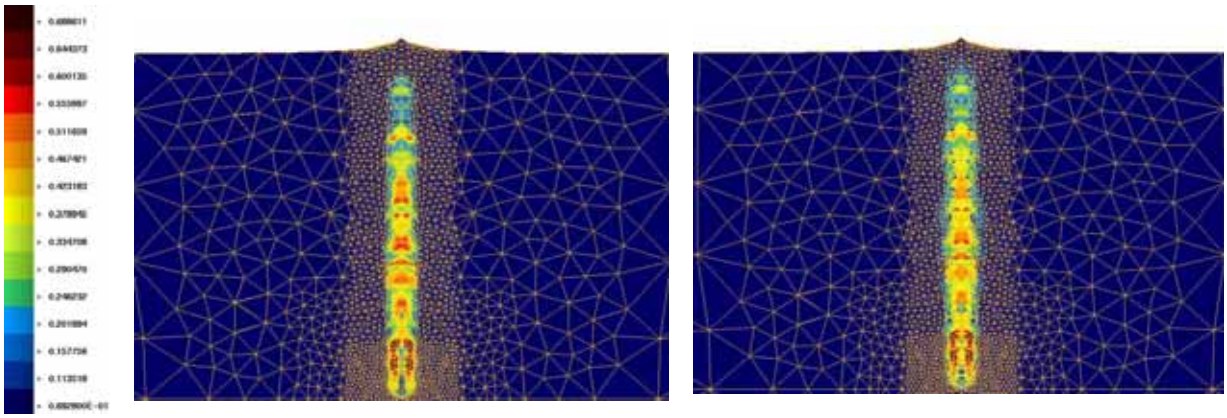


Figure 5.26 : Champ de pression P1 et champ de contrainte équivalente (P0). Rhéologie 1.

Pour circonvenir ces problèmes de convergence nous avons donc été amenés à réduire le pas de temps d'un facteur 5/2 (Table 5.6). Si nous constatons une amélioration du nombre d'itération moyen de Newton par incrément, celui ci se dégrade au fur et à mesure que l'outil avance. Néanmoins nous avons pu pousser les simulations plus loin.

Scléromètre Rhéologie Cas 1 : Influence du pas de temps			
Avancée	***1,68 cm***	***1,68 cm***	***2,4 cm***
Temps CPU total	***18h 42mn***	***12h 26mn 33s***	***26h 40mn***
CPU moyen / Incréments	***1020s***	***275s***	***405s***
Δt initial	$2{,}5.10^{-4}$	1.10^{-4}	1.10^{-4}
Δt moyen	$2{,}46.10^{-4}$	1.10^{-4}	$9.95\ 10^{-5}$
Nbre itération Newton Raphson / Incréments	***25***	***10***	***12***
CPU BICGSTAB / incr	***743s***	***210s***	***300s***

Table 5.6: Influence du pas de temps pour la rhéologie 1 avec le scléromètre.

5.3.1.4 Influence de Paramètres

Dans la suite nous nous proposons de mettre en évidence les paramètres du modèle CJS EC qui ont une influence prépondérante pour la scarification des sols et plus largement pour de grandes déformations.

La Figure 5.27 permet de comparer dans le plan de symétrie la répartition de la pression et de la contrainte équivalente pour deux jeux de paramètres. Un premier jeu correspondant à un comportement parfaitement plastique avec des déformations plastiques volumiques nulles (paramètre $\beta = 0$) cas numéro 4 de la Table 5.3. Le second jeu correspond à un comportement avec écrouissage positif, prise en compte de l'état critique et des déformations plastiques volumiques contractantes, cas numéro 1 de la Table 5.3.

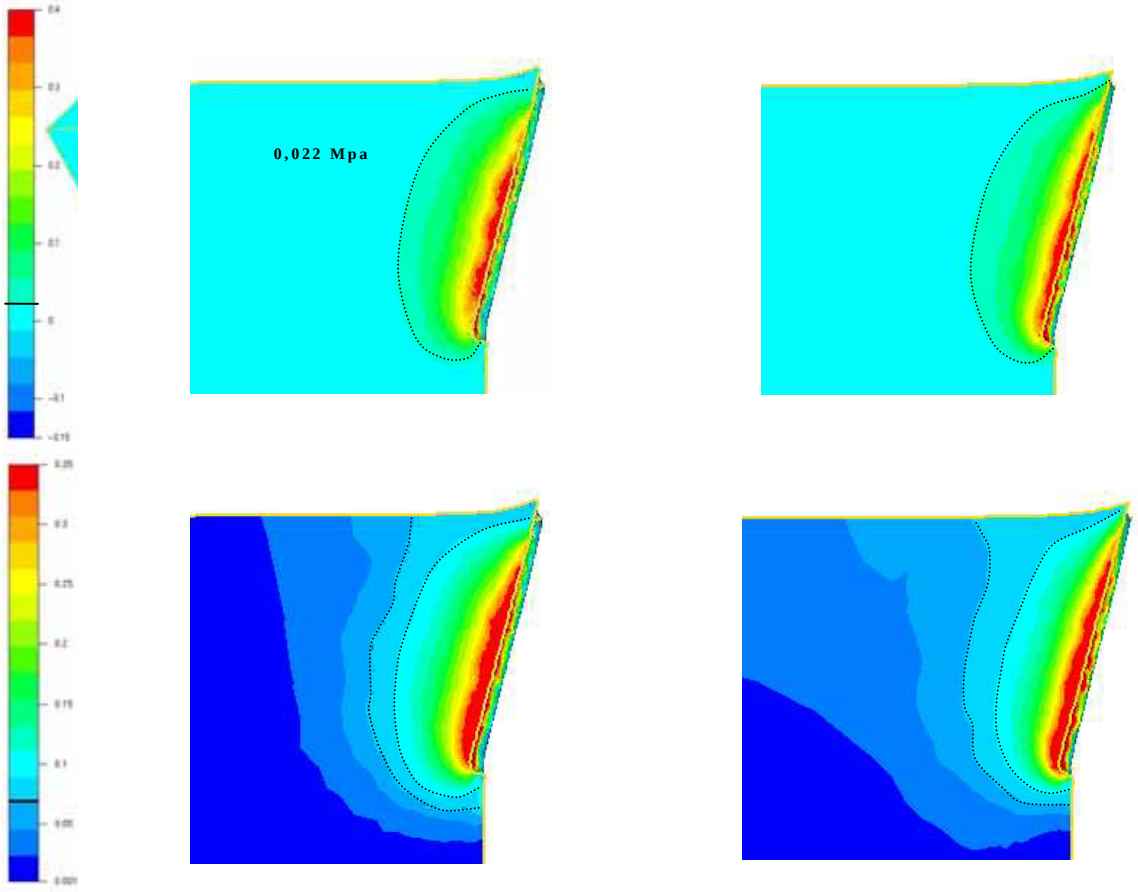


Figure 5.27 : Comparaison des répartitions de contrainte équivalente (en haut) et de pression(en bas) pour les rhéologies 4 (à gauche : plasticité parfaite et déformations volumiques nulles) et 1 (à droite : écrouissage et densification). Avancée de 2,19 cm.

D'une manière générale on ne constate pas une différence significative entre les deux jeux de paramètres pour la répartition des contraintes et de la pression. On peut néanmoins mettre en évidence deux nuances.

Pour le modèle parfaitement plastique la sensibilité de la surface de rupture à la pression moyenne est linéaire par l'intermédiaire du paramètre fixe : $Rc = 0{,}265$. Le champ de contrainte équivalente, à la plasticité, apparaît donc comme une transformation affine du champ de pression (en compression). Dans le cas avec écrouissage la variable R évolue en fonction de la pression, on a $R < R_c$ et $R \rightarrow R_c$ quand $p \rightarrow +\infty$. Les différents niveaux de contraintes sont alors plus resserrés. D'autre part la zone de plastification s'étend plus loin au devant de l'outil puisque pour de faibles pressions on a $R \approx 0$ et donc le domaine de plasticité est plus restreint que dans le cas parfaitement plastique ($R = 0{,}265 \ \forall p$).

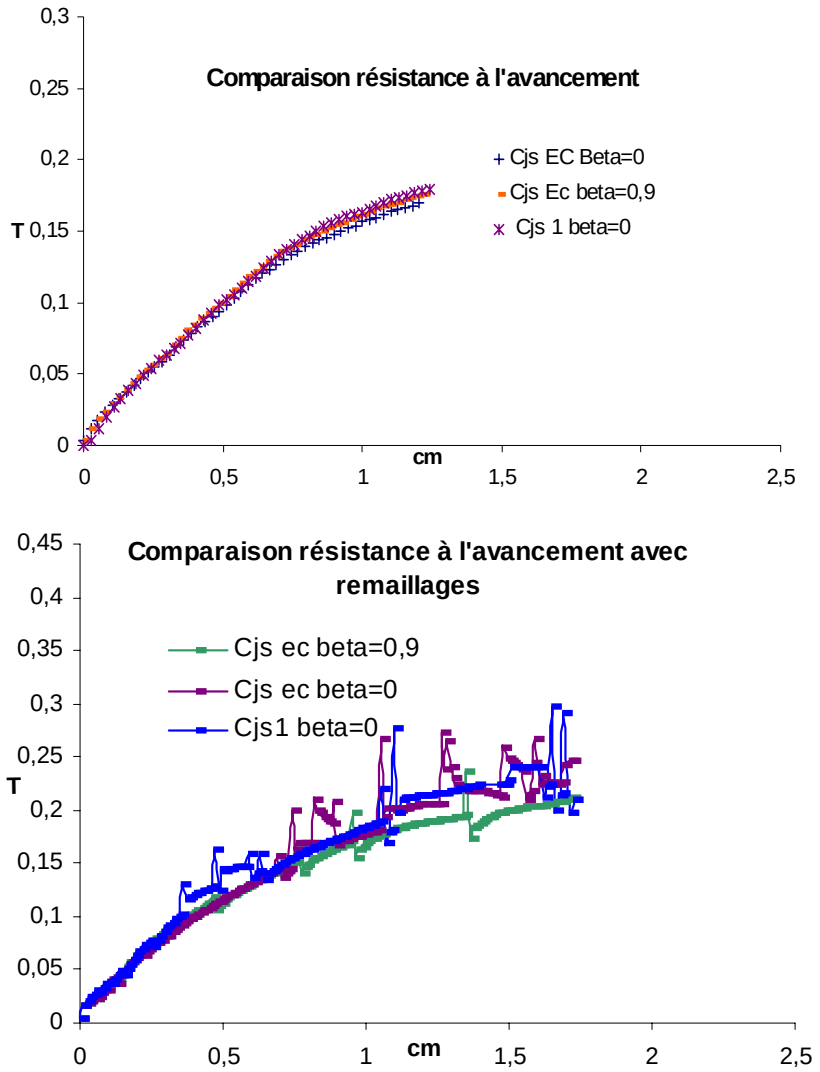


Figure 5.28 : Evolution des efforts pour le scléromètre : (en haut) rhéologie 1, 2 et 4 sans remaillage – (en bas) rhéologie 1, 2 et 4 avec remaillage.

La Figure 5.28 permet de comparer l'évolution de la résistance à l'avancement pour les rhéologies 1, 2 et 4 de la Table 5.3. Dans le cas sans remaillage on observe que les courbes sont quasiment confondues jusqu'à une avancée de 1,25 cm. Les courbes avec remaillages mettent en évidence une stabilisation du signal mais les perturbations dues aux remaillages ne

permettent pas d'établir une hiérarchie claire entre les rhéologies. Cependant on peut conclure que les différents jeux de paramètres conduisent aux mêmes efforts.
Il apparaît que, étant donné la nature de la sollicitation induite, par la scarification seules les données liées à l'état critique ont une importance forte quant à la prédiction des efforts. De ces données, l'angle de frottement à l'état critique est la plus importante. La compressibilité joue un rôle secondaire puisqu'elle ne modifie pas de façon significative le champ de pression et donc les efforts. Elle peut jouer un rôle par contre sur le mode d'écoulement.

Néanmoins nous avons comparé jusqu'ici des comportements contractants ou non. Nous avons donc choisi d'examiner l'influence d'un comportement purement dilatant pour l'essai d'enfoncement. Cette rhéologie correspond au cas 3 de la Table 5.3.

La Figure 5.29 permet de comparer les champs de pression et les déformations plastiques cumulées pour les cas 3 (dilatant) et 4 (contractant et état critique) de la Table 5.3.

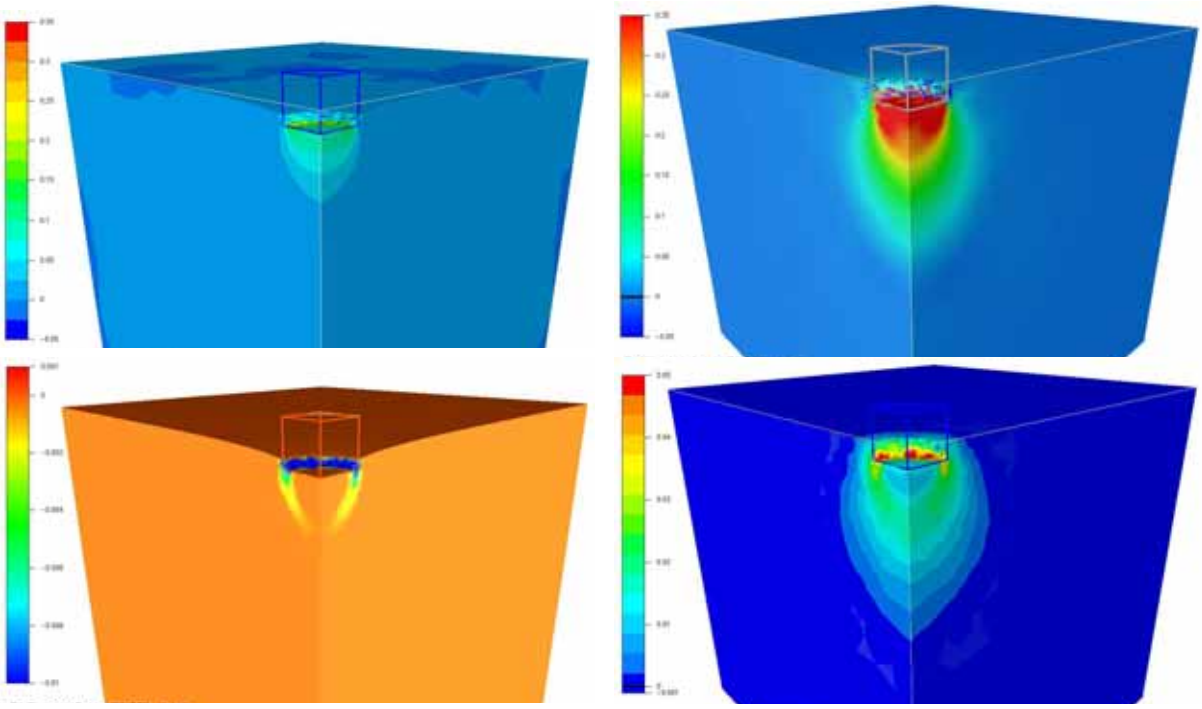


Figure 5.29 : Comparaison de la pression (en haut) et des déformations plastiques volumiques (en bas) pour les rhéologies 3 et 1. Enfoncement de 1,7cm.

On vérifie bien que les valeurs du champ de pression sont très inférieures dans le cas dilatant à celles du cas contractant. En se dilatant le matériau se dé-densifie ce qui diminue ses propriétés mécaniques. D'autre part le champ de pression reste confiné au plus près de l'outil. Ainsi la dilatation du matériau à lieu essentiellement au bord du disque de la plaque, là ou la sollicitation mécanique est la plus forte. On constate alors que pour un

enfoncement de 2,8 cm le modèle prédit jusqu'à 28% de déformations plastiques dilatante, alors que le modèle contractant avec état critique prédit autour de 6% de densification. (Les 28% de déformations plastiques dilatantes n'apparaissent pas sur la Figure 5.29, étant donné l'effet d'échelle).
Le modèle parfaitement plastique, ne prenant pas en compte l'état critique, prédit continuellement des déformations volumiques. Ceci peut conduire à une sur-évaluation de la dilatance dans le cadre de grandes sollicitations, et donc à une sous-évaluation des efforts (Figure 5.30).

D'autre part, comme pour la dent, lorsque l'on prend en compte l'état critique, on constate que l'activation ou non de la prédiction de déformations volumiques n'induit pas de différences notables sur les efforts.

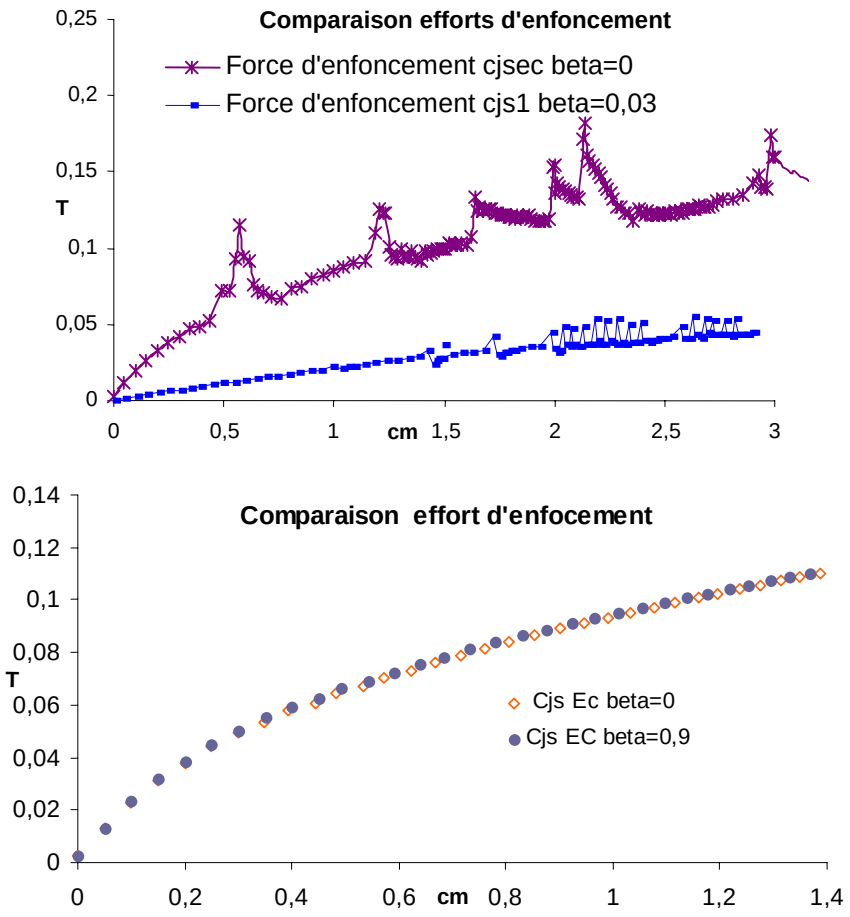


Figure 5.30 : Comparaison effort d'enfoncement : (en haut) rhéologie 2 (écrouissage + def. vol. plas. nulles) et 3 (parfaitement plastique+ def. vol. plas. positives) - (en bas) rhéologie 1 et 2 (écrouissage).

Il apparaît donc que la compressibilité du matériau, couplée à la prise en compte de l'état critique, n'est pas un paramètre clé quant à la prédiction d'efforts lors de sollicitations en grandes déformations.

5.3.1.5 Conclusion : Scarification sols frottants

Dans cette section nous avons étudié les simulations de scarification pour le scléromètre (dent à 15°) et d'enfoncement de plaque, avec le modèle CJS Etat Critique.

Il apparaît que, étant donné les grandes sollicitations mises en jeu, soit par l'action de la dent soit par l'enfoncement de la plaque, seules les données à l'état critique ont une influence sur les résultats (efforts).

L'influence de l'écrouissage ou de la compressibilité (paramètre β) est nulle sur les courbes d'efforts. C'est bien la valeur de l'angle de frottement à l'état critique qui détermine la résistance à l'avancement.

Néanmoins, en raison des faibles avancées de dent, ou d'enfoncement de plaque, simulées, nous n'avons pu mettre en évidence l'influence des paramètres du modèles sur le mode d'écoulement de matière. La raison tient dans les difficultés de convergence dans les algorithmes de résolution.
Ainsi nous avons mis en évidence l'effet néfaste du remaillage sur la convergence du *Newton Global*. D'autre part l'aspect bruité du champ de pression à l'interface outil/matière s'avère très pénalisant pour un matériau sensible à la pression hydrostatique.

5.3.2 Sols Cohérents :CJS-Tresca

Choix de l'outillage

Comme précédemment nous avons conduit notre étude sur l'action d'une dent à 15° : dent du Scléromètre. Les données géométriques et de profondeur de scarification sont celles décrites au début de la section 5.2. La vitesse d'avancée est de 1 m/s (cependant les effets d'inertie ne sont pas activés). Dans ce cas la dent n'est pas cylindrique.

Paramètres modèle

Nous avons conduit des simulations mettant en jeu le modèle incompressible CJS-Tresca pour le comportement avec écrouissage et celui avec adoucissement, décrit au chapitre 4. Pour des raisons de régularisation numérique nous avons modifié la définition de *R* de la manière suivante :

$$R = R_m + \frac{AR_{max}\bar{\varepsilon}}{A\bar{\varepsilon} + R_{max}}$$

$$R_{\max} = R_c + \frac{R_m - R_c}{(1+b\bar{\varepsilon})^2} \;\; ; \;\; \bar{\varepsilon} = \int_0^t \sqrt{\tfrac{2}{3}\dot{e}^{pl} : \dot{e}^{pl}}$$

La nature de la variable R est complètement différente de celle présentée au paragraphe précédent. Dans le cas présent *R* correspond à la cohésion du matériau et donc est homogène à une contrainte, dans le cas compressible *R* est un angle. Néanmoins toutes deux permettent de situer l'état du matériau par rapport à l'état critique.

	A (Mpa)	*b*	*Rm (kPa)*	*Rc (kPa)*	*E(MPa)*	*ν*
Adoucissement	27,5	120	75	15	8	0,3
Ecrouissage	5	120	30	15	8	0,3

Table 5.7 :Paramètres CJS-TRESCA

Scléromètre

Les simulations ont été conduites sur une machine SUN E4000/5000 (processeurs Sun UltraSPARC-II, 248 Mhz). Dans les deux cas de rhéologie, 40 heures de calculs ont été nécessaires pour réaliser 15cm d'avancée de dent. On constate que pour assurer la convergence de l'intégration des équations locales de comportement nous avons été amenés à diminuer le pas de temps $\Delta t := 8.10^{-4}$ au lieu de $\Delta t = 1{,}05.10^{-3}$. Le nombre d'itérations moyen du Newton Global par incréments est de 12. Nous avons constaté en particulier des difficultés de convergence (≈ 20 itérations) après remaillage.

Les Figure 5.31 et Figure 5.33 décrivent respectivement la répartition dans le massif déformé des valeurs de *R* (contrainte d'écoulement), pour le comportement écrouissable et adoucissant.
Dans le premier cas la cohésion initiale est de 30 kPa et la cohésion critique atteinte est de 45 kPa. Les zones de contraintes les plus élevées (en rouge sur les Figure 5.32) correspondent au zones les plus déformées (c'est à dire prés de la dent). Cela correspond bien à un comportement avec écrouissage positif.

Dans le cas avec adoucissement la cohésion initiale est de 75 kPa et la cohésion critique atteinte est de 90 kPa, après un "pic" à 105 kPa. Pour ce comportement les conclusions sont inverses. Le pic de contrainte (105 kPa, Figure 5.33) se situe pour des zones de faibles déformations (< 5%), par la suite le ramollissement du matériau se traduit par une diminution du niveau de contrainte au fur et à mesure que l'on se rapproche de la dent et donc des zones les plus déformées (Figure 5.33).

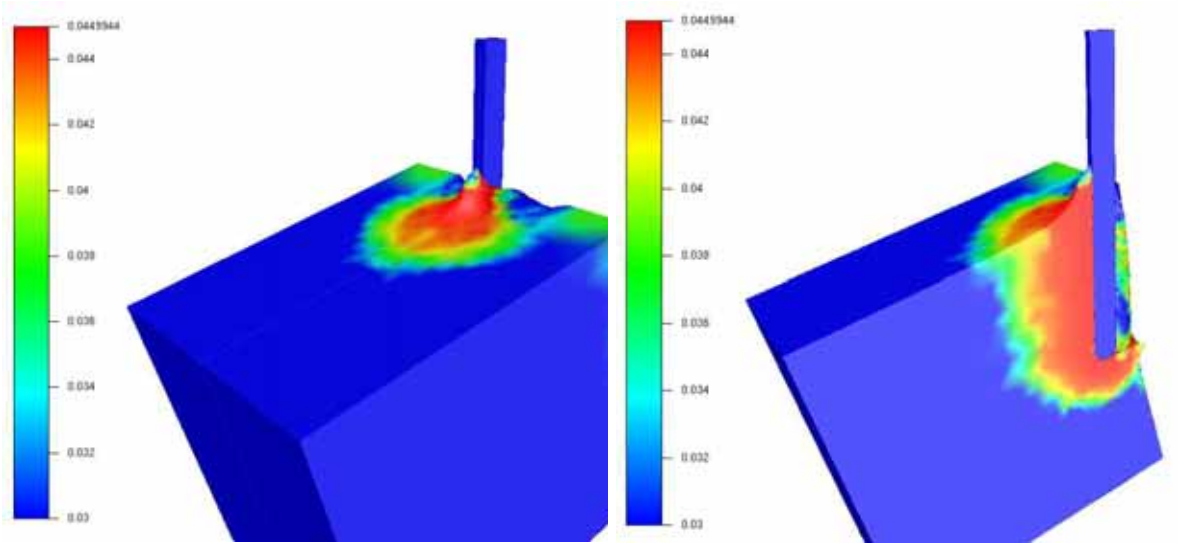


Figure 5.31 : CJS-Tresca, écrouissage positif : Contrainte équivalente, avancée 10 cm.(à gauche massif symétrisé, à droite demi-massif).

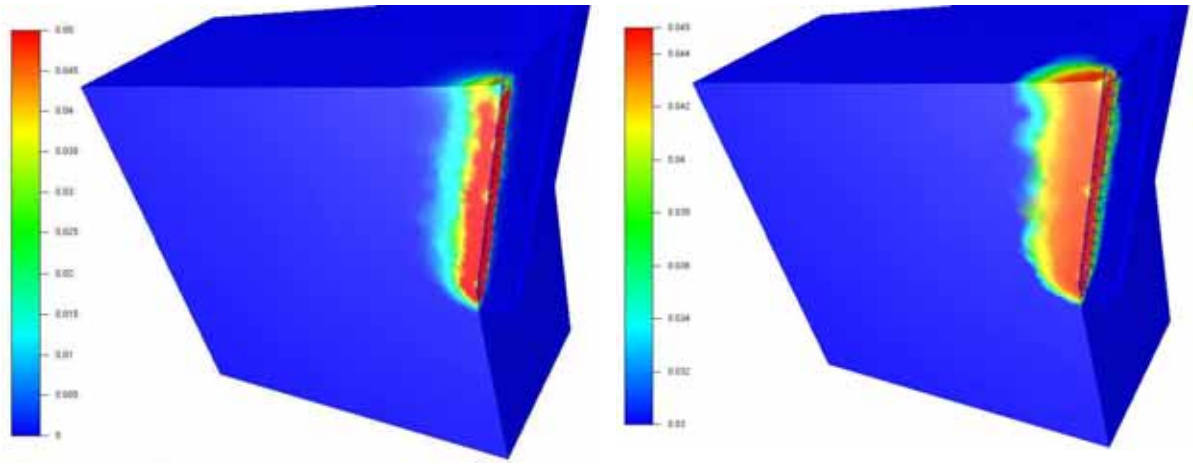


Figure 5.32 : CJS-Tresca, écrouissage positif, avancée 2cm: (à gauche) Déformation plastique cumulée. (à droite) Contrainte équivalente.

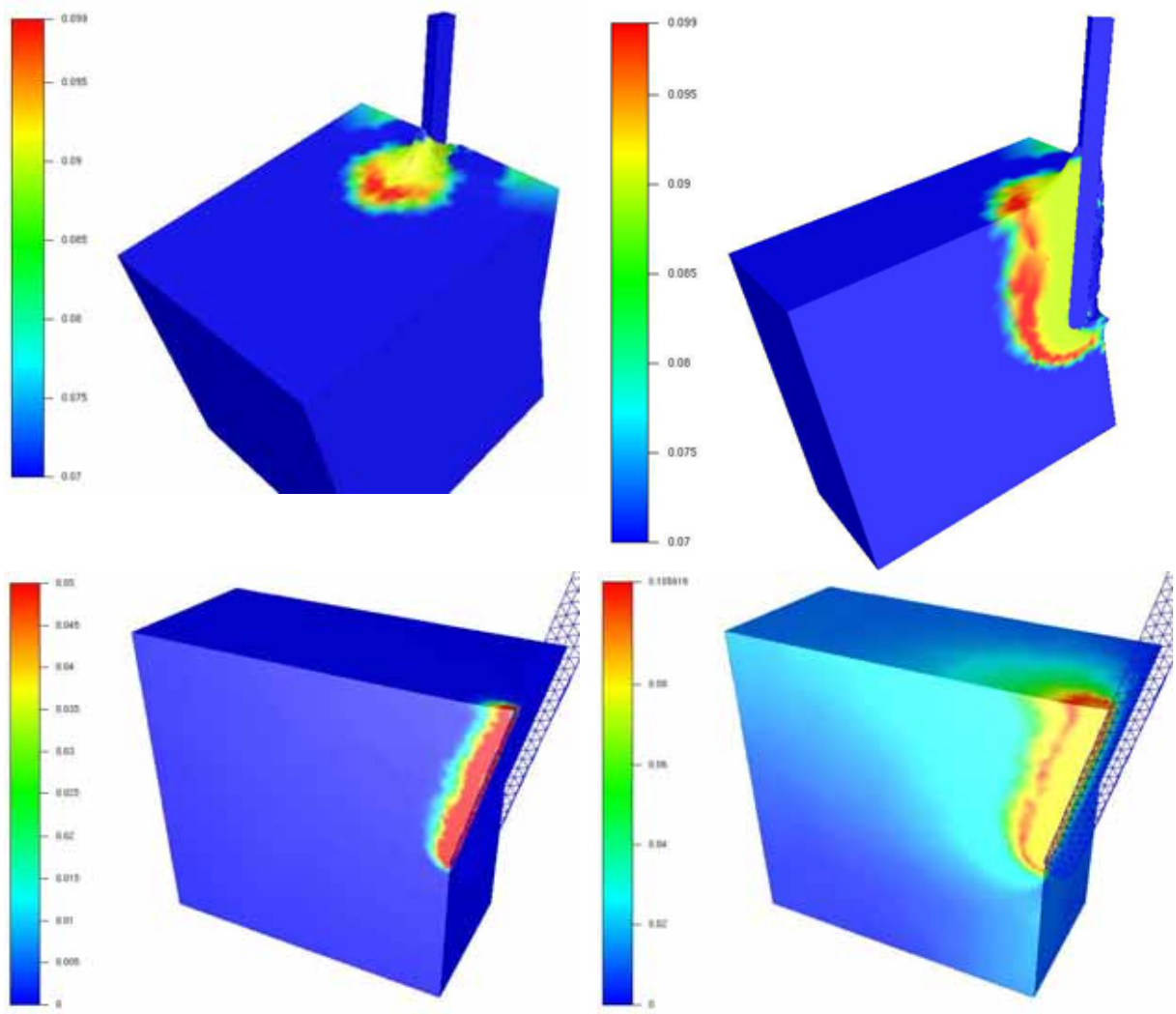


Figure 5.33 : *CJS-Tresca, adoucissement : (en haut) Contrainte équivalente, avancée 10 cm. (en bas à gauche) Déformation plastique cumulée avancée 2 cm. (en bas à droite) Contrainte équivalente avancée 2cm.*

La Figure 5.34 décrit l'évolution des efforts sur la dent pour les deux types de rhéologies (écrouissage, adoucissement). On remarque que dans les deux cas on atteint très rapidement, pour deux centimètres d'avancée de dent, des efforts stationnaires. En effet la cohésion critique est atteinte pour de faibles déformations (≈ 5%). Ce niveau de déformation est rapidement atteint et dépassé par l'action de coupe de la dent. On constate d'autre part que l'influence du "pic" dans le cas adoucissant n'apparaît pas dans l'évolution des efforts. De plus la force dépend linéairement de la cohésion du matériau. Enfin la force est supérieure dans le cas adoucissant car la cohésion initiale est de 75kpa (30 kpa dans le cas écroui).

Comme pour le modèle compressible nous pouvons conclure que c'est la donnée à l'état critique qui est prépondérante pour la prédiction des efforts de coupe.

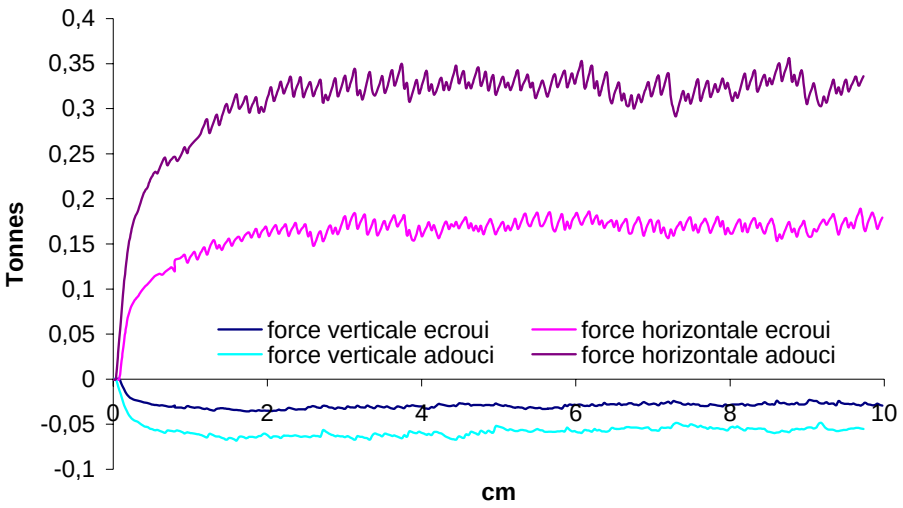


Figure 5.34 : CJS-Tresca :Evolution des efforts sur la dent pour une rhéologie avec écrouissage positif ou adoucissement.

Le graphe ci-dessous analyse, d'un point de vu qualitatif, les répercussions d'un comportement frottant sur les efforts. Dans ce graphe sont tracés les efforts pour le modèle incompressible et compressible avec une cohésion de 69,28 kPa et *Rc=0,265*. On peut estimer que pour cette cohésion seule, un comportement incompressible conduira à une résistance à l'avancement intermédiaire à celle obtenue pour les deux jeux de paramètres de CJS-Tresca. Cet apport peut alors être estimé à 30% d'augmentation.

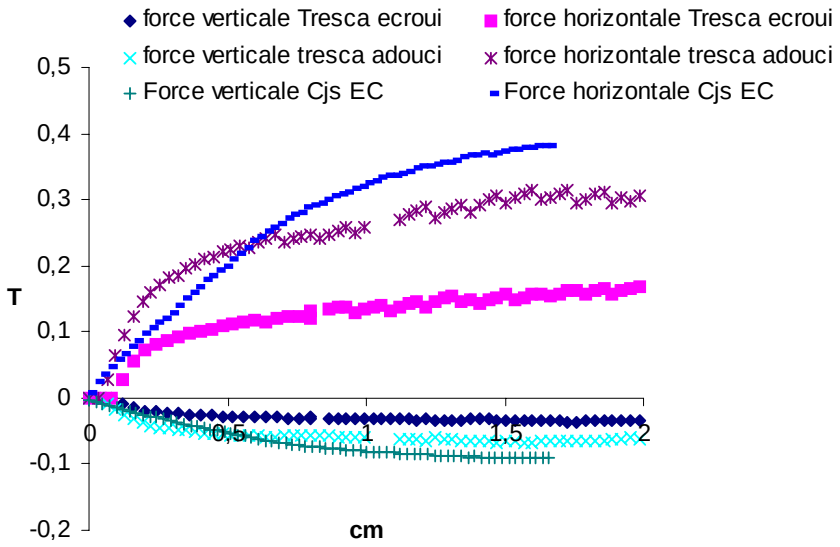


Figure 5.35 : Comparaison des efforts pour le modèle Incompressible avec écrouissage et adoucissement et le modèle Compressible Cjs EC (jeux de paramètres 1 de la Table 5.3)

Conclusion

Nous avons conduit des simulations de scarification pour une dent à 15° (scléromètre), mettant en jeu un comportement avec écrouissage positif et un comportement avec écrouissage et adoucissement (présence d'un "pic" de contrainte). Comme pour les sols frottants il s'avère que seul la donnée à l'état critique a une influence sur les efforts. De plus la force sur les outils évolue de façon linéaire avec cette valeur asymptotique.

D'autre part on obtient un signal stationnaire pour des avancées faibles inférieures à 3cm. De plus la présence du "pic" de contrainte dans le cas adoucissant n'a aucune influence sur l'évolution et la valeur stationnaire de la force.

5.3.3 Confrontation

Dans cette section nous traitons dans un premier temps de la confrontation des résultats numériques avec l'expérience, puis dans un second temps les résultats obtenus pour FLAC3D et Forge3.
Les essais expérimentaux ont été réalisés à l'échelle 1/3 : la dent a une largeur de 1cm et la profondeur de scarification est de 10cm. Le matériau est un limon. La confrontation FLAC3D/Forge3 a lieu pour une dent à 45°à l'échelle 1 (1cm de large, 30 cm de profondeur).

5.3.3.1 Confrontation à l'expérience

L'essai choisi pour cette confrontation est la scarification par une dent à 15° sur du limon. L'essai expérimental a été mis en œuvre au LERMES [69] à l'échelle 1/3 : la dent a une largeur de 1cm et la profondeur de scarification est de 10cm. La vitesse d'avancée 0,05 m/s. Nous avons négligé les termes d'inertie et de gravité. La teneur en eau est de 17,6% et la densité sèche est de 15,3 kN/m^3. La granulométrie est décrite par la Figure 5.36.

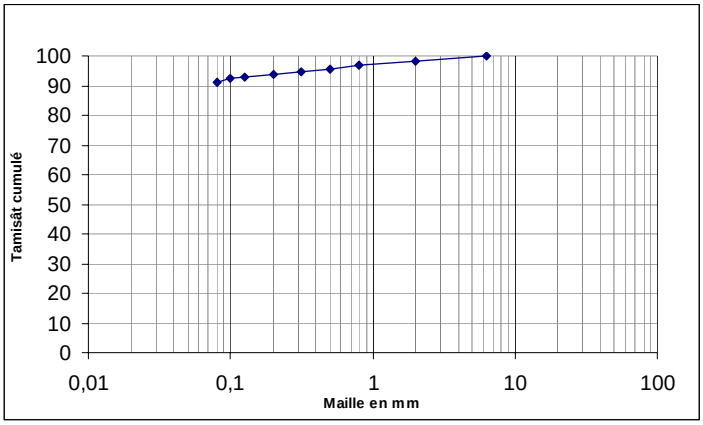


Figure 5.36 : granulométrie du limon

Paramètres CJS-Tresca

	A (Mpa)	b	Rm (kPa)	Rc (kPa)	E (Mpa)	ν
Paramètres	2	10	25	25	8	0,3

Table 5.8 :Paramètres CJS-TRESCA

Les paramètres du modèle CJS-Tresca sont exposés à la table 5.8. Ces paramètres ont été identifiés à l'aide d'essais tri-axiaux (*P. Kolmayer* [64]). Cette identification a eu lieu pour le matériau décrit plus haut, mais pour une teneur en eau et une densité sèche de, respectivement :18% et 14,4 kN/m^3. Cette configuration du matériau est peu plus plastique, mais reste dans le domaine de validité des paramètres du modèle.

Nous avons testé deux types de frottement :

- Frottement de *Coulomb :* $\mu=0,1$; $\overline{m}=0,3$.
- Frottement de *Tresca :* $\overline{m}=1$ (le seuil est égal à la cohésion)

Confrontation

On constate que la résistance à l'avancement prédite par la simulation est inférieure, d'un facteur supérieur à 10 avec le frottement de *Coulomb*, à l'expérience. Or cet effort numérique est cohérent avec l'état de contrainte du matériau, Figure 5.37, compte tenu des données matériau d'entrée.
En effet, pour le frottement de *Coulomb*, la contrainte équivalente atteint son maximum (25kPa) pour les zones de grandes déformations. La composante σ_{yy} (dans la direction de scarification) est de l'ordre de 80 kPa au voisinage de l'outil. Etant donné l'inclinaison de la dent, on peut estimer que la contrainte normale est de cet ordre, soit environ trois fois la cohésion. Dans le cas du frottement de *Tresca*, la contrainte normale est de l'ordre de quatre fois la cohésion. On retrouve cet ordre de grandeur pour des simulations de rayure avec le code *Forge3®* pour un comportement incompressible, qui ont été confrontées favorablement avec l'expérience (*Bucaille J.L.* [22]). Ainsi l'effort prédit par le code est cohérent avec l'état de contrainte du matériau.

	Expérience échelle 1/3 (Lermes)	Calcul (Forge3®) *Frot. Coulomb*	Calcul (Forge3®) *Frot. Tresca*
Résistance à l'avancement	83 daN	7,7 daN	12daN

Table 5.9 : Comparaison calcul / expérience. Dent à 15° échelle 1/3(1cm de large, 10 cm de profondeur) pour du limon.

On remarque que pour cette inclinaison de dent, le frottement a une influence très forte sur la résistance à l'avancement (augmentation de 50%). Cette influence se traduit aussi sur l'écoulement. La remontée de matière est beaucoup moins importante dans le cas *Tresca* (Figure 5.38).

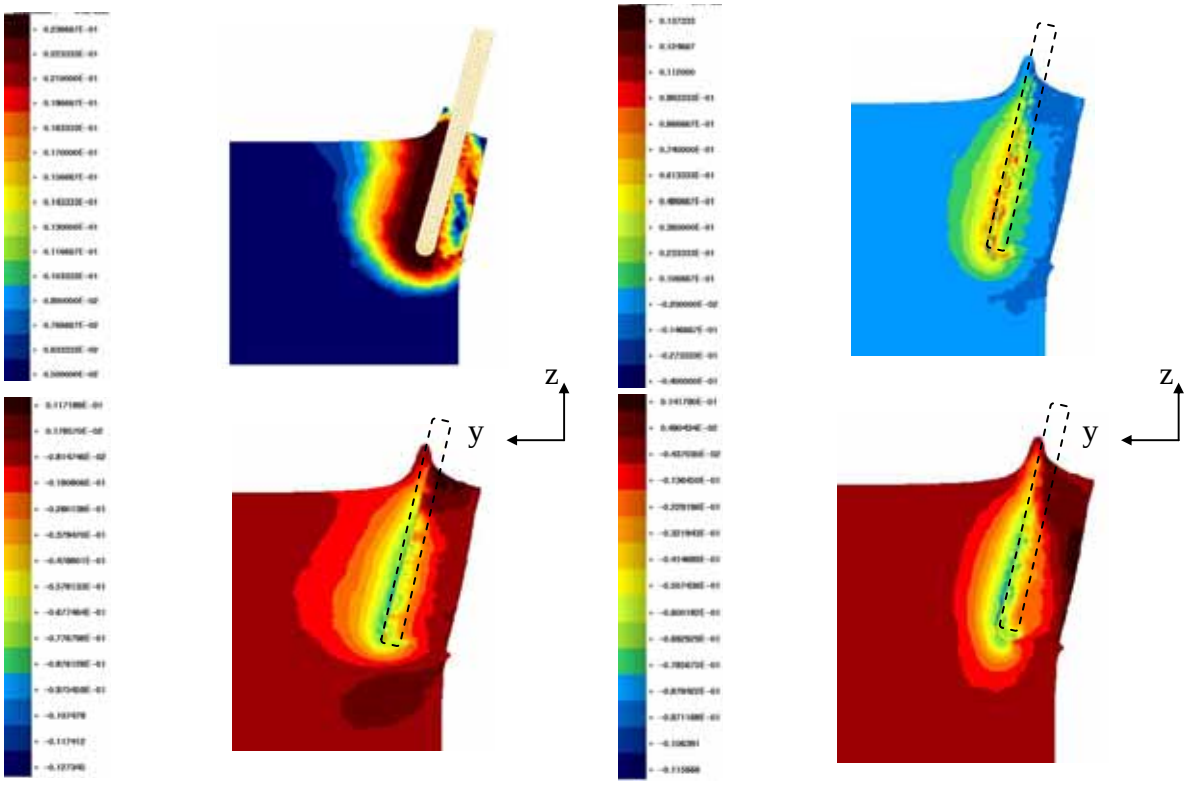


Figure 5.37 Etat de contrainte et de pression dans le massif pour une dent 15° (frottement de Coulomb) : (en haut à gauche) contrainte équivalente. (en haut à droite) champ de pression. (en bas à gauche) composante σ_{yy}. (en bas à droite) composante σ_{zz}.

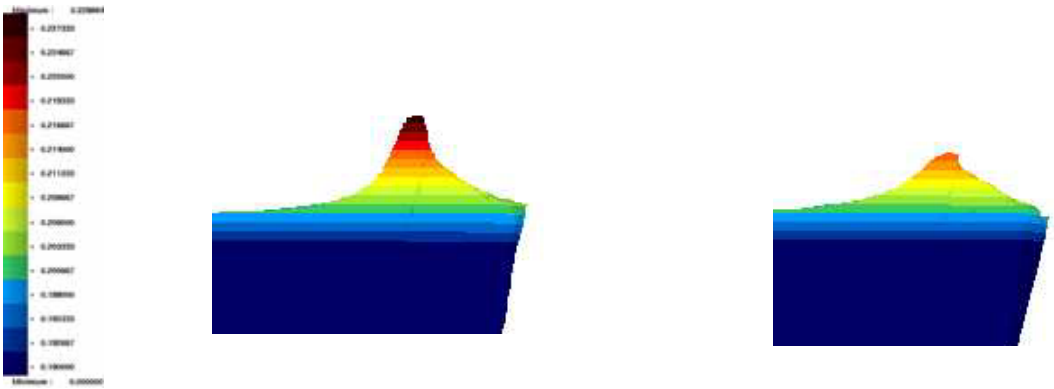


Figure 5.38 : Comparaison des lignes de niveaux pour la dent à 15° : (à gauche) frottement de Coulomb, (à droite) frottement de Tresca.

Pour expliquer cette très grande différence entre les efforts on peut s'appuyer sur le niveau de compaction du matériau *in situ* lors de l'essai de scarification et lors de l'essai triaxial. Néanmoins pour ce type de matériau (limon) la cohésion ne peut évoluer au delà de 60 kPa. Or le paragraphe 5.3.2, montre que l'effort de scarification, pour ce type de modèle et ce type de dent, évolue de façon linéaire avec la cohésion. Il apparaît d'ailleurs que c'est ce paramètre du modèle, uniquement, qui influe sur les efforts. Donc même pour

une cohésion de l'ordre de 60 Kpa la résistance à l'avancement calculée par *Forge3®* sera toujours nettement inférieure à l'expérience.

Ainsi, pour ce type de comportement purement cohésif, l'alimentation du modèle par des paramètres issus d'essais triaxiaux, ne conduit pas à une évaluation correcte de l'effort de scarification.

5.3.3.2 Confrontation FLAC3D©/Forge3®

N'ayant pas le calcul FLAC3D pour cette dent expérimentale, nous avons comparé les résultats donnés par FLAC3D et Forge3 dans le cas de la scarification avec une dent à 45° à l'échelle 1 (3cm de large et 30 cm de profondeur). Le cas est quasi-statique, pas d'effet d'inertie. La comparaison est faite pour un comportement incompressible, les paramètres mis en jeu sont ceux décrits plus haut (table 5.8).
Nous avons testé deux types de frottement :

- Frottement de *Coulomb* : $\mu=0,1$; $\overline{m}=0,3$.
- Frottement de *Tresca* : $\overline{m}=1$ (le seuil est égal à la cohésion)

	FLAC3D©	Forge3® (Frot. *Coulomb)*	Forge3® (Frot. *Tresca)*
Résultante	250 daN	77,3 daN	76,7 daN

Table 5.10 : Comparaison FLAC3D©/Forge3®. Dent à 45° échelle 1 (3cm de large, 30 cm de profondeur) pour du limon.

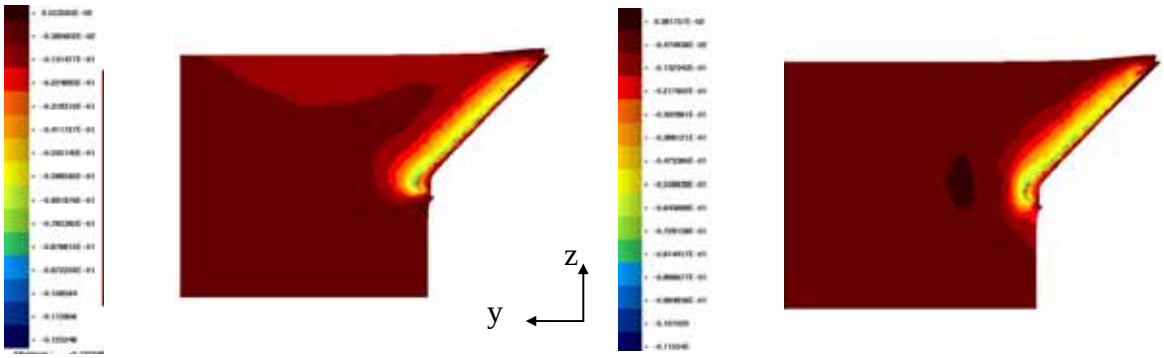


Figure 5.39 : Dent 45° échelle 1 (Forge3®, frottement de coulomb) : (à gauche) composante σ_{yy}. (à droite) composante σ_{zz}.

Nous constatons que les efforts calculés par Forge3 sont nettement inférieurs à ceux de FLAC3D. Cependant, comme précédemment dans le cas Forge3, les efforts sont cohérents avec l'état de contrainte du matériau. D'autre part la résultante est calculée pour une avancée de 2cm. A ce stade les efforts sont quasiment stabilisés. Pour FLAC3D l'avancée est inférieure à 0,5 cm, nous n'avons pas d'information sur l'évolution des efforts.
Une explication à ces différences entre les efforts peut tenir à la prise en compte de l'écoulement. Le code FLAC utilisant des quadrangles, l'écoulement latéral peut être mal décrit, ce qui en conséquence, augmenterait

la résistance à l'avancement. Cependant, nous ne pouvons donner une analyse plus précise sans conduire des tests de comparaisons adéquats.

On remarque que pour cette inclinaison de dent il n'y a pas de différences au niveau de la résultante entre les deux types de frottement. Ceci tend à montrer que le glissement est faible le long de l'outil. Avec cette inclinaison de dent (face avant orientée vers la surface libre) la matière a plutôt tendance à être soulevée.

5.3.4 Conclusions : Scarification pour une dent

Dans cette section nous avons traité des simulations de scarification pour une dent avec les modèles implémentés dans le code.

Les résultats numériques montrent que pour le modèle de comportement compressible (CJS Etat Critique) ou incompressible (CJS Tresca) se sont les données à l'état critique qui sont importantes pour déterminer l'effort de scarification.
Dans le cas compressible c'est donc l'angle de frottement à l'état critique qui est déterminant, la compressibilité n'ayant pas ou peu d'influence. Pour le comportement incompressible, la présence d'un "pic" dans la relation contrainte déformation n'a pas d'influence sur les efforts, et c'est la valeur asymptotique (cohésion critique) qui est déterminante.

Cependant la confrontation à l'expérience, dans le cas incompressible, montre que la résistance à l'avancement prédit par le modèle est très nettement inférieure à la valeur expérimentale. Néanmoins l'état de contrainte et les efforts donnés par le code sont cohérents par rapport aux paramètres d'entrée. Il apparaît donc que l'obtention de ces paramètres par des essais triaxiaux n'est pas adaptée à la sollicitation de scarification.

Enfin dans le cas compressible des difficultés numériques sont apparues. Nous constatons, et ce dans le cas compressible ou incompressible, un champ de pression bruité au contact de l'outil. L'origine de ce bruit trouve sa source dans le contact pénalisé, mais se voit amplifié par un comportement sensible à la pression hydrostatique. Enfin le remaillage, de part le transport de variable qui en découle, a aussi un effet néfaste sur la convergence du problème.

5.4 Scarification pour une dent avec Lame

Nous présentons dans cette section l'étude sur la scarification par un outil formé d'une dent plus une lame. Notre intérêt se concentre sur les mécanismes de déformations de la matière induit par cet outil complexe. Nous cherchons à distinguer l'action de la dent et celle de la lame. Ainsi nous avons fait varier les paramètres géométriques d'outillages que sont l'angle de

la dent et l'angle d'étrave de la lame. Cette étude n'est menée qu'avec un comportement incompressible de *Von Mises*.

Choix de l'outillage

Les données géométriques de la dent sont celles introduites à la section 5.2. La profondeur de scarification est toujours de 30 cm. La largeur de la lame est de 29 cm. La vitesse d'avancée de l'outillage est de 0,5 m/s. Les forces de masse et d'inertie sont négligées. La lame affleure le sol, sans être en contact, et son inclinaison est de 15° (Figure 5.40).

Maillage

Nous avons utilisé un maillage d'une largeur de 60cm et de longueur 120 cm. Nous avons supposé cette largeur suffisante pour ne pas perturber la solution. En effet, à la différence de l'étude pour une dent, la sollicitation de la lame n'intervient que pour la matière qui est soulevée par la dent. D'autre part le choix de la longueur du domaine est dicté par le souhait d'obtenir un signal d'effort et un écoulement stationnaire. Il apparaît, que étant donné la dimension de la lame, l'obtention d'un état stationnaire se fera pour une avancée correspondant à 1 à 2 fois la largeur du dispositif. Pour prendre en compte l'action de la lame nous avons rajouté des boites de raffinement de maillage, allant plus latéralement (boites "Lagrangiennes" évoluant avec les outils).

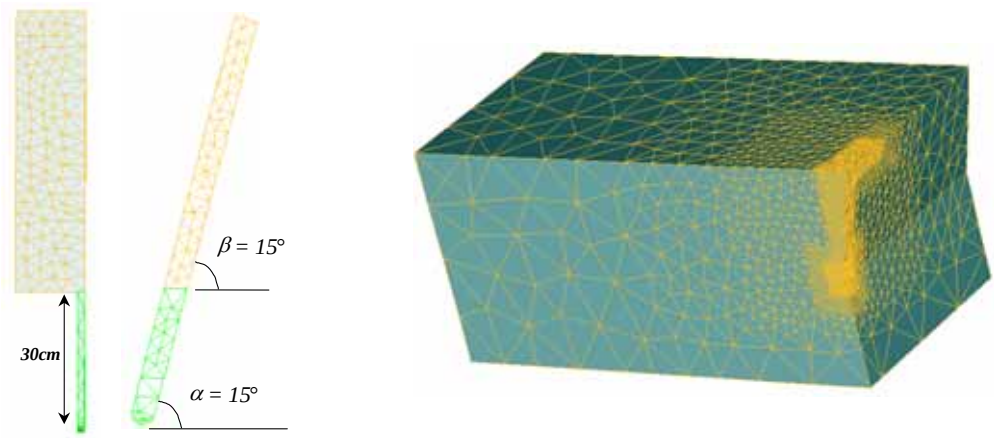


Figure 5.40 : Demi-outillage dent + lame.(à droite) maillage initial : 2879 Nœuds, 9185 Tétraèdres.

Rhéologie

Comportement elasto-plastique incompressible avec écrouissage :

Les paramètres élastiques :

$$E = 8Mpa$$

$$v = 0{,}3$$

Le critère de *Von Mises* :

$$f = \sqrt{\tfrac{3}{2}\|s\|} - \sigma_0(\bar{\varepsilon}) = 0; \quad \sigma_0(\bar{\varepsilon}) = \sqrt{3}k_0(1 + a\bar{\varepsilon})^n$$

Avec :

$$k_0 = 40kPa; a = 1{,}389; n = 0{,}514$$

frottement

Le frottement utilisé est le frottement de Coulomb tronqué. Au delà d'un certain seuil la cission de frottement est égale à une fraction de la contrainte d'écoulement.

- Coefficient de Coulomb : μ = 0.1
- m_{barre} = 0.3 (coefficient qui limite la cission de frottement aux fortes pressions de contact)

Paramètres étudiés

Pour cette étude nous avons fait varier l'inclinaison de la dent ainsi que l'angle d'étrave :

- Inclinaison Dent :45° et 15°.
- Etrave :90° (lame plate) et 45° (lame en V).

5.4.1 Résultats Outil dent + lame

Configuration déformée

La Figure 5.41 décrit l'état de la configuration déformée pour une dent à 15° et une lame à étrave nulle. Ce dispositif conduit à la formation d'un copeau au devant de l'outillage. La hauteur, considérable, du copeau atteint un maximum de 40 cm au dessus du niveau du sol pour 86 cm d'avancée. On observe aussi les deux cordons latéraux, plus modestes étant donné la géométrie sans étrave. Enfin l'action de la dent est mis en évidence par la présence du sillon central. Pour ce type d'outillage à étrave nulle, la matière est extraite du sol par la dent et ensuite poussée par la lame. La matière s'accumule principalement devant la lame, sous la forme d'un copeau, l'évacuation latérale étant secondaire.

La présence très nette du sillon de la dent semble liée à la nature cohésive du matériau. Cependant des expériences en vraie grandeur, menés au CER pour un outillage semblable (5 dents 15° en V + Lame, [96]) mettent aussi en évidence cinq sillons pour un matériau composé de sable et de limon (sol frottant).

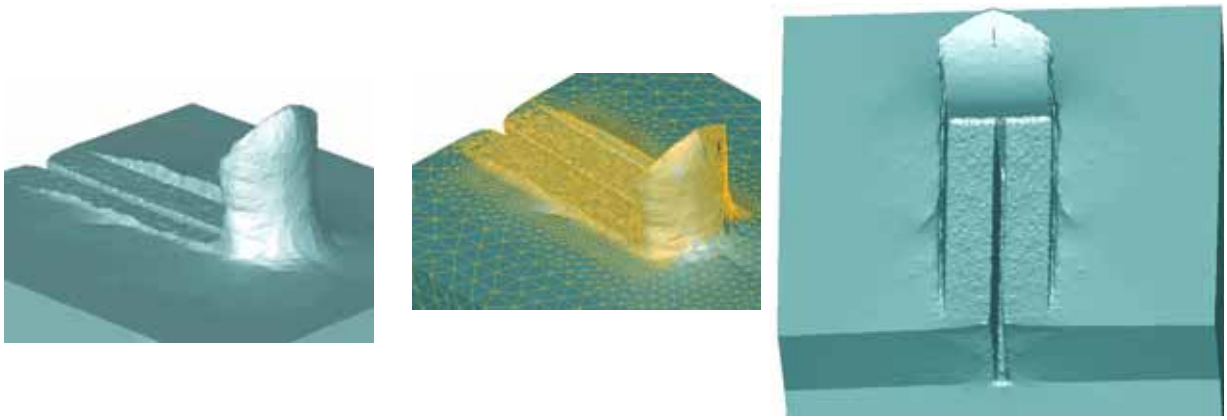


Figure 5.41: Etrave 0° plus dent à 15°, avancée de 86,5 cm, 12 jours de calculs. Maillage final : 23373 nœuds et 87578 tétraèdres.

Temps de calculs

La Table 5.11 rassemble les temps de calculs nécessaires pour une avancée de 86 cm. Plus de 12 jours sont nécessaires sur Machine IBM (processeurs IBM Power3-II, 375 Mhz), dont 66% sont destinés au remaillage. Néanmoins nous constatons une bonne tenue des algorithmes de résolution. Nous avons chiffré l'augmentation du temps de calcul par rapport à une dent seule, pour une avancée de 30 cm, à un facteur 1,6. Mais, pour ce système dent+lame, l'avancée nécessaire pour obtenir l'état stationnaire est beaucoup plus grande.

Avancée Outillage = 86,5cm	
Dent 15° et Etrave 0°	
Durée totale de la simulation	***282h(<12jours)***
CPU moyen / Incréments	***676s***
Δt moyen	***$1{,}16.10^{-3}$***
Nbre itérations moy. Newton Global	***10***
Maillage Initial	**2879 *nœuds***
	11272 tétraèdres
Maillage Final	***23373 nœuds***
	87578 *tétraèdres*
CPU total des remaillages	***188h***

Table 5.11 : Temps de calculs pour un outil dent+lame pour 86,5 cm d'avancée

Contraintes et déformations

La répartition du taux de déformation plastique montre le cisaillement de la base du copeau lors de l'avancée du dispositif (Figure 5.42). Une bande de cisaillement se forme du tiers supérieur de la dent jusqu'à la surface libre.
On retrouve ici, dans une simulation en 3D, un mode de déformation observé pour des simulations en 2D de lames, dans une approche milieux continus ou milieux granulaires (voir chapitre1). Ainsi, en 3D, lorsque la zone de contact est suffisamment large, la matière ne peut contourner l'outil (par écoulement), donc une bande de cisaillement se crée, dans ce cas à la base du copeau.

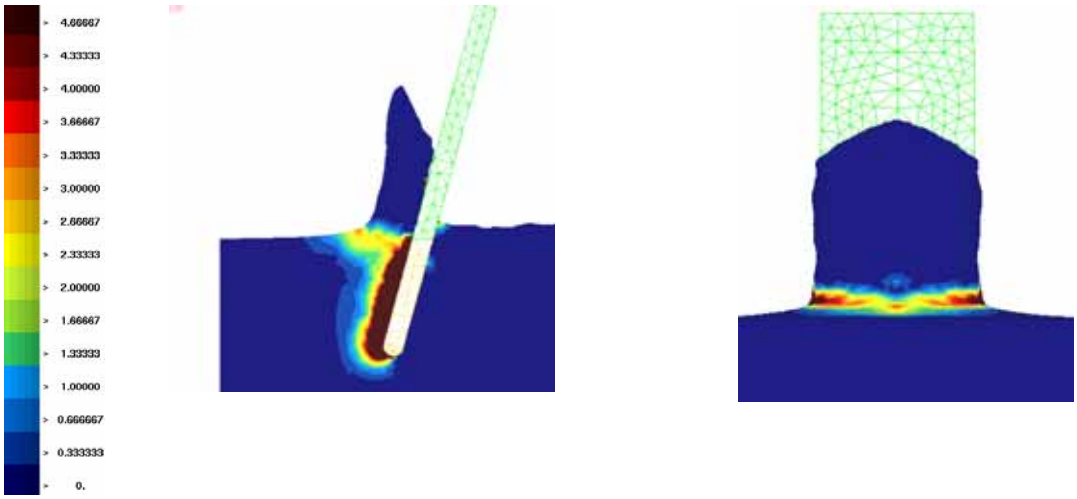


Figure 5.42 : taux de déformation plastique : $\dot{\bar{\varepsilon}} = \sqrt{\dot{e}^{pl} : \dot{e}^{pl}}$, avancée de 86 cm. (à gauche) vue de profil (à droite) vue de face.

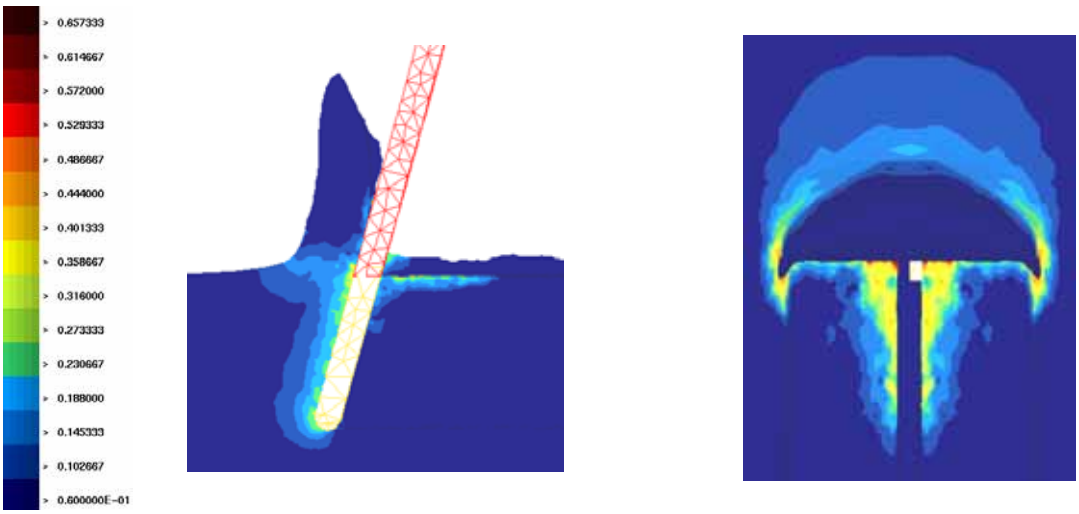


Figure 5.43 : Contrainte équivalente, avancée 86 cm. (à gauche) vue de profil. (à droite) vue de haut.

La répartition de la contrainte équivalente montre la présence de contraintes résiduelles à côté de la dent après le passage la lame (Figure 5.43). Celle-ci vient “racler” la matière extraite par la dent. On constate aussi que le bord du copeau est cisaillé par l’action de lame.
On remarque que, pour ce type de comportement, le matériau extrait par la dent est écroui et donc durci. Ce n’est pas le cas pour les sols puisque le matériau remonté par la dent est, lui, déstructuré et donc ramolli.

efforts

Le graphe de la Figure 5.44 met en évidence une composante verticale importante de la force exercée sur la lame. La matière qui remonte le long de la lame a tendance, par frottement, à soulever le dispositif. L’observation *in situ* de l’action d’outils de déminage simplifié (DIDEMEX-CER Rouen, [96]) ou d’outils complets (CIEL-ETAS), sur des matériaux cohésifs (limon ou argile saturée), met en évidence un “cabrage” du système. L’enfoncement initial de 30cm ne peut être maintenu, le système à tendance à s’élever. Ce phénomène n’apparaît pas pour des sols sableux.

L’observation de l’évolution des efforts nous permet de remarquer que ceux pour la dent atteignent très rapidement l'état stationnaire (10 cm d’avancée), alors que ceux pour la lame se stabilisent après 50 cm d’avancée (environ 2 fois la largeur du dispositif). La stationnarité du signal pour la dent a lieu bien plus tôt, dans le dispositif dent + lame, que pour une dent seule (Figure 5.44). De plus on observe un délestage des efforts par rapport à la dent seule.

Dans le dispositif dent + lame, l’action de coupe est principalement pris en charge par la dent, les phénomènes de surface (écoulement) sont eux du ressort de la lame. Ce phénomène à lieu indépendamment de l’angle de scarification de la dent (15° ou 45°) et de l’angle d’étrave (90° et 45°).

Il apparaît que l’instationnarité des efforts est liée à la croissance du bourrelet, en fait au mode d’écoulement en surface.

Nous mettons en évidence ainsi l’aspect "bi-échelle" du système dent + lame. Une échelle liée aux mécanismes de déformation induit par l’action de la dent, et une échelle liée à l’action de la lame.

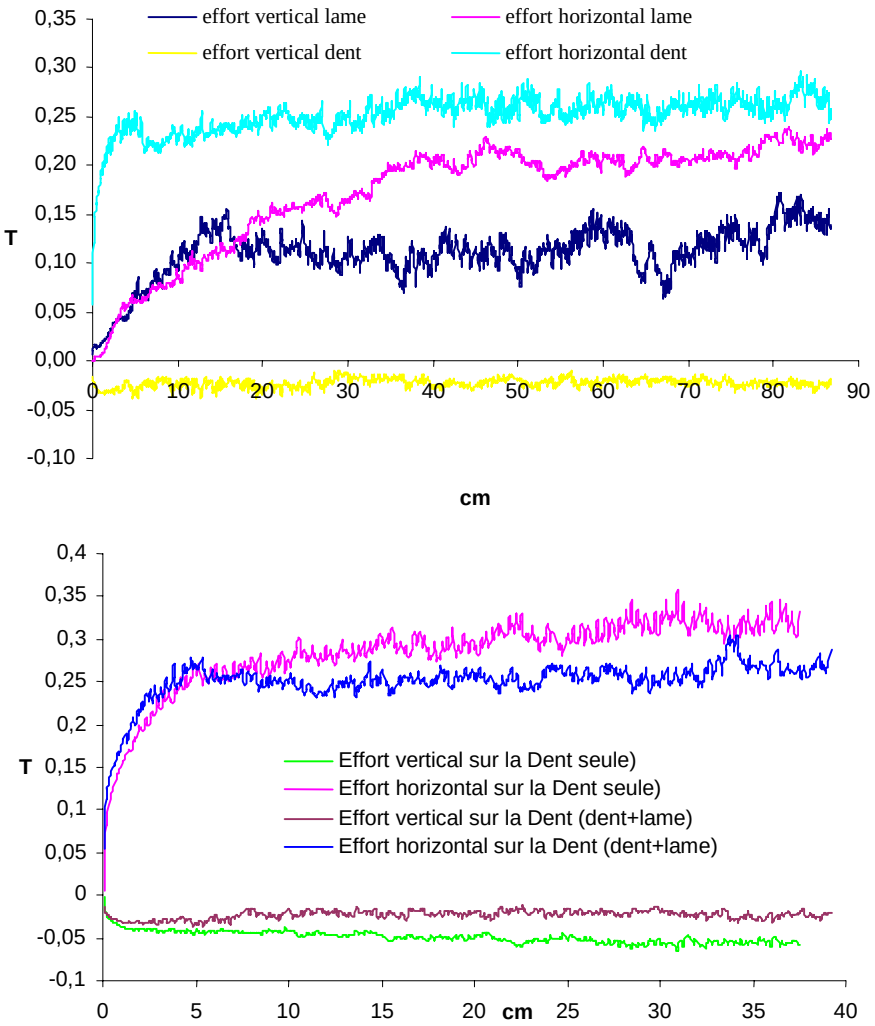


Figure 5.44 : effort système dent + lame : (en haut) composante horizontale et verticale de la dent et la lame. (en bas) comparaison des efforts pour une dent avec ou sans lame.

5.4.2 Influence de l'angle de scarification de la dent

Nous comparons les résultats pour deux angles de scarification : 15° et 45° avec un angle d'étrave de 90°. L'inclinaison de la lame est toujours de 15°.

Mode d'écoulement

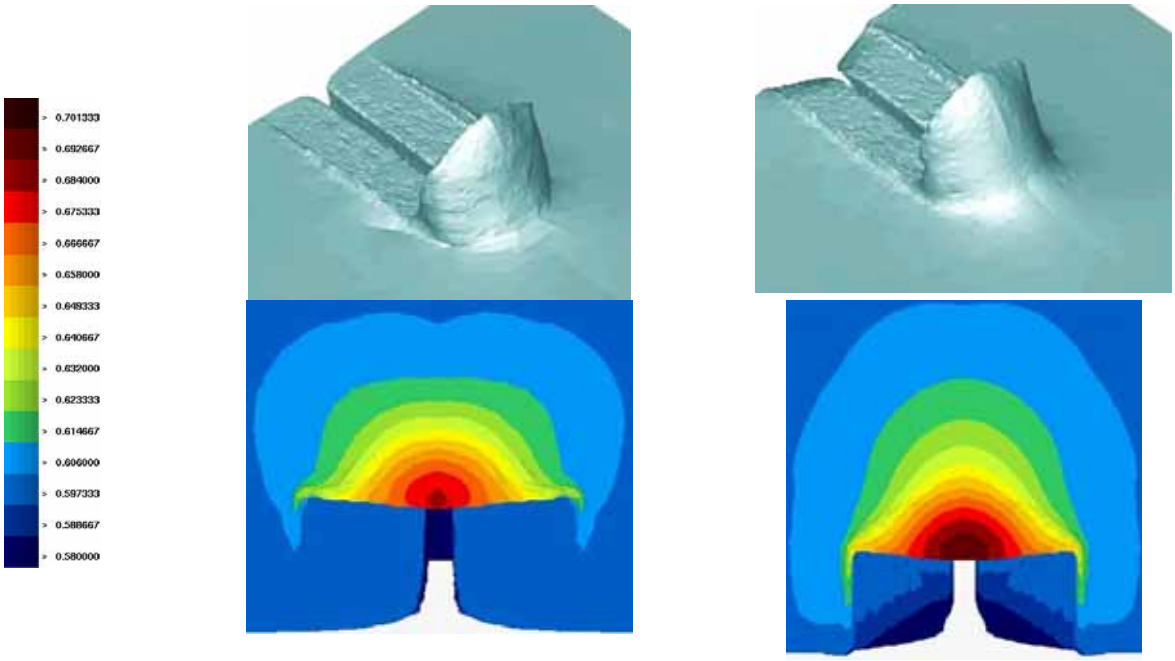


Figure 5.45 : Comparaison des écoulements pour une inclinaison de dent de 15° et 45°. (à gauche) dent à 15°, en haut configuration déformée, en bas lignes de niveaux. (à droite) dent à 45°, en haut configuration déformée, en bas lignes de niveaux.

L'écoulement de matière devant de la lame semble équivalent dans les 2 cas (formation d'un copeau, hauteur maximale, Figure 5.45 et Figure 5.46). Par contre la carte des lignes de niveaux (altitude) permet de mettre en évidence l'influence de l'angle de scarification de la dent.

En effet nous pouvons constater qu'avec une dent inclinée à 45° la matière est soulevée beaucoup plus loin devant les outils que pour une dent à 15°. La quantité de matière devant la dent la lame est alors plus importante (Figure 5.46). L'inclinaison de la dent joue bien sur la quantité de matière extraite du sol.

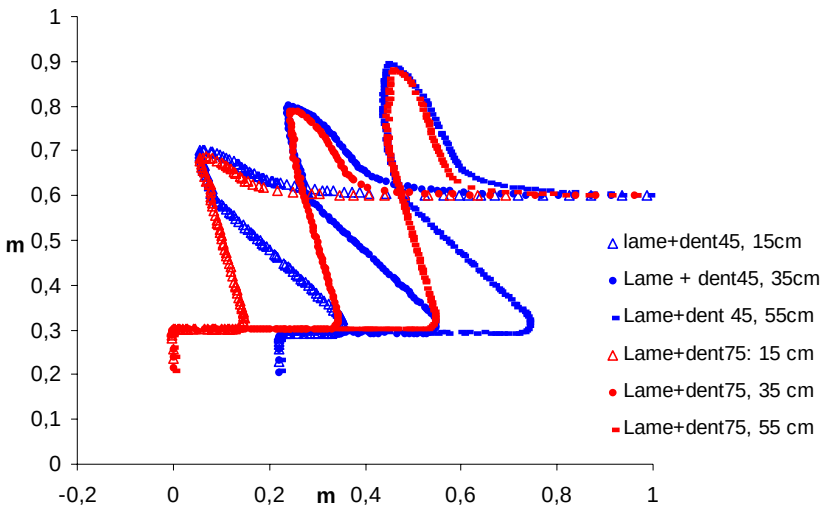


Figure 5.46 : Profils d'écoulements dans le plan de symétrie pour les deux angles de scarification 15° et 45° à 15cm, 35cm et 55 cm d'avancée.

efforts

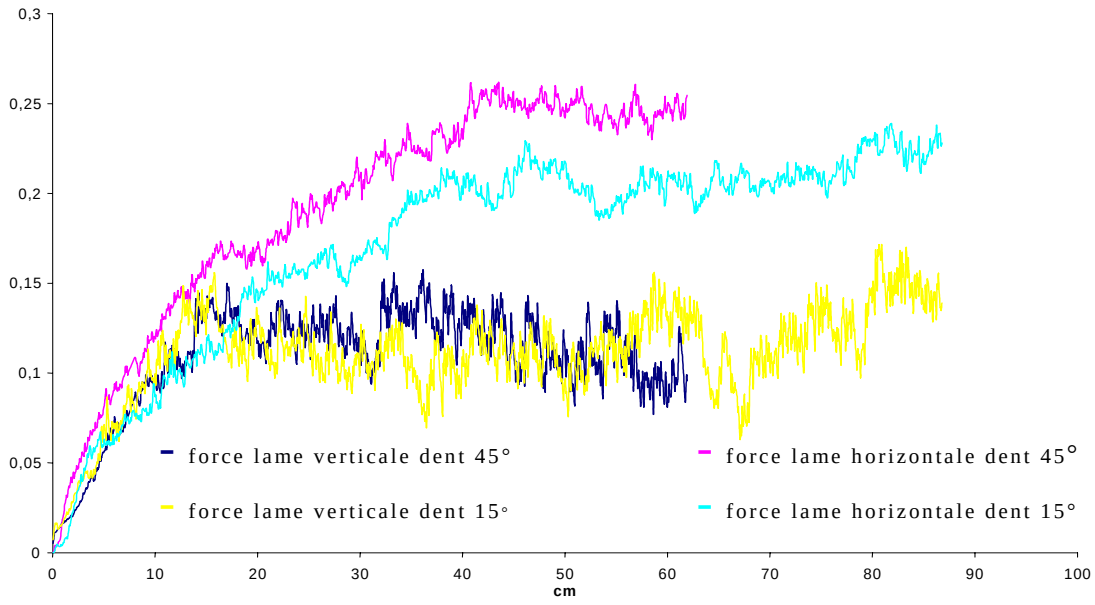


Figure 5.47 : Comparaison des efforts sur la lame pour la dent à 15° et à 45°.

Le graphe des efforts (Figure 5.47) montre une résistance à l'avancement sur la lame supérieur pour la dent à 45°, ce qui est cohérent avec le mode d'écoulement mis en évidence plus haut. La force verticale elle, est inchangée.

5.4.3 Influence de l'angle d'étrave

Nous comparons les résultats pour deux angles d'étrave : 90° et 45° avec un angle de scarification de 45°. L'inclinaison de la lame est de 15°.

Mode d'écoulement

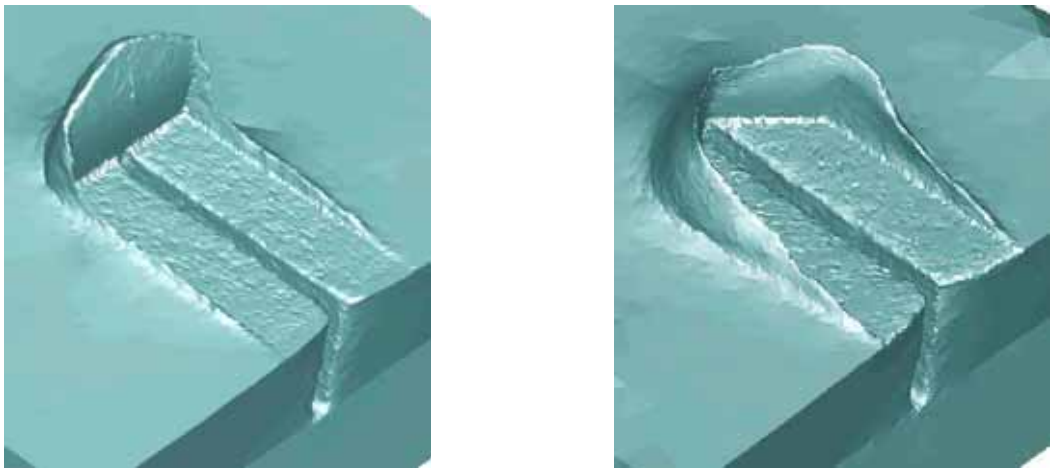


Figure 5.48 : Configuration déformée pour une avancée de 55 cm. (à gauche) étrave nulle, (à droite) étrave 45°.

La configuration déformée pour l'étrave de 45° montre clairement les modifications qui interviennent sur l'écoulement de surface (Figure 5.48). La matière, ne s'accumule plus au devant de la lame, mais s'écoule de part et d'autre, et donc conduit à des cordons latéraux importants.

En comparant les lignes de niveaux du massif pour une avancée de 15 cm et 55 cm on met en évidence une transition dans le mode d'écoulement pour une étrave de 45°.

La matière est initialement poussée devant les dispositifs. Pour chaque étrave un "pics" a lieu au milieu de la lame. Pour 55 cm d'avancée, l'étrave à 45° conduit à deux "pics" latéraux de part et d'autre de la lame.
Dans un premier temps la matière s'accumule devant la lame puis s'écoule latéralement tel un fluide.

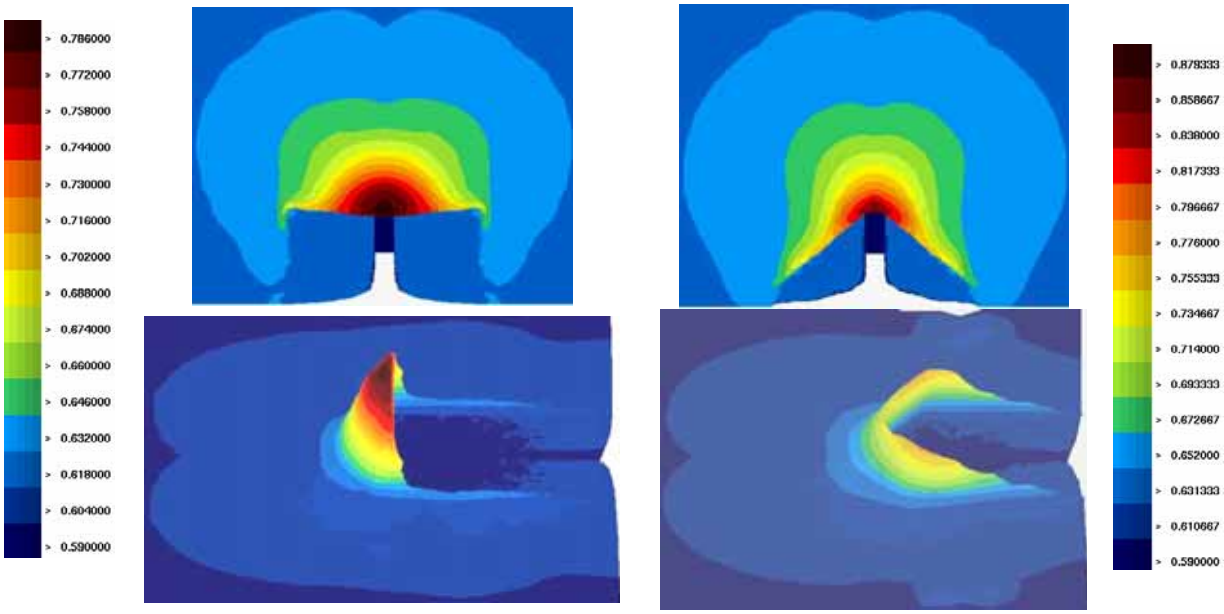


Figure 5.49 : Lignes de niveaux pour une étrave nulle (à gauche) et une étrave de 45° (à droite). En haut avancée de 15 cm, en bas avancée de 55 cm.

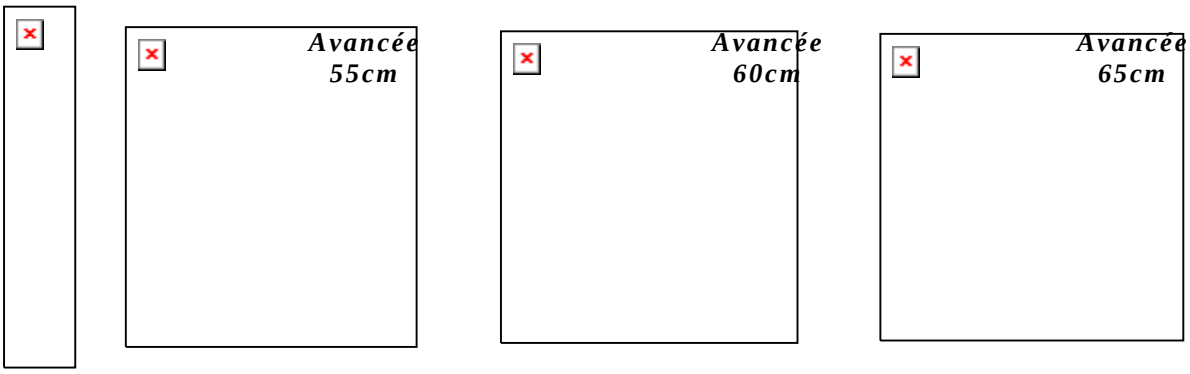


Figure 5.50 : Lignes de niveaux pour une étrave à 45° pour différentes avancées du système.

La Figure 5.50 nous permet de suivre l'évolution du bourrelet latéral entre 55 cm et 65cm. On constate que pour 65cm d'avancée la hauteur du cordon latéral, après passage de la lame, est stable. Ceci est un premier argument pour établir que l'état stationnaire s'obtient pour une avancée autour de deux fois la largeur du système (largeur du système 34 cm).

Efforts

La transition dans l'écoulement peut être mise en évidence en observant l'évolution de la force verticale sur la lame en étrave (Figure 5.51). Dans un premier temps, la force croit de façon monotone (accumulation devant la lame), puis décroit et se stabilise à hauteur la force verticale sans étrave. A ce stade la matière s'écoule de part et d'autre de la lame.

On remarque aussi que pour le cas avec étrave 45°, la résistance à l'avancement est plus élevée. Ceci est du à une zone de contact dans ce cas plus importante.

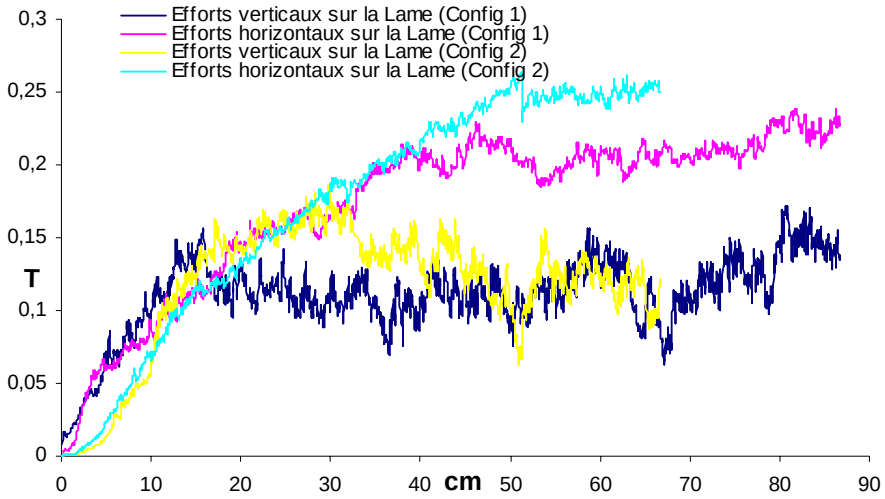


Figure 5.51 : évolution des efforts pour la lame pour deux angles d'étrave 90° (config. 1) et 45° (config. 2).

5.4.4 Conclusion

Les différentes simulations nous ont permis d'aboutir au conclusions suivantes :

- Nous avons pu saisir les actions spécifiques de la dent et de la lame. L'action de la dent déstructure le matériau mais aussi fait remonter la matière vers la surface et vers la lame. La quantité de matière à évacuer par la lame dépend directement de l'inclinaison de la dent : à 15°, peu de remontée de matière, à 45°, remontée plus importante. La lame, quant à elle, évacue la matière.

- Le point précédent nous permet d'aborder l'aspect bi-échelle de l'action d'un outillage Dent + Lame. En effet les efforts des dents se stabilisent très rapidement (≈10cm d'avancée), alors que ceux de la lame, qui est plus large et qui sollicite plus de matière, sont plus longs à se stabiliser (≈70cm d'avancée). En fait l'instationnarité est liée à la croissance du bourrelet au devant du dispositif. Or ce n'est plus la dent mais la lame qui pousse le bourrelet.

- Enfin les simulations montrent que l'angle d'étrave est un paramètre déterminant quant à l'évacuation de matière. Pour une étrave nulle la matière s'accumule sous la forme d'un copeau devant la lame, tandis qu'elle s'évacue latéralement pour une étrave à 45°. Enfin on retrouve, à la base du bourrelet, la bande de cisaillement mise en évidence lors de simulations 2D pour une lame avec une discrétisation *éléments finis* ou *éléments distincts* (*C. Nouguier*, [87]).

5.5 Scarification Multi-dent

Au cours de ce paragraphe nous traitons de l'action de dispositifs à trois dents sans lame. Deux configurations sont étudiées : en V ou en oblique. Nous mettons en évidence l'influence de l'angle d'étrave ainsi que l'interaction entre les dents. Cette étude n'est menée qu'avec un comportement incompressible de *Von Mises*.

Choix de l'outillage

La profondeur de scarification des dispositifs est toujours de 30 cm les données géométriques sont celles de la section 5.2. L'angle de scarification est de 45° et l'espace inter-dent est de 17cm (ordre de grandeur pour un outil de déminage réel).
Les Figure 5.52 et Figure 5.53 décrivent respectivement les configurations des dispositifs n°1 et n°2. Pour le dispositif n°1 les dents sont alignées en oblique par rapport à la direction de scarification, alors qu'elles forment un V dans le cas n°2. On remarque que le dispositif n°2 présente une symétrie, la simulation se fera donc pour un demi dispositif.

Nous avons choisi de présenter les résultats pour deux angles d'étrave : $\alpha=45°$ et $\alpha=65°$.

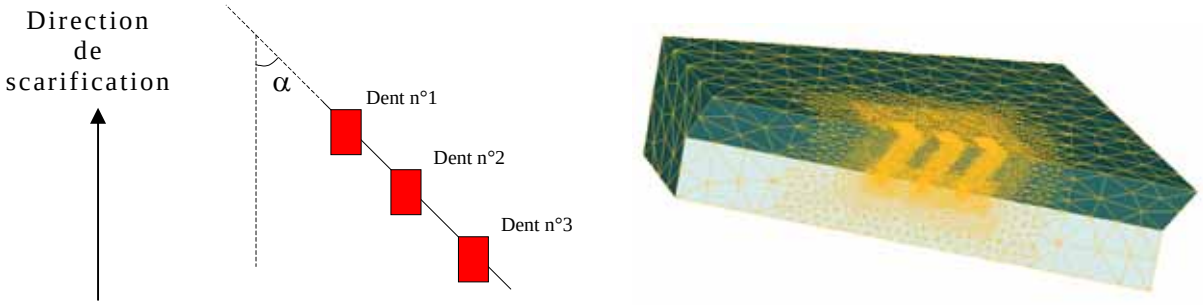


Figure 5.52 : dispositif n°1 - dents alignées - α angle d'étrave

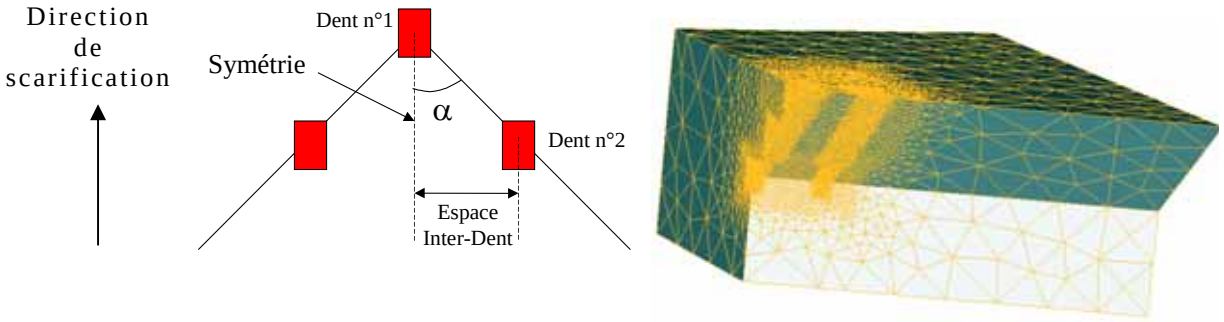


Figure 5.53 : dispositif n°2 - dents en V - α angle d'étrave

Rhéologie

Comportement elasto-plastique incompressible avec écrouissage :

Les paramètres élastiques :

$$E = 8Mpa$$
$$v = 0{,}3$$

Le critère de *Von Mises* :

$$f = \sqrt{\tfrac{3}{2}\|s\|} - \sigma_0(\bar{\varepsilon}) = 0; \quad \sigma_0(\bar{\varepsilon}) = \sqrt{3}k_0(1 + a\bar{\varepsilon})^n$$

Avec :

$$k_0 = 40kPa; \; a = 1{,}389; \; n = 0{,}514$$

frottement

Le frottement utilisé est le frottement de Coulomb tronqué. Au delà d'un certain seuil la scission de frottement est égale à une fraction de la contrainte d'écoulement.

- Coefficient de Coulomb : μ = 0.1
- m_{barre} = 0.3 (coefficient qui limite la cission de frottement aux fortes pressions de contact)

5.5.1 Résultats des Simulations

Configurations déformées

Quelles que soient les configurations, les simulations mettent en évidence un écoulement où une partie de la matière est poussée devant le dispositif et une autre partie s'écoule latéralement.

Pour la configuration n°1, on observe la formation d'un copeau sur toute la largeur du dispositif (Figure 5.54). L'écoulement propre à chaque dent à tendance à disparaître au profit d'un écoulement global, propre à l'ensemble des dents. Comme nous l'avons vu à la section 5.2.2, une partie de la matière est scarifiée (sur une profondeur de 0 à –30cm), et une autre partie est simplement poussée par le dispositif.

Ce résultat est mis en évidence à la Figure 5.54, en observant la zone de contact effective avec les outils. Les zones bleues du massif déformé correspondent au zones effectives de contact outil/matière. A mi-hauteur du copeau, la matière n'est plus en contact avec la dent n°1 et n°2, elle est alors "poussée" par le dispositif plutôt que scarifiée.

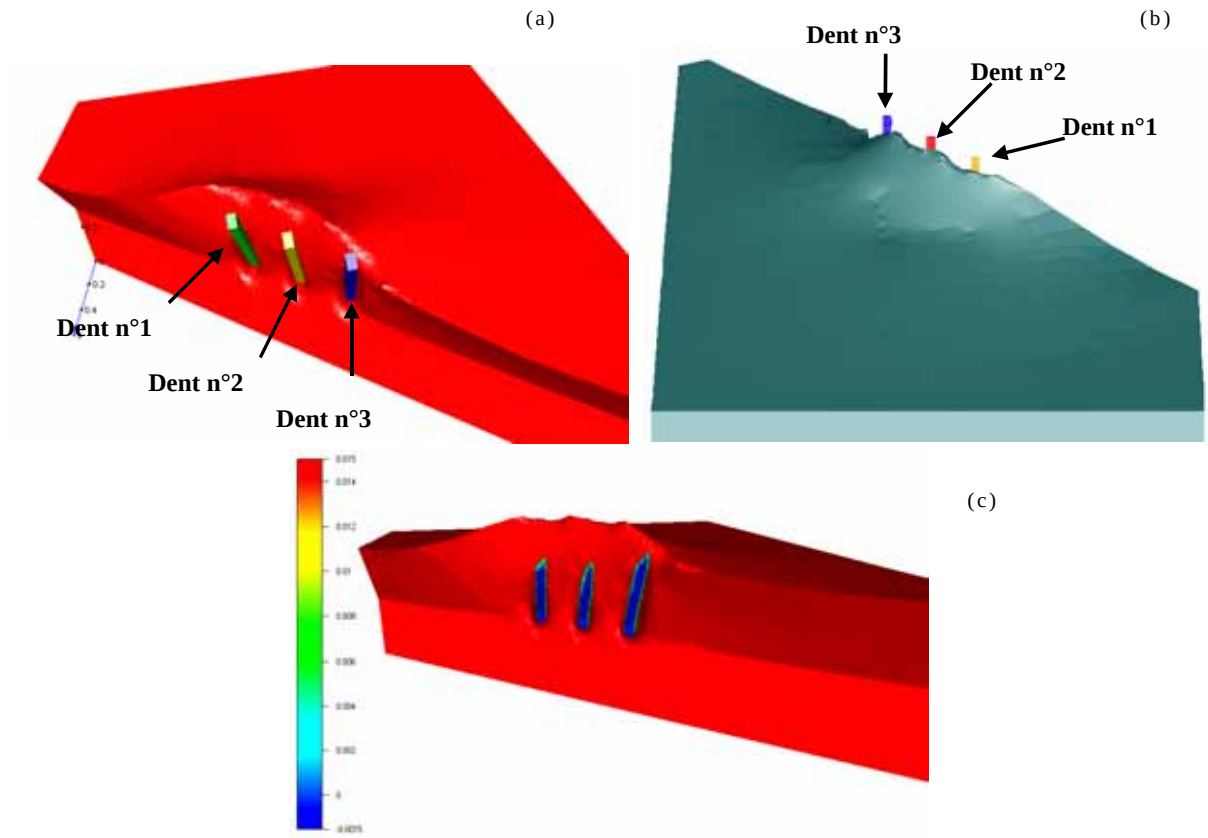


Figure 5.54 : résultat dispositif n°1 - avancée 20cm (11 jours de calculs) – angle d'étrave α= 45°. (a) Configuration déformée vue de derrière. (b) Configuration déformée vue de face. (c) Contact Outil /matière (contact pour valeurs < 0).

Figure 5.55 : Configuration trois dents alignée échelle 1/3. Etrave 65°, dents (1cm large/10cm profondeur) à 45°, espace interdent 14cm. Sol bigradué avec 15% de fines (LERMES, [69]).

L'observation d'essais expérimentaux à l'échelle 1/3 (Figure 5.55), montre cet effet de groupe sur l'écoulement avec la mise en œuvre d'un écoulement global sur la largeur du dispositif.

Des essais en vraie grandeur, pour une configuration en râteau mettent aussi en évidence cet effet de groupe, même pour un matériau essentiellement frottant.

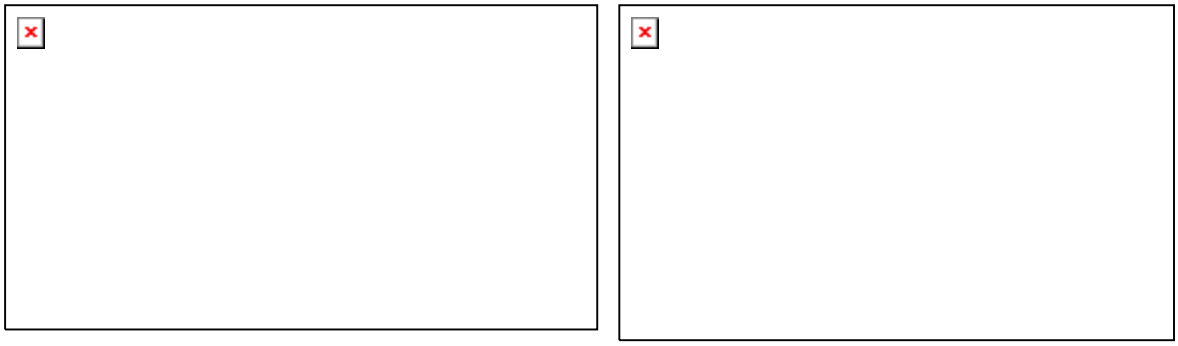


Figure 5.56 : Dispositif DIDEMEX échelle 1(CER-Rouen, [96]) sur du sable de Seine. Etrave 90°, 5 dents (3cm/30cm) à 45°, Espace inter-dent 17cm.

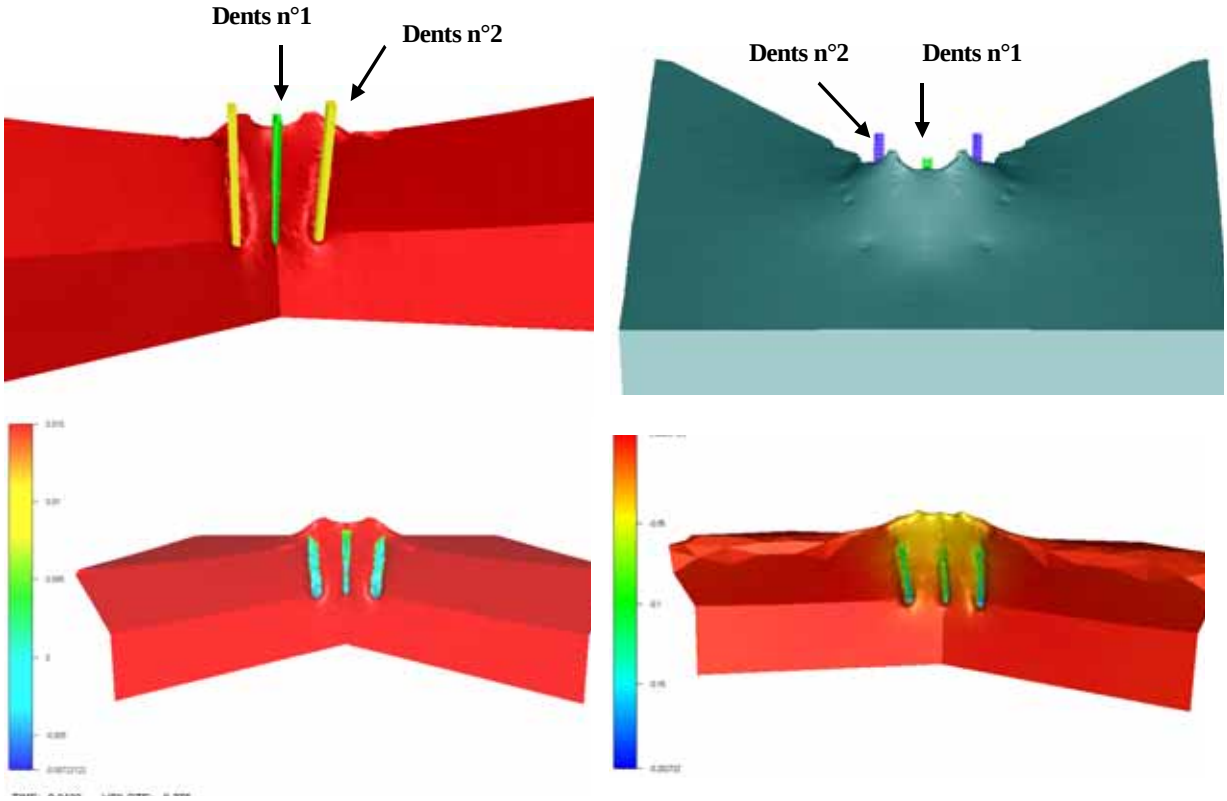


Figure 5.57: Configuration déformée symétrisée dispositif n°2 – avancée 20cm (7 jours de calculs) - α= 45°. (en haut) configuration déformée. (en bas à gauche zone de contact, (en bas à droite) champ de vitesse horizontal.

Pour la configuration en V, bien que l'interaction entre les dents intervient sur l'écoulement, l'écoulement propre à la dent centrale reste en partie présent. En effet la dent centrale, en avant par rapport aux autres, soulève le matériau et l'évacue latéralement. C'est cet écoulement latéral que viennent ensuite scarifier les dents externes. Ainsi, en observant les lignes de niveaux, on constate deux "pics" dans l'espace entre les dents, qui sont le fruit de

l'action des deux autres dents. L'observation de la composante horizontale du champ de vitesse montre bien que la matière ne s'écoule pas ou peu entre les dents. La Figure 5.58 permet d'accréditer cet effet de groupe sur l'écoulement entre les dents, pour un matériau argileux.

Figure 5.58 : Dispositif DIDEMEX échelle 1 (CER-Rouen, [96]) sur de l'argile. Etrave 90°, 5 dents (3cm/30cm) à 45° en râteau, espace inter-dent 17cm.

Temps de Calculs

Avancée Outillage = 20cm		
	Dispositif 1 (3 dent en oblique)	***Dispositif 2 (3 dent en V)***
Durée totale de la simulation	***267heures (11jours)***	***155h(<7jours)***
Maillage Initial	***10154 nœuds***	***6454 nœuds***
	39499 tétraèdres	***24940 tétraèdres***
Maillage Final	***22091 nœuds***	***11272 nœuds***
	96483 tétraèdres	***44229 tétraèdres***
CPU total des remaillages(%CPU Total)	***80% CPU total***	***60% CPU total***

table 5.12 : Comparaison des temps de calculs pour la configuration alignée et en V.

Les Calculs ont été effectués sur Machine IBM (processeurs IBM Power3-II, 375 Mhz). La configuration alignée conduit à un temps de calcul équivalent à une dent plus une lame mais pour quatre fois moins d'avancée. De plus la majeure partie du temps de calcul est destinée au remaillage. La moitié du dispositif en V étant simulé les temps de calculs sont d'autant plus réduits.

Il apparaît donc que l'augmentation du nombre de dents, a un impact plus lourd sur les temps de calculs que l'apport de lame. La scarification en grandes déformations s'inscrit bien dans un contexte de calculs très intensifs.

5.5.2 Influence de l'angle d'étrave sur l'écoulement

Comme nous l'avons exposé plus haut, pour les deux dispositifs, la matière est en partie poussée au devant du dispositif tandis que l'autre partie s'évacue latéralement. Dans ce paragraphe nous mettons en évidence la prépondérance d'un mode d'écoulement sur l'autre en fonction de l'angle d'étrave.

Influence de l'angle d'étrave pour dispositif n°1

On observe sur la Figure 5.59 le champ de vitesse vertical pour deux angles d'étrave α= 65°et α=45°. Les zones rouges correspondent à des vitesses positives, et les zones vertes à des vitesses négatives.

Pour α= 65° on constate que la matière est relevée au devant du dispositif, alors que pour α=45° c'est principalement la dent n°1 qui pousse la matière. On assiste à une transition dans les modes d'écoulement suivant l'angle d'étrave. Pour de faibles angles d'étrave l'écoulement privilégié est latéral, alors que pour des angles d'étrave plus grands on a une configuration de type "râteau" et la matière est alors poussée par le dispositif.

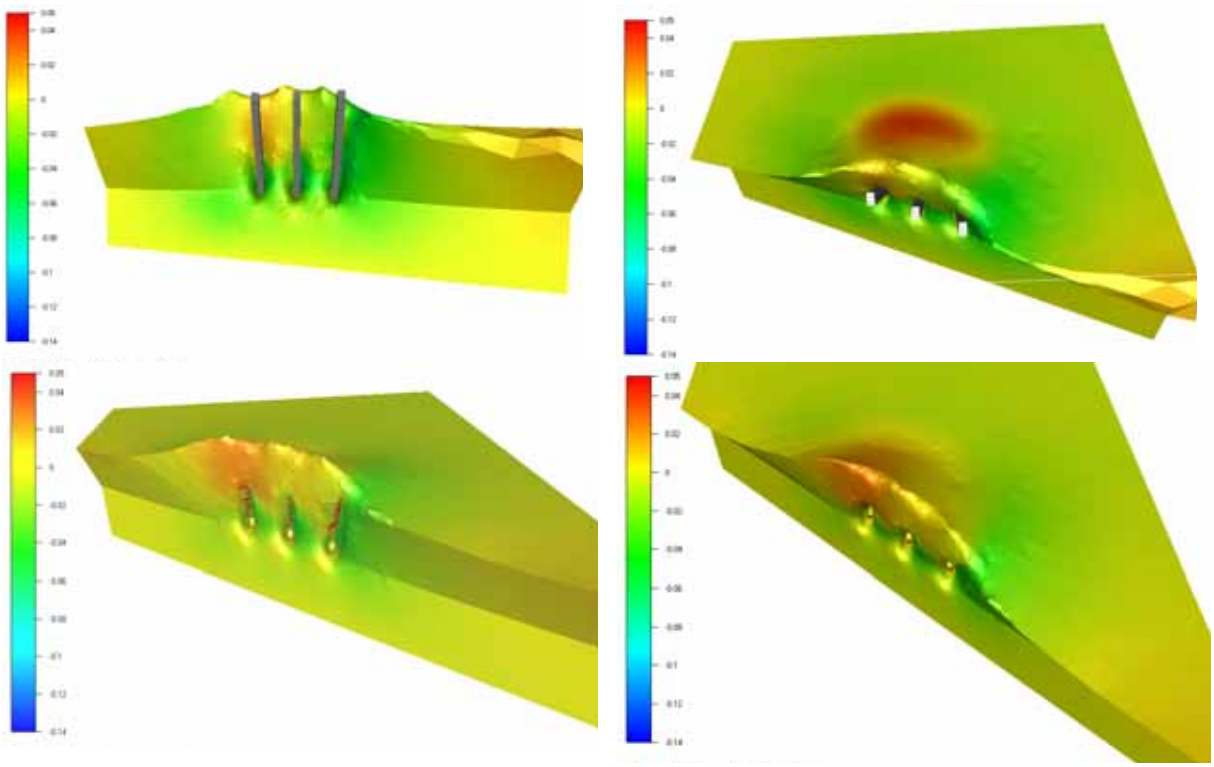


Figure 5.59 : dispositif n°1 (avancée 20cm), composante verticale du champ de vitesse, (en haut) étrave 65°, (en bas) étrave 45°

Influence angle d'étrave pour dispositif n°2

Comme précédemment, on observe sur la Figure 5.60 le champ de vitesse vertical pour deux angles d'étrave α= 65°et α=45°. Dans ce cas, les zones vertes correspondent à des vitesses positives, et les zones bleues à des vitesses négatives.
De la même manière que pour la configuration alignée, plus l'angle d'étrave est important et plus l'écoulement latéral est limité.

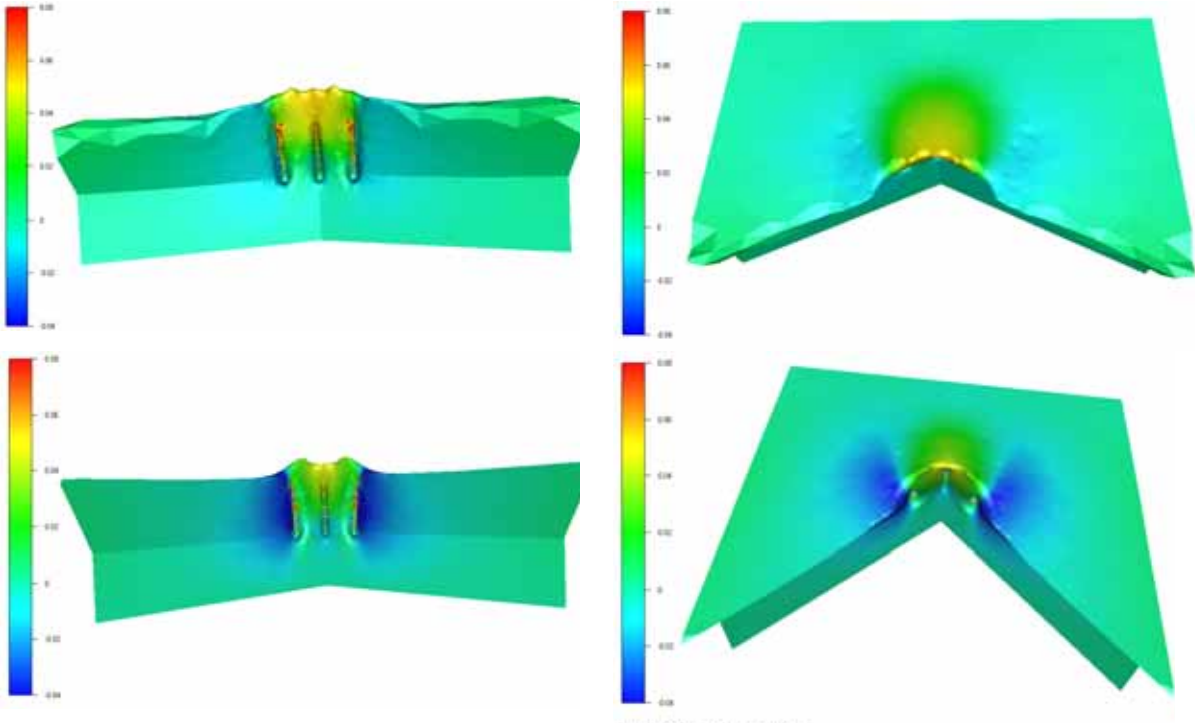


Figure 5.60 : dispositif n°2 – avancée 20cm – composante verticale du champ de vitesse. (en haut) étrave 65°, (en bas) étrave 45°.

5.5.3 Influence des configurations sur la répartition des efforts

Configuration Alignée

Le graphe de l'évolution des efforts pour le dispositif n°1 montre un "délestement" des efforts horizontaux et verticaux de la dent centrale par rapport aux autres dents (Figure 5.61). L'observation expérimentale montre clairement ce délestement pour des systèmes multidents en obliques (CER-Rouen) et différents types de sols (Figure 5.62). En effet, pour trois types de sols, sable, grave et limon, c'est la première dent qui engendre le maximum d'efforts, alors que la suivante est délestée. Les autres dents ont des valeurs intermédiaires qui varient suivant le type de sol.

Cette configuration a aussi une influence sur l'angle de la résultante pour chaque dent (Figure 5.61). Par rapport à une dent seule cet angle diminue de

15°. L'interaction entre les dents conduit donc à privilégier la résistance à l'avancement plutôt que la composante verticale. En effet nous avons constaté (section 5.5.1) que le groupe de dents pousse la matière devant le dispositif. La remontée de matière, le long des dents, étant plus limitée la composante verticale est plus faible. L'évolution des efforts montre bien que si les forces verticales se stabilisent, les forces horizontales augmentent continuellement. L'état stationnaire sera probablement atteint pour une avancée de l'ordre de 50 cm.

L'interaction des dents à lieu en termes de distribution des efforts, mais aussi dans l'orientation de la résultante.

D'autre part, si les efforts verticaux sur les dents du système semblent se stabiliser rapidement il n'en va pas de même pour les efforts horizontaux. On est encore dans une phase instationnaire.

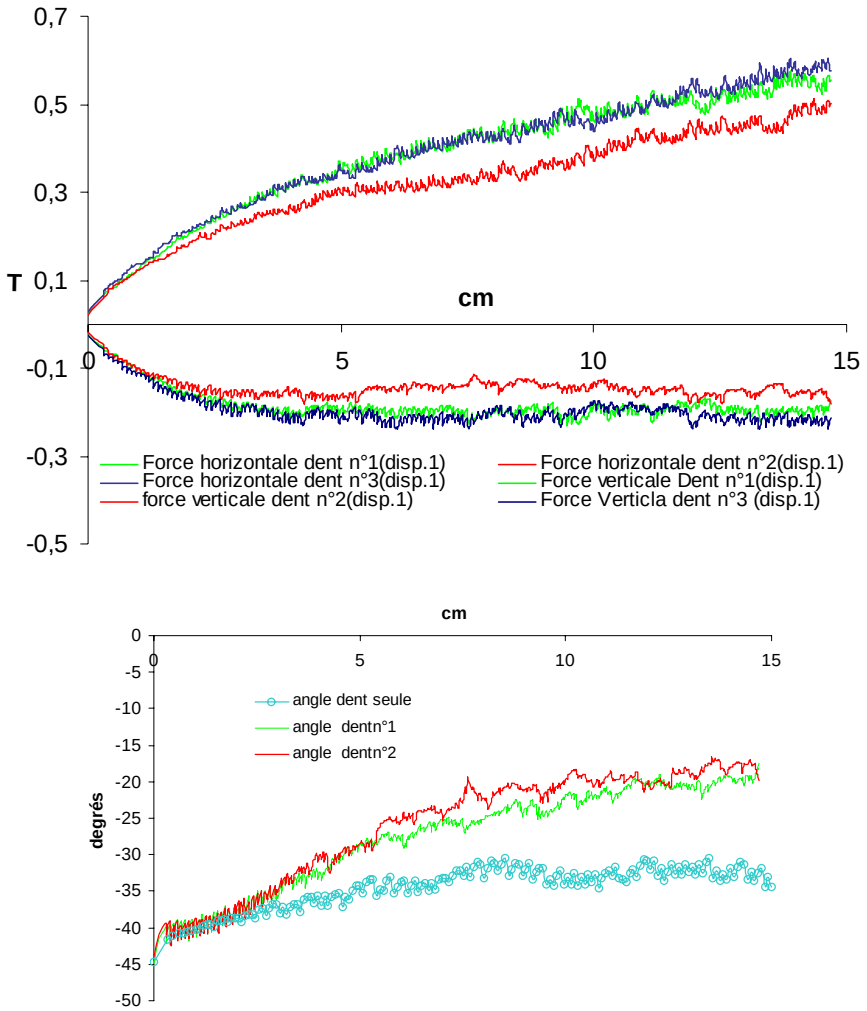


Figure 5.61 : (en haut) évolution des efforts pour la configuration alignée (étrave 65°). (en bas) évolution de l'angle de la résultante pour les dents n°1 et 2 du système et pour une dent seule.

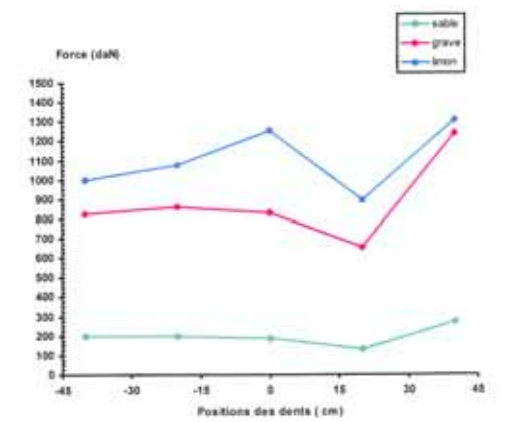


Figure 5.62 : Répartition des efforts par dents sur un dispositif expérimental (DIDEMEX, [96]). Etrave de 65°, 5 dents à 45°, espace interdent de 17cm. La dent d'attaque correspond à l'abscisse + 34cm sur le graphe.

Configuration en V

Le dispositif n°2 a une répartition des efforts différente (Figure 5.63). Initialement la dent centrale, en avant par rapport aux autres, présente l'effort le plus important. Ensuite, au delà de cinq cm d'avancée, la force se stabilise, alors que celles sur les dents externes augmentent régulièrement, et la dépassent.

D'autre part l'influence du groupe de dent sur la résultante par rapport à une dent seule, dans cette configuration en V, est moins importante que pour la configuration alignée. Pour le dispositif en V, la remontée de matière le long des dents est plus importante (voir zones de contact Figure 5.57). Ainsi, à l'inverse du dispositif aligné, se sont les efforts verticaux et horizontaux qui augmentent régulièrement (pour les dents externes).

Enfin on constate que, dans les premiers centimètres de scarification, l'évolution de la résultante pour une dent seule et pour la dent centrale du système sont confondues. Ensuite, c'est l'évolution de la résultante pour la dent externe du dispositif qui se confond avec celle de la dent seule.

Ce résultat peut nous permettre de mieux comprendre l'action de chaque dent dans le dispositif. L'action de la dent centrale est principalement dévolue à la scarification, l'écoulement local à la dent (remontée de matière le long de la dent) se stabilise rapidement. Les dents externes quant à elles scarifient la matière (écrouie) évacuée par la dent centrale. Ainsi leurs efforts augmentent régulièrement et ne se stabiliseront que lorsque l'écoulement du système global sera stationnaire.

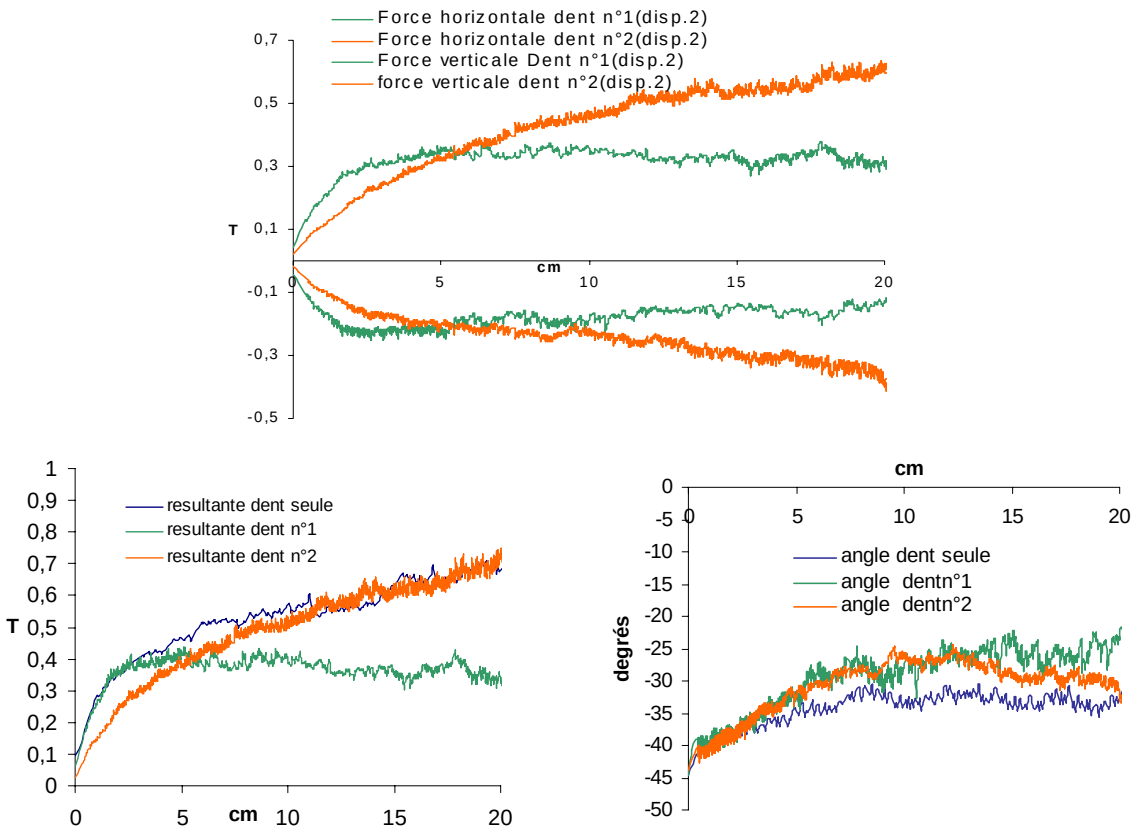


Figure 5.63 : : (en haut) évolution des efforts pour la configuration en V (étrave 65°). (en bas) évolution de la résultante et de son angle pour les dents n°1 et 2 du système et pour une dent seule.

5.5.4 Conclusion

Dans le cas des Outils Multi-dents nous avons testé deux configurations à trois dents : un dispositif où les dents sont alignées et un dispositif en V. Ces simulations ont montré le caractère très intensif des calculs (jusqu'à 11 jours de calcul).

Effet de Groupe

Dans ces dispositifs multi-dents, l'interaction entre les dents a été mise en évidence. On constate que la matière, pour un comportement purement cohésif, s'écoule peu entre les dents : une partie de la matière est poussée par le dispositif et ou une partie s'écoule latéralement. Cet effet de groupe a lieu aussi pour des sols frottants, mais la quantité de matière qui s'écoule entre les dents est plus importante (peignage).On a pu observer alors la prépondérance d'un mode écoulement sur l'autre en fonction de l'angle d'étrave.
Chaque dent présente une évolution des efforts liée à la configuration globale du système et sa place en son sein. A ce titre on a constaté un bon accord qualitatif en termes d'efforts avec les expériences en vraie grandeur menées au CER de Rouen, qui montrent le délestage de la dent immédiatement après la dent d'attaque pour un dispositif aligné oblique.

5.6 Scarification Multi-dents avec Lame

Choix de l'outillage

La profondeur de scarification du dispositif est toujours de 30 cm. Les données géométriques des dents sont celles de la section 5.2. L'angle de scarification est de 45° et l'espace inter-dent est de 17cm (ordre de grandeur pour un outil de déminage réel). La configuration des dents est en V, l'étrave est de 45° et l'inclinaison de la lame est de 15°. La largueur de la lame est de 34 cm. La vitesse est de 0,2 m/s. Etant donné la symétrie on effectue la simulation avec un demi-outil.

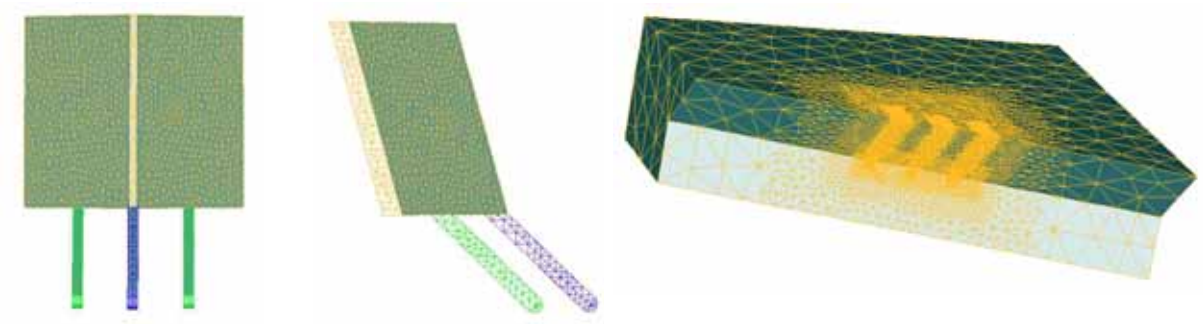


Figure 5.64 : Outillage 3 dents en V, angle de scarification 45°, étrave 45°. Maillage : 16726 nœuds et 66306 tétraèdres

Rhéologie

Comportement elasto-plastique incompressible avec écrouissage :
Les paramètres élastiques :

$$E = 8Mpa$$

$$v = 0{,}3$$

Le critère de *Von Mises* :

$$f = \sqrt{\tfrac{3}{2}\|s\|} - \sigma_0(\bar{\varepsilon}) = 0; \quad \sigma_0(\bar{\varepsilon}) = \sqrt{3}k_0(1 + a\bar{\varepsilon})^n$$

Avec :

$$k_0 = 40kPa; a = 1{,}389; n = 0{,}514$$

frottement

Le frottement utilisé est le frottement de Coulomb tronqué. Au delà d'un certain seuil la scission de frottement est égale à une fraction de la contrainte d'écoulement.

- Coefficient de Coulomb : μ = 0.1
- m_{barre} = 0.3 (coefficient qui limite la scission de frottement aux fortes pressions de contact)

Temps de Calculs

Prés de 20 jours de calculs sur Machine IBM (processeurs IBM Power3-II, 375 Mhz), ont été nécessaires pour effectuer 20 cm d'avancée du dispositif multi-dent + Lame. Pour une telle avancée la taille du maillage dépasse les 50 000 nœuds et 200000 éléments.

Avancée Outillage = 20cm		
	3 dents en V + Lame	***3 dents en V***
Durée totale de la simulation	***368h (<20jours)***	***155h(<7jours)***
Maillage Initial	***16726 nœuds***	***6454 nœuds***
	66306 tétraèdres	***24940 tétraèdres***
Maillage Final	***53551 nœuds***	***11272 nœuds***
	230011 tétraèdres	***44229 tétraèdres***

L'apport de la lame a quintuplé le nombre de nœuds et augmenté le temps de calcul d'un facteur 2,3. Pour des outils de déminage réels, ou des outils expérimentaux, les temps de calculs déjà longs, vont croître à cause non seulement de l'augmentation de la taille de l'outil (nombre de dents), mais aussi de l'avancée nécessaire pour obtenir un état stationnaire.

Par exemple pour le dispositif DIDEMEX (5 dents en V + lame, largeur 1,2m) l'état stationnaire sera atteint pour une avancée équivalente à la largeur du dispositif. Pour une configuration en oblique à deux fois sa largeur. En séquentiel, le temps de calcul peut être estimé à 5 mois ½ (5 dents configuration en V pour une avancée de 1,20m).

Ainsi il apparaît naturel de s'orienter vers l'emploi du calcul parallèle. L'estimation de temps de calcul présentée plus haut peut alors être orienté à la baisse en fonction du nombre de processeurs mis en jeu (10 jours sur 16 processeurs).

Mode d'écoulement et efforts

La configuration déformée met bien évidence la formation du bourrelet de matière de part et d'autre de la lame et la formation de sillons dus à l'action des dents(Figure 5.65). L'avancée n'est pas suffisante pour mettre en œuvre les cordons latéraux. En effet l'observation des lignes de niveaux montre que la matière s'accumule devant la lame. Nous avons vu que c'est un mode de déformation transitoire avant que la matière ne s'écoule de part et d'autre de la lame.

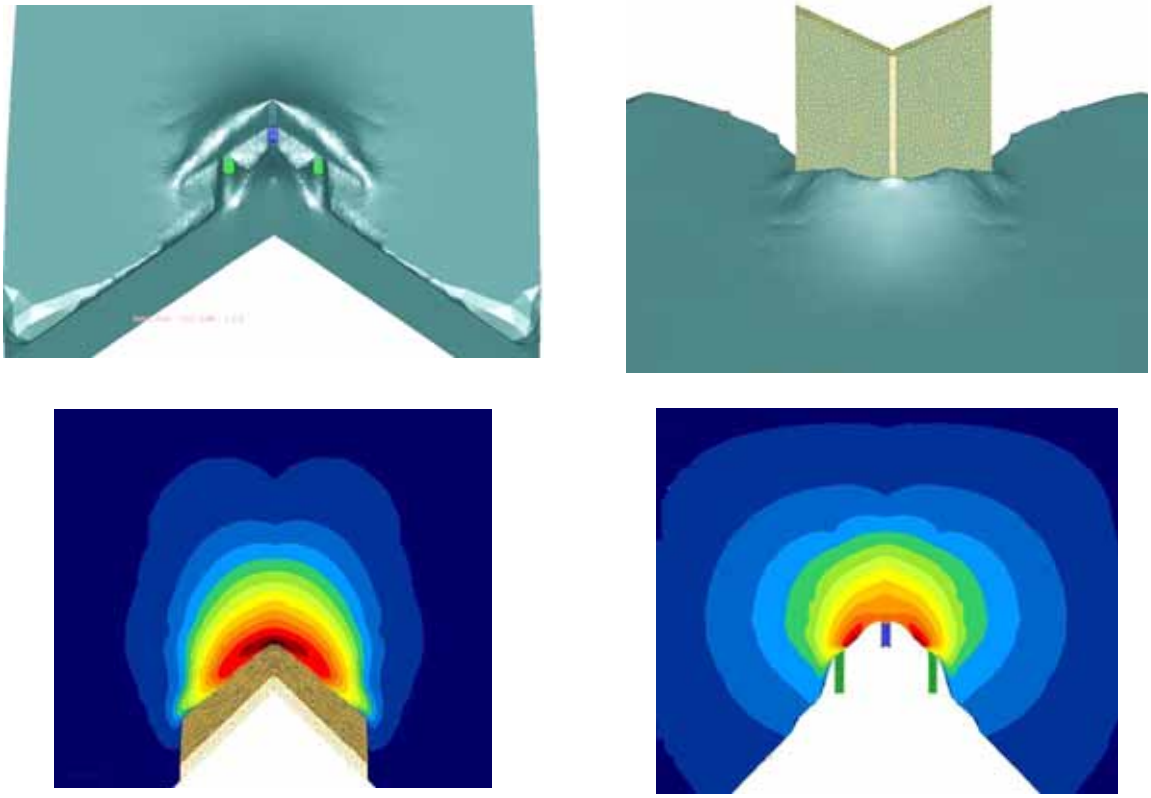


Figure 5.65 : Configuration déformée pour un outillage à 3 dents en V + lame. (en bas à gauche) ligne de niveaux pour l'outillage multi-dent + lame. (en bas à droite) ligne de niveaux pour outillage multidents (3 dents en V).

On constate que les efforts sur les dents évoluent de manière analogue au cas sans lame. Le fait que l'effort sur la lame n'apparaisse que pour une avancée de 5 cm met en évidence l'effet de groupe des dents qui pousse la matière et retarde ainsi la mise en contact avec la lame.
Enfin la résistance à l'avancement pour la lame, à partir de son activation, augmente linéairement. L'état stationnaire est loin d'être atteint.

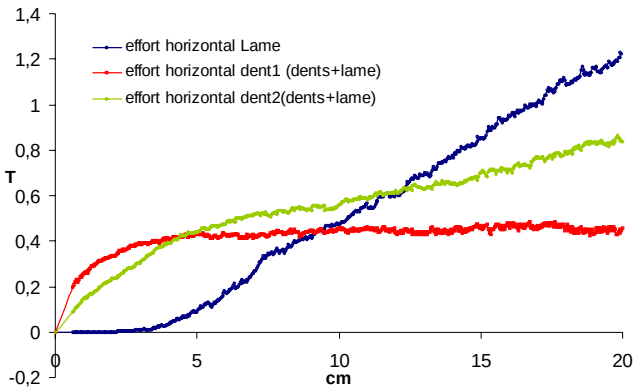


Figure 5.66 : Efforts horizontaux pour les dents n°1, n°2 et la lame.

5.7 Conclusions

Scarification d'un massif semi-infini

Nous avons mis en évidence l'aptitude du code Forge3® à prendre en compte les grandes déformations issues de la scarification.

Nous avons pu saisir l'influence de l'inclinaison de la dent sur le mode d'écoulement de matière, dans le cas d'un matériau incompressible. On observe la formation d'un copeau au devant de l'outil (pour des angles faibles), ou bien un écoulement latéral qui prédomine avec la formation d'un bourrelet (angles forts). D'autre part la sollicitation de scarification est semblable à une sollicitation de coupe.

Scarification pour une dent : influence du Sol

Il apparaît que, étant donné les grandes sollicitations mises en jeu, seules les données à l'état critique ont une influence sur les résultats (efforts) : Angle de frottement à l'état critique pour *CJS EC*, et cohésion critique pour *CJS Tresca*.

Cependant, pour le modèle compressible CJS EC, en raison des faibles avancées de dent, ou d'enfoncement de plaque, simulées, nous n'avons pu mettre en évidence l'influence des paramètres du modèle sur le mode d'écoulement de matière. La raison tient dans les difficultés de convergence rencontrées dans les algorithmes de résolutions.
Nous avons constaté un champ de pression très bruité à l'interface outil/matière. Ce bruit est d'autant plus amplifié et pénalisant que le comportement est sensible à la pression hydrostatique. Le remaillage (transport des variables d'état) et le contact pénalisé sont aussi des facteurs aggravants.

Pour un comportement incompressible CJS-*Tresca*, on obtient un signal d'efforts stationnaire pour des avancées inférieures à 3cm. La présence du "pic" dans la relation contrainte/déformation dans le cas adoucissant n'a pas d'influence sur l'évolution et la valeur stationnaire de la force.

La confrontation à l'expérience, dans le cas incompressible, montre que la résistance à l'avancement prédit par le modèle est très nettement inférieure à la valeur expérimentale. Néanmoins l'état de contrainte et les efforts donnés par le code sont cohérents par rapport aux paramètres d'entrée. Il apparaît donc que l'obtention de ces paramètres par des essais triaxiaux n'est pas adaptée à la sollicitation de scarification.

Outil Dent+Lame :

Nous avons pu saisir les actions spécifiques de la dent et de la lame : déstructuration du matériau pour la dent, évacuation pour la lame.
La quantité de matière à évacuer par la lame dépend directement de l'inclinaison de la dent : à 15°, peu de remontée de matière, à 45°, remontée plus importante. L'évacuation et la forme de l'écoulement dépendent eux de l'angle d'étrave de la lame.

L'aspect bi-échelle d'un tel outillage est clairement apparu. Les efforts des dents se stabilisent très rapidement, alors que ceux de la lame, qui est plus large et qui sollicite plus de matière, sont plus longs à se stabiliser. L'instationnarité est liée à la croissance du bourrelet au devant du dispositif.

Effet de Groupe

Pour des dispositifs alignés ou en V, l'interaction entre les dents a été mise en évidence. On constate que la matière, pour un comportement purement cohésif, s'écoule peu entre les dents : une partie de la matière est poussée par le dispositif et ou une partie s'écoule latéralement. Cet effet de groupe a lieu aussi pour des sols frottants, mais la quantité de matière qui s'écoule entre les dents est plus importante (peignage).

On a constaté un bon accord qualitatif en termes d'efforts avec les expériences en vraie grandeurs menées au CER de Rouen, qui montrent le délestage de la dent immédiatement après la dent d'attaque pour un dispositif aligné oblique.

Temps de calculs

Les différentes simulations ont montré l'aspect très intensif des calculs : pour une seule dent et 30 cm d'avancée, un jour de calcul est nécessaire, pour trois dents et une lame et 20 cm d'avancée, 20 jours de calculs sont nécessaires.

REFERENCES

[1] ABDEL-FATTAH T.T., HODHOD H.A., AKL A.Y., *"A novel formulation of infinite elements for static analysis"*, Computers and Structures, 77, pp. 371-379, (2000).

[2] ABOUAF M., *"Modélisation de la compaction de poudres métalliques frittées"* Thèse Doct. es sciences, Université scientifique et médicale et ENP de Grenoble, 168 p. (1985).

[3] ABU-FARSAKH M.Y., VOYIADJIS G.Z., *" Computational model for the simulation of the shield tunneling process in cohesive soils"* Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., **22**, pp. 00-22, (1998).

[4] ABU-FARSAKH M.Y., VOYIADJIS G.Z.,TUMAY M.T., *"Numerical analysis of the miniature piezocone penetration tests (PCPT) in cohesive soils"* Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., **22**, pp. 791-818, (1998).

[5] AHADI A., KRENK S., *"Characteristic state plasticity for granular materials Part I : Basic theory"*, International Journal of Solids and Structures, 37, pp 6343-6360 (2000).

[6] AHADI A., KRENK S., *"Characteristic state plasticity for granular materials Part II : Model calibration and results"*, International Journal of Solids and Structures, 37, pp 6361-6380 (2000).

[7] ARNOLD D.N., F. BREZZI, FORTRIN M., "A stable finite elemnt for stokes equations". Calcolo., **21**, 337-344, (1984).

[8] ASAOKA A., NAKANO M., NODA T., *"Soil-Water coupled behaviour of saturated clay near/at critical state"* Soils and foundations, **34,** pp.91-105 (1994).

[9] ASHBY S. F., MANTEUFFEL T. A., SAYLOR P. E., *"A Taxonomy for Conjugate Gradient Methods"* SIAM, J. Numer. Anal., vol. 27, No 6, pp. 1542-1568, (1990).

[10] BABUSKA I., "The finite element method with penalty" Math ; Comp., **27**, 221-228, 1973.

[11] BARBAS A., *"contribution à l'utilisation de la méthode des éléments finis en Mécanique des Sols dans le domaine de l'élasto-plasticité"* Thèse Doct. génie civil, ENPC, 140 p. (1981).

[12] BARDET J.P., *"A Comprehensive Review of Strain Localisation in Elasto-Plastic Soils"*, Computers and Geotechnics, **10**, pp. 163-188,

(1990).

[13] BAUER E., *"Conditions for embedding Casagrande's critical states into hypoplasticity"*, Mech. Cohes.-Frict. Mater., **5**, pp. 125-148, (2000).

[14] BAZANT Z., PIJAUDIER-CABOT G., *"Nonlocal Continuum Damage, Localisation Instability and Convergence"*, Journal of Applied Mechabics, **55**, pp. 287-293, (1988).

[15] BELLET M., *"Finite element analysis of compressible viscoplasticity using a three-field formulation"*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 175, pp. 19-40, (1999).

[16] BORGA R.I., LEE S.R., *"Cam-Clay Plasticity, Part I : Implicit integration of elasto-plastic constitutive relations"* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **78**, pp. 49-72 (1990).

[17] BORGA R.I., LEE S.R., *"Cam-Clay Plasticity, Part II :Implicit integration of contitutive equations based on non-linear elastic stress predictor"* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **88** pp. 225-240 (1991).

[18] BORGA R.I., TAMAGNIGNI C., *"Critical State Model at Finite Strain"* Proceedings of the 11th Conference on Engineering Mechanics, pp. 148-151 (1996).

[19] BOUSSHINE L., CHAABA A., DE SAXCE G., *"Softening in stress-strain for Drucker-Prager non-associated plasticity"* International Journal of Plasticity , **17**, pp. 21-46, (2001).

[20] BRAUDEL H.J., *"Modélisation des grandes transformations élastoplastique d'un solide isotrope par la méthode des éléments finis. Application à la forge à froid des métaux"* Thèse Doct. es sciences, Université de Lyon I, 226 p. (1986).

[21] BREZINSKI C., REDIVO-ZAGLIA M., *"Treatment of near-breakdown in the CGS algorithm"* Numerical Algorithm, vol. 7, pp. 33-73, 1994.

[22] BUCAILLE J.L., *"Simulation numérique de l'indentation et de la rayure des verres organiques",* Thèse de Doctorat, ENSMP, (2001).

[23] CAMBOU B., CHAZE M., DEDECKER F., *"Change of scale in granular materials"* Eur. J. Mech. A/Solids, **19**, pp. 999-1014 (2000).

[24] CAMBOU B., JAFARI, *"Modèles de comportement des sols non cohérents"* Revue française de Géotechnique, **44**, pp. 43-55 (1988).

[25] COUPEZ T., *"Génération de maillage et adaptation de maillage par optimisation locale"* Revue Européenne des éléments finis, **9**, pp. 403-

423, (2000).

[26] COUPEZ T., *"Stable-stabilized finite element for 3D forming calculation"* Communication interne (1995).

[27] COUSSY O., *"Mécanique des Milieux Poreux "* Edition Technip (1991).

[28] CHEN W.F., BALADI G.Y., *"Soil Plasticity : Theory and Implementation"* Developments in Geotechnical Engineering, **38**, Elsevier, New York (1985).

[29] CHEN W.F., MIZUNO E., *"Nonlinear Analysis in Soil Mechanics :Theory and Implementation"* Developments in Geotechnical Engineering, **53**, Elsevier, New York (1990).

[30] CHI L., KUSHWAHA R.L., *"Three-Dimensionnal, finit element interaction between soil and tillage tool"* ASAE, **34,** pp. 361-366 (1991).

[31] CHOPRA M. B., DARGUSH G.F., *"Finite Element Analysis of time Dependent Large-Deformation Problems "* Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., **16**, pp. 101-130, (1992).

[32] COTECCHIA F., CHANDLER R.J., *"A general framework for the mechanical behaviour of clays"*, Géotechnique, **50**, **4**, pp. 431-447, (2000).

[33] CUNDALL P., STRACK O.D.L., *"A discrete method for granular assemblies"*, Géotechnique, **2**, pp. 47-65, (1979).

[34] DE BORST R., VERMEER P.A., *"possibilities and limitations of finite elements for limit analysis"* Géotechnique, **34,** pp. 119-210 (1984).

[35] DE BORST R., *"Robustness in numerical computations of damage evolution in cohesive-frictional material"*, Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, **4,** pp. 27-54 (1997).

[36] DE BORST R., HEERES O. M., *"Performance of low-Order triangular elements during plastic flow"* Engeneering Computations, **16, 1,** pp. 70-87 (1999).

[37] DESAI C.S., ZAMAN M.M., LIGHTNER J.G., SIRIWARDANE H.J., *"Thin layer element for interfaces and joints"*, Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., **8**, pp. 19-43 (1984).

[38] DESSAI C.S., GIOCLA G., *"Modelling and Testing : Implementation of numerical models and their application in practice"* in *"Numerical Methodes and Constitutive Modelling in Geomechanics" Ed. C.S.*, C.I.S.M. Courses and Lectures, **311**, pp.1-168 (1990).

[39] DWORKIN J., *"large stains in cemented granular aggregates elastic-plastic cement"* Mechanics of Materials, **23**, pp. 29-44 (1996).

[40] ETEROVIC A. L., BATHE K., *"A Hyper-Elastic-Based Large Strain Elasto-Plastic Constitutive Formulation with Combined Isotropic-Kinematic Hardening using the Logarithmic stresses and Strain Measures"* Int. J. Numer. Meth. Engrg., **30,** pp. 1099-1114 (1990).

[41] FAMIYESIN O.R., *"Robust Symmetric Formulations for Nonassociated Plasticity Problems"*, Journal of Engineering Mechanics, **125**, **9**, pp. 1070-1080, (1999).

[42] FELIX B., *"La méthode des éléments finis en viscoélasticité et en viscoplasticité. Application à la mécanique des sols"* Rapport de recherche LPC n°123 (1983).

[43] FLETCHER R., *"Conjugate Gradient methods for indefinite systems"*, Lecture Notes Math., **506**, 73-89, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (1976).

[44] FREDLUNG D.G., *"The 1999 R.M. Hardy Lecture : The Implementation of unsaturated soil mechanics into geotechnical engineering"*, Can. Geotech. J., 37, pp. 963-986, (2000).

[45] GAY C., "Contribution à la simulation numérique tridimensionnelle du forgeage à froid", Thèse de Doctorat, ENSMP, (1995).

[46] GAWRONSKI W., *"Fuzzy Elements"* Computers and structures, **10,** pp. 863-865 (1979).

[47] GEE-CLOUGH D., WANG J., KANOK-NUKULCHAI W., *"Deformation and Failure in Wet Clay Soil : Part 3, Finite Element Analysis of Cutting of Wet Clay by Tines"*, J. agric. Engng. Res., **58**, pp.121-131, (1994).

[48] HASHASH Y.M.A., WHITTLE A.J. *"Integration of the modified Cam-Clay Model in non-linear finite element analysis"* Computers and geotechnics, **14,** pp. 59-83 (1992).

[49] HILD P. *"Problèmes de contact unilatéral et maillages éléments finis incompatibles"* Thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier, 1998.

[50] HSI J.P., SMALL J.C., *"Analysis of excavation in an elasto-plastic soil involving drawdown of the water table"* Computers and Geotechnics, **13**, pp.1-19 (1992).

[51] HU Y., RANDOLPH M.F., *"H-adaptaive FE analysis of elasto-plastic non-homogeneous soil with large deformation"*, Computers and Structures, **23**, pp. 61-83, (1998).

[52] HUANG T.K., CHEN W.F., CHAMEAU J.C., *"The application of cap-plasticity-model to embankment problems"* Computers and structures, **44,** pp. 1349-1369 (1992).

[53] ITASCA consulting, *"Documentation de FLAC2D© : strain-softening model"*, User's Manuel, Minneapolis, 1994.

[54] ITSKOV M., *"On the theory of fourth-order tensors and theior applications in computational mechanics"*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **189**, pp. 419-438, (2000).

[55] JAOUEN O., *"Modélisation tridimensionnelle par éléments finis pour l'analyse thermo-mécanique du refroidissement des pièces coulées"* Thèse Doct. Science et Génie des Matériaux, E.N.S.M.P., 1998.

[56] JARUSEK J., ECK C., *"Dynamic contact problems with friction in linear viscoelasticity"*, C. R. Acad. Sci. Paris, **322**, **I**, pp. 467-502, (1996).

[57] JEAN M., MOREAU J.J., *"Unilateraly and dry friction in dynamics of rigid bodies collections"*, Ed. par Curnier, Proceedings of the Contact Mechanics International Symposium, pages 31-48, lausanne, 1992. Presses polytechniques et Universitaires Romandes.

[58] JEREMIE B., *" Line search techniques for elasto-plastic finite element computations in geomechanics"*, Commun. Numer. Meth. Engng, **17**, pp. 115-125 (2000).

[59] KERYVIN V., DESOYER T., HANUS J-L., *"Localisation de la déformation sous sollicitations lentes : une approche dynamique"*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 328, Série II *b*, p. 727-732, (2000).

[60] KHOGO Y., NAKANO M., MIYAZAKI T., *"Theoretical Aspects of Constitutive Modelling for Unsaturated Soils"*, Soils and Foundations, **33**, **4**, pp. 49-63, (1993).

[61] KIOUSIS P.D., VOYADJIS G.Z., *"Lagrangean continuum theory for saturated porous media"* Journal of Engineering Mechanics., **111**, pp. 1277-1288 (1985).

[62] KIOUSIS P.D., VOYADJIS G.Z., TUMAY M.T., *"A Large Stain Theory for the Two-Dimentional Problems in Geomechanics"*, Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., **10**, pp. 17-39 (1986).

[63] KOLMAYER P., *"Rhéologie et modélisation des Sols de surface pour l'interprétation in situ"*, Rapport, ETAS, décembre 1998.

[64] KOLMAYER P., *"Modélisation du comportement Mécanique des Sols de Surface et Identification In Situ"*, Thèse de Doctorat en Génie Civil, Ecole Centrale de Lyon, 170 p., (2001).

[65] KUSHWAHA R.L., SHEN J., *"finite element analysis of dynamic interaction between soil and tillage tool"* ASAE, **37,** pp. 1315-1319 (1992).

[66] LABORDE P., TOSON B., PESQUE J.-J., *"On the consistent tangent operator algorithm for thermo-plastic problems"* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **146,** pp. 215-230 (1997).

[67] LAURSEN T.A., SIMO J.C., *"A continuum-based finite element formulation for the implicit solution of multibody, large deformation frictional contact problems"*, Int. J. Numer. Methods Eng., **36**, pp. 3451-3485, (1993).

[68] LEE E.H., *"Elastic-Plastic deformation at finite strains"* J. Appl. Mech. Trans. ASME, **36**, pp. 1-6 (1969).

[69] LEGENDRE A., BACCONNET C., "*Rapport d'essais de scarification*", LERMES, Ensemble Universitaire des Cézeaux, mai 2001.

[70] LIU Y., HOU Z.M., *"Three dimensionnal nonlinear finite element analysis of soil cutting by narrow blades"* in :Proc. of Int. Conf. On Soil Dynamics, Auburn, Ala. 2 :338-347. Nat. Tillage MachineryLab., Auburn, Ala (1985).

[71] LIU C.H., WONG J.Y., *"Numerical Simulations of tire-soil interaction based on Critical State Soil Mechanics"* Journal of Terramechanics, **33**, pp.209-221 (1997).

[72] MACARI E.J., WEIHE S., ARDUINO P., *"Implicit integration in elastoplastic constitutive models for frctional materials with highly non-linear hardening functions"*, Mech. Cohes.-Frict. Mater., **2**, pp. 1-29, (1997).

[73] MALEKI M., *" Modélisation hiérarchisée du comportement des Sols"*, Thèse de Doctorat en Génie Civil, Ecole Centrale de Lyon, 252 p., (1998).

[74] MARCON A.F., BITTENCOURT E., CREUS G.J., *"On the integration of stresses in large deformation plasticity"* Engineering Computations, **16**, pp 49-69, (1999).

[75] MARIE S. *"Un Modèle de Parallélisation S.P.M.D pour la Simulation Numérique de Procédés de Mise en Forme de Matériaux"*, Thèse de Doctorat, ENSMP, (1997).

[76] McMEEKING R.M., RICE J.R., *"Finite element formulations for problems of large elastic-plastic deformation"* Int. J. Solids struct., **11** pp.601-616 (1975).

[77] MESCHKE G., LIU C., MANG H.A., *"Large strain finite element*

analysis of snow" J. Engrg. Mech., **122,** pp.591-602 (1996).

[78] MIJAR A.R., ARORA J.S., *"Review of Formulations for elastostatic frictional contact problems"*, Struct. Multidisc. Optim., **20**, pp. 167-189, (2000).

[79] MIZUNO E., CHEN W.F., *"plasticity analysis of slope with different flow rules"* Computers and structures, **17**, pp. 375-388 (1983).

[80] MOCELLIN K., *" Contribution à la Simulation Numérique Tridimentionnelle du Forgeage à chaud : Etude du Contact et Calcul Multigrille"* Thèse Doct. Science et Génie des Matériaux, E.N.S.M.P., 1999.

[81] MOREAU J.J., *"Unilateral and dry friction in finite freedom dynamics"*, Ed. par J.J. Moreau & Panagiotopoulos, CISM Courses and Lectures 302 Springer-Verlag Wien New-York), Non-smooth Mechanics and Application, pages 1-82, (1988).

[82] MOUAZEN A.M., *"Modelling the interaction between the Soil and tillage tools"*, Ph. D. Thesis, submitted to the Hungarian Academy of Sciences, Budapest, Hungary, 128 p., (1997).

[83] MOUAZEN A.M., NEMENYI M., *"A review of the finite element modelling techniques of Soil tillage"*, Mathematics and Computers in Simulation, 48, pp. 23-32, (1998).

[84] MROUEH H., SHAHROUR I., *"Use of sparse iterative method for the resolution of three-dimensional soil / structure interaction problems"* Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., vol. 23, pp. 1961-1975, (1999).

[85] NAGTEGAAL J.C., DE JONG J.E., *"Some computational aspects of elastic-plastic larges stain analysis"* Int. J. Numer. Meth. Engrg., **17,** pp. 14-41 (1981).

[86] NAGTEGAAL J.C., *"On the implementation of inelastic constitutive equations with special reference to large deformation problems"* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **33,** pp. 469-484 (1982).

[87] NOUGUIER C., *"Simulation des Interactions Outil-Sol, Application aux Outils de Traitement des Sols"*, Thèse de Doctorat en Mécanique, Génie Mécanique, Génie Civil, Université Montpellier II, 144 p., (1999).

[88] ORTIZ M., POPOV E.P., *"Accuracy and Stability of Integration Algorithms for Elastoplastic Constitutive Relations"* Int. J. Num. Meth. Engrg., **21**, pp. 1561-1576, (1985).

[89] PALMER A.C., *"Speed effects in cutting and ploughing"*, Géotechnique, **49**, **3**, pp. 285-294, (1999).

[90] PERCHAT E., “MINI-élément et factorisation incomplètes pour la parallélisation d’un solveur de Stokes 2D. Application au Forgeage”. Thèse de Doctorat, ENSMP, (2000).

[91] PETRYK H., *“Plastic Instability : Criteria and Computational Approaches”* Archives of Computational Methods in Engineering, Vol **4**, **2**, pp 111-151, (1997).

[92] PORAN C.J., RODRIGUEZ J.A., *“Finite element analysis of impact behavior of sand”* Soils and foundations, **32**(4), pp. 68-80 (1992).

[93] POTTS D.M., GENS A., *“A critical assessment of methods of correcting for drift from the yield surface in elastoplastic finite element analysis”* Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., **9,** pp. 149-159 (1985).

[94] PREVOST J.H., *“Mechanics of continuous porous media”* Int. J. Engng Sci., **18**, pp. 787-800 (1980).

[95] PREVOST J.H., *“SHORT COMMUNICATION : Localization of deformations in Elastic-Plastic Solids”* Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech., **11**, pp. 187-196 (1984).

[96] QUIBEL A., FROMENTIN M., *“Essais en vraie grandeur d’un dispositif expérimental de scarification des Sols”,* Centre d’Expérimentation Routière, LCPC, Juin 2001.

[97] REGUEIRO R. A., BORJA R.I., *“Plane strain finite element analysis of pressure sensitive plasticity with stong discontinuity”*, Int. J. Solids. Structures, **38**, pp. 3647-3672, (2001).

[98] ROUAINIA M., MUIR WOOD D., *“An implicit constitutive algorithm for finite Cam-clay elasto-plastic model”*, Mech. Cohes.-Frict. Mater., , pp. 469-489, (2000).

[99] RUNESSON V., *“Implicit integration of elastoplastic relations with reference to soils”* Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech., **11**, pp. 315-321 (1987).

[100] RUNESSON K., *“A note on nonassociated plastic flox rules”* International Journal of Plasticity, **5**, pp. 639-658 (1989).

[101] SALENÇON J., *“Théorie de la plasticité pour les applications en mécanique des Sols”*, Eyrolles, (1974).

[102] SCHLOSSER F., *“Element de mecanique des sols”*, Presse de l’Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, (1983).

[103] SHENG D.,SLOAN S.W., YU H.S. *“ Aspects of finite element implementation of critical state models”*, Computational Mechanics, 2000, **26**, **2**, pp 185-196, (2000).

[104] SIDOROFF F., *"Incremental constitutive equation for large strain elastoplasticity"* Int. J. Eng. Sci., **20**, pp. 19-26 (1982).

[105] SIMO J.C., TAYLOR R.L., *"Consistent tangent operator for rate-independent elastoplasticity"* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **48,** pp. 101-118 (1985).

[106] SIMO J.C., JU J-W., PISTER K.S., TAYLOR R.L., *"Assessment of Cap Model : Consistent Return Algorithms and Rate-Dependent Extension"* Journal of Engineering Mechanics, **114**, **2**, pp 191-218, (1988).

[107] SIMO J.C., KENNEDY J.G., GOVINDJEE S. K.S., *"Non-Smooth Multisurface Plasticity and Visco-Plasticity. Loading/Unloading Conditions and Numerical Algorithm"* Int. J. Num. Meth. Engrg., **26**, pp. 2161-2185, (1988).

[108] SIRIWARDANE H.J., DESAI C.S., *"Computational procedures for non linear three dimensional analysis with some advanced constitutive laws"* Int. J. Numer.Anal.Meth. Geomech., **7,** pp.143-171 (1983).

[109] SNITBHAN N., CHEN W.F., *"Elastic-plastic large deformation analysis of soil slopes"* Computers and structures, **9,** pp. 567-577 (1978).

[110] SONNELVED P., "CGS :a fast Lanczos-type solver for nonsymmetric linear systems", SIAM J. Sci. Statist. Comput., 10, 36-52, (1989).

[111] STOLLE D.F.E., VERMEER P.A., BONNIER P.G.,*" Time Integration of a constitutive law for soft clays"*, Commun. Numer. Meth. Engng, **15**, pp. 603-609 (1999).

[112] SZABO L., *"Comments on loss of strong ellipticity in elastoplasticity"*, Int. J. Solids. Structures, **37**, pp. 3775-3806, (2000).

[113] TANAKA H., INOOKU K., NAGASAKI Y., MIYASAKI M., SUMIKAWA O., OIDA A., *"Simulation of Soil Loosening at Subsurface Tillage using Vibrating Type Subsoiler by means of the Distinct Element Method"*, Proceedings of the 8th European Conference of ISTVS, Umeå, Sweden, (2000).

[114] TRAORE K., "*Simulation thermomécanique du laminage circulaire : développement d'une formulation quasi-eulérienne tridimensionnelle sur une architecture parallèle.*", thèse de Doctorat, ENSMP, 2001

[115] VAN DER VORST H. A., "BI-CGSTAB : *A Fast and Smoothly Converging Variant of BI-CG for the Solution of Non-Symmetric Linear Systems"* J. Sci. Stat. Comput., vol. 13, No 2, pp 631-644, (1992).

[116] VAN DER VORST H. A. *"Parallel iterative solution methods for linear systems arising from discretized pde's"*. Technical Report AGARD R-

807, Proc. of Special Course on Parallel Computing in CFD, 1-39, AGARD, Neully-sur-Seine, 1995.

[117] VAN DER VORST H. A., VUIK C., *"The Superlinear Convergence Behaviour of GMRES"* Journal of Computational and Applied Mathematics (North Holland), vol. 48, pp. 327-341, (1993).

[118] VOYIADJIS G.Z., ABU-FARSAKH M.Y., *"Coupled Theory of Mixtures for Clayey Soils"* computers and geotechnics, **20,** pp. 195-222 (1997).

[119] WANG C.H., HU W., SAWYER J.P.G., *"Explicit numerical integration algorithm for a class of non-linear kinematic hardening model"* Computational Mechanics, 2000, Vol **26**, **2**, pp 140-147 (2000).

[120] WANG J., GEE-CLOUGH D., *"Deformation and Failure in Wet Clay Soil : Part 2, Soil Bin Experiments"*, J. agric. Engng. Res., **54**, pp.57-66, (1993).

[121] WRIGGERS P., *"Finite Element Algorithms for Contact Problems"*, Archives of Computational Methods in Engineering, State of the art reviews, **2**, **4**, pp. 1-49, (1995).

[122] XIE X.M., ZHANG D.J., *"An approach to 3-D nonlinear FE simulative method for investigation of soil-tool dynamic system"* in :Proc. of Int. Conf. On Soil Dynamics, Auburn, Ala. 2 :322-327. Nat. Tillage MachineryLab., Auburn, Ala (1985).

[123] YONG R.N., HANNA A.W., *"Finite element analysis of plane soil cutting"* Journal of terramechanics, **14,** pp. 103-125 (1977).

[124] ZHU Y., FOX P.J., MORRIS J.P., *"A pore-scale numerical model for flow through porous media"*, Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., 23, pp. 881-904, (1999).

[125] ZHANG H.W., SANAVIA L., SCHREFLER B.A., *"Gradient-dependent plasticity model and dynamic strain localisation of saturated and partially saturated porous media : one dimensional model"*, Eur. J. Mech. A/Solids, **19**, pp. 503-524, (2000).

[126] ZHANG H.W., SANAVIA L., SCHREFLER B.A., *"Numerical analysis of dynamic strain localisation in initially water saturated dense sand with a modified generalised plasticity model"*, Computers and structures, **79**, pp. 441-459, (2001).

Conclusions et Perspectives

La modélisation de l'interaction outil/sol se heurte à une somme de non linéarités : l'action d'un outil rigide fait intervenir le contact unilatéral ainsi que le frottement. La géométrie de l'outillage conduit à une évolution complexe de la surface libre. La nature du matériau mis en jeu témoigne d'un comportement fortement non linéaire.

Nous avons mené cette étude dans une approche milieux continus avec le code de mise en forme *Forge3®*. Ce code *Lagrangien* permet de modéliser les écoulements de matière par un système de remaillage automatique.

Pour décrire le comportement du matériau nous avons implémenté deux modèles : CJS Etat Critique pour des sols sableux et CJS *Tresca* pour des sols fins. Le modèle CJS Etat Critique est un modèle compressible capable de reproduire les relations de contraintes/déformations d'un matériau quel que soit son niveau de densité. Cette loi de comportement prend en compte la compressibilité, le durcissement, le ramollissement, le concept d'état critique et d'état caractéristique. La mise en œuvre numérique de ces lois s'avère alors complexe. On constate que la compressibilité, notamment dans la formulation vitesse/pression du code, conduit à une raideur non symétrique. D'autre part des difficultés de convergence dans l'algorithme d'intégration locale apparaissent pour les phases d'adoucissement. Ces difficultés peuvent être surmontées en diminuant le pas de temps et en régularisant le problème par l'activation des termes d'inertie.

Les simulations de scarification, dans le cas incompressible, ont montré l'aptitude du code *Forge3®* à mettre en œuvre des écoulements complexes pour de grandes avancées d'outils de scarification. L'influence des paramètres géométriques de l'outillage comme l'angle de scarification ou d'étrave est bien restitué par les simulations. L'interaction entre les dents a été mise en évidence, autant du point de vue de l'écoulement de matière que de la répartition des efforts. On constate en effet un bon accord qualitatif avec des essais multident en vraie grandeur (CER Rouen). Ces résultats montrent l'efficacité de la gestion du contact pénalisé avec des outils complexes, ainsi que des grandes déformations par l'algorithme de remaillage. Cependant les temps de calculs de ces simulations, pour atteindre l'état stationnaire, entrent dans le cadre du *calcul intensif* : on évalue à 5 mois ½ le temps de calcul nécessaire en séquentiel, pour un système à 5 dents plus une lame.

Les résultats de scarification avec les modèles de comportement des sols implémentés, montrent que, étant donné les grandes sollicitations mises en jeu, les paramètres des modèles qui ont une influence prépondérante sont issus de l'état critique du matériau. Ainsi, pour le modèle incompressible CJS-*Tresca*, la présence d'un "pic" dans la phase initiale de la relation

contrainte/déformation n'a pas d'influence sur l'évolution et la valeur stationnaire des efforts.

Cependant, pour le modèle compressible CJS EC nous avons rencontré des difficultés de convergence dans les algorithmes de résolutions (*Newton Global*). Nous avons constaté un champ de pression très bruité à l'interface outil/matière. Ce bruit est d'autant plus amplifié et pénalisant que le comportement est sensible à la pression hydrostatique. Nous avons identifié la pénalisation du contact, le transport des variables d'état après remaillage, ainsi que la nature linéaire du champ de pression comme source des difficultés numériques. Ainsi les algorithmes qui se sont avérés efficaces dans un premier temps montrent leurs limites, dans leur état actuel, pour un comportement compressible.

Enfin la confrontation à l'expérience, montre que la résistance à l'avancement prédite par le modèle (incompressible) est très nettement inférieure à la valeur expérimentale. Pourtant, l'état de contrainte prédit par le code semble cohérent au regard de la sollicitation et des paramètres d'entrée. L'obtention de ces paramètres par des essais triaxiaux ne serai donc pas adaptée à la sollicitation de scarification. Pour le cas incompressible (sols fins saturés ou partiellement saturés) on devrait alors déterminer une cohésion adaptée à la sollicitation de scarification.

Les perspectives de ces travaux sont nombreuses. A court terme, vis-à-vis des objectifs du PEA *" Sols de Surface"*, à plus long terme dans la modélisation de milieux compressibles en grandes déformations.

Les résultats de scarification en incompressible semblent indiquer une certaine inadéquation des paramètres issus d'essais triaxiaux. Les confrontations avec l'expérience doivent donc être poursuivies pour des matériaux frottants. Elles permettront de conclure sur la nature des paramètres d'entrée des modèles de comportement.
Les temps de calculs très longs des simulations orientent naturellement les travaux vers le calcul parallèle. Ceci s'avère nécessaire autant du point de vue des confrontations avec outils complexes (*n* dents + lame) et de la modélisation de l'état stationnaire, que de l'optimisation des outils de déminage.
La compressibilité doit être prise en compte de manière plus robuste au sein du code. Ceci passe par un champ de pression au contact de l'outil plus lisse. Il serai intéressant de comparer, pour ce type de sollicitation, la discrétisation $P1^+/P1$ avec quatre points d'intégration à celle du mini-elements avec un seul point d'intégration. Les méthodes de *Multiplicateurs de Lagrange* pour le contact unilatéral peuvent permettre d'éviter les problèmes liés à la pénalisation (amplifiés par le remaillage). Cependant la mise en œuvre de ces méthodes en 3D augmentent le coût du calcul.

Enfin un schéma temporel *explicite* avec des pas de temps très inférieurs au cas implicite et peu coûteux, est envisageable. On s'affranchirait ainsi des problèmes liés à l'adoucissement du matériau au niveau de l'intégration locale.

Références

[1] ABDEL-FATTAH T.T., HODHOD H.A., AKL A.Y., *"A novel formulation of infinite elements for static analysis"*, Computers and Structures, 77, pp. 371-379, (2000).

[2] ABOUAF M., *"Modélisation de la compaction de poudres métalliques frittées"* Thèse Doct. es sciences, Université scientifique et médicale et ENP de Grenoble, 168 p. (1985).

[3] ABU-FARSAKH M.Y., VOYIADJIS G.Z., *" Computational model for the simulation of the shield tunneling process in cohesive soils"* Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., **22**, pp. 00-22, (1998).

[4] ABU-FARSAKH M.Y., VOYIADJIS G.Z.,TUMAY M.T., *"Numerical analysis of the miniature piezocone penetration tests (PCPT) in cohesive soils"* Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., **22**, pp. 791-818, (1998).

[5] AHADI A., KRENK S., *"Characteristic state plasticity for granular materials Part I : Basic theory"*, International Journal of Solids and Structures, 37, pp 6343-6360 (2000).

[6] AHADI A., KRENK S., *"Characteristic state plasticity for granular materials Part II : Model calibration and results"*, International Journal of Solids and Structures, 37, pp 6361-6380 (2000).

[7] ARNOLD D.N., F. BREZZI, FORTIN M., "A stable finite element for stokes equations". Calcolo., **21**, 337-344, (1984).

[8] ASAOKA A., NAKANO M., NODA T., *"Soil-Water coupled behaviour of saturated clay near/at critical state"* Soils and foundations, **34,** pp.91-105 (1994).

[9] ASHBY S. F., MANTEUFFEL T. A., SAYLOR P. E., *"A Taxonomy for Conjugate Gradient Methods"* SIAM, J. Numer. Anal., vol. 27, No 6, pp. 1542-1568, (1990).

[10] BABUSKA I., "The finite element method with penalty" Math ; Comp., **27**, 221-228, 1973.

[11] BARBAS A., *"contribution à l'utilisation de la méthode des éléments finis en Mécanique des Sols dans le domaine de l'élasto-plasticité"* Thèse Doct. génie civil, ENPC, 140 p. (1981).

[12] BARDET J.P., *"A Comprehensive Review of Strain Localisation in Elasto-Plastic Soils"*, Computers and Geotechnics, **10**, pp. 163-188, (1990).

[13] BAUER E., *"Conditions for embedding Casagrande's critical states into hypoplasticity"*, Mech. Cohes.-Frict. Mater., **5**, pp. 125-148, (2000).

[14] BAZANT Z., PIJAUDIER-CABOT G., *"Nonlocal Continuum Damage, Localisation Instability and Convergence"*, Journal of Applied Mechabics, **55**, pp. 287-293, (1988).

[15] BELLET M., *"Finite element analysis of compressible viscoplasticity using a three-field formulation"*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 175, pp. 19-40, (1999).

[16] BORGA R.I., LEE S.R., *"Cam-Clay Plasticity, Part I : Implicit integration of elasto-plastic constitutive relations"* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **78**, pp. 49-72 (1990).

[17] BORGA R.I., LEE S.R., *"Cam-Clay Plasticity, Part II :Implicit integration of contitutive equations based on non-linear elastic stress predictor"* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **88** pp. 225-240 (1991).

[18] BORGA R.I., TAMAGNIGNI C., *"Critical State Model at Finite Strain"* Proceedings of the 11th Conference on Engineering Mechanics, pp. 148-151 (1996).

[19] BOUSSHINE L., CHAABA A., DE SAXCE G., *"Softening in stress-strain for Drucker-Prager non-associated plasticity"* International Journal of Plasticity , **17**, pp. 21-46, (2001).

[20] BRAUDEL H.J., *"Modélisation des grandes transformations élastoplastique d'un solide isotrope par la méthode des éléments finis. Application à la forge à froid des métaux"* Thèse Doct. es sciences, Université de Lyon I, 226 p. (1986).

[21] BREZINSKI C., REDIVO-ZAGLIA M., *"Treatment of near-breakdown in the CGS algorithm"* Numerical Algorithm, vol. 7, pp. 33-73, 1994.

[22] BUCAILLE J.L., *"Simulation numérique de l'indentation et de la rayure des verres organiques"*, Thèse de Doctorat, ENSMP, (2001).

[23] CAMBOU B., CHAZE M., DEDECKER F., *"Change of scale in granular materials"* Eur. J. Mech. A/Solids, **19**, pp. 999-1014 (2000).

[24] CAMBOU B., JAFARI, *"Modèles de comportement des sols non cohérents"* Revue française de Géotechnique, **44**, pp. 43-55 (1988).

[25] COUPEZ T., *"Génération de maillage et adaptation de maillage par optimisation locale"* Revue Européenne des éléments finis, **9**, pp. 403-423, (2000).

[26] COUPEZ T., *"Stable-stabilized finite element for 3D forming calculation"* Communication interne (1995).

[27] COUSSY O., *"Mécanique des Milieux Poreux "* Edition Technip (1991).

[28] CHEN W.F., BALADI G.Y., *"Soil Plasticity : Theory and Implementation"* Developments in Geotechnical Engineering, **38**, Elsevier, New York (1985).

[29] CHEN W.F., MIZUNO E., *"Nonlinear Analysis in Soil Mechanics :Theory and Implementation"* Developments in Geotechnical Engineering, **53**, Elsevier, New York (1990).

[30] CHI L., KUSHWAHA R.L., *"Three-Dimensionnal, finit element interaction between soil and tillage tool"* ASAE, **34,** pp. 361-366 (1991).

[31] CHOPRA M. B., DARGUSH G.F., *"Finite Element Analysis of time Dependent Large-Deformation Problems "* Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., **16**, pp. 101-130, (1992).

[32] COTECCHIA F., CHANDLER R.J., *"A general framework for the mechanical behaviour of clays"*, Géotechnique, **50**, **4**, pp. 431-447, (2000).

[33] CUNDALL P., STRACK O.D.L., *"A discrete method for granular assemblies"*, Géotechnique, **2**, pp. 47-65, (1979).

[34] DE BORST R., VERMEER P.A., *"possibilities and limitations of finite elements for limit analysis"* Géotechnique, **34,** pp. 119-210 (1984).

[35] DE BORST R., *"Robustness in numerical computations of damage evolution in cohesive-frictional material"*, Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, **4,** pp. 27-54 (1997).

[36] DE BORST R., HEERES O. M., *"Performance of low-Order triangular elements during plastic flow"* Engeneering Computations, **16, 1,** pp. 70-87 (1999).

[37] DESAI C.S., ZAMAN M.M., LIGHTNER J.G., SIRIWARDANE H.J., *"Thin layer element for interfaces and joints"*, Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., **8**, pp. 19-43 (1984).

[38] DESSAI C.S., GIOCLA G., *"Modelling and Testing : Implementation of numerical models and their application in practice"* in *"Numerical Methodes and Constitutive Modelling in Geomechanics" Ed. C.S.*, C.I.S.M. Courses and Lectures, **311**, pp.1-168 (1990).

[39] DWORKIN J., *"large stains in cemented granular aggregates elastic-plastic cement"* Mechanics of Materials, **23**, pp. 29-44 (1996).

[40] ETEROVIC A. L., BATHE K., *"A Hyper-Elastic-Based Large Strain Elasto-Plastic Constitutive Formulation with Combined Isotropic-Kinematic Hardening using the Logarithmic stresses and Strain Measures"* Int. J. Numer. Meth. Engrg., **30,** pp. 1099-1114 (1990).

[41] FAMIYESIN O.R., *"Robust Symmetric Formulations for Nonassociated Plasticity Problems"*, Journal of Engineering Mechanics, **125**, **9**, pp. 1070-1080, (1999).

[42] FELIX B., *"La méthode des éléments finis en viscoélasticité et en viscoplasticité. Application à la mécanique des sols"* Rapport de recherche LPC n°123 (1983).

[43] FLETCHER R., *"Conjugate Gradient methods for indefinite systems"*, Lecture Notes Math., **506**, 73-89, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (1976).

[44] FREDLUNG D.G., *"The 1999 R.M. Hardy Lecture : The Implementation of unsaturated soil mechanics into geotechnical engineering"*, Can. Geotech. J., 37, pp. 963-986, (2000).

[45] GAY C., "Contribution à la simulation numérique tridimensionnelle du forgeage à froid", Thèse de Doctorat, ENSMP, (1995).

[46] GAWRONSKI W., *"Fuzzy Elements"* Computers and structures, **10,** pp. 863-865 (1979).

[47] GEE-CLOUGH D., WANG J., KANOK-NUKULCHAI W., *"Deformation and Failure in Wet Clay Soil : Part 3, Finite Element Analysis of Cutting of Wet Clay by Tines"*, J. agric. Engng. Res., **58**, pp.121-131, (1994).

[48] HASHASH Y.M.A., WHITTLE A.J. *"Integration of the modified Cam-Clay Model in non-linear finite element analysis"* Computers and geotechnics, **14,** pp. 59-83 (1992).

[49] HILD P. *"Problèmes de contact unilatéral et maillages éléments finis incompatibles"* Thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier, 1998.

[50] HSI J.P., SMALL J.C., *"Analysis of excavation in an elasto-plastic soil involving drawdown of the water table"* Computers and Geotechnics, **13**, pp.1-19 (1992).

[51] HU Y., RANDOLPH M.F., *"H-adaptaive FE analysis of elasto-plastic non-homogeneous soil with large deformation"*, Computers and Structures, **23**, pp. 61-83, (1998).

[52] HUANG T.K., CHEN W.F., CHAMEAU J.C., *"The application of cap-plasticity-model to embankment problems"* Computers and structures, **44,** pp. 1349-1369 (1992).

[53] ITASCA consulting, *"Documentation de FLAC2D© : strain-softening model"*, User's Manuel, Minneapolis, 1994.

[54] ITSKOV M., *"On the theory of fourth-order tensors and theior applications in computational mechanics"*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **189**, pp. 419-438, (2000).

[55] JAOUEN O., *"Modélisation tridimensionnelle par éléments finis pour l'analyse thermo-mécanique du refroidissement des pièces coulées"* Thèse Doct. Science et Génie des Matériaux, E.N.S.M.P., 1998.

[56] JARUSEK J., ECK C., *"Dynamic contact problems with friction in linear viscoelasticity"*, C. R. Acad. Sci. Paris, **322**, **I**, pp. 467-502, (1996).

[57] JEAN M., MOREAU J.J., *"Unilateraly and dry friction in dynamics of rigid bodies collections"*, Ed. par Curnier, Proceedings of the Contact Mechanics International Symposium, pages 31-48, lausanne, 1992. Presses polytechniques et Universitaires Romandes.

[58] JEREMIE B., *" Line search techniques for elasto-plastic finite element computations in geomechanics"*, Commun. Numer. Meth. Engng, **17**, pp. 115-125 (2000).

[59] KERYVIN V., DESOYER T., HANUS J-L., *"Localisation de la déformation sous sollicitations lentes : une approche dynamique"*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 328, Série II *b*, p. 727-732, (2000).

[60] KHOGO Y., NAKANO M., MIYAZAKI T., *"Theoretical Aspects of Constitutive Modelling for Unsaturated Soils"*, Soils and Foundations, **33**, **4**, pp. 49-63, (1993).

[61] KIOUSIS P.D., VOYADJIS G.Z., *"Lagrangean continuum theory for saturated porous media"* Journal of Engineering Mechanics., **111**, pp. 1277-1288 (1985).

[62] KIOUSIS P.D., VOYADJIS G.Z., TUMAY M.T., *"A Large Stain Theory for the Two-Dimentional Problems in Geomechanics"*, Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., **10**, pp. 17-39 (1986).

[63] KOLMAYER P., *"Rhéologie et modélisation des Sols de surface pour l'interprétation in situ"*, Rapport, ETAS, décembre 1998.

[64] KOLMAYER P., *"Modélisation du comportement Mécanique des Sols de Surface et Identification In Situ"*, Thèse de Doctorat en Génie Civil, Ecole Centrale de Lyon, 170 p., (2001).

[65] KUSHWAHA R.L., SHEN J., *"finite element analysis of dynamic interaction between soil and tillage tool"* ASAE, **37,** pp. 1315-1319 (1992).

[66] LABORDE P., TOSON B., PESQUE J.-J., *"On the consistent tangent operator algorithm for thermo-plastic problems"* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **146,** pp. 215-230 (1997).

[67] LAURSEN T.A., SIMO J.C., *"A continuum-based finite element formulation for the implicit solution of multibody, large deformation frictional contact problems"*, Int. J. Numer. Methods Eng., **36**, pp. 3451-3485, (1993).

[68] LEE E.H., *"Elastic-Plastic deformation at finite strains"* J. Appl. Mech. Trans. ASME, **36**, pp. 1-6 (1969).

[69] LEGENDRE A., BACCONNET C., "*Rapport d'essais de scarification*", LERMES, Ensemble Universitaire des Cézeaux, mai 2001.

[70] LIU Y., HOU Z.M., *"Three dimensionnal nonlinear finite element analysis of soil cutting by narrow blades"* in :Proc. of Int. Conf. On Soil Dynamics, Auburn, Ala. 2 :338-347. Nat. Tillage MachineryLab., Auburn, Ala (1985).

[71] LIU C.H., WONG J.Y., *"Numerical Simulations of tire-soil interaction based on Critical State Soil Mechanics"* Journal of Terramechanics, **33**, pp.209-221 (1997).

[72] MACARI E.J., WEIHE S., ARDUINO P., *"Implicit integration in elastoplastic constitutive models for frctional materials with highly non-linear hardening functions"*, Mech. Cohes.-Frict. Mater., **2**, pp. 1-29, (1997).

[73] MALEKI M., *" Modélisation hiérarchisée du comportement des Sols"*, Thèse de Doctorat en Génie Civil, Ecole Centrale de Lyon, 252 p., (1998).

[74] MARCON A.F., BITTENCOURT E., CREUS G.J., *"On the integration of stresses in large deformation plasticity"* Engineering Computations, **16**, pp 49-69, (1999).

[75] MARIE S. *"Un Modèle de Parallélisation S.P.M.D pour la Simulation Numérique de Procédés de Mise en Forme de Matériaux"*, Thèse de Doctorat, ENSMP, (1997).

[76] McMEEKING R.M., RICE J.R., *"Finite element formulations for problems of large elastic-plastic deformation"* Int. J. Solids struct., **11** pp.601-616 (1975).

[77] MESCHKE G., LIU C., MANG H.A., *"Large strain finite element analysis of snow"* J. Engrg. Mech., **122,** pp.591-602 (1996).

[78] MIJAR A.R., ARORA J.S., *"Review of Formulations for elastostatic frictional contact problems"*, Struct. Multidisc. Optim., **20**, pp. 167-189, (2000).

[79] MIZUNO E., CHEN W.F., *"plasticity analysis of slope with different flow rules"* Computers and structures, **17**, pp. 375-388 (1983).

[80] MOCELLIN K., *" Contribution à la Simulation Numérique Tridimentionnelle du Forgeage à chaud : Etude du Contact et Calcul Multigrille"* Thèse Doct. Science et Génie des Matériaux, E.N.S.M.P., 1999.

[81] MOREAU J.J., *"Unilateral and dry friction in finite freedom dynamics"*, Ed. par J.J. Moreau & Panagiotopoulos, CISM Courses and Lectures 302 Springer-Verlag Wien New-York), Non-smooth Mechanics and Application, pages 1-82, (1988).

[82] MOUAZEN A.M., *"Modelling the interaction between the Soil and tillage tools"*, Ph. D. Thesis, submitted to the Hungarian Academy of Sciences, Budapest, Hungary, 128 p., (1997).

[83] MOUAZEN A.M., NEMENYI M., *"A review of the finite element modelling techniques of Soil tillage"*, Mathematics and Computers in Simulation, 48, pp. 23-32, (1998).

[84] MROUEH H., SHAHROUR I., *"Use of sparse iterative method for the resolution of three-dimensional soil / structure interaction problems"* Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., vol. 23, pp. 1961-1975, (1999).

[85] NAGTEGAAL J.C., DE JONG J.E., *"Some computational aspects of elastic-plastic larges stain analysis"* Int. J. Numer. Meth. Engrg., **17,** pp. 14-41 (1981).

[86] NAGTEGAAL J.C., *"On the implementation of inelastic constitutive equations with special reference to large deformation problems"* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **33,** pp. 469-484 (1982).

[87] NOUGUIER C., *"Simulation des Interactions Outil-Sol, Application aux Outils de Traitement des Sols"*, Thèse de Doctorat en Mécanique, Génie Mécanique, Génie Civil, Université Montpellier II, 144 p., (1999).

[88] ORTIZ M., POPOV E.P., *"Accuracy and Stability of Integration Algorithms for Elastoplastic Constitutive Relations"* Int. J. Num. Meth. Engrg., **21**, pp. 1561-1576, (1985).

[89] PALMER A.C., *"Speed effects in cutting and ploughing"*, Géotechnique, **49**, **3**, pp. 285-294, (1999).

[90] PERCHAT E., "MINI-élément et factorisation incomplètes pour la parallélisation d'un solveur de Stokes 2D. Application au Forgeage". Thèse de Doctorat, ENSMP, (2000).

[91] PETRYK H., *"Plastic Instability : Criteria and Computational Approaches"* Archives of Computational Methods in Engineering, Vol **4**, **2**, pp 111-151, (1997).

[92] PORAN C.J., RODRIGUEZ J.A., *"Finite element analysis of impact behavior of sand"* Soils and foundations, **32**(4), pp. 68-80 (1992).

[93] POTTS D.M., GENS A., *"A critical assessment of methods of correcting for drift from the yield surface in elastoplastic finite element analysis"* Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., **9,** pp. 149-159 (1985).

[94] PREVOST J.H., *"Mechanics of continuous porous media"* Int. J. Engng Sci., **18**, pp. 787-800 (1980).

[95] PREVOST J.H., *"SHORT COMMUNICATION : Localization of deformations in Elastic-Plastic Solids"* Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech., **11**, pp. 187-196 (1984).

[96] QUIBEL A., FROMENTIN M., *"Essais en vraie grandeur d'un dispositif expérimental de scarification des Sols",* Centre d'Expérimentation Routière, LCPC, Juin 2001.

[97] REGUEIRO R. A., BORJA R.I., *"Plane strain finite element analysis of pressure sensitive plasticity with stong discontinuity"*, Int. J. Solids. Structures, **38**, pp. 3647-3672, (2001).

[98] ROUAINIA M., MUIR WOOD D., *"An implicit constitutive algorithm for finite Cam-clay elasto-plastic model"*, Mech. Cohes.-Frict. Mater., , pp. 469-489, (2000).

[99] RUNESSON V., *"Implicit integration of elastoplastic relations with reference to soils"* Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech., **11**, pp. 315-321 (1987).

[100] RUNESSON K., *"A note on nonassociated plastic flox rules"* International Journal of Plasticity, **5**, pp. 639-658 (1989).

[101] SALENÇON J., *"Théorie de la plasticité pour les applications en mécanique des Sols"*, Eyrolles, (1974).

[102] SCHLOSSER F., *"Element de mecanique des sols"*, Presse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, (1983).

[103] SHENG D.,SLOAN S.W., YU H.S. *" Aspects of finite element implementation of critical state models",* Computational Mechanics, 2000, **26**, **2**, pp 185-196, (2000).

[104] SIDOROFF F., *"Incremental constitutive equation for large strain elastoplasticity"* Int. J. Eng. Sci., **20**, pp. 19-26 (1982).

[105] SIMO J.C., TAYLOR R.L., *"Consistent tangent operator for rate-independent elastoplasticity"* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **48,** pp. 101-118 (1985).

[106] SIMO J.C., JU J-W., PISTER K.S., TAYLOR R.L., *"Assessment of Cap Model : Consistent Return Algorithms and Rate-Dependent Extension"* Journal of Engineering Mechanics, **114**, **2**, pp 191-218, (1988).

[107] SIMO J.C., KENNEDY J.G., GOVINDJEE S. K.S., *"Non-Smooth Multisurface Plasticity and Visco-Plasticity. Loading/Unloading Conditions and Numerical Algorithm"* Int. J. Num. Meth. Engrg., **26**, pp. 2161-2185, (1988).

[108] SIRIWARDANE H.J., DESAI C.S., *"Computational procedures for non linear three dimensional analysis with some advanced constitutive laws"* Int. J. Numer.Anal.Meth. Geomech., **7,** pp.143-171 (1983).

[109] SNITBHAN N., CHEN W.F., *"Elastic-plastic large deformation analysis of soil slopes"* Computers and structures, **9,** pp. 567-577 (1978).

[110] SONNELVED P., "CGS :a fast Lanczos-type solver for nonsymmetric linear systems", SIAM J. Sci. Statist. Comput., 10, 36-52, (1989).

[111] STOLLE D.F.E., VERMEER P.A., BONNIER P.G.,*" Time Integration of a constitutive law for soft clays"*, Commun. Numer. Meth. Engng, **15**, pp. 603-609 (1999).

[112] SZABO L., *"Comments on loss of strong ellipticity in elastoplasticity"*, Int. J. Solids. Structures, **37**, pp. 3775-3806, (2000).

[113] TANAKA H., INOOKU K., NAGASAKI Y., MIYASAKI M., SUMIKAWA O., OIDA A., *"Simulation of Soil Loosening at Subsurface Tillage using Vibrating Type Subsoiler by means of the Distinct Element Method"*, Proceedings of the 8th European Conference of ISTVS, Umeå, Sweden, (2000).

[114] TRAORE K., *"Simulation thermomécanique du laminage circulaire : développement d'une formulation quasi-eulérienne tridimensionnelle sur une architecture parallèle."*, thèse de Doctorat, ENSMP, 2001

[115] VAN DER VORST H. A., "BI-CGSTAB : *A Fast and Smoothly Converging Variant of BI-CG for the Solution of Non-Symmetric Linear Systems"* J. Sci. Stat. Comput., vol. 13, No 2, pp 631-644, (1992).

[116] VAN DER VORST H. A. *"Parallel iterative solution methods for linear systems arising from discretized pde's"*. Technical Report AGARD R-807, Proc. of Special Course on Parallel Computing in CFD, 1-39, AGARD, Neully-sur-Seine, 1995.

[117] VAN DER VORST H. A., VUIK C., *"The Superlinear Convergence Behaviour of GMRES"* Journal of Computational and Applied Mathematics (North Holland), vol. 48, pp. 327-341, (1993).

[118] VOYIADJIS G.Z., ABU-FARSAKH M.Y., *"Coupled Theory of Mixtures for Clayey Soils"* computers and geotechnics, **20,** pp. 195-222 (1997).

[119] WANG C.H., HU W., SAWYER J.P.G., *"Explicit numerical integration algorithm for a class of non-linear kinematic hardening model"* Computational Mechanics, 2000, Vol **26**, **2**, pp 140-147 (2000).

[120] WANG J., GEE-CLOUGH D., *"Deformation and Failure in Wet Clay Soil : Part 2, Soil Bin Experiments"*, J. agric. Engng. Res., **54**, pp.57-66, (1993).

[121] WRIGGERS P., *"Finite Element Algorithms for Contact Problems"*, Archives of Computational Methods in Engineering, State of the art reviews, **2**, **4**, pp. 1-49, (1995).

[122] XIE X.M., ZHANG D.J., *"An approach to 3-D nonlinear FE simulative method for investigation of soil-tool dynamic system"* in :Proc. of Int. Conf. On Soil Dynamics, Auburn, Ala. 2 :322-327. Nat. Tillage MachineryLab., Auburn, Ala (1985).

[123] YONG R.N., HANNA A.W., *"Finite element analysis of plane soil cutting"* Journal of terramechanics, **14,** pp. 103-125 (1977).

[124] ZHU Y., FOX P.J., MORRIS J.P., *"A pore-scale numerical model for flow through porous media"*, Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., 23, pp. 881-904, (1999).

[125] ZHANG H.W., SANAVIA L., SCHREFLER B.A., *"Gradient-dependent plasticity model and dynamic strain localisation of saturated and partially saturated porous media : one dimensional model"*, Eur. J. Mech. A/Solids, **19**, pp. 503-524, (2000).

[126] ZHANG H.W., SANAVIA L., SCHREFLER B.A., *"Numerical analysis of dynamic strain localisation in initially water saturated dense sand with a modified generalised plasticity model"*, Computers and structures, **79**, pp. 441-459, (2001).

Annexe 1: Module Tangent Consistant *Cam Clay Modifié*

Nous présentons ici le calcul du module tangent consistant du modèle Cam Clay (Chapitre 4). Dans la suite, si x désigne une variable tensorielle ou scalaire, on écrit :

$$\Delta x = \Delta t \cdot \dot{x}$$

Sur l'incrément de temps [t , $t+\Delta t$], on impose un incrément de déformation $\Delta\varepsilon = \dot{\varepsilon} \cdot \Delta t$. Après intégration implicite l'état de contrainte à l'instant $t+\Delta t$ est donnée par :

Le déviateur des contraintes et la pression sont donnés par :

$$\begin{aligned} s^{t+\Delta t} &= s^{trial} - 2G\Delta\lambda^{t+\Delta t}\left(3s^{t+\Delta t}\right) \\ p^{t+\Delta t} &= p^{trial} - K\Delta\lambda^{t+\Delta t}\left(M^2\left(2p^{t+\Delta t} - p_c^{n+1}\right)\right) \end{aligned} \qquad \textbf{A1.1}$$

avec

$$\begin{aligned} s^{trial} &= s^t + 2G \cdot \Delta e \\ p^{trial} &= p^t - K \cdot \mathrm{tr}(\Delta\varepsilon) \end{aligned}$$

La pression critique est donnée par :

$$p_{c\,t+\Delta t} = p_{c\,t}\exp\left(\vartheta\Delta\lambda^{t+\Delta t} M^2\left(2p^{t+\Delta t} - p_{c\,t+\Delta t}\right)\right) \qquad \textbf{A1.2}$$

On dérive l'équation en pression de (A1.1) par rapport à $\Delta\varepsilon$:

$$\frac{\partial p^{t+\Delta t}}{\partial\Delta\varepsilon} = -Ka_1 II + KM^2 a_2 \frac{\partial\Delta\lambda^{t+\Delta t}}{\partial\Delta\varepsilon} \qquad \textbf{A1.3}$$

avec

$$a_1 = \frac{1 + M^2\vartheta\Delta\lambda^{t+\Delta t}\, p_{c\,t+\Delta t}}{aa},\ a_2 = -\frac{(2p^{t+\Delta t} - p_{c\,t+\Delta t})}{aa},$$
$$aa = (1 + 2KM^2\Delta\lambda^{t+\Delta t} + M^2\vartheta\Delta\lambda^{t+\Delta t}\, p_{c\,t+\Delta t})$$

On dérive l'équation (A1.2) et on obtient :

$$\frac{\partial p_{c\,t+\Delta t}}{\partial\Delta\varepsilon} = a_3 KM^2 II + a_4 KM^2 \frac{\partial\Delta\lambda^{t+\Delta t}}{\partial\Delta\varepsilon} \qquad \textbf{A1.4}$$

$$avec\ \ a_3 = 2p_{c\,t+\Delta t}\vartheta\Delta\lambda / aa\ ;\ a_4 = \vartheta\frac{p_{c\,t+\Delta t}}{K}(2p^{t+\Delta t} - p_{c\,t+\Delta t}) / aa$$

A partir de l'équation en déviateur de (A1.1)on calcule $\dfrac{\partial q^{t+\Delta t}}{\partial\Delta\varepsilon}$; $(q = \sqrt{3/2\, s : s})$

$$\frac{\partial q^{t+\Delta t}}{\partial\Delta\varepsilon} = 2\mu a_5 \hat{n} + 2\mu a_6 \frac{\partial\Delta\lambda^{t+\Delta t}}{\partial\Delta\varepsilon} \qquad \textbf{A1.5}$$

avec

$$a_5 = \frac{\sqrt{3/2}}{1+6\mu\Delta\lambda^{t+\Delta t}} ; a_6 = -\frac{3q^{trial}}{1+6\mu\Delta\lambda^{t+\Delta t}}$$

Le terme $\partial\Delta\lambda/\partial\Delta\varepsilon$ s'obtient à partir de la *condition de consistance*. Dériver $f(\Delta\lambda(\Delta\varepsilon))$ donne :

$$\frac{\partial f}{\partial\Delta\varepsilon} = 2q\frac{\partial q}{\partial\Delta\varepsilon} + (2p - p_c)\frac{\partial p}{\partial\Delta\varepsilon} - p\frac{\partial p_c}{\partial\Delta\varepsilon} \equiv 0 \qquad \textbf{A1.6}$$

substituant les équations (A1.3), (A1.4) et (A1.5) dans l'équation (A1.6) on obtient :

$$\frac{\partial\Delta\lambda^{t+\Delta t}}{\partial\Delta\varepsilon} = b_1 II + b_2\hat{n} \qquad \textbf{A1.7}$$

avec

$$b = 2\mu(2q^{trial}a_6) + KM^2\left[M^2(2a_2 - a_4)p^{t+\Delta t} - a_2 p_{ct+\Delta t}\right]$$

$$b_1 = KM^2\frac{\left[(2a_1 - M^2a_3)p^{t+\Delta t} - p_{ct+\Delta t}a_1\right]}{b}$$

$$b_2 = -2\frac{\left(q^{trial}a_5\right)}{b}$$

Substituant l'équation A1.7 dans les équations (A1.3), (A1.4) et (A1.5) on obtient :

$$\frac{\partial p_{n+1}}{\partial\Delta\varepsilon} = K(-a_1 + M^2a_2b_1)\mathrm{II} + KM^2a_2b_2\frac{\partial\Delta\lambda}{\partial\Delta\varepsilon}$$

$$\frac{\partial q_{n+1}}{\partial\Delta\varepsilon} = 2\mu(a_6b_1)\mathrm{II} + 2\mu(a_5 + a_6b_2)\hat{n}$$

$$\frac{\partial p_{c\,n+1}}{\partial\Delta\varepsilon} = a_3KM^2(a_3 + a_4b_1)\mathrm{II} + KM^2(a_4b_2)\hat{n}$$

Enfin le module tangent consistant est donné par :

$$\mathbf{C}_v^{t+\Delta t} = 2G\beta\left[I_4 - \tfrac{1}{3}\mathrm{II}\otimes\mathrm{II}\right] - 2G\beta\left[\sqrt{\tfrac{2}{3}}(a_5 + a_6b_2) - \beta\right]\hat{n}\otimes\hat{n} + 2G\sqrt{\tfrac{2}{3}}(a_6b_1)\hat{n}\otimes\mathrm{II} \qquad \textbf{A1.8}$$

avec

$$\hat{n} = \frac{s}{\|s\|} \;;\; I = \frac{1}{2}\left\{\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right\},\; \hat{n}\otimes\hat{n} = [\hat{n}_{ij}\hat{n}_{kl}] \;,.\; \beta = \frac{\left\|s^{t+\Delta t}\right\|}{\left\|s^{trial}\right\|}$$

Annexe 2: Module Tangent Consistant *CJS Etat Critique*

Nous présentons ici le calcul du module tangent consistant du modèle CJS Etat Critique(Chapitre 4), dans le cas $\gamma=0$ (pas de dépendance au troisième invariant). Sur l'incrément de temps $[t\ ,\ t+\Delta t]$, on impose un incrément de déformation $\Delta\varepsilon=\dot{\varepsilon}\cdot\Delta t$. Après intégration implicite l'état de contrainte à l'instant $t+\Delta t$ est donnée par :

Le déviateur des contraintes et la pression sont donnés par :

$$\begin{aligned} s^{t+\Delta t} &= s^{trial} - 2G\Delta t\lambda^{t+\Delta t}\left(3\left(\frac{1+R^{t+\Delta t}\beta'^{t+\Delta t}}{\left(\beta'^{t+\Delta t}\right)^2+3}\right)\hat{n}\right) \\ p^{t+\Delta t} &= p^{trial} - K\Delta t\lambda^{t+\Delta t}\,3\beta'^{t+\Delta t}\left(\frac{1+R^{t+\Delta t}\beta'^{t+\Delta t}}{\left(\beta'^{t+\Delta t}\right)^2+3}\right) \end{aligned} \qquad \textbf{A2.1}$$

avec

$$\beta'^{t+\Delta t} = \beta\left(\frac{R^{t+\Delta t}}{R_c} - 1\right)\ ; \quad \begin{aligned} s^{trial} &= s^t + 2G\Delta e \\ p^{trial} &= p^t - K\,\mathrm{tr}(\Delta\varepsilon) \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned} \phi^{t+\Delta t} &= 3\left(\frac{1+R^{t+\Delta t}\beta'^{t+\Delta t}}{\left(\beta'^{t+\Delta t}\right)^2+3}\right) \\ \varphi^{t+\Delta t} &= 3\beta'^{t+\Delta t}\left(\frac{1+R^{t+\Delta t}\beta'^{t+\Delta t}}{\left(\beta'^{t+\Delta t}\right)^2+3}\right) \end{aligned}$$

L'évolution du rayon de la surface de charge est donné par :

$$R^{t+\Delta t} = \frac{AR_m^{t+\Delta t}\overline{p}_{t+\Delta t}}{A\overline{p}_{t+\Delta t} + R_m^{t+\Delta t}} \qquad \textbf{A2.2}$$

L'évolution des variables $\overline{p}$, du rayon moyen de rupture R_m et de la pression critique p_c étant donnée par :

$$\begin{aligned} \overline{p}_{t+\Delta t} &= \overline{p}_t + \Delta t\dot{\lambda}^{t+\Delta t}3(p_a)^{1/2}(p^{t+\Delta t})^{-3/2} \\ R_m^{t+\Delta t} &= R_c + \mu\ln\left(\frac{p_c^{t+\Delta t}}{p^{t+\Delta t}}\right) \\ p_c^{t+\Delta t} &= p_c^t\exp\left(c\,\mathrm{tr}\left(\Delta\varepsilon_{t+\Delta t}^P\right)\right) \end{aligned} \qquad \textbf{A2.3}$$

On pose :

$$\frac{\partial \phi^{t+\Delta t}}{\partial \Delta \varepsilon} = \beta_1 \frac{\partial R^{t+\Delta t}}{\partial \Delta \varepsilon}$$
$$\frac{\partial \varphi^{t+\Delta t}}{\partial \Delta \varepsilon} = \beta_2 \frac{\partial R^{t+\Delta t}}{\partial \Delta \varepsilon}$$

La dérivation de l'équation A2.2 donne :

$$\frac{\partial R^{t+\Delta t}}{\partial \Delta \varepsilon} = \frac{A\left(A\overline{p}_{t+\Delta t} \frac{\partial R_m^{t+\Delta t}}{\partial \Delta \varepsilon} + \left(R_m^{t+\Delta t}\right)^2 \frac{\partial \overline{p}_{t+\Delta t}}{\partial \Delta \varepsilon} \right)}{\left(A\overline{p}_{t+\Delta t} + R_m^{t+\Delta t}\right)^2}$$

La dérivation des deux première équations de (A2.3) donne :

$$\frac{\partial \overline{p}_{t+\Delta t}}{\partial \Delta \varepsilon} = \frac{\partial \Delta \lambda^{t+\Delta t}}{\partial \Delta \varepsilon} 3(p_a)^{1/2}(p^{t+\Delta t})^{-3/2} + \Delta \lambda^{t+\Delta t} 3(p_a)^{3/2}\left(-\tfrac{1}{2}\left(p^{t+\Delta t}\right)^{-3/2}\right)\frac{\partial p^{t+\Delta t}}{\partial \Delta \varepsilon}$$
$$\frac{\partial R_m^{t+\Delta t}}{\partial \Delta \varepsilon} = \left(\frac{\partial \Delta \lambda^{t+\Delta t}}{\partial \Delta \varepsilon} \varphi^{t+\Delta t} + \frac{\partial \varphi^{t+\Delta t}}{\partial \Delta \varepsilon} \Delta \lambda^{t+\Delta t} \right) \psi^{t+\Delta t} - \left(\frac{\mu}{p^{t+\Delta t}} \frac{\partial p^{trial}}{\partial \Delta \varepsilon} \right)$$

On obtient alors :

$$\frac{\partial R^{t+\Delta t}}{\partial \Delta \varepsilon} = a_1 \frac{\partial \Delta \lambda^{t+\Delta t}}{\partial \Delta \varepsilon} + a_2 \frac{\partial p^{t+\Delta t}}{\partial \Delta \varepsilon} + a_3 \frac{\partial p^{trial}}{\partial \Delta \varepsilon} \qquad \textbf{A2.4}$$
$$aa = \left(A\overline{p}_{t+\Delta t} + R_m^{t+\Delta t}\right)^2 \left(1 - \frac{A^2 \overline{p}_{t+\Delta t} \beta_2 \psi^{t+\Delta t}}{\left(A\overline{p}_{t+\Delta t} + R_m^{t+\Delta t}\right)^2} \right)$$
$$a_1 = \frac{A^2 \overline{p}_{t+\Delta t} \psi^{t+\Delta t} \varphi^{t+\Delta t}}{aa} + \frac{A\left(R_m^{t+\Delta t}\right)^2 \alpha_1}{aa}; a_2 = \frac{A\left(R_m^{t+\Delta t}\right)^2 \Delta \lambda^{t+\Delta t} \alpha_2}{aa}; a_3 = -\frac{A^2 \overline{p}_{t+\Delta t}\left(\frac{\mu}{p^{t+\Delta t}}\right)}{aa}$$

On dérive l'équation en pression de A2.1 par rapport à $\Delta\varepsilon$:

$$\frac{\partial p^{t+\Delta t}}{\partial \Delta \varepsilon} = a_4 \frac{\partial p^{trial}}{\partial \Delta \varepsilon} + a_5 K \frac{\partial \Delta \lambda^{t+\Delta t}}{\partial \Delta \varepsilon} \qquad \textbf{A2. 5}$$
$$a_4 = \frac{1 - K\Delta \lambda^{t+\Delta t} \beta_2 a_2}{1 + K\Delta \lambda^{t+\Delta t} \beta_2 a_1}; a_5 = -\left(\frac{\varphi^{t+\Delta t} + \Delta \lambda^{t+\Delta t} \beta_2 a_2}{1 + K\Delta \lambda^{t+\Delta t} \beta_2 a_1} \right)$$

On dérive l'équation en déviateur de A2.1, et on obtient :

$$\frac{\partial \sqrt{s^{t+\Delta t} : s^{t+\Delta t}}}{\partial \Delta \varepsilon} = \frac{\partial \sqrt{s^{trial} : s^{trial}}}{\partial \Delta \varepsilon} - 2G\left[a_6 \frac{\partial \Delta \lambda^{t+\Delta t}}{\partial \Delta \varepsilon} + a_7 \frac{\partial p^{trial}}{\partial \Delta \varepsilon} \right] \qquad \textbf{A2. 6}$$
$$a_6 = \phi^{t+\Delta t} + \Delta t \beta_1 \left(a_1 + K a_2 a_5\right); a_7 = \Delta t \beta_2 a_2 \left(a_3 + a_4\right) \frac{\partial p^{trial}}{\partial \Delta \varepsilon}$$

Le terme $\partial\Delta\lambda/\partial\Delta\varepsilon$ s'obtient à partir de la *condition de consistance*. Dériver $f(\Delta\lambda(\Delta\varepsilon))$ donne :

$$\frac{\partial f}{\partial \Delta\varepsilon} = \frac{\partial\sqrt{s^{t+\Delta t} : s^{t+\Delta t}}}{\partial \Delta\varepsilon} - 3\frac{\partial R^{t+\Delta t}}{\partial \Delta\varepsilon} p^{t+\Delta t} - 3R^{t+\Delta t}\frac{\partial p^{t+\Delta t}}{\partial \Delta\varepsilon} \equiv 0 \qquad \textbf{A2. 7}$$

substituant les équations (A2.4), (A2.5) et (A2.6) dans l'équation (A2.8) on obtient :

$$\frac{\partial \Delta\lambda}{\partial \Delta\varepsilon} = b_1 \frac{\partial\sqrt{s^{trial} : s^{trial}}}{\partial \Delta\varepsilon} + b_2 \frac{\partial p^{trial}}{\partial \Delta\varepsilon} \qquad \textbf{A2. 8}$$

avec

$$b = 2Ga_6 + 3\left[p^{t+\Delta t}\left(a_1 + a_5 a_2\right) + R^{t+\Delta t} a_5\right]$$

$$b_1 = \frac{1}{b}$$

$$b_2 = -\frac{2Ga_7 + 3\left[p^{t+\Delta t}\left(a_3 + a_4 a_2\right) + R^{t+\Delta t} a_1\right]}{b}$$

Substituant l'équation (A2.9) dans les équations (A2.4), (A2.5) et (A2.6) on obtient le module tangent consistant :

$$\boldsymbol{C}_v^{t+\Delta t} = 2G\xi_{t+\Delta t}\left(I - \tfrac{1}{3}\mathrm{II}\otimes\mathrm{II}\right) + 2G\left(c_{t+\Delta t} - \xi_{t+\Delta t}\right)\hat{n}\otimes\hat{n} + 2G\left(K\theta_{t+\Delta t}\right)\hat{n}\otimes\mathrm{II} \qquad \textbf{A2. 9}$$

avec

$$: \hat{n} = \frac{s}{\|s\|} \;;\; I = \frac{1}{2}\left\{\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right\},\; \hat{n}\otimes\hat{n} = [\hat{n}_{ij}\hat{n}_{kl}]\;,$$

$$\xi_{t+\Delta t} = \frac{\left\|s^{t+\Delta t}\right\|}{\left\|s^{trial}\right\|};\; c_{t+\Delta t} = \left(1 - 2Ga_6 b_1\right);\; \theta_{t+\Delta t} = \left(a_6 b_2 + a_7\right).$$

Résumé

Le déminage mécanique consiste à scarifier le sol avec une « charrue », outil formé d'une lame en V munie de plusieurs dents, poussée par un engin : les dents déstructurent le sol et le font remonter devant la lame qui l'évacue sur le côté avec les mines qu'il contient. L'objectif de nos travaux est de mettre en œuvre la simulation numérique par éléments finis du problème fortement non linéaire issu de la modélisation de la scarification du sol. Le code d'éléments finis implicite Forge3®, dédié à la mise en forme des métaux, a été choisi comme support numérique. Il permet de prendre en compte les grandes déformations, en particulier à l'aide de son remaillage automatique. Nous avons dans un premier temps implanté dans ce code deux modèles elasto-plastiques de comportement, l'un incompressible réservé aux sols fins saturés, purement cohésifs, l'autre compressible, fondé sur la notion d'état critique, pour les matériaux purement frottants ou cohésifs et frottants. Ces modèles adoucissants sont intégrés par un schéma de retour radial généralisé, au sein d'une formulation implicite du problème aux limites. Nous montrons que la matrice de raideur est non symétrique dans le cas compressible et que la symétrisation du système ne conduit pas à une approche robuste. Nous avons donc importé et testé un solveur itératif non-symétrique : Bi-CGSTAB. Nous avons validé la programmation de ces modèles sur des essais triaxiaux. Pour les comportements adoucissants, on constate des oscillations dans la relation contrainte/déformation passé le pic de contrainte. Ces difficultés numériques sont traitées par linéarisation et régularisation. Dans un deuxième temps, nous avons mis en œuvre des simulations de scarification pour différents niveaux de complexité : une dent seule, une dent + une tranche de lame, plusieurs dents, en faisant suffisamment avancer l'outil pour atteindre le régime stationnaire ; cela se révèle d'autant plus long que l'outil est large, ce qui nous amène au calcul très intensif. L'influence de paramètres géométriques comme l'inclinaison de la dent ou l'angle d'étrave du système a été mise en évidence, elle est qualitativement conforme aux observations expérimentales. L'étude de l'influence des paramètres des modèles de comportement montre la prépondérance de ceux liés à l'état critique, i.e. aux propriétés mécaniques après de grandes déformations. Enfin nous avons validé qualitativement le code en termes de modes d'écoulements et de répartition des efforts pour des outils multi-dents. La comparaison quantitative des efforts reste à affiner en revenant sur le comportement choisi et son implémentation.

Mots Clés : Interaction outil/sol, Scarification, Déminage, Modélisation, Elasto-Plasticité, Plasticité Compressible, Simulations Numériques 3D, Calcul Intensif.

Numerical Simulation of Soil Large Deformation with Finite Element Method. Application to Ploughing

Abstract

Mine clearing (or military breaching) consists in ploughing the superficial layer of the soil with a multi-tine blade located in front of a pusher vehicle: the tine destructure the soil and heave it in front of the blade which pushes it aside, with the mines inside. The aim of the present study is to perform the numerical simulation by the 3D finite element method of the highly non-linear problem of soil ploughing modeling. The numerical tool chosen for this purpose is the implicit finite element code Forge3® (devoted to Metal Forming Processes) which, thanks to its automatic re-meshing routine, is able to model large deformation. We have implemented in Forge3® two hypo-elastic-plastic models: an incompressible one for saturated fine soils, purely cohesive, and a compressible one based on the critical state concept for frictional or frictional-cohesive materials. These work-softening material models are time-integrated by a generalized radial return technique within an implicit formulation. We show that compressibility yields a non-symmetric stiffness matrix, and that the symmetrization of the system is not robust enough, so that the non-symmetric solver Bi-CGSTAB has been implemented after comparative tests. The implemented models were validated on triaxial tests. For softening models, oscillations occurred in the stress/strain curves after the stress peak. These numerical difficulties were overcome using linearisation and regularisation techniques. As a second step, we performed numerical simulations for different kinds of tools : a single tine, a single tine + a slab of a blade, several tines and several tines + a blade. Tool displacements were simulated until a steady state was reached. This takes displacements all the larger as the tool system is wider, leading to intensive computation. Geometric parameters such as tine rake angle or system stem angle clearly influence the complex material flow patterns, in a way similar to experimental observations. Material model parameters shown dominant are those linked with the concept of critical state, i.e. corresponding to the large deformation range. Finally the global model was validated from a qualitative point of view, in terms of flow pattern and force distribution for multi-tine tools. Quantitative comparison with experiments must still be refined, returning to the constitutive model and its implementation.

Keywords : soil/tool Interaction, Ploughing, Mine Clearance, Modelisation, Compressible Plasticity, Elasto-Plasticity, 3D Numerical Simulation, Intensive Computation.