

Sur quelques méthodes en mécanique aléatoire

Karam Sab

▶ **To cite this version:**

Karam Sab. Sur quelques méthodes en mécanique aléatoire. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1989. Français. NNT : . tel-00519684

HAL Id: tel-00519684
https://pastel.hal.science/tel-00519684

Submitted on 21 Sep 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

18405

NS 15231
d C31

THESE

présentée à

L'ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES

en vue de l'obtention du diplôme de

DOCTEUR DE L'E.N.P.C.

par

Karam Sab

SUR QUELQUES METHODES EN MECANIQUE ALEATOIRE

soutenue le 21 Mars 1989

Jury :	J. Salençon	Président
	N. Bouleau	Directeur
	P. Bernard	Rapporteur
	K. Dang-Van	Rapporteur
	A. Zaoui	Examinateur

E.N.P.C.
DOC07298

08

Remerciements

J'exprime ma gratitude à Monsieur Bouleau qui m'a accueilli au CERMA et m'a dirigé pendant ces dernières années. Il m'a donné le goût des Probabilités.
Je remercie Monsieur Salençon pour l'honneur qu'il m'a fait en présidant le jury . Je remercie également Messieurs Zaoui, Bernard, et Dang-Van d'avoir participé au jury .
Je dois beaucoup à D. Lamberton pour son aide et sa grande disponibilité.
Je voudrais dire également combien m'ont été profitables les conseils formateurs de Messieurs Halphen, Coussy, Ehrlacher et Dang-Van. Qu'ils en soient remerciés.
Je salue mes amis B. Lapeyre et G. Pagès avec qui j'ai eu le plaisir d'effectuer un travail d'équipe sur les suites à discrépance faible.
Enfin, je remercie Mesdames Serre et Lebert de m'avoir aidé dans la réalisation de ce document.

Sur quelques méthodes en mécanique aléatoire

-Introduction

-Chapitre 1: Rappel de simulation.

-Chapitre 2: Deux contributions aux suites à discrépance faible

-Chapitre 3: Homogénéisation des matériaux élastiques à microstructure aléatoire.

-Chapitre 4: La fatigue à grand nombre de cycles des métaux polycristallins: un critère de rupture.

-Chapitre 5: Analyse de la simulation en calcul à la rupture probabiliste des structure discrètes.

-Conclusion

INTRODUCTION

Un calcul mécanique classique porte sur des données déterministes pour obtenir des résultats déterministes. On se donne, par exemple, la géométrie d'une pièce, ses propriétés élastiques, le chargement auquel elle est soumise, et on calcule le champ de contraintes qui y règne. En général, ce calcul est numérique (éléments finis, équations intégrales, ...).
Si les données sont aléatoires, les résultats sont a priori aléatoires. L'objet de la mécanique aléatoire est d'évaluer les caractéristiques statistiques des résultats, comme la moyenne du champ de contraintes ou la probabilité de ruine, en fonctions des caractéristiques statistiques des données.

L'usage des Probabilités en mécanique est encore du domaine de la recherche. Il est surtout motivé par la sécurité des ouvrages: les réglements en vigueur tente de tenir compte de l'aspect aléatoire des sollicitations que subit un ouvrage en utilisant des coefficients multiplicatifs dits de sécurité, et dont la justification est plus souvent empirique que scientifique. Un autre domaine d'application des Probabilités est l'étude des matériaux à partir de leur microstructure dans une approche analogue à la théorie cinétique des gaz parfaits: on veut déduire les propriétés élastiques, plastiques, ... d'un métal à partir des propriétés aléatoires des cristaux qui le composent.

Pour résoudre un problème de mécanique aléatoire, on a le plus souvent recours à une simulation. Une simulation consiste à générer un échantillon de données, à effectuer un calcul mécanique déterministe pour chaque élément de l'échantillon, et à traiter les résultats obtenus par des algorithmes stochastiques adaptés aux caractéristiques statistiques cherchées. Il importe de justifier mathématiquement ces algorithmes. La simulation est aux Probabilités ce que l'Analyse numérique est à l'Analyse mathématique.

Cette thèse contient quatre contributions indépendantes à la mécanique aléatoire. Elles sont dominées par deux thèmes, d'une part, l'étude et l'amélioration des techniques de simulation, et d'autre part, le passage de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique dans l'étude des matériaux à microstructure aléatoire.

En ce qui concerne la simulation, elle comporte généralement deux approximations: une approximation résultant de la résolution numérique du problème mécanique dans le cas déterministe (p.ex. les éléments finis),

et une approximation de nature aléatoire qui découle des algorithmes de génération des données et de traitement statistique des résultats. L'objet du premier chapitre est un rappel des techniques de génération des variables aléatoires et des principaux algorithmes stochastiques de type Monte-Carlo. Tous ces algorithmes font classiquement appel à un générateur de nombres pseudo-aléatoires qui simule des réalisations d'une suite infinie de variables aléatoires réelles indépendantes uniformément distribuées sur [0,1]. La question traitée dans le deuxième chapitre, est l'utilisation d'une suite à discrépance faible en lieu et place d'une suite de nombres pseudo-aléatoires, pour accélérer la convergence des algorithmes de type Monte-Carlo. En effet, on sait qu'une suite à discrépance faible est une suite déterministe (x_i) qui balaye l'intervalle [0,1] et qui est telle que: si f est une fonction Riemann intégrable sur [0,1], la moyenne des $f(x_1), ..., f(x_n)$ converge, quand n tend vers l'infini, vers l'intégrale de f; cette convergence étant plus rapide que celle de la moyenne des $f(u_1), ..., f(u_n)$, où (u_i) est une réalisation d'une suite infinie de variables aléatoires réelles indépendantes uniformément distribuées sur [0,1]. Notre contribution consiste, d'une part, à généraliser l'emploi des suites à discrépance faible au calcul des intégrales impropres (f possède une branche infinie), et d'autre part, à démontrer la convergence de l'algorithme de Robbins-Monro quand on y remplace l'appel à une suite pseudo-aléatoire par l'appel à une suite à discrépance faible. Pagès et Lapeyre démontrent que la convergence est alors plus rapide.

Dans le troisième chapitre, nous étudions l'homogénéisation des propriétés élastiques d'un matériau dont la microstructure est aléatoire dans ses aspects théoriques et numériques. Nous commençons par modéliser l'élasticité microscopique aléatoire par un processus aléatoire, ensuite nous formulons deux conditions sur ce processus nécessaires à l'obtention d'un comportement élastique macroscopique déterministe: le processus est supposé stationnaire, autrement dit, l'aléa qui porte sur l'élasticité microscopique ne distingue pas un point de la microstructure d'un autre, le matériau est statistiquement homogène; le processus est supposé ergodique, autrement dit, toute l'information statistique nécessaire à la description de l'aléa est contenue dans chaque échantillon infini de la microstructure. Si le processus vérifie ces deux conditions et d'autres conditions techniques que nous précisons, nous montrons que, l'approche en déformation appliquée à un échantillon cubique de la microstructure permet, en faisant tendre la

taille de l'échantillon vers l'infini, de définir le tenseur de rigidité macroscopique. De façon analogue, l'approche en contrainte permet la définition du tenseur de souplesse macroscopique. De ces définitions nous déduisons une méthode de simulation qui permet de calculer numériquement ces tenseurs macroscopiques en effectuant un calcul aux éléments finis sur un échantillon cubique de taille suffisamment grande. Nous appliquons ensuite cette méthode à un matériau fictif bidimensionnel; les résultats de la simulation montrent notamment que les deux tenseurs macroscopiques sont inverses l'un de l'autre, ce qui revient à dire que les approches en déformation et en contraintes sont équivalentes. Malheureusement, nous n'avons pas pu le démontrer.

Le chapitre quatre est lui aussi un passage du niveau microscopique au niveau macroscopique; il concerne la fatigue à grand nombre de cycles des pièces métalliques. En examinant la microstructure du métal, nous établissons un critère de rupture (endurance) tenant compte de l'aspect aléatoire de la fatigue. Cette étude est un exemple typique où la simulation est superflue.

La rupture des métaux soumis à des chargements cycliques voisins de la limite d'endurance - ces chargements ne provoquent pas de plastification détectable macroscopiquement - se décompose en trois périodes: 1) un mécanisme de plastification intense et localisé se développe dans quelques cristaux faibles et dure quelques milliers de cycles; 2) un autre mécanisme se développe dans ces cristaux et finit par les rompre. Ils peuvent alors former une fissure détectable macroscopiquement; 3) cette fissure se propage dans la structure jusqu'à la ruine.

Le critère est établi en deux temps: dans un premier temps, nous évaluons la plastification des cristaux faibles - qui sont à l'origine de la rupture éventuelle - en fonction du chargement cyclique appliqué à l'élément de volume: c'est un calcul qui relie une grandeur microscopique à une grandeur macroscopique; nous montrons que cette microplastification se stabilise et que le niveau de l'écrouissage à l'état stabilisé ne dépend que du tenseur de localisation des contraintes. Dans un deuxième temps, nous postulons un critère de non formation d'une fissure macroscopique sur l'état plastique stabilisé des cristaux les plus faibles. Finalement, le critère obtenu s'écrit en fonction du chargement cyclique appliqué à l'élément de volume et du tenseur de localisation des contraintes qui agit sur les cristaux les plus

faibles. Il s'applique aux chargements cycliques quelconques, généralisant celui que Dang Van a établi pour les chargements radiaux. Le caractère aléatoire de la rupture est modélisé en supposant que le tenseur de locolisation des contraintes qui agit sur les cristaux les plus faibles est une variable aléatoire.

L'objectif du cinquième chapitre est voisin de celui du deuxième chapitre puisque, là aussi, nous proposons de réduire le coût d'une simulation. Il s'agit du calcul à la rupture des structures discrètes lorsque les résistances et le chargement sont aléatoires. Nous indiquons que, dans ce cas, la simple répétition de l'algorithme de résolution du problème déterministe ne constitue pas un bon algorithme de simulation. En effet, nous définissons à l'aide de l'approche en vitesse les mécanismes élémentaires et nous montrons que la rupture de la structure (au sens du calcul à la rupture) a lieu si, et seulement si, la puissance résistante maximale dans un mécanisme élémentaire est inférieure à la puissance des efforts dans ce mécanisme; ces mécanismes ne dépendent ni des résistances ni du chargement, leur calcul ne dépend que de la géométrie de la structure; pour des résistances données et un chargement donné, la question de la rupture de la structure peut être traitée par un algorithme de simplexe. Cet algorithme détermine, après avoir calculé un certain nombre de mécanismes élémentaires, un mécanisme élémentaire critique (fonction des résistances et du chargement considérés) qui permet de répondre à la question. Lors d'une simple répétition de cet algorithme avec des résistances et des chargements différents nous risquons de recalculer inutilement beaucoup de mécanismes élémentaires: dans un calcul probabiliste par simulation, il faut garder en mémoire les mécanismes déjà calculés dans les étapes précédentes.

Vu la diversité des sujets traités, nous avons rédigé chaque chapitre de telle sorte qu'il soit possible de le lire sans faire appel aux autres chapitres à l'exception du premier dont la lecture est indispensable à celle des chapitres 2, 3 et 5.

Chapitre 1

Rappel de simulation

Introduction.

1) Notations.

2) Simulation d'une variable aléatoire.

2.a) la loi uniforme sur l'intervalle [0,1].

2.b) Quelques lois particulières.

2.c) Méthodes générales.

3) Principaux algorithmes stochastiques.

3.a) Convergence des variables aléatoires.

3.b) Calcul d'espérance.

3.c) Algorithme de Robbins-Monro.

3.d) Le gradient stochastique.

3.e) Calcul de la fonction de répartition.

3.f) Exemple.

Introduction:

Ce chapitre est un chapitre de rappel. Sa lecture est indispensable à la compréhension des autres chapitres à l'exception du quatrième. Il est consacré à la simulation et s'inspire de [1].

Nous commençons par fixer les notations relatives au calcul des Probabilités. Ensuite, nous rappelons les principales techniques de simulation d'une variable aléatoire de loi de probabilité connue; nous évoquons notamment les générateurs de nombres pseudo-aléatoires. Enfin, nous donnons un bref aperçu des algorithmes stochastiques de type Monte-Carlo dont l'objet est le calcul numérique de l'espérance mathématique d'une variable aléatoire, ou le calcul de sa fonction de répartition, ... etc. Nous exposons, en particulier, l'algorithme de Robbins-Monro qui est au coeur du deuxième chapitre.

1) Notations:

Soit (Ω, A, P) *un espace de probabilité*

* Ω est un ensemble non vide.

* A est *une tribu* sur Ω, c-à-d, A est un ensemble de parties de Ω contenant le vide et Ω, et stable par toute opération définie par un nombre dénombrable d'unions, d'intersections et de complémentations portant sur ses éléments.

* P est *une mesure positive de masse 1* sur A, c-à-d, P est une application de A dans R_+ vérifiant: $P(\text{vide})=0$, $P(\Omega)=1$, $P(UA_n) = \Sigma P(A_n)$ pour toute suite dénombrable (A_n) d'éléments de A disjoints deux à deux.

* *Une variable aléatoire* X à valeurs R^d est par définition une application mesurable de (Ω, A) dans $(R^d, B(R^d))$ ou $B(R^d)$ est la tribu borélienne de R^d (celle qui est engendrée par les ouverts):

$$\forall \; B \in B(R^d) \qquad X^{-1}(B) \in A$$

* *La loi* de X , P_X , est par définition la mesure image de P par X sur $(R^d, B(R^d))$ c-à-d:

$\forall B \in B(R^d)$ $P_X(B)=P(X^{-1}(B))$ (probabilité pour que $X(\omega)$ soit dans B).

* Soit T un ensemble d'indices (le plus souvent N, Z, R^p). *Un processus aléatoire* sur T à valeurs dans R^d, $\mathbf{X}=(X_t)_{t\in T}$, est une famille de variables aléatoires à valeurs dans R^d indicée par T.

* On définit la tribu produit $B(R^d)^{*T}$ comme étant la plus petite tribu sur $(R^d)^T$ contenant les cylindres C de la forme:

$$C=\{ (x_t)_{t\in T} \in (R^d)^T \;/\; x_{t1}\in B_1,.....,x_{tn}\in B_n \;, B_i \in B(R^d) \}$$

C'est aussi la plus petite tribu rendant mesurable toutes les applications

coordonnées π_t: $(R^d)^T \rightarrow (R^d, B(R^d))$

$$(x_s)_{s\in T} \rightarrow x_t$$

Ainsi un processus aléatoire apparait comme une variable aléatoire à valeurs $(R^d)^T$, c-à-d, une application mesurable:

$$\mathbf{X}: (\Omega, A, P) \rightarrow ((R^d)^T, B(R^d)^{*T})$$

$$\omega \rightarrow (X_t)_{t\in T}$$

La loi du processus $\mathbf{X}$, $P_{\mathbf{X}}$, étant par définition, la mesure image de P par $\mathbf{X}$ sur $((R^d)^T, B(R^d)^{*T})$.

Soit S = {t1, ... , tn} une partie finie de T. On considère le processus aléatoire déduit de $\mathbf{X}$: $\mathbf{X}_S = (X_t)_{t\in S}$. $\mathbf{X}_S$ apparait comme une variable aléatoire à valeurs $(R^d)^S$:

$$\mathbf{X}_S: (\Omega, A, P) \rightarrow ((R^d)^S, B(R^d)^{*S})$$

$$\omega \rightarrow (X_{t1}, \ldots, X_{tn})$$

On peut alors déduire la loi de $\mathbf{X}_S$, $P_{\mathbf{X}S}$ sur $B(R^d)^{*S}$ à partir de $P_{\mathbf{X}}$ par la relation:

$$\forall B_{t1}, \ldots, B_{tn} \in B(R^d) \qquad P_{\mathbf{X}S}(B_{t1} \times \ldots \times B_{tn}) = P_{\mathbf{X}}(C)$$

(C est le cylindre de $(R^d)^T$ construit à partir des B_{ti})

$P_{\mathbf{X}S}$ est dite *loi marginale* du processus $\mathbf{X}$ et la propriété précédente traduit la compatibilité de $P_{\mathbf{X}S}$ et $P_{\mathbf{X}}$; il est facile de voir que cette propriété subsiste quand on remplace $P_{\mathbf{X}}$ par une autre loi marginale $P_{\mathbf{X}S'}$ quand S' est une partie finie de T contenant S.

* Réciproquement, *le théorème de Kolmogorov* affirme que la donnée de toutes les lois marginales P_{X_S} (S partie finie de T), et à condition qu'elles soient compatibles entre elles, suffit pour définir de façon unique P_X :

P_X est appelée la limite du système compatible $\{P_{X_S}\}$.

* Comme première application de ce théorème, on définit une famille de variables aléatoires dans R^d *indépendantes* et *équidistribuées*: on dit que les variables aléatoires X_t ($t \in T$) sont équidistribuées quand elles ont même loi, il existe alors une mesure μ de masse 1 sur $(R^d, B(R^d))$ telle que:

$$\forall\ t \in T \qquad P_{X_t} = \mu$$

Elles sont dites indépendantes si pour toute partie finie $S = \{t1, \ldots, tn\}$ de T on a:

$$\forall\ B_{t1}, \ldots, B_{tn} \in B(R^d) \qquad P_{X_S}(B_{t1} \times \ldots \times B_{tn}) = \mu(B_{t1}) \times \ldots \times \mu(B_{tn})$$

Cette propriété traduit que la loi marginale P_{X_S} est la mesure produit $\mu * \ldots * \mu$. Le théorème de Kolmogorov assure que P_X existe et est défini de façon unique comme limite du système compatible défini précédemment en fonction de μ.

2) Simulation d' une variable aléatoire:

La question traitée dans cette partie est la suivante:

Soit une loi de probabilité P_X sur R^d, trouver une méthode effective pour générer une suite d'éléments de R^d: $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ qui soient les résultats successifs d'une suite de variables aléatoires $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ indépendantes de loi P_X sur R^d. Plus précisément, il s'agit de trouver un espace E et une suite d'applications x_n de E dans R^d, de telle sorte que, pour chaque élément e de E, la suite $x_1(e), x_2(e), ..., x_n(e), ...$ puisse être considérée comme la réalisation d'une suite de variables aléatoires indépendantes de loi P_X sur R^d. Et ce de manière effective.

En fait, un résultat théorique montre qu'une telle méthode n'existe pas! Intuitivement, un algorithme qui générerait une telle suite la rendrait prévisible ce qui lui enlèverait son caractère aléatoire. On se contente alors d'une suite *pseudo-aléatoire* qui sert d'approximation à la suite aléatoire de la même façon qu'un décimal approxime un réel. Cette approximation est estimée à l'aide des tests statistiques comme la loi des grands nombres, le test du X^2 , ...etc. En pratique, on dispose de beaucoup de méthodes qui fournissent des suites qui vérifient les tests statistiques, et qui sont très satisfaisantes pour les applications numériques.

2.a) la loi uniforme sur l'intervalle [0,1]:

La simulation de cette loi est très importante parce qu'on l'utilise pour la simulation des autres lois. Les méthodes de simulation des autres lois ne sont, en fait, que des techniques pour se ramener à la loi uniforme comme nous allons le voir dans les paragraphes suivants.

C'est pour cette raison que toutes les bibliothèques de programmes possède un générateur de nombre au hasard. Ainsi la bibliothèque **FORTRAN NAG** utilise la fonction g05caf. Mais malheureusement, la pratique de la simulation nous pousse à déconseiller le recours à ces générateurs d'une part, parcequ'ils ne sont pas toujours bons, et d'autre part, on rencontre des difficultés pour les appeler. Il est ainsi préférable d'écrire son propre générateur. Nous proposons dans ce paragraphe un générateur de très bonne qualité, proposé par Knuth[2], et qui a l'avantage d'être programmable sur toutes les machines. Il existe une littérature abondante sur les procédés d'obtention des suites *pseudo-aléatoires* uniformément distribuées entre 0 et 1, et le procédé le plus courant est la méthode des congruences. Elle consiste à engendrer une suite d'entiers (y_n) compris entre 0 et m définis par la relation:

$$(1) \qquad y_{n+1} = a y_n + c \pmod m$$

a et c sont des entiers et m est un entier très grand. La suite (x_n) est alors définie par la relation:

$$(2) \qquad x_n = y_n/m \ .$$

Comme on le voit, la suite (y_n) est entièrement déterminée par la donnée de y_0. Elle est comprise entre 0 et m-1, et périodique de période inférieure ou égale à m. Si m, c, et a sont choisis correctement, la période sera m. Dans ce cas, tous les entiers entre 0 et m-1 seront atteints à un moment donné quelque soit y_0. Cette méthode a l'avantage d'être rapide et facile à programmer mais elle a deux inconvénients. Le plus ennuyeux est qu'il

existe des corrélations séquentielles: par exemple, si on essaie de remplir un cube de coordonnées comprises entre 0 et 1 par des points dont les coordonnées tridimensionnelles sont calculées séquentiellement par l'algorithme précédent, on s'aperçoit que les points sont portés par des plans (moins de 1600 plans pour $m=2^{31}-1$) . Une autre faiblesse de cet algorithme est que les décimales d'ordre inférieur sont beaucoup moins aléatoires que les décimales d'ordre supérieur (pour simuler des entiers aléatoires entre 0 et 9, il vaut mieux prendre la première décimale des x_n que la dernière pour éviter les mauvaises surprises!) . Pour obtenir un générateur qui ne possède pas ces défauts, il faut payer le prix en temps de calcul. Ce supplément de temps est négligeable dans les problèmes que nous traitons où prédomine la longueur des calculs mécaniques répétés. Le générateur que nous proposons utilise, à chaque appel, trois générateurs différents obtenus par la méthode des congruences. Le premier est utilisé pour le calcul des décimales d'ordre supérieur, le deuxième pour les décimales d'ordre inférieur, et le troisième sert à rompre les corrélations séquentielles de la façon suivante: on remplit, tout d'abord, un tableau de taille arbitraire avec des nombres fabriqués à l'aide des deux premiers générateurs. Ensuite, à chaque appel, le troisième générateur détermine une ligne du tableau, le nombre contenu dans cette ligne est retenu, et les deux premiers générateurs servent au calcul du nombre qui le remplacera. La période obtenue est pratiquement infinie, et on ne décèle pas de corrélation. Les paramètres des trois générateurs sont à choisir arbitrairement dans une table donnée dans [2].

Le programme fortran est le suivant: (init est un entier négatif quelconque qui détérmine une suite de nombres *pseudo-aléatoires*, tabaux est un tableau auxilliaire, ix1, ix2, et ix3 sont des variables entières auxilliaires, alea est le terme de la suite.)

```
subroutine unifor (init,tabaux,ix1,ix2,ix3,alea)
dimension tabaux(97)
parameter (m1=259200,ia1=7141,ic1=54773,rm1=1./m1)
parameter (m2=134456,ia2=8121,ic2=28411,rm2=1./m2)
parameter (m3=243000,ia3=4561,ic3=51349)
data iff /0/
if (init.lt.0.or.iff.eq.0) then
    iff=1
    ix1=mod (ic1-init,m1)
     ix1=mod (ia1*ix1+ic1,m1)
    ix2=mod (ix1,m2)
     ix1=mod (ia1*ix1+ic1,m1)
    ix3=mod (ix1,m3)
    do [11] j=1,97
               ix1=mod (ia1*ix1+ic1,m1)
               ix2=mod (ia2*ix2+ic2,m2)
               tabaux (j)= ( float(ix1)+float(ix2)*rm2)*rm1
       [11] continue
    init=1
endif
ix1=mod (ia1*ix1+ic1,m1)
ix2=mod (ia2*ix2+ic2,m2)
ix3=mod (ia3*ix3+ic3,m3)
j=1+(97*ix3)/m3
alea=tabaux (j)
tabaux (j)= ( float(ix1)+float(ix2)*rm2)*rm1
return
end
```

Exemple:

```
dimension tabaux(97)
init=-360
do [10]  i=1,10
             call unifor (init,tabaux,ix1,ix2,ix3,alea)
             write (0,*)   alea
      [10] continue
end
```

Donne les nombres:

.65928192 .70233824 .08551951 .44849696 .18951458 .52730174 .89036384
.77060264 .38723069 .88271552

En résumé, dans l'algorithme précédent:

E={init}={entiers négatifs} et x_n(init) est le nième appel du sous-programme unifor.

2.b) Quelques lois particulières:

Il est souvent possible de simuler plus efficacement une variable aléatoire en utilisant ses propriétés particulières plutôt que les méthodes générales rappelées dans le prochain paragraphe. Une variable aléatoire X suivant une *loi normale* réduite est simulée en utilisant deux variables U_1 et U_2 indépendantes et uniformes sur [0,1] en posant:

$$X = [-2 \text{ LOG } U_1]^{0.5} \cos 2\pi U_2 .$$

Variables discrètes: Si X est une variable aléatoire dans R^d prenant une infinité dénombrable de valeurs: $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n, \ldots$ avec les probabilités $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n, \ldots$ ($\Sigma\, p_n=1$), on simule X à partir d'une variable U uniforme sur [0,1] en posant:

$X= x_n$ n étant l'unique entier vérifiant: $p_1+p_2+\ldots\ldots+p_{n-1} \leq U < p_1+p_2+\ldots\ldots+p_n$.

On peut aussi revenir à la définition des variables aléatoires dérivées d'autres variables, et de les simuler à partir de leurs définitions. Les lois binomiale et géométrique sont dérivées de la loi discrète prenant les valeurs 0 et 1. De même, les lois du X^2 , de Student, et de Fischer-Snedecor utilisées en statistique dérivent de la loi normale. C'est ainsi qu'une loi normale $N_d(m,\Sigma)$ dans R^d de moyenne m et de matrice de covariance Σ est simulée en utilisant d variables normales réduites indépendantes rangées dans un vecteus Z, en posant: $X=m+MZ$ avec M une matrice (d,d) vérifiant $M\,{}^tM=\Sigma$. On calcule M en diagonalisant la matrice symétrique semi-définie positive Σ.

2.c) Méthodes générales:

Méthode d'inversion:

Soit X une variable aléatoire réelle, sa fonction de répartition F est définie de R dans [0,1] par:

- $F(x)= \text{Prob}\ (X \leq x)$

On définit G l'inverse continue à gauche de F par:

- $G(y)=\inf\{a : y \leq F(a)\}$

On montre alors que si U est une variable uniforme sur [0,1], la variable aléatoire G(U) a la même loi que X. Cette méthode n'est utilisée en pratique que lorsqu'on a une méthode simple pour calculer G, par exemple, son expression analytique. Elle est généralisable au cas R^d si on sait inverser les fonctions de répartitions conditionnelles successives.

Méthode du rejet:

On désire simuler une variable aléatoire X dans R^d à densité continue f(x). Si on peut trouver une variable aléatoire Y dans R^d à densité continue g(y) facile à simuler et telle qu'il existe une constante k vérifiant $f \leq kg$,alors on simule X de la façon suivante:

On simule Y et une variable U indépendante uniformément distribuée sur [0,1] . Si $k.U.g(Y) \leq f(Y)$ on pose $X=Y$. Sinon on recommence l'opération précédente. (on démontre que l'inégalité précédente est vérifiée au bout d'un nombre fini d'opérations, ce nombre est une fonction croissante de k).

Dans le cas où f est à support compact, Y est souvent une variable uniforme ayant le même support et dans ce cas, k vérifie: $\max f \leq k$. Cette méthode est beaucoup plus courante que la méthode d'inversion.

3) Principaux algorithmes stochastiques:

L'objet d'une simulation est, en général, de calculer des quantités qui résultent de l'introduction du hasard dans un problème donné. Ces quantités sont le plus souvent la probabilité d'un évènement, l'espérance d'une variable aléatoire ou sa fonction de répartition, ou des paramètres à ajuster. On rappelle, dans cette partie, les différents types de convergence des variables aléatoires, ensuite on expose les algorithmes qui sont basés sur l'espérance, et enfin on décrit le calul d'une fonction de répartition.

3.a) Convergence des variables aléatoires:

Soit (Ω, A, P) un espace de probabilité. On considère une suite X_n de variables aléatoires à valeurs dans R^d . On dit que X_n converge vers la variable aléatoire X

1) presque sûrement: si l'ensemble des ω tels que $X_n(\omega) \to X(\omega)$ quand $n \to \infty$ est P-mesurable de mesure 1 .

2) dans L^p : si X_n converge vers X dans l'espace de Banach $(L^p, \| . \|_p)$.
Rappelons que puisque la mesure est finie: $\| X \|_p \leq \| X \|_q \quad 1 \leq p \leq q \leq \infty$ et donc $L^p \supset L^q$.

3) en probabilité: si $\forall\ \delta > 0 \quad P\{ | X_n - X | \geq \delta \} \to 0$ quand $n \to \infty$.

4) en loi: si les lois μ_n des X_n convergent étroitement vers la loi μ de X, c-à-d: $\forall$ f fonction réelle continue bornée sur $R^d \quad \int f \, d\mu_n \to \int f \, d\mu$.

Les différents types de convergence sont reliés par la

Proposition: La convergence dans L^p entraîne la convergence en probabilité. De même, la convergence presque sûre entraîne la convergence en probabilité. Et enfin, la convergence en probabilité entraîne la convergence en loi.

3.b) Calcul d'espérance:

Le calcul de l'espérance d'une variable aléatoire est, sans doute, le calcul le plus courant en simulation. On rappelle les bases théoriques de ce calcul, à savoir, la loi forte des grands nombres, le théorème du logarithme itéré, et le théorème central limite.

Soit X_n une suite de variables aléatoires dans R^d indépendantes et équidistribuées. La loi forte des grands nombres dit que si $E(X_1) < +\infty$ alors $(X_1 + \ldots + X_n)/n$ converge vers $E(X_1)$ presque sûrement et dans L^1.

Le théorème du logarithme itéré estime la vitesse de convergence de l'algorithme précédent dans le cas réel (dans le cas vectoriel on raisonne composante par composante) quand l'écart type $\sigma(X_1)$ existe. Il affirme que presque sûrement:

$$\liminf_n (X_1 + \ldots + X_n - n E(X_1)) / \sqrt{2 n \operatorname{Log} \operatorname{Log} n} = -\sigma(X_1)$$

et

$$\limsup_n (X_1 + \ldots + X_n - n E(X_1)) / \sqrt{2 n \operatorname{Log} \operatorname{Log} n} = \sigma(X_1)$$

Ainsi la quantité précédente oscille sans arrêt entre $\sigma(X_1)$ et $-\sigma(X_1)$.

Le théorème central limite estime la loi de l'erreur commise, il affirme quant à lui, que si X_1 est dans L^2 avec Σ comme matrice de dispersion alors la loi de $(X_1 + \ldots + X_n - n E(X_1))/\sqrt{n}$ converge étroitement vers $N_d(0,\Sigma)$.

Remarquons que le calcul de la probabilité d'un évènement A de A se ramène au calcul de l'espérance de sa fonction caractéristique $\mathbf{1}_{\{\omega \in A\}}$.

3.c) Algorithme de Robbins-Monro:

L'application de cet algorithme au calcul à la rupture probabiliste a été signalée récemment dans [3]. Le problème qu'on se pose est le suivant: soit (Y_θ) , $\theta \in R^d$, une famille de variables aléatoires dans R^d de loi dépendant du paramètre θ telles que $E(Y_\theta) = f(\theta)$, f est une fonction de R^d dans R^d qu'on ne connait que par simulation. On cherche alors à résoudre l'équation $f(\theta)=\alpha$ (On voit que le calcul de l'espérance d'une variable aléatoire Y est un cas particulier du problème précédent, puisqu'il suffit de poser $Y_\theta = Y - \theta$ et $\alpha=0$) . A priori, il faudrait appliquer à f un algorithme de résolution déterministe dans lequel on calculerait $E(Y_\theta)$ par simulation, à chaque fois que cela est nécessaire. En fait, Robbins et Monro ont mis au point dans les années 50 un algorithme stochastique qui nécessite autant de calcul qu'un seul calcul d'espérance :

$\theta_{n+1} = \theta_n - \gamma_n(Y_{n+1} - \alpha)$ Y_{n+1} étant tiré au hasard indépendamment du passé selon la loi de paramètre θ_n , et (γ_n) étant une suite de réels positifs. On démontre que sous les hypothèses suivantes l'algorithme converge presque sûrement vers θ^* solution du problème:

(H_1) $\quad \Sigma \gamma_n = +\infty \quad$ et $\quad \Sigma \gamma_n^2 < +\infty$

(H_2) $\quad \exists\ K>0$ tel que: $E(|Y_\theta|^2) \leq K(1+|\theta|^2)$

(H_3) $\quad \forall\ \varepsilon>0 \quad \inf_{\varepsilon \leq |\theta - \theta^*| \leq 1/\varepsilon} (\theta - \theta^*).(f(\theta) - \alpha) > 0$

Cet algorithme est la version probabiliste de la méthode du gradient (Newton) . (H_3) est une condition de stabilité de l'algorithme déterministe qui dit que le vecteur $f(\theta) - \alpha$ est dirigé vers l'intérieur du cercle centré en θ^* et passant par θ, (H_1) et (H_2) sont techniques. Un problème d'une importance capitale est d'estimer la vitesse de convergence de

l'algorithme en fonction des coefficients γ_n et des variables aléatoires Y_n . La technique qui consiste à arrêter l'algorithme lorsque les iterations successives ne produisent plus de modifications sensibles du résultat est très dangereuse, et peut conduire à une erreur systématique dans certains cas décrits dans [3], d'où la nécessité d'un critère d'arrêt. Le critère d'arrêt de Dvoretzky montre que si on suppose de plus:

(H_4) $\exists$ c>0 vérfiant: $|f_i(\theta)- \alpha_i| \geq c|\theta_i- \theta^*_i|$ $\forall$ i=1,...,d

(H_5) $\sup_\theta$ $(f_i(\theta)- \alpha_i)/(\theta_i- \theta_i^*) \leq 1/\gamma_1$ $\forall$ i=1,...,d

En posant $\sigma^2=\sup_{i,n}E[(f_i(\theta_n)- Y_{i,n+1})^2]$ et $T_{i,n}= \theta_{i,n}- \theta^*_{i,n}$, et si on prend $\gamma_n=ca^2/(\sigma^2+nc^2a^2)$ où c vérifie (H_4) et (H_5) , et a^2 majore l'erreur initiale $T_{i,1}^2$, on montre que $E(T_{i,n}^2) \leq \sigma^2\gamma_{n-1}/c$, et que le choix des γ_n est le meilleur qu'on puisse faire sauf à connaître d'autres informations sur les variables aléatoires Y_n. Pour plus de détail, se reporter à [3].

3.d) Le gradient stochastique:

Cet algorithme, qu'on ne fait que signaler, résoud le problème suivant: soit (Y_θ) , $\theta \in R^d$, une famille de variables aléatoires dans R^d de loi dépendant du paramètre θ telles que $E(Y_\theta) = f(\theta)$, f est une fonction de R^d dans R^d qu'on ne connait que par simulation et qui possède un maximum unique qu'on cherche. L'algorithme du gradient stochastique décrit dans [4] et [5] est l'équivalent de Robbins-Monro pour ce problème. Il évite aussi le calcul de f.

3.e) Calcul de la fonction de répartition:

On considère une variable aléatoire vectorielle X dans R^d. On désire calculer, par simulation, sa fonction de répartition F définie par:
$F(x) = Prob(X \leq x)$ $X \leq x$ veut dire qu'il y a inégalité composante par composante. Pour celà, on peut calculer F point par point en utilisant à chaque point un calcul d'espérance puisque $F(x) = E(\mathbf{1}_{\{X(\omega) \leq x\}})$. Cette méthode est praticable si on s'intéresse à la valeur de F en quelques points, mais si on s'intéresse à F en tant que fonction, le théorème suivant va nous permettre de l'approcher, en une seule simulation, par des fonctions en escaliers qu'on appelle fonctions de répartition empiriques.

Théorème:

Soit une suite de variables aléatoires vectorielles $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ indépendantes de même loi que X. Presque sûrement les fonctions de répartition empiriques:

$$F_{\omega,n}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_i(\omega) \leq x\}}$$

convergent vers F(x) uniformément en x.

On a une estimation de la vitesse de convergence dans le cas où la fonction F est continue. Presque sûrement:

$$\limsup_n \; (2n)^{0.5} (\text{LogLog } n)^{-0.5} \sup_x \left| F_{\omega,n}(x) - F(x) \right| = 1$$

Autrement dit, pour X réelle, si $x_1 \leq x_2 \leq ..... \leq x_n$ sont les valeurs, rangées dans l'ordre croissant, de n réalisations indépendantes de X, on approxime F par:

$F_n(x) = 0$ pour $x < x_1$

$F_n(x) = i/n$ pour $x_i \leq x < x_{i+1}$ $i = 1, n-1$

$F_n(x) = 1$ pour $x_n \leq x$

Remarque: il est plus avantageux de classer les x_i au fur et à mesure de leur apparition, plutôt que de les classer en une seule fois quand leur tirage est achevé.

3.f) Exemple:

Pour illustrer les algorithmes précédents, on traite un problème de calcul à la rupture probabiliste tiré de [6].

On considère la poutre à deux travées représentée sur la figure 1. Le chargement dépend d'un paramètre $Q \geq 0$. On suppose que le moment limite en flexion positive et négative dans chaque travée, repérée par l'indice i, est de la forme:

$$m_i = \alpha_i\, m \quad , \quad i=1,2$$

m étant un paramètre stictement positif.

On établit que le système est potentiellement stable si, et seulement si, le couple (α_1, α_2) vérifie:

$$\alpha_1 \geq c \qquad 2\alpha_1 + \alpha_2 \geq 3c \qquad \alpha_2 \geq 0.5c \qquad \text{avec} \quad c = 2QL/3m$$

on suppose dans la suite que α_1 et α_2 sont des variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur [1,2]. On note $P_s(c)$ la probabilité de stabilité potentielle.

1) calculer $P_s(7/4)$.

2) trouver c tel que $P_s(c) = 7/16$.

3) tracer le graphe de $c:\rightarrow P_s(c)$.

Ce problème simple possède une solution analytique et on établit dans [6] que:

$P_s(c) = 0$ pour $2 < c$

$P_s(c) = 2(2-c)^2$ pour $5/3 < c \leq 2$

$P_s(c) = 2 - c - (c-1)^2/4$ pour $1 < c \leq 5/3$

$P_s(c) = 1$ pour $c \leq 1$

On désire traiter les points 1), 2) et 3) par simulation. On définit la variable aléatoire:

$$\beta = \inf(\alpha_1, (2\alpha_1 + \alpha_2)/3, 2\alpha_2)$$

Dès lors on a:

$$P_s(c) = \text{probabilité}(\beta \geq c) = E(1_{\{\omega / \beta(\omega) \geq c\}})$$

1) On simule β à partir de sa définition en fonction de α_1 et α_2 :

$$\beta(\omega) = \inf(1 + U_1(\omega), 1 + (2U_1(\omega) + U_2(\omega))/3, 2 + 2U_2(\omega))$$

$U_1(\omega)$ et $U_2(\omega)$ sont des variables indépendantes uniformément réparties sur [0,1]. Si $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ est une suite de nombres *pseudo-aléatoires*, à l'étape i:

$$\beta_i = \inf(1 + x_{2i-1}(\omega), 1 + (2x_{2i-1}(\omega) + x_{2i}(\omega))/3, 2 + 2x_{2i}(\omega))$$

On applique ensuite la loi des grands nombres au calcul de $E(1_{\{\omega / \beta(\omega) \geq 7/4\}})$.

Figure 2. On peut estimer l'erreur commise en utilisant la loi du logarithme itéré: l'écart type d'une fonction caractéristique étant inférieure à 0.25, l'erreur commise est de l'ordre de $0.25\ (2n\ \text{LogLog}\ n)^{0.5}\ n^{-1}$. Ainsi, pour $n = 1000$, on estime l'erreur à 0.015. Cette estimation donne une erreur relative de 12%.

2) On applique l'algorithme de Robbins-Monro à la famille de variables aléatoires paramétrée par c: $Y_c = 1_{\{\omega / \beta(\omega) \geq c\}}$

on choisit: $c_0 = 1.2$ et $\gamma_n = 0.5/n$

à l'étape n+1, on a alors:

* si $\beta_n \geq c_n$ $\quad c_{n+1} = c_n + (0.5/n)(1 - 7/16)$

* si $\beta_n < c_n$ $\quad c_{n+1} = c_n + (0.5/n)(0 - 7/16)$

Figure 3. On peut estimer l'erreur commise à l'aide du critère de Dvoretzky: l'erreur est de l'ordre de $(6n)^{-0.5}$. Ainsi, pour $n = 100$, on estime l'erreur à 0.04. L'erreur relative est estimée à 0.03%.

3) Pour tracer le graphe de c:→ $P_s(c)$ on remarque que:

$P_s(c) = 1 - F(c)$, F étant la fonction de répartition de β

On applique l'algorithme du calcul d'une fonction de répartition. Figure 4. La convergence est uniforme en c et l'erreur commise sur $P_s(c)$ est estimée à $(\text{LogLog } n)^{0.5} (2n)^{-0.5}$. Ainsi pour n = 50 l'erreur est de l'ordre de 0.12.

Pour conclure ce chapitre de rappels, on peut dire que l'utilisation des algorithmes stochastiques présentées requiert beaucoup d'attention surtout pour l'estimation des erreurs puisque ces dernières sont elles mêmes aléatoires.

Références:

[1] N. Bouleau, Probabilités de l'ingénieur, variables aléatoires et simulation, Hermann, Paris, 1986.

[2] Press & al., Numerical Recipes, Cambridge University press. 1986.

[3] N. Bouleau, D. Lamberton, B. Lapeyre, une méthode numérique adaptée au calcul probabiliste des structures, Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, Vol. 5 n°5,1986.

[4] Kieffer & Wolfowitz, Stochastic estimation of the maximum of a regression function, Ann. Math. Stat., Vol.23, p. 462-466,1952.

[5] Benveniste & al., Algorithmes adaptatifs et approximations stochastiques, Masson, Paris, 1987.

[6] Carmasol, Approche probabiliste du calcul à la rupture, Thèse Docteur-Ingénieur, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1983.

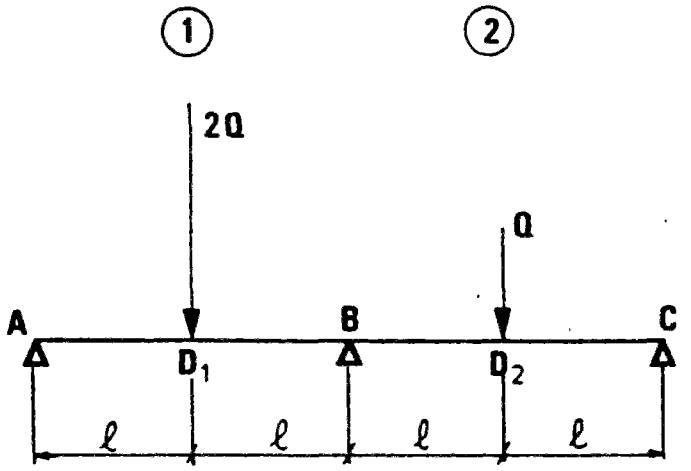


Figure 1 : Poutre continue à deux travées.

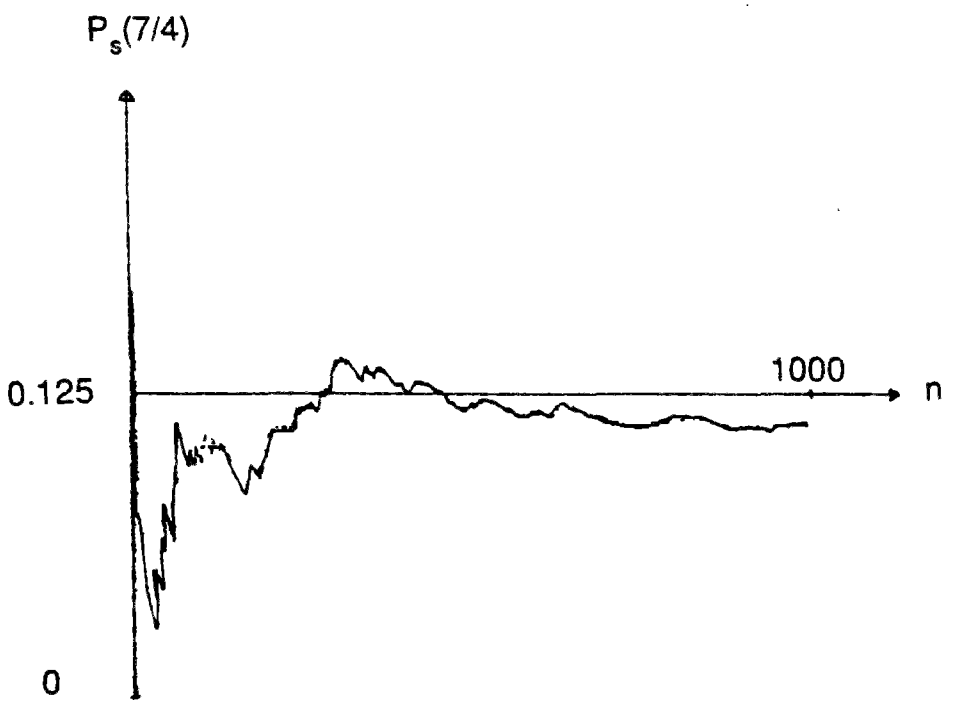


Figure 2: Calcul de $P_s(7/4)$

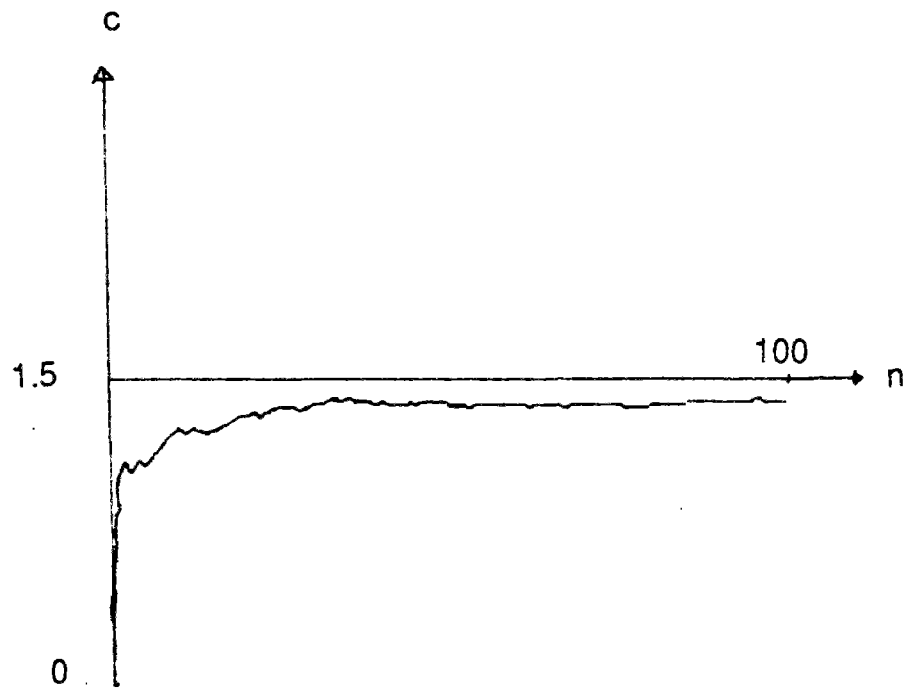


Figure 3: Robbins-Monro

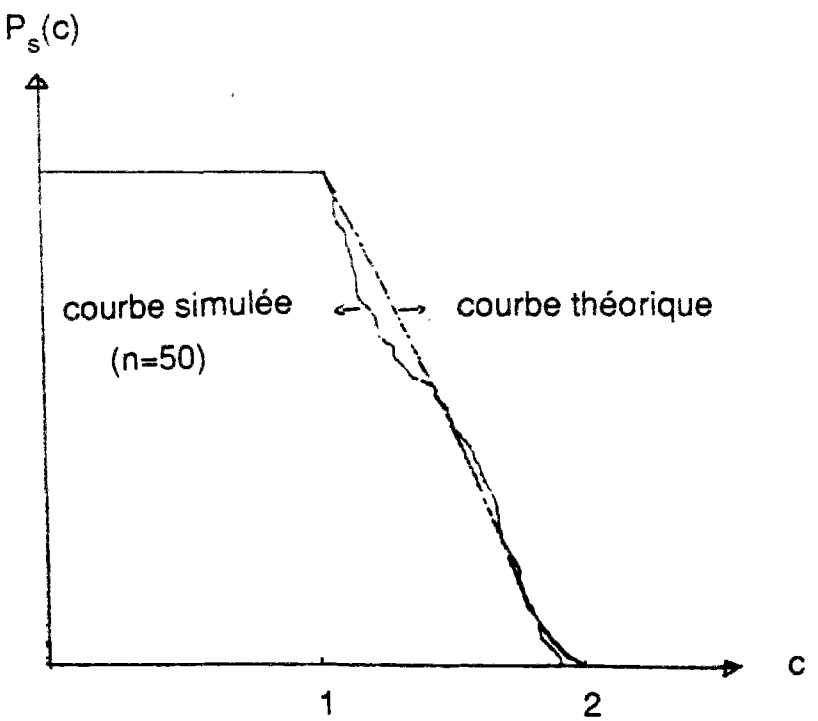


Figure 4: Calcul de $P_s(c)$

Chapitre 2
Deux Contributions aux suites à discrépance faible

Introduction.

1) Rappel sur les suites à discrépance faible.

2) Application aux intégrales impropres.

3) Application à Robbins-Monro.

Introduction:

Comme le volume de calcul utilisé lors d'une simulation en mécanique aléatoire dépend essentiellement du nombre d'étapes nécessaires à la convergence des algorithmes stochastiques avec une précision suffisante, nous avons intérêt à réduire ce nombre pour pouvoir augmenter la taille des problèmes traités. Le sujet traité dans ce chapitre est l'accélération de la vitesse de convergence des algorithmes stochastiques.

Nous avons vu dans le chapitre précédent que le calcul, par simulation, de l'espérance d'une variable aléatoire X utilise des suites *pseudo-aléatoires* sur [0,1]. Ces suites déterministes vérifiant les tests statistiques, servent d'approximation aux suites aléatoires. Si la simulation de X fait un seul appel par étape à ces suites, c'est qu'on a $X(\omega)$ sous la forme $X(\omega) = f(U(\omega))$ où U est une variable uniforme sur [0,1] et f une fonction intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur [0,1]. La fonction f est généralement sans expression explicite. Le calcul de l'espérance de X, qui n'est autre que l'intégrale de f, se fait de façon approchée lors d'une simulation par:

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n} \longrightarrow \int_0^1 f(x)dx$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ étant une suite *pseudo-aléatoire*..

Quand f est Riemann intégrable, ce calcul peut être fait plus rapidement en utilisant d'autres suites de réels de [0,1] à la place des suites *pseudo-aléatoires*. Ces suites sont dites à discrépance faible. Leur utilisation pour le calcul des intégrales est connue, mais malheureusement peu courante.

Après un rappel sur la question, nous présentons dans ce chapitre deux contributions à l'étude des suites à discrépance faible: la première consiste à généraliser leur usage au calcul des intégrales impropres (f possède une branche infinie); et la deuxième consiste à démontrer la convergence de l'algorithme de Robbins-Monro quand on y remplace l'appel à une suite pseudo-aléatoire par l'appel à une suite à discrépance faible. Lapeyre et Pagès démontrent, quant à eux, que la convergence est alors plus rapide [3].

1) Rappel sur les suites à discrépance faible:

On se contente dans ce paragraphe de donner les définitions et les théorèmes qui nous seront utiles dans la suite. Pour plus de détail sur le sujet, voir les références [1], [2], [3], et [4].

Définition: Une suite infinie de nombres réels $(\xi_i)_{i\geq 1}$ dans [0,1] est dite équirépartie si et seulement si pour toute fonction f borélienne bornée de [0,1] dans R continue presque partout par rapport à la mesure de Lebesgue:

$$\frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \ldots + f(\xi_n)}{n} \longrightarrow \int_0^1 f(x)dx \quad \text{quand n tend vers } +\infty.$$

Rappelons qu'une fonction f de [0,1] dans R est borélienne bornée continue presque partout par rapport à la mesure de Lebesgue ssi elle est Riemann intégrable.

En notant par μ_n les mesures de probabilité sur [0,1] $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{\xi_i}$, on démontre que la définition précédente revient à dire que les μ_n convergent étroitement vers la mesure de Lebesgue. On démontre par ailleurs, que les μ_n convergent étroitement vers la mesure de Lebesgue ssi leurs fonctions de répartitions $F_n(x)$ convergent uniformément vers la fonction de répartition de la mesure de Lebesgue $F(x)=x$, d'où

Définition: La discrépance à l'ordre n de $(\xi_i)_{i\geq 1}$, $D_n(\xi)$, est la distance de F_n à F pour la norme de la convergence uniforme c-à-d :

$$D_n(\xi) = \sup_{x\in[0,1]} | F_n(x) - F(x) | = \sup_{x\in[0,1]} | \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{\xi_i\leq x\}} - x |$$

Théorème: $(\xi_i)_{i\geq 1}$ est équirépartie ssi $D_n(\xi) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

La notion de discrépance sert dans l'évaluation de la vitesse de convergence donnée par l'inégalité de Koksma quand f est à variation bornée:

$$\left| \frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \ldots + f(\xi_n)}{n} - \int_0^1 f(x)dx \right| \leq V(f)\, D_n(x).$$

où V(f) est la variation de f sur [0,1].

Exemples de suites équiréparties:

a) Soit $u(\omega)=\{u_1(\omega), u_2(\omega),..., u_n(\omega),...\}$ une réalisation d'une suite infinie de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur [0,1], alors pour presque tout ω il existe une constante $C(\omega) > 0$ telle que:

$$\exists\ N \text{ tel que } \forall\ n > N \qquad D_n[u(\omega)] \leq C(\omega)\sqrt{\frac{\text{Log Log } n}{n}}$$

b) Suites de Van Der Corput: soit p un nombre premier et soit

$i = a_0 + a_1 p + \ldots + a_k p$ le développement p-adique de i, $a_l \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$.

On définit: $\phi_p(i) = a_0 p^{-1} + a_1 p^{-2} + \ldots + a_k p^{-(k+1)} \in [0,1]$ alors

- $(\phi_p(i))_{i\geq 1}$ est équirépartie et
- $D_n(\phi_p) \leq \dfrac{p \text{ Log } pn}{n \text{ Log } p}$
- Un algorithme de calcul de $\phi_p(i)$ est donné ci-dessous

```
      function phi(i,p)
      integer p, b, a
      phi=0.
      m=i
      b=1
10    if(m.ne.0)then
      a=m/b-(m/(b*p))*p
      m=m-a*b
      ra=a
      b=b*p
      phi=phi+ra/b
       goto10
      endif
      end
```

Les suites de Van Der Corput $(\phi_p(i))_{i\geq 1}$ ont une discrépance plus faible que celle des suites aléatoires et on montre par ailleurs que l'ordre de leur discrépance est minimale, c-à-d que leur discrépance est minimale à une constante multiplicative près. De telles suites sont dites à discrépance faible. Voir [1].

2) Application aux intégrales impropres:

Soit f une fonction Riemann intégrable sur [0,1] ne possédant pas de primitive. Le calcul de l'intégrale de f doit se faire de façon numérique. L'utilisation des suites de Van Der Corput s'impose, par sa récursivité et sa rapidité, quand f n'est pas suffisamment régulière. De même, dans un calcul d'espérance par simulation il est plus avantageux d' utiliser les suites de Van Der Corput à la place des suites *pseudo-aléatoires* parce que la convergence est plus rapide et le critère d'arrêt déterministe. La pratique de ces suites m' a poussé à étendre cette méthode au cas où f possède une branche infinie, l'intégrale étant donc impropre. Exemple:

Calculer $\int_0^1 (\sin u)^{-0.7} e^{-u^2} du$

Pour fixer les idées, on étudie le cas où f a une seule branche infinie en 0.

Proposition: soit f une fonction de]0,1] dans R à variation bornée sur tout intervalle [u,1] $0<u<1$, on note $V_u(f)$ la variation de f sur cet intervalle. On suppose que $\int_{[0,1]} f(u)du$ existe et que $\lim_{u\to 0} V_u(f)\ u \operatorname{Log} u = 0$, alors:

$$\frac{f(\phi_p(1)) + f(\phi_p(2)) + \ldots + f(\phi_p(n))}{n} \longrightarrow \int_0^1 f(u)du \quad \text{quand n tend vers } +\infty.$$

Démonstration: L'idée est d'appliquer l'inégalité de Koksma à une suite de fonctions à variation bornée d'intégrale tendant vers $\int_{[0,1]} f(u)du$. Soit $n \geq 1$ et k l'unique entier vérifiant $p^k \leq n < p^{k+1}$, d'après la définition des $\phi_p(i)$ on a: $\forall\ i \leq n \quad \phi_p(i) \geq 1/pn$; on définit alors la suite (f_n) de fonctions à variation bornée, nulles sur [0,1/np[et coïncidant avec f ailleurs.

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\phi_p(i)) - \int_0^1 f\,du\right| \leq \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\phi_p(i)) - \int_0^1 f_n\,du\right| + \left|\int_0^1 (f-f_n)\,du\right|$$

Le deuxième terme du second membre tend vers 0 par définition de

l'intégrale impropre, quant au premier terme il est majoré par:

$\frac{-p^2}{\text{Log } p} V_{(\frac{1}{np})}(f) (\frac{1}{np}) \text{Log } (\frac{1}{np})$ qui tend vers 0 avec n.

La condition portant sur $V_u(f)$ est vérifiée si au voisinage de 0, f(u) est d'ordre $u^{-\alpha}$ avec $0<\alpha<1$.

3) Application à Robbins-Monro:

L'idée est de remplacer les suites *pseudo-aléatoires* par des suites équiréparties à discrépance faible (en pratique, les suites de Van Der Corput) dans les algorithmes stochastiques basés sur l'espérance afin d'en accélérer la vitesse de convergence. Et en effet, on constate que la convergence a eu lieu dans toutes les simulations qu'on a effectuées, et de façon plus rapide et plus régulière. Mais si l'utilisation de ces suites est facilement justifiée par la pratique de la simulation, la justification théorique est, par contre, assez délicate. La difficulté principale est qu'on sort du cadre aléatoire et qu'on perd, dès lors, les notions probabilistes de la convergence des variables aléatoires comme par exemple la convergence presque sûre. Pour comprendre cette difficulté, il est utile de souligner la démarche intellectuelle qui a permis l'utilisation des suites à discrépance faible dans le calcul d'espérances. Soit X une vaiable aléatoire réelle qu'on peut mettre sous la forme $X(\omega)=f(U(\omega))$ avec U de loi uniforme sur [0,1], et soit $(u_i(\omega))_{i\geq 1}$ une réalisation d'une suite infinie de variables indépendantes de même loi que U, la loi forte des grands nombres affirme que si f est Lebesgue intégrable la moyenne arithmétique des $f(u_i)$ converge presque sûrement vers l'espérance de X , c-à-d que f étant donné, la probabilité pour qu'une réalisation (u_i) ne conduise pas à la convergence est nulle; mais pour une réalisation donnée, on peut trouver des fonctions f dans L^1 pour lesquels on n'a pas la convergence. Mais quand on utilise une suite équirépartie dans le calcul précédent, on perd l'aléa et la convergence vers l'intégrale doit être établie au sens usuel ce qui nécessite une hypothèse supplémentaire sur f, en l'occurence, on suppose f Riemann intégrable. D'après ce qui précède, on aura complètement résolu le problème dans le cas des algorithmes stochastiques quand on aura trouvé

les hypothèses supplémentaires les "moins restrictives". On traite dans la suite l'algorithme de Robbins-Monro dans le cas réel quand les variables aléatoires sont simulées avec un seul appel par étape. La formulation naturelle de cet algorithme est la suivante:

Soit $F : R \times [0,1] \to R$ telle que :

$\forall x \in R \quad F(x,.) \in L^1$ et $M(x) = \int_{[0,1]} F(x,u)du$ est strictement croissante.

On veut résoudre l'équation: $M(\alpha) = \beta$. Cette équation admet une solution unique si $\beta \in M(R)$ ce qu'on supposera dans la suite. L'algorithme se définit alors par la relation de récurrence:

$$x_0 \in R \quad x_{n+1} = x_n - \gamma_{n+1}(F(x_n , \xi_{n+1}) - \beta)$$

avec: $(\gamma_i)_{i\geq 1}$ une suite de réels positifs. $(\xi_i)_{i\geq 1}$ une suite de [0,1] .

Problème: trouver des conditions suffisantes sur $(\gamma_i)_{i\geq 1}$, $(\xi_i)_{i\geq 1}$ et F pour que l'algorithme précédent converge vers l'unique solution α , et évaluer la vitesse de convergence.

On remarque tout d'abord que la suite (x_n) est définie par la relation:

$$\forall n \geq 1 \quad x_n = x_0 - \sum_{k=1}^{n} \gamma_k(F(x_{k-1}, \xi_k) - \beta)$$

Pour oublier la condition initiale il faut imposer $\Sigma \gamma_n = +\infty$. Il est aussi nécessaire d'avoir $\gamma_n \to 0$ quand $n \to +\infty$. On fera ces hypothèses dans la suite.

Intuitivement, si x_n converge vers α on obtient , en remplaçant x_{k-1} par α dans la relation précédente, la convergence de $\Sigma \gamma_k(F(\alpha , \xi_k) - \beta)$.

La formule de Koksma qui sert à évaluer la vitesse de convergence en fonction de la discrépance suppose que la fonction à intégrer est à variation bornée. Des hypothèses de ce type seront nécessaires.

Théorème:

Si $(\gamma_i)_{i\geq 1}$, $(\xi_i)_{i\geq 1}$ et F sont telles que:

(i) F est bornée.

(ii) $\forall x \in R$ la série $\Sigma \gamma_k(F(x, \xi_k) - M(x))$ converge.

(iii) $\forall u \in [0,1]$ F(.,u) est croissante.

Alors:

$$x_n \to \alpha$$

Démonstration:

Démontrons d'abord que: $\liminf_n x_n \leq \alpha \leq \limsup_n x_n$.

Par l'absurde: supposons par exemple $\alpha > \limsup_n x_n$, alors

$\exists \tau < \alpha$ tel que: $\exists N$ tel que $\forall n \geq N$ $x_n \leq \tau$ et on a:

$$x_n = x_N - \sum_{k=N+1}^{n} \gamma_k(F(x_{k-1},\xi_k)-\beta) \geq x_N - \sum_{k=N+1}^{n} \gamma_k(F(\tau,\xi_k)-M(\tau)) + (\beta - M(\tau)) \sum_{k=N+1}^{n} \gamma_k \longrightarrow +\infty$$

ce qui est absurde. De même $\liminf_n x_n \leq \alpha$.

Démontrons maintenant que $\liminf_n x_n \leq \alpha < \limsup_n x_n$ est absurde.

En effet, dans ce cas on peut trouver $\varepsilon>0$ tel que:

$$\liminf_n x_n < \alpha + \varepsilon < \alpha + 2\varepsilon < \limsup_n x_n$$

La suite (x_n) traverse indéfiniment l'intervalle $[\ \alpha + \varepsilon, \alpha + 2\varepsilon\ ]$ de part et d'autre, il existe alors deux sous suites extraites $(x_{\phi(n)})$, $(x_{\lambda(n)})$ vérifiant:

$\forall n \quad \phi(n)<\lambda(n),\ x_{\phi(n)} < \alpha+\varepsilon\ ,\ \alpha+2\varepsilon < x_{\lambda(n)}$ et $\forall p \in \{\phi(n)+1,\ldots, \lambda(n)\}\ x_p > \alpha+\varepsilon.$

Par construction $x_{\lambda(n)} - x_{\phi(n)} > \varepsilon$ c'est à dire:

$$\sum_{k=\phi(n)}^{\lambda(n)-1} \gamma_{k+1}(F(x_k,\xi_{k+1})-\beta\ ) < -\varepsilon$$ et puisque F(.,u) est croissante on a:

$$\sum_{k=\phi(n)+1}^{\lambda(n)-1} \gamma_{k+1}(F(\alpha+\varepsilon,\xi_{k+1})-\beta\ ) < -\varepsilon - \gamma_{\phi(n)+1}(F(x_{\phi(n)},\xi_{\phi(n)+1})-\beta)$$

On obtient la contradiction en passant à la $\limsup_n$ dans l'inégalité

précédente; d'une part, le premier membre se décompose en deux parties:

$$\sum_{k=\phi(n)+1}^{\lambda(n)-1} \gamma_{k+1}(F(\alpha+\varepsilon,\xi_{k+1})-M(\alpha+\varepsilon)) + (M(\alpha+\varepsilon)-\beta) \sum_{k=\phi(n)+1}^{\lambda(n)-1} \gamma_{k+1}$$

la première tend vers 0 d'après (ii), et la seconde est toujours positive ou nulle; d'autre part, le second membre tend vers $-\varepsilon$ puisque F est bornée et γ_n tend vers 0. Donc on a démontré que $\limsup_n x_n = \alpha$. De même, on démontre $\liminf_n x_n = \alpha$, d'où la convergence.

Application: Pour vérifier l'hypothèse (ii) du théorème précédent, on suppose que:

-(γ_n) est donnée par le critère de Dvoretzky, alors γ_n est de la forme $1/(an+b)$ où a et b sont des constantes positives.

- (ξ_n) est une suite de Van Der Corput.

- $\forall x \in R$ F(x,.) est à variation bornée.

En effet, si on pose $V_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} F(x,\xi_k) - M(x)$, par transformationd'Abel on a la relation:

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k(F(x,\xi_k)-M(x)) = n\gamma_n V_n(x) + \sum_{k=1}^{n} k(\gamma_k - \gamma_{k+1})V_k(x)$$

mais d'après l'inégalité de Koksma on a: $|V_n(x)| \le V(F(x,.))\ D_n(\xi)$. Il est alors facile de voir que le premier terme tend vers 0 , et que le second terme est une série absolument convergente.

Le théorème précédent démontre la convergence de l'algorithme sous certaines hypothèses mais ne donne pas de renseignements sur la vitesse de convergence, et en particulier sa dépendance en fonction de la discrépance. En faisant d'autres hypothèses, Lapeyre et Pagès ont traité ce point à l'aide du théorème suivant:

Théorème: on suppose,

(i) $\gamma_n = 1/(an+b)$, $D_n(\xi) = O(1/n^r)$ $r>0$

(ii) $\forall\, x \in R$ $F(x,.)$ est à variation bornée.

(iii) $\exists\, \rho$ $0 \leq \rho < 1$ tel que $\forall\, x, y \in R$ $\forall\, u \in [0,1]$

$$| x-y-F(x,u)+F(y,u) | \leq \rho\, | x-y |$$

Alors:

$$| x_n - \alpha | \leq \varepsilon_n(D_1(\xi), \ldots , D_n(\xi)) \rightarrow 0$$

ε_n étant positive, croissante en fonction de chaque variable. Elle est explicitement donnée en [3].

Les théorèmes précédents supposent des hypothèses assez sévères, et on a construit des contre-exemples relatifs à chaque hypothèse, ces contre-exemples utilisent spécifiquement la valeur initiale, les coefficients (γ_n) et (ξ_n) . En fait,ils sont très "artificiels" car si on perturbe infinitésimalement la valeur initiale, ou la valeur des coefficients, ou leur point de départ, la convergence a toujours lieu plus vite qu'avec les suites *pseudo-aléatoires* . En pratique, la vérification de ces hypothèses est superflue: il suffit de remplacer les suites *pseudo-aléatoires* par les suites de Van Der Corput. De plus, on a un résultat qui affirme que si l'algorithme converge vers λ alors si on suppose que:

- F est borélienne bornée sur un petit rectangle $[\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon]\times[0,1]$, continue en tout point de $\{\lambda\}\times A$, A étant une partie Lebesgue- mesurable de [0,1] de mesure 1.

ou

- $(F(.,u))_{u\in[0,1]}$ est équicontinue au point λ, et $F(\lambda,.)$ Riemann-intègrable.

Alors:

$$\lambda = \alpha \ .$$

Remarque très importante:

On a supposé dans cette étude que la simulation d'une variable aléatoire fait un seul appel par étape à une suite *pseudo-aléatoire*: on a $X(\omega)$ sous la forme $X(\omega) = f(U(\omega))$, où U est une variable uniforme sur [0,1] et f une fonction intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur [0,1]. Que se passe-t-il quand on fait k appels par étape à une suite *pseudo-aléatoire*: on a $X(\omega)$ sous la forme $X(\omega) = f(U_1(\omega),..., U_k(\omega))$. $U_1(\omega),..., U_k(\omega)$ sont des variables indépendantes uniformément réparties sur [0,1] et f une fonction intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[0,1]^k$? Il est licite de remplacer les suites *pseudo-aléatoires* par k suites de Van Der Corput, une suite par variable uniforme. Remplacer le générateur de nombres *pseudo-aléatoires* par une seule suite de Van Der Corput serait une grave erreur. Quant à la vitesse de convergence des algorithmes stochastiques basés sur l'espérance comme la loi des grands nombres, le calcul d'une fonction de répartition, Robbins-Monro ou le gradient stochastique, la pratique montre que, dans l'état actuel des choses, le remplacement des suites *pseudo-aléatoires* par des suites de Van Der Corput est avantageux tant que k est inférieur à 13. L'utilisation des suites à discrépance faible est un sujet de recherche en plein développement. D'autres suites que celles de Van Der Corput sont étudiées.

Exemple:

On reprend l'exemple traité dans le premier chapitre.

$$\beta(\omega) = \inf(1+U_1(\omega),\ 1+(2U_1(\omega)+U_2(\omega))/3,\ 2+2U_2(\omega))$$

On génère β en utilisant deux suites de Van Der Corput, à l'étape i:

$$\beta_i = \inf(1+\phi_2(i),\ 1+(2\phi_2(i)+\phi_3(i))/3,\ 2+2\phi_3(i))$$

En toute rigueur, on n'a pas démontré la convergence de l'algorithme de Robbins-Monro quand on fait appel à deux suites de Van Der Corput. Néanmoins, la pratique nous montre que la convergence a lieu. La

comparaison avec les suites *pseudo-aléatoires* est illustrée dans les figures 2', 3', et 4'. La convergence des algorithmes est plus régulière et plus rapide. L'erreur commise dans le calcul de l'espérance par la loi des grands nombres en fonction de la discrépance est **asymptotiquement** meilleure pour les suites de Van Der Corput. Elle a l'avantage d'être déterministe. La pratique montre que tant que le nombre d'appels par étape à une suite *pseudo-aléatoire* reste inférieur à 13, les suites de Van Der Corput sont plus performantes. Quant à l'algorithme de Robbins-Monro on sait aussi qu'avec les hypothèses faites plus haut, l'erreur commise est **asymptotiquement** meilleure pour les suites de Van Der Corput, mais on n'a pas d'estimateur pratique. Il faudra se référer à la pratique.

Références:

[1] Kuipers & Nieddereiter, Uniform distribution of sequences, Wiley, New-York, 1974.

[2] Keng & Yuan, Application of number theory to numerical analysis, Springer-Verlag, 1981.

[3] Pagès, Sur quelques problèmes de convergence, Thèse de l'Université Paris 6, 1988.

[4] N. Bouleau, Probabilités de l'ingénieur, variables aléatoires et simulation, Hermann, Paris, 1986.

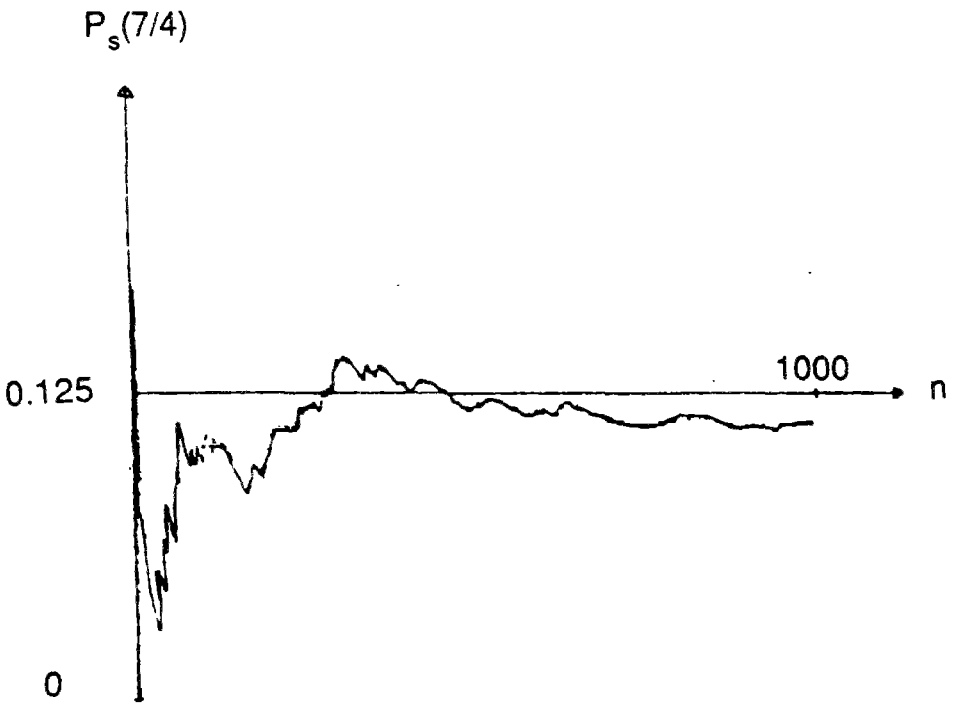


Figure 2: Calcul de $P_s(7/4)$

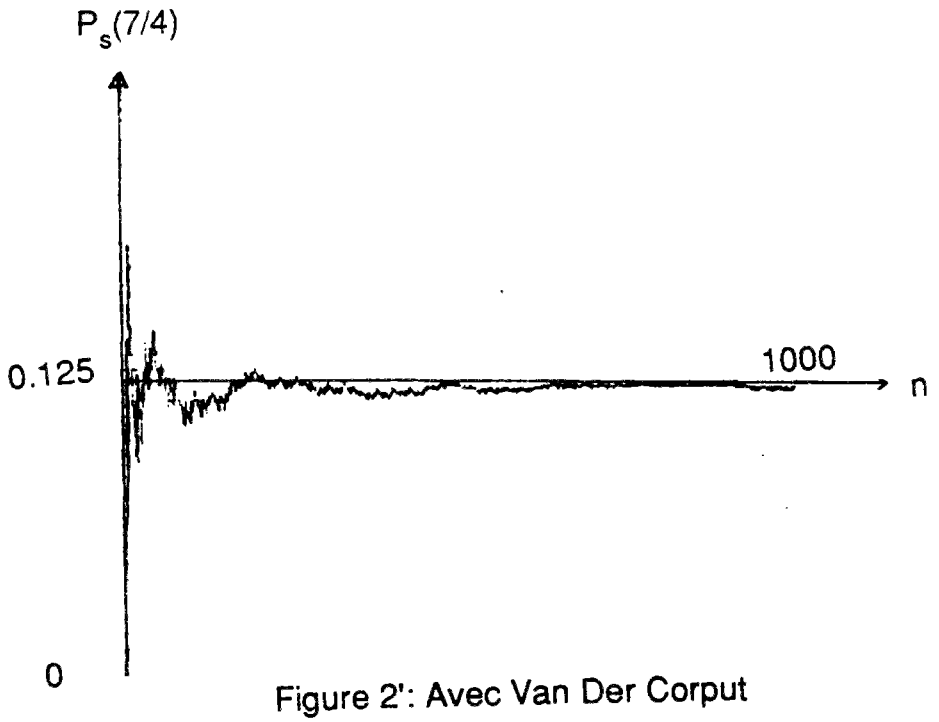


Figure 2': Avec Van Der Corput

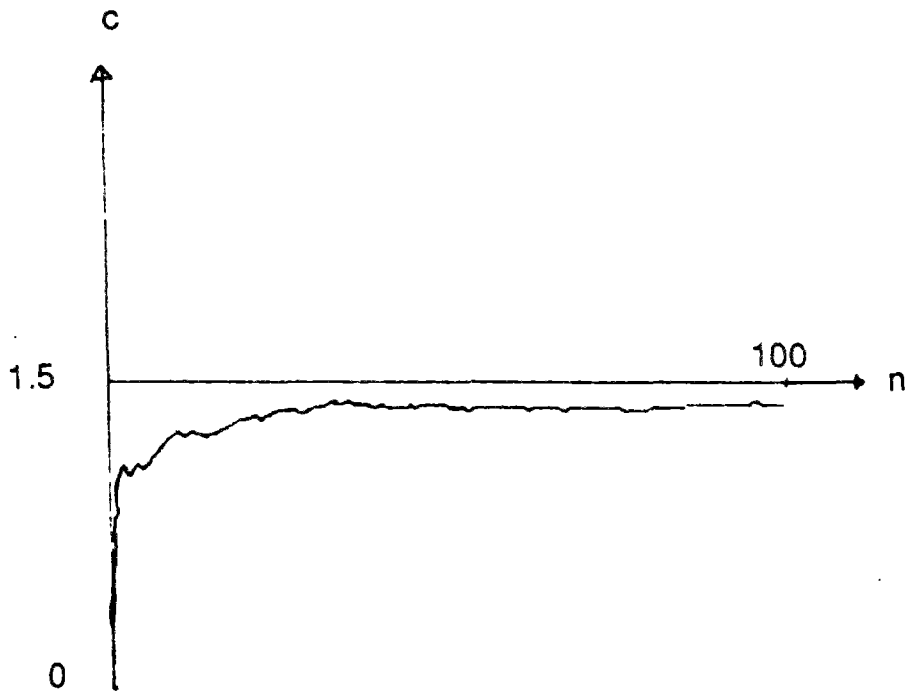


Figure 3: Robbins-Monro

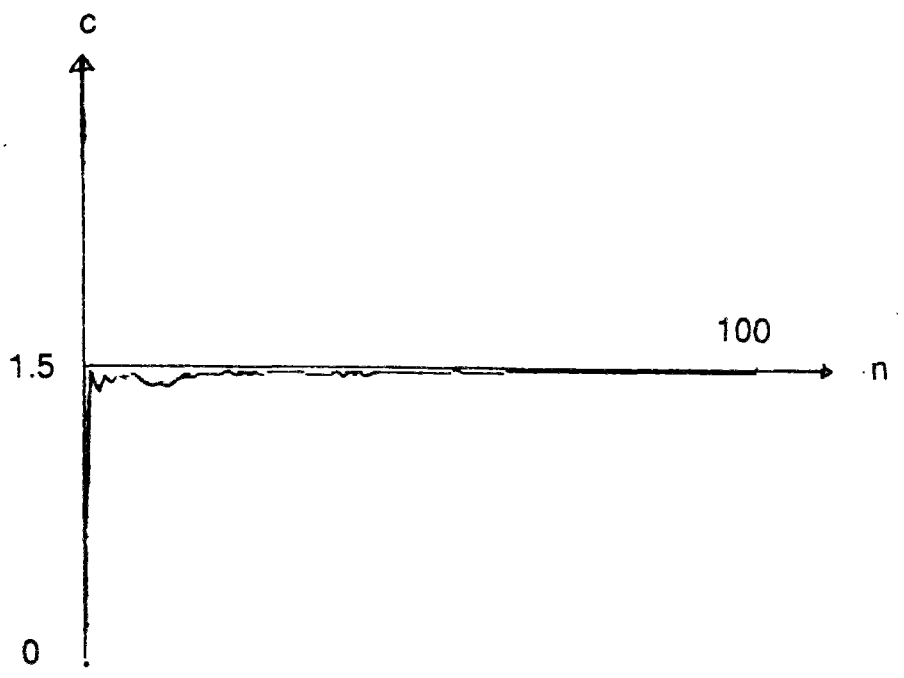


Figure 3': Avec Van Der Corput

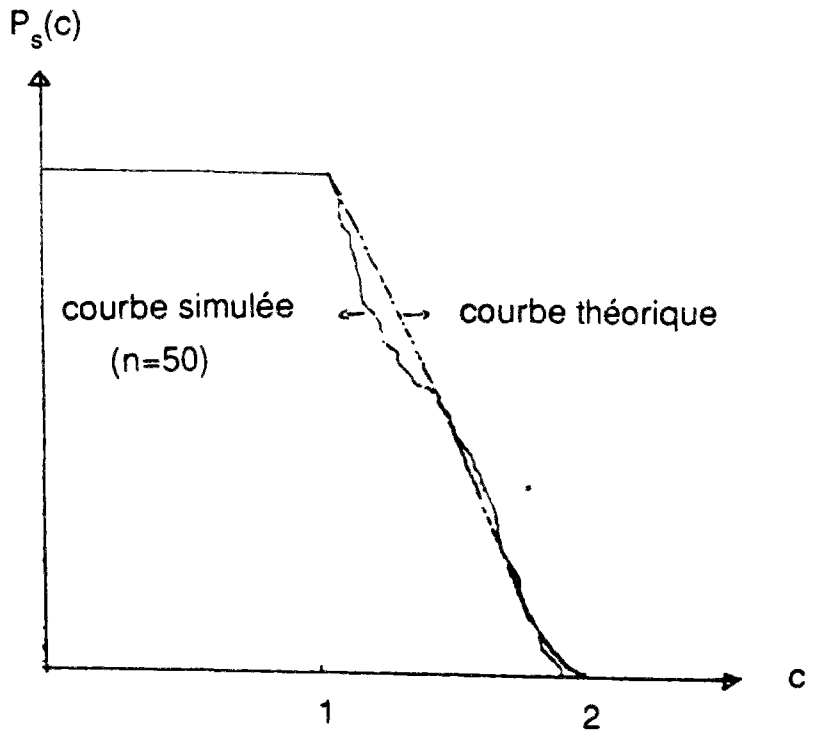


Figure 4: Calcul de $P_s(c)$

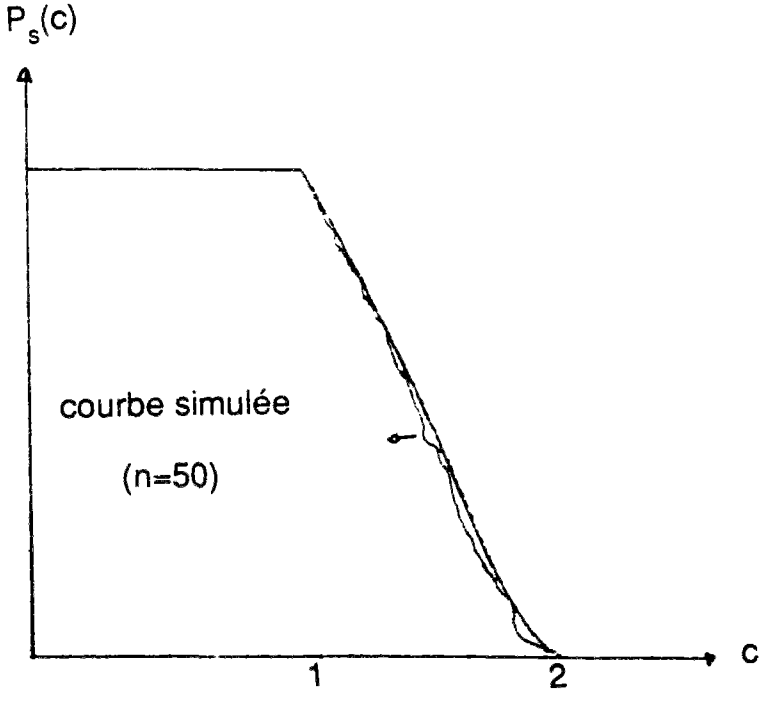


Figure 4': Avec Van Der Corput

Chapitre 3

Homogénéisation des matériaux élastiques à microstructure aléatoires

1 Introduction **1**
- 1.1 Généralités 1
- 1.2 Le cas unidimensionnel 4

2 Description de la simulation **10**
- 2.1 Définition des grandeurs macroscopiques 10
  - 2.1.1 L'approche déformation 11
  - 2.1.2 L'approche contrainte 12
- 2.2 Description de la microstruture 15
- 2.3 La procédure numérique 19
  - 2.3.1 Définition et calcul de $R_N^m(\omega)$: 19
  - 2.3.2 Définition de $S_N^m(\omega)$ 20
- 2.4 Résultats numériques 22

3 Justification mathématique de la simulation **28**
- 3.1 Système de l'élasticité 28
- 3.2 Position du problème 33
- 3.3 Définition de R^{hom} 35
- 3.4 Définition de S^{hom} 41

1 Introduction

On s'intéresse dans ce chapitre aux matériaux élastiques dont la microstructure est aléatoire ; on cherche à définir et à calculer les coefficients élastiques homogènes macroscopiques à partir des propriétés élastiques de la microstructure. Il s'agit d'un passage de l'échelle "microscopique" à l'échelle "macroscopique". Ce sujet a été étudié depuis longtemps et on peut citer les contributions de Mandel [1], Hill [2], Bui et col [3], Matheron [4], Willis [5], Berveiller et Zaoui [6], Huet [7], Krŏner [8], Suquet[9],...etc. Dans la plupart de ces études, on obtient des bornes sur les coefficients élastiques macroscopiques; avec l'explosion de l'informatique, il est devenu possible de traiter numériquement le problème et il est fréquent de voir des simulations dans l'étude des matériaux, Roelfstra et col [10].

Ce chapitre a pour objet de montrer que le problème de l'homogénéisation en élasticité d'un matériau à microstructure aléatoire peut être résolu numériquement à l'aide d'une simulation. Après une introduction qui permet de situer le contexte dans lequel on se place, la deuxième partie décrit en détail la résolution, par simulation numérique, du problème de l'homogénéisation d'un matériau fictif bidimensionnel ayant une microélasticité aléatoire . Dans la dernière partie, on formule mathématiquement le problème en termes de processus aléatoires, et on définit rigoureusement les coefficients élastiques macroscopiques en fonction de la loi du processus qui décrit la microélasticité; ensuite, on justifie la technique de simulation utilisée dans la deuxième partie.

1.1 Généralités

On désire obtenir les propriétés mécaniques d'un matériau à partir de ses propriétés microscopiques. Par exemple, déterminer les coefficients élastiques d'un matériau à partir des coefficients élastiques de ces constituants.

Microscopique et macroscopique sont des notions relatives. Pour les métaux polycristallins, l'échelle microscopique est celle des monocristaux (quelques microns), alors que pour le béton, elle se situe au niveau de l'agrégat (quelques centimètres) ; l'échelle macroscopique étant toujours celle des échantillons utilisés dans les essais servant à déterminer les lois de

comportement du matériau considéré. Typiquement, l'essai de compression pour le béton et l'essai de traction simple pour le métal.

Andrieux [11] a rappelé dans un excellent chapitre de synthèse les principales méthodes existantes pour traiter le problème de l'homogénéisation. Il fournit aussi une bibliographie très intéressante sur le sujet.

Les principales théories sont :

a) La théorie des modules effectifs : C'est une théorie approchée qui s'applique à un matériau homogène comportant une faible concentration d'hétérogénéité. Par exemple, une roche comportant une faible concentration de cavités.

b) La méthode auto-cohérente (Self-consistent) : C'est aussi une théorie approchée. Elle s'applique à un matériau hétérogène ne comportant pas de constituant prédominant comme c'est le cas dans la théorie des modules effectifs. Tous les constituants ont des concentrations du même ordre de grandeur. Par exemple, la microstructure des métaux polycristallins est constituée de grains de forme, d'orientation cristallographique et de caractéristiques mécaniques diverses. Un exposé de cette méthode est fait dans [6].

c) L'homogénéisation périodique : C'est une théorie exacte qui a donné lieu à des développements mathématiques très importants. Voir [9] et [12]. Elle s'applique aux matériaux dont la microstructure est périodique comme par exemple les matériaux composites.

Remarquons tout de suite que les deux premières méthodes s'appliquent à des matériaux dont la structure microscopique est en réalité aléatoire. Elles opèrent une modélisation simplificatrice de la microstructure qui permet d'obtenir les propriétés macroscopiques du matériau en fonction uniquement de la concentration des constituants et de leurs propriétés. La répartition géométrique de ces constituants, qui est en fait aléatoire, ne peut pas être prise en compte dans ces modèles. On peut considérer que ces deux méthodes fournissent des solutions approchées au problème de l'homogénéisation d'un matériau à microstructure aléatoire et qu'on peut énoncer de la façon suivante : déterminer par le calcul, les grandeurs macroscopiques à partir du comportement mécanique de la microstructure et de la loi qui y régit l'aléa.

Usuellement, la détermination de ces grandeurs est faite de façon expérimentale à l'aide d'une série d'essais sur des échantillons macroscopiquement iden-

tiques. Si la dispersion dans les résultats expérimentaux est négligeable, la grandeur macroscopique mesurée est considérée comme déterministe. Ainsi, une expérience de traction simple permet de déterminer le module d'Young d'un métal de façon précise. Le module d'Young est considéré comme déterministe. Par contre, la limite d'endurance d'un métal dans une expérience de fatigue doit être considérée comme une grandeur macroscopique aléatoire puisque la dispersion dans les résultats expérimentaux est considérable. Nous verrons d'ailleurs, au chapitre suivant comment on établit un critère de rupture par fatigue des métaux à partir d'une démarche allant de l'échelle microscopique pour aboutir à un critère rendant compte de la dispersion dans les résultats expérimentaux. Le phénomène de la rupture par fatigue illustre bien la fécondité de la démarche micro-macro. Nous pensons que cette démarche peut s'avérer féconde pour la compréhension et la modélisation d'autres phénomènes mécaniques ; la simulation numérique apparaît alors comme un outil naturel pour aborder ce problème. L'obstacle majeur à la mise en place d'une simulation est, bien entendu, la taille du problème numérique à résoudre. Nous montrons dans cette étude que dans le cas de l'élasticité bidimensionnelle le problème numérique reste de taille raisonnable.

Mais avant d'exposer l'étude, posons-nous la question de savoir dans quelles conditions une grandeur macroscopique apparaît comme déterministe alors que la microstructure est aléatoire ?

En toute généralité, les résultats expérimentaux obtenus à partir d'essais sur des échantillons dont la microstructure est aléatoire, doivent être considérés comme des variables aléatoires dont les lois dépendent de la taille et de la forme de l'échantillon d'essai.

Pour s'assurer que ces lois sont indépendantes de la géométrie de l'échantillon, il faut le considérer comme infiniment grand par rapport à l'échelle microscopique. (Le module d'Young d'une barre métallique doit être indépendant de sa longueur). Cette condition n'assure pas encore le caractère déterministe de la grandeur. Il faut supposer de plus qu'elle est une grandeur statistique spatiale de l'échantillon considéré comme un milieu infini, cette propriété étant identique dans tous les échantillons : c'est l'hypothèse de l'ergodicité. Plus précisément, on dit que la structure de l'aléa est ergodique si une réalisation particulière du hasard suffit pour connaître la loi qui le régit : chaque réalisation contient toute l'information statistique.

Comme exemple intuitif d'ergodicité, on peut citer la structure de l'aléa qui porte sur l'expérience qui consiste à lancer un dé une infinité de fois. Le résultat de cette expérience est une suite infinie d'entiers compris entre 1 et 6. Cette suite dépend du hasard selon une certaine loi de probabilité, mais une réalisation particulière de cette loi, c'est-à-dire une seule expérience suffit pour déterminer la fréquence d'apparition de chaque entier ($= \frac{1}{6}$ si le dé n'est pas pipé) et sachant cela, on peut connaître entièrement la loi de probabilité sur les suites infinies.

De la même manière, les échantillons d'essai doivent être considérés comme des réalisations d'un phénomène aléatoire dont la loi peut être entièrement déterminée par l'examen microscopique d'un **seul** échantillon (théoriquement). Une conséquence majeure de l'ergodicité est qu'une moyenne spatiale portant sur une grandeur dans le milieu infini apparaît comme l'espérance mathématique de cette grandeur en un point quelconque du milieu.

En résumé, pour obtenir par le calcul une grandeur macroscopique déterministe à partir de la microstructure (aléatoire), il est nécessaire de supposer l'ergodicité et de faire le calcul sur un milieu infini.

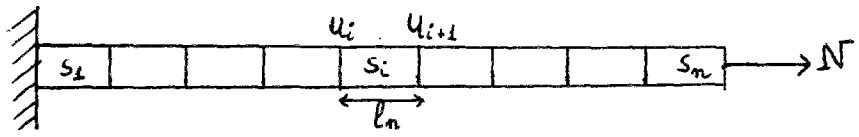
La théorie des modules effectifs, ainsi que la méthode auto-cohérente supposent explicitement le milieu infini, l'hypothèse d'ergodicité est implicite puisqu'on identifie la concentration d'un constituant à sa probabilité de présence.

A part des cas d'école, aucun calcul probabiliste analytique ne peut être mené à terme dans une approche micro-macro : aucune expression analytique ne permet d'exprimer la matrice d'élasticité homogénéisée d'un matériau à microstructure aléatoire en fonction du processus aléatoire représentant l'élasticité de la microstructure. Reste la simulation. Nous montrerons ultérieurement pourquoi une démarche micro-macro analytique a pu être fructueuse dans le cas particulier de la rupture par fatigue.

1.2 Le cas unidimensionnel

Avant d'aborder le problème de l'homogénéisation dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ il nous semble utile de préciser les concepts introduits plus haut sur un exemple unidimensionel très simple. Nous étudions une poutre de traction dont l'élasticité est homogène par morceaux. La poutre de longueur L comporte

n composantes montées en série (n très grand). Elle est encastrée en une extrémité et soumise à une force N à l'autre extrémité comme l'indique la figure :



Les n composantes sont de même longueur $l_n = \frac{L}{n}$ et se comportent linéairement : la relation qui relie l'effort normal n_i dans la $i^{ème}$ composante et son allongement relatif ϵ_i est :

$$\epsilon_i = s_i n_i \tag{1}$$

où s_i est la souplesse de la i^{eme} composante. Si on désigne par u_{i+1} et u_i les déplacements aux extrémités de la $i^{ème}$ composante, on a la relation :

$$\epsilon_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{l_n} \tag{2}$$

L'homogénéisation consiste à remplacer la poutre réelle par une poutre élastique homogène équivalente de souplesse S_n, c'est-à-dire, dont la loi de comportement est :

$$E = S_n N \tag{3}$$

où E représente l'allongement relatif de la poutre équivalente.
L'état de la poutre réelle est caractérisée par les déplacements $(u_i)_{i=1,\ldots,n}$, comment relier la grandeur macroscopique E à $(u_i)_{i=1,\ldots,n}$?
On dit alors que le travail de la force N dans la poutre réelle et dans la poutre équivalente doit être le même ce qui donne la relation :

$$N \times LE = N u_n \tag{4}$$

d'où :

$$E = \frac{u_n}{L} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \tag{5}$$

Mais l'équilibre de la poutre impose que :

$$n_i = N \qquad\qquad i = 1, \ldots, n \tag{6}$$

Les relations (6),(5),(3) et (1) impliquent alors :

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} s_i \tag{7}$$

REMARQUE : On a défini S_n en soumettant la poutre à une force N appliquée en son extrémité. On peut aussi imposer à cette extrémité un déplacement égal à $L\,E$, c'est ainsi qu'on définit la déformation macroscopique E. On définit alors l'effort normal macroscopique N en disant que l'équilibre de la poutre impose l'égalité des efforts normaux dans les composantes :

$$n_i = n_j = N$$

Dès lors N est relié linéairement à E puisque les relations (1) à (5) subsistent et on a :

$$E = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i = (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} s_i)N$$

d'où on tire (7).

Pour l'instant, nous n'avons pas parlé de microstructure aléatoire. Nous voulons modéliser le fait que les s_i sont aléatoires. Soit alors $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité et soit un processus aléatoire :

$$\begin{array}{rccl} s: & (\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}) & \longrightarrow & (\mathbb{R}_+^{\mathbf{Z}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)^{\otimes \mathbf{Z}}) \\ & \omega & \longrightarrow & (\ldots, s_{-1}(\omega), s_0(\omega), s_1(\omega), s_2(\omega), \ldots) \end{array}$$

Le processus est, bien entendu, défini par la donnée d'un système de lois marginales compatibles entre elles. Pour tout ω de Ω et tout n, la souplesse $S_n(\omega)$ est une variable aléatoire définie par la relation :

$$S_n(\omega) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} s_i(\omega).$$

Pour pouvoir parler de grandeur macroscopique homogène, il convient de regarder le comportement de $S_n(\omega)$ quand n tend vers l'infini. Pour cela, nous avons besoin des définitions suivantes :

Soit V un ensemble non vide et soit $V^{\mathbf{Z}}$ l'ensemble des suites doublement infini sur cet ensemble. Le shift T est par définition l'application :

$$\begin{array}{rccc} T: & V^{\mathbf{Z}} & \longrightarrow & V^{\mathbf{Z}} \\ & (v_i)_{i\in\mathbf{Z}} & \longrightarrow & (v_{i+1})_{i\in\mathbf{Z}} \end{array}$$

qui opère une translation d'indice sur ces suites.

* Le processus s est dit (fortement) stationnaire si sa loi $\mathbf{P}_s$ est invariante par translation, c'est-à-dire si :

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)^{\otimes \mathbf{Z}} \qquad \mathbf{P}_s(B) = \mathbf{P}_s(TB).$$

Il est équivalent de dire que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{P}(\omega/(s_n(\omega), \ldots, s_{n+k-1}(\omega)) \in C) \text{ est indépendant de } n \text{ pour tout cylindre } C \\ \text{de } \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)^{\otimes \mathbf{Z}} \text{ de la forme :} \\ C = \{(x_t)_{t \in \mathbf{Z}} / \quad x_n \in A_1, \ldots, x_{n+k-1} \in A_k \text{ où } A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\} \end{array} \right. \tag{8}$$

Il en résulte alors que les s_i sont équidistribuées.

* Le processus s est dit ergodique s'il est stationnaire et si de plus il vérifie :

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)^{\otimes \mathbf{Z}} \quad \text{tel que} \quad B = TB \quad \text{alors} \quad \mathbf{P}_s(B) = 0 \text{ ou } 1$$

On démontre que cette dernière propriété est équivalente à :

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall C_1, C_2 \text{ cylindres de } \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)^{\otimes \mathbf{Z}} \text{de la forme (8)} \\ \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}(s(\omega) \in C_1 \cap T^{-k} C_2) = \mathbf{P}(s(\omega) \in C_1).\mathbf{P}(s(\omega) \in C_2) \end{array} \right. \tag{9}$$

Nous avons alors les résultats suivants :

* Si s est stationnaire et si $\mathbb{E}(|s_i|) < +\infty$, il existe une variable aléatoire intégrable $S_{hom}(\omega)$ telle que $\mathbb{E}(S_{hom}) = \mathbb{E}(s_i)$ et :

$$\lim_{n \to +\infty} S_n(\omega) = S_{hom}(\omega) \text{ presque sûrement et dans } L^1.$$

* Si s est ergodique , S_{hom} est constante et on a :

$$S_{hom} = \mathbb{E}(s_i)$$

Nous voyons ainsi que la stationnarité du processus assure l'existence d'un coefficient de souplesse homogénéisé aléatoire (il dépend de ω, donc de l'échantillon) et que c'est l'ergodicité qui assure qu'il est déterministe.

La conséquence fondamentale de l'ergodicité est que la loi du processus s, $\mathbf{P}_s$, est entièrement déterminée par une seule réalisation $s(\omega)$ de s. En

effet, soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)^{\otimes \mathbf{Z}}$; on définit le processus indicateur $(IN_i)_{i\in\mathbf{Z}}$ par la relation :

$$\begin{array}{rccc} IN : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}) & \longrightarrow & (\{0,1\}^{\mathbf{Z}}, \mathcal{P}(\{0,1\}^{\mathbf{Z}})) \\ \omega & \longrightarrow & (\mathbf{1}_{\{s(\omega)\in T^i B\}})_{i\in\mathbf{Z}} \end{array}$$

Ce processus est ergodique et l'application du théorème précédent montre que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{s(\omega)\in T^i B\}} = \mathbf{P}_s(B) \text{ presque sûrement et dans } L^1.$$

Ainsi toute l'information statistique du processus est contenue dans chaque réalisation (à un ensemble de réalisations de probabilité nulle près).
Une autre conséquence de l'ergodicité est de remplacer l'espérance mathématique par la moyenne arithmétique ("spatiale").

L'hypothèse d'ergodicité est l'hyptohèse minimale qu'ont doit faire sur s pour pouvoir parler d'homogénéisation et nous allons donner quelques exemples de processus ergodiques.

Tout d'abord, nous pouvons citer le cas où les s_i sont indépendants identiquement distribués (iid). En effet, soient :

$$\begin{array}{rcl} C_1 & = & \{(x_t)_{t\in\mathbf{Z}} / \quad x_n \in A_1, \ldots, x_{n+p-1} \in A_p, \quad A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\} \\ C_2 & = & \{(x_t)_{t\in\mathbf{Z}} / \quad x_{n'} \in A'_1, \ldots, x_{n'+p'-1} \in A'_{p'}, \quad A'_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\} \end{array}$$

Alors :

$$T^{-k}C_2 = \{(x_t)_{t\in\mathbf{Z}} \quad x_{n'-k} \in A'_1, \ldots, x_{n'+p'-1-k} \in A'_{p'}, \quad A'_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\}$$

et pour $k > n' + p' - 1 - n$ on a la relation :

$$\mathbf{P}(s(\omega) \in C_1 \cap T^{-k}C_2) = \mathbf{P}(s(\omega) \in C_1).\mathbf{P}(s(\omega) \in C_2) \qquad (10)$$

ce qui prouve que la propriété (9) est vérifiée et que $(s_i)_{i\in\mathbf{Z}}$ est ergodique.

Une généralisation immédiate de ce qui précède consiste à définir s_i par :

$$s_n(\omega) = a_0 r_n(\omega) + a_1 r_{n-1}(\omega) + \cdots + a_m r_{n-m}(\omega) \qquad (11)$$

où $a_0, \ldots, a_m$ sont des constantes et les $(r_i)_{i\in\mathbf{Z}}$ une suite de variables aléatoires (iid); la relation (10) est vérifiée pour k assez grand.

En fait, toute simulation effective d'un processus stationnaire ne peut faire appel qu'à un nombre fini de nombres pseudo-aléatoires, de même, l'identification d'un tel processus se fait généralement en le supposant dans une classe de processus dépendant d'un nombre fini de paramètres, il nous semble alors, que les processus du type (11) ainsi que leur généralisation au processus multi-indiciels ($\mathbf{Z}^p$) ou continus ($\mathbb{R}^p$) suffisent, pour une précision donnée, à modéliser les propriétés microscopiques aléatoires des matériaux. Les processus du type (11) appartiennent à une classe de processus ergodiques qui est celle des processus mélangeants.

Un processus est dit mélangeant s'il est stationnaire et s'il vérifie :

$$\lim_{k \to +\infty} \quad \mathbf{P}(s(\omega) \in C_1 \cap T^{-k} C_2) = \mathbf{P}(s(\omega) \in C_1).\mathbf{P}(s(\omega) \in C_2) \qquad (12)$$

où C_1 et C_2 sont des cylindres du type évoqué dans (8).
On voit immédiatement en comparant (12) et (9) qu'un processus mélangeant est ergodique.
Les notions de processus stationnaire, ergodique, mélangeant s'étendent facilement au processus multiindiciels (dans $\mathbf{Z}^p$) et au processus indicés par $\mathbb{R}^p$. Pour plus de détails sur l'ergodicité, on peut consulter [13], [14] et [15].

2 Description de la simulation

Nous allons maintenant décrire la simulation que nous avons effectuée sur un matériau particulier, mais auparavant, rappelons les définitions classiques des grandeurs macroscopiques à partir des grandeurs microscopiques (voir Andrieux [11]).

2.1 Définition des grandeurs macroscopiques

On se place dans $\mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3). Soit dV un élément de volume élémentaire à l'échelle macroscopique, de contour ∂V. Il apparaît alors comme un volume de grande taille à l'échelle microscopique. On note $u(x)$, $\epsilon(x) = \frac{1}{2}(\text{grad}\, u + \text{grad}^t\, u)$ et $\sigma(x)$ les champs de déplacement, de déformation et de contrainte microscopiques qui règnent en chaque point x de dV. Comment peut-on définir les tenseurs de déformation macroscopique E et de contrainte macroscopique Σ dans dV à partir des champs microscopiques ? E et Σ devront être des grandeurs globales, et on pense naturellement à définir E et Σ comme les moyennes de $\epsilon(x)$ et $\sigma(x)$ dans dV.

Notons d'abord que l'équation d'équilibre que doit vérifier le champ $\sigma(x)$ est :

$$\forall x \in dV \qquad div\, \sigma(x) = 0 \tag{13}$$

Le principe des travaux virtuels revient à écrire l'équation précédente de façon globale : Pour tout champ de déplacement $u(x)$ et tout champ de contrainte $\sigma(x)$ vérifiant (13), on a :

$$\int_V \sigma(x) : \epsilon(x)\, dx = \int_{\partial V} T^n(x).u(x)\, dS \tag{14}$$

où $\epsilon(x) = \frac{1}{2}(\text{grad}\, u(x) + \text{grad}^t\, u(x))$
$T^n(x) = \sigma(x).n$ n étant la normale extérieure.

Nous allons utiliser (14) pour relier la moyenne des champs $\sigma(x)$ et $\epsilon(x)$ dans dV aux valeurs sur les bords. En effet, en appliquant (14) avec le champ de contrainte $\sigma(x) = \sigma^0$ constant dans dV, on déduit que pour tout champ de déplacement $u(x)$ on a :

$$\int_{dV} \epsilon(x)\, dx = \int_{\partial V} (n \otimes u)^{\text{symétrisé}}\, dS \tag{15}$$

où $\otimes$ désigne le produit tensoriel.
On peut exprimer (15) en coordonnées sous la forme :

$$\int_{dV} \epsilon_{ij}(x)\,dx = \int_{\partial V} \frac{1}{2}(n_i u_j + n_j u_i)\,dS \tag{16}$$

De même, en appliquant (14) avec le champ de déplacement $u(x) = \epsilon_0 x$ où ϵ_0 est un tenseur de déformation uniforme dans dV, on déduit que pour tout champ de contrainte $\sigma(x)$ vérifiant l'équilibre (13), on a :

$$\int_{dV} \sigma(x)\,dx = \int_{\partial V} (T^n(x) \otimes x)^{\text{symétrisé}} dS \tag{17}$$

ou, avec des notations indicielles :

$$\int_{dV} \sigma_{ij}(x)\,dx = \int_{\partial V} \frac{1}{2}(T_i^n(x)x_j + x_i T_j^n(x))\,dS \tag{18}$$

Les formules (15) et (17) nous poussent à définir E et Σ en fonction des conditions qu'on leur impose aux bords. Deux approches existent :

2.1.1 L'approche déformation

Définition de E : On impose que le champ de déplacement $u(x)$ soit compatible sur le bord ∂V avec une déformation homogène E. Par exemple, on impose :

$$u(x) = E.x \qquad \forall x \in \partial V. \tag{19}$$

Autrement dit :

$$u_i(x) = E_{ij}x_j \qquad \forall x \in \partial V. \tag{20}$$

En vertu de (15), on a par conséquent :

$$\frac{1}{|dV|}\int_{dV} \epsilon(x)\,dx = <\epsilon> = E. \tag{21}$$

Dès lors, en appliquant le principe des travaux virtuels (14) au champ réel $\sigma(x)$ et au champ virtuel $\widetilde{u}\,(x) = u(x) - Ex$ (nul sur ∂V), on déduit que pour tout $\sigma(x)$ vérifiant (13) et tout $u(x)$ vérifiant (19), on a :

$$\int_{dV} \sigma(x) : \epsilon(x)\,dx = E : \int_{dV} \sigma(x)\,dx \tag{22}$$

Afin d'assurer la cohérence thermodynamique du passage micro-macro on est amené à définir Σ par :

$$\Sigma = < \sigma(x) > = \frac{1}{|dV|} \int_{dV} \sigma(x)\, dx \tag{23}$$

On peut écrire (22) de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{llll} \forall \sigma(x) & \text{vérifiant (13)} & \text{et} & \forall u(x) \text{ vérifiant (19), on a :} \\ & E : \Sigma & = & < \sigma(x) : \epsilon(x) > \\ \textit{avec :} & E & = & < \epsilon(x) > \\ & \Sigma & = & < \sigma(x) > \end{array} \right. \tag{24}$$

2.1.2 L'approche contrainte

Définition de Σ : On impose que le champ de contrainte $\sigma(x)$ soit compatible sur le bord ∂V avec une contrainte uniforme Σ. On impose :

$$\Sigma.n = \sigma(x).n \qquad \forall x \in \partial V \tag{25}$$

et puisque $< \sigma(x) >$ ne dépend que des valeurs de $\sigma(x)$ au bord par la formule (17), on a comme conséquence de (25) :

$$< \sigma(x) > = \Sigma. \tag{26}$$

Dès lors en appliquant le principe des puissances virtuelles aux champs $\widetilde{\sigma}\,(x) = \sigma(x) - \Sigma$ et $u(x)$ on déduit que pour tout $\sigma(x)$ vérifiant (13) et (25), et pour tout champ de déplacement $u(x)$, on a :

$$\int_{dV} \sigma(x) : \epsilon(x)\, dx = \Sigma : \int_{dV} \epsilon(x)\, dx \tag{27}$$

on est alors amené à définir E par :

$$E = < \epsilon(x) > \tag{28}$$

on peut écrire (27) de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{llll} \forall \sigma(x) & \text{vérifiant (13) et (25)} & \text{et} & \forall u(x), \text{ on a :} \\ & E : \Sigma & = & < \sigma(x) : \epsilon(x) > \\ \textit{avec} & E & = & < \epsilon(x) > \\ & \Sigma & = & < \sigma(x) > \end{array} \right. \tag{29}$$

Nous allons maintenant utiliser les approches en déformation et en contrainte pour définir les tenseurs de rigidité et de souplesse de dV si le comportement est élastique. Plus précisément, on considère que le matériau est élastique à l'échelle microscopique ce qui revient à affirmer que les tenseurs $\sigma(x)$ et $\epsilon(x)$ sont reliés par la relation linéaire :

$$\sigma(x) = r(x) : \epsilon(x) \qquad x \in dV$$

où $r(x)$ est un tenseur d'ordre 4 symétrique défini positif, appelé tenseur de rigidité au point x.

On définit alors le tenseur de rigidité globale de dV en adoptant l'approche en déformation et en résolvant le problème élastique paramétré par E :

$$(AD)_E \begin{cases} div\,\sigma(x) &= 0 & x \in dV \\ \sigma(x) &= r(x) : \epsilon(x) & x \in dV \\ \epsilon(x) &= \frac{1}{2}(\mathrm{grad}\,u(x) + \mathrm{grad}^t\,u(x)) & x \in dV \\ u(x) &= E.x & x \in \partial V \\ & (E \text{ est un tenseur symétrique d'ordre 2}) & \end{cases}$$

Le champ solution u_E dépend linéairement de E; ainsi, les grandeurs E et Σ définis par l'approche en déformation sont linéairement dépendants par la relation :

$$\Sigma = R : E$$

où R est un tenseur d'ordre 4 qui est par définition le tenseur de rigidité globale de dV.
En notant $\epsilon_E(x)$ la déformation solution de $(AD)_E$, la relation (24) implique que :

$$\forall E, E'$$

$$\frac{1}{|dV|}\int_{dV} \epsilon_E(x) : r(x) : \epsilon_{E'}(x)\,dx = E : R : E'$$

ce qui montre que R est symétrique défini positif.

Du point de vue mathématique, il faut supposer :

$$\begin{cases} \exists \alpha > 0, \quad \forall \epsilon \text{ tenseur symétrique d'ordre 2}, \quad \forall x \in dV \\ \qquad\qquad \epsilon : r(x) : \epsilon \geq \alpha\, \epsilon : \epsilon \end{cases} \tag{30}$$

En écrivant le champ solution $u_E(x)$ sous la forme :

$$u_E(x) = \widetilde{u}_E(x) + E.x$$

on établit que $\widetilde{u}_E$ réalise le minimum de la fonctionnelle énergie élastique moyenne définie sur l'espace de Sobolov $[H_0^1(dV)]^n$ par :

$$v \in [H_0^1(dV)]^n \longrightarrow \frac{1}{|dV|}\int_{dV}(E+\epsilon(v)) : r : (E+\epsilon(v))\,dx$$

L'hypothèse d'ellipticité (30) assure l'existence et l'unicité de ce minimum sous des conditions de régularité géométrique sur dV.

L'approche en contrainte nous permet de définir le tenseur de souplesse globale de dV en résolvant le problème élastique paramétré par Σ :

$$(AC)_\Sigma \begin{cases} div\,\sigma(x) = 0 & x \in dV \\ \sigma(x) = r(x) : \epsilon(x) & x \in dV \\ \epsilon(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{grad}\,u(x) + \mathrm{grad}^t\,u(x)) & x \in dV \\ \sigma(x).n = \Sigma.n & x \in \partial V \\ \quad (\Sigma \text{ tenseur symétrique d'ordre 2}) & \end{cases}$$

Le champ solution u_Σ (défini à un déplacement rigide près) dépend linéairement de Σ; ainsi, les grandeurs E et Σ définis par l'approche en contrainte sont linéairement dépendants par la relation :

$$E = S : \Sigma$$

où S est un tenseur d'ordre 4, qui est par définition le tenseur de souplesse globale de dV.

En notant $\epsilon_\Sigma(x)$ la déformation solution de $(AC)_\Sigma$ la relation (29) implique que :

$$\forall \Sigma, \Sigma'$$

$$\frac{1}{|dV|}\int_{dV} \epsilon_{\Sigma'}(x) : r(x) : \epsilon_\Sigma(x)\,dx = \Sigma : S : \Sigma'$$

Ce qui montre que S est symétrique défini positif.

On établit que la solution u_Σ réalise le minimum de la fonctionnelle définie sur l'espace de Sobolev $[H^1(dV)]^n$ par :

$$v \in [H^1(dV)]^n \longrightarrow \frac{1}{dV}\int_{dV}\epsilon(v) : r : \epsilon(v)\,dx - \frac{2}{dV}\Sigma : \int_{dV}\epsilon(v)\,dx$$

u_Σ est unique à un déplacement près. Pour plus de détail sur les formulations variationnelles des problèmes $(AD)_E$ et $(AC)_\Sigma$ voir la 3e partie de ce chapitre. Il est à noter que les tenseurs R et S ne sont pas en général inverse l'un de l'autre !
Après avoir défini les grandeurs macroscopiques d'un élément de volume dV quelconque, nous allons décrire la microstruture du matériau qu'on étudie dans la suite.

2.2 Description de la microstruture

Nous nous sommes inspirés de la microstructure des métaux polycristallins pour définir notre matériau d'étude. Les métaux sont des assemblages de cristaux de même nature mais de forme et d'orientation cristallographique aléatoire. Notre but étant de montrer la faisabilité d'une simulation et non pas de traiter un problème précis, nous traitons un problème d'élasticité plane dans lequel le matériau a une microstructure aléatoire simple.

On schématise les cristaux par des carrés de même taille, l'hétérogénéité est donc uniquement dûe à la différence d'orientation des cristaux. Nous supposons l'élasticité des cristaux orthotrope et l'orientation cristallographique est identifiée à la direction d'orthotropie.

Dans le plan, un matériau orthotrope est cractérisé par trois constantes élastiques et on peut écrire la matrice de rigidité dans le repère propre du matériau c'est-à-dire dans le repère que forment ses deux axes d'orthotropie sous la forme matricielle.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 2c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \sqrt{2}\epsilon_{12} \end{bmatrix}$$

Si σ et ϵ sont exprimés dans un repère obtenu à partir du repère propre par une rotation d'angle α on établit que σ et ϵ sont reliés par la relation :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\alpha) & B(\alpha) & \sqrt{2}D(\alpha) \\ B(\alpha) & A(\alpha) & -\sqrt{2}D(\alpha) \\ \sqrt{2}D(\alpha) & -\sqrt{2}D(\alpha) & 2C(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \sqrt{2}\epsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\begin{array}{lllll} \text{avec} & A(\alpha) & = & a - \frac{\gamma}{2}\sin^2 2\alpha \\ & B(\alpha) & = & b + \frac{\gamma}{2}\sin^2 2\alpha \\ & C(\alpha) & = & c + \frac{\gamma}{2}\sin^2 2\alpha \\ & D(\alpha) & = & \frac{\gamma}{4}\sin 4\alpha \\ \text{où} & \gamma & = & a - b - 2c \end{array}$$

On vérifie que si $\gamma = 0$ le matériau a les mêmes coefficients élastiques dans tout changement de repère : il est dans ce cas isotrope.
De même on vérifie que :

$$\forall \alpha \qquad tr\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} = (a+b)tr\epsilon = (a+b)(\epsilon_{11} + \epsilon_{22})$$

et que le caractère défini positif de la matrice de rigidité suppose : $a+b > 0$, $a - b > 0$ et $2c > 0$.
L'angle α est la direction cristallographique. On note (31) plus synthétiquement :

$$\sigma = r(\alpha) : \epsilon$$

Ainsi, dans le plan $\mathbb{R}^2$ le cristal $C_{pq}(p,q) \in \mathbf{Z}^2$ est le carré $[p-1,p] \times [q-1,q]$; son orientation cristallographique est notée α_{pq}; l'élasticité de la microstructure est entièrement déterminée par la donnée de a, b, c et d'une suite $\omega = (\alpha_{pq})_{(p,q)\in\mathbf{Z}^2}$ de réels $\alpha_{pq} \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

Pour une microstructure aléatoire, la suite ω est aléatoire. Pour achever la description de la microstructure il faut alors préciser la loi du hasard qui ne porte ici que sur les α_{pq}:
on suppose dans notre simulation que les α_{pq} sont des variables aléatoires indépendantes deux à deux uniformément réparties entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

L'espace de probabilité est donc :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Omega & = & \{\omega = (\alpha_{pq})_{(p,q)\in\mathbf{Z}^2} \quad \alpha_{pq} \in [0, \frac{\pi}{2}[\} \\ \mathcal{A} & = & \mathcal{B}([0, \frac{\pi}{2}[)^{\otimes \mathbf{Z}^2} \\ \mathbf{P} & = & \text{la probabilité définie plus haut de façon unique (Kolmogorov)} \end{array} \right.$$

En résumé, on vient de définir le processus aléatoire décrivant la matrice de rigidité en chaque point x de $\mathbb{R}^2$ par l'application :

$$\begin{array}{rcl} \Omega \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \{ \text{ tenseurs de rigidité } \} \\ (\omega, x) & \longrightarrow & r(\omega, x) = r(\alpha_{pq}) \quad \forall x \in C_{pq} \end{array}$$

Pour ω donné, on peut définir les tenseurs de rigidité et de souplesse globaux du carré $C_N = [0, N] \times [0, N]$. Ces tenseurs sont notés $R_N(\omega)$ et $S_N(\omega)$. Explicitement, $R_N(\omega)$ est défini à partir du problème élastique :

$$(AD)_{E,N,\omega} \begin{cases} div\,\sigma(x) &= 0 & x \in C_N \\ \sigma(x) &= r(\alpha_{pq}) : \epsilon(x) & x \in C_{pq} \\ \epsilon(x) &= \frac{1}{2}(\mathrm{grad}\, u(x) + \mathrm{grad}^t\, u(x)) & x \in C_N \\ u(x) &= E.x & x \in \partial C_N \end{cases}$$

$S_N(\omega)$ est défini à partir de :

$$(AC)_{\Sigma,N,\omega} \begin{cases} div\,\sigma(x) &= 0 & x \in C_N \\ \sigma(x) &= r(\alpha_{pq}) : \epsilon(x) & x \in C_{pq} \\ \epsilon(x) &= \frac{1}{2}(\mathrm{grad}\, u(x) + \mathrm{grad}^t\, u(x)) & x \in C_N \\ \sigma(x).n &= \Sigma.n & x \in \partial C_N \end{cases}$$

$R_N(\omega)$ et $S_N(\omega)$ apparaissent comme des tenseurs aléatoires. On peut expliciter les termes de $R_N(\omega)$ par l'écriture matricielle :

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{11} \\ \Sigma_{22} \\ \sqrt{2}\Sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_N(\omega) & b_N(\omega) & d_N(\omega) \\ b_N(\omega) & e_N(\omega) & f_N(\omega) \\ d_N(\omega) & f_N(\omega) & 2c_N(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ \sqrt{2}E_{12} \end{bmatrix}$$

Les coefficients de $R_N(\omega)$ vérifient les relations :

$$\begin{cases} e_N(\omega) &= a_N(\omega), \quad a_N(\omega) + b_N(\omega) = a + b, \\ f_N(\omega) &= -d_N(\omega) \end{cases} \tag{32}$$

En effet :

$$\begin{aligned} tr\Sigma &= \frac{1}{|C_N|}\int_{C_N} tr\sigma(x)\,dx = (a+b)\frac{1}{|C_N|}\int_{C_N} tr\epsilon(x)\,dx \\ &= (a+b)trE \end{aligned}$$

$R_N(\omega)$ est donc de la forme :

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{11} \\ \Sigma_{22} \\ \sqrt{2}\Sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_N(\omega) & (a+b) - a_N(\omega) & d_N(\omega) \\ & a_N(\omega) & -d_N(\omega) \\ SYM & & 2c_N(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ \sqrt{2}E_{12} \end{bmatrix} \tag{33}$$

Similairement, on établit que $S_N(\omega)$ est de la forme :

$$\begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ \sqrt{2}E_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_N(\omega) & (a'+b') - a'_N(\omega) & d'_N(\omega) \\ & a'_N(\omega) & -d'_N(\omega) \\ SYM & & 2c'_N(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_{11} \\ \Sigma_{22} \\ \sqrt{2}\Sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (34)$$

où :

$$a' = \frac{a}{a^2 - b^2}$$

$$b' = \frac{-b}{a^2 - b^2}$$

Rappelons que $S_N(\omega)$ et $R_N(\omega)$ ne sont pas inverses l'un de l'autre.

Il est naturel de s'intéresser au comportement à l'infini des suites de variables aléatoires $(R_N)_{N\in\mathbf{N}}$ et $(S_N)_{N\in\mathbf{N}}$. En fait, on montrera plus loin qu'il existe deux tenseurs symétriques définis positifs R^{hom} et S^{hom} tels que R_N et S_N convergent dans $L^2(\Omega)$ vers R^{hom} et S^{hom}.

$$\begin{cases} R_N(\omega) \xrightarrow{L^2(\Omega)} R^{\text{hom}} \\ S_N(\omega) \xrightarrow{L^2(\Omega)} S^{\text{hom}} \end{cases}$$

Les tenseurs S^{hom} et R^{hom} sont par définition les coefficients élastiques homogénéisés. Ils sont orthotropes à cause de la symétrie du problème. Les coefficients $d_N(\omega)$ et $d'_N(\omega)$ définis dans (33) et (34) tendent vers 0 et il nous reste à estimer les deux coefficients a_∞ et c_∞ limites de $a_N(\omega)$ et $c_N(\omega)$. (Ou a'_∞ et c'_∞ limites de $a'_N(\omega)$ et $c'_N(\omega)$).

Pour N suffisamment grand, et pour un ω simulé suivant la loi de probabilité qu'on s'est donnée, la résolution par éléments finis des problèmes $(AD)_{E,N,\omega}$ et $(AC)_{\Sigma,N,\omega}$ nous permettra d'obtenir des approximations $R^m_N(\omega)$ et $S^m_N(\omega)$ des tenseurs $R_N(\omega)$ et $S_N(\omega)$ où m est un paramètre de finesse du maillage. La simulation comportera ainsi deux approximations : une approximation de même nature que la loi des grands nombres (N grand) et une autre de type éléments finis (maillage suffisamment fin). Ces deux approximations se compensent rendant ainsi le calcul numérique de R^{hom} et S^{hom} possible avec des moyens informatiques raisonnables. La partie suivante est consacrée à la description de la procédure numérique.

REMARQUE : Les résultats numériques montrent que R^{hom} et S^{hom} sont inverses l'un de l'autre, mais nous n'avons pas pû l'établir mathématiquement.

2.3 La procédure numérique

Nous avons réalisé un programme d'éléments finis triangulaires dont le maillage est représenté dans la figure (1). Il dépend de deux paramètres :

- N : nombre de carrés homogènes par côté,
- m : finesse du maillage dans chaque carré.

Les noeuds du maillage sont les points $NO_{i,j}$ de coordonnées $(i/m, j/m)$ i et j allant de 0 à $N.m$. Les éléments sont les triangles $(NO_{i,j}, NO_{i+1,j}, NO_{i,j+1})$ et $(NO_{i+1,j+1}, NO_{i+1,j}, NO_{i,j+1})$ i et j allant de 0 à $N.m-1$.
En notant par U le vecteur colonne représentant les déplacements aux noeuds du maillage et par F le vecteur colonne des forces qui s'y exercent et enfin, par $K(N,m,\omega)$ la matrice de rigidité de la structure, l'équation d'équilibre s'écrit :

$$KU = F \tag{35}$$

Plus précisément, il faut distinguer dans U : les déplacements donnés U_d et les déplacements inconnus U_{inc}, et dans F : les forces données F_d et les forces inconnues F_{inc} et l'équation (35) devient :

$$K[\frac{U_{inc}}{U_d}] = [\frac{F_d}{F_{inc}}]$$

2.3.1 Définition et calcul de $R_N^m(\omega)$:

Rappelons que $R_N(\omega)$ est défini à partir du problème $(AD)_{E,N,\omega}$. La formulation variationnelle de ce problème permet d'écrire : $\forall E$

$$E : R_N(\omega) : E = \min_{v \in [H_0^1(C_N)]^n} \frac{1}{|C_N|} \int_{C_N} (E+\epsilon(v(x))) : r(\omega,x) : (E+\epsilon(v(x)))dx \tag{36}$$

ce qui fournit une définition équivalente de $R_N(\omega)$. La méthode des éléments finis consiste à résoudre (36) dans un espace de dimension fini de $[H_0^1(C_N)]^n$, noté Q_N^m, où m est l'indice de finesse du maillage. Plus précisément, on note P_N^m l'éspace vectoriel des fonctions continues de C_N dans $\mathbb{R}^2$ et affines sur les triangles du maillage. Q_N^m est le sous espace des fonctions de P_N^m nulles

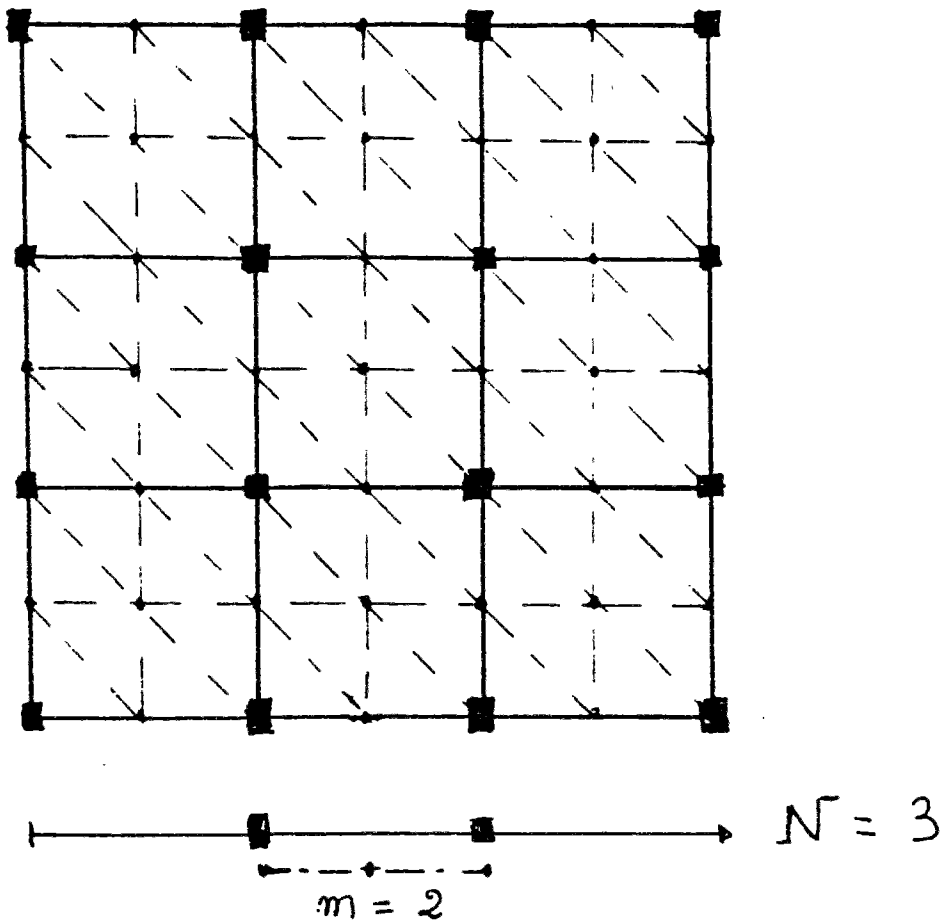


Figure 1: Maillage.

au bord.
On définit $R_N^m(\omega)$ par la relation : $\forall E$

$$E : R_N^m(\omega) : E = \min_{v \in Q_N^m} \frac{1}{|C_N|} \int_{C_N} (E + \epsilon(v(x))) : r(\omega, x) : (E + \epsilon(v(x)))dx \tag{37}$$

Les raisonnements qui nous ont permis d'établir les propriétés de $R_N(\omega)$ à savoir : $R_N(\omega)$ symétrique défini positif et les relations (32) que vérifient les coefficients de $R_N(\omega)$, nous permettent d'établir les mêmes propriétés pour $R_N^m(\omega)$. En effet, le caractère défini positif de $R_N^m(\omega)$ est donné dans (37), pour montrer que $R_N^m(\omega)$ est symétrique, on note $v_{N,E}^m$ l'élément de Q_N^m réalisant le minimum dans (37), ($v_{N,E}^m$ converge vers la solution dans $H_0^1(C_N)$ quand m tend vers l'infini) alors on a :

$$\forall E, E'$$

$$\begin{aligned} E : R_N^m(\omega) : E' &= \tfrac{1}{|C_N|} \textstyle\int_{C_N} (E + \epsilon(v_{N,E}^m)) : r(\omega, x) : (E' + \epsilon(v_{N,E'}^m))\, dx \\ &= \tfrac{1}{|C_N|} \textstyle\int_{C_N} (E + \epsilon(v_{N,E}^m)) : r(\omega, x) : E'\, dx \\ &= \tfrac{1}{|C_N|} \textstyle\int_{C_N} E : r(\omega, x) : (E' + \epsilon(v_{N,E'}^m))\, dx \end{aligned} \tag{38}$$

L'équivalent des propriétés (32) se déduit de (38) en particularisant le champ $E' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, on peut mettre $R_N^m(\omega)$ sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} a_N^m(\omega) & (a+b) - a_N^m(\omega) & d_N^m(\omega) \\ & a_N^m(\omega) & -d_N^m(\omega) \\ SYM & & 2c_N^m(\omega) \end{bmatrix} = R_N^m(\omega) \tag{39}$$

2.3.2 Définition de $S_N^m(\omega)$

Rappelons que $S_N(\omega)$ est défini à partir du problème $(AC)_{\Sigma,N,\omega}$. La formulation variationnelle de ce problème s'écrit: ($\forall \Sigma$

$$-\Sigma : S_N(\omega) : \Sigma = \min_{v \in [H^1(C_N)]^n} \int_{C_N} \frac{1}{|C_N|} [\epsilon(v) : r(\omega, x) : \epsilon(v) - 2\Sigma : \epsilon(v)]\, dx \tag{40}$$

ce qui fournit une définition équivalente de $S_N(\omega)$. La méthode des éléments finis consiste à résoudre (40) dans le sous-espace P_N^m de $[H^1(C_N)]^n$, défini plus haut. On définit $S_N^m(\omega)$ par la relation :$\forall \Sigma$

$$-\Sigma : S_N^m(\omega) : \Sigma = \min_{v \in P_N^m} \int_{C_N} \frac{1}{|C_N|} [\epsilon(v) : r(\omega, x) : \epsilon(v) - 2\Sigma : \epsilon(v)]\, dx \quad (41)$$

On montre alors que $S_N^m(\omega)$ est symétrique définie positive et se met sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} a_N'^m(\omega) & (a'+b') - a_N'^m(\omega) & d_N'^m(\omega) \\ & a_N'^m(\omega) & -d_N'^m(\omega) \\ SYM & & 2c_N'^m(\omega) \end{bmatrix} = S_N^m(\omega) \quad (42)$$

Nous avons aussi les ingégalités :

$$\begin{cases} a_N'^m(\omega) \leq a_N'(\omega) & & c_N'^m \leq c_N'(\omega) \\ & \forall N, \omega & \\ a_N^m(\omega) \geq a_N(\omega) & & c_N^m(\omega) \geq c_N(\omega) \end{cases} \quad (43)$$

et les limites :

$$\begin{cases} a_N'^m(\omega) \overset{m \to +\infty}{\longrightarrow} a_N'(\omega) & & c_N'^m(\omega) \overset{m \to +\infty}{\longrightarrow} c_N'(\omega) \\ & \forall N, \omega & \\ a_N^m(\omega) \overset{m \to +\infty}{\longrightarrow} a_N(\omega) & & c_N^m(\omega) \overset{m \to +\infty}{\longrightarrow} c_N(\omega) \end{cases} \quad (44)$$

Ces inégalités se démontrent à l'aide de la formulation variationnelle du problème.

On démontre aussi (voir 3e partie) que, à m fixé, c'est-à-dire, à une finesse du maillage donnée, les tenseurs $R_N^m(\omega)$ et $S_N^m(\omega)$ convergent, quand N tend vers l'infini vers, respectivement, $R^{m,hom}$ et $S^{m,hom}$, la convergence étant au sens $L^2(\Omega)$. Ces tenseurs sont de la forme (39) et (42), ils respectent les inégalités (43) et $R^{m,hom}$ converge vers R^{hom} quand m tend vers l'infini. Autrement dit, à chaque m correspond une homogénéisation d'un matériau de souplesse moindre que celle du matériau réel. Quand m tend vers l'infini, cette souplesse tend vers la souplesse réelle.

Nous avons, en outre, vérifié numériquement, sans pouvoir le démontrer, que les tenseurs $R^{m,hom}$ et $S^{m,hom}$ étaient inverses l'un de l'autre. Signalons aussi que les tenseurs $R^{m,hom}$ et $S^{m,hom}$ sont liés aux tenseurs obtenus en

prenant l'espérance mathématique de $r(\alpha)$ et $r^{-1}(\alpha)$ par les inégalités : (voir 3e partie)

$$\left\{\begin{array}{l} \forall m, \Sigma, E \\ E : R^{m,hom} : E \leq E : \mathbb{E}(r(\alpha)) : E \\ \Sigma : S^{m,hom} : \Sigma \geq \Sigma : \mathbb{E}(r^{-1}(\alpha)) : \Sigma \end{array}\right. \tag{45}$$

(45) est, bien entendu, vérifié aussi pour R^{hom} et S^{hom}.

2.4 Résultats numériques

Commençons par évaluer $\mathbb{E}(r(\alpha))$ et $\mathbb{E}(r^{-1}(\alpha))$. On a alors facilement :

$$\mathbb{E}(r(\alpha)) = \begin{bmatrix} a - \frac{\gamma}{4} & b + \frac{\gamma}{4} & 0 \\ b + \frac{\gamma}{4} & a - \frac{\gamma}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 2c + \frac{\gamma}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{E}(r^{-1}(\alpha)) = \begin{bmatrix} a' - \frac{\gamma'}{4'} & b' + \frac{\gamma'}{4'} & 0 \\ b' + \frac{\gamma'}{4'} & a' - \frac{\gamma'}{4'} & 0 \\ 0 & 0 & 2c' + \frac{\gamma'}{4'} \end{bmatrix}$$

Nous avons pris les valeurs numériques :

$$\begin{array}{lll} a = 1,7 & & a' = 1.2344782 \\ b = 1,23 & \Longleftrightarrow & b' = -0,8931813 \\ 2c = 1,5 & & 2c' = 2/3 \end{array}$$

Ce sont les constantes élastiques du cristal de cuivre.

Pour tout m, N, ω nous avons pu vérifier numériquement les relations qui existent entre les coefficients de $R_N^m(\omega)$ et $S_N^m(\omega)$, c'est-à-dire le caractère symétrique et les propriétés (32). Ces relations sont vérifiées à 5 décimales significatives près, ce qui nous a convaincu de la validité du programme de calcul.

L'estimation par l'espérance mathématique donne numériquement les valeurs suivantes :

$$\mathbb{E}(r(\alpha)) = \begin{bmatrix} 1,9575 & 0,9725 & 0 \\ 0,9725 & 1,9575 & 0 \\ 0 & 0 & 0,985 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{E}(r^{-1}(\alpha)) = \begin{bmatrix} 0,86923 & -0,52793 & 0 \\ -0,52793 & 0,86923 & 0 \\ 0 & 0 & 1,39716 \end{bmatrix}$$

Nous avons commencé par calculer numériquement $R^1_{11}(\omega)$, $S^1_{11}(\omega)$, $R^1_{22}(\omega)$, $S^1_{22}(\omega)$, $R^1_{33}(\omega)$, $S^1_{33}(\omega)$, et enfin $R^1_{44}(\omega)$, $S^1_{44}(\omega)$ pour un triage unique ω : On fixe $m = 1$ et on fait croître N.

Nous avons les valeurs numériques suivantes :

$$\begin{cases} a^1_{11} = 1,91276 & a'^1_{11} = .76584 \\ 2c^1_{11} = .91089 & 2c'^1_{11} = 1,16044 \\ d^1_{11} = -.,01289 & d'^1_{11} = .,01456 \end{cases}$$

$$R^1_{11}S^1_{11} - Id = \begin{bmatrix} 0,0326 & -0,0326 & -0,0027 \\ -0,0326 & 0,0326 & 0,0027 \\ -0,0028 & 0,0028 & 0,0563 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a^1_{22} = 1,89952 & a'^1_{22} = .76251 \\ 2c^1_{22} = .92957 & 2c'^1_{22} = 1.110676 \\ d^1_{22} = -.01368 & d'^1_{22} = .01722 \end{cases}$$

$$R^1_{22}S^1_{22} - Id = \begin{bmatrix} 0,0143 & -0,0143 & 0,0002 \\ -0,0143 & 0,0143 & -0,0002 \\ 0,0002 & -0,0002 & 0,0283 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a^1_{33} = 1,89967 & a'^1_{33} = .75609 \\ 2c^1_{33} = .91954 & 2c'^1_{33} = 1.110754 \\ d^1_{33} = -.00674 & d'^1_{33} = .00858 \end{cases}$$

$$R^1_{33}S^1_{33} - Id = \begin{bmatrix} 0,0088 & -0,0088 & 0,0000 \\ -0,0088 & 0,0088 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & -0,0212 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a^1_{44} = 1.89714 & a'^1_{44} = .75747 \\ 2c^1_{44} = .92108 & 2c'^1_{44} = 1.10120 \\ d^1_{44} = -.00988 & d'^1_{44} = .01277 \end{cases}$$

$$R^1_{44}S^1_{44} - I = \begin{bmatrix} 0,0070 & -0,0070 & 0,0002 \\ -0,0070 & 0,0070 & -0,0002 \\ 0,0002 & -0,0002 & 0,0140 \end{bmatrix}$$

Ces résultats numériques montrent que pour $m = 1$ et pour un échantillon ω il y a :

- Convergence des coefficients élastiques R^1_N et S^1_N quand N tend vers l'infini c'est-à-dire quand le nombre de composants est de plus en plus grand,
- La suite $R^1_N(\omega)S^1_N(\omega)$ tend vers l'identité : l'approche en déformation et l'approche en contrainte se confondent.

Toujours pour le même échantillon ω on fixe maintenant $N = 11$ et on fait croître m. Nous avons les valeurs numériques suivantes :

$$\begin{cases} a^2_{11} = 1.89634 & a'^2_{11} = .79337 \\ 2c^2_{11} = .87989 & 2c'^2_{11} = 1.21083 \\ d^2_{11} = -.01178 & d'^2_{11} = .01471 \end{cases}$$

$$R^2_{11}S^2_{11} - Id = \begin{bmatrix} .0368 & -.0368 & -.0022 \\ -.0368 & .0368 & .0022 \\ -.0024 & .0024 & .0604 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a^3_{11} = 1,88992 & a'^3_{11} = .80394 \\ 2c^3_{11} = .86198 & 2c'^3_{11} = 1.23108 \\ d^3_{11} = -.01124 & d'^3_{11} = .01472 \end{cases}$$

$$R^3_{11}S^3_{11} - Id = \begin{bmatrix} .0378 & -.0378 & -.0020 \\ -.0378 & .0378 & .0020 \\ -.0022 & .0022 & .0605 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}^4 = 1.88665 & a_{11}'^4 = .80918 \\ 2c_{11}^4 = .861977 & 2c_{11}'^4 = 1.24147 \\ d_{11}^4 = -.01097 & d_{11}'^4 = .01474 \end{cases}$$

$$R_{11}^4 S_{11}^4 - Id = \begin{bmatrix} .0381 & -.0381 & -.0017 \\ -.0381 & .0381 & +.0017 \\ -.0018 & .0018 & .069 \end{bmatrix}$$

Ces résultats numériques montrent que, pour N fixé (égal 11 dans ce cas) et quand le maillage s'affine (m tend vers l'infini) :

- Les coefficients de R_{11}^m et S_{11}^m calculés sur un seul échantillon ω convergent en respectant les inégalités (43). Ce n'est autre que la méthode des éléments finis.

- La suite $R_{11}^m(\omega)S_{11}^m(\omega) - Id$ a des composantes dont l'ordre de grandeur est indépendant de m. Il ne dépend en réalité que de N. Ceci laisse penser que la vitesse de convergence de R_N^m vers $R^{m,hom}$ quand N tend vers l'infini, ne dépend pas de m. Nous déduisons de là la démarche à suivre pour évaluer l'élasticité macroscopique: partir d'un maillage m avec une maille élémentaire de taille voisine de celle des hétérogénéités; pour m fixé, augmenter la taille N de l'échantillon, jusquà ce que l'ordre de grandeur des composantes de $R_N^m(\omega)S_N^m(\omega) - Id$ soit suffisamment petit; enfin, affiner le maillage en augmentant m.

Fort de ces remarques, nous pensons que l'approximation probabiliste est acceptable pour $N = 22$ et que la finesse du maillage est suffisante quand on prend $m = 2$. Ainsi nous allons approcher R^{hom} par $\mathbb{E}(R_{22}^2(\omega))$ et S^{hom} par $\mathbb{E}(S_{22}^2(\omega))$. Plus précisément, nous allons approcher a_∞, $2c_\infty$, a'_∞ et $2c'_\infty$ par les moyennes arithmétiques respectives des $a_{22}^2(\omega)$, $2c_{22}^2(\omega)$, $a_{22}'^2(\omega)$ et $2c_{22}'^2(\omega)$ calculées sur 13 échantillons.

Ainsi nous avons, par exemple :

$$a_\infty \approx \frac{1}{13}\left[a_{22}^2(\omega_1) + \cdots + a_{22}^2(\omega_{13})\right] = a^{APP}$$

Nous obtenons les moyennes arithmétiques et les écarts-type suivants:
Pour les a_{22}^2, moyenne : 1.8897623 écart-type: .00738
Pour les $2c_{22}^2$, moyenne: 0.8736953 écart-type: .01395
Pour les $a_{22}^{'2}$, moyenne : 0.7771139 écart-type: .00971
Pour les $2c_{22}^{'2}$, moyenne: 1.1792713 écart-type: .020969
Plus synthétiquement:

$$R^{APP} = \begin{bmatrix} 1,890 & 1,040 & 0 \\ & 1,890 & 0 \\ SYM & & .874 \end{bmatrix} \qquad S^{APP} = \begin{bmatrix} .777 & -.436 & 0 \\ & .777 & 0 \\ SYM & & 1.179 \end{bmatrix}$$

$$R^{APP}S^{APP} - Id = \begin{bmatrix} .015 & -.015 & 0 \\ & .015 & 0 \\ SYM & & .030 \end{bmatrix}$$

Le calcul d'un $a_{22}^2(\omega_i)$ (ou d'un $2c_{22}^2(\omega_i)$) nécessite la résolution d'un problème d'élasticité. Notre programme de calcul est implémenté sur un ordinateur DPS 8 Multics. Chaque éxécution met un temps de 4mn 27sec C.P.U. et occupe 44.5 unités mémoire. Ces grandeurs montre la faisabilité de la méthode.
De plus, cette simulation indique que l'élasticité macroscopique du matériau fictif considéré n'est pas isotrope alors que les orientations des repères propres des grains sont uniformément distribuées. Ceci résulte du fait que la morphologie déterministe des grains n'est pas isotrope. En effet, pour ce matériau, en chaque point x de la microstructure, la loi de la variable aléatoire tensorielle r(x) possède la symétrie isotrope; par contre, les fonctions de corrélation entre ces variables, quand x parcourt la microstructure, ne sont pas invariantes par rotation: la loi de l'aléa n'est pas isotrope. Par exemple, pour une loi de l'aléa isotrope, l'espérance de r(x):r(y) ne dépend que de la distance entre les points x et y; ceci n'est pas vérifié pour le matériau considéré puisque si x et y sont des points d'un seul grain cette espérance vaut l'espérance de r(x):r(x), alors que si x et y sont des points de deux grains cette espérance vaut le carré de l'espérance de r(x). Dans le cas général, la morphologie de la microstructure est aléatoire. L'élasticité macroscopique ne peut être isotrope que si la loi du processus aléatoire qui décrit la morphologie est elle même isotrope.

Après cette remarque, nous devons préciser que la simulation de l'aléa de la microstructure considérée se réduit dans notre cas à la génération des orientations des repères propres des grains: ω. Nous avons utilisé à cette fin un générateur de nombres pseudo-aléatoires. Voir le chapitre 1. Pour tenter d'accélérer la vitesse de convergence de l'algorithme stochastique, c'est à dire, pour avoir une convergence plus rapide en fonction de N, nous nous sommes inspirés des idées du chapitre 2 et nous avons recalculés les moyennes arithmétiques des $a_{22}^2(\omega)$, $2c_{22}^2(\omega)$, $a_{22}'^2(\omega)$ et $2c_{22}'^2(\omega)$ prises sur 13 échantillons ω_i générés à l'aide d'une suite de Van Der Corput d'ordre 2. Chaque ω_i est généré avec un point de départ différent de la suite de Van Der Corput. Nous obtenons des moyennes arithmétiques et des écarts-type empiriques très voisins de ceux obtenus avec le générateur de nombres pseudo-aléatoires. En réalité, ces résultats ne sont pas surprenants puisque l'algorithme que nous proposons se réduit dans le cas unidimensionnel exposé en début de chapitre, à un algorithme de Monte-Carlo. Ceci étant, nous devons déconseiller formellement l'usage des suites de Van Der Corput dans le calcul de l'élasticité macroscopique tant qu'une étude théorique n'aura pas établi le cadre de leur emploi, comme nous l'avons fait pour l'algorithme de Robbins-Monro dans le chapitre 2.
Nous allons maintenant justifier l'algorithme que nous avons appliqué.

3 Justification mathématique de la simulation

On commence cette partie, essentiellement mathématique, par un rappel du système de l'élasticité.

3.1 Système de l'élasticité

Soit V une partie de $\mathbb{R}^n (n = 2, 3)$ de frontière ∂V. Soit ∂V_0 une partie de ∂V et ∂V_1 le complémentaire de ∂V_0 dans ∂V. Pour résoudre un problème d'élasticité il faut se donner :

- un champ $r(x), x \in V$ de tenseurs d'ordre 4 sur $\mathbb{R}^n$, symétriques définis positifs : c'est le champ des tenseurs de rigidité élastique,
- un champ $f(x), x \in V$, de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ qui représentera la densité des forces volumiques qui s'exercent sur V,
- un champ $g(x), x \in \partial V_1$, de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ qui représentera la densité de forces surfaciques qui s'exercent sur ∂V_1,
- un champ $\overline{u}(x), x \in \partial V_0$ de vecteur de $\mathbb{R}^n$ qui représentera les déplacements imposés sur ∂V_0.

Le problème élastique est de chercher un champ $u(x), x \in V$, représentant les déplacements, qui vérifie les équations suivantes :

* Hypothèse des petites déformations:

$$\epsilon(u) = \tfrac{1}{2}[\mathrm{grad}\, u + \mathrm{grad}^t\, u] \qquad \forall x \in V$$

* Loi de comportement élastique linéaire :

$$\sigma(u) = r : \epsilon(u) \qquad \forall x \in V$$

* Les équations d'équilibre :

$$\begin{aligned} &div\, \sigma(u) + f = 0 && \forall x \in V \\ &\sigma.n = g && \forall x \in \partial V_1 \end{aligned}$$

(où n est la normale extérieure).

* Le respect des conditions en déplacement :

$$u = \overline{u} \qquad \forall x \in \partial V_0$$

En notation indicielle avec la convention de sommation, ce système s'écrit :

$$\epsilon_{ij}(u) = \tfrac{1}{2}(\tfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \tfrac{\partial u_j}{\partial x_i}) \qquad \forall x \in V$$

$$\sigma_{ij}(u) = r_{ijkl}\epsilon_{kl}(u) \qquad \forall x \in V$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{ij}(u)}{\partial x_j} + f_i = 0 & \forall x \in V \\ \sigma_{ij} n_j = g_i & \forall x \in \partial V_1 \end{cases}$$

$$u_i = \overline{u}_i \qquad \forall x \in \partial V_0$$

Si on suppose les champs introduits et la géométrie de la structure suffisamment réguliers pour effectuer des intégrations par parties, les équations d'équilibre sont équivalentes à la formulation variationnelle :

$$(P.T.V.) \begin{cases} \int_V \sigma(u) : \epsilon(v)\, dx = \int_V v.f\, dx + \int_{\partial V_1} v.g\, dS + \int_{\partial V_0} \overline{u}.\sigma(u).n\, dS \\ \\ \forall v \text{ vérifiant} \qquad v = \overline{u} \text{ sur} \partial V_0. \end{cases}$$

C'est le "principe des travaux virtuels". Il découle immédiatement de la formule de Green :

$$\int_V \sigma : \epsilon(v)\, dx = \int_{\partial V} (\sigma.n).v\, dS - \int_V div\sigma.v\, dx$$

$$(= \int_{\partial V} \sigma_{ij} n_j v_i\, dS - \int_V \tfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} v_i\, dx)$$

valable pour tout v et tout σ vérifiant les équations d'équilibre.

En injectant la loi de comportement dans le P.T.V., on obtient : $\forall v$ vérifiant $v = \overline{u}$ sur ∂V_0, la solution u vérifie :

$$\int_V \epsilon(u) : r : \epsilon(v)\, dx = \int_V v.f\, dx + \int_{\partial V_0} \overline{u}.\sigma(u).n\, dS + \int_{\partial V_1} v.g\, dS$$

qui devient dans le cas de conditions en déplacement homogène, c'est-à-dire $\overline{u} = 0$:

$$\begin{cases} \int_V \epsilon(u) : r : \epsilon(v)\, dx = \int_V v.f\, dx + \int_{\partial V_1} v.g\, dS \\ \\ \forall v \text{ vérifiant} \qquad v = 0 \text{ sur} \partial V_0. \end{cases} \tag{46}$$

La solution u, si elle existe, doit vérifier (46) qui est la formulation variationnelle du problème. Avant de préciser les espaces fonctionnels dans lesquels on se place, on rappelle le théorème de Lax-Milgram pour la résolution des problèmes variationnels :

Théorème 1 *(Lax-Milgram) Soient H un espace de Hilbert réel de norme $\|\ \|$ et une forme bilinéaire sur $H, (u,v) \mapsto a(u,v)$*
symétrique $(\forall u, v \in H \quad a(u,v) = a(v,u))$,
continue $(\exists M \in \mathbb{R} / \forall u, v \in H \quad a(u,v) \leq M\|u\|\|v\|)$,
H-elliptique $(\exists \alpha > 0 \quad \forall v \in H \quad a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2)$ *; et on se donne une forme linéaire continue $v \mapsto L(v)$ sur H alors le problème variationnel :*

$$(\mathcal{P}_1) \begin{cases} \textit{trouver} & u \in H & \textit{tel que} \\ & \forall v \in H & a(u,v) = L(v) \end{cases}$$

et le problème de minimisation :

$$(\mathcal{P}_2) \begin{cases} \textit{trouver} & u \in H & = & \textit{tel que} \\ & J(u) & = & \min_{v \in H} J(v) \\ \textit{avec} & J(v) & = & \frac{1}{2}a(v,v) - L(v) \end{cases}$$

admettent une solution unique identique.

L'équation (46) apparaît alors comme un problème variationnel du type $(\mathcal{P}_1)$ et il est normal de faire les hypothèses de régularité sur les données du problème de façon à appliquer le théorème ci-dessus. Pour travailler dans un espace de Hilbert dans lequel on peut dériver, il est naturel de se placer dans l'espace de Sobolev $(H^1(V))^n$ des champs vectoriels de carré intégrable dans V ainsi que toutes leurs dérivées, muni de la norme :

$$\forall v \in (H^1(V))^n \qquad \|v\|_1 = \Big(\int_V \sum_{i=1}^{n} v_i^2(x) + \sum_{i,j=1}^{n} \big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\big)^2(x)\, dx\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Examinons le membre de gauche de (46), le théorème de Körn nous permettra de l'identifier à une forme bilinéaire ayant les "bonnes propriétés". On note $H = \{v \in (H^1(V))^n ; v = 0 \text{ sur } \partial V_0\}$ c'est un espace de Hilbert pour la norme précédente.

Théorème 2 *(Körn) On suppose que V est un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^n$ et que ∂V est de classe C^1 par morceaux, alors si ∂V_0 est de mesure superficielle strictement positive l'application :*

$$v \in H \qquad v \mapsto \left(\int_V \sum_{i,j=1}^{n} \epsilon_{ij}^2(v)\, dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_V \epsilon(v) : \epsilon(v)\, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur H équivalente à la norme $\| \|_1$.

Ainsi, si les conditions de régularité géométrique nécessaires pour l'application du théorème de Körn sont satisfaites et si on suppose que le champ :

$$r_{ijkl}(x), x \in V, \text{ est dans } L^\infty(V) \qquad (\text{"borné"})$$

et vérifie la condition d'ellipticité uniforme :

$$\exists \alpha > 0 \quad \forall (\mathcal{E}_{ij}) \in \mathbb{R}^{n^2} \quad \sum_{i,j,k,l} r_{ijkl}(x) \mathcal{E}_{ij} \mathcal{E}_{kl} \geq \alpha \sum_{ij} \mathcal{E}_{ij}^2 \quad \forall x \in V.$$

Alors l'application bilinéaire symétrique :

$$a : \; H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \longrightarrow \int_V \epsilon(u) : r : \epsilon(v)\, dx$$

est continue et H-elliptique pour la norme $\| \|_1$.

La démonstration du théorème de Körn est assez délicate, elle montre que dans le cas où ∂V_0 est de mesure superficielle nulle (absence de condtiions en déplacement, problème de Neumann), l'application (a) définie plus haut est H^*-elliptique sur l'espace quotient $H^* = (H^1(V))^n / RIG$ où RIG est l'ensemble des déplacements de $(H^1(V))^n$ rigides, c'est-à-dire, dont les champs de déformation associés sont nuls.

Examinons maintenant le membre de droite de (46). Il faut l'identifier à une forme linéaire continue. Pour cela, on suppose que :

$$f \in (L^2(V))^n \quad , \quad g \in (L^2(\partial V_1))^n.$$

Alors un théorème de trace permet d'affirmer que l'application linéaire :

$$L : H \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$v \longrightarrow \int_V f.v\, dx + \int_{\partial V_1} g.v\, dS$$

est continue sur $(H, \| \|_1)$.

Il ne nous reste plus qu'à appliquer le théorème de Lax-Milgram à $(H, \| \|_1)$, (a) et (L) définis plus haut.

En résumé : Le problème de l'élasticité en condition homogène ($\overline{u} = 0$) admet une solution unique avec les hypothèses sur r, f et g quand V est un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^n$ et ∂V de classe C^1 par morceaux à condition que ∂V_0 soit de mesure non nulle.

* Cas du déplacement imposé non nul ($\overline{u} \neq 0$) : On suppose que $\overline{u} \in (H^{\frac{1}{2}}(\partial V_0))^n$ alors un théorème de trace permet d'affirmer qu'il existe $u_0 \in (H^1(V))^n$ tel que $u_0 = \overline{u}$ sur ∂V_0. On pose alors $w = u - u_0$ de sorte que w soit nul sur ∂V_0 et on cherche w solution du problème variationnel :

trouver $w \in H, \forall v \in H$:

$$a(w,v) = L(v) - a(u_0, v) = L'(v)$$

(on se ramène au cas $\overline{u} = 0$ en remplaçant L par L'). Il est physiquement intéressant de définir l'espace affine des champs de déplacement cinématiquement admissibles :

$$C.A. = \{v \in (H^1(V))^n \quad ; \quad v = \overline{u} \text{ sur } \partial V_0\}$$

et de remarquer que la solution u du problème de l'élasticité est solution du problème de minimisation avec contrainte :

trouver $u \in C.A$ tel que :

$$\begin{cases} J(u) = \inf_{v \in C.A.} J(v) \\ \text{où} \\ J(v) = \frac{1}{2} \int_V \epsilon(v) : r : \epsilon(v)\, dx - \int_V f.v\, dx - \int_{\partial V_1} g.v\, dS \end{cases}$$

c'est le théorème de l'énergie potentielle.

* Cas ∂V_0 de mesure nulle: nous avons vu que le théorème de Körn implique que dans ce cas (a) est bilinéaire symétrique continue elliptique sur $(H^1(\Omega))^n / RIG$. Pour pouvoir appliquer le théorème de Lax-Milgram dans cet espace, il faut pouvoir y définir l'application L. Pour cela, il faut que la résultante générale des forces extérieures et leur moment résultant

soient nuls. Si cette condition est vérifiée alors on a existence et unicité de la solution à un déplacement rigide près.

Pour les démonstrations des théorèmes énoncés plus haut voir [16] et [17].

3.2 Position du problème

Après avoir rappelé le problème de l'élasticité classique, nous voulons traiter le cas où le champ $r(x)$ des tenseurs de rigidité est aléatoire au niveau microscopique. Il faut alors formaliser l'aléa qui règne dans la microstructure : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité. On munit l'espace $\Omega \times \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3) de la tribu produit $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ engendrée par les ensembles produits d'un élément de $\mathcal{A}$ et d'un borélien de $\mathbb{R}^n$, $A \times B$ avec :

$$A \times B = \{(\omega, y) \in \Omega \times \mathbb{R}^n / \omega \in A, y \in B \quad A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$$

On définit sur $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ la mesure produit de $\mathbf{P}$ et de la mesure de Lebesgue (λ) sur $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{P} \otimes \lambda$ par la relation :

$$\mathbf{P} \otimes \lambda(A \times B) = \mathbf{P}(A)\lambda(B) \qquad \forall A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

En fait, la tribu $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ n'est pas forcément complète pour la mesure $\mathbf{P} \otimes \lambda$ c'est-à-dire qu'un ensemble contenu dans un élément de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ de $\mathbf{P} \otimes \lambda$-mesure nulle n'est pas forcément dans $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. La tribu complétée $\overline{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}$ est la tribu engendrée par de tels ensembles et par les éléments de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Nous pouvons définir le champ de tenseur de rigidité aléatoire $r(\omega, y)$ par ses composantes en postulant que les $r_{ijkl}(\omega, y)$ sont des fonctions mesurables :

$$\begin{array}{rccc} r_{ijkl} : (\Omega \times \mathbb{R}^n, \overline{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}, \mathbf{P} \otimes \lambda) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \\ (\omega, y) & \longrightarrow & r_{ijkl}(\omega, y) \end{array} \tag{47}$$

telles que $(r_{ijkl}(\omega, y))_{ijkl=1,\ldots,n} = r(\omega, y)$ soit un tenseur d'ordre 4 symétrique défini positif vérifiant la condition d'ellipticité uniforme suivante :
$\exists\, a^+ > 0$, $a^- > 0$ tels que :

$$\forall(\omega, y) \quad \forall(\mathcal{E}_{ij}) \in \mathbb{R}^{n2} \qquad a^- \sum_{ij} \mathcal{E}_{ij}^2 \leq \sum_{ijkl} r_{ijkl}(\omega, y)\mathcal{E}_{ij}\mathcal{E}_{kl} \leq a^+ \sum_{ij} \mathcal{E}_{ij}^2. \tag{48}$$

Soit $u_\alpha(\omega, x)$ la solution d'un problème d'élasticité PE_α défini sur un domaine borné V de $\mathbb{R}^n$ de bord $\partial V = \partial V_0 \cup \partial V_1$ par la donnée des champs $f(x) \quad x \in V$, $g(x) \quad x \in \partial V_1$, $\overline{u}(x) \quad x \in \partial V_0$ et du champ de tenseurs de rigidité $r_\alpha(\omega, x) \quad x \in V$ défini à partir du champ de tenseurs de rigidité microscopique $r(\omega, y)$ par la relation de changement d'échelle :

$$\forall x \in V \quad r_\alpha(\omega, x) = r(\omega, \frac{x}{\alpha})$$

où $\alpha > 0$ est destiné à tendre vers 0.

Le problème de l'homogénéisation s'énonce de la façon suivante : existe-t-il un tenseur de rigidité homogène R^{hom} qui remplace $r_\alpha(\omega, x)$ dans PE_α tel que $u_\alpha(\omega, x)$ converge vers la solution $u_{hom}(x)$ du problème homogénéisé PE_{hom} quand α tend vers 0 ? La convergence étant, par nature, en un sens probabiliste à préciser. En fait, pour que R^{hom} ait un intérêt physique, il faut qu'il soit construit uniquement à partir des propriétés élastiques microscopiques formalisées dans $r(\omega, y) \quad y \in \mathbb{R}^n$. On voit ainsi apparaître deux étapes distinctes dans la résolution du problème :

1. Définir R^{hom} à partir du processus aléatoire $r(\omega, y)$ de telle sorte qu'on puisse montrer que :

2. $u_\alpha(\omega, x) \longrightarrow u_{hom}(x)$ pour tout problème d'élasticité bien défini.

A notre connaissance, le problème de l'homogénéisation des coefficients élastiques aléatoires n'a pas encore été abordé dans la littérature mathématique. Voir à ce sujet l'article de synthèse de Attouch [18]. Néanmoins le problème a été abordé dans le cas des coefficients thermiques aléatoires par Kozlov [19], Yurinskii [20] et Papanicolaou [12] avec trois méthodes différentes mais en distinguant toujours les deux étapes : définition des coefficients homogénéisés et convergence de la solution réelle vers la solution du problème homogène. Notre but étant de prouver le bien fondé mathématique de la méthode de simulation exposée dans la première portée du chapitre, il nous suffit d'adapter la première étape de la méthode de Yurinskii, sans aborder la deuxième étape à cause de sa complexité et du volume de calcul qu'elle nécessite.

3.3 Définition de R^{hom}

Soit $r(\omega, y) \quad y \in \mathbb{R}^n \quad \omega \in \Omega$ un processus vérifiant la mesurabilité (47) et l'ellipticité (48). Nous allons définir R^{hom} à partir du tenseur de rigidité globale d'une structure défini dans la deuxième partie du chapitre en imposant un déplacement au bord compatible avec une déformation homogène. On applique cette définition au "cube" C_N de dimension N de $\mathbb{R}^n$:

$$C_N = \{y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n / 0 \leq y_i \leq N \quad \forall i = 1, \ldots, n\}$$

Le volume de $C_N, |C_N|$, est égal à N^n. La rigidité globale de C_N est alors définie par le problème de minimisation :

$$\begin{aligned} E : R_N(\omega) : E &= J_N^*(\omega, E) = \min_{v \in [H_0^1(C_N)]^n} J_N(\omega, E, v) \\ &\text{où} \\ J_N(\omega, E, v) &= \frac{1}{|C_N|} \int_{C_N} [E + \epsilon(v)] : r(\omega, y) : [E + \epsilon(v)] dy \qquad (49) \\ E &= (E_{ij}) \text{ est un tenseur symétrique de } \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

$R_N(\omega)$ est par définition la rigidité globale de C_N.

La solution $u(\omega)$ de (49) existe et est unique puisqu'elle est aussi solution du problème :

$$\begin{aligned} &\min_{v \in [H_0^1(C_N)]^n} && \tfrac{1}{2} a(v, v) - L(v) \\ &&&\text{où} \\ &a(v, v) && = \int_{C_N} \epsilon(v) : r(\omega, y) : \epsilon(v)\, dy \\ &L(v) && = -\int_{C_N} E : r(\omega, y) : \epsilon(v)\, dy \end{aligned}$$

auquel s'applique Lax-Milgram.

Nous voulons montrer que $R_N(\omega)$ est une variable aléatoire. Soit $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une base orthonormée totale de $[H_0^1(C_N)]^n$ avec φ_i de classe C^∞ à support compact dans C_N. $[H_0^1(C_N)]^n$ apparaît comme le complété pour la norme H^1 de $Vect(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$. La méthode de Galerkin consiste à approcher la solution $u(\omega)$ de (49) par la solution $u_h(\omega)$ obtenue en minimisant $J(\omega, E, v)$ sur $Vect(\varphi_1, \ldots, \varphi_h)$. On montre alors que $\lim_{h \to \infty} \|u(\omega) - u_h(\omega)\| = 0, \forall \omega$. On écrit $u_h(\omega) = \sum_{i=1}^h \mathcal{E}_i(\omega) \varphi_i$ alors les $\mathcal{E}_i(\omega)$ sont solution du système linéaire :

$$\sum_{j=1}^h a(\varphi_i, \varphi_j) \mathcal{E}_j = L(\varphi_i) \quad \forall i = 1, \ldots, h$$

Les $\mathcal{E}_i(\omega)$ s'expriment algébriquement en fonction de $a(\varphi_i, \varphi_j)$ et des $L(\varphi_i)$ qui sont $\mathcal{A}$-mesurables à cause de (47). Ainsi $u_h(\omega)$ apparaît comme une variable aléatoire à valeurs $[H_0^1(C_N)]^n$, il en est de même pour $u(\omega)$. En fait, la tribu qui intervient dans les calculs est la tribu $\mathcal{M}(C_N) \subset \mathcal{A}$ intersection des tribus qui rendent mesurables toutes les applications de la forme :

$$\begin{cases} \omega \longrightarrow \int_{C_N} \sum_{ijkl} r_{ijkl}(\omega, y) f_{ijkl}(y) dy & f_{ijkl} \text{ continue à support} \\ & \text{compact dans } C_N. \end{cases}$$

Dans le même ordre d'idée, $J_N(\omega, E, u_h)$ est $\mathcal{M}(C_N)$-mesurable ainsi que $J_N^*(\omega, E)$.

On a donc montré que $R_N(\omega)$ est $\mathcal{M}(C_N)$-mesurable et c'est son comportement quand N tend vers l'infini qui permettra de définir R^{hom}. Mais auparavant, on va donner quelques estimations a priori sur $R_N(\omega)$.
Rappelons pour mémoire que l'équivalence de (49) et de la forme variationnelle correspondante, nous permet d'établir que :

$$\begin{aligned} E : R_N(\omega) : E' &= \tfrac{1}{|C_N|} \int_{C_N} [E + \epsilon(u(\omega))] : r(\omega, y) : E' \, dy \\ &= \tfrac{1}{|C_N|} \int_{C_N} E : r(\omega, y) : [E' + \epsilon(u'(\omega))] \, dy \\ &= \tfrac{1}{4} [(E + E') : R_N(\omega) : (E + E') - (E - E') : R_N(\omega) : (E - E')] \end{aligned}$$

et il suffit d'étudier $J_N^*(\omega, E)$.

* Premièrement, il résulte de la condition (48) l'encadrement :

$$\forall \omega, E \qquad a^- E : E \leq J_N^*(\omega, E) \leq a^+ E : E \tag{50}$$

* Deuxièmement :

$$\begin{cases} \forall \omega, E \quad J_N^*(\omega, E) \leq J_N(\omega, E, 0) = E :< r(\omega, y) >_N : E \\ \text{où} \\ \qquad\qquad < r(\omega, y) >_N \quad = \tfrac{1}{|C_N|} \int_{C_N} r(\omega, y) dy \end{cases} \tag{51}$$

et on voit que si $r(\omega, y)$ est ergodique ce qu'on ne manquera pas de supposer dans la suite, on a l'estimation :

$$E : R^{\text{hom}} : E \leq E : \mathbb{E}(r(\omega, 0)) : E$$

où $\mathbb{E}$ est l'espérance mathématique.

* Troisièmement, soit $M < N$, on peut partager le cube C_N en cubes de dimension M de la façon suivante : soit $K = [\frac{N}{M}]$ partie entière de $\frac{N}{M}$. On considère les K^n cubes $C_{M,(l_i)}$ définis par :

$$\begin{cases} C_{M,(l_i)} = \{y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n / Ml_i \leq y_i \leq Ml_i + M\} \\ \\ \qquad\qquad \text{pour tout } (l_i)_{i=1,n} \in \{0, 1, \ldots, K-1\}^n \end{cases}$$

On définit un élément de $[H_0^1(C_N)]^n$, $\tilde{v}$, en l'identifiant dans le cube $C_{M,(l_i)}$ à la solution du problème (49) où C_N est remplacé par $C_{M,(l_i)}$, et à la solution nulle à l'extérieur des $C_{M,(l_i)}$: $C_N - \cup_{(l_i)} C_{M,(l_i)}$. Le volume de $C_{M,(l_i)}$ est égal à M^n ; ainsi celui de $C_N - \cup_{(l_i)} C_{M,(l_i)}$ vaut $N^n - K^n M^n$. Evaluons le rapport :

$$\frac{N^n - K^n M^n}{N^n} = \frac{N^n - [\frac{N}{M}]^n M^n}{N^n} \leq \frac{N^n - (\frac{N}{M} - 1)^n M^n}{N^n} = 1 - (\frac{N-M}{N})^n$$

$$\leq 1 - \frac{N-M}{N} = \frac{M}{N}$$

Nous pouvons alors écrire l'inégalité :

$$J_N^*(\omega, E) \leq J_N(\omega, E, \tilde{v}) = \sum_{(l_i)} (\frac{M}{N})^n J_{M,(l_i)}^*(\omega, E) + a^+ \frac{N^n - K^n M^n}{N^n} E : E$$

$$\leq \sum_{(l_i)} (\frac{M}{N})^n J_{M,(l_i)}^*(\omega, E) + c\frac{M}{N} \qquad \forall \omega, E \qquad (52)$$

avec $c = a^+ E : E$

Les estimations (50), (51) et (52) ont été établies sans aucune hypothèse de stationnarité sur $r(\omega, y)$. En réalité, il faut supposer la loi du processus $r_{ijkl}(\omega, y)$ stationnaire dans le sens suivant :

$\forall z \in \mathbf{Z}^n$ les processus sur $\mathbb{R}^n$ $r_{ijkl}(\omega, y)$ et $r_{ijkl}(\omega, y+z)$ ont même loi (53)

Dans ces conditions, $J_{M,(l_i)}^*(\omega, E)$ et $J_M^*(\omega, E)$ ont même loi et en passant à l'espérance dans (52) on obtient :

$$\mathbb{E}(J_N^*(\omega, E)) \leq (\frac{KM}{N})^n \mathbb{E}(J_M^*(\omega, E)) + c\frac{M}{N}$$

De cette relation on déduit que :

$$\lim_{N\to\infty} \sup \mathbb{E}(J_N^*(\omega, E)) \leq \mathbb{E}(J_M^*(\omega, E)) \quad \forall M$$

ce qui prouve que la suite $\mathbb{E}(J_N^*(\omega, E))$ est convergente puisqu'elle est bornée et ne peut admettre qu'une seule valeur d'adhérence: sa borne inférieure. On peut alors définir R^{hom} par la relation :

$$R^{\text{hom}} = \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}(R_N(\omega)) \tag{54}$$

En résumé, (54) a un sens quand le processus $r(\omega, y)$ est mesurable (47), vérifie (48) et est stationnaire au sens (53). Mais pour pouvoir remplacer le matériau réel par un matériau de rigidité R^{hom}, (54) s'avère insuffisante et il faut établir la convergence de $R_N(\omega)$ vers R^{hom} :

$$R^{\text{hom}} = \lim_{N\to\infty} R_N(\omega) \qquad \text{en un sens probabiliste à préciser.}$$

L'analyse de l'exemple unidimensionnel évoqué en début de chapitre montre que pour établir cette convergence il faut faire une hypothèse supplémentaire : l'ergodicité.

Dans [3] et [10], les auteurs traitent le problème de l'homogénéisation des coefficients thermiques aléatoires et énoncent des résultats de convergence en supposant l'ergodicité de $r(\omega, y)$. Afin d'adapter ces résultats au cas de l'élasticité, nous avons tenté de vérifier les démonstrations données dans ces articles, mais sans succès ! Il nous semble alors préférable de s'inspirer de [11] pour établir la convergence en faisant une hypothèse plus forte que l'ergodicité à savoir une hypothèse de mélange. Nous établirons alors la convergence au sens L^2. Nous voulons rendre compte du fait que si deux domaines boréliens bornés de $\mathbb{R}^n, G_1$ et G_2 sont très éloignés, une variable aléatoire définie à partir des coefficients élastiques sur G_1 et une variable aléatoire définie à partir des coefficients élastiques sur G_2 sont indépendantes (ou presque !). On traduit cela par :

$$\begin{aligned} \sup |\mathbb{E}\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 - \mathbb{E}\mathcal{E}_1\mathbb{E}\mathcal{E}_2| &= \varphi(d(\overline{G}_1, \overline{G}_2)) \\ \lim_{d\to+\infty} \varphi(d) &= 0 \end{aligned} \tag{55}$$

où le sup dans (55) porte sur tous les couples de variables aléatoires $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$: $|\mathcal{E}_i| \leq 1$ et $\mathcal{E}_i$ $\mathcal{M}(G_i)$-mesurable.

Reprenons l'inégalité (52). On peut l'écrire :

$$\begin{aligned} J_N^*(\omega, E) - \mathbb{E}(J_N^*(\omega, E)) &\leq \sum_{(l_i)} (\tfrac{M}{N})^n [J_{M,(l_i)}^*(\omega, E) - \mathbb{E}(J_M^*(\omega, E))] \\ &\quad + c\tfrac{M}{N} + (\tfrac{MK}{N})^n \mathbb{E}(J_M^*(\omega, E)) - \mathbb{E}(J_N^*(\omega, E)) \end{aligned}$$

En notant $\mathcal{E}_{(l_i)} = J_{M,(l_i)}^*(\omega, E) - \mathbb{E}(J_M^*(\omega, E))$, $\mathbb{E}\mathcal{E}_{(l_i)} = 0$ on a :

$$[J_N^*(\omega, E) - \mathbb{E}(J_N^*(\omega, E))]^+ \leq (\frac{M}{N})^n |\sum \mathcal{E}_{(l_i)}| + \epsilon_{M,N}$$

où

$$\begin{aligned} [x]^+ &= \tfrac{|x|+x}{2} \\ \epsilon_{M,N} &= c\tfrac{M}{N} + |(\tfrac{MK}{N})^n \mathbb{E}(J_M^*(\omega, E)) - \mathbb{E}(J_N^*(\omega, E))| \\ \lim_{N \to +\infty} \epsilon_{\sqrt{N},N} &= 0 \end{aligned}$$

$\mathcal{E}_{(l_i)}$ est $\mathcal{M}(C_{M,(l_i)})$-mesurable et vérifie d'après (48) :

$$|\mathcal{E}_{(l_i)}| \leq 2a_+ E : E$$

Ainsi :

$$\mathbb{E}|\sum_{(l_i)} \mathcal{E}_{(l_i)}|^2 \leq (2a_+ E : E)^2 [K^n + \varphi(M) K^{2n}]$$

à cause de l'hypothèse de mélange. D'où :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}([J_N^*(\omega, E) - \mathbb{E}(J_N^*(\omega, E))]^+)^2 &\leq 2\epsilon_{M,N}^2 + 2(\tfrac{M}{N})^{2n} \mathbb{E}|\textstyle\sum_{(l_i)} \mathcal{E}_{(l_i)}|^2 \\ &\leq 2\epsilon_{M,N}^2 + 2(2a_+ E : E)^2 ((\tfrac{M}{N})^n + \varphi(M)) \end{aligned}$$

et en prenant la $\lim_{M=\sqrt{N}, N \to \infty}$ du membre de droite, on a:

$$\lim_{N \to \infty} \mathbb{E}([J_N^*(\omega, E) - \mathbb{E}(J_N^*(\omega, E))]^+)^2 = 0$$

et puisque $\| \|_{L^1} \leq \| \|_{L^2}$, on a :

$$\lim_{N \to \infty} \mathbb{E}([J_N^*(\omega, E) - \mathbb{E}(J_N^*(\omega, E))]^+) = 0$$

De même, J_N^* est borné implique que :

$$\mathbb{E}([J_N^*(\omega,E)-\mathbb{E}(J_N^*(\omega,E))]^-)^2 \leq (2a^+E:E)\mathbb{E}([J_N^*(\omega,E)-\mathbb{E}(J_N^*(\omega,E))]^-)$$

or :

$$\mathbb{E}([J_N^*(\omega,E)-\mathbb{E}(J_N^*(\omega,E))]^-) = \mathbb{E}([J_N^*(\omega,E)-\mathbb{E}(J_N^*(\omega,E))]^+)$$

et ainsi :

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}(J_N^*(\omega,E)-\mathbb{E}(J_N^*(\omega,E)))^2 = 0$$

et en ramplaçant $\mathbb{E}(J_N^*(\omega,E))$ par sa limite, on a plus synthétiquement :

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}[(R_N(\omega)-R^{\text{hom}}):(R_N(\omega)-R^{\text{hom}})] = 0$$

qui n'est autre que la convergence dans L^2 de $R_N(\omega)$ vers R^{hom}.

En résumé, si on suppose $r(\omega,y)$ mesurable au sens (47), stationnaire au sens (53), elliptique au sens (48) et enfin mélangeant au sens (55) alors il existe un tenseur d'ordre 2 symétrique défini positif R^{hom}, vérifiant (48) et tel que :

$$\lim_{N\to\infty} R_N(\omega) = R^{\text{hom}} \quad \text{au sens } L^2(\Omega). \tag{56}$$

REMARQUE : Nous avons défini lors de la résolution numérique du problème (2ème partie) le tenseur $R_N^m(\omega)$ en minimisant la fonctionnelle J_N sur le sous-espace de dimension finie Q_N^m de $[H_0^1(C_N)]^n$, où m est le paramètre du maillage (figure 1). Il est facile de voir qu'à m fixé, et en remplaçant $J_N^*(\omega,E)$ (obtenue en minimisant J_N sur $[H_0^1(C_N)]^n$) par $J_N^{m*}(\omega,E)$ (obtenue en minimisant J_N sur Q_N^m), le raisonnement qui nous a permis de définir R^{hom}, puis de démontrer la convergence de $R_N(\omega)$ vers R^{hom} au sens L^2, nous permet de définir un tenseur $R^{m,hom}$ limite au sens L^2 des tenseurs $R_N^m(\omega)$; ainsi à chaque m correspond une homogénéisation et on

a par définition de $R^{m,hom}$ et à cause des éléments finis :

$$\left\{\begin{array}{lcl} & \forall E & \\ E : R^{m,hom} : E & = & inf_N \, \mathbb{E}(J_N^{m*}(\omega, E)) \\ & \forall E, N, \omega & \\ J_N^*(\omega, E) & = & inf_m \, J_N^{m*}(\omega, E) \\ & \text{alors} \, \forall E, m & \\ E : R^{m,hom} : E & \geq & E : R^{\text{hom}} : E \\ & \text{et} & \\ \lim_{m \to +\infty} R^{m,hom} & = & R^{\text{hom}} \end{array}\right.$$

La dernière limite découle du fait que $E : R^{\text{hom}} : E$ est l'inf sur N et m de $\mathbb{E}(J_N^{m*}(\omega, E))$ indépendament de l'ordre dans lequel on minimise. Ces résultats sont valables pour tout processus $r(\omega, y)$ vérifiant les hypothèses, et pour tout maillage régulier, paramétré par N et m, et défini avec d'autres éléments que les triangles linéaires.

3.4 Définition de S^{hom}

La définition de R^{hom} a nécessité l'utilisation de l'approche en déformation et les hypothèses (47), (48), (53) et (55) sur $r(\omega, y)$. Qu'en est-il de l'approche en contrainte ? On garde les notations du paragraphe précédent et les hypothèses sur $r(\omega, y)$. Rappelons que la définition du tenseur de souplesse $S_N(\omega)$ de C_N nécessite la résolution au problème d'élasticité paramétré par Σ :

$$(AC)_\Sigma \left[\begin{array}{lcll} div\, \sigma & = & 0 & \text{dans } C_N \\ \sigma & = & r : \epsilon & \text{dans } C_N \\ \epsilon & = & \frac{1}{2}(\text{grad}\, u + \text{grad}^t\, u) & \text{dans } C_N \\ \sigma.n & = & \Sigma.n & \text{sur } \partial C_N \end{array}\right.$$

(voir 2ème partie).

Une formulation variationnelle s'obtient à partir du principe des travaux virtuels, pour tout champ de déplacement v cinématiquement admissible, le champ de contrainte solution doit vérifier :

$$\int_{C_N} \sigma : \epsilon(v)\, dx = \int_{\partial C_N} (\Sigma.n).v\, dS = \Sigma : \int_{C_N} \epsilon(v)\, dx$$

Le champ des déplacements cinématiquement admissibles décrit l'espace de Sobolev $[H^1(C_N)]^n$. Ainsi, le champ solution u_Σ est unique à un déplacement rigide près et vérifie :

$$(PU1) \quad \max_{v\in[H^1(C_N)]^n} \frac{1}{|C_N|}[2\Sigma : \int_{C_N} \epsilon(v)\,dx - \int_{C_N} \epsilon(v) : r : \epsilon(v)\,dx]$$

et :

$$\forall v \in [H^1(C_N)]^n$$

$$(PU2) \qquad \int_{C_N} \epsilon(u_\Sigma) : r : \epsilon(v)\,dx = \Sigma . \int_{C_N} \epsilon(v)\,dx$$

Nous allons donner une autre formulation variationnelle du problème $(AC)_\Sigma$ équivalente à la précédente et plus facile à manier. Elle n'est autre que le théorème de l'énergie complémentaire connu en élasticité classique. On note SA_N le sous-espace dans $[L^2(C_N)]^{n\times n}$ des tenseurs $\sigma, n\times n$ symétriques de carré intégrable vérifiant :

$$\begin{cases} \forall v \in [H^1(C_N)]^n \\ \\ \int_{C_N} \sigma : \epsilon(v)\,dx = 0 \end{cases}$$

SA_N est l'espace des contraintes statiquement admissibles avec une contrainte normale nulle au bord de C_N. On munit SA_N de la norme induite de $[L^2(C_N)]^{n\times n}$:

$$(\sigma, \sigma') = \int_{C_N} \sigma : \sigma'$$

SA_N muni de cette norme est un espace de Hilbert puisqu'il est un sous-espace vectoriel fermé de $[L^2(C_N)]^{n\times m}$. L'uniforme ellipticité de r est équivalente à celle de r^{-1} et l'application du théorème de Lax-Milgram montre que les deux problèmes suivants admettent la même solution unique :

- trouver $\sigma^* \in SA_N$ vérifiant :

$$(PS1) \qquad \min_{\sigma\in SA_N} \frac{1}{|C_N|} \int_{C_N} (\Sigma + \sigma) : r^{-1} : (\Sigma + \sigma)$$

- trouver $\sigma^* \in SA_N$ vérifiant :

$$(PS2) \qquad \forall \sigma \in SA_N \quad \int_{C_N} (\Sigma + \sigma^*) : r^{-1} : \sigma = 0.$$

Montrons que le champ de contrainte associé à la solution de $(PU2)$ est égal à $\Sigma + \sigma^*$. En effet, le champ $r : \epsilon(u_\Sigma) - \Sigma$ est dans SA_N d'après $(PU2)$, il vérifie de plus :

$$[\Sigma + (r : \epsilon(u_\Sigma) - \Sigma)] : r^{-1} : \sigma = \epsilon(u_\Sigma) : \sigma$$

d'où l'équation $(PS2)$ pour tout $\sigma \in SA_N$ C.Q.F.D.

De ce qui précède, on définit facilement $S_N(\omega)$ par la relation :

$$\begin{cases} \max_{u \in [H^1(C_N)]^n} K_N(\omega, \Sigma, u) = \Sigma : S_N : \Sigma = \min_{\sigma \in SA_N} I_N(\omega, \Sigma, \sigma) \\ \text{où} \\ K_N(\omega, \Sigma, u) = \frac{1}{|C_N|}[2\Sigma : \int_{C_N} \epsilon(u) - \int_{C_N} \epsilon(u) : r(\omega, y) : \epsilon(u)] \\ I_N(\omega, \Sigma, \sigma) = \frac{1}{|C_N|} \int_{C_N} (\Sigma + \sigma) : r^{-1}(\omega, y) : (\Sigma + \sigma) \end{cases}$$

Les propriétés (47), (48), (53) et (55) sur $r(\omega, y)$ impliquent les mêmes propriétés sur $r^{-1}(\omega, y)$ de façon triviale puisque les composantes de r^{-1} s'expriment simplement en fonction de ceux de $r(\omega, y)$. Ainsi, la fonctionnelle $I_N(\omega, \Sigma, \sigma)$ peut jouer exactement le rôle de la fonctionnelle $J_N(\omega, E, v)$. L'utilisation de I au lieu de K est justifiée par le fait que lors du partage du cube C_N en cubes de côtés $M < N$, SA_N contient le champ de contrainte fabriqué à partir du champ solution dans chaque petit cube, ce qui n'est pas le cas pour K qu'on maximise sur $[H^1(C_N)]^n$. Ainsi, en remplaçant la fonctionnelle J_N par I_N dans tous les raisonnements qui nous ont permis de définir R^{hom} et d'établir la convergence de $R_N(\omega)$ vers R^{hom} au sens L^2, on définit S^{hom} et on établit la convergence de $S_N(\omega)$ vers S^{hom} au sens L^2. Malheureusement, nous n'avons pas pu établir que S^{hom} est l'inverse de R^{hom}, mais ceci est vérifiable numériquement à l'aide des simulations . Le prouver, c'est prouver le principe de Saint Venant!

REMARQUE : La remarque faite précédemment sur la définition d'un tenseur $R^{m,hom}$ limite des $R_N^m(\omega)$ est aussi valable pour la définition d'un tenseur $S^{m,hom}$ limite au sens L^2 des tenseurs $S_N^m(\omega)$ définis lors de la résolution numérique par éléments finis triangulaires linéaires (2ère partie).

En effet, il est facile de voir que $S_N^m(\omega)$ est défini par:

$$\max_{u \in P_N^m} K_N(\omega, \Sigma, u) = \Sigma : S_N^m : \Sigma = \min_{\sigma \in SA_N^m} I_N(\omega, \Sigma, \sigma)$$

avec: P_N^m le sous-espace de $[H^1(C_N)]^n$ défini pour le maillage de finesse m; SA_N^m le sous-espace dans $[L^2(C_N)]^{n\times n}$ des tenseurs $\sigma, n \times n$ symétriques de carré intégrable vérifiant :

$$\begin{cases} \forall v \in P_N^m \\ \\ \int_{C_N} \sigma : \epsilon(v)\, dx = 0 \end{cases}$$

Alors pour m fixé, et en remplaçant $J_N^*(\omega, E)$ (obtenue en minimisant J_N sur $[H_0^1(C_N)]^n$) par $I_N^{m*}(\omega, \Sigma)$ (obtenue en minimisant I_N sur SA_N^m), le raisonnement qui nous a permis de définir R^{hom}, puis de démontrer la convergence de $R_N(\omega)$ vers R^{hom} au sens L^2, nous permet de définir un tenseur $S^{m,hom}$ limite au sens L^2 des tenseurs $S_N^m(\omega)$; ainsi à chaque m correspond une homogénéisation et on a par définition de $S^{m,hom}$ et à cause des éléments finis :

$$\begin{cases} & \forall \Sigma & \\ \Sigma : S^{m,hom} : \Sigma & = & inf_N\, \mathbb{E}(I_N^{m*}(\omega, \Sigma)) \\ & \forall \Sigma, N, \omega & \\ I_N^*(\omega, \Sigma) & = & sup_m\, I_N^{m*}(\omega, \Sigma) \\ & \text{alors } \forall \Sigma, m & \\ \Sigma : S^{\text{hom}} : \Sigma & \geq & \Sigma : S^{m,hom} : \Sigma \end{cases}$$

On ne peut pas affirmer que $\lim_{m\to+\infty} S^{m,hom} = S^{\text{hom}}$ puisqu'on ne peut pas intervertir les limites aussi facilement que pour les rigidités R. Néanmoins, si on suppose que $S^{m,hom}$ et $R^{m,hom}$ sont inverses, comme le montre la simulation, alors la convergence sur les souplesses homogénéisées découle de celle qu'on a établi sur les rigidités.

CONCLUSION

Après avoir indiqué le cadre dans lequel un passage micro-macro est possible quand la microstructure est aléatoire, à savoir le cadre de l'ergodicité, nous avons abordé le problème dans le cas de l'élasticité. Nous avons alors défini rigoureusement les coefficients élastiques homogènes équivalents et nous avons donné une méthode numérique pour les calculer en fonction de la loi du processus aléatoire qui décrit la microstructure. Cette méthode est valable pour toute microstructure élastique vérifiant les hyphothèses. Elle comporte deux approximations de nature différente : une approximation probabiliste du type loi des grands nombres (c'est le paramètre N du maillage), et une approximation du type éléments finis (c'est le paramètre m du maillage). Nous avons situé ces deux approximations l'une par rapport à l'autre, et nous avons montré la faisabilité de la méthode sur un cas simple. Il est très fréquent de voir des simulations dans l'étude des matériaux, nous nous sommes attachés ici à montrer le bien fondé de celle qui est proposée. Cette étude pourra servir de support théorique et numérique à l'homogénéisation aléatoire pour des lois de comportement plus complexes que l'élasticité : élasto-plasticité, visco-élasticité, ...etc.

REFERENCES

[1] MANDEL : Contribution théorique à l'étude de l'écrouissage et des lois d'écoulement plastique. 11th I.C.A.M., Springer pp 502-509, 1964.

[2] HILL : The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycristals. J. Mech. Solids, Vol. 15, pp 79-95, 1967.

[3] BUI et col : Relations entre grandeurs microscopiques et macroscopiques pour un solide élastique fragile ayant des zones endommagées. Note aux CRAS t. 292, série II, pp 863-866, 1981.

[4] MATHERON : Eléments pour une théorie des milieux poreux. Masson et Cie, Paris, 1967.

[5] WILLIS : The overall elastic response of composite materials. J. of Applied Mechanics, ASME, Vol 50, pp 1202-1209. 1983.

[6] BERVEILLER et ZAOUI : Méthodes self-consistent en mécanique des solides, 15ème colloque du Groupe Français de Rhéologie, Paris, 1980.

[7] HUET : Remarques sur la procédure d'assimilation d'un matériau hétérogène à un milieu continu équivalent,15ème colloque du Groupe Français de Rhéologie, Paris, 1980.

[8] KRÖNER : Propriétés linéaires des milieux aléatoires: la théorie systématique. 15ème colloque du Groupe Français de Rhéologie, Paris, 1980.

[9] SUQUET : Méthodes d'homogénénéisation en mécanique des solides, 15ème colloque du Groupe Français de Rhéologie, Paris, 1980.

[10] ROELFSTRA et col : Le béton numérique. Mat. et Constr., Vol. 18, N 107, pp 327-335, 1985.

[11] ANDRIEUX : "Un modèle de matériau microfissuré. Application

aux roches et au béton". Thèse Docteur-Ingénieur. E.N.P.C. 1983.

[12] CEA-EDF-INRIA. "Les Méthodes de l'Homogénéisation : Théorie et Applications en Physique". Eyrolles, Paris, 1985.

[13] BILLINGSLEY. "Ergodic Theory and Information". Krieger, Huntington, New-York, 1978.

[14] BILLINGSLEY. "Convergence of Probability Measure". Wiley, New-York, 1968.

[15] KRENGEL. "Ergodic Theorems". Walter de Gtuyter, Berlin, New-York, 1985.

[16] RAVIART et THOMAS. "Introduction à l'Analyse Numérique des Equations aux Dérivées Partielles". Masson, 1983.

[17] DAUTRAY, LIONS et col. "Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques". Masson, Paris, 1984.

[18] ATTOUCH. "'Homogénéisation". Séminaire Bourbaki, 40e Année, n686, 1987-88.

[19] KOZLOV. "Averaging of Random Operators". Math. USSR Sbornik. Vol. 37, N2, 1980.

[20] YURINSKII."Averaging an Elliptic Boundary-Value Problem with Random Coefficients". Sibirskii Matematicheskii Zhurnal, Vol. 21, N3, p.209-223. 1980.

Chapitre 4

La fatigue à grand nombre de cycles des métaux polycristallins: un critère de rupture

1 Description du phénomène et modèle de Dang-Van 2

2 La Localisation de Hershey-Kröner 12

3 Généralisation du modèle de Dang-Van 17

3.1 Localisation 19

3.2 Ecrouissage du cristal 21

3.3 Le critère de rupture 29

3.4 Caractère aléatoire de la fatigue 32

INTRODUCTION

Nous avons donné, dans le chapitre précédent, une méthode numérique pour calculer les coefficients élastiques macroscopiques d'un matériau à partir de ses coefficients élastiques microscopiques aléatoires. Dans ce chapitre, le passage micro-macro se fait analytiquement : il concerne le phénomène de la rupture par fatigue à grand nombre de cyles des métaux: lorsqu'on soumet une structure métallique à des chargements répétés qui y induisent, à chaque instant, des contraintes inférieures à la limite de rupture statique, il arrive souvent que la structure se rompe : c'est la rupture par **fatigue**.

La question qu'on se pose est la suivante : si on applique à un élément de volume représentatif d'un métal polycristallin une contrainte homogène $\Sigma(t)$ périodique en fonction du temps, y aura-t-il rupture ou non ?

Pour y répondre, Dang-Van [1] modélisé la plastification qui apparaît au cours du chargement dans un cristal faible dont la rupture éventuelle provoque celle de l'élément de volume après un certain nombre de cycles. Il adopte à cette fin l'hypothèse d'un écrouissage linéaire isotrope du cristal et il évalue son état de contrainte en fonction de la contrainte dans l'élément de volume à l'aide de la localisation de Lin-Taylor; de cette modélisation il déduit un critère de rupture valable uniquement pour les trajets de contrainte radiaux.

Dans la première partie de ce chapitre, nous décrivons sommairement la physique du phénomène et nous rappelons sa modélisation d'après Dang-Van.

Dans la deuxième partie, nous remarquons que la localisation de Lin-Taylor ne modélise pas l'hétérogénéité élastique de la microstructure; nous reconduisons alors la démarche précédente en adoptant la localisation de Hershey-Kröner et nous montrons l'importance de la formule de localisation dans l'établissement du critère de fatigue.

Enfin, en adoptant des hypothèses moins fortes sur la localisation et sur l'écrouissage du cristal, nous établissons, dans la dernière partie de ce chapitre, un critère de fatigue valable pour tous les trajets de contrainte périodiques. De plus, ce critère modélise l'aspect aléatoire de la rupture.

1 Description du phénomène et modèle de Dang-Van

Un métal est un agrégat de cristaux d'orientation et de propriétés aléatoires, une observation expérimentale du phénomène de fatigue à l'échelle des cristaux permet de distinguer trois phases :

1. *Nucléation des microfissures* :
   Le processus débute par une plastification intense dans quelques cristaux faibles, ainsi dès les N_n premiers cycles, un tel cristal se partage en zones séparées par des plans parallèles; ces zones se déplacent en bloc les uns par rapport aux autres selon une direction de glissement appartenant aux plans qui les séparent.
   Ce déplacement est dû aux contraintes exercées par l'entourage du cristal ; il se fait avec une dissipation d'énergie analogue à celle qui est produite lors d'un frottement.

   Dans un premier temps, on observe que la résistance du cristal au glissement plastique augmente rapidement à cause d'une multiplication très importante des dislocations dans les régions de contact entre les zones. Les dislocations sont des défauts dans la structure cristalline dont la multiplication produit une plus grande résistance au glissement. On dit que le cristal se durcit par écrouissage.

   Puis dans un deuxième temps, aucun glissement plastique supplémentaire n'apparaît parce que la résistance au glissement a atteint un niveau tel que les contraintes exercées par l'entourage du cristal ne suffisent plus pour provoquer le glissement. La multiplication des dislocations est alors stoppée et le cristal se comporte élastiquement, les contraintes et les déformations y évoluent cycliquement.

   On atteint un état stabilisé (cyclique) des contraintes et des déplacements, mais ceci ne signifie pas pour autant que le cristal ne s'altère plus. En effet, au cours des cycles ultérieurs, il est le siège d'un mécanisme irréversible de regroupement des dislocations dans les régions de contact entre les zones qui y provoque l'apparition de vides affaiblissant la cohérence du cristal jusqu'à sa rupture. La rupture du cristal est une microfissuration du milieu puisqu'elle n'est pas détectable au

niveau macroscopique. D'ailleurs, ce qui rend le phénomène de fatigue dangereux, c'est l'absence de déformation plastique détectable à l'échelle macroscopique quand il se produit une microplastification puis une rupture dans quelques cristaux faibles qui sont à l'origine du phénomène de fatigue; un chargement cyclique qui ne produit pas de déformation plastique au niveau de la structure peut néanmoins provoquer sa ruine. C'est à ce type de chargement qu'on s'intéresse dans toute la suite. Voir [2], [3], [4] pour l'aspect descriptif des métaux et de leur microstructure.

2. *Coalescence des microfissures* :
   Au cours des N_c cyles suivants, plusieurs microfissures se propagent et se rejoignent pour former une fissure détectable macroscopiquement.

3. *Propagation* :
   Enfin, durant les N_p derniers cyles la macrofissure se propage dans l'élément de volume jusqu'à la rupture.
   Pour établir un critère de rupture par fatigue, Dang-Van admet que s'il y a microfissuration, il y a nécessairement rupture de l'élément de volume au bout d'un nombre suffisant de cycles. Il va alors postuler un critère de non nucléation des microfissures, c'est-à-dire un critère de non rupture du cristal faible qui porte sur l'état de contrainte qui y règne après stabilisation des glissements plastiques. Dès lors, la résolution du problème comporte trois étapes :

   (a) La localisation des contraintes :
   Il s'agit d'évaluer les contraintes qui règnent dans un cristal dans lequel se produit une plastification, en fonction de cette plastification et des contraintes macroscopiques Σ qui s'exercent sur l'élément de volume.

   (b) Ecrouissage du cristal :
   Il s'agit de modéliser le comportement élastoplastique du cristal afin d'aboutir au calcul de l'état de contrainte après stabilisation des glissements plastiques.

   (c) Critère de rupture :
   Et enfin, postuler un critère de rupture du cristal qui porte sur l'état de contrainte calculé après durcissement par écrouissage.

On va exposer la méthode qu'a développée Dang-Van pour établir un critère de fatigue pour des chargements radiaux cycliques, à partir de ces trois étapes. Après cela, on mènera une réflexion critique qui permettra de traiter le cas des chargements cycliques quelconques.

(a) La localisation des contraintes : (Lin-Taylor)

On reste dans le cadre de la mécanique des milieux continus et on considère que le cristal est une partie de l'élément de volume dans laquelle la contrainte σ et la déformation ϵ sont homogènes. On note E la déformation totale de l'élément de volume et Σ la contrainte qui s'y exerce. On suppose que :

$$(H1) \qquad \epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p = E^e + E^p = E$$

ϵ^e et E^e désignent les déformations élastiques. ϵ^p et E^p désignent les déformations plastiques.

Cette hypothèse identifie la déformation du cristal à celle de l'élément de volume. Les chargements considérés produisent une déformation plastique du cristal ; mais la déformation plastique macroscopique reste négligeable :

$$(H2) \qquad E^p \simeq 0$$

$(H3)$: On suppose de plus que le cristal a les mêmes propriétés élastiques que l'élément de volume et qui sont supposées isotropes de coefficients λ_0 et μ_0.

En écrivant les lois du comportement élastique :

$$(H3') \begin{cases} \sigma &= \lambda_0(tr\epsilon^e)Id + 2\mu_0\epsilon^e & \text{(cristal)} \\ \Sigma &= \lambda_0(trE^e)Id + 2\mu_0E^e & \text{(élément de volume)} \end{cases}$$

et en utlisant $(H1)$ et $(H2)$, on déduit facilement la relation qui relie σ, ϵ^p et Σ :

$$\sigma(t) = \Sigma(t) - 2\mu_0\epsilon^p(t) - \lambda_0[tr\epsilon^p(t)]Id \qquad (1)$$

c'est la formule de localisation de Lin-Taylor.

(b) Ecrouissage du cristal :

On va modéliser le comportement élastoplastique du cristal.

On suppose que la déformation plastique est un glissement irréversible de plan de normale $\vec{n}$ et dans la direction $\vec{m}$ $(\vec{m}.\vec{n} = 0)$:

$$(H4) \qquad \epsilon^p = \gamma^p\alpha$$

où :

$$\begin{array}{lcl} \alpha_{ij} & = & \frac{1}{2}(m_i n_j + m_j n_i) \\ \gamma^p & & \text{est l'amplitude du glissement.} \end{array}$$

$\vec{m}.\vec{n} = 0$ implique alors que: $tr\epsilon^p = \gamma^p tr\alpha = 0$
La puissance de dissipation plastique est alors :

$$\sigma : \dot{\epsilon}^p = \dot{\gamma}^p \ \sigma : \alpha$$

et en appelant τ la cission agissant sur le plan de glissement qui est définie par :

$$\tau = \sigma : \alpha$$

τ et $\dot{\gamma}^p$ apparaissent comme des quantités duales.
En remarquant qu'on a toujours :

$$\alpha : \alpha = \frac{1}{2}$$

On obtient facilement à partir de (1) la formule reliant τ, γ^p et Σ :

$$\tau(t) + \mu_0 \gamma^p(t) = \alpha : \Sigma(t) = \alpha : \Sigma^d(t) \qquad (2)$$

où Σ^d est la partie déviatorique de Σ, c'est-à-dire :

$$\Sigma^d = \Sigma - \frac{1}{3}(tr\Sigma)Id$$

Puisque $tr\alpha = 0$ on a alors d'après (1) :

$$p(t) = tr\sigma(t) = tr\Sigma(t) = P(t)$$

alors la pression hydrostatique est identique dans le cristal et dans l'élément de volume; on reviendra sur cette conclusion ultérieurement.

Pour compléter la modélisation élastoplastique du cristal, il faut préciser la loi élastoplastique qui relie τ et γ^p. On adopte une loi à écrouissage linéaire isotrope. Plus explicitement :

* Le critère de plasticité est :

$$|\tau| \leq \tau^s(t)$$

où $\tau^s(t)$ est le seuil actuel.

* L'évolution de γ^p et τ^s est décrite de la façon suivante :

$$\begin{cases} \text{- si} & \tau(t) = \tau^s(t) & \text{et} & \dot{\tau}(t) > 0 & \text{alors} \\ & \dot{\gamma}^p(t) > 0 & \text{et} & \dot{\tau}^s(t) = C\,\dot{\gamma}^p(t) & \\ \text{- si} & \tau(t) = -\tau^s(t) & \text{et} & \dot{\tau}(t) < 0 & \text{alors} \\ & \dot{\gamma}^p(t) < 0 & \text{et} & \dot{\tau}^s(t) = -C\,\dot{\gamma}^p(t) & \\ \text{- sinon} & \dot{\gamma}^p(t) = \dot{\tau}^s(t) = 0 & & & \\ \text{où C} & \text{est une constante positive} & & & \end{cases} \tag{3}$$

On a achevé la modélisation élastoplastique du cristal et on peut maintenant estimer l'état stabilisé quand $\Sigma(t)$ est donné périodique en fonction de t.
Dang-Van a effectué le calcul dans le cas où $\Sigma(t)$ est de la forme :

$$\Sigma(t) = \overline{\Sigma}(e + \sin\omega t) \tag{4}$$

où

* $\overline{\Sigma}$ est un tenseur constant
* e un réel.

Il montre qu'en adoptant la loi de comportement (3) et à l'aide de (2), que si l'état stabilisé est obtenu après un grand nombre de cycles (infini) alors on a :

$$\begin{cases} \gamma^p_\infty = \lim_{t\to+\infty}\gamma^p(t) = \frac{e}{\mu_0}\,\alpha : \overline{\Sigma} \\ \tau^s_\infty = \lim_{t\to+\infty}\tau^s(t) = |\alpha : \overline{\Sigma}| \\ \lim_{t\to+\infty}|\tau(t) - \tau_\infty(t)| = 0 \\ \text{où} \quad \tau_\infty(t) = \alpha : \overline{\Sigma}\sin\omega t \\ \text{est la cission à l'état stabilisé} \end{cases} \tag{5}$$

On reviendra ultérieurement sur la justification de ce calcul mais pour l'instant on retient que la détermination de la déformation limite γ^p_∞ permet par l'intermédiaire de la formule de localisation (1) de calculer l'état de contrainte du cristal à l'état stabilisé. On note cette contrainte $\sigma_\infty(t)$ et on a :

$$\sigma_\infty(t) = \Sigma(t) - 2\mu_0\gamma^p_\infty\alpha$$

(c) Le critère de rupture

On postule un critère de rupture du cristal qui porte sur l'état stabilisé sous la forme :

$$\forall t \in [0,T] \qquad f(\sigma_\infty(t)) \leq 0 \tag{6}$$

Autrement dit, il y a rupture par fatigue de l'élément de volume si, et seulement si, l'inégalité (6) est violée.

Dang-Van propose un critère affine qui porte sur la cission $\tau_\infty(t)$ et la pression $p_\infty(t)$:

$$\forall t \in [0,T] \qquad a|\tau_\infty(t)| + p_\infty(t) \leq b \tag{7}$$

a, b constantes positives caractéristiques du matériau.
Il faut l'appliquer aux cristaux les plus faibles, c'est-à-dire, les cristaux qui ont un système de glissement plastique α qui maximise l'amplitude du cisaillement stabilisé : $\tau_\infty(t)$.
Or, un système de glissement α est entièrement donné par $\vec{n}$ et $\vec{m}$, et il est facile d'établir que son expression dans la base $(\frac{\vec{n}+\vec{m}}{\sqrt{2}}, \frac{\vec{n}-\vec{m}}{\sqrt{2}}, \vec{n} \wedge \vec{m})$ est :

$$\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, si on parcout tous les $\vec{n}$ et $\vec{m}$ possibles, α parcourt $\mathbf{T}(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$ où $\mathbf{T}(T_1, T_2, T_3)$ désigne la famille de tous les tenseurs symétriques d'ordre 2 sur $\mathbb{R}^3$ de valeurs propres $T_1 \geq T_2 \geq T_3$.
On montre, en annexe, que :

$$\forall T' \in \mathbf{T}(T_1', T_2', T_3') \max_{T \in \mathbf{T}(T_1,T_2,T_3)} T : T' = T_1 T_1' + T_2 T_2' + T_3 T_3'$$

En se restreignant aux chargements de la forme (4), l'amplitude maximale cherchée vaut :

$$\frac{1}{2}(\overline{\Sigma}_1 - \overline{\Sigma}_3)$$

où $\overline{\Sigma}_1 \geq \overline{\Sigma}_2 \geq \overline{\Sigma}_3$ désignent les valeurs propres de $\overline{\Sigma}$.
Le critère (7) se ramène dans ce cas à l'inégalité :

$$(e \pm 1) tr\overline{\Sigma} + \frac{a}{2}(\overline{\Sigma}_1 - \overline{\Sigma}_3) \leq b \tag{8}$$

En résumé, un chargement de la forme (4) provoque la rupture par fatigue si et seulement si (8) est violée.
On proposera, dans la suite, une autre interprétation du critère de rupture, mais auparavant, on fait quelques remarques sur la modélisation du phénomène présentée plus haut.

L'idée de base est de modéliser le comportement et l'évolution d'un cristal faible dont la rupture sera à l'origine de la rupture par fatigue de l'élément de volume. La faiblesse d'un tel cristal est, à notre avis, dûe à trois phénomènes physiques de nature distincte qui interagissent entre eux :

1. Quand on examine la microstructure d'un métal, on s'aperçoit que les propriétés élastiques sont hétérogènes. Cette hétérogénéité est à l'origine d'une concentration de contraintes qui a lieu dans quelques cristaux et qui provoque éventuellement leur plastification.

2. A concentration de contraintes égale, un cristal sera d'autant plus faible que son orientation cristallographique favorisera l'activation d'un mécanisme de glissement. On décrira plus tard les mécanismes qui ont lieu dans un cristal cubique à faces centrées.

3. A concentration de contraintes égale et pour une même orientation cristallographique, un cristal sera d'autant plus faible que la résistance qu'il opposera au glissement plastique sera faible car il subira un écrouissage plus important par une multiplication plus grande de la densité des dislocations. Et on sait que la microfissuration éventuelle du cristal dépend directement de cette densité, pratiquement constante à l'état stabilisé.

Dans le modèle de Dang Van décrit dans la première partie, on tient compte explicitement du point 2 quand on choisit les orientations cristallographiques α qui maximisent l'amplitude du cisaillement à l'état stabilisé. De même, le point 3 est implicitement supposé puisque l'hypothèse selon laquelle l'état stabilisé est atteint après un nombre infini de cycles nécessite que le seuil initial $\tau^s(0)$ soit suffisamment faible.

Par contre, le point 1 est complètement ignoré par la formule de localisation de Lin-Taylor (1). On ne peut pas modéliser à l'aide de cette formule une des causes de faiblesse du cristal, à savoir la concentration de

contraintes dûe à l'hétérogénéité élastique. La formule de Lin-Taylor est vraie en moyenne. Elle ne tient compte ni de la forme ni de l'orientation du cristal étudié.

Pour modéliser l'effet de la concentration de contraintes, il faut que la localisation dépende du cristal. L'exemple unidimensionnel suivant est donné uniquement pour illustrer cette idée, sa lecture est utile, mais n'est pas nécessaire pour la compréhension de la suite.

Exemple : On considère n barres disposées en parallèle et soumises à une force de traction F. On suppose que la barre (i) a un module d'Young R_i, une déformation plastique ϵ_i^p et une section égale à S/n. D'après ce modèle, la contrainte macroscopique est :

$$\Sigma = F/S$$

On a aussi l'équivalent de l'hypothèse de Lin-Taylor puisque la déformation macroscopique E est égale à la déformation dans chaque barre (i) :

$$E = \epsilon_i \qquad \forall i$$

On veut évaluer la formule de localisation qui relie Σ, σ_i et ϵ_i^p. On écrit alors :

$$\sigma_i = R_i(\epsilon_i - \epsilon_i^p) = R_i(E - \epsilon_i^p)$$

D'où on tire :

$$F = \Sigma S = \sum_{(i)} \sigma_i S/n = \sum_{(i)} \frac{R_i S}{n}(E - \epsilon_i^p)$$

d'où :

$$\Sigma = \overline{R}(E - E^p)$$

Avec :

$$\overline{R} = \textstyle\sum_{i=1}^n \frac{R_i}{n}$$

$$E^p = \frac{1}{n\overline{R}} \textstyle\sum_{i=1}^n R_i \epsilon_i^p$$

On déduit la formule de localisation :

$$\sigma_i = \frac{R_i}{\overline{R}}\Sigma + R_i(E^p - \epsilon_i^p)$$

Cette formule rend compte de la différence de comportement élastique qui existe entre les barres. Si on ne tient pas compte de cette différence, on aboutit à une formule analogue à celle de Lin-Taylor :

$$\sigma_i = \Sigma + \overline{R}(E^p - \epsilon_i^p)$$

Si on transpose le critère de fatigue à cet exemple simple, sans passer par l'étape de l'écrouissage, on dit qu'il y a rupture de la structure sous Σ si, et seulement si, il existe une barre (i) dans laquelle le critère de rupture $f(\sigma_i)$ est violé.Le problème qu'on se pose est le suivant :

Connaissant f ainsi que la distribution aléatoire des R_i, ϵ_i^p trouver le critère de rupture de la structure sous le chargement Σ. On prend par exemple :

* $f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_r$

* R_i, ϵ_i^p sont des variables indépendantes de loi uniforme sur $[1,2]$ pour les R_i et sur $[-1,1]$ pour les ϵ_i^p.

Il est facile de voir que pour $n \to +\infty$:

$$\overline{R} = 1,5 \qquad E^p = 0$$

Le critère s'écrit :

$$\forall i \qquad |\sigma_i| \leq \sigma_r.$$

En utilisant la formule de localisation exacte, cette condition est équivalente à :

$$\forall i \qquad -\frac{1,5}{R_i}\sigma_r + 1,5\epsilon_i^p \quad \leq \quad \Sigma \quad \leq \quad \frac{1,5}{R_i}\sigma_r + 1,5\epsilon_i^p$$

d'où quand $n \to +\infty$:

$$-\tfrac{1,5}{max R_i}\sigma_r + 1,5.max\epsilon_i^p \quad \leq \quad \Sigma \quad \leq \quad \tfrac{1,5}{max R_i}\sigma_r + 1,5.min\epsilon_i^p$$

$$-0,75\sigma_r + 1,5 \qquad \leq \quad \Sigma \quad \leq \qquad 0,75\sigma_r - 1,5$$

ce qui suppose $\sigma_r \geq 2$.

En utilisant la formule de Lin-Taylor dans laquelle on identifie R_i et $\overline{R}$ on obtient le critère :

$$-\sigma_r + 1,5 \quad \leq \quad \Sigma \quad \leq \quad \sigma_r - 1,5$$

Ainsi, pour $\sigma_r = 2$, la localisation exacte assure la ruine de la structure pour tout chargement, alors que celle de Lin-Taylor assure la stabilité pour les Σ tels que :

$$-0,5 \quad \leq \quad \Sigma \quad \leq \quad 0,5.$$

Cet exemple simple montre que la barre la plus faible et qui va provoquer la ruine est celle qui a un module d'Young R_i maximal, provoquant une concentration de contrainte qu'il convient de modéliser. De la même façon, il faut rendre compte dans la localisation de la concentration de contrainte (dûe aux hétérogénéités élastiques) qui règne dans un cristal, on est amené à proposer pour le problème de la fatigue une autre localisation que celle de Lin-Taylor : celle de Hershey-Kröner.

2 La Localisation de Hershey-Kröner

Pour mieux tenir compte des hétérogénéités de la microstructure d'un métal polycristallin dans l'établissement de la formule de localisation, il nous faut en donner une description plus fine.

On se restreint dans cette partie aux métaux polycristallins dont les cristaux sont cubiques à faces centrées. On commence par décrire le comportement élastoplastique des cristaux.

Un cristal est un assemblage périodique d'atomes. La structure cubique possède trois axes de symétrie deux à deux orthogonaux. L'orientation du cristal est par définition l'orientation de ces axes par rapport à un repère absolu. Quand on veut modéliser le comportement élastique du cristal dans le cadre des milieux continus, on lui associe un tenseur de complaisance élastique Λ ayant la même symétrie cubique. Ce tenseur est caractérisé par l'orientation 0 du cristal et par trois coefficients élastiques g_1, g_2, g_3. Les composantes de Λ, dans un repère coïncidant avec les axes de symétrie, sont :

$$\left[\begin{array}{l} \Lambda_{1111} = \Lambda_{2222} = \Lambda_{3333} = g_1 \\ \Lambda_{1122} = \Lambda_{1133} = \Lambda_{2233} = \Lambda_{2211} = \Lambda_{3322} = \Lambda_{3311} = g_2 \\ \Lambda_{1212} = \Lambda_{2121} = \Lambda_{2323} = \Lambda_{3232} = \Lambda_{3131} = \Lambda_{1313} = g_3 \\ \text{toutes les autres composantes de } \Lambda \text{ étant nulles} \end{array}\right.$$

En ce qui concerne le comportement plastique, on sait que dans un cristal cubique à faces centrées, les seuls plans de glissement plastique sont les plans de types $\{1,1,1\}$ c'est-à-dire dont la normale dans le repère du cristal est :

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \text{ ou } \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1) \text{ ou } \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1) \text{ ou } \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)$$

Chaque plan de normale $\vec{n}$ comporte trois directions de glissement possibles $\vec{m}$ dans le plan. Ces directions sont de type $< 1,1,0 >$. C'est-à-dire que pour le plan $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ les directions possibles sont :

$$\vec{m} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$$

Pour les autres plans, les directions possibles se déduisent facilement. Il existe alors 12 systèmes de glissement α qu'on numérote $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(12)}$.

Tous ces systèmes sont équivalents; et le niveau de contrainte auquel on s'intéresse dans le phénomène de la fatigue nous autorise à faire l'hypothèse qu'un seul mécanisme de glissement peut être activé. Ce sera celui pour lequel la cission dépassera le seuil d'élasticité en premier. Pour compléter la modélisation de la plasticité du cristal il faut modéliser son écrouissage, ce qu'on fera plus tard.

Pour une première modélisation de l'hétérogénéité du comportement élastique de la microstructure d'un métal polycristallin, on peut dire qu'elle est uniquement imputable à la différence d'orientation de chaque cristal. Les coefficients g_1, g_2 et g_3 sont communs à tous les cristaux. Une conséquence de cette hypothèse est qu'une pression exercée sur l'élément de volume provoque une dilatation homogène et isotrope dans toute la microstructure puisqu'un cristal ne diffère d'un autre que par son orientation.

Ainsi, si on note Λ_0 la complaisance élastique de l'élément de volume, supposée isotrope (2 coefficients λ_0 et μ_0) et si on note $\Lambda(g_1, g_2, g_3, 0)$ la complaisance élastique d'un cristal d'orientation 0, on doit avoir :

$$\Lambda : Id = \Lambda_0 : Id = (3\lambda_0 + \mu_0).Id \tag{9}$$

pour toutes les orientations cristallographiques.
On est maintenant en mesure de proposer une localisation qui tienne compte de l'hétérogénéité élastique de la microstructure.

On assimile le cristal à une région ellipsoïdale C de l'élément de volume qui lui apparaît comme un milieu infini homogène purement élastique de complaisance Λ_0. Le cristal, quant à lui, a une complaisance $\Lambda(g_1, g_2, g_3, 0)$ qui dépend de son orientation et on suppose que sa déformation plastique ϵ^p est homogène (dans C). Bui démontre dans [5] que si on applique une contrainte Σ à l'infini, le champ de contrainte qui règne dans C est homogène et est donnée par :

$$\sigma(C) = A(\Lambda, \Lambda_0) : [\Sigma + 2\mu_0(\beta - 1)\epsilon^p] \tag{10}$$

où $A(\Lambda, \Lambda_0)$ est un tenseur d'ordre 4 symétrique défini positif, c'est-à-dire vérifiant :

$$\left[\begin{array}{rcl} \Sigma' : (A : \Sigma) & = & \Sigma : (A : \Sigma') \\ \Sigma : A : \Sigma & \geq & 0 \end{array} \right.$$

De plus, A vérifie à cause de (9) :

$$tr(A : \Sigma) = tr\Sigma \tag{11}$$

et il a la symétrie cubique, il est déterminé par trois constantes a_1, a_2, a_3 (fonction de g_1, g_2, g_3, λ_0 et μ_O), et de l'orientation du cristal. Ainsi dans le repère du cristal, les composantes de A vérifient :

$$\left[\begin{array}{llllllllllllll} A_{1111} & = & A_{2222} & = & A_{3333} & = & a_1 & & & & & & & \\ A_{1122} & = & A_{1133} & = & A_{2233} & = & A_{2211} & = & A_{3311} & = & A_{3322} & = & a_2 \\ A_{1212} & = & A_{1313} & = & A_{2323} & = & A_{2121} & = & A_{3131} & = & A_{3232} & = & a_3 \\ \text{toutes} & \text{les} & \text{autres} & & \text{composantes} & \text{de} & A & \text{étant} & \text{nulles.} & & & & \end{array}\right.$$

L'expression des coefficients a_1, a_2 et a_3 en fonction de g_1, g_2, g_3, λ_0 et μ_O peut être obtenue à partir des calculs effectués par Bui [5], mais elle ne nous est d'aucune utilité pour la suite. De même, dans la formule (10), β est un réel positif fonction de λ_0 et μ_0 :

$$\beta = \frac{6\lambda_0 + 16\mu_0}{15\lambda_0 + 30\mu_0}$$

La formule (10) est la formule de localisation de Hershey-Kröner. Elle relie la contrainte dans le cristal $\sigma(C)$ à la déformation plastique ϵ^p qui y règne et au tenseur de contrainte macroscopique Σ appliqué à l'élément de volume. Cette relation dépend de l'orientation du cristal 0 via le tenseur A. Nous allons l'utiliser en lieu et place de (1) pour établir le critère de rupture par fatigue, sans rien changer aux étapes écrouissage et critère de rupture.

Ainsi, si on suppose que le système de glissement $\alpha^{(i)}$ est activé dans le cristal d'orientation 0, on a :

$$\epsilon^p = \gamma^p \quad \alpha^{(i)}$$

La cission sur le plan de glissement $\tau^{(i)}$, est alors reliée à Σ et γ^p en contractant (10) par $\alpha^{(i)}$:

$$\tau^{(i)} + 2\mu_0(1-\beta)[\alpha^{(i)} : A : \alpha^{(i)}]\gamma^p = [A : \alpha^{(i)}] : \Sigma$$

cette relation est à rapprocher avec (2) dans laquelle on a remplacé, dans le membre de gauche, μ_0 par le réel positif μ_0' qui dépend du système de glissement (i) et de l'orientation du cristal 0 :

$$\mu_0' = 2\mu_0(1-\beta)[\alpha^{(i)} : A : \alpha^{(i)}]$$

et dans le membre de droite, on a remplacé le tenseur α par le tenseur α' qui dépend de (i) et de 0 :

$$\alpha' = A : \alpha^{(i)}$$

Le calcul de l'écrouissage reste inchangé : on adopte toujours la loi élastoplastique, reliant la vitesse de γ^p à celle de $\tau^{(i)}$, décrite par (3). En se restreignant aux chargements de la forme (4) :

$$\Sigma(t) = \overline{\Sigma}(e + \sin \omega t)$$

les conclusions du calcul effectué par Dang Van pour établir l'état stabilisé restent valables à condition de remplacer, dans (5), μ_0 par μ_0' et α par α'. La cission à l'état stabilisé est alors :

$$\tau_\infty^{(i)}(t) = [\alpha' : \Sigma] \sin \omega t$$

Quant à la pression hydrostatique dans le cristal, elle est toujours égale à la pression hydrostatique macroscopique puisque le tenseur A qui intervient dans la formule de localisation de Hershey-Kröner (10) vérifie (11). On retrouve :

$$p(t) = tr\sigma(t) = tr\Sigma(t) = P(t)$$

On peut aborder l'étape critère de rupture.

On postule toujours le critère (7) :

$$\forall t \in [0, T] \qquad a|\tau_\infty^{(i)}(t)| + p_\infty(t) \leq b$$

qu'on doit appliquer aux cristaux les plus faibles, ceux qui ont une orientation 0 et un système de glissement (i) qui maximise l'amplitude du cisaillement stabilisé : $\tau_\infty^{(i)}(t)$. Il s'agit de trouver :

$$\max_{(i),0} \qquad \alpha' : \overline{\Sigma}$$

Pour calculer ce max, on se fixe le mécanisme (i) et on optimise sur l'orientation du cristal.

Pour le mécanisme $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, $\vec{m} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$ l'expression de α dans le repère du cristal est :

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

et l'expression de α' est :

$$\alpha' = A : \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} a_1 - a_2 & 0 & a_3 \\ 0 & a_2 - a_1 & -a_3 \\ a_3 & -a_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de α' se calculent facilement et valent :

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 2a_3^2}, \quad 0, \quad -\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 2a_3^2}.$$

On trouve les mêmes valeurs propres pour tous les mécanismes (i).

Ainsi, quand on parcourt tous les systèmes de glissement (i) et toutes les orientations cristallographiques 0, α' parcourt la famille des tenseurs $\mathbf{T}(\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 2a_3^2}, 0, -\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 2a_3^2})$ et d'après l'annexe le maximum cherché est :

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 2a_3^2} \quad [\overline{\Sigma}_1 - \overline{\Sigma}_3]$$

où $\overline{\Sigma}_1 \geq \overline{\Sigma}_2 \geq \overline{\Sigma}_3$ sont les valeurs propres de $\overline{\Sigma}$.

Ce maximum est à rapprocher du maximum calculé avec une localisation de Lin-Taylor : $\frac{1}{2}[\overline{\Sigma}_1 - \overline{\Sigma}_3]$. On voit que l'application d'un critère de type (7) donne le même critère de rupture par fatigue (à un coefficient multiplicatif près) de la forme (8).

Même si on aboutit au même critère, la localisation de Hershey-Kröner a le mérite d'être plus cohérente que celle de Lin-Taylor. Elle fait surtout apparaître le fait que la structure cubique à faces centrées est une structure telle que les valeurs propres de α' sont de la forme $V, 0, -V$ de telle sorte que la deuxième valeur propre de $\overline{\Sigma}$, $\overline{\Sigma}_2$ n'intervient pas dans le critère. On voit d'une part, que si le tenseur de localisation A ne respectait pas la symétrie cubique ou, si on s'intéressait à une structure non cubique à faces centrées, on aurait un terme en $\overline{\Sigma}_2$ dans le calcul du maximum de l'amplitude de cisaillement. D'autre part, cette localisation, comme celle de Lin-Taylor, identifie la pression microscopique à la pression macroscopique à cause d'une trop grande symétrie du tenseur de localisation A.

Ces considérations sur la localisation, nous conduisent à repenser le critère de fatigue (7) dans lequel intervient la pression microscopique. Après cette réinterprétation du critère, nous reprendrons les trois étapes : localisation, écrouissage, critère de rupture.

3 Généralisation du modèle de Dang-Van

Le critère de fatigue introduit plus haut, porte sur les contraintes dans un cristal faible après stabilisation des déformations plastiques. Il est de la forme :

$$\forall t \in [0,T] \qquad f(\sigma_\infty(t)) \leq 0$$

Plus précisément, le critère proposé par Dang-Van porte sur la cission $\tau_\infty(t)$ et la pression $p_\infty(t)$:

$$\forall t \in [0,T] \qquad a|\tau_\infty(t)| + p_\infty(t) \leq b$$

Examinons l'introduction des termes $\tau_\infty(t)$ et $p_\infty(t)$ dans ce critère.

L'introduction de la pression hydrostatique du cristal $p_\infty(t)$, égale à la pression macroscopique $P(t)$ dans les localisations de Lin-Taylor et Hershey-Kröner, est faite pour tenir compte des observations expérimentales qui montrent l'influence de la pression hydrostatique macroscopique sur la rupture par fatigue. A notre avis, l'effet de cette pression se fait sentir à trois niveaux :

1. Elle influence l'état de contrainte qui règne dans un cristal faible avant stabilisation. Elle intervient donc dans le mécanisme d'écrouissage du cristal.

2. Après stabilisation des déformations plastiques, elle influence les mécanismes de regroupement des dislocations qui créent les micro-vides qui affaiblissent le cristal jusqu'à sa rupture.

3. Au stade de la coalescence des microfissures : on imagine bien que, plus l'élément de volume sera tendu, plus facile sera la formation de la macro-fissure à partir des micro-fissures. Au contraire, si l'élément de volume est comprimé, les micro-fissures se propageront plus difficilement ou, peut être, pas du tout si la compression est suffisamment forte.

Vue la diversité des mécanismes sur lesquels la pression hydrostatique macroscopique joue, nous préférons interpréter le critère de fatigue comme un critère phénoménologique dont une variable est la pression macroscopique maximale sur un cycle.

Après avoir réinterprété l'introduction de la pression hydrostatique dans le critère de fatigue, nous allons examiné le terme $\tau_\infty(t)$ qui désigne la cission à l'état stabilisé.
Les formules (5) établies par Dang-Van montrent que la cission à l'état stabilisé oscille entre $\pm\tau_\infty^s$ où τ_∞^s désigne la résistance au glissement plastique après stabilisation des déformations plastiques.

Rappelons que la nucléation des microfissures se produit après stabilisation des déformations plastiques par un mécanisme de regroupement irréversible des dislocations. Il semble alors naturel que la densité de dislocations à l'état stabilisé soit un paramètre physique sur lequel devrait porter le critère de fatigue. Cette densité, nous le savons déjà, est directement liée à la résistance au glissement. En notant L_∞ la demi longueur de l'intervalle d'élasticité à l'état stabilisé, c'est-à-dire, qu'on peut écrire le critère de plasticité à l'état stabilisé sous la forme :

$$\begin{cases} -\tau_\infty^{-s} \leq \tau \leq \tau_\infty^{+s} \\ \tau_\infty^{+s} + \tau_\infty^{-s} = 2L_\infty \end{cases}$$

le critère de fatigue portera sur le maximum de L_∞ sur les critaux faibles.

Remarquons que cette forme ne suppose pas l'écrouissage isotrope : τ_∞^{+s} est, a priori, différent de τ_∞^{-s}. Nous allons revenir sur l'écrouissage, mais retenons, pour l'instant, que le paramètre sur lequel portera le critère de fatigue est la demi longueur maximale de l'intervalle d'élasticité après stabilisation.

En résumé, nous voyons le critère de fatigue comme une loi phénoménologique reliant la pression macroscopique maximale sur un cycle et la densité de dislocation maximale dans les cristaux faibles par l'intermédiaire de L_∞. Le critère est donc de la forme :

$$f(\max_{\text{cristaux faibles}} L_\infty, \max_{t\in[0,T]} P(t)) \leq 0$$

Si f est affine, le critère devient :

$$a \max_{\text{cristaux faibles}} L_\infty + \max_{t\in[0,T]} P(t)) \leq b \qquad (12)$$

Le critère (12) est à rapprocher avec (7).

Nous voyons que dans le cas des chargements de la forme (4), ces critères coïncident ! Seule l'interprétation des termes a changé. Cette

réinterprétation nous permettra de traiter le cas des chargements périodiques quelconques en partant d'une localisation plus fine et d'un écrouissage non isotrope linéaire.

3.1 Localisation

Nous allons modéliser un cristal se plastifiant dans un élément de volume V élastique.
Soit V un domaine de $\mathbb{R}^3$, de bord ∂V. Le cristal C est une partie connexe de V de très petite taille par rapport à V. On suppose que le comportement de V est élastique et on note $\Lambda(x)$ la complaisance au point $x \in V$. Le comportement de C diffère du reste par l'existence d'une déformation plastique homogène. On peut traduire les lois de comportement par :

$$\begin{cases} \forall x \in C & \sigma(x) = \Lambda(x) : (\epsilon(x) - \epsilon^p) \\ \forall x \in V \backslash C & \sigma(x) = \Lambda(x) : \epsilon(x) \end{cases}$$

On applique au bord de V un tenseur de contrainte Σ, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \forall x \in \partial V & \sigma(x).\vec{n} = \Sigma.\vec{n} \\ & \vec{n}, \text{normale extérieure} \end{cases}$$

L'équilibre se traduit par le principe des travaux virtuels : pour tout v champ de déplacement cinématiquement admissible on a :

$$\int_V \sigma : \epsilon(v)dx = \int_{\partial V} (\Sigma.\vec{n}).v = \Sigma : \int_V \epsilon(v)dx$$

où $\epsilon(v)$ désigne le champ de déformation associé à v. Ainsi le champ solution u vérifie :

$$\begin{cases} \int_V \epsilon(u) : \Lambda : \epsilon(v)dx = \Sigma : \int_V \epsilon(v)dx + \epsilon^p : \int_C \Lambda : \epsilon(v)dx \\ \text{pour tout } v \text{ cinématiquement admissible} \end{cases} \quad (13)$$

(13) est la formulation variationnelle du problème. Nous savons alors (voir : système de l'élasticité, chapitre 3) que sous certaines conditions de régularité sur Λ (ellipticité uniforme) et sur V, la solution de (13) existe dans $[H^1(V)]^3$ (l'espace de Sobolev d'ordre 1 sur V) et qu'elle est unique à un déplacement rigide près. Cette solution est clairement linéaire en

fonction du couple (Σ, ϵ^p). (Nous avons écrit le problème sous forme variationnelle uniquement pour mettre en évidence cette dépendance linéaire !)

Ainsi, il existe un couple unique de champs de tenseurs d'ordre 4, $(A(x), B(x)), x \in C$ tel que :

$$\forall x \in C \qquad \sigma(x) = A(x) : \Sigma - B(x) : \epsilon^p$$

En notant par $\sigma(C)$ la contrainte moyenne dans C :

$$\sigma(C) = \frac{1}{|C|} \int_C \sigma(x) dx$$

Il existe un couple unique de tenseurs d'ordre 4 tel que :

$$\sigma(C) = A(C) : \Sigma - B(C) : \epsilon^p \tag{14}$$

Cette formule constitue la formule de localisation. Elle relie la contrainte moyenne dans le cristal à sa déformation plastique homogène ϵ^p, et à la contrainte macroscopique Σ. Elle a été établie grâce à une version du théorème de Colonnetti.

Nous allons maintenant donner quelques propriétés de $A(C)$ et $B(C)$.
$B(C)$ est symétrique défini positif.
En effet, si on prend $\Sigma = 0$ dans (13), on peut l'écrire (13) bis :

$$\int_{V \setminus C} \epsilon(u) : \Lambda : \epsilon(v) dx = \int_C [\epsilon^p - \epsilon(u)] : \Lambda : \epsilon(v) dx$$

pour tout champ cinématiquement admissible v.
Remarque : on est tenté de résoudre ce problème en disant que le champ de déformation solution est nul sur $V \setminus C$ et vaut ϵ^p sur C; mais ce champ n'est compatible que si ϵ^p est nul, puisque le déplacement sur le contour de C est alors constant en vertu de la nullité de la déformation sur $V \setminus C$ et de la continuité du déplacement.
Sachant que $B(C)$ est par définition tel que :

$$B(C) : \epsilon^p = \frac{1}{|C|} \int_C \Lambda : [\epsilon^p - \epsilon(u)] dx$$

On applique (13) bis au champ $v = u'$ solution du problème pour $\Sigma = 0$ et $\epsilon^{p'}$ donnée.

$$
\begin{aligned}
|C|\epsilon'^p : [B(C) : \epsilon^p] &= \int_C \epsilon'^p : \Lambda : [\epsilon^p - \epsilon(u)]dx \\
&= \int_C [\epsilon'^p - \epsilon(u')] : \Lambda : [\epsilon^p - \epsilon(u)]dx \\
&\quad + \int_C \epsilon(u') : \Lambda : [\epsilon^p - \epsilon(u)]dx \\
&= \int_C [\epsilon'^p - \epsilon(u')] : \Lambda : [\epsilon^p - \epsilon(u)]dx \\
&\quad + \int_{V\setminus C} \epsilon(u') : \Lambda : \epsilon(u)dx
\end{aligned}
$$

ce qui montre que $B(C)$ est symétrique défini positif.

Montrons maintenant que si le champ de complaisance $\Lambda(x), x \in V$ est tel que :

$$\forall x \in V \qquad \Lambda(x) : Id = \text{“constante”}\ Id \tag{15}$$

ce qui est le cas quand l'hétérogénéité élastique résulte uniquement de la différence d'orientation des cristaux, alors on a :

$$A(C) : Id = Id$$

En effet, $A(C) : Id$ est la contrainte moyenne dans le cristal quand Σ est une pression égale à l'unité et il est facile de voir que le champ :

$$u(x) = \frac{1}{\text{“constante”}} x$$

est solution de (13) pour $\Sigma = Id, \epsilon^p = 0$.

Une conséquence importante de l'hypothèse (15) est que le produit contracté de $\sigma(C)$ par un tenseur déviatorique ne fait intervenir que la partie déviatorique de Σ.

3.2 Ecrouissage du cristal

On suppose que la déformation plastique du cristal est dûe à l'activation d'un seul mécanisme de glissement α; ϵ^p est de la forme :

$$\epsilon^p = \gamma^p \alpha$$

La puissance dissipée est :

$$\int_C \sigma(x) : \dot{\epsilon}^p \, dx = \int_C [\sigma(x) : \alpha] \, \dot{\gamma}^p \, dx$$

ce qui fait apparaître la cission moyenne :

$$\tau(C) = \sigma(C) : \alpha$$

comme le paramètre dual de $\dot{\gamma}^p$.

D'après la formule de localisation (14) on a :

$$\tau(C) + [\alpha : B(C) : \alpha]\gamma^p = \alpha : A(C) : \Sigma \tag{16}$$

et en notant μ_0' le réel strictement positif :

$$\mu_0' = \alpha : B(C) : \alpha$$

et α' le tenseur :

$$\alpha' = \alpha : A(C)$$

La relation (16) s'écrit :

$$\tau + \mu_0' \gamma^p = \alpha' : \Sigma$$

qui est à rapprocher avec (2).
Si on fait l'hypothèse (15) sur le champ de complaisance $\Lambda(x)$, n'intervient dans le second membre de (16) que la partie déviatorique Σ^d de Σ.

Pour résoudre le problème d'élastoplasticité donné dans (16) quand on se fixe un trajet de chargement $\Sigma(t)$ cyclique de période T, il nous faut préciser la loi de comportement qui relie les évolutions de τ et γ^p.
Nous allons adopter une loi qui tienne compte de l'effet Bauschinger, et telle que le domaine d'élasticité est croissant.

* Le critère de plasticité est :

$$-\tau^{-s}(t) \leq \tau \leq \tau^{+s}(t)$$

où

- $\tau^{+s}(t)$ est le seuil supérieur actuel.
- $\tau^{-s}(t)$ est le seuil inférieur actuel.

Comme on le voit, le domaine d'élasticité est donné par les deux paramètres, mais il est plus commode de le décrire par sa demi longueur actuelle $L(t)$ et par son centre actuel $CE(t)$, on a ainsi :

$$\begin{cases} \tau^{+s}(t) &= CE(t) + L(t) \\ -\tau^{-s}(t) &= CE(t) - L(t) \end{cases}$$

et on peut écrire le critère de plasticité sous la forme équivalente :

$$|\tau - CE(t)| \leq L(t)$$

La loi élastoplastique est incrémentale, elle relie les incréments de γ^p, L, CE à l'incrément de contrainte $\Delta\tau$ si τ atteint le critère. Plus présicément, il y a évolution plastique :

- si $\tau(t) = \tau^{+s}(t)$ et $\Delta\tau > 0$ alors

$$\Delta\gamma^p > 0$$

- si $\tau(t) = -\tau^{-s}(t)$ et $\Delta\tau < 0$ alors

$$\Delta\gamma^p < 0$$

- sinon

$$\Delta\gamma^p = \Delta CE = \Delta L = 0$$

Les deux paramètres d'écrouissage choisis sont CE et L. Nous allons préciser les hypothèses sur la règle d'écrouissage, c'est-à-dire sur l'évolution de CE et L en fonction de $\Delta\gamma^p$.

On postule l'existence de trois fonctions $g_1(CE), g_2(CE, L)$ et $g_3(CE, L)$ positives, telles que :

$$\begin{cases} \Delta CE &= g_1(CE)\Delta\gamma^p \\ \Delta L &= \begin{cases} g_2(CE, L) \quad \Delta\gamma^p & \text{si } \Delta\gamma^p > 0 \\ -g_3(CE, L) \quad \Delta\gamma^p & \text{si } \Delta\gamma^p < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Les fonctions g_2 et g_3 vérifient en outre il existe $Cst > 0$ telle que :

$$\forall CE, L \begin{cases} g_2(CE, L) \geq Cst \\ g_3(CE, L) \geq Cst \end{cases}$$

La donnée des fonctions g_i permet d'expliciter $\Delta\gamma^p$ en fonction de $\Delta\tau$ par l'intermédiaire de la règle de consistance qui dit que lorsqu'on évolue plastiquement, on reste sur le seuil. Ainsi si $\tau = \tau^{+s}$ et $\Delta\tau > 0$, on doit avoir :

$$\Delta\tau = \Delta\tau^{+s} = \Delta C + \Delta L = (g_1 + g_2)\Delta\gamma^p$$

d'où :

$$\Delta\gamma^p = \frac{1}{g_1(CE) + g_2(CE, L)}\Delta\tau$$

De même, si $\tau = -\tau^{-s}$ et $\Delta\tau < 0$ on a :

$$\Delta\tau = -\Delta\tau^{-s} = \Delta C - \Delta L = (g_1 + g_3)\Delta\gamma^p$$

d'où

$$\Delta\gamma^p = \frac{1}{g_1(CE) + g_3(CE, L)}\Delta\tau$$

En résumé, l'évolution plastique est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\text{- Si} & \tau(t) = \tau^{+s}(t) \text{ et } \Delta\tau > 0 & \\
\text{Alors :} & & \\
 & \Delta\gamma^p = \frac{1}{g_1(CE)+g_2(CE,L)}\Delta\tau & \\
 & \Delta CE = g_1(CE)\ \Delta\gamma^p & \\
 & \Delta L = g_2(CE, L)\ \Delta\gamma^p & \\
\text{- Si} & \tau(t) = -\tau^{-s}(t) \text{ et } \Delta\tau < 0 & \\
\text{Alors :} & & \\
 & \Delta\gamma^p = \frac{1}{g_1(CE)+g_3(CE,L)}\Delta\tau & \\
 & \Delta CE = g_1(CE)\ \Delta\gamma^p & \\
 & \Delta L = -g_3(CE, L)\ \Delta\gamma^p & \\
\text{- Sinon} & & \\
 & \Delta\gamma^p = \Delta CE = \Delta L = 0 & \\
\text{Les fonctions } g_i \text{ sont positives et il existe une constante positive} & & \\
\text{qui minore } g_2 \text{ et } g_3 & &
\end{array}\right. \tag{17}$$

L'hyptohèse qu'on fait en disant que $g_1 \geq 0$ ne dépend que de CE, permet d'affirmer que CE apparaît comme fonction croissante de γ^p puisqu'on peut écrire :

$$CE(t) = f(\gamma^p(t))$$

où f vérifie l'équation différentielle :

$$\begin{cases} f'(x) &= g_1(f(x)) \\ f(0) &= CE(0) \end{cases}$$

Les hypothèses qu'on a faites sur la règle d'écrouissage sont beaucoup moins restrictives que l'hypothèse d'un écrouissage isotrope linéaire faite par Dang-Van. Elle nous permettront de montrer qu'on a toujours stabilisation des déformations plastiques (adaptation), et que si cette stabilisation a lieu en un nombre infini de cyles, alors la demi longueur de l'intervalle d'élasticité stabilisé L_∞ vaut :

$$L_\infty = \frac{1}{2} \max_{(t',t'') \in [0,T] \times [0,T]} \alpha' : [\Sigma(t') - \Sigma(t'')] \tag{18}$$

Les observations expérimentales montrent que le nombre de cycles nécessaire pour atteindre l'état stabilisé est de l'ordre de $10^3 - 10^4$ cycles, ce qui justifie l'hypothèse technique d'un nombre infini de cycles.
La lecture du long calcul qu'on fera pour établir (18) n'est pas indispensable pour la compréhension du reste.

Calcul de L_∞

On se donne un trajet de chargement cyclique $\Sigma(t)$ de période T, on définit la fonction $D(t)$ en écrivant (16) :

$$\tau(t) + \mu_0' \quad \gamma^p(t) = D(t) = \alpha' : \Sigma(t)$$

En passant aux vitesses dans (16) on peut voir en utilisant la loi de comportement que :

- $\dot{D}(t) > 0$ implique $\dot{\gamma}^p \geq 0$ et que
- $\dot{D}(t) < 0$ implique $\dot{\gamma}^p \leq 0$.

Ainsi, si on choisit l'origine des temps à un instant où D atteint son maximum absolu, on voit apparaître sur une période, par exemple $[0,T]$, une suite d'instants $0 = t_1, t_1', \ldots, t_j, t_j'$ qui se succèdent où, en t_i a lieu un maximum local, et en t_i' un minimum local.

$$0 = t_1 < t_1' < t_2 < t_2' < \ldots < t_j < t_j' < t_1 + T$$

On a alors d'après ce qui précède :

$$\begin{array}{lll} \forall i, & \forall t \in [t_i, t_i'] & \gamma^p(t) \text{ est décroissante} \\ & \forall t \in [t_i', t_{i+1}] & \gamma^p(t) \text{ est croissante} \end{array}$$

On note $t_{i,n}, t_{i,n}'$ les instants correspondants à t_i et t_i' qui arrivent au $n^{\text{ième}}$ cycle. On note $\gamma_{i,n}^p = \gamma^p(t_{i,n})$ et $\gamma_{i,n}^{p'} = \gamma^p(t_{i,n}')$. On note $D_{\max}$ le maximum absolu de D atteint en 0 (par choix) et on note $D_{\min}$ le minimum absolu atteint en un instant t_{j_0}'.

On divise le $n^{\text{ième}}$ cycle $[(n-1)T, nT]$ en deux phases : $[(n-1)T, (n-1)T + t_{j_0}']$ et $[(n-1)T + t_{j_0}', nT]$ qu'on appelle abusivement "décharge" pour la première et "charge" pour la deuxième.

On montre d'abord que si x_1 et x_2 sont deux instants successifs tels que :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \forall x \in [x_1, x_2] & & D(x) \leq D(x_1) \\ & \text{alors} & \\ \gamma^p(x_2) & \leq & \gamma^p(x_1) \end{array} \right. \tag{19}$$

Par l'absurde : si $\gamma^p(x_2) > \gamma^p(x_1)$ alors il existe $x_0 \in [x_1, x_2[$ tel que :

$$\gamma^p(x_0) = \gamma^p(x_1) \quad \text{et} \quad \dot{\gamma}^p(x_0) > 0$$

or

- si $\dot{\gamma}^p(x_0) > 0$ alors on a forcément $\dot{\tau}(x_0) > 0$ donc $\dot{D}(x_0) > 0$ via (16).
- De même $\dot{\gamma}^p(x_0) > 0$ implique que le seuil supérieur est atteint :

$$\tau(x_0) = \tau^{+s}(x_0) = CE(\gamma^p(x_0)) + L(x_0)$$

et en écrivant (16) en x_0 on a :

$$CE(\gamma^p(x_0)) + L(x_0) + \mu_0' \gamma^p(x_0) = D(x_0)$$

ou :

$$CE(\gamma^p(x_1)) + L(x_0) + \mu_0' \gamma^p(x_1) = D(x_0)$$

et comme $L(x_0) \geq L(x_1)$ puisque $x_0 \geq x_1$, on déduit de la formule ci-dessus que $D(x_0) \geq D(x_1)$. Cette inégalité jointe à $\dot{D}(x_0) > 0$ est en contradiction avec l'hypothèse faite en (19).. C.Q.F.D.

De la même manière, on montre que si x_1 et x_2 sont deux instants successifs, tels que :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \forall x \in [x_1, x_2] & & D(x) \geq D(x_1) \\ & \text{alors} & \\ \gamma^p(x_2) & \geq & \gamma^p(x_1) \end{array} \right. \tag{20}$$

D'après (19) et (20) :

- la suite $\gamma^p_{1,n} = \gamma^p((n-1)T)$ est décroissante avec n
- la suite $\gamma^{p'}_{j_0,n} = \gamma^p((n-1)T + t'_{j_0})$ est croissante avec n
- $\forall t \geq (n-1)T \quad \gamma^p(t) \leq \gamma^p_{1,n}$
- $\forall t \geq (n-1)T + t'_{j_0} \quad \gamma^p(t) \geq \gamma^{p'}_{j_0,n}$

Par ailleurs, il est clair que si au $n^{\text{ième}}$ cycle la "décharge" est purement élastique, l'évolution ultérieure reste purement élastique. De même si la "charge" est purement élastique, l'évolution ultérieure est aussi purement élastique. L'hypothèse de la non stabilisation en un nombre fini de cycles, implique qu'à la $n^{\text{ième}}$ "décharge", il y a évolution plastique et d'après (19), il existe un $t'_{i,n} \in [(n-1)T, (n-1)T + t'_{j_0}]$ où un minimum local de D est atteint, tel que :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \gamma^{p'}_{i,n} & < & \gamma^p_{1,n} \\ \tau(t'_{i,n}) & = & -\tau^{-s}(t'_{i,n}) \end{array} \right. \tag{21}$$

Il y a aussi évolution plastique à la $n^{\text{ième}}$ "charge" et d'après (20), il existe un $t_{k,n} \in [(n-1)T + t'_{j_0}, nT]$ où un maximum local de D est atteint, tel que :

$$\begin{cases} \gamma^p_{k,n} & > & \gamma^p_{j_0,n} \\ \tau(t_{k,n}) & = & \tau^{+s}(t_{k,n}) \end{cases} \tag{22}$$

Comme le nombre de couples $(t'_{i,n}, t_{k,n})$ pouvant vérifier (21) et (22) est en nombre fini sur une période, il existe un jeu d'indices $(i*, k*)$ qui revient une infinite de fois. Il existe alors une suite $(n_h)_h$ telle que (21) est vérifiée pour t'_{i*,n_h} au $n_h^{\text{ième}}$ cycle et (22) est vérifiée pour t_{k*,n_h} au $n_h^{\text{ième}}$ cycle.

L'écriture de (16) en t'_{i*,n_h} et t_{k*,n_h} donne :

$$-L(t'_{i*,n_h}) + CE(\gamma^{p'}_{i*,n_h}) + \mu'_0 \gamma^{p'}_{i*,n_h} = D(t'_{i*}) \tag{23}$$

$$L(t_{k*,n_h}) + CE(\gamma^p_{k*,n_h}) + \mu'_0 \gamma^p_{k*,n_h} = D(t_{k*}) \tag{24}$$

Comme $L(t'_{i*,n_h})$ est une suite strictement croissante avec h, alors $\gamma^{p'}_{i*,n_h}$ est aussi strictement croissante en vertu de la croissance de la fonction $x \mapsto CE(x)$, de la stricte positivité de μ'_0 et de la relation (23). $\gamma^p(t)$ étant bornée, la suite $\gamma^{p'}_{k,n_h}$ est convergente et en vertu de (23), $L(t'_{i*,n_h})$ aussi. La fonction $t \mapsto L(t)$ étant croissante, elle converge quand t tend vers l'infini puisque la suite $L(t'_{i*,n_h})$ est strictement croissante convergente.

De la convergente de $L(t)$ vers L_∞, on déduit celle de $\gamma^p(t)$. En effet, (24) implique que $\gamma^{p'}_{k*,n_h}$ est aussi convergente. On sait par ailleurs, à cause de la loi de comportement , qu'il existe une constante "Cst" telle que :

$$| \dot{\gamma}^p | \leq Cst\ \dot{L}$$

ce qui montre que la variation de γ^p sur un cycle tend vers 0 et puisque $\gamma^{p'}_{i*,n_h}$ et γ^p_{k*,n_h} convergent, ces deux quantités ainsi que $\gamma^p(t)$ converge vers une valeur limite commune : γ^p_∞.

En particulier, à la limite (23) et (24) deviennent :

$$-L_\infty + CE(\gamma^p_\infty) + \mu'_0 \gamma^p_\infty = D(t'_{i*}) \tag{25}$$

$$L_\infty + CE(\gamma^p_\infty) + \mu'_0 \gamma^p_\infty = D(t_{k*}) \tag{26}$$

Mais l'écriture de (16) aux instants où D atteint son maximum et son minimum étant à la limite :

$$\begin{aligned} \tau((n-1)T) &= D_{\max} - \mu_0' \gamma_\infty^p \\ &\leq L_\infty + CE(\gamma_\infty^p) = D(t_{k*}) - \mu_0' \gamma_\infty^p \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tau((n-1)T + t_{j_0}') &= D_{\min} - \mu_0' \gamma_\infty^p \\ &\geq -L_\infty + CE(\gamma_\infty^p) = D(t_{i*}') - \mu_0' \gamma_\infty^p \end{aligned}$$

On déduit que :

$$\begin{aligned} D(t_{k*}) &= D_{\max} \\ D(t_{i*}') &= D_{\min} \end{aligned}$$

et en combinant (25) et (26) on a (18):

$$L_\infty = \frac{1}{2}(D_{\max} - D_{\min}) = \frac{1}{2} \max_{(t',t'') \in [0,T]^2} [D(t') - D(t'')]$$

3.3 Le critère de rupture

Le critère de rupture adopté est de la forme :

$$f(\max_{cristaux faibles} L_\infty, \max_{t \in [0,T]} P(t)) \leq 0$$

Il nous faut évaluer $\max L_\infty$ sur les cristaux faibles. Rappelons que le calcul de l'écrouissage d'un cirstal de système de glissement α et de tenseur de localisation A défini dans (14) nous conduit, (avec une loi de comportement donnée en (17)) à l'expression de L_∞ : (18)

$$\begin{aligned} L_\infty &= \tfrac{1}{2} \max_{(t',t'') \in [0,T] \times [0,T]} \alpha : A : [\Sigma(t') - \Sigma(t'')] \\ &= \tfrac{1}{2} \max \{\alpha : A : [\Sigma^d(t') - \Sigma^d(t'')] + \tfrac{1}{3}(\alpha : A : Id)[P(t') - P(t'')]\} \end{aligned}$$

où :

- Σ^d est la partie déviatorique de Σ,
- P est la pression hydrostatique de Σ

On voit que si l'hétérogénéité élastique résulte uniquement de la différence d'orientation des cristaux, on a (15) qui implique :

$$\alpha : A : Id = tr\alpha = 0$$

Mais même si on ne fait pas cette hypothèse, qui paraît raisonnable, on doit être cohérent dans la formulation du critère de fatigue : on ne peut pas tenir compte de l'effet de la pression sur le calcul de L_∞ et dire qu'elle intervient de façon globale par son maximum sur un cycle. On a passé en revue les trois effets de la pression sur le phénomène de fatigue : effet sur L_∞, effet sur le mécanisme de regroupement irréversible des dislocations à l'état stabilisé, et enfin, effet sur la coalescence des microfissures. La complexité de la situation nous a amené à postuler un critère portant sur le maximum de L_∞ parmi les cristaux faibles et sur le maximum de la pression sur un cycle. D'une part, il serait incohérent dans ce cadre de tenir compte de la pression dans le calcul de $\max L_\infty$, et d'autre part, l'hétérogénéité élastique résulte pour une grade part de la différence d'orientation des cristaux; ainsi le réel :

$$\alpha : A : Id$$

sera négligé devant les autres termes de (18).

On écrit alors :

$$L_\infty = \frac{1}{2} \max_{t',t''} [\alpha : A]^d : [\Sigma^d(t') - \Sigma^d(t'')]$$

On note :

$$\Sigma_1(t',t'') \geq \Sigma_2(t',t'') \geq \Sigma_3(t',t'')$$

Les valeurs propres de $\Sigma(t') - \Sigma(t'')$, et :

$$e_1 \geq e_2 \geq -(e_2 + e_1) = e_3$$

les valeurs propres de $[\alpha : A]^d$ (e_1 est alors > 0) pour un cristal de tenseur de localisation A et de système de glissement α.

Pour évaluer $\max L_\infty$ sur les cristaux, on distingue deux cas :

1. On suppose que le couple (e_1, e_2) ne dépend pas du cristal, ce qui revient à négliger dans la formule de localisation l'effet de la géométrie

du cristal ainsi que l'influence des orientations des cristaux voisins. Autrement dit, cette hypothèse revient à distinguer les cristaux uniquement par leur orientation. Toute localisation de type matrice-inclusion, telle que celle de Lin-Taylor ou Hershey-Kröner rentre dans le cadre de cette hypothèse. On peut alors estimer $\max L_\infty$ en utilisant l'annexe :

$$\max L_\infty = \frac{1}{2} \max_{(t',t'')\in[0,T]\times[0,T]} e_1[\Sigma_1(t',t'')-\Sigma_3(t',t'')]+e_2[\Sigma_2(t',t'')-\Sigma_3(t',t'')] \tag{27}$$

2. On suppose que le comportement en fatigue est isotrope macroscopiquement. L'expression de $\max L_\infty$ doit être isotrope en fonction de $\Sigma(t)$; soit $(t',t'')_{\max}$ les instants qui réalisent le maximum de :

$$\frac{1}{2}[\alpha : A]^d : [\Sigma^d(t') - \Sigma^d(t'')]$$

parmi tous les instants (t',t'') et tous les cristaux faibles.
La condition d'isotropie impose que le maximum de (18) sur les cristaux à $(t',t'')_{\max}$ fixé, ne dépende pas de l'orientation du repère principal de $\Sigma(t'_{\max}) - \Sigma(t''_{\max})$. Ce qui veut dire que les cristaux dans lesquels le maximum peut être atteint, forment une classe dont les $[\alpha : A]^d$ ont les mêmes valeurs propres e_1, e_2, e_3 et dont les repères propres parcourent toutes les orientations.

Le maximum est atteint pour les cristaux de cette classe dont le repère propre coïncide avec celui de $\Sigma(t'_{\max}) - \Sigma(t''_{\max})$. On retrouve partiellement le 1er cas. En effet, la valeur du couple (e_1, e_2) avec $(e_1 \geq e_2 \geq -0.5e_1)$ qui détermine la classe de cristaux dans laquelle le maximum de L_∞ est atteint, dépend, a priori, du scalaire compris entre 0 et 1 défini par :

$$\lambda(t',t'') = \frac{\Sigma_2(t',t'') - \Sigma_3(t',t'')}{\Sigma_1(t',t'') - \Sigma_3(t',t'')}$$

Ainsi, l'hypothèse d'isotropie implique l'existence de deux fonctions réelles sur $[0,1]$ caractéristiques du matréria vérifiant :

$$\forall \lambda \in [0,1] \qquad e_1(\lambda) \geq e_2(\lambda) \geq -0.5e_1(\lambda)$$

et telles que :

$$\max \mathrm{L}_\infty = \frac{1}{2} \max_{(t',t'')} e_1(\lambda(t',t''))[\Sigma_1(t',t'')-\Sigma_3(t',t'')]+e_2(\lambda(t',t''))[\Sigma_2(t',t'')-\Sigma_3(t',t'')] \tag{28}$$

La formule (28) ne suppose pratiquement aucune hypothèse sur la localisation. Elle contient (27). Si de plus, on suppose l'existence d'une classe (*) de cristaux caractérisée par le couple (e_1^*, e_2^*), telle que :

$$e_1^* \geq e_1^c \quad \text{et} \quad e_2^* \geq e_2^c$$

pour toute classe de cristaux (e_1^c, e_2^c) alors on peut voir que :

$$\begin{cases} e_1(\lambda) = e_1^* = \text{constante} \\ e_2(\lambda) = e_2^* = \text{constante} \end{cases}$$

Cette hypothèse simplifie (28) pour retrouver (27). Elle signifie physiquement que la classe des cristaux les plus faibles est une donnée de l'élément de volume indépendante du chargement qu'on lui applique. Nous allons voir que cette hypothèse est assez plausible.

3.4 Caractère aléatoire de la fatigue

Les résultats des observations expérimentales montrent une dispersion non réductible aux imprécisions de l'expérimentation. La fatigue est un phénomène intrinsèquement aléatoire.

Plusieurs facteurs influencent le comportement en fatigue d'une pièce métallique (voir [4]), parmi les plus importants : on note tout d'abord la présence d'impuretés dont le comportement élastique est différent des cristaux, ce qui est souvent générateur de concentrations de contraintes et donc de microfissuration ; les irrégularités de la surface sont aussi génératrices de concentrations de contraintes. Il arrive aussi que le mode de fabrication de la pièce y induise un champ de contrainte résiduelle microscopique dont l'effet sur quelques cristaux peut se révéler décisif pour le phénomène de fatigue. D'autres facteurs influencent le phénomène de fatigue; quoiqu'il en soit les microfissures naissent toujours dans des cristaux qui subissent des concentrations de contraintes élevées. Tous les facteurs évoqués plus haut sont aléatoires, ce qui rend la localisation des contraintes aléatoire. Elle

varie d'un échantillon expérimental à un autre. La dépendance de la classe des cristaux les plus faibles en fonction des contraintes macroscopiques nous paraît négligeable en regard de la localisation aléatoire, justifiant ainsi l'hypothèse d'une clase (*) qui dépend de l'échantillon expérimental.

Nous proposons que le couple (e_1^*, e_2^*) soit considéré comme une variable aléatoire résumant tout l'aspect aléatoire de la fatigue qui est dûe, selon nous, aux concentrations aléatoires de contraintes.

En résumé, nous proposons dans un premier temps d'évaluer L_∞ par :

$$\max L_\infty = \frac{1}{2} \max_{(t',t'')} [e_1^*.(\Sigma_1(t',t'') - \Sigma_3(t',t'')) + e_2^*.(\Sigma_2(t',t'') - \Sigma_3(t',t''))]$$

où $e_1^* \geq e_2^* \geq -0.5e_1^*$ sont des constantes caractéristiques du matériau.

Puis, dans un deuxième temps, il faut considérer que le couple (e_1^*, e_2^*) est aléatoire et chercher à caractériser sa loi.

Le critère de fatigue :

$$f(\max L_\infty, \max_t P(t)) \leq 0$$

doit être considéré comme phénomélogique et valable pour tous les échantillons d'une expérimentation. On peut le prendre en première approximation affine :

$$a \max L_\infty + \max_t P(t)) \leq b$$

Ce qui donne, en changeant les notations, le critère :

$$\frac{a}{2} \max_{(t',t'')} \{(\Sigma_1(t',t'') - \Sigma_3(t',t'')) + c.(\Sigma_2(t',t'') - \Sigma_3(t',t''))\} + \max_t P(t) \leq b \tag{29}$$

$$a > 0 \qquad 1 \geq c \geq -0.5 \qquad b > 0$$

Le critère (29) nécessite l'identification de trois paramètres a, c et b, les deux premiers sont considérés dans une première approximation comme déterministes, puis pour tenir compte de l'aléa, on les considèrera comme des variables aléatoires dont on essaiera d'identifier la loi conjointe.

Le critère (29) généralise le critère (8) initialement établi par Dang-Van. Son évaluation numérique semble aisée puisqu'il suffit d'évaluer les maximisations qui y interviennent sur une discrétisation de l'intervalle de temps $[0, T]$. Nous pouvons préciser la nature géométrique de la quantité

$\frac{1}{2}\max_{(t',t'')}\{(\Sigma_1(t',t'')-\Sigma_3(t',t''))+c.(\Sigma_2(t',t'')-\Sigma_3(t',t''))\}$
en considérant l'application qui associe à un champ de contrainte Σ, de valeurs propres $\Sigma_1 \geq \Sigma_2 \geq \Sigma_3$, le réel positif:

$$\|\Sigma\|_c = \Sigma_1 - \Sigma_3 + c.(\Sigma_2 - \Sigma_3)$$

En utilisant l'annexe, on a une définition équivalente:

$$\|\Sigma\|_c = \max_{T \in \mathbf{T}(1,c,-1-c)} T : \Sigma$$

On vérifie que cette application est une norme sur l'espace vectoriel des déviateurs de contrainte. La quantité que nous voulons interpréter apparaît comme le rayon de la plus petite boule contenant la trajectoire décrite par $\Sigma(t)$ dans l'espace des déviateurs de contrainte muni de la norme $\| \|_c$. Papadopoulos [6] propose un critère analogue au nôtre et dans lequel la norme $\|\Sigma\|_c$ est remplacée par la norme $J_2(\Sigma)$, second invariant du déviateur de Σ.

ANNEXE

$\mathbf{T}(T_1, T_2, T_3)$ désigne la famille de tous les tenseurs symétriques d'ordre 2 sur $\mathbb{R}^3$ de valeurs propres $T_1 \geq T_2 \geq T_3$.
On veut montrer que :

$$\forall T' \in \mathbf{T}(T_1', T_2', T_3') \max_{T \in \mathbf{T}(T_1, T_2, T_3)} T : T' = T_1 T_1' + T_2 T_2' + T_3 T_3'$$

On exprime les tenseurs T et T' dans le repère principal de T', $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, alors :

$$T : T' = T_{11} T_1' + T_{22} T_2' + T_{33} T_3'$$

on établit l'inégalité dans un sens en prenant : $T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & T_3 \end{pmatrix}$
On va l'établir dans l'autre sens en utilisant les propriétés suivantes :

$$T_{11} + T_{22} + T_{33} = T_1 + T_2 + T_3$$

$$\begin{aligned} T_3 &\leq T_{11} \leq T_1 \\ T_3 &\leq T_{22} \leq T_1 \\ T_3 &\leq T_{33} \leq T_1 \end{aligned}$$

La première égalité exprime l'invariance de la trace; les inégalités sur les T_{ii} découlent de, par exemple,

$$T_{11} = \vec{i}.T.\vec{i} = T_1 i_1^2 + T_2 i_2^2 + T_3 i_3^2$$

où (i_1,i_2,i_3) sont les composantes de $\vec{i}$ dans le repère principal de T.
Soient les réels $a_1 \geq a$, $b \geq b_1$, et $x \geq y$, on a les deux inégalités:

$$ax + by \leq (a + b - b_1)x + b_1 y$$

et

$$ax + by \leq (a + b - a_1)y + a_1 x$$

En utilisant la première, on a :

$$T_{22}T_2' + T_{33}T_3' \leq (T_{22} + T_{33} - T_3)T_2' + T_3T_3' = (T_1 + T_2 - T_{11})T_2' + T_3T_3'$$

et la deuxième, on a :

$$T_{11}T_1' + (T_1 + T_2 - T_{11})T_2' \leq T_1T_1' + T_2T_2'$$

d'où

$$T_{11}T_1' + T_{22}T_2' + T_{33}T_3' \leq T_1T_1' + T_2T_2' + T_3T_3'$$

REFERENCES

[1] DANG VAN KY : Sur la résistance à la fatigue des métaux. Mémorial de l'Artillerie Française, Sciences et Techniques de l'Armement, 3ème fascicule,1973.

[2] LEHR : Structure et Plasticité des matériaux métalliques. Cours de l'E.N.S.T.A., 1972-1973.

[3] DOMINIQUE FRANÇOIS : Mécanique des matériaux. Cours de l'École Centale des Arts et Manufactures. 1984.

[4] BATHIAS et BAILON : La fatigue des matériaux et structures. Paris, Maloine, Montréal. Presses de l'Université de Montréal. 1980. (Collection de l'Université de Compiègne).

[5] BUI: Evaluation de la frontière du domaine élastique des métaux avec écrouissage plastique et comportement plastique d'un agrégat de cristaux cubiques. Mémorial de l'Artillerie Française, Sciences et Techniques de l'Armement, 1er fascicule,1970.

[6] PAPADOPOULOS : Fatigue polycyclique des métaux, une nouvelle approche. Thèse E.N.P.C., Paris, 1988.

CHAPITRE 5

ANALYSE DE LA SIMULATION EN CALCUL A LA RUPTURE PROBABILISTE DES STRUCTURES DISCRETES

Introduction.

1) Formulation du problème.

2) Formulation duale.

3) Etude du problème dual.

4) Application au cas où seules les résistances sont aléatoires.

5) Application au cas où les résistances et les chargements sont aléatoires.

6) Exemple.

Introduction :

Dans le chapitre trois on a calculé par simulation les coefficients élastiques macroscopiques d'un matériau à microstructure aléatoire. On a homogénéisé le matériau au sens de l'élasticité. Peut-on homogénéiser un matériau à microstructure aléatoire au sens du calcul à la rupture ? Peut-on calculer par simulation son critère de rupture macroscopique ? Comment calculer la stabilité d'une structure au sens du calcul à la rupture quand les chargements et les résistances sont aléatoires ?

L'étude des matériaux et la sécurité des ouvrages a motivé les mécaniciens à mettre en oeuvre le calcul à la rupture quand les chargements et les résistances sont aléatoires. Après une analyse des démarches suivies par Krée et Met [1], Augusti et Barrata [2], Frangopol et Nguyen Dang Hung [3], Garavini [4] et enfin Parimi et Cohn [5] pour définir la probabilité de ruine d'une structure, Carmasol et Salençon [6] donnent une définition précise du calcul à la rupture probabiliste. Le problème du calcul numérique se pose alors, et c'est naturellement qu'on pense aux méthodes de simulation. Mais très souvent, le volume des calculs nécessaire à une simulation limite la taille du problème à étudier. Dans ce chapitre on analyse le problème dans le cas des structures discrètes (ou discrétisées) quand les critères de rupture sont linéaires (ou linéarisés) et on montre dans quelle mesure la connaissance progressive de la structure mathématique du problème , à savoir une structure de simplexe, peut alléger les calculs. Comme on le voit, le sujet traité fait intervenir trois disciplines : Le calcul à la rupture [7], la méthode du simplexe en programmation linéaire [8] et le calcul des probabilités. Pour garder l'autonomie de ce chapitre on présentera toutes les étapes du raisonnement, même si l'application de la programmation linéaire au calcul à la rupture est connue depuis longtemps [9] , [10].

Pour fixer les idées on formulera le problème pour une structure à barres réticulées, et on montrera que la formulation duale est la formulation adaptée lorsqu'on a des calculs répétés comme c'est le cas lors d'une simulation. On abordera d'abord le cas où seules les résistances sont aléatoires, et ensuite, le cas où les résistances et les

chargements sont aléatoires.

On considère une structure formée de b barres réticulées. On note par n_i, r_i^c, r_i^t, respectivement, l'effort normal, la résistance en compression (≥ 0) et la résistance en traction (≥ 0) de la barre i. Les sollicitations qu'on peut appliquer à cette structure sont des forces concentrées aux noeuds. Un chargement quelconque est alors décrit par un nombre fini de paramètres (les composantes des forces aux noeuds), il est représenté par un vecteur colonne de dimension e noté F. Par définition, on dit que le chargement F est potentiellement stable (P.S) s'il existe une distribution d'efforts normaux n_i qui vérifie :

- L'équilibre sous le chargement F.
- le critère de rupture dans chaque barre i :

$$- r_i^c \leq n_i \leq r_i^t$$

Dans un calcul à la rupture classique le problème de base est le suivant : On se donne les résistances r_i^c et r_i^t ainsi que le chargement F : F est-il (P.S.) pour les résistances r_i^c, r_i^t ?

Dans un cadre aléatoire, on suppose les grandeurs r_i^c, r_i^t et F aléatoires, le problème de base devient : connaissant la loi de probabilité qui régit les résistances et le chargement, calculer la probabilité pour que le chargement soit (P.S.). Un calcul analytique de cette probabilité n'est envisageable que dans des cas très simples, sinon il faut recourir à une simulation dont le principe est le suivant :

On génère, à chaque étape, les quantités aléatoires $r_i^c(\omega)$, $r_i^t(\omega)$, $F(\omega)$ selon leur loi de probabilité et sur lesquelles on effectue un calcul déterministe ; ensuite on applique un traitement statistique aux résultats obtenus. Avant de traiter le cas aléatoire, il est nécessaire de bien comprendre le cas déterministe.

1. Formulation du problème.

On se donne r_i^c, r_i^t et F. F est-il (P.S.) ?

On définit $\bar{\alpha}$ par la relation

$$\bar{\alpha} = \sup\{\alpha \in \mathbb{R}^+ \ / \ \alpha F \quad \text{P.S.}\}$$

alors :

$$F(\text{P.S.}) \Leftrightarrow \bar{\alpha} \geq 1$$

Soit $N = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ . \\ . \\ n_b \end{bmatrix}$ un vecteur colonne de dimension b représentant une

répartition d'efforts normaux n_i. La condition d'équilibre sous le chargement αF, que doit vérifier N, s'obtient en écrivant l'équilibre des forces en chaque noeud (et en éliminant les réactions d'appui éventuellement). Cette condition peut se mettre dans tous les cas sous la forme d'une relation linéaire reliant N et αF dont l'expression matricielle est :

(1) $$\mathbf{M}\, N = \alpha F$$

M étant une matrice (e,b) de rang e et qui ne dépend que de la géométrie de la structure ; le degré d'hyperstaticité de la structure est alors $h = b-e \geq 0$.

Comme **M** est de rang e, elle contient au moins une famille de e colonnes indépendantes. Supposons, pour simplifier l'écriture, que les e dernières colonnes sont indépendantes, alors on peut écrire **M** sous la forme : **M** = (**H**,**L**) avec **L** une matrice (e,e) inversible, et **H** une matrice (e,h). De même on partitionne N en $N = \left[\begin{array}{c} N_H \\ \hline N_L \end{array}\right]$ et (1) s'écrit :

(1') $$\mathbf{H}N_H + \mathbf{L}N_L = \alpha F$$

d'où :

(2) $$N_L = -(\mathbf{L}^{-1}\mathbf{H})\, N_H + (\mathbf{L}^{-1}F)\alpha$$

L'équation (2) peut s'écrire sous forme matricielle :

(3) $$N = AX$$

avec

(4) $$\mathbf{A} = \begin{matrix} b \updownarrow \end{matrix} \left[\begin{array}{c|c} Id_h & 0 \\ \hline -\mathbf{L}^{-1}\mathbf{H} & \mathbf{L}^{-1}F \end{array}\right] \begin{matrix} \updownarrow h \\ \\ \updownarrow e \end{matrix} \qquad X = \left[\begin{array}{c} N_H \\ \hline \alpha \end{array}\right] \begin{matrix} \updownarrow h \\ \\ \updownarrow 1 \end{matrix}$$

$\overleftrightarrow{h}$ $\overleftrightarrow{1}$

X est une colonne de h+1 composantes, **A** est une matrice (b,h+1) de rang h+1 si $F \neq 0$.

La construction de **A** à partir de **M** nécessite la détermination de e colonnes de **M** indépendantes formant une base de $\mathbb{R}^e$ afin de mettre **M**, à

une permutation près, sous la forme $M = (H,L)$ et de calculer $L^{-1}H$ et $L^{-1}F$. On donne en annexe un algorithme original qui résoud ce problème.

N_H s'interprète comme le vecteur colonne représentant les inconnues hyperstatiques du problème. La relation (3) relie la répartition d'efforts normaux en équilibre avec αF aux inconnues hyperstatiques et à α.

Le problème de la recherche de $\bar{\alpha}$ devient :

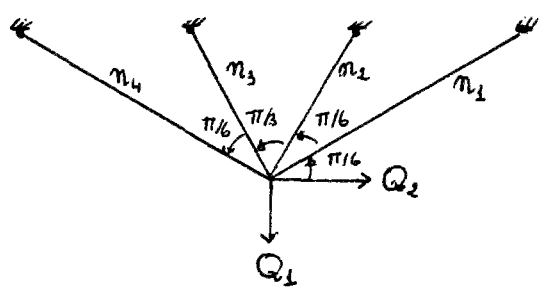
$$(P) \begin{cases} \bar{\alpha} = \text{Max } {}^tZX \\ -R^c \leq AX \leq R^t \end{cases}$$

où

$$Z = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \updownarrow h \quad , \quad R^c = \begin{bmatrix} r^c \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ r^c \\ b \end{bmatrix} \quad , R^t = \begin{bmatrix} r^t \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ r^t \\ b \end{bmatrix}$$

Les inégalités entre vecteurs expriment les inégalités entre leurs composantes. On reconnait que (P) est un problème de programmation linéaire classique.

Exemple : on construit la matice A de la structure décrite ci-dessous :



Cette structure est soumise au chargement $F = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$ où Q_1 et Q_2 sont des réels donnés.

Les équations d'équilibre sont :

$$\frac{n_1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} n_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} n_3 + \frac{n_4}{2} = Q_1$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} n_1 - \frac{n_2}{2} + \frac{n_3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} n_4 = Q_2$$

d'où

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

le degré d'hyperstaticité est 4 - 2 = 2. On partitionne M en :

$$H = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad L = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

les inconnues hyperstatiques étant n_1 et n_2, d'où en calculant $-L^{-1}H$ on a

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline -\sqrt{3} & -2 & \sqrt{3}\,Q_1 - Q_2 \\ 2 & \sqrt{3} & -Q_1 + \sqrt{3}\,Q_2 \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

2. <u>Formulation duale</u> :

Soit N un vecteur réalisant l'équilibre avec αF, alors pour toute colonne à b composantes $U = \begin{bmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_b \end{bmatrix}$ vérifiant :

(5) $$ {}^{t}A\ U = Z $$

on a, en remplaçant N par sa valeur dans (3) :

(6) $$ \sum_{i=1}^{b} n_i u_i = {}^{t}NU = {}^{t}X\,{}^{t}AU = {}^{t}XZ = \alpha $$

Si N est (P.S) alors on a : $-r_i^c \leq n_i \leq r_i^t$ dans chaque barre i, d'où :

(7) $$ n_i u_i \leq \frac{r_i^t - r_i^c}{2} u_i + \frac{r_i^t + r_i^c}{2} |u_i| \qquad \forall i $$

l'expression du second membre est toujours positive et vaut :

$$ r_i^t u_i \text{ si } u_i \geq 0 \quad \text{et} \quad -r_i^c u_i \text{ si } u_i \leq 0. $$

En rapprochant (6) et (7) et en passant aux valeurs extrêmes on a :

(8) $$ \bar{\alpha} \leq \bar{\lambda} = \min_{\langle U \,/\, {}^{t}AU = Z \rangle} \lambda(U) $$

avec

$$ \lambda(U) = \sum_{i=1}^{b} \frac{r_i^t - r_i^c}{2} u_i + \frac{r_i^t + r_i^c}{2} |u_i| $$

La recherche du second membre de (8), $\bar{\lambda}$, constitue la formulation duale (D) du problème (P). En fait, U désigne les vitesses d'allongement des barres, et l'équation (5), que doit vérifier U, consiste en h équations de compatibilité géométrique et une condition de normalisation imposant la puissance de F dans le champs U égale à 1. $\lambda(U)$ désigne la puissance résistante maximale du champ U. La formulation duale (D) n'est autre que l'approche par les vitesses en théorie du calcul à la rupture.

Un résultat classique de la programmation linéaire [8] montre que $\bar{\lambda} = \bar{\alpha}$. Dans le prochain paragraphe on expose l'algorithme du simplexe appliqué à (D).

3. Etude du problème dual :

On considère le problème (D) :

$$ (D) \begin{cases} \bar{\lambda} = \min_{\langle U \,/\, {}^{t}AU = Z \rangle} \lambda(U) \\ \\ \lambda(U) = \sum_{i=1}^{b} \frac{r_i^t - r_i^c}{2} u_i + \frac{r_i^t + r_i^c}{2} |u_i| \end{cases} $$

Il est clair que $\lambda(U)$ est une fonction positive convexe qui tend vers $+\infty$ avec la norme de U et qu'on minimise sur un espace affine, l'analyse convexe nous permet d'affirmer qu'il existe $\bar{U}$ vérifiant ${}^tA\bar{U} = Z$ et $\bar{\lambda} = \lambda(\bar{U})$, $\bar{U}$ n'étant pas forcément unique. On veut montrer que $\bar{U}$ peut être choisi tel que les colonnes de ${}^tA$ correspondant aux composantes non nulles de $\bar{U}$, forment un système linéairement indépendant. En effet, on suppose pour simplifier les notations, que les n premières composantes de $\bar{U}$ sont non nulles et on note C_i les colonnes de ${}^tA$. Pour vérifier (5), les composantes $\bar{u}_i$ de $\bar{U}$ doivent satisfaire à :

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{u}_i C_i = Z \tag{9}$$

Supposons que $C_1,\ldots, C_n$ soient liées, et montrons qu'il existe un $\bar{U}'$ réalisant le minimum et ne comportant que n - 1 composantes non nulles. En effet, dans ce cas il existe alors n réels $a_1,\ldots,a_n$ non tous nuls vérifiant :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i C_i = 0 \tag{10}$$

On voit alors que la solution $\bar{u}'_i = \bar{u}_i + x\, a_i \quad i = 1,\ldots,n$ vérifie (5) pour tout réel x, et que $\bar{u}'_i$ est du même signe que $\bar{u}_i$ pour tout x appartenant à l'intervalle non vide $\left[-\left|\frac{\bar{u}_j}{a_j}\right|, \left|\frac{\bar{u}_j}{a_j}\right|\right]$ où $\left|\frac{\bar{u}_j}{a_j}\right| = \underset{i/a_i \neq 0}{\text{Inf}} \left|\frac{\bar{u}_i}{a_i}\right| \neq 0$

La fonction $\lambda(\bar{U}')$ définie sur cet intervalle est donc affine en fonction de x, mais comme elle est minimum pour x=0, elle est constante sur tout l'intervalle, en particulier sur ses extrémités.

Ainsi pour une de ses extrémités $\bar{u}'_j = 0$. On a donc obtenu un $\bar{U}'$, réalisant le minimum et ne comportant que n-1 composantes non nulles. En opérant de proche en proche, on peut obtenir un minimum tel que les colonnes de ${}^tA$ correspondant aux composantes non nulles de $\bar{U}$ forment un système libre. Mais comme ${}^tA$ est de rang h + 1, on a démontré que le minimum est atteint sur une base de ${}^tA$ qui est, par définition, un ensemble de h + 1

colonnes indépendantes de ${}^tA$; la solution correspondante est obtenue en annulant les composantes de U suivant les colonnes hors base. Ainsi, en supposant pour simplifier l'écriture, que les h+1 premières colonnes de ${}^tA$ sont libres, ${}^tA$ se partitionne en ${}^tA = (B|HB)$ où B est une matrice carrée inversible de taille h+1 ; la solution de base associée à B est alors $U_B = (u_1,\ldots,u_{h+1}) = B^{-1}Z$, les composantes U_{HB} de U étant nulles. Mécaniquement, une solution de base est un mécanisme de rupture faisant intervenir au plus h + 1 barres et tel que "la puissance dissipée" de F dans ce mécanisme soit égale à 1. On montre sans peine que tout mécanisme de rupture vérifiant cette condition, c'est à dire tout U vérifiant (5) est combinaison linéaire convexe des solutions de base, autrement dit, U est de la forme :

$$U = \sum_{(B \text{ base de } {}^tA)} a_B U_B \quad \text{avec} \quad \sum_B a_B = 1.$$

On dit que la base B est dégénérée s'il existe une composante nulle de U_B.

On va donner une condition nécessaire et suffisante (C.N.S) pour que la base B soit minimale dans le cas où B est non dégénérée. On définit pour i = 1,...,h+1 par les coefficients r_i :

(11) $\qquad r_i = r_i^t$ si $u_i > 0$ $\quad r_i = -r_i^c$ si $u_i < 0$

r_i est alors du même signe que u_i. Soit C_d une colonne de HB, elle s'écrit comme combinaison linéaire des colonnes de B, C_i :

$$C_d = \sum_{i=1}^{h+1} d_i \, C_i \tag{12}$$

on définit n(d) par :

$$n(d) = \sum_{i=1}^{h+1} d_i \, r_i \tag{13}$$

alors la C.N.S est : Pour toute colonne d'indice d de HB on a :

$$- r_d^c \leq n(d) \leq r_d^t \tag{14}$$

l'interprétation mécanique de la C.N.S est la suivante : n(d) est l'effort normal dans la barre d calculé de façon unique quand on impose les efforts normaux limites r_i dans les h+1 premières barres, où r_i désigne la résistance à la traction si la vitesse d'allongement u_i de la barre i est positive, la résistance à la compression , sinon.

La condition est suffisante : puisque la distribution d'efforts normaux décrite par les r_i dans les h+1 premières barres, et les n(d), dans les autres barres, vérifie l'équilibre sous αF ainsi que les critères de rupture ; en calculant α par (6) on a :

$$\alpha = {}^{t}N\, U_B = \sum_{i=1}^{h+1} r_i\, u_i = \lambda(U_B) \tag{15}$$

on en déduit que $\bar{\alpha} = \bar{\lambda}$ et que **B** est une base minimale.

Montrons que la condition (14) est nécessaire : on suppose qu'il existe d tel que $n(d) > r_d^t$ et on va exhiber une base **B'** qui ne diffère de **B** que par une colonne, et qui est telle que $\lambda(U_{B'}) < \lambda(U_B)$.
En effet, **B** s'écrit $B = (C_1,\ldots,C_j,\ldots,C_{h+1})$. Pour avoir **B'** on calcule l'indice j vérifiant :

$$0 < \frac{u_j}{d_j} = \underset{(i/r_i\, d_i>0)}{\text{Inf}} \frac{u_i}{d_i} \tag{16}$$

En effet, $n(d) > r_d^t \Rightarrow (i \;/\; r_i d_i > 0)$ est non vide.
On remplace la colonne C_j par C_d, on obtient $B' = (C_1,\ldots,C_d,\ldots,C_{h+1})$.
Alors, soit un vecteur colonne V de dimension h+1 dont les composantes dans la base **B** sont v_i c'est à dire :

$$V = \sum_{i=1}^{h+1} v_i C_i$$

et dont les composantes dans la base **B'** sont v'_i, c'est à dire,

$$V = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{h+1} v'_i C_i + v'_d C_d$$

on a la formule de changement de base.

$$\begin{cases} v'_i = v_i - v_j \dfrac{d_i}{d_j} & \text{pour } i \neq j \\ v'_d = \dfrac{v_j}{d_j} \end{cases} \tag{17}$$

Cette formule nous permet de calculer rapidement les composantes dans **B'** des colonnes hors base, ainsi que la solution de base $U_{B'} = (u'_1,\ldots,u'_d,\ldots,u'_{h+1})$ correspondante à **B'** puisqu'elle n'est rien d'autre que les composantes de Z dans **B'**. On a :

$$(18)\qquad \begin{cases} u'_i = u_i - u_j \dfrac{d_i}{d_j} & \text{pour } i \neq j \\ u'_d = \dfrac{u_j}{d_j} \end{cases}$$

la condition (16) impose que u'_i est du même signe que u_i, rendant ainsi le calcul de $\lambda(U_{B'})$ facile :

$$(19)\qquad \lambda(U_{B'}) = \lambda(U_B) + u'_d (r^t_d - n(d)) < \lambda(U_B) \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Si maintenant, on suppose qu'il existe d tel que $n(d) < -r^c_d$, on fait le raisonnement précédent en remplaçant (16) par (16') et (19) par (19') :

$$(16')\qquad 0 > \frac{u_j}{d_j} = \operatorname*{Sup}_{\langle i / r_i d_i < 0 \rangle} \frac{u_i}{d_i}$$

$$(19')\qquad \lambda(U'_B) = \lambda(U_B) - u'_d (r^c_d + n(d)) < \lambda(U_B)$$

ainsi s'achève la démonstration de la C.N.S. Dans l'hypothèse où le miminum est atteint sur une base non dégénérée. De cette démonstration on déduit l'algorithme du simplexe pour la recherche de $\bar{\alpha} = \bar{\lambda}$ dont les étapes sont les suivantes:

1. - partir d'une base de départ B de ${}^tA$ et calculer U_B ainsi que l'expression des colonnes hors base de ${}^tA$ en fonction des colonnes de B.

2. - définir les coefficients r_i relatifs à U_B donnés dans la formule (11) puis pour toute colonne hors base d, calculer n(d) et examiner la condition (14) : Si elle est satisfaite pour tout d, B est minimale et l'algorithme s'arrête ; sinon

3. - effectuer le changement de base donné par les formules (16), (17), (18) et (19) ou (16'), (17), (18) et (19') dès que l'on trouve une colonne d violant la condition (14) et aller en 2.

On voit que, dans le cas où toutes les bases de ${}^tA$ sont non dégénérées, cet algorithme converge en un nombre fini d'étapes, puisque le nombre de bases de ${}^tA$ est fini. Dans le cas où une base B est dégénérée, c'est à dire dont la solution de base U_B correspondante admet des composantes nulles, la formule (11) ne permet pas de choisir entre les valeurs $-r^c_i$ et r^t_i qu'on doit attribuer aux coefficients r_i relatifs à

ces composantes nulles. On effectue alors un choix arbitraire pour chaque composante nulle. Pour un choix donné, on peut définir n(d) par la formule (13) pour toute colonne hors base C_d et si (14) est vérifiée pour tout d $\bar{\alpha} = \bar{\lambda}$ et B est minimale. Sinon, le changement de base B' décrit plus haut se fait de façon telle que :

$$\lambda(U_{B'}) \leq \lambda(U_B)$$

avec la possibilité d'avoir $\lambda(U_{B'}) = \lambda(U_B)$ si l'indice j défini dans (16) et (16') est tel que $u_j = 0$ cette possibilité étant exclue quand B est non dégénérée. Il est donc théoriquement possible, après un certain nombre de changements de base de ce type, de retrouver une base déjà rencontrée et de cycler indéfiniment. On peut se prémunir contre le cyclage [8], mais en fait, ce phénomène se rencontre rarement dans les cas concrets et sort du cadre de cette étude.

4. Application au cas où seules les résistances sont aléatoires :

On suppose que les r_i^c et r_i^t sont des variables aléatoires et qu'on est capable de simuler la loi du vecteur $R = (r_1^c, \ldots, r_b^c, r_1^t, \ldots, r_b^t)$.

On se donne un vecteur chargement fixé F, alors $\bar{\alpha}$ est une variable aléatoire dont on cherche la fonction de répartition $f(x) = \text{Prob}(\bar{\alpha} < x)$.

On calcule f en effectuant une simulation comportant t tirages du vecteur résistance R et, à chaque tirage de R, on fait un calcul déterministe (pour le calcul du $\bar{\alpha}$ correspondant) en appliquant l'algorithme du paragraphe précédent et on classe les $\bar{\alpha}_i$ au fur et à mesure des tirages successifs : $\bar{\alpha}_1 \leq \bar{\alpha}_2 \ldots \leq \bar{\alpha}_t$; la valeur de f en un point $x \in]\bar{\alpha}_{i-1}, \bar{\alpha}_i]$ peut être approximé par i/t. D'après le chapitre 1, l'erreur commise sur f(x) est uniforme en x et est estimée à $(\text{LogLog}t)^{1/2}(2t)^{-1/2}$ dans le cas où f est continue.

En particulier, on peut déduire la probabilité de rupture P_r sous le chargement F : $P_r = \text{Prob}(\bar{\alpha}<1) = f(1)$.

Cette méthode qui ne nécessite qu'une seule simulation pour estimer entièrement f est plus rapide que la méthode employée dans [6] et qui consiste à calculer f(x) en des points régulièrement espacés $x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n$ en effectuant en chaque point x_i une simulation utilisant la loi des grands nombres pour estimer :

$$f(x_i) = \text{Espérance}\ (1_{\langle \bar{\alpha} < x_i \rangle})$$

où 1 est la fonction indicatrice ($1_{\langle \bar{\alpha} < x_i \rangle} = 1$ si $\bar{\alpha}_i < x_i$, 0 sinon). Voir le chapitre 1.

En tout cas on voit la nécessité de réduire le volume des calculs déterministes à chaque étape. Rappelons la forme de ${}^tA$:

$$ {}^tA = \left[\begin{array}{c|c} Id_h & -{}^t(L^{-1}H) \\ \hline 0 & {}^t(L^{-1}F) \end{array}\right] \begin{array}{l} \updownarrow h \\ \updownarrow I \end{array} $$

$\leftrightarrow$ h

$\leftrightarrow$ b

${}^tA$ est inchangée pendant la simulation puisqu'elle ne dépend que de la géométrie (par **H** et **L**), et du vecteur F (dans la dernière ligne). Une base de départ de l'algorithme du simplexe facile à obtenir consiste à prendre les h premières colonnes de ${}^tA$ et une colonne dont la dernière composante (qui appartient à $L^{-1}F$) est non nulle. On prendra cette base pour démarrer le calcul du premier tirage. Mais pour un tirage quelconque, soient $(B_1, U_{B_1}), \ldots, (B_n, U_{B_n})$ toutes les bases et solutions de base calculées dans les tirages précédents : on calcule les $\lambda(U_{B_i})$ et on choisit comme base de départ pour le tirage actuel , la base dont le $\lambda(U_{B_i})$ est le plus petit.

L'interprétation mécanique de cette méthode est le stockage des mécanismes de rupture élémentaires (de base) qui apparaissent à chaque étape de la simulation, pour éviter de les recalculer.

Remarque : L'algorithme qu'on propose suppose le stockage des bases déjà exhibées, plus précisément, pour démarrer une itération du simplexe à partir d'une base **B** il faut disposer : des indices de ces colonnes, de U_B et enfin des composantes dans **B** de tous les vecteurs hors base. En réalité le stockage de ces composantes est coûteux en place mémoire et on perd en place mémoire ce qu'on gagne en temps d'exécution. Selon la taille et la nature du problème il convient de définir une stratégie de stockage adaptée aux capacités de la machine : si on dispose d'une place mémoire suffisante on peut stocker pour **toutes** les bases B_i calculées dans les tirages précédents : les indices des colonnes de B_i, la solution de base U_{B_i} et les composantes dans B_i des vecteurs hors base. Si la place mémoire manque, on peut se contenter de stocker de cette façon

autant de bases que possible. Une autre solution est de stocker pour toutes les bases B_i calculées dans les tirages précédents **uniquement** les indices des colonnes de B_i et la solution de base U_{B_i}, ce qui permet le calcul des $\lambda(U_{B_i})$ et la détermination de la nouvelle base de départ, mais il faut alors pour démarrer le simplexe recalculer les composantes dans cette base des vecteurs hors base.

Ces considérations montrent qu'il n'y a pas une unique procédure de simulation valable dans tous les cas. Néanmoins, il apparaît en analysant le problème que la formulation duale est plus adaptée à la simulation puisque les mécanismes élémentaires ne dépendent pas du vecteur de résistance ; si on sait les calculer, par le simplexe ou par une autre méthode, l'évaluation de $\bar{\alpha}$ pour n'importe quel vecteur résistance devient aisée.

5. Application au cas où les résistances et les chargements sont aléatoires :

On suppose que le vecteur résistance, R, ainsi que le vecteur chargement, F, sont aléatoires, et qu'on sait simuler la loi du couple (F,R). On cherche toujours la fonction de répartition de la variable aléatoire $\bar{\alpha}$: $f(x) = \text{Prob}(\bar{\alpha} < x)$ dont on déduit la probabilité de ruine $P_r = f(1)$. La simulation est la même que dans le cas précédent, mais cette fois ${}^tA$ diffère d'une simulation à une autre par sa dernière ligne qui dépend de F ; on peut néanmoins profiter des calculs précédents pour le choix d'une base de départ du simplexe à chaque étape.

En effet, soient ${}^tA$, ${}^tA'$ deux matrices correspondant à 2 chargements F et F'; on note T et T' les dernières lignes de ${}^tA$ et ${}^tA'$. Soit (B,U_B) une solution de base de ${}^tA$ alors si $T'U_B \neq 0$ les colonnes de ${}^tA'$ correspondant à la base B de ${}^tA$ forment une base B' de ${}^tA'$ dont une solution correspondante est $U_{B'} = (T'U_B)^{-1}U_B$. De même, soit C_d une colonne hors base de ${}^tA$ et soit D_B le vecteur des composantes de C_d dans la base B ,ie , $C_d = B\,D_B$ et considérons les quantités correspondantes dans ${}^tA'$: $C'_d = B'D_{B'}$, alors on vérifie facilement que D_B et $D_{B'}$ sont reliées par la relation : $D_{B'} = D_B + k\,U_B$ k étant un facteur égal à

$\dfrac{t'_d - T'D_B}{T'U_B}$ où t'_d est la $d^{\text{ième}}$ composante de T'.

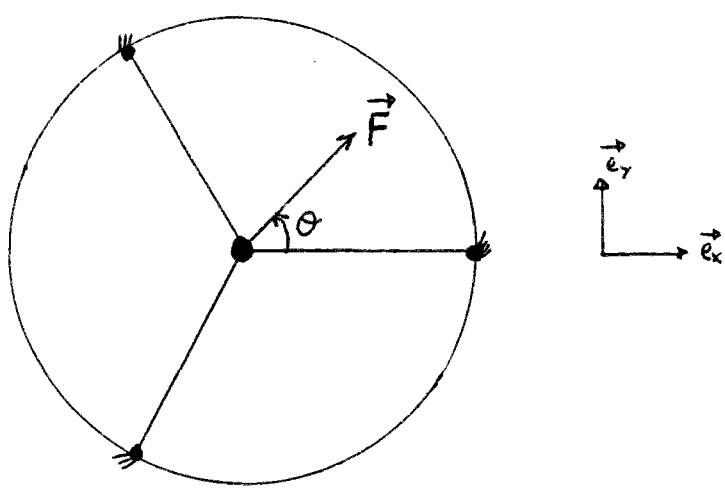
Comme on le voit, à chaque étape de la simulation on utilise les bases calculées dans les étapes précédentes - moyennant une réactualisation très facile - pour choisir la meilleure base de départ, cette réactualisation s'interprète comme une homothétie sur les mécanismes élémentaires calculés à l'étape précédente de façon à rendre la puissance dissipée de F dans ces mécanismes égale à 1.

6. Exemple.

On a établi à l'aide de la formulation duale que la recherche de $\bar{\alpha}$ peut se faire en minimisant λ sur les mécanismes de base qui sont en nombre fini. On a montré aussi que ces mécanismes ne dépendent pas des résistances et ne dépendent du chargement que par un coefficient multiplicatif. En réalité, c'est la géométrie de la structure qui les détermine. L'algorithme du simplexe calcule un certain nombre de ces mécanismes ; lors d'un calcul répété avec des chargements et des résistances différents, il faut éviter de recalculer inutilement des mécanismes de base en stockant les mécanismes déjà calculés dans la limite de la place mémoire disponible.

L'exemple suivant a pour objet d'illustrer cette démarche sans avoir recours à l'algorithme du simplexe pour le calcul des mécanismes de base qui se fait analytiquement. Il sera aussi l'occasion d'aborder l'homogénéisation en calcul de la rupture probabiliste.

On schématise la rupture d'une roue en considérant la structure ci-dessous :



Les noeuds périphériques sont fixes. Une force $\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y$ s'exerce sur le noeud central. La roue possède n rayons régulièrement espacés : le $k^{ième}$ rayon fait un angle de $\frac{2\pi}{n} k$ avec $\vec{e}_x$; sa résistance en traction et en compression vaut r_k. On se donne le vecteur résistance $R = (r_1,\ldots,r_n)$ et on cherche $\bar{\alpha}$.

L'équilibre du noeud central se traduit par les équations :

$$\sum_{k=1}^{n} N_k \cos \frac{2\pi}{n} k + \alpha F_x = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} N_k \sin \frac{2\pi}{n} k + \alpha F_y = 0$$

Le degré d'hyperstaticité de la structure est n - 2.

En choisissant les inconnues hyperstatiques $N_1, N_2,\ldots,N_{n-2}$, la matrice A est obtenue en transformant les équations précédentes :

$$N_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-2} \left[\frac{-\sin k\, 2\pi/n}{\sin (n-1)2\pi/n}\right] N_k + \left[\frac{-F_y}{\sin (n-1)2\pi/n}\right] \alpha$$

$$N_n = \sum_{k=1}^{n-2} \left[\cot g \frac{2\pi}{n}(n-1) \sin \frac{2\pi}{n} k - \cos \frac{2\pi}{n} k\right] N_k + \left[\cot g \frac{2\pi}{n}(n-1) F_y - F_x\right] \alpha$$

d'où :

$$t_A = \left[\begin{array}{c|c|c} & \dfrac{-\sin 2\pi/n}{\sin (n-1)2\pi/n} & \cot g \dfrac{2\pi}{n}(n-1) \sin \dfrac{2\pi}{n} - \cos \dfrac{2\pi}{n} \\ & \dfrac{-\sin 2\,2\pi/n}{\sin (n-1)2\pi/n} & \cot g \dfrac{2\pi}{n}(n-1) \sin \dfrac{2\pi}{n} 2 - \cos \dfrac{2\pi}{n} 2 \\ Id_{n-2} & \vdots & \vdots \\ & \vdots & \vdots \\ & \vdots & \vdots \\ & \vdots & \vdots \\ & \vdots & \vdots \\ & \vdots & \vdots \\ \hline 0\ldots\ldots\ldots\ldots 0 & \dfrac{-F_y}{\sin (n-1)2\pi/n} & \cot g \dfrac{2\pi}{n}(n-1) F_y - F_x \end{array}\right]$$

${}^tA$ est de dimension (n-1) × n. Il y a au plus n bases de ${}^tA$: $B_1,\ldots,B_n$

B_k est la base constituée de toutes les colonnes de ${}^tA$ sauf la $k^{ième}$ colonne.

On note $U_{B_k} = (u_1^{(k)},\ldots,u_n^{(k)})$ la solution de base correspondante à B_k. Calculons $U_{B_{n-1}}$; il faut résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \forall\ j = 1,\ldots,\ n-2 \quad u_j^{(n-1)} + \left[\cotg \dfrac{2\pi}{n}\,(n-1)\,\sin\dfrac{2\pi}{n}\,j - \cos\dfrac{2\pi}{n}\,j\right]u_n^{(n-1)} = 0 \\ \left[\cotg \dfrac{2\pi}{n}\,(n-1)\,F_y - F_x\right] \qquad\qquad u_n^{(n-1)} = 1 \end{cases}$$

d'où, on a :

$$\forall\ j = 1,\ldots,n \qquad u_j^{(n-1)} = \frac{\sin((n-1) - j)2\pi/n}{F\,\sin(\vartheta - (n-1)2\pi/n)}$$

où F est le module de $\vec{F}$ et ϑ l'angle $(\vec{e_x},\vec{F})$.
Une condition pour que B_{n-1} soit une base est $F\,\sin(\vartheta - (n-1)2\pi/n) \neq 0$.

Pour l'instant on a appliqué l'algorithme présenté plus haut pour l'obtention d'une base de départ pour le simplexe, mais la symétrie du problème implique que les autres U_{B_k} sont de la forme :

$$\forall\ j = 1,\ldots,n$$
$$\forall\ k = 1,\ldots,n \qquad u_j^{(k)} = \frac{\sin(k-j)\ 2\pi/n}{F\,\sin(\vartheta - k\ 2\pi/n)}$$

(ssi $F\,\sin(\vartheta - k\ 2\pi/n) \neq 0$)
On déduit alors :

$$\bar{\alpha} = \min_{k=1,\ldots,n} \lambda(U_{B_k}) = \min_{k=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\sin(k-j)\ 2\pi/n}{F\,\sin(\vartheta - k\ 2\pi/n)}\right| r_j$$

Pour l'instant on n'a pas encore aborder l'aspect aléatoire de la structure. On fait l'hypothèse que les résistances r_j sont des variables aléatoires indépendantes de la forme $r_j(\omega) = (0{,}5 + x_j(\omega))\bar{r}$ où les $x_j(\omega)$ sont des variables aléatoires indépendantes uniformément réparties sur [0,1]. On a alors $\mathbb{E}(r_j) = \bar{r}$. On définit la variable aléatoire $J_{n,\vartheta}(\omega)$ par la relation :

$$J_{n,\vartheta}(\omega) = \min_{k=1,\ldots,n} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\sin(k-j)\ 2\pi/n}{F \sin(\vartheta - k\ 2\pi/n)} \right| (0,5 + x_j(\omega))$$

une condition nécessaire et suffisante pour que le chargement $\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y = F(\cos\vartheta \vec{e}_x + \sin\vartheta \vec{e}_x)$ soit potentiellement stable est : $c = \frac{F}{n\ \bar{r}} \leq J_{n,\vartheta}(\omega)$.

On va maintenant effectuer deux types de simulation :

a) pour ϑ fixé, estimer par simulation la probabilité de stabilité de la structure $P_s(c)$. On remarque que $P_s(c) = 1 - g(c)$ où g est la fonction de répartition de $J_{n,\vartheta}$. Ainsi on calcule $P_s(c)$ en appliquant l'algorithme de la fonction de répartition $J_{n,\vartheta}$ (voir le chapitre 1). Pour éviter de recalculer des mécanismes lors de cette simulation, on commence par calculer les coefficients $a_{kj} = \frac{1}{n} \left| \frac{\sin((k-j)\ 2\pi/n)}{\sin(\vartheta - k\ 2\pi/n)} \right|$

Il y a $\frac{n^2-n}{2}$ termes non nuls à stocker. Puis pour chaque échantillon $(x_1(\omega),\ldots,x_n(\omega))$ on calcule $J_{n,\vartheta}(\omega) = \min_k \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\ (0,5 + x_j(\omega))$

L'économie faite est de $(\frac{n^2-n}{2})$ (nombre d'échantillons - 1) termes a_{kj} à calculer en moins.

On a réalisé cette simulation avec un nombre d'échantillons égal à 200 pour $\vartheta = 0$ quand le nombre de rayons est n = 5 (figure 1), et quand le nombre de rayons est n = 100 (figure 2). D'après le chapitre 1, l'erreur commise sur le calcul de $P_s(c)$ à l'aide de la fonction de répartition empirique simulée avec 200 échantillons est uniforme en c et est de l'ordre de $(\text{LogLog}200)^{1/2}(2\times200)^{-1/2} \simeq 0.06$.

On remarque que quand n augmente $P_s(c)$ tend vers 1 pour $c \leq 2/\pi$ et vers 0 pour $c > 2/\pi$. On reviendra ultérieurement sur ce résultat.

b) Pour un vecteur résistance $R = (r_1,\ldots,r_n)$ donné, on définit l'ensemble K des chargements potentiellement supportables par :

$$K = \{(F_x,F_y) \in \mathbb{R}^2 \ /\ \bar{\alpha} \geq 1\}$$

On sait alors que K est convexe, (voir [7]). Maintenant si $R(\omega)$ est

aléatoire, $K(\omega)$ est un convexe aléatoire. On se propose de calculer par simulation une réalisation de K.

On génère d'abord un $(x_1(\omega),\ldots,x_n(\omega))$ puis on calcule les n sommes $b_k = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} |\sin(k-j)2\pi/n|(0,5 + x_j(\omega))$. On discrétise l'intervalle $[0,2\pi[$ en m directions $(\vartheta_i)_{i=1,\ldots,m}$. On calcule la distance à l'origine du point extrême du convexe $\frac{1}{n\,\bar{r}} K(\omega)$ dans la direction ϑ_i en minimisant $\frac{b_k}{|\sin(\vartheta_i - 2k\,\pi/n)|}$ pour k allant de 1 à n. L'économie faite est de $n\times(m-1)$ termes b_k à calculer en moins.

On a réalisé cette simulation avec une discrétisation de $[0,2\pi[$ en 200 directions quand le nombre de rayons est n = 5 (figure 3) et quand le nombre de rayons est n = 100 (figure 4). Dans chacun de ces deux cas l'enveloppe convexe des points extrêmes contient $K(\omega)$. On remarque que quand n augmente le convexe $\frac{1}{n\,\bar{r}} K(\omega)$ tend vers un disque de rayon $\frac{2}{\pi}$. On s'est alors placé dans le plan $\left[\frac{F_x}{n\,\bar{r}}, \frac{F_y}{n\,\bar{r}}\right]$ et on a représenté le cercle de rayon $\frac{2}{\pi}$ sur les figures 3 et 4.

On va maintenant s'intéresser au comportement de la structure quand le nombre de rayons tend vers l'infini. Le problème est en quelque sorte l'homogénéisation de la structure considérée vis à vis du calcul à la rupture. En effet, on démontre que si les rayons de la roue ont des résistances aléatoires indépendantes, le convexe des chargements potentiellement supportables devient quand le nombre de rayons n tend vers l'infini un disque de rayon $\frac{2}{\pi}\, n\, \bar{r}$ où $\bar{r}$ est la moyenne des limites de résistance des rayons. On a donc un comportement limite déterministe alors que la structure est aléatoire.

Soit $r_1(\omega), r_2(\omega), \ldots, r_j(\omega), \ldots$ une suite infinie de variables aléatoires positives indépendantes identiquement distribuées. On définit la variable aléatoire paramétrée par n et ϑ :

$$J_{n,\vartheta}(\omega) = \frac{1}{n} \min_{k=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\sin(k-j)\ 2\pi/n}{F \sin(\vartheta - 2\pi k/n)} \right| r_j(\omega)$$

Alors si $\mathbb{E}(r_1) < +\infty$, on a presque sûrement

$$(20) \qquad \lim_{n\to+\infty} J_{n,\vartheta} = \frac{2}{\pi} \mathbb{E}(r_1) \text{ uniformément en } \vartheta.$$

Pour démontrer ce résultat on a besoin du lemme suivant :

Soit $X_1(\omega),\ldots,X_j(\omega),\ldots$ une suite infinie de variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées. Soit f une fonction réelle définie sur l'intervalle [a,b]. Alors si f est Riemann-intégrable et si $X_j \in L^p$ $p \geq 1$, on a presque sûrement et dans L^p

$$(21) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(a + j \frac{b-a}{n}) X_j = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx\ \mathbb{E}(X_1)$$

Démonstration :

On se ramène au cas a = 0, b = 1 par un changement de variable et au cas $X_j \geq 0$ en séparant X_j en une partie positive $\frac{|X_j|+X_j}{2}$ et une partie négative $\frac{|X_j|-X_j}{2}$.

Soit $s_o = 0$, $s_1 = 1/d,\ldots,$ $s_d = d/d = 1$ une subdivision de [0,1]. On note M_i et m_i les bornes supérieure et inférieure de f sur $[s_{i-1},s_i]$. Ces bornes existent puisque f est Riemann-intégrable donc bornée. On a :

$$(22) \qquad \forall\ j \in I_{i,d,n} \quad m_i \leq f(\frac{j}{n}) \leq M_i$$

$$\text{avec} \quad I_{i,d,n} = \left](i-1)\frac{n}{d}\ ,\ i\frac{n}{d}\right]$$

l'intervalle $I_{i,d,n}$ contient $N_{i,d,n}$ entiers avec $n/d - 1 \leq N_{i,d,n} \leq n/d$. En vertu de (22) on a :

$$\sum_{i=1}^{d} \frac{m_i}{d} \mathbb{E}(X_1) + \sum_{i=1}^{d} m_i \left[\frac{N_{i,d,n}}{n} - \frac{1}{d}\right] \mathbb{E}(X_1) + \sum_{i=1}^{d} \frac{m_i}{n} \sum_{j\in I_{i,d,n}} (X_j - \mathbb{E}(X_1))$$

$$(23) \qquad \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(\frac{j}{n}) X_j \leq$$

$$\sum_{i=1}^{d} \frac{M_i}{d} E(X_1) + \sum_{i=1}^{d} M_i \left[\frac{N_{i,d,n}}{n} - \frac{1}{d} \right] E(X_1) + \sum_{i=1}^{d} \frac{M_i}{n} \sum_{j \in I_{i,d,n}} (X_j - E(X_1))$$

De même, puisque f est Riemann-intégrable on a :

$$(24) \qquad \sum_{i=1}^{d} \frac{m_i}{d} = \sum_{i=1}^{d} m_i (s_i - s_{i-1}) \leq \int_0^1 f(x)dx \leq \sum_{i=1}^{d} M_i (s_i - s_{i-1}) = \sum_{i=1}^{d} \frac{M_i}{d}$$

$$\text{avec} \quad \lim_{d \to +\infty} \sum_{i=1}^{d} \frac{M_i - m_i}{d} = 0$$

En combinant (23) et (24) et en notant M la borne supérieure de $|f|$ on a :

$$(25) \qquad \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(\frac{j}{n}) X_j - \int_0^1 f(x)dx \, E(X_1) \right| \leq$$

$$E(X_1) \sum_{i=1}^{d} \frac{M_i - m_i}{d} + E(X_1) \, M \sum_{i=1}^{d} \left| \frac{N_{i,d,n}}{n} - \frac{1}{d} \right| + M \sum_{i=1}^{d} \frac{1}{n} \left| \sum_{j \in I_{i,d,n}} (X_j - E(X_1)) \right|$$

Pour d fixé suffisamment grand pour que le premier terme du membre de droite de (25) soit très petit, le deuxième terme tend vers 0 avec n ainsi que le troisième terme qui tend vers 0 au sens L^p et presque sûr. En effet, en notant l_1 et l_2 le premier et le dernier entier de $I_{i,d,n}$, on a pour $1 < i \leq d$:

$$\frac{1}{n} \left| \sum_{j \in I_{i,d,n}} (X_j - E(X_1)) \right| = \frac{1}{n} \left| l_2 \, S_{l_2} - (l_1 - 1) \, S_{l_1 - 1} \right| \leq |S_{l_1}| + |S_{l_1 - 1}|$$

$$\text{avec} \quad S_k = \frac{X_1 + \ldots + X_h}{h} - E(X_1)$$

La loi des grands nombres assure la convergence vers 0. On a le même résultat pour $i = 1$.

C.Q.F.D.

On va maintenant utiliser la démonstration du lemme pour établir (20). On reprend (25) avec $f_k(x) = |\sin(2\pi x - k/n \, 2\pi)|$ dont l'intégrale sur $[0,1]$ vaut $2/\pi$ et la borne supérieure $M = 1$. De même, $M_i - m_i \leq 2\pi/d$

par les accroissements finis. (25) devient (25') avec k = 1,...,n :

$$(25') \qquad \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} |\sin(j-k)2\pi/n| r_j(\omega) - \frac{2}{\pi} \mathbb{E}(r_1) \right| \leq \delta$$

$$\text{avec} \qquad \delta = \mathbb{E}(r_1) \frac{2\pi}{d} + \mathbb{E}(r_1) \sum_{i=1}^{d} \left| \frac{N_{i,d,n}}{n} - \frac{1}{d} \right| + \sum_{i=1}^{d} \frac{1}{n} \left| \sum_{j \in I_{i,d,n}} (r_j(\omega) - \mathbb{E}(r_1)) \right|$$

On note $\bar{k}$ l'entier qui réalise le minimum par lequel on définit $J_{n,\theta}$. On va établir que :

$$(26) \qquad 1 \geq |\sin(\theta - 2\pi \bar{k}/n)| \geq \cos \frac{2\pi}{n} - \delta \frac{\pi}{\mathbb{E}(r_1)}$$

On suppose $\mathbb{E}(r_1) \neq 0$ (sinon $r_j = 0$ sans intérêt).

En effet, soit p l'entier qui réalise le maximum de $|\sin(\theta-2\pi\, k/n)|$ quand k parcourt les entiers de 1 à n. Ce maximum est supérieur à $\cos 2\pi/n$.

On a

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\sin(j-p)2\pi/n}{\sin(\theta-2\pi\, p/n)} \right| r_j \geq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\sin(j-\bar{k})\, 2\pi/n}{\sin(\theta-2\pi\, \bar{k}/n)} \right| r_j$$

par définition de $\bar{k}$.

En utilisant (25') on a avec ce qui précède :

$$\left[\frac{2}{\pi} \mathbb{E}(r_1) + \delta \right] |\sin(\theta - 2\pi\, \bar{k}/n)| \geq \left[\frac{2}{\pi} \mathbb{E}(r_1) - \delta \right] (\sin(\theta - 2\pi\, p/n)|$$

$$\geq \left[\frac{2}{\pi} \mathbb{E}(r_1) - \delta \right] \cos \frac{2\pi}{n}$$

d'où

$$\frac{2}{\pi} \mathbb{E}(r_1) |\sin(\theta - 2\pi\, \bar{k}/n)| \geq \left[\frac{2}{\pi} \mathbb{E}(r_1) - \delta \right] \cos \frac{2\pi}{n} - \delta$$

$$|\sin(\theta - 2\pi\, \bar{k}/n)| \geq \cos \frac{2\pi}{n} - \frac{\pi}{\mathbb{E}(r_1)} \delta$$

Ainsi, comme δ converge presque sûrement vers 0, $J_{n,\theta}$ converge presque sûrement vers $2/\pi\, \mathbb{E}(r_1)$ uniformément en θ.

Remarques :

* Si on suppose $r_j(\omega)$ bornée ($\in L^\infty$) ce qui est physiquement néces-

saire, alors la convergence de $J_{n,\theta}$ vers $2/\pi\ \mathbb{E}(r_1)$ se fait dans L^p $1 \leq p < \infty$ par le théorème de la convergence dominée.

* La démonstration du lemme ne fait pas intervenir explicitement le fait que les X_j sont indépendantes ; il suffit de supposer le processus $(X_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ergodique (voir le chapitre 3).

* On pourrait évaluer la vitesse de convergence de $J_{n,\theta}$ vers $2/\pi\ \mathbb{E}(r_1)$ en estimant la vitesse de convergence de δ, à l'aide de la loi forte des grandes nombres et du logarithme itéré.

On peut dire en conclusion de ce chapitre et à la lumière de l'exemple traité plus haut que l'approche duale permet une économie de calcul lors d'une simulation. Elle est aussi l'approche naturelle pour traiter les problèmes d'homogénéisation.

ANNEXE

Soit M une matrice rectangulaire de type (e,b) et de rang e ≤ b. On désire partitionner M en une matrice L de type (e,e) formée de e colonnes indépendantes constituant une base de $\mathbb{R}^e$ et une matrice H de type (e,b-e) formée des autres colonnes de M. L'algorithme présenté ci-dessous permet cette partition et calcule les matrices L^{-1} (expression de la base canonique de $\mathbb{R}^e$ dans la nouvelle base) et $L^{-1}H$ (expression des colonnes de M hors base dans la nouvelle base).

On note $(\vec{w}_1,\ldots,\vec{w}_n)$ les vecteurs colonnes de M et $(\vec{w}_{b+1},\ldots,\vec{w}_{b+e})$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^e$. On a alors :

$$(1) \qquad \forall\ k = 1,\ldots,b \qquad \vec{w}_k = \sum_{i=1}^{e} M(i,k)\ \vec{w}_{b+i}$$

On peut formuler le problème en ces termes : trouver une base de $\mathbb{R}^e$ à partir des b premiers éléments de la famille $\langle\vec{w}_1,\ldots,\vec{w}_{b+e}\rangle$ et exprimer les coordonnées des autres vecteurs de la famille dans cette base.

Autrement dit, il faut passer de la partition initiale $P_o = (\langle 1,\ldots,b\rangle\ ,\ \langle b+1,\ldots,b+e\rangle)$ en e vecteurs de base $\langle\vec{w}_{b+1},\ldots,\vec{w}_{b+e}\rangle$ et b vecteurs hors base $\langle\vec{w}_1,\ldots,\vec{w}_b\rangle$ à une partition $P = (\langle 1hb(1),\ldots,1hb(b)\rangle\ ,\ \langle 1b(1),\ldots,1b(e)\rangle)$ en e vecteurs de base $\langle\vec{w}_{1b(1)},\ldots\vec{w}_{1b(e)}\rangle$ et b vecteurs hors base $\langle\vec{w}_{1hb(1)},\ldots,\vec{w}_{1hb(b)}\rangle$ vérifiant :

$$(2) \qquad \forall\ i = 1,\ldots,e \qquad 1b(i) \leq b$$

On note M_p la matrice exprimant les vecteurs hors base en fonction des vecteurs de base de la partition P. Plus précisément M_p est défini par :

$$(3) \qquad \forall\ k = 1,\ldots,b \qquad \vec{w}_{1hb(k)} = \sum_{i=1}^{e} M_p(i,k)\ \vec{w}_{1b(e)}$$

Pour la partition initiale P_o on a : $M_{P_o} = M$.

L'idée de l'algorithme est d'effectuer des changements de base qui ne différent que d'un vecteur. Il est aisé de voir qu'une condition nécessaire et suffisante pour passer de la partition :

$$P = (\langle 1hb(1),\ldots,1hb(n),\ldots,1hb(b)\rangle\ ,\ \langle 1b(1),\ldots,1b(j),\ldots,1b(e)\rangle)$$

à la partition P' obtenue à partir de P en échangeant les indices 1hb(n) et 1b(j) :

$P' = (\{lhb(1),\ldots,lb(j),\ldots,lhb(b)\}\ ,\ \{lb(1),\ldots,lhb(n),\ldots,lb(e)\})$ est $M_p(j,n) \neq 0$ et que dans ce cas on déduit $M_{p'}$ de M_p par les formules :

$$(4)\quad \begin{cases} M_{p'}(j,n) = \dfrac{1}{M_p(j,n)} \\ \forall\, i \neq j \quad M_{p'}(i,n) = -\dfrac{M_p(i,n)}{M_p(j,n)} \\ \forall\, k \neq j \quad M_{p'}(j,k) = \dfrac{M_p(j,k)}{M_p(j,n)} \\ \forall\, i \neq j,\ \forall\, k \neq n \quad M_{p'}(i,k) = M_p(i,k) - \dfrac{M_p(i,n)\, M_p(j,k)}{M_p(j,n)} \end{cases}$$

A la $n^{ième}$ étape de l'algorithme, on examine le vecteur $\vec{w}_n$ de la façon suivante :

- si $\{j/lb(j) > b\} = \emptyset$ c'est que la base recherchée est trouvée et l'algorithme s'arrête,
- sinon, si $\{j/lb(j) > b$ et $M_{P_{n-1}}(j,n) \neq 0\} = \emptyset$, ce qui veut dire que $\vec{w}_n$ est combinaison linéaire de $\vec{w}_1,\ldots,\vec{w}_{n-1}$ et ne saurait faire partie de la base recherchée ; on passe à l'étape n + 1 de l'algorithme.

  sinon, on choisit un j tel que $lb(j) > b$ et $M_{P_{n-1}}(j,n) \neq 0$ afin d'échanger le vecteur de base $\vec{w}_{lb(j)} = \vec{w}_{b+j}$ et le vecteur hors base $\vec{w}_{lhb(n)} = \vec{w}_n$. Ainsi la nouvelle partition P_n vérifie $lhb(n) = b+j$ et $lb(j) = n$ (d'où $lhb(lb(j)) = b + j$). On réactualise alors M_{P_n} comme décrit dans les formules (4) et on passe à l'étape n+1.

L'algorithme s'arrête en au plus b étapes puisque la matrice M est supposée de rang e. La partition finale vérifie :

$\forall\, i = 1,\ldots,e \qquad lb(i) \leq b$

$\forall\, k \in \{1,\ldots,b\} - \{lb(1),\ldots,lb(e)\} \qquad lhb(k) = k$

$\forall\, k \in \{1,\ldots,e\} \qquad lhb(lb(k)) = b + k$

d'où en appliquant la définition (3)

$$\forall\, k \in \langle 1,\ldots,b\rangle - \langle lb(1),\ldots,lb(e)\rangle \qquad \vec{w}_k = \sum_{i=1}^{e} M_p(i,K)\ \vec{w}_{lb(e)}$$

$$\forall\, k \in \langle 1,\ldots,e\rangle \qquad \vec{w}_{b+k} = \sum_{i=1}^{e} M_p(i,lb(k))\ \vec{w}_{lb(e)}$$

d'où

$$L^{-1}H = [M_p(i,k) \quad i = 1,\ldots,e \quad k \in \langle 1,\ldots,b\rangle - \langle lb(1),\ldots,lb(e)\rangle]$$

$$L^{-1} = [M_p(i,lb(k)) \quad i = 1,\ldots,e \quad k = 1,\ldots,e]$$

Références :

[1] Krée et Met : Probabilité de ruine des structures élastiques, Construction Métallique, n° 4, p. 49-60, 1973.

[2] Augusti et Barrata : Theory of probability and limit analysis of structures under multiparameter loading, Foundations of Plasticity, Warsaw, august 30, sept. 2, Ed. A. Sawczuk, p. 347-364, 1972.

[3] Frangopol et Nguyen Dang Hung : Calcul plastique probabiliste des structures en cier formées de barres, Construction Métallique, n° 1, p. 19-43, 1977.

[4] Gavarini : Aspect probabiliste de la rupture, "Evolution et théories modernes en élasticité et plasticité", Saint-Rémy-les-Chevreuses, 12-15 déc., CISCO, p. 131-157, 1977.

[5] Parimi et Cohn : Optimal solutions in probabilistic structural design, J. Mécanique Appliquée, Vol. 2, n° 1, p. 47-92, 1978.

[6] A. Carmasol et J. Salençon : Une approche probabiliste du dimensionnement des structures par le calcul à la rupture, journal de mécanique théorique et appliquée, vol 4, n° 3, p. 305-321, 1985.

[7] J. Salençon : Calcul à la rupture et analyse limite - Presses de l'E.N.P.C, Paris, 1983.

[8] Hillier and Liberman : Introduction to Operations Research (third edition) - Holden Day, 1980.

[9] Gavarini : L'analyse limite des structures au moyen de la programmation mathématique. Séminaire "Plasticité et Viscoplasticité", Ecole Polytechnique, Ediscience, Paris, p. 231-250, 1972.

[10] M.Croc, G.Michel et J.Salençon : Int. J.Solids Structures, vol. 7, p.1317-1332, Pergamon Press, 1971

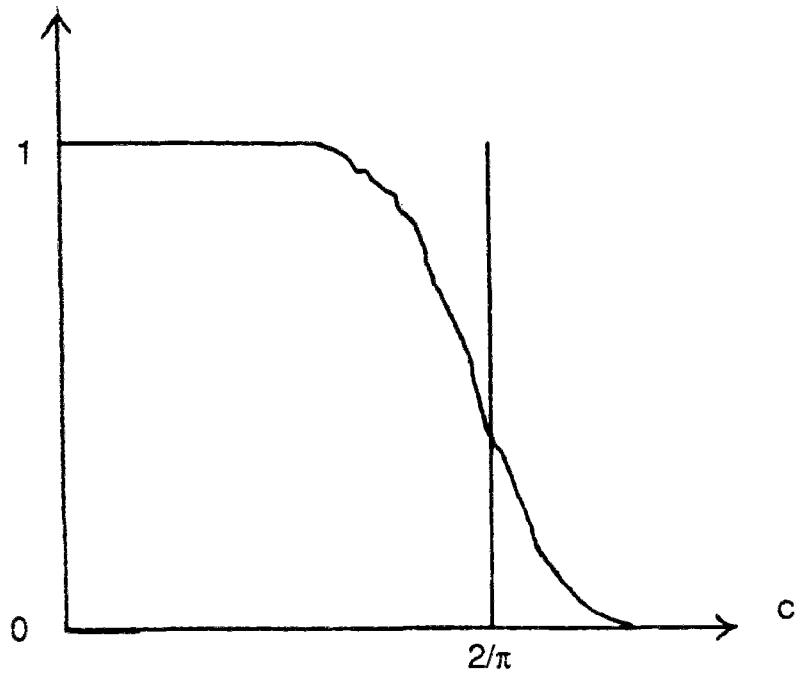


Figure 1: Calcul de $P_s(c)$ avec 200 échantillons pour une roue à 5 rayons

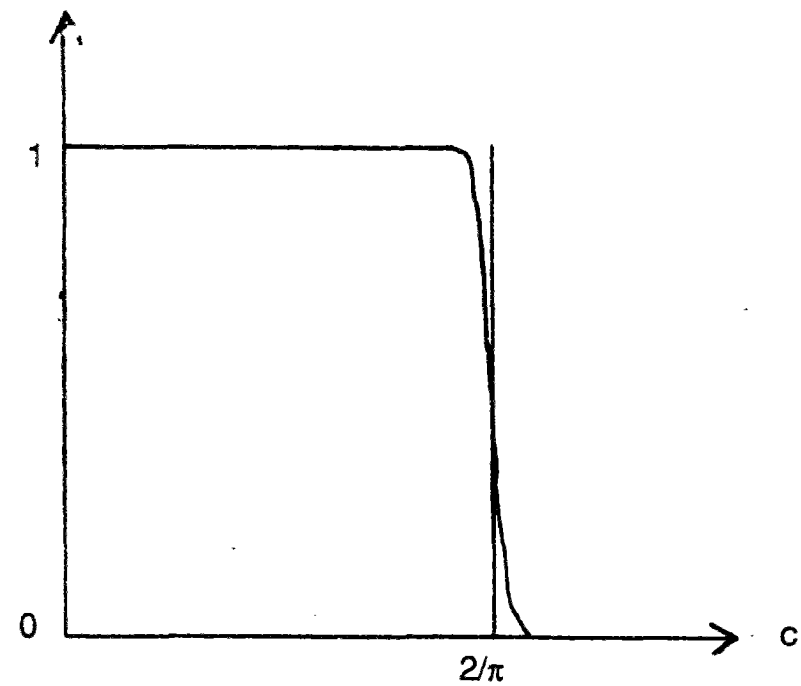


Figure 2: Calcul de $P_s(c)$ avec 200 échantillons pour une roue à 100 rayons

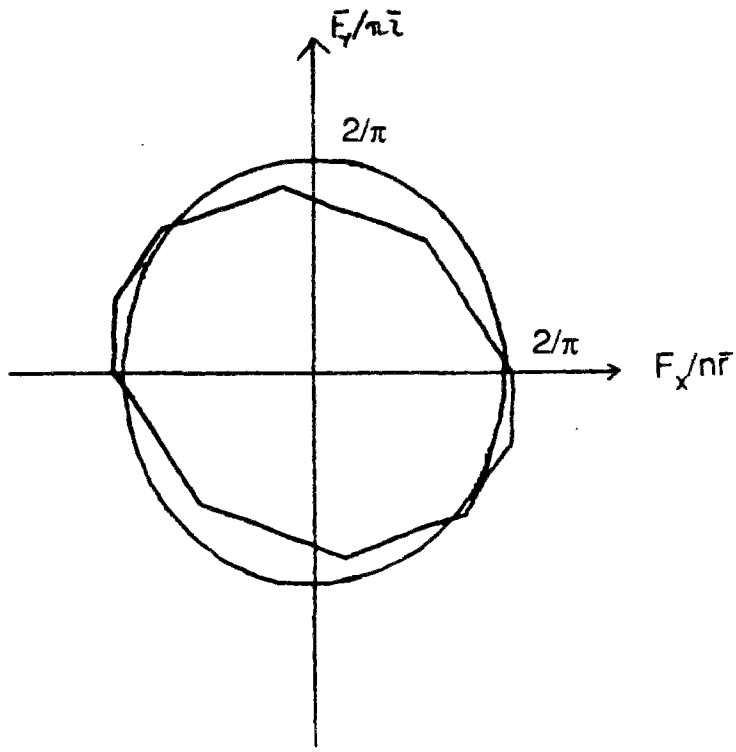


Figure 3: Simulation de **K**(ω) pour une roue à 5 rayons.

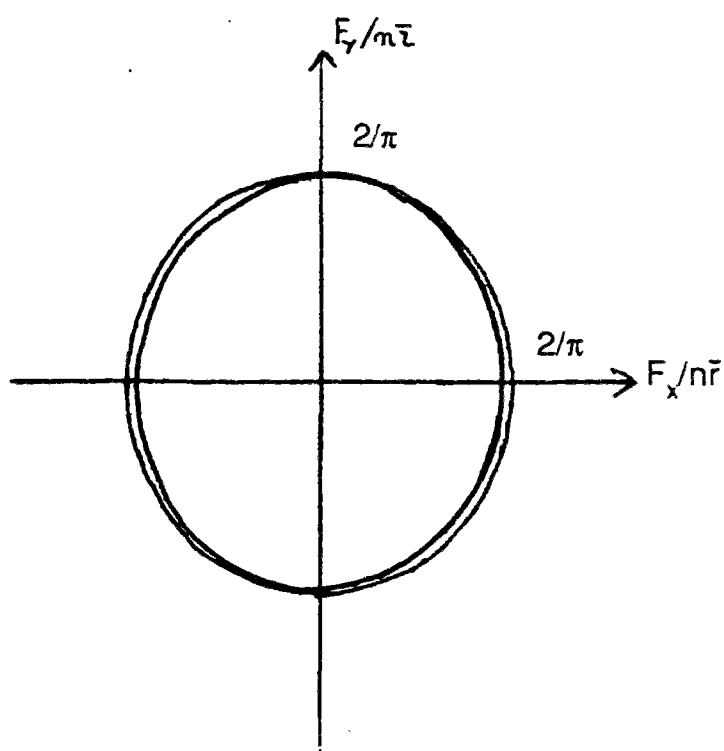


Figure 4: Simulation de **K**(ω) pour une roue à 100 rayons.

CONCLUSION

Nous souhaitons à la fin de ce document faire quelques remarques générales portant sur l'ensemble de l'étude. Nous avons signalé dans l'introduction les thèmes qui dominent la thèse: la simulation en mécanique aléatoire et le passage micro-macro quand la microstructure est aléatoire.

En ce qui concerne la simulation, à cause de son coût en temps machine et en place mémoire, il faut toujours se poser la question de sa pertinence; l'étude sur la fatigue montre qu'une approche analytique est possible dans certains cas. Dans les autres cas, nous pouvons tenter de diminuer son coût en pensant l'algorithme de simulation de façon globale et en fonction du problème mécanique particulier traité: l'étude sur le calcul à la rupture montre que la simple répétition d'un algorithme déterministe ne constitue pas toujours un algorithme optimal. Par ailleurs, l'utilisation des suites à discrépance faible à la place des suites pseudo-aléatoires afin d'accélérer les algorithmes stochastiques est une direction de recherche à poursuivre. La principale difficulté liée à ces suites est la nécessité d'établir chaque algorithme stochastique dans un cadre déterministe comme nous l'avons fait pour l'algorithme de Robbins-Monro. Cettte difficulté apparaît dans la simulation des coefficients élastiques macroscopiques du chapitre 3 à l'aide des suites de Van Der Corput. Même si les résultats numériques sont très proches de ceux obtenus à l'aide des suites pseudo-aléatoires, nous ne pouvons, en l'absence d'une démonstration, que déconseiller l'usage des suites de Van Der Corput dans ce cas.

En ce qui concerne le passage micro-macro quand la microstructure est aléatoire, l'examen des chapitres 2 et 3 nous permet de dégager deux étapes nécessaires à l'obtention d'un comportement macroscopique en fonction du comportement microscopique.

Avant d'introduire l'aléa, il faut tout d'abord définir la grandeur macroscopique qui nous intéresse en fonction de l'hétérogénéité de la microstructure: ainsi, nous définissons dans le cas de l'élasticité la rigidité globale d'un domaine hétérogène à l'aide de l'approche en déformation. De même dans le cas de la fatigue la grandeur microscopique est le niveau d'écrouissage dans un grain faible après stabilisation des déformations plastiques, la grandeur macroscopique étant le niveau maximum obtenu quand on parcourt tous

les grains.
Cette étape est une modélisation basée sur des considérations mécaniques et physiques.
Ensuite, il faut modéliser l'aléa de la microstructure: l'élasticité de la microstructure est modélisée par un processus aléatoire stationnaire et fortement mélangeant; dans le cas de la fatigue nous avons adopté une modélisation isotrope de l'aléa.
Enfin, la conjugaison de ces deux étapes et de la théorie des Probabilités nous a permis d'effectuer le passage micro-macro en élasticité et en fatigue. Ces deux passages reposent en fait sur des théorèmes de convergence différents. En effet, le tenseur de rigidité macroscopique est défini comme la limite de l'espérance du tenseur de rigidité globale d'un cube dont la taille tend vers l'infini; Nous sommes en présence d'une convergence analogue à la loi des grands nombres. Alors que dans le chapitre 4, le critère de fatigue est établi en examinant le grain le plus faible. La convergence dans ce cas est une recherche de maximum. Plus précisèment, soit $X_1, ..., X_n, ...$ une suite de variables aléatoires réelles bornées indépendantes équidistribuées dont la loi de probabilité a pour support l'intervalle [a,b], alors la moyenne arithmétique des $X_1, ..., X_n$ converge, quand n tend vers l'infini, au sens L^p et presque sûr vers $E(X_1)$ et leur maximum converge au sens L^p vers b. Ce sont ces deux types de convergence qui sont mis en évidence dans les chapitres 3 et 4. Il serait intéressant de placer l'homogénéisation en calcul à la rupture par rapport à ces deux types.

Nous espérons que cette thèse sera surtout ressentie comme un argument en faveur d'une formulation probabiliste précise des problèmes de simulation et de passage micro-macro, et qu'elle servira de point de départ à l'étude d'autres comportements mécaniques, comme par exemple, l'homogénéisation en calcul à la rupture probabiliste.