

EXTENSION DE LA NOTION DE PLATITUDE A DES SYSTEMES DECRITS PAR DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES LINEAIRES

Béatrice Laroche

▶ **To cite this version:**

Béatrice Laroche. EXTENSION DE LA NOTION DE PLATITUDE A DES SYSTEMES DECRITS PAR DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES LINEAIRES. Automatique / Robotique. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2000. Français. NNT : . tel-00454012

HAL Id: tel-00454012
https://pastel.hal.science/tel-00454012

Submitted on 7 Feb 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée à

L'École Nationale Supérieure des Mines de Paris

par

Béatrice Laroche

en vue de l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE DES MINES DE PARIS

Spécialité : Mathématiques et Automatique

Sujet de la thèse :

EXTENSION DE LA NOTION DE PLATITUDE À DES SYSTÈMES DÉCRITS PAR DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES LINÉAIRES

soutenue le 18 Décembre 2000 devant le jury composé de

MM	Michel Fliess	Président
	Jean-Michel Coron	Rapporteur
	Enrique Zuazua	Rapporteur
	Philippe Martin	Examinateur
	Rabah Rabah	Examinateur
	Pierre Rouchon	Examinateur

Résumé

La notion de platitude a été bien définie et largement étudiée pour les systèmes dynamiques de dimension finie.

Une des conséquences marquantes de cette propriété est de permettre la paramétrisation des trajectoires (état et commande) par des fonctions libres et leurs dérivées, rendant ainsi aisée la solution d'un problème important en contrôle des systèmes dynamiques: la planification de trajectoires.

Pour les systèmes linéaires de dimension finie, on a coïncidence exacte entre platitude et commandabilité, via la mise sous forme de Brunovsky.

La possibilité de définir une notion convenable de platitude en dimension infinie, et d'étendre la notion de forme de Brunovsky à certaines classes de systèmes de dimension infinie est examinée, et une définition de la platitude est proposée pour ces systèmes.

L'étude de la platitude de l'équation générale de diffusion à une variable d'espace est complètement traitée. Une méthode d'obtention d'une paramétrisation d'une famille dense de trajectoires est proposée, et la canonicité de la représentation de ces trajectoires est démontrée. Divers cas d'étude sont proposés, avec des applications à la planification de trajectoires.

L'étude complète de l'équation de Korteweg-De Vries mono-dimensionnelle linéaire est réalisée, ainsi que celle d'un problème de diffusion à deux variables d'espace, montrant les possibilités d'extension de la méthode à un cadre beaucoup plus général.

Abstract

Flatness has been already well defined and widely studied for finite dimensional dynamical systems.

One of the remarquable consequences of this property is to allow parametrization of trajectories (both state and control) by free functions and their derivatives. It therefore provides an easy solution to an important problem in control theory : motion planning.

For linear finite dimensional systems, flatness is exactly equivalent to controllability, via the Brunovsky canonical decomposition.

This work proposes a definition of flatness for a class of infinite dimensional systems and extends Brunovsky canonical decomposition to infinite dimension. Following this new definition, the problem of flatness for a general linear 1-D diffusion equation is completely studied. A method allowing the effective computation of flat trajectories is given, and the canonical nature of this representation of trajectories is proved.

Remerciements

Je remercie tous les membres de la commission d'examen de ma thèse.
Michel Fliess a présidé ce jury, je le remercie tout particulièrement pour les remarques toujours intéressantes et constructives qu'il a pu faire sur mon travail en cours de thèse. Elles ont été pour moi une source certaine de motivation.
Jean-Michel Coron et Enrique Zuazua ont accepté d'être rapporteurs, je les remercie tout particulièrement pour leur intérêt et l'appréciation qu'ils ont portée sur mon travail.
Je remercie également Rabah Rabah pour sa lecture attentive ainsi que l'éclairage très intéressant qu'il m'a donné sur ce travail, et Pierre Rouchon pour les discussions toujours enrichissantes que nous avons pu avoir: elles m'ont également beaucoup apporté.
Enfin, je remercie chaleureusement Philippe Martin: il a su par ses conseils, ses idées et son ouverture d'esprit diriger mon travail tout en respectant et encourageant mon autonomie. Travailler avec lui a été un plaisir véritable.
Merci enfin à l'ensemble du Centre Automatique et Systèmes de m'avoir accueillie pendant ces trois ans.

Table des matières

Introduction 1

Chapitre 1. Systèmes plats en dimension finie et infinie 3
1.1. La platitude 3
1.2. Platitude des systèmes linéaires de dimension finie 7
1.3. Extension de la notion en dimension infinie: exemple introductif 13

Chapitre 2. Equations aux dérivées partielles de type diffusion 21
2.1. Mise sous forme standard du système 21
2.2. Problème bien posé 22
2.3. Transformation par bouclages 24
2.4. Cas particuliers 29
2.5. Propriétés de l'opérateur en espace 32
2.6. Commandabilité "plate" approchée 36

Chapitre 3. Developpements en série de puissances de x 41
3.1. Convergence des trajectoires formelles 41
3.2. Retour sur l'exemple introductif 46
3.3. Densité 47
3.4. Généralisation des résultats présentés 48

Chapitre 4. Paramétrisation des trajectoires - Platitude 49
4.1. Forme de Brunovsky 49
4.2. Convergence des trajectoires formelles 52
4.3. Densité des états de départ et d'arrivée 64
4.4. Optimalité et unicité de la paramétrisation de Brunovsky 73
4.5. Planification de trajectoire et commandabilité approchée 78

Chapitre 5. Exemples de planification de trajectoire 81
5.1. Méthode opératoire de calcul de la loi de commande 81
5.2. Tige commandée par un réservoir de chaleur. 83
5.3. Exemple d'un système de paramètre plat inconnu 84
5.4. Anneau à symétrie radiale commandé en température à l'intérieur 86
5.5. Même exemple avec commande par un réservoir de chaleur 93
5.6. Synthèse de loi de commandes par sommation au plus petit terme 93

Chapitre 6. Un exemple d'équation linéaire d'ordre > 2, de dimension 1 en espace 97
6.1. Equation de Korteweg-deVries linéaire 97
6.2. Le problème est bien posé. 97
6.3. Bouclage par les termes de bords 100

6.4. Paramétrisation de Brunovsky: étude du déterminant de Fredholm 102
6.5. Convergence des trajectoires formelles 104
6.6. Densité, commandabilité approchée 111
6.7. Simulation numérique 114

Chapitre 7. Un exemple en dimension d'espace > 1 117
7.1. Présentation du problème 117
7.2. Etude de l'opérateur en espace 118
7.3. Décomposition de problème 120
7.4. Densité, commandabilité approchée, endogénéité 121
7.5. Simulation numérique 122

Conclusion et perspectives 125

Annexe A. Les problèmes aux limites d'ordre 2 en dimension 1 127
A.1. Les problèmes autoadjoints 127
A.2. Les problèmes non autoadjoints 130

Annexe B. Semi-groupes fortement continus 151
B.1. Définitions et théorèmes de base 151
B.2. Le problème de Cauchy 152
B.3. Caractérisations du générateur 154

Annexe C. Fonctions Gevrey 159
C.1. Fonctions Gevrey d'une variable 159
C.2. Propriétés des fonctions Gevrey, exemples 162
C.3. Fonctions Gevrey de plusieurs variables 163

Annexe. Bibliographie 165

Introduction

La notion de platitude pour un système dynamique commandé a été abondamment étudiée dans le cas des systèmes dynamiques de dimension d'état finie (voir par exemple [**16**],[**36**],[**17**]).

En effet, elle permet, localement ou globalement, la réalisation effective de la planification de trajectoire et de la linéarisation par bouclage, avec une grande simplicité de mise en œuvre. Elle trouve donc des applications dans de nombreux problèmes de contrôle appliqué ([**6**],[**39**],[**22**],[**2**], [**56**],[**8**],[**31**][**26**],[**30**],).

Outre son intérêt pratique évident, la platitude des systèmes dynamiques en dimension d'état finie est un domaine d'étude théorique très riche et encore largement ouvert: malgré des avancées certaines (voir par exemple [**25**],[**24**],[**7**],[**58**],[**57**],[**38**], [**51**],[**37**]), le problème de la caractérisation des systèmes plats reste encore un problème ouvert.

Depuis plusieurs années l'intérêt pour le contrôle des systèmes de dimension infinie décrits par des équations aux dérivées partielles est allé en croissant. Lorsqu'on veut controler de tels systèmes, on se trouve confronté à des problèmes nouveaux par rapport à la situation en dimension finie. En effet, il faut définir dans quel espace d'état (espace de fonctions de une ou plusieurs variables) le problème est bien posé au sens de Cauchy, et avec quelles conditions sur la commande. Une approche maintenant classique et quasi-incontournable reposant sur des techniques d'étude du problème stationnaire par formulation variationnelle et la théorie des semi-groupes (voir par exemple [**5**]) permet dans de nombreux cas de répondre à ce problème.

Il se pose ensuite des problèmes de contrôle proprement dit, et en particulier le très important problème de la commandabilité de tels systèmes. Une méthode désormais classique et efficace pour obtenir des résultats de commandabilité, lorsque c'est possible, est la célèbre méthode HUM (Hilbert Uniqueness Method), mise au point par J.L Lions (voir [**32**]), fondée sur l'obtention d'inégalités d'observabilité pour le problème adjoint.

On en trouve de nombreuses applications (voir par exemple [**4**],[**46**],[**50**]). De façon générale, les résultats de commandabilité exacte concernant les systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles non linéaires sont difficiles à obtenir.

Une nouvelle difficulté, qu'on ne rencontre pas en dimension finie, est que certains systèmes, comme les équations de type diffusion, ne permettent pas, à cause de leurs propriétés régularisantes, d' obtenir une formulation satisfaisante, dans un cadre fonctionnel où il soit bien posé, du problème de la commandabilité exacte. C'est notamment le cas des équations qui seront étudiées dans les chapitres 2 et 4 de cet ouvrage.

On peut cependant obtenir des résultats de commandabilité approchée pour une très large classe de ces systèmes. Ainsi, la commandabilité approchée de l'équation de la chaleur linéaire et semi-linéaire a été étudiée dans un cadre très général par Fabre, Puel et Zuazua (voir [**14**]), par dualité en s'appuyant sur un résultat de continuation unique pour le problème adjoint (voir [**40**]) dans le cas linéaire et en rajoutant un argument de point fixe dans le cas semi-linéaire.

Parallèlement, dans le cadre des systèmes linéaires de dimension infinie, les bases d'une approche visant à généraliser à la dimension infinie les concepts familiers de l'automatique linéaire en dimension finie, et en particulier ceux d'une approche fréquentielle de la commande des systèmes, tels que par exemple les notions de pôle, de fonction de transfert et de robustesse (voir [**20**] et plus récemment [**11**]). On trouve par exemple dans [**11**] un citère de commandabilité approchée pour une certaine classe de systèmes tout à fait analogue à la version modale du critère de Kalman en dimension finie. Tout ceci a motivé le désir d'étendre les concepts généraux sous-jacents à la notion de platitude, à savoir la caractérisation d'un système par l'ensemble de ses trajectoires, la paramétrisation de trajectoires par des fonctions libres, l'équivalence des systèmes, la notion d'endogénéité, aux systèmes de dimension infinie. On espère ainsi bénéficier en dimension infinie de la simplicité de la synthèse de lois de commande qu'apporte la platitude, ce qui est un atout certain par rapport aux approches mentionnées ci-dessus. Parmi les travaux déjà effectués à ce jour, on peut citer [**19**] pour une approche algébrique très intéressante, [**45**],[**18**] pour des équations de type équation des ondes et [**42**],[**41**] pour des systèmes à retard, et enfin [**12**] pour l'équation de Burgers.

L'objectif du présent travail est d'étudier, pour des systèmes de dimension infinie linéaires décrits par une équation aux dérivées partielles d'évolution (ordre de dérivation en temps égal à 1), l'extension des notions mentionnées ci-dessus, et de proposer une méthode *systématique* de construction d'une loi de commande pour la planification de trajectoire. Dans le cas des systèmes linéaires de dimension finie, la notion de paramétrisation par platitude est intrinsèquement liée à la commandabilité et à la forme de Brunovsky. C'est donc la démarche de mise sous forme de Brunovsky que nous essayons, dans une certaine mesure, de généraliser au cas de la dimension infinie.

Les résultats proposés concernent essentiellement les systèmes à une variable d'espace, et à une seule commande. Une étude complète des équations d'ordre 2 en espace est effectuée, et il est montré sur un exemple que les notions exposées et la méthode opératoire de synthèse de la loi de contrôle pour la planification de trajectoires s'étendent sans difficulté à des problèmes linéaires d'évolution monodimensionnels d'ordre plus grand que 2.

Un exemple de problème en dimension d'espace supérieure à 1 est également proposé.

CHAPITRE 1

Systèmes plats en dimension finie et infinie

1.1. La platitude

1.1.1. Equivalence de trajectoires. La notion de paramétrisation des trajectoires d'un système dynamique de dimension d'état finie, et donc l'idée de caractériser un système par l'ensemble de ses trajectoires a donné lieu à l'étude de la notion d'équivalence entre systèmes dynamiques (voir [**17**] et [**36**] pour un exposé complet et une formalisation adéquate dans le cadre de la géométrie différentielle de dimension infinie), et à une formulation très générale de la propriété de platitude pour un système dynamique de dimension finie.

Nous rappelons brièvement les notions qui interviennent dans cette définition. Soit un système dynamique commandé

$$\dot{x} = f(x,u)$$

où f est un fonction de classe C^∞ sur un ouvert $X \times U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $x \in X$, $u \in U$; nous considérons les trajectoires régulières (c'est à dire de classe C^∞) de ce système

$$t \mapsto (x(t),u(t)) \in X \times U$$

où $x(t)$ et $u(t)$ vérifient

$$\dot{x}(t) = f(x(t),u(t)).$$

Nous définissons alors la fonction à valeurs dans $X \times U \times \mathbb{R}_m^{\aleph}$ où $\mathbb{R}_m^{\aleph}$ désigne l'espace des suites dénombrables d'éléments de $\mathbb{R}^m$

$$t \mapsto \xi(t) = (x(t),u(t),\dot{u}(t),\ldots)$$

On a

$$\dot{\xi}(t) = (f(x(t),u(t)),\dot{u}(t),\ddot{u}(t),\ldots) = F(\xi).$$

$\xi(t)$ peut donc être considérée comme une trajectoire du champ de vecteurs de dimension infinie F (mais dont chaque composante ne dépend que d'un nombre fini de variables).

Réciproquement, à tout champ de vecteurs de dimension infinie, mais dont chaque composante ne dépend que d'un nombre fini de variables, on peut associer un système dynamique classique.

L'espace $\mathbb{R}_m^{\aleph}$ est muni d'une topologie convenable (voir [**36**]), ce qui permet de parler d'ensemble ouvert et de fonction régulières, et de donner la définition d'un système dynamique.

Définition 1.1.1. Un système dynamique est la donnée d'une paire $(\mathcal{O},F)$, où $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}_m^{\aleph}$ et F est un champ de vecteurs régulier de $X \times U \times \mathbb{R}_m^{\aleph}$.

Dans cette définition, la notion de dimension d'état disparaît d'une certaine façon, comme le prouve l'exemple suivant:

EXEMPLE 1.1.1. Les deux systèmes dynamiques usuels, où f est un fonction de classe C^∞ sur un ouvert $X \times U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $x \in X$, $u \in U$ décrits par

$$\dot{x} = f(x,u)$$

pour le premier, et

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u) \\ \dot{u} &= v \end{aligned}$$

pour le deuxième,

ont la même représentation en terme de champ de vecteur de dimension infinie, par le champ de vecteur:

$$F(\xi) = (f(x,u),\dot{u},\ddot{u},\ldots).$$

Le rajout d'intégrateurs sur les m entrées du système disparait dans la représentation par des champs de vecteurs infinis.

L'exemple qui suit s'avèrera très important.

EXEMPLE 1.1.2 (Le système trivial dans $\mathbb{R}^\aleph_m$). Il s'agit du système $(\mathbb{R}^\aleph_m,S)$ où S est défini par

$$S(u_0,u_1,u_2,\ldots) = (u_1,u_2,u_3,\ldots).$$

Il décrit n'importe quel système fait de m chaines de longueur arbitraire finie d'intégrateurs.

On peut alors définir la notion d'équivalence entre systèmes

DÉFINITION 1.1.2. Deux systèmes dynamiques $\dot{\xi} = F(\xi)$ et $\dot{\zeta} = G(\zeta)$, où F et G sont des champs de vecteurs de dimension infinie de classe C^∞, sont dits équivalents si

- il existe une transformation Φ régulière telle que $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\aleph_m \to \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^\aleph_m$ a des composantes qui ne font intervenir qu'un nombre fini de termes, et pour toute trajectoire régulière $t \mapsto (\xi(t))$ du premier système,
$$\zeta(t) = \Phi(\xi(t))$$
soit une trajectoire du deuxième.
- et réciproquement, il existe une transformation Ψ régulière telle que $\Psi : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^\aleph_m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\aleph_m$ et pour toute trajectoire suffisamment régulière $t \mapsto (\zeta(t))$ du deuxième système,
$$\xi(t) = \Psi(\zeta(t))$$
soit une trajectoire du premier.

Une transformation Φ pour laquelle Ψ existe est dite *endogène*.

DÉFINITION 1.1.3. Le système dynamique $\dot{\xi} = F(\xi)$, où F est un champ de vecteur infini de classe C^∞ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\aleph_m$, est dit "plat" lorsqu'il est équivalent par transformation endogène au système trivial de $\mathbb{R}^\aleph_m$, c'est à dire à la donnée de v, formé de m fonctions régulières libres. Ces fonction régulières libres sont appelées *sorties plates* du système.

REMARQUE. On peut donner une définition locale de la platitude (voir [**36**]) qui est souvent celle qu'on utilise en pratique.

REMARQUE. L'appellation sortie plate vient du fait que les fonctions libres s'expriment en fonction de l'état et de la commande du système d'origine et de ses dérivées, elle a donc le statut de sortie du système, dont l'état est éventuellement augmenté d'un certain nombre d'intégrateurs sur les entrées.

Un système (localement) plat au sens de cette définition est nécessairement (localement) commandable.

De nombreux systèmes mécaniques, électriques, ou issus du domaine du génie des procédés vérifient la propriété de platitude (voir [**36**] et [**17**] pour un recueil d'exemples).

1.1.2. Planification de trajectoire pour les systèmes plats. La notion de platitude permet de résoudre un problème très important de la théorie du contrôle : la planification de trajectoires.

L'objectif de la planification de trajectoire est de fabriquer une loi de commande *en boucle ouverte* pour amener un système donné d'un certain état initial, supposé connu, à un état final connu. On peut imposer ou non le temps mis pour effectuer ce changement d'état.

Pour un système plat, l'idée permettant de résoudre le problème de la planification est de faire la planification pour le système linéaire équivalent, puis de revenir au système de départ grâce au changement de coordonnées endogène. En effet, le système étant plat, il est équivalent au système trivial formé de k chaines d'intégrateurs

$$\begin{gathered} y_1,\dot{y}_1,\ddot{y}_1 \dots \text{ d'entrée } y_1^{n_1} \\ \vdots \\ y_k,\dot{y}_k,\ddot{y}_k \dots \text{ d'entrée } y_k^{n_k}. \end{gathered}$$

Nous notons Y le vecteur d'état de ce système, donc

$$Y = (y_1,\dot{y}_1,\ddot{y}_1,\dots y_1^{n_1-1},\dots y_k,\dot{y}_k,\ddot{y}_k \dots,y_k^{n_k-1})$$

et V le vecteur des entrées, donc

$$V = (y_1^{n_1},\dots y_k^{n_k}).$$

Si nous traduisons en projection sur les deux premières coordonnées la définition d'un système plat, l' existence de Φ nous garantit qu'il existe (au moins localement) un entier i et une transformation ϕ régulière tels que $\phi : \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^m)^{i+1} \to \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m)$ et pour toute trajectoire suffisamment régulière $t \mapsto (x(t),u(t))$ du premier système,

$$(Y(t),V(t)) = \phi(x(t),u(t),\dot{u}(t),\dots,u^{(i)}(t))$$

soit une trajectoire du deuxième. En particulier, si on fixe un état initial, un état final et un instant final T, aux instants 0 et T on peut calculer les valeurs de $Y(0),V(0)$ et de $Y(T),V(T)$.

Réciproquement, il existe un entier j et une transformation ψ régulière tels que $\psi : \mathbb{R}^p \times (\mathbb{R}^m)^{j+1} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ et pour toute trajectoire suffisamment régulière $t \mapsto (Y(t),V(t))$ du deuxième système,

$$(x(t),u(t)) = \psi(Y(t),V(t),\dot{V}(t),\dots,V^{(j)}(t))$$

soit une trajectoire du premier.

On raccorde alors les deux états et les deux commandes $Y(0)$,$V(0)$ et $Y(T)$,$V(T)$ en prenant pour chaque $y_m(t)$, m variant de 1 à k, un polynôme de degré $2n_m+1$ dont les valeurs des dérivées au départ et à l'arrivée coïncident avec celles du vecteur Y. On note $\tilde{Y}(t)$ et $\tilde{V}(t)$ les fonctions obtenues.

La loi de commande désirée s'obtient alors en revenant au système initial par

$$(\tilde{x}(t),\tilde{u}(t)) = \psi(\tilde{Y}(t),\tilde{V}(t),\dot{\tilde{V}}(t),\ldots,\tilde{V}^{(j)}(t)).$$

REMARQUE. Il faut bien sur tenir compte en pratique du fait que les paramétrisations Φ et Ψ ne sont souvent que locales et gérer le passage de singularités du système.

REMARQUE. En pratique, le fait pour un système dynamique, d'avoir des trajectoires paramétrables par des fonctions libres et leurs dérivées, même on n'a pas équivalence entre ce système et le système trivial parce que le système n'est pas commandable, est en soi très intéressant dans bien des applications.

1.1.3. Linéarisation par bouclage dynamique. Outre les problèmes de planification de trajectoire en boucle ouverte, il faut aussi résoudre, dans les applications de controle industrielles, le problème de l'asservissement du système sur la trajectoire planifiée, afin de corriger les erreurs dues aux erreurs dans la modélisation du système qui a servi à élaborer la commande en boucle ouverte et l'effet des perturbations, et d'optimiser les temps de réponse. Il s'agit de problèmes de suivi de trajectoires (ou "tracking") et donc contrôle en boucle fermée pour lesquels la notion de platitude joue aussi un rôle par le biais de la linéarisation par bouclage. On pourra consulter [**36**] pour un exposé très complet de l'utilisation de la linéarisation par bouclage pour le contrôle en boucle fermée de systèmes non linéaires. La linéarisation par bouclage se définit de la façon suivante

DÉFINITION 1.1.4. Un système dynamique

$$\dot{x} = f(x,u), \text{ où } (x,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \tag{1.1.1}$$

où f est C^∞, $f(0,0) = 0$ et $\operatorname{rang}(\partial_f u)(0,0) = m$, est linéarisable par bouclage dynamique si il existe un bouclage dynamique régulier

$$\begin{aligned} \dot{z} &= a(x,z,v) \\ u &= b(x,z,v) \qquad \text{où } z \in \mathbb{R}^q,\ v \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

avec équilibre en (0,0,0) tel que le système "augmenté"

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,b(x,z,v)) \\ \dot{z} &= a(x,z,v) \end{aligned}$$

puisse devenir, par un changement de coordonnées (donc un diffeomorphisme) noté $\xi = \Xi(x,z)$, où $\xi \in \mathbb{R}^{m+q}$ un système linéaire $\dot{\xi} = A\xi + Bv$.

Il découle donc de cette définition que

PROPRIÉTÉ 1.1.1 ([**36**], section 2.1, th.2 et cor.2). *Un système dynamique plat au sens de la définition par équivalence est linéarisable par bouclage dynamique.*

On définit alors la notion de bouclage endogène par

DÉFINITION 1.1.5. Le bouclage

$$\begin{aligned} \dot{z} &= a(x,z,v) \\ u &= b(x,z,v) \qquad \text{où } z \in \mathbb{R}^q,\ v \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

est dit endogène si le système en boucle ouverte (1.1.1) est équivalent (au sens de l'équivalence des trajectoires définie précedemment) au système en boucle fermée

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,b(x,z,v)) \\ \dot{z} &= a(x,z,v). \end{aligned}$$

Réciproquement, la propriété d'être linéarisable par bouclage endogène en un système commandable entraîne la platitude. En effet, par définition d'un bouclage endogène, le système de départ est équivalent au système bouclé, qui est lui même équivalent par changement de coordonnées statique au système linéaire $\dot{\xi} = A\xi + Bv$ commandable: c'est la définition de la propriété d'être linéarisable par bouclage. Mais, par bouclage statique et changement de coordonnées, le système linéaire $\dot{\xi} = A\xi + Bv$ est équivalent à sa forme canonique de Brunovsky :

$$\begin{aligned} y_1^{(i_1)} &= b_1 v_1 \\ &\vdots \\ y_k^{(i_k)} &= b_k v_k \\ &\vdots \\ y_m^{(i_m)} &= b_m v_m, \end{aligned}$$

où les coefficients $b_1, \ldots, b_m$ sont non nuls, qui est le système trivial donné dans l'exemple 1.1.2. Le système de départ est donc équivalent au système trivial, et nous avons

PROPRIÉTÉ 1.1.2. *Un système dynamique de dimension d'état finie est plat si et seulement si il est linéarisable par bouclage dynamique endogène en un système linéaire commandable.*

L'hypothèse d'endogénéité a, là encore, garanti que le bouclage dynamique n'a pas rajouté d'état véritable au système, si ce n'est un nombre fini d'intégrateurs sur les entrées des chaînes de la forme de Brunovsky.

Cette hypothèse est nécessaire pour sélectionner parmi les bouclages dynamiques réguliers une classe de transformations qui assure une correspondance *bijective* entre des fonctions arbitraires libres $t \mapsto y(t)$ suffisamment dérivables et les trajectoires suffisamment dérivables du système, et qui conserve la propriété de commandabilité.

1.2. Platitude des systèmes linéaires de dimension finie

1.2.1. Equivalence entre platitude et commandabilité. Dans le cas des systèmes linéaires, grâce à la forme canonique de Brunovsky, il est aisé de voir que tous les systèmes commandables ayant le même nombre de commandes sont équivalents par bouclage statique, et donc qu'ils sont plats. Les sorties plates

peuvent être choisies comme étant les sorties des chaînes d'intégrateurs de la forme canonique de Brunovsky du système. Réciproquement, dans sa définition même, un système plat voit ses trajectoires paramétrées par des fonctions y libres et leurs dérivées. L'hypothèse d'endogénéité revient à affirmer qu'à tout instant, y et ses dérivées peuvent être reconstruites à partir de x et de u et ses dérivées. Il est donc possible (voir [**16**]) de construire une trajectoire reliant n'importe quel état de départ à n'importe quel état état d'arrivée, et le système est commandable.

Dans le cas des systèmes linéaires, on a donc coïncidence exacte entre la notion de commandabilité et celle de platitude, et le lien se fait par l'intermédiaire de la forme de Brunovsky.

1.2.2. Le cas des systèmes linéaires à une commande: platitude et décomposition de Brunovsky.

1.2.2.1. *Le cas général.* Soit un système linéaire de dimension finie commandable à une commande

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

où A est une matrice (n,n), B est un vecteur de dimension n, et pour tout t, $u(t)$ est un scalaire et $x(t)$ un vecteur de dimension n.

Les notions exposées dans les paragraphes précédents se réduisent alors à rechercher à priori une paramétrisation des trajectoires régulières du système sous la forme

$$x(t) = \sum_{i=0}^{N} y^{(i)}(t) e_i, \tag{1.2.1}$$

où ici et dans toute la suite, $y^{(i)}$ designera la dérivée à l'ordre i en temps de la fonction $y(t)$, et $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est un base de l'espace d'état à déterminer. Notons que nous ne faisons *aucune hypothèse* à priori sur la valeur de N.

On doit avoir:

$$\sum_{i=1}^{N} y^{(i)}(t)(e_{i-1} - A(e_i)) - y(t)A(e_0) + y^{(N+1)}(t)e_N = Bu(t).$$

Comme cette égalité doit avoir lieu pour toutes les fonctions y dérivables N fois, nous obtenons que nécessairement:

$$\begin{aligned} \exists (a_0, \ldots, a_{N+1}) \in \mathbb{R}^{N+2} \ / \quad & \\ & e_N = a_{N+1} B, \\ & e_{N-1} - A(e_N) = a_N B, \\ & \vdots \\ & e_0 - A(e_1) = a_1 B, \\ & A(e_0) = -a_0 B, \end{aligned}$$

d'où:

$$e_i = a_{N+1} A^{N-i} B + \ldots + a_{i+2} AB + a_{i+1} B,$$

et

$$A(e_0) = a_{N+1} A^{N+1} B + a_N A^N B \ldots + a_2 A^2 B + a_1 AB = -a_0 B. \tag{1.2.2}$$

A cause du critère de commandabilité de Kalman, dès que le coefficient a_{N+1} est non nul, on doit avoir $N \geq n-1$, sinon (1.2.2) ne peut pas avoir lieu. De plus,

les vecteurs e_N,e_{N-1}, ...,e_{N-n+1} forment une base de l'espace d'état, et l'existence des coefficients $a_0, \ldots, a_{N+1}$ est assurée par la condition de rang.

Nous prenons $a_{N+1} = 1$, et nous obtenons alors l'expression de u en fonction de y et de ses dérivées par

$$u = a_0 y + a_1 \dot{y} + a_2 \ddot{y} + \ldots + a_N y^{(N)} + y^{(N+1)}. \tag{1.2.3}$$

Or, si nous écrivons la dynamique du système en coordonnées dans la base e_{N-n+1}, e_{N-n+2}, ...,e_N (prise dans cet ordre) où c_1,c_2, ...,c_n sont les coordonnées de e_{N-n} dans cette base, nous obtenons également

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} c_1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ c_{n-1} & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ c_n - a_{N-n+2} & -a_{N-n+2} & \ldots & -a_N & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u.$$

Il est alors clair que la première coordonnée dans cette base, x_1 est un sortie plate pour le système. En effet d'après l'expression de la dynamique, la coordonnée x_i dans cette base s'exprime en fonction des $i-1$ premières dérivées de x_1 et u s'exprime en fonction des n premières dérivées de x_1:

$$\begin{aligned} x_2 &= \dot{x}_1 - c_1 x_1 \\ x_3 &= \dot{x}_2 - c_2 x_1 = \ddot{x}_1 - c_1 \dot{x}_1 - c_2 x_1 \\ &\vdots \\ x_n &= \dot{x}_{n-1} - c_{n-1} x_1 = x_1^{(n-1)} - c_1 x_1^{(n-2)} - \ldots - c_{n-1} x_1 \\ u &= x_1^{(n)} - c_1 x_1^{(n-1)} - \ldots - c_{n-1} \dot{x}_1 \\ &\quad + (a_{N-n+2} - c_n) x_1 + a_{N-n+3} x_2 + \ldots + a_N x_{n-1} + x_n \\ &= x_1^{(n)} + k_{n-1} x_1^{(n-1)} + \ldots + k_0 x_1 \end{aligned}$$

Réciproquement, x_1 se déduit de x par bouclage statique.

Supposons que $N > n-1$, nous montrons alors que y ne peut pas être une sortie plate endogène du système. En effet, si elle l'était, nous pourrions écrire

$$y = l_1 x_1 + \ldots + l_p x_1^{(p)}, \text{ où } p \geq 0 \text{ et } l_p \neq 0$$

et en injectant cette relation dans (1.2.3)

$$u = l_p x_1^{(N+p+1)} + \text{des dérivées d'ordre} < N+p+1 \text{ de } x_1.$$

Mais nous avons établi ci-dessus que

$$u = x_1^{(n)} + k_{n-1} x_1^{(n-1)} + \ldots + k_0 x_1,$$

d'où, comme $N+1 > n$ et $l_p \neq 0$, une relation du type

$$x_1^{(N+p+1)} = \text{combinaison linéaire de dérivées d'ordre} < N+p+1 \text{ de } x_1,$$

ce qui contredit le fait que x_1 est une sortie plate du système, c'est à dire une fonction libre.

Ainsi, pour avoir une paramétrisation endogène, il faut que $N = n - 1$. Dans ce cas, comme la relation (1.2.2) est vérifiée, les coefficients c_i n'ont plus lieu d'être et la matrice dynamique du système est sous forme compagne dans la base $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$. En calculant le polynôme caractéristique de cette matrice, on voit que le seul choix possible pour les coefficients a_i est celui des coefficients du polynôme caractéristique normalisé de A.

1.2.2.2. *Forme de Brunovsky lorsque la matrice dynamique est inversible.* Si A est inversible d'inverse K le terme de plus bas degré du polynôme caractéristique de A est non nul. Notons ce polynôme

$$P(X) = p_0 + p_1 X + \ldots + p_{n-1} X^{n-1} + X^n,$$

on peut alors réécrire l'algorithme de calcul des e_i sous la forme:

$$\begin{aligned} e_0 &= -p_0 KB \\ e_1 &= K(e_0) - p_1 KB = K(e_0) + \frac{p_1}{p_0} e_0, \end{aligned}$$

(1.2.4) $$\ldots$$

$$\begin{aligned} e_{n-1} &= K e_{n-2} - p_{n-1} KB = K(e_{n-2}) + \frac{p_{n-1}}{p_0} e_0, \\ K(e_{n-1}) &= -\frac{1}{p_0} e_0 \end{aligned}$$

Cette version de l'algorithme s'avèrera extrèmement utile en dimension d'état infinie, où le polynôme caractéristique de A est remplacé par une fonction analytique qui n'a donc pas de terme de plus haut degré.

1.2.3. Interprétation modale de la platitude. Si de plus A est diagonalisable, nous notons $(d_1, \ldots, d_n)$ une base diagonalisante de A (ou base modale). λ_i désigne la valeur propre associée à d_i, et $(b_1, \ldots, b_n)$ sont les coordonnées de B dans la base diagonalisante. La matrice de commandabilité de Kalman s'y écrit:

$$[B\ AB\ A^2B\ \ldots\ A^{n-3}B\ A^{n-2}B\ A^{n-1}B] =$$

$$\begin{pmatrix} b_1 & \lambda_1 b_1 & \lambda_1^2 b_1 & \ldots & \lambda_1^{n-3} b_1 & \lambda_1^{n-2} b_1 & \lambda_1^{n-1} b_1 \\ b_2 & \lambda_2 b_2 & \lambda_2^2 b_2 & \ldots & \lambda_2^{n-3} b_2 & \lambda_2^{n-2} b_2 & \lambda_2^{n-1} b_2 \\ b_3 & \lambda_3 b_3 & \lambda_3^2 b_3 & \ldots & \lambda_3^{n-3} b_3 & \lambda_3^{n-2} b_3 & \lambda_3^{n-1} b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n-2} & \lambda_{n-2} b_{n-2} & \lambda_{n-2}^2 b_{n-2} & \ldots & \lambda_{n-2}^{n-3} b_{n-2} & \lambda_{n-2}^{n-2} b_{n-2} & \lambda_{n-2}^{n-1} b_{n-2} \\ b_{n-1} & \lambda_{n-1} b_{n-1} & \lambda_{n-1}^2 b_{n-1} & \ldots & \lambda_{n-1}^{n-3} b_{n-1} & \lambda_{n-1}^{n-2} b_{n-1} & \lambda_{n-1}^{n-1} b_{n-1} \\ b_n & \lambda_n b_n & \lambda_n^2 b_n & \ldots & \lambda_n^{n-3} b_n & \lambda_n^{n-2} b_n & \lambda_n^{n-1} b_n \end{pmatrix}$$

Si l'un des coefficients b_i est nul, la matrice ne peut pas être de rang plein car elle contient une ligne de zéros. De même, si deux des valeurs propres de la matrice sont égales, la matrice présente deux lignes proportionnelles, et elle n'est pas de rang plein. Réciproquement, le déterminant de cette matrice est un déterminant de Vandermonde, donc sa nullité entraîne l'égalité entre deux λ_i ou la nullité d'au moins un des b_i.

Ceci fournit donc une caractérisation modale de la commandabilité (et de la platitude) dans le cas d'un système à une commande:

PROPRIÉTÉ 1.2.1. *Pour qu'un système dynamique de dimension n à une commande, à dynamique A diagonalisable soit commandable (ou plat), il faut et il suffit que*

- *A ait n valeurs propres distinctes,*
- *et le vecteur de commande B ait une projection non nulle sur chaque sous-espace propre de A.*

Revenons dans ce cas à la paramétrisation (1.2.1), éventuellement non endogène des trajectoires du système, nous avons la propriété de minimalité suivante

PROPRIÉTÉ 1.2.2. *Si le système est commandable et la matrice A est diagonalisable à valeur propres simples, alors pour toute paramétrisation des trajectoires de la forme* (1.2.1)-(1.2.3)

$$x = \sum_{i=0}^{N} y^{(i)} e_i$$
$$u = c_0 y + c_1 \dot{y} + c_2 \ddot{y} + \ldots + c_N y^{(N)} + y^{(N+1)}$$

on a la factorisation

$$\sum_{i=0}^{N} c_i X^i + X^{N+1} = \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i + X^n \right) \left(\sum_{i=0}^{N-n} d_i X^i + X^{N-n+1} \right)$$

où

$$D(X) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i + X^n$$

est le polynôme caractéristique de A.

La paramétrisation peut donc se décomposer en

$$x_1 = \sum_{i=0}^{N-n} d_i y^{(i)} + y^{(N-n+1)}$$
$$u = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x_1^{(i)} + x_1^{(n)}$$

et se réaliser comme la mise en série de deux systèmes (voir figure 1).

DÉMONSTRATION. Nous projetons la relation (1.2.2) écrite avec les coefficients c_i dans la base modale. Nous obtenons pour chaque valeur propre λ_k, $1 \leq k \leq n$:

$$\sum_{i=0}^{N} c_i \lambda_k^i + \lambda_k^{N+1} = P(\lambda_k) = 0.$$

Donc tous les λ_k sont des racines de ce polynôme.

Or, l'existence de n valeurs propres distinctes entraîne que

$$D(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k),$$

donc D divise P, ce qui est la première assertion de la propriété.

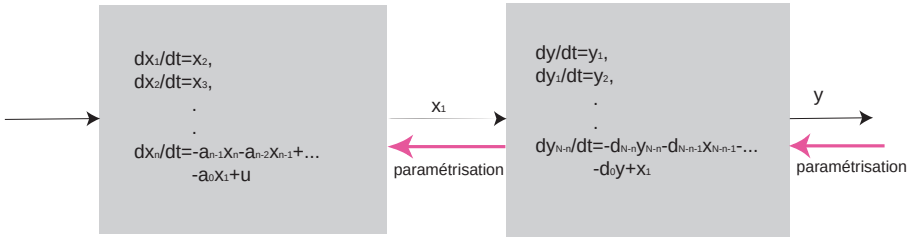


FIG. 1. *Décomposition de la paramétrisation.*

Posons $P = DQ$; la deuxième assertion vient de la relation (1.2.3) qui s'écrit

$$u = P(\frac{d}{dt})(y) = D(\frac{d}{dt})\left(Q(\frac{d}{dt})(y)\right).$$

La même relation (1.2.3) appliquée à la sortie plate x_1 fournit

$$u = D(\frac{d}{dt})(x_1),$$

d'où $x_1 = Q(\frac{d}{dt})(y)$, qui est le résultat annoncé. □

1.2.4. Planification de trajectoires. Nous détaillons ici la méthode indiquée précédemment.

Il s'agit de construire une loi de commande $u(t)$ qui amène le système de l'état initial $x(0)$ à l'instant 0 à l'état final $x(T)$ à l'instant T. Nous appelons ici y la sortie plate endogène qui est la première coordonnée dans la base de Brunovsky construite par l'algorithme de la section précédente sous sa forme directe ou inverse si c'est possible; nous avons $y = Mx$, où M est la première ligne de la matrice de changement de base.

Les valeurs de $y(0)$, $\dot{y}(0)$, $\ldots$, $y^{(n-1)}(0)$ sont donc des combinaisons linéaires des composantes de $x(0)$, elles sont connues à l'instant 0. On les note d_0, d_1, $\ldots$, d_{n-1}. La valeur de $y^{(n)}(0)$ est également connue, comme combinaison des valeurs $x(0)$ et $u(0)$, on la note d_n.

De même, les valeurs de $y(T)$, $\dot{y}(T)$, $\ldots$, $y^{(n-1)}(T)$, $y^{(n)}(T)$ sont connues à l'instant T. On les note f_0, f_1, $\ldots$, f_{n-1}, f_n.

On choisit alors de spécialiser y en lui donnant la valeur de la fonction polynômiale p de degré $2n+1$ qui vérifie:

$$\begin{aligned} p(0) = d_0,\, p(T) = f_0,\\ \dot{p}(0) = d_1,\, \dot{p}(T) = f_1,\\ \vdots\\ p^{(n-1)}(0) = d_{n-1},\, p^{(n-1)}(T) = f_{n-1},\\ p^{(n)}(0) = d_n,\, p^{(n)}(T) = f_n. \end{aligned}$$

Les relations

$$x(t) = \sum_{i=0}^{n-1} p^{(i)}(t) e_i$$
$$u = a_0 y + a_1 \dot{y} + a_2 \ddot{y} + \ldots + a_{n-1} y^{(n-1)} + y^{(n)},$$

où les e_i sont les vecteurs de la base de Brunovsky et les a_i sont les coefficients du polynôme caractéristique de A, définissent une trajectoire du système allant de $x(0)$ en 0 à $x(T)$ en T.

En particulier, la loi de commande

$$u(t) = a_0 p(t) + a_1 \dot{p}(t) + a_2 \ddot{p}(t) + \ldots + a_{n-1} p^{(n-1)}(t) + p^{(n)}(t)$$

répond au problème posé.

1.3. Extension de la notion en dimension infinie: exemple introductif

L'étude de cet exemple a été commencée dans [**28**] en utilisant une approche à base de développements en série formelle des trajectoires. Elle a été ensuite reprise dans [**29**], dans un cadre plus général. Nous en donnons maintenant une version plus achevée faisant apparaître les différentes approches possibles pour traiter le problème de la paramétrisation des trajectoires.

Considérons la tige mono-dimensionnelle:

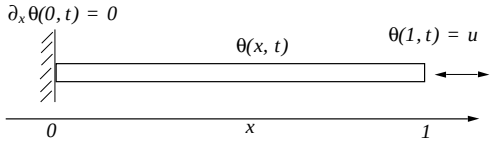


FIG. 2. *Tige chauffée à une extrémité, isolée à l'autre.*

On commande la température en $x = 1$, alors que l'extrémité $x = 0$ est parfaitement isolée. Ce système est modélisé par

$$\partial_t \theta(x,t) = \partial_{xx} \theta(x,t), \quad x \in [0,1] \tag{1.3.1}$$
$$\partial_x \theta(0,t) = 0 \tag{1.3.2}$$
$$\theta(1,t) = u(t), \tag{1.3.3}$$

où $\theta(x,t)$ est la répartition de température le long de la tige et $u(t)$, la température en 1, est la commande.

Nous allons montrer, en nous inspirant de la dimension finie, que ce système est "plat" avec

$$y(t) := \theta(0,t)$$

comme sortie plate. En d'autres termes, nous allons montrer qu'il existe (dans un certain sens) une correspondance entre des fonctions arbitraires $t \mapsto y(t)$ et un ensemble suffisamment "grand" de trajectoires de (1.3.1)-(1.3.3).

En effet, pour un système de dimension d'état finie la propriété de platitude consiste à demander que *toutes* les trajectoires au sens classique du système soient (au moins localement au voisinage de l'état de départ) paramétrables par une fonction arbitraire et un nombre fini de ses dérivées. En dimension infinie, nous nous

contenterons de demander que les points de départ et d'arrivée des trajectoires paramétrées (ou trajectoires "plates") forment une partie dense, au sens d'une norme convenable, de l'espace d'état du système, de telle sorte que comme en dimension finie, on conserve le lien:

$$\text{platitude} \Leftrightarrow \text{commandabilité (approchée)}$$

1.3.1. Détermination de l'espace d'état: le problème est bien posé dans $L^2(0,1)$. D'après les définitions et les résultats donnés dans l'annexe B, il s'agit d'un problème de controle bien posé dans $L^2(0,1)$. En effet, par rapport aux systèmes dynamiques de dimension finie, où le théorème de Cauchy garantit toujours un problème bien posé, dans le cas des systèmes de dimension d'état infinie décrits par des équations aux dérivées partielles avec conditions aux bords nous devons nous assurer de l'existence, l'unicité des solutions et leur régularité au sens d'une norme convenable vis à vis de la condition initiale et de la loi de commande. Pour ce problème, les résultats de l'annexe B prouvent que si la loi de commande u est dans $C^1(0,T)$ et l'état initial est dans $L^2(0,1)$, nous obtenons une trajectoire unique solution au sens faible du problème. En prenant un état initial plus régulier et une loi de commande compatible avec l'état initial, on obtient une solution forte (ou classique) du problème.

1.3.2. Solution par des développements en série. Une première approche est de remarquer que le système "inversé":

$$\partial_{xx}\theta(x,t) = \partial_t\theta(x,t) \tag{1.3.4}$$

$$\partial_x\theta(0,t) = 0 \tag{1.3.5}$$

$$\theta(0,t) = y(t), \tag{1.3.6}$$

est sous forme de Cauchy-Kovalevsky. Nous cherchons donc tout d'abord une solution série formelle de la forme $\theta(x,t) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i(t)\frac{x^i}{i!}$, où les a_i sont des fonctions de $C^\infty(0,1)$. Grâce à (1.3.4)-(1.3.6), nous obtenons

$$\forall i \geq 0, \begin{cases} a_{2i}(t) = y^{(i)}(t) \\ a_{2i+1}(t) = 0, \end{cases}$$

si bien que

$$\theta(x,t) = \sum_{i=0}^{+\infty} y^{(i)}(t)\frac{x^{2i}}{(2i)!}. \tag{1.3.7}$$

La loi de commande formelle est donnée par:

$$u(t) = \theta(1,t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{y^{(i)}(t)}{(2i)!}. \tag{1.3.8}$$

Nous donnons alors un sens à cette solution formelle en imposant à $t \mapsto y(t)$ d'être d'un ordre Gevrey σ convenable. La définition ainsi que plusieurs propriétés importantes des fonctions Gevrey sont données dans l'annexe C. Ce qui nous intéresse ici est que ce sont des fonctions C^∞ dont la croissance des valeurs absolues des dérivées est localement bornée par un terme en $K^n(n!)^\sigma$ pour la dérivée d'ordre n.

On obtient le résultat qui suit, qui sera prouvé dans un cadre plus général dans le chapitre 3.

PROPRIÉTÉ 1.3.1. *Si $y(t)$ est de classe Gevrey $\sigma < 2$, la solution formelle* (1.3.7) *est Gevrey d'ordre σ en t et deux fois continûment dérivable en x (en particulier, la loi de commande formelle* (1.3.8) *est Gevrey d'ordre σ).*

Lorsque $\sigma = 2$, on a le même résultat en prenant $R > 1$ (R est le "rayon de $y(t)$ dans la définition C.1.5.

Nous avons donc établi, grâce à cette propriété, que toute fonction Gevrey $y(t)$ d'ordre $\sigma < 2$ définit une unique trajectoire $\big(\theta(x,t),u(t)\big)$ de (1.3.1)-(1.3.3) qui soit Gevrey d'ordre σ en t et 1 en x. Réciproquement, toute trajectoire de (1.3.1)-(1.3.3) qui est deux fois continûment dérivable en x et Gevrey d'ordre σ en t définit de façon évidente une unique fonction Gevrey $y(t) := \theta(0,t)$ d'ordre σ. De plus, y s'exprime directement, c'est à dire sans aucune intégration en temps, en fonction de θ: notre paramétrisation n'a pas rajouté d'état au système, on dira donc par analogie avec la dimension finie qu'elle est *endogène*.

Pour $\sigma = 2$, cette bijection a lieu entre les fonctions Gevrey $y(t)$ d'ordre 2 et de rayon $R > 4$ et les trajectoires qui sont Gevrey d'ordre 2 en t et deux fois continûment dérivables en x.

1.3.3. Solution par une mise sous forme de Brunovsky. Nous proposons dans ce paragraphe une autre approche pour traiter la paramétrisation des trajectoires. L'idée directrice est de rechercher une trajectoire formelle non plus sous la forme d'une série de puissances de x affectées de coefficients qui dépendent du temps, mais, comme dans la section 1.1, sous la forme:

$$\theta(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^k y(t)}{dt^k} e_{k+1}(x), \tag{1.3.9}$$

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^k y(t)}{dt^k} a_k \tag{1.3.10}$$

où y est une fonction indéfiniment dérivable. Nous tentons donc d'effectuer une "mise sous forme de Brunovsky" du système, qui pourra mériter véritablement ce nom lorsque nous aurons prouvé qu'elle est, en un certain sens, "canonique", ce qui sera fait par la suite au 4.4.

Reprenons donc le problème de départ, et posons:

$$v(x,t) = \theta(x,t) - u(t).$$

Il se transforme alors en un problème de dimension infinie, très semblable dans sa forme au problème linéaire général décrit dans la section 1.1. Nous considérons v comme une fonction du temps, à valeurs dans $L^2(0,1)$ et nous obtenons:

$$\begin{aligned} \partial_t v &= A(v) - B\dot{u}, \\ v(1,t) = 0, &\quad \partial_t v(0,t) = 0, \end{aligned} \tag{1.3.11}$$

où l'opérateur A est défini sur $\mathcal{D}(A)$ à valeurs dans $L^2(0,1)$ par $A(v) = v''$, avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A) = \{v \in L^2(0,1)/v' \in L^2(0,1),\, v'' \in L^2(0,1), \\ v(1) = 0,\, v'(0) = 0\}, \end{aligned}$$

et le vecteur B est la fonction constante qui vaut 1 sur $[0,1]$. Nous prenons $\dot{u}$ comme nouvelle variable de commande. En dérivant formellement et en substituant dans

(1.3.11) nous obtenons:

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^k y(t)}{dt^k}(e_k(x) - a_k B)$$

et

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^{k+1} y}{dt^{k+1}}(A(e_{k+1} - a_{k+1}B) - e_k + a_k B) + yA(e_0 - a_0 B) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^{k+1} y}{dt^{k+1}} a_k B. \tag{1.3.12}$$

Nous voulons que (1.3.12) soit vérifiée au moins pour toute fonction polynômiale y, ce qui entraîne que

$$\begin{aligned} e_0 &= a_0 B, \\ A(e_{k+1} - a_{k+1}B) &= e_k. \end{aligned}$$

Nous utilisons alors le résultat classique suivant (voir la section A): A est inversible, et $K = A^{-1}$ est un opérateur intégral auto-adjoint compact de $L^2(0,1)$; A est donc Riesz-spectral et ses valeurs propres vérifient:

$$D_A(\lambda) = \cosh(\sqrt{\lambda}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}\lambda^k = 0.$$

D_A, qui n'est autre que le déterminant de Fredholm de K, joue le rôle du polynôme caractéristique en dimension finie. Nous obtenons donc:

$$\begin{aligned} e_0 &= a_0 B, \\ e_{k+1} &= K(e_k) + a_{k+1} B. \end{aligned}$$

L'algorithme de Brunovsky fournit un choix naturel des coefficients a_k: ce seront les coefficients du développement en série de D_A. Nous utilisons la forme (1.2.4) de l'algorithme comme ci-dessus, puisque B n'appartient pas à $\mathcal{D}(A)$ et qu'il n'y a pas de "dernier" vecteur de base dans notre suite infinie.

Le calcul effectif donne :

$$\begin{aligned} e_0(x) &= B(x) = 1 \\ e_1(x) &= K e_0(x) + \frac{1}{2!} B(x) \\ &= \frac{x^2 - 1}{2!} + \frac{1}{2!} = \frac{x^2}{2!} \end{aligned}$$

et par récurrence:

$$e_i(x) = K e_{i-1}(x) + \frac{1}{(2i)!} B(x) = \frac{x^{2i}}{2i!}$$

Nous avons donc retrouvé le résultat obtenu par un développement en série posé à priori, et la propriété de convergence des trajectoires formelles est alors identique à celle obtenue précédemment.

1.3.4. Densité. Il nous faut maintenant pour pouvoir qualifier ce système de "plat", vérifier que les états de départ et d'arrivée du système qu'il est possible de raccorder par une trajectoire plate sont denses dans $L^2(0,1)$. C'est une conséquence directe du théorème de Stone-Weierstrass, qui affirme la densité des polynômes de degré pair dans $C(0,1)$ pour la norme uniforme (voir [**52**]), et donc dans $L^2(0,1)$ pour la norme L^2.

Cette propriété de densité va entraîner, comme nous allons le voir dans la section qui suit, la commandabilité approchée du système dans $L^2(0,1)$: nous retrouvons bien, comme en dimension finie, le lien étroit entre commandabilité et platitude. Cet aspect sera développé par la suite.

1.3.5. Application à la planification de trajectoire. La propriété de platitude ainsi définie fournit une solution simple et constructive au problème de la planification de trajectoire approchée.

En effet, supposons que le profil de température initial de la tige est

$$\forall x \in [0,1], \quad \theta(x,0) = \Theta_0(x), \quad \Theta_0 \in L^2(0,1).$$

Nous voulons trouver une loi de commande en boucle ouverte $[0,T] \ni t \mapsto u(t)$ telle qu'à l'instant T le profil de température final soit "arbitrairement proche" de

$$\forall x \in [0,1], \quad \theta(x,T) = \Theta_T(x), \quad \Theta_T \in L^2(0,1).$$

Bien sur, Θ_0 ainsi que Θ_T n'ont pas, en général, un développement en une série de Taylor convergente de puissances paires de x à l'origine. Mais à cause de la densité des polynômes de degré 2, pour tout $\epsilon > 0$ il existe des polynômes

$$\Pi_0(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i \frac{x^{2i}}{(2i)!}, \qquad p_i \in \mathbb{R}$$

$$\Pi_T(x) = \sum_{i=0}^{n} q_i \frac{x^{2i}}{(2i)!}, \qquad q_i \in \mathbb{R}$$

tels que $\|\Theta_0 - \Pi_0\| \leq \epsilon$ et $\|\Theta_T - \Pi_T\| \leq \epsilon$ (ici et dans ce qui suit $\|.\|$ désigne la norme usuelle de $L^2(0,1)$). D'autre part, en prenant

$$\phi_\gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t \notin]0,1[, \\ \exp\left(\dfrac{-1}{\big((1-t)t\big)^\gamma}\right) & \text{if } t \in]0,1[. \end{cases}$$

qui est d'ordre Gevrey $1 + 1/\gamma$ pour $\gamma > 0$ (voir annexe sur les fonctions Gevrey) la fonction

$$\Phi_\gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ 1 & \text{if } t > 1 \\ \dfrac{\int_0^t \phi_\gamma(\tau)d\tau}{\int_0^1 \phi_\gamma(\tau)d\tau} & \text{if } t \in]0,1[, \end{cases}$$

est aussi Gevrey d'ordre ≤ 2 lorsque $\gamma \geq 1$. Donc la fonction

$$Y(t) := \left(\sum_{i=0}^{n} p_i \frac{t^i}{i!}\right)\left(1 - \Phi_\gamma\left(\frac{t}{T}\right)\right) + \left(\sum_{i=0}^{n} q_i \frac{(t-T)^i}{i!}\right)\Phi_\gamma\left(\frac{t}{T}\right)$$

est Gevrey d'ordre ≤ 2 lorsque $\gamma \geq 1$ et satisfait à:

$$\begin{aligned} &Y^{(i)}(0) = p_i, \quad Y^{(i)}(T) = q_i, && i = 0, \ldots, n \\ &Y^{(i)}(0) = 0, \quad Y^{(i)}(T) = 0, && i > n. \end{aligned}$$

En nous inspirant de (1.3.8), nous définissons alors la loi de commande en boucle ouverte:

$$U(t) := \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{Y^{(i)}(t)}{(2i)!}, \quad t \in [0,1].$$

Nous considérons également une loi de commande approchée $\bar{U} \in C^2(0,T)$ telle que

$$\sup_{t\in[0,T]} \left|\bar{U}(t) - U(t)\right| \leq \epsilon \quad \text{et} \quad \sup_{t\in[0,T]} \left|\dot{\bar{U}}(t) - \dot{U}(t)\right| \leq \epsilon.$$

Un exemple de loi de commande approchée est:

$$\bar{U}(t) := \sum_{i=0}^{N} \frac{Y^{(i)}(t)}{(2i)!},$$

obtenue en tronquant U à un ordre N suffisamment grand (on peut effectivement trouver un tel N, puisque la série qui définit U, ainsi que toutes ses dérivées, est uniformément convergente sur $[0,T]$ en vertu de la propriété de convergence des trajectoires formelles).

Grâce à ces lois de commande nous obtenons le résultat qui suit, dont la démonstration sera donnée au paragraphe 2.6

PROPRIÉTÉ 1.3.2. *La loi de commande* $[0,T] \ni t \mapsto U(t)$ *conduit le système* (1.3.1)-(1.3.3) *de l'état initial* Π_0 *à l'instant* 0 *à l'état final* Π_T *à l'instant* T*, ceci de façon exacte.*

La loi de commande approchée $[0,T] \ni t \mapsto \bar{U}(t)$ *conduit le système* (1.3.1)-(1.3.3) *de l'état initial* Θ_0 *à l'instant* 0 *à l'état final* Θ_T *à l'instant* T*, ceci de façon approchée: il existe* $K > 0$*, indépendant de* T *tel que*

$$\|\theta(.,T) - \Theta_T\| \leq K\epsilon.$$

Nous avons donc prouvé en utilisant des arguments élémentaires et *constructifs* la *commandabilité approchée en un temps* T *quelconque* de (1.3.1)-(1.3.3), en utilisant une loi de commande très régulière (C^∞ par exemple).

La figure 3 montre l'évolution de la température avec une loi de commande générée par $Y(t) = \Phi_1(t)$, conçue pour amener le système de l'état stationnaire $\theta = 0$ à l'instant $t = 0$ à l'état stationnaire $\theta = 1$ à l'instant $t = 1$ (la loi de commande approchée est U tronquée à l'ordre 10).

1.3.6. Proposition de définition de la platitude en dimension infinie. Au vu de l'exemple du système (1.3.1)-(1.3.2), nous proposons d'adopter pour la définition de la platitude d'un système de dimension infinie linéaire à une commande décrit par une équation d'évolution la définition qui suit.

L'idée, sous-jacente à la définition de platitude en dimension finie, de pouvoir paramétrer les trajectoires du systèmes par une fonction libre et ses dérivées est bien sur conservée.

Par contre la notion d'équivalence endogène est beaucoup plus difficile à retranscrire en dimension infinie. Puisque nous sommes dans le cadre des systèmes

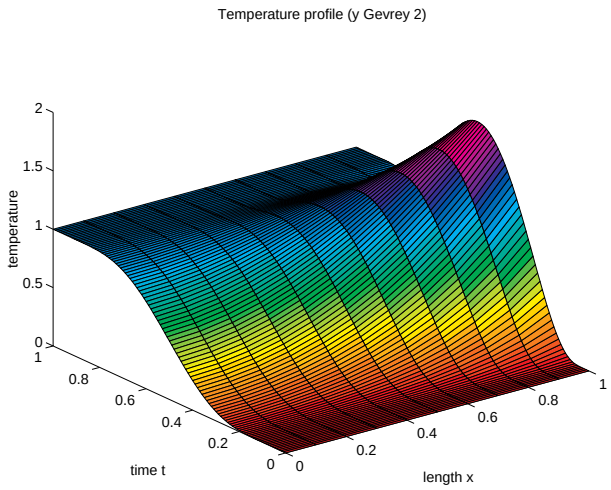


FIG. 3. *Planification de trajectoire avec une fonction Gevrey d'ordre* 2.

linéaires pour lesquels, en dimension finie, la platitude équivaut à la commandabilité, nous essayons de la remplacer par une exigence de densité des états joignables par des trajectoires paramétrées. Cette exigence correspond, nous le verrons par la suite, à une exigence de commandabilité approchée du système.

REMARQUE. Dans le cas des systèmes de dimension infinie, la propriété de commandabilité approchée s'avère parfois être la seule propriété qu'on puisse obtenir. C'est le cas, par exemple, pour les équations de diffusion, où l'effet régularisant de l'opérateur en espace ne permet d'atteindre exactement que des états deux fois continûment dérivables en espace.

DÉFINITION 1.3.1. Un système comme ci-dessus sera dit "plat" si il existe une paramétrisation des trajectoires du système, c'est à dire une famille de fonctions $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$, et un espace fonctionnel $G \subset C^\infty(0,T)$ tels que pour toute fonction y dans G, la série

$$\sum_{i=0}^{\infty} y^{(i)}(t)\alpha_i(x) \tag{1.3.13}$$

converge normalement sur $[0,1] \times [0,T]$ vers une trajectoire au sens classique (c'est à dire suffisamment continûment dérivable en temps et en espace), et si de plus le sous ensemble D de l'espace d'état H du système, formé des états de départ et d'arrivée joignables par des trajectoires de la paramétrisation, est dense dans H, où H est supposé être un espace de Hilbert.

Nous allons étudier diverses équations, toujours avec la même démarche dictée par cette définition.

Les chapitres 2, 3 et 4 sont consacrés à l'étude de l'équation de diffusion linéaire.

Dans le chapitre 2 sont regroupées les étapes préparatoires (changements de coordonnées, transformations par bouclages statiques sur les termes de bords) nécessaires à l'étude du développement en série au chapitre 3 aussi bien qu'à la construction de la paramétrisation des trajectoires du chapitre 4.

La méthode des développements en séries, qui est étudiée au chapitre 3, correspond à une classe particulière de problèmes à coefficients analytiques et à conditions aux bords particulières où les fonctions α_i sont analytiques, et la série (1.3.13) peut être resommée en une série normalement convergente de puissances de x. Cet aspect sera abordé dans la section 4.2.4.

Le chapitre 4 est ensuite consacré à la construction effective de la famille $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$, et à la preuve de la platitude au sens de la définition ci-dessus pour une très large classe d'équations de diffusion linéaires. Des exemples sont donnés au chapitre 5.

Le chapitre 6 suit la même démarche, appliquée à un système où l'ordre de dérivation en espace est supérieur à 2, et le chapitre 7 esquisse ce qui pourrait être fait dans un problème de géométrie simple où la dimension en espace est de deux.

CHAPITRE 2

Equations aux dérivées partielles de type diffusion

Soit le problème d'évolution linéaire avec une commande au bord, où $(x,t) \in [0,1] \times [0,T]$:

$$\partial_t y(x,t) = \partial_{xx} y(x,t) + c_1(x)\partial_x y(x,t) + c_0(x)y(x,t) \tag{2.0.14}$$

$$l_{11}y(0,t) + l_{12}\partial_x y(0,t) + l_{13}y(1,t) + l_{14}\partial_x y(1,t) = u(t) \tag{2.0.15}$$

$$l_{21}y(0,t) + l_{22}\partial_x y(0,t) + l_{23}y(1,t) + l_{24}\partial_x y(1,t) = u(t) \tag{2.0.16}$$

Les fonctions c_0 et c_1 sont supposées être C^∞ sur un voisinage ouvert de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, et les l_{ij} sont des constantes réelles. La loi de commande $t \mapsto u(t)$ sera en général au moins dans $C^1(0,T)$, si elle n'est pas dans $C^\infty(0,T)$.

Nous allons, dans la section 2.1, transformer le système par changement de coordonnées pour le mettre sous une forme standard, puis nous assurer dans la section 2.2 qu'il s'agit d'un problème bien posé.

Nous le transformons ensuite par bouclage des termes de bord de façon à nous ramener à une forme de système présentant des propriétés intéressantes lorsqu'on désire paramétrer les trajectoires: c'est l'objet du paragraphe 2.3. Il n'est pas toujours possible d'effectuer ces transformations: dans la section 2.4 nous effectuons un examen de ces situations particulières.

Nous terminons ce chapitre par deux sections où sont regroupés des résultats généraux concernant le problème (2.0.14)-(2.0.16); dans la section 2.5 sont établies des propriétés utiles de l'opérateur en espace du problème mis sous forme standard, alors que dans la section 2.6 sont donnés des résultats généraux concernant la commandabilité approchée de ce même problème.

2.1. Mise sous forme standard du système

Tout d'abord, en combinant les deux conditions aux bords, on peut toujours ramener un problème d'évolution linéaire avec une commande au bord de la forme (2.0.14)-(2.0.16) ci-dessus à:

$$\partial_t y(x,t) = \partial_{xx} y(x,t) + c_1(x)\partial_x y(x,t) + c_0(x)y(x,t) \tag{2.1.1}$$

$$l_{11}y(0,t) + l_{12}\partial_x y(0,t) + l_{13}y(1,t) + l_{14}\partial_x y(1,t) = 0 \tag{2.1.2}$$

$$l_{21}y(0,t) + l_{22}\partial_x y(0,t) + l_{23}y(1,t) + l_{24}\partial_x y(1,t) = u(t) \tag{2.1.3}$$

où la commande n'apparaît que dans une seule des deux conditions aux bords. L'équation (2.1.2) sera désignée par la suite sous le nom d'"équation de contrainte", et l'équation (2.1.3) sous le nom d'"équation de commande".

Grâce au changement de variable:

$$\theta(x,t) := e^{\int_0^x \frac{c_1(\xi)}{2} d\xi} y(x,t),$$

(il s'agit l'équivalence de geauge d'un opérateur du second ordre quelconque à un opérateur de Schrödinger, voir [**43**]) le problème (2.1.1)-(2.1.3) se transforme tout d'abord en

$$\partial_t\theta(x,t) = \partial_{xx}\theta(x,t) + q(x)\theta(x,t) \tag{2.1.4}$$

$$a_{11}\theta(0,t) + a_{12}\partial_x\theta(0,t) + a_{13}\theta(1,t) + a_{14}\partial_x\theta(1,t) = 0 \tag{2.1.5}$$

$$a_{21}\theta(0,t) + a_{22}\partial_x\theta(0,t) + a_{23}\theta(1,t) + a_{24}\partial_x\theta(1,t) = u(t) \tag{2.1.6}$$

où on a posé:

$$\begin{array}{ll} a_{11} = l_{11} - \frac{c_1(0)}{2}l_{12} & a_{12} = l_{12} \\ a_{13} = \left(l_{13} - \frac{c_1(0)}{2}l_{14}\right)e^{-\int_0^1 \frac{c_1(\xi)}{2}d\xi} & a_{14} = \frac{c_1(0)}{2}l_{14}e^{-\int_0^1 \frac{c_1(\xi)}{2}d\xi} \\ a_{21} = l_{21} - \frac{c_1(0)}{2}l_{22} & a_{22} = l_{22} \\ a_{23} = \left(l_{23} - \frac{c_1(0)}{2}l_{24}\right)e^{-\int_0^1 \frac{c_1(\xi)}{2}d\xi} & a_{24} = \frac{c_1(0)}{2}l_{24}e^{-\int_0^1 \frac{c_1(\xi)}{2}d\xi} \end{array}$$

et $q(x) = c_0(x) - \frac{c_1^2(x)}{4} - \frac{c_1'(x)}{2}$.

Il suffit donc d'étudier les problèmes de la forme (2.1.4)-(2.1.6) et de transposer les résultats obtenus: le changement de coordonnées effectué est extrèmement régulier, puisqu'il s'agit d'une multiplication par une fonction de x qui est C^∞ et non nulle sur un voisinage de [0,1] .

2.2. Problème bien posé

Nous donnons ici des conditions suffisantes pour que le problème (2.1.4)-(2.1.6) soit bien posé. Nous utilisons les concepts développés dans [**11**] (chap.3, sec.3) dans un cadre général, en les adaptant au cas particulier du problème.

DÉFINITION 2.2.1. Le problème avec commande au bord (2.1.4)-(2.1.6) est un problème bien posé si l'opérateur différentiel en espace:

$$\begin{aligned} &E: \quad \mathcal{D}(E) \to L^2(0,1) \\ &E(f) = f'' + q(x)f \\ \text{où } \mathcal{D}(E) = \{f \in H^2(0,1)/ \quad &a_{11}f(0) + a_{12}f'(0) + a_{13}f(1) + a_{14}f'(1) = 0, \\ &a_{21}f(0) + a_{22}f'(0) + a_{23}f(1) + a_{24}f'(1) = 0\}, \end{aligned}$$

est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu, et si on peut trouver une fonction F dans $C^\infty(0,1)$ telle que

$$\begin{aligned} a_{11}F(0) + a_{12}F'(0) + a_{13}F(1) + a_{14}F'(1) = 0, \\ a_{21}F(0) + a_{22}F'(0) + a_{23}F(1) + a_{24}F'(1) = 1 \end{aligned}$$

Si c'est le cas, lorsque u est dans $C^2(0,T)$, le problème

$$\dot{z}(t) = E(z)(t) - F\dot{u}(t) + Gu(t) \tag{2.2.1}$$

où z est considéré comme une fonction de t à valeurs dans $\mathcal{D}(E)$, et $G = F'' + qF$, (qui est obtenu en posant formellement $z(t) = f(t) - Fu(t)$), est bien posé au sens défini dans l'annexe B et on a:

PROPRIÉTÉ 2.2.1 ([**11**] th. 3.3.3). *Supposons que u est dans $C^2(0,T)$, et qu'en $t = 0$ on ait $z_0 = f_0 - Fu(0) \in \mathcal{D}(E)$. Alors la solution au sens classique du*

problème avec commande au bord de la définition et celle du problème (2.2.1) *sont reliées par*

$$z(t) = f(t) - Fu(t). \tag{2.2.2}$$

REMARQUE. Au sens de cette définition, le problème

$$\partial_t \theta(x,t) = -\partial_{xx}\theta(x,t) \tag{2.2.3}$$

$$\partial_x \theta(0,t) = 0 \tag{2.2.4}$$

$$\theta(1,t) = u(t) \tag{2.2.5}$$

est mal posé, puisqu'il l'opérateur en espace associé a une suite de valeurs propres réelles positives tendant vers l'infini: il ne génère donc pas un semi-groupe continu, par application du théorème de Hille-Yosida B.3.1.

REMARQUE. Dans le cas des problèmes à une variable d'espace, la fonction F existe toujours (il suffit de la choisir polynômiale de degré suffisamment élevé).

En vertu des résulats donnés dans l'annexe B, le problème sera bien posé dès que E est par exemple Riesz-spectral, ou maximal dissipatif. Nous montrons le résultat plus général suivant, où comme dans l'annexe A, nous avons posé

$$A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{vmatrix}.$$

PROPRIÉTÉ 2.2.2. *Si l'opérateur E est tel que:*

- $A_{24} \neq 0$,
- *ou* $A_{14} \neq A_{23}$,
- *ou* $A_{12} = A_{34}$,
- *ou* $A_{13} \neq 0$ *et tous les autres* A_{ij} *sont nuls,*

alors le problème est bien posé.

DÉMONSTRATION. La première, deuxième et quatrième condition entraînent, grâce aux propriétés A.2.5 et A.2.8 que l'opérateur E vérifie la caractérisation du théorème de Hille-Yosida B.3.1, d'ou le résultat. La troisième condition nous dit que E est autoadjoint, et que son spectre est réel et admet une borne supérieure positive, donc le théorème B.3.1 s'applique. □

La transformation permettant de passer d'un problème de contrôle au bord à un problème à commande répartie (de forme particulière) a rajouté un état au système, la variable u. Or nous avons la propriété suivante

PROPRIÉTÉ 2.2.3. *Si l'opérateur E est inversible, alors il existe une unique fonction B solution de*

$$\begin{aligned} &B'' + q(x)B = 0 \\ &a_{11}B(0) + a_{12}B'(0) + a_{13}B(1) + a_{14}B'(1) = 0 \\ &a_{21}B(0) + a_{22}B'(0) + a_{23}B(1) + a_{24}B'(1) = 1. \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

DÉMONSTRATION. Par contraposition, si B n'existe pas, il s'ensuit que toutes les solutions de:

$$f'' + q(x)f = 0 \tag{2.2.7}$$

$$a_{11}f(0) + a_{12}f'(0) + a_{13}f(1) + a_{14}f'(1) = 0 \tag{2.2.8}$$

vérifient

$$\begin{aligned} &f'' + q(x)f = 0 \\ &a_{11}f(0) + a_{12}f'(0) + a_{13}f(1) + a_{14}f'(1) = 0 \\ &a_{21}f(0) + a_{22}f'(0) + a_{23}f(1) + a_{24}f'(1) = 0. \end{aligned}$$

Or le problème (2.2.7)-(2.2.8) a au moins une solution. Donc l'opérateur E admet 0 comme valeur propre, avec un sous espace propre associé de dimension ≥ 1, et n'est pas inversible. □

Dans le cas particulier où E est inversible, on peut donc choisir $F = B$ et obtenir un problème séparé en un intégrateur et un problème à commande répartie

$$\begin{aligned} &\dot{u}(t) = e(t) \\ &\dot{z}(t) = E(z)(t) - Fe(t). \end{aligned}$$

Précisons bien qu'il ne s'agit pas d'un bouclage que nous effectuons réellement sur le système, mais d'une simple transformation que nous introduisons pour des raisons purement techniques de facilité de paramétrisation. Nous verrons au chapitre 4 qu'il est intéressant de travailler avec des systèmes de la forme ci-dessus, et donc avec des opérateurs inversibles.

2.3. Transformation par bouclages

Nous allons maintenant étudier les transformations par des bouclages sur les termes de bords de (2.1.4)-(2.1.6). Nous supposons le problème bien posé, et nous proscrivons les bouclages pour lesquels l'opérateur d'arrivée ne satisfait aucune des conditions de 2.2.2.

Il est fondamental de remarquer que si nous effectuons un bouclage par des termes de bord sur (2.1.4)-(2.1.6) pour avoir une paramétrisation de $\theta(x,t)$, nous en déduirons nécessairement une paramétrisation de $u(t)$, puisque $u(t) = a_{21}\theta(0,t) + a_{22}\partial_x\theta(0,t) + a_{23}\theta(1,t) + a_{24}\partial_x\theta(1,t)$. Nous pouvons donc transformer par bouclage à notre guise (modulo le fait que le problème reste bien posé) les coefficients de l'équation de commande (2.1.6), en conservant intacte l'équation de contrainte (2.1.5).

2.3.1. Bouclage des termes de bords. De même que nous avons associé au problème de départ son opérateur différentiel en espace E défini au paragraphe précédent, nous associons à chaque problème obtenu par bouclage à partir de (2.1.4)-(2.1.6) son opérateur différentiel A défini par:

$$\begin{aligned} A: \quad & \mathcal{D}(A) \to L^2(0,1) \\ & A(f) = f'' + q(x)f, \\ & \text{où:} \\ \mathcal{D}(A) = \{f \in H^2(0,1)/ \quad & a_{11}f(0) + a_{12}f'(0) + a_{13}f(1) + a_{14}f'(1) = 0, \\ & \tilde{a}_{21}f(0) + \tilde{a}_{22}f'(0) + \tilde{a}_{23}f(1) + \tilde{a}_{24}f'(1) = 0\}, \end{aligned}$$

et, *si elle existe*, une fonction B solution de

$$\begin{aligned} & B'' + q(x)B = 0 \\ & a_{11}B(0) + a_{12}B'(0) + a_{13}B(1) + a_{14}B'(1) = 0 \\ & \tilde{a}_{21}B(0) + \tilde{a}_{22}B'(0) + \tilde{a}_{23}B(1) + \tilde{a}_{24}B'(1) = 1. \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

L'action des tranformations par bouclages des termes de bords sur les systèmes induit donc une relation d'équivalence sur les opérateurs associés. Nous allons examiner l'orbite de E, l'opérateur associé au problème de départ, sous l'action de ces bouclages. Nous sélectionnerons dans cette orbite un ou des opérateurs présentant des caractéristiques intéressantes pour la future paramétrisation des trajectoires.

Au vu de ce qui a été dit dans la section précédente, nous recherchons dans l'orbite de E un opérateur A inversible. Nous demandons aussi à A d'être Riesz-spectral, car nous verrons au chapitre 4 que nous savons paramétrer des trajectoires du système pour ces opérateurs. Comme il a été remarqué dans la section précédente, l'inversibilité de A assure l'existence de la fonction B. Nous obtenons le résultat suivant

PROPRIÉTÉ 2.3.1. *Soit l'espace vectoriel (de dimension* 1 *ou* 2*)* $\mathcal{E}$ *défini par:*

$$\mathcal{E} = \{f \in C^\infty(0,1) / f'' + qf = 0, a_{11}f(0) + a_{12}f'(0) + a_{13}f(1) + a_{14}f'(1) = 0\}.$$

Nous savons trouver dans l'orbite de E *un opérateur* A *comme ci- dessus, sauf dans le cas où:*

- $\mathcal{E}$ *est de dimension égale à* 2*,*
- *ou* $\mathcal{E}$ *est de dimension égale à* 1*, l'équation de contrainte du problème a la forme*

$$f(0) \pm f(1) = 0$$

et tout générateur non nul B *de* $\mathcal{E}$ *vérifie* $B(0) = B(1) = 0$.

Les cas où A ne peut pas être construits sont examinés dans le paragraphe 2.4. Retenons pour l'instant que sauf cas particulier, l'opérateur A introduit pour paramétrer les trajectoires du système peut toujours être choisi *inversible et Riesz-spectral*.

DEMONSTRATION DE 2.3.1. Nous discutons de l'allure de l'orbite de E selon la dimension de $\mathcal{E}$.

Si $\dim(\mathcal{E}) = 2$, il contient nécessairement le système de solutions fondamentales en zéro de $f''+qf = 0$, noté (e_1,e_2). Nous montrons qu'alors $\mathcal{E}$ contient une fonction propre de E associée à la valeur propre 0; nous cherchons donc $f = ce_1 + de_2$ telle que $a_{21}f(0) + a_{22}f'(0) + a_{23}f(1) + a_{24}f'(1) = 0$. c et d vérifient donc:

$$c(a_{21} + a_{23}e_1(1) + a_{24}e_1'(1)) + d(a_{22} + a_{23}e_2(1) + a_{24}e_2'(1)) = 0.$$

Nous en déduisons donc que soit $a_{21} + a_{23}e_1(1) + a_{24}e_1'(1) = 0$, ce qui signifie que e_1 est une valeur propre de E associée à la valeur propre 0, soit $a_{21} + a_{23}e_1(1) + a_{24}e_1'(1) \neq 0$, auquel cas on peut prendre:

$$f = -\frac{(a_{22} + a_{23}e_2(1) + a_{24}e_2'(1))}{(a_{21} + a_{23}e_1(1) + a_{24}e_1'(1))}e_1 + e_2$$

E n'est donc pas inversible, et la même démonstration vaut évidemment pour n'importe quel opérateur dans l'orbite de E. Il n'y a donc pas de possibilité, par bouclage des termes de bord, de remplacer E par un opérateur Riesz-spectral inversible.

Si $\dim(\mathcal{E}) = 1$, nous désignons par B un générateur (non nul, par définition) de $\mathcal{E}$.

(1) si l'équation de contrainte ne fait intervenir qu'un seul bord, c'est à dire si $|a_{11}|+|a_{12}| = 0$ ou bien $|a_{13}|+|a_{14}| = 0$, alors si par exemple $|a_{13}|+|a_{14}| = 0$, il existe $(a,b) \neq (0,0)$ tel que

$$aB(1) + bB'(1) = 1 \quad \text{(car B est non nul)}$$

et nous choisissons le bouclage:

$$\tilde{a}_{21} = 0,\ \tilde{a}_{22} = 0,\ \tilde{a}_{23} = a,\ \tilde{a}_{24} = b.$$

Dans l'orbite de E, nous sélectionnons donc l'opérateur A dont les conditions aux bords sont

$$a_{11}f(0) + a_{12}f'(0) = 0,$$
$$\tilde{a}_{23}f(1) + \tilde{a}_{24}f'(1) = 0\}.$$

Il est inversible, à conditions aux bords séparées, donc Riesz-spectral autoadjoint, et B est son vecteur associé.

Le cas où $|a_{11}|+|a_{12}| = 0$ est symétrique, et conduit aussi à sélectionner un opérateur A inversible, à conditions aux bords séparées, donc Riesz-spectral autoadjoint, avec B comme vecteur associé.

(2) si l'équation de contrainte fait intervenir les deux bords, c'est à dire si $|a_{11}| + |a_{12}| \neq 0$ et $|a_{13}| + |a_{14}| \neq 0$, alors

(a) si $a_{12} \neq 0$ ou $a_{14} \neq 0$, on choisit $\tilde{a}_{22}$ et $\tilde{a}_{24}$ de telle sorte que

$$A_{24} = a_{12}\tilde{a}_{24} - a_{14}\tilde{a}_{22} \neq 0. \tag{2.3.2}$$

On ajuste les coefficients $\tilde{a}_{21}$ et $\tilde{a}_{23}$ de telle sorte que:

$$\tilde{a}_{21}B(0) + \tilde{a}_{22}B'(0) + \tilde{a}_{23}B(1) + \tilde{a}_{24}B'(1) \neq 0. \tag{2.3.3}$$

D' après le théorème A.2.3, ceci garantit le choix d'un opérateur Riesz -spectral à condition que les pôles de la fonction de Green de A soit simples, et que les valeurs propres de A soient simples. De plus, l'opérateur ainsi construit est inversible, puisque nous supposons que $\dim(\mathcal{E}) = 1$.

(b) si $a_{12} = a_{14} = 0$ alors nécessairement:$a_{13} \neq 0$ et $a_{11} \neq 0$: nous appliquons en core les résultats du théorème A.2.3 en choisissant $\tilde{a}_{22}$ et $\tilde{a}_{24}$ de façon à ce que

$$A_{12} + A_{34} = 0, \tag{2.3.4}$$
$$E = A_{14} - A_{23} \neq 0. \tag{2.3.5}$$

Un calcul élémentaire montre que c'est possible dès que le rapport $\alpha = \frac{a_{13}}{a_{11}}$ ne vérifie pas:

$$\alpha = \pm 1. \tag{2.3.6}$$

Les deux autres coefficients peuvent alors être ajustés de façon à ce que (2.3.3) soit vérifiée, si bien que nous obtenons un opérateur A Riesz-spectral inversible.

(c) si $a_{12} = a_{14} = 0$, et $\alpha = \pm 1$, c'est à dire $a_{13} = \pm a_{11} \neq 0$, alors nous pouvons considérer que $a_{11} = 1$. Nous appliquons encore les résultats du théorème A.2.3 en choisissant par exemple $\tilde{a}_{22} = \tilde{a}_{24} = \tilde{a}_{21} = 0$ et $\tilde{a}_{23} \neq 0$ de telle sorte que

$$A_{13} = \tilde{a}_{23} \neq 0,$$

alors que tous les autres coefficients A_{ij} sont nuls. Cela garantit le choix d'un opérateur A Riesz-spectral (car il est à conditions aux bords séparées), et inversible si le générateur de $\mathcal{E}$ ne vérifie pas

$$B(0) = \pm B(1) = 0. \tag{2.3.7}$$

Dans le cas particulier où $\mathcal{E}$ est de dimension égale à 1, l'égalité (2.3.6) est vraie et B vérifie 2.3.7 cette construction ne fournit pas un opérateur inversible.

□

REMARQUE. A peut être choisi à conditions aux bords séparées le plus souvent, ce qui garantit qu'il est Riesz-spectral autoadjoint. En effet, pour choisir les coefficients $\tilde{a}_{ij}$ de façon à satisfaire aux relations (2.3.2) ou (2.3.4)-(2.3.5) (selon le cas) et à la condition d'inversibilité qui garantit que la propriété (2.2.3) est vérifiée, nous pouvons essayer le bouclage

$$a_{13}\theta(1,t) + a_{14}\theta(1,t) = u(t),$$

qui correspond au choix $\tilde{a}_{21} = \tilde{a}_{22} = 0$, $\tilde{a}_{23} = a_{13}$ et $\tilde{a}_{24} = a_{14}$, *si ce bouclage convient*, c'est à dire si l'opérateur obtenu est inversible et la propriété (2.2.3) est vérifiée.

REMARQUE. Le fait d'être Riesz-spectral n'est pas invariant par bouclage des termes de bords, car les bouclages peuvent changer totalement la structure du spectre d'un opérateur. Ainsi, l' opérateur autoadjoint à conditions aux bords séparées

$$\begin{aligned} E_1 : \quad & \mathcal{D}(E_1) \to L^2(0,1) \\ & E_1(f) = f'', \\ & \text{où:} \\ \mathcal{D}(E_1) = \{f \in H^2(0,1)/ \quad & f(0) = 0, f'(1) = 0\}, \end{aligned}$$

est équivalent par bouclage des termes de bord à l'opérateur

$$\begin{aligned} E_1 : \quad & \mathcal{D}(E_1) \to L^2(0,1) \\ & E_1(f) = f'', \\ & \text{où:} \\ \mathcal{D}(E_1) = \{f \in H^2(0,1)/ \quad & f(0) = 0, f'(0) + f'(1) = 0\}, \end{aligned}$$

qui correspond à un problème bien posé, mais dont tous les sous-espaces caractéristiques sont de dimension égale à 2, tous les sous-espaces propres sont de dimension égale à 1, et tous les pôles de la fonction de Green sont doubles (voir [**9**]).

EXEMPLE 2.3.1. Mettons en application les résultats du paragraphe précédent sur un exemple académique, qui est le système

$$\begin{aligned}
&\partial_t\theta = \partial_{xx}\theta \\
&\theta(0) + \theta(1) + \frac{\partial_x\theta(1)}{2} = 0 \\
&2\partial_x\theta(0) + \theta(1) = u(t)
\end{aligned}$$

En vertu de la propriété 2.2.2, comme $A_{24} = 1$, il s'agit d'un problème bien posé, d'opérateur

$$\begin{aligned}
E: \quad & \mathcal{D}(E) \to L^2(0,1) \\
& E(f) = f''
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(E) = \{f \in H^2(0,1)/ \quad & f(0) + f(1) + \frac{1}{2}f'(1) = 0, \\
& 2f'(0) + f(1) = 0\}.
\end{aligned}$$

En appliquant le théorème A.2.3 de l'annexe A, comme la quantité A_{24} est non nulle, E est Riesz-spectral si sa fonction de Green a des pôles simples, et si ses valeurs propres sont de multiplicité 1.

Un calcul simple montre (voir l'annexe A) que les valeurs propres de E sont les zéros de

$$D_E(\lambda) = \frac{\sin(\sigma)}{\sigma} + \frac{3}{2} + 2\cos(\sigma) - \sigma\sin(\sigma),$$

où $\lambda = -\sigma^2$.

Nous montrons que D_E et $\frac{d}{d\lambda}D_E$ n'ont pas de zéro commun, ce qui prouvera la simplicité des valeurs propres. Pour cela nous observons que:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\lambda}D_E(\lambda) &= \frac{d}{d\sigma}D_E(\sigma)\frac{d\sigma}{d\lambda} \\
&= \frac{-1}{2}\left(\cos(\sigma)(\frac{1}{\sigma^2} - 1) - \sin(\sigma)(\frac{3}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3})\right).
\end{aligned}$$

Supposons que $D_E(\lambda) = 0$ et $\frac{d}{d\lambda}D_E(\lambda) = 0$, alors on aurait après calculs

$$\begin{aligned}
\cos(\sigma) &= -\frac{3}{2}\frac{1 + 3\sigma^2}{3 + 4\sigma^2 + \sigma^4}, \\
\sin(\sigma) &= -\frac{3\sigma}{2}\frac{1 - \sigma^2}{3 + 4\sigma^2 + \sigma^4},
\end{aligned}$$

et donc nécessairement

$$9((1 + 3\sigma^2)^2 + \sigma^2(1 - \sigma^2)^2) = (6 + 8\sigma^2 + 2\sigma^4)^2,$$

c'est à dire

$$9((1 - 3\lambda)^2 - \lambda(1 - \lambda)^2) = (6 - 8\lambda + 2\lambda^2)^2 = 0.$$

Nous obtenons donc une équation de degré 4 en λ, dont on vérifie que les valeurs (numériques approchées) des racines ne satisfont pas les deux relations en sin et

cos, ce qui contredit l'hypothèse de départ. Donc E est à spectre simple et Riesz-spectral.

On vérifie aisément que l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ est de dimension 1, et que la fonction B définie par $B(x) = 4x - 3$ est un générateur de $\mathcal{E}$.

Comme on a $2B'(0) + B(1) = 9$, on en déduit que $\frac{B}{9}$ est solution de (2.3.1) pour l'opérateur E, ce qui achève de montrer que le problème est bien posé.

En appliquant la démarche exposée au paragraphe précédent, nous pouvons ne pas boucler le système et l'utiliser tel quel. Nous pouvons aussi, dans le cas où nous aurions su que le problème est bien posé sans pouvoir étudier de façon exacte la simplicité des valeurs propres de E, effectuer un bouclage et choisir l'opérateur A défini par:

$$\begin{aligned} A: \quad & \mathcal{D}(A) \to L^2(0,1) \\ & A(f) = f'' \\ & \text{où } \mathcal{D}(A) = \{f \in H^2(0,1)/ \quad f(0) = 0, \\ & \qquad\qquad f(1) + \frac{1}{2} f'(1) = 0\}, \end{aligned}$$

On montre sans peine qu'il est inversible et Riesz-spectral, car à conditions aux bords séparées.

La fonction B asociée à A est donnée par (2.3.1), et on a

$$B(x) = \frac{4x - 3}{3}.$$

Notons que ce choix nous évite les calculs pénibles qui précèdent.

2.4. Cas particuliers

Nous revenons ici aux situations particulières mises en évidence dans la section 2.3, situations où nous ne savons pas construire un opérateur A qui nous permette par la suite de paramétrer des trajectoires du système.

Les notations sont celles de la section 2.3.

2.4.1. Le cas où (2.3.6) **est vérifiée.** Nous nous plaçons dans le cas où l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ est de dimension 1, engendré par un générateur B qui vérifie $B(0) = B(1) = 0$, où $a_{12} = a_{14} = 0$, et $a_{13} = \pm a_{11} = 1$.

Les démarches décrites ci dessus ne s'appliquent pas, il faut donc se livrer à un étude directe de l'opérateur E (voir [**9**],chap. 12) pour savoir s'il est Riesz-spectral inversible, ou si on peut trouver par bouclage un opérateur A Riesz-spectral inversible dans l'orbite de E.

Nous n'avons pu trouver aucun exemple de système satisfaisant à ces conditions. Il semble qu'aucun des cas usuel de diffusion linéaire ne rentre dans cette catégorie de problème.

2.4.2. La dimension de l'espace $\mathcal{E}$ est égale à 2. Nous proposons un exemple pour illustrer ce qui peut se produire dans cette situation. On y voit que le

système, dans ce cas particulier, correspond à un système non commandable, mais dont on peut malgré tout paramétrer certaines trajectoires.

EXEMPLE 2.4.1. L'exemple proposé est le suivant

$$\begin{aligned} &\partial_t\theta(x,t) = \partial_{xx}\theta(x,t) \\ &\partial_x\theta(0,t) - \partial_x\theta(1,t) = 0 \\ &\partial_x\theta(1,t) = u(t). \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

Il s'agit d'un problème bien posé. En effet, on vérifie sans peine que l'opérateur E est Riesz-spectral donc qu'il génère un semi-groupe continu. Mais E n'est pas inversible: l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ est engendré par la fonction constante égale à 1, et par la fonction $B(x) = x$.

Grâce au changement de variable $z = \theta - Bu$ on peut transformer le problème en:

$$\begin{aligned} &\partial_t z(x,t) = \partial_{xx} z(x,t) - B\dot{u} \\ &\partial_x z(0,t) - \partial_x z(1,t) = 0 \\ &\partial_x z(1,t) = 0 \end{aligned}$$

Les fonctions propres de l'opérateur E sont données par: $\phi_n(x) = \cos(n\pi x)$, et on a:

$$\begin{aligned} < \phi_n, B > &= \int_0^1 \cos(n\pi x) x dx = \frac{(\cos(n\pi) - 1)}{n^2\pi^2} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si n est pair,} \\ \frac{-2}{n^2\pi^2} & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

B est donc orthogonal aux fonctions propres d'ordre pair. Donc, en appliquant le critère de commandabilité approché donné dans [**11**], on trouve que le système n'est pas commandable. D'après notre définition de la platitude en dimension infinie, le système ne peut donc pas être plat: ce résultat sera démontré de façon rigoureuse au chapitre 4.

Il est cependant possible de paramétrer *certaines* trajectoires de la façon suivante: nous réécrivons le problème (2.4.1) comme un problème à *deux* commandes; les trajectoires seront donc données, puisque le problème est linéaire, par la superposition des trajectoires de deux problèmes à une commande. Nous retrouverons le problème initial en prenant des valeurs opposées pour ces deux commandes.

Mettons en œuvre cette démarche: (2.4.1) s'écrit

$$\begin{aligned} &\partial_t\theta(x,t) = \partial_{xx}\theta(x,t) \\ &\partial_x\theta(0,t) - \partial_x\theta(1,t) = u_1(t) + u_2(t) \\ &- \partial_x\theta(1,t) = u_2(t), \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

et on retrouve bien (2.4.1) en faisant $u_1(t) + u_2(t) = 0$.

Les trajectoires de (2.4.2) sont la superposition de celles de

$$\begin{aligned} &\partial_t\theta_1(x,t) = \partial_{xx}\theta_1(x,t) \\ &\partial_x\theta_1(0,t) = u_1(t) \\ &\partial_x\theta_1(1,t) = 0, \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

et de celles de

$$\begin{aligned} &\partial_t\theta_2(x,t) = \partial_{xx}\theta_2(x,t) \\ &\partial_x\theta_2(0,t) = 0 \\ &-\partial_x\theta_2(1,t) = u_2(t). \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

Nous paramétrons les trajectoires de (2.4.3) en bouclant de façon à avoir $\tilde{u_1} = \theta_1(0,t)$, ce qui revient à utiliser l'opérateur A_1 défini par:

$$\begin{aligned} A_1 : \quad &\mathcal{D}(A_1) \to L^2(0,1) \\ &A_1(f) = f'', \end{aligned}$$

avec:

$$\mathcal{D}(A_1) = \{f \in H^2(0,1)/ \quad f'(1) = 0,\, f(0) = 0\}$$

pour paramétrer les trajectoires de (2.4.3). Après un calcul tout à fait analogue à celui de l'exemple introductif de la section 1.3, chapitre 1, nous obtenons:

$$\begin{aligned} \theta_1(x,t) &= \sum_{i=0}^{\infty} y_1^{(i)}(t)\frac{(1-x)^{2i}}{(2i)!}, \\ u_1(t) = \partial_x\theta_1(0,t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_1^{(i)}(t)}{(2i-1)!}, \\ y_1(t) &= \theta_1(1,t). \end{aligned}$$

De même, nous paramétrons les trajectoires de (2.4.4) en bouclant de façon à avoir $\tilde{u_2} = \theta_2(1,t)$, et nous obtenons:

$$\begin{aligned} \theta_2(x,t) &= \sum_{i=0}^{\infty} y_2^{(i)}(t)\frac{(x)^{2i}}{(2i)!}, \\ u_2(t) = -\partial_x\theta_2(1,t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{-y_2^{(i)}(t)}{(2i-1)!}, \\ y_2(t) &= \theta_2(0,t). \end{aligned}$$

Le choix $y_2 = y_1 = y$ conduit à la paramétrisation souhaitée:

$$\begin{aligned} \theta(x,t) &= \sum_{i=0}^{\infty} y^{(i)}(t)\frac{(x)^{2i} + (1-x)^{2i}}{(2i)!}, \\ u(t) = \partial_x\theta(1,t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_2^{(i)}(t)}{(2i-1)!}. \end{aligned}$$

Le problème qui se pose alors est celui de la densité des états de départ et d'arrivée compatibles avec cette paramétrisation, autrement dit celui de la commandabilité approchée du système. Il est clair dans cet exemple que si $a_{12} = a_{14} = 1$, les trajectoires obtenues présentent une symétrie par rapport au point $x = \frac{1}{2}$ à tout instant t. En particulier, à $t = 0$ et à $t = T$, tout les état de départ et d'arrivée que l'on peut raccorder par de telles trajectoires présentent cette même symétrie: on ne pourra donc pas approcher *n'importe quel* état de $L^2(0,1)$ par de telles fonctions : on retrouve le résultat de non commandabilité annoncé plus haut.

Nous avons par contre déterminé un "sous espace commandable" plat du système, et nous pouvons par exemple faire de la planification de trajectoire arrêt-arrêt: cette simple propriété s'avère utile dans bien des applications pratiques.

2.5. Propriétés de l'opérateur en espace

Nous regroupons dans cette section des résultats simples, mais essentiels dans toute la suite, qui concernent l'opérateur en espace de l'équation de diffusion linéaire. On peut en résumer brièvement le contenu par ces deux résultats: le déterminant de Fredholm de l'opérateur inverse est une fonction entière d'ordre de Weierstrass (voir par exemple [**55**]) $\frac{1}{2}$ exactement, et les coefficients de son développement en série de Taylor admettent une majoration en $\frac{MK^n}{(2n)!}$.

2.5.1. Quelques propriétés des solutions fondamentales de l'équation linéaire d'ordre 2. Nous désignons par $e_1(x,\lambda)$ et $e_2(x,\lambda)$ les solutions respectives de:

$$\begin{aligned} y'' + q(x)y &= \lambda y \\ y(0) = 1,\, y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y'' + q(x)y &= \lambda y \\ y(0) = 0,\, y'(0) &= 1. \end{aligned}$$

Elles forment un système de solutions fondamentales de l'équation $y'' + q(x)y = \lambda y$ au point zéro. A λ fixé dans $\mathbb{C}$, e_1 et e_2 sont des fonctions C^∞ sur un voisinage de [0,1] dans $\mathbb{C}$, et à x fixé dans [0,1], e_1 et e_2 sont des fonctions entières de λ (voir par exemple [**9**]).

On désignera de la même façon par f_1 et f_2 un système de solutions fondamentales de l'équation $y'' + q(x)y = \lambda y$ au point un. De même que e_1 et e_2, f_1 et f_2 sont des fonctions C^∞ sur un voisinage de [0,1] dans $\mathbb{C}$, et à x fixé dans [0,1], f_1 et f_2 sont des fonctions entières de λ.

V_0 et V_1 désigneront les opérateurs intégraux de Volterra définis sur $L^2(0,1)$ par:

$$\forall v \in L^2(0,1),\, y = V_0(v) \Leftrightarrow \begin{cases} y \in H^2(0,1) \\ y'' + q(x)y = v \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

et:

$$\forall v \in L^2(0,1),\, y = V_1(v) \Leftrightarrow \begin{cases} y \in H^2(0,1) \\ y'' + q(x)y = v \\ y(1) = y'(1) = 0. \end{cases}$$

Il est aisé de vérifier que les noyaux de V_0 et V_1 ont pour expressions respectives:

$$Z(x,\xi) = \chi(x-\xi)(e_1(\xi,0)e_2(x,0) - e_1(x,0)e_2(\xi,0)),$$

$$U(x,\xi) = \chi(\xi-x)(-f_1(\xi,0)f_2(x,0) + f_1(x,0)f_2(\xi,0)),$$

où la fonction χ est la fonction caractéristique de $\mathbb{R}^+$.

Z et U sont des fonctions C^∞ par morceaux sur $[0,1] \times [0,1]$ qui vérifient la propriété suivante:

PROPRIÉTÉ 2.5.1.

$$\begin{aligned}\exists L>0 \ / \ \forall (x,\xi)\in[0,1]\times[0,1],\\ |Z(x,\xi)|\leq \chi(x-\xi)L(x-\xi),\\ |U(x,\xi)|\leq \chi(\xi-x)L(\xi-x).\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned}&\forall (x,\xi)\in[0,1]\times[0,1],\\ &|Z(x,\xi)|\leq \chi(x-\xi)\left(|e_2(x,0)e_1(\xi,0)-e_2(\xi,0)e_1(\xi,0)|\right.\\ &\qquad\left.+|e_2(\xi,0)e_1(\xi,0)-e_2(\xi,0)e_1(x,0)|\right)\\ &\leq \chi(x-\xi)(x-\xi)\left(\left|e_2(\xi,0)\frac{e_1(\xi,0)-e_1(x,0)}{x-\xi}\right|+\left|e_1(\xi,0)\frac{e_2(x,0)-e_2(\xi,0)}{x-\xi}\right|\right)\end{aligned}$$

La fonction $h_1(x,\xi)$ définie sur $[0,1]\times[0,1]$ par :

$$h_1(x,\xi)=\begin{cases}\frac{e_1(x,0)-e_1(\xi,0)}{x-\xi} & \text{si } x\neq\xi,\\ e_1'(x,0) & \text{sinon,}\end{cases}$$

est définie continue sur $[0,1]\times[0,1]$, donc bornée. Il en est de même pour h_2 (définie de façon analogue à h_1), ainsi que pour les fonctions e_1 et e_2 sur $[0,1]$. La grande parenthèse du membre de droite de la dernière inégalité est donc majorée par une constante $L>0$. Le même raisonnement s'applique à U, et donc quitte à augmenter sa valeur, on peut trouver une valeur de L pour laquelle le résultat annoncé est vrai. □

On en déduit la propriété:

PROPRIÉTÉ 2.5.2. *L étant la constante obtenue au lemme 2.5.1, on a les majorations suivantes:*

$$\begin{aligned}\exists M>0 \ / \ \forall x\in[0,1],\forall i\in\mathbb{N},\\ \left|V_0^i(e_1(.,0))(x)\right|&\leq ML^i\frac{x^{2i}}{(2i)!},\\ \left|V_0^i(e_1(.,0))'(x)\right|&\leq ML^{i-1}\frac{x^{2i-1}}{(2i-1)!},\\ \left|V_0^i(e_1(.,0))''(x)\right|&\leq ML^{i-2}\frac{x^{2i-2}}{(2i-2)!},\\ \left|V_1^i(f_1(.,0))(x)\right|&\leq ML^i\frac{(1-x)^{2i}}{(2i)!},\\ \left|V_1^i(f_1(.,0))'(x)\right|&\leq ML^{i-1}\frac{(1-x)^{2i-1}}{(2i-1)!},\\ \left|V_1^i(f_1(.,0))''(x)\right|&\leq ML^{i-2}\frac{(1-x)^{2i-2}}{(2i-2)!}.\end{aligned}$$

Quitte à ajuster la valeur de la constante M, les mêmes majorations sont valables pour e_2.

DÉMONSTRATION. Grâce au lemme 2.5.1, si nous posons:

$$M_e=\sup(\sup_{x\in[0,1]}|e_1(x,0)|,\sup_{x\in[0,1]}|f_1(x,0)|),$$

nous obtenons:

$$|V_0(e_1(.,0))(x)| \leq M_e L \int_0^x (x-\xi)d\xi \leq \frac{x^2}{2},$$
$$|V_1(f_1(.,0))(x)| \leq M_e L \int_x^1 (\xi-x)d\xi \leq \frac{(1-x)^2}{2},$$

et par récurrence:

$$\begin{aligned}\left|V_0^i(e_1(.,0))(x)\right| &= \left|V_0(V_0^{i-1}(e_1(.,0)))(x)\right| \\ &\leq L\int_0^x (x-\xi)M_e\frac{L^{i-1}\xi^{2(i-1)}}{(2(i-1))!}d\xi \\ &\leq M_e L^i\frac{x^{2i}}{(2i)!}\end{aligned}$$

et:

$$\begin{aligned}\left|V_1^i(e_1(.,0))(x)\right| &= \left|V(V^{i-1}(f_1(.,0)))(x)\right| \\ &\leq L\int_x^1 (\xi-x)M_e\frac{L^{i-1}(1-\xi)^{2(i-1)}}{(2(i-1))!}d\xi \\ &\leq M_e L^i\frac{(1-x)^{2i}}{(2i)!}.\end{aligned}$$

Pour obtenir une majoration pour $V_0^i(e_1(.,0))'(x)$ et $V_1^i(f_1(.,0))'(x)$, on part des l'égalités (qui résultent de la définition de V_0 et de V_1):

$$y = V_0(v) \;\Rightarrow\; y'(x) = \int_0^x v(\xi)d\xi - \int_0^x q(\xi)V_0(v)(\xi)d\xi$$
$$y = V_1(v) \;\Rightarrow\; y'(x) = \int_1^x v(\xi)d\xi - \int_1^x q(\xi)V_1(v)(\xi)d\xi.$$

Posons $M_q = \sup_{x\in[0,1]} |q(x)|$. En faisant $y = V_0^i(e_1(.,0))$ et en utilisant la majoration qui précède nous obtenons donc pour $i \geq 1$:

$$\begin{aligned}\left|V_0^i(e_1(.,0))'(x)\right| &\leq \int_0^x \left|V_0^{i-1}(e_1(.,0))(\xi)\right| d\xi + \int_0^x \left|q(\xi)V_0^i(e_1(.,0))(\xi)\right| d\xi \\ &\leq M_e(L^{i-1}\frac{x^{2i-1}}{(2i-1)!} + M_q L^i\frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}) \\ &\leq M_e(1+M_qL)L^{i-1}\frac{x^{2i-1}}{(2i-1)!}.\end{aligned}$$

Le même calcul s'applique pour V_1 et f_1, d'où le résultat en posant:

$$M = \sup(M_e, M_e(1+M_qL).$$

La troisième majoration s'obtient par:

$$\begin{aligned}\left|V_0^i(e_1(.,0))''(x)\right| &= \left|V_0^{i-1}(e_1(.,0))(x) - q(x)V_0^i(e_1(.,0))(x)\right| \\ &\leq M(L^{i-1}\frac{x^{2i-2}}{(2i-2)!} + M_q L^i \frac{x^{2i}}{(2i)!}) \\ &\leq M(1+M_qL)L^{i-1}\frac{x^{2i-2}}{(2i-2)!} \\ &\leq M'L^{i-1}\frac{x^{2i-2}}{(2i-2)!}.\end{aligned}$$

Le calcul de majoration pour V_1 et f_1 est analogue.

Les mêmes calculs s'appliquent aussi à e_2 et f_2. □

PROPRIÉTÉ 2.5.3. *Les fonctions $e_1(x,\lambda)$ et $f_1(x,\lambda)$ admettent le développement en série entière de puissances de λ :*

$$e_1(x,\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} V_0^i(e_1(.,0))(x)\lambda^i, \tag{2.5.1}$$

$$f_1(x,\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} V_1^i(f_1(.,0))(x)\lambda^i. \tag{2.5.2}$$

De même :

$$e_2(x,\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} V_0^i(e_2(.,0))(x)\lambda^i \tag{2.5.3}$$

et

$$f_2(x,\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} V_1^i(f_2(.,0))(x)\lambda^i. \tag{2.5.4}$$

DÉMONSTRATION. D'après le lemme 2.5.2, à λ fixé quelconque dans $\mathbb{C}$, les séries de fonctions de x (2.5.1),(2.5.2),(2.5.3) et (2.5.4) sont normalement convergentes sur [0,1], ainsi que les séries des dérivées premières et secondes terme à terme. Ces séries définissent donc des fonctions $C^2(0,1)$ qui vérifient trivialement les équations différentielles avec conditions initiales définissant e_1,f_1,e_2 et f_2, d'où le résultat. □

2.5.2. Propriétés du déterminant de Fredholm. Dans le cas où l'opérateur en espace A du système mis sous forme standard et éventuellement bouclé est inversible, nous savons (voir l'annexe A, section A.2) que l'inverse de A, noté K, est un opérateur intégral compact à noyau C^0 sur $[0,1]\times[0,1]$. C'est donc un opérateur de Fredholm, et l'expression générale de son déterminant de Fredholm est donnée par l'expression (A.2.1).

Les notations employées par la suite sont définies dans l'annexe A.

Comme conséquence directe du lemme 2.5.3 nous obtenons la propriété suivante:

PROPRIÉTÉ 2.5.4. *Soit D_A le déterminant de Fredholm de K, alors on a, à multiplication par une constante près:*

$$\begin{aligned} D_A(\lambda) =& A_{12} + A_{34} + \sum_{i=0}^{\infty} (A_{23} V^i(e_1(.,0))(1) + A_{13} V^i(e_2(.,0))(1) \\ &+ A_{42} V^i(e_1(.,0))'(1) + A_{14} V^i(e_2(.,0))'(1)) \lambda^i, \end{aligned}$$

et D_A est une fonction entière d'ordre de Weierstrass inférieur à $\frac{1}{2}$.

De plus, les coefficients a_i du développement en série entière de D_A sont tels qu'il existe deux constantes C et P positives telles que:

$$|a_i| \leq C \frac{P^i}{(2i)!}$$

DÉMONSTRATION. L'expression du développement en série de D_A est une conséquence immédiate de (2.5.1) et de (2.5.3). Les majorations obtenues dans le lemme 2.5.2 prouvent le résultat sur la majoration des a_i et l'ordre de Weierstrass de D_A. □

De plus, grâce aux développements asymptotiques donnés dans l'annexe dans le cas d'opérateurs vérifiant les hypothèses du théorème A.2.3, on peut affirmer que:

PROPRIÉTÉ 2.5.5. *Il existe une constante $M > 0$ telle que pour toute valeur propre λ_i de A on ait:*

$$\left| \frac{1}{\lambda_i} \right| \leq \frac{M}{(\pi(i+1))^2}.$$

D'où la propriété

PROPRIÉTÉ 2.5.6. *La fonction entière $D_A(\lambda)$ est d'ordre de Weierstrass $\frac{1}{2}$ exactement.*

DÉMONSTRATION. Les zéros de $D_A(\lambda)$ sont les valeurs propres de A, et vérifient d'après la propriété immédiatement précédente, ou encore d'après le théorème A.1.3 si A est auto-adjoint à conditions aux bords séparées

$$\exists n_0 / \ \forall n \geq n_0, \forall \epsilon > 0, \ \sum_{i=n_0}^{\infty} (\frac{1}{|\lambda_i|})^{\frac{1}{2}+\epsilon} < +\infty,$$

ce qui entraîne (voir [**55**]) que l'ordre de Weierstrass de D est $\geq \frac{1}{2}$. D'après la propriété 2.5.4, nous savons que cet ordre est $\leq \frac{1}{2}$, d'où le résultat. □

2.6. Commandabilité "plate" approchée

Nous nous intéressons à la propriété de commandabilité approchée pour un problème du type (2.1.4)-(2.1.6), que nous supposons bien posé au sens qui a été défini dans la section 2.2. Après un bref aperçu des définitions et résultats existants, nous donnons notre définition de la commandabilité "plate".

2.6.1. Résultats généraux de commandabilité. On distingue principalement trois notions de commandabilité:

- la commandabilité exacte en un temps donné T: on fixe l'état de départ et d'arrivée, et on cherche une loi de commande générant une trajectoire dont l'état initial et final au temps T coïncident exactement avec les états fixés à l'avance.

- la commandabilité approchée en un temps donné T: on fixe l'état de départ et d'arrivée, ainsi qu'un voisinage aussi petit qu'on le souhaite de l'état final. On cherche une loi de commande générant une trajectoire telle que, partant de l'état initial prescrit, l'état final au temps T soit dans le voisinage de l'état final souhaité. Cette propriété équivaut à la densité de l'ensemble des états atteignables au temps T depuis un état de départ fixé, ceci pour chaque état de départ possible.
- et enfin la commandabilité à zéro en un temps donné T: partant de n'importe quel état initial, on veut pouvoir rejoindre l'état nul, exactement et au temps T.

Une méthode classique efficace pour obtenir des résultats de commandabilité exacte, lorsque c'est possible est la célèbre méthode HUM (Hilbert Uniqueness Method), mise au point par J.L Lions (voir [**32**]), fondée sur l'obtention d'inégalités d'observabilité pour le problème adjoint. On en trouve de nombreuses applications: voir par exemple [**4**] pour l'équation des ondes linéaire, et [**50**] pour une application assez récente à l'équation de Korteweg-De Vries mono-dimensionnelle, avec un résultat en non linéaire. De façon générale, les résultats de commandabilité exacte concernant les systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles non linéaires sont difficiles à obtenir (voir par exemple [**61**] pour l'équation des ondes semi-linéaire mono-dimensionnelle , [**10**] pour l'équation d'Euler, où le résultat est obtenu par d'autres méthodes inspirées des systèmes en dimension finie et [**23**] pour l'équation de Burgers).

Certains systèmes, comme les équations de type diffusion, ne permettent pas, à cause de leurs propriétés régularisantes d' obtenir une formulation satisfaisante, dans un cadre fonctionnel où il soit bien posé, du problème de la commandabilité exacte. C'est notamment le cas des équations étudiées dans ce chapitre. On peut cependant obtenir des résultats de commandabilité approchée pour une très large classe de ces systèmes. Ainsi, la commandabilité approchée de l'équation de la chaleur linéaire et semi-linéaire a été étudiée dans un cadre très général par Fabre, Puel et Zuazua (voir [**14**]), par dualité en s'appuyant sur un résultat de continuation unique pour le problème adjoint (voir [**40**]) dans le cas linéaire et en rajoutant un argument de point fixe dans le cas semi-linéaire.

2.6.2. Un critère modal de commandabilité approchée. De même, on trouve dans [**11**] dans le cas Riesz-spectral un critère "modal" de commandabilité approchée, à mettre en parallèle avec le critère de commandabilité (1.2.1) obtenu en dimension finie, qui est le suivant dans sa version à une commande:

PROPRIÉTÉ 2.6.1. *Considérons le système linéaire de dimension infinie à* 1 *commande*

$$\dot{z} = E(z) + Bu$$

où z est une fonction de t à valeurs dans un espace de Hilbert X, E est un opérateur Riesz-spectral de X.

Nous désignons les fonctions propres de E par $(\phi_n)_{n\in(N)}$. Par définition d'un opérateur Riesz-spectral, les sous-espaces propres de E sont tous de dimension égale à 1. *De même, nous désignons les fonctions propres de $E^\star$ par $(\psi_n)_{n\in(N)}$.*

De plus, nous supposons que B est défini sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans X et a la forme suivante

$$Bu = ub, \quad b \in X.$$

Alors le problème est bien posé et le système est approximativement commandable si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad < b,\psi_n > \neq 0$$

2.6.3. Commandabilité approchée "plate". Nous supposons que nous avons affaire à un système plat au sens de la définition proposée dans 1.3.1: nous avons donc trouvé un paramètre plat y dans un espace fonctionnel adéquat, un ensemble D d'états de départ et d'arrivée du système (2.1.4)-(2.1.6) joignable par des trajectoires et une loi de commande paramétrée par y et ses dérivées, et nous avons prouvé que D est dense dans $L^2(0,1)$.

Alors nous montrons que:

PROPRIÉTÉ 2.6.2. *Si Θ_0 est un état initial quelconque dans $L^2(0,1)$ du système* (2.1.4)-(2.1.6) *et si Θ_T est un état final quelconque dans $L^2(0,1)$ dont on souhaite rallier un voisinage aussi petit que l'on veut au temps T, si on note Π_0 et Π_T deux états $\in D$, tels que*

$$\|\Theta_0 - \Pi_0\|_2 \leq \epsilon \tag{2.6.1}$$

$$\|\Theta_T - \Pi_T\|_2 \leq \epsilon \tag{2.6.2}$$

et si $U(t)$ est la loi de commande plate $\in C^\infty(0,T)$ qui conduit le système (2.1.4)-(2.1.6) *de l'état initial Π_0 à l'instant 0 à l'été final Π_T à l'instant T, ceci de façon exacte, alors il existe une loi de commande approchée $\bar{U}(t)$ qui est au moins dans $C^2(0,T)$ et qui conduit le système* (2.1.4)-(2.1.6) *de l'état initial Θ_0 à l'instant 0 à l'été final Θ_T àl'instant T, ceci de façon approchée: il existe $K_T > 0$, qui ne dépend que de T tel que*

$$\|\theta(.,T) - \Theta_T\|_2 \leq K_T\epsilon.$$

DÉFINITION 2.6.1. La propriété 2.6.2 sera appelée commandabilité "plate" approchée.

REMARQUE. Comme les lois de commande de la commandabilité plate approchée sont au moins C^2, la commandabilité plate approchée implique la commandabilité approchée usuelle, qui n'impose pas d'autre condition à la loi de commande que d'être dans l'espace des commandes pour lesquelles le problème est bien posé.

PREUVE DE LA PROPRIÉTÉ 2.6.2. Comme dans la section 2.2, posons $v(x,t) = \theta(x,t) - Fu(t)$, et considérons le problème transformé (2.2.1), et l'opérateur différentiel E associé. E est par hypothèse le générateur infinitésimal d'un semi-groupe continu. Nous en déduisons (voir annexe B, prop. B.2.3) que, étant donné une condition initiale $v_0 \in \mathcal{D}(E)$ et une loi de commande $u \in C^2(0,T)$, le problème (2.2.1) a une solution classique unique continûment différentiable sur $[0,T]$ qui coïncide avec la solution faible du problème donnée par

$$v(\cdot,t) = S_E(t)v_0 - \int_0^t S_E(t-\tau)(F\dot{u}(\tau) - Gu(\tau))d\tau, \tag{2.6.3}$$

où S_E est le semi-groupe fortement continu de générateur infinitésimal E et les notations sont celles de la section 2.2.

De plus pour tout $t \geq 0$,

$$\|S_E(t)\| \leq Me^{\omega t},$$

où ω est la borne de croissance du semi-groupe (voir annexe B, prop. B.1.1).

Grâce à (2.6.3), nous avons

$$\Pi_T - FU(T) = S_E(T)\big(\Pi_0 - FU(0)\big) - \int_0^T S_E(T-\tau)(F\dot{U}(\tau) - GU(\tau))d\tau. \tag{2.6.4}$$

Nous estimons maintenant l'erreur finale commise lorsque nous appliquons une loi de commande approchée $\bar{U}$ au système (2.1.4)-(2.1.6) en partant de l'état initial $\tilde{\theta}_0 = \Theta_0 - \bar{U}(0)$. Notons que cet état n'est plus nécessairement dans $\mathcal{D}(E)$ mais seulement dans $L^2(0,1)$, et donc que, sauf situation exceptionnelle (voir annexe B), la trajectoire suivie est une solution faible du problème.

Posons $\Delta U := \bar{U} - U$. La loi de commande $\bar{U}$ sera, nous le verrons par la suite, obtenue à partir de U comme une valeur approchée. Nous supposons qu'elle est dans $C^2(0,T)$, et qu'on a:

$$\sup_{t\in[0,T]} |\Delta U(t)| \leq \epsilon, \tag{2.6.5}$$

$$\sup_{t\in[0,T]} \left|\Delta\dot{U}(t)\right| \leq \epsilon. \tag{2.6.6}$$

Grâce à (2.6.3) puis à (2.6.4), nous obtenons

$$\begin{aligned}
&v(.,T) = \theta(.,T) - F\bar{U}(T)\\
&= S_E(T)\big(\Theta_0 - F\bar{U}(0)\big) - \int_0^t S_E(t-\tau)(F\dot{\bar{U}}(\tau) - G\bar{U}(\tau))d\tau\\
&= S_E(T)\big(\Pi_0 - FU(0) + \Theta_0 - \Pi_0 - F\Delta U(0)\big) - \int_0^T S_E(T-\tau)(F\dot{U}(\tau) - GU(\tau))d\tau\\
&- \int_0^T S_E(T-\tau))(F\Delta\dot{U}(\tau) - G\Delta U(\tau))d\tau\\
&= \Pi_T - FU(T) + S_E(T)\big(\Theta_0 - \Pi_0 - F\Delta U(0)\big)\\
&\qquad - \int_0^T S_E(T-\tau)(F\Delta\dot{U}(\tau) - G\Delta U(\tau))d\tau.
\end{aligned}$$

D'où on tire que

$$\begin{aligned}
&\theta(.,T) - \Pi_T =\\
&F\Delta U(T) + S_E(T)\big(\Theta_0 - \Pi_0 - F\Delta U(0)\big) - \int_0^T S_E(T-\tau)(F\Delta\dot{U}(\tau) - G\Delta U(\tau))d\tau.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
&\|\theta(.,T) - \Theta_T\|_2 \leq \|\Theta_T - \Pi_T\|_2 + \|\theta(.,T) - \Pi_T\|_2 \\
&\leq \|\Theta_T - \Pi_T\|_2 + K_1 \sup_{t\in[0,T]} |\Delta U(t)| + \|S_E(T)\| \cdot \|\Theta_0 - \Pi_0 + \Delta U(0)\|_2 \\
&+ \sup_{t\in[0,T]} \left|\Delta\dot{U}(t)\right| \int_0^T \|S_E(T-\tau)\|_2 \|F\|_2 \, d\tau + \sup_{t\in[0,T]} |\Delta U(t)| \int_0^T \|S_E(T-\tau)\|_2 \|G\|_2 \, d\tau \\
&\leq \|\Theta_T - \Pi_T\| + Me^{\omega T}\big(\|\Theta_0 - \Pi_0\| + \|\Delta U(0)\|\big) + K_1 \sup_{t\in[0,T]} |\Delta U(t)| \\
&+ (\sup_{t\in[0,T]} \left|\Delta\dot{U}(t)\right| + \sup_{t\in[0,T]} |\Delta U(t)|) MK_2 \int_0^T e^{\omega(T-\tau)} d\tau \\
&\leq \left(1 + K_1 + 2Me^{\omega T} + 2MK_2 \frac{e^{\omega T} - 1}{\omega}\right) \epsilon,
\end{aligned}$$

où nous avons posé

$$K_1 = \sup_{x\in[0,1]} |F(x)|,$$

et

$$K_2 = \max(\|F\|_2, \|G\|_2).$$

La propriété est donc prouvée, avec

$$K_T = 1 + K_1 + 2Me^{\omega T} + 2MK_2 \frac{e^{\omega T} - 1}{\omega}.$$

□

CHAPITRE 3

Developpements en série de puissances de x

Cette approche consiste à rechercher des solutions sous la forme de développements en série formelles à priori. Elle a le mérite d'une grande simplicité de mise en œuvre. Nous l'avons appliquée dans l'exemple 1.3, où l'équation de contrainte est localisée sur un bord, ce qui permet par bouclage de mettre le problème initial sous forme de Cauchy-Kovalevsky. Cela sera possible, de façon très générale, dès que toutes les équations de contraintes font intervenir le même bord . Cette méthode s'applique pour des systèmes décrits par une équation aux dérivées partielles linéaire dont les coefficients sont analytiques, de rayon de convergence en zéro strictement supérieur à 1.

Nous considérons donc l'équation de diffusion linéaire :

$$\begin{aligned}
&\partial_t\theta = \partial_{xx}\theta + q(x)\theta, \ \ (x,t) \in [0,1] \times [0,T] \\
&\gamma\theta(0,t) + \delta\partial_x\theta(0,t) = 0 \\
&a_{21}\theta(0,t) + a_{22}\partial_x\theta(0,t) + a_{23}\theta(1,t) + a_{24}\partial_x\theta(1,t) = u(t),
\end{aligned}$$

où q est une fonction analytique, de rayon de convergence en zéro supérieur strictement à 1, γ est un coefficient réel constant de même que δ.

3.1. Convergence des trajectoires formelles

3.1.1. Le cas : $\delta \neq 0$. Nous pouvons, quitte à modifier la valeur de γ, supposer que $\delta = 1$. Par bouclage, nous nous ramenons à:

$$\begin{aligned}
&\partial_t\theta = \partial_{xx}\theta + q(x)\theta, \ \ (x,t) \in [0,1] \times [0,T] \\
&\gamma\theta(0,t) + \partial_x\theta(0,t) = 0 \\
&\theta(0,t) = y(t),
\end{aligned}$$

Nous montrons qu'alors $y(t) := \theta(0,t)$ est une sortie "plate" du système.

Comme dans l'exemple introductif, le système "inversé"

$$\begin{aligned}
&\partial_{xx}\theta = \partial_t\theta - q(x)\theta \\
&\gamma\theta(0,t) + \partial_x\theta(0,t) = 0 \\
&\theta(0,t) = y(t),
\end{aligned} \tag{3.1.1}$$

est sous forme de Cauchy-Kovalevsky, et nous cherchons une solution formelle $\theta(x,t) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i(t)\frac{x^i}{i!}$, où les a_i sont des fonctions régulières.

Nous obtenons le résultat suivant:

PROPRIÉTÉ 3.1.1. *Il existe $R_0 > 0$ tel que la solution formelle de (3.1.1) soit convergente sur un voisinage de zéro en x lorsque $y(t)$ est une fonction Gevrey d'ordre $1 \leq \alpha \leq 2$, de rayon Gevrey $R > R_0$ (R est le "rayon" de $y(t)$ dans la définition C.1.5 donnée dans l'annexe C).*

DÉMONSTRATION. Soit y une fonction Gevrey d'ordre α, où $1 \leq \alpha \leq 2$, telle qu'il existe $M > 0$ et $R > 0$, avec

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,T] \left| y^{(k)}(t) \right| \leq \frac{M(k!)^\alpha}{R^k}$$

Nous développons q en série $q(x) = \sum_{k\geq 0} q_i \frac{x^i}{i!}$, ce qui permet d'obtenir facilement que les a_k sont définis par la récurrence

$$\begin{aligned} a_{k+2}(t) &= \dot{a}_k(t) - \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} q_{k-i}\ a_i(t) \\ a_0(t) &= y(t) \\ a_1(t) &= \gamma a_0(t). \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Il nous faut alors prouver qu'il existe $\lambda,\mu > 0$ tels que $|a_k| \leq \frac{\lambda}{\mu^k} k!$ sur $[0,T]$.

La démonstration est adaptée de la très classique *méthode des majorants*: nous remplaçons d'abord la suite a_k par une suite "majorante" A_k (au sens du lemme 3.1.1) telle que

$$|a_k| \leq \big(A_k(0)\big)^\alpha.$$

Cette suite est initialisée avec $A_0 = A_1 = A$, où on a posé $R^{\frac{1}{\alpha}} = r$, $M^{\frac{1}{\alpha}} = m > 0$ et

$$\forall t \in [0,r[, \quad A(t) := \frac{m}{1 - \frac{t}{r}},$$

ce qui suppose qu'on a choisi $R > R_0$, avec $R_0 = T^\alpha$. On montre facilement que A vérifie

$$A^{(k)} = \frac{m\ k!}{r^k \left(1 - \frac{t}{r}\right)^{k+1}}$$

et vérifie la propriété différentielle du lemme 3.1.2.

Nous estimons alors la croissance des quantités A_k en terme des dérivées de A (lemme 3.1.3) et nous obtenons

$$A_{2k}, A_{2k+1} \leq \frac{(2k)!^{\frac{1}{\alpha}}}{k!} \frac{A^{(k)}}{\rho^k},$$

où ρ est défini dans le lemme 3.1.3.

Ici et dans toute la suite, nous désignons $m^\alpha, r^\alpha, \ldots$ par $\tilde{m}, \tilde{r}, \ldots$. Nous en concluons finalement que $|a_{2k}|, |a_{2k+1}| \leq \frac{\tilde{m}}{(\tilde{r}\tilde{\rho})^k}(2k)!$, ce qui prouve la propriété de convergence pour $R > R_0$, et sur l'intervalle $[0,\tilde{r}\tilde{\rho}[$. □

LEMME 3.1.1. *$\forall \alpha \geq 1$,*

$$\begin{cases} A_{k+2} = \dot{A}_k + \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \left(\frac{Q}{S^{k-i}} \frac{k!}{i!} \right)^{\frac{1}{\alpha}} A_i \\ A_0 = A \\ A_1 = A \end{cases}$$

où Q et S sont définis ci-dessous est un problème majorant de (3.1.2) au sens où

$$\forall k,n \geq 0, \quad \left| a_k^{(n)} \right| \leq \left(A_k^{(n)}(0) \right)^\alpha.$$

DÉMONSTRATION. Par construction de A, la propriété est vraie au rang 0 et 1. Supposons qu'elle soit vraie jusqu'au rang $k+1$, et prouvons qu'elle est vraie au rang $k+2$; en effet, puisque q est analytique de rayon de convergence en zéro supérieur à 1, il existe deux constantes $Q > 0$ et $S > 1$ telles que

$$\begin{aligned}
\left|a_{k+2}^{(n)}\right| &= \left|\dot{a}_k^{(n)} + \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} a_i^{(n)} q_{k-i}\right| \\
&\leq \left|a_k^{(n+1)}\right| + \sum_{i=0}^{k} \frac{Q}{S^{k-i}} \frac{k!}{i!} \left|a_i^{(n)}\right| \\
&\leq \left(A_k^{(n+1)}(0)\right)^{\alpha} + \sum_{i=0}^{k} \frac{Q}{S^{k-i}} \frac{k!}{i!} \left(A_i^{(n)}(0)\right)^{\alpha} \\
&\leq \left(A_k^{(n+1)}(0) + \sum_{i=0}^{k} \frac{w}{s^{k-i}} \left(\frac{k!}{i!}\right)^{\frac{1}{\alpha}} A_i^{(n)}(0)\right)^{\alpha} \\
&= \left(A_{k+2}^{(n)}(0)\right)^{\alpha},
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que $\sum_s |L_s|^{\alpha} \leq (\sum_s |L_s|)^{\alpha}$ lorsque $\alpha \geq 1$, et posé $w = Q^{\frac{1}{\alpha}}$ et $s = S^{\frac{1}{\alpha}}$. □

LEMME 3.1.2. *$\forall n \geq 0, k \geq j \geq 0$,*

$$A^{(j+n)} \leq \frac{j!}{k!} r^{k-j} A^{(k+n)}.$$

DÉMONSTRATION. Comme $D(t) := \frac{1}{1-\frac{t}{r}} \leq 1$ sur $[0,r[$,

$$\begin{aligned}
A^{(j+n)} &= \frac{m\ (j+n)!}{r^{j+n} D^{j+n+1}} \\
&\leq \frac{m\ (j+n)!}{r^{j+n} D^{k+n+1}} \\
&= \frac{(j+n)!}{(k+n)!} r^{k-j} A^{(k+n)} \\
&\leq \frac{j!}{k!} r^{k-j} A^{(k+n)}. \quad \square
\end{aligned}$$

LEMME 3.1.3. *$\forall \alpha \leq 2, k \geq 0, n \geq 0$,*

$$A_{2k}^{(n)}, A_{2k+1}^{(n)} \leq \frac{(2k)!^{\frac{1}{\alpha}}}{k!} \frac{A^{(k+n)}}{\rho^k},$$

où $\dfrac{1}{\rho} := \max(\dfrac{r}{s^2}, 1 + rw + rws)$.

DÉMONSTRATION. La propriété est évidente au rang 0 puisque $A_0 = A_1 = A$. Supposons qu'elle est vérifiée jusqu'au rang k. Par définition,

$$\begin{aligned} A^{(n)}_{2(k+1)} &= \dot{A}^{(n)}_{2k} + \sum_{i=0}^{2k} \underbrace{\frac{w}{s^{2k-i}} \left(\frac{(2k)!}{i!}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}_{T_i} A^{(n)}_i \\ &= \dot{A}^{(n)}_{2k} + \sum_{j=0}^{k} T_{2j} A^{(n)}_{2j} + \sum_{j=0}^{k-1} T_{2j+1} A^{(n)}_{2j+1} \end{aligned}$$

En utilisant successivement l'hypothèse de récurrence, le lemme 3.1.2 et $\rho \leq s^2/r$, nous trouvons que

$$\begin{aligned} T_{2j} A^{(n)}_{2j} &\leq \frac{w}{s^{2k-2j}} \frac{(2k)!^{\frac{1}{\alpha}}}{j!} \frac{A^{(j+n)}}{\rho^j} \\ &\leq \frac{wr}{\rho^j} \left(\frac{r}{s^2}\right)^{k-j} \frac{(2k)!^{\frac{1}{\alpha}}}{(k+1)!} A^{(k+1+n)} \\ &\leq \frac{wr}{\rho^k} \frac{(2k)!^{\frac{1}{\alpha}}}{(k+1)!} A^{(k+1+n)}. \end{aligned}$$

De la même façon,

$$T_{2j+1} A^{(n)}_{2j+1} \leq \frac{wsr}{\rho^k} \frac{(2k)!^{\frac{1}{\alpha}}}{(k+1)!} A^{(k+1+n)}.$$

D'autre part, l'hypothèse de récurrence entraîne

$$\dot{A}^{(n)}_{2k} \leq \frac{(2k)!^{\frac{1}{\alpha}}}{k!} \frac{rA^{(k+1+n)}}{\rho^k}.$$

D'où,

$$\begin{aligned} A^{(n)}_{2k+2} &\leq \frac{(2k)!^{\frac{1}{\alpha}}}{k!} \frac{A^{(k+1+n)}}{\rho^k} (1 + rw + rws) \\ &\leq \frac{(2k)!^{\frac{1}{\alpha}}}{k!} \frac{A^{(k+1+n)}}{\rho^{k+1}} \\ &\leq \frac{(2k+2)!^{\frac{1}{\alpha}}}{(k+1)!} \frac{A^{(k+1+n)}}{\rho^{k+1}}. \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que $k \mapsto \frac{(2k)!^{\frac{1}{\alpha}}}{k!}$ est croissante lorsque $\alpha \leq 2$.

La démonstration est identique pour les termes d'ordre impair $A^{(n)}_{2k+1}$. □

Nous avons de plus le résultat suivant

PROPRIÉTÉ 3.1.2. *Il existe $R_0 > 0$ tel que lorsque $y(t)$ est une fonction Gevrey d'ordre $1 \leq \alpha \leq 2$, de rayon Gevrey $R > R_0$, la solution formelle de (3.1.1) définisse une fonction d'ordre Gevrey α en t et 1 en x sur un ensemble de la forme $[0,x_0[\times[0,T]$.*

DÉMONSTRATION. On a, grâce au lemme (3.1.1), si $R > R_0$

$$\forall k,n \geq 0, \quad \left|a^{(n)}_k\right| \leq \left(A^{(n)}_k(0)\right)^{\alpha},$$

et, grâce au lemme (3.1.3), et en notant $\frac{k}{2}$ le quotient entier de la division de k par 2

$$\begin{aligned} A_k^{(n)} &\leq \frac{(k)!^{\frac{1}{\alpha}}}{(\frac{k}{2})!}\frac{A^{(\frac{k}{2}+n)}}{\rho^{\frac{k}{2}}} \\ &\leq m\frac{(k)!^{\frac{1}{\alpha}}}{(\frac{k}{2})!}\frac{(\frac{k}{2}+n)!}{r^{\frac{k}{2}}\rho^{\frac{k}{2}}} \\ &\leq m(k)!^{\frac{1}{\alpha}}\frac{2^{\frac{k}{2}+n}(n)!}{r^{\frac{k}{2}}\rho^{\frac{k}{2}}} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\left|a_k^{(n)}\right| \leq \tilde{m}(k)!\frac{2^{\frac{\alpha k}{2}}}{\tilde{r}^{\frac{k}{2}}\tilde{\rho}^{\frac{k}{2}}}(2^n(n)!)^\alpha$$

et donc que:

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial^{n+m}}{\partial t^n\partial x^m}\frac{a_k(t)x^k}{k!}\right| &\leq \frac{\left|a_k^{(n)}x^k\right|}{(k-m)!} \\ &\leq \tilde{m}\frac{(k)!}{(k-m)!}\frac{2^{\frac{\alpha k}{2}}}{\tilde{r}^{\frac{k}{2}}\tilde{\rho}^{\frac{k}{2}}}(2^n(n)!)^\alpha x^k \\ &\leq \tilde{m}\frac{2^{\frac{\alpha k}{2}+k}}{\tilde{r}^{\frac{k}{2}}\tilde{\rho}^{\frac{k}{2}}}x^k(m)!(2^n(n)!)^\alpha \end{aligned}$$

Cette dernière expression est le terme d'une série convergente lorsque

$$\frac{2^{\frac{\alpha}{2}+1}}{\tilde{r}^{\frac{1}{2}}\tilde{\rho}^{\frac{1}{2}}}x < 1,$$

ce qui fournit la valeur de

$$x_0 = \frac{\tilde{r}^{\frac{1}{2}}\tilde{\rho}^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{\alpha}{2}+1}}. \tag{3.1.3}$$

La somme de cette série est la dérivée partielle de θ, elle vérifie une estimation en

$$\left|\frac{\partial^{n+m}}{\partial t^n\partial x^m}\theta\right| \leq Km!(n!)^\alpha 2^{\alpha n},$$

qui prouve la propriété annoncée. □

Remarque. Les rayons de convergence trouvés dans la propriété 3.1.1 et dans 3.1.3 dépendent uniquement de l'estimation des dérivées de la fonction q, c'est à dire des quantités Q et S, puisque nous avons

$$\frac{1}{\tilde{r}\tilde{\rho}} = \max(\frac{1}{S^2}, Q(\frac{1}{wr}+1+s)^\alpha).$$

Les techniques de majoration utilisées ne fournissent qu'un résultat relativement médiocre de convergence des solutions formelles du problème, car nous verrons dans la section 4.2.4 que moyennant des hypothèses sur le rayon gevrey de y, on obtient une solution analytique du problème sur tout l'intervalle [0,1].

3.1.2. Le cas $\delta = 0$. Nous pouvons donc supposer que $\gamma = 1$. Par bouclage, nous nous ramenons à:

$$\begin{aligned}&\partial_t\theta = \partial_{xx}\theta + q(x)\theta,\ \ (x,t) \in [0,1] \times [0,T]\\ &\theta(0,t) = 0\\ &\partial_x\theta(0,t) = y(t),\end{aligned}$$

Nous montrons qu'alors $y(t) := \partial_x\theta(0,t)$ est une sortie "plate" du système.

Le système "inversé"

$$\begin{aligned}&\partial_{xx}\theta = \partial_t\theta - q(x)\theta\\ &\theta(0,t) = 0\\ &\partial_x\theta(0,t) = y(t),\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

est encore sous forme de Cauchy-Kovalevsky, et nous cherchons à nouveau une solution formelle $\theta(x,t) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i(t)\frac{x^i}{i!}$, où les a_i sont des fonctions régulières.

On a alors:

PROPRIÉTÉ 3.1.3. *Il existe $R_0 > 0$ tel que la solution formelle de (3.1.4) soit convergente lorsque $y(t)$ est une fonction Gevrey d'ordre $1 \leq \alpha \leq 2$, de rayon Gevrey $R > R_0$.*

DÉMONSTRATION. En utilisant le développement de q en série $q(x) = \sum_{k\geq 0} q_i\frac{x^i}{i!}$, les a_k sont définis par la récurrence

$$\begin{aligned}&a_{k+2}(t) = \dot{a}_k(t) - \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} q_{k-i}\ a_i(t)\\ &a_0(t) = 0\\ &a_1(t) = y(t).\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

La démonstration faite dans la section précédente s'applique donc de façon tout à fait identique, et fournit le résultat annoncé. □

REMARQUE. Puisque nous avons $a_0 = 0$, la paramétrisation des trajectoires prend la forme:

$$\theta(x,t) = y(t)x + \sum_{i=2}^{+\infty} a_i(t)\frac{x^i}{i!} \tag{3.1.6}$$

3.2. Retour sur l'exemple introductif

Dans le cas de l'exemple étudié dans la section 1.3, nous pouvons, étant donnée la forme particulièrement simple de la solution série formelle, raffiner les résultats de la section précédente. Nous obtenons

PROPRIÉTÉ 3.2.1. *Si $y(t)$ est de classe Gevrey $\sigma < 2$, quel que soit son rayon Gevrey, la solution formelle* (1.3.7) *est Gevrey d'ordre σ en t et 1 en x (en particulier, la loi de commande formelle* (1.3.8) *est Gevrey d'ordre σ).*

Lorsque $\sigma = 2$, on a le même résultat si y est de rayon Gevrey > 4.

DÉMONSTRATION. Nous dérivons formellement (1.3.7),

$$\frac{\partial^{m+n}\theta}{\partial t^m \partial x^n}(x,t) = \sum_{2i\geq n} y^{(i+m)}(t)\frac{x^{2i-n}}{(2i-n)!}, \tag{3.2.1}$$

et majorons le terme général de la série dérivée afin de trouver une estimation Gevrey:

$$\begin{aligned}\left|\frac{y^{(i+m)}(t)}{m!^\sigma n!}\frac{x^{2i-n}}{(2i-n)!}\right| &\leq \frac{M}{R^{i+m}}\frac{(i+m)!^\sigma}{(2i-n)!}\frac{1}{m!^\sigma n!}\\ &= \frac{M}{R^{i+m}}\left(\frac{(i+m)!}{i!m!}\right)^\sigma \frac{i!^2 i!^{\sigma-2}}{n!(2i-n)!}\\ &\sim \frac{M}{R^{i+m}}\left(\frac{(i+m)!}{i!m!}\right)^\sigma \frac{\sqrt{\pi i}}{2^{2i}}\frac{(2i)!i!^{\sigma-2}}{n!(2i-n)!}\\ &\leq \frac{M}{\tilde{R}^m}\frac{i!^{\sigma-2}\sqrt{\pi i}}{\tilde{R}^i},\end{aligned}$$

où nous avons posé $\tilde{R} := \frac{R}{2^\sigma}$ et utilisé $(l+k)! \leq 2^{l+k} l!k!$ ainsi que la formule de Stirling:

$$k! \underset{k\to+\infty}{\sim} \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k}. \tag{3.2.2}$$

Soit le nombre:

$$\tilde{M} := M\sum_{2i\geq n}\frac{i!^{\sigma-2}\sqrt{\pi i}}{\tilde{R}^i}.$$

Puisque le terme général de cette série vérifie

$$\lim_{i\to+\infty}\frac{\frac{(i+1)!^{\sigma-2}\sqrt{\pi(i+1)}}{\tilde{R}^{i+1}}}{\frac{i!^{\sigma-2}\sqrt{\pi i}}{\tilde{R}^i}} = \lim_{i\to+\infty}\frac{i^{\sigma-2}}{\tilde{R}},$$

$\tilde{M}$ est fini lorque $\sigma < 2$; lorsque $\sigma = 2$, $\tilde{M}$ est fini dès que $\tilde{R} > 1$, i.e., $R > 4$. Donc

$$\left|\frac{\partial^{m+n}\theta}{\partial x^n \partial t^m}(x,t)\right| \leq \sum_{2i\geq n}\left|y^{(i+m)}(t)\frac{x^{2i-n}}{(2i-n)!}\right| \leq \tilde{M}\frac{m!^\sigma n!}{\tilde{R}^m 1^n},$$

ce qui signifie que $\theta(x,t)$ est Gevrey d'ordre 1 en x et σ en t. En particulier, la loi de commande $u(t)$ definie par (1.3.8) est Gevrey d'ordre σ, puisque la série entière qui définit θ a un rayon de convergence > 1. □

3.3. Densité

Il n'est pas aisé de répondre à la question de la densité des états de départ exactement raccordables par des trajectoires "séries" pour deux raisons.

Les monomes $\frac{x^i}{i!}$ forment une famille dense dans $C^0(0,1)$ pour la norme uniforme et dense dans $L^2(0,1)$ pour la norme L^2, mais il se peut que la récurrence qui définit les a_i conduise à des coefficients formellement nuls à certains rangs. Le théorème de Münz-Szatz (voir [**53**]) permet alors d'affirmer que si $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la famille des rangs pour lesquels les coefficients a_{i_n} ne sont pas formellement nuls, une condition nécessaire et suffisante pour la densité de la famille $(\frac{x^{i_n}}{i_n!})_{n\in\mathbb{N}}$ dans $C^0(0,1)$ muni de

la norme uniforme est que la fonction constante égale à 1 soit dans cet ensemble (on lui attribue le rang i_0), et que pour les autres rangs, on ait

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{i_n} = +\infty$$

Dans le cas de l'exemple 1.3, nous avons donc, comme il a été signalé, la densité pour la norme uniforme et pour la norme $L^2(0,1)$ de la famille des monômes générateurs des trajectoires. Par contre, dans la même situation, mais avec les conditions aux bords de (3.1.4), un calcul simple montre que les monômes générateurs sont les monômes d'ordre impair. Nous perdons donc la densité pour la norme uniforme, mais nous conservons la densité pour la norme $L^2(0,1)$.

La deuxième difficulté réside dans le fait qu'à partir de l'approximation en norme L^2 de l'état initial du système, il faut calculer les valeurs initiales des dérivée de la paramétrisation y, via les formules de récurrence (3.1.2) ou (3.1.5); il n'est pas facile de montrer qu'on arrive toujours à maîtriser l'estimation Gevrey sur y.

3.4. Généralisation des résultats présentés

La méthode des développements en séries se généralise aux équations linéaires mono-dimensionnelles à coefficients analytiques d'ordre quelconque, de la forme

$$\begin{cases} \partial_t\theta(x,t) = \partial_x^n\theta(x,t) + \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j(x)\ \partial_x^j\theta(x,t), \quad x \in [0,1] \\ \partial_x^k\theta(1,t) = u(t), \quad \text{où } k \in \{0,\dots,n-1\} \\ \partial_x^j\theta(0,t) = 0, \qquad j = 1,\dots,n-1, j \neq k. \end{cases}$$

où l'ordre de dérivation en espace, n, est stictement supérieur à 1, l'ordre de dérivation en temps. Les calculs et les estimations sont bien entendu plus complexes, mais le point essentiel est que toutes les contraintes sont sur un même bord, si bien que le problème "inversé"

$$\begin{cases} \partial_x^n\theta(x,t) = \partial_t\theta(x,t) - \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j(x)\ \partial_x^j\theta(x,t) \\ \partial_x^k\theta(0,t) = y(t), \quad k \in \{0,\dots,n-1\} \\ \partial_x^j\theta(0,t) = 0, \qquad j = 1,\dots,n-1, j \neq k. \end{cases}$$

est sous forme de Cauchy-Kovalevsky et

$$y(t) := \partial_x^k\theta(0,t)$$

est la sortie plate.

Cette méthode présente aussi l'avantage d'espérer avoir des résultats en non linéaire: voir [**54**] pour un calcul en semi-linéaire.

CHAPITRE 4

Paramétrisation des trajectoires - Platitude

A l'aide des transformations effectuées au chapitre 2, nous mettons le système (2.1.4)-(2.1.6) sous "forme de Brunovsky" de façon à paramétrer des trajectoires formelles dans le paragraphe 4.1, et nous étudions dans le paragraphe 4.2 la convergence de ces trajectoires formelles.

Nous étudions ensuite au paragraphe 4.3 la densité des états de départ et d'arrivée joignables par une trajectoire paramétrée, dans un espace fonctionnel convenable: ce sera ici $L^2(0,1)$.

Nous examinons ensuite de façon plus approfondie le problème de trouver une notion se rapprochant de celle d'endogénéité en dimension d'état finie pour la paramétrisation des trajectoires du système obtenue à la section 4.2, avant d'appliquer ces résultats à la planification de trajectoire.

4.1. Forme de Brunovsky

4.1.1. Mise sous forme de Brunovsky. Soit donc l'opérateur A inversible Riesz-spectral tel qu'il a été défini dans le paragraphe 2.3, et la fonction B associée. Nous transformons par bouclage sur les termes de bords le problème initial (2.1.4)-(2.1.6) en un problème identique hormis l'équation de commande qui devient

$$\tilde{a}_{21}\theta(0,t) + \tilde{a}_{22}\partial_x\theta(0,t) + \tilde{a}_{23}\theta(1,t) + \tilde{a}_{24}\partial_x\theta(1,t) = \tilde{u}(t).$$

Il est important de remarquer que ce bouclage n'est qu'un artifice de calcul qui va servir par la suite à la paramétrisation des trajectoires du système initial. Il n'a donc pas besoin d'être effectivement réalisé.

Nous posons

$$z(x,t) = \theta(x,t) - B(x)\tilde{u}(t),$$

et nous obtenons, sous réserve que $\tilde{u}$ soit suffisamment régulière:

$$\begin{aligned} &\partial_t z(x,t) = \partial_{xx} z(x,t) + q(x)z(x,t) - B(x)\dot{\tilde{u}}(t) \\ &a_{11}z(0,t) + a_{12}\partial_x z(0,t) + a_{13}z(1,t) + a_{14}\partial_x z(1,t) = 0 \\ &\tilde{a}_{21}z(0,t) + \tilde{a}_{22}\partial_x z(0,t) + \tilde{a}_{23}z(1,t) + \tilde{a}_{24}\partial_x z(1,t) = 0, \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

qui s'écrit encore en considérant z comme une fonction de t à valeurs dans $\mathcal{D}(A)$, et en posant $\dot{\tilde{u}} = e$

$$\dot{z} = A(z) - Be. \tag{4.1.2}$$

Par analogie avec les systèmes dynamiques linéaires d'espace de dimension finie, et par analogie avec la terminologie des séries formelles de puissances, nous posons la définition suivante:

Définition 4.1.1. On appelle trajectoire formelle de (2.1.4) toute solution formelle donnée par une série dont le terme général est le produit des dérivées

successives d'une fonction scalaire $y(t)$ par des coefficients qui sont des fonctions de x, la fonction associée à la dérivée d'ordre 0 de y étant non nulle. Une trajectoire formelle de (2.1.4) est donc de la forme:

$$\theta(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i(x) y^{(i)}(t) \tag{4.1.3}$$

$$\tilde{u}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i y^{(i)}(t) \tag{4.1.4}$$

$$u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i y^{(i)}(t), \tag{4.1.5}$$

avec $\alpha_0 \neq 0$.

DÉFINITION 4.1.2. Soit $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de fonctions de $L^\infty(0,1)$, et G un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de fonctions, tels que pour toute fonction y dans G, la serie (4.1.3) est une solution formelle du problème qui converge normalement sur $[0,1] \times [0,T]$, c'est à dire qu'elle vérifie

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sup_{t\in[0,T]} \left| y^{(i)} \right| \left\| \alpha_i \right\|_\infty < +\infty.$$

Alors le couple $(G,(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}})$ sera appelé une paramétrisation du système, et toute fonction $y \in G$ sera appelée paramètre du système.

Il est naturel de rechercher des conditions sur les $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ pour que (4.1.3),(4.1.4) et (4.1.5) aient un sens pour une classe de fonctions y la plus grande possible, c'est à dire pour que la paramétrisation $(G,(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}})$ soit maximale au sens de l'inclusion pour G. On a sans peine la propriété suivante

PROPRIÉTÉ 4.1.1. *Une paramétrisation formelle de* (2.1.4) *de la forme* (4.1.3), (4.1.4) *et* (4.1.5) *sera valide pour toutes les fonctions y polynômiales si et seulement si les fonctions* $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *et les coefficients* $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *vérifient:*

$$\begin{aligned}
&\alpha_0 = a_0 B, \quad \text{où } a_0 \neq 0,\\
&A(\alpha_{i+1} - a_{i+1}B) = \alpha_i,\\
&b_i = a_{21}\alpha_i(0) + a_{22}\alpha_i'(0) + a_{23}\alpha_i(1) + a_{24}\alpha_i'(1).
\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. On exprime z et e en fonction de θ et $\tilde{u}$:

$$\begin{aligned}
z(x,t) &= \sum_{i=0}^{\infty} (\alpha_i(x) - a_i B(x)) y^{(i)}(t)\\
e(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i y^{(i+1)}(t),
\end{aligned}$$

d'où en dérivant formellement:

$$\begin{aligned}
\partial_t z - \partial_{xx} z - qz + Be = &(-\alpha_0'' + a_0 B'' - q(\alpha_0 - a_0 B))y\\
&+ \sum_{i=0}^{\infty} (\alpha_i - a_i B - \alpha_{i+1}'' + a_{i+1}B'' - q(\alpha_{i+1} - a_{i+1}B) + a_i B) y^{(i+1)},
\end{aligned}$$

$$a_{11}z(0,.) + a_{12}z'(0,.) + a_{13}z(1,.) + a_{14}z'(1,.) = \sum_{i=0}^{\infty}(a_{11}(\alpha_i(0) - a_iB(0)) + a_{12}(\alpha_i'(0) - a_iB'(0)) + a_{13}(\alpha_i(1) - a_iB(1)) + a_{14}(\alpha_i'(1) - a_iB'(1)))y^{(i)}$$

$$\tilde{a}_{21}z(0,t) + \tilde{a}_{22}z'(0,t) + \tilde{a}_{23}z(1,t) + \tilde{a}_{24}z'(1,t) = \sum_{i=0}^{\infty}\tilde{a}_{21}(\alpha_i(0) - a_iB(0)) + \tilde{a}_{22}(\alpha_i'(0) - a_iB'(0)) + \tilde{a}_{23}(\alpha_i(1) - a_iB(1)) + \tilde{a}_{24}(\alpha_i'(1) - a_iB'(1)))y^{(i)},$$

On veut, en vertu de (4.1.2), que ces trois quantités soient nulles lorsque y est une fonction polynômiale quelconque, donc nécessairement, α_0 vérifie:

$$\alpha_0 - a_0B \in \mathcal{D}(A), \quad A(\alpha_0 - a_0B) = 0,$$

et pour tous les $i \geq 0$, α_{i+1} vérifie:

$$\alpha_{i+1} - a_{i+1}B \in \mathcal{D}(A), \quad A(\alpha_{i+1} - a_{i+1}B) = \alpha_i.$$

Comme nous supposons que 0 n'est pas une valeur propre de A, il s'ensuit le résultat annoncé. □

Définition 4.1.3. L'espace G d'une paramétrisation $(G,(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}})$ du système qui vérifie la propriété précédente contient alors au moins l'espace des polynômes, une telle paramétrisation sera dite "au moins polynômiale".

Le procédé de construction de la famille de fonctions $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'une paramétrisation au moins polynômiale est donc analogue à l'algorithme d'obtention d'une base de Brunovsky en dimension finie. Nous disposons formellement d'un degré de liberté qui est le choix des coefficients $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$. L'espace G associé à la paramétrisation contient, par construction, au moins les polynômes, puisqu'alors les séries (4.1.3)-(4.1.5) ne sont plus que des sommes finies, et selon le choix plus ou moins judicieux des coefficients $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, l'espace G sera plus ou moins "gros".

Puisque 0 n'est pas une valeur propre de A, d'après A.1, A est inversible et son inverse K est un opérateur intégral. Le choix particulier qui consiste à prendre les $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ égaux aux coefficients de la fonction $D_A(\lambda)$, qui est le déterminent de Fredholm de K, revient à transposer exactement en dimension infinie l'algorithme de Brunovsky (1.2.4) et à calculer:

$$\alpha_0 = a_0B$$
$$\alpha_{i+1} = K(\alpha_i) + a_{i+1}B = \sum_{j=0}^{i+1} a_jK^{i+1-j}B$$

La paramétrisation correspondant à ce choix sera par la suite appelée paramétrisation de Brunovsky, et la famille $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sera appelée famille de Brunovsky.

Exemple 4.1.1. Nous continuons les calculs sur l'exemple académique 2.3.1, en prenant l'opérateur A à conditions aux bords séparées. La mise sous forme de Brunovsky se fait en calculant les coefficients du développement en série du

déterminant de Fredholm de l'opérateur K inverse de A. De façon évidente on a

$$\begin{aligned} D_A(\lambda) &= \frac{\sin(\sigma)}{\sigma} + \frac{\cos(\sigma)}{2} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(2k+1)!} + \frac{1}{2(2k)!} \right) \lambda^k. \end{aligned}$$

La famille de Brunovsky $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ se construit donc par

$$\alpha_0(x) = \frac{1}{3}(4x-3) = \frac{4}{3}x - 1,$$

$$\alpha_k(x) = K(\alpha_{k-1})(x) + a_k B(x) = K(\alpha_{k-1})(x) + \left(\frac{1}{(2k+1)!} + \frac{1}{2(2k)!} \right) (\frac{4}{3}x - 1),$$

où K est l'opérateur intégral défini par

$$\begin{aligned} K(f)(x) = &\int_0^x (x-\xi) f(\xi) d\xi \\ &- \frac{2x}{3} \left(\int_0^1 (\frac{3}{2} - \xi) f(\xi) d\xi \right). \end{aligned}$$

4.2. Convergence des trajectoires formelles

Nous considérons un opérateur A comme défini dans la section 2.3. Il est donc, par construction, inversible, Riesz-spectral. Son inverse sera noté K, c'est un opérateur intégral compact, autoadjoint lorsque A est à conditions aux bords séparées. La famille de Brunovsky associée (voir la section 4.1) sera notée $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Nous examinons la convergence des trajectoires formelles dans trois situations différentes qui ont été mises en évidence dans 2.3:

- Premier cas: l'opérateur A qui a servi à la mise sous forme de Brunovsky est Riesz-spectral inversible quelconque.
- Deuxième cas: le problème de départ présente une équation de contrainte qui ne fait intervenir qu'un seul bord : A est donc "naturellement" à conditions aux bords séparées.
- Troisième cas: bien que l'équation de contrainte fasse intervenir les deux bords, on a pu construire par bouclage un opérateur A inversible à conditions aux bords séparées.

4.2.1. Premier cas: convergence "faible" et classique des trajectoires formelles.

4.2.1.1. *Convergence faible des trajectoires formelles dans $C^\infty([0,T],L^2(0,1))$.* Nous supposons seulement dans ce paragraphe que A Riesz-spectral inversible sans faire d'hypothèse particulière sur l'allure des conditions aux bords.

Nous désignons par $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une base de Riesz de $L^2(0,1)$ formée de vecteurs propres de A; λ_i est la valeur propre (non nulle, par hypothèse) associée à ϕ_i.

Nous supposons de plus que les λ_i ont été indexés de telle sorte que $|\lambda_i| \leq |\lambda_{i+1}|$, et nous posons:

$$\mu_i = \frac{1}{\lambda_i}$$

μ_i est donc la valeur propre de K associée à ϕ_i, et on a $|\mu_i| \geq |\mu_{i+1}|$.

L'expression générale du déterminant de Fredholm de l'inverse de A est donnée dans l'annexe A, section A.2 par l'expression (A.2.1). Les notations employées ci-dessous sont définies dans cette annexe.

La propriété suivante est alors vérifiée:

PROPRIÉTÉ 4.2.1. *Si y est dans $G^\sigma(0,T)$, où $0 < \sigma \leq 2$, alors* (4.1.3) *définit une fonction $t \mapsto \theta(x,t)$ dans $C^\infty([0,T],L^2(0,1))$.*

DÉMONSTRATION. Dans la base de Riesz $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ nous avons :

$$\alpha_0 = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \phi_k,$$

et par construction

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \mu_k^{n-i} \right) x_k \phi_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \lambda_k^i \right) \mu_k^n x_k \phi_k.$$

D'après la définition même d'une base de Riesz, nous avons alors deux constantes réelles $C > 0$ et $c > 0$ telles que:

$$\begin{aligned} \|\alpha_n\| &\leq C \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda_k^i \right|^2 |\mu_k|^{2n} |x_k|^2}, \\ &\leq \frac{C}{c} \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\left| \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda_k^i \right| |\mu_k|^n \right) \|\alpha_0\|. \end{aligned}$$

Or on reconnaît dans l'expression $\sum_{i=0}^{n} a_i \lambda_k^i$ le développement à l'ordre n de $D_A(\lambda_k)$. D'après la propriété 2.5.4, et en appliquant le théorème de factorisation de Weierstrass (voir [**53**]) on sait que :

$$D_A(\lambda) = \prod_{i=0}^{\infty} (1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}), \tag{4.2.1}$$

et que ce produit est absolument convergent, puisque 2.5.4 entraîne que:

$$\forall r > \frac{1}{2}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k|}^r) < +\infty. \tag{4.2.2}$$

D'où nous déduisons par identification qu'on a :

$$\begin{aligned} a_1 &= -\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i}, \\ a_2 &= \sum_{i<j}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i \lambda_j}, \\ &\vdots \\ a_l &= (-1)^l \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_{l-1}<i_l}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\ldots\lambda_{i_{l-1}}\lambda_{i_l}}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} &\forall k \in \mathbb{N}\star, \\ &|1 + a_1\lambda_k| = \left|1 - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\lambda_i}\right| \\ &\qquad = |\lambda_k| \left|\sum_{i\neq k}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i}\right| \leq |\lambda_k|\, M \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}. \end{aligned}$$

de même :

$$\begin{aligned} &\forall k \in \mathbb{N}\star, \\ &\left|1 + a_1\lambda_k + a_2\lambda_k^2\right| = \left|-\sum_{i\neq k}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\lambda_i} + \sum_{i_1<i_2}^{\infty} \frac{\lambda_k^2}{\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}}\right| \\ &\qquad = |\lambda_k|^2 \left|\sum_{\substack{i_1,i_2\neq k \\ i_1<i_2}}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}}\right| \leq |\lambda_k|^2\, M^2 \sum_{\substack{i_1,i_2\neq 0 \\ i_1<i_2}}^{\infty} \frac{1}{i_1^2 i_2^2}, \end{aligned}$$

et par récurrence :

$$\begin{aligned} &\forall (k,l) \in \mathbb{N}\star \times \mathbb{N}\star, \\ &\left|1 + a_1\lambda_k + \ldots + a_l\lambda_k^l\right| = |\lambda_k|^l \left|\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_l\neq k \\ i_1<\ldots<i_l}}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_l}}\right| \leq |\lambda_k|^l\, M^{2l} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_l\neq 0 \\ i_1<\ldots<i_l}}^{\infty} \frac{1}{i_1^2\ldots i_l^2}. \end{aligned}$$

Mais de l'égalité classique (voir par exemple [**59**]):

$$\frac{\sin(z)}{z} = \prod_{i=1}^{\infty}(1 - \frac{z^2}{i^2\pi^2}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^{2i}}{(2i+1)!},$$

on déduit que:

$$\sum_{\substack{i_1,\dots,i_l\neq 0\\ i_1<\dots<i_l}}^{\infty} \frac{1}{i_1^2\dots i_l^2} \leq \frac{\pi^{2l}}{(2l+1)!},$$

d'où finalement:

$$\forall (k,l)\in \mathbb{N}\star\times\mathbb{N}\star,$$
$$\left|1+a_1\lambda_k+\dots+a_l\lambda_k^l\right| \leq |\lambda_k|^l \frac{(M\pi)^{2l}}{(2l+1)!},$$

et

$$\begin{aligned}\|\alpha_n\| &\leq \frac{C}{c}\sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\left|\sum_{i=0}^{n} a_i\lambda_k^i\right||\mu_k|^n\right)\|\alpha_0\| \\ &\leq \frac{C}{c}\|\alpha_0\|\frac{(M\pi)^{2n}}{(2n+1)!}. \qquad (4.2.3)\end{aligned}$$

Il est alors clair que, par des calculs analogues à ceux de la section 4.2, la série (4.1.3) définit une fonction de $C^\infty([0,T],L^2(0,1))$ lorsque y est une fonction Gevrey d'ordre $\sigma<2$, et également lorsque y est une fonction Gevrey d'ordre 2, en imposant une contrainte sur le rayon de y, d'où la propriété annoncée. □

Malheureusement, ce résultat définit une "solution" du problème dans un sens trop faible car il ne permet pas de donner un sens aux expressions formelles (4.1.4) et (4.1.5).

4.2.1.2. *Convergence classique des trajectoires formelles dans* $C^\infty([0,T],C^2(0,1))$. Le résultat de régularité suivant est vérifié

Propriété 4.2.2. *Si l'opérateur A est Riesz-spectral inversible, et si y est dans $G^\sigma(0,T)$, alors* (4.1.3) *converge normalement dans $C^\infty([0,T],C^2(0,1))$; autrement dit, $(G^\sigma(0,T),(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}})$ est une paramétrisation de Brunovsky du système.*

Démonstration. Par la majoration (4.2.3) et la propriété 2.5.4, nous savons que, quitte à choisir des valeurs suffisamment grandes, il existe $C,M>0$ tels que pour tout α_n on a les majorations:

$$\|\alpha_n\|_2 \leq C\frac{M^{2n}}{(2n+1)!},$$
$$a_n \leq C\frac{M^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Or nous avons en notant K l'inverse de A: $\alpha_n = K(\alpha_{n-1}) + a_nB$. Posons $v = K(\alpha_{n-1})$. Alors par définition de K:

$$v'' + q(x)v = \alpha_{n-1},$$

d'où, en multiplant les deux membres de l'égalité par la quantité

$$f(x,s) = x^2(3s-2x)$$

et en intégrant entre 0 et s:

$$\begin{aligned}\int_0^s x^2(3s-2x)v''(x)dx &= \left[x^2(3s-2x)v'(x)\right]_{x=0}^{x=s} - \int_0^s x(6s-6x)v'(x)dx \\ &= s^3v'(s) + \int_0^s (6s-12x)v(x)dx \\ &= \int_0^s \alpha_{n-1}(x)f(x,s)dx - \int_0^x f(x,s)q(x)v(x)dx.\end{aligned}$$

D'où:

$$s^3v'(s) = \int_0^s \alpha_{n-1}(x)f(x,s)dx - \int_0^x f(x,s)q(x)v(x)dx - \int_0^s (6s-12x)v(x)dx.$$

Nous appliquons l'inégalité de Schwarz à cette dernière égalité pour obtenir:

$$\begin{aligned}s^3\left|v'(s)\right| &\leq F\left\|\alpha_{n-1}\right\|_2 + \left(F\left\|q\right\|_2 + G\right)\left\|v\right\|_2 \\ &\leq F\left\|\alpha_{n-1}\right\|_2 + \left(F\left\|q\right\|_2 + G\right)\left\|K(\alpha_{n-1})\right\|_2 \\ &\leq F\left\|\alpha_{n-1}\right\|_2 + \left(F\left\|q\right\|_2 + G\right)\left\|K\right\|_2\left\|\alpha_{n-1}\right\|_2 \\ &\leq \left(F + \left(F\left\|q\right\|_2 + G\right)\left\|K\right\|_2\right)\left\|\alpha_{n-1}\right\|_2,\end{aligned}$$

où nous avons posé:

$$\begin{aligned}F &= \sup_{s,x\in[0,1]} \left|x^2(3s-2x)\right| = 3, \\ G &= \sup_{s,x\in[0,1]} |6s-12x| = 6.\end{aligned}$$

Donc, pour $s \geq \frac{1}{2}$, nous obtenons

$$|v'(s)| \leq \tilde{C}\frac{M^{2(n-1)}}{(2n-1)!},$$

où nous avons posé $\tilde{C} = 2^3(F + (F\left\|q\right\|_2 + G)\left\|K\right\|_2)$.

Nous recommençons pour obtenir une majoration de $|v'(s)|$ sur $[0,\frac{1}{2}]$, en multipliant cette fois par la fonction

$$g(x,s) = f(1-x,1-s) = (x-1)^2(-3s+2x+1).$$

Nous obtenons que

$$(1-s)^3\left|v'(s)\right| \leq \left(F + \left(F\left\|q\right\|_2 + G\right)\left\|K\right\|_2\right)\left\|\alpha_{n-1}\right\|_2$$

et donc que pour $s \leq \frac{1}{2}$ nous avons la même majoration

$$|v'(s)| \leq \tilde{C}\frac{M^{2(n-1)}}{(2n-1)!}.$$

Nous en déduisons que pour tout $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned}|\alpha_n'(x)| &\leq |K(\alpha_{n-1})'(x)| + |a_n B'(x)| \\ &\leq |v'(x)| + |a_n| \, \|B'\|_\infty \\ &\leq \tilde{C}\frac{M^{2(n-1)}}{(2n-1)!} + C\,\|B'\|_\infty \frac{M^{2n}}{(2n)!} \\ &\leq \tilde{\tilde{C}}\frac{\tilde{M}^{2n}}{(2n)!}.\end{aligned}$$

La série de fonctions continues $\sum_{n=0}^{\infty} y^{(i)}(t)\alpha_n'(x)$ est donc normalement convergente sur $[0,1] \times [0,T]$.

D'autre part,

$$\int_0^1 x\alpha_n'(x)dx = \alpha_n(1) - \int_0^1 \alpha_n(x)dx,$$

donc:

$$\begin{aligned}|\alpha_n(1)| &\leq \left|\int_0^1 x\alpha_n'(x)dx\right| + \left|\int_0^1 \alpha_n(x)dx\right| \\ &\leq \|\alpha_n'\|_\infty + \|\alpha_n\|_2 \\ &\leq \tilde{\tilde{C}}\frac{\tilde{M}^{2n)}}{(2n)!},\end{aligned}$$

en prenant les valeurs de $\tilde{\tilde{C}}$ et M suffisamment grandes. Donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} y^{(n)}(t)\alpha_n(1)$ est normalement convergente. Par application du théorème d'intégration des séries de fonctions, nous en concluons que la série de fonction (4.1.3) est normalement convergente sur $[0,1] \times [0,T]$ et qu'elle définit une fonction C^1 en x. La convergence normale de la série des dérivées secondes est alors évidente, d'où le résultat de la propriété. □

4.2.2. Deuxième cas: convergence des trajectoires formelles lorsque $a_{13} = 0$ et $a_{14} = 0$. Nous supposons que le problème (2.1.4) a la forme particulière suivante:

$$\begin{aligned}&\partial_t\theta(x,t) = \partial_{xx}\theta(x,t) + q(x)\theta(x,t) \\ &a_{11}\theta(0,t) + a_{12}\partial_x\theta(0,t) = 0 \\ &a_{21}\theta(0,t) + a_{22}\partial_x\theta(0,t) + a_{23}\theta(1,t) + a_{24}\partial_x\theta(1,t) = u(t),\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

A a donc pour expression: $A(f) = f'' + q(x)f$, où:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(A) = \{f \in H^2(0,1)/ \quad & a_{11}f(0) + a_{12}f'(0) = 0, \\ & \tilde{a}_{23}f(1) + \tilde{a}_{24}f'(1) = 0\},\end{aligned}$$

A est Riesz-spectral (voir corollaire A.1.1). Les valeurs des coefficients $\tilde{a}_{2j}$ ont été choisies pour que A soit de plus inversible.

La propriété suivante est vérifiée:

PROPRIÉTÉ 4.2.3. *Si y est dans $G^\sigma(0,T)$, où $0 < \sigma \leq 2$, alors (4.1.3) définit une fonction $t \mapsto \theta(x,t)$ continûment dérivable en temps sur $[0,T]$ et deux fois continûment dérivable en espace sur $[0,1]$.*
Les séries (4.1.4) et (4.1.5) définissent des fonctions $\tilde{u}$ et u qui sont dans $G^\sigma(0,T)$. Les α_i sont donnés par

$$\alpha_i = V_0^i(-a_{12}e_1(x,0) + a_{11}e_2(x,0)),$$

où V_0 est l'opérateur de Volterra en zéro associé au système.
De plus on a: $y(t) = -a_{12}\theta(0,t)$ si $a_{12} \neq 0$, ou $y(t) = a_{11}\partial_x theta(0,t)$ si $a_{12} = 0$

DÉMONSTRATION. L'opérateur A est inversible, d'inverse K. Le déterminant de Fredholm de K a pour expression (voir (A.2.1)):

$$\begin{aligned} D_A(\lambda) &= -\tilde{a}_{23}a_{12}e_1(1,\lambda) + a_{11}\tilde{a}_{23}e_2(1,\lambda) - \tilde{a}_{24}a_{12}e_1'(1,\lambda) + a_{11}\tilde{a}_{24}e_2'(1,\lambda) \\ &= \tilde{a}_{23}(-a_{12}e_1(1,\lambda) + a_{11}e_2(1,\lambda)) + \tilde{a}_{24}(-a_{12}e_1(1,\lambda) + a_{11}e_2(1,\lambda))'. \end{aligned}$$

Nous utilisons la propriété 2.5.3 du paragraphe 2.5.1 pour obtenir un développement en série de D_A:

$$D_A(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty}(\tilde{a}_{23}V^i(y_1)(1) + \tilde{a}_{24}V^i(y_1)'(1))\lambda^i,$$

où on a posé: $y_1(x) = -a_{12}e_1(x,0) + a_{11}e_2(x,0)$. D'autre part, un calcul élémentaire montre que la fonction B a pour expression:

$$B(x) = \frac{y_1(x)}{D_A(0)} = \frac{y_1(x)}{a_0}$$

et que les opérateurs K et V_0 sont reliés par la relation:

$$\forall f \in L^2(0,1), \quad K(f) = V_0(f) - (\tilde{a}_{23}V_0(f)(1) + \tilde{a}_{24}V_0(f)'(1))B.$$

Nous en déduisons que:

$$\alpha_0 = a_0 B = y_1,$$
$$\alpha_1 = K(\alpha_0) + a_1 B = K(y_1) + (\tilde{a}_{23}V_0(y_1)(1) + \tilde{a}_{24}V_0(y_1)'(1))B = V_0(y_1),$$

et par récurrence que

$$\alpha_i = V_0^i(y_1).$$

Nous pouvons donc utiliser la propriété 2.5.2 de la section 2.5.1 pour obtenir:

$$\begin{aligned} \exists (M,L) \in (\mathbb{R}^{+\star})^2 / \ \forall i \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], \quad & |\alpha_i(x)| \leq ML^i \frac{x^{2i}}{(2i)!}, \\ & |\alpha_i'(x)| \leq ML^{i-1}\frac{x^{2i-1}}{(2i-1)!}, \\ & |\alpha_i''(x)| \leq ML^{i-2}\frac{x^{2i-2}}{(2i-2)!}. \end{aligned}$$

Soient alors P et Q deux constantes réelles positives telles que:

$$\forall t \in [0,T], \forall i \in \mathbb{N}, \quad |y(t)| \leq PQ^i\Gamma(\sigma i + 1).$$

Le terme général de la série (4.1.3) est uniformément majoré en valeur absolue sur $[0,1] \times [0,T]$ par:

$$\left|y^{(i)}(t)\alpha_i(x)\right| \leq (PM)(QL)^i\frac{\Gamma(\sigma i + 1)}{(2i)!}.$$

De même,

$$\left|y^{(i)}(t)\alpha_i'(x)\right| \leq \frac{PM}{L}(QL)^i\frac{\Gamma(\sigma i+1)}{(2i-1)!} \leq \frac{PM_1}{L}2i(QL)^i\frac{\Gamma(\sigma i+1)}{(2i)!},$$
$$\left|y^{(i)}(t)\alpha_i''(x)\right| \leq 2i(2i-1)\frac{PM}{L^2}(QL)^i\frac{\Gamma(\sigma i+1)}{(2i)!},$$

et

$$\begin{aligned}\left|y^{(i+1)}(t)\alpha_i(x)\right| &\leq PMQ(QL)^i\frac{\Gamma(\sigma(i+1)+1)}{(2i)!}\\ &\leq (2i+1)(2i+2)PMQ(QL)^i\frac{\Gamma(\sigma(i+1)+1)}{(2(i+1))!}.\end{aligned}$$

donc, si $\sigma < 2$, ces quatre séries sont normalement convergentes et θ ainsi définie est deux fois continûment dérivable en x et une fois continûment dérivable en t (voir annexe sur les fonctions Gevrey); si $\sigma = 2$, le même résultat est vrai à condition qu'on ait: $QL < 1$.

Les fonctions $\tilde{u}$ et u sont dans $G^\sigma(0,T)$; en effet si nous posons:

$$\beta_i = \tilde{a}_{23}\alpha_i(1) + \tilde{a}_{24}\alpha_i'(1) \text{ pour i} \geq 0,$$

nous pouvons majorer chaque β_i par une quantité de la forme: $M\frac{L^i}{(2i)!}$, d'où:

$$\begin{aligned}\forall i \in \mathbb{N},\ \left|\frac{d^n\beta_i y^{(i)}}{dt^n}\right| &\leq MP\frac{L^n(QL)^i}{(2i)!}\Gamma(\sigma(i+n)+1)\\ &\leq MPL^n\Gamma(\sigma n+1)(QL)^i\frac{\Gamma(\sigma(i+n)+1)}{\Gamma(\sigma n+1)\Gamma(2i+1)}\\ &\leq MPL^n\Gamma(\sigma n+1)(QL)^i2^{\sigma(i+n)}\frac{\Gamma(\sigma i+1)}{\Gamma(2i+1)}\\ &\leq MP(2^\sigma L)^n\Gamma(\sigma n+1)(2^\sigma QL)^i\frac{\Gamma(\sigma i+1)}{\Gamma(2i+1)},\end{aligned}$$

donc là encore, si $\sigma < 2$, la série des dérivées d'ordre n est normalement convergente et $\tilde{u}^{(n)}$ ainsi définie vérifie: $\left|\tilde{u}^{(n)}\right| \leq C(2^\sigma L)^n\Gamma(\sigma n+1)$, où C est une constante positive; si $\sigma = 2$, le même résultat est vrai à condition qu'on ait: $QL < \frac{1}{4}$. Le résultat pour u en découle immédiatement.

L'expression de y est une conséquence immédiate de la définition de l'opérateur V_0. □

4.2.3. Troisième cas: convergence au sens classique lorsque A est à conditions aux bords séparées. Examinons maintenant le cas où le problème (2.1.4) a la forme suivante:

$$\begin{aligned}&\partial_t\theta(x,t) = \partial_{xx}\theta(x,t) + q(x)\theta(x,t)\\ &a_{11}\theta(0,t) + a_{12}\partial_x\theta(0,t) + a_{13}\theta(1,t) + a_{14}\partial_x\theta(1,t) = 0\\ &a_{21}\theta(0,t) + a_{22}\partial_x\theta(0,t) + a_{23}\theta(1,t) + a_{24}\partial_x\theta(1,t) = u(t),\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

et où nous avons effectué un choix particulier, qui est d'imposer $\tilde{a}_{23} = a_{13}$, $\tilde{a}_{24} = a_{14}$, et de fixer les coefficient $\tilde{a}_{21}$ et $\tilde{a}_{22}$ à zéro. Le problème (4.1.1) prend donc la

forme

$$\begin{aligned}
&\partial_t\theta(x,t) = \partial_{xx}\theta(x,t) + q(x)\theta(x,t)\\
&a_{11}\theta(0,t) + a_{12}\partial_x\theta(0,t) = -\tilde{u}(t)\\
&a_{13}\theta(1,t) + a_{14}\partial_x\theta(1,t) = \tilde{u}(t),
\end{aligned}$$

L'opérateur A est alors défini par:

$$A(f) = f'' + q(x)f, \text{ où:}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(A) = \{f \in H^2(0,1)/ \quad & a_{11}f(0) + a_{12}f'(0) = 0,\\
& a_{13}f(1) + a_{14}f'(1) = 0\},
\end{aligned}$$

Nous avons de plus supposé que A défini comme ci-dessus est inversible. Alors la propriété suivante est vérifiée:

PROPRIÉTÉ 4.2.4. *Si y est dans $G^\sigma(0,T)$, où $0 < \sigma \leq 2$, alors* (4.1.3) *définit une fonction $t \mapsto \theta(x,t)$ continûment dérivable en temps sur $[0,T]$ et deux fois continûment dérivable en espace sur $[0,1]$.*
Les séries (4.1.4) *et* (4.1.5) *définissent des fonctions $\tilde{u}$ et u qui sont dans $G^\sigma(0,T)$. Les α_i sont donnés par*

$$\alpha_i = V_0^i(-a_{12}e_1(x,0) + a_{11}e_2(x,0)) + V_1^i(-a_{14}f_1(x,0) + a_{13}f_2(x,0))$$

où V_0 est l'opérateur de Volterra en zéro associé au système, V_1 est l'opérateur de Volterra en un associé au système, et les notations sont celles du paragraphe 4.2.1.
Par contre, nous n'avons plus d'expression simple pour le paramètre y.

DÉMONSTRATION. Nous considérons les fonctions $f_1(x,\lambda)$ et $f_2(x,\lambda)$ définies au paragraphe 2.5.1. f_1 et $f2$ sont reliés à e_1 et e_2 par les relations:

$$\begin{aligned}
f_1(x,\lambda) &= e_2'(1,\lambda)e_1(x,\lambda) - e_1'(1,\lambda)e_2(x,\lambda),\\
f_2(x,\lambda) &= -e_2(1,\lambda)e_1(x,\lambda) + e_1(1,\lambda)e_2(x,\lambda).
\end{aligned}$$

La définition de B est donnée par (2.2.6). En posant $y_1(x) = -a_{12}e_1(x,0) + a_{11}e_2(x,0)$ et $z_1(x) = -a_{14}f_1(x,0) + a_{13}f_2(x,0)$, on montre aisément que:

- $D_A(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty}(a_{13}V^i(y_1)(1) + a_{14}V^i(y_1)'(1))\lambda^i$ (cf. les calculs de la section précédente), et
- $D_A(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty}(a_{11}V_1^i(z_1)(0) + a_{12}V_1^i(z_1)'(0))\lambda^i$, en utilisant les propriétés 2.5.1, 2.5.2 et 2.5.3 du paragraphe 2.5.1,
- et enfin que: $B = \frac{1}{D_A(0)}(y_1 + z_1)$.

Des deux expressions de D_A ci-dessus, on tire l'égalité: $D_A(0) = a_{13}y_1(1)+a_{14}y_1'(1) = a_{11}z_1(0) + a_{12}z_1'(0)$. De plus, en notant K l'inverse de A, nous avons facilement:

$$\begin{aligned}\forall f \in L^2(0,1),\, K(f) &= V_0(f) - \frac{(a_{13}V_0(f)(1) + a_{14}V_0(f)'(1))}{a_{13}y_1(1) + a_{14}y_1'(1)}y_1 \\ &= V_0(f) - \frac{(a_{13}V_0(f)(1) + a_{14}V_0(f)'(1))}{D_A(0)}y_1, \\ \forall f \in L^2(0,1),\, K(f) &= V_1(f) - \frac{(a_{11}V_1(f)(0) + a_{12}V_1(f)'(0))}{a_{11}z_1(1) + a_{12}z_1'(1)}z_1 \\ &= V_1(f) - \frac{(a_{11}V_1(f)(0) + a_{12}V_1(f)'(0))}{D_A(0)}z_1.\end{aligned}$$

Nous en déduisons donc:

$$\begin{aligned}&\alpha_0 = a_0B = y_1 + z_1, \\ &\alpha_1 = K(\alpha_0) + a_1B = K(y_1) + \frac{a_1}{D_A(0)}y_1 + K(z_1) + \frac{a_1}{D_A(0)}z_1 \\ &\quad = V_0(y_1) - \frac{(a_{13}V_0(y_1)(1) + a_{14}V_0(y_1)'(1))}{D_A(0)}y_1 + \frac{(a_{13}V_0(y_1)(1) + a_{14}V_0(y_1)'(1))}{D_A(0)}y_1 \\ &\quad + V_1(z_1) - \frac{(a_{11}V_1(z_1)(0) + a_{12}V_1(z_1)'(0))}{D_A(0)}z_1 + \frac{(a_{11}V_1(z_1)(0) + a_{12}V_1(z_1)'(0))}{D_A(0)}z_1 \\ &\quad = V_0(y_1) + V_1(z_1),\end{aligned}$$

et par récurrence que: $\alpha_i = V_0^i(y_1) + V_1^i(z_1)$ La fin de la démonstration est alors tout à fait semblable à celle de la propriété 4.2.3. □

4.2.4. Un résultat supplémentaire de convergence. En faisant des hypothèses supplémentaires sur la fonction q, on peut améliorer le résultat de convergence classique dans le cas du paragraphe 4.2.2 où les contraintes du problème sont localisées sur un seul bord, pour obtenir le résultat suivant:

PROPRIÉTÉ 4.2.5. *Si y est dans $G_\sigma(0,T)$, où $1 \leq \sigma < 2$, et si q est analytique, de rayon de convergence en zéro strictement supérieur à 1, alors* (4.1.3) *définit une fonction dans $G^{1,\sigma}([0,1] \times [0,T])$, où le rayon Gevrey de l'estimation en x est stictement supérieur à 1. Si $\sigma = 2$, le résultat est encore vrai lorsque la constante Q associée à l'estimation Gevrey de y sur $[0,T]$ est strictement inférieure à $\frac{1}{4}$.*

De l'analyticité de la trajectoire en x (puisque son ordre Gevrey est de 1) sur [0,1], on déduit le corollaire immédiat

COROLLAIRE 4.2.1. *Dans les conditions de la propriété 4.2.5,* (4.1.3) *se développe en une série de puissances de x dont les coefficient sont des fonctions Gevrey d'ordre σ du temps.*

Nous retrouvons donc la paramétrisation sous forme de série du chapitre 3.

DEMONSTRATION DE 4.2.5. Comme q est analytique sur [0,1], avec un rayon de convergence en zéro > 1, α_0 l'est également et nous pouvons trouver des constantes

positives K, L et R_1, telles que $K > 2$, $L > 0$, $R_1 > 1$, et:

$$\begin{aligned} \exists \alpha > 1/ \quad & \alpha(\alpha+1) = K \qquad (\text{car } K > 2), \\ \forall x \in [0,1] \quad & q(x) \ll \frac{K}{(R_1 - x)^2}, \\ & \alpha_0(x) \ll \frac{L}{(R_1 - x)^\alpha}. \end{aligned}$$

où le symbole $\ll$ signifie "est dominée par". Cette expression signifie que chaque coefficient du développement en série de Taylor au point zéro du membre de gauche est majoré en valeur absolue par le coefficient correspondant du développement de Taylor en zéro du membre de droite.

Construisons la suite de fonctions $(\mathcal{M}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que:

$$\mathcal{M}_0 = \frac{L}{(R_1 - x)^\alpha},$$

et pour $i > 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_i'' &= \frac{L}{(R_1 - x)^2}\mathcal{M}_i + \mathcal{M}_{i-1} \\ \mathcal{M}_i(0) = 0 \quad &, \quad \mathcal{M}_i'(0) = 0. \end{aligned}$$

Par construction, les $(\mathcal{M}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dominent les $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$, et en appliquant le lemme 4.2.1 nous obtenons:

$$\forall i \geq 0, \quad \alpha_i \ll \mathcal{M}_i \ll \frac{Lx^{2i}}{(2i)!(R_1 - x)^\alpha}.$$

Le résultat ci dessus permet d'obtenir des estimations Gevrey pour θ:

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial^m}{\partial t^m}\left(\alpha_i(x)\frac{d^i y}{dt^i}\right)\right| &= \left|\alpha_i(x)\frac{d^{i+m} y}{dt^{i+m}}\right| \\ &\ll PQ^{i+m}\Gamma(\sigma(i+m)+1)\frac{Lx^{2i}}{(2i)!(R_1 - x)^\alpha} \\ &\ll PQ^m\Gamma(\sigma m+1)\frac{\Gamma(\sigma(i+m)+1)}{\Gamma(\sigma m+1)\Gamma(2i+1)}\frac{Q^i L x^{2i}}{(R_1 - x)^\alpha}. \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

Mais:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\sigma(i+m)+1)}{\Gamma(\sigma m+1)\Gamma(2i+1)} &\leq \frac{\Gamma(\sigma(i+m)+1)}{\Gamma(\sigma m+1)\Gamma(\sigma i+1)}\frac{\Gamma(\sigma i+1)}{\Gamma(2i+1)} \\ &\leq \frac{2^{\sigma(i+m)}\Gamma(\sigma i+1)}{\Gamma(2i+1)}, \end{aligned}$$

de sorte que:

$$\left|\frac{\partial^m}{\partial t^m}\left(\alpha_i(x)\frac{d^i y}{dt^i}\right)\right| \ll P(2^\sigma Q)^m\Gamma(\sigma m+1)\frac{\Gamma(\sigma i+1)}{\Gamma(2i+1)}\frac{L(2^\sigma Q)^i x^{2i}}{(R_1 - x)^\alpha}.$$

Il faut alors distinguer deux cas:

– si $\sigma < 2$, alors la fonction h définie par

$$h(x) = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} L(2^\sigma Q)^i x^{2i}\frac{\Gamma(\sigma i+1)}{\Gamma(2i+1)}}{(R_1 - x)^\alpha}$$

est une fonction analytique sur [0,1], dont le numérateur est une fonction entière et nous avons:

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \frac{\partial^m}{\partial t^m}\theta \ll (2^\sigma Q)^m \Gamma(\sigma m + 1) h(x).$$

Ceci prouve que θ est dans $G^{1,\sigma}([0,1] \times [0,T])$.

– si $\sigma = 2$ il suffit de supposer que $Q < \frac{1}{4}$ pour garantir que h est analytique sur [0,1] avec un rayon de convergence en 0 strictement supérieur à 1. Il faut cependant remarquer que grâce à (4.2.6), l'hypothèse $Q < 1$ conduit à une solution C^∞ sur [0,1], mais ne garantit plus les estimations Gevrey.

Ceci achève la démonstration du théorème. □

LEMME 4.2.1.

$$\forall i \geq 0, \quad \mathcal{M}_i \ll \frac{L x^{2i}}{(2i)!(R_1 - x)^\alpha}.$$

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{M}_i(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{i,2i+k}}{(2i+k)!} x^{2i+k}$ le développement en série de Taylor de $\mathcal{M}_i$ en zéro, et : $\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{i,2i+k} x^{2i+k}$ le développement en série de Taylor de $\frac{L x^{2i}}{(2i)!(R_1-x)^\alpha}$ en zéro. Nous avons donc:

$$\gamma_{i,2i+k} = \frac{L}{R_1^\alpha (2i)!} \frac{\Gamma(\alpha + k)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(k+1) R_1^k}.$$

Le lemme se démontre par récurrence. La propriété est vraie au rang zéro, grâce à notre choix de la constante L. Supposons qu'elle soit vraie jusqu'au rang i, alors, en substituant le développement de $\mathcal{M}_{i+1}$ dans l'équation différentielle qui le définit, nous obtenons au rang $i+1$:

Pour k=0 où 1, $\left|\frac{a_{i+1,2i+2}}{(2i)!}\right| \leq \left|\frac{a_{i,2i}}{(2i)!}\right| \leq \frac{L}{R_1^\alpha (2i)!}$ (grâce à notre hypothèse de récurrence), si bien que:

$$\left|\frac{a_{i+1,2i+2}}{(2i+2)!}\right| \leq \frac{L}{R_1^\alpha (2i+2)!} = \gamma_{i+1,2(i+1)},$$

et de la même façon:

$$\left|\frac{a_{i+1,2i+3}}{(2i+1)!}\right| \leq \left|\frac{a_{i,2i+1}}{(2i+1)!}\right| \leq \frac{L\alpha}{R_1^{\alpha+1}(2i)!},$$

$$\left|\frac{a_{i+1,2i+3}}{(2i+3)!}\right| \leq \frac{L\alpha}{R_1^{\alpha+1}(2i+2)!} = \gamma_{i+1,2(i+1)+1}.$$

Si la majoration $\left|\frac{a_{i+1,2(i+1)+k}}{(2(i+1)+k)!}\right| \leq \gamma_{i+1,2(i+1)+k}$ est vraie juqu'au rang $k = n-1$, en désignant par $\left(\frac{K}{(R_1-x)^2}\right)_j$ le coefficient de x^j dans le développement de Taylor de $\frac{K}{(R_1-x)^2}$ nous obtenons au rang n (≥ 2):

$$\left|\frac{a_{i+1,2i+n+2}}{(2i+n)!}\right| \leq \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{K}{(R_1-x)^2}\right)_{n-k} \gamma_{i+1,2(i+1)+k-2} + \gamma_{i,2i+n}.$$

Or la somme dans le membre de droite est exactement le coefficient de x^{2i+n} dans le développement de Taylor de $\frac{KLx^{2(i+1)}}{(2i+2)!(R_1-x)^{\alpha+2}}$, d'où:

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{a_{i+1,2i+n+2}}{(2i+n)!}\right| \leq \left(\frac{KLx^{2(i+1)}}{(2i+2)!(R_1-x)^{\alpha+2}} + \frac{Lx^{2i}}{(2i)!(R_1-x)^{\alpha}}\right)_{2i+n} \\
&\leq \left(\frac{\alpha(\alpha+1)Lx^{2(i+1)}}{(2i+2)!(R_1-x)^{\alpha+2}} + \frac{Lx^{2i}}{(2i)!(R_1-x)^{\alpha}}\right)_{2i+n} + \left(\frac{2\alpha Lx^{2i+1}}{(2i+1)!(R_1-x)^{\alpha+1}}\right)_{2i+n} \\
&= \left(\frac{\alpha(\alpha+1)Lx^{2(i+1)}}{(2i+2)!(R_1-x)^{\alpha+2}} + \frac{2\alpha Lx^{2i+1}}{(2i+1)!(R_1-x)^{\alpha+1}} + \frac{Lx^{2i}}{(2i)!(R_1-x)^{\alpha}}\right)_{2i+n} \\
&= \left(\frac{d}{dx^2}\left(\frac{Lx^{2(i+1)}}{(2i+2)!(R_1-x)^{\alpha}}\right)\right)_{2i+n} \\
&= (2i+n+1)(2i+n+2)\gamma_{i+1,2(i+1)+n},
\end{aligned}$$

ce qui donne finalement:

$$\left|\frac{a_{i+1,2i+n+2}}{(2i+2+n)!}\right| \leq \gamma_{i+1,2(i+1)+n}.$$

La propriété est donc vraie à tout rang n, donc au rang $i+1$, ce qui achève la récurrence. □

Le théorème est aussi valable dans le cas traité dans la section 4.2.3.

4.3. Densité des états de départ et d'arrivée

Nous prenons A et K comme dans la section 4.2, et nous cherchons à quelles conditions, conformément à la définition proposée pour la platitude des systèmes de dimension infinie 1.3.1, nous avons un résultat de densité pour les états de départ et d'arrivé de notre paramétrisation. Nous allons voir qu'en fin de compte, nous retrouvons le critère de commandabilité approchée 2.6.1.

4.3.1. Densité dans $L^2(0,1)$ des itérés de K. Nous donnons ici une preuve élémentaire d'un résultat général de densité: soit K un opérateur borné, défini sur un espace de hilbert H, Riesz spectral (comme défini dans [**11**], def. 2.3.4 p. 41). On note $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les valeurs propres de K, qui sont par définition simples, et on suppose qu'elles n'ont qu'un seul point d'accumulation, la valeur zéro. On a donc $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, et on suppose qu'on a ordonné les $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de façon à ce que: $|\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}|$.

On note $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base de Riesz de H formée de vecteurs propres de K, et $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base de Riesz de H formée de vecteurs propres de K^* telles que:

$$\forall k \in (N),\ K(\phi_k) = \lambda_k\phi_k,\ K^*(\psi_k) = \overline{\lambda_k}\psi_k,$$

et

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ <\phi_k,\psi_k> = \delta_{ij}$$

On sait alors (voir [**11**], lemme 2.3.2) que tout élément f de H admet la représentation:

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} <f,\psi_k>\phi_k,$$

qu'il existe $m > 0$ et $M > 0$ tels que:

$$\forall f \in H, \quad m\sum_{k=0}^{\infty} < f,\psi_k >^2 \leq \|f\|^2 \leq M\sum_{k=0}^{\infty} < f,\psi_k >^2$$

et que $K(f)$ admet la représentation:

$$K(f) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k < f,\psi_k > \phi_k.$$

On a alors la propriété suivante:

PROPRIÉTÉ 4.3.1. *Si B est un élément de H qui vérifie:*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ < B,\psi_k > \neq 0,$$

alors $(K^n(B))_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans H.

REMARQUE. Nous pouvons établir un parallèle immédiat entre ce résultat et les résultats en dimension finie exposés dans la section 1.2 en matière de caractérisation modale de la commandabilité.

En effet, un opérateur Riesz-spectral peut être considéré comme l'analogue en dimension infinie d'une matrice diagonalisable à valeurs propres distinctes, et la densité des itérés est l'analogue de la condition de rang des itérés (critère de Kalman) en dimension finie.

DÉMONSTRATION. Comme $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est dense dans H, il suffit de montrer que:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall \epsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}, \exists(\alpha_0, \cdots, \alpha_m) \in \mathbb{C}^{m+1} \ / \ \left\| \phi_k - \sum_{i=0}^{m} \alpha_i K^i(B) \right\| \leq \epsilon.$$

Fixons $k \in \mathbb{N}$, et pour tout entier $m > k$, définissons: $P_{m,k}(\lambda) = \prod_{i=0, i\neq k}^{m} \frac{\lambda - \lambda_i}{\lambda_k - \lambda_i}$.
C'est le polynôme de Legendre qui prend la valeur 1 en λ_k et 0 en λ_i, pour $i \neq k$, allant de 1 à m.

Soit $m > k$, si n est un entier strictement supérieur à m, on a:

$$\begin{aligned} |P_{m,k}(\lambda_n)| &\leq \prod_{i=0, i\neq k}^{m} \frac{|\lambda_n - \lambda_i|}{|\lambda_k - \lambda_i|} \\ &\leq \prod_{i=0, i\neq k}^{m} \frac{2\,|\lambda_i|}{|\lambda_k - \lambda_i|}. \end{aligned}$$

Posons:

$$C_{m,k} = \prod_{i=0, i\neq k}^{m} \frac{2\,|\lambda_i|}{|\lambda_k - \lambda_i|}.$$

Donc : $\forall n > m, \ |P_{m,k}(\lambda_n)| \leq C_{m,k}$.

Mais, k étant fixé, on a:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{C_{m+1,k}}{C_{m,k}} = \lim_{m\to\infty} \frac{2\,|\lambda_{m+1}|}{|\lambda_k - \lambda_{m+1}|} = 0,$$

d'où on déduit qu'il existe $N_k > 0$, indépendant de m, tel que: $\forall m \in \mathbb{N}, \quad C_{m,k} \leq N_k$, si bien que:

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall n > m, \quad |P_{m,k}(\lambda_n)| \leq N_k.$$

Notons $\alpha_0, \cdots, \alpha_m$ les coefficients du développement en puissances de λ de $P_{m,k}(\lambda)$, on a alors:

$$\begin{aligned}\left\|\phi_k - \sum_{i=0}^{m}\alpha_i K^i(B)\right\|^2 &= \|\phi_k - P_{m,k}(K)(B)\|^2 \\ &= \left\|\phi_k - \sum_{n=0}^{\infty} P_{m,k}(\lambda_n) < B,\psi_n > \phi_n\right\|^2 \\ &= \left\|\phi_k - \phi_k - \sum_{n=m+1}^{\infty} P_{m,k}(\lambda_n) < B,\psi_n > \phi_n\right\|^2 \\ \leq M \sum_{n=m+1}^{\infty} |P_{m,k}(\lambda_n)|^2 |< B,\psi_n >|^2 &\leq M N_k^2 \sum_{n=m+1}^{\infty} |< B,\psi_n >|^2 .\end{aligned}$$

La dernière expression est le reste d'ordre m d'une série convergente: on peut donc, à k fixé, choisir m tel que ce reste soit inférieur à $\frac{\epsilon}{MN_k^2}$, ce qui fournit le résultat recherché. □

Dans le cas où l'opérateur K est auto-adjoint, notons qu'il s'agit d'un résultat classique (voir [**20**] et [**1**]) dont nous rappelons les grandes lignes.

Définition 4.3.1. Un opérateur auto-adjoint K défini sur un espace de Hilbert H est dit à spectre simple si il existe un vecteur $g \in H$, appelé élément générateur tel que le sous espace vectoriel fermé engendré par les $E_K(I)g$, où E_K est la mesure spectrale associée à K et I décrit tous les intervalles de $\mathbb{R}$, soit dense dans H.

Remarque. Dans le cas d'un opérateur K auto-adjoint compact, le spectre de K est réduit à ses valeurs propres, et les vecteurs propres forment une base Hilbertienne de H. La mesure spectrale E_K a pour expression:

$$E_K(I) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n_i} < .,\phi_{i,k} > \phi_{i,k}\delta_{\lambda_i}(I).$$

La densité des $E_K(I)g$, parmi lesquels on trouve en particulier toutes les sommes finies, équivaut donc à la densité des $\sum_{k=1}^{n_i} < g,\phi_{i,k} > \phi_{i,k}$. Cette densité n'est clairement assurée que lorsque $n_i = 1$, et $< g,\phi_{i,1} > \neq 0$ pour tous les indices i (car les $\phi_{i,k}$ forment une base Hilbertienne de H). La définition de la simplicité ci-dessus rejoint donc la définition classique de la simplicité de l'algèbre linéaire en dimension finie, et la condition que doit satisfaire un vecteur de H pour être un élément générateur est de n'être orthogonal à aucun vecteur propre de K.

Théorème 4.3.1. *Si K est un opérateur auto-adjoint, à spectre simple, dont le domaine est dense dans un espace de Hilbert H et à valeurs dans H, alors il existe au moins un élément générateur $g \in H$ tel que*

$$\overline{(K^i(g))}_{i\in\mathbb{N}} = H.$$

Dans le cas où K est autoadjoint compact défini sur H, nous pouvons là encore affiner ce résultat: comme signalé dans [**20**], p. 105, tout générateur de K possède

la propriété du théorème 4.3.1. En effet, le support de E_k est alors compact, donc inclus dans un intervalle fermé borné Δ, et K admet la représentation spectrale: $K(y) = \int_\Delta \lambda E_K(d\lambda)(y)$. Pour toute fonction f borélienne bornée sur Δ, on définit $f(K) = \int_\Delta f(\lambda) E_K(d\lambda)$. Supposons que g est un générateur de K, et que h est un vecteur de H orthogonal à tous les $K^i(g)$. On définit : $\Phi(f) =< f(K)(g),h >$, et on se restreint aux fonctions f continues sur Δ (qui sont boréliennes bornées). Il est immédiat que Φ définit une forme linéaire continue pour la norme uniforme, qui s'annule par construction sur tous les polynômes. Par densité, elle est donc nulle pour toute fonction f continue sur Δ. Comme les valeurs propres non nulles de K sont des points isolés, on peut construire une fonction continue f_i qui vaut 1 pour la ième valeur propre non nulle de K et 0 sur toutes les autres, y compris en 0. On obient alors $\Phi(f_i) = 0 =< g,\phi_i >< \phi_i,h >$, d'où, comme g est un générateur de K, $< \phi_i,h >= 0$. Si K a encore une valeur propre nulle, on voit alors facilement que h doit être orthogonal à la fonction propre associée. Ceci montre que $h = 0$, d'où le résultat suivant:

THÉORÈME 4.3.2. *Si K est un opérateur auto-adjoint, compact à spectre simple, défini sur un espace de Hilbert H et à valeurs dans H, alors pour tout $g \in H$, tel que g n'est orthogonal à aucun vecteur propre de K, on a:*

$$\overline{(K^i(g))}_{i\in\mathbb{N}} = H.$$

Le même résultat est vrai pour des opérateurs plus généraux: voir [**15**], [**34**] et [**35**].

4.3.2. Densité dans $L^2(0,1)$ de la famille $(\alpha_i)_{(i\in\mathbb{N})}$. La propriété générale suivante est vérifiée:

PROPRIÉTÉ 4.3.2. *Etant donnée une fonction B continue sur $[0,1]$ qui vérifie :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad < \psi_n,B >\neq 0,$$

où les ϕ_n sont les vecteurs propres de K et les ψ_n sont les vecteurs propres de $K^\star$, et étant donnée une famille de nombres réels quelconques $(b_i)_{(i\in\mathbb{N})}$ où $b_0 \neq 0$, la famille de fonctions $(\beta_i)_{(i\in\mathbb{N})}$ définie par:

$$\begin{aligned} &\beta_0 = b_0 B, \\ &\beta_i = K(\beta_{i-1}) + b_i B, \text{ pour } i > 0 \end{aligned}$$

est dense dans $L^2(0,1)$.

DÉMONSTRATION. Par définition, A est Riesz spectral inversible, donc K est Riesz-spectral (et même le plus souvent autoadjoint compact à spectre simple), et le seul point d'accumulation de ses valeurs propres est 0. Par hypothèse sur B, les propriétés 4.3.1 ou 4.3.2 ci-dessus s'appliquent, et :

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} vect(B,KB,\cdots,K^nB)} = L^2(0,1)$$

Mais on a :

$$\begin{aligned}
&\beta_0 = a_0 B \;\Rightarrow\; vect(B) = vect(\beta_0),\\
&\beta_1 = a_0 KB + a_1 B \;\Rightarrow\; vect(B,KB) = vect(\beta_0,\beta_1),\\
&\quad\vdots\\
&\beta_n = \sum_{i=0}^{n} a_i K^{n-i} B \;\Rightarrow\; vect((K^i B)_{i=0\to n}) = vect((\beta_i)_{i=0\to n}),
\end{aligned}$$

à tout ordre n, d'où

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} vect(\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_n)} = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} vect(B,KB,\cdots,K^n B)} = L^2(0,1)$$

□

Appliquée dans le cadre de la construction de la famille de Brunovsky, où l'opérateur A, la fonction B et la famille $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ont été construits dans les sections 2.3 et 4.1, cette propriété conduit aux trois résultats suivants (les notations sont celles des sections 2.3 et 4.1):

De façon générale nous avons

PROPRIÉTÉ 4.3.3. *Si A est Riesz-spectral inversible quelconque, et si $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ désignent les valeurs propres de $A^\star$, alors la famille $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est dense dans $L^2(0,1)$ si pour tout i on a:*

$A_{24} \neq 0$ et

$$-\phi_i(0)a_{14} \neq -\phi_i(1)a_{12},$$

ou $A_{13} \neq 0$ et

$$\phi_i'(0)a_{13} \neq -\phi_i'(1)a_{11},$$

ou $A_{24} = 0$, $A_{13} = 0$, $A_{14} \neq 0$ et

$$\phi_i'(0)a_{14} \neq -\phi_i(1)a_{11},$$

ou $A_{24} = 0$, $A_{13} = 0$, $A_{14} = 0$ et

$$\phi_i'(1) \neq 0$$

les coefficients A_{ij} étant définis comme dans l'annexe A.

DÉMONSTRATION. Pour toute valeur propre ϕ_i de $A^\star$ on a, B étant une fonction réelle

$$\begin{aligned}
< \phi_i, B > &= \int_0^1 \phi_i(x)B(x)dx \\
&= \frac{1}{\lambda_i}\int_0^1 (\phi_i''(x) + q(x)\phi_i(x))B(x)dx \\
&= \frac{1}{\lambda_i}\left(\int_0^1 \phi_i''(x)B(x)dx + \int_0^1 q(x)\phi_i(x))B(x)dx\right) \\
&= \frac{1}{\lambda_i}(\phi_i'(1)B(1) - \phi_i'(0)B(0) - \phi_i(1)B'(1) + \phi_i(0)B'(0)) \\
&+ \frac{1}{\lambda_i}\int_0^1 (B''(x) + q(x)B(x))\phi_i(x)dx \\
&= \frac{1}{\lambda_i}(\phi_i'(1)B(1) - \phi_i'(0)B(0) - \phi_i(1)B'(1) + \phi_i(0)B'(0)) \qquad (4.3.1)
\end{aligned}$$

car $B'' + qB = 0$.

Si $A_{24} = a_{12}\tilde{a}_{24} - a_{14}\tilde{a}_{22} \neq 0$, alors les fonctions propres ϕ_i vérifient les conditions aux bords qui définissent le domaine de $A^\star$, et on montre aisément que

$$\begin{aligned}
\phi_i'(0) &= -\frac{A_{14}}{A_{24}}\phi_i(0) - \frac{A_{12}}{A_{24}}\phi_i(1) \\
\phi_i'(1) &= \frac{A_{34}}{A_{24}}\phi_i(0) - \frac{A_{23}}{A_{24}}\phi_i(1).
\end{aligned}$$

De même, B vérifie

$$\begin{aligned}
a_{11}B(0) + a_{12}B'(0) + a_{13}B(1) + a_{14}B'(1) &= 0 \\
\tilde{a}_{21}B(0) + \tilde{a}_{22}B'(0) + \tilde{a}_{23}B(1) + \tilde{a}_{24}B'(1) &= 1
\end{aligned}$$

qui devient

$$\begin{aligned}
B'(0) &= -\frac{A_{14}}{A_{24}}B(0) - \frac{A_{34}}{A_{24}}B(1) - \frac{a_{14}}{A_{24}} \\
B'(1) &= \frac{A_{12}}{A_{24}}B(0) - \frac{A_{23}}{A_{24}}B(1) + \frac{a_{12}}{A_{24}}.
\end{aligned}$$

On en déduit, en reportant ces expressions dans (4.3.1), que

$$\begin{aligned}
< \phi_i, B > &= \frac{1}{\lambda_i}(\phi_i'(1)B(1) - \phi_i'(0)B(0) - \phi_i(1)B'(1) + \phi_i(0)B'(0)) \\
&= \frac{1}{A_{24}\lambda_i}\times \qquad (4.3.2) \\
&(-a_{14}\phi_i(0) - a_{12}\phi_i(1))
\end{aligned}$$

ce qui entraîne le résultat annoncé.

Lorsque $A_{13} \neq 0$, un calcul tout à fait analogue fournit

$$\begin{aligned}
\phi_i(0) &= -\frac{A_{23}}{A_{13}}\phi_i'(0) + \frac{A_{12}}{A_{13}}\phi_i'(1) \\
\phi_i(1) &= -\frac{A_{34}}{A_{13}}\phi_i'(0) - \frac{A_{14}}{A_{13}}\phi_i'(1).
\end{aligned}$$

et

$$B(0) = -\frac{A_{23}}{A_{13}}B'(0) + \frac{A_{34}}{A_{13}}B'(1) - \frac{a_{13}}{A_{13}}$$
$$B(1) = -\frac{A_{12}}{A_{13}}B'(0) - \frac{A_{14}}{A_{13}}B'(1) + \frac{a_{11}}{A_{13}}.$$

d'où

$$\begin{aligned} < \phi_i, B > &= \frac{1}{\lambda_i}(\phi_i'(1)B(1) - \phi_i'(0)B(0) - \phi_i(1)B'(1) + \phi_i(0)B'(0)) \\ &= \frac{1}{A_{13}\lambda_i}(a_{13}\phi_i'(0) + a_{11}\phi_i'(1)) \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

et le résultat annoncé.

Si $A_{13} = 0$ et $A_{24} = 0$, alors que $A_{14} \neq 0$, on obtient

$$\phi_i(0) = -\frac{A_{12}}{A_{14}}\phi_i(1)$$
$$\phi_i'(1) = -\frac{A_{34}}{A_{14}}\phi_i'(0),$$

et

$$B(0) = -\frac{A_{34}}{A_{14}}B(1) - \frac{a_{14}}{A_{14}}$$
$$B'(1) = -\frac{A_{12}}{A_{14}}B'(0) + \frac{a_{11}}{A_{14}}.$$

d'où

$$\begin{aligned} < \phi_i, B > &= \frac{1}{\lambda_i}(\phi_i'(1)B(1) - \phi_i'(0)B(0) - \phi_i(1)B'(1) + \phi_i(0)B'(0)) \\ &= \frac{1}{A_{13}\lambda_i}\left(a_{14}\phi_i'(0) + a_{11}\phi_i(1)\right) \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

et le résultat annoncé.

Enfin, dans le cas très particulier où $A_{13} = 0$, $A_{24} = 0$ et $A_{14} = 0$, on obtient que les conditions aux bords sont nécessairement de la forme

$$\phi_i(1) - a_{14}\phi_i(0) = 0$$
$$\phi_i'(0) = 0,$$

et que B vérifie

$$B'(0) + a_{14}B'(1) = 0$$
$$B(1) = 1,$$

d'où

$$\begin{aligned} < \phi_i, B > &= \frac{1}{\lambda_i}(\phi_i'(1)B(1) - \phi_i'(0)B(0) - \phi_i(1)B'(1) + \phi_i(0)B'(0)) \\ &= -\frac{\phi_i'(1)}{\lambda_i} \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

d'où le résultat annoncé. □

On en déduit le corollaire suivant

COROLLAIRE 4.3.1. *Si l'équation de contrainte du problème initial ne fait intervenir des valeurs que sur un seul bord, alors la famille* $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *est dense dans* $L^2(0,1)$.

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence directe de la propriété ci-dessus. Supposons que l'équation de contrainte ne fasse intervenir que les valeurs en 0. B est défini par l'équation (2.2.6), qui s'écrit

$$\begin{aligned} &B'' + q(x)B = 0 \\ &a_{11}B(0) + a_{12}B'(0) = 0 \\ &\tilde{a}_{23}B(1) + \tilde{a}_{24}B'(1) = 1. \end{aligned}$$

De plus, A est autoadjoint. Nous avons en supposant que $A_{24} = a_{12}\tilde{a}_{24} \neq 0$:

$$\begin{aligned} < \phi_i, B > &= \frac{1}{\lambda_i A_{24}}\phi_i(0)((-A_{34}+A_{12})B(1) - a_{14}) - \phi_i(1)((-A_{34}+A_{12})B(0) - a_{12}) \\ &= \frac{-a_{12}}{\lambda_i A_{24}}\phi_i(1) \\ &= \frac{-1}{\lambda_i \tilde{a}_{24}}\phi_i(1). \end{aligned}$$

Or nécessairement, à cause de la forme séparée des conditions aux bords de A, on a $\phi_i(1) \neq 0$, sinon on aurait $\phi_i'(1) = 0$ et donc $\phi_i = 0$.

Si $A_{24} = 0$, on reprend le même raisonnement avec la formule valable parmi les formules données dans la propriété précédente. □

Dans le cas où l'équation de contrainte fait intervenir les deux bords, nous avons vu dans la section 2.3 qu'on peut tenter de choisir l'opérateur A qui "sépare" les conditions aux bords. Si c'est possible, on a la propriété suivante:

COROLLAIRE 4.3.2. *La famille* $((\alpha_i)_{(i\in\mathbb{N})})$ *est dense dans* $L^2(0,1)$ *si la condition*

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad y_1(x,\lambda_i) \neq z_1(x,\lambda_i)$$

est vérifiée, où

$$y_1(x,\lambda_i) = a_{12}e_1(x,\lambda_i) - a_{11}e_2(x,\lambda_i)$$

et

$$z_1(x,\lambda_i) = a_{14}f_1(x,\lambda_i) - a_{13}f_2(x,\lambda_i).$$

DÉMONSTRATION. Dans le cas où on a pu choisir l'opérateur A de façon à séparer les conditions aux bords, B est défini par l'équation (2.2.6) qui devient

$$\begin{aligned} &B'' + q(x)B = 0 \\ &a_{11}B(0) + a_{12}B'(0) = -1 \\ &a_{13}B(1) + a_{14}B'(1) = 1, \end{aligned}$$

et A est encore autoadjoint. Nous avons donc en supposant que $a_{14} \neq 0$ et $a_{12} \neq 0$ et en appliquant la formule valable pour $A_{24} \neq 0$

$$< \phi_i, B > = -\frac{1}{\lambda_i a_{12} a_{14}}(a_{12}\phi_i(1) + a_{14}\phi_i(0)).$$

Après calculs, nous trouvons que:

$$\begin{aligned} < \phi_i,B >= 0 \ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}^\star / \\ &\quad \phi_i(0) = ka_{12},\ \phi_i'(0) = -ka_{11} \\ &\quad \phi_i(1) = ka_{14},\ \phi_i'(1) = -ka_{13} \\ &\Leftrightarrow \phi_i(x) = ky_1(x,\lambda_i) \\ &\quad y_1(x,\lambda_i) = z_1(x,\lambda_i). \end{aligned}$$

Donc, dès que $y_1(x,\lambda_i) \neq z_1(x,\lambda_i)$, la famille des α_i est dense.

Si $A_{24} = 0$ mais $A_{13} \neq 0$, on utilise la formule adéquate et on obtient

$$< \phi_i,B > = \frac{1}{\lambda_i a_{11} a_{13}}(a_{11}\phi_i'(1) + a_{13}\phi_i'(0)),$$

ce qui après calculs conduit au même résultat que ci-dessus.

Le cas $A_{24} = 0$, $A_{13} = 0$, mais $A_{14} \neq 0$ est similaire. □

4.3.3. Exemple: suite. Nous avons choisi de paramétrer les trajectoires avec l'opérateur A défini par

$$\begin{aligned} & A: \quad \mathcal{D}(A) \to L^2(0,1) \\ & A(f) = f'' \\ & \text{où} \\ \mathcal{D}(A) = \{f \in H^2(0,1)/ \quad & f(0) = 0, \\ & f(1) - \frac{1}{2}f'(1) = 0\}. \end{aligned}$$

ψ_i est une fonction propre de A lorsque λ_i est un zéro (réel, car A est autoadjoint) de

$$D_A(\lambda) = \frac{\sin(\sigma)}{\sigma} + \frac{\cos(\sigma)}{2}$$

La fonction B est donnée par $B(x) = \frac{4x-3}{3}$. Les ψ_i sont données par

$$\psi_i(x) = K\frac{\sin(\sigma_i x)}{\sigma_i}.$$

Nous appliquons le corollaire 4.3.2, donc nous calculons:

$$y_1(x,\lambda_i) = -\frac{\sin(\sigma_i x)}{\sigma_i}$$

et

$$z_1(x,\lambda_i) = \frac{1}{2}\cos(\sigma_i(x-1)) - \frac{\sin(\sigma_i(x-1))}{\sigma_i}.$$

Nous transformons z_1:

$$\begin{aligned} z_1(x,\lambda_i) = &(\frac{\sin(\sigma_i)}{\sigma_i} + \frac{1}{2}\cos(\sigma_i))\cos(\sigma_i x) \\ &+ (-\frac{1}{2}\sigma_i \sin(\sigma_i) - \cos(\sigma_i))\frac{\sin(\sigma_i x)}{\sigma_i}. \end{aligned}$$

Donc $z_1 = f_1$ si et seulement si σ_i est solution de

$$\frac{\sin(\sigma_i)}{\sigma_i} + \frac{1}{2}\cos(\sigma_i) = 0$$
$$\frac{1}{2}\sigma_i \sin(\sigma_i) + \cos(\sigma_i)) = -1.$$

Un calcul simple fournit alors

$$\cos(\sigma_i) = \frac{-2\sigma_i}{\sigma_i^2 - 4},$$
$$\sin(\sigma_i) = \frac{-4}{\sigma_i^2 - 4},$$

d'où nécessairement

$$\frac{16 + 4\sigma_i^2}{(\sigma_i^2 - 4)^2} = 1,$$

qui donne:

$$\sigma_i = 0 \text{ ou } \sigma_i = \pm\sqrt{12}.$$

En reportant ces valeurs dans l'expression de D_A, on trouve qu'elles ne conviennent ni l'une ni l'autre, donc on n'a jamais $z_1 = f_1$, et le système bouclé est commandable.

4.4. Optimalité et unicité de la paramétrisation de Brunovsky

Les principaux résultats que nous établissons dans cette section peuvent s'énoncer de la façon suivante.

Plaçons nous dans le cas de la section 2.3, où on a pu construire un opérateur$A$ qui est Riesz-spectral et inversible. B et $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont définis avec les mêmes notations que dans les sections 2.3 et 4.1, et la famille $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est dense dans $L^2(0,1)$. Le système considéré est donc plat au sens donné dans la définition 1.3.1.

Définition 4.4.1. Si les conditions ci-dessus sont vérifiées, alors la paramétrisation de Brunovsky est appelée paramétrisation plate de Brunovsky.

Soit une famille de fonctions $(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ deux fois continûment dérivables sur [0,1], qui définit une paramétrisation des trajectoires de (2.1.4)-(2.1.6) au moins polynômiales (voir la section 4.1 pour les définitions) .

On définit le nombre σ_β par:

$$\sigma_\beta = \sup\{\sigma \in \mathbb{R}^{+\star} / \ (G^\sigma(0,T),(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}}) \text{ est une paramétrisation du système } \}$$

où la borne supérieure de l'ensemble vide est, par convention, égale à $-\infty$.

On a la propriété suivante

Propriété 4.4.1. *Si la famille de fonctions $(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est telle que:*

$$\sigma_\beta \geq \sigma_\alpha,$$

alors

$$\sigma_\beta = \sigma_\alpha.$$

De plus

PROPRIÉTÉ 4.4.2. *Si* $(G^\sigma(0,T),(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}})$ *est une paramétrisation du système, alors il existe des coefficients* $(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *tels que : si* $z \in G^\sigma(0,T)$ *est le paramètre d'une trajectoire formelle normalement convergente de* (2.1.4)-(2.1.6)*,*

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} d_i z^{(i)}$$

est le paramètre plat de Brunovsky de (2.1.4)-(2.1.6) *pris dans* $G^\sigma(0,T)$ *de la même trajectoire.*

De plus, la famille $(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *est dense dans* $L^2(0,1)$*.*

Ce résultat a une interprétation très importante en termes de contrôle: prendre la paramétrisation en z et β_i au lieu de y et α_i revient à mettre en série les deux "systèmes" selon la figure 1.

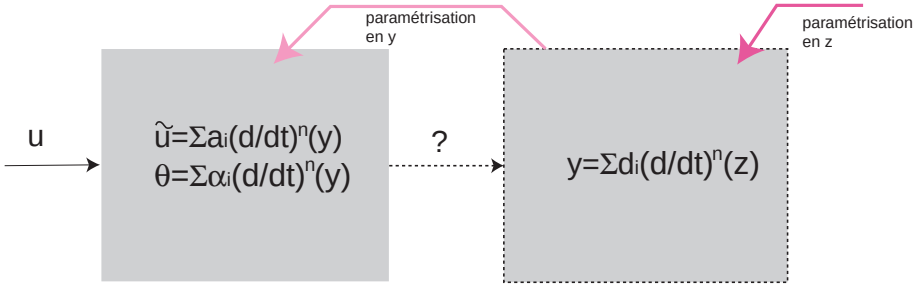


FIG. 1. *Lien entre les paramétrisations en "y" et "z".*

COROLLAIRE 4.4.1. *Soit un système tel qu'on ait trouvé un bouclage des termes de bords conduisant à un opérateur* A *Riesz-spectral inversible, et une fonction* B*, tels que la paramétrisation de Brunovsky associée* $(G^\sigma(0,T),(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}})$ *soit plate. Alors tout autre bouclage du système conduisant à un opérateur Riesz-spectral inversible fournit la même paramétrisation.*

4.4.1. Preuve de la première propriété. La propriété 4.4.1 peut se reformuler de la façon suivante: soit une paramétrisation des trajectoires de (2.1.4) convergente au moins pour des fonctions polynômiales, et soit G son espace fonctionnel associé. La famille de Brunovsky liée à l'opérateur A détermine la borne supérieure des ordres Gevrey σ admissibles pour que $G^\sigma(0,T) \subset G$.

DÉMONSTRATION. Nous supposons $\sigma_\beta > \sigma_\alpha$, et nous montrons que nous obtenons une contradiction, d'où le résultat.

D'après les résultats de la section 4.2, $\sigma_\alpha \geq 2$, donc on aurait $\sigma_\beta > 2$.

Fixons donc σ tel que: $2 < \sigma < \sigma_\beta$, et considérons la série formelle :

$$\hat{f}(X) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\sigma i + 1)}{i!} X^i.$$

Il s'agit d'une série Gevrey d'ordre $\sigma-1$, et en appliquant le théorème de Ritt (voir annexe sur les fonctions Gevrey), nous pouvons affirmer qu'il existe une fonction f holomorphe sur un secteur épointé de sommet zéro, de bissectrice $\mathbb{R}^{+\star}$, de rayon $T>0$ telle que $\hat{f}$ soit le développement asymptotique Gevrey de f. En particulier, f est Gevrey σ sur $[0,T]$, et à l'origine:

$$\forall i \in \mathbb{N},\ f^{(i)}(0) = \Gamma(\sigma i+1)$$

Mais, par définition de σ_β,nous avons en faisant $y=f$ et $t=0$ dans la définition:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \Gamma(\sigma i+1) \sup_{x\in[0,1]} |\beta_i(x)| < K_0$$

d'où nous tirons qu'il existe deux constantes réelles positives K_0 et $R_0<1$ telles que

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \|\beta_i\|_\infty \leq \frac{K_0 R_0^i}{\Gamma(\sigma i+1)}. \tag{4.4.1}$$

D'autre part, $(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ définit une paramétrisation formelle valable pour toutes les fonctions y polynômiales, donc en appliquant la propriété 4.1.1 de la section 4.1, on obtient que:

$$\exists c_0 \in \mathbb{R}^\star /\ \beta_0 = c_0 B, \tag{4.4.2}$$

$$\forall i>0,\ \exists c_i \in \mathbb{R} /\ \beta_i = K(\beta_{i-1}) + c_i B = \sum_{k=0}^{i} c_k K^{i-k}(B). \tag{4.4.3}$$

Le noyau $\mathcal{G}$ de K est une fonction bornée en valeur absolue de $[0,1]\times[0,1]$; en notant $N_1 = \sup_{(x,\xi)\in[0,1]\times[0,1]} \mathcal{G}(x,\xi)$ nous avons donc:

$$\forall x \in [0,1],\ |c_i|\,|B(x)| \leq \frac{K_0 R_0^i}{\Gamma(\sigma i+1)} + N_1 \frac{K_0 R_0^{i-1}}{\Gamma(\sigma i-\sigma+1)},$$

d'où la majoration des c_i :

$$|c_i|\,\|B\|_\infty \leq K_0(R_0+N_1)\frac{R_0^{i-1}}{\Gamma(\sigma i-\sigma+1)},$$

soit en ajustant correctement la valeur de la constante C, une majoration du type:

$$|c_i| \leq M\frac{C^i}{\Gamma(\sigma i+1)}.$$

La fonction F définie par:

$$F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \lambda^i$$

est donc entière, d'ordre de Weierstrass inférieur ou égal à $\frac{1}{\sigma}$.

D'autre part, B se développe sur une base de Riesz de vecteurs propres de K en:

$$B = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \phi_n$$

Puisque le système est par hypothèse plat, B n'a de composante nulle sur aucune fonction propre donc les x_n sont non nuls. Des relations (4.4.3) et (4.4.1), on tire que

$$\begin{aligned}\|\beta_i\|_2^2 &= \left\| \sum_{k=0}^{i} c_k K^{i-k}(B) \right\|_2^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n|^2}{|\lambda_n|^{2i}} \left| \sum_{k=0}^{i} c_k \lambda_n^k \right|^2,\end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned}\forall n > 0,\ \left| \sum_{k=0}^{i} c_k \lambda_n^k \right| &\leq \|\beta_i\|_2 \frac{|\lambda_n|^i}{|x_n|} \\ &\leq \frac{K_0 R_0^i}{\Gamma(\sigma i + 1)} \frac{|\lambda_n|^i}{|x_n|}.\end{aligned}$$

En faisant tendre i vers $+\infty$ dans l'inégalité ci-dessus, on obtient que toute valeur propre λ_n de A est un zéro de F.

On en déduit alors en utilisant le théorème de factorisation de Weierstrass pour les fonctions entières d'ordre inférieur strictement à 1, que

$$F(x) = D(x) D_A(x), \tag{4.4.4}$$

où D est une fonction entière d'ordre inférieur où égal à 1, et D_A, d'après la propriété 2.5.6 ci-dessous, est d'ordre de Weierstrass $\frac{1}{2}$ exactement. Donc l'ordre de F est supérieur où égal à $\frac{1}{2}$.

Nous obtenons donc : $\frac{1}{\sigma} \geq \frac{1}{2}$, ce qui est la contradiction annoncée. □

4.4.2. Preuve de la deuxième propriété.

Démonstration. Soit $z \in G^\sigma(0,T)$ et $(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une paramétrisation associée à une trajectoire formelle normalement convergente de (2.1.4)-(2.1.6).

Nous avons prouvé dans la preuve de la propriété 4.4.1 que la famille $(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ vérifie nécessairement les relation (4.4.2) et (4.4.3), et que la fonction

$$F(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \lambda^i$$

est donc entière, d'ordre de Weierstrass inférieur ou égal à $\frac{1}{\sigma}$. Nous avons également montré qu'elle se factorise en

$$F(\lambda) = D(\lambda) D_A(\lambda) = D_A(\lambda) D(\lambda).$$

Or, par définition de K, inverse de l'opérateur A et par définition de B, nous déduisons de (4.4.2) et (4.4.3) que la trajectoire $\theta(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} z^{(i)} \beta_i$ paramétrée par

z vérifie

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{21}\theta(0,t)+\tilde{a}_{22}\theta'(0,t)+\tilde{a}_{23}\theta(1,t)+\tilde{a}_{24}\theta'(1,t) &= \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^{(i)}(t)\\ &= F(\frac{d}{dt})(z)\\ &= D_A(\frac{d}{dt})D(\frac{d}{dt})(z).\end{aligned}$$

Posons $y = D(\frac{d}{dt})(z)$, y ainsi défini est dans $G^\sigma(0,T)$, donc la loi de commande

$$\tilde{u}(t) = D_A(\frac{d}{dt})(y)$$

définit, puisque l'opérateur A est le générateur d'un semi-groupe continu, une unique trajectoire du système, dont nous avons prouvé dans la section 4.2 qu'elle est un solution au sens classique du problème, et cette solution est

$$\theta(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} y^{(i)}\alpha_i.$$

Nous avons donc prouvé qu'il existe des coefficients $(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tels que :

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} d_i z^{(i)} \tag{4.4.5}$$

soit le paramétre plat de Brunovsky de (2.1.4)-(2.1.6) pris dans $G^\sigma(0,T)$ de la même trajectoire.

De plus, en resommant la série (qui est normalement convergente) sur les dérivées de z, et en identifiant, puisque l'égalité a lieu pour toute fonction $z \in G^\sigma(0,T)$ on obtient

$$\begin{aligned}\theta(x,t) &= \sum_{i=0}^{\infty} y^{(i)}(t)\alpha_i(x)\\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} d_k z^{(k)}(t)\right)^{(i)}\alpha_i(x)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{(n)}(t)\left(\sum_{i+k=n} d_k\alpha_i(x)\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{(n)}(t)\left(\sum_{i=0}^{n} d_{n-i}\alpha_i(x)\right),\end{aligned}$$

et dans le même temps

$$\theta(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{(n)}(t)\beta_n(x).$$

On en déduit que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \beta_n(x) = \sum_{i=0}^{n} d_{n-i}\alpha_i(x)$$

avec $d_0 \neq 0$, puisque a_0 et c_0 ne sont pas nuls.

La densité dans $L^2(0,1)$ des α_i, qui est par hypothèse vérifiée, entraîne donc celle des β_i. □

Nous donnons maintenant la preuve du corollaire 4.4.1.

DÉMONSTRATION. Nous supposons que $(y,(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}})$ soit une paramétrisation plate du système, valable pour tout $y \in G^\sigma(0,T)$, obtenue via un bouclage correspondant à un opérateur A Riesz-spectral inversible.

Considérons un autre bouclage conduisant à un autre opérateur $\tilde{A}$ Riesz-spectral inversible. Alors, d'après les résultats de la section 4.2, $\tilde{A}$ définit une paramétrisation de Brunovsky $(z,(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}})$ qui fournit des trajectoires normalement convergentes pour tout $z \in G^\sigma(0,T)$.

En appliquant la propriété 4.4.2 ci-dessus, nous obtenons que $(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est dense dans $L^2(0,1)$, et donc que $(z,(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}})$ est aussi une paramétrisation plate du système.

De plus, par la relation (4.4.5), nous savons que si z est un élément quelconque de $G^\sigma(0,T)$ qui paramétrise une trajectoire du système dans la paramétrisation $(G^\sigma(0,T),(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}})$, alors

$$y = D(\frac{d}{dt})(z).$$

paramétrise la même trajectoire dans $(G^\sigma(0,T),(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}})$.

Mais, comme $(z,(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}})$ est une paramétrisation plate de Brunovsky du système, nous pouvons appliquer la propriété 4.4.2 en inversant les rôles des α_i et des β_i, ce qui donne que réciproquement:

$$z = C(\frac{d}{dt})(y).$$

où C est une fonction entière d'ordre de Weierstrass $\leq \frac{1}{\sigma}$. Nous obtenons donc, puisque ceci est vrai pour toute fonction z, que:

$$C(\lambda)D(\lambda) = 1.$$

ce qui ne peut se produire, étant donné l'ordre de Weierstrass de D et C, que si C et D sont deux fonctions constantes dont le produit vaut 1. Les fonctions z et y correspondant à la même trajectoire dans les deux paramétrisations sont donc proportionnelles, et les α_i et β_i aussi, ce qui prouve l'unicité à multiplication par un scalaire près de la paramétrisation plate. □

4.4.3. Endogéneité de la paramétrisation plate de Brunovsky. Par endogénéité, nous entendons la propriété au sens de la dimension finie, qui consiste à savoir à tout instant expliciter une fonction qui permette de calculer le paramètre plat en fonction de l'état du système et de la commande.

Il y a un cas où nous savons répondre positivement à cette question, qui est celui des problèmes où l'équation de contrainte ne fait intervenir qu'un seul bord. La "sortie plate" (elle mérite à ce moment là effectivement l'appellation de sortie plate) est une soit la valeur de l'état à l'autre bord, soit la valeur du flux (voir 4.2.3.

Dans tous les autres cas, nous ne savons pas répondre à cette question, sauf éventuellement si le système présente des symétries particulières.

4.5. Planification de trajectoire et commandabilité approchée

Nous nous plaçons désormais dans le cas où le système étudié est plat et nous avons pu construire un opérateur A Riesz-spectral et inversible qui génère la paramétrisation de Brunovsky du système.

Nous souhaitons pouvoir fixer un état initial et un état final du système (2.1.4)-(2.1.6), et trouver une loi de commande $u(t)$ qui conduise le système de cet état initial à cet état final en un temps T donné.

Nous obtenons alors deux résultats qui s'énoncent de la façon suivante:

PROPRIÉTÉ 4.5.1. *Supposons que l'état initial et l'état final soient de la forme:*

$$\theta_{ini} = \sum_{i=0}^{\infty} d_i \alpha_i(x) \tag{4.5.1}$$

$$\theta_{final} = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \alpha_i(x), \tag{4.5.2}$$

où les coefficients d_i et f_i sont réels, et qu'il existe trois réels $P > 0$,$Q > 0$ et $0 < \sigma \leq 2$ tels que:

$$\forall i \in \mathbb{N},\ |d_i| \leq PQ^i\Gamma(\sigma i + 1)$$
$$|f_i| \leq PQ^i\Gamma(\sigma i + 1)$$

Il existe une loi de commande $[0,T] \ni t \mapsto U(t)$ dans $G^\sigma(0,T)$, où $\sigma \leq 2$, qui conduit le système (2.1.4)-(2.1.6) de l'état initial θ_{ini} à l'instant 0 à l'état final θ_{final} à l'instant T, ceci de façon exacte.

et

PROPRIÉTÉ 4.5.2. *Si l'état initial θ_{ini} à l'instant 0 et l'état final θ_{final} à l'instant T sont dans $L^2(0,1)$ alors il existe une loi de commande $[0,T] \ni t \mapsto \bar{u}(t)$ dans $G^\sigma(0,T)$, où $\sigma \leq 2$, qui conduit le système (2.1.4) de l'état initial θ_{ini} à l'instant 0 à l'état final θ_{final} à l'instant T, ceci de façon approchée.*

4.5.1. Preuve de la propriété 4.5.1. Nous supposons donc que l'état initial et l'état final sont de la forme:

$$\theta_{ini} = \sum_{i=0}^{\infty} d_i \alpha_i(x)$$
$$\theta_{final} = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \alpha_i(x),$$

où les coefficients d_i et f_i sont réels, et qu'il existe trois réels $P > 0$,$Q > 0$ et $0 < \sigma \leq 2$ tels que:

$$\forall i \in \mathbb{N},\ |d_i| \leq PQ^i\Gamma(\sigma i + 1)$$
$$|f_i| \leq PQ^i\Gamma(\sigma i + 1)$$

La planification de trajectoire est alors théoriquement possible grâce à ce qui précède, en utilisant la loi de commande:

$$u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} (a_{21}\alpha_i(0) + a_{22}\alpha_i'(0) + a_{23}\alpha_i(1) + a_{24}\alpha_i'(1)) y^{(i)}(t) \tag{4.5.3}$$

où y est une fonction de classe Gevrey σ inférieure à 2, compatible avec l'état final et l'état initial. En effet, puisque le problème de commande est bien posé, les propriétés des semi-groupes garantissent (voir l'annexe B, th. B.2.3) l'existence et l'unicité de la trajectoire classique générée par la commande et l'état initial qui est

dans $\mathcal{D}(A)$. Le système évolue donc sur la trajectoire $\theta(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} y^{(i)}(t)\alpha_i(x)$. La fonction y doit donc satisfaire aux conditions de raccord:

$$\forall i \in \mathbb{N},\ y^{(i)}(0) = d_i, \text{ et } y^{(i)}(T) = f_i \tag{4.5.4}$$

Le problème de la planification de trajectoire reliant des états ayant la forme particulière ci-dessus est donc résolu si, étant données deux suites de nombres réels $(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ qui satisfont une estimation Gevrey comme ci-dessus, on peut toujours trouver une fonction y de classe Gevrey σ telle que (4.5.4) soit satisfaite. La réponse à ce problème est positive, comme nous l'assure le théorème de Ritt C.1.1 et son corollaire C.2.1.

4.5.2. Preuve de la propriété 4.5.2. La platitude du système implique la densité de la famille $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Nous appliquons donc les résultats du chapitre 2, section 2.6, prop. 2.6.2: nous sélectionnons deux états de départ et d'arrivée de la forme (4.5.1)-(4.5.2) dans des voisinages aussi petits que l'on souhaite de l'état de départ et d'arrivée (en pratique, on prendra des polynômes pour (4.5.1)-(4.5.2)), et on considère une loi de commande 4.5.3 comme au paragraphe 4.5.1 reliant de façon exacte (4.5.1) à (4.5.2). Alors nous savons que toute loi de commande au moins $C^2(0,T)$ qui vérifie 2.6.5-2.6.6 répond au problème.

En particulier, la loi de commande obtenue en tronquant la série (normalement convergente, ainsi que la série dérivée sur $[0,T]$) 4.5.3 à un ordre adéquat convient. C'est ce choix qui est effectué dans tous les exemples qui suivent.

CHAPITRE 5

Exemples de planification de trajectoire

5.1. Méthode opératoire de calcul de la loi de commande

Les résultats obtenus aux chapitres 2 et 4 nous permettent maintenant de définir un mode opératoire de calcul d'une loi de commande en boucle ouverte pour la planification de trajectoire. Les différentes étapes sont détaillées ci-après.

Etape 1. Il faut s'assurer qu'il s'agit d'un problème de commande bien posé au sens défini au paragraphe 2.2.

Etape 2. Il faut ensuite, si le problème n'est pas un des cas particuliers mentionnés dans la section 2.4, déterminer par bouclage un opérateur A Riesz-spectral inversible, et une fonction B. Il semble qu'il soit intéressant de sélectionner lorsqu'on le peut un opérateur A à conditions aux bords séparées.

Si nous sommes dans le cas particulier où, avec les notations de la section 2.3, l'espace $\mathcal{E}$ est de dimension 2, nous savons séparer le problème en deux problèmes qui rentrent dans le cadre ci-dessus (voir la section 2.4).

Par contre, si nous sommes dans le cas du premier paragraphe de la section 2.4, nous ne savons pas traiter le problème de la planification de trajectoire. Nous supposons donc que nous ne sommes pas dans ce cas.

Etape 3. Il faut maintenant calculer la "forme de Brunovsky" du système, c'est à dire la famille de fonctions $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Notons qu'il suffit d'en calculer un nombre fini puisque la loi de commande effectivement utilisée est une série tronquée.

Dans le cas général, le calcul des fonctions α_i nécessite tout d'abord le calcul des premiers coefficients a_i du déterminant de Fredholm de l'inverse de $K = A^{-1}$. Ce calcul peut être fait en utilisant les expressions qui découlent du lemme 2.5.4:

$$\begin{aligned} a_0 =& A_{12} + A_{34} + A_{23}e_1(1) + A_{13}e_2(1) + A_{42}e_1'(1) + A_{14}e_2'(1) \\ a_i =& A_{23}V_0^i(e_1)(1) + A_{13}V_0^i(e_2)(1) + A_{42}(V_0^i(e_1))'(1) + A_{14}(V_0^i(e_2))'(1), \end{aligned}$$

où l'opérateur de Volterra V_0 a été défini au paragraphe 2.5.1, et e_1 et e_2 sont les solutions fondamentales en zéro de

$$f'' + qf = 0.$$

Il faut donc numériquement calculer e_1 et e_2 sur [0,1], puis un nombre fini des itérés $V_0^i(e_1)$ et $V_0^i(e_2)$. Les valeurs au point 1 de ces fonctions et de leurs dérivées permettent un calcul approché des valeurs des a_i.

Une fois les a_i calculés, on obtient les α_i en résolvant numériquement la suite de problèmes:

$$\begin{aligned}
&B'' + q(x)B = 0\\
&a_{11}B(0) + a_{12}B'(0) + a_{13}B(1) + a_{14}B'(1) = 0\\
&\tilde{a}_{21}B(0) + \tilde{a}_{22}B'(0) + \tilde{a}_{23}B(1) + \tilde{a}_{24}B'(1) = 1,
\end{aligned}$$

$$\alpha_0 = a_0 B,$$

$$\begin{aligned}
&v_i'' + q(x)v_i = \alpha_{i-1}\\
&a_{11}v_i(0) + a_{12}v_i'(0) + a_{13}v_i(1) + a_{14}v_i'(1) = 0\\
&\tilde{a}_{21}v_i(0) + \tilde{a}_{22}v_i'(0) + \tilde{a}_{23}v_i(1) + \tilde{a}_{24}v_i'(1) = 0,
\end{aligned}$$

$$\alpha_i = v_i + a_i B.$$

Remarque. Toutefois, dans le cas où l'opérateur A a pu être choisi Riesz-spectral inversible à conditions aux bords séparées, on peut utiliser les résultats des paragraphes 4.2.2 et 4.2.3. Il a été montré dans ces paragraphes que si f_1, f_2 désignent le système de solutions fondamentales en 1 de $f''+qf = 0$, et si V_1 désigne l'opérateur de Volterra qui s'annule au point 1 associé à cette équation, alors:

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= -a_{12}e_1(x) + a_{11}e_2(x),\\
\text{et } z_1(x) &= -a_{14}f_1(x) + a_{13}f_2(x),\\
\text{alors } \alpha_i &= V_0^i(y_1) + V_1^i(z_1).
\end{aligned}$$

Le calcul des α_i se fait donc sans faire intervenir les coefficients du déterminant de Fredholm, et en résolvant numériquement la suite de problèmes

$$\begin{aligned}
&y_1'' + q(x)y_1 = 0\\
&y_1(0) = -a_{12}\\
&y_1'(0) = a_{11}
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
&z_1'' + q(x)z_1 = 0\\
&z_1(1) = -a_{14}\\
&z_1'(1) = a_{13},
\end{aligned}$$

$$\alpha_0 = y_1 + z_1,$$

$$\begin{aligned}
&y_i'' + q(x)y_i = y_{i-1}\\
&y_i(0) = 0\\
&y_i'(0) = 0
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
&z_i'' + q(x)z_i = z_{i-1}\\
&z_i(1) = 0\\
&z_i'(1) = 0,
\end{aligned}$$

$$\alpha_{i-1} = y_i + z_i.$$

Etape 4. Nous examinons la commandabilité du système bouclé, en utilisant les résultats de la section 4.3.

Sauf dans le cas où le problème de départ ne présente des contraintes que sur un seul bord, ce qui assure la commandabilité, cette étape n'est pas facile à traiter numériquement, car elle nécessite le calcul de toutes les valeurs propres de A.

Cependant, on peut espérer pouvoir donner une réponse par un calcul théorique si on connaît l'expression de la fonction q.

Si on parvient à répondre positivement à la question de la commandabilité du système bouclé et donc à celle de la densité des α_i, alors les α_i définissent *la* paramétrisation de Brunovsky du système (invariante sous l'action des bouclages sur les opérateurs Riesz-spectraux inversibles) et le système est plat.

Etape 5. Enfin nous procédons à l'élaboration de la loi de commande en suivant la démarche exposée dans la section 4.5, ce qui sera toujours possible, même si la famille des α_i n'est pas dense dans $L^2(0,1)$, à condition que l'état de départ et d'arrivée de la planification de trajectoire soient dans l'adhérence des α_i.

Ainsi, il est parfois possible de faire de la planification de trajectoire arrêt-arrêt, même avec un système non commandable.

5.2. Tige commandée par un réservoir de chaleur.

Il s'agit d' un problème identique à celui de l'exemple 1.3, à ceci près que la variable de commande n'est plus directement la température de l'extrémité de la tige correspondant à $x = 1$, mais la température d'un réservoir de chaleur (par exemple un générateur de vapeur) au contact de cette extrémité.

Le modèle du système est donc maintenant:

$$\begin{aligned} \partial_t\theta(x,t) &= \partial_{xx}\theta(x,t), \quad x \in [0,1] \\ \partial_x\theta(0,t) &= 0 \\ \theta(1,t) + k\partial_x\theta(1,t) &= u(t). \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

Nous appliquons les résultats du chapitre 4.

Etapes 1 et 2: Le système (5.2.1) correspond à un problème bien posé, puisque l'opérateur en espace est inversible et à conditions aux bords séparées. Il peut être envoyé par bouclage des termes de bords sur le système étudié dans l'exemple 1.3, qui est plat.

Etapes 3, 4 et 5: Il résulte des étapes 1 et 2 que (5.2.1) est plat, sa paramétrisation de Brunovsky est unique et c'est celle de l'exemple 1.3, où tous les calculs ont déjà été faits.

La sortie plate est donc encore $y(t) := \theta(0,t)$, et la paramétrisation des trajectoires est donnée par

$$\theta(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} y^{(i)}(t)\frac{x^{2i}}{(2i)!}$$

$$u(t) = y(t) + \sum_{i=1}^{\infty} y^{(i)}(t)\left(\frac{1}{(2i)!} + \frac{k}{(2i-1)!}\right)$$

Les résultats de simulation sont évidemment identiques à ceux de l'exemple 1.3, seule la loi de commande change.

5.3. Exemple d'un système de paramètre plat inconnu

Nous reprenons l'exemple académique 2.3.1 qui a été étudié dans les précédents chapitres: le problème étudié peut être vu comme celui d'une barre, chauffée avec une loi de chauffage complexe, avec des conditions aux bords faisant intervenir les deux bords. Les équations du système sont:

$$\begin{aligned}
&\partial_t\theta = \partial_{xx}\theta \\
&\theta(0) + \theta(1) + \frac{\partial_x\theta(1)}{2} = 0 \\
&\theta(1) + 2\partial_x\theta(0) = u(t)
\end{aligned}$$

Etapes 1 et 2: elles ont été développés dans les chapitres précédents.

Etape 3: On utilise la remarque 5.1 pour calculer les valeurs des α_i.

Etape 4: la commandabilité plate approchée a été vue dans les chapitres précédents.

Etape 5: Nous avons fabriqué une loi de commande qui conduit le système de l'état de repos: $\theta_i(x) = \frac{4x-3}{9}$, correspondant à une valeur constante égale à 1 de la commande à l'état de repos final $\theta_f(x) = 2\frac{4x-3}{9}$, correspondant à une valeur constante égale à 2 de la commande, ceci en $1s$..

Les résultats de simulation sont illustrés par les figures 1,2 et 3. Le fait de ne pas connaitre précisément le lien entre la sortie plate et l'état ne gêne en rien le déroulement des calculs.

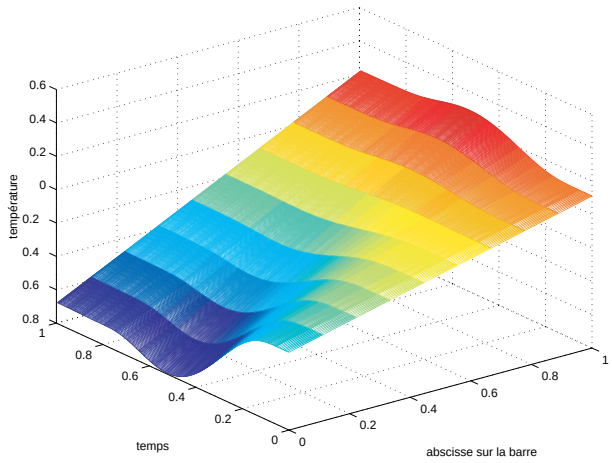


FIG. 1. *Planification de trajectoire avec une fonction Gevrey d'ordre* 2.

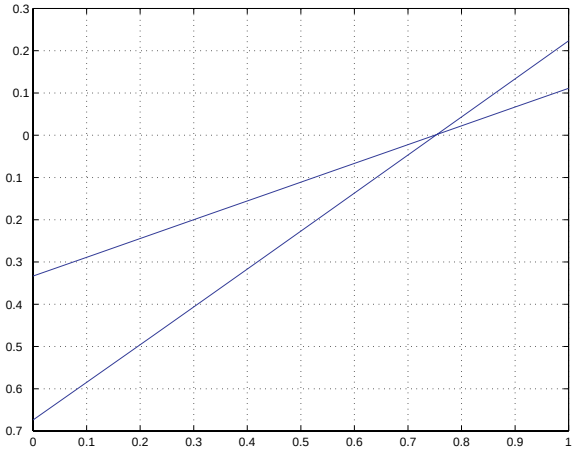


FIG. 2. *Etats de départ et d'arrivée.*

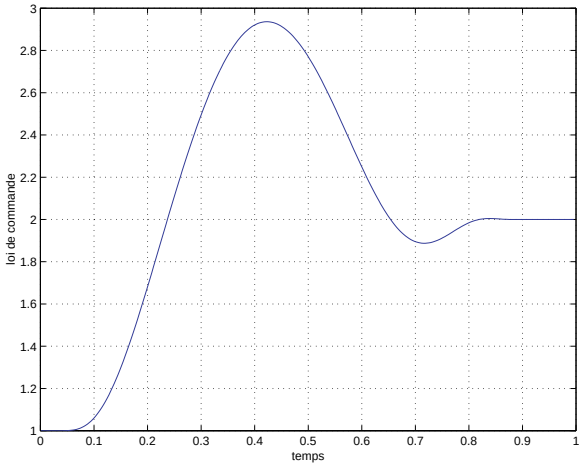


FIG. 3. *Loi de commande en fonction de temps.*

5.4. Anneau à symétrie radiale commandé en température à l'intérieur

L'étude de ce problème a été faite dans ses grandes lignes dans [**27**], nous en donnons une version complétée, avec une démarche plus systématique.

Considérons le problème suivant (voir figure 4: Un anneau circulaire de rayons

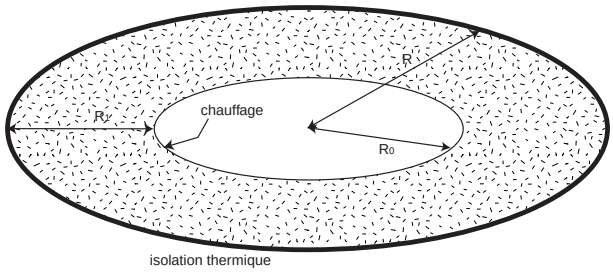


FIG. 4. *Anneau à symétrie radiale, chauffé à l'intérieur.*

intérieurs et extérieurs R_0 et R ($R_0 < R$), est chauffé uniformément sur sa frontière interne. De plus, on suppose que la frontière externe est parfaitement isolée. Le problème est donc invariant en θ, où r et θ sont les coordonnées polaires usuelles dans le plan. Les relations qui décrivent l'évolution de la température u de l'anneau sont données par:

$$\begin{aligned} &\partial_t u = \frac{1}{r}\partial_r u + \partial_{rr} u \\ &\partial_r u(R,t) = 0 \\ &u(R_0,t) = c(t) \end{aligned} \tag{5.4.1}$$

Après avoir effectué le changement de variable $x = R - r$,et avoir posé $R_1 = R - R_0$ nous obtenons:

$$\begin{aligned} &\partial_t u = -\frac{1}{R-x}\partial_x u + \partial_{xx} u \\ &\partial_x u(0,t) = 0 \\ &u(R_1,t) = c(t) \end{aligned} \tag{5.4.2}$$

5.4.1. Synthèse d'une loi de commande pour une trajectoire arrêt-arrêt. Le problème (5.4.2) est exactement de la forme des problèmes étudiés au chapitre 4: nous appliquons la démarche exposée dans ce chapitre.

Etape 1 :Transformations du problème.

Le problème (5.4.2) se transforme par le changement de variable:

$$v(x,t) := \sqrt{\frac{R-x}{R}}u(x,t)$$

en:

$$\begin{aligned} \partial_t v &= \frac{1}{4(R-x)^2} v + \partial_{xx} v \\ \frac{1}{2R} v(0,t) + \partial_x v(0,t) &= 0 \\ \sqrt{\frac{R}{R-R_1}} v(R_1,t) &= c(t) \end{aligned} \tag{5.4.3}$$

Nous définissons l'opérateur Ξ par

$$\Xi(v) = \frac{1}{R-x} v' + v''$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\Xi) = \{ & v \in L^2(0,R_1) / v' \in L^2(0,R_1), v'' \in L^2(0,R_1), \\ & v(R_1) = 0, v'(0) = 0 \}. \end{aligned}$$

Le changement de fonction le transforme en E défini par:

$$E(v) = \frac{1}{4(R-x)^2} v + v''$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(E) = \{ & v \in L^2(0,R_1) / v' \in L^2(0,R_1), v'' \in L^2(0,R_1), \\ & v(R_1) = 0, \frac{1}{2R} v(0) + v'(0) = 0 \} \end{aligned}$$

Le problème est donc bien posé. En effet, on montre aisément que Ξ n'a pas de valeur propre nulle; il s'ensuit que E n'en a pas non plus. E est à conditions aux bords séparées, et donc il est auto-adjoint, inversible et Ξ est Riesz-spectral inversible. Ceci entraîne (voir annexe sur les semi-groupes) que le problème (5.4.2) est bien posé.

Etape 2: choix de l'opérateur A.

Ici la situation est particulièrement simple; on choisit $A = E$, et la fonction B est définie par:

$$B(x) = \sqrt{\frac{R}{R-x}}$$

Nous désignons par K l'inverse autoadjoint compact de A, et par H l'inverse Riesz-spectral compact de E.

Si nous définissons l'isomorphisme continu de $L^2(0,1)$ Φ par

$$\begin{aligned} \Phi : \quad L^2(0,1) &\to L^2(0,1) \\ y &\mapsto \sqrt{\frac{R-x}{R}} \end{aligned}$$

nous avons:

$$E = \Phi^{-1} A \Phi$$

et donc:

$$H = \Phi^{-1} K \Phi$$

Etape 3: Décomposition de Brunovsky

Pour pouvoir faire la décomposition de Brunovsky du système (5.4.2) ou de façon équivalente celle du système (5.4.3), il nous faut calculer les coefficients du

déterminant de Fredholm des inverses de E ou de A. Ces déterminants sont identiques. En revenant au système de départ (5.4.1), cela revient aussi à calculer l'expression du déterminant de Fredholm de l'opérateur inverse de $\tilde{E}$ défini par:

$$\tilde{E}(v) = \frac{1}{r}v' + v''$$

avec :

$$\mathcal{D}(\tilde{E}) = \{v \in L^2(R_0,R)/(v',v'') \in \left(L^2(R_0,R)\right)^2, \\ v(R_0) = 0, v'(R) = 0\}$$

Il est bien connu (voir [**13**]) que les solutions de l'équation $v'' + \frac{1}{r}v' = -v$ sont de la forme: $cJ_0(r) + dY_0(r)$, où J_0 et Y_0 sont les fonctions de Bessel de première et de deuxième espèce. Les fonctions propres de $\tilde{E}$ sont donc les fonctions G_μ définies par:

$$G_\mu(r) = Y_0'(\mu R)J_0(\mu r) - J_0'(\mu R)Y_0(\mu r)$$

et les valeurs propres associées sont les nombres réels négatifs $\lambda = -\mu^2$, pour les valeurs de λ qui annulent le déterminant de Fredholm de K (l'inverse de A) dont l'expression est donnée par

$$\begin{aligned} D_A(\lambda) &= R\mu Y_0'(R\mu)J_0(R_0\mu) - R\mu J_0'(R\mu)Y_0(R_0\mu) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{5.4.4}$$

J_0 et Y_0 peuvent toutes les deux être développées en séries de puissances paires deμ, avec pour Y_0 une singularité logarithmique à l'origine. Fort heureusement, cette singularité disparait lorsque nous remplaçons J_0 et Y_0 par leurs développements en série dans $D(\lambda)$,et nous obtenons une fonction entière de puissance paires de μ, c'est à dire une fonction entière de λ, puisque $\lambda = -\mu^2$.

Nous obtenons finalement pour $D(\lambda)$ l'expression

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^m R^{2m}}{2^{2m}} A_m = 0 \tag{5.4.5}$$

où nous avons posé

$$\begin{aligned} A_m = &\sum_{k+l=m} \frac{\left(\frac{R_0}{R}\right)^{2l}}{(k!)^2(l!)^2} \\ &+ 2\ln\left(\frac{R_0}{R}\right) \sum_{k+l=m-1} \frac{\left(\frac{R_0}{R}\right)^{2l}}{k!(k+1)!(l!)^2} \\ &+ 2 \sum_{k+l=m-1} \frac{\left(\frac{R}{R_0}\right)^{2l}(S_l - S_{k+1})}{k!(k+1)!(l!)^2} \end{aligned}$$

avec $S_0 = 0$, et pour $l > 0$, $S_l = \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{i}$.

Cependant, selon ce qui a été dit dans le paragraphe “mode opératoire” ci-dessus, il n'est pas nécessaire de connaître l'expression du déterminant de Fredholm

pour conduire les calculs, et on peut procéder de façon plus simple. Il suffit de résoudre la suite de problèmes stationnaires homogènes sur [0,R_1]:

$$\alpha_0'' - \frac{1}{R-x}\alpha_0' = 0$$
$$\alpha_0'(0) = 0, \quad \alpha_0(0) = 1$$

et:

$$\alpha_{n+1}'' - \frac{1}{R-x}\alpha_{n+1}' = \alpha_n$$
$$\alpha_{n+1}'(0) = 0, \quad \alpha_{n+1}(0) = 0.$$

On trouve après un calcul élémentaire que $\alpha_0 = 1$ et : $\alpha_{n+1} = \int_0^x (R-\xi)\ln\left(\frac{R-\xi}{R-x}\right)\alpha_n(\xi)d\xi$

étape 4 et 5: Densité et synthèse de la loi de commande.

Nous savons, d'après les résultats des sections 4.2 et 4.3 qu'étant donné $y \in G_\sigma([0,T])$, où $0 \leq \sigma \leq 2$, $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n y(t)}{dt^n}\alpha_n(x)$ est une trajectoire de notre système dans $G^{1,\sigma}([0,1]\times[0,T])$, avec la loi de commande théorique c d'expression

$$c(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^k y(t)}{dt^k}\alpha_k(R_1)$$

et que le système est approximativement commandable dans $^2(0,1)$ sur ce type de trajectoires.

Afin de conduire le système de l'état de repos initial u_0 à l'état de repos final u_T, nous prenons pour y la fonction:

$$y(t) = \begin{cases} c_0 & \text{if t} \leq 0, \\ c_0 + (c_T - c_0)\dfrac{\int_0^t e^{\frac{k}{(\tau(T-\tau))^k}}d\tau}{\int_0^T e^{\frac{k}{(\tau(T-\tau))^k}}d\tau} & \text{if } 0 < \text{t} \leq \text{T}, \\ c_T & \text{sinon.} \end{cases}$$

La loi de commande réellement utilisée $\tilde{c}$ sera:

$$\tilde{u}(t) = \sum_{k=0}^{K} \frac{d^k y(t)}{dt^k}\alpha_k(R_1)$$

où K est choisi de telle sorte que $|u(t) - \tilde{u}(t)|$ soit petite sur l'intervalle [0,T].

5.4.2. Simulations. Les simulations présentées dans ce paragraphe, comme toutes les simulations présentées dans cet ouvrage, sont obtenues de la façon suivante:

la loi de commande est d'abord générée, en effectuant les calculs exposés ci-dessus. Elle est ensuite injectée dans un modèle semi-discrétisé différences finies en espace/continu en temps; le calcul de la trajectoire du système se fait en utilisant un schéma d'intégration numérique de systèmes d'équation différentielles ordinaires à pas variables.

Le calcul de la loi de commande et celui de la trajectoire du système sont donc indépendants, et la simulation n'utilise pas la mise sous forme de brunovsky du système.

5.4.3. Loi de commande Gevrey 1.5. Nous montrons des résultats de simulations obtenus avec les valeurs de paramètres suivantes: $R = 2cm.$, $R_0 = 1cm.$, $T = 1s.$, $u_0 = 25$ and $u_T = 30$.

Nous avons utilisé une fonction Gevrey d'ordre 1.5. La loi de commande est à l'ordre $K = 10$. La figure 5 montre le comportement en température de l'anneau. La stabilisation est est pratique obtenue dès l'instant $T = 0.7s$. Par contre, ce

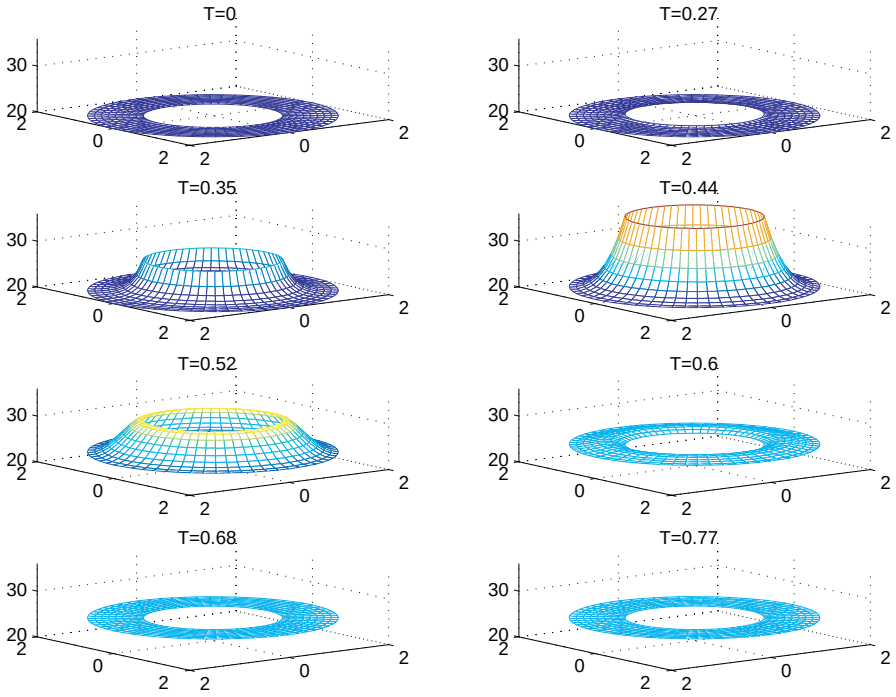


FIG. 5. *Planification de trajectoire avec une fonction Gevrey d'ordre* 1.5.

mode de commande génère un assez fort dépassement, comme on peut mieux le constater sur la figure 6, où sont tracées sur un même graphique la température de commande (température de la couronne interne) et la "sortie plate" (température de la couronne externe). D'une façon générale, et quel que soit l'ordre de la fonction Gevrey qui a servi à générer la loi de commande, on observe que plus T diminue, plus le dépassement augmente. Il y a donc une limite naturelle à T (qui, rappelons-le, peut théoriquement prendre des valeurs quelconques) qui est l'amplitude du dépassement autorisée pour le système.

5.4.4. Loi de commande Gevrey 2. Les résultats de simulations qui suivent sont obtenus avec les valeurs de paramètres suivantes: $R = 2cm.$, $R_0 = 1cm.$, $T = 0.8s.$, $u_0 = 25$ and $u_T = 30$.

Nous avons utilisé pour la génération de la loi de commande une fonction Gevrey d'ordre 2. La loi de commande est tronquée à l'ordre $K = 10$. On remarque que la trajectoire en température du système obtenue avec cette commande présente un

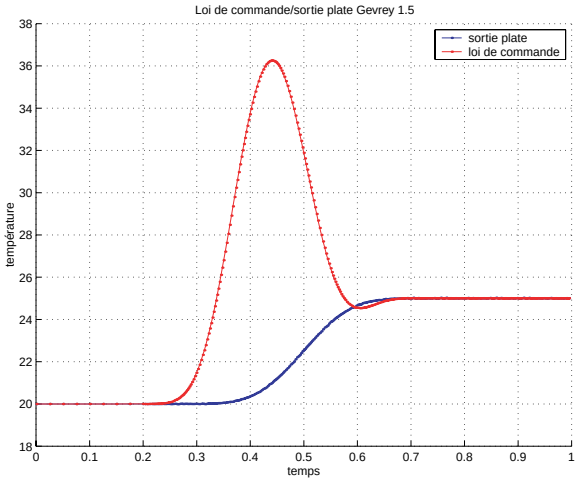


FIG. 6. *Planification de trajectoire avec une fonction Gevrey d'ordre* 1.5.

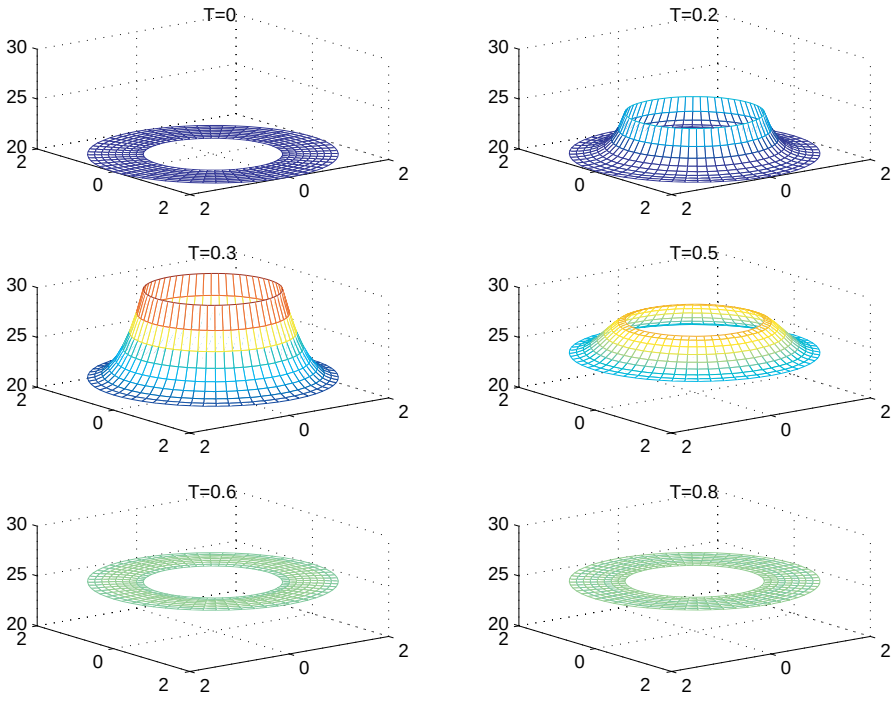


FIG. 7. *Planification de trajectoire avec une fonction Gevrey d'ordre* 2.

dépassement nettement moins important qu'avec une loi de commande générée par une fonction Gevrey 1.5, comme on peut le voir sur la figure 8.

De plus, il est possible ici de réaliser une simulation présentant un dépassement raisonnable sur un horizon de temps de $0.8s.$, alors qu'avec une loi de commande Gevrey 1.5, on observe pour cet horizon de temps un dépassement très important. La figure 9 compare la réponse du système (température mesurée en $x = 0$) à un

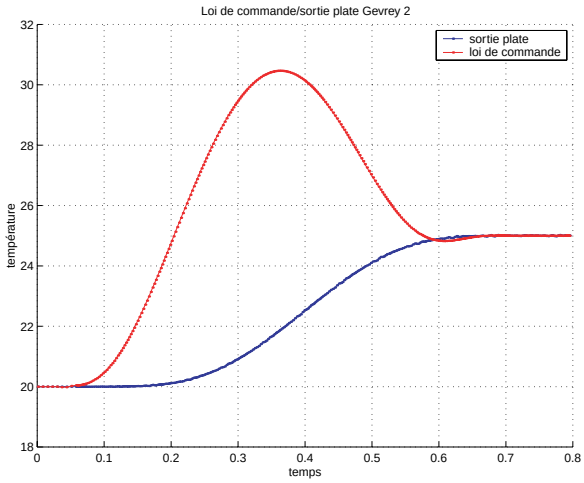


FIG. 8. *Loi de commande générée avec une fonction Gevrey d'ordre* 2.

échelon de cinq degrés à la réponse à la commande Gevrey-2. Il faut environ $3s.$ pour atteindre l'état de repos final, alors qu'avec la commande Gevrey 2, la convergence est obtenue en moins de $0.8s$.

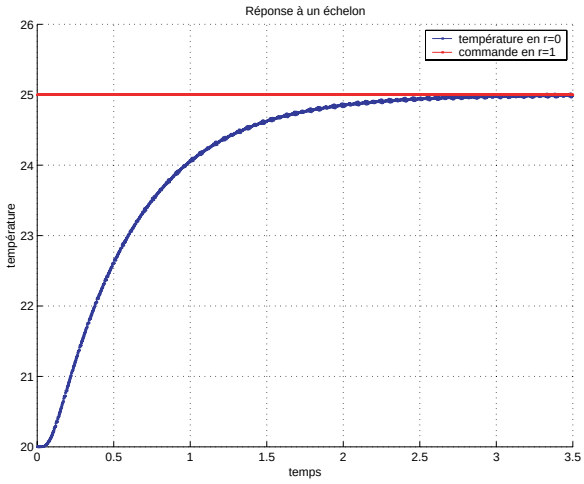


FIG. 9. *Réponse à un échelon.*

5.5. Même exemple avec commande par un réservoir de chaleur

Il s'agit du problème suivant:

$$\begin{aligned} &\partial_t u = \frac{1}{r}\partial_r u + \partial_{rr} u \\ &\partial_r u(R,t) = 0 \\ &u(R_0,t) + k\partial_r u(R_0,t) = c(t), \end{aligned} \tag{5.5.1}$$

qui devient, après avoir effectué comme précédemment le changement de variable $x = R - r$,et avoir posé $R_1 = R - R_0$:

$$\begin{aligned} &\partial_t u = -\frac{1}{R-x}\partial_x u + \partial_{xx} u \\ &\partial_x u(0,t) = 0 \\ &u(R_1,t) - k\partial_x u(R_1,t) = c(t) \end{aligned} \tag{5.5.2}$$

Le système 5.5.2 se transforme en 5.4.2 par bouclage sur les termes de bords, donc il est plat, de sortie plate $y(t) = u(0,t)$, et la paramétrisation plate de Brunovsky du système est:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n y(t)}{dt^n} \alpha_n(x)$$

avec la loi de commande théorique c d'expression

$$c(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^k y(t)}{dt^k} (\alpha_k(R_1) - k\alpha_k'(R_1))$$

5.6. Synthèse de loi de commandes par sommation au plus petit terme

Nous mentionnons ici un résultat curieux, et encore inexpliqué, obtenu en simulation sur plusieurs exemples, dont l'exemple 1.3. C'est la simulation de cet exemple qui est présentée ici. Nous avons utilisé pour la synthèse de la loi de commande des-

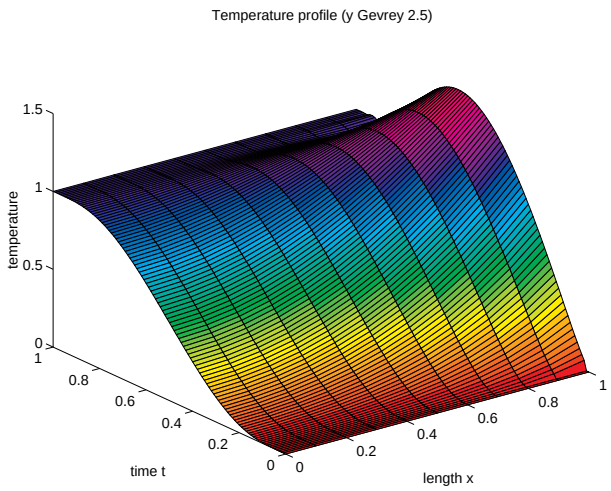


FIG. 10. *Planification de trajectoire à partir d'une fonction Gevrey d'ordre* 2.5.

tinée à la planification de trajectoire arrêt arrêt entre 0 et 1 la fonction

$$y(t) := \Phi_{\frac{2}{3}}\left(\frac{t}{T}\right),$$

qui est Gevrey d'ordre $\frac{5}{2}$ sur $[0,T]$, et analytique sur $]0,T[$.

La loi de commande théorique est alors

$$u(t) := \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{y^{(i)}(t)}{(2i)!}, \quad t \in [0,T],$$

et la solution formelle du problème est

$$\theta(x,t) := \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{y^{(i)}(t)x^{2i}}{(2i)!}$$

Notons que nous n'avons plus la convergence normale de la série sur $[0,T] \times [0,1]$, mais que, à cause de l'analyticité de y sur $]0,T[$, nous avons la convergence uniforme sur les compacts de $]0,T[\times[0,1]$ de la série qui définit θ, vers une solution analytique en x. Toutefois, il est clair à cause des propriétés Gevrey de y que cette convergence sera très mauvaise, avec des phases transitoires qui semblent diverger, ce qui est extrêmement gênant pour les calculs.

Or, en général, ce genre de série divergente ou mal convergente semble converger très vite dans un premier temps, puis diverge ensuite très vite pour éventuellement reconverger après sommation d'un très grand nombre de termes. Le fait d'évaluer la somme de la série en la tronquant à sa partie "convergente", c'est à dire d'effectuer une "sommation au plus petit terme", est en général très efficace numériquement and et conduit à des erreurs exponentiellement petites. On pourra consulter [**48**] pour une étude détaillée à ce sujet, d'où nous tirons le résultat suivant: si nous supposons que x est petit d'ordre $\epsilon > 0$, des estimations simples qui reposent sur la formule de Stirling montrent que lorsque le nombre de termes n est convenablement choisi (typiquement: $n \approx 1/(A\epsilon)^{1/\beta}$), nous avons lorsque $a_i(t) \sim C^i(i!)^\beta$ uniformément en t sur $[0,T]$ une estimation du type

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,L]} \left|\theta(x,t) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)\frac{x^i}{i!}\right| & \\ &\leq C(2\pi)^{1/\beta}\exp(-\beta n) \\ &\sim C(2\pi)^{1/\beta}\exp\left(\frac{-\beta}{(A\epsilon)^{1/\beta}}\right).\end{aligned}$$

La simulation effectuée (sans justification théorique aucune) montre la planification de trajectoire du profil de température uniforme $\theta = 0$ at $t = 0$ au profil uniforme $\theta = 1$ at $t = 1$, en utilisant y, comme ci-dessus, c'est à dire une fonction Gevrey d'ordre $\alpha = 5/2 > 2$. La loi de commande en boucle ouverte est obtenue en effectuant à chaque instant t une sorte de "sommation au plus petit terme",

$$\tilde{u}(t) = \sum_{i=1}^{n_t} \frac{\Phi_{2/3}^{(i)}(t)}{(2i)!},$$

où n_t est défini par

$$\left|\frac{\Phi_\gamma^{(n_t)}(t)}{(2n_t)!}\right| = \min_i \left|\frac{\Phi_\gamma^{(i)}(t)}{(2i)!}\right|.$$

La figure 10 montre l'évolution de la température. Les résultats obtenus semblent numériquement corrects, puisque on observe une bosse beaucoup moins importante dans l'allure de la loi de commande (en $x = 1$) que ce qu'on obtenait avec la loi de commande convergente synthétisée à partir d'une fonction Gevrey d'ordre 2 (voir figure 3). Le maximum est d'environ 1.4, à comparer avec la valeur 2.0 obtenue dans le cas de la commande Gevrey d'ordre 2. Il semble donc que la sommation au plus petit terme agisse comme un lissage de la loi de commande, toutefois difficile à interpréter théoriquement.

CHAPITRE 6

Un exemple d'équation linéaire d'ordre > 2, de dimension 1 en espace

6.1. Equation de Korteweg-deVries linéaire

Nous nous intéressons ici à l' équation aux dérivées partielles d'évolution, linéaire à coefficients constants, définie sur [0,1] en espace avec conditions aux bords

$$\partial_t u = -\partial_{xxx} u - \partial_x u \tag{6.1.1}$$

$$u(0,t) = 0 \tag{6.1.2}$$

$$u(1,t) = 0 \tag{6.1.3}$$

$$\partial_x u(1,t) = c(t) \tag{6.1.4}$$

Cette équation (équation de Korteweg-De Vries linéaire) a été étudiée de façon approfondie dans [**50**], où la commandabilité exacte L^2 a été démontrée, de même que la commandabilité exacte de l'équation de Korteweg-de Vries non linéaire mono dimensionnelle.

Nous cherchons, en utilisant la même démarche que celle qui a été décrite pour l'équation de diffusion linéaire, à prouver la platitude du système 6.1.1-6.1.4. Nous allons donc procéder par les mêmes étapes.

6.2. Le problème est bien posé.

Nous nous assurons qu'il s'agit d'un problème à commande au bord bien posé, au sens de la définition 2.2.1.

Considérons donc l'opérateur E défini par:

$$\begin{aligned} E:\ \mathcal{D}(E) &\to\ L^2(0,1) \\ f &\mapsto\ -f''' - f' \end{aligned}$$

où on a posé

$$\mathcal{D}(E) = \{f \in H^3(0,1)\ /\ f(0) = f(1) = 0,\ f'(1) = 0\}$$

La propriété suivante est vraie:

Propriété 6.2.1. *L'opérateur E est le générateur d'un semi-groupe continu de contractions.*

Démonstration. Ce résultat sera une conséquence immédiate du théorème B.3.2 de l'annexe B, dès que nous aurons prouvé que E est maximal dissipatif.

Or

$$\begin{aligned}\forall f \in \mathcal{D}(E),\, \mathcal{R}e(< E(f), f >) &= \mathcal{R}e(-\int_0^1 f'''\bar{f}dx - \int_0^1 f'\bar{f}dx)\\ &= \mathcal{R}e(\int_0^1 f''\bar{f}'dx)\\ &= -\frac{\|f'(0)\|^2}{2}\\ &\leq 0,\end{aligned}$$

ce qui prouve que E est dissipatif.

Soient λ_1,λ_2 et λ_3 les trois racines (distinctes) de l'équation : $X^3 + X + 1 = 0$.

On vérifie sans peine que les trois fonctions

$$e_3(x) = \frac{e^{\lambda_1 x}}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)} + \frac{e^{\lambda_2 x}}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)} + \frac{e^{\lambda_3 x}}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}$$
$$e_2(x) = \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 x}}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)} + \frac{\lambda_2 e^{\lambda_2 x}}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)} + \frac{\lambda_3 e^{\lambda_3 x}}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}$$
$$e_1(x) = \frac{(\lambda_1^2+1) e^{\lambda_1 x}}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)} + \frac{(\lambda_2^2+1) e^{\lambda_2 x}}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)} + \frac{(\lambda_3^2+1) e^{\lambda_3 x}}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}$$

forment un système de solutions fondamentales en zéro de $f''' + f' + f = 0$.

Donc pour tout v de $L^2(0,1)$, la solution générale de $f''' + f' + f = v$ est donnée par

$$f(x) = \int_0^x e_3(x-\xi)v(\xi)d\xi + ae_3(x) + be_2(x) \tag{6.2.1}$$

La fonction f ainsi définie est dans $H^3(0,1)$ et vérifie $f(0) = 0$; pour que f soit dans $\mathcal{D}(E)$, il faut que a et b soient solution de

$$ae_3(1) + be_2(1) = -\int_0^1 e_3(1-\xi)v(\xi)d\xi$$
$$ae_2(1) + b(e_1(1) - 1) = -\int_0^1 e_2(1-\xi)v(\xi)d\xi$$

Si $D = e_3(1)(e_1(1) - 1) - e_2(1)^2 \neq 0$, on peut calculer a et b dont l'expression est

$$a = \frac{-(e_1(1)-1)\int_0^1 e_3(1-\xi)v(\xi)d\xi + e_2(1)\int_0^1 e_2(1-\xi)v(\xi)d\xi}{D}$$
$$b = \frac{-e_3(1)\int_0^1 e_2(1-\xi)v(\xi)d\xi + e_2(1)\int_0^1 e_3(1-\xi)v(\xi)d\xi}{D}$$

de façon à ce que 6.2.1 définisse f dans $\mathcal{D}(E)$. f vérifie alors $(I - E)(f) = v$.

Nous en déduisons que $I - E$ est surjectif, ce qui prouve la maximalité de E. Il en résulte la propriété annoncée. □

Il nous reste donc à montrer que

LEMME 6.2.1. *La quantité $D = e_3(1)(e_1(1) - 1) - e_2(1)^2$ n'est pas nulle.*

DÉMONSTRATION. Posons

$$Q = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3) \neq 0$$

alors nous avons

$$\begin{aligned}
Qe_3(1) &= e^{\lambda_1}(\lambda_2-\lambda_3)+e^{\lambda_2}(\lambda_3-\lambda_1)+e^{\lambda_3}(\lambda_1-\lambda_2)\\
Qe_2(1) &= \lambda_1 e^{\lambda_1}(\lambda_2-\lambda_3)+\lambda_2 e^{\lambda_2}(\lambda_3-\lambda_1)+\lambda_3 e^{\lambda_3}(\lambda_1-\lambda_2)\\
Q(e_1(1)-1) &= \lambda_1^2 e^{\lambda_1}(\lambda_2-\lambda_3)+\lambda_2^2 e^{\lambda_2}(\lambda_3-\lambda_1)+\lambda_3^2 e^{\lambda_3}(\lambda_1-\lambda_2),
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
Q^2D &= \left(\lambda_1^2 e^{\lambda_1}(\lambda_2-\lambda_3)+\lambda_2^2 e^{\lambda_2}(\lambda_3-\lambda_1)+\lambda_3^2 e^{\lambda_3}(\lambda_1-\lambda_2)\right)\\
&\quad\times\left(e^{\lambda_1}(\lambda_2-\lambda_3)+e^{\lambda_2}(\lambda_3-\lambda_1)+e^{\lambda_3}(\lambda_1-\lambda_2)\right)\\
&\quad-\left(\lambda_1 e^{\lambda_1}(\lambda_2-\lambda_3)+\lambda_2 e^{\lambda_2}(\lambda_3-\lambda_1)+\lambda_3 e^{\lambda_3}(\lambda_1-\lambda_2)\right)^2\\
&= (\lambda_1^2+\lambda_2^2-2\lambda_1\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_1)e^{\lambda_1+\lambda_2}\\
&\quad+(\lambda_1^2+\lambda_3^2-2\lambda_1\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_2)e^{\lambda_1+\lambda_3}\\
&\quad+(\lambda_2^2+\lambda_3^2-2\lambda_2\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_1-\lambda_2)e^{\lambda_2+\lambda_3}\\
&= Q\left((\lambda_2-\lambda_1)e^{-\lambda_3}+(\lambda_1-\lambda_3)e^{-\lambda_2}+(\lambda_3-\lambda_2)e^{-\lambda_1}\right).
\end{aligned}$$

Or, les racines de $X^3+X+1=0$ sont de la forme

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= k\\
\lambda_2 &= \overline{\lambda}_3 = -\frac{k}{2}+il,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
QD &= \left((-\frac{3k}{2}+il)e^{\frac{k}{2}+il}-(-\frac{3k}{2}-il)e^{\frac{k}{2}-il}-2ile^{-k}\right)\\
&= 2i\left(e^{\frac{k}{2}}(-\frac{3k\sin(l)}{2}+l\cos(l))-le^{-k}\right)
\end{aligned}$$

On vérifie sans mal en remplaçant k et l par leurs valeurs approchées que $D\neq 0$ □

De plus, pour toute fonction v de $L^2(0,1)$, on vérifie que

$$\begin{aligned}
f(x) = &-\int_0^x(1-\cos(x-u))v(u)du+\frac{\cos(1-x)-\cos(1)}{1-\cos(1)}\int_0^1(1-\cos(1-u))v(u)du\\
&+\frac{\sin(1)-\sin(x)+\sin(x-1)}{1-\cos(1)}\int_0^1(\sin(1-u))v(u)du
\end{aligned}$$

est dans $\mathcal{D}(E)$, et qu'elle vérifie $E(f)=v$. E est donc inversible, et son inverse est l'opérateur intégral compact de $L^2(0,1)$ dont l'expression est donné ci-dessus.

La solution de

$$\begin{aligned}
-B'''-B' &= 0\\
B(0)=B(1) &= 0\\
B'(1) &= 1
\end{aligned}$$

est donc unique, et c'est la fonction

$$B(x)=\frac{\sin(1-x)+\sin(x)-\sin(1)}{(\cos(1)-1)}$$

.

Le problème est donc bien posé au sens de la définition 2.2.1.

6.3. Bouclage par les termes de bords

Nous cherchons dans l'orbite de E sous l'action des bouclages par des termes de bord un opérateur A dont nous puissions affirmer sans trop de calculs qu'il est Riesz- spectral inversible.

Etant donné que les deux équations de contrainte du problème, c'est à dire 6.1.2 et 6.1.3, forment un ensemble invariant lorsqu'on permute 0 et 1 il semble naturel d'adjoindre au problème une équation de commande elle-même symétrique en 0 et 1, qui est:

$$u'(0) = u'(1)$$

On obtient alors l'opérateur A défini par:

$$\begin{aligned} A:\ \mathcal{D}(A) &\to\ L^2(0,1) \\ f &\mapsto\ -f''' - f' \end{aligned}$$

où on a posé

$$\mathcal{D}(A) = \{f \in H^3(0,1)\ /\ f(0) = f(1) = 0,\ f'(0) = f'(1)\}$$

Soit K l'operateur intégral de $L^2[0,1]$ dans $L^2[0,1]$ défini par :

$$K(u) = \int_0^1 h(x,\xi)u(\xi)d\xi,$$

ou $h \in L^2([0,1] \times [0,1]$ et est définie pour $0 \leq \xi \leq x$ par :

$$h(x,\xi) = \frac{2}{\sin(\frac{1}{2})}(\sin(\frac{\xi}{2})\sin(\frac{\xi - x}{2})\sin(\frac{1-x}{2}))$$

et pour $x \leq \xi \leq 1$ par :

$$h(x,\xi) = \frac{2}{\sin(\frac{1}{2})}(\sin(\frac{x}{2})\sin(\frac{\xi - x}{2})\sin(\frac{1-\xi}{2}))$$

On vérifie que si $v = K(u)$, alors $v \in H_0^3[0,1]$ et $-v''' - v' = u$. De plus, on a $v'(0) = v'(1)$. Enfin, h est réelle et vérifie : $h(\xi,x) = -h(x,\xi)$. Il en découle que:

PROPRIÉTÉ 6.3.1. *L' opérateur K est l'inverse de A. Il est compact et anti-symétrique, donc normal.*

Les valeurs propres de A forment donc une base Hilbertienne de $L^2(0,1)$, et ne présentent pas de point d'accumulation. Pour prouver que A est Riesz-spectral, il nous reste donc à prouver que

PROPRIÉTÉ 6.3.2. *Les valeurs propres de A sont simples.*

DÉMONSTRATION. Soit λ une valeur propre de A, nous notons λ_1,λ_2 et λ_3 les racines de $X^3 + X + \lambda = 0$.

Nous commençons par montrer que ces racines sont distinctes.

Supposons en effet que $X^3 + X + \lambda = 0$ ait une racine double. Cela signifierait qu' on a à la fois $X^3 + X + \lambda = 0$ et $3X^2 + 1 = 0$, d'où $\lambda = \pm\frac{i}{3\sqrt{3}}$. On note λ_1 la racine double, et $\lambda_2 = -2\lambda_1$ l'autre.

Les fonctions

$$f_1 = e^{\lambda_1 x}$$
$$f_2 = xe^{\lambda_1 x}$$
$$f_3 = e^{\lambda_2 x}$$

forment un système de solutions indépendantes en zéro de l'équation $f''' + f' + \lambda f = 0$. Toute fonction propre ϕ associée à λ doit donc vérifier: $\phi = af_1 + bf_2 + cf_3$, avec a,b et c solutions de

$$a + c = 0$$
$$ae^{\lambda_1} + be^{\lambda_1} + ce^{\lambda_2} = 0$$
$$a\lambda_1(e^{\lambda_1} - 1) + b((1 + \lambda_1)e^{\lambda_1} - 1) + c\lambda_2(e^{\lambda_2} - 1) = 0,$$

soit

$$c = -a \tag{6.3.1}$$
$$a(e^{3\lambda_1} - 1) + be^{3\lambda_1} = 0 \tag{6.3.2}$$
$$a\lambda_1(e^{3\lambda_1} + e^{2\lambda_1} + 2) + b((1 + \lambda_1)e^{3\lambda_1} - e^{2\lambda_1}) = 0, \tag{6.3.3}$$

Or le déterminant du système formé par les équation (6.3.2) et (6.3.3) est non nul, puisque

$$(e^{3\lambda_1} - 1)((1 + \lambda_1)e^{3\lambda_1} - e^{2\lambda_1}) - \lambda_1(e^{3\lambda_1} + e^{2\lambda_1} + 2)e^{3\lambda_1} \neq 0$$

pour $\lambda_1 = \pm\frac{i}{\sqrt{3}}$.

Donc λ ne peut pas être une valeur propre de A.

Les nombres λ_1,λ_2 et λ_3 sont donc distincts, et les fonctions

$$h_1(x) = e^{\lambda_1 x}$$
$$h_2(x) = e^{\lambda_2 x}$$
$$h_3(x) = e^{\lambda_3 x}$$

forment un système de solutions indépendantes en zéro de l'équation $f''' + f' + \lambda f = 0$. Toute fonction propre ϕ associée à λ doit donc vérifier: $\phi = ah_1 + bh_2 + ch_3$, avec a,b et c solutions de

$$a + b + c = 0$$
$$ae^{\lambda_1} + be^{\lambda_2} + ce^{\lambda_3} = 0$$
$$a\lambda_1(e^{\lambda_1} - 1) + b\lambda_2(e^{\lambda_2} - 1) + c\lambda_3(e^{\lambda_3} - 1) = 0,$$

Le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{\lambda_1} & e^{\lambda_2} & e^{\lambda_3} \\ \lambda_1(e^{\lambda_1} - 1) & \lambda_2(e^{\lambda_2} - 1) & \lambda_3(e^{\lambda_3} - 1) \end{pmatrix} \tag{6.3.4}$$

détermine la taille du sous espace propre associé à ϕ: le rang doit être égal à 2 pour que la valeur propre soit simple. Mais en calculant les mineurs d'ordre 2 associés à la troisième ligne, on trouve qu'ils ne s'annulent simultaément que lorsque $e^{\lambda_1} = e^{\lambda_2} = e^{\lambda_3}$,mais si c'est le cas, les mineurs associés à la deuxième ligne ne s'annulent simultanément que si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, ce qui est impossible. D'où la simplicité de la valeur propre λ. □

L'opérateur A est donc Riesz-spectral antisymétrique inversible.

La fonction B associée à A est la fonction

$$B(x) = \frac{\sin(1-x)+\sin(x)-\sin(1)}{1-\cos(1)}. \tag{6.3.5}$$

6.4. Paramétrisation de Brunovsky: étude du déterminant de Fredholm

Si on note $e_1(x,\lambda)$,$e_2(x,\lambda)$ et $e_3(x,\lambda)$ le système de solution fondamentales en zéro de

$$f''' + f' + \lambda f = 0,$$

nous pouvons, comme au chapitre 2, donner un développement en série entière de λ de ces fonctions.

Pour cela, nous commençons par une majoration des itérés de l'opérateur de Volterra en zéro associé à (6.4)

PROPRIÉTÉ 6.4.1. *On note V_0 l'opérateur de Volterra en zéro associé à* (6.4)*, alors*

$$\begin{aligned}
&\exists (M,Q) \in \mathbb{R}^{+\star} \ / \\
&\quad \forall x \in [0,1] \quad \left|V_0^i(e_2(.,0))(x)\right| \leq M\frac{x^{3i}}{(3i)!} \\
&\qquad\qquad \left|V_0^i(e_2(.,0))'(x)\right| \leq M\frac{x^{3i-1}}{(3i-1)!} \\
&\qquad\qquad \left|V_0^i(e_2(.,0))''(x)\right| \leq M\frac{x^{3i-2}}{(3i-2)!} \\
&\qquad\qquad \left|V_0^i(e_3(.,0))(x)\right| \leq M\frac{x^{3i}}{(3i)!} \\
&\qquad\qquad \left|V_0^i(e_3(.,0))'(x)\right| \leq M\frac{x^{3i-1}}{(3i-1)!} \\
&\qquad\qquad \left|V_0^i(e_3(.,0))''(x)\right| \leq M\frac{x^{3i-2}}{(3i-2)!}
\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. L'opérateur V_0 est défini sur $L^2(0,1)$ par

$$f = V_0(v) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -f''' - f' = v \\ f(0) = f'(0) = f''(0) = 0 \end{array} \right.$$

Après calcul, on trouve que son expression intégrale est

$$V_0(v) = -\int_0^x (1-\cos(x-u))v(u)du.$$

Son noyau admet la majoration suivante

$$\forall (x,u) \in [0,1]\times[0,1], |\cos(x-u)-1| \leq \int_0^{|x-u|} |\sin(\xi)|\, d\xi = \frac{(x-u)^2}{2}$$

Prenons $M = \sup_{x\in[0,1]}(|e_1(x,0)|, |e_2(x,0)|)$, et $Q = 1$. Alors:

$\left|V_0^0(e_2(.,0))(x)\right| \leq M$

$\left|V_0^0(e_3(.,0))(x)\right| \leq M$

et par récurrence,

$$\text{si } \left|V_0^i(e_2(.,0))(x)\right| \leq M\frac{x^{3i}}{(3i)!} \text{ alors } \left|V_0^{i+1}(e_2(.,0))(x)\right| \leq M\int_0^x \frac{(x-u)^2}{2}\frac{u^{3i}}{(3i)!}du \leq M\frac{x^{3i+3}}{(3i+3)!}$$

Donc à tout rang $i \geq 0$,

$$\forall x \in [0,1] \quad \left|V_0^i(e_2(.,0))(x)\right| \leq M\frac{x^{3i}}{(3i)!}.$$

Nous injectons cette majoration dans l'expression de $V_0^i(e_2(.,0))'(x)$:

$$\begin{aligned}\forall x \in [0,1] \quad \left|V_0^i(e_2(.,0))'(x)\right| &= \left|-\int_0^x \sin(x-u)V_0^{i-1}(e_2(.,0))(u)du\right| \\ &\leq M\int_0^x (x-u)\frac{u^{3(i-1)}}{(3(i-1))!}du \\ &\leq M\frac{x^{3i-1}}{(3i-1)!}.\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\forall x \in [0,1] \quad \left|V_0^i(e_2(.,0))''(x)\right| &= \left|-\int_0^x \cos(x-u)V_0^{i-1}(e_2(.,0))(u)du\right| \\ &\leq M\int_0^x \frac{u^{3(i-1)}}{(3(i-1))!}du \\ &\leq M\frac{x^{3i-2}}{(3i-2)!}.\end{aligned}$$

Les mêmes majorations sont évidemment valables pour e_3. □

PROPRIÉTÉ 6.4.2. *Les développements en série*

$$\begin{aligned}e_2(x,\lambda) &= \sum_{i=0}^{\infty} V_0^i(e_2(.,0))(x)\lambda^i \\ e_2'(x,\lambda) &= \sum_{i=0}^{\infty} V_0^i(e_2(.,0))'(x)\lambda^i \\ e_3(x,\lambda) &= \sum_{i=0}^{\infty} V_0^i(e_3(.,0))(x)\lambda^i \\ e_3'(x,\lambda) &= \sum_{i=0}^{\infty} V_0^i(e_3(.,0))'(x)\lambda^i\end{aligned}$$

sont vérifiés, et définissent des fonctions entières de λ d'ordre de Weierstrass $\leq \frac{1}{3}$.

DÉMONSTRATION. Grâce à la propriété 6.4.1, les séries de fonctions ci-dessus sont normalement convergentes en x sur [0,1], et définissent des fonction entières d'ordre de Weierstrass $\leq \frac{1}{3}$. □

Or, si λ est une valeur propre de A (où de K), nous avons

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ e_1(1,\lambda) & e_2(1,\lambda) & e_3(1,\lambda) \\ e_1'(1,\lambda) & e_2'(1,\lambda)-1 & e_3'(1,\lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

D'où l'expression du déterminant de Fredholm de K (à multiplication par une constante non nulle près):

$$D_A(\lambda) = e_2(1,\lambda)e_3'(1,\lambda) - e_3(1,\lambda)e_2'(1,\lambda) + e_3(1,\lambda)$$

donc, en utilisant la propriété 6.4.2, nous obtenons

PROPRIÉTÉ 6.4.3. *L'expression de développement en série du déterminant de Fredholm de K est*

$$D_A(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\left(\sum_{k=0}^{i} V_0^k(e_2(.,0))(1) V_0^{i-k}(e_3(.,0))'(1) - V_0^k(e_3(.,0))(1) V_0^{i-k}(e_2(.,0))'(1) \right) + V_0^i(e_3(.,0))(1) \right) \lambda^i$$

et D_A est une fonction entière d'ordre de Weierstrass $\leq \frac{1}{3}$.

De plus, les coefficients

$$a_i = \left(\sum_{k=0}^{i} V_0^k(e_2(.,0))(1) V_0^{i-k}(e_3(.,0))'(1) - V_0^k(e_3(.,0))(1) V_0^{i-k}(e_2(.,0))'(1) \right) + V_0^i(e_3(.,0))(1)$$

sont tels que:

$$|a_i| \leq 2M \frac{3^i}{(3i)!}$$

DÉMONSTRATION. Comme les produits et sommes de fonctions d'ordre $\leq \frac{1}{3}$ sont eux mêmes d'ordre $\leq \frac{1}{3}$, le développement en série et le résultat sur l'ordre découlent immédiatement de la propriété 6.4.2. La majoration de a_i est une conséquence immédiate des majorations de la propriété 6.4.1. □

Nous construisons la famille de Brunovsky associée à A en faisant

$$\alpha_0 = a_0 B$$
$$\alpha_{i+1} = K(\alpha_i) + a_{i+1} B$$

6.5. Convergence des trajectoires formelles

Nous suivons la même démarche que dans la section 4.2.

6.5.1. Convergence "faible" des trajectoires formelles. Nous commençons par montrer la convergence "faible" des trajectoires formelles lorsque le paramètre y est une fonction d'ordre Gevrey convenable.

PROPRIÉTÉ 6.5.1. *Lorsque le paramètre y est dans $G^\sigma(0,T)$, avec $\sigma \leq 3$, alors la trajectoire formelle*

$$u(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} y^{(i)}(t)\alpha_i(x)$$
$$e(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i y^{(i)}(t)$$

converge vers une fonction de $C^\infty([0,T],L^2(0,1))$.

DÉMONSTRATION. Soit $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne formée de vecteurs propres de A. Nous notons λ_i les valeurs propres de A, et $\mu_i = \frac{1}{\lambda_i}$ celles de K. Comme A, ainsi que K sont tous deux antisymétriques, ces valeurs propres sont imaginaires pures et conjuguées deux à deux.

Nous pouvons donc indicer les valeurs propres de façon à ce que à tout indice $i \in \mathbb{N}$ soit associé les deux valeurs propres λ_i et $\bar{\lambda}_i = -\lambda_i$, où les valeurs $|\lambda_i|$ ont été ordonnées de telle sorte que

$$|\lambda_i| < |\lambda_{i+1}|$$

Grçace à la propriété 6.4.3, nous pouvons alors factoriser la fonction D_A, et nous obtenons le produit normalement convergent

$$D_A(\lambda) = \prod_{i=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_i}\right)\left(1+\frac{\lambda}{\lambda_i}\right) = \prod_{i=0}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda^2}{|\lambda_i|^2}\right)$$

D'où nous déduisons par identification (le produit infini étant absolument convergeant), que tous les coefficients a_i sont nuls lorsque I est impair, et que

$$a_2 = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_i^2|} \tag{6.5.1}$$

$$a_4 = \sum_{i<j}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_i^2|\,|\lambda_j^2|} \tag{6.5.2}$$

$$\vdots$$

$$a_{2l} = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_{l-1}<i_l}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_{i_1}|^2\,|\lambda_{i_2}|^2\ldots|\lambda_{i_{l-1}}|^2\,|\lambda_{i_l}|^2} \tag{6.5.3}$$

(6.5.4)

Projetons les α_i la base des u_i. Nous obtenons:

$$\alpha_0 = \sum_{k=0}^{\infty} x_k u_k$$

et par construction

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \mu_k^{n-i} \right) x_k u_k$$

D'où :

$$\begin{aligned} \|\alpha_n\| &= \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} a_{2i} \lambda_k^{2i} \right|^2 |\mu_k|^{2n} |x_k|^2} \\ &\leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \left(\left| \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} a_{2i} \lambda_k^{2i} \right| |\mu_k|^n \right) \|\alpha_0\| \end{aligned}$$

Or on reconnait dans l'expression $\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} a_{2i} \lambda_k^{2i}$ le dévelopement à l'ordre n de D_A. En utilisant les relations (6.5.1)-(6.5.3), nous obtenons:

$$\begin{aligned} &\forall k \in \mathbb{N}^\star, \\ \left|1 + a_2 \lambda_k^2\right| &= \left| 1 + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_k^2}{|\lambda_i^2|} \right| = \left| 1 - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|\lambda_k|^2}{|\lambda_i^2|} \right| \\ &\qquad \text{(car } \lambda_k \text{ est imaginaire pur)} \\ &= |\lambda_k|^2 \left| \sum_{i \neq k}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_i^2|} \right| \leq |\lambda_k|^2 |a_2| \end{aligned}$$

de même : $\forall k \in \mathbb{N}^\star$,

$$\begin{aligned} \left|1 + a_2 \lambda_k^2 + a_4 \lambda_k^4\right| &= \left| - \sum_{i \neq k}^{\infty} \frac{|\lambda_k|^2}{|\lambda_i^2|} + \sum_{i_1 < i_2}^{\infty} \frac{|\lambda_k|^4}{\left|\lambda_{i_1}^2\right| \left|\lambda_{i_2}^2\right|} \right| \\ &= |\lambda_k|^4 \left| \sum_{\substack{i_1, i_2 \neq k \\ i_1 < i_2}}^{\infty} \frac{1}{\left|\lambda_{i_1}^2\right| \left|\lambda_{i_2}^2\right|} \right| \leq |\lambda_k|^4 |a_4| \end{aligned}$$

et par récurrence : $\forall (k,l) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$,

$$\left|1 + a_2 \lambda_k^2 + \ldots + a_{2l} \lambda_k^{2l}\right| = |\lambda_k|^{2l} \left| \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_l \neq k \\ i_1 < \ldots < i_l}}^{\infty} \frac{1}{\left|\lambda_{i_1}^2\right| \ldots \left|\lambda_{i_l}^2\right|} \right| \leq |\lambda_k|^{2l} |a_{2l}|$$

Nous en déduisons que, en posant $\epsilon = n \mod 2$, nous avons la majoration suivante :

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \left(\left| \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} a_{2i} \lambda_k^{2i} \right| |\mu_k|^n \right) \|\alpha_0\| \leq |\mu_k|^\epsilon \left| a_{2(\frac{n}{2})} \right|$$

et par conséquent:

$$\begin{aligned}\|\alpha_n\|_2 &\leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\left| \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} a_{2i}\lambda_k^{2i} \right| |\mu_k|^n \right) \|\alpha_0\| \\ &\leq |\mu_k|^\epsilon \left| a_{2(\frac{n}{2})} \right| \|\alpha_0\|_2\end{aligned}$$

Or la propriété 6.4.3 nous fournit une majoration de a_{2l} sous la forme :

$$|a_{2l}| \leq 2M \frac{9^l}{(6l)!}$$

d'où l'existence d'une constante C telle que:

$$\|\alpha_n\|_2 \leq C \frac{3^n}{(3n)!} \tag{6.5.5}$$

Lorsque y est dans $G^\sigma(0,T)$, avec $\sigma < 3$ la série

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\infty} \sup_{t\in[0,T]} \left| y^{(i)}(t) \right| \|\alpha_i\|_2 & \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{C} \frac{3^i \Gamma(1+\sigma i)}{R^i (3i)!}\end{aligned}$$

est convergente, ce qui prouve en appliquant le théorème de convergence dominée que la série

$$u(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} y^{(i)}(t)\alpha_i(x)$$

définit pour tout $t \in [0,T]$ une fonction de $L^2(0,1)$.

Lorsque y est dans $G^3(0,T)$, le résultat est encore vrai si le rayon R de l'estimation Gevrey pour y est supérieur strictement à 3.

Il en est de même pour toute les séries des dérivées en temps, ce qui achève la démonstration de la proposition. □

6.5.2. Convergence "forte" des trajectoires formelles. Nous montrons maintenant que cette solution "faible" est en fait une trajectoire au sens classique du système.

PROPRIÉTÉ 6.5.2. *Lorsque le paramètre y est dans $G^\sigma(0,T)$, avec $\sigma \leq 3$, alors la trajectoire formelle*

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \sum_{i=0}^{\infty} y^{(i)}(t)\alpha_i(x) \\ e(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i y^{(i)}(t)\end{aligned}$$

converge vers une fonction de $C^\infty([0,T],C^3(0,1))$.

Pour prouver ce résultat, il nous faut tout d'abord prouver deux lemmes techniques

LEMME 6.5.1. *Si f est une fonction continue sur* [0,1] *qui vérifie:*

$$f(x) = f(1-x)$$

alors $v = K(f)$ est une fonction continue sur [0,1] *qui vérifie:*

$$v(x) = -v(1-x)$$

De la même façon, si f est une fonction continue sur [0,1] *qui vérifie:*

$$f(x) = -f(1-x)$$

alors $v = K(f)$ est une fonction continue sur [0,1] *qui vérifie:*

$$v(x) = v(1-x)$$

DÉMONSTRATION. Supposons que f vérifie $f(x) = f(1-x)$, alors $v = K(f)$ vérifie

$$v'''(x) + v'(x) = -f(x)$$
$$v(0) = v(1) = 0, \quad v'(0) = v'(1)$$

Posons $g(x) = v(1-x)$. Nous avons $g'''(x) = -v'''(1-x)$ et $g'(x) = -v'(1-x)$, d'où

$$\begin{aligned} g'''(x) + g'(x) &= -v'''(1-x) - v'(1-x) \\ &= f(1-x) = f(x) \end{aligned}$$
$$g(0) = g(1) = 0, \quad g'(0) = -v'(1) = -v'(0) = g'(1)$$

Nous en déduisons que $g = K(-f)$, et donc que $v = -g$, ce qui est le résultat annoncé.

Le cas où f vérifie $f(x) = -f(1-x)$ se traite de façon tout à fait similaire. □

Nous en déduisons le deuxième lemme

LEMME 6.5.2. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a:*

$$\alpha_{2k}(x) = \alpha_{2k}(1-x)$$
$$\alpha_{2k+1}(x) = -\alpha_{2k+1}(1-x)$$

DÉMONSTRATION. Nous avons $\alpha_0 = a_0 B$, avec B, définie par l'expression 6.3.5, qui vérifie $B(x) = B(1-x)$. De plus,

$$\begin{aligned} \alpha_1(x) &= K(\alpha_0)(x) + a_1 B(x) \\ &= K(\alpha_0)(x) \quad \text{(car les } a_{2k+1} \text{ sont nuls)} \\ &= -K(\alpha_0)(1-x) \quad \text{(par le lemme 6.5.1)} \\ &= -\alpha_1(1-x), \end{aligned}$$

et par récurrence, si au rang k nous avons

$$\alpha_{2k}(x) = \alpha_{2k}(1-x)$$
$$\alpha_{2k+1}(x) = -\alpha_{2k+1}(1-x),$$

alors au rang $k+1$ nous aurons

$$\begin{aligned} \alpha_{2(k+1)}(x) &= K(\alpha_{2k+1})(x) + a_{2k} B(x) \\ &= K(\alpha_{2k+1})(1-x) + a_{2k} B(1-x) \quad \text{(par le lemme 6.5.1)} \\ &= \alpha_{2(k+1)}(1-x), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\alpha_{2k+3}(x) &= K(\alpha_{2(k+1)})(x) + a_{2k+3}B(x)\\ &= K(\alpha_{2(k+1)})(x) \quad \text{(car les } a_{2k+3} \text{ sont nuls)}\\ &= -K(\alpha_{2(k+1)})(1-x) \quad \text{(par le lemme 6.5.1)}\\ &= -\alpha_{2k+3}(1-x),\end{aligned}$$

□

Nous pouvons maintenant prouver la propriété 6.5.2.

DÉMONSTRATION. Posons $\beta_i = K(\alpha_{i-1})$, et $v_i = \beta_i'$.
Par définition de K, nous avons donc

$$\begin{aligned}&\beta_i''' + \beta_i' = -\alpha_{i-1}\\ &\beta_i(0) = \beta_i(1) = 0\\ &\beta_i'(0) = \beta_i'(1)\end{aligned}$$

De plus, en appliquant successivement les lemmes 6.5.2 et 6.5.1, nous obtenons que:

- si $i = 2k$, alors $\alpha_{i-1}(x) = -\alpha_{i-1}(1-x)$, donc $\beta_i(x) = \beta_i(1-x)$. D'où $\beta_i''(x) = \beta_i''(1-x)$, et en particulier $\beta_i''(0) = \beta_i''(1)$.
  v_i est donc la solution de

$$\begin{aligned}&v_i'' + v_i = -\alpha_{i-1}\\ &v_i(0) = v_i(1)\\ &v_i'(0) = v_i'(1)\end{aligned}$$

  Nous en déduisons que

$$v_i = -\int_0^1 h_1(x,\xi)\alpha_{i-1}(\xi)d\xi$$

  où h_1 est la fonction de Green du problème ci-dessus. h_1 est une fonction C^0 donc bornée de [0,1] × [0,1].
- si $i = 2k+1$, alors $\alpha_{i-1}(x) = \alpha_i(1-x)$, donc $\beta_i(x) = -\beta_i(1-x)$. D'où $\beta_i''(x) = -\beta_i''(1-x)$, et en particulier $\beta_i''(0) = -\beta_i''(1)$.
  v_i est donc la solution de

$$\begin{aligned}&v_i'' + v_i = -\alpha_{i-1}\\ &v_i(0) = v_i(1)\\ &v_i'(0) = -v_i'(1)\end{aligned}$$

  Nous en déduisons que

$$v_i = \int_0^1 h_2(x,\xi)\alpha_{i-1}(\xi)d\xi$$

  où h_2 est la fonction de Green du problème ci-dessus. h_2 est une fonction C^0 donc bornée de [0,1] × [0,1].

Comme h_1 et h_2 sont bornées, nous notons

$$L = \sup_{(x,\xi)\in[0,1]\times[0,1]} (|h_1(x,\xi)|, |h_2(x,\xi)|).$$

Nous obtenons alors

$$\forall i \in \mathbb{N}^\star, \forall x \in [0,1], \quad |v_i(x)| \leq L \|\alpha_{i-1}\|_2$$

D'où, en utilisant la majoration (6.5.5),

$$\forall i \in \mathbb{N}^\star, \forall x \in [0,1], \quad |v_i(x)| \leq LC\frac{3^i}{(3i)!}$$

Or nous avons

$$\begin{aligned}\alpha_i' &= (K(\alpha_{i-1}))' + a_i B' \\ &= v_i + a_i B'\end{aligned}$$

d'où

$$\forall x \in [0,1], \quad |\alpha_i'(x)| \leq LC\frac{3^i}{(3i)!} + \|B'\|_\infty 2M\frac{3^i}{(3i)!}$$

Lorsque y est dans $G^\sigma(0,T)$, avec $\sigma < 3$ la série

$$\sum_{i=0}^{\infty} y^{(i)}(t)\alpha_i'(x)$$

est donc normalement convergente sur $[0,1] \times [0,T]$.

Comme dans la section 4.2, nous observons alors que

$$\int_0^1 (1-x)\alpha_i'(x)dx = -\alpha_i(0) + \int_0^1 \alpha_i(x)dx$$

d'où

$$\begin{aligned}|\alpha_i(0)| &\leq \|\alpha_i'\|_\infty + \|\alpha_i\|_2 \\ &\leq C\frac{3^i}{(3i)!}\end{aligned}$$

pour une constante positive C convenablement choisie. Ceci prouve que la série

$$\sum_{i=0}^{\infty} y^{(i)}(t)\alpha_i(0)$$

est normalement convergente sur $[0,T]$, et en appliquant le théorème d'intégration des séries de fonctions uniformémént convergentes, que la série

$$u(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} y^{(i)}(t)\alpha_i(x)$$

converge uniformément (et même normalement) sur $[0,1] \times [0,T]$. Elle définit donc une fonction continûment dérivable en x.

Il nous reste à montrer la convergence normale sur $[0,1]$, uniformémént en t, des séries des dérivées secondes et troisièmes en x des $y^{(i)}(t)\alpha_i(x)$.

Nous commençons par la série des dérivées troisièmes; nous avons à tout rang $i > 0$:

$$\begin{aligned}\alpha_i''' &= v_i'' + a_i B''' \\ &= -v_i - \alpha_{i-1} + a_i B'''\end{aligned}$$

D'après ce qui précède, nous en tirons encore une majoration du type

$$\|\alpha_i'''\|_\infty \leq C\frac{3^{i-1}}{(3i-3)!},$$

ce qui assure la convergence normale de la série des dérivées troisièmes.

Comme ci-dessus, nous écrivons alors que:

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-x)^2\alpha_i'''(x)dx &= -\alpha_i''(0) + 2\int_0^1 (1-x)\alpha_i''(x)dx \\ &= -\alpha_i''(0) - 2\alpha_i'(0) + 2\int_0^1 \alpha_i'(x)dx\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}|\alpha_i''(0)| &\leq 4\,\|\alpha_i'\|_\infty + \|\alpha_i''\|_\infty \\ &\leq C\frac{3^{i-1}}{(3(i-1))!}\end{aligned}$$

pour une constante C convenablement choisie. Nous appliquons alors le théorème d'intégrations des séries uniformément convergentes, ce qui prouve finalement que la série des dérivées secondes en x converge uniformément et définit une fonction continue.

La trajectoire formelle $u(x,t)$ converge donc en une trajectoire classique trois fois dérivable en espace. □

6.6. Densité, commandabilité approchée

Comme il a été prouvé dans la section 4.3, la densité de la famille $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est acquise si nous avons

$$\forall i \in \mathbb{N}, < u_i, B > \neq 0$$

où $(u_i))_{i\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(0,1)$ formée de vecteurs propres de K.

Or, la fonction B étant à valeurs réelles, on a:

$$\begin{aligned}< u_i, B > &= \frac{1}{\lambda_i} < u_i''' + u_i', B > \\ &= \frac{1}{\lambda_i} u_i'(0)\end{aligned}$$

Nous devons donc, pour prouver la densité de la famille $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$, et donc la commandabilité plate approchée du système, prouver que

PROPRIÉTÉ 6.6.1. *Pour toute valeur propre λ_i de A, pour toute fonction propre ϕ_i associée à λ_i, on a $\phi_i'(0) = \phi_i'(1) \neq 0$.*

Pour prouver 6.6.1, nous allons prouver la propriété plus générale suivante

PROPRIÉTÉ 6.6.2. *Soit $L > 0$, alors il existe un nombre complexe λ tel que le problème*

$$-f''' - f' = \lambda f \tag{6.6.1}$$

$$f(0) = f(1) = 0 \quad f'(0) = f'(1) = 0 \tag{6.6.2}$$

ait une solution non nulle si et seulement si il existe deux nombres entiers $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ tels que

$$L = 2\pi\sqrt{\frac{k^2 + kl + l^2}{3}} \tag{6.6.3}$$

Nous en déduisons immédiatement que 6.6.1 est vraie, car 6.6.3 ne peut pas être vérifiée avec $L = 1$.

La condition 6.6.3 est exactement la condition de commandabilité obtenue dans [**50**] dans un cadre beaucoup plus général. nous en donnons ici une preuve élémentaire.

DÉMONSTRATION. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Un calcul élémentaire montre que le problème 6.6.1-6.6.2 n'a pas de solution non nulle sur $[0,L]$ lorsque le polynôme $X^3 + X + \lambda = 0$ a une racine double. Nous supposons donc que ce n'est pas le cas, alors le problème 6.6.1-6.6.2 a une solution sur $[0,L]$ si et seulement si la troisième solution fondamentale associée à λ, c'est à dire la fonction

$$\begin{aligned} e_3(x) &= \frac{e^{\lambda_1 x}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} + \frac{e^{\lambda_2 x}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)} + \frac{e^{\lambda_3 x}}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} \\ &= \frac{e^{\lambda_1 x}(\lambda_2 - \lambda_3) + e^{\lambda_2 x}(\lambda_3 - \lambda_1) + e^{\lambda_3 x}(\lambda_1 - \lambda_2)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \end{aligned}$$

où λ_1, λ_2 et λ_3 sont les trois racines distinctes de $X^3 + X + \lambda = 0$, est telle que

$$\begin{aligned} e_3(L) &= \frac{e^{\lambda_1 L}(\lambda_2 - \lambda_3) + e^{\lambda_2 L}(\lambda_3 - \lambda_1) + e^{\lambda_3 L}(\lambda_1 - \lambda_2)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} = 0 \\ e_3'(L) &= \frac{e^{\lambda_1 L}\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_3) + e^{\lambda_2 L}\lambda_2(\lambda_3 - \lambda_1) + e^{\lambda_3 L}\lambda_3(\lambda_1 - \lambda_2)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} = 0 \end{aligned}$$

Ces deux relations sont équivalentes par combinaison à

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 L} &= e^{\lambda_2 L} \\ e^{\lambda_2 L} &= e^{\lambda_3 L} \end{aligned}$$

Donc le problème 6.6.1-6.6.2 a une solution non nulle si et seulement si il existe deux nombres entiers $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$ tels que

$$(\lambda_1 - \lambda_2)L = 2ik\pi \tag{6.6.4}$$

$$(\lambda_2 - \lambda_3)L = 2il\pi \tag{6.6.5}$$

D'autre part, λ_1, λ_2 et λ_3 vérifient

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \tag{6.6.6}$$

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3 = 1 \tag{6.6.7}$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -\lambda. \tag{6.6.8}$$

Des relations 6.6.6 et 6.6.7, nous tirons que

$$\begin{aligned}\lambda_3 &= -(\lambda_1+\lambda_2)\\ \lambda_1\lambda_2 - (\lambda_1+\lambda_2)^2 &= 1,\end{aligned}$$

d'où, quitte à permuter les rôles de λ_3 et λ_2, les relations

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= \frac{-\lambda_1+\sqrt{-3\lambda_1^2-4}}{2} = \frac{-\lambda_1+i\sqrt{3\lambda_1^2+4}}{2}\\ \lambda_3 &= \frac{-\lambda_1-\sqrt{-3\lambda_1^2-4}}{2} = \frac{-\lambda_1-i\sqrt{3\lambda_1^2+4}}{2}\end{aligned}$$

De même, quitte à permuter les rôles de λ_1, λ_2 et λ_3, on peut supposer que les nombres k et l sont positifs, ce que nous faisons par la suite.

Nous injectons les expressions de λ_2 et λ_3 en fonction de λ_1 dans 6.6.4 et 6.6.5, pour obtenir

$$\begin{aligned}L\sqrt{3\lambda_1^2+4} &= 2k\pi\\ L\frac{3\lambda_1 - i\sqrt{3\lambda_1^2+4}}{2} &= 2il\pi.\end{aligned}$$

Nous en tirons que

$$\begin{aligned}L &= \frac{2k\pi}{\sqrt{3\lambda_1^2+4}}\\ L\frac{3\lambda_1}{2} &= i\pi(2l+k),\end{aligned}$$

et donc que

$$\begin{aligned}L &= \frac{2k\pi}{\sqrt{3\lambda_1^2+4}}\\ \frac{3k\lambda_1}{\sqrt{3\lambda_1^2+4}} &= i(2l+k),\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}L &= \frac{2k\pi}{\sqrt{3\lambda_1^2+4}}\\ 3\lambda_1^2(k^2+kl+l^2) &= -(2l+k)^2,\end{aligned}$$

soit encore

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= i\frac{(2l+k)}{\sqrt{3(k^2+kl+l^2)}}\\ L &= 2\pi\sqrt{\frac{k^2+kl+l^2}{3}}\end{aligned}$$

Réciproquement, si L et λ_1 sont comme ci-dessus, le problème 6.6.1-6.6.2 a une solution non nulle. Ceci prouve la propriété annoncée. □

6.7. Simulation numérique

Nous montrons une simulation arrêt-arrêt, de l'état d'équilibre correspondant à une commande constante nulle (c'est à dire l'état initial nul) à l'état d'équilibre correspondant à la commande constante égale à 1 (c'est à dire à la fonction $B(x) = \frac{\sin(1)-\sin(x)-\sin(1-x)}{1-\cos(1)}$.

La simulation est plus délicate que pour les problèmes d'ordre 2. Nous utilisons méthode classique de résolution de problèmes paraboliques, faisant intervenir une formulation variationnelle du problème, puis une projection sur une base spectrale d'un sous-espace de dimension finie de $L^2(0,1)$ et une résolution par discrétisation totale avec un schéma semi-implicite en temps (voir [**49**], chap 7., sec. 4 et 5.).

Deux cas de simulations ont été examinés, le premier sur un horizon de temps de $0.08s.$, et la deuxième sur un horizon de temps de $0.02s.$. Les lois de commande arrêt arrêt, calculées en suivant la démarche exposée dans les sections précédentes, sont montrées sur les figures 1 et 2. Les résultats de simulation sont illustrés par

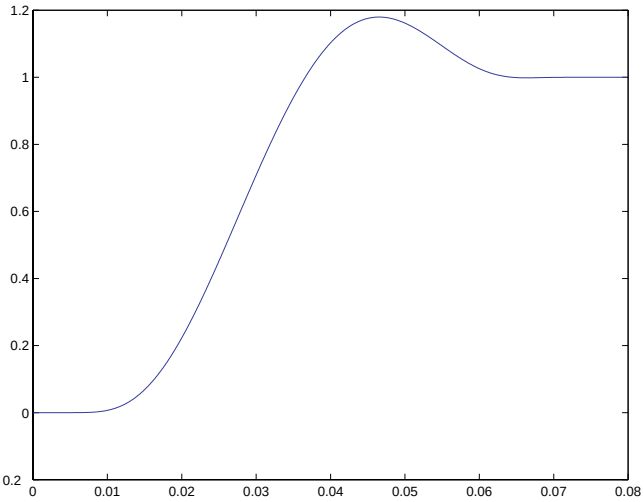


FIG. 1. *Loi de commande obtenue à partir d'une fonction Gevrey d'ordre* $2(<3)$*, sur un horizon de* $0.08s$.

les figures 3 et 4.

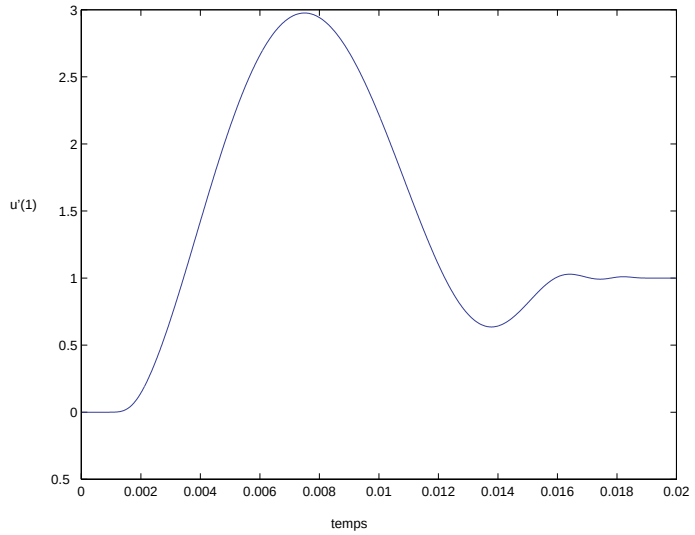


FIG. 2. *Loi de commande obtenue à partir d'une fonction Gevrey d'ordre* $2(<3)$*, sur un horizon de* $0.02s$.

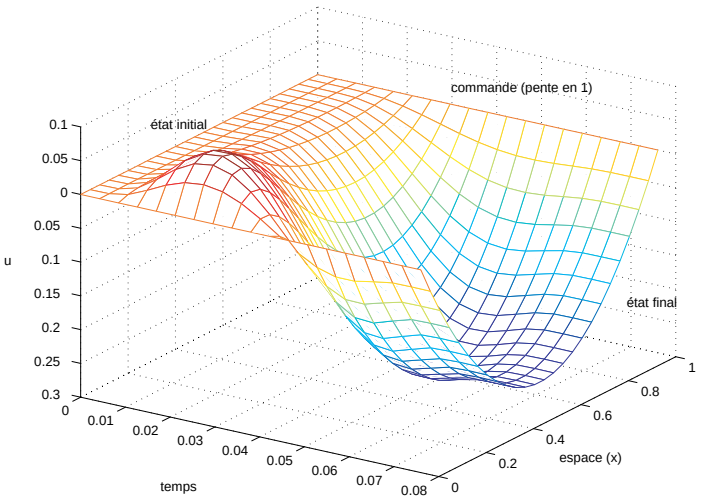


FIG. 3. *Planification arrêt-arrêt sur un horizon de* $0.08s$.

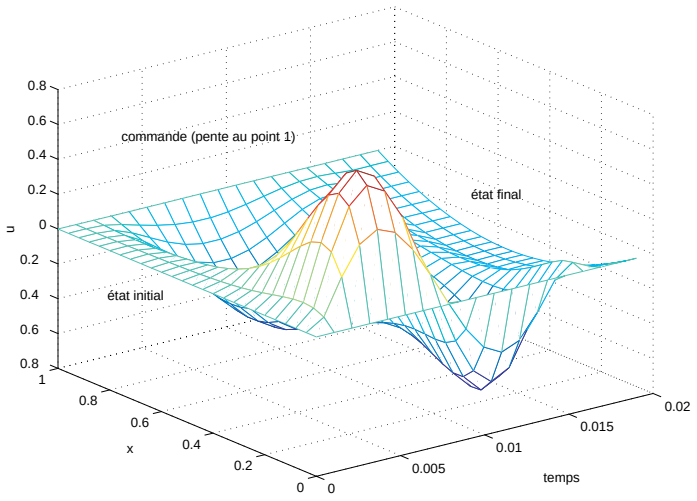


FIG. 4. *Planification arrêt-arrêt sur un horizon de* $0.02s$.

CHAPITRE 7

Un exemple en dimension d'espace > 1

7.1. Présentation du problème

Le problème étudié est le suivant (voir figure 1): Un tuyau cylindrique de hau-

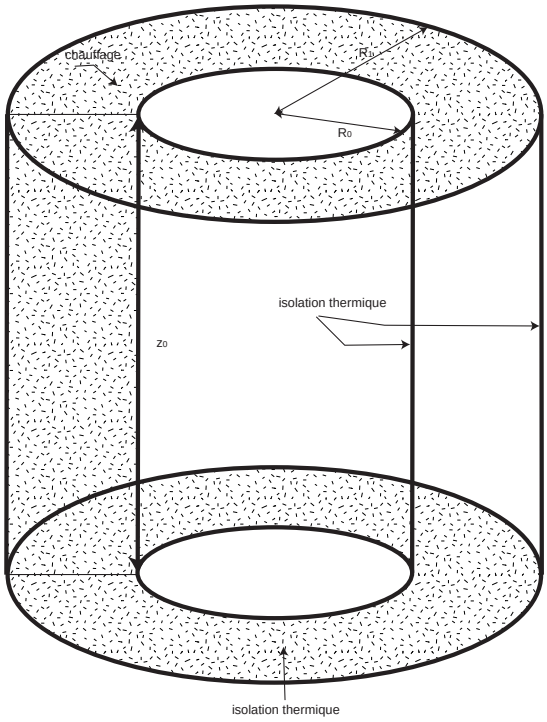


FIG. 1. *Tuyau cylindrique isolé, chauffé par le couvercle.*

teur z_0 de rayon externe R_1 et de rayon interne R_0 est chauffé par sa face supérieure ($z = z_0$), où on impose la température; les surfaces latérales internes et externes, ainsi que le fond du cylindre sont thermiquement isolés; l'état initial du tuyau ainsi que la température de commande présentent une symétrie radiale, de sorte que la température à tout instant à l'intérieur du tuyau ne dépend que de r (distance à l'axe du point considéré), de z (cote du point sur l'axe) et du temps t.

Les équations décrivant l'évolution de la température θ à l'intérieur du tuyau sont:

$$\begin{cases} \forall (r,z,t) \in [R_0,R_1] \times [0,z_0] \times [0,T] \\ \partial_t \theta = \partial_{rr}\theta + \frac{1}{r}\partial_r \theta + \partial_{zz}\theta, \\ \partial_r \theta(R_1,z,t) = 0, \quad \partial_r \theta(R_0,z,t) = 0 \\ \theta(r,z_0,t) = u(r,t), \quad \partial_z \theta(r,0,t) = 0 \end{cases} \tag{7.1.1}$$

7.2. Etude de l'opérateur en espace

Posons $\Omega = [R_0,R_1] \times [0,z_0]$, nous considérons l'opérateur en espace A du problème, défini par:

$$\mathcal{D}(A) = \{y \in H^2(\Omega),\ \partial_r y(R_0,.) = 0,\ \partial_r y(R_1,z) = 0,\ y(r,z_0) = 0,\ \partial_z y(.,0) = 0\}$$

et

$$A(y) = \partial_{rr} y + \frac{1}{r}\partial_r y + \partial_{zz} y$$

De façon classique (voir par exemple [**5**] ou [**13**]), A est un opérateur inversible, dont l'inverse K est un opérateur autoadjoint compact sur $L^2(\Omega)$ muni de la norme et du produit scalaire associé

$$\|y_1\|_\Omega = \int_{R_0}^{R_1} \int_0^{z_0} r \left|y_1\right|^2 (r,z) dr dz, \tag{7.2.1}$$

$$< y_1, y_2 >= \int_{R_0}^{R_1} \int_0^{z_0} r y_1(r,z) \overline{y_2(r,z)} dr dz. \tag{7.2.2}$$

On peut, par la méthode de séparation des variables, calculer les vecteurs propres normés de K. Ce sont les fonctions orthogonales pour (7.2.2):

$$\phi_{kl}(r,z) = a_k(r) b_l(z),\ (k,l) \in \mathbb{N}^2 \tag{7.2.3}$$

où:

$$a_k(r) = c_k \left(-Y_1(\lambda_k R_0) J_0(\lambda_k r) - J_1(\lambda_k R_0) Y_0(\lambda_k r)\right)$$

et

$$b_l(z) = d_l \cos((l + \frac{1}{2})\pi \frac{z}{z_0}).$$

Dans ces expressions, les fonctions J_i et Y_i sont les fonctions de Bessel de première et deuxième espèce d'ordre i. les nombres réels λ_k sont définis par:

$$\forall k \in \mathbb{N},\ Y_1(\lambda_k R_0) J_1(\lambda_k R_1) - J_1(\lambda_k R_0) Y_1(\lambda_k R_1) = 0$$

et

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_k < \ldots$$

et le coefficient de normalisation c_k est donné par:

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{\left(\int_{R_0}^{R_1} r \left|Y_1(\lambda_k R_0) J_0(\lambda_k r) - J_1(\lambda_k R_0) Y_0(\lambda_k r)\right|^2 dr\right)}}.$$

alors que le coefficient de normalisation d_l est donné par:

$$d_l = \frac{1}{\sqrt{\left(\int_0^{z_0} \left|\cos((l + \frac{1}{2})\pi \frac{z}{z_0})\right|^2 dz\right)}} = \sqrt{\frac{2}{z_0}}$$

À chaque vecteur propre correspond la valeur propre réelle, strictement négative

$$\mu_{kl} = -\frac{1}{(\lambda_k^2 + (l+\frac{1}{2})^2 \frac{\pi}{z_0}^2)}.$$

Dans ces conditions, K est un opérateur à spectre simple, d'expression:

$$\forall v \in L^2(\Omega),\ K(v)(r,z) = \int_{R_0}^{R_1} \int_0^{z_0} \left(\sum_{k,l=0}^{\infty} \mu_{k,l} \phi_{k,l}(r,z) \phi_{k,l}(\rho,\zeta) \right) \rho v(\rho,\zeta) d\rho d\zeta$$

Construisons maintenant la fonction $B(r,z)$, solution de:

$$\begin{cases} \forall (r,z) \in \Omega \\ \partial_{rr} B + \frac{1}{r} \partial_r B + \partial_{zz} B = 0, \\ \partial_r B(R_0,z) = 0, \quad \partial_r B(R_1,z) = 0, \\ B(r,z_0) = f(r), \quad \partial_z B(r,0) = 0 \end{cases} \tag{7.2.4}$$

où $f \in L^2[R_0,R_1]$. La fonction B est donnée par l'expression:

$$\begin{aligned} B(r,z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{R_0}^{R_1} \rho f(\rho) a_k(\rho) d\rho \right) a_k(r) \beta_k(z) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f_k a_k(r) \beta_k(z) \end{aligned}$$

où:

$$\beta_k(z) = \frac{\cosh(\lambda_k z)}{\cosh(\lambda_k z_0)}$$

$B(r,z)$ vérifie aussi:

$$\begin{aligned} \forall (k,l) \in \mathbb{N} \ < B, \phi_{k,l} > &= f_k \left(\int_0^{z_0} \beta_k(\zeta) b_l(\zeta) d\zeta \right) \\ &= \frac{(-1)^l d_l f_k (l+\frac{1}{2}) \frac{\pi}{z_0}}{\mu_{k,l}} \\ &\neq 0 \text{ si } f_k \text{ est non nul} \end{aligned}$$

Nous sommes donc dans une situation où nous pourrions tenter de reproduire exactement la démarche qui a été dégagée au cours des chapitres précédents, en supposant que nous appliquons au système une loi de commande de la forme: $u(r,t) = f(r)\tilde{u}(t)$, où $\tilde{u}$ est dans $C^2(0,T)$.

Mais nous nous heurtons à une difficulté de taille : si K est auto-adjoint compact, il est malheureusement de puissance nucléaire égale à $p > 1$. On ne peut donc pas définir de fonction entière d'ordre de Weierstrass < 1 qui annule ses valeurs propres (la généralisation du déterminant de Fredholm en dimension 1). Un produit de Weiertstrass (mais il n'a aucun caractère d'unicité) qui annule toutes les valeurs propres de K est donné par:

$$D_K(\lambda) = \prod_{k,l=0}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_k^2 + (l+\frac{1}{2})^2 (\frac{\pi}{z_0})^2} \right) e^{-\frac{\lambda}{\lambda_k^2 + (l+\frac{1}{2})^2 (\frac{\pi}{z_0})^2}}$$

On montre que D_K a l'expression suivante:

$$D_K(\lambda) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\cosh\left(\sqrt{\lambda_k^2+\lambda} z_0\right)}{\cosh(\lambda_k z_0)} e^{-\lambda \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2 + (l+\frac{1}{2})^2 (\frac{\pi}{z_0})^2}} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \lambda^i$$

On vérifie que B n'est orthogonal à aucun des sous espaces propres, et donc que la famille $B_0 = B$, $B_i = K(B_{i-1}) + a_i B_0$ est dense dans $L^2(\Omega)$, mais on ne peut plus assurer une décroissance de la norme L^2 des B_i en $\frac{1}{(2i)!}$ ni faire la planification de trajectoire approchée dans $L^2(\Omega)$ en utilisant une fonction y de classe Gevrey-2.

7.3. Décomposition de problème

On peut cependant procéder de la façon suivante: on "projette" sur chaque direction a_k la fonction $\theta(r,z,t)$ en posant

$$v_k(z,t) = \int_{R_0}^{R_1} r\theta(r,z,t) a_k(r) dr$$
$$u_k(t) = \int_{R_0}^{R_1} r u(r,t) a_k(r) dr$$

Par le théorème de Fubini, si $\theta(r,z,t)$ est dans le domaine de définition de A, alors chaque v_k est dans $H_2([0,z_0])$ et vérifie

$$\partial_t v_k = \partial_{zz} v_k - \lambda_k^2 v_k \tag{7.3.1}$$
$$\partial_z v_k(0,t) = 0 \quad v_k(z_0,t) = u_k(t) \tag{7.3.2}$$

Il s'agit bien maintenant d'un problème du type que nous avons déjà rencontré et pour lequel nous avons donné une paramétrisation dans 1.3 puis 2. Nous appliquons les résultats obtenus, et désignons par y_k une fonction Gevrey d'ordre $\sigma \leq 2$, de telle sorte que

$$v_k(z,t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_k^{(i)}(t) \alpha_{ki}(z)$$
$$u_k(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_k^{(i)}(t) \alpha_{ki}(z_0)$$

soit une trajectoire plate C^2 du système 7.3.1. Nous allons maintenant examiner à quelle condition la trajectoire formelle reconstituée du système global, à savoir

$$v(r,z,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} y_k^{(i)}(t) \alpha_{ki}(z) a_k(r) \tag{7.3.3}$$

$$u(r,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} y_k^{(i)}(t) \alpha_{ki}(z_0) a_k(r) \tag{7.3.4}$$

définit une fonction qui a un sens sur un intervalle de temps fixé $[0,T]$.

Nous désignons par

$$\left| y_k^{(i)}(t) \right| \leq M_k \frac{(i!)^\sigma}{R_k^i}$$

l'estimation Gevrey pour chaque y_k sur $[0,T]$. Nous avons alors

$$\forall (r,z,t) \in \Omega \times [0,T],$$
$$\left| y_k^{(i)}(t)\alpha_{ki}(z)a_k(r) \right| \leq M_k \frac{C_k^i (i!)^\sigma}{(2i)! R_k^i} \left| a_k(r) \right|$$

d'où, les a_k étant normalisés:

$$\forall (r,z,t) \in \Omega \times [0,T],$$
$$\left\| y_k^{(i)}(t)\alpha_{ki}(z)a_k(r) \right\|_\Omega \leq M_k \frac{z_0 C_k^i (i!)^\sigma}{(2i)! R_k^i} \int_{R_0}^{R_1} r \left| a_k(r) \right|^2 dr$$
$$\leq M_k \frac{z_0 C^i (i!)^\sigma}{(2i)! R_k^i}$$

Comme la série $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{C_k^i (i!)^\sigma}{(2i)! R_k^i}$ est convergente dès que $\sigma \leq 2$ si les R_k sont tous suffisamment grands ($> C_k$), nous notons A_k sa somme, et nous avons par convergence dominée:

PROPRIÉTÉ 7.3.1. *La paramétrisation* (7.3.3)-(7.3.4) *définit une trajectoire au sens faible dans* $L^2(\Omega)$ *si les* M_k *et les* A_k *sont tels que*

$$\sum_{k=0}^{\infty} M_k A_k < +\infty$$

De plus, nous avons le résultat évident et immédiat, grâce aux résultats des chapitres précédents que

PROPRIÉTÉ 7.3.2. *La paramétrisation* (7.3.3)-(7.3.4)*, si elle ne fait apparaître qu'un nombre fini de termes d'indice* k *définit une trajectoire au sens au sens fort (c'est à dire deux fois continûment dérivable en espace et une fois continument dérivable en temps), sans aucune condition sur les* A_k *et les* M_k*.*

7.4. Densité, commandabilité approchée, endogénéité

La propriété 7.3.2 nous assure, en utilisant la platitude de chaque problème projeté sur a_k, que tout état de départ et tout état d'arrivée de la forme

$$\theta_i(r,z,t) = \sum_{k=0}^{N} v_k(z,t) a_k(r) \tag{7.4.1}$$

$$\theta_f(r,z,t) = \sum_{k=0}^{N} w_k(z,t) a_k(r) \tag{7.4.2}$$

peuvent être approximativement raccordés par une trajectoire (7.3.3)-(7.3.4).

Si nous arrivons à prouver que

PROPRIÉTÉ 7.4.1. *Soient deux états de départ et d'arrivée quelconques, alors dans tout voisinage de ces états, il y a un état de la forme ci-dessus*

nous aurons prouvé la densité dans $L^2(\Omega)$ des états de départ et d'arrivée joignables par des trajectoires paramétrées, donc la platitude du système.

De plus, l'existence du semi-groupe continu de contraction engendré par A nous assurera, en appliquant la propriété 2.6.2, de la commandabilité plate approchée du système.

La propriété 7.4.1 résulte immédiatement de (7.2.3):

$$\forall \epsilon > 0, \forall f \in L^2(\Omega), \exists (N,P) \in \mathbb{N},$$
$$\left\| f - \sum_{k=0}^{N} \sum_{l=0}^{P} < f,\phi_{kl} > \phi_{kl} \right\|_{\Omega} \leq \epsilon$$

mais :

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{N} \sum_{l=0}^{P} < f,\phi_{kl} > \phi_{kl} \right\|_{\Omega} =$$
$$\left\| \sum_{k=0}^{N} \sum_{l=P+1}^{\infty} < f,\phi_{kl} > \phi_{kl} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} < f,\phi_{kl} > \phi_{kl} \right\|_{\Omega}$$
$$= \sqrt{\sum_{k=0}^{N} \sum_{l=P+1}^{\infty} < f,\phi_{kl} >^2 + \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} < f,\phi_{kl} >^2}$$
$$\geq \sqrt{\sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} < f,\phi_{kl} >^2}$$
$$= \left\| f - \sum_{k=0}^{N} \sum_{l=0}^{\infty} < f,\phi_{kl} > \phi_{kl} \right\|_{\Omega}$$

Mais, à k fixé, la série $\sum_{l=0}^{\infty} < f,\phi_{kl} > bl$ définit une fonction de $L^2([0,z_0]$, notée v_k, et

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{N} \sum_{l=0}^{\infty} < f,\phi_{kl} > \phi_{kl} \right\|_{\Omega} = \left\| f - \sum_{k=0}^{N} v_k a_{kn} \right\|_{\Omega} \leq \epsilon,$$

ce qui prouve la propriété 7.4.1. L' endogénéité de la famille dénombrable de sorties plates est évidente: ce sont les moments de $\theta(r,0,t)$ sur les fonctions $a_i(r)$.

7.5. Simulation numérique

La simulation effectuée correspond aux valeurs des paramères suivantes: $R_0 = 1.cm$, $R_1 = 2.cm$, $z_0 = 1.cm$, et $T = 0.8s$. Le rayon r a été ramené à des valeurs entre 0 et 1.

La condition initiale a une seule composante sur a_0 (qui est la fonction constante égale à 1), elle prend la valeur constante de 20 degrés. La valeur finale demandée a une composante sur a_0, de valeur 25 degrés, et une composante sur a_1, de poids 5. Les résultats sont représentés sur les figures 2 et 3

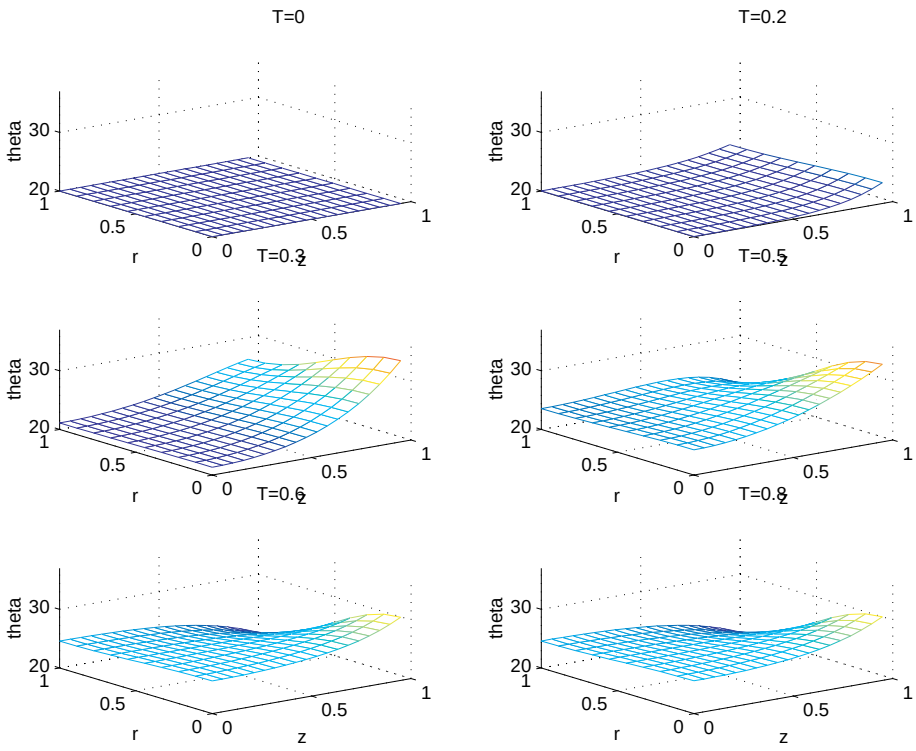


FIG. 2. *Planification de trajectoire avec une fonction Gevrey d'ordre* 2.

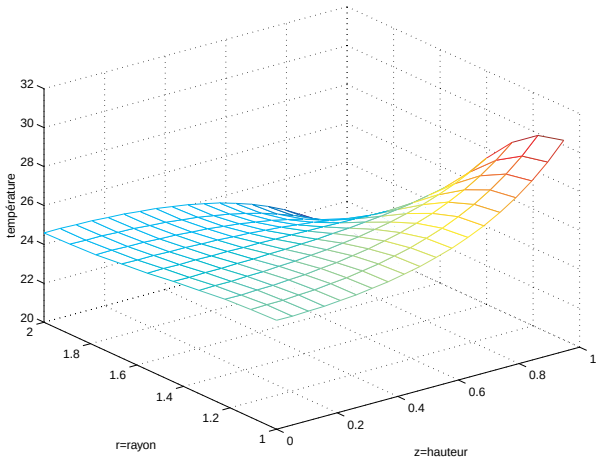


FIG. 3. *Etat final à T=0.8 s*

Conclusion et perspectives

Nous avons donc proposé une définition de la platitude pour des systèmes de dimension infinie, et donné une démarche algorithmique qui permet, si le problème a contrôler est linéaire et bien posé dans un cadre fonctionnel correctement défini, de générer une trajectoire répondant au problème de la planification de trajectoire.

Nous avons également montré que pour un problème bien posé qui contient dans son orbite sous l'action des bouclages un système "plat" selon notre définition, la paramétrisation obtenue est indépendante du bouclage utilisé pour l'obtenir, et que le système de départ vérifie la propriété de commandabilité approchée: en ce sens, notre méthode fournit bien un analogue de la décomposition de Brunovsky en dimension finie.

Remarquons que tout ce qui a été fait fonctionne aussi pour des problèmes où la commande, scalaire, est "répartie" par multiplication par une fonction $B(x)$. Enfin, notre méthode de paramétrisation s'adapte sans mal aux systèmes monodimensionnels d'ordre 1 en temps et n en espace, et nous allons essayer par la suite de formaliser une théorie dans ce cas.

Il faut aussi par la suite approfondir le problème de l'endogénéité de la paramétrisation plate, qui reste pour l'instant sans réponse, afin d'obtenir un concept convenable d'équivalence de systèmes.

Nous avons également l'intention de développer l'étude des bouclages (pas nécessairement de bords), afin de voir quelles sont les possibilités en matière de placement de pôles.

Il semble aussi tout à fait envisageable d'étendre la méthode et d'obtenir des résultats théoriques pour des systèmes d'évolution où l'ordre de dérivation en temps est supérieur à 1, mais reste strictement inférieur à l'ordre de dérivation en espace. En effet, si tel n'est pas le cas, la seule classe Gevrey admissible pour les paramétrisations du système est la classe Gevrey-1 des fonctions analytiques, qui ne permet pas la construction d'une famille dense de trajectoires plates du système. Ainsi, notre méthode est inadéquate en l'état pour traiter l'équation des ondes, dont l'étude peut être faite par d'autres techniques (voir les références citées en introduction). Toutefois, une reformulation dans un cadre plus général devrait rendre possible le traitement de ce type de problèmes.

Enfin, il faut s'attaquer aux problèmes linéaires de dimension d'espace > 1, avec des géométries de domaine plus complexes que celle qui aété étudiée dans notre exemple.

Reste enfin la question des équations non linéaires: est il possible, comme en dimension finie sur certaines classes de systèmes, de caractériser les problèmes décrits par une E.D.P. d'évolution équivalents à un système linéaire plat? La question, comme en dimension finie, est encore largement ouverte.

ANNEXE A

Les problèmes aux limites d'ordre 2 en dimension 1

Les principales références utilisées dans ce paragraphe sont [**9**] et [**13**].

Nous considérons donc sur l'intervalle [0,1] le problème aux limites homogène:

$$\begin{aligned} & y'' + c_1(x)y' + c_0(x)y = v \\ & l_{11}y(0) + l_{12}y'(0) + l_{13}y(1) + l_{14}y'(1) = 0 \\ & l_{21}y(0) + l_{22}y'(0) + l_{23}y(1) + l_{24}y'(1) = 0 \end{aligned} \tag{A.0.1}$$

Nous supposons que les fonctions c_0 et c_1 sont dans $C^\infty(0,1)$; les l_{ij} sont des constantes réelles, et la fonction v est connue.

Classiquement, tout problème de la forme (A.0.1) se ramène à un problème de la forme (dite forme autoadjointe pour l'équation):

$$\begin{aligned} & y'' + q(x)y = v \\ & a_{11}y(0) + a_{12}y'(0) + a_{13}y(1) + a_{14}y'(1) = 0 \\ & a_{21}y(0) + a_{22}y'(0) + a_{23}y(1) + a_{24}y'(1) = 0 \end{aligned} \tag{A.0.2}$$

grâce au changement de variable: $y(x) \leftarrow e^{\int_0^x \frac{c_1(\xi)}{2} d\xi} y(x)$. Il suffit donc d'étudier les problèmes de la forme (A.0.2) et de tranposer les résultats obtenus.

Il nous faut définir le cadre fonctionnel dans lequel nous cherchons à résoudre (A.0.2). Pour cela, on pose:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A) = \{ y \in H^2(0,1) / \quad & a_{11}y(0) + a_{12}y'(0) + a_{13}y(1) + a_{14}y'(1) = 0, \\ & a_{21}y(0) + a_{22}y'(0) + a_{23}y(1) + a_{24}y'(1) = 0 \} \end{aligned}$$

et on définit l'opérateur A : $\mathcal{D}(A) \to L^2(0,1)$ par $A(y) = y'' + q(x)y$. Résoudre (A.0.2) équivaut donc, étant donné $v \in L^2(0,1)$, à trouver $y \in \mathcal{D}(A)$ tel que $A(y) = v$.

Les propriétés de l'opérateur A dépendent de la nature des coefficients a_{ij} : c'est l'objet des deux sections suivantes.

Nous posons pour toute la suite :

$$A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{vmatrix}$$

A.1. Les problèmes autoadjoints

Pour être autoadjoint, l'opérateur A doit nécessairement être symétrique.Il nous faut donc distinguer deux cas.

Si $A_{12} = 0$ et $A_{34} = 0$, les conditions aux bords peuvent se "séparer", c'est à dire se mettre sous la forme $\tilde{a}_{11}y(0) + \tilde{a}_{12}y'(0) = 0$ et $\tilde{a}_{23}y(1) + \tilde{a}_{24}y'(1) = 0$,

(ce qui revient à supposer que $a_{13} = a_{14} = a_{21} = a_{22} = 0$) et A est effectivement symétrique.

Sinon, on peut supposer par exemple que $A_{12} \neq 0$, et les conditions aux bords se mettent sous la forme: $y'(0)+\tilde{a}_{13}y(1)+\tilde{a}_{14}y'(1) = 0$ et $y(0)+\tilde{a}_{32}y(1)+\tilde{a}_{42}y'(1) =$, où $\tilde{a}_{ij} = \frac{A_{ij}}{A_{12}}$. Il est alors aisé de vérifier que A ne peut être symétrique que lorsque:

$$\forall (y,z) \in \mathcal{D}(A)^2, y(1)z'\bar{(}1) - y(0)z'\bar{(}0) - y'(1)z\bar{(}1) + y'(0)z\bar{(}0) = 0$$

En remplaçant dans l'égalité ci-dessus $y(0)$,$y'(0)$,$z(0)$ et $z'(0)$ par leurs expressions en fonctions des valeurs au point 1, on obtient que: $\tilde{a}_{14}\tilde{a}_{23} - \tilde{a}_{13}\tilde{a}_{24} = 1$. Revenant aux variables initiales, la condition trouvée s'écrit: $A_{12} = A_{34} \neq 0$ (le cas plus général de conditions aux bords à coefficient complexes est proposé en exercice dans [**9**], chap.7). Les deux cas les plus étudiés dans cette catégorie de problèmes auto-adjoints sont le cas des conditions aux bords périodiques ($y(0) = y(1)$ et $y'(0) = y'(1)$) et antipériodiques ($y(0) = -y(1)$ et $y'(0) = -y'(1)$).

A.1.1. Les conditions aux bords séparées. Nous supposons donc ici que $a_{13} = a_{14} = a_{21} = a_{22} = 0$, et, bien sur, que $a_{11}^2 + a_{12}^2$ ainsi que $a_{23}^2 + a_{24}^2$ sont non nuls. A est alors un opérateur de Schrödinger monodimensionnel symétrique. Il est commode pour étudier A de construire sa fonction de Green, notée $G(x,\xi,\lambda)$. Détaillons cette construction qui permet de résoudre le problème de Sturm-Liouville pour A, c'est à dire le problème de la détermination de ses valeurs propres et vecteurs propres.

Nous désignons par $e_1(x,\lambda)$ et $e_2(x,\lambda)$ les solutions de $y'' + q(x)y = \lambda y$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ et $y'' + q(x)y = \lambda y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ respectivement. Il est clair qu'à λ fixé dans $\mathbb{C}$, e_1 et e_2 sont des fonctions C^∞ sur un voisinage de [0,1] dans $\mathbb{C}$ et qu'à x fixé, ces deux fonctions . Si λ est une valeur propre de A, et y est une fonction propre, alors y est une combinaison à coefficients constants de $e_1(.,\lambda)$ et $e_2(.,\lambda)$, qui doit de plus satisfaire les conditions au bord définissant $(D)(A)$. D'où:

$$y = Ae_1(.,\lambda) + Be_2(.,\lambda)$$

et:

$$\begin{aligned} &a_{11}A + a_{12}B = 0 \\ &(a_{23}e_1(1,\lambda) + a_{24}e_1'(1,\lambda))A + (a_{23}e_2(1,\lambda) + a_{24}e_2'(1,\lambda))B = 0 \end{aligned}$$

Pour que ce système ait une solution $(A,B) \neq (0,0)$, λ doit vérifier:

$$D(\lambda) = -a_{12}a_{23}e_1(1,\lambda) - a_{12}a_{24}e_1'(1,\lambda) + a_{11}a_{23}e_2(1,\lambda) + a_{11}a_{24}e_2'(1,\lambda) = 0 \quad \text{(A.1.1)}$$

Réciproquement, si $\lambda \in \mathbb{C}$ annule $D(\lambda)$, alors ce sera une valeur propre pour A, de vecteur propre associé $y = -a_{12}e_1(.,\lambda) + a_{11}e_2(.,\lambda)$.

Très classiquement, le caractère autoadjoint des conditions aux bords permet d'affirmer que les éventuelles valeurs propres de A sont réelles, et donc que D est une fonction non nulle. Pour tous les nombres λ tels que $D(\lambda) \neq 0$, il est alors possible de construire la fonction de Green de A. On vérifie aisément que si on pose:

$$\begin{aligned} y_1(x,\lambda) &= -a_{12}e_1(x,\lambda) + a_{11}e_2(x,\lambda), \text{ et} \\ y_2(x,\lambda) &= (a_{23}e_2(1,\lambda) + a_{24}e_2'(1,\lambda))e_1(x,\lambda), \end{aligned}$$

on obtient deux solutions indépendantes de l'équation $y''+q(x)y = \lambda y$ (leur Wronskien est égal à $D(\lambda)$) qui vérifient chacune une des conditions au bord. La fonction de Green de A a alors pour expression :

$$G(x,\xi,\lambda) = \frac{1}{D(\lambda)}\left(\chi(x-\xi)y_1(x)y_2(\xi) + \chi(\xi-x)y_1(\xi)y_2(x)\right) \tag{A.1.2}$$

L'opérateur $A-\lambda I$ est alors inversible, et son inverse est l'opérateur intégral défini sur $L^2[0,1]$ par:

$$(A-\lambda I)^{-1}(f)(x) = \int_0^1 G(x,\xi,\lambda)f(\xi)d\xi.$$

Choisissons donc λ_0, tel que λ_0 soit réel et dans l'ensemble résolvant de A (si possible $\lambda_0 = 0$). On a le résultat suivant (voir [**13**], chap.2,§8 ou [**9**]):

THÉORÈME A.1.1.

a) L'opérateur $A-\lambda_0 I$ est l'inverse d'un opérateur intégral autoadjoint compact .

b) Il existe une base Hilbertienne de $L^2(0,1)$ formée de fonctions propres de $A-\lambda_0 I$.

c) $A-\lambda_0 I$ a une infinité dénombrable de valeurs propres simples, réelles, dont le seul point d'accumulation est $-\infty$.

d) Si $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ désigne la suite des valeurs propres de $A-\lambda_0 I$ et ψ_i la fonction propre normée associée, alors:

$$\forall y \in \mathcal{D}(A),\ (A-\lambda_0 I)(y) = \sum_{i=0}^{\infty}\mu_i(y,\psi_i)\psi_i$$

Du théorème qui précède, on déduit aisément le théorème suivant:

THÉORÈME A.1.2.

a) Il existe une base Hilbertienne de $L^2(0,1)$ formée de fonctions propres de A.

b) A a une infinité dénombrable de valeurs propres simples, réelles, dont le seul point d'accumulation est $-\infty$.

c) Si $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ désigne la suite des valeurs propres de A et ϕ_i la fonction propre normée associée, alors:

$$\forall y \in \mathcal{D}(A),\ A(y) = \sum_{i=0}^{\infty}\lambda_i(y,\phi_i)\phi_i$$

REMARQUE. La seule différence entre les théorèmes A.1.1 et A.1.2 réside dans le fait que A peut avoir une valeur propre (simple) nulle, et donc ne pas être inversible.

Nous retenons la conséquence simple suivante du théorème A.1.2:

COROLLAIRE A.1.1. *Si A est un opérateur à conditions aux bords séparées, alors A est Riesz-spectral.*

Pour une définition des opérateurs Riesz-spectraux, voir l'annexe B.

Pour ce type d'opérateur, on a également une estimation de la répartition asymptotique des valeurs propres (voir [**13**], chap.2, §8):

THÉORÈME A.1.3. *si* $a_{12} \neq 0$ *et* $a_{24} \neq 0$ *alors* $\lambda_n = -\sigma_n^2$ *avec*

$$\sigma_n = n\pi + \frac{1}{n\pi}\left(-\frac{a_{11}}{a_{12}} + \frac{a_{23}}{a_{24}} - \frac{1}{2}\int_0^1 q(\xi)d\xi\right) + O(\frac{1}{n^2})$$

si $a_{12} = 0$ *et* $a_{24} \neq 0$ *alors* $\lambda_n = -\sigma_n^2$ *avec*

$$\sigma_n = (n+\frac{1}{2})\pi + \frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi}\left(\frac{a_{23}}{a_{24}} - \frac{1}{2}\int_0^1 q(\xi)d\xi\right) + O(\frac{1}{n^2})$$

si $a_{12} \neq 0$ *et* $a_{24} = 0$ *alors* $\lambda_n = -\sigma_n^2$ *avec*

$$\sigma_n = (n+\frac{1}{2})\pi + \frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi}\left(\frac{-a_{11}}{a_{12}} - \frac{1}{2}\int_0^1 q(\xi)d\xi\right) + O(\frac{1}{n^2})$$

si $a_{12} = 0$ *et* $a_{24} = 0$ *alors* $\lambda_n = -\sigma_n^2$ *avec*

$$\sigma_n = n\pi - \frac{1}{2n\pi}\int_0^1 q(\xi)d\xi + O(\frac{1}{n^2})$$

A.1.2. Les conditions aux bords de type périodique. Le cas des opérateurs symé-triques à conditions aux bords de type périodique est plus délicat. Les résultats des théorèmes 1 et 2 restent valables, à ceci près que les valeurs propres de l'opérateur A ne sont plus nécessairement simples, comme le prouve l'exemple suivant:

$$\mathcal{D}(A) = \{y \in H^2(0,1)/ \quad y(0) = y(1),\, y'(0) = y'(1)\}$$
$$A(y) = y'',$$

où nous avons trivialement: $D(\lambda) = \cosh(\sqrt{\lambda}) - 1 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(2n)!}$. Les valeurs propres sont donc: $\lambda_0 = 0$ (valeur propre simple, de vecteur propre associé $\phi_0(x) = 1$), et $\lambda_i = -4\pi^2 i^2$ (valeur propre double, de vecteurs propres -non normalisés- associés $\phi 1_i(x) = \cos(2\pi x)$ et $\phi 2_i(x) = sin(2\pi x)$).

Par contre, l'estimation asymptotique en $|\lambda_i| \sim_{i\to\infty} Ki^2$ reste valable, bien que plus difficile à obtenir.

A.2. Les problèmes non autoadjoints

On considère donc le problème (A.0.2), et l'opérateur A associé, sans hypothèse particulière sur les conditions aux bords. On peut, comme on l'a fait au A.1.1, donner l'expression de la fonction $D_A(\lambda)$ qui annule toutes les valeurs propres de A, ainsi que de la fonction de Green de A. On obtient après calculs les expressions générales suivantes:

(A.2.1) $D_A(\lambda) = A_{12} + A_{34} + A_{32}e_1(1,\lambda) + A_{13}e_2(1,\lambda) + A_{42}e_1'(1,\lambda) + A_{14}e_2'(1,\lambda)$

où e_1 et e_2 sont les solutions fondamentales de $A(u) = \lambda u$.

De plus, on a les développement asymptotiques de e_1 et e_2 pour λ grand (voir [**9**], chap.6, sec.5) où on a posé $\lambda = -\rho^2$:

$$e_1(x,\lambda) = \cos(\rho x) + \frac{\sin(\rho x)}{\rho}\int_0^x \frac{q(\xi}{2}d\xi + O(\frac{e^{|v|x}}{|\rho^2|}) \tag{A.2.2}$$

$$e_2(x,\lambda) = \frac{\sin(\rho x)}{\rho} + O(\frac{e^{|v|x}}{|\rho^2|}) \tag{A.2.3}$$

$$e_1'(x,\lambda) = -\rho\sin(\rho x) + \cos(\rho x)\int_0^x \frac{q(\xi}{2}d\xi + O(\frac{e^{|v|x}}{|\rho|}) \tag{A.2.4}$$

$$e_2'(x,\lambda) = \cos(\rho x) + O(\frac{e^{|v|x}}{|\rho|}) \tag{A.2.5}$$

donc, en reportant dans (A.2.1):

$$D_A(\lambda) = A_{24}\rho\sin(\rho) + (A_{12}+A_{34}) + (A_{14}-A_{23}-A_{24}\int_0^1 \frac{q(\xi}{2}d\xi)\cos(\rho) + O(\frac{e^{|v|x}}{|\rho|})$$

On en déduit une estimation asymptotique des valeurs propres.

PROPRIÉTÉ A.2.1. *Dès que $A_{24} \neq 0$ ou ($A_{24} = 0$ et $A_{14} - A_{23} \neq 0$), les valeurs propres de A sont asymptotiquement équivalentes à $-\frac{K}{n^2}$*

DÉMONSTRATION. Nous détaillons les calculs dans le cas où $A_{24} \neq 0$. Comme dans les calculs détaillés dans la section consacrée au cas $q = 0$, on montre qu'on peut trouver $v_0 > 0$ tel que à l'extérieur de la bande $\{\rho \in \mathbb{C}/\ |v| \leq v_0\}$, l'équation $D_A(\lambda) = 0$ n'ait pas de solution. En revanche, à l'intérieur de cette bande et suffisamment loin de l'origine, les solutions de cette équation (et donc les valeurs propres de A) sont de la forme: $\lambda_n = -\sigma_n^2$ avec $\sigma_n = n\pi + O(\frac{1}{n})$ où n est un entier positif. La preuve est la même dans les autres cas. □

Pour la fonction de Green, on a:

$$\begin{aligned}
G(x,\xi,\lambda) &= \chi(x,\xi)(e_1(\xi,\lambda)e_2(x,\lambda) - e_1(x,\lambda)e_2(\xi,\lambda)) \\
&- (a_{13}(e_1(\xi,\lambda)e_2(1,\lambda) - e_1(1,\lambda)e_2(\xi,\lambda)) + a_{14}(e_1(\xi,\lambda)e_2'(1,\lambda) - e_1'(1,\lambda)e_2(\xi,\lambda))) \\
&\qquad \times y_1(x,\lambda) \\
&- (a_{23}(e_1(\xi,\lambda)e_2(1,\lambda) - e_1(1,\lambda)e_2(\xi,\lambda)) + a_{24}(e_1(\xi,\lambda)e_2'(1,\lambda) - e_1'(1,\lambda)e_2(\xi,\lambda))) \\
&\qquad \times y_2(x,\lambda)
\end{aligned}$$

où on a posé

$$y_1(x,\lambda) = \frac{(a_{22} + a_{23}e_2(1,\lambda) + a_{24}e_2'(1,\lambda))e_1(x,\lambda) - (a_{21} + a_{23}e_1(1,\lambda) + a_{24}e_1'(1,\lambda))e_2(x,\lambda)}{D_A(\lambda)}$$

$$y_2(x,\lambda) = \frac{a_{14}e_2'(1,\lambda))e_1(x,\lambda) - (a_{12} + a_{13}e_2(1,\lambda) + (a_{11} + a_{13}e_1(1,\lambda) + a_{14}e_1'(1,\lambda))e_2(x,\lambda)}{D_A(\lambda)}$$

On en déduit que A est un opérateur fermé, et que pour tous les nombres complexes λ tels que $D_A(\lambda) \neq 0$, $A - \lambda I$ est inversible et son inverse K_λ est un opérateur

intégral de $L^2(0,1)$. On vérifie sans difficulté que le noyau de cet opérateur est, à λ fixé, une fonction continue et bornée sur $[0,1] \times [0,1]$, donc la fonction D_A n'est autre, à multiplication par une constante près, que le déterminant de Fredholm (voir [**33**]) de K_0 si 0 n'est pas une valeur propre de A.

De plus, K est un opérateur compact (de Hilbert-Schmidt) de $L^2(0,1)$. Nous en déduisons qu'il existe λ_0 tel que (voir [**60**], th. 2 chap X) le spectre de K_{λ_0} est formé d'au plus une infinité dénombrable de valeurs propres, avec un seul point d'accumulation possible qui est zéro, et donc que A est un opérateur fermé dont le spectre de est réduit à

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} / \ D_A(\lambda) = 0\}$$

La résolvante de A est définie pour les $\lambda \in \rho(A)$ par

$$(R(\lambda : A)v)(.) = \int_0^1 G(.,\xi,\lambda)v(\xi)d\xi \tag{A.2.6}$$

Il est évidemment délicat d'utiliser la forme très générale de la fonction de Green de A pour obtenir plus de précisions sur cet opérateur, c'est pourquoi nous suivons plutôt l'approche proposée dans [**9**] chap 12 pour pousser plus loin l'étude. Nous en donnons un bref résumé: l'étude consiste à étudier dans un premier temps le problème correspondant au cas où la fonction q est nulle. On sait alors construire explicitement la fonction de Green du problème et en déduire les propriétés de l'opérateur associé. On peut ensuite en déduire les propriétés de l'opérateur dans le cas général, par perturbation du cas $q = 0$.

A.2.1. Le cas $q = 0$: construction de $\mathcal{G}$. On introduit l'opérateur $\tilde{A}$ défini par:

$$\mathcal{D}(\tilde{A}) = \mathcal{D}(A), \quad \text{et} : \forall v \in \mathcal{D}(\tilde{A}), \tilde{A}(v) = v''$$

A.2.1.1. *Etude du spectre de $\tilde{A}$.* Une étude plus détaillée du spectre de A dans ce cas particulier fournira des estimations plus précises que les formules asymptotiques données ci-dessus et qui s"avèreront esentielles pour la suite.

La fonction $D_{\tilde{A}}(\lambda)$ qui annule toutes les valeurs propres de A a pour expression, avec $\lambda = -\sigma^2$:

$$D_{\tilde{A}}(\lambda) = (A_{12} + A_{34}) + (A_{14} - A_{23})\cos(\sigma) + (A_{13} + \sigma^2 A_{24})\frac{\sin(\sigma)}{\sigma}$$

Génériquement, c'est à dire sauf dans le cas où $A_{24} = 0$, $A_{14} = A_{23}$, et $A_{13} = 0$, c'est une fonction analytique non constante d'ordre de Weierstrass $\frac{1}{2}$ exactement, car les fonctions trigonométriques sont d'ordre de Weierstrass $\frac{1}{2}$.

Grâce au théorème de Hadamard (voir par exemple [**55**]) on peut donc affirmer que cette fonction se factorise avec une infinité de zéros sous la forme de son produit canonique de Weierstrass:

$$D_{\tilde{A}}(\lambda) = \prod_{k=0}^{\infty}(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k})$$

La formule de Jensen permet d'estimer la répartition des zéros de $D_{\tilde{A}}$. En effet, si on désigne par $n(r)$ le nombre de zéros de $D_{\tilde{A}}$ contenus dans le disque de rayon $r > 0$ dans $\mathbb{C}$, on a ([**55**], chap VII, §8, lemme 8.3):

$$\forall \epsilon > 0, \exists r_0 > 0 \ / \ r \geq r_0 \Rightarrow n(r) \leq r^{\frac{1}{2}+\epsilon}$$

On peut toutefois comme dans [**9**] estimer plus précisément cette répartition selon les valeurs de E,B et C, où on a posé pour simplifier les notations:

$$E = A_{14} - A_{23},\ B = A_{13},\ C = A_{24},\ D = A_{12} + A_{34}$$

Pour cela, remarquons que:

$$\begin{aligned} \forall \sigma \in \ & \mathbb{C}, \\ & \sigma = u + iv \ \Rightarrow \qquad \cos(\sigma) = \cos u \cosh v - i \sin u \sinh v \\ & \qquad\qquad\qquad\quad \sin(\sigma) = \sin u \cosh v + i \cos u \sinh v \end{aligned}$$

d'où:

$$|\cos(\sigma)| = \sqrt{(\cos u)^2(\cosh v)^2 + (\sin u)^2(\sinh v)^2} \geq \sinh |v|$$

et

$$\sinh |v| \leq |\cos(\sigma)| \leq \cosh v + \sinh |v| \leq e^{|v|} \tag{A.2.7}$$

de même:

$$\sinh |v| \leq |\sin(\sigma)| \leq \cosh v + \sinh |v| \leq e^{|v|} \tag{A.2.8}$$

La boule de centre 0 et de rayon $\frac{1}{2}$, notée $B(0,\frac{1}{2})$, contient un nombre fini de zéros de $D_{\tilde{A}}$. Notons B_{v_0} la bande formée par les σ tels que $|v| \leq v_0$.

• si $C \neq 0$:

Soit $v_0 > 0$, à l'extérieur de Bv_0 nous avons:

$$D + E\cos(\sigma) + B\frac{\sin(\sigma)}{\sigma} + C\sigma\sin(\sigma) = 0 \ \Leftrightarrow\ C = -\frac{B}{\sigma^2} - \frac{E\cos(\sigma)}{\sigma\sin(\sigma)} - \frac{D}{\sigma\sin(\sigma)}$$

D'où en utilisant (A.2.7) et (A.2.8):

$$\begin{aligned} |C| &\leq \frac{|B|}{|v|^2} + \frac{E}{1-e^{-2|v|}}\frac{1}{|v|} + \frac{De^{-|v|}}{1-e^{-2|v|}}\frac{1}{|v|} \\ &\leq \frac{|B|}{|v|^2} + \frac{\max(E,D)}{|v|}\frac{1}{1-e^{-|v|}} \\ &\leq \frac{|B|}{|v_0|^2} + \frac{\max(E,D)}{|v_0|}\frac{1}{1-e^{-|v_0|}} \end{aligned}$$

Cette dernière quantité tend vers zéro lorsque v_0 tend vers l'infini, ce qui contredit la non nullité de C. On peut donc choisir v_0 suffisamment grand pour que l'équation n'ait pas de zéro à l'extérieur de Bv_0. v_0 étant maintenant fixé, les fonctions cosinus et sinus sont bornées sur B_{v_0} (d'aprés (A.2.7) et (A.2.8)), et:

$$\begin{aligned} \forall\, \sigma \in B_{v_0} \setminus B(0,\frac{1}{2}), & \\ D + E\cos(\sigma) + B\frac{\sin(\sigma)}{\sigma} + C\sigma\sin(\sigma) = 0 \ &\Leftrightarrow \\ \sin(\sigma) + \frac{B}{C}\frac{\sin(\sigma)}{\sigma^2} + \frac{E}{C}\frac{\cos(\sigma)}{\sigma} + \frac{D}{C\sigma} &= 0 \end{aligned}$$

Or sur $B_{v_0} \setminus B(0,\frac{1}{2})$, on a:

$$\left|\frac{B}{C}\frac{\sin(\sigma)}{\sigma^2} + \frac{E}{C}\frac{\cos(\sigma)}{\sigma} + \frac{D}{C\sigma}\right| \leq \frac{K_{v_0}}{|\sigma|}$$

Donc, par développement asymptotique, les solutions de l'équation sont en :

$$\sigma_n = n\pi + O(\frac{1}{n}), \text{ et } \lambda_n = -n^2\pi^2 + O(1)$$

• si $C = 0$ et $E \neq 0$:
On procède de la même façon que dans le cas précédent. Soit $v_0 > 0$, à l'extérieur de Bv_0 nous avons:

$$D + E\cos(\sigma) + B\frac{\sin(\sigma)}{\sigma} = 0 \Leftrightarrow E = -\frac{B\sin(\sigma)}{\sigma\cos(\sigma)} - \frac{D}{\cos(\sigma)}$$

D'où en utilisant (A.2.7) et (A.2.8):

$$\begin{aligned} |E| &\leq \frac{|B|\, e^{|v_0|}}{\sinh(|v_0|)\,|v_0|} + \frac{D}{\sinh(|v_0|)} \\ &\leq \frac{\frac{|B|}{|v_0|} + De^{-|v_0|}}{1 - e^{-2|v_0|}} \end{aligned}$$

Cette dernière quantité tend vers zéro lorsque v_0 tend vers l'infini, ce qui contredit la non nullité de E. On peut donc choisir v_0 suffisamment grand pour que l'équation n'ait pas de zéro à l'extérieur de Bv_0. v_0 étant maintenant fixé, les fonctions cosinus et sinus sont bornées sur B_{v_0} (d'aprés (A.2.7) et (A.2.8)), et:

$$\exists K_{v_0} > 0, \forall \sigma \in B_{v_0} \setminus B(0,\frac{1}{2}),\ \left|\frac{\sin(\sigma)}{\sigma}\right| \leq \frac{K_{v_0}}{\sigma}$$

d'où, par développement asymptotique, nous déduisons que:

- si $D = 0$, alors les solutions de $D + E\cos(\sigma) + B\frac{\sin(\sigma)}{\sigma} = 0$ sont en $\sigma_n = (n + \frac{1}{2})\pi + O(\frac{1}{n})$, et nous avons alors $\lambda_n = -(n + \frac{1}{2})^2\pi^2 + O(1)$.
- si $D \neq 0$, alors les solutions de $D + E\cos(\sigma) + B\frac{\sin(\sigma)}{\sigma} = 0$ sont en $\sigma_{2n} = \sigma_0 + 2n\pi + O(\frac{1}{n})$ et $\sigma_{2n+1} = -\sigma_0 + 2n\pi + O(\frac{1}{n})$ où σ_0 est solution de $\cos(\sigma_0) = -\frac{D}{E}$: si $\left|\frac{D}{E}\right| \leq 1$, alors on prend $\sigma_0 = \arccos(-\frac{D}{E})$; si $-\frac{D}{E} \leq -1$, alors on prend $\sigma_0 = \pi + i\,\mathrm{arg\,cosh}(\frac{D}{E})$; enfin, si $-\frac{D}{E} > 1$, alors on prend $\sigma_0 = i\,\mathrm{arg\,cosh}(-\frac{D}{E})$.

Il est clair dans la dernière estimation des σ_n, et donc des λ_n qu'il y a des cas où les valeurs propres de $\tilde{A}$ peuvent être doubles (lorsque $\sigma_0 = 0$, c'est à dire lorsque $\left|\frac{D}{E}\right| = 1$), alors que généralement elles sont (au moins asymptotiquement) simples.

• si $C = 0$, $E = 0$ et $B \neq 0$:
La situation est alors nettement plus compliquée: nous avons à examiner, en supposant que $B = 1$ les solutions de l'équation:

$$D + \frac{\sin(\sigma)}{\sigma} = 0$$

Cette équation nous donne

$$\sin u\cosh v + i\cos u\sinh v = Du + iDv$$

soit encore:

$$\sin u\cosh v = Du, \quad \cos u\sinh v = Dv$$

On en tire que u et v vérifient:

$$cos(u) = D\frac{\sinh v}{v} \tag{A.2.9}$$

et

$$u = \pm \cosh v \sqrt{\frac{1}{D^2} - \frac{v^2}{\sinh v^2}} \tag{A.2.10}$$

Donc v ne peut pas rester borné, sinon u reste borné également et on n'obtient qu'un nombre fini de solutions, et lorsque v tend vers l'infini, on tire de A.2.9 que $u \sim \frac{\pi}{2} + n\pi$ et de (A.2.10) que $v \sim \pm \arg\cosh(u) \sim \pm \ln(|n|)$. Le module des valeurs propres λ_n reste donc encore équivalent à $-n^2$.

Dans chacun de ces cas, on peut contruire la fonction de Green $\mathcal{G}(x,\xi,\lambda)$ de $\tilde{A}$. Elle s'obtient par exemple après un calcul élémentaire mais fastidieux fondé sur la méthode de variation des constantes, et a l'expression suivante:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(x,\xi,\lambda) = \frac{1}{D_{\tilde{A}(\lambda)}} \Bigg[& \chi(x,\xi) \left(A_{12}\frac{\sin\sigma(x-\xi)}{\sigma} + A_{23}\frac{\sin\sigma(1-x)}{\sigma}\cos\sigma\xi \right. \\ & \left. + A_{41}\cos\sigma(1-x)\frac{\sin\sigma\xi}{\sigma} + A_{31}\frac{\sin\sigma(1-x)}{\sigma}\frac{\sin\sigma\xi}{\sigma} + A_{24}\cos\sigma(1-x)\cos\sigma\xi \right) \\ & + \chi(\xi,x) \left(A_{34}\frac{\sin\sigma(\xi-x)}{\sigma} + A_{23}\frac{\sin\sigma(1-\xi)}{\sigma}\cos\sigma x \right. \\ & \left. + A_{41}\cos\sigma(1-\xi)\frac{\sin\sigma x}{\sigma} + A_{31}\frac{\sin\sigma(1-\xi)}{\sigma}\frac{\sin\sigma x}{\sigma} + A_{24}\cos\sigma(1-\xi)\cos\sigma x \right) \Bigg]\end{aligned}$$

C'est donc une fonction méromorphe en λ, dont les pôles sont les λ_n. Si μ est fixé dans $\mathbb{C}$ et n'est pas un pôle de $\mathcal{G}$, l'opérateur défini de $L^2(0,1)$ dans $L^2(0,1)$ par:

$$K(f) = \int_0^1 \mathcal{G}(x,\xi,\mu) f(\xi) d\xi$$

est l'inverse algébrique de $\tilde{A} - \mu I$. Comme il a été mentionné plus haut, c'est un opérateur compact de $L^2(0,1)$. Ses valeurs propres sont les $(\frac{1}{\lambda_n - \mu})_{n\in\mathbb{N}}$. Les vecteurs propres associés sont aussi des vecteurs propres de $\tilde{A} - \mu I$, et donc des vecteurs propres de $\tilde{A}$, avec les λ_n comme valeurs propres associées.

A.2.1.2. *Théorémes d'expansion.* On peut alors montrer le résultat suivant (appelé théorème d'expansion). On considère pour tout entier $n > 0$ un contour C_n qui encercle les n premiers pôles de $\mathcal{G}$ (les estimations asymptotiques obtenues précédemment montrent que c'est possible, avec des cercles dont le rayon croît comme n^2). On a alors, en posant:

$$\Sigma_n(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_n} \int_0^1 \mathcal{G}(x,\xi,\lambda) f(\xi) d\xi d\lambda$$

Propriété A.2.2. *Si $C \neq 0$, alors:*

$$\forall f \in L^2(0,1),\ \lim_{n\to\infty} \|\Sigma_n - s_n\|_\infty = 0$$

où $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{< f, \cos(k\pi.) >}{< \cos(k\pi.), \cos(k\pi.) >} \cos(k\pi x)$ *est le développement en cosinus de* f *à l'ordre* n.

DÉMONSTRATION. voir [**9**], th. 2.1, chap. 12. □

Nous en déduisons que si $f \in L^2(0,1)$, alors:

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f - \frac{1}{2i\pi} \int_{C_n} \left(\int_0^1 \mathcal{G}(x,\xi,\lambda) f(\xi) d\xi \right) d\lambda \right\|_{L^2} = 0$$

et que si de plus, f est la limite en tout point de [0,1] de sa série de fourier en cosinus, alors:

$$\lim_{n\to\infty} \left| f(x) - \frac{1}{2i\pi} \int_{C_n} \left(\int_0^1 \mathcal{G}(x,\xi,\lambda) f(\xi) d\xi \right) d\lambda \right| = 0$$

Dans le cas où $C = 0$ et $E \neq 0$, la situation est plus complexe:
Les coefficients des conditions aux bords peuvent être présentés sous la forme d'un tableau à deux lignes et quatre colonnes:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

Nous supposons, quitte à échanger les deux bords 0 et 1, que a_{12} ou $a_{22} \neq 0$: en effet, $E \neq 0$ entraîne qu'au moins un des coefficients qui compose le déterminant A_{24} est non nul.

Quitte à permuter les deux lignes, nous supposons que c'est a_{12} qui est non nul. On sait alors qu'il exite un nombre α tel que $\begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$, et donc que $A_{14} = \alpha A_{12}$ et $A_{34} = \alpha A_{32}$.

Supposons que $a_{23} \neq 0$; en utilisant la relation $C = A_{24} = 0$ on obtient en combinant les deux lignes du tableau de départ:

$$\begin{pmatrix} A_{12} & 0 & A_{32} & 0 \\ A_{13} & A_{23} & 0 & A_{43} \end{pmatrix}$$

Dans ces conditions, A_{32} est nécessairement différent de zéro, sinon les des relations qui définissent les conditions aux bords ne sont pas indépendantes. Posons: $\beta = \frac{A_{12}}{A_{32}}$, et $\gamma = \frac{A_{13}}{A_{23}}$. Le tableau des coefficients des conditions aux bords devient alors:

$$\begin{pmatrix} \beta & 0 & 1 & 0 \\ \gamma & 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \tag{A.2.11}$$

On peut toujours, en échangeant les lignes du tableau de départ, se ramener à cette forme sauf dans le cas où $a_{23} = a_{22} = 0$. Dans ce cas, on a nécessairement $a_{24} = 0$, et le tableau de conditions aux bords s'écrit:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha & \beta \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.2.12}$$

où $\beta \neq 0$.

Nous supposons que nous sommes dans la situation de (A.2.11), le cas (A.2.12) se traite de la même façon et ne donne aucun résultat itéressant. La fonction de

Green $\mathcal{G}(x,\xi,\lambda)$ de $\tilde{A}$ s'écrit alors:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(x,\xi,\lambda) = \frac{1}{D_{\tilde{A}(\lambda)}} \Bigg[& \chi(x,\xi) \left(\beta \frac{\sin\sigma(x-\xi)}{\sigma} - \frac{\sin\sigma(1-x)}{\sigma}\cos\sigma\xi \right. \\ & \left. -\alpha\beta\cos\sigma(1-x)\frac{\sin\sigma\xi}{\sigma} + \gamma\frac{\sin\sigma(1-x)}{\sigma}\frac{\sin\sigma\xi}{\sigma} \right) \\ & + \chi(\xi,x) \left(\alpha\frac{\sin\sigma(\xi-x)}{\sigma} - \frac{\sin\sigma(1-\xi)}{\sigma}\cos\sigma x \right. \\ & \left. -\alpha\beta\cos\sigma(1-\xi)\frac{\sin\sigma x}{\sigma} + \gamma\frac{\sin\sigma(1-\xi)}{\sigma}\frac{\sin\sigma x}{\sigma} \right) \Bigg]\end{aligned}$$

où $D_{\tilde{A}(\lambda)}$ a pour expression:

$$D_{\tilde{A}(\lambda)} = (\alpha+\beta) + (1+\alpha\beta)\cos(\sigma) - \gamma\frac{\sin(\sigma)}{\sigma}$$

Les zéros de cette fonctions sont les pôles de la fonction de Green et les valeurs propres du problème; nous excluons le cas des valeurs propres doubles, qui, d'après l'étude menée précédemment, correspond à $\sigma_0 = 0$ ou $\sigma_0 = \pi$.

On définit la région E du plan complexe formée de la réunion de tous les cercles centrés sur les σ_k et de rayon $r = \min(\frac{|\sigma_0|}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{|\pi - abs\sigma_0|}{2})$. A l'extérieur de E, on a en notant $\sigma = u + iv$ et $\sigma_0 = u_0 + iv_0$:

$$\begin{aligned}& |(\alpha+\beta) + (1+\alpha\beta)\cos(\sigma)| = |(1+\alpha\beta)(\cos(\sigma) - \cos(\sigma_0)| \\ & = 2\,|1+\alpha\beta| \left|\sin(\frac{\sigma+\sigma_0}{2})\right| \left|\sin(\frac{\sigma-\sigma_0}{2})\right| \\ & \geq 2\,|1+\alpha\beta| \max\left(\min_{|z|=r}(\left|\sin(\frac{z}{2})\right|^2), \sinh(\frac{|v+v_0|}{2})\sinh(\frac{|v-v_0|}{2}) \right) \\ & \geq K e^{|v|}\end{aligned}$$

On en déduit, comme dans le cas où $A_{24} \neq 0$ (voir [**9**], chap.12) que la fonction de Green $\mathcal{G}(x,\xi,\sigma^2)$ associée à $\tilde{A}$ vérifie pour $|\sigma|$ suffisamment grand et à l'extérieur de E l'inégalité:

$$\left|\mathcal{G}(x,\xi,\sigma^2)\right| \leq k\frac{e^{-|v||x-\xi|} + e^{-|v|(1-|x-\xi|)}}{\sigma} \tag{A.2.13}$$

où k est une constante positive qui ne dépend que des coefficients des conditions aux bords, et v désigne la partie imaginaire de σ.

Remarque. Ce calcul est également valable lorsque les conditions aux bords sont de la forme (A.2.12).

On définit C_n comme étant l'image par la fonction carrée du cercle U_n de rayon $(2n+1)\pi$. Pour n suffisamment grand, on montre aisément que U_n contient les $4n+1$ premières valeurs σ_k et passe à l'extérieur de E. On définit encore $\Sigma_{2n}(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C_n}\int_0^1 \mathcal{G}(x,\xi,\lambda)f(\xi)d\xi d\lambda$.

On remarque alors comme dans [**9**] que:

$$\Sigma_{2n}(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C_n}\int_0^1 \mathcal{G}(x,\xi,\lambda)f(\xi)d\xi d\lambda = \frac{1}{2i\pi}\int_{U_n}\int_0^1 \mathcal{G}(x,\xi,\sigma)f(\xi)d\xi\sigma d\sigma$$

Un calcul élémentaire fournit l'estimation pour $\sigma \in U_n$:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{G}(x,\xi,\lambda) = \\
&\chi(x,\xi)\left(\frac{\beta\frac{\sin\sigma(x-\xi)}{\sigma} - \frac{\sin\sigma(1-x)}{\sigma}\cos\sigma\xi - \alpha\beta\cos\sigma(1-x)\frac{\sin\sigma\xi}{\sigma}}{(\alpha+\beta)+(1+\alpha\beta)\cos(\sigma)}\right. \\
&\qquad\left. +O(\frac{e^{-|v|(x-\xi)}}{\sigma^2}) + O(\frac{e^{-|v|(1-x+\xi)}}{\sigma^2})\right) \\
&+\chi(\xi,x)\left(\frac{\alpha\frac{\sin\sigma(\xi-x)}{\sigma} - \frac{\sin\sigma(1-\xi)}{\sigma}\cos\sigma x - \alpha\beta\cos\sigma(1-\xi)\frac{\sin\sigma x}{\sigma}}{(\alpha+\beta)+(1+\alpha\beta)\cos(\sigma)}\right. \\
&\qquad\left. +O(\frac{e^{-|v|(\xi-x)}}{\sigma^2}) + O(\frac{e^{-|v|(1-\xi+x)}}{\sigma^2})\right)
\end{aligned}$$

Posons:

$$\begin{aligned}
&\hat{\mathcal{G}}(x,\xi,\lambda) = \\
&\chi(x,\xi)\left(\frac{\beta\frac{\sin\sigma(x-\xi)}{\sigma} - \frac{\sin\sigma(1-x)}{\sigma}\cos\sigma\xi - \alpha\beta\cos\sigma(1-x)\frac{\sin\sigma\xi}{\sigma}}{(\alpha+\beta)+(1+\alpha\beta)\cos(\sigma)}\right) \\
&+\chi(\xi,x)\left(\frac{\alpha\frac{\sin\sigma(\xi-x)}{\sigma} - \frac{\sin\sigma(1-\xi)}{\sigma}\cos\sigma x - \alpha\beta\cos\sigma(1-\xi)\frac{\sin\sigma x}{\sigma}}{(\alpha+\beta)+(1+\alpha\beta)\cos(\sigma)}\right)
\end{aligned}$$

C'est la fonction de Green de l'opérateur $\hat{A}$ défini comme $\tilde{A}$ mais en faisant $\gamma = 0$. On montre alors (voir [**9**], chap.12, sec.2) les termes en "O" tendent vers 0 lorsque n tend vers 0, uniformément en x et donc que:

$$\lim_{n\to+\infty} \left\| \Sigma_{2n}(.) - \hat{\Sigma_{2n}}(.) \right\|_\infty = 0$$

On a d'autre part en appliquant la formule des résidus:

$$\hat{\Sigma_{2n}}(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{U_n}\int_0^1 \hat{\mathcal{G}}(x,\xi,\sigma)f(\xi)d\xi\sigma d\sigma$$
$$= \frac{1}{2i\pi}\int_{U_n}\left(\int_0^x \frac{\beta\sin\sigma(x-\xi)-\sin\sigma(1-x)\cos\sigma\xi-\alpha\beta\cos\sigma(1-x)\sin\sigma\xi}{(\alpha+\beta)+(1+\alpha\beta)\cos(\sigma)}f(\xi)d\xi + \right.$$
$$\left.\int_x^1 \frac{\alpha\sin\sigma(\xi-x)-\sin\sigma(1-\xi)\cos\sigma x-\alpha\beta\cos\sigma(1-\xi)\sin\sigma x}{(\alpha+\beta)+(1+\alpha\beta)\cos(\sigma)}f(\xi)d\xi\right)d\sigma$$
$$= \int_0^x f(\xi)\frac{1}{2i\pi}\int_{U_n}\frac{\beta\sin\sigma(x-\xi)-\sin\sigma(1-x)\cos\sigma\xi-\alpha\beta\cos\sigma(1-x)\sin\sigma\xi}{(\alpha+\beta)+(1+\alpha\beta)\cos(\sigma)}d\sigma d\xi$$
$$+\int_x^1 f(\xi)\frac{1}{2i\pi}\int_{U_n}\frac{\alpha\sin\sigma(\xi-x)-\sin\sigma(1-\xi)\cos\sigma x-\alpha\beta\cos\sigma(1-\xi)\sin\sigma x}{(\alpha+\beta)+(1+\alpha\beta)\cos(\sigma)}d\sigma d\xi$$
$$= \int_0^x f(\xi)\left(\sum_{k=-n}^{n}\frac{\beta\sin\sigma_{2k}(x-\xi)-\sin\sigma_{2k}(1-x)\cos\sigma_{2k}\xi-\alpha\beta\cos\sigma_{2k}(1-x)\sin\sigma_{2k}\xi}{-(1+\alpha\beta)\sin(\sigma_{2k})}\right.$$
$$\left.+\sum_{k=-n}^{n}\frac{\beta\sin\sigma_{2k+1}(x-\xi)-\sin\sigma_{2k+1}(1-x)\cos\sigma_{2k+1}\xi-\alpha\beta\cos\sigma_{2k+1}(1-x)\sin\sigma_{2k+1}\xi}{-(1+\alpha\beta)\sin(\sigma_{2k+1})}\right)$$
$d\xi$
$$+\int_x^1 f(\xi)\left(\sum_{k=-n}^{n}\frac{\alpha\sin\sigma_{2k}(\xi-x)-\sin\sigma_{2k}(1-\xi)\cos\sigma_{2k}x-\alpha\beta\cos\sigma_{2k}(1-\xi)\sin\sigma_{2k}x}{-(1+\alpha\beta)\sin(\sigma_{2k})}\right.$$
$$\left.+\sum_{k=-n}^{n}\frac{\alpha\sin\sigma_{2k+1}(\xi-x)-\sin\sigma_{2k+1}(1-\xi)\cos\sigma_{2k+1}x-\alpha\beta\cos\sigma_{2k+1}(1-\xi)\sin\sigma_{2k+1}x}{-(1+\alpha\beta)\sin(\sigma_{2k+1})}\right)$$
$d\xi$

Or nous avons par définition:

$$\sigma_{2k} = \sigma_0 + 2k\pi, \text{ et } \sigma_{2k+1} = -\sigma_0 + 2k\pi = -\sigma_{-2k},$$

d'où:

$$\sum_{k=-n}^{n}\frac{\beta\sin\sigma_{2k}(x-\xi)-\sin\sigma_{2k}(1-x)\cos\sigma_{2k}\xi-\alpha\beta\cos\sigma_{2k}(1-x)\sin\sigma_{2k}\xi}{-(1+\alpha\beta)\sin(\sigma_{2k})}+$$
$$\sum_{k=-n}^{n}\frac{\beta\sin\sigma_{2k+1}(x-\xi)-\sin\sigma_{2k+1}(1-x)\cos\sigma_{2k+1}\xi-\alpha\beta\cos\sigma_{2k+1}(1-x)\sin\sigma_{2k+1}\xi}{-(1+\alpha\beta)\sin(\sigma_{2k+1})}$$
$$= 2\sum_{k=-n}^{n}\frac{\beta\sin\sigma_{2k}(x-\xi)-\sin\sigma_{2k}(1-x)\cos\sigma_{2k}\xi-\alpha\beta\cos\sigma_{2k}(1-x)\sin\sigma_{2k}\xi}{-(1+\alpha\beta)\sin(\sigma_{2k})}$$
$$= \frac{2}{(1+\alpha\beta)\sin\sigma_0}\sum_{k=-n}^{n}((-\beta-\cos\sigma_0)\sin\sigma_{2k}x\cos\sigma_{2k}\xi+(\beta+\alpha\beta\cos\sigma_0)$$
$$\sin\sigma_{2k}\xi\cos\sigma_{2k}x+\alpha\beta\sigma_0\sin\sigma_{2k}\xi\sin\sigma_{2k}x+\sin\sigma_0\cos\sigma_{2k}x\cos\sigma_{2k}\xi)$$

et de même:

$$\sum_{k=-n}^{n}\left(\frac{\alpha\sin\sigma_{2k}(\xi-x)-\sin\sigma_{2k}(1-\xi)\cos\sigma_{2k}x-\alpha\beta\cos\sigma_{2k}(1-\xi)\sin\sigma_{2k}x}{-(1+\alpha\beta)\sin(\sigma_{2k})}+\right.$$

$$\left.\frac{\alpha\sin\sigma_{2k+1}(\xi-x)-\sin\sigma_{2k+1}(1-\xi)\cos\sigma_{2k+1}x-\alpha\beta\cos\sigma_{2k+1}(1-\xi)\sin\sigma_{2k+1}x}{-(1+\alpha\beta)\sin(\sigma_{2k+1})}\right)$$

$$=2\sum_{k=-n}^{n}\frac{\alpha\sin\sigma_{2k}(\xi-x)-\sin\sigma_{2k}(1-\xi)\cos\sigma_{2k}x-\alpha\beta\cos\sigma_{2k}(1-\xi)\sin\sigma_{2k}x}{-(1+\alpha\beta)\sin(\sigma_{2k})}$$

$$=\frac{2}{(1+\alpha\beta)\sin\sigma_0}\sum_{k=-n}^{n}((-\alpha-\cos\sigma_0)\sin\sigma_{2k}\xi\cos\sigma_{2k}x+(\alpha+\alpha\beta\cos\sigma_0)$$

$$\sin\sigma_{2k}x\cos\sigma_{2k}\xi+\alpha\beta\sigma_0\sin\sigma_{2k}x\sin\sigma_{2k}\xi+\sin\sigma_0\cos\sigma_{2k}\xi\cos\sigma_{2k}x)$$

Or, nous avons par définition: $(1+\alpha\beta)\cos\sigma_0=-\alpha-\beta$, d'où: $\beta+\alpha\beta\cos\sigma_0=-\alpha-\cos\sigma_0$, et $\alpha+\alpha\beta\cos\sigma_0=-\beta-\cos\sigma_0$. En reportant ceci dans les expressions précédemment calculées, nous obtenons finalement:

$$\hat{\Sigma_{2n}}(x)=\frac{2}{(1+\alpha\beta)\sin\sigma_0}\times$$

$$\int_0^1 f(\xi)\sum_{k=-n}^{n}((-\alpha-\cos\sigma_0)\sin\sigma_{2k}\xi\cos\sigma_{2k}x+(-\beta-\cos\sigma_0)\cos\sigma_{2k}\xi\sin\sigma_{2k}x$$

$$+\alpha\beta\sigma_0\sin\sigma_{2k}\xi\sin\sigma_{2k}x+\sin\sigma_0\cos\sigma_{2k}\xi\cos\sigma_{2k}x)d\xi$$

$$=\frac{2}{(1+\alpha\beta)\sin\sigma_0^2}\int_0^1 f(\xi)\sum_{k=-n}^{n}(\sin\sigma_0\cos\sigma_{2k}\xi-(\alpha+\cos\sigma_0)\sin\sigma_{2k}\xi)$$

$$(\sin\sigma_0\cos\sigma_{2k}x-(\beta+\cos\sigma_0)\sin\sigma_{2k}x)d\xi=\sum_{k=-n}^{n}<f,\phi_{2k}^{\star}>\phi_{2k}$$

où on a posé:

$$\phi_{2k}(x)=\sqrt{\frac{2}{(1+\alpha\beta)\sin\sigma_0^2}}(\sin\sigma_0\cos\sigma_{2k}x-(\beta+\cos\sigma_0)\sin\sigma_{2k})$$

et

$$\phi_{2k}^{\star}(x)=\sqrt{\frac{2}{(1+\alpha\beta)\sin\overline{\sigma_0}^2}}(\sin\overline{\sigma_0}\cos\overline{\sigma_{2k}}x-(\alpha+\cos\overline{\sigma_0})\sin\overline{\sigma_{2k}})$$

Il est immédiat de vérifier que ϕ_{2k} est le vecteur propre de $\hat{A}$ associé à la valeur propre $-\sigma_{2k}^2$ et que $\phi_{2k}^{\star}$ est le vecteur propre de $\hat{A}^{\star}$ associé à la valeur propre $-\overline{\sigma_{2k}}^2$, et que:

$$\forall(i,j)\in\mathbb{Z}^2,\ <\phi_{2i},\phi_{2j}^{\star}>=\delta_{ij}$$

Nous retrouvons dons un cas particulier des théorèmes 5.1 et 5.2, sec.5 chap.12 de [**9**]. Il en résulte que trivialement, si $\alpha=\beta$, ou autrement dit si $A_{12}=A_{34}$, nous savons que $\hat{A}$ est autoadjoint et que ses vecteurs propres forment une base Hilbertienne de $L^2(0,1)$, et donc:

$$\lim_{n\to+\infty}\left\|f-\hat{\Sigma}_{2n}\right\|_2=0$$

d'où:

$$\lim_{n\to+\infty} \|f-\Sigma_{2n}\|_2 = 0$$

Mais on a aussi: si $\alpha = -\beta$, alors pour $k>0$, $\sigma_{2k} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et $\sigma_{-2k} = -(\frac{\pi}{2} + (2k-1)\pi) = -\sigma_{2k-1}$. On en déduit que:

$$\begin{aligned}
\hat{\Sigma_{2n}}(x) &= \frac{2}{(1-\beta^2)}\int_0^1 f(\xi)\left(\sum_{k=0}^{n}(\beta\sin\sigma_{2k}\xi\cos\sigma_{2k}x - \beta\cos\sigma_{2k}\xi\sin\sigma_{2k}x\right.\\
&-\beta^2\sin\sigma_{2k}\xi\sin\sigma_{2k}x+\cos\sigma_{2k}\xi\cos\sigma_{2k}x) + \sum_{k=1}^{n}(-\beta\sin\sigma_{2k-1}\xi\cos\sigma_{2k-1}x\\
&\left.+\beta\cos\sigma_{2k-1}\xi\sin\sigma_{2k-1}x-\beta^2\sin\sigma_{2k-1}\xi\sin\sigma_{2k-1}x+\cos\sigma_{2k-1}\xi\cos\sigma_{2k-1}x)\right)d\xi\\
&= \frac{2}{(1-\beta^2)}\int_0^1 f(\xi)\sum_{k=0}^{2n}(\beta\cos\sigma_k(1-\xi)\cos\sigma_k x - \beta\cos\sigma_k\xi\cos\sigma_k(1-x)\\
&-\beta^2\cos\sigma_k(1-\xi)\cos\sigma_k(1-x)+\cos\sigma_k\xi\cos\sigma_k x)d\xi
\end{aligned}$$

Mais on sait que les $(\sqrt{2}\cos\sigma_k x)_{k\in\mathbb{N}}$ forment une base Hilbertienne de $L^2(0,1)$, donc en norme L^2:

$$\lim_{n\to+\infty} 2\int_0^1 f(\xi)\sum_{k=0}^{2n}\cos\sigma_k\xi\cos\sigma_k x d\xi = f(x)$$

$$\lim_{n\to+\infty} 2\int_0^1 f(\xi)\sum_{k=0}^{2n}-\beta^2\cos\sigma_k(1-\xi)\cos\sigma_k(1-x)d\xi = -\beta^2 f(1-(1-x)) = -\beta^2 f(x)$$

$$\lim_{n\to+\infty} 2\int_0^1 f(\xi)\sum_{k=0}^{2n}\beta\cos\sigma_k(1-\xi)\cos\sigma_k x d\xi = \beta f(1-x)$$

$$\lim_{n\to+\infty} 2\int_0^1 f(\xi)\sum_{k=0}^{2n}-\beta\cos\sigma_k\xi\cos\sigma_k(1-x)d\xi = -\beta f(1-x)$$

On en déduit que:

$$\lim_{n\to+\infty}\left\|f-\hat{\Sigma}_{2n}\right\|_2 = 0$$

d'où:

$$\lim_{n\to+\infty}\|f-\Sigma_{2n}\|_2 = 0$$

Il est évident que dans les deux cas particuliers étudiés, le résultat est aussi valable avec un contour qui encercle seulement les $4n-1$ premieres valeurs de σ_k, car on vérifie sans peine que dans le cas autoadjoint, σ_0 est nécessairement un nombre réel. Nous avons donc la propriété suivante:

PROPRIÉTÉ A.2.3. *Si $C = A_{24} = 0$, $E = A_{23} - A_{14} \neq 0$, et si ($D = A_{12} + A_{34} = 0$ ou $A_{12} = A_{34}$), alors:*

$$\forall f \in L^2(0,1),\ \lim_{n\to+\infty}\|f-\Sigma_n\|_2 = 0$$

De même, dans le cas où $B \neq 0$:

PROPRIÉTÉ A.2.4. *Si tous les A_{ij} sont nuls, sauf A_{13}, alors:*

$$\forall f \in L^2(0,1),\ \lim_{n\to+\infty} \|f - \Sigma_n\|_2 = 0$$

A.2.1.3. *Comportement à l'infini de la fonction de Green.* Il ressort des estimations asymptotiques étudiées au paragraphe A.2.1.1 que les λ_n sont dans le demi-plan complexe gauche lorsque n tend vers $+\infty$. Il existe donc une borne $\omega > 0$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad a_n = \mathcal{R}e(\lambda_n) < \omega - 1$$

Nous désignons par D_ω la demi-droite ouverte formé des nombres réels μ tels que : $\mu \geq \omega$ Nous allons montrer que

PROPRIÉTÉ A.2.5. *Si A est tel que:*

- *$C = A_{24} \neq 0$,*
- *ou: $C = 0$, $E = A_{23} - A_{14} \neq 0$, et $\left|\frac{D}{E}\right| \neq 1$ avec $D = A_{12} + A_{34}$,*
- *ou: tous les A_{ij} sont nuls, sauf A_{13},*

alors la résolvante vérifie pour tout f de $L^2(0,1)$ et tout $\mu \in D_\omega$:

$$\|R(A:\mu)^p(f)\|_2 = \frac{K}{(\mu-\omega)^p} \tag{A.2.14}$$

DÉMONSTRATION. Nous donnons la preuve dans le cas de pôles d'ordre 2, elle se généralise sans mal à l'ordre $m > 1$ quelconque.

Nous évaluons l'intégrale, pour tout μ qui n'est pas une valeur propre de A

$$\int_{C_n}\int_0^1 \frac{G(x,\xi,\lambda)}{\lambda} f(\xi)d\xi d\lambda,$$

où C_n est un contour qui contient les n premiers pôles de G, μ et 0, et qui ne rencontre pas E (défini dans la section précédente).

Nous sommes dans des conditions où (A.2.13) est vérifiée, donc cette intégrale tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Nous utilisons les résultats de [**60**],th.1, 2 et p.288. Nous notons:

- $N(A-\lambda_n I)^2$ le noyau de $(A-\lambda_n I)^2$, il est de dimension finie inférieure à 4 (nous regardons des équations différentielles d'ordre 2).
- $R[(A-\lambda_n I)(N(A-\lambda_n I)^2]$ l'image par $(A-\lambda_n I)$ de $N(A-\lambda_n I)^2$. Les éléments de $R[(A-\lambda_n I)(N(A-\lambda_n I)^2]$ sont les vecteurs propres de $(A-\lambda_n I)$. Il est de dimension inférieure à 2. Nous supposons pour simplifier qu'il est de dimension 1,alors $R[(A-\lambda_n I)(N(A-\lambda_n I)^2]$ est nécessairement de dimension 2.
- e_n l'unique valeur propre (à multiplication par un scalaire près) de $A-\lambda_n I$,
- f_{1n} et f_{2n} une base de $N(A-\lambda_n I)^2$
- et nous adoptons les mêmes notations avec une "$\star$" pour $A^\star - \bar{\lambda}_n I$

Nous appliquons la formule des résidus, qui donne, sachant qu'un pôle est de multiplicité au plus 2 par hypothèse, et en rédigeant les calculs comme si tous les pôles

étaient doubles:

$$R(A:\mu)(f)(x) = \int_0^1 G(x,\xi,\mu)f(\xi)d\xi$$
$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \left(\frac{2N'(x,\xi,\lambda_n) - \frac{2D_A'''(\lambda_n)}{3D_A''(\lambda_n)}N(x,\xi,\lambda_n)}{D_A''(\lambda_n)(\lambda_n-\mu)} - \frac{2N(x,\xi,\lambda_n)}{D_A''(\lambda_n)(\lambda_n-\mu)^2}f(\xi)\right)d\xi$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\int_0^1 G_{1n}(x,\xi)f(\xi)d\xi}{\lambda_n-\mu} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\int_0^1 G_{2n}(x,\xi)f(\xi)d\xi}{(\lambda_n-\mu)^2}$$

où nous avons posé: $G(x,\xi,\lambda) = \frac{N(x,\xi,\lambda)}{D_A(\lambda)}$. Or nous savons (voir [**60**], th.3 p.288) que

$$\int_0^1 G_{1n}(x,\xi)f(\xi)d\xi \quad \text{est à valeurs dans } N(A-\lambda_n I)^2$$
$$\int_0^1 G_{2n}(x,\xi)f(\xi)d\xi \quad \text{est à valeurs dans } R[(A-\lambda_n I)(N(A-\lambda_n I)^2]$$

Nous en déduisons donc, en appliquant le théorème de représetation de Riesz des formes linéaires continues qu'il existe trois fonctions de $L^2(0,1)$, notées c_n, d_{1n} et d_{2n} telles que

$$\int_0^1 G_{2n}(x,\xi)f(\xi)d\xi = (\int_0^1 \bar{c}_n(\xi)f(\xi)d\xi)e_n(x)$$
$$\int_0^1 G_{1n}(x,\xi)f(\xi)d\xi = (\int_0^1 \bar{d}_{1n}(\xi)f(\xi)d\xi)f_{1n}(x) + (\int_0^1 \bar{d}_{2n}(\xi)f(\xi)d\xi)f_{2n}(x)$$

Le même résultat vaut pour l'adjoint, et $G^\star(x,\xi,\lambda) = \bar{G}(\xi,x,\bar{\lambda})$, d'où nécessairement

$$\int_0^1 G_{2n}(x,\xi)f(\xi)d\xi = (\int_0^1 \bar{e}_n^\star(\xi)f(\xi)d\xi)e_n(x)$$
$$\int_0^1 G_{1n}(x,\xi)f(\xi)d\xi = (\int_0^1 \bar{f}_{1n}^\star(\xi)f(\xi)d\xi)f_{1n}(x) + (\int_0^1 \bar{f}_{2n}^\star(\xi)f(\xi)d\xi)f_{2n}(x)$$

Or, on a de façon triviale si $m \neq n$:

$$\begin{array}{llll} <e_n,e_m^\star> = 0 & <e_n,f_{1m}^\star> = 0 & <e_n,f_{2m}^\star> = 0 \\ <f_{1n},e_m^\star> = 0 & <f_{1n},f_{1m}^\star> = 0 & <f_{1n},f_{2m}^\star> = 0 \\ <f_{2n},e_m^\star> = 0 & <f_{2n},f_{1m}^\star> = 0 & <f_{2n},f_{2m}^\star> = 0 \end{array}$$

On montre de plus en calculant $R(A:\mu)(e_n)$ que: $<e_n,e_n^\star> = 0$, et que

$$e_n = <e_n,f_{1n}^\star> f_{1n} + <e_n,f_{2n}^\star> f_{2n}$$
$$e_n^\star = <e_n^\star,f_{1n}> f_{1n}^\star + <e_n^\star,f_{2n}> f_{2n}^\star$$

De plus

$$\forall f_n \in N(A-\lambda_n I)^2,\ [(A-\mu I)+(\mu-\lambda_n)I]^2(f_n) = 0$$
$$= (A-\mu I)^2(f_n) + 2(\mu-\lambda_n)(A-\mu I)(f_n) + (\mu-\lambda_n)^2(f_n)$$

d'où

$$(\mu-\lambda_n)^2 R(A:\mu)(f_n)+2(\mu-\lambda_n)f_n+(A-\mu I)(f_n)=0$$

et

$$(\mu-\lambda_n)^2 R(A:\mu)(f_n)+(\mu-\lambda_n)f_n+(A-\lambda_n I)(f_n)=0$$

mais $(A-\lambda_n I)(f_n)$ est colinéaire à e_n, donc

$$\forall f_n \in N(A-\lambda_n I)^2, \exists M \in \mathbb{C}$$
$$R(A:\mu)(f_n) = -\frac{M}{(\mu-\lambda_n)^2}e_n - \frac{1}{\mu-\lambda_n}f_n$$

En injectant ceci dans l'expression de $R(A:\mu)(f_n)$, on obtient qu'il faut que les fonction f_{1n} et f_{2n} vérifient

$$\begin{array}{llll} < f_{1n}, f_{2n}^\star > = 0 & < f_{1n}, f_{1n}^\star > & = 1 \\ < f_{2n}, f_{1n}^\star > = 0 & < f_{2n}, f_{2n}^\star > & = 1 \end{array}$$

On peut alors obtenir l'expression de $R(A:\mu)^p(f)$:

$$\begin{aligned} R(A:\mu)^2(f) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 < f, e_n^\star >}{(\lambda_n-\mu)^3}e_n + \\ &\quad \frac{< f, f_{1n}^\star >}{(\lambda_n-\mu)^2}f_{1n} + \frac{< f, f_{2n}^\star >}{(\lambda_n-\mu)^2}f_{2n} \\ R(A:\mu)^p(f) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p < f, e_n^\star >}{(\lambda_n-\mu)^{p+1}}e_n + \\ &\quad \frac{< f, f_{1n}^\star >}{(\lambda_n-\mu)^p}f_{1n} + \frac{< f, f_{2n}^\star >}{(\lambda_n-\mu)^p}f_{2n} \end{aligned}$$

Dans le cas d'un pôle simple, seul le terme en f_{1n} apparaît. Sinon, sachant que chaque e_n est colinéaire à f_{1n} et f_{2n}, et chaque $e_n^\star$ est colinéaire à $f_{1n}^\star$ et $f_{2n}^\star$, nous obtenons que pour tout n,

$$\begin{aligned} &\frac{p < f, e_n^\star >}{(\lambda_n-\mu)^{p+1}}e_n + \frac{< f, f_{1n}^\star >}{(\lambda_n-\mu)^p}f_{1n} + \frac{< f, f_{2n}^\star >}{(\lambda_n-\mu)^p}f_{2n} \\ &= \left(k_{1n}\frac{p < f, e_n^\star >}{(\lambda_n-\mu)^{p+1}} + \frac{< f, f_{1n}^\star >}{(\lambda_n-\mu)^p}\right)f_{1n} \\ &+ \left(k_{2n}\frac{p < f, e_n^\star >}{(\lambda_n-\mu)^{p+1}} + \frac{< f, f_{2n}^\star >}{(\lambda_n-\mu)^p}\right)f_{2n} \end{aligned}$$

Nous avons de plus, dans chacun des cas mentionnés dans l'énoncé de la propriété, un résultat analogue à celui de la propriété A.2.7 pour les f_{in}: ils se comportent comme des combinaisons (par des coefficient éventuellement dépendants de x, mais indépendants de λ_n) de $\cos(\sigma_n)$ et $\sin(\sigma_n$, perturbées par des fonctions de taille $\frac{1}{n}$,

d'où, comme dans la preuve de A.2.3, l'existence de d'une constante M telle que

$$
\begin{aligned}
&\|R(A:\mu)^p(f)\|_2 \\
&= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \left(k_{1n} \frac{p < f,e_n^\star >}{(\lambda_n-\mu)^{p+1}} + \frac{< f,f_{1n}^\star >}{(\lambda_n-\mu)^p} \right) + \left(k_{2n} \frac{p < f,e_n^\star >}{(\lambda_n-\mu)^{p+1}} + \frac{< f,f_{2n}^\star >}{(\lambda_n-\mu)^p} \right) f_{2n} \right\|_2 \\
&= \frac{1}{(\mu-\omega)^p} \\
&\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \left(k_{1n} \frac{p < f,e_n^\star > (\mu-\omega)^p}{(\lambda_n-\mu)^{p+1}} + \frac{< f,f_{1n}^\star > (\mu-\omega)^p}{(\lambda_n-\mu)^p} \right) f_{1n} \right. \\
&\left. + \left(k_{2n} \frac{p < f,e_n^\star > (\mu-\omega)^p}{(\lambda_n-\mu)^{p+1}} + \frac{< f,f_{2n}^\star > (\mu-\omega)^p}{(\lambda_n-\mu)^p} \right) f_{2n} \right\|_2 \\
&\leq \frac{1}{(\mu-\omega)^p} M \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(k_{1n} \frac{p < f,e_n^\star > (\mu-\omega)^p}{(\lambda_n-\mu)^{p+1}} + \frac{< f,f_{1n}^\star > (\mu-\omega)^p}{(\lambda_n-\mu)^p} \right)^2 \right. \\
&\left. + \left(k_{2n} \frac{p < f,e_n^\star > (\mu-\omega)^p}{(\lambda_n-\mu)^{p+1}} + \frac{< f,f_{2n}^\star > (\mu-\omega)^p}{(\lambda_n-\mu)^p} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

Or nous avons la majoration, lorsque $\mu > \omega > a_n + 1$:

$$
\begin{aligned}
\left| \frac{p(\mu-\omega)^p}{(\lambda_n-\mu)^{p+1}} \right| &\leq \frac{p(\mu-\omega)^p}{(\mu-a_n)^{p+1}} \\
&\leq \left(\frac{p}{p+1} \right)^{p+1} \frac{1}{(\omega-a_n)} \\
&\leq 1
\end{aligned}
$$

et d'autre part, $e_n^\star$ est une combinaison linéaire de $f_{1n}^\star$ et $f_{2n}^\star$, et ces vecteurs vérifient aussi la propriété A.2.7 d'où l'exitence d'une constante P telle que:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(\mu-\omega)^p} M \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(k_{1n} \frac{p < f,e_n^\star > (\mu-\omega)^p}{(\lambda_n-\mu)^{p+1}} + \frac{< f,f_{1n}^\star > (\mu-\omega)^p}{(\lambda_n-\mu)^p} \right)^2 \right. \\
&\left. + \left(k_{2n} \frac{p < f,e_n^\star > (\mu-\omega)^p}{(\lambda_n-\mu)^{p+1}} + \frac{< f,f_{2n}^\star > (\mu-\omega)^p}{(\lambda_n-\mu)^p} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{(\mu-\omega)^p} MQ \|f\|_2
\end{aligned}
$$

En posant $K = MQ$, on obtient la propriété annoncée. □

A.2.2. Le cas général $q \neq 0$.

A.2.2.1. *Construction de G.* Ce cas peut se traiter en considérant qu'il s'agit d'une perturbation du cas où $q = 0$. C'est ce qui est fait dans [**9**], sec.3, chap.12, d'où on tire les résultats suivants:

THÉORÈME A.2.1 ([**9**] th. 3.1, sec.3, chap. 12). *Si la fonction de Green $\mathcal{G}(x,\xi,\sigma^2)$ associée à $\tilde{A}$ vérifie pour $|\sigma|$ suffisamment grand et à l'extérieur d'une région E formée d'une réunion de cercles contenant chacun un σ_k tel que σ_k^2 soit un pôle*

de $\mathcal{G}$, l'inégalité A.2.13, alors A admet une fonction de Green $G(x,\xi,\sigma^2)$ pour $|\sigma|$ suffisamment grand, définie et holomorphe en σ à l'extérieur de E.

L'inégalité (A.2.13) est vérifiée dans les cas particuliers étudiés dans la partie précédente:

- si $A_{24} \neq 0$: voir [**9**],
- si $A_{24} = 0$, $E \neq 0$: c'est évident d'après les calculs de majoration effectués dans la partie précéente,
- si tous les A_{ij} sont nuls, sauf A_{13}.

THÉORÈME A.2.2 ([**9**], th. 3.2, sec.3, chap. 12). *Soit G la fonction de Green associée à A et $\mathcal{G}$ la fonction de Green associée à $\tilde{A}$, dont on suppose qu'elle vérifie* (A.2.13). *Alors on a pour toute fonction f appartenant à $L^2(0,1)$:*

$$\lim_{n\to+\infty} \|S_n - \Sigma_n\|_\infty = 0 \tag{A.2.15}$$

où Σ_n aété précédemment défini et où on pose de la même façon: $S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{C_n}\int_0^1 f(\xi)G(x,\xi,\lambda)d\lambda$

Nous déduisons immédiatement de (A.2.15), grâce aux résultats de la section précédente, que:

PROPRIÉTÉ A.2.6. *Si A est tel que:*

- $C = A_{24} \neq 0$,
- *ou:* $C = 0$, $E = A_{23} - A_{14} \neq 0$, *et* $A_{12} = \pm A_{34}$),
- *ou: tous les A_{ij} sont nuls, sauf A_{13},*

alors: pour toute fonction f appartenant à $L^2(0,1)$:

$$\lim_{n\to+\infty} \|f - S_n\|_2 = 0 \tag{A.2.16}$$

Enfin nous utilisons le théorème 5.2, sec.5, chap.12 de [**9**] pour l'interprétation de ce résultat:

THÉORÈME A.2.3. *Si A est tel que:*

- $C = A_{24} \neq 0$,
- *ou:* $C = 0$, $E = A_{23} - A_{14} \neq 0$, *et* $A_{12} = \pm A_{34}$),
- *ou: tous les A_{ij} sont nuls, sauf A_{13},*

et si les pôles de sa fonction de Green G sont simples, alors pour toute fonction f de $L^2(0,1)$, on a:

$$\lim_{n\to+\infty} \left\| f - \sum_{k=0}^{n} < f,\phi_k^\star > \phi_k \right\|_2 = 0 \tag{A.2.17}$$

où: ϕ_k est fonction propre de A, associée à λ_k, $\phi_k^\star$ est fonction propre de $A^\star$, associée à $\bar{\lambda_k}$ et pour tout i,j entiers positifs, on a : $< \phi_i,\phi_j^\star >= \delta_{ij}$.

De plus l'opérateur A est Riesz-spectral.

Nous commençons par la propriété technique suivante:

PROPRIÉTÉ A.2.7. *Nous supposons que le sous espace propre associé à chaque λ_n est de dimension égale à 1, et notons ϕ_n un vecteur propres associé. Alors*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \phi_n(x) = A_{24}\cos(n\pi x) + \psi_n(x),$$

où les fonctions ψ_n sont dans $C^\infty(0,1)$ et telles que: $\|\psi_n\|_\infty \in O(\frac{1}{n})$.

DÉMONSTRATION. Dans le cas $A_{24} \neq 0$, nous reprenons l'expression genérale de $D_A(\lambda)$ donnée en (A.2.1), et nous utilisons les estimations asymptotiques A.2.1.

On construit alors un vecteur propre associé à λ_n : asymptotiquement, le sous espace propre associé à λ_n est de dimension égale à 1), et on suppose ici que c'est vrai pour tous les λ_n:

$$\phi_n = A_{24}e_1(x,\lambda_n) - A_{14}e_2(x,\lambda_n) + A_{34}(e_2(1,\lambda_n)e_1(x,\lambda_n) - e_1(1,\lambda_n)e_2(x,\lambda_n))$$

On a, en remarquant que les σ_n sont à partie imaginaire bornée par v_0, et donc que les termes en $O(\frac{e^{|v|x}}{|\sigma_n^2|})$ et $O(\frac{e^{|v|x}}{|\sigma_n|})$ sont en $O(\frac{1}{n^2})$ et $O(\frac{1}{n})$:

$$\begin{aligned}\phi_n(x) &= A_{24}(\cos(\sigma_n x) + O(\frac{1}{n})) - A_{14}O(\frac{1}{n}) + A_{34}O(\frac{1}{n}) \\ &= A_{24}\cos(n\pi x) + A_{24}(\cos(\sigma_n x) - \cos(n\pi x)) + O(\frac{1}{n})\end{aligned}$$

mais:

$$\begin{aligned}\forall x \in [0,1],\ & |A_{24}(\cos(\sigma_n x) - \cos(n\pi x))| \\ &\leq |A_{24}| \left|(\sigma_n x - n\pi x)\int_0^1 \sin(n\pi x + t(\sigma_n x - n\pi x))dt\right| \\ &\leq |A_{24}|\,|\sigma_n - n\pi|\,e^{v_0},\end{aligned}$$

or $\sigma_n = n\pi + O(\frac{1}{n})$, d'où:

$$\|\psi_n\|_\infty = \|\phi_n - A_{24}\cos(n\pi.)\|_\infty = O(\frac{1}{n})$$

Les autres cas envisa gés dans le théorème A.2.3 se prouvent de manière analogue. □

Nous prouvons maintenant le théorème:

DÉMONSTRATION. Il nous reste seulement à prouver que dans chacun de ces cas, A est un opérateur Riesz-spectral.

Nous savons que A est un opérateur fermé de $L^2(0,1)$, dont les valeurs propres sont par hypothèse simples, et forment, d'après le théorème d'expansion A.2.17, une famille totale. De plus, les valeurs propres de A sont des points isolés. Il ne nous reste donc plus pour satisfaire à la définition 2.3.4 de [**11**] qu'à prouver que les $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de Riesz de $L^2(0,1)$, c'est à dire que:

$$\exists M > 0, \quad \exists m > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall(\alpha_0,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{C}^{n+1},$$
$$m\sum_{i=0}^{n}|\alpha_i|^2 \leq \left\|\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\phi_i\right\|_2^2 \leq M\sum_{i=0}^{n}|\alpha_i|^2$$

Or en utilisant A.2.7:

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\phi_i\right\|_2 &\leq |A_{24}|\left\|\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\cos(i\pi.)\right\|_2+\left\|\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\psi_i\right\|_2\\ &\leq \frac{|A_{24}|}{2}\sqrt{\sum_{i=0}^{n}|\alpha_i|^2}+\sum_{i=0}^{n}|\alpha_i|\,\|\psi_i\|_2\\ &\leq \frac{|A_{24}|}{2}\sqrt{\sum_{i=0}^{n}|\alpha_i|^2}+\sqrt{\sum_{i=0}^{n}|\alpha_i|^2}\sqrt{\sum_{i=0}^{n}\|\psi_i\|_2}\\ &\leq (\frac{|A_{24}|}{2}+O(\frac{\pi^2}{6}))\sqrt{\sum_{i=0}^{n}|\alpha_i|^2}\end{aligned}$$

Donc on peut effectivement trouver une constante $M=(\frac{|A_{24}|}{2}+\frac{K\pi^2}{6})^2$, où K est un nombre positif suffisamment grand, telle que:

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \forall(\alpha_0,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{C}^{n+1},\qquad \left\|\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\phi_i\right\|_2^2\leq M\sum_{i=0}^{n}|\alpha_i|^2$$

Pour montrer la deuxième inégalité, on considère l'opérateur adjoint $A^\star$. On montre sans difficulté que les $\bar{\lambda}_n$ sont les valeurs propres (simples, par hypothèse) de $A^\star$, avec comme valeur propre associée:

$$\phi_n^\star=\frac{1}{A_{24}^2}(A_{24}e_1(x,\bar{\lambda}_n)-A_{14}e_2(x,\bar{\lambda}_n)+A_{12}(e_2(1,\bar{\lambda}_n)e_1(x,\bar{\lambda}_n)-e_1(1,\bar{\lambda}_n)e_2(x,\bar{\lambda}_n)))$$

Il est alors clair que la propriété A.2.7 est aussi valable pour $\phi_n^\star$, et nous posons $\phi_n^\star=\frac{\cos(n\pi.)}{A_{24}}+\psi_n^\star$, avec $\|\psi_n^\star\|_\infty=O(\frac{1}{n})$. De plus, on a: $<\phi_i\phi_j^\star>=0$ lorsque $i\neq j$ et $<\phi_i\phi_i^\star>=\frac{1}{2}+O(\frac{1}{i})$. Grâce au théorème d'expansion A.2.17, nous savons que $<\phi_i\phi_i^\star>\neq 0$, donc il existe une constante $L>0$ telle que: $<\phi_i\phi_i^\star>\geq L$.

Posons maintenant: $f=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\phi_i$, alors:

$$\begin{aligned}\forall i\leq n,\quad |\alpha_i|^2&=\left|\frac{<f,\phi_i^\star>^2}{<\phi_i\phi_i^\star>^2}\right|\\ &\leq\frac{1}{L^2}\left|<f,\phi_i^\star>^2\right|\\ &\leq\frac{1}{L^2}\left|(<f,\frac{\cos(i\pi.)}{A_{24}}>+<f,\psi_i^\star>)^2\right|\\ &\leq\frac{2}{L^2}(\frac{\left|<f,\cos(i\pi.)>^2\right|}{|A_{24}|^2}+|<f,\psi_i^\star>|^2)\\ &\leq\frac{2}{L^2\,|A_{24}|^2}\left|<f,\cos(i\pi.)>^2\right|+\frac{2}{L^2}\,\|f\|_2^2\,\|\psi_i^\star\|_2^2\end{aligned}$$

On en déduit que:

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=0}^{n} |\alpha_i|^2 &\leq \frac{2}{L^2 \left|A_{24}\right|^2} \sum_{i=0}^{n} \left| < f, \cos(i\pi.) >^2 \right| + \frac{2}{L^2} \|f\|_2^2 \sum_{i=0}^{n} \|\psi_i^\star\|_2^2 \\ &\leq \frac{2}{L^2 \left|A_{24}\right|^2} \sum_{i=0}^{\infty} \left| < f, \cos(i\pi.) >^2 \right| + \frac{2}{L^2} \|f\|_2^2 \sum_{i=0}^{\infty} \|\psi_i^\star\|_2^2 \\ &\leq \frac{2}{L^2 \left|A_{24}\right|^2} \|f\|_2^2 + \frac{2}{L^2} \|f\|_2^2 \frac{Q\pi^2}{6} \\ &\leq (\frac{2}{L^2 \left|A_{24}\right|^2} + \frac{2}{L^2} \frac{Q\pi^2}{6}) \|f\|_2^2\end{aligned}$$

où Q est une quantité positive suffisamment grande.Donc, en posant $\frac{1}{m} = \frac{2}{L^2|A_{24}|^2} + \frac{2}{L^2}\frac{Q\pi^2}{6}$, la deuxième inégalité est démontrée.

Les calculs dans les autres cas particuliers sont analogues, et on montre sans difficulté qu'on peut construire une base de Riesz de $L^2(0,1)$ formée de vecteurs propres de A. Il s'ensuit immédiatement que A est Riesz-spectral, ce qui achève la démonstration du théorème A.2.3 □

De même, grâce à

PROPRIÉTÉ A.2.8 ([**9**](3.9) p.307). *Si $\mathcal{G}$ vérifie* (2.5.1)*, alors*

$$\left|G(x,\xi,\sigma^2)\mathcal{G}(x,\xi,\sigma^2)\right| \leq M \frac{h_v(x,\xi)_i n t_0^1 q(s) ds}{|\sigma|^2}$$

la propriété A.2.5 est vraie lorsque q est non nul.

ANNEXE B

Semi-groupes fortement continus

Nous rappelons ici les principaux résultats concernant les semi-groupes fortement continue d'opérateurs.

B.1. Définitions et théorèmes de base

Soit X un espace de Banach, alors

DÉFINITION B.1.1. La famille à un paramètre $(T(t))_{0\leq t<\infty}$ d'opérateurs linéaires bornés de X dans X est un *semi-groupe fortement continu d'opérateurs linéaires bornés sur* X si

(1) $T(0) = I$,
(2) $\forall (t,s) \in \mathbb{R}^+ \quad T(t+s) = T(t)T(s)$,
(3) $\forall x \in X, \quad \lim_{t\to 0^+} T(t)x = x$

Dans toute la suite, l'expression "semi-groupe continu sur X" sera utilisée à la place de "semi-groupe fortement continu d'opérateurs linéaires bornés sur X".

On definit le générateur infinitésimal du semi-groupe par

DÉFINITION B.1.2. Le générateur infinitésimal du semi-groupe $(T(t))_{0\leq t<\infty}$ est l'opérateur linéaire A défini par:

$$\mathcal{D}(A) = \{x \in X \ / \ \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe } \}$$
$$A(x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \left.\frac{dT(t)x}{dt}\right|_{t=0^+} \text{ lorsque x} \in \mathcal{D}(A)$$

où $\mathcal{D}(A)$ désigne le domaine de A

Nous rappelons les résultats essentiels suivants:

PROPRIÉTÉ B.1.1. *Si $(T(t))_{0\leq t<\infty}$ est un semi-groupe continu sur X, il existe des constantes $\omega \geq 0$ et $M > 1$ telles que*

$$\forall t \geq 0, \quad \|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$$

DÉMONSTRATION. Voir [**44**], th.2.2, p.4 □

La constante ω est appelée borne de croissance du semi-groupe. Si $\omega = 0$, on dit que le semi-groupe est uniformément borné, et si $M = 1$, on dit que le semi-groupe est un semi-groupe de contractions.

On a également le théorème suivant

THÉORÈME B.1.1. *Si $(T(t))_{0\leq t<\infty}$ est un semi-groupe continu sur X, et si A est son générateur infinitésimal, alors*

(1)

$$\forall x \in X, \quad \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x. \tag{B.1.1}$$

(2) $\forall x \in X$, $\int_0^t T(s)x ds \in \mathcal{D}(A)$ *et*

$$A\left(\int_0^t T(s)x ds\right) = T(t)x - x. \tag{B.1.2}$$

(3) $\forall x \in \mathcal{D}(A)$, $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ *et*

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax. \tag{B.1.3}$$

(4) $\forall x \in \mathcal{D}(A)$,

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t AT(\tau)x d\tau = \int_s^t T(\tau)Ax d\tau. \tag{B.1.4}$$

DÉMONSTRATION. Voir [**44**], th.2.4, p.4-5 □

Il en résulte le

COROLLAIRE B.1.1. *Le générateur infinitésimal A d'un semi-groupe continu est un opérateur linéaire fermé dont le domaine $\mathcal{D}(A)$ est dense dans X.*

DÉMONSTRATION. Voir [**44**], cor.2.5, p.5 □

Nous donnons aussi les définitions de deux types de semi-groupes continu particuliers mais importants:

DÉFINITION B.1.3. Soit $T(t)$ un semi-groupe continu sur X. $T(t)$ est dit différentiable pour $t > t_0$ si pour tout $x \in X$, $t \mapsto T(t)x$ est différentiable pour $t > t_0$. On dit que $T(t)$ est différentiable s'il est différentiable pour $t > 0$.

DÉFINITION B.1.4. Soit $\Delta = \{z \in \mathbb{C}/\ \phi_1 < \arg z < \phi_2,\ \phi_1 < 0 < \phi_2\}$. Pour $z \in \Delta$, soit $T(z)$ un opérateur linéaire borné sur X. On dit que $(T(z))_{(z\in\Delta)}$ est un semi-groupe analytique si

(1) $z \mapsto T(z)$ est analytique sur Δ,

(2) $T(0) = I$ et $\forall x \in X$, $\lim_{z\to 0, z\in\Delta} T(z)x = x$

(3) $\forall (y,z) \in \Delta$, $T(y+z) = T(y)T(z)$

Un semi-groupe $T(t)$ est dit analytique s'il est analytique sur une région Δ contenant $\mathbb{R}^+$.

REMARQUE. La restriction à $\mathbb{R}^+$ d'un semi-groupe analytique est un semi-groupe continu sur X.

B.2. Le problème de Cauchy

L'intérêt des semi-groupes continus vient entre autre du rôle qu'ils jouent dans la résolution des problèmes de Cauchy abstraits.

B.2.1. Problème de Cauchy abstrait homogène. On appelle problème de Cauchy abstrait homogène un problème de la forme

$$\frac{d}{dt}u(t) = Au(t), \quad t > 0 \tag{B.2.1}$$

$$u(0) = x \tag{B.2.2}$$

où: X est un espace de Banach, $x \in X$ est la donnée initiale, A est un opérateur linéaire défini de $\mathcal{D}(A) \subset X$ à valeurs dans X, et $u(t)$ est la solution du problème.

Il faut définir ce que nous entendons par solution du problème:

Nous recherchons une fonction u de t, continue pour tout $t \geq 0$, continuement différentiable et à valeurs dans $\mathcal{D}(A)$ pour $t > 0$, et qui vérifie (B.2.1)-(B.2.2).

Remarque. A cause de la continuité de u en zéro, le problème n'a de sens que si $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$.

Le théorème suivant est vérifié:

Théorème B.2.1. *Soit A un opérateur linéaire de domaine dense dans X, et tel que : $\rho(A) \neq \emptyset$. Alors le problème* (B.2.1)-(B.2.2) *a une unique solution $u(t)$ continûment différentiable sur $[0, +\infty[$ pour toute donnée initiale $x \in \mathcal{D}(A)$ si et seulement si A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe continu.*

Démonstration. Voir [**44**], th.1.3 p.103 □

Le théorème ci-dessus fournit un résultat lorsque l'état initial x est dans $\mathcal{D}(A)$. Cependant, moyennant des hypothèse supplémentaires sur A, on peut obtenir des résultats plus forts.

Théorème B.2.2. *Si A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe continu différentiable, alors le problème* (B.2.1)-(B.2.2) *a une unique solution pour tout $x \in X$.*

Corollaire B.2.1. *Si A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe continu analytique, alors le problème* (B.2.1)-(B.2.2) *a une unique solution pour tout $x \in X$.*

Démonstration. Voir [**44**], th.1.4 et cor.1.5 p.104 □

B.2.2. Problème de Cauchy abstrait non homogène. On appelle problème de Cauchy abstrait non homogène un problème de la forme

$$\frac{d}{dt}u(t) = Au(t) + f(t), \quad t > 0 \tag{B.2.3}$$

$$u(0) = x \tag{B.2.4}$$

où $f : [0,T[\to X$.

Nous supposons dans toute la section que A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe continu, de façon à pouvoir appliquer les résultats de la section précédente.

Comme précédemment, il faut définir le concept de solution. Les définitinos diffèrent légèrement selon les auteurs (voir par exemple [**11**] et [**44**]).

Nous adoptons les définitions données dans [**44**] (def.2.1 p.104)

Définition B.2.1. Solution classique

On dit que la fonction $u : [0,T[\to X$ est une solution classique de (B.2.3)-(B.2.4) si u est continue sur $[0,T[$,continument différentiable sur $]0,T[$, $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ si $t \in]0,T[$, et (B.2.3)-(B.2.4) sont vérifies sur $[0,T[$.

DÉFINITION B.2.2. Solution faible

Soit A le générateur infinitésimal d'un semi-groupe continu noté $T(t)$. Soit $x \in X$ et $f \in L^1(0,T : X)$. La fonction $u(t)$ continue sur l'intervalle $[0,T]$, à valeurs dans X, définie par

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{B.2.5}$$

est appelée solution faible (mild solution) du problème (B.2.3)-(B.2.4).

On montre sans peine le résultat suivant

PROPRIÉTÉ B.2.1. *Si $f \in L^1(0,T : X)$, alors pour tout $x \in X$ le problème* (B.2.3)-(B.2.4) *a au plus une solution classique. Si cette solution existe, elle est nécessairement donnée par la formule* (B.2.5)*, c'est à dire qu'elle coïncide avec l'unique solution faible du problème.*

DÉMONSTRATION. Voir [**44**], cor.2.2. chap.4, p.106. □

La propriété suivante est vérifiée

PROPRIÉTÉ B.2.2. *Soit A le générateur infinitésimal d'un semi-groupe continu noté $T(t)$. Si la fonction f est continûment différentiable sur $[0,T]$ et si $x \in \mathcal{D}(A)$, alors le problème* (B.2.3)-(B.2.4) *a une solution (classique) unique u, donnée par la formule* (B.2.5)*.*

DÉMONSTRATION. Voir [**44**], corollaire 2.5 du théorème 2.4, p.109 □

On peut trouver dans [**11**] une version améliorée de ce résultat dans le cas où X est un espace de Hilbert:

PROPRIÉTÉ B.2.3. *Soit A le générateur infinitésimal d'un semi-groupe continu noté $T(t)$ sur un espace de Hilbert X. Si la fonction f à valeurs dans X est continûment différentiable sur $[0,T]$ et si $x \in \mathcal{D}(A)$, alors le problème* (B.2.3)-(B.2.4) *a une solution unique u qui est continûment différentiable sur $[0,T]$, donnée par la formule* (B.2.5)*.*

DÉMONSTRATION. Voir [**11**], th. 3.1.3, p.103 □

Enfin, en combinant le corollaire B.2.1 et le théorème ci-dessus, nous obtenons le résultat suivant

THÉORÈME B.2.3. *Si A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe continu* analytique *sur un espace de Hilbert X, et si la fonction f à valeurs dans X est continûment différentiable sur $[0,T]$ alors le problème* (B.2.3)-(B.2.4) *a une unique solution (classique) pour tout $x \in X$.*

B.3. Caractérisations du générateur

Au vu des résultats de la section précédente, il est donc essentiel, pour résoudre un problème d'évolution du type du problème de Cauchy non-homogène (B.2.3)-(B.2.4), de savoir caractériser les générateurs infinitésimaux des semi-groupes continus.

B.3.1. Théorème de Hille-Yosida. Les générateurs des semi-groupes continus ont été complètement caractérisés grâce au théorème de Hille-Yosida et à ses théorèmes dérivés.

Avant d'en donner l'énoncé nous rappelons la definition de la résolvante d'un opérateur linéaire.

DÉFINITION B.3.1. Soit A un opérateur linéaire sur X, l'ensemble résolvant de A, noté $\rho(A)$, est l'ensemble des nombres complexes λ tels que $(\lambda I - A)^{-1}$ existe comme opérateur linéaire borné de X. On appelle résolvante de A la famille $(R(\lambda : A))_{\lambda\in\rho(A)}$ d'opérateurs linéaires bornés définis par $R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}$

Nous appelons le résultat suivant "théorème de type Hille-Yosida", car le théorème original concerne seulement les semi-groupe continus de contractions, et celui-ci en découle:

THÉORÈME B.3.1 (théorème de type Hille-Yosida, [**44**], th.5.3, p.21). *Un opérateur linéaire non borné est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe continu qui vérifie*

$$\forall t \geq 0, \quad \|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$$

où $M \geq 1$ et $\omega \geq 0$, si et seulement si

(1) *A est un opérateur fermé et $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.*
(2) *$\rho(A) \supset]\omega, +\infty[$ et*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \lambda > \omega, \quad \|R(\lambda : A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n} \tag{B.3.1}$$

La condition (B.3.1) n'est pas, dans la pratique, facile à vérifier. C'est pourquoi on utilise souvent la condition suffisante, mais non nécessaire, suivante pour que l'opérateur A soit le générateur infinitésimal d'un semi-groupe continu

PROPRIÉTÉ B.3.1 ([**44**], th 7.7, p.30). *Soit A un opérateur tel que $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$, et qui vérifie de plus*

(1) *$\exists\delta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ / $\rho(A) \supset \Sigma_\delta = \{\lambda / |\arg\lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta\} \bigcup \{0\}$*
(2) *$\exists M > 0 / \forall \lambda \in \Sigma_\delta \setminus \{0\}$,*

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|} \tag{B.3.2}$$

alors A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe continu $T(t)$ qui vérifie

$$\exists C > 0 / \ \|T(t)\| \leq C$$

Nous donnons dans les paragraphes suivants des cas de familles d'opérateurs qui génèrent des semi-groupes continus.

B.3.2. Opérateurs maximaux dissipatifs. Nous nous plaçons dans le cas où X est un espace de Hilbert, les résultats ci-dessous peuvent être trouvés dans [**5**], chap. VII. Des résultats analogues sont encore vrais lorsque X est un espace de Banach réflexif (voir [**44**], ou [**60**]).

DÉFINITION B.3.2. Soit X est un espace de Hilbert réel ou complexe. Un opérateur non borné $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ est dissipatif si

$$\forall x \in \mathcal{D}(A), \quad \mathcal{R}e(Ax,x) \leq 0 \tag{B.3.3}$$

DÉFINITION B.3.3. Un opérateur non borné $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ est maximal si

$$Ran(I - A) = X \tag{B.3.4}$$

(où $Ran(I - A)$ désigne l'image de $(I - A)$)

Grâce à la propriété suivante

PROPRIÉTÉ B.3.2. *Soit A un opérateur maximal dissipatif alors*

(1) *A est fermé,*
(2) *$\mathcal{D}(A)$ est dense dans X,*
(3) *$\forall \lambda > 0, \lambda \in \rho(A)$ et $\|R(\lambda : A)\| \leq 1$*

et en appliquant le théorème de Hille-Yosida, on obtient le théorème de Lumer-Phillips:

THÉORÈME B.3.2. *Les opérateurs maximaux dissipatifs sont exactement les générateurs des semi-groupes continus de contractions.*

B.3.3. Opérateurs Riesz-spectraux. Nous supposons ici que X est un espace de Hilbert séparable.

Nous commençons par la définition d'une base de Riesz d'un espace de Hilbert (voir [**11**], chap.2, section 2.3)

DÉFINITION B.3.4. Une famille $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X est une base de Riesz de X si

(1) $\overline{Vect(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}} = X$
(2) il existe deux constantes réelles positives M et m telles que:

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N$$

$$m\sum_{i=1}^{N} |\alpha_i|^2 \leq \left\| \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \phi_i \right\|^2 \leq M \sum_{i=1}^{N} |\alpha_i|^2 \tag{B.3.5}$$

On définit aussi des familles bi-orthogonales par

DÉFINITION B.3.5. Deux familles $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X sont dites bi-orthogonales si

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad < \phi_i, \psi_j >= \delta_{ij}$$

Les opérateurs Riesz-spectraux sont alors définis par

DÉFINITION B.3.6. Un opérateur A fermé est dit Riesz-spectral si

(1) ses valeurs propres sont simples,
(2) les vecteurs propres associés forment une base de Riez de X,
(3) en notant $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ l'ensemble des valeurs propres de A, et en prenant deux points quelconques $\lambda < \mu$ dans $\overline{(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}}$, on a

$$[\lambda, \mu] \not\subseteq \overline{(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}}.$$

REMARQUE. Les opérateurs autoadjoints à spectre simple sont des cas particuliers d'opérateurs Riesz-spectraux; ils sont l'analogue en dimension infinie des matrices symétriques à valeurs propres simples, alors que les opérateurs Riesz-spectraux quelconques sont l'analogue en dimension infinie des matrices diagonalisables à valeurs propres simples.

On a alors le résultat suivant :

THÉORÈME B.3.3. *Soit un opérateur A Riesz-spectral, de valeurs propres $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et de vecteurs propres associés $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Alors*

(1) *Il existe une famille $(\psi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de vecteurs propres de $A*$ associés aux $(\bar{\lambda}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ soient bi-orthogonales,*

(2) *$\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \overline{(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}}$ et*

$$\forall \lambda \in \rho(A), \quad R(\lambda : A) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_i} < .,\psi_i > \phi_i,$$

(3) *On a : $\mathcal{D}(A) = \{z \in X / \sum_{i=0}^{\infty} |\lambda_i|^2 \, |< z,\psi_i >|^2 < +\infty\}$ et :*

$$\forall z \in \mathcal{D}(A), \quad A(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i < z,\psi_i > \phi_i,$$

(4) *A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe continu $T(t)$ si et seulement si $\sup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{R}](\lambda_i) < +\infty$ et on a*

$$T(t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{\lambda_i t} < .,\psi_i > \phi_i,$$

(5) *la borne de croissance du semi-groupe est: $\omega_0 = \sup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{R}](\lambda_i)$.*

DÉMONSTRATION. Voir [**11**], th.2.3.5 p.41. □

ANNEXE C

Fonctions Gevrey

C.1. Fonctions Gevrey d'une variable

C.1.1. Séries Gevrey. Nous désignons par $\mathbb{C}[[X]]$ l'espace vectoriel des séries formelles à coefficients complexes. Alors

DÉFINITION C.1.1 ([**47**],p.181). Soit s un nombre réel quelconque. On appelle série Gevrey-Roumieu d'ordre s tout élément $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ de $\mathbb{C}[[X]]$ tel que:

$$\begin{aligned} &\exists C > 0, \exists A > 0/ \\ &\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leq C A^n (n!)^{s-1} \end{aligned}$$

On peut trouver, lorsque le nombre s est supérieur ou égal à 1, une définition équivalente qui est

DÉFINITION C.1.2 ([**3**],p.64). Soit $s \geq 1$, on appelle série Gevrey d'ordre s tout élément $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ de $\mathbb{C}[[X]]$ tel que:

$$\begin{aligned} &\exists C > 0, \exists A > 0/ \\ &\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leq C A^n \Gamma(1 + (s-1)n) \end{aligned}$$

REMARQUE. On passe sans peine d'une caractérisation à l'autre, mais les valeurs des constantes A et C ne sont pas les mêmes.

On a de même

DÉFINITION C.1.3 ([**47**],p.181). Soit s un nombre réel quelconque. On appelle série Gevrey-Beurling d'ordre s tout élément $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ de $\mathbb{C}[[X]]$ tel que:

$$\begin{aligned} &\forall \alpha > 0, \exists C_\alpha > 0/ \\ &\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leq C_\alpha \alpha^n (n!)^{s-1} \end{aligned}$$

REMARQUE. On a de façon immédiate que: $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ est Gevrey-Roumieu d'ordre s si et seulement si $g = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n!)^{(s-1)}} X^n$ est analytique sur une boule ouverte de centre 0 (de rayon $\frac{1}{A}$).

De même, $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ est Gevrey-Beurling d'ordre s si et seulement si $g = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n!)^{(s-1)}} X^n$ est entière.

Lorsque $s < 1$, on a la propriété suivante

PROPRIÉTÉ C.1.1 ([**47**],p.182). *Soit $s < 1$, nous posons $k = \frac{1}{1-s} > 0$. Alors f est Gevrey-Roumieu d'ordre s si et seulement si f est un fonction entière qui vérifie*

$$\exists C > 0, \exists a > 0 \ / \\ |f(x)| < Ce^{a|x|^k}$$

La fonction entière définie par f est donc d'ordre de Weierstrass inférieur ou égal à k.

C.1.2. Fonctions Gevrey.

DÉFINITION C.1.4 ([**3**], p. 60). On appelle secteur angulaire ouvert un ensemble de points de la surface de Riemann du logarithme de la forme:

$$S(d,\alpha,\rho) = \{z \ / 0 < |z| < \rho, \quad |d - \arg(z)| \leq \frac{\alpha}{2}\}$$

α est l'ouverture du secteur, ρ son rayon (éventuellement infini) et d est sa direction bissectrice.

REMARQUE. Dans tout ce qui suit, nous nous intéresseront uniquement à des secteurs angulaires d'ouverture $< \pi$, donc nous pouvons pour simplifier supposer qu'un secteur angulaire est un ensemble de points de $\mathbb{C}$.

DÉFINITION C.1.5 ([**47**], p.183). Soit V un secteur ouvert de $\mathbb{C}$, et s un nombre > 0. On dit que la fonction f est Gevrey-Roumieu d'ordre s si pour tout secteur ouvert $W \subset V$ on a:

$$\exists C_W > 0 \ \exists A_W > 0 \ / \forall p \in \mathbb{N} \\ \sup_{x \in W} \left| f^{(p)}(x) \right| < C_W A_W^p (p!)^s$$

ou de façon équivalente

$$\exists \tilde{C}_W > 0 \ \exists \tilde{A}_W > 0 \ / \forall p \in \mathbb{N} \\ \sup_{x \in W} \left| f^{(p)}(x) \right| < \tilde{C}_W \tilde{A}_W^p \Gamma(1 + sp)$$

La quantité $R_W = \frac{1}{A_W}$ sera appelée le rayon de l'estimation Gevrey pour f sur W.

On a une définition analogue pour les fonctions Gevrey-Beurling. Les fonctions Gevrey-Roumieu d'ordre s forment un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

Nous utiliserons pour générer des lois de commandes des fonctions qui sont la restriction de fonctions Gevrey à un segment de $\mathbb{R}$. Nous adoptons donc la définitions suivante:

DÉFINITION C.1.6. Si s est un nombre réel positif strictement, l'espace vectoriel $G^s(0,T)$ est défini comme étant l'ensemble des fonctions $f : [0,T] \to \mathbb{C}$ pou lesquelles il existe un secteur ouvert V de direction bissectrice 0 et de rayon $R > T$, et il existe une fonction $\tilde{f}$ Gevrey-Roumieu d'ordre s sur V telle que f soit la restriction de $\tilde{f}$ à $[0,T]$

C.1.3. Développements asymptotiques. Dans toute le suite, l'appellation "Gevrey" signifiera "Gevrey-Roumieu".

DÉFINITION C.1.7 (Développement asymptotique, [**3**], p.65). Soit V un secteur angulaire ouvert, f une fonction holomorphe sur V et $\tilde{f}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n X^n$ un élément de $\mathbb{C}[[X]]$. On dit que $\tilde{f}(z)$ est le développement asymptotique de $f(z)$ lorque $G \ni z \to 0$, et on note $f \sim \tilde{f}$, si pour tout secteur fermé $W \subset V$, on a

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists C_{(W,N)} > 0 \ /$$
$$\forall z \in W, \ |z|^{-N} \left| f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n z^n \right| \leq C_{(W,N)}$$

On pose $r_f(z,N) = z^{-N} \left(f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n z^n \right)$.

La propriété suivante est vérifiée

PROPRIÉTÉ C.1.2 ([**3**], prop. 8 p.66). *Soit f holomorphe dans V, les propriété suivantes sont équivalentes*

(1) $f \sim \tilde{f}$
(2) *La fonction f est indéfiniment dérivable à l'origine et $f^{(n)}(0) = n! f_n$ pour $n \geq 0$.*
(3) *Toutes les fonctions dérivées $f^{(n)}(z)$ sont continues à l'origine, et pour tout $n \geq 0$,*

$$f^{(n)}(z) \to n! f_n \text{ lorsque } G \ni z \to 0$$

Une forme particulière de développement asymptotique est la suivante:

DÉFINITION C.1.8 (Développement asymptotique Gevrey, [**3**], p.70). Soit V un secteur angulaire ouvert, f une fonction holomorphe sur V et $\tilde{f}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n X^n$ une série formelle Gevrey d'ordre $s \geq 1$. On dit que $\tilde{f}(z)$ est le développement asymptotique Gevrey de $f(z)$ lorque $G \ni z \to 0$, et on note $f \sim_s \tilde{f}$, si pour tout secteur fermé $W \subset V$, il existe $c,K > 0$ telles que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall z \in W,$$
$$|r_f(z,N)| \leq C K^N \Gamma(1 + (s-1)N)$$

La propriété suivante est alors une conséquence immédiate de C.1.2:

PROPRIÉTÉ C.1.3. *Soit f une fonction holomorphe sur un secteur ouvert V. Alors il existe une série formelle $\tilde{f}$, Gevrey d'ordre $s \geq 1$, telle que $f \sim_s \tilde{f}$ sur V si et seulement si f est Gevrey d'ordre s sur V. $\tilde{f}$ est alors le développement de Taylor de f en 0.*

Nous savons donc associer à toute fonction Gevrey sur un secteur V une série formelle Gevrey à laquelle elle est asymptotiquement égale. Le théorème suivant donne la propriété réciproque sur des secteurs angulaires de petite ouverture

THÉORÈME C.1.1 (Théorème de Borel-Ritt, [**3**], p.73). *Soit $s > 1$, et soient $\tilde{f}$ et V une série formelle Gevrey d'ordre s et un secteur angulaire ouvert d'ouverture au plus $(s-1)\pi$ arbitraires. Alors il existe une fonction f Gevrey d'ordre s sur V telle que $f \sim_s \tilde{f}$ sur G.*

Pour finir, la propriété suivante donne différentes caractérisations d'une fonction Gevrey d'ordre $s > 0$ de développement asymptotique Gevrey nul en zéro:

PROPRIÉTÉ C.1.4 ([**47**], p.184). *Les propositions suivantes sont équivalentes*

(1) *la fonction Gevrey d'ordre $s > 0$ est asymptotiquement Gevrey égale à la fonction nulle en zéro,*
(2) *Pour tout secteur $W \subset V$, il existe C_W et B_W strictement positifs tels que*

$$\sup_{x \in W} \left| \frac{1}{x^q} f(x) \right| < C_W B_w^q (q!)^{s-1} \tag{C.1.1}$$

(3) *Pour tout secteur $W \subset V$, il existe C_W, A_W et B_W strictement positifs tels que*

$$\sup_{x \in W} \left| \frac{1}{x^q} f^{(p)}(x) \right| < C_W A_w^p B_w^q (p!)^s (q!)^{s-1} \tag{C.1.2}$$

(4) *Pour tout secteur $W \subset V$, il existe $a_W > 0$ tel que*

$$\forall x \in W, \quad |f(x)| < e^{-a_W |x|^{-k}} \tag{C.1.3}$$

où on a posé $k = \frac{1}{s-1}$.

C.2. Propriétés des fonctions Gevrey, exemples

Comme application immédiate de la caractérisation (C.1.3), nous obtenons que

PROPRIÉTÉ C.2.1. *Pour tout $\gamma > 0$, la fonction ϕ_γ définie sur un secteur angulaire ouvert d'ouverture inférieure à π, de bissectrice 0 par*

$$\phi_\gamma(z) = e^{-z^{-\gamma}}$$

est Gevrey d'ordre $s = 1 + \frac{1}{\gamma}$, avec un développement asymptotique Gevrey égal à zéro en 0.

On déduit également de (C.1.3) que

PROPRIÉTÉ C.2.2. *Le produit et la somme de deux fonctions Gevrey d'ordre s sont également des fonctions Gevrey d'ordre s.*
La dérivée d'une fonction gevrey est Gevrey du même ordre.
Toute primitive d'une fonction Gevrey est Gevrey du même ordre.

On en déduit que

PROPRIÉTÉ C.2.3. *Pour tout $\gamma > 0$, la fonction ψ_γ définie sur l'intersection G d'un secteur angulaire ouvert de sommet 0, d'ouverture inférieure à π, de bissectrice 0, de rayon infini et d'un secteur angulaire ouvert de sommet T réel positif, d'ouverture inférieure à π, de bissectrice π et de rayon infini par*

$$\psi_\gamma(z) = \phi_\gamma(z)\phi_\gamma(T - z)$$

est Gevrey d'ordre $s = 1 + \frac{1}{\gamma}$ sur G, avec un développement asymptotique Gevrey égal à zéro en 0 et en T. Sa restriction à [0,T] est dans $G^s(0,T)$

De même:

PROPRIÉTÉ C.2.4. *Pour tout $\gamma > 0$, la fonction Φ_γ définie sur $[0,T]$ par*

$$\Phi_\gamma(x) = \frac{\int_0^x e^{-(x(T-x))^{-\gamma}}}{\int_0^T e^{-(x(T-x))^{-\gamma}}}$$

est dans $G^s(0,T)$, avec un développement asymptotique Gevrey égal à zéro en 0 et 1 en T.

Le corollaire suivant, déduit des exemples qui précèdent et du théorème de Ritt, nous sera utile par la suite:

COROLLAIRE C.2.1. *Etant données deux séries S_1 et S_2 d'ordre Gevrey s, et un nombre réel positif T, il existe une fonction Gevrey définie sur l'intersection G d'un secteur angulaire ouvert de sommet 0, d'ouverture inférieure à π, de bissectrice 0, de rayon infini et d'un secteur angulaire ouvert de sommet T réel positif, d'ouverture inférieure à π, de bissectrice π et de rayon infini qui soit asymptotiquement égale à S_1 en 0 et à S_2 en T.*

DÉMONSTRATION. On applique le théorème de Ritt avec S_1 et S_2, et deux secteurs V_1 et V_2 comme dans l'énoncé: on obtient deux fonctions Gevrey d'ordre s f_1 et f_2 définies sur V_1 et V_2, asymptotiquement égales à S_1 et S_2 en 0 et T respestivement. La fonction Φ_γ, où $s = 1 + \frac{1}{\gamma}$, est Gevrey d'ordre s sur $G = V_1 \bigcap V_2$ avec un développement asymptotique Gevrey égal à zéro en 0 et 1 en T, donc la fonction $f(x) = f_1(x)\Phi_\gamma(T-x) + f_2(x)\Phi_\gamma(x)$ est une solution de notre problème. □

C.3. Fonctions Gevrey de plusieurs variables

Nous donnons la définition des fonctions Gevrey de plusieurs variables dans le cas réel seulement:

DÉFINITION C.3.1 (voir [**21**]). La fonction F définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est Gevrey d'ordre $s_1, \dots s_n$ en $x_1, \dots x_n$, si elle est indéfiniment différentiable sur Ω, et s' il exite $M > 0$ et $R_1, \dots R_n > 0$ tels que

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, \forall (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{N}^n,$$
$$\left| \frac{\partial^{p_1+\dots+p_n} F}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}}(x_1, \dots, x_n) \right| \leq M \frac{(p_1!)^{s_1} \dots (p_n!)^{s_n}}{R_1^{p_1} \dots R_n^{p_n}}$$

ou, de façon équivalente, s'il exite $\tilde{M} > 0$ et $\tilde{R}_1, \dots \tilde{R}_n > 0$ tels que

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, \forall (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{N}^n,$$
$$\left| \frac{\partial^{p_1+\dots+p_n} F}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}}(x_1, \dots, x_n) \right| \leq \tilde{M} \frac{\Gamma(1 + p_1 s_1 + \dots + p_n s_n)}{\tilde{R}_1^{p_1} \dots \tilde{R}_n^{p_n}}$$

La référence [**21**] propose une étude très approfondie de ces fonctions, et a beaucoup inspiré la rédaction du chapitre 3. On désignera par la suite par $G^{s_1,\dots s_n}([0,x_1] \times \dots \times [0,x_n])$ l'espace des fonctions F telles qu'il existe un voisinage ouvert Ω de $[0,x_1] \times \dots \times [0,x_n]$ dans $\mathbb{R}^n$ sur lequel F est Gevrey d'ordre $s_1, \dots s_n$ en $x_1, \dots x_n$.

Bibliographie

[1] N. Akhiezer and Glazman I. *Theory of Linear Operators in Hilbert Space*. Pitman, 1980.

[2] J. Alvarez, R. Suarez, and A. Sanchez. Nonlinear decoupling control of free radical polymerization continuous stirred reactors. *Chem. Engng. Sciences*, 45:3341–3357, 1990.

[3] W. Balser. *Formal Power Series and Linear Systemss of Meromorphic Ordinary Differential Equations*. Universitext. Springer-Verlag, 2000.

[4] C. Bardos, G. Lebeau, and J. Rauch. Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary. *SIAM Journal of control and optimization*, 30:1024–1065, 1992.

[5] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Masson, 1983.

[6] C.I. Byrnes and A. Isidori. On the attitude stabilization of rigid spacecraft. *Automatica*, 27:87–95, 1991.

[7] B. Charlet, J.Lévine, and R.Marino. On dynamic feedback linearization. *Systems & Control Letters*, 13:143–151, 1989.

[8] J. Chiasson. Dynamic feedback linearization of an induction motor. *IEEE Trans. Automat. Control*, 38:1588–1594, 1993.

[9] A. Coddington and N. Levinson. *Theory of Ordinary Differential Equations*. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, New York Toronto London, 1955.

[10] J.M. Coron. On controllability of 2-d incompressible perfect fluids. *J. Math. Pures and Appli.*, 75-2:155–188, 1996.

[11] R.F. Curtain and H.J. Zwart. *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*. Text in Applied Mathematics, 21. Springer-Verlag, 1995.

[12] F. Dubois, N. Petit, and P. Rouchon. Motion planning and nonlinear simulations for a tank containing a fluid. In *ECC99*, 1999.

[13] Y.V. Egorov and M.A. Shubin. *Foundations of the Classical Theory of Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, second edition, 1998.

[14] C. Fabre, J.P. Puel, and E.Zuazua. Approximate controllability of the semi-linear heat equation. *Proceedings of the Royal Society of Edimburgh*, 125 A:31–61, 1995.

[15] H.O. Fattorini. Bondary control systems. *SIAM J. Control and Optimization*, 6, 1968.

[16] M. Fliess, J. Lévine, Ph. Martin, and P. Rouchon. Flatness and defect of nonlinear systems: introductory theory and examples. *Int. J. Control*, 61(6):1327–1361, 1995.

[17] M. Fliess, J. Lévine, Ph. Martin, and P. Rouchon. A lie-bäcklund approach to equivalence ans flatness of non linear systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 44(5):922–937, 1999.

[18] M. Fliess, Ph. Martin, N. Petit, and P. Rouchon. Active signal restoration for the telegraph equation. In *CDC98*, pages 1995–2000, 1998.

[19] M. Fliess, H. Mounier, P. Rouchon, and J. Rudolph. Systèmes linéaires sur les opérateurs de Mikusiński et commande d'une poutre flexible. In *ESAIM Proc. "Élasticité, viscolélasticité et contrôle optimal", 8ème entretiens du centre Jacques Cartier, Lyon*, pages 157–168, 1996.

[20] P.A. Fuhrmann. *Linear Systems and Operators in Hilbert Space*. MGH, 1980.

[21] M. Gevrey. La nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles. *Ann. Sc. Ecole Norm. Sup.*, 25:129–190, 1918.

[22] K.A. Hoo and J.C. Kantor. An exothermic continuous stirred tank reactor is feedback equivalent to a linear system. *Chem. Engng. Commun.*, 37:1–10, 1985.

[23] T. Horsin. On controllability of the burger equation. *COCV*, 3:83–95, 1998.

[24] L.R. Hunt, R. Su, and G. Meyer. Global transformations of nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 28:24–31, 1983.

[25] B. Jakubczyk and W. Respondek. On linearization of control systems. *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math.*, 28:517–522, 1980.

[26] L. Karsenti and P. Rouchon. A tracking controller-observer scheme for DC-to-DC converters. 1997.

[27] B. Laroche and Ph. Martin. Motion planning for a 1-d diffusion equation using a brunovsky-like decomposition. In *Proc. of the International Symposium MTNS'2000*, Perpignan, 2000.

[28] B. Laroche, Ph. Martin, and P. Rouchon. Motion planning for a class of partial differential equations with boundary control. In *Proc. of the* 37*th IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 3494–3497, Tampa, 1998.

[29] B. Laroche, Ph. Martin, and P. Rouchon. Motion planning for the heat equation. *Int. J. Control*, 10:629–643, 2000.

[30] Y. Lenoir, Ph. Martin, and P. Rouchon. $2k\pi$, the juggling robot. In *CDC98*, pages 1995–2000, 1998.

[31] J. Lévine, J.Lottin, and J.C. Ponsart. A non-linear approach to the control of magnetic bearings. *IEEE Trans. Control Systems Technology*, 4:524–544, 1996.

[32] J.L. Lions. *Contrôlabilité exacte. I.*, volume 8 of *Collection R.M.A.* Editions Masson, Paris, 1988.

[33] W.V. Lovitt. *Linear Integral Equations*. Dover Publication, first edition, 1924.

[34] A. Manitius and R. Triggiani. Controlability, observability and stabilizability of retarted systems. *Proc. IEEE Conference on Decision and Control*, 1976.

[35] A. Manitius and R. Triggiani. Function space controlability of linear retarted systems: a derivation from abstract operator conditions. *SIAM J. Control and Optimization*, 16:599–645, 1978.

[36] Ph. Martin, R. Murray, and P. Rouchon. Flat systems. In *Proc. of the* 4*th European Control Conf.*, pages 211–264, Brussels, 1997. Plenary lectures and Mini-courses.

[37] Ph. Martin and P. Rouchon. Feedback linearization and driftless systems. *Math. of Control, Signals, and Systems*, 7:235–254, 1994.

[38] Ph. Martin and P. Rouchon. Any (controllable) driftless system with 3 inputs and 5 states is flat. *Systems & Control Letters*, 25:167–173, 1995.

[39] Ph. Martin and P. Rouchon. Flatness and sampling control of induction motors. In *IFAC World Congress, San Francisco*, pages 389–394, 1996.

[40] S. Mizohata. Unicité du prolongement des solutions pour quelques opérateurs différentiels paraboliques. *Mem. Coll. Sci. Univ Kyoto*, pages 219–239, 1958.

[41] H. Mounier, M. Mboup, N. Petit, P. Rouchon, and D. Seret. High speed network congestion control with a simplified time-varying delay model. In *IFAC Conf.System Structure Control*, pages 43–47, Nantes, 1998.

[42] H. Mounier, J. Rudolph, M. Fliess, and P. Rouchon. Tracking control of a vibrating string with an interior mass viewed as a delay system. *ESAIM Control Optimization Calculus Variations*, 3:315–321, 1998.

[43] P.J. Olver. *Equivalence, Invariants and Symmetry*. Cambridge University Press, 1995.

[44] A. Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, volume 44 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1983.

[45] N. Petit and P.Rouchon. Motion planning for heavy chain systems. In *to appear in Waves 2000*.

[46] J.P. Puel. Contrôle et équations aux dérivées partielles. In *Aspects de la théorie du contrôle - Commande des systèmes gouvernés par des équations différentielles ou des équations aux dérivées partielles - Journées X-UPS 1999*, pages 125–128, Centre de Mathématiques - Ecole Polytechnique, 1999.

[47] J.P. Ramis. Dévissage Gevrey. *Astérisque*, 59-60:173–204, 1979.

[48] J.P. Ramis. *Séries Divergentes et Théories Asymptotiques*. Panoramas et synthèses. Société Mathématique de France, 1993.

[49] P.A. Raviart and J.M. Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Masson, 2ème edition, 1988.

[50] Lionel Rosier. Exact boundary controlability for the korteweg-de vries equation on a bounded domain. *COCV*, 2:33–55, 1997.

[51] P. Rouchon. Necessary condition and genericity of dynamic feedback linearization. *Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control*, 4(2):1–14, 1994.

[52] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill International Editions, third edition, 1976.

[53] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill International Editions, third edition, 1987.

[54] J. Rudolph and A.F. Lynch. Flatness-based boundary control of a non linear parabolic equation modelling a tubular reactor. In *2nd Non Linear Control Network Workshop*, Paris, 2000.

[55] S. Saks and A. Zygmund. *Analytic Functions*. Paristwowe Wydawnictwo Nankowe, 1965.

[56] H. Sira-Ramirez and M. Ilic-Spong. Exact linearzation in switched-mode DC-to-DC power converters. *Int. J. Control*, 50:511–524, 1989.

[57] W.M. Sluis. *Absolute Equivalence and its Application to Control Theory*. PhD thesis, University of Waterloo, Ontario, 1992.

[58] W.M. Sluis. A necessary condition for dynamic feedback linearization. *Systems Control Letters*, 21:277–283, 1993.

[59] G. Valiron. *Théorie des fonctions*. Masson et Cie, Editeurs, Paris, 3 ème edition.

[60] K. Yosida. *Functional Analysis*. Springer-Verlag, 2nd edition, 1966.

[61] E. Zuazua. Exact controllability for the semilinear wave equation in one space dimension. *Annales de l'I.H.P., Analyse non linéaire*, 10:109–129, 1993.