Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris

THESE

Présentée par
Pierre-Olivier Bouchard

En vue de l'obtention du titre de
Docteur
de
l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris
Spécialité « Sciences et Génie des Matériaux »

CONTRIBUTION A LA MODELISATION NUMERIQUE EN MECANIQUE DE LA RUPTURE ET STRUCTURES MULTIMATERIAUX

Soutenue le 20 septembre 2000

Devant le jury composé de

M. Philippe Destuynder	Président & Rapporteur
M. Milan Jirásek	Rapporteur
Mme Isabelle Tovena	Examinateur
M. Jean-Loup Chenot	Examinateur
M. François Bay	Directeur de thèse
M. Yvan Chastel	Directeur de thèse

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION 1

I. TECHNIQUES DE MAILLAGE POUR DES GEOMETRIES COMPLEXES

I.1. Introduction 3
I.2. Résolution mécanique 4
I.2.1. Les équations de la mécanique pour un matériau élasto-viscoplastique 4
I.2.2. Formulation incrémentale du problème 8
I.2.3. La discrétisation spatiale du problème 11
I.2.4. La résolution du système 12
I.3. Mailleur et remailleur automatique 14
I.3.1. Le mailleur multi-domaines 14
I.3.2. Le remailleur automatique 19
I.4. Gestion du contact pour des multimatériaux 20
I.4.1. L'élaboration de composites 20
I.4.2. Stratégie de gestion des contours 21
I.4.3. Application 26
I.5. Méthodes de résolution pour des multimatériaux 27
I.5.1. Etude d'un assemblage collé 27
I.5.2. Etude de conditionnement 29
I.5.3. La méthode du gradient conjugué préconditionné 34
I.6. Bilan 39

II. ANALYSE MECANIQUE D'UNE PIECE FISSUREE

II.1. Motivations 40
II.2. Etude Bibliographique 41
II.2.1. Historique 41
II.2.2. Hypothèses et cadre de l'étude 42
II.2.3. Approche locale 47
II.2.4. Approche globale ou énergétique 50
II.2.5. Bilan 59
II.3. Développement d'outils numériques pour la modélisation d'une fissure 61
II.3.1. Maillage concentrique 61
II.3.2. Eléments singuliers 63
II.3.3. Bilan 68

II.4. Calcul du taux de restitution d'énergie 69
II.4.1. Implémentation de la méthode Gθ 69
II.4.2. Comparaison de différentes méthodes 71
II.4.3. Influence du maillage pour la méthode Gθ 77
II.4.4. Bilan 79
II.5. Application à l'adhérence d'un assemblage collé 80
II.5.1. Description de l'essai 80
II.5.2. Résultats 83
II.5.3. Bilan 86
II.6. Conclusion 87

III. MODELISATION DE LA PROPAGATION QUASI-STATIQUE DE FISSURES

III.1. Etude bibliographique 88
III.1.1. Critères d'amorçage 88
III.1.2. Critères de bifurcation 89
III.1.3. Critères de stabilité 90
III.1.4. Méthodes numériques utilisées 91
III.2. Amorçage d'une fissure 94
III.2.1. Les outils numériques nécessaires à la localisation et à l'amorçage d'une fissure 94
III.2.2. Amorçage en contrainte critique 96
III.2.3. Amorçage en endommagement critique 96
III.2.4. Application au compactage de coques 97
III.3. Propagation d'une fissure 99
III.3.1. Critère de la contrainte normale maximale 100
III.3.2. Critère de la densité d'énergie de déformation minimale 102
III.3.3. Critère du taux de restitution d'énergie maximal 104
III.3.4. Comparaison 105
III.3.5. Bilan 115
III.4. Applications et développements spécifiques 116
III.4.1. Plaque trouée pré-fissurée 116
III.4.2. Poutres en flexion et formation de débris 117
III.4.3. Procédés à fort cisaillement et contact matière-matière 121
III.4.4. Propagation dans les structures multimatériaux 125
III.5. Conclusion 134

IV. INFLUENCE DE L'OXYDATION DE GAINES EN ZIRCALOY 4 SUR LEURS PROPRIETES MECANIQUES

IV.1. Contexte de l'étude 136
IV.1.1. L'essai spécifique de compactage 138
IV.1.2. Le zircaloy 4 irradié 139
IV.1.3. Recherche du matériau simulant 141
IV.1.4. Bilan et matériau simulant retenu 144
IV.2. Modélisation numérique du compactage 145
IV.2.1. Validation de la loi de comportement : dépliage d'un demi-tube 145
IV.2.2. Prise en compte du multi-domaines : compactage de trois tubes superposés 147
IV.2.3. Prise en compte de la fissuration : compactage d'un tube 149
IV.2.4. Etudes de sensibilité 152
IV.2.5. Bilan 153
IV.3. Etude et discussion sur l'influence d'une couche d'oxyde 154
IV.3.1. Oxydation du zircaloy 4 154
IV.3.2. Etude expérimentale de l'oxydation de tubes en zircaloy 4 écroui 160
IV.3.3. Modélisation numérique du compactage d'un tube oxydé 169
IV.4. Bilan 175

CONCLUSION ET PERSPECTIVES 176

ANNEXES

A. TECHNIQUES DE MAILLAGE A.1
A.1. Discrétisation de la frontière A.1
A.2. Triangulation de Delaunay A.2
A.3. Régularisation du maillage A.3

B. CHAMPS MECANIQUES A LA POINTE D'UNE FISSURE STATIQUE B.1
B.1. Facteurs d'intensité de contraintes B.1
B.2. Justification des éléments singuliers B.2

C. COURBES DE RESISTANCE C.1
C.1. Courbe de résistance C.1
C.2. Module de déchirement T C.2

D. IMPLEMENTATION DU CRITERE DE LA CONTRAINTE NORMALE MAXIMALE ____ *D.1*

D.1. Exemple d'application symétrique ____ *D.1*

D.2. CNM1 ____ *D.2*

D.3. CNM2 ____ *D.3*

D.4. CNM3 ____ *D.4*

D.5. Exemple d'application non symétrique ____ *D.5*

D.6. Bilan ____ *D.7*

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

INTRODUCTION

Les problèmes rencontrés en mécanique ou en physique conduisent pour la plupart à des systèmes d'équations aux dérivées partielles complexes, avec des conditions aux limites et des conditions initiales spécifiques. Des solutions analytiques approchées existent pour certains problèmes, en général pour le cas de géométries très régulières, et de conditions de chargement simples. Cependant, les problèmes pratiques auxquels sont confrontés les ingénieurs aujourd'hui sont plus complexes et nécessitent en général une résolution approchée par une méthode numérique. Parmi les nombreuses méthodes numériques développées ces dernières années, la méthode des éléments finis est sans aucun doute la méthode la plus utilisée, et celle qui offre le plus de solutions pour un très grand nombre d'applications. Enormément utilisée en mécanique des fluides et en calcul de structures, elle permet également de traiter certains problèmes thermiques, électromagnétiques, …

Dans certains champs d'application, d'autres méthodes ont été développées, telles que les différences finies, volumes finis, méthodes spectrales, d'éléments frontières ou encore « meshless » (sans maillage). Cependant la méthode des éléments finis reste la méthode la plus universelle, qui regroupe le plus grand nombre d'applications, et qui constitue la base d'un très grand nombre de codes de calcul numérique commercialisés. Cette méthode consiste à transformer le problème aux limites en un problème variationnel, et à approximer l'espace fonctionnel où on cherche la solution. On utilise alors une approximation simple des variables inconnues, afin de transformer les équations aux dérivées partielles continues, en un système d'équations portant sur les variables discrétisées. Ces dernières pouvant être résolues par de nombreuses méthodes numériques.

Le CEMEF s'est rendu compte très tôt de l'importance de telles méthodes numériques pour la mise en forme des matériaux. Plusieurs codes de calcul ont alors été développés aussi bien en forgeage, qu'en laminage, en remplissage de moule ou encore pour le thermoformage. Chacun de ces codes possèdent leurs propres caractéristiques, mais tous visent à prévoir le chemin de déformation dans un premier temps, puis à améliorer la qualité des pièces finales obtenues.

Dans le cadre du forgeage, le code FORGE2 a été développé au CEMEF à la fin des années 80 [Cescutti 1989]. L'objectif visé alors était triple :

- maîtriser la qualité et la fiabilité de l'écoulement, de façon à prévenir l'apparition de défauts majeurs tels que le repli ;
- maîtriser l'état métallurgique du métal à travers son histoire thermo-mécanique, de façon à pouvoir prédire et contrôler les propriétés mécaniques du produit final ;
- optimiser la gamme de forgeage, à travers une minimisation de la perte de matière et de la densité de défauts, une simplification de la gamme de fabrication, et une augmentation de la durée de vie de l'outillage.

Pour simuler avec précision une opération de forgeage, deux aspects sont particulièrement importants :

- la possibilité de traiter un grand nombre de matériaux à travers des lois de comportement très générales. Ces lois, de type élasto-viscoplastiques, nécessitent une méthode de résolution non linéaire ;
- la nécessité de pouvoir étudier de grandes déformations. Pour cela, une formulation en déplacement de type lagrangien réactualisé, couplée à un remailleur automatique, ont été utilisés.

De nombreux autres développements ont contribués à la robustesse et à la qualité du code FORGE2. Ces dernières années une nouvelle version, visant à modéliser plusieurs sous-domaines et plusieurs matériaux, a été développée sur la base du code FORGE2 : le code FORGE2 Multimatériaux [Magny 1996].

Les études et recherches que nous avons mené en mécanique de la rupture s'appuient sur un certain nombre des concepts mis en œuvre précédemment. Dans ce manuscrit, nous proposons donc de généraliser les **techniques de maillage et remaillage automatique multi-domaines**, et de les utiliser pour **modéliser la propagation quasi-statique de fissures dans un maillage**.

Dans le premier chapitre, nous présentons le code FORGE2 Multimatériaux à travers les équations de la mécanique et leur résolution éléments finis. Nous insistons particulièrement sur les développements numériques effectués sur le mailleur et le remailleur automatique, et qui permettent de gérer plusieurs sous-domaines et plusieurs matériaux. Ces développements procurent une grande souplesse et une bonne maîtrise de la structure du maillage, et vont nous permettre dans la suite de l'étude de modéliser avec précision la propagation de fissures.
Le second chapitre consiste à analyser les champs mécaniques dans une pièce fissurée. Pour cela, nous commencerons par introduire des notions de mécanique de la rupture ainsi que les méthodes numériques les plus utilisées dans ce domaine. Nous montrerons ensuite l'importance du maillage en pointe de fissure pour obtenir une bonne précision sur les champs mécaniques, et les paramètres caractéristiques en mécanique de la rupture.
Dans le troisième chapitre, les outils numériques permettant de modéliser l'amorçage et la propagation quasi-statique de fissures dans un maillage sont présentés. Nous introduisons trois critères de bifurcation de fissures basés sur le champ de contraintes en pointe de fissure, sur la densité d'énergie de déformation et sur le taux de restitution de l'énergie, et nous comparons leurs résultats sur des cas simples. Enfin de nombreux exemples d'applications sont présentés afin de montrer la robustesse et la précision des techniques utilisées.
Le quatrième chapitre consiste à utiliser les différents outils présentés dans les chapitres précédents pour étudier les mécanismes de déformation et de rupture lors du compactage de tubes en zircaloy 4 (matériau utilisé dans l'industrie nucléaire). Une étude expérimentale est menée en parallèle afin de valider les résultats numériques, et afin d'étudier l'influence de l'oxydation sur les propriétés mécaniques du zircaloy 4.

CHAPITRE I

TECHNIQUES DE MAILLAGE POUR DES GEOMETRIES COMPLEXES

-

STRUCTURES MULTIMATERIAUX

I. Table des Matières

I.1. Introduction 3

I.2. Résolution Mécanique 4

I.2.1. Les équations de la mécanique pour un matériau élasto-viscoplastique 4

I.2.1.1. Les équations d'équilibre 4
I.2.1.2. La loi de comportement 5
I.2.1.3. Ecriture en déviateur 7
I.2.1.4. Formulation faible du problème 8

I.2.2. Formulation incrémentale du problème 8

I.2.2.1. Formulation incrémentale 8
I.2.2.2. Loi élastoplastique incrémentale 9

I.2.3. La discrétisation spatiale du problème 11

I.2.4. La résolution du système 12

I.3. Mailleur et Remailleur Automatique 14

I.3.1. Le mailleur multi-domaines 14

I.3.1.1. Description détaillée des contours 15
I.3.1.2. Discrétisation de la frontière 15
I.3.1.3. Triangulation de Delaunay 16
I.3.1.4. Régularisation du maillage 16
I.3.1.5. Développements spécifiques 17

I.3.2. Le Remailleur automatique 19

I.4. Gestion du contact pour des multimatériaux 20

I.4.1. L'élaboration de composites 20

I.4.2. Stratégie de gestion des contours 21

I.4.2.1. Surdiscrétisation de la frontière 22
I.4.2.2. Repérage des intersections 22
I.4.2.3. Détermination des cycles 22
I.4.2.4. Gestion des cycles 23
I.4.2.5. Assemblage des cycles 25
I.4.2.6. Remaillage 25

I.4.3. Application 26

I.5. Méthodes de résolution pour des multimatériaux 27

I.5.1. Etude d'un Assemblage Collé 27

I.5.2. Etude de conditionnement 29

- Influence du nombre de nœuds 31
- Influence de la qualité du maillage 31
- Influence des sous-domaines et de la rhéologie des matériaux 32

I.5.3. La méthode du gradient conjugué préconditionné 34

I.5.3.1. La méthode du gradient conjugué 35
I.5.3.2. Préconditionneurs 35
I.5.3.3. Stockage morse 36
I.5.3.4. Résultats 37

I.6. Bilan 39

I.1. INTRODUCTION

Le code FORGE2® a été développé dans le but de modéliser le forgeage de pièces à chaud (version viscoplastique) et à froid (version élastoplastique). La complexité de la modélisation du forgeage (lois de comportement complexes, grandes déformations, remaillage automatique, résolution non-linéaire, …) a conduit le CEMEF à développer de nombreuses techniques numériques fiables et performantes. Certaines de ces techniques nous paraissent très intéressantes pour modéliser des applications mécaniques différentes de celles rencontrées en mise en forme des matériaux.

La modélisation de la propagation de fissures que nous proposons dans les chapitres suivants nécessite notamment des techniques de maillage et de remaillage complexes. Les techniques introduites dans le code FORGE2 multimatériaux afin de pouvoir gérer plusieurs sous-domaines et donc plusieurs contours de maillage, sont d'une grande souplesse et s'avèrent très intéressantes pour la modélisation de la propagation de fissures. Dans ce chapitre nous nous proposons, de présenter le code FORGE2 Multimatériaux, et plus particulièrement ses caractéristiques multi-domaines et multi-matériaux.

Dans une première partie, nous présentons les équations de la mécanique ainsi que la méthode de résolution utilisée pour les résoudre. Les lois de comportement élastoplastiques ainsi que les grandes déformations nous obligent à formuler le problème de façon incrémentale et à utiliser une méthode de résolution adaptée à un système non linéaire.

Puis, nous présenterons le mailleur basé sur la triangulation de Delaunay, et le remailleur automatique associé. Nous insisterons en particulier sur les développements spécifiques qui permettent de gérer plusieurs sous-domaines et donc plusieurs matériaux.

Nous aborderons ensuite la gestion du contact entre les différents matériaux, à travers la modélisation de l'élaboration de composites.

Enfin nous mettrons en évidence les difficultés inhérentes à la modélisation de matériaux multicouches et nous présenterons les outils permettant d'y remédier.

I.2. RESOLUTION MECANIQUE

Nous abordons ici les équations mécaniques utilisées dans le cadre du code FORGE2 Multimatériaux, et les méthodes de résolution nécessaires pour les résoudre.

I.2.1. Les équations de la mécanique pour un matériau élasto-viscoplastique

Le code FORGE2 Multimatériaux possède une version viscoplastique [Magny 1996]. Dans le cadre de notre étude, nous avons développé une version élasto-viscoplastique que nous présentons dans les paragraphes suivants. La résolution d'un problème mécanique par éléments finis s'appuie sur différentes équations : les **équations d'équilibre** qui constituent la base du problème et la **loi de comportement** définissant le matériau étudié. Nous présenterons également l'**écriture en déviateur** que nous utilisons pour décomposer les contraintes et les déformations en une partie sphérique et déviatorique. La **formulation faible** (ou intégrale) du problème, obtenue grâce au Principe des Puissances Virtuelles (PPV), exprime la condition nécessaire pour minimiser l'énergie (équations d'Euler). Le problème, ainsi défini sous forme intégrale, est ensuite discrétisé et résolu par la méthode des éléments finis.

Les équations qui vont suivre étant pour la plupart bien connues, nous ne rentrerons pas dans les détails, mais pour plus de précision le lecteur pourra se référer à [Bellet 1994], [Chenot 1994] et [Montmitonnet 1994].

I.2.1.1. Les équations d'équilibre

L'équilibre en rotation et en translation d'un petit volume élémentaire permet de montrer la symétrie du tenseur des contraintes σ, et de formuler les équations d'équilibre. En négligeant les forces volumiques appliquées au système (inertie, gravité), ces équations s'écrivent :

$$div(\sigma) = 0 \text{ sur } \Omega$$

, où σ est le tenseur des contraintes de Cauchy, et Ω représente le solide étudié.

Pour qu'un problème soit correctement posé, on lui ajoute certaines conditions aux limites, traduisant les contraintes surfaciques auxquelles est soumis le solide Ω :

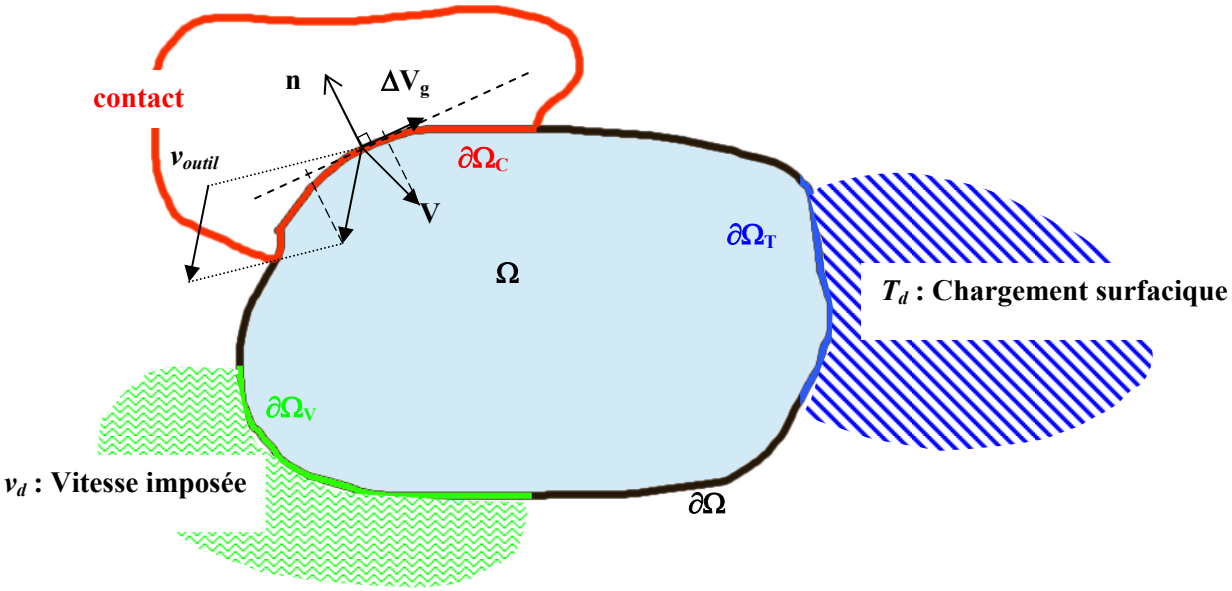


Figure I. 1. Conditions aux limites du problème

$$\begin{cases} v = v_d \text{ sur } \partial\Omega_V \\ \sigma_n = T_d \text{ sur } \partial\Omega_T \\ (v - v_{outil}).n = 0 \text{ sur } \partial\Omega_c \\ \tau = f\left(\sigma_n, \Delta V_g, \mu, ...\right) \text{sur } \partial\Omega_c \end{cases}$$

où n est la normale sortante à $\partial\Omega$, σ_n le vecteur contrainte normale, et v_d, v_{outil} et T_d sont respectivement la vitesse imposée sur $\partial\Omega_v$, la vitesse de l'outil sur $\partial\Omega_c$ et le chargement surfacique appliqué à $\partial\Omega_T$. La dernière équation exprime le frottement entre la matière et l'outil, caractérisée ici par une loi de frottement générale f qui peut représenter une loi de type viscoplastique, Coulomb ou encore Tresca. μ est un paramètre spécifique au couple de matériaux en vis-à-vis et à leur interface, et τ est le vecteur cission de frottement, défini de la façon suivante : $\tau = \sigma_n - [\sigma_n.n]n$. Enfin ΔV_g est le vecteur vitesse relative de glissement défini comme la composante tangentielle de la différence des vitesses de la matière V, et de l'outil v_{outil}.

I.2.1.2. La loi de comportement

La loi élasto-viscoplastique retenue ici s'appuie en fait sur une loi élastoplastique à laquelle on rajoute une sensibilité de la contrainte d'écoulement à la vitesse basée sur la loi de Norton-Hoff. Cette version élastoplastique est basée sur la loi de **Prandtl-Reuss** avec le **critère de plasticité de Von Mises** et un **écrouissage isotrope**. Cette loi se traduit en 2D par les deux relations suivantes (voir [Montmitonnet 1994]) :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_{el} + \dot{\varepsilon}_{pl} \\ f(\sigma, \bar{\varepsilon}) = \left\{ \frac{1}{2} \left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 3\sigma_{12}^2 \right] \right\}^{1/2} - \sigma_0(\bar{\varepsilon}) \end{cases}$$

où $\dot{\varepsilon}$ est le tenseur des vitesses de déformation, et $\dot{\varepsilon}_{el}, \dot{\varepsilon}_{pl}$ sont respectivement les composantes élastique et plastique de ce tenseur. $\bar{\varepsilon}$ représente la déformation cumulée (ou déformation plastique équivalente au sens de Von Mises), σ_{ij} la composante i,j du tenseur des contraintes de Cauchy, et $\sigma_0(\bar{\varepsilon})$ la contrainte d'écoulement du matériau. Enfin $f(\sigma, \bar{\varepsilon})$ est la fonction du critère de plasticité de Von Mises.

Nous choisissons de plus une **loi d'écoulement associée au critère de plasticité**, c'est à dire que la fonction f du critère de Von Mises est utilisée à la place du potentiel plastique dans la loi d'écoulement :

$\dot{\varepsilon}^{pl} = \lambda^{pl} \frac{\partial f}{\partial \sigma}(\sigma)$, où λ^{pl} est le multiplicateur plastique.

Nous nous plaçons ici dans le cadre de la plasticité incompressible : $Tr(\dot{\varepsilon}^{pl}) = 0$.

La **viscosité** du matériau apparaît, comme nous l'avons mentionné précédemment, dans le terme σ_0 du critère de Von Mises. Dans ce cas, on décompose le terme σ_0 de la façon suivante :

$\sigma_0(\bar{\varepsilon}, \dot{\bar{\varepsilon}}) = \sqrt{3}K_s + \sqrt{3}K\left(\sqrt{3}\dot{\bar{\varepsilon}}\right)^m$

où K_s représente le seuil de plasticité du matériau, K la consistance et m le coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation.

En différenciant le cas de chargement élastique du cas de chargement élastoplastique à l'aide de la fonction de plasticité de Von Mises et de sa variation, on aboutit aux équations de Prandtl-Reuss finales :

- Cas élastique : $\begin{cases} \dot{\sigma} = D^{el} : \dot{\varepsilon} \\ \dot{\bar{\varepsilon}} = 0 \end{cases}$

- Cas élastoplastique : $\begin{cases} \dot{\sigma} = D^{ep} : \dot{\varepsilon} \\ \dot{\varepsilon}^{pl} = \left[I_d - \left(D^{el}\right)^{-1} : D^{ep} \right] : \dot{\varepsilon} \\ \dot{\bar{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}^{pl} : \dot{\varepsilon}^{pl}} \end{cases}$

Où D^{el} est la matrice élastique (tenseur d'ordre 4), définie par la **loi de Hooke** pour un matériau isotrope : $D^{el}_{ijkl} = 2\mu\delta_{ik}\delta_{jl} + \lambda\delta_{kl}\delta_{ij}$ avec $\begin{cases} \mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)} \\ \lambda = \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{cases}$

λ et μ sont les coefficients de Lamé, E le module d'Young et ν le coefficient de Poisson.

Et D^{ep}, appelée matrice tangente élastoplastique, s'exprime [Montmitonnet 1994] :

$$D^{ep} = \left[D^{el} - \frac{\left(D^{el} : \dfrac{\partial f}{\partial \sigma} \right) \otimes \left(\dfrac{{}^t\partial f}{\partial \sigma} : D^{el} \right)}{\dfrac{\partial \sigma_0}{\partial \bar{\varepsilon}} + \dfrac{{}^t\partial f}{\partial \sigma} : D^{el} : \dfrac{\partial f}{\partial \sigma}} \right]$$

I.2.1.3. Ecriture en déviateur

Du fait de l'incompressibilité de la déformation plastique, et de l'isotropie de l'élasticité, on peut décomposer les équations de Prandtl-Reuss en parties sphérique et déviatorique en utilisant les relations :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} = \dot{e} + \dfrac{1}{3} Tr(\dot{\varepsilon}) \mathrm{I} \\ \dot{\varepsilon}^{el} = \dot{e}^{el} + \dfrac{1}{3} Tr(\dot{\varepsilon}^{el}) \mathrm{I} \\ \dot{\varepsilon}^{pl} = \dot{e}^{pl} \\ \sigma = s - p\mathrm{I} \end{cases}$$

où e est la partie déviatorique du tenseur des déformations et s celle du tenseur des contraintes. p est la pression hydrostatique, et I le tenseur identité.
Après quelques calculs, on obtient finalement :

- Une équation sur les Traces : $\dot{p} = -\dfrac{1}{3} Tr(\dot{\sigma}) = -\dfrac{3\lambda + 2\mu}{3} Tr(\dot{\varepsilon}^{el})$
- un système d'équations en déviateur : $\begin{cases} \dot{s} = 2\mu \left[\dot{e} - s. \dfrac{s : \dot{e}}{\dfrac{2}{3}\sigma_0^2 \left(1 + \dfrac{1}{3\mu} \dfrac{d\sigma_0}{d\bar{\varepsilon}} \right)} \right] \\ \dot{\bar{\varepsilon}} = \dfrac{s : \dot{e}}{\sigma_0 \left(1 + \dfrac{1}{3\mu} \dfrac{d\sigma_0}{d\bar{\varepsilon}} \right)} \end{cases}$

I.2.1.4. Formulation faible du problème

Pour passer à la formulation faible du problème, on utilise les équations d'équilibre, et les conditions aux limites. L'ensemble de ces équations constitue la forme forte du problème, et elles nous permettent, à l'aide du **Principe des Puissances Virtuelles** (PPV), de passer à la formulation faible du problème. Pour cela, on multiplie l'équation d'équilibre par une vitesse virtuelle v^*, et on intègre sur le domaine Ω. Puis, en se servant des conditions aux limites et de la formule de Green, on aboutit à l'expression du PPV qui traduit l'équivalence de la puissance de déformation et de la puissance des efforts extérieurs :

$$\forall v^* \in V^0, \int_\Omega s : \dot{e}^* dV - \int_\Omega p.Tr(\dot{\varepsilon}^*) dV = \int_{\partial\Omega_\gamma} T_d . v^* dS$$

où V^0 est l'espace des champs de vitesse cinématiquement admissibles à 0, c'est-à-dire à vitesse nulle sur la partie de la surface où la vitesse est imposée.

I.2.2. Formulation incrémentale du problème

I.2.2.1. Formulation incrémentale

Nous avons vu qu'en élastoplasticité, le système d'équations en déviateur reliait la dérivée temporelle du tenseur des contraintes $\dot{\sigma}$ (ou $\dot{s}$ en écriture déviatorique) et le tenseur des vitesses de déformations plastiques $\dot{\bar{\varepsilon}}$ à la vitesse de déformation totale $\dot{\varepsilon}$ (ou $\dot{e}$) par des équations différentielles du premier ordre, non linéaires et à coefficients non constants. Par conséquent, le champ des contraintes ne peut être connu à l'instant t, que si il est connu pour tout temps τ, $\tau<t$.
De plus, nous avons vu que nous avions deux jeux d'équations différentielles correspondant l'un à l'état élastique, et l'autre à l'état plastique. La transition élastique-plastique n'apparaît pas au même instant pour chaque point du solide. Il est donc là encore nécessaire de suivre l'évolution des contraintes en chaque point du solide pour déterminer l'instant pour lequel le critère de plasticité est atteint.

Pour palier à ces difficultés, la méthode de résolution est basée sur une formulation en déplacement de type Lagrangien réactualisé, et sur l'hypothèse des petites déformations (sur chaque incrément).
Partant d'une configuration en équilibre $(X, s, \bar{\varepsilon})$ à l'instant t, il s'agit de trouver le champ de déplacement ΔX entre t et $t+\Delta t$ tel que la configuration $(X+\Delta X, s+\Delta s, \bar{\varepsilon}+\Delta\bar{\varepsilon})$ soit également en équilibre (Figure I.2.).

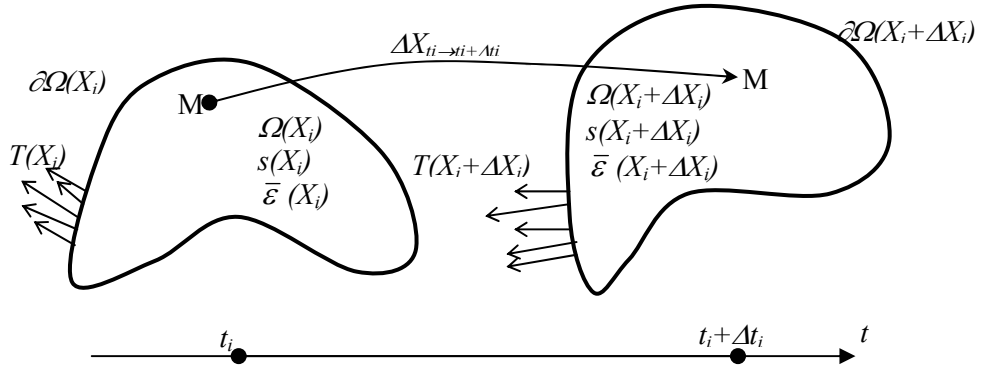


Figure I. 2. Evolution de la configuration entre les instants t_i et $t_i+\Delta t_i$

Connaissant le PPV à l'instant t_i, on cherche donc le champ de déplacement $\Delta X_i(X_i,t_i,\Delta t_i)$ tel que le PPV soit réalisé à l'instant $t_i+\Delta t_i$. Puis, en effectuant un développement à l'ordre 1 par rapport à ΔX_i des grandeurs s, p et T, le PPV s'écrit à l'instant $t_i+\Delta t_i$:

$$\forall v^* \in V^0, \int_{\Omega(X_i+\Delta X_i)} \left[s(X_i,t_i)+\Delta s(\Delta X_i)\right] : \dot{e}^* dV - \int_{\Omega(X_i+\Delta X_i)} \left[p(X_i,t_i)+\Delta p(\Delta X_i)\right] Tr(\dot{\varepsilon}^*) dV$$

$$= \int_{\partial\Omega(X_i+\Delta X_i)} \left[T(X_i,t_i)+\Delta T(\Delta X_i)\right] v^* dS$$

Le problème demande la connaissance de $\Delta s(\Delta X)$ et $\Delta p(\Delta X)$, c'est-à-dire en fait de $\Delta s[\Delta\varepsilon(\Delta X)]$ et $\Delta p[\Delta\varepsilon(\Delta X)]$. Où ε est le tenseur des déformations linéarisé puisque nous avons fait l'hypothèse des petites déformations : $\Delta\varepsilon_{ij}(\Delta X) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Delta X_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta X_j}{\partial x_i}\right)$. Ces inconnues sont obtenues par intégration de la loi de comportement sur l'intervalle de temps Δt_i : la loi de comportement incrémentale.

I.2.2.2. Loi élastoplastique incrémentale

La méthode incrémentale consiste à intégrer la loi de Prandtl-Reuss ($(\dot{s},\dot{\bar{\varepsilon}}) = F(\dot{e})$) sur les incréments de temps Δt_i de façon à obtenir la forme incrémentale de la loi de comportement en chaque point matériel : $(\Delta s, \Delta\bar{\varepsilon}) = F(\Delta e)$. Cette intégration est possible car on considère que $\dot{e}$ est constante sur l'intervalle de temps Δt_i : $\Delta e = \dot{e}\Delta t_i$.

Etant donné que la loi de Prandtl-Reuss se décompose en deux jeux d'équations correspondant au cas élastique ou plastique, il est nécessaire de définir les différents types de transitions de l'un à l'autre pour un incrément de déformation donné. Ces transitions, détaillées dans [Montmitonnet 1994] sont basées sur la comparaison de l'état de contrainte au cours de l'incrément de déformation par rapport au critère de plasticité de Von Mises ($f(\sigma)=0$). Dans le cas d'un incrément totalement élastoplastique (le

point initialement sur le critère reste sur le critère : $f(s_0, \bar{\varepsilon}_0) = 0$), une méthode d'intégration numérique est nécessaire. Parmi les nombreuses méthodes satisfaisant la condition de consistance incrémentale ($f(s_0 + \Delta s, \bar{\varepsilon}_0 + \Delta\bar{\varepsilon}) = 0$) [Gratacos et al. 1991], nous utilisons la *méthode du point milieu généralisé*.

La formulation incrémentale de la loi de comportement est alors définie par :

- Cas élastique pur :
$$\begin{cases} \Delta p = -\dfrac{3\lambda + 2\mu}{3} Trace(\Delta\varepsilon) \\ \Delta s = 2\mu \Delta e \\ \Delta\bar{\varepsilon} = 0 \end{cases}$$

- Cas élastoplastique :
$$\begin{cases} \Delta p = -\dfrac{3\lambda + 2\mu}{3} Trace(\Delta\varepsilon) \\ \Delta e = \Delta e^{el} + \Delta e^{pl} \\ \Delta e^{el} = \dfrac{\Delta s}{2\mu} \end{cases}$$

Δe^{pl} est déterminé en intégrant la forme déviatorique de la loi d'écoulement par une θ-méthode :

$$\dot{e}^{pl} = \Delta\lambda \left[(1-\theta) \frac{\partial f}{\partial s}(s_0) + \theta \frac{\partial f}{\partial s}(s_0 + \Delta s) \right] \text{ avec } \Delta\lambda > 0, \text{ et } 0 \le \theta \le 1.$$

En prenant $\theta = 1$, on obtient un cas particulier de la méthode du point milieu généralisé : la **méthode du retour radial** (ou schéma implicite d'Euler, figure I.3.) :

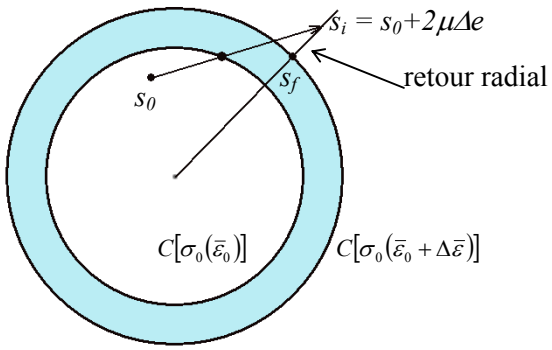


Figure I. 3. Méthode du retour radial

Ainsi, l'état final s_f est obtenu en deux étapes :

- **prédicteur élastique** : s_i est calculé comme si l'incrément était purement élastique ;
- **correcteur plastique** : s_f est obtenu par projection radiale (pour $\theta = 1$) sur le critère.

Enfin une manipulation astucieuse des équations précédentes nous ramène à la résolution d'une équation scalaire où la seule inconnue est $\Delta\lambda$ [Montmitonnet 1994].

I.2.3. La discrétisation spatiale du problème

La discrétisation spatiale est effectuée à l'aide de la **méthode des éléments finis** [Zienkiewicz 1979], [Dhatt et al.1984]. Les éléments 2D utilisés sont des triangles à 6 nœuds, de type P2P0 (Figure I.4.). C'est à dire que la vitesse est quadratique et que la pression est constante sur chaque élément (donc discontinue d'un élément à l'autre).



Figure I. 4. Elément triangulaire de type P2P0

Ces éléments sont isoparamétriques, ce qui signifie que l'on choisit les mêmes fonctions d'interpolation N pour les coordonnées spatiales x que pour le déplacement u et pour la vitesse v :

$$\begin{cases} x = \sum_{n=1}^{Nbnoeuds} N_n X_n \\ u = \sum_{n=1}^{Nbnoeuds} N_n U_n \\ v = \sum_{n=1}^{Nbnoeuds} N_n V_n \end{cases}$$

où N_n est la fonction de forme (ou d'interpolation) associée au nœud n, et X_n (respectivement Un, Vn) les coordonnées (respectivement le déplacement, la vitesse) du nœud n. Chaque grandeur intervenant dans le calcul est alors discrétisée à l'aide de ces fonctions d'interpolation :

- le déplacement :

$$u(x, t+\Delta t) = \sum_{n=1}^{Nbnoeuds} N_n(x).U_n(X_n, t+\Delta t)$$

- ses dérivées premières :

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x, t+\Delta t) = \sum_{n=1}^{Nbnoeuds} \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial N_n(x)}{\partial x_i}.U_{kn}(X_n, t+\Delta t)$$

- la déformation incrémentale :

$$\Delta\varepsilon_{ij}(x,t+\Delta t)=\sum_{n=1}^{Nbnoeuds}\sum_{k=1}^{2}B_{ijkn}(x).U_{kn}(X_n,t+\Delta t)\ \text{ où }\ B_{ijkn}(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial N_n}{\partial x_j}\delta_{ik}+\frac{\partial N_n}{\partial x_i}\delta_{jk}\right]$$

Le PPV s'écrit alors sous forme discrétisée :

$$\forall k,1\le k\le 2,\forall n,1\le n\le Nbnoeuds,$$
$$R_{nk}(U)=\int_{\Omega(X+U)}\sigma_{ij}(X+U)B_{ijkn}(X+U)dV-\int_{\partial\Omega(X+U)}T_k(X+U)N_n dS$$
$$=0$$

où le terme T_k regroupe le chargement surfacique et le frottement des forces extérieures réellement appliquées.

I.2.4. La résolution du système

On est donc confronté à un système de *2*nbnoe* équations non linéaires à *2*nbnoe* inconnues U_{nk}. Les intégrales sont calculées par la **méthode des points de Gauss** (7 points pour des éléments P2P0). Un élément est donc défini par ses fonctions d'interpolation N_n et ses points d'intégration.

L'équation *R(Un)=0* ainsi obtenue est non linéaire en *U* :

- non linéarité de comportement avec $\Delta\sigma(U)$;
- non linéarité géométrique, puisque $\Omega(X+U)$ et $\partial\Omega(X+U)$ dépendent de *U*.

Pour résoudre ce problème non linéaire, nous utilisons la **méthode de Newton-Raphson**. C'est une méthode qui consiste à linéariser le problème, de manière à résoudre itérativement une suite de systèmes linéaires :

- U_1 est connu à l'incrément *1*
- U_{k-1} est connu à l'incrément *k-1*
  - on pose $U_k=U_{k-1}+\Delta U_k$ et on cherche ΔU_k
  - on développe au premier ordre $R(U_k)=R(U_{k-1})+\frac{\partial R(U_{k-1})}{\partial U}\Delta U_k$
  - on définit la matrice Hessienne (ou matrice de raideur) à l'itération *k-1* par : $H(U_{k-1})=\frac{\partial R(U_{k-1})}{\partial U}$
  - Comme $R(U_k)=0$, on obtient ΔU_k en résolvant le système linéaire :

$$H(U_{k-1}).\Delta U_k=-R(U_{k-1})$$

- Puis, un paramètre de sous-incrémentation λ est utilisé pour chercher à obtenir une valeur inférieure à $R(U_k)$ du résidu R, entre U_{k-1} et U_k :
  On cherche λ tel que $R(U_{k-1} + \lambda \Delta U_k) \leq R(U_k)$.

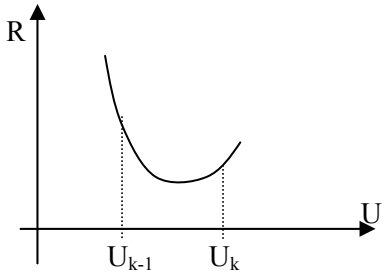


Figure I. 5. Sous-incrémentation pour minimiser le résidu

- A l'itération k, on détermine donc $U_k = U_{k-1} + \lambda \Delta U_k$

Les systèmes linéaires sont résolus par une **méthode directe de Crout**. Cette méthode est basée sur la décomposition de la matrice de raideur H sous la forme LDL^t [Lascaux et al. 1994], où L est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité, et D une matrice diagonale.
Le stockage des matrices de calcul est un **stockage de type bande**, qui consiste à stocker tous les termes situés à une certaine distance (largeur de bande) de la diagonale.

I.3. MAILLEUR ET REMAILLEUR AUTOMATIQUE

Dans la méthode des éléments finis, l'étape du maillage est primordiale. Elle peut directement conditionner la précision des résultats obtenus. C'est pourquoi le choix du mailleur est très important. Les qualités d'un mailleur sont principalement :

- la **robustesse** : quelle que soit la géométrie proposée, il doit être capable de construire, si possible automatiquement, un maillage correspondant ;
- la **précision** : le maillage doit coller le plus possible au contour de la géométrie, de façon à avoir le minimum de perte de volume ;
- la **régularité** : la qualité des éléments du maillage doit être bonne et suffisamment régulière, afin de minimiser l'approximation réalisée par la méthode des éléments finis ;
- la **souplesse** : on doit pouvoir mailler plus finement certaines zones de la pièce où les phénomènes que l'on désire étudier sont plus fins ;
- la **rapidité** : la rapidité d'un mailleur à créer un maillage est un paramètre important, qui prend encore plus de poids lorsque l'on désire développer un remailleur automatique.
- la **capacité à évoluer** : il doit être suffisamment « modulable » pour pouvoir générer de nouveaux types d'éléments, ou lui imposer une structure particulière.

Ce dernier point est essentiel pour le maillage de pièces multi-domaines et non connexes. Comme nous le verrons par la suite, c'est également un aspect important pour mailler finement la région entourant la pointe de fissure en mécanique de la rupture.
Pour toutes ces raisons, le mailleur utilisé dans FORGE2 Multimatériaux est basé sur la triangulation de Delaunay. Plusieurs outils spécifiques y ont été ajoutés de façon à pouvoir adapter le code au cas de multimatériaux.

I.3.1. Le mailleur multi-domaines

Pour développer le mailleur multi-domaines, nous nous sommes basé sur le mailleur mono-domaine de FORGE2®, et nous avons augmenté le nombre de contours ainsi que les caractéristiques des différents contours. Le mailleur multi-domaines est donc basé sur une **description détaillée des contours** servant à définir la pièce à mailler. Une fois la géométrie du contour définie par l'utilisateur, le maillage est réalisé en trois étapes principales. La première consiste à **discrétiser la frontière** de la pièce. Cette discrétisation produit un nuage de points qui constituera la base de la seconde étape : la **triangulation de Delaunay**. La dernière étape consiste à **régulariser le maillage**. Durant la description de ces trois étapes, nous mettrons en valeur les développements spécifiques nécessaires à la création de maillages multi-domaines [Bouchard et al. 2000a].

Pour illustrer les différentes étapes de création d'un maillage, nous choisirons la géométrie non connexe et bi-domaine suivante :

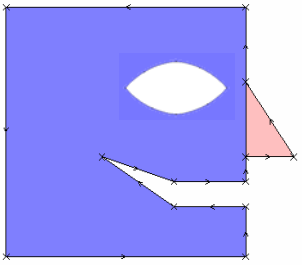


Figure I. 6. Géométrie de la pièce à mailler

I.3.1.1. Description détaillée des contours

Pour réaliser un tel maillage, il est nécessaire de définir une structure de données avancée pour la gestion des différents contours. Les contours sont déclarés comme ouverts ou fermés, et orientés ou non orientés. Un contour **ouvert** correspond généralement à une interface entre deux matériaux. Un contour **fermé** peut définir soit une pièce, soit une cavité dans une pièce suivant l'orientation qui lui est attribuée. Un contour **orienté** permet de situer la matière par rapport au contour que l'on définit. Lorsque l'on parcourt le contour dans le sens trigonométrique, la matière se trouve à l'intérieur de ce dernier. Elle se trouve à l'extérieur de celui-ci lorsque son orientation est inverse au sens trigonométrique. Enfin un contour **non orienté** est utilisé lorsque la matière se trouve de part et d'autre du contour.

Une fois ces contours définis, une **recherche automatique des points d'intersection** est effectuée de façon à déterminer le nombre de sous-domaines présents dans le maillage. Cela permettra notamment par la suite d'assigner des rhéologies différentes à chaque sous-domaine.

Ainsi, pour créer le maillage de la pièce présentée sur la figure I.7., nous définissons les trois contours suivants :

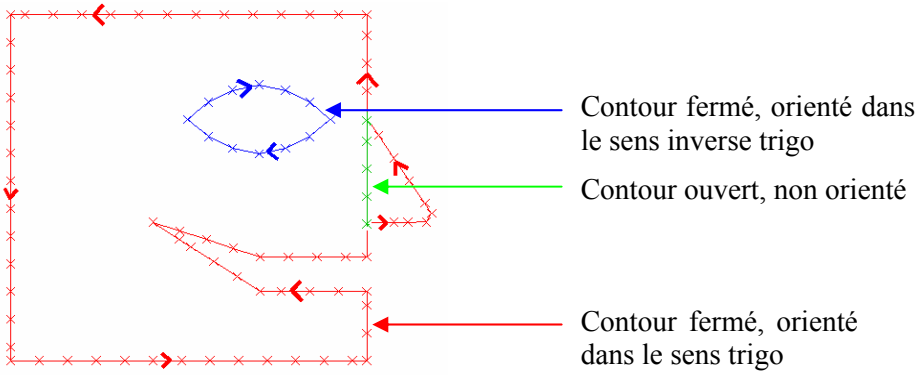


Figure I. 7. Déclaration des différents contours

I.3.1.2. Discrétisation de la frontière

Une fois le contour de la pièce connu, la discrétisation de la frontière est effectuée en deux étapes : la surdiscrétisation, puis la discrétisation de la frontière. Elle nécessite de plus la connaissance de 5 paramètres définis par l'utilisateur, et qui détermineront la finesse de cette discrétisation.

- **La surdiscrétisation de la frontière** : il s'agit d'une première discrétisation de la frontière dont les points, appelés points de surdiscrétisation, sont espacés d'une distance constante définie par l'utilisateur. Cette distance est généralement choisie petite, de façon à perdre le moins d'information lors de la surdiscrétisation du contour continu initial (Figure I.8.a).

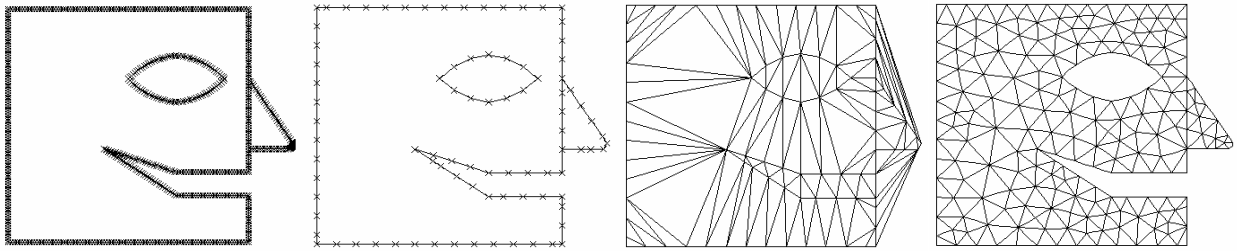
- **La discrétisation de la frontière** : cette discrétisation réelle de la frontière consiste à éliminer les points inutiles de la frontière surdiscrétisée. On définit par « points inutiles » les points que l'on peut enlever à la frontière surdiscrétisée, tout en vérifiant 5 critères (précision, courbure, nombre de points maximum, taille maximale et homogénéité) définis en Annexe A.1. A l'aide de ces différents paramètres, le mailleur crée une discrétisation de la frontière (Figure I.8.b). Cette discrétisation, dont la finesse dépend en grande partie du bon choix des paramètres précédents, forme un nuage de points qui sert de structure de base à la triangulation de Delaunay.

I.3.1.3. Triangulation de Delaunay

La triangulation de Delaunay est développée à partir des polygones de Voronoï, dont la formulation mathématique est expliquée en détail dans [Coupez 1991], [Borouchaki et al. 1997]. La construction du maillage à partir du nuage de points fournis par la discrétisation s'effectue de manière itérative. Les différentes étapes sont présentées en Annexe A.2.
A la fin des *n* itérations (*n* étant le nombre de points à rajouter), on obtient un maillage grossier de l'enveloppe convexe (Figure I.8.c).

I.3.1.4. Régularisation du maillage

Une fois le maillage de l'enveloppe convexe réalisé, plusieurs outils permettent d'obtenir un maillage suffisamment fin et régulier (Figure I.8.d) : l'élimination des triangles extérieurs au domaine, l'ajout de nœuds internes, et la régularisation par barycentrage et par inversion de diagonale sont présentés en Annexe A.3.



a) surdiscrétisation de la frontière | b) discrétisation de la frontière | c) maillage obtenu après la triangulation de Delaunay | d) maillage final après régularisation

Figure I. 8. Les différentes étapes de maillage

A la fin de ces différentes étapes, les triangles à 3 nœuds sont transformés en triangles à 6 nœuds. Les nouveaux nœuds sont rajoutés au milieu des arêtes internes au domaine, et sur le point de surdiscrétisation le plus proche pour les arêtes frontières du domaine (Figure I.9.).

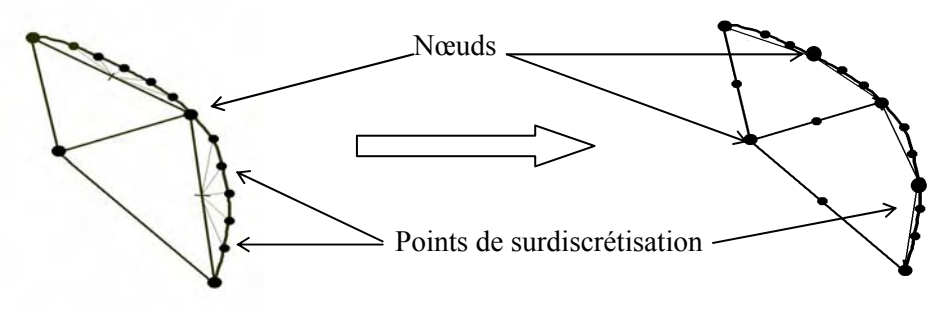


Figure I. 9. Transformation des triangles à 3 nœuds en triangles à 6 nœuds

I.3.1.5. Développements spécifiques

Certains développements spécifiques ont été ajoutés pour améliorer la précision dans certaines zones du maillage, et pour prendre en compte avec précision les différents contours et les différents matériaux :

- Des **boites de raffinement** : lors d'études de structures multimatériaux, il est souvent nécessaire de privilégier la précision dans des zones fines et bien délimitées du maillage. C'est par exemple le cas lorsque l'on étudie des produits multicouches, et que l'on s'intéresse particulièrement à une couche de la pièce. Pour gérer ce genre de problèmes, l'utilisateur a la possibilité de définir des zones géométriques rectangulaires et de leur assigner une *Taille max*[1] qui leur est propre, de façon à réduire la distance entre deux points de discrétisation consécutifs de la frontière. La figure I.10. nous montre l'exemple d'un raffinement du bout du nez et du coin de la bouche de la pièce :

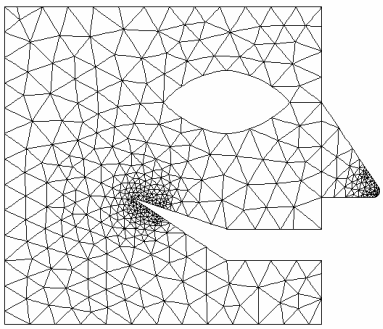


Figure I. 10. Maillage non connexe multidomaines avec boîtes de raffinement

- Un **maillage coïncidant aux interfaces** : la technique de maillage utilisée implique la coïncidence du maillage aux interfaces entre les différents matériaux. En effet, les interfaces sont discrétisées une seule fois, et la triangulation de Delaunay s'appuie directement sur les points de discrétisation des contours. Cela implique notamment un contact collant entre les différents matériaux. De plus,

la pièce contenant les différents sous-domaines (4 sur la figure I.11.) n'est constituée que d'un seul et unique maillage. La figure I.11. montre un maillage composé de 2 fibres et de 2 feuillards, en vue de l'élaboration d'un composite.

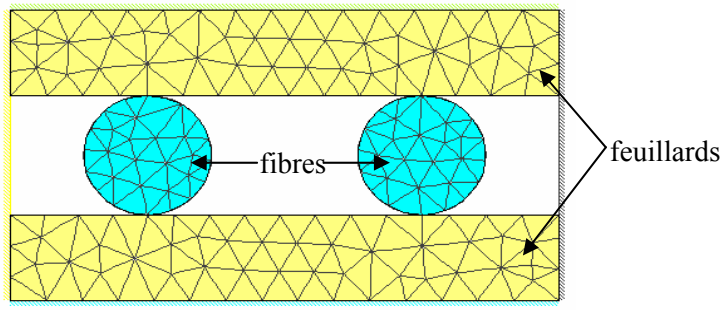


Figure I. 11. Maillage composé de deux fibres et de deux feuillards

- Une **gestion automatique des différents sous-domaines** : une fois le maillage créé, l'utilisateur attribue un numéro à chacun des sous-domaines repérés par le mailleur. Ce numéro correspond au numéro d'un des éléments appartenant à ce sous-domaine. Le mailleur génère alors une structure de donnée qui permettra de suivre l'évolution des différents sous-domaines au cours du calcul.

- La **rhéologie aux points d'intégration** : les rhéologies des différents matériaux à l'intérieur du même maillage sont prises en compte aux points d'intégration de Gauss des éléments (7 points d'intégration pour des triangles à 6 nœuds). Les contraintes étant calculées directement aux points d'intégration, nous n'avons ainsi aucune ambiguïté à la frontière entre deux matériaux.

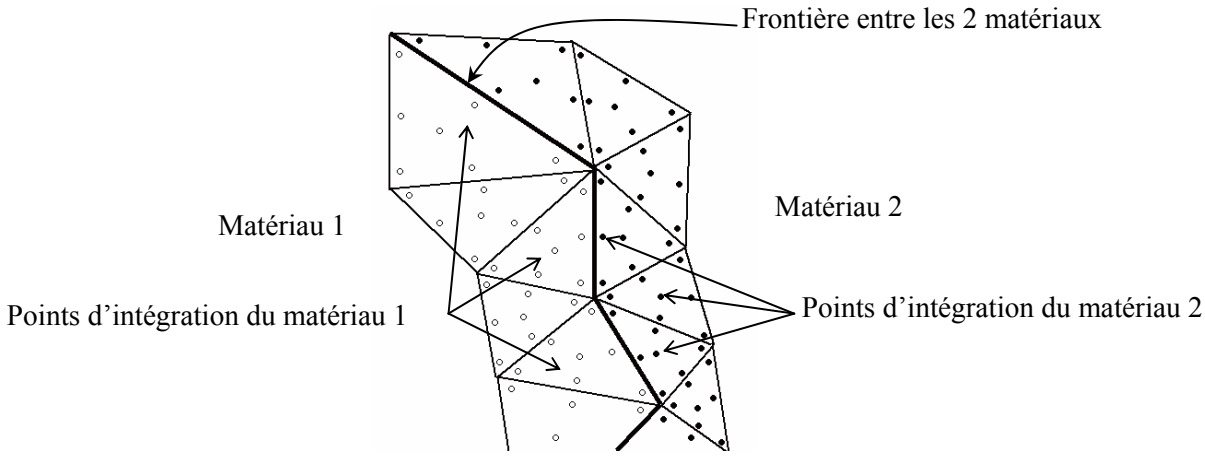


Figure I. 12. Rhéologie aux points d'intégration à l'interface entre deux matériaux

[1] C'est la distance maximale entre deux points de discrétisation consécutifs de la frontière.

I.3.2. Le Remailleur automatique

Lors d'un calcul en grandes déformations, les éléments du maillage sont soumis à de grandes transformations, susceptibles de mener à des formes dégénérées et de réduire la précision du calcul. Pour cela, nous avons introduit un remailleur automatique, qui se déclenche lorsque :

- un élément du maillage « dégénère » ;
- la courbure d'un côté frontière dépasse la courbure maximum autorisée par l'utilisateur ;
- des imprécisions géométriques dues au contact de la pièce et de l'outil apparaissent ;
- un domaine entre en contact avec lui-même (création d'un trou : figure I.13.) ;
- un domaine entre en contact avec un autre domaine (création d'une ligne d'interface : figure I.13.).

Pour toutes ces raisons, un remailleur automatique est utilisé afin de regénérer un maillage de bonne qualité lorsque c'est nécessaire durant le calcul. Ce remailleur opère en deux étapes :

- un ensemble de points frontières est généré à partir du maillage précédent. Ces points frontières définissent parfaitement les contours de la pièce, ainsi que les interfaces entre les différents matériaux et les conditions de contact avec les différents outils ;
- un nouveau maillage est créé à partir de ces points frontières de la même façon que pour le maillage initial (triangulation de Delaunay). Les variables sont transportées de l'ancien maillage au nouveau maillage en utilisant une méthode de transport de données performante.

La difficulté d'un remailleur automatique dans le cas de multimatériaux réside principalement dans la gestion des différents sous-domaines et différents contours au cours du calcul. Sachant que la pièce multimatériaux ne constitue qu'un seul et unique maillage, le problème se ramène souvent à l'étude de la rencontre du maillage avec lui-même, et à l'intersection de différents contours entre eux. Ainsi, l'élaboration du composite présenté sur la figure I.13., entraîne la formation de trous lorsque deux sous-domaines ayant la même rhéologie entrent en contact, ou de ligne interne, lorsque les sous-domaines qui entrent en contact ont des rhéologies différentes :

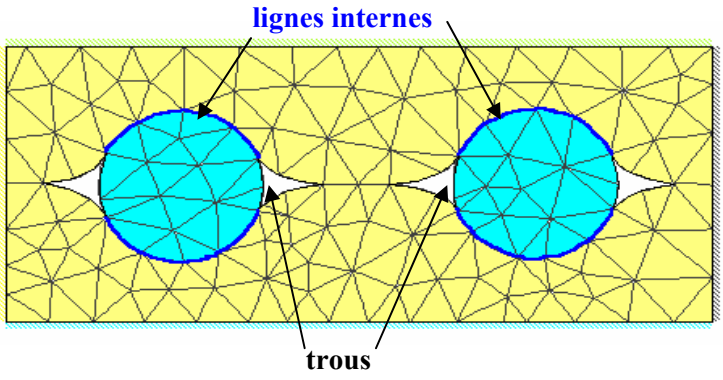


Figure I. 13. Création de trous et de lignes internes lors de la formation de composite

Finalement, pour bien gérer le contact entre les différents sous-domaines, il est nécessaire d'étudier avec précision les intersections des différents contours du maillage. C'est ce que nous présentons dans le sous-chapitre suivant.

I.4. GESTION DU CONTACT POUR DES MULTIMATERIAUX

Comme nous venons de le voir, la gestion de différents sous-domaines tout au long du calcul, est une étape difficile d'un point de vue numérique, mais indispensable si l'on veut mener un calcul multimatériaux jusqu'à son terme.

Afin de définir ici la stratégie que nous avons suivie pour résoudre le problème de contact entre différents sous-domaines, nous nous appuierons sur un exemple d'élaboration de composite. Après avoir présenté brièvement cet exemple d'application qui illustrera notre méthode, nous aborderons la stratégie générale de gestion des contours lors du calcul, puis nous donnerons plus de précision sur les techniques originales de cette stratégie.

I.4.1. L'élaboration de composites

Les matériaux utilisés dans l'industrie aéronautique ayant un coût élevé, il est bien souvent nécessaire de mettre au point les nouvelles techniques à l'aide de la modélisation numérique. A titre d'exemple, nous étudions ici l'élaboration de matériaux composites renforcés par des fibres longues : le procédé Feuillard/Fibre/Feuillard (Figure I.14.).

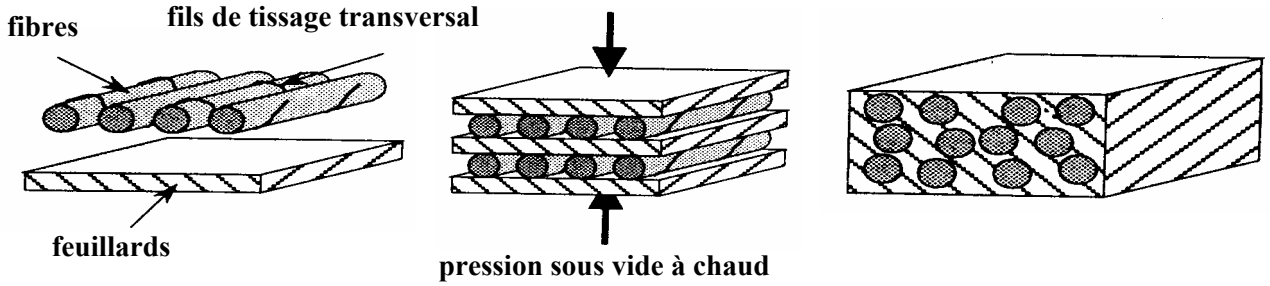


Figure I. 14. Procédé Feuillard/Fibre/Feuillard

Nous ne présenterons pas ici les détails relatifs au procédé et au matériau [Magny 1996], mais nous nous consacrerons aux difficultés numériques rencontrées lors des simulations. Pour les modélisations suivantes, nous avons utilisé les rhéologies suivantes :

- **Fibres** : elles ont un comportement élastique à haut module, caractérisé par :
  - un seuil élevé empêchant toute plastification ;
  - un module d'Young E = 350 GPa ;
  - un coefficient de Poisson ν=0,3.

- **Feuillards** : ils ont un comportement élasto-viscoplastique, caractérisé par la loi de comportement suivante : $\overline{\sigma} = 315{,}1\dot{\overline{\varepsilon}}^{0{,}265}$ MPa.

  Cette rhéologie, correspondant à des essais à 800°C, pourrait être prise dépendante de la température, mais ce n'est pas un sujet que nous aborderons ici. Enfin le maillage est coïncidant aux interfaces fibres/feuillards, ce qui revient à considérer un contact collant entre les différents matériaux.

I.4.2. Stratégie de gestion des contours

Afin de mener l'élaboration du composite jusqu'à son terme, il est nécessaire de gérer correctement les intersections de contours. Pour cela, nous suivons la stratégie suivante [Magny 1996] :

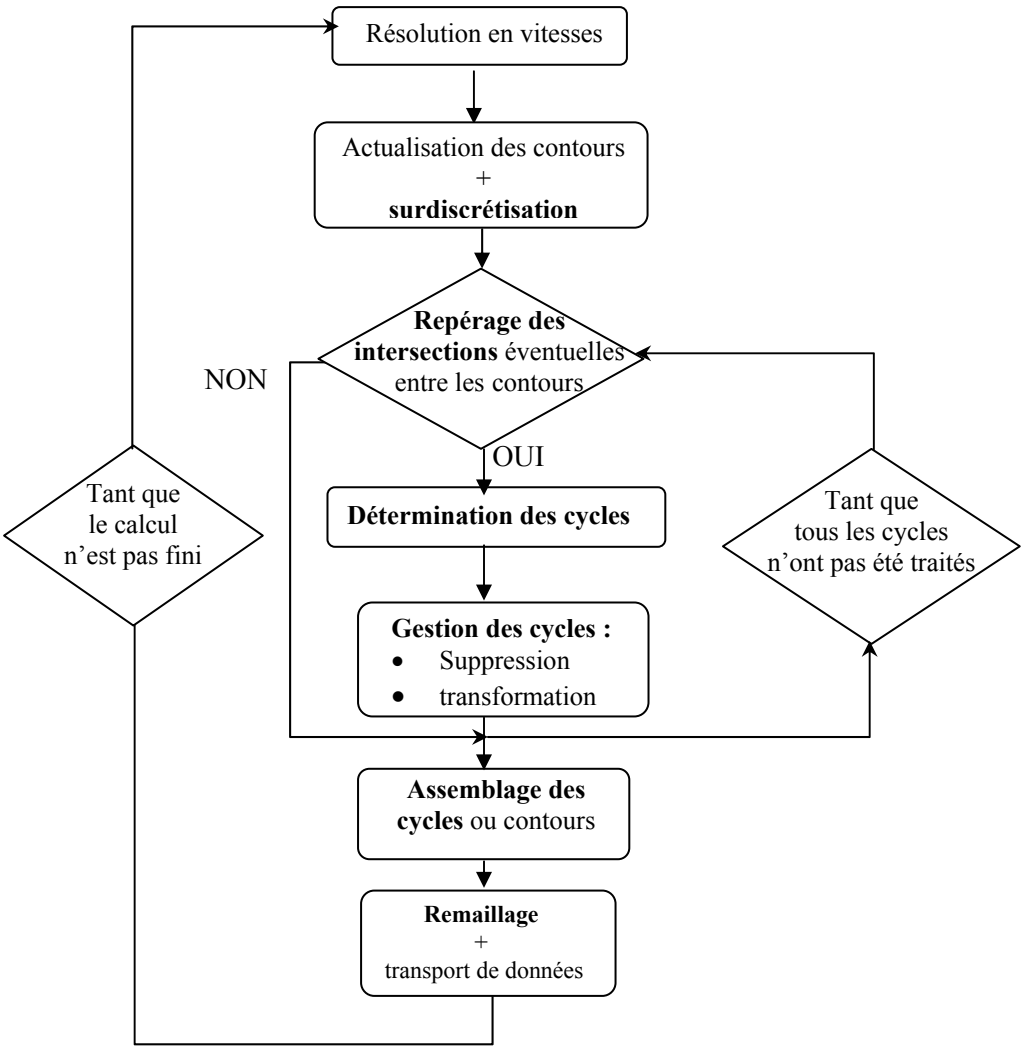


Figure I. 15. Stratégie générale pour la gestion des contours

I.4.2.1. Surdiscrétisation de la frontière

Avant d'étudier d'éventuelles intersections entre les différents contours, il est nécessaire d'avoir une description fine de ces derniers. Pour cela, on vient rajouter deux points de surdiscrétisation entre chaque nœud du maillage appartenant à une frontière :

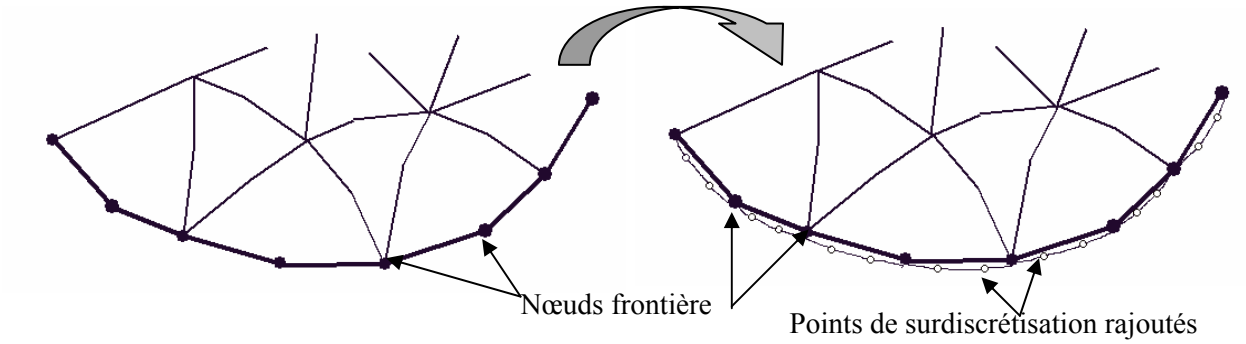


Figure I. 16. Surdiscrétisation de la frontière définie par des nœuds

Les points de discrétisation ainsi créés sont ajoutés aux nœuds de la frontière, et forment les points de surdiscrétisation des contours que l'on va étudier.

I.4.2.2. Repérage des intersections

Durant cette étape, on définit par segment de la frontière, le segment compris entre deux points de surdiscrétisation consécutifs. On compare alors tous les segments de frontière entre eux, de façon à déterminer une éventuelle intersection. Lorsque des points d'intersection sont trouvés, on vient les insérer dans la liste des points de surdiscrétisation de la frontière comme indiqué sur la figure I.17. :

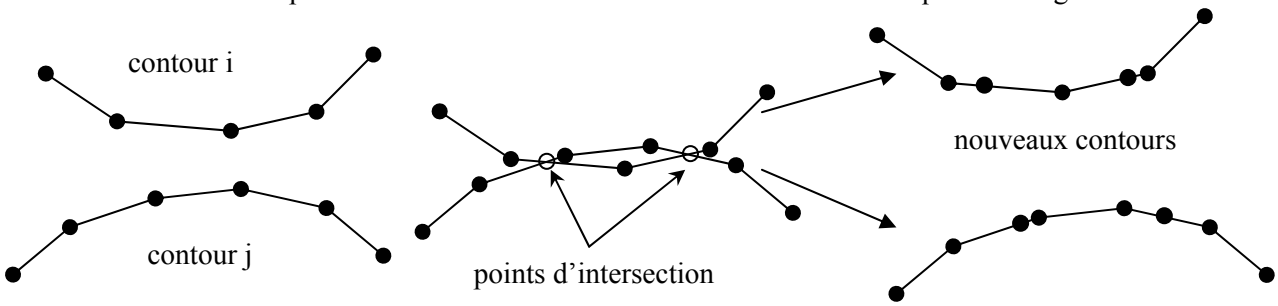


Figure I. 17. Construction des points d'intersections entre les différents contours

I.4.2.3. Détermination des cycles

Les cycles sont des morceaux de contour partant et aboutissant au même point, ce point étant un point d'intersection :

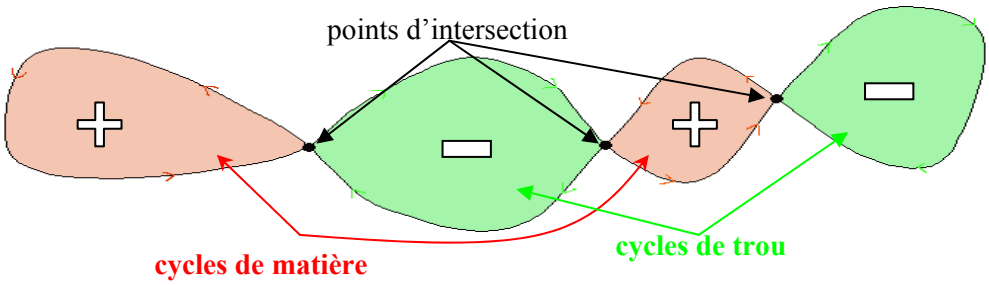


Figure I. 18. Cycles et points d'intersections

L'orientation initiale des contours nous permet de différentier deux types de cycles. Ceux correspondant à de la matière, lorsque l'orientation correspond au sens trigonométrique, et ceux correspondant à des trous dans le cas contraire.

Dans le cas de l'intersection d'un contour avec lui-même, on détermine chacun des cycles en partant d'un point d'intersection, et en parcourant les points de surdiscrétisation. Chacun de ces cycles, uniques et orientés, sont stockés dans des tableaux différents.
Dans le cas de l'intersection de deux contours différents, on part toujours d'un point d'intersection. Puis on parcourt les points de surdiscrétisation du premier contour jusqu'au point d'intersection suivant. On change alors de contour pour parcourir les points de surdiscrétisation jusqu'au point d'intersection initial. On détermine ainsi chacun des cycles de manière unique, et on les stocke dans de nouveaux tableaux.

I.4.2.4. Gestion des cycles

Les cycles ainsi déterminés correspondent soit à de la matière, soit à une cavité. L'utilisateur a la possibilité de déterminer une *aire minimale des trous* en dessous de laquelle les trous seront supprimés, ou encore une *aire d'intersection de matière minimale* en dessous de laquelle l'intersection de matière sera supprimée. Cela nous amène alors à gérer trois cas distincts :

- **Suppression d'une intersection de matière** : ces intersections de matière peuvent apparaître lorsqu'il y a intersection d'un contour avec lui-même. Une boucle de matière dont on calcule l'aire se forme. Si cette aire est inférieure à l'*aire d'intersection de matière minimale*, on supprime tout simplement le cycle correspondant.

- **Suppression d'un trou** : il s'agit ici d'éliminer un trou dont l'aire est inférieure à l'*aire minimale des trous* définie par l'utilisateur. Cependant la suppression d'un trou nécessite quelques précautions si l'on veut garder la notion de sous-domaines. On détermine le centre de gravité des points de surdiscrétisation du cycle, puis on le relie aux points d'intersection tout en supprimant les autres points de surdiscrétisation (Figure I.19.).

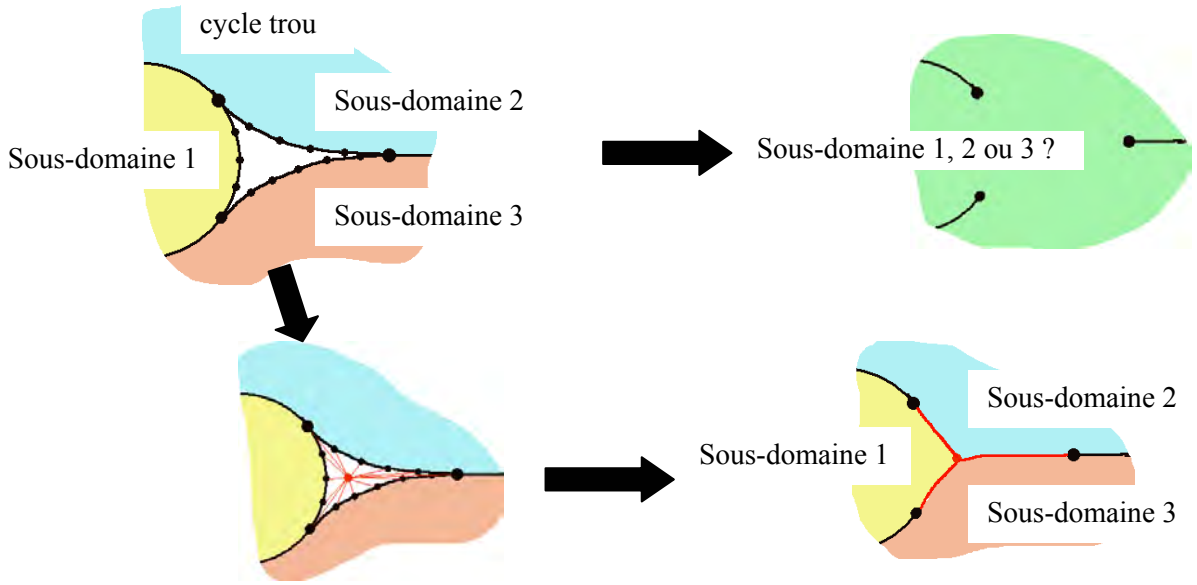


Figure I. 19. Suppression d'un trou

- **Gestion normale d'un cycle** : c'est le cas par exemple lors de l'intersection de matière entre deux matériaux. Dans ce cas, on va remplacer le cycle de matière par une ligne interne, représentant la frontière entre les deux matériaux (Figure I.20.a). On commence par ajouter des points de façon à ce qu'il y ait le même nombre de points de part et d'autre des deux points d'intersection (Figure I.20.b). Puis on crée de nouveaux nœuds équidistants des nœuds en vis-à-vis (Figure I.20.c). Enfin on supprime les anciens points du cycle, hormis les points d'intersection, que l'on relie aux nouveaux nœuds créés, de façon à définir la ligne interne (Figure I.20.d).

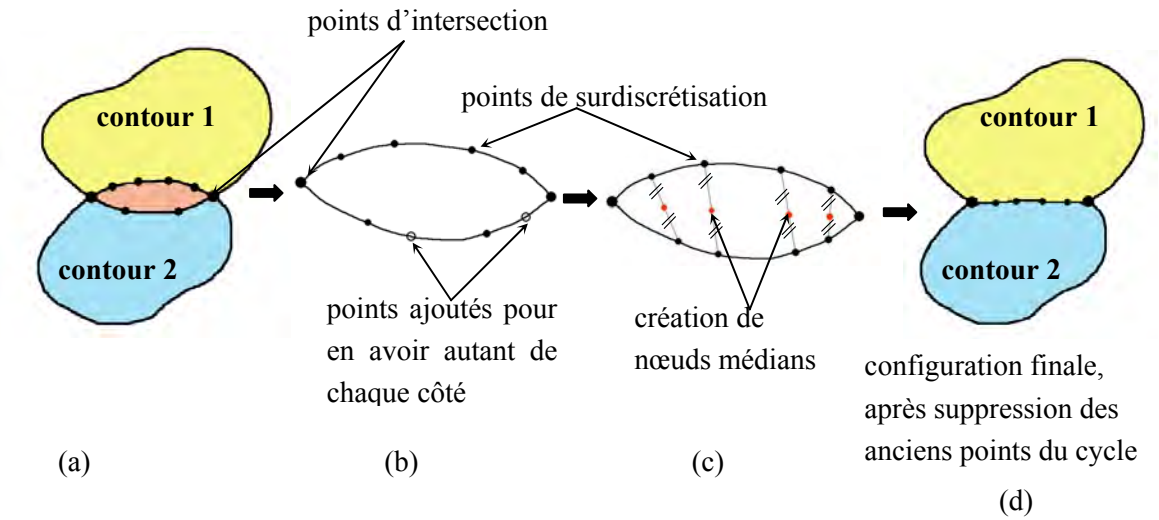
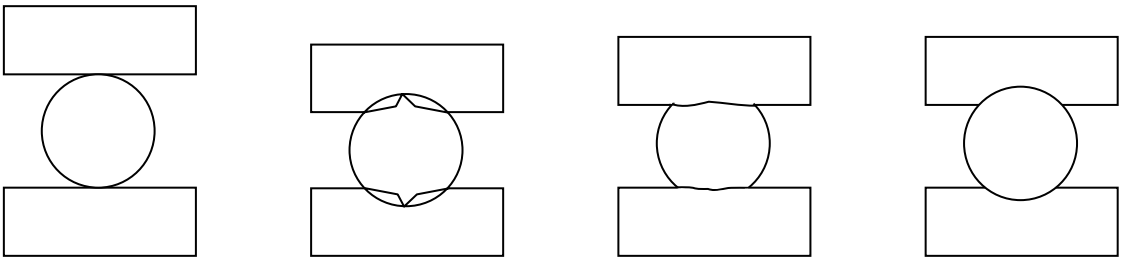


Figure I. 20. Gestion normale d'un cycle

Si les pas de temps de calcul sont trop grands, cette technique peut entraîner des pertes de volume non négligeable. Pour pallier à ce problème, deux solutions ont été utilisées. La première consiste à calculer des pas de temps entraînant une perte de matière minimum. Cette technique peut cependant s'avérer coûteuse lorsque l'on est confronté à de nombreux matériaux entrant en contact les uns avec les autres. La seconde concerne les applications pour lesquelles un matériau est bien plus rigide que l'autre, comme c'est le cas dans notre exemple d'élaboration de composite. On permet alors à l'utilisateur de donner une priorité à certains sous-domaines (les fibres dans notre exemple) qui ne subiront peu ou pas de déformation lors de l'intersection de matière (Figure I.21.) :



configuration initiale | avant gestion des contours | Remaillage sans priorité | Remaillage avec priorités aux fibres

Figure I. 21. Remaillage avec priorités aux fibres

Quelle que soit la technique utilisée , les variations de volume sont calculées à chaque pas de temps.

I.4.2.5. Assemblage des cycles

Les contours ouverts (lignes internes) créés lors de la gestion des cycles sont alors réorientés dans certains cas, et insérés dans les contours existants [Magny 1996], de façon à ne pas alourdir les calculs ultérieurs, tout en préservant les différents sous-domaines.

I.4.2.6. Remaillage

Une fois tous les contours redéfinis correctement, le remaillage est activé. Dans la version monomatériau, le remailleur fonctionne sur les mêmes bases que le mailleur : on parcourt la frontière dans le sens trigonométrique, et on élimine le plus de points possible de la frontière surdiscrétisée tout en vérifiant les différents critères de remaillage (précision, taux de raffinement, …). Dans le cas multimatériaux, on ne peut pas supprimer les points d'intersections des différents contours, et ceci peut conduire à une agglomération de nœuds au voisinage de ceux-ci (Figure I.22.). Pour éviter ce problème, on définit une distance critique et on supprime tous les nœuds frontières dont la distance au point d'intersection est inférieure à cette distance.

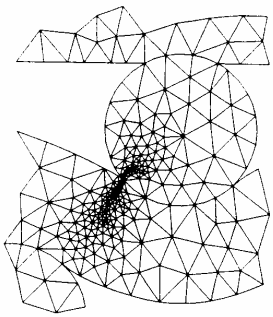


Figure I. 22. Exemple d'agglomération de nœuds

I.4.3. Application

Tous les outils définis ci-dessous ont été appliqués pour étudier l'élaboration de composites. Nous proposons ici l'exemple constitué de 3 fibres et de 4 feuillards, que nous appelons composite 4 plis :

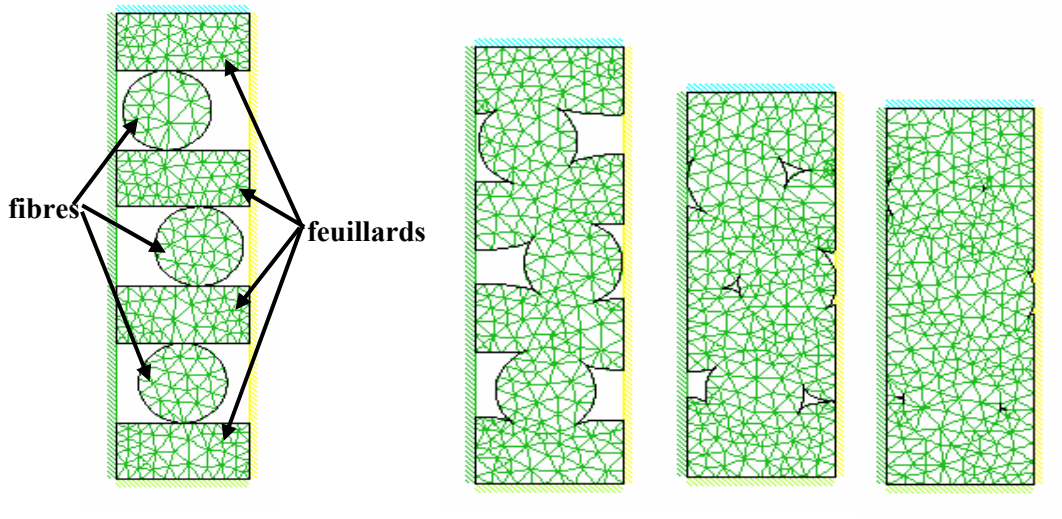


Figure I. 23. Elaboration d'un composite 4 plis

La figure I.23. nous montre bien les différentes techniques exposées dans les paragraphes précédents :

- Les fibres restent circulaires tout au long du calcul, dans la mesure où elles ont été déclarées comme prioritaires par rapport aux feuillards ;
- Des lignes internes sont créées, puis insérées aux autres contours à chaque fois qu'il y a intersection entre une fibre et un feuillard ;
- La rencontre de deux feuillards entre eux génère un trou, dont l'aire va diminuer au fur et à mesure du compactage.

Toutes ces techniques permettent ainsi de mener le calcul jusqu'à fermeture complète des porosités. La déformation plastique représentée à différentes étapes du calcul (Figure I.24.) nous montre bien l'importante déformation des feuillards, et la déformation plastique nulle des fibres.

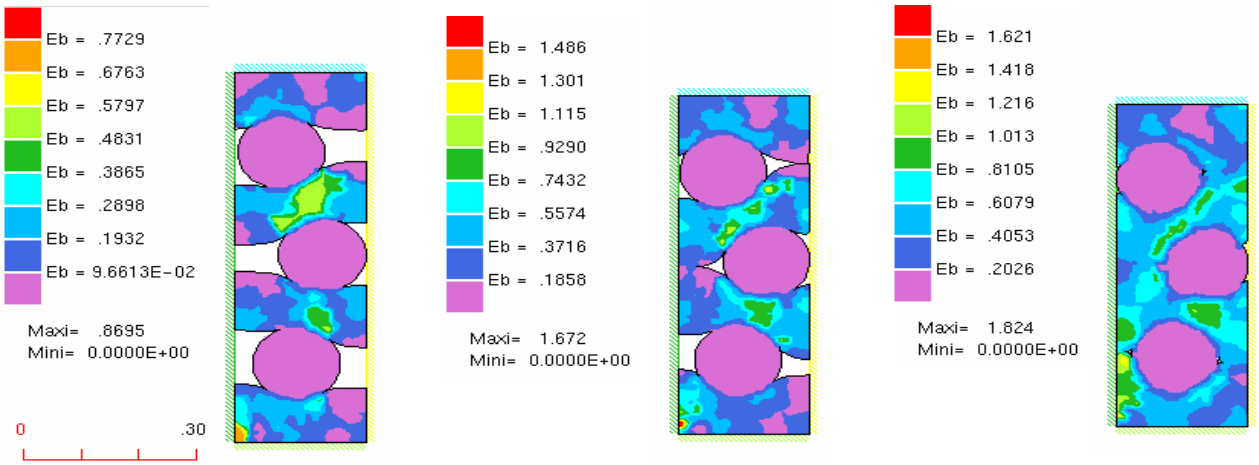


Figure I. 24. Déformation plastique lors de l'élaboration de composites

I.5. METHODES DE RESOLUTION POUR DES MULTIMATERIAUX

La difficulté de traiter des pièces multimatériaux ne réside pas uniquement dans la gestion des différents sous-domaines. Elle apparaît également lorsque l'on traite des matériaux multicouches ayant des épaisseurs et des caractéristiques mécaniques très différentes. Dans ce cas, deux nouvelles difficultés apparaissent :

- les systèmes linéaires que l'on cherche à résoudre peuvent être très mal conditionnés ;
- la précision exigée dans les couches très fines peut considérablement augmenter la taille du maillage.

Les méthodes de résolution directes telles que la méthode de Crout ne sont alors pas forcément les plus intéressantes. Certaines méthodes itératives permettent notamment de diminuer à la fois le temps de calcul et le stockage en mémoire des matrices de résolution.

Pour illustrer nos propos, nous commencerons par présenter l'exemple d'un assemblage collé Colle/Polymère/Acier. Puis, nous montrerons les fortes hétérogénéités d'un tel exemple et le mauvais conditionnement que cela entraîne. Enfin nous montrerons les avantages à utiliser, dans ce genre de cas, une méthode de résolution itérative.

I.5.1. Etude d'un Assemblage Collé

Nous étudierons dans ce sous-chapitre un assemblage collé [Scotto 1999], composé d'adhésif, de polymère et d'acier dont les caractéristiques sont les suivantes :

	Adhésif	Polymère	Acier
σ_0 (MPa)	**20**	**31**	**290**
E (MPa)	**420**	**3000**	**210000**
ν	**0,47**	**0,4**	**0,29**

Tableau I. 1. Caractéristiques mécaniques des composants de l'assemblage collé

Il s'agit d'une éprouvette de clivage, pré-fissurée, dont la géométrie est donnée par la figure I.25. :

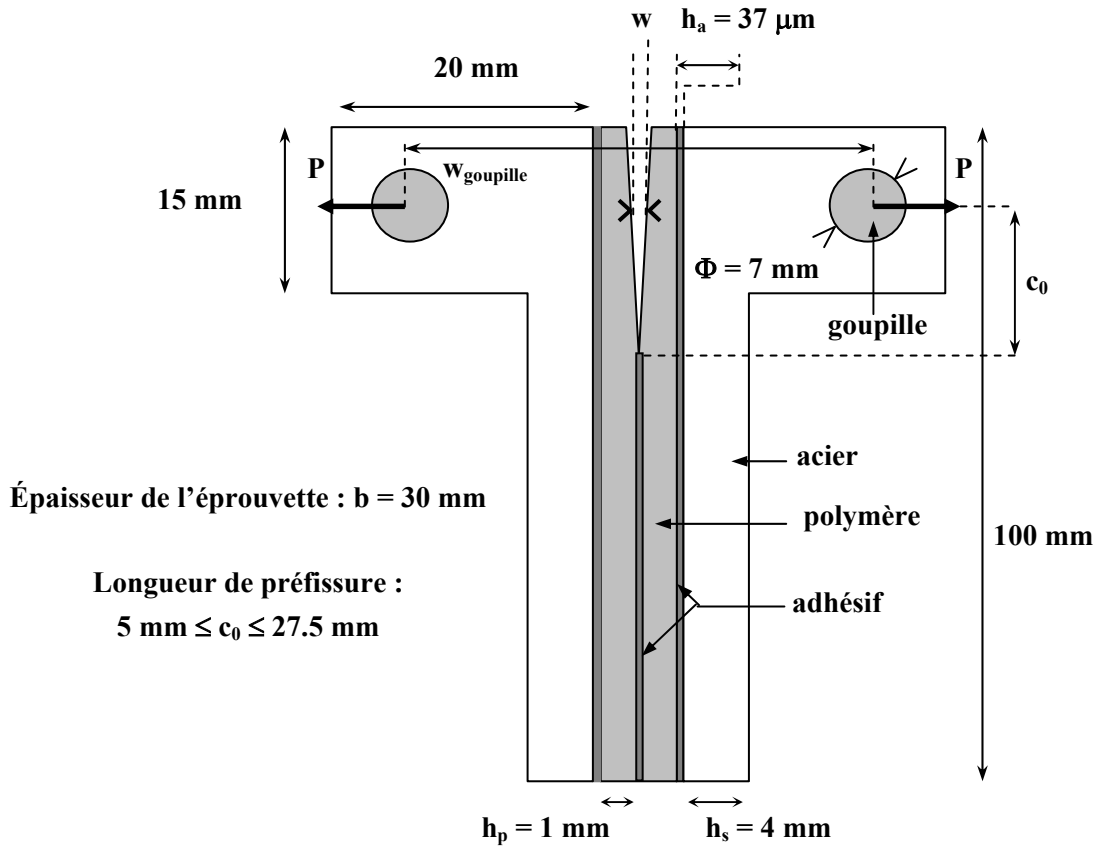


Figure I. 25. Eprouvette de clivage colle/polymère/acier

L'intérêt d'une telle éprouvette est de mesurer la ténacité de l'assemblage, nous y reviendrons dans le chapitre suivant. Dans ce chapitre, nous ne nous intéressons qu'aux difficultés numériques liées à ce type d'assemblage multicouches et de sollicitation. Pour plus de précisions sur les matériaux et sur le procédé, le lecteur pourra se référer à [Scotto-Sheriff 1998] et [Bay et al. 1999].

Cette éprouvette présente de fortes hétérogénéités géométriques, puisque sur une hauteur de 100 mm, nous avons des couches descendant jusqu'à 37 μm d'épaisseur. De plus, comme nous ne modélisons qu'une partie symétrique de cette éprouvette, la couche d'adhésif centrale aura une épaisseur de 18,5 μm. Le maillage de cette partie symétrique présenté en figure I.26. a été obtenu en utilisant les techniques présentées au §I.3.1., et notamment un raffinement important à la pointe de la pré-fissure.

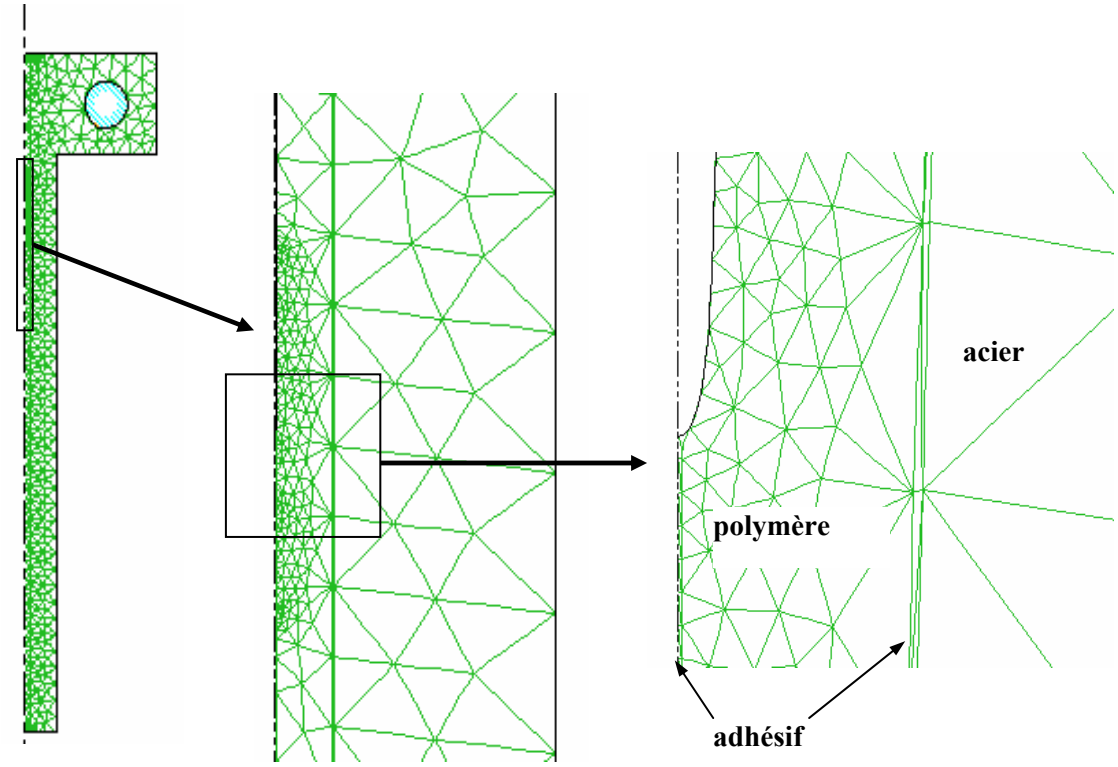


Figure I. 26. Maillage de la partie symétrique de l'assemblage

I.5.2. Etude de conditionnement

Considérons un système linéaire $A.u=b$ où A est une matrice connue, b un vecteur connu, et u le vecteur solution recherché. Dans un exemple souvent repris dans la littérature, R.S. Wilson [Ciarlet 1998] montre comment une perturbation minime sur les données b (de l'ordre de 0,3%) entraîne une perturbation importante sur le résultat u du système (de l'ordre de 700%). On se rend tout de suite compte des conséquences catastrophiques que cela pourrait avoir sur la précision d'un calcul éléments finis lorsque la matrice de rigidité est mal conditionnée. C'est pourquoi nous avons décidé d'étudier le conditionnement des matrices de rigidité, ainsi que les paramètres qui l'influence.

Plus concrètement, le conditionnement de la matrice A mesure la sensibilité de la solution u du système par rapport à de légères perturbations sur les données A et b. Ainsi, on dira qu'un système est *bien conditionné*, si le conditionnement de la matrice A est *petit*.

On définit généralement le **conditionnement** d'une matrice inversible A, comme étant : $C(A) = \|A\|.\|A^{-1}\|$. Il dépend donc de la norme matricielle choisie, mais il reste toujours supérieur à 1.

Pour une matrice A symétrique, et pour la norme L^2, on a $C_2(A) = \dfrac{\max_i |\lambda_i(A)|}{\min_i |\lambda_i(A)|}$, où $\lambda_i(A)$, $1 \le i \le n$ sont les valeurs propres de la matrice A de dimension n*n.

Pour des raisons de rapidité et de facilité, plusieurs auteurs proposent d'évaluer le conditionnement par un calcul de déterminant, un déterminant proche de zéro correspondant à un mauvais conditionnement. C'est un raisonnement dangereux dans la mesure où le déterminant est sensible à une mise à l'échelle du système, ce qui n'est pas le cas du rapport entre la plus petite et la plus grande valeur propre.
Notons cependant qu'il est possible d'avoir un mauvais conditionnement sans que cela n'entraîne d'erreurs significatives sur la solution. En effet, la répartition des valeurs propres a une influence non négligeable : si ces valeurs propres sont « régulièrement » réparties, un mauvais conditionnement n'entraîne pas forcément de grosse sensibilité sur la solution. Inversement, si les valeurs propres sont dispersées, la sensibilité de la solution par rapport à de petites perturbations peut être dangereuse.
Dans la suite de l'étude, nous nous concentrerons sur le calcul du conditionnement tel qu'il a été défini précédemment. Le calcul du conditionnement se ramène donc au calcul de la plus grande et de la plus petite valeur propre d'une matrice. De plus, la matrice de rigidité provenant de la méthode des éléments finis est symétrique, définie et positive. Ses valeurs propres sont donc toutes strictement positives.

De nombreuse méthodes (méthode de Jacobi, de la puissance itérée, méthode QR) permettent de calculer l'ensemble des valeurs propres. Ces méthodes restent néanmoins lourdes à utiliser si l'on ne s'intéresse qu'à deux valeurs propres. La méthode de Givens-Householder (GH) est particulièrement bien adaptée à la recherche de valeurs propres « sélectionnées » d'une matrice symétrique. Elle permet en effet le calcul de la plus grande et de la plus petite valeur propre, sans pour autant calculer les autres. Cette méthode, détaillée dans [Ciarlet 1992], comprend deux étapes :

- La méthode de **Householder** : partant d'une matrice symétrique A, on détermine une matrice orthogonale P telle que la matrice symétrique P^TAP soit tridiagonale. Cette étape ne nécessite qu'un nombre fini d'opérations élémentaires.
- La méthode de **Givens** : également appelée méthode de bissection, elle consiste à calculer de façon approchée, avec une précision définie par l'utilisateur, une valeur propre de rang donné d'une matrice tridiagonale symétrique.

Le conditionnement a été calculé pour une pièce de géométrie quelconque, et en faisant varier le nombre de nœuds du maillage. La figure I.27. représente la comparaison entre le conditionnement évalué par la méthode GH, et celui obtenu à l'aide de la librairie mathématique ESSL.

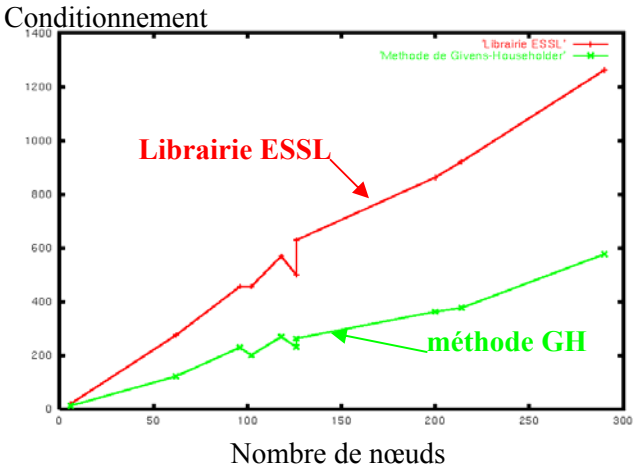


Figure I. 27. Conditionnement calculé par la méthode de Givens-Householder et par la librairie ESSL

Les courbes sont semblables à un facteur près, dû au fait que l'on utilise la norme L^2 pour la méthode GH, alors que la librairie ESSL utilise une norme L^1.
La méthode GH est donc validée et elle va nous permettre d'étudier l'influence de plusieurs paramètres, tels que le nombre de nœuds du maillage, sur le conditionnement. On remarque également un phénomène qui aura de l'importance par la suite : pour deux maillages distincts mais de même nombre de nœuds (126 nœuds), on obtient deux valeurs différentes pour le conditionnement. Il sera donc intéressant dans la suite d'étudier l'influence de la qualité du maillage sur le conditionnement du système. Enfin, étant donné l'aptitude du code à étudier les structures multimatériaux, nous mettrons en évidence l'influence de leurs caractéristiques mécaniques sur le conditionnement.

- **Influence du nombre de nœuds**

Cette première étude ressemble plus à une seconde validation : nous nous plaçons dans le cas d'un domaine carré, maillé de façon structurée avec des éléments quadrangles. Nous choisissons plus particulièrement des éléments carrés (qualité=1), de façon à conserver la qualité globale du maillage lorsque le nombre de nœuds augmente. Alors, si l'on note *N* le nombre de nœuds de chaque côté, *L* la longueur d'un côté, et *h* le pas de discrétisation (*h=L/(N-1)*), le conditionnement théorique est en $O\left(\frac{1}{h^2}\right)$.
Les résultats obtenus sur la figure I.28. en échelle logarithmique sont bien conformes à la théorie, puisque nous obtenons approximativement une droite de pente –2.

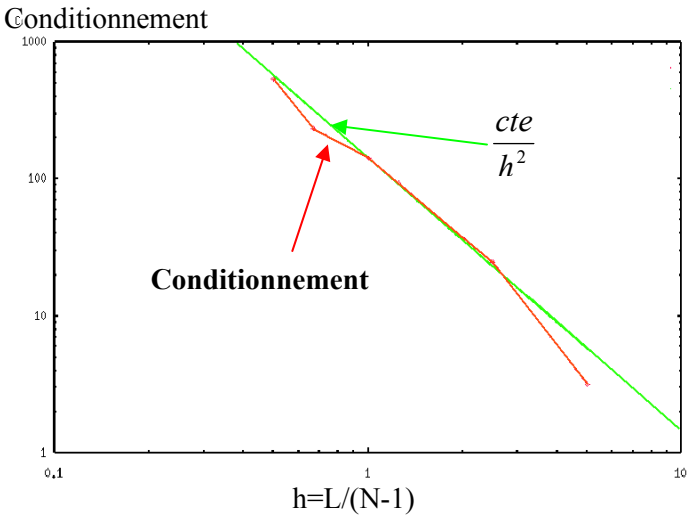


Figure I. 28. Influence du nombre de nœuds sur le conditionnement

- **Influence de la qualité du maillage**

La qualité d'un maillage mesure la dégénérescence des éléments le constituant, et permet ainsi, lors de grandes déformations, de déclencher un remaillage automatique. Il existe de nombreuses manières de calculer la qualité d'un maillage. Pour notre part, nous définissons la fonction qualité [Cescutti 1989] :

$$\pi(X) = \sum_{\text{éléments}} \pi_e(X) = \sum_{\text{éléments}} \frac{1}{Surface(K_e)} \int_{K_e} \frac{F^2}{J} d\xi \quad \text{avec} \quad \begin{cases} F = \|\nabla \tau\| \\ J = Jacobien(\tau) \end{cases}$$

où τ est la transformation qui fait passer l'élément K_e de sa configuration de référence à sa configuration réelle. On vérifie alors facilement que la valeur $\pi_e(X)$ est minimum et égale à 2 lorsque τ_e est une similitude. Le terme F mesure la régularité de la grille, et la division par le jacobien J permet à la fois d'adimensionnaliser l'expression, et de faire croître π_e vers l'infini lorsque l'élément approche de la dégénérescence. Pour notre part, nous avons défini la qualité du maillage comme étant : $qualité(X) = \frac{2}{\pi(X)}$ afin que la qualité soit comprise entre 0 et 1, et qu'un élément parfait ait une qualité égale à 1.

Pour étudier la dépendance du conditionnement à la qualité du maillage, nous avons réalisé plusieurs maillages réguliers, composés du même nombre de nœuds, mais avec des qualités moyennes d'éléments différentes. La figure I.29. montre l'amélioration globale du conditionnement lorsque la qualité moyenne se rapproche de 1.

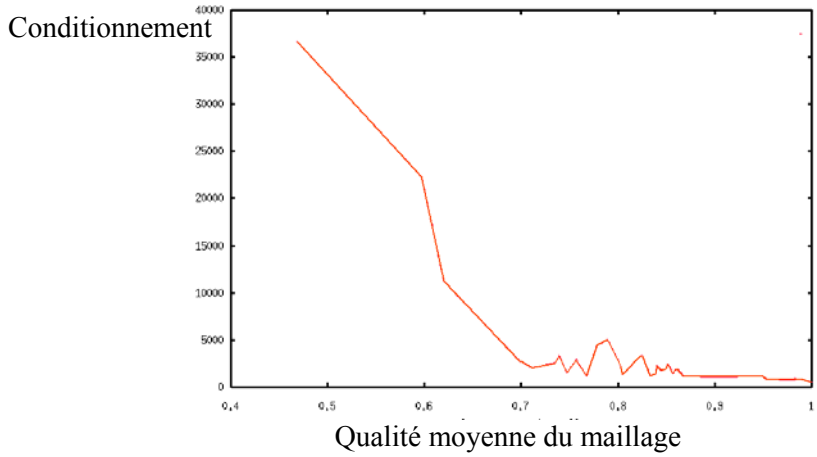


Figure I. 29. Influence de la qualité moyenne du maillage sur le conditionnement

- **Influence des sous-domaines et de la rhéologie des matériaux**

Afin d'étudier l'influence du nombre de sous-domaines et de la rhéologie sur le conditionnement, nous nous sommes placés dans le cas simplifié suivant : une plaque rectangulaire, composée de trois matériaux, et symétrique par rapport aux ordonnées est soumise à un essai de traction (Figure I.30.).

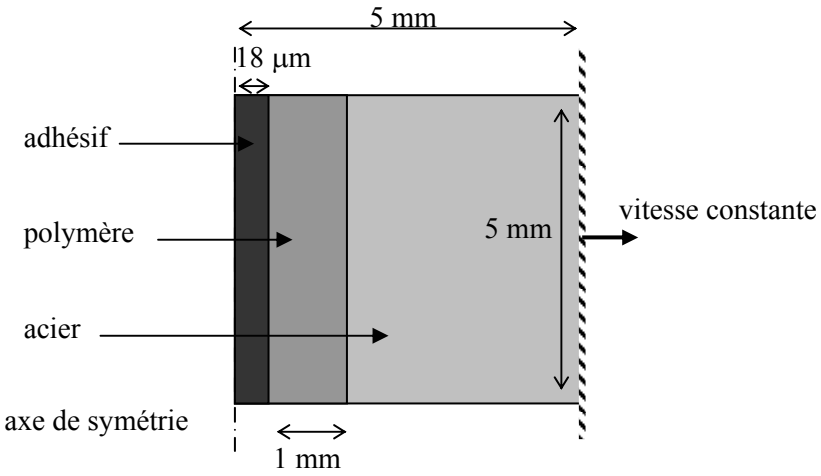


Figure I. 30. Cas simplifié pour l'étude de l'influence du nombre de sous-domaines et de la rhéologie

Trois cas ont été comparés :

- 1SDM-1MAT : la pièce rectangulaire a été maillée avec un seul sous-domaine (de 5mm sur 5mm), et en ne prenant que la rhéologie de l'acier ;
- 3SDM-1MAT : la pièce est maillée en prenant en compte les trois sous-domaines, mais en leur attribuant à chacun la rhéologie de l'acier ;
- 3SDM-3MAT : il s'agit du modèle complet, composé des trois sous-domaines, auxquels on attribue les caractéristiques mécaniques différentes de l'acier, du polymère et de l'adhésif.

Pour des maillages constitués du même nombre de nœuds, le tableau I.2. présente l'évolution du conditionnement et de la qualité du maillage pour les 3 cas définis ci-dessus.

		1SDM-1MAT	3SDM-1MAT	3SDM-3MAT
Conditionnement	690 nœuds	$1{,}19.10^4$	$1{,}52.10^5$	$8{,}88.10^5$
	876 nœuds	$1{,}45.10^4$	$3{,}42.10^5$	$2{,}01.10^6$
	930 nœuds	$1{,}56.10^4$	$4{,}12.10^5$	$2{,}41.10^6$
Qualité minimale		0,56	0,06	0,06
Qualité moyenne		0,87	0,74	0,74

Tableau I. 2. Evolution du conditionnement et de la qualité du maillage suivant le cas étudié

On note tout d'abord la valeur importante du conditionnement.

La comparaison des deux premières colonnes montre l'influence du nombre de sous-domaines pour un même matériau. Le conditionnement est bien supérieur (facteur de 10 à 30) lorsque la pièce est décomposée en trois sous-domaines. Cet écart provient vraisemblablement de la chute de la qualité du maillage, et particulièrement de la qualité minimale lorsque l'on passe à 3 sous-domaines.
La comparaison des deux dernières colonnes montre l'influence des rhéologies sur le conditionnement. En effet pour deux maillages identiques (même nombre de nœuds, même nombre de sous-domaines, même qualité de maillage), le conditionnement est bien plus élevé (facteur de l'ordre de 6) lorsque l'on considère 3 matériaux différents. Ce résultat semblait prévisible dans la mesure où la matrice de rigidité dépend directement des modules d'Young des différents matériaux. L'important écart entre les modules d'Young des trois matériaux intensifie le facteur de différence entre la plus petite et la plus grande valeur propre de la matrice de rigidité, et le conditionnement est donc plus important.
Remarquons enfin que nous sommes ici dans le *pire* des cas, puisque le module d'Young le plus faible est associé au matériau ayant l'épaisseur la plus faible. Les systèmes auxquels nous sommes confrontés sont alors très mal conditionnés avec un facteur d'environ 100 par rapport à un cas *standard*.

Nous venons de voir que le conditionnement du système dépend de nombreux paramètres. De plus, l'essai d'adhérence que nous étudions (comme beaucoup de structures multicouches) comprend :

- un grand nombre de nœuds ;
- des sous-domaines élancés de tailles très différentes, pouvant entraîner des qualités de maillage très faibles ;
- des caractéristiques mécaniques très variées.

Autant de facteurs qui font croître considérablement le conditionnement, et qui nous amènent à penser qu'une méthode de résolution itérative préconditionnée serait peut-être mieux adaptée au problème. De plus, nous verrons que pour ce type de méthode, nous avons la possibilité de stocker les matrices de résolution de façon plus optimale. Ce qui permettra donc de créer des maillages plus précis.

I.5.3. La méthode du gradient conjugué préconditionné

Nous nous intéresserons ici à la résolution d'un système matriciel de la forme $A.x=b$, où A est une matrice symétrique, définie, positive de taille n*n ; x et b étant deux vecteurs appartenant à R^n. Nous noterons J la fonctionnelle quadratique positive associée au système $A.x=b$.

Parmi les nombreuses méthodes de résolution itératives de tels systèmes linéaires, nous avons choisi une des méthodes les plus utilisées : la méthode du gradient conjugué. Puis, comme le nombre d'itérations de cette méthode est directement lié au conditionnement de la matrice du système, nous nous sommes intéressé à différents préconditionneurs. Enfin, nous comparons les résultats obtenus à ceux obtenus avec la méthode directe de Crout.

I.5.3.1. La méthode du gradient conjugué

La méthode du gradient conjugué est une méthode itérative de type « descente ». Introduite par Heztenes et Stiefel en 1952 [Heztenes et al. 1952], ce n'est qu'en 1971 que Reid [Reid 1971] montra qu'elle pouvait être très efficace. Nous ne détaillerons pas ici cette méthode suffisamment connue, et présentée dans plusieurs ouvrages [Ciarlet 1998], [Lascaux et al. 1994].
Les méthodes de type « descente » consistent à construire la suite de vecteurs (x_k) tendant vers x, et telle qu'à chaque itération, on détermine un vecteur direction de descente d_k et un scalaire pas de descente α_k nous permettant de calculer : $x_{k+1} = x_k + \alpha_k . d_k$.
Les méthodes de type gradient consistent à prendre le gradient de la fonctionnelle J comme direction de descente car c'est, localement, la direction de plus profonde descente. La particularité de la méthode du gradient conjugué est de rechercher x_{k+1} non pas sur la droite engendrée par $\nabla J(x_k)$, mais sur le sous-espace orthogonal à l'ensemble des directions de descente précédentes. On démontre alors que la méthode converge en au plus n itérations.

Si on note $\overline{n}$ le nombre moyen de coefficients non nuls par ligne de la matrice A, le nombre d'opérations à effectuer par itération est de l'ordre de $2n\overline{n}$ .Comme la méthode converge en au plus n itérations, on obtient un coût total de l'ordre de $2\overline{n}n^2$, ce qui est relativement élevé, surtout si $\overline{n}$ est grand. Par exemple pour une matrice pleine ($\overline{n} = n$), la méthode serait en $O\left(2n^3\right)$, ce qui est en fait moins bien que la méthode directe de Crout qui est en $O\left(\frac{n^3}{3}\right)$. D'où l'idée d'introduire la notion de préconditionneurs, qui auront pour but d'accélérer la convergence.

I.5.3.2. Préconditionneurs

Le préconditionnement consiste à remplacer la résolution du système initial $A.x=b$ par celle du système équivalent $C^{-1}.A.x=C^{-1}.b$, où C est une matrice régulière. Le but étant de réduire le temps de calcul, il faut que la réduction du nombre d'itérations pour atteindre la convergence introduit par le préconditionnement, compense le coût dû au calcul et au stockage de la matrice C, ainsi qu'aux produits matrice-vecteur supplémentaires. Pour atteindre cet objectif, les caractéristiques principales d'une bonne matrice de préconditionnement sont les suivantes [Menai 1995] :

- $Cond(C^{-1}.A) << Cond(A)$: l'objectif est de trouver la matrice C de telle sorte que le conditionnement de $C^{-1}.A$ soit le plus proche de 1 afin d'accélérer la convergence. Le meilleur choix étant bien sûr $C^{-1}=A^{-1}$, qui nous permettrait d'avoir un conditionnement égal à 1.
- *C facilement inversible* : pour résoudre le système $C^{-1}.A.x=C^{-1}.b$, il nous faut inverser la matrice C. Il est donc important qu'elle soit facilement inversible.
- *C creuse* : Pour des raisons d'économie en place mémoire, il est nécessaire que C soit au moins aussi creuse que A.
- *C facile à obtenir* : toujours pour une raison de coût de calcul, il est important que la matrice C soit rapide à obtenir.

Il existe plusieurs types de préconditionneurs [Golub et al. 1983]. Le but n'étant pas d'effectuer une étude exhaustive des préconditionneurs, nous allons juste présenter ceux que nous avons implémentés :

- **Préconditionneur par la diagonale** : c'est le préconditionneur le plus intuitif, et sûrement un des plus utilisés : *C* est une matrice diagonale constituée des termes diagonaux de *A*.

  $C=Diag(A)$

  C'est sans aucun doute le préconditionneur le plus simple, et il permet, dans la plupart des cas, d'accélérer suffisamment la convergence. Par ailleurs, il ne nécessite aucun coût supplémentaire de stockage.

- **Préconditionneur SSOR** (Symmetric Successive Over Relaxation) : c'est une méthode itérative basée sur la décomposition de la matrice A sous la forme :

  $A=D-L-U$, où $\begin{cases} D = Diag(A) \\ L = (-a_{ij})_{i>j} \text{ matrice triangulaire inférieure stricte} \\ \mathrm{U} = (-a_{ij})_{i<j} \text{ matrice triangulaire supérieure stricte} \end{cases}$

  Cette technique de préconditionnement a été introduite par Evans [Evans 1968], puis reprise et développée par Axelsson [Axelsson 1976]. Elle consiste à définir la matrice de conditionnement comme combinaison linéaire de D et L :

  $C=[\omega(2-\omega)]^{-1}.(D+\omega L).D^{-1}.(D+\omega L)^t$

  où ω est un coefficient de relaxation compris entre 0 et 2.
  Ce préconditionneur à l'avantage de pouvoir être obtenu directement à partir de la matrice *A*, et donc de ne nécessiter aucun stockage supplémentaire. Par contre, la détermination du paramètre ω optimal n'est pas facile.

Remarque : Il est également possible de définir un préconditionneur à partir de la factorisation incomplète de Cholesky de la matrice symétrique *A* [Meijerink et al. 1977]. C'est une méthode intéressante dans la plupart des cas, mais qui peut poser des problèmes de stockage lorsque l'on stocke les matrices sous forme morse.

I.5.3.3. Stockage morse

Un des avantages des méthodes itératives est qu'elles nous permettent de stocker les matrices de façon plus optimale. Le stockage de type morse consiste à stocker dans un vecteur $A_{compact}$ uniquement les termes non nuls de la matrice *A* (partie inférieure seulement si la matrice est symétrique). On utilise de plus deux vecteurs pointeurs *PL* et *PC* qui permettent de repérer la position a_{ij} d'un coefficient dans la matrice *A*.
Ce type de stockage est très intéressant pour les méthodes itératives car elles ne nécessitent que des opérations de multiplication matrice-vecteur qui ne modifient pas la structure des pointeurs *PL* et *PC*.

I.5.3.4. Résultats

On reprend le modèle simplifié composé de trois matériaux et présenté en figure I.30.. En se plaçant en élasticité pure, avec des coefficients de Poisson nuls, le modèle a été validé en le comparant à un modèle analogique 1D, composé de trois ressorts. Chaque ressort possède une raideur correspondant au module d'Young du matériau qu'il représente, et une longueur égale à l'épaisseur de ce matériau [Bouchard 1997]. Une fois validé, nous avons étudié la place mémoire utilisée, ainsi que le temps de calcul pour les méthodes de résolution directe et itérative.

- **Stockage** :

Le tableau I.3. présente la taille du tableau nécessaire au stockage de la matrice de rigidité de notre problème pour trois maillages différents :

	Taille de la matrice		**Facteur de gain**
	Stockage bande	**Stockage morse**	
690 nœuds	86800	14063	6,17
940 nœuds	127840	20501	6,24
1473 nœuds	437192	67116	6,51

Tableau I.3. Taille de la matrice de rigidité en fonction du stockage utilisé

Le facteur de gain obtenu lorsque l'on passe à un stockage morse est de l'ordre de 6 pour des maillages comportant de 600 à 1500 nœuds. Ce facteur augmente avec le nombre de nœuds. Ce gain en place mémoire est très important puisqu'il permet de créer des maillages beaucoup plus précis.

- **Rapidité** :

Pour étudier la rapidité des différentes méthodes, on se place dans le cas de l'éprouvette complète présentée en figure I.26.. Le maillage réalisé comporte 3823 nœuds, et donc 7646 degrés de liberté. Nous comparons dans le tableau I.4. le temps de calcul nécessaire à la résolution d'un système linéaire pour les méthodes suivantes : méthode directe de Crout, méthode du gradient conjugué sans préconditionnement (GC), avec un préconditionneur diagonal (GC-D) et SSOR (GC-SSOR). Pour les méthodes itératives, le critère d'arrêt est basé sur une erreur relative inférieure à 10^{-14}.

	Crout	**GC**	**GC-D**	**GC-SSOR**
Nombre d'itérations	---	4424	1068	339
Temps CPU (s)	66	82	26	18

Tableau I.4. Comparaison des performances des différentes méthodes de résolution

Ainsi, la méthode du gradient conjugué n'est intéressante que lorsque l'on utilise un préconditionnement. Les deux préconditionneurs utilisés réduisent considérablement le temps de calcul, d'un facteur 3 à peu près.
On remarque que le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre la convergence est trois fois plus petit pour GC-SSOR que pour GC-D. Cependant, le temps de calcul est du même ordre de grandeur pour les trois méthodes, car la construction de la matrice de préconditionnement est bien plus coûteuse pour GC-SSOR. De plus, les données correspondent à un facteur de relaxation optimal qui n'est pas facile à déterminer. Pour d'autres facteurs de relaxation, la méthode GC-SSOR n'est plus intéressante.

La méthode du gradient conjugué préconditionné (GC-D) est donc plus intéressante aussi bien au niveau du stockage mémoire que du temps de calcul. Elle est donc conseillée dans le type d'application que nous avons présenté : fortes hétérogénéités d'épaisseur et de rhéologie. Cependant, il est nécessaire de conserver un solveur direct dans la mesure où les méthodes itératives ne convergent pas toujours pour les problèmes fortement non linéaires : comportement élastoplastique, contact, traitement de l'incompressibilité, …

I.6. BILAN

Dans ce chapitre, nous avons présenté le code de calcul Forge2 Multimatériaux qui sera utilisé dans les chapitres suivants. Nous avons introduit les équations de la mécanique utilisées par le code ainsi que les méthodes numériques implémentées pour les résoudre. Nous avons porté une attention particulière aux techniques de maillage et de remaillage permettant de modéliser des structures multi-domaines. Ces techniques permettent une gestion performante et entièrement automatisée des différents contours lors d'un calcul. La modélisation de la formation d'un composite a permis de mettre en valeur les difficultés liées au calcul multi-domaines, ainsi que la robustesse des techniques utilisées pour gérer les intersections de contour. Enfin nous avons présenté les difficultés inhérentes au calcul multimatériau à travers l'essai de clivage d'une éprouvette multicouche. L'étude du conditionnement a montré l'augmentation importante de ce paramètre lorsque l'on passe d'une pièce homogène à une pièce multi-domaines, puis multimatériaux.

Comme nous allons le montrer dans les chapitres suivants, la facilité à utiliser et à gérer plusieurs contours pour un même maillage, va nous permettre de modéliser avec précision les champs mécaniques à la pointe d'une fissure.

CONCLUSION
ET
PERSPECTIVES

La Mécanique de la Rupture est un domaine en plein essor, dont l'étude fait appel à différentes disciplines : modélisation mathématique et mécanique, analyse numérique, investigations physiques et métallurgiques, …

Dans le cadre des structures mono- et multi-matériaux auxquelles nous nous sommes intéressés ici, nous avons cherché à mettre en œuvre cette transdisciplinarité afin de mieux analyser les phénomènes physiques, mécaniques et métallurgiques impliqués dans le problème industriel qui nous intéressait.
A cette occasion, nous avons développé et implémenté des méthodes numériques faisant appel à des concepts dérivant à la fois du calcul de structures en petites déformations et des techniques utilisées pour les grandes déformations ; en particulier les développements liés au remaillage automatique ont permis de faire sauter le verrou lié à la modification topologique du maillage lors de la propagation de fissures. Le code FORGE2®, développé initialement pour la modélisation numérique du forgeage, a été généralisé à la modélisation de structures multimatériaux. Notre travail a consisté à introduire de nouveaux outils numériques permettant de gérer l'apparition et le développement de plusieurs contours et plusieurs sous-domaines lors d'un calcul mécanique, puis d'améliorer le remailleur automatique de façon à modéliser avec précision la propagation de fissures dans un maillage.

Nous avons présenté, dans le premier chapitre, le code FORGE2 Multimatériaux dont la particularité est de pouvoir, à présent, modéliser de façon totalement automatique plusieurs sous-domaines et plusieurs matériaux. Ce code de calcul éléments finis 2D permet de modéliser un ou plusieurs matériaux élasto-viscoplastiques en grandes déformations. Cela nécessite, comme nous l'avons vu, de créer une structure de données de maillage complexe de façon à gérer les intersections des nombreux contours. Nous sommes également confrontés à des problèmes mal conditionnés que nous devons résoudre par des méthodes itératives pré-conditionnées.

Dans le second chapitre, nous avons introduit les bases de la mécanique de la rupture et les méthodes numériques couramment utilisées dans ce domaine. Nous avons montré les difficultés liées à la singularité créée par la pointe d'une fissure. Les développements apportés au mailleur nous permettent de mailler finement et de façon bien structurée le voisinage de la pointe de fissure. Les éléments singuliers avec nœud au quart permettent de rendre compte de la singularité d'ordre ½ sur les champs mécaniques en pointe de fissure. La méthode Gθ a été implémentée pour le calcul du taux de restitution d'énergie. Les comparaisons par rapport à d'autres techniques de calcul de G ont montré la grande précision de cette méthode ainsi que son indépendance par rapport au maillage. Il sera intéressant par la suite de généraliser cette méthode aux structures multimatériaux. Pour cela, il sera nécessaire de gérer convenablement les intersections de la couronne d'intégration et des interfaces entre les différents matériaux.

Le remailleur multimatériaux a été adapté, dans le chapitre 3, à la modélisation de la propagation d'une ou de plusieurs fissures dans un maillage. Sa grande souplesse permet de conserver un maillage concentrique, avec raffinement évolutif et couronne d'intégration à la tête de chaque fissure. Les trois critères de bifurcation implémentés ont été comparés sur de nombreux exemples. Ils donnent tous les trois de bons résultats, mais le critère de la densité d'énergie de déformation minimale semble être assez sensible à la qualité du maillage. Le critère du taux de restitution d'énergie maximal, à partir de la méthode Gθ, donne de bons résultats indépendamment de la qualité du maillage. Cependant, la validité de la méthode Gθ pour le calcul du taux de restitution de l'énergie n'est justifiée en élastoplasticité que si il n'y a pas de déchargement. Or un incrément de fissure correspond à un déchargement local, et on ne peut donc pas modéliser la propagation quasi-statique dans un matériau élastoplastique à l'aide de cette méthode. Enfin le critère de la contrainte normale maximale est simple, facilement implémentable, et donne de bons résultats. Il offre de plus l'avantage de pouvoir être utilisé pour des matériaux élastoplastiques dans le cadre de la plasticité confinée. Cependant le calcul de la direction de propagation provient des champs mécaniques locaux en pointe de fissure, et il est donc indispensable d'y avoir un maillage fin. Les nombreux exemples d'applications montrent la robustesse et la précision des techniques introduites.

Enfin le chapitre 4, à vocation applicative, nous a permis de mettre en pratique tous les outils numériques présentés dans les chapitres précédents. Nous avons modélisé le compactage de tubes en zircaloy 4, de façon à étudier les mécanismes de déformation et de rupture lors de l'essai de compactage. Nous avons également mené en parallèle une étude expérimentale du compactage de tubes en zircaloy 4 écroui, puis de tubes en zircaloy 4 écroui oxydé. Cette étude fut très enrichissante d'un point de vue expérimental, puisqu'elle nous a permis d'étudier de façon beaucoup plus fine les mécanismes de rupture. Les observations réalisées au Microscope Electronique à Balayage ont montré l'importance de l'oxydation sur la rupture des tubes en zircaloy 4. Elles permettent ainsi de déterminer un ensemble de phénomènes microscopiques qu'il serait souhaitable de modéliser pour obtenir de meilleurs résultats sur le compactage de tubes oxydés : interface métal-oxyde ondulée, contraintes résiduelles dues à l'oxydation très importantes, fragilisation du matériau par la présence d'hydrures, anisotropie de la zircone, … Une fois tous ces phénomènes pris en compte, notre connaissance approximative de certaines propriétés du matériau (ténacité de l'interface métal-oxyde, taux de porosité dans la zircone, …) risque d'être le facteur limitant. A partir d'un code de calcul numérique prenant en compte ces nombreux phénomènes, il sera alors envisageable d'améliorer notre connaissance matériau grâce à une analyse inverse sur des paramètres tels que la contrainte à rupture de la zircone ou de l'interface métal-oxyde.

La conjonction des techniques développées et utilisées dans ces quatre chapitres nous a ainsi permis de mettre au point un outil d'analyse efficace et complètement automatique en mécanique de la rupture. Les perspectives envisageables à partir d'un tel outil sont très nombreuses :

- Un couplage endommagement-mécanique de la rupture. Si la plupart des auteurs se contentent d'utiliser l'une ou l'autre de ces deux approches, nous pensons pour notre part qu'il serait très intéressant de les coupler de façon à modéliser le processus complet de rupture d'une pièce : dégradation des propriétés mécaniques du matériau dû à la croissance et à la coalescence de cavités (endommagement) et conduisant à la propagation d'une macro-fissure dans la pièce (mécanique de la rupture). Cela nécessiterait à la fois d'introduire des lois d'endommagement couplées au comportement mécanique du matériau, et de généraliser certaines des méthodes numériques déjà implémentées aux matériaux élastoplastiques.

- La modélisation de la propagation pour des applications à fort cisaillement (usinage, découpage). Pour ces applications, nous avons montré que les critères de propagation classiques n'étaient pas adaptés, et qu'il fallait plutôt s'orienter vers des critères basés sur le taux de cisaillement maximum. Pour parvenir à modéliser la fissuration dans de telles zones fortement cisaillées, il sera important par la suite de gérer convenablement le contact des lèvres de la fissure. Pour ces applications, le fait de pouvoir modéliser la séparation complète de la pièce en deux maillages distincts représente également une avancée significative.

- La propagation de fissures dans des pièces multimatériaux. Nous avons montré des exemples de propagation dans des pièces contenant des inclusions. Cette caractéristique peut être très intéressante en génie civil pour des propagations dans le béton, ou encore pour des propagations dans des pièces composites ou multicouches. La propagation d'une fissure au travers d'une interface entre deux matériaux constituerait une avancée significative en modélisation numérique de la mécanique de la rupture et offrirait un vaste champ d'applications industrielles.

CHAPITRE II

ANALYSE MECANIQUE D'UNE PIECE FISSUREE

II. Table des Matières

II.1. Motivations 40

II.2. Etude Bibliographique 41

II.2.1. Historique 41

II.2.2. Hypothèses et cadre de l'étude 42

II.2.2.1. Endommagement et mécanique de la rupture 42

II.2.2.2. Fissures statiques, quasi-statiques, dynamiques 43

II.2.2.3. Modes de rupture 44

II.2.2.4. Mécanique linéaire, et non-linéaire de la rupture 44

II.2.3. Approche Locale 47

II.2.3.1. Facteurs d'intensité des contraintes 47

II.2.3.2. Calcul des facteurs d'intensité des contraintes 48

II.2.4. Approche Globale ou Energétique 50

II.2.4.1. Le taux de restitution d'énergie 50

II.2.4.2. Intégrales de contour 51

II.2.4.3. Crack Tip Opening Displacement (CTOD) 52

II.2.4.4. Calcul du taux de restitution d'énergie 53

II.2.5. Bilan 59

II.3. Développement d'outils numériques pour la modélisation d'une fissure 61

II.3.1. Maillage Concentrique 61

II.3.2. Eléments Singuliers 63

II.3.3. Bilan 68

II.4. Calcul du Taux de Restitution d'Energie 69

II.4.1. Implémentation de la méthode Gθ 69

II.4.2. Comparaison de différentes méthodes 71

II.4.2.1. La méthode analytique 71

II.4.2.2. La méthode de différenciation d'énergie 73

II.4.2.3. La méthode de la complaisance 73

II.4.2.4. Eprouvette SEC 73

II.4.2.5. Eprouvette DEC 74

II.4.2.6. Fissure centrale inclinée 75

II.4.3. Influence du maillage pour la méthode Gθ 77

II.4.4. Bilan 79

II.5. Application à l'adhérence d'un assemblage collé 80

II.5.1. Description de l'essai 80

II.5.1.1. La méthode expérimentale 81
II.5.1.2. La méthode analytique 82
II.5.1.3. La méthode numérique 82
II.5.2. Résultats 83
II.5.2.1. Complaisance 83
II.5.2.2. Taux de restitution d'énergie 84
II.5.3. Bilan 86
II.6. Conclusion 87

II.1. MOTIVATIONS

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté le code FORGE2 Multimatériaux, et plus particulièrement son mailleur et remailleur automatique. Les développements numériques ainsi introduits permettent de gérer plusieurs contours et plusieurs sous-domaines. Ces développements sont très utiles pour la modélisation de structures multimatériaux en grandes déformations.
La mécanique de la rupture constitue également un axe de recherche important, et très sollicitant d'un point de vue numérique. Plusieurs auteurs ont essayé, depuis longtemps, de caractériser avec précision les champs mécaniques en pointe de fissure et de modéliser numériquement la propagation de telles fissures. Si notre connaissance théorique en mécanique de la rupture est maintenant assez étendue, les outils numériques permettant de la modéliser peuvent encore progresser. En effet, les importantes variations dans les champs mécaniques à la pointe d'une fissure nécessitent une modélisation fine et bien contrôlée du maillage dans son voisinage.
Nous proposons ici d'apporter une contribution à la modélisation numérique de pièces fissurées en utilisant les techniques de gestion de plusieurs contours proposées dans le chapitre I. Puis, dans le chapitre suivant, nous poursuivrons notre étude par la modélisation de la propagation d'une ou de plusieurs fissures dans des pièces homogènes ou multimatériaux.

Nous commencerons donc par présenter une étude bibliographique sur la modélisation numérique en mécanique de la rupture, en insistant sur les hypothèses nécessaires à une telle étude. La deuxième partie sera consacrée aux outils numériques nécessaires à une modélisation précise d'une fissure et des singularités qu'elle engendre dans les champs mécaniques. Une fois ces outils mis en place, nous nous attacherons, dans la troisième partie, à calculer le taux de restitution d'énergie. Nous comparerons les résultats obtenus par différentes méthodes et nous effectuerons une étude de sensibilité par rapport à la finesse du maillage en pointe de fissure. Enfin, la quatrième partie sera consacrée à l'étude de la ténacité d'un assemblage collé. Nous verrons l'intérêt de la modélisation numérique par rapport à des résultats expérimentaux et analytiques pour cette étude.

II.2. ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

II.2.1. Historique

Grâce aux progrès réalisés dans le domaine de la mise en forme des métaux durant les trois derniers siècles, le fer et l'acier ont progressivement remplacé le bois et le ciment comme matériaux structuraux de base. Malgré leurs hautes caractéristiques, les structures réalisées à partir de ces matériaux ont connu des accidents importants dès le milieu du 19ème siècle. L'origine de ces accidents était la rupture inattendue de composants critiques de ces structures.
L'un des premiers incidents enregistré sur une structure importante fut la rupture d'une chaîne du pont suspendu Montrose en Mars 1830 en Grande Bretagne. Depuis, il y a eu un nombre important d'effondrements de ponts, dont le King's Bridge à Melbourne (1962) ou encore le Point Pleasant Bridge en Virginie (1967). Les accidents ferroviaires dus à une rupture brutale des essieux, des roues ou encore des rails ont également été très nombreux. Entre 1860 et 1870, le nombre de personnes victimes d'accidents de train en Grande Bretagne s'élevait environ à 200 par an. De nombreux accidents intervinrent également sur des pipelines, des pétroliers, ou encore sur des avions. En 1950, 2 avions Comet se sont brisés à haute altitude à cause d'un problème de rupture par fatigue sur les trous des rivets près des hublots, lesquels étaient de forme carrée !
Ces risques d'accidents étaient d'autant plus grand que l'utilisation d'alliages à hautes caractéristiques mécaniques (ténacité, rigidité…), permettant la réalisation de structures de plus en plus complexes et sollicitées, a énormément augmenté. En fait, les estimations de tenue des structures, fondées sur les caractéristiques mécaniques classiques, ne tenaient pas compte de la ténacité des matériaux en conditions réelles de service, et les chercheurs étaient alors incapables d'expliquer le phénomène de rupture brusque sous des sollicitations bien inférieures à celles de la limite d'élasticité.

Si Griffith est souvent cité comme le premier chercheur à avoir introduit la mécanique de la rupture (en tant que science), ces travaux restent basés sur des études antérieures. On peut notamment citer l'article de Wieghardt, paru en 1907 et récemment traduit en anglais [Wieghardt 1995], dans lequel l'existence de la singularité du champ des contraintes en pointe de fissure dans un matériau élastique linéaire fut reconnue.
A partir de ces résultats, Griffith [Griffith 1920] s'est intéressé en 1920 au problème de la rupture, dans un milieu élastique fissuré, d'un point de vue énergétique. Il a ainsi mis en évidence une variable (appelée plus tard **taux de restitution d'énergie**) caractérisant la rupture, et dont la valeur critique est une caractéristique du matériau.
Vinrent ensuite les premiers développements théoriques d'analyse des champs de contraintes et de déformations au voisinage d'une fissure en élasticité. Ces études, menées notamment par Sneddon en 1946 [Sneddon 1946], puis Irwin [Irwin 1957] en 1957, ont permis de définir les **facteurs d'intensité de contraintes**, caractérisant l'état de sollicitation de la région dans laquelle la rupture se produit.
Entre 1960 et 1980, la mécanique de la rupture connaît un grand succès scientifique, avec notamment l'apparition de la mécanique non linéaire de la rupture qui a permis de mieux prendre en compte le

comportement plastique des matériaux. De nombreux travaux sont publiés à cette période ; on peut citer par exemple Rice [Rice 1968] et Bui [Bui 1973] qui introduisent la notion d'**intégrales indépendantes du contour** telles que l'intégrale J, dont les propriétés ont permis de caractériser la ténacité d'un matériau lorsque la plasticité n'est plus confinée à la pointe de fissure. C'est également à cette période que les premiers travaux concernant la mécanique de la rupture dans les matériaux multicouches sont réalisés (Sih(1964), Erdogan (1965) et Comninou (1977)).
Tous les développements théoriques réalisés à cette époque ont permis de déterminer la forme exacte de la singularité, et des champs asymptotiques en pointe de fissure nécessaires à l'analyse et à l'interprétation des résultats expérimentaux. De plus, ils représentent une solution précise à de nombreux problèmes de géométries simples, et peuvent donc être utilisés comme solutions approchées pour des problèmes plus complexes.
L'apparition de la méthode des éléments finis a permis d'étudier la mécanique de la rupture d'un point de vue numérique, proposant ainsi des solutions plus précises à des problèmes plus complexes. Apparurent alors une multitude de méthodes permettant de calculer les facteurs d'intensité de contraintes, le taux de restitution d'énergie, ou encore de découpler les différents modes de rupture. Parmi ces nombreuses méthodes, les plus facilement implémentables donnent bien souvent des résultats approchés, ou dépendants du maillage, alors que les autres nécessitent des techniques éléments finis avancées.
Ce chapitre bibliographique a pour but de présenter les méthodes numériques les plus utilisées pour l'analyse mécanique d'une pièce fissurée. La mécanique de la rupture couvrant un domaine extrêmement vaste, nous commencerons par spécifier de façon précise le cadre de l'étude. Puis nous introduirons les notions fondamentales liées aux approches locales et globales en mécanique linéaire de la rupture. Cela nous amènera à faire un tour d'horizon des différentes méthodes numériques utilisées pour le calcul de grandeurs caractéristiques telles que les facteurs d'intensité de contraintes, ou le taux de restitution d'énergie. Enfin, nous terminerons cette partie bibliographique par la mécanique non linéaire de la rupture, et l'élastoplasticité.

II.2.2. Hypothèses et cadre de l'étude

Le domaine couvert par la mécanique de la rupture est si vaste qu'il serait présomptueux de vouloir en présenter tous les aspects. Il apparaît donc nécessaire de bien préciser les limites de cette étude bibliographique.

II.2.2.1. Endommagement et mécanique de la rupture

Lorsqu'une pièce est soumise à des efforts d'origines variées, il existe des limites, en contraintes ou en déformations, qu'elle ne doit pas dépasser, sous peine d'endommager le matériau et de provoquer sa rupture. Suivant que l'on s'intéresse à la dégradation du matériau d'un point de vue micro-mécanique ou macro-mécanique, deux approches peuvent être utilisées :

- La **mécanique de l'endommagement** propose de décrire continûment la dégradation progressive du matériau due à l'apparition, à la croissance, puis à la coalescence de micro-fissures ou de micro-cavités présentes dans le matériau. Cette approche, initialement introduite par Kachanov, a

été reprise et développée par de nombreux auteurs tels que Chaboche, Lemaitre [Lemaitre 1988], Bui [Bui et al. 1981], Ehrlacher [Ehrlacher 1985], Gurson [Gurson 1977], Tvergaard, Needleman [Needleman et al. 1987], Rousselier [Rousselier 1987], etc… Lorsque les microfissures, les microcavités créées par croissance ou par coalescence des défauts sont de taille assez grande, cette façon d'aborder le problème n'est plus valable, et il faut alors utiliser la mécanique de la rupture.

- La **mécanique de la rupture** a pour objet l'étude du comportement mécanique d'un matériau en présence de fissures macroscopiques. Cela revient notamment à déterminer le champ des contraintes et des déformations au voisinage de la pointe d'une fissure. L'étude de ces champs mécaniques permettant ensuite de juger de la stabilité ou non d'une fissure. Il est également possible, comme nous le verrons par la suite, d'aborder la mécanique de la rupture à travers une étude énergétique du solide fissuré.

Le choix de l'approche dépend essentiellement de l'étude que l'on désire effectuer. Dans certains procédés de mise en forme des matériaux, l'endommagement est souvent critique, et il n'est donc pas nécessaire d'étudier la propagation de fissures. Par contre, dans d'autres procédés (usinage, découpage) et en génie civil, l'étude des fissures se propageant dans le matériau est nécessaire et est basée sur la mécanique de la rupture.
De plus, la capacité du code de calcul utilisé à permettre la propagation d'une fissure à travers un maillage est un paramètre important. En effet, en mécanique de l'endommagement, on ne modélise pas réellement les étapes d'amorçage et de propagation de fissures. Ces étapes se produisent naturellement lorsque l'adoucissement dû à la croissance des cavités l'emporte sur l'écrouissage du matériau. Il se produit alors une instabilité mécanique traduite notamment par la chute des contraintes dans la zone endommagée. La fissure correspond alors aux zones qui ne transmettent plus d'efforts normaux. Cette approche présente donc l'avantage de ne pas significativement modifier la topologie du maillage en introduisant une fissure mais reste approximative dans la mesure où la précision sur le chemin de propagation est directement lié à la finesse du maillage. De plus, en grandes déformations, la dégénérescence des éléments correspondant aux zones les plus endommagées peut rapidement entraîner la fin du calcul. Dans la suite du manuscrit, nous nous intéresserons spécifiquement à la **mécanique de la rupture**, en effectuant de temps en temps quelques parenthèses concernant l'endommagement.

II.2.2.2. Fissures statiques, quasi-statiques, dynamiques

Les premiers travaux réalisés en mécanique de la rupture visaient à établir, de façon précise, les champs mécaniques au voisinage d'une **fissure statique**. La difficulté d'une telle étude réside dans la prise en compte de la singularité introduite par la pointe d'une fissure. Le calcul précis de paramètres mécaniques tels que les facteurs d'intensité des contraintes, ou le taux de restitution d'énergie réside en grande partie dans la bonne prise en compte de cette singularité. L'étude des champs mécaniques entourant une pointe de fissure statique fait l'objet de cette étude bibliographique.

Ces paramètres mécaniques ainsi calculés, il est possible de prévoir la propagation ou non de la fissure. Suivant le type de matériau étudié, et le chargement appliqué, la propagation pourra être qualifiée de stable (la fissure a besoin de plus d'énergie pour reprendre sa progression) ou d'instable

(la fissure poursuit sa progression jusqu'à la ruine de la structure, sans nécessiter d'énergie supplémentaire).

On est alors amené à étudier la **propagation quasi-statique de fissures**, à l'aide de critères d'amorçage, de bifurcation, et de stabilité. Ce domaine fera l'objet de l'étude bibliographique du Chapitre III.1.

Enfin dans les problèmes de chargement rapide, ou lorsque les vitesses de propagation de fissures sont importantes, il devient nécessaire de prendre en compte les termes d'inertie dans la formulation et dans la résolution du problème. On parle alors de **propagation dynamique des fissures** [Attigui 1997] ; ce domaine ne sera pas abordé dans ce manuscrit.

II.2.2.3. Modes de rupture

La fissuration se manifeste par la séparation irréversible d'un milieu continu en deux parties, appelées lèvres de la fissure, ce qui introduit une discontinuité au sens des déplacements. Les mouvements possibles des lèvres de chaque fissure sont des combinaisons de trois modes indépendants :

- Mode I : ouverture (ou clivage) ;
- Mode II : cisaillement plan ;
- Mode III : cisaillement anti-plan.

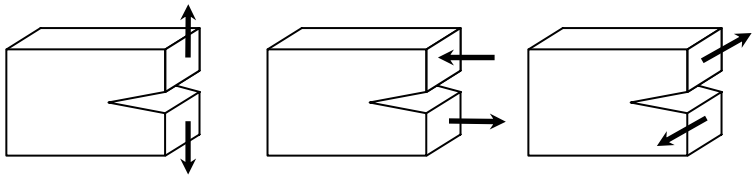


Figure II. 1. Modes de rupture

Le mode I est le plus dangereux pour l'extension d'une fissure ; cependant, une fois amorcée et pour des sollicitations mixtes ou des géométries complexes, la fissure a tendance à bifurquer, et reste donc rarement rectiligne (2D) ou plane (3D).

II.2.2.4. Mécanique linéaire, et non-linéaire de la rupture

La mécanique de la rupture se propose de décrire les étapes d'amorçage et de propagation de la fissuration. Selon le comportement du matériau durant la propagation d'une fissure, on peut être confronté à deux types de rupture :

- **Rupture fragile**, en l'absence de déformation plastique significative (mécanique linéaire de la rupture) ;
- **Rupture ductile**, en présence de déformation plastique non négligeable (mécanique non linéaire de la rupture). Dans ce cas, suivant l'étendue de la zone plastique en pointe de fissure, on différencie le cas de la plasticité confinée, de celui de la plasticité étendue.

- **Etude d'un milieu élastique fissuré**

Dans un **milieu élastique** fissuré, la région proche de la pointe de fissure peut être décomposée en trois zones [Zhang 1992] :

1. La **zone d'élaboration** : au voisinage direct de la pointe de fissure, l'étude de cette zone (considérée comme ponctuelle d'un point de vue mécanique) est très complexe dans la mesure où les contraintes tendent vers l'infini (d'un point de vue théorique) à la pointe de fissure ;
2. La **zone singulière** : dans cette zone, le champs de contrainte présente une singularité en $r^{-1/2}$;
3. La **zone des champs lointains** : extérieure aux deux précédentes, elle raccorde la zone singulière aux conditions aux limites de chargement et déplacement.

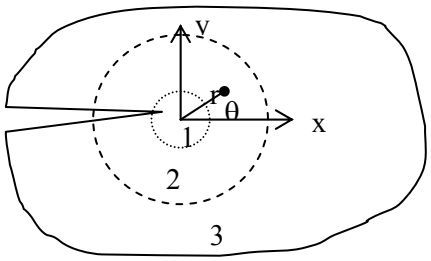


Figure II. 2 Les zones de champs mécaniques

C'est la singularité d'ordre –1/2 dans la zone singulière qui caractérise la solution obtenue en élasticité pure.

Cette solution n'est malheureusement pas physiquement réaliste. En fait, les contraintes en pointe de fissure sont « écrêtées » par la plasticité (Figure II.3.) [François et al. 1993]. De plus, la signification énergétique de la rupture proposée par Griffith devient plus ambiguë, dans la mesure où elle consiste à représenter la propagation de fissure comme un déchargement. Or, en plasticité, une partie de l'énergie est dissipée (phénomène irréversible) et on ne peut donc pas toujours évaluer la fraction d'énergie « disponible » pour la propagation.

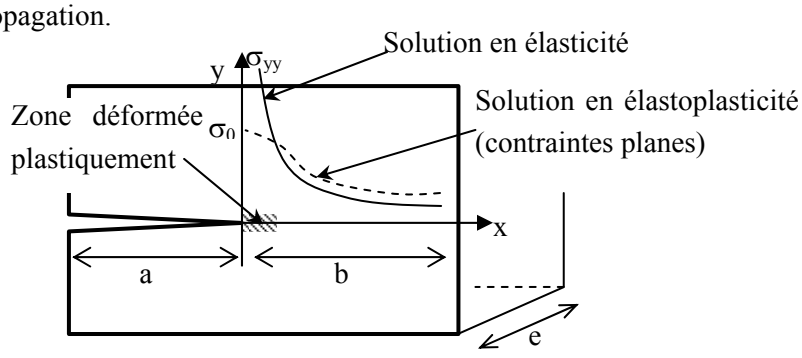


Figure II. 3. Plasticité en pointe de fissure

- **Plasticité confinée**

La concentration de contraintes en pointe de fissure créant une plastification locale, il est nécessaire que la taille de cette zone reste petite par rapport à la longueur de la fissure, et aux dimensions de la structure, de façon à ne pas trop perturber la distribution élastique des contraintes. A titre d'exemple, la norme ASTM impose aux éprouvettes utilisées pour le calcul de la ténacité la condition suivante :

$\min(e,a,b) \geq \frac{5}{2}\left(\frac{K_{IC}}{\sigma_0}\right)^2$, où σ_0 est la limite élastique, et K_{IC} la ténacité du matériau.

Lorsque c'est le cas, on peut continuer à utiliser les concepts de la mécanique linéaire de la rupture.
Plusieurs modèles proposent de déterminer la taille de la zone plastique en pointe de fissure : modèles d'Irwin, et de Dugdale-Barenblatt qui sont détaillés dans [François et al. 1993] et [Baouch 1998].

- **Plasticité étendue**

La plasticité étendue est le domaine pour lequel la taille de la zone plastique n'est plus négligeable devant la longueur de la fissure ou la dimension du ligament. Elle s'inscrit dans le cadre de la mécanique de la rupture à comportement non linéaire, et son étude n'est que très récente.
Si en élasticité linéaire, la singularité est d'ordre –1/2, elle est plus faible en plasticité, et vaut $-n/(n+1)$, où n, le coefficient d'écrouissage du matériau, est compris entre 0 et 0,2.
La zone d'élaboration définie en élasticité linéaire est remplacée par un champ de déformation qui ne dépend que de la limite d'élasticité en cisaillement et de l'orientation par rapport à l'axe de la fissure (champ de Prandtl).
A la pointe de la fissure, l'émoussement et le champ de Prandtl conduisent à des contraintes finies. Plus loin de l'extrémité de la fissure (zone de champs semi-lointains), la distribution des contraintes et des déformations peut être approchée par la solution asymptotique proposée par Hutchinson [Hutchinson 1968], Rice et Rosengren [Rice et al. 1968] (HRR).

Même si l'étude de la mécanique non linéaire de la rupture est en plein essor actuellement, la majorité des résultats obtenus d'un point de vue numérique concernent la mécanique linéaire de la rupture. Il est souvent difficile de différencier les méthodes applicables à tout type de matériau, ou uniquement aux matériaux élastiques. Sauf indications contraires, notre étude sera donc basée sur une analyse élastique du champ des contraintes, en admettant les hypothèses générales de l'élasticité linéaire classique, mais en tolérant néanmoins l'existence d'une zone de plasticité sous la condition suivante : cette zone doit à la fois être confinée et de dimension constante.

Les ruptures obtenues par fatigue, par choc thermique, ou par corrosion couvrent également un domaine de recherche important, mais elles ne seront pas abordées dans ce manuscrit.

De plus, notre étude est volontairement restreinte aux fissures planes, et supposées rectilignes par morceaux. Enfin, nous nous placerons, dans ce chapitre, dans le cas de matériaux homogènes et isotropes.
On peut alors distinguer deux approches concernant l'étude de la zone singulière :

- Une **approche locale**, caractérisée par une étude des champs de contrainte et de déformation au voisinage du front de fissure ;
- Une **approche globale** (ou énergétique), caractérisée par l'étude du comportement global de la structure fissurée sur le plan énergétique.

II.2.3. Approche Locale

Certains auteurs définissent l'approche locale comme l'approche liée aux modèles d'endommagement. Dans notre cas, cette approche consiste à déterminer les paramètres de mécanique de la rupture à l'aide des champs de contraintes et de déformations locaux en pointe de fissure. Pour définir ces champs en pointe de fissure, nous introduirons la notion de facteurs d'intensité des contraintes. Ces champs étant fortement perturbés par la singularité créée par la pointe de fissure, nous verrons qu'il est nécessaire d'utiliser des outils spécifiques afin de calculer ces facteurs d'intensité des contraintes de façon précise.

II.2.3.1. Facteurs d'intensité des contraintes

Introduits par G.R. Irwin [Irwin 1957] en 1957, les facteurs d'intensité de contraintes correspondent à des cinématiques particulières du mouvement des fissures. Dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture, les contraintes et les déformations au voisinage d'une fissure admettent un développement asymptotique dont le terme singulier s'écrit :

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = K_\alpha \dfrac{1}{\sqrt{2\pi r}} f^{\alpha}{}_{ij}(\theta) \\ \varepsilon_{ij} = K_\alpha \dfrac{1}{\sqrt{2\pi r}} g^{\alpha}{}_{ij}(\theta) \end{cases} \quad \alpha = 1,2,3$$

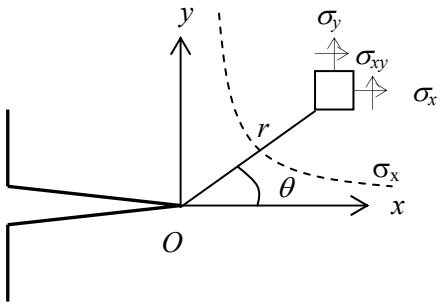


Figure II. 4 Champ des contraintes au voisinage de la fissure

K_α est le Facteur d'Intensité des Contraintes (FIC) en mode α, avec α=I, II ou III. Les fonctions f et g donnent la répartition angulaire ; leurs expressions en contraintes et déformations planes sont données en Annexe B.1. ainsi que dans plusieurs ouvrages de mécanique de la rupture [François et al. 1993], [Miannay 1995]. Lorsque l'on se trouve en mode I pur, l'état local de contraintes et de déformations peut être caractérisé à l'aide du seul paramètre K_I. Nous verrons dans la chapitre suivant que l'on définit une valeur critique de ce paramètre K_{Ic} comme critère de rupture.
Dans certains cas (préchargement à chaud [Pineau 1998], effets d'échelle ou de géométrie [Bauvineau 1996], [Hancock 1993] …), il est nécessaire de tenir compte également des premiers termes non singuliers :

$$\sigma_{ij} = K_I \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} f^{I}{}_{ij}(\theta) + T\delta_{xi}\delta_{xj} + O\left(\sqrt{r}\right)$$

La contrainte transverse T, est une contrainte parallèle au plan de fissure, et n'intervient que sur σ_{xx}. Elle a également pour effet de modifier le terme hydrostatique du tenseur des contraintes : $\sigma_m = Trace(\sigma)/3$ (donc la triaxialité des contraintes) ainsi que la plus grande contrainte principale.

Les FIC caractérisent la force de la singularité du champ des contraintes à l'extrémité de la fissure [Erdogan 1983]. Ils sont proportionnels aux discontinuités des déplacements des lèvres de la fissure, et ne dépendent que de la répartition des efforts extérieurs et de la géométrie de la fissure. Plusieurs ouvrages tels que celui de Murakami [Murakami et al. 1987] donnent l'expression de ces FIC pour des géométries et des chargements variés.
Plusieurs auteurs continuent à utiliser les FIC en plasticité confinée (et surtout en déformation plane), mais ces facteurs n'ont plus de signification en plasticité étendue puisqu'il n'y a plus de singularité des contraintes en pointe de fissure. En plasticité confinée, on définit alors des FIC équivalents, ou apparents, qui dépendent des FIC élastiques, mais également des déformations plastiques en pointe de fissure.
Dans le cas de la plasticité étendue, le champ singulier HRR [Hutchinson 1968], [Rice et al. 1968] représente le premier terme de la solution complète qui pourrait se présenter sous la forme d'un développement en série. Tout comme le rajout de la contrainte transverse T en élasticité linéaire, on montre qu'en plasticité étendue il est parfois nécessaire de prolonger le développement en série et de prendre en compte le premier terme non singulier Q. Q est appelé facteur d'amplitude du champ du second ordre, ou paramètre de triaxialité du confinement. Sa prise en compte prend une importance croissante avec l'extension de la plasticité, et devient indispensable pour la prédiction de rupture dans certains cas de préchargement à chaud [Rousselier 1998]. Pour plus de détails le lecteur pourra se référer à [Bauvineau 1996] et [O'Dowd et al. 1994]. Dans notre étude, nous n'aborderons pas le cas de la plasticité étendue, et nous nous consacrerons donc plutôt à la détermination des facteurs d'intensité des contraintes.

II.2.3.2. Calcul des facteurs d'intensité des contraintes

Les facteurs d'intensité des contraintes s'exprimant en fonction du champ des contraintes au voisinage de la fissure, et ce champ de contraintes étant parfaitement accessible numériquement, ce calcul ne devrait pas poser de problèmes à priori. Pourtant, nous allons voir qu'une bonne précision sur ces facteurs est difficile à obtenir.

- **Eléments singuliers**

L'utilisation standard de la méthode des éléments finis ne permettant pas de rendre compte des singularités des champs de contrainte au voisinage de la pointe de la fissure, il a été nécessaire d'effectuer quelques modifications.
Plusieurs idées ont été proposées : du raffinement de la zone singulière à l'introduction brutale de la singularité dans les fonctions de forme, la plupart de ses techniques ont peu à peu été abandonnées.

Ce sont Henshell et Shaw [Henshell et al. 1975] d'une part, et Barsoum [Barsoum 1976] d'autre part, qui finirent par trouver une solution préservant à la fois les fonctions de forme et les fonctions d'interpolation.

Le fait de déplacer les nœuds milieux des côtés correspondant à la pointe de la fissure (arêtes 1-2 et 1-4) au quart de la longueur (Figure II.5.a) permet de forcer la singularité, tout en représentant correctement un champ constant de déformation, et un déplacement d'ensemble (Cf Annexe B.2.). Toutefois, si la singularité existe le long des côtés en contact avec la pointe de la fissure, elle disparaît sur les autres rayons émanant du nœud 1. Hibbitt [Hibbitt 1977] a de plus montré en 1977 que l'énergie de déformation (et donc la raideur) n'était plus bornée lorsque l'on tendait vers la pointe de fissure. Il a alors fallu introduire le triangle à 8 nœuds avec nœuds au quart (Figure II.5.b), la pointe de fissure se trouvant aux trois nœuds confondus 1-8-4. Cet élément garantit alors la singularité pour toutes les arêtes émanant du nœud 1, ainsi qu'une énergie de déformation bornée lorsqu'on tend vers la pointe de fissure.

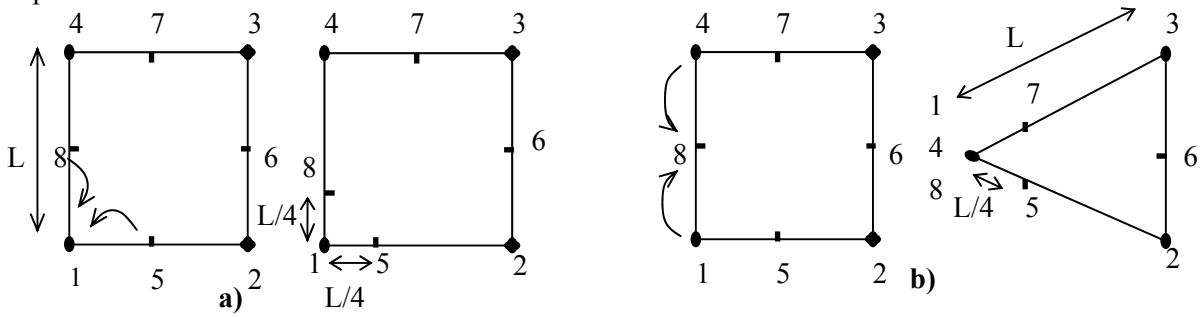


Figure II. 5. a) Elément quadrangle singulier – b) Elément triangulaire singulier

Tong et Pian [Tong et al. 1973] ont également proposé un super-élément mixte à 9 ou 17 nœuds, avec présence d'une fissure centrée et qui permet de prendre en compte la singularité ; malheureusement, sa mise en œuvre délicate constitue un sérieux handicap.

- **Principe de superposition**

Cette méthode, la plus couramment utilisée, consiste à ramener le problème traité à une suite de problèmes déjà résolus et dont les solutions se trouvent dans certains Handbooks [Murakami et al. 1987]. Le principe utilisé est celui de la superposition des solutions, qui résulte de l'élasticité linéaire.

- **Méthode des fonctions de poids**

On recherche la valeur de K_I produite par une force unité, placée à une distance x de l'extrémité de la fissure. Pour une distribution $F(x)$, on peut alors écrire : $K_I = \int_{fissure} F(x)K(x)dx$

La fonction $K(x)$ s'appelle fonction de poids. Elle est bien établie pour certains cas particuliers, et répertoriée dans certains Handbooks.
L'avantage d'une telle méthode est qu'elle ne nécessite qu'un seul calcul de structure. Malheureusement, on reste limité aux géométries qui existent dans les tables.

- **Calcul par extrapolation**

Cette méthode, également utilisée en élastoplasticité, consiste à effectuer une extrapolation du champ des contraintes ou des déplacements lorsque r tend vers 0.

Par exemple, en déformations planes, le déplacement est une fonction linéaire de $\sqrt{r}$, et pour $\theta=\pi$, K_I et K_{II} peuvent s'exprimer en fonction du déplacement :

$$\begin{cases} K_{Iu}(r) = \dfrac{E}{1-\nu^2}\sqrt{\dfrac{\pi}{8}}\dfrac{u_y}{\sqrt{r}} \\ K_{IIu}(r) = \dfrac{E}{1-\nu^2}\sqrt{\dfrac{\pi}{8}}\dfrac{u_x}{\sqrt{r}} \end{cases} \text{ puis, par passage à la limite : } \begin{cases} K_I = \lim\limits_{r\to 0} K_{Iu}(r) \\ K_{II} = \lim\limits_{r\to 0} K_{IIu}(r) \end{cases}$$

La même extrapolation peut être faite en exprimant K_I en fonction du champ des contraintes. La solution obtenue sera cependant moins précise dans la mesure où les contraintes sont calculées aux points d'intégration et non aux nœuds.

Ces méthodes ont l'avantage de ne pas nécessiter de code spécialisé en mécanique de la rupture et de pouvoir séparer les modes I et II. Elles peuvent indifféremment être appliquées aux éléments classiques ou aux éléments spéciaux. Cependant, elles nécessitent un maillage fin lorsque l'on n'utilise pas d'éléments spéciaux, et il est préférable d'effectuer une étude de sensibilité par rapport à la finesse du maillage. Il existe également une incertitude sur l'intervalle à considérer pour l'extrapolation dans la mesure où il faut éliminer les points les plus proches de la pointe de la fissure pour effectuer un lissage.

II.2.4. Approche Globale ou Energétique

La propagation de fissure est un phénomène dissipateur d'énergie. Dans la théorie de Griffith, l'énergie consommée est la différence entre l'état énergétique du système avant et après fissuration. Cette énergie peut s'assimiler à une énergie de surface, et Griffith a postulé que c'était une caractéristique intrinsèque du matériau.

II.2.4.1. Le taux de restitution d'énergie

Noté G, le taux de restitution d'énergie représente l'**énergie nécessaire pour faire progresser la fissure d'une longueur unité**. Elle correspond à la décroissance de l'énergie potentielle totale W_p pour passer d'une configuration initiale avec une longueur de fissure a, à une autre où la fissure s'est propagée d'une longueur da : $\begin{cases} G = -\dfrac{\partial W_p}{\partial A} \\ W_p = W_e + W_{ext} \end{cases}$ avec $\begin{cases} W_e = \int_\Omega \sigma : \varepsilon \\ W_{ext} = \int_\Omega f.u \end{cases}$

où W_e représente l'énergie de déformation élastique, W_{ext} l'énergie potentielle des forces extérieures f, et ∂A l'incrément de surface correspondant à l'extension de la fissure.

En utilisant le champ des contraintes dans la zone singulière et la loi de comportement élastique linéaire, il est possible de relier le taux de restitution d'énergie aux facteurs d'intensités de contraintes par : $G = \frac{(K_I^2 + K_{II}^2)}{E'} + \frac{K_{III}^2}{2\mu}$ où $\begin{cases} E' = E & \text{en contraintes planes} \\ E' = \frac{E}{1-\nu^2} & \text{en déformations planes} \\ \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} & \text{est le module de cisaillement} \end{cases}$

où E est le module d'Young et ν le coefficient de poisson.

Remarque : Il est également possible de relier G à la complaisance C de la structure par $G = \frac{P^2}{2}\frac{\partial C}{\partial A}$.

Sur la courbe Force/Déplacement ci-contre, OA correspond à une fissure de longueur a, et OB à une fissure de longueur $a+\delta a$. G représente l'aire située dans le triangle OAB pour un essai effectué à charge imposée ou dans le triangle OAC pour un pilotage en déplacement imposé.

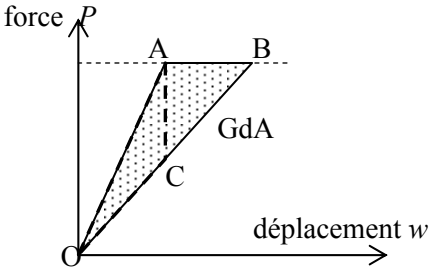


Figure II. 6. Relation entre G et la complaisance de la structure

II.2.4.2. Intégrales de contour

La singularité du champ des contraintes au voisinage de la pointe d'une fissure peut également être étudiée grâce à certaines intégrales de contour déduite de la loi de conservation de l'énergie [Eshelby 1968]. Ces intégrales ont la particularité d'être équivalentes au taux de restitution d'énergie, et d'être indépendantes du contour d'intégration choisi. Parmi les plus connues, on peut citer l'intégrale J de Rice [Rice 1968], l'intégrale duale I de Bui [Bui 1973], l'intégrale hybride s'appuyant sur le super-élément de Tong et Pian [Zhang 1992] ou encore les intégrales T et A proposées par Bui et Proix [Bui et al. 1985] et mises en œuvre et étudiées par Zhang [Zhang 1992].

Pour l'**intégrale de Rice**, on considère un milieu bidimensionnel fissuré, dont la fissure sera supposée rectiligne. Le contour C est un contour ouvert, orienté dont les extrémités se trouvent sur les faces supérieure et inférieure de la fissure.

$$J = \int_C \left(W_e(\varepsilon) n_1 - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) ds$$

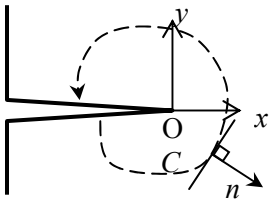


Figure II. 7. Contour d'intégration

où W_e est la densité d'énergie de déformation élastique telle que $\sigma_{ij} = \partial W_e / \partial \varepsilon_{ij}$, u est le vecteur déplacement en un point M du contour C avec la normale n tournée vers l'extérieur et σ représente le champ de contraintes.

☛ L'intégrale J est indépendante du contour (à condition qu'il n'y ait pas de forces de surface sur les lèvres de la fissure, que l'on soit en conditions isothermes, et en quasi-statique);

☛ L'intégrale J représente le taux de décroissance de l'énergie potentielle : $J = -\frac{\partial W_p}{\partial A} = G$

☛ L'intégrale J permet, dans certaines conditions[1], de décrire le champ des contraintes et des déformations à la pointe de la fissure à travers le champs HRR.

Dans les cas où la plasticité est importante, on effectue une analogie avec un matériau élastique non linéaire. Cette hypothèse est valable à condition qu'il n'y ait pas de brusques variations dans la direction du chargement appliqué, et donc, **pas de déchargement**. En effet, le déchargement en élasticité non linéaire s'effectue suivant la même courbe qu'à la montée, ce qui n'est pas le cas en élastoplasticité. Dans ce cadre, l'intégrale J est étendue au cas des matériaux élastiques non linéaires, et permet ainsi d'intégrer le champ des contraintes et des déplacements à la pointe de la fissure. Ayant ainsi fait l'analogie entre l'élastoplasticité et l'élasticité non linéaire, l'intégrale J peut être obtenue, comme précédemment, par la méthode de la complaisance :

$$J = -\int_0^w \left(\frac{\partial P}{\partial a} \right)_w dw = \int_0^P \left(\frac{\partial w}{\partial a} \right)_P dP$$

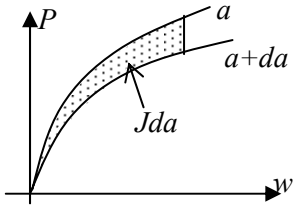


Figure II. 8. Détermination de *J* par la méthode de la complaisance

II.2.4.3. Crack Tip Opening Displacement (CTOD)

En élastoplasticité, la pointe de la fissure s'émousse et certains auteurs [Wells 1963] ont proposé d'utiliser l'ouverture de fissure comme paramètre de mécanique de la rupture. Le CTOD, ou

[1] La principale étant l'analogie entre le comportement élastoplastique, et le comportement élastique non linéaire dans les cas sans déchargement.

écartement de fissure δ, a ainsi été défini à partir des déplacements de la pointe de fissure, mesurés à l'intersection de la frontière de la zone plastique avec les lèvres de la fissure (Figure II.9.a). Il existe de nombreuses façons de calculer cet écartement δ [Pluvinage 1989]. Par exemple, Tracey a proposé de définir cet écartement à l'intersection de deux droites passant à 45° de l'axe et des lèvres de la fissure (Figure II.9.b).

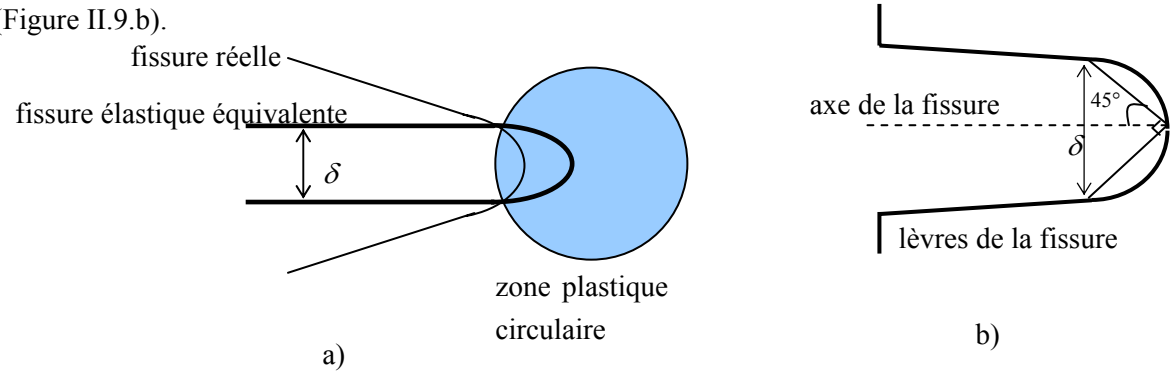


Figure II. 9. Ecartement de fissure δ (CTOD)

Il est ensuite possible de relier le CTOD au taux de restitution d'énergie, ou encore à l'intégrale J en utilisant la solution asymptotique HRR [Shih 1981] : $\delta = d_n(\sigma_0, n)\dfrac{J}{\sigma_0}$

où d_n est un coefficient de proportionnalité sans dimension, et qui dépend fortement du coefficient d'écrouissage n, et peu de la limite d'élasticité σ_0.

II.2.4.4. Calcul du taux de restitution d'énergie

Ces méthodes sont particulièrement bien adaptées aux calculs éléments finis car on se place relativement loin de la pointe de fissure, de façon à ne pas faire intervenir les singularités. Par contre, elles présentent souvent le désavantage de ne pas permettre le découplage des différents modes. Ces méthodes étant très nombreuses, nous nous restreindrons à celles qui sont les plus utilisées.

- **Calcul par avancée réelle de fissure**

En travaillant à force imposée, on peut calculer G en calculant l'évolution de l'énergie élastique lors d'un petit incrément de longueur de la fissure. G s'obtient alors par lissage de la quantité : $\Delta W_{el}/\Delta a$.

Dans la pratique, la méthode consiste donc à effectuer deux ou trois calculs élastiques successifs à partir d'un maillage identique, mais sur lequel on relâche un ou plusieurs nœuds en fond de fissure entre les différents calculs. On peut travailler avec des éléments quadratiques courant, mais il ne faut surtout pas positionner la pointe de fissure sur un nœud milieu. Il est préférable de réaliser au moins deux déterminations (3 calculs) puis d'évaluer G par extrapolation quand $r \to 0$.

Cette méthode, basée sur un raisonnement physique, a l'avantage de bien s'adapter aux codes, tout en n'utilisant pas d'éléments spéciaux. Elle nécessite cependant un maillage fin en pointe de fissure et est très coûteuse en temps de calcul, puisqu'elle requiert au moins deux calculs pour une longueur de fissure donnée.

- **Méthode de l'intégrale *J***

Cette méthode permet de calculer l'intégrale de Rice à partir des résultats du code éléments finis. Reprenons la définition de l'intégrale *J* :

$$J = \int_C \left(W_e(\varepsilon) n_1 - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) ds$$

Cette intégrale représente l'énergie disponible en fond de fissure. Elle peut cependant être calculée assez loin de cette zone. D'ailleurs, son indépendance par rapport au contour d'intégration permet de prendre ce dernier assez grand, afin d'éviter la zone de singularité.

En pratique, le contour d'intégration *C* est défini par un ensemble de nœuds du maillage. Le code de calcul nous permet d'obtenir les valeurs des contraintes et du gradient des déplacements dans chaque élément aux points d'intégration, puis par lissage à ses sommets. Pour un contour donné *C*, on peut donc calculer la valeur de *J* basée sur les éléments intérieurs au contour (J_{int}), celle basée sur les éléments extérieurs (J_{ext}), et enfin celle obtenue par moyenne arithmétique en chaque nœud du contour (J_m). Afin de justifier le choix du contour, il est nécessaire que ces trois quantités soient très voisines.

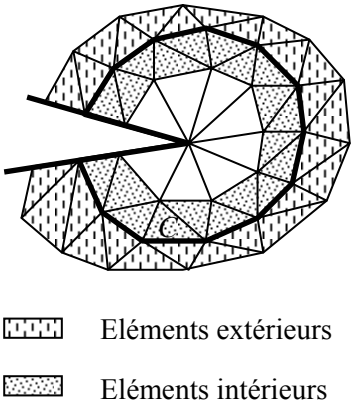


Figure II. 10. Contour d'intégration

Contrairement à la théorie, la précision des résultats numériques obtenus par cette méthode est très dépendante du choix du contour. Elle est d'autant meilleure que le contour est éloigné de la pointe de fissure. Pour les maillages constitués d'éléments quadrilatères, disposés "circulairement" autour de la pointe de la fissure, il peut être intéressant de choisir comme contour d'intégration, le contour passant directement aux points d'intégration de l'élément. Cela permet en effet d'avoir la valeur exacte de la contrainte ou de la déformation qui sont des valeurs calculées aux points d'intégration. Pour des éléments triangulaires, cette technique est peu utilisée, car elle fournit alors des contours très irréguliers. Petit [Petit 1990] montre que la précision est améliorée par l'utilisation d'éléments singuliers avec nœuds au quart.

- **Calcul par avancée virtuelle de fissure**

Cette technique, introduite par Hellen [Hellen 1975] et Parks [Parks 1974] au milieu des années 1970, permet de calculer la variation d'énergie potentielle totale en introduisant une extension virtuelle de fissure δa. Le processus d'extension de la fissure est obtenu en déplaçant les points nodaux du réseau, plutôt qu'en ôtant les composantes de traction nodale à la pointe de la fissure et en procédant à une seconde analyse comme cela est fait dans la méthode d'extension réelle.

Si l'on note *[K]* la matrice de rigidité du système, *{u}* le vecteur déplacement, et *{f}* le vecteur chargement aux nœuds du maillage, le système à résoudre s'écrit : *[K]{u}={f}*.

On réalise une petite perturbation δa de la pointe de fissure (de l'ordre de 10^{-2} à 10^{-3} fois la dimension de la première maille en pointe). Cette extension implique une variation $\{\delta u\}$ du champ des déplacements, induisant ainsi une variation d'énergie potentielle dW_p. Le taux de restitution d'énergie s'obtient alors par :

$$G = -\frac{dW_p}{da} = -\frac{1}{2}\{u\}^t\left[\frac{\delta K}{\delta a}\right]\{u\} + \{u\}^t\left\{\frac{\delta f}{\delta a}\right\}$$

La zone affectée par la transformation joue un rôle important, aussi bien au point de vue de la précision que du temps de calcul, pour la détermination de G. Pour y remédier, on introduit un contour Γ_0 à l'intérieur duquel les éléments sont translatés avec l'avancée de la fissure, et un contour Γ_1 à l'extérieur duquel la structure n'est pas perturbée. Dans ce cas, la perturbation de la matrice de raideur est due exclusivement aux éléments situés entre ces deux contours.

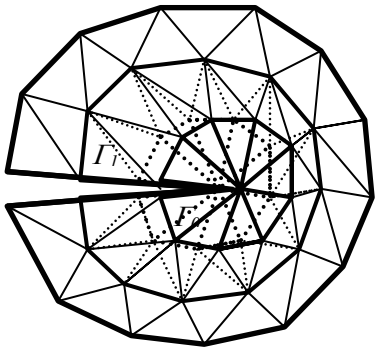


Figure II. 11. Extension virtuelle

Outre la méthode classique de différences finies (peu précise), le calcul de $[\delta K]$ peut être effectué suivant une méthode d'intégration directe proposée par Lin et Abel [Lin et al. 1988]. Cette méthode consiste à calculer les dérivées de la matrice de rigidité par rapport à la longueur de fissure, en effectuant des variations virtuelles de géométrie et des développements en série des grandeurs intervenant dans la formulation du problème.

De Lorenzi [De Lorenzi 1985] a étendu la méthode de Parks à la plasticité, et a transformé l'intégrale de contour en une intégrale de surface, donnant ainsi plus de précision et d'indépendance vis-à-vis du maillage. Il montre alors que le taux de restitution d'énergie peut s'écrire :

$$G = J = \frac{1}{\delta a}\iint_A \left(\sigma_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x_1} - W\delta_{i1}\right)\frac{\partial \Delta x_1}{\partial x_i}dA$$

A étant la surface comprise entre les contours Γ_0 et Γ_1, et Δx_1 représentant l'extension virtuelle.

Les applications numériques [Zhang 1992], [Lin et al. 1988], [Burlet 1998] ont montré la grande précision de cette méthode. De plus, les résultats obtenus sont entièrement indépendants des contours choisis lorsque la méthode d'intégration directe est utilisée pour calculer la perturbation de la matrice de raideur.

- **Méthode Gθ**

En remplaçant Δx_1 par une fonction vectorielle θ de composantes nulles à l'intérieur du contour Γ_0, de norme unité à l'extérieur du contour Γ_1, et de composantes variant continûment entre ces valeurs sur la

couronne comprise entre Γ_0, Γ_1 et les lèvres de la fissure, on retrouve le principe de la méthode $G\theta$. Cette méthode introduite par Destuynder et Djaoua au début des années 1980 [Destuynder et al. 1981], [Destuynder et al. 1983], [Gilles et al. 1993] consiste à calculer le taux de restitution d'énergie G par dérivation (par la méthode lagrangienne[2]) de l'énergie potentielle d'une structure fissurée par rapport à un domaine. Elle revient à effectuer une intégration non pas sur un contour, mais sur une couronne C_{cour} entourant la pointe de fissure. Cette couronne dont les frontières coïncident avec les côtés des éléments doit être prise assez loin du fond de fissure pour bénéficier d'une bonne approximation de la solution. De plus, l'intégration numérique est effectuée aux points de Gauss des éléments appartenant à la couronne, ce qui lui donne plus de précision.
Nous présentons ici les grandes lignes de la méthode. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer aux articles [Destuynder et al. 1981], [Destuynder et al. 1983].

- **La variation d'énergie potentielle totale W_p**

Considérons un solide fissuré occupant l'ouvert Ω :

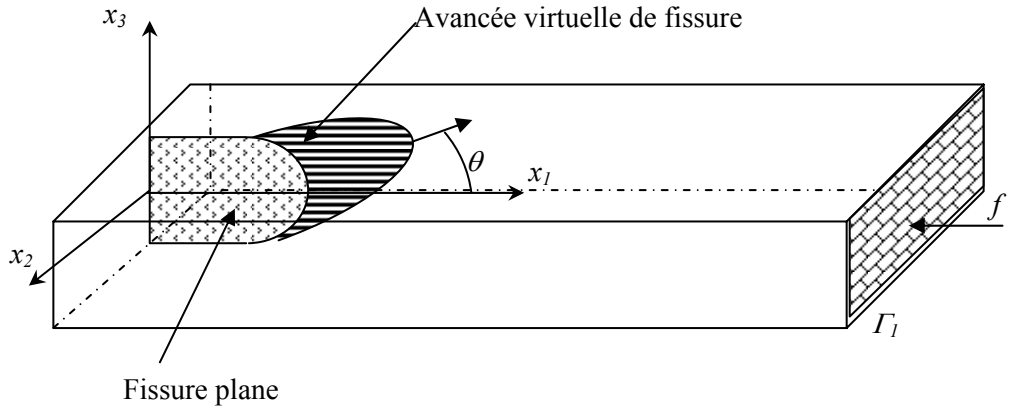


Figure II. 12. Solide fissuré occupant l'ouvert Ω

Pour déterminer la variation d'énergie potentielle totale, on définit une application F^ε représentant une perturbation géométrique infinitésimale ε, au voisinage du fond de fissure :

$$F^\varepsilon : \Re^3 \to \Re^3$$
$$\forall M \in \Omega, F^\varepsilon(M) = M^\varepsilon = M + \varepsilon\theta(M)$$

où le champ θ permet de représenter la position de chaque point du corps perturbé en fonction de sa position initiale, avant la perturbation infinitésimale ε.

Si la perturbation ε est suffisamment petite, Destuynder a montré [Destuynder et al. 1983] que les champs de contraintes σ et de déplacements u correspondant à la configuration perturbée pouvaient se décomposer de la façon suivante :

[2] La dérivation d'une fonctionnelle définie sur un ouvert variable par la méthode lagrangienne consiste à travailler sur une configuration de référence occupée par le solide à un instant donné.

$$\sigma^{\varepsilon} = \sigma + \varepsilon\sigma^{1}$$
$$u^{\varepsilon} = u + \varepsilon u^{1}$$

où σ^{1} et u^{1} représentent les premières variations correspondant aux champs des contraintes et des déplacements lors de la perturbation infinitésimale ε de Ω.
La variation d'énergie potentielle totale par rapport à l'allongement de la fissure peut alors être obtenue par passage à la limite lorsque ε tend vers 0 :

$$\frac{dW_p}{da} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{W_p^{\varepsilon} - W_p}{\varepsilon}$$

- **Propriétés du champ θ**

Le champ de déplacement θ, introduit pour représenter la cinématique virtuelle du mouvement, doit vérifier les propriétés suivantes :

- θ est parallèle au plan de la fissure (automatique en 2D) ;
- θ est normal au front de la fissure ;
- le support de θ est limité à un voisinage de la fissure ;
- θ est constant dans une zone entourant la pointe de fissure.

En pratique, on définit deux contours *C1* et *C2* entourant la pointe de fissure. Ces deux contours divisent la pièce en trois parties (Figure II.13.) :

- dans C_{int}, le champ θ est constant de norme unitaire (1,0) ;
- dans C_{ext} le champ θ est nul (0,0) ;
- dans la couronne C_{cour} le champ θ varie continûment de (1,0) à (0,0).

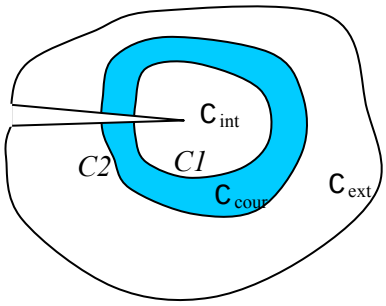


Figure II. 13. Couronnes d'intégration pour la méthode Gθ

- **Expression du taux de restitution d'énergie**

L'énergie potentielle totale du système est définie par : $W_p = \frac{1}{2}\int_{\Omega} Tr(\sigma \nabla u)d\Omega - \int_{\Omega} f.u\, d\Omega$

où f représente les forces extérieures appliquées à Ω (Γ_1 sur la Figure II.12.).
Le principe des travaux virtuels, à l'équilibre, nous donne la relation suivante pour tout champ de déplacements virtuels cinématiquement admissibles u^* : $\int_{\Omega} Tr(\sigma \nabla u^*)d\Omega = \int_{\Omega} f.u^* d\Omega$

Donc en prenant u comme champ de déplacement virtuel, on obtient l'expression de l'énergie potentielle totale à l'équilibre : $W_p = -\frac{1}{2}\int_{\Omega} Tr(\sigma \nabla u)d\Omega$

La perturbation étant infinitésimale, les opérations de dérivation et d'intégration sur le corps perturbé peuvent s'exprimer à l'aide d'un développement limité au premier ordre en fonction des mêmes opérations sur le corps non perturbé. Destuynder montre alors que sous les hypothèses suivantes :

- pas d'efforts appliqués au voisinage de la fissure ;
- pas de déformations d'origine thermique ;

et en se servant des expressions de σ^{ε} et u^{ε} définies précédemment, le taux de restitution d'énergie peut s'exprimer en élasticité pure :

$$G = \int_{\Omega} Tr\left(\sigma \nabla U \nabla \theta\right) d\Omega - \int_{\Omega} w_e . div\left(\theta\right) d\Omega$$

$$\text{où} \quad w_e = \frac{1}{2} Tr\left(\sigma \nabla U\right)$$

Cette expression peut être généralisée en élasticité non linéaire (ou élastoplasticité en conditions de chargement monotone) en remplaçant l'énergie élastique w_e par une énergie totale w_{tot}, somme de l'énergie élastique w_e et de l'énergie plastique w_p. De même, il est possible d'ajouter plusieurs termes supplémentaires pour prendre en compte des forces extérieures près de la fissure, le cas d'un chargement thermique, ou encore le cas d'une fissure au voisinage d'une interface bimatériaux. Ces termes complémentaires ne seront pas développés dans ce mémoire.

- **Méthode de découplage des modes**

Lorsque la fissuration se présente en mode mixte, les méthodes énergétiques sont, pour la plupart, incapables de séparer les deux modes de rupture, car l'expression de G ou J est une forme quadratique des facteurs d'intensité de contraintes.

La méthode de découplage consiste alors à séparer les paramètres énergétiques en deux termes, chaque terme étant relié au facteur d'intensité de contraintes correspondant :

$$\begin{cases} J = J_I + J_{II} \\ G = G_I + G_{II} \end{cases} \quad \text{avec donc :} \quad \begin{cases} J_I = G_I = \dfrac{K_I^2}{E'} \\ J_{II} = G_{II} = \dfrac{K_{II}^2}{E'} \end{cases}$$

Le calcul de ces termes est alors effectué en décomposant le champ de déplacement en une partie symétrique, et une partie anti-symétrique par rapport à l'axe de la fissure ; chacune de ces parties correspondant respectivement au mode I et II. Pour ce calcul, il faut donc considérer deux points M et M' symétriques par rapport à l'axe de la fissure, ce qui nous permettra par combinaison linéaire des déplacements de ces deux points, d'obtenir les contributions aux modes I et II.

Sur le plan numérique, cette méthode est relativement difficile à mettre en œuvre, car les points M et M' doivent appartenir à un contour, et ils doivent donc être des nœuds du maillage. Pour pouvoir

appliquer cette méthode, il est donc nécessaire d'avoir un maillage et un contour symétrique par rapport à l'axe de la fissure dans la zone de calcul.

D'autres méthodes telles que celles utilisant les intégrales *T* et *A* [Bui 1985] permettent également de découpler les différents modes tout en s'affranchissant du problème de maillage symétrique, mais elles sont plutôt utilisées dans le domaine de la thermoélasticité.

- **Comparaison des différentes méthodes**

Plusieurs études comparatives de ces différentes méthodes ont été effectuées [Elouard 1993], [Zhang 1992], [Petit 1990]. Les deux méthodes les plus précises, à finesse de maillage donnée, semblent être la méthode de l'extension virtuelle de la fissure associée à la méthode d'intégration directe, et la méthode $G\theta$. La finesse du maillage intervient très peu sur la précision des résultats obtenus par ces deux méthodes, mais elle conditionne significativement le temps de calcul.
Pour un même maillage, la méthode locale par extrapolation des déplacements est moins précise que les deux méthodes précédentes, mais elle est plus rapide ; elle permet le découplage en modes I et II, et elle ne nécessite pas de code spécialisé.

II.2.5. Bilan

Il est possible de résumer les zones de prédominance des différents paramètres de calcul utilisés en mécanique de la rupture à l'aide du graphe suivant :

Le solide fissuré est subdivisé en plusieurs zones de dominance, et on peut alors être confronté à plusieurs situations [Marchal 1997] :

- En **élasticité linéaire**, les zones I et II n'existent pas, et on peut déterminer la rupture uniquement à l'aide de *K* (et la contrainte *T*). Le paramètre *G* peut également être utilisé, et s'avère très précis lorsqu'il est calculé par des méthodes d'intégrales surfaciques. De plus, la fissure reste aiguë.
- En **plasticité confinée**, la fissure subit un léger émoussement, la zone I apparaît, mais reste de petite taille (≈2CTOD). Il apparaît une zone de plasticité (zone II) dominée par le paramètre *J* (et le terme *Q*). La zone III reste valide. On peut continuer à utiliser *K* à l'aide des facteurs d'intensité des contraintes équivalents, et des méthodes élastiques équivalentes [Baouch 1998] (Irwin, Dugdale-Barenblatt) ;
- En **plasticité étendue**, la fissure s'émousse encore. La zone de dominance de *K* (et de *K-T*) disparaît, et les zones I et II s'agrandissent. Les méthodes élastiques équivalentes ne sont plus valables, et la méthode élastoplastique incrémentale est nécessaire pour le calcul des paramètres *G* ou *J*. Lorsque la plasticité s'étend encore, la rupture ne peut plus être caractérisée à l'aide d'un seul paramètre, et on rentre dans la zone de dominance de *J-Q*.

Enfin, il peut arriver que la zone de grande déformation recouvre toutes les autres. Il n'est alors plus possible d'utiliser les différents paramètres *J, K, Q* ou *T* pour caractériser la rupture.

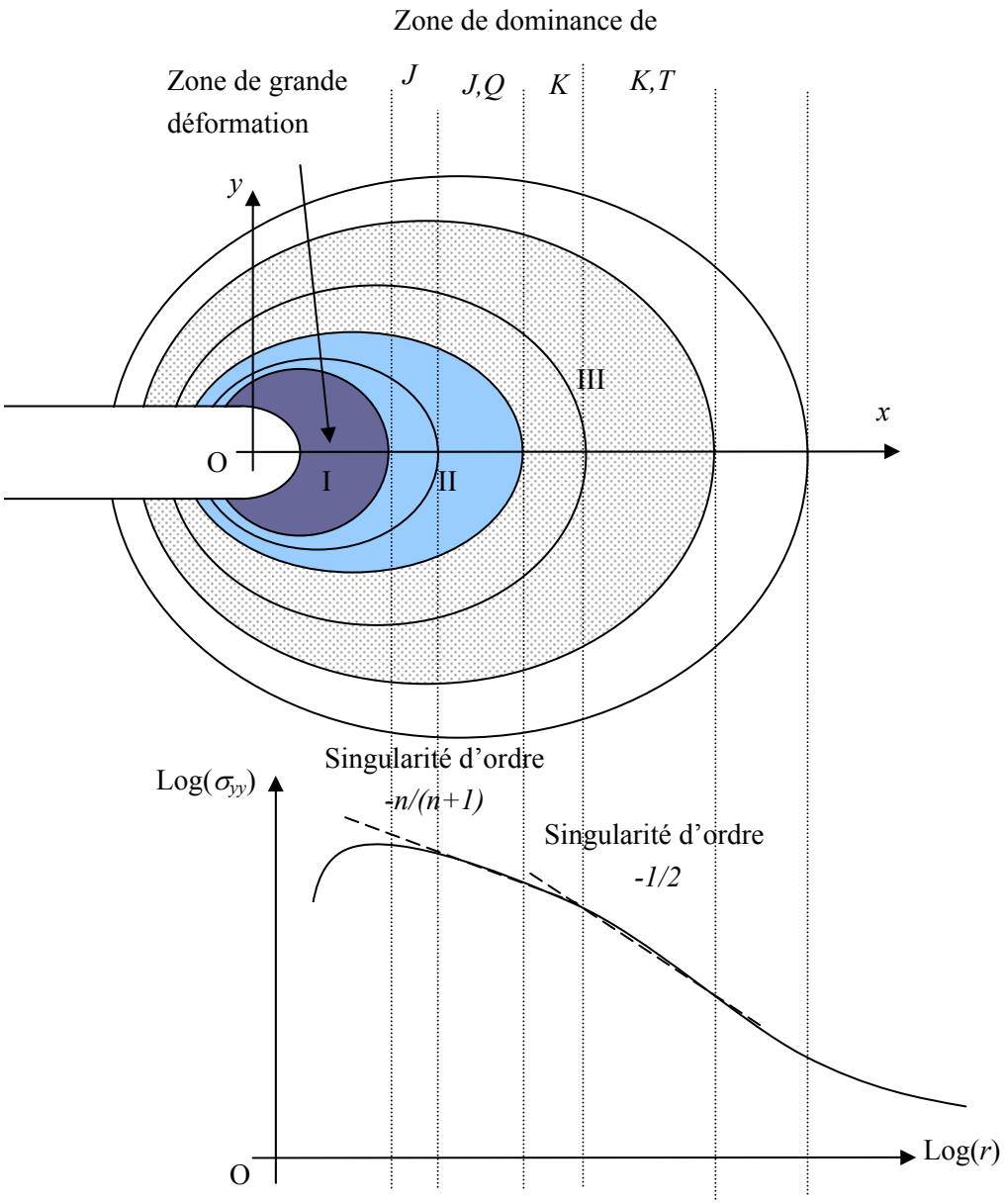


Figure II. 14. Zones de dominance des différents paramètres

Dans la suite de l'étude, nous n'aborderons pas le cas de la plasticité étendue, et nous nous intéresserons donc au calcul des paramètres gouvernant la rupture : *G* et *K*.

II.3. DEVELOPPEMENT D'OUTILS NUMERIQUES POUR LA MODELISATION D'UNE FISSURE

Comme nous l'avons vu lors de l'étude bibliographique précédente, l'analyse numérique des champs mécaniques d'une pièce fissurée est fortement liée à la qualité du maillage de cette pièce, et plus particulièrement du voisinage de la pointe de fissure. Dans cette seconde partie du chapitre II, nous présentons les outils que nous avons développés pour obtenir un maillage de qualité en pointe de fissure. Puis nous étudions l'influence des nœuds milieux des éléments en tête de fissure, sur la précision du calcul du champ des contraintes.

II.3.1. Maillage Concentrique

Afin d'utiliser certaines techniques de calcul propres à la mécanique de la rupture, la gestion du maillage à la pointe d'une fissure est primordiale.
Ainsi, pour pouvoir utiliser les éléments singuliers proposés par Barsoum [Barsoum 1976], il est important d'avoir un maillage triangulaire concentrique autour de la pointe de la fissure. De même, pour pouvoir implémenter la méthode Gθ, il est nécessaire de créer une couronne d'éléments qui servira de surface d'intégration pour le calcul du taux de restitution d'énergie.

La technique de maillage présentée au chapitre I est tout à fait adaptée à ce genre de manipulations. Pour la création de ces contours circulaires, l'utilisateur définit les rayons relatifs au contour concentrique C_{con}, au contour interne de la couronne C_{int}, et au contour externe de la couronne C_{ext}. Ces trois contours sont des contours ouverts (puisqu'ils s'appuient sur les lèvres de la fissure), et non orientés (puisque la matière se situe à l'intérieur et à l'extérieur des contours). Puis, le mailleur détermine automatiquement les points d'intersection des différents contours, et il génère un maillage triangulaire s'appuyant sur les contours ainsi définis. La finesse du maillage étant alors déterminée par les paramètres de maillage définis par l'utilisateur ainsi que par la taille des contours en pointe de fissure :

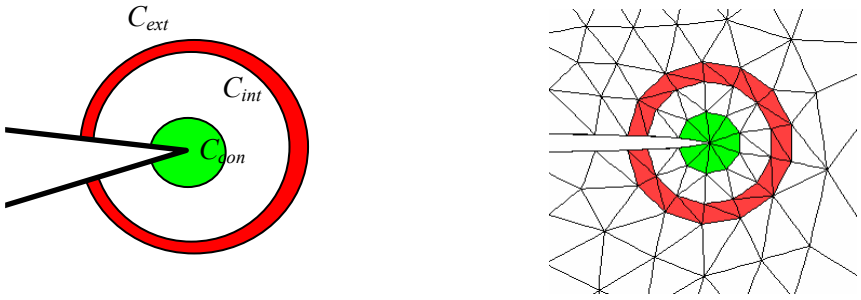


Figure II. 15. Contours circulaires pour le maillage en tête de fissure

Cette technique nous permet de maîtriser parfaitement la structure du maillage en pointe de fissure, que ce soit pour le calcul de paramètres mécaniques, ou pour la propagation d'une fissure, comme nous le verrons dans le chapitre III.

Afin de valider notre simulation, et d'observer l'influence de la structure du maillage en pointe de fissure, nous allons étudier les champs mécaniques au voisinage immédiat de la fissure pour un matériau purement élastique. Puis nous comparerons la forme de la zone plastique en pointe de fissure à celle proposée dans la littérature pour un matériau élastoplastique.

- **Champs mécaniques au voisinage de la fissure dans un matériau élastique :**

Nous étudions ici un solide élastique, fissuré, et soumis à un essai de traction suivant l'axe *Oy* (Figure II.16.). Nous représentons sur le graphe de la figure II.16. la contrainte normale σ_{yy} dans l'axe de la fissure *Ox*, et pour deux finesses de maillage différentes : un maillage classique, sans raffinement particulier, et sans maillage concentrique en pointe de fissure ; et un maillage raffiné et concentrique à la pointe.

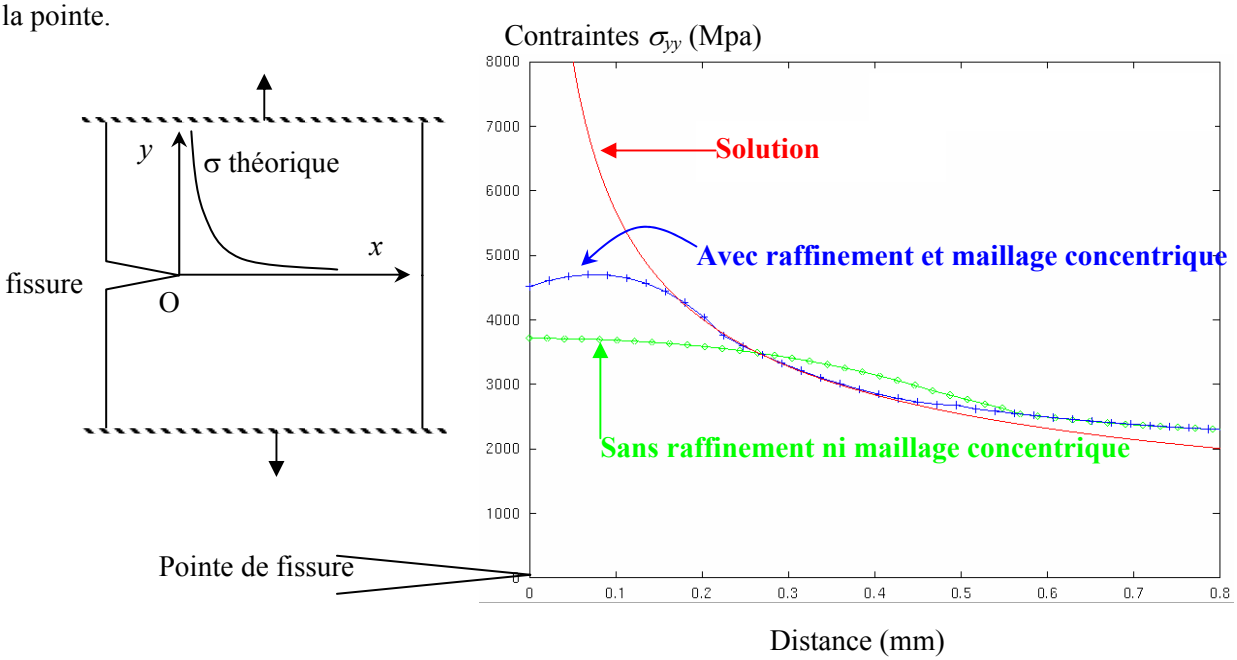


Figure II. 16. Contrainte normale en pointe de fissure pour un essai de traction simple

On retrouve bien les résultats théoriques, avec une contrainte en $\frac{K}{\sqrt{2\pi r}}$ au voisinage proche de la pointe de fissure : $0{,}2 \leq r \leq 0{,}6$. Cependant, pour $r<0{,}2$, les contraintes provenant de la simulation « décrochent ». Cela vient du fait que les éléments finis P2P0 (éléments triangulaires quadratiques en vitesse, et à pression constante par élément) utilisés ne peuvent engendrer de contrainte infinie. Pour cela, il sera nécessaire d'introduire les éléments de Barsoum. On remarque également l'importance du raffinement et de la concentricité du maillage en pointe de fissure sur la précision. La mauvaise précision pour un maillage quelconque sera d'autant plus importante lorsque nous étudierons les fissures quasi-statiques. En effet, nous verrons que certains critères de bifurcation déterminent la direction de propagation de la fissure à partir du champ de contraintes locales en pointe de fissure.

- **Forme de la zone plastique :**

Pour un matériau élastoplastique, il est possible de représenter la forme de la zone plastique en pointe de fissure. En effet, en **déformations planes**, les modèles théoriques de la zone plastique à fond de fissure prévoient une forme ressemblante à des ailes de papillon :

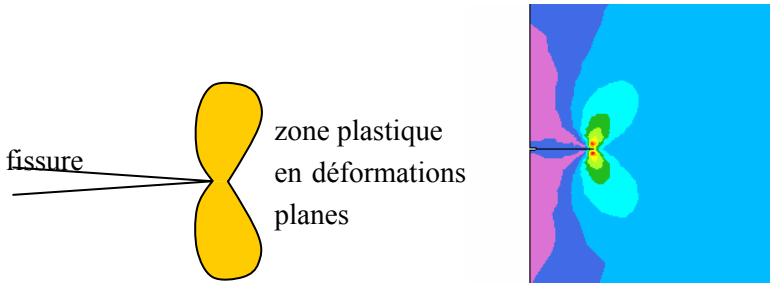


Figure II. 17. Forme de la zone plastique en pointe de fissure et en déformation plane

Lors de la simulation, nous retrouvons bien cette même forme en visualisant les déformations équivalentes.

II.3.2. Eléments Singuliers

Dans l'exemple précédent, nous avons vu que nous n'arrivions pas à modéliser la singularité des contraintes au voisinage immédiat de la pointe de fissure, et ceci même pour un maillage concentrique très raffiné. Pour pouvoir représenter cette singularité, nous déplaçons les nœuds milieux des éléments en pointe de fissure au quart de la longueur de l'arête [Henshell et al. 1975]. Nous allons également étudier les solutions obtenues en plaçant les nœuds milieux des éléments en pointe de fissure à différentes distances de la pointe de fissure.
Nous étudions 5 cas différents, où les nœuds milieux ont été déplacés :

- Au trois-quart de la longueur de l'arête en partant de la pointe de fissure (*3L/4*) ;
- Au milieu de l'arête (*L/2*) ;
- Au tiers de l'arête (*L/3*) ;
- Au quart de l'arête (*L/4*) ;
- Au cinquième de l'arête (*L/5*).

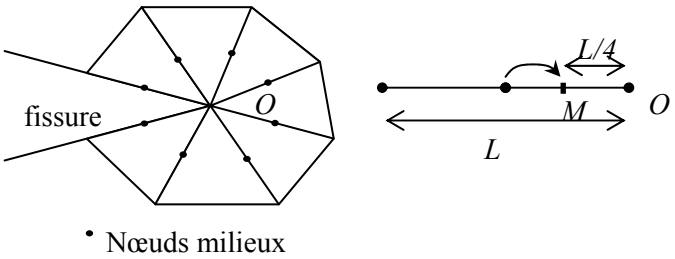


Figure II. 18. Déplacement des nœuds milieux

Pour étudier les champs mécaniques dans chaque configuration, nous reprenons l'essai de traction simple présenté en figure II.16. et nous étudions l'influence du positionnement du nœud milieu sur le

profil de contraintes au voisinage immédiat de la pointe de fissure pour un matériau purement élastique.

- **Contraintes σ_{yy} (MPa) en pointe de fissure en fonction du déplacement du nœud milieu**

Ci-dessous, nous observons les contraintes σ_{yy}, visualisées aux points d'intégration, à la pointe de la fissure, et en fonction du positionnement du nœud milieu.

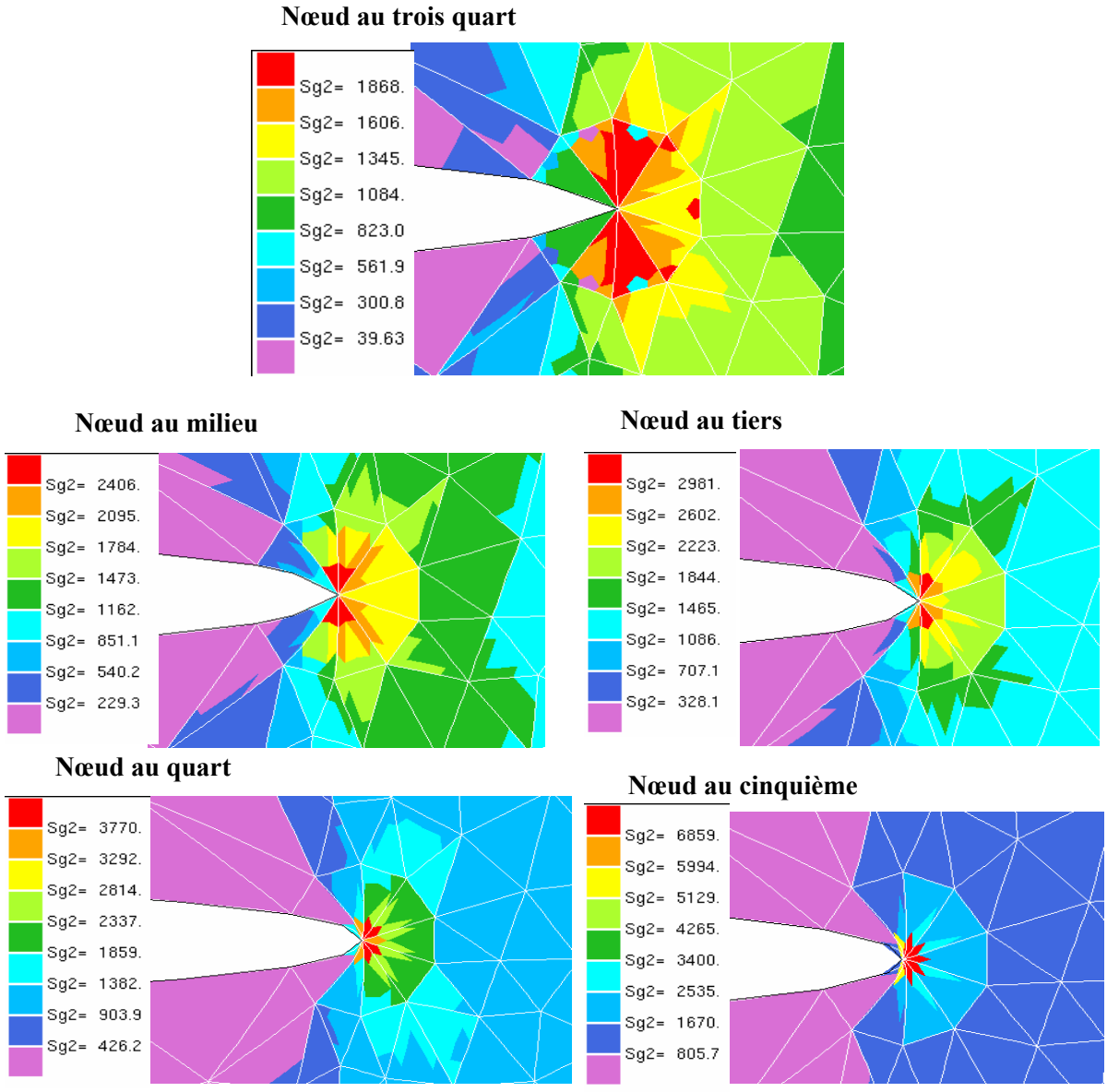


Figure II. 19. σ_{yy} aux points d'intégration et pour différents éléments en pointe de fissure

On se rend bien compte de l'influence de la position des nœuds milieux sur les résultats obtenus. La forme des arêtes représentant les lèvres de la pointe de fissure est modifiée, et cela se remarque bien sur la courbure de l'arête aboutissant à la pointe de fissure. Au niveau du champ de contraintes σ_{yy}, le fait de rapprocher le nœud milieu de la pointe provoque une concentration de contraintes beaucoup plus importante à la pointe même de la fissure. Les contraintes sont donc plus élevées à la pointe de

fissure : dans le cas classique (nœuds aux milieux des arêtes) la contrainte maximale est de l'ordre de 2400 MPa, alors qu'elle est quasiment de 7000 MPa pour l'exemple avec les nœuds au cinquième de la longueur. On remarque également que ces contraintes ne dépassent pas les 2000 MPa lorsque les nœuds milieux sont déplacés aux trois-quarts de l'arête. Pour représenter cette concentration de contraintes, nous avons représenté dans le graphe ci-dessus les contraintes σ_{yy} sur le contour de la pièce au voisinage de la fissure :

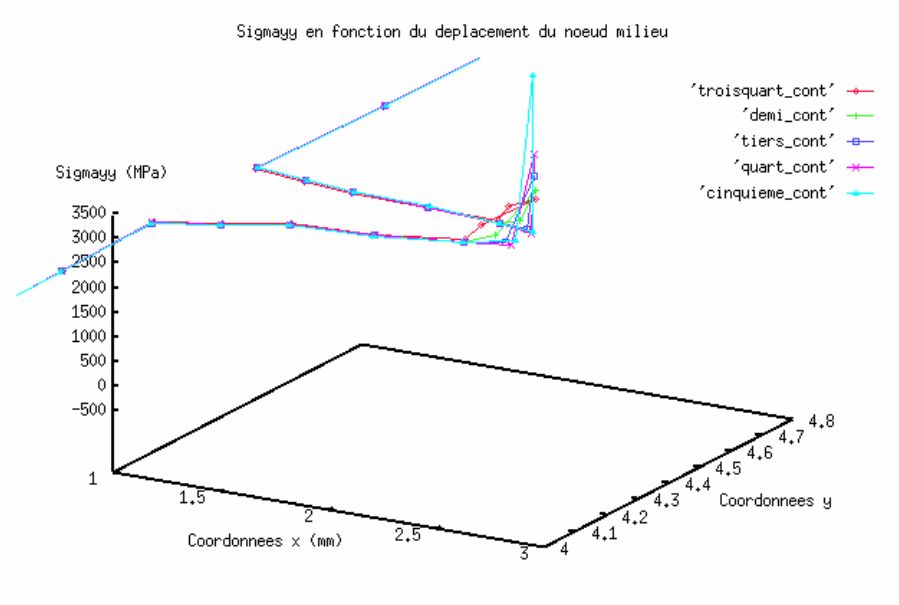


Figure II. 20. Graphe 3D des contraintes en pointe de fissure

Afin de comparer nos résultats aux résultats théoriques provenant de l'élasticité linéaire, nous avons tracé les contraintes σ_{yy} sur la droite représentant l'axe de la fissure, et ceci pour les 5 positionnements des nœuds milieux. Nous avons tracé en parallèle la courbe théorique de la forme :

$$f(x) = \frac{Cte}{\sqrt{2\pi x}}$$

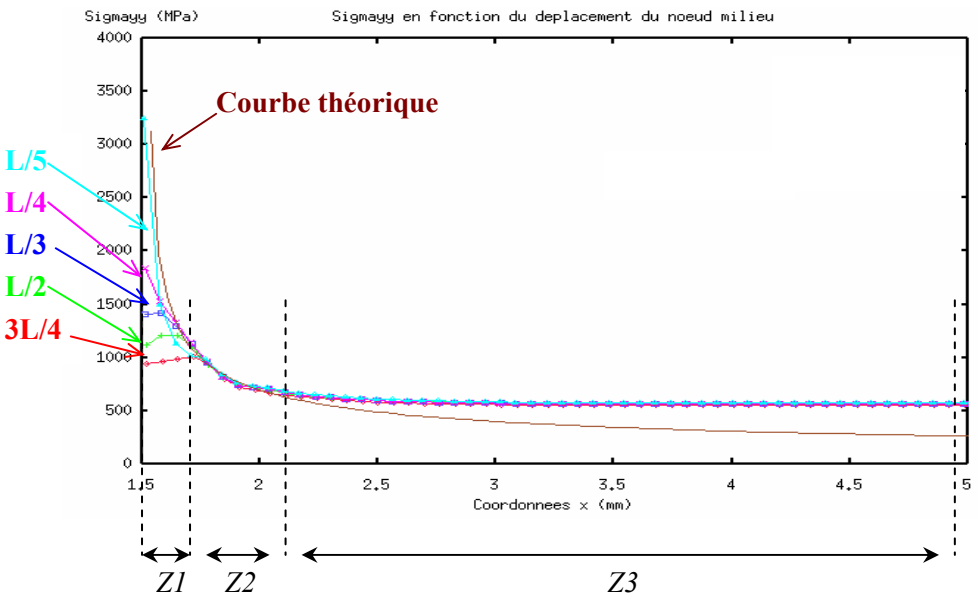


Figure II. 21. Contrainte σ_{yy} en fonction du positionnement du nœud milieu

Sur la figure II.21., nous pouvons délimiter trois régions :

- *Z3* est la **zone de champs lointains** : cette zone n'est quasiment pas influencée par la fissure et le champ de contraintes y est sensiblement constant. La solution théorique n'y est d'ailleurs plus tout à fait précise.
- *Z2* est la **zone singulière** : c'est à partir de cette zone que les contraintes présentent une singularité en $1/\sqrt{r}$. La comparaison entre la courbe théorique (en marron) et les courbes numériques est excellente.
- *Z1* est la **zone d'élaboration** : C'est principalement dans cette zone que le déplacement des nœuds milieux intervient. On remarque bien pour les nœuds déplacés aux trois-quarts, au milieu et au tiers que les contraintes redescendent légèrement en arrivant à la pointe de fissure. Ce phénomène n'est pas observé pour les nœuds au quart et au cinquième. On peut en effet montrer formellement (Annexe B.2.) que le fait de déplacer les nœuds milieux au quart de l'arête fait apparaître un terme en $1/\sqrt{r}$ dans les champs mécaniques. C'est ce qui permet d'obtenir des contraintes si élevées à la pointe de fissure. Les nœuds déplacés au cinquième donnent les plus grandes valeurs de contraintes, mais ces éléments sont fortement dégénérés et la courbe présente un saut à la frontière entre les zones *Z1* et *Z2*. Les nœuds déplacés au quart ne tendent pas vers l'infini en pointe de fissure pour ce maillage assez grossier, mais donnent des résultats bien meilleurs que ceux obtenus avec des éléments classiques.

Par la suite, nous avons continué à étudier les champs mécaniques à la pointe de la fissure pour les nœuds déplacés au quart. Nous avons voulu évaluer l'influence de la finesse du maillage sur les résultats obtenus et les comparer à ceux obtenus avec un maillage classique. Pour cela, nous avons effectué le même calcul que précédemment avec 3 finesses de maillage différentes :

- *M1* : 909 nœuds et rayon du disque en pointe = 0.4mm
- *M2* : 1044 nœuds et rayon du disque en pointe = 0.25mm
- *M3* : 1716 nœuds et rayon du disque en pointe = 0.05mm

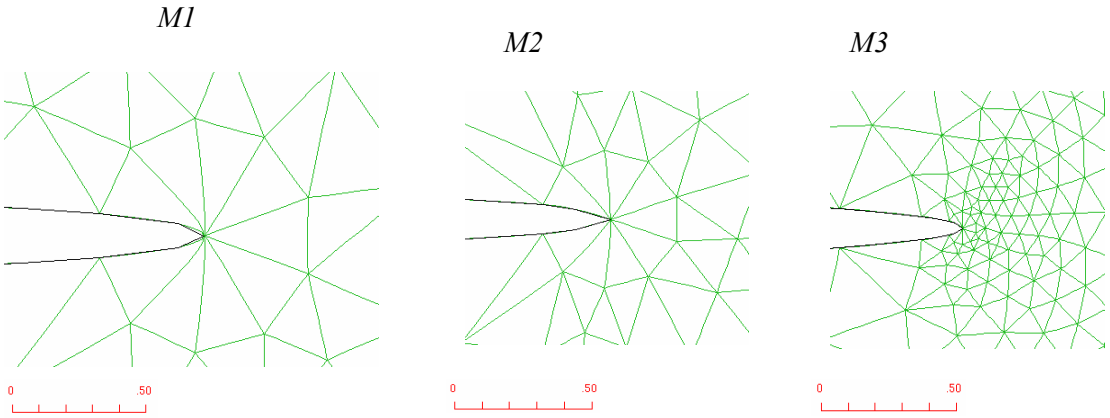


Figure II. 22. Différentes finesses de maillage en pointe de fissure

Nous représentons ci-dessous les contraintes σ_{yy} sur l'axe de la fissure pour ces 3 types de maillage. fdemi2, demi2 et gdemi2 correspondent respectivement aux maillages *M1*, *M2* et *M3* avec des éléments classiques, tandis que les courbes gquart2, quart2 et fquart2 correspondent aux essais pour lesquels les nœuds milieux ont été déplacés au quart de l'arête. Enfin en bleu, nous avons représenté la courbe théorique.

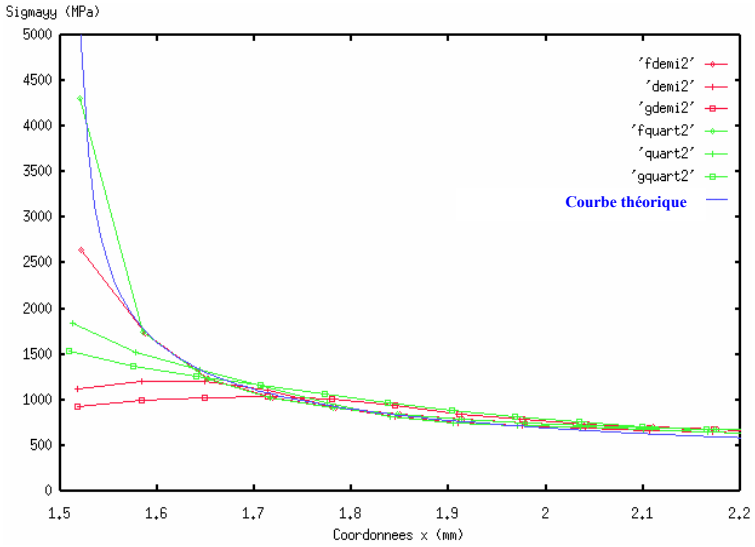


Figure II. 23. Comparaison d'éléments classiques et d'éléments singuliers en fonction de la finesse du maillage

Pour une finesse de maillage donnée, les nœuds au quart améliorent considérablement la solution. Pour des éléments classiques, il est nécessaire d'avoir un grand raffinement en pointe de fissure afin d'éviter la décroissance des contraintes lorsque l'on arrive en pointe de fissure.
Les nœuds au quart ne présentent pas cette chute de contraintes, même pour un maillage très grossier. Pour le maillage fin, les nœuds au quart donnent une solution très comparable à la courbe théorique. En augmentant encore légèrement la finesse du maillage en pointe de fissure, et en augmentant le nombre de mesures sur l'axe de la fissure, on obtient la comparaison excellente suivante :

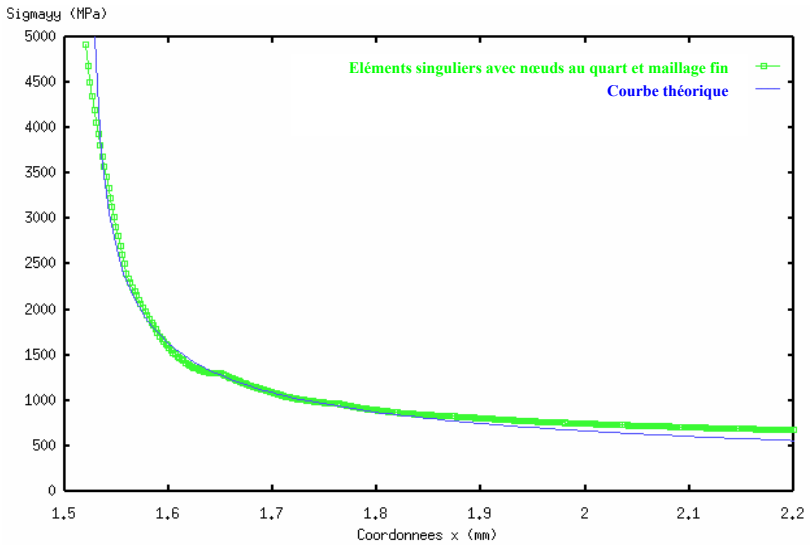


Figure II. 24. Comparaison de la courbe théorique aux résultats obtenus avec nœuds au quart et maillage fin

II.3.3. Bilan

Ainsi, les éléments singuliers avec nœuds au quart proposés par Barsoum permettent de représenter correctement la singularité en pointe de fissure pour un matériau élastique. Certains auteurs affirment que ces éléments peuvent également s'avérer intéressants pour des matériaux élastoplastiques.
Cependant, un maillage concentrique assez raffiné en pointe de fissure donne des résultats tout à fait acceptables. De plus, les directions de propagation de fissures (que nous étudierons dans le prochaine chapitre) sont correctes avec des éléments classiques pour un maillage convenablement structuré et raffiné en tête de fissure. La technique numérique que nous utilisons pour mailler, automatiquement et avec la finesse nécessaire, la fissure nous permet de parfaitement contrôler la structure du maillage en pointe de fissure. Il ne nous semble donc pas indispensable d'utiliser ces éléments singuliers.

II.4. CALCUL DU TAUX DE RESTITUTION D'ENERGIE

Comme nous l'avons vu précédemment, les principales grandeurs en mécanique de la rupture sont les facteurs d'intensité des contraintes et le taux de restitution d'énergie. Ces grandeurs pouvant être reliées les unes aux autres, nous proposons ici de calculer le taux de restitution d'énergie à l'aide de la méthode Gθ présentée précédemment. Puis nous comparerons les résultats obtenus aux résultats analytiques sur des configurations géométriques connues. Après avoir montré la bonne précision de la méthode Gθ, nous étudierons l'influence du maillage sur les résultats obtenus.

Le calcul de G est souvent effectué en utilisant la densité d'énergie de déformation, qui peut être décomposée en trois parties élastique, plastique et thermique. Nous nous intéresserons pour l'instant à la partie mécanique w (élastique w_e et plastique w_p), que nous pouvons exprimer :

$$w = w_e + w_p$$

$$w_e = \int_0^{\varepsilon_e} \sigma d\varepsilon_e = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon_e$$

$$w_p = \int_0^{\varepsilon_p} \sigma d\varepsilon_p = \int_0^{\varepsilon_{eq}} \sigma_{eq} d\varepsilon_{eq} \approx \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\sigma_{eq}^{i} + \sigma_{eq}^{i-1}}{2} \right) \left(\varepsilon_{eq}^{i} - \varepsilon_{eq}^{i-1} \right)$$

où ε_e et ε_p sont les parties élastique et plastique de la déformation ; σ_{eq} est la contrainte équivalente de Von Mises, ε_{eq} la déformation plastique équivalente cumulée, et m le nombre total de pas du calcul élastoplastique.

II.4.1. Implémentation de la méthode Gθ

La méthode Gθ présentée au II.2.4.4 a été implémentée dans le code FORGE2 Multimatériaux pour des matériaux élastiques et élastoplastiques. Nous présentons ici la technique utilisée en élasticité.

En élasticité pure $G = \int_\Omega Tr(\sigma \nabla U \nabla \theta) d\Omega - \frac{1}{2} \int_\Omega Tr(\sigma \nabla U) div(\theta) d\Omega$

Remarque : le champ θ varie uniquement sur la couronne C_{cour}, donc l'intégration peut être faite uniquement sur cette couronne. Mais pour les cas axisymétriques, nous remarquons qu'un terme en θ_r intervient, et il est alors nécessaire d'intégrer à la fois sur les zones C_{int} et C_{cour}.

Il est possible de calculer G pour une propagation de fissure dans différentes directions. Même si cela ne sert pas dans ce chapitre, nous présentons cette technique qui nous servira lors du calcul de la direction de propagation dans le prochain chapitre.

Soit θ, l'angle de la propagation éventuelle de la fissure par rapport à sa direction initiale. On caractérise cette propagation par son vecteur directeur $\boldsymbol{\theta}=(\cos\theta,\sin\theta)$.

Ce vecteur directeur $\boldsymbol{\theta}$ introduit une perturbation qui doit être unitaire dans C_{int}, varier continûment de 1 à 0 dans C_{cour}, et qui doit être nulle dans C_{ext}.

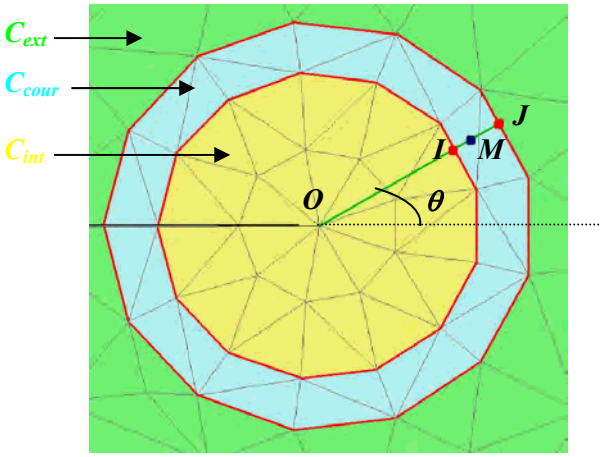


Figure II. 25. Couronnes d'intégration pour la méthode Gθ

On note O la pointe de fissure, M le point d'intégration en cours de traitement, et I et J les points d'intersection de la droite OM avec respectivement le contour interne et le contour externe de la couronne C_{cour}. Nous pouvons alors définir le vecteur $\boldsymbol{\theta}(\theta_1,\theta_2)$ avec :

$$\begin{cases}\theta_1=\left(1-\dfrac{IM}{IJ}\right)\cos(\theta)\\ \theta_2=\left(1-\dfrac{IM}{IJ}\right)\sin(\theta)\end{cases}$$

Le calcul du taux de restitution d'énergie est alors réalisé en utilisant tous les éléments de la couronne, et en intégrant en chacun des 7 points d'intégrations de chaque élément :

$$G=\int_{couronne}\left[Tr(\sigma\nabla U\nabla\theta)-\frac{1}{2}Tr(\sigma\nabla U)div(\theta)\right]dC$$

$$\begin{aligned}G=\sum_{éléments}\sum_{p_\mathrm{int}}\{&(\sigma_{11}u_{1,1}+\sigma_{12}u_{1,2})\theta_{1,1}+(\sigma_{11}u_{2,1}+\sigma_{12}u_{2,2})\theta_{1,2}\\&+(\sigma_{12}u_{1,1}+\sigma_{22}u_{1,2})\theta_{2,1}+(\sigma_{12}u_{2,1}+\sigma_{22}u_{2,2})\theta_{2,2}\\&-\frac{1}{2}[(\sigma_{11}u_{1,1}+\sigma_{12}u_{1,2}+\sigma_{12}u_{2,1}+\sigma_{22}u_{2,2})(\theta_{1,1}+\theta_{2,2})]\}w_{\mathrm{int}}dAire_{\mathrm{int}}\end{aligned}$$

où w_{int} et $dAire_{int}$ représentent respectivement le poids de Gauss, et la surface associés au point d'intégration *int*.

Tous ces champs étant directement accessibles par un calcul éléments finis, il nous est possible de calculer le taux de restitution d'énergie en n'utilisant qu'un seul maillage et qu'un seul calcul mécanique.

Pour chaque élément de la couronne
  Pour chaque point d'intégration de l'élément
    On connaît σ_{ij}
    On calcule les coordonnées de M, I et J
    On calcule $u_{i,j}$ et $\theta_{i,j}$ pour $1 \le i,j \le 2$
    On calcule la contribution G_{int} correspondant à ce point d'intégration
    On ajoute cette contribution à G_{total}

Ainsi, pour chaque direction virtuelle de propagation de la fissure (θ), il est possible de calculer le taux de restitution d'énergie associé. Cela nous servira essentiellement dans le prochain chapitre. Dans ce chapitre, nous calculons le taux de restitution d'énergie associé à une perturbation normale au front de fissure : $\theta=0°$.

II.4.2. Comparaison de différentes méthodes

Afin de déterminer la précision et la robustesse de la méthode Gθ, nous allons comparer les résultats obtenus par cette méthode à des résultats analytiques connus pour certaines configurations géométriques. Nous présenterons également les résultats obtenus par deux autres méthodes couramment utilisées : la méthode de différenciation d'énergie, et la méthode de la complaisance.

II.4.2.1. La méthode analytique

Pour des éprouvettes simples, et en élasticité, il est possible de calculer les facteurs d'intensité de contraintes par des formules analytiques qui peuvent être trouvées dans plusieurs ouvrages tels que celui de Murakami [Murakami et al. 1987]. Puis, le taux de restitution d'énergie est calculé à l'aide des formules suivantes :

$$G = \frac{(K_I^2 + K_{II}^2)}{E'} + \frac{K_{III}^2}{2\mu} \quad où \quad \begin{cases} E' = E & \textit{en contraintes planes} \\ E' = \dfrac{E}{1\text{-}\nu^2} & \textit{en déformations planes} \\ \mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)} & \textit{est le module de cisaillement} \end{cases}$$

Pour les applications numériques, nous utiliserons les caractéristiques mécaniques d'un acier : E = 210000 MPa, et ν = 0.3.

Les éprouvettes auxquelles nous allons nous intéresser sont les suivantes :

- **Eprouvette SEC (Single Edge Crack) :**

Il s'agit d'une plaque semi-infinie, soumise à une contrainte homogène, et possédant une fissure latérale de longueur 2a. Pour ce type de géométrie, le facteur d'intensité de contraintes pour le mode d'ouverture pure (mode I), vaut :

$$K_I = 1{,}122\,\sigma\sqrt{\pi a}$$

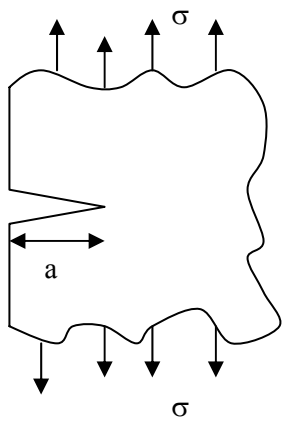


Figure II. 26. Eprouvette Single Edge Crack

- **Eprouvette DEC (Double Edge Crack) :**

Il s'agit d'une éprouvette carrée, de largeur w, comportant deux fissures latérales de longueur a, et soumise à une contrainte homogène. On a alors :

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}\left[1 + 0{,}122\cos^2\left(\frac{\pi a}{w}\right)\right]\left[\frac{w}{\pi a}tg\left(\frac{\pi a}{w}\right)\right]^{1/2}$$

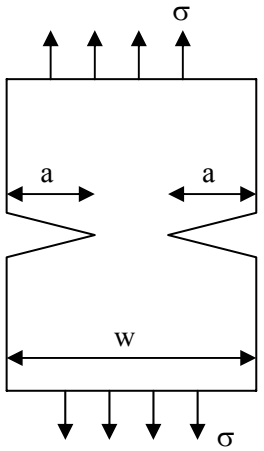


Figure II. 27. Eprouvette Double Edge Crack

- **Fissure centrale inclinée**

On considère une plaque infinie, soumise à une contrainte uniaxiale homogène, et possédant une fissure interne de longueur 2a. Cette fissure peut être inclinée ou non, et on compare les résultats obtenus pour des inclinaisons de 0° , 30° et 45°.

On a alors :

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}\cos^2\beta$$

$$K_{II} = \sigma\sqrt{\pi a}\cos\beta\sin\beta$$

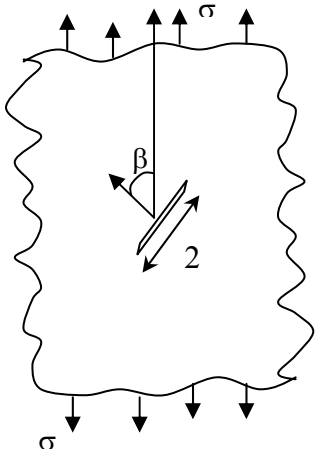


Figure II. 28. Eprouvette contenant une fissure centrale inclinée

II.4.2.2. La méthode de différenciation d'énergie

Cette méthode est basée sur la définition du taux de restitution d'énergie. Elle consiste à faire la différence de l'énergie totale dans la pièce entre un état avec une longueur de fissure a, et un état avec une longueur de fissure $a+\delta a$:

$$G = -\frac{W(a+\delta a) - W(a)}{\delta a}$$

où $W(a)$ représente l'énergie totale du système pour une longueur de fissure a.

Pour cette méthode, il est nécessaire d'effectuer deux maillages distincts : le premier avec une longueur de fissure a et le second avec une longueur de fissure $a+\delta a$. Puis, un calcul mécanique doit être effectué pour chacun des deux maillages.

II.4.2.3. La méthode de la complaisance

Comme nous l'avons vu dans la partie bibliographique, il est possible de relier G à la complaisance C de la structure : $G = \frac{P^2}{2}\frac{\partial C}{\partial A}$

Sur la figure II.6., le taux de restitution d'énergie est évalué en calculant l'aire située dans le triangle OAC, puisque nous travaillons en déplacement imposé.
Comme pour la méthode précédente, la méthode de la complaisance nécessite deux maillages distincts et deux calculs mécaniques.

II.4.2.4. Eprouvette SEC

Pour l'éprouvette Single Edge Crack, nous utilisons le maillage suivant :

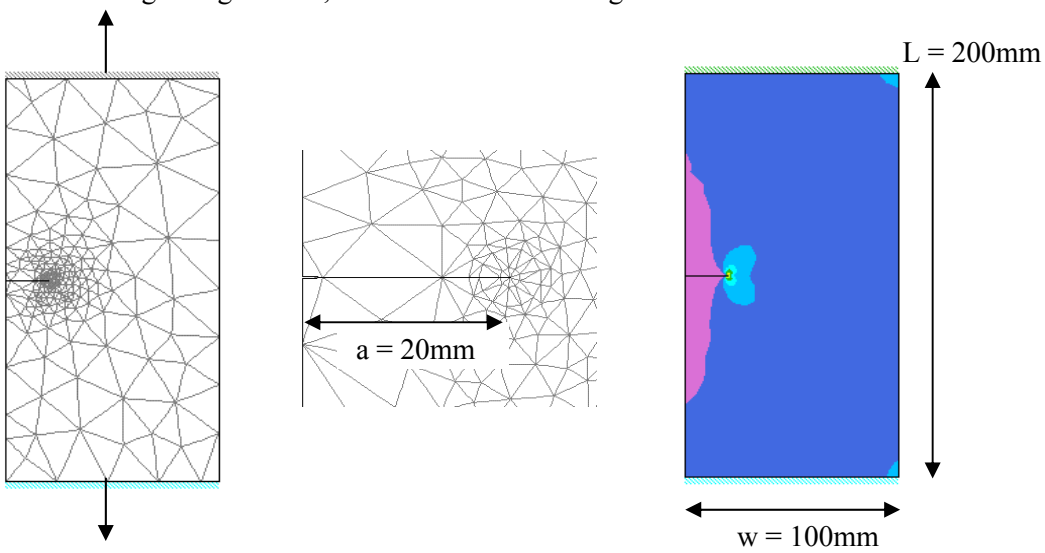


Figure II. 29. Maillage pour l'éprouvette Single Edge Crack

Les résultats obtenus pour les quatre méthodes présentées ci-dessus sont comparés sur le graphe suivant, où le taux de restitution d'énergie *G* est évalué en fonction du déplacement des mors :

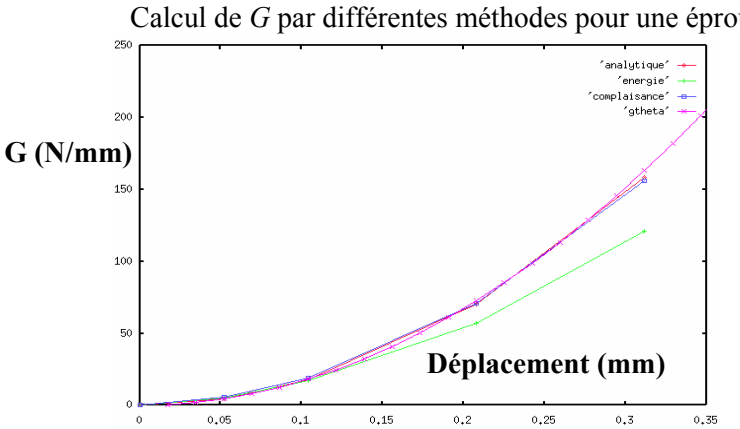


Figure II. 30. *G* en fonction du déplacement des mors pour une éprouvette SEC

La méthode analytique est censée être la référence dans ce genre de cas, et nous comparons donc les autres résultats par rapport à elle. Si la méthode énergétique semble légèrement moins précise, on remarque que la méthode Gθ et la méthode de la complaisance donnent d'excellents résultats.
Cependant, la méthode de la complaisance (tout comme la méthode énergétique) présente deux inconvénients :

- un temps de calcul long, car l'évaluation de *G* nécessite deux maillages et deux résolutions mécaniques ;
- une sensibilité par rapport à la longueur de l'extension de fissure δa. En effet, la méthode énergétique étant basée sur une différenciation infinitésimale de l'énergie, elle sera d'autant plus précise que l'extension de fissure sera petite.

Enfin, la méthode Gθ donne d'excellents résultats, tout en ne nécessitant qu'un seul maillage, et un seul calcul mécanique.

II.4.2.5. Eprouvette DEC

Pour l'éprouvette Double Edge Crack, nous ne modélisons que la partie symétrique de la pièce :

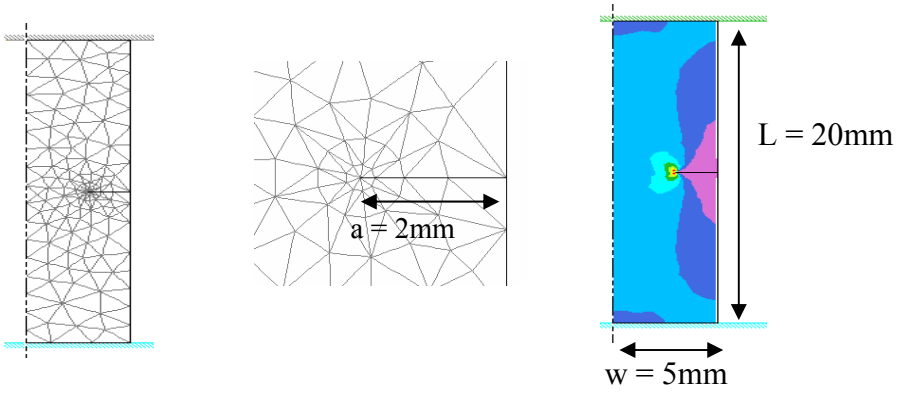


Figure II. 31. Maillage pour l'éprouvette Double Edge Crack

Comme nous pouvons le voir sur la figure suivante, les résultats obtenus pour les 4 méthodes sont très comparables.

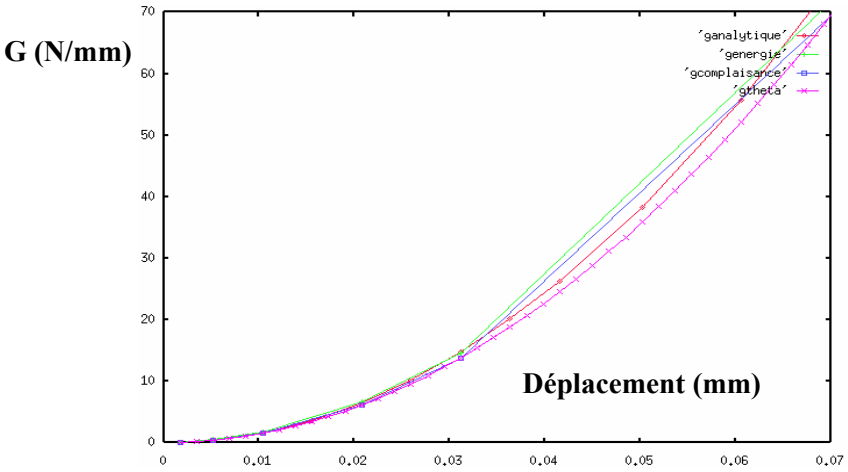


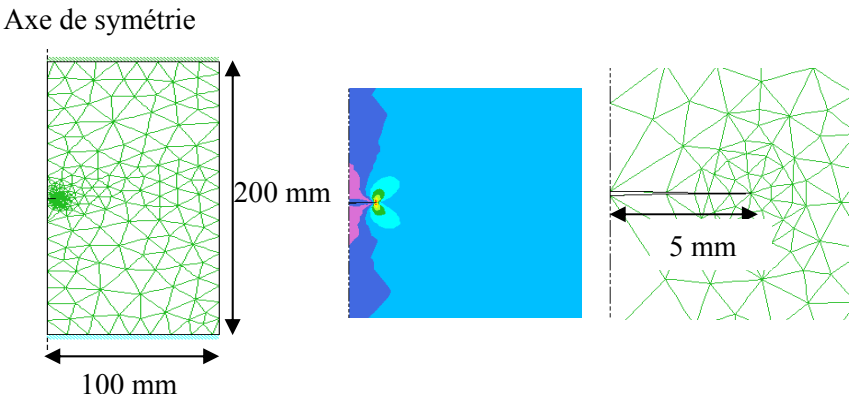
Figure II. 32. *G* en fonction du déplacement des mors pour une éprouvette DEC

La méthode Gθ semble être légèrement plus précise, mais offre surtout l'avantage d'être beaucoup plus rapide.

II.4.2.6. Fissure centrale inclinée

Ce dernier exemple de comparaison concerne une fissure au centre d'une pièce, et inclinée d'un angle β par rapport à l'axe horizontal. Pour 3 angles d'inclinaison différents, nous comparons le taux de restitution d'énergie obtenu par la formule analytique et par la méthode Gθ.
Puis, pour un incrément de déformation donné, nous traçons la courbe représentant le taux de restitution d'énergie en fonction de la direction virtuelle de perturbation infinitésimale définie par l'angle θ.

- Fissure à 0° :



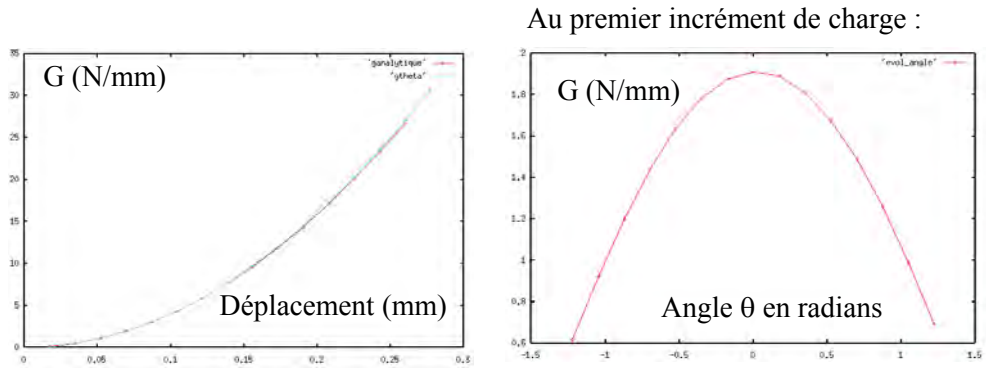


Figure II. 33. *G* pour une fissure horizontale

- Fissure à 30° :

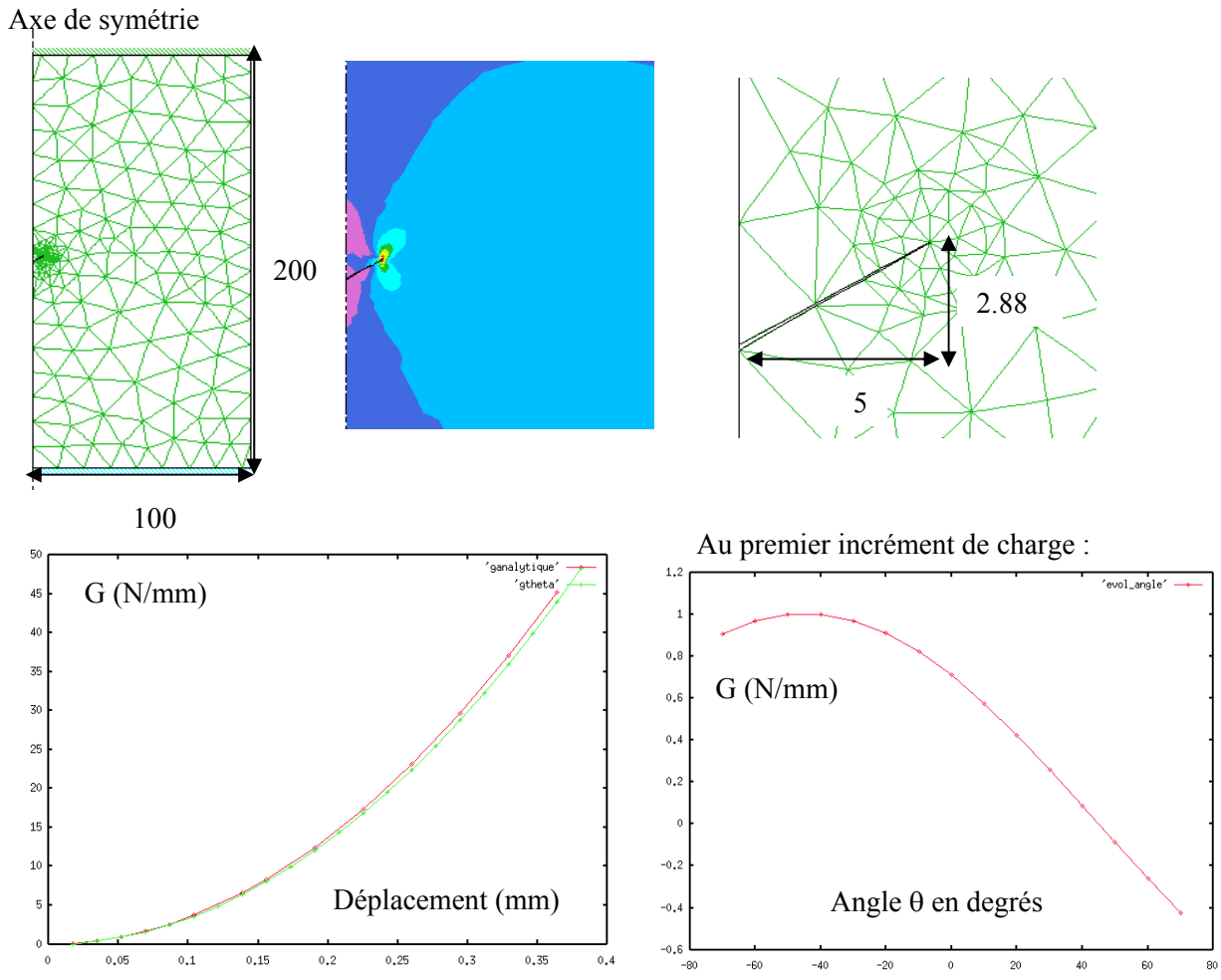


Figure II. 34. *G* pour une fissure inclinée à 30°

- Fissure inclinée à 45° :

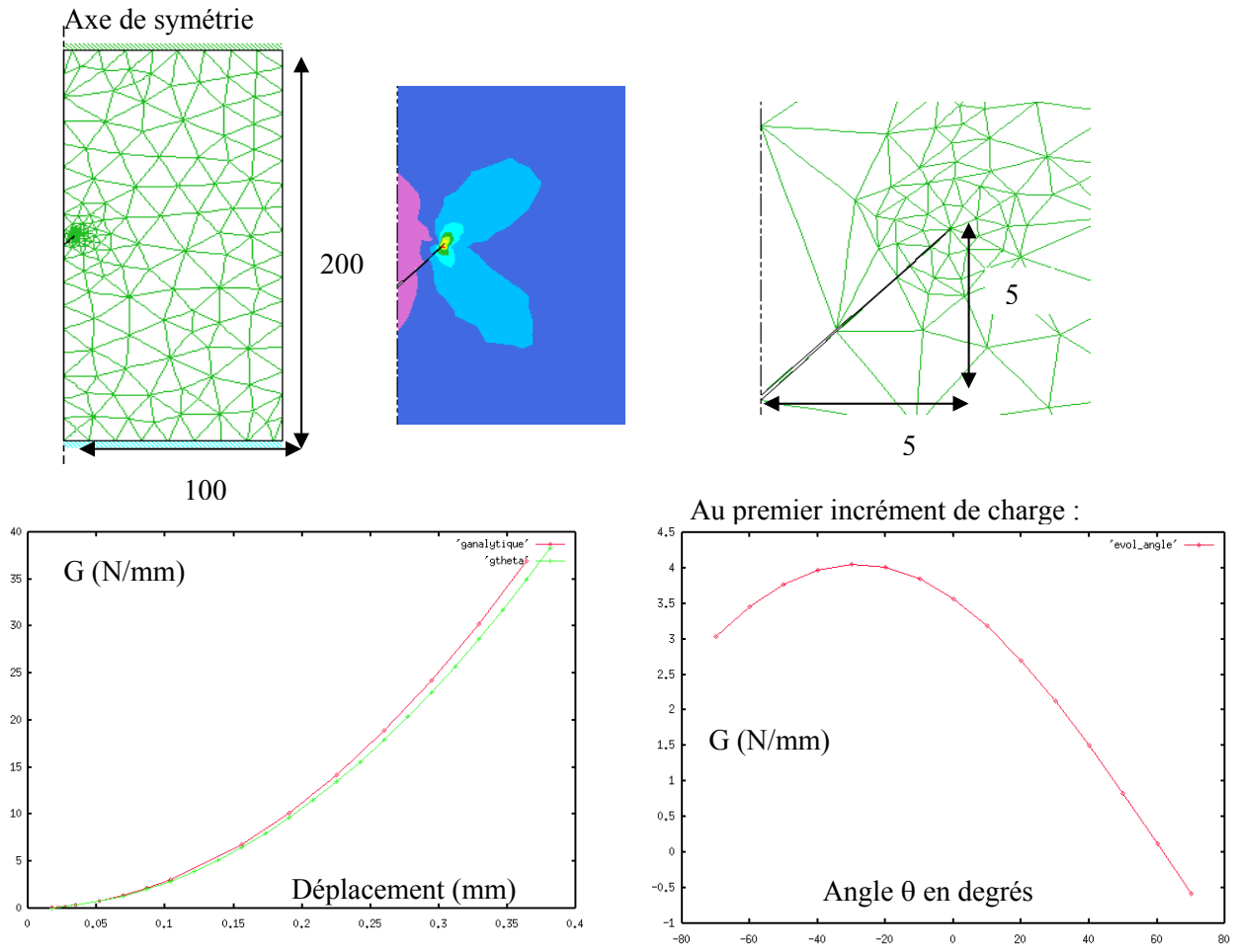


Figure II. 35. *G* pour une fissure inclinée à 45°

Quel que soit l'angle d'inclinaison de la fissure, les résultats obtenus par la méthode Gθ sont excellents. Mais elle permet également de calculer le taux de restitution d'énergie associé à une direction particulière de perturbation. La courbe *G(θ)* correspondante est très régulière, et nous verrons dans le chapitre suivant qu'elle nous permet de déterminer la direction de propagation d'une fissure avec précision.

II.4.3. Influence du maillage pour la méthode Gθ

La méthode Gθ semble donner de très bons résultats. La principale difficulté pour utiliser cette méthode est de pouvoir générer une couronne d'éléments en pointe de fissure. On est alors amené à se poser des questions quant à la sensibilité de la méthode par rapport à cette couronne entourant la pointe de fissure, et plus généralement par rapport au maillage. Pour cela, nous avons représenté ci-dessous les résultats obtenus par la méthode Gθ, sur une éprouvette DEC et pour trois maillages différents :

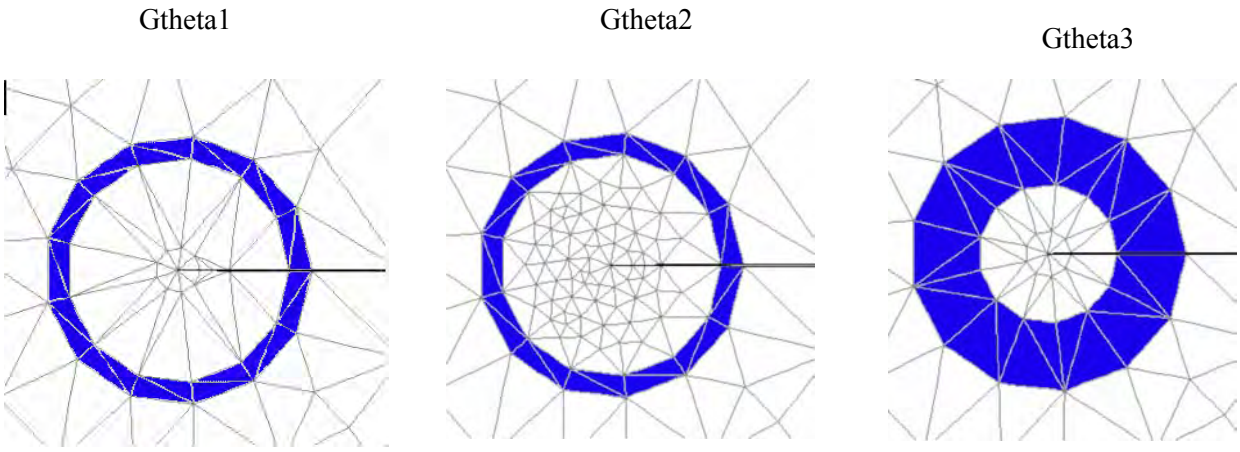


Figure II. 36. 3 maillages différents pour la couronne en tête de fissure

Comme nous pouvons le voir sur le graphe suivant, les résultats obtenus sont tout à fait identiques quel que soit le maillage en pointe de fissure. Pour un déplacement d'outils de 0,02mm, on obtient par exemple des erreurs relatives de l'ordre de 0,12%.
On peut en conclure que la couronne d'intégration n'a pas d'influence sur les résultats obtenus pour un matériau purement élastique.

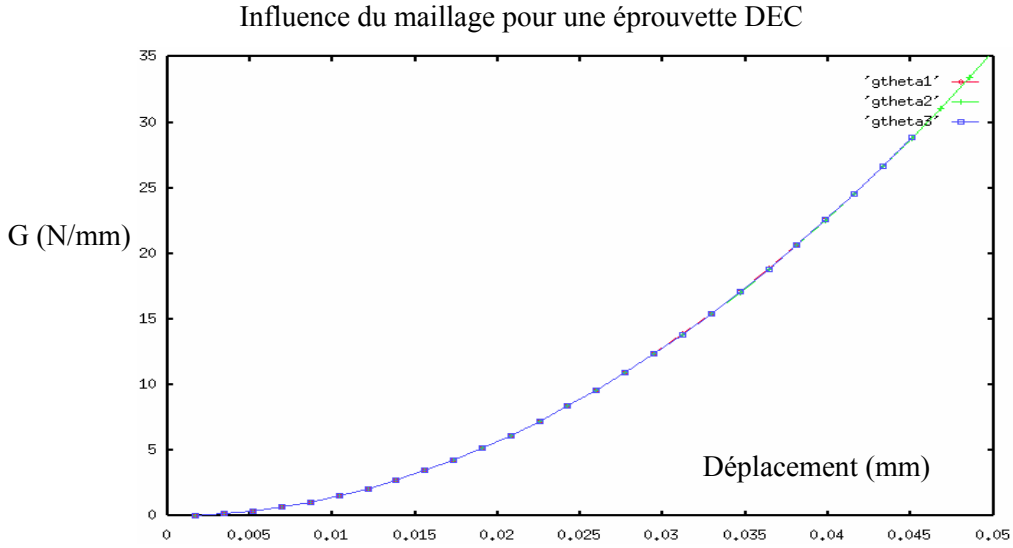


Figure II. 37. Influence du maillage sur le calcul de *G*

Cependant, il sera intéressant de recommencer ce test de sensibilité en élastoplasticité. En effet, la géométrie et la disposition relative de la couronne par rapport à la zone plastique pourra peut-être avoir son influence.

II.4.4. Bilan

Nous avons calculé le taux de restitution d'énergie pour trois géométries d'éprouvettes différentes, et par 4 méthodes de calcul différentes. En élasticité, la solution analytique est la solution de référence. Cette méthode permet d'accéder rapidement aux facteurs d'intensité de contraintes (et donc au taux de restitution d'énergie) à partir de la contrainte appliquée à l'éprouvette. Mais les solutions analytiques n'existent que pour un nombre limité de géométrie d'éprouvettes et de chargement. C'est pourquoi il est nécessaire de développer des méthodes, utilisant les grandeurs calculées lors d'un calcul éléments finis, permettant de calculer le taux de restitution d'énergie. Trois méthodes ont été proposées. Les méthodes de l'énergie et de la complaisance donnent de bons résultats, mais nécessitent deux maillages et deux calculs mécaniques. La méthode Gθ donne des résultats très précis, tout en ne nécessitant qu'un seul maillage et qu'un seul calcul mécanique. Nous avons également montré que les résultats obtenus étaient indépendants du maillage. De plus, il est possible de rajouter plusieurs termes dans l'expression de calcul de G, afin de traiter des cas plus compliqués : matériau élastoplastique, forces extérieures près de la fissure, propriétés du matériau variables avec la température, cas d'une interface bimétallique…

II.5. APPLICATION A L'ADHERENCE D'UN ASSEMBLAGE COLLE

L'obtention de la meilleure adhésion d'un polymère spécifique à un métal est d'une très grande importance dans de nombreuses applications industrielles. Afin de mesurer et de comparer les niveaux d'adhésion atteints, il est bien souvent nécessaire d'effectuer des essais mécaniques permettant de mesurer des paramètres spécifiques tels que le taux de restitution d'énergie. Nous reprenons ici l'éprouvette de clivage (ou DCB : Double Cantilever Beam) Adhésif/Polymère/Acier présentée dans le premier chapitre (Figure I.25.), et nous nous intéressons à la ténacité de cet assemblage. Ce paramètre est généralement évalué à l'aide de calculs analytiques basés sur les hypothèses simplificatrices de la théorie des poutres. Afin de vérifier ces hypothèses, nous effectuons une simulation numérique de l'essai de clivage en prenant en compte les trois matériaux, et sans faire d'hypothèses simplificatrices [Bay et al. 1999].

II.5.1. Description de l'essai

Parmi les nombreuses approches proposées pour déterminer la ténacité d'un assemblage, et particulièrement le taux de restitution d'énergie, la méthode de la complaisance (rapport de l'ouverture w sur la charge P, $C=w/P$) est basée sur l'équation : $G = \frac{P^2}{2b}\frac{dC}{dc}$, où b est la largeur de l'éprouvette, et C est considérée comme fonction de la longueur de pré-fissure c. Cependant, une telle méthode dépend fortement de la bonne précision sur la détermination de la longueur de pré-fissure c. Or cette détermination, qui nécessite l'utilisation d'un microscope optique mobile, s'avère difficile et peu précise.

Afin de s'affranchir de cette difficulté, Arnott et Kindermann [Arnott et al. 1995] ont proposé un essai à vitesse constante sur une éprouvette DCB pré-fissurée sur une longueur c_0 (Figure II.38.a). L'avantage de leur méthode provient du fait qu'ils déterminent le taux de restitution d'énergie en fonction du déplacement du point de chargement w, plutôt que de la longueur de fissure c. Lors d'un tel essai, deux étapes peuvent être distinguées (Figure II.38.b) :

- Lors de la première étape, la force croît linéairement avec l'ouverture w (partie 1 sur la figure II.38.b). Ce qui signifie que le taux de restitution d'énergie de l'éprouvette avec une pré-fissure de longueur c_0 est trop faible pour amorcer la propagation (on se situe en dessous de la courbe de résistance). On peut alors relier la force appliquée à l'ouverture à l'aide de la raideur de l'éprouvette $S=S(c_0)$ ou de sa complaisance $C=C(c_0)$: $P = S.w = \frac{w}{C}$.

Dans ce cas, l'énergie élastique W_e stockée dans l'éprouvette pour une longueur de pré-fissure c est donnée par : $W_e = \frac{1}{2} Pw = \frac{w^2}{2} S(c)$.

- Dans la seconde étape, la force appliquée décroît rapidement tandis que l'ouverture et la longueur de fissure augmentent conjointement. Le taux de restitution d'énergie peut alors être calculé à chaque instant par la relation :

$$G = -\frac{1}{b}\frac{\delta W_e(c,w)}{\delta c} = -\frac{w^2}{2b} S'(c) = \frac{P^2}{2b} C'(c)$$

où S' (respectivement C') est la dérivée de la raideur (respectivement la complaisance) par rapport à la longueur de fissure c.

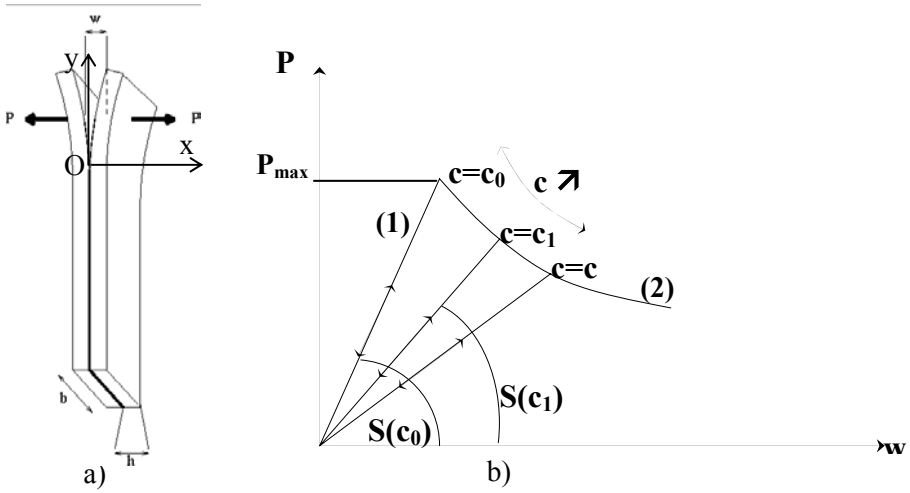


Figure II. 38. (a) Eprouvette DCB – (b) courbe force-déplacement d'un chargement à vitesse constante

Ainsi, la valeur du taux de restitution d'énergie critique G_c, caractérisant l'amorçage pour une pré-fissure de longueur c_0, peut être déterminée à partir de la complaisance $C(c_0)$ par trois méthodes.

II.5.1.1. La méthode expérimentale

Cet essai de clivage a été réalisé sur plusieurs éprouvettes, et avec des longueurs de pré-fissures différentes [Scotto-Sheriff 1998]. Pour chaque essai une courbe Force/Déplacement, semblable à celle proposée sur la figure II.38.b, a été enregistrée. La première partie de cette courbe (pente élastique) nous permet de déterminer la complaisance $C(c_0)$, ainsi que la force maximale à rupture $P_{max}(c_0)$. Le taux de restitution critique $G_c(c_0)$ est alors calculé par la relation :

$$\boxed{G_c(c_0) = \frac{P_{\max}^2(c_0)}{2b}\frac{dC(c_0)}{dc}}$$

II.5.1.2. La méthode analytique

Comme pour la plupart des méthodes analytiques, il nous faut faire certaines hypothèses pour obtenir une solution analytique. Nous considérons ici une éprouvette constituée de polymère et d'acier d'épaisseurs respectives h_p et h_s. Nous supposons que le déplacement du point de chargement w est négligeable devant l'épaisseur de l'adhérent, qui est lui même négligeable devant la longueur de fissure c : $w << h_p+h_s << c$. Nous supposons de plus que les déformations sont purement élastiques, à l'exception de la pointe de fissure où l'on admet une plasticité confinée. En s'appuyant sur la théorie des poutres minces, et en faisant l'hypothèse des petites déformations et des petits déplacements, on peut alors exprimer la complaisance de la structure en fonction de la longueur de fissure c, du module d'Young de l'adhérent E et du moment d'inertie I de la poutre : $C(c_0) = \frac{2c_0^3}{3EI}$.

Comme les rapports des modules d'Young et des épaisseurs du polymère sur l'acier sont plus petits que 1, on montre que le comportement mécanique de l'adhérent est, au 1er ordre, celui de l'acier [Scotto-Sheriff 1998]. Le moment d'inertie est obtenu grâce aux hypothèses initiales, et il peut s'exprimer : $I \approx \frac{bh_s^3}{12}$, où h_s est la hauteur de l'acier.

Après simplifications, on accède au taux de restitution d'énergie critique par la relation :

$$G_c(c_0) = \frac{\left(c_0 P_{\max}(c_0)\right)^2}{bE_s I}$$

La principale limite d'un tel modèle est qu'il ne prend pas en compte les déformations du matériau après la pointe de fissure (y<0 sur la figure II.38.a). Les résultats obtenus sont alors très peu précis pour de petites longueurs de pré-fissures. En s'appuyant sur le modèle de Kanninen, Maugis [Maugis 1999] utilise le modèle de fondation élastique de Wrinkler pour décrire la distribution de la contrainte normale le long de l'axe de symétrie. On peut alors se ramener à des résultats plus précis sur la complaisance calculée pour de petites pré-fissures en l'exprimant comme une fonction polynomiale de degré 3 de la longueur de fissure réduite $c^*=c/h$. Nous ne rentrons pas dans les détails de cette approche, qui est exposée dans [Bay et al. 1999] et [Scotto-Sheriff 1998].

II.5.1.3. La méthode numérique

La méthode numérique consiste à calculer le taux de restitution d'énergie en se basant sur sa définition : l'énergie nécessaire pour faire progresser la fissure d'une longueur unité. Nous avons donc réalisé plusieurs simulations numériques correspondant à plusieurs longueurs de pré-fissures (Figure II.39.). La simulation tient compte des rhéologies exactes des différents matériaux et ne présente donc pas d'hypothèses simplificatrices telles que celles introduites pour l'approche analytique.

Connaissant la force à rupture (déterminée de façon expérimentale) pour une éprouvette de longueur de pré-fissure c_0, on détermine l'énergie $W(c_0)$ stockée dans l'éprouvette pour cette force. On effectue le même calcul pour une pré-fissure de longueur c_0+dc, et on détermine finalement le taux de restitution d'énergie par la relation :

$$G_c(c_0) = \frac{W(c_0 + dc) - W(c_0)}{b.dc}$$

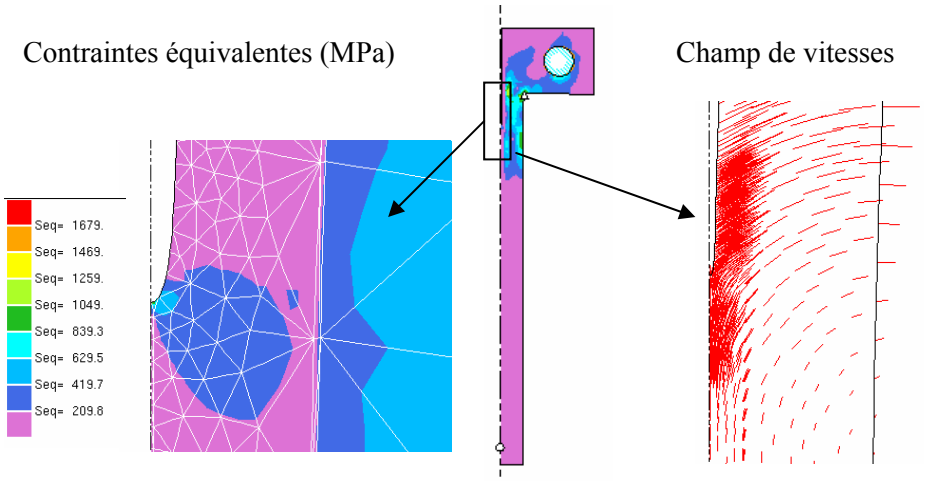


Figure II. 39. Contraintes équivalentes et champ de vitesses en pointe de fissure

II.5.2. Résultats

Nous allons comparer dans cette partie les résultats obtenus par les différentes méthodes. Nous montrerons d'abord les écarts importants qui apparaissent sur le calcul de la complaisance, avant de nous intéresser au taux de restitution d'énergie.

II.5.2.1. Complaisance

Les courbes expérimentales obtenues par Scotto-Sheriff [Scotto-Sheriff 1998] mettent bien en évidence les deux étapes intervenant dans l'essai de clivage. La première étape nous permet de mesurer la complaisance de l'assemblage à 10% près. Cette complaisance est comparée dans le tableau II.1. à celle obtenue de façon analytique pour différentes longueurs de pré-fissures dites nominales :

Longueurs nominales de pré-fissures c (mm)	5	10	15	27,5
Complaisances expérimentales C_{exp} (10^3m.MN^{-1})	53	77	111	450
Complaisances analytiques C_{ana} (10^3m.MN^{-1})	2,5	20	67	410

Tableau II. 1. Complaisances expérimentales et analytiques

On remarque que les complaisances expérimentales sont bien supérieures aux complaisances analytiques, surtout pour de petites longueurs de pré-fissures. Cela signifie que les longueurs de pré-fissures tendraient à être supérieures aux longueurs nominales. Cependant, la méthode de préparation des échantillons entraînerait plutôt une diminution de cette longueur.
De manière à analyser ce phénomène, plusieurs simulations numériques ont été effectuées, et les complaisances obtenues ont été comparées aux complaisances analytiques (tableau II.2.).

Longueurs nominales de pré-fissures c (mm)	0	2	4	5	6	8	10	15	20	25	27,5
Complaisances numériques C_{num} (10^3m.MN^{-1})	34	45	57	65	76	118	159	357	714	1293	1667
Complaisances analytiques C_{ana} (10^3m.MN^{-1})	0	0,1	1,3	2,5	3,4	10	20	67	159	311	410

Tableau II. 2. Complaisances numériques et analytiques

Les complaisances numériques sont elles aussi bien supérieures aux complaisances analytiques. Le rapport de complaisance diminue avec la longueur de pré-fissure, mais il reste cependant très important. Ainsi, les hypothèses utilisées dans le cadre de l'approche analytique sont trop sévères pour ce type d'étude.
La complaisance numérique est supérieure à celle obtenue de façon expérimentale. Cela signifie que la longueur de pré-fissure réelle est plus petite que la longueur nominale, c'est-à-dire celle que l'on avait voulu réaliser expérimentalement. Cette différence augmente avec des longueurs de fissures élevées. Cela s'explique par un phénomène de cicatrisation qui permet le recollement d'une partie de la fissure durant la dernière partie de l'élaboration de l'éprouvette [Scotto-Sheriff 1998].

II.5.2.2. Taux de restitution d'énergie

Le but étant d'évaluer la ténacité d'un tel assemblage, nous avons déterminé le taux de restitution d'énergie critique pour différentes longueurs de pré-fissures. Il est obtenu de façon expérimentale en traçant la courbe de l'ouverture w en fonction de l'inverse de la force au carré P^{-2}. Cette courbe, linéaire par morceaux [Scotto-Sheriff 1998], nous permet de remonter au taux de restitution d'énergie critique G_c^{exp}, en calculant la pente. Les résultats obtenus pour des longueurs de pré-fissures comprises entre 5 et 15mm sont les suivants :

$$65 \leq G^{exp} \text{ (J.m}^{-2}) \leq 102$$

Le calcul numérique de G est obtenu en traçant la courbe de l'énergie stockée dans l'éprouvette en fonction de l'effort appliqué pour différentes longueurs de pré-fissures (Figure II.40.). Pour chacune de ces courbes, on note l'énergie W correspondant à la force à la rupture P_{max} obtenue de façon expérimentale. La figure II.40. montre la détermination de cette énergie pour des pré-fissures de 5, 10 et 15mm.

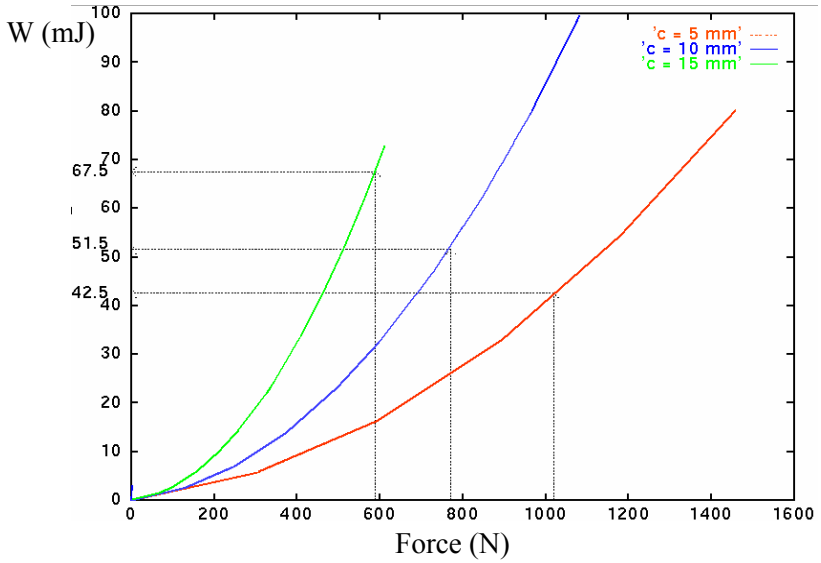


Figure II. 40. Courbe énergie/force pour différentes longueurs de pré-fissures

Les énergies ainsi déterminées sont stockées dans le tableau II.3..

c (mm)	P_{max} (N)	W (mJ)
5	1000~1030	41,1~43,8
10	750~800	47,8~55,2
15	580~600	65~70

Tableau II. 3. Force à la rupture et énergie totale du système pour différentes longueurs de pré-fissures

Un simple calcul de différenciation nous permet alors de déterminer la valeur du taux de restitution numérique :

$$G^{num} \approx -\left(\frac{W_e(c+\delta c) - W_e(c)}{b\delta c}\right) \quad \text{et donc} \qquad 60 \le G^{num}\ (\text{J.m}^{-2}) \le 106$$

II.5.3. Bilan

Le but de cette application était de calculer la ténacité d'un assemblage collé. Pour cela, nous avons comparé les résultats obtenus par trois méthodes : expérimentale, analytique et numérique.
L'étude sur la complaisance est très intéressante car elle montre l'importance de l'approche numérique dans ce type d'applications. En effet, la modélisation numérique ne fait intervenir aucune hypothèse simplificatrice. Elle permet d'invalider les hypothèses (trop sévères) de base de l'approche analytique (surtout pour de petites longueurs de pré-fissures). Mais elle a également permis de mettre en évidence les erreurs de longueurs de pré-fissures réalisées expérimentalement. Les valeurs nominales étaient supérieures aux valeurs de pré-fissures réelles à cause du recollement d'une partie de la pré-fissure.
Enfin les résultats obtenus pour le calcul expérimental et numérique du taux de restitution d'énergie sont tout à fait comparable. Rappelons cependant que la méthode numérique de différenciation de l'énergie utilisée n'est peut-être pas la plus précise. Il serait intéressant d'appliquer la méthode Gθ à cette application. Malheureusement, les difficultés numériques (couronne d'intégration coupant les interfaces entre plusieurs matériaux ainsi que l'axe de symétrie) ne nous ont pas encore permis de réaliser un tel calcul.

II.6. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté les outils numériques nécessaires à une modélisation précise d'une fissure dans un maillage. Nous avons montré les singularités que pouvait engendrer une telle fissure. La bonne maîtrise de la structure du maillage est indispensable si l'on veut obtenir un calcul précis des champs mécaniques. Pour cela, nous avons montré l'intérêt des éléments concentriques et des éléments singuliers à la pointe de la fissure.
L'étude énergétique d'une pièce fissurée s'effectue à l'aide du taux de restitution d'énergie. Il existe de nombreuses façons de calculer ce paramètre. Parmi ces méthodes, la méthode Gθ est à la fois rapide, précise, et facilement généralisable. Cependant, son utilisation nécessite la présence d'une couronne d'éléments entourant la pointe de fissure. Encore une fois, la technique de maillage que nous avons mis en place permet de générer facilement cette structure particulière en pointe de fissure. A l'aide de cette couronne d'éléments, nous avons montré la bonne précision de la méthode, ainsi que son indépendance vis-à-vis du maillage.
Enfin, nous avons choisi d'étudier la ténacité d'un assemblage collé adhésif/polymère/acier à travers sa réponse énergétique à une sollicitation mécanique. Le calcul numérique du taux de restitution d'énergie a été comparé avec succès au résultat expérimental. Mais la simulation a surtout permis de mettre en évidence les limitations de l'approche analytique pour ce type d'essai, ainsi que les erreurs qui peuvent être commises lors de l'approche expérimentale.

Après avoir ainsi appliqué la technique de maillage multi-domaines à l'étude d'une fissure statique, il nous a semblé intéressant de poursuivre par la propagation quasi-statique d'une fissure dans un maillage.

CHAPITRE III

MODELISATION DE LA PROPAGATION QUASI-STATIQUE DE FISSURES

III. Table des Matières

III.1. Etude bibliographique *88*

III.1.1. Critères d'amorçage **88**

III.1.2. Critères de bifurcation **89**

III.1.3. Critères de stabilité **90**

III.1.4. Méthodes numériques utilisées **91**

III.2. Amorçage d'une fissure *94*

III.2.1. Les outils numériques nécessaires à la localisation et à l'amorçage d'une fissure **94**

III.2.2. Amorçage en contrainte critique **96**

III.2.3. Amorçage en endommagement critique **96**

III.2.4. Application au compactage de coques **97**

III.3. Propagation d'une fissure *99*

III.3.1. Critère de la contrainte normale maximale **100**

III.3.2. Critère de la densité d'énergie de déformation minimale **102**

III.3.3. Critère du taux de restitution d'énergie maximal **104**

III.3.4. Comparaison **105**

III.3.4.1. Plaque pré-fissurée de façon oblique – fissure débouchante 105

III.3.4.2. Eprouvette trouée pré-fissurée 109

III.3.4.3. Temps de calcul 114

III.3.5. Bilan **115**

III.4. Applications et développements spécifiques *116*

III.4.1. Plaque trouée pré-fissurée **116**

III.4.2. Poutres en flexion et formation de débris **117**

III.4.2.1. Poutre en flexion 3 points 118

III.4.2.2. Poutre en flexion 4 points 118

III.4.2.3. Formation de débris 119

III.4.2.4. Bilan 120

III.4.3. Procédés à fort cisaillement et contact matière-matière **121**

III.4.3.1. Usinage 121

III.4.3.2. Découpage de tôles 123

III.4.3.3. Le contact des lèvres d'une fissure 124

III.4.4. Propagation dans les structures multimatériaux **125**

III.4.4.1. Mécanique de la rupture de structures multimatériaux 125

III.4.4.2. Eprouvette bicouche pré-fissurée 129

III.4.4.3. Propagation dans un composite 132

III.5. Conclusion *134*

III.1. ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

Dans le chapitre précédent, nous avons montré comment la modélisation mécanique d'un milieu fissuré permet, d'une part de caractériser la singularité du champ des contraintes en fond de fissure à travers les facteurs d'intensité des contraintes, et d'autre part d'étudier de façon énergétique le solide fissuré à l'aide du taux de restitution d'énergie. Dans ce chapitre, nous allons voir que ces paramètres gouvernant la fissuration permettent également de prédire l'évolution de la fissure jusqu'à la ruine de la structure.
L'évolution d'une fissure dépend de plusieurs paramètres intrinsèques au matériau, tels que les propriétés géométriques et mécaniques de la structure, ou extrinsèques comme l'étendue de cette fissure ou la nature des charges appliquées. Tous ces paramètres doivent être pris en compte dans la simulation numérique, de façon à permettre l'étude de la propagation quasi-statique d'une ou de plusieurs fissures. On pourra alors se poser les questions suivantes : quand la fissure va-t-elle se propager, puis (si le chargement ou la géométrie de la structure n'est pas symétrique) dans quelle direction, et enfin, va-t-on aboutir à une propagation stable ou instable ? Pour répondre à ces questions, on définit respectivement des critères d'amorçage de fissures, des critères de bifurcation, et des critères de stabilité.

III.1.1. Critères d'amorçage

Ces critères permettent de déterminer à quel moment et à quel endroit la fissure va s'amorcer. Ils sont généralement basés sur une comparaison des paramètres de fissuration (K, G, J, …) à des valeurs critiques de ces paramètres.

Pour une approche locale, et en mode I pur, il y aura amorçage lorsque le paramètre K_I atteint une valeur critique K_{IC} appelée **ténacité** du matériau.
De même, au niveau énergétique, Griffith [Griffith 1920] a proposé une valeur limite du taux de restitution d'énergie, appelée **résistance à la fissuration** et notée G_C. Il y aura alors propagation lorsque G atteint la valeur critique G_C qui représente l'énergie nécessaire à la création de nouvelles surfaces libres en fond de fissure. Remarquons que pour un matériau élastique fragile, G_C ne dépend que de l'énergie superficielle intrinsèque 2γ du matériau : $G_C=2\gamma$.
De même que pour G ou K, il existe une caractéristique intrinsèque du matériau δ_C, qui représente l'ouverture de fissure critique (CTOD) que peut subir le matériau avant qu'il n'y ait propagation.
De son côté, Sih [Sih 1974] a introduit un critère basé sur la densité d'énergie de déformation N minimale. Après avoir déterminé l'angle θ_0 de bifurcation, il suppose que la propagation a lieu dans cette direction lorsque N_{min} atteint une valeur critique N_C caractéristique du matériau. N_C peut être reliée à K_{IC} en se plaçant en mode d'ouverture pur et en identifiant $N=N_C$ à $K_I=K_{IC}$.
Yehia [Yehia et al. 1988] pour sa part, a exprimé le rayon r_p de la zone plastique confinée en fond de fissure. Puis, il a considéré que la propagation s'effectuait lorsque r_p atteignait une valeur critique caractéristique du matériau r_{pc}, appelée rayon critique.

Enfin, il est également possible de localiser l'amorçage à l'aide d'une approche basée sur l'endommagement. Lors d'un chargement, les lois d'endommagement permettent de modéliser la dégradation du matériau et de déterminer le lieu d'endommagement maximal. Il est alors possible de déterminer un endommagement critique, caractéristique au matériau étudié, et au-delà duquel une macro-fissure s'amorce.

III.1.2. Critères de bifurcation

Lorsque le chargement ou la géométrie d'une structure n'est pas symétrique par rapport à l'axe de la fissure, la rupture se présente en mode mixte, et la fissure ne se propage pas de façon rectiligne. Il est alors nécessaire d'utiliser des critères de bifurcation, afin de déterminer la nouvelle direction de propagation.

- **Critère de la contrainte normale maximale :** Proposé par Erdogan et Sih [Erdogan et al. 1963], ce critère est basé sur les hypothèses suivantes :

➥ la fissure se propage dans la direction pour laquelle la contrainte de traction circonférentielle $\sigma_{\theta\theta}$ est maximale.

➥ l'accroissement de fissure se produit lorsque $\sqrt{2\pi}\sigma_{\theta\theta} = K_{IC}$.

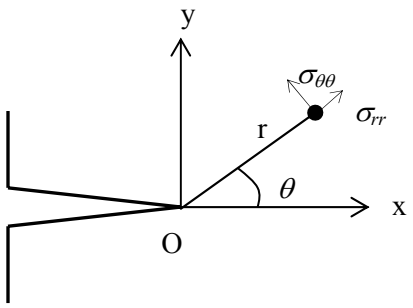


Figure III. 1. Fond de fissure

Finalement, l'angle de bifurcation de la fissure est solution du système :

$$K_I \sin(\theta) + K_{II}(3\cos(\theta) - 1) = 0 \quad \text{sous les conditions} \begin{cases} K_{II} \sin(\theta/2) < 0 \\ \theta \in]-\pi;\pi[\\ K_I > 0 \end{cases}$$

Ce critère permet également de montrer qu'il existe un angle limite, correspondant au cas du mode de cisaillement pur, au-delà duquel la fissure ne peut se propager : θ_0=±70.54°. Cette technique a été étendue aux matériaux anisotropes par Saouma et al. [Saouma et al. 1987].

Sa facilité de mise en œuvre, entièrement basée sur la notion de facteurs d'intensité de contraintes, le rend très utilisé. Il peut cependant paraître discutable dans la mesure où le champ de contraintes locales en fond de fissure est seulement un champ approché. De plus, l'existence d'une zone non élastique en fond de fissure modifie également la répartition de contraintes. Sa précision est donc fortement liée à la finesse du maillage en pointe de fissure, ainsi qu'à la plus ou moins bonne

modélisation de la zone élastoplastique par le code. C'est pourquoi les critères énergétiques, faisant intervenir des grandeurs globales au niveau de la structure, peuvent paraître plus appropriés.

***Remarque* :** Il existe également un **critère basé sur la déformation maximale** [Maiti et al. 1984]. La propagation de la fissure se manifeste lorsque la déformation ε_θ atteint une valeur critique $\varepsilon_{\theta c}$ (déterminée en mode d'ouverture pure et reliée à K_{Ic}).

- **Critère de la densité d'énergie de déformation minimale :** Dans ce critère énergétique, Sih [Sih et al. 1974] considère que l'énergie de déformation s'oppose à la croissance de la fissuration. Celle-ci cherchera donc à se propager dans la direction où la densité d'énergie de déformation N est minimale.

L'angle de déviation θ_0 est alors défini par : $\left(\frac{\partial N}{\partial \theta}\right)_{\theta_0} = 0$ sous la condition $\left(\frac{\partial^2 N}{\partial \theta^2}\right)_{\theta_0} \geq 0$

- **Critère du Taux de restitution d'énergie maximal :** Parmi tous les accroissements virtuels et cinématiquement admissibles, l'accroissement réel est celui qui maximise le taux de restitution d'énergie. En calculant le taux de restitution d'énergie pour différentes directions de propagation éventuelles de fissure, on détermine celle pour laquelle G est maximal.

- **Comparaison** : Plusieurs études comparatives ont été effectuées sur ces différents critères [Maiti et al. 1984], [Elouard 1993]. Elles montrent une bonne corrélation au niveau de l'angle de déviation et du chargement critique. Maiti montre cependant que les chemins de fissuration instables peuvent différer pour des fissures inclinées et pour des chargements en cisaillement pur.

III.1.3. Critères de stabilité

Il existe deux types de propagation :

- La **propagation stable** : après son amorçage, la fissure s'arrête, nécessitant plus d'énergie pour reprendre sa propagation[1]. Ce mode de propagation n'est a priori pas dangereux ;
- La **propagation instable** : après son amorçage, la fissure poursuit sa progression en l'absence de toute modification des paramètres de la sollicitation. Cette instabilité conduit alors à la ruine de la structure.

L'analyse de la stabilité de propagation est fondée sur le bilan énergétique :

[1] La stabilité de la propagation dépend essentiellement du type de sollicitation. Ainsi, le problème de stabilité sous chargement quasi statique ne se pose, en pratique, que dans le cas d'un chargement imposé ; en déplacement imposé, la propagation de fissure est presque toujours stable.

$$I = W_{ext} + W_e + W_d \quad \text{où} \quad \begin{cases} I \text{ est l'énergie interne du système} \\ W_{ext} \text{ représente le travail des forces extérieures} \\ W_e \text{ est l'énergie de déformation} \\ W_d \text{ est l'énergie dissipée lors d'une extension de fissure} \end{cases}$$

Alors, pour une fissure de longueur a donnée, et un incrément de propagation da, la propagation sera

$$\begin{cases} \text{stable si} \quad \dfrac{d^2 I}{da^2}(a) < 0 \\ \text{instable si} \quad \dfrac{d^2 I}{da^2}(a) > 0 \end{cases} .$$

Pour étudier la stabilité d'une propagation de fissures, plusieurs méthodes ont été proposées. Parmi ces méthodes, la notion de courbe de résistance revient souvent.

La **courbe de résistance**, ou encore **courbe-R**, traduit l'évolution du taux critique de restitution de l'énergie (ou de J) en fonction de la longueur de la fissure. Elle est déterminée de façon expérimentale, et permet de caractériser la propagation stable d'une fissure dans un matériau donné. Pour des matériaux fragiles, cette courbe (peu ou pas utilisée) est réduite à une droite (en déformation plane) puisque dans ce cas le taux de restitution d'énergie critique G_c, ou plus précisément la ténacité K_{Ic}, ne dépend pas de la longueur de fissure (Cf. Annexe C).
La courbe-R, introduite plus particulièrement pour les matériaux ductiles, est une caractéristique intrinsèque du matériau. La condition de rupture fragile $G \geq 2\gamma$ doit être remplacée par une condition de rupture ductile, prenant en compte le fait que la résistance du milieu fissuré est ici une fonction de la longueur de fissure a :

$$\begin{cases} G < G_c & \text{pas de propagation} \\ G = G_c \text{ et } \dfrac{\partial G}{\partial a} < \dfrac{\partial G_c}{\partial a} & \text{propagation stable} \\ G = G_c \text{ et } \dfrac{\partial G}{\partial a} \geq \dfrac{\partial G_c}{\partial a} & \text{propagation instable} \end{cases}$$

De même, Paris et al. [Paris et al. 1979] ont proposés d'étudier la stabilité de la propagation à travers un paramètre T, appelé **module de déchirement**, qui est la dérivée de l'intégrale J par rapport à la longueur de la fissure a (Cf. Annexe C).

III.1.4. Méthodes numériques utilisées

De nombreuses méthodes ont été proposées et développées pour étudier la propagation d'une fissure : méthode des différences finies, équations intégrales (méthode des éléments frontière [Bush 1999]), puis méthode des éléments finis. Récemment, quelques auteurs ont proposé des méthodes novatrices.

On peut citer par exemple la méthode sans maillage (meshless) « Element-Free Galerkin Method » proposée par Belytschko et al. en 1994, et appliquée à la mécanique de la rupture par la suite [Belytschko et al. 1994]. Dans ces méthodes, l'interpolation est réalisée uniquement à l'aide de nœuds et de la surface de la pièce, ce qui offre l'avantage de propager des fissures sans nécessiter de remaillage. Rashid a également proposé une approche intéressante (Arbitrary Local Mesh Replacement Method [Rashid 1998]), basée sur la méthode des éléments finis, et consistant à superposer deux maillages. Un maillage de la pièce, qui ne prend pas en compte la fissuration, et un maillage circulaire centré sur la pointe de fissure, et qui va se déplacer en même tant qu'elle. Cette méthode s'avère être assez rapide, mais reste pour l'instant confinée aux matériaux élastiques, et pose des problèmes pour l'étude de plusieurs fissures.
La méthode des éléments finis reste finalement la méthode la plus utilisée, car son domaine d'application est beaucoup plus étendu : matériaux à comportement non-linéaire, problèmes de contact, grandes déformations, couplages thermo-mécaniques, etc… De nombreux auteurs l'ont utilisé dans le cadre de la mécanique de la rupture, et on peut distinguer trois catégories principales [Jirásek 1999] :

- Pour les **modèles continus**, le comportement du matériau est décrit par une relation contrainte-déformation. Les méthodes basées sur la notion d'**endommagement** [Gurson 1977], [Rousselier 1987] appartiennent à ces modèles. Des lois, basées sur des paramètres micro-mécaniques du matériau, sont liées a son comportement et permettent de modéliser la fissuration en faisant chuter les propriétés mécaniques dans la zone endommagée. Cependant, cette approche peut conduire à des dégénérescences importantes du maillage en grandes déformations. Les modèles « **smeared crack** », développés spécifiquement pour l'étude de pièces en béton sous tension, sont également basés sur une décomposition de la déformation totale en une partie élastique, et une partie inélastique [Rashid 1968]. Ces deux parties correspondent respectivement à la déformation élastique du matériau non fissuré, et à la déformation inélastique due à la fissuration. La partie élastique est gouvernée par une loi reliant contrainte et déformation élastique, comme la loi de Hooke. La partie inélastique correspond à la déformation due à l'ouverture de micro-fissures, ces dernières étant amorcées lorsque les contraintes atteignent une valeur critique. Ces modèles sont cependant affectés par un blocage en contrainte car une fois la micro-fissure introduite, son orientation est fixée. Les « **rotating crack model** », introduits par Gupta [Gupta et al. 1984], remédient à ce problème en autorisant un réajustement permanent de l'orientation de la fissure en fonction des sollicitations. On peut également citer les « **microplane models** » [Bazant et al. 1988], basés non pas sur des paramètres tensoriels, mais sur les projections des tenseurs (contrainte et déformation) sur des plans définis.

- Dans les **modèles mixtes**, on enrichit la description mécanique des milieux continus par des discontinuités de déplacement correspondant aux fissures macroscopiques. La partie continue du solide est décrite par une loi reliant le tenseur des contraintes au tenseur des déformations, tandis que les discontinuités sont introduites à partir de critères d'amorçage et de propagation de fissures, propres à la mécanique de la rupture. Le « **fictitious crack model** » proposé par Hillerborg et al. [Hillerborg et al. 1976] définit une loi de traction-séparation qui traduit la décohésion progressive le long de la fissure. L'**approche discrète**, quant à elle, consiste à modéliser les discontinuités en

propageant des fissures réelles à l'intérieur du maillage [Elouard 1993], [Červenka 1994], [Bouchard et al. 2000a]. Une telle approche permet de modéliser finement la propagation des fissures, mais nécessite plusieurs remaillages. Certains auteurs ont proposé récemment l'«**embedded crack approach** », consistant à introduire ces discontinuités à l'intérieur même des éléments [Dvorkin et al. 1990].

- Les **modèles discrets** (à ne pas confondre avec l'approche discrète présentée ci-dessus) ne sont pas basés sur une description continue du solide, mais sont plutôt constitués d'assemblages de barres, poutres ou ressorts. Ces entités élémentaires peuvent permettre de modéliser des structures complexes à partir d'éléments simplifiés, ou encore de représenter les liaisons à l'échelle microstructurale du matériau. La rupture est alors prise en compte par la rupture d'une de ces entités élémentaires.

Les outils développés à partir du mailleur de Forge2 Multimatériaux nous ont tout de suite orientés vers l'approche discrète, consistant à modéliser la propagation de la fissure concrètement à l'intérieur du maillage. Cette approche nécessite plusieurs remaillages, mais présente les avantages suivants :

- elle permet de modéliser le **chemin de propagation** d'une ou de plusieurs fissures même en grandes déformations ;
- le fait de remailler souvent la pièce nous permet de conserver des **éléments de bonne qualité** et de ne pas être bloqués par la dégénérescence du maillage comme pour l'approche endommagement ;
- les outils numériques développés autour du remailleur permettent de conserver une **grande précision en pointe de fissur**e et donc sur les champs mécaniques calculés à cet endroit, quel que soit le chemin de propagation ;
- elle ne présente pas les problèmes liés au blocage en contrainte.

III.2. AMORÇAGE D'UNE FISSURE

Comme nous l'avons vu dans le sous-chapitre précédent, les critères d'amorçage sont basés sur des paramètres critiques du matériau tels que la ténacité K_{Ic}, la résistance à la fissuration G_c ou encore l'ouverture de fissure critique δ_c. Donc pour étudier l'amorçage, il nous faut calculer les FIC, le taux de restitution d'énergie, ou le CTOD. Or tous ces paramètres se calculent lorsqu'une pré-fissure existe. En fait, la plupart des codes de calcul en mécanique de la rupture étudient des pièces pré-fissurées, de façon à ne pas avoir à localiser le lieu d'amorçage de la fissure, mais également à cause des problèmes topologiques liés à la création d'une fissure dans un maillage.
Dans ce sous-chapitre, nous commencerons par déterminer les difficultés liées à la localisation puis à l'amorçage de fissures dans un maillage, et nous présenterons les outils numériques nécessaires pour y parvenir. Puis, nous étudierons un critère de localisation de l'amorçage en contrainte critique et en endommagement critique, avant de présenter un exemple d'application.

III.2.1. Les outils numériques nécessaires à la localisation et à l'amorçage d'une fissure

En modélisation numérique de la mécanique de la rupture, la phase d'amorçage de fissures est une phase critique dans la mesure où il est difficile de localiser le lieu d'amorçage de la fissure. C'est pourquoi la majorité des codes évitent ce problème en étudiant des pièces pré-fissurées. Les principales difficultés que l'on rencontre sont les suivantes :

- Il est difficile de localiser le lieu exact d'amorçage d'une fissure dans un matériau car ce lieu dépend fortement des **inclusions** et des **micro-défauts** présents dans le matériau. Ces micro-défauts induisent des concentrations de contraintes locales qui provoquent l'apparition de micro-fissures puis de macro-fissures. Ces micro-défauts ne peuvent pas être pris en compte numériquement, du moins aux échelles où l'on se place dans notre travail. Il est donc nécessaire de supposer que le matériau est « parfait », ou d'imposer le lieu d'amorçage en pré-fissurant la pièce.
- L'amorçage d'une fissure dans un maillage entraîne des **modifications topologiques importantes** qui sont rarement supportées par les codes éléments finis. Notre technique de remaillage, présentée au chapitre I, est particulièrement bien adaptée à ce type de modifications puisqu'elle permet l'ajout de plusieurs contours sur lesquels le maillage vient s'appuyer. Ainsi, lorsque l'on connaît le lieu d'amorçage, la direction et la distance de propagation, l'amorçage est effectué en deux étapes :
  - Un contour interne, ouvert et non orienté est ajouté aux autres contours. Ce nouveau contour représente la fissure. Le remailleur est alors activé de façon à avoir un maillage coïncidant sur ce nouveau contour (Figure III.2.a).
  - Un dédoublement des nœuds appartenant à la fissure est effectué sur le nouveau maillage. Ainsi l'ouverture de la fissure est obtenue naturellement grâce aux contraintes locales appliquées aux lèvres de la fissure (Figure III.2.b).

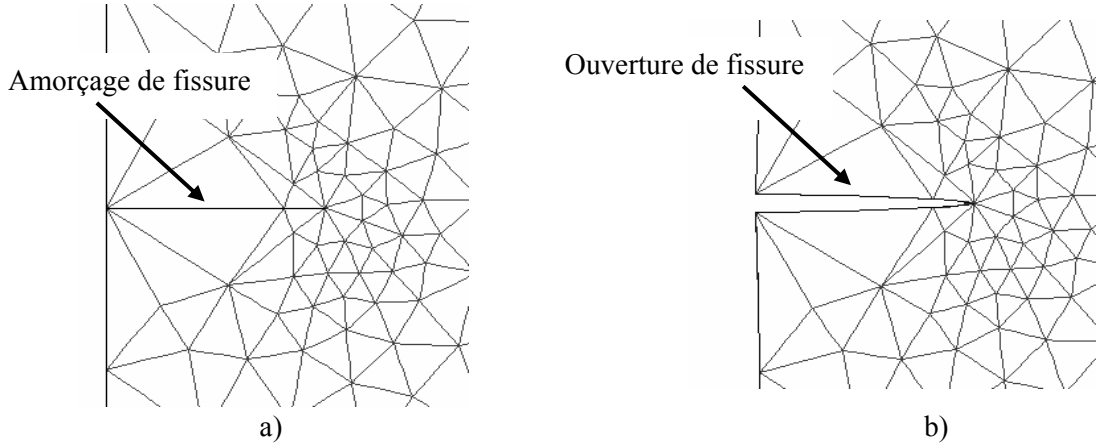


Figure III. 2. Amorçage d'une fissure a) ajout d'un contour – b) dédoublement des nœuds

- Le **temps CPU** peut également être un facteur limitant. En effet, à chaque pas de temps et en chaque nœud du maillage, il faut calculer une grandeur mécanique et la comparer à la grandeur critique correspondant au matériau étudié. Pour réduire ce temps CPU, nous avons envisagé trois cas en fonction du type d'application qui nous intéresse. L'option par défaut consiste à localiser l'amorçage sur la totalité du maillage. Une seconde option, moins coûteuse, consiste à déterminer des zones probables d'amorçage. La localisation de l'amorçage est alors restreinte à ces zones géométriques. Cette option est intéressante pour les applications où l'on peut facilement déterminer les lieux de fortes contraintes ou de forts endommagements (singularité, etc…). Enfin, la dernière option s'applique aux pièces pré-fissurées où l'on connaît le lieu d'amorçage et qui ne nécessite donc pas de recherche sur le reste de la pièce. La comparaison des paramètres mécaniques aux paramètres critiques du matériau peut alors s'effectuer uniquement en un point.

La technique ainsi proposée permet de propager une fissure de façon tout à fait automatique dans un maillage. Comme nous le verrons par la suite, certains critères déterminent la direction de propagation à partir des champs mécaniques locaux en pointe de fissure. Il est donc nécessaire que le maillage soit fin dans cette zone. Par contre, lorsque la fissure se propage, il est souhaitable de déraffiner le maillage dans les zones précédemment raffinées pour ne pas alourdir les calculs. Pour atteindre cet objectif, nous avons introduit un raffinement évolutif qui suit la pointe de fissure [Bouchard et al. 2000a], [Fourment et al. 2000] (Figure III.3.).

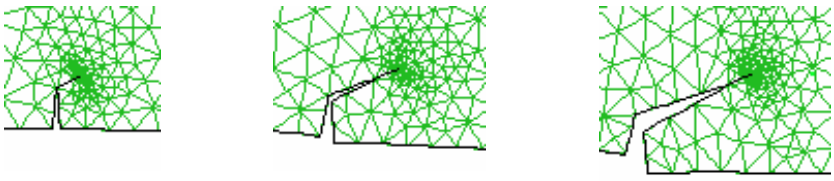


Figure III. 3. Raffinement évolutif en pointe de fissure

Pour étudier l'amorçage d'une pièce non pré-fissurée, il est impossible de se baser sur les FIC ou sur le taux de restitution d'énergie. Dans ce cas, nous proposons ici deux façons de déceler le lieu d'amorçage : la contrainte critique et l'endommagement critique.

III.2.2. Amorçage en contrainte critique

Dans une simulation numérique, les contraintes sont calculées à chaque pas de temps (ou incrément de charge), et en chaque point d'intégration. Nous proposons ici de localiser l'amorçage en étudiant les contraintes maximales. Pour cela, nous évaluons à chaque pas de temps, et dans la zone d'amorçage définie (Cf. III.2.1.), la valeur de la contrainte maximale en chaque point d'intégration voisin de la frontière. Puis, nous comparons les valeurs obtenues à une contrainte critique caractéristique du matériau. Lorsque cette valeur critique est dépassée, une fissure est amorcée perpendiculairement à la contrainte maximale en ce point d'intégration. La détermination de cette direction est explicitée avec plus de précision au sous-chapitre III.3.1.
A chaque incrément de charge, nous n'autorisons qu'un seul amorçage de fissure. Cet amorçage apparaît au nœud ayant la plus forte contrainte. Cela permet d'éviter l'amorçage de plusieurs fissures dans une zone fortement contrainte à un instant donné. A l'incrément suivant, les contraintes se concentrent à la pointe de la fissure amorcée, si bien que l'on n'observe pas les autres amorçages initialement prévus dans cette zone.
Pour l'instant, nous n'étudions pas les amorçages de fissures internes (au sein même du matériau), mais uniquement les fissures débouchantes. C'est pourquoi les comparaisons des contraintes maximales s'effectuent uniquement sur des éléments attenant à la frontière du maillage.
Ce critère de localisation, facile à implémenter, donne de bons résultats pour des matériaux plutôt fragiles. Pour des matériaux plus ductiles, l'utilisation de lois d'endommagement serait certainement nécessaire.

III.2.3. Amorçage en endommagement critique

Certains auteurs ont également proposé de coupler les approches micro et macro-mécanique [Könke 1995]. Cette méthode consiste à utiliser une loi d'endommagement pour localiser le lieu d'amorçage et la direction de propagation de la fissure, puis à propager la fissure à l'aide d'outils de mécanique de la rupture.
Une telle méthode nécessite à la fois de maîtriser les modèles d'endommagements et d'être capable de propager une fissure dans un maillage. On définit un paramètre d'endommagement D, qui croît avec la déformation plastique du matériau. Lorsque D atteint une valeur critique D_c, caractéristique du matériau, on amorce la fissure.
Récemment, Brokken [Brokken 1999] et Goijaerts [Goijaerts 1999] ont appliqué cette approche au découpage de tôles en utilisant le critère d'endommagement d'Oyane [Oyane et al. 1980]. Ce modèle, découplé[2], définit la variable d'endommagement selon l'intégrale suivante :

$$D = \int_0^{\bar{\varepsilon}^p} \left(1 + A \frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} \right) d\bar{\varepsilon}^p$$

[2] L'endommagement du matériau ne modifie pas ses propriétés mécaniques.

où $\bar{\varepsilon}^p$ représente la déformation plastique, σ_{eq} et σ_m sont respectivement la contrainte équivalente et la composante hydrostatique de la contrainte, et où A est un paramètre matériau à déterminer expérimentalement.

Cette approche est séduisante car elle propose d'utiliser les avantages des approches micro et macro-mécanique. Cependant, il est parfois difficile de sélectionner un modèle d'endommagement approprié, puis d'identifier les paramètres matériaux pour ce modèle.

III.2.4. Application au compactage de coques

Nous proposons ici un exemple d'application sur une pièce sans pré-fissure. Nous étudions le compactage d'une coque cylindrique, écrasée selon sa génératrice (Figure III.4.). Cet essai, proche de l'essai sur anneau proposé par Pineau [Bouyne 1995], présente l'avantage de permettre l'étude de l'amorçage et de la propagation fragile d'une fissure.

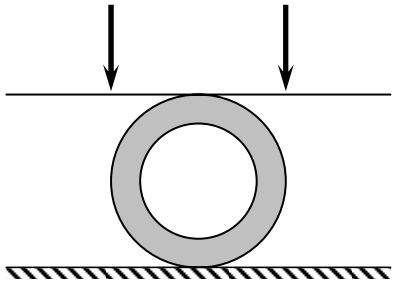


Figure III. 4. Compactage d'une coque horizontale

La recherche du lieu d'amorçage de fissure est effectuée sur la totalité de la pièce. Une contrainte critique, déterminée de façon expérimentale, est utilisée pour localiser l'amorçage (Figure III.5.).

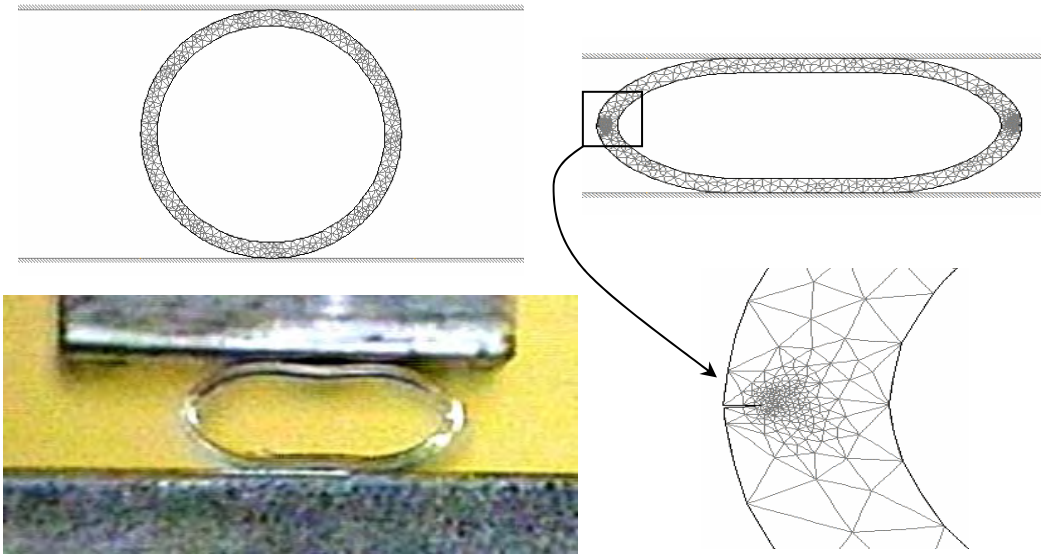


Figure III. 5 Localisation de l'amorçage lors de la simulation numérique de compactage d'une coque

Les résultats numériques sont en accord avec l'expérience puisque deux fissures s'amorcent simultanément sur les parties externes latérales de la coque. L'amorçage en contrainte critique apparaît donc comme étant un moyen simple et efficace pour localiser l'amorçage sur des pièces non pré-fissurées, du moins pour nos exemples.

Le critère d'Oyane a également été implémenté dans Forge2 Multimatériaux. Nous ne connaissons pas la valeur critique de l'endommagement pour notre matériau, mais nous pouvons repérer les zones où l'endommagement *D* est maximum (Figure III.6.). Les résultats obtenus sont similaires à ceux obtenus avec l'amorçage en contrainte critique, puisque les valeurs maximums de *D* sont repérées sur les parois latérales externes du tube.

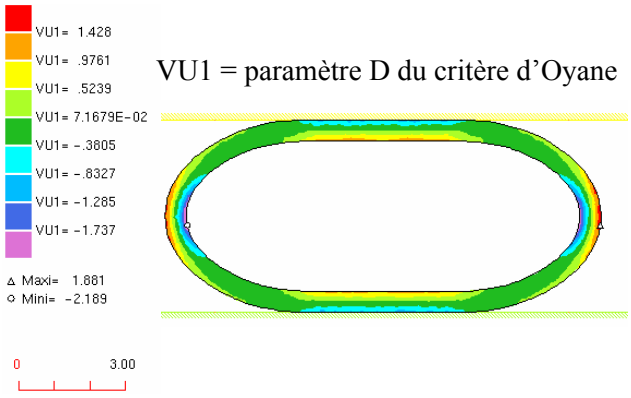


Figure III. 6. Endommagement selon le critère d'Oyane pour le compactage d'un tube

III.3. PROPAGATION D'UNE FISSURE

Une fois amorcée, la fissure peut continuer à se propager. Lorsque la géométrie ou le chargement ne sont pas symétriques, la fissure ne se propage pas de façon rectiligne, et il est nécessaire de déterminer les directions de propagation des fissures. De nombreux critères ont été proposés pour déterminer l'angle de bifurcation d'une fissure [Bouchard et al. 2000b]. Une fois cet angle déterminé, on propage la fissure dans le maillage sur une certaine distance Δa. Plus cette distance est petite, et plus on se rapproche de la solution exacte. Cependant, d'un point de vue numérique, il est nécessaire de déterminer cette distance de propagation.

Cela peut être fait en exprimant la vitesse de propagation[3] de la fissure $\dot{a}$ en fonction du taux de restitution d'énergie [Elouard 1993]. Si $\dot{G}$ est la dérivée du taux de restitution d'énergie, on a :

$$\begin{cases} \text{si } G < G_C \quad \text{on a} \quad \dot{a} = 0 \\ \text{si } G = G_C \quad \text{on a} \quad \dot{a} > 0 \end{cases} \quad \text{d'où la relation} \quad \dot{G}\dot{a} = 0$$

En se rappelant la relation entre G et la dérivée de l'énergie potentielle W_p, on obtient l'expression de la vitesse de propagation :

$$\dot{a} = \left[-\frac{\dfrac{\partial^2 W_P}{\partial a \partial u}\dot{u}}{\dfrac{\partial^2 W_P}{\partial a^2}} \right]^+ = \left[-\frac{\dfrac{\partial G}{\partial u}\dot{u}}{\dfrac{\partial G}{\partial a}} \right]^+$$

où u est le déplacement, $\dot{u}$ la vitesse, et où la notation $[.]^+$ désigne la partie positive de l'expression. Cependant cette méthode nécessite le calcul de la dérivée du taux de restitution d'énergie, ce qui est assez complexe.

Il est possible également de définir un critère empirique, basé sur la différence du paramètre étudié (par exemple G) par rapport au paramètre critique (G_c). Plus cette différence sera élevée, et plus la distance de propagation sera grande.
Mais la plupart des auteurs préfèrent définir Δa comme étant un paramètre utilisateur, petit de préférence. D'après Červenka [Červenka 1994], ce paramètre ne doit pas excéder $L/10$, où L est la dimension caractéristique de la pièce étudiée. Pour notre part, Δa vaut une à trois fois la taille de maille en pointe de fissure, selon que l'on privilégie la précision ou le temps de calcul.

[3] Le temps étant une variable fictive de notre calcul, cette vitesse de propagation est utilisée par rapport à l'incrément de charge ou plutôt pour des propagations dynamiques.

Lorsque l'on étudie la propagation de plusieurs fissures, il peut être nécessaire (dans les cas non symétriques) de différencier les distances de propagation de chaque fissure. Pour cela, une méthode [Wang 1994] consiste à propager les fissures les unes après les autres. A chaque incrément :

- on calcule les facteurs d'intensité de contraintes (respectivement le taux de restitution d'énergie) pour chaque fissure ;
- on les compare à la ténacité K_c (respectivement la résistance à la fissuration G_c) du matériau ;
- la fissure ayant le K_i maximal, $K_i>K_c$ (resp. G_i, $G_i>G_c$) est propagée. Il est possible d'en propager plusieurs à la fois.

Dans les applications complètement symétriques, on peut propager les fissures de la même distance à chaque incrément.

Nous présentons ici un critère local, basé sur le champ de contraintes en pointe de fissure, et deux critères énergétiques, basés sur la densité d'énergie de déformation et le taux de restitution d'énergie. Puis, nous comparons les chemins de propagation obtenus par les trois critères sur différents exemples.

III.3.1. Critère de la contrainte normale maximale

Le critère de la contrainte normale maximale (ou critère de la contrainte circonférentielle maximale), introduit par Erdogan et Sih [Erdogan et al. 1963] est un critère local, basé sur la connaissance du champ des contraintes en pointe de fissure. Ce critère, présenté au §III.1.2., est l'un des plus utilisés. Cependant, la façon de l'implémenter conditionne fortement sa précision (Cf. Annexe D). En effet, le calcul de la direction de propagation peut être basé :

- soit sur les **contraintes principales** au voisinage de la pointe de fissure :
  - on repère les points d'intégration les plus proches de la pointe de fissure (Figure III.7.). Les contraintes étant calculées directement aux points d'intégration, c'est en ces points qu'elles seront les plus précises ;
  - pour chacun d'eux, on calcule les valeurs propres et vecteurs propres associés du tenseur des contraintes ;
  - le vecteur propre associé à la valeur propre maximale fournit la direction principale du champ de contraintes pour le point d'intégration traité. La fissure est appelée à se propager perpendiculairement à cette direction ;
  - la direction de propagation finale est obtenue par une moyenne pondérée (par rapport à la contrainte principale maximale et la distance à la pointe de fissure) de chacune des directions obtenues pour les différents points d'intégration.

- soit sur la **contrainte circonférentielle** $\sigma_{\theta\theta}$ maximale :
  - on repère les points d'intégration les plus proches de la pointe de fissure (Figure III.7.) ;
  - pour chacun de ces points, on calcule la contrainte circonférentielle $\sigma_{\theta\theta}$;
  - on propage la fissure vers le point d'intégration pour lequel $\sigma_{\theta\theta}$ est maximale.

Cette dernière technique présente cependant l'inconvénient de dépendre fortement de la finesse du maillage en pointe de fissure. Il est alors plus intéressant de faire une moyenne pondérée (par la valeur de $\sigma_{\theta\theta}$) de deux ou trois directions correspondant aux valeurs maximales de $\sigma_{\theta\theta}$ (Cf Annexe D).

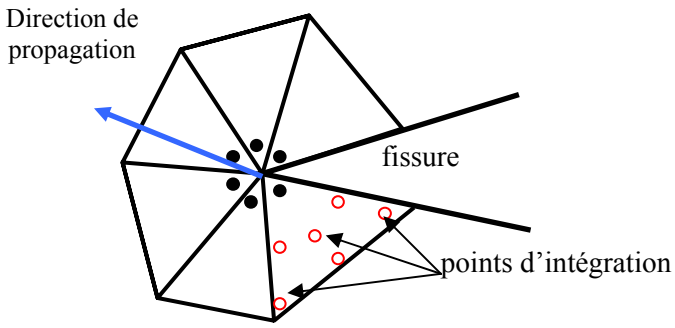


Figure III. 7. Détermination de la direction de propagation pour le critère de la contrainte normale maximale

Enfin, une erreur fréquemment commise consiste à considérer que lorsque l'on se trouve au point d'intégration pour lequel la contrainte circonférentielle $\sigma_{\theta\theta}$ est maximale, la direction perpendiculaire à la contrainte principale maximale est confondue avec la direction correspondant à $\sigma_{\theta\theta}$ maximale. On détermine alors la direction de propagation comme étant la direction perpendiculaire à la contrainte principale maximale au point d'intégration associé à $\sigma_{\theta\theta}$ maximale. On montre dans l'Annexe D que cela peut s'avérer imprécis, dans la mesure où l'évaluation de $\sigma_{\theta\theta}$ est réalisée de façon discrète (et non continue) en plusieurs points d'intégration. La valeur maximale de $\sigma_{\theta\theta}$ au point d'intégration ainsi déterminé ne correspond donc pas forcément à la valeur maximale de la courbe $\sigma_{\theta\theta}(\theta)$ continue. Dans ces conditions, la direction orthogonale à la contrainte principale maximale en ce point ne correspond pas à la bonne direction de propagation.

Pour une comparaison sur les précisions obtenues avec ces différentes techniques d'implémentation, le lecteur pourra se référer à l'Annexe D. Dans la suite de l'étude, nous utilisons la méthode basée sur les contraintes principales maximales calculées et moyennées en chacun des points d'intégration adjacents à la pointe de fissure.

Le critère est donc basé uniquement sur les contraintes locales à la pointe de fissure. La précision en pointe de fissure est donc primordiale, et l'utilisation d'un maillage concentrique et raffiné est indispensable pour prédire correctement la direction de propagation de la fissure. Notons également que ce critère, développé initialement en mécanique linéaire de la rupture, peut également être utilisé en mécanique non linéaire de la rupture [Bocca et al. 1991], [Baouch 1998].

Une propagation inter-élément a aussi été implémentée. Cette technique consiste à calculer la direction de propagation de la même façon, puis à choisir l'arête la plus proche de cette direction. On n'introduit pas alors de nouveau contour, et on se contente juste de dédoubler les nœuds de l'arête correspondante. Cette technique, présentée dans [Bouchard et al. 2000a] présente l'avantage de ne pas nécessiter de remaillages, mais elle comporte cependant plusieurs inconvénients :

- la propagation de la fissure est dépendante du maillage ;
- il est impossible de créer une rosette d'éléments en pointe de fissure, et on est donc parfois confrontés à des maillages grossiers en pointe de fissure.

Cependant, lorsqu'une grande précision sur le chemin de propagation n'est pas nécessaire, cette méthode s'avère intéressante et rapide.

III.3.2. Critère de la densité d'énergie de déformation minimale

L'inconvénient des critères locaux tels que le critère de la contrainte normale maximale, est que notre connaissance des champs mécaniques au voisinage immédiat de la pointe de fissure est parfois approximative. Il pourrait être intéressant de se placer un peu plus loin du fond de fissure pour calculer la direction de propagation. Sih considère que l'énergie de déformation s'oppose à la croissance de la fissuration [Sih et al. 1974]. La fissure s'orientera donc dans la direction pour laquelle cette énergie est minimale.

Soit W_e l'énergie de déformation, qui peut se décomposer en une énergie de déformation volumique W_v (dilatation, contraction) et une énergie de distorsion W_d (cisaillement) :

$$\begin{cases} W_v = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_\Omega Tr(\sigma)Tr(\varepsilon)d\Omega \\ W_d = \displaystyle\int_\Omega (s:e)d\Omega \end{cases}$$

où s et e sont respectivement les parties déviatoriques du tenseur des contraintes σ et des déformations ε.

Soit N la densité d'énergie de déformation : $N = \left(\dfrac{dW_e}{dV}\right)$.

N est proportionnelle au carré d'une contrainte, et le champ des contraintes présente une singularité en $1/\sqrt{r}$ en pointe de fissure. La densité d'énergie de déformation est donc singulière en $1/r$, r représentant la distance à la pointe de fissure.

Pour éviter cette singularité, on introduit le **facteur de densité d'énergie de déformation** $S = r.N$ qui reste borné, même lorsque r tend vers 0.

Nous utilisons deux méthodes pour calculer ce paramètre S :

- **Formulation analytique** : cette formulation consiste à exprimer la densité d'énergie de déformation en fonction des facteurs d'intensité des contraintes ou du champ des contraintes.

$$S = r\,N = r\left(\frac{1+\nu}{2E}\right)\left[\sigma_{11}^2+\sigma_{22}^2+\sigma_{33}^2-\frac{\nu}{1+\nu}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})^2+2\sigma_{12}^2\right]$$

Il est donc possible de calculer *S* en chaque point d'intégration. De la même façon, Yehia et Shephard [Yehia et al. 1988] décomposent la densité d'énergie de déformation en fonction des facteurs d'intensité des contraintes et de l'angle θ par rapport à la pointe de fissure.
Ce retour à l'approche locale permet d'exprimer explicitement la densité d'énergie de déformation. Cependant, pour profiter de l'intérêt d'un tel critère, il est conseillé d'utiliser uniquement des grandeurs globales.

- **Formulation numérique** : à chaque pas de calcul, et en chaque point d'intégration, le logiciel calcule la puissance de déformation P_ε. En intégrant cette puissance de déformation sur le temps, nous avons directement accès à l'énergie de déformation en chaque point d'intégration du maillage : $W_\varepsilon = \int_0^t P_\varepsilon dt$, puis à la densité d'énergie de déformation *N*.

Ces deux formulations nous permettent de calculer le paramètre *N*. Il nous suffit alors de déterminer l'angle θ pour lequel cette densité d'énergie de déformation est minimale. Pour cela, nous proposons de nous servir de la couronne d'intégration entourant la pointe de fissure définie au §II.3.1. Les éléments présents dans cette couronne donnent une bonne répartition angulaire θ de la direction éventuelle de propagation de fissure. Pour chaque élément de la couronne d'intégration se trouvant dans le demi-plan de propagation, on calcule la densité d'énergie de déformation *N* en chaque point d'intégration. Puis on en fait une moyenne pour chacun des éléments. Il est alors possible de tracer la courbe $N(\theta)$ pour en étudier le minimum (Figure III.8.).

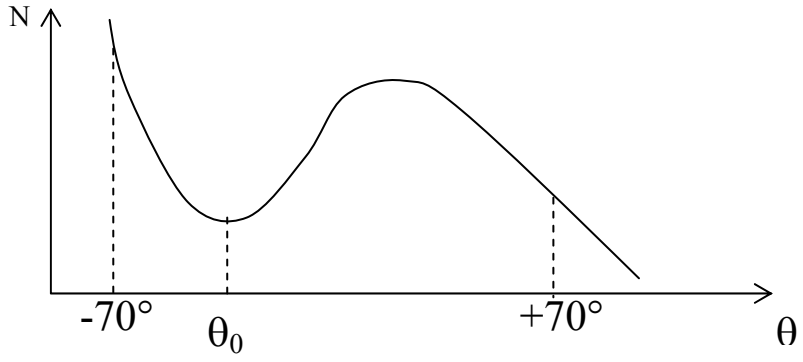


Figure III. 8. Densité d'énergie de déformation en fonction de l'angle θ

Il faut faire attention lors du calcul de *Nmin*, car il s'agit du minimum local, c'est à dire de l'angle θ_0 tel que : $\begin{cases} \left(\frac{\partial N}{\partial \theta}\right)_{\theta=\theta_0} = 0 \\ \left(\frac{\partial^2 N}{\partial \theta^2}\right)_{\theta=\theta_0} \geq 0 \end{cases}$.

Le minimum global, bien souvent différent du minimum local (Figure III.8.), conduirait à des directions de propagation erronées, qui de plus pourraient ne pas appartenir à l'intervalle de propagation possible de la fissure [-70,54° ;70,54°].

La précision du calcul est liée au nombre d'éléments que l'on met dans la couronne d'intégration. Plus il y aura d'éléments, et moins il y aura d'écart entre chaque direction probable de propagation.

III.3.3. Critère du taux de restitution d'énergie maximal

Tout comme pour le critère précédent, on s'éloigne du fond de fissure pour éviter les perturbations dues à la singularité, et on calcule le taux de restitution d'énergie sur la couronne d'intégration entourant la pointe de fissure.

Nous avons vu au §II.2.4.4. qu'il existait de nombreuses méthodes de calcul du taux de restitution d'énergie. Parmi ces méthodes, nous avons choisi la méthode Gθ [Destuynder et al. 1983] qui est à la fois précise, rapide et facilement généralisable.

Selon le critère, la fissure se propagera dans la direction qui maximisera le taux de restitution d'énergie : $\begin{cases} \left(\frac{\partial G}{\partial \theta}\right)_{\theta=\theta_0} = 0 \\ \left(\frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2}\right)_{\theta=\theta_0} \leq 0 \end{cases}$.

Ce critère devrait nécessiter de faire un calcul dans chaque direction afin de déterminer celle pour laquelle le taux de restitution d'énergie est maximal. Pour éviter ce calcul fastidieux, nous avons utilisé les possibilités de la méthode Gθ. Le champ vectoriel θ défini dans la méthode Gθ représente un champ virtuel cinématiquement admissible de la propagation de la fissure (§II.4.1.). Pour le calcul de G, ce champ virtuel est normalement orthogonal au front de fissure. Pour notre part, nous avons fait varier l'angle θ entre –70.54° et +70.54° avec un pas de 10°, 5° ou 1° et nous avons calculé le taux de restitution d'énergie pour chacun de ces angles. La courbe représentant G en fonction de θ est très régulière (croissante puis décroissante), et permet donc facilement de calculer l'angle θ_0 qui maximise G (Figure III.9.) :

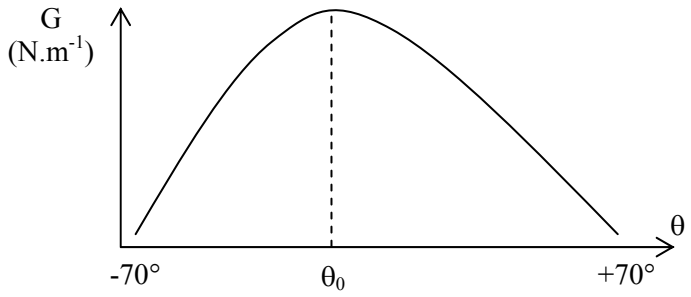


Figure III. 9. Courbe *G(θ)* pour le calcul de la direction de propagation

La méthode Gθ, comme la plupart des méthodes d'intégrales de contour ou de surface pour le calcul de G, peut également être utilisée pour des matériaux élastoplastiques. Cependant, ces méthodes sont basées sur l'analogie entre le comportement élastoplastique et le comportement élastique non-linéaire (§ II.2.4.2.). Cette analogie n'est justifiée que lorsqu'il n'y a pas de déchargement. Or une propagation

de fissure correspond à un déchargement local en pointe de fissure. Par conséquent, lorsque *G* est calculé par une méthode intégrale, le critère du taux de restitution d'énergie maximal n'est valable, en élastoplasticité, que pour des fissures immobiles. Autrement dit, on peut prévoir la direction de propagation d'une fissure grâce au calcul de *G* ; cependant, le fait de la propager concrètement dans le maillage modifie le champ mécanique avoisinant la pointe de fissure de telle sorte à ce que l'on ne puisse plus faire l'analogie entre le comportement élastoplastique et le comportement élastique linéaire. Sans cette analogie, le calcul de *G* à l'aide des méthodes d'intégrale de contour ou de surface devient erroné.

III.3.4. Comparaison

Les trois critères présentés précédemment ont été implémentés dans le code FORGE2 Multimatériaux [Bouchard et al. 2000b], et nous allons les illustrer ici sur des exemples d'applications suffisamment variés. Pour chacun de ces exemples, nous comparerons :

- le critère de la Contrainte Normale Maximale **CNM** ;
- le critère du Taux de Restitution d'Energie Maximal **TREM** ;
- le critère de la Densité d'Energie de Déformation minimale analytique **DEDma** et numérique **DEDmn**.

Pour chacun des exemples qui suivront, le matériau sera considéré purement élastique, et aura les caractéristiques suivantes :

- module d'Young E = 98000 MPa ;
- coefficient de Poisson $\nu = 0,3$.

III.3.4.1. Plaque pré-fissurée de façon oblique – fissure débouchante

Il s'agit d'un essai de traction verticale sur une plaque carrée pré-fissurée de façon oblique :

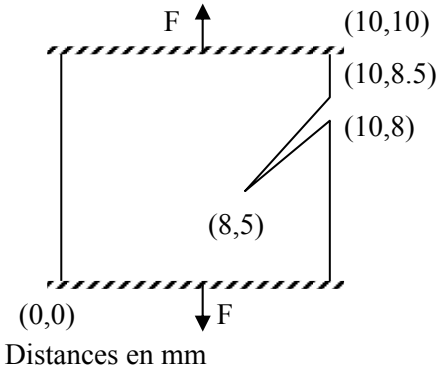


Figure III. 10. Plaque carrée pré-fissurée soumise à un essai de traction

- ***Critère de la contrainte normale maximale***

Dans cet exemple, comme dans le suivant, le critère CNM est basé sur les contraintes principales maximales aux différents points d'intégration (Cf. §III.3.1). L'étude comparative par rapport aux différentes façons d'implémenter ce critère est proposée en Annexe D.
La distance de propagation correspond à trois fois la taille de maille en pointe de fissure. Cette distance sera la même pour les trois critères.
Comme attendu, la fissure se propage horizontalement (Figure III.11.), selon le mode I, et donc perpendiculaire à la contrainte maximale qui est verticale sur un tel essai. Le chemin de propagation est très régulier, et le raffinement évolutif permet de conserver une bonne précision en pointe de fissure.

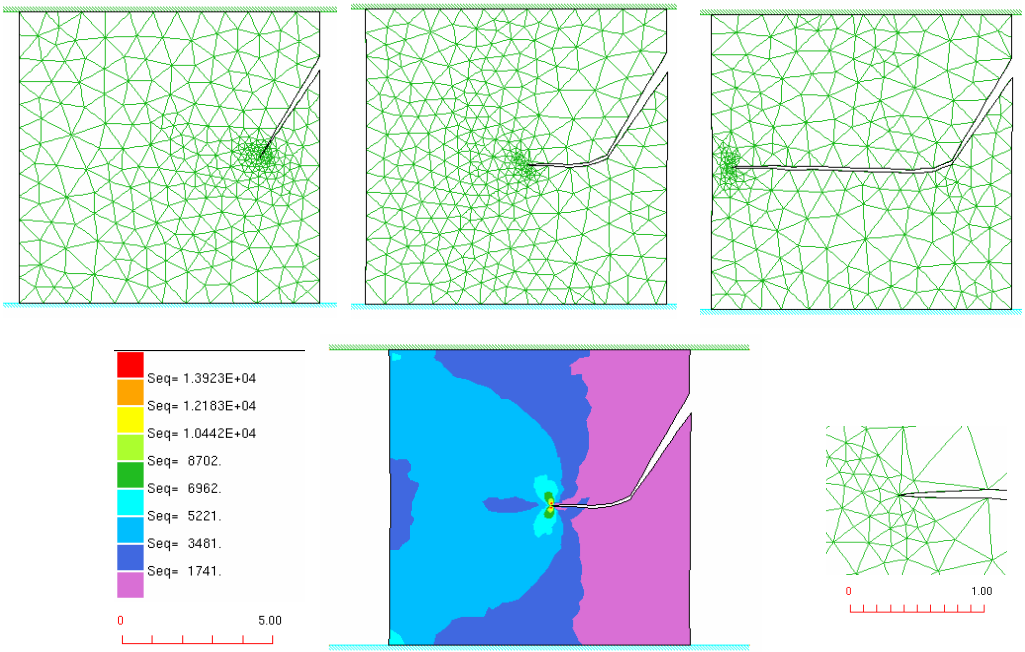


Figure III. 11. Propagation d'une fissure dans une plaque pré-fissurée, selon le critère CNM

- ***Critère de la densité d'énergie de déformation minimale***

Pour ce critère, la précision est fortement liée au nombre d'éléments présents dans la couronne d'intégration entourant la pointe de fissure. La densité d'énergie de déformation est calculée pour chaque élément de cette couronne, puis le minimum est déterminé à l'aide de la courbe $N(\theta)$. Donc plus on aura d'éléments, plus l'allure de la courbe $N(\theta)$ sera précise et plus le choix de directions possibles sera étendu.

Cependant, il apparaît une petite différence, lors du calcul de N, entre les éléments contigus à la partie interne de la couronne (*int* sur la figure III.12.a) et ceux contigus à la partie externe (*ext* sur la figure III.12.a). Ce léger écart, que l'on peut observer sur la figure III.12.b, rend la détermination du minimum local difficile.

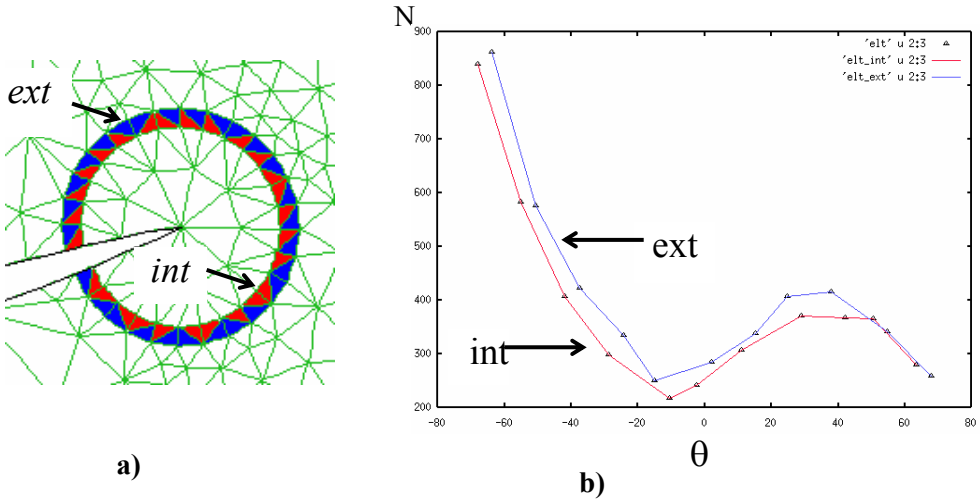


Figure III. 12. a) couronne d'éléments – b) courbe N(θ) pour le critère DEDm

Pour illustrer cette remarque, nous avons appliqué le critère DEDma à notre exemple d'application, en prenant en compte tous les éléments de la couronne d'intégration. Le chemin de propagation (Figure III.13.) est globalement identique, mais il n'est pas très régulier. Si cela n'a pas d'incidence sur un exemple aussi simple, nous verrons que cela devient plus problématique lorsque nous étudions des exemples dont la géométrie ou le chargement sont plus complexes.

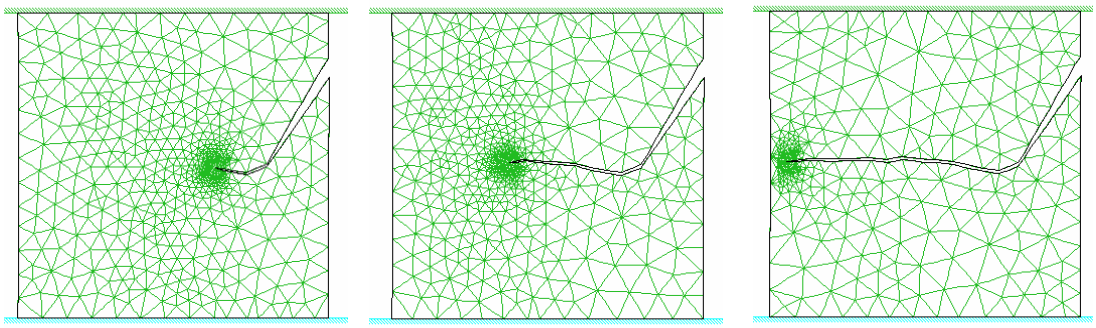


Figure III. 13. Chemin de propagation à partir du critère DEDma

C'est pourquoi il est recommandé de différencier les valeurs provenant des éléments internes, et celles provenant des éléments externes de la couronne. Dans la suite, nous effectuerons les calculs uniquement sur les éléments internes de la couronne.

Enfin, pour avoir plus de précision quant à la position exacte du minimum, nous sélectionnons le minimum local ainsi que ses deux voisins. L'angle de propagation θ_0 est alors déterminé en recherchant le minimum de la parabole passant par ces 3 points. La figure III.14.a montre le chemin de propagation obtenu avec le critère DEDmn couplé à la méthode de la parabole ainsi définie. La propagation est cette fois-ci tout à fait régulière. Nous pouvons également observer la concentration de l'énergie de déformation sur la figure III.14.b, ainsi que la valeur minimale obtenue pour la direction horizontale.

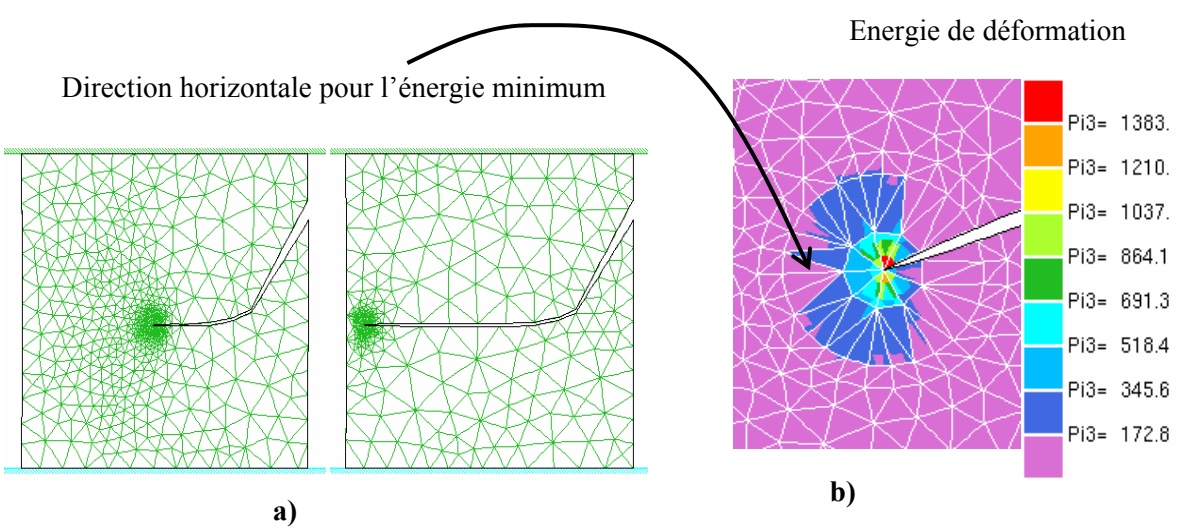


Figure III. 14. a) chemin de propagation avec le critère DEDmn – b) énergie de déformation

La formulation numérique du critère est donc plus précise que la formulation analytique. Ce résultat était prévisible, puisque la formulation analytique utilise justement le champ de contrainte local dont on voulait s'affranchir en passant à un critère énergétique. De plus, le découplage des éléments internes et externes, ainsi que la détermination du minimum par une parabole sont des outils indispensables pour une bonne précision sur la trajectoire de la fissure.

- ***Critère du taux de restitution d'énergie maximal***

Si ce critère utilise également la couronne d'intégration comme le critère DEDm, il est cependant insensible au nombre d'éléments qui la constitue. Cela est dû essentiellement à la grande précision de la méthode Gθ utilisée pour calculer le taux de restitution d'énergie. La précision du calcul dépend par contre du nombre de directions pour lesquelles nous allons calculer le taux de restitution d'énergie. La figure III.15. représente la propagation de la fissure pour un balayage de 10° (a), de 1° (b) et la comparaison des deux trajectoires (c).

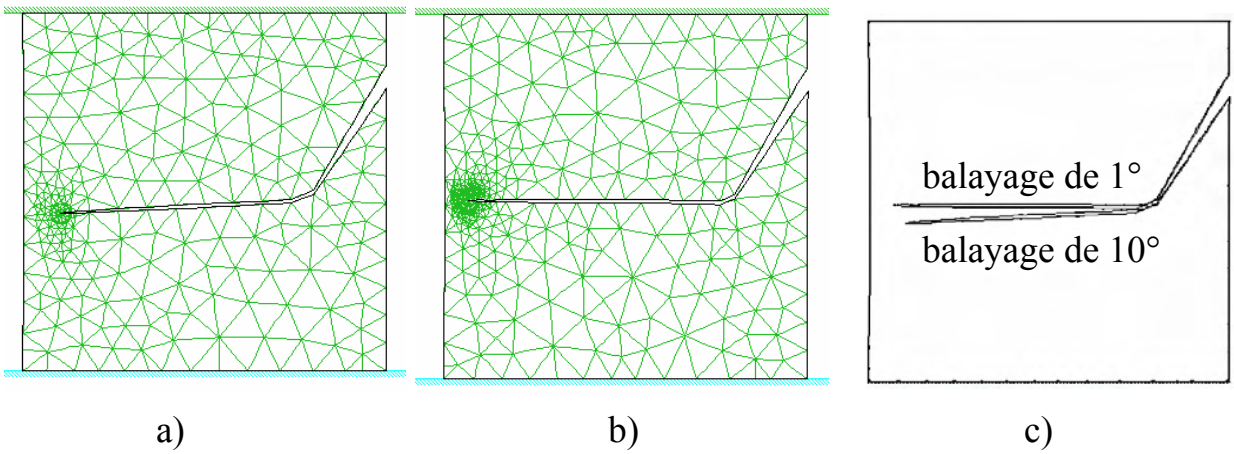


Figure III. 15. Critère TREM pour un balayage de 10° (a) de 1° (b) et comparaison des trajectoires (c)

La fissure se réoriente bien suivant le mode d'ouverture pure comme pour les deux autres critères. Cependant la trajectoire obtenue pour un balayage de 10° n'est pas tout à fait horizontale. Cela vient du fait qu'une fois amorcée, la seule possibilité pour que la fissure se réoriente horizontalement serait qu'elle bifurque de 10°, ce qui est trop dans ce cas précis. Donc un petit écart dans le premier incrément de propagation peut entraîner une différence non négligeable sur la trajectoire finale de la fissure.

Cependant, la courbe *G(θ)* (Figure III.16.) est bien plus régulière que la courbe *N(θ),* et il est donc plus facile de calculer le maximum avec précision. La méthode de la parabole peut encore être utilisée et donne de bons résultats, même pour un balayage de 10°.

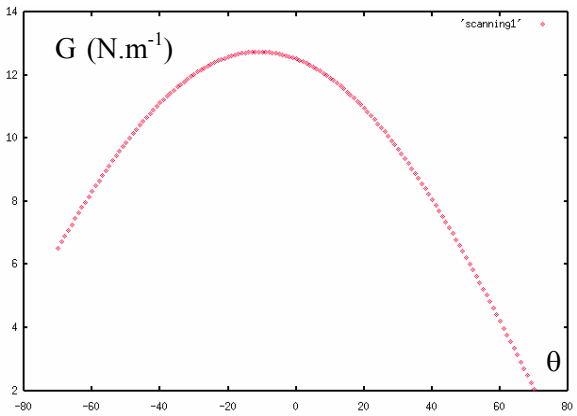


Figure III. 16. Courbe *G(θ)* pour le critère TREM

- ***Bilan***

Les trois critères donnent donc de bons résultats sur cet exemple d'application relativement simple. Nous avons cependant noté que le critère DEDm était dépendant du nombre d'éléments dans la couronne d'intégration, et que le critère TREM dépendait de la précision du balayage choisi. Dans l'exemple suivant, Nous allons donc appliquer ces trois critères à un exemple plus complexe, de façon à faire ressortir ces dépendances. Nous en profiterons également pour comparer leurs temps de calcul respectifs et pour étudier leur dépendance vis-à-vis de la finesse du maillage.

III.3.4.2. Eprouvette trouée pré-fissurée

Dans [Bouchard et al. 2000a], nous avions montré comment la présence d'une cavité pouvait influencer la propagation d'une fissure. En créant une dépression de contrainte, la cavité attire la fissure, puis celle-ci se réoriente horizontalement une fois la cavité dépassée.

Nous considérons ici une éprouvette trouée à deux extrémités, et pré-fissurée en deux endroits, soumise à un essai de traction :

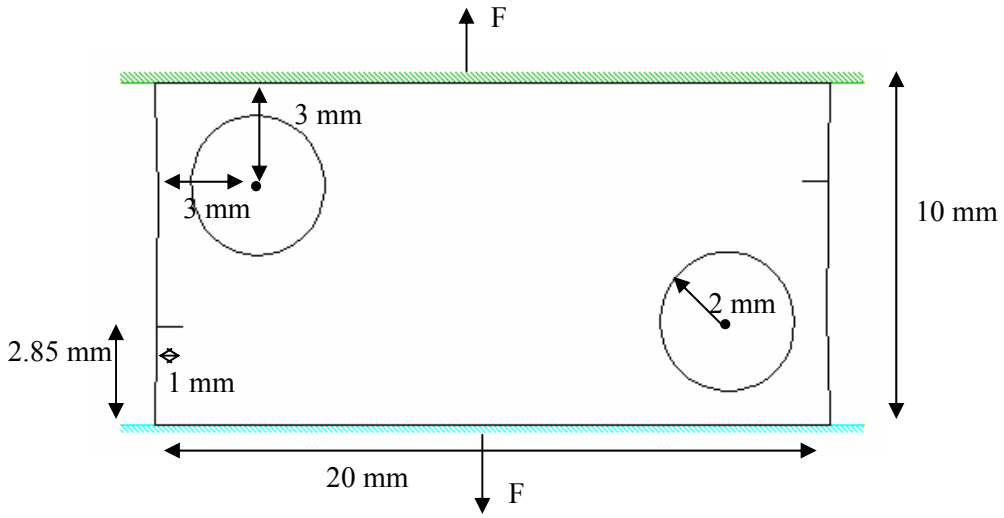
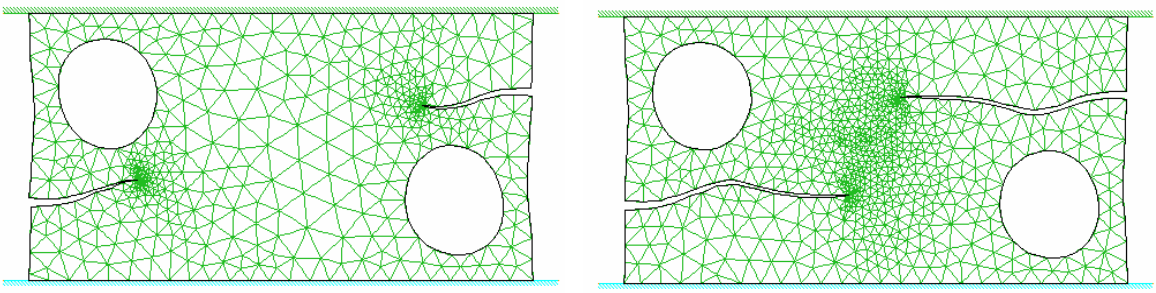


Figure III. 17. éprouvette trouée pré-fissurée

- ***Critère de la contrainte normale maximale***

Les deux fissures s'orientent tout d'abord vers la cavité la plus proche (Figure III.18.a). Ceci vient du fait que les cavités créent une « dépression » de contrainte qui va modifier la contrainte principale maximale de façon à ce que la fissure s'oriente vers la cavité. Une fois la cavité passée, les fissures se réorientent en mode I pur, et elles s'éloignent très légèrement de la cavité (Figure III.18.b). Puis, dès qu'elles commencent à avoir une influence l'une par rapport à l'autre, elles vont se rapprocher l'une de l'autre (Figure III.18.c). Cela est dû au fait que chacune d'entre elle crée une dépression de contraintes, attirant ainsi la fissure opposée. En fin de propagation, les fissures sont « piégées » par la cavité sur laquelle elles débouchent (Figure III.18.d). Sur la figure III.18.e, on peut visualiser le champ de contrainte équivalente de Von Mises, et on se rend bien compte de l'influence de chaque fissure sur son opposée.



(a) (b)

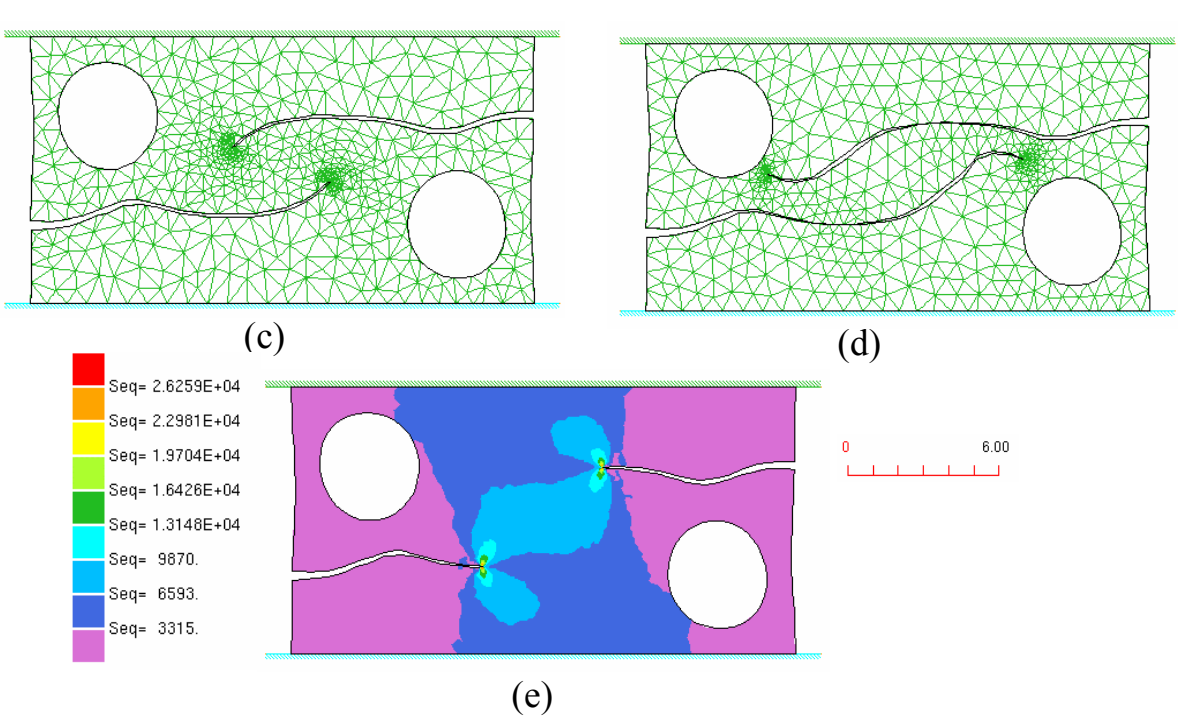


Figure III. 18. Trajectoire de deux fissures à l'aide du critère CNM dans une plaque pré-fissurée contenant deux cavités

- ***Critère de la densité d'énergie de déformation minimale***

Sur cet exemple, on va pouvoir se rendre compte de l'influence de la couronne d'intégration par rapport au résultat pour le critère DEDm. Pour cela, nous effectuons la même simulation avec des tailles de couronnes différentes en pointe de fissure:

- Cas 1 : **couronne éloignée**
  rayon interne = 0,3 mm
  rayon externe = 0,4 mm
  distance de propagation = 0,65 mm

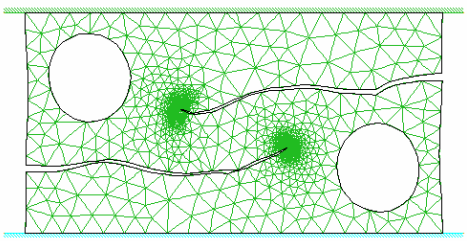


Figure III. 19. Propagation à l'aide du critère DEDm et avec une couronne éloignée

Dans ce cas, on retrouve une trajectoire très proche de celle obtenue avec le critère CNM.

- Cas 2 : **couronne intermédiaire**
  rayon interne = 0,22 mm
  rayon externe = 0,29 mm
  distance de propagation = 0,65 mm

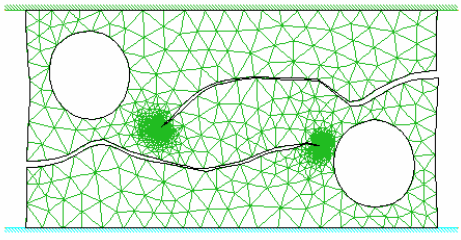


Figure III. 20. Propagation à l'aide du critère DEDm et avec une couronne intermédiaire

Avec une couronne intermédiaire, le chemin de propagation reste globalement le même, mais il semble plus perturbé par les cavités.

- Cas 3 : **couronne proche**
  rayon interne = 0,18 mm
  rayon externe = 0,24 mm
  distance de propagation = 0,65 mm

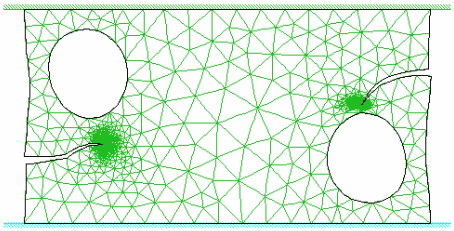


Figure III. 21. Propagation à l'aide du critère DEDm et avec une couronne proche

Lorsque la couronne est très proche de la pointe, les fissures s'orientent plus brutalement vers les cavités, si bien que l'une d'entre elles ne peut se réorienter horizontalement et se trouve « piégée » par cette cavité. Cela vient du fait que les champs mécaniques, très perturbés dans un voisinage proche de la pointe de fissure, ne permettent pas d'obtenir une courbe *N(θ)* suffisamment régulière pour calculer correctement le minimum local (Figure III.22.).

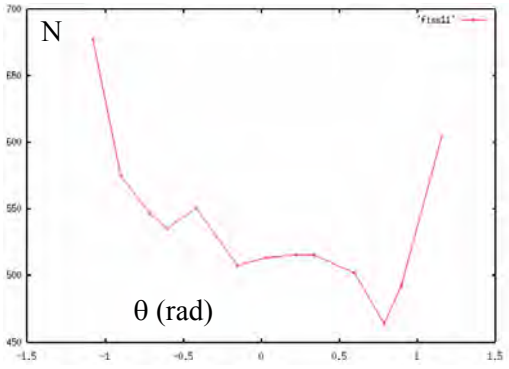


Figure III. 22. Courbe N(θ) pour une couronne proche du fond de fissure

On peut cependant noter que la distance de propagation choisie pour ces trois exemples est assez élevée. Une distance de propagation plus faible, plus proche de la réalité, permet aux fissures de se réorienter horizontalement avant d'atteindre la cavité.

Dans certains cas assez complexes comme celui-ci, la fissure passe dans un voisinage proche d'une cavité ou d'un contour extérieur. Une légère imprécision sur l'angle de bifurcation peut alors l'amener à suivre un chemin différent. De même, la distance de propagation de la fissure à chaque incrément peut également être un facteur d'imprécision. Plus elle sera petite, plus le résultat sera précis, mais plus le calcul sera long. Cette influence, pénalisante pour le critère DEDm, ne se retrouve pas avec le critère TREM.

- ***Critère du taux de restitution d'énergie maximal***

Le critère TREM a également été utilisé avec un balayage de 10°, et pour les trois tailles de couronne définies pour le critère DEDm. La même distance de propagation est utilisée. Cependant, les courbes $G(\theta)$ utilisées pour calculer le maximum sont très régulières, même lorsque la fissure passe dans un voisinage proche d'une cavité. Les trajectoires des fissures sont donc très régulières elles aussi. De plus, ce critère s'avère complètement indépendant de la taille de la couronne (et donc du maillage) comme le montre la figure III.23. où l'on a superposé les 3 trajectoires obtenues avec les trois tailles de couronnes différentes.

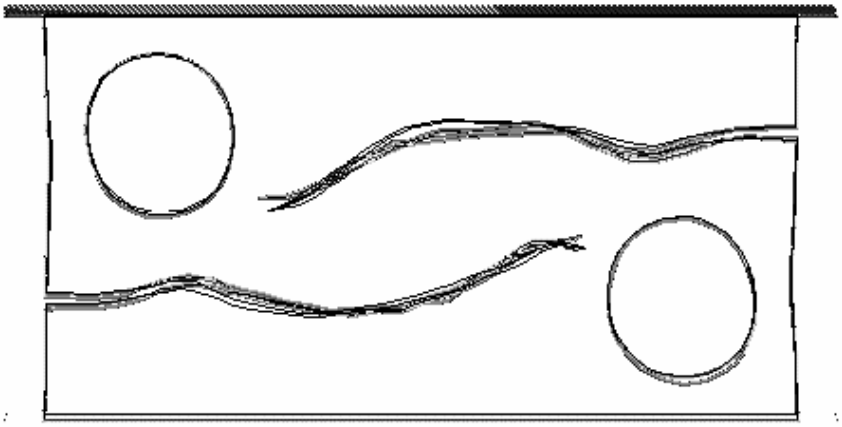
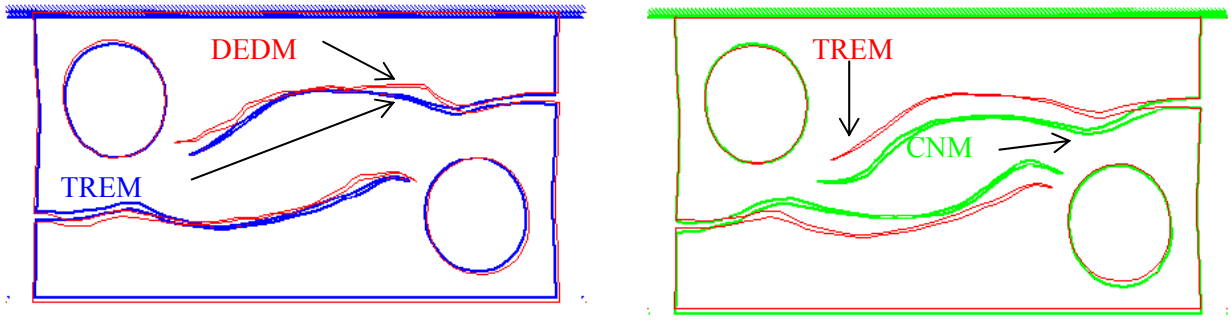


Figure III. 23. Superposition des trajectoires obtenues pour trois maillages différents

Cette indépendance vis-à-vis du maillage provient de la bonne précision de la méthode Gθ utilisée pour calculer le taux de restitution d'énergie. En effet, nous avions déjà remarqué au §II.4.3. que la méthode Gθ n'était pas influencée par la finesse du maillage.

- ***Bilan***

Sur cet exemple plus complexe, on observe des différences entre les trois critères développés. Le critère DEDm dépend fortement du maillage, et les trajectoires obtenues par ce critère peuvent donc être mises en doute. Pour un même maillage, la figure III.24.a montre la bonne superposition des trajectoires obtenues pour ce critère et pour le critère TREM. Ce dernier est intéressant, car il est indépendant du maillage et donne des trajectoires très régulières. C'est également le cas pour le critère CNM. En effet, le raffinement évolutif ainsi que la couronne concentrique en pointe de fissure permettent de calculer précisément la direction de propagation. D'ailleurs, pour des maillages aussi fins, il n'est pas nécessaire d'utiliser les éléments singuliers pour calculer précisément les directions de propagation. La figure III.24.b compare les trajectoires du critère CNM et du critère TREM. Si les chemins de propagation sont globalement similaires, on observe que le critère CNM semble plus influencé par les cavités que le critère TREM. Par contre, le critère CNM présente l'avantage de pouvoir également être utilisé pour des matériaux élastoplastiques [Bocca et al. 1991], [Baouch 1998].



a) b)

Figure III. 24. Comparaison de trajectoires de fissures

III.3.4.3. Temps de calcul

Pour chacun des trois critères, nous comparons ici les temps de calcul jusqu'à propagation complète des fissures pour l'exemple de la pièce pré-fissurée, et contenant deux cavités.

Pour des paramètres de remaillage identiques, le critère CNM nécessitera moins de nœuds car il n'utilise pas de couronne d'intégration en pointe de fissure. C'est ce que l'on peut observer sur la figure III.25. où l'on représente le nombre de nœuds à chaque remaillage pour les trois critères utilisés. Si les deux méthodes énergétiques sont équivalentes, la méthode locale nécessite beaucoup moins de nœuds pour un résultat équivalent. L'augmentation importante du nombre de nœuds pour ce critère en milieu de calcul correspond à l'interaction des deux fissures en vis-à-vis, et qui entraîne une concentration de nœuds. Le paramètre *taux de raffinement* (Annexe A) est responsable de ce phénomène puisqu'il définit l'évolution de la taille des éléments de la frontière vers le centre de la pièce. Pour un taux de raffinement plus élevé, on n'observe plus cette concentration de nœuds due à la proximité des deux pointes de fissures.

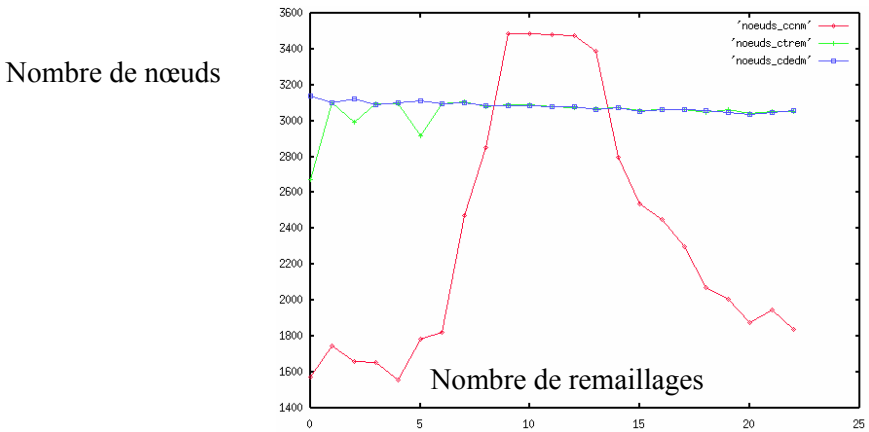


Figure III. 25. Nombre de nœuds au cours des remaillages pour les trois critères

Le temps de calcul associé au critère CNM sera alors plus intéressant. Cependant, si on compare ces temps pour des maillages comportant approximativement le même nombre de nœuds (tableau III.1.), on observe que le calcul lié au critère basé sur la densité d'énergie de déformation est plus long que les deux autres critères. Ces deux derniers étant quasiment équivalents en temps de calcul.

Critère	CNM	TREM	DEDm
Nombre de nœuds	3053	3186	3075
Temps de calcul	t	1,08t	1,3t

Tableau III. 1. Comparaison des temps de calcul pour les trois critères de propagation

III.3.5. Bilan

Un critère local, CNM, et deux critères globaux (ou énergétiques) TREM, DEDm ont été testés sur deux exemples. Dans l'ensemble, les 3 critères donnent des résultats très satisfaisants. Pour des applications complexes, le critère de la contrainte normale maximale et le critère du taux de restitution d'énergie maximal sont les critères les plus précis, tandis que le critère de la densité d'énergie de déformation minimale reste assez dépendant du maillage. Si le critère local est plus rapide, il semble plus sensible aux cavités ou aux conditions aux limites du problème que le critère TREM.

III.4. APPLICATIONS ET DEVELOPPEMENTS SPECIFIQUES

Afin de mettre en évidence la robustesse des outils implémentés, nous allons les tester sur plusieurs exemples d'application. Pour chaque exemple, les propagations des fissures sont complètement automatiques, et ne nécessitent donc aucune intervention de l'utilisateur. Ces exemples seront validés par rapport à des résultats expérimentaux ou numériques. De plus, ils permettront de présenter de nouveaux outils introduits spécifiquement pour certaines applications.

III.4.1. Plaque trouée pré-fissurée

Nous reprenons ici l'exemple d'une plaque trouée pré-fissurée proposé par Rashid [Rashid 1998]. Une plaque rectangulaire pré-fissurée, contient une cavité circulaire ayant pour but de modifier le champ des contraintes dans la plaque (Figure III.26.). Cette plaque est soumise à une traction verticale, et on suit le chemin de propagation de la fissure.

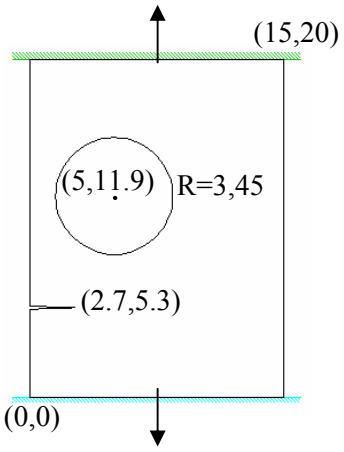
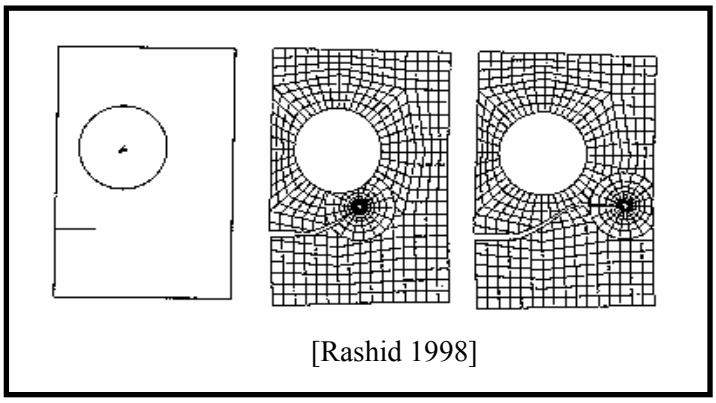


Figure III. 26. Plaque trouée pré-fissurée

La méthode proposée par Rashid, Arbitrary Local Mesh Replacement (ALMR) method, est une méthode élément finis, qui consiste à utiliser deux maillages. Le premier maillage concerne la discrétisation de la pièce, tandis que le second, superposé au premier et dominant, est centré sur la pointe de fissure et sert à calculer les champs mécaniques avec précision en pointe de fissure. La direction de propagation est calculée à l'aide du critère de la contrainte normale maximale.

Sur la figure III.27., nous comparons les chemins de propagation obtenus par la méthode de Rashid et par la nôtre. On remarque une très bonne correspondance entre les deux méthodes. L'absence de contraintes dans la cavité, ainsi que la concentration de contraintes qu'elle génère sur ses parois latérales, modifie les contraintes principales en pointe de fissure. La fissure s'oriente donc vers la cavité, puis elle se réoriente horizontalement, selon le mode I, une fois celle-ci dépassée. La méthode AMLR semble intéressante, mais devient très lourde à gérer lorsque plusieurs fissures se propagent dans la pièce ; ce qui n'est pas un problème pour notre méthode, comme nous l'avions vu sur la figure III.18..



[Rashid 1998]

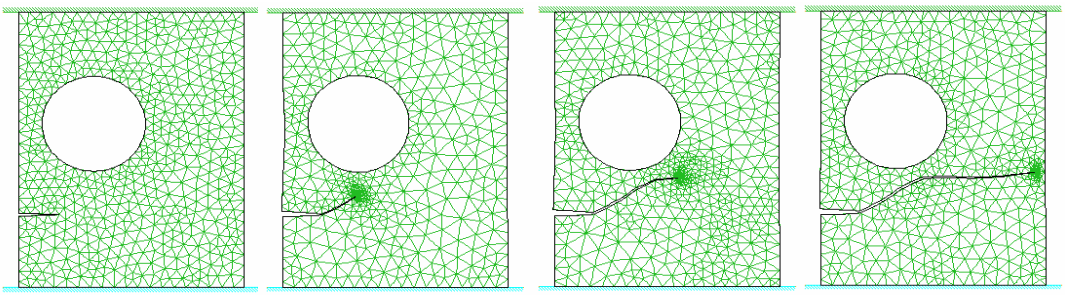


Figure III. 27. Comparaison des chemins de propagation pour une plaque trouée pré-fissurée

Cependant, on remarque que lorsque l'on définit une longueur de propagation importante par incrément, la fissure peut être capturée par la cavité, et se propager vers celle-ci jusqu'à rupture complète (Figure III.28.).

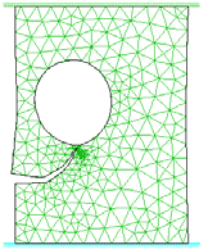


Figure III. 28. Chemin de propagation erroné pour des distances de propagation importantes

III.4.2. Poutres en flexion et formation de débris

Pour étudier le cheminement de propagation d'une fissure, de nombreux exemples de poutres en flexion ont été proposés. C'est notamment le cas en génie civil, où des poutres en béton sont soumises à différentes sollicitations de flexion pour étudier leur résistance à la fissuration. Nous proposons ici quelques uns de ces exemples, afin de valider notre approche et de mettre en valeur la robustesse du code. Puis, nous étudions le cas de fissures qui s'entrecoupent, et de gestion de débris qui peuvent être générés.

Pour chacune des applications proposées, les poutres sont en béton, avec un module d'Young de 35 GPa, et un coefficient de Poisson de 0,15.

III.4.2.1. Poutre en flexion 3 points

Nous considérons ici une poutre en flexion 3 points (Figure III.29.), possédant une pré-fissure excentrée par rapport à l'axe de chargement.



Figure III. 29. Poutre en flexion trois points

On applique une force sur l'outil supérieur, et on suit le chemin de propagation déterminé à l'aide de la contrainte normale maximale. Dès l'amorçage, la fissure s'oriente en direction du point d'application de la force, et se propage jusqu'à atteindre celui-ci (Figure III.30.).

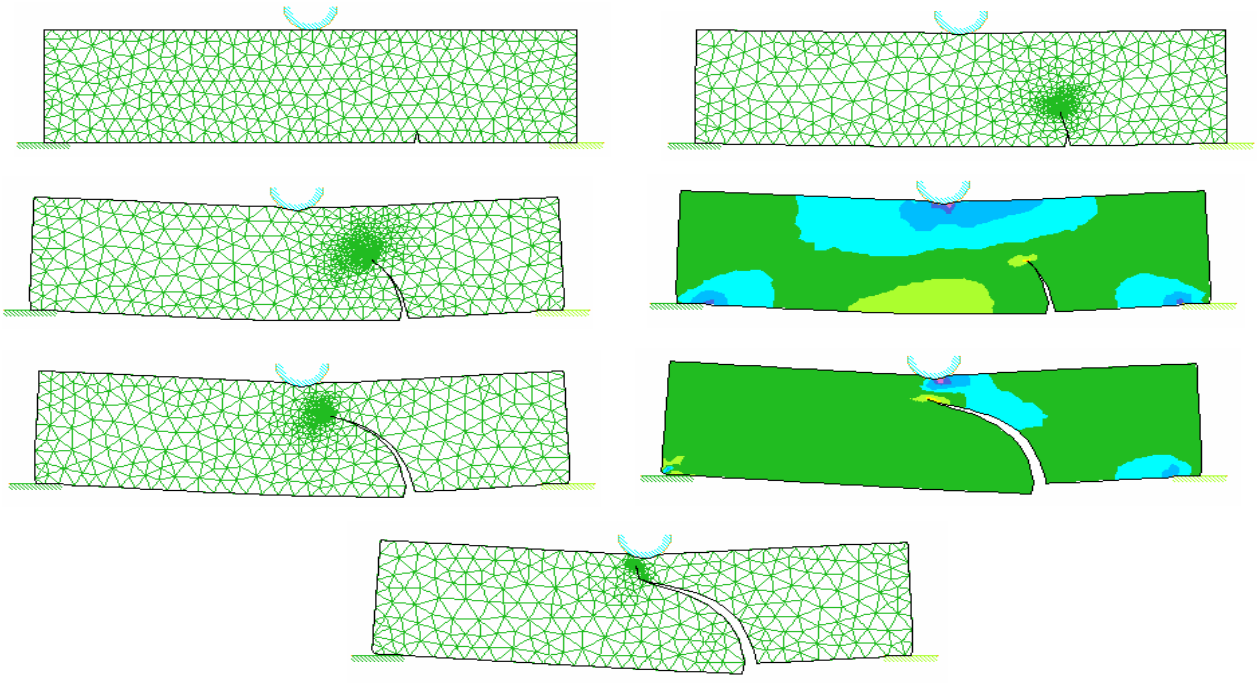


Figure III. 30. Propagation dans une poutre en flexion 3 points à l'aide du critère CNM

III.4.2.2. Poutre en flexion 4 points

Nous étudions ici l'exemple un peu plus complexe d'une poutre doublement pré-fissurée et soumise à un essai de flexion 4 points (Figure III.31.). Cet exemple, proposé initialement par Bocca [Bocca et al. 1990], a été étudié expérimentalement et numériquement par plusieurs auteurs [Ballatore et al. 1990], [Elouard 1993].

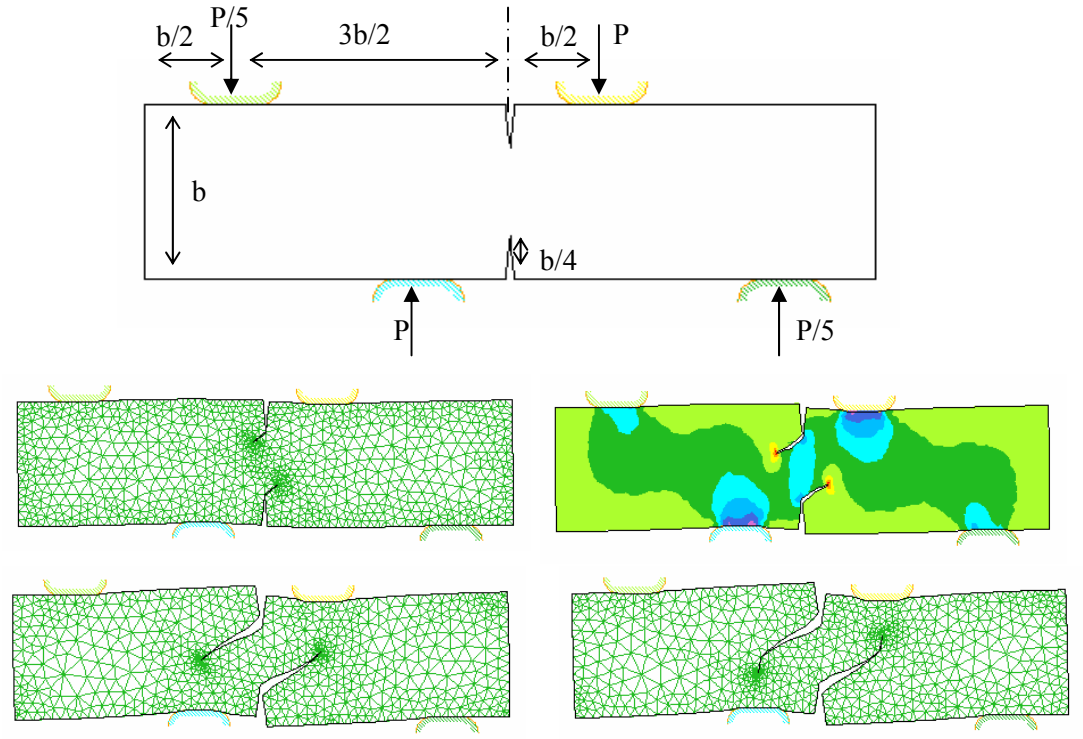


Figure III. 31. Chemin de propagation dans une poutre en flexion 4 points

Comme observé expérimentalement par Bocca [Bocca et al. 1990], les deux fissures s'amorcent dans une direction formant un angle de 50° avec l'axe de pré-fissure. Puis, les deux fissures se propagent en direction du point d'application du chargement, avant de se réorienter verticalement pour se propager jusqu'à celui-ci.

III.4.2.3. Formation de débris

Pour compléter cette partie sur les poutres, nous présentons l'exemple d'une poutre en flexion 3 points, possédant deux pré-fissures placées de façon symétrique par rapport à l'axe de chargement (Figure III.32.). Cet exemple a pour but de modéliser la rencontre de deux fissures se propageant l'une vers l'autre.

Lors de chaque incrément, la position respective des différentes fissures est repérée. On compare alors à chaque incrément la distance entre différentes pointes de fissure, ou entre une pointe de fissure et un contour externe. Lorsque cette distance est inférieure à une distance critique déterminée par l'utilisateur, les deux fissures se rejoignent, formant ainsi un débris dont la formation est gérée automatiquement par le code de calcul. A l'heure actuelle, le débris est tout simplement ôté du maillage, et le calcul se poursuit sur la partie principale (Figure III.32.d). Mais on peut très bien imaginer pouvoir stocker toutes les données (contraintes, déformations, etc…) relatives au débris, de façon à pouvoir y effectuer un calcul ultérieur de type déchargement (retour élastique).

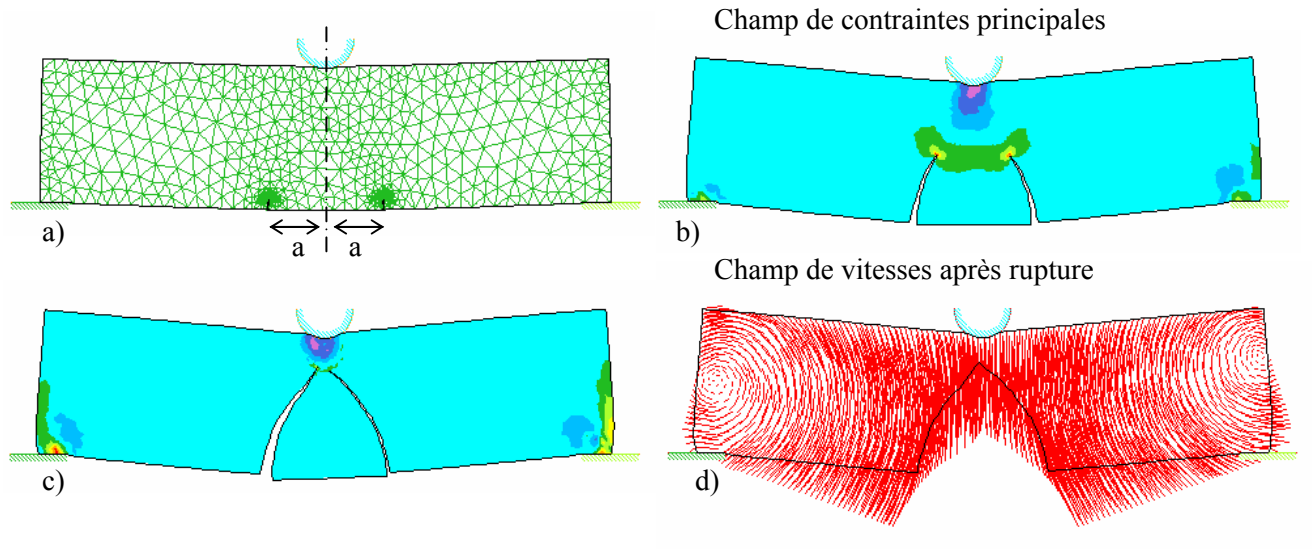


Figure III. 32. Formation de débris provenant de la rencontre de deux fissures

L'exemple ci-dessus est géré de façon entièrement automatique. Une fois que les deux fissures se sont rencontrées, on recherche le contour externe, fermé et orienté, n'intervenant plus dans le calcul (par exemple celui n'ayant plus de contact avec les outils), et on le retire du maillage. Puis on poursuit le calcul après cette rupture. Sur la figure III.32.c, la légère dissymétrie qui apparaît provient du fait que la discrétisation en éléments finis n'est pas symétrique par rapport à l'axe de chargement.

III.4.2.4. Bilan

Ces exemples de poutres en flexion montrent la précision et la fiabilité de la technique utilisée. Plusieurs autres exemples d'applications sur des poutres, ou plus généralement en génie civil (essai brésilien) ont été modélisés [Bouchard et al. 2000a], et montrent la robustesse des techniques numériques développées (remaillage automatique, calcul des directions de propagation, …).
Sur le dernier exemple, la gestion de la propagation des deux fissures et de la création du débris est complètement gérée automatiquement. Ce type d'outils peut trouver son intérêt dans certains procédés industriels où l'on cherche à mettre en forme le matériau en le fissurant, ou en l'endommageant. C'est le cas des deux procédés que nous allons étudier dans le §III.4.3. : l'usinage et le découpage.

III.4.3. Procédés à fort cisaillement et contact matière-matière

Dans cette partie, nous nous intéressons aux procédés à fort cisaillement, afin d'étudier la validité des critères introduits pour ce type d'application. Pour cela, nous présentons successivement des modélisations d'usinage, puis de découpage de tôles.

III.4.3.1. Usinage

Le procédé d'usinage, ou de coupe orthogonale, tient une place importante dans le secteur industriel de la mécanique. C'est pourquoi de nombreux auteurs se sont lancés dans la modélisation numérique de ce procédé [Sekhon et al. 1993], [Marusich et al. 1995], [Fourment et al. 1997], [Touratier 1999]. C'est un procédé très sollicitant d'un point de vue numérique, qui fait intervenir de très fortes vitesses de déformation, des instabilités de cisaillement, des effets thermiques très violents (auto-échauffements très localisés, et temps caractéristique du procédé trop faible pour permettre la diffusion) tant dans le copeau qu'aux contacts outil-copeau et outil-pièce, des frottements à grande vitesse et température élevée. La version viscoplastique du code FORGE2® permet de modéliser l'usinage, sans prendre en compte la formation de débris lors du procédé (Figure III.33.). Or pour modéliser correctement l'usinage, cette création de copeau est un paramètre important.

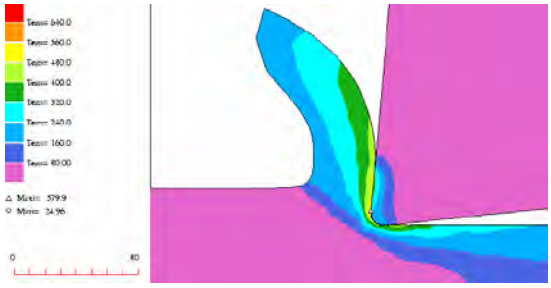


Figure III. 33. Champ de températures après 1ms d'usinage

Nous proposons donc ici de modéliser la propagation d'une fissure lors de l'usinage. Pour cela, nous repérons le lieu d'amorçage en comparant les contraintes maximales à une contrainte critique (Figure III.34.), et nous propageons la fissure lorsque cette contrainte est dépassée (critère de la contrainte normale maximale (Figure III.35.)).

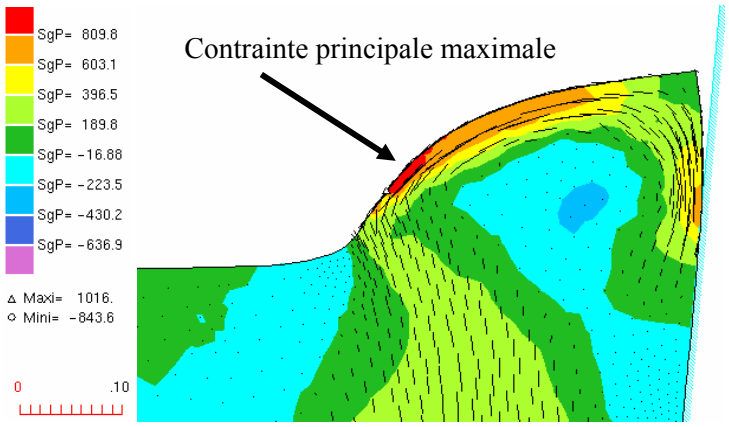


Figure III. 34. Localisation de l'amorçage en contrainte critique

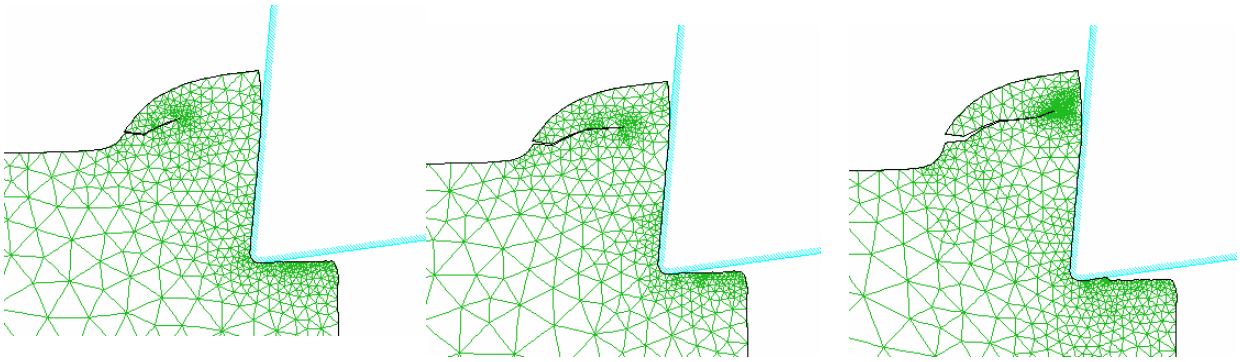
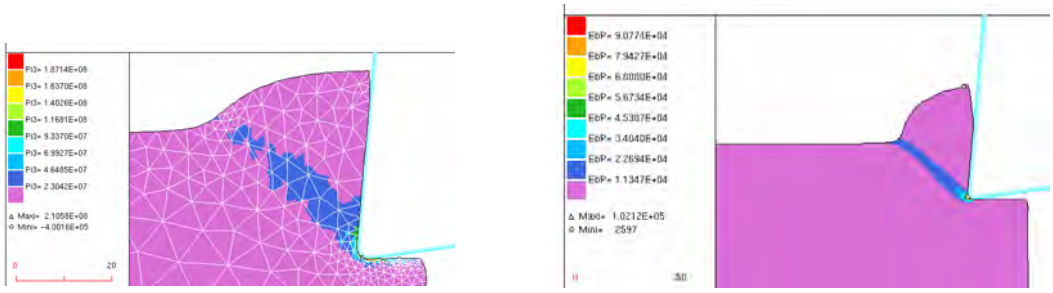


Figure III. 35. Propagation de la fissure lors de l'usinage à l'aide du critère CNM

Comme le montre la figure III.35., le critère CNM n'est pas adapté à ce genre de procédé à fort cisaillement. Ce résultat était prévisible, dans la mesure où ce critère, tout comme les deux autres critères implémentés, sont conseillés pour des applications où le mode I est prédominant. En fait, comme on peut le voir sur la figure III.36., la direction de propagation de la fissure correspondrait plutôt au taux de cisaillement maximal (Figure III.36.a) [Ceretti 1999], ou à la direction de la vitesse de déformation maximale (Figure III.36.b).



a) b)

Figure III. 36. a) Taux de cisaillement et b) vitesse de déformation équivalente

Nous avons introduit un critère basé sur le taux de cisaillement maximum. Comme le montre la figure III.37., la fissure se propage dans la bonne direction, mais on est confronté au problème

d'interpénétration des lèvres de la fissure, et le calcul s'arrête. Comme nous le verrons par la suite, certains développements ont été effectués pour permettre de gérer le contact des lèvres de la fissure.

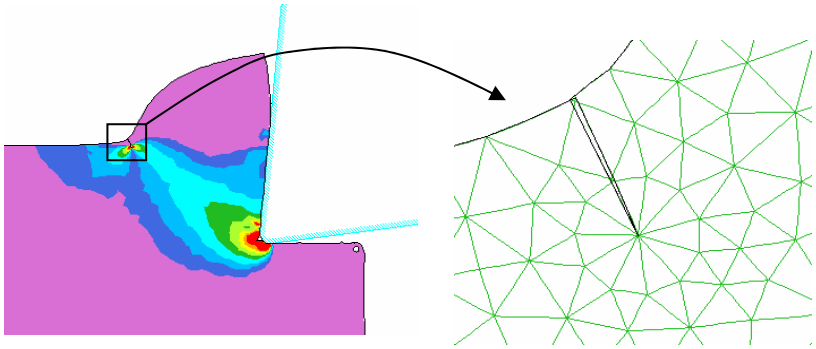


Figure III. 37. Interpénétration des lèvres de la fissure lors d'une propagation dans la direction du taux de cisaillement maximal

III.4.3.2. Découpage de tôles

Tout comme l'usinage, le découpage de tôle est un procédé très sollicitant numériquement, et qui présente une zone de fort cisaillement. La modélisation numérique du découpage de tôle a également été abordée par plusieurs auteurs[4]. La plupart d'entre eux privilégient l'approche basée sur des lois d'endommagement pour modéliser la rupture de la pièce ; d'autres proposent de propager des fissures, mais aucun ne parvient actuellement à modéliser la rupture complète de la pièce.
Nous avons, là encore, effectué une modélisation du découpage et de la fissuration à l'aide du critère CNM [Traën 1999] et d'un amorçage en contrainte critique. Nous obtenons des résultats non conformes à l'expérience, puisque les fissures ne s'orientent pas l'une vers l'autre le long de la bande de cisaillement, mais plutôt parallèlement l'une à l'autre (Figure III.38.).

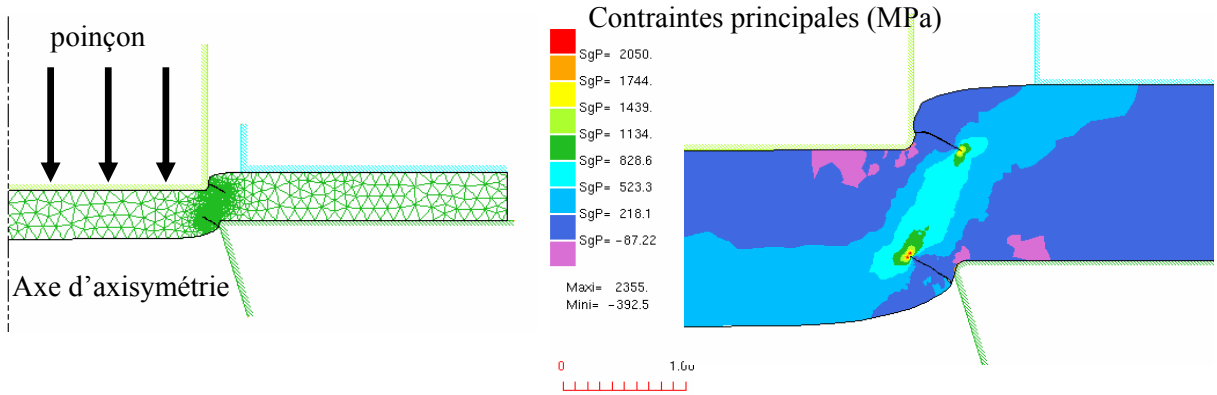


Figure III. 38. Propagation suivant le critère CNM

Cette fois encore, le critère basé sur le taux de cisaillement maximum donne une bonne direction de propagation, mais le problème de contact matière-matière se pose à nouveau (Figure III.39.).

[4] Pour une revue des différentes méthodes utilisées en découpage, le lecteur pourra se référer à [Dumas 2000].

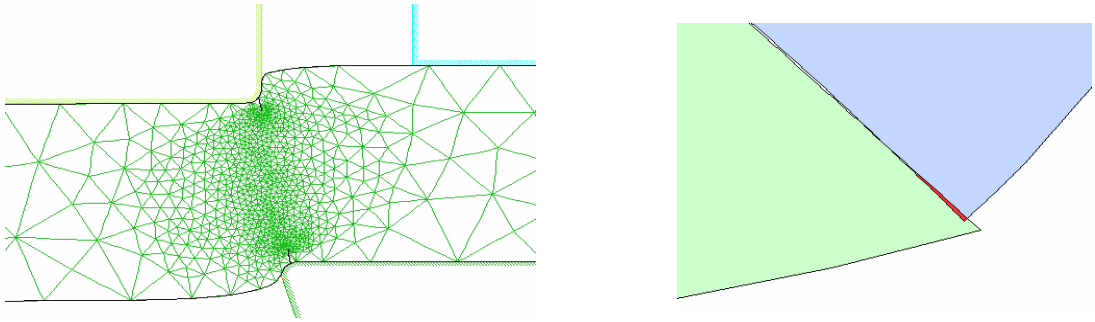


Figure III. 39. Interpénétration des lèvres de la fissure en découpage

III.4.3.3. Le contact des lèvres d'une fissure

Afin de pouvoir gérer l'entrée en contact des lèvres d'une fissure, nous avons abordé le problème du contact matière-matière. C'est un sujet de recherche à part entière, et nous n'entrerons donc pas dans tous les détails dans ce manuscrit : pénalisation, algorithmes maître-esclave, multiplicateurs de Lagrange, etc… Pour plus de précision, le lecteur pourra se référer à [Wriggers 1995] et [Chenot et al. 1998].

Parmi les nombreuses techniques de gestion du contact matière-matière, nous avons recherché une méthode facilement implémentable, et qui puisse s'appliquer spécifiquement aux nœuds situés sur la fissure. La méthode du Lagrangien (non augmenté) correspond à ces critères, d'autant plus que les contraintes de compression que l'on peut voir apparaître sur les lèvres d'une fissure sont généralement faibles. Enfin un algorithme de recherche de contact a été mis en place pour les nœuds appartenant à une fissure [Traën 1999].

Si l'on considère que la résolution d'un problème mécanique correspond à la minimisation d'une fonctionnelle, notée *J(u)*, la méthode du Lagrangien [Ciarlet 1982] consiste à venir ajouter des termes supplémentaires à cette fonctionnelle à minimiser. Ces termes, qui peuvent par exemple correspondre à la distance de pénétration d'un nœud dans la matière, transforment le problème en un problème de minimisation sous contraintes : minimiser le Lagrangien *L(u)* tel que :

$$L(u) = J(u) + \sum_{i=1}^{N_{in}} \mu_i \cdot \phi_i(u)$$

où N_{in} représente le nombre de nœuds ayant pénétrés, et donc le nombre de contraintes d'inégalités $\phi_i(u) \leq 0$. Dans notre cas, ces contraintes $\phi_i(u)$ sont égales au produit scalaire $(IP'.n)$ qui est négatif lorsque l'on a pénétration (Figure III.40.). Enfin les termes μ_i, appelés coefficients de Lagrange, sont calculés itérativement à partir de la contrainte de non pénétration associée $\phi_i(u)$.

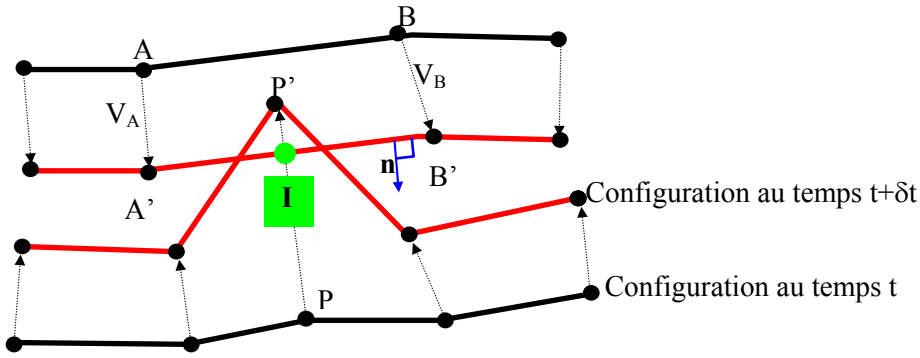


Figure III. 40. Pénétration d'un nœud appartenant à une fissure

D'un point de vue numérique, une telle méthode revient à venir ajouter des termes correcteurs (les coefficients de Lagrange) dans le second membre du système matriciel correspondant à la résolution mécanique du problème. La linéarité des contraintes ajoutées n'entraîne donc aucune modification sur la matrice de rigidité de ce système, qui est en fait une dérivée seconde de la fonctionnelle à minimiser. Lorsqu'un nœud a pénétré un segment particulier, cela revient donc à ajouter un terme correcteur de traction au nœud qui a pénétré, et un terme correcteur de compression aux deux nœuds du segment qui a été pénétré. La résolution se fait itérativement jusqu'à ce que le nœud soit repoussé à la surface de la fissure.
Cette méthode a été validée sur un exemple simple [Cozzi 2000] où l'on vient imposer le contact entre les deux parties de la fissure. Elle n'a pas encore été appliquée aux exemples d'usinage et de découpage présentés précédemment, mais son utilisation devrait permettre de mener ces simulations jusqu'à leur terme. Un tel outil permettrait alors d'ouvrir la voie à de nombreuses applications où le cisaillement prédomine sur le mode I.

III.4.4. Propagation dans les structures multimatériaux

Le dernier champ d'applications que nous proposons ici, met en jeu les deux atouts importants du code FORGE2 MULTIMATERIAUX : le fait de pouvoir prendre en compte plusieurs matériaux, et la propagation de fissures. Pour cela, nous commencerons par présenter quelques résultats importants concernant la mécanique de la rupture de structures multimatériaux, avant d'étudier deux exemples d'application.

III.4.4.1. Mécanique de la rupture de structures multimatériaux

La propagation d'une fissure se propageant dans une structure multimatériaux est influencée par de nombreux paramètres tels que le rapport des modules d'Young des deux matériaux, la nature du contact entre les matériaux. Sih en 1964 [Sih et al. 1964], Erdogan en 1965 [Erdogan 1965], puis

Comninou en 1977 [Comninou 1977], ont été parmi les premiers à étudier la mécanique de la rupture au voisinage d'interfaces entre deux matériaux. Toutes les formulations obtenues alors sont analytiques ; elles sont intéressantes dans la mesure où elles peuvent nous donner une idée de la singularité en pointe de fissure. Malheureusement, elles sont difficilement utilisables car elles sont restreintes à des géométries assez simples, et bien souvent pour des matériaux purement élastiques.
Lorsque l'on étudie la rupture dans des structures bimatériaux, on différencie deux types de fissure dont les comportements à la rupture sont différents : les fissures dans le plan de l'interface, et celles qui sont perpendiculaires ou inclinées par rapport à l'interface.

- ***Fissures dans le plan de l'interface***

Les études réalisées sur ce type de fissures ont montré que, dans le cas de deux matériaux isotropes, la singularité du champ de contraintes en pointe de fissure reste d'ordre ½, comme c'était le cas pour un matériau homogène.

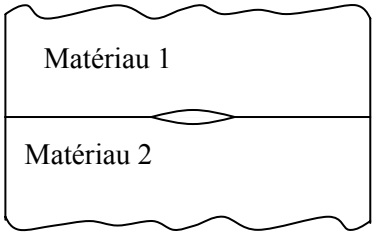


Figure III. 41. Fissure dans le plan de l'interface

Les formulations analytiques proposées sont restreintes à des configurations géométriques simples, et font intervenir une constante ζ, appelée constante biélastique. Cette constante dépend du type de configuration (déformation plane ou contrainte plane), des coefficients de Poisson de chaque matériau, et du module de cisaillement de chaque matériau [Sih et al. 1964] :

$$\zeta = \frac{1}{2\pi}\log\left[\frac{\frac{k_1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}}{\frac{k_2}{\mu_2}+\frac{1}{\mu_1}}\right] \quad \text{où} \quad \begin{cases} k_i = 3-4\nu_i \text{ en déformations planes} \\ k_i = \dfrac{3-\nu_i}{1+\nu_i} \text{ en contraintes planes} \\ \nu_i \text{ est le coefficient de Poisson du matériau i} \\ \mu_i \text{ est le module de cisaillement du matériau i} \end{cases}$$

- ***Fissures perpendiculaires au plan de l'interface***

Les études portant sur le comportement d'une fissure perpendiculaire au plan de l'interface se décomposent généralement en trois catégories :

- Une fissure n'ayant pas atteint l'interface (Figure 40a) : il est possible d'exprimer les facteurs d'intensité de contraintes en fonction des paramètres classiques (module de cisaillement du matériau dans lequel se trouve la fissure, coefficient de Poisson, etc…), mais aussi à partir d'une fonction *f(r), r* étant la distance par rapport à la pointe de fissure. Cette fonction ne peut être déterminée analytiquement que pour des cas classiques et simples, ou elle peut être approchée numériquement comme nous le verrons par la suite ;
- Une fissure dont la pointe est au droit de l'interface (Figure 40b) : les facteurs d'intensité de contraintes prennent la forme [Cook et al. 1972] : $K_I = \lim_{r\to 0}\sqrt{2}\mu^* r^{\omega} f(r)$, où r est la distance

par rapport à la pointe de fissure, μ^* est un paramètre dépendant des modules de cisaillement et des coefficients de Poisson des deux matériaux, *f(r)* est une fonction de *r* dépendant de la configuration géométrique et ω est la nouvelle puissance de la singularité en pointe de fissure. En effet, lorsque la fissure est au droit de l'interface, la singularité ne vaut plus ½ (sauf si les deux matériaux ont le même module d'Young), mais elle varie entre 0 et 1 suivant le rapport des modules d'Young [Zhang 1992] ;

- Une fissure ayant traversé l'interface (Figure 40c) : dans ce cas, Lu et Erdogan [Lu et al. 1983] proposent de traiter le problème en considérant deux fissures situées de part et d'autre de l'interface. Là encore, la puissance de la singularité peut être différente de ½, et la fissure a la possibilité de se propager le long de l'interface.

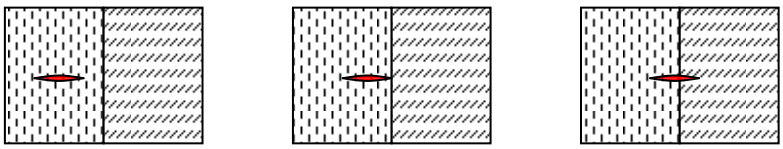


Figure III. 42. a) fissure n'ayant pas atteint l'interface – b) fissure au droit de l'interface – c) fissure ayant traversé l'interface

Toutes ces formulations analytiques étant restreintes aux géométries et aux matériaux idéaux, l'approche numérique, abordée à la fin des années 1970, semble préférable pour étudier des cas plus réalistes.

- ***Généralisation des méthodes numériques aux multimatériaux***

En se basant sur les formulations analytiques proposées par Sih [Sih et al. 1981] dans le cas de multimatériaux, il est possible de calculer les facteurs d'intensité des contraintes en appliquant la **méthode d'extrapolation** (présentée au chapitre II). Il reste cependant nécessaire de différencier le cas où la fissure est dans le plan de l'interface, du cas où la fissure est perpendiculaire ou inclinée par rapport à l'interface.

Cette méthode, d'utilisation simple, présente cependant certains inconvénients :

- elle nécessite la connaissance d'une formulation analytique des champs mécaniques en pointe de fissure, ce qui n'est pas toujours possible ;
- pour avoir une bonne précision sur les résultats, il est nécessaire d'effectuer un raffinement important en pointe de fissure. El Abdi [El Abdi 1986] recommande par exemple l'utilisation d'éléments singuliers, de taille inférieure au $1/60^{ème}$ de la taille de la fissure.

Pour toutes ces raisons, l'utilisation de méthodes énergétiques, considérant le comportement global de la structure fissurée, peut s'avérer plus intéressante.

Plusieurs méthodes énergétiques ont été généralisées aux fissures au voisinage d'interfaces entre deux matériaux :

- les **intégrales de contour** font intervenir un terme supplémentaire correspondant à une intégrale le long de l'interface [Zhang 1992] ;

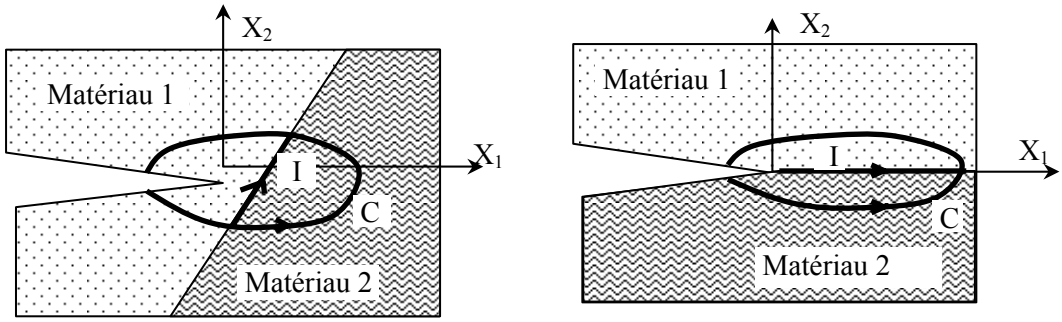


Figure III. 43. Contour d'intégration traversant deux matériaux

- pour les **méthodes d'extensions virtuelles**, si la **fissure est dans le plan de l'interface**, et qu'elle se propage le long de cette interface, le déplacement virtuel des nœuds du contour ne modifie pas l'interface entre les deux matériaux, et la méthode peut donc être appliquée. Par contre, si la **fissure est perpendiculaire, ou inclinée par rapport à l'interface**, l'indépendance par rapport au contour d'intégration n'est plus vérifiée [Petit 1990]. En effet, lorsque la pointe de fissure a atteint l'interface, le fait d'effectuer une extension virtuelle modifie la position de la pointe de fissure, et donc de l'interface. L'indépendance par rapport au contour n'est alors plus vérifiée car la zone interfaciale déplacée varie en fonction du contour choisi. Ce problème peut également être rencontré lorsqu'une fissure est suffisamment proche d'une interface pour que son contour d'intégration englobe les deux matériaux.

- Malgré sa lourdeur de calcul, Bush [Bush 1999] conseille d'utiliser la méthode de **la variation d'énergie potentielle totale** (méthode d'extension réelle) pour avoir plus de précision lorsque la fissure a une trajectoire très proche de l'interface. En effet, le calcul de l'énergie potentielle est un calcul global sur l'ensemble du domaine, et il n'est donc pas perturbé par le fait que la fissure soit au voisinage immédiat de l'interface. Par contre, lorsque l'on recherche la direction de propagation de la fissure par la méthode du taux de restitution d'énergie maximal, on est obligé de refaire un calcul mécanique pour chaque direction virtuelle de propagation de fissure. La détermination de la trajectoire de la fissure donne alors lieu à des calculs très longs.

Pour comprendre la nature du problème, il est important de rappeler que le taux de restitution d'énergie *G* représente la diminution d'énergie potentielle du système lors d'un incrément unitaire de propagation de fissure, alors que les facteurs d'intensité de contraintes peuvent être définis à n'importe quel instant de propagation. Lorsqu'une fissure arrive en contact avec une interface, il est donc possible de définir les facteurs d'intensité de contraintes, mais la notion de taux de restitution d'énergie conduit à définir des valeurs de *G* avant d'atteindre l'interface ou une fois que l'interface a été traversée. Les extensions virtuelles doivent donc toujours être réalisées dans le même matériau, et on définit des valeurs de *G* à droite, et à gauche de l'interface. C'est pour cette raison que les méthodes basées sur des intégrales de surface ne sont pas applicables lorsque la fissure est en contact avec l'interface. Par contre, le calcul de *G* est possible juste avant d'avoir atteint l'interface, ou juste après

l'avoir traversé. D'un point de vue numérique, il faut réserver une ou deux rangées d'éléments entre la pointe de la fissure et l'interface [Zhang 1992].

Une étude, menée par Zhang sur des fissures statiques au voisinage immédiat d'une interface, met en évidence l'influence du rapport des modules d'Young, et du type de contact à l'interface entre les deux matériaux. Cette étude montre que la fissure se propage toujours de préférence dans le matériau le plus rigide, et qu'elle se propageait plus facilement vers l'interface lorsque celle-ci était glissante. Une fois que la fissure a atteint l'interface, le fait d'avoir un contact avec frottement (utilisation d'éléments d'interface) peut ralentir, voir stopper la propagation de la fissure. Celle-ci peut alors se réorienter le long de l'interface, ou encore se propager à son autre extrémité. Il est très difficile de pouvoir prévoir l'évolution d'une fissure lorsqu'elle a atteint l'interface : le changement de singularité et notre trop faible connaissance de la résistance d'une interface nous empêchent de déterminer avec précision la direction de propagation de la fissure.

- ***Bilan***

Comme nous venons de le voir, la mécanique de la rupture appliquée aux structures multimatériaux reste un domaine complexe et très ouvert. Les solutions analytiques ne sont applicables que pour des géométries simples et des matériaux idéaux. L'approche numérique n'est pas encore tout à fait satisfaisante. Si elle permet d'étudier les facteurs d'intensité des contraintes ou le taux de restitution d'énergie pour une fissure statique au voisinage d'une interface bimatériaux, elle ne permet pas encore de modéliser la propagation quasi-statique d'une fissure à travers cette interface. Notre faible connaissance des propriétés exactes d'une interface entre deux matériaux, la difficulté de calculer la direction de propagation d'une fissure au droit d'une interface, la complexité numérique liée à la propagation d'une fissure à travers une interface dans un maillage, sont autant de paramètres qui nous empêchent de modéliser, dans un cadre général, la propagation quasi-statique d'une fissure à travers une interface bimatériaux.
Cependant, il peut être intéressant d'étudier la propagation de fissures dans des structures multimatériaux. Cela nous permettra de mettre en évidence l'influence des propriétés mécaniques des différents matériaux sur le chemin de propagation de la fissure.

III.4.4.2. Eprouvette bicouche pré-fissurée

Nous proposons ici d'étudier le cheminement d'une fissure dans une éprouvette bicouche en faisant varier la rigidité de la poutre de soutien inférieure. Une poutre en T est soumise à un chargement vertical sur sa partie supérieure. Sur sa partie inférieure, elle est collée à une poutre de soutien (poutre inférieure sur la figure III.44.), bloquée à ses extrémités, et dont l'utilité est de rigidifier l'assemblage. Enfin une pré-fissure est introduite au niveau d'un des rayons de congé de la poutre en T (Figure III.44.). Cet exemple, proposé par Sumi et al. [Sumi et al. 1995], consiste à étudier la propagation d'une fissure à partir d'une soudure dans un élément de structure. Sumi incluait également les effets de contraintes résiduelles de soudure et faisait varier la rigidité de flexion de la structure en faisant varier l'épaisseur de la poutre de soutien.

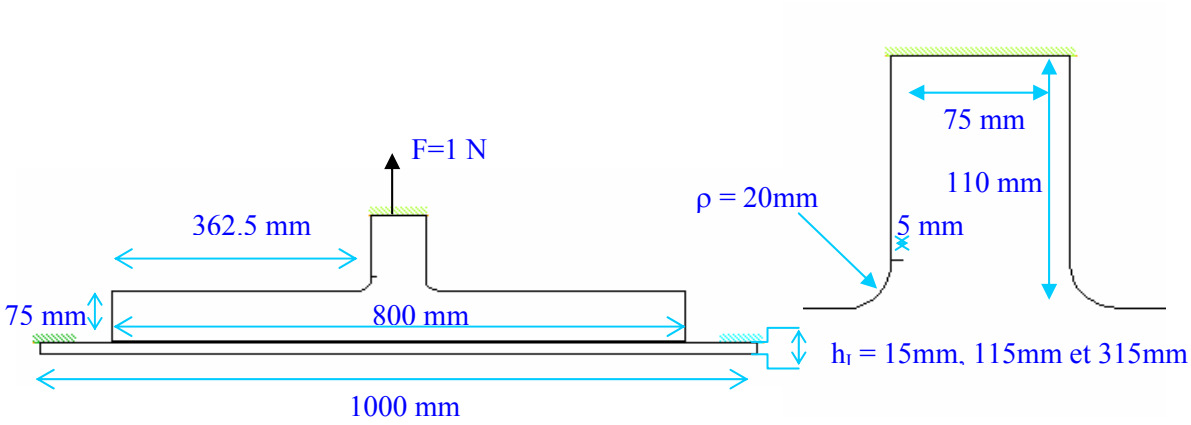


Figure III. 44. Géométrie de l'éprouvette bicouche pré-fissurée

Nous avons effectué une simulation avec trois épaisseurs de poutre de maintien différentes : 15mm, 115mm et 315mm. Nous négligeons d'éventuelles contraintes résiduelles de soudure, pour n'étudier que l'influence de la rigidité de la poutre inférieure. Le critère de propagation choisi est le critère du taux de restitution d'énergie maximum, qui est à la fois précis, et moins sensible aux interfaces que le critère de la contrainte normale maximale.

- Poutre mince :

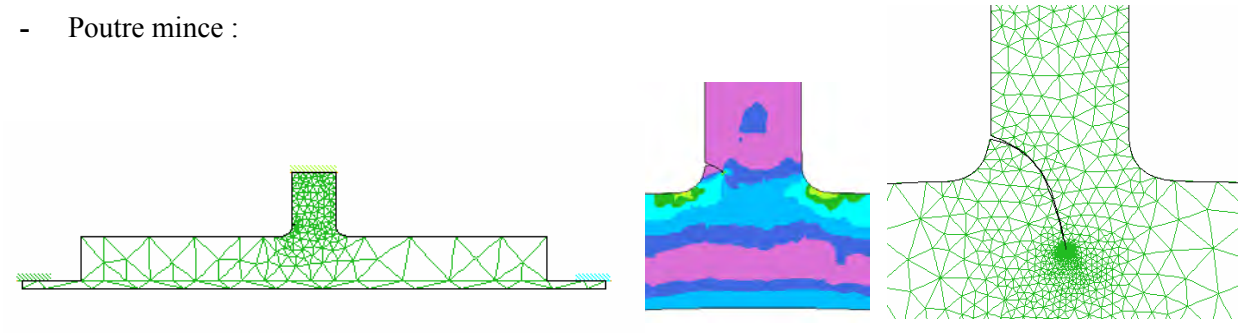


Figure III. 45. Chemin de propagation pour une poutre mince

- Poutre moyenne :

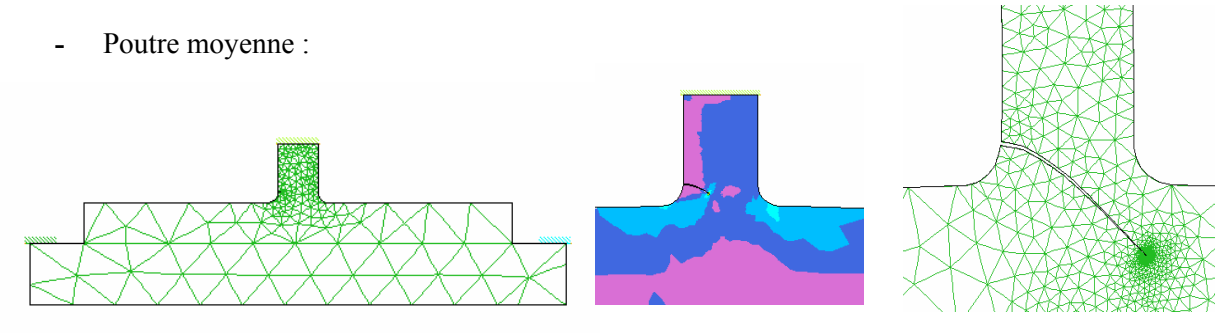


Figure III. 46. Chemin de propagation pour une poutre moyenne

- Poutre épaisse :

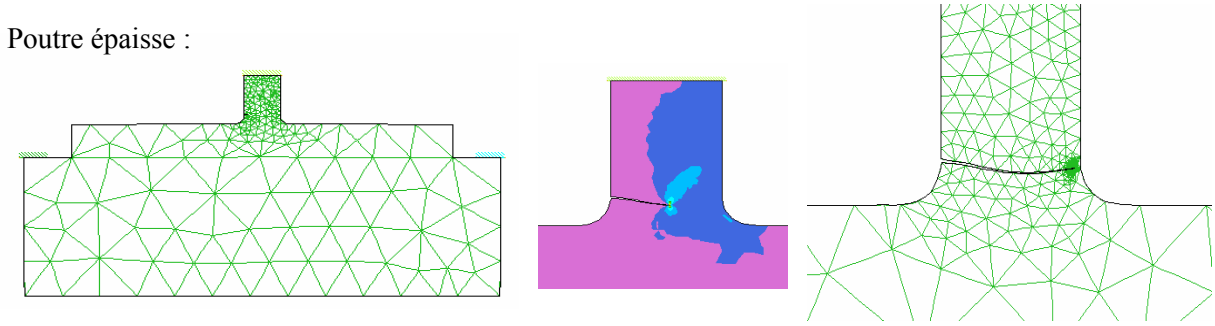


Figure III. 47. Chemin de propagation pour une poutre épaisse

Ces chemins de propagation, tous très différents, montrent l'importance de la rigidité de la poutre de soutien. D'un point de vue général, on peut donc noter que plus la poutre de soutien est mince, et plus la fissure bifurque de façon abrupte vers le bas.

Cet exemple a été repris numériquement par Flemming et al. [Flemming et al. 1997] par une méthode sans maillage, l'"Element-Free Galerkin Method" (EFGM) enrichie. Pour une poutre de maintien flexible (poutre mince) et pour une poutre de maintien rigide (poutre épaisse), Flemming obtient les chemins de propagation suivants :

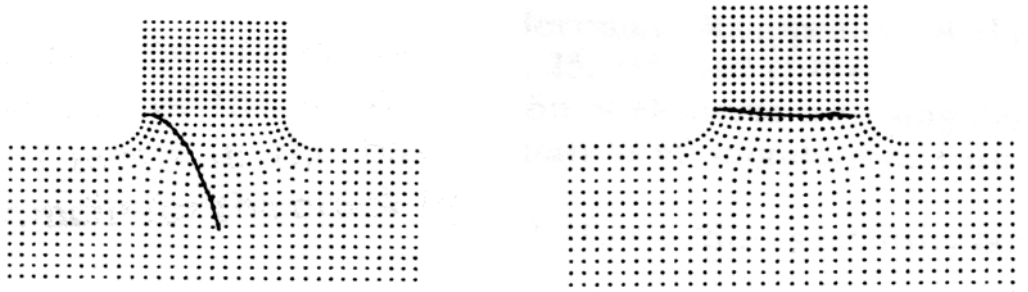


Figure III. 48. Chemins de propagation avec l'Element-Free Galerkin Method enrichie [Flemming et al. 1997]

Les résultats que nous obtenons correspondent bien à ceux obtenus par Sumi [Sumi et al. 1995] et Flemming [Flemming et al. 1997]. Plus la poutre de soutien est mince, et plus elle fléchit. Le champ de contraintes est alors modifié au voisinage de la fissure, et elle se propage vers le bas de l'éprouvette, en direction de la poutre de soutien. La figure III.49. représente la superposition des trajectoires des fissures pour une poutre mince, obtenues par notre méthode, et par la méthode sans maillage.

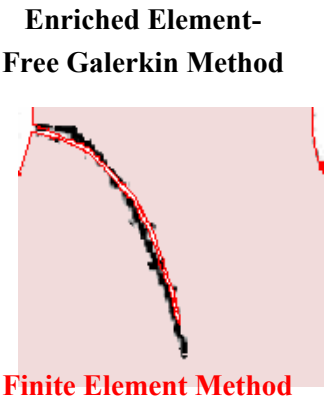


Figure III. 49. Trajectoires de fissure pour une poutre mince

III.4.4.3. Propagation dans un composite

Pour finir, nous proposons ici d'étudier la propagation d'une fissure dans une pièce contenant une inclusion. Soit R, le rapport de rigidité de la matrice par rapport à l'inclusion. Nous comparons les chemins de propagation pour R=1 (matériau homogène), R=10 (inclusion molle), et R=0,1(inclusion rigide).

Nous commençons avec un rapport R unitaire, ce qui signifie que nous avons bien une inclusion, mais qu'elle est constituée du même matériau que la matrice. Comme attendu, la fissure se propage horizontalement, comme pour un monomatériau homogène (Figure III.50.).

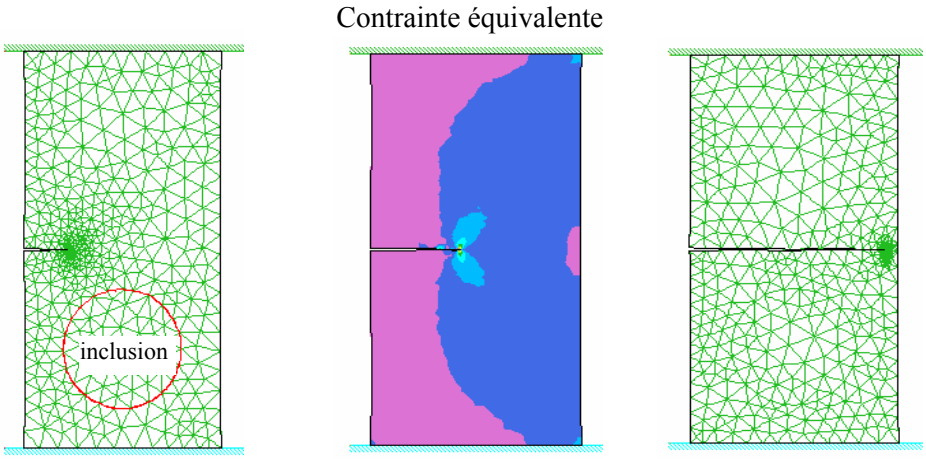


Figure III. 50. Propagation dans un composite contenant une inclusion du même matériau que la matrice

Dans le cas de l'inclusion molle, figure III.51., on retrouve un résultat similaire à celui qui avait été obtenu pour une plaque trouée pré-fissurée : l'inclusion étant moins rigide, modifie la répartition de contraintes et attire la fissure. Une fois l'inclusion dépassée, la fissure se réoriente horizontalement.

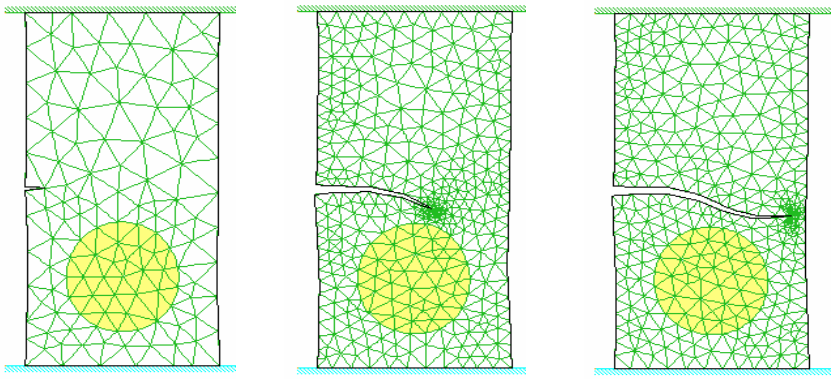


Figure III. 51. Propagation dans un composite contenant une inclusion molle R=10

Dans le cas de l'inclusion dure, figure III.52., la fissure est cette fois-ci légèrement repoussée.

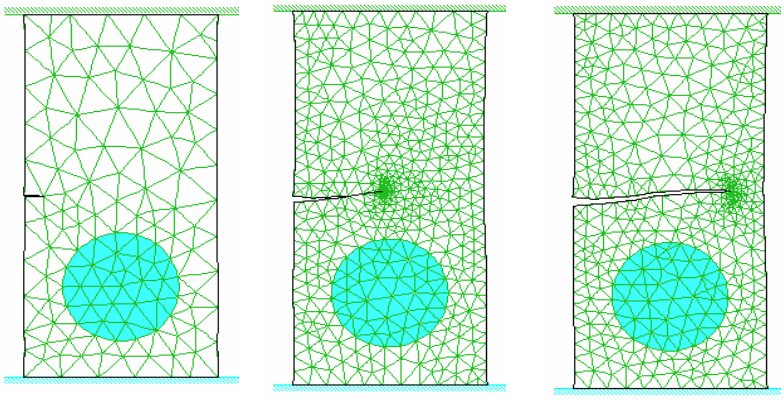


Figure III. 52. Propagation dans un composite contenant une inclusion rigide R=0,1

Ainsi, il est possible d'étudier les trajectoires des fissures en faisant varier les caractéristiques mécaniques des différents matériaux, ou encore leur géométrie. On imagine vite le grand nombre d'applications que l'on pourrait étudier grâce à tous ces outils réunis : propagation de fissures dans les bétons en fonction de la disposition des agrégats, propagation dans des matériaux composites ou multicouches, structures multicristallines, rôle des inclusions pour la propagation de fissures, etc …

III.5. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté tous les outils nécessaires à la modélisation de la propagation quasi-statique de fissures. Les difficultés numériques sont surmontées grâce à la technique de maillage et de remaillage automatique et multi-domaines présentée au chapitre I. Cette technique permet notamment de propager une ou plusieurs fissures dans un maillage, tout en conservant une très bonne précision en pointe de fissure.

Après avoir présenté le critère de la contrainte normale maximale, le critère de la densité d'énergie de déformation minimale et le critère du taux de restitution d'énergie maximal, nous les avons comparés sur différents exemples d'application. Ils donnent tous les trois de bons résultats, mais le critère de la densité d'énergie de déformation minimale semble assez dépendant du maillage et du nombre d'éléments dans la couronne d'intégration. Le critère de la contrainte normale maximale donne de très bons résultats, grâce au raffinement évolutif, et au maillage concentrique en pointe de fissure. Il est également le critère le plus rapide, et il peut être appliqué aux cas de matériaux élastoplastiques. Le critère du taux de restitution d'énergie maximal est lui aussi très précis. Il est indépendant du maillage, et est moins perturbé lorsque la fissure passe dans le voisinage d'interfaces ou de cavités. Pour chacun de ces critères, nous avons montré que la *distance de propagation* est un paramètre important : plus cette distance est petite, et plus les résultats sont précis.

Les nombreuses applications présentées montrent la robustesse et la fiabilité des techniques utilisées. Tous les outils implémentés offrent de nombreuses perspectives d'application dans plusieurs domaines :

- l'usinage avec la modélisation de la formation de copeaux ;
- la propagation de fissures dans des matériaux multicouches tels que les tôles oxydées ;
- le découpage de tôles avec la rupture totale de la pièce, permettant ainsi d'étudier la remontée de l'outil et l'usure provenant de son frottement sur la tôle restante ;
- la propagation de fissures dans des matériaux composites ou des alliages métalliques et l'effet, bénéfique ou néfaste, des inclusions ou des fibres dans la matrice.

CHAPITRE IV

APPLICATION DES DEVELOPPEMENTS NUMERIQUES AU COMPACTAGE DE TUBES EN ZIRCALOY 4

IV. Table des Matières

IV.1. Contexte de l'étude — *136*

IV.1.1. L'essai spécifique de compactage — **138**

IV.1.2. Le zircaloy 4 irradié — **139**

IV.1.2.1. Le zircaloy 4 — 139

IV.1.2.2. Effet de l'irradiation sur le zircaloy 4 — 140

IV.1.3. Recherche du matériau simulant — **141**

IV.1.3.1. Influence de l'état métallurgique — 142

IV.1.3.2. Influence du type de sollicitation — 143

IV.1.3.3. Influence de l'écrouissage — 144

IV.1.4. Bilan et matériau simulant retenu — **144**

IV.2. Modélisation numérique du compactage — *145*

IV.2.1. Validation de la loi de comportement : dépliage d'un demi-tube — **145**

IV.2.2. Prise en compte du multi-domaines : compactage de trois tubes superposés — **147**

IV.2.3. Prise en compte de la fissuration : compactage d'un tube — **149**

IV.2.3.1. Localisation de l'amorçage — 149

IV.2.3.2. Propagation — 151

IV.2.4. Etudes de sensibilité — **152**

IV.2.5. Bilan — **153**

IV.3. Etude et discussion sur l'influence d'une couche d'oxyde — *154*

IV.3.1. Oxydation du zircaloy 4 — **154**

IV.3.1.1. Formation de la couche de zircone — 154

IV.3.1.2. Description de la couche d'oxyde — 156

IV.3.1.3. Etude mécanique de l'oxydation — 157

IV.3.1.4. Bilan — 159

IV.3.2. Etude expérimentale de l'oxydation de tubes en zircaloy 4 écroui — **160**

IV.3.2.1. Conditions d'oxydation — 160

IV.3.2.2. Observations de microstructure — 161

IV.3.2.3. Courbes Force/Déplacement — 164

IV.3.2.4. Faciès de rupture — 166

IV.3.2.5. Bilan — 169

IV.3.3. Modélisation numérique du compactage d'un tube oxydé — **169**

IV.3.3.1. Hypothèses simplificatrices — 169

IV.3.3.2. Simulation numérique du compactage d'un tube oxydé sans fissuration — 170

IV.3.3.3. Sensibilité par rapport à l'épaisseur de zircone — 173

IV.4. Bilan — *175*

A la différence des trois chapitres précédents qui étaient centrés sur le développement de méthodes numériques, ce chapitre est à vocation applicative. Outre l'intérêt physique et industriel de cette d'application, cet exemple nous permettra de mettre en pratique et de tester les principales caractéristiques du code FORGE2 MULTIMATERIAUX : la non linéarité du comportement, les grandes déformations, l'aspect multi-domaines et multi-matériaux, et la propagation de fissures.

L'étude qui suit consiste à modéliser le compactage de tubes en zircaloy 4 irradiés en réacteur à eau pressurisée (REP), afin de mettre en évidence les mécanismes de déformation et de rupture lors de l'essai de compactage. Pour cela, nous commencerons par présenter brièvement le contexte industriel de l'étude, le fonctionnement d'une centrale nucléaire, et ses principaux constituants. Nous présenterons ensuite plus particulièrement le zircaloy 4, alliage à base de zirconium, et nous verrons les propriétés pour lesquelles ce matériau a été retenu. Puis, nous étudierons les principaux effets de l'irradiation sur les propriétés mécaniques du zircaloy 4. Toute cette **première partie** aura donc pour but de **présenter le contexte de notre étude ainsi que le matériau que nous étudierons**.

Dans la **seconde partie**, nous nous attacherons plus particulièrement à déterminer le **comportement mécanique de tubes en zircaloy 4 pour l'essai spécifique de compactage**. Des essais expérimentaux sur le matériau irradié n'étant pas envisageables ici (les impératifs de sécurité rendent le coût des essais exorbitant), nous chercherons un état métallurgique du zircaloy 4 dont les propriétés mécaniques sont suffisamment proches de celles du matériau irradié pour l'essai de compactage. Cela nous permettra notamment de valider les résultats numériques dans la partie suivante.

La **troisième partie** sera consacrée à la **modélisation numérique de l'essai de compactage**. Outre l'intérêt de cette application pour étudier les mécanismes de déformation des tubes en zircaloy 4 lors du compactage, nous pourrons également utiliser successivement tous les outils importants qui ont été décrits dans les premiers chapitres. Nous commencerons par valider la loi de comportement monomatériau déterminée précédemment sur un essai de dépliage d'un demi-tube. Puis, nous utiliserons les caractéristiques multi-domaines du code pour simuler le compactage de trois tubes superposés. Nous utiliserons enfin les développements en mécanique de la rupture pour modéliser les compactage d'un tube jusqu'à rupture complète.

Dans la **quatrième partie**, nous aborderons le thème de **l'oxydation des tubes en zircaloy 4** entraînant l'apparition d'une fine couche d'oxyde de zirconium (la zircone) sur les faces interne et externe du tube. Nous montrerons la complexité de cette oxydation, et son influence sur les propriétés mécaniques du matériau. Nous présenterons également la modélisation du compactage d'un tube oxydé, en insistant sur les hypothèses simplificatrices nécessaires à l'heure actuelle pour y parvenir. Cela nous amènera finalement à discuter des développements nécessaires pour modéliser avec précision un tel exemple d'application.

IV.1. CONTEXTE DE L'ETUDE

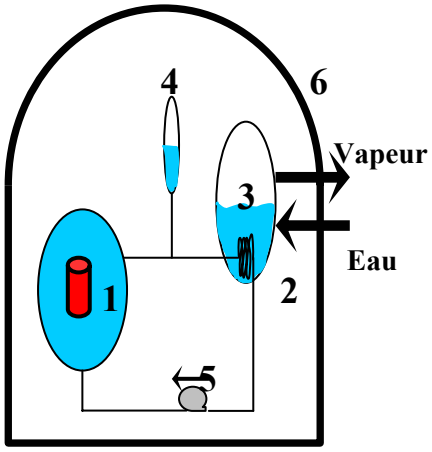
Le parc nucléaire français, décidé et conçu principalement au moment du choc pétrolier de 1973, est maintenant achevé depuis quelques années. Si le nucléaire représente actuellement 17% de l'électricité totale produite dans le monde, la production d'électricité en France est réalisée à 76% par le parc nucléaire (1995).

L'essentiel du parc EDF est composé de réacteurs à eau pressurisée (REP). Ces réacteurs utilisent de l'eau maintenue sous pression à l'état liquide, qui circule dans un circuit primaire, et échange ses calories dans des générateurs de vapeur. La puissance dégagée dans le cœur (1) d'une chaudière nucléaire (FigureIV.I.) permet de chauffer l'eau d'un premier circuit (2). Cette eau est entraînée par une pompe (5), et maintenue en pression par un pressuriseur (4). Cette eau chauffée est ensuite transformée en vapeur à l'aide du générateur de vapeur (3). Enfin l'ensemble de la chaudière est située dans une enceinte de confinement en béton armé (6). Notons que cette enceinte ne sert qu'en cas d'accident, puisque le confinement de toute fuite radioactive est assuré dans un premier temps par les gaines en zircaloy 4 entourant le combustible nucléaire, et dans un deuxième temps par l'enceinte étanche du circuit primaire.

Dans notre étude, nous allons nous intéresser au comportement mécanique des gaines en zircaloy 4 (appelées crayons) qui contiennent un empilement de pastilles de combustible (oxyde d'uranium fritté). Ces crayons sont obturés par des bouchons soudés, et les pastilles sont comprimées à l'aide d'un ressort aménageant en partie supérieure du crayon une chambre d'expansion qui permet de limiter la pression interne due au relâchement des gaz de fission. Enfin, on pressurise les crayons à l'hélium, de façon à diminuer les contraintes et la fatigue du gainage. Le cœur du réacteur est composé de 205 assemblages combustibles disposés verticalement. Chacun de ces assemblages est constitué de 264 crayons combustibles assemblés en un réseau carré de 17*17 crayons (Figure IV.2.).

Comme nous l'avons précisé précédemment, ces gaines en zircaloy 4 constituent la première barrière de confinement des matières radioactives. C'est pourquoi la tenue sous irradiation des matériaux constituant l'assemblage combustible est un des facteurs essentiels de son comportement en réacteur avec la tenue à la température et à la corrosion. De nombreuses études ont donc été menées sur la mise en forme des gaines en zircaloy 4 [Mulot 1997], [Logé 1999], sur leur tenue en réacteur, mais aussi sur leur oxydation [Parise 1996] et leur hydruration [Prat 1994] en réacteur.

Lorsque ces gaines arrivent en fin de vie, la question de la gestion de ce déchet se pose. Elle constitue la préoccupation principale de l'opinion publique actuellement. De plus, elle est prise en charge intégralement par les exploitants nucléaires, ce qui est rarement le cas dans la plupart des industries.



1 cœur du réacteur
2 premier circuit
3 générateur de vapeur
4 pressuriseur
5 pompe
6 enceinte

Figure IV. 1. Schématisation d'une chaudière nucléaire

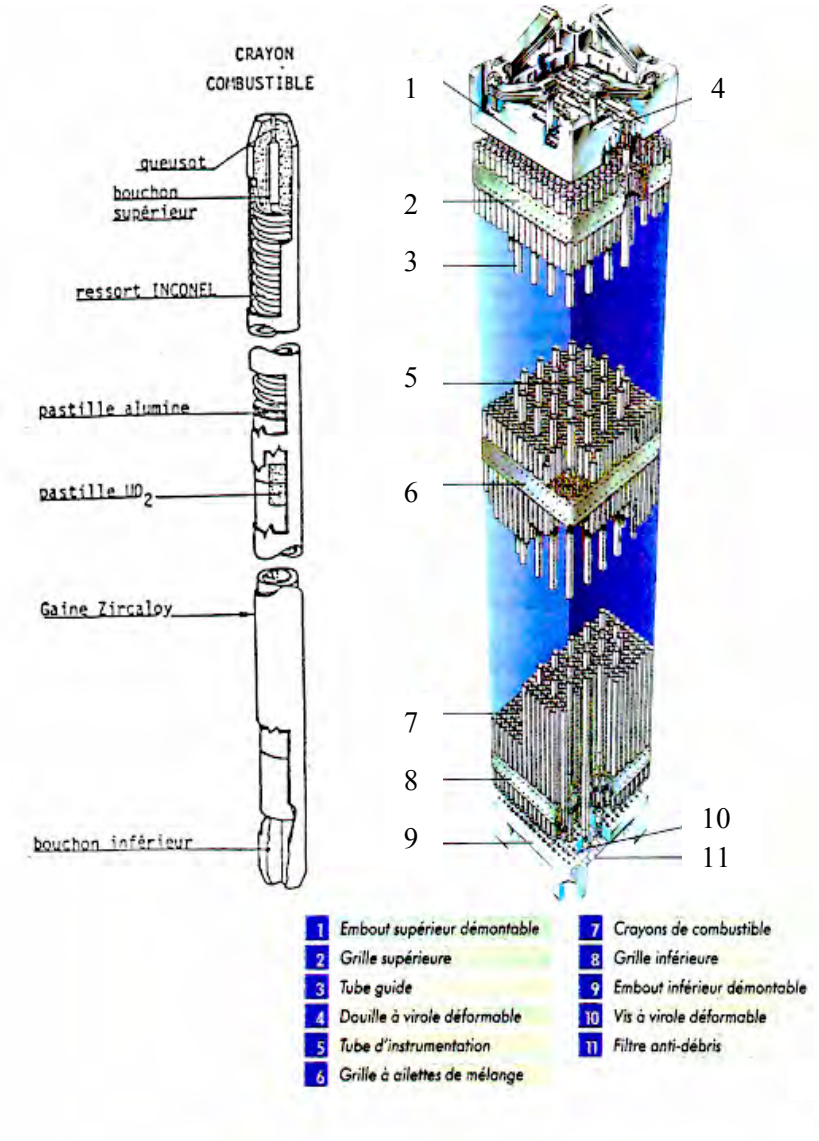


Figure IV. 2. Assemblage de crayons combustibles

L'étude que nous proposons ici consiste à étudier les propriétés mécaniques de tubes en zircaloy 4 irradié provenant de centrales REP. Pour cela nous étudierons les mécanismes de déformation et de rupture des tubes soumis à un **essai de compactage**. Dans une **première partie**, nous présenterons donc cet essai, ainsi que la géométrie des tubes étudiés.
Malheureusement, nous ne pourrons pas valider nos résultats numériques par rapport à des résultats expérimentaux sur le matériau irradié, car les essais ont été jugés très coûteux. Il sera donc nécessaire de trouver un matériau (que nous appellerons matériau simulant) qui ait des propriétés mécaniques très proches de celles du matériau irradié pour l'essai de compactage. Cela nous permettra d'effectuer des compactages expérimentaux et de comparer les courbes Force/Déplacement ainsi obtenues aux courbes numériques. Avant de déterminer ce matériau simulant, nous présenterons dans la **deuxième partie** le **zircaloy 4** utilisé pour les crayons combustibles, et nous étudierons les **effets de l'irradiation** sur leurs propriétés mécaniques.
La **troisième partie** sera alors consacrée à la **recherche d'un matériau simulant**. Pour cela, nous comparerons les propriétés mécaniques du zircaloy 4 dans **différents états métallurgiques**. Ces propriétés mécaniques provenant exclusivement d'essais de traction et d'éclatement, et le zircaloy 4 étant anisotrope, il sera également nécessaire de déterminer le jeu de paramètres correspondant le mieux à l'essai de compactage.

IV.1.1. L'essai spécifique de compactage

Afin de mettre en valeur les mécanismes de déformation et de rupture dans les tubes en zircaloy 4, nous avons choisi de développer spécifiquement l'essai de compactage. Nous étudierons donc des tronçons de tubes de 30mm de longueur, soumis à un compactage suivant leur génératrice (axe Oz sur la figure IV.3.). Les caractéristiques géométriques des tubes étudiés sont les suivantes :

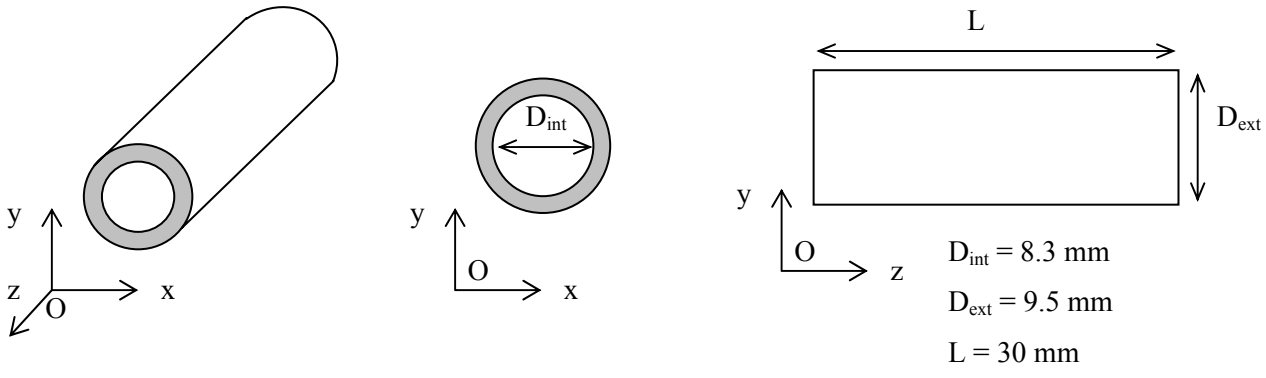


Figure IV. 3. Caractéristiques géométriques des tubes étudiés

Nous modéliserons plus particulièrement trois essais de compactages différents : le compactage d'un demi-tube (ou dépliagepliage), d'un tube, et de trois tubes superposés :

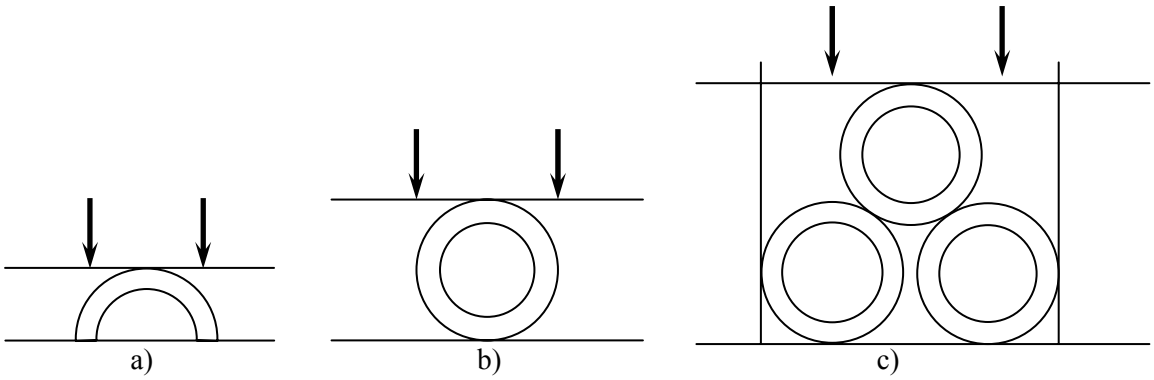


Figure IV. 4. Compactage a) d'un demi-tube, b) d'un tube, et c) de trois tubes superposés

Ces trois configurations nous permettront d'illustrer les différents développements effectués dans le code FORGE2 Multimatériaux. Enfin, dans le dernier sous-chapitre, nous modéliserons le compactage d'un tube oxydé grâce aux caractéristiques multimatériaux du code. Nous déterminerons alors les développements nécessaires à une modélisation plus précise du compactage d'un tube en zircaloy 4 oxydé.

IV.1.2. Le zircaloy 4 irradié

IV.1.2.1. Le zircaloy 4

Comme nous venons de le dire, les crayons combustibles sont réalisés en alliage de zirconium : le zircaloy 4. Le choix de ce matériau provient à la fois de sa transparence aux neutrons, et des ses bonnes propriétés de résistance à divers types de corrosion.
Le zirconium pur est de structure hexagonale compacte à la température ambiante (phase α). Il subit une transformation allotropique à 863°±3°C, température au delà de laquelle il présente une structure cubique centrée (phase β). Il possède un point de fusion élevé (1840°C), un très faible coefficient de dilatation thermique ($5{,}86.10^{-6}$ $°C^{-1}$ à 25°C) et une bonne conductibilité thermique (22W/mK à 300 °C).
Il existe principalement trois alliages de zirconium couramment utilisés dans l'industrie nucléaire :

- le zircaloy 2 pour les centrales à eau bouillante :
  1,5% Sn – 0,13% Fe – 0,12 % Cr – 0,11% O - 0,05% Ni ;
- le zircaloy 4 pour les réacteurs à eau pressurisée :
  1,5% Sn – 0,21% Fe – 0,12% Cr – 0,11% O - <0,005 Ni ;
- les nouveaux alliages au Niobium pour les réacteurs à eau lourde ou pressurisée.

Dans la suite de notre étude, nous nous intéresserons au zircaloy 4, dont plus de détails sur sa microstructure et son comportement peuvent être trouvés dans [Mulot 1997]. De même, le rôle des différents éléments d'alliage dans le zircaloy 4 sont donnés dans [Logé 1999]. Ces éléments d'alliage ont surtout eu pour but d'améliorer les propriétés mécaniques des gaines, tout en préservant la faible absorption neutronique et la tenue à la corrosion. L'**étain** améliore sensiblement la tenue au fluage des

gaines, tout comme l'**oxygène** qui, de plus, agit sur la charge de rupture et la limite élastique à froid et à 400°C. Le rôle du **carbone** est encore plus actif, surtout à froid, puisqu'il augmente la charge de rupture et la limite élastique d'environ 80 MPa/100 ppm. Le rôle du **fer** et du **chrome** est de limiter la croissance des grains lors de la réaction de recristallisation et d'améliorer les propriétés mécaniques et la tenue à la corrosion. Enfin le **nickel**, convaincu de culpabilité dans la forte hydruration du zircaloy 2, sera quasiment éliminé pour créer le zircaloy 4.

Dans la suite de l'étude, nous nous intéresserons plus particulièrement aux propriétés mécaniques du zircaloy 4. Nous verrons (§IV.1.3.2.) qu'elles dépendent fortement du type de sollicitation que l'on étudie (traction en sens longitudinal ou transversal, éclatement, …), ainsi que de l'état métallurgique du zircaloy 4 (détendu, hydruré, recristallisé, …) et de la température.

IV.1.2.2. Effet de l'irradiation sur le zircaloy 4

Lors de l'irradiation, les gaines subissent à la fois une oxydation et une hydruration.

L'**oxydation** des gaines entraîne la formation d'une couche (interne et externe) de zircone. La couche de zircone interne, de faible épaisseur (8 à 10 μm), n'influe pas significativement sur les propriétés mécaniques des tubes. La couche de zircone externe pouvant parfois atteindre un dixième de millimètre a un rôle fragilisant plus important. Des **essais de traction,** réalisés **à 25°C** sur des tubes irradiés, ont montré une **fragilisation** du matériau. L'irradiation entraîne une augmentation de la contrainte maximum σ_m, corrélée à une légère diminution de l'allongement total A_t, lorsque le temps passé en réacteur augmente. On remarque également une certaine stabilisation en temps des effets de l'irradiation, aussi bien en résistance qu'en ductilité.

L'**hydruration** est couplée à la réaction de corrosion du zircaloy [Prat 1994]. Lors du processus d'oxydation du zirconium, la réduction de l'eau libère de l'hydrogène au fond des pores de la zircone. La majeure partie de l'hydrogène est relâchée dans l'eau, mais une faible partie (environ 20%) est incorporée dans le tube après traversée de la zircone. Dès que la concentration en hydrogène dans le zircaloy dépasse la limite de solubilité, il y a formation d'hydrures qui précipitent sous forme de plaquettes. A température ambiante, on observe que les hydrures se répartissent de façon hétérogène dans l'épaisseur du tube. Ceci provient du gradient thermique lors de l'irradiation, entraînant une concentration d'hydrogène plus importante dans la moitié externe de la gaine. Les propriétés mécaniques du zircaloy 4 en présence d'hydrures sont influencées par de nombreux facteurs, notamment la distribution des hydrures et la température d'essai. Des études montrent l'importance du changement de mécanisme de rupture dû à la présence d'hydrures, à la température d'essai, ou à l'état de contrainte [Prat 1994].

Les **observations** du faciès de rupture, après traction dans le sens travers, au Microscope Electronique à Balayage (**MEB**) ont montré une rupture transgranulaire ductile à cupules avec de nombreuses fissures secondaires parallèles à la surface du tube et associées à des précipités allongés, dont la rupture présente un aspect fragile.

D'un point de vue mécanique, l'irradiation induit donc une **augmentation de la limite d'élasticité** R_e, couplée à une **fragilisation du matériau** (diminution de la résistance maximum R_m et de la déformation à rupture ε_r). Malgré cela on constate, tant en traction sens travers qu'en sens long, que les allongements totaux atteignent plusieurs pour-cent, voire plus de 10%. Cela représente une chute considérable par rapport aux propriétés mécaniques initiales, mais révèle une aptitude encore certaine à la déformation.

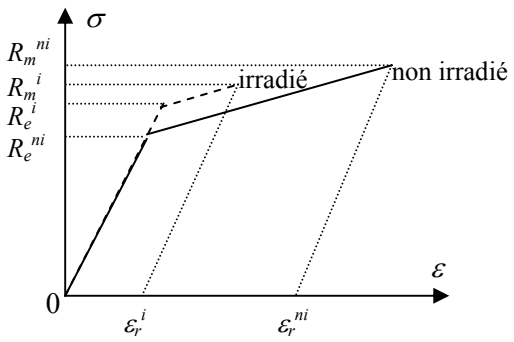


Figure IV. 5. Influence de l'irradiation sur la courbe contrainte-déformation

IV.1.3. Recherche du matériau simulant

Le zircaloy 4 utilisé à l'heure actuelle dans les REP est un zircaloy 4 à bas étain (teneur en étain 1,2% à 1,5%) à l'état détendu. Le rôle de l'étain dans les alliages de zirconium est de minimiser l'effet néfaste de l'azote vis-à-vis de la corrosion. L'amélioration des techniques de fabrication a permis petit à petit de réduire la teneur nécessaire en étain du zircaloy. Cette teneur ne doit cependant pas être trop réduite afin que les gaines conservent de bonnes propriétés mécaniques. L'état détendu est obtenu par un traitement thermique vers 475°C. On observe alors une structure de restauration partielle de l'écrouissage sans recristallisation, où les grains restent allongés avec une densité de dislocations résiduelles forte. Cette structure confère au matériau une résistance mécanique élevée dont les principales caractéristiques sont données dans le tableau IV.1. :

Matériau	$\sigma_{0,2}$ (Mpa)	σ_m (MPa)	A_r (%)
Zy4 détendu	635	847	5,9

Tableau IV. 1 Caractéristiques mécaniques du Zircaloy 4 dans différents états.

Ces caractéristiques mécaniques ont été obtenues par essais de traction dans le sens longitudinal du tube (Figure IV.6.) à température ambiante.

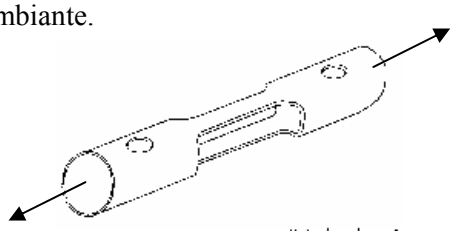


Figure IV. 6. Eprouvette de traction dans le sens longitudinal.

Comme le zircaloy est un matériau anisotrope, rien ne prouve que ces propriétés mécaniques sont adaptées à l'essai de compactage qui nous intéresse. De plus, nous avons vu que l'irradiation induisait

une fragilisation, une corrosion et une hydruration des tubes. Pour modéliser correctement le compactage de tubes irradiés, il est donc nécessaire de trouver :

- un état métallurgique du zircaloy 4 dont les propriétés mécaniques sont les plus proches possibles de celles du matériau irradié ;
- un type de sollicitation dont les caractéristiques mécaniques peuvent être adaptées à l'essai de compactage.

IV.1.3.1. Influence de l'état métallurgique

Les essais mécaniques sur les tubes irradiés étant très coûteux et difficiles à mettre en œuvre, nous avons recherché un état métallurgique du zircaloy 4 dont les propriétés mécaniques sont les plus proches de celles du matériau irradié. Pour cela, nous avons donc effectué une étude bibliographique pour des essais à température ambiante, en traction dans le sens longitudinal, sur les matériaux suivants :

- A : zircaloy 4 à l'état détendu irradié (données internes CEA);
- B : zircaloy 4 détendu non hydruré [Bouffioux et al. 1995] ;
- C : zircaloy 4 recristallisé non hydruré [Prat 1994] ;
- D : zircaloy 4 recristallisé hydruré [Prat 1994] ;
- E : zircaloy 4 écroui non hydruré [Bouchard et al. 1999] ;
- F : zircaloy 4 écroui hydruré [Prat 1994].

Les caractéristiques mécaniques accessibles pour ce type d'essais sont la limite d'élasticité σ_0, la résistance maximum σ_m, et l'allongement réparti ε_r. A partir de ces trois valeurs, nous avons tracé sur la figure IV.7. les courbes contrainte/déformation correspondant à chaque matériau.

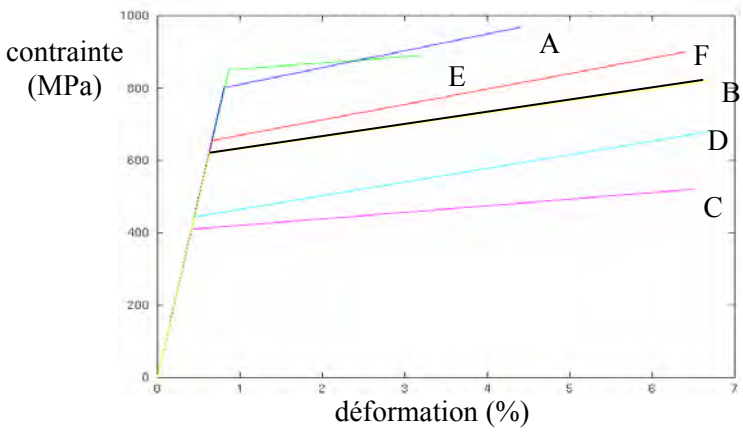


Figure IV. 7. Courbes contrainte/déformation correspondants à différents états métallurgiques

Le zircaloy 4 écroui non hydruré semble être un bon simulant du zircaloy 4 irradié, d'autant plus qu'étant légèrement plus fragile que le matériau irradié, il permet une approche majorante.
Le zircaloy 4 hydruré ne convient pas, car le procédé d'hydruration en température crée une restauration du zircaloy 4, qui le rend plus ductile. De même, le zircaloy 4 détendu non irradié, moins résistant et plus ductile, ne convient pas.

Cette étude montre donc que, parmi tous ces états métallurgiques, les tubes **écrouis non hydrurés** semblent présenter le comportement mécanique le plus proche des tubes irradiés. C'est du moins ce que l'on peut déduire des essais de traction dans le sens longitudinal.

IV.1.3.2. Influence du type de sollicitation

Cependant, avant de déterminer les caractéristiques mécaniques du zircaloy 4 pour la simulation, il est important de remarquer que le zircaloy est un matériau anisotrope. Il sera donc important, dans le paragraphe suivant, d'étudier les caractéristiques mécaniques provenant de différentes sollicitations, afin de choisir celles qui se rapprochent le plus de l'essai de compactage.

Pour un même taux d'irradiation (59 GWj/tU, 5 cycles à l'étage 2), nous avons recueilli les propriétés mécaniques des tubes soumis à des essais de traction dans le sens longitudinal (Figure IV.6.), des essais de traction dans le sens transversal (Figure IV.8.a) et des essais d'éclatement (Figure IV.8.b).

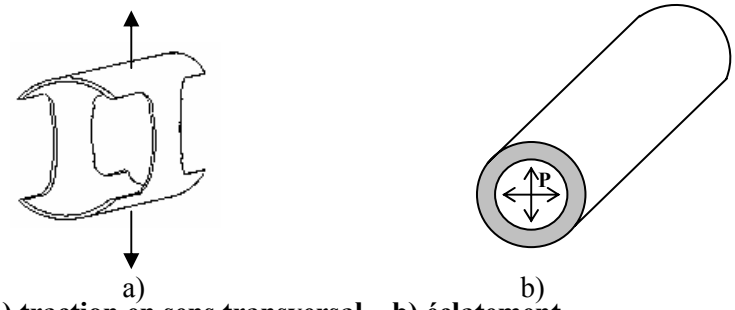
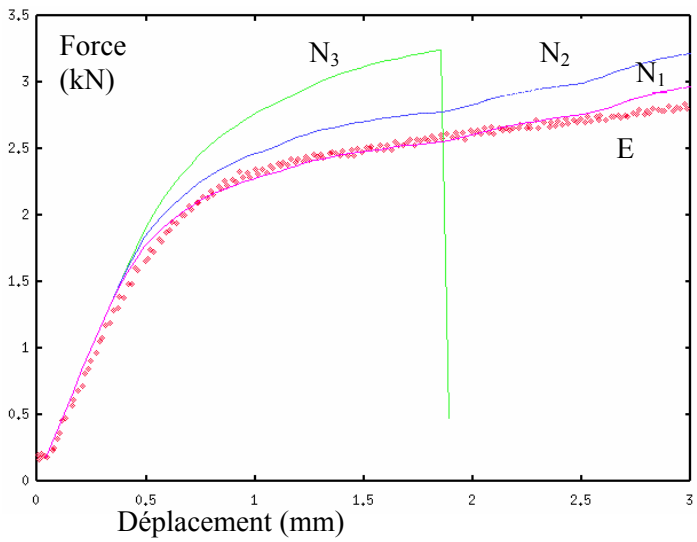


Figure IV. 8. a) traction en sens transversal – b) éclatement

Les essais de traction ont montré une résistance mécanique supérieure dans le sens transversal à celle dans le sens longitudinal, mais une ductilité axiale plus importante. Les essais d'éclatement montrent une déformation à rupture quasi-nulle et une contrainte maximum plus élevée que celle obtenue en traction dans le sens longitudinal ou transversal. Différentes simulations numériques du compactage d'un tube ont été effectuées avec les différents jeux de paramètres (Figure IV.9.) :



E : Expérimentale (compactage)

N_1 : courbe numérique à partir des données de l'essai de traction dans le sens longitudinal

N_2 : courbe numérique à partir des données de l'essai de traction dans le sens transversal

N_3 : courbe numérique à partir des données de l'essai d'éclatement

Figure IV. 9. Comparaison de la courbe Force/Déplacement expérimentale et des résultats numériques pour un essai de compactage d'un tube simple

Ces différences montrent la forte **anisotropie** du zircaloy 4. La comparaison des courbes Force/Déplacement obtenues avec la courbe expérimentale sur un essai de compactage (correspondant au matériau écroui) montre que les données provenant de l'essai **de traction dans le sens longitudinal** sont satisfaisantes pour représenter l'essai de compactage [Bouchard et al. 2000c].

IV.1.3.3. Influence de l'écrouissage

Les trois caractéristiques mécaniques que nous étudions ($\sigma_{0,2}$, σ_m, A_r) ne nous donnent malheureusement aucune indication sur la loi d'écrouissage de notre matériau. Afin de déterminer cette loi, nous avons effectué plusieurs simulations numériques du compactage, avec les données mécaniques de l'essai de traction dans le sens longitudinal, mais avec différentes lois d'écrouissage : écrouissage linéaire, et écrouissage puissance avec différents coefficients d'écrouissage. Puis, nous avons comparé les différentes courbes Force/Déplacement numériques à la courbe expérimentale pour l'essai de compactage (§IV.2.1.). Cette comparaison [Bouchard et al. 1999] montre que la loi d'**écrouissage linéaire** est la plus appropriée.

IV.1.4. Bilan et matériau simulant retenu

Les différentes études effectuées nous permettent de choisir le matériau simulant suivant : **zircaloy 4 écroui non hydruré**. Pour la simulation numérique, il faudra de plus prendre les propriétés mécaniques provenant de l'essai de **traction dans le sens longitudinal**, et utiliser une **loi d'écrouissage linéaire**. Les caractéristiques mécaniques qui seront donc utilisées pour modéliser le monomatériau seront les suivantes :

	σ_0 (MPa)	σ_m (MPa)	ε_d (%)	ε_t (%)	ν	E (MPa)
zircaloy 4 écroui	850	880	2.1	2.3	0.3	80000

Tableau IV. 2. Caractéristiques mécaniques du zircaloy 4 écroui choisi pour modéliser le compactage

Les études précédentes ont permis de valider le zircaloy 4 écroui d'un point de vue mécanique global. Nous avons également étudié le matériau d'un point de vue microstructural. Plusieurs observations ont donc été effectuées au microscope optique et au MEB. Ces observations (dont nous parlons plus en détail au §IV.3.2.) montrent la structure de grains enchevêtrés des tubes en zircaloy 4, qui découle directement du procédé de mise en forme : le laminage à pas de pèlerin [Mulot 1997]. De plus, les observations au MEB du faciès de rupture (Cf. §IV.3.2.) après compactage des tubes écrouis sont très ressemblantes aux observations effectuées sur le matériau irradié : après un amorçage fragile, la rupture est à dominance ductile à cupules.

IV.2. MODELISATION NUMERIQUE DU COMPACTAGE

Maintenant que nous avons déterminé les caractéristiques mécaniques du matériau étudié, nous allons modéliser le compactage et comparer les résultats par rapport à des études expérimentales qui ont été menées en parallèle sur les tubes en zircaloy 4 écroui. La longueur des tubes étant de 30mm, une modélisation en déformation plane suivant une section est acceptable. Les comparaisons s'effectueront à la fois sur les courbes Force/Déplacement, et sur les déformations géométriques des tubes.
Nous commencerons par valider les caractéristiques mécaniques et la loi d'écrouissage choisies sur un essai simple de compactage d'un demi-tube. Puis, nous appliquerons la caractéristique multi-domaines du code en compactant un assemblage de 3 tubes superposés. Les outils développés en mécanique de la rupture seront ensuite utilisés pour modéliser la rupture lors du compactage d'un tube monomatériau. Enfin, nous montrerons qu'une fois le code validé, des études de sensibilité par rapport à différents paramètres peuvent beaucoup nous apporter sur le plan de la compréhension des mécanismes de déformation.

IV.2.1. Validation de la loi de comportement : dépliage d'un demi-tube

L'essai de dépliage que nous proposons de modéliser ici (Figure IV.10.), s'effectue sur un demi-tube, provenant de la découpe de nos échantillon de 30mm suivant leur génératrice. Les caractéristiques mécaniques utilisées sont celles du zircaloy 4 écroui, provenant de l'essai de traction dans le sens longitudinal. La comparaison de la déformation du demi-tube entre la simulation et l'expérience est très bonne, comme le montre la figure suivante :

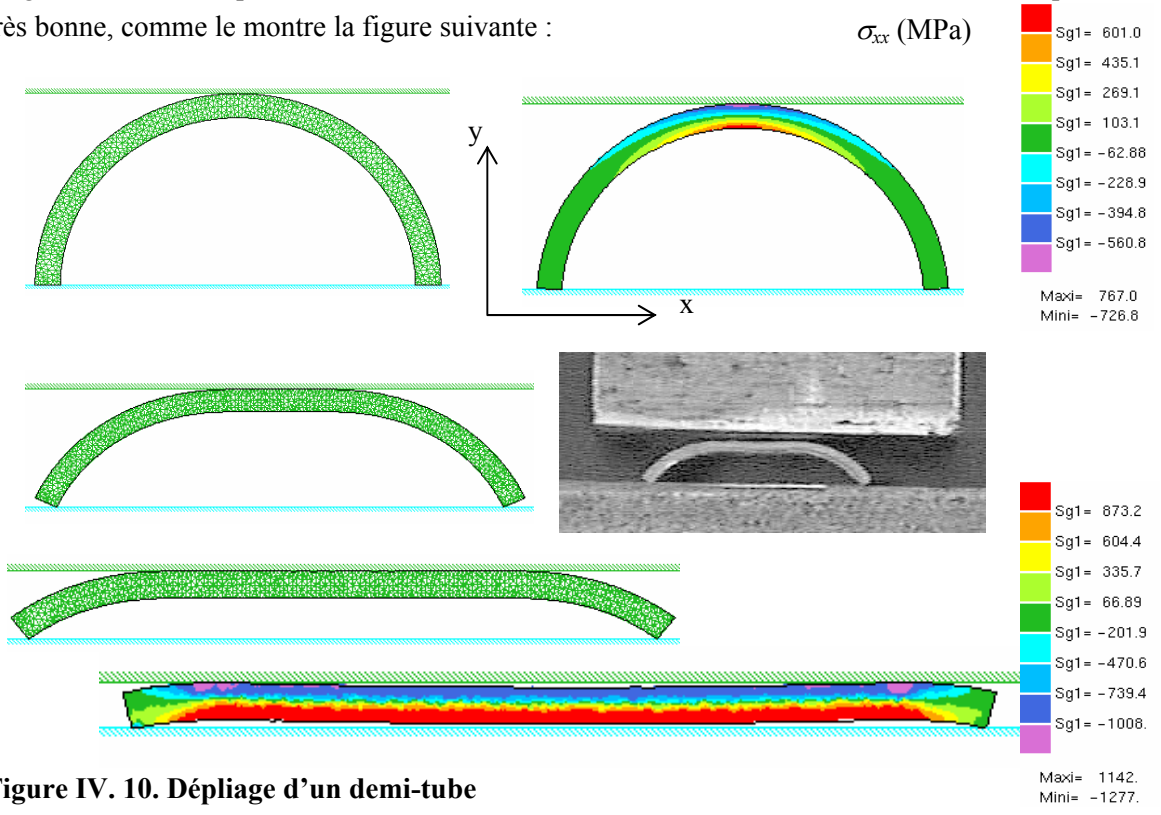


Figure IV. 10. Dépliage d'un demi-tube

De plus, le compactage du demi-tube s'effectuant librement et sans rupture, nous pouvons comparer les courbes Force/Déplacement provenant de la simulation et de l'expérience :

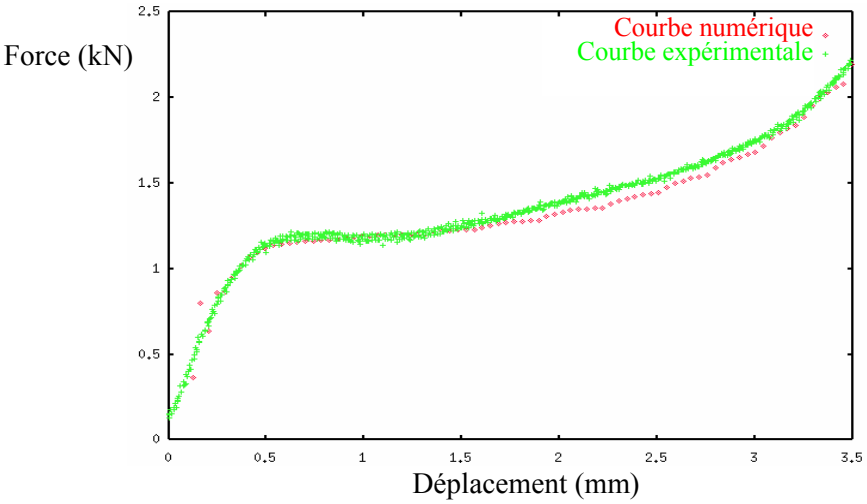


Figure IV. 11. Essai de pliage : Courbes Force/Déplacement numérique et expérimentale

Outre le fait que la comparaison entre les courbes numérique et expérimentale soit excellente, il faut souligner que les données mécaniques ayant servi à la simulation numérique proviennent d'un essai de traction longitudinale. Ces données semblent tout à fait convenir à l'essai de dépliage, et a fortiori à celui de compactage que nous proposons dans la suite.

Avant de passer au compactage de trois tubes, nous modélisons le compactage d'un tube sans rupture, et nous utilisons trois lois d'écrouissage différentes. La figure IV.12. montre la bonne ressemblance de la simulation numérique d'un point de vue qualitatif, puisque l'on observe (comme lors de l'expérience) un décollement du tube sur ses parties inférieure et supérieure, initialement en contact avec l'outil.

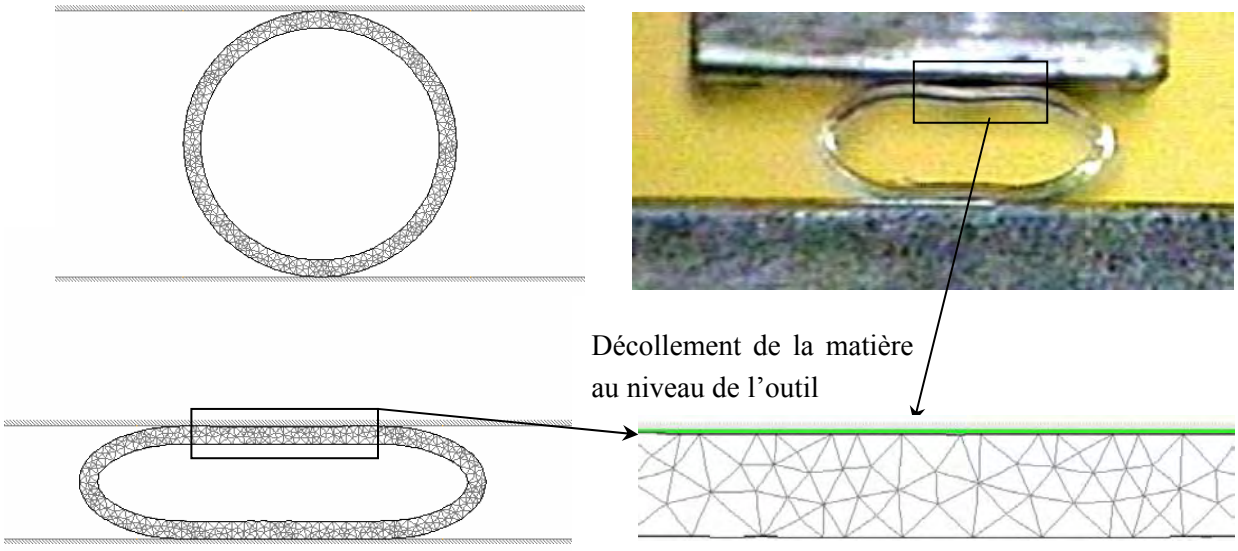


Figure IV. 12. Compactage d'un tube

D'un point de vue quantitatif, cette fois, nous avons utilisé les propriétés mécaniques du matériau écroui, en utilisant trois écrouissages différents : un écrouissage linéaire et deux écrouissages de type puissance avec des coefficients n=0,05 et n=0,4. Les lois d'écrouissages puissance sont du type : $\sigma_0 = \sqrt{3}K_0\left(\bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}_0\right)^n$, où σ_0 représente la courbe d'écrouissage, K_0 est la consistance du matériau, $\bar{\varepsilon}$ la déformation plastique, $\bar{\varepsilon}_0$ le terme de régularisation de l'écrouissage et n le coefficient de sensibilité à l'écrouissage. La comparaison des courbes Force/Déplacement obtenues pour ces trois écrouissages avec la courbe expérimentale confirme que l'écrouissage linéaire est le plus adapté à notre essai de compactage.

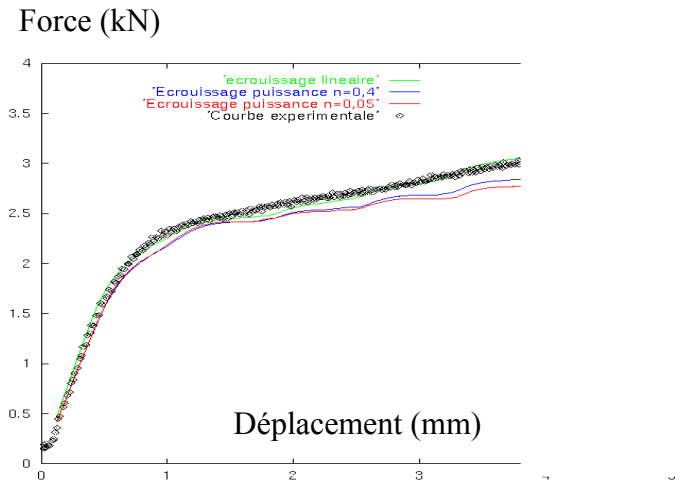


Figure IV. 13. Courbes Force/Déplacement pour trois écrouissages différents

Les bonnes comparaisons obtenues pour l'essai de dépliage et de compactage d'un tube montrent que la loi de comportement, déterminée dans le sous-chapitre précédent, permet de modéliser avec précision les essais de compactage qui nous intéressent.

IV.2.2. Prise en compte du multi-domaines : compactage de trois tubes superposés

Nous allons maintenant utiliser la caractéristique multi-domaines du code en modélisant le compactage de trois tubes superposés. Deux outils verticaux seront disposés de part et d'autre des tubes de façon à maintenir l'ensemble. Le maillage étant coïncidant aux interfaces, le contact entre les tubes sera collant.

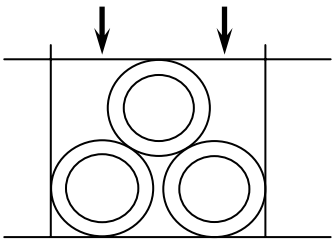


Figure IV. 14. Compactage de 3 tubes

Il est important de souligner la grande difficulté à modéliser un tel essai. Les grandes déformations subies par les tubes nécessitent de remailler régulièrement les trois tubes de façon à garder des éléments de bonne qualité. Ces remaillages doivent être effectués avec précaution au niveau du contact entre les tubes. De plus, ce contact doit être géré en permanence, puisque à chaque incrément les tubes s'interpénètrent.

La figure IV.15. montre les résultats de la simulation numérique, et une photo de l'essai expérimental. On retrouve là encore une bonne adéquation sur la déformation des tubes durant le compactage. On remarque que le tube supérieur se déforme de façon importante avant que les deux autres ne commencent à se déformer significativement.

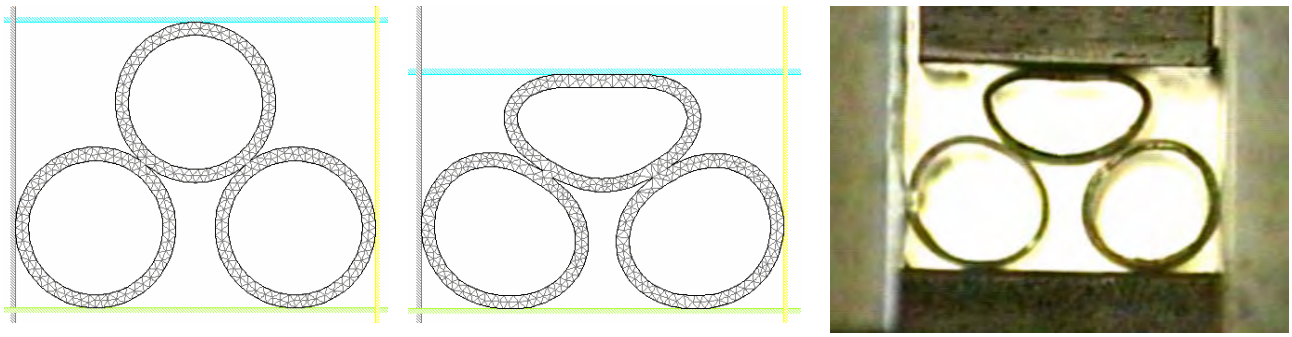


Figure IV. 15. Modélisation numérique et essai expérimental du compactage de trois tubes

Nous ne modélisons pas encore la fissuration sur cet essai, cependant il est possible de visualiser les contraintes dans les tubes, de façon à prévoir où les fissures pourront s'amorcer. Nous pouvons comparer sur la figure suivante, les champs de contrainte σ_{xx} (Figure IV.16.a) et σ_{yy} (Figure IV.16.b). Les zones rouges correspondent aux zones qui sont en traction et qui pourront être à l'origine de la rupture. Au même incrément, nous remarquons que les niveaux de contraintes σ_{xx} et σ_{yy} sont très proches. Les contraintes σ_{yy} sont légèrement supérieures, et sont surtout localisées sur les côtés latéraux externes du tube supérieur. C'est à cet endroit que la première rupture apparaît lors de l'expérience.

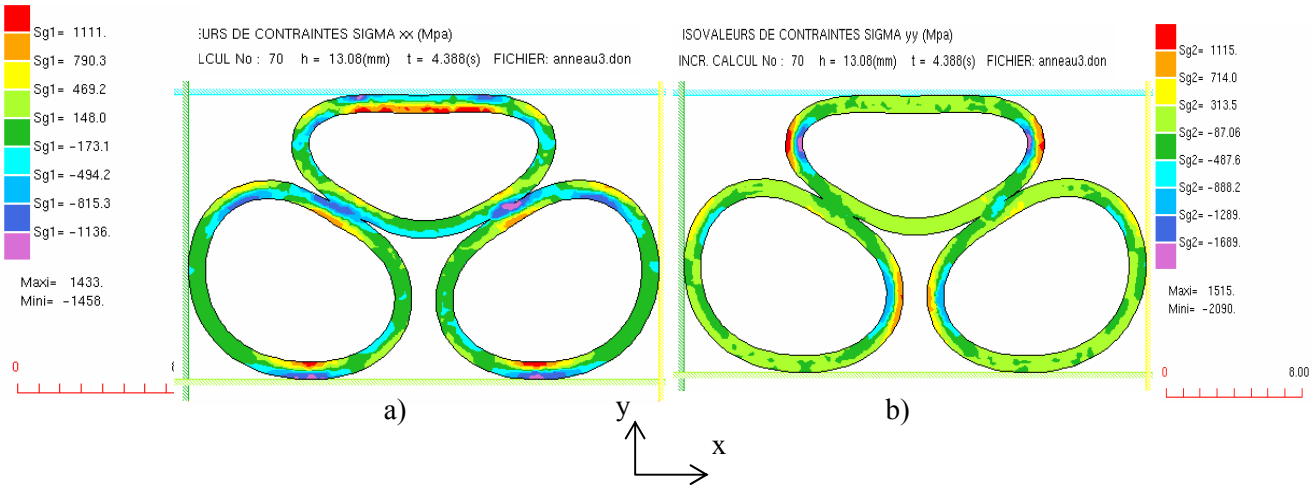


Figure IV. 16. Champs de contraintes lors du compactage de trois tubes

IV.2.3. Prise en compte de la fissuration : compactage d'un tube

Nous allons maintenant utiliser les outils numériques en mécanique de la rupture présentés précédemment pour modéliser l'amorçage et la propagation de fissures lors du compactage d'un tube.

IV.2.3.1. Localisation de l'amorçage

Afin d'étudier avec précision le phénomène de rupture du tube, nous recherchons le lieu d'amorçage des fissures. Pour cela, nous commençons par modéliser le compactage d'un tube sans fissuration, et nous analysons les champs de contrainte et de déformation obtenus. Ces observations nous montrent qu'il existe deux zones susceptibles d'être des zones d'amorçage. L'une est située sur la paroi externe du tube (points A) et l'autre sur la paroi interne (points B).

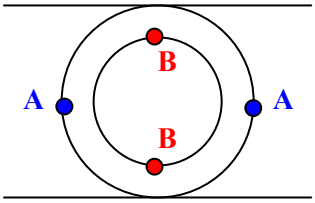


Figure IV. 17. Zones d'amorçage possibles lors du compactage

En étudiant l'évolution de la déformation du tube au cours du compactage, nous avons remarqué que les zones B étaient les premières à se déformer (Figure IV.18.). La déformation généralisée augmente rapidement pour finir par stagner lorsque le tube est suffisamment aplati. Ce sont alors les zones A qui se plastifient, pour rattraper la déformation existante dans les zones B, avant de la dépasser.

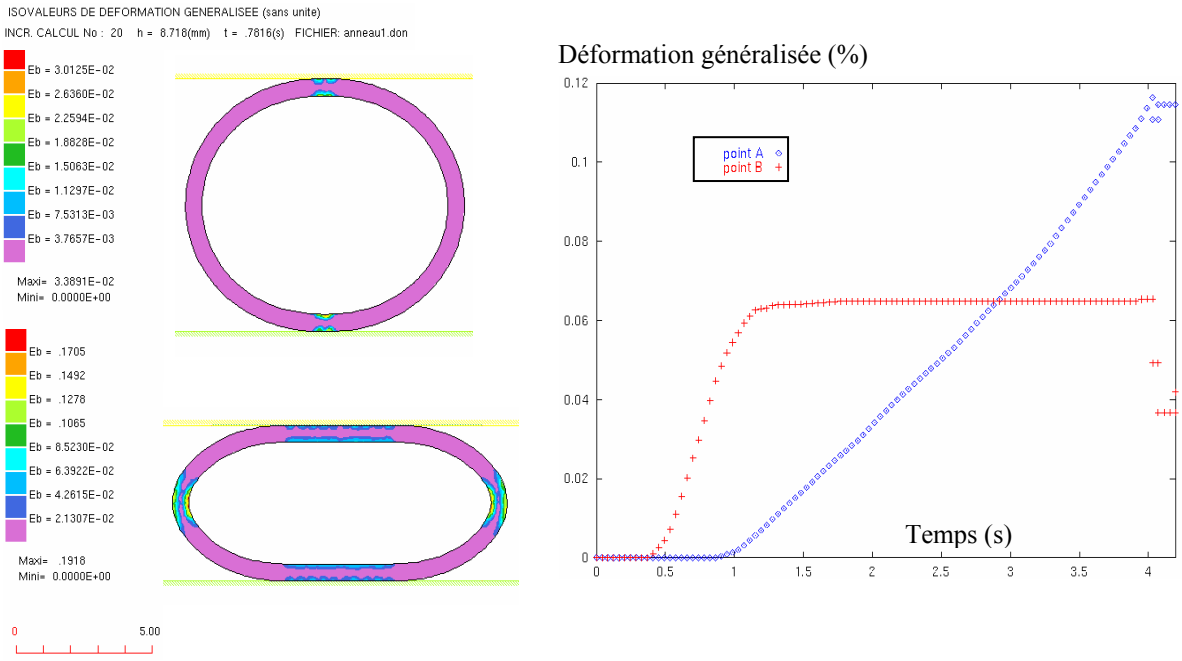


Figure IV. 18 Evolution de la déformation généralisée au cours du compactage

Un phénomène similaire est observé lorsque l'on étudie le champ de contrainte. La figure IV.19., représentant les valeurs et directions des contraintes principales, montre bien que les zones A et B sont les plus sollicitées.

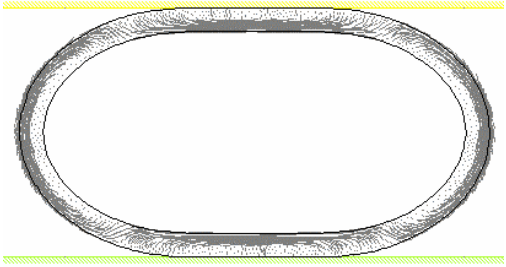


Figure IV. 19. Contraintes principales

Nous comparons ici les contraintes σ_{yy} relevées dans les zones A (σ_{yyA}), et les contraintes σ_{xx} dans les zones B (σ_{xxB}). On s'aperçoit qu'en début de compactage, la contrainte maximum correspond à la contrainte xx dans les zones B. σ_{xxB} croît plus vite que σ_{yyA}, mais elle atteint une valeur limite (environ 1150 MPa) à partir de laquelle elle se met à stagner. σ_{yyA} continue à croître pour finalement devenir plus importante que σ_{xxB}.

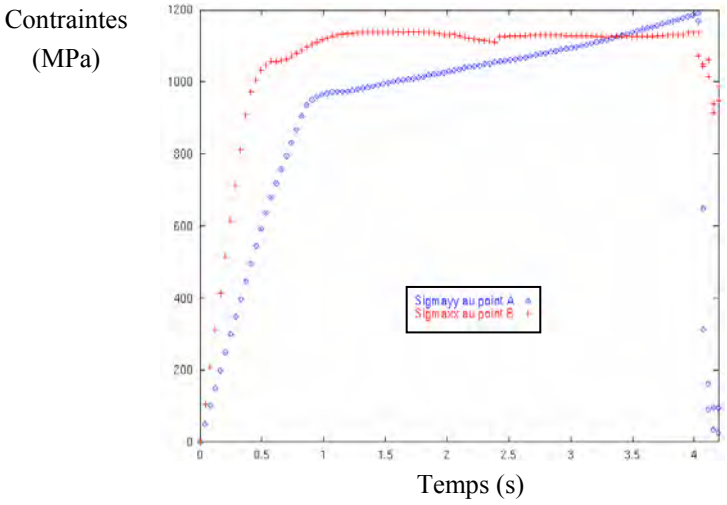


Figure IV. 20 Evolution des contraintes dans différentes zones au cours du compactage

Ceci signifie que, suivant la contrainte critique du zircaloy 4 écroui, on peut obtenir une rupture sur la face intérieure du tube (zone B) ou sur la face extérieure latérale (zone A).

Comme nous l'avons indiqué dans le chapitre précédent, nous localisons l'amorçage en comparant les contraintes sur le contour de la pièce à une contrainte critique, caractéristique du matériau. Sur cet exemple, nous avons choisi d'utiliser l'option d'amorçage général, c'est-à-dire que l'on considère que l'on ne connaît pas, à priori, le lieu d'amorçage de la fissure. La recherche se fait donc sur tous les points d'intégration adjacents aux contours. La détermination de la contrainte critique du zircaloy 4 écroui a été obtenue par analogie entre les courbes Force/Déplacement numérique et expérimentale : σ_{crit} = 1190 MPa.

Nous avons utilisé cette contrainte critique pour repérer l'amorçage des fissures. Cet amorçage apparaît sur les parois externes latérales du tube, puisque la contrainte critique est supérieure à la contrainte pour laquelle σ_{xxB} et σ_{yyA} s'intersectent.

IV.2.3.2. Propagation

Une fois que l'on a localisé les nœuds d'amorçage des fissures, on calcule la première direction de propagation en utilisant le critère de la contrainte normale maximale : l'amorçage s'effectue donc perpendiculairement à la direction de la contrainte principale au nœud défini pour l'amorçage. Après ce premier incrément d'amorçage, la direction de propagation peut être déterminée indifféremment par l'un des trois critères présentés dans le chapitre précédent. Sur un exemple simple comme celui-ci les trois critères sont équivalents.
En effet, étant donné la sollicitation verticale et la symétrie de la pièce, la rupture se produira exclusivement en mode I. C'est ce qui explique la propagation horizontale des deux fissures amorcées sur les parois latérales externes du tube sur la figure IV.21.

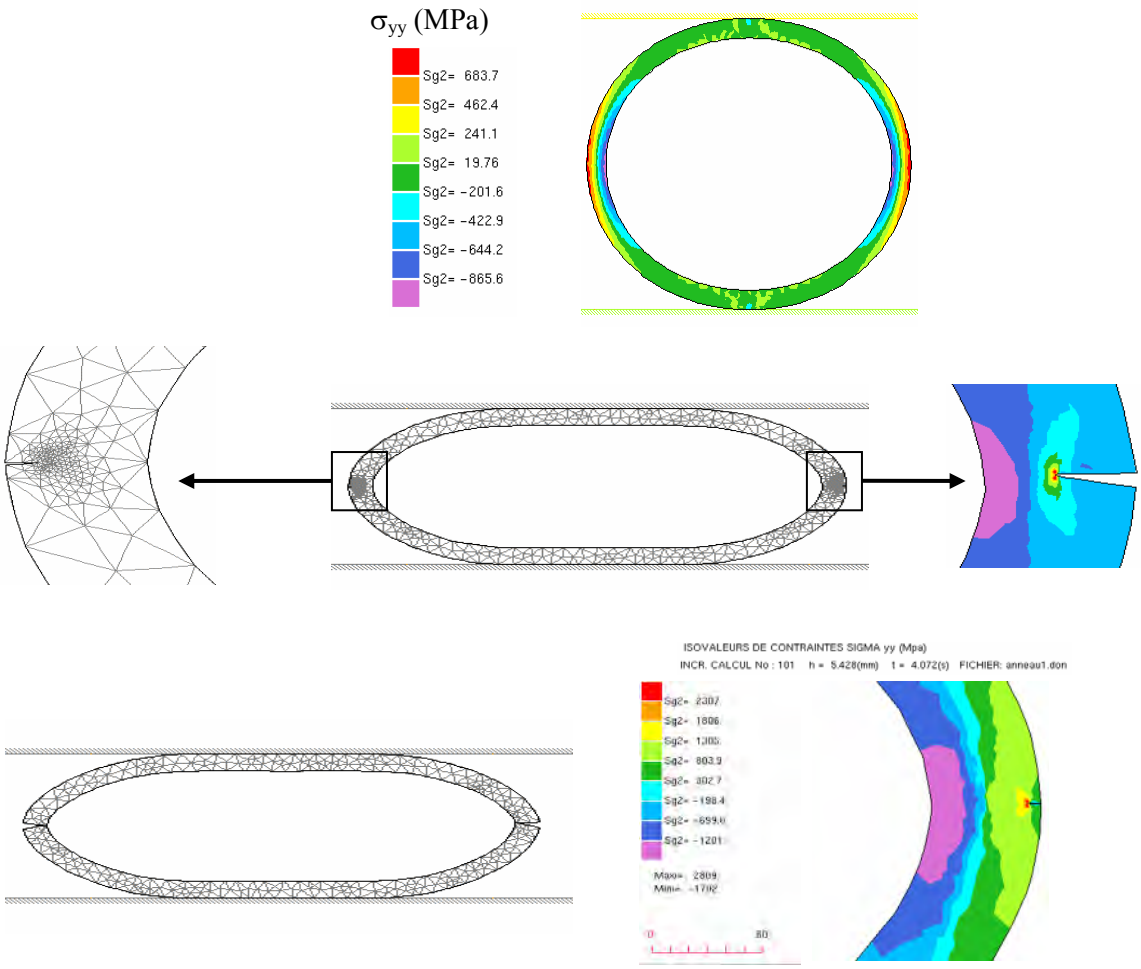


Figure IV. 21. Amorçage et propagation des fissures lors du compactage d'un tube

La comparaison des courbes Force/Déplacement numérique et expérimentale est excellente (Figure IV.22.). Ces deux courbes se superposent parfaitement jusqu'à la rupture du tube, puis la courbe numérique présente une remontée en effort importante. Cela vient du fait que l'on ne gère pas encore la séparation totale de la pièce en deux pièces distinctes, car il faudrait alors résoudre deux systèmes matriciels correspondant à chacun des demi-tubes. Dans notre cas, les deux parties de la pièce restent en contact sur un nœud de chaque côté. Ce sont ces deux derniers nœuds qui expliquent la forte remontée en effort sur la courbe numérique :

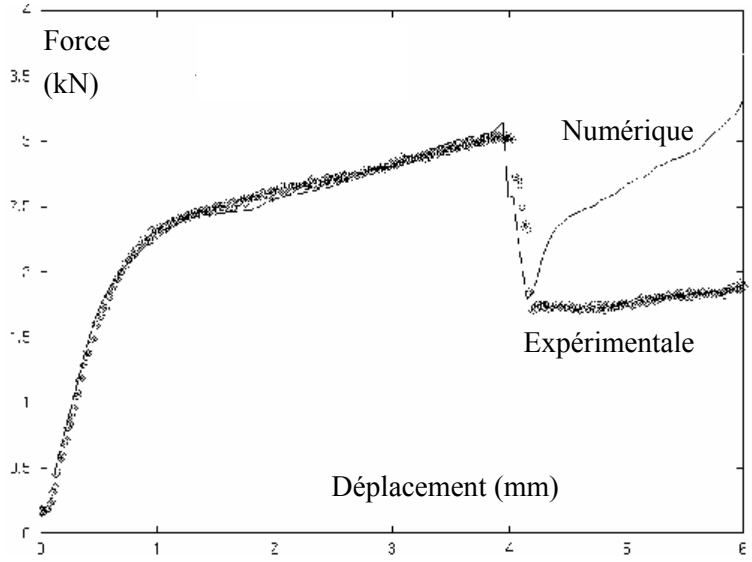


Figure IV. 22. Courbes Force/Déplacement numérique et expérimentale lors du compactage avec rupture d'un tube

IV.2.4. Etudes de sensibilité

Lorsqu'un code est validé par rapport à l'expérience comme cela vient d'être fait, le grand intérêt est de pouvoir ensuite faire une étude de sensibilité par rapport à différents paramètres. Au cours de notre étude, plusieurs de ces études ont été réalisées.

Les premières ont consisté à effectuer des modélisations du compactage en faisant varier les **propriétés mécaniques** du zircaloy 4 écroui. Nous avons successivement utilisé les paramètres provenant des essais de traction dans le sens longitudinal ou transversal et de l'essai d'éclatement. Par comparaison avec la courbe expérimentale, ces simulations ont permis de montrer que les paramètres provenant de l'essai de traction dans le sens longitudinal étaient adaptés au compactage.

La **fluence** correspond à la quantité d'irradiation reçue par un matériau au cours de son service en réacteur. Certains auteurs ont proposé des lois, dépendantes de la fluence, pour calculer les caractéristiques mécaniques (limite d'élasticité, résistance maximum, allongement à rupture) des gaines. Une analyse de sensibilité, que nous ne présenterons pas ici, a été réalisée par rapport à la

fluence. Cette étude montre des différences non négligeables sur les courbes Force/Déplacement, et la fragilisation des gaines due à la fluence, entraîne une rupture plus tôt lors du compactage.

Une étude de sensibilité par rapport à la **loi d'écrouissage** a également été menée. Nous avons vu au §IV.2.1. qu'elle avait permis de valider la loi d'écrouissage linéaire. Lors de notre étude sur la localisation de l'amorçage, nous avons également voulu examiner l'influence de l'écrouissage sur le lieu d'amorçage.

Pour cela, nous avons comparé les courbes σ_{yyA}, et σ_{xxB} définies au §IV.2.3.1. en fonction de l'écrouissage. Ces courbes montrent que le dépassement de la contrainte σ_{xxB} par la contrainte σ_{yyA} intervient plus tard dans le calcul pour le coefficient puissance n=0,4, et que ce dépassement n'a carrément pas lieu pour n=0,05. Cela implique que l'amorçage des fissures se situerait sur les parois internes (zone B) du tube, ce qui ne correspond pas aux observations réalisées lors du compactage expérimental.

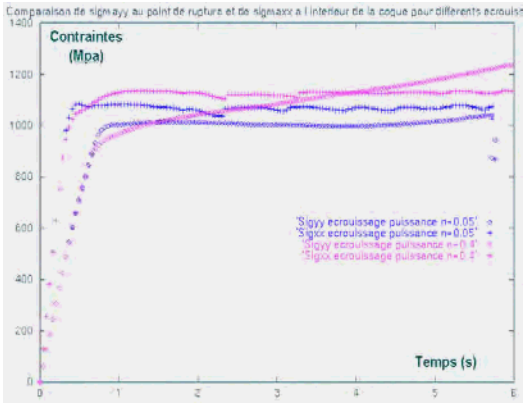


Figure IV. 23. Contraintes xx et yy en fonction de l'écrouissage

Cette étude montre la cohérence du choix de l'écrouissage linéaire par rapport aux écrouissages de type puissance. Mais elle montre également l'importance du type d'écrouissage sur les mécanismes de déformation et de rupture lors du compactage.

IV.2.5. Bilan

Dans ce sous-chapitre, nous avons utilisé le code FORGE2 Multimatériaux pour modéliser le compactage de tubes en zircaloy 4. Nous avons montré que la simulation fournissait de très bons résultats aussi bien d'un point de vue qualitatif que quantitatif. Les outils développés en mécanique de la rupture ont permis de repérer le lieu d'amorçage des fissures et leur direction de propagation.
Enfin, une fois validé, plusieurs études de sensibilité ont été effectuées. Ces informations sont d'une grande aide pour la compréhension des mécanismes de déformation et de rupture des gaines en zircaloy 4 lors du compactage.

Lors de leur service en réacteur, les gaines s'oxydent. Cette oxydation entraîne l'apparition d'une couche interne et d'une couche externe d'oxyde de zirconium : la zircone. La zircone, très rigide et très fragile joue un rôle important lors du compactage. Le sous-chapitre suivant a pour but de présenter l'oxydation des gaines en zircaloy 4, et d'expliquer l'influence d'une couche d'oxyde lors du compactage.

IV.3. ETUDE ET DISCUSSION SUR L'INFLUENCE D'UNE COUCHE D'OXYDE

Dans cette partie, nous nous proposons d'étudier les mécanismes d'oxydation du zircaloy 4, entraînant l'apparition de la couche de zircone.
Dans une **première partie**, nous présenterons une **étude bibliographique sur l'oxydation du zircaloy 4** [Bouchard et al. 2000c]. Cette étude montre la grande complexité de ce phénomène, ainsi que les paramètres à prendre en compte pour modéliser avec précision le compactage du bimatériau zircaloy 4/zircone.
La **seconde partie** sera consacrée à l'**étude expérimentale** que nous avons réalisée en oxydant en autoclave des échantillons de tubes écrouis. Nous pourrons alors étudier l'influence de l'oxydation d'un point de vue microscopique (microstructure, faciès de rupture) et d'un point de vue macroscopique (courbe Force/Déplacement).
Enfin la **troisième partie** consistera à **modéliser le compactage d'un tube oxydé**. Si la prise en compte du multimatériau par le code est validée, nous verrons que plusieurs autres paramètres peuvent rendre difficile cette simulation.

IV.3.1. Oxydation du zircaloy 4

Lors de l'utilisation des gaines en zircaloy 4 en réacteur, une couche d'oxyde se forme sur les surfaces externe et interne de la gaine. L'étude des propriétés mécaniques de cette couche de zircone constitue une étape importante afin de bien appréhender les mécanismes de déformation dans les gaines oxydées.
Nous nous intéresserons tout d'abord à la formation de la couche de zircone à travers la cinétique d'oxydation. Puis nous donnerons une description de la couche d'oxyde ainsi formée, avant de finir par une étude mécanique de l'oxydation.

Remarque : Il est plus difficile d'étudier la zircone produite en réacteur que la zircone produite par oxydation en autoclave. Sauf indications contraires, la zircone étudiée dans ce rapport provient d'oxydation en autoclave.

IV.3.1.1. Formation de la couche de zircone

En réacteur, les gaines en zircaloy 4 subissent une corrosion interne et externe.

- **Corrosion interne**

Inexistante lors du 1er cycle d'irradiation, **la couche interne** [Averty 1997] se développe rapidement au cours du 2ème cycle pour atteindre 8 à 10 μm, puis son épaisseur n'évolue plus. Cette couche sans porosité ni fissure reste donc de faible épaisseur et n'influe que très peu sur les propriétés mécaniques des gaines. Cette couche provient d'une interaction chimique entre la gaine et le combustible au cours de l'irradiation, et elle n'apparaît notablement que lorsque le jeu pastille de combustible/gaine est fermé.

- **Corrosion externe**

Le milieu environnant en réacteur est très corrosif (bore, LiOH ,280-340°C à 10-15 MPa et radiolyse) et le zirconium est très réactif à l'oxygène. **La couche de zircone externe** dépend de l'étage du crayon. Les étages les plus bas sont les moins oxydés. Pour ces étages, on mesure des épaisseurs de zircone de l'ordre de 40 μm (pour un crayon 5 cycles), et la couche est relativement dense et adhérente à la gaine. Pour les étages supérieurs, les plus oxydés, la couche de zircone peut dépasser les 80 μm. Elle reste dense au voisinage de l'interface oxyde/métal (épaisseur de 10 à 20 μm), mais elle présente des porosités sur la face en contact avec l'eau. Ces deux zones sont parfois séparées par des fissures circonférentielles, et la partie poreuse est souvent fissurée radialement. Enfin la desquamation s'observe pour des couches supérieures à 80 μm.
Lors de l'oxydation, la réduction de l'eau libère de l'hydrogène au fond des pores de la zircone : $2H_2O + Zr \longrightarrow ZrO2 + 2H_2$
Une partie (20%) de cet hydrogène traverse la zircone et est incorporée dans la gaine. On montre alors qu'il existe une corrélation entre la teneur en hydrogène et l'épaisseur de la couche de zircone.

- **Cinétique d'oxydation**

La cinétique d'oxydation est différente suivant que l'on étudie l'oxydation sous irradiation ou non Cf. figure IV.24.).

Hors irradiation, la cinétique d'oxydation des alliages de zirconium peut être décomposée en deux régimes successifs :

- le premier régime [1] correspond à des épaisseurs d'oxyde inférieures à une épaisseur critique appelée **épaisseur de transition**. Cette épaisseur peut varier de 2 à 3 μm en fonction des conditions d'oxydation et de la nature de l'alliage étudié. Lors de cette première phase, la croissance de l'oxyde est parabolique [Godlewski 1990] ou cubique [Bryner 1979], [Argelès 1993] suivant les auteurs ;
- au delà de cette épaisseur de transition, le régime devient approximativement linéaire [2].

Sous irradiation, une seconde transition apparaît, conduisant à un régime linéaire accéléré [3] par rapport à l'absence d'irradiation (Figure IV.24.) :

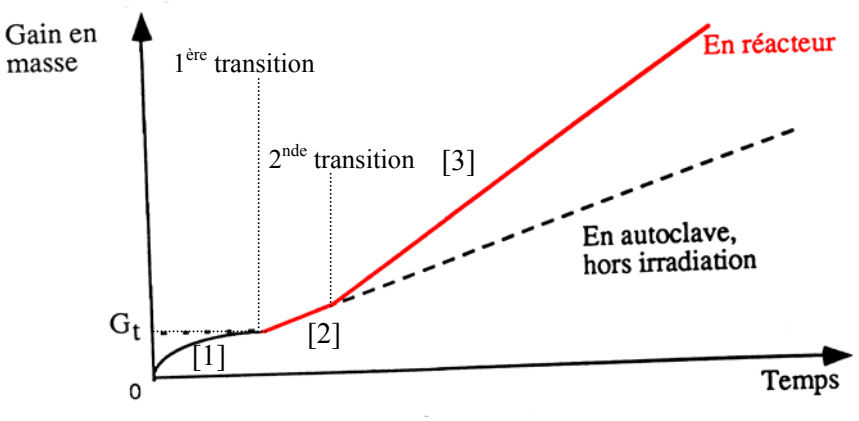


Figure IV. 24. Cinétique d'oxydation des alliages de zirconium entre 260 et 400°C [Billot et al. 1989].

IV.3.1.2. Description de la couche d'oxyde

La zircone possède trois formes allotropiques stables dans des domaines différents de température et de pression. A la pression atmosphérique, la zircone monoclinique est stable de la température ambiante à 1200°C, puis apparaît la zircone quadratique jusqu'à 2370°C, et enfin la zircone cubique jusqu'au point de fusion (2680°C) [Levin et al. 1975].

Cependant, des traces de zircone quadratique ont été observées dans les couches de zircone d'oxydation [Godlewski 1990], [Ding et al. 1993]. Cette phase peut provenir de différents facteurs tels que la présence de stabilisateurs chimiques, un déficit d'oxygène ou encore l'existence de contraintes de compression élevées à l'interface métal/oxyde.

L'étude morphologique des couches d'oxyde menée par Parise [Parise 1996] montre deux phénomènes importants :

- une **ondulation de l'interface métal/oxyde** : cette ondulation, observée dès les plus faibles épaisseurs, est irrégulière tant en période qu'en amplitude, mais il semble qu'elle soit plus marquée lorsque l'épaisseur d'oxyde augmente ;

- la **présence de bandes sombres dans la couche d'oxyde** : ces bandes sombres correspondant à des **fissures** commencent à apparaître pour des épaisseurs d'oxyde supérieures à 500 nm. Les couches d'oxyde post-transitoires présentent un réseau de fissures dont la répartition peut varier suivant l'alliage de zircaloy 4 étudié.

IV.3.1.3. Etude mécanique de l'oxydation

- **Aspects mécaniques de l'oxydation**

A l'interface métal oxyde, la transformation du métal en oxyde s'accompagne d'une dilatation volumique correspondant au rapport de Pilling et Bedworth [Pilling et al. 1923]. Ce rapport des volumes spécifiques de l'oxyde et du métal vaut 1,56[1] dans le cas du zirconium. Ce qui veut dire que la couche d'oxyde sera soumise à des contraintes de compression élevées lors de sa formation. Depuis 1970, plusieurs études ont été menées afin de déterminer l'origine et la grandeur des contraintes internes générées dans la couche d'oxyde.

Les premières études menées sur du zircaloy 2 [Bradhurst et al. 1970] mettent en évidence les points suivants :

- les contraintes de croissance augmentent avec l'épaisseur d'oxyde jusqu'à la transition ;
- la contrainte maximum est atteinte à l'épaisseur de transition ;
- les couches d'oxydes pré-transitoires sont intactes alors que les couches post-transitoires présentent de nombreuses fissures circonférentielles ;
- l'épaisseur de transition est d'autant plus importante que l'oxydation se fait à plus haute température.

D'après ces études, les contraintes croîtraient dans la couche jusqu'à ce que la couche se fissure, permettant ainsi un redémarrage de la cinétique.
D'autres auteurs [Roy et al. 1970, David et al. 1971] observent que les contraintes présentes dans la couche d'oxyde dépassent le GPa. Ils en déduisent qu'il existe un lien direct entre le niveau de contrainte des couches d'oxyde et la présence ou non de zircone quadratique.
Selon Stringer [Stringer 1970], il n'est pas exclu que les contraintes soient relaxées par l'oxyde lui-même. A priori, les oxydes appartiennent à la famille des céramiques, matériaux fragiles, qui se rompent sans déformation plastique. Stringer rapporte cependant des déformations plastiques (par glissement de dislocations)[2] dans l'oxyde. Enfin, les couches d'oxydes croissent de façon très texturée, ce qui peut également contribuer à minimiser les contraintes.

[1] La valeur élevée de ce rapport se traduit par une épaisseur d'oxyde formée supérieure à l'épaisseur de métal qui lui a donné naissance.
[2] Des déformations superplastiques peuvent également être observées dans la zircone, mais pour des températures très élevées, supérieures à 2/3 de la température absolue de fusion (soit à peu près 1790°C).

- **Modèle global à deux matériaux**

Un modèle reposant sur une résolution semi-analytique des équations de la mécanique et avec des paramètres identifiés à l'aide du code Sidolo a été proposé afin d'évaluer l'ordre de grandeurs des contraintes dues à l'oxydation.
Le zircaloy 4 est considéré isotrope élastique, mais la zircone monocristalline est très anisotrope d'un point de vue élastique. Cependant, la texture de fibre des couches de zircone d'oxydation permet de considérer que le tenseur macroscopique est de forme isotrope transverse, le plan perpendiculaire à l'axe de fibre étant le plan d'isotropie. Le tenseur des constantes élastiques peut alors s'exprimer sous forme matricielle [Parise 1996] :

$$C_{(GPa)} = \begin{pmatrix} 375 & 156 & 94 & 0 & 0 & 0 \\ 156 & 375 & 94 & 0 & 0 & 0 \\ 94 & 94 & 219 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 109 \end{pmatrix}$$

La dilatation induite par la transformation de métal en oxyde est représentée par un tenseur de déformation diagonal (dit de changement de phase), où l'on considère que la dilatation est isotrope dans le plan de l'interface.

$$\varepsilon^{cph} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^{cph} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2^{cph} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3^{cph} \end{pmatrix}$$

où les directions 1 et 2 sont les deux directions du plan de l'interface (axiale et transversale), et la direction 3 est la direction normale à l'interface (direction radiale). Si la dilatation est considérée isotrope dans le plan de l'interface ($\varepsilon_{2=}\varepsilon_1$), il ne reste plus qu'une seule composante à déterminer, puisque le rapport de Pilling et Bedworth nous donne :

$$\left(\varepsilon_1^{cph} + 1\right)^2 \left(\varepsilon_3^{cph} + 1\right) = 1.56$$

Les valeurs des coefficients de ce tenseur ont été déterminées par trois expériences :
- déflexion d'une lame s'oxydant sur une face;
- augmentation de diamètre d'une gaine due à l'oxydation ;
- dissolution du métal afin d'observer la relaxation de contraintes dans la couche d'oxyde.

Les résultats obtenus par ces expériences [Parise 1996] montrent que les dilatations dans le plan de l'interface métal oxyde sont très faibles (0,5%), tandis que les dilatations radiales sont de l'ordre de 54%.

L'épaisseur de la couche d'oxyde peut alors être calculée assez précisément à partir du diamètre initial des tubes (D_{ini}), du diamètre après oxydation (D_{oxy}) et du rapport de Pilling et Bedworth (1,56) :

$$e_{oxy} = \left(\frac{1,56}{1,56-1}\right)\left(\frac{D_{oxy} - D_{ini}}{2}\right) \approx 1,393\left(D_{oxy} - D_{ini}\right)$$

A partir des valeurs de dilatation, le modèle global donne les informations importantes suivantes :

- la contrainte radiale est nulle sur les faces interne et externe de la gaine, et continue à l'interface métal-oxyde. Sa valeur atteint un maximum de traction à l'interface zircaloy4/zircone, et elle est inversement proportionnelle au rayon de la gaine. Cette valeur reste très faible dans le cas de nos gaines ≈ 1 MPa ;
- les contraintes orthoradiales et axiales sont discontinues à la traversée de l'interface métal-oxyde. Elles sont compressives de l'ordre de 2 GPa dans l'oxyde, et légèrement en traction (≈ 10 MPa) dans le métal ;
- enfin le niveau de contraintes dans le métal est trop faible pour que celui-ci sorte du domaine élastique (ce qui ne sera pas le cas lors du compactage !).

IV.3.1.4. Bilan

Cette étude a permis de se rendre compte de la complexité de l'oxydation du zircaloy 4, et des nombreux paramètres à prendre en compte si l'on veut modéliser avec précision le bimatériau zircaloy 4/zircone :

- la densité de la couche d'oxyde évolue lors de l'oxydation ;
- une ondulation à l'interface métal/oxyde est observée dès les plus faibles épaisseurs de zircone ;
- la présence de micro-fissures est observée pour des épaisseurs supérieures à 500 nm ;
- à l'interface métal oxyde, la transformation du métal en oxyde s'accompagne d'une dilatation volumique importante donnant lieu à des contraintes de compression élevées dans la couche d'oxyde lors de sa formation. Les dernières études montrent que la contrainte radiale est faible à l'interface métal/oxyde, mais que les contraintes orthoradiales et axiales (discontinues à l'interface) peuvent atteindre des valeurs compressives très élevées (de l'ordre de 2 GPa) ;
- enfin la zircone est anisotrope, voire isotrope transverse pour de la zircone d'oxydation.

Tous ces paramètres, difficiles à prendre en compte numériquement, nous obligerons à formuler plusieurs hypothèses simplificatrices pour modéliser le compactage d'un tube oxydé. Mais avant de passer à la simulation numérique, nous avons effectué une étude expérimentale de l'oxydation de tubes en zircaloy 4 écroui, puis nous les avons compacté afin d'étudier l'influence de cette oxydation sur les propriétés mécaniques des tubes.

IV.3.2. Etude expérimentale de l'oxydation de tubes en zircaloy 4 écroui

Parallèlement à cette étude bibliographique, et afin de valider nos simulations numériques, nous avons effectué notre propre étude expérimentale de l'oxydation de tubes en zircaloy 4. Une campagne d'oxydation en autoclave a été menée au CEA Cadarache [Bouineau 1999], et plusieurs observations microstructurales et essais expérimentaux ont été réalisés au CEMEF. Cette étude nous donne une meilleure connaissance du matériau, et nous permet surtout d'étudier l'influence de l'oxydation sur les propriétés mécaniques du zircaloy 4. Cela nous permettra notamment de comparer les simulations numériques sur un tube oxydé à des résultats expérimentaux.
Nous commencerons par présenter les **conditions d'oxydation** des échantillons que nous étudierons. Puis nous observerons la **microstructure du zircaloy 4** écroui avant et après oxydation. Ces observations sont importantes, car une restauration (polygonisation, recristallisation) éventuelle du zircaloy 4 lors de l'oxydation modifierait significativement ses propriétés mécaniques. Nous étudierons ensuite les **courbes Force/Déplacement** obtenues lors d'essais de compactage, et nous les comparerons à celles obtenues sur le matériau non oxydé. Enfin des observations du **faciès de rupture** nous permettront d'étudier l'influence de l'oxydation d'un point de vue microspcopique.

IV.3.2.1. Conditions d'oxydation

Pour cette étude, nous avons utilisé trois lots de tubes (lots A_1, A_2 et V) dont nous comparerons les propriétés mécaniques par rapport aux tubes écrouis non oxydés (lot NO). Les deux premiers lots de tubes ont été oxydés en autoclave (A_1 et A_2), tandis que le troisième a été oxydé sous vapeur d'eau (lot V). Les oxydations en autoclave sont réalisées à 360°C, dans des conditions physico-chimiques proches de celles existantes en réacteur à eau pressurisée, excepté pour le lithium (70ppm de lithium au lieu de 2 ppm en réacteur) afin d'accélérer l'oxydation. L'oxydation réalisée sous vapeur d'eau s'effectue à 410°C sous 70 bars de vapeur d'eau, et est moins représentative de ce qui se passe en réacteur. Nous porterons donc naturellement plus d'attention aux lots A_1 et A_2.
De plus, à la différence de l'oxydation en réacteur, l'oxydation en autoclave est symétrique, et les tubes ne perçoivent pas le fort gradient thermique qu'ils subissent en réacteur. La conséquence principale étant que la couche de zircone est de même épaisseur sur les parois interne et externe de nos tubes oxydés :

- lot A_1 : 176 jours en autoclave $\rightarrow$ 11 µm de zircone interne et externe ;
- lot A_2 : 258 jours en autoclave $\rightarrow$ 19 µm de zircone interne et externe ;
- lot V : 208 jours à 410°C $\rightarrow$ 10 µm de zircone interne et externe.

IV.3.2.2. Observations de microstructure

Des observations microstructurales ont été effectuées sur les tubes avant et après oxydation. Nous synthétisons ici les principaux résultats, mais le lecteur intéressé pourra se référer à [Destouches 2000] pour plus de précision. Les observations ont été effectuées sur des coupes transversales (Figure IV.25.a) et longitudinales (Figure IV.25.b) :

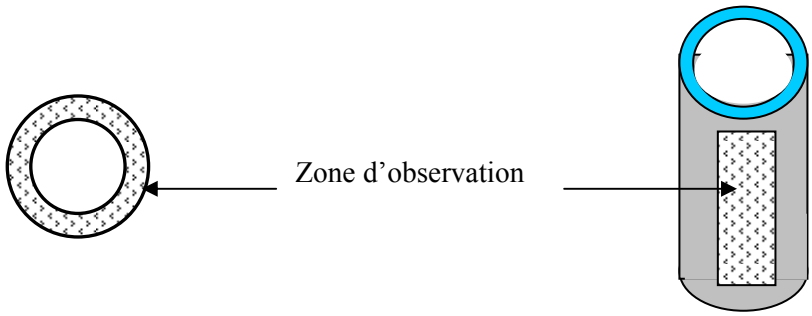


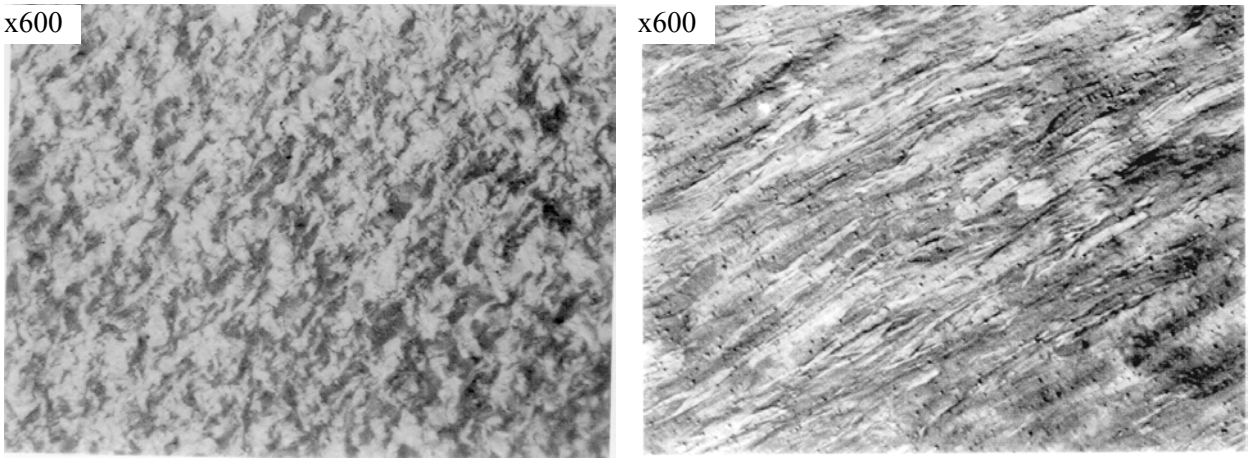
Figure IV. 25. a) coupe transversale - b) coupe longitudinale

Afin d'observer la microstructure du Zircaloy-4, des polissages manuels avec différentes tailles de grains (400 à 4000 grains par cm²), suivis d'un polissage à 3 µm puis d'un polissage à OGP ont été réalisés sur les échantillons enrobés. Pour les échantillons non-enrobés un polissage électrolytique a été effectué à l'aide d'une solution.
Ces observations mettent en évidence la **microstructure enchevêtrée** du matériau, mais elles nous informent également sur la **présence d'hydrures** dans le zircaloy 4, ainsi que sur les propriétés de la **zircone** et de l'**interface métal/oxyde**.

- **Microstructure du zircaloy 4 avant et après oxydation**

Les tubes écrouis (A_1 et A_2) ayant passé plusieurs centaines de jours à 360°C, nous nous sommes interrogés sur une recristallisation éventuelle du zircaloy 4. La recristallisation, réagencement des atomes de grains déformés en un assemblage de grains entièrement nouveaux, aurait modifié les propriétés mécaniques du zircaloy 4. Nous avons donc comparé la microstructure du matériau avant et après oxydation.

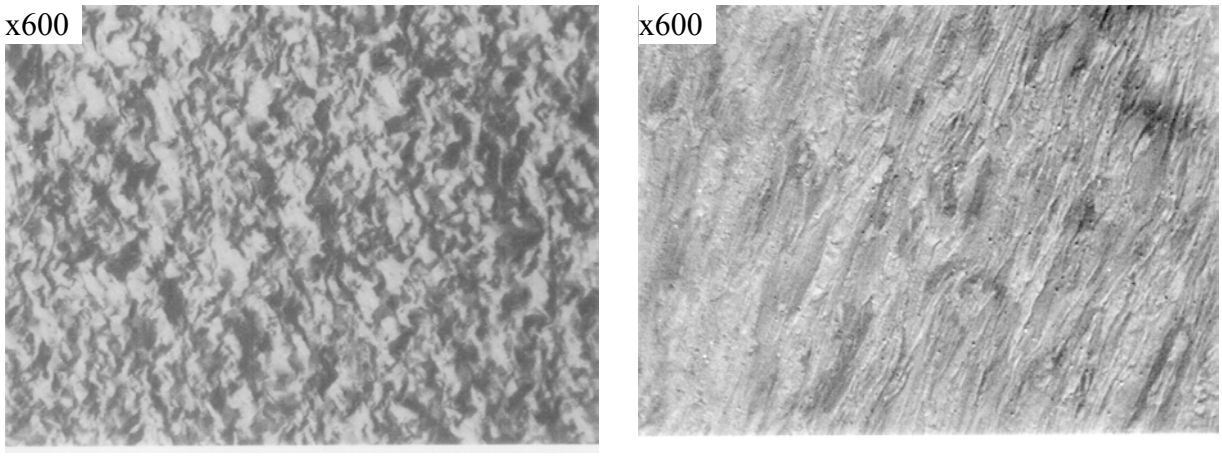
Les observations sur le lot non oxydé montrent que la microstructure des tubes est directement liée au procédé de mise en forme : le laminage à pas de pèlerin [Mulot 1997]. C'est ce qui explique la structure très enchevêtrée des grains sur la coupe transversale (Figure IV.26.a), et leur structure très allongée sur la coupe longitudinale (Figure IV.26.b). La taille moyenne des grains varie entre 20 et 25 µm de longueur et 1 à 3 µm de large. On peut observer quelques grains plus ou moins équiaxes, mais en petite quantité.



a) b)

Figure IV. 26. Microstructure des tubes écrouis sur a) une coupe transversale et b) une coupe longitudinale

Les mêmes observations (Figure IV.27.a et IV.27.b), réalisées sur le lot A_2, sont très semblables aux précédentes. Des observations plus fines, réalisées au MEB, ne montrent pas non plus de recristallisation du matériau.



a) b)

Figure IV. 27. Microstructure du lot A_2 sur a) une coupe transversale et b) une coupe longitudinale

Compte tenu de ces observations, nous pourrons conserver les mêmes propriétés mécaniques pour le zircaloy 4 après oxydation que celles que l'on avait déterminé avant oxydation.

- **Hydrures dans le zircaloy 4**

Des observations, à grossissement moins fort ont été effectuées sur une coupe transversale d'un tube oxydé. Nous observons, tout comme cela est indiqué dans la littérature [Prat 1994], de nombreux hydrures de zirconium qui n'étaient pas présents avant oxydation (Figure IV.28.a). Ces hydrures, qui ressemblent à des micro-fissures circonférentielles uniformément réparties dans l'épaisseur du tube, sont plus nombreux pour le lot oxydé sous vapeur d'eau (Figure IV.28.b) car la réaction d'hydruration est favorisée par la pression importante de vapeur d'eau.

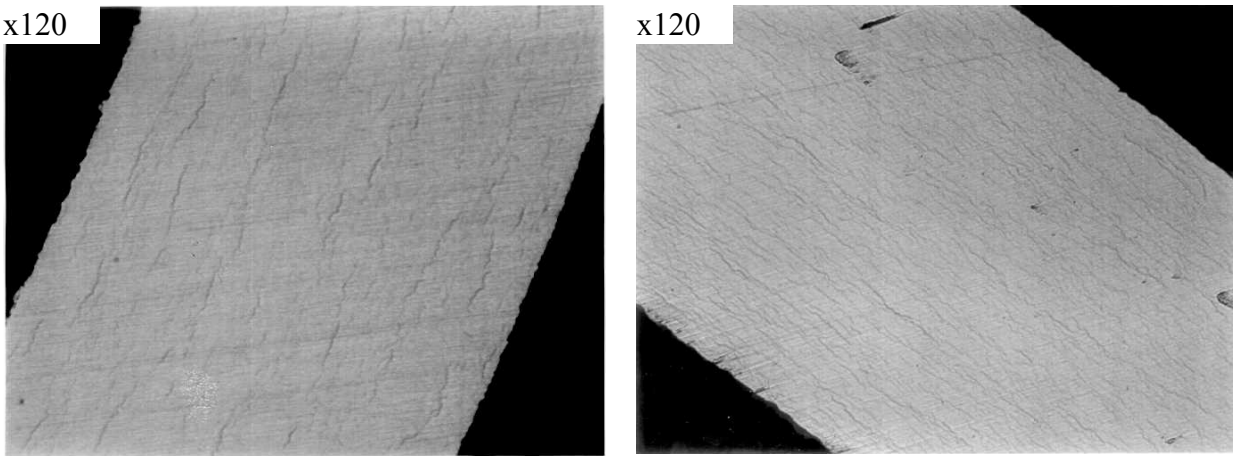


Figure IV. 28. Hydrures de zirconium sur une coupe transversale d'un tube oxydé a) en autoclave et b) sous vapeur d'eau

A plus fort grossissement, on observe également le caractère intergranulaire des hydrures qui suivent la direction de mise en forme du matériau (Figure IV.29.).



Figure IV. 29. Caractère intergranulaire des précipités d'hydrures de zirconium

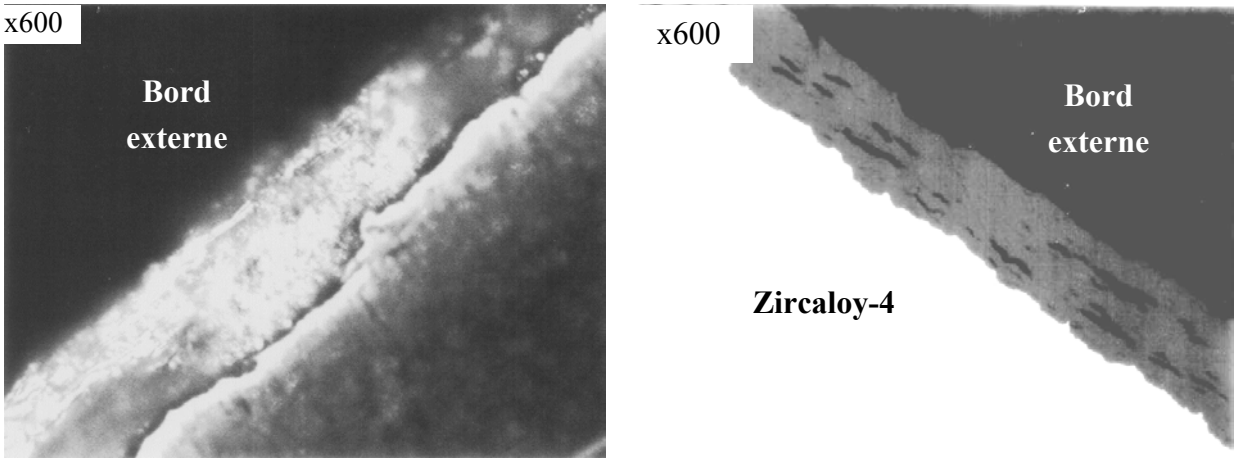
La réaction d'oxydation du zirconium au contact de l'eau, schématisée par l'équation $Zr + 2H_2O \rightarrow ZrO_2 + 4H^+$, libère des protons H^+ qui peuvent soit se recombiner entre eux, soit

diffuser au sein du matériau. Plus que l'hydrogène, c'est la précipitation d'hydrures de zirconium qui fragilise le matériau.

Des essais de traction à température ambiante ont été réalisés [Prat 1994], et ont mis en évidence le rôle des hydrures dans la rupture du matériau. Ils ne modifient pas le processus de rupture mais catalysent l'endommagement du matériau par leurs multiples fissurations, et le rendent ainsi plus fragile. Ces hydrures auront donc une influence certaine sur le comportement local, mais aussi global, du tube lors du compactage.

- **La zircone**

Enfin, plusieurs observations ont été effectuées plus particulièrement sur la zircone et son interface avec le zircaloy 4. Elles confirment les résultats proposés dans la littérature [Parise 1996] : l'interface zircaloy4/zircone est ondulée (Figure IV.30.a) et la zircone présente des porosités, ou micro-fissures, dont la quantité augmente avec l'épaisseur de zircone (Figure IV.30.b).



a) b)

Figure IV. 30. a) ondulation de l'interface zircone/zircaloy 4 et b) porosités dans la zircone

Ces nombreuses micro-fissures sont très importantes, car elles peuvent être à l'origine de petits débris qui peuvent rapidement se former dès les premiers instants du compactage. D'un point de vue global, cette « dédensification » de la zircone lors du compactage entraîne des efforts de compactage moins importants que ceux que l'on aurait observés avec une couche de zircone saine et intacte.

IV.3.2.3. Courbes Force/Déplacement

Nous proposons maintenant d'étudier l'influence de l'oxydation sur le comportement global des tubes en zircaloy 4, en comparant les courbes Force/Déplacement du compactage pour des tubes oxydés et non oxydés.

La première comparaison, effectuée pour le compactage d'un tube suivant son axe montre que les tubes sont plus fragiles après oxydation (Figure IV.31.). Le tube oxydé sous vapeur d'eau est le plus fragile car il contient plus de précipités d'hydrures que les tubes oxydés en autoclave.

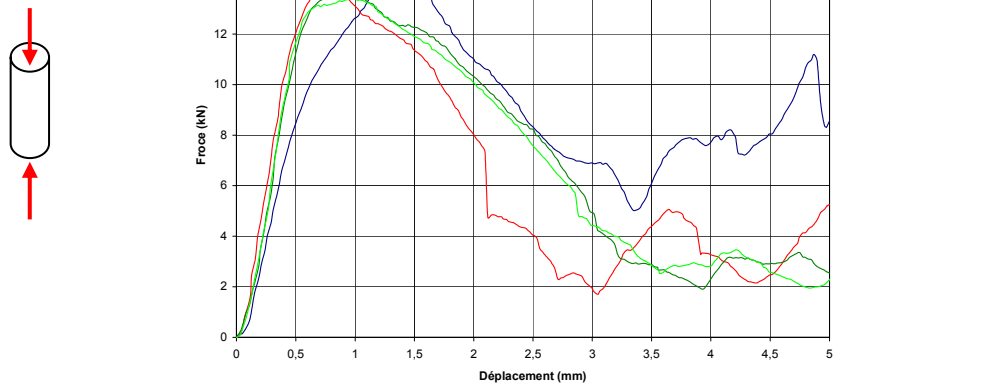


Figure IV. 31. Comparaison des courbes Force/Déplacement pour un essai de compactage vertical

Pour l'essai de compactage horizontal, les tubes oxydés sous vapeur d'eau sont plus fragiles que les tubes non oxydés, alors que les tubes oxydés en autoclave (lot A_2) semblent plus ductiles (Figure IV.32.).

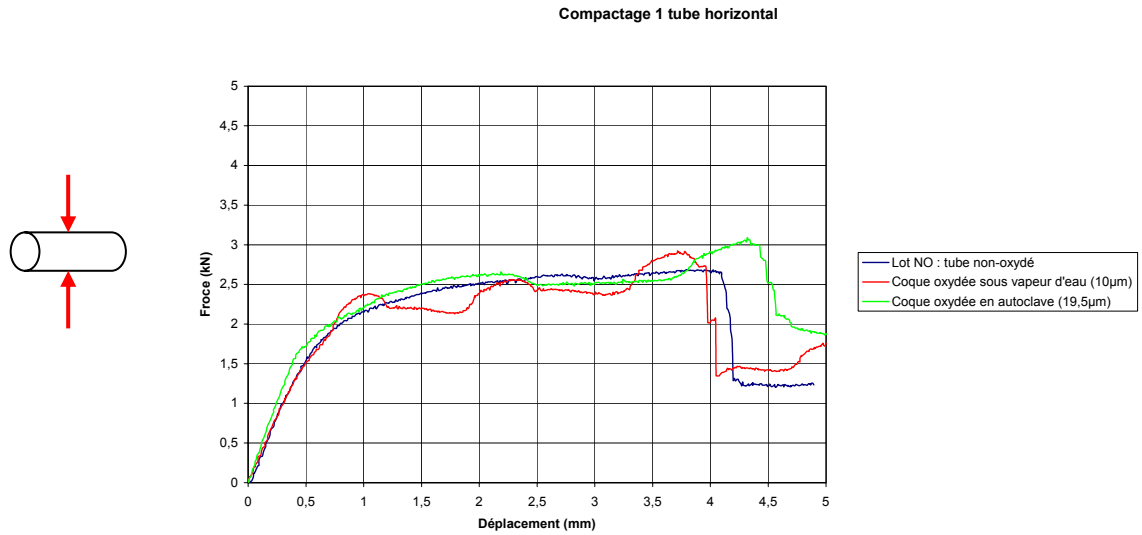


Figure IV. 32. Comparaison des courbes Force/Déplacement pour un essai de compactage horizontal

Plusieurs remarques peuvent être formulées en observant ces courbes :

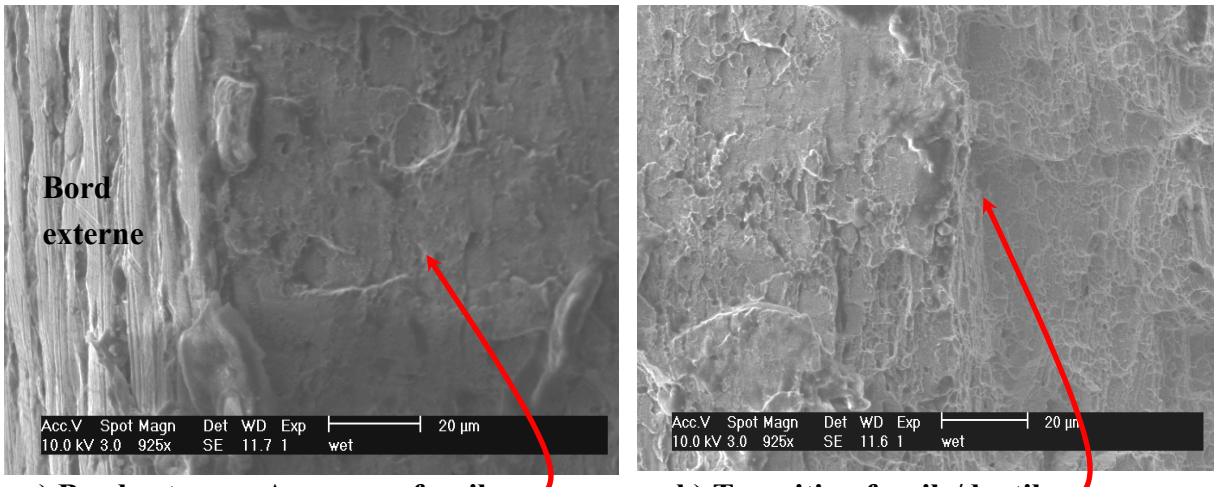
- Les hydrures ont un rôle fragilisant. Cela se remarque bien pour le compactage vertical et pour le compactage horizontal du tube oxydé sous vapeur d'eau ;
- Malgré la présence d'hydrures, le tube oxydé en autoclave A_2 semble être plus ductile que le tube non oxydé pour le compactage horizontal. Ce phénomène semble croître avec la durée passée en autoclave. Si la température d'oxydation est insuffisante pour recristalliser le matériau, elle peut cependant entraîner le phénomène de polygonisation qui restaure légèrement le matériau, augmentant ainsi sa ductilité ;
- Quelle que soit l'épaisseur de zircone, les niveaux d'effort de compactage sont très proches. La zircone, bien plus rigide et fragile que le zircaloy 4 n'agît donc pas significativement sur la réponse globale du tube. Cela s'explique par le fait que dès les premiers instants du compactage, de nombreux petits débris de zircone se forment entraînant alors une dédensification de la couche de zircone et donc une dérigidification du tube ;

IV.3.2.4. Faciès de rupture

Après avoir observé l'influence de l'oxydation d'un point de vue mécanique global, nous analysons maintenant les faciès de rupture obtenus de façon à étudier son influence au niveau microscopique. Nous commencerons donc par observer le faciès de rupture pour un tube non oxydée, avant d'étudier ceux des tubes oxydés.

- **Tube non oxydé**

Pour les tubes non oxydés, l'amorçage est fragile (Figure IV.33.a), puis on observe une transition fragile/ductile (Figure IV.33.b).



a) Bord externe : Amorçage fragile **b) Transition fragile/ductile**

Figure IV. 33. Amorçage et transition fragile/ductile pour un tube non oxydé

Si la partie interne du tube présente également un aspect fragile, tout le centre est clairement à **dominante ductile à cupules** (Figure IV.34.) avec cependant quelques zones de plages fragiles.

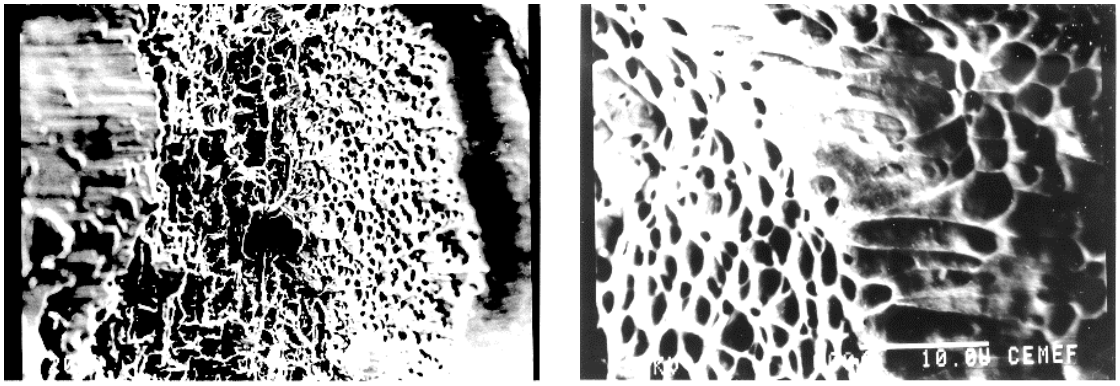


Figure IV. 34. Cupules pour le faciès de rupture du tube écroui non oxydé

- **Tubes oxydés**

Les tubes oxydés, en autoclave et sous vapeur d'eau, présentent également un amorçage fragile (Figure IV.35.a), suivi d'une zone ductile, puis un retour à une zone fragile sur le bord interne (Figure IV.35.b).

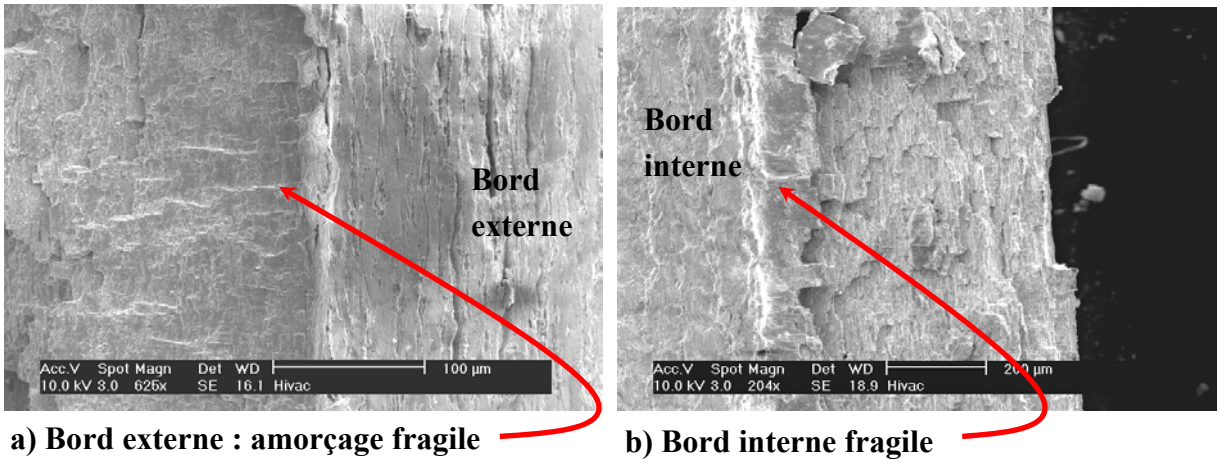


Figure IV. 35. Rupture fragile sur les parties externe et interne du tube

Par contre, les zones ductiles sont moins présentes pour les tube oxydés en autoclave, et presque inexistantes pour les tubes oxydés sous vapeur d'eau. Sur les faciès de rupture, l'augmentation de la teneur en hydrogène se traduit par un accroissement de la taille moyenne des zones de clivage : ces zones correspondent aux traces des hydrures rompues. C'est ce qui explique que l'on trouve plusieurs zones de plages fragiles à l'intérieur même des zones ductiles (Figure IV.36.).

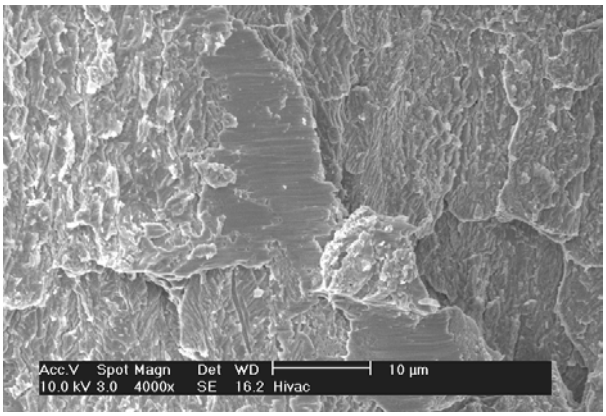


Figure IV. 36. Zone centrale : Domaine ductile avec des phases fragiles

- **Bilan**

La couche de zircone crée des contraintes importantes au niveau de l'interface Zircaloy-4/oxyde. Ces contraintes se caractérisent par un amorçage fragile de la rupture observé à la fois sur les bords externe et interne du matériau. Le reste de la rupture est principalement influencé par le nombre d'hydrures contenu dans le zircaloy 4. Pour exemple, la différence entre les tubes oxydés en autoclave et sous vapeur d'eau est très représentative de la fragilité due aux précipités d'hydrure de zirconium. Ainsi, localement, l'oxydation semble fragiliser le matériau. Quelle que soit l'oxydation, on peut schématiquement représenter le faciès de rupture de la façon suivante :

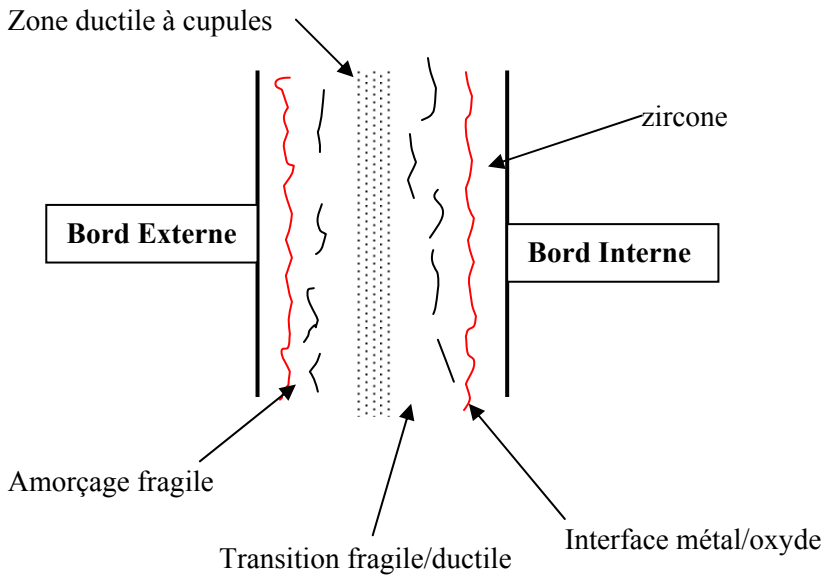


Figure IV. 37. Schématisation du faciès de rupture

IV.3.2.5. Bilan

Cette étude expérimentale est très instructive, dans la mesure où elle nous apporte une quantité importante d'informations, tant au niveau microstructural qu'au niveau macromécanique, sur l'oxydation des tubes en zircaloy 4 écroui.
Si la microstructure ne semble pas avoir fondamentalement changé lors de l'oxydation (grains allongés et enchevêtrés), on observe néanmoins l'apparition de nombreux hydrures. Puis, on observe concrètement l'influence de ces précipités sur la réponse globale du tube soumis au compactage, mais aussi sur le faciès de rupture.
Les observations de la zircone nous montrent une interface métal/oxyde ondulée, mais également de nombreuses micro-fissures (ou porosités) au sein même de la zircone. Ces dernières, qui augmentent avec l'épaisseur de zircone, provoquent la formation très rapide de petits débris dès le début du compactage, avec une influence évidente sur la courbe Force/Déplacement correspondante.

IV.3.3. Modélisation numérique du compactage d'un tube oxydé

L'étude bibliographique (§IV.3.1.) nous a permis de déterminer les propriétés mécaniques de la zircone, puis l'étude expérimentale précédente a mis en évidence les phénomènes importants se produisant lors de l'oxydation. Nous proposons ici de formuler plusieurs **hypothèses simplificatrices**, de façon à pouvoir modéliser le **compactage sans fissuration** à l'aide des données mécaniques ainsi définies. L'étude expérimentale précédente sera mise à profit pour expliquer les différences observées entre la simulation et l'expérience. Enfin nous effectuerons une **étude de sensibilité par rapport à l'épaisseur de zircone**, et nous montrerons les conséquences que cela peut avoir sur le lieu d'amorçage des fissures.

IV.3.3.1. Hypothèses simplificatrices

Pour une première modélisation du compactage d'un tube oxydé, nous effectuons quelques hypothèses simplificatrices. Nous considérerons donc que :

- l'interface métal/oxyde est parfaitement circulaire ;
- la zircone ne présente pas de micro-fissures, et qu'elle est élastique isotrope, avec un module d'Young de 240 GPa, et un coefficient de Poisson de 0,25.
- les contraintes résiduelles sont nulles en début de simulation ;
- les précipités d'hydrures dus à l'oxydation n'influencent pas le compactage d'un point de vue mécanique global.

Le rapport de Pilling et Bedworth sera pris en compte pour définir le diamètre extérieur des tubes pour une épaisseur d'oxyde (interne et externe) de 11µm, correspondant à l'épaisseur de zircone de nos tubes écrouis oxydés.

Dans ces conditions, les caractéristiques mécaniques qui seront utilisées pour la simulation numérique sont répertoriées dans le tableau IV.3. :

	σ_0 (MPa)	σ_m (MPa)	ε_d (%)	ε_t (%)	ν	E (MPa)
zircaloy 4 écroui	850	880	2,1	2,3	0,3	80000
Zircone	Elastique	?	-	-	0,25	240 000

Tableau IV. 3. Caractéristiques mécaniques du zircaloy 4 écroui et de la zircone pour modéliser le compactage

IV.3.3.2. Simulation numérique du compactage d'un tube oxydé sans fissuration

Nous avons modélisé le compactage d'un tube oxydé, possédant des couches interne et externe de zircone d'une épaisseur de 11µm. Nous avons vu que la dilatation due à l'oxydation pouvait être quantifiée grâce au rapport de Pilling et Bedworth qui vaut 1,56 pour le zircaloy 4. Le nouveau diamètre des tubes peut alors être calculé par :

$$e_{oxy} = \left(\frac{1{,}56}{1{,}56-1}\right).\left(\frac{D_{oxy} - D_{ini}}{2}\right) \approx 1{,}393\left(D_{oxy} - D_{ini}\right)$$

où e_{oxy} représente l'épaisseur de la couche d'oxyde, D_{ini} le diamètre initial du tube et D_{oxy} le diamètre après oxydation. Etant donné le diamètre initial du tube écroui, et l'épaisseur de zircone que nous voulons prendre en compte, le diamètre (D_{oxy}) et le rayon interne (R_{int_oxy}) après oxydation valent :

$$\left.\begin{array}{l} D_{ini} = 9{,}5 \text{ mm} \\ R_{int_ini} = 4{,}15 \text{ mm} \\ E_{oxy} = 0{,}011 \text{ mm} \end{array}\right\} \begin{array}{l} D_{oxy} = 9{,}508 \text{ mm} \\ R_{int_oxy} = 4{,}146 \text{ mm} \end{array}$$

N'ayant aucune donnée sur la contrainte à rupture de la zircone, nous modélisons le compactage du tube oxydé sans prendre en compte la fissuration. Pour mailler des couches aussi fines de zircone, nous avons modélisé un quart de tube avec deux axes de symétrie (Figure IV.38.). On remarque la forte concentration de contraintes, générée par les deux fines couches de zircone.

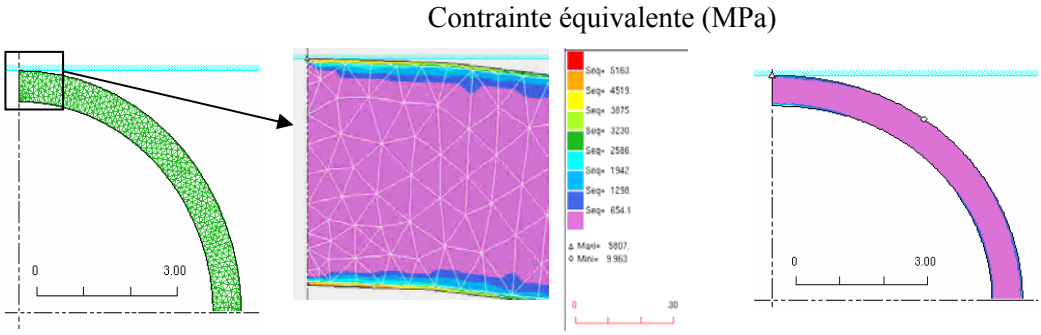


Figure IV. 38. Modélisation numérique du compactage d'un tube oxydé

La rupture dans la zircone n'étant pas encore prise en compte dans la simulation numérique, la courbe Force/Déplacement surestime largement les courbes réelles comme nous pouvons le voir sur le tracé suivant (Figure IV.39.).

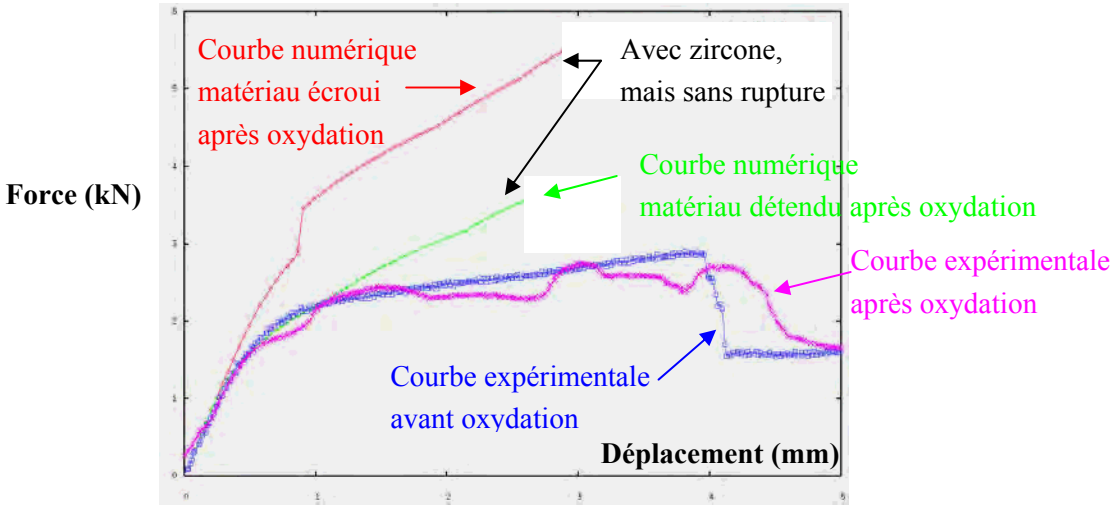


Figure IV. 39. Comparaison des courbes Force/Déplacement numérique et expérimentale pour un tube oxydé

Cependant, le zircaloy 4 est susceptible de s'être légèrement détendu durant la période d'oxydation, et nous avons donc modélisé le compactage d'un tube oxydé, mais en utilisant les propriétés mécaniques du zircaloy 4 détendu (courbe verte sur la figure IV.39.). La surestimation de la solution numérique est cette fois-ci moins importante, et elle provient sans doute de la zircone. Ainsi, le niveau d'effort très important atteint lors de la simulation numérique d'un tube oxydé peut s'expliquer par le fait que l'on ne modélise pas encore les nombreux débris qui se forment dès le début du compactage. De plus, les propriétés mécaniques attribuées au zircaloy 4 et à la zircone ne prennent pas en compte les hydrures dans le métal, ou les micro-fissures présentes dans la zircone. Enfin, il serait intéressant de pouvoir prendre en compte le haut niveau de contraintes résiduelles dû à l'oxydation, et à moindre titre, l'aspect ondulé de l'interface métal/oxyde.

La modélisation de la fissuration de la zircone serait l'avancée majeure pour la suite d'une telle étude. A l'heure actuelle, si on arrive à modéliser finement l'amorçage et la propagation d'une ou de plusieurs fissures dans la zircone (Figure IV.40.), nous n'arrivons pas encore à lui faire traverser

l'interface zircone/zircaloy 4. De même, nous arrivons à gérer la formation de débris, comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, mais il s'agirait ici de modéliser la fragmentation de la zircone en une multitude de débris microscopiques, sous l'effet de la sollicitation, mais également des micro-fissures préexistantes dans cette zircone.

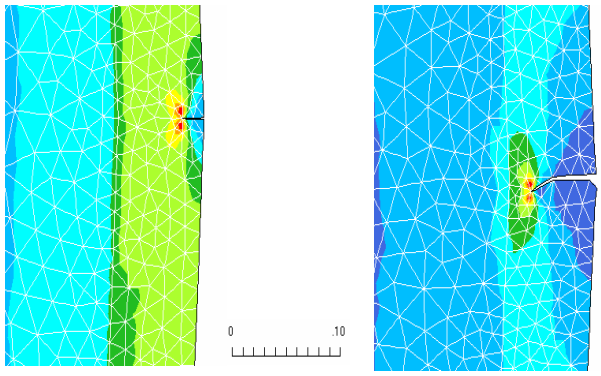


Figure IV. 40. Propagation d'une fissure dans la zircone

Enfin, notre connaissance du matériau est trop faible à l'heure actuelle pour déterminer les paramètres critiques nécessaires à la modélisation de la fissuration dans le bimatériaux zircaloy 4/zircone. On a pu déterminer précédemment la contrainte critique pour la rupture d'un tube écroui non oxydé, mais on ne sait rien sur la contrainte critique de la zircone, ainsi que sur la résistance de l'interface entre le métal et son oxyde. Si bien que l'on ne peut, pour l'instant, déterminer le type de rupture à l'interface zircaloy 4/zircone (Figure IV.41.). Si la connaissance de ces paramètres matériau n'est pas encore possible actuellement, il est important de poursuivre les développements numériques visant à modéliser la propagation de fissures dans des multimatériaux dans la mesure où cela pourra permettre, par la suite, de les déterminer par analyse inverse.

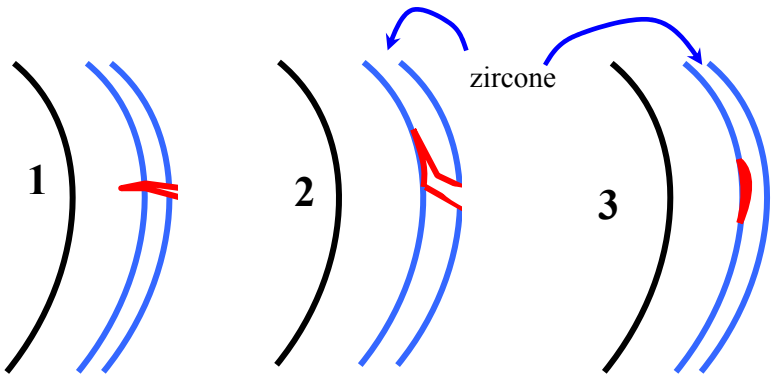


Figure IV. 41. Possibilités de fissuration à l'interface zircaloy 4/zircone

Si tout ces développements font plutôt partie des perspectives pour la suite d'une telle étude, il est cependant possible de tirer plusieurs informations qualitatives de la simulation numérique en effectuant une étude de sensibilité par rapport à l'épaisseur de zircone.

IV.3.3.3. Sensibilité par rapport à l'épaisseur de zircone

Pour cette étude, nous ne modéliserons pas la couche interne de zircone, et les couches externes seront prises assez épaisses : 50µm et 80µm. Les compactages sont réalisés sans fissuration. Nous commencerons par étudier l'influence de la couche de zircone sur les contraintes dans l'épaisseur du tube, puis, nous nous intéresserons à la localisation de l'amorçage.

- **Contraintes dans le tube**

La figure IV.42. montre la contrainte yy dans l'épaisseur du tube.

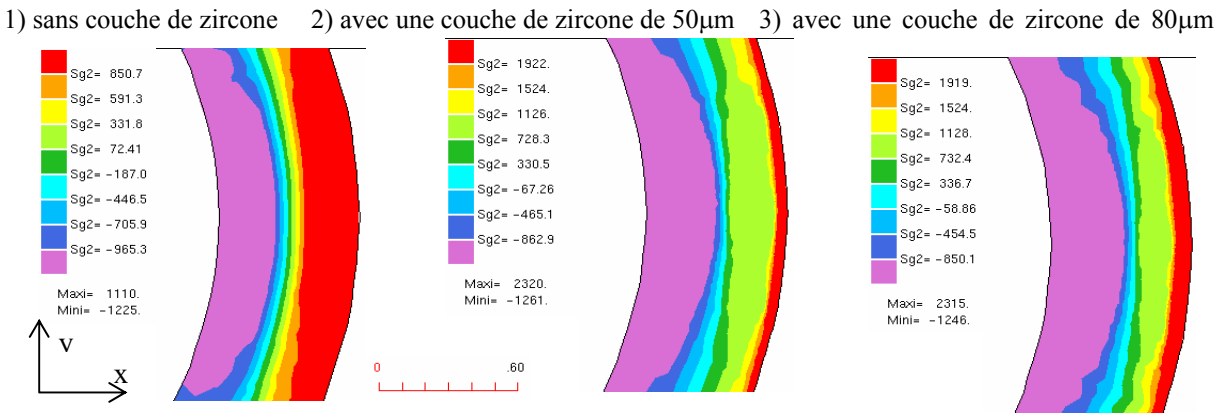


Figure IV. 42. Contrainte yy en fonction de l'épaisseur de zircone

On remarque que l'existence d'une couche de zircone peut faire varier les contraintes du simple au double! De plus, plus la couche de zircone est fine, et plus les contraintes sont localisées. Cela est confirmé par la figure IV.43., où l'on a tracé la valeur de cette contrainte σ_{yy} en fonction de la position sur le contour externe du tube.

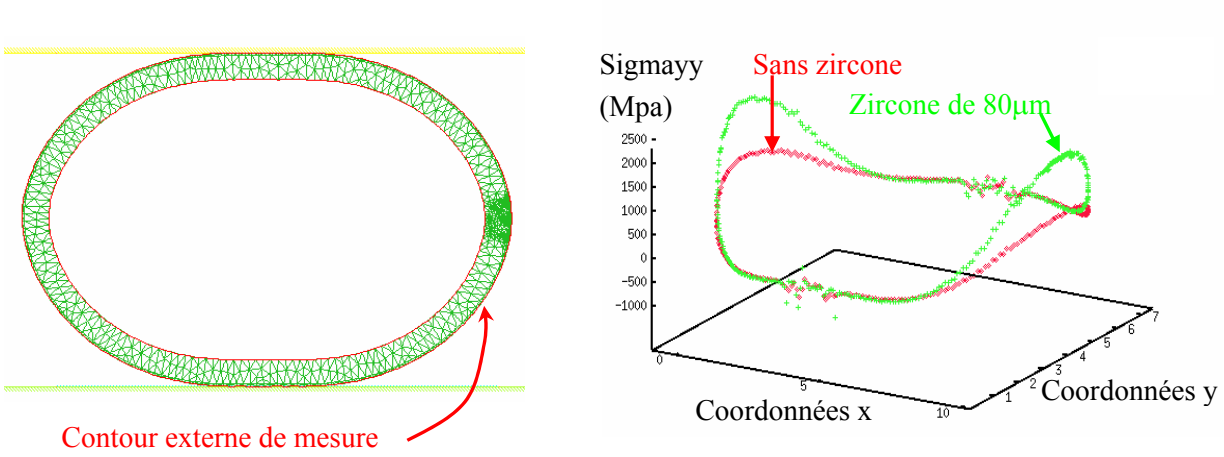


Figure IV. 43. Contrainte yy mesurée sur le contour externe

Enfin, si on prend en compte le fait que l'oxydation entraîne des contraintes importantes dans la zircone, on peut aisément comprendre que la zircone se fissure très rapidement, dès le début du compactage.

- **Localisation de l'amorçage**

Nous comparons maintenant les contraintes yy sur le contour externe et les contraintes xx sur le contour interne, pour un tube non oxydé, et pour un tube oxydé (Figure IV.44.). Sur cet exemple (sans zircone interne) on s'aperçoit que la couche de zircone externe fait augmenter de façon importante la contrainte yy sur les bords externes latéraux du tube. L'amorçage se produira donc de préférence en ces endroits.

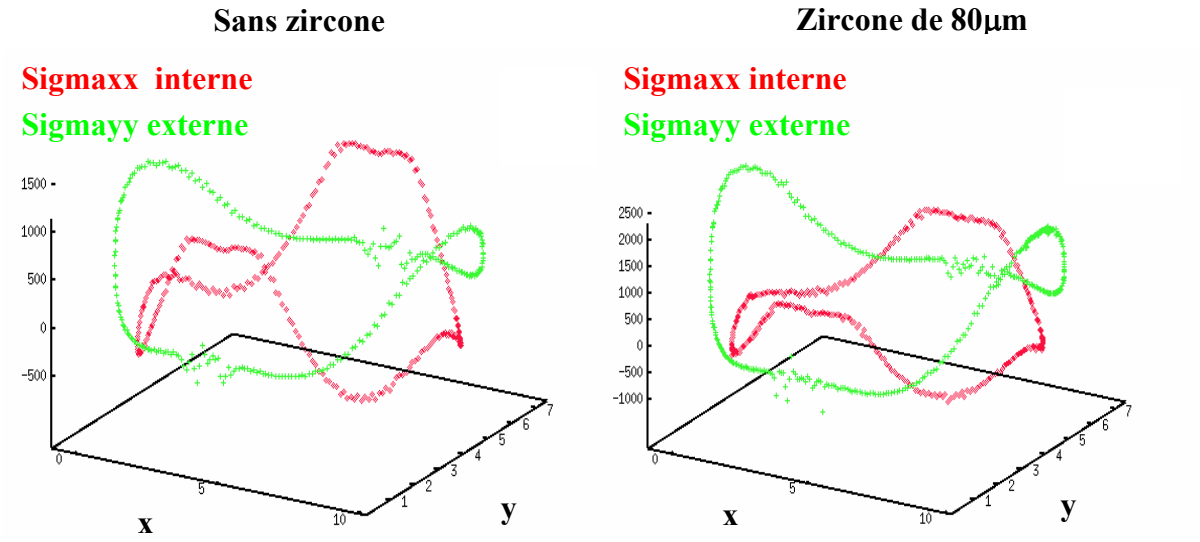


Figure IV. 44. σ_{xx} et σ_{yy} sur les contours interne et externe d'un tube non oxydé, et oxydé

L'ajout d'une couche interne augmenterait la contrainte xx sur les parois internes supérieure et inférieure du tube, entraînant ainsi une fragmentation rapide de la zircone interne. C'est ce que l'on observe également lors de l'expérience de compactage d'un tube oxydé.

IV.4. BILAN

Cette étude, très complète, nous a permis de mettre en évidence et d'appliquer les différentes caractéristiques du code FORGE2 Multimatériaux.
Pour cela, l'étude expérimentale menée en parallèle a été indispensable à la validation des résultats numériques. Elle nous a permis de valider le zircaloy 4 écroui comme matériau simulant du zircaloy 4 irradié, puis de déterminer que les caractéristiques mécaniques obtenues en traction dans le sens longitudinal donnaient de bons résultats pour la modélisation du compactage.
La modélisation numérique du compactage de tubes écrouis a montré les aptitudes du code à gérer correctement les grandes déformations et les structures multidomaines. Les outils développés en mécanique de la rupture ont été utilisés pour modéliser la fissuration lors du compactage. La localisation de l'amorçage, la propagation des fissures et la courbe Force/Déplacement obtenue sont en parfaite adéquation avec l'expérience. De plus, les études de sensibilité effectuées montrent l'intérêt que revêt une telle étude une fois le code validé.
Après avoir présenté les mécanismes d'oxydation du zircaloy 4, nous avons modélisé le compactage d'un tube écroui oxydé en formulant quelques hypothèses. Si la modélisation de la structure multimatériaux donne de bons résultats, la courbe Force/Déplacement numérique obtenue est éloignée de la courbe expérimentale. L'étude expérimentale poussée de l'oxydation des tubes écrouis nous a apporté plusieurs éléments de réponse à ces différences. Les micro-fissures dans la zircone, les précipités d'hydrures dans le zircaloy 4, les contraintes résiduelles dues à l'oxydation ou encore l'anisotropie de la zircone sont autant de paramètres qu'il faudra prendre en compte à l'avenir pour modéliser correctement le compactage de tubes oxydés.

Le but de cette étude était de mettre en application les nombreuses caractéristiques et possibilités du code FORGE2 Multimatériaux. Elle montre qu'il existe encore des données matériaux à déterminer, et des développements importants à réaliser pour modéliser correctement des phénomènes complexes tels que ceux liés à l'oxydation (les premiers résultats de mesure de contraintes résiduelles montrent qu'elles peuvent atteindre quelques GPa !). Mais elle met également en valeur les nombreux résultats que l'on peut obtenir grâce aux outils développés et présentés dans les chapitres précédents.

CONCLUSION
ET
PERSPECTIVES

La Mécanique de la Rupture est un domaine en plein essor, dont l'étude fait appel à différentes disciplines : modélisation mathématique et mécanique, analyse numérique, investigations physiques et métallurgiques, …

Dans le cadre des structures mono- et multi-matériaux auxquelles nous nous sommes intéressés ici, nous avons cherché à mettre en œuvre cette transdisciplinarité afin de mieux analyser les phénomènes physiques, mécaniques et métallurgiques impliqués dans le problème industriel qui nous intéressait.
A cette occasion, nous avons développé et implémenté des méthodes numériques faisant appel à des concepts dérivant à la fois du calcul de structures en petites déformations et des techniques utilisées pour les grandes déformations ; en particulier les développements liés au remaillage automatique ont permis de faire sauter le verrou lié à la modification topologique du maillage lors de la propagation de fissures. Le code FORGE2®, développé initialement pour la modélisation numérique du forgeage, a été généralisé à la modélisation de structures multimatériaux. Notre travail a consisté à introduire de nouveaux outils numériques permettant de gérer l'apparition et le développement de plusieurs contours et plusieurs sous-domaines lors d'un calcul mécanique, puis d'améliorer le remailleur automatique de façon à modéliser avec précision la propagation de fissures dans un maillage.

Nous avons présenté, dans le premier chapitre, le code FORGE2 Multimatériaux dont la particularité est de pouvoir, à présent, modéliser de façon totalement automatique plusieurs sous-domaines et plusieurs matériaux. Ce code de calcul éléments finis 2D permet de modéliser un ou plusieurs matériaux élasto-viscoplastiques en grandes déformations. Cela nécessite, comme nous l'avons vu, de créer une structure de données de maillage complexe de façon à gérer les intersections des nombreux contours. Nous sommes également confrontés à des problèmes mal conditionnés que nous devons résoudre par des méthodes itératives pré-conditionnées.

Dans le second chapitre, nous avons introduit les bases de la mécanique de la rupture et les méthodes numériques couramment utilisées dans ce domaine. Nous avons montré les difficultés liées à la singularité créée par la pointe d'une fissure. Les développements apportés au mailleur nous permettent de mailler finement et de façon bien structurée le voisinage de la pointe de fissure. Les éléments singuliers avec nœud au quart permettent de rendre compte de la singularité d'ordre ½ sur les champs mécaniques en pointe de fissure. La méthode Gθ a été implémentée pour le calcul du taux de restitution d'énergie. Les comparaisons par rapport à d'autres techniques de calcul de G ont montré la grande précision de cette méthode ainsi que son indépendance par rapport au maillage. Il sera intéressant par la suite de généraliser cette méthode aux structures multimatériaux. Pour cela, il sera nécessaire de gérer convenablement les intersections de la couronne d'intégration et des interfaces entre les différents matériaux.

Le remailleur multimatériaux a été adapté, dans le chapitre 3, à la modélisation de la propagation d'une ou de plusieurs fissures dans un maillage. Sa grande souplesse permet de conserver un maillage concentrique, avec raffinement évolutif et couronne d'intégration à la tête de chaque fissure. Les trois critères de bifurcation implémentés ont été comparés sur de nombreux exemples. Ils donnent tous les trois de bons résultats, mais le critère de la densité d'énergie de déformation minimale semble être assez sensible à la qualité du maillage. Le critère du taux de restitution d'énergie maximal, à partir de la méthode Gθ, donne de bons résultats indépendamment de la qualité du maillage. Cependant, la validité de la méthode Gθ pour le calcul du taux de restitution de l'énergie n'est justifiée en élastoplasticité que si il n'y a pas de déchargement. Or un incrément de fissure correspond à un déchargement local, et on ne peut donc pas modéliser la propagation quasi-statique dans un matériau élastoplastique à l'aide de cette méthode. Enfin le critère de la contrainte normale maximale est simple, facilement implémentable, et donne de bons résultats. Il offre de plus l'avantage de pouvoir être utilisé pour des matériaux élastoplastiques dans le cadre de la plasticité confinée. Cependant le calcul de la direction de propagation provient des champs mécaniques locaux en pointe de fissure, et il est donc indispensable d'y avoir un maillage fin. Les nombreux exemples d'applications montrent la robustesse et la précision des techniques introduites.

Enfin le chapitre 4, à vocation applicative, nous a permis de mettre en pratique tous les outils numériques présentés dans les chapitres précédents. Nous avons modélisé le compactage de tubes en zircaloy 4, de façon à étudier les mécanismes de déformation et de rupture lors de l'essai de compactage. Nous avons également mené en parallèle une étude expérimentale du compactage de tubes en zircaloy 4 écroui, puis de tubes en zircaloy 4 écroui oxydé. Cette étude fut très enrichissante d'un point de vue expérimental, puisqu'elle nous a permis d'étudier de façon beaucoup plus fine les mécanismes de rupture. Les observations réalisées au Microscope Electronique à Balayage ont montré l'importance de l'oxydation sur la rupture des tubes en zircaloy 4. Elles permettent ainsi de déterminer un ensemble de phénomènes microscopiques qu'il serait souhaitable de modéliser pour obtenir de meilleurs résultats sur le compactage de tubes oxydés : interface métal-oxyde ondulée, contraintes résiduelles dues à l'oxydation très importantes, fragilisation du matériau par la présence d'hydrures, anisotropie de la zircone, … Une fois tous ces phénomènes pris en compte, notre connaissance approximative de certaines propriétés du matériau (ténacité de l'interface métal-oxyde, taux de porosité dans la zircone, …) risque d'être le facteur limitant. A partir d'un code de calcul numérique prenant en compte ces nombreux phénomènes, il sera alors envisageable d'améliorer notre connaissance matériau grâce à une analyse inverse sur des paramètres tels que la contrainte à rupture de la zircone ou de l'interface métal-oxyde.

La conjonction des techniques développées et utilisées dans ces quatre chapitres nous a ainsi permis de mettre au point un outil d'analyse efficace et complètement automatique en mécanique de la rupture. Les perspectives envisageables à partir d'un tel outil sont très nombreuses :

- Un couplage endommagement-mécanique de la rupture. Si la plupart des auteurs se contentent d'utiliser l'une ou l'autre de ces deux approches, nous pensons pour notre part qu'il serait très intéressant de les coupler de façon à modéliser le processus complet de rupture d'une pièce : dégradation des propriétés mécaniques du matériau dû à la croissance et à la coalescence de cavités (endommagement) et conduisant à la propagation d'une macro-fissure dans la pièce (mécanique de la rupture). Cela nécessiterait à la fois d'introduire des lois d'endommagement couplées au comportement mécanique du matériau, et de généraliser certaines des méthodes numériques déjà implémentées aux matériaux élastoplastiques.

- La modélisation de la propagation pour des applications à fort cisaillement (usinage, découpage). Pour ces applications, nous avons montré que les critères de propagation classiques n'étaient pas adaptés, et qu'il fallait plutôt s'orienter vers des critères basés sur le taux de cisaillement maximum. Pour parvenir à modéliser la fissuration dans de telles zones fortement cisaillées, il sera important par la suite de gérer convenablement le contact des lèvres de la fissure. Pour ces applications, le fait de pouvoir modéliser la séparation complète de la pièce en deux maillages distincts représente également une avancée significative.

- La propagation de fissures dans des pièces multimatériaux. Nous avons montré des exemples de propagation dans des pièces contenant des inclusions. Cette caractéristique peut être très intéressante en génie civil pour des propagations dans le béton, ou encore pour des propagations dans des pièces composites ou multicouches. La propagation d'une fissure au travers d'une interface entre deux matériaux constituerait une avancée significative en modélisation numérique de la mécanique de la rupture et offrirait un vaste champ d'applications industrielles.

ANNEXES

ANNEXE A : Techniques de maillage

Comme nous l'avons dit dans le Chapitre I, la création d'un maillage s'effectue en trois étapes principales : la discrétisation de la frontière, la création d'un maillage initial à partir de cette discrétisation (à l'aide de la triangulation de Delaunay dans notre cas), et la régularisation du maillage. Dans cette annexe, nous décrivons avec plus de précision ces trois étapes, ainsi que les paramètres importants qui déterminent la qualité d'un maillage.

A.1. Discrétisation de la frontière

Nous avons vu que pour passer de la surdiscrétisation de la frontière, à sa discrétisation, on enlevait le maximum de points de surdiscrétisation tout en respectant 5 critères :

- La **précision** : c'est la variation relative de volume (variation moyenne, calculée par intégration) que l'on s'autorise entre la frontière surdiscrétisée et la frontière discrétisée (Figure A.1.).

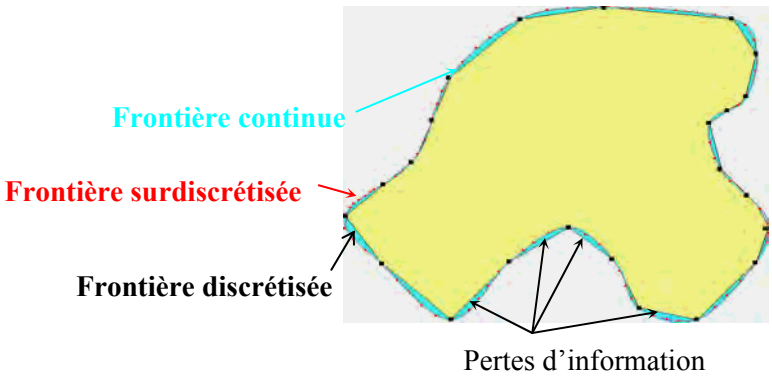


Figure A. 1. Les trois représentations de la frontière

- La **courbure** : ce paramètre représente la courbure maximale que l'on autorise entre 3 points consécutifs de la frontière. La courbure vaut C=h/L, où h et L sont définis sur la figure A.2.

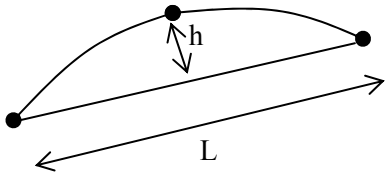


Figure A. 2. Le paramètre courbure

- Le **nombre de points maximum** : c'est le paramètre qui fixe le nombre de points maximum autorisé pour discrétiser la frontière.

- La **taille maximale** : c'est la taille maximale que peut mesurer un côté situé sur la frontière.

- L'**homogénéité** : c'est la valeur maximum que peut prendre le rapport entre la longueur de deux côtés consécutifs de la frontière (Figure A.3.).

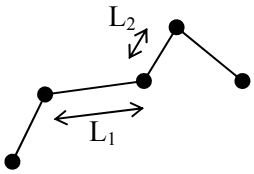


Figure A. 3. Le paramètre homogénéité

Ces différents paramètres déterminent la discrétisation de la frontière, qui représente le nuage de points nécessaire à la création d'un maillage initial par la triangulation de Delaunay.

A.2. Triangulation de Delaunay

La triangulation de Delaunay est une méthode consistant à rajouter itérativement des points dans un maillage existant. Pour cela, il est donc nécessaire d'initialiser la méthode en créant un premier triangle contenant le nuage de points

- **Initialisation** : la première étape consiste à ajouter 3 points A, B et C, de façon à construire un triangle contenant le nuage de points que l'on veut mailler.

- **Itération 1** : on ajoute le premier point en définissant les arêtes reliant ce point aux 3 sommets A, B, C.
- …
- **Itération i+1** : on considère que les i premiers points du nuage ont été ajoutés, et on traite le i+1ème. On relie ce i+1ème point à chacun des sommets des triangles déjà formés et dont le cercle circonscrit contient ce point (Figure A.4.). Il faut ensuite supprimer l'arête des triangles considérés qui intersecte la nouvelle arête créée.

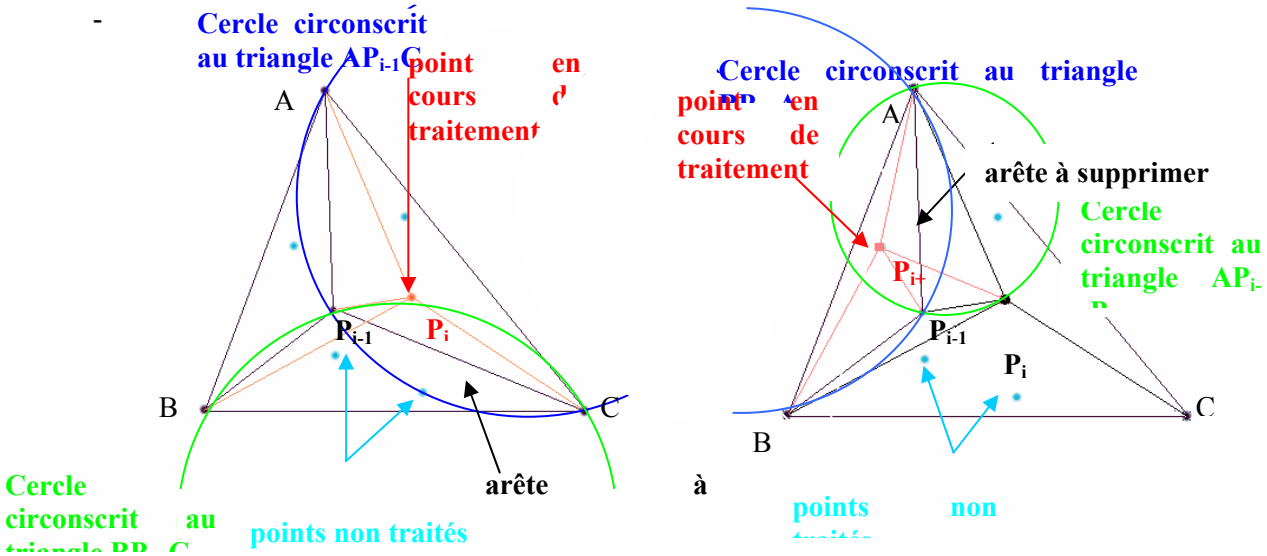


Figure A. 4. Itérations i et i+1 de la triangulation de Delaunay

- **Itération finale** : une fois que tous les points du nuage ont été ajoutés, on élimine les points A, B, C ainsi que tous les triangles auxquels ils appartiennent (Figure A.5.).

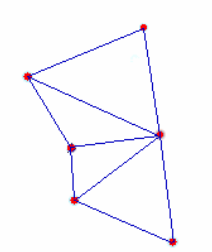
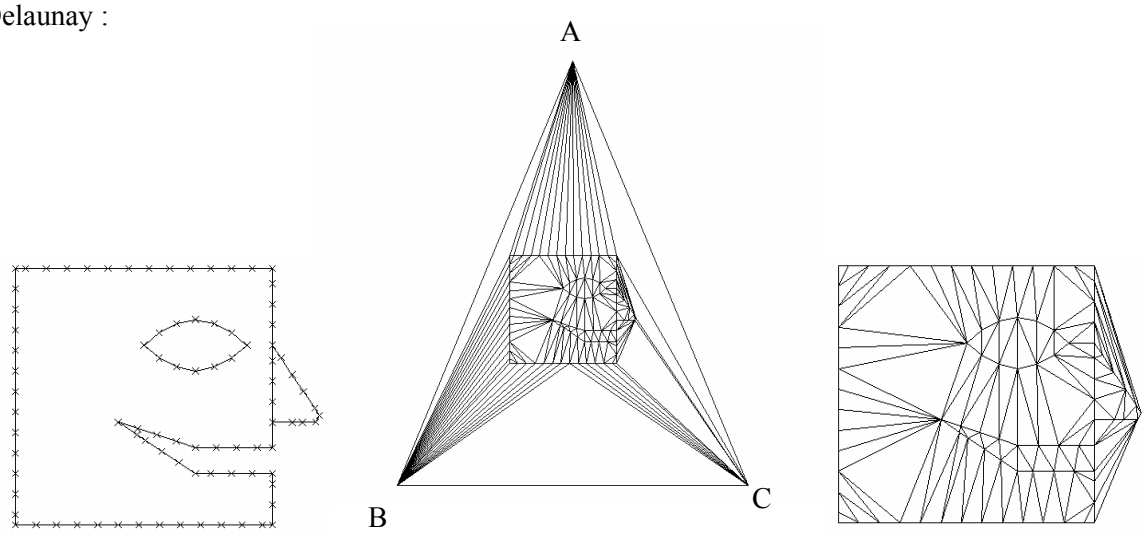


Figure A. 5. Itération finale

A la fin des n itérations (n étant le nombre de points à rajouter), on obtient un maillage grossier de l'enveloppe convexe.
Sur la figure suivante, nous représentons la discrétisation de la frontière figure A.6.a., puis le maillage de la géométrie obtenue juste avant (Figure A.6.b.) et juste après (Figure A.6.c.) l'itération finale de Delaunay :



(a) (b) (c)

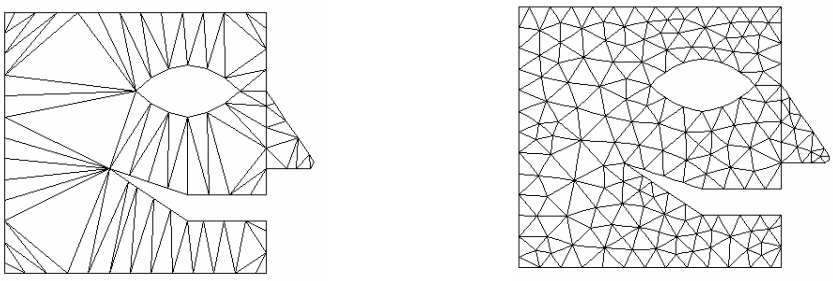
Figure A. 6. (a) frontière discrétisée, puis maillage obtenu (b) avant et (c) après l'itération finale de la triangulation

A.3. Régularisation du maillage

Une fois le maillage de l'enveloppe convexe réalisé, plusieurs outils permettent d'obtenir un maillage suffisamment fin et régulier :

- l'élimination des triangles extérieurs au domaine (Figure A.7.a) ;
- l'**ajout de nœuds internes** : afin d'obtenir un maillage suffisamment raffiné, et des éléments de meilleure qualité, des nœuds internes sont ajoutés itérativement par la triangulation de Delaunay (Figure A.7.b). Un poids est attribué à chaque nœud et à chaque triangle afin de déterminer l'emplacement de nouveaux nœuds permettant d'améliorer sensiblement la qualité des éléments [Coupez 1991]. Ce nœud est ajouté au barycentre du triangle, pondéré par le poids des nœuds sommets de ce dernier. Un paramètre utilisateur, appelé **taux de raffinement**, permet également

de contrôler l'évolution de la taille des éléments de la frontière vers le centre du domaine. Il limite en fait la différence de taille entre deux éléments consécutifs à l'intérieur du domaine.

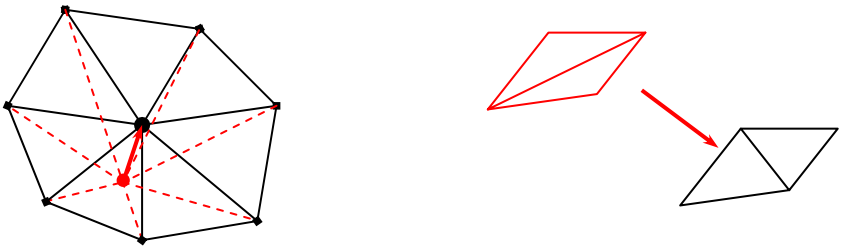


(a) (b)

Figure A. 7. a) Elimination des éléments extérieur – b) Ajout de nœuds internes

- la **régularisation par barycentrage** : cette étape consiste à déplacer le nœud appartenant à un domaine de plusieurs triangles au barycentre du domaine, pondéré par la qualité[1] des éléments de ce dernier (Figure A.8.a).

- la **régularisation par inversion de diagonale** : cette méthode consiste tout simplement à basculer la diagonale si cela permet d'améliorer la qualité des éléments (Figure A.8.b).



(a) (b)

Figure A. 8. Régularisation par a) barycentrage – b) inversion de diagonale

A la fin de ces différentes étapes, nous obtenons le maillage final ci-contre (figure A.9.) et une structure de donnée est générée de façon à connaître explicitement les points d'intersections des différents contours, ainsi que le sous-domaine auquel appartient chaque élément.

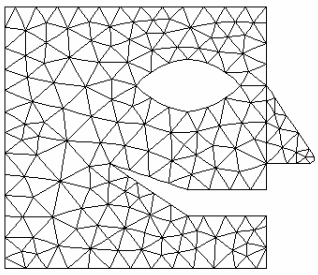


Figure A. 9. Maillage non connexe et multi-domaine final

[1] Il existe plusieurs façons de définir la qualité des éléments. En général, on utilise le rapport entre le diamètre du cercle inscrit, et la longueur de la plus grande arête. Dans notre cas, nous la définissons par le rapport entre les diamètres du cercle inscrit et du cercle circonscrit du triangle.

ANNEXE B : Champs mécaniques à la pointe d'une fissure statique

Dans cette annexe, nous donnons les expressions des champs mécaniques à la pointe d'une fissure. Nous avons vu que ces champs singuliers ne peuvent être représentés convenablement par des éléments finis classiques. Dans la seconde partie de cette annexe, nous montrons comment les éléments singuliers avec nœuds au quart permettent de rendre compte de cette singularité.

B.1. Facteurs d'intensité de contraintes

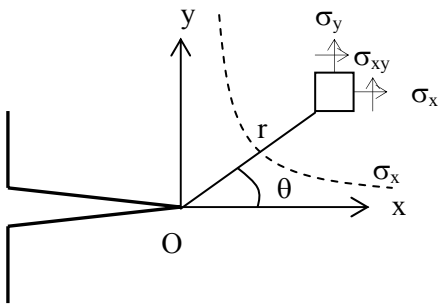


Figure B. 1. Champ de contraintes au voisinage de la pointe de fissure

Les formules classiques du champ de déplacements et du champ de contraintes en élasticité plane, sont les suivantes :

$$\begin{cases} u = \dfrac{K_I}{2\mu}\sqrt{\dfrac{r}{2\pi}}\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\left(k-\cos(\theta)\right)+\dfrac{K_{II}}{2\mu}\sqrt{\dfrac{r}{2\pi}}\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\left(k+2+\cos(\theta)\right) \\ v = \dfrac{K_I}{2\mu}\sqrt{\dfrac{r}{2\pi}}\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\left(k-\cos(\theta)\right)-\dfrac{K_{II}}{2\mu}\sqrt{\dfrac{r}{2\pi}}\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\left(k-2+\cos(\theta)\right) \end{cases}$$

où u et v sont représentent respectivement le déplacement suivant x et suivant y.

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\left(1-\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{3\theta}{2}\right)\right)\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)+\dfrac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\left(2+\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{3\theta}{2}\right)\right)\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \\ \sigma_y = \dfrac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\left(1+\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{3\theta}{2}\right)\right)\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)+\dfrac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{3\theta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \\ \sigma_{xy} = \dfrac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{3\theta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)-\dfrac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\left(1-\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{3\theta}{2}\right)\right)\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \end{cases}$$

$$\text{Avec } \begin{cases} k = 3 - 4v & \text{en déformation plane} \\ k = \dfrac{3-v}{1+v} & \text{en contrainte plane} \end{cases} \qquad \text{et } \mu = \frac{E}{2(1+v)}$$

Dans le cas d'un chargement anti-plan, la seule composante du déplacement est *w*. Le déplacement et les contraintes ont alors les expressions suivantes :

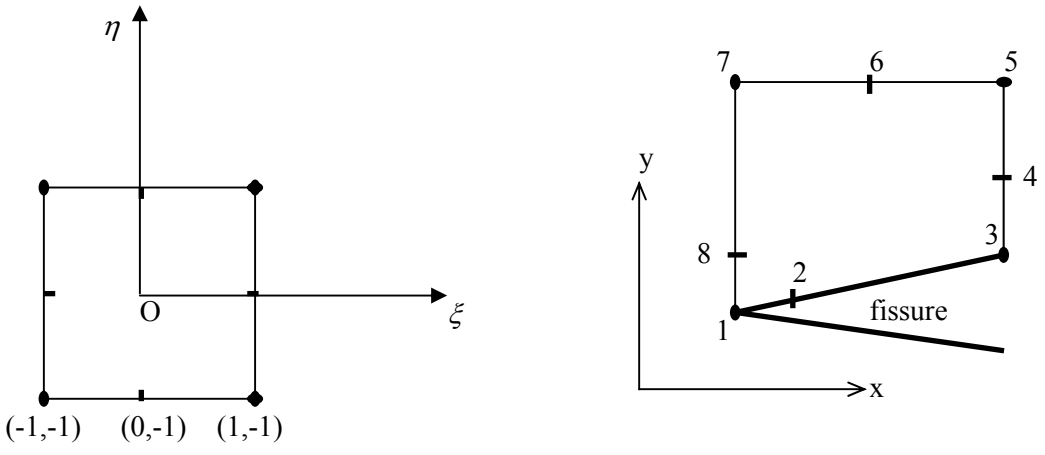
$$\begin{cases} w = \dfrac{2K_{III}}{\mu}\sqrt{\dfrac{r}{2\pi}}\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \\ \sigma_{xz} = -\dfrac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \\ \sigma_{yz} = -\dfrac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \end{cases}$$

Réciproquement, si on connaît les expressions des composantes des contraintes ou des déplacements, on peut alors déterminer les facteurs d'intensité de contraintes par :

$$\begin{cases} K_I = \lim\limits_{r\to 0}\left[\sigma_{ij}\sqrt{2\pi r}\right] = \lim\limits_{r\to 0}\left[\dfrac{E}{8C}\sqrt{\dfrac{2\pi}{r}}[v]\right] \\ K_{II} = \lim\limits_{r\to 0}\left[\sigma_{ij}\sqrt{2\pi r}\right] = \lim\limits_{r\to 0}\left[\dfrac{E}{8C}\sqrt{\dfrac{2\pi}{r}}[u]\right] \\ K_{III} = \lim\limits_{r\to 0}\left[\sigma_{ij}\sqrt{2\pi r}\right] = \lim\limits_{r\to 0}\left[\dfrac{E}{8(1+\nu)}\sqrt{\dfrac{2\pi}{r}}[w]\right] \end{cases} \qquad \text{avec } \begin{cases} C = 1-\nu^2 & \text{en déformation plane} \\ C = 1 & \text{en contrainte plane} \end{cases}$$

B.2. Justification des éléments singuliers

On montre ici **l'utilité du nœud au quart** pour faire apparaître la singularité en $1/\sqrt{r}$:



Elément de référence **Elément réel**

Figure B. 2. Positionnement du nœud au quart

Pour simplifier les calculs, on se placera dans le cas d'un élément dégénéré 1D, c'est-à-dire sur l'axe η=-1. Les fonctions de forme ont alors les expressions suivantes :

$$\begin{cases} N^{(1)} = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi) \\ N^{(2)} = 1-\xi^2 \\ N^{(3)} = \frac{1}{2}\xi(1+\xi) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_i = \sum_{n=1}^{8} N^{(n)}(\xi,\eta).x_i^{(n)} \\ u_i = \sum_{n=1}^{8} N^{(n)}(\xi,\eta).u_i^{(n)} \end{cases}$$

Alors
$$x_1 = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi)x_1^{(1)} + (1-\xi^2)x_1^{(2)} + \frac{1}{2}\xi(1+\xi)x_1^{(3)}$$
$$u_1 = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi)u_1^{(1)} + (1-\xi^2)u_1^{(2)} + \frac{1}{2}\xi(1+\xi)u_1^{(3)}$$

Considérons maintenant que les arêtes sont de longueur L et que le nœud milieu est placé au quart : $x_1^{(1)} = 0, x_1^{(2)} = \frac{L}{4}, x_1^{(3)} = L$.

Alors $x_1 = \frac{L}{4}(1+\xi)^2$ soit encore : $\boxed{\xi = 2\sqrt{\frac{x_1}{L}} - 1}$

On obtient la déformation par : $\varepsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x_1}$

Après calcul, on retrouve bien la singularité en $1/\sqrt{r}$:

$$\boxed{\varepsilon_1 = \left(\frac{2}{L} - \frac{3}{2\sqrt{x_1 L}}\right)u_1^{(1)} - \left(\frac{4}{L} - \frac{2}{\sqrt{x_1 L}}\right)u_1^{(2)} + \left(\frac{2}{L} - \frac{1}{2\sqrt{x_1 L}}\right)u_1^{(3)}}$$

Si les éléments à la pointe de la fissure sont raisonnablement précis, ce n'est pas le cas pour les valeurs des contraintes et des déplacements dans les éléments adjacents à la fissure. Ils doivent donc être ignorés pour le calcul de K.

La précision obtenue en utilisant ces éléments est meilleure que celle obtenue avec des éléments normaux, mais moins bonne que celle obtenue avec des éléments hybrides de Tong et Pian (qui restent néanmoins plus difficiles à implémenter).

Pour une démonstration plus complète, et pour le cas 3D, le lecteur pourra se référer à l'article de Barsoum [Barsoum 1976].

ANNEXE C : COURBES DE RESISTANCE

Pour des matériaux fragiles, l'amorçage de la fissure intervient lorsque le taux de restitution d'énergie G atteint une valeur critique, caractéristique du matériau. La rupture est alors brutale, et la propagation instable. Pour des matériaux élastoplastiques soumis à un chargement statique, la rupture passe tout d'abord par une phase stable (ou contrôlée) avant de se propager brutalement si on dépasse un certain seuil. La plasticité peut donc accroître significativement la durabilité de certaines pièces fissurées, il est donc important de bien étudier ce phénomène. C'est pour cela que la notion de **courbe de résistance** a été introduite : déterminer le caractère stable ou instable de la propagation.

C.1. Courbe de résistance

La courbe de résistance, ou encore courbe-R, traduit l'évolution du taux critique de restitution de l'énergie G_c ou J_c en fonction de la longueur de fissure.

La courbe-R est une caractéristique intrinsèque du matériau, qui peut être déterminée par plusieurs méthodes expérimentales [Baouch 1998], [Bauvineau 1996] (méthode du chargement interrompu, méthode des décharges partielles périodiques, …). Cependant, les expressions utilisées pour définir la courbe-R, ne sont rigoureusement applicables que sous les conditions de plasticité confinée en pointe de fissure. De plus, certains auteurs ont montré que les courbes de résistance d'un même matériau déterminées sur des éprouvettes différentes ne sont pas les mêmes, car les zones plastiques sont assez sensibles à la géométrie de l'éprouvette [Schmit et al. 1990].

Une fois la courbe-R déterminée expérimentalement, on la compare aux valeurs déterminées numériquement.

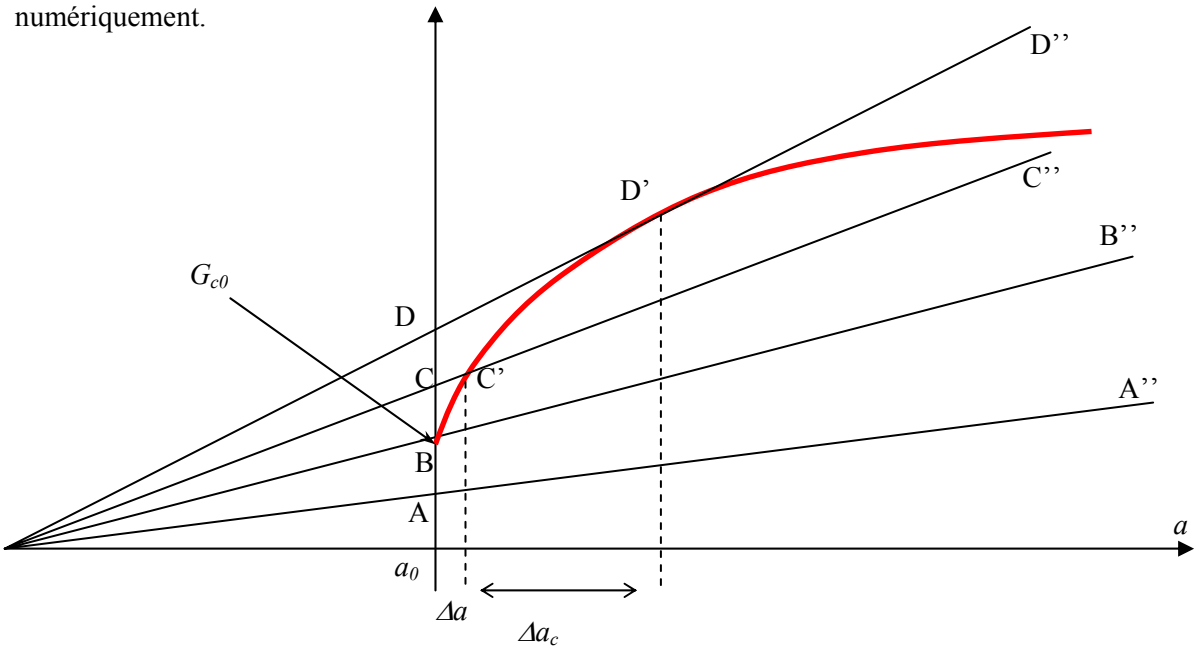


Figure C. 1. Courbe-R

Le solide étant initialement soumis à un effort F, le taux de restitution d'énergie G est en A, on a $G<G_{c0}$ et il n'y a donc pas initiation.

On augmente l'effort pour que G atteigne le point B. Il y a initiation puisque $G=G_{c0}$. Si la fissure commence sa propagation, la valeur de G augmentera suivant la droite BB' (puisque G est linéaire en a pour un milieu infini) qui se trouve complètement en dessous de la courbe-R : la fissure ne pourra donc plus progresser d'elle même.

On augmente encore la charge pour passer en C : il y aura propagation de la fissure d'une longueur Δa de C en C' puis la fissure s'arrête.

Finalement, sous une sollicitation critique F_C, la longueur totale de la fissure devient a_c, et le taux G correspondant est atteint au point D. L'effort imposé restant inchangé, l'extension de la fissure augmente la valeur de G suivant la droite D-D'-D'' qui se trouve au dessus de la courbe de résistance, il y aura donc propagation continue jusqu'à rupture.

Le point D' est le point critique au dessus duquel toutes les propagations de fissure seront instables et conduiront à la ruine de la structure. La condition de rupture peut s'écrire :

$$\begin{cases} G = G_R \\ \dfrac{\partial G}{\partial a} = \dfrac{\partial G_R}{\partial a} \end{cases}$$

C.2. Module de déchirement T

Soit $J_R=f(\Delta a)$ la courbe de résistance du matériau ; elle caractérise l'évolution de la valeur de J atteinte à rupture pour différentes longueurs de fissure. Paris et al. [Paris et al. 1979] ont proposé un paramètre T, appelé **module de déchirement**, qui est la dérivée de l'intégrale J par rapport à la longueur de la fissure a, et qui permet également de prédire le caractère stable ou non de la propagation lorsque J atteint J_R :

$T = \dfrac{E}{\sigma_0^2}\dfrac{\partial J}{\partial a}$ où E représente le module d'Young, a la longueur de fissure, et σ_0 la limite d'élasticité.

On appelle « module de déchirement **du matériau** » : $T_R = \dfrac{E}{\sigma_0^2}\dfrac{\partial J_R}{\partial a}$

Sur la figure C.2., la première pente correspond à l'extension de la fissure par émoussement, et la seconde, un peu moins raide, traduit le phénomène de déchirement du matériau. Lorsque J atteint J_R, il y a amorçage de la fissure. Si la pente correspondant à la dérivée de J par rapport à la longueur de fissure a est inférieure à la pente de la courbe, on aura une propagation stable. Si cette pente est supérieure, la propagation sera instable.

On atteint donc l'instabilité lorsque : $\begin{cases} J = J_R \\ T \geq T_R \end{cases}$

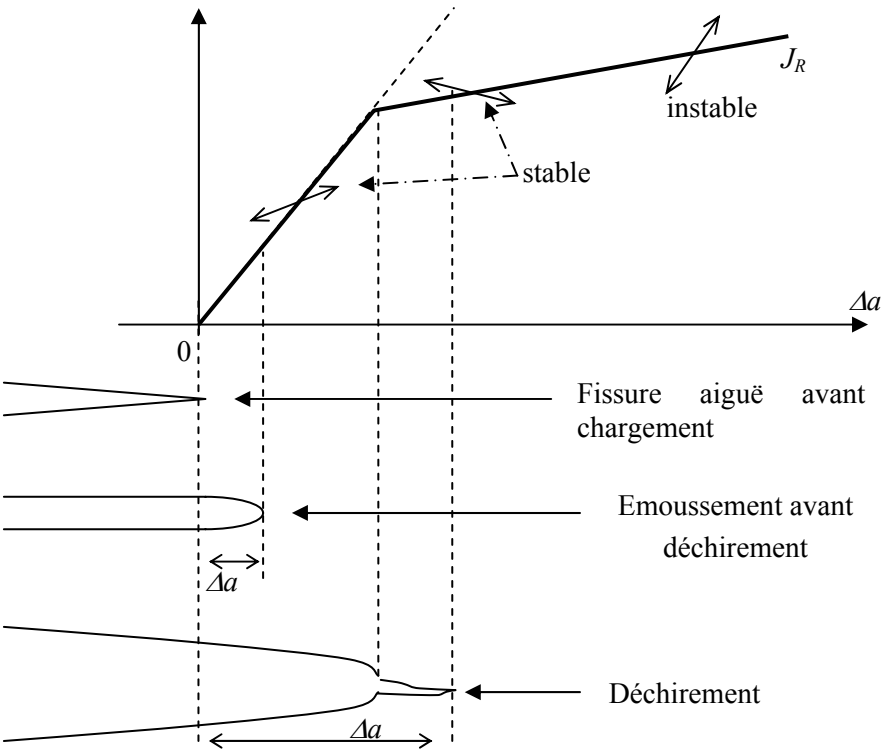


Figure C. 2.Courbe de résistance $J_R=f(\Delta a)$ et stabilité de propagation

ANNEXE D : IMPLEMENTATION DU CRITERE DE LA CONTRAINTE NORMALE MAXIMALE

Le critère de la contrainte normale maximale est le critère le plus utilisé dans la littérature. Bien que sa définition soit unique, l'implémentation pratique de ce critère soulève des problèmes (sensibilité au maillage, …), et les auteurs sont souvent avares de détails sur les manières de l'implémenter. Dans cette annexe, nous étudions les différentes façons d'implémenter ce critère et nous montrons la diversité des résultats obtenus. Pour cela, nous allons comparer trois techniques d'implémentation de ce critère (Cf. §III.3.1) :

- **CNM1** : on calcule la contrainte principale maximale en chacun des points d'intégration proches de la pointe de fissure. On effectue une moyenne pondérée (par rapport à la valeur de la contrainte principale maximale) de chacune des directions, et on propage la fissure perpendiculairement à la direction ainsi obtenue.
- **CNM2** : On calcule la contrainte circonférentielle $\sigma_{\theta\theta}$ pour chacun des points d'intégration proches de la pointe de fissure. On propage la fissure dans la direction du point d'intégration associé à la valeur maximale de $\sigma_{\theta\theta}$.
- **CNM3** : on repère le point d'intégration pour lequel $\sigma_{\theta\theta}$ est maximale. On calcule la direction de la contrainte principale maximale en ce point et on propage la fissure perpendiculairement à cette direction.

Nous commencerons par comparer ces trois implémentations du critère sur une plaque trouée de façon symétrique et pré-fissurée. Nous comparerons les chemins de propagation ainsi obtenus avec ceux provenant des critères énergétiques présentés au §III.3.2 et §III.3.3. Nous montrerons ainsi que certaines techniques d'implémentation peuvent conduire à des chemins de propagation erronés, ou dépendants du maillage. Enfin nous étudierons ces différentes implémentations sur un exemple non symétrique.

D.1. Exemple d'application symétrique

On soumet une plaque trouée de façon symétrique, et pré-fissurée a un essai de traction dans le sens vertical (Figure D.1.). Dans un exemple tel que celui-ci, la fissure doit se propager horizontalement sans être influencée par les deux cavités disposées de façon symétrique. Pourtant, on imagine bien l'importance du maillage pour un tel exemple. En effet, un critère dépendant du maillage peut entraîner un amorçage de la fissure vers l'une ou l'autre des cavités, rompant ainsi la symétrie initiale. C'est ce que nous proposons d'étudier avec les critères CNM1, CNM2 et CNM3.

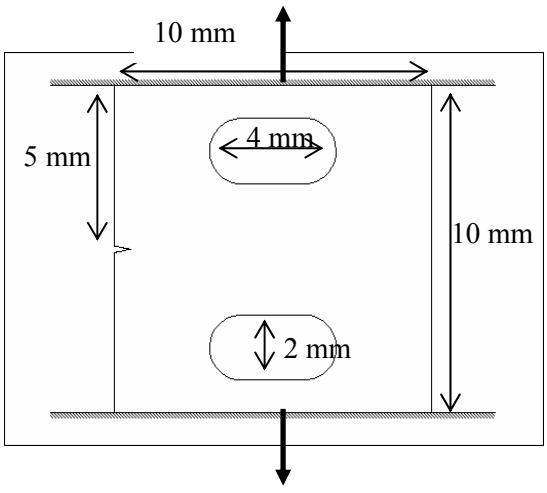


Figure D. 1. Exemple d'application symétrique

De plus, pour chacun des critères utilisés, nous proposons de faire une étude de sensibilité par rapport au maillage en utilisant deux maillages de finesses différentes : un maillage grossier, noté Mg et un maillage fin noté Mf.

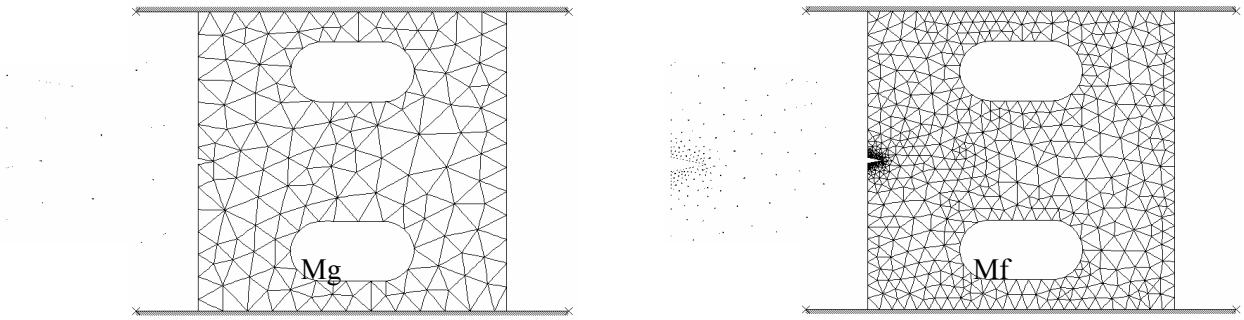


Figure D. 2. Maillage grossier Mg et Maillage fin Mf

Avant d'étudier les chemins de propagation obtenus avec le critère CNM, nous avons utilisé le critère du taux de restitution d'énergie maximal. Comme nous l'avons remarqué au §III.3.4.2, ce critère est indépendant du maillage et nous obtenons un chemin de propagation parfaitement horizontal (Figure D.3.).

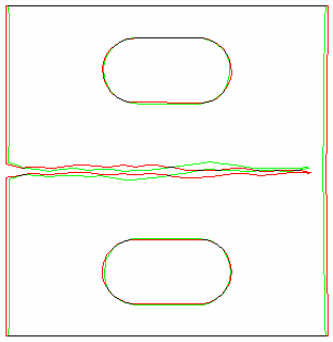


Figure D. 3. Propagation avec le critère TREM

D.2. CNM1

Le critère CNM1 consiste à :

- repérer les points d'intégration adjacents à la pointe de fissure ;
- calculer les valeurs propres et vecteurs propres en ces points ;
- déterminer la direction de propagation pour chacun de ces points : c'est la direction perpendiculaire au vecteur propre associé à la valeur propre maximale ;
- faire une moyenne pondérée – par les valeurs propres maximales et par la distance à la pointe de fissure – de chaque direction.

Sur la figure D.4., nous avons modélisé les propagations pour le maillage fin et le maillage grossier. La superposition des deux chemins de propagation montre la bonne indépendance de ce critère par rapport au maillage. Notons que cette indépendance se retrouve également sur des cas non symétriques.

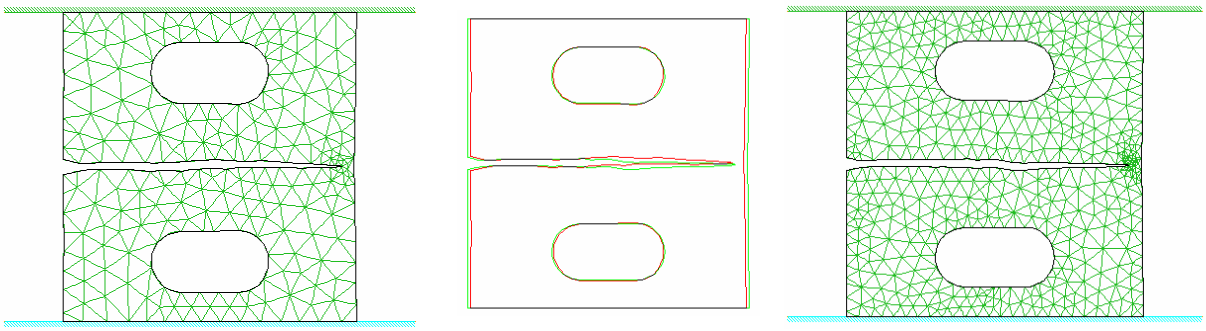


Figure D. 4. Propagation avec le critère CNM1 pour les maillages fin Mf et grossier Mg

D.3. CNM2

Le critère CNM2 consiste à :

- repérer les points d'intégration adjacents à la pointe de fissure ;
- calculer la contrainte circonférentielle $\sigma_{\theta\theta}$ en ces points ;
- déterminer le point d'intégration pour lequel la valeur de $\sigma_{\theta\theta}$ est maximale ;
- propager la fissure dans la direction de ce point d'intégration.

Cette fois-ci, le maillage en pointe de fissure a une influence, puisque l'on propage la fissure directement dans la direction d'un point d'intégration. C'est ce que l'on observe sur la figure D.5., puisque la propagation n'est pas horizontale, et que la finesse du maillage influence de façon importante les chemins de propagation. On note sur le maillage grossier l'instabilité de la méthode, qui ne « rattrape pas » l'imprécision de l'amorçage sur la direction initiale.

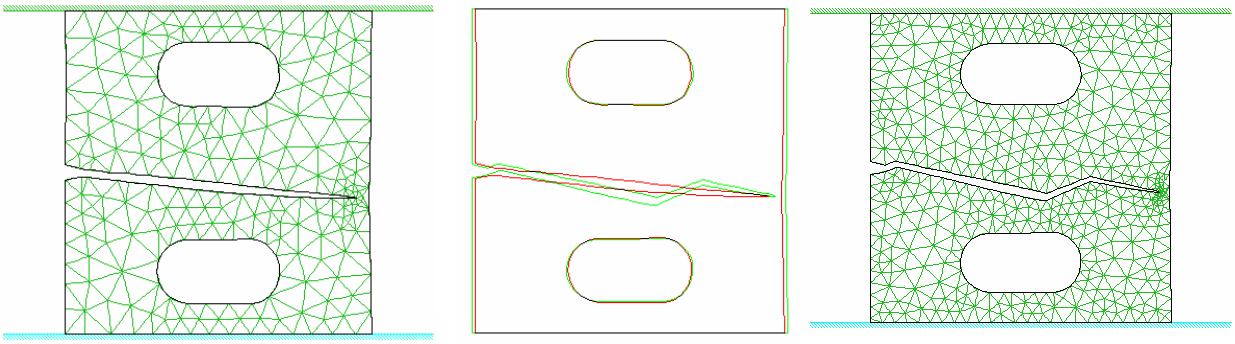


Figure D. 5. Propagation avec le critère CNM2 pour les maillages fin Mf et grossier Mg

Pour éviter cette sensibilité par rapport à la finesse du maillage, nous proposons de repérer les trois points d'intégration correspondants aux trois valeurs maximales de $\sigma_{\theta\theta}$, puis de calculer la direction de propagation en faisant une moyenne pondérée (par la valeur de $\sigma_{\theta\theta}$) des trois directions. Une telle méthode donne de meilleurs résultats, comme le montre la figure D.6.

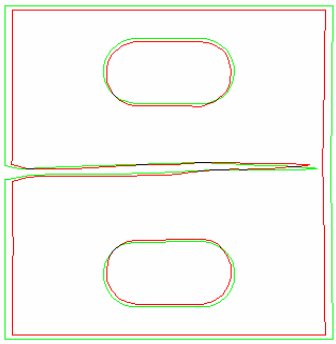


Figure D. 6. Propagation avec le critère CNM2 modifié

Cependant, nous verrons par la suite que cette méthode peut donner des résultats peu précis pour des cas d'applications non symétriques.

Pour éviter cette dépendance par rapport au maillage, il est possible d'exprimer les contraintes σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$ et $\tau_{r\theta}$ en fonction des facteurs d'intensité des contraintes K_I et K_{II} :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \dfrac{2}{\sqrt{2\pi r}}\left[K_I\left(3-\cos(\theta)\right)\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)+K_{II}\left(3\cos(\theta)-1\right)\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right] \\ \sigma_{\theta\theta} = \dfrac{2}{\sqrt{2\pi r}}\left[K_I\left(1+\cos(\theta)\right)\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)-K_{II}\left(3\cos(\theta)-1\right)\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right] \\ \tau_{r\theta} = \dfrac{2}{\sqrt{2\pi r}}\left[K_I\sin(\theta)\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)+K_{II}\left(3\cos(\theta)-1\right)\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right] \end{cases}$$

où r est la distance à la pointe de la fissure.

L'angle de propagation θ_0 est alors obtenu lorsque $\tau_{r\theta}$=0. Donc si on élimine la solution $\pm\pi$, on détermine θ_0 en résolvant l'équation suivante :

$$\boxed{K_I\sin(\theta_0)+K_{II}\left(3\cos(\theta_0)-1\right)=0}$$

Cette méthode permet de s'affranchir du maillage, mais nécessite un calcul précis des facteurs d'intensité des contraintes et la résolution d'une équation non linéaire en θ.

D.4. CNM3

Le critère CNM3 consiste à :

- repérer les points d'intégration adjacents à la pointe de fissure ;
- calculer la contrainte circonférentielle $\sigma_{\theta\theta}$ en ces points ;
- déterminer le point d'intégration pour lequel la valeur de $\sigma_{\theta\theta}$ est maximale ;
- calculer la direction principale maximale en ce point d'intégration ;
- propager la fissure perpendiculairement à cette direction.

Les auteurs qui proposent cette façon de procéder considèrent que la direction principale maximale est confondue avec la direction de $\sigma_{\theta\theta}$ au point d'intégration où $\sigma_{\theta\theta}$ est maximale. Ceci n'est pas tout à fait vrai dans la mesure où le maximum θ_d que l'on détermine par cette méthode (méthode discrète puisque l'on ne cherche le maximum que pour quelques points d'intégration) ne correspond pas forcément au maximum réel θ_c (celui qui serait obtenu sur une courbe continue).

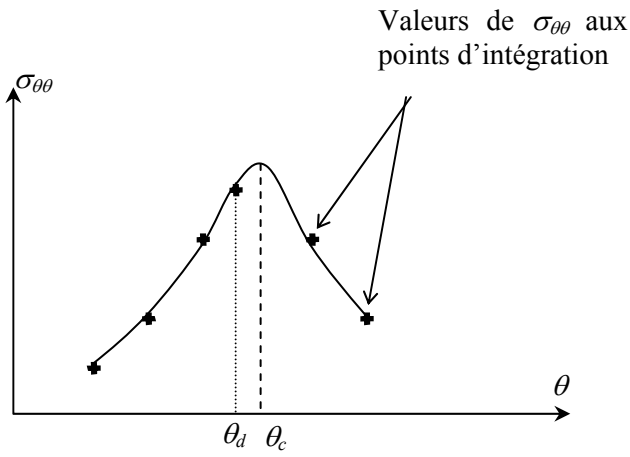


Figure D. 7. Maximum de $\sigma_{\theta\theta}$ discret et continu

Les résultats obtenus par une telle méthode sont alors très mauvais, et fortement dépendants du maillage, comme le montre la comparaison de la figure D.8.

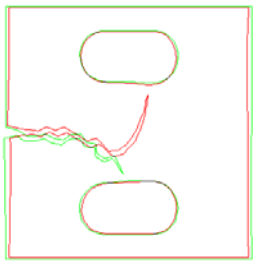


Figure D. 8. Propagation avec le critère CNM3

Ici encore, il est possible de faire une moyenne des trois directions obtenues à partir des points correspondants aux trois valeurs de $\sigma_{\theta\theta}$ maximales. Les résultats sont meilleurs que ceux obtenus avec un seul point d'intégration, mais le chemin de propagation reste très chaotique. Nous déconseillons donc fortement d'utiliser une telle méthode.

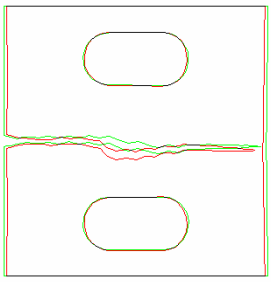
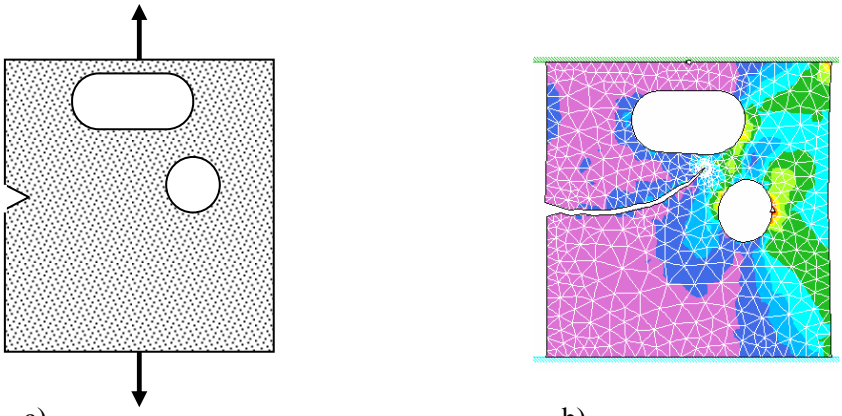


Figure D. 9. Propagation avec le critère CNM3 modifié

D.5. Exemple d'application non symétrique

Les comparaisons précédentes sur un cas symétrique nous ont montré que le critère CNM1 et le critère CNM2 modifié donnaient d'excellents résultats. Nous proposons ici d'effectuer une nouvelle comparaison à partir de l'exemple d'application non symétrique présenté sur la figure D.10.a. Comme nous ne connaissons pas, à priori, le chemin de propagation exact pour un tel essai, nous prendrons la solution obtenue avec le critère TREM (Figure D.10.b) comme solution de référence.



a) b)

Figure D. 10. a) Exemple d'application non symétrique – b) propagation avec le critère TREM

La première simulation, réalisée avec le critère CNM1 donne un chemin de propagation très proche de celui obtenu avec le critère TREM, comme le montre la figure D.11.

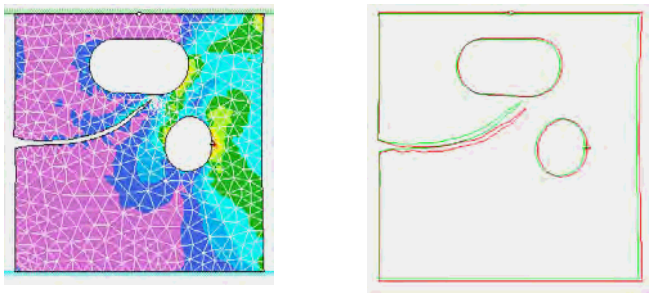
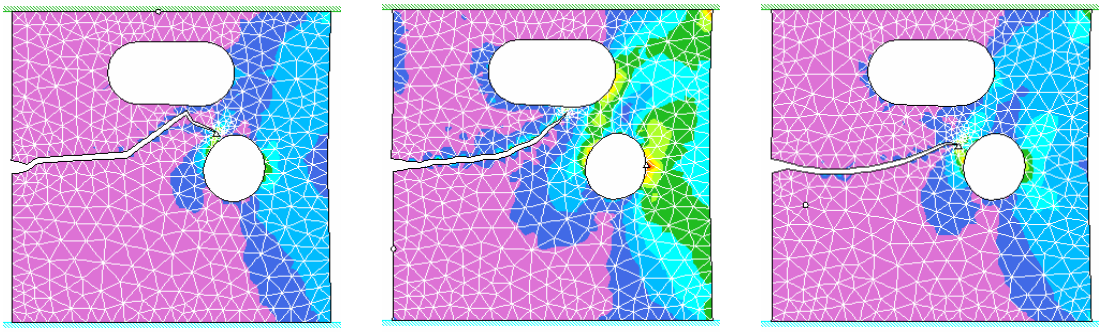


Figure D. 11. Propagation avec le critère CNM1, et comparaison au critère TREM

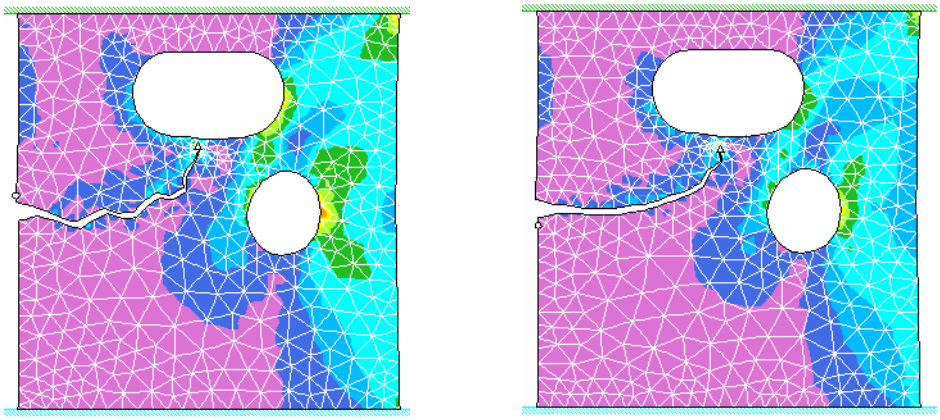
Nous avons utilisé le critère CNM2, en calculant la direction de propagation à partir d'un point d'intégration (CNM2.1), de deux points d'intégration (CNM2.2) et de trois points d'intégration (CNM2.3). La figure D.12. nous permet de formuler la même remarque qu'au §D.3. A savoir que la détermination de la direction à partir d'un point d'intégration donne un chemin de propagation proche de la solution, mais très dépendant du maillage. Lorsque l'on effectue une moyenne pondérée sur deux ou trois points d'intégration, on ne s'affranchit pas tout à fait du maillage (comme cela avait été observé sur l'exemple d'application symétrique) puisque l'on obtient deux chemins de propagation différents : l'un qui tend vers la cavité supérieure, et le second qui tend vers la cavité ronde.



CNM2.1 CNM2.2 CCNM2.3

Figure D. 12. Propagation avec le critère CNM2

Enfin le critère CNM3 donne un chemin de propagation très chaotique (Figure D.13.a). Lorsque l'on utilise la technique consistant à effectuer une moyenne des directions correspondant aux trois points d'intégration associés aux valeurs maximales de $\sigma_{\theta\theta}$, on obtient un chemin de propagation plus précis (Figure D.13.b), mais qui reste cependant sensible à la finesse du maillage.



a) b)

Figure D. 13. Propagation avec le critère CNM3

D.6. Bilan

Comme nous venons de le voir, la manière d'implémenter le critère de la contrainte normale maximale est très importante. Beaucoup d'auteurs déterminent simplement le point d'intégration pour lequel $\sigma_{\theta\theta}$ est maximale et propagent la fissure dans cette direction (CNM2). Nous avons vu qu'une telle technique conduisait à des résultats peu précis. La propagation avec le critère CNM3 a montré les erreurs importantes que l'on pouvait commettre lorsque l'on interprétait mal la définition d'un critère.
Dans ce manuscrit, le critère de la contrainte normale maximale a été utilisé à l'aide de la technique CNM1. Cette technique donne de bons résultats et n'est pas sensible à la finesse du maillage. Notons cependant que le critère de la contrainte normale maximale est plutôt adapté aux cas où le mode I est prédominant. Nous verrons notamment au §III.4.3 qu'il n'est pas adapté aux procédés à fort cisaillement. De plus, ce critère est directement lié à la précision de calcul du champ des contraintes en pointe de fissure. Le gradient de contraintes étant très fort au voisinage immédiat de la fissure, il est préférable d'utiliser un critère énergétique.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[Argelès 1993] M. Argelès – Corrosion du Zy4 en milieux aqueux entre 25°C et 360°C : effet de la radiolyse sur la croissance des couches minces d'oxyde, Thèse de doctorat de l'INPG, 1993.

[Arnott et al. 1995] D.R. Arnott et M.R. Kindermann – Constant displacement rate method for testing adhesive bonds, *J. Adhesion*, 48, pp. 85-100, 1995.

[Attigui 1997] M. Attigui – Modélisation du comportement dynamique des structures fissurées par la mécanique de la rupture, Thèse de doctorat de l'université de Limoges, Décembre 1997.

[Averty 1997] X. Averty – Caractéristiques Mécaniques à Température Ambiante du Zircaloy Irradié, *Rapport DMT n°97/153, LECM n°97/026*, Septembre 1997.

[Axelsson 1976] O. Axelsson – A class of iterative methods for finite element equations, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng*., Vol. 9, pp. 123-137, 1976.

[Ballatore et al. 1990] E. Ballatore, A. Carpinteri, G. Ferrara et G. Melchiorri – Mixed mode fracture energy of concrete, *Engng. Fract. Mech*., Vol. 35, N°1/2/3, pp. 145-157, 1990.

[Baouch 1998] D. Baouch – Validation numérique des paramètres de fissuration en élastoplasticité, Thèse de doctorat de l'Université Blaise Pascal Clermont II, 1998.

[Barsoum 1976] R.S. Barsoum – On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics, *Int. J. for Num. Meth. in Engng.*, Vol. 10, pp. 25-37, 1976.

[Bauvineau 1996] L. Bauvineau – Approche locale de la rupture ductile : application à un acier Carbone-Manganèse. Thèse de doctorat de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1996.

[Bay et al. 1999] F. Bay, P.O. Bouchard, E. Darque-Ceretti, E. Felder et S. Scotto-Sheriff – Numerical and experimental analysis of a fracture mechanics test for adhesively bonded joints, *J. Adhesion Sci. Technol*., Vol. 13, N°8, pp. 931-957, 1999.

[Bellet 1994] M. Bellet – Mécanique et thermique des milieux continus, Séminaire de Plasticité, Tome 1, Ch. 1, Sophia Antipolis, Septembre 1994.

[Belytschko et al. 1994] T. Belytschko, L. Gu et Y.Y. Lu – Fracture and crack growth by element free Galerkin method, *Modelling Simul. Mater. Sci. Engng*., Vol. 2, pp. 519-534, 1994.

[Billot et al. 1989] P. Billot, P. Beslu, A . Giordano et J. Thomazet – Zirconium in the nuclear industry, ASTM STP 1023, San Diego, pp. 165, 1989.

[Bocca et al. 1990] P. Bocca, A. Carpinteri et S. Valente – Size effects in the mixed mode crack propagation : softening and snap-back analysis, *Engng. Fract. Mech*., Vol. 35, pp. 159-170, 1990.

[Bocca et al. 1991] P. Bocca, A. Carpinteri et S. Valente – Mixed mode fracture of concrete, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 27, N°9, pp. 1139-1153, 1991.

[Borouchaki et al. 1997] H. Borouchaki et P.L. George – Aspects of 2D Delaunay mesh generation, *Int. J. for Num. Meth. in Engng.*, Vol. 40, pp. 1957-1975, 1997.

[Bouchard 1997] P.O. Bouchard – Simulation numérique d'un essai d'adhérence adhésif/polymère/acier, *Rapport de fin d'étude*, Ecole Supérieure en Sciences Informatiques, Septembre 1997.

[Bouchard 1998] P.O. Bouchard – Etude numérique et expérimentale du compactage de tubes en zircaloy 4, Rapport d'avancement d'année probatoire, CEMEF, Juin 1998.

[Bouchard et al. 1999] P.O. Bouchard, F. Bay, Y. Chastel and I. Tovena – Experimental and Numerical Analysis of Fracture of Zircaloy4 tubes under compaction*, Acte du 2nd ESAFORM Conference sur le thème « Material Forming »*, Guimaraes (Portugal), Avril 1999.

[Bouchard et al. 2000a] P.O. Bouchard, F. Bay, Y. Chastel et I. Tovena – Crack propagation modelling using an advanced remeshing technique, to appear in *Computer Meth. In Appl. Mech. and Engng.*

[Bouchard et al. 2000b] P.O. Bouchard, F. Bay, Y. Chastel – Comparison of crack propagation criteria using advanced finite element techniques, submitted to *Int. J. for Num. Meth. in Engng.*

[Bouchard et al. 2000c] P.O. Bouchard, F. Bay, Y. Chastel and I. Tovena – Influence of oxidation on mechanical properties of zircaloy 4 tubes under compaction, *International Symposium on Mathematical Modeling in Metal Processing and Manufacturing, 39th Annual Conference of Metallurgists* , Ottawa, 20-23 Août 2000.

[Bouchard et al. 2000d] P.O. Bouchard, F. Bay, Y. Chastel – Modelling of discrete crack propagation, *The Fifth International Conference on Computational Structures Technology & The Second International Conference on Engineering Computational Technology*, Leuven, 6-8 Septembre 2000.

[Bouffioux et al. 1995]P. Bouffioux, B. Gabriel, A. Soniak et J.P. Mardon – Influence d'un chargement cyclique sur les propriétés viscoplastiques de tubes de gaine en zircaloy 4, Le zirconium, Journées d'études "propriétés-microstructures", les Editions de Physique, Saclay, pp. 199-208, Avril 1995.

[Bouineau 1999] V. Bouineau – Oxydation des coques et matériaux simulant, Rapport interne CEA DEC/SH2C/LCG, janvier 1999.

[Bouyne 1995] E. Bouyne – Propagation et arrêt de fissures dans un acier 2 ¼ de Cr., Rapport de DEA, Centre des Matériaux, Ecole des Mines de Paris, 1995.

[Bradhurst et al. 1970] D.H. Bradhurst, P.M. Heuer – The influence of oxide stress on the breakaway oxidation of Zircaloy-2, *J. of Nuclear Materials*, Vol. 37, pp. 35-47, 1970.

[Brokken 1999] D. Brokken – Numerical modelling of ductile fracture in blanking, PhD thesis of the Eindhoven University of Technology, 1999.

[Bryner 1979] J.S. Bryner – The cyclic nature of corrosion of Zircaloy-4 in 633K water, *J. of Nuclear Materials*, Vol. 82, pp. 84-101, 1979.

[Bui 1973] H.D. Bui – Dualité entre les intégrales de contour. *Compte Rendu Acad. Sciences*, T. 276, Paris, Mai 1973.

[Bui et al. 1981] H.D. Bui et A. Ehrlacher – Propagation of damage in elastic and plastic solids, Advances in fracture research 2, Pergamon Press, London 1981.

[Bui et al. 1985] H.D. Bui, J.M. Proix – Découplage des modes mixtes de rupture en thermo-élasticité par des intégrales indépendantes du contour. *Actes du troisième colloque Tendances Actuelles en Calcul de Structures*, Bastia, pp. 631-643, novembre 1985.

[Burlet 1998] H. Burlet – Rappels d'éléments finis, calculs de K, G, J, C*. *Cours de DEA de Mécanique et Matériaux*, Centre des Matériaux (Evry), Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1998.

[Bush 1999] M.B. Bush – Prediction of crack trajectory by the boundary element method, *Structural Engng. and Mech.*, Vol. 7, N°6, pp. 575-588, 1999.

[Ceretti 1999] E. Ceretti – Numerical study of segmented chip formation in orthogonal cutting, , *Proceedings (CD-ROM) of the 2nd International Workshop on Modelling of Machining Operations*, Nantes, 25-26 juin, 1999.

[Červenka 1994] J. Červenka – Discrete crack modeling in concrete structures, PhD thesis of the University of Colorado, 1994.

[Chenot 1994] J.L. Chenot – Introduction à la méthode des éléments finis : élasticité et thermique, Séminaire de Plasticité, Tome 1, Ch. 6, Sophia Antipolis, Septembre 1994.

[Chenot et al. 1998] J.L. Chenot et L. Fourment – Numerical formulations and algorithms for solving contact problems in metal forming simulation, *Computational Mech.*, E. Oñate and S.R. Idelsohn (Eds), Barcelona, Spain, 1998.

[Ciarlet 1982] P.G. Ciarlet – Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation, Editions Dunod, Paris, 1998.

[Comninou 1977] M. Comninou – The interface crack, *J. Appl. Mech*., pp. 631-636, 1977.

[Cook et al. 1972] T.S. Cook et F. Erdogan – Stresses in bonded materials with a crack perpendicular to the interface, *Int. J. Engrg Sc.,* Vol. 10, pp. 677-697, 1972.

[Coupez 1991] T. Coupez – Grandes transformations et remaillages automatiques, Thèse de doctorat de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, novembre 1991.

[Cozzi 2000] F. Cozzi – Contact matière matière pour la gestion du contact des lèvres d'une fissure, Rapport de projet de fin d'étude ESSI, Avril 2000.

[David et al. 1971] G. David, R. Geschier, C. Roy – Etude de la croissance de l'oxyde sur le zirconium et le Zircaloy-2, *J. of Nuclear Materials*, Vol. 38, pp. 329-339, 1971.

[De Lorenzi 1985] H.G. De Lorenzi – Energy release rate calculations by the finite element method. *Engng. Fracture Mech.*, Vol. 21, N°1, pp. 129-143, 1985.

[Destouches 2000] N. Destouches – Influence de l'oxydation de gaines en zircaloy 4, Rapport de stage IUP de Lorient – CEMEF, Mars 2000.

[Destuynder et al. 1981] Ph. Destuynder, M. Djaoua – Sur une interprétation mathématique de l'intégrale de Rice en théorie de la rupture fragile, *Math. Meth. In the Appl. Sci*., Vol. 3, pp. 70-87, 1981.

[Destuynder et al. 1983] Ph. Destuynder, M. Djaoua, S. Lescure – Quelques remarques sur la mécanique de la rupture élastique. *J. de Méca. Théorique et Appliquée*, Vol. 2, N°1, pp. 113-135, 1983.

[Dhatt et al.1984] G. Dhatt et G. Touzot – Une présentation de la méthode des éléments finis, *Ed. Maloine*, 1981.

[Ding et al. 1993] Y. Ding, D.O. Northwood – TEM study of the oxide-metal interface formed during corrosion of Zr-2,5wt% Nb pressure tubing, *Mat. Charact*., Vol. 30, pp. 13-22, 1993.

[Dumas 2000] J. Dumas – Modèles d'endommagement dans les procédés à fort cisaillement et simulation numérique du découpage, Rapport bibliographique de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, CEMEF, Mars 2000.

[Dumont et al. 1994] A. Dumont, J. Thomazet, D. Charquet, J. Senevat – Enhancement of Zircaloy-4 cladding resistance : from AFA to AFA2G, *Proc. of Int. Symp. Fontevraud III*,

« Contribution of materials investigation to the resolution of problems encountered in pressurized water reactors », 1994.

[Ehrlacher 1985] A. Ehrlacher – Contribution à l'étude thermodynamique de la progression de fissure et à la mécanique de l'endommagement brutal, Thèse de doctorat d'état de l'Université Pierre et Marie Curie Paris 6, Février 1985.

[El Abdi 1986] R. El Abdi – Modélisation d'un matériau hétérogène en présence de fissure, Thèse de l'Université de Bordeaux I, 1986.

[Elouard 1993] A. Elouard – Etude numérique par éléments finis de la fissuration avec remaillage automatique – Application à la mécanique des chaussées, Thèse de Doctorat de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Avril 1993.

[Erdogan et al. 1963] F. Erdogan et G.C. Sih – On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear, *J. Basic Engng.,* Vol. 85, pp. 519-527, 1963.

[Erdogan 1965] F. Erdogan – Stress distribution in bonded dissimilar materials with cracks, *J. Appl. Mech*., 32, p. 418, 1965.

[Erdogan 1968] F. Erdogan – Crack propagation theories. *Fracture II*, wiley, Y.N. 1968.

[Erdogan 1983] F. Erdogan – Stress intensity factors. *J. of Appl. Mech.*, Vol. 50, pp. 992-1002, 1983.

[Eshelby 1968] J.D. Eshelby – The continuum theory of lattice deffects, *Solid Stat. Physics*, Vol. II, pp. 79-144, 1968.

[Evans 1968] D.J. Evans – The use of preconditionning in iterative methods for solving linear equations with symmetric positive definite matrices, *J. Inst. Math. Applics*, Vol. 4, pp. 295-314, 1968.

[Flemming et al. 1997] M. Flemming, Y. A. Chu, B. Moran et T. Belytschko – Enriched element-free Galerkin methods for crack tip fields, *Int. J. Num. Methods Engng*., Vol. 40, pp. 1483-1504, 1997.

[Fourment et al. 1997] L. Fourment, A. Oudin, E. Massoni, G. Bittes et C. Le Calvez – Numerical simulation of tool wear in orthogonal cutting, *Proceedings of the First French and German Conference on High Speed Machining*, June 17-18, Metz, France, 1997.

[Fourment et al. 2000] L. Fourment, P.O. Bouchard – Numerical simulation of chip formation and crack propagation during non-steady cutting processes, to appear in *Int. J. of Forming Processes.*

[François et al. 1993] D. François, A. Pineau, A. Zaoui – Comportement mécanique des matériaux. Ed. Hermes, Paris, 1993.

[Gilles et al. 1993] Ph. Gilles, Ph. Mourgue, M. Rochette – Précision du calcul de la force d'extension de fissure G : effets du maillage et avantages de la méthode G-θ. *Acte du Colloque National en Calcul de Structures*, Ed. HERMES et INRIA, Vol. 2, pp. 639-670, 1993.

[Godlewski 1990] J. Godlewski – Oxydation d'alliages de zirconium en vapeur d'eau : influence de la zircone tétragonale sur le mécanisme de croissance de l'oxyde, Thèse de doctorat de l'Université Technologique de Compiègne, 1990.

[Goijaerts 1999] A. Goijaerts – Prediction of ductile fracture in metal blanking, PhD thesis of the Eindhoven University of Technology, 1999.

[Golub et al. 1983] G.H. Golub et G.A. Meurant – Résolution numérique des grands systèmes linéaires, Eyrolles Paris, 1983.

[Gratacos et al. 1991] P. Gratacos, P. Montmitonnet et J.L. Chenot – An integration scheme for Prandtl-Reuss elastoplastic constitutive equations, *Proccedings of the European Conference on New Advances in Computational Structural Mechanics*, pp. 51-64, Giens, France, Avril 1991.

[Griffith 1920] A.A. Griffith – The phenomena of rupture and flow in solids. *Phil. Trans. Roy. Soc. Of London*, A221, pp. 163-197, 1920.

[Gurson 1977] A.L. Gurson – Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth : Part I – Yield criteria and flow rules for porous ductile media, *Transaction of the ASME*, Janvier 1977.

[Hancock et al. 1993] J.W. Hancock, W.G. Reuter, D.M. Parks – Constraint and toughness parameterized by T. Constraint Effects in Fracture, ASTM STP 1171, *Ed. E.M. Hacket, K.H. Schwalbe, R.H. Dodds*, pp. 21-40, 1993.

[Hellen 1975] T.K. Hellen – On the method of virtual crack extensions. *Int. J. for Num. Meth. in Engng*, Vol. 9, pp. 187-207, 1975.

[Henshell et al. 1975] R.D. Henshell, K.G. Shaw – Crack tip finite elements are unnecessary, *Int. J. for Num. Meth. in Engng*, Vol. 9, pp. 495-507, 1975.

[Heztenes et al. 1952] M. Heztenes et E. Stieffel – Methods of conjugate gradient for solving linear systems, *J. Res. Nat. Bur. Of Stan.*, Vol. B49, pp. 409-436, 1952.

[Hibbitt 1977] H.D. Hibbitt – Some properties of singular isoparametric elements, *Int. J. for Num. Meth. in Engng*, Vol. 11, N°1, pp. 180-184, 1977.

[Hutchinson 1968] J.W. Hutchinson – Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material, *J. Mech. Phys. Solids*, Pergamon Press, Vol. 16, pp. 13-31,1968.

[Irwin 1957] G.R. Irwin – Analysis of stresses and strains near the end of crack traversing a plate, *J. of Appl. Mech. Transactions*, pp.361-364, 1957.

[Jirásek 1999] M. Jirásek – Numerical modeling of deformation and failure of materials, *Short Course*, Aachen, 3-7 Mai 1999.

[Könke 1995] C. Könke – Damage evolution in ductile materials: from micro- to macro-damage, *Comp. Mech*., Vol. 15, pp. 497-510, 1995.

[Lascaux et al. 1994] P. Lascaux et R. Théodor – Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, Masson, Paris, 1994.

[Lemaitre et al. 1988] J. Lemaitre et J.L. Chaboche – Mécanique des matériaux solides, Dunod 2ème édition, Paris, 1988.

[Levin et al. 1975] E.M. Levin, H.F. Mc Murdie – Phase diagrams for ceramists, *The American Ceramic Society*, 1975.

[Liebowitz 1971] H. Liebowitz – Fracture, an advanced treatise, Vol. 3 *: Engng fundamentals and environmental effects*, Academic Press, New York and London, 1971.

[Lin et al. 1988] S.C. Lin, J.F. Abel – Variational approach for a new direct-integration form of the virtual crack extension method, *Int. J. Fract.*, Vol. 38, pp. 217-235, 1988.

[Logé 1999] R. Logé – Influence des conditions thermomécaniques et de la microstructure sur les évolutions de texture cristallographique du zircaloy 4 en mise en forme à chaud, Thèse de doctorat de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, avril 1999.

[Lu et al. 1983] M.C. Lu, F. Erdogan – Stress intensity factors in two bonded elastic layers containing cracks perpendicular to and on the interface, *Engng. Fract. Mech*.,Vol. 18, N°3, pp. 491-506, 1983.

[Maiti et al. 1984] S.K. Maiti, R.A. Smith – Comparison of the criteria for mixed mode brittle fracture based on the preinstability stress-strain field. Part II: pure shear and uniaxial compressive loading, *Int. J. Fract*., Vol. 24, pp. 5-22, 1984.

[Marchal 1997] Y. Marchal – Mechanics an physics of the ductile fracture of thin plates, Thèse de doctorat de l'université de Louvain-la-Neuve, 1997.

[Marusich et al. 1995], T.D. Marusich et M. Ortiz – Modelling and simulation of high speed machining, *Int. J. for Num. Meth. in Engng*, Vol. 38, pp. 3675-3694, 1995.

[Maugis 1999] D. Maugis – Contact, adhésion et rupture de solides élastiques, Hermann, Paris, Chapitre 5, 2000.

[Meijerink et al. 1977] J.A. Meijerink et H. Van Der Vost – An iterative solution method for linear systems of which the coefficient matrix is a symmetric m-matrix, *Math. Of Comp.,* Vol. 31, N°137, pp. 148-162, 1977.

[Menai 1995] M. Menai – Simulation numérique tridimensionnelle du refroidissement des pièces de fonderie : approche thermomécanique, Thèse de doctorat de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, mars 1995.

[Miannay 1995] D. Miannay – Mécanique de la rupture. Les éditions de Physique, Monographie de Matériologie, Courtabœuf, 1995.

[Montmitonnet 1994] P. Montmitonnet – Simulation des écoulements élastoplastiques par éléments finis, Séminaire de Plasticité, Tome 2, Ch. 8, Sophia Antipolis, Septembre 1994.

[Mulot 1997] S. Mulot – Etude théorique et expérimentale du laminage à pas de pèlerin de tubes en zircaloy 4, Thèse de doctorat de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, février 1997.

[Murakami et al. 1987] Y. Murakami et al. – Stress intensity factors handbook. Pergamon Press, 1987.

[Needleman et al. 1987] A. Needleman and V. Tvergaard – An analysis of ductile rupture modes at a crack tip, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 35, N° 2, pp. 151-183, 1987.

[Nguyen 1980] Q.S. Nguyen – Méthodes énergétiques en mécanique de la rupture. *J. de Méca.*, Vol. 19, N°2, pp. 363-386, 1980.

[O'Dowd et al. 1994] N.P. O'Dowd, C.F. Shih – Two parameter fracture mechanics : theory and applications. Fracture Mechanics, Vol. 24, ASTM STP 1207, *Ed. J.D. Landes, D.E. McCabe, J.A.M. Boulet*, pp. 21-47, 1994.

[Oyane et al. 1980] M. Oyane, T. Sato, K. Okimoto et S. Shima – Criteria for ductile fracture and their applications, *J. Mech. Working Tech.,* 4, pp. 65-81, 1980.

[Parise 1996] M. Parise – Mécanismes de corrosion des alliages de zirconium, Thèse de doctorat de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, décembre 1996.

[Parks 1974] D.M. Parks – A stiffness derivative finite element technique for determination of crack tip stress intensity factors. *Int. J. Fract.*, Vol. 10, N°4, pp. 487-502, 1974.

[Petit 1990] C. Petit – Modélisation des milieux composites multicouches fissurés par la mécanique de la rupture, Thèse de Doctorat de l'Université de Clermont-Ferrand II, janvier 1990.

[Pilling et al. 1923] N.B. Pilling, R.E. Bedworth – The oxidation of metals at high temperatures, *J. Inst. Metals*, Vol. 29, pp. 529-591, 1923.

[Pineau 1998] A. Pineau – Mécanique élastoplastique de la rupture. *Cours de DEA Mécanique et Matériaux*. Evry, 1998.

[Pluvinage 1989] G. Pluvinage – Mécanique élastoplastique de la rupture « critères d'amorçage », Ed. CEPADUES, Metz, 1989.

[Prat 1994] F. Prat – Etude et modélisation de l'effet de l'hydruration sur le comportement mécanique de composants de structure en zircaloy 4, Thèse de doctorat de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, septembre 1994.

[Rashid 1968] Y.R. Rashid – Ultimate strength analysis of prestressed concrete pressure vessels, *Nuclear Engng and Design*, Vol. 7, pp. 334-344, 1968.

[Rashid 1998] M.M. Rashid – The arbitrary local mesh replacement method : an alternative to remeshing for crack propagation analysis, *Computer Meth. in Appl. Mech. and Engng.,* Vol. 154, pp. 133-150, 1998.

[Reid 1971] J.K. Reid – On the method of conjugate gradients for solution of large sparse systems of linear equation, Academic Press, 1971.

[Rice 1968] J.R. Rice – A path independent integral and the approximate analysis of strain concentrations by notches and cracks. *J. of Appl. Mech.*, Vol. 35, pp. 379-386, 1968.

[Rice et al. 1968] J.R. Rice and G.F. Rosenberg – Plain strain deformation near a crack tip in a power law hardening material, *J. Mech. Phys. Solids*, Pergamon Press, Vol. 16, pp. 1-12,1968.

[Rousselier 1987] G. Rousselier – Ductile fracture models and their potential in local approach of fracture, *Nucl. Engng. And Design*, Vol. 105, pp. 97-111, 1987.

[Rousselier 1998] G. Rousselier – Approches globales et locales en rupture fragile. *11ème Colloque National MECAMAT*, AUSSOIS, pp.25-29, 1998.

[Roy et al. 1970] C. Roy, B. Burgess – A study of the stresses generated in zirconia films during the oxidation of zirconium alloys, *Oxid. Met.*, Vol. 2, N° 3, pp. 235-261, 1970.

[Saouma et al. 1987] V.E. Saouma, M.L. Ayari et D.A. Leavell – Mixed mode crack propagation in homogeneous anisotropic solids, *Engng. Fract. Mech.,* Vol. 27, N°2, pp. 171-184, 1987.

[Schmit et al. 1990] F. Schmit, D. Bouvart et D. François – Ductile fracture characterization of polycarbonate by the R-curve method, *Int. J. Fract.*, Vol. 43, pp. 83-96, 1990.

[Scotto-Sheriff 1998] S. Scotto-Sheriff – Influence des traitements de surfaces de métal et de polymère sur l'adhérence de joints collés, Thèse de doctorat de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, novembre 1998.

[Sekhon et al. 1993] G.S. Sekhon et J.L. Chenot – Numerical simulation of continuous chip formation during non steady orthogonal cutting, *Engng Comp.*, Vol. 10, pp. 31-48, 1993.

[Shih 1981] C.F. Shih – Relationship between the J-integral and the crack opening displacement for stationary and extending cracks, *J. of Mech. Phys. Solids*, Vol. 29, pp. 305-326, 1981.

[Sih et al. 1964] G.C. Sih et J.R. Rice – The bending of plates of dissimilar materials with cracks, *J. Appl. Mech.*, pp. 477-482, 1964.

[Sih et al. 1974] G.C. Sih, B. Macdonald – Fracture mechanics applied to engineering problems – strain energy density fracture criterion, *Engng Fract. Mech.*, Vol. 6, pp. 361-386, 1974.

[Sih et al. 1981] G.C. Sih, E.P. Chen – Cracks in composite materials, *Mech. of Fract.*, Vol. 6, Martinus nijhoff publishers, 1981.

[Sneddon 1946] I.N. Sneddon – The distribution of stress in the neighborhood of a crack in an elastic solid, *Proc. Roy. Soc. London 187A*, pp. 229-260, 1946.

[Stringer 1970] J. Stringer – Stress generation end relief in growing oxide films, Cor. Sc., Vol. 10, pp. 513-543, 1970.

[Sumi et al. 1995] C.Y. Sumi et Z.N. Wang – Morphological aspects of fatigue crack propagation Part II – effects of stress biaxiality and welding residual stress, 1995.

[Tong et al. 1973] P. Tong, T.H.H Pian, S.J. Lasry – A hybrid element approach to crack problems in plane elasticity. *Int. J. for Num. Meth. in Engng*, Vol. 7, pp. 297-308, 1973.

[Touratier 1999] M. Touratier – Computational models of chip formation and chip flow in machining in a multi-scale approach. Present status and future needs, *Proceedings (CD-ROM) of the 2nd International Workshop on Modelling of Machining Operations*, Nantes, 25-26 juin, 1999.

[Traën 1999] R. Traën – Simulation numérique de la découpe de tôle par cisaillement, Rapport de stage de fin d'étude CEMEF-USINOR, Septembre 1999.

[Wells 1963] A.A. Wells – Application of fracture mechanics at and beyond general yielding, *British welding J.,* Vol. 10-11, pp. 563-570, 1963.

[Wieghardt 1995] K. Wieghardt – On splitting and cracking of elastic bodies, *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct*., 18, pp. 1371-1405, 1995 (Traduit par H.P. Rossmanith).

[Wriggers 1995] P. Wriggers – Finite element algorithms for contact problems, *Archives of Comp. Meth. in Engng*, Vol. 2, N°4, pp. 1-49, 1995.

[Yiehia et al. 1988] N.A.B. Yehia et M.S. Shephard – Automatic crack growth tracking of bimaterial interface cracks, *Int. J. of Fract.*, Vol. 37, pp. 123-135, 1988.

[Zienkiewicz1979] O.C. Zienkiewicz – La méthode des éléments finis*, traduction de la troisième édition anglaise. Mac Graw Hill*, 1979.

[Zhang 1992] X.B. Zhang – Etude numérique de la propagation de fissures par la mécanique de la rupture, Thèse de Doctorat de l'Université de Clermont-Ferrand II, Juin 1992.

CONTRIBUTION A LA MODELISATION NUMERIQUE EN MECANIQUE DE LA RUPTURE ET STRUCTURES MULTIMATERIAUX

Dans le contexte industriel actuel, la modélisation numérique apparaît comme un outil nécessaire, entraînant des gains de temps et d'argent importants. Le logiciel FORGE2 Multimatériaux a été développé dans ce cadre, afin de modéliser des matériaux élastoplastiques ou élasto-viscoplastiquse en grandes déformations.

Nous présentons dans ce mémoire les développements qui ont été réalisés pour permettre de prendre en compte et de gérer plusieurs sous-domaines et plusieurs matériaux, en insistant sur les difficultés liées à la gestion des contours et du remaillage. Nous présentons également les outils numériques introduits pour modéliser la propagation quasi-statique de fissures dans le maillage. Pour cela, nous introduisons les paramètres caractéristiques classiques en mécanique de la rupture, et nous les étudions pour une fissure statique. La méthode Gθ, permettant de calculer avec précision le taux de restitution d'énergie, est développée et comparée à d'autres méthodes. Nous abordons ensuite l'amorçage et la propagation quasi-statique de fissures en présentant et en comparant trois critères de propagation : le critère de la contrainte normale maximale, le critère de la densité d'énergie de déformation minimale et le critère du taux de restitution d'énergie maximal. Une attention particulière est portée aux problèmes de remaillage et de structure du maillage en pointe de fissure. La caractéristique multimatériaux du code permet également d'étudier la propagation de fissures dans des matériaux composites. Les exemples d'application proposés montrent la robustesse des développements effectués et offrent de nombreuses perspectives intéressantes.

Enfin nous utilisons les différents outils présentés pour étudier les mécanismes de déformation et de rupture lors du compactage de tubes en zircaloy 4. Une étude expérimentale est menée en parallèle afin de valider les résultats numériques, et d'étudier l'influence de l'oxydation sur les propriétés mécaniques du zircaloy 4.

Mots Clés :

Maillage Multi-domaines Structures multimatériaux Remaillage automatique

Mécanique de la Rupture Méthode Gθ Propagation de Fissures

Zircaloy 4

NUMERICAL MODELLING IN FRACTURE MECHANICS AND MULTIMATERIALS STRUCTURES

In today's industrial environment, numerical modelling is being increasingly used in order to optimise industrial processes and reduce manufacturing costs. These objectives can be achieved only if we can get an in-depth understanding of material behaviour during mechanical loading cycles. FORGE2 Multimaterials software has been developed within this framework to model large deformation of elastic-plastic or elastic-viscoplastic materials.

In this thesis, we present the numerical tools that have been developed to model multiple fields and multiple materials, with a special attention to meshing and automatic remeshing techniques. We also introduce the numerical tools implemented to model crack propagation in a mesh. In order to do so, we introduce classical fracture mechanics parameters, and different techniques to compute them for a static crack. The Gθ method is implemented to compute the strain energy release rate with accuracy. We then study different criteria to model the stages of crack initiation and crack propagation. Three crack propagation criteria are compared : the maximum circumferential stress criterion, the minimum strain energy density criterion, the maximum strain energy release rate criterion. Special attention has been paid to the mesh topology at the crack tip and numerous examples are presented to show the robustness and the accuracy of our technique.

Finally, we apply our different developments to the study of strain and fracture mechanisms of zircaloy 4 tubes under compaction. An experimental study is also performed to validate our numerical results and to study the influence of oxidation on the mechanical properties of zircaloy 4 tubes.

Key words :

Multiple fields meshing Multimaterials structures Automatic remeshing

Fracture Mechanics Gθ Method Crack Propagation

Zircaloy 4