Thèse de Doctorat
de
l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées

Spécialité : **Structures et matériaux**

Auteur : **Mohammed Bénali BENMANSOUR**

Laboratoire d'accueil : **Service Ingénierie et Modélisation du C.E.B.T.P.**

Sujet : **Modélisation du comportement cyclique alterné du béton armé. Application à divers essais statiques de poteaux .**

Soutenue le 06 Janvier 1997 devant le jury composé de :

Messieurs :	D. E. KERDAL	Président
	R. J. GIBERT	Rapporteur
	G. PIJAUDIER-CABOT	Rapporteur
	B. HALPHEN	Directeur de thèse
	B. FOURÉ	Examinateur
	J. GUAL	Examinateur
	P. VÉZOLE	Examinateur
	D. VIÉ	Examinateur

E.N.P.C.
INV05961

NS 22193(4)

X

A la mémoire de mon oncle Hocine .
A la mémoire de mon cousin Sid-Ahmed .

A mes parents pour avoir semé en moi le germe de la foi
et en témoignage de leur affection.

A mon épouse pour sa patience et ses encouragements
tout au long de ce travail .

A mes enfants Mohammed , Ilyès et Nadir
avec toute l'affection que je leur dois .

A mes frères , à mes soeurs et à leurs enfants
en témoignage de mon affection .

A toute ma belle famille pour ses encouragements
durant toutes ces années .

REMERCIEMENTS

Je tiens à présenter mes respectueux remerciements à Monsieur Bernard HALPHEN, Professeur à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées , pour l'intérêt bienveillant qu'il a bien voulu porter à ce travail .

J'exprime ma profonde gratitude et ma reconnaissance à Monsieur Bernard FOURÉ , Chef du Service Ingénierie et Modélisation du C.E.B.T.P. , qui m'a fait l'honneur de me confier cette Recherche et permis de la réaliser dans les meilleures conditions .

Je tiens à remercier vivement Monsieur Djamal KERDAL , Professeur à l'Institut de Génie Civil de l'Université des Sciences et de la Technologie d'Oran , pour ses encouragements tout au long de ce travail .

J'exprime ma reconnaissance à Monsieur Nilson MENEZES , ancien Ingénieur au Service Ingénierie et Modélisation , dont l'expérience en programmation informatique m'a aidé à franchir de nombreux obstacles .

Ma reconnaissance va à Monsieur Alain GRELAT , Ingénieur au C.E.B.T.P. , pour ses précieux conseils tout au début de ce travail .

De nouveaux développements sont envisagés par Monsieur Dominique VIÉ , Directeur Technique du C.E.B.T.P. , qu'il trouve ici ma profonde reconnaissance pour ses critiques constructives à la fin de ce travail .

Qu'il me soit permis de remercier très chaleureusement Messieurs René-Jean GIBERT , Directeur au C.E.A. de Saclay , et Gilles PIJAUDIER-CABOT ,Professeur au Laboratoire de Mécanique et Technologie de l'E.N.S. (Cachan) , de m'avoir honoré en acceptant d'être rapporteurs . Mes remerciements vont à Monsieur Pierre VÉZOLE , Directeur Technique à la S.A.E. , et à Monsieur Jean GUAL , Responsable de Projets au SETRA , d'avoir accepté d'être membres du jury .

Je remercie Madame Danielle GOULET pour ses précieux conseils lors de la frappe et de la mise en forme de ce mémoire .

Je ne saurai oublier Mesdames Edith FRUGIER , Marine DANIEL , Claude TU et Nicole DAUGUIN de la Direction de la Recherche de l'E.N.P.C. pour les services gentiment rendus .

J'exprime ma sympathie à mes amis ingénieurs et stagiaires , Achour IDIR et Pancé VELKOV , pour leurs encouragements .

Enfin , je rends hommage à ma famille et à mes amis pour le soutien qu'ils m'ont apporté durant toutes ces années d'études .

RESUME

Le comportement des structures sous certains types d'actions tels que les séismes nécessite une bonne connaissance du comportement des matériaux composants sous des charges cycliques .

Dans cette étude , le modèle de comportement cyclique du béton est basé sur la théorie de l'endommagement , sur la mécanique des milieux continus et la thermodynamique des processus irréversibles .Ce modèle tient compte des déformations résiduelles et de la perte de raideur due à la fissuration . Dans son application , les effets biaxiaux et le fluage ne sont pas pris en considération . Le comportement des armatures est considéré élasto - plastique parfait .

Une amélioration importante pour l'application du modèle a été de définir une méthode d'identification des paramètres à partir des données physiques obtenues dans les essais classiques de contrôle du béton et d'une expression analytique de la loi de comportement d'usage courant .

Le modèle uniaxial est introduit dans un code numérique pour structures planes . La structure à analyser est découpée en plusieurs éléments de poutres . Chaque élément est représenté par un certain nombre de sections . La section est divisée en plusieurs fibres soumises à une sollicitation uniaxiale . Chaque fibre suit sa propre histoire conforme au modèle ci -dessus,mais sa déformation respecte la loi de planéité de la section considérée .

Des essais de validation ont été réalisés sur des éprouvettes cylindriques sous charges cycliques de compression , sur des poteaux courts sous compression - traction cyclique et sur des poteaux sous flexion alternée et effort normal constant .

La comparaison modèle - essais apporte des résultats encourageants pour l'analyse des structures en béton armé sous charges cycliques .

Mots - clés : béton , comportement , endommagement , déformations résiduelles , charges cycliques , modélisation , structures planes .

ABSTRACT

The behavior of structures under seismic loads needs a good knowledge of materials behavior under these loads .

In this study , the model for the concrete behavior is based on the theory of damage, on the mechanics of continuum media and the thermodynamics of irreversible processes . This model takes into account the inelastic deformation and the loss of rigidity due to cracking . The biaxial and the creep effects are not considered . The behavior of the reinforcement steel is elastic perfectly plastic .

An important improvement for the application of the model has been to define a method of identification of parameters based on physical data obtained from concrete classical tests and from an analytical expression of the behavior law of common use .

The monoaxial model is implemented in a numerical code for plane structures . The analysed structure is discretised into several beam elements . Each element is represented by a certain number of sections . The section is divided into fibers subjected to monoaxial sollicitations . Each fiber follows its own history that is comformable to the model ; its deformation agrees with the plane section hypothesis .

Validation tests has been carried on standard cylinders subjected to repeated compressive loads ; Other tests are also performed on short columns under normal reversible forces and on columns under alternate bending forces .

The comparison between the model and tests gives encouraging results for analysis of plane reinforced concrete structure under cyclic loading .

Keywords : concrete , behavior , damage , inelastic deformation , cyclic loads , modeling , plane structures .

TABLE DES MATIERES

0. INTRODUCTION 9

1. ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

1.1 LE BETON 11

1.1.1 Chargement monotone 11

1.1.2 Chargement cyclique 12

1.1.2.1 Chargement cyclique de même signe 12

a. Essais de Sinha,Gerstle et Tulin 13

b. Essais de Karsan et Jirsa 13

c. Essais de Gopalaratnam et Shah 14

d. Essais de Yankelevski et Reinhardt 14

e. Essais de Alsulayfani et Lamirault 16

f. Essais de Ramtani 17

1.1.2.2 Chargement cyclique alterné 17

1.1.3 Modèles existants 19

1.1.3.1 Compression 19

a. Modèles dérivant de la théorie de l'élasticité 19

b. Modèles basés sur la théorie de la plasticité 19

c. Modèles basés sur l'endommagement élastique 20

d. Modèles basés sur l'association de la plasticité et de la mécanique des microfissures 21

e. Modèles empiriques 22

1.1.3.2 Traction 26

1.1.3.1 Charges alternées 27

1.2 L'ACIER 29

1.2.1 Chargement monotone 29

1.2.2 Chargement cyclique 29

1.2.2.1 Chargement cyclique de même signe 29

1.2.2.2 Chargement cyclique alterné 30

1.2.2.3 Modèles empiriques 31

a. Modèle élasto.plastique 31

b. Modèle de Kent et Park 31

c. Modèle de Kato,Akiyama et Yamanouchi 32

d. Modèle de Aktan , Karlson et Sozen 33

e. Modèle de Giuffre,Menegotto et Pinto 33

2. MODELISATION DU COMPORTEMENT DU BETON SOUS CHARGES CYCLIQUES SELON LA THEORIE DE L'ENDOMMAGEMENT

2.1 BASES THEORIQUES 35

2.1.1 Définitions 35
2.1.2 Thermodynamique des milieux continus 35
2.1.2.1 Loi de conservation de la masse 35
2.1.2.2 Premier principe de la thermodynamique 35
2.1.2.3 Entropie , deuxième principe de la thermodynamique 36
2.1.3 Mécanique de l'endommagement 36
2.1.3.1 Variable d'endommagement 36
a - Définition 36
b - Hypothèse d'istropie 37
2.1.3.2 Contrainte effective 38
a - Définition 38
b - Principe d'équivalence en déformation 38
c - Endommagement critique à rupture 38
2.2 MODELE PROPOSE 39
2.2.1 Etude thermodynamique 39
2.2.1.1 Variables d'état 39
2.2.1.2 Potentiel d'état 40
a - Potentiel élastique 41
b - Potentiel anélastique 46
2.2.1.3 Critères d'endommagement 47
2.2.2 Récapitulatif 49
2.2.2.1 Variables 49
a - Potentiel d'état 49
b - Lois d'état 49
c - Variables d'endommagement 50

3. MODELE UNIAXIAL POUR LE BETON

3.1. ECRITURE DU MODELE EN UNIAXIAL 51
3.1.1 Loi contrainte - déformation 51
3.1.2 Taux de restitution d'énergie volumique 52
3.1.3 Lois d'évolution des variables d'endommagement 54
3.2 ETUDE DU SIGNE DE LA CONTRAINTE 56
3.2.1 Contrainte positive 56
3.2.2 Contrainte négative 58
3.3 CALCUL DE LA CONTRAINTE 59
3.4 DETERMINATION DES PARAMETRES 61
3.4.1 Paramètres d'élasticité et résistances de compression et de traction 61
3.4.2 Paramètres d'anélasticité 61
3.4.2.1 Identification de β_t 62

3.4.2.2 Identification de β_c 65
3.4.3Paramètres caractérisant les variables d'endommagement 69
3.4.3.1 Identification de Y_{0t} 69
3.4.3.2 Identification de Y_{0c} 69
3.4.3.3 Identification de a_t et b_t 70
3.4.3.4 Identification de a_c et b_c 72
3.4.4 Récapitulatif 74
3.5 ILLUSTRATION GRAPHIQUE DU MODELE EN COMPRESSION 75
3.5.1 Loi de comportement et évolution de l'endommagement 75
3.5.2 Potentiels élastique et anélastique 77
4. METHODE DE CALCUL
4.1 INTRODUCTION 79
4.2 DOMAINE D'APPLICATION 79
4.3 HYPOTHESES GENERALES 80
4.4 DISCRETISATION DE LA STRUCTURE 80
4.5 FORMULATION DU PRINCIPE DE CALCUL 83
4.5.1 Schéma général de calcul 83
4.5.2 Séquence de calcul 85
4.5.3 Analyse d'un élément poutre 89
4.5.3.1 Calcul des sollicitations internes 90
4.5.3.2 Déformation de la section à l'équilibre 93
4.5.3.3 Méthode itérative de résolution et critères de divergence 94
4.5.3.4 Matrice de rigidité d'un élément dans son repère intrinsèque 95
4.5.3.5 Expression de la matrice de rigidité dans le repère local 99
4.5.3.6 Relation entre variation des efforts et des déplacements dans le repère lié à la structure 105
5. APPLICATION DU MODELE A DES ESSAIS
5.1 INTRODUCTION 107
5.2 ESSAIS DE COMPRESSION CYCLIQUE SUR CYLINDRES 107
5.2.1 Paramètres des essais 107
5.2.2 Comparaison calcul - essai 108
5.2.2.1 Déformations résiduelles 109
5.2.2.2 Aires des cycles 109
5.3 POTEAUX COURTS SOUS COMPRESSION - TRACTION CYCLIQUE 110
5.3.1 Programme des essais 110
5.3.2 Description du corps d'épreuve 110

5.3.3 Caractéristiques des matériaux 111
5.3.3.1 Béton 111
5.3.3.2 Acier 112
5.3.4 Dispositif expérimental 113
5.3.4.1 Montage d'essais 113
5.3.4.2 Instrumentation et mesures 114
5.3.5 Procédures d'essais 115
5.3.6 Excentricité accidentelle du chargement 116
5.3.7 Modélisation des corps d'épreuve 117
5.3.8 Comparaison modèle - essais 118
5.3.8.1 Corps d'épreuve QJ1TC 118
5.3.8.2 Corps d'épreuve QJ5TC 119
5.4 POTEAUX SOUS FLEXION ALTERNEE 120
5.4.1 Programme des essais 120
5.4.2 Description du corps d'épreuve 121
5.4.2.1 Coffrage 121
5.4.2.2 Ferraillage 122
5.4.3 Caractéristiques des matériaux 123
5.4.3.1 Béton 123
5.4.3.2 Acier 124
5.4.4 Dispositif expérimental 125
5.4.4.1 Montage d'éssais 125
5.4.42 Instrumentation et mesures 125
5.4.5 Procédure d'éssai 128
5.4.6 Modélisation des corps d'épreuve 128
5.4.6.1 Données de base 128
5.4.6.2 Paramètre du modèle cylique 130
5.4.7 Comparaison modèle - essais 130
5.4.7.1 Courbes 130
a - Corps d'épreuve QD1 131
b - Corps d'épreuve QD2 132
c - Corps d'épreuve QD3 134
5.4.7.2 Commentaires 136
CONCLUSION GENERALE 137
BIBLIOGRAPHIE. 139

0.INTRODUCTION

0.1 PRESENTATION DU PROBLEME :

L'ingénierie parasismique est le domaine privilégié où se manifeste l'intérêt pour le comportement cyclique alterné des structures en béton armé sous des sollicitations de haut niveau jusqu'à rupture . Les modèles de comportement sont intéressants car ils permettent de réaliser des simulations numériques qui peuvent être utilisées , soit pour la justification du dimensionnement de structures particulières , soit pour élargir par des études paramétriques les conclusions tirées des expérimentations . Mêmes des calculs purement statiques peuvent alors fournir des résultats utiles concernant l'enveloppe non linéaire du comportement et les capacités de dissipation d'énergie par hystérésis .

Les spécificités essentielles du matériau béton sont la non-linéarité de la relation contrainte déformation , le développement de fissures entraînant une perte de raideur et l'apparition de déformations résiduelles . Les armatures utilisées dans les structures courantes suivent un comportement élastique avec plateau plastique .

Les objectifs de cette étude sont :

- d'une part de choisir la modélisation la plus adéquate du comportement cyclique alternée des matériaux (essentiellement le béton) ,

- d'autre part d'introduire cette modélisation dans un logiciel de calcul non linéaire des structures en béton armé , modifié pour accepter des historiques de chargement cyclique .

0.2 CONTENU DE L'ETUDE :

Le présent travail fait partie des recherches sur le calcul non linéaire des ossatures planes en béton armé menées par le Service Ingénierie et Modélisation du C.E.B.T.P. .

L'étude se décompose comme suit :

- Le premier chapitre présente une étude bibliographique qui permet de donner un aperçu sur le comportement du béton et l'acier sous charges monotone et cyclique .

- Dans le deuxième chapitre , nous précisons les bases théoriques de l'étude qui sont la théorie de l'endommagement isotrope et la thermodynamique des processus

irréversible . Nous développons un modèle tridimensionnel du comportement du béton en nous basant , essentiellement , sur les travaux réalisés à l'Ecole Normale Supérieure de Cachan .

Dans ce modèle , nous ne considérons pas la refermeture des fissures de traction lors d'un chargement en compression et vice versa car il nous a pas été possible de trouver dans la littérature , ou de déterminer , l'état de contrainte à partir duquel ces refermetures sont possibles . Ceci reste notre choix . Nous proposons , par ailleurs , une nouvelle loi d'évolution de l'endommagement .

- L'écriture uniaxiale du modèle développé auparavant est faite au troisième chapitre. Elle permet de mettre en évidence que le modèle dépend de onze paramètres . Une partie de notre travail consiste à montrer la manière d'identifier ces paramètres et de relever les difficultés rencontrées et ceci surtout en traction par manque d'essais cycliques .

- Au quatrième chapitre , nous présentons le logiciel SNOB dans lequel nous introduisons le modèle uniaxial du comportement du béton et le modèle élastoplastique - parfait pour l'acier . Ce logiciel fait le calcul des structures en béton armé sollicitées par des charges monotones croissantes jusqu'à rupture . Notre travail consiste à changer le chargement monotone en chargement cyclique par l'introduction de modules nécessaires aux différents historiques (paramètres d'endommagement , déformations et contraintes du béton et de l'acier , charges , déplacements) ainsi que l'introduction des lois de comportement . Ce travail a été rendu très difficile et très lent par l'inexistence de manuel d'explication du code numérique SNOB .

- Le cinquième chapitre présente des essais effectués au laboratoire d'essais de structures du C.E.B.T.P. . Des cylindres soumis à la compression cyclique permettent de valider le comportement local du béton en compression . Le modèle est appliqué à des poteaux courts (essais QJ) soumis à la compression - traction cyclique et des poteaux (essais QD) soumis à la flexion alternée avec effort normal constant .

1 . ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

Le comportement des structures de type poutre en béton armé soumises à des actions répétées et alternées (de type sismique , par exemple) résulte principalement du comportement uniaxial cyclique alterné du béton et de l'acier et de leur adhérence . La loi de comportement du béton sous chargement statique monotone est connue depuis longtemps bien que se soit manifesté récemment le manque de formulations assez générales pour s'adapter à l'accroissement des résistances vers les bétons à hautes et très hautes performances . Le comportement de l'acier sous charge monotone est bien connu depuis très longtemps . Par contre , les recherches concernant le comportement sous chargement cyclique datent d'une trentaine d'années.

1.1 LE BETON

1.1.1 Chargement monotone:

La résistance à la **compression** du béton est déterminée, en général, sur des cylindres normalisés dont le rapport de la hauteur au diamètre est de deux. Les cylindres sont chargés longitudinalement avec une vitesse telle que la résistance maximale est atteinte au bout d'une à trois minutes. La déformation correspondant à la résistance maximale est de l'ordre de 0,2%. On obtient ainsi une courbe d'allure parabolique avec une première branche ascendante presque linéaire au début , une incurvation qui commence en même temps que des désordres intérieurs , un sommet donnant la résistance conventionnelle et une branche descendante plus ou moins raide . L'allure de la courbe contrainte - déformation en fonction de la résistance est représentée sur la figure 1.1 :

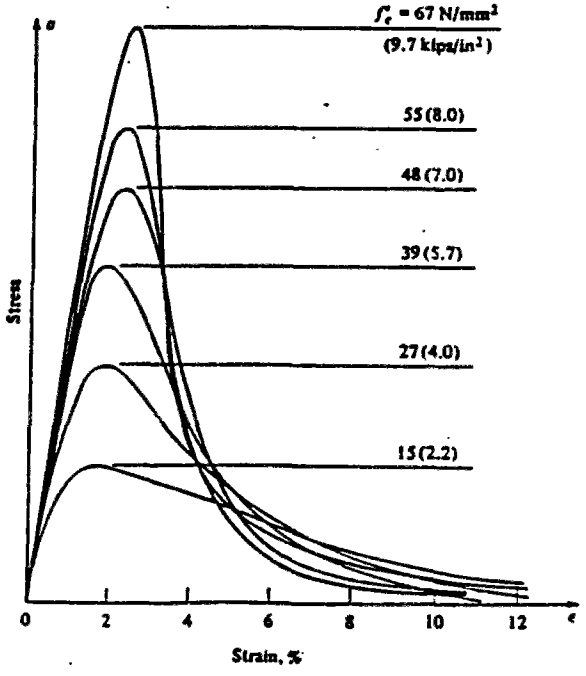


Fig. 1.1 : Courbes contrainte - déformation en compression uniaxiale [HAN86].

La résistance du béton affecte sensiblement l'allure de la courbe contrainte - déformation. Plus la résistance est grande, plus la raideur de la courbe contrainte - déformation entre l'origine et la contrainte maximale augmente. Les courbes , à branches descendantes raides , révèlent un comportement plus fragile, courant avec des bétons à hautes performances ; les courbes à branches descendantes longues correspondent à un comportement plus ductile (Fig. 1.1).

La résistance à la **traction** du béton, généralement moins de 10% de la résistance à la compression, peut être obtenue par des essais directs de traction. Cependant, pour des difficultés d'expérimentation, l'essai direct de traction n'est pas fréquemment utilisé. Quelques auteurs ont essayés, toutefois, ces dernières années à faire des expériences de traction sur des cylindres. Nous citerons, en particulier, les travaux de Terrien [TERRIEN80] , Gopalaratnam et Shah [GOPALARATNAM85] et de Al Sulayfani et Lamirault [ALSULAYFANI87]. La courbe contrainte - déformation du béton en traction directe présente, généralement, une partie ascendante raide et une branche descendante raide au début et plus ou moins plate jusqu'à rupture. Le module de Young à l'origine reste le même que celui en compression. La Figure 1.2 montre bien ces aspects.

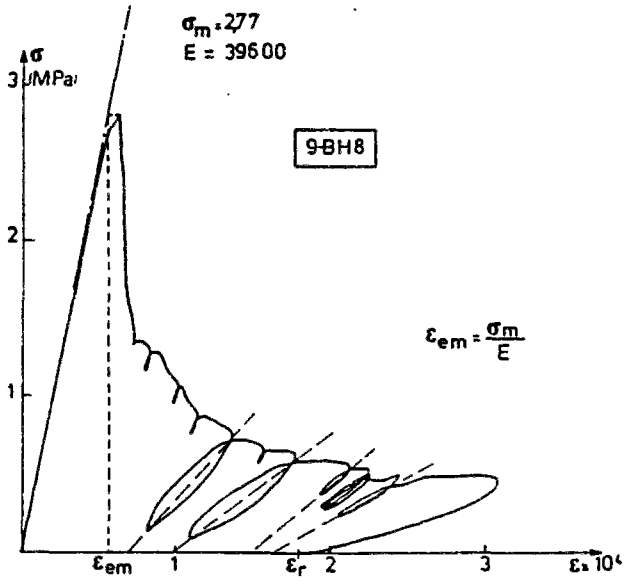


Fig. 1.2 : Courbe expérimentale contrainte - déformation en traction [TERRIEN80].

Il faut remarquer qu'après le pic de contrainte , on ne peut plus définir exactement la déformation ε qui n'est qu'une mesure de déplacement sur une longueur de base fixée . En effet , il y'a localisation des déformations dans la fissure pour l'essai de traction , dans une zone fortement micro - fissurée dégénérant en rupture par glissement pour l'essai de compression [TORRENTI89] .

1.1.2 Chargement cyclique

1.1.2.1 Chargement cyclique de même signe

a . Essais de Sinha, Gerstle et Tulin [SINHA64] :

Cette étude comporte deux séries d'essais sur cylindres, de deux dimensions différentes, soumis à des charges cycliques répétées de **compression**. Elle détermine les propriétés de la courbe enveloppe et celles des courbes de chargement et de déchargement aboutissant, ainsi, à un modèle analytique (Fig. 1.3). Pour des cylindres de même résistance à la compression, la courbe enveloppe des cycles est unique.

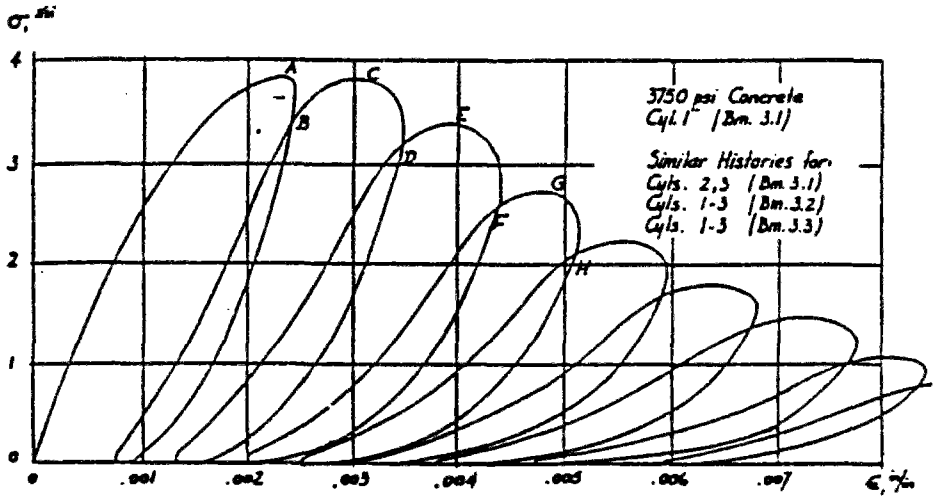


Fig. 1.3 : Courbes expérimentales contrainte - déformation sous chargement cyclique [SINHA64].

b . Essais de Karsan et Jirsa [KARSAN69] :

L'étude porte sur des poteaux courts rectangulaires en béton soumis à des charges axiales cycliques variables de compression(Fig. 1.4). La courbe enveloppe des cycles coïncide avec la courbe monotone de **compression** (Fig. 1.5). Dans le modèle analytique développé, les auteurs définissent l'équation de la courbe enveloppe et celles des courbes de chargement et de déchargement.

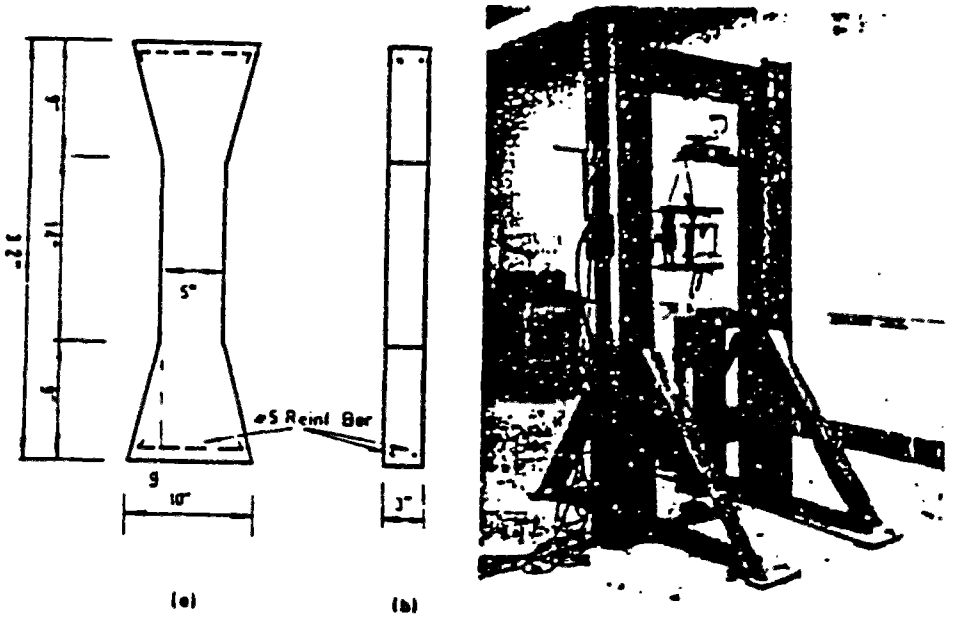


Fig. 1.4 : (a) Eprouvette ; (b)montage d'essai [KARSAN69]

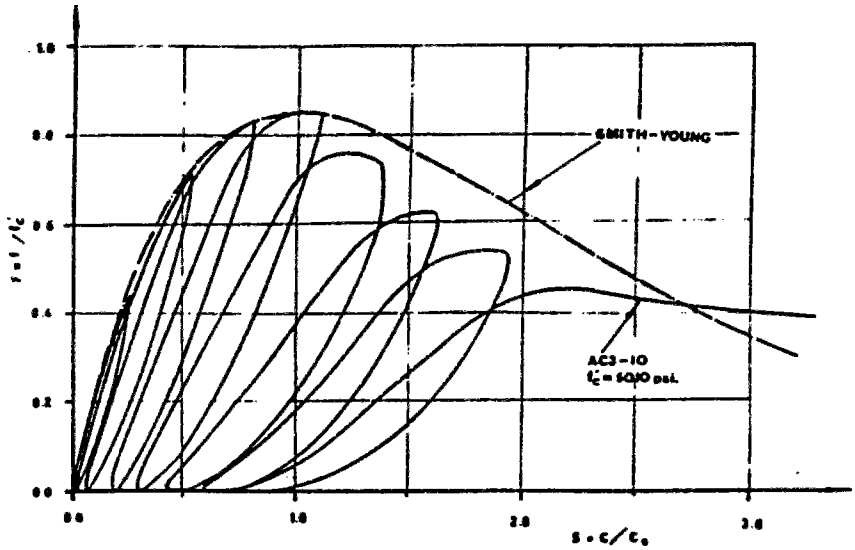


Fig. 1.5 : Courbe cyclique charge - déformation [KARSAN69]

c . Essais de Gopalaratnam et Shah [GOPALARATNAM85] :

L'étude porte sur des éprouvettes rectangulaires (76x19x305 mm). Parmi ces éprouvettes, certaines ont été soumises à des charges de **traction** uniaxiale cyclique (Fig. 1.6). Ils proposent un modèle dans lequel ils définissent les branches ascendante et descendante des courbes contrainte - déplacement.

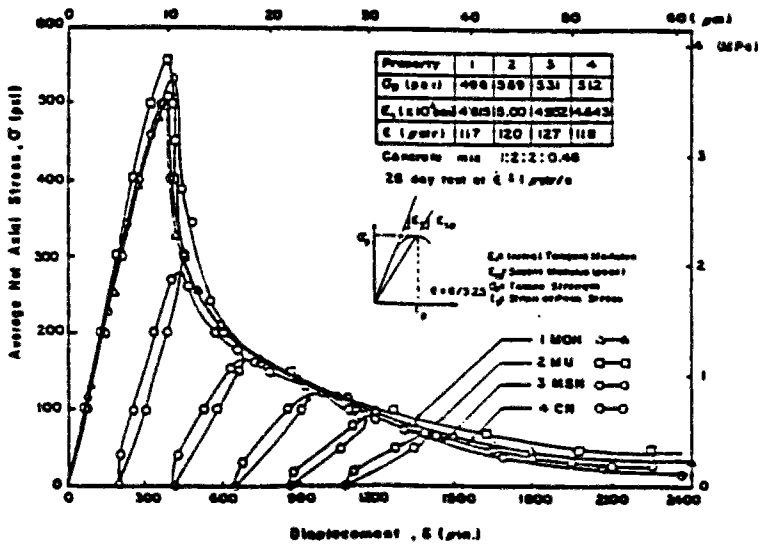


Fig. 1.6 : Courbe contrainte - déplacement [GOPALARATNAM85].

d . Essais de Yankelevski et Reinhardt [YANKELEVSKI87b]:

Les auteurs utilisent les résultats d'essais sur des éprouvettes de dimensions 50x60x250 mm, appelées série 1, chargées cycliquement en **traction** sous différents historiques de chargement. Une deuxième série d'essais (série 2) est faite par les auteurs sur des éprouvettes (50x40x150 mm) qui sont soumises à un nombre différent de cycles. Les résultats obtenus ont permis d'écrire un modèle analytique dans lequel la courbe enveloppe et celles de déchargement et de rechargement sont définies (Figs. 1.7 et 1.8).

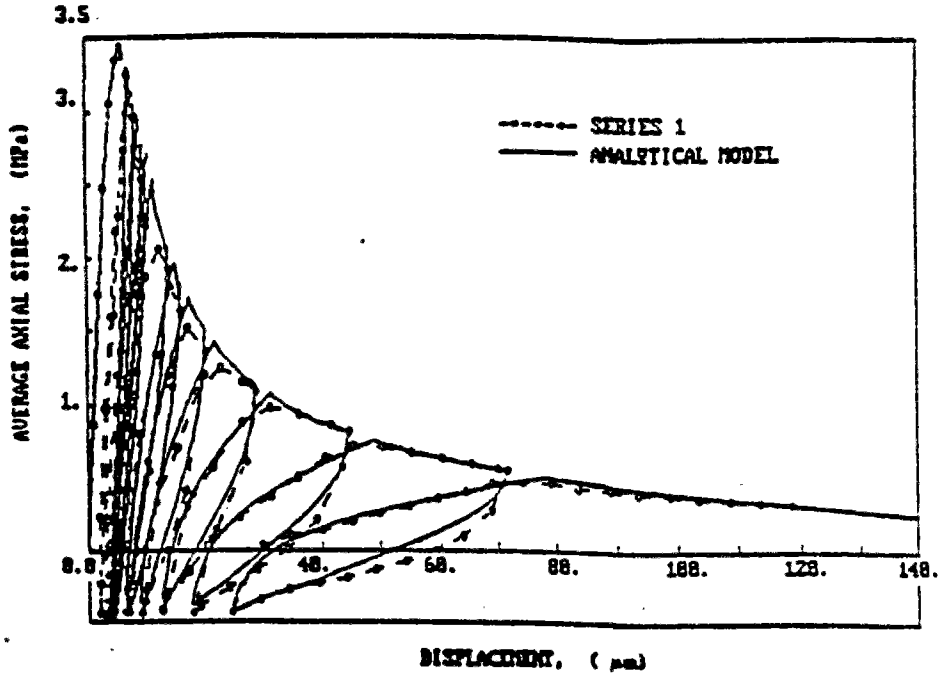


Fig. 1.7 : Courbe en traction cyclique (série 1) [YANKELEVSKI87b].

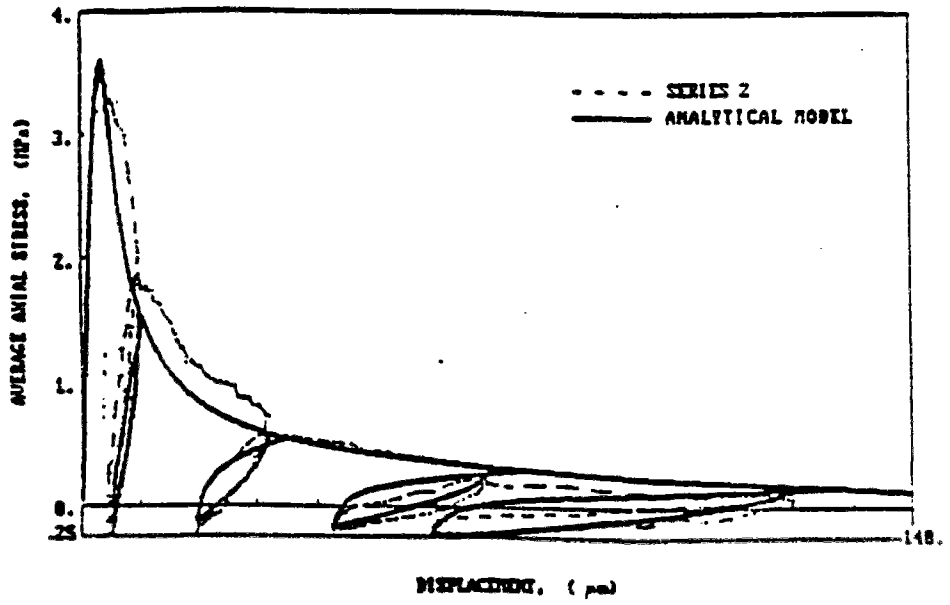


Fig. 1.8 : Courbe en traction cyclique (série 2) [YANKELEVSKI87b].

En 1989, ces auteurs [YANKELEVSKI89] développent un modèle graphique pour le comportement du béton sous traction uniaxiale cyclique (Fig. 1.9).

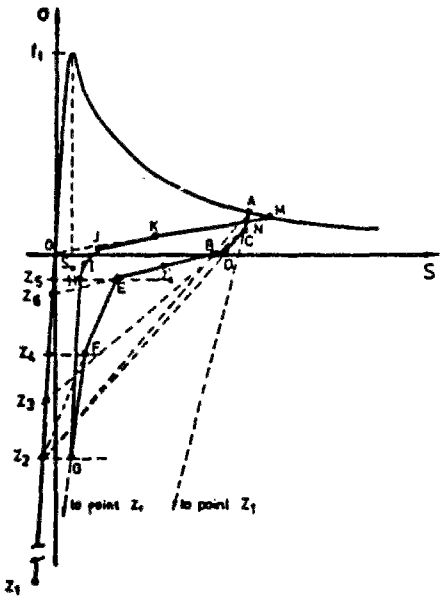
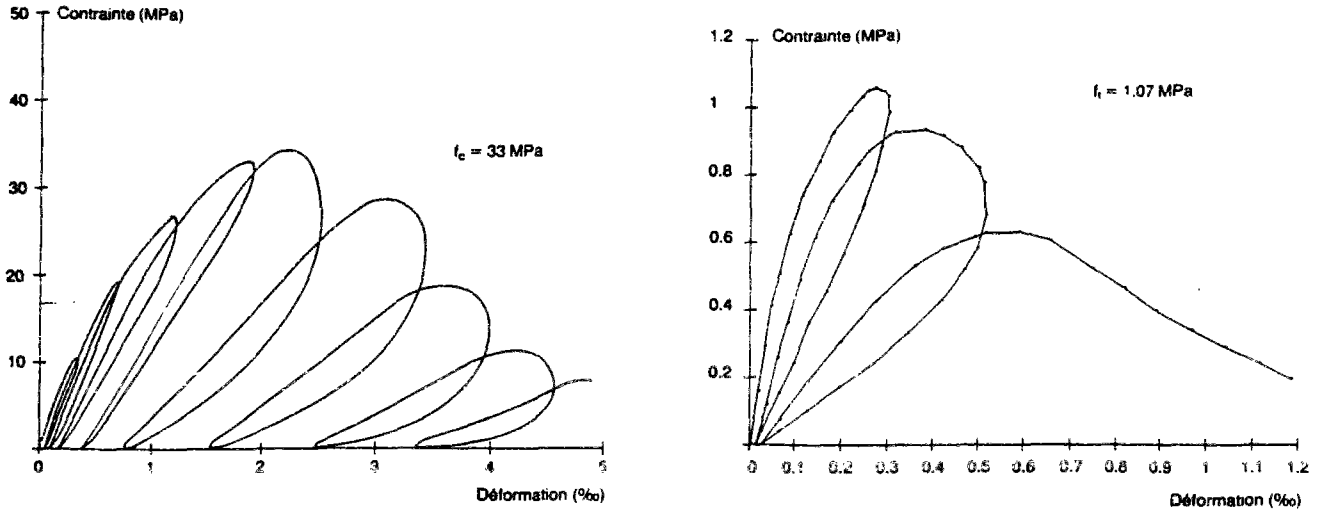


Fig. 1.9 : Modèle du *point focal*; schéma [YANKELEVSKI89].

e . Essais de Alsulayfani et Lamirault [ALSULAYFANI87] :

Des cylindres en béton normalisés sont soumis à des charges axiales répétées de **compression** et de **traction** (Fig. 1.10). Les comparaisons effectuées entre essais statique et cyclique pour des cylindres de même composition confirment l'identité existant entre courbe statique et enveloppe des cycles. Le modèle développé dépend uniquement de la résistance à la compression du béton.



(a) (b)

Fig. 1.10 : Courbe expérimentale contrainte - déformation obtenue (a) en compression et (b) en traction [ALSULAYFANI87] .

f. Essais de Ramtani [RAMTANI90] :

Dans un programme d'essai sur des éprouvettes non armées ou renforcées par des barrettes d'aluminium extérieures collées, l'auteur essaie de réaliser un endommagement diffus en **traction** plutôt que la localisation d'une fissure unique (fig. 1.11). On note qu'il y a une importante variation du module d'élasticité sécant avec la dégradation du matériau. Ces essais permettent de s'orienter vers la définition des lois de comportement (σ, ε).

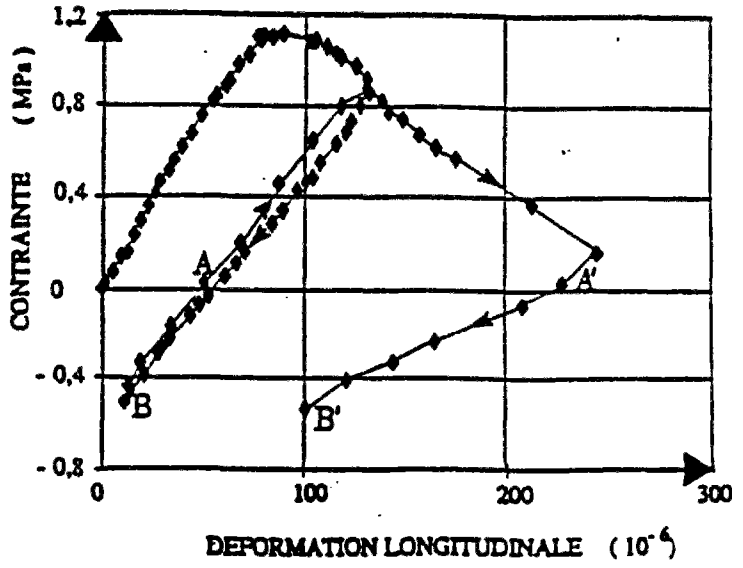


Fig. 1.11 : Courbe expérimentale contrainte déformation longitudinale traction uniaxiale [RAMTANI90].

1.1.2.2. Chargement cyclique alterné :

Le béton, ayant une faible résistance à la traction, a un comportement sous charges cycliques alternées, généralement considéré comme étant le même que dans le cas de charges répétées de compression . Il n'existe pas suffisamment d'essais de béton sous charges cycliques alternées pour que nous puissions en faire une référence de travail . Toutefois , Al Sulayfani et Lamirault [ALSULAYFANI87] ont fait un travail expérimental qui leur a permis de trouver des formulations analytiques pour le béton sous charges alternées ; ils obtiennent des courbes expérimentales de cycles alternées dans lesquels ils montrent qu'il y a différence entre un cycle commençant en traction et un cycle commençant en compression (Figs. 1.12 et 1.13) .

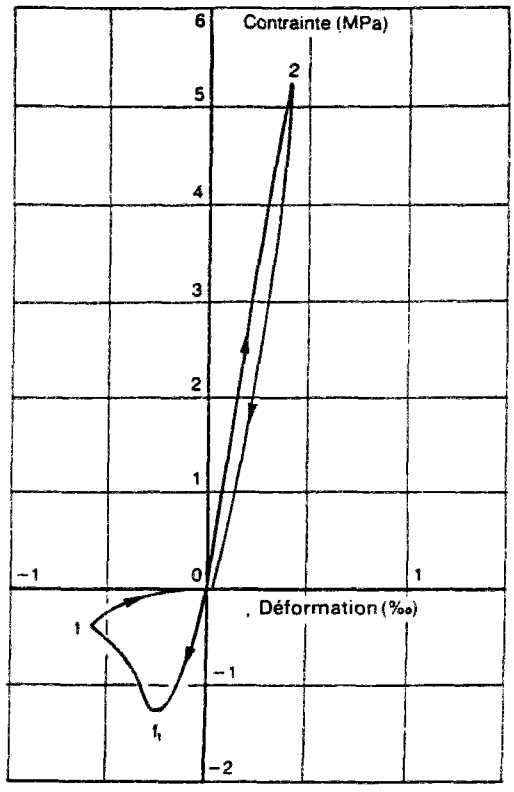


Fig. 1.12 :Courbe expérimentale obtenue sous cycle traction - compression [ALSULAYFANI87].

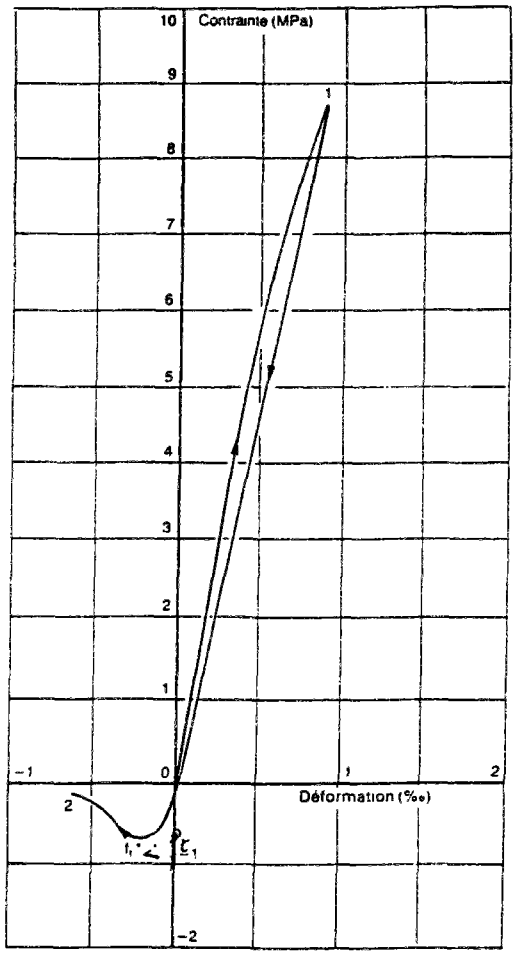


Fig. 1.13 : Courbe expérimentale obtenue sous cycle compression - traction [ALSULAYFANI87].

1.1.3 Modèles existants :

Les modèles qui suivent sont théoriquement valable en multiaxial .

1.1.3.1 Compression

Une classification des modèles a été proposé dans le bulletin d'information du C.E.B. n° 210 [CEB91] dans lequel les auteurs se basent sur les différentes théories.

a . Modèles dérivant de la théorie de l'élasticité :

Dans ces modèles , la relation incrémentale entre les contraintes et les déformations est de la même forme que celle d'un solide élastique:

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl} d\varepsilon_{kl} \qquad (1\text{-}1)$$

D_{ijkl} est le tenseur de rigidité dans lequel les paramètres élastiques ont des valeurs tangentes et dépendent de l'état actuel des contraintes.

L'expression (1-1) est généralement inadéquate pour décrire le comportement du béton quand il s'approche de la zone de rupture(non - proportionnalité des contraintes)mais, couplée à des résultats d'essais , elle a donné naissance à des modèles empiriques .

Le nombre de paramètres entrant dans la matrice D_{ijkl} est très grand . Ceci nécessite l'introduction d'hypothèses afin de simplifier la formulation du modèle .

b . Modèles basés sur la théorie de la plasticité :

Dans la théorie de la plasticité , l'incrément de déformation a deux composantes , l'une élastique et l'autre plastique :

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{e} + d\varepsilon_{ij}^{p} \qquad (1\text{-}2)$$

La composante élastique est , par définition , totalement récupérée après décharge et est régie par une loi élastique linéaire . La composante plastique n'est pas récupérée après décharge et commence à exister dès que la contrainte atteint la surface d'écoulement .

La surface d'écoulement est fixe dans la théorie de la plasticité parfaite et pour avoir un incrément de déformation plastique , il faut que la contrainte soit sur la surface d'écoulement .

$$d\varepsilon_{ij}^{p} \neq 0 \quad \text{si} \quad \frac{\partial f(\sigma_{mn})}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = o \qquad (1\text{-}3)$$

$$f(\sigma_{mn}) = 0 \text{ (surface d'écoulement)}$$

Cette théorie ne convient pas pour décrire le comportement du béton pour plusieurs raisons ; l'une de ces raisons est que la non - linéarité de ce matériau débute avant que la contrainte n'atteigne la surface d'écoulement . Une extension de cette théorie qui permet d'incorporer ce genre de comportement introduit le concept d'écrouissage .Ce dernier va permettre l'élaboration de plusieurs modèles qui aboutissent à des programmes numériques .

c . Modèles basés sur l'endommagement élastique:

Ces modèles tentent de reproduire , à un niveau macroscopique , le mécanisme interne de la microfissuration et l'évolution des microcavités qui apparaissent dans les matériaux fragiles tel que le béton .L'affaiblissement du matériau , dans ces modèles ,est caractérisé par une diminution de la rigidité sans déformation permanente quand le matériau est déchargé . Ce mécanisme peut être appelé endommagement élastique.

Nous citons , à titre d'exemple , le modèle de Mazars [MAZARS84 , DAVENNE89] qui illustre bien les principes des modèles à endommagement élastique . C'est un modèle à endommagement scalaire . Il est défini comme suit :

- la relation uniaxiale contrainte - déformation est donnée par :

$$\sigma = E_0(1-D)\varepsilon$$

- la progression de l'endommagement est guidée par l'évolution de la déformation équivalente $\tilde{\varepsilon}$, calculée à partir des déformations principales positives $\langle \varepsilon_i \rangle_+$:

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\sum \langle \varepsilon_i \rangle_+^2}$$

- sous un état quelconque de sollicitation , l'endommagement est considéré comme étant la combinaison d'un endommagement dû à la traction D_t et d'un endommagement dû à la compression D_c sous la forme suivante :

$$D = \alpha^{\beta} D_t + (1-\alpha)^{\beta} D_c$$

avec $\alpha = 0 \Rightarrow$ compression pure .

$\alpha = 1 \Rightarrow$ traction pure .

β est un coefficient qui traduit le couplage entre ces deux endommagements (# 1,05 pour un béton courant ,il permet de représenter à peu de frais les résultats expérimentaux ,

particulièrement pour les essais de cisaillement , alors qu'une valeur de 1,00 surestime notablement l'influence des tractions locales [PIJAUDIER89]) .

- Les lois d'évolution de D_t et de D_c sont identifiées à partir des essais uniaxiaux correspondants et l'on peut choisir les formes suivantes :

On exprime la fonction seuil par $f = \tilde{\varepsilon} - k(\tilde{\varepsilon})$, où $k(\tilde{\varepsilon})$ est égal à la valeur maximale atteinte par $\tilde{\varepsilon}$ au cours de l'histoire du chargement et vaut initialement ε_0.

Si $f = 0$ et $\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} = 0$ alors :

$$\text{en traction pure : } D_t = 1 - \frac{\varepsilon_0}{\tilde{\varepsilon}}(1 - A_t) - A_t \exp\{-B_t(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_0)\}$$

$$\text{en compression pure : } D_c = 1 - \frac{\varepsilon_0}{\tilde{\varepsilon}}(1 - A_c) - A_c \exp\{-B_c(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_0)\}$$

Si $f < 0$ ou si $f = 0$ et $\dot{f} < 0$ alors D n'évolue pas .

La figure (1.14) montre les courbes données par ce modèle pour le comportement du béton sous sollicitations uniaxiales découplées .

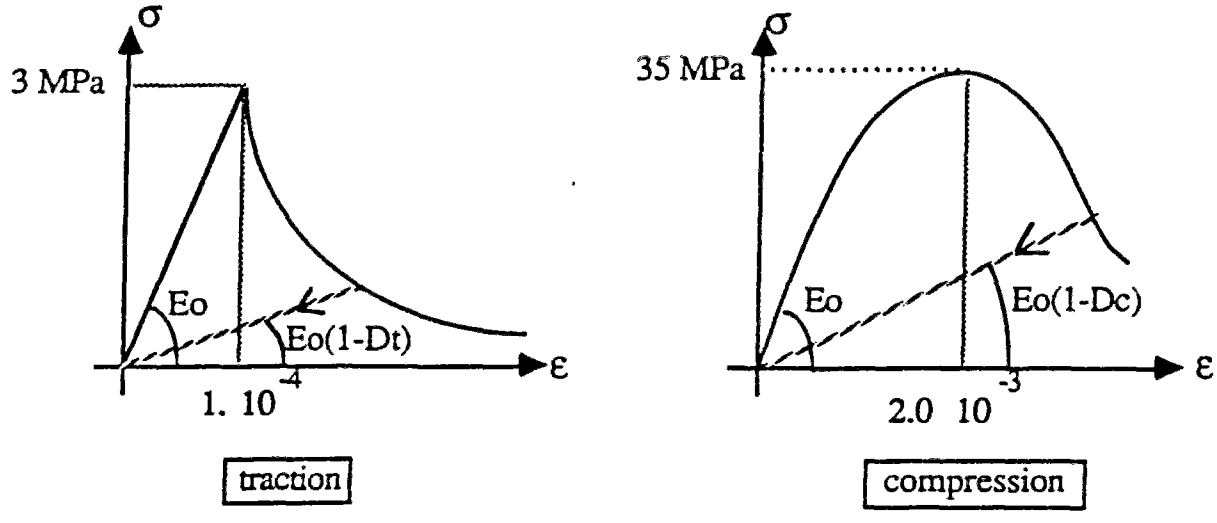
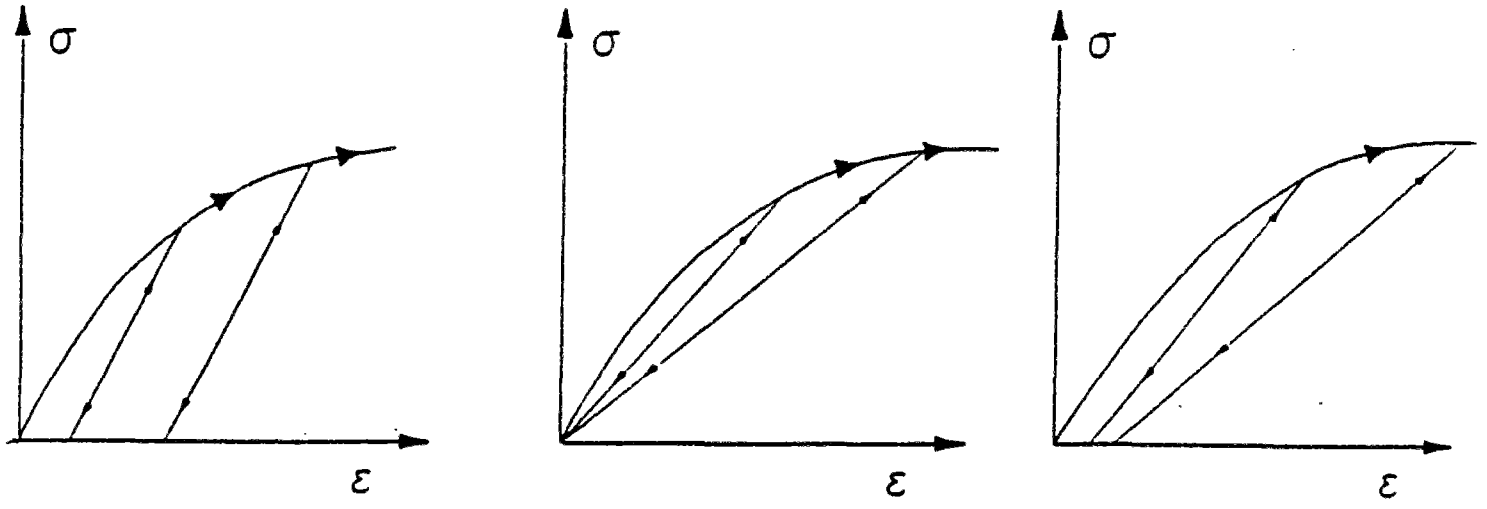


Fig. 1.14 : Comportement du béton sous sollicitations uniaxiales [DAVENNE89] .

d . Modèles basés sur l'association de la plasticité et de la mécanique des microfissures :

L'association de la plasticité et de l'endommagement élastique permet de tenir compte des déformations permanentes dans le comportement du matériau en plus de la perte progressive de rigidité (fig. 1.15).

Dans ce type de modèle , la représentation des cycles déchargement - rechargement peut être obtenue linéairement (modèle de Bazant) , multilinéairement , ou mieux, par des courbes représentant les boucles observées et analysées expérimentalement .



Modèle élastoplastique avec déchargement suivant le module initial	Modèle élastique endommageable sans déformation résiduelle .	Modèle avec diminution de rigidité et déformation résiduelle .

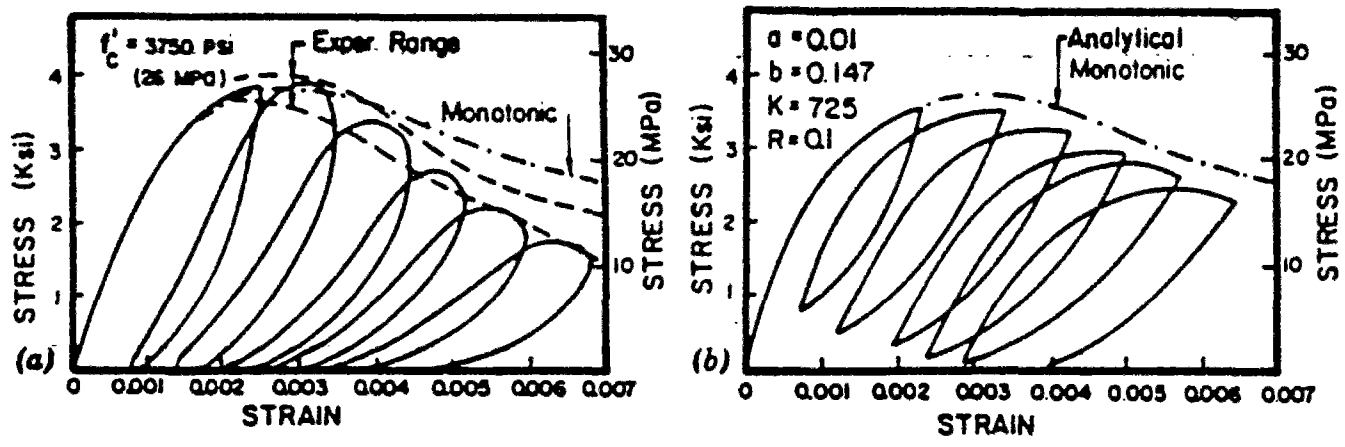
Fig 1.15 : Illustration du mécanisme plasticité - endommagement élastique .

e . Modèles empiriques :

En 1964 , Sinha et col. [SINHA64] tentent de modéliser le béton soumis aux charges cycliques répétées de compression . Ils développent une équation polynomiale du second degré pour la courbe enveloppe , une équation parabolique du second degré pour la courbe de déchargement et une droite pour le rechargement . Quatre constantes expérimentales et deux paramètres sont nécessaires pour définir chaque type de béton .

En 1969 , Karsan et Jirsa [KARSAN69] font une investigation expérimentale sur des poteaux rectangulaires courts soumis à des charges cycliques répétées de compression . Le modèle développé donne une relation exponentielle entre la contrainte et la déformation pour la courbe enveloppe et des équations paraboliques du second degré pour les courbes de décharge et de recharge .

Un modèle rhéologique pour le béton sous charge cyclique est développé en 1984 par Fafitis et Shah [FAFITIS84] .Le modèle est défini par trois paramètres (fig. 1.16) .



(a) (b)

Fig. 1.16 : Comparaison entre (a) courbe expérimentale [SINHA64] et (b) courbe analytique [FAFITIS84] .

Un modèle basé sur la construction géométrique est développé en 1987 par Yankelevski et Reinhardt [YANKELEVSKI87a] . La décharge se fait de la courbe enveloppe . A la fin du rechargement , la courbe rejoint la courbe enveloppe . Ce modèle est comparé à plusieurs essais. Il donne une bonne corrélation (fig. 1.17) .

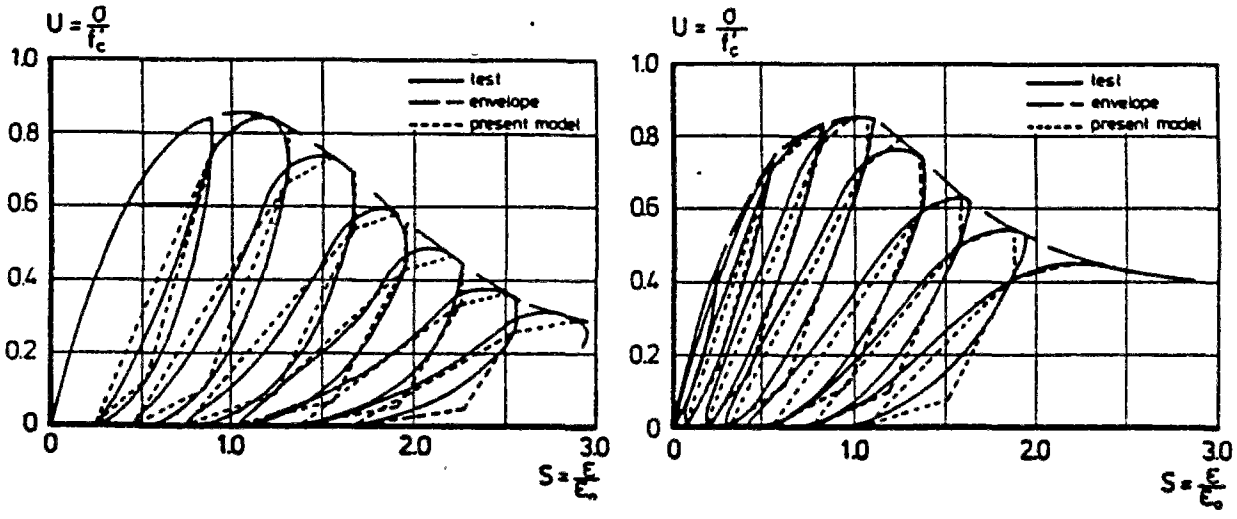


Fig. 1.17 : Comparaison du modèle [YANKELEVSKI87a] avec les essais de (a)Karsan et Jirsa [KARSAN69] et (b) Sinha et col. [SINHA64] .

Alsulayfani et Lamirault [ALSULAYFANI87] développe un modèle pour le béton sous charge cycliques à partir de résultats expérimentaux réalisés sur des cylindres normalisés . Ils lient tous les paramètres à la contrainte maximale de compression f_c (fig. 1.18.) .

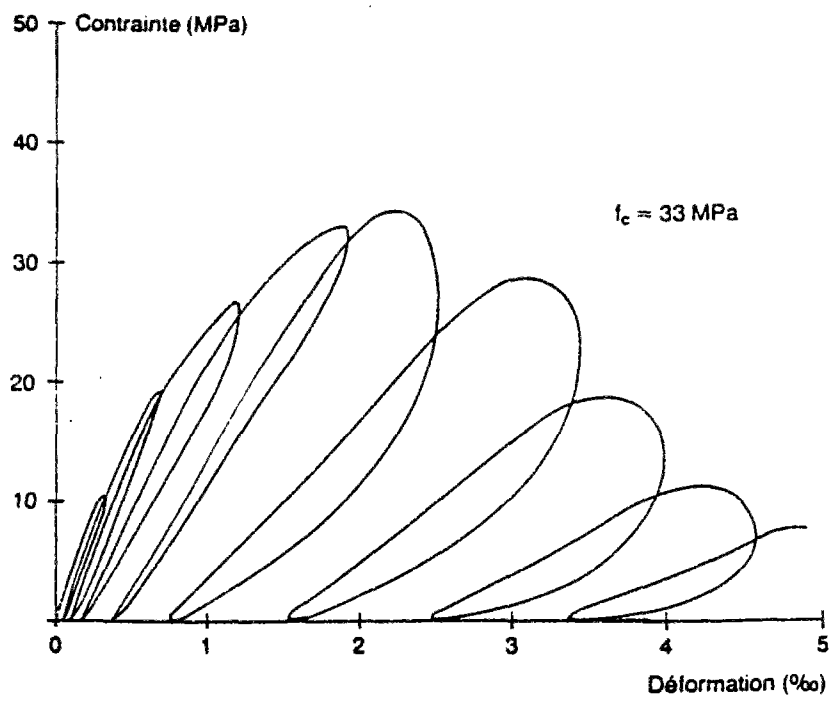


Fig. 1.18 : Courbe expérimentale contrainte - déformation [ALSULAYFANI87] .

Velkov et Fouré [VELKOV96] modifient le modèle de Costes . Le chargement monotone en compression , qui est aussi l'enveloppe du comportement cyclique , est représenté par un modèle tri-linéaire OABD (fig. 1.19) . Cette enveloppe est définie par cinq paramètres (f_c,E_{c0},ε_{c0},ε_{c1},ε_{c3}) dont les valeurs sont cohérentes avec la loi de Sargin des Règles BPEL 91: coïncidence de la pente à l'origine et des points B et C , définition particulière du point A (fig. 1.19) . Les expressions proposées par Fouré [FOURÉ96a] permettent de se ramener finalement aux deux seuls paramètres les plus habituels , la résistance à la compression et le module à l'origine . Une déformation limite ε_{cu} peut être imposée si nécessaire .

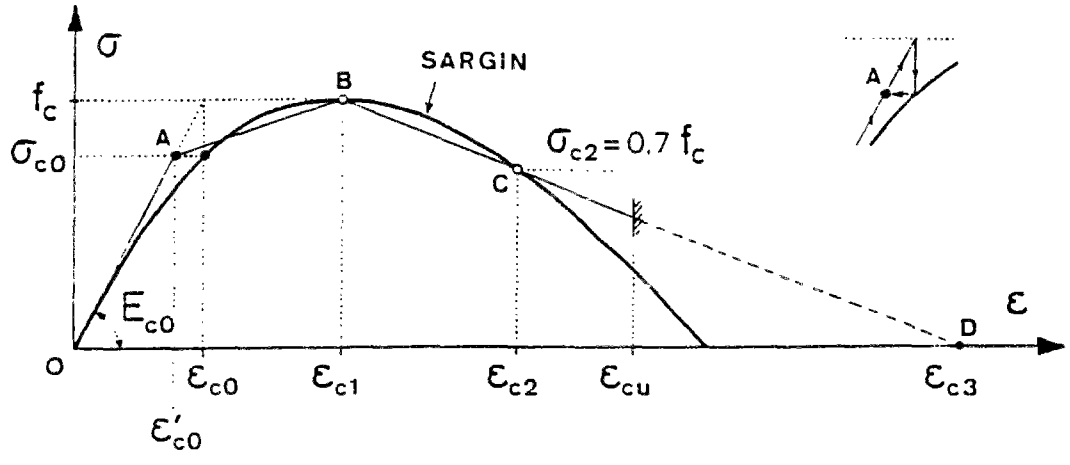


Fig. 1.19 : Identification de l'enveloppe par rapport à la loi SARGIN - FOURÉ [VELKOV96].

Dans le comportement cyclique en compression , les chemins de déchargement et rechargement sont bilinéaires (fig. 1.20) , le lieu des changements de pente étant la droite AE parallèle à la branche descendante BD de l'enveloppe . La première phase de déchargement se fait à pente constante , égale à E_{c0} . La seconde phase de déchargement et la première phase de rechargement sont définies par le pôle fixe P , la seconde phase de rechargement par le pôle fixe Q . Le seul paramètre supplémentaire est la résistance à la traction f_t .

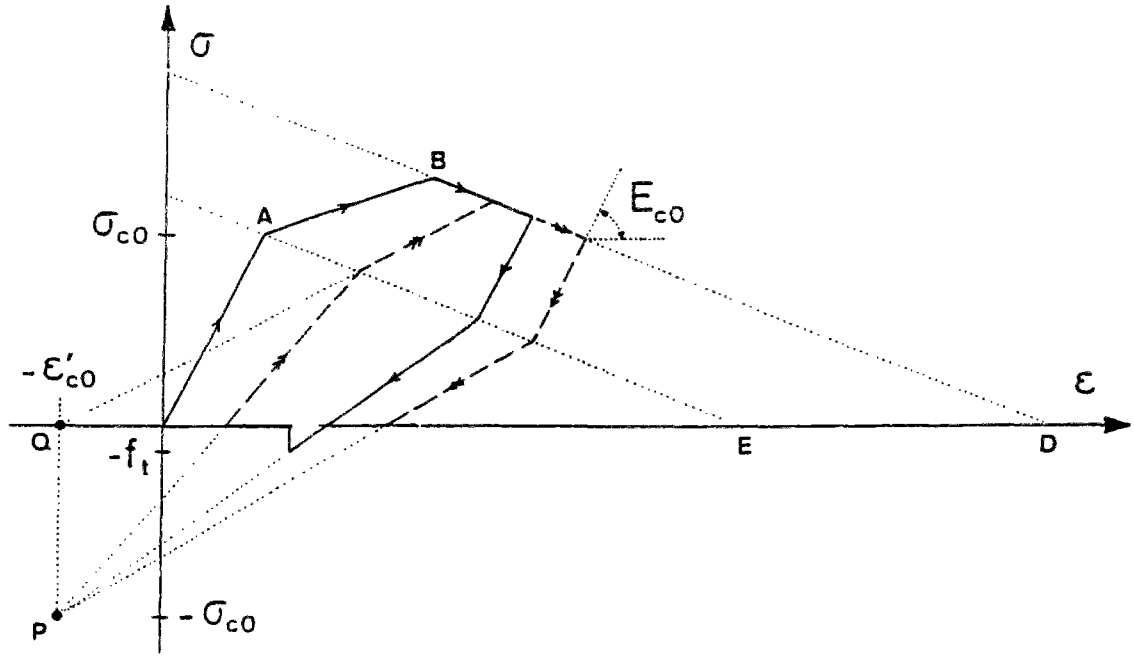


Fig. 1.20 : Modélisation cyclique [VELKOV96].

Validé sur des essais cycliques de compression , le modèle représente bien l'enveloppe des cycles (par exemple , fig. 1.21a) . Il suit bien également l'évolution des cycles de chargement dans la partie ascendante de l'enveloppe et au voisinage de son sommet . La corrélation est un peu moins bonne pour la partie descendante , surtout lorsque les contraintes s'approchent de zéro . C'est surtout le cas pour les bétons de résistance pas très élevée (inférieure à 30 MPa) pour lesquels la partie descendante est assez étendue ; le modèle s'avère alors un peu conservateur car il sous - estime l'enveloppe et l'aire des cycles . Pour les bétons de résistance moyenne (40 MPa et plus) , le modèle arrive à bien décrire l'enveloppe et les cycles (fig. 1.21b) .

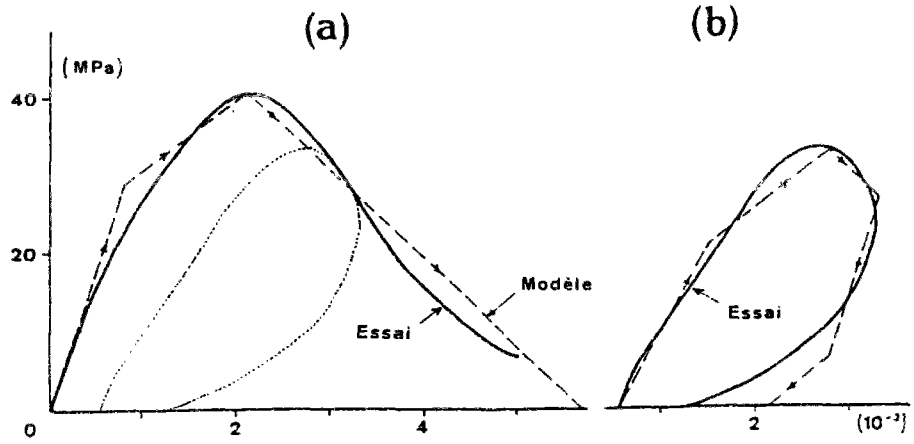


Fig. 1.21 : Validation du modèle sur un essai d'Al Sulayfani [VELKOV96].

1.1.3.2. Traction :

La fissuration du béton , essentiellement due à son comportement en traction , est un phénomène critique dans le calcul des constructions en béton armé . Depuis le début des années quatre-vingts , des chercheurs ont tenté de modéliser le comportement du béton sous charges cycliques en traction . Nous citons les modèles de Rots(1985) , de Gylltoft(1984) , de Reinhardt(1986) et de Yankelevski(1989) [KOENIG91] .

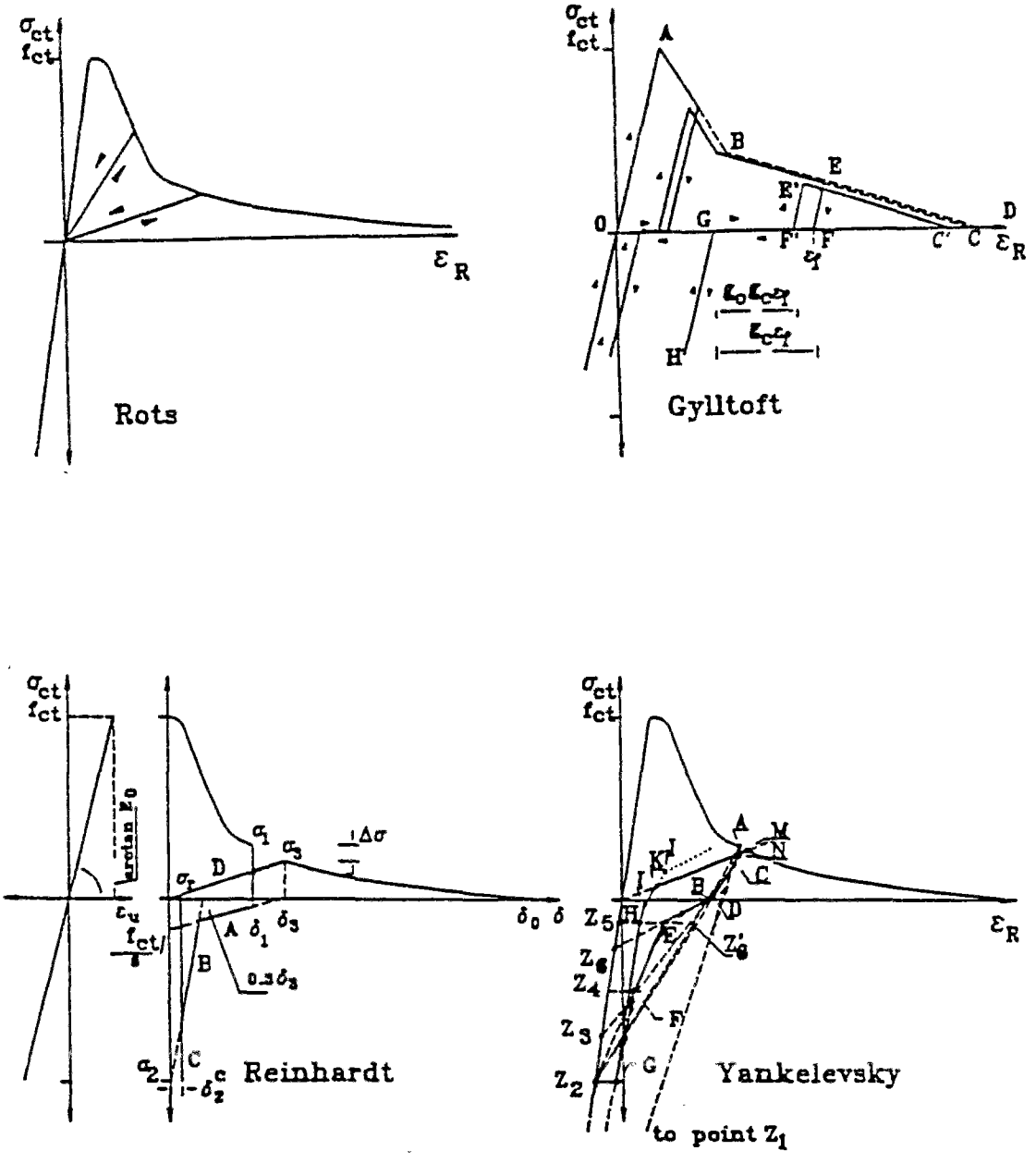


Fig. 1.22 :Modèles en traction cyclique [KOENIG91]

Le modèle de Rots lie par une droite le point de déchargement sur l'enveloppe à l'origine . Les courbes de déchargement et de rechargement sont réversibles sur la même ligne droite . Ce modèle est une approximation grossière du comportement réel . Il ne faudra l'utiliser que si l'effet cyclique est négligé pour le comportement global .

Le modèle de Gylltoft utilise des droites parallèles à la pente initiale de la courbe pour décrire le comportement cyclique . Il considère que la microfissuration commence quand la résistance à la traction est atteinte au point A (fig. 1.22) . C'est une meilleure approximation du comportement réel que celui de Rots .

Le modèle de Reinhardt est une bonne approximation du comportement d ' hystérésis du béton sous traction cyclique . Il a des inconvénients du point de vue du calcul numérique .

Yankelevski pose les mêmes hypothèses que pour son modèle en compression (courbe enveloppe unique , décharge et recharge à partir de la courbe) . Le modèle reste très complexe pour l'application numérique .

Alsulayfani et Lamirault [ALSULAYFANI87] développe un modèle pour le béton sous charge cycliques à partir de résultats expérimentaux réalisés sur des cylindres normalisés . Ils lient tous les paramètres à la contrainte maximale de traction f_t (fig. 1.23).

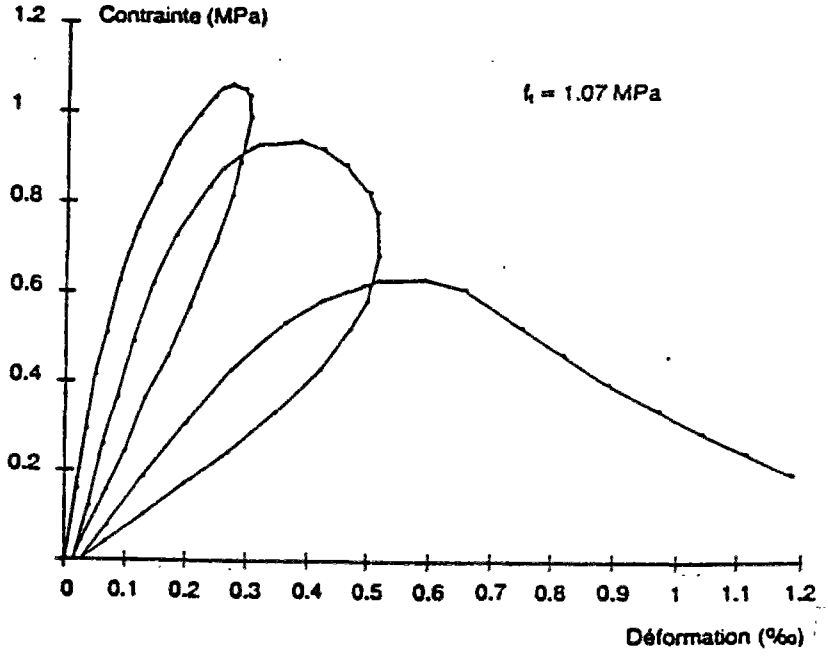


Fig. 1.23 : Courbe expérimentale contrainte - déformation [ALSULAYFANI87] .

1.1.3.3. Charges alternées :

Sur la base d'essais faits au L.M.T. (Cachan) [RAMTANI90] , un modèle ,basée sur la théorie de l'endommagement élastique et la thermodynamique des processus irréversibles , est

développé pour le béton sous charges cycliques alternées [LABORDERIE91] . L'auteur utilise le caractère unilatéral c'est à dire la différenciation dans la loi de comportement des effets de traction et des effets de compression dont une loi générale a été proposée par Ladevèze [MAZARS87] . La formulation du modèle est isotrope ; elle est limitée dans la description des déformations transversales et volumiques . En effet , le modèle donne les mêmes déformations anélastiques dans les directions transversale et longitudinale , alors que les essais montrent qu'elles sont de signes opposées .

Le modèle uniaxial dépend de dix paramètres dont sept sont déterminés par des essais de compression et de traction monotones . Il est introduit dans un code numérique ; les résultats des comparaisons faites entre le modèle et les essais présentés semblent en accord avec les hypothèses prises par l'auteur .La figure 1.24 présente la simulation du modèle pour un essai de traction - compression .

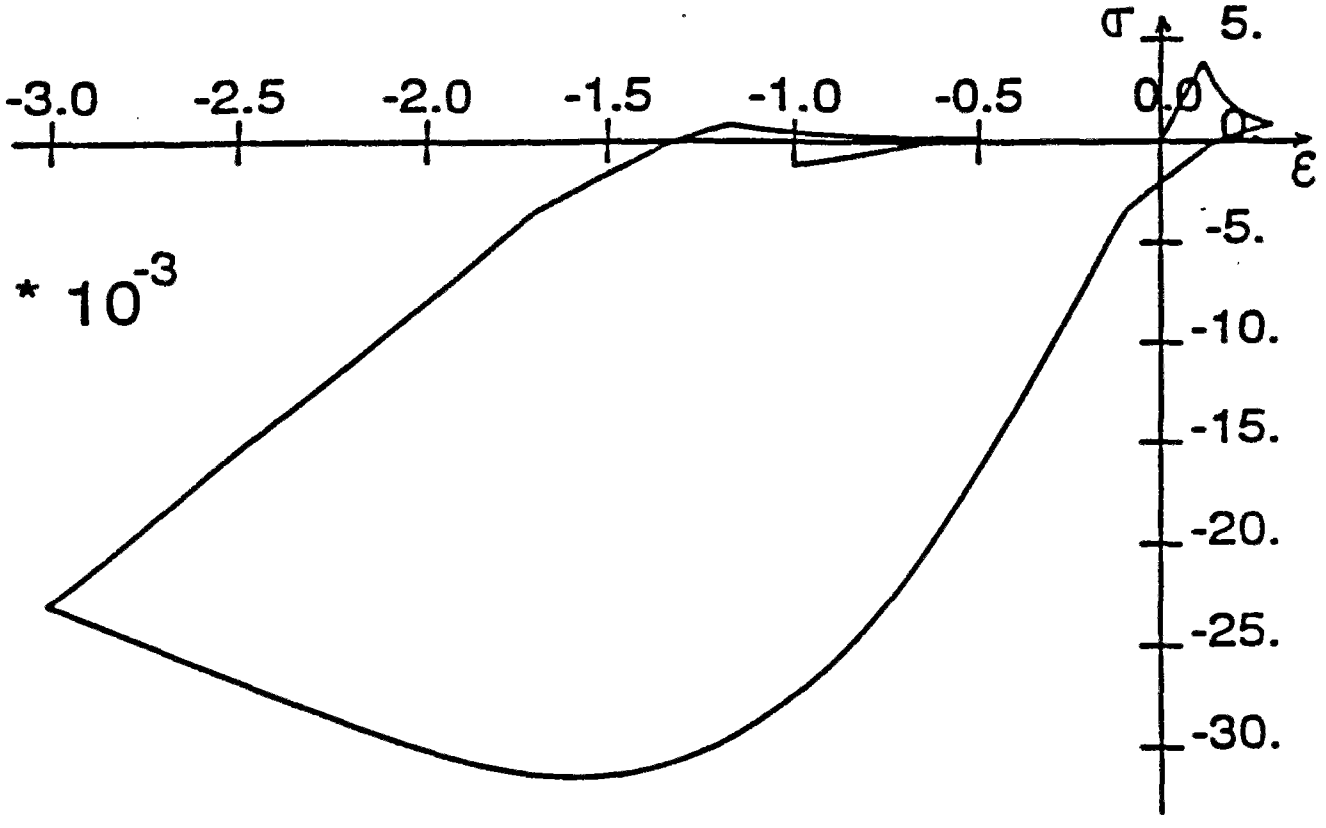


Fig. 1.24 : Simulation d'un essai de traction - compression [LABORDERIE91].

1.2. L'ACIER

1.2.1 Chargement monotone

La loi contrainte - déformation de l'acier sous chargement monotone est bien connue. Cette loi présente successivement des parties élastique, plastique et écrouie. Dans le cas de l'acier naturel, la partie écrouie n'existe pas. Cette loi est supposée la même en traction et en compression. Des résultats d'essais confirment la validité de cette hypothèse [KATO79] (Fig. 1.25).

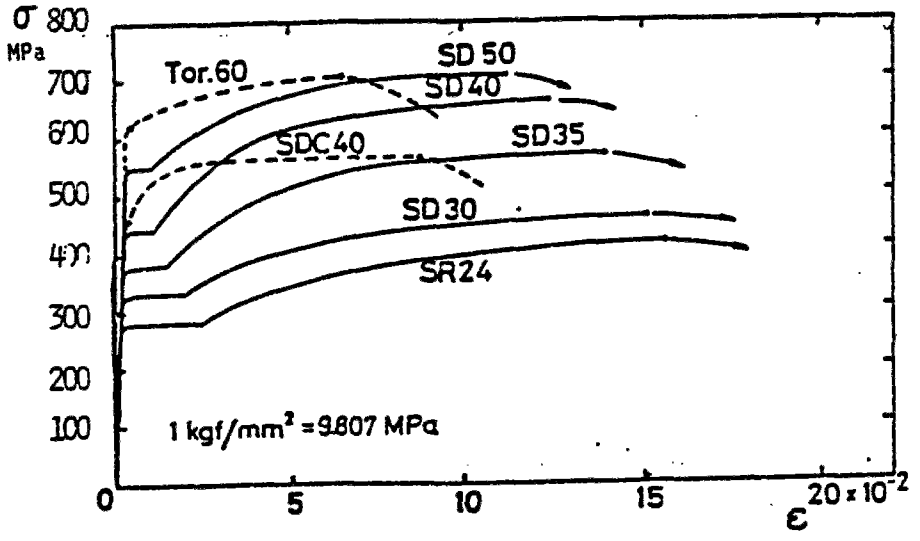


Fig. 1.25 : Courbe contrainte - déformation de quelques types d'acier [KATO79].

1.2.2 Chargement cyclique

1.2.2.1 Chargement cyclique de même signe

Sous une charge répétée de même signe, les courbes de déchargement et de rechargement suivent la pente élastique initiale de la courbe contrainte - déformation. Lorsque la charge dépasse le niveau de la charge précédente à partir de laquelle la décharge avait été effectuée, la courbe contrainte - déformation continue comme si la charge n'avait pas eu lieu.

La courbe contrainte - déformation monotone forme une enveloppe pour les courbes sous charges répétées de même signe indépendamment du fait que le chargement soit effectué dans la zone élastique, plastique ou écrouie (Fig. 1.26).

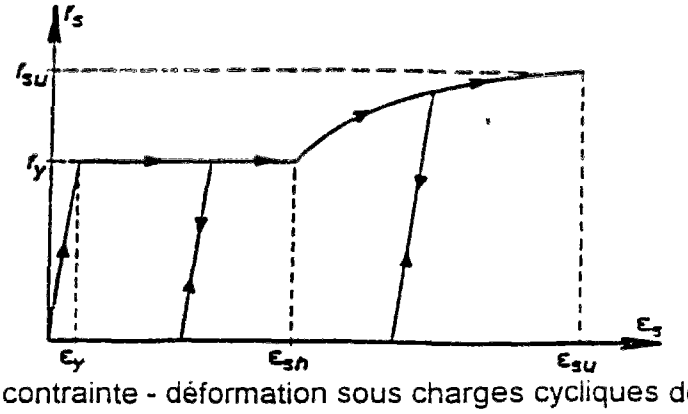


Fig. 1.26 : Courbe contrainte - déformation sous charges cycliques de même signe.

1.2.2.2 Chargement cyclique alterné

Les chargements alternés, dans le domaine sismique par exemple, provoquent dans les armatures de structures en béton armé des contraintes qui atteignent rapidement la phase post - élastique. La réponse de la structure dans le domaine fissuré est , en conséquence, largement dépendante des caractéristiques mécaniques de l'acier et à ses modes de rupture.

De plus, il est connu, qu'à partir de la première inversion du sens de chargement, on observe une non - linéarité de la courbe contrainte - déformation avant même d'atteindre la limite élastique du métal, elle-même affaiblie. Ce phénomène est appelé effet de Bauschinger (Fig. 1.27). Ce comportement est fortement influencé par l'histoire des déformations antérieures (Fig. 1.28).

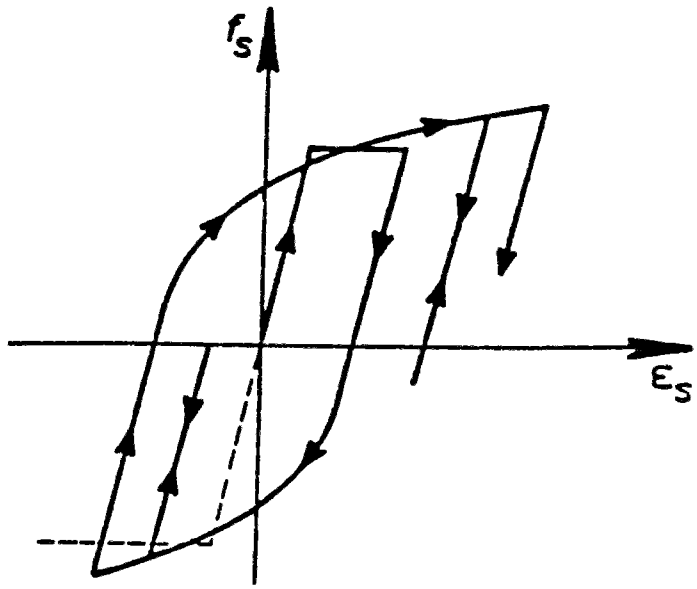


Fig. 1.27 : Courbe contrainte - déformation sous charge cyclique alternée. Effet Bauschinger.

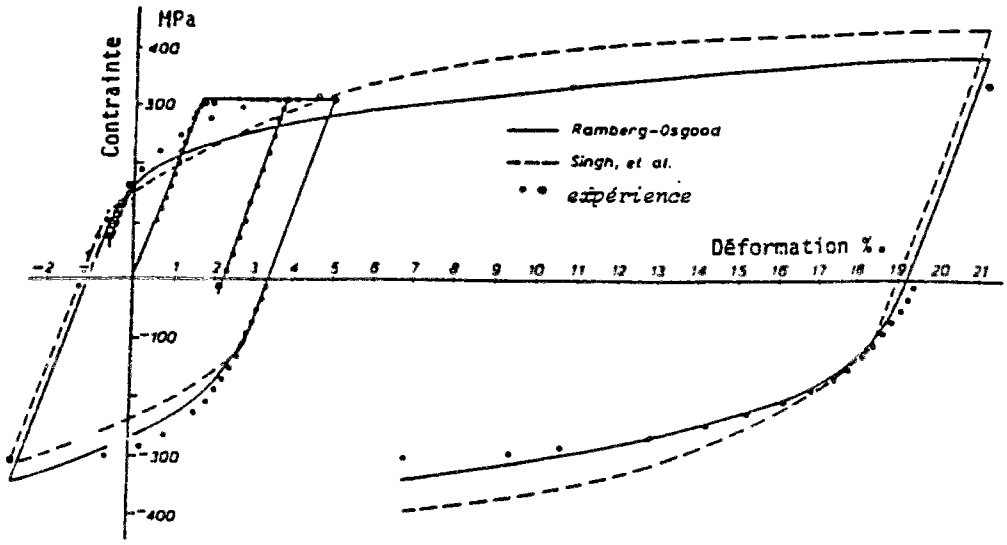


Fig. 1.28 : Courbes contrainte - déformation théorique et expérimentale de l'acier [PARK75].

1.2.2.3 Modèles empiriques :

Les courbes contrainte-déformation et moment-courbure ont une importance particulière lors de l'analyse des structures en béton armé soumises aux charges de type sismique . Plusieurs modèles sont proposés dans la littérature . Nous n'en citons que quelques uns pour montrer l'importance de la modélisation du comportement de l'acier sous chargement cyclique dans l'analyse des structures .

a . Modèle élastoplastique :

C'est le modèle le plus simple . Décharge et recharge se font sur la même droite avec la même pente que celle de la partie élastique (fig. 1.29) . Si le seuil de plasticité reste le même en traction et en compression , on dit que le modèle est élastoplastique parfait .

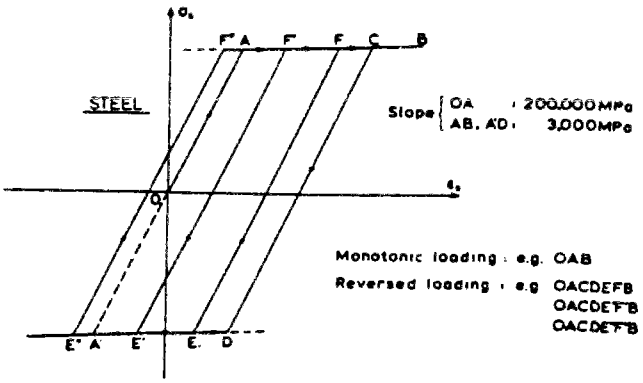


Fig. 1.29 :Courbe contrainte déformation simplifiée de l'acier sous chargement cyclique alterné .

b . Modèle de Kent et Park :

Ce modèle utilise les équations de Ramberg - Osgood pour idéaliser les branches de chargement dans les deux sens . Les branches de déchargement pour les contraintes de compression et de traction suivent la pente élastique initiale . Après la première inversion , les parties de chargement de la courbe contrainte - déformation sont représentées par les équations de Ramberg - Osgood suivantes :

$$\varepsilon_s - \varepsilon_{si} = \frac{\sigma_s}{E_s}\left(1+\left|\frac{\sigma_s}{\sigma_{ch}}\right|^{r-1}\right) \qquad (1\text{-}4)$$

ε_s : déformation de l'acier .

ε_{si} : déformation de l'acier pour une contrainte nulle au début de chargement .

σ_s :contrainte dans l'acier .

E_s :module de l'élasticité de l'acier.

σ_{ch} :contrainte dépendant de la résistance à l'écoulement et de la déformation plastique dans l'acier produite dans le cycle de chargement précédent .

r : paramètre dépendant du nombre de cycle de chargement .

La figure 1.30 montre qu'il y a corrélation entre la courbe expérimentale et la courbe obtenue par l'équation Ramberg - Osgood . Néanmoins , ce modèle n'a jamais été testé pour des déformations supérieures à 27 10^{-3} qui est largement suffisante pour le calcul des structures en béton armé .

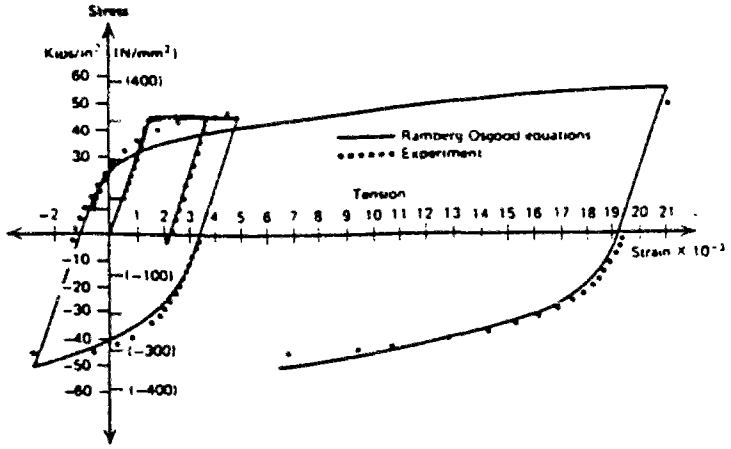


Fig. 1.30 : Modèle de Kent et Park .

c . Modèle de Kato ,Akiyama et Yamanouchi :

Ce modèle est basé sur l'observation de plusieurs courbes expérimentales contrainte - déformation . Les auteurs obtiennent la courbe contrainte - déformation pour chargement alterné et pour chargement monotone de compression et traction de la manière illustrée sur la figure 1.31 . La comparaison entre la courbe expérimentale et la courbe analytique montre un bon accord entre les deux courbes .

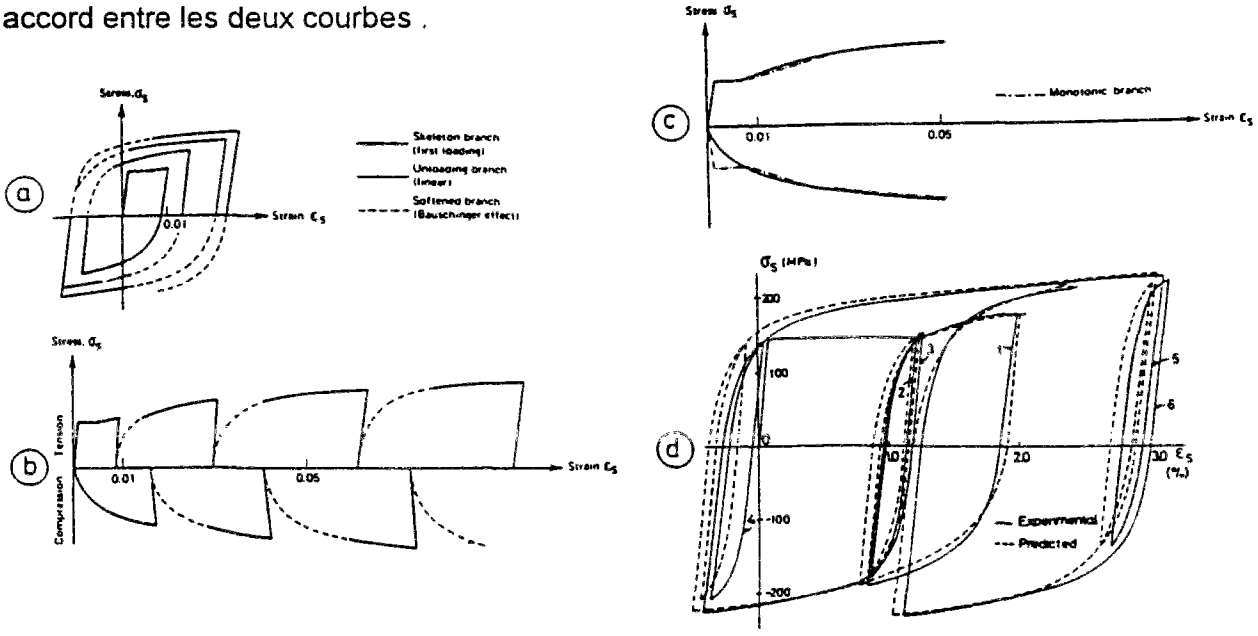


Fig. 1.31 :Modèle de Kato , Akiyama et Yamanouchi .: a - Courbes de chargement alterné ; b - Expansion des courbes de chargement alterné ; c - Courbes monotones ;d - Application du modèle .

d . Modèle de Aktan , Karlson et Sozen :

Les différentes branches de la courbe contrainte - déformation sont définies par les équations mathématiques suivantes:

- partie élastique : $\sigma=E\varepsilon$ pour $\varepsilon \leq \varepsilon_y$;

- plateau plastique : $\sigma=\sigma_y$ pour $\varepsilon_y<\varepsilon<4{,}2447\varepsilon_y$;

- région d'écrouissage : la fonction de Ramberg - Osgood est utilisée pour décrire la relation contrainte - déformation pour chaque demi-cycle entre deux inversions de la contrainte , comme par exemple AB ou BC sur la figure 1.32 .

$$\frac{\varepsilon-\varepsilon_i}{\varepsilon_0}=\frac{\sigma-\sigma_i}{\sigma_0}+\left(\frac{\sigma-\sigma_i}{\sigma_0}\right)^{\alpha} \qquad (1\text{-}5)$$

avec σ_i , ε_i les valeurs initiales , respectivement , de la contrainte et de la déformation au début du demi-cycle (σ_1 , ε_1 pour AB et σ_2, ε_2 pour BC) . Un processus itératif , utilisant la technique des moindres carrés , est appliqué aux données expérimentales pour déterminer les paramètres σ_0,ε_0 et α pour chaque demi-cycle . Une bonne corrélation est trouvée entre les courbes expérimentales et analytiques (fig. 1.33) .

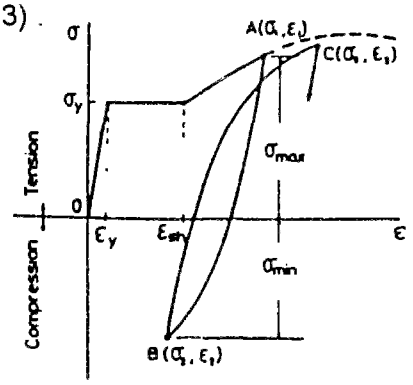


Fig. 1.32 : Modèle de Aktan et col. .

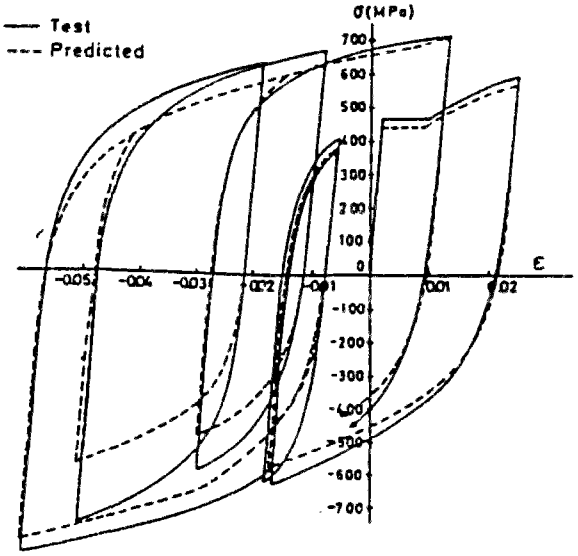


Fig. 1.33 : Application du modèle de Aktan et col..

e . Modèle de Giuffré , Menegotto et Pinto [FILIPPOU91]:

Le modèle original est représenté par les équations suivantes :

$$\sigma^* = b\varepsilon^* + \frac{(1-b)\varepsilon^*}{(1+(\varepsilon^*)^R)^{1/R}} \qquad (1\text{-}6)$$

avec

$$\sigma^* = \frac{\sigma - \sigma_r}{\sigma_0 - \sigma_r} \qquad (1\text{-}7)$$

$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon - \varepsilon_r}{\varepsilon_0 - \varepsilon_r} \qquad (1\text{-}8)$$

L'équation 1-6 représente une courbe de transition entre une droite asymptotique de pente E_0 et une autre asymptote de pente E_1 (droites a et b sur la figure 1.34) . σ_0 et ε_0 sont , respectivement , la contrainte et la déformation au point de rencontre des deux asymptotes (point A sur la figure 1.34) ; σ_r et ε_r sont , respectivement , la contrainte et la déformation au point de la dernière inversion de déformation avec la contrainte correspondante de même signe (point B sur la figure 1.34) ; b est le taux d'écrouissage qui est le rapport des pentes E_0 et E_1 , et R est un paramètre qui intervient sur la forme de courbe de transition et permet une bonne représentation de l'effet de Bauschinger .

Ce modèle n'est pas pratique du point de vue numérique car il demande de mémoriser plusieurs courbes en même temps telles que la courbe enveloppe , les branches des courbes de déchargement et de rechargement ainsi que la courbe actuelle . En raison de ce problème , les auteurs ont simplifié la formulation du modèle . Le modèle simplifié reproduit bien des résultats expérimentaux avec des histoires de chargement en traction et compression .

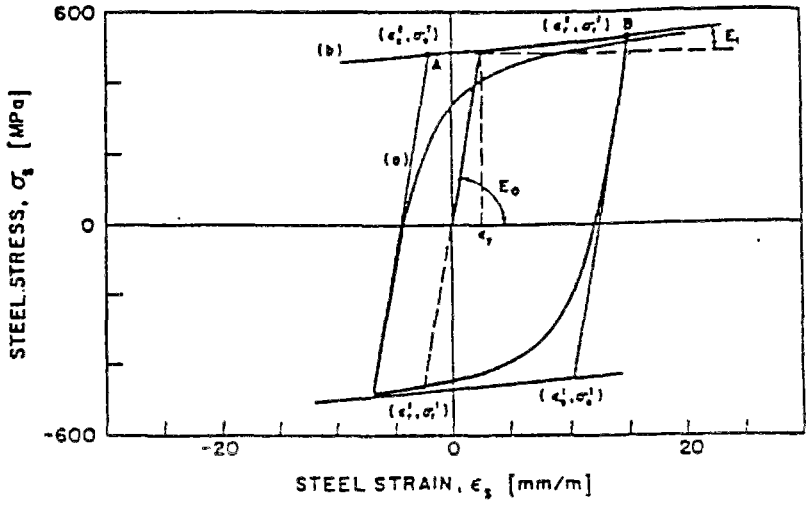


Fig. 1.34 : Modèle de Giuffré et col.

Les modèles cités plus haut ne sont pas exhaustifs . Ils ont été introduit afin de montrer l'importance de la loi contrainte - déformation de l'acier dans le comportement des éléments en béton armé soumis aux cycles intenses de charge de flexion . Dans la suite de notre travail , le modèle choisi est le modèle élastoplastique parfait où décharge et recharge se font sur la même droite de pente le module d'élasticité de l'acier à l'origine .

2 . MODELISATION DU COMPORTEMENT DU BETON SOUS CHARGES CYCLIQUES SELON LA THEORIE DE L'ENDOMMAGEMENT

2.1. BASES THEORIQUES :

2.1.1. Définitions:

La mécanique des milieux continus étudie les déplacements , les déformations et les champs de contraintes au sein des milieux continus . On désigne par milieu continu tout liquide , gaz ou solide , déformable ou non , quand on le considère d'un point de vue macroscopique , par opposition à une description corpusculaire . Cette discipline est conduite à partir de lois universelles de la physique : conservation de la masse , de la quantité de mouvement , lois fondamentales de la thermodynamique [DUVAUT90].

2.1.2. Thermodynamique des milieux continus :[LEMAITRE88]

Un rappel des principes de la thermodynamique est fait afin de permettre une meilleure compréhension du cadre choisi pour la modélisation du comportement du béton sous charges cycliques alternées .

2.1.2.1. Loi de la conservation de la masse :

$$\frac{d}{dt}\int_{\partial D}\rho dV = 0 \quad (2\text{-}1)$$

pour un domaine D de volume V et de frontière ∂D .

2.1.2.2. Premier principe de la thermodynamique :

En supposant l'hypothèse des petites perturbations , le premier principe de thermodynamique s'écrit :

$$\rho\dot{e} = \boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + r - \mathrm{div}\vec{q} \quad (2\text{-}2)$$

ρ : masse volumique .

e : énergie spécifique interne .

r : densité volumique de production de chaleur .

$\vec{q}$: vecteur courant de chaleur .

σ : tenseur de contrainte .

ε : tenseur de déformation .

2.1.2.3. Entropie , deuxième principe de la thermodynamique :

En supposant l'hypothèse des petites perturbations , l'inégalité de Clausius-Duhem pour le deuxième principe de la thermodynamique s'écrit :

$$\sigma : \dot{\varepsilon} - \dot{\Psi} - S\dot{T} - \frac{\bar{q}}{\rho}\frac{\overrightarrow{grad}T}{T} \geq 0 \quad (2\text{-}3)$$

σ : tenseur de contrainte .

ε : tenseur de déformation .

ρ : masse volumique .

Ψ : énergie libre volumique .

S : entropie volumique .

T : température .

$\bar{q}$: vecteur courant de chaleur .

2.1.3. Mécanique de l'endommagement :

Un matériau est considéré vierge de tout endommagement s'il est dépourvu de fissures et de cavités à l'échelle microscopique . Le stade final de l'endommagement est la rupture de l'élément de volume c'est à dire l'existence d'une fissure macroscopique de la taille de l'élément de volume représentatif qui , pour le béton , est estimé de l'ordre de dix centimètres .

La théorie de l'endommagement décrit l'évolution des phénomènes entre l'état vierge et l'amorçage de la fissure macroscopique .

2.1.3.1. Variable d'endommagement :

a. Définition :

Soit S l'aire d'une section d'un élément de volume repéré par sa normale $\vec{n}$. Soit S_D l'aire totale de l'ensemble des défauts (fig. 2.1) .

On appelle D_n la mesure mécanique de l'endommagement local relativement à la direction $\vec{n}$ .Par définition , on pose :

$$\frac{S_D}{S} = D_n \quad (2\text{-}4)$$

$D_n = 0$ correspond à l'état non endommagé ou vierge .

$D_n = 1$ correspond à l'élément de volume rompu en deux parties selon un plan normal à $\vec{n}$.

$0<D_n<1$ caractérise l'état d'endommagement .

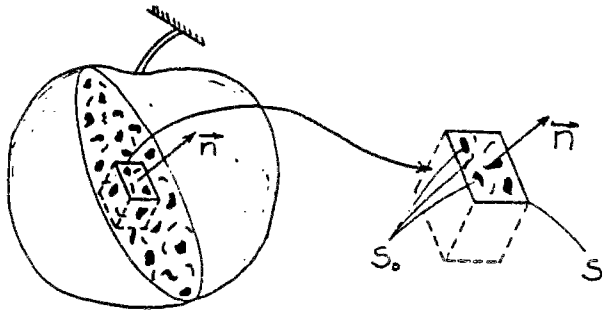


Fig. 2.1 : Elément endommagé .

Dans le cas général d'un endommagement anisotrope constitué de fissures et de cavités d'orientations privilégiées , la valeur de la variable scalaire D_n dépend de l'orientation de la normale . Cette variable sera représentée par un tenseur pour tenir compte du changement de valeur de la variable D_n pour chaque orientation de la normale $\bar{n}$.

b. Hypothèse d'isotropie :

Un endommagement isotrope est constitué de fissures et cavités dont l'orientation est distribuée uniformément dans toutes les directions . Dans ce cas , la valeur de la variable D_n ne dépend pas de l'orientation de la normale $\vec{n}$ et le scalaire D caractérise complètement l'état de dommage . Pour cette étude , nous nous limitons au cas de l'endommagement isotrope .

$$D_n = D \quad \forall \bar{n} \quad (2\text{-}5)$$

2.1.3.2. Contrainte effective :

a . Définition :

La contrainte effective , notée $\tilde{\sigma}$, est la contrainte rapportée à la section qui résiste effectivement aux efforts . Pour le cas unidimensionnel , on a :

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1-D} \quad (2\text{-}6)$$

Dans le cas tridimensionnel d'un endommagement isotrope , on écrit pour le tenseur contrainte effective $\tilde{\sigma}$:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{1-D} \quad (2\text{-}7)$$

b . Principe d'équivalence en déformation :

"Tout comportement à la déformation , unidimensionnel ou tridimensionnel , d'un matériau endommagé est traduit par les lois de comportement du matériau vierge dans lesquelles on remplace la contrainte usuelle par la contrainte effective [LEMAITRE88]" .

Par exemple , la loi d'élasticité linéaire unidimensionnelle d'un matériau endommagé s'écrit :

$$\varepsilon_e = \frac{\tilde{\sigma}}{E} = \frac{\sigma}{(1-D)E} \quad (2\text{-}8)$$

avec E module de Young .

c . Endommagement critique à rupture :

On définit la valeur critique de l'endommagement D_{cr} qui correspond à la rupture par décohésion interatomique [LEMAITRE88].

Si $\tilde{\sigma}_u$ est la contrainte unidimensionnelle de rupture et σ_u la contrainte de rupture ultime usuelle , on a :

$$\tilde{\sigma}_u = \frac{\sigma_u}{1-D_{cr}} \quad (2\text{-}9)$$

$$\Rightarrow D_{cr} = 1 - \frac{\sigma_u}{\tilde{\sigma}_u} \quad (2\text{-}10)$$

2.2. MODELE PROPOSE :

Dans le cadre de la mécanique des milieux continus et de la thermodynamique des processus irréversibles , nous étudions le comportement du béton sous charges cycliques alternées en utilisant la théorie de l'endommagement sous l'hypothèse des petites perturbations .

2.2.1. Etude thermodynamique :

La dégradation du béton est due , essentiellement , à la création de microfissures et de microcavités qui créent , en même temps ,des déformations résiduelles et une perte de raideur [HERMAN88] . On suppose que ces deux phénomènes sont couplés et que c'est l'endommagement qui permettra de les décrire [LABORDERIE91] .

2.2.1.1. Variables d'état :

Nous nous intéressons à une modélisation du comportement mécanique du béton qui est différent en traction et en compression . Ce caractère peut s'interpréter dans le cas de l'endommagement ; les microcavités et les microfissures au sein du matériau endommagé ont nécessairement un caractère unilatéral suivant qu'elles sont ouvertes ou fermées [LADEVEZE83] . De ce fait , deux variables internes , D_t et D_c , sont considérées , respectivement , la première pour le comportement de l'endommagement en traction et la seconde pour le comportement de l'endommagement en compression .

Des études préalables ont montré que , dans le cadre d'un modèle associé , les variables associées à l'endommagement représentent mieux le comportement caractéristique du béton (notamment en compression) si le potentiel d'état est l'enthalpie libre ou l'énergie libre de Gibbs [LABORDERIE91]. En adoptant cette énergie comme potentiel d'état , la contrainte devient variable observable en plus de la température .

	variables d'état		variables associées
	variables observables	variables internes	
thermo-élasticité	T σ		S entropie ε déformation
endommagement et dégradation		D_t D_c	Y_t, Y_c taux de restitution d'énergie volumique

2.2.1.2. Potentiel d'état :

Soit X le potentiel d'état :

$$X = X(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, D_t, D_c)$$

Nous postulons la décomposition suivante du potentiel d'état en deux termes élastique et anélastique :

$$X = X_e(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, D_t, D_c) + X_{an}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, D_t, D_c)$$

Les équations des énergies libres sont définies par [LUBLINER72] :

- énergie libre de Helmotz : $\Psi = E - TS$ (2-11)

- énergie libre de Gibbs : $X = \boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon} - E + TS$ (2-12)

où (:) désigne le double produit contracté .

En appliquant l'inégalité de Clausius-Duheim pour le deuxième principe de la thermodynamique , on peut écrire en mettant l'équation (2-11) dans l'équation (2-3) :

$$\boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + T\dot{S} - \dot{E} - \frac{1}{\rho}.\frac{\vec{q}}{T}\vec{\text{grad}}T \geq 0 \quad (2\text{-}13)$$

La dérivée de l'équation (2-12) donne :

$$T\dot{S} - \dot{E} + \boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{X} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}:\boldsymbol{\varepsilon} - \dot{T}S \quad (2\text{-}14)$$

En introduisant l'équation (2.14) dans l'équation (2.13) , on obtient :

$$\dot{X} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}:\boldsymbol{\varepsilon} - \dot{T}S - \frac{1}{\rho}.\frac{\vec{q}}{T}\vec{\text{grad}}T \geq 0 \quad (2\text{-}15)$$

L'équation (2-15) est une autre forme d'écriture de l'inégalité de Clausius-Duhem qui garantit la positivité de la dissipation .

En supposant la dissipation thermique découplée , on en déduit :

$$\varepsilon = \frac{\partial X}{\partial \sigma} \quad (2\text{-}16)$$

$$S = \frac{\partial X}{\partial T} \quad (2\text{-}17)$$

$$\frac{\partial X}{\partial D_i}\dot{D}_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \vec{q}\frac{\vec{grad}T}{T} \geq 0 \quad (2\text{-}18)$$

Pour prendre en compte l'indépendance des raideurs en traction et en compression (caractère unilatéral) , les variables d'endommagement doivent intervenir dans le potentiel d'état sur des termes différents privilégiant soit la traction soit la compression . Le tenseur des contraintes est décomposé dans le repère principal en parties positive σ^+ et négative σ^- . Ladevèze [LADEVEZE83] montre que :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \sigma^+ : \sigma^+}{\partial \sigma} = \sigma^+ \quad (2\text{-}19)$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \sigma^- : \sigma^-}{\partial \sigma} = \sigma^- \quad (2\text{-}20)$$

et d'une façon triviale , on obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial (< \mathrm{Trace}\sigma >^+)^2}{\partial \sigma} = < \mathrm{Trace}\sigma >^+ . I \quad (2\text{-}21)$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial (< \mathrm{Trace}\sigma >^-)^2}{\partial \sigma} = < \mathrm{Trace}\sigma >^- . I \quad (2\text{-}22)$$

ou **I** est le tenseur identité .

a. Potentiel élastique :

L'expression de l'énergie X_e est établie en imposant les règles suivantes :

- Pour $D_t=D_c=0$, on doit retrouver l'énergie de déformation élastique du milieu non endommagé .

- Conserver la convexité du potentiel par rapport aux contraintes ; pour cela , il faut montrer que la dérivée seconde du potentiel par rapport à la contrainte est définie positive .

- Indépendance des raideurs en traction et en compression : caractère unilatéral .

Nous faisons un premier choix du potentiel élastique qui satisfait la première règle énoncée ci-dessus en considérant que les deux variables d'endommagement interviennent dans la partie volumique de l'énergie .

$$X_e = \frac{\boldsymbol{\sigma}^+:\boldsymbol{\sigma}^+}{2E_0(1-D_c)} + \frac{\boldsymbol{\sigma}^-:\boldsymbol{\sigma}^-}{2E_0(1-D_t)} + \frac{\nu}{2E_0}\frac{\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\sigma} - (\mathrm{Trace}\boldsymbol{\sigma})^2}{(1-D_t)(1-D_c)} \quad (2\text{-}23)$$

Il est aisé de voir que pour $D_t=D_c=0$:

$$X_e = \frac{1+\nu}{2E_0}\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{2E_0}(\mathrm{Trace}\boldsymbol{\sigma})^2 \quad (2\text{-}24)$$

qui représente le potentiel élastique du matériau sain .

Afin de simplifier les calculs pour démontrer la convexité du potentiel par rapport aux contraintes , nous nous plaçons dans le repère principal des contraintes que nous posons , par hypothèse , celui des déformations .

Soient $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ les contraintes principales . Soit J tel que :

$$J_{ij} = \frac{\partial^2 X_e}{\partial\sigma_i \partial\sigma_j} \quad (2\text{-}25)$$

et soit :

$$h_i=1 \quad \text{si} \quad \sigma_i > 0 \quad (2\text{-}26)$$

$$h_i=0 \quad \text{si} \quad \sigma_i < 0 \quad (2\text{-}27)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial X_e}{\partial\sigma} = \frac{\boldsymbol{\sigma}^+}{E_0(1-D_c)} + \frac{\boldsymbol{\sigma}^-}{E_0(1-D_t)} + \frac{\nu(\boldsymbol{\sigma} - \mathrm{Trace}\boldsymbol{\sigma}.1)}{E_0(1-D_c)(1-D_t)} \quad (2\text{-}28)$$

$$\Rightarrow \varepsilon_i = \frac{h_i\sigma_i}{E_0(1-D_c)} + \frac{(1-h_i)\sigma_i}{E_0(1-D_t)} + \frac{\nu}{E_0}\frac{\sigma_i - (\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)}{(1-D_c)(1-D_t)} \quad (2\text{-}29)$$

Soient :

$$\lambda_i = \frac{h_i}{1-D_c} + \frac{1-h_i}{1-D_t}$$

$$\mu = \frac{\nu}{(1-D_c)(1-D_t)} \quad (2\text{-}31)$$

$$\Rightarrow \varepsilon_i = \frac{\lambda_i\sigma_i}{E_0} + \frac{\mu}{E_0}\left[\sigma_i - (\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)\right] \quad (2\text{-}32)$$

$$\Rightarrow J = \begin{bmatrix} \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\sigma_1} & \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\sigma_2} & \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\sigma_3} \\ \frac{\partial\varepsilon_2}{\partial\sigma_1} & \frac{\partial\varepsilon_2}{\partial\sigma_2} & \frac{\partial\varepsilon_2}{\partial\sigma_3} \\ \frac{\partial\varepsilon_3}{\partial\sigma_1} & \frac{\partial\varepsilon_3}{\partial\sigma_2} & \frac{\partial\varepsilon_3}{\partial\sigma_3} \end{bmatrix} \quad (2\text{-}33)$$

$$\Rightarrow J = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} \lambda_1 & -\mu & -\mu \\ -\mu & \lambda_2 & -\mu \\ -\mu & -\mu & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}34)$$

Pour que J soit défini positif , il faut que les trois mineurs J_1 , J_2 , J_3 définis par:

$$J_1 = \frac{1}{E}|\lambda_1| \quad (2\text{-}35)$$

$$J_2 = \frac{1}{E}\begin{vmatrix} \lambda_1 & -\mu \\ -\mu & \lambda_1 \end{vmatrix} \quad (2\text{-}36)$$

$$J_3 = \frac{1}{E}\begin{vmatrix} \lambda_1 & -\mu & -\mu \\ -\mu & \lambda_2 & -\mu \\ -\mu & -\mu & \lambda_3 \end{vmatrix} \quad (2\text{-}37)$$

soient positifs .

Il parait évident que :

$$\forall h_1 \in [0,1], \forall (D_c, D_t) \in [0,1[\times [0,1[$$
$$\lambda_1 > 0 \Rightarrow J_1 > 0$$

Le calcul du deuxième mineur donne :

$$J_2 = \frac{1}{E_0}(\lambda_1\lambda_2 - \mu^2) = \frac{1}{E_0}\left[\left(\frac{h_1}{1-D_c} + \frac{1-h_1}{1-D_t}\right)\left(\frac{h_2}{1-D_c} + \frac{1-h_2}{1-D_t}\right) - \frac{\nu^2}{(1-D_t)^2(1-D_c)^2}\right] \quad (2\text{-}38)$$

Nous calculons J_2 pour toutes les valeurs possibles de h_1 et h_2 :

$$h_1 = 1, h_2 = 0 \Rightarrow J_{21} = \frac{1}{E_0}\left[\frac{1}{(1-D_c)(1-D_t)} - \frac{\nu^2}{(1-D_c)^2(1-D_t)^2}\right] \quad (2\text{-}39)$$

$$h_1 = 1, h_2 = 1 \Rightarrow J_{22} = \frac{1}{E_0}\left[\frac{1}{(1-D_c)^2} - \frac{\nu^2}{(1-D_t)^2(1-D_c)^2}\right] \quad (2\text{-}40)$$

$$h_1 = 0, h_2 = 0 \Rightarrow J_{23} = \frac{1}{E}\left[\frac{1}{(1-D_t)^2} - \frac{\nu^2}{(1-D_t)^2(1-D_c)^2}\right] \quad (2\text{-}41)$$

Pour que l'équation (2-39) soit positive , il faut que :

$$(1-D_c)(1-D_t) > \nu^2 \quad (2\text{-}42)$$

Or l'équation (2-42) n'est pas toujours vérifiée . Suite à ce résultat , nous concluons que le choix de l'équation (2-23) pour le potentiel élastique n'est pas satisfaisant . Afin de pallier cette difficulté , nous ne faisons pas intervenir D_c et D_t dans la partie volumique du potentiel élastique . Désormais , nous écrirons le potentiel élastique :

$$X_e = \frac{\sigma^+ : \sigma^+}{2E_0(1-D_c)} + \frac{\sigma^- : \sigma^-}{2E_0(1-D_t)} + \frac{\nu}{2E_0}\left[\sigma : \sigma - (\mathrm{Trace}\,\sigma)^2\right] \quad (2\text{-}43)$$

Le calcul de J_2 pour l'équation 2-43 donne :

$$J_2 = \frac{1}{E_0}\left[\left(\frac{h_1}{1-D_c} + \frac{1-h_1}{1-D_t}\right)\left(\frac{h_2}{1-D_c} + \frac{1-h_2}{1-D_t}\right) - \nu^2\right] \quad (2\text{-}44)$$

avec

$$h_1 = 1, h_2 = 0 \Rightarrow J_{21} = \frac{1}{E_0}\left[\frac{1}{(1-D_c)(1-D_t)} - \nu^2\right] \quad (2\text{-}45)$$

$$h_1 = 1, h_2 = 1 \Rightarrow J_{22} = \frac{1}{E_0}\left[\frac{1}{(1-D_C)^2} - \nu^2\right] \quad (2\text{-}46)$$

$$h_1 = 0, h_2 = 0 \Rightarrow J_{23} = \frac{1}{E_0}\left[\frac{1}{(1-D_t)^2} - \nu^2\right] \quad (2\text{-}47)$$

Les trois équations (2-45,2-46,2-47) sont positives si le coefficient de Poisson est strictement inférieur à un .

Le calcul de J_3 pour l'équation (2-43) donne :

$$J_3 = \frac{1}{E_0}\left[\lambda_1\lambda_2\lambda_3 - \mu^2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 2\mu)\right] \quad (2\text{-}48)$$

La valeur minimale de λ_i est 1 . Si nous prenons cette valeur pour le calcul de l'équation (2-48) , cette condition est la condition la plus restrictive quand nous comparons les deux termes composant la partie droite de l'équation . Nous pouvons donc écrire :

$$J_3 = \frac{1}{E_0}\left[1 - \mu^2(3 + 2\mu)\right] \quad (2\text{-}49)$$

Donc pour $J_3 > 0$ il faut que :

$$(1-2\mu)(\mu+1)^2 > 0 \Rightarrow (1-2\mu) > 0 \Leftrightarrow \mu < 0,5 \quad (2\text{-}50)$$

Or $\mu = \nu$; donc l'équation (2-50) est vérifiée puisque pour tout matériau élastique le coefficient de Poisson est inférieur à 0,5 .

Les trois mineurs étant positifs , J est donc défini positif . Par conséquent , le potentiel élastique est convexe par rapport aux contraintes . Nous l'écrirons de la manière suivante :

$$X_e = \frac{\sigma^+ : \sigma^+}{2E_0(1-D_c)} + \frac{\sigma^- : \sigma^-}{2E_0(1-D_t)} + \frac{\nu}{2E_0}\left[\sigma:\sigma - (\mathrm{Trace}\sigma)^2\right] \quad (2\text{-}51)$$

b . Potentiel anélastique :

La microfissuration du matériau est à l'origine de deux phénomènes : l'endommagement et les déformations anélastiques qui évoluent simultanément .

Les contraintes initiales dans le matériau , dues à la fabrication et à la dessiccation empêchent les microfissures de se refermer complètement pour un état de contrainte extérieur nulle ; il y a une présence de microvides à l'intérieur du matériau . Ces microvides sont la cause des déformations anélastiques [LABORDERIE91] .

En nous basant sur les travaux de Hermann [HERMANN88] ,de Ramtani [RAMTANI90] et de Laborderie [LABORDERIE91] , nous faisons le choix suivant pour l'équation du potentiel anélastique :

$$X_{an} = \frac{\beta_c f_c D_c}{E_0(1-D_c)}\mathrm{Trace}\sigma + \frac{\beta_t f_t D_t}{E_0(1-D_t)}\mathrm{Trace}\sigma \quad (2\text{-}52)$$

ou β_c et β_t sont des paramètres adimensionnelles et f_c et f_t sont , respectivement , la résistance à la compression et la résistance à la traction .

Par dérivation , nous obtenons le tenseur des déformations anélastiques :

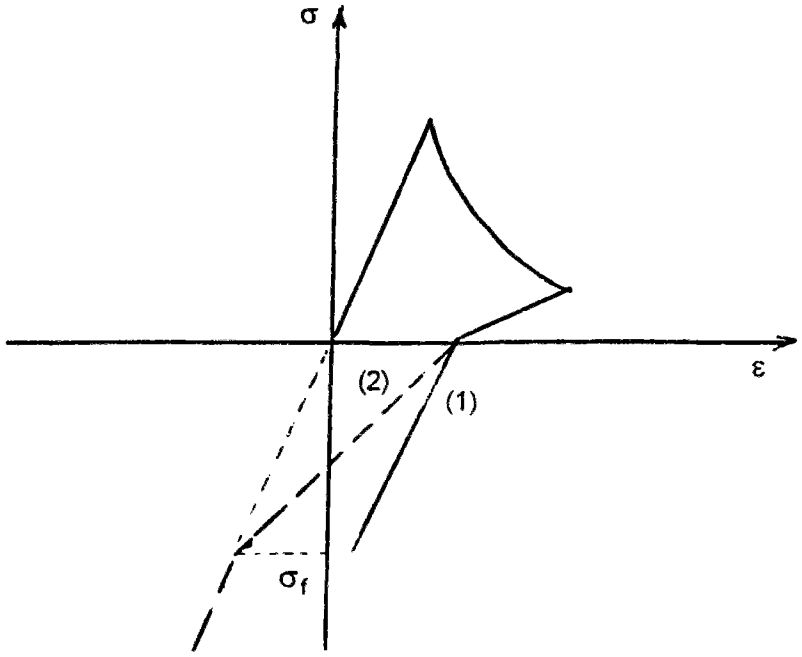
$$\varepsilon_{an} = \frac{\partial X_{an}}{\partial \sigma} = \frac{\beta_c f_c . \mathbf{I}}{E_0(1-D_c)} + \frac{\beta_t f_t . \mathbf{I}}{E_0(1-D_t)} \quad (2\text{-}53)$$

ou **I** est le tenseur identité .

On obtient des déformations anélastiques sphériques . Cette formulation isotrope est limitée dans la description de l'évolution des déformations transversale et volumique . Le modèle donnera les mêmes déformations anélastiques dans les directions transversale et longitudinale alors que les essais [LABORDERIE91] montrent qu'elles sont de sens opposées .

Nous considérons que lors du changement du signe de la contrainte les fissures se referment .Ceci bien sûr est en contradiction avec les observations faites sur les essais de Ramtani [RAMTANI90] ou on postule :"les déformations anélastiques créées par un état de traction s'annulent progressivement lors d'un chargement en compression . On pourra considérer qu'elles sont nulles pour une contrainte inférieure à une valeur fixe que nous appellerons contrainte de fermeture [LABORDERIE91] (fig. 2.2) " .

Cette hypothèse reste valable quand les microfissures sont créées par un chargement de traction et refermées par un chargement de compression . Si l'inverse en chargement se produit , l'hypothèse n'est plus valable car la contrainte de traction qu'il faudrait atteindre dépasserait la contrainte maximale de traction du matériau considéré .



(1) Loi de l'auteur : restitution de la raideur au changement de signe de la contrainte ; les déformations anélastiques de l'état de traction n'évoluent pas .

(2) Loi de Laborderie : les déformations anélastiques de l'état de traction évoluent linéairement jusqu'à s'annuler pour une contrainte égale à la contrainte de fermeture (σ_f) .

Fig. 2.2 : Déformations anélastiques au changement de signe de la contrainte .

Comme il ne nous a pas été possible de déterminer la contrainte de fermeture , nous écrivons , désormais , le potentiel anélastique de la manière suivante :

$$X_{an} = \frac{\beta_c f_c D_c}{E_0(1-D_c)} \text{Trace}\boldsymbol{\sigma} + \frac{\beta_t f_c D_t}{E_0(1-D_t)} \text{Trace}\boldsymbol{\sigma} \quad (2\text{-}54)$$

2.2.1.3. Critères d'endommagement :

Nous écrivons la loi d'évolution sous la forme :

$$\dot{D}_i = \dot{\lambda}_i \frac{\partial f}{\partial Y_i} \quad (2\text{-}55)$$

$\dot{\lambda}_i$ est le multiplicateur d'endommagement . Nous utilisons les fonctions seuil qui sont aussi fonctions de charge proposées à la référence [LABORDERIE91] et que nous écrivons sous la forme suivante :

$$f_i = Y_i - K_i(D_i) \quad (2\text{-}56)$$

Les équations (2-55,2-56) montrent que $\dot{D}_i = \dot{\lambda}_i$ (2-57)

La condition de consistance $f_i = 0$ et $\dot{f}_i = 0$ détermine l'évolution de λ . Nous pouvons , donc , écrire :

$$Y_i = K_i(D_i) \quad (2\text{-}58)$$

$$\dot{Y}_i = \frac{\partial K_i}{\partial D_i}\dot{D}_i \quad (2\text{-}59)$$

avec i = c , t .

Pour pouvoir satisfaire les équations ci-dessus , nous choisissons l'équation suivante pour l'évolution des variables d'endommagement :

$$K_i(D_i) = Y_{0_i}\left(1+\frac{a_i D_i}{1+D_i}\right)^{\frac{1}{b_i}} \quad (2\text{-}60)$$

où Y_{0_i} est le seuil d'endommagement initial , a_i et b_i sont des paramètres réels positifs à déterminer . Le choix de cette équation a été dicté surtout par la simplicité et un nombre minimal de paramètres à déterminer .

Les équations (2-57,2-59) nous permettent d'écrire :

$$\dot{\lambda}_i = \dot{D}_i = \dot{Y}_i \frac{(1+D_i)^2}{a_i b_i D_i Y_{0i}}\left(1+\frac{a_i D_i}{1+D_i}\right)^{\frac{b_i}{1-b_i}} \geq 0 \quad (2\text{-}61)$$

avec i = c , t .

Cette équation montre que la réponse reste élastique tant que $\dot{D}_i$ reste égal à zéro et $Y_i < Y_{0_i}$ c'est à dire $\dot{Y}_i = 0$. L'amorçage d'endommagement est fait dès que $Y_i = Y_{0_i}$ et $\dot{Y}_i > 0$ et la variable d'endommagement peut être calculée par l'équation suivante :

$$D_i = \frac{\left(\frac{Y_i}{Y_{0_i}} - 1\right)^{b_i}}{a_i + \left(\frac{Y_i}{Y_{0_i}} - 1\right)^{b_i}} \quad (2\text{-}62)$$

2.2.2. Récapitulatif :

2.2.2.1. Variables :

	variables d'état		variables associées
	variables observables	variables internes	
contrainte	σ		ε déformation
endommagement de traction		D_t	Y_t taux de restitution d'énergie volumique de traction
endommagement de compression		D_c	Y_c taux de restitution d'énergie volumique de compression

2.2.2.2. Potentiel d'état :

Le potentiel d'état est obtenu en additionnant les deux potentiels , élastique et anélastique .

$$X = \frac{\sigma^+ : \sigma^+}{2E_0(1-D_c)} + \frac{\sigma^- : \sigma^-}{2E_0(1-D_t)} + \frac{\nu}{2E_0}\left[\sigma:\sigma - (\mathrm{Trace}\sigma)^2\right] + \frac{\beta_c f_c D_c}{E_0(1-D_c)}\mathrm{Trace}\sigma + \frac{\beta_t f_t D_t}{E_0(1-D_t)}\mathrm{Trace}\sigma \quad (2\text{-}63)$$

où $\sigma^-, \sigma^+, \sigma$ sont des tenseurs de contrainte .

2.2.2.3. Lois d'état :

Elles sont obtenues par dérivation du potentiel par rapport aux variables d'état et régissent l'évolution des variables associées .

- tenseur déformation:

$$\varepsilon = \frac{\partial X}{\partial \sigma} = \frac{\sigma^+}{E_0(1-D_c)} + \frac{\sigma^-}{E_0(1-D_t)} + \frac{\nu}{E_0}(\sigma - \text{Trace}\sigma.\mathbf{I}) + \frac{\beta_c f_c D_c}{E_0(1-D_c)}.\mathbf{I} + \frac{\beta_t f_t D_t}{E_0(1-D_t)}.\mathbf{I} \quad (2\text{-}64)$$

où $\mathbf{I}$ est le tenseur identité .

- taux de restitution d'énergie volumique :

$$Y_t = \frac{\partial X}{\partial D_t} = \frac{\sigma^-:\sigma^- + 2\beta_t f_t \text{Trace}\sigma}{2E_0(1-D_t)^2} \quad (2\text{-}65)$$

$$Y_c = \frac{\partial X}{\partial D_c} = \frac{\sigma^+:\sigma^+ + 2\beta_c f_c \text{Trace}\sigma}{2E_0(1-D_c)^2} \quad (2\text{-}66)$$

où β_t et β_c sont des paramètres à identifier .

2.2.2.4 Variables d'endommagement :

Les variables d'endommagement se déduisent des critères d'endommagement en prenant $b_i = b_t$ pour l'endommagement négatif et $b_i = b_c$ pour l'endommagement positif .

$$D_t = \frac{\left(\frac{Y_t}{Y_{0_t}} - 1\right)^{b_t}}{a_t + \left(\frac{Y_t}{Y_{0_t}} - 1\right)^{b_t}} \quad (2\text{-}67)$$

$$D_c = \frac{\left(\frac{Y_c}{Y_{0_c}} - 1\right)^{b_c}}{a_c + \left(\frac{Y_c}{Y_{0_c}} - 1\right)^{b_c}} \quad (2\text{-}68)$$

avec $Y_{0_t}, Y_{0_c}, a_t, a_c, b_t, b_c$ des paramètres réels positifs . La manière d'identifier ces paramètres sera décrite dans le chapitre suivant .

3 . MODELE UNIAXIAL POUR LE BETON

Les lois de comportement uniaxial sont usuellement employées dans l'étude du comportement des structures . Ces lois seront introduites dans le logiciel SNOB du CEBTP qui traite des ossatures à poutres et poteaux .

La loi de comportement du béton est la loi uniaxiale du modèle multiaxial développé au chapitre précédent . La principale hypothèse est l'isotropie de l'endommagement du béton ; elle nous a permis de considérer que le repère principal des contraintes est celui des déformations .

3.1. ECRITURE DU MODELE EN UNIAXIAL :

3.1.1. Loi contrainte - déformation :

En raison du caractère unilatéral , nous avons deux équations pour la loi contrainte-déformation , la première exprimant l'état de traction et la seconde l'état de compression .

$$\varepsilon = \frac{\sigma^-}{E_0(1-D_t)} + \frac{\beta_c f_c D_c}{E_0(1-D_c)} + \frac{\beta_t f_t D_t}{E_0(1-D_t)} \quad (3\text{-}1a)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma^+}{E_0(1-D_c)} + \frac{\beta_c f_c D_c}{E_0(1-D_c)} + \frac{\beta_t f_t D_t}{E_0(1-D_t)} \quad (3\text{-}1b)$$

σ^+ : contrainte normale en compression .

σ^- : contrainte normale en traction .

E_0 : module d'élasticité de Young .

D_c : variable d'endommagement de compression .

D_t : variable d'endommagement de traction .

β_c : paramètre d'anélasticité de compression .

β_t : paramètre d'anélasticité de traction .

f_c : résistance à la compression du béton .

f_t : résistance à la traction du béton .

3 . MODELE UNIAXIAL POUR LE BETON

Les lois de comportement uniaxial sont usuellement employées dans l'étude du comportement des structures . Ces lois seront introduites dans le logiciel SNOB du CEBTP qui traite des ossatures à poutres et poteaux .

La loi de comportement du béton est la loi uniaxiale du modèle multiaxial développé au chapitre précédent . La principale hypothèse est l'isotropie de l'endommagement du béton ; elle nous a permis de considérer que le repère principal des contraintes est celui des déformations .

3.1. ECRITURE DU MODELE EN UNIAXIAL :

3.1.1. Loi contrainte - déformation :

En raison du caractère unilatéral , nous avons deux équations pour la loi contrainte-déformation , la première exprimant l'état de traction et la seconde l'état de compression .

$$\varepsilon = \frac{\sigma^-}{E_0(1-D_t)} + \frac{\beta_c f_c D_c}{E_0(1-D_c)} + \frac{\beta_t f_t D_t}{E_0(1-D_t)} \quad (3\text{-}1a)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma^+}{E_0(1-D_c)} + \frac{\beta_c f_c D_c}{E_0(1-D_c)} + \frac{\beta_t f_t D_t}{E_0(1-D_t)} \quad (3\text{-}1b)$$

σ^+ : contrainte normale en compression .

σ^- : contrainte normale en traction .

E_0 : module d'élasticité de Young .

D_c : variable d'endommagement de compression .

D_t : variable d'endommagement de traction .

β_c : paramètre d'anélasticité de compression .

β_t : paramètre d'anélasticité de traction .

f_c : résistance à la compression du béton .

f_t : résistance à la traction du béton .

équations de la contrainte et du taux de restitution d'énergie volumique de la manière suivante :

$$\sigma = E_0(1-D)\left(\varepsilon - \frac{\beta_c f_c D_c}{E_0(1-D_c)} - \frac{\beta_t f_t D_t}{E_0(1-D_t)}\right)$$

ou

$$\sigma = E_0(1-D)(\varepsilon - \varepsilon_{an}) \quad (3\text{-}4)$$

En mettant l'équation (3-4) soit dans l' équation (3-2a) pour le cas de la compression, soit dans l'équation (3-3a) pour la traction , on obtient :

$$Y_i = \frac{1}{2}E_0(\varepsilon - \varepsilon_{an})^2 + \sigma\frac{\partial \varepsilon_{an}}{\partial D_i} \quad (3\text{-}5)$$

avec $\dfrac{\partial \varepsilon_{an}}{\partial D_c} = \dfrac{\beta_c f_c}{E_0(1-D_c)^2}$ et $\dfrac{\partial \varepsilon_{an}}{\partial D_t} = \dfrac{\beta_t f_t}{E_0(1-D_t)^2}$

Il est à noter que le signe de Y_i est toujours positif (β_i et σ sont toujours de même signe et f_c et f_t sont toujours donnés en valeur absolue) . On remarque que les contributions sont de nature différente dans l'expression de Y_i :

- une contribution classique correspondant au taux de restitution d'énergie élastique $\left(\frac{1}{2}E_0(\varepsilon - \varepsilon_{an})^2\right)$.

- une contribution moins classique $\left(\dfrac{\sigma\beta_i f_i}{E_0(1-D)^2}\right)$ qui est relative à l'énergie dissipée pendant le processus de création de déformations anélastiques induites par l'endommagement .

En nous basant sur les définitions données par Lemaitre [LEMAITRE88] sur le bilan des puissances dissipées en cours d'écoulement plastique et d'endommagement et en reprenant le schéma proposé dans la référence [RAMTANI90] , la figure 3.1 montre le bilan des puissances dissipées pour le cas uniaxial .

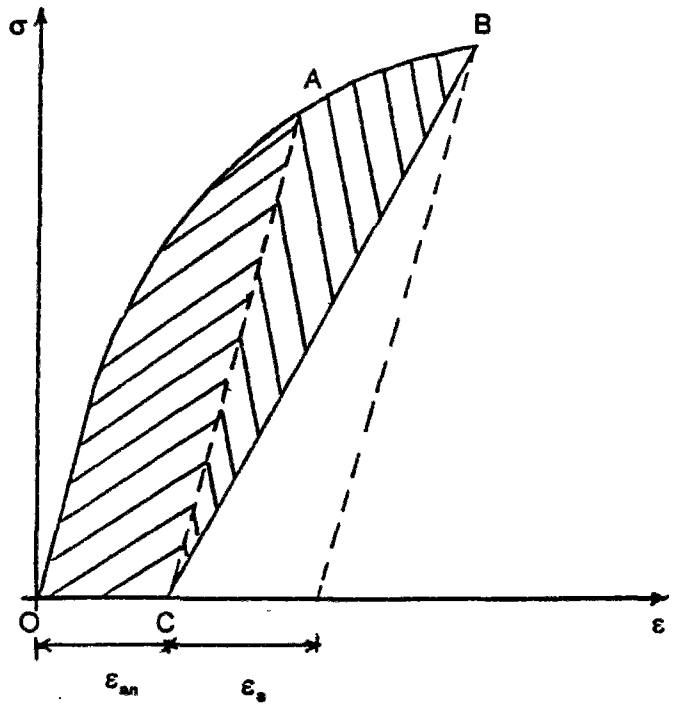


Fig. 3.1 : Bilan des puissances dissipées pour le cas uniaxial .

- L'aire OACO correspond à l'énergie dissipée lors du processus d'apparitions des déformations anélastiques $\left(\int\left(\sigma\frac{\partial\varepsilon_{an}}{\partial D}\right)\dot{D}\right)$.

- L'aire ABCA correspondant à $\int\frac{1}{2}E_0(\varepsilon-\varepsilon_{an})^2\dot{D}$ représente l'énergie dissipée par le processus de décohésion .

- L'aire totale OABCO correspond à la notion classique de l'énergie dissipée lors d'un chargement OAB suivi d'une décharge BC .

3.1.3 Lois d'évolution des variables d'endommagement :

L'évolution des variables d'endommagement de compression et de traction est donnée par les équations (3-4) et (3-5) . Les variables d'endommagement évoluent indépendamment l'une de l'autre dès que leur taux de restitution d'énergie respectif dépasse leur seuil initial d'endommagement respectif . En d'autres termes , nous pouvons avoir deux cas :

- Pour $\sigma > 0$, il y a possibilité d'évolution de D_c mais D_t ne peut pas évoluer .

- Pour $\sigma \leq 0$, il y a possibilité d'évolution de D_t mais D_c ne peut pas évoluer .

$$D_c = \frac{\left(\frac{Y_c}{Y_{0_c}} - 1\right)^{b_c}}{a_c + \left(\frac{Y_c}{Y_{0_c}} - 1\right)^{b_c}} \quad (3\text{-}4)$$

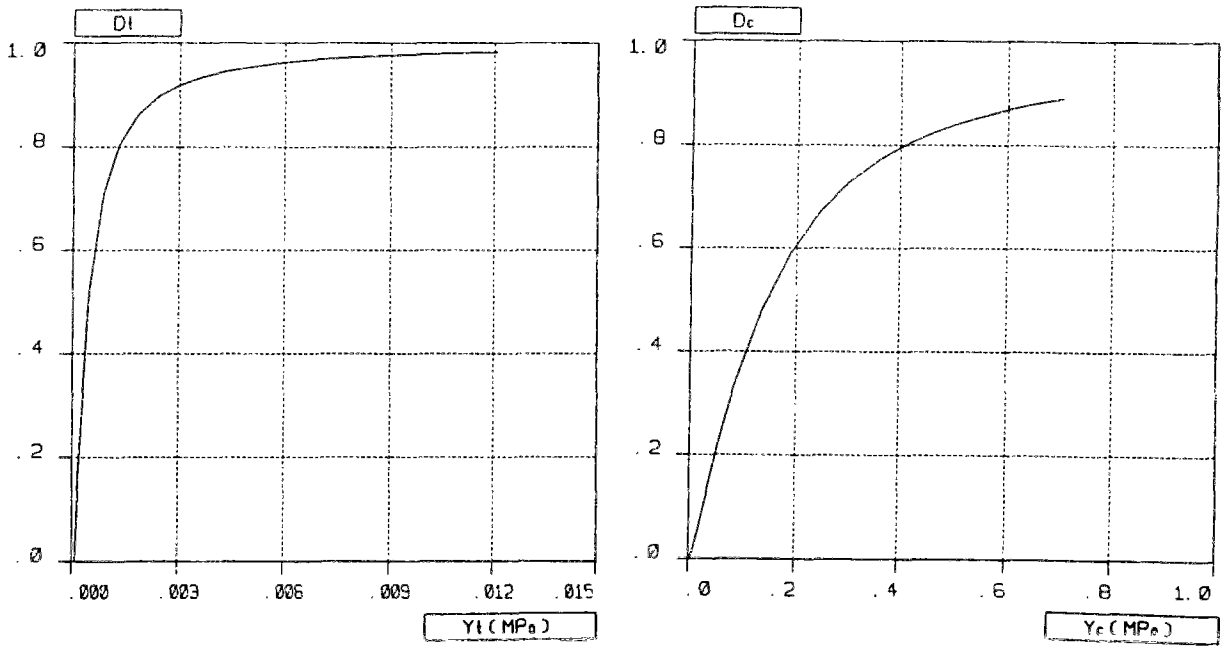
$$D_t = \frac{\left(\frac{Y_t}{Y_{0_t}} - 1\right)^{b_t}}{a_t + \left(\frac{Y_t}{Y_{0_t}} - 1\right)^{b_t}} \quad (3\text{-}5)$$

Y_{0_c} : seuil initial d'endommagement en compression .

Y_{0_t} : seuil initial d'endommagement de traction .

a_c, b_c, a_t, b_t : paramètres réels addimentionnels .

Les courbes de la figure 3.2 montrent que l'évolution de l'endommagement en traction est beaucoup plus rapide que celle de l'endommagement en compression .



(a) (b)

Fig. 3.2 : Evolution de l'endommagement (a) en traction (b) en compression .

3.2 ETUDE DU SIGNE DE LA CONTRAINTE :

3.2.1 Contrainte positive :

La déformation positive liée à une contrainte positive est associée dans le logiciel SNOB à un état de compression . Pour le cas du chargement cyclique dans le logiciel SCOB (Simulation du comportement Cyclique des Ossatures Bidimensionnelles) , l'état de compression du béton est associé à la contrainte positive quel que soit le signe de la déformation ; la figure 3.3 montre cet aspect pour un cycle compression -traction - compression .

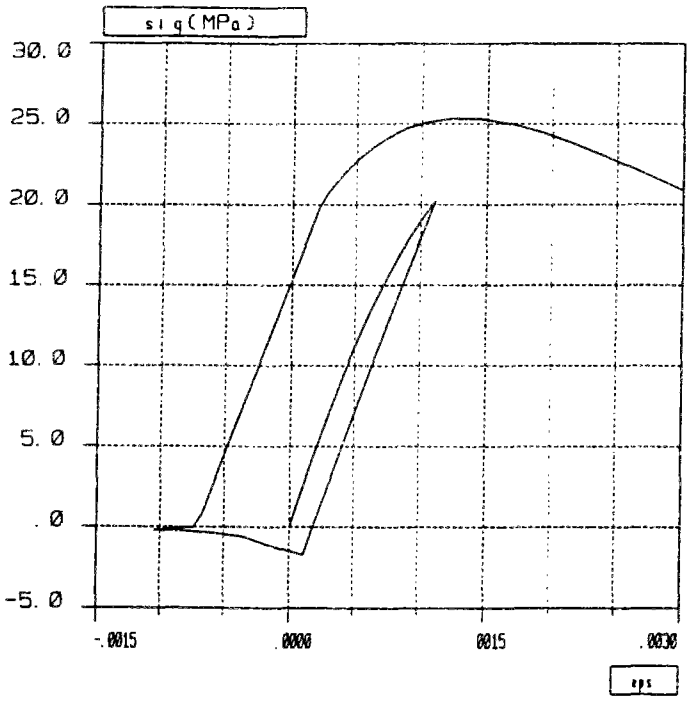


Fig. 3.3 : Cycle compression - traction - compression

Remarque : Nous constatons qu'au passage de l'état de traction (ouverture des fissures) vers l'état de compression (refermeture des fissures) la 'courbe' change brusquement de pente en ne récupérant pas une partie importante des déformations résiduelles comme cela s'observe physiquement sachant que les fissures ne se referment jamais parfaitement . Cependant , le modèle respecte l'hypothèse que nous avons émise au chapitre 2 (§ 2.2.1.2.b) et qui est expliquée à la figure 2.2 .

La loi contrainte - déformation s'écrit :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_0(1-D_c)} + \frac{\beta_c f_c D_c}{E_0(1-D_c)} + \frac{\beta_t f_t D_t}{E_0(1-D_t)} \quad (3\text{-}6)$$

Nous pouvons écrire la déformation sous la forme suivante :

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{an} \quad (3\text{-}7)$$

dans laquelle

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E_0(1-D_c)} \quad (3\text{-}8)$$

représente la partie élastique non - linéaire et

$$\varepsilon_{an} = \frac{\beta_c f_c D_c}{E_0(1-D_c)} + \frac{\beta_t f_t D_t}{E_0(1-D_t)} \quad (3\text{-}9)$$

la partie anélastique .

Nous pouvons aussi écrire la contrainte de la manière suivante :

$$\sigma = \varepsilon E_0(1-D_c) - \beta_c f_c D_c - \frac{\beta_t f_t D_t(1-D_c)}{(1-D_t)} \quad (3\text{-}10)$$

et la mettre sous la forme

$$\sigma = \sigma_e - \sigma_{an} \quad (3\text{-}11)$$

avec

$$\sigma_e = \varepsilon E_0(1-D_c) \quad (3\text{-}12)$$

la partie élastique non - linéaire et

$$\sigma_{an} = \beta_c f_c D_c + \frac{\beta_t f_t D_t(1-D_c)}{(1-D_t)} \quad (3\text{-}13)$$

la partie anélastique de la contrainte .

Pour que la contrainte soit positive ou nulle, il faut que :

$$\sigma \geq 0 \Leftrightarrow \varepsilon \geq \frac{\beta_c f_c D_c}{E_0(1-D_c)} + \frac{\beta_t f_t D_t}{E_0(1-D_t)} \quad (3\text{-}14)$$

3.2.2 Contrainte négative:

L'état de traction du béton est associé à la contrainte négative quel que soit le signe de la déformation ; la figure 3.4 montre cet aspect pour un cycle traction - compression - traction .

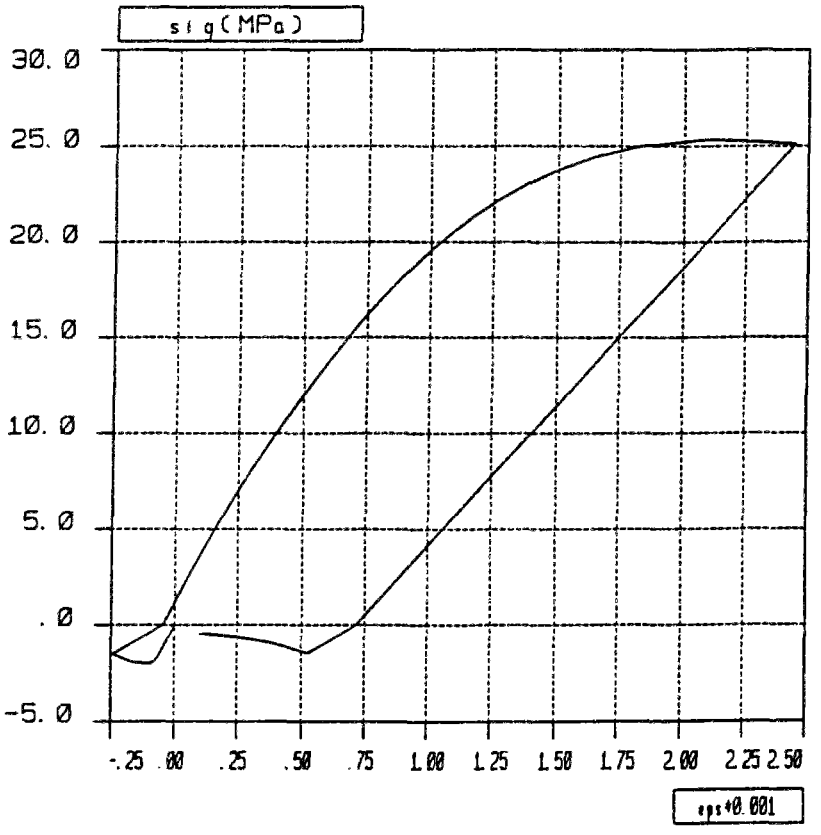


Fig. 3.4 : Cycle traction - compression - traction .

La loi contrainte - déformation s'écrit :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_0(1-D_t)} + \frac{\beta_c f_c D_c}{E_0(1-D_c)} + \frac{\beta_t f_t D_t}{E_0(1-D_t)} \quad (3\text{-}15)$$

Nous pouvons écrire la déformation sous la forme suivante :

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{an} \quad (3\text{-}16)$$

dans laquelle

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E_0(1-D_t)} \quad (3\text{-}17)$$

représente la partie élastique non - linéaire et

$$\varepsilon_{an} = \frac{\beta_c f_c D_c}{E_0(1-D_c)} + \frac{\beta_t f_t D_t}{E_0(1-D_t)} \quad (3\text{-}18)$$

la partie anélastique .

Nous pouvons aussi écrire la contrainte de la manière suivante :

$$\sigma = \varepsilon E_0(1-D_t) - \beta_t f_t D_t - \frac{\beta_c f_c D_c(1-D_t)}{(1-D_c)} \quad (3\text{-}19)$$

et la mettre sous la forme

$$\sigma = \sigma_e - \sigma_{an} \quad (3\text{-}20)$$

avec

$$\sigma_e = \varepsilon E(1-D_t) \quad (3\text{-}21)$$

la partie élastique non - linéaire et

$$\sigma_{an} = \beta_t f_t D_t + \frac{\beta_c f_c D_c(1-D_t)}{(1-D_c)} \quad (3\text{-}22)$$

la partie anélastique de la contrainte .

Pour que la contrainte soit négative , il faut que

$$\sigma < 0 \Leftrightarrow \varepsilon < \frac{\beta_c f_c D_c}{E_0(1-D_c)} + \frac{\beta_t f_t D_t}{E_0(1-D_t)} \quad (3\text{-}23)$$

3.3 CALCUL DE LA CONTRAINTE :

Le modèle uniaxial est introduit dans le logiciel SCOB . Le calcul de la contrainte doit être orienté vers un état de traction ou vers un état de compression en testant la valeur de la déformation (eqs. 3-14 et 3-23) car la loi de comportement est unilatérale .

L'organigramme de la figure 3.5 montre le calcul de la contrainte :

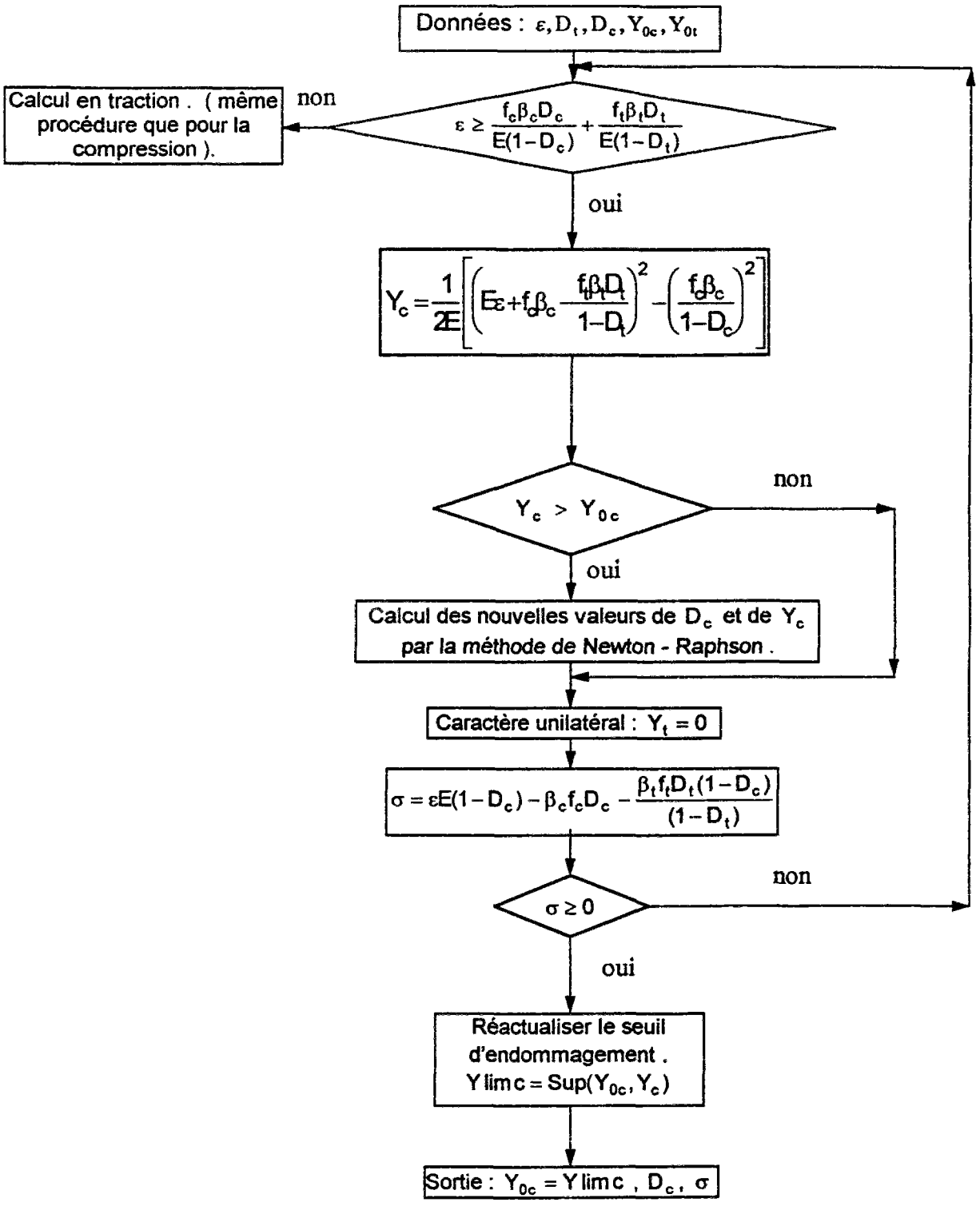


Fig. 3.5 : Organigramme de calcul de la contrainte en compression .

3.4 DETERMINATION DES PARAMETRES :

Les onze paramètres nécessaires à l'utilisation de la loi de comportement du béton sont $E_0, f_c, f_t, \beta_c, \beta_t, Y_{0_c}, Y_{0_t}, a_c, b_c, a_t$ et b_t .

Les paramètres à identifier sont classés en quatre groupes :

- le paramètre d'élasticité E_0 (module d'élasticité à l'origine) ,
- les résistances de compression et de traction , f_c et f_t ,
- les paramètres d'anélasticité β_c et β_t ,
- les paramètres caractérisant la variable d'endommagement :
  * de traction : a_t, b_t et Y_{0t} ,
  * de compression : a_c, b_c et Y_{0c} .

3.4.1 - Paramètre d'élasticité et résistances de compression et de traction :

Les paramètres E_0 et f_c peuvent être identifiés sur un essai de compression simple . Le paramètre f_t peut être identifié par un essai de fendage ou un essai de traction directe , ou tout simplement calculé en fonction de f_c en utilisant des formules connues telles que , par exemple , celle des règles BAEL91 .

3.4.2 - Paramètres d'anélasticité :

Les paramètres β_t et β_c permettent de décrire les évolutions des déformations permanentes , respectivement , en traction et en compression . Ils peuvent être identifiés sur des essais cycliques répétés , respectivement , en traction et en compression . Ces paramètres apparaissent dans la partie anélastique de la déformation :

$$\varepsilon_{an} = \frac{\beta_i f_i D_i}{E_0(1-D_i)} \quad \text{avec } i = c, t \quad (3\text{-}24)$$

L' écart quadratique est donné par l'équation (3-25) ci -dessous :

$$V_q = \sum_{j=1}^{n} \left[\varepsilon_{an_j} - f_i \beta_i \left(\frac{D_i}{E_0(1-D_i)} \right)_j \right]^2 \quad \text{avec } i = c, t \quad (3\text{-}25)$$

Nous pouvons obtenir la valeur de β_i en minimisant l'écart quadratique :

$$\frac{\partial V_q}{\partial \beta_i} = 0 \Rightarrow \beta_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{an_j} \left(\frac{f_i D_i}{E_0 (1 - D_i)} \right)_j}{\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{f_i D_i}{E_0 (1 - D_i)} \right)_j^2} \quad (3\text{-}26)$$

avec i = c , t et n le nombre de décharges considérées pour le calcul .

Pour un cycle , les valeurs de la contrainte et de la déformation sont celles prises au point de début de décharge ; la valeur de la déformation résiduelle est celle prise au point de début de recharge à contrainte nulle . Afin de clarifier la méthode d'identification des paramètres d'anélasticité , nous proposons des exemples de calcul :

3.4.2.1- Identification de β_t :

-.Exemple 1:

Pour ce faire , nous utilisons la courbe (fig. 3.4) obtenue par Terrien [TERRIEN80] .

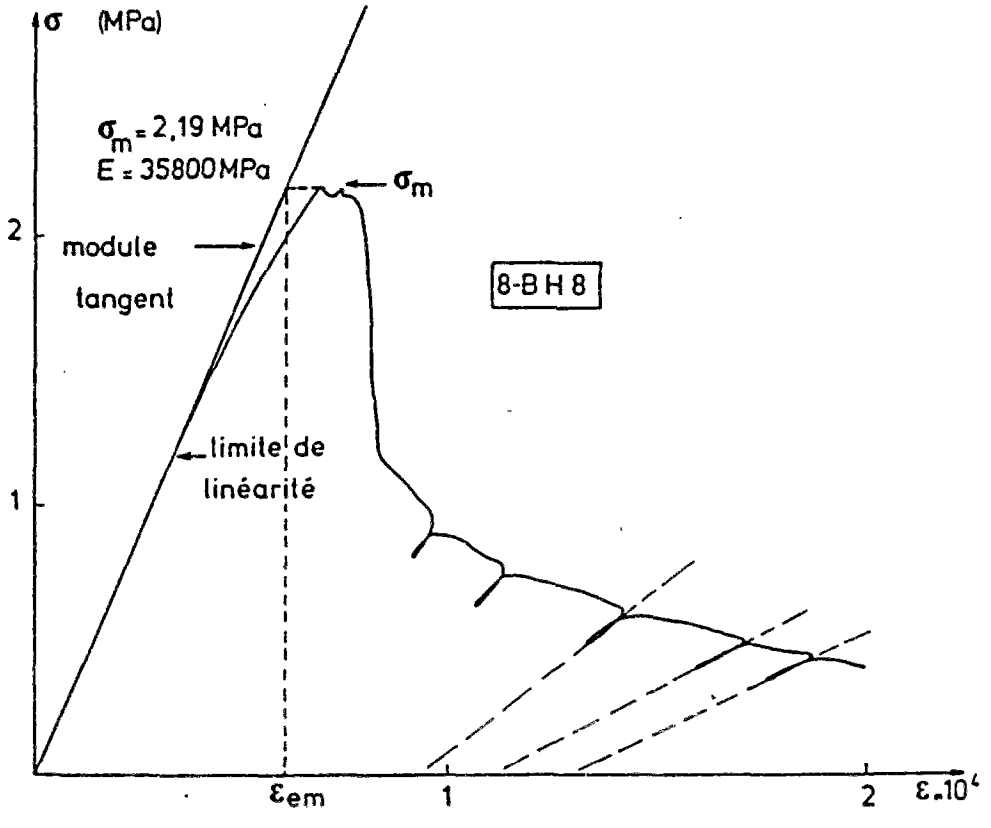


Fig. 3.4 : Courbe contrainte - déformation en traction avec plusieurs décharges [TERRIEN80] .

Toutes les valeurs nécessaires au calcul ont été prises manuellement sur la courbe de la figure 3.4 . Ayant comme données E_0 = 35800 MPa et f_t = 2,19 MPa et en mesurant

ε , ε_{an} et σ pour chaque décharge sur la courbe de la figure 3.4 , nous pouvons calculer la valeur de la variable d'endommagement de traction par l' équation suivante :

$$D_t = 1 - \frac{\sigma}{E_0(\varepsilon - \varepsilon_{an})} \quad (3\text{-}27)$$

Toutes les valeurs nécessaires au calcul de β_t sont portées dans le tableau ci - dessous :

σ(MPa)	$\varepsilon(10^{-4})$	$\varepsilon_{an}(10^{-4})$	D_t	$\frac{f_t D_t}{E_0(1-D_t)}(10^{-4})$
0,933	0,978	0,558	0,379	0,373
0,767	1,159	0,710	0,523	0,671
0,622	1,435	0,935	0,653	1,151
0,478	1,696	1,029	0,800	2,447
0,433	1,899	1,290	0,801	2,462

En utilisant l'équation (3-26) , nous obtenons β_t = -0,534 .

Remarque : Nous avons extrapolé des décharges linéaires à partir des petits débuts de décharges réelles alors que pour le calcul de β_t des décharges complètes sont nécessaires (à contrainte nulle) . L'exemple précédent montre surtout le principe du calcul.

- Exemple 2 :

Dans cet exemple , nous avons choisi la courbe obtenue dans la référence [GOPALARATNAM85] . Les mesures de déplacement ont été faites sur une base de 83 mm . Le module d'élasticité à l'origine et la résistance à la traction sont donnés : E_0 = 32630 MPa et f_t = 3,60 MPa . Les valeurs nécessaires au calcul ont été mesurées manuellement sur la courbe de la figure 3.5 .

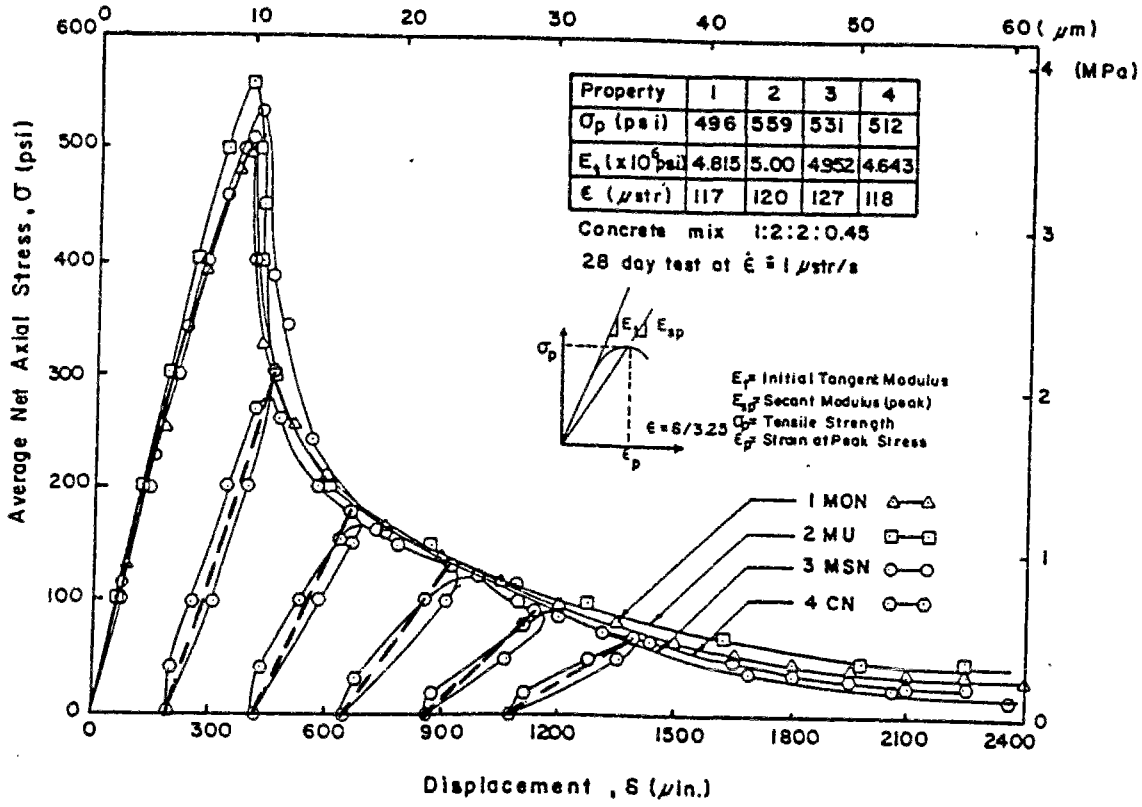


Fig. 3.5 : Courbe contrainte - déformation en traction avec plusieurs décharges [GOPALARATNAM85] .

Les valeurs nécessaires au calcul de β_t sont reportées dans le tableau ci - dessous :

σ(MPa)	$\varepsilon(10^{-4})$	$\varepsilon_{an}(10^{-4})$	D_t	$\frac{f_t D_t}{E_0(1-D_t)}(10^{-4})$
2,014	1,385	0,583	0,230	0,330
1,205	2.065	1,263	0,540	1,295
0,922	2,915	1,968	0,702	2,599
0,715	3,595	2,672	0,763	3,552
0,489	4,227	3,304	0,838	5,707

En utilisant l'équation (3-26) , nous obtenons β_t = -0,657 .

Remarque : D'après cette exemple , l'hypothèse de décharge-recharge linéaire est acceptable en traction comme le montrent les droites de décharge-recharge tracées en trait discontinu sur la courbe de la figure 3.5 .

3.4.2.2. Identification de β_c :

- Exemple 1 :

La courbe (fig. 3.6) contrainte - déformation d'un cylindre sous compression cyclique utilisée dans cet exemple pour le calcul de β_c est celle trouvée dans la référence [SINHA64]. Toutes les valeurs nécessaires au calcul ont été mesurées manuellement sur cette courbe . Les valeurs du module d'élasticité à l'origine et de la résistance à la compression sont : E_0=25800 MPa et f_c= 27,2 MPa .

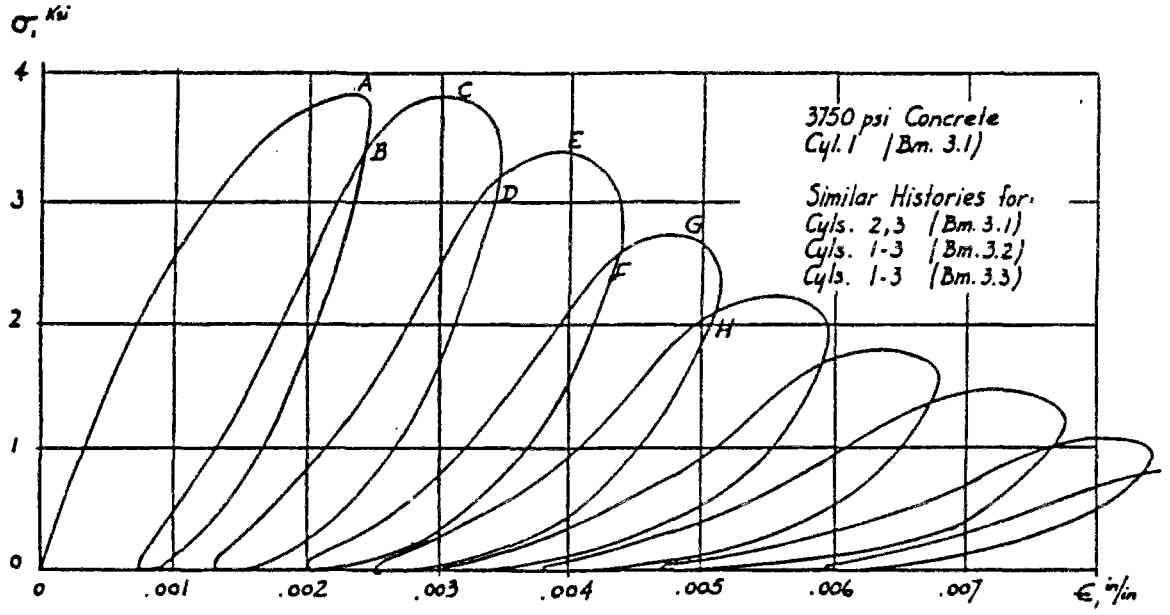


Fig. 3.6 : Courbe expérimentale contrainte - déformation [SINHA64] .

Toutes les valeurs nécessaires au calcul de β_c sont reportées dans le tableau ci - dessous .

σ(MPa)	$\varepsilon(10^{-3})$	$\varepsilon_{an}(10^{-3})$	D_c	$\frac{f_c D_c}{E_0(1-D_c)}(10^{-3})$
26,975	2,302	0,747	0,328	0,515
26,522	3,142	1,307	0,440	0,828
23,121	4,169	2,022	0,583	1,474
18,361	5,000	2,489	0,717	2,671
14,508	5,818	3,049	0,797	4,139
11,787	6,751	3,796	0,845	5,747
9,181	7,778	4,729	0,883	7,957

En utilisant l'équation 3-26 , on trouve β_c = 0,672 .

- Exemple 2 :

Dans cet exemple , la courbe contrainte - déformation est tirée des essais plus récents de la référence [ALSULAYFANI86] . Les valeurs utilisées ont été mesurées manuellement sur la courbe de la figure 3.7 . Les valeurs du module d'élasticité à l'origine et de la résistance à la compression sont : E_0 = 37500 MPa et f_c = 35,5 MPa .

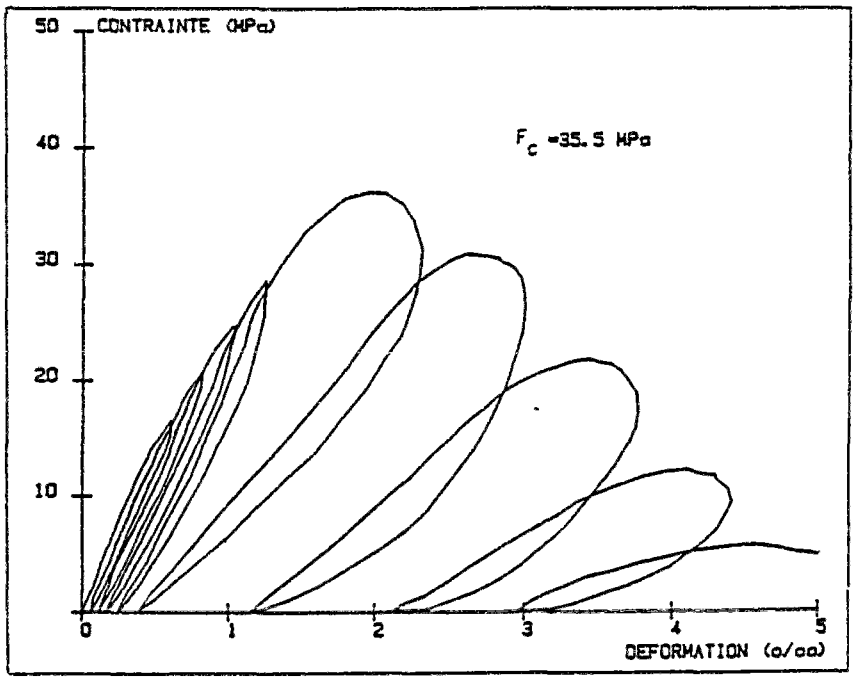


Fig. 3.7 : Courbe contrainte - déformation [ALSULAYFANI86] .

Toutes les valeurs nécessaires au calcul de β_c sont reportées dans le tableau ci - dessous .

σ(MPa)	$\varepsilon(10^{-3})$	$\varepsilon_{an}(10^{-3})$	D_c	$\frac{f_c D_c}{E_0(1-D_c)}(10^{-3})$
35,5	2,117	0,401	0,448	0,768
29,22	2,920	1,150	0,560	1,205
20,00	3,686	2,099	0,664	1,871
9,59	4,398	2,920	0,827	4,525

Pour cet exemple nous avons fait deux calculs , le premier en considérant toutes les décharges et le deuxième en ne considérant que les décharges après le pic de contrainte . Le résultat pour β_c reste sensiblement le même dans les deux cas . Il parait , a priori , que les décharges avant le pic de contrainte n'ont aucune influence sensible sur le calcul de β_c. La valeur de β_c est 0,422 .

- Exemple 3 :

Nous citons deux essais sur cylindres (Ø = 16 cm , H = 32 cm) soumis à la compression cyclique réalisés en juin 1996 au CEBTP dans le cadre de notre travail .

. Essai QJ2 :

Les valeurs nécessaires au calcul sont prises des résultats expérimentaux . Le module d'élasticité et la résistance à la compression sont E_0= 33600 MPa et f_c= 34,4 MPa . La figure 3.8 montre la courbe expérimentale contrainte - déformation .

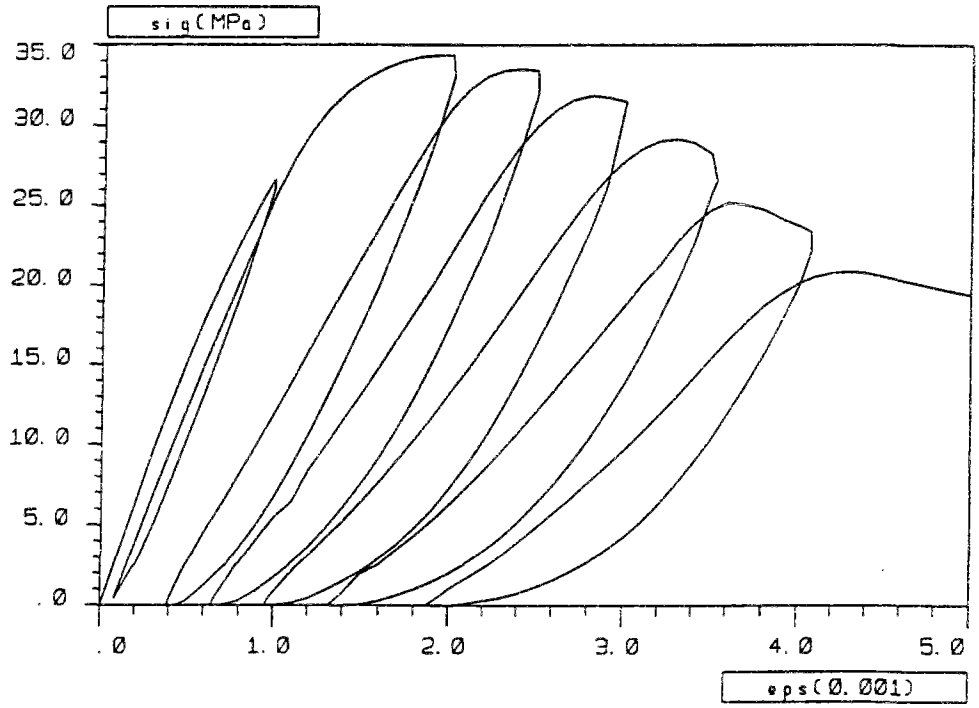


Fig. 3.8 : Courbe expérimentale contrainte - déformation QJ2 .

Les valeurs nécessaires au calcul du paramètre anélastique sont données dans le tableau ci - dessous .

σ(MPa)	$\varepsilon(10^{-3})$	$\varepsilon_{an}(10^{-3})$	D_c	$\frac{f_c D_c}{E_0(1-D_c)}(10^{-3})$
34,375	2,000	0,390	0,365	0,588
33,4	2,500	0,640	0,466	0,893
31,465	3,000	0,950	0,543	1,216
28,295	3,500	1,320	0,614	1,629
23,4	4,070	1,870	0,683	2,206

Le calcul donne β_c = 0,812 .

. Essai QJ4 :

Les valeurs nécessaires au calcul sont prises des résultats expérimentaux . Le module d'élasticité et la résistance à la compression sont E_0= 32500 MPa et f_c= 35 MPa . La figure 3.9 montre la courbe expérimentale contrainte - déformation .

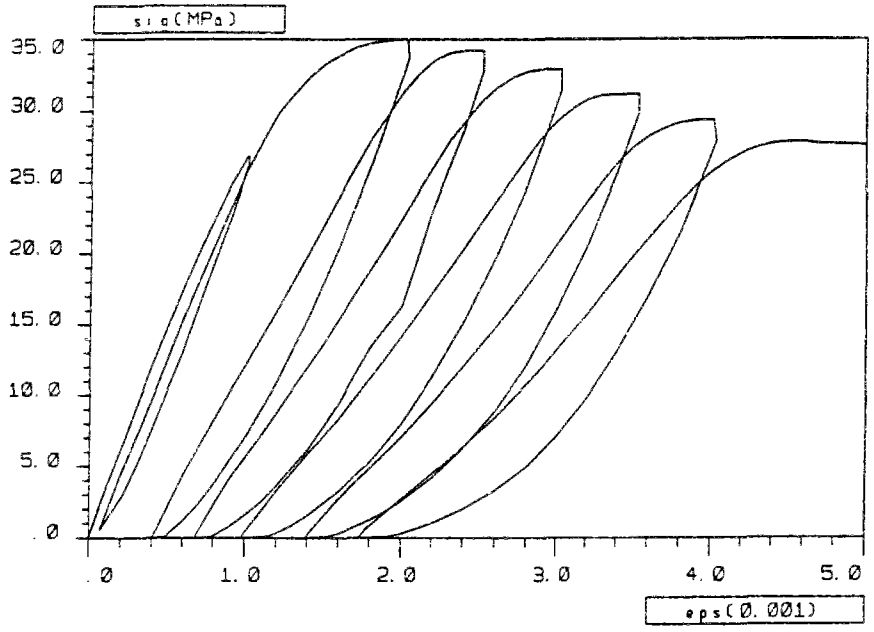


Fig. 3.9 : Courbe expérimentale contrainte - déformation QJ4 .

Les valeurs nécessaires au calcul du paramètre anélastique sont données dans le tableau ci - dessous .

σ(MPa)	$\varepsilon(10^{-3})$	$\varepsilon_{an}(10^{-3})$	D_c	$\frac{f_c D_c}{E_0(1-D_c)}(10^{-3})$
35	2	0,40	0,327	0,523
34.215	2,5	0,68	0,422	0,786
32.865	3.02	0,98	0,504	1,094
31.14	3,53	1,39	0,552	1,327
29.375	4,01	1,73	0,604	1,643

Le calcul donne β_c = 0,993 .

3.4.3 Paramètres caractérisant les variables d'endommagement :

3.4.3.1 Identification de Y_{0t}:

Pour calculer le seuil d'endommagement en traction , nous considérons que l'endommagement ne débute que si la contrainte atteint 95% de la résistance à la traction . En utilisant l'équation (3-3a) avec $Y = Y_{0t}$, $\sigma = 0,95f_t$ et $D_t = 0$, nous obtenons :

$$Y_{0t} = \frac{f_t^2\left(1+1,9|\beta_t|\right)}{2E_0} \quad (3\text{-}28)$$

3.4.3.2 Identification de Y_{0c}:

Après avoir calculé E_0 , f_c et β_c pour le béton en compression , nous pouvons déterminer le seuil d'endommagement en posant comme principe que le début de l'endommagement coïncide avec la fin du comportement élastique linéaire observé sur la courbe contrainte - déformation . Par conséquent , le calcul du seuil d'endommagement dépend de la détermination de la contrainte limite d'élasticité linéaire . Pour ce faire , nous considérons que la courbe contrainte - déformation reste linéaire tant que l'écart en déformation entre la droite tangente à l'origine et la courbe contrainte - déformation ne dépasse pas 2% au point de la limite élastique (fig. 3.10) .

Afin de simplifier les calculs , nous utilisons la loi de comportement de Sargin des Règles BPEL91 comme courbe contrainte - déformation définie par :

$$\sigma = f_c \frac{k\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{b_0}}\right)+(k'-1)\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{b_0}}\right)^2}{1+(k-2)\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{b_0}}\right)+k'\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{b_0}}\right)^2} \quad (3\text{-}29)$$

avec $k = \frac{E_0\varepsilon_{b_0}}{f_c}$

$k' = k-1$ pour $f_c \le 30$ MPa .

$k' = 0$ pour $f_c \ge 55$ MPa .

$k' = (k-1)\left(\frac{55-f_c}{25}\right)$ pour $30 \text{ MPa} < f_c < 55 \text{ MPa}$.

ε_{b_0} : déformation correspondant à la résistance à la compression .

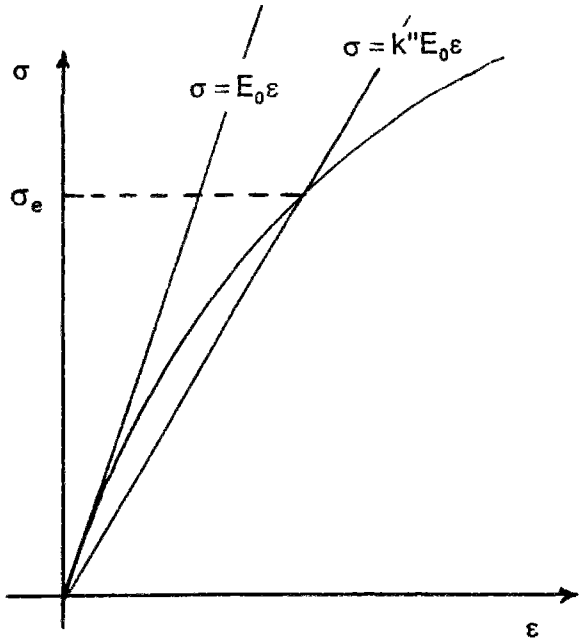


Fig. 3.10 : Tangente et sécante à la courbe contrainte - déformation .

La résolution du système d'équations composé de la loi de Sargin et de l'équation

$$\sigma = k''E_0\varepsilon \quad (3\text{-}30)$$

avec $k'' \approx 0,98$, revient à résoudre l' équation suivante :

$$k'\sigma^2 + \left(k''(k-2)E_0\varepsilon_{b0} + (1-k')f_c\right)\sigma + (k'')^2E_0^2\varepsilon_{b0}^2 - kk''f_cE_0\varepsilon_{b0} = 0 \quad (3\text{-}31)$$

qui donne la contrainte recherchée σ_e .

En utilisant l'équation (3-2a) avec $Y = Y_{0c}$, $\sigma = \sigma_e$ et $D_c = 0$, nous obtenons :

$$Y_{0c} = \frac{\sigma_e^2 + 2\beta_c f_c \sigma_e}{2E_0} \quad (3\text{-}32)$$

3.4.3.3 Identification de a_t et b_t :

La phase post - pic du comportement du béton en traction n'est pas suffisamment connue pour que nous puissions faire une identification objective sur un essai de traction . Néanmoins , nous pouvons identifier les paramètres a_t et b_t en faisant varier chacun des deux paramètres dans un calcul dans SCOB d'un cylindre soumis à la flexion simple ou à la traction directe en prenant soin de ne pas dépasser f_t au pic de traction pour une

déformation correspondante égale à f_t / E_0 . La branche descendante de la courbe contrainte - déformation reste aléatoire et dépend de la partie anélastique de la loi .Les figures 3.11 et 3.12 montrent , respectivement , l'influence de chaque paramètre sur la courbe contrainte - déformation .Nous avons choisi comme base pour le calcul les paramètres obtenus pour l'essai de la référence [GOPALARATNAM85] citée plus haut :

E_0 = 32630 MPa f_t = 3,6 MPa ε_{bt}=1,18 10^{-4} β_t = 0,657

Y_{0t} = 0,00045 a_t = 1,7 b_t =1,2

ε_{bt} est la déformation au pic de contrainte .

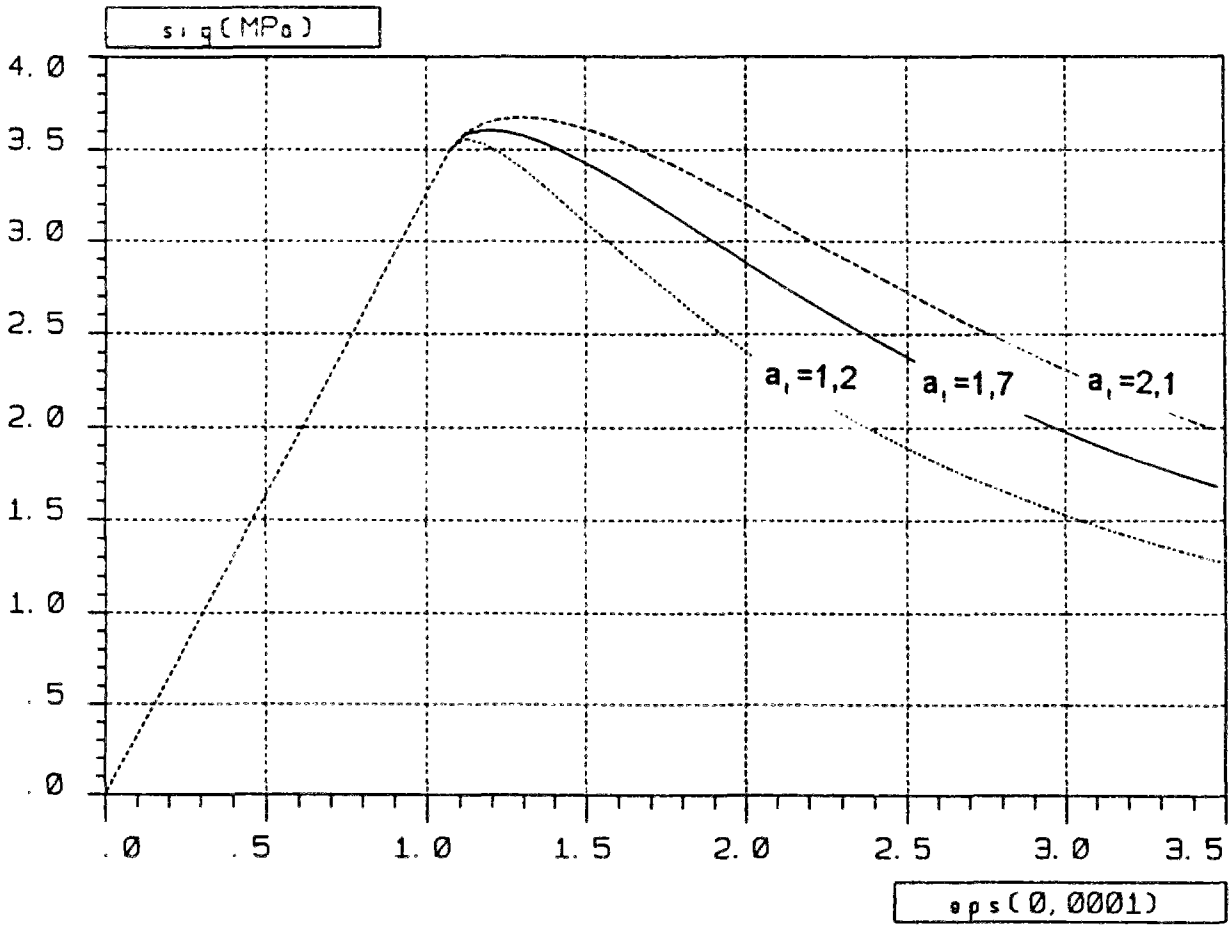


Fig . 3.11 : Influence de a_t sur le comportement en traction

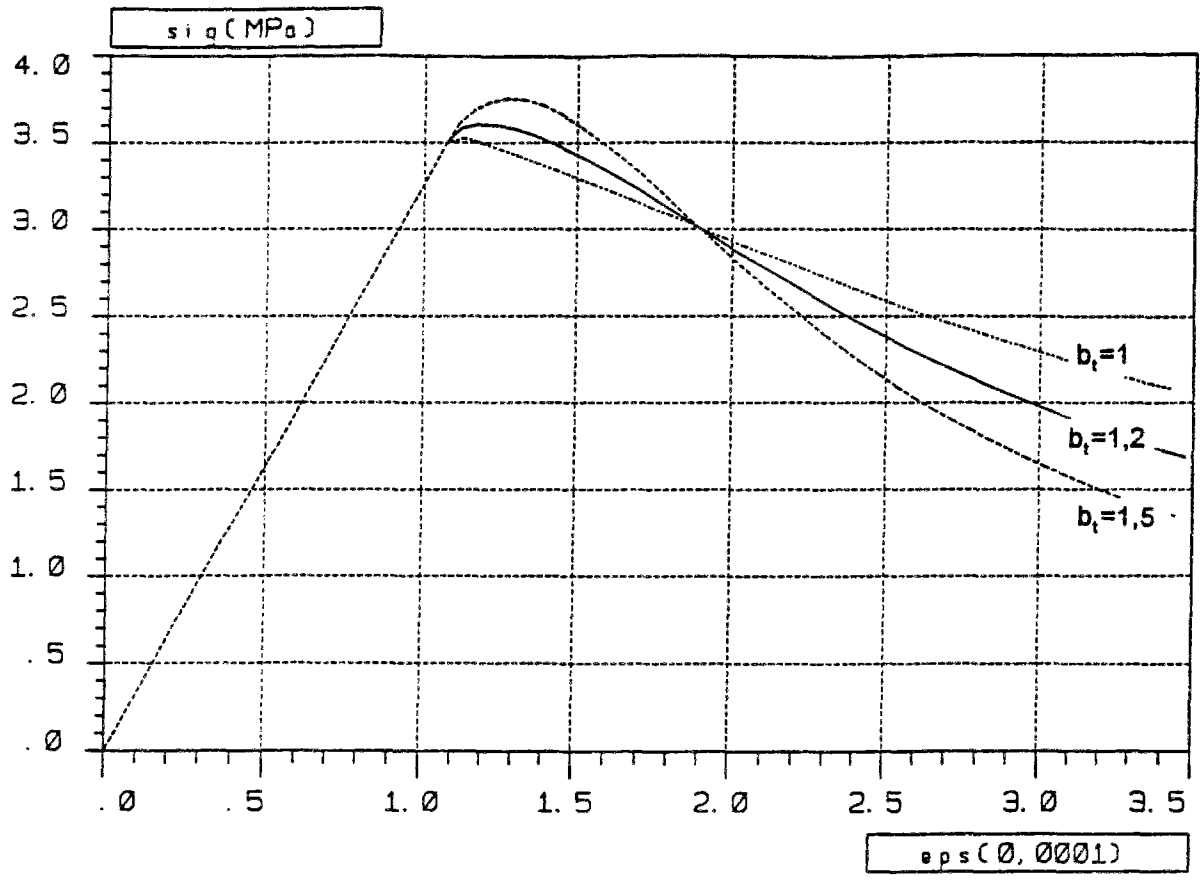


Fig . 3.12 : Influence de b_t sur le comportement en traction .

3.4.3.4 Identification de a_c et b_c :

La détermination de ces paramètres se fait en ajustant l'enveloppe des cycles répétés avec la courbe contrainte - déformation monotone de compression en respectant les valeurs précédemment calculées de E_0 , f_c et de ε_{bo}. Ce calcul est assez fastidieux . Pour clarifier les idées , nous allons montrer sur les figures 3.13 et 3.14 l'influence de ces deux paramètres sur la courbe enveloppe contrainte - déformation en ne faisant varier qu'un seul à la fois . Pour ce faire , nous avons choisi comme base pour le calcul les paramètres obtenus pour la courbe contrainte - déformation de l'essai QJ2 cité précédemment :

E_0 = 33600 MPa $\quad f_c$ = 34,4 MPa $\quad \varepsilon_{b_0}$ = 0,002 $\quad \beta_c$ = 0,812

Y_{0c} = 0,0078 MPa $\quad a_c$ = 60 $\quad b_c$ = 1,35 .

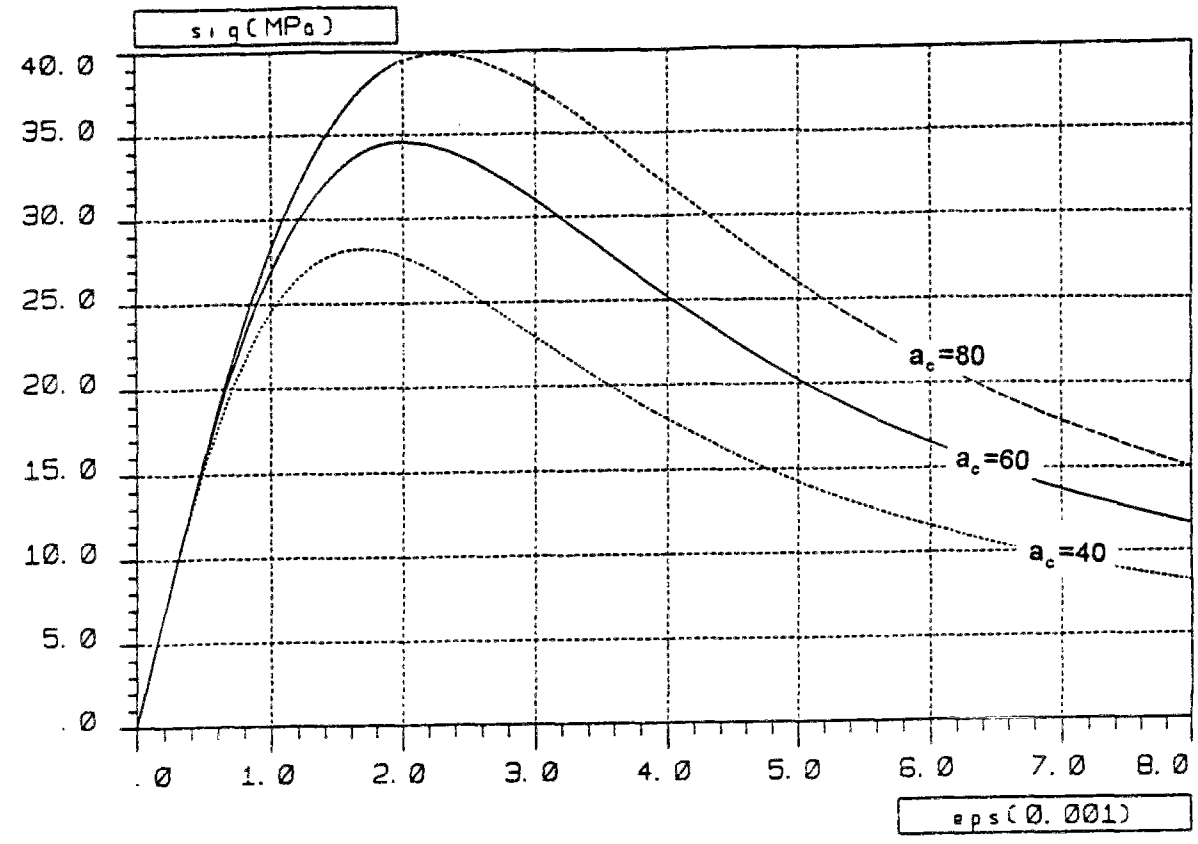


Fig . 3.13 : Influence de a_c sur le comportement en compression .

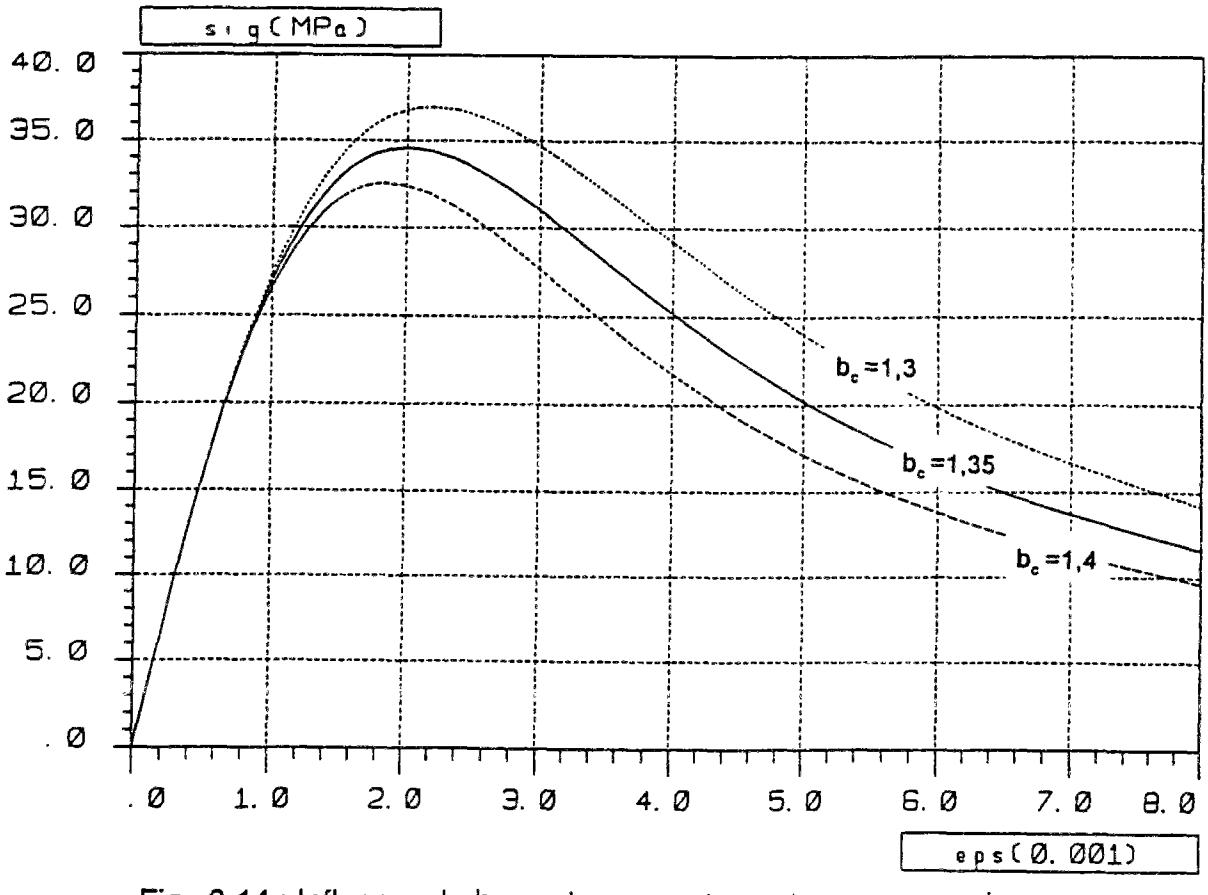


Fig . 3.14 : Influence de b_c sur le comportement en compression .

Remarques :

R1 : Toutes les valeurs des β_i sont inférieures à un .

R2 : Il parait beaucoup plus logique d'utiliser des courbes à décharges complètes (contrainte nulle) car la décharge et la recharge se font sur la même droite dans le modèle .

R3 - Pour le calcul des β_i , il est préférable d'utiliser les décharges après le pic de contrainte car nous avons constaté qu' il n'y a pas d'influence des décharges avant le pic de contrainte sur le calcul de β_c .

R4 - Pour l'introduction des valeurs de β_i en données dans le logiciel SCOB , **$\beta_c$est positive et β_t est négative** .

R5 - Les courbes des figures 3.13 et 3.14 montrent que lorsque a_c augmente , f_c et ε_{b_0} augmentent tandis que le contraire se produit lorsque b_c augmente .

3.4.4 Récapitulatif :

En supposant E_0,f_c et f_t connues , les paramètres d'anélasticité β_c et β_t sont identifiés sur des essais cycliques de même signe en suivant la méthode de calcul du paragraphe 3.1.4.2 . Si l'essai en compression cyclique sur cylindre est réalisable et exploitable du point de vue des résultats , l'essai en traction cyclique est difficilement réalisable et les résultats de l'essai après la fissuration donnent plutôt la mesure de valeurs de déplacements relatives que des valeurs de déformations ; or , pour la méthode de calcul que nous proposons , il est impératif d'avoir des valeurs de déformations . Dans le cas où on ne pourra pas faire d'essais pour déterminer ces paramètres , nous conseillons de prendre $\beta_t = -0,1$ et $\beta_c = 1$.

Le calcul du seuil d'endommagement de traction Y_{0t} se fait en supposant que l'endommagement débute quand la contrainte atteint 95% de la résistance à la traction . Avec $Y = Y_{0t}$, $\sigma = 0,95 f_t$ et $D_t = 0$, nous avons obtenu l'équation 3-28 :

$$Y_{0t} = \frac{f_t^2\left(1+1,9|\beta_t|\right)}{2E_0}$$

Pour la détermination du seuil d'endommagement de compression , nous utilisons la loi de Sargin des Règles BPEL 91 et la droite tangente à l'origine pour déterminer la contrainte limite d'élasticité linéaire avec un seuil de non-linéarité de 2% (cf. § 3.1.4.3) . Avec $Y = Y_{0c}$, $\sigma = \sigma_e$ et $D_c = 0$, nous avons obtenu l'équation 3-32 :

$$Y_{0c} = \frac{\sigma_e^2 + 2\beta_c f_c \sigma_e}{2E_0}$$

L'identification des paramètres a_c, b_c, a_t et b_t intervenant dans les équations 3-4 et 3-5 (ci-dessous) nécessite l'utilisation du modèle soit en traction soit en compression monotones (enveloppe des cycles) appliqué à un cylindre .

$$D_t = \frac{\left(\frac{Y_t}{Y_{0_t}} - 1\right)^{b_t}}{a_t + \left(\frac{Y_t}{Y_{0_t}} - 1\right)^{b_t}} \qquad D_c = \frac{\left(\frac{Y_c}{Y_{0_c}} - 1\right)^{b_c}}{a_c + \left(\frac{Y_c}{Y_{0_c}} - 1\right)^{b_c}}$$

L'ajustement de a_c et b_c se fait jusqu'à ce que les valeurs obtenues pour la résistance à la compression et la déformation correspondante coïncident avec celles déterminées par les Règles BAEL 91 ou par des essais . La détermination de a_t et b_t se fait en ajustant les valeurs données par le modèle pour la contrainte au pic de traction et sa déformation correspondante coïncident , respectivement , avec f_t et f_t / E_0 .

3.5 ILLUSTRATION GRAPHIQUE DU MODELE EN COMPRESSION :

Vié [VIÉ96] propose une autre manière intéressante d'écriture et d'illustration graphique du modèle en compression .

3.5.1 Loi de comportement et évolution de l'endommagement :

En prenant $\beta_c = 1$, la loi contrainte déformation s'écrit :

$$\sigma = E_0 \varepsilon (1 - D_c) - f_c D_c \quad (3\text{-}33)$$

avec une déformation composée d'une partie élastique donc réversible et une partie anélastique donc irréversible .

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{an} \quad (3\text{-}34)$$

avec

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E_0(1-D)} \quad (3\text{-}35)$$

$$\varepsilon_{an} = \frac{f_c D_c}{E_0(1-D_c)} \quad (3\text{-}36)$$

Cette équation peut devenir l'équation de l'enveloppe $\sigma(\varepsilon)$ s'il n'y a pas de décharge-recharge ; elle permet de calculer D_c en fonction du "dernier" parcours sur l'enveloppe en écrivant l'équation suivante :

$$D_c = \frac{E_0\varepsilon - \sigma(\varepsilon)}{E_0\varepsilon + f_c} \quad (3\text{-}37)$$

La figure 3.15 donne une interprétation graphique du paramètre d'endommagement D_c .

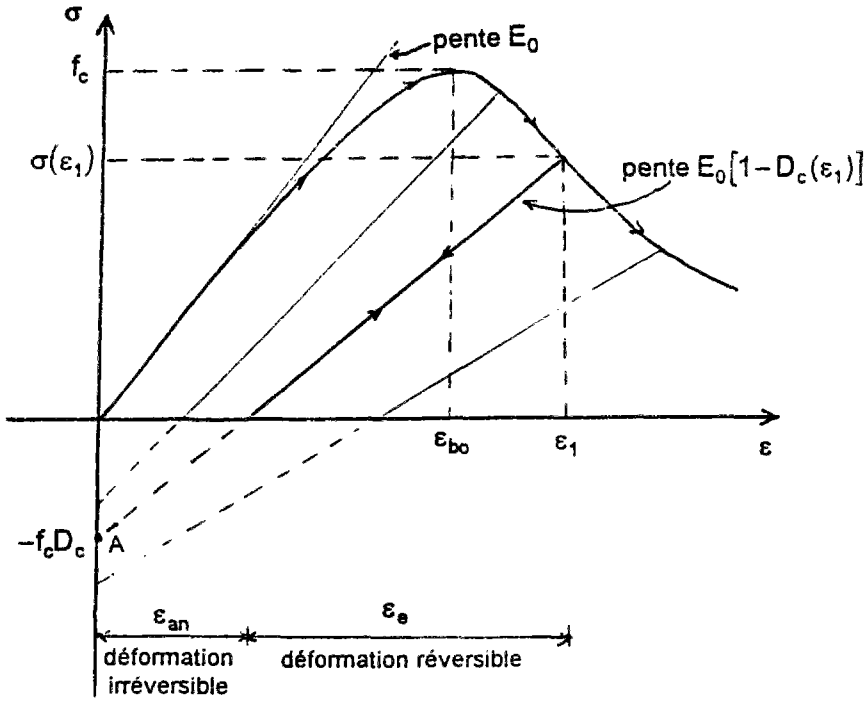


Fig. 3.15 : Interprétation graphique du paramètre d'endommagement D_c .

On remarque que le point A , qu'on dénommera pivot , sur l'axe des ordonnées de la figure 3.15 a une position variable qui est fonction de la valeur de D_c . Les positions limites du pivot A (fig. 3.16) sont l'origine O pour $D_c = 0$ et le point B ($\sigma = -f_c$) pour $D_c = 1$. En conséquence si on connaît la valeur de la contrainte en un point sur l'enveloppe et la valeur du paramètre d'endommagement correspondant , on pourra tracer la droite de décharge et déterminer la déformation anélastique .

$$\varepsilon \le \varepsilon_0 \Rightarrow D_c = 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon_{an} = 0$$

$$\varepsilon_0 < \varepsilon < +\infty \Rightarrow 0 < D_c < 1 \quad \text{et} \quad \varepsilon_{an} = \frac{f_c D_c}{E_0(1-D_c)}$$

$$\varepsilon \to +\infty \Rightarrow D_c \to 1 \quad \text{et} \quad \varepsilon_{an} \to +\infty$$

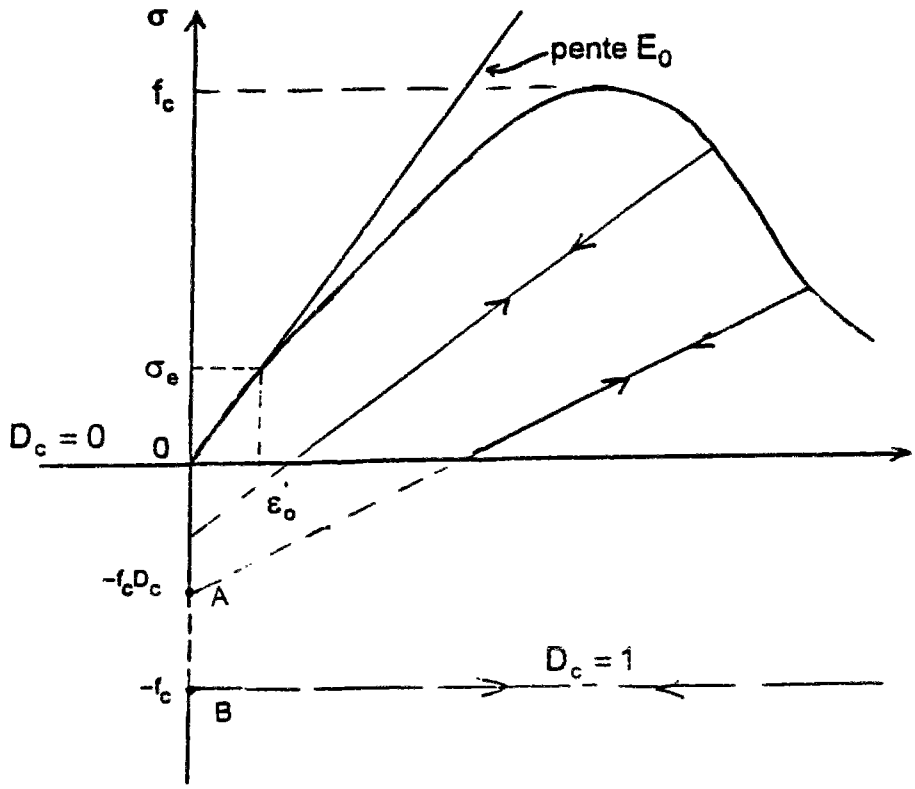


Fig. 3.16 : Pivot de décharge-recharge .

3.5.2 Potentiels élastique et anélastique :

La connaissance des équations les déformations élastique et anélastique et de la relation déformation - potentiel définie par :

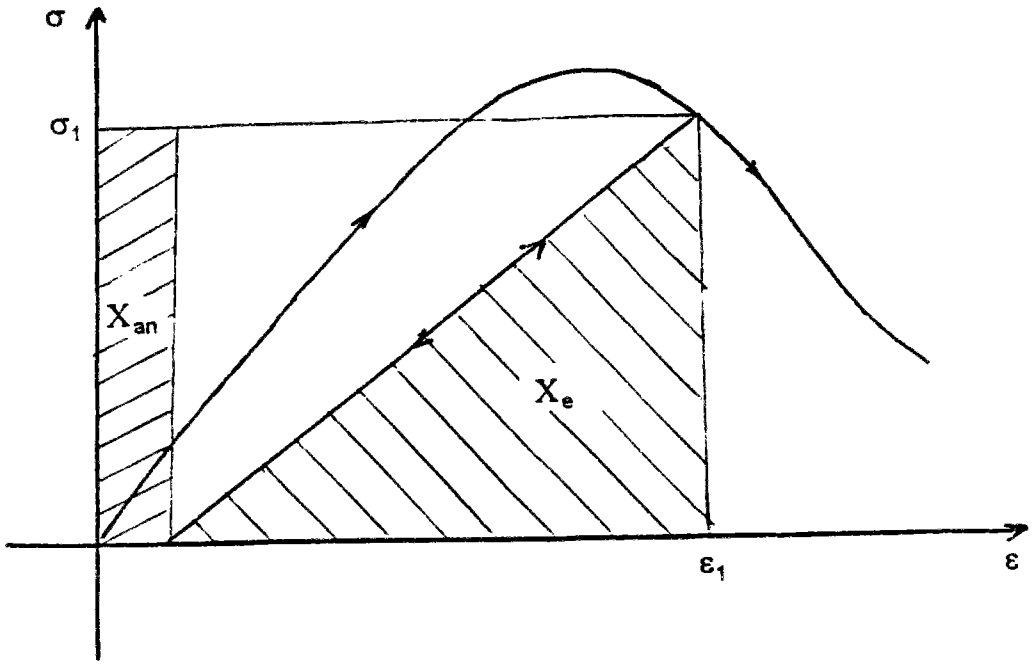
$$\varepsilon = \frac{\partial X}{\partial \sigma}$$

permet d'écrire :

$$X_e = \frac{\sigma^2}{2E_0(1-D_c)} = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon_e \quad (3\text{-}38)$$

$$X_{an} = \frac{f_cD_c\sigma}{E_0(1-D_c)} = \sigma\varepsilon_{an} \quad (3\text{-}39)$$

avec X_e l'énergie de déformation "récupérée" lors d'une décharge et X_{an} l'énergie dissipée non récupérée après déchargement (fig.3.17) .



ou

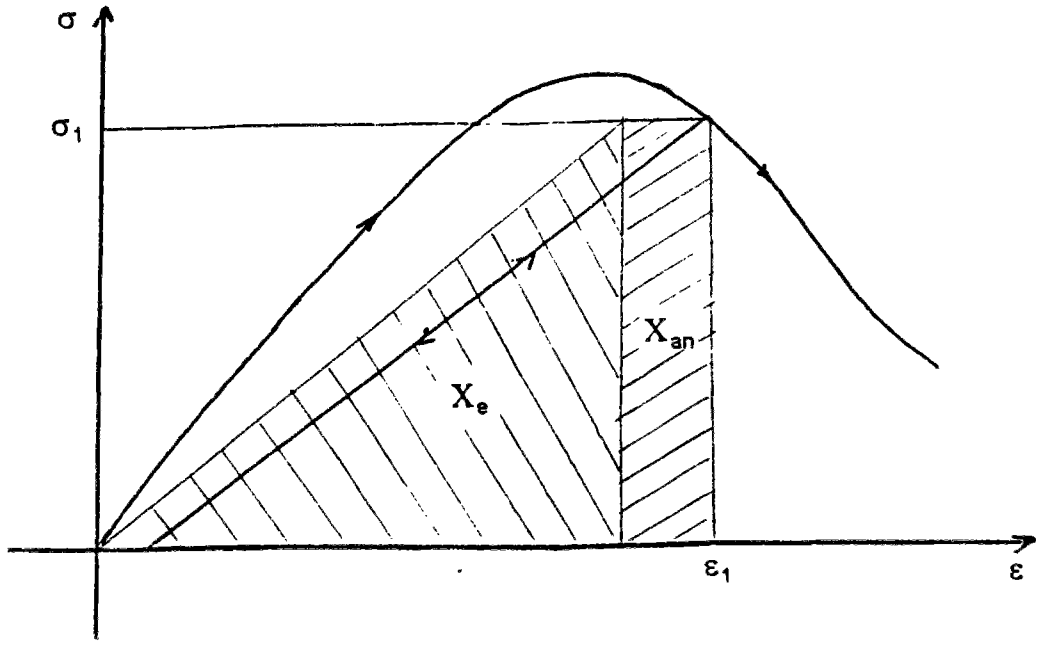


Fig. 3.17 : Illustration graphique des énergies X_e et X_{an} .

Remarque : Cette schématisation des énergies n'est valable que si on étudie la compression indépendamment de la traction .

4.METHODE DE CALCUL

4.1 INTRODUCTION :

La méthode de calcul que nous proposons pour simuler le comportement des structures en béton armé sous charges cycliques repose sur un certain nombre de cycles chargement - déchargement quasi - statiques pendant lesquels l'histoire des déformations généralisées est gardée en mémoire afin de permettre le calcul des forces globales à chaque étape en fonction des étapes précédentes .

Pour chaque changement de valeur de la charge , on cherche à calculer le changement de la valeur des déplacements correspondants par une méthode itérative tenant compte de l'histoire du chargement et des déplacements . Cette méthode de calcul est introduite dans le logiciel SNOT traitant le comportement monotone sous chargement croissant jusqu'à la ruine développé par Naït-Rabah [NAÏT90] ; ce dernier a mis au point un système non-linéaire basé sur la méthode des déplacements pour résoudre itérativement l'équation d'équilibre de la structure qui lie l'accroissement des déplacements aux accroissements de charges extérieures et à l'action éventuelle de la précontrainte à la mise en tension . Pour notre étude , nous ne nous intéressons qu'aux structures en béton armé .

4.2 DOMAINE D'APPLICATION :

La structure étudiée est modélisée en une ossature constituée par des éléments de poutres comme dans la version bidimensionnelle SNOB du logiciel SNOT .

Le logiciel de calcul , que nous avons appelé SCOB (Simulation du comportement Cyclique des Ossatures Bidimensionnelles) , est révisé , corrigé et complété par l'introduction des modules correspondant aux charges cycliques , l'histoire du chargement , l'histoire des déformations et l'histoire des contraintes en un point de la structure .

La structure étudiée est considérée soumise à un système de charges quasi-statiques . Les charges appliquées sont supposées concentrées aux noeuds de la structure.

Le système de chargement $\vec{Q}$ comporte :

- des charges fixes $\vec{P}$,

- des charges variables $\alpha\vec{F}$,d'intensité proportionnelle à un paramètre α réel.

L'analyse de la structure est effectuée pas à pas pour des valeurs croissantes ou décroissantes de α .

L'analyse de l'état de déformation d'un élément de la structure est effectuée dans un repère intrinsèque lié à l'élément .

4.3 HYPOTHESES GENERALES :

Dans cette analyse , les hypothèses considérées sont :

- les déformations sont petites ;
- les déplacements sont petits ;
- la longueur des éléments est faible et donc la non-linéarité géométrique attachée à la déformation propre de l'élément est négligeable ;
- les déformations des noeuds situés à la jonction de plusieurs barres sont négligeables .

Les caractéristiques de déformabilité d'un élément sont obtenues en étudiant le comportement d'un certain nombre de sections droites de cet élément .

L'analyse non-linéaire concerne , principalement , les sollicitations dues à l'effort normal et au moment fléchissant . Les déformations dues à l'effort tranchant sont prises en compte sous une approche linéaire .

Le calcul des déplacements aux noeuds de l'élément dans le repère intrinsèque est effectué par intégration des déformations des sections de calcul .

La longueur des éléments et le nombre de sections de calcul ont une grande influence sur les déplacements calculés . Grelat [GRELAT78] a montré que , pour des éléments de faible longueur , la considération de trois sections de calcul est , en général , suffisante . L'approche utilisée pour le calcul des déplacements est basée sur des formulations conduisant à la formation de la matrice de souplesse reliant les variations de déplacements aux variations d'efforts aux noeuds de l'élément [MENEGOTTO72 , JENNINGS68] .

4.4 DISCRETISATION DE LA STRUCTURE :

La structure réelle est modélisée en une ossature constituée par des éléments de

type poutre dont les extrémités constituent l'ensemble des noeuds de la structure (fig. 4.1).

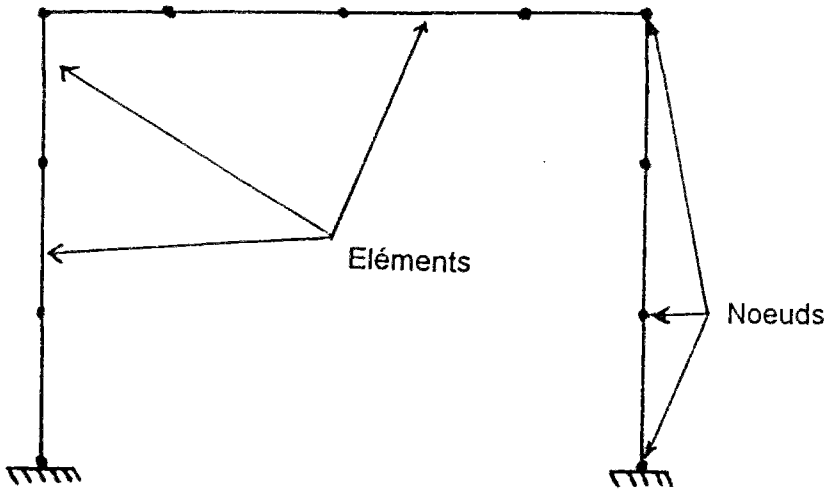


Fig. 4.1 : Exemple de discrétisation d'une structure en éléments poutres .

Chaque élément de la structure est divisé en plusieurs sections dénommées sections longitudinales dans le programme (fig. 4.2) . Ce nombre de section est toujours impair et supérieur ou égal à trois .

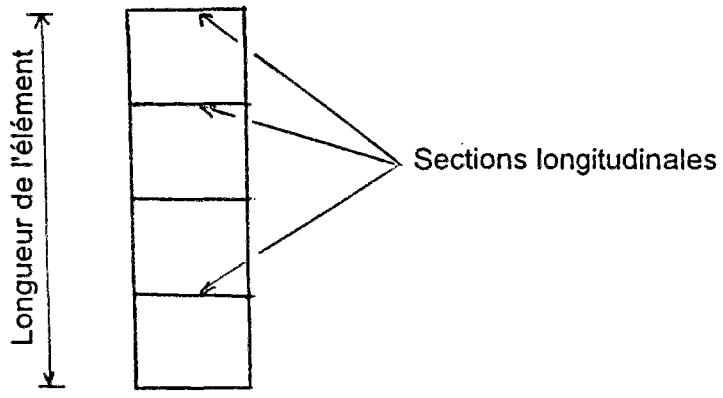


Fig. 4.2 : Discrétisation d'un élément en sections longitudinales .

La section longitudinale peut être aussi divisée en plusieurs sections dénommées sections transversales . Cette discrétisation est surtout utilisée quand la section longitudinale est constituée de plusieurs matériaux de caractéristiques mécaniques différentes ou qu'elle comporte des trous (fig. 4.3) .

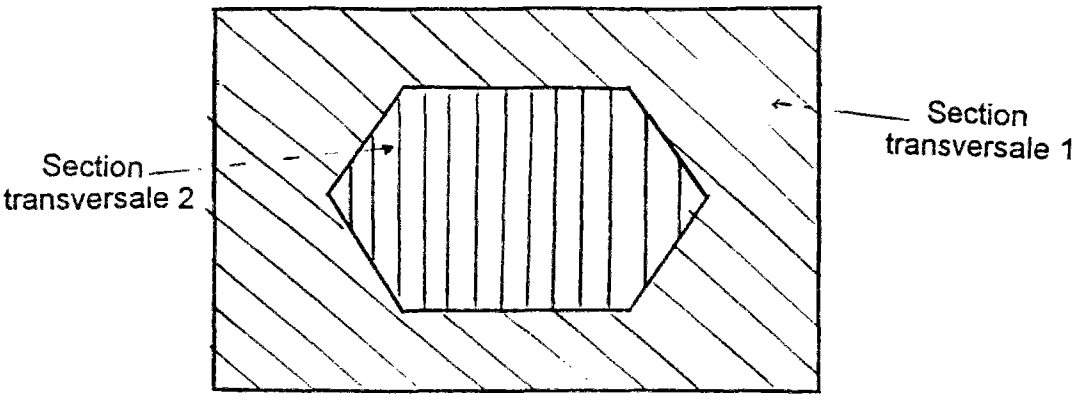


Fig. 4.3 : Discrétisation d'une section longitudinale en plusieurs sections transversales .

La section transversale est divisée automatiquement en plusieurs trapèzes si sa forme n'est pas régulière (fig. 4.4) . Pour l'exemple ci-dessous , la section transversale 1 est divisée en six trapèzes et la section transversale 2 en deux trapèzes .

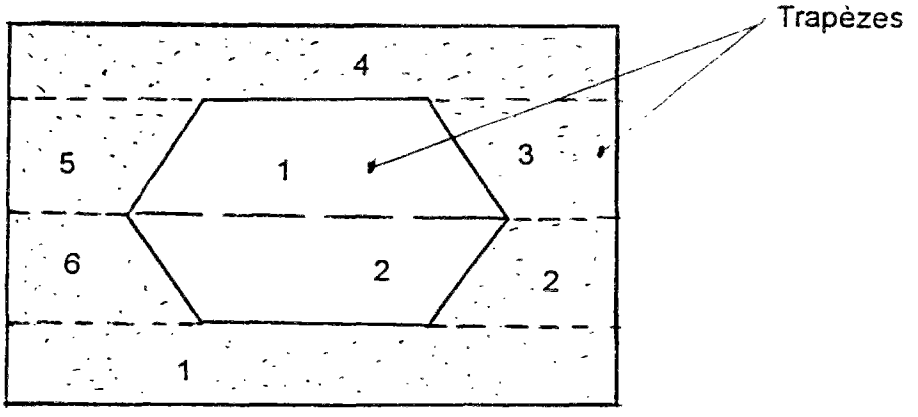


Fig. 4.4 : Discrétisation d'une section transversale en plusieurs trapèzes .

Le trapèze est divisé en plusieurs fibres de béton (fig. 4.5). Ceci est fait à l'appréciation de l'utilisateur avec le nouveau mot-clé (dis_pin) que nous avons introduit .

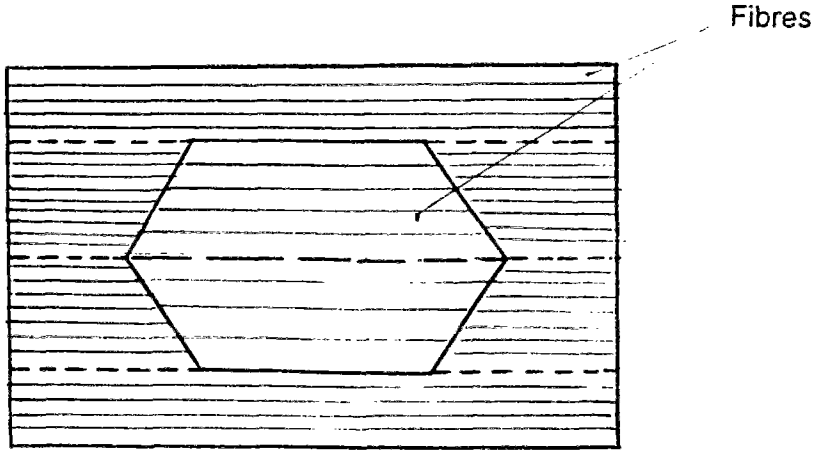


Fig. 4.5 : Discrétisation de trapèzes en plusieurs fibres .

A chaque fibre, on associe une contrainte normale et une déformation longitudinale . Chaque fibre représente un point de la section . La fibre n'est sollicitée qu'en traction ou en

compression . Les armatures sont introduites par l' aire et la position dans la section .

Remarque : La section circulaire doit être introduite comme section polygonale dans SCOB afin de pouvoir utiliser la discrétisation par nombre de fibres contrôlé .

4.5 FORMULATION DU PRINCIPE DE CALCUL :

4.5.1 Schéma général de calcul :

La structure réelle est modélisée en une ossature constituée par des éléments de type poutre dont les extrémités constituent l'ensemble des noeuds de la structure .

Le problème non-linéaire est résolu en utilisant une méthode itérative basée sur la méthode des déplacements , dans laquelle on recalcule , à chaque étape , la matrice de rigidité "corde" reliant les variations de déplacements aux variations d'efforts .

Pour une variation du chargement extérieur $\Delta\bar{\mathbf{Q}}$ donné , on construit la matrice de rigidité **R** de la structure .

Pour chaque étape de chargement , le problème consiste à chercher la variation de déplacements des noeuds $\Delta\bar{\mathbf{U}}$ solution du système d'équations non-linéaire suivant :

$$\Delta\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}\Delta\bar{\mathbf{U}} \quad (4\text{-}1)$$

La matrice de rigidité **R** est déterminée à partir des matrices $\mathbf{K}_G$ des éléments de la structure .

La matrice de rigidité $\mathbf{K}_G$ de chaque élément de la structure est calculée en étudiant le comportement mécanique d'un certain nombre de sections transversales le long de l'élément dans le repère intrinsèque lié à l'élément . La non-linéarité géométrique attachée à la déformation propre de l'élément est supposée négligeable . Le passage au repère global, lié à la structure , est effectué au moyen d'une matrice de rotation $\mathbf{T}_G$ qui ne dépend que de l'inclinaison initiale de l'élément .

La recherche de l'équilibre de la structure se fait pour une variation de chargement extérieur . A chaque variation de chargement $\Delta\bar{\mathbf{Q}}$ donné , le système non-linéaire des équations (4-1) est résolu en utilisant la méthode des substitutions successives basée sur les matrices "cordes" reliant les variations d'efforts appliqués aux noeuds aux variations de déplacements des noeuds (fig. 4.6) .

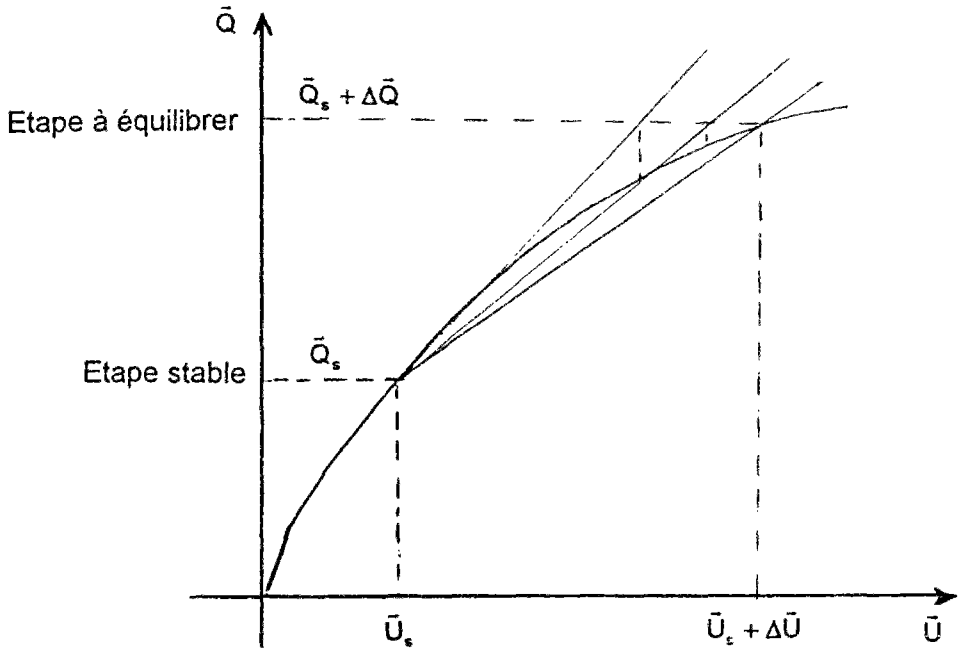


Fig. 4.6 : Représentation de la méthode des substitutions utilisant les matrices "cordes".

La méthode des substitutions utilisant les matrices de rigidité "cordes" est décrite ultérieurement ; elle consiste à construire une suite de solutions $\Delta\bar{U}_0, \Delta\bar{U}_1, ..., \Delta\bar{U}_i$, $\Delta\bar{U}_i$ étant calculée à partir de $\Delta\bar{U}_{i-1}$ en résolvant le système linéaire d'équations suivant :

$$\Delta\bar{Q}_i = \mathbf{R}_{i-1}\Delta\bar{U}_i \quad (4\text{-}2)$$

où $\mathbf{R}_{i-1}$ représente la matrice de rigidité de la structure à l'itération (i-1) .

Pour le démarrage de l'algorithme de calcul , la condition initiale est donnée par $\Delta\bar{U}_0 = \bar{0}$.

A l'issue de chaque étape de chargement , on établit la matrice de rigidité de la structure correspondant à ce niveau de chargement , qui sert à une première évaluation des effets de l'étape suivante de chargement .

L'application de l'algorithme exige la formulation , à chaque itération , d'une nouvelle matrice de rigidité de la structure R .

Le critère de convergence des variations de déplacement est analogue à celui utilisé dans la résolution de l'équilibre de déformation des sections (§ 4.5.3.3) , à la différence près que si le nombre d'itérations fixé à priori est dépassé , on considère que la solution diverge et donc le processus itératif est repris avec un pas de chargement ou de déchargement égal à la moitié du pas de chargement ou de déchargement précédent et ainsi de suite . Le processus itératif est terminé quand le pas devient plus petit que la

tolérance t_u , de l'ordre de 1. 10^{-3} , fixée au départ . Il constitue donc un des critères de rupture .

4.5.2 Séquence de calcul :

L'étude du comportement de la structure est effectuée pas à pas pour des valeurs croissantes ou décroissantes du paramètre α . Les équations qui décrivent la séquence de calcul sont présentées ultérieurement .

On considère que , pour une étape donnée p où le paramètre α vaut α_p , sont connus les déplacements , les sollicitations et les déformations de la structure . Toutes les équations mentionnées ci-dessus sont obtenues ultérieurement .

Sous un accroissement (au sens général) des charges extérieures $\Delta\bar{Q} = \Delta\alpha.\bar{F}$, le paramètre α est donné par :

$$\alpha_{p+1} = \alpha_p + \Delta\alpha \quad (4\text{-}3)$$

où $\Delta\alpha$ peut être positif ou négatif .

La séquence de calcul pour la détermination de la réponse en déplacement de la structure sous une variation du chargement extérieur est la suivante :

1 - On suppose connu le vecteur de déplacement des noeuds $\Delta\bar{U}_0$. Pour la première itération , ce vecteur est nul et il est ensuite égal au vecteur fourni par l'itération précédente .

2 - Le vecteur $\Delta\bar{S}_n$ d'accroissement de déplacement aux noeuds d'un élément est calculé à partir de $\Delta\bar{U}_0$.

On calcule l'accroissement des efforts internes $\Delta\bar{F}_n$ aux noeuds des éléments dans leur repère intrinsèque en utilisant pour chaque élément la relation suivante :

$$\Delta\bar{F}_n = \mathbf{K}_n\Delta\bar{S}_n \quad (4\text{-}4)$$

La valeur de $\mathbf{K}_n$ est celle obtenue à l'itération précédente .

3 - Le vecteur des accroissements de sollicitations $\Delta\bar{F}_s$ d'une section de calcul est obtenu à partir de $\Delta\bar{F}_n$.

L'équilibre d'une section est obtenu en résolvant par itérations successives (méthode de substitution utilisant les matrices cordes) le système non-linéaire (4-21) .

Cependant , si l'équilibre d'une section n'est pas vérifié , ceci provient du fait d'une "rupture" de la section ou du fait que le nombre d'itérations fixé à priori n'est pas suffisant pour aboutir à la convergence du processus itératif et en conséquence le calcul est repris avec un pas de chargement $\Delta\alpha$ plus petit en valeur absolue .

4 - Du fait de l'équilibre des sections , l'accroissement de déformations $\Delta\bar{\delta}$ étant connu par intégration (règle de Simpson) , on détermine la matrice de rigidité $\mathbf{K}_n$ de chaque élément dans le repère intrinsèque en tenant compte des non-linéarités mécaniques.

5 - La matrice $\mathbf{K}_L$ dans le repère local , liée à la position initiale de l'élément , s' en déduit par les équations (4-38) dans lesquelles les matrices **B** et **D** , exprimant la non-linéarité géométrique , sont celles obtenues à l'étape précédente .

6 - Le passage à $\mathbf{K}_G$ dans le repère global est effectué par l'intermédiaire de la matrice de rotation $\mathbf{T}_G$.

7 - La matrice de rigidité de la structure **R** est formée en écrivant l'équilibre des noeuds dans le repère global .

8 - Le vecteur des accroissements de déplacements des noeuds $\Delta\bar{\mathbf{U}}$ de la structure correspondant à l'itération en cours s'obtient en résolvant le système (4-1) en tenant compte des conditions aux limites de la structure .

9 - Après avoir obtenu l'accroissement de déplacements des noeuds $\Delta\bar{\mathbf{U}}$, on procède à la vérification de la convergence . Si le test est vérifié , le calcul est répété avec la nouvelle valeur $\Delta\bar{\mathbf{U}}(\Delta\bar{\mathbf{U}}_0 = \Delta\bar{\mathbf{U}})$. Toutefois , un défaut de convergence peut apparaître du fait de l'instabilité d'ensemble ou du fait que le nombre d'itérations fixé à priori n'est pas suffisant pour assurer la convergence ; dans ce cas , le calcul est repris avec un pas de chargement $\Delta\alpha$ plus petit en valeur absolue .

10 - A la fin de chaque étape , on calcule les déformations , les efforts $\bar{\mathbf{F}}_L$ et déplacements $\bar{\mathbf{S}}_L$ totaux aux noeuds des éléments dans leur repère local , ainsi que les déplacements totaux des noeuds $\bar{\mathbf{U}}$ et les charges extérieures totales $\bar{\mathbf{Q}}$ dans le repère global , lié à la structure , en cumulant les variations de cette étape aux valeurs de l'étape précédente .

11 - On effectue une étape de correction des déplacements des noeuds $\bar{\mathbf{U}}$ obtenus . En effet , la matrice $\mathbf{K}_n$ exprimant la non-linéarité physique est recalculée à chaque itération, tandis que les matrice **B** et **D** exprimant la non-linéarité géométrique sont gardées constantes pendant l'étape avec les valeurs obtenues à la fin de l'étape précédente . Cette

procédure peut entraîner une sous-estimation des effets du second ordre .

Pour palier ce défaut , on effectue une " étape de correction " dans l'étape en cours en y introduisant l'effet d'un accroissement de charge fictif $\Delta\bar{Q}^{\cdot}$ donné par :

$$\Delta\bar{Q}^{\cdot} = \bar{Q} - \bar{Q}^{\cdot} \quad (4\text{-}5)$$

$\bar{Q}$ étant des charges réelles et $\bar{Q}^{\cdot}$ le vecteur des charges qui sont en équilibre avec les efforts $\bar{F}_n$ calculés , compte tenu des déplacements des noeuds $\bar{U}$ calculés . Le vecteur de charges $\bar{Q}^{\cdot}$ (fig. 4.7) est obtenu en écrivant l'équilibre des noeuds de la structure . Toutefois , les réactions d'appuis ne sont pas considérées dans ce vecteur .

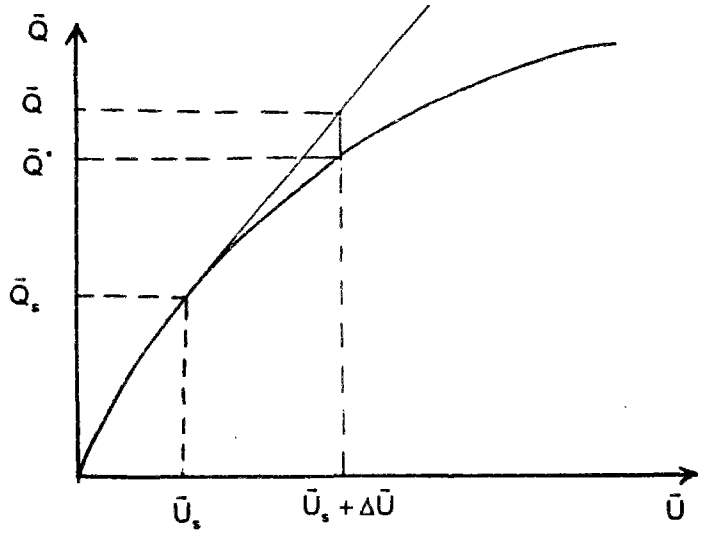


Fig. 4.7 : Etat d'équilibre de la structure avant l'étape de correction .

Cette étape de correction est caractérisée par un cycle itératif pour équilibrer ce chargement fictif . Elle est supprimée si la norme euclidienne n_f des efforts est inférieure ou égale à une certaine tolérance t_f fixée à priori . Le cas échéant , l'étape de correction est effectuée jusqu'à ce que la valeur de $\Delta\bar{Q}^{\cdot}$ devienne négligeable .

12 - Après cette étape de correction , on continue l'analyse avec une nouvelle étape de chargement ou déchargement extérieur . La charge de rupture est obtenue lorsque l'algorithme de résolution diverge pour un accroissement de valeur absolue de la charge inférieur ou égal à une précision fixée à priori .

L'organigramme simplifiée d'une étape de chargement est montré sur la figure 4.8 .

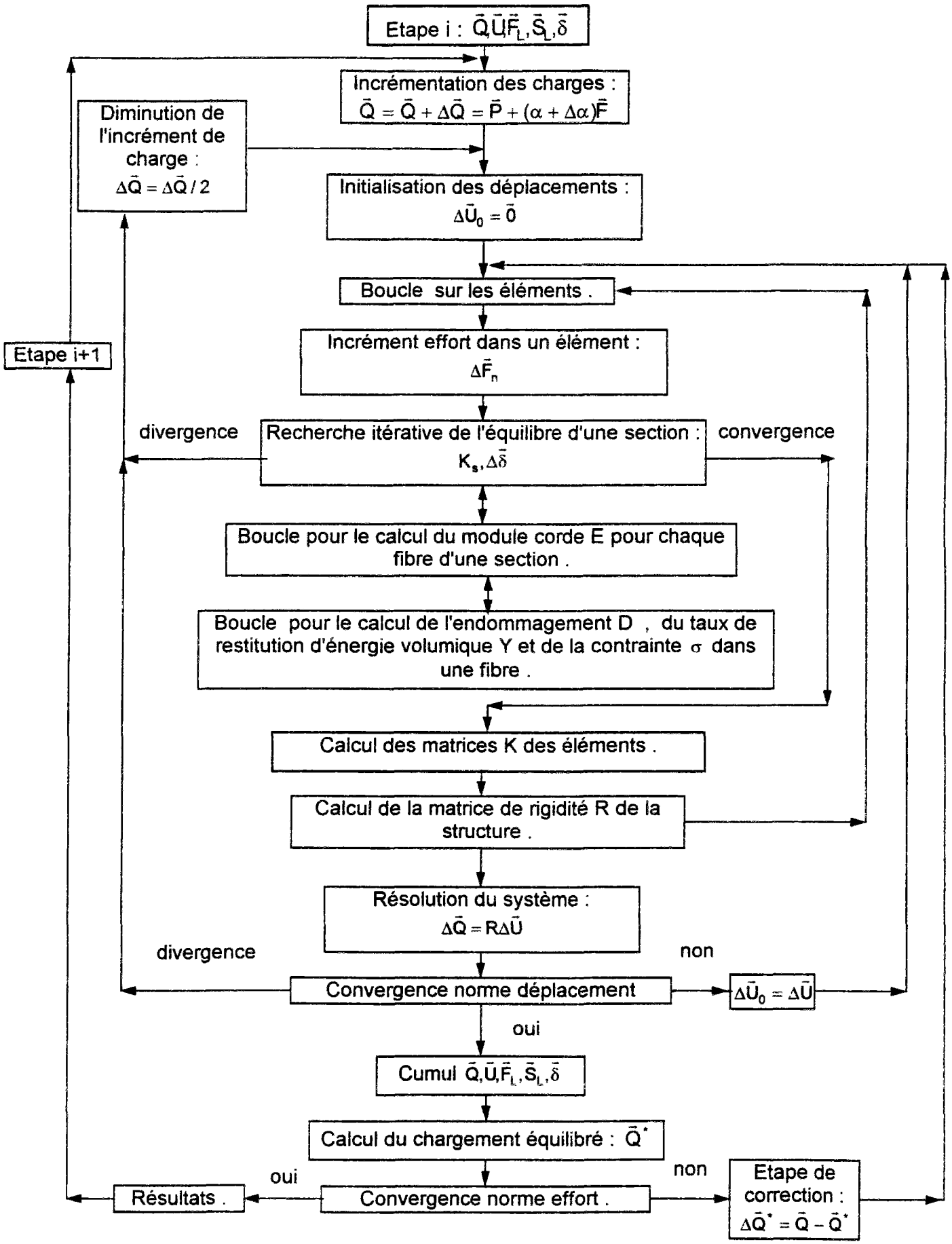


Fig. 4.8 : Procédure itérative globale .

4.5.3 Analyse d'un élément de poutre :

Les éléments d'une structure sont modélisés par des éléments poutre à six degrés de liberté. La section de ces éléments est en béton armé . La figure 4.9 montre une section typique d' un élément en béton armé . La section de béton est discrétisée en un ensemble de fibres et des armatures sont représentées par leur aire et leur position dans la section comme défini au paragraphe 4.4 . Les lois de comportement des matériaux sont celles définies au chapitre 3 .

La section est étudiée dans l'hypothèse des petites déformations . Elle est définie dans son repère principal .

La section droite d'un élément est sollicitée en flexion alternée , simple ou composée. L' analyse concerne essentiellement les sollicitations normales dues à un effort normal N et à un moment de flexion M_z . La distorsion moyenne du béton , due à l'effort tranchant T_y , est calculée en supposant que la rigidité correspondante est constante et égale à celle de l'élasticité linéaire .

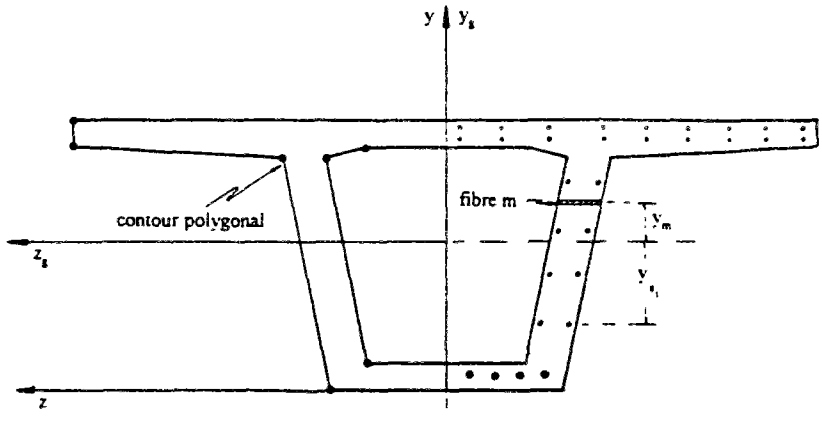


Fig. 4.9 :Description d'une section typique d'une poutre en béton armé .

En admettant que les sections restent planes au cours de leur déformation, que le glissement entre les armatures et le béton est nul , quel que soit le niveau des sollicitations, la déformation longitudinale ε comptée positivement dans le sens des raccourcissements des fibres de la section est donnée par:

$$\varepsilon = \varepsilon_g + y_m \varphi_z \quad (4\text{-}6)$$

où y_m est l'ordonnée du centre de gravité de la fibre m , ε_g la déformation du centre de gravité de la section totale et φ_z la courbure par rapport à l'axe y .

La déformation tangente considérée dans l'analyse γ_y désigne la déformation de cisaillement de la section dans le plan xy c'est à dire la distorsion moyenne .

Soit $\vec{\delta}_n$ le vecteur de déformation normales défini par :

$$\vec{\delta}_n = \begin{Bmatrix} \varepsilon_g \\ \varphi_z \end{Bmatrix}$$

et $\Delta\vec{\delta}_n$ le vecteur contenant la variation de déformation de la section sous sollicitations normales :

$$\Delta\vec{\delta}_n = \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_g \\ \Delta\varphi_z \end{Bmatrix}$$

La variation de déformation tangente est représenté par $\Delta\gamma_y$.

Pour une armature de la section droite, la déformation est donnée par :

$$\varepsilon_{s_i} = \begin{Bmatrix} 1 & y_{s_i} \end{Bmatrix} \vec{\delta}_n \quad (4\text{-}7)$$

4.5.3.1 Calcul des sollicitations internes :

Les sollicitations normales à la section droite dues aux matériaux constituant la section peuvent s'écrire sous la forme d' un vecteur $\vec{F}_n$ défini dans le repère principal lié à la section droite par :

$$\vec{F}_n = \begin{Bmatrix} N_m \\ M_{z_m} \end{Bmatrix} = \iint_A \begin{Bmatrix} 1 \\ y \end{Bmatrix} \sigma_m dydz \quad (4\text{-}8)$$

σ_m étant la contrainte normale en un point courant de la section transversale A de l'élément.

Une section droite est composée , en général , du matériau béton et des armatures . On peut écrire l'équation (4-8) en tenant compte de la contribution de chaque matériau constituant la section comme :

$$\vec{F}_n = \vec{F}_{n_b} + \vec{F}_{n_s} \quad (4\text{-}9)$$

ou $\vec{F}_{n_b}$ représente la contribution du béton . Ce vecteur est donné par :

$$\vec{F}_{n_b} = \iint_A \begin{Bmatrix} 1 \\ y_m \end{Bmatrix} \sigma_m dydz \quad (4\text{-}10)$$

σ_m étant la contrainte normale en un point courant de la section de béton .

La contribution des armatures s , considérées concentrées dans chaque lit en leur centre de gravité , est donnée par le vecteur $\bar{F}_{n_s}$ défini par :

$$\bar{F}_{n_s} = \sum_{i=1}^{n_s} \begin{Bmatrix} 1 \\ y_{s_i} \end{Bmatrix} \sigma_{s_i} A_{s_i} \quad (4\text{-}11)$$

σ_{s_i} étant la contrainte normale à la section droite au niveau de l'armature d'ordre i , A_{s_i} l'aire de la section de l'armature et n_s le nombre d'armatures traversant la section droite .

La variation des déformations normales notée , $\Delta\bar{\delta}_n$, de la section droite produit une variation des sollicitations normales dans les matériaux de la section .

La variation des sollicitations normales $\Delta\bar{F}_{n_b}$ dans le béton est donnée par :

$$\Delta\bar{F}_{n_b} = \iint_A E_m \begin{bmatrix} 1 & y_m \\ y_m & y_m^2 \end{bmatrix} dydz \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_g \\ \Delta\varphi_z \end{Bmatrix} \quad (4\text{-}12)$$

E_m étant le module élastique longitudinal "corde" de chaque fibre de la section du béton . Il relie la variation de contrainte normale $\Delta\sigma_m$ à la variation de déformation longitudinale $\Delta\varepsilon_m$ correspondant de la fibre .

$$\Delta\sigma_m = E_m \Delta\varepsilon_m$$

Pour permettre des calculs numériques , la section A , définie par des contours polygonaux , est décomposée en une succession de fibres . Les intégrales sur la section A sont calculées en utilisant la formule de cubature de type Simpson .

La sollicitation tangente due au béton est calculée en fonction de la déformation correspondante en supposant un comportement élastique linéaire :

$$T_{y_m} = GA_y \gamma_y$$

GA_y étant la rigidité de la section à l'effort tranchant dans le plan xy . Cette rigidité étant constante , l'accroissement d'efforts est alors :

$$\Delta T_{y_m} = GA_y \Delta\gamma_y \quad (4\text{-}13)$$

En tenant compte des relations (4-12) et (4-13) , on peut écrire sous forme

matricielle la relation liant les variations de déformations dans une section et les variations de sollicitations internes développées dans le béton :

$$\Delta\bar{F}_b = \begin{Bmatrix} \Delta\bar{F}_{n_b} \\ \Delta T_{t_b} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1_b} & 0 \\ 0^T & GA_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\bar{\delta}_n \\ \Delta\gamma_y \end{Bmatrix} \quad (4\text{-}14)$$

avec :

$$K_{1_b} = \iint_A E_m \begin{bmatrix} 1 & y_m \\ y_m & y_m^2 \end{bmatrix} dydz \quad (4\text{-}15)$$

$$\mathbf{0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La variation des sollicitations normales dans les armatures s $\Delta\bar{F}_{n_s}$, due à la variation de déformation normales $\Delta\bar{\delta}_n$ de la section droite , est donnée par :

$$\Delta\bar{F}_{n_s} = \sum_{i=1}^{n_{s1}} E_{s_i} A_{s_i} \begin{bmatrix} 1 & y_{s_i} \\ y_{s_i} & y_{s_i}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_g \\ \Delta\varphi_z \end{Bmatrix} \quad (4\text{-}16)$$

E_{s_i} étant le module élastique au niveau de l'armature d'ordre i ; il relie l'accroissement de contrainte $\Delta\sigma_{s_i}$ à l' accroissement de déformations longitudinales $\Delta\varepsilon_{s_i}$ correspondant au niveau de l'armature :

$$\Delta\sigma_{s_i} = E_{s_i}\Delta\varepsilon_{s_i} \quad (4\text{-}17)$$

En négligeant la sollicitation tangente due aux armatures s , la relation liant les variations de déformations dans une section aux variations de sollicitations internes développées dans les armatures s s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \Delta N_{n_s} \\ \Delta M_{n_s} \\ \Delta T_{t_s} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n_{s1}} E_{s_i} A_{s_i} \begin{bmatrix} 1 & y_{s_i} & 0 \\ y_{s_i} & y_{s_i}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_g \\ \Delta\varphi_z \\ \Delta\gamma_y \end{Bmatrix} \quad (4\text{-}18)$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme :

$$\Delta\vec{F}_a = \begin{Bmatrix} \Delta\vec{F}_{n_s} \\ \Delta T_{t_s} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{1_s} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\vec{\delta}_n \\ \Delta\gamma_y \end{Bmatrix} \quad (4\text{-}19)$$

avec :

$$\mathbf{K}_{1_s} = \sum_{i=1}^{n_s} E_{s_i} \begin{bmatrix} 1 & y_{s_i} \\ y_{s_i} & y_{s_i}^2 \end{bmatrix} A_{s_i} \quad (4\text{-}20)$$

4.5.3.2 Déformation de la section à l'équilibre :

La section droite est supposée soumise aux variations d'efforts sollicitants dus aux forces extérieures :

$$\Delta\vec{F}_s = \begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M_z \\ \Delta T_y \end{Bmatrix}$$

La condition d'équilibre de la section se traduit par l'égalité des variations des sollicitations internes et externes , et elle est donnée par la relation:

$$\Delta\vec{F}_s = \Delta\vec{F}_b + \Delta\vec{F}_a \quad (4\text{-}21)$$

Cette condition peut , en tenant compte des équations (4-16) et (4-19) , être exprimée par :

$$\Delta\vec{F}_s = \mathbf{K}_s \Delta\vec{\delta} \quad (4\text{-}22)$$

où $\mathbf{K}_s$ représente la matrice de rigidité de la section , donnée par :

$$\mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{1_b} + \mathbf{K}_{1_s} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{GA}_y \end{bmatrix}$$

et

$$\Delta\vec{\delta} = \begin{Bmatrix} \Delta\vec{\delta}_n \\ \Delta\gamma_y \end{Bmatrix}$$

Pour une variation des efforts sollicitants , la résolution en déformation de l'équation (4-21) est itérative . La solution de cette équation peut s'exprimer par :

$$\Delta\bar{\delta} = \mathbf{K}_s^{-1}\left\{\Delta\bar{\mathbf{F}}_s\right\} \quad (4\text{-}23)$$

4.5.3.3 Méthode itérative de résolution et critères de divergence :

On peut calculer les efforts développés par une déformation donnée (équation 4-21). Cependant , il n'existe pas une méthode directe permettant d'obtenir les déformations produites par des efforts donnés (équation 4-23) . On est obligé , donc , d'utiliser une méthode itérative pour déterminer la solution en déformation .

Soit un état d'équilibre de la section soumise à des sollicitations extérieures exprimées par le vecteur $\bar{\mathbf{F}}_s$ défini par :

$$\bar{\mathbf{F}}_s = \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M}_z \\ \mathbf{T}_y \end{Bmatrix}$$

et soit le vecteur de déformation correspondant $\bar{\delta}_s$ donné par :

$$\bar{\delta}_s = \begin{Bmatrix} \varepsilon_g \\ \varphi_z \\ \gamma_y \end{Bmatrix}$$

Pour une variation de sollicitations extérieures $\Delta\bar{\mathbf{F}}_s$, la variation de déformation $\Delta\bar{\delta}_s$ de la section est recherchée en utilisant la méthode des substitutions successives utilisant les matrices "cordes" .

Cette méthode consiste à construire une suite de solutions $\Delta\bar{\delta}_0, \Delta\bar{\delta}_1, \ldots\ldots, \Delta\bar{\delta}_i$; $\Delta\bar{\delta}_i$ est calculée à partir de $\Delta\bar{\delta}_{i-1}$, solution du système linéaire d'équations suivant :

$$\Delta\bar{\mathbf{F}}_s = \mathbf{K}_{s_{i-1}}\Delta\bar{\delta}_i$$

$\mathbf{K}_{s_{i-1}}$ étant la matrice de rigidité "corde" de la section à l'itération (i-1) .

En partant de la solution initiale $\Delta\bar{\delta}_0$ nulle , le schéma de résolution s'écrit :

$$\Delta\bar{\delta}_0 = \bar{\mathbf{0}}$$

$$\Delta\bar{\delta}_i = \mathbf{K}_{s_{i-1}}^{-1}\left\{\Delta\bar{\mathbf{F}}_s\right\}$$

$K^{-1}_{s_{i-1}}$ étant la matrice de souplesse de la section à l'itération (i-1) .

En général , l'équilibre d'une section est défini par deux conditions :

- la première concerne la limitation de la variation de déformation entre deux itérations successives à une tolérance fixée à priori . Cette variation est déterminée avec la norme euclidienne de déformation ;

- la seconde concerne la limite du nombre d'itérations pour chaque étape de calcul . En général , si ce nombre est supérieur à une dizaine d'itérations , c'est le signe que certains problèmes d'ordre numérique liés à la fissuration du béton , à une loi de comportement non convexe , etc. , peuvent se présenter . Mathématiquement , ces problèmes se manifestent lorsque le déterminant de la matrice de rigidité K_s est voisin de zéro .

L'organigramme simplifié de la recherche de l'état d'équilibre d'une section transversale lors d'une variation de sollicitation extérieure $\Delta\bar{F}_s$ est montré sur la figure 4.10 .

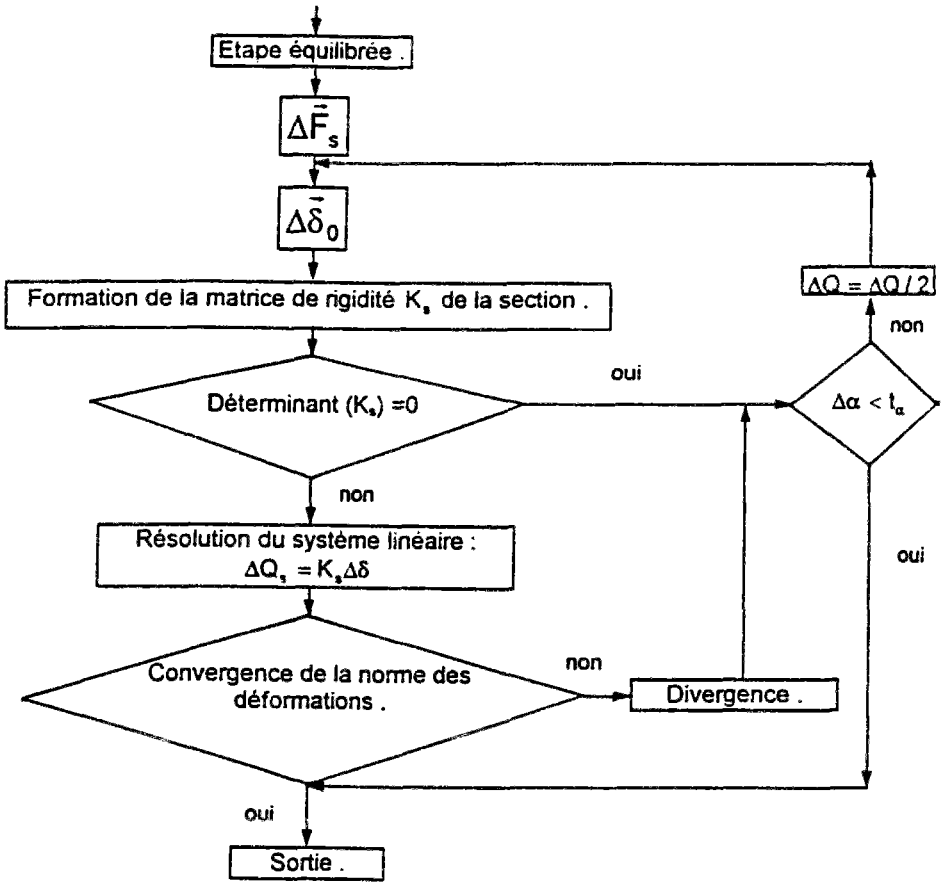


Fig. 4.9 : Organigramme simplifié de la recherche de l'état d'équilibre d'une section .

4.5.3.4 Matrice de rigidité d'un élément dans son repère intrinsèque :

Soit un élément quelconque de la structure de noeud origine I_0 et de noeud

extrémité J_0 , et soit $x_0y_0z_0$ le repère local de référence lié à la position initiale de l'élément (fig. 4.5) . L'origine du système des axes est en I_0 .

Sous l'action des forces $F_{i_{x0}}, F_{i_{y0}}, M_{i_{z0}}, F_{j_{x0}}, F_{j_{y0}}, M_{j_{z0}}$, les noeuds se déplacent de (u_i, v_i) et de (u_j, v_j) dans le repère local (fig.4.11) .

Pour tenir compte , dans la matrice de rigidité de l'élément , des effets des non - linéarités dus au comportement des matériaux constitutifs et de leur association et des effets du second ordre dus aux déplacements des noeuds , l'analyse de l'état de déformation de l'élément est effectuée dans le repère intrinsèque xyz lié à la position déformée de l'élément , dans l'hypothèse des petites déformations , des petits déplacements et en négligeant la déformation propre de l'élément supposé de faible longueur . Les effets de second ordre s'introduisent dans le passage du repère intrinsèque xyz au repère $x_0y_0z_0$ défini précédemment .

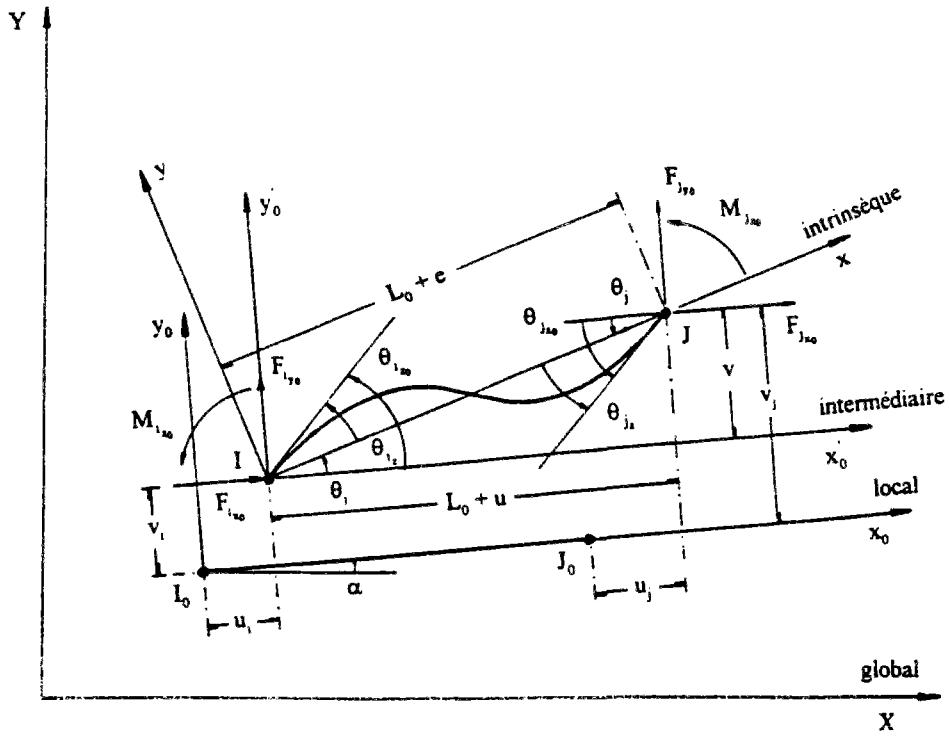


Fig. 4.11 : Repères d'un élément poutre

Soit un élément quelconque chargé à ses noeuds dans son repère intrinsèque lié aux noeuds de l'élément (figs. 4.11 et 4.12) . Cet élément est supposé court de sorte que l'on peut négliger les effets de second ordre dus à ses déformations dans ce repère . Les sollicitations selon l'abscisse x sont donc linéaires .

Soit $\vec{F}_x$ le vecteur contenant les efforts appliqués aux noeuds de l'élément (fig.4.12) :

$$\bar{F}_x = \begin{Bmatrix} N_i \\ T_{i_y} \\ M_{i_z} \\ N_j \\ T_{j_y} \\ M_{j_z} \end{Bmatrix}$$

Le vecteur $\bar{F}_x$ peut être exprimé en fonction du vecteur $\bar{F}_n$ contenant les efforts dans le repère intrinsèque par :

$$\bar{F}_x = T^T \bar{F}_n \quad (4\text{-}24)$$

$\bar{F}_n$ étant un vecteur défini par :

$$\bar{F}_n = \begin{Bmatrix} N_j \\ M_{i_z} \\ M_{j_z} \end{Bmatrix}$$

et T une matrice donnée par :

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L & 1 & 0 & -1/L & 0 \\ 0 & 1/L & 0 & 0 & -1/L & 1 \end{bmatrix} \quad (4\text{-}25)$$

On désigne par $\bar{S}_n$ le vecteur contenant les déplacements dans ce repère (fig. 4.6) :

$$\bar{S}_n = \begin{Bmatrix} e \\ \theta_{i_z} \\ \theta_{j_z} \end{Bmatrix}$$

avec

$$e = L - L_0$$

e étant la variation de longueur de l'élément.

D'autre part , et compte tenu que l'élément est supposé suffisamment court pour que les moments dus à l'interaction effort normal - flèche soient négligeables dans le repère intrinsèque , les efforts dans une section d'abscisse x s'écrivent :

$$N(x) = N_j$$
$$M_z(x) = -\left\{(1-x/L)M_{i_z} - x/LM_{j_z}\right\}$$
$$T_y(x) = \left(M_{i_z} + M_{j_z}\right)/L$$

équations qui peuvent s'écrire comme :

$$\vec{F}_s = \mathbf{L}(\mathbf{x})\vec{F}_n \quad (4\text{-}26)$$

où

$$\vec{F}_s = \begin{Bmatrix} N(x) \\ M_z(x) \\ T_y(x) \end{Bmatrix}$$

et

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -(1-x/L) & x/L \\ 0 & 1/L & 1/L \end{bmatrix}$$

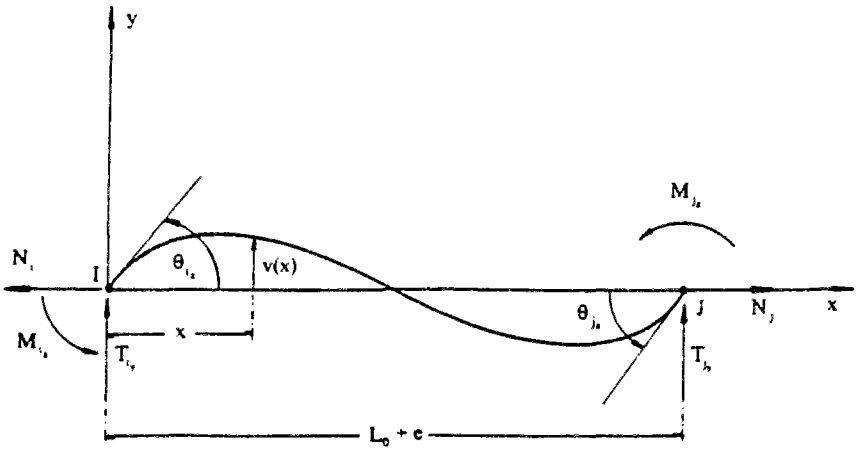


Fig. 4.12 : Elément poutre déformé.

L'équation (3-51) lie les sollicitations dans une section aux efforts aux noeuds de l'élément dans le repère intrinsèque . En négligeant la variation de longueur dans le calcul des variations de sollicitations , on a :

$$\Delta\vec{F}_s = \mathbf{L}(\mathbf{x})\Delta\vec{F}_n$$

Le théorème des travaux virtuels permet d'écrire:

$$\bar{S}_n = \int_0^L \mathbf{L}^T(x)\bar{\delta}(x)dx \quad (4\text{-}27)$$

où

$$\bar{\delta}(x) = \begin{Bmatrix} \varepsilon(x) \\ \varphi_z(x) \\ \gamma_y(x) \end{Bmatrix}$$

En négligeant la variation de longueur dans le calcul de déplacements des noeuds , on trouve de l'équation (3-52) :

$$\Delta\bar{S}_n = \int_0^L \mathbf{L}^T(x)\Delta\bar{\delta}(x)dx \quad (4\text{-}28)$$

En remplaçant les relations (4-23) et (4-27) dans l'équation (4-28) , on obtient la matrice de souplesse de l'élément $\mathbf{K}_n^{-1}$ tel que :

$$\Delta\bar{S}_n = \mathbf{K}_n^{-1}\Delta\bar{F}_n \quad (4\text{-}29)$$

avec

$$\mathbf{K}_n^{-1} = \int_0^L \mathbf{L}^T(x)\mathbf{K}_s^{-1}\mathbf{L}(x)dx$$

L'intégration est effectuée par la règle de Simpson en considérant sur l'élément un certain nombre de sections de calcul dans lesquelles les matrices $\mathbf{K}_s$ sont déterminées à chaque étape .

Finalement , la relation entre variation d'efforts et variation de déplacements aux noeuds de l'élément s'écrit :

$$\Delta\bar{F}_n = \mathbf{K}_n\Delta\bar{S}_n \quad (4\text{-}30)$$

$\mathbf{K}_n$ étant la matrice de rigidité tangente de l'élément dans le repère intrinsèque .

4.5.3.5 Expression de la matrice de rigidité dans le repère local :

Dans le repère local (fig. 4.11) , $\bar{F}_L$ et $\bar{S}_L$ représentent les vecteurs contenant les sollicitations et les déplacements aux noeuds de l'élément :

$$\bar{F}_L = \begin{Bmatrix} F_{i_{x_0}} \\ F_{i_{y_0}} \\ M_{i_{z_0}} \\ F_{j_{x_0}} \\ F_{j_{y_0}} \\ M_{j_{z_0}} \end{Bmatrix} \quad ; \quad \bar{S}_L = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_{i_{z_0}} \\ u_j \\ v_j \\ \theta_{j_{z_0}} \end{Bmatrix}$$

Sous l'action des forces $F_{i_{x_0}}, F_{j_{y_0}}, M_{i_{z_0}}, M_{j_{z_0}}$, les noeuds se déplacent de (u_i, v_i) et (u_j, v_j) dans le repère local . Dans une phase intermédiaire de calcul (fig. 4.11) , on utilise les axes $x_0' y_0' z_0'$ (indice u) et ces vecteurs s'écrivent de la manière suivante :

$$\bar{F}_u = \begin{Bmatrix} F_{j_{x_0}} \\ F_{j_{y_0}} \\ M_{i_{z_0}} \\ M_{j_{z_0}} \end{Bmatrix} \quad ; \quad \bar{S}_u = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta_{i_{z_0}} \\ \theta_{j_{z_0}} \end{Bmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} u &= u_j - u_i \\ v &= v_j - v_i \end{aligned} \qquad (4\text{-}30)$$

La relation qui lie les déplacements dans ces deux repères est donnée par l'équation (valable aussi pour les accroissements des variables) :

$$\bar{S}_u = T_0 \bar{S}_L \quad (4\text{-}31)$$

De même , les vecteurs des efforts sont liés par :

$$\bar{F}_L = T_0^T \bar{F}_u \quad (4\text{-}32)$$

avec

$$T_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les déplacements de l'élément dans le repère intrinsèque sont donnés par :

$$
\begin{aligned}
e &= L - L_0 \\
\theta_{i_z} &= \theta_{i_{z_0}} - \theta \quad (4\text{-}33) \\
\theta_{j_z} &= \theta_{j_{z_0}} - \theta
\end{aligned}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
\theta &= \mathrm{Arc}\sin(v/L) \\
L &= \sqrt{(L_0 + u)^2 + v^2}
\end{aligned}
$$

Le déplacement axial e du noeud J est fonction des déplacements relatifs u et v des noeuds I et J dans le repère intermédiaire . En effet, on a :

$$e = \sqrt{(L_0 + u)^2 + v^2} - L_0$$

où u et v sont définis par (4-30) .

La différentiation des expressions (4-33) nous permet d'établir les relations entre les variations de déplacements dans les repères intrinsèque et intermédiaire $\Delta\bar{\mathbf{S}}_n$ et $\Delta\bar{\mathbf{S}}_u$, respectivement :

$$\Delta\bar{\mathbf{S}}_n = \mathbf{B}\,\Delta\bar{\mathbf{S}}_u \quad (4\text{-}34)$$

avec

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial e}{\partial u} & \dfrac{\partial e}{\partial v} & 0 & 0 \\ \dfrac{-\partial\theta}{\partial u} & \dfrac{-\partial\theta}{\partial v} & 1 & 0 \\ \dfrac{-\partial\theta}{\partial u} & \dfrac{-\partial\theta}{\partial v} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En ne considérant que les termes du premier ordre dans le développement en série des dérivées partielles , la matrice **B** est donnée par :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & v/L_0 & 0 & 0 \\ v/L_0^2 & -1/L_0 + u/L_0^2 & 1 & 0 \\ v/L_0^2 & -1/L_0 + u/L_0^2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La relation entre variations des efforts et des déplacements dans le repère

intermédiaire est obtenue d'après le théorème des travaux virtuels :

$$\bar{F}_n^T \delta \bar{S}_n = \bar{F}_u^T \delta \bar{S}_u$$

et en tenant compte de l'équation (4-31) :

$$\bar{F}_n^T \mathbf{B} \delta \bar{S}_u = \bar{F}_u^T \delta \bar{S}_u$$

$\delta \bar{S}_u$ étant arbitraire , on peut écrire :

$$\bar{F}_u = \mathbf{B}^T \bar{F}_n \quad (4\text{-}35)$$

d'où par différentiation , on obtient :

$$\Delta \bar{F}_u = \mathbf{B}^T \Delta \bar{F}_n + \Delta \mathbf{B}^T \bar{F}_n \quad (4\text{-}36)$$

D'autre part , les termes de la matrice **B** ne dépendent que des dérivées partielles des fonctions e et θ , qui sont fonction des déplacements relatifs u et v des noeuds I et J , respectivement . On a alors :

$$\Delta \mathbf{B}^T = \frac{\partial \mathbf{B}^T}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{B}^T}{\partial \mathbf{v}} \Delta \mathbf{v}$$

$$\Delta \mathbf{B}^T \bar{F}_n = \mathbf{D} \Delta \bar{S}_u \quad (4\text{-}37)$$

avec

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{d} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

où

$$d_{11} = N_j \frac{\partial^2 e}{\partial u^2} - \left(M_{i_z} + M_{J_z}\right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2}$$

$$d_{12} = d_{21} = N_j \frac{\partial^2 e}{\partial u \partial v} - \left(M_{i_z} + M_{J_z}\right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v}$$

$$d_{22} = N_j \frac{\partial^2 e}{\partial v^2} - \left(M_{i_z} + M_{J_z}\right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2}$$

En ne tenant compte que des termes de premier ordre dans le développement des termes de la matrice **d** , on obtient :

$$d_{11} = -2\frac{v}{L_0^3}\left(M_{i_z} + M_{j_z}\right)$$

$$d_{12} = d_{21} = -\frac{v}{L_0^2} N_j - \frac{2u - L_0}{L_0^3}\left(M_{i_z} + M_{j_z}\right)$$

$$d_{22} = \frac{L_0 - u}{L_0^2} N_j + \frac{2v}{L_0^3}\left(M_{i_z} + M_{j_z}\right)$$

L'équation (4-35) permet d'exprimer les efforts appliqués aux noeuds de l'élément dans le repère intrinsèque en fonction des efforts appliqués dans l'élément dans le repère intermédiaire . En effet :

$$\begin{Bmatrix} F_{j_{x0}} \\ F_{j_{y0}} \end{Bmatrix} = C \begin{Bmatrix} N_j \\ -\left(M_{i_z} + M_{j_z}\right)/L_0 \end{Bmatrix}$$

où

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -v/L_0 \\ v/L_0 & 1 - u/L_0 \end{bmatrix}$$

et aussi

$$\begin{Bmatrix} N_j \\ -\left(M_{i_z} + M_{j_z}\right) \end{Bmatrix} = C^{-1} \begin{Bmatrix} F_{j_{x0}} \\ F_{j_{y0}} \end{Bmatrix}$$

et finalement

$$\begin{Bmatrix} N_j \\ -\dfrac{M_{j_z}+M_{j_z}}{L_0} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{L_0(L_0-u)}{B_1} & \dfrac{vL_0}{B_1} \\ -\dfrac{vL_0}{B_1} & \dfrac{L_0^2}{B_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{j_{x0}} \\ F_{j_{y0}} \end{Bmatrix}$$

où

$$B_1 = L_0^2 - uL_0 + v^2$$

et donc les termes de **d** deviennent :

$$\begin{Bmatrix} d_{11} \\ d_{12} \\ d_{22} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-2v^2}{L_0B_1} & \dfrac{2v}{B_1} \\ \dfrac{uv}{L_0B_1} & \dfrac{B_2}{B_1L_0} \\ \dfrac{B_3}{B_1L_0} & -\dfrac{vL_0+uv}{L_0B_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{j_{x0}} \\ F_{j_{y0}} \end{Bmatrix}$$

avec

$$d_{12} = d_{21}$$
$$B_2 = -L_0^2 + 2uL_0 - v^2$$
$$B_3 = (L_0+u)^2 + 2v^2$$

Si on néglige la contribution du déplacement longitudinal u et des termes non linéaires en v , on obtient :

$$\begin{Bmatrix} d_{11} \\ d_{12} \\ d_{22} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2v/L_0^2 \\ 0 & -1/L_0 \\ 1/L_0 & -v/L_0^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{j_{x0}} \\ F_{j_{y0}} \end{Bmatrix}$$

avec $d_{12} = d_{21}$.

Par conséquent , l'équation (4-36) peut s'écrire :

$$\Delta\bar{F}_u = \mathbf{B}^T\Delta\bar{F}_n + \mathbf{D}\Delta\bar{S}_u \quad (4\text{-}38)$$

Finalement , en substituant les relations (4-30) , (4-32) et (4-33) dans l'équation (4-38) , on arrive à l'expression liant les variations des efforts aux variations de déplacements

des noeuds de l'élément dans son repère local , lié à sa position initiale , qui fait intervenir la matrice de rigidité $\mathbf{K}_L$ sous la forme :

$$\Delta\bar{\mathbf{F}}_L = \mathbf{K}_L \Delta\bar{\mathbf{S}}_L \quad (4\text{-}40)$$

avec

$$\mathbf{K}_L = \mathbf{T}_0^T\left(\mathbf{B}^T\mathbf{K}_n\mathbf{B} + \mathbf{D}\right)\mathbf{T}_0$$

4.5.3.6 Relation entre variations des efforts et des déplacements dans le repère global lié à la structure :

La matrice de rigidité de la structure , notée **R** , est formée à partir des matrices de rigidité des éléments définissant la structure dans le repère global XYZ .

Pour l'assemblage de la matrice de rigidité **R** , il est nécessaire de former les matrices de rigidité des éléments dans le repère global (indice G) .

Soient $\bar{\mathbf{F}}_G$ et $\bar{\mathbf{S}}_G$ les vecteurs contenant les efforts appliqués et les déplacements aux noeuds de l'élément , respectivement dans ce repère :

$$\bar{\mathbf{F}}_G = \begin{Bmatrix} F_{i_x} \\ F_{i_y} \\ M_{i_z} \\ F_{j_x} \\ F_{j_y} \\ M_{j_z} \end{Bmatrix} \; ; \; \bar{\mathbf{S}}_G = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ \Theta_{i_z} \\ U_j \\ V_j \\ \Theta_{j_z} \end{Bmatrix}$$

La relation liant ces grandeurs (et leurs variations) dans les deux systèmes s'obtient au moyen de la matrice de rotation $\mathbf{T}_G$, dont les termes ne dépendent que de l'orientation initiale de l'élément (fig. 4.11) . En effet , on a :

$$\bar{\mathbf{S}}_L = \mathbf{T}_G\bar{\mathbf{S}}_G$$

et de même :

$$\bar{\mathbf{F}}_G = \mathbf{T}_G^T\bar{\mathbf{F}}_L$$

avec

$$T_G = \begin{bmatrix} r_0 & 0 \\ 0 & r_0 \end{bmatrix}$$

ou

$$r_0 = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'équation (4-40) s'écrit alors , en faisant intervenir la matrice de rigidité K_G dans le repère global :

$$\Delta\bar{F}_G = K_G \Delta\bar{S}_G$$

avec

$$K_G = T_G^T K_L T_G$$

5 . APPLICATION DU MODELE A DES ESSAIS

5.1. INTRODUCTION :

Dans ce chapitre , nous appliquons le modèle uniaxial développé au chapitre 3 et introduit dans le code SCOB dans le chapitre 4 à trois types de structures :

- des cylindres soumis à la compression cyclique afin de modéliser le comportement local du béton et le comparer avec les résultats expérimentaux ;

- des poteaux courts armés avec différent taux d'armatures soumis à la compression - traction cyclique ;

- des poteaux armés soumis à la flexion alternée avec effort normal constant et différent taux d'armatures longitudinales .

5.2 ESSAIS DE COMPRESSION CYCLIQUE SUR CYLINDRES :

5.2.1 Paramètres des essais :

Plusieurs cylindres (∅ = 16 cm , h = 32 cm) sont soumis à la compression répétée cyclique avec déchargement total . Nous en avons choisi deux pour lesquels les paramètres nécessaires au modèle ont été déterminés au chapitre 3 . Il s'agit en particulier des cylindres QJ2 et QJ4 dont les paramètres sont les suivants :

Tableau 1

	E_0 (MPa)	f_c (MPa)	β_c	Y_{0c} (MPa)	a_c	b_c
QJ2	33600	34,4	0,812	0,00780	60	1,35
QJ4	32500	35	0,993	0,01095	55	1,40

avec : - E_0 : module d'élasticité à l'origine ;

- f_c : résistance à la compression ;

- β_c : paramètre d'anélasticité en compression ;

- Y_{0c} : seuil d'endommagement en compression ;

- a_c,b_c : paramètres intervenant dans l'équation de la variable d'endommagement .

5.2.2 Comparaison calcul - essai :

Les figures (5.1) et 5.2) montrent la comparaison modèle - essai pour les courbes contrainte - déformation .

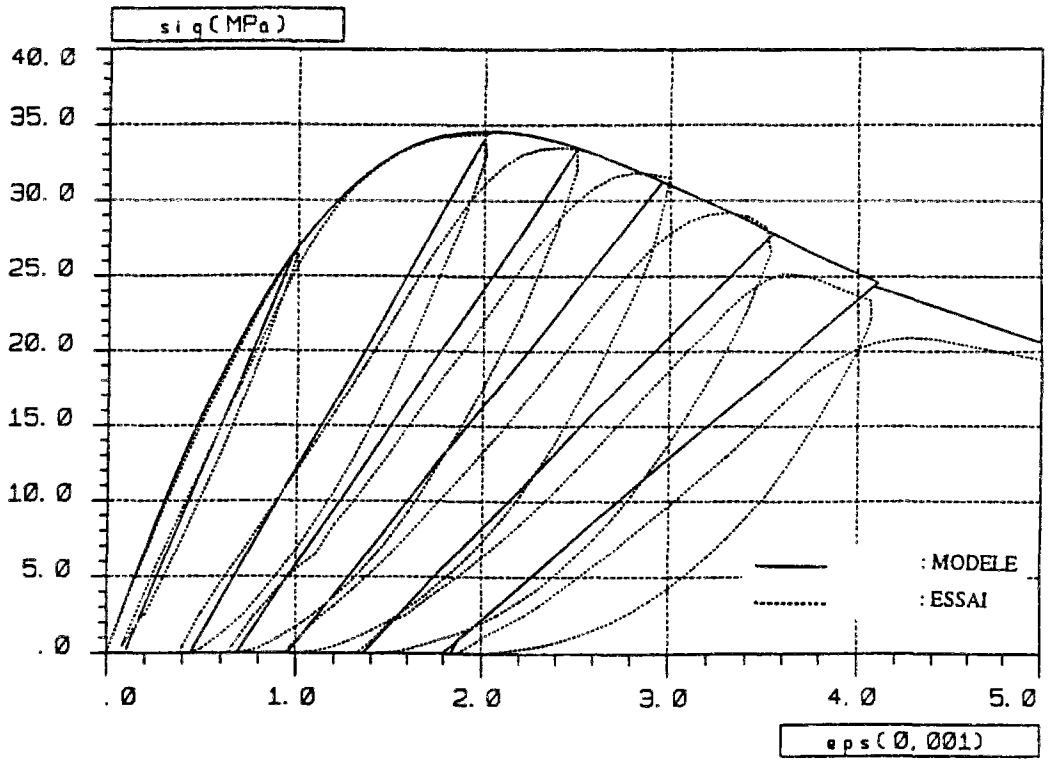


Fig. 5.1 : Courbes contrainte - déformation modèle - essai QJ2 .

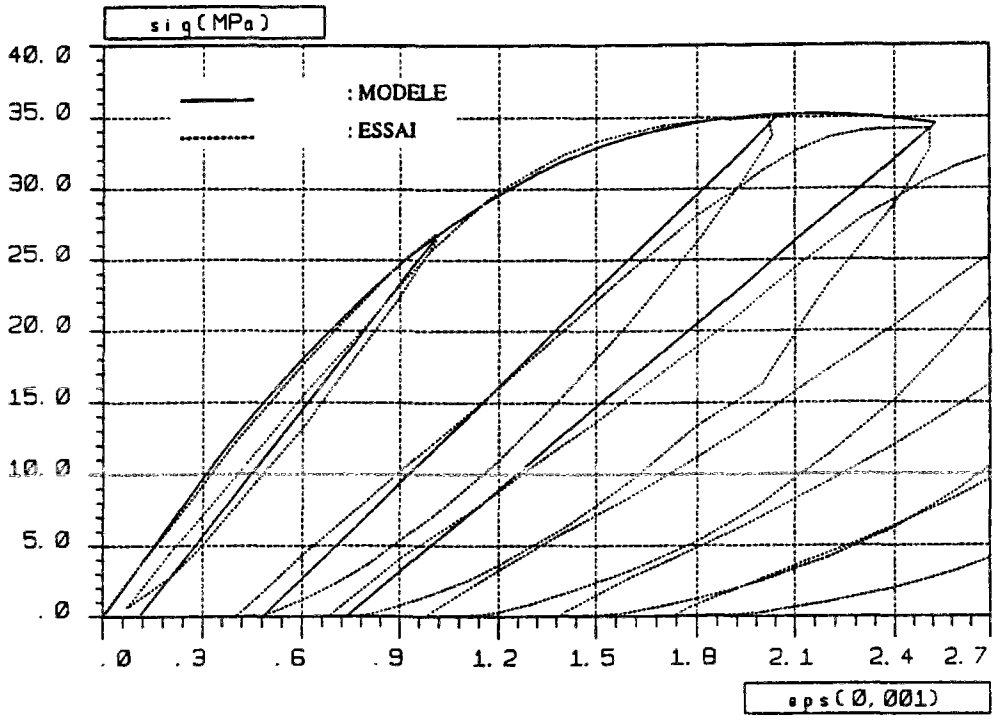


Fig. 5.2 : Courbes contrainte - déformation modèle - essai QJ4 .

5.2.2.1 Déformations résiduelles :

La modélisation de la décharge se fait à partir de la déformation maximale atteinte sur l'enveloppe dans le cycle expérimental . Nous remarquons que le modèle surestime les déformations résiduelles pour les premiers cycles mais les sous-estime pour les cycles à grande déformation . De plus , nous avons remarqué sur différents essais ([SINHA64], QJ) qu' il existe un intervalle de déformation à contrainte pratiquement nulle compris entre le dernier point de décharge et le premier point de recharge (fig. 5.3) . Il s'agit sans doute d'une composante de déformation visqueuse lentement réversible , dont le modèle ne sait pas tenir compte . Nous considérons que la déformation résiduelle calculée par le modèle est une déformation moyenne entre ces deux points et qu'elle assez représentative du résultat expérimental .

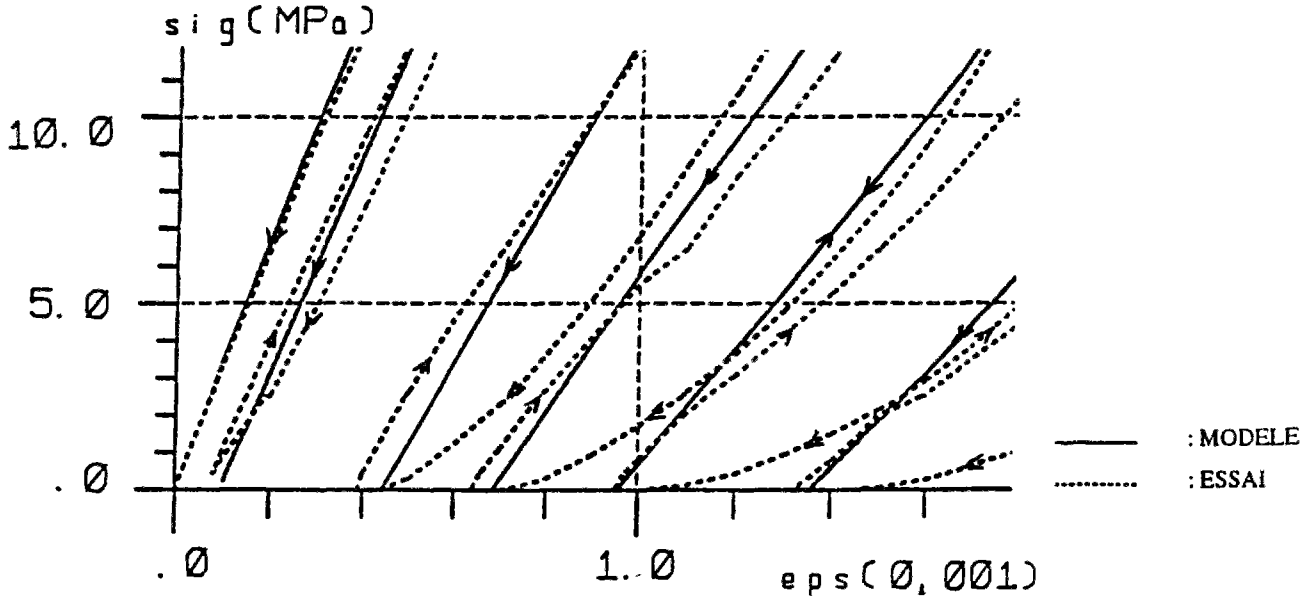


Fig. 5.3 : Comparaison déformations résiduelles modèle - essai .

5.2.2.2 Aire des cycles :

Nous isolons un cycle expérimental et le cycle correspondant du modèle afin de comparer les aires respectives . Nous constatons sur la figure 5.4 que le chargement débute au point A($\varepsilon=\varepsilon_1$, $\sigma=0$) pour atteindre l'enveloppe au point B ; la décharge est entamée au point C($\varepsilon=\varepsilon_2$, $\sigma=\sigma_2$) pour atteindre le point D($\varepsilon=\varepsilon_3$, $\sigma=0$) .

L'aire du cycle modélisé est sensiblement plus petite que celle du cycle expérimental (fig. 5.4) ; ceci découle directement de l'hypothèse sur la variable d'endommagement (D_c pour ce cas) qui n'évolue qu'à partir d'un seuil du taux de restitution d'énergie volumique et par conséquent l'endommagement n'évolue que sur l'enveloppe des cycles et la décharge-recharge se fait sur une même droite issue de cette enveloppe . Si un cycle n'atteint qu'une déformation maximale inférieure à celle atteinte au cycle précédent , donc n'atteint pas

l'enveloppe , le modèle effectue la charge et décharge sur la même droite . L'aire du cycle est donc nulle , ce qui n'est pas le cas expérimentalement .

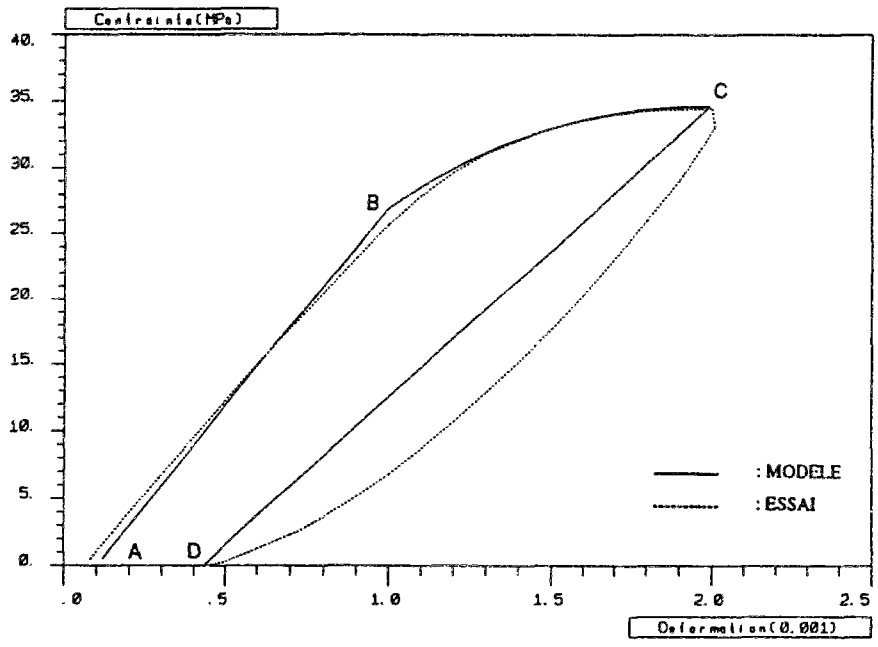


Fig. 5.4 : Comparaison des aires de cycles expérimental et calculé .

5.3 POTEAUX COURTS SOUS COMPRESSION - TRACTION CYCLIQUE :

Des essais de compression et traction cyclique sur des poteaux en béton armé avec divers pourcentages d'armatures ont été réalisé au C.E.B.T.P.[FOURÉ95] .

5.3.1 Programme des essais :

Le programme comporte 24 essais répartis en deux séries (gâchées A et B) . Pour chaque combinaison d'armatures longitudinales et transversales , trois essais sont réalisés :

- essai de compression monotone jusqu'à rupture (noté C) ,
- essai de traction monotone jusqu'à rupture (noté T) ,
- essai cyclique de traction et de compression (noté TC) .

Pour notre travail , nous ne nous intéressons qu' aux essais TC .

5.3.2 Description des corps d'épreuve :

Les corps d'épreuve sont des poteaux courts de section 150 mm x 150 mm et de longueur 0,70m . Le tableau 2 indique le béton (gâchée A ou B) et les armatures utilisés pour chaque corps d'épreuve .

Tableau 2

Repères.	Armatures longitudinales .	Diamètre et espacements des armatures transversales .	Gâchée du béton .
QJ1TC	non armé	non armé	B
QJ2TC	4 HA 6	Φ_t 2,5 ; $s_t = 12\Phi_l$	A
QJ3TC	4 HA 8	Φ_t 2,5 ; $s_t = 12\Phi_l$	A
QJ4TC	4 HA 12	Φ_t 4 ; $s_t = 12\Phi_l$	A
QJ5TC	4 HA 14	Φ_t 5 ; $s_t = h$	B
QJ6TC	4 HA 16	Φ_t 5 ; $s_t = h$	B
QJ7TC	4 HA 8	Φ_t 2,5 ; $s_t = 8\Phi_l$	B
QJ8TC	4 HA 8	Φ_t 2,5 ; $s_t = 15\Phi_l$	A

5.3.3 Caractéristiques des matériaux :

5.3.3.1 Béton :

La composition du béton est donnée dans le tableau 3 .

Tableau 3

Gâchées		A et B
Granulats	8/12,5 (kg/m^3)	718
	5/8 (kg/m^3)	308
Sable	1,6/5 (kg/m^3)	114
	0/1,6 (kg/m^3)	646
Ciment CPJ 45	(kg/m^3)	300
Eau	(l/m^3)	224
Affaissement au cône (cm)		14,5 et 14

Des essais de compression et de fendage ont été réalisés sur des éprouvettes standards Ø 160 mm , h = 320 mm . L'ensemble des résultats est porté sur le tableau 4 :

Tableau 4

Gâchée	Age (jours)	Compression			Fendage
		f_c (MPa)	E_0 (MPa)	ε_{b0}‰	f_t (MPa)
A	34	21,85	28000	2,35	2,39
	53	24,3			2,82
B	47	27,6	28500	2,30	2,94
	62	27,4			3,03

avec :

f_c : résistance en compression ;

E_0 : module tangent à l'origine ;

ε_{b0} : abscisse du sommet de la courbe (σ, ε) ;

f_t : résistance à la traction par fendage .

Fouré [FOURÉ95] adopte une même loi d'évolution moyenne pour le calcul de la résistance à la compression pour les deux gâchées :

$$f_c = \frac{j}{0,2 + 0,036j}$$

qui permet de calculer la résistance probable à l'age de l'essai de chaque corps d'épreuve . Les résultats de ce calcul sont reportés dans le tableau suivant :

Tableau 5

Repère	Gâchée	Essai cyclique alterné	
		Age (jours)	f_{cj} (MPa)
QJ1TC	B	63	25,5
QJ2TC	A	39	24,3
QJ3TC	A	49	24,9
QJ4TC	A	53	25,1
QJ5TC	B	50	25,0
QJ6TC	B	60	25,4
QJ7TC	B	46	24,8
QJ8TC	A	46	24,8

5.3.3.2 Acier :

Les résultats des essais de traction sur des échantillons ont donné les valeurs moyennes du module E_a , de la limite d'élasticité f_e et de la contrainte de rupture f_r ainsi

que l'allongement $\varepsilon_e = f_e / E_a$ correspondant à l'atteinte de la limite d'élasticité . Les valeurs des caractéristiques des armatures sont portées dans le tableau ci - dessous :

Tableau 6

	E_a (GPa)	f_e (MPa)	f_r (MPa)	$\varepsilon_e(10^{-3})$
Nerfil ϕ 6	195	590	615	3,0
Torsid ϕ 8	200	615	670	3,1
Torsid ϕ 12	195	575	635	2,95
Torsid ϕ 14	195	610	730	3,15
Torsid ϕ 16	205	520	620	2,55

Le Nerfil est un acier écroui et le Torsid un acier à palier plastique .

5.3.4. Dispositif expérimental :

5.3.4.1 Montage d'essais :

Les essais sont réalisés sur une machine hydraulique asservie de 2000 KN de capacité statique maximale . La figure 5.5 montre le montage d'un corps d'épreuve entre les plateaux de la machine . Les fixations sont rigides , il n'y a aucune articulation interposée .

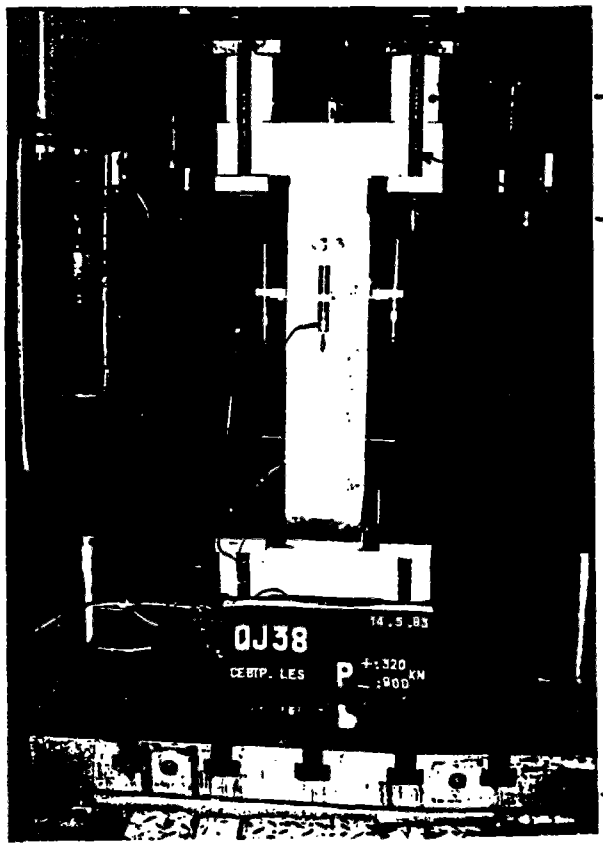


Fig. 5.5 : Montage d 'un corps d'épreuve .

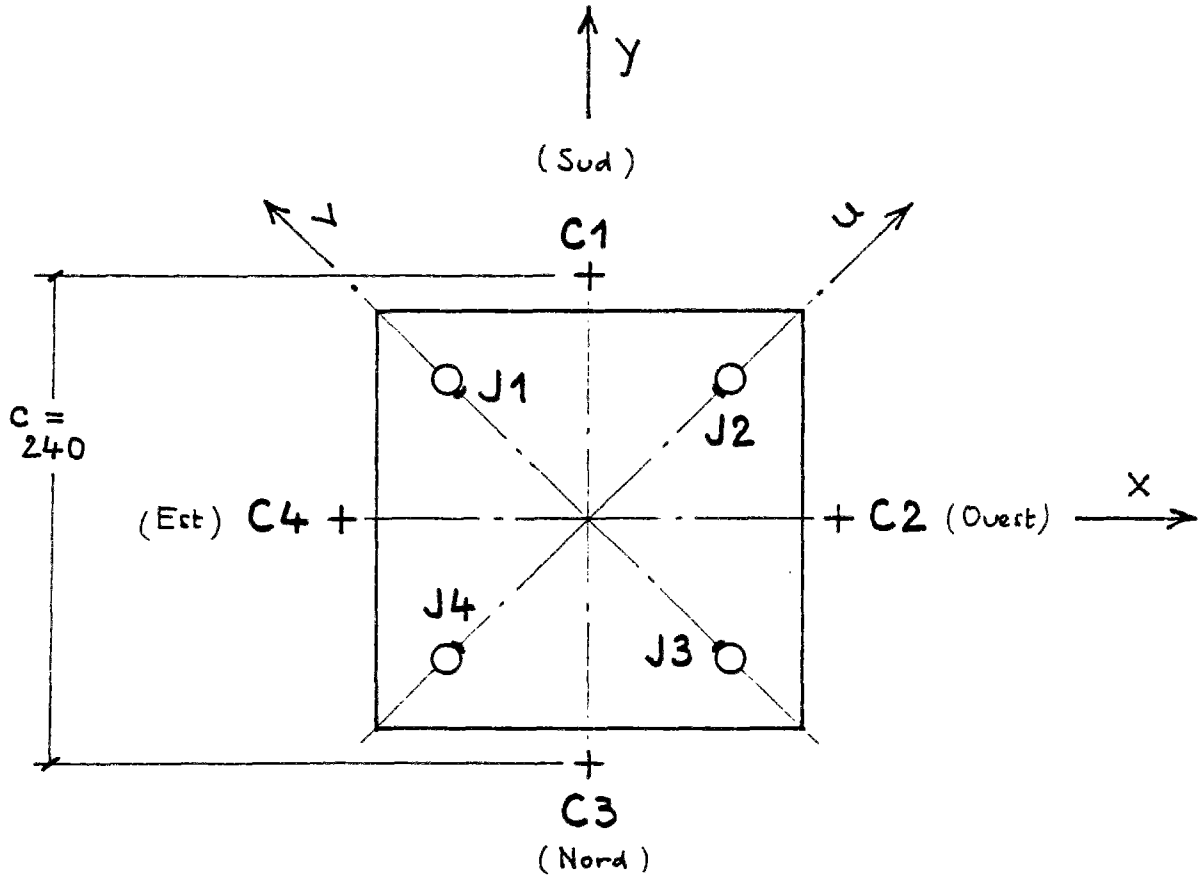
5.3.4.2 Instrumentation et mesures :

La force exercée est mesurée par l'intermédiaire de la pression d'huile , laquelle est asservie à la mesure du déplacement vertical entre les plateaux de la machine.

Les autres mesures portent sur les déformations longitudinales (figure 5.6) :

- par 4 capteurs de déplacement, un au milieu de chaque face (figure 5.7) , intégrant la déformation moyenne sur une base de 400 mm de longueur ,

- par 4 jauges de déformation collées sur les armatures (une par barre) dans la section médiane, mesurant la déformation locale qui est l'allongement maximal en traction car les jauges se situent au niveau de la fissure amorcée par les initiateurs .



C : capteur de déplacement extérieur ; base 400 mm .

J : jauge de déformation collée sur l' armature ; longueur 5 mm .

Fig. 5.6 : Mesures de déformations longitudinales .

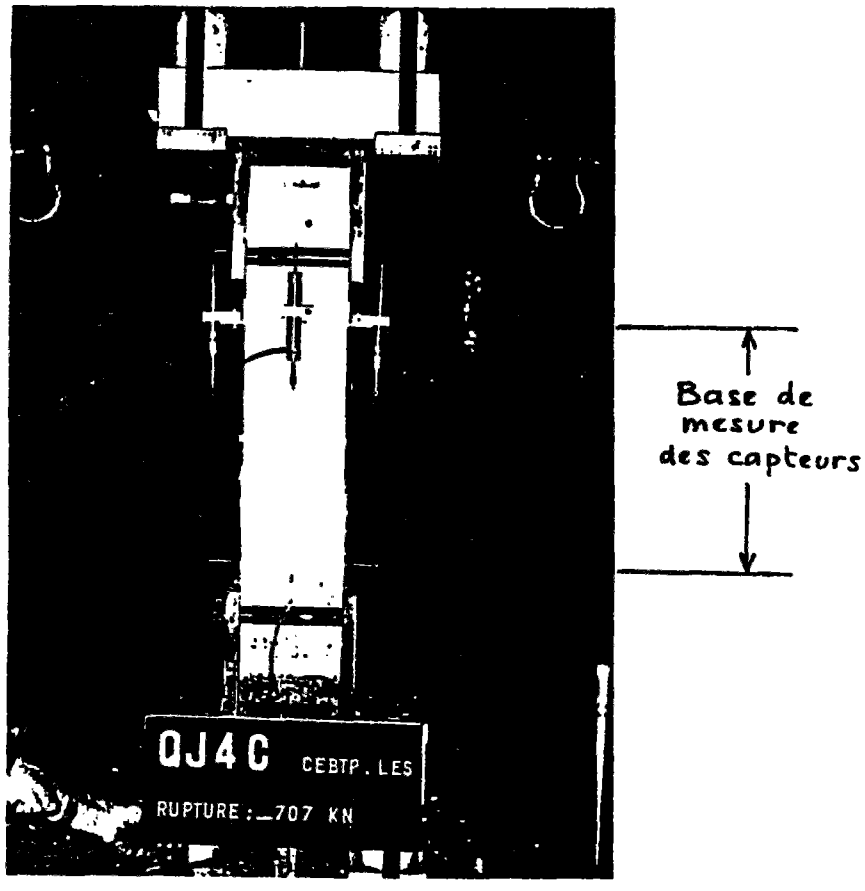


Fig. 5.7 : Base de mesure des capteurs .

L'ensemble des voies est raccordé à un centralisateur piloté par micro-ordinateur, qui réalise l'acquisition automatique des mesures en continu, avec une fréquence d'échantillonnage suffisante pour reconstituer, en différé, les courbes force-déformation.

On réalise aussi deux enregistrements graphiques en temps réel:

- la courbe force-raccourcissement moyen en compression (moyenne des 4 capteurs);

- la courbe force-allongement maximal en traction (moyenne des 4 jauges).

5.3.5 Procédure d'essai :

La procédure des essais de traction-compression (TC) consiste à réaliser des cycles alternés de traction et de compression, à déformations extrêmes croissant d'un cycle au suivant, de façon à "balayer" l'ensemble du domaine de comportement jusqu'à une large plastification de l'acier en traction et à une déformation du béton en compression nettement supérieure à la déformation "de rupture" en compression simple ε_{b0}.

On prévoit aussi deux cycles successifs ayant les mêmes bornes en déformation, avant d'augmenter celles-ci. Sur le plan en pratique , l'essai commence en compression . Il

n'est pas possible de réaliser exactement les bornes prévues ni le nombre total de cycles prévu. Le nombre réel a été le suivant :

Tableau 7

Essai QJ TC	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de cycles complets	17	15	16	13	15	15	15	17

Dans la plupart des cas, si les armatures n'étaient pas rompues en traction, l'essai était achevé par un chargement monotone en compression.

La vitesse de chargement et de déchargement imposée est de 0,88 mm de déplacement entre plateaux par minute. Elle correspond approximativement à une vitesse de déformation moyenne du corps d'épreuve $d\varepsilon/dt = 1.10^{-3}$/min. Les cycles successifs sont réalisés en continu, les arrêts éventuels s'effectuant à force nulle .

5.3.6 Excentricité accidentelle du chargement :

On remarque que les déformations ne sont pas uniformes en raison de l'excentricité accidentelle de la force . L'excentricité relative et l'inclinaison du plan de chargement (fig. 5.8) sont évaluées à partir des mesures de déformations sur les 4 faces [FOURÉ95] et présentées dans le tableau 8 .

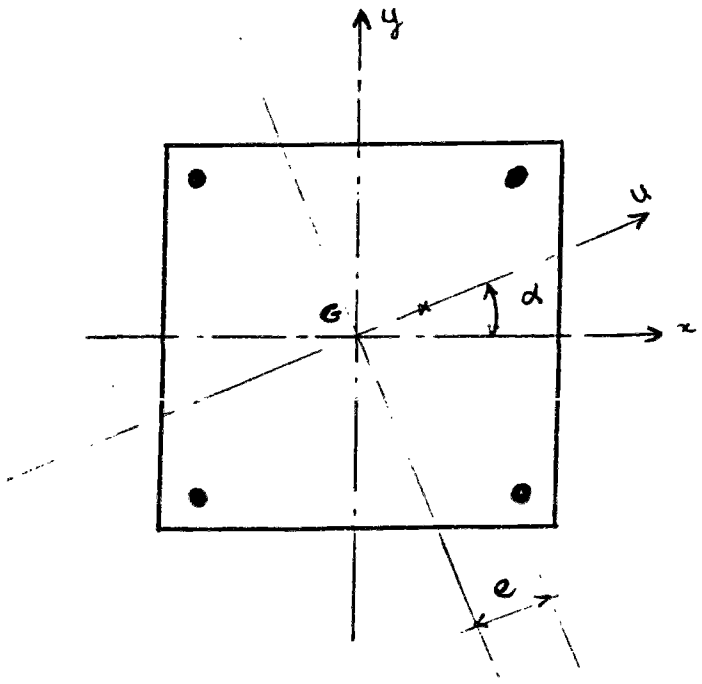


Fig. 5.8 : Excentricité relative et plan de chargement .

Tableau 8

Repères	QJ1TC	QJ2TC	QJ3TC	QJ4TC	QJ5TC	QJ6TC	QJ7TC	QJ8TC
α	30°	20°	6°	23°	13°	6°	31°	3°
e (mm)	7,5	11,8	0,7	2,6	1,2	4,6	1,4	2,7

5.3.7 Modélisation des corps d'épreuve :

Les corps d'épreuve auxquels nous allons appliquer le modèle sont QJ1TC et QJ5TC . La valeur prise pour β_t pour le calcul est beaucoup plus petite que celle que nous avons conseillée au chapitre 3 (β_t=-0,1) car cette dernière nous a donné des valeurs de déformations résiduelles plus grandes que celles observées sur les résultats d'essais . Les paramètres nécessaires au calcul pour les 2 éléments sont synthétisés dans le tableau 9 .

Tableau 9

	E_0(MPa)	f_c(MPa)	Y_{0c}(MPa) (10^{-3})	β_c	a_c	b_c	f_t(MPa)	Y_{0t}(MPa) (10^{-4})	β_t	a_t	b_t
QJ1TC	25600	25,5	8,8	1	41,7	1,4	1,6	0,5	-0,001	1,1	1,40
QJ5TC	27850	25	6,2	1	47	1,27	1,6	0,46	-0,001	1,5	1,27

En ce qui concerne la résistance à la traction , nous prenons les valeurs correspondant à la fissuration observée aux essais et non celles déterminées par fendage .

Le programme de charge que nous adoptons pour les 2 éléments de structure est porté dans le tableau 10 . On remarque que nous ne dédoublons pas les cycles comme cela a été fait pendant les essais .

Tableau 10

	QJ1TC		QJ5TC	
N° cycle	F_{max}(KN)	F_{min}(KN)	F_{max}(KN)	F_{min}(KN)
1	200	-40	250	-55
2	270	0	365	-176
4	375	0	490	-298
6	510	0	675	-368
8	530	0	790	-376

Pour tenir compte de l'excentricité accidentelle dont les valeurs calculées sont données au tableau 8 , nous utilisons la transformation de la section proposée dans la référence [ROBINSON75] dans laquelle une section carrée est transformée en section polygonale pour se ramener à un calcul plan (fig. 5.9) :

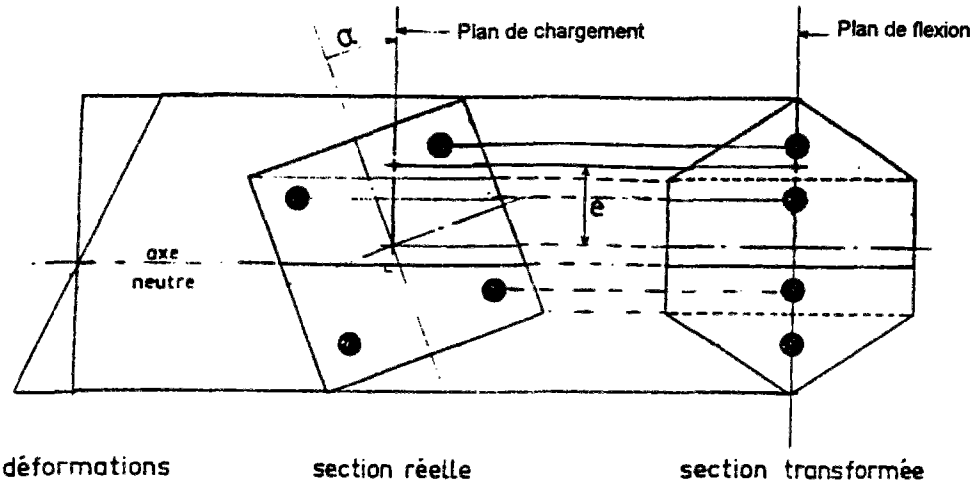


Fig. 5.9 : Transformation d'une section carrée chargée en dehors d'un plan de symétrie [ROBINSON75] .

5.3.8 Comparaison modèle - essais :

5.3.8.1 Corps d'épreuve QJ1TC :

Cet élément n'est pas armé . Dans la modélisation , la section polygonale est sollicitée par une force axiale assez excentrée . La figure 5.10 montre une comparaison modèle - essai ; nous remarquons que le modèle ne présente pas de déformation résiduelle en traction mais suit assez bien l'enveloppe des cycles en compression . Les déformations résiduelles calculées dans l'état de compression sont plus petites que celles de l'essai .

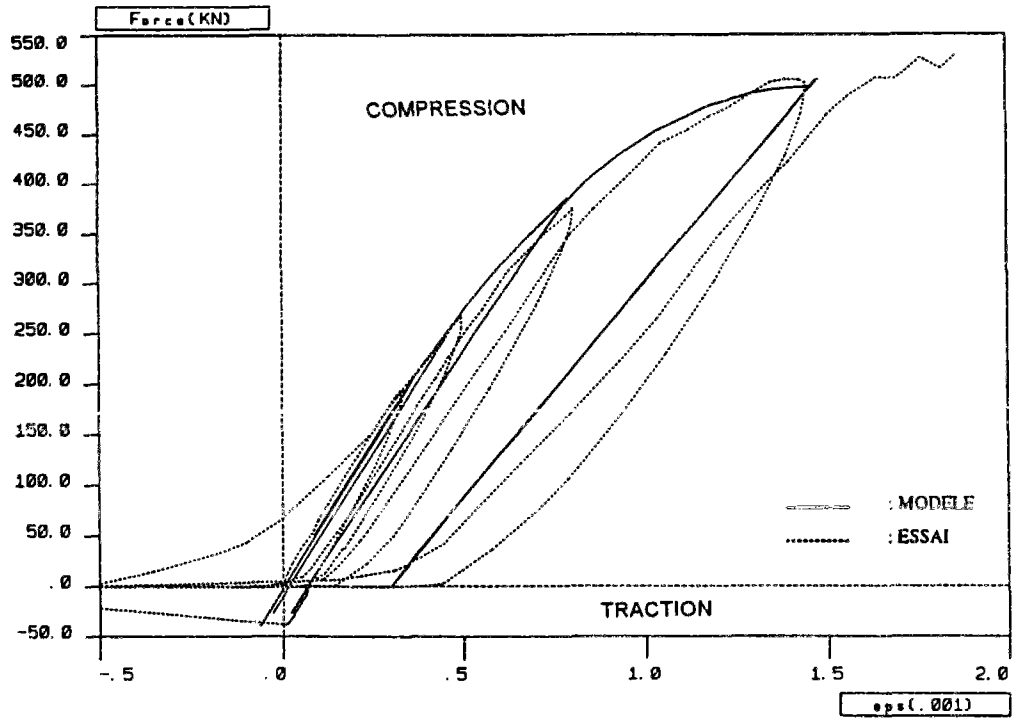


Fig. 5.10 : Courbe force - déformation moyenne QJ1TC

5.3.8.2 Corps d'épreuve QJ5TC :

Cet élément est fortement armé (ϖ =2,74%) . Il est sollicité par une force axiale légèrement excentrée . La figure 5.11 montre la courbe cyclique contrainte - déformation d'une fibre de béton . La partie A de la courbe montre surtout qu'à partir d'une certaine valeur la déformation augmente à contrainte nulle . Dans la partie B de la courbe, le passage 'numérique' de la compression vers la traction ne se fait pas toujours par un changement brusque de pente à contrainte nulle mais se fait de manière plus physique avec changement de pente graduel .

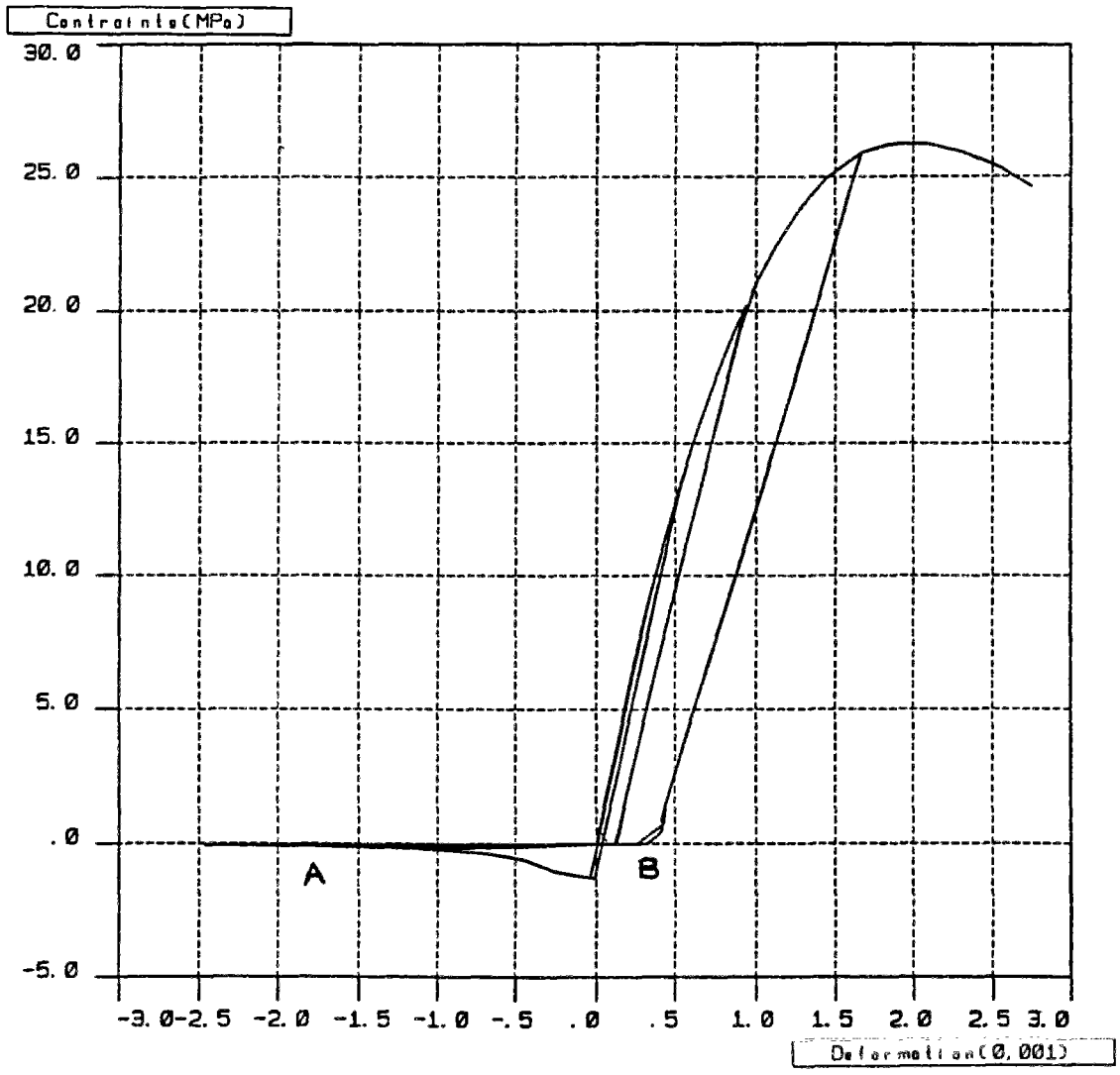


Fig. 5.11 : Courbe cyclique contrainte - déformation du béton selon notre modèle pour QJ5TC .

Une comparaison entre l'essai et le modèle est montrée sur la figure 5.12 . En compression , les constatations faites sur QJ1TC restent valables ; pour l'état de traction , la courbe du modèle respecte la pente à l'origine avant la fissuration du béton mais suit plutôt la pente de l'acier qui impose son comportement à l'élément après fissuration . Les

déformations calculées sont inférieures à celles de l'essai pour les mêmes niveaux de charge .

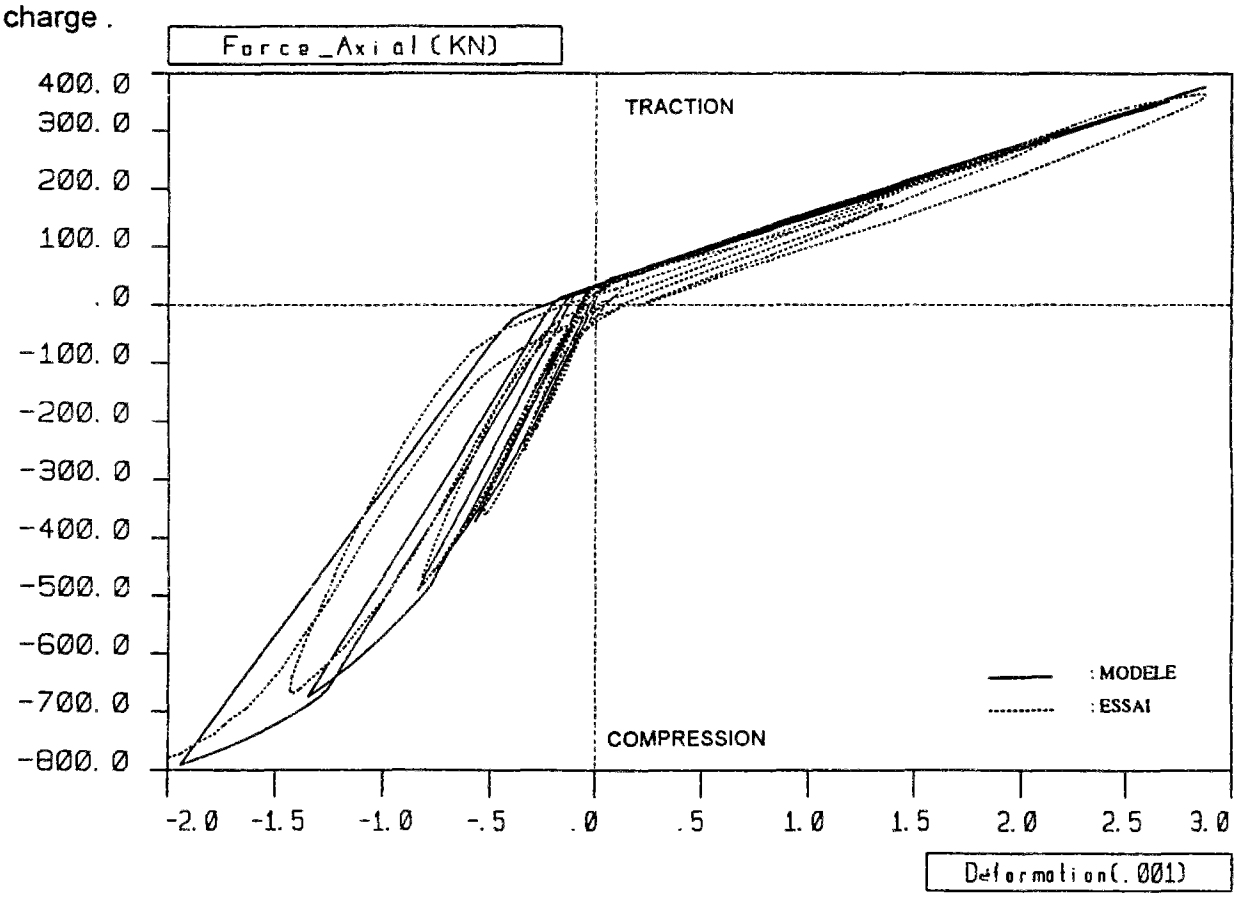


Fig. 5.12 : Courbe force - déformation moyenne pour QJ5TC .

5.4 POTEAUX SOUS FLEXION ALTERNEE :

Un programme expérimental [FOURÉ96b] a été réalisé sur des poteaux à section rectangulaire constante et à armatures longitudinales, soit constantes sur toute la hauteur, soit comportant un ou deux changements de section, soumis à une charge verticale fixe et à une force horizontale cyclique et alternée . Ces essais visent à développer simultanément 2 ou 3 rotules plastiques sur la hauteur des poteaux .

5.4.1 Programme des essais :

La procédure de dimensionnement est décrite dans la référence [THOMAS93] · Pour définir trois essais avec arrêts de barres , il a fallu , en plus du nombres d'arrêts de barres et du taux maximal des armatures longitudinales , jouer sur la valeur de l'effort normal N . Dans un des cas , il n'y a que 2 rotules . A chaque poteau avec des arrêts de barres est associé le poteau homologue à armatures constantes sur toute la hauteur . Le programme adopté est celui du tableau 11 .

Tableau 11

Repère	Pourcentage maximal armatures longitudinales ϖ_1	Effort normal relatif ν	Nombre d'arrêts de barres
QD1	2,04%	0,125	2
QD 2	2,04%	0,125	0
QD 3	1,12%	0,125	1
QD 4	1,12%	0,125	0
QD 5	1,12%	0,050	2
QD 6	1,12%	0,050	0

5.4.2 Description du corps d'épreuve :

5.4.2.1 Coffrage

On fabrique un "double poteau" associant deux "consoles" opposées par un noeud central rigide fortement ferraillé (figure 5.13). Il est bétonné dans un coffrage en bois dans la position indiquée sur la figure.

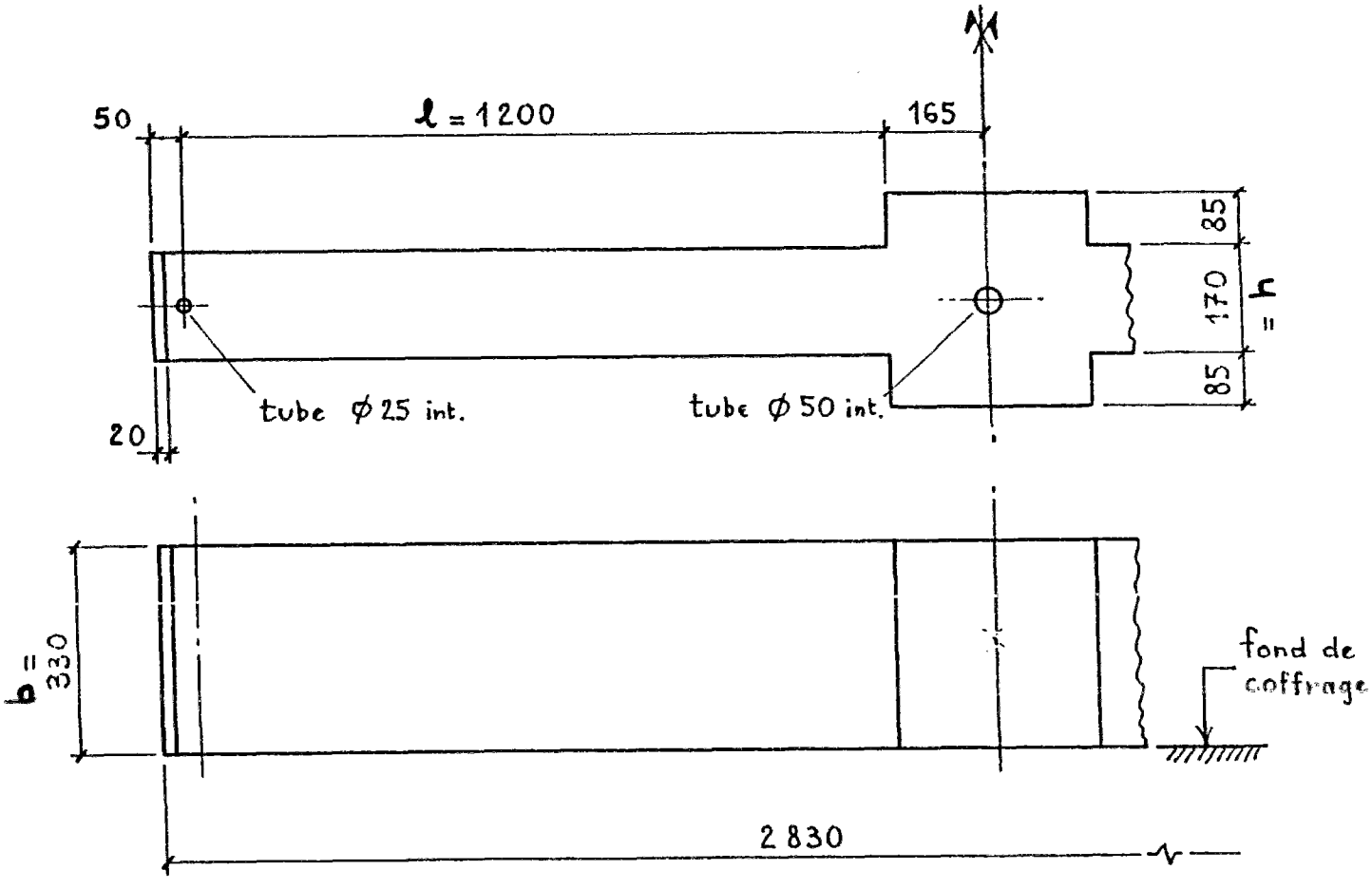


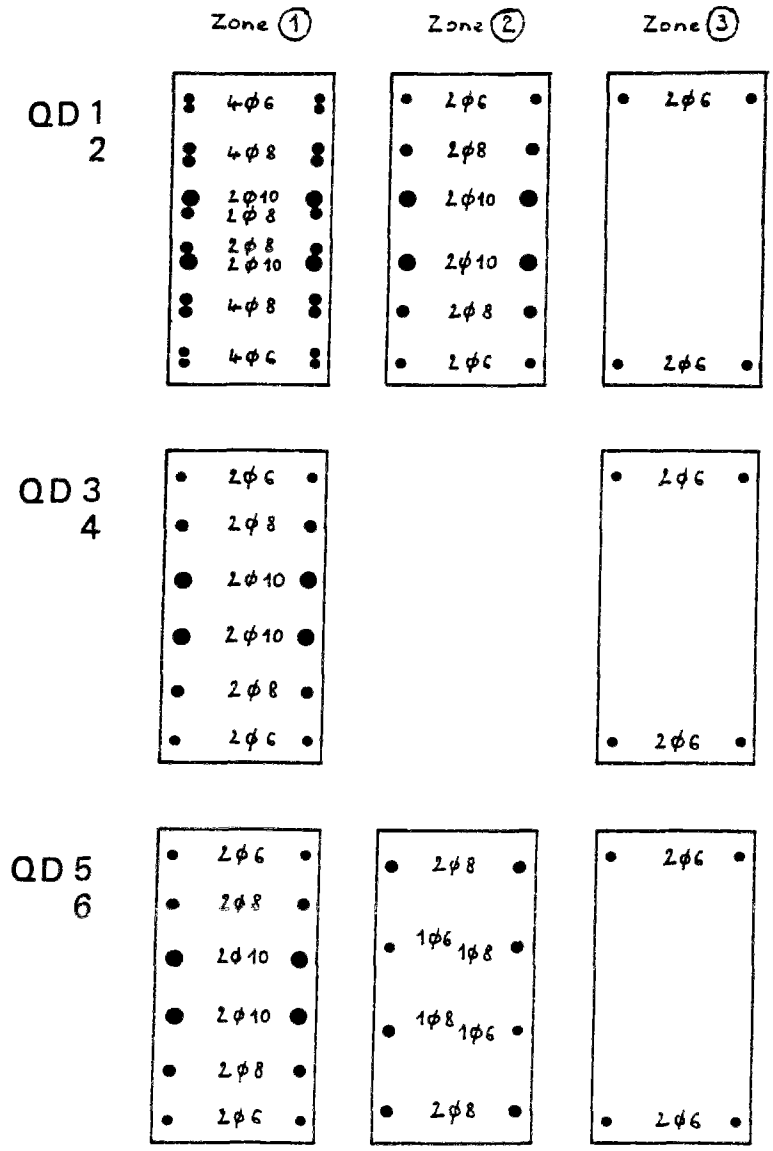
Fig. 5.13: Dimensions de coffrage des poteaux .

5.4.2.2 Ferraillage

Les dispositions d'armatures longitudinales sont présentées en section à la figure 5.14 et en élévation sur la figure 5.15 . On distingue 2 ou 3 zones pour les poteaux avec arrêts de barres . Le tableau 12 rassemble les informations correspondantes .

Tableau 12

Repère	Ferraillage longitudinal					
	zone 1	ϖ_1	zone 2	ϖ_2	zone 3	ϖ_3
QD 1	8ϕ6+12ϕ8+4ϕ10	2,04%	4ϕ6+4ϕ8+4ϕ10	1,12%	4ϕ6	0,20%
QD 2	comme QD1	2,04%	idem zone 1	2,04%	idem zone 1	2,04%
QD 3	4ϕ6+4ϕ8+4ϕ10	1,12%			4ϕ6	0,20%
QD 4	comme QD 3	1,12%			idem zone 1	1,12%
QD 5	4ϕ6+4ϕ8+4ϕ10	1,12%	2ϕ6+6ϕ8	0,82%	4ϕ6	0,20%
QD 6	comme QD5	1,12%	idem zone 1	1,12%	idem zone 1	1,12%



5.14 : Dispositions d'armatures longitudinales .

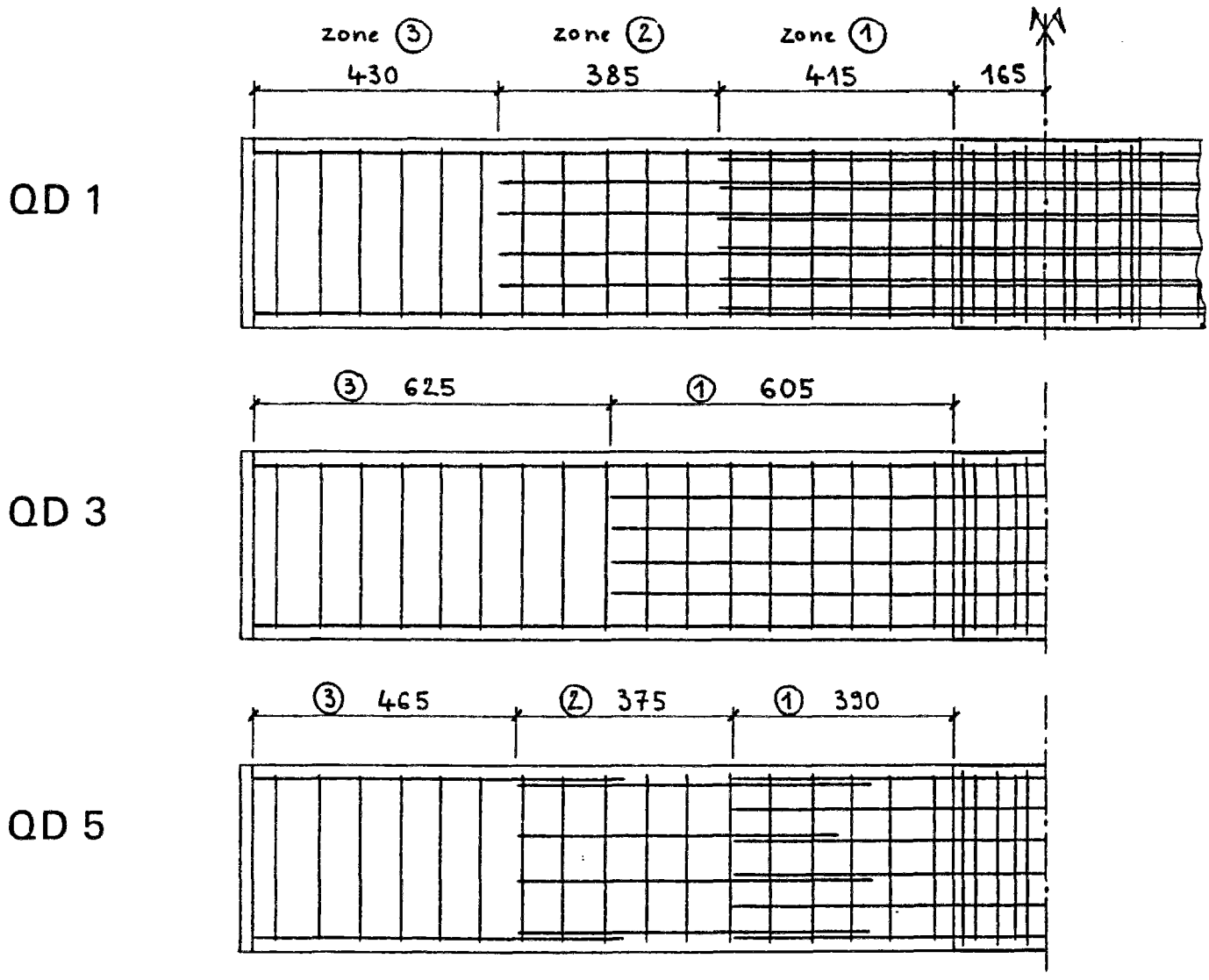


Fig. 5.15: Ferraillage - Arrêts de barres longitudinales .

5.4.3 Caractéristiques des matériaux :

5.4.3.1 Béton:

La composition du béton était la suivante:

Sable	0,6/1,6	420 kg/m^3
	1,6/5	280 kg/m^3
Graviers	5/8	658 kg/m^3
	8/12,5	460 kg/m^3
Ciment CPJ45		350 kg/m^3
Eau		217 l/m^3

Les valeurs moyennes des caractéristiques mécaniques mesurées sur éprouvettes sont portées au tableau 13 .

Tableau 13

Repère	Age j (jours)	Compression ① f_{cj}(MPa) à 28 jours	Compression ① f_{cj}(MPa) à J	Fendage ② f_{tj}(MPa) à J	$E_{ij,o}$ ③(MPa) à J	k_0
QD1	42	37,0	39,9	3.40	30300	8870
QD2	41	35,7	39,2	3,85	31400	9240
QD3	42	37,5	38,6	3,55	31700	9380
QD4	41	37,1	37,3	3,85	32100	9610
QD5	40	33,3	35,8	3,55	29700	9010
QD6	41	37,4	38,4	3,60	30300	8980
Moyenne (coefficient de variation)			38,2 (4%)	3,65 (5%)	30900 (3%)	

① 3 ou 4 éprouvettes ② 3 éprouvettes ③ 2 éprouvettes

avec :

- f_{cj} : résistance en compression ,

- f_{tj} : résistance en traction (fendage) ,

- $E_{ij,o} = k_o \left(f_{cj}\right)^{\frac{1}{3}}$, module à l'origine .

La résistance à l'âge de l'essai des poteaux est légèrement supérieure à la valeur visée dans le dimensionnement (35 MPa) .

5.4.3.2 Acier :

Les caractéristiques moyennes mesurées sur échantillons sont portées au tableau ci -dessous . Le Nerfil est un tréfilé cranté écroui , le Torsid un laminé naturel .

Type et diamètre (mm)	E_a (GPa)	f_e (MPa)	f_r (MPa)	A(*) %
Nerfil 6	200	595	610	3,1
Torsid 8	205	630	675	8,6
Torsid 10	200	585	660	8,6

(*) A = allongement de rupture

5.4.4 Dispositif expérimental :

5.4.4.1 Montage d'essais :

Les têtes de poteau , munies de plaques d'acier solidaires du béton , sont appuyées sur les plateaux d'une presse Amsler de 10 MN munie de "têtes de flambement" qui assurent une parfaite liberté de rotation . Le poteau est placé du mieux possible en position coaxiale avec la presse qui exerce donc un effort normal N centré .

Une force horizontale 2F est exercée à mi-hauteur du "double poteau" grâce à un vérin à double effet de 300 kN . Le dispositif de transmission des efforts horizontaux prend appui sur le poteau par l'intermédiaire d'axes passant dans des tubes de réservation dans le béton , à mi-hauteur et aux deux extrémités (fig. 5.16) . Le schéma statique (même figure) montre que le dispositif d'application de la force transversale n'introduit aucun effort parasite .

5.4.4.2 Instrumentation et mesures :

Outres les forces , on mesure :

- les flèches , au moyen de capteurs de déplacement horizontaux (2 au niveau de chacune des articulations de réaction horizontale basse et haute ; 2 au niveau inférieur et 2 au niveau supérieur du noeud central ; 1 au niveau de chaque section de changement d'armatures longitudinales) soit 10 ou 12 mesures au total ;

- la déformation locale des armatures longitudinales , au niveau de chaque changement de section des armatures (12 jauges dans la section S1 , 8 ou 12 dans la section S2 , 4 ou 8 dans la section S3) , soit 32 à 64 mesures au total . Des inserts de 10 mm de profondeur en tôle de 0,4 mm d'épaisseur , noyés au bétonnage , servaient d'initiateurs de fissure au droit des jauges dans les sections S2 et S3 . On mesure ainsi l'allongement maximal ;

- la déformation longitudinale cumulée , sur une base de 1150 mm de longueur à partir du noeud central , pour chaque face et chaque moitié basse ou haute du poteau , au moyen de 4 capteurs de déplacement actionnés par des fils coulissant dans de petits tronçons de tube collés sur le parement du béton .

La figure 5.17 indique les schémas d'implantation des mesures .

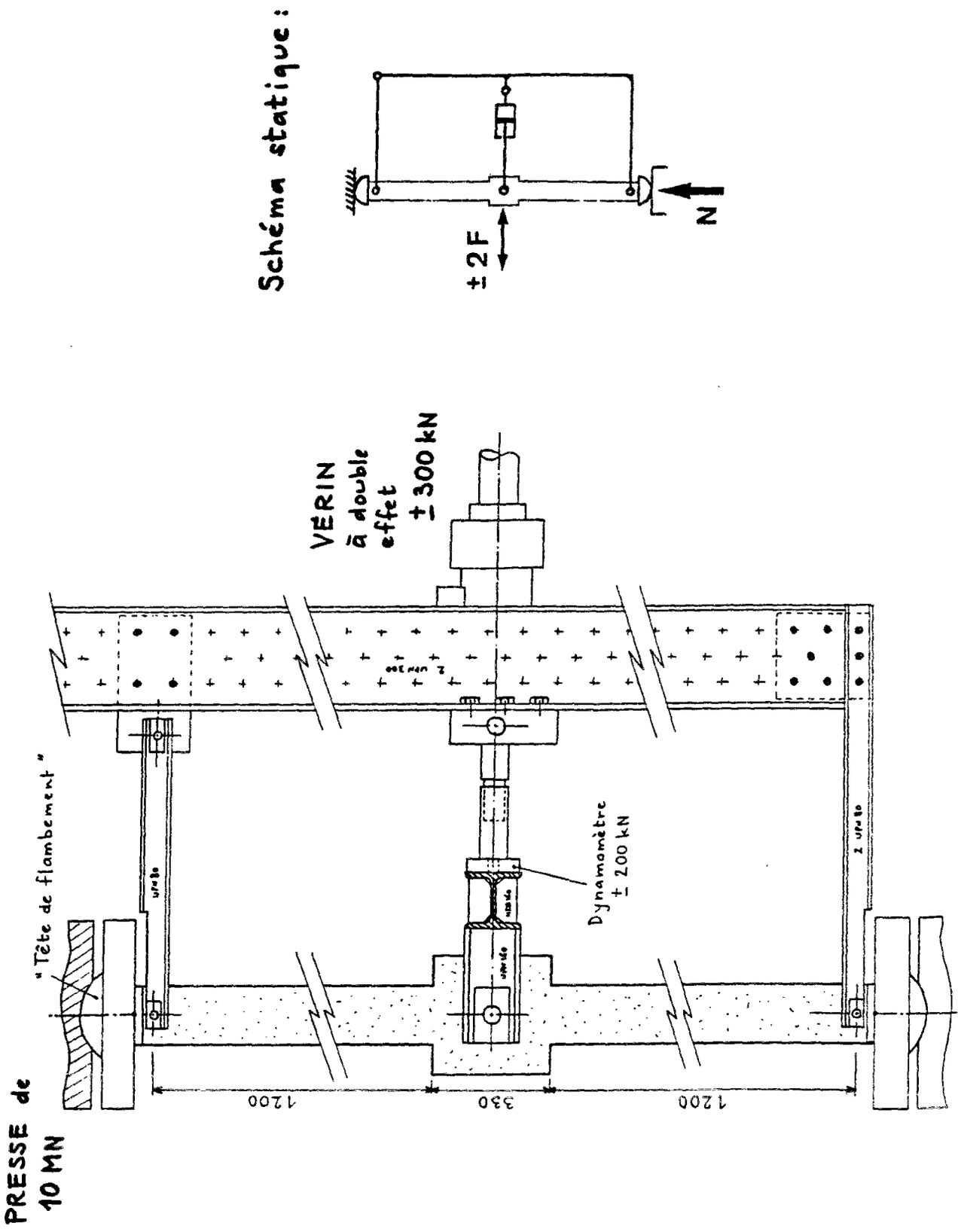


Fig. 5.16 : Dispositif expérimental .

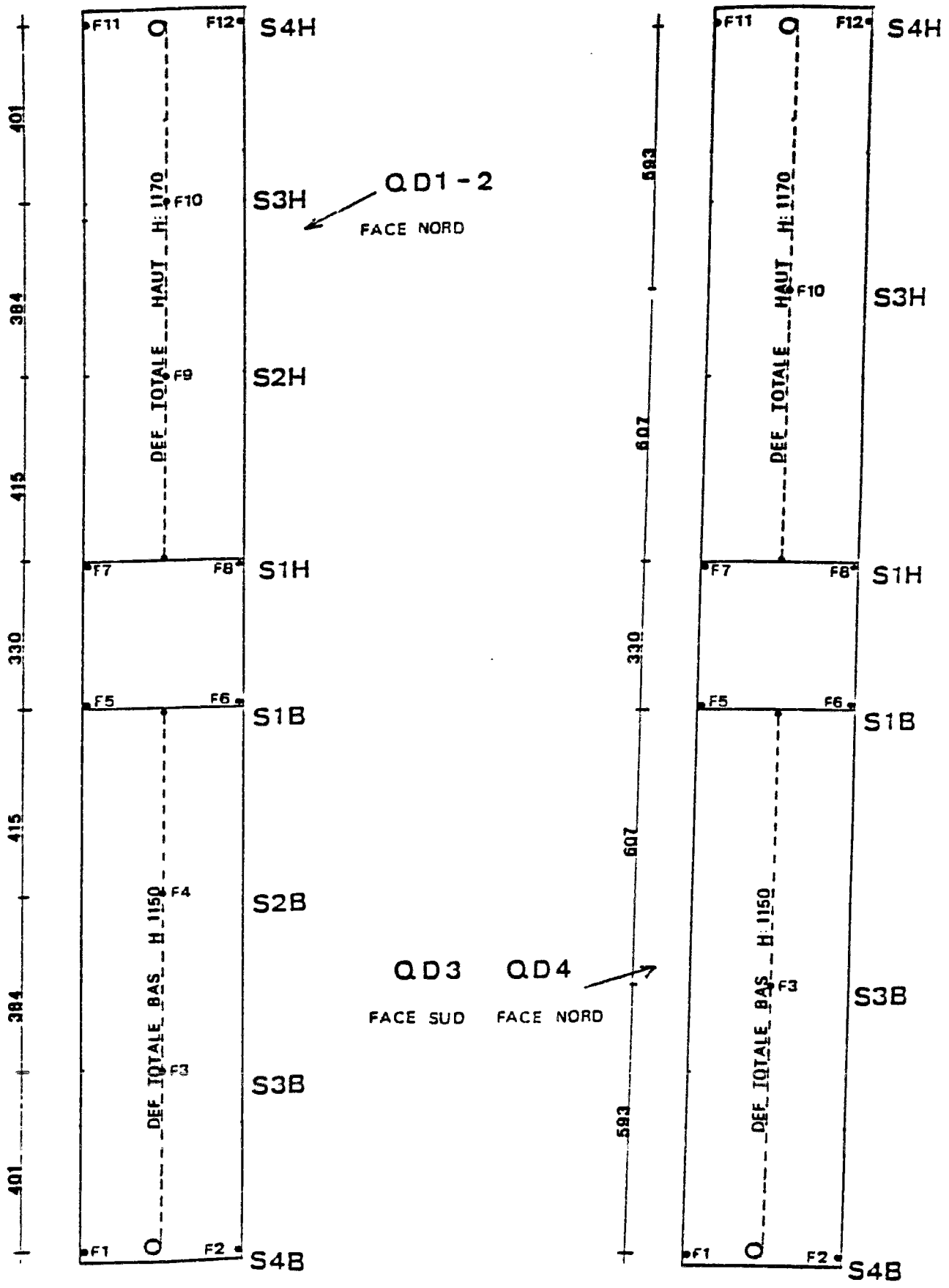


Fig. 5.17: Schémas d'implantation des mesures .

5.4.5 Procédure d'essai :

L'effort normal N est appliqué en premier , au niveau théorique souhaité , puis maintenu constant (mainteneur de charge de la presse hydraulique) . La résistance réelle du béton étant plus ou moins supérieure à la valeur visée , l'effort normal relatif ν est inférieur à la valeur théorique .

La force horizontale cyclique 2F est ensuite appliquée en variation continue , exceptés les arrêts aux valeurs extrêmes et au passage à zéro pour l'enregistrement de la totalité des mesures . Pendant la variation continue , on enregistre les mesures de flèches avec une fréquence d'échantillonnage suffisante pour restituer ensuite les courbes force-déplacement . Les arrêts aux valeurs extrêmes permettent d'observer et de tracer les fissures .

Il s'agit de cycles lents , à pilotage manuel . La durée totale d'un cycle varie grosso modo entre 20 et 30 minutes . Au voisinage de la résistance maximale , la vitesse de chargement ou de déchargement est de l'ordre de 10 kN/minute .

La pression d'huile dans le vérin exerçant la force horizontale est asservie à la mesure de la flèche à mi-hauteur du poteau . Aux étapes extrêmes des cycles , les déformations sont ainsi maintenues constantes pendant la durée des mesures .

Chaque cycle est répété une seconde fois avec les mêmes valeurs extrêmes de la flèche . L'amplitude est augmentée d'un couple de cycles au suivant (d'abord en force , puis en déplacement lorsqu'on approche puis qu'on dépasse la force résistante maximale 2 F_u) .

5.4.6 Modélisation des corps d'épreuve :

Nous nous intéressons , particulièrement , aux trois corps d'épreuves QD1 , QD2 et QD3 à cause de leurs différences de taux d'armatures longitudinales et du nombre d'arrêts de barres .

5.4.6.1 Données de base :

Le schéma statique que nous utilisons dans les données numériques pour les trois corps d'épreuve est donné dans la figure 5.18 où ne sont indiqués que les principaux noeuds de la discrétisation .

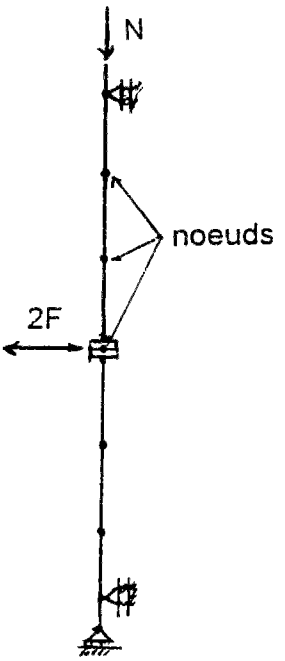


Fig.5.18 : Schéma statique de calcul des corps d'épreuve .

La structure est sollicitée par une force axiale verticale constante appliquée au noeud supérieur , le poids propre et une force horizontale alternée appliquée au noeud central .

De nombreux calculs réalisés en chargement monotone ont montré que la force maximale F_u , les déplacements correspondants et les courbures ultimes des sections de rotules , sont très sensibles à de petites variations de certains paramètres qui correspondent à des incertitudes expérimentales :

- position exacte des arrêts de barres ,

- bras de levier exact des armatures ,

- longueurs d'ancrage des barres arrêtées ,

- fluage causé par la durée de chargement .

Nous avons retenu les valeurs donnant le meilleur accord global avec l'enveloppe des cycles expérimentaux .

Pour les trois corps d'épreuve que nous modélisons pour faire le calcul cyclique , le module d'élasticité du béton est diminué de 30% afin de tenir compte de l'effet de fluage lors des essais . Nous avons essayé de nous rapprocher le plus possible des conditions des essais en mettant chaque barre d'acier à la place ou elle a été mise avant le coulage du béton , en tenant compte du poids propre et en "découpant" l'élément de structure en un nombre suffisant d'éléments numériques .

5.4.6.2 Paramètres du modèle cyclique :

Il faut noter que nous ne tenons pas compte explicitement de la refermeture des fissures au passage de l'état de traction à l'état de compression ; le paramètre β_t, intervenant dans la partie anélastique de la déformation , va jouer un rôle important quant à l'évaluation des déformations résiduelles de traction . Si β_t est trop grand où trop petit , nous risquons de surestimer ou sous-estimer les déformations résiduelles de traction . Afin de trouver une solution à ce problème , nous avons fait plusieurs calculs avec les données des essais QJTC et QD . Nous avons remarqué que β_t peut prendre une valeur de l'ordre de -1.10^{-3} pour des éléments soumis essentiellement à la traction - compression cyclique et une valeur de l'ordre -0,1 pour des éléments soumis essentiellement à de la flexion .

Les paramètres nécessaires à l'entrée de données dans le logiciel SCOB sont portés dans le tableau 14 .

Tableau 14

	E_0(MPa)	f_c(MPa)	Y_{0c}(MPa) (10^{-2})	β_c	a_c	b_c	f_t(MPa)	Y_{0t}(MPa) (10^{-4})	β_t	a_t	b_t
QD1	30780	40,0	2,000	1	56	1,64	3,40	2,2	-0,1	1,8	1,1
QD2	30520	39,0	2,118	1	42	1,60	3,85	2,9	-0,1	1,8	1,1
QD3	30380	38,5	1,973	1	37	1,47	3,55	2,5	-0,1	1,8	1,1

Le programme de charge adopté dans le calcul des trois éléments est porté dans le tableau 15 .

Tableau 15

	QD1		QD2		QD3	
N° cycle	F_{max}(KN)	F_{min}(KN)	F_{max}(KN)	F_{min}(KN)	F_{max}(KN)	F_{min}(KN)
1	10	-10	10	-10	10	-10
2	25	-25	25	-25	25	-25
3	38	-38	38	-38	33	-33
4	50	-50	49	-50	40	-40
5	65	-65	62	61	44	-44
6	77	-77	77	-77	48	-48
7	94	-92	89	-88	53	52
8	98		95		56	

Nota : Pour ces poteaux assez élancés , l'effort tranchant n'a aucune influence sur le comportement .

5.4.7 Comparaison modèle - essais :

5.4.7.1 Courbes :

Pour chaque corps d'épreuve , nous présentons les courbes suivantes :

- la courbe charge - flèche expérimentale ;

- la courbe charge -flèche calculée ;

- la comparaison modèle - essai ;

- la comparaison modèle essai sur un cycle particulier (QD3 seulement) .

a Corps d'épreuve QD1 :

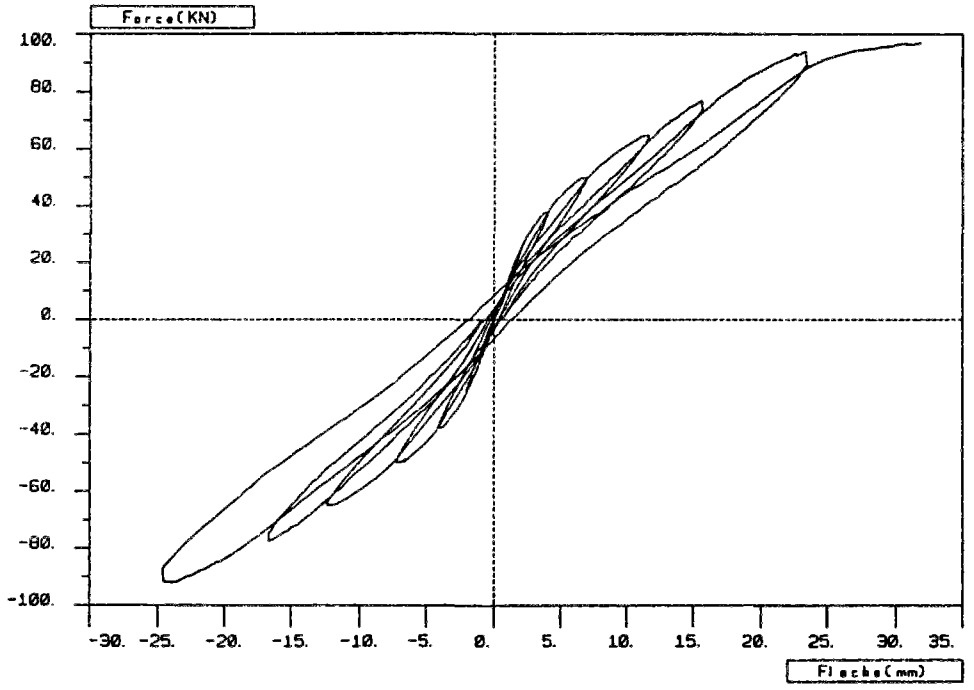


Fig. 5.19 : Courbe charge - flèche expérimentale QD1 .

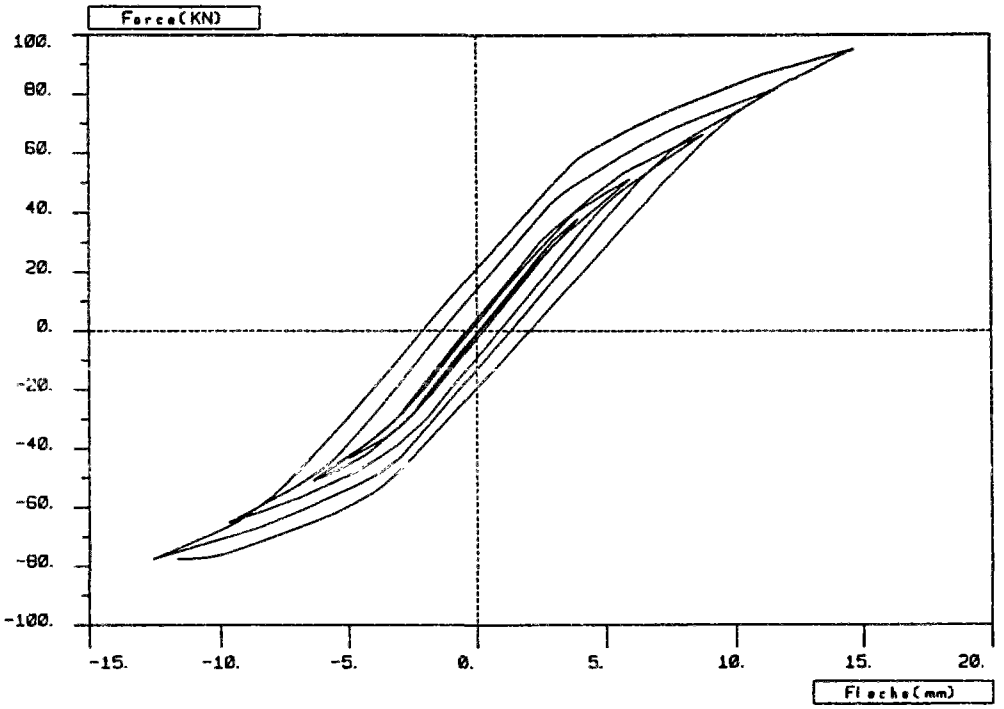


Fig. 5.20 : Courbe charge - flèche calculée QD1

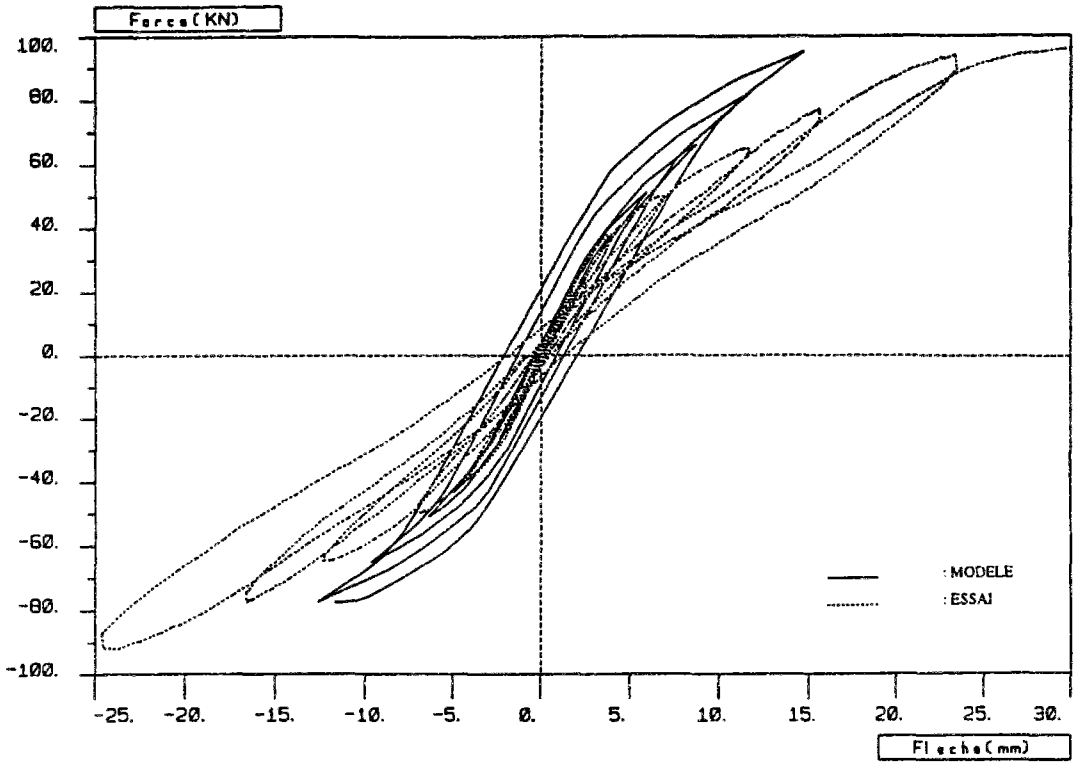


Fig. 5.21 : Comparaison courbes charge - flèche modèle -essai QD1.

b Corps d'épreuve QD2 :

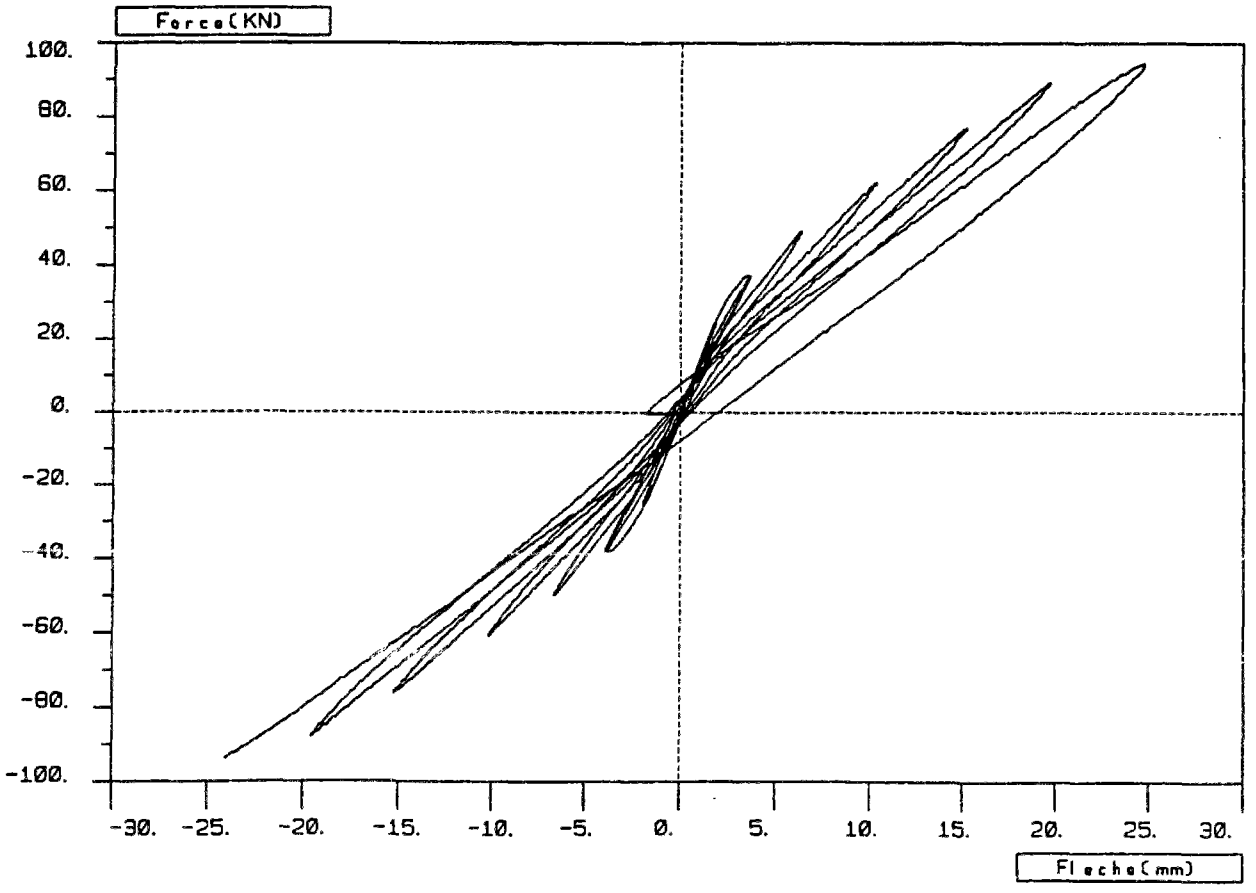


Fig. 5.22 : Courbe charge - flèche expérimentale QD2.

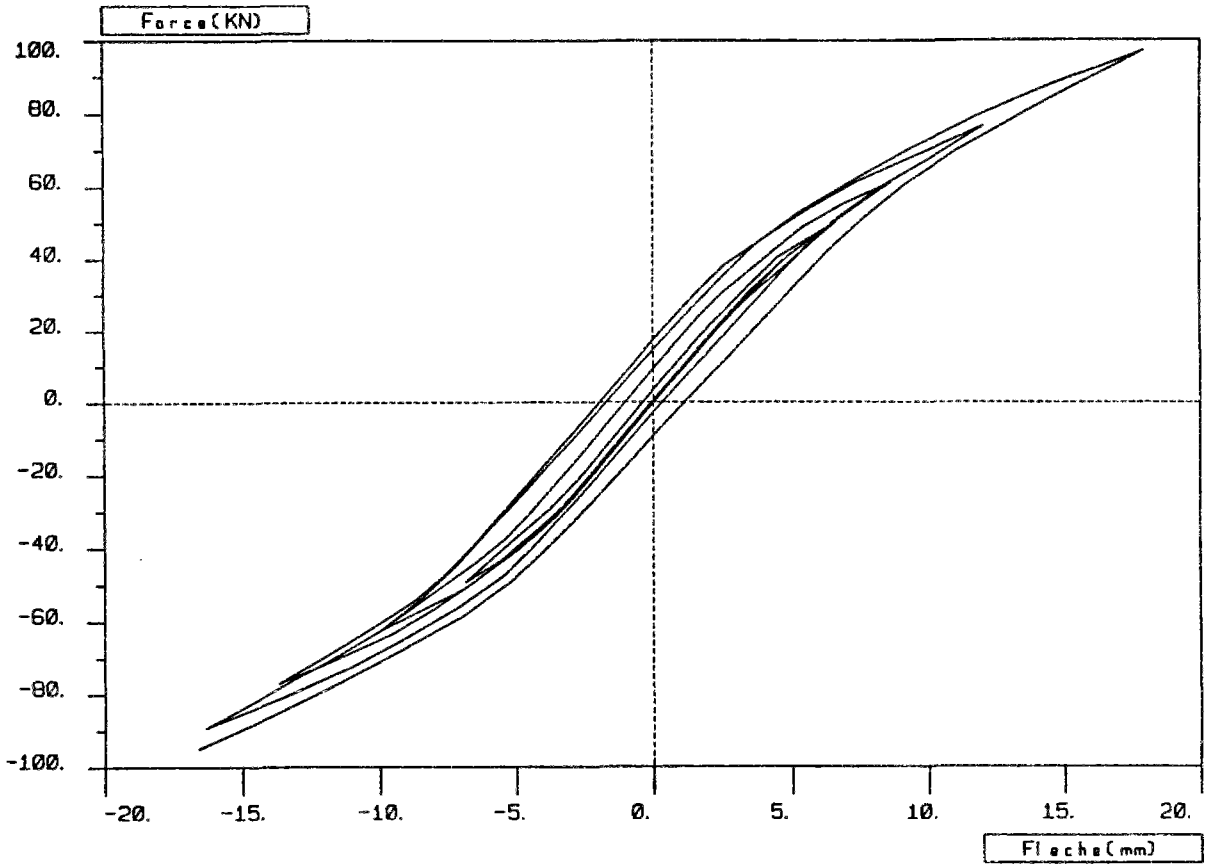


Fig. 5.23 : Courbe charge - flèche calculée QD2.

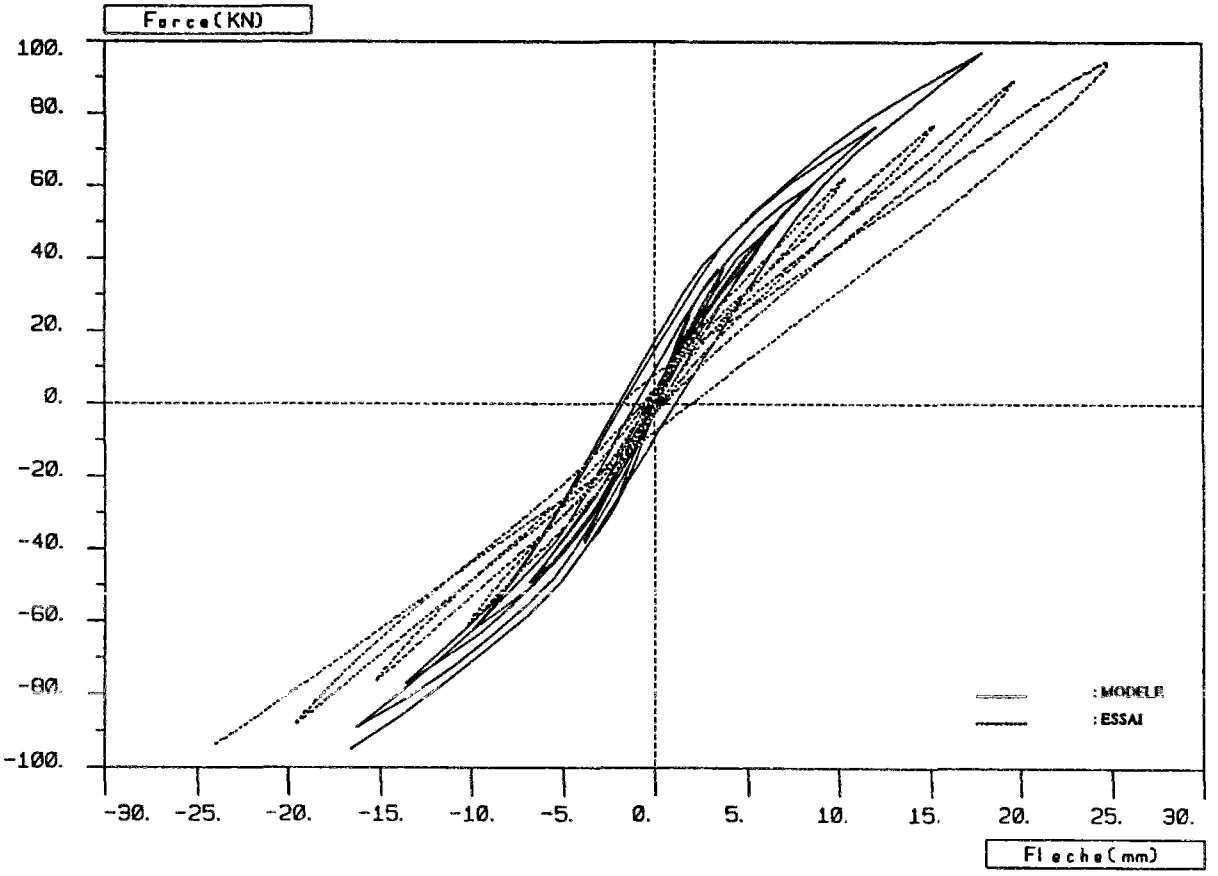


Fig. 5.24 : Comparaison courbes charge - flèche modèle -essai QD2.

c Corps d'épreuve QD3 :

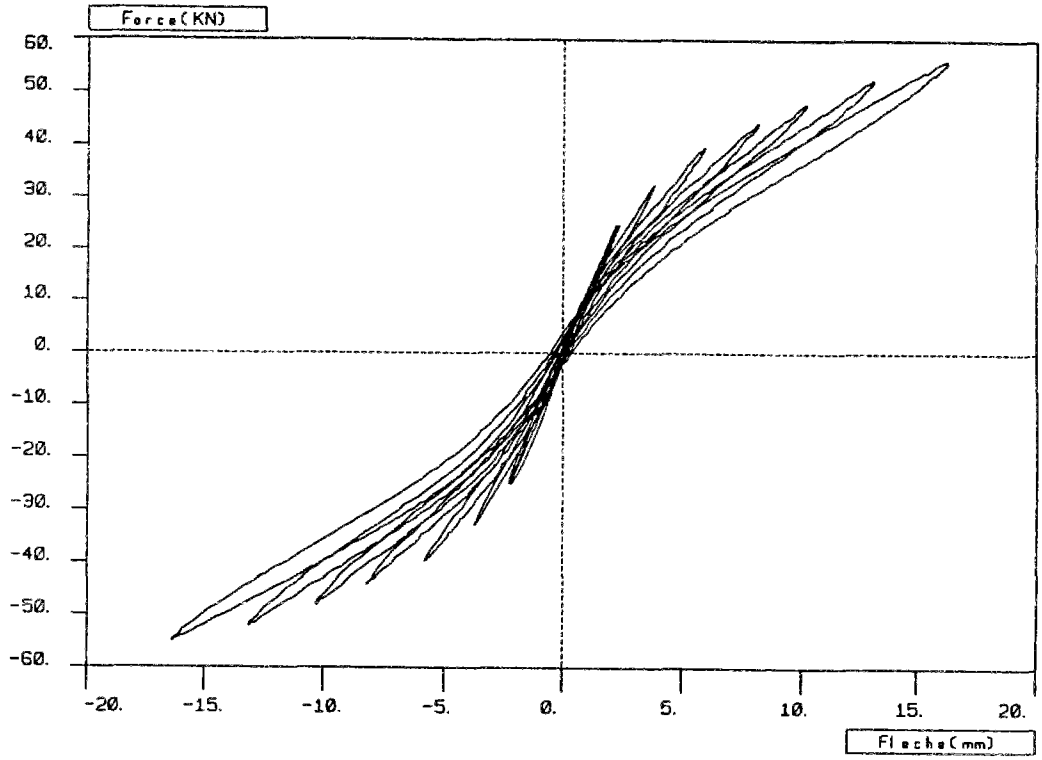


Fig. 5.25 : Courbe charge - flèche expérimentale QD3 .

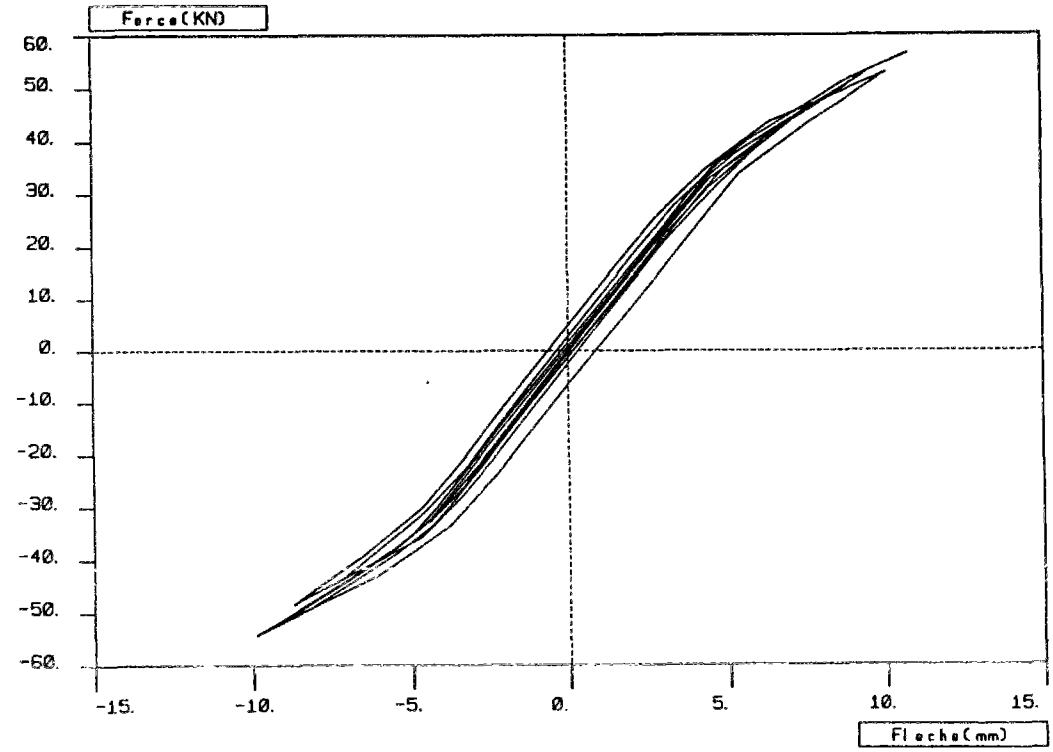


Fig. 5.26 : Courbe charge - flèche calculée QD3 .

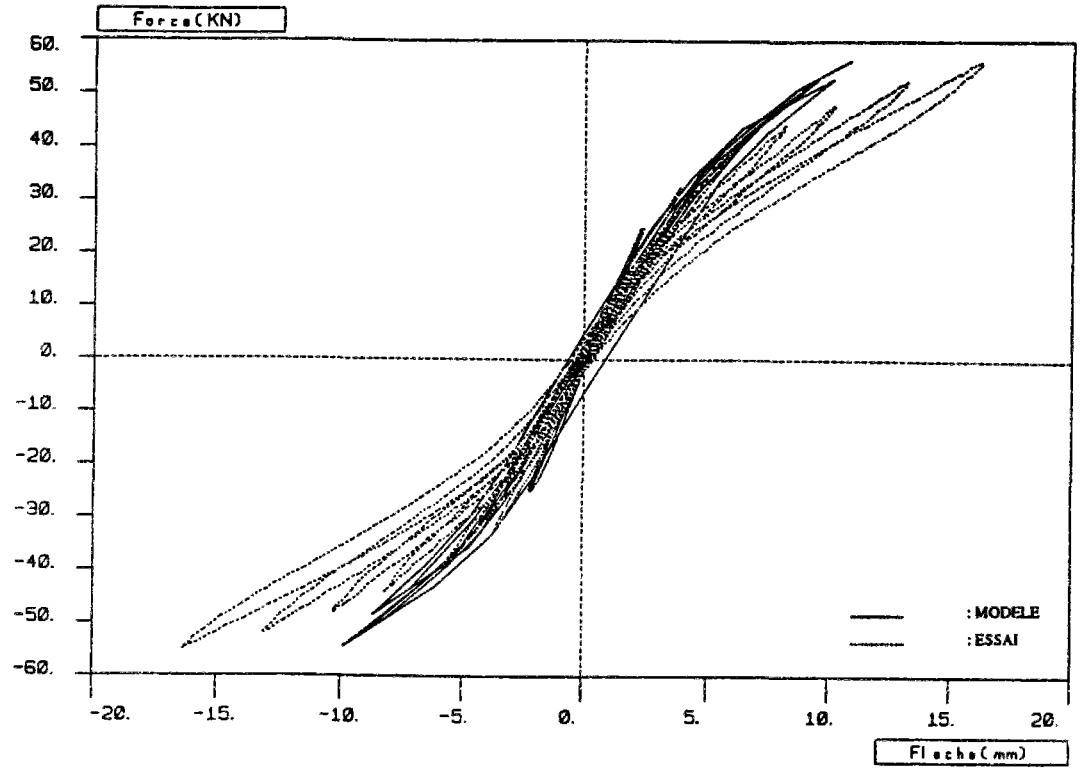


Fig. 5.27 : Comparaison courbes charge - flèche modèle - essai QD3 .

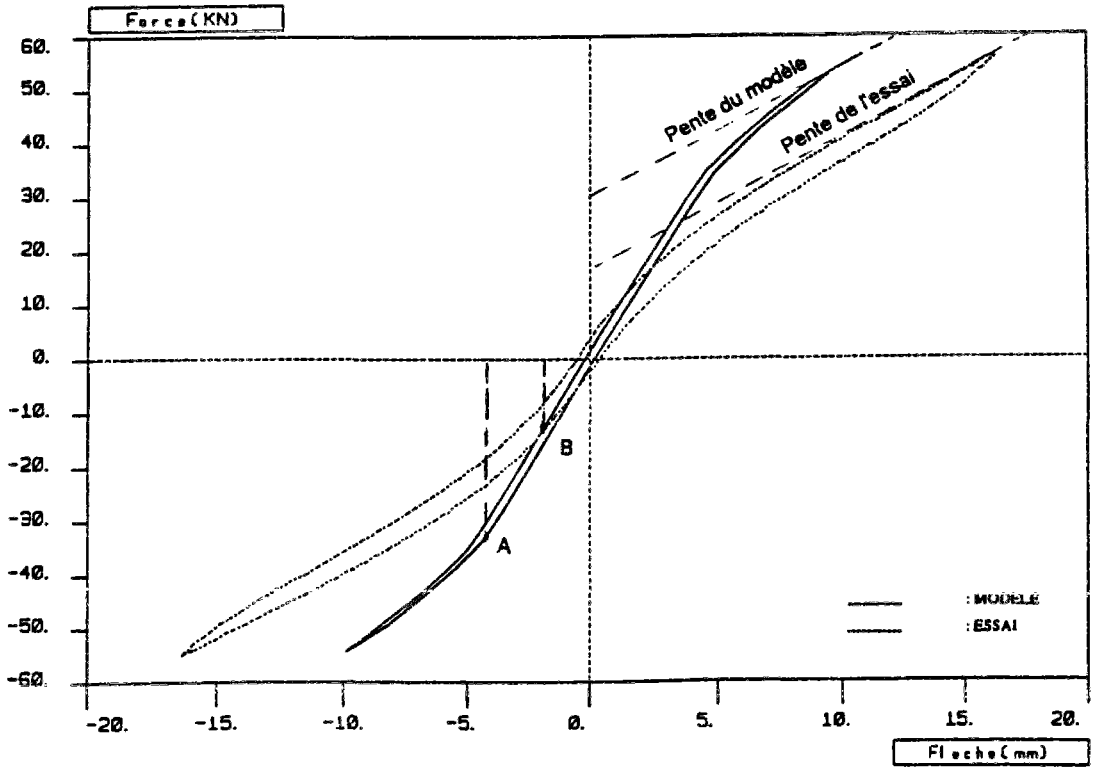


Fig. 5.28 : Comparaison courbes charge - flèche modèle -essai QD3 pour le cycle au pic de la charge .

5.4.7.2 Commentaires :

La comparaison essais - modèle des courbes charge -flèche fait ressortir les constatations suivantes :

- les charges maximales expérimentale et calculée coïncident montrant ainsi que la méthode d'ajustement des paramètres (§ 3.4.4) est correcte ,

- les pentes moyennes des deux courbes sont assez comparables au voisinage de l'origine et du maximum de charge ,

- le changement de pente commençant au point A de la courbe calculée est beaucoup plus 'tardif' que celui de l'essai (point B) (fig. 5.28) , ce qui donne une sous estimation des déplacements calculées .

Nous pouvons lier le fait que la courbe calculée reste assez raide par rapport à la courbe expérimentale à la modélisation du béton fissuré . En effet , le modèle du comportement du béton ne tient pas compte , explicitement , de l'ouverture et de la refermeture des fissures; le modèle élastoplastique parfait de l'acier ne tient pas compte de l'effet Bauschinger (§1.2.2.2) qui joue un rôle important après plastification des armatures; cette effet introduit , dès la première inversion de charge , une limite de non - linéarité de la courbe contrainte - déformation avant même d'atteindre la limite élastique du métal ; cette limite de non - linéarité s'abaisse à chaque inversion de charge . Nous notons , par ailleurs , que lors d'un calcul fait en diminuant de moitié la valeur du module d'acier , les courbes charge - flèche expérimentale et calculée coïncident parfaitement ; ceci n'est qu'un artifice de calcul (sans justification physique) mais qui permet de montrer l'importance pour l'amélioration du modèle de comportement de l'acier .

CONCLUSION GENERALE

1 . A propos du modèle :

Le béton a été modélisé en s'appuyant essentiellement sur la théorie de l'endommagement des milieux continus et en se servant de la thermodynamique des processus irréversible pour écrire d'une façon systématique les équations nécessaires au développement du modèle multiaxial . Deux hypothèses restrictives , l'isotropie d'endommagement du béton et la coïncidence des axes principaux de contraintes et de déformations , ont été introduites dans le développement du modèle ; la première a permis de représenter l'endommagement par deux variables scalaires indépendantes, une en traction et l'autre en compression ; la deuxième a facilité la démonstration de la convexité du potentiel élastique . Ces deux hypothèses n'ont pas d'effet sur le problème uniaxial en flexion composée si on raisonne sur les déformations moyennes pour la zone tendue (discontinuités dues aux fissures "réparties" sur une longueur en principe égale à l'espacement des fissures) mais sont en contradiction avec la réalité s'il y a influence de l'effort tranchant .

Les variables d'endommagement n'évoluant que sur l'enveloppe des cycles imposent des décharges et recharges uni - linéaires qui sont en divergence avec la réalité.

La difficulté pratique d'identification des paramètres a été plus ou moins levée par les hypothèses précédentes et par d'autres qui ont été émises pour que tous les paramètres du modèle dépendent essentiellement de grandeurs habituellement connues comme f_c et E_0 et de la loi de Sargin (BPEL91) qui est couramment utilisée .

Le comportement de l'acier est géré par la loi élastoplastique parfaite .

2 . A propos de la programmation :

La partie la plus importante du travail a été l'introduction du chargement cyclique de structures dans le logiciel SNOB qui traite le cas des structures en béton armé ou précontrainte soumises à des chargements monotones .

Dans le nouveau logiciel SCOB pour la simulation du comportement cyclique des structures en béton armé , trois historiques ont été créés , le premier pour gérer les contraintes dans les fibres ,le second pour faire évoluer les variables d'endommagement (D_c , D_t)et les taux de restitution d'énergie volumique (Y_c , Y_t) des fibres et le troisième pour la gestion des historiques de chargement .

3 . A propos de la comparaison essais - modèle :

L'application du modèle à divers essais a mis en évidence les points suivants :

- Le modèle dissipe moins d'énergie par rapport à la réalité (voir fig.5.4) .

- Le modèle ne traite pas de la refermeture progressive des fissures lors d'un passage de l'état de traction à l'état de compression (effet unilatéral) car il ne nous a pas été possible de trouver dans la littérature des essais permettant de déterminer une loi d'évolution des déformations anélastiques au changement de signe de la contrainte .

- Les déformations anélastiques sont comparables aux déformations résiduelles expérimentales (voir §5.2.2.1) , en compression .

- Le modèle obtient une enveloppe des cycles de compression comparable à la courbe expérimentale pour les éléments ayant un comportement uniforme (QJ et QJTC)et la sous-estime pour les éléments soumis à la flexion (QD) , ce qui laisse supposer que le modèle ne calcule pas correctement les courbures à cause de la mauvaise estimation des déformations du côté tendu .

4 . Perspectives :

Il conviendrait de faire progresser le modèle notamment :

- par une modélisation correcte du béton armé fissuré ,

- par la prise en compte de l'évolution de l'endommagement du béton non seulement sur l'enveloppe , mais aussi dans les phases de déchargement et rechargement ; les courbes correspondantes peuvent être représentées par des modèles multilinéaires ;

- par la prise en compte de l'anisotropie du béton en considérant que l'endommagement du béton est non - uniforme suivant les trois directions ; ceci , bien sûr , nécessite une modélisation multiaxiale ;

- par l'introduction d'un modèle plus adapté pour l'acier sous chargement cyclique qui est nécessaire pour tenir compte du changement de la limite d'élasticité apparente à chaque cycle (effet Bauschinger).

BIBLIOGRAPHIE

[ALSULAYFANI86] : B. AL-SULAYFANI ; " Contribution à l'étude du comportement des ossatures en béton armé sous sollicitations cycliques par analyse non-linéaire globale " Thèse de Doctorat de l'Université de Nantes , Nantes , 06 Mars 1986 .

[ALSULAYFANI87] : B. AL-SULAYFANI , J. LAMIRAULT ; " Contribution à l'analyse expérimentale du comportement mécanique cyclique du béton " , Matériaux et Constructions , V.20 , N°118 , Juillet 1987 .

[AOYAMA79] : H. AOYAMA ; " Mechanical properties of concrete under load cycles idealizing seismic actions " , Symposium AICAP-CEB , Structures en béton sous actions sismiques , V.1 , Rome 1979 .

[CEB83] : BULLETIN D'INFORMATION DU CEB ; " Response of critical regions under large amplitude reversed actions " , N°161 , Août 1983 .

[CEB91] : BULLETIN D'INFORMATION DU CEB ; "Behavior and analysis of reinforced concrete structures under alternate actions inducing inelastic response " , N° 210 , July 1991 .

[CIAMPI91] : V. CIAMPI , P. E. PINTO , G.VIA ; "Concrete in compression " , CEB , Bulletin d'information , N°210 , V.1 ,Juillet 1991 .

[DAVENNE89] : L. DAVENNE , C. SAOURIDIS , J. M. PIAU ; " Un code de calcul pour la prévision du comportement de structures endommageables en béton , en béton armé ou en béton de fibres " , Annales de l'I.T.B.T.P. , N° 478 , Nov. 1989 .

[DUVAUT90] : G. DUVAUT ; " Mécanique des milieux continus " , Edition Masson , 1990 .

[FAFITIS84] : A. FAFITIS , S. P. SHAH ; " Rheological model for cyclic loading of concrete " Journal of Structural Engineering , Vol. 113 , N°2 , Feb.1987.

[FILIPPOU91] : F. C. FILIPPOU ; " Reinforcing steel " ; Bulletin d'information du C.E.B. n° 210 , July 1991 .

[FOURÉ95] : B. FOURÉ , D. VIÉ ; " Essais de compression et traction cyclique sur poteaux en béton armé " , Rapport interne (22 042 et 2212.9.214) , C.E.B.T.P. , Service Ingénierie - Modélisation , Septembre 1995 .

[FOURÉ96a] : B. FOURÉ ; " Loi de comportement empirique du béton en compression et extrapolation aux bétons à ultra haute résistance " , Symposium international sur l'utilisation des bétons à hautes performances , AFPC-AFREM "BHP96" , Paris , Mai 1996 .

[FOURÉ96b] : B. FOURÉ , Ph. THOMAS (†) , M. PASQUIGNON , M. BENMANSOUR , " Essais statiques de poteaux en flexion cyclique alternée " , Rapport interne (91 036 et 2212.9.209) , C.E.B.T.P. , Service Ingénierie - Modélisation , Septembre 1996 .

[GOPALARATNAM85] : V. S. GOPALARATNAM , S. P. SHAH ; " Softening response of plain concrete in direct tension " , ACI Journal , May - June 1985 .

[GRELAT78] : A. GRELAT ; " Comportement non - linéaire et stabilité des ossatures en béton armé " , Annales de l'ITBTP , Novembre , 1978 .

[HAN86] : D. J. HAN , W. F. CHEN ; " Strain - space plasticity formulation for hardening - softening materials with elastoplastic coupling " , International Journal of Solid Mechanics , Vol. 22 , N° 8 , 1986 .

[HERMANN88] : G. HERMANN , J. KESTIN , " On thermodynamic foundations of a damage theory in elastic solids " , Proceedings of the CNRF - NSK workshop on " Strain localisation and size effect due to damage and cracking " , Cachan , Edited by J. Mazars and Z. Bazant, Elsevier , 1988 .

[JENNINGS68] : A. JENNINGS ; " Frame analysis including change in geometry " , Journal of Structural Division , ASCE , Mars , 1968 .

[KARSAN69] : I. D. KARSAN , J. O. JIRSA ; " Behaviour of concrete under compressive loadings " , ASCE , ST12 , V.95 , Dec.1969 .

[KATO79] : B. KATO ; " Mechanical properties of steel under load cycles idealizing seismic actions " , Symposium AICAP-CEB , Structures en béton sous actions sismiques , V.1, Rome 1979 .

[KENT73] : D. C. KENT , R. PARK ; " Cyclic load behavior of reinforced steel " , Strain , July 1973 .

[KOENIG91] : G. KOENIG , H. DUDA ; " Concrete in tension " , CEB, Bulletin d'information , N°210 , V.1 ,Juillet 1991 .

[LABORDERIE91] : C. LABORDERIE ; " Phénomènes unilatéraux dans un matériau endommageable : modélisation et application à l'analyse de structures en béton" , Thèse de docteur de l'université , Paris VI , 03 Mai 1991 .

[LADEVEZE83] : P. LADEVEZE ; " Sur une théorie de l'endommagement anisotrope " , Rapport interne N° 34 , L.M.T , E.N.S. Cachan , Mars 1983 .

[LEMAITRE88] : J. LEMAITRE , J. L. CHABOCHE ; " Mécanique des matériaux solides " , Edition Dunod , 1988 .

[MAZARS84] : J. MAZARS ; " Application de la mécanique de l' endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure " , Thèse de doctorat d'état, Paris VI , Mai 1984 .

[MAZARS87] : J. MAZARS , C. LABORDERIE ; " Comportement oligocyclique des bétons composites " , Rapport interne N° 80 , Laboratoire de Mécanique et de Technologie , E.N.S. Cachan , Nov. 1987 .

[MENEGOTTO72] : M. MENEGOTTO , E. PINTO ; "Method of analysis for cyclically loaded reinforced concrete frames including changes in geometry and non elastic behavior elements " , Instituto di Scienza et Technica della Costruzioni , Pub. n° 52 , Rome , 1972 .

[PARK75] : R. PARK , T. PAULAY ; " Reinforced concrete structures" , Wiley-Interscience 1975 .

[PIJAUDIER89] : G. PIJAUDIER-CABOT , J. MAZARS , J. PULIKOWSKI ; " Steel-concrete bond analysis with non local continuous damage " . Rapport interne n° 96 , L.M.T. ,E.N.S. Cachan / CNRS / Université Paris VI , Cachan ,Mars 1989 .

[RAMTANI90] : S.RAMTANI ; " Contribution à la modélisation du comportement multiaxial du béton endommagé avec description du caractère unilatéral " , Thèse de docteur de l'université , Paris VI , 09 Avril 1990 .

[ROBINSON75] : J.R.ROBINSON , B. FOURÉ , A. SAHÉBDJEM ; " Flambement des poteaux carrés en béton armé chargés hors d'un plan de symétrie " , Annales de l'I.T.B.T.P., N° 327 , Avril 1975 .

[SINHA64] : B. P. SINHA , K. H. GERSTLE , L. G. TULIN ; " Stress - strain relations for concrete under cyclic loading " , ACI Journal , V.61 , N°2 , Feb.1964 .

[TERRIEN80] : M. TERRIEN ; " Emission acoustique et comportement mécanique post - critique d'un béton sollicité en traction " , Bulletin de liaison du Laboratoire des Ponts et Chaussées , N° 105 , Jan. - Fev. 1980 .

[THOMAS93] : Ph. THOMAS , M. BENMANSOUR , B. FOURÉ ; " Comportement sismique des structures travaillant en console ; essais quasi-statiques en flexion alternée - Bibliographie et étude détaillée des essais " , Rapport interne , Dossiers N° 22036 et 2212-9-169 , Service d'Etude des Structures , C.E.B.T.P., Mars 1993 .

[TORRENTI89] : J. M. TORRENTI , J. DESRUES , C. PUCH , Y. MALIER ; " Application de la stéréophotogrammétrie à l'étude de la localisation des déformations dans le béton " , Bulletin de Liaison du Laboratoire des Ponts et Chaussées , N° 159 , Jan.- Fev. 1989 .

[VELKOV96] : P. VELKOV , B. FOURÉ , N. MENEZES ; " Validation des coefficients de comportement sismiques des murs de bâtiments et des piles de ponts par des calculs dynamiques non linéaires pas à pas " , 4ème Colloque National de l'AFPS , Saint-Remy-Lès-Chevreuse , 10-12 Avril 1996 .

[VIÉ96] : D. VIÉ ; " Modélisation du comportement cyclique du béton " , Note Interne N° DT 96.002 - DV/MFG , Direction Technique , C.E.B.T.P. , Mai 1996 .

[YANKELEVSKI87a] : D. Z. YANKELEVSKI , H. W. REINHARDT ; " Model for cyclic compressive behavior of concrete" , ASCE , ST2 , V.113 , Feb.1987 .

[YANKELEVSKI87b] : D. Z. YANKELEVSKI , H. W. REINHARDT ; " Response of plain concrete to cyclic tension " , ACI Journal , Sept.-Oct.1987 .

[YANKELEVSKI89] : D. Z. YANKELEVSKI , H. W. REINHARDT ; " Uniaxial behavior of concrete in cyclic tension " , ASCE , ST1 , V.115 , Jan.1989 .