

Acquisition et extraction d'information des images polarimétriques actives.

Arnaud Bénière

▶ **To cite this version:**

Arnaud Bénière. Acquisition et extraction d'information des images polarimétriques actives.. Physique [physics]. Université Paris Sud - Paris XI, 2009. Français. NNT : . tel-00483072v2

HAL Id: tel-00483072

https://pastel.hal.science/tel-00483072v2

Submitted on 17 Sep 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique
Faculté des sciences d'Orsay - Université Paris-Sud XI

THÈSE

présentée par
Arnaud Bénière

pour obtenir le grade de
Docteur en Sciences

spécialité : physique

Acquisition et extraction d'information des images polarimétriques actives.

soutenue le 26 octobre 2009
devant le jury composé de :

Mehdi ALOUINI	Co-directeur de thèse
Jacques BLANC-TALON	Correspondant DGA
Fabien BRETENAKER	Examinateur
Vincent DEVLAMINCK	Rapporteur
François GOUDAIL	Directeur de thèse
Razvigor OSSIKOVSKI	Rapporteur

Remerciements

Ce travail de thèse a été réalisé en collaboration étroite entre le Laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique et Thales Research & Technology. Je remercie Pierre Chavel et Daniel Dolfi de m'avoir accueilli dans le groupe Systèmes et Composants Optiques et dans le laboratoire de Traitement Optique du Signal.

Je tiens à remercier chaleureusement François Goudail et Mehdi Alouini pour m'avoir encadré et accompagné durant ces 3 années de thèse. Leur complémentarité m'a permis d'avancer sereinement dans mes travaux, tant sur le plan théorique qu'expérimental. Ils ont su me transmettre une compétence précieuse qui est l'élégance d'expliquer la physique "avec les mains". Je les remercie également tous les deux pour leur franchise, leur aide et leur patience lors de nos nombreuses discussions quant à "l'après-thèse".

J'aimerais ensuite remercier Vincent Devlaminck et Razvigor Ossikovski pour s'être acquittés de la tache de rapporteur et pour leurs remarques constructives, Jacques Blanc-Talon d'avoir accepté de faire partie du jury de thèse et enfin Fabien Bretenaker pour avoir présidé le jury et pour l'intérêt manifesté à mes recherches.

Je remercie Gérard Berginc de TOSA pour son implication et son soutien durant mon stage et ma thèse.

Je remercie l'équipe du LPICM avec laquelle nous avons collaboré sur le thème de l'imagerie à travers les milieux turbulents : merci à Tatiana Novikova, Maria Rosaria Antonelli et Antonello de Martino.

Je voudrais remercier l'équipe de Philippe Bois du IIIV-lab pour sa disponibilité lors des essais avec les caméras QWIP.

Un grand merci à l'équipe TOS de Thales pour sa bonne humeur et son soutien moral. Dans l'ordre du couloir merci à Patrick, Stéphanie, Loic, Grégoire, Jérome, Daniel, Ghaya, Hamza et Perrine. Merci également à la machine expresso qui nous a permis de nous réunir quotidiennement pour des discussions philosopho-politico-scientifiques avec Jean-Claude, Jean-Paul, Jean-Pierre, Barbara, Anne, Thierry, Arnaud B., Murielle, Dominique, Arnaud G., Bastien, Noémie, Augustin, Christian, Gilles, Cindy et Sylvain.

Un tout aussi grand merci à l'équipe SPIM dirigée par Jean Taboury pour son accueil et sa contribution à la bonne ambiance générale. Merci à Hervé, Yann, Gaid, Céline, Noura, Marius et Jean M.

Je terminerai en remerciant sincèrement mes proches qui ont relu avec attention ce manuscrit, mes parents, Maggy, Louis et Lucile.

Table des matières

Remerciements i

Table des matières iii

Introduction 1

1 Signal polarimétrique et système d'acquisition 3
- 1.1 Polarisation d'une onde électromagnétique . . . 4
  - 1.1.1 États totalement polarisés : formalisme de Jones . . . 5
  - 1.1.2 États partiellement polarisés : formalisme de Stokes . . . 5
  - 1.1.3 Degré de polarisation . . . 7
  - 1.1.4 Représentation de Poincaré . . . 7
  - 1.1.5 Transformation d'un état de polarisation par un matériau : matrice de Mueller . . . 8
- 1.2 Imagerie polarimétrique . . . 10
  - 1.2.1 Imagerie de Mueller . . . 10
  - 1.2.2 Imagerie de Stokes : polarimètre à quatre dimensions . . . 11
  - 1.2.3 Polarimètre à trois dimensions . . . 11
  - 1.2.4 Polarimètre à deux dimensions . . . 11
  - 1.2.5 Polarimètre à une dimension . . . 12
- 1.3 Conception et réalisation d'un système d'imagerie d'OSC expérimental . . . 13
  - 1.3.1 Choix du séparateur de polarisation . . . 13
  - 1.3.2 Conception du système . . . 14
  - 1.3.3 Optimisation de la configuration . . . 17
  - 1.3.4 Réduction des aberrations résiduelles dans les images d'OSC . . . 17
  - 1.3.5 Calibration polarimétrique du système . . . 23
  - 1.3.6 Validation du concept dans des situations réelles . . . 27
- 1.4 Conclusion . . . 32

2 Estimation de l'OSC (Orthogonal State Contrast) 33
- 2.1 Théorie de l'estimation . . . 34
  - 2.1.1 Échantillon statistique . . . 35
  - 2.1.2 Qualité d'un estimateur . . . 36
  - 2.1.3 Estimateur optimal : maximum de vraisemblance . . . 37
  - 2.1.4 Estimation dans le cadre de l'imagerie OSC . . . 38
- 2.2 Bruit additif gaussien, illumination uniforme . . . 39

2.2.1 Borne de Cramer-Rao . . . 39
2.2.2 Estimateur du maximum de vraisemblance . . . 41
2.2.3 Comparaison de différents estimateurs . . . 43
2.2.4 Vérification expérimentale . . . 45
2.2.5 Amélioration de l'estimateur MV . . . 46
2.2.6 Discussion . . . 48
2.3 Bruit de photons et contribution passive . . . 49
2.3.1 Modélisation . . . 49
2.3.2 Borne de Cramer-Rao . . . 51
2.3.3 Comparaison de l'influence de la contribution dépendant du signal et de la contribution additive. . . . 52
2.3.4 Discussion . . . 55
2.4 Prise en compte de la polarisation partielle de la contribution passive . . . 56
2.4.1 Borne de Cramer-Rao . . . 57
2.4.2 Estimateur du maximum de vraisemblance généralisé . . . 59
2.4.3 Simulations de Monte-carlo . . . 60
2.4.4 Illustration expérimentale . . . 60
2.4.5 Discussion . . . 63
2.5 Prise en compte de l'illumination non-uniforme . . . 65
2.5.1 Modélisation . . . 65
2.5.2 Borne de Cramer-Rao avec une illumination non-uniforme mais connue . . . 65
2.5.3 Gain potentiel en précision en prenant en compte la non-uniformité . . . 67
2.5.4 Estimateurs de l'OSC en présence d'illumination non-uniforme . . . 70
2.5.5 Comparaison avec les estimateurs adaptés à l'illumination uniforme. . . . 74
2.5.6 Illustration expérimentale . . . 76
2.5.7 Discussion . . . 77
2.6 Conclusion . . . 79

3 Détection dans les images OSC **81**
3.1 Base de la théorie de la détection . . . 82
3.1.1 Position du problème . . . 82
3.1.2 Qualité d'un détecteur . . . 83
3.1.3 Détecteur optimal . . . 85
3.2 Détecteur GLRT en présence d'illumination non-uniforme . . . 86
3.2.1 Cas où l'illumination, $\mathbf{F}$, est connue . . . 87
3.2.2 Cas où l'illumination, $\mathbf{F}$, est inconnue . . . 89
3.3 Comparaison de différentes méthodes de détection . . . 91
3.3.1 Performances de $\mathcal{R}_{uni}$ en présence d'une illumination non-uniforme . . . 91
3.3.2 Comparaison de deux approches . . . 92
3.4 Application à la détection de cible . . . 94
3.4.1 Images simulées . . . 95
3.4.2 Images expérimentales . . . 99
3.5 Conclusion . . . 100

4 Optimisation du contraste dans une image polarimétrique scalaire 103
4.1 Définition du contraste . . . 105
4.2 Optimisation du contraste . . . 107
4.2.1 Réduction à un problème d'optimisation à deux paramètres . . . 108
4.2.2 Analyse de quelques cas particuliers . . . 109
4.3 Illustration sur un premier exemple . . . 110
4.3.1 Optimisation des états de polarisation $\vec{s}$ et $\vec{t}$ . . . 110
4.3.2 Comparaison avec d'autres états de polarisation non-optimisés sur des images simulées . . . 112
4.4 Illustration sur un deuxième exemple . . . 113
4.4.1 Optimisation des états de polarisation $\vec{s}$ et $\vec{t}$ . . . 114
4.4.2 Comparaison avec d'autres états de polarisation non-optimisés sur des images simulées . . . 114
4.5 Conclusion . . . 116

Conclusion générale 119

A Caractérisation et calibration de la caméra Basler A312f 123
A.1 Mode d'acquisition de la caméra . . . 123
A.2 Bruit temporel dans l'obscurité . . . 124
A.2.1 Courant d'obscurité ou "Dark current" . . . 124
A.2.2 Bruit d'obscurité ou "Dark noise" . . . 126
A.3 Bruit spatial . . . 129
A.3.1 Bruit de non-uniformité d'offset : "Fixed Pattern Noise" . . . 130
A.3.2 Bruit de non-uniformité de gain : "Photo Response Non Uniformity" . . . 130
A.3.3 Correction des images . . . 131
A.4 Linéarité . . . 131
A.5 Bruit spatial et temporel . . . 131

B Densité de probabilité de l'estimateur $\widehat{P}_{mv}$ 135
B.1 DDP de (η, ρ) . . . 135
B.2 DDP de ρ . . . 136

C Calcul de la vraisemblance généralisée avec une illumination non-uniforme inconnue 139
C.1 Elimination de $\mathbf{F}$: vraisemblance généralisée partielle . . . 139
C.2 Estimation de P au sens du MVG . . . 140
C.3 Paramètres dont R dépend . . . 141
C.4 Vraisemblance généralisée totale . . . 142

D Calcul de $\mathcal{R}^0_{Fconnu}$ et $\mathcal{R}^1_{Fconnu}$ 145

Bibliographie 149

Introduction générale

La vision naturelle de l'homme, bien que très performante, n'est pas sensible à la nature vectorielle de la lumière. Ceci explique que les premières théories sont purement scalaires : Huygens considère la lumière comme une grandeur sinusoïdale alors que Newton propose une approche corpusculaire. Aucune de ces deux théories ne permet d'expliquer le phénomène de polarisation par réflexion observé par Malus en 1809. Fresnel et plus tard Maxwell l'expliquent en démontrant la nature ondulatoire de la lumière et le caractère transversal des vibrations lumineuses. La notion de polarisation est introduite pour décrire la façon dont l'orientation du champ électrique évolue en un point de l'espace.

Certaines espèces animales telle que la pieuvre (*Octopus vulgaris*) disposent de photorécepteurs sensibles à la polarisation disposés orthogonalement les uns par rapport aux autres. Ceci lui permet de déjouer le camouflage d'une proie. Depuis quelques années, des systèmes d'imagerie tentent de reproduire ce principe de fonctionnement en bénéficiant des progrès constants des capteurs d'images et d'algorithmes de traitement du signal adaptés. L'imagerie polarimétrique permet en effet de mettre en évidence des contrastes qui ne sont pas présents dans les images d'intensité classiques. Les applications sont très nombreuses dans la télédétection, dans le domaine biomédical ou pour la vision à travers les milieux diffusants. Dans ce manuscrit, nous allons focaliser notre attention sur les systèmes actifs, c'est-à-dire ceux qui requièrent l'illumination de la scène par une source dont l'état de polarisation est contrôlé.

De nombreux systèmes d'imagerie polarimétrique actifs ont été développés. Certains sont complexes, comme les imageurs de Mueller, d'autres sont plus simples à mettre en oeuvre comme les imageurs polarimétriques scalaires. L'objectif de cette thèse est premièrement de concevoir un système d'acquisition simple et robuste permettant d'analyser simultanément deux états de polarisation orthogonaux. Dans un deuxième temps, le but est de développer des techniques de traitement du signal et de l'image afin d'améliorer l'extraction d'information et d'être en mesure de spécifier de manière claire l'amélioration des performances par rapport à l'imagerie classique.

Après une brève introduction sur le formalisme utilisé, nous présentons dans le chapitre 1 une vue d'ensemble de l'imagerie polarimétrique active. Nous montrons en particulier que la mesure de deux états de polarisation orthogonaux permet de construire une image appelée OSC ("Orthogonal State Contrast"). Une architecture robuste et simple à mettre en œuvre est proposée, conçue et validée expérimentalement. Elle permet de faire l'acquisition simultanée des deux états de polarisation. Nous montrons qu'une telle conception a un bruit technique limité et que par conséquent les sources de bruit liées à la détection et l'illumination sont prépondérantes et dépendent du type d'application.

Dans le second chapitre, nous nous intéressons à la problématique de l'estimation de l'OSC dans une zone homogène de la scène en présence de différentes perturbations. L'objectif pre-

mier est ici de connaître la précision maximale que l'on peut espérer obtenir sur l'estimation du paramètre d'OSC. Pour cela nous calculons la borne de Cramer-Rao, qui est une borne sur la variance d'un estimateur non-biaisé. Le deuxième objectif est d'essayer d'atteindre cette borne en proposant plusieurs estimateurs. Nous menons cette étude pour un système d'imagerie OSC dans différentes conditions expérimentales. Lorsque le système fonctionne en limite de portée ou à très faible illumination, le bruit du détecteur est prépondérant. En revanche, lorsque le signal rétro-réfléchi est plus intense le bruit de photons devient limitant. Deux autres perturbations se manifestent dans une utilisation du système en extérieur : la présence d'une illumination ambiante partiellement polarisée et la non-uniformité du faisceau d'illumination due aux perturbations atmosphériques par exemple.

Cette étude soulève une problématique sous-jacente et primordiale qui est celle de la détection. En effet, les algorithmes de détection sont au cœur de tout système de défense ou appareil médical. Dans ce cas l'objectif n'est plus de connaître précisément les propriétés polarimétriques de chaque objet de la scène, mais de pouvoir détecter leur présence.

Dans le chapitre 3 nous étudions le cas d'un système perturbé par une non-uniformité d'illumination. Nous définissons la notion de contraste dans les images d'OSC et nous présentons plusieurs algorithmes de détection. Nous montrons alors que le choix de la méthode de détection dépend des paramètres de l'illumination.

Dans le chapitre 4 nous nous intéressons à un autre mode d'imagerie polarimétrique nécessitant l'acquisition d'une seule image : l'optimisation des états de polarisation d'illumination et d'analyse nous permet de maximiser le contraste entre deux zones homogènes de la scène.

Chapitre 1

Signal polarimétrique et système d'acquisition

Sommaire

1.1 Polarisation d'une onde électromagnétique **4**
1.1.1 États totalement polarisés : formalisme de Jones 5
1.1.2 États partiellement polarisés : formalisme de Stokes 5
1.1.3 Degré de polarisation 7
1.1.4 Représentation de Poincaré 7
1.1.5 Transformation d'un état de polarisation par un matériau : matrice de Mueller 8
1.2 Imagerie polarimétrique **10**
1.2.1 Imagerie de Mueller 10
1.2.2 Imagerie de Stokes : polarimètre à quatre dimensions 11
1.2.3 Polarimètre à trois dimensions 11
1.2.4 Polarimètre à deux dimensions 11
1.2.5 Polarimètre à une dimension 12
1.3 Conception et réalisation d'un système d'imagerie d'OSC expérimental . . . **13**
1.3.1 Choix du séparateur de polarisation 13
1.3.2 Conception du système 14
1.3.3 Optimisation de la configuration 17
1.3.4 Réduction des aberrations résiduelles dans les images d'OSC 17
1.3.5 Calibration polarimétrique du système 23
1.3.6 Validation du concept dans des situations réelles 27
1.4 Conclusion **32**

L'imagerie polarimétrique active consiste à sonder les propriétés polarimétriques d'une scène en l'illuminant avec un état de polarisation et en analysant la lumière rétro-réfléchie. Dans ce chapitre nous commençons par introduire le formalisme relatif à l'étude de la polarisation d'une onde électromagnétique que nous utiliserons dans ce manuscrit. Nous montrons que le formalisme de Stokes, contrairement au formalisme de Jones permet de décrire des états partiellement polarisés. Nous présenterons ensuite différents modes d'acquisition en allant du plus complexe : l'imagerie de Mueller, au plus simple : le polarimètre à une dimension. Parmi les solutions présentées, nous détaillerons tout particulièrement l'imagerie d' "Orthogonal State Contrast" (OSC) qui repose sur l'acquisition de deux images correspondant à deux états de polarisation orthogonaux.

Dans une deuxième partie de ce chapitre nous aborderons la conception d'un imageur d'OSC actif capable de faire l'acquisition simultanée des états de polarisation. Une architecture simple et compacte sera présentée. Elle nécessite cependant une calibration optique et polarimétrique que nous détaillerons.

1.1 Polarisation d'une onde électromagnétique

La notion de polarisation est une propriété intrinsèque des ondes vectorielles telles que la lumière. En effet, une onde électromagnétique est caractérisée par des vecteurs, ce qui la différencie des autres types d'ondes comme les ondes sonores et implique le phénomène de polarisation. Pour expliquer simplement cette propriété, nous considérons une onde lumineuse plane. Comme toute onde électromagnétique qui se propage dans un milieu homogène, elle est constituée d'un champ électrique et d'un champ magnétique, tous deux perpendiculaires à la direction de propagation. Nous nous intéressons uniquement au champ électrique $\vec{E}$, puisque les propriétés du champ magnétique $\vec{B}$ en découlent via les équations de Maxwell [1]. Pour une onde se propageant suivant l'axe z, le vecteur champ électrique appartient au plan xy et l'extrémité de ce vecteur décrit une courbe dont la forme détermine la polarisation de l'onde :

- totalement dépolarisée : la trajectoire décrite par le vecteur $\vec{E}$ est complètement aléatoire. L'évolution du champ électrique n'est connue que de manière statistique.
- totalement polarisée : la courbe décrite est dans le cas le plus général une ellipse. On distinguera les polarisations linéaires et circulaires, qui ne sont que des cas particuliers.
- partiellement polarisée : cet état peut être décrit comme la superposition statistique pondérée d'une contribution totalement polarisée et d'une contribution dépolarisée. Le poids relatif de chacune des contributions est décrit par le degré de polarisation.

Le formalisme utilisé dépend du degré de polarisation de l'onde électromagnétique. Nous présenterons d'abord le formalisme de Jones limité à l'étude de systèmes non-dépolarisants, puis le formalisme de Stokes, plus général, qui est adapté à l'étude de la polarisation partielle.

1.1.1 États totalement polarisés : formalisme de Jones

Nous considérons une onde plane monochromatique (de longueur d'onde λ) se propageant suivant l'axe z. Son champ électrique est défini dans le plan xy par :

$$\vec{E}(z,t) = \begin{bmatrix} E_x(z,t) \\ E_y(z,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x \cos(\omega t - kz) \\ A_y \cos(\omega t - kz - \phi) \end{bmatrix}, \tag{1.1}$$

où A_x (A_y) est l'amplitude réelle positive suivant l'axe Ox (Oy), $k = 2\pi/\lambda$ est le vecteur d'onde, $\omega = kc$ est la pulsation et ϕ est le déphasage entre les composantes orthogonales $E_x(z,t)$ et $E_y(z,t)$. On montre facilement que l'expression du champ électrique (voir Eq.1.1) peut se mettre sous la forme :

$$\left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{A_y}\right)^2 - 2\cos\phi\frac{E_x E_y}{A_x A_y} = \sin^2\phi, \tag{1.2}$$

qui correspond à l'équation d'une ellipse, appelée ellipse de polarisation. Le vecteur de Jones $\vec{U}$ associé à cet état de polarisation est défini par :

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y e^{\imath\phi} \end{bmatrix}. \tag{1.3}$$

Il en résulte qu'une onde polarisée quelconque est caractérisée par trois paramètres indépendants : les amplitudes A_x, A_y et la phase ϕ. Il est parfois plus simple d'utiliser d'autres jeux de paramètres, par exemple (I, α, ε) (voir Fig.1.1) où I est l'intensité de l'onde, α est l'azimut de l'ellipse et ε son ellipticité. On montre qu'il existe une relation bijective entre ces deux triplets de paramètres [2] :

$$\begin{aligned} I &= A_x^2 + A_x^2, \\ \tan 2\alpha &= \frac{2A_x A_y}{A_x^2 - A_y^2}\cos\phi, \\ \sin 2\varepsilon &= \frac{2A_x A_y}{A_x^2 + A_y^2}\sin\phi. \end{aligned}$$

Le sens de rotation de l'ellipse dépend du signe de ϕ (ou d'une manière équivalente de ε) :

- si $\phi > 0$ ($\varepsilon > 0$), on parle de polarisation "gauche", *ie* dans le sens trigonométrique.
- si $\phi < 0$ ($\varepsilon < 0$), on parle de polarisation "droite".
- si $\phi = 0$ ($\varepsilon = 0$), la polarisation est linéaire.

1.1.2 États partiellement polarisés : formalisme de Stokes

Pour une lumière totalement polarisée, nous venons de voir que la trajectoire du champ électrique évolue de manière déterministe (ellipse représentée par le vecteur de Jones). Ce formalisme est insuffisant pour décrire la lumière partiellement polarisée. En effet dans ce cas le

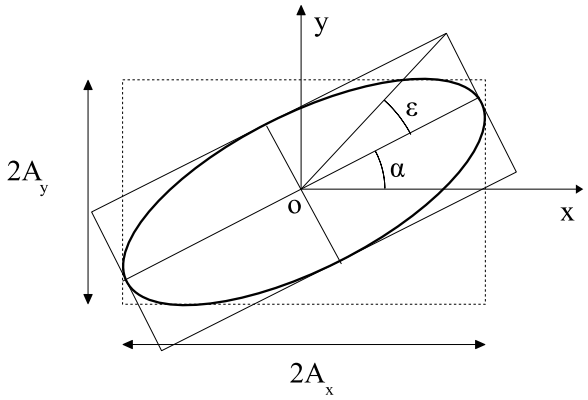


FIGURE 1.1 – Ellipse de polarisation d'azimut α et d'ellipticité ε

vecteur de Jones devient un vecteur aléatoire. Pour caractériser l'état de polarisation, il faut utiliser la matrice de covariance Γ, appelée matrice de cohérence en optique, qui est construite à partir des moments d'ordre 2 du champ électrique :

$$\Gamma =< \vec{u}\,[\vec{u}^*]^+ >= \begin{bmatrix} < |u_x|^2 > & < u_x u_y^* > \\ < u_y u_x^* > & < |u_x|^2 > \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

On lui préférera la représentation sous la forme d'un vecteur de Stokes $\vec{S}$, qui est complètement équivalente étant donné qu'il existe une relation bijective entre Γ et $\vec{S}$. Le vecteur de Stokes est défini comme :

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x^2 + A_y^2 \\ A_x^2 - A_y^2 \\ 2A_x A_y \cos\phi \\ 2A_x A_y \sin\phi \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

Les composantes du vecteur de Stokes peuvent s'exprimer en fonction d'intensités mesurables : I_x, I_y et $I_{\pm 45^\circ}$ sont respectivement les intensités de polarisations linéaires suivant les axes x,y et $\pm 45^\circ$ et I_L, I_R sont les intensités de polarisations circulaires gauche et droite.

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} I_x + I_y \\ I_x - I_y \\ I_{+45^\circ} - I_{-45^\circ} \\ I_L - I_R \end{bmatrix}, \tag{1.6}$$

Dans la pratique on utilise souvent le vecteur de Stokes réduit :

$$\vec{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1/S_0 \\ S_2/S_0 \\ S_3/S_0 \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

Dans la suite, nous noterons en minuscule les composantes du vecteur de Stokes réduit.

Nous présentons dans le tableau 4.2 quelques vecteurs de Stokes réduits usuels.

totalement dépolarisé	elliptique d'azimut α et d'ellipticité ε	linéaire horizontal	linéaire vertical	linéaire à 45°	circulaire gauche
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos 2\alpha \cos 2\varepsilon \\ \sin 2\alpha \cos 2\varepsilon \\ \sin 2\varepsilon_s \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

TABLEAU 1.1 – Vecteurs de Stokes réduits de quelques états de polarisation usuels.

1.1.3 Degré de polarisation

Le degré de polarisation ou "degree of polarization" (DOP) d'une onde s'exprime à partir de ses paramètres de Stokes :

$$DOP = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{S_0} \tag{1.8}$$

et vérifie la relation $0 \leq DOP \leq 1$. Le degré de polarisation est nul pour une lumière totalement dépolarisée et vaut 1 pour un état totalement polarisé. Une propriété intéressante est qu'un état de polarisation quelconque peut se décomposer en la somme incohérente d'un état totalement polarisé (état de polarisation principal) et d'un état totalement dépolarisé :

$$\begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = (1 - DOP) \times S_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + DOP \times S_0 \begin{bmatrix} 1 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

1.1.4 Représentation de Poincaré

Comme nous l'avons vu précédemment, un état totalement polarisé est caractérisé par les paramètres (I, α, ε). Cet état peut être représenté par un point sur la sphère de Poincaré (de rayon I), dont l'azimuth est 2α et l'élévation 2ε, comme nous pouvons le voir sur la figure 1.2. On montre que les coordonnées cartésiennes de ce point correspondent aux paramètres du vecteur de Stokes de l'état totalement polarisé correspondant. En effet [1] :

$$\begin{aligned} S_1 &= I\cos(2\alpha)\cos(2\varepsilon) \\ S_2 &= I\sin(2\alpha)\cos(2\varepsilon) \\ S_3 &= I\sin(2\varepsilon) \end{aligned}$$

Ainsi un état totalement polarisé est entièrement décrit par le triplet de paramètres (S_1, S_2, S_3). En revanche, pour décrire un état partiellement polarisé il est nécessaire de connaître le quatrième paramètre S_0. La représentation d'un tel état se trouve à l'intérieur de la sphère de Poincaré à la distance $DOP \times S_0$ du centre de la sphère. Un état totalement dépolarisé correspond donc au centre de la sphère. Notons que certains auteurs préfèrent utiliser la sphère de Poincaré normalisée : dans ce cas les coordonnées d'un point correspondent aux paramètres (s_1, s_2, s_3) du vecteur de Stokes réduit.

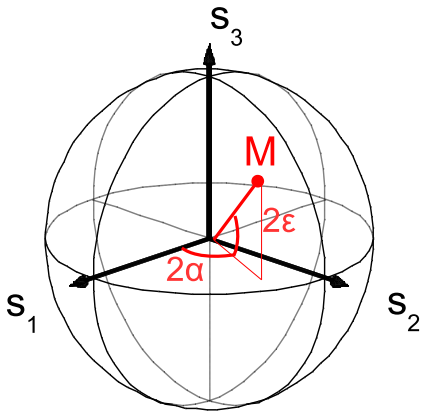


FIGURE 1.2 – Représentation d'un état de polarisation caratérisé par le triplet (I, α, ε) sur la sphère de Poincaré de rayon I

1.1.5 Transformation d'un état de polarisation par un matériau : matrice de Mueller

Considérons un faisceau incident dont le vecteur de Stokes est noté $\vec{S}$. Après avoir interagi avec un matériau, le faisceau rétro-réfléchi est caractérisé par son vecteur de Stokes $\vec{T}$. On peut montrer que si l'interaction du champ électrique avec le matériau est linéaire, on peut exprimer $\vec{T}$ en fonction de $\vec{S}$:

$$\vec{T} = M\vec{S} \tag{1.10}$$

où M est une matrice réelle 4×4, appelée matrice de Mueller. Étant donné la généralité de la description des états de polarisation par les vecteurs de Stokes, la matrice de Mueller permet de décrire les propriétés polarimétriques de n'importe quel matériau, qu'il soit dépolarisant ou non.

Le vecteur de Stokes émergent $\vec{T}$ se déduit du vecteur de Stokes incident $\vec{S}$ par une transformation linéaire. Les règles de calcul matriciel s'appliquent pour l'interaction successive avec k matériaux de matrice de Mueller M_k :

$$T = M_k M_{k-1} \dots M_1 S \tag{1.11}$$

Polariseurs

Nous représentons dans le tableau 1.2 les matrices de Mueller [3, 4] de quelques polariseurs que nous allons utiliser dans ce manuscrit.

polariseur linéaire horizontal	polariseur linéaire vertical	polariseur linéaire à 45°	polariseur circulaire gauche
$\frac{\tau}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{\tau}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{\tau}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{\tau}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
polariseur partiel d'azimut α d'ellipticité ε et de degré de polarisation P (voir [4] p.61)			
$\frac{\tau}{1+P^2}\begin{pmatrix} 1 & P\cos 2\alpha\cos 2\varepsilon & P\cos 2\alpha\sin 2\varepsilon & P\sin 2\varepsilon \\ P\cos 2\alpha\cos 2\varepsilon & P^2\cos^2 2\alpha\cos^2 2\varepsilon & P^2\cos^2 2\alpha\sin 2\varepsilon\cos 2\varepsilon & P^2\sin 2\alpha\cos 2\alpha\cos 2\varepsilon \\ P\cos 2\alpha\sin 2\varepsilon & P^2\cos^2 2\alpha\sin 2\varepsilon\cos 2\varepsilon & P^2\cos^2 2\alpha\sin^2 2\varepsilon & P^2\sin 2\alpha\cos 2\alpha\sin 2\varepsilon \\ P\sin 2\varepsilon & P^2\sin 2\alpha\cos 2\alpha\cos 2\varepsilon & P^2\sin 2\alpha\cos 2\alpha\sin 2\varepsilon & P^2\sin^2 2\alpha \end{pmatrix}$			

TABLEAU 1.2 – Matrices de Mueller de quelques polariseurs usuels de transmittance τ.

Matériau dépolarisant

Dans le cadre de notre étude, nous nous intéresserons tout particulièrement au cas des matériaux purement dépolarisants . Lu et Chipman en donnent la définition dans la référence [5] que nous rappelons dans le tableau 1.3 : ils n'ont ni polarisance ni diatténuation. Les coefficients de dépolarisation sont $1-|a|$, $1-|b|$ et $1-|c|$ et correspondent au pouvoir dépolarisant du matériau suivant les axes S_1, S_2 et S_3.

matériau purement dépolarisant	matériau purement dépolarisant isotrope	matériau totalement dépolarisant
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

TABLEAU 1.3 – Matrices de Mueller de quelques matériaux dépolarisants avec |a|,|b|,|c|<1.

Le pouvoir dépolarisant moyen est défini par :

$$\Delta = 1 - \frac{|a| + |b| + |c|}{3}.$$

Il vaut 1 pour un matériau totalement dépolarisant. D'une manière plus générale les axes principaux d'un matériau dépolarisant ne sont pas forcément S_1, S_2 et S_3, mais peuvent être trois

axes orthogonaux quelconques. La matrice de Mueller d'un tel matériau est de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & m_\Delta \end{pmatrix}$$

où m_Δ est une matrice 3×3 symétrique qui peut être diagonalisée. Ses vecteurs propres correspondent aux axes de dépolarisation principaux et les valeurs propres sont les pouvoirs de dépolarisation.

1.2 Imagerie polarimétrique

D'une manière générale l'imagerie polarimétrique consiste à analyser la lumière rétrodiffusée par un objet. Les imageurs polarimétriques passifs mesurent l'état de polarisation de la lumière émise par un source, ou issue de l'interaction de la lumière ambiante avec un matériau. Les applications sont diverses comme la reconstruction en trois dimensions [6], ou l'augmentation de la visibilité à travers les milieux diffusants [7]. Dans le cadre de cette étude, nous nous intéressons aux imageurs polarimétriques actifs : la scène est illuminée avec un faisceau incident dont l'état de polarisation est connu et la lumière rétrodiffusée est analysée. La configuration la plus commune est appelée quasi-monostatique : l'illumination et l'observation se font dans la même direction (voir la figure 1.3). Il existe alors plusieurs méthodes d'analyse que nous allons présenter.

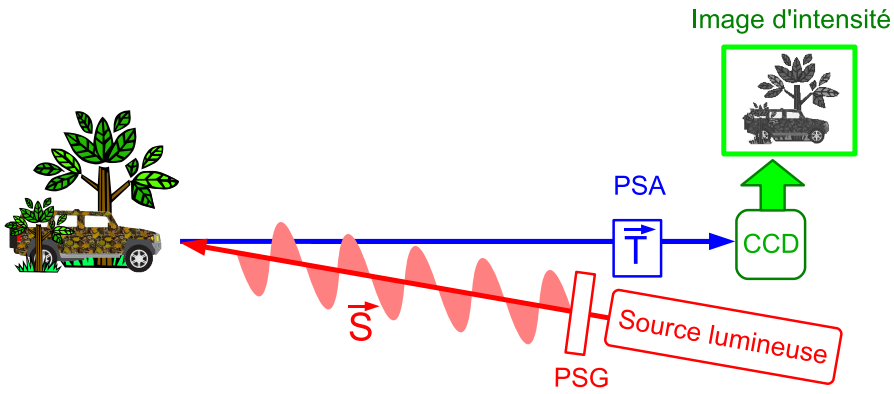


FIGURE 1.3 – Schéma général d'un imageur polarimétrique actif en configuration quasi-monostatique. La scène est illuminée par un faisceau totalement polarisé de vecteur de Stokes $\vec{S}$, créé à partir d'une source lumineuse et d'un générateur d'état de polarisation ou PSG (Polarization State Generator). La lumière rétro-réfléchie est projetée sur un état de polarisation d'analyse de vecteur de Stokes $\vec{T}$ grâce au PSA (Polarization State Analyzer) puis enregistrée grâce à un détecteur (CCD).

1.2.1 Imagerie de Mueller

La méthode la plus exhaustive est l'imagerie de Muller. Elle permet de caractériser complètement les propriétés polarimétriques d'un objet. On mesure de manière rigoureuse l'état

de polarisation de la lumière rétrodiffusée en fonction de l'état de polarisation de la lumière incidente. Ceci nécessite l'acquisition d'au moins 16 images pour calculer en chaque point de la scène, les 16 composantes de la matrice de Mueller correspondante. L'imagerie de Mueller est utile lorsque l'objet à caractériser produit sur la lumière, en plus d'une dépolarisation pure, un changement d'état de polarisation dû à un effet géométrique, de biréfringence ou d'activité optique. Elle trouve des applications dans le domaine biomédical [8–10] et dans l'imagerie à travers les milieux diffusants [11, 12].

1.2.2 Imagerie de Stokes : polarimètre à quatre dimensions

D'autres systèmes, moins complexes à mettre en oeuvre, mesurent le vecteur de Stokes de la lumière rétro-réfléchie pour chaque point de la scène : ils nécessitent alors l'acquisition d'au moins quatre images. Plusieurs études ont été menées sur l'optimisation du choix des quatre états de polarisation analysés. [13–15]. Ce type de polarimètre peut être utilisé en actif ou en passif et permet de calculer le degré de polarisation défini dans l'équation 1.8. Les applications sont nombreuses et variées : biomédical [16, 17], télédétection [18], astronomie [19, 20].

1.2.3 Polarimètre à trois dimensions

Dans la pratique, la quatrième composante du vecteur de Stokes nécessite l'analyse d'un état de polarisation circulaire. Cette mesure implique forcément l'utilisation d'un matériau biréfringent (lame $\lambda/4$ par exemple) qui est plus complexe à mettre en oeuvre et qui empêche de faire une analyse simple à plusieurs longueurs d'onde. (Smith propose tout de même dans la référence [21] l'architecture d'un imageur de Stokes multispectral dans l'infrarouge). Pour des raisons techniques la majorité des imageurs polarimétriques ne mesurent pas le paramètre S_3 du vecteur de Stokes, mais simplement S_0, S_1 et S_2. Ainsi seuls des états linéaires sont analysés avec le PSA [22, 23]. Un tel système permet de calculer, entre autre, pour chaque point de la scène, le degré de polarisation linéaire ou "degree of linear polarization" (DOLP) d'un vecteur de Stokes rétro-réfléchi $\vec{S}$:

$$DOLP = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2}}{S_0} \tag{1.12}$$

1.2.4 Polarimètre à deux dimensions

Dans la pratique et en particulier lorsque la scène à imager est de dimension métrique, on se limite souvent à l'acquisition de deux images. La scène est alors illuminée avec un faisceau incident totalement polarisé (noté $\vec{S}$) et les deux images acquises sont relatives à deux états de polarisation orthogonaux : la première image notée X correspond à l'état de polarisation parallèle à l'état incident ($\vec{T_X} = \vec{S}$), la seconde notée Y correspond à l'état orthogonal ($\vec{T_Y}^T \vec{S} = 0$). Pour chaque pixel (u, v) de l'image, on peut alors calculer une image d'intensité notée I et une image

de contraste polarimétrique notée P telles que pour chaque pixel :

$$I(u,v) = X(u,v) + Y(u,v) \tag{1.13}$$

$$P(u,v) = \frac{X(u,v) - Y(u,v)}{X(u,v) + Y(u,v)} \tag{1.14}$$

Le paramètre P est communément appelé *degré de polarisation*. Ce nom n'est justifié que dans le cas où l'état de polarisation principal (voir l'équation 1.9) de la lumière émergent du matériau est colinéaire à $\vec{T_X}$. Dans ce cas on montre que le paramètre P est égal au degré de polarisation défini dans l'équation 1.8.

Cette condition est vérifiée dans un système actif analysant des états de polarisation linéaire et observant des matériaux purement dépolarisants. En effet la matrice de Mueller de tels matériaux est diagonale : $M = \text{diag}(1, a, b, c)$ avec $|a|, |b|, |c| < 1$ (voir la section 1.1.5). Plusieurs études ont également montré expérimentalement que pour de nombreux matériaux usuels $a = b$ (peinture, bois, papier, carton, sable, pierre, *etc*...). Le vecteur de Stokes du faisceau incident totalement polarisé linéairement est noté $\vec{s} = (1, s_1, s_2, 0)^T$ tel que $s_1^2 + s_2^2 = 1$. Le vecteur de Stokes réduit de la lumière rétrodiffusée a pour expression :

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix} \vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ as_1 \\ as_2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

dont le degré de polarisation est $DOP = \sqrt{(as_1)^2 + (as_2)^2} = a$. Les intensités mesurées sur les canaux orthogonaux sont $X = 1/2(1 + as_1^2 + as_2^2)$ et $Y = 1/2(1 - as_1^2 - as_2^2)$. Le paramètre P mesuré vaut alors

$$P = \frac{X - Y}{X + Y} = a \tag{1.16}$$

Dans ce cas, le paramètre P correspond donc au degré de polarisation de la lumière rétrodiffusée.

Cependant, dans un contexte plus général, P n'est pas égal au degré de polarisation : c'est pourquoi nous préférons l'appeler *contraste d'états orthogonaux* (CEO), ou *orthogonal state contrast* (OSC). Dans tous les cas le paramètre P est compris entre -1 et 1 et fournit une information sur les propriétés polarimétriques du matériau observé. Par la suite, nous nous intéresserons tout particulièrement à ce type d'imageur.

1.2.5 Polarimètre à une dimension

Ce type d'imageur est le plus simple à mettre en oeuvre. Il suffit pour cela de placer un analyseur devant le détecteur et d'ajuster son état de polarisation pour maximiser le contraste entre l'objet d'intérêt et le fond. Cette technique est communément employée en photographie, pour limiter l'influence de la lumière polarisée linéairement par la diffusion de l'atmosphère [24]. Des techniques similaires ont été employées pour la vision sous l'eau, dans un milieu diffusant avec des polarisations linéaires ou circulaires [25]. Notons que la plupart des animaux marins et des insectes sont dotés d'une vision polarisée linéairement [26,27] ou circulairement [28]. Ceci leur permet de s'orienter ou d'augmenter le contraste dans la scène observée. On trouve également

des applications pour la sécurité routière, où des dispositifs actifs sont utilisés pour augmenter la visibilité de nuit sans pour autant être ébloui par les panneaux de signalisation [29]. Nous proposerons l'étude d'un tel système dans le chapitre 4.

1.3 Conception et réalisation d'un système d'imagerie d'OSC expérimental

Dans la partie précédente, nous avons passé en revue différents types d'imageurs polarimétriques. Intéressons-nous maintenant aux imageurs d'OSC actifs qui requièrent l'analyse de la lumière rétrodiffusée suivant deux états de polarisation orthogonaux. Ceci est généralement effectué en utilisant un composant optique tel qu'un polariseur linéaire tournant [30], un rotateur de polarisation à base de cristaux liquides [31], un déphaseur variable [8, 18], ou un modulateur ferroélectrique [19,32,33]. Ce type d'approche présente deux inconvénients majeurs. Le premier est que l'acquisition des deux images est séquentielle (l'une avant et l'autre après avoir basculé le rotateur). Si on observe une scène en mouvement, elle apparaîtra différemment sur les deux images, conduisant à des erreurs d'estimation et de détection dans les images d'OSC. Le deuxième inconvénient est que le composant actif rotateur de polarisation peut introduire des erreurs non-systématiques qui peuvent évoluer avec le temps, la température. Une calibration ne permettra donc pas de les corriger. Une solution à ces deux problèmes consiste à utiliser un cube séparateur de polarisation qui permet de faire l'image de deux états de polarisation linéaire orthogonaux sur deux capteurs différents [34–36]. Cependant, même si les deux détecteurs sont identiques, ils peuvent avoir des statistiques de bruit différentes, des réponses en température différentes ...

Pour répondre à cette problématique, nous avons conçu un système dépourvu de bruit "technique" introduit par le composant rotateur de polarisation, ou par la présence de plusieurs détecteurs. Pour cela nous imageons simultanément les deux états de polarisation orthogonaux sur le même détecteur. Les perturbations d'un tel système ont le mérite d'être stables dans le temps et peuvent être calibrées au préalable. Les performances d'un tel système doivent être limitées par le bruit de détecteur et le bruit de photons, qui sont des limites fondamentales. Bien entendu un compromis sur la résolution spatiale doit être fait.

Dans un premier temps nous analyserons les différentes possibilités pour effectuer la séparation des états de polarisation orthogonaux. Nous mettrons ensuite au point une architecture, que nous optimiserons pour en limiter les aberrations optiques. Nous verrons dans une troisième partie comment les aberrations résiduelles peuvent être corrigées *a posteriori* grâce à une calibration. Nous testerons enfin notre système dans des conditions réelles, où les systèmes basés sur une acquisition séquentielle sont mis en défaut.

1.3.1 Choix du séparateur de polarisation

Pour former les deux images sur le même détecteur, nous utilisons un composant biréfringent qui sépare le faisceau rétro-réfléchi en deux faisceaux totalement polarisés linéaires et orthogonaux. Cette séparation peut être spatiale ou angulaire et être effectuée sur un faisceau convergent

ou collimaté. Nous allons comparer les différentes configurations possibles qui sont présentées sur la figure Fig.1.4. La séparation spatiale consiste à utiliser un séparateur du type polariscope de Savart, qui divise un rayon optique incident en deux rayons parallèles décalés latéralement (voir Fig.1.4.a et 1.4.b). La séparation angulaire, quant à elle, est réalisée avec un prisme de Wollaston par exemple. En sortie, les deux rayons polarisés orthogonalement sont déviés chacun dans une direction (voir Fig.1.4.c et 1.4.d).

La configuration de la figure Fig.1.4.a consiste à séparer spatialement un faisceau convergent. Weijers a déjà étudié cette architecture dans la référence [37] et a montré qu'elle était limitée par l'astigmatisme.

La configuration de la Figure Fig.1.4.b réalise une séparation spatiale sur un faisceau collimaté. Il est donc nécessaire d'utiliser deux systèmes optiques (lentilles ou objectifs) pour former les deux images sur le détecteur. L'ouverture du système est alors limitée par l'ouverture des deux lentilles, qui est au maximum égale à la distance séparant les deux faisceaux en sortie du séparateur de polarisation. Un cristal biréfringent d'YVO4 d'une longueur de 2 cm donnera en sortie une séparation de 2 mm. Les 2 lentilles auront donc un diamètre de cet ordre de grandeur, ce qui va fortement limiter le flux lumineux atteignant le détecteur. Il n'y a pas à notre connaissance de système basé sur cette architecture dans la littérature.

La séparation angulaire d'un faisceau convergent (voir Fig.1.4.c) a été étudiée dans la référence [38] et est fortement limitée par l'astigmatisme, la coma et la distorsion. De plus, les deux images ne sont généralement pas formées dans le même plan focal.

La dernière configuration présentée dans la Fig.1.4.d, repose sur une séparation angulaire d'un faisceau collimaté. Nous avons sélectionné cette architecture car le composant séparateur de polarisation ne fait que transformer un front d'onde plan, en deux fronts d'ondes plan déviés. La séparation d'état de polarisation n'introduit donc pas d'aberrations optiques dans le système. Cette configuration a été testée par Perrin *et al.* [39] dans un polarimètre passif pour l'astronomie. Harvey *et al.* [40] ont également utilisé cette technique couplée à des filtres de Lyot pour obtenir un imageur multispectral, mais n'ont pas exploité la capacité polarimétrique du système.

Dans l'analyse ci-dessus, nous avons considéré que le faisceau incident était polarisé linéairement, tout comme les deux états d'analyse. La raison de ce choix est purement technique : la plupart des séparateurs de polarisation fonctionnent avec des polarisations linéaires. Cependant, le système proposé peut facilement s'adapter à une illumination dont l'état de polarisation est quelconque. Il suffit pour cela de déplacer une lame de phase (statique) en entrée du séparateur de polarisation pour avoir les états d'analyse parallèle et orthogonal à l'état de polarisation d'illumination. Pour analyser suivant les polarisations circulaires gauche et droite, il suffit de placer une lame $\lambda/4$ en amont du séparateur. L'utilisation de lames biréfringentes achromatiques, dont la retardance varie de quelques pour cent sur une plage de 200 nm typiquement, permet de conserver les capacités large bande spectrale du système.

1.3.2 Conception du système

Le système d'imagerie que nous avons conçu repose sur la configuration choisie précédemment. Rappelons que nous cherchons à mettre au point un imageur polarimétrique dans lequel

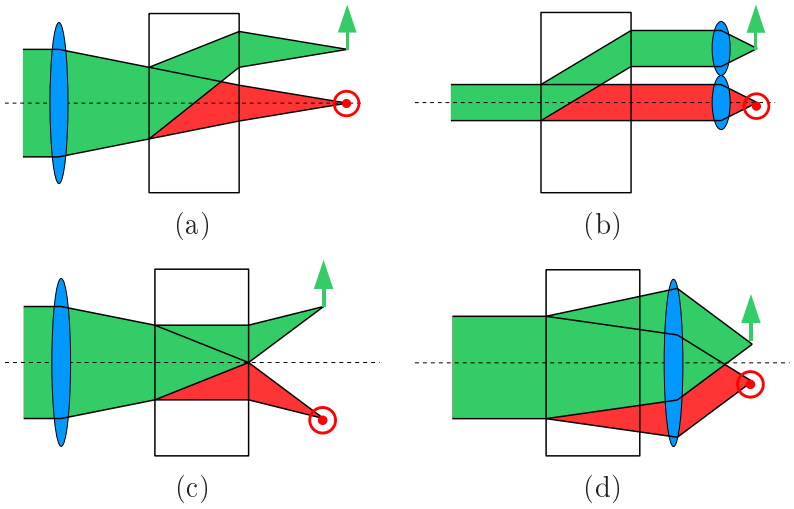


FIGURE 1.4 – Séparation spatiale avec un polariscope de Savart (a et b) et séparation angulaire avec un prisme de Wollaston (c et d) appliquées respectivement à un faisceau convergent ou collimaté.

le bruits de photons et le bruit de détecteur sont limitants. Il sera l'outil expérimental qui nous permettra, par la suite, de valider nos développements théoriques. Le schéma expérimental est présenté sur la figure Fig.1.5 : L'objectif L1 permet de faire une image intermédiaire de la scène. Cette image est renvoyée à l'infini par l'objectif L2. Le faisceau obtenu est alors séparé angulairement d'un angle θ par le prisme de Wollaston. Les faisceaux ordinaire et extraordinaire sont focalisés sur la matrice CCD grâce à un objectif unique L3, pour former respectivement les images **X** et **Y**. Le masque de champ rectangulaire M est placé sur l'image intermédiaire et permet d'éviter le recouvrement des deux images de polarisation sur le détecteur.

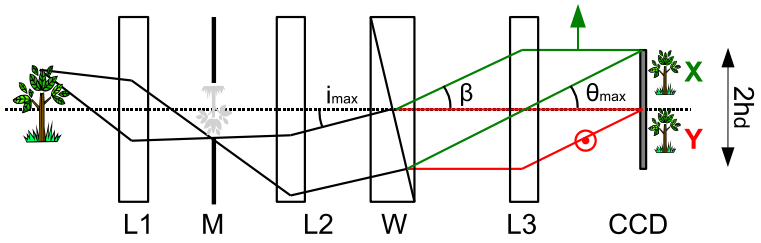


FIGURE 1.5 – Dispositif expérimental composé d'un prisme de Wollaston (W), de trois objectifs (L1,L2,L3), d'un masque de champ rectangulaire(M) et d'un détecteur de hauteur $2h_d$.

L'élément clé du système est le prisme de Wollaston. Comme on peut le voir sur la figure 1.6, un rayon de polarisation quelconque arrivant avec une incidence i sur le prisme de Wollaston va être séparé en deux rayons totalement polarisés orthogonalement. Pour simplifier les notations

nous appellerons rayon ordinaire (resp. extraordinaire), le rayon qui est ordinaire dans le premier élément du prisme de Wollaston.

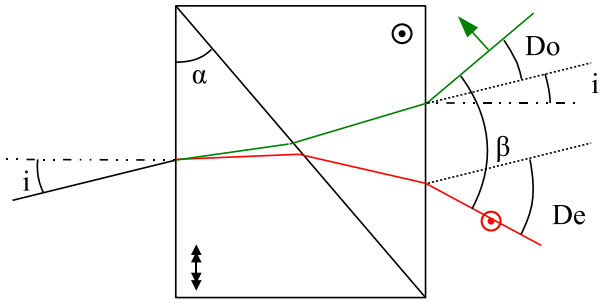


FIGURE 1.6 – Déviation d'un rayon lumineux par le prisme de Wollaston : un rayon de polarisation quelconque arrive avec un incidence i sur le prisme de Wollaston , qui génère un rayon ordinaire (dévié de l'angle D_o) et un rayon extraordinaire (dévié de l'angle D_e).

En sortie du prisme de Wollaston, les deux rayons polarisés linéairement sont séparés d'un angle de divergence $\beta = D_o + D_e$, où D_o et D_e sont respectivement les angles de déviation ordinaire et extraordinaire. Ces angles dépendent de l'angle du prisme de Wollaston α, de l'angle d'incidence i et de la longueur d'onde. Par construction on se rend compte qu'une onde plane monochromatique caractérisée par son vecteur d'onde $\vec{k}$, va générer deux ondes planes ($\vec{k_o}$ et $\vec{k_e}$). Par conséquence, ce composant n'introduit pas à proprement parler d'aberrations optiques. En effet, le front d'onde n'est pas déformé. Cependant, les angles de déviations D_o and D_e dépendent légèrement de l'angle d'incidence i. Cela va se traduire par une légère déformation verticale des images ordinaires et extraordinaires, que nous appellerons distorsion anamorphique non-symétrique.

Pour concevoir le système nous supposons dans un premier temps que la déviation du prisme de Wollaston est indépendante de l'angle d'incidence i et peut être approximée par [3] :

$$\beta \approx 2\tan^{-1}(|\Delta n|\tan\alpha). \tag{1.17}$$

avec $\Delta n = n_e - n_o$ où n_o, n_e sont les indices ordinaire et extraordinaire. Supposons que le système soit conçu de telle manière que les images $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ ne se superposent pas et couvrent la totalité du détecteur. Le rayon de bord de champ arrive sur le prisme de Wollaston avec un angle d'incidence noté i_{max} (voir Fig.1.5). Le rayon ordinaire associé correspond au bord supérieur de l'image $\mathbf{X}$, c'est-à-dire au bord supérieur du détecteur. Quant au rayon extraordinaire associé, il correspond au bord supérieur de l'image $\mathbf{Y}$, c'est-à-dire au milieu du détecteur. Grâce à cette constatation nous obtenons la relation suivante :

$$\beta = \theta_{max} = h_d/(2f'_3). \tag{1.18}$$

où θ_{max} est l'angle de champ de l'objectif L3, h_d la demi-hauteur du détecteur et f'_3 la focale du dernier objectif L3. A partir de l'expression de θ_{max}, nous pouvons calculer l'angle i_{max} : en effet, si on fait l'approximation que les déviations D_o et D_e sont symétriques, on obtient

$i_{max} + D_o = \beta$ et donc :

$$i_{max} = \beta/2. \tag{1.19}$$

Etant donné que le masque de champ (M) délimite l'image intermédiaire, sa hauteur notée h_m est directement liée à l'angle de champ i_{max} :

$$h_m = i_{max} f_2' = i_{max}\beta/2, \tag{1.20}$$

où f_2' est la focale de l'objectif L2. L'angle de champ et le grandissement du système complet sont ensuite déterminés à partir des caractéristiques de l'objectif L1 et peuvent être adaptés en fonction du type d'application (imagerie médicale, télédétection ...). Ces calculs préliminaires nous ont permis de dimensionner rapidement le système. Nous avons utilisé comme détecteur une caméra Basler A312f 12 bits avec une résolution de 782×582 pixels. Le prisme de Wollaston a un angle de séparation β de 5°. En conséquence, l'angle d'incidence i varie entre $-2,5°$ to $2,5°$ (voir l'équation 1.19). Les objectifs L2 et L3 sont des doublets achromatiques de 35 mm de focale ouverts à F/2.1. Dans nos expériences l'objectif L1 est un zoom 28 mm-200 mm.

1.3.3 Optimisation de la configuration

Dans cette partie nous présentons un exemple d'optimisation que nous avons réalisé grâce au logiciel de conception optique OSLO. Le capteur que nous utilisons est une matrice CCD dont la taille des pixels est de $d_{pixel} = 8,3\ \mu$m de coté. La fréquence spatiale du capteur est donc $\nu_c = 1/d_{pixel} \approx 120$ traits/mm. La configuration que nous avons simulée comprend une lentille parfaite de focale L1, un doublet achromatique de focale 35 mm (L2) et un triplet de Cook de focale 35 mm (L3). L'optimisation se fait sur la distance séparant les composants. Le critère à minimiser est la fonction d'erreur générée par le logiciel qui prend en compte l'ensemble des aberrations optiques du 3ème ordre. Nous obtenons au final l'architecture présentée sur la figure 1.7. Nous mesurons les performances du système en étudiant sa fonction de transfert de modulation (FTM). La FTM est le module de la fonction de transfert optique ou "optical transfer function" (OTF) définie comme l'autocorrélation de la pupille d'entrée du système [41]. La FTM est une excellente indication de la qualité de retransmission de l'information par l'instrument : elle mesure le rapport entre le contraste d'une mire modulée spatialement et le contraste dans l'image correspondante fournie par le système. On considère que le système a des performances correctes, si la FTM est supérieure à $0,5$ pour une fréquence spatiale égale à la moitié de celle du capteur (qui est $\nu_c/2 \approx 60$ traits/mm. dans notre cas). La FTM simulée du système après optimisation est représentée sur la figure 1.8. Nous pouvons voir que le critère de performance est vérifié pour notre système, excepté pour les points en bord de champ (incidence de $2,5°$) où la FTM descend à une valeur de contraste de $0,4$.

Nous représentons sur la figure 1.9, une photographie du montage expérimental, correspondant à l'optimisation réalisée précédemment.

1.3.4 Réduction des aberrations résiduelles dans les images d'OSC

Nous venons de montrer dans la partie précédente, que les aberrations du système étaient limitées par construction. Cependant, le prisme de Wollaston et le dernier objectif (L3) intro-

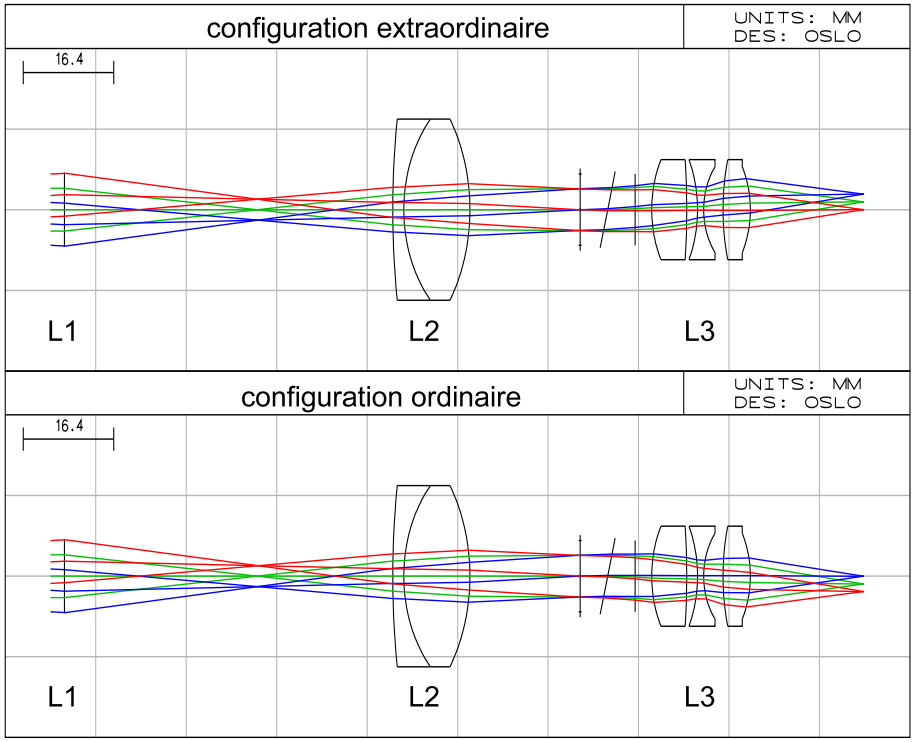


FIGURE 1.7 – Objet à l'infini suivi d'une lentille parfaite de focale 35 mm, d'un doublet achromatique, du wollaston et d'un triplet de Cook. En haut le tracé extraordinaire, en bas le tracé ordinaire.

duisent de légères déformations dans les images $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$: nous allons les traiter dans cette partie. Deux types d'aberrations doivent être distingués :

- les aberrations qui détériorent les images $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ de la même manière (comme les aberrations introduites par les objectifs L1 et L2).
- les aberrations qui n'affectent pas $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ de la même manière.

Nous nous intéresserons au deuxième type d'aberration puisqu'il affecte grandement la qualité de l'image OSC : en effet le calcul de l'image OSC repose sur la différence et le rapport de deux images (voir Eq.1.14). Dans cette équation, les pixels $X(u,v)$ et $Y(u,v)$ doivent faire référence à la même région de la scène observée pour que $P(u,v)$ ait un sens. L'image d'OSC est donc très sensible aux déformations relatives des images $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$. Le système présenté précédemment nous permet d'obtenir une image brute dont la partie supérieure correspond au canal parallèle (image $\mathbf{X}$) et la partie inférieure correspond au canal orthogonal (image $\mathbf{Y}$). Les deux images d'intensité $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ sont extraites de cette image brute et doivent être recalées l'une par rapport à l'autre. Ce recalage se réduirait à une simple translation si les images n'étaient pas déformées, mais nous allons voir que ce n'est pas le cas. Il y a dans le système deux sortes d'aberrations non symétriques que nous allons étudier à présent.

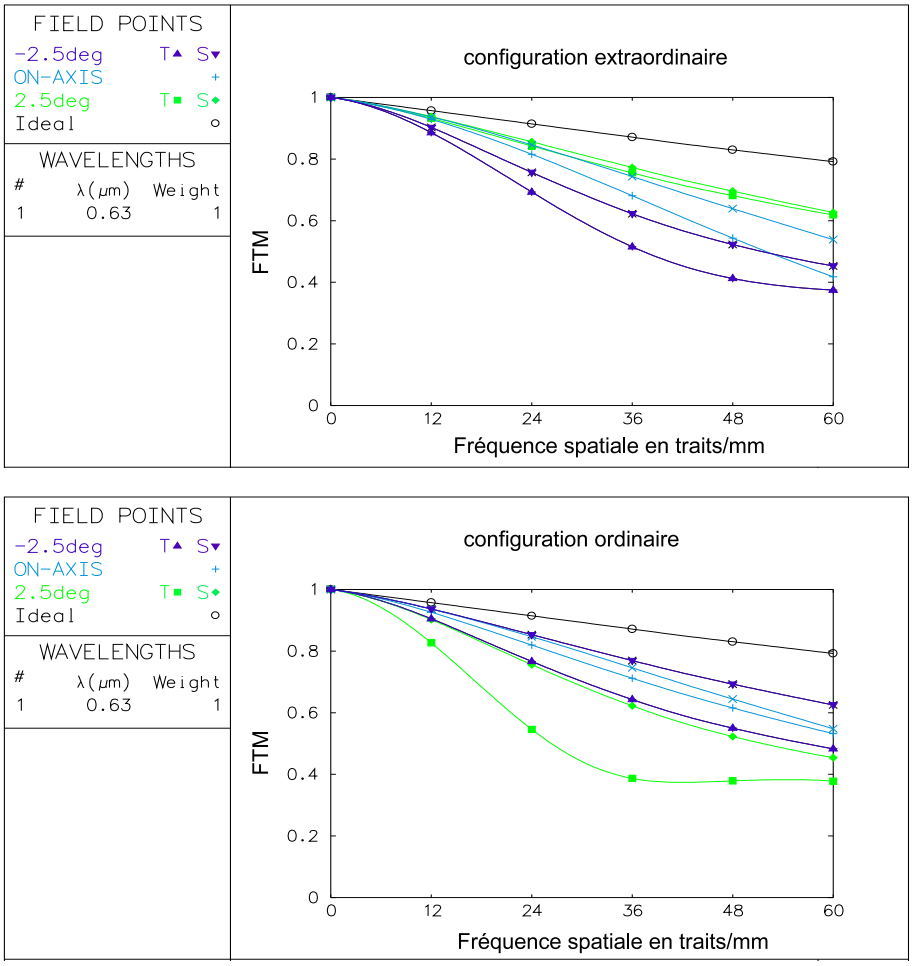


FIGURE 1.8 – Objet à l'infini suivi d'une lentille parfaite de focale 35mm, d'un doublet achromatique, du wollaston et d'un triplet de Cook. En haut le tracé extra-ordinaire, en bas le tracé ordinaire.

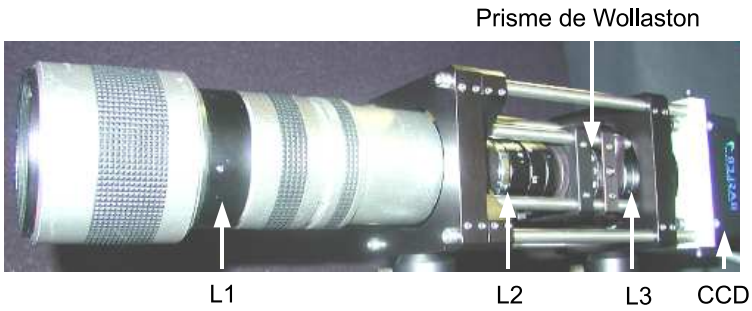


FIGURE 1.9 – Montage expérimental

Distorsion anamorphique non-symétrique introduite par le prisme de Wollaston

Nous avons représenté sur la figure Fig.1.10 une simulation de l'évolution des déviations D_e et D_o en fonction de l'incidence i. Ces courbes simulées dépendent comme on le voit de la longueur d'onde. Intéressons-nous dans un premier temps à un système actif monochromatique. Un système multispectral est envisageable à condition de calibrer correctement le système. Pour une longueur d'onde donnée nous remarquons que les courbures des déviations sont de signe opposé et varient de manière non symétrique : c'est-à-dire que $|D_o|$ varie sur une plage plus importante que $|D_e|$. La hauteur de l'image $\mathbf{X}$ va donc être moindre qu'elle ne le serait si D_o était fixe, alors que la hauteur de l'image $\mathbf{Y}$ est plus grande qu'elle ne le serait si D_e était fixe.

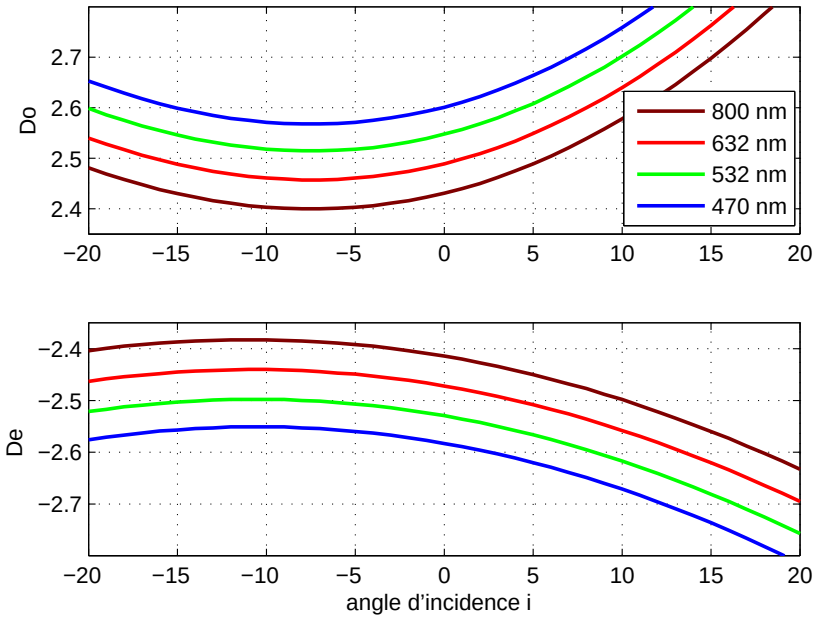


FIGURE 1.10 – Déviation ordinaire (D_o) et extraordinaire (D_e) d'un prisme de Wollaston de séparation angulaire de 5° en fonction de l'angle d'incidence i pour $\lambda = 632$ nm. Tous les angles sont en degrés.

Nous pouvons quantifier la déformation introduite par notre système expérimental. Supposons que les images soient recalées en utilisant une translation seulement, avec la référence au centre de l'image ($i = 0°$). En d'autres termes, l'image $\mathbf{Y}$ est translatée pour que son centre soit recalé sur celui de l'image $\mathbf{Y}$. Le décalage maximum observé entre les deux images est atteint sur leurs bords supérieurs ou inférieurs ($i = -2,5°$ or $i = 2,5°$, *cf.* Eq.1.19) et est d'environ $0,05°$ ce qui correspond, dans notre cas, à un décalage de 4 pixels sur le détecteur.

Comme nous pouvons le voir sur la figure 1.10, le minimum de la courbure des déviations n'est pas atteint pour une incidence normale mais pour $i = i_{mde} \approx -8°$ pour la déviation extraordinaire et $i = i_{mdo} \approx -10°$ pour la déviation ordinaire. Si le Wollaston est "tilté" d'un angle $i_{md} = (i_{mde} + i_{mdo})/2$, les déviations D_o et D_e varieront peu avec l'incidence. Étant donné que nous connaissons la déformation introduite par le prisme de Wollaston, il est possible de

la corriger informatiquement. Cependant, nous allons voir par la suite que le système est aussi affecté par une distorsion introduite par l'objectif L3 et qu'une correction globale est nécessaire.

Distorsion non symétrique introduite par les objectifs

Comme nous le disions précédemment toutes les aberrations optiques introduites par les objectifs L1 et L2 ne sont pas vraiment gênantes, puisqu'elles affectent les images $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ de la même façon : elles n'engendrent pas de problème de recalage. Ce n'est pas le cas de l'objectif L3 qui est positionné en aval du séparateur de polarisation. Le phénomène mis en jeu est schématisé de manière exagérée sur la figure 1.11 : la distorsion de l'objectif L3 ne déforme pas symétriquement les deux images : la partie supérieure de l'image $\mathbf{X}$ est plus distordue que la partie inférieure alors que c'est le contraire pour l'image $\mathbf{Y}$.

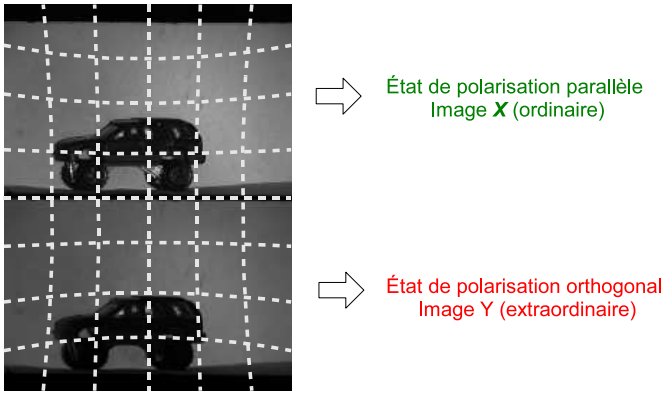


FIGURE 1.11 – Image brute d'un modèle réduit sur un fond diffusant. La partie supérieure de l'image brute est l'image ordinaire qui correspond à l'état de polarisation parallèle (image $\mathbf{X}$). La partie inférieure est l'image extraordinaire, qui correspond à l'état de polarisation orthogonal (image $\mathbf{Y}$). La distorsion introduite par l'objectif L3 est volontairement exagérée et est représentée en trait pointillé.

Au lieu d'essayer de caractériser chaque élément du système, nous avons choisi de calibrer le système complet (*i.e.* le prisme de Wollaston et la lentille L3). Après extraction de l'image brute, les pixels $X(u,v)$ et $Y(u,v)$ ne correspondent pas à une même région de la scène. L'image $\mathbf{Y}$ va donc être déformée numériquement en une image $\mathbf{Y'}$ telle que chaque paire de pixels $X(u,v)$ et $Y(u,v)$ corresponde à un même point de l'espace objet.

Pour estimer la déformation à appliquer, un ensemble de H paires de points de contrôle est utilisé : $\{(p_j, q_j), j \in [1, H]\}$. Le premier élément de la paire $p_j = (u_j, v_j)$ correspond à la position d'un point dans l'image $\mathbf{Y}$ brute, alors que le second élément $q_j = (u'_j, v'_j)$ correspond à la position du même point après transformation. La déformation est une fonction f, qui à chaque point de l'image $\mathbf{Y}$ associe un point dans l'image $\mathbf{Y'}$ et qui vérifie la propriété $f(p_j) = q_j$ pour chacun des points de contrôle. En d'autres termes, la déformation est une fonction inférée à partir des points de contrôles, qui décrit mathématiquement comment l'image non corrigée $\mathbf{Y}$ doit être déformée. Une fois que la fonction f est estimée, il suffit de l'appliquer à l'image $\mathbf{Y}$,

puis d'interpoler la valeur de chaque pixel de l'image $\mathbf{Y}'$. Dans la pratique nous utilisons une transformation polynômiale d'ordre 4 : la fonction f est donc un polynôme d'ordre 4 en u et v. La calibration du système a pour but d'estimer les 30 coefficients du polynôme. Pour cela nous faisons l'image d'une grille de 170 pastilles blanches sur fond noir représentée sur la figure 1.12. La scène est éclairée avec un faisceau non polarisé pour obtenir le même flux lumineux dans les deux canaux (la grille imprimée est supposée totalement dépolarisante). Les barycentres des pastilles blanches imagées sont utilisés comme points de contrôle et les coefficients du polynômes sont estimés au sens des moindres carrés.

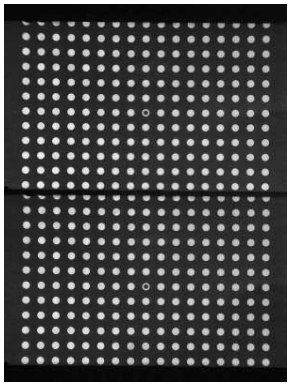


FIGURE 1.12 – Image brute d'une grille de pastilles blanches sur fond noir, utilisée pour la calibration du système. La partie supérieure de l'image brute est l'image ordinaire qui correspond à l'état de polarisation parallèle (image $\mathbf{X}$). La partie inférieure est l'image extraordinaire, qui correspond à l'état de polarisation orthogonal (image $\mathbf{Y}$).

Pour illustrer la nécessité et l'efficacité de cette méthode de recalage nous utilisons une scène composée de disques concentriques noirs et blancs (voir figure 1.13.a). Comme précédemment, la scène est illuminée avec un faisceau non polarisé. Sur la figure 1.13.b, nous calculons l'image d'OSC après avoir appliqué un recalage en translation avec la référence au centre de l'image. Nous observons que la partie centrale de l'image a une valeur moyenne proche de 0. En s'éloignant du centre de l'image on voit apparaître des "croissants" dont la valeur moyenne est non nulle. Cela montre bien que les images $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ ne sont pas recalées correctement. Nous remarquons également que la distorsion observée est majoritairement verticale (les croissants observés sont en effet horizontaux). Sur la figure 1.13.c, nous avons représenté l'image d'OSC où $\mathbf{Y}'$ est l'image corrigée par la méthode décrite ci-dessus. Le résultat est très satisfaisant. On peut remarquer que les anneaux sont toujours discernables : cela provient simplement du fait que le flux lumineux rétrodiffusé et donc le bruit de photon associé est plus important sur les zones blanches que sur les zones noires. Grâce aux agrandissements présentés sur les figures 1.13.d et 1.13.e nous observons que la qualité du recalage passe de quelques pixels (typiquement trois) à moins d'un pixel. Enfin, nous avons représenté sur les figures 1.13.e et 1.13.f les histogrammes des images d'OSC (b) et (c). Le recalage avec déformation permet de réduire fortement la largeur de l'histogramme : en effet il n'y a plus de valeurs d'OSC supérieures à 0,25 en valeur absolue.

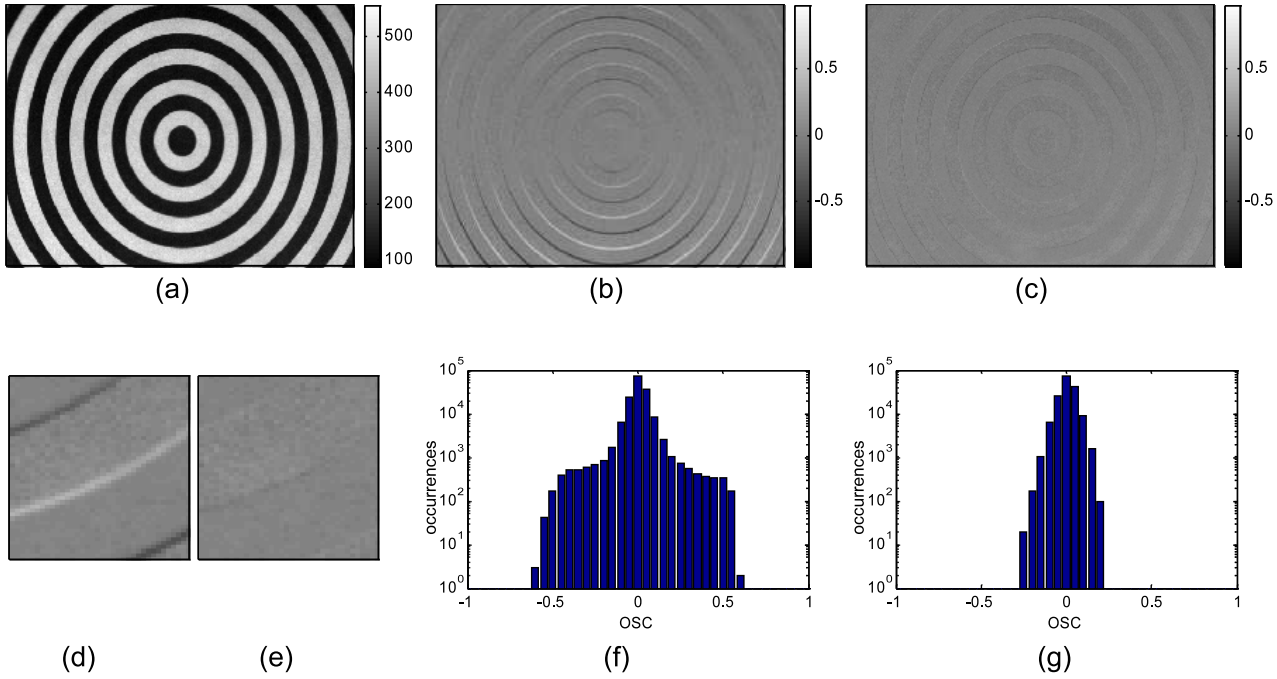


FIGURE 1.13 – (a) Image d'intensité d'une mire composée de disques noirs et blancs concentriques. Images OSC avec un recalage par simple translation (b) (zoomée sur (d)) ou après une transformation polynômiale (c) (zoomée sur (e)). Les histogrammes des images (b) et (c) sont présentés respectivement sur les figures (f) et (g)

Par la suite nous considérerons que le système est calibré et que l'image notée $\mathbf{Y}$ est déjà corrigée grâce à l'algorithme présenté ci-dessus.

1.3.5 Calibration polarimétrique du système

Le système d'imagerie OSC présenté dans les parties précédentes nécessite une calibration pour évaluer la précision de mesure. Nous prenons en compte certains défauts représentés dans la figure 1.14. Le vecteur de Stokes à analyser est noté $\vec{S} = (S_0, S_1, S_2, S_3)^T$. La dépolarisation introduite par l'instrument avant la séparation est modélisée grâce à une matrice de Mueller d'un matériau purement dépolarisant (voir tableau 1.2) notée M_D.

Le prisme de Wollaston peut présenter une transmittance différente dans la voie ordinaire et la voie extraordinaire que nous notons respectivement τ_o et τ_e. Comme tout polariseur, son taux d'extinction n'est pas infini : nous voulons dire par là qu'il ne polarise que partiellement la lumière incidente. Le prisme dans la voie ordinaire (resp. extraordinaire) est modélisé comme un polariseur partiel linéaire vertical (resp. horizontal) dont la matrice de Mueller est notée M_{PV} (resp. M_{PH}) (voir le tableau 1.2). Le degré de polarisation en sortie du prisme est supposé identique dans chacune des voies et noté P_w.

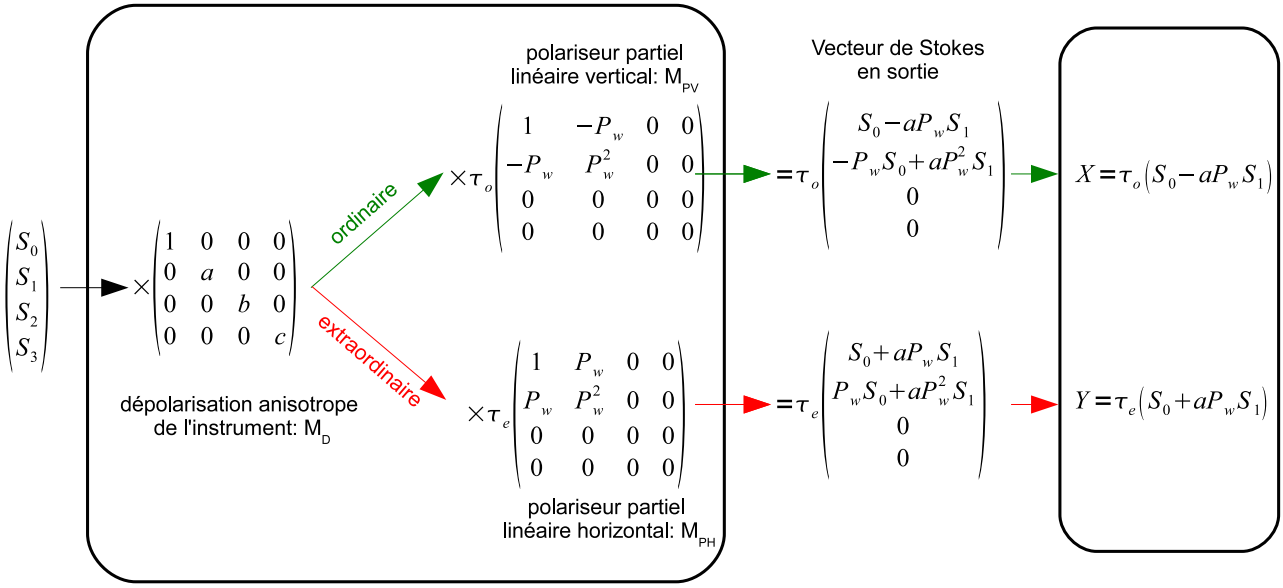


FIGURE 1.14 – Modélisation des défauts de l'instrument.

En sortie de l'instrument, nous mesurons dans la voie ordinaire l'intensité du vecteur de Stokes $M_{PV}M_D\vec{S}$ qui vaut $X = \tau_o(S_0 - aP_wS_1)$. Dans la voie extraordinaire nous mesurons l'intensité du vecteur de Stokes $M_{PH}M_D\vec{S}$ qui vaut $Y = \tau_e(S_0 + aP_wS_1)$. Si l'OSC est calculé sans tenir compte des défauts du système nous obtenons :

$$\frac{X-Y}{X+Y} = \frac{(S_0 - aP_wS_1) - \frac{\tau_e}{\tau_o}(S_0 + aP_wS_1)}{(S_0 - aP_wS_1) + \frac{\tau_e}{\tau_o}(S_0 + aP_wS_1)} \tag{1.21}$$

Pour pouvoir corriger les images et obtenir une valeur d'OSC sans biais, il nous faut connaître deux quantités que sont $\eta_0 = \frac{\tau_e}{\tau_o}$ et $\eta_1 = \frac{1}{aP_w}$. En effet nous pourrions ainsi calculer la vraie valeur de l'OSC :

$$\eta_1 \frac{\eta_0 X - Y}{\eta_0 X + Y} = \frac{S_1}{S_0} = P \tag{1.22}$$

Pour cette calibration nous aurons besoin d'une source lumineuse totalement dépolarisée. Nous utilisons une sphère intégratrice présentant une ouverture circulaire de 5 cm de diamètre. Cette ouverture est recouverte d'un filtre interférentiel centré sur $632nm$ avec une bande passante de 10 nm.

Polarisation introduite par le système : mesure de η_0

Commençons par caractériser la polarisation induite par le système c'est-à-dire la valeur de l'OSC lorsque l'on analyse une lumière totalement dépolarisée ($S_1 = S_2 = S_3 = 0$). Pour cela nous faisons la mise au point de l'objectif L1 sur la surface du filtre et obtenons ainsi une image d'intensité et une image d'OSC d'une scène totalement et uniformément dépolarisée. La

moyenne et la variance empiriques sont estimées dans une région de 50×50 pixels et cela pour différents temps d'intégration de la caméra. Les résultats sont présentés dans la figure 1.15.

Nous voyons sur la figure 1.15.a que la moyenne de l'intensité dépend linéairement du temps d'intégration. Ceci prouve que le capteur est bien linéaire comme nous l'avons montré dans l'annexe A. La variance empirique dépend elle aussi linéairement du temps d'intégration comme le montre la figure 1.15.b. Cela est dû au fait, qu'en présence de signal suffisant, le bruit de photons est prédominant.

La figure 1.15.c montre que même si une lumière totalement dépolarisée entre dans le système ce dernier mesure un OSC moyen $P_0 = -0,012$. Nous avons vérifié que ce phénomène ne provenait pas d'une polarisation partielle résiduelle provenant de la sphère intégratrice. En effet, lorsque nous tournons de 90° le système autour de l'axe optique nous mesurons toujours la même valeur. Ceci est en fait dû à la transmission du prisme de Wollaston qui n'est pas tout à fait la même pour les deux états de polarisation orthogonaux. En utilisant l'équation 1.21 nous obtenons :

$$\frac{X-Y}{X+Y} = \frac{1-\eta_0}{1+\eta_0} = P_0 \tag{1.23}$$

Nous concluons que $\eta_0 = 1 - P_0/1 + P_0 = 1,024$.

Dépolarisation introduite par le système : mesure de η_1

La seconde source de biais que nous allons étudier est la dépolarisation introduite par les optiques du système et par le Wollaston. Pour cela nous plaçons, sur une monture rotative, un polariseur dont le taux d'extinction est 1 :10000 dans la gamme de longueurs d'ondes sélectionnée par le filtre interférentiel. Ceci nous permet d'obtenir une scène uniforme émettant une lumière avec un degré de polarisation $P_{source} = 99,99\%$. La mise au point de l'imageur d'OSC est faite sur le polariseur et ce dernier est orienté pour maximiser le signal dans l'image $\mathbf{X}$. La moyenne et la variance empiriques sont estimées dans une région de 50×50 pixels et cela pour différents temps d'intégration de la caméra. Les résultats sont présentés dans la figure 1.16. Nous précisons que nous tenons compte de la calibration précédente pour calculer l'OSC : l'image $\mathbf{X}$ est au préalable multipliée par la constante η_0. Si le système était parfait, nous devrions mesurer un OSC de $99,99\%$. Ce n'est pas le cas comme nous pouvons le voir sur la figure 1.16.c : la valeur moyenne de l'OSC est en effet de $P_1 = 98,2\%$ et ne dépend pas du temps d'intégration. Cette valeur est très proche de celle mesurée par Kawabata dans la référence [42] où un prisme de Wollaston était utilisé en tant que séparateur de polarisation. En utilisant l'équation 1.21 nous obtenons :

$$\frac{\eta_0 X - Y}{\eta_0 X + Y} = \frac{1}{\eta_1} = P_{source} P_1 \tag{1.24}$$

ce qui correspond à $\eta_1 = 1/(P_{source} P_1) = 1,018$

Grâce aux deux calibrations présentées ci-dessus nous pouvons obtenir une mesure de l'OSC affranchie des biais dus à la polarisation et la dépolarisation induites par le système.

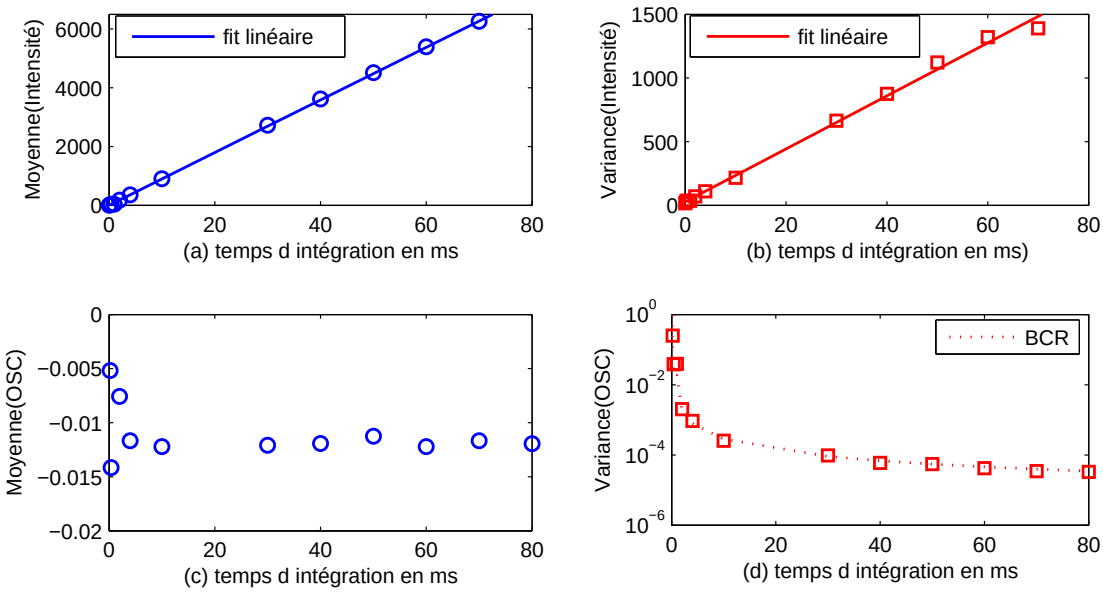


FIGURE 1.15 – Moyenne empirique (a) et variance empirique (b) sur l'image d'intensité calculées sur une zone de 50×50 pixels en observant une scène uniforme totalement dépolarisée. Moyenne empirique (c) et variance empirique (d) de l'OSC.

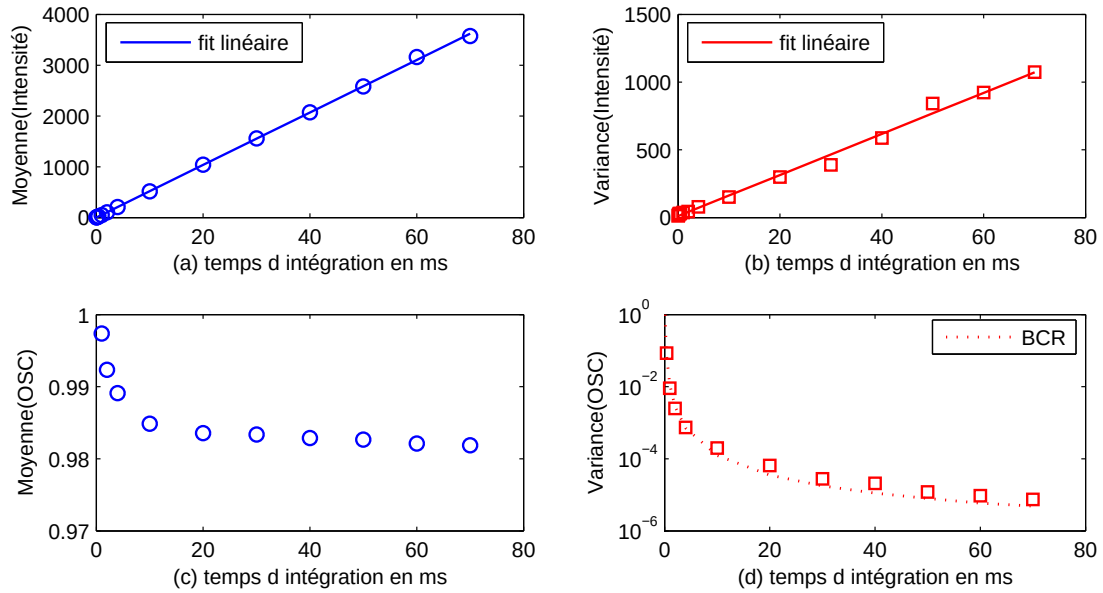


FIGURE 1.16 – Moyenne empirique (a) et variance empirique (b) sur l'image d'intensité calculées sur une zone de 50×50 pixels en observant une source uniforme totalement polarisée (à 99,99%). Moyenne empirique (c) et variance empirique (d) de l'OSC (estimé en tenant compte de la première calibration).

Précision de mesure de l'OSC

En ce qui concerne la précision de mesure de l'OSC nous avons tracé sur les figures 1.15.d et 1.16.d la variance de l'OSC et la borne de Cramer-Rao (BCR) associée. Nous verrons dans le chapitre 2 que la borne de Cramer-Rao est une borne inférieure sur la variance d'estimation qui peut être atteinte par un estimateur non-biaisé. Le calcul de la BCR en présence de bruit de photons et d'une contribution passive (bruit de détecteur par exemple) sera présenté dans la partie 2.3. Nous obtenons l'expression :

$$BCR_P(g) = \frac{(1-P^2)}{qI} + \frac{2g(1+P^2)}{(qI)^2}$$

où I est l'intensité en niveau de gris, $q = 4,85$ est le nombre de photoélectrons par niveau de gris (dont l'estimation est donnée dans l'annexe A),et g est la contribution passive estimée ici à 100 photoéléctrons. La variance estimée est très proche de la BCR ce qui justifie le fait que les images sont majoritairement limitées par le bruit de photons et le bruit de détecteur.

La conclusion à retenir ici, est que le système présente de légers biais que nous pouvons corriger. Cependant, l'application visée est de révéler des contrastes entre un objet d'intérêt et un fond et non pas de mesurer avec précision et de manière absolue l'OSC de chaque point de la scène. Dans de telles applications, le paramètre le plus important est la variance de l'OSC et nous avons montré qu'elle atteignait sa limite fondamentale qu'est la BCR.

Dans la suite, nous considérons que le système est calibré et que les image notées $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ sont déjà corrigées grâce à la calibration polarimétrique.

1.3.6 Validation du concept dans des situations réelles

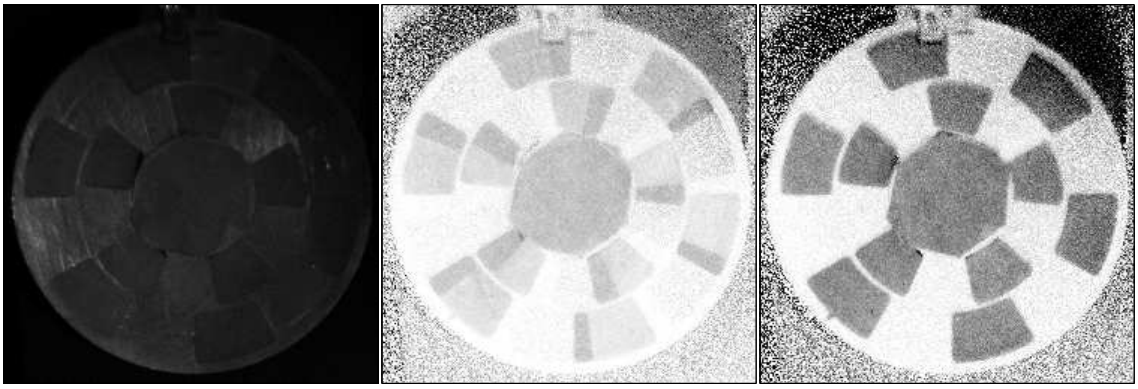
Maintenant que nous avons conçu un système d'imagerie OSC avec une acquisition simultanée couplée à une méthode de calibration efficace, nous allons montrer qualitativement les améliorations apportées par rapport à un système classique d'acquisition séquentielle. Nous nous sommes penchés sur quelques situations où les systèmes basés sur une acquisition séquentielle montrent des faiblesses [43,44] :

- observation d'objet en mouvement.
- observation à travers un milieu turbulent.
- utilisation d'une source d'illumination impulsionnelle.

Imagerie OSC d'objet en mouvement

Dans le but d'étudier l'influence du mouvement de la scène observée, nous utilisons un "chopper" métallique noir tournant devant un fond diffusant noir. Sur l'image d'intensité (figure 1.17.a), le contraste entre le fond (vu a travers les trous) et le "chopper" lui même, est très faible. Sur la figure 1.17.b, les images $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ sont acquises séquentiellement, pendant que le "chopper" tourne, ce qui se traduit par des problèmes de recalage dans certaines régions de l'image d'OSC. En effet, à cause du mouvement de la scène, un pixel $X(u,v)$ peut correspondre à un trou, alors que le pixel $Y(u,v)$ correspond à une partie métallique. Pour simuler un système

séquentiel nous avons utilisé l'imageur OSC du chapitre 1. Il suffit de considérer l'image $\mathbf{X}$ dans la $N^{ième}$ acquisition et l'image $\mathbf{Y}$ dans la $N+1^{ième}$. Nous voyons sur la figure 1.17.c, que le calcul de l'OSC est beaucoup plus précis lorsque l'acquisition des deux images est simultanée. Nous remarquons que le bruit est très important sur les images OSC, notamment sur le fond diffusant noir en arrière plan. Nous verrons par la suite qu'à faible flux le bruit de détecteur devient prédominant, ce qui donne lieu à une grande variance de l'OSC. Notons que le même type de problèmes se présente lorsque l'imageur est en mouvement, ce qui est souvent le cas lorsqu'il est placé sur un porteur.



(a) (b) (c)

FIGURE 1.17 – (a) Image d'intensité d'une scène composée d'un "chopper" métallique noir tournant sur un fond diffusant noir. (b) Image OSC avec une acquisition séquentielle des états de polarisation. (c) Image OSC avec une acquisition simultanée des états de polarisation.

Imagerie à travers les milieux turbulents

Lorsque l'on fait de l'imagerie longue distance en milieu extérieur, on est souvent confronté aux problèmes des turbulences atmosphériques. Elles se traduisent par une fluctuation de l'indice de réfraction qui déforme le front d'onde provenant d'un point de la scène et cela d'autant plus qu'il est éloigné. On comprend que si les images $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ sont acquises séquentiellement, elles ne seront pas perturbées de la même manière par la turbulence qui évolue pendant et entre les acquisitions. Pour illustrer ce phénomène nous plaçons une plaque métallique sur un tissu de camouflage diffusant, de telle manière qu'elle soit difficilement détectable dans l'image d'intensité 1.19.a. Une plaque chauffante est placée entre la scène et le système d'imagerie, afin que la propagation des ondes se fasse au travers d'un milieu turbulent (voir la figure 1.18). L'image d'intensité est donc légèrement floue. Avec une acquisition séquentielle, les images $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ ne sont pas perturbées de la même manière. La pièce métallique est alors noyée dans un ensemble d'artéfacts comme nous pouvons le voir sur la figure 1.19.b.

Pour expliquer ce phénomène, considérons une zone proche d'une frontière entre une zone claire et une zone sombre. Soit un pixel $X(u,v) = w$, correspondant à une zone claire. Si l'image orthogonale est déformée de telle sorte que $Y(u,v) = b$ corresponde à une zone sombre, alors

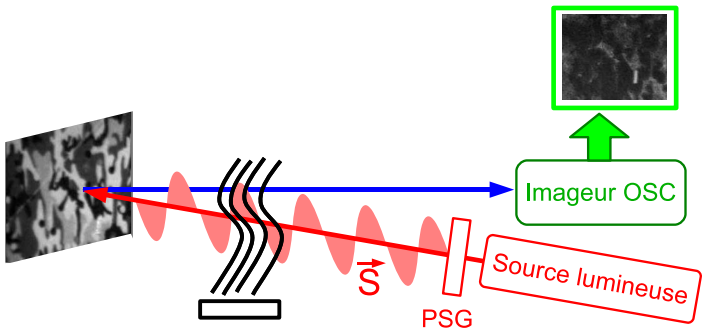


FIGURE 1.18 – Configuration d'imagerie à travers un milieu turbulent. La scène est composée d'un objet métallique sur un motif de camouflage diffusant. Elle est illuminée par un faisceau totalement polarisé de vecteur de Stokes $\vec{S}$ (linéaire vertical dans notre cas). La lumière rétro-réfléchie est analysée grâce à un imageur OSC. Une plaque chauffante permet de créer des turbulences entre le système et la scène observée.

l'estimation de l'OSC pour le pixel (u, v) est définie par

$$P(u,v) = \frac{X(u,v) - Y(u,v)}{X(u,v) + Y(u,v)} = \frac{w-b}{w+b} \neq 0, \tag{1.25}$$

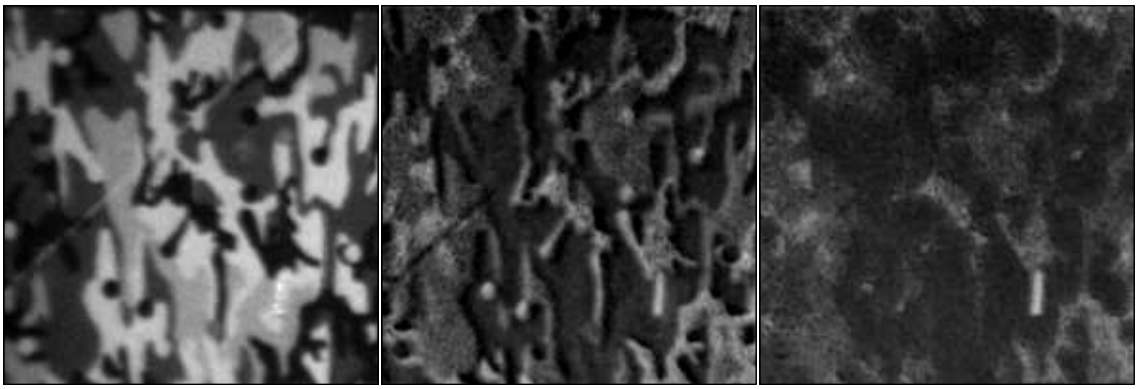
qui diffère de la valeur vraie de l'OSC. Le cas contraire, lorsqu'une région sombre dans l'image $\mathbf{X}$ correspond à une zone claire dans l'image $\mathbf{Y}$, peut même donner lieu à des valeurs négatives d'OSC.

Lorsque nous procédons à l'acquisition simultanée des deux états de polarisation, l'image OSC est toujours déformée par les turbulences mais ne comporte plus d'artéfacts comme nous pouvons le voir sur la figure 1.19.c. Dans ce cas l'image $\mathbf{Y}$ est affectée par le même état de turbulence que l'image $\mathbf{X}$ de telle manière que $Y(u,v) = w' \approx w$. Le paramètre OSC estimé est alors correct :

$$P(u,v) = \frac{X(u,v) - Y(u,v)}{X(u,v) + Y(u,v)} = \frac{w-w'}{w+w'}. \tag{1.26}$$

Nous remarquons également des faibles variations de l'OSC sur le fond dans la figure 1.19.c. Les régions sombres dans l'image d'intensité apparaissent claires dans l'image d'OSC. Ce phénomène est expliqué grâce à la théorie de Kubelka-Munk [45,46]. En effet, la lumière rétro-réfléchie par un matériau absorbant (région sombre) est principalement due à une interaction de surface, qui est peu dépolarisante. Au contraire les zones claires correspondent à des milieux moins absorbants et où la contribution du volume à la lumière rétrodiffusée est plus importante. Les régions sombres dans l'image d'intensité ont donc un OSC plus grand que les régions claires.

Il est important de rappeler que l'imagerie d'OSC simultanée ne permet pas de s'affranchir du "flou" généré par les turbulences mais révèle des contrastes polarimétriques utiles pour détecter la présence d'un objet d'intérêt.



(a) (b) (c)

FIGURE 1.19 – Image de 100x100 pixels d'une pièce de métal sur un motif de camouflage diffusant. (a) Image d'intensité , (b) d'OSC séquentiel et (c) d'OSC simultané en présence de turbulences.

Imagerie avec une illumination impulsionnelle

Pour augmenter la portée des systèmes actifs de télédétection, les sources impulsionnelles sont classiquement utilisées ([44,47]). Ces sources lumineuses présentent des fluctuations d'intensité d'une impulsion à l'autre. Si l'acquisition des images est séquentielle, les images $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ ne sont pas acquises avec la même intensité d'illumination, ce qui se traduit par une estimation erronée du paramètre OSC. Considérons le cas de l'acquisition séquentielle d'une scène fixe illuminée par une source impulsionnelle dont le profil spatial d'éclairement est uniforme. Nous considérons que l'image parallèle $\mathbf{X}^t$ est acquise à l'instant t avec une intensité d'illumination F^t et que l'image orthogonale $\mathbf{Y}^{t+1}$ est acquise à l'instant $t+1$ avec une intensité F^{t+1}. La réflectivité de la scène est supposée indépendante du temps, ce qui signifie que pour chaque pixel nous avons :

$$X^t(u,v) = F^t X(u,v) \quad \text{et} \quad Y^{t+1}(u,v) = F^{t+1} Y(u,v). \tag{1.27}$$

L'OSC est alors estimé par :

$$\widehat{P}^t(u,v) = \frac{F^t X^t(u,v) - F^{t+1} Y^{t+1}(u,v)}{F_t X^t(u,v) + F^{t+1} Y^{t+1}(u,v)} = \frac{P(u,v) + \alpha^t}{\alpha^t P(u,v) + 1}, \tag{1.28}$$

où $P(u,v) = \frac{X(u,v) - Y(u,v)}{X(u,v) + Y(u,v)}$ est la valeur vraie de l'OSC et $\alpha^t = \frac{F^t - F^{t+1}}{F^t + F^{t+1}}$ représente la fluctuation relative de l'intensité des impulsions. Si $\forall t, \alpha^t = 0$, l'intensité des impulsions est indépendante du temps et la valeur estimée de l'OSC correspond à la valeur vraie. L'évolution de la valeur estimée de l'OSC en fonction de α^t est représentée sur la figure 1.20 pour différentes valeurs d'OSC P.

Pour illustrer expérimentalement ce phénomène nous utilisons la même scène que celle de la figure 1.17 à la différence près que le "chopper" n'est plus en rotation. La scène est illuminée par une diode électroluminescente de puissance rouge pulsée et sur-modulée en intensité pour simuler les fluctuations d'intensité représentées sur la figure 1.21.d. Nous représentons également une image d'OSC obtenue avec l'acquisition séquentielle sur la figure 1.21.a et avec une acquisition

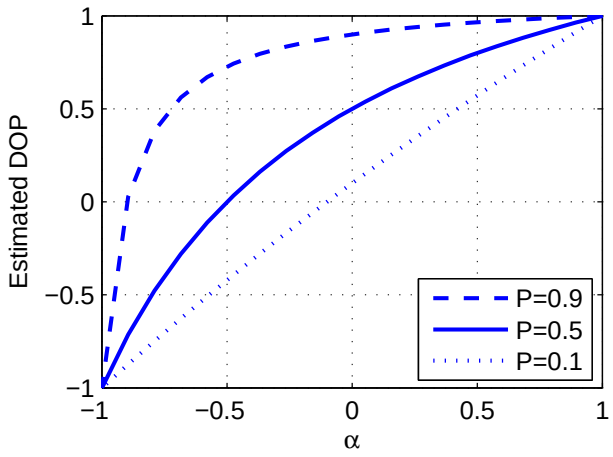


FIGURE 1.20 – Valeur estimée de l'OSC $\widehat{P}$ en fonction du paramètre α^t, pour différentes valeurs vraies de l'OSC P.

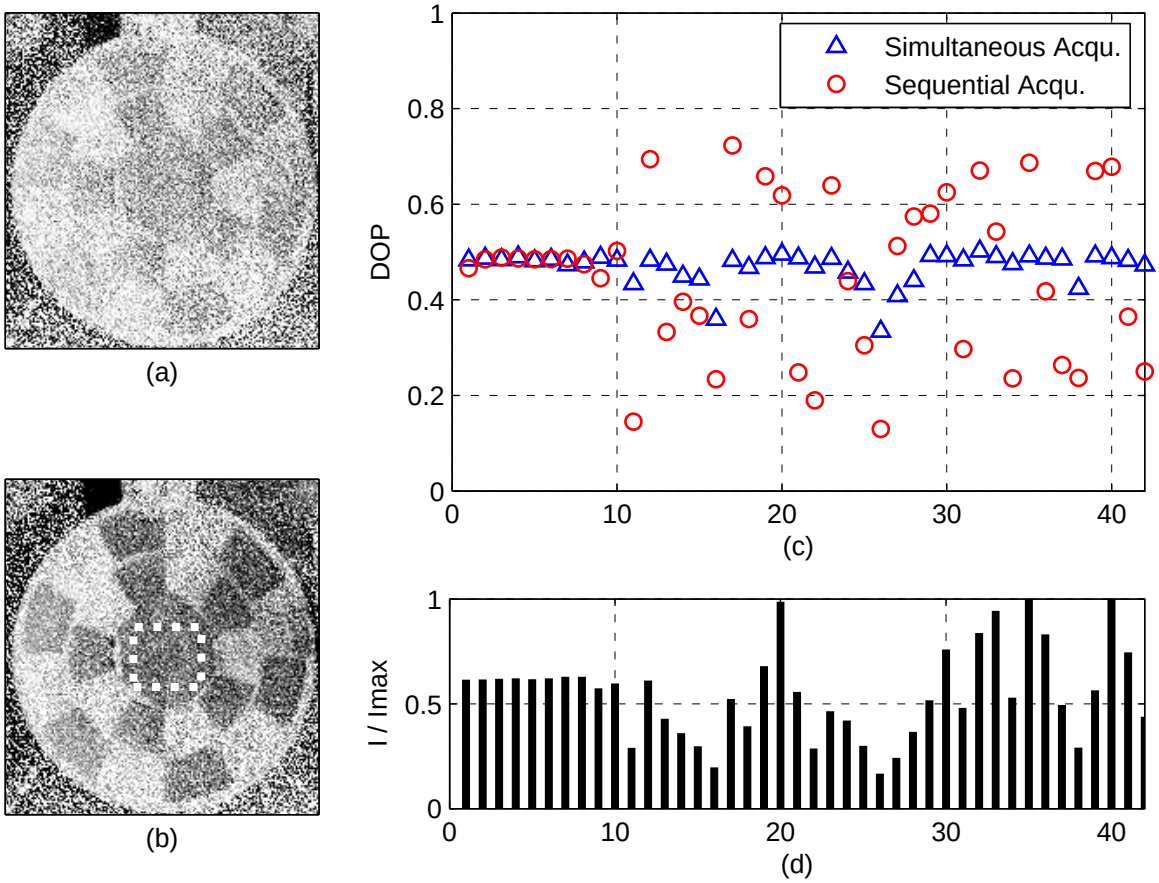


FIGURE 1.21 – Images d'OSC obtenues avec l'acquisition séquentielle (a) et simultanée (b) des états de polarisation, avec une source impulsionnelle. Estimation de l'OSC du fond diffusant noir dans la zone délimitée par les pointillés (c), pour les deux types d'acquisition . Fluctuation d'intensité des impulsions (d).

simultanée sur la figure 1.21.b. Pour chacune de ces images, nous calculons la valeur moyenne de l'OSC dans un carré de 100 pixels correspondant au matériau diffusant noir. La zone dans laquelle nous faisons la moyenne de l'OSC est représentée en pointillés sur la figure 1.21.b et l'évolution de la valeur moyenne est tracée sur la figure 1.21.c. En mode séquentiel, une impulsion est utilisée pour l'acquisition de l'image $\mathbf{X}$ et la suivante pour l'acquisition de l'image $\mathbf{Y}$. Cela conduit à une perte de contraste (1.21.b) et à une fluctuation importante de l'OSC estimé. En effet, si nous considérons que l'intensité d'une impulsion ne peut dépasser le double de la précédente, c'est-à-dire que $-1/3 \leq \alpha \leq 1/3$, en reportant cette inégalité sur la figure Fig.1.20, nous voyons que $0,2 \leq \widehat{P} \leq 0,7$, ce qui est parfaitement vérifié sur la figure 1.21.c. Avec le mode simultané, la même impulsion est utilisée pour les deux acquisitions et les fluctuations de l'OSC sont maintenant limitées par le bruit du système (essentiellement le bruit de photons dans ce cas). Bien entendu, les images d'intensité sont toujours entachées du bruit lié aux fluctuations d'intensité des impulsions.

1.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié plusieurs types d'imagerie polarimétrique, dont l'imagerie d'OSC. Cette dernière nécessite l'illumination de la scène avec un faisceau totalement polarisé et l'acquisition de deux images dans des états de polarisation orthogonaux. Nous avons conçu et réalisé expérimentalement un système permettant de faire l'acquisition simultanée de ces deux images sur le même détecteur. Les aberrations résiduelles et les imperfections des composants doivent cependant être prises en compte grâce à une calibration optique et polarimétrique. Nous avons illustré expérimentalement que ce système présentait de bonnes performances dans des situations où les systèmes basés sur une acquisition séquentielle montraient leurs limites. L'intérêt d'une telle architecture est d'être majoritairement limité par le bruit intrinsèque du détecteur et le bruit de photons (si l'illumination est incohérente). Ces perturbations affectent les images d'intensité $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$. Nous pouvons alors nous demander comment ce bruit est transmis lors du calcul des images d'intensité et d'OSC. Nous allons développer ultérieurement des méthodes d'estimation et de détection adaptées à cette problématique et l'imageur conçu dans cette partie permettra de valider les développement théoriques.

Chapitre 2
Estimation de l'OSC (Orthogonal State Contrast)

Sommaire

2.1 Théorie de l'estimation **34**
2.1.1 Échantillon statistique 35
2.1.2 Qualité d'un estimateur 36
2.1.3 Estimateur optimal : maximum de vraisemblance 37
2.1.4 Estimation dans le cadre de l'imagerie OSC 38
2.2 Bruit additif gaussien, illumination uniforme **39**
2.2.1 Borne de Cramer-Rao 39
2.2.2 Estimateur du maximum de vraisemblance 41
2.2.3 Comparaison de différents estimateurs 43
2.2.4 Vérification expérimentale 45
2.2.5 Amélioration de l'estimateur MV 46
2.2.6 Discussion 48
2.3 Bruit de photons et contribution passive **49**
2.3.1 Modélisation 49
2.3.2 Borne de Cramer-Rao 51
2.3.3 Comparaison de l'influence de la contribution dépendant du signal et de la contribution additive. 52
2.3.4 Discussion 55
2.4 Prise en compte de la polarisation partielle de la contribution passive **56**
2.4.1 Borne de Cramer-Rao 57
2.4.2 Estimateur du maximum de vraisemblance généralisé 59
2.4.3 Simulations de Monte-carlo 60
2.4.4 Illustration expérimentale 60
2.4.5 Discussion 63
2.5 Prise en compte de l'illumination non-uniforme **65**
2.5.1 Modélisation 65
2.5.2 Borne de Cramer-Rao avec une illumination non-uniforme mais connue 65
2.5.3 Gain potentiel en précision en prenant en compte la non-uniformité . . 67
2.5.4 Estimateurs de l'OSC en présence d'illumination non-uniforme 70
2.5.5 Comparaison avec les estimateurs adaptés à l'illumination uniforme. . 74
2.5.6 Illustration expérimentale 76
2.5.7 Discussion 77
2.6 Conclusion **79**

Dans le chapitre précédent, nous avons mis en place un système d'imagerie d'OSC dont le bruit technique est limité. Il persiste néanmoins du bruit dans les images d'intensité $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ qui sont utilisées pour calculer l'image d'OSC. Dans ce chapitre, nous étudierons comment ce bruit influence la précision d'estimation de l'OSC. Cette problématique a déjà largement été abordée dans le cas du bruit de speckle [48–51] lorsque la scène est illuminée avec une source cohérente. Une étude a également été menée sur le bruit de speckle couplé au bruit de photons dans les systèmes à faible flux lumineux [52]. Nous choisissons de nous placer dans le cas des systèmes actifs utilisant une source lumineuse avec une longueur de cohérence plus petite. Le bruit de speckle n'est alors plus limitant et nous devons faire face à d'autres types de bruit.

Après avoir introduit quelques notions sur la théorie de l'estimation dans une première partie, nous étudierons le cas d'un système limité par un bruit additif et gaussien. Ce modèle rend compte du bruit de détecteur dans un système à très faible flux lumineux. Si l'illumination est plus importante, la contribution du bruit de photons devient prédominante. Nous étudierons cette transition dans une deuxième partie où nous considérerons que le bruit de détecteur fait partie d'un ensemble de sources de bruit d'obscurité que nous appellerons "contribution passive". D'une manière générale, cette contribution passive est supposée totalement dépolarisée. Nous verrons dans une troisième partie, que cette hypothèse n'est pas toujours vérifiée et qu'il est nécessaire, dans certains cas, de prendre en compte la polarisation partielle de la contribution passive.

Enfin, dans une quatrième partie nous prendrons en compte la non-uniformité de l'illumination. Cette perturbation peut être spatiale si le faisceau d'illumination est non-homogène, ou temporelle si l'intensité du faisceau varie.

2.1 Théorie de l'estimation

Une mesure physique est toujours entachée de bruit qui dépend du type d'application considérée : bruit de détecteur, bruit de photons, bruit de speckle... Il paraît donc naturel de modéliser le résultat d'une mesure par une variable aléatoire. Afin d'augmenter la précision, on réalise souvent une série de mesures d'une même grandeur physique, c'est-à-dire qu'on obtient plusieurs réalisations de cette variable aléatoire. Ces réalisations sont ensuite combinées pour obtenir un estimateur de la grandeur physique d'intérêt. Dans la pratique, la moyenne arithmétique est souvent utilisée, alors que ce n'est pas forcément l'estimateur le plus performant.

Un estimateur est une fonction d'un ensemble de variables aléatoires. C'est donc aussi une variable aléatoire. Cela signifie que, si on recalcule un estimateur à partir d'une autre série de mesures, le résultat de l'estimation sera différent. Quoi qu'il en soit, nous pouvons espérer que la valeur ainsi estimée sera plus précise (moins bruitée) et en moyenne plus proche de la valeur vraie, que ne l'était chaque mesure prise séparément.

L'estimation est donc au cœur de toute mesure physique. L'objectif de cette partie est de rappeler les bases de la théorie de l'estimation, de définir la qualité d'un estimateur, de savoir comment le calculer, et enfin de déterminer la variance minimale qui peut être atteinte.

2.1.1 Échantillon statistique

Définition

Un problème d'estimation peut être modélisé de la manière suivante : on considère une série de N réalisations de la variable aléatoire X_λ que l'on rassemble dans un échantillon statistique $\chi = \{x_1, \dots x_N\}$. On peut également voir l'échantillon χ comme une réalisation de l'échantillon statistique aléatoire $\chi_\lambda = \{X_{\lambda 1}, \dots, X_{\lambda N}\}$ où $\lambda(1)...\lambda(N)$ est la série d'événements aléatoires conduisant à la réalisation de l'échantillon χ_λ.

Dans le cadre de notre étude, les mesures physiques sont des images d'intensité. La valeur prise par chaque pixel de coordonnées (i, j) de l'image X peut être considérée comme la réalisation d'une variable aléatoire $X_{(i,j)}$. Les échantillons statistiques que nous allons considérer peuvent être temporels et/ou spatiaux :

- un échantillon statistique temporel sera composé de N réalisations du pixel $X_{(i,j)}$ correspondant à N acquisitions successives.
- un échantillon statistique spatial sera composé de réalisations de N pixels au voisinage du pixel $X_{(i,j)}$.

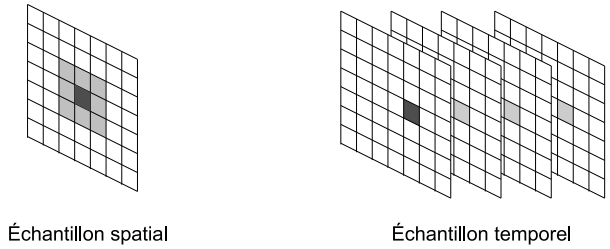


FIGURE 2.1 – Échantillons spatial et temporel

Homogénéité et indépendance

Précisons que pour chaque pixel, la densité de probabilité (DDP) ou loi de probabilité de la variable aléatoire $X_{(i,j)}$ est notée $\mathcal{P}_\theta(x_{i,j})$, où θ est un scalaire ou un vecteur qui représente le ou les paramètres de la densité de probabilité. Parmi les paramètres dont dépend la loi de probabilité, nous distinguerons :

- les paramètres d'intérêt. Ils sont liés à la nature de l'objet (dépolarisation, réflectance...) et ce sont eux que nous chercherons à estimer.
- les paramètres de nuisance. Ils sont liés aux perturbations lors de la mesure (inhomogénéité du faisceau d'illumination par exemple). Leur connaissance ne fournit pas d'information utile.

Dire que l'échantillon est homogène revient à dire que les densités de probabilité des éléments de l'échantillon ont toutes les mêmes paramètres d'intérêt. Si l'échantillon est temporel, cela signifie que la scène est immobile, et qu'à chaque instant le pixel $X_{(i,j)}$ fait référence au même point dans l'espace objet. Si l'échantillon est spatial, cela signifie que les éléments de l'échantillon font référence à une zone homogène dans l'espace objet. Cette zone a donc les mêmes propriétés optiques

en chaque pixel. D'autre part, dans le cadre de notre étude, les variables aléatoires constituant l'échantillon sont supposées statistiquement indépendantes. Les bruits que nous considérons ne sont en effet pas corrélés d'un pixel à un autre. On dit alors que l'échantillon est indépendant.

Vraisemblance d'un échantillon

L'échantillon χ_λ est un vecteur aléatoire. Il est donc décrit par sa densité de probabilité conjointe, qui est appelée vraisemblance dans le cadre de la théorie de la décision et qui est notée $\mathcal{L}(\chi|\theta)$. Si l'échantillon est indépendant, la vraisemblance est définie comme :

$$\mathcal{L}(\chi|\theta) = \prod_{i=1}^{N} P_\theta(x_i). \tag{2.1}$$

Pour simplifier les calculs, nous utiliserons la log-vraisemblance définie par :

$$\ell(\chi|\theta) = \log\left[\mathcal{L}(\chi|\theta)\right] = \sum_{i=1}^{N} log\left[P_\theta(x_i)\right]. \tag{2.2}$$

Estimateur

Nous appellerons toute fonction $T(\chi) = t(x_1, \ldots, x_N)$ de l'échantillon une statistique (par opposition à "la statistique"). L'estimation statistique consiste à inférer la valeur des paramètres θ de la distribution de probabilité de l'échantillon statistique χ_λ à partir d'une réalisation χ. Un estimateur de θ est donc une statistique $T(\chi)$ de l'échantillon, dont la valeur est proche de θ. Nous allons préciser par la suite cette notion de "proximité".

2.1.2 Qualité d'un estimateur

Erreur quadratique moyenne

Notons θ_0 la valeur vraie du paramètre que nous cherchons à estimer. D'une manière intuitive nous dirons qu'une statistique $T(\chi)$ est un "bon estimateur" si elle se rapproche de θ_0. Or nous savons que $T(\chi)$ est elle-même une variable aléatoire. Il faut donc définir cette notion de "proximité" à partir de ses moments (moyenne, variance,...). Dans la théorie classique de l'estimation la qualité d'un estimateur est définie par l'erreur quadratique moyenne (EQM) dont l'expression est :

$$EQM[T(\chi)] = \sigma_T^2 + b_T^2, \tag{2.3}$$

où $b_T = E[T(\chi)] - \theta_0$ est le biais de l'estimateur, c'est-à-dire, la différence entre sa valeur moyenne et la valeur vraie du paramètre et σ_T^2 est la variance de l'estimateur. La propriété la plus recherchée pour un estimateur est d'avoir une faible EQM. Si un estimateur est sans biais, minimiser son EQM revient simplement à minimiser sa variance.

Borne de Cramer-Rao

Nous avons les outils pour comparer relativement deux estimateurs entre eux (EQM, biais, variance, ...) mais il est intéressant de savoir si, dans l'absolu, l'estimateur choisi présente les meilleures performances possibles. La borne de Cramer-Rao permet d'apporter une réponse à cette question. C'est une limite inférieure sur la variance d'estimation pouvant être atteinte dans un problème d'estimation. Si le domaine de définition de la variable aléatoire X_λ ne dépend pas de θ, pour une valeur donnée de θ, la variance $\sigma_T^2(\theta)$ de tout estimateur non-biaisé $T(\chi_\lambda)$ de θ est telle que :

$$\sigma_T^2(\theta) \geq \frac{1}{\mathcal{I}(\theta)}, \tag{2.4}$$

où $\mathcal{I}$ est l'information de Fisher définie par :

$$\mathcal{I}(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2\{\ln[L(\chi_\lambda|\theta)]\}}{\partial\theta^2}\right). \tag{2.5}$$

Nous remarquons que cette expression est indépendante de l'estimateur de θ. L'équation Eq.2.4 fournit alors une borne inférieure sur la variance d'un estimateur. Elle est appelée borne de Cramer-Rao (BCR). Comme elle est indépendante de l'expression de l'estimateur $T(\chi_\lambda)$ pourvu qu'il soit non-biaisé, la BCR est une indication de la difficulté intrinsèque d'une tâche d'estimation. Un estimateur qui atteint la borne de Cramer-Rao est dit efficace. Notons que pour certains problèmes d'estimation, il arrive qu'aucun estimateur ne puisse atteindre la BCR.

2.1.3 Estimateur optimal : maximum de vraisemblance

Une technique courante en traitement du signal consiste à calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance (MV), qui revient à choisir la valeur de θ qui maximise la vraisemblance :

$$\widehat{\theta}_{mv} = \arg\max_{\theta}[L(\chi|\theta)] \tag{2.6}$$

Autrement dit, cela revient à choisir pour θ la valeur pour laquelle on a la probabilité maximale d'obtenir l'échantillon observé χ. Si l'intervalle de définition de la variable aléatoire X_λ est indépendant de θ, l'estimateur du maximum de vraisemblance est solution du système d'équation :

$$\begin{cases} \frac{\partial\mathcal{L}(\chi|\theta)}{\partial\theta} = 0 \\ \frac{\partial^2\mathcal{L}(\chi|\theta)}{\partial\theta^2} < 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

Comme nous l'avons dit précédemment la log-vraisemblance est souvent utilisée. L'estimateur $\widehat{\theta}_{mv}$ est alors solution du système :

$$\begin{cases} \frac{\partial\ell(\chi|\theta)}{\partial\theta} = 0 \\ \frac{\partial^2\ell(\chi|\theta)}{\partial\theta^2} < 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

car la fonction logarithme est monotone croissante.

L'estimateur du maximum de vraisemblance possède des propriétés intéressantes en matière d'efficacité :

propriété 1 : Considérons un échantillon χ de taille N et de vraisemblance $L(\chi|\theta)$. Si $L(\chi|\theta)$ est deux fois dérivable et si l'intervalle de variation de X_λ est indépendant de θ, l'estimateur du maximum de vraisemblance est asymptotiquement efficace, c'est-à-dire que sa variance tend vers la BCR lorsque N tend vers l'infini.

En d'autres termes, si on augmente la taille de l'échantillon l'estimateur du MV devient toujours efficace, mais il faut noter que cette propriété est asymptotique. Cela signifie que pour un échantillon de taille finie, il peut exister un estimateur non-biaisé de variance plus faible que l'estimateur du MV.

propriété 2 : Si la densité de probabilité de l'échantillon appartient à la famille exponentielle (comme c'est le cas avec du bruit de Speckle) et si l'estimateur du MV est non-biaisé, alors il est efficace. La famille exponentielle regroupe les densités de probabilité de la forme $\mathcal{P}_\theta(x) = \exp\left[A(x)B(\theta) + C(x) + D(\theta)\right]$ où $A(x), B(\theta), C(x)$ et $D(\theta)$ sont des fonctions connues [53].

Cette propriété justifie l'utilisation de l'estimateur MV pour des échantillons distribués avec des lois appartenant à la famille exponentielle.

2.1.4 Estimation dans le cadre de l'imagerie OSC

Comme nous l'avons expliqué dans le chapitre 1, l'imagerie OSC consiste à illuminer la scène avec un faisceau incident totalement polarisé, et à faire l'acquisition de deux images : la première , X, correspond à l'état de polarisation parallèle à l'état de polarisation incident, et la seconde, Y, correspond à l'état orthogonal. Considérons un point de la scène correspondant au pixel (i,j). Ses propriétés optiques (directement liées à sa matrice de Mueller) vont être caractérisées par deux quantités notées $m_X(i,j)$ et $m_Y(i,j)$. Nous définissons $m_X(i,j)$ (resp. $m_Y(i,j)$) comme la valeur (en niveau de gris) du pixel (i,j) dans l'image X (resp. Y), en l'absence de toute perturbation (bruit, illumination ambiante, émissivité propre du matériau...). Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned} m_X(i,j) &= 1/2 \times [\vec{T_X}^+ . \vec{T}(i,j)] \times E_Q/q \\ m_Y(i,j) &= 1/2 \times [\vec{T_Y}^+ . \vec{T}(i,j)] \times E_Q/q \end{aligned} \tag{2.9}$$

où :

- $\vec{T}(i,j) = M(i,j).\vec{S}$ où $M(i,j)$ est la matrice de Mueller du point (i,j) de la scène, et $\vec{S}$ le vecteur de Stokes du faisceau d'illumination,
- $\vec{T_X}$ et $\vec{T_Y}$ sont les vecteurs de Stokes des états de polarisation orthogonaux qui sont analysés,
- E_Q est l'efficacité quantique du détecteur,
- q est le nombre de photoélectrons par niveau de gris.

Les paramètres $m_X(i,j)$ $m_Y(i,j)$ sont les paramètres d'intérêt que nous cherchons à estimer. Nous pouvons utiliser un autre couple de paramètre défini par :

$$\begin{aligned} I(i,j) &= m_X(i,j) + m_Y(i,j) \\ P(i,j) &= \frac{m_X(i,j) - m_Y(i,j)}{m_X(i,j) + m_Y(i,j)} \end{aligned} \tag{2.10}$$

La paramétrisation (I, P) est équivalente à la paramétrisation (m_X, m_Y), étant donné la relation bijective qui existe entre ces deux jeux de paramètres.

Par la suite nous allons nous intéresser à l'estimation des paramètres (I, P) à partir d'un échantillon et ce, pour différents types de perturbations. Commençons par analyser l'influence du bruit de détecteur qui peut être modélisé comme additif et gaussien (voir Annexe A)

2.2 Bruit additif gaussien, illumination uniforme

Comme nous venons de le mentionner, dans cette partie nous nous intéressons à l'estimation de l'OSC lorsque les images d'intensité X et Y sont limitées par le bruit du détecteur. Il peut être modélisé par un bruit gaussien additif comme nous pouvons le voir dans l'annexe A. Après avoir présenté le modèle de perturbations, nous calculerons la borne de Cramer-Rao pour ce problème d'estimation. Nous verrons ensuite comment estimer l'OSC grâce à l'estimateur du maximum de vraisemblance, dont nous calculerons la densité de probabilité (DDP). Enfin nous comparerons les performances de plusieurs estimateurs sur des données simulées puis sur des images expérimentales obtenues à l'aide de l'imageur décrit dans le chapitre 1.

Considérons deux échantillons homogènes $\mathbf{X} = \{X_i, i \in [1, N]\}$ et $\mathbf{Y} = \{Y_i, i \in [1, N]\}$. Chaque élément de l'échantillon X_i (resp. Y_i) est une variable qui va fluctuer autour d'une moyenne m_X (resp. m_Y) à laquelle vient s'ajouter une variable aléatoire gaussienne n_i^X (resp. n_i^X) de moyenne nulle et de variance σ^2. Nous obtenons donc :

$$X_i = m_X + n_i^X \tag{2.11}$$

$$Y_i = m_Y + n_i^Y \tag{2.12}$$

où $i \in [1, N]$. Les variables aléatoires n_i^X et n_i^Y sont supposées indépendantes. En effet, dans l'expérience elles correspondent chacun à deux pixels différents du détecteur (voir la description de l'imageur dans la partie 1.3). La densité de probabilité d'un élément de l'échantillon est donc de la forme :

$$\mathcal{P}_{U_i}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(u - m_U)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{2.13}$$

où $U = \{X, Y\}$.

2.2.1 Borne de Cramer-Rao

Comme nous l'avons vu dans l'introduction, une manière classique de déterminer la précision maximale que nous pouvons espérer sur l'estimation des paramètres d'intérêt est de calculer la borne de Cramer-Rao. Pour cela nous commençons par déterminer la log-vraisemblance de l'échantillon χ à partir des densités de probabilité des éléments de l'échantillon (voir Eq.2.13) :

$$\begin{aligned}\ell(\chi|I,P) &= -2N\log(\sqrt{2\pi}\sigma) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}\left[X_i - I\frac{(1+P)}{2}\right]^2 \\ &\quad -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}\left[Y_i - I\frac{(1-P)}{2}\right]^2 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Considérons un estimateur non biaisé $\widehat{P}$ du paramètre P. Nous pouvons définir une borne minimale sur sa variance $\mathrm{VAR}[\widehat{P}] \geq BCR$. Pour cela nous calculons la matrice de Fisher $\mathcal{I}$ définie par :

$$\mathcal{I} = \begin{bmatrix} \left\langle -\frac{\partial^2\ell}{\partial I^2}\right\rangle & \left\langle -\frac{\partial^2\ell}{\partial I\partial P}\right\rangle \\ \left\langle -\frac{\partial^2\ell}{\partial P\partial I}\right\rangle & \left\langle -\frac{\partial^2\ell}{\partial P^2}\right\rangle \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

A partir de l'équation 2.14 nous obtenons :

$$\left\langle -\frac{\partial^2\ell}{\partial I^2}\right\rangle = \frac{N\left(1+P^2\right)}{2\sigma^2} \quad , \quad \left\langle -\frac{\partial^2\ell}{\partial P^2}\right\rangle = \frac{NI^2}{2\sigma^2} \quad \text{et} \quad \left\langle -\frac{\partial^2\ell}{\partial I\partial P}\right\rangle = \left\langle -\frac{\partial^2\ell}{\partial P\partial I}\right\rangle = \frac{NIP}{2\sigma^2}$$

En conséquence, la matrice $\mathbf{J} = \mathcal{I}^{-1}$ est de la forme :

$$\mathbf{J} = \frac{2\sigma^2}{N}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{P}{I} \\ -\frac{P}{I} & \frac{(1+P^2)}{I^2} \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

La BCR sur l'estimation I et P est donnée par les termes diagonaux de la matrice $\mathbf{J}$. Ainsi :

$$BCR_I = \frac{2\sigma^2}{N} \tag{2.17}$$

$$BCR_P = \frac{1}{N}\,\frac{(1+P^2)}{\mathrm{RSB}^2} \tag{2.18}$$

où :

$$\mathrm{RSB} = \frac{I\sqrt{N}}{\sqrt{2}\sigma} \tag{2.19}$$

correspond à la définition classique du rapport signal sur bruit dans l'image d'intensité totale $X+Y$. La borne de Cramer-Rao sur I correspond à la variance classique que l'on obtient sur un signal dont la densité de probabilité est gaussienne. La précision augmente avec la taille de l'échantillon. La borne de Cramer-Rao sur P, quant à elle, dépend à la fois du rapport signal sur bruit et de la valeur du paramètre P. Pour une valeur de RSB fixée, elle atteint sa valeur maximale pour $P = 1$ (lumière totalement polarisée) et minimale pour $P = 0$ (lumière totalement dépolarisée).

2.2.2 Estimateur du maximum de vraisemblance

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, une technique classique pour estimer un paramètre est de calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance.

Expression en fonction de l'échantillon

Pour cela, il nous suffit d'annuler la dérivée de la log-vraisemblance (Eq. 2.14) par rapport au paramètre P. Nous obtenons, après quelques calculs simples :

$$\widehat{P}_{mv} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i - \sum_{i=1}^{N} Y_i}{\sum_{i=1}^{N} X_i + \sum_{i=1}^{N} Y_i} \tag{2.20}$$

L'estimateur du MV consiste à calculer d'abord la moyenne des échantillons $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$, puis à estimer l'OSC à partir de ces valeurs moyennes. Dans la suite nous le comparerons à d'autres estimateurs, mais dans un premier temps intéressons-nous à la densité de probabilité de $\widehat{P}_{mv}$.

Densité de probabilité de l'estimateur

Par définition, un estimateur est une statistique calculée à partir de variables aléatoires, et est donc lui même une variable aléatoire que nous pouvons caractériser en calculant sa densité de probabilité. En injectant le modèle de perturbations (Eq. 2.12) dans l'expression de $\widehat{P}_{mv}$ (Eq. 2.20) nous obtenons après quelques calculs :

$$\begin{aligned} \widehat{P}_{mv} &= \frac{(m_X - m_Y) \times \sum_{i=1}^{N} \left(n_i^X - n_i^Y\right)}{(m_X + m_Y) \times \sum_{i=1}^{N} \left(n_i^X + n_i^Y\right)} \\ &= \frac{\mathrm{RSB} \times P + b_1}{\mathrm{RSB} + b_2} \end{aligned} \tag{2.21}$$

où $b_1 = \sum_{i=1}^{N} \left(n_i^X - n_i^Y\right) / \mathrm{RSB}$ et $b_2 = \sum_{i=1}^{N} \left(n_i^X + n_i^Y\right) / \mathrm{RSB}$ sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes, de moyenne nulle et de variance égale à 1. Nous venons ainsi de montrer que $\widehat{P}_{mv}$ peut s'exprimer comme le rapport de deux variables aléatoires gaussiennes. La densité de probabilité (DDP) d'une telle variable aléatoire a été déterminée d'une manière générale dans le cas de variables aléatoires corrélées [54] et peut se mettre sous la forme suivante :

$$\mathcal{P}(\rho) = \alpha\ \mathcal{P}_1(\rho) + (1 - \alpha)\ \mathcal{P}_2(\rho) \tag{2.22}$$

où

$$\alpha = \exp\left(-RSB^2\left(1 + P^2\right)/2\right),$$

et $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ sont deux densités de probabilité définies par :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1(\rho) &= \frac{1}{\pi(1+\rho^2)}, \\ \mathcal{P}_2(\rho) &= \frac{RSB}{\sqrt{2\pi}(1-\alpha)}\ \frac{1+\rho P}{\left(1+\rho^2\right)^{3/2}}\ \times \mathrm{F}\left[RSB\frac{(1+\rho P)}{\sqrt{1+\rho^2}}\right] \times \exp\left[-\frac{RSB^2(\rho - P)^2}{2(1+\rho^2)}\right], \end{aligned} \tag{2.23}$$

avec $\mathrm{F}(x) = \left[\mathrm{erf}(x/\sqrt{2}) - \mathrm{erf}(-x/\sqrt{2})\right]/2$ et $\mathrm{erf}(x) = 2/\sqrt{\pi}\int_0^x \exp(-t^2)dt$ est la fonction d'erreur classique.

Nous proposons dans l'annexe B une démonstration de ce résultat. Ainsi, l'expression Eq.2.22 montre que la DDP de $\widehat{P}_{mv}$ est la somme pondérée de deux DDP. La première $\mathcal{P}_1$, est la DDP d'une variable aléatoire suivant une loi de Cauchy [55]. Aucun de ses moments statistiques (moyenne, variance...) ne sont définis. En effet, le moment statistique d'ordre N est défini par $\mu_N = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho^N \mathcal{P}_1(\rho)d\rho$, or en $+\infty$, $\rho^N\mathcal{P}_1(\rho)$ est équivalent à ρ^{N-2} qui n'est pas intégrable au sens de Lebesgue pour $N \geq 1$. Elle fait partie des densités de probabilité auxquelles la loi des grands nombres ne s'applique pas : la moyenne empirique d'une telle variable aléatoire ne converge pas vers une quantité déterministe (à savoir l'espérance de la loi) quelle que soit la taille de l'échantillon. Quant à $\mathcal{P}_2$, tous ses moments statistiques sont définis grâce au facteur exponentiel. Nous pouvons voir sur la figure 2.2 que lorsque le RSB augmente, $\mathcal{P}$ se rapproche d'une densité de probabilité gaussienne de moyenne P et de variance égale à $(1+P^2)/RSB^2$ (qui correspond à la borne de Cramer-Rao donnée par l'équation 2.18). Pour les faibles RSB, la densité de probabilité (DDP) est proche de celle d'une loi de Cauchy, qui n'est même plus centrée sur la vraie valeur de l'OSC P.

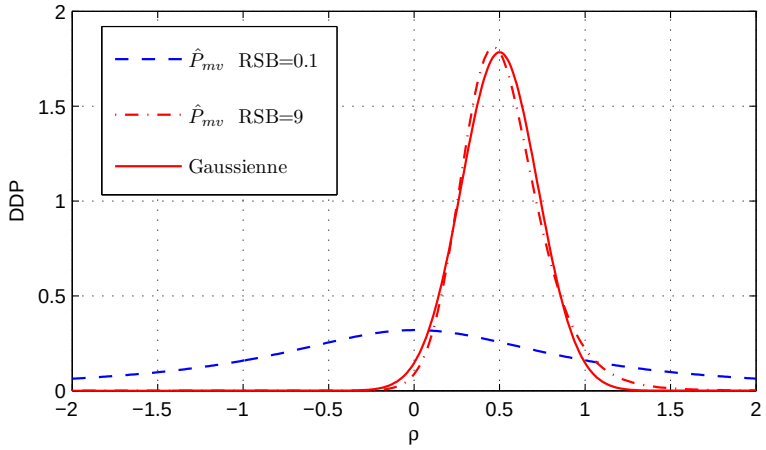


FIGURE 2.2 – Densité de probabilité de l'estimateur $\widehat{P}_{mv}$ pour deux valeurs du RSB=0,1 et 9 et pour P=0,5. En trait plein, densité de probabilité d'une variable aléatoire gaussienne dont la variance est égale à $(1+P^2)/RSB^2$ et la moyenne égale à P.

Il est intéressant de noter d'après l'équation 2.22, que générer une variable aléatoire dont la DDP est celle de $\widehat{P}_{mv}$, revient à faire un choix entre une loi de Cauchy (avec la probabilité α), et une loi dont la DDP est $\mathcal{P}_2$ (avec la probabilité $(1-\alpha)$). Il suffit ensuite de générer la variable aléatoire suivant la DDP choisie. La probabilité α dépend de P et du RSB. Elle décroît très rapidement lorsque le RSB augmente : par exemple si $RSB = 9$ et $P = 0,5$ alors $\alpha = 1,64.10^{-7}$. Ainsi, quand le bruit diminue dans les images d'intensité, la probabilité de "tirer" une variable de Cauchy diminue très rapidement, et la variable aléatoire $\widehat{P}_{mv}$ a un comportement moins chaotique.

Nous ne pouvons donc pas parler, de façon rigoureuse, de la moyenne ou de la variance de l'estimateur $\widehat{P}_{mv}$. En effet ni l'une ni l'autre ne sont définies à cause de la contribution de $\mathcal{P}_1$. Nous nous permettrons néanmoins cet abus de langage en considérant les estimées classiques de ces moments statistiques (moyenne arithmétique, variance empirique ...).

Pour illustrer ces conclusions, nous avons réalisé des simulations de Monte-Carlo. Pour une valeur vraie de l'OSC, $P = 0,5$, et différentes valeurs du RSB, nous avons généré 10^4 réalisations de la variable aléatoire $\widehat{P}_{mv}$ à partir de l'équation 2.21. Nous en avons ensuite calculé la moyenne et la variance empiriques. Les résultats sont représentés sur la figure 2.3. Nous voyons que pour les faibles valeurs de RSB, la moyenne et la variance empiriques de $\widehat{P}_{mv}$ fluctuent énormément. Cela provient du fait que α est faible, et que par conséquent la DDP $\mathcal{P}_1$ est prédominante. Lorsque le RSB augmente, la DDP $\mathcal{P}_1$ prend le dessus, la moyenne estimée tend vers la valeur vraie $P = 0,5$, et la variance se rapproche de la borne de Cramer-Rao sur P.

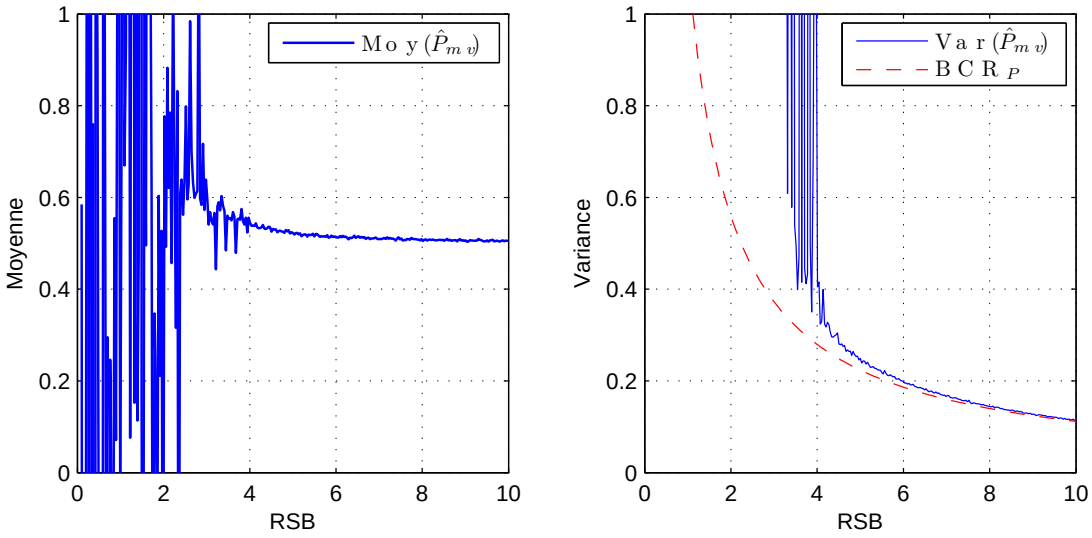


FIGURE 2.3 – Moyenne et variance empiriques de la variable aléatoire $\widehat{P}_{mv}$ estimées sur 10^4 réalisations pour chaque valeur du rapport signal sur bruit RSB. La variance est comparée à la borne de Cramer-Rao sur le paramètre P.

Nous en concluons que la densité de probabilité de l'OSC a, dans notre cas, une expression plus complexe que celle en présence de bruit de speckle [49].

2.2.3 Comparaison de différents estimateurs

Nous venons de caractériser l'estimateur $\widehat{P}_{mv}$ dans la partie précédente. Nous allons à présent le comparer aux deux estimateurs suivants :

$$\widehat{P}_{emp} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{X_i - Y_i}{X_i + Y_i}, \tag{2.24}$$

$$\widehat{P}_{med} = \text{mediane}\left(\frac{X_i - Y_i}{X_i + Y_i}\right). \tag{2.25}$$

Contrairement à $\widehat{P}_{mv}$ (voir Eq. 2.20), l'estimateur $\widehat{P}_{emp}$ revient à calculer la moyenne empirique des OSC de chaque pixel de l'échantillon. L'estimateur $\widehat{P}_{med}$ revient quant à lui, à calculer la médiane des OSC de chaque pixel de l'échantillon. Nous comparons ces estimateurs grâce à des simulations de Monte-Carlo dans la figure 2.4. La valeur vraie de l'OSC est $P = 0,5$, l'échantillon est de taille $N = 9$ et les estimations sont faites sur 10^4 réalisations des échantillons $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ (voir Eq. 2.12).

Nous remarquons que l'estimateur utilisant la moyenne empirique, $\widehat{P}_{emp}$, a des performances bien en dessous des autres. Il présente un biais important, et sa variance empirique est très chahutée jusqu'à RSB=14. Cela s'explique simplement par le fait qu'à faible RSB, l'estimateur $\widehat{P}_{emp}$ devient lui même une variable aléatoire de Cauchy (la somme de variables aléatoires de Cauchy est une variable aléatoire de Cauchy). L'estimateur médian, $\widehat{P}_{med}$, n'atteint pas la borne de Cramer-Rao, mais est le seul à ne pas présenter de divergence à faible RSB : en effet la valeur médiane d'une variable aléatoire de Cauchy est définie et vaut zéro ce qui explique que $\widehat{P}_{med}$ tende vers zéro pour les faibles valeurs de RSB. Il est bien connu que la médiane n'est pas une méthode optimale, mais est plus robuste que la moyenne arithmétique.

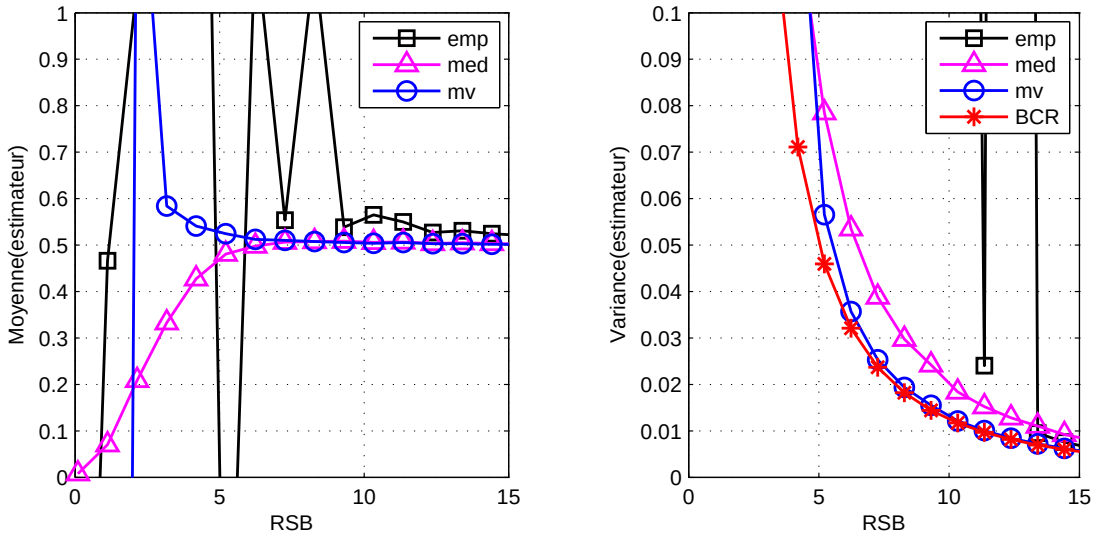


FIGURE 2.4 – Moyenne et variance estimées des estimateurs $\widehat{P}_{emp}$, $\widehat{P}_{med}$, $\widehat{P}_{mv}$ comparés à la borne de Cramer-Rao BRC_P pour un échantillon de taille $N = 9$ et $P = 0,5$. Les estimations sont effectuées sur 10^4 réalisations

En conclusion l'estimateur $\widehat{P}_{mv}$ présente les meilleures performances dès lors que le RSB>4. Il est peu biaisé et sa variance atteint la BCR. Comme nous l'avions dit dans l'introduction, l'estimateur du maximum de vraisemblance est asymptotiquement efficace.

2.2.4 Vérification expérimentale

Nous vérifions expérimentalement ces conclusions en illuminant une plaque de plastique blanc diffusant (P=0,15) avec une source incohérente polarisée linéairement. Deux échantillons $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ de 50×50 pixels sont acquis neuf fois successivement. Nous avons donc 2500 réalisations des vecteurs aléatoires $\mathbf{X} = \{X_i, i \in [1, N]\}$ and $\mathbf{Y} = \{Y_i, i \in [1, N]\}$ avec N=9. Les moyennes et variances des estimateurs sont estimées à partir de ces 2500 réalisations.

Comme expliqué dans l'annexe A, la matrice CCD fournit, pour chaque pixel, une valeur entière positive à laquelle il faut soustraire "l'offset" que nous avons ajouté pendant l'acquisition. Rappelons que l'ajout de "l'offset" pendant l'acquisition permet d'obtenir un bruit de détecteur correctement modélisé par une variable aléatoire gaussienne. Après soustraction de "l'offset" les échantillons $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ ont des densités de probabilité gaussiennes, et peuvent être négatifs pour les faibles RSB. De plus, il est possible qu'à faible RSB, les mesures X_i et Y_i soient telles que $X_i + Y_i = 0$. La valeur estimée de l'OSC est alors infinie ou non-définie : nous choisissons de ne pas prendre ces mesures en considération.

Les histogrammes, les moyennes et variances expérimentales des estimateurs $\widehat{P}_{emp}$, $\widehat{P}_{med}$ et $\widehat{P}_{mv}$ sont représentés sur la figure 2.5. Ces valeurs sont comparées dans le tableau 2.1 à des simulations réalisées avec les mêmes paramètres ($P = 0,15$ et $RSB = 6,1$). Nous pouvons remarquer que les résultats expérimentaux et simulés sont en parfait accord excepté pour l'estimateur $\widehat{P}_{emp}$ dont les performances expérimentales sont meilleures que celles prédites par les simulations : cela provient du fait que nous n'avons pas pris en compte les mesures qui fournissent des valeurs d'OSC infinies ou non-définies. Cela diminue artificiellement la variance de l'estimateur.

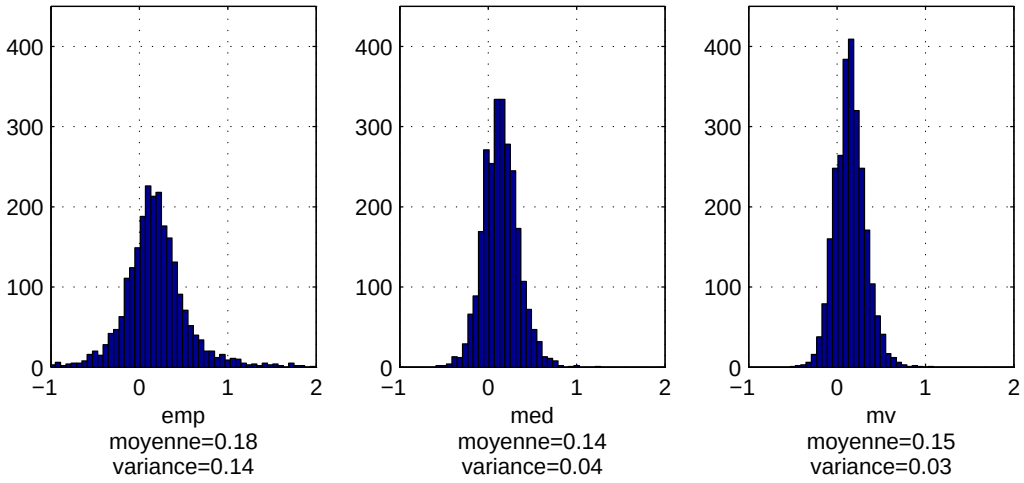


FIGURE 2.5 – Histogrammes, moyennes et variances expérimentales des estimateurs $\widehat{P}_{emp}$, $\widehat{P}_{med}$ et $\widehat{P}_{mv}$ obtenus sur des échantillons de tailles N=9. Les moments statistiques sont estimés sur 2500 réalisations. Le rapport signal sur bruit est RSB$\approx 6,1$ et l'OSC vaut $P = 0,15$ (cette valeur a été estimée expérimentalement à fort RSB).

2.2.5 Amélioration de l'estimateur MV

Comme nous l'avons évoqué dans le chapitre 1, lorsque la scène ne comporte que des objets purement dépolarisants, l'OSC est compris entre 0 et 1. Cependant, nous voyons sur la figure 2.2 qu'à faible RSB, l'estimateur $\widehat{P}_{mv}$ peut prendre des valeurs négatives, même si la valeur vraie dans cet exemple est $P = 0,5$. Nous l'observons également dans l'histogramme sur la figure 2.5. Nous pouvons utiliser l'information *a priori* sur les objets observés pour améliorer les performances de l'estimateur MV. Pour cela nous allons étudier les performances de l'estimateur du maximum de vraisemblance tronqué :

$$\widehat{P}_{mvt} = \begin{cases} \widehat{P}_{mv} & \text{si} \quad \widehat{P}_{mv} \in [0,1] \\ 0 & \text{si} \quad \widehat{P}_{mv} < 0 \\ 1 & \text{si} \quad \widehat{P}_{mv} > 1 \end{cases} \tag{2.26}$$

Cet estimateur est fondé sur le fait que l'OSC réel est forcément compris entre 0 et 1 dans notre cas. L'histogramme de l'estimateur correspondant aux données expérimentales de la figure 2.5 est représenté dans la figure 2.6. Nous voyons que l'estimateur est borné entre 0 et 1 ce qui diminue sa variance.

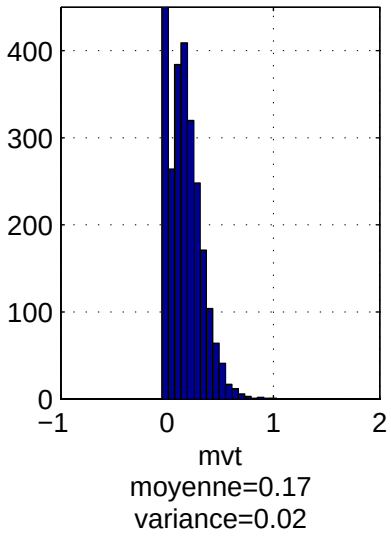


FIGURE 2.6 – Histogramme, moyenne et variances expérimentales de l'estimateur $\widehat{P}_{mvt}$ calculé sur des échantillons de tailles N=9. Les moments statistiques sont estimés sur 2500 réalisations. Le rapport signal sur bruit est RSB$\approx 6,1$ et l'OSC vaut $P = 0,15$ (cette valeur a été estimée à fort RSB).

Pour évaluer ses performances, nous avons réalisé des simulations de Monte-Carlo et estimé son biais, sa variance et son EQM (voir Eq.2.3). Les résultats sont présentés dans la figure 2.7.

Notons tout d'abord que les biais et variances estimés des estimateurs pour $P = 0,1$ sont en parfait accord avec les mesures expérimentales de la figure 2.5. Nous voyons que, dans tous les cas, $\widehat{P}_{mvt}$ ne diverge plus et que son EQM est toujours plus faible que celui de l'estimateur MV. Ceci provient du fait que, par construction, l'estimateur tronqué est borné entre 0 et 1. Nous observons également que la variance de $\widehat{P}_{mvt}$ peut être plus faible que la BCR, ce qui est théoriquement

		$\widehat{P}_{emp}$	$\widehat{P}_{med}$	$\widehat{P}_{mv}$
moyenne	expérimentale	0,18	0,14	0,15
	simulée	0,25	0,14	0,15
variance	expérimentale	0,14	0,04	0,03
	simulée	14,5	0,04	0,03

TABLEAU 2.1 – Moyennes et variances estimées des estimateurs $\widehat{P}_{emp}$, $\widehat{P}_{med}$ et $\widehat{P}_{mv}$. Les résultats expérimentaux sont ceux obtenus précédemment, et les résultats simulés ont été obtenus par des simulations de Monte-Carlo avec $P = 0,15$, $RSB = 6,1$, $N = 9$ et 2500 réalisations.

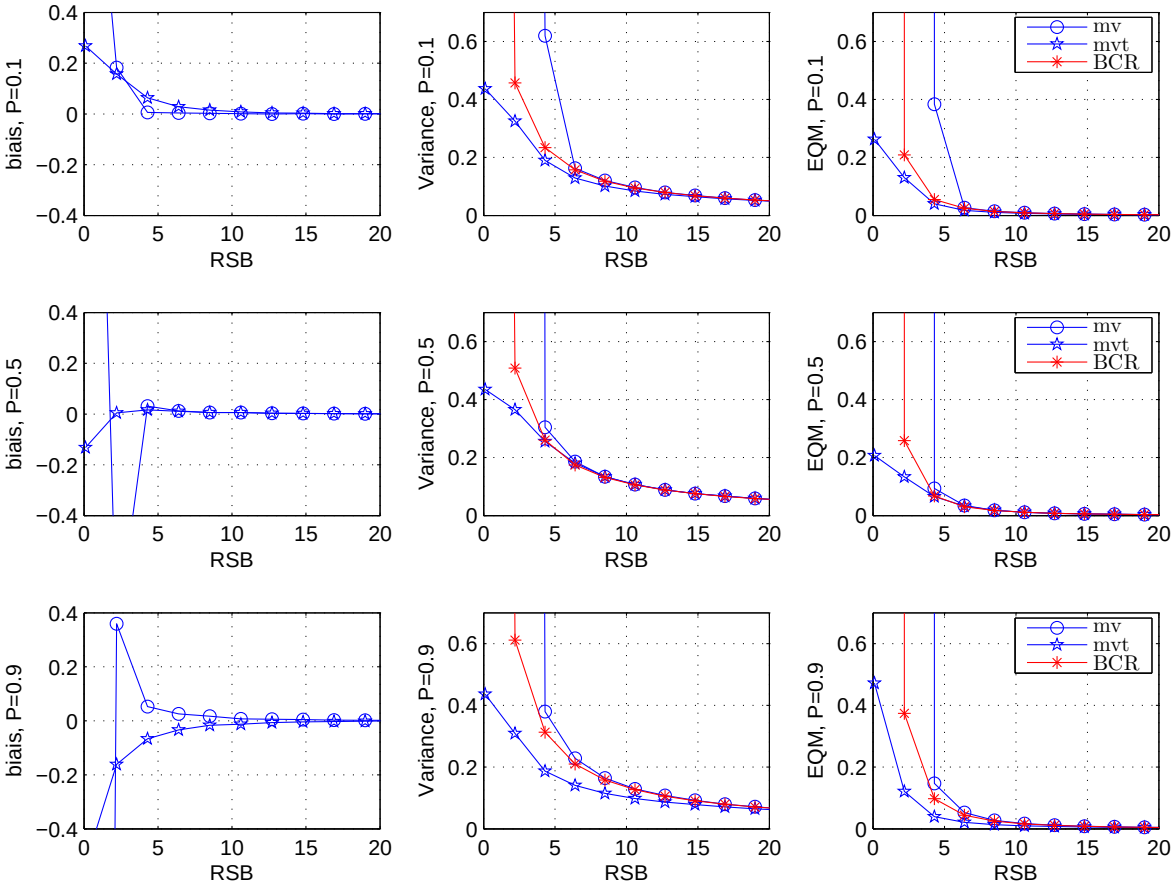


FIGURE 2.7 – Biais, variance et EQM estimés des estimateurs $\widehat{P}_{mv}$ et $\widehat{P}_{mvt}$ avec un échantillon de taille N=25, en fonction du RSB. La variance et l'EQM sont comparés à la BCR. Les simulations de Monte-Carlo ont été effectuées avec 10^5 réalisations et trois valeurs différentes d'OSC : sur la première ligne $P = 0,1$, sur la deuxième $P = 0,5$ et sur la troisième $P = 0,9$.

possible puisque que l'estimateur est cette fois-ci biaisé. De plus, d'après ces simulations, $\langle \widehat{P}_{mvt} \rangle$ converge vers une valeur d'environ $0,36$ lorsque le RSB tend vers 0. Cette valeur peut être obtenue théoriquement. En effet, si le rapport signal sur bruit est nul, la densité de probabilité de $\widehat{P}_{mv}$ est une loi de Cauchy et peut s'écrire $\mathcal{P}_{mv}(\rho) = \mathcal{P}_1(\rho) = \frac{1}{\pi(1+\rho^2)}$. La probabilité que $\widehat{P}_{mv} < 0$ est $\int_{-\infty}^{0} \mathcal{P}(\rho) = 1/2$. La probabilité que $\widehat{P}_{mv} > 1$ est $\int_{1}^{\infty} \mathcal{P}(\rho) = 1/2 - \tan^{-1}(1)/\pi$. Il est donc possible d'écrire la DDP de $\widehat{P}_{mvt}$ sous la forme :

$$\mathcal{P}_{mvt}(\rho) = \begin{cases} \mathcal{P}_{mv}(\rho) & \text{si} \quad \rho \in]0,1[\\ 0 & \text{si} \quad \rho < 0 \\ 0 & \text{si} \quad \rho > 1 \\ 1/2 & \text{si} \quad \rho = 0 \\ 1/2 - \tan^{-1}(1)/\pi & \text{si} \quad \rho = 1. \end{cases} \tag{2.27}$$

Nous pouvons ensuite calculer la moyenne de $\widehat{P}_{mvt}$:

$$\langle \widehat{P}_{mvt} \rangle = \int_0^1 \rho \mathcal{P}_{mvt}(\rho) d\rho \tag{2.28}$$

$$= 0 + \int_0^1 \rho \mathcal{P}_{mv}(\rho) d\rho + \mathcal{P}_{mvt}(1) \tag{2.29}$$

$$\approx 0,36. \tag{2.30}$$

Étant donné l'amélioration apportée par l'estimateur $\widehat{P}_{mvt}$, nous pouvons donc en conclure que l'estimateur tronqué doit être utilisé dès que l'hypothèse de l'observation d'une scène purement dépolarisante est vérifiée. En effet, dans ce cas, nous devons utilisé l'information *a priori* $0 \leq P \leq 1$.

2.2.6 Discussion

Dans cette partie nous avons mis en évidence que l'influence sur l'estimation de l'OSC d'un bruit gaussien additif dans les images d'intensité est plus complexe que celle en présence de bruit de speckle. En effet, nous avons démontré que l'OSC était une somme de deux variables aléatoires dont l'une suit une loi de Cauchy. Cela explique la divergence de l'OSC pour de faibles RSB. Lorsque le RSB est plus fort, nous avons montré que la BCR pouvait être atteinte et qu'il était possible d'augmenter la précision d'estimation si nous avions une information *a priori* sur la scène. Cependant lorsque le RSB augmente, les mesures s'éloignent du modèle limité par le bruit de détecteur. En effet, le bruit de photons devient alors prédominant. Dans la suite du chapitre nous allons étudier la transition entre ces deux régimes de bruit.

2.3 Bruit de photons et contribution passive

Dans cette partie, nous nous intéresserons au bruit dans les systèmes d'imagerie OSC utilisés avec un flux lumineux plus important que dans la partie précédente. C'est le cas, par exemple, lorsque la scène imagée est suffisamment proche. Comme nous pouvons le voir dans l'annexe A les images d'intensité X et Y utilisées pour construire l'OSC sont principalement affectées par le bruit de grenaille, ou bruit de photons. Dans un premier temps nous définirons le modèle que nous utilisons, puis nous montrerons que la borne de Cramer-Rao peut être calculée et atteinte par l'estimateur du maximum de vraisemblance.

2.3.1 Modélisation

Dans notre modèle de perturbations, nous distinguons deux contributions au signal mesuré par le détecteur :

- la première correspond à la rétroréflexion du faisceau d'illumination active par la scène. Il s'agit du signal utile, qui suit une loi de probabilité de Poisson.
- la seconde correspond à tous les autres phénomènes présents même en l'absence d'illumination active. Il peut s'agir de l'émissivité propre des matériaux (lorsque l'on travaille dans l'infrarouge entre $5\,\mu$m et $10\,\mu$m), de l'illumination ambiante rétrodiffusée par la scène, du courant d'obscurité du détecteur... Dans tous les cas, il s'agit d'une contribution passive qui suit, elle aussi, une loi de probabilité de Poisson, si nous supposons que toutes ces sources sont indépendantes.

Comme pour l'étude précédente, ce modèle n'a pas été étudié dans la littérature, alors qu'il peut être adapté à l'imagerie infrarouge, où le bruit du fond est un problème récurrent [56], aux systèmes à faibles flux où le courant d'obscurité n'est plus négligeable par rapport au signal, ou bien dans tous les systèmes d'imagerie dans lesquels une contribution passive est présente.

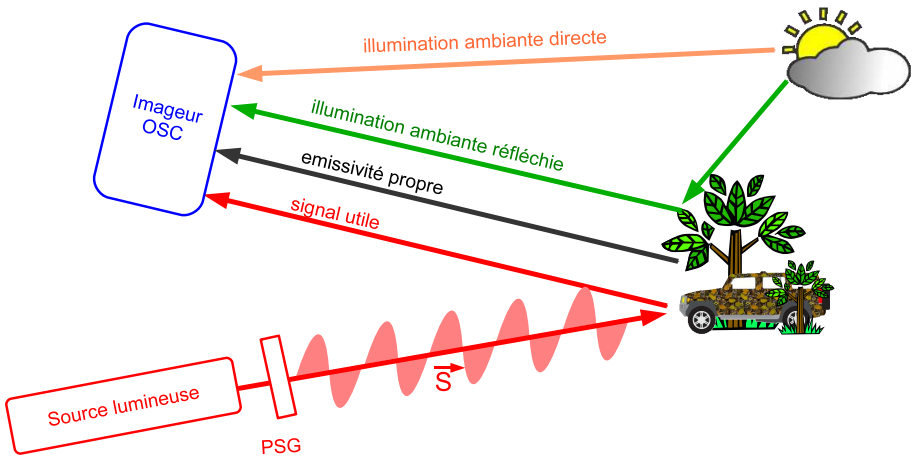


FIGURE 2.8 – Représentation des différentes contributions au signal mesuré, dans un système d'imagerie OSC actif.

Considérons deux échantillons homogènes $\mathbf{X} = \{X_i, i \in [1, N]\}$ et $\mathbf{Y} = \{Y_i, i \in [1, N]\}$ dont les valeurs sont exprimées en nombre de photoélectrons. Le signal moyen mesuré sur le

détecteur vaut $m_X + g_X$ dans l'échantillon $\mathbf{X}$ et $m_Y + g_Y$ dans l'échantillon $\mathbf{Y}$, où m_X, m_Y sont les paramètres d'intérêt que nous cherchons à estimer et g_X, g_Y sont les contributions passives dans chacun des canaux, provenant de K sources distinctes et indépendantes :

$$\begin{aligned} g_X &= \sum_{k=1}^{K} g_X^k \\ g_Y &= \sum_{k=1}^{K} g_Y^k \end{aligned}$$

Dans un premier temps nous considérons que les contributions passives sont identiques dans les deux échantillons ($g_X = g_Y = g$), ce qui est le cas dans de nombreuses situations. En effet, le courant d'obscurité par exemple, est dû à la génération aléatoire d'électrons dans le détecteur en absence d'illumination. Il suit une loi de Poisson [57] et est identique pour les deux canaux, étant donné que les images sont acquises sur le même détecteur.

De plus la scène est souvent illuminée par la lumière ambiante (soleil, source lumineuse...). D'une manière générale, dans une scène naturelle, cette illumination passive peut être considérée totalement dépolarisée. Si nous faisons l'hypothèse d'observer des matériaux purement dépolarisants, leurs matrices de Mueller sont diagonales et ne présentent pas de polarisance [5] : la lumière rétro-réfléchie par ces matériaux restera totalement dépolarisée : $g_X^k = g_Y^k$. Nous avons mené une expérience, en faisant l'acquisition d'une scène éclairée avec un faisceau totalement dépolarisé, en configuration monostatique. Nous avons mesuré la valeur de g_X et g_Y pour différents matériaux : les résultats sont présentés dans le tableau 2.2 et nous voyons que l'OSC ne dépasse pas 0,02 en valeur absolue. L'hypothèse $g_X^k = g_Y^k$ est donc vérifiée. La très faible polarisation résiduelle peut être due à une faible polarisance du matériau ou à l'orientation de ce dernier.

Matériau	g_X	g_Y	OSC_g
papier blanc	395	409	0,02
teflon	1063	1069	-0,03
peinture grise	1095	1140	-0,02
métal	1072	1062	0,01

TABLEAU 2.2 – Lumière rétro-réfléchie (en niveau de gris) par différents matériaux lorsqu'ils sont illuminés avec un faisceau totalement dépolarisé en configuration monostatique. Nous présentons la valeur de chaque canal g_X et g_Y ainsi que $OSC_g = \frac{(g_X - g_Y)}{(g_X + g_Y)}$ qui représente l'OSC de la contribution passive.

Nous pouvons donc donner l'expression de la loi de probabilité d'un élément de l'échantillon : le nombre de photoélectrons mesurés est une variable aléatoire dont la densité de probabilité suit une loi de Poisson :

$$P_{U_i}(n) = \exp\left[-(m_U + g)\right] \frac{(m_U + g)^n}{n!} \tag{2.31}$$

où $U = \{X, Y\}$.

2.3.2 Borne de Cramer-Rao

L'objectif de cette partie est de déterminer la précision maximale que nous pouvons espérer sur l'estimation des paramètres I et P. Comme dans les parties précédentes, nous commençons par déterminer la log-vraisemblance :

$$\begin{aligned} \ell(I,P) &= \sum_{i=1}^{N} \log P_{X_i}(X_i) + \sum_{i=1}^{N} \log P_{Y_i}(Y_i) \\ &= -N(I+2g) + S_X \log\left[\frac{I}{2}(1+P)+g\right] + S_Y \log\left[\frac{I}{2}(1-P)+g\right] + A \end{aligned} \tag{2.32}$$

où $A = \sum_{i=1}^{N} [-\log(X_i!) - \log(Y_i!)]$ ne dépend pas des paramètres d'intérêt I et P. Nous définissons $S_X = \sum_{i=1}^{N} X_i$ et $S_Y = \sum_{i=1}^{N} Y_i$. Nous calculons ensuite la matrice de Fisher :

$$\mathcal{I} = \frac{N}{(I+2g)^2 - (IP)^2} \begin{bmatrix} I(1-P^2)+2g(1+P^2) & 2gIP \\ 2gIP & I^2(I+2g) \end{bmatrix}, \tag{2.33}$$

En prenant l'inverse de cette matrice nous obtenons :

$$J = \mathcal{I}^{-1} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} I+2g & -2gP/I \\ -2gP/I & (1-P^2)/I + 2g(1+P^2)/I^2 \end{bmatrix}. \tag{2.34}$$

Nous pouvons en déduire les bornes de Cramer-Rao sur I et P, qui sont données par les éléments diagonaux de la matrice J :

$$\begin{aligned} BCR_I(g) &= BCR_I^{ds} + BCR_I^{add} \\ \text{avec} \quad & BCR_I^{ds} = \frac{I}{N} && (2.35) \\ \text{et} \quad & BCR_I^{add} = \frac{2g}{N} && (2.36) \end{aligned}$$

La borne de Cramer-Rao sur I peut se décomposer en un terme dépendant du signal utile (BCR_I^{ds}) et un terme additif (BCR_I^{add}). En effet, quand la contribution passive est nulle, c'est-à-dire $g = 0$, alors $BCR_I^{add} = 0$ et par conséquent $BCR_I(g) = BCR_I^{ds} = I/N$. Cette borne correspond à la variance d'estimation classique obtenue sur les images d'intensité en présence de bruit de photons uniquement.

La matrice J, nous donne également la borne de Cramer-Rao sur le paramètre P qui peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} BCR_P(g) &= BCR_P^{ds} + BCR_P^{add} \\ \text{avec} \quad & BCR_P^{ds} = \frac{(1-P^2)}{NI} && (2.37) \\ \text{et} \quad & BCR_P^{add} = \frac{2g(1+P^2)}{NI^2}. && (2.38) \end{aligned}$$

L'expression de la BCR_P se décompose elle aussi en deux termes : le premier BCR_P^{ds} dépend du signal utile uniquement (c'est-à-dire de I et P) et le second est un terme additif BCR_P^{add}. Lorsque

la contribution passive est nulle ($g = 0$) on remarque que $BCR_P(0) = BCR_P^{ds} = (1-P^2)/(NI)$. Il a été montré dans [51] que cette expression est la borne de Cramer-Rao sur P en présence de bruit de photons uniquement. Quant au terme additif, BCR_P^{add}, on remarque que son expression est identique à celle de la borne de Cramer-Rao en présence de bruit additif gaussien (voir Eq. 2.18) avec une variance σ^2 égale à g.

Nous notons également que la BCR sur I est indépendante de la valeur du paramètre d'OSC P, alors que la BCR sur P dépend de cette valeur. Plus précisément, BCR_P^{ds} décroît avec P et est nulle lorsque le signal rétrodiffusé est totalement polarisé. Cela s'explique facilement : lorsque $P = 1$ alors $m_y = 0$ et le bruit a une variance nulle puisqu'il s'agit du bruit de photons uniquement. En revanche le terme BCR_P^{add} augmente avec P et n'est jamais nul. En effet, étant donné que ce terme est indépendant de la puissance du signal utile, il est toujours présent, même quand le signal est nul.

2.3.3 Comparaison de l'influence de la contribution dépendant du signal et de la contribution additive.

Dans cette partie nous allons étudier l'influence de la contribution passive sur la précision d'estimation des paramètres d'intérêt. Commençons par l'estimation du paramètre d'intensité I. Nous voyons clairement dans l'équation 2.36 que la variance d'estimation augmente avec la valeur de g. Pour l'illustrer nous avons représenté dans la figure 2.9 le rapport :

$$\rho_I(g) = \frac{BCR_I(g)}{BCR_I(0)} = 1 + 2\frac{g}{I} \tag{2.39}$$

qui représente le rapport entre la BCR_I pour une valeur de g donnée et la BCR_I en l'absence de contribution passive ($g = 0$). Nous voyons que $\rho_I(g)$ croît linéairement avec g/I qui peut être considéré comme le rapport signal sur bruit associé à la contribution passive. Procédons de la même manière pour le paramètre P en calculant le rapport :

$$\rho_P(g) = \frac{BCR_P(g)}{BCR_P(0)} = 1 + 2\left(\frac{1+P^2}{1-P^2}\right)\ \frac{g}{I} \tag{2.40}$$

que nous avons également représenté sur la figure 2.9. Nous remarquons que $\rho_P(g)$ croît aussi linéairement avec g/I, mais la pente dépend de la valeur de l'OSC. En effet, la pente tend vers $+\infty$ lorsque la valeur vraie de P tend vers 1. Il apparaît clairement que l'influence de la contribution passive est plus importante sur l'estimation de P que sur celle de I, et cela est d'autant plus vrai que le signal rétro-réfléchi est polarisé.

Pour essayer de mieux comprendre cet effet, adoptons un autre point de vue. Considérons que la contribution passive est fixée (valeur de g fixée), et déterminons "les intensités seuil" qui correspondent au cas où la BCR^{ds} et BCR^{add} sont égales, pour l'estimation de I d'une part, et l'estimation de P d'autre part. Ces intensités seuil correspondent à l'intersection des courbes ρ_I, respectivement ρ_P, avec la droite $\rho = 2$. Commençons par l'estimation de l'intensité : l'intensité seuil correspond au cas où $BCR_I^{ds} = BCR_I^{add}$ c'est-à-dire :

$$I_c^I = 2g,$$

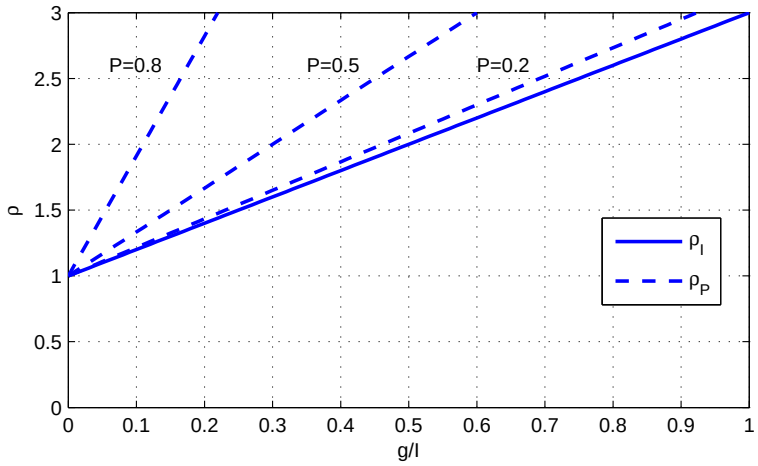


FIGURE 2.9 – Rapports $\rho_I(g)$ et $\rho_P(g)$ en fonction de la quantité g/I pour différentes valeurs de l'OSC, P.

Cette valeur ne dépend pas de la valeur de l'OSC. Lorsque $I < I_c^I$, le bruit de Poisson additif est prédominant alors que lorsque $I > I_c^I$ le bruit prédominant est le bruit de photons associé au signal utile. Intéressons-nous à présent à l'estimation du paramètre P. L'intensité seuil correspond au cas où $BCR_P^{ds} = BCR_P^{add}$, ce qui conduit à :

$$I_c^P = 2g\,\frac{1+P^2}{1-P^2}.$$

Contrairement au cas précédent, cette valeur d'intensité seuil dépend de la valeur de P. Nous avons représenté sur la figure 2.10 l'évolution du rapport I_c^P/I_c^I en fonction de P. Lorsque le signal rétro-réfléchi est totalement dépolarisé $I_c^P/I_c^I = 1$. En revanche, lorsque P tend vers 1, le rapport tend vers $+\infty$: en effet, lorsque le signal rétro-réfléchi est partiellement polarisé, I_c^P peut être beaucoup plus grand que I_c^I. Par exemple, si $P = 0,9$ alors $I_c^P = 9,5\ I_c^I$. Cela signifie que pour être limité par le bruit de Poisson dépendant du signal pour l'estimation de P, il faut une illumination active 9,5 fois plus intense que pour l'estimation de I. En d'autres termes, dès que le signal rétro-réfléchi est polarisé, nous devons tenir compte du bruit de Poisson additif pour l'estimation de P, même s'il peut être négligé pour l'estimation de I.

Figure de mérite

Pour visualiser l'influence des différentes sources de bruit, nous pouvons tracer les figures de mérites. Nous représentons la variance du bruit (sur I et P) en fonction de la valeur moyenne du signal utile. Pour l'estimation de l'intensité I, nous avons :

$$\log_{10}[BCR_I] = \log_{10}\left[BCR_I^{ds} + BCR_I^{add}\right].$$

En dessous de l'intensité de seuil ($I < I_c^I$), nous pouvons négliger le terme dépendant du signal et obtenir :

$$\log_{10}[BCR_I] \simeq \log_{10}\left[BCR_I^{add}\right] = -\log_{10}[2g] - \log_{10}[N],$$

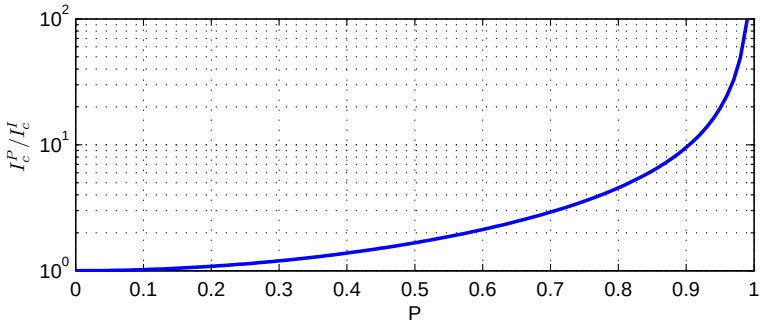


FIGURE 2.10 – Rapport des intensités seuil I_c^P/I_c^I en fonction de la valeur vraie de l'OSC P

c'est-à-dire une valeur constante. Au-dessus de l'intensité seuil ($I > I_c^I$), nous pouvons négliger le terme additif et obtenir :

$$\log_{10}[BCR_I] \simeq \log_{10}\left[BCR_I^{ds}\right] = \log_{10}[I] - \log_{10}[N],$$

c'est-à-dire une droite avec une pente de 1 dB par décade. Cela correspond à la figure de mérite classique de l'estimation de l'intensité [57]. Nous la représentons sur la figure 2.11 pour un échantillon de taille $N = 1$. Augmenter la taille de l'échantillon revient à translater verticalement la courbe de la quantité $-\log_{10}[N]$.

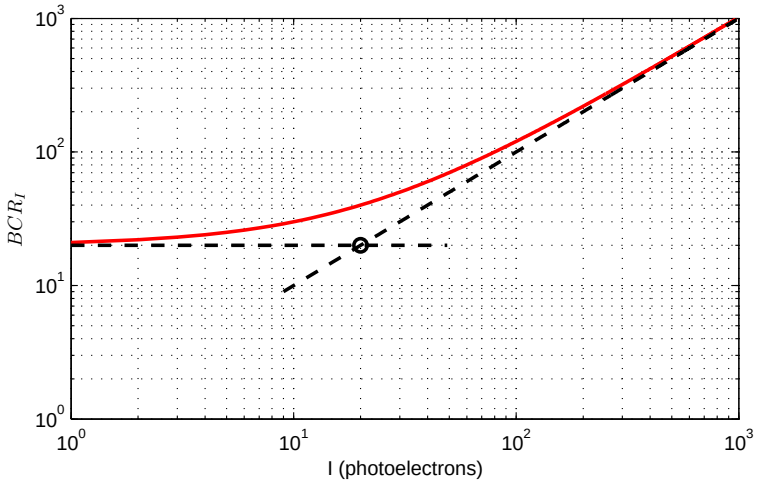


FIGURE 2.11 – Précision d'estimation du paramètre I en fonction de sa vraie valeur I, avec une contribution passive $g = 10$ photoélectrons. En trait plein : BCR_I, en trait pointillé : BCR_I^{add} et BCR_I^{ds}. Le cercle représente l'intensité seuil (I_c^I).

Considérons à présent l'estimation du paramètre d'OSC. Nous avons :

$$\log_{10}(BCR_P) = \log_{10}\left[BCR_P^{ds} + BCR_P^{add}\right].$$

En dessous de l'intensité de seuil, ($I < I_c^P$), nous pouvons négliger le terme dépendant du signal et obtenir :

$$\log_{10}[BCR_P] \simeq \log_{10}\left[BCR_P^{add}\right] = -2\log_{10}[I] - \log_{10}[1+P^2] - \log_{10}[2g] - \log_{10}[N],$$

c'est-à-dire une droite de pente 2 dB par décade. Au dessus de l'intensité de seuil nous négligeons le terme additif pour obtenir :

$$\log_{10}[BCR_P] \simeq \log_{10}\left[BCR_P^{ds}\right] = -\log_{10}[I] - \log_{10}[1-P^2] - \log_{10}[N],$$

ce qui correspond à une droite de pente 1 dB par décade. Dans la figure 2.12 nous représentons la figure de mérite pour $N = 1$ et pour deux valeurs différentes de l'OSC P. Nous pouvons voir que de plus grandes valeurs de P conduisent à un décalage significatif de l'intensité seuil.

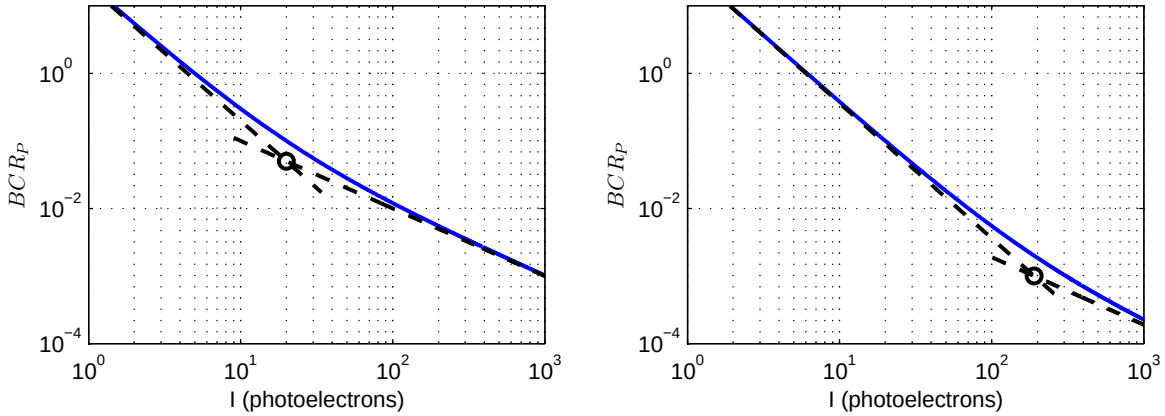


FIGURE 2.12 – Précision d'estimation du paramètre d'OSC P en fonction de l'intensité I, avec une contribution passive $g = 10$ photons. En trait plein : BCR_I, en pointillés : BCR_P^{add} et BCR_P^{ds}. Le cercle représente l'intensité seuil (I_c^P). Les simulations ont été réalisées avec deux valeurs du paramètre d'OSC : (a) $P = 0$ et (b) $P = 0,9$.

Cela illustre que l'influence du bruit associé à la contribution passive dépend de la valeur du paramètre d'OSC que l'on cherche à estimer.

2.3.4 Discussion

Dans cette partie, nous avons modélisé le bruit de détecteur comme faisant partie d'un ensemble plus général de sources de bruit que nous avons appelé contribution passive. Cette contribution est prédominante à faible flux. Lorsque l'intensité d'illumination est plus importante, le bruit de photons associé devient majoritaire. Nous avons montré que l'intensité seuil de la transition entre ces deux régimes n'était pas la même pour l'estimation de l'intensité et celle de l'OSC. Notre approche a cependant deux limites : nous avons supposé que la contribution passive était connue *a priori* et qu'elle était dépolarisée. Dans la suite de ce chapitre nous allons améliorer le modèle de perturbations.

2.4 Prise en compte de la polarisation partielle de la contribution passive

L'étude que nous avons menée dans la partie précédente, tient compte d'une contribution passive, *connue et dépolarisée*, au bruit de photons observé sur les mesures. Dans cette partie nous allons nous intéresser au cas plus général où la contribution passive est inconnue *a priori* et partiellement polarisée. Cette problématique est justifiée dans les cas suivants :

- La lumière ambiante réfléchie par la scène, peut être partiellement polarisée [6]. En effet, les lois de Fresnel montrent que les coefficients de réflexion en intensité pour des ondes polarisées TE (transverse électrique) et TM (transverse magnétique) sont différents, ce qui donne lieu à des polarisations partielles linéaires.
- La lumière ambiante peut également interagir avec un milieu diffusant. Le régime de Rayleigh correspond à des particules dont la taille est petite par rapport à la longueur d'onde [7]. Dans ce cas, les particules sont considérées comme des dipôles qui absorbent puis réémettent la lumière avec une distribution obéissant à celle de l'émission d'un dipôle. Le champ électrique diffusé oscille dans un plan qui est perpendiculaire à la direction de propagation, ce qui donne lieu à une polarisation linéaire partielle.
- Dans certains cas, l'émissivité d'un matériau (essentiellement dans l'infrarouge) peut être partiellement polarisée [58]. En effet la loi de Kirchhoff qui relie l'absorptivité et l'émissivité peut être généralisée pour prendre en compte la polarisation [59] et permettre d'expliquer ce phénomène.

Ces contributions dépendent de la scène observée. Elles ne sont pas connues *a priori*, et par conséquent, ne peuvent être calibrées. Nous supposons également que ces contributions passives sont indépendantes les unes des autres et ainsi :

$$\begin{aligned} g_X &= \sum_{k=1}^{K} g_X^k \\ \text{et} \quad g_Y &= \sum_{k=1}^{K} g_Y^k \end{aligned}$$

sont des variables aléatoires de Poisson.

Comme dans la partie précédente, nous considérons à présent deux échantillons homogènes $\mathbf{X} = \{X_i, i \in [1, N]\}$ et $\mathbf{Y} = \{Y_i, i \in [1, N]\}$ distribués suivant une loi de Poisson de moyennes respectives $m_U + g_U$:.

$$P_{U_i}(n) = \exp\left[-(m_U + g_U)\right] \ \frac{(m_U + g_U)^n}{n!}, \tag{2.41}$$

avec $U = \{X, Y\}$. Nous voyons clairement que l'observation de $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ n'est pas suffisante pour estimer m_X et m_Y : d'autres données sont nécessaires. Une manière classique de procéder consiste à éteindre l'illumination active et à faire l'acquisition de deux échantillons passifs V_i (W_i), $i \in [1, N]$ dans chacun des deux états de polarisation orthogonaux. Le nombre moyen de photoélectrons pour un élément de l'échantillon $\mathbf{X}$ suit une loi de Poisson de moyenne g_X. Au final, toutes ces mesures peuvent être rassemblées dans un échantillon statistique de taille N

$\chi' = \{\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{V}, \mathbf{W}\}$ constitué de quatre vecteurs aléatoires de Poisson de moyennes respectives $m_X + g_X$, $m_Y + g_Y$, g_X, et g_Y.

2.4.1 Borne de Cramer-Rao

Notre objectif est ici de déterminer la précision maximale que nous pouvons espérer sur l'estimation du paramètre P, en calculant la borne de Cramer-Rao. Pour cela nous commençons par déterminer la log-vraisemblance de l'échantillon χ à partir des densités de probabilité des éléments de l'échantillon (voir Eq.2.41) :

$$\begin{aligned}
\ell(I, P, g_X, g_Y) &= \sum_{i=1}^{N} \left[\log P_{X_i}(X_i) + \log P_{Y_i}(Y_i) + \log P_{V_i}(V_i) + \log P_{W_i}(W_i)\right] \\
&= -N(I + 2(g_X + g_Y)) + S_X \log\left[\frac{I(1+P)}{2} + g_X\right] + S_V \log(g_X) \\
&\quad + S_Y \log\left[\frac{I(1-P)}{2} + g_Y\right] + S_W \log(g_Y) + B \qquad (2.42)
\end{aligned}$$

où $S_U = \sum_{i=1}^{N} U_i$ avec $U = \{X, Y, V, W\}$ et $B = \sum_{i=1}^{N} -\log(X_i!) - \log(Y_i!) - \log(V_i!) - \log(W_i!)$ ne dépend pas des paramètres d'intérêt I, P, g_X, et g_Y. Le vecteur de paramètres que nous cherchons à estimer est $\theta^T = [I, P, g_X, g_Y]$. A partir de l'expression de la log-vraisemblance nous calculons la matrice de Fisher définie par $\mathcal{I}_{ij} = \frac{\partial \ell}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$ et nous l'inversons pour obtenir après quelques calculs :

$$J = \mathcal{I}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2I_g + I}{N} & -\frac{2(-g_X + g_Y + I_g P)}{IN} & -\frac{g_X}{N} & -\frac{g_Y}{N} \\ -\frac{2(-g_X + g_Y + I_g P)}{IN} & \frac{I(1-P^2) + 2I_g(1 + P^2 + 2P_g P)}{I^2 N} & \frac{g_X(-1+P)}{IN} & \frac{g_Y(1+P)}{IN} \\ -\frac{g_X}{N} & \frac{g_X(-1+P)}{IN} & \frac{g_X}{N} & 0 \\ -\frac{g_Y}{N} & \frac{g_Y(1+P)}{IN} & 0 & \frac{g_Y}{N} \end{pmatrix}$$

où :

$$I_g = g_X + g_Y \qquad (2.43)$$

$$P_g = \frac{g_X - g_Y}{g_X + g_Y} \qquad (2.44)$$

sont respectivement l'intensité (*i.e.* le nombre total de photoélectrons) et l'OSC de la contribution passive. Les bornes de Cramer-Rao sur l'estimation des paramètres sont les éléments diagonaux de la matrice J. Ainsi $BCR_{g_X} = g_X/N$ et $BCR_{g_Y} = g_Y/N$. Cela correspond à la variance classique d'estimation de la moyenne d'une variable aléatoire de Poisson. La borne de Cramer-Rao peut se décomposer en deux termes, comme dans la partie précédente :

$$BCR_I(g) = BCR_I^{ds} + BCR_I^{add}$$

$$\text{avec} \quad BCR_I^{ds} = \frac{I}{N} \qquad (2.45)$$

$$\text{et} \quad BCR_I^{add} = \frac{2I_g}{N} \qquad (2.46)$$

Nous en concluons que l'estimation de I ne dépend pas de la répartition de la contribution passive sur les canaux parallèle et orthogonal.

La BCR sur P s'écrit quant à elle :

$$\begin{aligned} BCR_P(g) \quad &= \quad BCR_P^{ds} + BCR_P^{add} \\ &\text{avec} \quad BCR_P^{ds} = \frac{(1-P^2)}{NI} \qquad (2.47) \\ &\text{et} \quad BCR_P^{add} = 2\ I_g\ \frac{1+P^2-2P_g\ P}{NI^2}. \qquad (2.48) \end{aligned}$$

Nous retrouvons, comme dans la partie précédente, une décomposition en deux termes : BCR_P^{ds} liée au bruit de photons du signal utile et BCR_P^{add} liée au bruit de photons de la contribution passive. Il est très intéressant de noter que BCR_P^{add} dépend à la fois du nombre total de photoélectrons passifs, mais aussi de leur OSC P_g. Cela signifie que pour un nombre total I_g de photoélectrons passifs donné, leur répartition entre les deux canaux polarimétriques influe sur la précision d'estimation de l'OSC. Analysons plusieurs cas :

- si $P_g = 0$ alors $g_X = g_Y = g$. Nous sommes dans le cas de la partie 2.3, à l'exception près que g est ici supposé *a priori* inconnu. Par conséquent, la valeur de BCR_P^{add} double par rapport au cas où g est connu (voir Eq.2.38).
- si $|P_g| = 1$ et P_g a le même signe que P alors la contribution passive est totalement polarisée dans l'état de polarisation principal du signal utile. Dans ce cas BCR_P^{add} est minimale (la précision d'estimation est donc maximale). Au contraire si P_g et P sont de signe opposé alors BCR_P^{add} est maximale.

Nous en concluons que pour maximiser la précision d'estimation de l'OSC, la majorité des photons passifs doit être dans le canal polarimétrique où se trouve la majorité des photons utiles. Le rapport entre la valeur maximale et minimale de la BCR_P lorsque P_g varie entre $+1$ et -1 est :

$$\rho_{BCR} = \left(\frac{1-P}{1+P}\right)^2$$

Cette différence est d'autant plus grande que P est grand, c'est-à-dire que le signal est polarisé. Si le signal utile est dépolarisé ($P = 0$), alors P_g n'a aucune influence sur la précision d'estimation de P. Nous illustrons cela sur un exemple dans la figure 2.13, où nous traçons la courbe BCR_P en fonction de l'intensité du signal utile I, avec $P = 0,8$, $I_g = 500$, et $P_g = 1$, 0 et -1. Les trois courbes sont clairement constituées de deux parties où la source de bruit prédominante est différente :

- si par exemple l'objet observé est éloigné, le signal utile capté par le système est faible et le bruit prédominant est dû à la contribution passive. Nous avons alors $BCR_P \approx BCR_P^{add}$ qui dépend de la valeur de P_g. Les courbes correspondant à $P_g = 1$ et $P_g = -1$ sont espacées de la quantité $Log_{10}\rho_B CR = 19$ dB.
- en revanche si I augmente le bruit dû au signal utile augmente aussi et nous observons que $BCR_P \approx BCR_P^{ds}$. Dans ce cas, la BCR n'est plus fonction de P_g. Les trois courbes correspondant à $P_g = 1, 0$ et -1 tendent alors à se rejoindre.

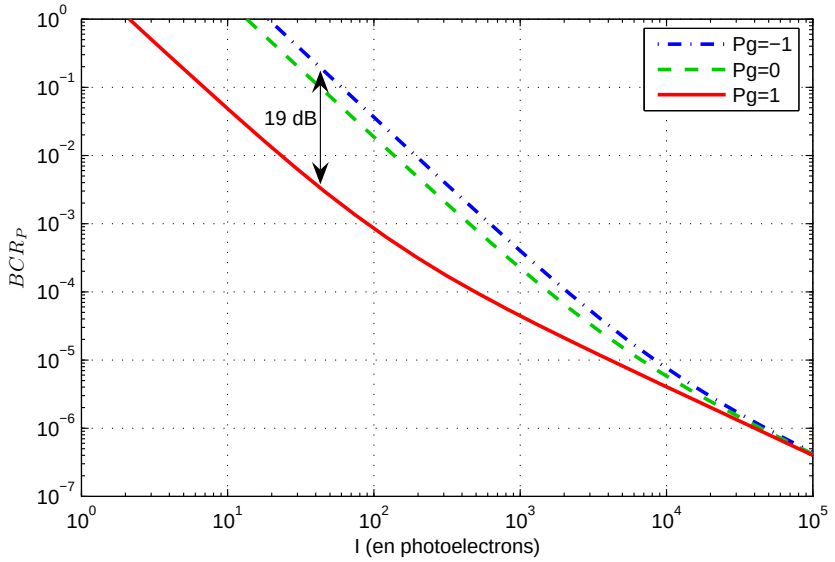


FIGURE 2.13 – Borne de Cramer-Rao pour l'estimation de l'OSC P en fonction de l'intensité I et avec une contribution passive $I_g = 500$ photo-éléctrons et un échantillon de taille N=10. La valeur vraie de l'OSC est $P = 0,8$ et les BCR sont tracées pour plusieurs répartitions des photons passifs : $P_g = 1$, $P_g = 0$ et $P_g = -1$.

2.4.2 Estimateur du maximum de vraisemblance généralisé

Dans la partie précédente, notre analyse était basée sur l'étude des BCR, qui nous renseigne sur la précision maximale d'estimation. Intéressons-nous dans cette partie à l'étude d'estimateurs. À partir de l'expression de la vraisemblance donnée dans l'équation (Eq. 2.42), nous utilisons la méthode du maximum de vraisemblance généralisé. Pour cela nous annulons les dérivées partielles de la log-vraisemblance par rapport à chacun des paramètres de nuisance (g_X et g_Y dans notre cas). Nous obtenons :

$$\widehat{g}_X = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} V_i \qquad \text{et} \qquad \widehat{g}_Y = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} W_i.$$

Ces estimées sont réinjectées dans la log-vraisemblance :

$$\begin{aligned}\ell(I,P) &= -N\left[I + 2(\widehat{g}_X + \widehat{g}_Y)\right] + S_X \log\left[\frac{I(1+P)}{2} + \widehat{g}_X\right] + S_V \log\left(\widehat{g}_X\right) \\ &\quad + S_Y \log\left[\frac{I(1-P)}{2} + \widehat{g}_Y\right] + S_W \log\left(\widehat{g}_Y\right) + B \qquad (2.49)\end{aligned}$$

Il nous reste à calculer les estimées des paramètres d'intérêt I et P, au sens du maximum de vraisemblance généralisé. Nous obtenons :

$$\widehat{I}_{mvg} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \widehat{g}_X) + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(Y_i - \widehat{g}_Y) \qquad (2.50)$$

$$\widehat{P}_{mvg} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \widehat{g}_X) - \sum_{i=1}^{N}(Y_i - \widehat{g}_Y)}{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \widehat{g}_X) - \sum_{i=1}^{N}(Y_i - \widehat{g}_Y)} \qquad (2.51)$$

Ces deux estimateurs du MVG sont plutôt intuitifs. Ils consistent à d'abord estimer m_X (m_Y) en soustrayant l'estimée de g_X (g_Y) aux valeurs de l'échantillon $X_i(Y_i)$, puis en calculant la moyenne. Ces estimées de m_X (m_Y) sont ensuite utilisées pour estimer I et P. Nous savons que cet estimateur a de bonnes propriétés en terme d'efficacité (voir [50]) et nous allons le vérifier à l'aide de simulations de Monte-Carlo.

2.4.3 Simulations de Monte-carlo

Dans cette partie, nous allons tester l'efficacité de l'estimateur P_{mvg} grâce à des simulations de Monte-Carlo. Nous représentons sur la figure 2.14 le biais et la variance de l'estimateur $\widehat{P}_{mvg}$ pour différentes valeurs de l'OSC de la contribution passive P_g.

Nous voyons qu'au-delà d'une certaine intensité, l'estimateur du MVG atteint la BCR et peut donc être considéré comme efficace et cela quelle que soit la valeur de P_g. Sa variance devient bien supérieure à la BCR pour de plus faibles valeurs de I et son biais devient également très important. Cela peut s'expliquer grâce à l'expression de $\widehat{P}_{mvg}$ (voir l'équation 2.51). En effet, les valeurs estimées de g_U sont soustraites aux données, et lorsque le bruit sur $\widehat{g}_U$ est grand, la valeur du dénominateur peut être proche de zéro, ce qui donne lieu à de grandes variations.

Intéressons-nous à cette intensité seuil, en dessous de laquelle l'estimation est trop chahutée (biais trop important, et variance très supérieure à la BCR). Nous remarquons que ce seuil ne dépend pas de l'OSC de la contribution passive. En effet, sur chacune des figures, les courbes correspondant aux différentes valeurs de P_g décrochent pour la même valeur de I. Nous remarquons cependant que le seuil dépend de la valeur de I_g. Comme nous le voyons sur chacune des lignes de la figure 2.14, le seuil augmente avec I_g.

Essayons de quantifier ce phénomène. Dans la figure 2.15, nous avons réalisé les mêmes simulations que précédemment. Pour chacune d'elles nous calculons la valeur de I_{seuil} que nous définissons comme la plus faible intensité telle que si $I > I_{seuil}$ alors

$$1 - \varepsilon < \frac{\mathrm{Var}(\widehat{P}_{mvg})}{BCR_P} < 1 + \varepsilon \tag{2.52}$$

Par la suite nous fixons arbitrairement $\varepsilon = 0,2$. Nous voyons que l'intensité I_{seuil} ne dépend pas de l'OSC de la scène observée : les deux courbes sont en effet très proches. Il apparaît que la dépendance entre I_{seuil} et I est de la forme $\log(I_{seuil}) = a\log(I_g) + \log(b)$ soit $I_{seuil} = b \times (I_g)^a$ où ν dépend de ε c'est-à-dire de la manière dont est défini le seuil. Dans notre exemple a=3,49 et b=0,50.

2.4.4 Illustration expérimentale

Afin d'illustrer les résultats précédents, nous avons réalisé l'expérience schématisée dans la figure 2.16. Un polariseur fixe placé devant une source lumineuse (lampe halogène) contribue à l'illumination passive. Son intensité est réglée de telle sorte que nous sommes dans le régime où la contribution passive est prédominante. Nous utilisons le système actif que nous avons présenté dans le chapitre 1. Dans notre exemple, il est constitué d'une source totalement polarisée linéaire (grâce à un polariseur dans une monture tournante dont l'angle par rapport à la position

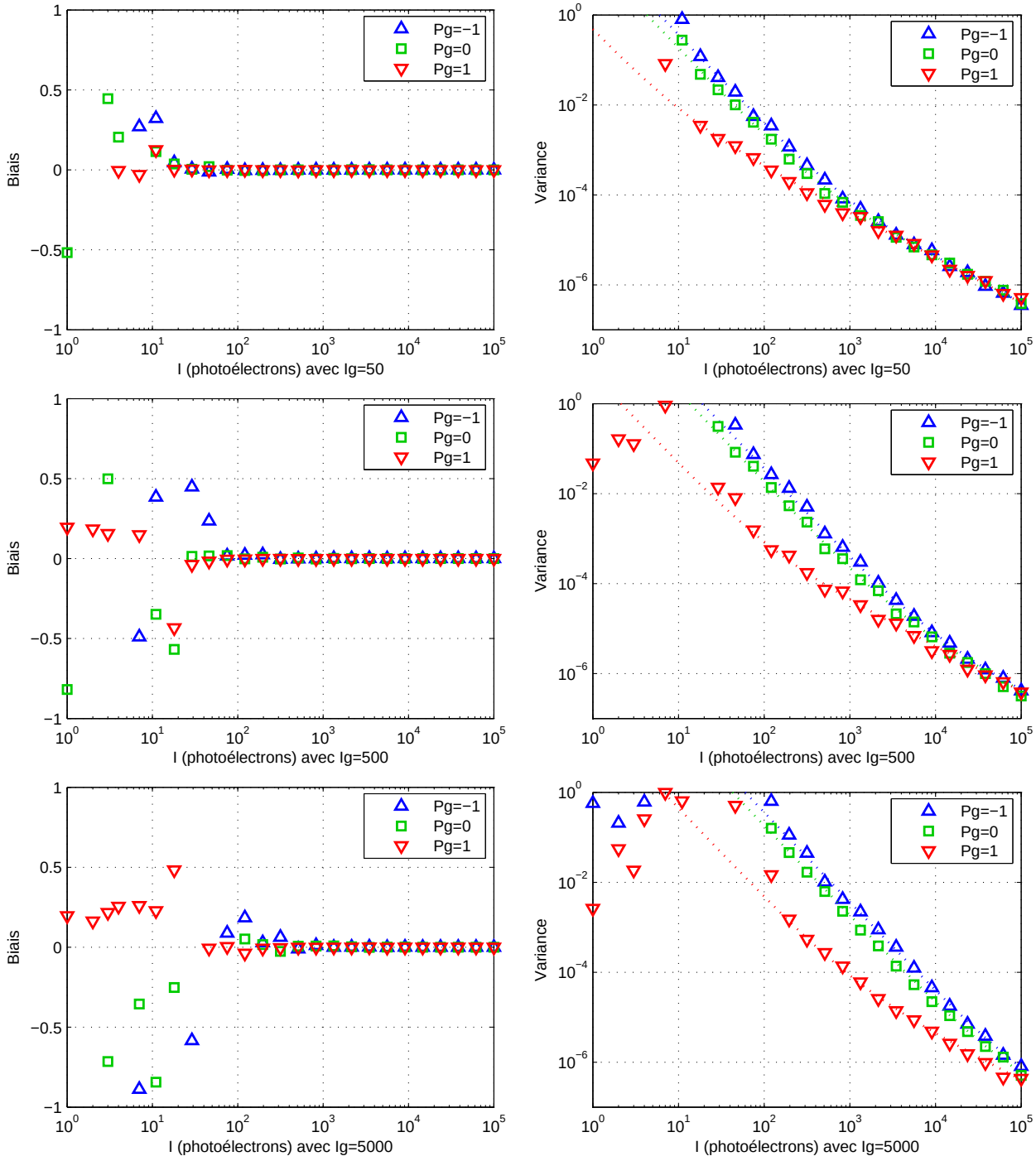


FIGURE 2.14 – Biais et variance de l'estimateur $\widehat{P}_{mvg}$ en fonction de l'intensité I avec un échantillon de taille N=10. Sur la première ligne $I_g = 50$, sur la deuxième $I_g = 500$ et sur la troisième $I_g = 5000$ photoélectrons. La valeur vraie de l'OSC est $P = 0,8$ et les courbes sont tracées pour plusieurs répartitions des photons passifs : $P_g = 1$, $P_g = 0$ et $P_g = -1$ avec 10^4 réalisations. Les bornes de Cramer-Rao sont tracées en pointillés dans les figures de droite

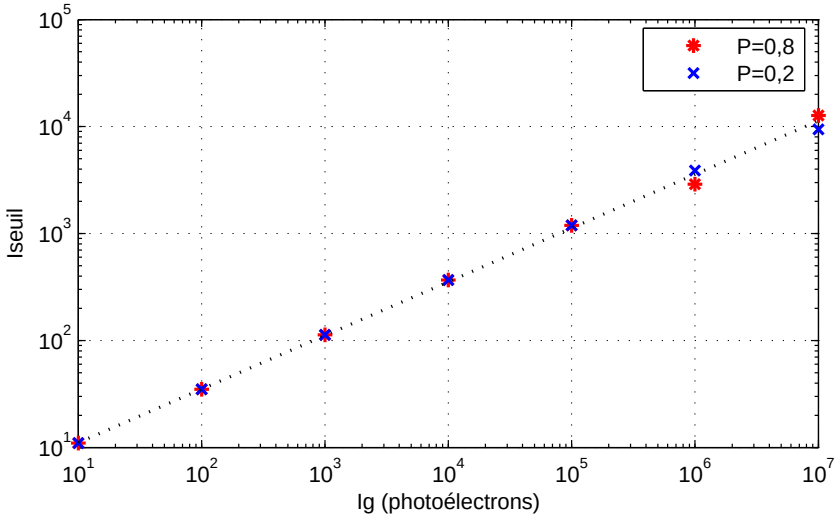


FIGURE 2.15 – Valeur de l'intensité de seuil I_{seuil}, en fonction de l'intensité de la contribution passive I_g, pour $\varepsilon = 0,2$ (voir l'équation 2.52). En pointillé nous représentons un "fit" des données par une fonction du type $f(x) = a \times x^b$ avec a=3,49 et b=0,50

verticale est noté θ). La partie réception permet de faire l'acquisition simultanée de deux états de polarisation, l'un étant parallèle à celui de l'illumination et l'autre orthogonal. Une lame $\lambda/2$ est placée devant le module de réception pour pouvoir ajuster les états d'analyse sur celui de la source : il suffit pour cela de la tourner d'un angle $\theta/2$ par rapport à la position où l'axe neutre est vertical. Précisons qu'un filtre interférentiel est placé devant le module de réception pour que l'analyse soit monochromatique ($\lambda = 630\,\text{nm}$ avec une largeur de 10 nm) et que la lame $\lambda/2$ soit efficace.

La scène observée est composée d'une plaque métallique sur laquelle nous avons collé des rubans de plastique transparent. Les OSC de ces matériaux sont élevés : en effet, $P \simeq 1$ pour le métal et $P \simeq 0,9$ pour le plastique. Nous considérons deux situations différentes :

- dans la première, $\theta = 0°$ (c'est-à-dire $P_g \simeq 1$) ce qui signifie que l'état de polarisation principal de la lumière passive est parallèle à celui de l'illumination active.
- dans la seconde, l'état de l'illumination et les états d'analyse sont tournés de 90 degrés ($\theta = 90°$) de telle sorte que $P \simeq -1$, c'est-à-dire que l'état de polarisation principal de la contribution passive est orthogonal à celui de l'illumination.

Nous représentons dans la figure 2.17 les images OSC observées dans chacune des situations. La variance du bruit est beaucoup plus faible dans la configuration $P_g \simeq 1$ (Fig. 2.17.a) que dans la configuration $P_g \simeq -1$ (Fig. 2.17.c). Cette observation est également vérifiée sur les profils le long de la ligne en trait pointillé dans les figures 2.17.b et 2.17.d, où les rubans en plastique sont plus difficilement détectables suivant la coupe horizontale. Les valeurs de variance estimées sur les deux matériaux sont en accord avec les BCR correspondantes. Par exemple, la variance de $\widehat{P}_{mvg}$ sur l'aluminium $P_g \approx 1$ est $3,6\ 10^{-4}$ et la BCR correspondante est de $3,5\ 10^{-4}$.

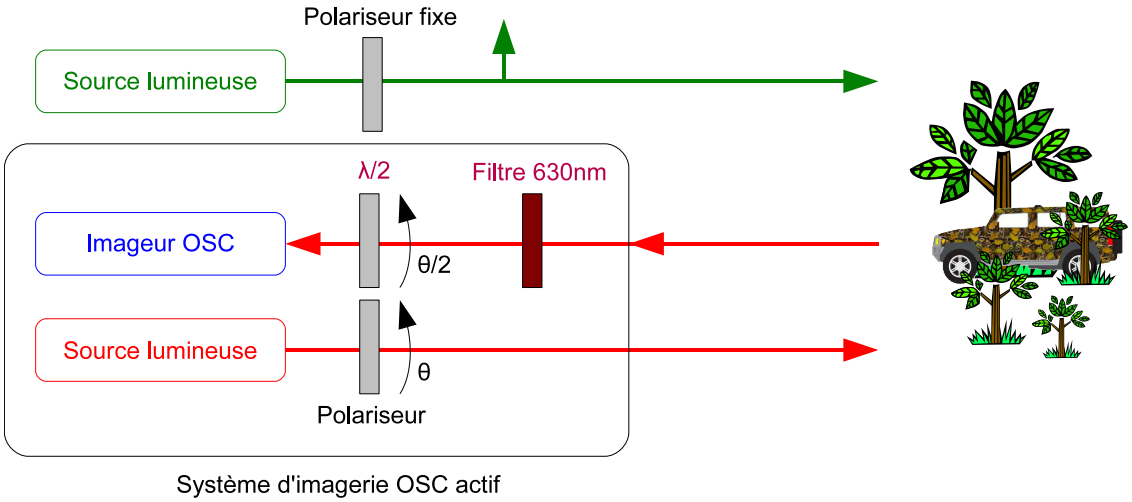


FIGURE 2.16 – Schéma du montage expérimental. Nous nous intéressons à deux configurations. Dans la première l'angle θ vaut 0°. Les états de polarisation de l'illumination active et passive sont colinéaires. Dans la seconde configuration $\theta = 90°$. Les états de polarisation de l'illumination active et passive sont orthogonaux.

Ce résultat illustre le fait que la connaissance de la contribution passive permet d'augmenter la précision d'estimation de l'OSC. En effet, l'état de polarisation de l'illumination active doit être choisi pour minimiser BCR_P. Nous venons de montrer que si la scène est purement dépolarisante alors le choix optimal consiste à illuminer la scène avec l'état de polarisation principal de la contribution passive.

2.4.5 Discussion

Cette partie a permis de compléter l'étude précédente. En effet, nous avons considéré que la contribution passive (bruit de détecteur, lumière ambiante ...) était inconnue *a priori* et pouvait être partiellement polarisée. L'expression de la borne de Cramer-Rao met en evidence que nous pouvons augmenter la précision d'estimation en choisissant correctement l'état de polarisation de l'illumination. Nous avons montré que l'estimateur du maximum de vraisemblance généralisé était asymptotiquement efficace puisqu'il atteignait la borne de Cramer-Rao.

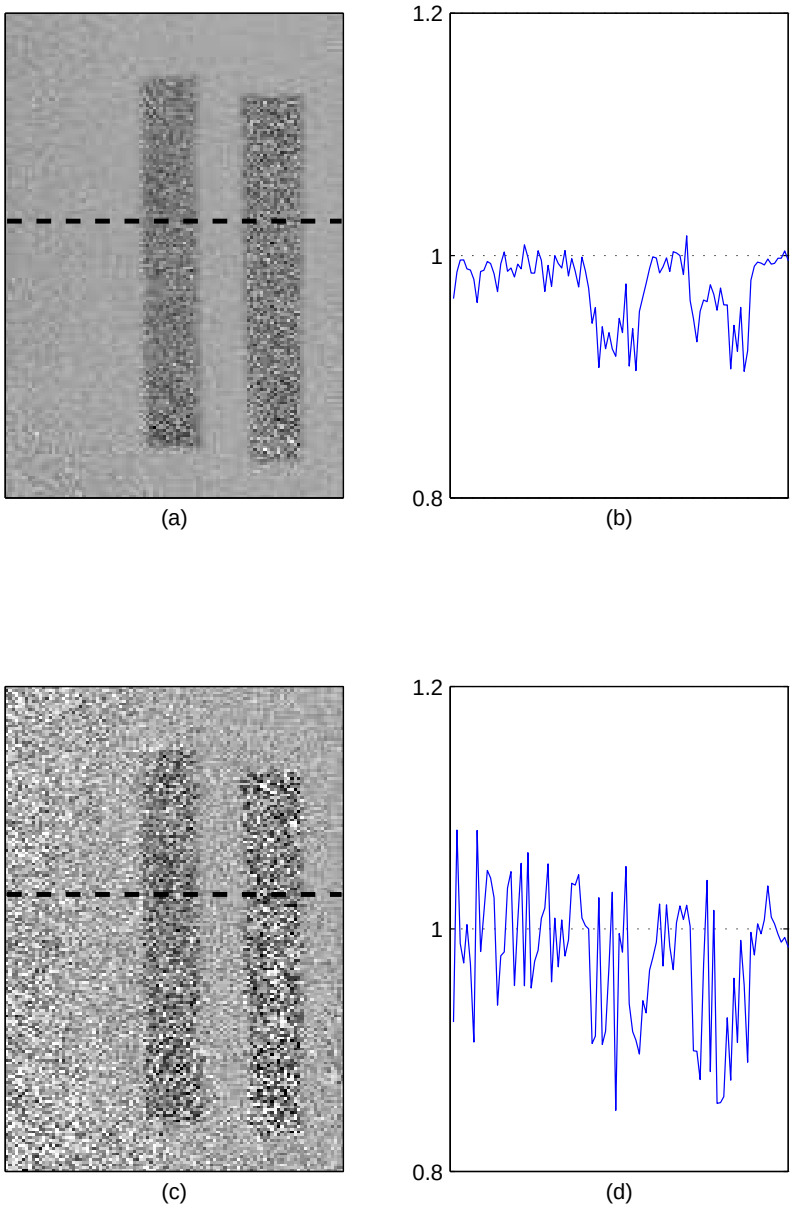


FIGURE 2.17 – Image d'OSC d'une scène composée de deux rubans de plastique transparent, sur une plaque d'aluminum dans deux configurations : (a) configuration $P_g \approx 1$ et (c) configuration $P_g \approx -1$. Les profils respectifs le long des lignes pointillées sont tracés sur les figures (b) et (d)

2.5 Prise en compte de l'illumination non-uniforme

L'estimateur du MV que nous avons calculé et caractérisé dans la partie précédente est basé sur l'hypothèse d'un échantillon homogène. Chaque pixel de l'échantillon a les mêmes paramètres m_X et m_Y (voir Eq. 2.12). Dans l'équation 2.9, si la matrice de Mueller du matériau est supposée homogène sur l'échantillon, cela signifie que l'illumination l'est aussi. Or ce n'est pas forcément le cas en pratique. En effet, le faisceau qui illumine la scène peut être spatialement non-uniforme à cause, par exemple, de la déformation du front d'onde due aux perturbations atmosphériques, ou à la non-homogénéité du faisceau. Il peut être aussi non-uniforme temporellement si, par exemple, nous utilisons une illumination impulsionnelle dont l'intensité fluctue. Dans cette partie, nous nous focaliserons sur le problème de l'estimation de l'OSC en présence de deux perturbations : le bruit de détecteur et l'illumination non-uniforme. Nous commencerons par définir un nouveau modèle qui prend en compte la non-uniformité d'illumination. Nous déterminerons ensuite la BCR et l'estimateur du maximum de vraisemblance quand l'illumination est non-uniforme et connue. Nous déterminerons enfin l'estimateur du maximum de vraisemblance généralisé (MVG) qui suppose l'illumination inconnue, et caractériserons ses performances sur des données simulées et expérimentales.

2.5.1 Modélisation

Nous modélisons l'échantillon de taille N mesuré $\chi' = (\mathbf{X}', \mathbf{Y}')$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} X_i' &= F_i\, m_X + n_i^x, \\ Y_i' &= F_i\, m_Y + n_i^y, \end{aligned} \tag{2.53}$$

pour $i \in [1, N]$, où m_X et m_Y sont les paramètres de l'échantillon (voir Eq. (2.9)) et n_i^x ou n_i^y sont des variables aléatoires dont les DDP sont supposées gaussiennes de moyenne nulle et de variance σ^2. Notons que l'échantillon est toujours considéré homogène. En effet, les paramètres d'intérêt sont les mêmes pour chaque pixel. Il n'est cependant plus identiquement distribué, étant donné que l'illumination $\mathbf{F}$ est supposée non-uniforme. Le vecteur $\mathbf{F}$ est à valeur réelle positive et traduit les variations spatiales ou temporelles de l'intensité d'illumination. Nous remarquons que pour chaque mesure i l'illumination F_i est la même sur les deux échantillons $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$. Pour garantir cela, l'utilisation d'un système faisant l'acquisition simultanée de X_i et Y_i, tel que celui que nous avons conçu dans le chapitre 1, est indispensable. La densité de probabilité d'un élément de l'échantillon est donc de la forme :

$$\mathcal{P}_{U_i}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(u - F_i m_U)^2}{2\sigma^2}\right], \tag{2.54}$$

où $U = \{X, Y\}$.

2.5.2 Borne de Cramer-Rao avec une illumination non-uniforme mais connue

Commençons par supposer que le vecteur d'illumination $\mathbf{F}$ est connu. Cette hypothèse peut se justifier :

- si la non-uniformité est spatiale et ne varie pas dans le temps, le système peut être calibré au préalable.
- si la non-uniformité temporelle est due à la fluctuation d'intensité des impulsions d'illumination, nous pouvons envisager de prélever une partie du faisceau d'illumination pour enregistrer en temps réel ses fluctuations. Cela a été mis en place dans le démonstrateur Hypolac [60]. Quoi qu'il en soit, la connaissance de $\mathbf{F}$ n'est possible que dans certains cas particuliers et est souvent difficile à mettre en œuvre.

Notre objectif est de déterminer la BCR sur le paramètre P en supposant que l'illumination est non-uniforme mais connue. Pour cela, commençons par calculer la log-vraisemblance à partir du modèle Eq.(2.53) :

$$\ell(\chi'|\mathbf{F}, m_X, m_Y) = -2N\ln(\sqrt{2\pi}\sigma) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(X_i - F_i m_X)^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(Y_i - F_i m_Y)^2. \quad (2.55)$$

En utilisant la paramétrisation (I, P) nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\ell(\chi'|\mathbf{F}, I, P) &= -2N\ln(\sqrt{2\pi}\sigma) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}\left(X_i - F_i\frac{I(1+P)}{2}\right)^2 \\ &\quad -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i - F_i\frac{I(1-P)}{2}\right)^2. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Le calcul de la matrice de Fisher se fait simplement, en dérivant la log-vraisemblance par rapport aux paramètres I et P. Nous obtenons la matrice J qui est l'inverse de la matrice de Fisher :

$$J = \mathcal{I}^{-1} = \frac{2\sigma^2}{\sum_{i=1}^{N} {F_i}^2}\begin{bmatrix} 1 - \frac{P}{I} & \\ -\frac{P}{I} & \frac{(1+P^2)}{I^2} \end{bmatrix}. \quad (2.57)$$

Les BCR sur I et P sont données par les éléments diagonaux de J. Ainsi :

$$BCR_I^F = \frac{2\sigma^2}{\sum_{i=1}^{N} {F_i}^2}, \quad (2.58)$$

$$BCR_P^F = \frac{(1+P^2)}{RSB_F^2}, \quad (2.59)$$

avec :

$$RSB_F = \frac{I\sqrt{\sum_{i=1}^{N} {F_i}^2}}{\sqrt{2}\sigma}. \quad (2.60)$$

Les expressions des bornes de Cramer-Rao sur I et P sont similaires à celles obtenues dans le cas de l'illumination uniforme (voir Eq. 2.18). Il suffit de remplacer N par $\sum_{i=1}^{N} {F_i}^2$, qui prend en compte le vecteur d'illumination $\mathbf{F}$. Nous notons que le rapport signal sur bruit RSB_F dépend de l'illumination. De plus nous observons que si l'illumination est uniforme, $F_i = 1,\ \forall i \in [1, N]$, alors $RSB = RSB_F$. Nous en concluons, que lorsque l'illumination est connue, qu'elle soit uniforme ou non, le problème d'estimation est très similaire. Nous pouvons à présent nous interroger sur l'intérêt de prendre en compte la non-uniformité : cela apporte-t-il réellement un gain en précision d'estimation ?

2.5.3 Gain potentiel en précision en prenant en compte la non-uniformité

Considérons une illumination non-uniforme $\mathbf{F}$. Notre objectif est ici d'évaluer le gain en précision lorsque nous prenons en compte cette perturbation dans le modèle de bruit. Pour cela nous allons d'abord analyser la borne de Cramer-Rao calculée avec le modèle d'illumination non-uniforme dans Eq.(2.59). Nous nous intéresserons ensuite au cas où nous faisons l'hypothèse que l'illumination est uniforme dans le modèle de bruit, mais qu'en réalité, expérimentalement, elle ne l'est pas. Autrement dit, nous étudierons le cas où la modélisation d'illumination uniforme n'est pas adaptée aux données. Pour cela nous calculerons la borne de Cramer-Rao, notée BCR^U avec le modèle d'illumination uniforme Eq.(2.18), mais en présence d'un échantillon non-uniformément illuminé. Cela nous donnera une idée de la précision que nous pouvons espérer avec les deux modèles de perturbations, en présence d'une illumination non-uniforme.

Analyse de RSB^F

Définissons le niveau d'intensité total de l'illumination, c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^{N}(m_X F_i + m_Y F_i) = IF^0.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, et le fait que $\forall i, F_i > 0$ nous obtenons :

$$\left(F^0\right)^2/N \leq \sum_{i=1}^{N} F_i^2 \leq \left(F^0\right)^2,$$

et donc :

$$RSB_F^{min} \leq RSB_F \leq RSB_F^{max}, \tag{2.61}$$

avec :

$$RSB_F^{min} = \frac{I}{\sqrt{2}\sigma}\frac{F^0}{\sqrt{N}} \qquad \text{et} \qquad RSB_F^{max} = \frac{I}{\sqrt{2}\sigma}F^0.$$

La borne inférieure RSB_F^{min} est atteinte pour le cas de l'illumination uniforme, $F_i = F^0/N,\ \forall i$. La borne supérieure RSB_F^{max} est atteinte pour une illumination que nous appellerons "impulsionnelle" : toute l'intensité d'illumination est concentrée sur un seul élément j de l'échantillon : $F_j = F^0$ et $F_i = 0,\ \forall i \neq j$. Dans la pratique, si nous considérons un échantillon temporel de taille N, cela signifie que le rapport signal sur bruit maximum RSB_F^{max} sera atteint lorsque l'illumination est concentrée dans une impulsion correspondant à la première image, et que les $N-1$ suivantes ne sont pas illuminées.

Précision avec le modèle d'illumination uniforme

Supposons que la scène soit observée avec une illumination uniforme. L'échantillon mesuré est donc modélisé par Eq.(2.12). L'expression de la vraisemblance est :

$$\ell(\chi|I,P) = -2N\ln(\sqrt{2\pi}\sigma) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{1}^{N}\left(X_i - \frac{I(1+P)}{2}\right)^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{1}^{N}\left(Y_i - \frac{I(1-P)}{2}\right)^2, \tag{2.62}$$

Nous pouvons l'écrire sous la forme :

$$\ell(\chi|I,P) \quad = \quad f(S_X,S_Y|I,P)+g(\chi), \tag{2.63}$$

avec :

$$\begin{aligned}
&S_X=\sum_{i=1}^{N}X_i,\\
&S_Y=\sum i=1^N Y_i,\\
&f(S_X,S_Y|I,P)=\frac{1}{2\sigma^2}\left\{[S_XI(1+P)-S_YI(1-P)]-\frac{NI^2(1+P^2)}{2}\right\},\\
&g(\chi)=-2N\ln(\sqrt{2\pi}\sigma)-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{1}^{N}X_i^2+Y_i^2\right).
\end{aligned}$$

Notons que la fonction $g(\chi)$ ne dépend pas des paramètres d'intérêt I et P. En langage statistique on dit que les statistiques S_X et S_Y sont des statistiques suffisantes. Leur connaissance est suffisante pour caractériser les performances d'estimation. En effet, connaître complètement l'échantillon χ est inutile, puisque la vraisemblance $\ell(\chi|I,P)$ ne dépend que de S_X et S_Y. Ce sont des variables aléatoires gaussiennes de moyennes respectives $NI(1+P)/2$ et $NI(1-P)/2$ et de variances $N\sigma^2$.

Si dans la réalité la scène est illuminée non-uniformément, l'échantillon mesuré suit le modèle Eq.(2.53). Mais nous supposons que l'estimation se fait avec le modèle d'illumination uniforme. Dans ce cas, S_X et S_Y sont des variables aléatoires gaussiennes de moyennes $F^0I(1+P)/2$ et $F^0I(1-P)/2$ et de variances $N\sigma^2$. Cette situation est donc totalement équivalente à celle d'une illumination uniforme avec les paramètres $I'=IF^0/N$ et P. Dans ce cas le rapport signal sur bruit se calcule simplement à partir de l'équation 2.19 :

$$RSB=\frac{I'\sqrt{N}}{\sqrt{2}\sigma}=\frac{IF^0}{\sqrt{N}\sqrt{2}\sigma}=RSB_F^{min}.$$

Par conséquent, une borne sur la variance d'estimation de P est donnée par la BCR_P calculée avec le modèle uniforme dans Eq.2.18 et avec un rapport signal sur bruit égal à RSB_F^{min} :

$$BCR_U=\frac{1+P^2}{\left[RSB_F^{min}\right]^2}. \tag{2.64}$$

Ceci correspond à la précision maximale que nous pouvons espérer en utilisant le modèle (2.12) alors que l'illumination est non-uniforme.

Amélioration apportée par le modèle prenant en compte la non-uniformité

Comparons à présent les performances d'estimation obtenues en partant de chacun des modèles. Compte tenu des équations (2.59) et (2.64) nous obtenons :

$$\begin{aligned} BCR_U &= BCR_F \left(\frac{RSB_F}{RSB_F^{min}} \right)^2 = BCR_F \left(\frac{N \sum_{i=1}^{N} F_i^2}{F_0^2} \right) \\ &= BCR_F \left(1 + \frac{\sigma_F^2}{m_F^2} \right), \end{aligned}$$

où $m_F = (1/N) \sum_{i=1}^{N} F_i$ et $\sigma_F^2 = (1/N) \sum_{i=1}^{N} F_i{}^2 - {m_F}^2$ sont respectivement la moyenne et la variance empiriques de l'illumination. On peut ainsi écrire la relation précédente de la manière suivante :

$$BCR_U = BCR_F \left[1 + (N-1)Q \right], \tag{2.65}$$

avec :

$$Q = \frac{1}{N-1} \frac{{\sigma_F}^2}{{m_F}^2}. \tag{2.66}$$

Le paramètre Q caractérise la non-uniformité d'illumination et varie entre 0 et 1. En effet on montre facilement, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, que σ_F^2/m_F^2 varie entre 0 and N-1. Dans le tableau 2.3 nous donnons quelques exemples de non-uniformité d'illumination et les valeurs de Q correspondantes. Nous prenons comme exemple :

- l'illumination uniforme. $F_i = F_j, \ \forall i, j$ et dans ce cas $\sigma_F = 0$ et par conséquent $Q = 0$,
- l'illumination aléatoire distribuée uniformément. $\mathbf{F}$ est un vecteur aléatoire distribué uniformément entre 0 et $2F_0$. Dans cette situation on sait que sa moyenne est $m_F = F_0$ et sa variance ${\sigma_F}^2 = F_0^2/3$.
- l'illumination de type exponentiel. $\mathbf{F}$ est un vecteur aléatoire distribué avec une DDP exponentielle. Dans ce cas on sait que $\sigma_F^2/m_F^2 \approx 1$.
- l'illumination impulsionnelle. $\mathbf{F}$ est telle que $F_j = F^0$ et $F_i = 0, \ \forall i \neq j$. On montre alors facilement que $Q = 1$.

Nous représentons sur la figure 2.18, l'évolution de BCR_U et BCR_F en fonction du paramètre Q, pour un $RSB_F = 12$. Pour $Q = 0$, c'est-à-dire une illumination uniforme, les BCR sont égales. Les performances d'estimation seront les mêmes en utilisant les deux modèles de bruit. L'amélioration est modeste pour l'illumination aléatoire distribuée uniformément, plus importante pour l'illumination avec une distribution exponentielle. Dans le cas de l'illumination impulsionnelle, l'amélioration apportée est significative et augmente avec la taille de l'échantillon.

Ainsi, nous venons de montrer que si l'illumination est non-uniforme, l'amélioration potentielle apportée par le modèle Eq.(2.53) dépend du type de non-uniformité et peut être significative. Nous allons, par conséquent, poursuivre l'étude par le calcul et la caractérisation d'un estimateur adapté à ce type de perturbation.

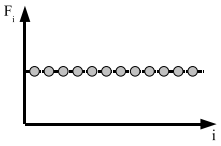
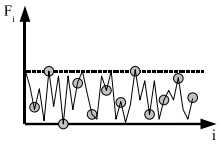
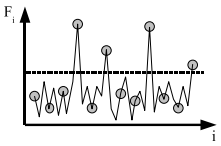
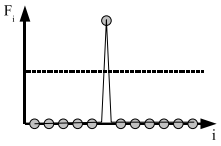
Uniforme		$Q = 0$	$BCR_U = BCR_F$
Uniformément distribuée		$Q = \frac{1}{3(N-1)}$	$BCR_U = 4/3BCR_F$
Exponentielle		$Q = \frac{1}{N-1}$	$BCR_U = 2BCR_F$
Impulsionnelle		$Q = 1$	$BCR_U = NBCR_F$

TABLEAU 2.3 – Valeur du paramètre Q et gain en précision pour différents types de non-uniformité d'illumination.

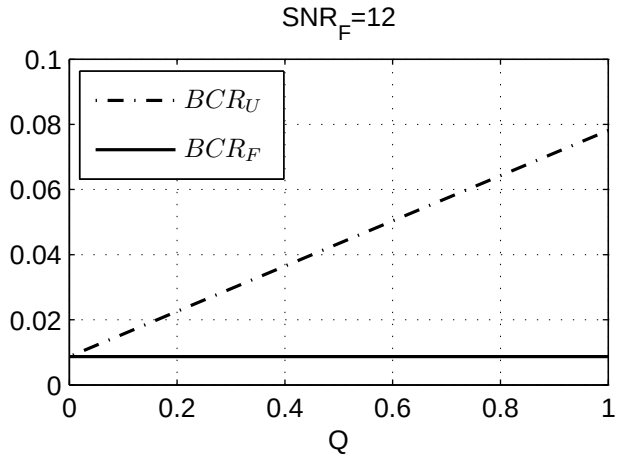


FIGURE 2.18 – Evolution de BCR_U et BCR_F en fonction du paramètre Q. Le rapport signal sur bruit est $RSB_F = 12$ et l'échantillon considéré est de taille $N = 9$.

2.5.4 Estimateurs de l'OSC en présence d'illumination non-uniforme

Nous considérons d'abord le cas simple où l'illumination est connue, puis le cas où elle ne l'est pas.

Illumination connue

Notre objectif est ici de déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance lorsque l'illumination est non-uniforme et connue. A partir de l'expression de la log-vraisemblance Eq.2.55,

nous estimons les paramètres m_X et m_Y en annulant ses dérivées partielles par rapport à m_X et m_Y. Nous obtenons $\widehat{m}_V = \sum_{i=1}^{N} F_i V_i / \sum_{i=1}^{N} F_i$ avec $V = X'$ ou Y'. D'après la propriété classique d'invariance de l'estimateur MV par changement de paramétrisation [61] les estimées de I et P s'expriment de la manière suivante :

$$\widehat{I}_{mv,Fconnu} = \widehat{m}_X + \widehat{m}_Y = \sum_{i=1}^{N} F_i(X_i + Y_i) / \sum_{i=1}^{N} F_i, \tag{2.67}$$

$$\widehat{P}_{mv,Fconnu} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(F_i X_i - F_i Y_i)}{\sum_{i=1}^{N}(F_i X_i + F_i Y_i)}. \tag{2.68}$$

On montre facilement que l'estimateur du MV de P peut se mettre sous la forme :

$$\widehat{P}_{mv,Fconnu} = \frac{RSB_F \times P + b_1''}{RSB_F + b_2''}, \tag{2.69}$$

où b_1'' et b_2'' sont deux variables aléatoires gaussiennes de moyenne nulle et de variance 1. Cette expression est identique à celle de l'estimateur MV dans le cas de l'illumination uniforme (voir Eq.(2.21). Il suffit pour cela de remplacer RSB par RSB_F.

Illumination inconnue

Dans la plupart des applications, le vecteur d'illumination $\mathbf{F}$ est *a priori* inconnu. Se pose alors un nouveau problème d'estimation dont les paramètres sont $\{\mathbf{F}, m_X, m_Y\}$ ou $\{\mathbf{F}, I, P\}$. L'estimation de $\mathbf{F}$ n'a pas d'intérêt pour l'utilisateur, seule l'estimation de I et P est intéressante. Le vecteur $\mathbf{F}$ est appelé paramètre de nuisance. Nous remarquons également que m_X et m_Y ne peuvent pas être estimés séparément. En effet, les jeux de paramètres $\{\mathbf{F}, m_X, m_Y\}$ et $\{\mathbf{F}/a, a \times m_X, a \times m_Y\}$, où a est réel positif, conduiront tous les deux à l'échantillon mesuré χ' avec exactement les mêmes propriétés statistiques. Cela signifie que les deux jeux de paramètres mentionnés ne peuvent être distingués à partir de l'observation de χ'. Le même raisonnement peut être appliqué si nous utilisons la paramétrisation (I, P) : les jeux de paramètres $\{\mathbf{F}, I, P\}$ et $\{\mathbf{F}/a, a \times I, P\}$ ne sont pas discernables par l'observation de χ'. Cependant, nous voyons que le paramètre P a la propriété intéressante d'être invariant par la multiplication de m_X et m_Y par le scalaire a. L'OSC peut donc être estimé à partir de l'observation de l'échantillon χ'.

Plusieurs méthodes ont été développées pour éliminer les paramètres de nuisance, de telle manière que la vraisemblance soit une fonction des paramètres d'intérêt seulement. Nous en présentons rapidement deux : la vraisemblance marginale et la vraisemblance généralisée [62].

Vraisemblance marginale Cette approche Bayesienne considère que les paramètres de nuisance sont des variables aléatoires dont la densité de probabilité est connue. Dans notre cas cela revient à supposer que nous connaissons *a priori* la DDP de l'illumination notée $\mathcal{P}(\mathbf{F})$. Nous pouvons calculer la vraisemblance marginale $\mathcal{L}(\chi' \mid I, P) = \int \mathcal{L}(\chi'|\mathbf{F}, I, P)\mathcal{P}(\mathbf{F})d\mathbf{F}$ qui ne dépend plus du paramètre de nuisance. Cependant cette méthode donne lieu à des calculs

compliqués et ne fournit pas de solution analytique. Nous l'avons donc abandonnée et adopté une autre approche.

Vraisemblance généralisée Cette méthode consiste à exprimer les paramètres de nuisance comme des paramètres d'intérêt. Pour cela nous considérons que l'illumination est inconnue et nous cherchons à l'estimer au sens du maximum de vraisemblance. Cette estimée est ensuite injectée dans la vraisemblance, pour obtenir la vraisemblance généralisée $\mathcal{L}_p(\chi'|I,P) = \arg\max_{\mathbf{F}} [\mathcal{L}(\chi'|\mathbf{F}I,P)]$. La fonction ainsi obtenue est appelée vraisemblance généralisée, car ce n'est plus vraiment une vraisemblance. En effet, son intégrale sur l'ensemble de définition de χ' n'est pas forcément égale à 1. Il ne reste plus alors qu'à calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance généralisé (MVG) de P. Étant donné que nous n'avons pas d'information *a priori* sur l'illumination nous préférons cette approche à la précédente.

Le calcul détaillé de cet estimateur noté $\widehat{P}_{mvg,Finconnu}$ est présenté dans l'annexe C. Le résultat obtenu est le suivant :

$$\widehat{P}_{mvg,Finconnu} = -R + \text{sgn}\left(\sum_{i=1}^{N}\left(X_i^2 - Y_i^2\right)\right)\sqrt{1+R^2}, \tag{2.70}$$

$$\text{avec} \quad R = 2\left(\sum_{1}^{N} X_i Y_i\right) / \left(\sum_{1}^{N} X_i^2 - Y_i^2\right),$$

où $\text{sgn}(x) = 1$ si $x > 0$ et -1 sinon.

Avant de caractériser les performances de cet estimateur, nous cherchons à connaître les paramètres dont il dépend. Dans l'équation (2.70) nous voyons que $\widehat{P}_{mvg,Finconnuf}$ ne dépend des données X_i et Y_i qu'à travers R et $\text{sgn}\left[\sum_{i=1}^{N}\left(X_i^2 - Y_i^2\right)\right]$, il est donc suffisant d'analyser ces deux variables. Quelques calculs simples également détaillés dans l'annexe C nous permettent d'écrire la variable aléatoire R sous la forme :

$$R = \frac{{RSB_F}^2\left(\frac{1-P^2}{2}\right) + RSB_F(b_s - Pb_d) + \sqrt{N}b_3}{{RSB_F}^2 P + RSB_F(b_s + Pb_d) + \sqrt{N}b_4}, \tag{2.71}$$

où b_s, b_d sont deux variables aléatoires gaussiennes de moyennes nulles et de variances 1, et b_3, b_4 sont des variables aléatoires de moyennes nulles et de variances 1. Nous en déduisons que R ne dépend que de RSB_F, P et N. Nous montrons dans l'annexe, qu'il en va de même pour $\text{sgn}\left(\sum_{i=1}^{N}\left(X_i^2 - Y_i^2\right)\right)$. L'estimateur du maximum de vraisemblance généralisé $\widehat{P}_{mvg,Finconnu}$ dépend donc de ces trois paramètres, mais pas du paramètre Q, c'est-à-dire de la distribution de l'illumination. D'après l'équation (2.71), nous pouvons également anticiper que pour un RSB_F suffisamment important, la précision de $\widehat{P}_{mvg,Finconnu}$ ne va pas beaucoup dépendre de la taille de l'échantillon N.

Illustrons ces conclusions grâce à des simulations de Monte-Carlo effectuées sur 10^5 réalisations de l'échantillon χ' pour une valeur fixée de RSB_F. Nous représentons sur la figure 2.19 la variance des estimateurs $\widehat{P}_{ml,F}$ et $\widehat{P}_{mvg,Finconnu}$ en fonction du paramètre de non-uniformité d'illumination Q. Nous pouvons voir que la précision de ces deux estimateurs ne dépend pas de Q, comme nous l'avions annoncé dans les équations (2.69) et (2.71). Les variations observées sur

la figure proviennent simplement des fluctuations dues à l'estimation de la variance : nous avons d'ailleurs représenté les barres d'erreurs correspondantes. Elles sont égales à $\pm 2\sigma_{VAR}$ où σ_{VAR} est une approximation de l'écart type sur l'estimation de la variance. En faisant l'hypothèse que la variance estimée a une densité de probabilité gaussienne, un calcul simple montre que σ_{VAR} est égal au rapport entre la valeur de la variance estimée et $\sqrt{2M}$ où M est le nombre de réalisations utilisées dans la simulation de Monte-Carlo. Nous observons sur cette figure, que les performances d'estimation avec et sans connaissance de l'illumination *a priori* sont très proches. Cela signifie que dans notre exemple, le fait de ne pas connaître l'illumination ne dégrade pas significativement les performances d'estimation.

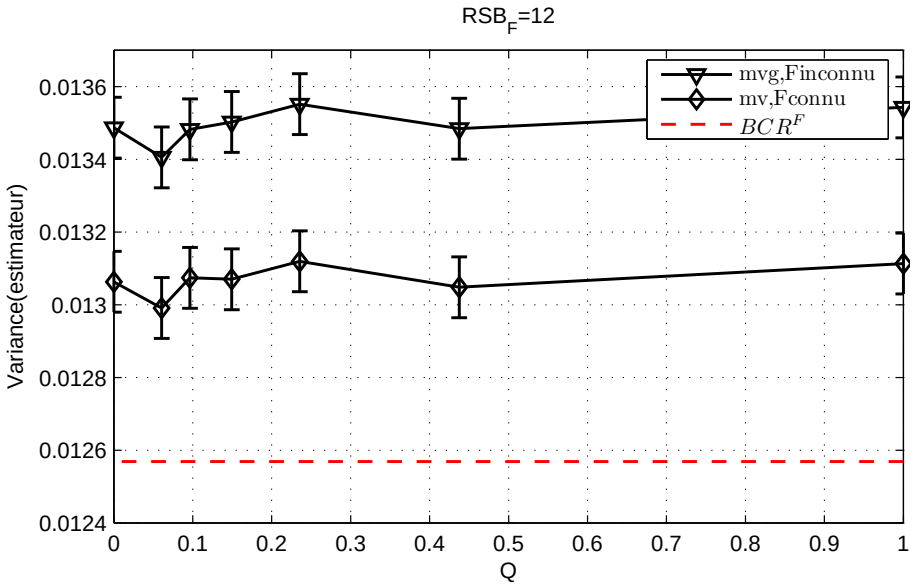


FIGURE 2.19 – Variances des estimateurs $\widehat{P}_{mvg,Finconnu}$, $\widehat{P}_{mv,Fconnu}$ et borne de Cramer-Rao BCR_F (voir Eq.2.59) en fonction du paramètre de non-uniformité de l'illumination Q (voir Eq.2.66), pour $RSB_F = 12$, $P = 0,5$ et $N = 9$. Les estimations des variances sont réalisées grâce à des simulations de Monte-Carlo sur 2.10^5 réalisations.

Nous avons également caractérisé la dépendance de l'estimateur $\widehat{P}_{mvg,Finconnu}$ avec la taille de l'échantillon dans la figure 2.20. Comme nous pouvons le voir dans les équations (2.59) et (2.69), la BCR et l'estimateur $\widehat{P}_{mv,Fconnu}$ ne dépendent pas de la taille de l'échantillon pour un rapport signal sur bruit fixé. Encore une fois les petites variations observées sont dues à l'erreur sur l'estimation de la variance.

On peut voir que la variance de l'estimateur $\widehat{P}_{mvg,Finconnu}$ croît lentement avec la taille de l'échantillon. Cela peut paraître surprenant, on s'attendrait plutôt à un comportement opposé. Ceci est simplement dû au fait que dans notre cas, la valeur de RSB_F est fixée : augmenter la taille de l'échantillon signifie alors que la même intensité d'illumination est distribuée sur plus de pixels. Par conséquent, les paramètres F_i sont plus nombreux et donc moins bien estimés. L'erreur commise sur cette estimation se répercute sur la log-vraisemblance généralisée et au final sur la variance de l'estimateur $\widehat{P}_{mvg,Finconnu}$.

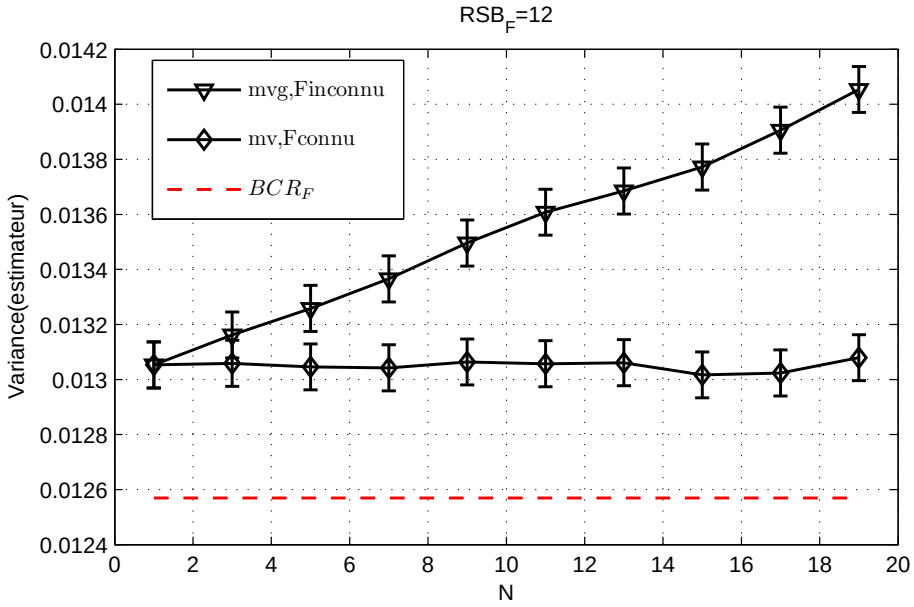


FIGURE 2.20 – Variances des estimateurs $\widehat{P}_{mvg,Finconnu}$, $\widehat{P}_{mv,Fconnu}$ et borne de Cramer-Rao BCR_F (voir Eq.2.59) en fonction de la taille de l'échantillon N , pour $RSB_F = 12$, $P = 0,5$ et $Q = 1$. Les estimations des variances sont réalisées grâce à des simulations de Monte-Carlo sur 2.10^5 réalisations.

2.5.5 Comparaison avec les estimateurs adaptés à l'illumination uniforme.

Il est intéressant de comparer l'estimateur $\widehat{P}_{mvg,Finconnu}$ avec les estimateurs adaptés à l'illumination uniforme que nous avons mis en place dans la partie 2.2 : c'est dire $\widehat{P}_{med}$ (voir l'équation 2.25), et $\widehat{P}_{mvt}$ (voir l'équation 2.26) que nous noterons $\widehat{P}_{mv,Funi,t}$ pour le distinguer de l'estimateur $\widehat{P}_{mv,Fconnu}$. Nous supposons observer des objets purement dépolarisants, ce qui nous amène à définir l'estimateur du maximum de vraisemblance généralisé tronqué :

$$\widehat{P}_{mvg,Finconnu,t} = \begin{cases} \widehat{P}_{mvg,Finconnu} & \text{si} \quad \widehat{P}_{mvg,Finconnu} \in [0,1] \\ 0 & \text{si} \quad \widehat{P}_{mvg,Finconnu} < 0 \\ 1 & \text{si} \quad \widehat{P}_{mvg,Finconnu} > 1 \end{cases} \tag{2.72}$$

Nous avons représenté sur la figure 2.21 la moyenne empirique et la variance de ces estimateurs en fonction de RSB_F. Nous avons choisi le cas $Q = 1$, qui correspond à une illumination impulsionnelle : tout le signal est concentré sur un pixel de l'échantillon.

L'estimateur médian n'est clairement pas adapté à ce type de non-uniformité : son biais est très important, et sa variance largement en dessus de la BCR_F. Pour un RSB_F supérieur à 3, la variance de l'estimateur du MVG tronqué atteint la borne de Cramer-Rao, ce qui n'est pas le cas pour l'estimateur du MV tronqué. Nous notons que l'estimateur $\widehat{P}_{mvg,Finconnu,t}$ converge vers la valeur $0,36$ tout comme l'estimateur $\widehat{P}_{mv}$. L'explication est donnée dans la partie 2.2.5

Concernant l'amélioration apportée par la troncature, la même conclusion peut être tirée que dans le cas de l'illumination uniforme. Elle permet d'améliorer les performances d'estimation et

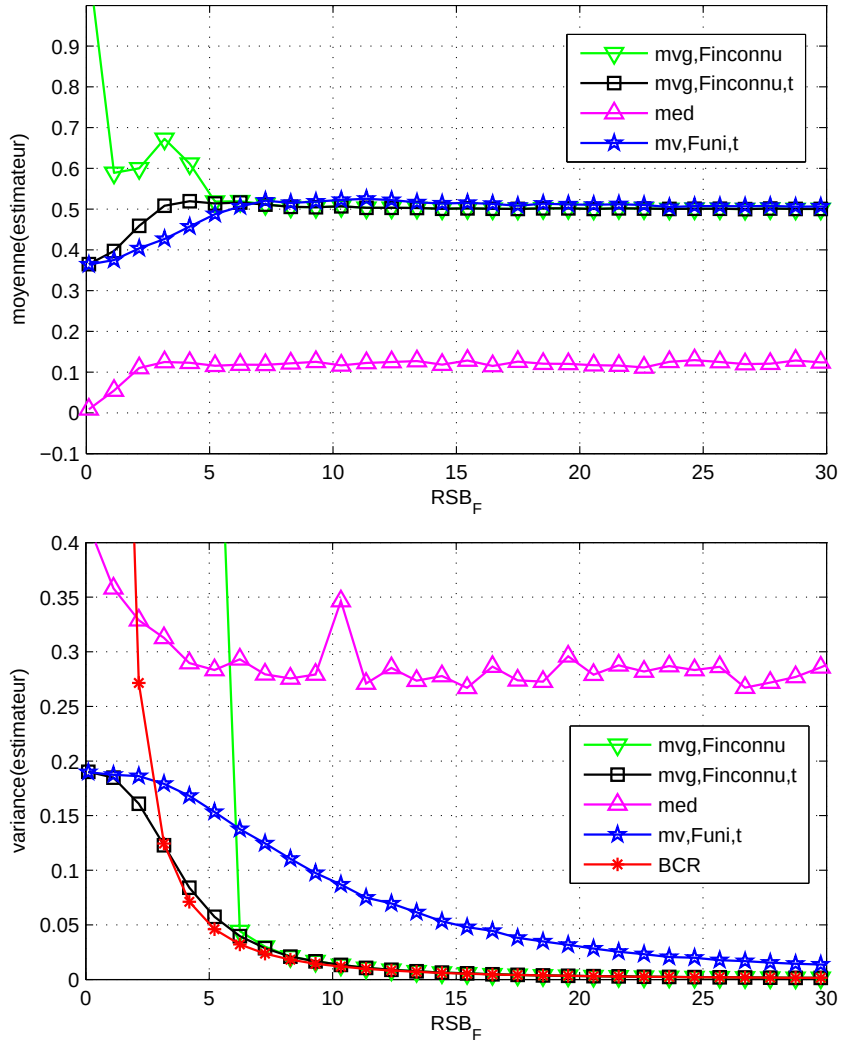


FIGURE 2.21 – Moyennes et variances estimées sur 10^5 réalisations, des estimateurs $\widehat{P}_{mvg,Finconnu}$, $\widehat{P}_{mvg,Finconnu,t}$, $\widehat{P}_{med}$, $\widehat{P}_{mv,Funi,t}$ et borne de Cramer-Rao BCR_F, en fonction de RSB_F pour $N = 9$, $P = 0,5$ et $Q = 1$.

aussi d'éviter la divergence de l'estimateur pour les faibles valeurs de RSB_F. Elle doit être utilisée dès que la scène observée est composée d'objets purement dépolarisants.

Nous avons représenté sur la figure 2.22 l'évolution des variances des différents estimateurs en fonction de la non-uniformité d'illumination Q, pour une valeur de RSB_F donnée. Nous voyons que la précision des estimateurs $\widehat{P}_{med}$ et $\widehat{P}_{mv,Funi,t}$ dépend fortement du type de non-uniformité d'illumination, alors que l'estimateur $\widehat{P}_{mvg,Finconnu,t}$ y est complètement insensible comme nous l'avons montré précédemment dans la figure 2.19. Pour les faibles valeurs de Q, l'estimateur $\widehat{P}_{mv,Funi,t}$ est proche de la BCR_U, ce qui n'est plus le cas lorsque Q augmente. Cela s'explique par le fait que nous raisonnons à RSB_F fixé. Augmenter Q dans ces conditions revient à diminuer le rapport signal sur bruit correspondant au modèle uniforme. Nous avons vu dans la figure 2.4 qu'une diminution sur rapport signal sur bruit implique que la variance des estimateurs s'éloigne de la BCR. En effet, d'après l'équation 2.65, augmenter le paramètre Q à

RSB_F fixé revient à augmenter la valeur de BCR_U qui est inversement proportionnelle au RSB équivalent du modèle uniforme (voir équation 2.65).

Pour une illumination uniforme (c'est-à-dire $Q = 0$), l'estimateur MVG n'est que légèrement moins précis que l'estimateur MV, sa variance est estimée à $0,0135$ contre $0,0130$ pour l'estimateur MV.

Pour conclure nous avons montré que les performances de l'estimateur MVG étaient indépendantes de la non-uniformité d'illumination. De plus, sa variance est proche de la borne de Cramer-Rao, même si l'illumination est parfaitement uniforme. En conséquence, c'est une très bonne alternative à l'estimateur MV adapté au modèle uniforme, dès lors que l'on suspecte une non-uniformité d'illumination spatiale ou temporelle.

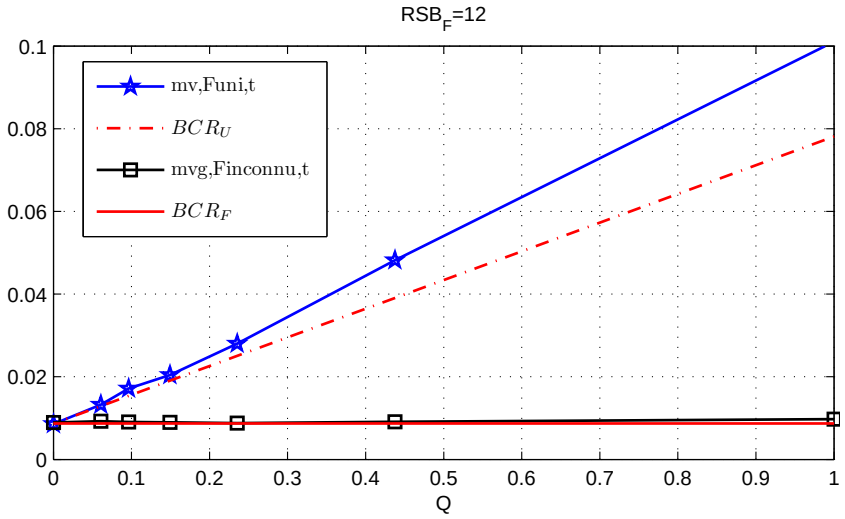


FIGURE 2.22 – Variance des estimateurs $\widehat{P}_{mv,Funi,t}$, $\widehat{P}_{mvg,Finconnu,t}$ et borne de Cramer-Rao correspondante BCR_U, BCR_F (voir Eq.2.59) en fonction du paramètre de non-uniformité de l'illumination Q (voir Eq.2.66), pour $RSB_F = 12$, $P = 0,5$ et $N = 9$. Les estimations des variances sont réalisées grâce à des simulations de Monte-Carlo sur 10^5 réalisations.

2.5.6 Illustration expérimentale

Illustrons les conclusions précédentes expérimentalement. Pour cela, nous utilisons l'imageur d'OSC présenté dans le chapitre 1. La scène observée est composée de trois pièces en plastique transparent sur un fond diffusant uniforme. Nous faisons successivement neuf acquisitions pour obtenir un échantillon temporel de taille $N = 9$. L'illumination est active uniquement sur la première acquisition et éteinte pour les huit acquisitions suivantes, ce qui correspond à un paramètre de non-uniformité $Q = 1$. L'intensité d'illumination est volontairement très faible de sorte que le système est principalement limité par le bruit de détecteur. Les résultats obtenus grâce aux estimateurs $\widehat{P}_{med}$, $\widehat{P}_{mv,Funi,t}$ et $\widehat{P}_{mvg,Finconnu,t}$ sont présentés dans la figure 2.23. Les trois pièces en plastiques sont difficilement discernables en utilisant les estimateurs médian (Fig.2.23.a) et MV tronqué (Fig.2.23.c) ce qui n'est pas le cas pour l'estimateur MVG tronqué (Fig.2.23.e). Cette

observation subjective est confirmée grâce aux histogrammes correspondants qui mettent en évidence les grandes variances des estimateurs médian (Fig.2.23.b) et MV tronqué (Fig.2.23.d). En effet, on montre que la variance sur les objets en plastique (estimée dans une fenêtre de 25×120) décroît de 0,53 pour $\widehat{P}_{med}$ à 0,13 pour $\widehat{P}_{mv,Funi,t}$ et 0,06 pour $\widehat{P}_{mvg,Finconnu,t}$. Ces variances sont en accord avec les simulations présentées dans la figure 2.21. Nous concluons qu'avec une telle non-uniformité d'illumination, l'estimateur $\widehat{P}_{mvg,Finconnu,t}$ montre indiscutablement les meilleures performances.

2.5.7 Discussion

Dans cette section, nous avons étudié l'influence de la non-uniformité d'illumination sur la précision d'estimation de l'OSC. Lorsque l'illumination est connue, le problème se rapproche grandement du cas uniforme étudié dans la section 2.2 à condition de définir correctement le rapport signal sur bruit. En revanche, lorsque l'illumination n'est pas connue *a priori*, nous avons utilisé la vraisemblance généralisée pour calculer un estimateur efficace. Nous devons retenir essentiellement deux points sur cette méthode d'estimation :

- Notre approche supposant que l'illumination est uniforme nous empêche d'estimer l'intensité rétro-réfléchie par la scène. En effet, nous avons montré que seul l'OSC pouvait être estimé dans ces conditions.
- Les performances de l'estimateur du maximum de vraisemblance généralisé (MVG) sont très proches de celles de l'estimateur MV avec une illumination connue *a priori*. Nous en avons conclu que le fait d'estimer la non-uniformité ne pénalisait que très peu l'estimateur MVG. Il doit donc être utilisé dès que nous soupçonnons une non-uniformité spatiale ou temporelle de l'illumination.

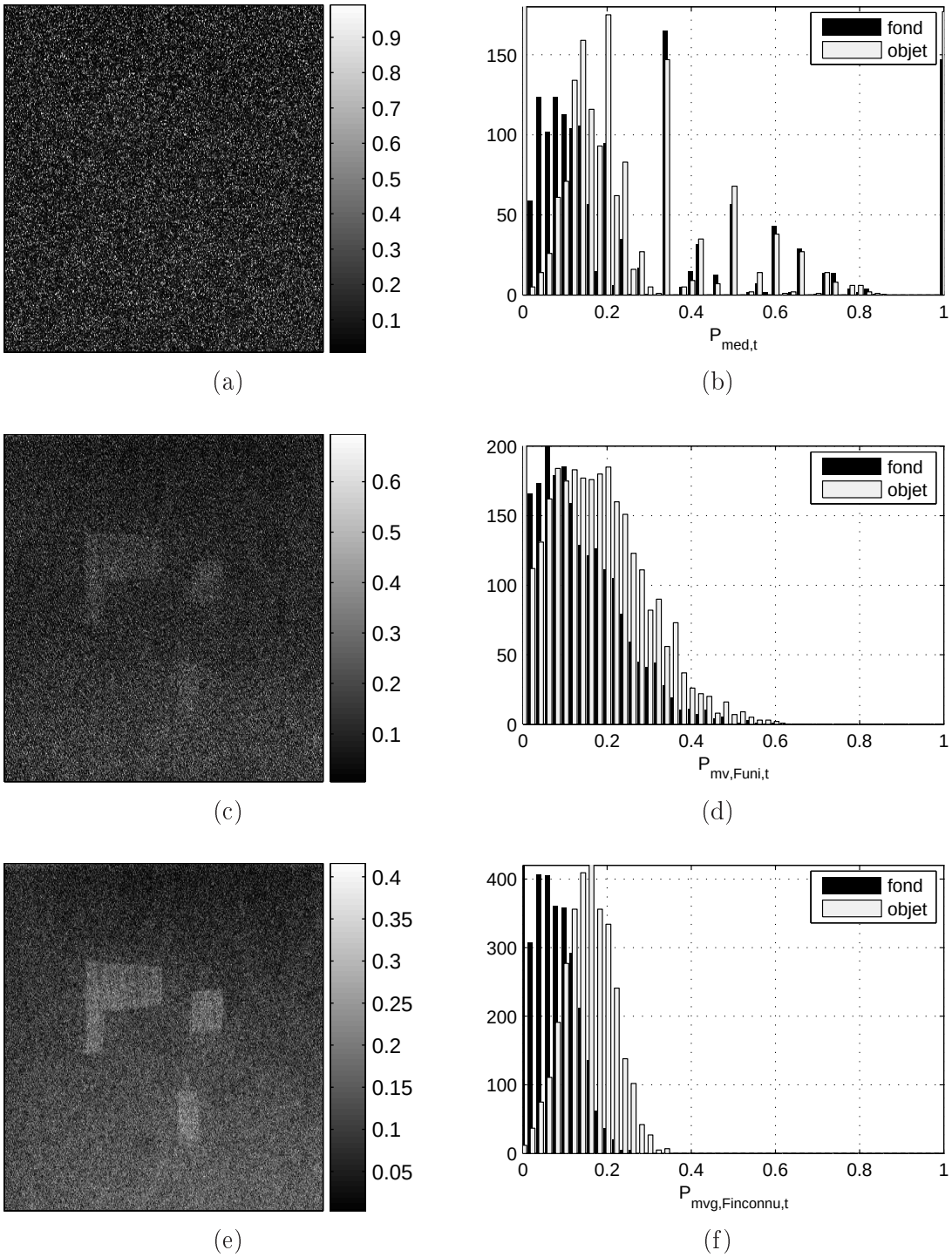


FIGURE 2.23 – Image d'une scène composée de trois plastiques transparents sur un fond diffusant en utilisant les estimateurs (a) $\widehat{P}_{med}$, (c) $\widehat{P}_{mv,Funi,t}$ et (e) $\widehat{P}_{mvg,Finconnu,t}$. (b), (d) et (f) : histogrammes respectifs estimés sur l'objet et sur le fond dans des fenêtres de 25×120 pixels. La taille de l'échantillon temporel est $N = 9$ et l'illumination est impulsionnelle ($Q = 1$).

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié l'estimation de l'OSC en présence de différentes perturbations correspondant à différentes conditions expérimentales. Nous avons commencé par le cas des systèmes à faible flux lumineux, qui sont limités par le bruit de détecteur. Après avoir calculé la borne de Cramer-Rao, nous avons comparé différents estimateurs. L'estimateur du maximum de vraisemblance présente les meilleures performances. La non-uniformité de l'illumination peut apparaître dans les systèmes longue portée. Le modèle de perturbations a donc été modifié pour en tenir compte. Les bornes de Cramer-Rao ont été calculées lorsque la non-uniformité d'illumination est connue et ensuite inconnue. Nous avons aussi proposé des estimateurs efficaces dans chacun des cas. En particulier, nous avons montré que l'estimateur du maximum de vraisemblance généralisé est efficace pour des RSB suffisamment élevés. Nous nous sommes également intéressés aux systèmes à plus fort flux, dans lesquels le bruit de photons n'est plus masqué par le bruit de détecteur. Dans cette situation, il faut également prendre en compte la contribution due à l'illumination passive. Grâce au modèle mis en place, nous avons montré que la BCR se décomposait en deux termes : le premier dépend du signal, alors que le deuxième est additif. Nous avons enfin montré que la précision d'estimation de l'OSC P dépendait de l'OSC de la contribution passive. Cela nous fournit un degré de liberté pour optimiser les performances du système.

Chapitre 3

Détection dans les images OSC

Sommaire

3.1 Base de la théorie de la détection **82**
3.1.1 Position du problème 82
3.1.2 Qualité d'un détecteur 83
3.1.3 Détecteur optimal 85
3.2 Détecteur GLRT en présence d'illumination non-uniforme **86**
3.2.1 Cas où l'illumination, **F**, est connue 87
3.2.2 Cas où l'illumination, **F**, est inconnue 89
3.3 Comparaison de différentes méthodes de détection **91**
3.3.1 Performances de $\mathcal{R}_{uni}$ en présence d'une illumination non-uniforme . . 91
3.3.2 Comparaison de deux approches 92
3.4 Application à la détection de cible **94**
3.4.1 Images simulées 95
3.4.2 Images expérimentales 99
3.5 Conclusion **100**

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié les performances d'estimation de l'OSC en présence de différentes perturbations. Cependant, dans de nombreuses applications, l'objectif n'est pas de mesurer l'OSC avec précision, mais de détecter la présence d'un objet dont l'OSC est différent de celui du fond. Pour cela il est nécessaire de prendre en compte les caractéristiques du bruit pour concevoir des algorithmes efficaces.

En effet, cela a été démontré dans le traitement des images SAR (Synthetic Aperture Radar), où les filtres de détection adaptés se sont révélés bien supérieurs aux techniques classiques [63–65]. D'autres études ont été menées sur la définition d'algorithmes de détection pour des systèmes limités par le bruit de photons [66]. Il en ressort que le détecteur GLRT (Generalized Likelihood Ratio Test) montre de très bonnes performances même lorsque le signal mesuré est faible. Le GLRT a aussi été utilisé dans le cadre des systèmes polarimétriques actifs [60,67] où le bruit de speckle est prédominant.

Notre objectif dans ce chapitre est d'utiliser ces méthodes qui ont fait leurs preuves pour traiter les images polarimétriques en présence de différentes perturbations. Dans un premier temps nous ferons quelques rappels sur la théorie de la détection. Nous présenterons ensuite deux approches pour construire des algorithmes de détection en présence d'une illumination non-uniforme. Leurs performances seront comparées grâce à des simulations et validées sur des images réelles.

3.1 Base de la théorie de la détection

En traitement du signal, il est fréquent qu'on ait à prendre une décision entre plusieurs alternatives possibles. Dans les systèmes de détection, on doit par exemple décider si une cible est présente ou non dans l'image. Ce problème de choix entre deux hypothèses est appelé détection. Tout comme dans la partie précédente, si on se fixe un modèle statistique de bruit, on peut définir une méthode de détection optimale. Après une brève introduction sur la théorie de la détection, nous nous intéresserons au cas d'un système perturbé par un bruit additif gaussien, et d'une illumination non-uniforme. Nous comparerons les performances de deux détecteurs correspondant à deux approches différentes.

3.1.1 Position du problème

Considérons un échantillon statistique χ de taille N correspondant au signal mesuré. Il appartient à un ensemble Ω qui est en général un sous espace de $\mathbb{R}^N$. On peut donc représenter le signal χ comme un point de Ω. Dans une problématique de détection on suppose que le signal χ appartient à l'une de deux classes : la première notée γ_0 correspond à l'absence de cible tandis que la deuxième γ_1 correspond à la présence de cible (voir la figure 3.1).

Un algorithme de détection va associer à chacune des classes γ_k, $k \in \{0, 1\}$ une région ω_k de l'espace Ω des signaux possibles. Comme le signal appartient forcément à l'une des deux classes, les régions ω_0 et ω_1 forment une partition de l'espace Ω. Un algorithme de détection fonctionne de la manière suivante :

- si le signal χ appartient à la région ω_0 il est affecté à la classe γ_0

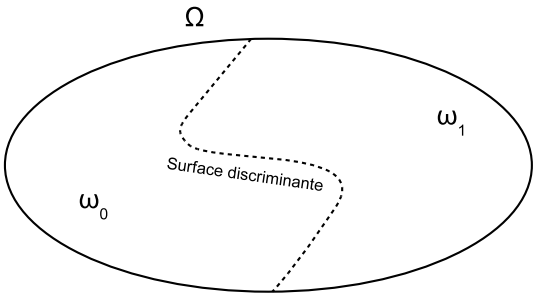


FIGURE 3.1 – Représentation de l'ensemble Ω auquel appartient le signal χ mesuré. Les régions ω_0 et ω_1 forment un partition de l'espace Ω et sont séparées par la surface discriminante $g(\chi)$.

- si le signal χ appartient à la région ω_1 il est affecté à la classe γ_1

Définir un algorithme de détection revient donc à définir la "frontière" entre ces deux régions qu'on appelle *surface discriminante*. Dans la pratique, on détermine une fonction scalaire à valeur réelle $g(\chi)$ du signal mesuré, telle que :

- si $g(\chi) < \lambda$, on affecte le signal à la classe γ_0
- si $g(\chi) > \lambda$, on affecte le signal à la classe γ_1

Le paramètre λ est appelé *seuil de détection*.

La fonction $g(\chi)$ quant à elle, est appelée fonction discriminante ou détecteur. L'objectif de la théorie de la détection est de déterminer, pour un problème donné, la fonction discriminante optimale. Nous allons voir par la suite comment nous pouvons caractériser les performances d'un détecteur, ce qui nous permettra de préciser la notion d'optimalité.

3.1.2 Qualité d'un détecteur

Commençons par donner quelques définitions qui vont nous servir pour définir la qualité d'un détecteur :

- La probabilité *a priori*, notée $\mathcal{P}(\gamma_k)$, est la probabilité d'observer un élément de la classe γ_k indépendamment de la mesure d'un signal. Dans tous les cas, on vérifie $\mathcal{P}(\gamma_0) + \mathcal{P}(\gamma_1) = 1$ puisque le signal appartient forcément à l'une des deux classes.
- La vraisemblance, notée $\mathcal{P}(\chi|\gamma_k)$ est définie comme la probabilité d'observer une réalisation du signal connaissant la classe à laquelle il appartient.
- La densité de probabilité conjointe, notée $\mathcal{P}(\chi, \gamma_k)$ peut être écrite à partir de la probabilité *a priori* et de la vraisemblance en utilisant la relation de Bayes :

$$\mathcal{P}(\chi, \gamma_k) = \mathcal{P}(\chi|\gamma_k)P(\gamma_k)$$

.

- La densité de probabilité *a posteriori*, notée $\mathcal{P}(\gamma_k|s)$, correspond à la probabilité que le signal observé χ corresponde à la classe γ_k.

Ces quelques définitions nous permettent de donner l'expression de deux types d'erreurs que peut fournir un algorithme de détection.

Définition de deux types d'erreurs

Les résultats possibles d'un algorithme de détection à deux classes sont présentés dans le tableau 3.1. Comme nous le voyons, l'algorithme peut renvoyer un résultat juste (vrai positif ou vrai négatif), mais également une erreur (fausse alarme et non détection).

	classe détectée γ_0	classe détectée : γ_1
classe effective : γ_0	vrai négatif	fausse alarme
classe effective : γ_1	non détection	vrai positif

TABLEAU 3.1

Intéressons-nous plus particulièrement à ces deux erreurs :

- Associer le signal à la classe γ_0 alors qu'il appartient à la classe γ_1 correspond à une non détection. La probabilité d'occurrence de cette erreur est appelée probabilité de non détection (P_{nd}) et est égale à :

$$\mathcal{P}_{nd} = \int_{\omega_0} \mathcal{P}(\chi|\gamma_1)d\chi. \tag{3.1}$$

- Associer le signal à la classe γ_1 alors qu'il appartient à la classe γ_0 correspond à une fausse alarme. La probabilité d'occurrence de cette erreur est appelée probabilité de fausse alarme (P_{fa}) et est égale à :

$$\mathcal{P}_{fa} = \int_{\omega_1} \mathcal{P}(\chi|\gamma_0)d\chi. \tag{3.2}$$

On peut aussi définir la probabilité de détection :

$$\mathcal{P}_d = \int_{\omega_1} P(\chi|\gamma_1)d\chi = 1 - P_{nd}$$

En effet on montre facilement que :

$$\mathcal{P}_d + \mathcal{P}_{nd} = \int_{\omega_1} P(\chi|\gamma_1)d\chi + \int_{\omega_0} P(\chi|\gamma_1)d\chi = \int_{\omega} P(\chi|\gamma_1)d\chi = 1$$

Nous en concluons que minimiser la probabilité de non détection revient à maximiser la probabilité de détection.

Performances de détection

Pour représenter les performances d'un détecteur, nous pouvons étudier les valeurs de la probabilité de détection et de la probabilité de fausse alarme lorsque le seuil de détection (ou surface discriminante) varie. Nous obtenons ainsi une courbe paramétrique $\{\mathcal{P}_{fa}(\lambda), \mathcal{P}_d(\lambda)\}$ qui est appelée caractéristique opérationnelle du récepteur (COR) (voir la figure 3.2).

Analysons cette courbe : chacun des points correspond aux probabilités $\mathcal{P}_{fa}$ et $\mathcal{P}_d$ pour une valeur du seuil λ (défini dans l'équation eq.3.1.1). Lorsque le seuil est faible, les probabilités $\mathcal{P}_{fa}$ et $\mathcal{P}_d$ sont élevées, ce qui correspond à la partie droite de la courbe. La partie gauche, quant à

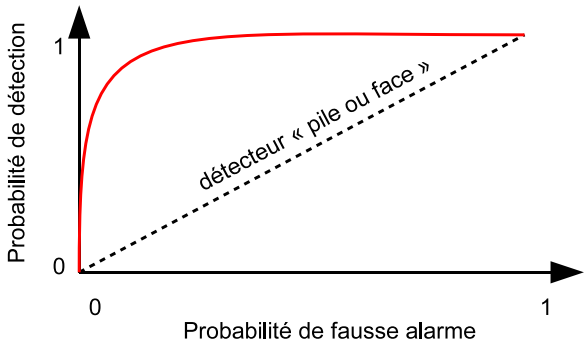


FIGURE 3.2 – Courbe caractéristique opérationnelle du récepteur (COR).

elle, correspond aux valeurs de seuil élevées. Un détecteur performant a une courbe COR proche du point ($\mathcal{P}_{fa} = 0$, $\mathcal{P}_d = 1$). La diagonale correspond au détecteur "pile ou face". Un détecteur dont la courbe COR est en dessous de la diagonale est donc pire que le détecteur pile ou face. Il affecte plus souvent un signal à la mauvaise classe qu'à la classe correcte.

3.1.3 Détecteur optimal

Le détecteur idéal aurait à la fois une probabilité de fausse alarme minimale et une probabilité de non détection minimale. Cependant, il est facile de voir que ce n'est pas possible : en effet, pour minimiser $\mathcal{P}_{fa}$, il suffit de définir $\omega_1 = \Omega$ et dans ce cas $\mathcal{P}_{fa}$=0, mais en revanche $\mathcal{P}_{nd} = 1$. Il faut donc trouver le bon compromis. Pour cela nous déterminons un algorithme optimal qui minimise P_{nd} pour une valeur donnée de P_{fa}. Un résultat classique de la théorie de la détection montre que la méthode de détection optimale revient à comparer à un seuil le logarithme du rapport des vraisemblances. Nous allons distinguer deux cas. Dans le premier tous les paramètres de la mesure sont connus, dans le second ils sont inconnus.

Cas où les paramètres sont connus

Considérons que la mesure χ est effectuée dans de telles conditions que tous les paramètres θ dont elle dépend sont connus exactement. Le log-rapport des vraisemblances s'écrit :

$$\mathcal{R} = \log\left[\frac{\mathcal{L}(\chi|\gamma_1, \theta)}{\mathcal{L}(\chi|\gamma_0), \theta}\right] \tag{3.3}$$

- si $\mathcal{R} > \lambda$, on décide que χ appartient à la classe γ_1,
- si $\mathcal{R} < \lambda$, on décide que χ appartient à la classe γ_0.

Cet algorithme de détection est appelé "Likelihood Ratio Test" (LRT). Il n'est pas souvent mis en pratique, puisque comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, la mesure χ dépend généralement d'un ensemble de paramètres qui sont inconnus *a priori*.

Cas où les paramètres sont inconnus

Considérons maintenant que la mesure χ dépend d'un ensemble de paramètres θ qui ne sont pas connus *a priori*. Dans cette situation, il nous faut considérer tous les paramètres comme des paramètres de nuisance. Ils sont estimés au sens du MV puis réinjectés dans la vraisemblance pour obtenir une vraisemblance généralisée. Le log-rapport des vraisemblances généralisées dans les hypothèses γ_0 et γ_1 ainsi obtenues s'écrit de la manière suivante :

$$\mathcal{R} = \log \left[\frac{\mathcal{L}(\chi|\gamma_1, \hat{\theta})}{\mathcal{L}(\chi|\gamma_0), \hat{\theta}} \right] \tag{3.4}$$

Cette valeur est ensuite comparée à un seuil λ : l'algorithme correspondant est appelé 'Generalized Likelihood Ratio Test" (GLRT).

Discussion

Le test du rapport de vraisemblance (LRT) est le détecteur optimal : il fournit la meilleure probabilité de détection pour une probabilité de fausse alarme donnée. Le test du rapport de vraisemblance généralisée ne possède pas cette propriété en général [68], mais il montre de bonnes performances et est facile à mettre en oeuvre.

Cependant, il est fréquent dans la pratique qu'on ne puisse pas le calculer de manière analytique. On utilise alors des détecteurs plus empiriques. Ils ont toujours la même forme qui consiste à calculer à partir des données une fonction discriminante que l'on compare à un seuil pour prendre une décision.

3.2 Détecteur GLRT en présence d'illumination non-uniforme

Dans cette partie nous allons appliquer les méthodes présentées ci-dessus, à la détection dans les images OSC. Nous prendrons en compte, comme dans la section 2.5, la non-uniformité d'illumination, ainsi qu'un bruit additif gaussien (provenant du bruit de détecteur par exemple).

Considérons que les mesures sont regroupées dans un échantillon statistique de taille N. L'échantillon est divisé en deux sous-échantillons homogènes de tailles respectives N_a et N_b telles que $N_a + N_b = N$. Pour simplifier les notations nous définissons $\Omega_a = [1, N_a]$ et $\Omega_b = [N_a + 1, N]$. La première partie de l'échantillon $\chi_a = \{X_i, Y_i, i \in \Omega_a\}$ est homogène et ses paramètres sont (m_X^a, m_Y^a) ou d'une manière équivalente (I_a, P_a). La seconde partie $\chi_b = \{X_i, Y_i, i \in \Omega_b\}$ est homogène et définie par les paramètres (m_X^b, m_Y^b) ou (I_b, P_b). Nous utilisons la notation $\mathbf{F_a} = [F_i]_{i \in \Omega_a}$ et $\mathbf{F_b} = [F_i]_{i \in \Omega_b}$, pour définir les vecteurs d'illumination sur chacune des parties de l'échantillon.

Nous considérons par la suite les deux classes suivantes :

- γ_1 : les sous-échantillons χ_a et χ_b ont des paramètres d'intérêt différents : $I_a \neq I_b$ et/ou $P_a \neq P_b$,
- γ_0 : les sous-échantillons χ_a et χ_b ont les mêmes paramètres d'intérêt : $I_a = I_b$ et $P_a = P_b$.

Ce type d'approche permet de réaliser de la détection de bords, ou de cibles homogènes sur un fond. Il suffit pour cela de concevoir un masque $\mathbf{M}$ contenant N pixels, qui sépare les sous-échantillons χ_a et χ_b (voir figure 3.3).

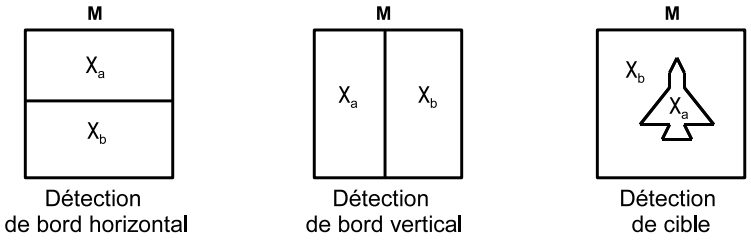


FIGURE 3.3 – Masque utilisé pour différentes tâches de détection.

Considérons dans un premier temps que l'illumination est connue pour déterminer l'expression du GLRT. Cela nous permettra d'avoir une référence pour étudier les performances de détection. Nous considérerons ensuite le cas pratique dans lequel l'illumination est inconnue *a priori*.

3.2.1 Cas où l'illumination, F, est connue

Dans cette partie nous considérons que l'illumination $\mathbf{F}$ est connue, mais que les paramètres I_a, P_a et I_b, P_b doivent être estimés.

Expression du GLRT

Pour déterminer le GLRT, nous devons commencer par déterminer l'expression de la vraisemblance généralisée dans une région homogène notée $\ell(\chi|\mathbf{F})$. A partir de la log-vraisemblance d'un échantillon homogène :

$$\begin{aligned}\ell(\chi|\mathbf{F}, m_X, m_Y) &= -2N\ln\left[\sqrt{2\pi}\right] - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(X_i - F_i m_X)^2 \\ &\quad -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(Y_i - F_i m_Y)^2. \end{aligned} \tag{3.5}$$

On montre facilement que les estimateurs de m_X et m_Y au sens du maximum de vraisemblance sont $\widehat{m}_U = \sum_{i=1}^{N} F_i U_i / \sum_{i=1}^{N} F_i^2$ avec $U = \{X, Y\}$. Nous les réinjectons dans la log-vraisemblance

et nous obtenons :

$$\begin{aligned}\ell(\chi|\mathbf{F}) &= \ell(\chi|\mathbf{F},\widehat{m}_X,\widehat{m}_Y)\\ &= -2N\ln\left[\sqrt{2\pi}\right]-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{\sum_{i=1}^{N}X_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{N}F_iX_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{N}F_i^2}\right\}\\ &\quad -\frac{1}{2\sigma^2}\left\{\sum_{i=1}^{N}Y_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{N}F_iY_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{N}F_i^2}\right\}.\end{aligned}$$

Il nous suffit ensuite de déterminer l'expression du GLRT défini par :

$$\mathcal{R}_{Fconnu} = \ell_1(\chi|\mathbf{F})-\ell_0(\chi|\mathbf{F}),$$

où $\ell_1(\chi|\mathbf{F})$ est la log-vraisemblance généralisée dans l'hypothèse γ_1 et $\ell_0(\chi|\mathbf{F})$ la log-vraisemblance généralisée dans l'hypothèse γ_0.

- Dans l'hypothèse γ_0, il n'y a pas de cible, et l'échantillon χ est homogène. La log-vraisemblance est donc égale à celle d'une région homogène : $\ell_0(\chi|\mathbf{F})=\ell(\chi|\mathbf{F})$.
- Dans l'hypothèse γ_1 l'échantillon est composé de deux sous-échantillons indépendants avec des paramètres différents. La log-vraisemblance correspondante est donc définie comme $\ell_1(\chi|\mathbf{F})=\ell(\chi_a|\mathbf{F})+\ell(\chi_b|\mathbf{F})$.

En découle l'expression du GLRT :

$$\mathcal{R}_{Fconnu} = \frac{1}{2\sigma^2}\frac{\Phi_a\Phi_b}{\Phi_a+\Phi_b}\left[\left(\widehat{m}_X^a-\widehat{m}_X^b\right)^2+\left(\widehat{m}_Y^a-\widehat{m}_Y^b\right)^2\right], \tag{3.6}$$

où :

$$\Phi_v=\sum_{i\in\Omega_v}F_i^2 \quad \text{et} \quad \widehat{m}_U^v=\frac{1}{\Phi_v}\sum_{i\in\Omega_v}F_iU_i,$$

avec $U=\{X,Y\}$ et $v=\{a,b\}$. On montre facilement que dans cette expression, $\widehat{m}_U^v$ est en fait l'estimateur de m_U^v au sens du maximum de vraisemblance. Ainsi, nous voyons que $\mathcal{R}_{Fconnu}$ ne dépend des données qu'à travers la différence des moyennes empiriques sur les deux zones dans chacun des canaux.

Cas particulier de l'illumination uniforme

Le cas particulier de l'illumination uniforme correspond à $F_i=F_0,\forall i\in[1,N]$. Dans cette situation , on donne facilement l'expression du GLRT à partir de l'équation 3.6 :

$$\mathcal{R}_{uni} = \frac{1}{2\sigma^2}\frac{N_aN_b}{N_a+N_b}\left[\left(\sum_{i\in\Omega_a}\frac{X_i}{N_a}-\sum_{i\in\Omega_b}\frac{X_i}{N_b}\right)^2+\left(\sum_{i\in\Omega_a}\frac{Y_i}{N_a}-\sum_{i\in\Omega_b}\frac{Y_i}{N_b}\right)^2\right]. \tag{3.7}$$

On voit que le GLRT dépend uniquement des données $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$.

Expression du contraste

Nous allons maintenant définir le contraste entre les régions a et b. Les performances de détection du GLRT $\mathcal{R}_{Fconnu}$ dépendent des densités de probabilité du GLRT dans les hypothèses γ_1 et γ_0. Notons ces deux variables aléatoires $\mathcal{R}^0_{Fconnu}$ et $\mathcal{R}^1_{Fconnu}$. On montre dans l'annexe D que la variable $2\mathcal{R}^0_{Fconnu}$ est une variable aléatoire suivant une loi du χ^2 avec deux degrés de liberté [55]. Elle est indépendante des paramètres I et P. On dit alors que le détecteur $\mathcal{R}_{Fconnu}$ a un taux de fausse alarme constant ou "constant false alarm rate" (CFAR).

Nous montrons également dans l'annexe D que $2\mathcal{R}^1_{Fconnu}$ est une variable aléatoire suivant une loi du χ^2 non centrée, avec deux degrés de liberté et un paramètre de non centralité égal à :

$$\mathcal{C}_{Fconnu} = \frac{\Phi_a\Phi_b}{(\Phi_a+\Phi_b)} \times \left[(\mathrm{RSB}_a - \mathrm{RSB}_b)^2 + (\mathrm{RSB}_a P_a - \mathrm{RSB}_b P_b)^2\right], \tag{3.8}$$

avec $\mathrm{RSB}_a = I_a/(\sqrt{2}\sigma)$ et $\mathrm{RSB}_b = I_b/(\sqrt{2}\sigma)$. Par conséquent, $\mathcal{R}^1_{Fconnu}$, et donc les performances de détection, dépendent uniquement du paramètre $\mathcal{C}_{Fconnu}$. Il peut être considéré comme le paramètre de contraste du problème de détection que nous étudions. En d'autres termes, si nous considérons deux scénarios avec des paramètres de contraste $\mathcal{C}_{Fconnu}$ identiques, les performances du détecteur $\mathcal{R}_{Fconnu}$ seront identiques.

Intéressons-nous rapidement au cas particulier où il n'y a pas de contraste d'intensité entre les zones a et b, c'est-à-dire, $I_a = I_b = I$, ou, en d'autres termes, $\mathrm{RSB}_a = \mathrm{RSB}_b = \mathrm{RSB}$. Dans ce cas, nous avons :

$$\mathcal{C}_{Fconnu} = \frac{\Phi_a\Phi_b}{(\Phi_a+\Phi_b)}\,\mathrm{RSB}^2\,(P_a - P_b)^2\,.$$

Dans cette situation, le contraste $\mathcal{C}_{Fconnu}$ dépend de la différence des OSC dans chacune des régions et du RSB.

3.2.2 Cas où l'illumination, F, est inconnue

L'algorithme décrit dans la partie précédente suppose que l'illumination est connue. Il peut être utilisé lorsque le "pattern" d'illumination est statique et qu'il peut être connu *a priori*. Cependant, dans de nombreuses situations ce n'est pas le cas et $\mathbf{F}$ doit être considérée comme inconnue. Comme dans la section 2.5, $\mathbf{F}$ est alors un paramètre de nuisance.

Expression du GLRT

Commençons par déterminer la vraisemblance généralisée dans une région homogène : ce calcul est détaillé dans l'annexe C.

$$\ell(\chi) = -2N\ln(\sqrt{2\pi}\sigma) - \frac{1}{2\sigma^2}\left\{\sum_{i=1}^{N}(X_i^2+Y_i^2) - \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{N}(X_i^2-Y_i^2)\right)^2 + 4\left(\sum_{i=1}^{N}X_iY_i\right)^2}\right\}.$$

Il suffit ensuite de calculer son expression dans les hypothèses γ_0 et γ_1.

- Dans l'hypothèse γ_0, l'échantillon est considéré complètement homogène. L'expression de la log-vraisemblance est :

$$\ell_0(\chi) \quad = \quad -\frac{1}{4\sigma^2}\left\{(T_X+T_Y)-\sqrt{(T_X-T_Y)^2+W^2}\right\},$$

avec $T_U=\sum_{i=1}^{N}U_i^2$, $U=\{X,Y\}$ et $W=2\ \sum_{i=1}^{N}X_iY_i$. Ces paramètres sont calculés sur la totalité de l'échantillon χ.

- Dans l'hypothèse γ_1, l'échantillon est divisé en deux parties ayant chacune des paramètres d'intérêt différents. Par conséquent sa log-vraisemblance est la suivante :

$$\begin{aligned}\ell_1(\chi) &= \ell(\chi_a)+\ell(\chi_b)\\ &= -\frac{1}{4\sigma^2}\left\{(T_X+T_Y)-\sqrt{(T_X^a-T_Y^a)^2+W_a^2}\ -\sqrt{(T_X^b-T_Y^b)^2+W_b^2}\right\},\end{aligned}$$

où $T_U^v=\sum_{i\in\Omega_v}U_i^2$ et $W^v=2\ \sum_{i\in\Omega_v}X_iY_i$, avec $U=\{X,Y\}$ et $v=\{a,b\}$.
En effet, nous remarquons que $T_X=T_X^a+T_X^b$, $T_Y=T_Y^a+T_Y^b$ et $W=W_a+W_b$.

L'expression du GLRT défini par $\mathcal{R}_{Finconnu}=\ell_1(\chi)-\ell_0(\chi)$, est donc la suivante :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{Finconnu} &= \frac{1}{4\sigma^2}\left\{\sqrt{D_a^2+W_a^2}+\sqrt{D_b^2+W_b^2}\right.\\ &\quad\left.-\sqrt{(D_a+D_b)^2+(W_a+W_b)^2}\right\},\end{aligned} \tag{3.9}$$

où

$$D_v=\sum_{i\in\Omega_v}(X_i^2-Y_i^2) \quad \text{et} \quad W_v=2\sum_{i\in\Omega_v}X_iY_i,$$

avec $v=a,b$. La valeur de $\mathcal{R}_{Finconnu}$ dépend donc uniquement de D_a, D_b, W_a et W_b. Notons que l'estimateur du maximum de vraisemblance généralisé déterminé au chapitre 2 (Eq. 2.70) dépend également de ces même valeurs.

Nous pouvons donner une interprétation intéressante de ces résultats. En effet, définissons les vecteurs à deux dimensions $\mathbf{a}=(D_a,W_a)^T$ et $\mathbf{b}=(D_b,W_b)^T$. Nous pouvons réécrire l'équation 3.9 de la manière suivante :

$$\mathcal{R}_{Finconnu}=\frac{\|\mathbf{a}\|+\|\mathbf{b}\|-\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|}{4\sigma^2}, \tag{3.10}$$

où la norme classique dans un espace euclidien est notée $\|.\|$. L'inégalité triangulaire donne $\|\mathbf{a}\|+\|\mathbf{b}\|\geq\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|$ ce qui implique que $\mathcal{R}_{Finconnu}\geq 0$. Cela est une propriété fondamentale du GLRT [69].

Expression du contraste

L'expression du GLRT est ici plus complexe que celle dans le cas où $\mathbf{F}$ est connue, et il est difficile de déterminer la DDP de $\mathcal{R}$ dans les hypothèses γ_0 et γ_1. Cependant, nous allons

essayer de déterminer les paramètres qui jouent sur les performances du GLRT. Pour cela nous considérons la limite du GLRT lorsque la variance du bruit de détecteur σ^2 tend vers zéro. Cela revient à faire les hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned} X_i^{\sigma=0} &= F_i m_X, \\ Y_i^{\sigma=0} &= F_i m_Y. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Si nous injectons ce modèle dans l'expression du GLRT (voir Eq.3.9), nous obtenons :

$$\mathcal{R}_{Finconnu}^{\sigma=0} = \frac{RSB_{F_a} RSB_{F_b}}{4} \times A \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{2\Delta P}{A} \right)^2} \right], \tag{3.12}$$

où RSB_{F_u} est défini dans l'équation 2.60 :

$$\begin{aligned} RSB_{F_u} &= (\sqrt{\Phi_u} I_u)/(\sqrt{2}\sigma), \\ \Delta P &= P_a - P_b, \\ A &= \frac{RSB_{F_a}}{RSB_{F_b}}(1 + P_a^2) + \frac{RSB_{F_b}}{RSB_{F_a}}(1 + P_b^2). \end{aligned}$$

Ce résultat est très intéressant puisqu'il montre que si $\Delta P = 0$, alors $\mathcal{R}_{Finconnu}^{\sigma=0} = 0$, ce qui ne paraissait pas évident en considérant l'expression du détecteur donnée dans l'équation 3.6. Dans ce cas, la détection n'est pas possible si le contraste d'OSC est nul, et ce, quel que soit le contraste en intensité. Ceci peut se comprendre en observant l'équation C.5 : le fait que les F_i soient inconnus rend impossible l'estimation des paramètres I_a et I_b. En résumé, $\mathcal{R}_{Finconnu}$ n'est sensible qu'au contraste d'OSC, et est incapable de détecter un contraste d'intensité. Ce dernier ne peut en effet être différencié d'une non-uniformité d'illumination.

3.3 Comparaison de différentes méthodes de détection

Dans le cas où l'illumination est non connue *a priori*, deux stratégies de détection sont envisageables. L'une consiste à utiliser le détecteur $\mathcal{R}_{Finconnu}$ pour supprimer l'influence de la non-uniformité d'illumination. Cependant, ceci n'est pas forcément la meilleure approche : en effet, le détecteur $\mathcal{R}_{Finconnu}$ ne tient pas du tout compte des contrastes d'intensité entre la cible et le fond, or cette information peut se révéler pertinente si les variations d'intensité d'illumination sont faibles. Dans ce cas, il paraît plus intéressant d'utiliser le détecteur adapté à l'illumination uniforme $\mathcal{R}_{uni}$ (voir Eq.3.7).

Nous commencerons par étudier les propriétés statistiques de cette nouvelle variable aléatoire. Nous saurons ainsi comment se comporte le détecteur $\mathcal{R}_{uni}$ en présence d'une illumination non-uniforme. Dans un deuxième temps nous comparerons les deux approches grâce à l'étude des courbes des caractéristiques opérationnelles des récepteurs.

3.3.1 Performances de $\mathcal{R}_{uni}$ en présence d'une illumination non-uniforme

Comme nous l'avons vu dans la section 3.2.1, le détecteur $\mathcal{R}_{uni}$ est adapté à l'illumination uniforme. C'est une variable aléatoire qui est calculée à partir des données $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$.

- Si la scène est illuminée uniformément, nous avons vu dans la section 3.2.1 que ce détecteur était CFAR (taux de fausse alarme constant) et qu'il suivait une loi du χ^2 avec deux degrés de liberté.
- Si l'illumination est non-uniforme les propriétés statistiques vont changer. Injectons le modèle de perturbations défini dans l'expression du GLRT 2.53 adapté à l'illumination uniforme $\mathcal{R}_{uni}$ (voir Eq.3.7). Notre objectif est ici de déterminer la densité de probabilité de $\mathcal{R}_{uni}$ dans les hypothèses γ_0 et γ_1. Ces variables aléatoires sont notées respectivement $\mathcal{R}^0_{uni}$ et $\mathcal{R}^1_{uni}$. Après quelques calculs, nous pouvons montrer que $2\mathcal{R}^1_{uni}$ est une loi de χ^2 non centrale avec deux degrés de liberté et un paramètre de non centralité égal à :

$$\mathcal{C}' = (RSB'_a - RSB'_b)^2 + (RSB'_a P_a - RSB'_b P_b)^2,$$

où

$$RSB'_v = \sqrt{\frac{N_a N_b}{N}} \frac{\overline{F}_v I_v}{\sqrt{2}\sigma} \quad \text{et} \quad \overline{F}_v = \frac{1}{N_v} \sum_{i \in \Omega_v} F_i,$$

avec $v = a, b$. La valeur de $\overline{F}_v$ représente la valeur moyenne empirique de l'illumination dans le sous-échantillon Ω_v. Dans l'hypothèse γ_0, $2\mathcal{R}^0_{uni}$ est aussi une variable aléatoire suivant une loi du χ^2 non centrée, avec deux degrés de liberté et un paramètre de non centralité égal à :

$$\mathcal{C}'' = \frac{I^2(1+P^2)}{2\sigma^2} \frac{N_a N_b}{N} \left(\overline{F}_a - \overline{F}_b\right)^2.$$

Ce résultat démontre que le détecteur $\mathcal{R}_{uni}$ n'est pas, dans ces conditions, un détecteur CFAR, puisque $\mathcal{R}^0_{uni}$ dépend des paramètres du problème. Intéressons-nous au cas où l'échantillon χ est homogène, c'est-à-dire que nous sommes dans l'hypothèse γ_0, et $\overline{F}_a \neq \overline{F}_b$ à cause de la non-uniformité de l'illumination. Dans cette situation d'absence de cible, le détecteur $\mathcal{R}_{uni}$ va interpréter la non-uniformité d'illumination comme un contraste d'intensité, et conduire à une fausse alarme. Rappelons que ce n'est pas le cas du détecteur $\mathcal{R}_{Finconnu}$ qui est insensible au contraste d'intensité.

3.3.2 Comparaison de deux approches

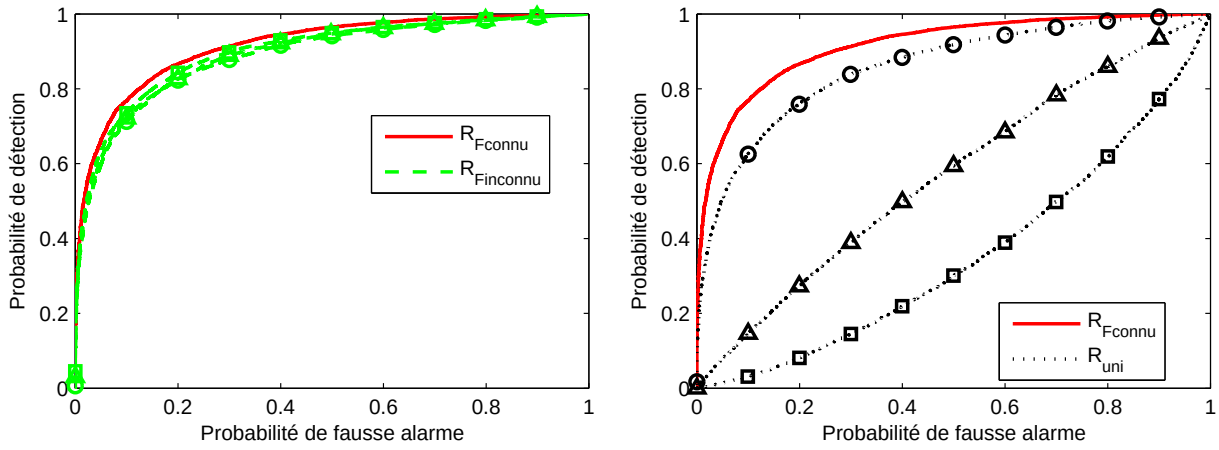
Nous avons représenté dans les figures 3.4 et 3.5, les courbes COR des détecteurs $\mathcal{R}_{Fconnu}$, $\mathcal{R}_{Finconnu}$ et $\mathcal{R}_{uni}$ avec trois types d'illumination, c'est-à-dire avec différentes valeurs de $\overline{F}_a$ et $\overline{F}_b$. Les trois vecteurs d'illumination $\mathbf{F}$ correspondants sont choisis de telle sorte que $\overline{F}_a/\overline{F}_b = 1$, $\overline{F}_a/\overline{F}_b = 1,4$ et $\overline{F}_a/\overline{F}_b = 4,7$. Dans tous les cas le contraste $\mathcal{C}_{Fconnu}$ (Eq.3.8) est maintenu constant en jouant sur les paramètres $\overline{F}_a$ et $\overline{F}_b$. Les courbes COR du détecteur $\mathcal{R}_{Fconnu}$ sont donc les mêmes dans chacune des situations. En effet ses performances dépendent uniquement de $\mathcal{C}_{Fconnu}$. Ce résultat nous servira de référence pour évaluer les performances des autres détecteurs.

Par la suite, nous considérerons deux scénarios. Le premier correspond à un contraste d'OSC uniquement. L'objet et le fond ne diffèrent que par leur valeur d'OSC. Le second quant à lui, correspond à un contraste d'intensité et d'OSC.

Scénario 1	Scénario 2
Contraste d'OSC uniquement	Contraste d'intensité et d'OSC
$[N_a\ I_a\ P_a] = [10\ 100\ 0,8]$	$[N_a\ I_a\ P_a] = [10\ 110\ 0,7]$
$[N_b\ I_b\ P_b] = [10\ 100\ 0,4]$	$[N_b\ I_b\ P_b] = [10\ 90\ 0,5]$
$\mathcal{C}_{Fconnu} = 9$	$\mathcal{C}_{Fconnu} = 9$

Scénario 1

Dans cette situation il n'y a pas de contraste d'intensité, mais juste un contraste d'OSC. Nous voyons sur la figure 3.4.a que les courbes COR de $\mathcal{R}_{Finconnu}$ sont très proches de la référence ($\mathcal{R}_{Fconnu}$). Cela signifie qu'en présence d'un contraste d'OSC uniquement, le détecteur $\mathcal{R}_{Finconnu}$ est quasiment optimal. L'estimation de l'illumination $\mathbf{F}$ ne détériore pratiquement pas ses performances. Les courbes COR du détecteur $\mathcal{R}_{uni}$ sont représentées sur la figure 3.4.b. Nous observons que ses performances dépendent énormément de la non-uniformité d'illumination. En effet, ce détecteur se rapproche de la référence si $\overline{F}_a/\overline{F}_b = 1$ (courbe $\circ$), mais il peut également être moins bon qu'un détecteur "pile ou face" dans le cas où $\overline{F}_a/\overline{F}_b = 4.7$. Sa courbe COR (courbe $\square$) est en dessous de la diagonale.



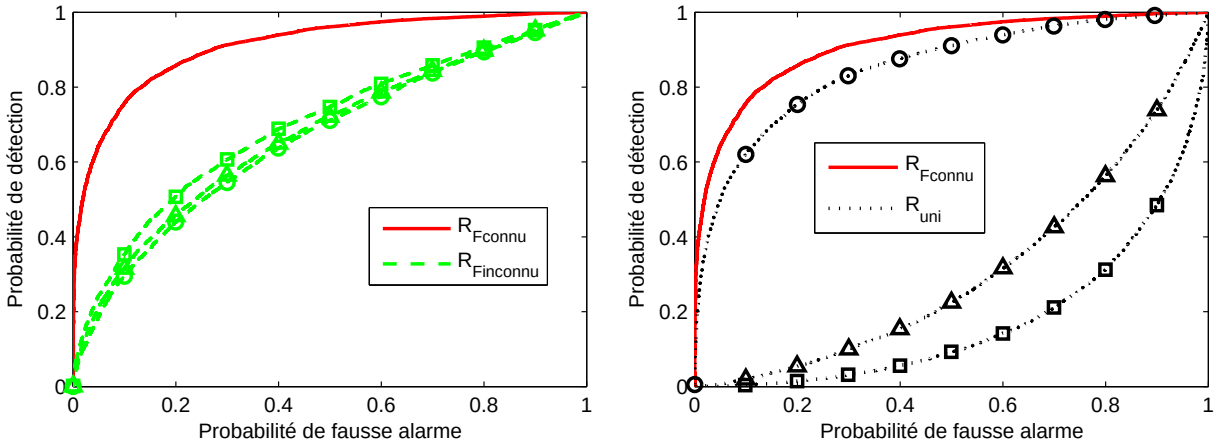
(a) (b)

FIGURE 3.4 – Courbes COR du détecteur (a) :$\mathcal{R}_{Fconnu}$(trait plein), $\mathcal{R}_{Finconnu}$(trait pointillé) et (b) : $\mathcal{R}_{Fconnu}$(trait plein), $\mathcal{R}_{uni}$(trait pointillé) avec trois types de non-uniformité d'illumination dans le scénario 1. Le contraste $\mathcal{C}_{Fconnu}$ est fixé à 9, $\sigma = 15$ et $\overline{F}_a/\overline{F}_b = 1$ ($\circ$), $\overline{F}_a/\overline{F}_b = 1.4$ ($\triangle$) et $\overline{F}_a/\overline{F}_b = 4.7$ ($\square$).

Scénario 2

Dans cette situation, nous sommes en présence à la fois d'un contraste d'intensité et d'OSC. Le contraste global $\mathcal{C}_{Fconnu}$ est fixé et égal à celui du scénario 1. Avec ce jeu de paramètres le contraste d'OSC est plus faible que précédemment. Comme nous pouvons le voir sur la figure 3.5.a, il en résulte que les performances de $\mathcal{R}_{Finconnu}$ sont moins bonnes que dans le scénario 1,

étant donné que ce détecteur tient compte uniquement du contraste d'OSC. Notons cependant que les courbes COR correspondant aux différentes illuminations sont toujours très proches, ce qui montre bien que les performances de $\mathcal{R}_{Finconnu}$ sont peu affectées par la non-uniformité d'illumination. Le détecteur $\mathcal{R}_{uni}$ quant à lui, dépend toujours du type d'illumination comme nous le voyons sur la figure 3.5.b. Il peut cependant fournir de meilleurs résultats que $\mathcal{R}_{Finconnu}$ notamment pour $\overline{F}_a/\overline{F}_b \approx 1$ (voir la courbe $\circ$ sur la figure Fig.3.5), étant donné qu'il exploite les contrastes d'intensité et d'OSC.



(a) (b)

FIGURE 3.5 – Identique à la figure 3.4 dans le scénario 2.

3.4 Application à la détection de cible

Dans le but d'illustrer les conclusions précédentes, nous avons testé les détecteurs $\mathcal{R}_{Finconnu}$ et $\mathcal{R}_{uni}$ sur des images composées de cibles sur un fond non-uniforme. Nous commencerons par mener cette étude sur des images simulées puis sur des images expérimentales.

Pour effectuer la détection, les images sont parcourues avec un masque $\mathbf{M}$ composé de deux parties :

- la première χ_a, représente la forme de la cible que nous cherchons.
- la deuxième χ_b est le complémentaire de χ_a dans $\mathbf{M}$ (voir la figure 3.6).

Les paramètres N_a et N_b définis précédemment sont, dans ce cas, le nombre de pixels dans χ_a et χ_b. Les algorithmes correspondant aux détecteurs $\mathcal{R}_{Finconnu}$ et $\mathcal{R}_{uni}$ consistent essentiellement à faire des moyennes dans les sous-échantillons χ_a et χ_b (voir les équations 3.9 et 3.7) ce qui correspond en fait, à effectuer des convolutions avec le masque $\mathbf{M}$. Nous choisissons de faire ce calcul de manière efficace dans l'espace de Fourier.

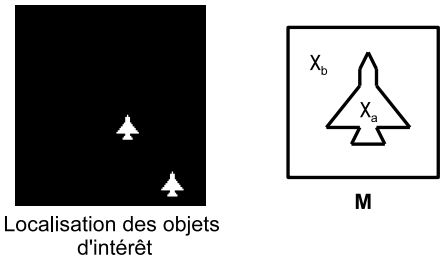


FIGURE 3.6 – Position des deux cibles dans les images de 256×256 pixels, et forme du masque $\mathbf{M}$. Le sous-échantillon χ_a est de taille $N_a = 85$, et χ_b de taille $N_b = 491$.

3.4.1 Images simulées

Commençons par définir un modèle d'illumination. Nous procédons de la même manière que dans la référence [70] pour obtenir des variations spatiales d'intensité dont l'amplitude et la longueur de corrélation sont contrôlables.

Modèle d'illumination

Pour cela, l'illumination est définie à partir d'une réalisation d'un champ aléatoire gaussien $g(u, v)$, spatialement corrélé avec une moyenne nulle et un écart type σ_F. Sa fonction d'auto-corrélation $C^{gg}(m, n)$ est une exponentielle de largeur l_c :

$$C^{gg}(m, n) = \sigma_F^2 \exp\left(-\frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{l_c}\right) \tag{3.13}$$

Nous définissons ensuite l'illumination comme :

$$F(u, v) = [1 + g(u, v)]^2 . \tag{3.14}$$

Les deux paramètres de ce modèle sont l_c qui correspond à la longueur de corrélation de l'illumination et σ_F^2 à sa variance. Ensuite nous considérons trois longueurs de corrélation différentes : $l_c = 1$, $l_c = 10$ et $l_c = 100$. Comme nous pouvons le voir sur la figure 3.7, lorsque $l_c = 1$ la longueur de corrélation des variations spatiales d'intensité d'illumination est bien plus petite que la taille caractéristique de la cible. Lorsque nous calculons $\overline{F}_a$ et $\overline{F}_b$ grâce au masque $\mathbf{M}$ nous effectuons une moyenne empirique et obtenons $\overline{F}_a \approx \overline{F}_b$. Lorsque $l_c = 10$ la longueur de corrélation de l'illumination est proche de la taille de la cible. Nous avons donc dans certains cas une illumination moyenne différente dans Ω_a et Ω_b et par conséquent $\overline{F}_a \neq \overline{F}_b$. Lorsque $l_c = 100$ les longueurs de corrélation des variations spatiales sont beaucoup plus grandes que la cible : dans ce cas l'illumination est quasiment uniforme sur tout le masque $\mathbf{M}$ et $\overline{F}_a \approx \overline{F}_b$. Cela est illustré dans la figure 3.7.

Application des détecteurs sur les images

Considérons à présent les mêmes scénarios que dans la partie 3.3.2 : le scénario 1 correspond à un contraste d'OSC uniquement, tandis que le scénario 2 correspond à un contraste d'intensité

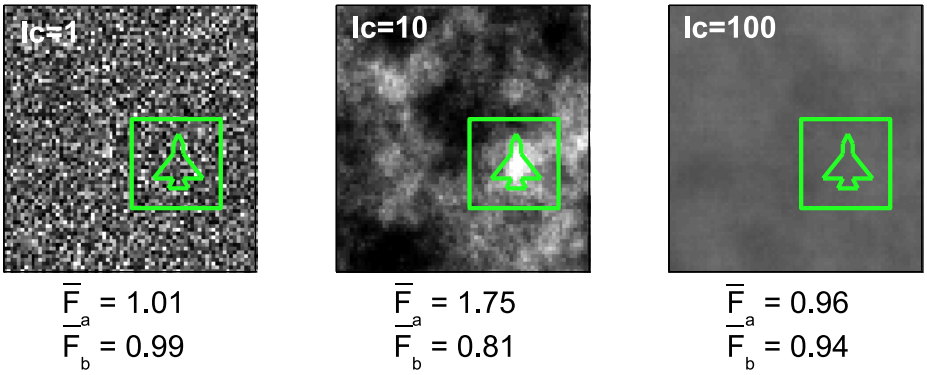


FIGURE 3.7 – Représentation de l'illumination non-uniforme $\mathbf{F}$ avec $l_c = 1$, $l_c = 10$ et $l_c = 100$. Les moyennes empiriques $\overline{F}_a$ et $\overline{F}_b$ sont calculées dans le masque représenté sur les images.

et d'OSC. Rappelons que le contraste global $\mathcal{C}_{Fconnu}$ est identique dans les deux scénarios. Les paramètres pour la cible (P_a,I_a) et pour le fond (P_b,I_b) sont les mêmes que ceux des figures 3.4 et 3.5. Nous présentons sur les figures 3.8 et 3.9 successivement la matrice d'illumination $\mathbf{F}$, l'image d'intensité, l'image d'OSC et les plans de détection $\mathcal{R}_{uni}$ et $\mathcal{R}_{Finconnu}$. Rappelons que la valeur du pixel (u, v) du plan de détection d'un détecteur correspond à la valeur prise par ce détecteur lorsque le masque de détection est centré sur le pixel (u, v). Chaque ligne correspond à une valeur différente de l_c ($l_c = 1$, $l_c = 10$ et $l_c = 100$).

Nous voyons sur la figure 3.8, que dans le scénario 1, le détecteur $\mathcal{R}_{Finconnu}$ montre de bonnes performances et est capable de détecter les cibles avec tous les types d'illumination. Ceci est en accord avec les courbes COR qui sont proches de la référence dans la figure 3.4.a. Le détecteur $\mathcal{R}_{uni}$ quant à lui, est moins efficace que $\mathcal{R}_{Finconnu}$ quelle que soit la valeur de l_c et ses performances dépendent énormément de cette valeur. Intéressons-nous plus particulièrement au cas $l_c = 10$, pour lequel les variations spatiales d'illuminations sont de la même taille que la cible. Dans cette situation, il arrive que $\overline{F}_a \neq \overline{F}_b$ (voir la figure 3.7), ce qui conduit à de nombreuses fausses alarmes comme nous pouvons le voir sur la courbe □ dans la figure 3.4.(b). En effet $\mathcal{R}_{uni}$ interprète les variations de l'illumination comme un contraste d'intensité. Lorsque $l_c = 1$ ou $l_c = 100$ la longueur de corrélation de l'illumination est soit beaucoup plus petite, soit beaucoup plus grande que la taille de la cible, ce qui conduit à $\overline{F}_a \approx \overline{F}_b$ (voir la courbe (○) dans la figure 3.4.(b)). Cela explique pourquoi dans ces deux cas, $\mathcal{R}_{uni}$ est meilleur que lorsque $l_c = 10$.

A présent intéressons-nous au scénario 2 dans la figure 3.9. Les performances du détecteur $\mathcal{R}_{Finconnu}$ ne dépendent toujours pas de la longueur de corrélation de l'illumination, mais sont globalement moins bonnes que dans le scénario 1. Ceci est en accord avec ce que nous avions observé sur les courbes COR. Plus la contribution du contraste d'intensité dans le contraste global $\mathcal{C}_{Fconnu}$ est grande, plus le contraste $\mathcal{C}_{Finconnu}$ est faible. En d'autres termes, le détecteur $\mathcal{R}_{Fconnu}$ n'exploite pas le contraste d'intensité présent dans la scène. Concernant le détecteur $\mathcal{R}_{uni}$, nous voyons que pour $l_c = 1$ et $l_c = 100$, ses performances sont meilleures que celle de $\mathcal{R}_{Finconnu}$. Ceci est directement lié au fait que pour ces deux valeurs de longueur de corrélation, le

détecteur $\mathcal{R}_{uni}$ exploite le contraste d'intensité sans être perturbé par la non-uniformité d'illumination. Lorsque $l_c = 10$, le détecteur $\mathcal{R}_{uni}$ est très perturbé par la non-uniformité d'illumination ce qui n'est pas le cas de $\mathcal{R}_{Finconnu}$.

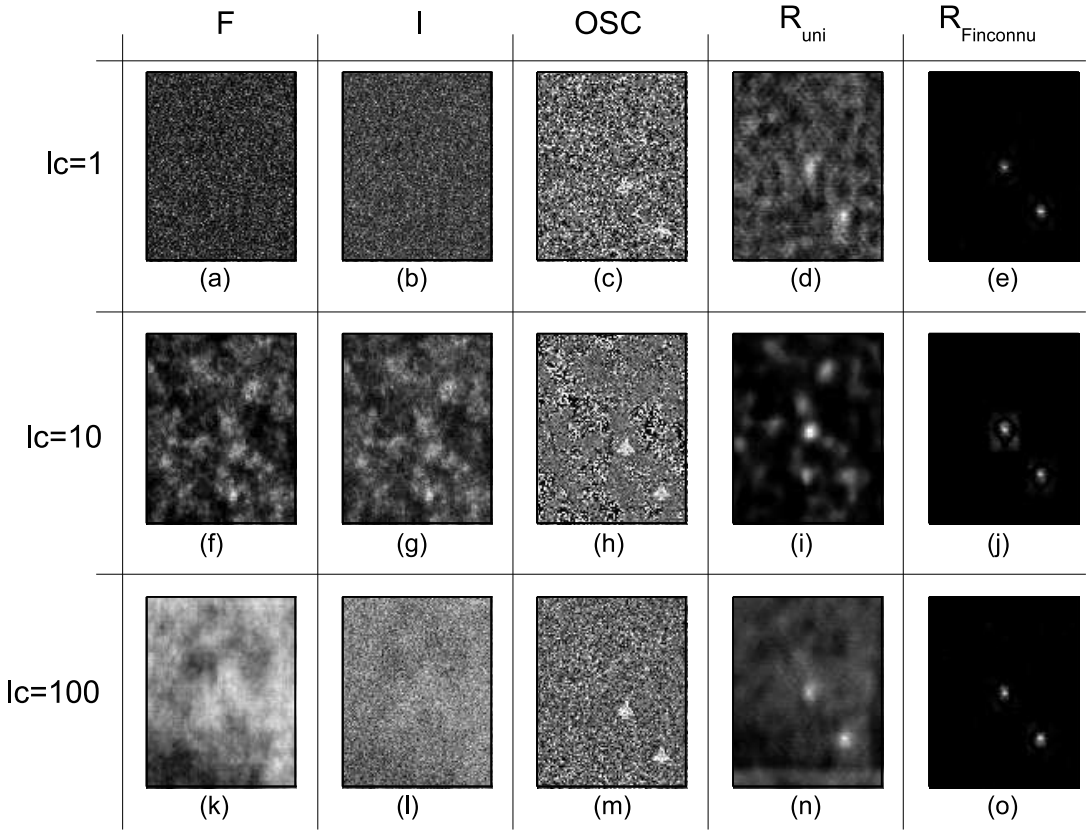


FIGURE 3.8 – Détection dans le scénario 1 correspondant à un contraste d'OSC uniquement. Horizontalement : la matrice d'illumination **F**, l'image d'intensité, d'OSC, et les détecteurs $\mathcal{R}_{uni}$ et $\mathcal{R}_{Finconnu}$. Verticalement : chaque ligne correspond respectivement à $l_c = 1$, $l_c = 10$ et $l_c = 100$.

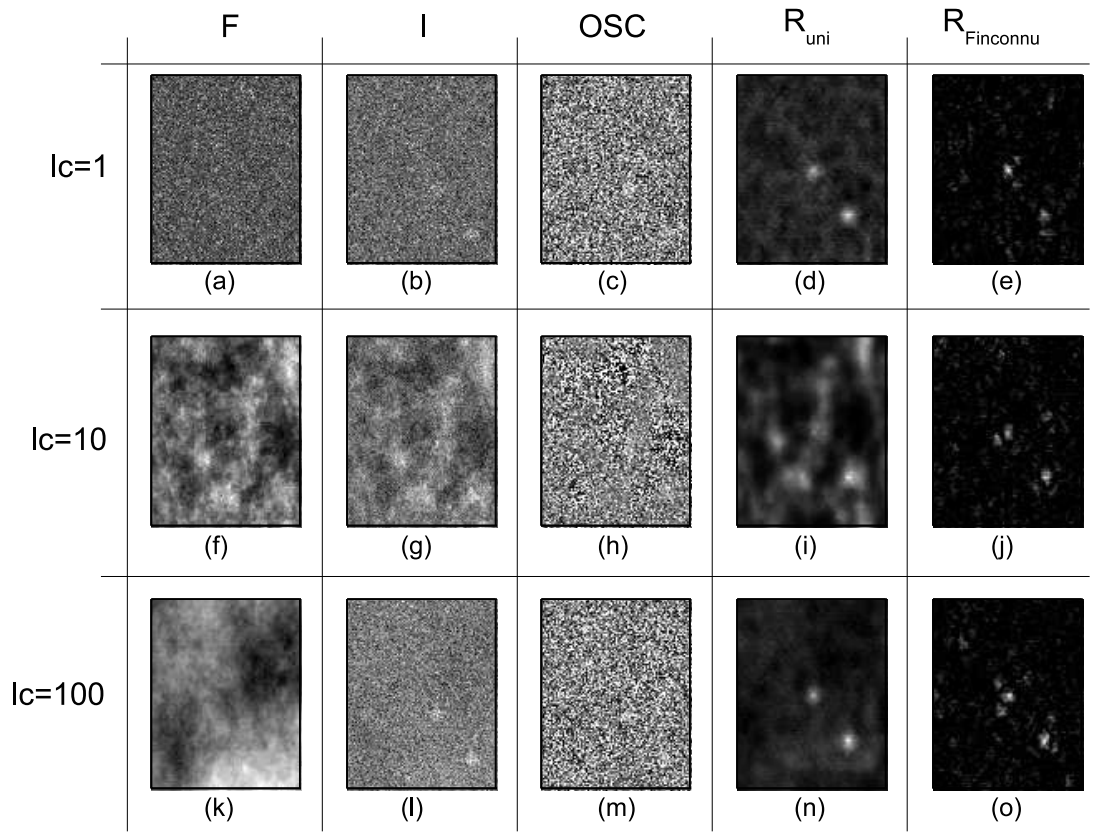


FIGURE 3.9 – Détection dans le scénario 2 correspondant à un contraste d'intensité et d'OSC. Horizontalement : la matrice d'illumination $\mathbf{F}$, l'image d'intensité, d'OSC, et les détecteurs $\mathcal{R}_{uni}$ et $\mathcal{R}_{Finconnu}$. Verticalement : chaque ligne correspond respectivement à $l_c = 1$, $l_c = 10$ et $l_c = 100$.

3.4.2 Images expérimentales

Nous proposons dans cette partie de vérifier expérimentalement les conclusions que nous venons de tirer grâce aux précédentes simulations. Pour cela nous générons artificiellement une illumination non-uniforme spatialement. Rappelons que notre étude reste valable pour une non-uniformité temporelle de l'illumination (cas d'une illumination impulsionnelle par exemple). Le schéma du montage expérimental est représenté sur la figure 3.10.

La scène est composée d'une pièce carrée en métal sur un fond diffusant blanc. Le banc expérimental nous permet de créer artificiellement des illuminations non-uniformes en projetant un masque de transmittance sur la scène observée. Pour chaque type d'illumination nous calculons la demi-largeur à mi-hauteur (half width at half maximum, HWHM) de la fonction d'autocorrélation du motif d'illumination. Cette grandeur nous renseigne sur la longueur de corrélation des variations spatiales d'intensité. Dans la pratique le masque $\mathbf{M}$ utilisé est de taille 100×100 pixels et est composé d'une partie centrale carrée χ_a de taille $N_a = 3600$ et χ_b est le complémentaire dans $\mathbf{M}$ avec $N_b = 6400$.

Nous présentons les résultats de détection dans la figure 3.11. Les paramètres de la scène se rapprochent du scénario 1 dans lequel nous avons un contraste d'OSC uniquement. Nous obtenons des conclusions similaires : le détecteur $\mathcal{R}_{uni}$ présente de bonnes performances pour les faibles et les grandes longueurs de corrélation des variations spatiales de l'illumination (respectivement HWHM=3 et HWHM=105 dans notre illustration). En revanche lorsque HWHM=25, $\mathcal{R}_{uni}$ interprète la non-uniformité d'illumination comme un contraste d'intensité, ce qui conduit à de nombreuses fausses alarmes. Le détecteur $\mathcal{R}_{Finconnu}$ est quant à lui très peu perturbé par la non-uniformité de l'illumination et donne de bons résultats quelle que soit la valeur de HWHM.

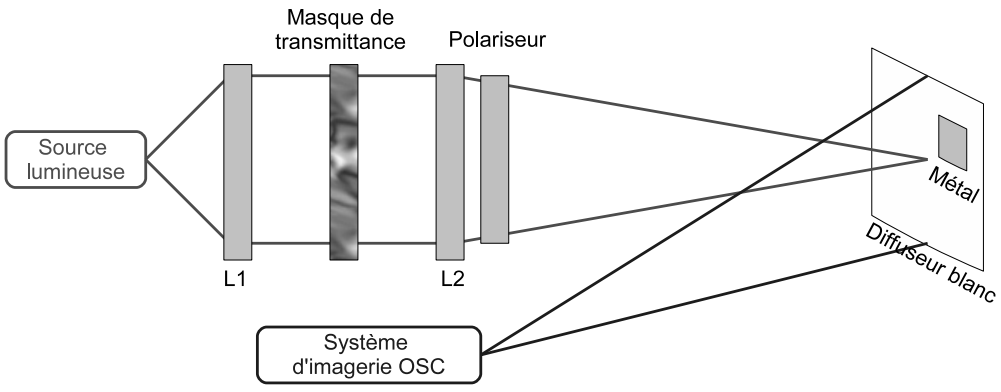


FIGURE 3.10 – Schéma du montage expérimental comprenant, de gauche à droite, une source lumineuse, une lentille de collimation, un masque de transmittance qui permet de générer une illumination non-uniforme, un polariseur linéaire vertical, et enfin une lentille qui permet d'imager le masque sur la scène observée. Le système de détection est l'imageur OSC que nous avons développé dans le chapitre 1.

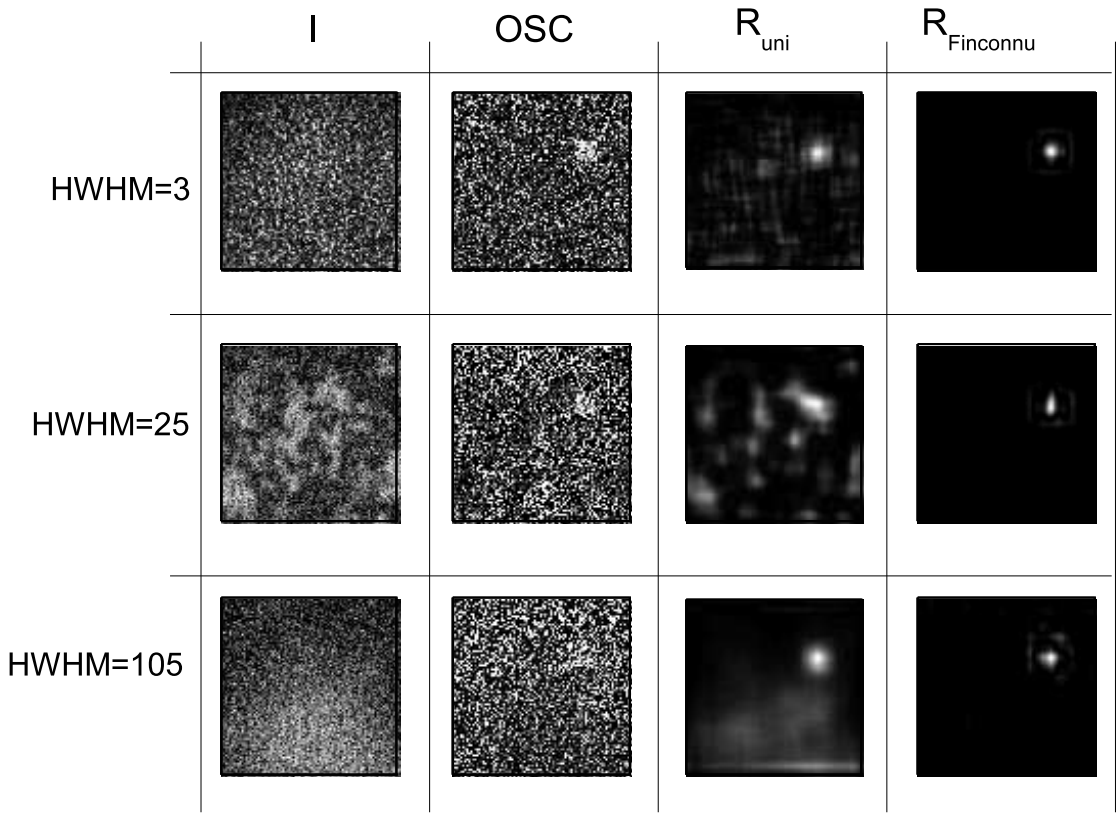


FIGURE 3.11 – Détection sur des images expérimentales correspondant à contraste d'OSC uniquement (scénario 1). Horizontalement : l'image d'intensité, l'image d'OSC, les détecteurs $\mathcal{R}_{uni}$ et $\mathcal{R}_{Finconnu}$. Verticalement : ces images sont réalisées avec longueurs de corrélations des variations spatiales différentes : $HWHM = 3$, $HWHM = 25$ et $HWHM = 105$.

3.5 Conclusion

Dans cette partie nous nous sommes intéressés à la problématique de la détection dans un système perturbé par le bruit de détecteur et une illumination non-uniforme. Deux approches ont été envisagées :

- la première ne prend pas en compte la non-uniformité de l'illumination et exploite à la fois les images d'intensité et d'OSC. Nous avons montré qu'elle était mise en défaut lorsque la non-uniformité présentait des longueurs de corrélation spatiales proches de la taille de la cible.
- la deuxième approche, quant à elle, prend en compte la non-uniformité d'illumination inconnue *a priori*. Nous avons constaté qu'elle présentait des performances similaires quelles que soient les caractéristiques de l'illumination (à contraste global constant). En revanche, cette méthode n'exploite pas le contraste dans les images d'intensité.

Le choix entre ces deux approches va dépendre de la nature du contraste présent dans la scène (OSC seulement, ou OSC et intensité), mais également de l'amplitude et de la longueur de corrélation des variations spatiales d'intensité d'illumination.

Chapitre 4

Optimisation du contraste dans une image polarimétrique scalaire

Sommaire

4.1 Définition du contraste **105**
4.2 Optimisation du contraste **107**
4.2.1 Réduction à un problème d'optimisation à deux paramètres 108
4.2.2 Analyse de quelques cas particuliers 109
4.3 Illustration sur un premier exemple **110**
4.3.1 Optimisation des états de polarisation $\vec{s}$ et $\vec{t}$ 110
4.3.2 Comparaison avec d'autres états de polarisation non-optimisés sur des images simulées 112
4.4 Illustration sur un deuxième exemple **113**
4.4.1 Optimisation des états de polarisation $\vec{s}$ et $\vec{t}$ 114
4.4.2 Comparaison avec d'autres états de polarisation non-optimisés sur des images simulées 114
4.5 Conclusion **116**

Dans les chapitres précédents nous avons étudié les performances d'estimation et de détection d'un système d'imagerie OSC en présence de diverses perturbations. Comme nous l'avons vu, cette méthode d'imagerie polarimétrique requiert l'acquisition de deux images dans deux états de polarisation. Le premier est colinéaire à celui de l'illumination, alors que le second est orthogonal. Par conséquent, un tel système ne dispose finalement que de deux degrés de liberté qui sont par exemple l'azimut et l'ellipticité de l'illumination. En effet, une fois que l'état de polarisation de l'illumination est choisi, les états de polarisation d'analyse sont déterminés.

Dans ce chapitre, nous considérons un système d'imagerie polarimétrique active qui consiste à illuminer la scène avec un état de polarisation défini par le vecteur de Stokes $\vec{S}$ et à analyser la lumière suivant un autre état de polarisation de vecteur de Stokes $\vec{T}$. Contrairement à un système d'imagerie OSC, le choix de l'état d'analyse est indépendant de celui de l'illumination. Nous obtenons ainsi une image d'intensité (voir la figure 4.1). Nous nous proposons d'étudier comment ce type d'imagerie permet de mettre en évidence des contrastes entre un objet et le fond qui a des propriétés polarimétriques différentes.

Notre objectif est ici d'optimiser le contraste entre ces deux régions de la scène. Les degrés de liberté pour effectuer cette optimisation sont les états de polarisation $\vec{S}$ et $\vec{T}$. Ce problème est particulièrement intéressant à traiter pour des applications de télédétection ou d'imagerie biomédicale où une seule image d'intensité peut être acquise. Il a déjà été traité dans le cas des signaux radars perturbés par du bruit de speckle [71, 72].

Une étude a également été menée sur la détection de cibles immergées grâce à un lidar [73]. La méthode d'optimisation, dans cette référence, consiste à choisir l'état de polarisation d'illumination qui fournit à la fois un maximum d'intensité et le degré de polarisation le plus élevé pour la cible. L'état de polarisation d'analyse est celui qui a la plus forte probabilité d'être rétro-réfléchi par la cible. Nous proposons d'explorer une approche différente qui repose sur la maximisation du contraste que nous allons définir.

4.1 Définition du contraste

Considérons deux régions a et b dont les propriétés polarimétriques sont décrites par leurs matrices de Mueller M_a et M_b. Nous utilisons le formalisme de Mueller car nous considérons que les scènes observées sont dépolarisantes. Le formalisme de Jones n'est pas adapté dans ce cas. La scène est illuminée avec un état de polarisation purement polarisé dont le vecteur de Stokes $\vec{S}$ peut se trouver n'importe où sur la sphère de Poincaré. Ce dernier est créé grâce à un polariseur généralisé appelé "polarization state generator" (PSG).

Le vecteur de Stokes rétro-réfléchi par la région a (resp. b) est $\vec{S}_a = M_a\vec{S}$ (resp. $\vec{S}_b = M_b\vec{S}$). Ces vecteurs de Stokes de la lumière rétro-réfléchie sont ensuite projetés sur le vecteur de Stokes $\vec{T}$. Pour cela nous utilisons un polariseur généralisé que nous appelons "Polarization State Analyzer" (PSA). Ainsi les intensités mesurées par le détecteur dans les régions a et b sont :

$$I_u = \frac{1}{2}\left(\vec{T}^T M_u \vec{S}\right) \tag{4.1}$$

avec $u = \{a, b\}$ et ou l'exposant ^{T} représente la transposition matricielle.

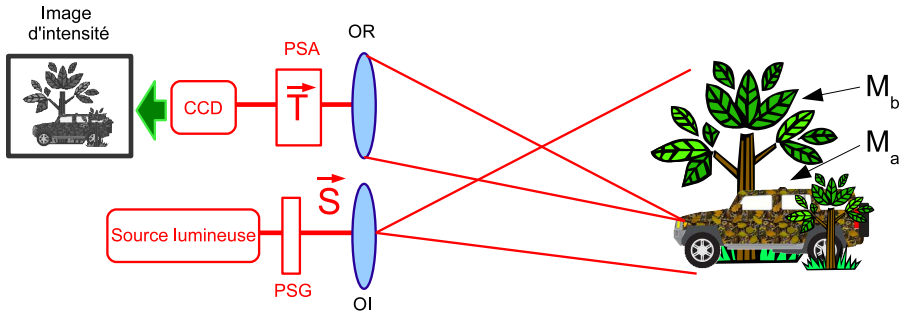


FIGURE 4.1 – Principe de fonctionnement d'un système d'imagerie polarimétrique à une image. Le PSG : (Polarization State Generator) permet de générer un état de polarisation $\vec{S}$ totalement polarisé et le PSA (Polarization State Analyzer) permet d'analyser la lumière rétro-réfléchie suivant l'état de polarisation $\vec{T}$. OI est l'optique d'illumination et OR l'optique de réception.

Notons qu'un polariseur généralisé permet de générer n'importe quel état de polarisation sur la sphère de Poincaré. Dans les domaines de l'ellipsométrie ou de l'imagerie de Mueller, le PSG et le PSA sont généralement caractérisés par leurs matrices de modulation respectives W et A. Les colonnes de la matrice W (resp. A) représentent les quatre vecteurs de Stokes utilisés pour illuminer (resp. analyser) la scène. Les PSG et PSA sont dits complets s'ils permettent de générer tous les états de polarisation possibles. Les matrices W et A sont alors inversibles. Dans le cadre de notre étude, nous considérons que le PSG et le PSA sont des polariseurs généralisés caractérisés par leurs états de polarisation $\vec{S}$ et $\vec{T}$. Ils ne correspondent donc chacun qu'a un seul état de polarisation. Notre objectif n'est pas d'estimer le vecteur de Stokes rétro-réfléchi mais simplement de faire apparaître des contrastes.

La définition du contraste dépend, comme nous l'avons vu dans le chapitre 3, des caractéristiques du bruit présent dans l'image. Dans cette partie nous supposerons, comme précédemment, que le bruit est additif et gaussien. Nous avons montré que ce modèle simple permettait de modéliser le bruit de détecteur. Dans ce cas, il a été démontré dans la référence [74], que le rapport de Fisher $\mathcal{F}$ était une expression adéquate du contraste :

$$\mathcal{C}(\vec{S},\vec{T}) = \mathcal{F} = \frac{1}{\sigma^2}\left(I_a - I_b\right)^2 . \tag{4.2}$$

On montre facilement en utilisant l'équation 4.1 que l'expression du contraste peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{C}(\vec{S},\vec{T}) = \frac{1}{4\sigma^2}\left(\vec{T}^T D\vec{S}\right)^2 ,$$

où $D = (M_a - M_b)$.

4.2 Optimisation du contraste

Rappelons que notre objectif est de trouver les vecteurs de Stokes $\vec{S}$ et $\vec{T}$ qui maximisent la valeur du contraste donnée dans l'équation 4.1. On peut facilement montrer que :

$$\begin{aligned} \max_{\vec{S},\vec{T}} \mathcal{C}(\vec{S},\vec{T}) &= \frac{1}{4\sigma^2} \max_{\vec{S},\vec{T}} \left(\vec{T}^T D \vec{S}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4\sigma^2} \left(\max_{\vec{S},\vec{T}} \left|\vec{T}^T D \vec{S}\right| \right)^2 . \end{aligned} \tag{4.3}$$

Nous en concluons que pour maximiser $\mathcal{C}(\vec{S},\vec{T})$ il suffit de déterminer le maximum et le minimum de la fonction :

$$F(\vec{S},\vec{T}) = \frac{1}{S_0} \vec{T}^T D \vec{S} \tag{4.4}$$

Pour simplifier les équations nous allons considérer la forme réduite des vecteurs de Stokes :

$$\vec{S} = S_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{s} \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{T} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{t} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} D_{00} & \vec{m}^T \\ \vec{n} & \widetilde{D} \end{bmatrix}, \tag{4.5}$$

où $\widetilde{D}$ est une matrice 3×3 et $\vec{s}$ et $\vec{t}$ sont les vecteurs de Stokes réduits (ils sont de normes 1 puisqu'ils correspondent à des états totalement polarisés). La fonction F (voir l'équation 4.4) peut s'écrire sous la forme :

$$F(\vec{s},\vec{t}) = D_{00} + \vec{s}^T \vec{m} + \vec{t}^T, \vec{n} + \vec{t}^T \widetilde{D} \vec{s} \tag{4.6}$$

Considérons la décomposition en valeurs singulières[1] (DVS) de la matrice $\widetilde{D}$ qui est en général non-symétrique :

$$\widetilde{D} = Y \Lambda X^T \tag{4.7}$$

où Λ est une matrice diagonale dont les valeurs λ_i sont positives ou nulles et X et Y sont des matrices orthogonales (*i.e.* carrées et unitaires). Nous définissons aussi les paramètres suivants :

$$\vec{u} = X^T \vec{s}, \tag{4.8}$$
$$\vec{v} = Y^T \vec{t}, \tag{4.9}$$
$$\vec{p} = X^T \vec{m}, \tag{4.10}$$
$$\vec{q} = Y^T \vec{n}. \tag{4.11}$$

[1] Décomposition en valeur singulière [75] : Soit $\widetilde{D}$ une matrice $m \times n$ dont les coefficients appartiennent au corps K, où $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$. Alors il existe une factorisation de la forme : $\widetilde{D} = Y \Lambda X^*$, avec X une matrice unitaire $m \times m$ sur K, Λ une matrice $m \times n$ dont les coefficients diagonaux sont des réels positifs ou nuls et tous les autres sont nuls (c'est donc une matrice diagonale dont on impose que les coefficients soient positifs ou nuls), et Y^* est la matrice adjointe à Y, matrice unitaire $n \times n$ sur K. On appelle cette factorisation la décomposition en valeurs singulières de $\widetilde{D}$.

- La matrice Y contient un ensemble de vecteurs de base orthonormés pour $\widetilde{D}$, dits « d'entrée »,
- La matrice X contient un ensemble de vecteurs de base orthonormés pour $\widetilde{D}$, dits « de sortie » ,
- La matrice Λ contient les valeurs singulières de la matrice $\widetilde{D}$.

Une convention courante est de ranger les valeurs Λ_{ii}, par ordre décroissant. Dans notre cas la matrice $\widetilde{D}$ est carrée à valeurs réelles.

En injectant ces définitions dans la fonction F nous obtenons :

$$\begin{aligned} F(\vec{u},\vec{v}) &= D_{00} + (X\vec{u})^T X\vec{p} + (Y\vec{v})^T Y\vec{q} + (Y\vec{u})^T Y\widetilde{\Lambda} X^T X\vec{u} \\ &= D_{00} + \vec{u}^T\vec{p} + \vec{v}^T\vec{q} + \vec{v}^T\widetilde{\Lambda}\vec{u} \\ &= D_{00} + \vec{p}^T\vec{u} + \vec{v}^T(\vec{q} + \Lambda\vec{u}). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Trouver le minimum et le maximum de la fonction $F(\vec{u},\vec{v})$ sous la contrainte $\|\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 = 1$ (étant donné que $\|\vec{s}\|^2 = \|\vec{t}\|^2 = 1$ et que les matrices X et Y sont orthogonales) est un problème d'optimisation à quatre paramètres qui sont par exemple l'azimut et l'ellipticité des états de polarisation d'illumination et d'analyse. Nous allons montrer dans la suite que ce problème peut se réduire à une optimisation à deux paramètres, ce qui induit un temps de calcul bien moindre.

4.2.1 Réduction à un problème d'optimisation à deux paramètres

Considérons que le vecteur $\vec{u}$ est fixé et déterminons les vecteurs $\vec{v}$ qui correspondent aux extrema de la fonction $F(\vec{u},\vec{v})$. Pour cela, il suffit simplement de maximiser le produit scalaire $\vec{v}^+(\vec{q} + \Lambda\vec{u})$. En tenant compte de la contrainte $\|\vec{v}\| = 1$ nous obtenons deux solutions notées $\vec{v}_+$ et $\vec{v}_-$:

$$\vec{v}_+ = \frac{\vec{q} + \Lambda\vec{u}}{\|\vec{q} + \Lambda\vec{u}\|} \quad \text{et} \quad \vec{v}_- = -\vec{v}_+. \tag{4.13}$$

En injectant ces solutions dans la fonction F nous obtenons :

$$F(\vec{u},\vec{v}_+) = A(\vec{u}) + B(\vec{u}), \tag{4.14}$$

$$F(\vec{u},\vec{v}_-) = A(\vec{u}) - B(\vec{u}), \tag{4.15}$$

avec

$$A(\vec{u}) = D_{00} + \vec{p}^T\vec{u} \qquad \text{et} \qquad B(\vec{u}) = \|\vec{q} + \Lambda\vec{u}\|. \tag{4.16}$$

En utilisant l'équation 4.4 et le fait que $B > 0$, nous montrons que maximiser le contraste revient à maximiser la fonction G que nous appellerons contraste réduit :

$$G(\vec{u}) = \max_{\vec{v}} \left\{ [F(\vec{u},\vec{v})]^2 \right\} = \left[|A(\vec{u})| + B(\vec{u}) \right]^2. \tag{4.17}$$

La valeur de $\vec{v}$ qui permet d'obtenir le maximum de $[F(\vec{u},\vec{v})]^2$ est $\vec{v}_+$ si $A(\vec{u}) > 0$ et $\vec{v}_-$ si $A(\vec{u}) < 0$. Si $A(\vec{u}) = 0$, les deux vecteurs $\vec{v}_+$ et $\vec{v}_-$ conduisent à un maximum.

En résumé l'algorithme que nous proposons correspond aux étapes suivantes :

1. Détermination de $\vec{u}_{opt} = \arg\max_{\vec{u}}[G(\vec{u})]$ grâce à une routine d'optimisation.
2. Calcul de la valeur du vecteur $\vec{v}$ correspondante :

$$\vec{v}_{opt} = \text{sign}[A(\vec{u}_{opt})]\frac{\vec{q} + \Lambda\vec{u}_{opt}}{\|\vec{q} + \Lambda\vec{u}_{opt}\|}, \tag{4.18}$$

   où $A(\vec{u})$ est défini dans l'équation 4.16. Si $A(\vec{u}_{opt}) = 0$, alors les deux signes conduisent à un optimum.
3. L'état de polarisation optimal d'illumination est donc $\vec{s}_{opt} = X\vec{u}_{opt}$ et l'état optimal d'analyse est $\vec{t}_{opt} = Y\vec{v}_{opt}$, où X et Y sont définis dans l'équation 4.7.

4.2.2 Analyse de quelques cas particuliers

Analysons deux cas particuliers où la solution est simple et permet d'avoir une compréhension physique des phénomènes mis en jeu.

Cas $\vec{m} = \vec{n} = \vec{0}$

Considérons le cas $\vec{m} = \vec{n} = \vec{0}$, ce qui signifie que les régions a et b ont les mêmes vecteurs polarisance et diatténuation [76]. Grâce à l'équation 4.12, one peut voir que, dans ce cas, si le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ est optimal alors $(-\vec{u}, -\vec{v})$ l'est aussi. La fonction que nous devons maximiser est $G(\vec{u}) = |D_{00}| + \|\Lambda\vec{u}\|$. La solution est alors évidente. Si λ_1 est la valeur la plus grande de la matrice diagonale Λ, le vecteur optimal est $\vec{u}_{opt} = (\pm 1, 0, 0)^T$. Par conséquent, $\vec{s}_{opt}$ est proportionnel au "vecteur d'entrée" associé à la valeur singulière la plus grande de $\widetilde{D}$. La valeur $\vec{v}_{opt}$ correspondante dépend du signe de D_{00}.

- Si $D_{00} > 0$, ce qui signifie que la réflectance de la lumière dépolarisée de la région a est plus grande que celle de la région b, alors l'équation 4.18 conduit à $\vec{v}_{opt} = \vec{u}_{opt}$, c'est-à-dire, $\vec{t}_{opt}$ est le "vecteur de sortie" associé à la plus grande valeur singulière.
- En revanche, si $D_{00} < 0$, alors $\vec{v}_{opt} = -\vec{u}_{opt}$ et $\vec{t}_{opt}$ est opposé (*i.e.* l'état de polarisation est orthogonal) à ce qu'il était dans le cas précédent. Ce résultat a une interprétation intéressante. En effet, le signe de $\vec{t}_{opt}$ est tel que la contribution de l'intensité au contraste, c'est à dire D_{00}, a le même signe que la contribution polarimétrique, c'est à dire $\vec{t}_{opt}^T\widetilde{D}\vec{s}_{opt}$, de telle sorte que la valeur absolue de la somme des deux termes est maximisée.
- Enfin, si $D_{00} = 0$, c'est-à-dire que les régions a et b ont la même réflectance pour la lumière dépolarisée, alors le contraste est uniquement dû aux propriétés polarimétriques. Dans ce cas $\vec{t}_{opt}$ et $-\vec{t}_{opt}$ sont tous les deux optimaux.

Cas $\widetilde{D} = 0$

Considérons à présent le cas $\widetilde{D} = 0$: les régions a et b ne diffèrent l'une de l'autre que par leurs vecteurs polarisance et diatténuation. D'après l'équation 4.6, nous voyons immédiatement que

si $D_{00} > 0$, alors $\vec{s}_{opt} = \vec{m}/\|\vec{m}\|$ et $\vec{t}_{opt} = \vec{n}/\|\vec{n}\|$. En revanche si $D_{00} < 0$, alors $\vec{s}_{opt} = -\vec{m}/\|\vec{m}\|$ et $\vec{t}_{opt} = -\vec{n}/\|\vec{n}\|$. Encore une fois, nous remarquons que la contribution polarimétrique au contraste a le même signe que la contribution de l'intensité.

4.3 Illustration sur un premier exemple

Considérons un cas plus général où les régions a et b ont les matrices de Mueller suivantes :

$$M_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 4\gamma & 0 & 0,3 & 0 \\ -\gamma & 0 & 0 & 0,4 \end{bmatrix}, \tag{4.19}$$

$$M_b = \begin{bmatrix} 0,9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4 \end{bmatrix}, \tag{4.20}$$

où γ varie entre 0 et $0,1$. Nous vérifions que toutes ces matrices sont bien des matrices de Mueller physiques. Pour cela nous nous assurons que les valeurs propres des matrices de cohérence associées sont toutes positives ou nulles pour chaque valeur de γ [77]. La matrice de Mueller M_b correspond à celle d'un milieu purement dépolarisant (voir le chapitre 1).

Dans cet exemple, nous remarquons que la matrice $\widetilde{D}$ est diagonale : par conséquent les matrices de passage X et Y sont égales à la matrice identité.

4.3.1 Optimisation des états de polarisation $\vec{s}$ et $\vec{t}$

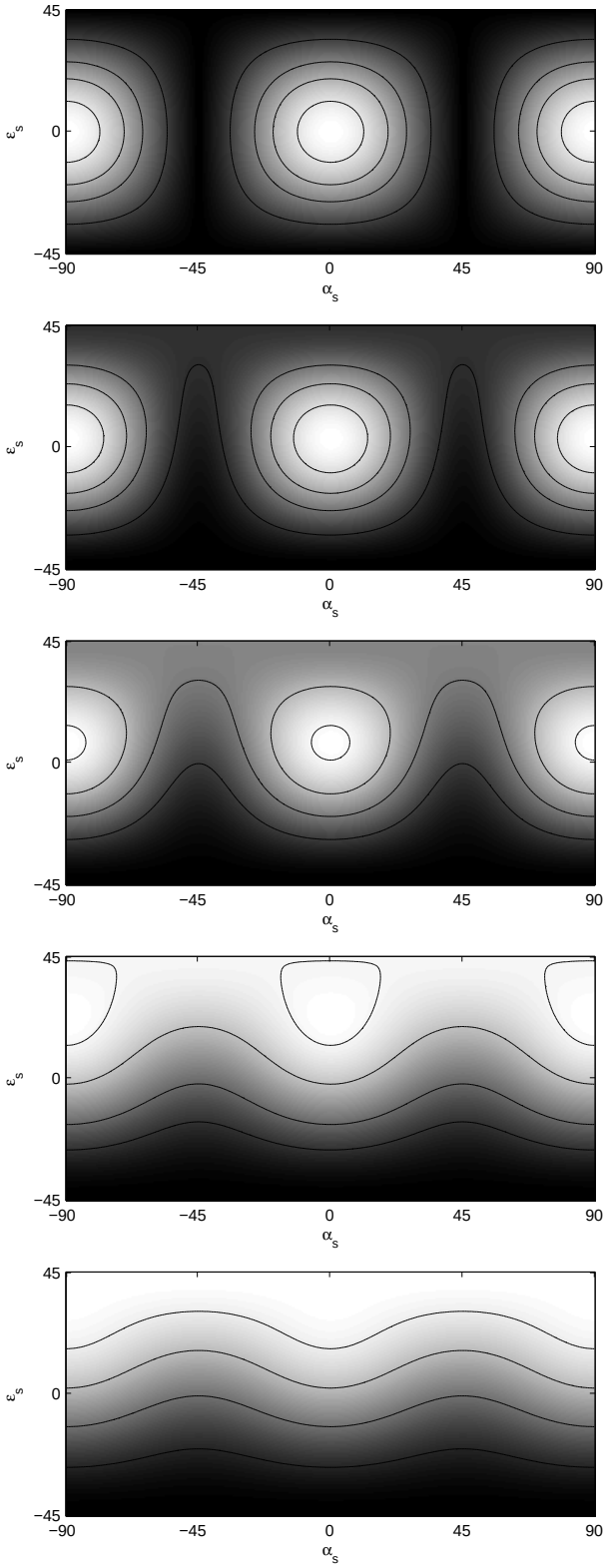
Commençons par analyser deux cas correspondant à $\gamma = 0$ et $\gamma = 0,1$.

- Lorsque $\gamma = 0$, nous sommes dans le cas particulier $\vec{m} = \vec{n} = \vec{0}$. Étant donné que $D_{00} > 0$, $\vec{s}_{opt} = \vec{t}_{opt} = (1\ 0\ 0)^T$ ce qui correspond à des états de polarisation linéaires horizontaux.
- Lorsque γ atteint sa valeur maximale de $0,1$, nous nous rapprochons du second cas particulier $\widetilde{D} \approx 0$. Dans cette situation nous obtenons $\vec{s}_{opt} \approx \vec{m} = (0\ 0\ 1)^T$ et $\vec{t}_{opt} \approx \vec{n}/\|n\| = (0\ 0,97\ \ -0,24)^T$.

Lorsque $0 < \gamma < 0,1$ nous utilisons l'algorithme décrit précédemment pour trouver la valeur de $\vec{u}_{opt}$ qui maximise $G(\vec{u})$. Dans la figure 4.2, nous représentons la fonction $G'(\alpha_s, \varepsilon_s) = G(\vec{u})$ pour γ variant entre 0 et $0,1$, où α_s est l'azimut et ε_s l'ellipticité du vecteur de Stokes $\vec{S} = (1,\ \cos 2\alpha_s \cos 2\varepsilon_s,\ \sin 2\alpha_s \cos 2\varepsilon_s,\ \sin 2\varepsilon_s)^T$.

Nous représentons sur la figure 4.3 l'évolution des vecteurs $\vec{s}_{opt}$ et $\vec{t}_{opt}$ en fonction du paramètre γ. Pour $\gamma = 0$, ils sont quasiment identiques et ensuite lorsque γ augmente $\vec{s}_{opt}$ tend vers une polarisation circulaire gauche tandis que $\vec{t}_{opt}$ se rapproche d'un état légèrement elliptique dont l'azimut est proche de 45°.

Nous remarquons que dans notre exemple, pour chaque valeur de γ il existe deux maxima correspondant à $\alpha_s = 0°$ et $\alpha_s = 90°$. Notons $\vec{s}_{opt}$, $\vec{t}_{opt}$ les vecteurs optimaux correspondant au



$\gamma = 0$
$\alpha_s = 0°$
$\varepsilon_s = 0,2°$

$\gamma = 0,02$
$\alpha_s = 0°$
$\varepsilon_s = 3,1°$

$\gamma = 0,04$
$\alpha_s = 0°$
$\varepsilon_s = 7,1°$

$\gamma = 0,08$
$\alpha_s = 0°$
$\varepsilon_s = 22,6°$

$\gamma = 0,1$
$\alpha_s = 0°$
$\varepsilon_s = 44,9°$

FIGURE 4.2 – Représentation pour différentes valeurs de γ de la fonction à maximiser $G'(\alpha_s, \varepsilon_s) = G(\vec{u})$ où α_s est l'azimut et ε_s l'ellipticité du vecteur de Stokes d'illumination. A droite sont données les valeurs α_s et ε_s correspondant au maximum de la fonction $G'(\alpha_s, \varepsilon_s)$.

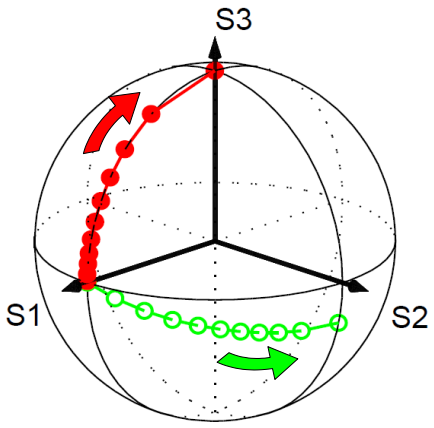


FIGURE 4.3 – Représentation sur la sphère de Poincaré des vecteurs de Stokes $\vec{s}_{opt}$ (•) et $\vec{t}_{opt}$ (○), correspondant respectivement aux états de polarisation optimaux à l'emission et à la réception, pour différentes valeurs de γ entre 0 et 0,1. Les flèches vont dans le sens des γ croissants.

cas $\alpha_s = 0°$ et $\vec{s'}_{opt}$, $\vec{t'}_{opt}$ ceux correspondant au cas $\alpha_s = 90°$. On montre facilement que

$$\vec{s'}_{opt} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{s}_{opt}, \quad \text{et} \quad \vec{t'}_{opt} = -\vec{t}_{opt} + \text{sign}[A(\vec{s}_{opt})] \frac{\vec{n}}{\|\vec{n} + \Lambda \vec{s}_{opt}\|}.$$

En réinjectant ces expressions dans l'équation 4.6 on montre sans difficulté que :

$$F(\vec{s}_{opt}, \vec{t}_{opt}) = F(\vec{s'}_{opt}, \vec{t'}_{opt}).$$

Cela démontre que dans ce cas particulier, les valeurs $\alpha = 0°$ et $\alpha = 90°$ conduisent toutes les deux au même maximum de contraste.

4.3.2 Comparaison avec d'autres états de polarisation non-optimisés sur des images simulées

Pour illustrer l'intérêt d'utiliser les états de polarisation optimaux d'illumination et d'analyse, nous avons simulé dans la figure 4.4 une scène composée d'une pièce carrée de matériau caractérisé par la matrice de Mueller M_a avec $\gamma = 0,096$ sur un fond dont la matrice de Mueller est M_b. Nous comparons différentes configurations classiques présentées dans le tableau 4.2 :

- linéaire "co-polarisée" (LCO), lorsque $\vec{S}$ est linéaire vertical et $\vec{T} = \vec{S}$.
- linéaire "cross-polarisée" (LCR), lorsque $\vec{S}$ est linéaire vertical et $\vec{T}$ linéaire horizontal.
- circulaire "co-polarisée" (CCO), lorsque $\vec{S}$ circulaire droit et $\vec{T} = \vec{S}$.
- circulaire "cross-polarisée" (CCR),lorsque $\vec{S}$ circulaire droit et $\vec{T}$ circulaire gauche.
- la configuration optimale (OPT).

	$\alpha_{\vec{s}}$	$\varepsilon_{\vec{s}}$	$\alpha_{\vec{t}}$	$\varepsilon_{\vec{t}}$
LCO	0°	0°	0°	0°
LCR	0°	0°	90°	0°
CCO	0°	45°	0°	45°
CCR	0°	45°	0°	−45°
OPT	0°	36, 9°	40, 1°	−6, 9°

TABLEAU 4.1 – Configurations des vecteurs $\vec{s} = (\cos 2\alpha_s \cos 2\varepsilon_s,\ \sin 2\alpha_s \cos 2\varepsilon_s,\ \sin 2\varepsilon_s)^T$ et $\vec{t} = (\cos 2\alpha_t \cos 2\varepsilon_t,\ \sin 2\alpha_t \cos 2\varepsilon_t,\ \sin 2\varepsilon_t)^T$ utilisés dans les simulations de la figure 4.4.

La valeur du contraste est calculée dans chacune des situations grâce à l'équation 4.2 et reportée dans la figure 4.4. Nous voyons qualitativement que la configuration optimisée fournit un bien meilleur contraste : le contraste estimé dans cette situation est au moins plus de quatre fois supérieur aux autres cas.

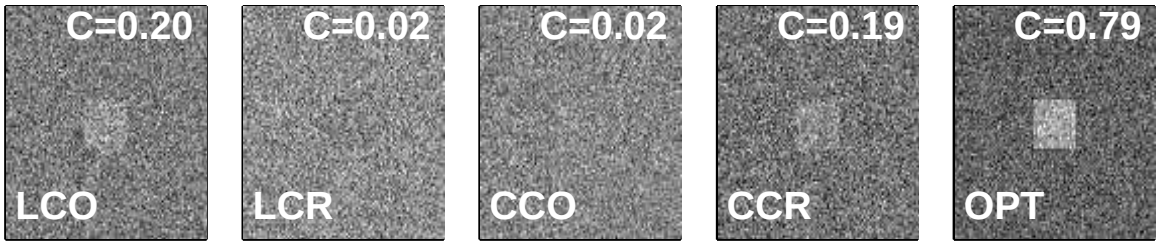


FIGURE 4.4 – Images simulées d'un élément carré de matériau (M_a avec $\gamma = 0,096$) sur un fond (M_b) avec $I_0 = 30$, $\sigma = 10$. Chacune des configurations est détaillée dans le tableau 4.2.

4.4 Illustration sur un deuxième exemple

Considérons à présent un second cas où les régions a et b ont les matrices de Mueller suivantes :

$$M_a = \begin{bmatrix} 1,5 & 0,1 & 8\gamma & \gamma \\ 0,1 & 0,5 & 0,2 & 0,1 \\ 4\gamma & 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ -\gamma & -0,1 & 0,1 & 0,4 \end{bmatrix}, \tag{4.21}$$

$$M_b = \begin{bmatrix} 0,9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4 \end{bmatrix}, \tag{4.22}$$

où γ varie entre 0 et $0,1$. Nous vérifions également dans ce cas que toutes ces matrices sont bien des matrices de Mueller physiques. Notons que la matrice M_b caractérisant le fond de la scène est identique à celle de la première illustration.

4.4.1 Optimisation des états de polarisation $\vec{s}$ et $\vec{t}$

Nous utilisons l'algorithme que nous avons développé dans la section 4.2.1 pour trouver les états de polarisation d'illumination et d'analyse qui maximisent le contraste. Dans la figure 4.5, nous représentons la fonction de contraste réduit $G'(\alpha_s, \varepsilon_s) = G(\vec{u})$ pour γ variant entre 0 et $0,1$. Rappelons que α_s est l'azimut et ε_s l'ellipticité du vecteur de Stokes $\vec{S} = (1,\ \cos 2\alpha_s \cos 2\varepsilon_s,\ \sin 2\alpha_s \cos 2\varepsilon_s,\ \sin 2\varepsilon_s)^T$.

Contrairement à l'exemple précédent nous pouvons remarquer qu'il n'y a qu'un seul maximum de contraste.

Comme précédemment, nous représentons sur la figure 4.3 l'évolution des vecteurs $\vec{s}_{opt}$ et $\vec{t}_{opt}$ en fonction du paramètre γ. Lorsque γ augmente de 0 à 0,1, on note dans ce cas que les états de polarisation $\vec{S}_{opt}$ et $\vec{T}_{opt}$ se rapprochent de l'équateur, c'est-à-dire des états de polarisation linéaires d'azimuts respectifs $\alpha_s = 33,8°$ et $\alpha_t = 26,3°$.

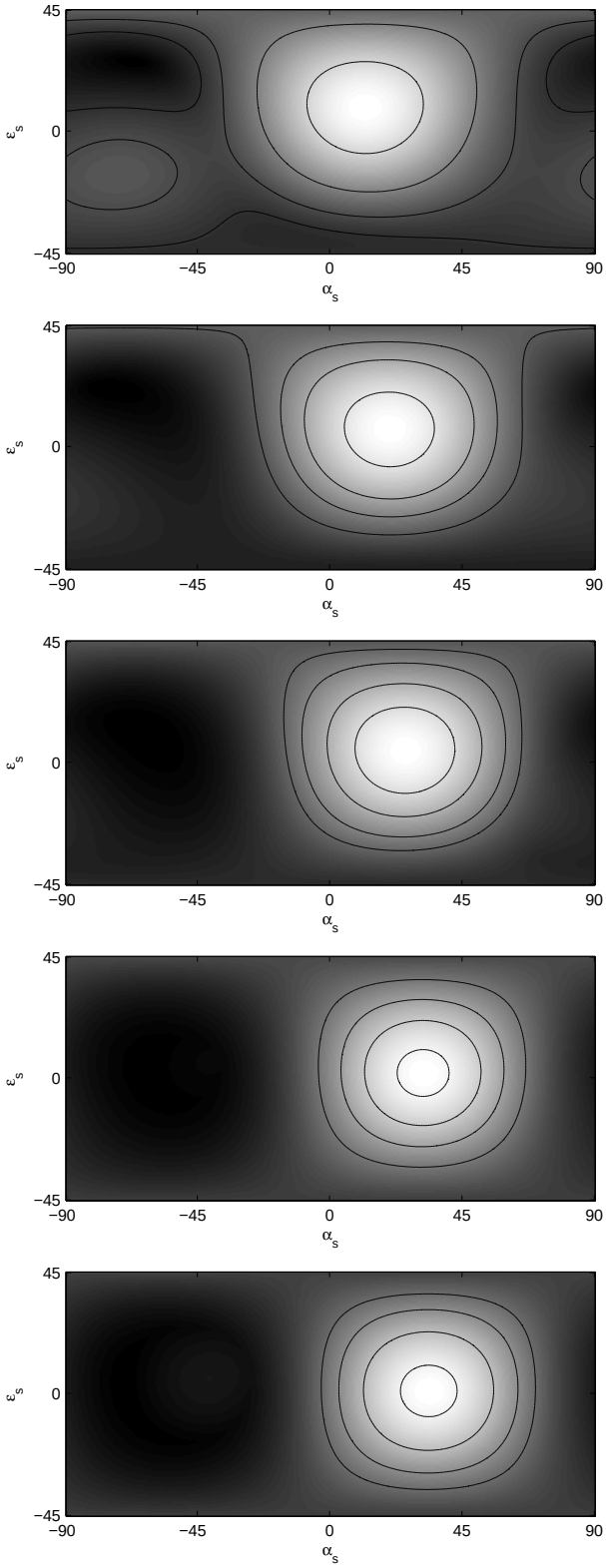
4.4.2 Comparaison avec d'autres états de polarisation non-optimisés sur des images simulées

Pour illustrer l'intérêt d'utiliser les états de polarisation optimaux d'illumination et d'analyse, nous avons simulé dans la figure 4.7 une scène composée d'une pièce carrée de matériau caractérisé par la matrice de Mueller M_a avec $\gamma = 0,1$ sur un fond dont la matrice de Mueller est M_b. Nous comparons différentes configurations classiques présentées dans le tableau 4.2 :

	$\alpha_{\vec{s}}$	$\varepsilon_{\vec{s}}$	$\alpha_{\vec{t}}$	$\varepsilon_{\vec{t}}$
LCO	0°	0°	0°	0°
LCR	0°	0°	90°	0°
CCO	0°	45°	0°	45°
CCR	0°	45°	0°	−45°
OPT	33,8°	1,4°	26,4°	−2,2°

TABLEAU 4.2 – Configurations des vecteurs $\vec{s} = (\cos 2\alpha_s \cos 2\varepsilon_s,\ \sin 2\alpha_s \cos 2\varepsilon_s,\ \sin 2\varepsilon_s)^T$ et $\vec{t} = (\cos 2\alpha_t \cos 2\varepsilon_t,\ \sin 2\alpha_t \cos 2\varepsilon_t,\ \sin 2\varepsilon_t)^T$ utilisés dans les simulations de la figure 4.4.

La valeur du contraste est calculée dans chacune des situations grâce à l'équation 4.2 et reportée dans la figure 4.7. Nous voyons qualitativement que la configuration optimisée fournit un bien meilleur contraste : le contraste estimé dans cette situation est au moins quatre fois supérieur aux autres cas.



$\gamma = 0$
$\alpha_s = 11,4°$
$\varepsilon_s = 8,8°$

$\gamma = 0,02$
$\alpha_s = 20,0°$
$\varepsilon_s = 6,6°$

$\gamma = 0,04$
$\alpha_s = 25,2°$
$\varepsilon_s = 4,8°$

$\gamma = 0,08$
$\alpha_s = 29,2°$
$\varepsilon_s = 3,1°$

$\gamma = 0,1$
$\alpha_s = 33,8°$
$\varepsilon_s = 1,4°$

FIGURE 4.5 – Représentation pour différentes valeurs de γ de la fonction à maximiser $G'(\alpha_s, \varepsilon_s) = G(\vec{u})$ où α_s est l'azimut et ε_s l'ellipticité du vecteur de Stokes d'illumination. A droite sont données les valeurs α_s et ε_s correspondant au maximum de la fonction $G'(\alpha_s, \varepsilon_s)$.

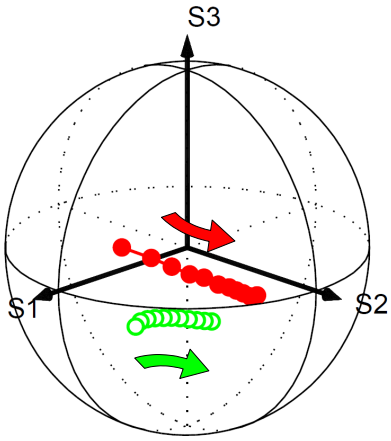


FIGURE 4.6 – Représentation sur la sphère de Poincaré des vecteurs de Stokes $\vec{s}_{opt}$ (•) et $\vec{t}_{opt}$ (○), correspondant respectivement aux états de polarisation optimaux à l'emission et à la réception, pour différentes valeurs de γ entre 0 et 0,1. Les flèches vont dans le sens des γ croissants.

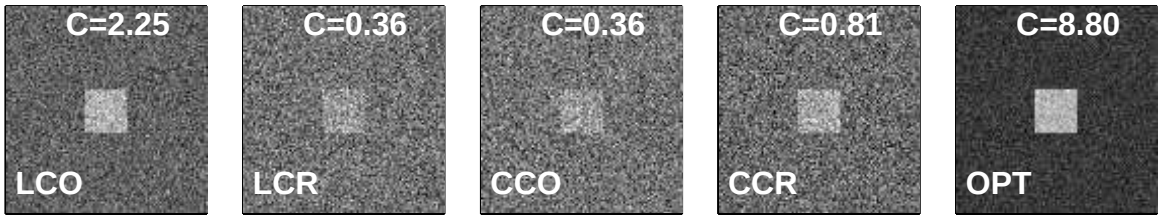


FIGURE 4.7 – Images simulées d'un élément carré de matériau (M_a avec $\gamma = 0,096$) sur un fond (M_b) avec $I_0 = 30$, $\sigma = 10$. Chacune des configurations est détaillée dans le tableau 4.2.

4.5 Conclusion

Nous avons présenté une méthode permettant d'optimiser le contraste observé entre deux régions dans un système d'imagerie polarimétrique faisant l'acquisition d'une seule image en présence de bruit additif gaussien. L'optimisation des vecteurs d'illumination et d'analyse peut se réduire à un problème d'optimisation à deux paramètre et produit des résultats très encourageants.

Il est supposé, dans ce chapitre, que les matrices de Mueller des matériaux observés sont connues *a priori*, ce qui n'est en général pas le cas. Néanmoins, un système permettant de générer des états de polarisation d'illumination et d'analyses comme celui présenté dans la figure 4.1 peut également servir à mesurer une matrice de Mueller [8]. Nous pouvons ainsi envisager un système qui mesurerait dans un premier temps la matrice de Mueller de la scène. Il convergerait ensuite automatiquement vers les états de polarisation d'illumination et d'analyse fournissant le meilleur contraste. Il est également envisageable de faire converger le système expérimentalement et de

manière autonome vers le meilleur contraste sans mesurer au préalable la matrice de Mueller de chaque point de la scène.

Nous avons également supposé que l'image acquise était perturbée par du bruit additif gaussien. Une perspective intéressante des ces travaux, serait de mener une étude similaire en présence du bruit de photons.

Conclusion générale

Résumé

L'objectif de cette thèse était d'une part, d'explorer et de développer de nouvelles techniques d'imagerie polarimétrique active et d'autre part, d'utiliser des techniques de traitement du signal et de l'image afin d'améliorer l'extraction d'information.

Une méthode simple d'imagerie polarimétrique active, appelée imagerie d'OSC, nécessite l'acquisition de deux images correspondant à deux états de polarisation orthogonaux. De nombreux systèmes existants font l'acquisition séquentielle de ces deux images et montrent leurs limites s'ils sont utilisés avec une source impulsionnelle ou lors de l'observation de scènes dynamiques. Pour cela nous avons conçu une architecture permettant de faire l'acquisition simultanée de deux états de polarisation orthogonaux. La configuration proposée repose sur l'utilisation d'un prisme de Wollaston ce qui permet d'obtenir un système compact, robuste et dans lequel les bruits techniques sont limités. Durant la conception du système nous nous sommes efforcés de minimiser l'influence des aberrations optiques. Une calibration optique a cependant été nécessaire et nous a permis d'obtenir des images d'intensité parfaitement recalées. Nous avons de plus mis en place une procédure calibration polarimétrique pour compenser les biais introduits par les défauts des composants utilisés (polarisation et dépolarisation induites).

Les problèmes de bruits d'origine purement technique liés à l'utilisation d'un rotateur de polarisation, de deux capteurs ou d'une source d'éclairement impulsionnelle ne se posant pas dans notre architecture, nous avons pu nous intéresser aux bruits résiduels ultimes dans les images de polarisation (bruit de photons et bruit de détecteur) et cela dans différentes configurations. Dans tous les cas présentés, l'objectif était de modéliser de manière rigoureuse le bruit dans les images d'intensité pour pouvoir calculer la borne de Cramer-Rao sur l'estimation du paramètre d'OSC. Nous avons commencé par étudier l'influence du bruit de détecteur seul, dans un système à très faible flux lumineux. La densité de probabilité de l'OSC a été calculée et son expression justifie les grandes variances observées à faible rapport signal sur bruit.

Lorsque l'illumination est plus importante, le bruit de photons devient prédominant. Le bruit de détecteur est alors intégré à un ensemble de sources de bruit appelé contribution passive, qui peut être partiellement polarisée. L'expression de la borne de Cramer-Rao met en évidence que la précision d'estimation de l'OSC de la scène dépend de l'état de polarisation de la contribution passive. Nous avons alors montré qu'il était possible de minimiser la variance de l'OSC en choisissant correctement l'état de polarisation de l'illumination active. Enfin, la dernière perturbation prise en compte était la non-uniformité du faisceau d'illumination qui apparaît dès que l'on considère des applications longue portée. Dans ce cas, nous avons montré que l'utilisation d'un

estimateur adapté (maximum de vraisemblance généralisé) était indispensable pour atteindre la BCR.

Les systèmes d'imagerie polarimétrique active n'est sont pas seulement destinés à des tâches d'estimation du paramètre d'OSC, mais également à la détection d'objet d'intérêt dont les propriétés sont différentes de celles du milieu environnant. Nous nous sommes donc naturellement intéressés à la problématique de la détection en présence d'une illumination non-uniforme et de bruit de détecteur. Les calculs qui conduisent au détecteur optimal (GLRT) sont assez proches de ceux effectués dans le cadre de l'estimation. Nous avons montré, grâce à des simulations de Monte-Carlo, que prendre en compte la non-uniformité dans le calcul GLRT permettait d'obtenir un algorithme insensible au type de non-uniformité. Cependant il ne mettait pas à profit le contraste d'intensité (lié à la réflectance des objets) présent dans la scène. Une manière d'exploiter ce contraste consiste à utiliser le détecteur adapté à l'illumination uniforme. Cette approche fournit de bons résultats mais conduit à une probabilité de fausse alarme élevée lorsque la longueur de corrélation des variations spatiales d'intensité d'illumination est proche de la taille de l'objet d'intérêt. Le choix de l'algorithme dépend donc du type d'application et des caractéristiques de l'illumination.

Enfin nous avons élargi notre étude au cas d'un système actif faisant l'acquisition d'une seule image d'intensité. Contrairement aux systèmes d'imagerie d'OSC, il présente deux degrés de liberté : l'état de polarisation de l'illumination et celui de l'analyse. L'objectif de notre étude était de maximiser le contraste entre deux zones homogènes de l'image. Nous avons montré que ce problème d'optimisation à quatre paramètres pouvait se réduire à seulement deux paramètres. En effet, nous avons présenté l'expression analytique de l'état de polarisation d'analyse optimale pour un état d'illumination donné. Il devient alors possible d'utiliser des méthodes d'optimisation classiques pour trouver les états de polarisation maximisant le contraste.

Perspectives

Il est à présent possible d'avoir une bonne vue d'ensemble de l'influence de différentes perturbations sur les performances d'estimation et de détection dans les images polarimétriques. De nombreuses études ont été menées en présence de bruit de speckle [48, 78, 79], de bruit de photons [80], ou de bruit de détecteur [13,80]. Il serait très enrichissant de généraliser cette étude en combinant plusieurs types de bruit. Cela a déjà été fait, dans quelques cas [51, 81, 82], mais mérite d'être approfondi.

Notre approche concernant la problématique de la détection était assez réduite puisque nous supposions connaître parfaitement la forme et la taille de l'objet d'intérêt. Il serait très intéressant de poursuivre cette étude en développant des méthodes de segmentation telles que les contours actifs par exemple. Pour cela il faudra définir une fonction d'énergie que nous chercherons à minimiser.

D'un point de vue expérimental, notre étude sur le système polarimétrique à une image soulève des perspectives intéressantes. En effet, nous pouvons envisager de modifier le fonctionnement d'un imageur de Mueller. Après une acquisition permettant d'estimer les images

de Mueller d'une scène, une segmentation grossière permettrait d'isoler un objet d'intérêt du fond environnant. Nous avons montré qu'il était alors possible de maximiser expérimentalement le contraste entre ces deux régions. Il serait ensuite possible "d'accrocher" la zone d'intérêt et d'optimiser en temps réel les états de polarisation d'illumination et d'analyse en fonction de l'évolution de la scène. Cette étude très prometteuse peut être généralisée à d'autres types de perturbations.

Chapitre A

Caractérisation et calibration de la caméra Basler A312f

Le détecteur que nous avons utilisé dans cette étude est une caméra visible Basler A312f monochrome avec une dynamique de 12 bits (4095 niveaux de gris). Ses principales caractéristiques sont résumées dans le tableau A.1.

Type de détecteur :	CCD Sony ICX 415AL/AQ
Résolution :	782×582 pixels
Taille des pixels :	$8,3 \times 8,3\,\mu$m
Format de sortie vidéo :	Mono 16 (16 bits dont 12 effectifs)
Temps d'intégration minimum :	$20\,\mu$ s
Efficacité quantique :	40% à 545 nm
Inverse du gain global :	5,1±0,3 électrons/niveau de gris.
Bruit d'obscurité temporel :	22±1.8 électrons

Tableau A.1 – Caractéristiques de la caméra Basler A312f.

A.1 Mode d'acquisition de la caméra

Le logiciel d'interfaçage (Labview) propose deux modes de fonctionnement : le mode "Snapshot" et le mode "Sequence". Le mode "Snapshot", également appelé "Grab" lorsqu'il est utilisé en boucle, ne fonctionne qu'avec un seul et unique buffer qui doit être vidé pour être réutilisé lors de l'acquisition suivante. Le mode "Sequence" quant à lui, est préconisé dans l'aide de Labview, pour l'acquisition d'un grand nombre d'images car il est très rapide. En effet, dans ce cas, il y a autant de buffer que d'images. Nous représentons sur la figure A.1 les histogrammes d'un pixel dans le noir pour 500 acquisitions successives. Nous remarquons que le mode "Sequence" n'est pas adapté à la caméra que nous utilisons. En effet, certains niveaux de gris ne sont pas accessibles.

Par la suite nous n'utiliserons donc que le mode "Snapshot".

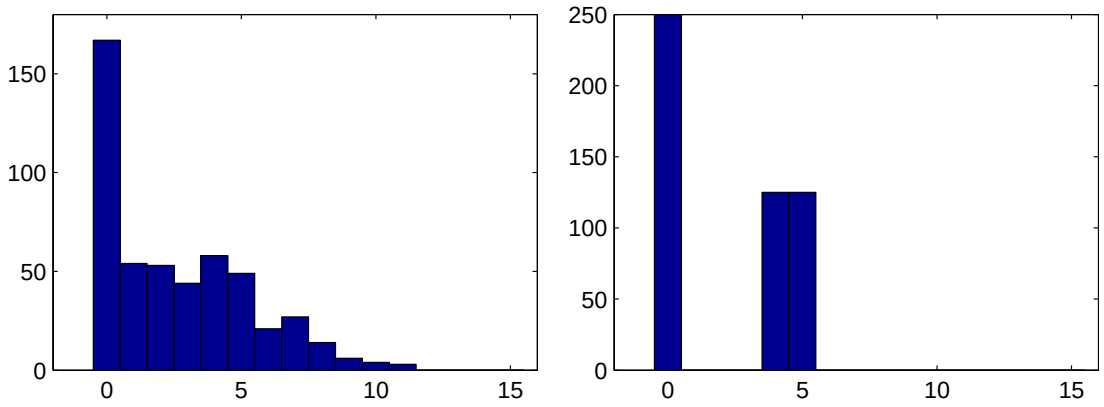


FIGURE A.1 – Histogrammes d'un pixel pour 500 acquisitions dans le noir pour 80ms d'exposition. A gauche le mode "Snap" à droite le mode "Sequence".

A.2 Bruit temporel dans l'obscurité

Dans cette partie nous nous intéressons au bruit temporel, c'est-à-dire aux fluctuations d'un pixel en fonction du temps. Nous commencerons par les sources de bruits présentes dans l'obscurité.

A.2.1 Courant d'obscurité ou "Dark current"

D'une manière générale, un pixel d'une matrice CCD transforme les photons lumineux qu'il reçoit en paires électron-trou par effet photoélectrique dans le substrat semi-conducteur. Les électrons sont ensuite collectés dans un puits de potentiel maintenu à chaque photo-site. Le nombre d'électrons collectés est proportionnel à la quantité de lumière reçue. Cependant, en surface du détecteur, c'est-à-dire en surface de la couche dopée N, se créent spontanément des paires électron-trou à cause de l'agitation thermique. Ces électrons sont eux aussi collectés et assimilés à un signal. Ils constituent le courant d'obscurité. Dans la pratique on observe que le nombre d'électrons générés thermiquement suit une loi de Poisson :

$$\mu_{dark\ current} = \sigma^2_{dark\ current} = N_d T_{exp}, \tag{A.1}$$

où $\mu_{dark\ current}$ est le nombre moyen d'électrons d'obscurité, $\sigma^2_{dark\ current}$ sa variance, T_{exp} le temps d'exposition et N_d le nombre de charges moyennes générées par unité de temps.

Un grand nombre de détecteurs est aujourd'hui équipé d'une compensation du courant d'obscurité. La technologie employée sur la matrice CCD Sony ICX 415AL/AQ est la "Hole Accumulation Diode" (HAD). Le principe consiste à rajouter une couche dopée P (très riche en trous) à la surface du détecteur. Les électrons activés thermiquement en surface de la couche N vont ainsi être majoritairement captés par la couche HAD et ils ne sont plus collectés dans le puits de potentiel. Il est ainsi possible de réduire fortement le courant d'obscurité. Les photons, quant à eux, interagissent plus en profondeur dans le matériau et produisent donc des charges qui ne sont pas captées par la couche HAD. C'est d'ailleurs cette technologie qui a orienté notre choix de détecteur.

Sur la figure A.2 sont représentées la moyenne et la variance en niveau de gris d'un pixel en fonction du temps d'intégration dans l'obscurité. Nous observons que ni l'une ni l'autre ne dépend du temps d'intégration (sur la plage que nous avons testée, *i.e.* de 20μs à 4s). Cela signifie que le détecteur ne présente pas de courant d'obscurité au sens commun, du moins jusqu'à 4 s de temps d'intégration.

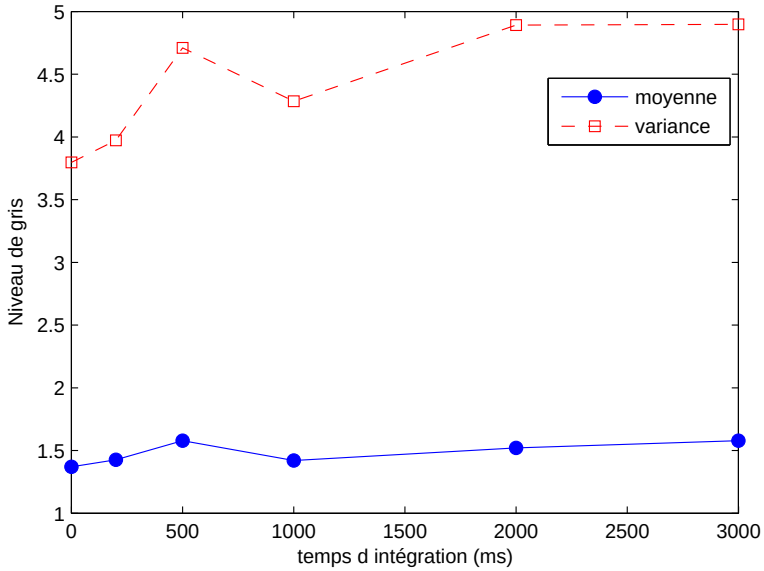


FIGURE A.2 – Moyenne et variance du niveau de gris d'un pixel (320,320) sur 500 acquisitions, en fonction du temps d'intégration dans le noir avec un offset de 0. (Acquisition en mode snapshot).

Nous avons remarqué tout de même la présence de quelques pixels chauds ou "hot pixels" dans la matrice de détection. La couche HAD ne doit pas être efficace sur ces pixels, ce qui se traduit par la présence d'un courant d'obscurité. Sur la figure A.3 nous représentons la moyenne et la variance d'un pixel chaud en fonction du temps d'intégration.

Etant donné les régressions linéaires obtenues, nous concluons que la moyenne et la variance de ce pixel chaud dépendent linéairement du temps d'intégration : il s'agit donc d'un courant d'obscurité. Comme nous le savons, le nombre de charges créées thermiquement N_{ct} peut être modélisé par une variable aléatoire de Poisson. Nous obtenons donc :

$$\langle N_{ct} \rangle = \mathrm{Var}(N_{ct}).$$

Ces charges sont ensuite converties en niveau de gris grâce au convertisseur analogique numérique (CAN) pour obtenir un niveau X_{ct} de gris codé sur 12 bits. Notons q le nombre d'électrons par

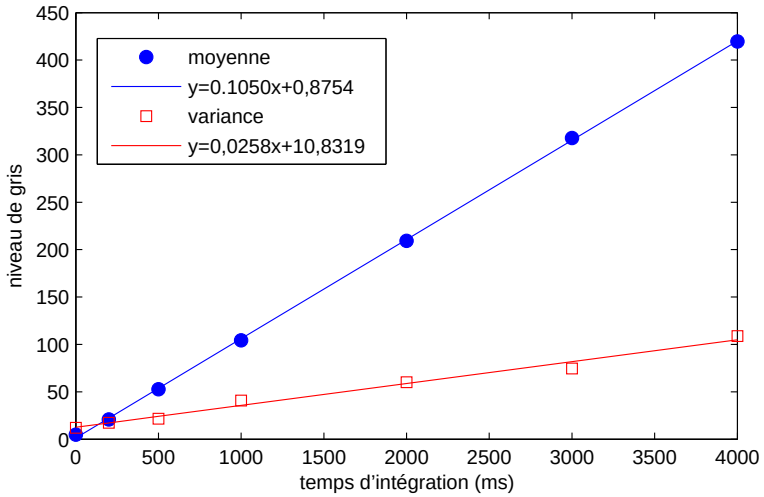


FIGURE A.3 – Moyenne et variance du niveau de gris d'un "pixel chaud" (185,50) sur 500 acquisitions, en fonction du temps d'intégration dans le noir avec un "offset" de 0. Nous traçons également les régressions linéaires correspondantes.

niveau de gris (1/q est appelé gain global). Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X_{ct}) &= \mathrm{Var}(\frac{N_{ct}}{q}) \\ &= \frac{1}{q^2}\mathrm{Var}(N_{ct}) \\ &= \frac{1}{q^2}\langle N_{ct}\rangle \\ &= \frac{1}{q}\langle X_{ct}\rangle \end{aligned}$$

Grâce aux régressions linéaires obtenues dans la figures A.3, nous pouvons obtenir une première estimation du paramètre q en calculant le rapport de leurs pentes. Nous obtenons $q = 4,06$ électrons par niveau de gris. Cependant nous n'accordons qu'une confiance mesurée à cette estimation, puisque nous n'avons pas la certitude que la densité de probabilité du nombre de charges crées thermiquement est Poissonnienne.

A.2.2 Bruit d'obscurité ou "Dark noise"

Étant donné que la matrice CCD ne fournit quasiment pas de courant d'obscurité dans la plage d'utilisation (excepté pour les rares pixels chauds), la variance du signal mesuré sur la figure A.2 provient d'autres sources de bruit. Nous allons montrer que ce bruit peut être modélisé de deux manières différentes suivant les paramètres utilisés pour l'acquisition.

Paramètre d'offset fixé à 0

La caméra est utilisée avec un paramètre d'offset fixé à 0, comme cela était le cas jusqu'à présent. Pour visualiser la distribution du bruit d'obscurité nous avons tracé sur la figure A.4 les histogrammes temporels (sur 500 acquisitions) d'un pixel (320,320) pour différents temps d'intégration :

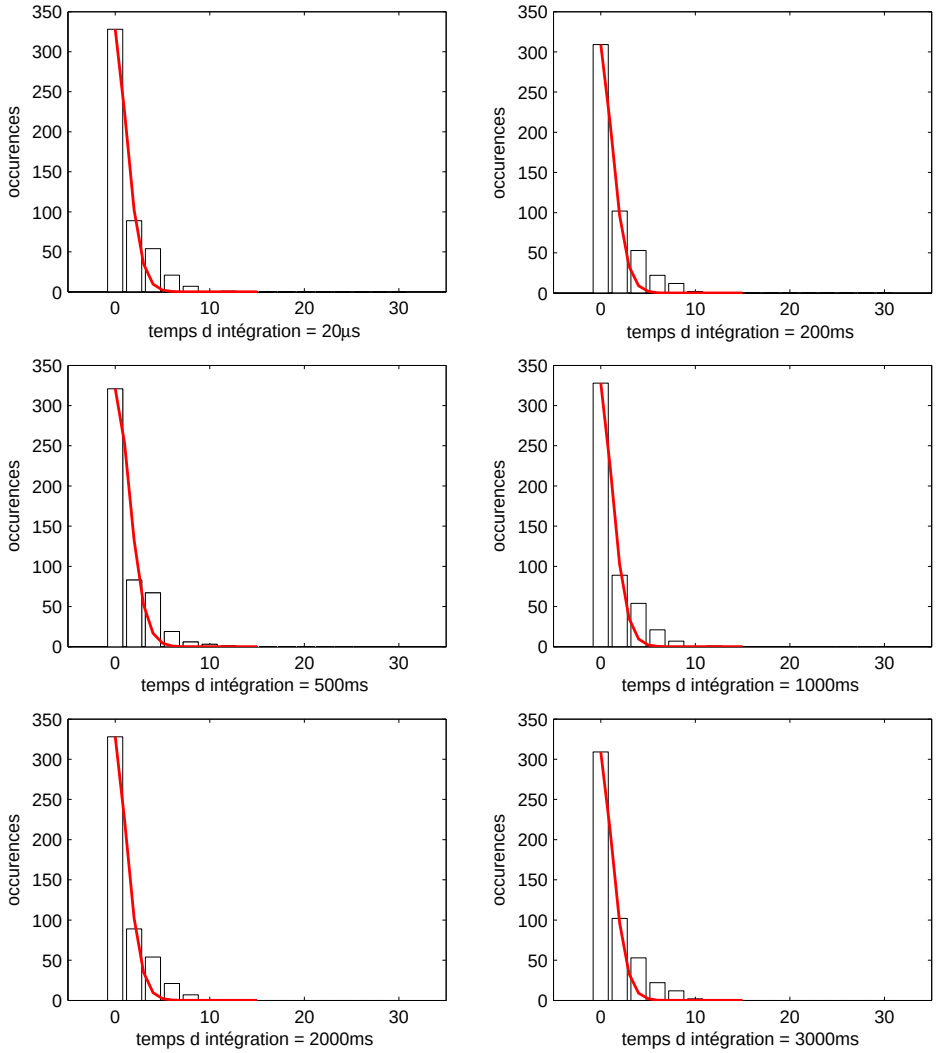


FIGURE A.4 – Histogramme du pixel (320,320) sur 500 réalisations pour différents temps d'intégration, dans l'obscurité avec offset de 0. Une distribution de Poisson dont la moyenne correspond à celle donnée dans la figure A.2 est tracée en trait plein.

Nous remarquons que les histogrammes ne varient pas avec le temps d'intégration, ce qui montre encore une fois qu'il n'y a pas de courant d'obscurité. L'histogramme est assez bien approché par une distribution de Poisson. Nous concluons que dans ce cas, le bruit d'obscurité peut être modélisé par une variable aléatoire de Poisson de moyenne égale 1,5. D'autre part, nous remarquons que la valeur 0 contient à peu près la moitié des réalisations (250 dans notre cas) comme si le bruit était symétrique autour de 0 et que toutes les valeurs négatives étaient

repliées sur 0. Pour vérifier cette hypothèse nous menons la même expérience, avec cette fois-ci un offset fixé à 14.

Paramètre d'offset fixé à 14

Les histogrammes sont représentés sur la figure A.5 et les moyennes et variances empiriques sur la figure A.6. Nous constatons que dans ce cas, la variance empirique est plus élevée (aux

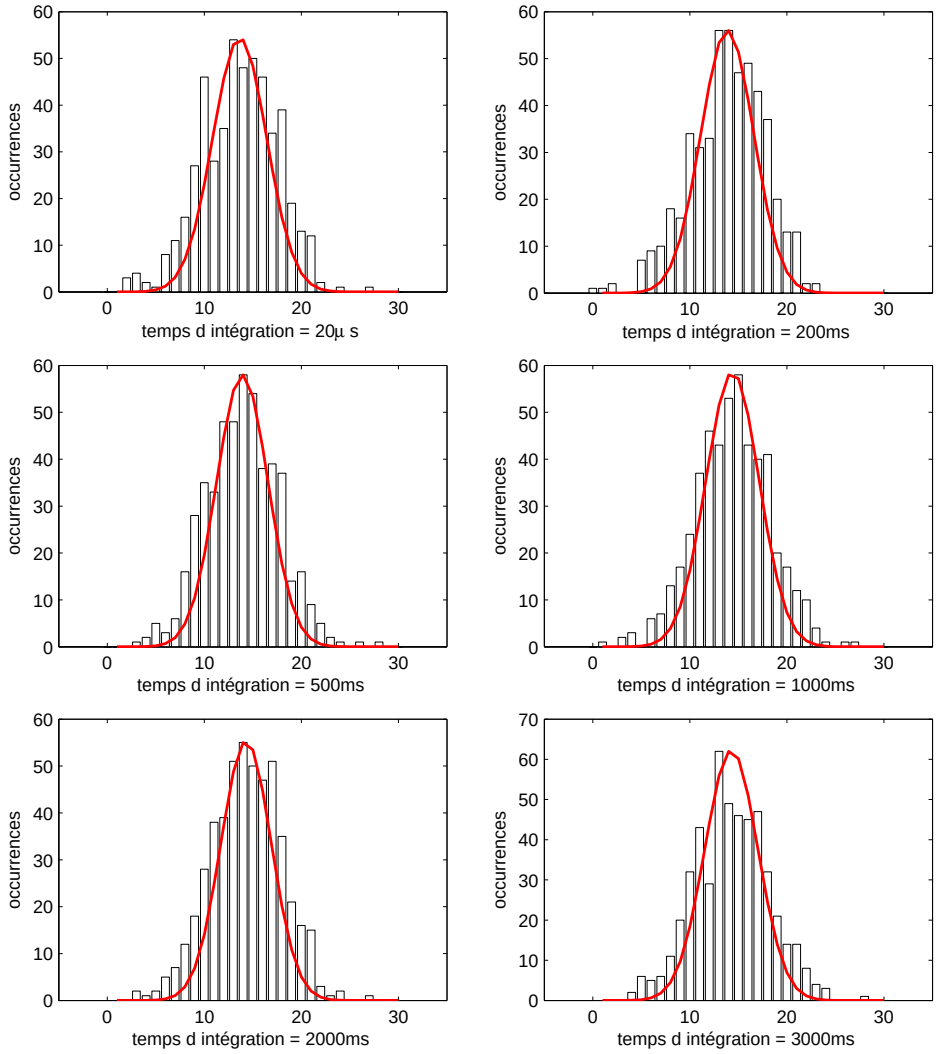


FIGURE A.5 – Histogramme du pixel (320,320) sur 500 réalisations pour différents temps d'intégration, dans l'obscurité et avec offset de 14. Une courbe gaussienne dont la moyenne et la variance correspondent à celles données dans la figure A.6 est tracée en trait plein.

environs de 15 en niveau de gris) que lorsque l'offset est fixé à 0. On peut également remarquer que l'approximation de la densité de probabilité du bruit par une gaussienne est justifiée. En effet, les histogrammes sont très proches des courbes gaussiennes dans la figure A.5. Enfin la moyenne de ce bruit est très proche de la valeur de l'offset que nous avons utilisée pour l'acquisition, *i.e.*

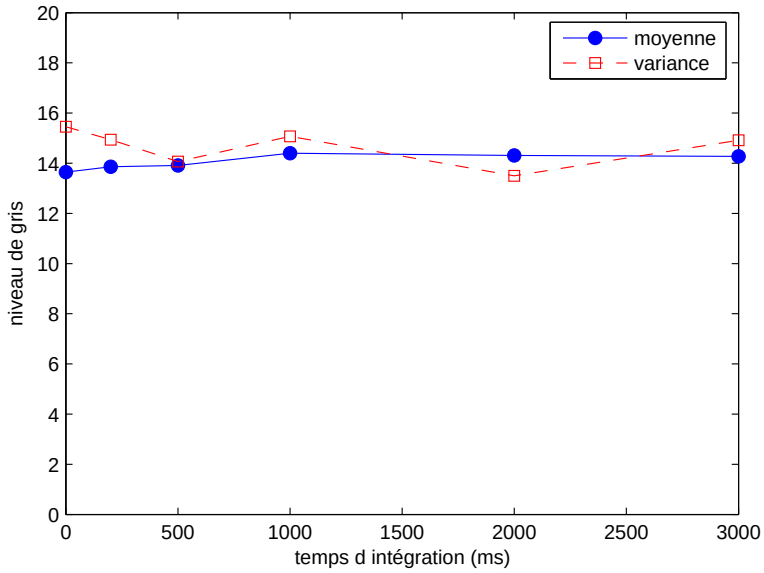


FIGURE A.6 – Moyenne et variance empiriques calculées pour le pixel (320,320) sur 500 réalisations pour différents temps d'intégration, dans l'obscurité et avec un offset de 14.

14. Nous concluons donc que si l'offset d'acquisition est retiré des images *a posteriori*, le signal mesuré par un pixel peut être modélisé par une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et de variance égale à 15 niveaux de gris.

Dans cette partie, nous nous sommes intéressés aux sources de bruit temporel dans l'obscurité. Le point à retenir est que le signal d'obscurité peut être modélisé par une variable aléatoire de Poisson, ou une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et cela dépend du mode d'acquisition choisi. Dès que le détecteur est illuminé, le bruit de photons contribue lui aussi au bruit temporel. Mais avant cela, commençons par nous intéresser au bruit spatial du détecteur.

A.3 Bruit spatial

Le bruit spatial correspond aux variations du signal entre pixels, et ceci même quand l'illumination est uniforme et que les variations temporelles sont lissées (grâce à une moyenne sur plusieurs acquisitions). Le bruit spatial se décompose en 2 contributions principales :

- le bruit d'offset appelé communément "offset noise", "Dark signal non-uniformity" (DSNU) ou "Fixed Pattern Noise" (FPN),
- et le bruit de gain appelé communément "gain noise" ou "photo-response non-uniformity" (PRNU)).

Pour chaque Pixel i le signal de sortie X_i (en niveau de gris) dépend linéairement du nombre de photons reçus $N_{photons}$:

$$X_i = \text{Offset}_i + \text{Gain}_i \left(QE \times q \times N_{photons} \right), \tag{A.2}$$

où QE est l'efficacité quantique du détecteur, q le nombre d'électrons par niveau de gris. Ni le gain ni l'offset ne sont exactement les mêmes pour chaque pixel, ce qui se traduit par de légères

fluctuations spatiales du signal de sortie. Autrement dit les matrices “Offset” et “Gain” ne sont pas uniformes.

A.3.1 Bruit de non-uniformité d'offset : “Fixed Pattern Noise”

Connaître le FPN, ou bruit d'offset revient à connaître la matrice $Offset_i$. Pour cela nous calculons une image moyenne sur 500 acquisitions (pour s'affranchir du bruit temporel de chaque pixel) dans l'obscurité pour un temps d'acquisition de 20 μs (c'est-à-dire pour $N_{photons} = 0$ dans Eq.A.2). Nous obtenons l'image sur la figure A.7 qui correspond finalement à $Offset_i$:

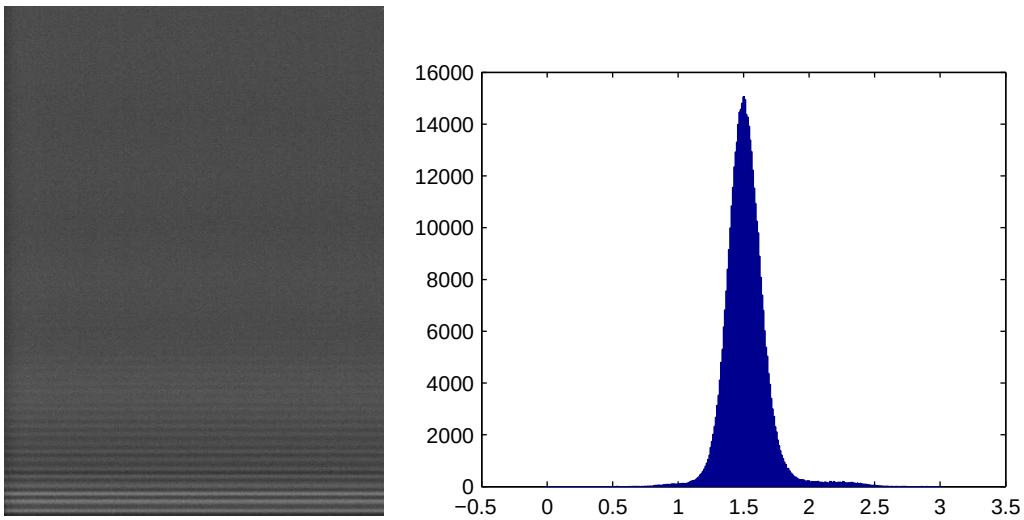


FIGURE A.7 – Image moyenne sur 500 acquisitions dans le noir, pour un temps d'intégration nul et un offset de 0 (a) et l'histogramme associé (b) (acquisition snap).

Cette image “moyenne” peut être soustraite aux acquisitions. Cette opération est appelée “offset shading” ou “dark shading”.

A.3.2 Bruit de non-uniformité de gain : “Photo Response Non Uniformity”

Connaître le PRNU, ou bruit de gain revient à connaître la matrice $Gain_i$. Le détecteur est illuminé de manière uniforme en le plaçant dans une sphère intégratrice. Nous calculons ensuite une image moyenne sur 500 acquisitions ce qui permet de s'affranchir du bruit de photons. L'image ainsi obtenue notée $X_{uni}(u, v)$, est représentée dans la figure A.8 et est proportionnelle à la matrice de gain. En effet :

$$Gain(u, v) = \frac{X_{uni}(u, v)}{\text{Mean}_{u,v}\left(X_{uni}\right)}, \tag{A.3}$$

où Mean (X_{uni}) est la valeur moyenne de l'image X_{uni}.

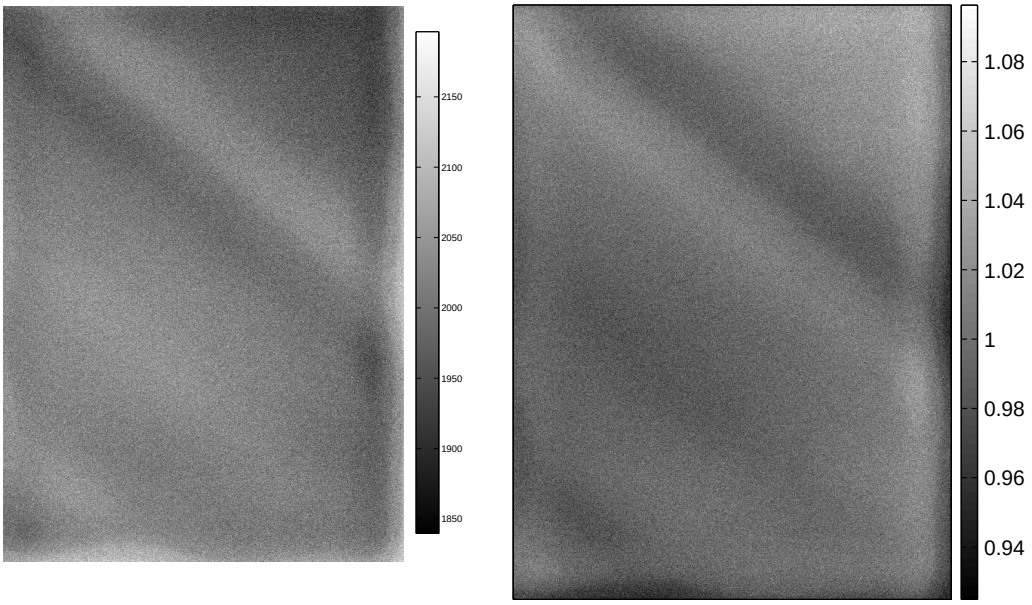


FIGURE A.8 – Image obtenue avec un éclairement uniforme (à gauche) et matrice de gain correspondante (à droite).

A.3.3 Correction des images

Pour corriger les images brutes nous choisissons d'appliquer une correction d'offset suivie d'une correction de gain. Nous obtenons ainsi une image corrigée $\widetilde{X}$ telle que :

$$\widetilde{X}_i = \frac{X_i - Offset_i}{Gain_i}.$$

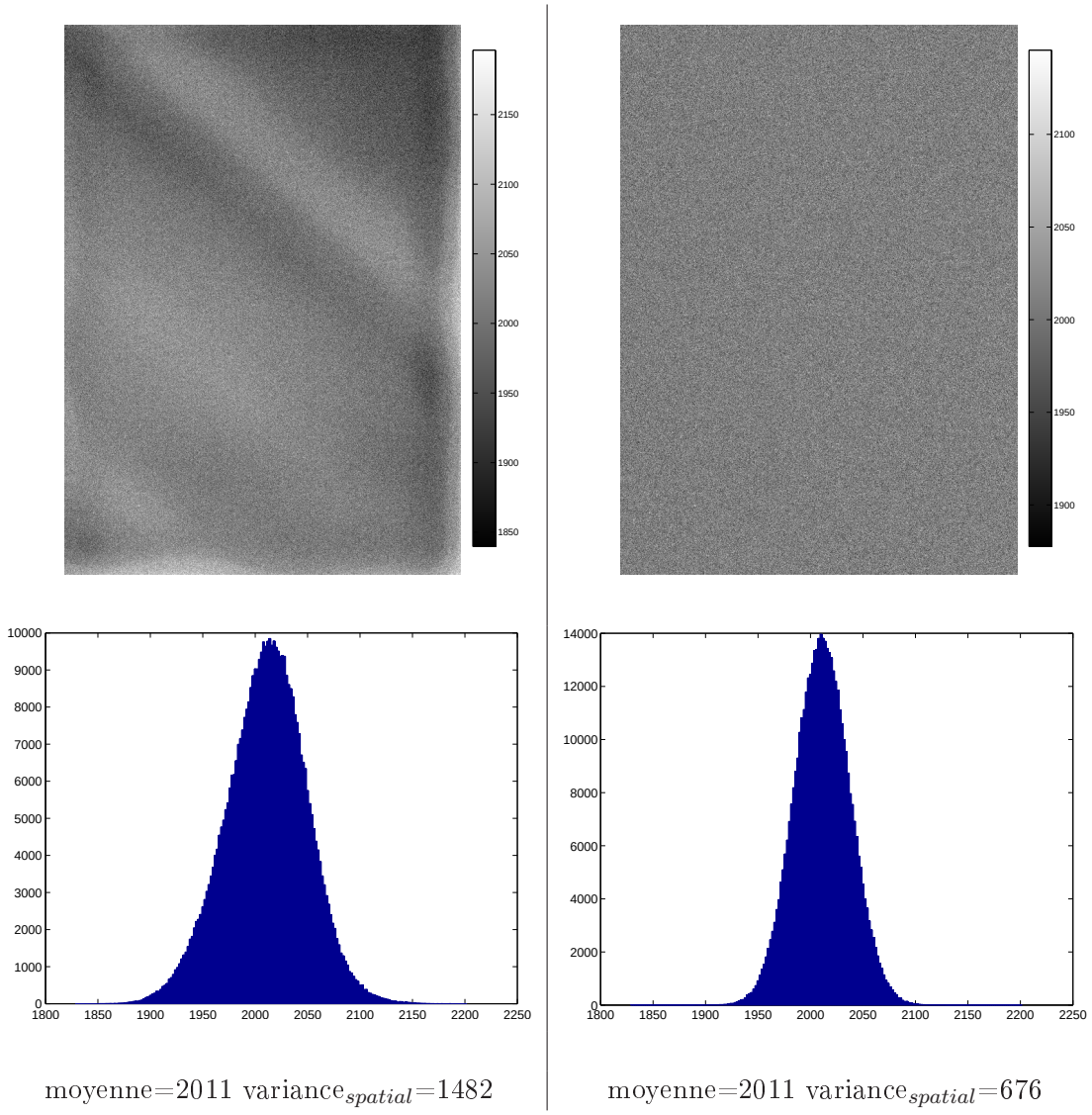
Sur la figure A.9, nous présentons une image correspondant à une scène uniforme, avant et après correction. Nous remarquons que la variance diminue significativement et que la moyenne de l'image reste la même.

A.4 Linéarité

Maintenant que la caméra est correctement calibrée, nous pouvons tester sa linéarité. Pour cela, nous fixons le temps d'intégration à 3 ms et l'offset à 0. La caméra est placée devant la sphère intégratrice. Une photodiode placée dans la sphère nous permet d'obtenir à une constante multiplicative près, l'éclairement du capteur CCD. Nous faisons l'acquisition d'une image pour différents éclairements.

A.5 Bruit spatial et temporel

Nous savons à présent que la caméra est linéaire et qu'elle est calibrée. Nous pouvons caractériser les bruits spatial et temporel en fonction de l'éclairement. Pour cela le temps d'intégration



moyenne=2011 variance$_{spatial}$=1482 | moyenne=2011 variance$_{spatial}$=676

FIGURE A.9 – Images et histogrammes correspondants obtenus avec une éclairement uniforme, avant correction(à gauche) et après correction (à droite).

est fixé à 3 ms et nous faisons varier l'intensité d'illumination dans la sphère intégratrice. Pour estimer la variance et la moyenne spatiale nous utilisons l'ensemble des pixels d'une acquisition, ce qui correspond à $782 \times 582 = 455124$ réalisations. En ce qui concerne l'estimation de la variance et de la moyenne temporelle, nous utilisons un pixel arbitrairement choisi de coordonnées (120,120) sur 100 acquisitions différentes. Ces estimations sont réalisées pour 5 éclairements différents. Nous obtenons les variances représentées dans la figure A.11. Nous voyons que la variance du bruit spatial comme temporel varient linéairement avec la moyenne du signal. Ceci est caractéristique du bruit de photon (appelé aussi bruit de grenaille ou "shot noise").

Notons x l'intensité d'un pixel. Supposons que le nombre d'électrons N_i créés correspondant à un pixel i, a une statistique poissonienne. Nous avons donc $Var(N_i) = \langle N_i \rangle$ où $\langle . \rangle$ représente la moyenne d'ensemble. Supposons également que le niveau de gris X_i est proportionnel au nombre

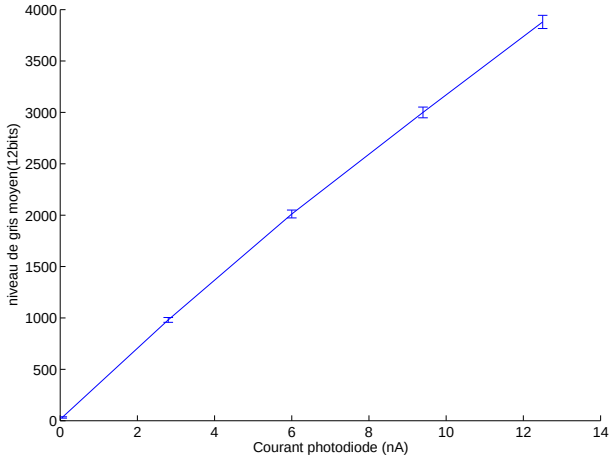


FIGURE A.10 – Linéarité du capteur. Moyenne de niveau de gris sur tous les pixels d'une image en fonction de l'éclairement (mesuré à l'aide d'une photodiode dont la réponse est linéaire).

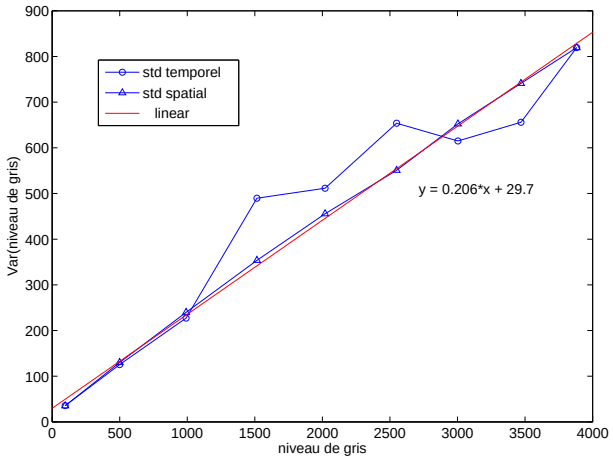


FIGURE A.11 – Variances du bruit spatial et temporel en fonction du niveau de gris moyen d'une image acquise avec une éclairement uniforme.

d'électrons générés ce qui est le cas étant donné que le capteur est linéaire :

$$X_i = \frac{1}{q} N_i + b_i, \tag{A.4}$$

où q le nombre d'électrons correspondant à un niveau de gris et b_i est un bruit additif représentant le bruit de détecteur par exemple. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} Var(X_i) &= 1/q^2 Var(N_i) + Var(b_i) \\ &= 1/q^2 \langle N_i \rangle + Var(b_i) \\ &= 1/q \langle X_i \rangle + Var(b_i) \end{aligned}$$

D'après la courbe de tendance que nous avons tracée, nous avons $1/q = 0,206$, soit $q = 4,85$ ce qui signifie qu'un niveau de gris correspond à 4.85 électrons. Cette valeur est tout à fait en accord avec celle fournie par la documentation technique de la caméra (voir tableau A.1)

Chapitre B

Densité de probabilité de l'estimateur $\widehat{P}_{mv}$

Comme nous l'avons vu dans l'équation 2.21 l'estimateur du MV peut se mettre sous la forme :

$$\widehat{P}_{mv} = \frac{RSB \cdot P + b_1}{RSB + b_2}. \tag{B.1}$$

Pour calculer la densité de probabilité commençons par simplifier cette expression en la mettant sous la forme :

$$\widehat{P}_{mv} = \frac{U}{V} \tag{B.2}$$

où :

$$U = RSB \times P + b_1 \tag{B.3}$$
$$V = RSB + b_2. \tag{B.4}$$

Les variables U et V sont deux variables aléatoires gaussiennes de moyennes respectives $RSB \times P$ et RSB et de variances 1. Nous définissons deux nouvelles variables aléatoires :

$$\begin{aligned} \rho &= U/V \\ \eta &= V. \end{aligned}$$

Notre objectif est donc de déterminer la DDP de la variable aléatoire ρ. Pour cela, commençons par définir la densité de probabilité conjointe du couple de variables (η, ρ).

B.1 DDP de (η, ρ)

La densité de probabilité conjointe de (η, ρ) peut s'écrire :

$$\mathcal{P}_{\eta,\rho}(\eta, \rho) = |\det[J]|\, \mathcal{P}_{U,V}(U, V),$$

où J est le Jacobien défini comme :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial \eta} & \frac{\partial U}{\partial \rho} \\ \frac{\partial V}{\partial \eta} & \frac{\partial V}{\partial \rho} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho & \eta \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

dont la valeur absolue du déterminant vaut $|\det[J]| = |\eta|$. Ainsi nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\eta,\rho}(\eta,\rho) &= |\eta|\ \mathcal{P}_{U,V}\left(\eta\rho,\eta\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\ |\eta|\ \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\eta\rho - RSB\times P\right]^2 - \frac{1}{2}\left[\eta - RSB\right]^2\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi}\ |\eta|\ \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\eta^2(1+\rho^2) - 2\eta RSB(1+\rho P) + RSB^2(1+P^2)\right]\right\}.
\end{aligned}$$

B.2 DDP de ρ

La DDP de ρ est simplement la DDP marginale de la DDP conjointe exprimée ci-dessus :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\rho}(\rho) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}_{\eta,\rho}(\eta,\rho)d\eta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\eta|\ \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\eta^2(1+\rho^2) - 2\eta RSB(1+\rho P) + RSB^2(1+P^2)\right]\right\} d\eta.
\end{aligned}$$

Or en utilisant le fait que :

$$\eta^2(1+\rho^2) - 2\eta RSB(1+\rho P) = (1+\rho^2)\left(\eta - \frac{RSB(1+\rho P)}{1+\rho^2}\right)^2 - \frac{RSB^2(1+\rho P)^2}{(1+\rho^2)^2},$$

nous montrons que la DDP de ρ se met sous la forme :

$$\mathcal{P}_{\rho}(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\eta| \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[(1+\rho^2)\left(\eta - K\right)^2 - \frac{RSB^2(1+\rho P)^2}{1+\rho^2} + RSB^2(1+P^2)\right]\right\} d\eta,$$

avec

$$K = \frac{RSB(1+\rho P)}{1+\rho^2}.$$

Cette expression de la DDP peut encore être simplifiée. Pour cela nous remarquons que :

$$-\frac{RSB^2(1+\rho P)^2}{(1+\rho^2)} + RSB^2(1+P^2) = RSB^2\ \frac{(\rho - P)^2}{1+\rho^2},$$

et ainsi

$$\mathcal{P}_{\rho}(\rho) = \frac{1}{2\pi}\ \exp\left\{-\frac{RSB^2\ (\rho-P)^2}{2(1+\rho^2)}\right\}\ \int_{-\infty}^{+\infty} |\eta|\ \exp\left\{-\frac{(1+\rho^2)}{2}\left(\eta - K\right)^2\right\} d\eta. \quad \text{(B.5)}$$

Dans cette expression de la DDP, l'intégrale peut être exprimée de la manière suivante en faisant le changement de variable $u = -\eta$:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} |\eta|\ \exp\left\{-\frac{(1+\rho^2)}{2}\left(\eta - K\right)^2\right\} d\eta \\
&= \int_{0}^{+\infty} \eta\ \exp\left\{-\frac{\left(\eta - K\right)^2}{2\alpha^2}\right\} d\eta + \int_{0}^{+\infty} u\ \exp\left\{-\frac{\left(u + K\right)^2}{2\alpha^2}\right\} du \\
&= \int_{-K}^{+\infty} (v+K)\ \exp\left\{-\frac{v^2}{2\alpha^2}\right\} dv + \int_{+K}^{+\infty} (v-K)\ \exp\left\{-\frac{v^2}{2\alpha^2}\right\} dv, \qquad \text{(B.6)}
\end{aligned}$$

avec

$$\alpha \;=\; \frac{1}{1+\rho^2}.$$

Nous pouvons calculer la première intégrale de l'expression (B.6) :

$$\begin{aligned}\int_{-K}^{+\infty}(v+K)\,\exp\left\{-\frac{v^2}{2\alpha^2}\right\}dv &= \int_{-K}^{+\infty} v\,\exp\left\{-\frac{v^2}{2\alpha^2}\right\}dv + K\int_{-K}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{v^2}{2\alpha^2}\right\}dv \\ &= -\alpha^2\left[\exp\left(-\frac{v^2}{2\alpha^2}\right)\right]_{-K}^{+\infty} + K\sqrt{2}\alpha\int_{-K/\sqrt{2}\alpha}^{+\infty}\exp\left\{-w^2\right\}dw \\ &= \alpha^2\exp\left(-\frac{K^2}{2\alpha^2}\right) + K\sqrt{2}\alpha\;\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{1}{2}-\mathrm{erf}\left(\frac{K}{\sqrt{2}\alpha}\right)\right), \quad \text{(B.7)}\end{aligned}$$

où

$$\mathrm{erf}(x) \;=\; \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \exp\left(-u^2\right)du$$

est la fonction d'erreur classique. En utilisant l'expression (B.7) dans l'équation (B.6) en en remplaçant K par $-K$ nous obtenons :

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}|\eta|\;\exp\left\{-\frac{(1+\rho^2)}{2}\left(\eta-K\right)^2\right\}d\eta \\ &= 2\alpha^2\;\exp\left(-\frac{K^2}{2\alpha^2}\right) + \sqrt{2\pi}K\alpha\left[\frac{1}{2}\left(\mathrm{erf}\left(\frac{K}{\sqrt{2}\alpha}\right)-\mathrm{erf}\left(-\frac{K}{\sqrt{2}\alpha}\right)\right)\right]. \quad \text{(B.8)}\end{aligned}$$

Enfin en injectant l'équation (B.8) dans l'expression de la DDP (B.5) et en remplaçant K par α nous obtenons :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_\rho(\rho) \;=\;& \frac{1}{\pi(1+\rho^2)}\;\exp\left(-\frac{RSB^2\left(1+P^2\right)}{2}\right) \quad \text{(B.9)} \\ &+\frac{RSB}{\sqrt{2\pi}}\frac{1+\rho P}{(1+\rho^2)^{3/2}}\;\mathrm{F}\left(RSB\frac{(1+\rho P)}{\sqrt{1+\rho^2}}\right)\;\exp\left(-\frac{RSB^2(\rho-P)^2}{2(1+\rho^2)}\right),\end{aligned}$$

avec

$$\mathrm{F}(x) = \left[\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)-\mathrm{erf}\left(-\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]/2.$$

Étant donné que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi(1+\rho^2)}d\rho \;=\; 1,$$

puisqu'il s'agit de la loi de Cauchy, nous pouvons écrire la DDP de ρ (voir Eq.(B.8)) sous la forme :

$$\mathcal{P}_\rho(\rho) \;=\; \alpha\mathcal{P}_1(\rho) + (1-\alpha)\mathcal{P}_2(\rho), \quad \text{(B.10)}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\alpha &= \exp\left(-RSB^2\left(1+P^2\right)/2\right), \\
\mathcal{P}_1(\rho) &= \frac{1}{\pi(1+\rho^2)}, \\
\mathcal{P}_2(\rho) &= \frac{RSB}{\sqrt{2\pi}(1-\alpha)}\ \frac{1+\rho P}{(1+\rho^2)^{3/2}}\ \mathrm{F}\left(RSB\frac{(1+\rho P)}{\sqrt{1+\rho^2}}\right)\ \exp\left(-\frac{RSB^2(\rho-P)^2}{2(1+\rho^2)}\right).
\end{aligned}$$

Ce sont ces expressions qui vont nous servir à expliquer le comportement de l'estimateur de l'OSC.

Chapitre C

Calcul de la vraisemblance généralisée avec une illumination non-uniforme inconnue

Nous avons montré que la vraisemblance, d'un échantillon χ perturbé par un bruit de détecteur additif gaussien et par une illumination non-uniforme, était de la forme :

$$\ell(\chi|\mathbf{F},I,P) = -2N\ln(\sqrt{2\pi}\sigma) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}\left(X_i - F_i\frac{I(1+P)}{2}\right)^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i - F_i\frac{I(1-P)}{2}\right)^2$$

L'objectif de cette partie est de déterminer la vraisemblance généralisée totale de l'échantillon que nous définissons par :

$$\ell(\chi) = \arg\max_{I,P,\mathbf{F}}\left[\ell(\chi|\mathbf{F},I,P)\right]. \tag{C.1}$$

Dans un premier temps, nous détaillerons comment nous estimons $\mathbf{F}$ pour le réinjecter dans la vraisemblance et obtenir une vraisemblance généralisée partielle :

$$\ell(\chi|I,P) = \arg\max_{\mathbf{F}}\left[\ell(\chi|\mathbf{F},I,P)\right]. \tag{C.2}$$

C.1 Elimination de F : vraisemblance généralisée partielle

Commençons par estimer F_i au sens du MV : pour cela, nous annulons les dérivées partielles de $\ell(\chi|\mathbf{F},m_X,m_Y)$ par rapport aux F_i. Nous obtenons après un calcul simple :

$$\widehat{F_i} = \frac{(1+P)X_i + (1-P)Y_i}{2I(1+P^2)}. \tag{C.3}$$

En injectant ces estimées dans l'expression de la vraisemblance nous obtenons :

$$\ell(\chi|I,P) = -2N\ln(\sqrt{2\pi}\sigma) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}\frac{\left((1-P)X_i - (1+P)Y_i\right)^2}{1+P^2}, \tag{C.4}$$

que nous pouvons exprimer sous la forme suivante :

$$\ell(\chi|P) = -2N\ln(\sqrt{2\pi}\sigma) - \frac{1}{2\sigma^2}\frac{T_1P^2 - WP + T_2}{1+P^2}, \tag{C.5}$$

avec :

$$T_1 = \sum_{i=1}^{N}(X_i + Y_i)^2/2 \tag{C.6}$$

$$T_2 = \sum_{i=1}^{N}(X_i - Y_i)^2/2 \tag{C.7}$$

$$D = \sum_{i=1}^{N} X_i^2 - Y_i^2 \tag{C.8}$$

Dans l'équation (C.5), nous voyons que la log-vraisemblance généralisée partielle ne dépend que de P. En particulier, elle ne dépend pas de I : cela signifie que le paramètre I ne peut pas être estimé à partir de l'observation de l'échantillon χ.

C.2 Estimation de P au sens du MVG

Pour obtenir la vraisemblance généralisée totale, il nous faut estimer P au sens du maximum de vraisemblance. La dérivée partielle de $\ell(\chi|P)$ par rapport à P vaut :

$$\frac{\partial \ell}{\partial P} = -\frac{1}{2\sigma^2}\frac{DP^2 + 2WP - D}{(1+P^2)^2}, \tag{C.9}$$

où $W = T_1 - T_2 = 2\ \sum_{i=1}^{N} X_iY_i$. Annuler cette dérivée revient à résoudre l'équation du second degré suivante :

$$DP^2 + 2WP - D = 0. \tag{C.10}$$

qui admet deux solutions réelles :

$$P = \frac{-W \pm \sqrt{\Delta}}{D}, \tag{C.11}$$

où

$$\Delta = D^2 + W^2. \tag{C.12}$$

La solution correcte est celle qui maximise la log-vraisemblance. Pour cela calculons sa dérivée seconde de $\ell(\chi|P)$ par rapport à P :

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial P^2} = -\frac{1}{2\sigma^2}\frac{(2PD + 2W)(1+P^2)^2 - (DP^2 + 2WP - D)(4P^3 + 4P)}{(1+P^2)^4}. \tag{C.13}$$

Utilisons le fait que, pour la valeur $\widehat{P}$, la dérivée première est nulle. En injectant l'équation (C.10) dans l'expression de la dérivée seconde nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial P^2}(\widehat{P}) = -\frac{1}{\sigma^2}\frac{PD + W}{(1+P^2)^2}. \tag{C.14}$$

Pour obtenir un maximum, la dérivée seconde doit être négative ce qui implique $P \geq D/W$. Ainsi la solution qui correspond au maximum de la vraisemblance généralisée partielle est :

$$\widehat{P}_{mvg,Finconnu} = \frac{W + \sqrt{W^2 + D^2}}{D}.$$

que l'on peut écrire sour la forme :

$$\boxed{\widehat{P}_{mvg,Finconnu} = -R + \text{sgn}\left(\sum_1^N X_i^2 - Y_i^2\right)\sqrt{1+R^2}} \tag{C.15}$$

où

$$R = W/D = 2\left(\sum_1^N X_i Y_i\right) / \left(\sum_1^N X_i^2 - Y_i^2\right)$$

et $\text{sgn}(x) = 1$ si $x > 0$ et -1 sinon.

C.3 Paramètres dont R dépend

Comme nous le voyons dans l'équation C.15, l'estimateur du maximum de vraisemblance généralisée partielle dépend uniquement de R et de $\text{sgn}\left(\sum_{i=1}^N \left(X_i^2 - Y_i^2\right)\right)$ qui se trouve être le dénominateur de R. Dans cette partie nous cherchons à déterminer le paramètre dont R dépend.

Commençons par analyser le numérateur de R. En utilisant le modèle de perturbations donné dans l'équation 2.53, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N X_i Y_i &= \sum_{i=1}^N F_i^2 m_X m_Y + F_i m_X n_i^y + F_i m_Y n_i^x + n_i^x n_i^x \qquad \text{(C.16)}\\
&= \left(\sum_{i=1}^N F_i^2\right) m_X m_Y + \left(m_X \sum_{i=1}^N F_i n_i^y + m_Y \sum_{i=1}^N F_i n_i^x\right) + \sum_{i=1}^N n_i^x n_i^y \\
&= \left(\sum_{i=1}^N F_i^2\right) m_X m_Y + \left(\sqrt{\sum_{i=1}^N F_i^2}\right) \sigma \left(m_X b_y + m_Y b_x\right) + \sqrt{N}\sigma^2 b_3,
\end{aligned}$$

où b_x et b_y sont des variables aléatoires gaussiennes de moyennes nulles et de variances unité, b_3 est une variable aléatoire de moyenne nulle et de variance unité. Nous avons utilisé le fait que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors $Var(XY) = Var(X)Var(Y)$.

Analysons maintenant le numérateur de R. Après quelques calculs nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N X_i^2 - Y_i^2 &= \sum_{i=1}^N F_i^2 m_X^2 + 2F_i m_X n_i^x + n_i^{x2} - F_i^2 m_Y^2 - 2F_i m_Y n_i^y - n_i^{y2} \qquad \text{(C.17)}\\
&= \sum_{i=1}^N F_i^2 (m_X^2 - m_Y^2) + 2\left(m_X \sum_{i=1}^N F_i n_i^x - m_Y \sum_{i=1}^N F_i n_i^y\right) + \sum_{i=1}^N n_i^{x2} - n_i^{y2} \\
&= \sum_{i=1}^N F_i^2 \left(m_X^2 - m_Y^2\right) + 2\left(\sqrt{\sum_{i=1}^N F_i^2}\right) \sigma \left(m_X b_x - m_Y b_y\right) + 2\sqrt{N}\sigma^2 b_4.
\end{aligned}$$

où b_4 est une variable aléatoire de moyenne nulle et de variance unité. Nous avons utilisé le fait que si X est une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et de variance σ^2, alors $\langle X^2 \rangle = \sigma^2$ et $Var(X^2) = 2\sigma^4$.

Ainsi en utilisant les équations C.17, C.18 et la paramétrisation (I, P), nous pouvons écrire R sous la forme :

$$R = 2\frac{\left(\sum_{i=1}^{N} F_i^2\right)\frac{I^2(1-P^2)}{4} + \frac{\sigma I}{2}\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{N} F_i^2}\right)\sqrt{2}\,(b_s - Pb_d) + \sqrt{N}\sigma^2 b_3}{\left(\sum_{i=1}^{N} F_i^2\right) I^2 P + \sigma I\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{N} F_i^2}\right)\sqrt{2}\,(b_s + Pb_d) + 2\sqrt{N}\sigma^2 b_4} \quad \text{(C.18)}$$

où $b_s = (b_x + b_y)/\sqrt{2}$ et $b_d = (b_x - b_d)/\sqrt{2}$ sont deux variables aléatoires gaussiennes de moyenne nulle et de variance unité. Enfin en utilisant la définition RSB_F donnée dans l'équation 2.60 nous obtenons :

$$R = \frac{(RSB_F)^2\left(\frac{1-P^2}{2}\right) + RSB_F(b_s - Pb_d) + \sqrt{N}b_3}{(RSB_F)^2 P + RSB_F(b_s + Pb_d) + \sqrt{N}b_4} \quad \text{(C.19)}$$

$$\text{et} \quad \mathrm{sgn}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i^2 - Y_i^2\right) = \mathrm{sgn}\left(\sigma^2\left[(RSB_F)^2 P + RSB_F(b_s + Pb_d) + \sqrt{N}b_4\right]\right) \quad \text{(C.20)}$$

Nous voyons donc que ces deux quantités ne dépendent que des paramètres RSB_F, P et N. Il en va de même pour l'estimateur $P_{mvg,Finconnu}$.

C.4 Vraisemblance généralisée totale

Pour obtenir la vraisemblance généralisée totale, l'estimée de P au sens du maximum de vraisemblance généralisé est injectée dans l'expression de $\ell(\chi|P)$ (voir Eq.(C.5)) :

$$\begin{aligned}
\ell(\chi) &= -2N\ln(\sqrt{2\pi}\sigma) - \frac{1}{2\sigma^2}\left(T_1 + \frac{-T_1 - DP + T_2}{1+P^2}\right) \\
&= -2N\ln(\sqrt{2\pi}\sigma) - \frac{1}{4\sigma^2}\left(2T_1 + \frac{\sqrt{\Delta}}{1 + \frac{W^2}{D^2} + \frac{-W\sqrt{\Delta}}{D^2}}\right),
\end{aligned}$$

où nous avons tenu compte du fait que $W = T_1 - T_2$. Nous remarquons que :

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{\Delta}}{1 + \frac{W^2}{D^2} + \frac{-W\sqrt{\Delta}}{D^2}} &= \frac{D^2\sqrt{\Delta}}{D^2 + W^2 - W\sqrt{\Delta}} \\
&= \frac{(\Delta - W^2)\sqrt{\Delta}}{\Delta - W\sqrt{\Delta}} \\
&= \sqrt{\Delta} + W.
\end{aligned}$$

Par conséquence nous obtenons :

$$\ell(\chi) = -2N\ln(\sqrt{2\pi}\sigma) - \frac{1}{4\sigma^2}\left(T_2 + T_1 - \sqrt{(D^2 + T_2 - T_1)^2}\right).$$

En remplaçant T_2, T_1, Δ et W par leurs valeurs pouvons mettre la vraisemblance sous la forme suivante :

$$\ell(\chi) \quad = \quad -2N\ln(\sqrt{2\pi}\sigma) - \frac{1}{2\sigma^2}\left\{\sum_{i=1}^{N}(X_i^2+Y_i^2) - \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{N}(X_i^2-Y_i^2)\right)^2 + 4\left(\sum_{i=1}^{N}X_iY_i\right)^2}\right\}.$$

Cela est l'expression de la vraisemblance généralisée totale : elle dépend uniquement de l'échantillon statistique.

Chapitre D

Calcul de $\mathcal{R}^0_{Fconnu}$ et $\mathcal{R}^1_{Fconnu}$

Pour caractériser les performances du détecteur $\mathcal{R}_{Fconnu}$ nous cherchons à connaître les paramètres dont il dépend, dans les hypothèses γ_0 et γ_1. Notons ces deux variables aléatoires $\mathcal{R}^0_{Fconnu}$ et $\mathcal{R}^1_{Fconnu}$. Commençons par rappeler l'expression du détecteur$\mathcal{R}_{Fconnu}$:

$$\mathcal{R}_{Fconnu} = \frac{1}{2\sigma^2}\frac{\Phi_a\Phi_b}{\Phi_a+\Phi_b}\left[\left(\widehat{m}^a_X-\widehat{m}^b_X\right)^2+\left(\widehat{m}^a_Y-\widehat{m}^b_Y\right)^2\right], \tag{D.1}$$

où :

$$\Phi_v=\sum_{i\in\Omega_v}F_i^2 \quad \text{et} \quad \widehat{m}^v_U=\frac{1}{\Phi_v}\sum_{i\in\Omega_v}F_iU_i,$$

Hypothèse γ_0 Dans l'hypothèse γ_0, nous avons $m^a_U=m^b_U=m^0_U$ où $U=X,Y$. Par conséquent, les estimées de m_X et m_Y données dans l'équation D.1 s'écrivent,

$$\begin{aligned}\widehat{m}^a_U &= m^0_U+n^a_U/\Phi_a,\\ \widehat{m}^b_U &= m^0_U+n^b_U/\Phi_b,\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}n^a_U&=\sum_{i\in\Omega_a}F_i[n_U]_i,\\ n^b_U&=\sum_{i\in\Omega_b}F_i[n_U]_i.\end{aligned}$$

avec $U=\{X,Y\}$. Ce sont des variables aléatoires gaussiennes de moyennes nulles et de variances respectives $\sigma^2\Phi_a$ et $\sigma^2\Phi_b$. En injectant ces équations dans l'expression du GLRT D.1, la variable aléatoire $\mathcal{R}^0_{Fconnu}$ a la forme suivante :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^0_{Fconnu} &= \frac{\left(\Phi_bn^X_a-\Phi_an^X_b\right)^2+\left(\Phi_bn^Y_a-\Phi_an^Y_b\right)^2}{2\sigma^2\Phi_a\Phi_b(\Phi_a+\Phi_b)}\\ &= \frac{b^2_X}{2}+\frac{b^2_Y}{2},\end{aligned}$$

où

$$b_U = \frac{\Phi_b n_a^U - \Phi_a n_b^U}{\sigma \sqrt{\Phi_a \Phi_b (\Phi_a + \Phi_b)}},$$

avec $U = X, Y$. Ce sont deux variables aléatoires gaussiennes indépendantes, de moyennes nulles et de variances unité. Nous en déduisons que $2\mathcal{R}^0_{Fconnu}$ est une variable aléatoire suivant une loi du χ^2 avec deux degrés de liberté [83]. Elle ne dépend d'aucun paramètre du problème.

Hypothèse γ_1 Dans l'hypothèse γ_1, nous avons $m_X^a \neq m_X^b$ et/ou $m_Y^a \neq m_Y^b$ et

$$\begin{aligned} \widehat{m}_U^a &= m_a + n_U^a/\Phi_a, \\ \widehat{m}_U^b &= m_b + n_U^b/\Phi_b, \end{aligned}$$

pour $U = X, Y$, où n_X^a and n_X^b sont les variables aléatoires définies ci-dessus. Commençons par analyser le premier terme de l'expression du GLRT donnée dans l'équation D.1. Nous remarquons que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sigma^2} \frac{\Phi_a \Phi_b}{\Phi_a + \Phi_b} \left(\widehat{m}_X^a - \widehat{m}_X^b \right)^2 &= \frac{1}{2\sigma^2} \frac{\left(\Phi_b \Phi_a m_a - \Phi_b \Phi_a m_b + \Phi_b n_U^a - \Phi_a n_U^b \right)^2}{\Phi_a \Phi_b (\Phi_a + \Phi_b)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\Phi_a \Phi_b}{(\Phi_a + \Phi_b)}} \frac{(m_a - m_b)}{\sigma} + b_U \right)^2, \end{aligned}$$

avec $U = X, Y$, et b_U est une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et de variance unité. Nous en déduisons l'expression du GLRT :

$$\mathcal{R}^1_{Fconnu} = \frac{1}{2} \left(\mathcal{C}_X + b_X \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\mathcal{C}_Y + b_Y \right)^2,$$

où

$$\mathcal{C}_U = \sqrt{\frac{\Phi_a \Phi_b}{(\Phi_a + \Phi_b)}} \frac{|m_U^a - m_U^b|}{\sigma},$$

pour $U = X, Y$. Nous voyons que $2\mathcal{R}^1_{Fconnu}$ est une variable aléatoire suivant une loi du χ^2 non centrée avec deux degrés de liberté et un paramètre de non-centralité égal à :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{Fconnu} &= \mathcal{C}_X^2 + \mathcal{C}_Y^2 \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \frac{\Phi_a \Phi_b}{(\Phi_a + \Phi_b)} \times \left[\left(m_X^a - m_X^b \right)^2 + \left(m_Y^a - m_Y^b \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

En utilisant la paramétrisation (I, P) nous obtenons :

$$\mathcal{C}_{Fconnu} = \frac{\Phi_a \Phi_b}{(\Phi_a + \Phi_b)} \times \left[(\mathrm{RSB}_a - \mathrm{RSB}_b)^2 + (\mathrm{RSB}_a P_a - \mathrm{RSB}_b P_b)^2 \right],$$

avec $\mathrm{RSB}_a = I_a/(\sqrt{2}\sigma)$ et $\mathrm{RSB}_b = I_b/(\sqrt{2}\sigma)$.

Liste de publications et communications

Publications dans les revues à comité de lecture

A. Bénière, F. Goudail, M. Alouini, and D. Dolfi. *Precision of degree of polarization estimation in the presence of additive gaussian detector noise.* Opt. Commun., 278(2), pp. 264–269 (2007).

A. Bénière, F. Goudail, M. Alouini, and D. Dolfi. *Estimation precision of degree of polarization in the presence of signal-dependent and additive poisson noises.* J. Europ. Opt. Soc. Rap. Public., p. 3 :08002 (2008).

A. Bénière, F. Goudail, M. Alouini, and D. Dolfi. *Degree of polarization estimation in the presence of nonuniform illumination and additive gaussian noise.* J. Opt. Soc. Am. A, 25(4), pp. 919–929 (2008).

A. Bénière, F. Goudail, M. Alouini, and D. Dolfi. *Minimization of the influence of passive-light contribution in active imaging of the degree of polarization. Opt. Lett.*, 33(20), pp. 2335–2337 (2008).

A. Bénière, F. Goudail, M. Alouini, and D. Dolfi. *Target detection in active polarization images perturbed with additive noise and illumination non uniformity.* J. Opt. Soc. Am. A, 26(7), pp. 1678–1686 (2009).

M. Alouini, F. Goudail, A. Grisard, J. Bourderionnet, D. Dolfi, A. Bénière, I. Baarstad, T. Løke, P. Kaspersen, X. Normandin, and G. Berginc. *Near-infrared active polarimetric and multispectral laboratory demonstrator for target detection.* Appl. Opt., 48(8), pp. 1610–1618 (2009).

F. Goudail and A. Bénière. *Optimization of the contrast in polarimetric scalar images.* Opt. Lett., 34(9), pp. 1471–1473 (2009).

A. Bénière, M. Alouini, F. Goudail and D. Dolfi. *Design and experimental validation of a snapshot polarization contrast imager.* Appl. Opt., 48(30), pp.5764-5773 (2009).

T. Novikova, A. Bénière, F. Goudail and A. De Martino. *Sources of possible artefacts in the contrast evaluation for the backscattering polarimetric images of different targets in turbid medium.* Optics Express, 17(26), pp.23851-23860 (2009).

F. Goudail and A. Bénière. *Estimation precision of the degree of linear polarization and of the angle of polarization in the presence of different sources of noise.* Appl. Opt., 49(4), pp.683-693 (2010).

Conférences

A. Bénière, F. Goudail, M. Alouini, and D. Dolfi. *Estimation of the degree of polarization in the presence of additive gaussian noise.* In *3rd EOS Topical Meeting on Advanced Imaging Techniques*, Lille, France, 2007 - oral

A. Bénière, F. Goudail, M. Alouini, and D. Dolfi. *Estimation du degré de polarisation en présence de bruit additif gaussien et d'une illumination non-uniforme.* In *Journées Imagerie Optique non Conventionelle - GDR ISIS*, Paris, 2008 - oral

A. Bénière, F. Goudail, M. Alouini, and D. Dolfi. *Estimation et détection dans les images de degré de polarisation en présence d'illumination non-uniforme.* In *Journées Imagerie Optique non Conventionelle - GDR ISIS*, Paris, 2009 - oral

A. Bénière, F. Goudail, M. Alouini, and D. Dolfi. *Estimation and detection in degree of polarization images perturbed by detector noise and non uniform illumination.* In *Automatic Target Recognition XIX*, volume 7335. Proc. SPIE, 2009 - oral

A. Bénière, M. Alouini, F. Goudail, A. Grisard, J. Bourderionnet, D. Dolfi, I. Baarstad, T. Loke, P. Kaspersen, X. Normandin, and G. Berginc. *Snapshot active polarimetric and multispectral laboratory demonstrator.* In *Laser Radar Technology and Applications XIV*, volume 7323. Proc. SPIE, 2009 - oral

A. Bénière, F. Goudail, M. Alouini, and D. Dolfi. *Minimisation de l'influence de la contribution passive dans les imageurs actifs de degré de polarisation. Horizons de l'Optique*, Lille, France, 2009 - poster

F. Goudail, A. Bénière, M. Alouini, and D. Dolfi. *Optimizing contrast in active polarimetric images.* In *4th EOS Topical Meeting on Advanced Imaging Techniques*, Jena, Germany, 2009 - oral

A. Bénière, F. Goudail, M. Alouini, and D. Dolfi. *Snapshot active imager for target detection. Workshop on Information Optics 2009*, Paris, France, 2009 - oral

Brevets

M. Alouini, A. Bénière, F. Goudail, D. Dolfi and G. Berginc. *Procédé d'identification d'une scène à partir d'images polarisées multi-longueurs d'onde.* déposé en mai 2009, n° national 09 02227,

Bibliographie

[1] C. Brosseau, *Fundamentals of polarized light - A statistical approach*, John Wiley, New York (1998).

[2] F. Bréhat et B. Wyncke, *Représentation des états de polarisation des ondes lumineuses*, Publibook, Paris (2003).

[3] S. Huard, *Polarization of light*, Chap. Polarized optical wave. Wiley, Masson, Paris (1997).

[4] H. G. Tompkins et E. A. Irene, *Handbook of ellipsometry*, William Andrew (2005).

[5] S. Y. Lu et R. A. Chipman, *Interpretation of Mueller matrices based on polar decomposition*, J. Opt. Soc. Am. A, 13 (5), pp. 1106–1113 (1996).

[6] F. A. Sadjadi, *Passive three-dimensional imaging using polarimetric diversity*, Opt. Lett., 32 (3), pp. 229–231 (2007).

[7] P. C. Y. Chang, J. C. Flitton, K. I. Hopcraft, E. Jakeman, D. L. Jordan et J. G. Walker, *Improving Visibility Depth in Passive Underwater Imaging by Use of Polarization*, Appl. Opt., 42 (15), pp. 2794–2803 (2003).

[8] B. Laude-Boulesteix, A. De Martino, B. Drévillon et L. Schwartz, *Mueller Polarimetric Imaging System with Liquid Crystals*, Appl. Opt., 43 (14), pp. 2824–2832 (2004).

[9] K. M. Twietmeyer, R. A. Chipman, A. E. Elsner, Y. Zhao et D. VanNasdale, *Mueller matrix retinal imager with optimized polarization conditions*, Opt. Express, 16 (26), pp. 21339–21354 (2008).

[10] S. Jiao et L. V. Wang, *Two-dimensional depth-resolved Mueller matrix of biological tissue measured with double-beam polarization-sensitive optical coherence tomography*, Optics Letters, 27 (2), pp. 101–103 (2002).

[11] G. W. Kattawar et D. J. Gray, *Mueller Matrix Imaging of Targets in Turbid Media : Effect of the Volume Scattering Function*, Appl. Opt., 42 (36), pp. 7225–7230 (2003).

[12] S. Manhas, M. K. Swami, P. Buddhiwant, N. Ghosh, P. K. Gupta et J. Singh, *Mueller matrix approach for determination of optical rotation in chiral turbid media in backscattering geometry*, Opt. Express, 14 (1), pp. 190–202 (2006).

[13] F. Goudail, *Optimization of the contrast in active Stokes images*, Opt. Lett., 34, pp. 121–123 (2009).

[14] D. S. Sabatke, M. R. Descour, E. L. Dereniak, W. C. Sweatt, S. A. Kemme et G. S. Phipps, *Optimization of retardance for a complete Stokes polarimeter*, Opt. Lett., 25 (11), pp. 802–804 (June 2000).

[15] J. S. Tyo, *Design of optimal polarimeters : maximization of the signal-to-noise ratio and minimization of systematic error*, Appl. Opt., 41 (4), pp. 619–630 (February 2002).

[16] P. J. Wu et J. T. J. Walsh, *Stokes polarimetry imaging of rat tail tissue in a turbid medium : degree of linear polarization image maps using incident linearly polarized light*, Journal of Biomedical Optics, 11 (1), p. 014031 (2006).

[17] J. Xuan, U. Klimach, H. Zhao, Q. Chen, Y. Zou et Y. Wang, *Improved diagnostics using polarization imaging and artificial neural networks*, Journal of Biomedical Imaging, 2007 (2), pp. 1–9 (2007).

[18] F. Goudail, P. Terrier, Y. Takakura, L. Bigué, F. Galland et V. Devlaminck, *Target detection with a liquid crystal-based passive Stokes polarimeter*, Appl. Opt., 43 (2), pp. 274–282 (2004).

[19] C. Xu, Z. Qu, X. Zhang, C. Jin et X. Yan, *Polarimeter with two ferroelectric liquid-crystal modulators attached to the Yunnan solar tower*, Appl. Opt., 45 (33), pp. 8428–8433 (2006).

[20] J. C. del Toro Iniesta et M. Collados, *Optimum Modulation and Demodulation Matrices for Solar Polarimetry*, Appl. Opt., 39 (10), pp. 1637–1642 (2000).

[21] M. H. Smith, J. D. Howe, J. B. Woodruff, M. A. Miller et G. R. Ax, *Multispectral infrared Stokes imaging polarimeter*, Dans *Polarization : Measurement, analysis and remote sensing II*, sous la direction de D. H. Goldstein et D. B. Chenault, pp. 137–143. Proc SPIE vol. 3754 (1999).

[22] A. F. Sadjadi et C. S. L. Chun, *Automatic detection of small objects from their infrared state-of-polarization vectors*, Optics Letters, 28 (7), pp. 531–533 (2003).

[23] N. Lefaudeux, N. Lechocinski, S. Breugnot et P. Clemenceau, *Compact and robust linear Stokes polarization camera*, Dans *Developments in Polarization Instrumentation I*, vol. 6972. SPIE (2008).

[24] S. J. Hitzfelder, G. N. Plass et G. W. Kattawar, *Radiation in the earth's atmosphere : its radiance, polarization, and ellipticity*, Appl. Opt., 15 (10), p. 2489 (1976).

[25] G. D. Gilbert et J. C. Pernicka, *Improvement of underwater visibility by reduction of backscatter with a circular polarization technique*, Dans *Underwater Photo-Optics I*, sous la direction de A. B. Dember (1966).

[26] R. Wehner, *The perception of polarised light.*, Cambridge University Press (1983).

[27] G. Horvath et D. Varju, *Polarized Light in Animal Vision*, Springer (2004).

[28] T. Chiou, S. Kleinlogel, T. Cronin, R. Caldwell, B. Loeffler, A. Siddiqi, A. Goldizen et J. Marshall, *Circular Polarization Vision in a Stomatopod Crustacean*, Current Biology, 18, pp. 429–434 (2008).

[29] A. Halstuch et Y. Yitzhaky, *Properties of light reflected from road signs in active imaging*, Appl. Opt., 47 (22), pp. 4031–4036 (2008).

[30] O. Matoba et B. Javidi, *Three-dimensional polarimetric integral imaging*, Opt. Lett, 29 (20), pp. 2375–2377 (2004).

[31] S. Breugnot et P. Clémenceau, *Modeling and performances of a Polarization Active Imager at* $\lambda = 806\ nm$, Opt. Eng., 39 (10), pp. 2681–2688 (2000).

[32] A. Jaulin, L. Bigué et P. Ambs, *Implementation of a high-speed imaging polarimeter using a liquid crystal ferroelectric modulator*, Vol. 6189, p. 618912. SPIE (2006).

[33] A. Jaulin, L. Bigué et P. Ambs, *High-speed degree-of-polarization imaging with a ferroelectric liquid-crystal modulator*, Opt. Eng., 47 (2008).

[34] P. Terrier et V. DeVlaminck, *Robust and Accurate Estimate of the Orientation of Partially Polarized Light from a Camera Sensor*, Applied Optics - IP, 40 (29), pp. 5233–5239 (2001).

[35] J. C. Ramella-Roman, K. Lee, S. A. Prahl et S. L. Jacques, *Polarized Light Imaging with a Handheld Camera*, Dans *SPIE Saratov Fall Meeting 2002 : Optical Technologies in Biophysics and Medicine IV*, sous la direction de V. V. Tuchin, vol. 5068 (2003).

[36] L. B. Wolff, *Polarization camera for computer vision with a beam splitter*, J. Opt. Soc. Am. A, 11 (11), pp. 2935–2945 (Nov 1994).

[37] A. L. Weijers, H. van Brug et H. J. Frankena, *Polarization Phase Stepping With a Savart Element*, Appl. Opt., 37 (22), pp. 5150–5155 (1998).

[38] M. C. Simon, *Wollaston prism with large split angle*, Appl. Opt., 25 (3), p. 369 (1986).

[39] M. D. Perrin, J. R. Graham et J. P. Lloyd, *The IRCAL Polarimeter : Design, Calibration, and Data Reduction for an Adaptive Optics Imaging Polarimeter*, Publications of the Astronomical Society of the Pacific, 120 (867), pp. 555–570 (2008).

[40] A. R. Harvey, D. W. Fletcher-Holmes, A. Gorman, K. Altenbach, J. Arlt et N. D. Read, *Spectral imaging in a snapshot*, Dans *Spectral Imaging : Instrumentation, Applications, and Analysis III*, sous la direction de G. H. Bearman, A. Mahadevan-Jansen et R. M. Levenson, vol. 5694, pp. 110–119 (2005).

[41] T. Williams, *The Optical Transfer Function of Imaging Systems (Optics and Optoelectronics)*, Taylor & Francis (1998).

[42] K. S. Kawabata, A. Okazaki, H. Akitaya, N. Hirakata, R. Hirata, Y. Ikeda, M. Kondoh, S. Masuda et M. Seki, *A New Spectropolarimeter at the Dodaira Observatory*, PASP, 111, pp. 898–908 (juillet 1999).

[43] M. Alouini, F. Goudail, P. Réfrégier, A. Grisard, E. Lallier et D. Dolfi, *Multispectral polarimetric imaging with coherent illumination : towards higher image contrast*, Dans *Polarization : Measurement, Analysis, and Remote Sensing VI*, sous la direction de D. H. Goldstein et D. B. Chenault, vol. 5432, pp. 133–144. Proc. SPIE (2004).

[44] M. Alouini, F. Goudail, A. Grisard, J. Bourderionnet, D. Dolfi, I. Baarstad, T. Løke, P. Kaspersen et X. Normandin, *Active polarimetric and multispectral laboratory demonstrator : contrast enhancement for target detection*, Dans *Electro-Optical Remote Sensing II. Proceedings of the SPIE*, sous la direction de G. W. Kamerman, D. V. Willetts et O. K. Steinvall, vol. 6396, p. 63960B (octobre 2006).

[45] L. Le Hors, P. Hartemann, D. Dolfi et S. Breugnot, *Phenomenological model of paints for multispectral polarimetric imaging*, Dans *Targets and Backgrounds VII : Characterization and Representation*, sous la direction de W. R. Watkins, D. Clement et W. R. Reynolds, pp. 94–105. Proc. SPIE Vol. 4370 (2001).

[46] M. Alouini, F. Goudail, N. Roux, L. Le Hors, P. Hartemann, S. Breugnot et D. Dolfi, *Active spectro-polarimetric imaging : signature modeling, imaging demonstrator and target detection*, Eur. Phys. J. Appl. Phys., 42, pp. 129–139 (2008).

[47] S. Sumrain et G. Giakos, *Sub Pixel Detection of Polarimetric Signatures of Man-Made Targets*, Dans *Instrumentation and Measurement Technology Conference 2006*, pp. 163 – 167, Sorrento, Italy, proc. IEEE (2006).

[48] N. Roux, F. Goudail et P. Réfrégier, *Cramer-Rao lower bounds on the estimation of the degree of polarization in coherent imaging systems*, J. Opt. Soc. Am. A, 22 (11), pp. 2532–2541 (2005).

[49] P. Réfrégier, F. Goudail et N. Roux, *Estimation of the degree of polarization in active coherent imagery using the natural representation*, J. Opt. Soc. Am. A, 21 (12), pp. 2292–2300 (2004).

[50] F. Goudail, F. Réfrégier et N. Roux, *Estimation of the degree of polarization of coherent light in the presence of uniform and nonuniform illumination*, J. Opt. Soc. Am. A, 23 (11), pp. 2845–2854 (2006).

[51] P. Réfrégier, M. Roche et F. Goudail, *Cramer-Rao lower bound for the estimation of the degree of polarization in active coherent imagery at low photon level.*, Opt. Lett., 31 (24), pp. 3565–3567 (2006).

[52] P. Réfrégier, *Mutual information-based degrees of coherence of partially polarized light with Gaussian fluctuations*, Opt. Letters, 30 (23), pp. 3117–3119 (2005).

[53] E. B. Andersen, *Sufficiency and Exponential Families for Discrete Sample Spaces*, Journal of the American Statistical Association, 65, pp. 1248–1255 (1970).

[54] D. V. Hinkley, *On the ratio of two correlated normal random variables*, Biometrika, 56, p. 635 (1969).

[55] A. Papoulis, *Probability, random variables and stochastic processes*, Mc Graw-Hill, Boston (1991).

[56] A. Daniels, *Field Guide to Infrared Systems* (2007).

[57] G. C. Holst, *CCD arrays, cameras, and displays, Second Edtion*, JCD Publishing, Winter Park, Florida (1998).

[58] O. Sandus, *A Review of Emission Polarization*, Appl. Opt., 4 (12), pp. 1634–1642 (1965).

[59] A. Resnick, C. Persons et G. Lindquist, *Polarized Emissivity and Kirchhoff's Law*, Appl. Opt., 38 (8), pp. 1384–1387 (1999).

[60] M. Alouini, F. Goudail, A. Grisard, J. Bourderionnet, D. Dolfi, A. Bénière, I. Baarstad, T. Løke, P. Kaspersen, X. Normandin et G. Berginc, *Near-infrared active polarimetric and multispectral laboratory demonstrator for target detection*, Appl. Opt., 48 (8), pp. 1610–1618 (2009).

[61] S. M. Kay, *Fundamentals of statistical signal processing - Volume II : Detection Theory*, Chap. Statistical decision theory II, pp. 186–247. Prentice-Hall, Upper Saddle River (1998).

[62] Y. Pawitan, *In All Likelihood : Statistical Modelling and Inference Using Likelihood*, Oxford University Press (2001).

[63] R. Touzi, A. Lopès et P. Bousquet, *A statistical and geometrical edge detector for SAR images*, IEEE Trans. Geoscience and Remote Sensing, 26 (6), pp. 764–773 (1988).

[64] C. J. Oliver, I. Mc Connell, D. Blacknell et R. G. White, *Optimum edge detection in SAR*, Dans *Synthetic Aperture Radar and Passive Microwave Imaging*, sous la direction de G. Franceschetti, C. J. Oliver, J. C. Shiue et S. Tajbakhsh, vol. 2584, pp. 152–163. SPIE Proceedings (1995).

[65] O. Germain et P. Réfrégier, *Edge detection and localisation in SAR images : a comparative study of global filtering and active contour approaches*, Dans *EurOpto Conf. on Image and Signal Processing for Remote Sensing, Barcelona, Spain*, vol. 3500, pp. 111–121. SPIE (1998).

[66] A. Abu-Naser, N. P. Galatsanos et M. N. Wernick, *Methods to detect objects in photon-limited images*, J. Opt. Soc. Am. A, 23 (2), pp. 272–278 (2006).

[67] F. Goudail et P. Réfrégier, *Statistical algorithms for target detection in coherent active polarimetric images*, J. Opt. Soc. Amer. A, 18 (12), pp. 3049–3060 (Dec 2001).

[68] H. V. Poor, *An introduction to signal detection and estimation*, Springer Verlag, New York (1994).

[69] S. M. Kay, *Fundamentals of statistical signal processing - Volume I : Estimation Theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1993).

[70] F. Goudail et P. Réfrégier, *Target segmentation in active polarimetric images by use of statistical active contours*, Applied Optics, 41 (5), pp. 874–883 (Feb 2002).

[71] A. B. Kostinski et W. M. Boerner, *On the polarimetric contrast optimization*, IEEE Trans. Antennas Propagat., 35, pp. 988–991 (1987).

[72] A. A. Swartz, H. A. Yueh, J. A. Kong, L. M. Novak et R. T. Shin, *Optimal polarizations for achieving maximal constrast in radar images*, Journal of Geophysical Research, 93, pp. 15252–15260 (1988).

[73] M. Floc'h, G. Le Brun, C. Kieleck, J. Cariou et J. Lotrian, *Polarimetric considerations to optimize lidar detection of immersed targets*, Pure and Applied Optics, 7, pp. 1327–1340 (1998).

[74] F. Goudail, P. Réfrégier et G. Delyon, *Bhattacharyya distance as a contrast parameter for statistical processing of noisy optical images*, J. Opt. Soc. Am. A, 21 (7), pp. 1231–1240 (2004).

[75] G. Golub et W. Kahan, *Calculating the Singular Values and Pseudo-Inverse of a Matrix*, J. SIAM Numer. Anal., 2 (2), pp. 205–224 (1965).

[76] D. Goldstein, *Polarized Light, 2nd ed.*, Marcel Dekker (2003).

[77] R. S. Cloude et E. Pottier, *Concept of polarization entropy in optical scattering*, Optical Engineering, 34 (6), pp. 1599–1610 (1995).

[78] P. Réfrégier, J. Fade et M. Roche, *Estimation precision of the degree of polarization from a single speckle intensity image*, Opt. Lett., 32 (7), pp. 739–741 (2007).

[79] M. Roche, J. Fade et P. Réfrégier, *Parametric estimation of the square degree of polarization from two intensity images degraded by fully developed speckle noise*, J. Opt. Soc. Am. A, 24 (9), pp. 2719–2727 (2007).

[80] A. Bénière, F. Goudail, M. Alouini et D. Dolfi, *Precision of degree of polarization estimation in the presence of additive Gaussian detector noise*, Opt. Commun., 278 (2), pp. 264–269 (2007).

[81] A. Bénière, F. Goudail, M. Alouini et D. Dolfi, *Minimization of the influence of passive-light contribution in active imaging of the degree of polarization*, Opt. Lett., 33 (20), pp. 2335–2337 (2008).

[82] P. Réfrégier, F. Goudail et G. Delyon, *Photon noise effect in coherent active images*, Opt. Lett., 29 (2), pp. 162–164 (2004).

[83] E. T. Jaynes, *Probability Theory : The Logic of Science*, Cambridge University Press (1995).

Résumé : L'imagerie d'OSC ("Orthogonal State Contrast") est un mode d'imagerie polarimétrique active qui consiste à illuminer la scène avec une lumière polarisée et à analyser le signal rétro-diffusé dans deux états de polarisation orthogonaux. Elle permet de mettre en évidence des contrastes qui ne sont pas présents dans les images d'intensité classiques. Les applications sont très nombreuses en télédétection, dans le domaine biomédical ou pour la vision à travers les milieux diffusants. L'objectif de cette thèse était de concevoir un instrument et de caractériser ses capacités en terme d'acquisition et de traitement de l'information.
Nous avons réalisé et validé un système d'acquisition simple et robuste permettant de faire l'image simultanée des deux états de polarisation. Cette architecture permet d'atteindre des limites fondamentales fixées par le bruit de détecteur, le bruit de photons ou la non-uniformité spatiale et temporelle de l'illumination. Nous avons montré expérimentalement son apport pour l'imagerie de cibles mobiles ou à travers un milieu turbulent.
Pour évaluer les capacités de ce mode d'imagerie, nous avons déterminé les algorithmes d'estimation et caractérisé leurs précisions en fonction du type de bruit prédominant grâce à la borne de Cramer-Rao. Dans un deuxième temps, nous avons étudié les performances de détection de cible en fonction de la non-uniformité de l'illumination.
Enfin, d'une manière plus générale, nous nous sommes intéressés à la maximisation du contraste dans une image polarimétrique scalaire. Nous avons proposé une méthode d'optimisation conjointe des états de polarisation d'illumination et d'analyse qui présente des perspectives prometteuse pour l'amélioration des imageurs de Mueller.

Abstract : *OSC ("Orthogonal State Contrast") imaging is an active polarimetric imaging mode which consists in illuminating the scene with a totally polarized light and analyzing the backscattered light along two orthogonal states of polarization. It reveals contrasts which are not present in conventional intensity images. It arouses a great interest in several domains such as remote sensing, biomedical imaging or vision through diffusive medium. The objective of this thesis was to design an OSC imaging system and to characterize its performance in terms of acquisition capabilities and signal processing.*
We designed and tested a simple robust setup which is able to acquire simultaneously both orthogonal states of polarization. This architecture reaches the fundamental limits set by detector noise, photon shot noise or spatial and temporal non-uniformity of th illuminaiton. We demonstrated experimentally its benefit when imaging moving targets or imaging through turbulent medium.
In order to characterize the performance of this imaging mode, we determine estimation algorithm depending on the predominant type of noise and compare their precision to the Cramer-Rao lower bound. We then studied the performance for target detection as a function of the non-uniformity of the illumination.
Finally, we studied the maximization of contrast in scalar polarimetric images. We proposed a method which simultaneously optimizes the states of polarization of the illumination and the reception. This is an interesting perspective for Mueller imagers improvement.