Structures et désordres

Stéphane G. Roux

▶ **To cite this version:**

Stéphane G. Roux. Structures et désordres. Matière Condensée [cond-mat]. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1990. Français. NNT : . tel-00523045

HAL Id: tel-00523045
https://pastel.hal.science/tel-00523045

Submitted on 4 Oct 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

18360

NS 15188
(3)

Ecole Nationale des Ponts et Chaussées

Thèse présentée pour obtenir le titre de

Docteur de L' Ecole Nationale des Ponts et Chaussées

Spécialité : Structures

par

Stéphane ROUX

Sujet : Structures et Désordres

---

soutenue le 17 Janvier 1990 devant la Commission d'Examen composée de

MM.	E. BREZIN	Président
	J. VANNIMENUS	Rapporteur
	A. ZAOUI	Rapporteur
	E. GUYON	
	J. SALENÇON	
	D. STAUFFER	

E.N.P.C
DOC25572

08

Remerciements

Il est difficile d'exprimer toute la gratitude que j'ai envers Etienne GUYON, qui m'a appris tout ce qui est présenté dans cette thèse, qui m'a initié à la recherche, et qui, malgrè ces multiples et débordantes activités, a souvent été d'une disponibilité remarquable.

Je remercie Monsieur le Professeur Edouard BREZIN, qui me fait l'honneur de présider le jury. Je sais grè à Monsieur le Professeur Jean SALENÇON, et Herr Professor Doktor Editor Dietrich STAUFFER d'avoir bien voulu participé à ce jury. Mes remerciements vont également à Messieurs les Professeurs Jean VANNIMENUS et André ZAOUI qui ont accepté la tâche ingrate d'être rapporteur de ce travail. Que Monsieur le Professeur André ZAOUI qui est à l'origine de mon orientation vers les problèmes étudiés dans cette thèse trouve ici l'expression de ma gratitude.

Très peu du travail exposé dans ce mémoire aurait vu le jour sans Alex HANSEN et Hans HERRMANN avec qui j'ai eu, et j'ai, l'extrème plaisir de travailler. Je tiens à leur exprimer ici mon amitié, et mes plus sincères remerciements.

Je remercie tous les chercheurs du Laboratoire de Physique et Mécanique de la Matière Hétérogène et qui lui donnent son caractère si unique, C. ALLAIN, A. AMBARI, C. BAUDET, E. CHARLAIX, M. CLOITRE, J. C. CHARMET, M. FERMIGIER, B. GAUTHIER-MANUEL, J. P. HULIN, C. LEROY, L. LIMAT, P. MAGNICO, M. MARTIN, I. MUTABAZI, B. NŒTINGER, L. OGER, L. PETIT, H. PEERHOSSAINI, P. RIGORD, D. VALLET, J. E. WESFREID, et tous ceux que j'oublie.

Je tiens encore à témoigner de ma reconnaissance à tous ceux avec qui j'ai eu la chance de collaborer, directement ou indirectement, et avec qui j'espère avoir le plaisir de continuer à travailler: L. de ARCANGELIS, G. G. BATROUNI, M. BEN-AYAD, D.J. BERGMAN, D. BIDEAU, R. BLANC, H. CRAPO, R. CYTERMANN, B. GAUTHIER-MANUEL,

A. GILABERT, E. L. HINRICHSEN, M. LAGIER, P. M. LAM, L. LUCENA, C. D. MITESCU, A. PALEVSKI, R. PANDEY, V. PRUNET, I. RUDNICK, L. da SILVA, D. SORNETTE, D. STAUFFER, J. P. TROADEC, J. VAREILLE, C. WEILL, et J. WU.

Isabelle, à qui je dois mes meilleures idées et qui a pourtant connu la partie la plus ingrate de cette thèse, qui m'a sans cesse aidé et soutenu, qui a participé grandement à la frappe de ce mémoire et surtout à la pénible tâche de sa correction mérite plus que quiconque l'expression de ma plus profonde gratitude.

Que le corps des Ponts et Chaussées qui m'a donné la possibilité d'effectuer ce travail dans les meilleures conditions soit remercié.

Enfin je remercie tous ceux qui m'ont aidé, de pres ou de loin, dans la réalisation concrète de ce mémoire.

Chapitre 2 : Percolation de connexité

2.1 Rappel de propriétés géométriques 3
2.1.1 Seuils de percolation 4
2.1.2 Exposants critiques 6
2.1.4 Schématisation de l'amas infini 15
2.1.5 Transport "logique" 17
2.1.6 Symétrie, Linéarité et Localité 20

2.2 Transport scalaire, Conduction 24
2.2.1 Problème primal 24
2.2.2 Bornes sur l'exposant t 27
2.2.3 Renormalisation de petites cellules 30
2.2.4 Problème dual 33
2.2.5 Bruit 39
2.2.6 Multifractalité 41

2.3 Transport scalaire, Problèmes assimilés 53
2.3.1 Diffusion 54
2.3.2 Vibration 58
2.3.3 Jonctions Josephson 61
2.3.4 Résistances non-linéaires 66

2.4 Transport vectoriel, Elasticité 69
2.4.1 Symétries 69
2.4.2 Réseaux de poutres 72
2.4.3 Bornes sur l'exposant τ 75
2.4.4 Relations avec la mécanique des milieux continus 81
2.4.5 Flexion à deux dimensions 83
2.4.6 Problème dual 86
2.4.7 Précontrainte 88
2.4.8 Vibration 93

Références 94

Chapitre 3 : Percolation à transmission d'information incomplète

3.1 Percolation de forces centrales I : Propriétés classiques 3
3.1.1 Linéarité et non-localité 3
3.1.2 Notations 8
3.1.3 Découplage 12
3.1.4 Scalaire ou Vectoriel ? 16
3.1.5 Bref historique 20
3.1.6 Résultats 30
3.1.7 Multifractalité 38

3.2 Percolation de forces centrales II : Propriétés originales 43
3.2.1 Rigidité orientationnelle 43
3.2.2 Elongation libre 49

3.3 Modèle de Potts antiferromagnétique dilué à trois états à température nulle
3.3.1 Modèle complet non-linéaire 56
3.3.2 Modèle continu et linéarisation 61
3.3.3 Autre modèle 68
3.3.4 Borne sur le seuil de rigidité 71

3.4 Percolation et transport : Synthèse 74

Références 79

Chapitre 4 : Structures Minimales

4.1 Chemins Minimaux en fort désordre 5

4.1.1 Comportements critiques 8

4.1.2 Comportements en régime dilué 18

4.1.3 Distribution continue large 31

4.1.4 Lien avec la percolation 37

4.2 Chemins Minimaux en faible désordre 40

4.2.1 Renormalisation sur réseaux hiérarchiques 40

4.2.2 Réseau Euclidien 50

4.2.3 Arbres et rugosité 53

4.2.4 Modèle de rivières 56

4.2.5 Dualité 59

4.3 Relation avec d'autres modèles 63

4.3.1 Domaines de spins 65

4.3.2 Equation de Burgers avec bruit 74

4.3.3 Polymères dirigés en milieu aléatoire 81

4.3.4 Imbibition et drainage en milieu poreux 83

4.3.5 Modèle d'Eden 85

4.3.6 Modèles de fronts d'empilement 94

4.3.7 Etats critiques auto-organisés 100

4.3.8 Ondes de densité de charge 107

4.3.9 Réactions contrôlées par la diffusion 116

4.3.10 Autres applications 126

4.3.11 Conclusion 131

4.4 Aspect dynamique : Transport 132

4.4.1 Réseau de Diodes à seuil 132

4.4.2 Autres applications 142

4.4.3 Elasticité d'empilements 147

Références 153

Chapitre 5 : Modèles de fracture de milieux hétérogènes

5.1 Présentation du problème 5

5.1.1 Rupture fragile 6

5.1.2 Types de désordre: "Gelé" et "Recuit" 9

5.1.3 Contrainte de connexité 10

5.1.4 Différents critères 11

5.2 Désordre gelé 17

5.2.1 Dilution 17

5.2.2 Distribution des coefficients de transport 44

5.2.3 Distribution des seuils de rupture 46

5.2.4 Cas d'une fissure unique 92

5.2.5 Autres modèles reliés 97

5.2.6.Conclusion sur le désordre figé 99

5.3 Désordre recuit 101

5.3.1 Agrégation limitée par diffusion, modèle de rupture de diélectrique 102

5.3.2 Modèle de croissance de fracture élastique unique 117

5.3.3 Abandon du critère de connexité 131

5.3.4 Comparaison avec le désordre figé 148

5.4 Correspondance entre désordres 150

5.4.1 Reconstruction des seuils 152

5.4.2 Les distributions invariantes d'échelle 157

5.4.3 Modèles à fissure unique 161

5.5 Conclusion 167

5.5.1 Avant de conclure... 167

5.5.2 Conclusion 169

Références 172

A celui ou celle

qui bientôt sera.

'Il est dans le plus grand ordre qu'il y ait un petit désordre'

G.W.Leibniz,
('Theodicée',III,248)

Structures et Désordres

Entre le cristal et la fumée [1]

Kenneth Wilson avait coutume de citer, de façon résolument provocante, comme les trois états de la matière, les suivants:

- L'état ordonné dont l'archétype est le cristal , mais qui comporte toutes les phases présentant un certain ordre relativement à un paramètre pertinent pour telle ou telle propriété considérée

- L'état désordonné qui inclue les gaz et les liquides , voire même les solides amorphes

- L'état critique qui correspond à l'état d'un milieu, précisément à une transition de phase.

Le caractère provocant d'une telle classification est clair. Il ne s'agit bien sûr pas du fait que l'ordre et le désordre puissent coexister au sein d'une même structure, comme pour les cristaux liquides (selon la direction envisagée), ou encore les quasi-cristaux (selon que l'on s'attache à l'ordre d'orientation, ou au désordre de position), et de tels exemples abondent. Une telle classification ne vise à décrire naturellement qu'un simple aspect, qu'une seule propriété de la matière. Non, ce qui choque dans cette classification sommaire, c'est le caractère apparemment stable de deux des états (ordonné et désordonné), et instable de l'état critique. Une transition de phase est, comme son nom l'indique, la séparation fugace et ponctuelle entre deux états stables. Elle n'a l'épaisseur que du 'point' mathématique auquel se réfère l'appellation de 'point critique'. Bien que ces propos dussent être modulés par la prise en compte concrètement d'un certain élargissement de la transition par des effets de taille finie, ou autre, il n'en demeure pas moins que le caractère critique d'une transition représente souvent le type même de l'instant insaisissable, de la chimère rebelle aux efforts de l'étude expérimentale ou même numérique. Si de même le cristal n'est jamais parfait, car il contient toujours une part de défauts, et que le milieu désordonné comporte toujours des corrélations comme un fossile d'ordre, les

deux états ordonné et désordonné, semblent plus stables, et plus proches de la notion intuitive d'état.

La pertinence de la classification de Kenneth Wilson apparaît lorsque nous considérons deux traits particuliers liés à la dynamique du phénomène (cf. Figure 1.1):

- Le ralentissement critique et

- Le caractère attractif du point critique pour certaines dynamiques.

Le premier point était originellement mis en avant par Wilson pour justifier le statut d' 'état' qu'il conférait aux états critiques. En effet au voisinage du point critique, la dynamique est extrèmement ralentie et, d'une certaine manière, elle est quasiment figée à la transition même. Il apparaît donc possible de piéger des états critiques en exploitant cette propriété.

Le caractère éventuellement attractif du point critique pour la dynamique du phénomène a été très récemment mis en avant par Per Bak, pour justifier l'existence de tels états critiques naturellement, alors même qu'ils semblent correspondre à un concours de circonstances très fragile. Le modèle spécifique que mentionne Bak [2] (cf Figure 1.2) pour étayer ce concept d'état critique auto-organisé est un modèle d'empilement que nous étudierons plus en détail au chapitre 4. Mais au-delà de ce modèle particulier, l'idée de caractère attractif du point critique mérite que l'on s'y arrête un instant.

Il n'est certes pas toujours possible de construire une dynamique qui conduise vers un état critique, mais il est des exemples qui suffisent à légitimer l'existence de tels états naturellement. Un illustration simple est fournie par la percolation. Ce phénomène est comme nous le verrons au chapitre prochain un modèle simple de transition de phase géométrique. Pour générer ce modèle juste au point critique, l'une des méthodes les plus simples consiste à envahir progressivement un milieu en utilisant à chaque instant le point accessible le plus favorable. Nous obtenons alors la 'percolation d'invasion', qui n'est pas un modèle de percolation

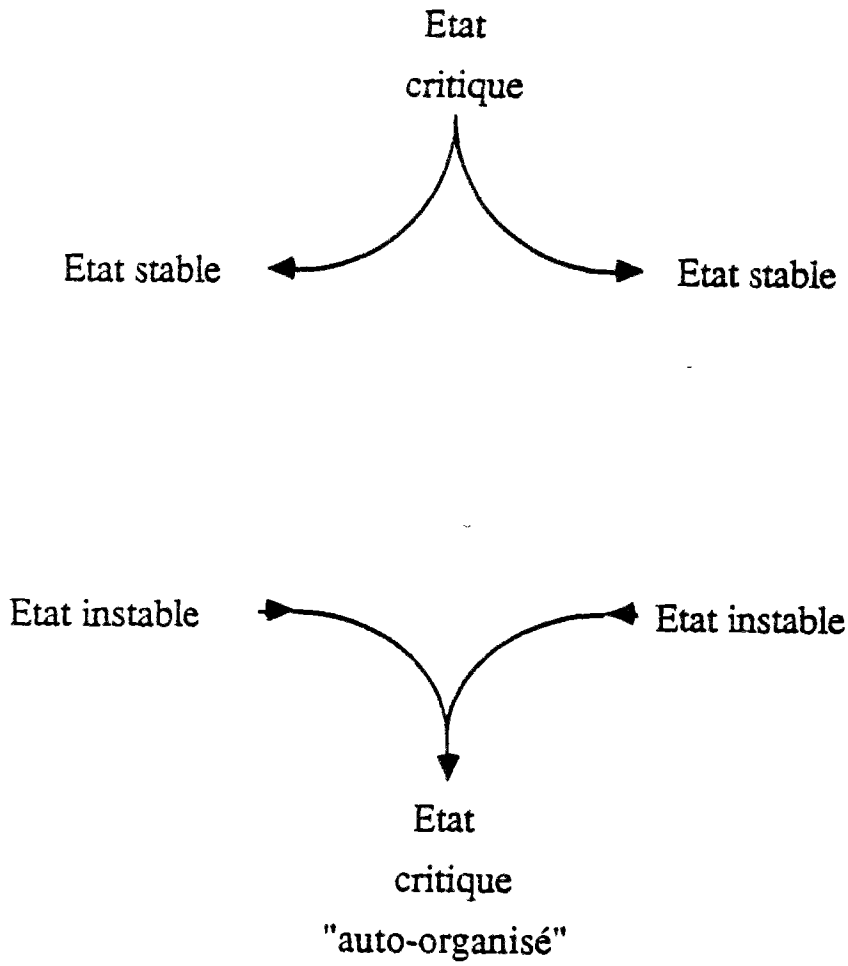


Figure 1.1: Alors que classiquement l'état critique apparaît comme la séparation fragile entre deux états stables (haut), il est possible de considérer des situations physiques où l'état critique est un attracteur de la dynamique du système (bas).

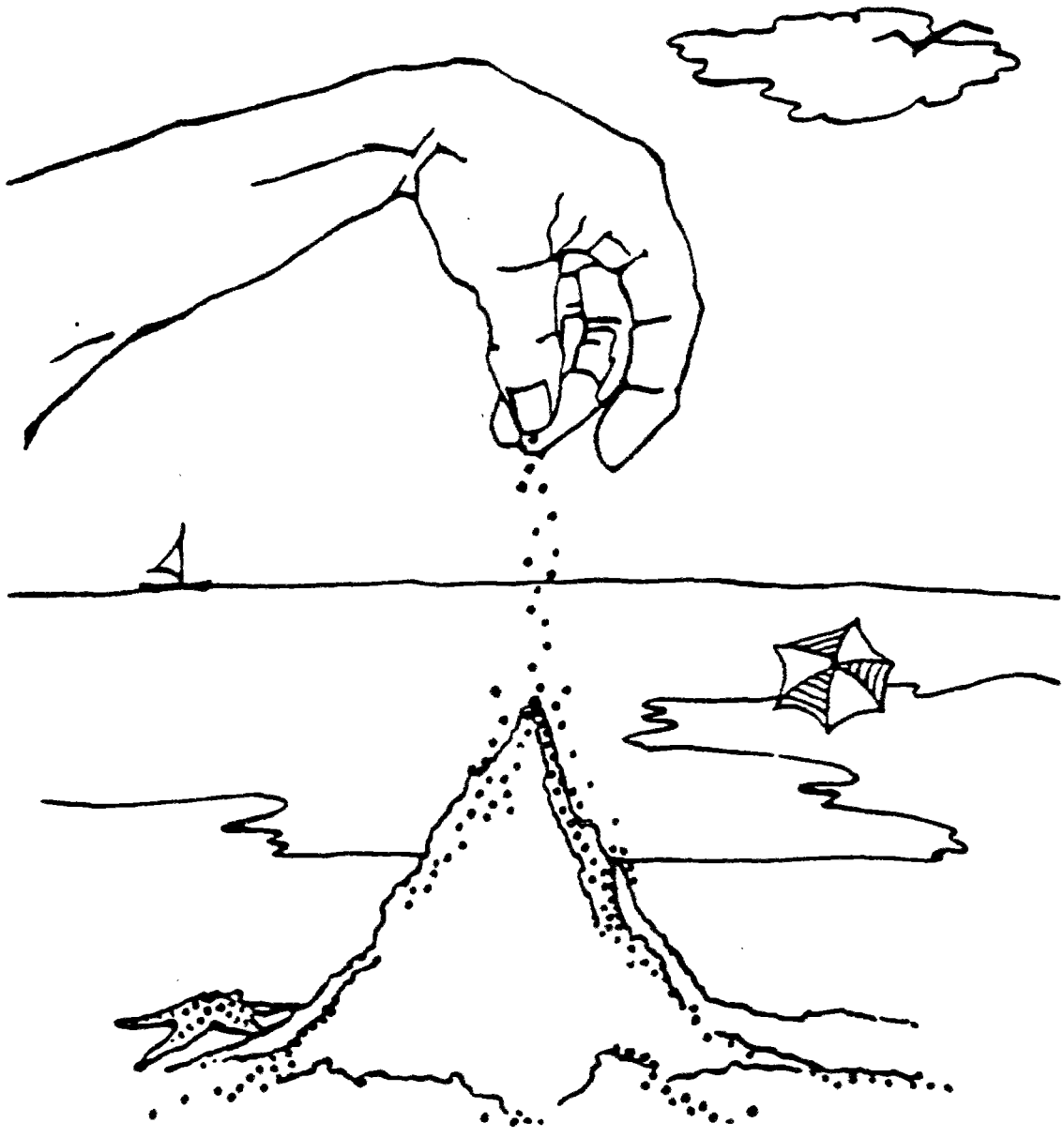


Figure 1.2: La présentation du concept d'état critique auto-organisé telle que faite par P.Bak utilise un modèle de structure d'empilement. Ce concept est cependant beaucoup plus général et puissant que ce modèle précis. Nous ne le mentionnons ici que comme un paradigme (Figure extraite de P.Bak, C.Tang et K.Wiesenfeld, in "Directions in Chaos", Hao Bai-Lin ed., World Scientific, Singapore 1988).

particulier mais plutôt un mode de génération d'amas de percolation, où il est 'naturel' de se situer juste au point critique. L'intérêt de la percolation d'invasion a été reconnu depuis longtemps, bien que la terminologie de 'phénomène critique auto-organisé' n'ait pas été utilisée à son propos.

Aujourd'hui, nombre de phénomènes de la physique des milieux aléatoires apparaissent comme des exemples d'états critiques auto-organisés, jusqu'au fameux processus d' 'agrégation limitée par diffusion' [3].

Désordre et Bruit

Dans l'ensemble de ce mémoire, nous allons nous intéresser à des phénomènes caractéristiques des milieux hétérogènes aléatoires. Le désordre étant soit spatial (hétérogénéité) soit temporel (bruit). Très schématiquement, il existe deux grandes classes de problèmes:

- d'une part, les phénomènes où la présence de désordre ne fait que modifier quantitativement la physique de l'état ordonné, sans défaut.

- d'autre part, ceux où le désordre se traduit par des régimes nouveaux, des comportements spécifiques qui n'apparaissent pas en l'absence de désordre. Nous verrons que dans bien des cas, l'originalité des comportements, et surtout leur pertinence sur une grande gamme de taille ou de temps proviennent de l'existence d'un régime critique sous-jacent, qui justifie ou légitime l'existence de lois d'échelle, par l'auto-similarité des structures présentes.

L'originalité de comportement ou de structure, constitue l'intérêt même de ces problèmes. En effet, de façon schématique (qui souffre de nombreuses exceptions), l'essentiel de la physique repose sur des hypothèses de linéarité, ou de proportionalité entre la cause et la conséquence, pour lesquels nous disposons d'un formalisme mathématique puissant. Or cette linéarité, toujours sur un plan très schématique , n'est valide que pour de petites perturbations par rapport à une

situation de référence sur laquelle sont forgé les concepts de base utiles à la description. Ceci suffit à justifier l'intérêt de carctériser le mieux possible ces états de référence. Pour illustrer ces propos, nous pouvons citer l'exemple d'une instabilité hydrodynamique bien connue (dite de Rayleigh-Benard). Considérons un fluide confiné soumis à un gradient spatial vertical de température. Pour un faible gradient, la description du fluide se fait en considérant des faibles perturbations par rapport à un état de référence trivial, l'état de repos d'un fluide homogène. Ainsi la répartition du gradient de température se sera uniforme dans le fluide. Au-delà d'une valeur seuil du gradient de température, une instabilité apparaît. Nous assistons à une convection dans le fluide qui dessine des cellules qui s'agence dans le milieu selon une répartition cristalline. Il s'agit là d'un processus d'auto-organisation du fluide à une échelle macroscopique dictée par la taille du système plutôt que par la taille des molécules constitutives. C'est à partir de cette structure, de ces cellules, qu'il faudra dès lors décrire le comportement hydrodynamique de ce fluide.

Au-delà de son intérêt physique, l'"auto-structuration" est un sujet fascinant. Et comme toute fascination, elle cache une part d'étonnement et de défense. Le terme même d'"auto-organisation" en témoigne. Il suggère qu'alors le système se détermine lui-même, comme si dans son état normal nous le controlions et que, passé un certain seuil, il prenait son 'autonomie', nous volant notre fonction 'démiurgique'. Cette vision caricaturale, traduit pourtant bien une incompréhension des phénomènes qui président à cette structuration. On connaît d'autres exemple d'intrusions de vocabulaires 'défensifs' dans la science, y compris en mathématiques, comme les 'nombres faux' pour désigner les nombres négatifs, aux débuts de leur utilisation, ou même l'exemple encore vivace des nombres 'imaginaires'. Au delà de cette question de terminologie, cette fascination a depuis longtemps débordé les frontières de la science. On trouve aujourd'hui une abondante (et plus ou moins heureuse) littérature sur ce sujet [4]. Partant de la physique, les extensions de ces concepts ont gagné la biologie (cf. H.Atlan, F.Varela), la philosophie (cf. E.Morin, C.Castoriadis), la sociologie (cf. R.Girard), l'économie et la politique (cf. J.P.Dupuy,

P.Dumouchel),....L'auto-organisation est même l'un des thèmes majeurs de reflexion du Centre de Recherche pour l'Epistémologie et l'Autonomie (CREA) [5].

Revenons sur notre propos initial, et voyons comment peut apparaitre cette structuration d'un milieu aléatoire.

Transport et structure

Nous nous intéressons plus particulièrement aux propriétés de transport dans les milieux aléatoires. Nous entendons ici transport dans un sens large, incluant le transport de charges électriques, de chaleur (conduction), de fluide dans un milieux poreux (perméabilité), de matière par diffusion, et aussi le transport de force (élasticité). Dans tous ces phénomènes, nous traiterons des propriétés d'un champ, soit scalaire (potentiel, température, pression, concentration), soit vectoriel (déplacement) qui satisfait à une équation différentielle linéaire du second ordre elliptique (e.g. Laplacien nul pour un champ scalaire), dans le cadre du transport linéaire. Ces propriétés sont bien sûr eminemment dépendantes de la géométrie du milieu, et donc naturellement nous serons amené à étudier spécifiquement, les structures, ou sous-structures qui supportent le transport. C'est ainsi que la schématisation géométrique de l'amas infini en percolation, par l'image du super-réseau construit à l'échelle de la longueur de corrélation, fournit simplement des renseignements importants sur la façon dont la conductivité d'un milieu conducteur dégradé s'annule au seuil de percolation.

Sur un plan plus générique, nous pouvons montrer que, dans certaines circonstances, les propriétés géométriques peuvent être vues comme des propriétés de transport très simple, avec une algèbre Booléene plutôt que scalaire ou vectorielle, d'où le nom de transport logique. Nous mettrons en conséquence l'accent sur la linéarité, qui reste l'élément primordial de ces analyses.

Mais, à côté des propriétés linéaires, il est important de considérer aussi d'autres comportements, où, au lieu de se répartir le plus uniformément possible, en fonction des contraintes géométriques, la dissipation (ou la déformation) se localise sur une sous-structure 'optimale' en un certain sens. Ces localisations (au sens mécanique du terme) sont caractéristiques des systèmes non-linéaires, et nous les rencontrerons essentiellement dans des processus dynamiques éventuellement associés à des phénomènes de transport. C'est, nous en sommes convaincus, un domaine tout à fait nouveau et potentiellement très riche de la physique des milieux inhomogènes. Car en effet, il n'est pas besoin d'aller construire des situations de désordre aussi 'pathologiques' que la percolation pour observer alors des phénomènes critiques réalistes. Dans beaucoup de processus associés à des phénomènes non-linéaires, le désordre est considérablement amplifié. Son rôle devient dès lors fondamental, même si son amplitude n'est pas 'infinie' (ou 'tout ou rien', comme en percolation). Cela se perçoit aisément dans l'exemple de la fracture fragile des matériaux hétérogènes.

C'est particulièrement dans ce cadre qu'il faut chercher les phénomènes critiques auto-organisés qui sont pertinents pour les matériaux réels.

Ouverture

Qu'une telle stabilité des phénomènes critiques puisse exister suggère alors une démarche inverse. En effet, dans beaucoup d'analyses phénoménologiques, nous rencontrons des lois de puissance. Ces lois de puissance peuvent constituer la trace d'un phénomène sans échelle caractéristique, donc auto-similaire, qui éventuellement correspond à un point critique. Si cela est effectivement le cas, alors il est important de chercher des lois d'échelle, de tester une possible universalité des exposants critiques, d'identifier une éventuelle longueur de corrélation... concepts sur lesquels nous allons revenir en détail à maintes reprises.

Une telle démarche commence à être mise en œuvre dans certains domaines en mécanique, mais, la dichotomie entre physique et mécanique (que l'on se souvienne de la fameuse classification des Sciences d'Auguste Comte) est une barrière culturelle difficile à franchir. Gageons cependant, qu'à l'interface entre ces deux disciplines, des progrès seront accomplis dans la compréhension et la modélisation de maints phénomènes aujourd'hui mal pris en compte.

Plan

Brossons à grands traits l'organisation de ce mémoire. Nous commençons par le cas de désordre le plus simple : la dilution, et son symétrique, le renforcement. Alors le désordre est d'origine purement géométrique, sous la forme de tout ou rien. Dans cette situation existe un point critique de transition de phase géométrique simple, la percolation (Chapitre 2). Nous verrons un modèle très voisin, où la transmission d'information à travers le système est partielle (Chapitre 3). Dans ce cas le 'bon' critère de criticalité ne sera plus la connexité de la structure mais cependant nous verrons que l'on conserve l'essentiel des propriétés de la percolation usuelle.

Puis nous quitterons ce problème de dilution simple pour aborder un champ plus vaste où nous nous interesserons aux structures minimales dans un système à désordre imposé, figé dans l'espace (Chapitre 4). Dans ce cadre, la selection de structures se fait selon des critères purement géométriques simples.

Nous aborderons également le cas où la croissance de structures se fait non pas selon une minimalité de fonctionnelle géométrique, mais suivant la valeur d'un champ extérieur qui subit lui-même l'influence de la structure déja crée (Chapitre 5). L'exemple type de ce domaine sera la rupture de milieux fragiles désordonnés. Dans ce même chapitre, nous étudierons la situation voisine où le désordre est un bruit plutôt qu'une hétérogéneité figé dans la géométrie.
De façon schématique, nous résumons cette organisation selon :

- *Géométrie imposée*	- *Percolation*
	- *Percolation de Forces Centrales*
- *Désordre figé*	- *Géométrie déterminée par un critère de minimalité de structures*
	- *Géométrie déterminée par une croissance dans un champ Laplacien (ou assimilé) à l'extérieur de la structure*
- *Bruit*	- *Géométrie déterminée par une croissance dans un champ Laplacien (ou assimilé) à l'extérieur de la structure*

Une présentation alternative des thèmes évoqués dans ce mémoire est donné sur la figure 1.3. Ne considérant que la géométrie, nous mettons en avant la complexité croissante des problèmes évoqués:

1) Soit cette géométrie est directement imposée de l'extérieur (désordre exogène) (Chapitre 2 et 3)

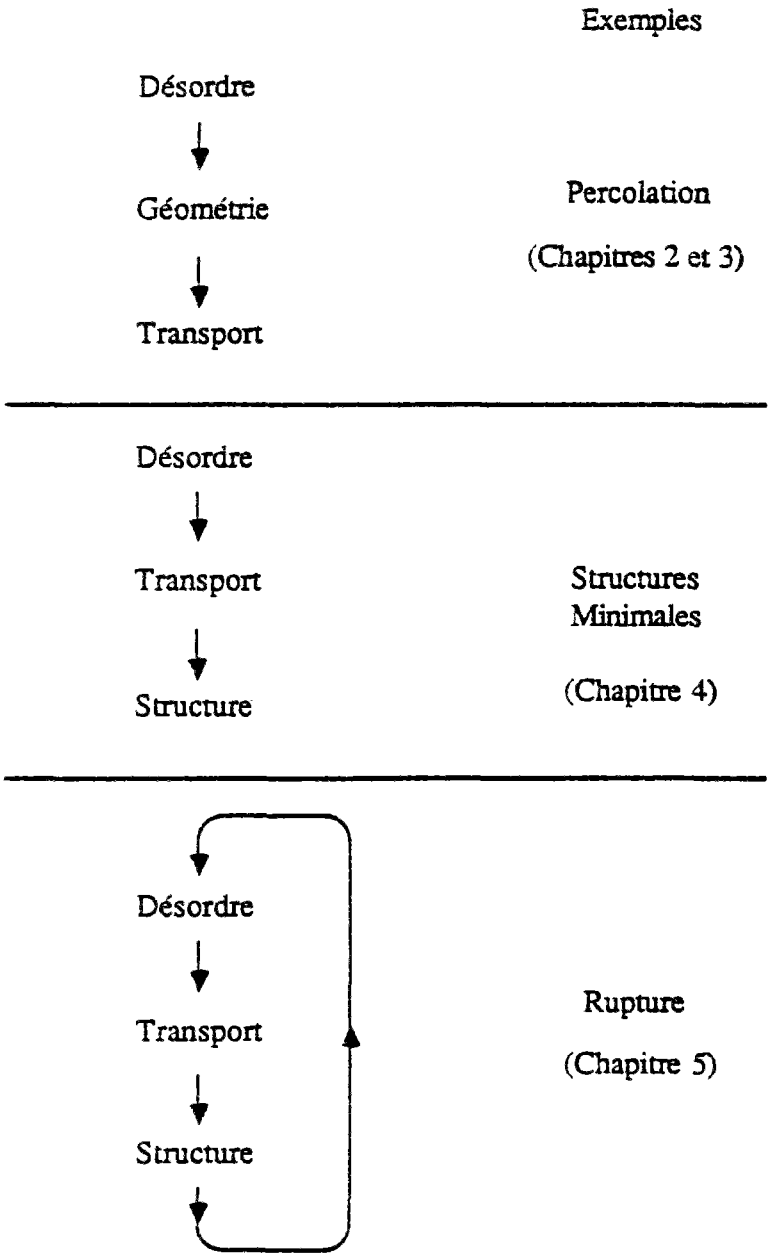


Figure 1.3: Architecture de ce mémoire en trois grandes étapes:
- Dans le premier cas, (haut), le désordre est présent dans la géométrie du milieu et impose certaines propriétés de transport.
- Dans le deuxième cas, (milieu), un désordre inhérent au milieu affecte directement les propriétés de transport, qui à leur tour selectionnent une sous-structure du système.
- Dans le dernier cas, (bas), à la différence du cas précédent, la structure du milieu qui est dessinée par le transport modifie en retour le désordre.

2) Soit elle est fixé par l'intermédiaire de propriétés de transport du milieu, en particulier pour des comportements non-linéaires donnant lieu à une 'localisation'. (Chapitre 4)

3) Soit enfin, elle résulte de la compétition entre une hétérogénéité locale ou un bruit et le champ de potentiel (au sens large) dans le milieu (désordre endogène modulé). (Chapitre 5)

Précisons cependant que de telle schématisations sont toujours trop nettes pour être toujours respectées, et l'on s'interessera par exemple à la rupture d'un milieu (troisième catégorie) ayant la géométrie d'un réseau de percolation (première catégorie). Inversement, dans des situations de fort désordre, la rupture d'un milieu aléatoire (troisième catégorie) s'apparente à une dégradation aléatoire (première catégorie).

Enfin nous conclurons ce mémoire en tentant de dégager certains traits qui nous semble mériter des développements plus importants dans le futur.

Références :

[1] Titre emprunté à H.Atlan "Entre le cristal et la fumée", Seuil, (Paris, 1979)

Nous ne pouvions résister au plaisir de citer ce titre, car l'ensemble de cet ouvrage traite de l'auto-organisation, essentiellement en relation avec des problèmes de biologie, mais, sur un plan très général, les concepts évoqués ne sont pas très éloignés de ceux qui nous préoccupent ici.

[2] P.Bak, C.Tang et K.Wiesenfeld Phys.Rev.Lett. 59, 381,(1987)

[3] voir par exemple dans "Random Fluctuations and Pattern Growth", (Cargèse 1988), N.Ostrowsky et H.E.Stanley eds., le texte de P.Alstrøm, Trunfio et H.E.Stanley, p.340, celui de P.Bak, C.Tang et K.Wiesenfeld, p.329, et celui de Obukhov, p.336.

[4] P.Dumouchel et J.P.Dupuy eds. "L'auto-organisation", Colloque de Cerisy 1982, Seuil, (Paris, 1983)

et les références que cet ouvrage contient.

[5] J.P.Dupuy "Ordres et désordres", Seuil, (Paris, 1982)

CALIFORNIE

2 Percolation I : Connexité

- 2.1 Rappel de propriétés géométriques

  - Seuils de percolation
  - Exposants critiques
  - Schématisation de l'amas infini
  - Transport "logique"
  - Symétrie, Linéarité et Localité

- 2.2 Transport scalaire, Conduction

  - Problème primal
  - Bornes sur l'exposant t
  - Renormalisation de petites cellules
  - Problème dual
  - Bruit
  - Multifractalité

- 2.3 Transport scalaire, Problèmes assimilés

  - Diffusion
  - Vibration
  - Jonctions Josephson
  - Résistances non-linéaires

- 2.4 Transport vectoriel, Elasticité

- Symétries
- Réseaux de poutres
- Bornes sur l'exposant τ
- Relations avec la mécanique des milieux continus
- Flexion à deux dimensions
- Problème dual
- Précontrainte
- Vibration

2 Percolation I : Connexité

Dans ce chapitre, nous rappellerons rapidement certaines propriétés classiques de la percolation usuelle, où l'on s'intéresse à la connexité géométrique de la structure. Il ne s'agit pas d'une revue exhaustive du sujet, loin s'en faut, mais une brève introduction où nous définissons les notions élémentaires qui nous servirons tout au long de cette étude. Ainsi, les références correspondants à la partie géométrique seront omises. Nous nous permettons de suggérer les références 1 à 10 au lecteur intéressé par une description plus précise et plus complète.

- 2.1 Rappel de propriétés géométriques

Considérons un réseau régulier de taille infinie, et coupons une fraction (1-p) des liens de ce réseau choisis aléatoirement (Fig.2.1). Lorsque p est proche de 1, seuls quelques trous auront été créés. Au contraire lorsque p est voisin de 0, l'ensemble du réseau est morcelé en petits amas. Entre ces deux extrêmes, il existe une valeur de p particulière, nommée *seuil de percolation*, et notée p_c, telle que pour $p>p_c$ existe un amas d'extension infinie, et pour $p<p_c$ ne subsistent que des amas de taille finie (Fig.2.2).

La percolation a pour objet de décrire les propriétés *statistiques* des systèmes au voisinage immédiat de leur seuil de percolation. Le phénomène physique mis en jeu est alors une véritable *transition de phase du deuxième ordre*. Le paramètre de contrôle de cette transition (l'équivalent de la température) est la fraction p. Le paramètre d'ordre (l'équivalent de la magnétisation) est la probabilité d'appartenir à l'amas infini. La percolation est donc un phénomène critique très simple (puisque purement géométrique), mais assez complexe cependant pour ne pas être soluble exactement, tout au moins dans le cas général.

La mise en correspondance du problème de percolation et d'une transition de phase a été démontrée par Kasteleyn et Fortuin [11]. Il s'agit en l'occurence de la limite

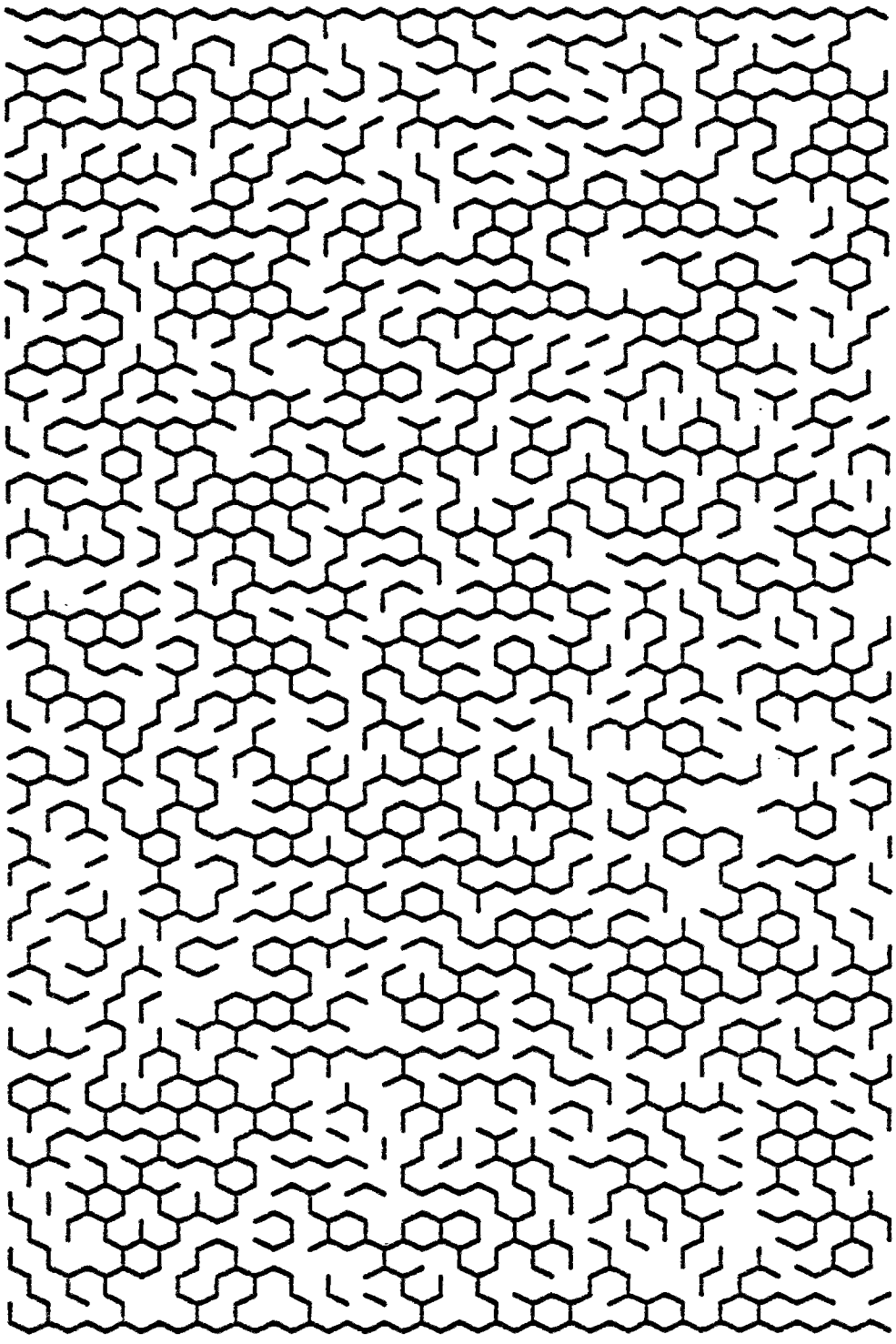


Figure 2.1: Réseau hexagonal sur lequel une fraction p = 0.653 de liens sont présents, alors que les autres, tirés aléatoirement, ont été coupés. Nous sommes juste au seuil de percolation de la structure.

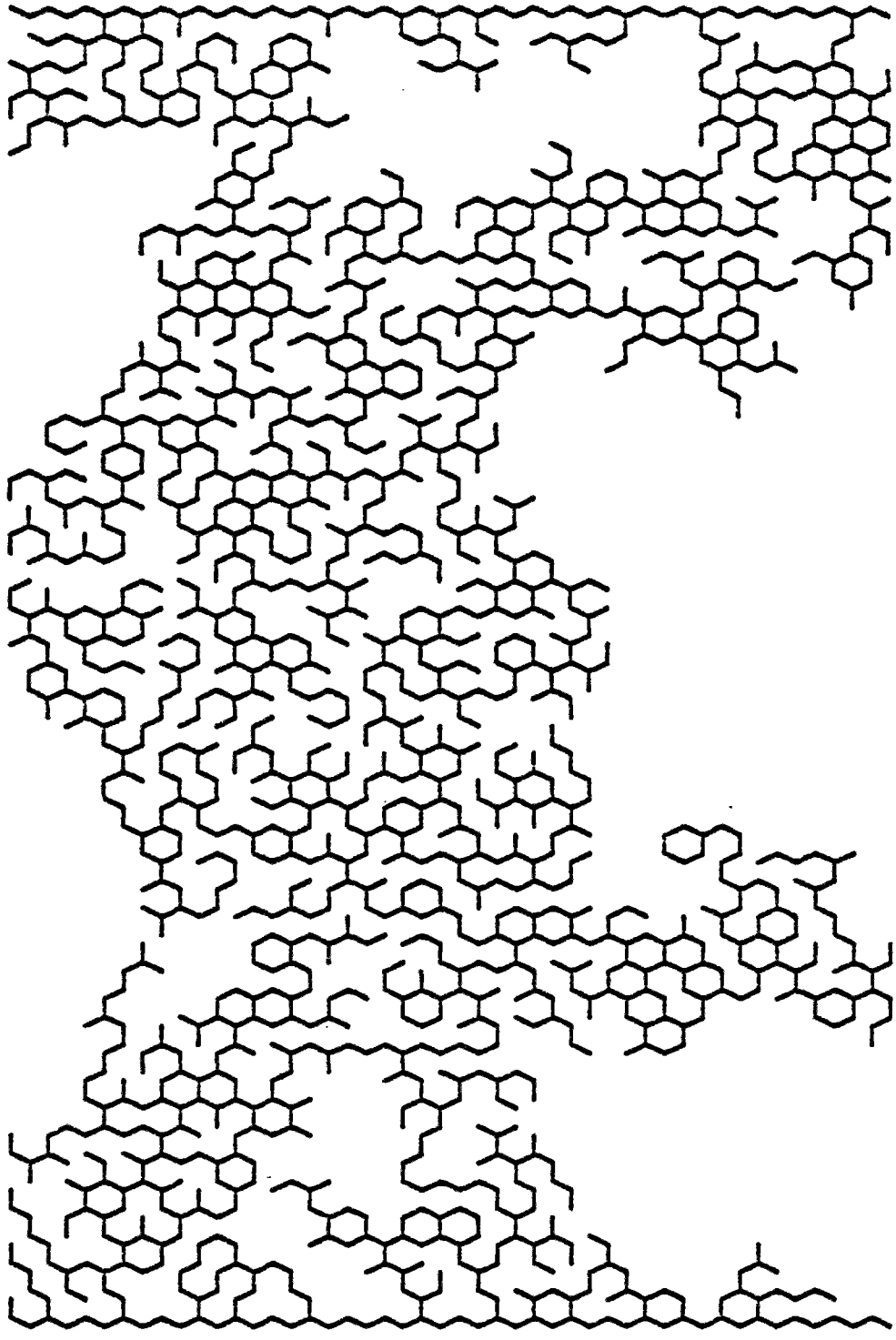


Figure 2.2: Le plus grand amas du réseau précédent est ici seul représenté. Le réseau est au seuil de percolation effectif. (C'est un fractal de dimension 1.89).

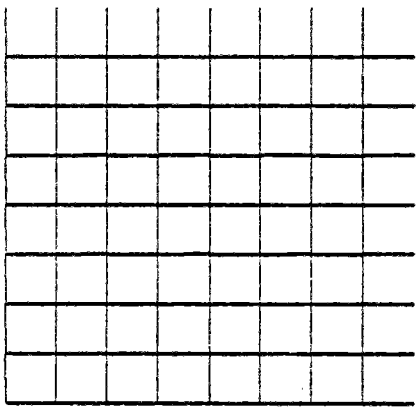
du modèle de Potts à S états lorsque S tend vers 1. Ceci permet, en particulier, d'identifier sans ambiguité l'équivalent des quantités physiques usuellement rencontrées dans les transitions de phases, en termes ici géométriques. Par exemple la présence d'un champ extérieur peut être représentée par un champ fantôme ("Ghost field") qui relie certains sites du réseau avec un site extérieur unique. Ceci a aussi permis d'obtenir les valeurs exactes de certains exposants critiques à deux dimensions.

On peut essentiellement distinguer deux classes de propriétés : celles qui sont purement géométriques, et celles qui sont liées à des phénomènes de transport sur la structure. Nous étudierons principalement cette seconde catégorie qui cependant est intimement liée à la première.

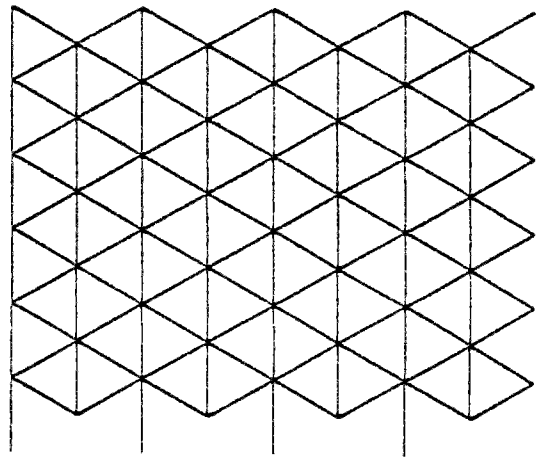
L'intérêt de l'étude de la percolation provient en grande partie de son *universalité*. Nombre des propriétés que nous étudierons sont dites universelles, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent pas des détails fins des structures étudiées. Ceci est une conséquence du fait que la percolation est un phénomène critique. En particulier, la schématisation élémentaire dont nous nous sommes servis pour introduire le sujet, et plus précisément le fait de situer ce phénomène sur un réseau, n'a d'importance que dans la valeur du seuil. L'ensemble des propriétés critiques (que nous définirons plus loin) ne dépendent que de la dimension de l'espace dans lequel le système est inclus.

- Seuils de percolation

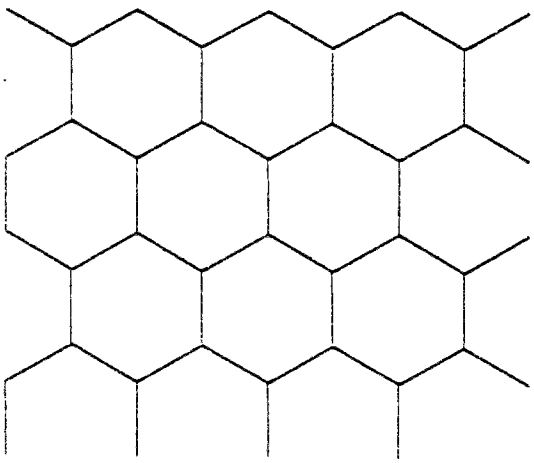
Nous avons vu précédemment la définition du seuil de percolation. Celui-ci dépend du type de réseau considéré et de la façon dont on le dégrade. Nous avons déjà introduit un processus qui consiste à couper les liens aléatoirement, ceci définit la *percolation de liens* mais on peut également retirer les sites du réseau, il s'agit alors de la *percolation de sites*. La table 1 donne la valeur des seuils de percolation pour différents réseaux (montrés dans la figure 2.3), obtenus soit exactement (écrits en caractère gras



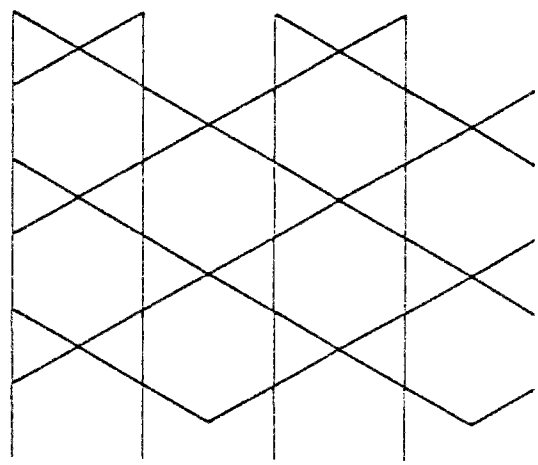
Réseau carré



Réseau triangulaire



Réseau hexagonal (nid d'abeille)



Réseau kagomé

Figure 2.3: Différents types de réseaux bidimensionnels dont les seuils de percolation de sites et de liens sont donnés dans la table 1.

dans la table 1), soit par des simulations numériques. Deux types de transformations de réseaux sont utiles pour relier différents seuils :

Table 1

Seuils de percolation

Réseaux 2D

	Site	Lien
Carré	0.59273	**1/2**
Triangulaire	**1/2**	**2sin(π/18)**=0.3473
Hexagonal	0.6962	**1- 2sin(π/18)**=0.6527
Kagomé	**1- 2sin(π/18)**=0.6527	

Réseaux 3D

Cubique simple	0.3116	0.2488
Cubique centré	0.245	0.1785
Cubiques faces centrées	0.198	0.119
Diamant	0.428	0.388

Réseaux 4D

Hypercubique simple	0.198	

Réseaux 5D

Hypercubique simple	0.142	

Les nombres indiqués en caractères gras sont exacts, les autres sont obtenus par simulations numériques.

La première correspondance utilise la notion de réseau dual. Il est construit à partir du réseau original (primal) de façon à ce que ses liens coupent chacun un lien du réseau primal. Les sites du réseau dual sont donc situés au milieu des cellules du réseau

primal et réciproquement. Ceci définit la géométrie du réseau (Fig.2.4). Ainsi le réseau dual d'un réseau carré est aussi un réseau carré de même maille, le dual d'un réseau triangulaire est en nid d'abeille (hexagonal) et vice versa. Si maintenant nous adoptons la convention de couper les liens duaux de liens primaux intacts, et de conserver les liens duaux de liens primaux coupés, nous mettons en correspondance deux problèmes de percolation de liens sur deux réseaux distincts (Fig.2.5). Remarquons enfin que si le réseau primal possède un amas infini, le réseau dual n'en possède pas et réciproquement. Ceci nous permet de conclure, par exemple que le seuil de percolation de lien sur réseau carré est exactement 1/2. De même, le seuil de percolation de liens d'un réseau triangulaire est égal au complément à 1 du seuil de percolation de liens sur réseau hexagonal. (cf.Table 1).

La seconde correspondance permet d'associer à la percolation de liens sur un réseau, un problème de sites sur un second réseau. Cette correspondance est illustrée Fig.2.6. A chaque lien, on associe un site, et on détermine la connectivité du second réseau de façon à respecter les voisinages initiaux. Deux sites du second réseau seront ainsi reliés par un lien si ils correspondent à deux liens du réseau initial qui ont un site en commun. On montre ainsi, par exemple que le seuil de percolation de liens sur réseau hexagonal est égal au seuil de percolation de sites sur réseau kagomé. D'autres correspondances existent, et l'on pourra trouver un récapitulatif plus complet dans la revue de Essam [5].

- Exposants critiques

Avant de continuer, précisons que l'amas infini que nous avons introduit a un sens intrinséque. Il n'est pas défini par des conditions aux limites particulières. Malgré cela, sur un réseau de taille finie, cette définition est un peu ambigüe. Pour lever cette indétermination, on considère généralement un point (ou un ensemble de points)

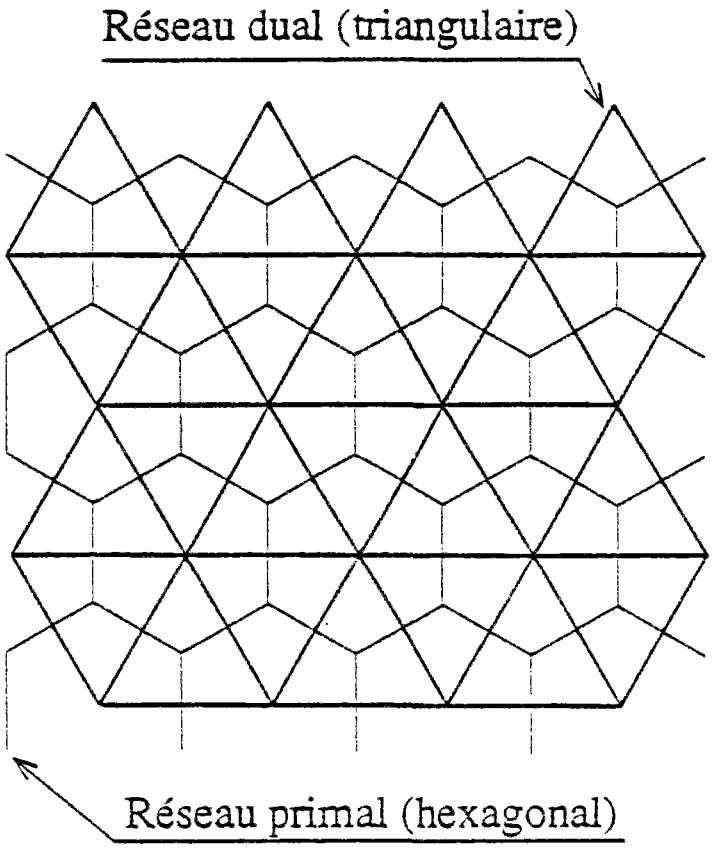


Figure 2.4: La construction du réseau dual consiste à joindre les centres des mailles du réseau primal par des liens qui coupent une et une seule fois les liens du réseau primal.

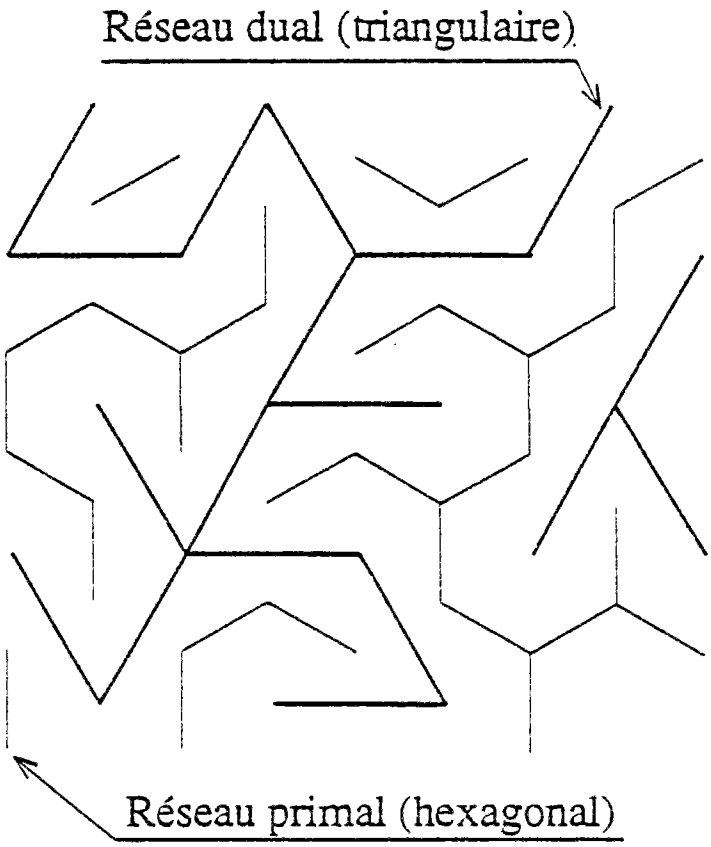


Figure 2.5: Nous pouvons établir une relation de correspondance sur deux réseaux duaux si nous choisissons comme liens présents sur le réseau dual, ceux qui sont duaux de liens absents sur le réseau primal. Les deux réseaux ainsi construits auront alors des seuils de percolation complémentaires.

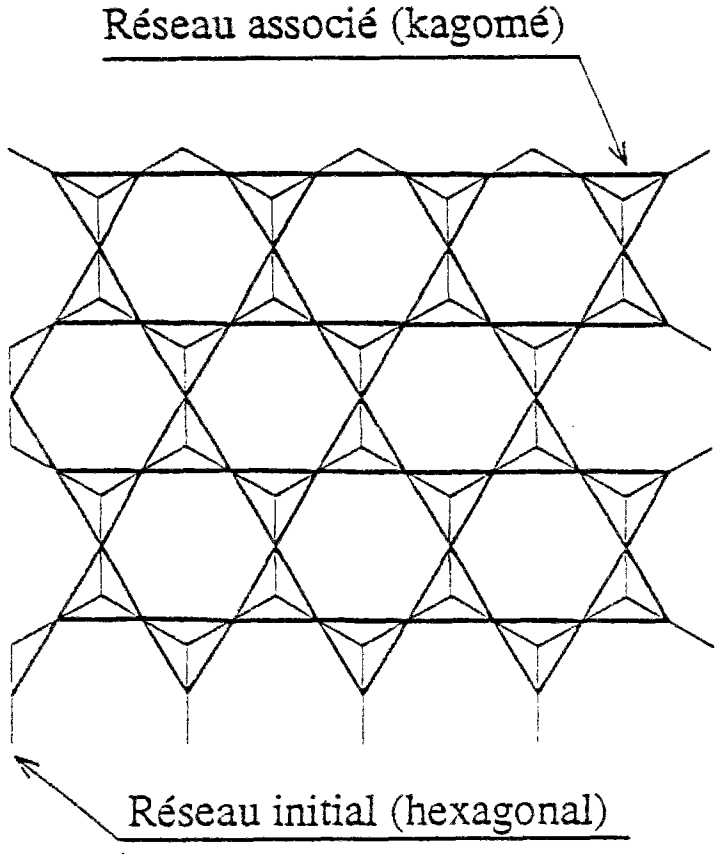


Figure 2.6: Correspondance site-lien entre un réseau en percolation de liens (ici le réseau hexagonal) et un réseau en percolation de sites (ici kagomé). Les sites du second réseau ont les mêmes voisins que les liens du réseau original.

source(s), et l'amas qui y est attaché. Si cet amas traverse le réseau, on le considèrera comme étant "infini". Ou bien encore, pour s'affranchir du critère consistant à "traverser le réseau", on pourra introduire deux ensembles de points, *a priori* éloignés l'un de l'autre, et on appellera "infini" un amas qui relie l'un des sites du premier ensemble à au moins un site du second. C'est désormais toujours dans cet esprit que nous nous réfèrerons à l' "amas infini".

Nous avons déjà mentionné que le paramètre d'ordre en percolation était la probabilité d'appartenir à l'amas infini P_∞. Par définition du seuil de percolation, pour p inférieur à p_c, P_∞ est nul (pour un système infini). Au contraire, pour p supérieur à p_c, P_∞ est non nul. Il s'annule au seuil en suivant la loi de puissance:

$$P_\infty \propto (p-p_c)^\beta \qquad (2.1.1)$$

pour $p>p_c$, où β est un exposant critique. β (ainsi que les autres exposants critiques que nous décrivons dans ce chapitre) a une valeur précise qui ne dépend que de la dimension de l'espace. La valeur de β en fonction de la dimension de l'espace est donnée dans la table 2. (Cette table ainsi que les figures 2.7 et 2.8 montrent les exposants critiques en percolation.) Pour un système de taille finie, P_∞ a un comportement que l'on décrira un peu plus loin.

Une autre caractéristique essentielle de la percolation concerne la distribution des tailles d'amas. Soit n_s le nombre d'amas (par site) de taille s omettant le plus grand amas. Au seuil de percolation, toujours pour un système de taille infinie, on observe une distribution en loi de puissance (Fig. 2.9):

$$n_s \propto s^{-\tau} \qquad (2.1.2)$$

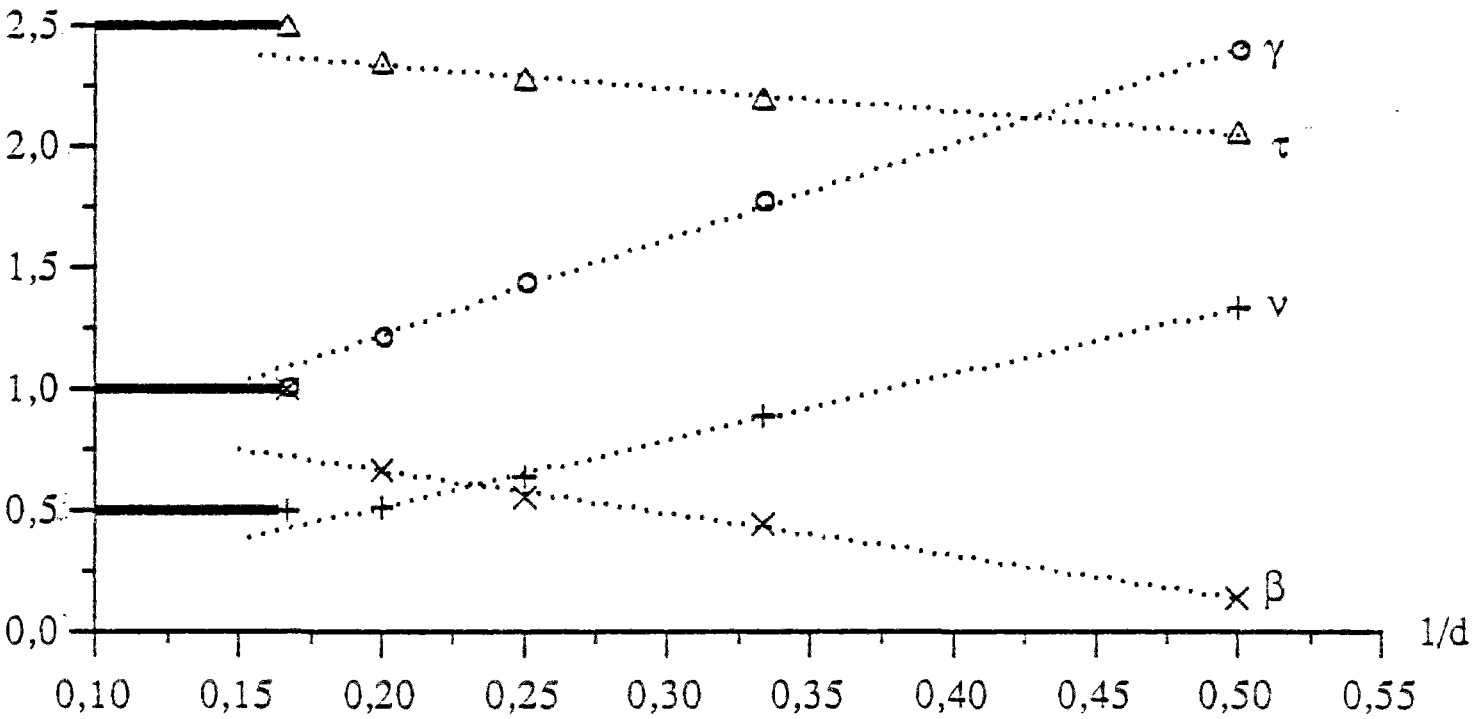


Figure 2.7: Evolution de certains exposants critiques avec 1/d où d est la dimension de l'espace. Les lignes pointillées ne sont là que pour indiquer une tendance. Les traits gras représentent pour $d \geq 6$, la valeur des exposants critiques dans la limite du champ moyen (arbres de Bethe).

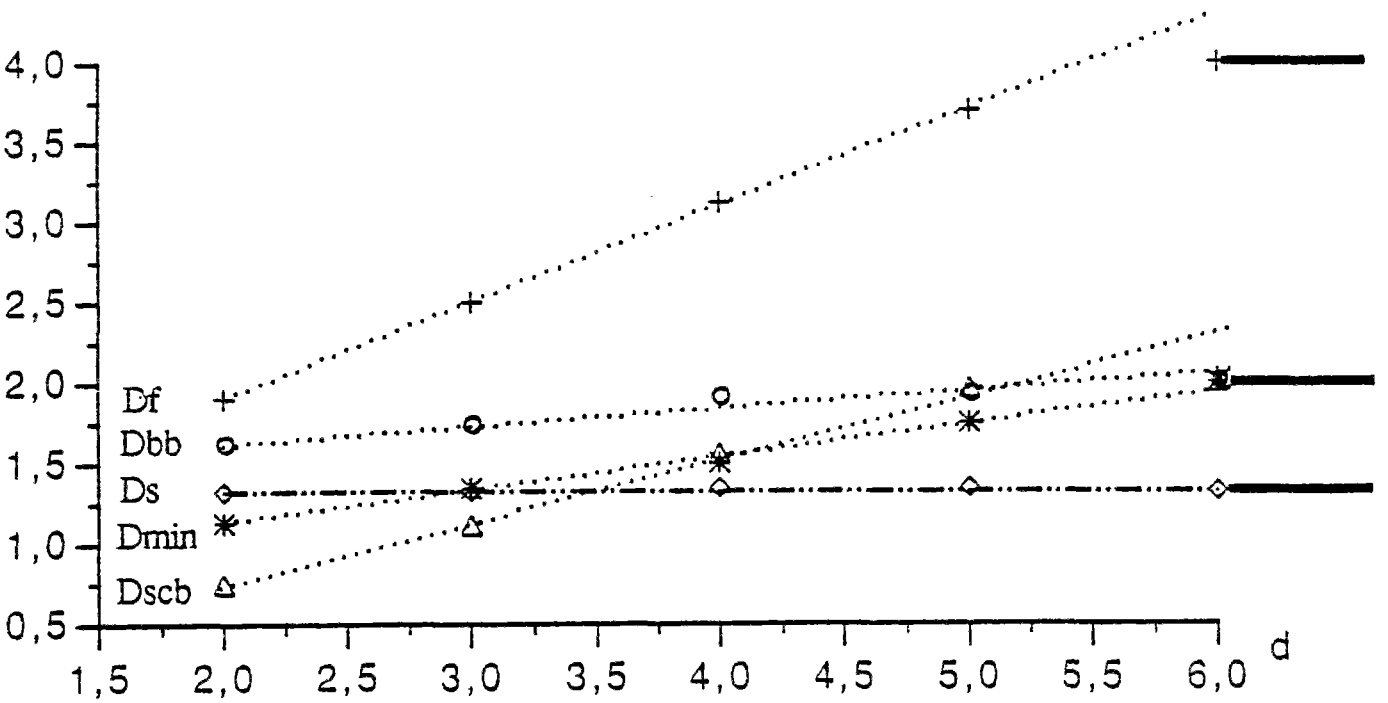


Figure 2.8: Différentes dimensions fractales apparaissant en percolation (définitions dans le texte) en fonction de la dimension de l'espace d. Les lignes pointillées ne sont là que pour indiquer une tendance. Le trait mixte correspond à la conjecture d'Alexander et Orbach (Cf. paragraphe 2.3).

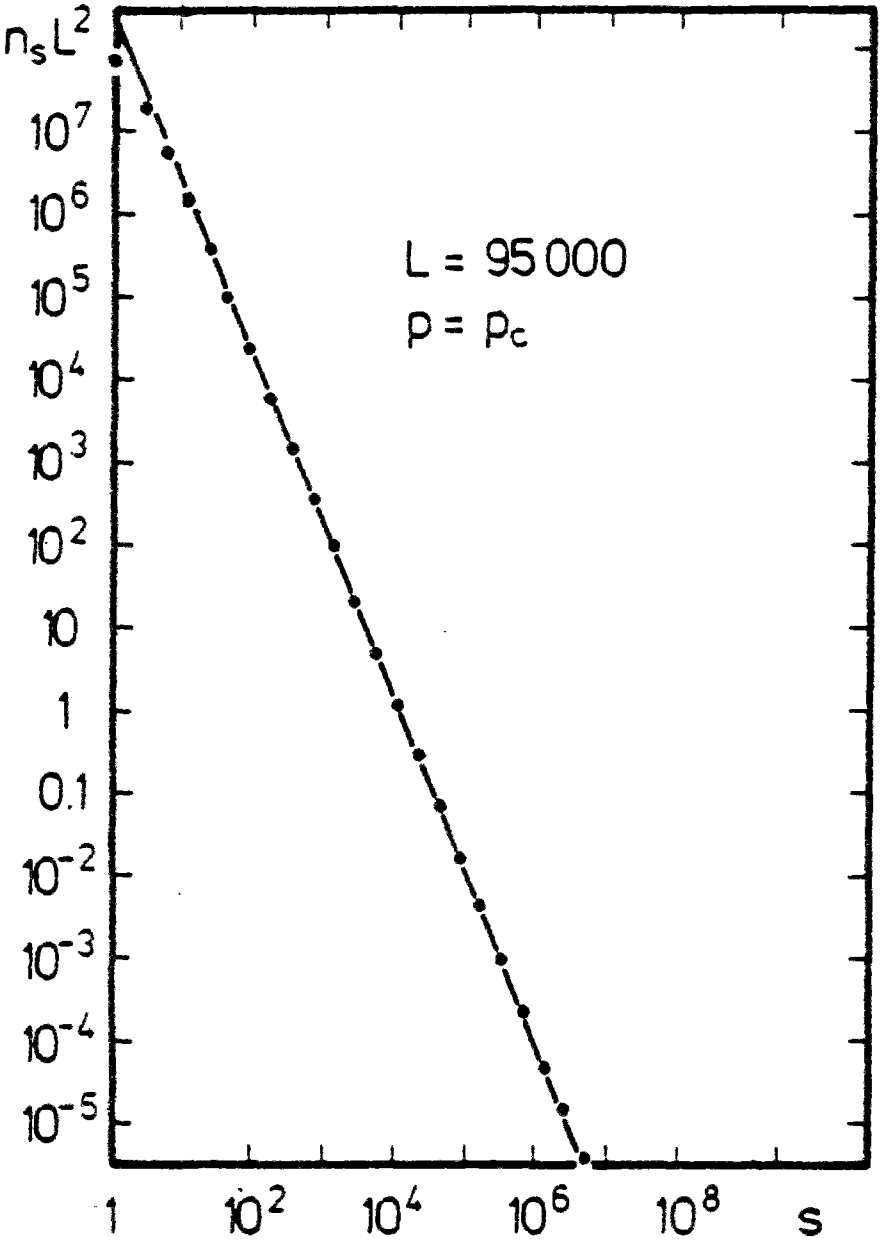


Figure 2.9: Distribution de tailles d'amas au seuil de percolation de sites d'un réseau triangulaire de taille L = 95000. (Courbe extraite de A. Margolina, H. Nakanishi, D. Stauffer, H.E. Stanley J. Phys. A, 17, 1683, (1984)).

Table 2

Exposants critiques

Dimension d'espace :	2	3	4	5	6
Géometrie					
ν	4/3 =1.33	0.88	0.64	0.51	1/2
β	5/36 =0.14	0.44	0.56	0.67	1
γ	43/18 =2.39	1.76	1.43	1.21	1
τ	187/91=2.05	2.20	2.28	2.35	5/2
σ	36/91 =0.39	0.45	0.50	0.53	1/2
D_f	91/48 =1.89	2.50	3.12	3.69	4
D_{bb}	1.62	1.74	1.9	1.93	2
D_{min}	1.13	1.34	1.50	1.75	2
D_{scb}	3/4 =0.75	1.14	1.56	1.96	2
Transport					
D_s	1.32	1.33	1.35	1.35	4/3
D_w	2.87	3.77	4.64	5.45	6
t	1.30	2.02	2.25	2.43	3
s	1.30	0.75	0.6		0
τ	3.96	3.8			4
σ	1.30				

La signification physique d'une telle loi est qu'il n'existe pas de taille caractéristique d'amas. On peut trouver des amas de toutes tailles. La coexistence de ces différentes échelles est caractéristique des phénomènes critiques. Cependant cette

propriété est en quelques sortes idéale, dès que l'on s'éloigne un tant soit peu du seuil de percolation (ou, bien sur, dès que l'on considère un système de taille finie) cette distribution est tronquée. Etudions d'abord l'effet d'une variation de p. Pour p différent de p_c, on peut, si l'on reste cependant au voisinage de p, mettre la distribution sous la forme:

$$n_s = s^{-\tau} f((p-p_c) s^{\sigma}) \qquad (2.1.3)$$

Il existe, et cela est observé numériquement, une unique fonction d'échelle f qui permet de représenter sous une simple forme, l'ensemble des résultats obtenus pour différentes valeurs de p (Fig.2.10). Bien sur, f(x) tend vers une constante non nulle lorsque x tend vers 0. En fait, une étude numérique [1] révèle que f(x) a une allure de courbe gaussienne. σ est encore un exposant critique dont on trouvera la valeur dans la table 2. Quel est le sens de l'argument à l'intérieur de f? Il introduit une coupure supérieure à la distribution n_s. Cette coupure supérieure s_{max} varie comme $(p-p_c)^{-1/\sigma}$. Elle est fondamentale et va nous permettre de définir une longueur de corrélation. Mais auparavant, montrons que σ n'est pas un nouvel exposant. Au dessus du seuil de percolation, un site appartient soit à l'amas infini, soit à un amas fini et donc, nous déduisons le bilan suivant:

$$P_\infty + \Sigma s n_s = p \qquad (2.1.4)$$

soit

$$P_\infty = p - \Sigma s n_s \qquad (2.1.5)$$

ou encore

$$\partial P_\infty / \partial p = 1 - \Sigma s \partial(n_s)/\partial p \qquad (2.1.6)$$

remplaçant la somme sur s par une intégrale continue:

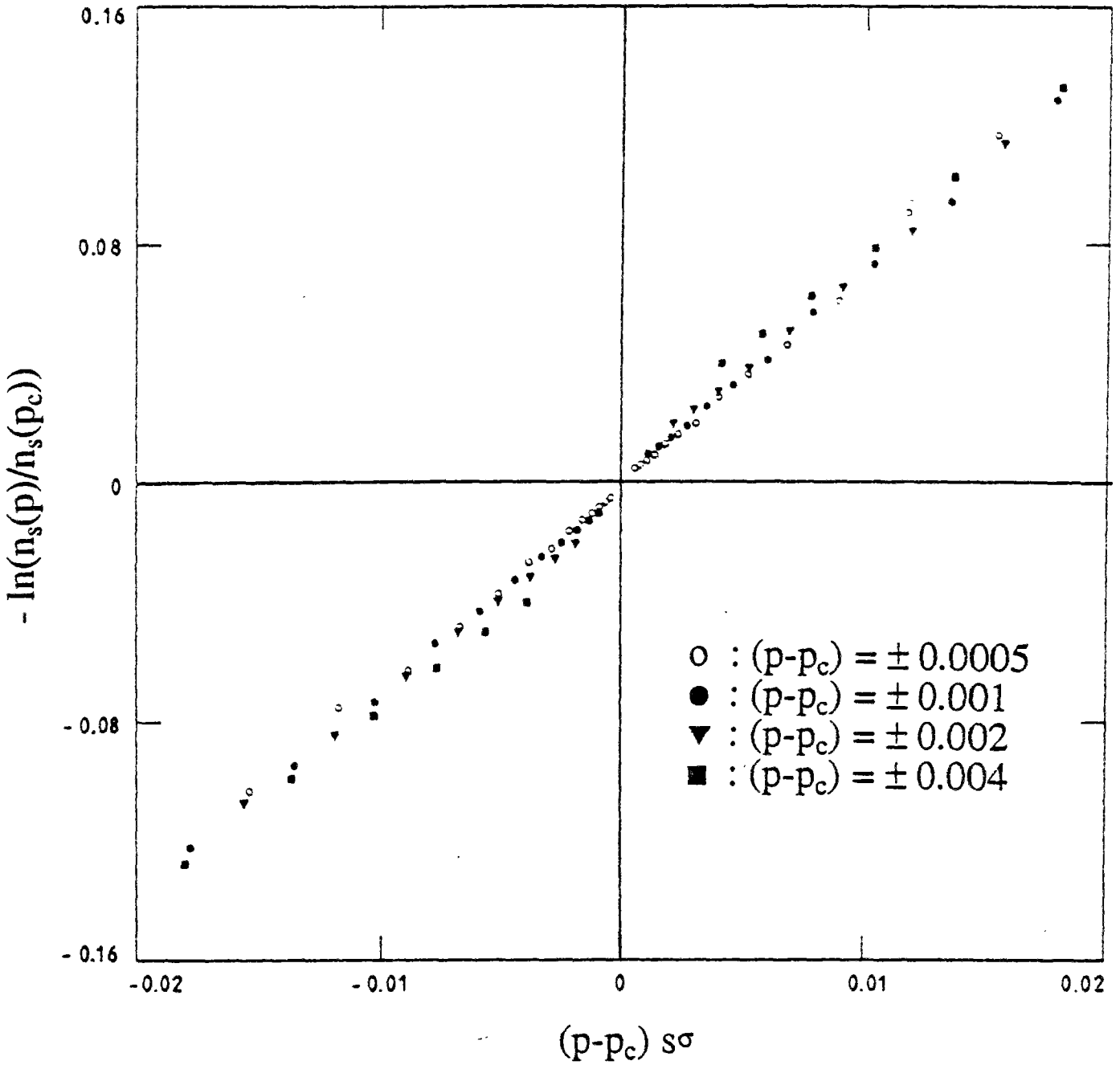


Figure 2.10: Fonction d'échelle montrant la distribution des tailles d'amas sur des réseaux triangulaires hors du seuil de percolation de sites, contenant jusqu'à 2.56 10^{10} sites. (Courbe extraite de D.C. Rapaport J. Phys. A, 19, 291, (1986)).

$$\partial P_\infty/\partial p = 1-\int s\, s^{-\tau}\, s^{\sigma}\ f'((p-p_c)\, s^{\sigma})\, ds \qquad (2.1.7)$$

Notons maintenant

$$A = \int z^{(2-\tau)/\sigma}\ f'(z)\, dz \qquad (2.1.8)$$

(intégrale définie), nous avons

$$\partial P_\infty/\partial p = 1- (A/\sigma)\, (p-p_c)^{(\tau-2)/\sigma-1} \qquad (2.1.9)$$

Utilisant maintenant la définition de l'exposant β, nous identifions :

$$\beta = (\tau-2)/\sigma \qquad (2.1.10)$$

Revenons sur la coupure supérieure s_{max}. Nous pouvons définir la taille typique des plus grands amas ξ que l'on trouve en dessous du seuil par l'argument suivant. Le nombre de sites occupés par un amas de taille ξ est :

$$\xi^d.\ \Delta p^{\beta} = s_{max} \qquad (2.1.11)$$

or, nous avons vu que:

$$s_{max} \propto \Delta p^{-1/\sigma} \qquad (2.1.12)$$

d'où

$$\xi^d \propto \Delta p^{(-1/\sigma-\beta)} \qquad (2.1.13)$$

ou

$$\xi \propto \Delta p^{-\nu} \qquad (2.1.14)$$

avec

$$\nu = (1/\sigma + \beta)/d \qquad (2.1.15)$$

L'exposant ν que nous venons d'introduire joue un rôle tout à fait considérable, puisqu'il gouverne la divergence d'une échelle de longueur, qui, en quelques sortes, est propre au phénomène critique considéré. La longueur ξ ainsi définie

est appelée longueur de corrélation. Utilisant maintenant ν et β comme exposants principaux, nous déduisons:

$$\sigma = 1/(\nu d-\beta) \qquad (2.1.16)$$

et

$$\tau = 2 + \beta\sigma = 2 + \beta/(\nu d-\beta) \qquad (2.1.17)$$

Telle que nous l'avons dérivée, la formule (2.1.15) ne semble valable que pour $p<p_c$. En fait, nous pouvons montrer (très facilement, dans le cas bidimensionnel, par un argument de dualité) qu'il existe une longueur de corrélation au-dessus du seuil, qui diverge de la même manière, soit:

$$\xi \propto |p-p_c|^{-\nu} \qquad (2.1.18)$$

En fait, ce résultat que l'on peut obtenir par un argument de dualité (applicable uniquement dans le cas bidimensionnel) est valable pour toute dimension d'espace et n'est pas spécifique du cas bidimensionnel. Au dessus du seuil, ξ donne la taille des plus grands "trous" dans l'amas infini. Nous pouvons déjà nous représenter un réseau de percolation de taille infinie au voisinage du seuil de percolation: en dessous d'une échelle de longueur ξ, le système apparaît comme s'il était exactement au seuil et l'observateur non averti ne peut distinguer si le système est au dessus, en dessous ou au seuil. Au contraire, lorsque la taille du système dépasse ξ, alors, on peut distinguer si l'on est au dessus du seuil. Dans ce cas, l'ensemble a une allure homogène: il existe un amas infini percé de trous de toutes tailles inférieures à ξ. En dessous du seuil, nous avons une collection d'amas de tailles toutes inférieures à ξ.

Nous venons de voir comment prendre en compte le fait de ne pas être exactement au seuil. Voyons maintenant comment inclure un effet de taille finie dans

notre description. Prenons l'exemple de P_∞ pour un réseau de taille L. Comme précédemment, nous allons utiliser une fonction d'échelle φ:

$$P_\infty = (p-p_c)^\beta \varphi(L/\xi) \qquad (2.1.19)$$

où l'argument de la fonction est le rapport entre la taille du système et la seule longueur macroscopique d'intérêt dans notre problème. $\varphi(x)$ est une fonction homogène de degré 0. On peut obtenir les comportements asymptotiques de φ au voisinage de 0 et de l'infini par des arguments physiques simples. Pour L très grand devant ξ, le système apparaît comme homogène entre l'échelle ξ et L, et donc P_∞ doit être indépendant de L soit:

$$\varphi(x) = \mathcal{O}(1) \qquad (2.1.20)$$

lorsque x tend vers l'infini, comme ceci est visible en comparant P_∞ pour une taille infinie et pour une taille finie. Au contraire lorsque L est très petit devant ξ, alors, modifier p et le rapprocher du seuil n'a pas d'effet visible à l'échelle L. Seule la coupure supérieure qui est déjà plus grande que le système, varie. Ainsi,

$$\partial P_\infty/\partial p = 0 \qquad (2.1.21)$$

Postulons la forme asymptotique de φ au voisinage 0 sous la forme :

$$\varphi(x) \propto x^\zeta \qquad (2.1.22)$$

où ζ est pour l'instant inconnu. Utilisant la dépendance de x en p,

$$\xi \propto (\Delta p)^{-\nu} \qquad (2.1.23)$$

on obtient

$$P_\infty \propto \Delta p^{\beta+\zeta\nu} \qquad (2.1.24)$$

d'où

$$\zeta = -\beta/\nu \qquad (2.1.25)$$

Donc

$$\varphi(x) \propto x^{-\beta/\nu} \qquad x<<1 \qquad (2.1.26)$$

Finalement, pour un réseau de taille L,

$$P_\infty \propto L^{-\beta/\nu} \qquad \text{si } L<<\xi \qquad (2.1.27)$$

Nous pouvons tirer de cette dernière relation une propriété importante. Lorsque nous sommes au seuil de percolation, pour un réseau de taille L, la masse de l'amas percolant __s'il existe__ est proportionnelle à :

$$L^d \cdot P_\infty(L) \propto L^{d-\beta/\nu} \qquad (2.1.28)$$

En d'autres termes, l'amas infini est un objet fractal de dimension:

$$D_f = d-\beta/\nu \qquad (2.1.29)$$

Encore ne faut-il pas se méprendre sur le sens donné ici au terme fractal. La propriété est à prendre ici au sens statistique car en changeant la taille du réseau, ce qui apparaît comme amas percolant peut se révéler être fini, alors que tel amas fini, coupé par un bord, peut faire partie de l'amas percolant pour un système de taille supérieure.

D'autres moments que le premier peuvent être calculés pour la distribution des tailles d'amas. On peut en particulier s'intéresser à la taille moyenne, χ, des amas en dessous du seuil de percolation.

$$\chi = \Sigma\, s^2\, n_s \qquad (2.1.30)$$

Cette quantité est l'analogue de la susceptibilité pour une transition de phase magnétique. Utilisant la même approche que précédemment, nous écrivons:

$$\chi = \int s^2\ s^{-\tau}\ \ f((p-p_c)\, s^{\sigma})\, ds \qquad (2.1.31)$$

ou, si

$$B = \int z^{(3-\tau)/\sigma-1}\ \ f(z)\, dz \qquad (2.1.32)$$

alors

$$\chi \propto B/\sigma\, \Delta p^{(\tau-3)/\sigma} \qquad (2.1.33)$$

Reprenant la notation conventionnelle où χ diverge avec un exposant γ selon:

$$\chi \propto (\Delta p)^{-\gamma} \qquad (2.1.34)$$

nous avons

$$\gamma = (3-\tau)/\sigma \qquad (2.1.35)$$

On peut, bien sur, refaire l'analyse pour tous moments m de la distribution et trouver pour $m \geq 1$:

$$\Sigma\, s^m\, n_s \propto (\Delta p)^{\nu(d-mDf)} \qquad (2.1.36)$$

Remarquons ici que tous les exposants obtenus, $\nu(d-m\ D_f)$, sont affines en m. Cette simple propriété (souvent qualifiée de "constant gap scaling") lorsqu'elle ne sera pas vérifiée, mènera à définir le concept de multifractalité. Notons simplement maintenant que ce caractère affine indique la présence d'une coupure supérieure (à la taille ξ) extrèmement brutale. Il n'existe que très peu d'amas (ou de trous) dont la taille excède cette longueur.

Avant de conclure ce paragraphe, rappelons encore une propriété de base. Il existe un cas simple où le problème de percolation est analytiquement soluble: sur un arbre de Bethe, on peut obtenir tous les exposants critiques de façon très simple. Un arbre (ou réseau) de Bethe est une structure arborescente de coordinance fixe et ne comportant aucune boucle. C'est l'archétype d'un réseau dans un espace de dimension infinie. Or, il se trouve que si la dimension de l'espace dans lequel nous nous trouvons est suffisamment élevée, alors les boucles du réseau deviennent non-pertinentes et n'affectent pas les propriétés d'échelle en percolation. Dès lors, le cas du réseau de Bethe donne la solution du problème. En ce qui concerne la percolation, ceci est vrai à partir de la dimension 6. Il s'agit de ce que l'on appelle la *dimension critique supérieure* du problème.

- Schématisation de l'amas infini

La description précédente nous a permis d'introduire les concepts de base de la géométrie de l'amas de percolation. Nous allons maintenant donner une description de l'amas infini, qui permettra de mieux appréhender les phénomènes de transport.

Plaçons-nous au seuil de percolation dans un milieu infini, et considérons l'amas infini. Définissons ici encore l'amas infini par rapport à deux ensembles de points, comme explicité précédemment. Beaucoup de structures ne sont attachées à cet amas infini que par une seule terminaison. On les appelle des *bras morts*. Ils ne participent bien sur pas aux propriétés de transport sur l'amas infini, à moins que l'on y place des sources. Nous supposerons maintenant que les seuls sources et puits, (ou connexions vers l'extérieur), présents sur la structure appartiennent aux deux ensembles de définition de l'amas infini. Si nous débarassons l'amas infini de tous ses bras morts, nous obtenons une structure (voir Fig.2.11) que l'on appelle le *squelette* ("backbone") [12]. Le squelette ainsi défini peut aussi être considéré comme étant le support de toutes les marches auto-évitantes sur l'amas infini, partant de l'un des ensembles de points et

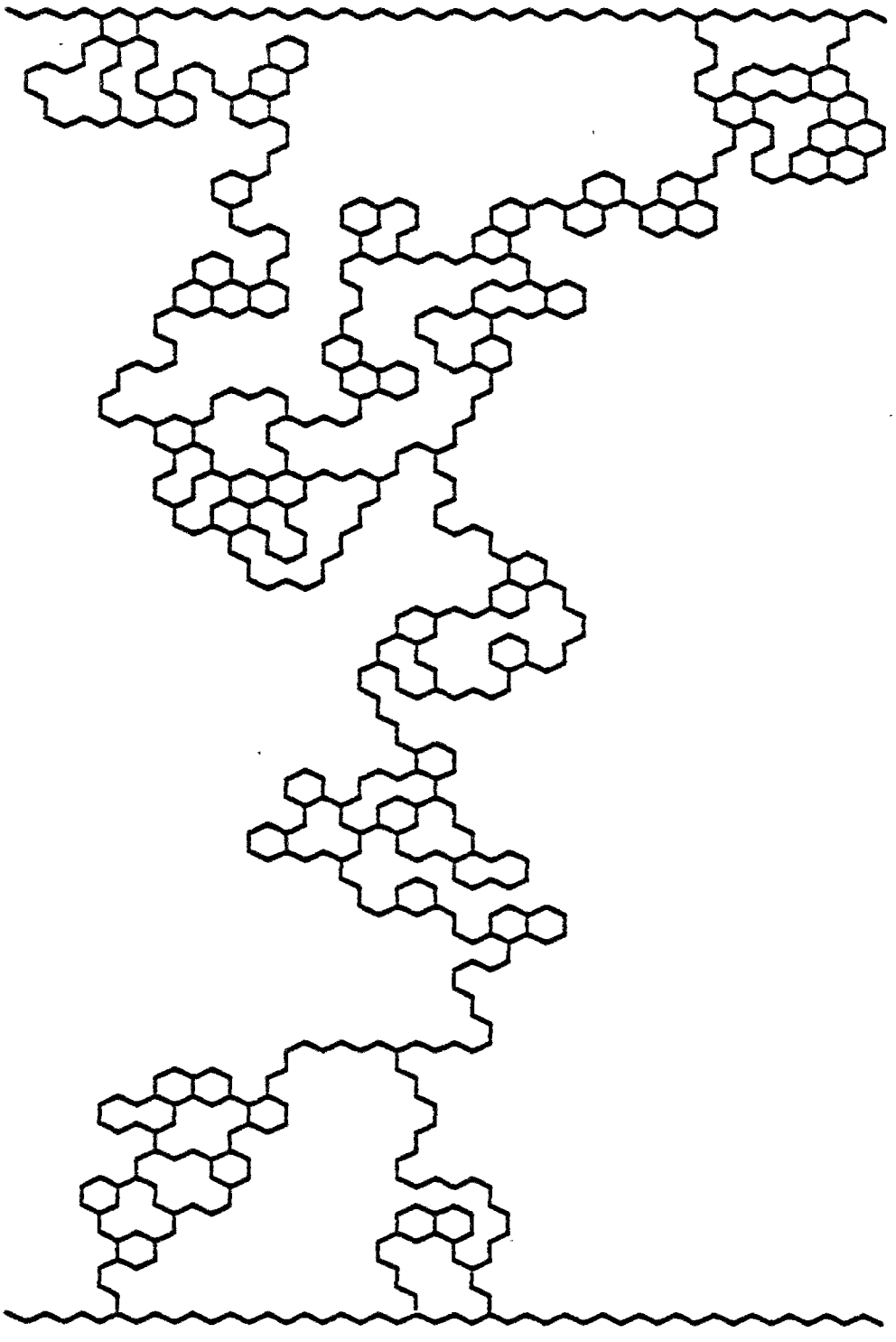


Figure 2.11: Squelette de l'amas infini présenté dans les figures 2.1 et 2.2. Nous avons enlevé toutes les structures qui n'étaient rattachées à l'amas principal que par un lien unique. Les deux ensembles de définition de cette structure sont les deux bords extrêmes haut et bas, c'est pourquoi ils sont représentés ici. (C'est un fractal de dimension 1.62).

arrivant au second. Il conditionne tous les transports sur l'amas infini mais ne représente cependant qu'une infime partie de ce dernier. C'est aussi une structure fractale dont la dimension, D_{bb}, est donnée dans la table 2. L'obtention du backbone est généralement une opération extrèmement délicate[13]. A deux dimensions pourtant, l'utilisation du réseau dual permet de simplifier considérablement l'algorithme d'extraction.

En examinant de plus près la structure du squelette, nous voyons qu'il consiste en une série d'amas de boucles, appelés *blobs*, reliés entre eux par des liens simples, non redondants, que l'on qualifie de *sensibles* (voir Fig.2.12). En effet dès que ces liens sensibles sont coupés, le squelette (et donc aussi l'amas infini) est disconnecté en deux parties. L'ensemble des liens sensibles forme un ensemble fractal non nécessairement connexe dont la dimension est exactement $1/\nu$ [14]. Quant à la distribution des blobs sur le squelette, elle est justiciable d'un traitement similaire à celui que nous avons présenté pour les amas finis [15]. On peut ainsi redéfinir un nouvel exposant τ pour la distribution en taille $n_s \propto s^{-\tau}$. Il est alors relié à la dimension fractale du squelette par la même relation que précédemment pour les amas finis :

$$\tau = 1 + d/D_{bb}. \qquad (2.1.37)$$

De plus, il a été montré que ces blobs sont agencés le long du squelette, comme des perles sur un collier, aléatoirement, sans corrélation de taille entre deux blobs consécutifs [15].

Enfin, lorsque l'on veut relier les deux ensembles de définition de l'amas infini par le chemin le plus court, on définit encore un nouvel objet fractal (Fig.2.13), dont la dimension D_{min} est donnée dans la Table 2.[16]

Au dessus du seuil de percolation, l'amas infini peut être vu comme un milieu homogène percé de trous dont la taille n'excède pas la longueur de corrélation, ξ. Il est donc raisonnable de le schématiser par un "super-réseau" homogène dont la maille

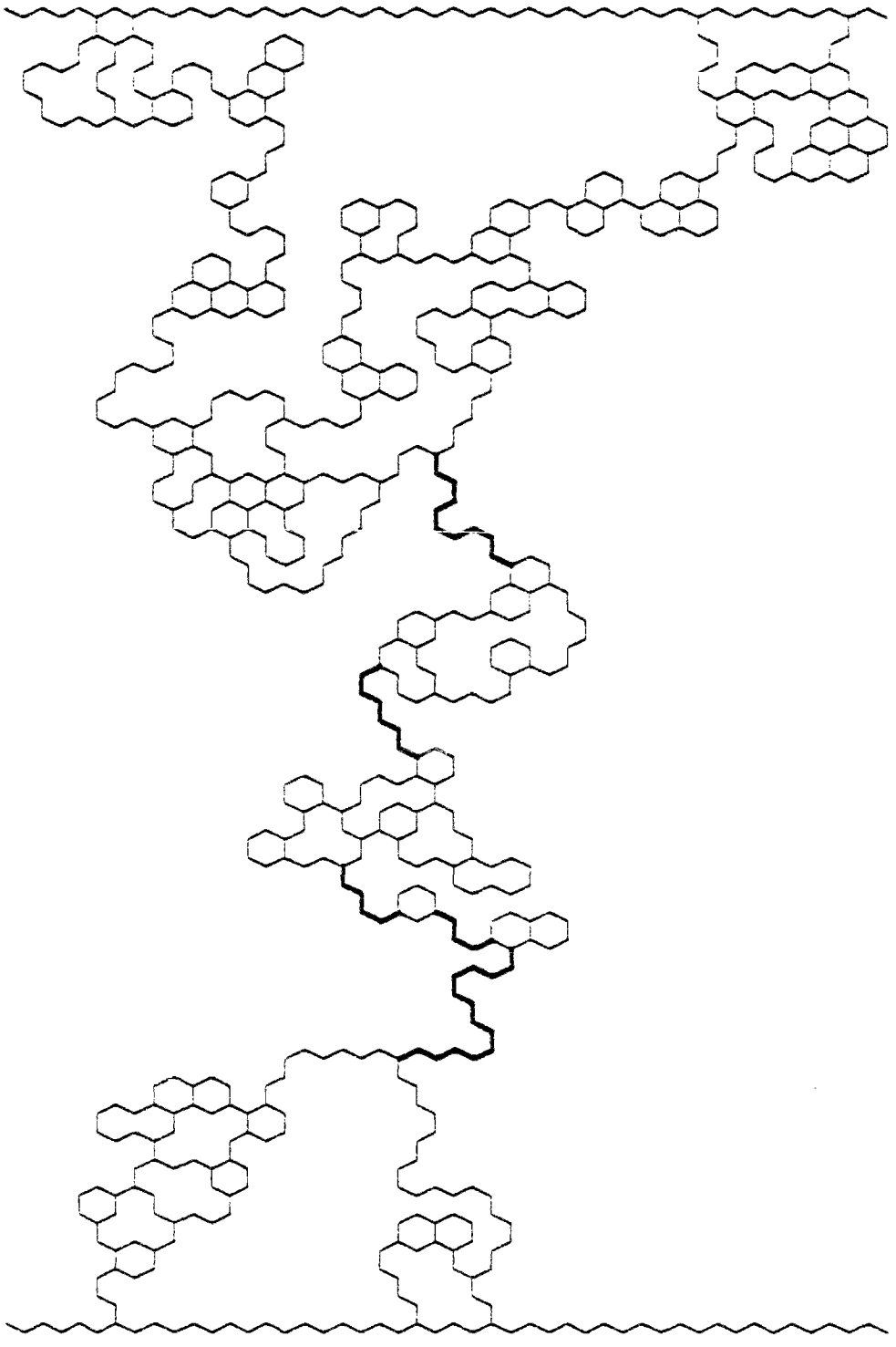


Figure 2.12: Le squelette représenté sur cette figure (identique à celui de la figure 2.11) comprend des liens que l'on qualifie de sensibles et qui sont tels qu'une fois coupés, le réseau n'est plus percolant. Ces liens sont dessinés en trait gras. Ils constituent un objet fractal de dimension 3/4.

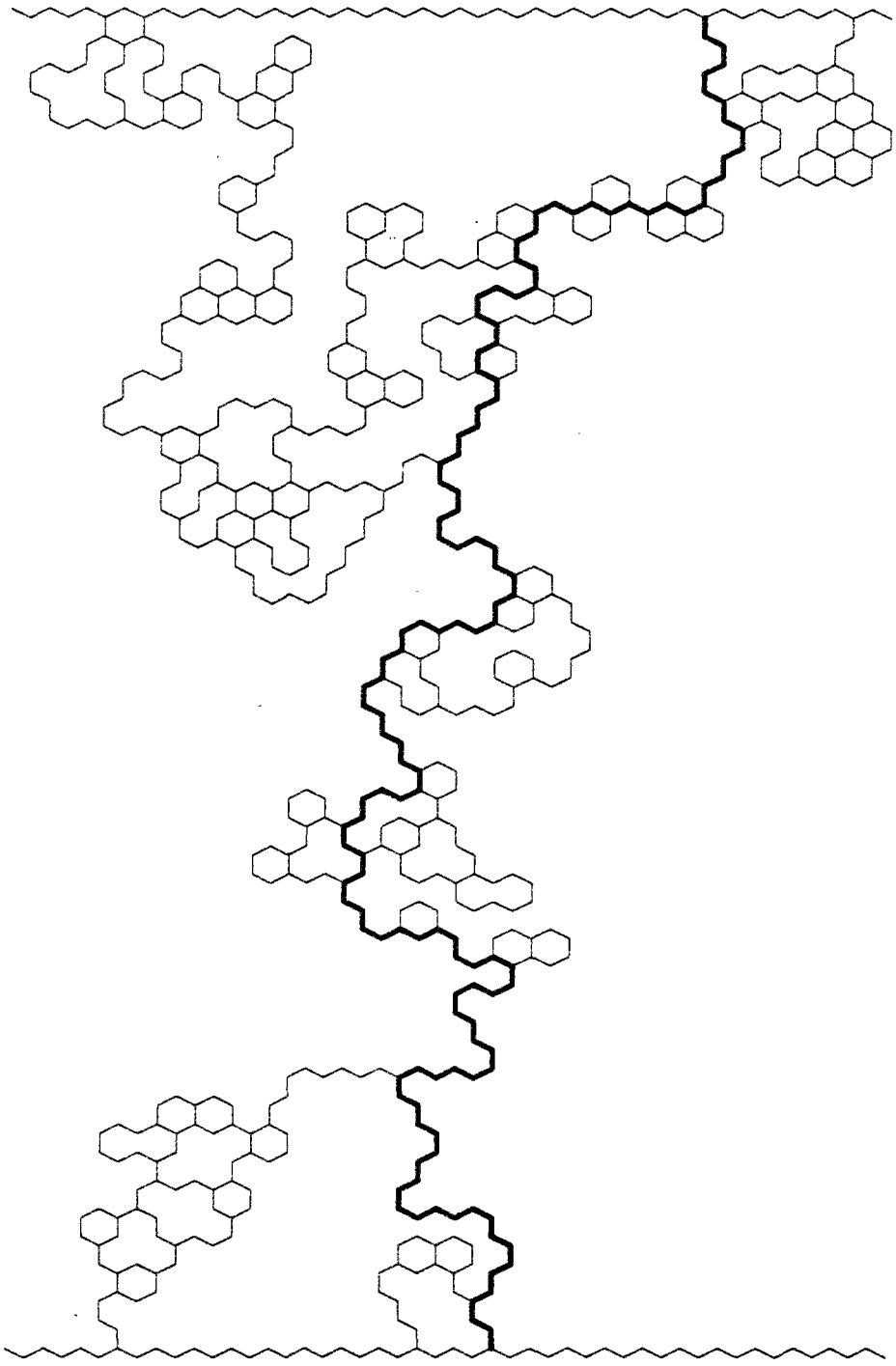


Figure 2.13: L'un des plus courts chemins à travers l'amas infini qui relient les deux bords extrèmes du réseau. Il appartient bien sûr au squelette. C'est un fractal de dimension 1.13.

élémentaire est de longueur ξ. Les liens de ce super-réseau ont alors une géométrie proche de celle de l'amas infini juste au seuil de percolation. Nous pouvons donc ici encore distinguer le squelette et les bras morts. Le squelette garde lui aussi la structure de super-réseau de maille ξ. Nous raisonnerons donc souvent sur une structure simplifiée du squelette au-dessus du seuil de percolation, en nous figurant un réseau régulier dont chaque (super-)lien de longueur ξ est formé de blobs connectés par des liens sensibles (ici, "sensible" est à comprendre à l'échelle du super-lien) dont le nombre est de l'ordre de $\xi^{1/\nu}$. Entre chaque site la longueur du plus court chemin sera de l'ordre de $\xi^{D_{min}}$. Cette schématisation a été introduite par Skal et Shklovskii [17] d'une part et de Gennes [18] d'autre part. Elle a ensuite été reconsidérée par Stanley [19]. Nous verrons son intérêt dans la section suivante où elle permet d'obtenir très facilement des bornes d'exposants critiques.

- Transport "logique"

Une façon simple de se figurer la connexité d'un réseau de percolation, consiste à introduire une matrice C_{ij} dont les éléments sont des variables Booléennes ou logiques : "vrai" et "faux" ou 0 et 1, et dont les indices représentent les sites du réseau. Plus précisément, C_{ij} vaut 1 si un lien existe entre les sites i et j, et sinon il vaut 0. Par convention C_{ii} vaudra 0. Choisissons maintenant un site i au hasard sur le réseau, et explorons l'amas auquel ce site appartient. Au premier pas, nous découvrons les sites immédiatement voisins, puis au second, les seconds voisins etc... Introduisons maintenant le vecteur Booléen A_i dont le seul élément non nul est celui correspondant au site i choisi. Les sites qu'il est possible d'atteindre en un pas seront les éléments non nuls du vecteur A'=CA où la multiplication Booléenne de matrice est une simple transposition de la multiplication matricielle habituelle :

$$A'_j = OU_k \ (C_{jk} \text{ et } A_k) \qquad (2.1.38)$$

où l'addition est le "ou" logique et la multiplication le "et" logique. Nous garderons dans ce paragraphe les notations de somme et de multiplication habituelles, bien qu'il s'agisse toujours d'opérations logiques. En itérant l'équation précédente, au bout de n pas, les sites que l'on peut atteindre sont donnés par C^nA où la nième puissance est à prendre au sens du produit matriciel défini comme ci-dessus. Les sites atteints en, au moins n pas, seront donc donnés par:

$$\{I + C + C^2 + C^3 .....+ C^n\}A \qquad (2.1.39)$$

où I est la matrice identité. L'opérateur devant A, va tendre vers une limite que l'on appelle G, lorsque n tend vers l'infini, et ce en un temps fini si l'on est en-dessous du seuil de percolation, infini sinon. Symboliquement, nous pourrons écrire $G = (I-C)^{-1}$, bien que ni l'inversion, ni la soustraction ne soient définies. L'opérateur G est un projecteur, qui, à un ensemble de points de départ, associe les sites des amas qui leurs sont connectés. Il est l'analogue Booléen formel de la fonction de Green du problème. Le parallèle que l'on peut faire entre ce niveau de description logique très rudimentaire, et un problème de transport sur la même structure est tout à fait frappant. Notons enfin que la formulation ici présentée est tout à fait générique et aisément adaptable à des problèmes d'automates cellulaires.[21]

Nous pouvons poursuivre ces parallèles algébriques de la façon suivante: La manière la plus courante de générer un réseau de percolation consiste à tirer pour chaque lien i (ou site) un nombre aléatoire x_i équidistribué entre 0 et 1, et de décider que le lien est présent si x_i est inférieur à p, ou absent si x_i est supérieur à p.

Définissons maintenant une procédure pour calculer le seuil de percolation effectif pour un réseau de taille finie, une fois que les nombres x_i ont été tirés. Soit un chemin particulier, $\mathcal{P}$, joignant un site de l'un des ensembles de définition, A, à un site de

l'autre ensemble, B. Pour que ce chemin soit connecté, il faut que chacun des liens qui le constituent, soit présent. Donc pour chaque lien i, $x_i < p$, ou encore,

$$p \geq \max_{i \in \mathcal{P}}(x_i) \qquad (2.1.40)$$

Ceci définit une norme sur les chemins $\mathcal{P}$, que nous noterons $\|\mathcal{P}\|$. Le seuil de percolation du réseau, défini par rapport aux ensembles A et B, peut être maintenant exprimé de la manière suivante. Au seuil de percolation effectif, il existe au moins un chemin $\mathcal{P}_{AB}$ connecté qui relie A à B. Donc p_c apparait comme étant le minimum sur l'ensemble des chemins $\mathcal{P}_{AB}$ de $\|\mathcal{P}_{AB}\|$ ou:

$$p_c = \min_{\mathcal{P}}(\max_{i \in \mathcal{P}}(x_i)) \qquad (2.1.41)$$

Il existe ainsi un et un seul lien i tel que $p_c = x_i$. Il s'agit d'un lien sensible dans la terminologie introduite précédemment.

Notons également que ceci permet de définir une distance d(i,j) entre deux points i et j, comme étant le seuil de percolation effectif relatif aux deux ensembles A et B réduits aux deux points considérés. Il est immédiat de voir que d constitue effectivement une distance :

$$d(i,i) = 0 \qquad (2.1.42)$$
$$d(i,j) = d(j,i)$$
$$d(i,k) \leq d(i,j) + d(j,k)$$

et nous avons même une propriété plus forte que l'inégalité triangulaire:

$$d(i,k) \leq \max(d(i,j) ; d(j,k)) \qquad (2.1.43)$$

et donc d est une ultra-distance. La structure ultra-métrique ainsi définie reflète simplement la hiérarchie des amas inclus les uns dans les autres lorsque p augmente.

A un niveau purement algébrique, on voit aisément la correspondance que l'on a établi entre d'une part le "et" logique et le "max" et d'autre part entre le "ou" logique et le "min". Nous voyons ici une formulation très simple de la percolation qui permet de mettre sur un même pied beaucoup d'autres modèles. C'est ainsi que nous serons amenés dans le chapitre 4 à redéfinir la norme sur un chemin, mais en gardant la même structure.

- Symétrie, Linéarité et Localité

Dans le problème de percolation de connexité, il existe quelques propriétés élémentaires qui rendent le problème simple. Nous verrons par la suite qu'il existe des modèles de percolation dépourvus de ces "attraits", ce qui rend la situation beaucoup plus complexe, car l'aspect géométrique de la transition n'est plus aussi transparent que dans le cas présent.

Citons ainsi la symétrie des liens. Si un site i est relié à un site j par un lien, alors le site j est aussi relié à i. La transmission d'information est symétrique sur le lien et peut s'effectuer dans les deux sens. Ceci transparaît dans la formulation Booléenne par la symétrie de la matrice C. Dans le cas de la percolation de diodes [22], au contraire, la transmission d'information est unilatérale. Dans ce cas la notion d'amas doit être redéfinie. Nous pourrons ainsi trouver un amas aval, i.e. l'ensemble des sites qui peuvent être rejoints à partir d'un ensemble donné de départ (cet amas aval est donné par G appliqué à un vecteur de départ), et aussi un amas amont, i.e. l'ensemble des sites qui peuvent rejoindre l'ensemble de départ (celui-ci est donné par l'application itérée de la matrice transposée de C sur le vecteur de départ). En imposant de plus certaines contraintes globales sur l'orientation des liaisons, nous pouvons définir la percolation dirigée [23], qui appartient à une classe d'universalité différente de la percolation usuelle.

La connexité d'une structure est une propriété *locale*. On peut l'exprimer en termes de *chemins* sur la structure comme nous l'avons vu au paragraphe précédent. Ainsi toute l'information géométrique qui nous intéresse ici, (mais aussi d'autres informations comme par exemple un potentiel électrique), peut être transmise par l'intermédiaire d'un seul lien. C'est en ce sens que la percolation de connexité, peut être vue comme un phénomène de percolation de systèmes à transmission d'information totale. C'est aussi la raison pour laquelle nous pouvons donner une représentation Booléenne des propriétés géométriques. Ceci a des retombées pratiques intéressantes sur le plan algorithmique et, certainement, la simplicité avec laquelle on peut faire des simulations numériques du problème a joué un rôle considérable dans le "succés" de la percolation.

Nous verrons cependant dans la suite, que la localité ne joue pas de rôle déterminant pour identifier la classe d'universalité du problème. En revanche il existe une seconde propriété, beaucoup plus importante à cet égard : il s'agit de la *linéarité*. Nous avons vu que l'on pouvait schématiser les propriétés géométriques de la percolation en termes de transport "logique" ou Booléen. Si maintenant, nous considérons deux ensembles de sites de départ, représentés par deux vecteurs A et B, l'ensemble des sites envahis est donné respectivement par GA et GB. De par la correspondance entre l'addition et le "ou" logique, nous pouvons superposer les deux ensembles initiaux en formant D = (A ou B) (i.e. site par site $D_i = (A_i$ ou $B_i)$). De par la "linéarité" de la multiplication booléenne de matrice de connectivité C, nous avons la propriété de superposition suivante GD = (GA ou GB). La linéarité n'est pas directement liée au caractère Booléen de notre représentation. Il existe des modèles où l'occupation de plusieurs sites voisins est nécessaire à la propagation de l'information. Dans le cas de deux sites, nous pourrons alors adopter une formulation voisine de celle présentée ci-dessus, où la connectivité est donnée par un tenseur Booléen du troisième ordre.

$$A'_i = OU_{jk} (C_{ijk} \text{ et } A_j \text{ et } A_k) \qquad (2.1.44)$$

Nous pouvons nous représenter l'équation précédente par une triode où l'activation simultanée de deux entrées est nécessaire à un signal de sortie. Nous noterons l'analogie formelle entre ces triodes et les monômes du second degré, de la même façon que nous avions identifié les diodes précédentes avec les monômes du premier degré, et les termes de sources comme des termes constants. L'analogie peut être poursuivie plus avant en introduisant en particulier le concept de dérivation. Ceci a une application tout à fait directe dans la propagation de défauts dans des réseaux d'automates cellulaires, comme en particulier le problème de Kauffman.[21]

Des problèmes de percolation à transmission partielle d'information, donc non-locaux et réfractaires à toute schématisation Booléenne, peuvent cependant comme nous le verrons ultérieurement, être linéaires. Toutefois, un modèle non-linéaire ne peut pas être local. Dans l'exemple des triodes, nous voyons que l'information n'est pas transmise par un seul "canal" et nous ne pouvons donc réduire le problème à de simples propriétés de chemins sur la structure; au contraire, il faut considérer des structures plus complexes avec des boucles et des branchements. Ceci a pour conséquence non-seulement de rendre le problème plus complexe mais aussi de changer sa classe d'universalité.

Citons finalement quelques exemples de modèles que l'on trouve communément dans la littérature ainsi que leurs propriétés de symétrie, localité et linéarité éventuelles.

Percolation de connexité	Symétrique	Local	Linéaire
Percolation de diodes	Non-symétrique	Local	Linéaire
Percolation dirigée	Non-symétrique	Local	Linéaire
Percolation de force-centrale	Symétrique	Non-local	Linéaire
Percolation de Bootstrap	Symétrique	Non-local	Non-linéaire
3PAFT[†]		Non-local	Non-linaire
Modèle de Kauffman	Non-symétrique	Non-local	Non-linéaire

[†] 3PAFT : Modèle de Potts à trois états, antiferromagnétique, dilué, à température nulle. Ce modèle sera défini et étudié dans le paragraphe 3.3

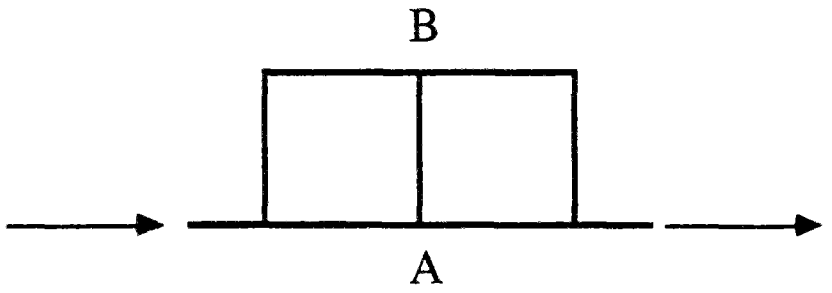
- 2.2 Transport scalaire, Conduction

Après avoir introduit les principales données géométriques de la percolation qui nous seront utiles dans la suite, nous abordons maintenant les propriétés de transport sur l'amas infini de percolation. Nous commençons par le cas le plus simple en la matière qui nous servira de référence pour la suite de notre discussion, à savoir le transport "scalaire", dont l'archétype est le réseau aléatoire de résistances ("Random Resistor Network")

- Problème primal

Considérons un réseau de percolation dont chaque lien présent représente une résistance électrique unité, et où chaque lien absent est supposé parfaitement isolant. Chacun des deux ensembles de définition qui nous a permis de définir la structure de percolation est maintenant assimilé à une électrode (équipotentielle). Les objets de base qui vont nous servir à définir le comportement critique du système sont ici les courants qui transitent dans chaque lien.

Commençons d'abord par le support de la distribution des courants. Evidemment, aucun courant ne peut passer dans les bras morts. Ils sont trivialement équipotentiels. Ainsi, les seuls liens qui portent un courant non-nul appartiennent au squelette que nous avons défini par des critères purement géométriques (i.e. comme l'intersection de toutes les marches auto-évitantes qui rejoignent les deux ensembles de définition [12]). Ils constituent ce que nous appellerons le squelette électrique. Notons tout de suite que certains liens du squelette géométrique n'appartiennent pas au squelette électrique. En effet, sur un réseau régulier, certains liens peuvent être parfaitement équilibrés, (comme la branche centrale d'un pont de Wheatstone), et donc ne porter aucun courant, bien qu'ils soient membres du squelette géométrique. Un tel exemple de structure est fourni par la figure suivante :



où le lien AB appartient au squelette géométrique mais non électrique. Remarquons cependant que de telles propriétés ne sont pas "robustes" car dès qu'un bruit, aussi faible soit-il, est ajouté au système__en modifiant, par exemple de façon infinitésimale, les conductances des liens de façon aléatoire__, alors aussitôt, le squelette électrique devient confondu avec le géométrique.

De plus, nous avons montré récemment, par des simulations numériques [24], que la densité des liens équilibrés sur le squelette est constante. Ainsi par exemple sur un réseau carré en percolation de liens, la densité de ces liens est de l'ordre de 0.50 %. Ainsi, ils n'affectent pas la valeur de la dimension fractale du squelette, et dans la suite, nous ignorerons la distinction entre les deux squelettes. Nous pouvons comprendre la constance de la densité de ces liens, en remarquant qu'ils peuvent appartenir à des sous-structures locales qui peuvent apparaître sur le squelette avec une probabilité finie non-nulle, et indépendante de la taille du système.

La caractéristique la plus importante des réseaux de résitance concerne l'évolution de la conductivité, Σ, au voisinage du seuil de percolation p_c [25]. Pour un réseau de taille infinie, la conductivité s'annule en effet au seuil de percolation en suivant une loi de puissance caractérisée par un nouvel exposant critique t.

$$\Sigma \propto (p-p_c)^t \qquad (2.2.1)$$

où la valeur de l'exposant t est donnée dans la Table 2.

Comment se manifeste l'effet d'un réseau de taille finie sur l'évolution de la conductivité au voisinage du seuil de percolation? Nous pouvons encore développer ici un argument similaire à celui que nous avons utilisé pour obtenir la dimension fractale de l'amas infini. Nous "corrigeons" la loi de puissance valable pour un système infini, par une fonction qui dépend de la taille du système. De façon à rendre l'expression homogène, nous introduisons également la seule longueur pertinente du problème de percolation à savoir la longueur de corrélation ξ. Ainsi nous postulons que la conductivité Σ varie selon:

$$\Sigma \propto (p-p_c)^t \varphi(L/\xi) \qquad (2.2.2)$$

Les limites de $\varphi(x)$ sont obtenues d'une part en considérant le cas où L tend vers l'infini, et où l'on s'attend à:

$$\Sigma \propto (p-p_c)^t \qquad (2.2.3)$$

soit

$$\varphi(x) = \mathcal{O}(1) \qquad (2.2.4)$$

pour x tendant vers l'infini. D'autre part, lorsque L est plus petit que ξ, alors il devient impossible de sentir les variations de p, d'où:

$$\partial\Sigma/\partial p = 0 \qquad (2.2.5)$$

soit, compte-tenu de la variation critique de ξ:

$$\xi \propto (p-p_c)^{-\nu} \qquad (2.2.6)$$

nous devons avoir

$$\varphi(x) \propto x^{-t/\nu} \tag{2.2.7}$$

pour x tendant vers 0. Dans cette limite

$$L \ll \xi \tag{2.2.8}$$

nous pouvons écrire

$$\Sigma \propto L^{-t/\nu} \tag{2.2.9}$$

Ainsi, exactement au seuil de percolation, la conductivité d'un système varie avec la taille de ce dernier selon une loi de puissance. Numériquement, c'est d'ailleurs le moyen privilégié d'obtention de l'exposant t (comme d'ailleurs beaucoup d'autres exposants critiques, justiciables du même argument) (cf. Fig.2.14). Les déterminations numériques de t/ν abondent, citons seulement quelques méthodes et résultats représentatifs : matrice de transfert [26, 27], énumération exacte de marches aléatoires et calcul de serie [28], Monte-Carlo sur marches aléatoires [29], Monte-Carlo et transformation triangle-étoile [30]. Le calcul le plus poussé connu aujourd'hui est donné par matrice de transfert, et exécuté sur un calculateur spécialisé [31]. Il indique, à deux dimensions, $t/\nu = 0.9745 \pm 0.0015$.

- Bornes sur l'exposant t

Soit un réseau de percolation au-dessus du seuil de percolation. Nous avons vu que le système était homogène au-delà de l'échelle donnée par la longueur de corrélation ξ. La conductivité est donc constante dès que la taille du réseau est plus grande que ξ. Nous nous limitons donc à un hypercube de côté ξ pour évaluer la conductivité Σ. Définissons l'exposant ζ qui donne la relation entre la résistance R et la distance L entre électrodes au seuil de percolation:

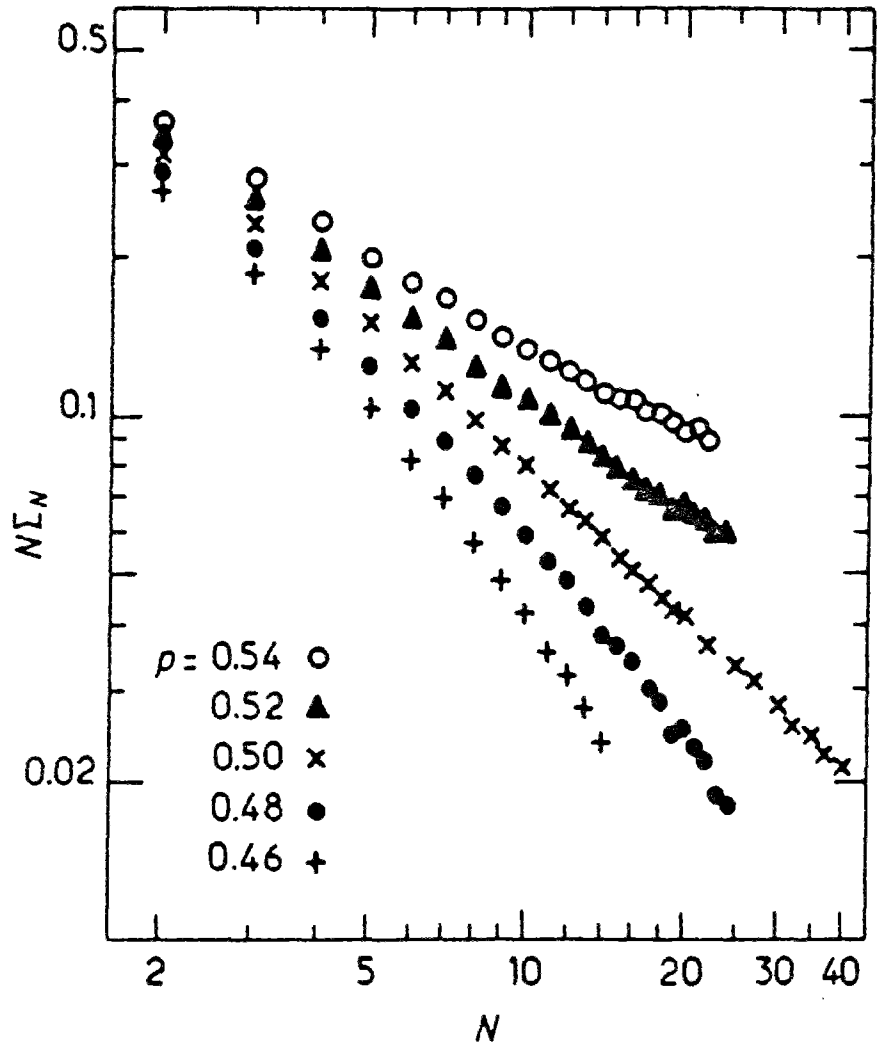


Figure 2.14: Evolution de la conductivité pour un réseau carré en percolation de liens au seuil et en son voisinage obtenue par matrice de transfert sur un ruban de largeur N et de longueur comprise entre 10^4 et 10^5. Pour $p = p_c = 0.5$, on observe une ligne droite traduisant une loi de puissance d'exposant -t/ν. (Courbe extraite de B. Derrida et J. Vannimenus J. Phys. A, 15, L557, (1982))

$$R \propto L^{\zeta} \tag{2.2.10}$$

Si le réseau est soumis à un champ électrique E, et est traversé par une densité de courant j, nous pouvons écrire à l'échelle ξ, la différence de potentiel aux bornes de notre hypercube:

$$\Delta V = E.\xi \tag{2.2.11}$$

et le courant total passant à travers une face:

$$I = j.\xi^{d-1} \tag{2.2.12}$$

Utilisant maintenant la loi d'échelle de la résistance, nous avons:

$$\Delta V = R.I \tag{2.2.13}$$

$$E\,\xi \propto j\,\xi^{d-1}.\xi^{\zeta} \tag{2.2.14}$$

donc

$$\Sigma = j/E \propto x^{2-d-\zeta} \tag{2.2.15}$$

Connaissant la divergence de ξ au seuil, $\xi \propto (p-p_c)^{-\nu}$, nous déduisons :

$$\Sigma \propto \Delta p^{\nu\zeta + \nu(d-2)} \tag{2.2.16}$$

soit

$$t = \nu\,\zeta + \nu\,(d-2) \tag{2.2.17}$$

Le problème est donc de déterminer ζ. Il n'existe pas d'argument exact à notre connaissance pour obtenir ζ, mais cependant nous pouvons donner des bornes [32]

en utilisant la schématisation du super-réseau explicitée ci-dessus. Nous devons encadrer la résistance d'un "super-lien". Il consiste de "blobs" (amas de boucles) multiplement connectés, reliés entre eux par des liens sensibles. Ces liens sensibles ont une dimension fractale de $1/\nu$ [14]. Nous pouvons donc simplement minorer la résistance totale du super-lien en supposant que les blobs, étant abondamment connectés, contribuent de façon négligeable à la résistance totale. R sera donc supérieur à la résistance dûe aux liens sensibles disposés en série. Or ces derniers sont au nombre de:

$$N_s \propto \xi^{1/\nu} \tag{2.2.18}$$

d'où

$$R > A\, \xi^{1/\nu} \tag{2.2.19}$$

où A est une constante. Inversement R sera inférieur à la résistance de n'importe quel chemin parcourant ce super-lien de bout en bout, et *a fortiori* si nous considérons la plus court chemin. Utilisant maintenant la dimension fractale du plus court chemin D_{min}, nous déduisons:

$$R < B\, \xi^{D_{min}} \tag{2.2.20}$$

ainsi

$$1/\nu \leq \xi \leq D_{min} \tag{2.2.21}$$

et donc

$$1+\nu\,(d-2) \leq t \leq \nu\,(D_{min}+d-2) \tag{2.2.22}$$

Nous avons donc l'encadrement suivant selon la dimension de l'espace:

d	$1+\nu\ (d-2)$	t	$\nu\ (D_{min}+d-2)$
2	1	1.30	1.51
3	1.88	2.02	2.07
4	2.28	2.25	2.24
5	2.53	2.43	2.42
6	3	3	3

Si pour la dimension 2, la précision n'est pas très bonne, elle devient correcte à d=3 (10%) et est difficile à améliorer au delà de d=4. Notons que les deux bornes se croisent à d=4 et 5. Ceci provient d'une certaine inconsistance dans les valeurs de ν et D_{min} que l'on trouve dans la littérature; en effet D_{min} doit être nécessairement supérieur à $1/\nu$. La majoration de t convient (aux barres d'erreurs près), car les valeurs citées proviennent d'estimations de t/ν et de D_{min} et donc la même valeur de ν est utilisée dans les deux colonnes. Le rapport entre t et la borne supérieure n'est pas affecté par une sous-estimation de ν.

- Renormalisation de petites cellules

La renormalisation dans l'espace réel pour obtenir une estimation des exposants critiques est une méthode directement héritée de la physique des transitions de phases. Nous l'explicitons ci-dessous pour un cas extrèmement simple où cependant on obtient déjà un bon ordre de grandeur des exposants t et ν. Le principe de la transformation appliquée sur réseau carré en percolation de liens est dû à Bernasconi [33]. L'idée consiste à partir d'un réseau au voisinage du seuil de percolation, et à construire, à partir de celui-ci, un second réseau de même structure que le premier, mais avec une taille différente. Ainsi dans l'exemple considéré, nous partons d'une cellule 2x2 d'un réseau

carré et lui associons une cellule élémentaire (deux liens) d'un second réseau. Plus précisément, comme le montre la figure (2.15), nous partons d'une structure en H et lui associons un lien. La maille du réseau se trouvant ainsi multiplié par un facteur 2. Le lien renormalisé sera dit présent si il existe dans la cellule initiale en H un chemin reliant la base au sommet. En énumérant les différentes configurations i possibles avec leurs probabilités respectives p_i, nous déduisons en particulier la probabilité d'avoir un lien présent p'(p) pour le réseau renormalisé, en fonction de la probabilité initiale p.

$$p'(p) = p^5 + 5p^4q + 8p^3q^2 + 2p^2q^3 \qquad (2.2.23)$$

où q = 1-p (Fig.2.16 et 2.17). La transformation peut être itérée à l'infini. Dans la relation p'(p), il existe deux points fixes stables (triviaux) p = 0 ou p = 1, et un point fixe instable p = 1/2. Ce point fixe instable est identifié avec le seuil de percolation.

Partant d'une valeur de p voisine du seuil $p = 1/2 + \varepsilon$, après transformation, nous obtenons une nouvelle valeur :

$$p'(p) = 1/2 + \varepsilon\, \partial p'/\partial p \big|_{p_c} \qquad (2.2.24)$$

au premier ordre en ε. Dans cette transformation, la longueur de corrélation ξ, est devenue ξ/2 puisque l'échelle de longueur a doublé. Oublions les corrélations introduites par cette renormalisation et considérons le réseau obtenu comme ayant une structure de percolation, nous déduisons de la loi

$$\xi \propto (p-p_c)^{-\nu} \qquad (2.2.25)$$

que

$$\xi\, (p-p_c)^{\nu} = \xi/2\, (p'-p_c)^{\nu} \qquad (2.2.26)$$

ou

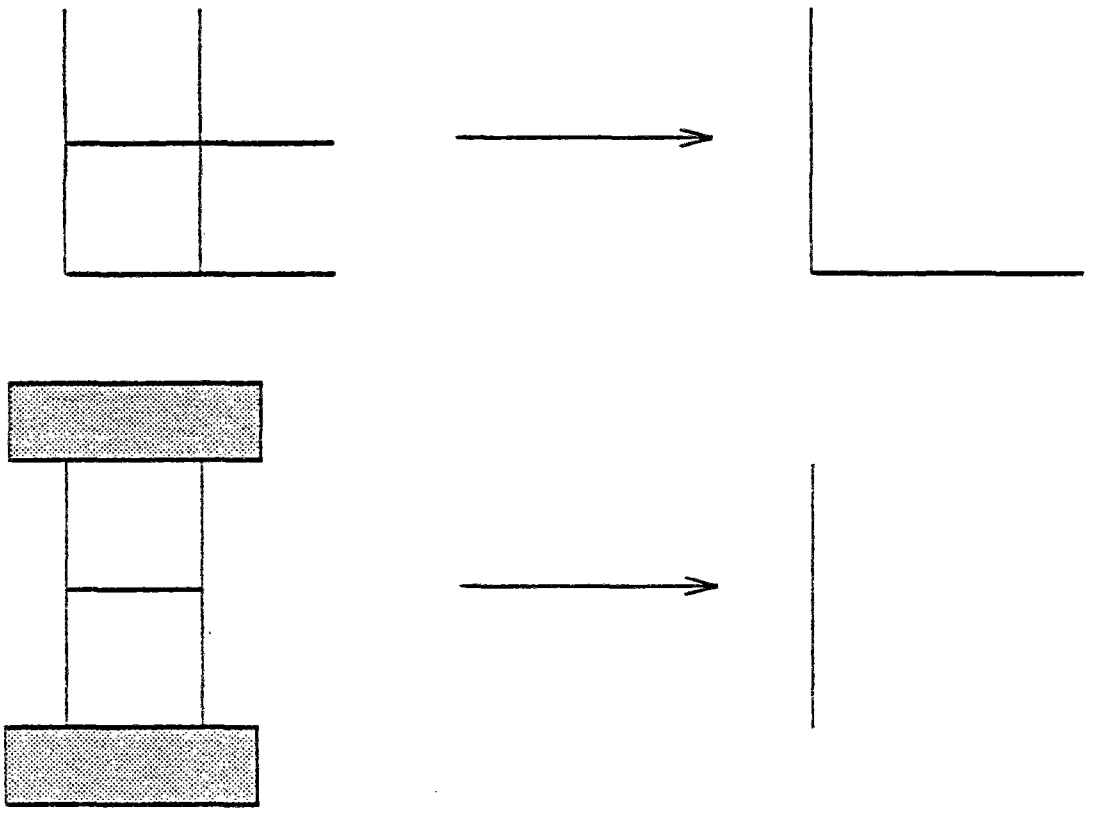


Figure 2.15: La renormalisation de petites cellules consiste à remplacer une cellule 2 x 2 qui engendre le réseau carré par une cellule élémentaire. La correspondance se fait en schématisant chaque lien renormalisé comme une structure équivalente à la figure illustrée en bas à gauche: i.e. en H.

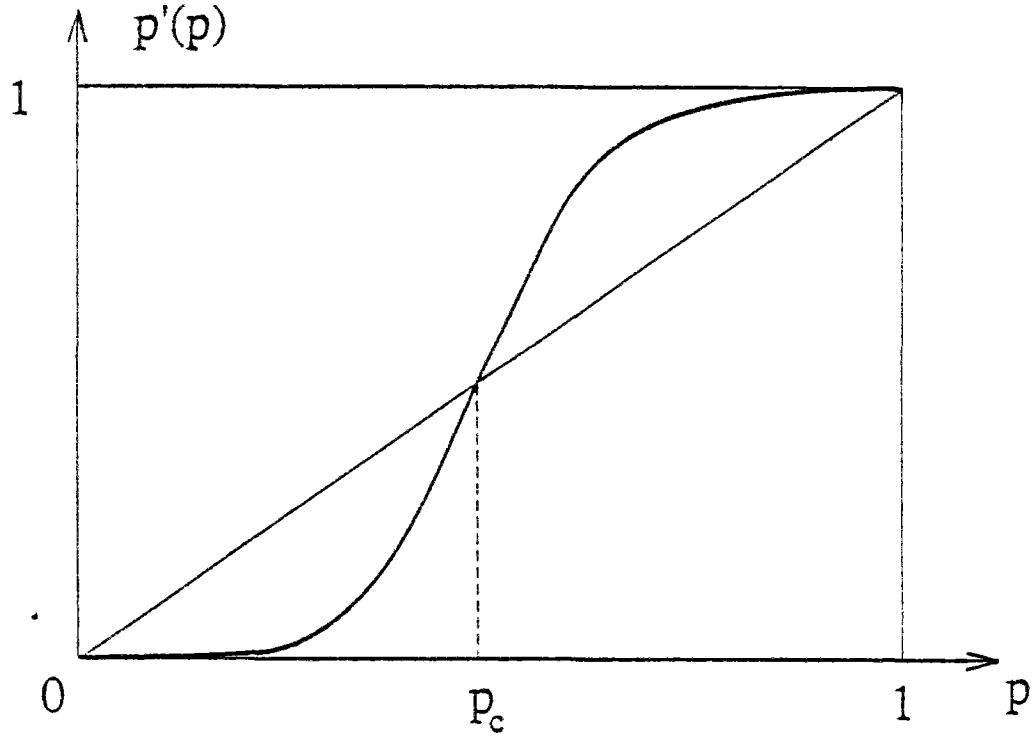


Figure 2.16: Probabilité p'(p) d'avoir un lien renormalisé présent. (i.e. une cellule en H connectée d'un bord à l'autre. Il existe deux points fixes stables (0 et 1) dans la p'(p) et un point fixe instable: p = 1/2)

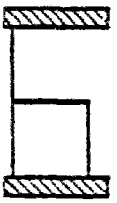
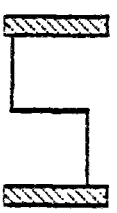
Configuration	Probabilité pondérée	Conductance
	p^5	1
	$4p^4q$	3/5
	p^4q	1
	$2p^3q^2$	1/2
	$4p^3q^2$	1/2
	$2p^3q^2$	1/3
	$2p^2q^3$	1/2

Figure 2.17: Pour les différentes conformations de la cellule en H, nous donnons ici, tant les probabilités d'occurence que la conductance associée.

$$2 = \{(\partial p'/\partial p) \mid_{p_c}\}^{\nu} \qquad (2.2.27)$$

et finalement

$$\nu = \log (2)/\log (\partial p'/\partial p) \qquad (2.2.28)$$

utilisant la relation p'(p), nous calculons aisément

$$\partial p'/\partial p \mid p_c = 13/8 \qquad (2.2.29)$$

ou

$$\nu = \log 2 / \log (13/8) = 1.428 \qquad (2.2.30)$$

à comparer à la valeur exacte 4/3. Nous procédons de même pour calculer la conductance. Donnons au lien renormalisé une conductance égale à la moyenne de la conductance sur les configurations qui percolent (Fig. 2.17):

$$g = \Sigma\, p_i\, g_i / \Sigma\, p_i \qquad (2.2.31)$$

Alors écrivant que la conductance globale varie comme $(p-p_c)^t$ nous déduisons:

$$t = \log g / \log \partial p'/\partial p \qquad (2.2.32)$$

soit t = 1.17, ou utilisant un effet de taille finie

$$t/\nu = \log g /\log 2 = 0.82 \qquad (2.2.33)$$

à comparer avec la valeur obtenue directement par simulations numériques : t=1.30, $t/\nu = 0.975$. Nous sommes aussi libres de définir la moyenne à considérer comme étant géométrique alors:

$$g = \exp (\Sigma p_i \log g_i / \Sigma p_i) \qquad (2.2.34)$$

et donc t = 1.26 ou t/ν = 0.88. Adoptant enfin une moyenne harmonique:

$$g = \Sigma p_i / (\Sigma p_i / g_i) \qquad (2.2.35)$$

t = 1.47 et t/ν = 1.03. Aux vues de la rusticité de l'argument, il est déjà remarquable d'obtenir ainsi de tels ordres de grandeur.

La sensibilité au choix de la moyenne à considérer est bien sûr une conséquence de l'approximation du modèle. Sous-jacente est la motion d'"auto-moyennage", i.e. toutes les moyennes ont-elles le même comportement asymptotique? La réponse à cette question sur réseau Euclidien, est sans ambiguïté oui. La seule exception à cette règle est le cas de la percolation continue pour des disributions singulières de conductances locales pour les liens présents.

- Problème dual

Partant du problème original où certains liens ont une conductivité nulle, et d'autres une conductivité unité, nous pouvons prendre en compte une situation moins extrême où le milieu est constitué de deux phases de conductivité σ_1 et σ_2 avec un fort contraste (disons $\sigma_2 \ll \sigma_1$). Le cas précédent correspond à la limite $\sigma_2 = 0$. Un rapport de conductivité non nul va tronquer le comportement critique de la même façon que lorsque nous considérons un système de taille finie, ou bien lorsque nous sommes au voisinage mais non exactement au seuil. De part et d'autre du seuil, nous passerons cependant d'une conductivité de l'ordre de σ_1 à une conductivité de l'ordre de σ_2. Nous savons maintenant décrire la chute de conductivité au-dessus du seuil. Considérons alors le comportement en-dessous du seuil. Exprimé en unité où $\sigma_2 = 1$ ($1 \ll \sigma_1$), la

conductance du réseau, initialement finie, va croître très rapidement au seuil. Ceci nous conduit naturellement à considérer le problème de percolation suivant. Une proportion p de liens est supraconductrice et une proportion (1-p) est résistive: σ_1 est infini, alors que $\sigma_2 = 1$. Approchant le seuil, la conductivité du milieu va diverger et ce en suivant un nouveau comportement critique [34, 35] :

$$\Sigma \propto (p_c-p)^{-s} \qquad (2.2.36)$$

Nous qualifierons souvent ce second problème de dual du précédent, car, comme nous le verrons, à deux dimensions, on peut par dualité [36], mettre ces deux problèmes en correspondance et obtenir en particulier s = t.

Revenons maintenant au problème du milieu à deux phases de conductivité σ_1 et σ_2, avec $\sigma_2 \ll \sigma_1$ (Fig. 2.18). Postulons l'existence de deux fonctions d'échelle [37] décrivant le comportement au voisinage du seuil de percolation: la conductivité Σ étant donnée par:

$$\Sigma = \sigma_1 (p-p_c)^t \ \varphi_+(\sigma_2/\sigma_1 (p-p_c)^{-a}) \qquad p> p_c \qquad (2.2.37)$$

$$= \sigma_2 (p_c-p)^{-s} \varphi_-(\sigma_2/\sigma_1 (p_c-p)^{-a}) \qquad p< p_c \qquad (2.2.37')$$

Comparant ces comportements avec ceux correspondant à un contraste infini $\sigma_2 = 0$, $\sigma_1 = 1$, nous obtenons:

$$\varphi_+(x) \propto O(1) \qquad (2.2.38)$$

lorsque x tend vers zéro . Pour $\sigma_2 = 1$, et σ_1 tendant vers l'infini :

$$\varphi_-(x) \propto O(1) \qquad (2.2.39)$$

lorsque x tend vers zéro.

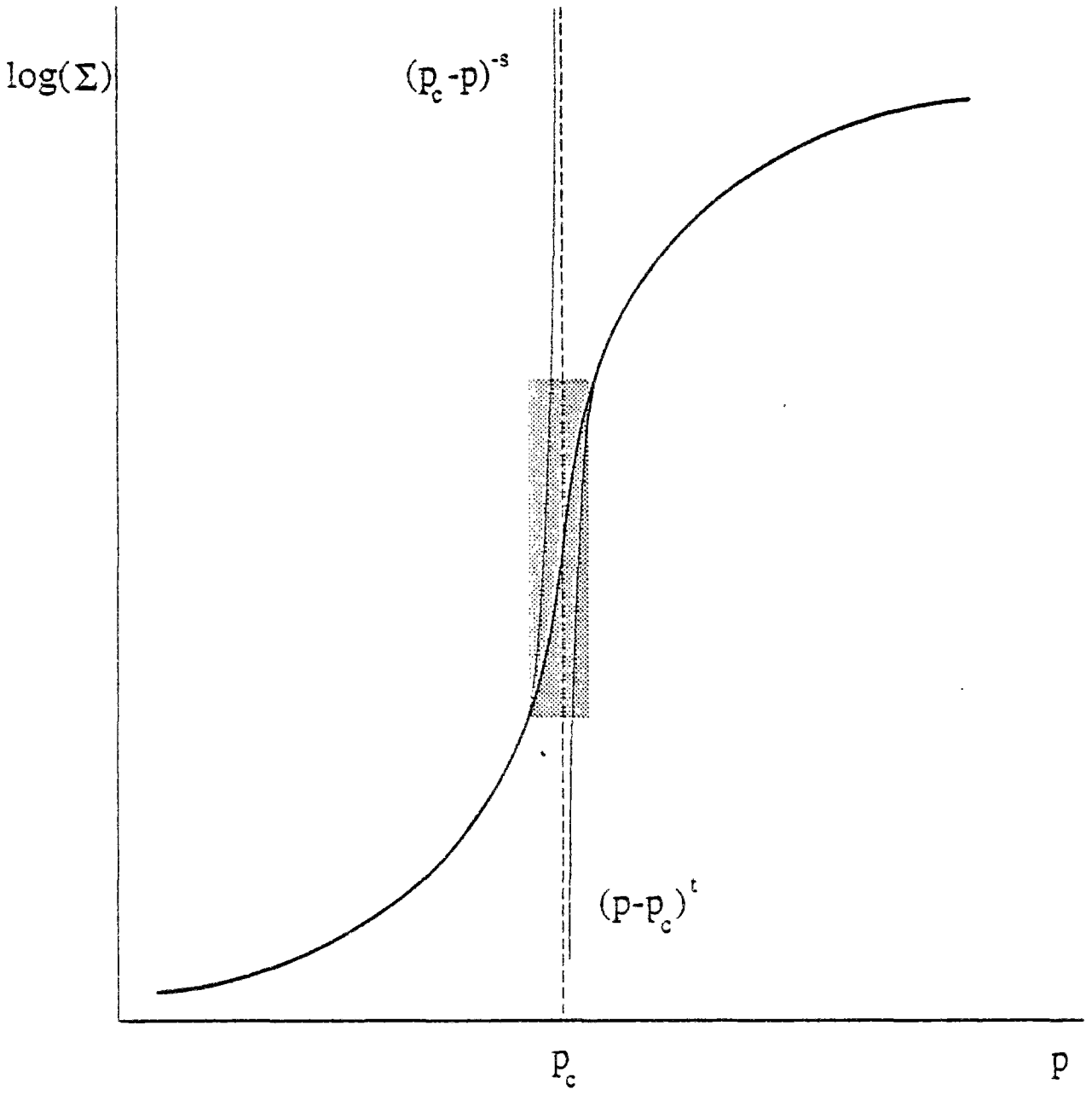


Figure 2.18: Schéma montrant qualitativement l'évolution de la conductivité Σ en fonction de p, pour un milieu constitué de deux phases de conductivité σ_1 (proportion p) et σ_2 (proportion 1-p) tels que $\sigma_1 >> \sigma_2$. Les deux courbes en trait fin correspondent aux comportements purs de type percolation en dessous du seuil ($\sigma_1 = +\infty$) et au dessus ($\sigma_2 = 0$). La zone en gris représente un régime intermédiaire décrit dans le texte.

Si le contraste des deux conductivités n'est pas extrême au seuil de percolation, Σ n'a plus de comportement critique; il doit saturer à une valeur non nulle et donc au premier ordre, Σ doit être indépendant de p lorsque p tend vers p_c et donc:

$$\varphi_+(x) \propto x^{t/a} \tag{2.2.40}$$

et

$$\varphi_-(x) \propto x^{-s/a} \tag{2.2.41}$$

x tendant vers l'infini d'où

$$\Sigma \propto \sigma_1 \ (\sigma_2/\sigma_1)^{t/a} \tag{2.2.42}$$

p tendant vers p_c^+

$$\Sigma \propto \sigma_2 \ (\sigma_2/\sigma_1)^{-s/a} \tag{2.2.43}$$

p tendant vers p_c^-. En égalant ces deux contributions, nous obtenons :

$$a = s+t \tag{2.2.44}$$

Ainsi, au seuil de percolation, Σ doit être fonction de (σ_1/σ_2) selon :

$$\Sigma \propto (\sigma_1^{\,s} \sigma_2^{\,t})^{1/(s+t)} \tag{2.2.45}$$

En particulier à deux dimensions, utilisant l'égalité s = t, nous avons :

$$\Sigma \propto (\sigma_1 \sigma_2)^{1/2} \tag{2.2.46}$$

Cependant, dans notre dérivation de ce résultat, une question se pose. Pourquoi avons-nous choisi le même exposant , a, de part et d'autre du seuil ? Pour répondre à cette

question, plaçons-nous exactement au seuil. Choisissons deux points distants de L. La résistance typique entre ces deux points vaudra $\sigma_1 L^{-t/\nu}$, si ils appartiennent tous deux à un même amas de la première phase. Au contraire, si ces deux points ne sont pas connectés, la résistance typique sera de l'ordre de $\sigma_2 L^{-s/\nu}$. Il existe donc une taille typique où il est aussi avantageux de suivre les tortuosités de l'amas infini de la première phase, que d'emprunter quelques liens de la seconde phase qui sont pénalisants en termes de conductivité mais peuvent raccourcir le chemin considérablement. Cette longueur typique $\mathcal{L}$ sera telle que:

$$\sigma_1 \mathcal{L}^{-t/\nu} = \sigma_2 \mathcal{L}^{s/\nu} \qquad (2.2.47)$$

ou

$$\mathcal{L} = (\sigma_1/\sigma_2)^{\nu/(s+t)} \qquad (2.2.48)$$

Ainsi, dès que la longueur de corrélation ξ excède $\mathcal{L}$, on ne voit plus le comportement critique. Produit en termes de valeurs de p, nous obtenons les deux limites (au-dessus et en-dessous du seuil) qui correspondent à une saturation du comportement critique. L'écart au seuil sera dans les deux cas:

$$\Delta p^{-\nu} \propto \mathcal{L} \qquad (2.2.49)$$

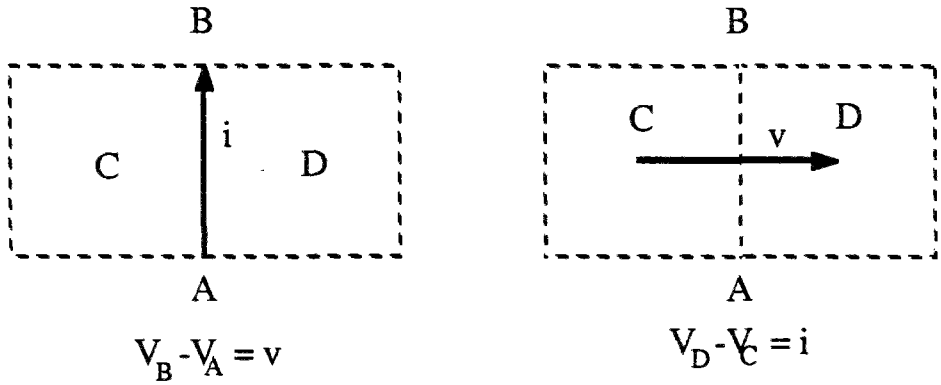
ou

$$\Delta p \propto (\sigma_2/\sigma_1)^{1/(s+t)} \qquad (2.2.50)$$

tant d'un côté du seuil que de l'autre. Ceci permet donc de retrouver l'expression de l'exposant a, et son apparition tant pour f_+ que pour f_-.

Montrons maintenant l'égalité s = t à deux dimensions, en reproduisant un argument dû à Straley [36]. Considérons un lien AB d'un réseau de résistance. Soit R la résistance du lien, v la différence de potentiel à ses bornes et i = v/R le courant qui le

parcourt. Au lien AB, nous associons par dualité le lien CD du réseau dual (cf. Figure ci-dessous). Imposons dans le lien CD un courant, v, et une



$V_B - V_A = v$ $V_D - V_C = i$

différence de potentiel i, donc une conductance R. Répétons ceci pour chaque lien du réseau primal. Il est maintenant facile de voir que nous aurons par là-même, construit une solution en potentiel et courant, de la conduction électrique dans le réseau dual. En effet, la loi des noeuds du réseau primal devient la loi des mailles du réseau dual et réciproquement. Si, dans le réseau initial nous avions choisi comme conditions aux limites, un côté au potentiel zéro, le côté opposé au potentiel unité, et les deux autres bords isolés, alors les conditions aux limites du problème dual auraient été que deux côtés soient des équipotentiels à travers lesquels passe un courant unité (égal à la différence de potentiel entre électrodes du réseau initial). Une telle transformation ne présuppose rien quant à la géométrie du réseau ou bien quant à la distribution des résistances qui sont initialement quelconques. Mais si maintenant nous considérons un problème de percolation, disons des conductances zéro et unité, alors, par dualité nous aurons le problème supraconducteur-conducteur, sur le réseau dual, toujours au seuil de percolation. Dans la transformation nous avons simplement interverti différence de potentiel et intensité, et donc, conductance et résistance. Si dans le problème original, nous avions une conductance

$$\Sigma \propto (p-p_c)^t \qquad (2.2.51)$$

alors pour le problème dual,

$$\Sigma \propto (q^* - q_c^*)^{-t} \qquad (2.2.52)$$

où q^* représente la fraction de liens normaux égal à p, sur le réseau dual, et donc, notant

$$p^* = 1 - q^* \qquad (2.2.53)$$

$$\Sigma \propto (p_c^* - p^*)^{-t} \qquad (2.2.54)$$

d'où la relation exacte s = t, valable à deux dimensions.

De façon à rendre la transformation de dualité plus façile à transposer dans d'autres cas, il est préférable en fait de la présenter comme suit :

Nous pouvons, afin de résoudre la distribution des courants et des potentiels dans la structure, considérer les courants de boucles, φ_i, (Fig.2.19), qui sont centrés sur chaque maille i du réseau. Le courant réel traversant le lien AB qui sépare deux cellules C et D, est la différence φ_C-φ_D. La solution du problème est donc donnée par minimisation, sur les champs φ qui satisfont aux conditions aux limites, de l'énergie E :

$$E= \Sigma R_{AB} (\varphi_C-\varphi_D)^2 \qquad (2.2.55)$$

où R_{AB} est la résistance du lien AB. La transformation de dualité consiste à identifier les courants de boucles φ_i à des potentiels sur les sites i du réseau dual, les résistances R_{AB} à des conductances et les différences de potentiel R_{AB} (φ_C-φ_D) à l'intensité transitant dans le lien CD.

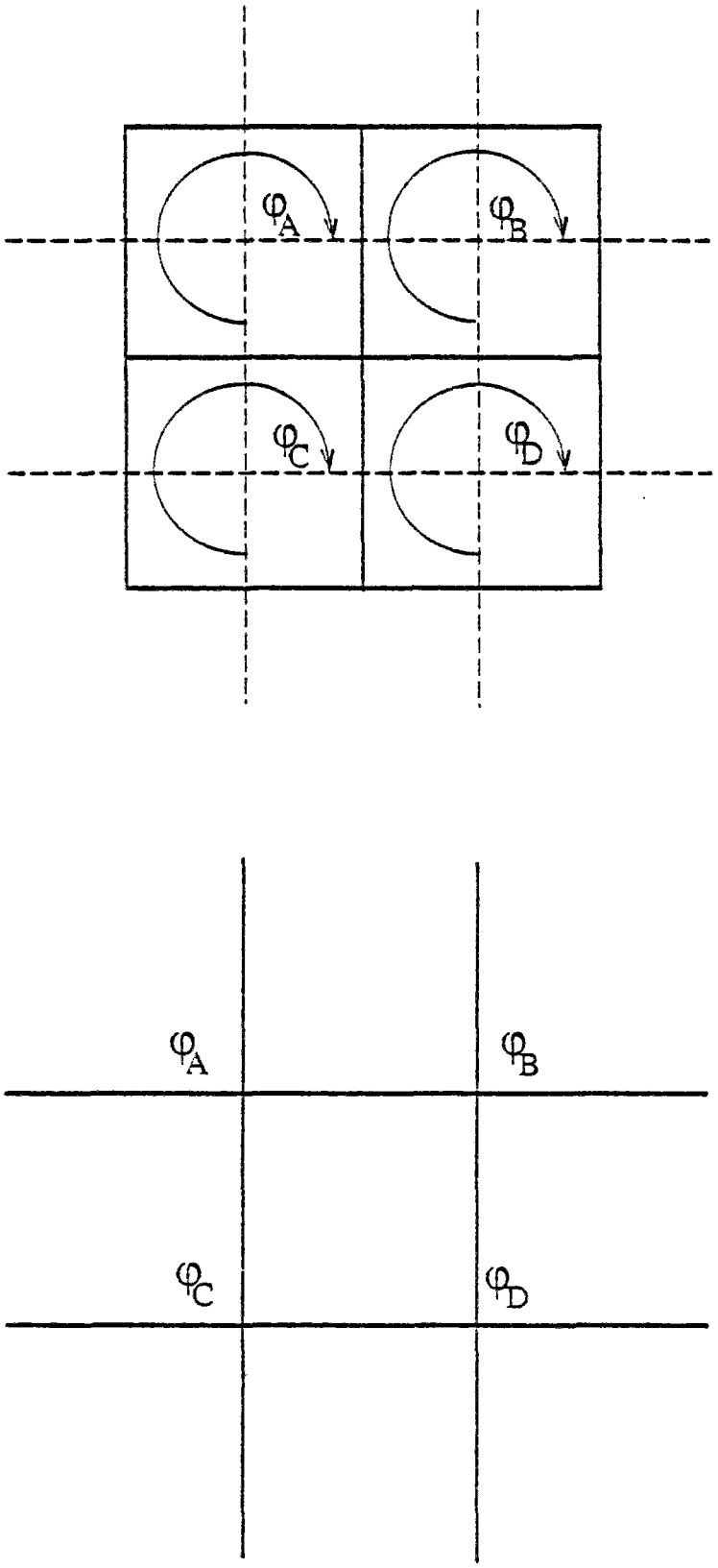


Figure 2.19: Courants de boucles sur un réseau de résitance. Ces champs de courants admissibles φ, permettent de trouver la solution du problème par minimisation de l'énergie sur les champs φ qui satisfont aux conditions aux limites. La transformation de dualité associe alors les courants de boucles φ à des potentiels sur les sites du réseau dual.

- Bruit

Nous avons vu pour l'instant les lois d'échelles suivies par le support de la distribution des courants non nuls, et par la conductance. Voyons maintenant quelques propriétés du bruit résistif aux bornes d'un réseau aléatoire de résistance [38, 39, 40]. Supposons que les liens présents du réseau aient une résistance non plus unité mais fluctuante: $r_{ij}+ \delta r_{ij}$ où $r_{ij} = 1$ et δr_{ij} est un bruit gaussien décorrélé en espace de faible intensité ($\delta r_{ij} << r_{ij}$).

$$< \delta r_{ij} > = 0 \qquad (2.2.56)$$

$$< \delta r_{ij} \delta r_{kl} > = \rho^2 \delta_{ij} \delta_{kl} \qquad (2.2.57)$$

Une telle situation physique est assez simple à obtenir. Un bruit résistif de la sorte, (avec un spectre en fréquence voisin de 1/f) est une propriété extrèmement commune dont l'explication physique est par ailleurs très controversée. La résistance globale du circuit R va aussi fluctuer:

$$R = R +\delta R \qquad (2.2.58)$$

On définit alors le bruit normalisé S_R sous la forme:

$$S_R=< \delta R \, \delta R >/R^2 \qquad (2.2.59)$$

Avant de nous intéresser au comportement critique de S_R, décrivons une propriété intéressante de S_R. L'influence de la variation d'une seule résistance de r_{ij} à $r_{ij}+ \delta r_{ij}$ sur la résistance totale (de R à R +δR) peut être obtenue par le théorème de Cohn sous la forme:

$$\delta R\, I^2 = \delta\, r_{ij}\, i_{ij}^2 \qquad (2.2.60)$$

où i_{ij} est le courant circulant dans le lien ij. Donc lorsque toutes les résistances du réseau fluctuent, par superposition, nous avons:

$$\begin{aligned} S_R &= < \delta R\, \delta R > / R^2 \\ &= \Sigma_{ijkl} (< \delta\, r_{ij}\, \delta\, r_{kl} > i_{ij}^2\, i_{ij}^2) / R^2 I^4 \qquad (2.2.61) \\ &= \rho^2 \Sigma_{ij} (\, i_{ij}^4) / R^2 I^4 \qquad (2.2.62) \end{aligned}$$

Ainsi, le bruit S_R est proportionnel au quatrième moment de la distribution des courants.

Le comportement critique du bruit au seuil de percolation peut être décrit par un nouvel exposant critique b tel que:

$$S_R \propto (p-p_c)^b \qquad (2.2.63)$$

Nous pouvons adopter pour la mesure de cet exposant toutes les techniques utilisées pour la conductivité, comme en particulier le calcul par matrice de transfert [41].

Cet exposant b est un nouvel exposant pour lequel nous pouvons adapter le calcul de la renormalisation sur réseaux hiérarchiques [42], ou l'encadrement donné par notre schématisation de l'amas infini en super-réseau [43], ou encore le formalisme de la théorie des champs [44]. Il n'est pas directement relié aux exposants introduits jusqu'alors. Nous verrons au prochain paragraphe qu'il appartient à une famille infinie d'exposants critiques qui conduisent à la notion de spectre multifractal. Cet exposant a aussi été mesuré expérimentalement [45, 46].

- Multifractalité

Nous avons vu que le support des courants non nuls au seuil de percolation était fractal. Le moment d'ordre 0 des courants, varie avec la taille du système L selon:

$$\mathcal{M}_0 = < \Sigma\, i^0 >_V$$
$$\propto L^{Dbb} \qquad (2.2.64)$$

où les crochets $< >_V$ désignent une moyenne sur différentes réalisations, avec les mêmes conditions aux limites : une différence de potentiel unité appliquée aux bornes du système.

La conductance du réseau suit aussi une loi de puissance avec L. Avec les conditions aux limites considérées ici, nous pouvons écrire la conductance comme l'énergie dissipée dans le système soit:

$$G = 2\,\mathcal{M}_2 = 2 < \Sigma\, i^2 >_V$$
$$\propto L^{-(t-\nu(d-2))/\nu} \qquad (2.2.65)$$

Le bruit donne également une loi de puissance entre le quatrième moment des courants et la taille du système,

$$\mathcal{M}_2 = \mathcal{S}_R\, R^2\, I^4$$
$$\propto L^{-(b+2t-2\nu(d-2))/\nu} \qquad (2.2.66)$$

et finalement le courant maximum donne encore une contribution du même type. Nous introduisons donc une série infinie d'exposants y(n) [47, 48] tels que:

$$\mathcal{M}_n = < \Sigma |i|^n >_V$$
$$\propto L^{y(n)} \qquad (2.2.67)$$

Lorsque chaque réseau est soumis à une différence de potentiel unité. Cette série d'exposants y(n) n'est pas simplement affine en n, (cf.fig 2.20) comme c'était le cas pour les moments de la distribution de taille d'amas finis. Tous les exposants y(n) sont nécessaires pour caractériser complètement les propriétés de transport conductif. Cette propriété est souvent qualifiée de "multifractalité" et l'on représente parfois cette série y(n) par sa transformée de Legendre [49]:

$$\alpha = \partial y(n)/\partial n$$
$$f(\alpha) = y(n) - n\alpha \qquad (2.2.68)$$

Si l'obtention de y(n) nécessite de considérer un effet de taille au seuil de percolation, il n'est pas utile d'effectuer la dérivation $\partial y/\partial n$ pour obtenir α et f : en effet, mesurer un exposant tel que y(n) se fait avec une précision limitée et il serait vain d'essayer de déterminer y(n+dn) avec une grande précision. Il est possible de considérer une interpolation polynomiale de y(n) à partir d'un nombre discret de valeurs de n, mais ce n'est pas la méthode la mieux adaptée au problème. De façon plus précise, il est utile de considérer les moments logarithmiques [50] $\mathcal{L}_n$ définis par:

$$\mathcal{L}_n = < \Sigma |i|^n \log |i| >_V \qquad (2.2.69)$$

En effet, dérivant l'équation (2.2.67) par rapport à n, il vient:

$$\partial \mathcal{M}_n/\partial n = < \Sigma |i|^n \log |i| >_V$$
$$\propto L^{y(n)} \log L \; \partial y(n)/\partial n \qquad (2.2.70)$$

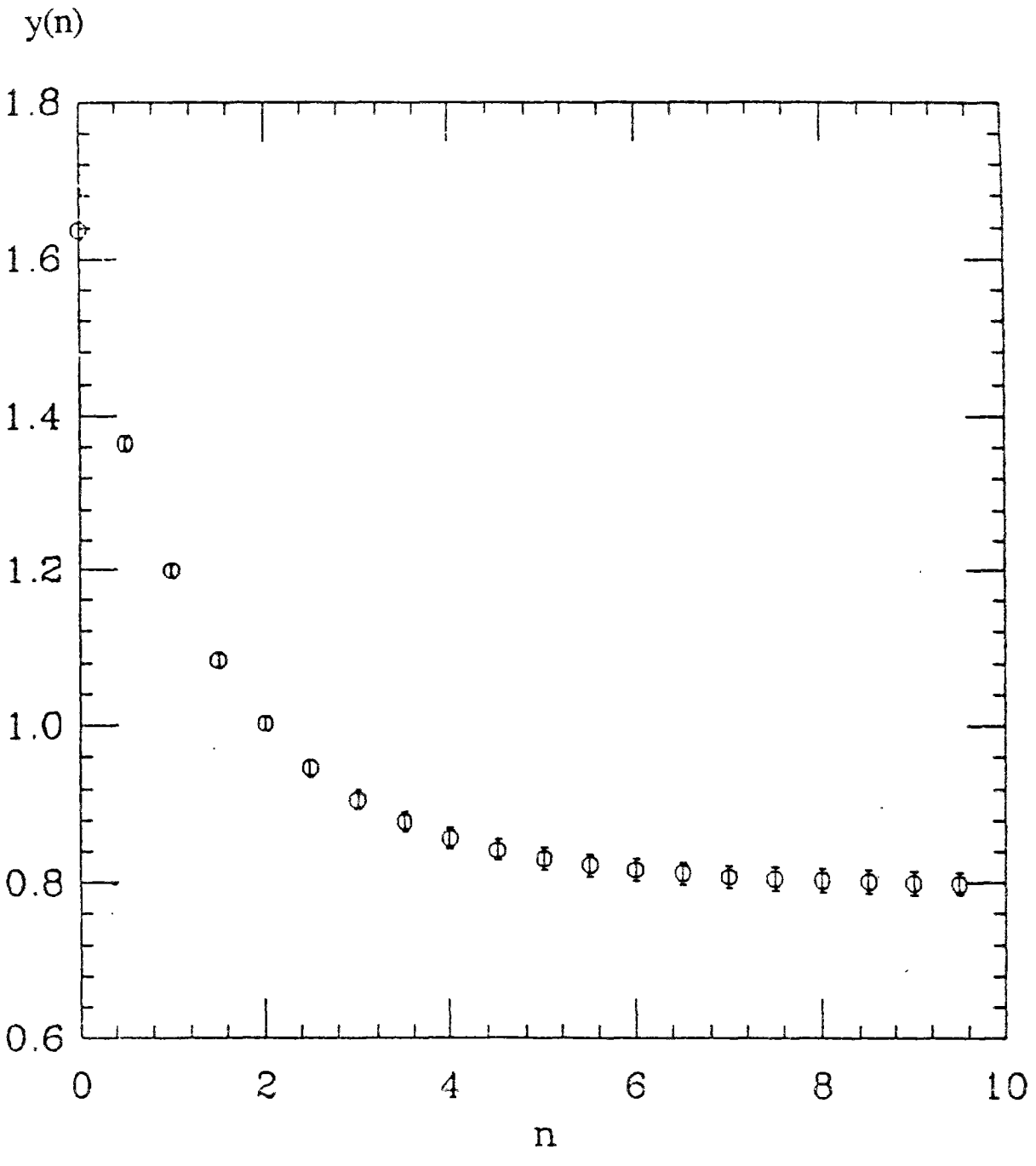


Figure 2.20 : Exposants y(n) qui gouvernent le nième moment de la distribution des courants en fonction de la taille du système (extrait de G.G.Batrouni, A.Hansen et M.Nelkin J.Physique 48, 771, (1987))

et donc formant le rapport $\mathcal{L}_n / \mathcal{M}_n$, nous obtenons:

$$\mathcal{L}_n / (\mathcal{M}_n \log L) = \alpha(n) \qquad (2.2.71)$$

et donc $\alpha(n)$ peut être mesuré pour une seule taille.

L'ensemble du spectre multifractal, $f(\alpha)$, peut être aussi obtenu tout à fait directement, en considérant l'histogramme de la distribution des courants. Ceci permet alors de mieux comprendre le véritable sens de ce spectre. Soit N(i,L) la distribution des courants dans un réseau de percolation de taille L. Le moment d'ordre n s'écrit:

$$\mathcal{M}_n = \int |i|^n N(i,L)\, di \qquad (2.2.72)$$

ou

$$\mathcal{M}_n = \int \exp(n \log(|i|) + \log(N(i,L)))\, di \qquad (2.2.73)$$

Posons

$$N(i,L) = L^{g(\log(|i|)/\log L)} \qquad (2.2.74)$$

alors,

$$\mathcal{M}_n = \int \exp(n \log(i) + g(\log(i)/\log L) \log L)\, di \qquad (2.2.75)$$

Appliquant un argument du col [49] pour calculer cette intégrale, nous calculons l'*extremum* de l'argument de l'exponentiel, par rapport à i, ou plutôt log(i):

$$\partial \{n \log(i) + g(\log(i)/\log L) \log L\} / \partial \log(i)$$
$$= n + g'(\log(i)/\log L) \qquad (2.2.76)$$

Le courant typique i_0 qui contribue donc au moment, $\mathcal{M}_n$ sera tel que :

$$g'(\log(i_0)/\log L) = -n \qquad (2.2.77)$$

posons

$$\beta = \log(i_0)/\log L \tag{2.2.78}$$

pour cette valeur, nous avons alors:

$$\mathcal{M}_n \propto \exp(n \beta \log L + g(\beta) \log L) \tag{2.2.79}$$

$$\propto L^{(n \beta + g(\beta))} \tag{2.2.80}$$

Comparant ceci à l'expression de définition de y(n):

$$y(n) = n \beta + g(\beta) \tag{2.2.81}$$

Dérivons cette égalité par rapport à n:

$$\partial y(n)/\partial n = \alpha = \beta + \{n+g'(\beta)\} \partial\beta/\partial n$$

$$= \beta \tag{2.2.82}$$

et donc

$$g(\beta) = y(n) - n \beta$$

$$= f(\alpha) + n \alpha - n \beta$$

$$= f(\alpha) \tag{2.2.83}$$

Le sens de α et $f(\alpha)$ est maintenant clair: α est à un facteur 1/log(L) près, le logarithme du courant qui contribue au $n^{ième}$ moment $f(\alpha)$ à un facteur 1/log(L) près, est le logarithme de l'histogramme N(i,L) exprimé en termes de logarithme de i:

$$g(x) = \log(N(L^x,L))/\log L \tag{2.2.84}$$

Le formalisme du spectre multifractal ne cache rien de plus qu'un histogramme en coordonnées logarithmiques. La figure 2.21 montre differents "histogrammes" de ce type, correspondant à differentes tailles de réseaux de percolation.

Nous pouvons nous représenter physiquement l'argument du col de la façon suivante (Fig.2.22). Portons sur le spectre, une droite de pente -n, de façon à ce qu'elle soit tangente à la courbe. Le point de tangence correspond, comme nous l'avons vu (Eq. 2.2.77), aux courants qui vont effectivement contribuer au moment $\mathcal{M}_n$. Si maintenant, nous traçons l'histogramme pondéré des courants: $|i|^n N(i)$ nous obtenons un pic très pointu (à la limite thermodynamique, il devient une distribution de Dirac) centré autour du courant correspondant.

La propriété physique intéressante de l'aspect multifractal est que asymptotiquement, la fonction $f(\alpha)$ est universelle. Chaque point de cette fonction représente un exposant critique. Dans le cas où une distribution n'est pas multifractale, par exemple pour la distribution de taille d'amas au seuil de percolation, le spectre est réduit à un point unique. Nous avons vu en effet que le $n^{ième}$ moment de cette distribution variait comme (2.1.36), donc au seuil pour un système de taille L, nous aurons:

$$\sum s^m n_s \propto (p_c-p)^{\nu(d-mDf)} \qquad (2.2.85)$$

$$\propto L^{mDf-d} \qquad (2.2.86)$$

Ainsi

$$y(m) = m D_f - d \qquad (2.2.87)$$

d'où

$$\alpha = D_f \qquad (2.2.88)$$

et

$$f(\alpha) = -d \qquad (2.2.89)$$

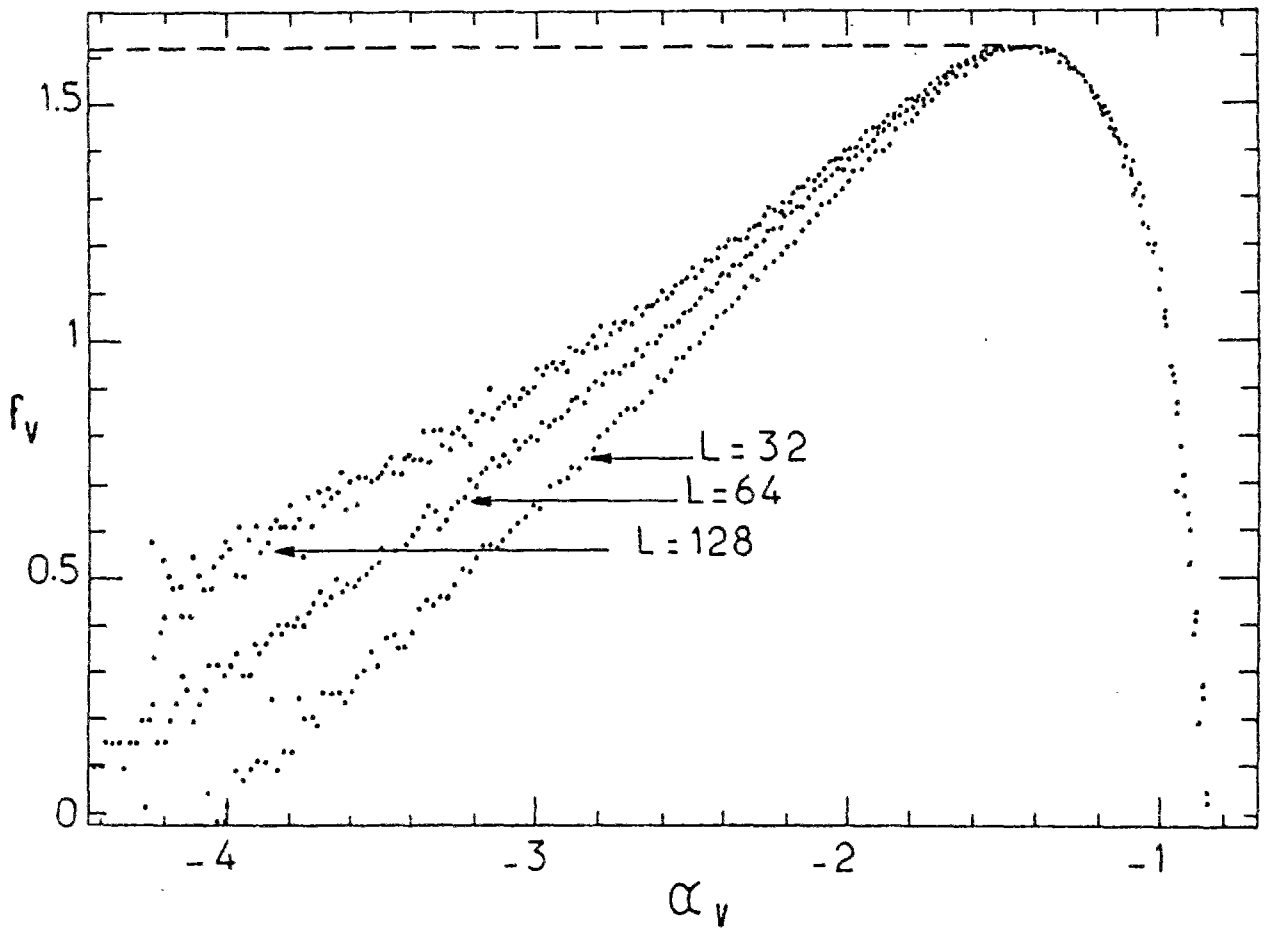


Figure 2.21 : Histogramme de la distribution des courants sur un réseau de résistances au seuil de percolation log(N(i,L))/log(L) en fonction du courant log(i)/log(L) dans l'ensemble à intensité constante à deux dimensions sur réseau carré. Cette courbe doit tendre asymptotiquement vers une fonction universelle : le spectre multifractal f(α).

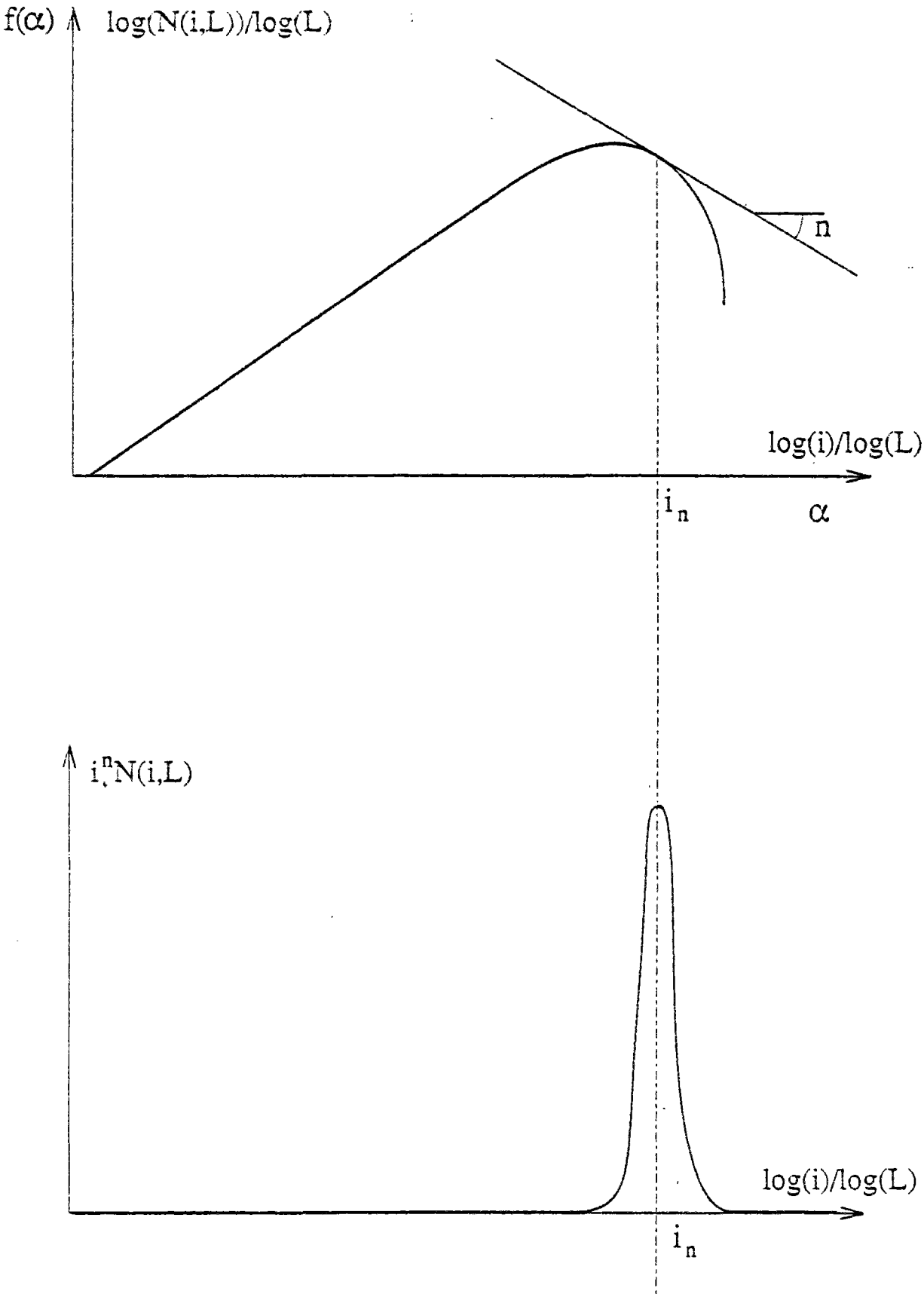


Figure 2.22 : La contribution majeure du nième moment de la distribution des courants provient des courants i_n definis par le point de tangence de la droite de pente -n avec le spectre $f(\alpha)$ (figure du haut). L'histogramme pondéré $N(i,L)\, i^n$ va progressivement tendre vers une fonction de Dirac centrée sur i_n lorsque la taille du système augmente.(figure du bas)

Revenons sur la signification de f et de α dans le cas de la distribution de courant. Comme il transparaît dans l'équation (2.2.74), f peut être interprétée comme la dimension fractale du support des liens qui contribuent à un moment donné. Par exemple, pour le moment d'ordre 0, tous les liens contribuent, et l'on vérifie aisément que:

$$f(\alpha(0)) = y(0) = D_{bb} \qquad (2.2.90)$$

f est aussi maximum en ce point puisque:

$$\partial f/\partial n = \partial y/\partial n - \alpha - n\,\partial\alpha/\partial n \qquad (2.2.91)$$

$$= - n\,\partial\alpha/\partial n \qquad (2.2.92)$$

d'où

$$\partial f(n=0)/\partial n = 0 \qquad (2.2.93)$$

f est donc une fonction convexe qui atteint son maximum en $\alpha(n = 0)$. Plus l'on s'intéresse à un moment d'ordre élevé, plus l'on est sensible aux liens les plus "chauds" du réseau, et donc plus ils deviennent rares; f, en effet, diminue avec n. A la limite, lorsque l'on considère un moment dont l'ordre tend vers l'infini, ne contribuent que les liens dont le courant est maximum. Or, nous avons déjà vu que ces liens sont les liens sensibles dont la dimension est $1/\nu$. Il s'ensuit que $f(\alpha)$ tend, lorsque n tend vers l'infini, vers $1/\nu$. La valeur de α en ce point se calcule aisément. Puisque les réseaux sont soumis à une différence de potentiel unité, le courant total qui les traverse sera égal à la conductance du réseau, soit I proportionnel à $L^{-y(2)}$ où $y(2)=(t-\nu(d-2))/\nu$. Le courant maximum suivra aussi cette même loi de puissance, d'où:

$$\alpha_{max}=(t-\nu(d-2))/\nu \qquad (2.2.94)$$

Notons en passant que l'approximation, que nous avons présentée pour le calcul de l'exposant t de la conductivité, peut se traduire dans le langage du spectre multifractal par une schématisation du spectre où celui-ci serait réduit à un point isolé qui correspond aux liens sensibles (et donc ne serait plus multifractal).

Nous pouvons aussi considérer des conditions aux limites différentes pour comparer des réseaux de tailles variables. En particulier, un "ensemble" (au sens thermodynamique) est particulièrement bien adapté. Il s'agit d'appliquer un courant unité dans chaque réalisation. Avec ces nouvelles conditions aux limites, nous introduisons une nouvelle famille d'exposants x(n) tels que:

$$< \Sigma |i|^n >_I \propto L^{x(n)} \qquad (2.2.95)$$

Alors nous pouvons relier x(n) à la famille précédente y(n), car nous connaissons la variation de la conductance du système avec la taille du système. En effet, pour un réseau donné, nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned} (\Sigma |i|^n)_I &= (\Sigma |i/G|^n)_V \\ &= (\Sigma |i|^n)_V / G^n \end{aligned} \qquad (2.2.96)$$

Prenons la moyenne sur différents réseaux, alors:

$$< \Sigma |i|^n >_I = < \Sigma |i|^n >_V / <G>^n \qquad (2.2.97)$$

Cette dernière égalité est valide dans la limite thermodynamique (système de grande taille) car les liens contribuant aux moments d'ordre n et 2 (pour <G>) sont distincts et donc décorrélés. De même, $<G^n>$ suit la même variation que $<G>^n$. Nous en déduisons donc que:

$$L^{x(n)} = L^{y(n)-ny(2)} \qquad (2.2.98)$$

ou

$$x(n) = y(n) - n\, y(2) \qquad (2.2.99)$$

Inversement puisque x(2) = -y(2),

$$y(n) = x(n) - nx(2) \qquad (2.2.99')$$

Dans l'ensemble à courant constant nous pouvons calculer le spectre multifractal $f^*(\alpha^*)$:

$$\begin{aligned} \alpha^* &= \partial x(n)/\partial n = \partial y(n)/\partial n - y(2) \\ &= \alpha - y(2) \end{aligned} \qquad (2.2.100)$$

$$\begin{aligned} f^*(\alpha^*(n)) &= x(n) - n\alpha^* \\ &= y(n) - n\alpha \\ &= f(\alpha(n)) \end{aligned} \qquad (2.2.101)$$

Nous en déduisons ainsi que le nouveau spectre s'obtient à partir du premier par une translation de y(2) de l'axe α. Notons que dans l'ensemble à courant constant, x(n) tend, lorsque n tend vers l'infini, vers $1/\nu$, la dimension fractale des liens sensibles.

Le formalisme du spectre multifractal est tout à fait général et s'applique à de nombreuses situations physiques. Il a été introduit pour décrire certaines propriétés de systèmes turbulents en hydrodynamique [51], puis a servi à décrire la distribution de probabilité de croissance des sites périphériques d'amas d'agrégation limitée par diffusion, (DLA) [52],... En ce qui concerne la distribution des courants sur des fractals il existe quelques cas simples comme le réseau hiérarchique considéré par de Arcangelis et coll.[48], ou le tamis de Sierpinski [53], où la distribution des courants est aussi multifractale.

Même dans le cas de la percolation, qui pourtant est un cas relativement simple, de nombreuses questions restent ouvertes sur la limite du spectre. Exposons en particulier deux points fondamentaux.

Après avoir remarqué que les liens sensibles gouvernent le comportement du spectre pour la limite où l'ordre du moment tend vers l'infini, il est légitime d'essayer d'obtenir les exposants y(n) ou x(n) en se limitant aux "blobs" du squelette. Dans la limite thermodynamique, en effet, les liens sensibles ne doivent pas contribuer aux moments d'ordre fini.

Ceci a été appliqué [54] en ne calculant la somme des courants que sur les "blobs". Or, numériquement, il apparaît que ces moments suivent des lois de puissance avec la taille mais avec des exposants légèrement différents de ceux obtenus pour les moments bruts. Ceci suggère différentes explications:

a) Soit ces moments évalués sur ces blobs montrent des corrections d'échelle très apparentes en particulier pour les moments d'ordre élevé, alors on s'attend à ce qu'à la limite thermodynamique, on reconstruise des liens qui suivent la loi d'échelle des liens sensibles, mais que pour des systèmes de taille limitée, on observe numériquement un "déficit" apparent du nombre de ces liens.

b) Au contraire, les moments bruts sont emprunts de fortes corrections d'échelle qui font surestimer les exposants x(n) et y(n).

c) Cette différence n'est pas un artéfact numérique due à la taille finie des réseaux considérés, mais traduit l'existence d'une singularité isolée dans le spectre multifractal global: dans ce cas, il n'existerait pas de liens correspondant à un intervalle fini $[\alpha_1, \alpha_{max}]$ de valeur de α, (ou pour être plus précis, les valeurs de $f(\alpha)$ dans cet intervalle seraient strictement inférieures à celles obtenues en prenant l'enveloppe convexe du spectre) et donc les exposants apparaissant dans les lois d'échelle des moments de blobs seraient des corrections d'échelle pour les lois d'échelle des moments bruts. Les spectres correspondants auraient alors l'allure indiquée dans la figure 2.23.

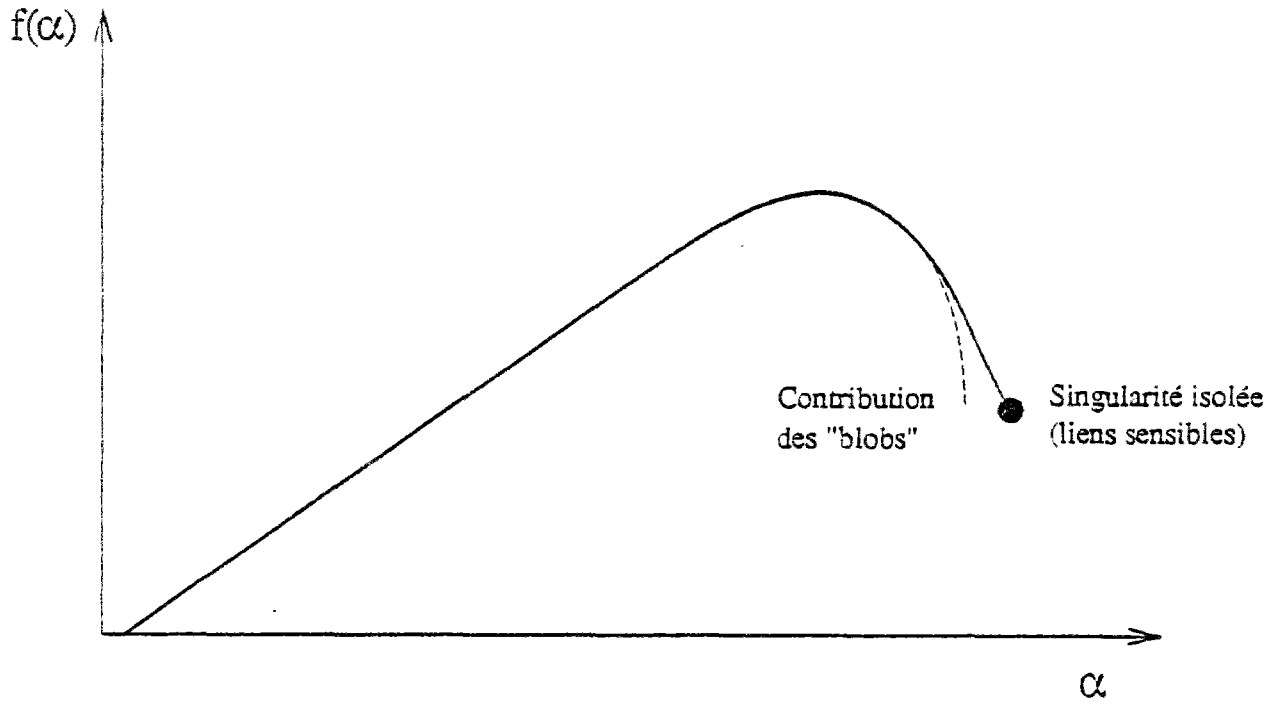


Figure 2.23 : Allure hypothétique du spectre multifractal due aux "blobs" (courbe pointillée) et contribution des liens sensibles (point). Le spectre complet sera alors l'enveloppe convexe des deux éléments (courbe pleine).

Le choix entre ces différentes possibilités est aujourd'hui impossible tant par des simulations numériques que théoriquement.

Une autre question importante concerne la loi d'échelle des moments d'ordre négatif [24]. Cette question est importante pour les phénomènes physiques sensibles à des faibles courants. Tel est le cas par exemple du problème de la convection-diffusion de traceurs dans un milieu poreux dont la géométrie est de type percolation. En effet, une fois piégée dans des zones à faibles débits, le traceur doit s'extraire par diffusion moléculaire, ce qui pénalise d'autant le temps moyen de transit dans le réseau. Or ce temps est , dans les canaux où le nombre de Péclet est plus grand que 1, proportionnel à l'inverse du débit (soit un moment pondéré d'ordre -1)[55]. On peut également citer le cas du bouchage de filtres par dépôt, où l'obstruction de pores de faible débit est favorisée.

Or si maintenant l'on observe les histogrammes remis à l'échelle du courant dans l'amas infini (fig.2.21), nous remarquons que la partie du spectre correspondant aux zones froides (moments négatifs, et donc pentes positives de l'histogramme), se comporte assez "mal". Le spectre a alors l'allure d'une loi de puissance sur plusieurs décades et ce, à une taille fixée, ce qui suggère plutôt l'existence d'une singularité isolée, plutôt que d'un spectre plein. En effet, la fonction $f(\alpha)$ est toujours convexe et donc comme dans le cas précédent, (hypothèse c), le spectre observable sera l'enveloppe convexe éventuellement d'une série de singularités isolées (voir figure 2.24). C'est donc l'existence de lignes droites dans le spectre qui rend possible la présence de singularités isolées. Une autre conséquence de ceci est que si nous nommons p la pente de la droite, les moments d'ordre supérieur à -p, seront gouvernés par la partie droite du spectre, (après la portion linéaire) et les moments d'ordre inférieur à -p seront, eux, sensibles exclusivement à la partie gauche du spectre. A -p, existe donc une discontinuité, en particulier dans la relation $\alpha(n)$ (pour $n = -p$). Mais de plus, la pente de la droite du spectre, correspondant aux moments d'ordre négatif, change (diminue) avec la taille du système. Or ceci est le signe que la propriété observée n'est pas caractéristique du

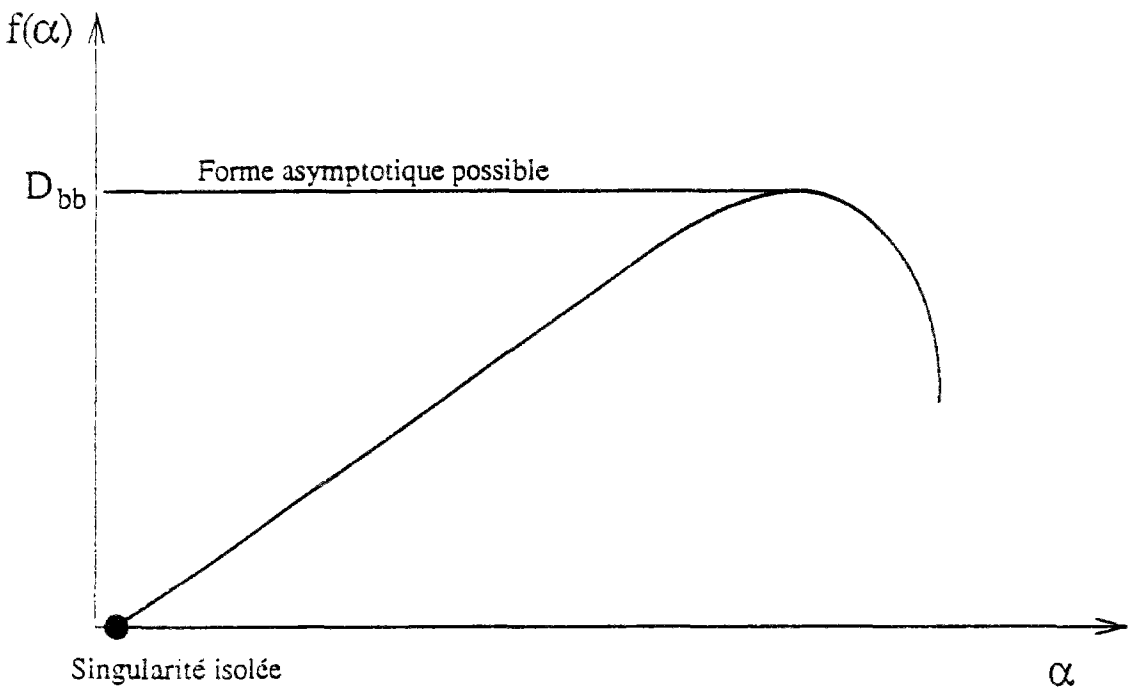


Figure 2.24 : Allure hypothétique du spectre multifractal pour un système de taille finie. Lorsque la taille du système augmente la singularité "froide" se déplace vers la gauche eventuellement sans limite, rendant ainsi le spectre asymptotique plat à gauche du maximum de la courbe.

système dans la limite thermodynamique. En effet, on s'attend alors à ce que $f(\alpha)$ soit indépendant de la taille du système. Ceci suggère qu'éventuellement, la singularité "froide" soit en fait asymptotiquement rejetée à moins l'infini (cf. Fig.2.24).

Si tel était le cas, il est évident que pour tout système de taille finie, le spectre aurait l'allure vue numériquement, car un tel spectre plat, avec une densité constante de α égal à moins l'infini, jusqu'à un α fini, ne serait pas sommable et donc ne correspondrait à aucune distribution. Si la limite éventuelle de $\alpha = -\infty$ pour la singularité __ soit une pente nulle à la gauche du maximum du spectre__ n'est toujours qu'une conjecture, il n'en demeure pas moins que la singularité existe et qu'une discontinuité de la relation $\alpha(n)$ apparaît pour une valeur de n négative et supérieure à -0.5 (cf. la référence [48]).

Très récemment, un comportement similaire, (spectre plat pour les ordres de moments négatifs) a été suggéré dans le cas de la distribution de probabilité de croissance d'amas de diffusion limitée par diffusion [56].

Deux autres arguments militent en faveur de l'occurence d'un spectre plat pour les valeurs négatives de l'ordre des moments. D'une part, nous avons noté que sur réseaux, il existe des liens parfaitement équilibrés, donc traversés par un courant nul, bien qu'ils appartiennent au squelette géométrique. S'il fallait replacer ces liens sur le spectre multifractal, ils correspondraient évidemment à un point isolé, de coordonnées $\alpha = -\infty$ et $f = D_{bb}$ (la dimension fractale du squelette puisque nous avions noté que leur masse suivait la même loi d'échelle que le squelette lui-même). Or, utilisant le fait que le spectre est nécessairement convexe, et que son maximum est atteint pour le moment d'ordre 0 et vaut alors $f(\alpha(n = 0)) = D_{bb,}$ cela conduit à prolonger le spectre à gauche du maximum par une horizontale jusqu'à l'infini. Mais évidemment, les liens parfaitement équilibrés doivent être exclus des liens sur lesquels les moments sont calculés pour donner un sens aux moments négatifs. Cependant, il n'est pas exclus que ces liens soient "reconstruits" progressivement lorsque la taille du système augmente de façon à reproduire une limite universelle. Ceci se traduirait effectivement par la diminution progressive de la pente de la partie linéaire du spectre.

Les liens parfaitement équilibrés n'ont de sens que lorsque les valeurs des résistances des liens conducteurs sont toutes identiques. Dans tout milieu réaliste, cette condition est bien sûr inconcevable. Mais d'autre part, nous nous attendons ici à ce que les propriétés d'échelle ne soient pas sensibles à la présence d'une telle dispersion de valeurs (lorsque celle-ci est faible). En conséquence, il serait intéressant d'étudier la modification éventuelle du spectre induite par une faible fluctuation des conductances locales. Incidemment, c'est par une telle procédure qu'ont été identifiés numériquement les liens exactement équilibrés dans l'étude de la référence [24].

Un deuxième argument réside dans une redéfinition d'un nouvel ensemble. Nous avions vu précédemment, l'ensemble à potentiel constant et l'ensemble à courant constant, nous introduisons maintenant l'ensemble où un moment donné d'ordre m est choisi constant, et donc de réalisations à réalisations, le potentiel extérieur est adapté de façon à reproduire ce moment $\mathcal{M}_m$ constant. Si nous fixons un tel moment, d'ordre négatif, constant, alors nous pouvons observer les lois d'échelle des moments d'ordre voisin avec une grande précision. Une telle procédure [24] conduit à observer un spectre dont la singularité froide est maintenant fixe, et elle correspond effectivement à une valeur de f proche de 0, alors que la partie "chaude" du spectre est translatée vers la droite lorsque la taille du système augmente. Ceci est encore en accord avec la conjecture du spectre plat, puisqu'alors nous nous attendons à ce que progressivement, le spectre s'éloigne vers la droite, jusqu'à plus l'infini.

Concluons ce paragraphe en rephrasant encore cette conjecture en de nouveaux termes. La partie froide du spectre sera horizontale à la limite thermodynamique, si le courant le plus froid (i_{min}) d'un réseau de taille L décroît plus vite que toute loi de puissance de L (e.g. comme une exponentielle de -L).

Ainsi, si l'allure globale de la partie positive du spectre est claire, des deux côtés extrêmes se posent des problèmes fondamentaux dont la compréhension n'est pas aujourd'hui parfaite.

- 2.3 Transport scalaire. Problèmes assimilés

La solution d'un problème de conductivité sur un réseau de percolation peut être vue sous la forme de la résolution de l'équation de Laplace sur un objet fractal. Ceci peut être justifié de deux points de vues. Le premier consiste à observer que en toutes dimensions d'espace, la solution en potentiel V d'un problème de conductivité est solution de l'équation de Laplace

$$\Delta V = 0, \qquad (2.3.1)$$

et, par généralisation, il en va de même sur l'amas infini au seuil de percolation, qui est bien un objet fractal. La seconde justification provient de la discrétisation sur réseau dégradé de l'opérateur laplacien. Le potentiel en chaque site est la moyenne arithmétique du potentiel sur les sites adjacents (reliés au site initial par un lien présent). Toutes les propriétés des fonctions harmoniques peuvent donc se traduire sur le problème de percolation. On pourra ainsi définir des fonctions de Green, par exemple, dont les propriétés moyennes seront semblables à celles que l'on obtient dans un espace euclidien [57]. Nous pourrons aussi définir les fonctions propres de l'opérateur laplacien:

$$\Delta\varphi = l\,\varphi \qquad (2.3.2)$$

qui nous permettra de donner les modes de vibrations propres de sructures fractales et d'introduire la notion de fractons, (analogue de phonons) ou modes localisés. Citons donc les principaux types de problèmes considérés ci-dessous :

- Diffusion : $\partial\varphi / \partial t = \Delta\varphi$
- Vibration : $\partial^2\varphi / \partial t^2 = \Delta\varphi$
- Jonctions Josephson: $\Delta\varphi = \psi$

- Diffusion

L'un des problèmes les plus importants reliés directement au cas du transport scalaire étudié précédemment, concerne le problème de la diffusion [58]. La correspondance entre l'équation de Laplace et le phénomène de diffusion est en effet bien connu, par exemple sous la forme de la relation d'Einstein.

Dans un milieu Euclidien, considérons une marche aléatoire sans biais. Soit N le nombre de pas de la marche, et R(N) la distance entre le point de départ et le point d'arrivée de la marche. Il est bien connu que :

$$<R(n)^2> \propto N \qquad (2.3.3)$$

Le même processus peut aussi être étudié sur un milieu de géométrie fractale. Alors, la relation précédente est modifiée et prend la forme [59]:

$$<R(n)^2> \propto N^{2/Dw} \qquad (2.3.4)$$

où D_w est un exposant caractéristique généralement supérieur à 2 . La diffusion est alors ralentie par la présence de bras morts, de passages obligés (liens sensibles) et autres tortuosités. Ce phénomène est appelé *"diffusion anormale"* de par la présence d'un exposant D_w différent de 2.

La diffusion anormale est un phénomène caractéristique du milieu fractal sur lequel il a lieu. Nous rencontrons donc ce phénomène sur l'amas infini de percolation. (La valeur de D_w est donnée dans la table 1 pour la percolation).

Considérons le problème suivant : Soit $C_i(t)$ la concentration en une substance diffusante au site i en fonction du temps t. Résolvons en chaque noeud i l'équation :

$$\partial C_i(t) / \partial t = \Sigma_j \; g \, \delta_{ij} \, (C_i(t)-C_j(t)) \qquad (2.3.5)$$

où g est une constante de diffusion, δ_{ij} vaut 1 si le lien i-j est présent et 0 sinon. Les conditions aux limites sont de deux types : sur un bord du réseau, A, nous imposons un flux d'entrée sous la forme d'une impulsion de Dirac en temps, et sur le bord opposé, B, une condition de puits (C=0). Alors par transformée de Laplace sur le temps, nous obtenons :

$$-s \, \underline{\underline{C}}_i(s) = \Sigma_j \; g \, \delta_{ij} \, (\underline{\underline{C}}_i(s)-\underline{\underline{C}}_j(s)) \qquad (2.3.6)$$

où s représente la variable conjuguée du temps. Les conditions aux limites sont alors un courant unité injecté en A et une concentration nulle en B. Soit $\underline{\underline{J}}$ (s) le courant de sortie en B. Nous pouvons le developper en série de s pour obtenir :

$$\underline{\underline{J}}(s) = a - b \, s + O(s^2) \qquad (2.3.7)$$

Par conservation de la matière a vaut simplement 1 (puisque un courant unité a été injecté), et b vaut alors simplement <t>, la valeur moyenne du temps nécessaire à la diffusion de A à B [60]. La référence [61] montre l'évolution de <t> en fonction de la distance L entre entrée et sortie. On observe bien une relation similaire à l'Eq.(2.3.4) sous la forme

$$\langle t \rangle \propto L^{Dw} \qquad (2.3.8)$$

La présentation ci-dessus du problème peut être vue comme décrivant un réseau aléatoire de résistances au seuil de percolation, où les sites sont connectés à la

masse par un condensateur [62]. La diffusion anormale traduit alors le *ralentissement critique* de la propagation d'un signal dans ce réseau.

La formulation en termes de réseaux de résistances et de capacités a permis d'étudier le phénomène de diffusion anormale par l'évolution de l'impédance complexe $Z(\omega)$ en fonction de la fréquence ω. Cette étude a été réalisée sur un réseau réel [63] et a montré le régime de diffusion anormale sur plusieurs décades.

Ce ralentissement critique est tout à fait générique des transitions de phase, où les fluctuations qui ont lieu sur des distances de plus en plus grandes au fur et à mesure que l'on se rapproche du point critique, entrainent une dynamique très lente.

Il est intéressant de remarquer que la discrétisation en temps de l'équation (2.3.5) nous autorise à faire le lien avec un autre phénomène de relaxation à dynamique très lente : La relaxation numérique (dite de Jacobi) qui permet la résolution des potentiels en chaque noeud d'un réseau aléatoire de résistances , suit très exactement l' Eq.(2.3.5) discrétisée en temps. Ainsi l'on comprend que le problème purement numérique de la résolution des potentiels au seuil de percolation est aussi sujet au ralentissement critique au seuil de percolation [64]. La quantité $C(t)$ peut être vue comme l'erreur par rapport à la solution exacte $C(t=\infty)$. Ceci a conduit dans les premières études numériques de la conductivité à sous-estimer le temps nécéssaire à la convergence du calcul. Ainsi, les premières déterminations de t (de 1.0 à 1.1) furent-elles très inférieures à ce que l'on considère être sa valeur aujourd'hui (1.300).

Notons que, malgré tout, la compréhension de ce biais numérique a permis depuis de mettre au point des algorithmes de relaxation qui évitent au moins partiellement ce ralentissement critique [64, 65], par accélération "forcée" par transformée de Fourier, ainsi que des méthodes qui sont dépourvues de cette tare (matrice de transfert [26, 27], transformations triangle-étoile [30],...).

D'autres versions de ce problème existent , comme par exemple la célèbre "fourmi dans le labyrinthe" suggérée par de Gennes [66] où la diffusion est réellement éxécutée par des marches aléatoires dans le labyrinthe que constitue l'amas infini de

percolation [67]. Ceci représente un moyen très rapide de résoudre le problème [68] bien que cependant l'on superpose deux sources de fluctuations: la géométrie du réseau de percolation d'une part et la marche aléatoire de chaque "fourmi" d'autre part.

La relation entre l'exposant D_w et les autres exposants que nous avons considérés jusqu'à présent, peut être obtenue par la relation d'Einstein [59]. Rappelons-la dans sa forme originale. Elle relie la conductivité Σ à la constante de diffusion D par

$$\Sigma = q^2 n D / kT \qquad (2.3.9)$$

où n est la densité de porteurs de charge q. D est d'autre part relié à la loi précédente par :

$$D = \langle R^2(N) \rangle / N \qquad (2.3.10)$$

pour grand N. Juste au seuil de percolation, nous avons vu que Σ variait avec la taille du système L selon

$$\Sigma \propto L^{-t/\nu} \qquad (2.3.11)$$

La densité de porteurs, n, est uniforme sur l'amas infini, soit :

$$n \propto L^{Df-d}$$
$$\propto L^{-\beta/\nu} \qquad (2.3.12)$$

Identifiant $\langle R^2(N) \rangle^{1/2}$ à la distance L, nous obtenons

$$L^{-t/\nu} \propto L^{-\beta/\nu} L^2 / N \qquad (2.3.13)$$

soit

$$N \propto L^{2+t/\nu-\beta/\nu} \qquad (2.3.14)$$

ou

$$D_w = 2+(t-\beta)/\nu$$
$$= D_f+\zeta \qquad (2.3.15)$$

Une notation aussi fréquemment rencontrée consiste à noter θ l'écart de D_w par rapport à sa valeur usuelle 2: $D_w= 2+\theta$

Il existe beaucoup de variations sur le thème de la diffusion en adjoignant éventuellement un biais aux marches aléatoires. Ce biais pouvant être soit externe (Champ constant extérieur) ou suivant les conformations du réseau : champ convectif proportionnel à l'intensité d'un courant dans un milieu poreux modèle (réseau de capillaire) de même géométrie [60, 69], biais suivant le plus court chemin du point courant au point d'arrivée [69]... Nous n'aborderons pas ces différents problèmes ici, et nous renvoyons le lecteur intéréssé par ces questions aux différentes revues référencées : pour l'aspect diffusion sur les fractals [58] et pour l'aspect dispersion hydrodynamique sur des géométries hétérogènes [71].

- Vibrations

Toujours en relation avec le problème de la conductivité électrique, nous considérons maintenant le problème des vibrations sur la structure [72]. Pour l'instant, nous nous restreignons au cas scalaire. Soit donc un champ scalaire $V_i(t)$ satisfaisant en chaque site i la relation

$$\partial^2 V_i(t) / \partial^2 t = \Sigma_j \, g \, \delta_{ij} \, (V_i(t)-V_j(t)) \qquad (2.3.16)$$

où δ_{ij} vaut 1 ou 0 selon que le lien i-j est respectivement présent ou absent. Par une transformation de Fourier sur le temps t, nous obtenons une équation aux valeurs

propres pour l'opérateur laplacien discrétisé sur notre réseau de percolation. Cette équation est très voisine du cas précédent, où la dérivée seconde en temps était alors une dérivée première.

Quelle est la forme de la densité spectrale ? Pour répondre à cette question, nous utiliserons l'argument [73] qui relie la densité d'états $\mathcal{N}(\varepsilon)$ à la probabilité de retour à l'origine, P(0,N), d'une marche aléatoire de N pas :

$$P(0,N) = \int \mathcal{N}(\varepsilon) \exp(-\varepsilon N) \, d\varepsilon \qquad (2.3.17)$$

(obtenue par transformée de Laplace). Or, sur un milieu fractal comme l' amas infini de percolation, après N pas, une marche aléatoire a visité un nombre, M, de sites proportionel à R^{Df} et où R est proportionnel à :

$$R \propto N^{1/Dw} \qquad (2.3.18)$$

soit

$$M \propto N^{Df/Dw} \qquad (2.3.19)$$

La probabilité de retour à l'origine est donc de l'ordre de 1/M

$$P(0,N) \propto N^{-Df/Dw} \qquad (2.3.20)$$

soit

$$\mathcal{N}(\varepsilon) \propto \varepsilon^{Df/Dw-1} \qquad (2.3.21)$$

Utilisant maintenant le fait que sur un espace Euclidien de dimension d, la relation précédente est la relation classique :

$$\mathcal{N}(\varepsilon) \propto \varepsilon^{d/2-1} \qquad (2.3.22)$$

cela engage à proposer une nouvelle dimension, appelée dimension spectrale, D_S, telle que

$$D_S = 2 D_f / D_w \qquad (2.3.23)$$
$$D_S = 2 D_f / (D_f + t/\nu + 2 - d)$$

qui décrit une dimension effective pour l'opérateur de Laplace. Ainsi en fonction de la pulsation ω,

$$\mathcal{N}(\omega) \propto \omega^{Ds-1} \qquad (2.3.24)$$

Comme on peut le constater sur la table 2, la valeur de D_S est très proche de 4/3 en toute dimension. Ceci a amené Alexander et Orbach [72] à suggérer comme conjecture une telle relation. Ceci a bien sur pour conséquence de relier l'exposant dynamique t aux exposants purement géométriques par :

$$t = \nu (2 (D_f / D_S) - D_f + d - 2) \qquad (2.3.25)$$

ou utilisant $D_S = 4/3$:

$$t = \nu ((D_f / 2) + d - 2) \qquad (2.3.26)$$

ou encore

$$\zeta = (D_f / 2) \qquad (2.3.27)$$

Malheureusement, de nombreuses études très soignées [26-31] ont tenté de tester cette conjecture et ont montré que, bien que très voisine de la vérité, cette conjecture n'était pas exacte. A deux dimensions, l'erreur commise est de l'ordre de 3%.

Par analogie avec la distribution du spectre de vibration d'un solide usuel, et le concept de phonon, Alexander et Orbach ont introduit le mot de fracton [72] pour

qualifier les états propres du laplacien sur une structure fractale. Une caractéristique fondamentale des fractons est qu'ils représentent des modes non propagatifs. Les fractons sont localisés sur l'amas infini dès que $D_S<2$. De façon plus précise, l'enveloppe des amplitudes de vibration d'un état propre donné, doit s'évanouir à une distance r du centre comme une hyperexponentielle :

$$A(r) \propto (1/r^{(d-Df)}) \exp(-r^{\alpha}) \qquad (2.3.28)$$

De nombreuses valeurs de l'exposant α (voir e.g. [74]) ont été proposées. Il est borné par les exposants 1 et D_{min}. Cependant la valeur précise de α est toujours une question très débattue, et une étude numérique récente [75] suggère un exposant α très différent de toute attente. Il existe une vaste littérature qui explore en particulier la transition fracton-phonon, ainsi que les relations de ce problème avec la diffusion. Mentionons simplement un bref mais clair article de revue par Orbach [76].

Enfin le système expérimental sur lequel ce phénomène a été le plus étudié est assurément les aérogels de silice [77].

- Jonctions Josephson

Considérons un réseau formé de liens supraconducteurs (avec une probabilité p) et normaux (probabilité (1-p)). Supposons de plus que les liens supraconducteurs consistent en deux parties supraconductrices jointes par une jonction Josephson. (Un tel modèle a récemment été suggéré à propos des nouveaux composés supraconducteurs à hautes températures critiques [78]) L'ensemble du réseau est plongé dans un champ magnétique B uniforme et constant, qui dérive d'un potentiel-vecteur A. Appelons φ_i la phase de la fonction d'onde au site i. Soit δ_{ij} une variable de valeur 1 lorque le lien i-j est supraconducteur, et 0 lorsqu'il ne l'est pas. L'Hamiltonien, H, du système peut alors être écrit sous la forme :

$$H = \Sigma_{ij}\ \delta_{ij} \cos(\ \varphi_i - \varphi_j - A_{ij}) \qquad (2.3.29)$$

où A_{ij} est la circulation du potentiel vecteur A sur le lien i-j. Dans la mesure où le champ magnétique est faible, il est possible de linéariser la loi de comportement et donc d'obtenir la forme quadratique suivante :

$$H = -1/2\ \Sigma_{ij}\ \delta_{ij}\ (\varphi_i - \varphi_j - A_{ij})^2 \qquad (2.3.30)$$

L'énergie, E, du système est donnée par la minimisation de -H sur les variables de phase φ. La dérivée seconde de cette énergie par rapport au champ B nous permet de définir la susceptibilité diamagnétique du réseau, χ, par la relation :

$$\chi = 1/S\ \ (\partial^2 E / \partial B^2) \qquad (2.3.31)$$

où S est la surface totale du réseau.

Dans l'approximation linéaire, le courant circulant dans le lien i-j vaut :

$$J_{ij} = \delta_{ij}\ (\varphi_i - \varphi_j - A_{ij}) \qquad (2.3.32)$$

Nous pouvons donc identifier ce problème avec un réseau aléatoire de résistances, où φ_i joue le rôle de potentiel, et A_{ij} représente un terme de source de différence de potentiel . L'energie est alors l'énergie totale dissipée dans le réseau par effet Joule. Une telle formulation rend transparente la correspondance avec le problème étudié précédemment.

Nous nous intéressons ici au comportement critique de la susceptibilité χ au seuil de percolation. Soit b l'exposant critique défini par :

$$\chi \propto (p-p_c)^{-b} \qquad (2.3.33)$$

Le problème a été considéré pour la première fois par de Gennes [79] et on lui attribue la conjecture suivante

$$b = 2\nu - t \qquad (2.3.34)$$

Le problème a ensuite été reconsidéré par Rammal, Toulouse et Lubensky [80] qui, après avoir résolu le problème sur un Tamis de Sierpinski, ont suggéré par analogie une relation différente

$$b= 2\nu + \beta - t \qquad (2.3.35)$$

Si la différence entre les deux prédictions est faible à deux dimensions (où β =0.13), elle devient tout à fait conséquente à trois dimensions : en effet, selon la première relation, $b < 0$, et donc la susceptibilité s'annule au seuil de percolation, alors qu'avec la seconde suggestion, $b>0$ et donc χ diverge. Différentes simulations numériques de ce problème ont été publiées [81, 82], aucune ne semblait trancher entre les deux propositions.

La formulation en termes de réseaux de résistances rend facile la transcription d'algorithme adaptée à l'étude numérique de ce problème. Ainsi par une méthode de matrice de transfert, nous avons obtenu [83] à deux dimensions un résultat en excellent accord avec la conjecture de de Gennes, $b = 2\nu - t$. Quelle est la raison pour laquelle cette relation est valable pour un réseau de percolation, et non pour un fractal déterministe comme le tamis de Sierpinski ? En fait la raison est simple : Sur un réseau de percolation, tous les amas, même finis, contribuent à la susceptibilité diamagnétique, la densité n'est donc pas critique, alors que sur un fractal déterministe comme le tamis de Sierpinski, on ne considère que la contribution donnée par un objet fractal. Ainsi

donc, considérant exclusivement l'amas infini de percolation, la réponse attendue est une divergence de la susceptibilité avec un exposant b' où

$$b'=b+\beta \qquad (2.3.36)$$

soit en fait la prédiction de Rammal, Toulouse et Lubensky. Les deux conjectures sont donc correctes mais ne se rapportent pas exactement au même problème. Quoiqu'il en soit, la situation expérimentale usuelle consiste à étudier un réseau global et non pas à extraire l'amas infini, dans ce cas la prédiction de de Gennes est donc correcte.

Nous pouvons retrouver ces conjectures de la façon suivante : Le terme A_{ij} qui joue le rôle de source de potentiel, provient de la circulation du potentiel vecteur, or pour obtenir un champ magnétique uniforme, il faut que A varie linéairement en l'une des coordonnées spatiales. Supposons à deux dimensions que A soit linéaire en x. L'énergie correspondant à une source de potentiel unique ponctuelle est proportionnelle à la conductance du système, et au carré de la différence de potentiel. Nous intéressant simplement à la loi de variation de l'énergie avec la taille du système au seuil de percolation, nous pouvons sommer les énergies correspondant à chaque source (attention : les énergies ne peuvent être additionnées *stricto sensus*, il faut en toute rigueur prendre en compte les énergies mutuelles, cependant nous utilisons ici cette sommation de façon à n'obtenir que la loi d'échelle de E, et non une égalité stricte, et dans ce cas, la réponse fournie par l'argument est correcte) . Pour un réseau carré de taille L, utilisant le fait que la conductance varie comme $L^{-t/\nu}$ nous obtenons :

$$E \propto B^2 L^{-t/\nu} \left(\iint x^2 \, dx \, dy \right) \qquad (2.3.37)$$

soit

$$\chi \propto L^{-t/\nu} \left(\iint x^2 \, dx \, dy \right) / \left(\iint dx \, dy \right) \qquad (2.3.38)$$

$$\chi \propto L^{-t/\nu} \, L^2 \qquad (2.3.39)$$

or

$$\chi \propto L^{b/\nu} \qquad (2.3.40)$$

donc

$$b = 2\nu - t \qquad (2.3.41)$$

ne prenant en compte que l'amas infini, nous aurions dû remplacer l'intégrale de surface au dénominateur de l'Eq.(2.3.38) par la surface de l'amas infini, et donc nous aurions eu un terme de densité supplémentaire $L^{-\beta/\nu}$ au dénominateur soit pour l'exposant b la seconde conjecture.

La conjecture de de Gennes vient récemment d'être démontrée par des arguments issus de la théorie des champs [84].

Il est possible de pousser l'étude de ce problème un peu plus loin, en effet, il est légitime de se demander si la linéarisation est appropriée, au voisinage du seuil. Même si le champ B est faible, localement, nous pouvons observer des courants intenses, car la taille des boucles diverge au seuil et donc la source de potentiel cumulée le long d'une boucle (i.e. le flux du champ B à travers elle) va diverger également. Il s'ensuit que la plage linéaire exprimée en terme de champ magnétique, s'évanouit au seuil de percolation. Ce phénomène est par ailleurs extrèmement général : les non-linéarités du système sont toujours critiquement amplifiées au seuil de percolation, ce qui pose rapidemment des problèmes dans la mesure de propriétés critiques au voisinage immédiat du seuil de percolation.

La référence [85] étudie plus particulièrement cet aspect de la question, ainsi que la structure multifractale du problème linéaire, et les relations entre ces deux points.

- Résistances non-linéaires

Toujours dans le voisinage des réseaux aléatoires de résistances, nous pouvons citer le cas des résistances non-linéaires étudiées en grand détail et par différents outils dans les références [86-88]. Plus précisément, considérons des dipôles électriques passifs, tels que la relation entre potentiel et intensité à ses extrémités et le courant i qui les traverse est de la forme

$$v = r\, i^{\alpha} \qquad (2.3.42)$$

où α est un exposant caractéristique. Au seuil de percolation, la résistance globale d'un réseau suivra la loi critique :

$$R \propto (p-p_c)^{-t(\alpha)} \qquad (2.3.43)$$

où $t(\alpha)$ est une famille d'exposants qui dépend de α. Bien sur, nous retrouvons le cas usuel pour $\alpha=1$, $t(1)=t$. Nous voyons donc apparaître une nouvelle série infinie d'exposants qui rappellent la hiérarchie d'exposants rencontrée dans la cas multifractal [87]. Elle est cependant d'une tout autre nature car ici, un seul exposant de la famille $t(\alpha)$ est considéré pour chaque valeur de α alors que la famille précédente x(n) ou y(n) était engendrée par différents moment d'une seule et même distribution.

Le paramètre α permet de donner différents poids aux différents chemins qui relient les deux électrodes, comme on peut le voir en calculant la résistance totale, R, d'éléments en série ou en parallèle. Il est façile d'obtenir les règles de composition suivantes pour deux résistances r_1 et r_2 disposées en :

série : $$R = r_1 + r_2 \qquad (2.3.44)$$

parallèle : $$R = \{ (1/r_1)^{1/\alpha}+(1/r_2)^{1/\alpha}\}^{-\alpha} \qquad (2.3.45)$$

Nous pouvons alors considérer les cas limites suivants : Lorsque α tend vers 0^+, alors la règle de composition de chemins en parallèle devient :

$$\{ (1/r_1)^{1/\alpha}+(1/r_2)^{1/\alpha}\}^{-\alpha} \rightarrow \min(r_1, r_2) \qquad (2.3.46)$$

Ainsi la résistance totale du réseau devient simplement égale à la longueur du plus court chemin entre électrodes, et donc

$$t(\alpha) \rightarrow \nu(D_{min}) + \nu (d-2) \qquad \alpha \rightarrow 0^+ \qquad (2.3.47)$$

Le courant, dans cette limite, n'emprunte que le plus court chemin et, si nous considérons le squelette , nous trouvons qu'il a une dimension fractale de D_{min}. De fait, l'ensemble du spectre multifractal que l'on peut construire à partir de la distribution des courants est réduit à un point unique d'ordonnéè D_{min}. Pour toute autre valeur finie non nulle de α, la dimension du squelette reste fixe à sa valeur usuelle D_{bb}.

Lorsque α tend vers plus l'infini, alors

$$\{ (1/r_1)^{1/\alpha}+(1/r_2)^{1/\alpha}\}^{-\alpha} \rightarrow (r_1 r_2)^{1/2} \qquad (2.3.48)$$

Il est dans ce cas plus judicieux d'introduire les conductances g telles que

$$i = g v^{1/\alpha}$$
$$g =(1/r)^{1/\alpha} \qquad (2.3.49)$$

car nous aurons les règles de compositions suivantes :

parallèle : $G=g_1+g_2$ (2.3.50)

série : $G=\{ (1/g_1)^{\alpha}+(1/g_2)^{\alpha}\}^{-1/\alpha}$ (2.3.51)

Ainsi, l'on voit que la conductance du réseau va tendre vers la conductance du plus petit élément en série et donc la conductance ne va être sensible qu'aux "étranglements" du réseau que constituent les liens sensibles. Soit

$$G \propto (p-p_c)^1 \quad (2.3.52)$$

et

$$t(\alpha) \rightarrow 1 + \nu (d-2) \qquad \alpha \rightarrow \infty \quad (2.3.53)$$

Il est donc remarquable de voir que ces résistances non-linéaires pour α positif permettent d'obtenir des réalisations physiques réelles des bornes que nous avions considérées pour l'exposant t dans la schématisation du superréseau (paragraphe 2.2.2)

Suivant l'exemple des références [88], nous pourrions continuer l'étude de ces réseaux pour les valeurs de α négatives et donc obtenir ainsi en particulier lorsque α tend vers 0 par valeurs inférieures, la notion de plus long chemin entre électrodes...Cependant, les cas où α est négatif sont non-physiques et n'ont d'intérêt ici que par symétrie par rapport au cas α positif.

Au contraire, les cas où α est positif se rencontrent asssez naturellement, par exemple lorsque l'on considère un fluide non-Newtonien dans un milieux poreux, ou dans le cas élastique, lorsque les liens du réseau représente des contacts élastiques de Hertz...

- 2.4 Transport vectoriel, Elasticité

- Symétries

Nous suggérons au lecteur ayant quelques notions de résistance des matériaux de passer directement au paragraphe suivant.

Nous allons introduire maintenant le modèle le plus simple (mais faux) à partir duquel on peut décrire le comportement élastique d'un réseau. Il s'agit du modèle de Born. On peut le présenter de façon extrèmement simple à partir du réseau de résistances que nous avons considéré précédemment. Maintenant, au lieu de traiter de potentiels (scalaires), nous devons prendre en compte les déplacements (vecteurs) de chacun des sites du réseau. Nous restreignons ici la discussion au cas bidimensionnel, bien que la généralisation à des dimensions supérieures soit tout à fait immédiate. Pour un lien unique i-j, nous définissons l'axe x le long du lien, et l'axe y perpendiculaire. Les déplacements des deux sites extrèmes sont (x_i,y_i) et (x_j,y_j). Appelons k_1 et k_2 les raideurs dans la direction axiale et transverse respectivement. L'énergie élastique d'un lien prend alors la simple forme suivante :

$$E=1/2 \{ k_1 (x_j-x_i)^2 + k_2 (y_j-y_i)^2 \} \qquad (2.4.1)$$

Ainsi la force à appliquer par exemple au site i pour obtenir les déplacements imposés vaudra :

$$F_x = \partial E/\partial x_i = k_1 (x_i-x_j) \qquad (2.4.2)$$

et

$$F_y = \partial E/\partial y_i = k_1 (y_i-y_j) \qquad (2.4.3)$$

Ce modèle est donc très proche du cas de la conduction électrique que nous avons considéré précédemment. Ceci est d'autant plus vrai que comme on le voit dans l'expression des forces ou de l'énergie, il n'y a aucun couplage entre les déformations axiales et transverses. Ce couplage est éventuellement introduit sur un réseau si les liens ne sont pas tous orthogonaux. Mais dans le cas d'un réseau carré, nous avons deux problèmes complètement découplés selon les deux directions principales du réseau.

Dans le cas d'un réseau carré au seuil de percolation, nous avons donc très simplement l'annulation du module élastique du réseau selon la même loi de puissance que pour la conductivité [18], i.e.:

$$K \propto (p-p_c)^t \qquad (2.4.4)$$

ainsi que la contrepartie pour le problème analogue du cas scalaire dual (liens infiniment rigides et élastiques normaux):

$$K \propto (p_c-p)^{-s} \qquad (2.4.5)$$

Il est légitime de se demander si ce résultat très simple n'est pas dû à la "pathologie" particulière du réseau carré. En fait, il n'en n'est rien, comme nous allons le montrer: supposons, par exemple, que $0 < k_1 < k_2$. Nous pouvons alors encadrer l'énergie élastique par les deux formes "sphériques" suivantes:

$$E \leq 1/2\, k_2\, \{(x_j-x_i)^2 + (y_j-y_i)^2\} \qquad (2.4.6)$$

$$E \geq 1/2\, k_1\, \{(x_j-x_i)^2 + (y_j-y_i)^2\} \qquad (2.4.6')$$

Considérons maintenant un réseau quelconque au voisinage du seuil de percolation sur lequel nous nous intéressons à l'une des deux formes sphériques de l'énergie élastique. Maintenons un bord du réseau fixe alors que le bord opposé est

astreint à une translation V. Dans ce cas, le déplacement de tous les sites du réseau se fera parallèlement à V. Le module du déplacement dans cette direction, en chaque site, peut être mis en correspondance avec un potentiel électrique, pour un réseau de géométrie identique et dont les liens ont une conductivité k_1 (ou k_2) selon la forme choisie de l'énergie (2.4.6) ou (2.4.6'). Ainsi le module élastique du réseau pour chacune des formes sphériques s'annulera selon (2.4.4). Compte-tenu de l'encadrement proposé, nous aurons pour la rigidité du modèle original (énergie donnée par (2.4.1)):

$$A\,(p-p_c)^t \leq k \leq A\,(k_2/k_1)\,(p-p_c)^t \qquad (2.4.7)$$

et ainsi nous en déduisons l'équation (2.4.4). Un argument tout à fait similaire peut être construit pour le problème dual.

Le problème du comportement du module élastique d'une structure au seuil de percolation est-il donc résolu ? Non! En effet la forme de l'énergie élastique n'est pas physique. En particulier si nous imposons une rotation rigide à un lien (et *a fortiori* pour le réseau), l'énergie élastique varie! En effet, si nous considérons une rotation d'angle θ supposé petit, autour du site i, au premier ordre, le délacement en i est nul et en j vaut $(0,\theta l)$ où l est la longueur du lien. Ainsi, l'énergie vaut:

$$E = 1/2\; k_2\, \theta^2 l^2 \qquad (2.4.8)$$

Et donc la seule forme admissible du modèle de Born est obtenu pour $k_2 = 0$. Ceci correspond précisément au cas d'un ressort ou d'une barre élastique articulée à ses extrémités [88]. Le réseau alors formé est un treillis élastique. L'argument que nous avons développé pour montrer le caractère critique du modèle de Born, s, s'applique encore dans la limite $k_2 = 0$, mais il donne alors un résultat trivial: l'énergie élastique est dominée par le cas scalaire correspondant mais en fait, cette énergie est strictement nulle au voisinage immédiat du seuil de percolation de connexité. La structure, tout en étant

connexe n'est pas généralement rigide. Ce cas sera étudié plus en détail dans le chapitre 3.

Cherchons maintenant à modifier l'Hamiltonien de façon à construire un modèle réaliste (i.e. invariant par rotation et translation) qui est critique au seuil de percolation de connexité.

- Réseaux de poutres

De façon à satisfaire l'invariance par rotation, il est nécessaire de considérer des variables supplémentaires. Nous décrirons le mouvement d'un site par un torseur rigide. Ainsi, nous aurons d variables de translation et d(d-1)/2 variables de rotation. A nouveau, considérons simplement le cas bidimensionnel. Pour un lien i-j, nous aurons des déplacements extrèmes, aux sites i: x_i, y_i et θ_i (rotation) et j: x_j, y_j et θ_j. A des fins de simplicité, nous noterons $z_i = \theta_i$ l au lieu de θ_i, ainsi toutes les composantes du déplacement seront homogènes à une longueur. Maintenant nous allons considérer la forme quadratique la plus générale possible qui décrive l'énergie élastique du lien i-j:

$$E = 1/2\ D^t\ C\ D \qquad (2.4.9)$$

où D est le vecteur $(x_i, x_j, y_i, y_j, z_i, z_j)$ et C_{kl} un tenseur 6x6 symétrique positif. C dépend donc de 15 paramètres. En fait l'utilisation de considérations de symétrie et d'invariance peut réduire considérablement le nombre de paramètres libres.

Supposons d'abord que le lien soit symétrique par rapport à son axe. Il s'ensuit dès lors que E doit être invariant dans la transformation qui à (x, y, z) associe (x, -y, -z). Alors C peut se décomposer en deux parties:

$$E = 1/2\ (X^t\ C'\ X + Y^t\ C''\ Y) \qquad (2.4.10)$$

où $X^t = (x_i, x_j)$ et $Y^t = (y_i, y_j, z_i, z_j)$. X et Y sont découplés. L'invariance par translation dans la direction x impose:

$$X^t C' X = a (x_i - x_j)^2 \qquad (2.4.11)$$

L'invariance par translation selon y impose l'invariance de E par rapport à la transformation $Y \rightarrow Y + (\alpha, \alpha, 0, 0)$, alors que pour l'invariance par rotation, nous considérons $Y \rightarrow Y + (0, \beta, \beta, \beta)$. Ceci impose:

$$C''_{k2} = -C''_{k1} \qquad (2.4.12)$$

et

$$C''_{k4} = C''_{k1} - C''_{k3} \qquad (2.4.13)$$

pour tout k. Tenant compte de la symétrie de C", nous avons encore trois paramètres libres pour C". Usant maintenant de la symétrie du lien par rapport à l'échange i j, nous imposons $C''_{33} = C''_{44}$. Il ne reste plus que deux paramètres libres que nous noterons b et c:

$$C'' = \begin{bmatrix} b & -b & b/2 & b/2 \\ -b & b & -b/2 & -b/2 \\ b/2 & -b/2 & c & b/2-c \\ b/2 & -b/2 & b/2-c & c \end{bmatrix} \qquad (2.4.14)$$

et

$$C' = \begin{bmatrix} a & -a \\ -a & a \end{bmatrix} \qquad (2.4.15)$$

Nous pouvons également exprimer l'énergie sous sa forme conjuguée avec les variables conjuguées de x (effort normal noté N), de y (effort tranchant noté T) et de θ (moment fléchissant noté M, ou utilisant la variable z, la variable conjuguée devient M/l où l est la longueur du lien) (Cf. Fig.2.25). Rappelons que les équations d'équilibre (qui

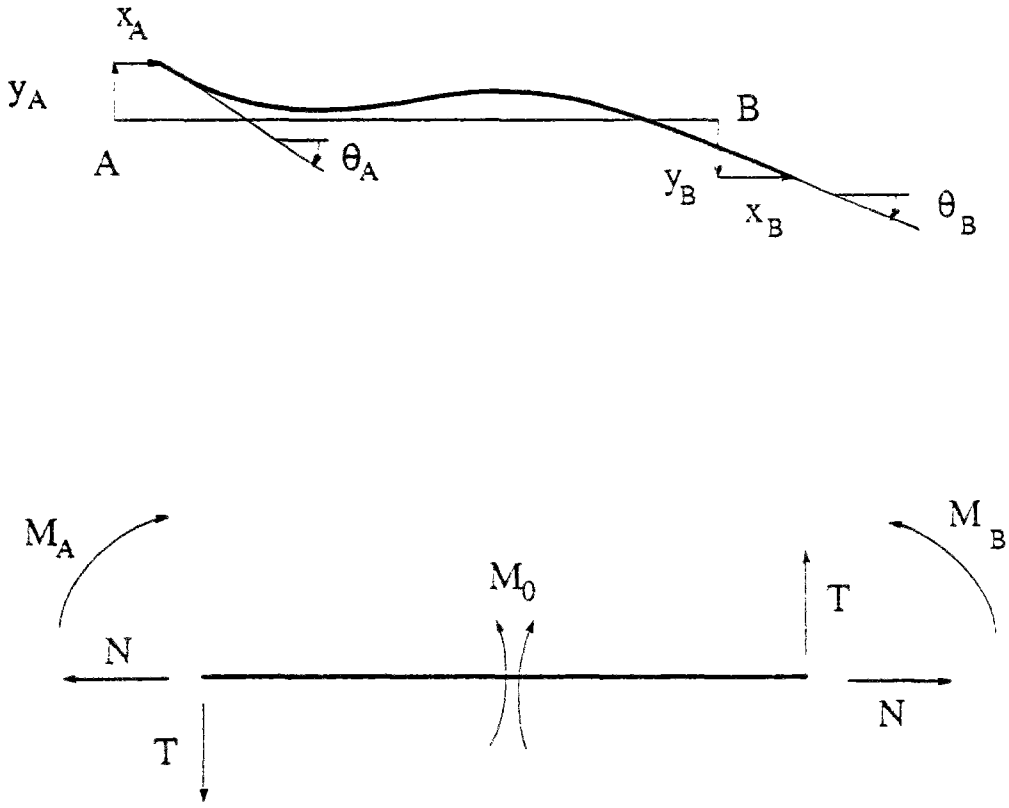


Figure 2.25 : Déformée d'une poutre élastique repérée par les trois coordonnées des déplacements aux extrémités (figure du haut) et efforts correspondants (figure du bas).

constituent une forme duale de l'invariance étudiée précédemment) imposent que N et T soient constants tout au long du lien, alors que M varie linéairement avec l'abscisse curviligne. L'énergie élastique prend alors la forme simple suivante :

$$2E = a' N^2 + b' T^2 + c' M_0^2 \qquad (2.4.16)$$

où M_0 est le moment fléchissant au milieu du lien (i.e. la demi-somme des moments aux extrémités).

Ainsi nous avons construit l'Hamiltonien le plus simple qui satisfait tant aux symétries du lien (qui ne joue en fait aucun rôle) qu'à l'invariance (quant à elle tout à fait fondamentale) dans toutes transformations rigides. En fait nous n'avons fait que retrouver la très classique théorie des poutres (Saint Venant) [89]. Le modèle physique auquel nous aboutissons est ainsi un réseau de poutres encastrées aux noeuds du réseau, de façon à ce que le déplacement d'un site soit identique pour tous les liens y aboutissant [90]. Il est clair que dès que la structure est connexe elle est aussi rigide, et donc les modules élastiques, K, de la structure doivent s'annuler exactement au seuil de percolation en suivant une loi de puissance

$$K \propto (p-p_c)^{\tau} \qquad (2.4.17)$$

où τ est l'exposant critique correspondant à t pour la conductivité électrique. Nous verrons que l'exposant τ est différent de t contrairement à ce que suggérait le modèle de Born.

Notons cependant que d'autres modèles physiques existent qui reproduisent un comportement élastique réaliste. En particulier, si, partant de la situation des treillis réticulés, nous adjoignons à chaque paire de liens ij, ik ayant un site commun, un ressort angulaire, nous obtenons alors l'Hamiltonien suivant [91]:

$$E = 1/2 \sum k_1 (x_j - x_i)^2 + 1/2 \sum K\Delta\theta_{ijk}^2 \qquad (2.4.18)$$

où $\Delta\theta_{ijk}$ est la variation d'angle formé par les liens ij et ik entre l'état déformé et l'état libre. Ce dernier hamiltonien donne trivialement les mêmes propriétés que le réseau de "poutres" mais il fait intervenir des termes à trois sites qui rendent plus compliqués certains calculs [92]. Le "squelette" élastique doit être redéfini en incluant les liens qui sont attachés au squelette usuel.

- Bornes sur l'exposant τ

Nous pouvons, pour le modèle des poutres, obtenir un encadrement similaire à celui obtenu sur l'exposant t dans la schématisation du super-réseau [91]. Encore une fois, nous sommes amenés à évaluer le module élastique du super-réseau à l'échelle ξ de la longueur de corrélation. L'ensemble du réseau est soumis à une contrainte σ et subit alors une déformation ε. La sollicitation typique d'un lien du super-réseau sera constitué de forces (effort normal et effort tranchant) dont l'ordre de grandeur sera typiquement:

$$f = \sigma \xi^{d-1} \qquad (2.4.19)$$

ainsi que de moments M (de flexion à deux dimensions et aussi de torsion pour des dimensions d'espace plus élevées) dont l'ordre de grandeur sera:

$$M = f \xi = \sigma \xi^d \qquad (2.4.20)$$

Nous voyons immédiatement que la divergence de la longueur de corrélation rend les moments dominants par rapport aux forces. Comme dans le cas précédent, nous pouvons encadrer le module élastique d'un super-lien par deux schématisations extrêmes. Dans la première, les blobs (puisqu'ils sont multiplement connectés) seront considérés

comme infiniment rigides, alors que les liens sensibles absorberons l'ensemble des déformations locales. Dans la seconde schématisation, au contraire, nous ne conserverons que le plus court chemin, en considérant comme infiniment "simple" le reste du squelette. Négligeant d'ores et déjà les déformations dûes aux efforts tranchants et normaux pour ne conserver que celles dûes aux moments, nous obtenons des rotations θ locales proportionnelles au moment M et au nombre de liens déformés, soit:

$$M\,\xi^{1/\nu} < \theta < M\,\xi^{Dmin} \qquad (2.4.21)$$

Ces rotations vont s'accompagner de déplacements d dont l'ordre de grandeur typique sera $D = \theta\,\xi$ puisque le rayon de giration transverse des macro-liens est aussi de l'ordre de ξ [93]. Réunissant ces différentes inégalités nous aurons finalement:

$$\sigma\,\xi^{d+1+1/\nu} \le D \le \sigma\,\xi^{d+1+Dmin} \qquad (2.4.22)$$

Soit une déformation $\varepsilon = D/\xi$:

$$\sigma\,\xi^{d+1/\nu} \le \varepsilon \le \sigma\,\xi^{d+Dmin} \qquad (2.4.23)$$

Le module élastique Y variant selon $(\Delta p)^{\tau}$, nous avons finalement

$$1 + \nu d \le \tau \le \nu\,(D_{min} + d) \qquad (2.4.24)$$

La table ci-dessous donne l'encadrement de τ selon la dimension de l'espace. Cette table est sujette aux mêmes commentaires que la table correspondante pour t.

d	1+ν d	τ	t+2ν	ν (D_{min}+d)
2	3.66	3.96	3.97	4.17
3	3.66		3.80	3.85
4	3.56		3.53	3.52
5	3.55		3.45	3.44
6	4	4	4	4

Il est immédiat que τ est très différent de t. Remarquons que l'encadrement de τ ainsi obtenu diffère très exactement de celui obtenu pour t d'un terme 2ν. L'origine de ce terme supplémentaire est clair dans les schématisations proposées ci-dessus. En effet, un premier facteur ξ vient de la "traduction" de forces en moments et un second de la "traduction" de rotations en déplacements. Hormis ces deux opérations, le déroulement de l'argument est exactement identique. Ceci conduit à la conjecture suivante [94]:

$$\tau = t + 2\nu \qquad (2.4.25)$$

que l'on peut étayer de la façon suivante. Sur une stucture topologiquement unidimensionnelle, la propagation des moments sur une structure élastique, et des courants sur une structure conductrice est tout à fait similaire. Cette corespondance s'explicite comme suit:

Transport électrique	Transport élastique
Potentiel.....	Rotation
Intensité.....	Moment fléchissant
Conductance.....	Module élastique
Energie dissipée.....	Energie potentielle

Si les super-liens étaient véritablement unidimensionnels, nous aurions donc explicitement le résultat proposé. Or dans la structure réelle, il existe des amas de boucles où un effort tranchant ou normal peut exister pour contrebalancer un moment global transmis. Utilisant une approche variationnelle, il est cependant possible de montrer qu'alors [94]:

$$\tau \leq t + 2\nu \qquad (2.4.26)$$

Cependant, l'égalité semble atteinte d'après des simulations numériques très poussées [95]. En effet, malgré des corrections d'échelles extrèmement fortes (logarithmiques), l'estimation de l'exposant τ à deux dimensions est de $\tau = 3.96 \pm 0.04$, à comparer à $t + 2\nu = 3.966$. La figure 2.26 montre la valeur de τ/ν apparente pour différentes tailles, τ/ν étant évalué par la pente de la tangente à la courbe log(Y) fonction du logarithme de la taille du système. Nous voyons que pour des systèmes dont la taille est de 96, τ/ν est encore de l'ordre de 2.6-2.7 soit plus de 10% en dessous de sa valeur asymptotique $\tau/\nu = 2.97 \pm 0.03$. Ces valeurs sont obtenues pour des réseaux hexagonaux constitués de ressorts linéaires et angulaires, par une technique de matrice de transfert pour des réseaux dont la géométrie est celle de rubans de largeur étroite, ici jusqu'à 96, et de grande longueur, ici quelques dizaines de millions de liens, ce qui permet d'obtenir des moyennes satisfaisantes, le plus possible dépourvues d'effets de bord parasites. Vue la difficulté d'estimer l'exposant τ déjà à deux dimensions, et la

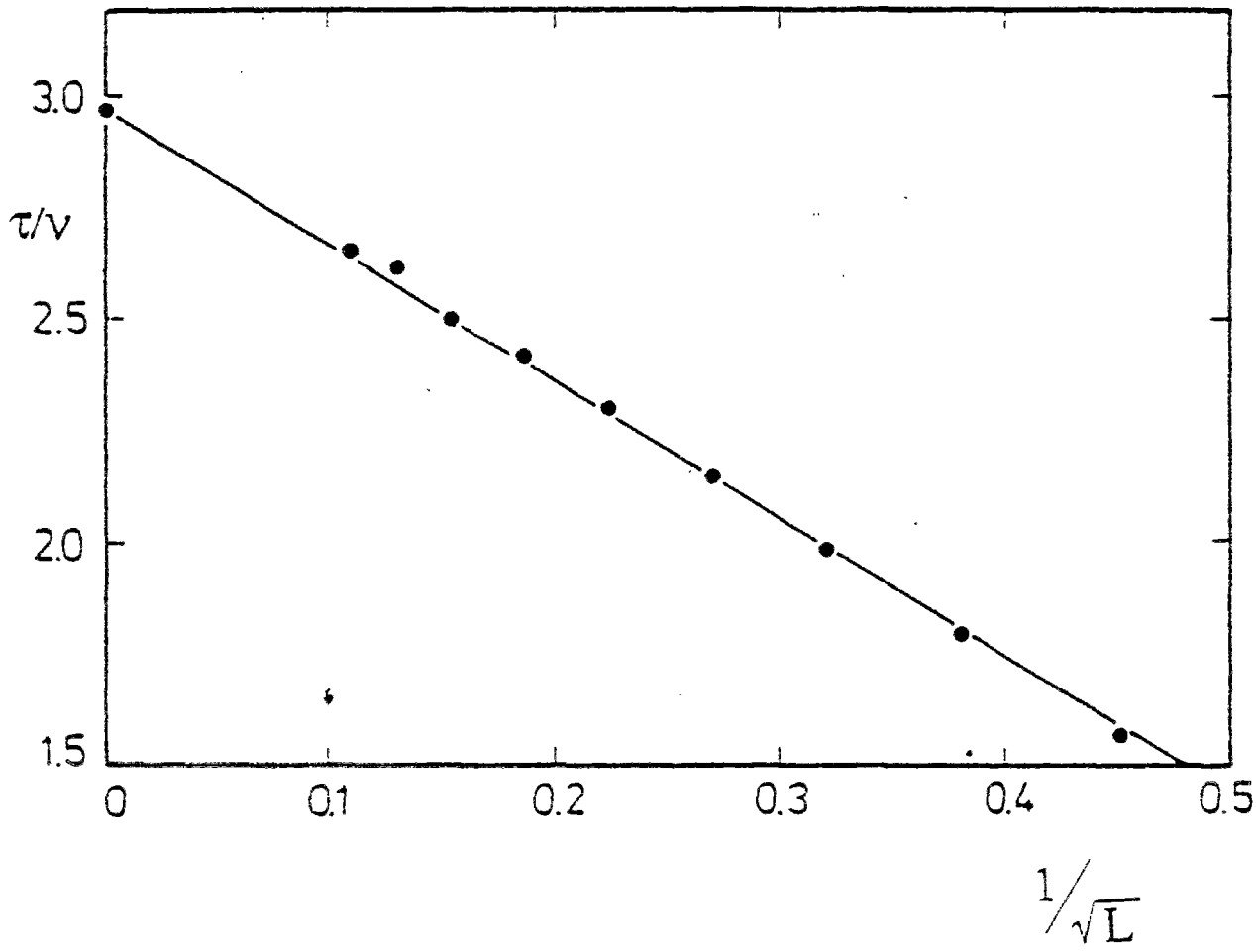


Figure 2.26 : Evolution de l'"exposant" apparent τ/ν (pente tangente de la courbe module élastique fonction de la taille du système, en coordonnées logarithmiques) en fonction de l'inverse de la racine de la taille du système. Loin d'être constante, cette pente est marquée par de fortes corrections d'échelle (logarithmiques). La valeur extrapolée pour un système de taille infinie est 2.97 ± 0.03. (courbe extraite de J.G.Zabolitzky, D.J.Bergman et D.Stauffer J.Stat.Phys. 44, 211, (1986))

précision de l'encadrement de τ dans les dimensions d'espace supérieures, il ne semble pas raisonnable d'essayer d'améliorer la précision sur τ par des simulations numériques dans un avenir proche. Le calcul de τ à deux dimensions a déjà représenté 200 heures de calculs sur un Cyber 205 avec un code numérique très optimisé. Remarquons avant de conclure ce paragraphe que certains modèles de fractals déterministes ne semblent pas suivre la relation $\tau = t + 2\nu$ [96]. Ceci provient du fait que dans ces cas, le rayon de giration transverse ne suit pas la même loi de variation que la taille du système. Ces modèles apparaissent donc comme "pathologique" par rapport au cas simple de la percolation. Il en est également de même pour le tamis de Sierpinski [97] constitué d'éléments articulés : alors, seuls les liens extérieurs participent à la rigidité de l'ensemble. Le module élastique Y varie alors dans ce cas proportionnellement à la taille du système, alors que la conducivité suit une loi de puissance de la taille avec un exposant log(5/3)/log(2). Si le même tamis est maintenant constitué de poutres encastrées, alors Y est proportionnel au carré de la taille.

De façon à obtenir d'autres estimations de τ, on peut, comme dans le cas de la conduction électrique, effectuer un calcul de renormalisation dans l'espace réel sur "petites cellules". Ce calcul a été effectué par Feng et Sahimi [98], et (bien qu'érroné dans le détail du calcul) il redonne un ordre de grandeur de τ satisfaisant. Il apparaît cependant qu'une seule configuration contribue réellement à l'estimation de τ et que en changeant par exemple de type de moyenne (arithmétique ou harmonique plutôt que géométrique), nous pouvons obtenir un éventail extrèmement large de valeurs, ce qui donne à la méthode dans le cas présent un caractère peu prédictif.

Nous avons jusqu'à présent parlé de module élastique en des termes très vagues sans jamais préciser de quel type de déformation il s'agissait; cisaillement, compression uniaxiale, compression isotrope... En fait, ceci était fait à dessein car qu'importe le type de sollicitation, la loi d'échelle du module élastique est identique. Seul un type de déformation locale domine: la flexion à deux dimensions et aussi la torsion dans des dimensions d'espace supérieures. Ce (ou ces) type(s) de déformation est (sont)

identique(s) pour toutes sollicitations et il s'ensuit que seul un paramètre décrit le comportement élastique. Il en découle que le coefficient de Poisson en particulier n'est plus un paramètre libre du problème. Il acquiert au seuil de percolation une valeur universelle, indépendante des caractéristiques locales (rapport des modules élastiques des liens). Ainsi à deux dimensions C_{11}/μ tend, pour un sytème de grande taille au seuil de percolation, vers 3.5±0.2 [99].

De même que pour la conduction électrique nous avions pu considérer le problème dual de supraconducteurs et de conducteurs normaux, ici par analogie, nous définirons le problème renforcé par une proportion p d'éléments infiniment rigides et (1-p) d'éléments élastiques. Par opposition, le problème precedemment discuté sera denommé dilué. Nous abandonnerons la denomination de problème dual et primal dans un contexte élastique pour des raisons qui apparaîtrons clairement dans la suite.

Pour la problème renforcé, en dessous du seuil, le module élastique du réseau est alors fini et diverge au seuil selon [100,101]:

$$Y \propto (p_c\text{-}p)^{-\sigma} \qquad (2.4.27)$$

où l'exposant σ est l'équivalent de s pour le problème électrique. De la même façon que τ, σ représente aussi un exposant géométrique défini dans la table 2. Il va cependant de soi que ces exposants n'ont rien de commun avec leur emploi dans le contexte du transport élastique. Nous continuerons donc à perpétuer cette notation quelque peu maladroite. Que vaut l'exposant σ?

Nous pouvons nous figurer la structure de ce problème renforcé comme suit. En dessous du seuil existent des amas rigides de tailles inférieure à ξ connectés entre eux par des liens élastiques. Ces différents amas s'interpénètrent les uns les autres sans pour autant se toucher. Ainsi les rotations des amas seront extrèmement pénalisées d'un point de vue énergétique, comme étaient favorisées ces mêmes rotations dans le problème dilué,

si bien que nous pouvons nous affranchir de la propagation de moments, ici sous-dominants pour ne garder que celle des forces. Ceci revient à un niveau plus fondamental à "oublier" l'invariance par rotation et donc à considérer un modèle de Born. Alors il découle immédiatement que les problèmes de transport élastique seront, composantes par composantes, identiques au transport conductif pour les problèmes renforcés. Ainsi, nous suggérons $\sigma = s$ [100] en toutes dimensions d'espace. Ceci est en effet confirmé à deux dimensions par des simulations numériques récentes par Bergman et al [101]. En effet, à deux dimensions $s = t = 1.30$, et $\sigma = 1.30 \pm 0.02$ (Feng [100] suggère une valeur inférieure 1.02 ± 0.07). Nous avons aussi réalisé une étude numérique à deux dimensions sur un réseau de poutres par matrice de transfert particulièrement adaptée à cette situation) et obtenu $\sigma/\nu = 0.95$ (à comparer à $t/\nu = 0.9745$). Il s'agissait d'un réseau carré de liens de forme ruban avec conditions aux limites périodiques dans la direction transverse. Les largeurs considérées allaient de 2 à 16 et de longueur 10^5.

- Relations avec la mécanique des milieux continus

Nous avions déjà noté l'analogie entre la solution du problème de transport conductif sur l'amas infini et les propriétés attachées à l'opérateur Δ sur un fractal. De la même façon, nous pouvons, pour un problème d'élasticité, nous représenter la distribution des déplacements locaux comme solution de l'équation de Lamé sur un fractal. Rappelons la forme de cette équation:

$$(\Delta + 1/(1-(d-1)\nu)\ \nabla\nabla\ )\ \mathbf{V} = 0 \qquad (2.4.28)$$

où ν est le coefficient de Poisson et $\mathbf{V}$ le champ de déplacement.

Dans le cadre de l'élasticité plane, nous pouvons montrer qu'il est possible de représenter la solution d'un problème élastique par une fonction scalaire biharmonique (par exemple avec la fonction d'Airy). Il n'est pas sans intérêt de noter alors que la

différence observée entre les comportements élastiques et conductifs, et en particulier la différence entre les exposants t et $\tau = t + 2\nu$, peut être interprétée comme le carré d'une longueur (puisque ν est l'exposant critique de la longueur de corrélation). Or le champ de contrainte est relié au potentiel d'Airy par un opérateur différentiel du second ordre et donc le champ de déplacement est lié au potentiel par un opérateur du premier ordre. Ainsi la différence entre courant électrique et contrainte élastique d'une part et, potentiel électrique et déplacement élastique d'autre part, est la présence d'un opérateur différentiel du premier ordre. Or l'énergie étant une forme quadratique des courants (ou des contraintes), il est cohérent d'obtenir un facteur 2ν, si la longueur caractéristique intervenant dans l'opérateur gradient est ξ pour le cas du problème dilué et 0, si la longueur caractéristique est la maille du réseau dans le problème renforcé.

La correspondance suggérée ci-dessus est cependant spécifique du cas bidimensionnel. Nous pouvons malgré tout prolonger l'argument dans le cadre tridimensionnel à l'aide de potentiels élastiques, dits de Grodski [102]. En effet, la solution en déplacement **V** d'un problème élastique tridimensionnel peut être exprimée en fonction de quatre fonctions harmoniques B_0, B_1, B_2 et B_3, sous la forme:

$$V_i = B_i - 1/4\ (1-\nu)^{-1}\ \partial(\ B_0 + x_j\ B_j)/\partial x_i \qquad (2.4.29)$$

(i variant de 1 à 3) ou, notant **B** le vecteur de composante (B_1, B_2, B_3)

$$\mathbf{V} = \mathbf{B} - 1/4\ (1-\nu)^{-1}\ \mathbf{V}\ (\ B_0 + \mathbf{x}\ \mathbf{B}) \qquad (2.4.30)$$

Ceci suggère que dans le problème dilué, la contribution dominante (de façon dimensionnelle) provient du champ B_0 (scalaire harmonique), alors que dans le problème renforcé le champ **B** (vectoriel harmonique) impose la loi d'échelle.

Les arguments présentés ci-dessus ne sont en aucun cas des preuves des lois d'échelles observées, mais simplement des justifications dimensionnelles, et ils suggèrent éventuellement des éléments qui pourraient conduire à une démonstration plus rigoureuse.

- Flexion à deux dimensions

Jusqu'à présent, nous n'avons discuté que les cas où la déformation se faisait dans l'espace où le système était construit. En particulier, dans le cas bidimensionnel, les déformations se faisaient dans le plan. Nous pouvons nous demander si les comportements critiques considérés jusqu'alors sont aussi valables pour des déformations hors du plan. La réponse est non, bien que la solution du problème hors du plan soit directement reliée à celle dans le plan.

Considérons tout d'abord le cas dilué: soit un réseau plan de poutres élastiques au voisinage du seuil de percolation, soumis à un essai de flexion pure. Sur deux des bords opposés du réseau nous appliquons un moment fléchissant M. Chaque lien n'est soumis qu'à un moment fléchissant ou/et un moment de torsion. La correspondance évoquée précédemment entre un problème de conduction électrique et un problème élastique s'applique encore, mais cette fois-ci nous n'avons plus à établir de traduction entre force et moment d'une part et entre rotation et déplacement d'autre part, puisque, au-delà de l'échelle ξ, les moments se propagent de façon dominante. Il s'ensuit de façon très simple que le comportement critique du module de flexion Y_F en fonction de p est identique à celui de la conductance électrique et donc:

$$Y_F \propto (p-p_c)^{\tau'} \qquad (2.4.31)$$

où $\tau' = t$.

Pour le problème renforcé, la situation est toute autre. Comme nous l'avions aussi remarqué pour les déformations planes, les rotations sont pénalisées sur un plan

énergétique et le mode de déplacement le plus favorable consistera en de simples translations. Mais ici, lorsque le système est homogène (au-delà de l'échelle ξ) nous avons une flexion pure et donc nous imposons des moments fléchissants et de torsion. Il s'ensuit que nous devons, à l'échelle ξ effectuer une "traduction" inverse. Si M est le moment de flexion typique aux bornes d'un amas fini rigide, nous devrons avoir des forces tranchantes f de l'ordre de $f = M\xi^{-1}$, et des rotations hors du plan d'amas finis rigides de l'ordre de θ, soit des déplacements $D = \xi\theta$. Maintenant, par analogie avec la propagation du potentiel dans le cas du problème dual, nous supposons que, composante par composante, le "transport" de forces suit la même loi d'échelle. Nous aurons entre D et f la relation:

$$f \propto \xi^{\zeta} D \qquad (2.4.32)$$

où ζ est l'exposant qui décrit la croissance de la conductance avec la longueur de corrélation dans le problème dual. Cet exposant à deux dimensions est égal à celui décrivant la divergence de la résistance aux bornes d'un super-lien de longueur ξ, dans le problème primal. Ainsi nous pouvons relier M à θ par:

$$M \propto \xi\, \xi^{\zeta}\, \xi\, \theta \qquad (2.4.33)$$

Soit donc un module de rigidité à la flexion Y_F qui varie selon:

$$Y_F \propto \xi^{2+\zeta} \qquad (2.4.34)$$

ou

$$Y_F \propto (p_c - p)^{-\nu(2+\zeta)} \qquad (2.4.35)$$

Nous avons donc une divergence de Y_F au voisinage du seuil selon la loi:

$$Y_F \propto (p_c\text{-}p)^{-\sigma'} \qquad (2.4.36)$$

où

$$\sigma' = \zeta\nu + 2\nu \qquad (2.4.37)$$

Comme $\zeta\nu = s = t$, nous aurons finalement $\sigma' = s + 2\nu$. Nous pouvons résumer dans la table ci-dessous les exposants apparaissant dans les problèmes dilués et renforcés, pour les transports électrique et élastique à deux dimensions:

	primal		**dual**	
Transport électrique:				
Conductance	$G \propto (p\text{-}p_c)^t$		$G \propto (p_c\text{-}p)^{-s}$	$\underline{s = t}$
Transport élastique:				
Module élastique	$Y \propto (p\text{-}p_c)^\tau$	$\tau = t+2\nu$	$Y_F \propto (p_c\text{-}p)^{-\sigma'}$	$\underline{\sigma'=\tau}$
	$Y_F \propto (p\text{-}p_c)^{\tau'}$	$\tau' = t$	$Y \propto (p_c\text{-}p)^{-\sigma}$	$\underline{\sigma = \tau'}$

N.B. les relations soulignés sont exactes alors que celles en italique sont simplement conjecturées et vérifiées numériquement.

Ainsi donc nous voyons que dans le cas de la déformation de flexion, nous intervertissons les valeurs des deux exposants $\sigma' = \tau$ et $\sigma = \tau'$. Nous verrons que nous pouvons relier par une véritable transformation de <u>dualité</u> l'annulation du module élastique dans la déformation plane avec dans le cas dilué (problème primal) la divergence du module de flexion dans le cas renforcé (problème dual). Nous verrons également (dans le chapitre suivant) que nous pouvons aussi établir une correspondance semblable

dans le cas de la percolation de forces centrales. Ainsi les trois relations obtenues par dualité sont véritablement:

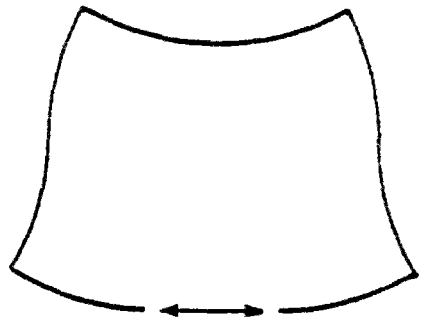
$$s = t$$
$$\sigma' = \tau \qquad (2.4.38)$$
et $$\sigma = \tau'$$

- Problème dual

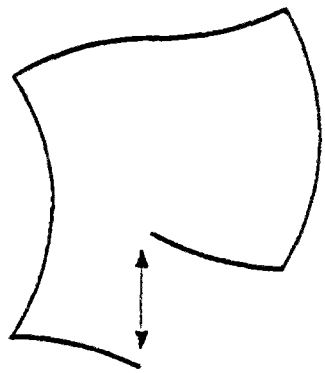
Nous allons maintenant montrer la relation de dualité élastique dans la cas des réseaux de poutres.

Nous allons maintenant présenter un argument exact qui montre la transformation de dualité dans un système élastique bidimensionnel. Nous allons le montrer dans le cas d'un réseau de poutres encastrées sur réseau carré. Pour ce faire, nous devons d'abord introduire la notion de potentiel dans ce contexte.

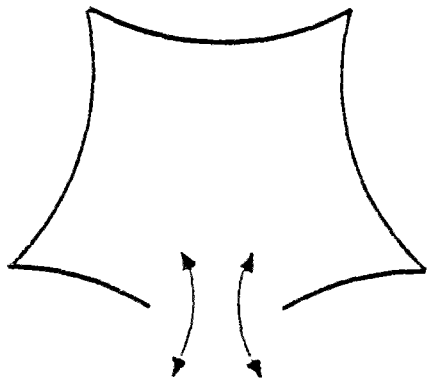
Il est possible de trouver la distribution des efforts et déplacements locaux en chaque noeud en minimisant l'énergie du système sur l'ensemble des champs de contrainte admissibles (i.e. satisfaisant en chaque site les équations d'équilibre). Or ces champs de contrainte peuvent être engendrés par des stuctures précontraintes locales pour lesquelles seuls quatre liens formant une cellule carrée supportant des efforts non nuls. Ces structures sont l'équivalent de dislocations centrées en chaque cellule. Elles sont au nombre de 3 par cellules correspondant respectivement à une discontinuité en translation (selon les deux amas du système) et en orientation (cf. Fig. 2.27). Cependant, si ces discontinuités sont une façon commode de se représenter ces champs, elles ne correspondent à aucune discontinuité physique. De façon à mieux comprendre ceci, il est commode de faire appel au cas analogue dans le cas de la conductivité. Alors des structures précontraintes locales sont les courants de boucles. Bien sur, pour engendrer de réels courants de boucles, il est nécessaire d'introduire des discontinuités de potentiels



φ_y



φ_x



ψ

Figure 2.27 : Représentation schématique des trois précontraintes qui engendrent l'ensemble des champs de contrainte auto-équilibrés pour une cellule constituée de poutres encastrées aux nœuds.

(analogues aux discontinuités de x,y ou z dans le cas élastique) mais nous raisonnons sur des courants de boucles virtuels, sans source. La figure 2.28 montre alors la distribution des efforts et des moments dans chaque structure précontrainte de base.

Dans la première, que nous appellerons φ_y, seules les bornes horizontales ont un effort normal non nul et les bornes verticales subissent un effort tranchant. Le moment fléchissant sera donc constant dans les poutres horizontales, alors qu'il variera linéairement dans la poutre verticale. La seconde structure (φ_x) se déduit de la première par une rotation de $\pi/2$ (aux conventions de signe près). Quant à la dernière, les efforts normaux et tranchants sont nuls partout, et le moment fléchissant M est constant et égal à ψ.

Considérons maintenant une poutre horizontale AB et calculons les sollicitations qui lui sont appliquées. Appelons φ_x, φ_y, ψ les trois scalaires caractérisant le champ de contrainte de la cellule inférieure au lien AB et les termes équivalents pour la cellule située au-dessus du lien AB. Dans la poutre AB, par superposition, l'effort normal, N, sera:

$$N= \varphi_y-\varphi'_y \qquad (2.4.39)$$

l'effort tranchant T:

$$T= -\varphi_x+\varphi'_x \qquad (2.4.40)$$

et le moment fléchissant, calculé au centre de la poutre, sera:

$$M= l/2\ (\varphi_y+\varphi'_y)+ (\psi - \psi') \qquad (2.4.41)$$

L'énergie totale de la poutre, en adoptant la relation donnée en fonction des efforts appliqués (2.4.17)

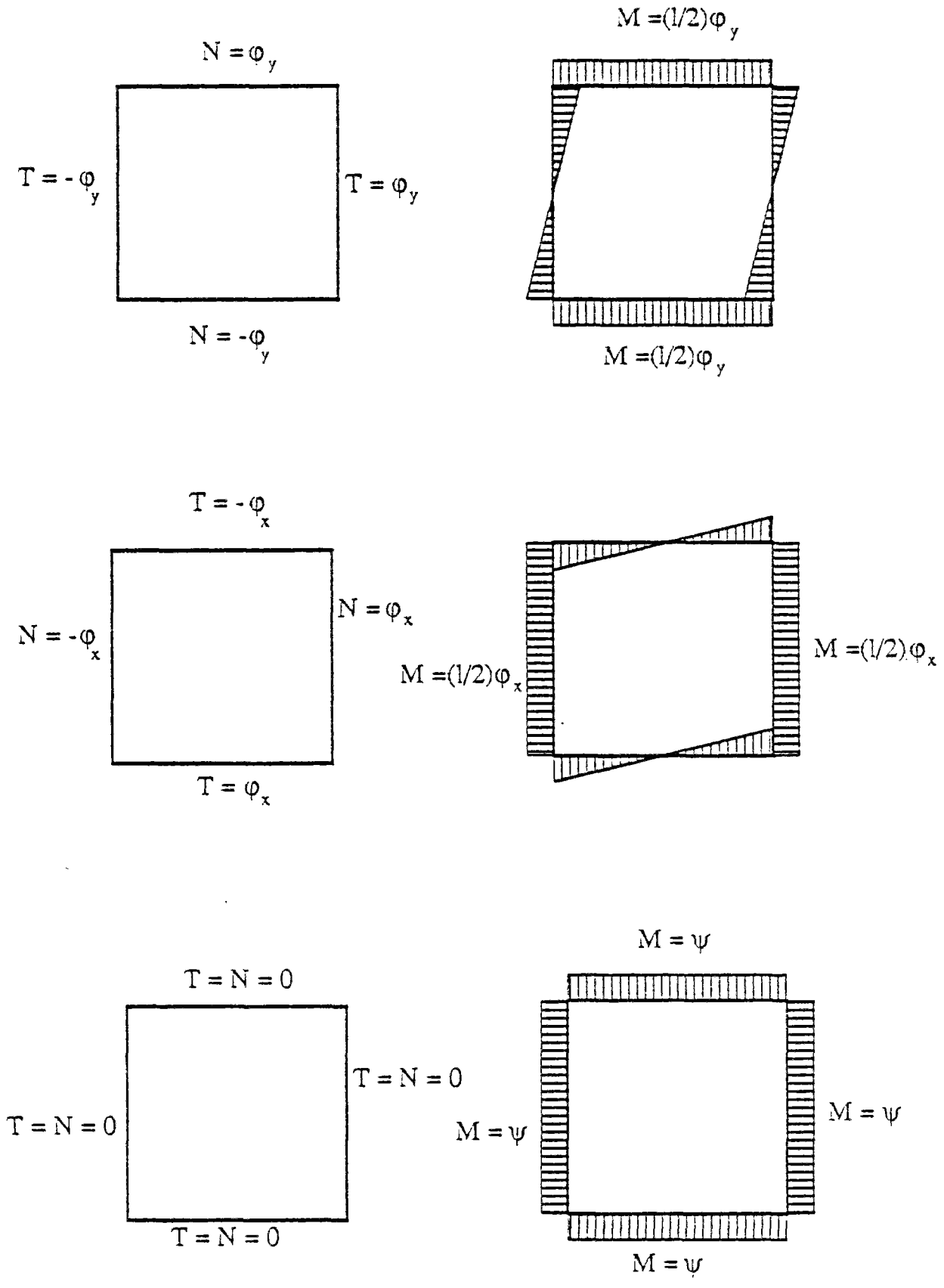


Figure 2.28 : Distribution des efforts dans les trois configurations précontraintes de base. N est l'effort normal, T l'effort tranchant, et M le moment fléchissant.

$$2E = a' (\varphi_y - \varphi'_y)^2 + b' (\varphi_x - \varphi'_x)^2 + c' (1/2 (\varphi_y + \varphi'_y) + (\psi - \psi'))^2 \quad (2.4.42)$$

Nous pouvons de même exprimer (N,T,M) dans chaque poutre verticale en fonction des champs φ et ψ des cellules adjacentes. Finalement, nous résolvons le problème élastique en minimisant l'énergie totale par rapport aux champs φ et ψ, en respectant les conditions aux limites.

Le problème dual de la déformation élastique dans le plan s'obtient finalement en identifiant les contraintes φ et ψ avec des champs de déplacement. Identifions donc ψ avec un déplacement normal au plan. φ_x avec un angle de rotation par rapport à l'axe x, φ_y avec un angle de rotation par rapport à l'axe y (cf. Fig. 2.29). On remarque qu'alors, la forme de l'énergie écrite pour le lien AB précédent comprend trois termes qui correspondent respectivement à une énergie de flexion, une énergie de torsion et un terme d'effort tranchant. Comme nous pouvons le voir en comparant cette expression à celle obtenue en déplacement pour les déformations dans le plan. De plus, dans cette correspondance une souplesse devient une rigidité.

Ainsi, si le lien AB est absent (infiniment souple) alors $1/a' = 1/b' = 1/c' = 0$. Il s'ensuit que, par dualité, le lien correspondant sera infiniment rigide et réciproquement.

Un problème dilué de déformation dans le plan sera donc associé à un problème renforcé de déformation hors du plan et inversement. De là, découle directement les égalités entre exposants critiques énoncées précédemment dans le tableau.

- Précontrainte

Les précontraintes présentes dans un milieu élastique sont rarement prises en compte dans les modélisations de mécanique des milieux continus. En effet, elles sont

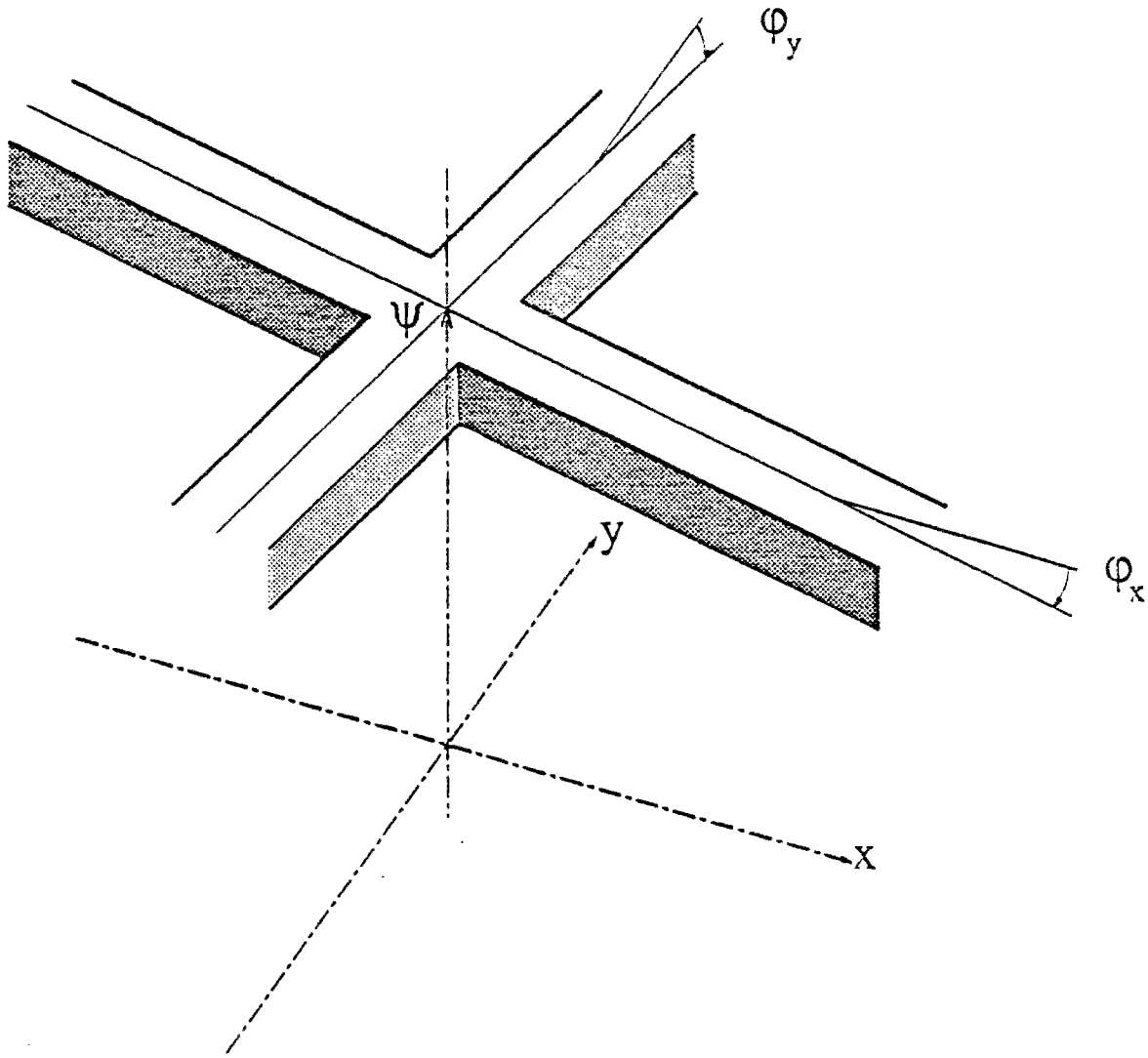


Figure 2.29 : Interprétation des variables φ et ψ en termes de déplacements, qui permet de définir la dualité dans un contexte d'élasticité de réseaux bidimensionnels.

difficilement mesurables et sont, par ailleurs, souvent inférieures aux contraintes induites par la déformation.

Rappelons brièvement de quoi il s'agit: Partant d'une situation d'équilibre, nous avons par définition un champ de déformation ε, nul. Le champ de contrainte σ_0 satisfait donc pour une densité volumique de forces extérieures appliquées

$$\text{div}\,(\sigma_0) = 0 \qquad (2.4.43)$$

Considérons maintenant un champ de déplacement **U** à partir de l'état de référence. Le tenseur des déformations vaudra alors:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij} &= 1/2\,(\partial \mathbf{U}_i/\partial x_j + \partial \mathbf{U}_j/\partial x_i + \partial \mathbf{U}_k/\partial x_i\,\partial \mathbf{U}_k/\partial x_j)\\ &= \varepsilon^1{}_{ij} + \varepsilon^2{}_{ij} \qquad (2.4.44)\end{aligned}$$

où nous distinguons explicitement les contributions du premier et du second ordre. Le tenseur des contraintes comprendra donc alors en plus du champ de précontrainte, σ_0, un terme d'ordre 1 en **U**, σ_1, tels que

$$\sigma_1 = \mathbf{H}\,(\varepsilon^1) \qquad (2.4.45)$$

où **H** est le tenseur de Hooke local.

Ne considérant que les termes d'ordre 2 dans l'expression de l'énergie, nous obtenons:

$$2E = \sigma_1 \varepsilon^1 + \sigma_0\,\varepsilon^2 \qquad (2.4.46)$$

La première contribution est habituelle, alors que la seconde est généralement négligée pour les raisons mentionnées ci-dessus, même si l'existence de ce terme a été largement discutée par Cauchy [103] il y a plus d'un siècle.

Si maintenant nous considérons un cas extrême [104], où contrairement à l'habitude, $\sigma_1 << \sigma_0$, et que nous négligeons donc cette contribution à l'énergie nous obtenons une énergie proportionnelle à

$$E \propto \sigma_0 \, \varepsilon^2 \tag{2.4.47}$$

$$\propto \sigma_{0ij} \, \partial U_k/\partial x_i \, \partial U_k/\partial x_j \tag{2.4.48}$$

soit, si par exemple σ_{0ij} est un terme de pression $\sigma_{0ij} = p \, \delta_{ij}$

$$E \propto p \, \Sigma_i \, \|\nabla U_i\|^2 \tag{2.4.49}$$

Alors composante par composante, on reconnait un terme sililaire au cas d'un potentiel électrique, d'où un champ de déplacement harmonique.

Ceci conduit naturellement à obtenir alors un comportement critique au voisinage du seuil de percolation semblable au cas de la conductivité; soit un module élastique Y qui s'annule au seuil comme:

$$Y \propto (p-p_c)^t \tag{2.4.50}$$

Un tel comportement a déjà été observé dans le cadre du modèle de Born. Nous l'avions alors rejeté car il n'était pas invariant par rotation. Qu'en est-il ici? Il faut simplement noter ici que le terme σ_0 de précontrainte est bien entendu attaché au solide et donc dans tout mouvement rigide, σ_0 évolue comme le solide. Il s'ensuit que la contribution due aux précontraintes est aussi invariant par rotation. C'est en fait le seul cas physique pour lequel le modèle de Born est légitime.

Nous pouvons distinguer deux grandes classes de systèmes précontraints: dans la première, le terme de précontrainte est imposé par des efforts appliqués sur la structure, alors que dans la seconde, σ_0 est simplement un champ de contrainte autoéquilibré. Dans la première classe, nous trouvons entre autres le cas simple que nous avons considéré où σ_0 est une pression isotrope. Ce cas ne pose pas de problèmes fondamentaux et, sous réserve de respecter la condition de prédominance énergétique du terme de précontrainte, le comportement de type "conduction scalaire" est valable. Nous pouvons donc proposer la loi d'échelle suivante, où le module élastique Y suit:

$$Y = Y_0 (p-p_c)^{\tau} \varphi(\sigma_0/Y_0 (p-p_c)^{t-\tau}) \qquad (2.4.51)$$

ou au voisinage de $x = 0$: $\varphi(x) \propto 1$

$$x = +\infty: \varphi(x) \propto x \qquad (2.4.52)$$

où Y_0 est une constante élastique du matériau et σ_0 le niveau de précontrainte.

Il reste alors à évaluer, sur un cas réel, l'évolution du terme de précontrainte σ_0 qui peut dans certains cas être lui aussi critique (et donc varier avec $(p-p_c)$ au voisinage du seuil). Si cependant σ_0 n'est pas critique, alors nous devons observer au voisinage immédiat du seuil un comportement "scalaire" avec l'exposant t, puis pour une valeur de p telle que:

$$(p-p_c) \propto (\sigma_0/Y_0)^{1/\tau-t} \qquad (2.4.53)$$

nous devons passer dans un nouveau régime où le comportement est de type habituel avec un exposant critique τ.

Un tel comportement a en effet été observé sur un gel de silice [105]. Dans ce cas, la précontrainte σ_0 peut être vue comme l'action exercée par le solvant sur le réseau solide constitué par les agrégats de silice soudés les uns aux autres. On notera que

l'obtention d'exposants critiques par une mesure expérimentale est déjà une opération délicate, et donc que la recherche de deux exposants critiques dans une même zone critique est extrèmement difficile. Cependant, dans l'étude citée, la mesure de la viscosité sous le point de gel, associée à la mesure du module élastique au-dessus a permis d'exclure de simples comportements en loi de puissance pour à la fois la viscosité et le module élastique en imposant un même seuil.

La deuxième classe de systèmes précontraints pose plus de problèmes compte-tenu de l'absence de sollicitations imposées de l'extérieur. Dans ce cas, les précontraintes proviennent généralement de "frustrations" géométriques. Il est impossible de respecter la géométrie du système sous contrainte sans imposer, soit des ouvertures, soit des chevauchements de matière, ou encore des glissements locaux. Il va donc de soi que d'une part, la précontrainte σ_0 est naturellement très sensible aux modifications de géométrie. Lorsque l'on dégrade le système, alors au voisinage du seuil σ_0 doit s'approcher de zéro, d'autre part, la résultante des précontraintes sur un sous-système de taille L doit varier comme $L^{(d-1)/2}$, soit la racine carrée du nombre d'éléments soumis (il n'y a pas d'effets exercés par l'extérieur). Soit une contrainte effective de l'ordre de $L^{(d-1)/2}/L^{(d-1)} = L^{-(d-1)/2}$.

Si maintenant nous considérons des propriétés de vibrations de la structure, alors le terme de précontrainte qui est pertinant à une longueur d'ordre donnée, doit varier avec cette longueur. Une telle situation pourrait apparaître dans le cas des aérogels de silice qui sont naturellement des systèmes éventuellement proches d'un seuil de percolation, et dont la structure même est telle que les précontraintes doivent être très élevées.

En conclusion de ce paragraphe, notons que la présence de précontraintes dans un système percolant est apte à modifier considérablement le comportement critique. La diversité des situations physiques nécessitent cependant des études plus poussées pour mieux appréhender les changements de régimes en fonction des divers paramètres

(distance au seuil, amplitude de sollicitation, longueur d'onde de vibration, précontraintes appliquées...).

- Vibration

De même que dans le cas du réseau aléatoire de résistance, il est possible dans le cas élastique de considérer les problèmes de vibration (de fractons) et de diffusion (propagation d'impulsions dans un milieu visco-élastique). Ce deuxième type de problème sera traité dans le chapitre suivant.

En ce qui concerne les propriétés de vibration, on peut exactement répéter l'argument scalaire en changeant cependant t en τ. Nous définirons donc une dimension spectrale D'_s élastique donnée par

$$D'_s = 2\, D_f / (D_f + \tau/\nu + 2 - d) \qquad (2.4.54)$$

telle que la densité d'états $\mathcal{N}(\omega)$ varie selon:

$$\mathcal{N}(\omega) \propto \omega^{D's-1} \qquad (2.4.55)$$

une telle forme de loi de distribution a en effet été obtenue par Webman et Grest [106]. Il est curieux de noter que D'_s est numériquement négatif pour d=2 et d=3.

En liaison avec le phénomène de diffusion, on observe qu'à deux dimensions $D'_w \approx 2 + D_w$ et donc la diffusion est très fortement ralentie [107]. Il découle de là que la technique numérique de relaxation usuelle (Jacobi ou Gauss-Seidel) n'est pas du tout adaptée à l'étude numérique du problème élastique. Ceci, combiné avec les fortes corrections d'échelle déjà mentionnées, rend caduque toute tentative de résolution numérique du problème qui ne prend pas ce ralentissement critique en compte.

Références :

1 D.Stauffer *"Introduction to percolation theory"* (Taylor and Francis, London) (1985)

D.Stauffer Phys.Rep. 54, 1, (1979)

2 H.Kesten *"Percolation theory for mathematicians"* (Birkhouser, Boston) (1982)

3 J.Feder *"Fractals"* (Plenum press, New York) (1988)

4 R.Zallen *"The physics of amorphous solids"* (John Wiley, New York) (1983)

5 J.W.Essam Rep. Prog. Phys. 43, 833, (1980)

6 G.Deutscher, R.Zallen et J.Adler *"Percolation, structure and processes"* Annals of the Israel. Phys.Soc.vol.5 (Hilger, London) (1983)

7 H.E.Stanley et N.Ostrowsky *"On growth and forms"* (Martinus Nijhoff, Dordrecht) (1986)

8 R.Pynn et A.Skjeltorp *"Scaling phenomena in disordered systems"* (Plenum press, New York) (1985)

9 J.Souletie, J.Vannimenus et R.Stora *"Chance and matter"* (Les Houches 86) (North-Holland, Amsterdam) (1986)

10 L.Pietronero et E.Tossati *"Fractals in Physics"* (North-Holland, Amsterdam) (1986)

11 P.W.Kasteleyn et C.Fortuin J.Phys. Soc.Japan 26, 11, (1969)

P.W.Kasteleyn et C.Fortuin Physica 57, 536, (1972)

12 G.Shlifer, W.Klein, P.J.Reynolds et H.E.Stanley J.Phys.A 12, L169, (1979)

13 H.J.Herrmann, D.C.Hong et H.E.Stanley J.Phys.A 17, L261, (1984)

14 A.Coniglio Phys.Rev.Lett. 46, 250, (1981)

A.Coniglio J.Phys.A 15, 3829, (1982)

15 H.J.Herrmann et H.E.Stanley Phys.Rev.Lett. 53, 1121, (1984)

16 H.J.Herrmann et H.E.Stanley J.Phys.A 21, L829, (1988)

17 A.Skal et B.Shklovskii Sov.Phys.Semicond.8,1029,(1975)

18 P.G. de Gennes J.Physique Lett. 37, L1, (1976)

19 H.E.Stanley J.Phys.A 10, L211, (1977)

20 A.Hansen et S.Roux J.Phys.A 20, L873, (1987)

21 L.da Silva, A.Hansen et S.Roux Europhys.Lett. 8, 47, (1989)

22 S.Redner Phys.Rev.B 25, 3242, (1982)

S.Redner J.Phys.A 15, L685, (1982)

23 S.P.Obukhov Physica A 101, 145, (1980)

24 G.G.Batrouni, A.Hansen et S.Roux Phys.Rev.A 38, 3820, (1988)

25 S.Kirkpatrick Rev.Mod.Phys. 45, 574, (1973)

26 J.G.Zabolitzky Phys.Rev.B 30, 4077, (1984)

27 H.J.Herrmann, B.Derrida et J.Vannimenus

Phys.Rev.B 30, 4080, (1984)

28 D.C.Hong, S.Havlin, H.J.Herrmann et H.E.Stanley

Phys.Rev.B 30, 4083, (1984)

29 R.Rammal, J.C.Angles d'Auriac et A.Benoit

Phys.Rev.B 30, 4087, (1984)

30 C.J.Lobb et D.J.Franck Phys.Rev.B 30, 4090, (1984)

31 J.M.Normand, H.J.Herrmann et M.Hajjar J.Stat.Phys. 52, 441, (1988)

32 voir Réf. 17 et 18, ainsi que

R.Pike et H.E.Stanley J.Phys.A 14, L169, (1981)

33 J.Bernasconi, Phys.Rev.B 18, 2185, (1978)

34 J.P.Straley Phys.Rev.B 15, 5733, (1977)

35 A.Coniglio et H.E.Stanley Phys.Rev.Lett. 52, 1068, (1984)

36 La dualité est explicitée dans la référence 34

37 I.Webman et J.Jorner Phys.Rev.B 16, 2593, (1977)

38 R.Rammal, C.Tannous et A.M.S.Tremblay Phys.Rev.A 31, 2662, (1985)

39 R.Rammal J.Physique Lett. 45, L1007, (1984)

40 R.Rammal J.Physique Lett. 46, L129, (1985)

41 A.Csordas J.Phys.A 19, L613, (1986)

42 J.P.Clerc, G.Giraud, J.M.Laugier et J.M.Luck
J.Phys.A 18, 2565, (1985)

43 D.C.Wright, D.J.Bergman et Y.Kantor Phys.Rev.B 33, 396, (1986)

44 Y.Park, A.B.Harris et T.C.Lubensky Phys.Rev.B 35, 5048, (1987)

45 G.A.Garfunkel et M.B.Weissman Phys.Rev.Lett. 55, 296, (1985)

46 G.Giraud, J.P.Clerc, B.Orsal et J.M.Laugier
Europhys.Lett. 3, 935, (1987)

47 R.Rammal, C.Tannous, P.Breton et A.M.S.Tremblay
Phys.Rev.Lett. 54, 1718, (1985)

48 L.de Arcangelis, S.Redner et A.Coniglio Phys.Rev.B 31, 4725, (1985)

49 T.C.Halsey,M.H.Jensen, L.P.Kadanoff, I.Procaccia et BI.Shraiman
Phys.Rev.A 33, 1141, (1986)

50 A.Hansen Ph.D. Thesis, Cornell Univ., (1986)

51 G.Paladin et A.Vulpiani Phys.Rep. 156, 147, (1987)

52 P.Meakin in *"Phase transition and critical phenomena"* vol.12, C.Domb et J.L.Leibowitz eds., Academic Press, (1988)

53 S.Roux et C.D.Mitescu Phys.Rev.B, 35, 898, (1987)

54 G.G.Batrouni, A.Hansen et M.Nelkin J.Physique 48, 771, (1987)

55 S.Redner in *"Physics of finely divided matter"* N.Boccara, M.Daoud eds. (Springer-Verlag, Berlin) (1985)

56 I.Procaccia et R.Zeitak Phys.Rev.Lett. 60, 2511, (1988)

57 B.O'Shaughnessy et I.Procaccia Phys.Rev.Lett. 54, 455, (1985)

58 S.Havlin et D.Ben-Avraham Adv. Phys. 36, 695, (1987)

et J.P.Bouchaud et A.Georges Phys.Rep. à paraître

59 Y.Gefen, A.Aharony et S.Alexander Phys.Rev.Lett. 50, 77, (1983)

60 S.Roux, C.D.Mitescu, E.Charlaix et C.Baudet
J.Phys.A 19, L687, (1986)

61 S.Roux et E.Guyon Europhys.Lett. 4, 175, (1987)

62 M.Stephen Phys.Rev.B 17, 4444, (1978)

63 P.Rigord et J.P.Hulin Europhys.Lett.6, 85, (1988)

64 G.G.Batrouni, A.Hansen et M.Nelkin Phys.Rev.Lett. 57, 1336, (1986)

65 G.G.Batrouni et A.Hansen J.Stat.Phys. 52, 747, (1988)

66 P.G. de Gennes La Recherche, 7, 919, (1976)

67 C.D.Mitescu, H.Ottavi et J.Roussenq *"Electrical transport and optical properties of inhomogeneous media"*, J.C.Garland et D.B.Tanner eds., AIP Conf. Proc.(New-York) (1979)

68 R.B.Pandey, D.Stauffer, A.Margolina et J.G.Zabolitzky
J.Stat.Phys. 36, 427, (1984)

R.B.Pandey et D.Stauffer Phys.Rev.Lett. 51, 527, (1983)

69 L. de Arcangelis, J.Koplik, S.Redner et D.Wilkinson
Phys.Rev.Lett. 57, 996, (1986)

70 S.Havlin, A.Bunde, H.E.Stanley et D.Movshowitz
J.Phys.A 19, L693, (1986)

71 J.P.Hulin *in "Disorder and mixing"*, Cargese 87, E.Guyon, J.P.Nadal et Y.Pomeau eds. Kluwer, (1989)

72 S.Alexander et R.Orbach J.Physique Lett. 43, L625, (1982)

73 R.Rammal et G.Toulouse J.Physique Lett. 44, L13, (1983)

où ces auteurs utilisent un argument dû à :

E.W.Montroll *"Proceeding of the 3rd Berkeley symposium on mathematical statistics and probability"*, Univ. of Calif.Press (Berkeley) (1955)

74 S.Alexander, O.Entin-Wohlman et R.Orbach
Phys.Rev.B 32, 6447, (1985)
Y.E.Levy et B.Souillard Europhys.Lett. 4, 233, (1987)
A.Brooks-Harris et A.Aharony Europhys.Lett. (1987)
75 K.Yakubo et T.Nakayama Phys.Rev.B 36, 8933, (1987)
76 R.Orbach Science, 231, 814, (1986)
77 E.Courtens, J.Pelous, J.Phalippou, R.Vacher et T.Woignier
Phys.Rev.Lett. 58, 128, (1987)
B.Calemczuk, A.M. de Goer, B.Salce, R.Maynard et A.Zarembowitch
Europhys.Lett.3, 1205, (1987)
78 G.Deutscher et K.A.Müller Phys.Rev.Lett. 59, 1745, (1987)
J.Bednorz, M.Tagashige et K.A.Müller EuroPhys.Lett. 3, 379, (1987)
79 P.G. de Gennes C.R.Acad.Sc. 292, II, 9, (1981)
P.G. de Gennes C.R.Acad.Sc. 292, II, 279, (1981)
80 R.Rammal, T.C.Lubensky et G.Toulouse Phys.Rev.B 27, 2820, (1983)
81 R.Rammal et J.C.Angles d'Auriac J.Phys.C 16, 3933, (1983)
82 D.R.Bowman et D.Stroud Phys.Rev.Lett. 52, 299, (1984)
83 S.Roux et A.Hansen Europhys.Lett 5, 473, (1988)
84 S.John,T.C.Lubensky et J.Wang Phys.Rev.B38, 2533, (1988)
85 A.Hansen et S.Roux J.Physique 49, 1379, (1988)
86 S.W.Kenkel et J.P.Straley Phys.Rev.Lett 49 , 767, (1982)
87 L. de Arcangelis, A.Coniglio et S.Redner J.Phys.A 18, L805, (1985)
L. de Arcangelis, S.Redner et A.Coniglio Phys.Rev.B 31, 4725, (1985)
88 R.Blumenfeld et A.Aharony J.Phys.A 18, L443, (1985)
R.Blumenfeld, Y.Meir, A.Brooks-Harris et A.Aharony
J.Phys.A 19, L791, (1986)
Y.Meir, R.Blumenfeld, A.Aharony et A.Brooks-Harris
Phys.Rev.B 34, 3424, (1986)

89 Toute référence de Résistance des matériaux, e.g.

Y.Bamberger *"Mécanique de l'ingénieur"* Herrman, (Paris) (1981)

90 S.Roux et E.Guyon J.Phys.Lett. 46, L699, (1985)

91 Y.Kantor et I.Webman Phys.Rev.Lett. 52, 1891, (1984)

92 L.Limat C.R.A.Sc. 301, II, 1099, (1985)

93 Y.Kantor J.Phys.A 17, L843, (1984)

94 S.Roux J.Phys.A 19, L351, (1986)

95 J.G.Zabolitzky, D.J.Bergman et D.Stauffer J.Stat.Phys. 44, 21, (1986)

96 L.Limat Phys.Rev.B 37, 672, (1988)

L.Limat Phys.Rev.B 38, 512, (1988)

L.Limat Phys.Rev.B 38, 7219, (1988)

97 Y.Kantor et D.J.Bergman Phys.Rev.Lett. 53, 511, (1984)

98 S.Feng et M.Sahimi Phys.Rev.B 31, 1671, (1985)

99 D.J.Bergman Phys.Rev.B 31, 1696, (1985)

100 S.Feng Phys.Rev.B 32, 510, (1985)

101 D.J.Bergman Phys.Rev.B 33, 2013, (1986)

102 L.Solomon *"Elasticité linéaire"*, Masson, (Paris) (1968)

103 A.L.Cauchy *"Exercices de Mathématiques"*, t.2 et 3, (1827)

104 S.Alexander J.Physique 45, 1939, (1984)

105 B.Gauthier-Manuel, E.Guyon, S.Roux, S.Gits et F.Lefaucheux J.Physique 48, 869, (1987)

106 I.Webman et G.Grest Phys.Rev.B 31, 1689, (1985)

107 S.Roux et A.Hansen J.Physique 49, 897, (1988)

CALIFORNIE

3 Percolation II : Transmission d'information incomplète

- 3.1 Percolation de forces centrales I : Propriétés classiques

  - Linéarité et non-localité
  - Notations
  - Découplage
  - Scalaire ou Vectoriel ?
  - Bref historique
  - Résultats
  - Multifractalité

- 3.2 Percolation de forces centrales II : Propriétés originales

  - Rigidité orientationnelle
  - Elongation libre

- 3.3 Modèle de Potts antiferromagnétique dilué à trois états à température nulle

  - Modèle complet non-linéaire
  - Modèle continu et linéarisation
  - Autre modèle
  - Borne sur le seuil de rigidité

- 3.4 Percolation et transport : Synthèse

3 Percolation II : Transmission d'information incomplète

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, il existe un modèle de transport élastique qui satisfait à l'invariance par rotation et par translation et qui ne met en jeu, dans l'expression de l'énergie de chaque lien, que les déplacements aux nœuds : il s'agit du treillis réticulé, où chaque lien est une barre élastique articulée à ses extrémités. Ce modèle, dit de percolation de forces centrales [1], *a priori* très voisin de la percolation dans son esprit et sa formulation, pose grand nombre de questions qui lui sont tout à fait spécifiques.

Ces difficultés inhérentes au modèle ont fait que le statut de la percolation de forces centrales a beaucoup évolué (et fluctué) au cours du temps, au gré des simulations numériques effectuées sur le sujet. Nous présentons dans ce chapitre nos résultats et conclusions qui diffèrent encore de la plupart des travaux antérieurs. Nous prions donc le lecteur de se forger un jugement par les faits et arguments que nous présentons, mais de ne pas considérer le sujet comme déjà clos et nos conclusions comme des vérités fermement établies. Il va de soi que des confirmations par d'autres groupes seront nécéssaires avant d'en arriver à ce stade. Espérons simplement que nous sommes maintenant arrivés à un point raisonnablement proche de la convergence !

Le chapitre est subdivisé en quatre parties : la première présente le sujet et les propriétés du modèle qui ont un équivalent en percolation de connexité, la deuxième s'intéresse à des propriétés spécifiques du modèle de forces centrales, et la troisième traite d'un problème voisin de la percolation de forces centrales, qui partage nombre de spécificités (information partielle, non-localité, non-linéarité..) et qui permet d'étendre la discussion à des cas moins atypiques que notre modèle élastique de départ. Le chapitre se conclue par un bref récapitulatif des modèles de percolation et des propriétés de transport critiques qui leur sont relatifs.

- 3.1 Percolation de forces centrales I : Propriétés classiques

- Linearité et non-localité

Considérons un réseau dont les liens sont des barres élastiques articulées aux nœuds du réseau. Ces liaisons rotules parfaites imposent la nullité des moments aux deux extrémités de chaque lien et par voie de conséquence la nullité des efforts tranchants. Chaque barre ne sera donc soumise qu'à un effort normal N (force axiale) (Fig.3.1). Ceci justifie la dénomination de *forces centrales* pour ce modèle. Notons $\mathbf{U}_i$ et $\mathbf{U}_j$ les déplacements aux deux extrémités des liens i-j, nous avons vu au chapitre précédent que l'effort normal, $\mathbf{N}_{ij}$, peut être écrit :

$$\mathbf{N}_{ij} = k\ (\mathbf{n}_{ij} \otimes \mathbf{n}_{ij})(\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_j) \qquad (3.1.1)$$

où k est une constante élastique (raideur), $\mathbf{n}_{ij}$ un vecteur unitaire orienté le long du lien i-j, et $\otimes$ est le symbole du produit tensoriel. ($\mathbf{n}_{ij} \otimes \mathbf{n}_{ij}$ est ainsi l'opérateur de projection dans la direction du lien, et dont les coordonnées $\alpha\beta$ sont $(\mathbf{n}_{ij} \otimes \mathbf{n}_{ij})^{\alpha\beta} = \mathbf{n}_{ij}^{\alpha}\, \mathbf{n}_{ij}^{\beta}$). L'énergie élastique du lien sera donc E:

$$\begin{aligned} E &= 1/(2\,k)\ N_{ij}^2 \\ &= (1/2)\ k\ \{\mathbf{n}_{ij}(\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_j)\}^2 \end{aligned} \qquad (3.1.2)$$

On reconnait alors le seul modèle de Born qui satisfasse aux impératifs d'invariance par rotation et translation.

Comme précédemment, nous coupons une fraction (1-p) des liens choisis de façon aléatoire. Le module de rigidité du réseau va s'annuler pour une valeur seuil de $p=p_r$, appelée *seuil de rigidité*. La valeur de ce seuil pour un réseau triangulaire est de $p_r = 0.642$ (nous justifierons cette valeur dans la suite), à

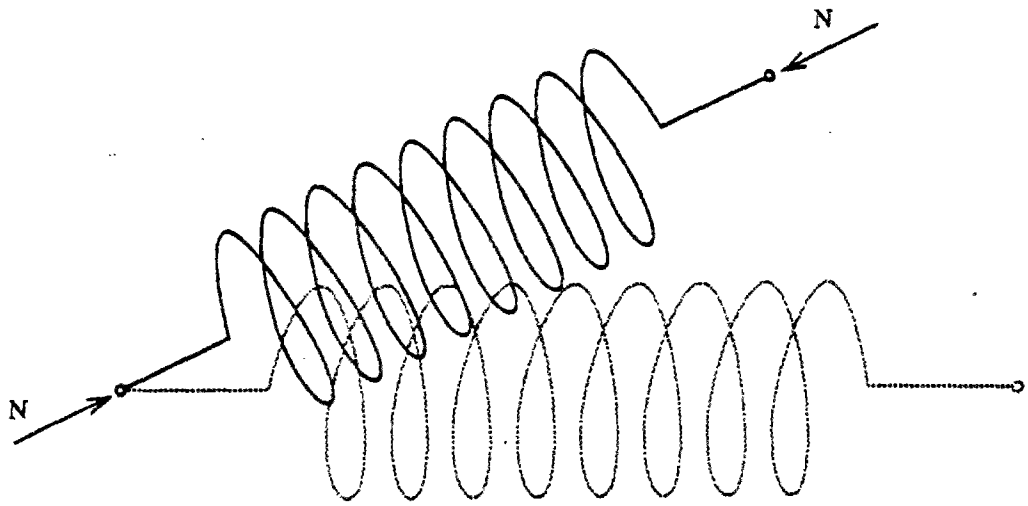


Figure 3.1 : Un lien du réseau de forces centrales dans l'état non-déformé (trait gris) et dans l'état déformé (trait noir). Les articulations aux extrémités de chaque lien font que les seules sollicitations auxquelles sont soumises les barres sont des efforts normaux, montrés sur la figure.

comparer au seuil de percolation $p_c = 0.347$. Pour une valeur intermédiaire de p, le réseau est donc bien connecté ($p>p_c$), mais il peut librement être déformé ($p<p_r$). Le réseau est alors un *mécanisme*.

Pourquoi avons-nous d'emblée considéré un réseau triangulaire ? Il s'agit simplement de l'un des seuls réseaux réguliers bidimensionnels planaires où le problème ne se pose pas en des termes triviaux. En effet, un réseau carré, même intact, ne résiste pas à un cisaillement. Sa résistance à une sollicitation de type extension uniaxiale le long d'une direction propre du réseau, si elle n'est pas nulle pour p=1, est cependant extrèmement fugace: le module élastique est alors simplement égal au nombre de colonnes de liens intacts. Le problème est alors véritablement unidimensionnel. Nous pouvons calculer exactement la probabilité $P_N(p)$ pour qu'un réseau de taille N par N soit rigide vis à vis d'une telle sollicitation: pour qu'une colonne soit intacte, il faut que chaque lien qui la compose le soit, d'où:

$$P_{col} = p^N \tag{3.1.3}$$

et donc pour que le réseau soit rigide,

$$\begin{aligned} P_N(p) &= 1-(1-P_{col})^N \\ &= 1-(1-p^N)^N \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

La valeur de $p=p^*(N)$ pour que $P(p^*(N))=1/2$ va alors rapidement tendre vers 1 avec N. De façon plus explicite, un rapide calcul donne

$$p^*(N) = 1-1/\{N \log(N/\log(2))\} \tag{3.1.5}$$

Le cas d'un réseau carré est donc juste marginal : son seuil de rigidité est $p_r=1$. Il s'ensuit qu'il ne constitue pas un bon système d'étude. Nous pouvons poursuivre

l'argument en calculant le degré d'hyperstaticité global d'un réseau de coordinance z (la coordinance est le nombre de plus proches voisins), suivant Feng et al [2] et Garboczi et Thorpe [3]. Les inconnues du problème sont les déplacements, soit d inconnues scalaires par site. Le nombre de liaisons est égal au nombre de lien par site soit z/2. Après dilution, ce nombre est réduit à pz/2. Un argument de type champ moyen, où l'on néglige les fluctuations, donne alors un ordre de grandeur grossier du seuil de percolation en écrivant que le système est globalement *isostatique*, soit

$$p_r z/2=d \qquad (3.1.6)$$

ou

$$p_r=2d/z \qquad (3.1.7)$$

Ce calcul est bien sûr légitime pour un réseau régulier intact, et donc, c'est sans surprise que l'on retrouve dans le cas du réseau carré $p_r=1$, et dans un esprit tout à fait similaire, le réseau kagomé où là encore $p_r=1$. Pour des réseaux de plus faible coordinance, comme le réseau hexagonal où z=3, le réseau intact est largement hypostatique, et donc nous sommes déjà dans une phase de mécanisme pour p=1. Au contraire, pour un réseau triangulaire, z=6, l'argument donne une valeur de seuil non dégénérée, $p_r=2/3$, proche mais différente de la valeur réelle $p_r= 0.642$.

Un résultat du même type est fourni par un calcul auto-cohérent du module élastique en fonction de p. Le module obtenu par ce calcul s'annule alors pour une valeur de p égal à 2d/z [2,3]. Une analyse similaire du cas renforcé donne un seuil identique pour la divergence du module élastique [3]. L'approche peut également être étendue au cas de la dilution de sites [4].

A trois dimensions, nous pouvons formuler plusieurs modèles où le seuil de rigidité sera distinct du seuil de percolation. Hormis le cas précité, nous pouvons envisager le cas d'un réseau de poutres tridimensionnel, comme au chapitre précédent, dont toutefois le module de torsion des liens est nul. Alors nous

aurons encore une phase de mécanisme entre le seuil de percolation et le seuil de rigidité. Il est encore possible de continuer les variations sur le thème, en annulant une ou plusieurs valeurs propres du tenseur de rigidité local.

Revenons maintenant au cas bidimensionnel, où la situation est déjà fort complexe et représentative des cas de dimension d'espace plus élevée). La difficulté essentielle du problème de percolation de forces centrales réside dans l'absence de propriétés géométriques simples qui sont critiques au seuil de rigidité.

Soyons précis : si nous modifions la valeur de la raideur locale d'un lien présent dans le réseau, (sans cependant l'annuler) cela n'affecte pas le fait que le réseau soit ou non rigide. En ce sens, la géométrie est prépondérante, l'opérateur de projection apparaissant dans l'expression de l'Hamiltonien (Eq. 3.1.2) est fondamental, mais non son préfacteur. Ainsi devrait-il exister une formulation "pauvre" du problème qui permettrait de répondre par oui ou non à la question : le réseau est-il rigide?, sans pour autant calculer explicitement un module élastique. Ceci constituerait l'équivalent de la formulation Booléenne introduite au chapitre précédent pour la percolation de connexité. Cependant, malgré des effort répétés, une telle formulation n'a pu être mise au point de façon opérationnelle, c'est-à-dire en simplifiant le problème par rapport à la version élastique complète.

Toujours sur le plan des propriétés géométriques, quelques résultats existent [5,6]. Ils ont été obtenus par des mathématiciens qui travaillent sur ce type de problème dans un contexte très différent de celui de la percolation. Citons l'un des résultats les plus originaux, du à Lovasz [7], qui malheureusement, ne se traduit pas de fait par un algorithme simple, mais qui représente bien les spécificités du problème.

Soit une structure constituée de n solides S_i (i=1,..,n) liés les uns aux autres par des barres élastiques articulées. Ces solides peuvent eux-mêmes être constitués de barres articulées, comme sur l'exemple de la Figure 3.2. Traçons sur cette structure un arbre, $\mathcal{T}$, qui connecte tous les solides S_i qui empruntant les liens. Recommençons l'opération pour générer ainsi trois arbres $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ et $\mathcal{T}_3$. Si ces trois

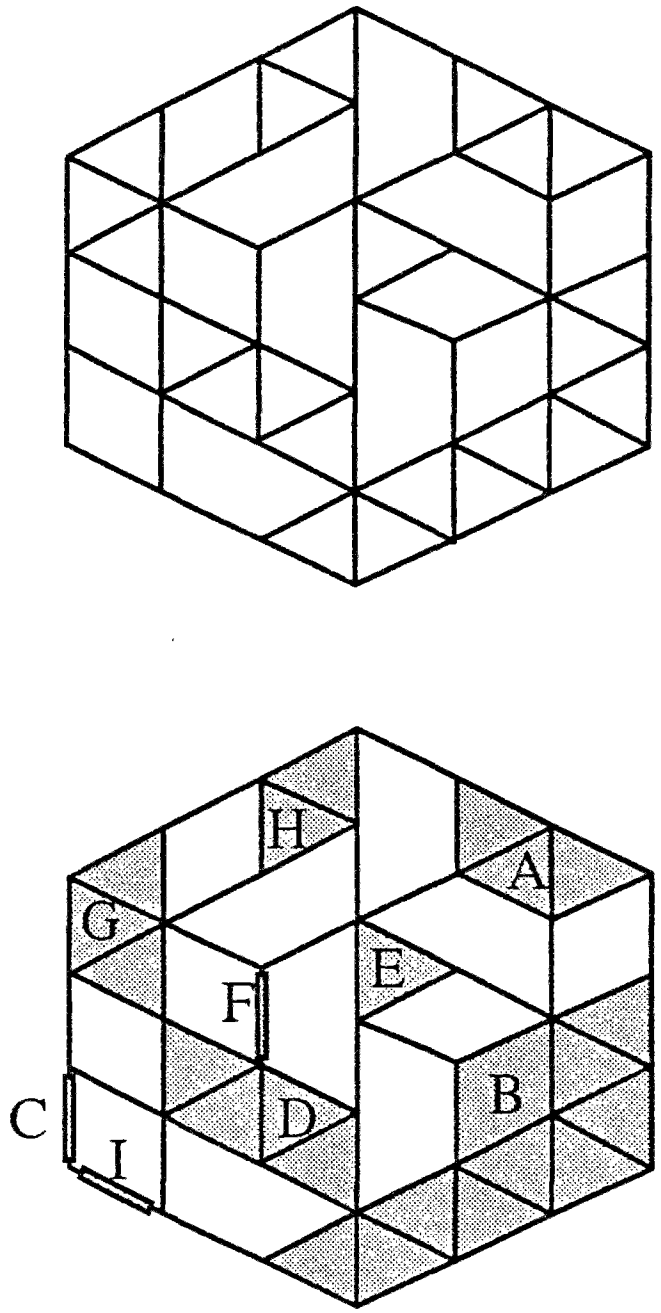


Figure 3.2 : Un ensemble de barres articulées (haut) peut être dans un premier temps décomposé en quelques solides rigides élémentaires (représentés en grisé en bas, et numérotés de A à I) reliés les uns aux autres par des liens ou des articulations communes. Le choix des solides n'est pas unique, et en particulier, le solide F aurait pu être choisi autrement.

arbres peuvent s'éviter mutuellement, (un lien donné n'appartenant qu'à un seul arbre $\mathcal{T}_i$), alors la structure sera isostatique, comme sur le cas de la Figure 3.3. Si, au contraire, il n'existe pas de telle configuration de trois arbres auto-évitants, alors la structure est un mécanisme. Ces trois arbres représentent la transmission de trois informations indépendantes qui sont nécessaires pour bloquer les trois degrés de liberté d'un solide dans le plan. Ce cas est générique (c'est-à-dire valable sans prendre en compte des alignements éventuels de liens), mais il peut être adapté à des situations un peu plus complexes : lorsque deux solides ont un site commun, on peut les considérer comme reliés par deux liens distincts. Dans notre problème de percolation, il n'est pas nécessaire de parcourir tous les sites du réseau, mais il faut qu'existe une sous-partie (d'extension infinie pour un réseau infini) du système qui satisfasse au critère précité pour que l'on soit au dessus du seuil de rigidité. La propriété équivalente en percolation de connexité est bien entendu triviale, puisqu'elle se réduit à l'existence d'un seul arbre. Cet arbre peut alors être construit à partir de l'amas infini en "ouvrant" toutes les boucles (i.e. en n'excluant un lien dans chaque cycle élémentaire).

Dans le cas précis de notre problème où les solides à considerer sont naturellement les sites du réseau, alors la situation est un peu différente: en effet un site n'a que deux degrés de liberté et non trois: la rotation d'un site ne compte pas comme degré de liberté. Il est possible cependant dans ce cas de formuler un critère semblable au précédent [8] : un ensemble de sites reticulés sera isostatique si et seulement si il existe trois arbres qui s'évitent mutuellement, tels que chaque site appartienne à exactement deux arbres, et enfin tels qu'il n'existe pas de sous-ensemble de sites du sytème qui ne soit atteint que par deux sous-arbres des trois arbres précédents (Figure 3.4). Une structure plus générale est alors rigide si il est possible d'extraire une structure isostatique au sens précédent qui contienne tous les sites du réseau.

On comprend bien ainsi la nature non-locale du problème de percolation de forces centrales. Un seul arbre, et *a fortiori* un seul chemin, ne fournit aucune

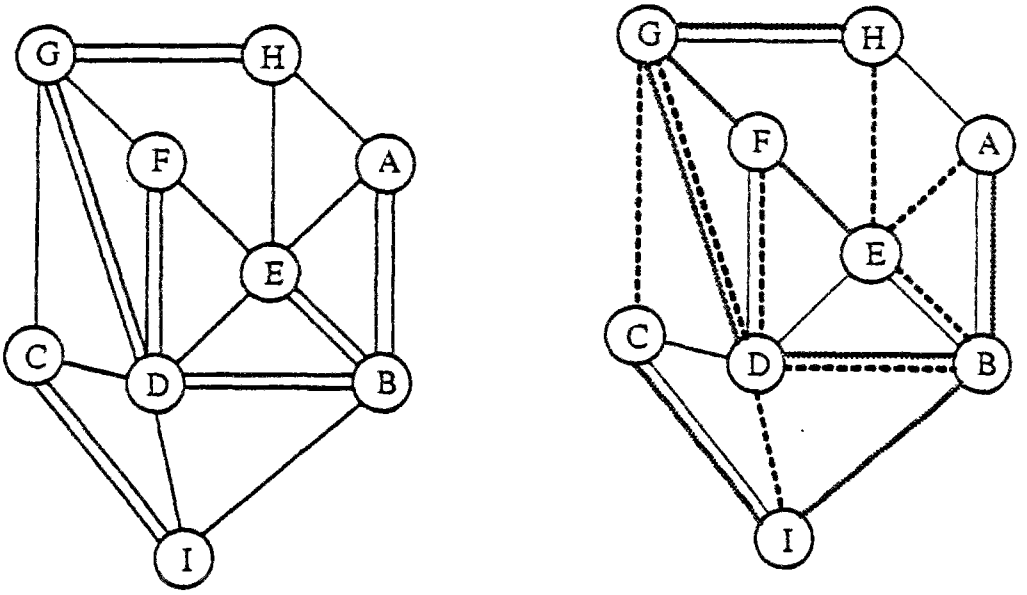


Figure 3.3 : Les connections entre solides de l'exemple de la figure précédente sont schématisées dans le graphe de gauche. Deux solides reliés entre eux par une articulation commune sont représentés comme connectés par deux liaisons indépendantes. Si il est possible de couvrir l'ensemble du graphe par trois arbres (traits fin continu, gras pointillé et grisé de la figure de droite) qui s'évitent mutuellement et qui visitent chacun l'ensemble des solides, alors la structure est isostatique. (Exemple extrait de H.Crapo, prépublication)

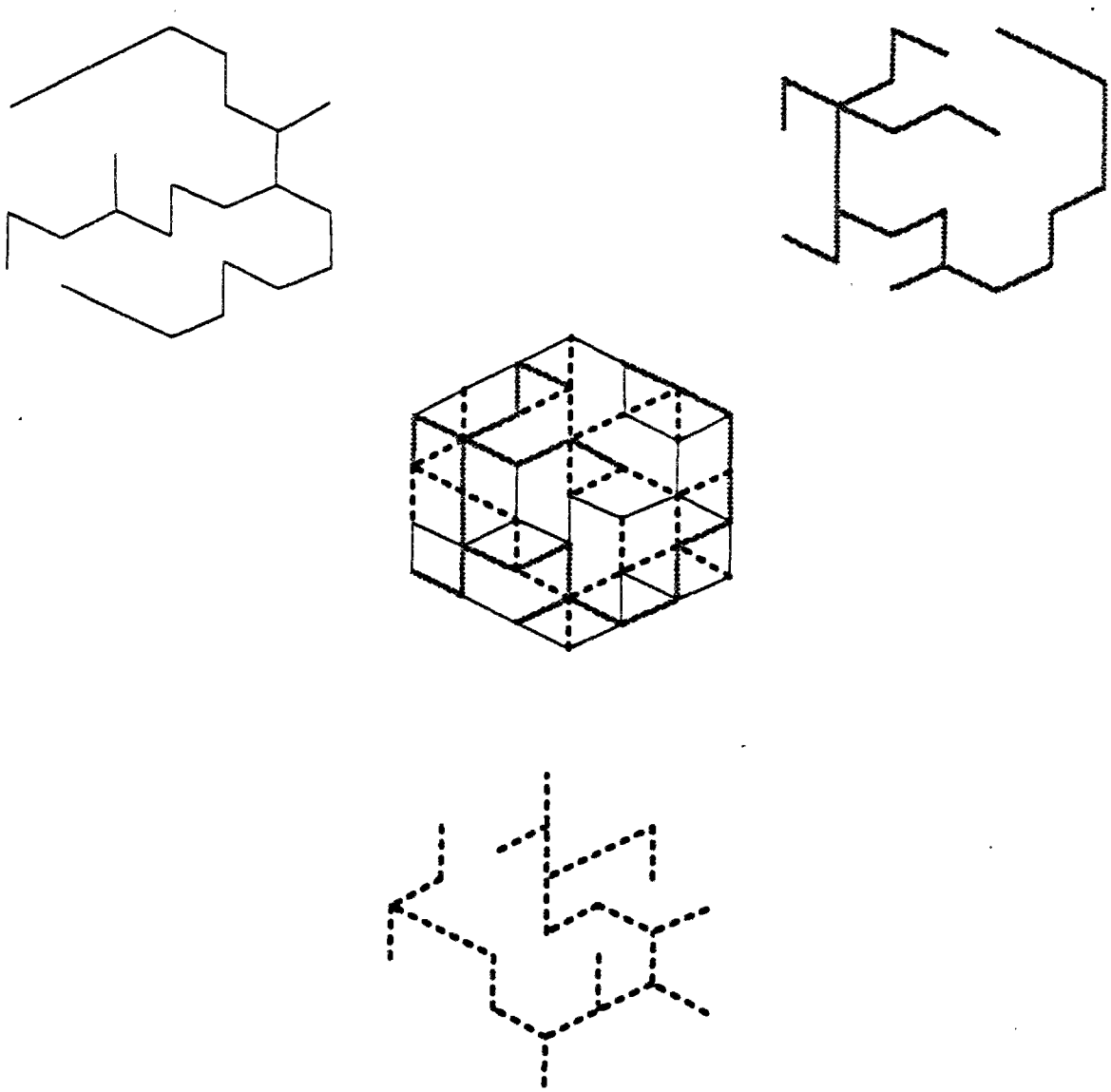


Figure 3.4 : L'exemple de la structure de la figure 3.2 peut être analysé comme isostatique car il existe trois arbres (traits fin continu, gras pointillé et grisé) qui s'évitent mutuellement et tels que chaque site appartient à deux arbres parmi les trois, et enfin tels qu'il n'existe pas deux sous-arbres qui couvrent une sous-partie de ce système.

information sur la rigidité du système. La nécessité de répartir ces trois arbres de façon à ce qu'ils s'évitent mutuellement introduit des contraintes non-locales.

La non-localité que l'on trouve ici est une simple conséquence de la partialité de l'information transmise par un seul lien. En effet un lien ne contraint deux sites que partiellement (dans la composante axiale de la différence de déplacements). On peut le percevoir dans la présence de l'opérateur de projection qui intervient dans l'expression de l'énergie élastique (Eq. 3.1.2). Nous aurons l'occasion de revenir sur ce point fondamental.

Un point essentiel également concerne la linéarité. En toute rigueur, un treillis réticulé, surtout au voisinage du seuil de rigidité, a un comportement non-linéaire. La non-linéarité est implicitement contenue dans l'écriture de l'énergie, car le vecteur $\mathbf{n}_{ij}$ est aligné sur le lien ij et est donc fonction des déplacements $\mathbf{U}_i$ et $\mathbf{U}_j$. Ces non-linéarités proviennent des grandes déformations locales, et incluent également des effets de flambement. Cependant, dans toute la discussion qui suit, nous nous bornerons au cas linéaire, i.e. relatif aux petites déformations locales, et où le flambement ne sera pas considéré. Ceci revient, dans le modèle, à considérer les vecteurs $\mathbf{n}_{ij}$ comme fixés à leurs valeurs dans l'état non-déformé. L'Hamiltonien (Eq.3.1.2) est alors bien une forme quadratique en $\mathbf{U}$.

- Notations

Dans tout ce chapitre, nous noterons les exposants relatifs au problème de forces centrales de la même façon que pour la percolation usuelle, sans pour autant préjuger ainsi de leurs valeurs. Dans les cas où nous comparerons ces deux situations, nous spécifierons la classe de problème considérée.

Ainsi, nous introduisons une longueur de corrélation, ξ, qui diverge au seuil de rigidité, p_r, de façon symétrique au dessus et en dessous du seuil, avec un exposant ν :

$$\xi \propto | p-p_r |^{-\nu} \qquad (3.1.8)$$

Pour le problème dilué, l'annulation du module élastique, Y, lorsque l'on s'approche du seuil par valeurs supérieures, est caractérisée par l'exposant τ,

$$Y \propto (p-p_r)^{\tau} \qquad (3.1.9)$$

et, pour le cas renforcé, Y diverge lorsque p se rapproche du seuil par valeurs inférieures selon:

$$Y \propto (p_r-p)^{-\sigma} \qquad (3.1.10)$$

Considérons maintenant au cas dilué. Le squelette, défini ici exclusivement par des propriétés de transport, est l'ensemble des liens qui portent une force non nulle dans une géométrie et un type de sollicitation donné. Il s'agit encore d'un objet statistique fractal. La masse de ce squelette (en valeurs moyennes), M_{bb}, varie avec la taille, L, du système selon :

$$M_{bb} \propto L^{Dbb} \qquad (3.1.11)$$

où D_{bb} est la dimension fractale.

Abordons maintenant un point plus délicat. En percolation de connexité, l'amas infini est un concept clair et simple. Sa transposition au cas de la percolation avec transmission partielle d'information est *a priori* non unique. L'information qui caractérise l'état d'un site ou d'un lien donné, n'est pas un simple scalaire. Pour fixer les idées, représentons l'état d'un site i par un vecteur, $\mathbf{V}_i$, dans un espace de dimension D, (bien que ceci ne soit pas nécessaire, c'est le cas notamment de la percolation de forces centrales où D est égal à la dimension de l'espace réel d). Dans une géométrie donnée, et avec des conditions aux limites

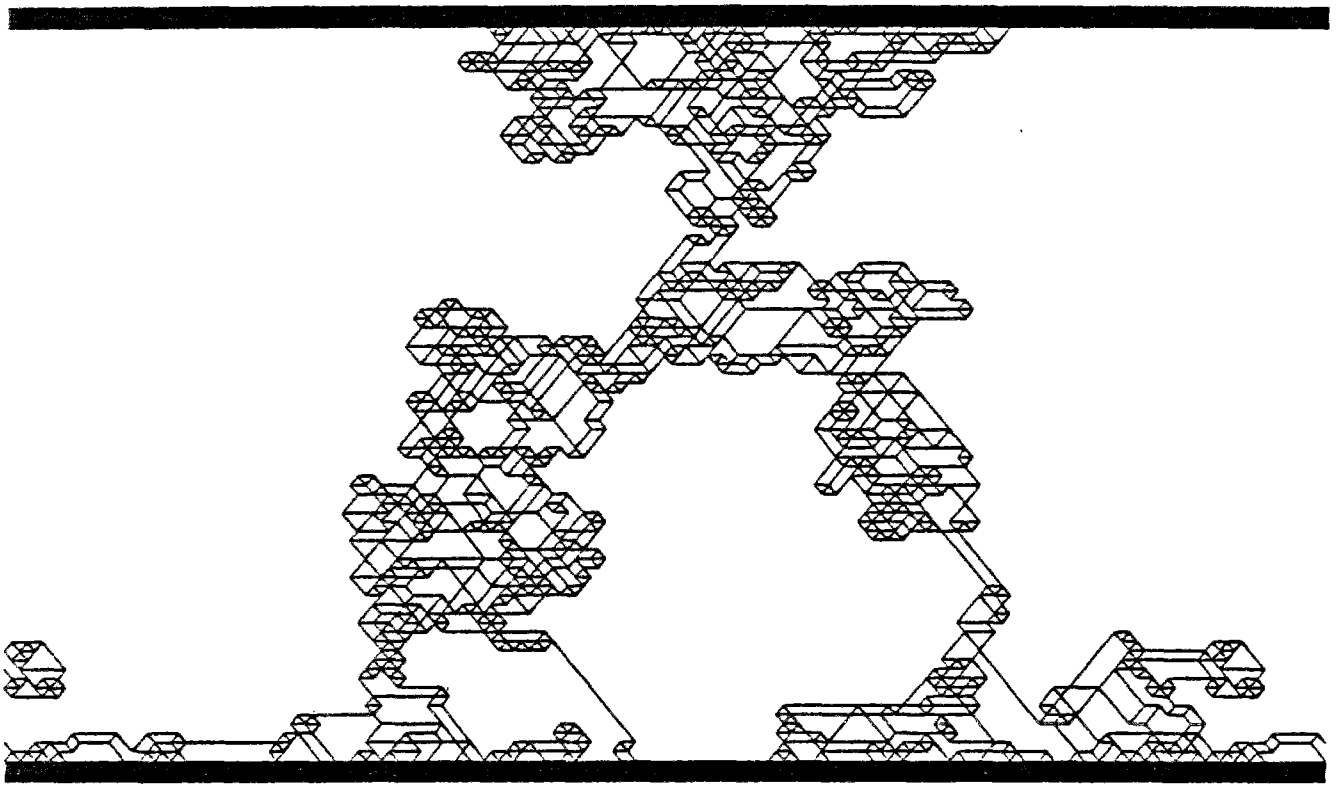


Figure 3.5 : Squelette d'un treillis réticulé dilué (de taille 80 par 80) au seuil de rigidité. Les conditions aux limites sont périodiques dans le sens horizontal, (un peu plus d'une période est montré sur la figure). Une force de traction verticale est appliquée sur les deux bords haut et bas (représentés en noir) considérés comme infiniment rigides.

fixées, le vecteur $\mathbf{V}_i$ peut être soit complétement déterminé, soit totalement indéterminé, mais, plus généralement, il sera astreint à appartenir à un sous-espace de dimension D'. Maintenant, pour définir le paramètre d'ordre de notre problème, nous sommes naturellement amenés à envisager l'ensemble, $\mathcal{E}_n$, des sites dont le vecteur **V** est contraint à un espace de dimension inférieure ou égale à n, pour n (strictement) inférieur à D. Partant, nous introduisons les exposants critiques, β_n, tels que

$$\text{Card}(\mathcal{E}_n) \propto (p-p_r)^{\beta n} \qquad (3.1.12)$$

où Card(...) est le cardinal (nombre d'éléments) de l'ensemble considéré. Dans le cas de la percolation de connexité où D=1, l'exposant β introduit au chapitre précédent est simplement β_0, le seul membre de cette famille.

Pour que le système soit critique, il faut et il suffit qu'<u>une</u> information puisse être propagée à l'infini. Ainsi, il semble raisonnable, (et nous verrons dans la suite que les résultats numériques le confirment pour la percolation de forces centrales, et que ceci peut être démontré dans certains modèles simples), d'opter pour le choix du paramètre d'ordre, l'ensemble $\mathcal{E}_{D-1}$ des sites qui ont au moins une contrainte. Cet ensemble est nécessairement connexe et de plus il doit s'étendre à l'infini pour que l'information se propage. Dans les comparaisons entre différents modèles, locaux ou non, que nous ferons dans la suite, retenons que le "bon" exposant est β_{D-1}.

Les relations d'inclusions qui découlent naturellement des définitions :

$$\mathcal{E}_{D-1} \supset \mathcal{E}_{D-2} \supset \ldots \supset \mathcal{E}_1 \supset \mathcal{E}_0 \qquad (3.1.13)$$

fournissent les inégalités entre exposants:

$$\beta_{D-1} \leq \beta_{D-2} \leq \ldots \leq \beta_1 \leq \beta_0 \qquad (3.1.14)$$

Si de plus nous faisons l'hypothèse d'une décorrélation entre le cheminement des différentes informations dans le système, nous sommes amenés à la relation simple suivante :

$$\beta_{D-i} = i\,\beta_{D-1} \qquad (3.1.15)$$

pour tout i variant de 1 à D. Si cette dernière relation est vraie dans un cas simple soluble (3PAFT explicité plus loin), elle ne semble pas vérifiée numériquement pour le cas de la percolation de forces centrales.

Spécialisons maintenant notre discussion à ce dernier cas. L'ensemble $\mathcal{E}_0$ est alors l'ensemble des sites rigidement liés dont la position est complètement déterminée, alors que l'ensemble $\mathcal{E}_1$ correspond aux sites partiellement contraints, libres de se mouvoir dans au plus une direction.

Considérons le cas de la percolation de connexité: les bords d'un réseau induisent de propriétés de surface originales, différentes de celles du milieu infini. En particulier, si la probabilité d'appartenir à l'amas infini pour un site quelconque varie [9] comme

$$P_\infty \propto (p-p_c)^\beta \qquad (3.1.16)$$

il en va différemment pour un site qui serait sur la frontière d'un domaine semi-infini. Nous avons alors une probabilité P'_∞ qui suit une loi d'échelle différente [10,11,12]:

$$P'_\infty \propto (p-p_c)^{\beta'} \qquad (3.1.17)$$

Ainsi, à deux dimensions, $\beta = 5/36$, à comparer à $\beta' = 4/9$. La plus grande valeur de β', traduit l'effet répulsif de la coupure du domaine infini. En effet, certains sites de la frontière ne seront pas partie intégrante de l'amas infini, alors qu'ils l'auraient été si le domaine avait été infini, car la coupure a empêché la propagation de la connexité dans un demi-espace (voir figure 3.6 A et B).

Nous pouvons étudier ce comportement critique de surface par un effet de taille finie de la manière suivante. Considérons un réseau de percolation dont la géométrie est celle d'un ruban de largeur finie w, et de longueur infinie. Un site sur l'un des bords de ce ruban aura une probabilité P'(w) d'être connecté par un chemin continu au bord opposé. Alors, au seuil de percolation, nous pourrons écrire (en suivant un argument développé à de nombreuses reprises) que

$$P'(w) \propto w^{-\beta'/\nu} \qquad (3.1.18)$$

Dans le contexte de la percolation de forces centrales, nous aurons donc à introduire deux comportements critiques de surface, selon que l'on s'interessera aux sites rigidement liés

$$P'_0(w) \propto w^{-\beta'_0/\nu} \qquad (3.1.19)$$

ou partiellement

$$P'_1(w) \propto w^{-\beta'_1/\nu} \qquad (3.1.20)$$

C'est effectivement par une méthode de ce type que nous pouvons estimer ces exposants [13].

- Découplage

Nous allons brièvement considérer un cas particulier, où, exceptionellement, quelques résultats sont obtenus de manière exacte.

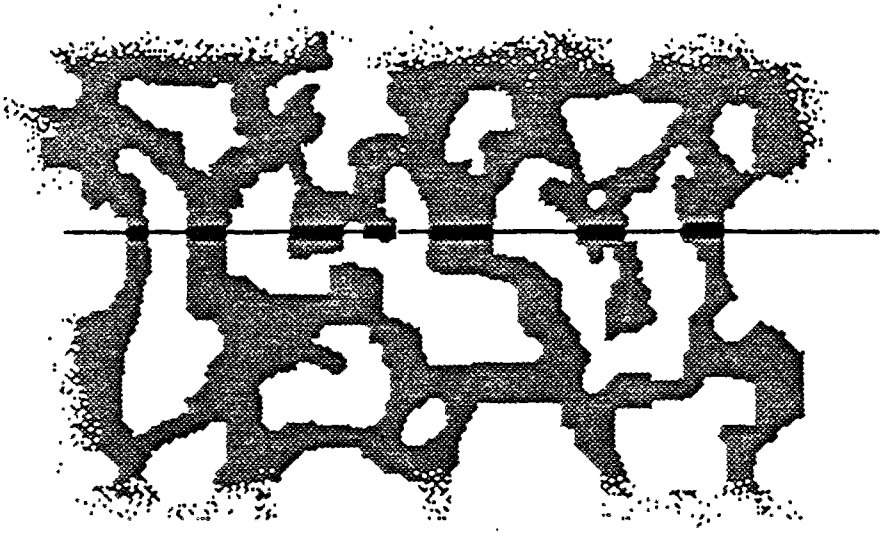


Figure 3.6 A : Représentation schématique d'un amas infini (montré en grisé) dans un plan sans limite. La probabilité d'appartenir à l'amas infini est caractérisée par un exposant critique β.

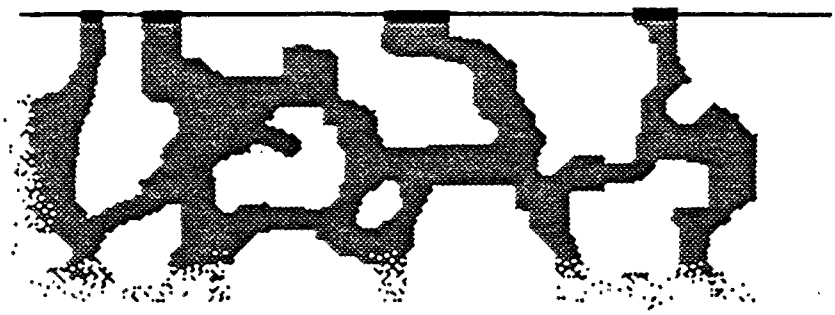


Figure 3.6 B : Représentation schématique d'un amas infini (montré en grisé) dans un plan limité par une droite. La probabilité d'appartenir à l'amas infini pour un point situé sur la droite frontière (traits gras) est caractérisée par un exposant critique de surface β' différent de β.

Malheureusement, ce cas partiellement soluble a perdu le sel de la non-localité, et ne peut être étendu au cas le plus général.

La simplification de ce cas particulier est obtenue en imposant que tous les liens orientés dans une direction particulière, disons 1, soient présents. Les autres liens du réseau triangulaire sont absents avec une probabilité (1-p) ou présents avec une probabilité p. Nous nous réfèrerons souvent à ce problème sous la dénomination un peu vague d' "anisotrope".

La présence de tous les liens dans une direction donnée, découple le problème en deux parties indépendantes : l'une, triviale par construction, dans la direction 1, et l'autre dans la direction orthogonale. En effet, une force appliquée dans une direction quelconque aura toujours sa composante selon 1 équilibrée par les liens présents dans cette direction. La seule question qui se pose concerne la composante de la force perpendiculaire à la direction 1. Comme nous avons vu que les seuls efforts supportés par les barres articulées étaient des efforts normaux, il faut chercher exclusivement parmi les liens orientés selon les directions 2 et 3 ceux qui transmettent cet effort. Il s'ensuit alors, comme le montre la figure 3.7, que pour équilibrer une telle force, il faut qu'existe une structure continue du point d'application de la force jusqu'à un bord (ou à l'infini), dans le sous-réseau formé par les liens 2 et 3. Ce sous-réseau étant de fait un réseau carré, le seuil de rigidité du réseau triangulaire anisotrope sera le seuil de percolation de connexité du réseau carré (soit pour un problème de lien, p_c=0.5).

Nous voyons alors que le découplage du problème nous permet une simple correspondance avec un problème de percolation usuelle. Ceci est vrai, non seulement pour la détermination du seuil de rigidité et pour les propriétés géométriques qui en découlent, mais également pour certaines propriétés de transport.

Considérons le problème renforcé : tous liens dans la direction 1 sont infiniment rigides, alors que pour les directions 2 et 3 ils ne le sont qu'avec une probabilité p. Les liens qui ne sont pas infiniment rigides sont présents mais ont un

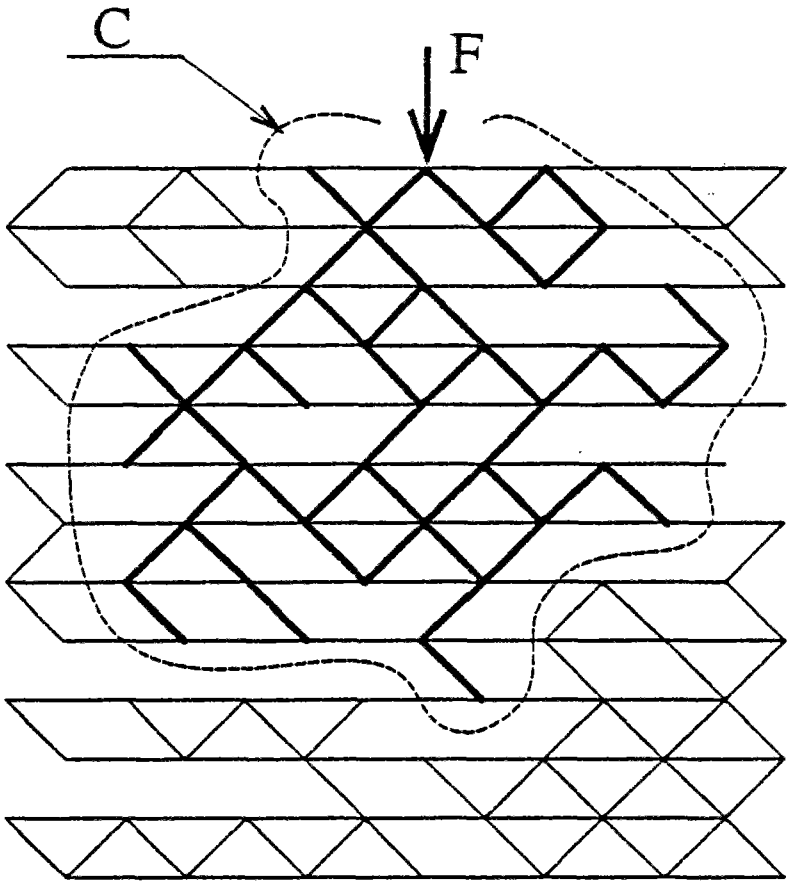


Figure 3.7 : La force F verticale appliquée sur ce réseau ne peut pas être équilibrée car comme le montre la courbe C, la résultante des efforts transmis par les liens qui interceptent cette courbe est nécessairement horizontale. Il en est de même pour tous les amas formés par les liens non-horizontaux de ce réseau.

module élastique fini, disons l'unité. La compliance C du système (l'inverse du module élastique) doit alors s'annuler au seuil de rigidité en suivant la loi

$$C \propto (p_c-p)^{\sigma''} \qquad (3.1.21)$$

où nous avons introduit un nouvel exposant σ''. Utilisant comme toujours un argument de taille finie, nous savons qu'au seuil de rigidité, la dépendance de la compliance avec la taille du système sera de la forme :

$$C \propto L^{-\sigma''/\nu} \qquad (3.1.22)$$

Une simulation par matrice de transfert [14] de cet exposant a fourni l'évaluation $\sigma''/\nu = 0.99 \pm 0.03$ (Cf. Fig.3.8). Cette valeur est très voisine de celle rencontrée dans le problème élastique renforcé en percolation usuelle (systèmes avec élasticité angulaire, 0.97 ± 0.03), et également de celle du problème supraconducteurs-conducteurs (exposant s/ν, 0.9745 ± 0.0015) comme nous l'avons vu au chapitre précédent. De fait Wang et Brooks-Harris [15] ont montré que cette correspondance était ici exacte :

$$\sigma''=s \qquad (3.1.23)$$

Nous reproduisons ici leur argument. Introduisons x_i et y_i les coordonnées du déplacement de chaque site i dans la direction 1 et perpendiculairement. Puisque les liens 1 sont infiniment rigides, tous les sites d'une même ligne 1 auront un même déplacement selon 1, x. De plus, pour un réseau de taille suffisante, il existera, avec une probabilité aussi voisine de 1 que l'on désire, au moins un hexagone constitué de liens infiniment rigides qui joindra trois lignes consécutives dans la direction 1.(Cf. Fig.3.9). Ces hexagones étant rigides, ils imposent naturellement que le déplacement x soit une fonction affine de

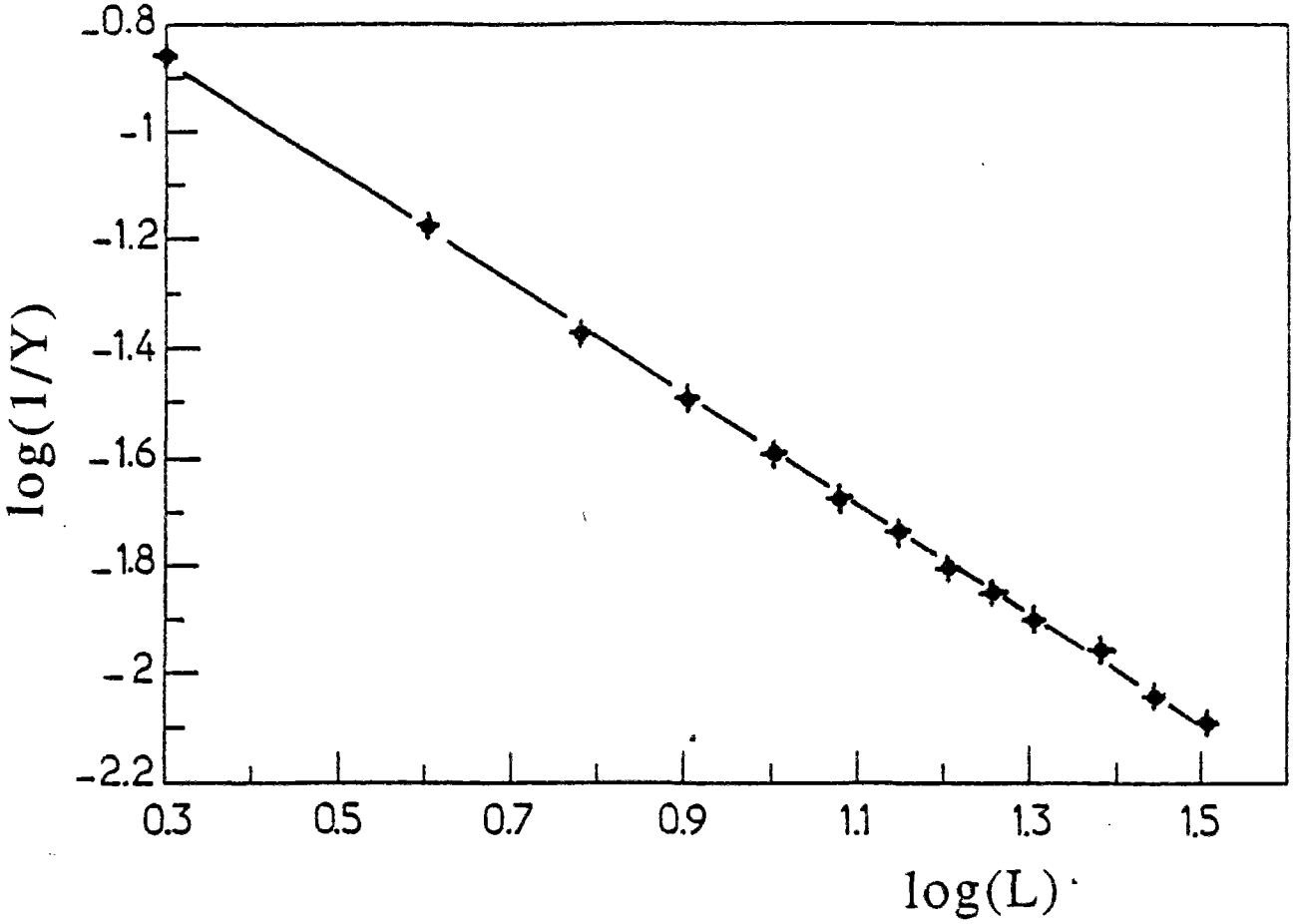


Figure 3.8 : Evolution de la compliance du réseau anisotrope de forces centrales au seuil de rigidité en fonction de la taille du système, en coordonnées bilogarithmiques. La pente donne l'exposant σ''/ν estimé ici à 0.99 ± 0.03. Courbe extraite de la référence [14].

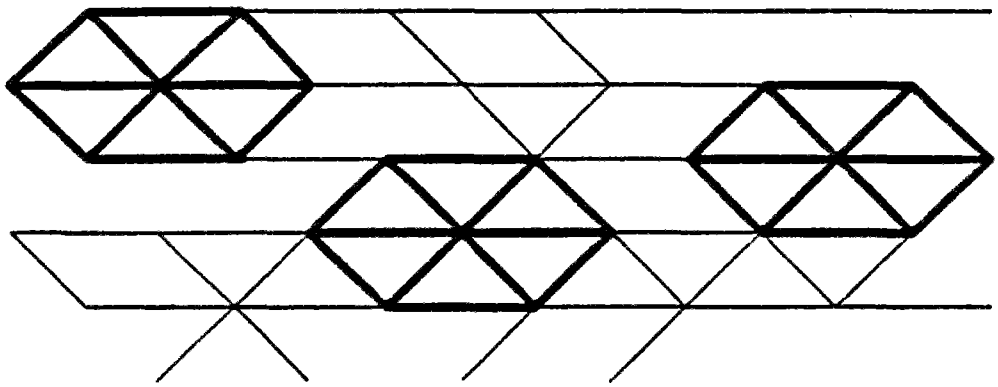


Figure 3.9 : Dans le cas anisotrope, où seuls les liens infiniment rigides ont été représentés, il existe, avec une probabilité finie, des hexagones (tracés en traits gras) qui rigidifient les déplacements horizontaux de chaque triplet de lignes horizontales consécutives.

la coordonnée perpendiculaire à 1. Nous pouvons ainsi imposer que x soit nul pour tout lien, car une telle fonction affine correspond à une simple translation et à une rotation de l'ensemble du réseau, or un mouvement rigide ne saurait modifier l'énergie élastique du système. Ainsi l'expression de l'énergie se réduit dans ce problème à la simple expression suivante :

$$E= 1/2\ (\sqrt{3}/2)^2\ \Sigma_{ij}\ (y_i-y_j)^2 \qquad (3.1.24)$$

la somme étant restreinte à tous les liens élastiques (donc sur le sous-réseau 2-3). Il est alors simple d'identifier une telle expression de l'énergie avec celle d'un problème de percolation de connexité, où des supraconducteurs et des conducteurs sont présents en lieu et place des liens infiniment rigides et élastiques respectivement sur le sous-réseau carré. y est alors interprété comme un potentiel, et la conductivité des liens résistifs vaut (3/4). Le module élastique du problème élastique anisotrope original va donc diverger au seuil comme la conductivité du problème électrique, et donc l'égalité (3.1.23) résulte. Si nous conjuguons à ce résultat exact, la conjecture selon laquelle la divergence du module élastique pour un système élastique renforcé avec élasticité angulaire, se fait encore avec un même exposant (σ=s) (cf. chapitre précédent), alors nous obtenons le résultat que la présence ou non d'élasticité angulaire ne joue pas de rôle significatif pour ce comportement critique. Le cas dilué malheureusement ne se prête pas aussi aisément à une telle correspondance.

Ce résultat ne peut non plus être étendu au cas générique de la percolation de forces centrales. En effet, la présence de tous les liens dans une direction (et donc le caractère essentiel qui rend le problème soluble dans certains cas) peut modifier la classe d'universalité du phénomène. Nous connaissons en particulier le cas de la percolation dirigée, où la présence de tous les liens dans une direction rend également le problème soluble analytiquement, en établissant une correspondance exacte avec des marches aléatoires, mais modifie la valeur des

exposants critiques (par exemple $\nu_{//} = 2$ et $\nu_{\perp} = 1$ dans le cas anisotrope, et $\nu_{//} = 1.7334$ et $\nu_{\perp} = 1.0972$ dans le cas général).

Revenons maintenant dans le cadre général de la percolation de forces centrales dans le cas isotrope.

- Scalaire ou Vectoriel ?

La distinction que l'on fait souvent pour différencier les systèmes électriques (ou assimilés) et élastiques, consiste à qualifier les premiers de scalaires et les seconds de vectoriels. Cette appellation repose, bien entendu, sur le caractère scalaire des potentiels électriques (des pressions pour la perméabilité, des phases pour les jonctions Josephson, des concentrations pour la diffusion, ou finalement des températures pour la conduction thermique) mis en jeu dans les premiers, et le caractère vectoriel des quantités correspondantes (i.e. les déplacements) dans le cas de l'élasticité. Comme nous allons le montrer, bien que commode, cette distinction ne repose que sur des fondements très superficiels: Certains problèmes vectoriels (cf. le modèle de Born vu au chapitre précédent) ont un comportement identique au cas de la conduction électrique. De façon symétrique, nous pouvons formuler la percolation de forces centrales en des termes exclusivement scalaires [16].

Nous avons vu au chapitre précédent la notion de champ de contrainte admissible, et la formulation du problème qui découlait de son utilisation. Ceci nous avait, entre autres, permis de définir une relation de dualité entre différentes situations. Une technique similaire peut être utilisée dans le cas de la percolation de forces centrales. La structure de base qui va nous permettre d'engendrer tous les champs de contraintes admissibles est montrée sur la figure 3.10. Il s'agit d'un hexagone régulier dont les liens radiaux sont soumis à une force φ, alors que les liens périphériques portent une force $-\varphi$. Il est trivial de voir que de tels objets sont effectivement en équilibre d'une part, et d'autre part, qu'ils engendrent l'ensemble des champs de contraintes admissibles. Chaque structure élémentaire dépend donc

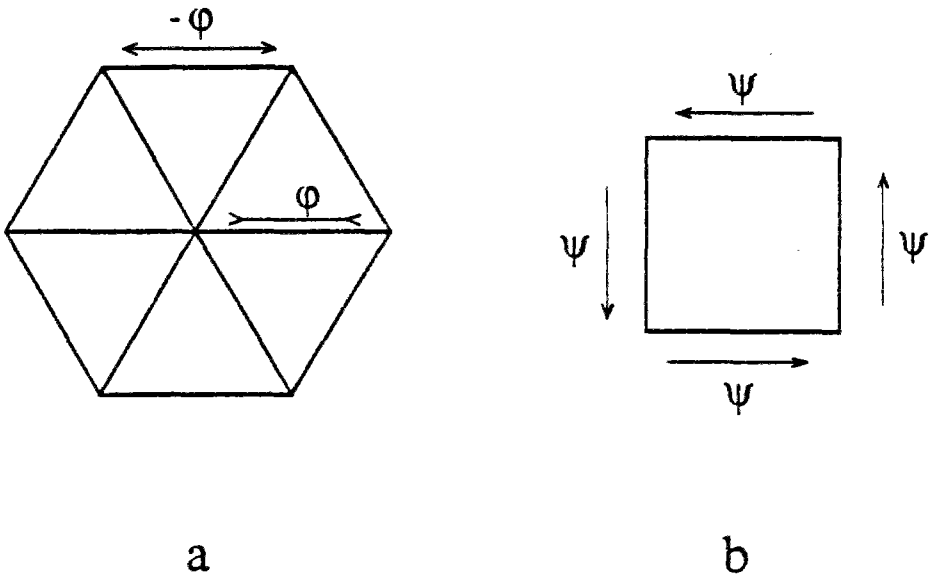


Figure 3.10 : Configuration de précontrainte élémentaire (a), où les liens radiaux de l'hexagone supportent une force φ alors que les liens périphériques supportent une force opposée -φ. La figure de droite (b) représente la structure équivalente pour un problème de conduction électrique. Il s'agit alors d'un courant de boucle ψ.

ainsi d'un paramètre scalaire, φ_i, la force dans les liens radiaux, que nous associons conventionellement au centre, i, de l'hexagone.

La force supportée par un lien i-j provient alors de la superposition de quatre structures précontraintes élémentaires. En effet, le lien i-j est radial pour les deux hexagones centrés en i et en j, et il est périphérique pour deux autres hexagones de centre k(i,j) et l(i,j) (Cf. Fig. 3.11). La force f_{ij} transitant dans le lien sera donc :

$$f_{ij} = \varphi_i + \varphi_j - \varphi_{k(i,j)} - \varphi_{l(i,j)} \qquad (3.1.25)$$

l'énergie élastique du réseau peut alors s'écrire :

$$E = 1/(2k) \ \Sigma_{ij} \ \delta_{ij} \ f_{ij}^2 \qquad (3.1.26)$$

où δ_{ij} vaut l'unité pour les liens ij élastiques, l'infini pour les liens absents dans le cas dilué et zéro pour les liens infiniment rigides dans le cas renforcé. k est la raideur de chaque barre élastique, soit encore

$$E = (1/2k) \ \Sigma_{ij} \ \delta_{ij} \ (\varphi_i + \varphi_j - \varphi_{k(i,j)} - \varphi_{l(i,j)})^2 \qquad (3.1.27)$$

La solution du problème élastique est alors donnée en minimisant E sur l'ensemble des champs φ qui respectent les conditions aux limites. Cette formulation est finalement très voisine de celle obtenue en utilisant les courants de boucles pour le cas de la conduction électrique. Cependant une différence essentielle apparait ici. Nous avions obtenu dans le cas électrique une formulation tout à fait semblable en termes de potentiels ou bien de courants de boucles. Ceci nous avait permis alors d'identifier le problème dual au problème primal (Cf. Chapitre 2). Ici, nous aboutissons à une formulation scalaire du problème de forces centrales dont la forme de l'énergie est originale.

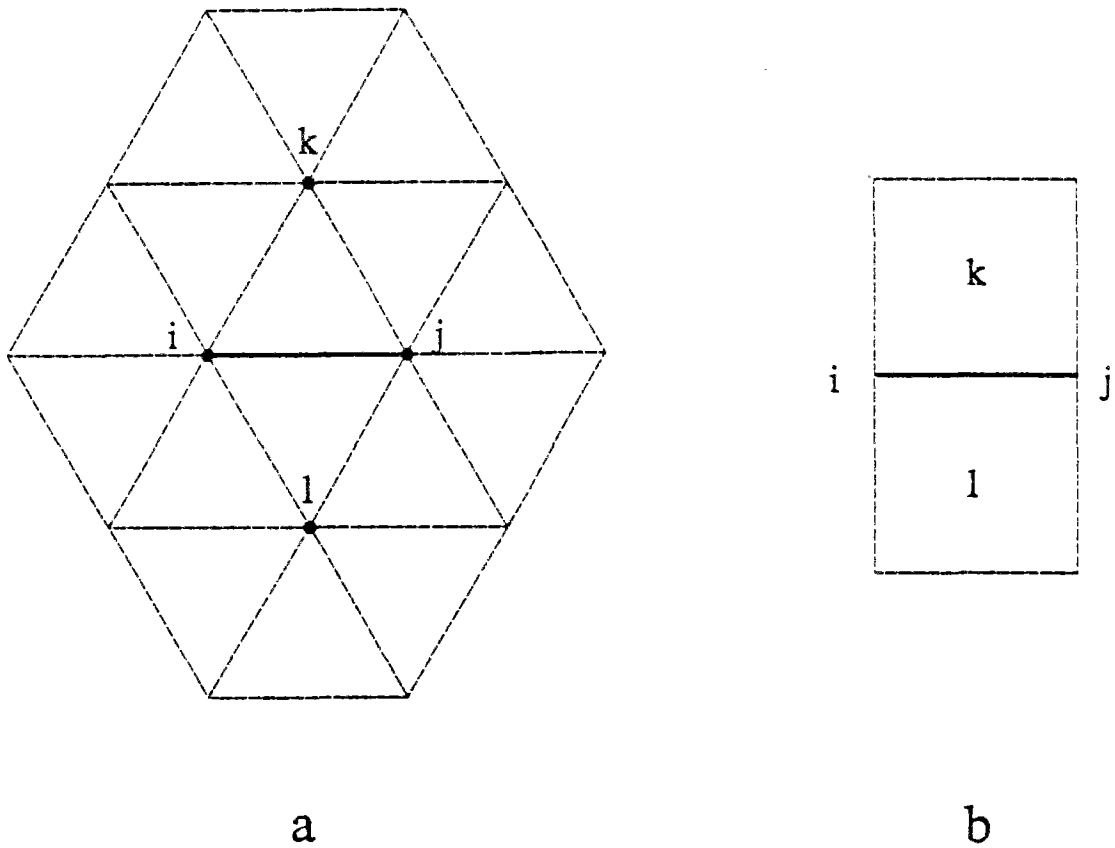


Figure 3.11: Utilisant la distribution des forces dans une structure élémentaire précontrainte, il est aisé de déduire, par superposition, la force réelle qui transite par un lien ij donné. Les quatre hexagones qui contribuent sont montrés en pointillés (a). La figure de droite (b) donne la construction équivalente pour la conduction électrique, où seules deux mailles interviennent.

L'invariance de l'énergie élastique dans tout déplacement de corps rigide transparait ici dans les différentes formes du champ φ qui donnent la même énergie élastique. Il est aisé de se convaincre que l'addition à φ d'un champ affine

$$\varphi_i \rightarrow \varphi_i + A + Bx(i) + Cy(i) \qquad (3.1.28)$$

en les coordonnées (x(i),y(i)) de tout point i dans le plan n'a aucune conséquence physique. Cette invariance est l'analogue élastique de l'addition d'un potentiel constant à un réseau de conducteurs. Cette symétrie est, elle, donc tout à fait fondamentale et subsiste bien entendu dans toute formulation du problème, qu'elle soit scalaire ou vectorielle.

Notons en passant l'analogie entre cette formulation et la notion de fonction d'Airy en élasticité plane [17]. Rappelons à ce propos que la fonction d'Airy Ψ est définie comme un potentiel de contrainte par les relations suivantes

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \partial^2 \Psi / \partial y^2 \\ \sigma_{yy} &= \partial^2 \Psi / \partial x^2 \\ \sigma_{xy} &= -\partial^2 \Psi / \partial x \partial y \end{aligned} \qquad (3.1.29)$$

Les équations de compatibilité (équations de Beltrami) imposent alors que la fonction d'Airy soit biharmonique. Symétriquement, toute fonction scalaire biharmonique peut ainsi engendrer un champ de contrainte solution d'un problème d'élasticité plane. L'équation (3.1.25) peut être considérée comme la discrétisation d'un opérateur différentiel du second ordre, agissant sur le champ φ pour donner les forces transitant dans chaque lien. La minimisation de l'énergie (3.1.26) exprimée en termes de φ donnent alors des relations scalaires sur φ qui seraient des discrétisations d'opérateurs différentiels du quatrième ordre, analogues à la condition de biharmonicité de la fonction d'Airy.

Notons de façon plus générale que d'autres formulations potentielles existent en élasticité plane [17] (Muskhelishvili, ...) et il serait intéressant d'explorer les conséquences de telles formulations dans notre contexte (version discrète sur réseau et "dilution" de ce réseau) afin de mieux mettre en évidence le rôle joué par les opérateurs tant laplacien que bilaplacien dans le comportement critique de réseaux elastiques dilués ou renforcés au seuil de percolation. Il s'agit là encore d'une voie vierge où tout reste à faire.

Nous avions déjà utilisé la formulation en termes de champs admissibles dans les problèmes de conduction électrique et d'élasticité afin d'établir des correspondances de dualité entre différents problèmes. Ici également, nous pouvons maintenant interpréter les variables φ introduites précédemment en leur donnant une nouvelle signification [16]. Nous proposons de comprendre φ_i comme un déplacement du site i dans la direction normale au plan du réseau. Il faut alors interpréter l'énergie élastique (3.1.26) dans ce nouveau cadre. Cette énergie est une somme de différents termes (initialement un pour chaque lien) qui mettent en jeu quatre variables φ aux sommets de losanges composés de deux triangles élémentaires voisins. Nous qualifierons de plaquettes les losanges ainsi formés. Pour l'une de ces plaquettes (i,j,k,l), l'énergie sera nulle si et seulement si

$$\varphi_i + \varphi_j - \varphi_k - \varphi_l = 0 \qquad (3.1.30)$$

Il est facile alors de voir que cette condition, où φ est un déplacement hors du plan, correspond à une condition de coplanéité des quatre sommets (i,j,k,l). L'énergie associée à une plaquette

$$E_{ijkl} = 1/(2k)\ \delta_{ij}\ (\varphi_i + \varphi_j - \varphi_k - \varphi_l)^2 \qquad (3.1.31)$$

est donc une énergie de courbure de la plaquette (Cf. Fig. 3.12). k, qui était précédemment une raideur (d'une barre), devient alors une souplesse de flexion de

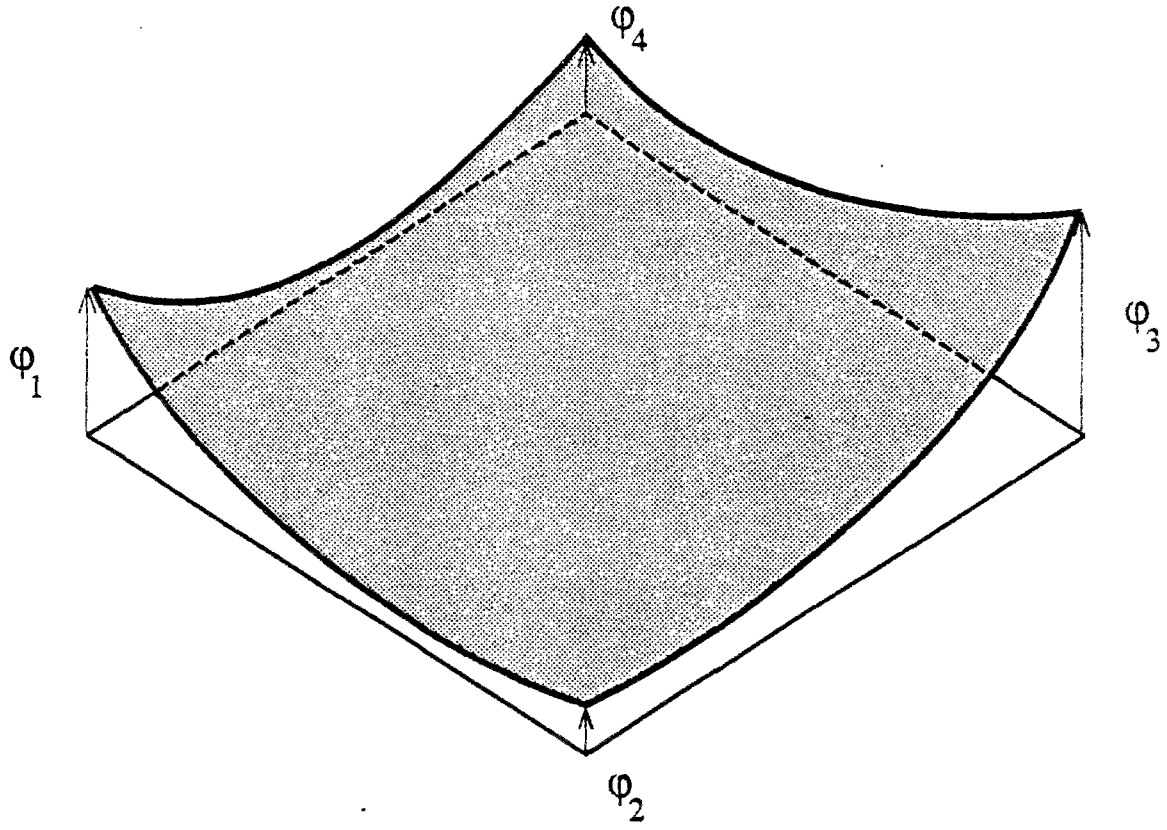


Figure 3.12 : Flexion d'une plaquette élémentaire. Les variables φ qui symbolisaient les forces dans chaque structure précontrainte sont maintenant interprétées comme des déplacement hors du plan par la correspondance de dualité explicitée dans le texte.

chaque plaquette. Si dans le réseau initial, un lien ij était élastique de raideur k, alors la plaquette de diagonale courte ij sera élastique normale de souplesse k; si le lien était absent, alors la plaquette sera infiniment rigide, et finalement si le lien était infiniment rigide alors la plaquette sera absente (ou infiniment souple).

Il est tout à fait remarquable de noter que la correspondance que l'on établi ainsi entre la déformation dans le plan d'un treillis réticulé dilué (respectivement renforcé) et la déformation hors du plan d'un réseau de plaquettes renforcé (resp. dilué) est tout à fait semblable à la correspondance que nous avions montré par dualité pour les réseaux de poutres encastrées (entre déformation perpendiculaire et parallèle au plan).

Nous allons maintenant nous attacher exclusivement au cas de la déformation dans le plan. Comme nous l'avions déja mentionné, le problème du comportement critique de ces systèmes est une question tout à fait délicate tant au niveau théorique que numérique. Nous présentons donc dans un premier temps les résultats publiés dans la littérature, puis nos propres résultats en tentant une analyse critique.

- Bref historique

Le problème de la percolation de forces centrales (cas dilué) a été étudié pour la première fois par Feng et Sen [1]. Ces auteurs ont utilisé dans leur travail numérique un algorithme de relaxation . Nous aurons l'occasion de revenir sur les problèmes inhérents à cette technique numérique. Disons simplement ici qu'elle est très mal adaptée à l'étude de ce type de problème, et qu'elle donne des résultats peu fiables. Ceci explique probablement le caractère très approximatif des résultats obtenus. L'estimation du seuil de rigidité, p_r, et de l'exposant τ, qui gouverne l'évolution du module élastique, était

$$p_r = 0.58 \qquad (3.1.32)$$

et

$$\tau = 2.4 \pm 0.4 \qquad (3.1.33)$$

Nous verrons que ces valeurs sont maintenant tout à fait exclues par les estimations actuelles. Cette première référence sur le sujet, ne présente plus aujourd'hui qu'un intérêt historique.

Le problème a ensuite été reconsideré par Lemieux, Breton et Tremblay [18]. Ces auteurs ont utilisé une méthode de matrice de transfert. La détermination du seuil se faisant en recherchant le "meilleur" comportement critique du module élastique en fonction de la taille du système, à une valeur de p fixée. p_r est alors choisi comme étant la valeur de p qui réalise une variation de type loi de puissance. En parallèle à ces approches, ces auteurs ont utilisé la propriété d'échelle suivante : en variant, à la fois p et la taille L du système, il est possible d'écrire la variation du module élastique Y selon

$$\begin{aligned} Y &= (p-p_r)^{\tau} f(L/\xi) \\ &= (p-p_r)^{\tau} f(L\,|p-p_r|^{\nu}) \end{aligned} \qquad (3.1.34)$$

Ainsi, un simple tracé de $Y(p-p_r)^{-\tau}$ en fonction de $L\,|p-p_r|^{\nu}$ permet d'obtenir deux courbes, l'une relative à $p>p_r$ et l'autre à $p<p_r$, qui rassemblent toutes les données (pour différents p et L). La détermination de τ et ν indépendamment se fait donc en jouant sur le triplet de paramètres p_r, τ et ν de manière à obtenir le "meilleur" regroupement des points de mesures ("data collapse"). Utilisant ces deux critères, l'estimation fournie est

$$\begin{aligned} p_r &= 0.650 \pm 0.005 \\ \tau &= 1.40 \pm 0.20 \\ \nu &= 1.05 \pm 0.15 \end{aligned} \qquad (3.1.35)$$

Bien qu'idéale dans le principe, cette étude pose quelques problèmes : La technique de matrice de transfert, implique l'inversion de tenseurs de rigidité locaux relatifs à un lien, dans la forme

$$\mathbf{K'}_{il} = \mathbf{K}_{il} - \mathbf{K}_{ij} (\mathbf{K}_{jj}+\mathbf{k})^{-1} \mathbf{K}_{jl} \qquad (3.1.36)$$

où chaque terme de cette équation est un tenseur 2x2, (dont les composantes $\alpha\beta$ ne sont pas ici explicitées $\mathbf{K}_{ij} = (K_{ij}{}^{\alpha\beta})$, i et j ne sont pas ici les indices des composantes). Or le tenseur $(\mathbf{K}_{jj}+\mathbf{k})$ a souvent une valeur propre nulle : il n'est donc pas inversible. Ceci correspond physiquement, à la présence d'une direction le long de laquelle la raideur est nulle alors que, dans la direction perpendiculaire, elle ne l'est pas. Cette "inversion" est cependant légitime car si $(\mathbf{K}_{jj}+\mathbf{k})$ a une valeur propre nulle dans une direction, alors $\mathbf{K}_{ij}$ et $\mathbf{K}_{jl}$ ont aussi une valeur propre nulle dans cette même direction. Ainsi, nous pouvons légitimer la dénomination d' "inverse" en considérant la limite d'une valeur propre tendant vers zéro. Il est aussi possible de librement changer la valeur propre nulle (tout en respectant les directions propres) avant de procéder à l'inversion, sans modifier le résultat.

Lemieux et coll. ont évité la difficulté en ajoutant en chaque site du réseau une liaison élastique faible (de raideur $\varepsilon=10^{-5}$) et isotrope qui relie ce site à un substrat fictif indéformable. Ceci revient à ajouter systématiquement le tenseur $\varepsilon\mathbf{I}$ à chaque tenseur de rigidité. Il devient alors toujours possible d'effectuer les inversions (au sens strict). Mais en contrepartie, les deux valeurs propres sont modifiées. Ceci introduit donc un effet pervers: une erreur systématique cumulative. L'effet de cette procédure ne devient sensible cependant que pour des grandes tailles.

Une autre difficulté est liée au même processus: dans l'inversion de ces tenseurs mal conditionnés (présentant un grand rapport de valeurs propres) interviennent des instabilités numériques occasionnées par des erreurs d'arrondis.

Ces instabilités deviennent de plus en plus fréquentes lorsque la taille du système augmente. Il est cependant possible de guérir de telles instabilités en redéfinissant l'inverse, T^{-1}, d'un tenseur, T, ayant une valeur propre nulle, par

$$T^{-1} = (1/\,tr(T)^2)\,T \qquad (3.1.37)$$

où tr(.) désigne la trace [19].

La raison pour laquelle nous insistons sur de tels détails techniques est que, le calcul par matrice de transfert ne se conçoit, (de façon à en exploiter les avantages), que pour des géométries de "rubans", de faibles largeurs, mais de très grandes longueurs. En dessous de longueurs de l'ordre de 10^4, pour des largeurs de 20, les fluctuations sont telles qu'il est impossible d'obtenir des estimations précises. De plus, lorsque la largeur augmente, pour garder une précision approximativement constante, il faut accroître la longueur. Or dans leur étude numérique, Lemieux et coll. n'avaient considéré que des longueurs très faibles (2000) pour des largeurs variant de 3 à 48 et finalement pour la largeur maximale, 77, la longueur générée fut seulement de 460. En conclusion, nous ne prétons qu'une confiance très limitée aux valeurs correspondant à des largeurs supérieures à 30.

Revenons maintenant sur les résultats annoncés : le fait le plus marquant est la valeur de l'exposant de la longueur de corrélation $\nu = 1.05 \pm 0.15$. Cette estimation est, en effet, très différente de celle que l'on rencontre en percolation de connexité, où $\nu = 4/3 = 1.33$. la conclusion qui s'impose est alors que : ***la classe d'universalité de la percolation de forces-centrales est différente de celle de la percolation de connexité.*** Dans ces conditions, tous les exposants géométriques (ν, β, D_f, ...) que nous avons mentionnés au chapitre précédent, doivent être recalculés. Il en va, *a fortiori*, de même pour les exposants de transport (τ, σ, D_{bb}, D_s, ...).

Attardons nous un instant sur ce résultat : En extrapolant à trois dimensions, il semble alors raisonnable de penser que tous les modèles d'élasticité à transmission partielle d'information que nous avons mentionné appartiennent chacun à une classe d'universalité différente! La situation devient alors tellement diverse que les applications de modèle de type percolation à la transition sol-gel, en particulier, doivent être étudiées au cas par cas en fonction de la structure des liaisons chimiques entre molécules (torsion et/ou flexion libre ou non....).

L'étude de Lemieux et coll. [18] a été poursuivie par Day, Tremblay et Tremblay [20] du même groupe, avec des outils différents. La méthode numérique utilisée était alors une relaxation par gradient conjugué. Cet algorithme, bien qu'aussi sujet au ralentissement critique, près du seuil de rigidité, est beaucoup plus sûr que la relaxation de Gauss-Seidel ou de Jacobi. En effet, nous savons que cette méthode converge vers la solution exacte en un nombre fini d'itérations (égal au nombre de degrés de liberté du système). Cette seconde étude a donné les résultats suivants, confirmant les calculs précédents :

$$p_r = 0.650 \pm 0.005$$
$$\tau/\nu = 1.35 \pm 0.10 \qquad (3.1.38)$$

D'autres quantités ont alors pu être mesurées grâce à cette technique, comme en particulier la dimension fractale du squelette qui fut estimée à

$$D_{bb} = 1.94 \,{}^{+0.06}_{-0.10} \qquad (3.1.39)$$

Encore une fois, cet exposant apparait comme très différent de son équivalent en percolation de connexité, où $D_{bb} = 1.62$. La valeur de $D_{bb} = 2$ n'est même pas exclue de leur encadrement. Ceci traduit une structure beaucoup plus compacte que pour les réseaux aléatoires de résistances.

Revenons encore sur le détail du calcul : deux critiques peuvent être formulées. La taille des systèmes considérés était cette fois très faible (jusqu'à 28 par 28). Mais surtout, le nombre d'itérations nécessaires à la convergence du calcul était supérieur au nombre maximum théorique! Il est possible de rencontrer un tel phénomène si l'algorithme de gradient conjugué a été mal implanté : en effet, si les directions de relaxations successives ne sont pas orthogonales (par rapport au tenseur de rigidité), alors on obtient un algorithme du même type que la relaxation dite de Jacobi. A savoir, la convergence vers la solution du problème aura toujours lieu, mais elle sera beaucoup plus lente que dans le cas où la relaxation par gradient conjugué est implémentée de manière correcte. La figure présentée dans l'article [20], représentant le squelette d'un réseau, vient étayer la possibilité d'une mauvaise implémentation de l'algorithme. Il est possible de voir dans cette figure que plusieurs liens ne peuvant supporter aucune force (pour des raisons géométriques), font cependant partie du squelette tel que dessiné dans cette référence. Ceci indique donc nettement un manque de convergence du programme. La taille des systèmes considérés est cependant suffisament faible pour que les résultats ne ressentent pas trop la difficile convergence de l'algorithme.

Sahimi et Goddard [21] ont étudié la divergence du module élastique dans le problème renforcé. La procédure suivie numériquement était la renormalisation sur petits réseaux (de tailles 8, 12 et 18). L'algorithme de résolution utilisé n'était pas spécifiée dans la référence [21]. Les résultats obtenus étaient les suivants :

$$\begin{aligned} p_r &= 0.65 \\ \sigma/\nu &= 1.02 \\ \nu &= 1.1 \end{aligned} \qquad (3.1.40)$$

sans barres d'erreurs estimées.

Dans un travail ultérieur [22] concernant la rupture de réseaux élastiques, ces mêmes auteurs ont reproduit un calcul concernant le cas dilué. Leurs résultats, obtenus par une technique numérique non précisée, ont confirmé les estimations de Lemieux et al [18], et de Day et al [20].

$$p_r = 0.65$$
$$\tau/\nu = 1.50 \pm 0.20 \qquad (3.1.41)$$

Très récemment, Arbabi et Sahimi [23] ont étendu les calculs précédents (cas dilué) à différents types de dilution : A) liens, B) liens corrélés et C) sites. La dilution de liens corrélés introduite par Kirkpatrick [24], consiste à introduire des nombres aléatoires S_i en chaque site i, puis à évaluer pour chaque lien ij de nouveaux nombres S_{ij} évalués à partir des précédents par

$$S_{ij} = 1/2\ (|S_i|+|S_j|+|S_i-S_j|) \qquad (3.1.42)$$

Enfin la dilution est réalisée en enlevant tous les liens dont le nombre S_{ij} est supérieur à un limite Δ choisie. La proportion de liens présents vaut alors

$$p(\Delta) = (3/4)\ \Delta^2 \qquad \text{si } 0 \le \Delta \le 1 \qquad (3.1.43)$$
$$p(\Delta) = \Delta - (1/4)\ \Delta^2 \qquad \text{si } 1 \le \Delta \le 2$$

Cette dernière procédure est une des multiples variations sur le thème de la dilution, qui ne modifie que le seuil en ce qui concerne la percolation usuelle, puisque les corrélations entre liens introduites par ce modèle, sont de portée finie (plus proche voisin uniquement). Elle constitue simplement un cas intermédiaire entre dilution de sites et de liens. Arbabi et Sahimi ont alors généré des réseaux de tailles variant entre 10 et 45, pour ces trois modèles par une méthode d'élimination de Gauss. Ils ont ainsi estimé p_r, ν et τ/ν :

Cas A (liens):

$$p_r = 0.65$$
$$\tau/\nu = 1.42 \pm 0.04 \qquad (3.1.44)$$
$$\nu = 1.1$$

Cas B (liens corrélés):

$$p_r = 0.58 \pm 0.01$$
$$\tau/\nu = 1.28 \pm 0.04 \qquad (3.1.45)$$
$$\nu = 0.90 \pm 0.05$$

Cas C (site):

$$p_r = 0.71 \pm 0.01$$
$$\tau/\nu = 1.14 \pm 0.04 \qquad (3.1.46)$$
$$\nu = 0.94 \pm 0.05$$

Ces estimations ont été faites en prenant en compte des corrections d'échelle importantes (logarithmiques) identiques à celles observées par Zabolitsky et al [25] dans le calcul du module élastique de sytèmes, avec élasticité angulaire, dilués, au seuil de percolation usuel.

La conclusion que semblerait suggérer une telle étude est qu'il n'existe pas de classe d'universalité de la percolation de force centrale. Les exposants observés dépendant du processus même de dilution. Cette dernière conclusion est choquante! En effet, si l'idée d'universalité est rejetée par cette analyse, il n'en demeure pas moins que des lois de puissance seraient observées pour le module élastique ainsi que pour la longueur de correlation. Or l'idée même de lois de puissance provient de l'existence d'un régime où le système n'est plus sensible aux détails locaux du modèle comme la structure du réseau, et *a fortiori* le processus de dilution. Ceci constitue par exemple le fondement même de la renormalisation. De façon quelque peu inconsistente, Arbabi et Sahimi [24] ont estimé les exposants critiques précités par renormalisation. Dans la suite de ce travail, nous prendrons le

parti pris de ne considérer ces résultats que comme un artéfact numérique, ou comme le fruit d'une analyse insuffisamment précautionneuse. Il est également intéressant de noter que Garcia-Molina, Guinea et Louis [26] sont parvenus à une conclusion similaire à celle d'Arbabi et Sahimi suivant des résultats numériques différents, mais dans ce dernier cas il etait facile [27, 28] de démontrer que cette conclusion était erronée, comme les auteurs l'ont eux-mêmes reconnu ultérieurement [29].

Une autre étude à laquelle nous nous réfèrerons est celle de Burton et Lambert [30] qui se sont interessé au spectre de vibration du problème renforcé. Ces auteurs ont obtenu ce spectre, $N(\omega)$, par un algorithme de matrice de transfert pour différentes valeurs du seuil de percolation de rigidité : 0.630, 0.635, 0.640, et 0.650. En superposant ces différents spectres sous la forme

$$N(\omega)\, L^d = \phi\,(\omega\, L^{2d/D_s}) \qquad (3.1.47)$$

ils ont estimé tant p_r que la dimension spectrale correspondant au cas renforcé, D_s. Si l'on considère leurs graphiques, il semble que les deux valeurs extrèmes de p essayées sont à rejeter, alors que pour p=0.635 et 0.640, l'accord est raisonnable pour certaines plages de valeurs de D_s. Les auteurs font preuve d'un peu d'optimisme en concluant que :

$$p_r = 0.6375 \pm 0.0025$$

et

$$D_s = 4.0 \pm 0.2 \qquad (3.1.48)$$

soit, en utilisant la relation liant D_s à σ/ν:

$$D_s = 2d / (2-\sigma/\nu) \qquad (3.1.49)$$

on tire:

$$\sigma/\nu = 1.00 \pm 0.05 \qquad (3.1.50)$$

car les valeurs de p_r intermédiaires entre les deux cas extrêmes rejetés sont *a priori* possibles. Nous ne donnerons donc pas de crédit trop important aux barres d'erreurs citées, en remarquant qu'en tout état de cause ces dernières sont toujours évaluées de manière quelque peu subjective.

Marshall et Brooks-Harris [31] ont enfin eux aussi analysé le problème dilué de façon numérique, par une technique d'élimination de Gauss. Ces auteurs se sont intéressés aux moments de la distribution de tailles d'amas. Ils ont donc été amenés à calculer des exposants essentiellement géométriques, par effet de taille finie, sur des réseaux de tailles 12, 18, 24 et 36.

$$\begin{aligned} p_r &= 0.640 \pm 0.002 \\ \nu &= 1.14 \pm 0.10 \\ \beta &= 0.46 \pm 0.40 \\ \gamma &= 1.60 \pm 0.30 \end{aligned} \qquad (3.1.51)$$

Ces résultats confirment donc encore que la classe d'universalité de la percolation de force centrale (puisque nous considérons ici qu'une telle classe existe) est différente de celle de la percolation usuelle. Cependant, si γ est violemment différent de sa valeur en percolation de connexité (2.39), ν est relativement proche de la valeur équivalente (4/3), et la large barre d'erreur sur β autorise également la comparaison avec (0.14).

Cette énumération de résultats a au moins un avantage, celui de sa diversité! Ceci suffit à convaincre que ce problème est délicat et qu'il est facile d'aboutir à des conclusions aussi originales que possible. Nous allons maintenant présenter nos propres résultats obtenus par différentes techniques numériques et pour plusieurs comportements critiques, puisqu'il semble indispensable de vérifier

la cohérence des résultats et la sûreté des algorithmes utilisés. Nous ne répèterons pas les précautions qu'il y a lieu d'apporter aux conclusions de notre travail.

- Résultats

Les problèmes que nous avons considérés sont les suivants :

-Module élastique pour le cas dilué, par matrice de transfert [19]

-Module élastique pour le cas renforcé, par matrice de transfert [19]

-Probabilité de rigidité en surface pour le cas dilué, par matrice de transfert [13]

-Diffusion anormale, par matrice de transfert [32]

-Structure du squelette, Module élastique [33], Bruit... Spectre multifractal [34] de la distribution des forces pour le cas dilué, par gradient conjugué.

Nous avons déjà évoqué la difficulté liée à l'algorithme de matrice de transfert dans le cas dilué, à savoir l' "inversion" des tenseurs de rigidité dégénérés. Dans le cas renforcé, nous rencontrons une difficulté un peu similaire: un lien infiniment rigide est toujours à même de tourner librement à ses extrémités, donc son tenseur de souplesse (l'inverse du tenseur de rigidité) avec lequel il est naturel de travailler, comporte deux valeurs propres : l'une nulle et l'autre infinie. Ainsi, ni la souplesse, ni la rigidité, ne sont de bonnes représentations. La façon la plus simple de contourner cette difficulté consiste simplement à considérer simultanément une paire de liens formant un chevron. La souplesse du site ajouté au réseau sera alors toujours finie puisque tous les liens sont présents. Mis à part ce détail, la mise en œuvre du calcul est tout à fait standard et ne pose pas de problème de stabilité.

En ce qui concerne la probabilité d'appartenir à un amas rigide à la surface d'un domaine, la procédure suivie est très proche de celle du calcul du module élastique toujours par matrice de transfert. Les détails de l'algorithme sont explicités dans l'article [19].

Quant à la "diffusion anormale", nous l'étudions ici [32] de la même manière que dans le cas de la conduction électrique. Nous aurons l'occasion de

revenir sur ce sujet mais il ne nous a pas servi explicitement à déterminer le seuil de rigidité.

Finalement, la seconde technique utilisée, la relaxation par gradient conjugué, [33,34] bien que lourde à mettre en œuvre, nous permet d'avoir accès à une multitude d'informations sur le système. Cette technique est sujette au ralentissement critique au seuil de rigidité. Nous avons essayé de réduire ce ralentissement critique par un reconditionnement du tenseur de rigidité dans l'espace de Fourier [35]. Cette technique est très rentable dans le cas de la conductivité à partir de tailles réduites (de l'ordre de 30 par 30). Dans le cas des forces-centrales, le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une même erreur résiduelle, est effectivement diminué, mais cela ne se traduit pas encore par un gain de temps de calcul global pour la taille des réseaux que nous avons considérée (jusqu'à 80 par 80). Les raisons de cette difficulté sont discutées en détails dans la référence [35]. Une façon de pallier cet obstacle, consiste probablement à utiliser la formulation scalaire discutée ci-dessus, mais cela n'a pas encore été testé. Notons, finalement, que l'estimation d'erreurs n'est pas critique : c'est une mesure fiable de la convergence de l'algorithme, alors que dans certains cas, comme pour la relaxation de Gauss-Seidel [35], certains estimateurs d'erreur donnent des sous-estimations systématiques d'erreur de plus en plus graves, au fur et à mesure que l'on se rapproche du seuil, ou que le système devient grand.

Enfin, ces deux grands types d'approche ont été mutuellement vérifiés, en calculant des quantités semblables sur un même réseau, avec ces deux approches.

Nous avons tenté, pour différentes valeurs de p, d'obtenir une évolution de différentes quantités physiques critiques selon une loi de puissance avec la taille du système. (Cette loi de puissance est reliée, comme nous l'avons vu maintes fois, à l'exposant critique correspondant au phénomène étudié). Les valeurs de concentration, p, essayées ont varié depuis 0.630 jusqu'à 0.660. Nous

pouvons maintenant donner une synthèse des résultats obtenus, en présentant plus précisémment deux valeurs du paramètre p, qui selon les cas donnent de "bons" ou de "mauvais" résultats.

Dans un premier temps, nous avons tenté d'évaluer le seuil en étudiant le module élastique du problème dilué [19]. Les comportements qui suivaient le mieux une loi de puissance, dans la gamme de taille 2-30, ont étés obtenus pour p=0.653. Lorsque p est supérieur à cette valeur, la courbe log(Y) en fonction de log (L) (Y: module élastique, L: taille du système) présente une nette courbure vers le haut, traduisant le fait que la valeur de p estimée était au dessus du seuil de rigidité (le reste de la discussion montrera que, effectivement, toutes les autres quantités physiques considérées présentent les caractéristiques semblables). Au contraire, pour des valeurs de p inférieures, il existe une courbure constante vers le bas, qui indique que soit le seuil de rigidité est supérieur, soit qu'il existe des corrections d'échelle importantes. L'estimation $p_r = 0.653$ est compatible avec l'estimation donnée par Lemieux et coll.[18] et Day et coll.[20] qui procédaient de cette manière de façon à estimer le seuil. Dans ces conditions, pour p = 0.653, nous mesurons un exposant (cf. courbe 3.13) apparent $\tau/\nu = 1.35$ toujours en accord avec les études précitées. Acceptant pour l'instant cette valeur du seuil, nous pouvons estimer les autres comportements critiques :

- Dans le problème renforcé, le module élastique obtenu par matrice de transfert, ne suit pas une loi de puissance franche. Il existe une forte courbure vers le bas dans la figure 3.14 qui indique alors une valeur de l'exposant σ/ν très élevée, marquée de fortes corrections d'échelle (typiquement : $\sigma/\nu \geq 3$)

- Les probabilités de rigidité de surface P'_0 et P'_1 tendent à saturer vers des valeurs non nulles lorsque la taille du système augmente. Au mieux peut-on estimer que les exposants β'_0/ν et β'_1/ν sont très faibles (typiquement inférieurs à 0.05) [13]

- La dimension fractale du squelette, D_{bb}, est rigoureusement égale à 2 [33].

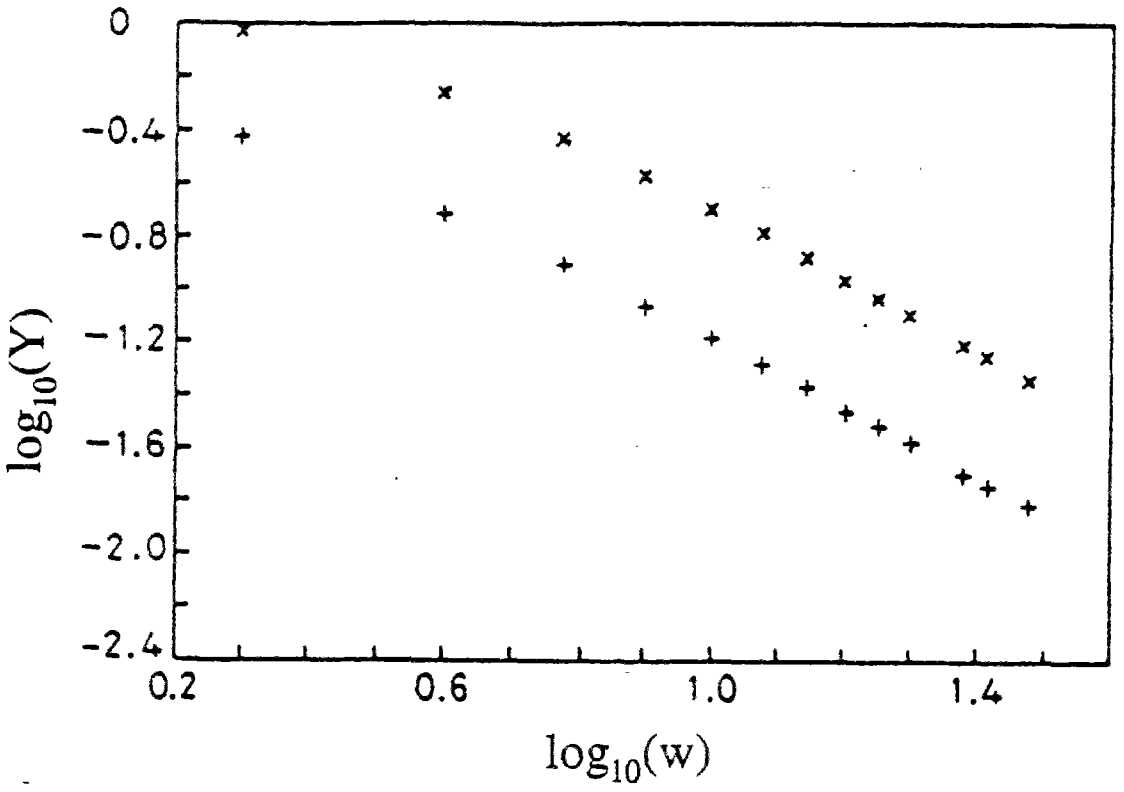


Figure 3.13 : Evolution du module élastique Y en fonction de la taille du système w en coordonnées bi-logarithmiques, pour une valeur de p = 0.653. Les deux symboles correspondent à un module de traction (x) et de cisaillement (+). L'exposant apparent pour les plus grandes tailles est 1.35.

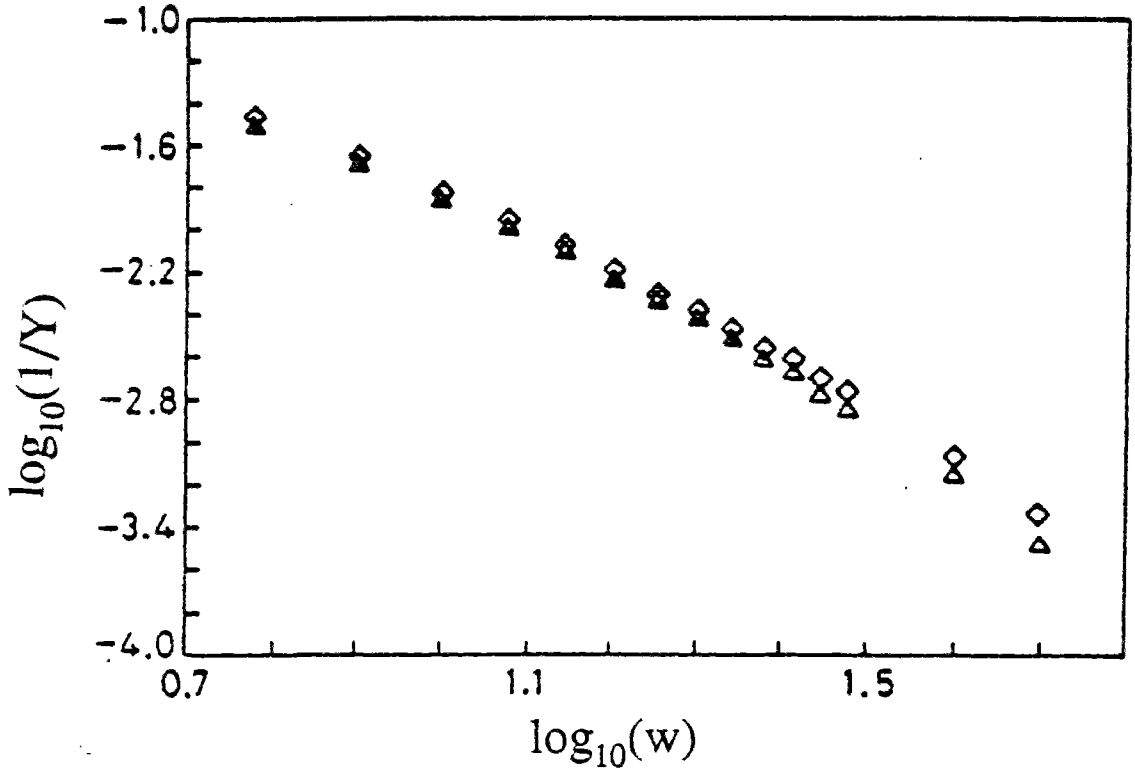


Figure 3.14 : Evolution de la compliance 1/Y en fonction de la taille du système w en coordonnées bi-logarithmiques, pour une valeur de p = 0.653. Les deux symboles correspondent à un module de traction (◊) et de cisaillement (Δ). L'exposant apparent pour les plus grandes tailles est supérieur à 3.

L'ensemble de ces données est donc compatible avec les résultats publiés de Lemieux et coll.[18] et Day et coll.[20]. Cependant, il convient de remarquer que le seul comportement véritablement satisfaisant qui suit effectivement une loi de puissance, sans de fortes corrections d'échelle, est le cas du module élastique du problème dilué. Pour les autres quantités étudiées, les valeurs suivantes ne sont pas exclues :

$$\left|\begin{array}{l} \sigma/\nu = +\infty \\ \beta'_0/\nu = 0 \\ \beta'_1/\nu = 0 \\ D_{bb} = 2 \end{array}\right. \qquad (3.1.52)$$

Or ces valeurs-ci indiquent plus vraisemblablement que le seuil de rigidité a été mésestimé, et qu'il est de fait inférieur à la valeur test $p_r < 0.653$.

Nous avons donc repris l'étude du seuil en se fixant maintenant un nouveau critère d'appréciation : à savoir d'une part, la dimension fractale du squelette et d'autre part, la variation du module élastique du cas renforcé. En essayant d'autres valeurs test du seuil, nous avons obtenu des comportements tout à fait "satisfaisants" pour la valeur $p = 0.642$.

- Dans ce cas, le squelette a une dimension fractale

$$D_{bb} = 1.64 \pm 0.03 \qquad (3.1.53)$$

sans corrections d'échelle appréciables pour des tailles de systèmes supérieures à 20. (cf. Fig.3.15) [33].

- Le module élastique, dans le problème renforcé, suit une loi de puissance avec la taille, toujours avec de faibles corrections d'échelle, dont l'exposant σ/ν est estimé à

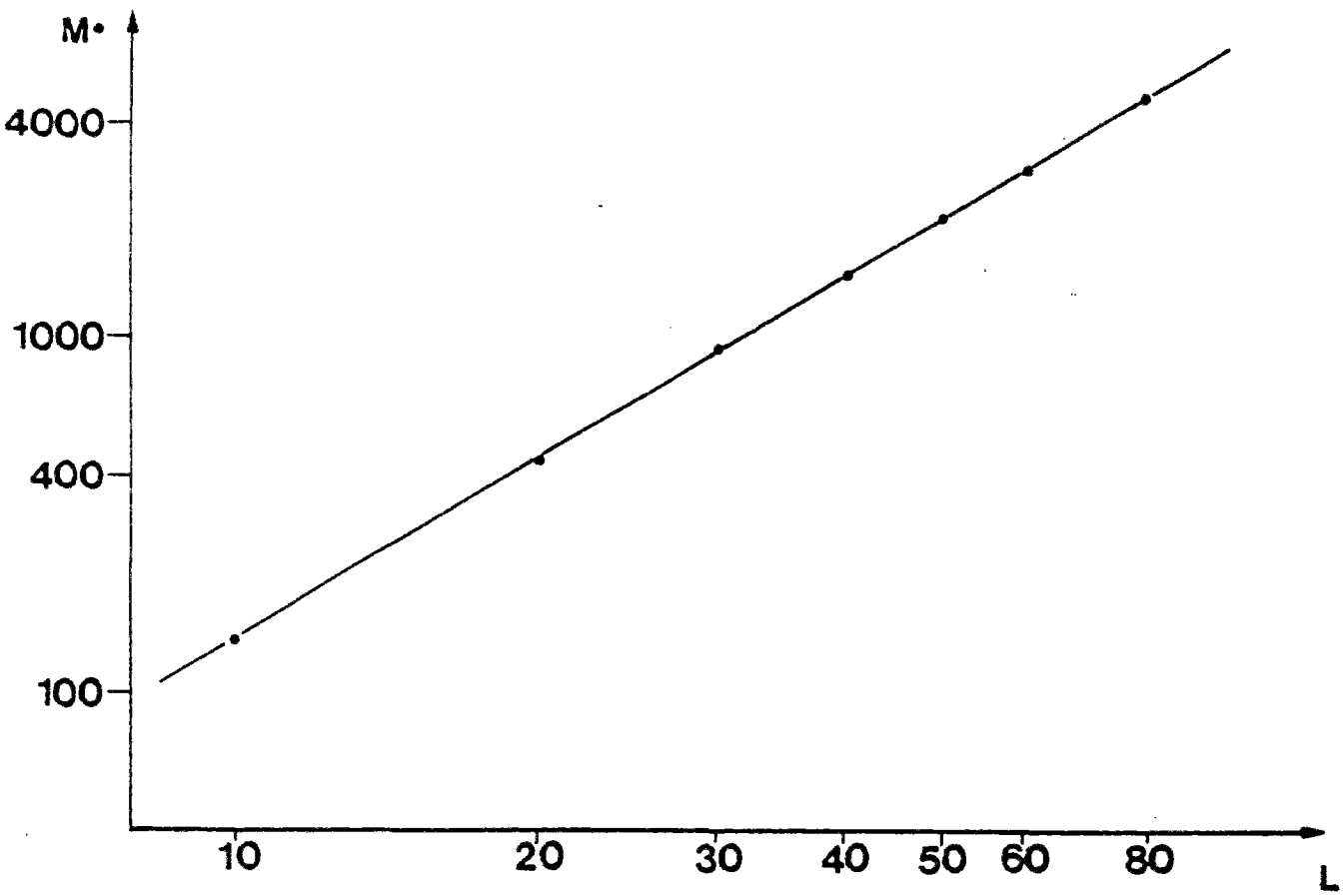


Figure 3.15 : Masse du squelette en fonction de la taille du système en coordonnées bi-logarithmiques, pour une valeur de p = 0.642. La pente de la droite est la dimension fractale du squelette. Elle est estimée ici à 1.64 ± 0.03.

$$\sigma/\nu = 0.97 \pm 0.02 \qquad (3.1.54)$$

- Les probabilités de rigidité de surface P'_0 et P'_1 suivent encore des lois de puissance qui donnent

$$\beta'_0/\nu = 0.54 \pm 0.03 \qquad (3.1.55)$$

et

$$\beta'_1/\nu = 0.31 \pm 0.03 \qquad (3.1.56)$$

Jusqu'à présent, tous les exemples cités, se révèlent "acceptables", au sens où les valeurs d'exposants ne sont ni nulles, ni infinies, et que les corrections sont faibles. Mais pour le problème dilué, le cas du module élastique est peu satisfaisant. La courbe 3.16 représentant log(Y) en fonction de log(L) présente une forte concavité. Prise isolément, comme dans le procédure précédente, cette seule courbe inciterait à croire que le seuil est sous-estimé. La seconde alternative consiste à admettre, pour ce cas précis, que les corrections aux lois d'échelle sont très importantes, et que l'exposant τ/ν est grand ($\tau/\nu \geq 2.2$).

Comparons maintenant la situation avec celle que nous rencontrons en percolation usuelle toujours pour le comportement élastique, comme par exemple sur le réseau de poutres, où alors le seuil est bien connu. Les exposants D_{bb}, σ/ν, et β'/ν (correspondant respectivement à D_{bb}, σ/ν, et β'_1/ν) montrent de faibles corrections d'échelle, alors que le cas de l'exposant τ/ν, comme nous l'avons vu au chapitre précédent, est très marqué par des corrections d'échelle, comme l'illustrait en particulier la figure 2.26 tirée de l'étude numérique de Zabolitzky et coll. [25]. Insistons sur le fait qu'alors, l'estimation du seuil ne peut être incriminée, et donc que ces corrections apparaissent comme un trait intrinsèque de l'élasticité en percolation (cas dilué).

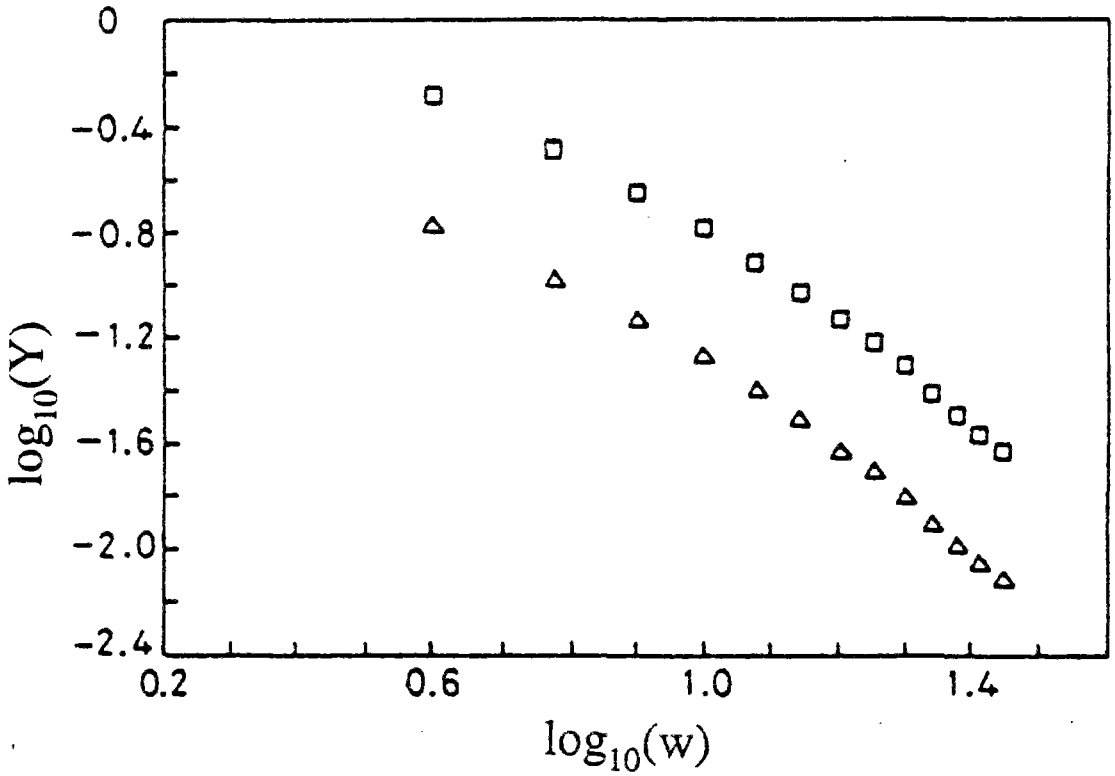


Figure 3.16 : Evolution du module élastique Y en fonction de la taille du système w en coordonnées bi-logarithmiques, pour une valeur de p = 0.642. Les deux symboles correspondent à un module de traction (❐) et de cisaillement (Δ). L'exposant apparent pour les plus grandes tailles est supérieur à 2.2.

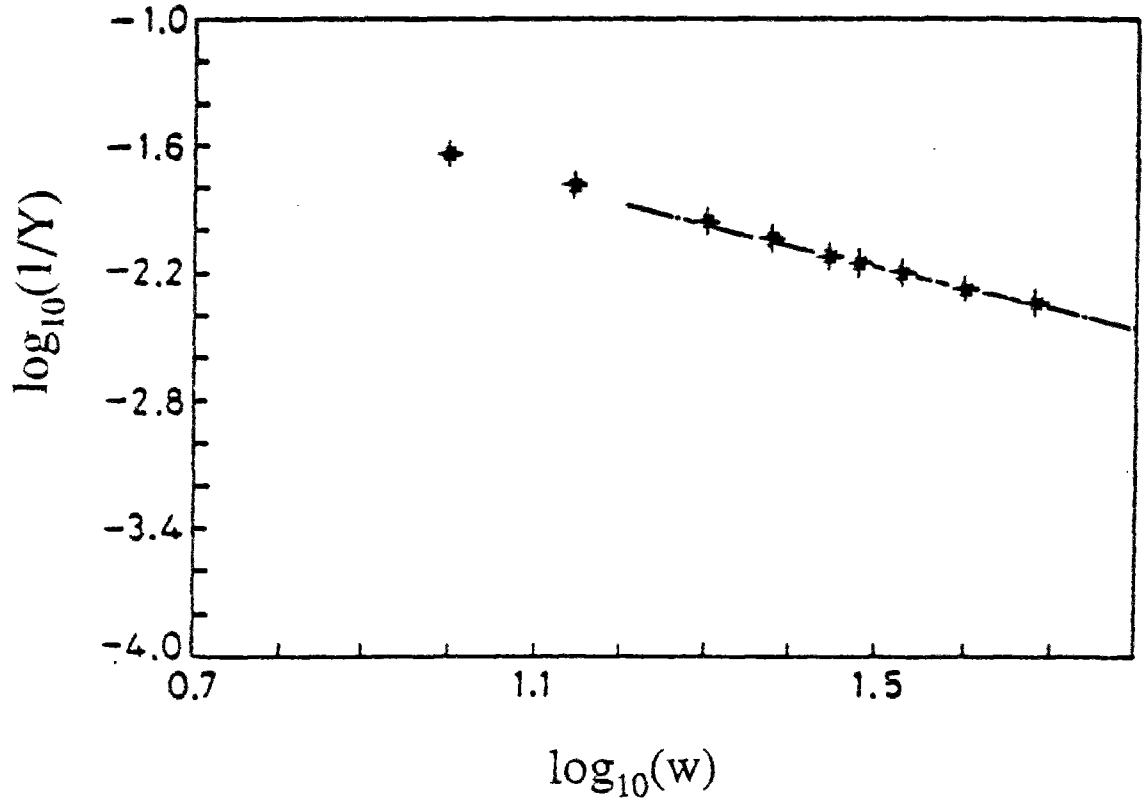


Figure 3.17 : Evolution de la compliance 1/Y en fonction de la taille du système w en coordonnées bi-logarithmiques, pour une valeur de p = 0.642. Les deux symboles correspondent à un module de traction (x) et de cisaillement (+). L'exposant apparent pour les plus grandes tailles est 0.97.

En s'inspirant donc du travail de Zabolitzky et coll. [25] nous avons cherché à déterminer l'exposant τ/ν en introduisant dans notre analyse des facteurs correcteurs. Dans un premier temps, nous avons tenté la forme simple suivante :

$$Y = A\, L^{-\tau/\nu}\,(1 - B\, L^{-x}) \qquad (3.1.57)$$

où A et B sont des constantes. En cherchant le meilleur couple d'exposant τ/ν et x, nous avons alors été amenés à considérer des valeurs de x très faibles. Cela engage donc à tester une forme éventuelle de correction logarithmique :

$$Y = A\, L^{-\tau/\nu}\,(1 - B/\log(CL)) \qquad (3.1.58)$$

où A , B et C sont des constantes. Mais même cette forme de correction ne permet pas de reproduire fidèlement le comportement global. Finalement, en raffinant de plus en plus les formes de corrections, nous aboutissons à une très bonne adéquation pour la forme

$$Y = A\, L^{-\tau/\nu}\,(1 - B/\log(CL) + D/L) \qquad (3.1.59)$$

où A , B, C et D sont des constantes. Il va sans dire cependant que avec de telles formes de lois il est facile de suivre beaucoup de comportements qui ne sont pas des lois de puissance! Cependant, adoptant la même démarche que Zabolitzky et coll., nous aboutissons à des conclusions très proches : - la forme de loi a été obtenue à la suite des mêmes appréciations de qualité, - les valeurs de l'exposant et des préfacteurs de l'Eq. (3.1.59) finalement obtenues, sont très voisines :

$$\begin{aligned} \tau/\nu &= 3.0 \pm 0.2 \\ C &= 6.0 \pm 0.5 \\ D/B &= 1.0 \pm 0.1 \end{aligned} \qquad (3.1.60)$$

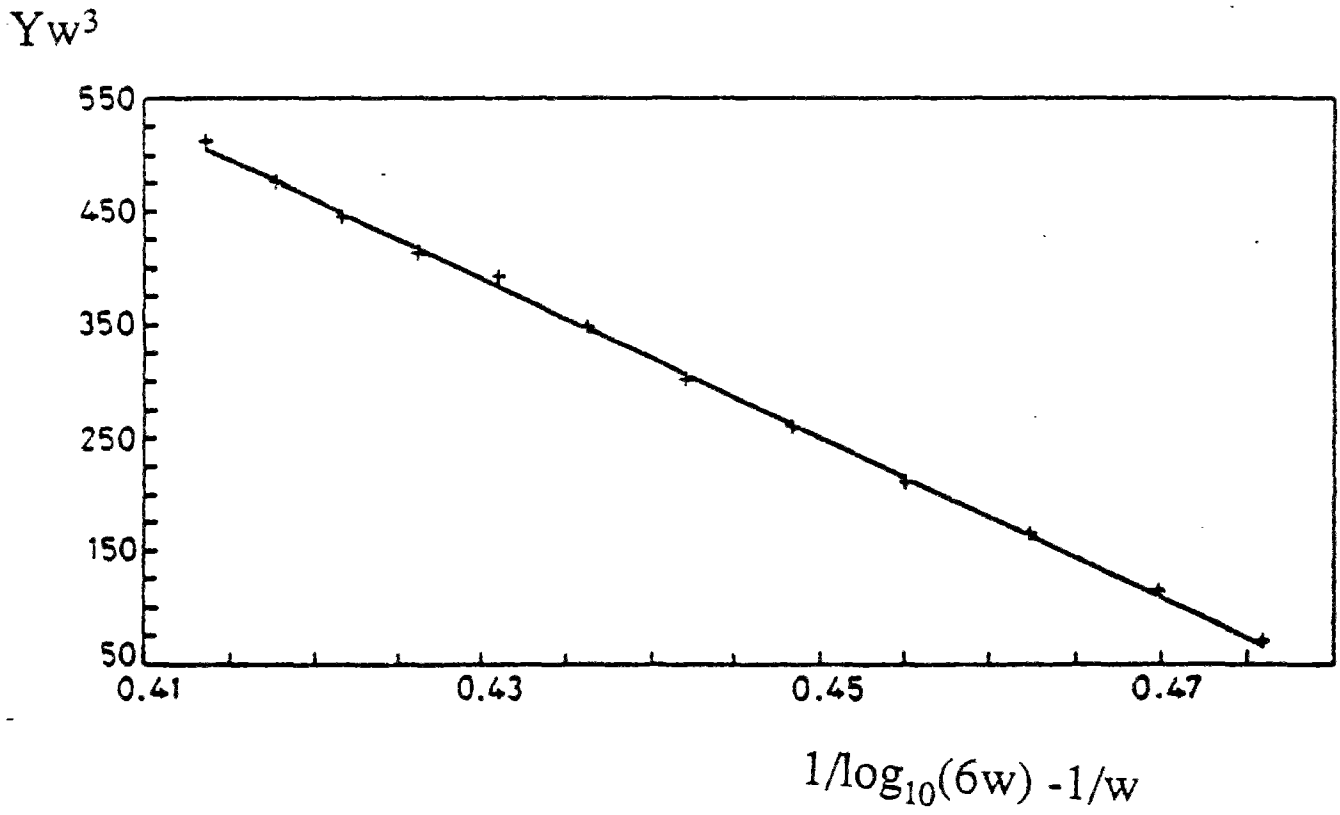


Figure 3.18 : La figure 3.16 donnant le module élastique, Y, en fonction de la taille du système w, montrait de fortes corrections d'échelle. Cette figure montre le résultat d'une analyse prenant en compte des corrections ici logarithmiques.

à comparer à

$$\tau/\nu = 2.97 \pm 0.03$$
$$C = 2.2 \qquad (3.1.61)$$
$$D/B = 0.34$$

suivant [25].

Compte-tenu du fait que la forme des lois de correction est, *a priori*, inconnue, nous estimons, de façon assez subjective, la barre d'erreur sur τ/ν comme le double de celle obtenue en considérant la forme de la loi comme établie. Dans ce cadre d'analyse, il est alors aisé de comprendre l'origine de l'erreur commise dans l'analyse précédente : Les corrections d'échelle induisent une concavité de la courbe log(Y) fonction de log(L). Si maintenant nous surestimons le seuil de rigidité, alors, nous imposons au delà d'une taille correspondant à la longueur de corrélation, une convexité de cette même courbe. Ces deux effets antagonistes imposent par voie de conséquence un point d'inflexion dans la relation log(y)-log(L) (Cf. Fig. 3.19). Or sur un intervalle de taille limitée, un point d'inflexion ressemble plus à une ligne droite qu'une courbe concave! Raisonnablement, nous aurions pu escompter que l'étude de systèmes de "grande" taille (au-delà de 30) puisse révéler ce biais. Or, dans ce cas en particulier, les simulations numériques de Lemieux et coll.[18] ne peuvent être considérées comme concluantes pour les raisons explicitées précédemment. Nous n'avons nous même investi qu'un effort mesuré pour les grandes tailles à une valeur de p de l'ordre de 0.653, compte-tenu des résultats auxiliaires cités, et du coût de ce type de calculs. De plus, nous avons présenté ici les résutats de façon assez schématique. Il est aisé de concevoir que la dichotomie entre les deux situations p = 0.653 et p = 0.642 n'est pas franche. Pour des valeurs de p intermédiaires, nous pouvons repousser la position du point d'inflexion, améliorer certains comportements et en appauvrir d'autres. C'est pourquoi, il est plus satisfaisant de viser l'optimum pour quelques quantités, plutôt qu'un compromis timide.

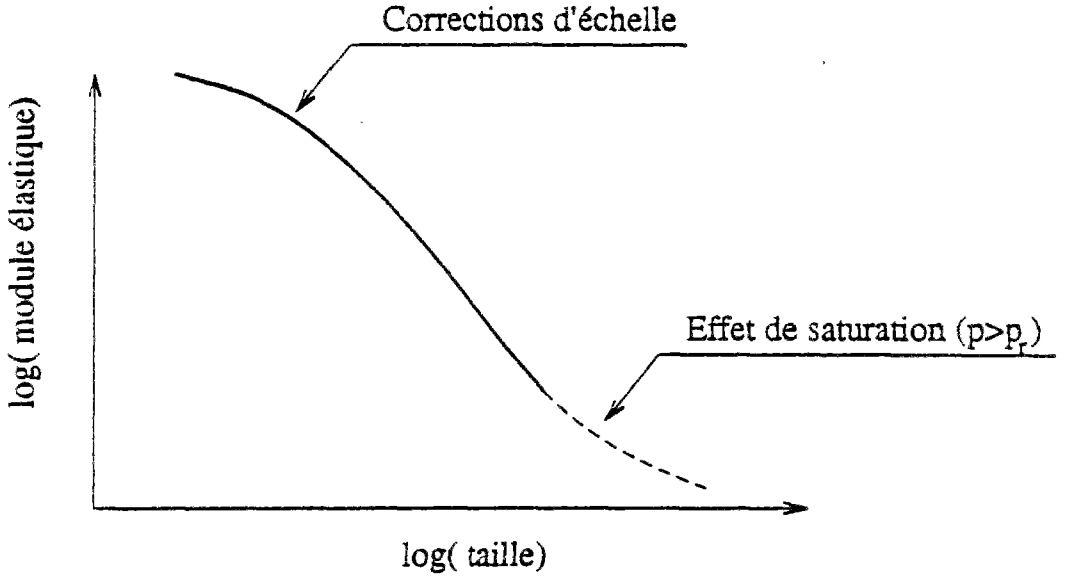


Figure 3.19 : Représentation schématique des deux effets antagonistes présents dans une sur-évaluation du seuil de rigidité: les corrections d'échelle imposent une concavité de la courbe alors que les effets de saturation induisent pour les grandes tailles une convexité de la courbe. Combinant ces deux effets, il est facile d'obtenir un comportement sensiblement rectiligne au point d'inflexion.

Remarquons, finalement, que les estimations que nous obtenons dans cette seconde analyse, sont cohérentes avec les résultats obtenus par Burton et Lambert [30] (et partiellement avec Sahimi et Goddard [21]) qui ont aussi fondé leurs conclusions sur une quantité autre que le module élastique du problème dilué.

Enfin, pour conclure ce paragraphe, signalons que la diffusion anormale dans un contexte d'élasticité, a également été étudiée et ce par matrice de transfert [32]. Mais ce dernier calcul n'a pas été effectué de façon à corroborer une détermination précédente du seuil, mais simplement, une fois acceptée la valeur de ce seuil, obtenir une estimation de l'exposant de diffusion anormale. En parallèle avec la diffusion d'un potentiel électrique, nous considérons un réseau de barres élastiques articulées, au seuil de percolation de rigidité, et où tous les sites du réseau sont connectés à un substrat indéformable par l'intermédiaire d'un pot visqueux parfait. (cf. Fig. 3.20). Puis, imposant une impulsion à l'instant initial sur un bord du réseau, nous calculons le temps moyen <t> mis par cette impulsion pour atteindre la bord opposé. Ce temps <t> depend alors de la taille du système, L, selon une loi de puissance :

$$<t> \propto L^{2+\theta'} \qquad (3.1.62)$$

où l'exposant θ' est relié aux exposants précédemment introduit par

$$\theta' = (\tau-\beta)/\nu \qquad (3.1.63)$$

A deux dimensions nous nous attendons donc à une valeur de l'ordre de $2+\theta' = 4.87$. La valeur obtenue numériquement était $2+\theta' = 5.0 \pm 0.5$ [32], en bon accord avec la valeur attendue.

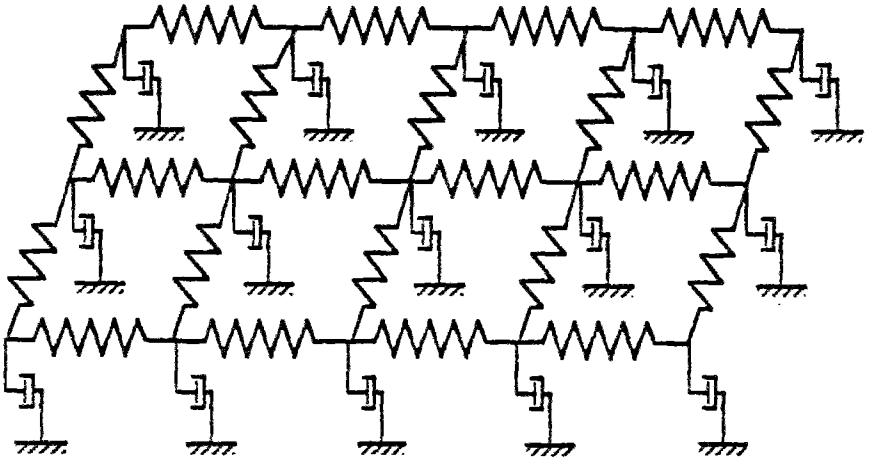


Figure 3.20 : Schématisation du réseau de barres élastiques et de pots visqueux, utilisé pour l'étude de l'analogue de la diffusion anormale en élasticité. Chaque site est connecté à un substrat indéformable alors que le réseau de barres articulées est dilué. On étudie alors le temps moyen mis par une impulsion pour traverser le système de part en part.

- Multifractalité

Nous avions vu en détail au chapitre 2 le caractère multifractal de la distribution des courants dans un réseau aléatoire de résistances électriques au seuil de percolation. Il est donc naturel de chercher à identifier une telle propriété pour les réseaux de forces centrales au seuil de percolation de rigidité [34]. Dans ce cas, la définition des moments de cette distribution ne présente pas de difficultés particulières, puisque l'état de contrainte d'un lien individuel est caractérisé par un seul nombre scalaire à savoir l'effort normal. Nous sommes donc amenés à introduire les moments $\mathcal{M}_n$ définis par :

$$\mathcal{M}_n = \Sigma_{ij} \ |f_{ij}|^n \qquad (3.1.64)$$

et ce pour un même type de conditions aux limites appliquées aux systèmes. Nous distinguerons en particulier trois ensembles: celui à force appliquée constante, celui à énergie élastique constante et enfin celui à déplacement constant, que nous dénoterons au besoin par les indices F, E et D respectivement. Les lois d'échelle suivies par ces différents moments en fonction de la taille du système au seuil de rigidité nous fournissent une série d'exposants critiques *a priori* indépendants les uns des autres:

$$\mathcal{M}_n \propto L^{z(n)} \qquad (3.1.65)$$

$z_F(n)$ pour l'ensemble à force constante, et de façon similaire, $z_E(n)$ et $z_D(n)$ pour les deux autres ensembles.

Comme pour le cas des réseaux de résistances, z(0) est la dimension fractale du squelette

$$z(0)= D_{bb} \qquad (3.1.66)$$

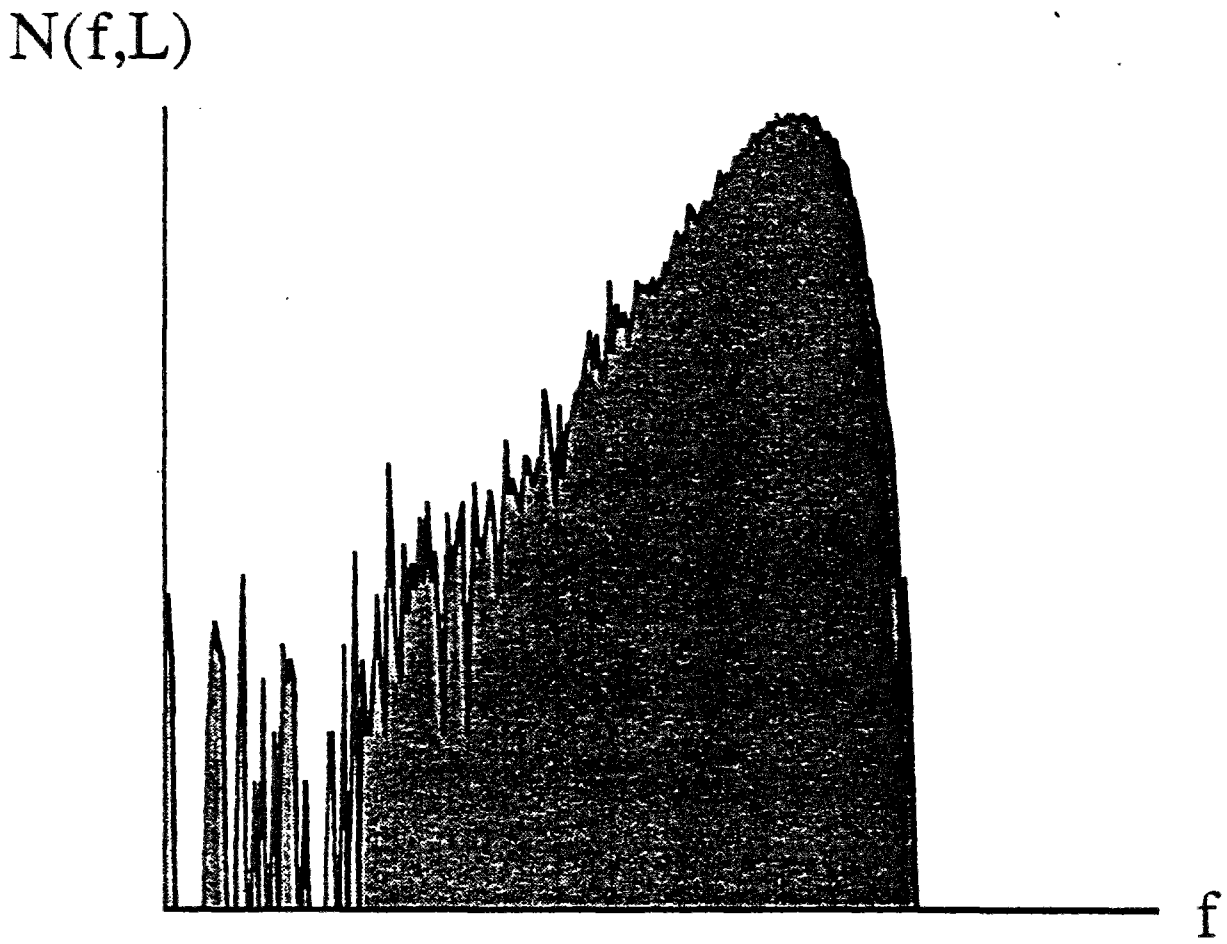


Figure 3.21 : Histogramme de la distribution des forces dans le réseau de percolation de forces centrales au seuil de rigidité estimé à p = 0.642, en coordonnées bi-logarithmiques, pour des réseaux de taille 50. Cet histogramme doit tendre pour des systèmes de grande taille vers le spectre multifractal.

quelque soit l'ensemble considéré. $z_F(2)$ est relatif à l'exposant du module élastique, Y, car :

$$\mathcal{M}_{2F} \propto 1/Y \tag{3.1.67}$$

d'où

$$z_F(2) = \tau/\nu \tag{3.1.68}$$

Utilisant la relation entre les différentes séries d'exposants selon l'ensemble considéré, obtenue en exploitant l'équation précédente,

$$z_E(n) = z_F(n) - (n/2)\, z_F(2) \tag{3.1.69}$$

et

$$z_D(n) = z_F(n) - n\, z_F(2) \tag{3.1.70}$$

nous obtenons simplement $z_E(2) = 0$, par définition même de cet ensemble, et $z_D(n) = -z_F(n)$.

Le quatrième moment de la distribution des forces est relié au "bruit élastique" [36] , c'est-à-dire, la variation de module élastique global induit par des fluctuations de module élastique local dans chaque lien. La preuve de ceci est absolument identique à celle décrite au chapitre précédent, puisque les seules propriétés exploitées par cet argument reposent sur la linéarité du problème. La démonstration du théorème de Cohn pour les problèmes de forces centrales n'est donc qu'une simple question de vocabulaire comme nous pourrons nous en convaincre aisément en lisant la référence [36] de Wang et Brooks-Harris. L'appellation "bruit élastique", bien qu'explicite, est un peu formelle car, à notre connaissance, peu de systèmes sont dotés de telles propriétés qui rendraient mesurable un tel bruit. Cette propriété ne concerne pas les variations entre échantillons, mais est relative aux fluctuations au sein d'un même milieu.

Le moment $\mathcal{M}_n$, lorsque n tend vers l'infini, est plus facile à exploiter car il traduit la variation, avec la taille du système, des liens les plus fortement contraints, tant en amplitude qu'en nombre.

Il serait souhaitable de pouvoir comparer ces séries d'exposants, avec leurs homologues obtenus pour des systèmes élastiques possédant une élasticité angulaire, au seuil de percolation de connexité. Avant de tenter une telle comparaison, il est nécessaire de s'interroger un peu plus en détail sur ce dernier cas.

Dans un réseau de poutres, l'état de contrainte de chaque lien est caractérisé par, non seulement des forces, mais aussi des moments. Considérer séparément ces deux catégories ne semble pas naturel, aussi nous suggérons de plutôt considérer une quantité scalaire qui soit représentative (bien que non équivalente) de la façon dont le lien est contraint. Il est alors naturel d'étudier l'énergie élastique de chacun des liens constituant le réseau. Et, en fait pour pouvoir comparer directement ces moments à ceux introduits au début de ce paragraphe, nous choisirons de préférence la distribution de la racine carrée de l'énergie élastique e_{ij} de chaque lien ij.

$$\mathcal{M}_n = \Sigma_{ij} \sqrt{e}_{ij}^{\,n} \qquad (3.1.71)$$

Ainsi les seconds moments correspondront dans chaque situation à un module élastique, etc... Les exposants gouvernant les variations de ces moments avec la taille du systèmes seront notés y(n), pour les distinguer ici de leur équivalent en percolation de forces centrales, z(n). Ces derniers exposants n'ont jamais étés étudiés dans la littérature. Nous nous contenterons donc de suggérer, (conjecturer) [34], une relation générale entre y(n) et les exposants apparaissant dans le cas de la conduction électrique sur réseaux de percolation, x(n) (dans les trois ensembles équivalents à F, E et D, i.e. courant I, énergie dissipée E et potentiel V constant).

Il est évident que la structure du squelette est identique dans les deux cas, réseaux de poutres et de résistances, donc

$$y(0) = x(0) \tag{3.1.72}$$

D'autre part, nous avions mentionné la conjecture reliant l'exposant τ (concernant le module élastique) à l'exposant t (gouvernant la conductivité) :

$$\tau = t + 2\nu \tag{3.1.73}$$

soit

$$y_F(2) = x_I(2) + 2 \tag{3.1.74}$$

Suivant un raisonnement similaire, il est possible de généraliser cette dernière conjecture à la forme suivante, pour tous moments d'ordre n:

$$y_F(n) = x_I(n) + n \tag{3.1.75}$$

Ainsi, c'est par l'intermédiaire d'une telle relation que nous allons tester, à la fois cette conjecture et l'éventuelle identité d'exposants entre le modèle de forces centrales et celui de réseaux de poutres:

$$z(n) = y(n) \tag{3.1.76}$$

La figure 3.22 montre la comparaison entre les exposants z(n) estimés dans les trois ensembles et les prédictions issues des deux conjectures ci-dessus. Ces données ont été obtenues durant les simulations numériques effectuées par gradient conjugué, comme explicité au paragraphe précédent, au seuil estimé 0.642, et pour des tailles allant jusqu'à 60. Bien que la précision des exposants chute considérablement pour les ordres élevés, et ce plus ou moins selon l'ensemble

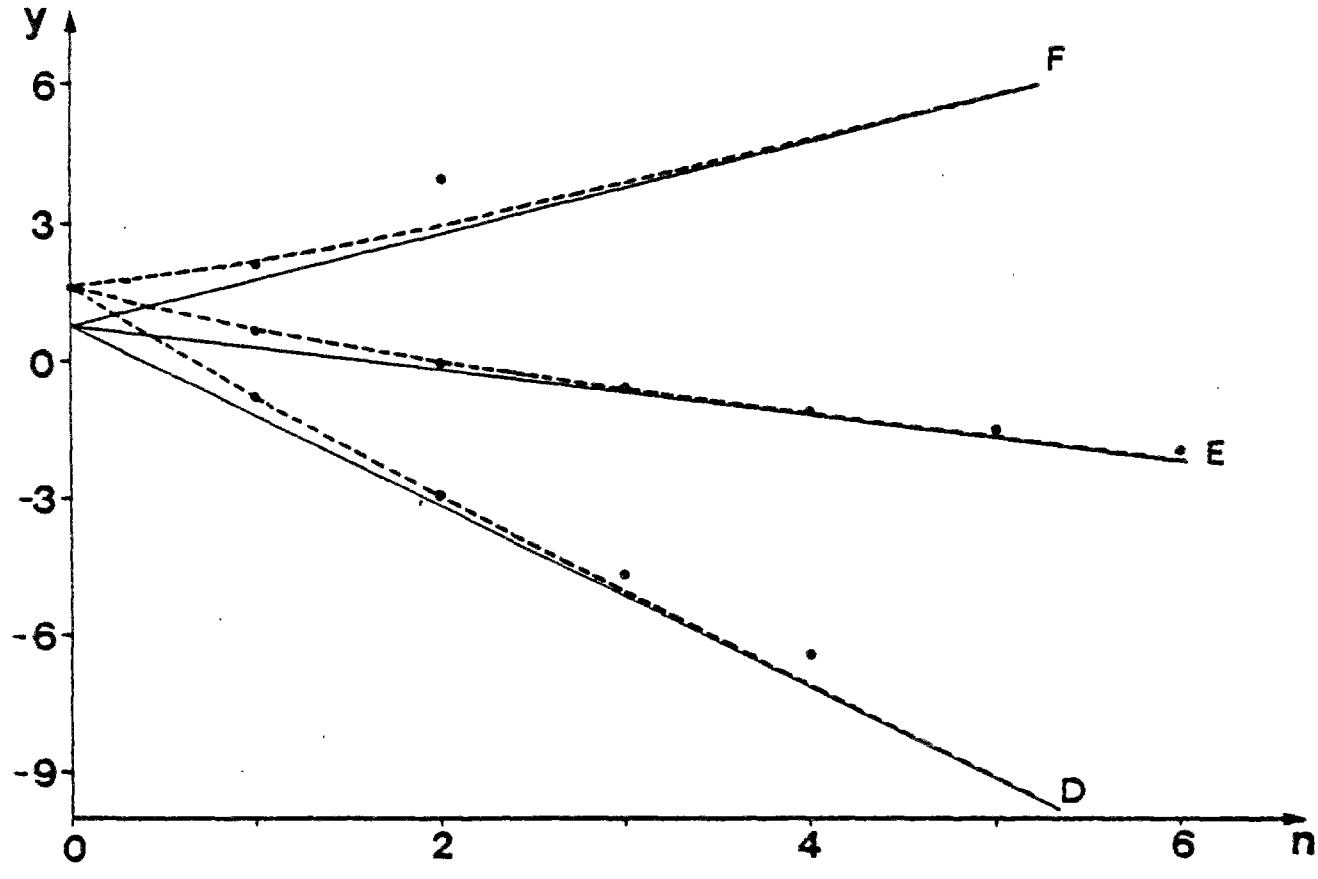


Figure 3.22 : Comparaison entre les valeurs obtenues par simulations numériques et les conjectures pour les exposants critiques gouvernant les premiers moments de la distribution des forces dans trois ensembles, force (F), énergie (E) et déplacement (D) constants.

choisi, l'accord obtenu est tout à fait satisfaisant. De plus amples détails sont donnés dans l'article [34].

Pour conclure ce paragraphe, remarquons que toutes les caractéristiques critiques que nous avons étudiées numériquement pour la percolation de forces centrales, et qui ont un équivalent pour la percolation de connexité, donnent des résultats indistinguables, à la précision du calcul, pour ces deux situations *a priori* distinctes. Notons également que ces résultats contrastent fortement avec ceux publiés antérieurement par d'autres groupes, et que par conséquent, une certaine prudence est recommandée pour l'utilisation desdits résultats. Cependant l'effort numérique fourni dépasse d'au moins un ordre de grandeur les efforts précédemment dépensés.

- 3.2 Percolation de forces centrales II : Propriétés originales

Malgré la conclusion du paragraphe précédent, la percolation de forces centrales ne peut être réduite au cas de la percolation de connexité. Nous allons ainsi voir maintenant que certaines quantités, qui peuvent être définies dans le cadre présent, sont originales (sans équivalent pour les systèmes à transmission d'information complète). Elles utilisent naturellement les propriétés spécifiques de la phase de mécanisme existant entre le seuil de percolation de forces centrales et le seuil de percolation de connexité.

- Rigidité orientationnelle

Dans certains cristaux liquides, la description des propriétés élastiques du milieu requiert l'introduction du concept de rigidité "orientationnelle". Nous emploierons ici cette expression pour traduire l'expression anglaise souvent utilisée comme telle en français : "Splay rigidity".

Que recouvre ce concept pour nos treillis réticulés ? Il est facile d'imaginer, et la figure 3.23 en montre un exemple simple, des structures qui soient des mécanismes, mais qui conservent cependant des orientations fixes. Si en effet nous choisissons deux liens quelconques dans la structure réprésentée en traits gras dans la figure, nous pouvons, à loisir, translater librement une barre par rapport à l'autre, cependant, l'orientation relative de ces deux barres restera toujours fixe, tant que l'on respectera les liaisons du système. Pensons simplement à une règle de table à dessin industriel, il est possible de positionner l'extrémité de la règle en un endroit quelconque de la table, mais l'orientation de cette règle reste fixe. Un tel système sera dit doté de rigidité orientationnelle. Comme nous venons de le voir, il est possible que le même système ne soit pas rigide vis à vis de sollicitations de types traction ou cisaillement simple. Par commodité d'expression, nous dirons

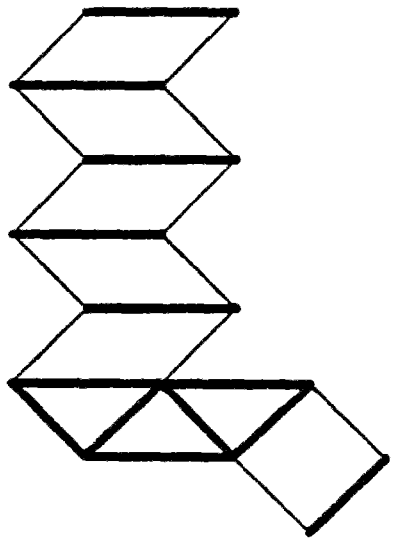


Figure 3.23 : Un exemple de structure qui forme un mécanisme bien que l'ensemble des barres (représentées en traits gras) forme un amas doté de rigidité orientationnelle. En effet l'orientation mutuelle de deux barrres de cet amas reste fixe dans toutes déformations de l'ensemble qui respectent les liaisons.

qu'un lien est O-rigide par rapport à un autre, pour désigner une telle rigidité orientationnelle.

De façon à quantifier cette propriété, il est usuel d'introduire la constante élastique de Frank, K, qui mesure la rigidité orientationnelle. Elle est définie par l'expression suivante de l'énergie élastique pour un milieu homogène (bidimensionnel) de champ de déformation $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$:

$$E = \frac{1}{2} K \int \left(\nabla(\partial_y u_x - \partial_x u_y)\right)^2 dx\, dy \qquad (3.2.1)$$

Si le système est également rigide vis à vis des translations alors la constante élastique K tend vers l'infini avec la taille du système.

Wang et Brooks-Harris [37], ont suggéré qu'il était possible qu'existe une phase particulière dans le processus de dilution qui soit caractérisée par une rigidité orientationnelle non nulle alors que, vis à vis de toutes translations, le système soit libre. Cette phase serait donc limitée par deux valeurs du paramètre de contrôle p:

$$p_{sr} < p < p_r \qquad (3.2.2)$$

La constante de Frank s'annulant pour $p = p_{sr}$, et divergeant lorsque p se rapproche de p_r pour un système de taille infinie (Cf. Fig.3.24). Cette suggestion était étayée d'arguments issus de la théorie des champs, dans lesquels nous ne nous immiscerons pas, ainsi que par des calculs effectués par la méthode des séries (extrapolation de résultats obtenus par dénombrement exact d'amas de tailles fixées, ici inférieures à 12) qui fournissaient la valeur suivante:

$$p_{sr} = 0.61 \pm 0.02 \qquad (3.2.3)$$

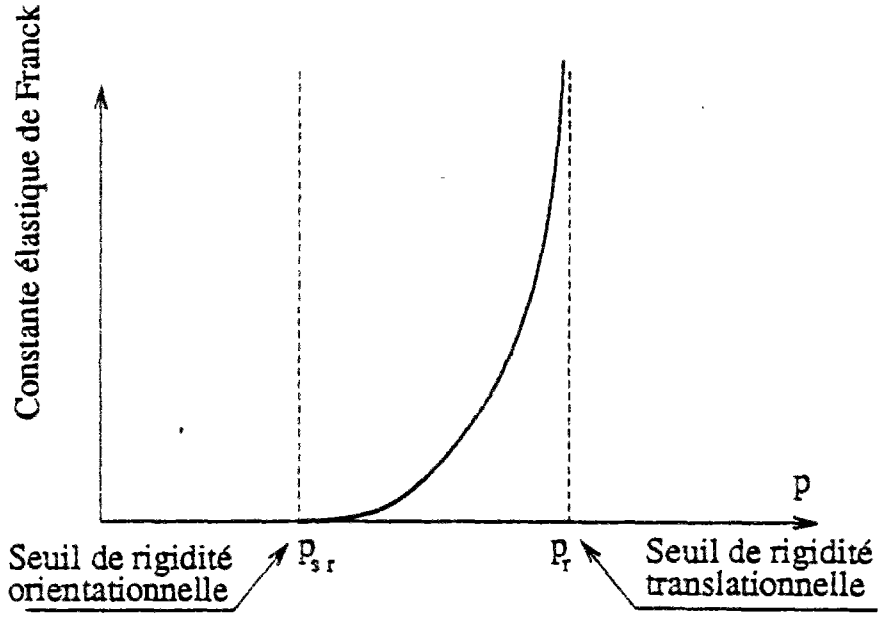


Figure 3.24 : Représentation schématique de l'évolution de la constante élastique de Franck, entre le seuil de rigidité orientationnelle et celui de rigidité translationnelle.

Associé à ce nouveau point critique, il est possible de définir tous les exposants habituels. Une propriété intéressante dans ce contexte est que l'on peut définir une notion d'amas liée à la rigidité orientationnelle. En effet si un lien A est O-rigide par rapport à un lien B, lui-même O-rigide par rapport à un troisième lien C, alors A sera O-rigide par rapport à C. La rigidité orientationnelle défini une relation d'équivalence, dont les classes seront les amas. Il ne se pose donc aucun problème "de principe" pour calculer les caractéristiques géométriques de ces amas, et donc pour définir les exposants β, γ, ν, etc... introduits dans le chapitre 2. Wang et Brooks-Harris dans cette même étude [37] ont donné les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} \beta &= 0.45 \pm 0.20 \\ \gamma &= 0.95 \pm 0.10 \\ \nu &= 0.60 \pm 0.15 \end{aligned} \qquad (3.2.4)$$

Nous verrons par la suite que le même groupe, Marshall et Brooks-Harris [31] ont effectué d'autres simulations numériques de ce même problème, avec des résultats tout à fait différents. Un poids très limité doit donc être accordé à ces estimations. Mais plus que les valeurs numériques, les concepts sont importants et particulièrement la notion de rigidité orientationnelle qui peut aussi jouer un rôle important dans un contexte fort différent comme l'ordre orientationnel et le comportement mécanique d'empilements désordonnés [38,39].

Dans certains modèles, il est aisé de voir que la phase de rigidité orientationnnelle existe vraiment : Ainsi dans le cas de réseaux de forces centrales anisotropes, où tous les liens sont présents dans une direction, la rigidité orientationnelle est non nulle pour toute valeur de p positive. La constante de Frank diverge alors au seuil de rigidité usuel, $p_r = 0.5$, mais est finie pour des valeur de p inférieures, comme l'ont montré Wang et Brooks-Harris [40].

Ces mêmes auteurs [41] ont aussi montré que pour des modèles moins pathologiques que le cas anisotrope, il était possible de trouver une phase de rigidité orientationnelle.

Qu'en est-il alors du cas général de la percolation de forces centrales isotrope? La question est toujours débattue. Nous venons de présenter le premier résultat obtenu dans ce cadre par la méthode des séries [37].

Tremblay et al [42] ont effectué des simulations numériques en calculant la fraction, f(p,L), de réseaux présentant une rigidité orientationnelle mais non translationnelle, en fonction de p, pour des systèmes de différentes tailles, L: 6, 10 et 16. La résolution numérique faisait appel à une technique de relaxation par gradient conjugué. La forme globale des réseaux triangulaires était carrée, avec deux bords libres et deux bords liés à des solides rigides sur lesquels deux moments opposés étaient appliqués pour tester la rigidité orientationnelle, et deux forces de compression opposées pour la rigidité translationnelle. La figure 3.25 extraite de leur publication [42] montre que cette probabilité f(p,L) décroît avec la taille du système pour toutes valeurs de p. La conclusion naturelle est alors que p_{sr} est très proche de p_r et que la phase de rigidité orientationnelle semble disparaître à la limite thermodynamique (systèmes de tailles infinies). Au vu de la sensiblilité du problème aux effets de taille, il est difficile de tirer des conclusions définitives sur des systèmes de si petites tailles. Notons également, suivant Wang et Brooks-Harris[41], que la géométrie même des réseaux favorise la rigidité translationnelle au profit de la rigidité orientationnelle, du fait de la présence de bords infiniment rigides qui couplent différents amas, et donc introduit peut-être un biais pernicieux dans la determination d'une quantité différentielle comme f.

Une troisième étude sur ce sujet a été publiée par Marshall et Brooks-Harris [31]. Nous avons déjà évoqué au paragraphe précédent la procédure numérique suivie en ce qui concerne la rigidité translationnelle. Pour ce qui est de la rigidité orientationnelle, ces auteurs ont identifié les amas définis par cette propriété dans des systèmes de taille allant jusqu'à 36. L'analyse des différents moments de

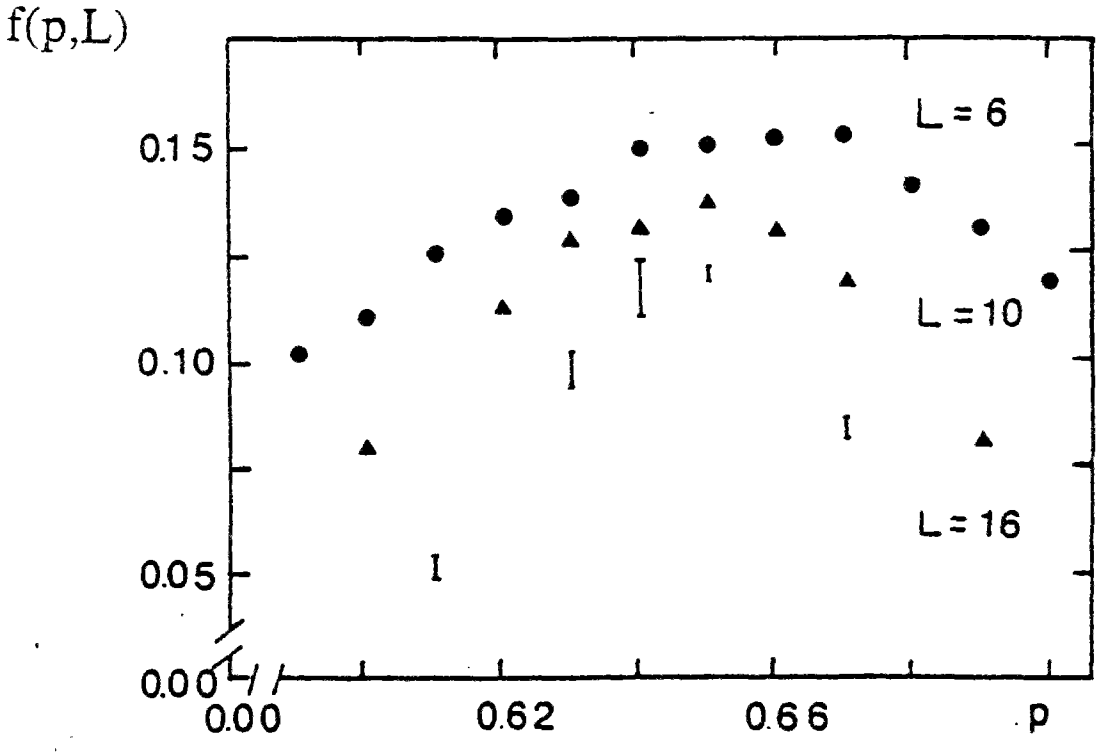


Figure 3.25 : Proportion de réseaux montrant une rigidité orientationnelle mais non translationnelle, pour différentes tailles, L, de systèmes (6,10,16), en fonction de la proportion, p, de liens présents.(Figure extraite de [42] R.R.Tremblay, A.R.Day et A.M.S.-Tremblay Phys.Rev.Lett. 56, 1425, (1986).)

la distribution de ces amas avait conduit à la determination d'exposants critiques donnés ci-dessus. En s'affranchissant de la critique portée contre Tremblay et al [43] concernant l'effet induit par les conditions aux limites, Marshall et Brooks-Harris ont aussi déterminé la probabilité de rigidité orientationnelle sans rigidité translationnelle. Ils ont montré numériquement qu'une telle probabilité décroissait effectivement lorsque la taille du système augmentait, approximativement selon

$$P \propto L^{-x} \tag{3.2.5}$$

où

$$x = 1.1 \tag{3.2.6}$$

Un tel comportement suggère, en accord avec le travail précédent, que la phase de rigidité orientationnelle devrait disparaitre à la limite thermodynamique. Si cependant une telle loi (Eq.(3.2.5)) n'est pas avérée, ils ont majoré la différence probable entre les deux seuils p_{sr} et p_r:

$$p_r - p_{sr} < 0.007 \pm 0.002 \tag{3.2.7}$$

Dans cette même étude, s'intéressant aux propriétés des amas, tant totalement rigides, que O-rigides, les exposants critiques obtenus dans ces deux cas se sont révélés indistinguables.

Notons que ces estimations sont contraires aux premiers résultats obtenus par ce même groupe. La différence de méthode employée ainsi que l'investissement réalisé, légitime un tel renversement.

Les deux derniers travaux rapportés, tendaient à estimer une éventuelle différence entre les deux seuils en étudiant directement le problème en fonction du paramètre p. On connait les difficultés liées à la détermination d'exposants en fonction de p plutôt qu'en fonction de la taille du système. Nous proposons donc une approche alternative [13] qui consiste à se placer au seuil de rigidité

translationnelle tel qu'estimé précédemment et de considérer le comportement critique d'une quantité spécifique de la phase de rigidité orientationnelle.

C'est dans cet esprit que nous avons étudié [13] la probabilité pour qu'un lien situé à la surface d'un domaine semi-infini soit O-rigide. Nous avons déjà mentionné les résultats de ce type relatifs à la rigidité de sites, (exposants β de surface). Ces dernières quantités étaient évidemment reliées à la rigidité translationnelle. L'algorithme utilisé était par matrice de transfert. Pour une valeur de $p = p_r = 0.642$, la probabilité, P_{SR}, pour qu'un lien soit O-rigide ne semblait pas suivre de loi de puissance avec la taille du système. Au contraire une telle quantité semblait saturer à une valeur non-nulle, et même remarquablement élevée :

$$P_{SR}(L) = P_{SR}(\infty) + A\, L^{-1} \qquad (3.2.8)$$

où

$$P_{SR}(\infty) = 0.55 \pm 0.05 \qquad (3.2.9)$$

Contrairement aux conclusions précédentes, nous sommes amenés à suggérer que la différence entre les deux seuils ne semble pas disparaître. Il est important de noter que cette étude ne visait pas à estimer le seuil p_{sr} mais simplement à tester son éventuel caractère critique au seuil de rigidité total, p_r. D'autre part, la valeur importante de $P_{SR}(\infty)$ ne peut pas donner d'estimation de la distance au seuil p_{sr} car une telle quantité doit s'annuler au seuil avec un exposant critique β de surface éventuellement faible, et donc traduisant des variations rapides de P_{SR}.

L'éventuelle existence d'une phase de rigidité orientationnelle est donc, comme nous le voyons, une question délicate, comme l'était également le problème original de la rigidité totale du réseau. Elle est pourtant d'importance pratique considérable dans certains problèmes d'empilement où des schématisations de type percolation de forces centrales sont parfois utilisées. En effet, dans ce contexte, la phase de rigidité orientationnelle correspond à une phase hexatique où l'ordre d'orientation est toujours présent alors que l'ordre de position est perdu. Une telle

structure joue un rôle crucial pour les propriétés mécaniques du système comme suggéré par une étude récente de Travers [38].

- Elongation libre

Une autre propriété originale de la percolation de forces centrales exploite simplement la différence de seuils entre celui de rigidité, p_r, et celui de connexité, p_c. En effet, entre ces deux seuils, le système est un mécanisme, que l'on peut librement déformer. Nous ignorerons ci-après la distinction entre les deux seuils de rigidité totale et orientationnelle, qui ne modifie en rien la discussion qualitative des phénomènes rapportés ici (cf. Ref. [44] pour une discussion plus précise de ce point).

Considérons un réseau dilué sur lequel est imposée une force de traction F. Tant que p est supérieur à p_r, les équations linéarisées donnent une extension relative, λ, simplement proportionnelle à F et à l'inverse de la rigidité Y. Entre les deux seuils p_r et p_c, les équations linéarisées donnent littéralement un déplacement infini. Physiquement cela est bien sûr irréaliste, et les grandes déformations du réseau auront tôt fait de limiter cette extension. Ces grandes déformations correspondent aux termes non-linéaires des équations du modèle que nous avons négligés jusqu'à présent. En fait, pour une valeur de p comprise entre p_c et p_r, si l'on décroît simplement la force de traction F, partant d'une valeur non nulle où résultait une extension relative $\lambda(p,F)$, il va de soi que l'extension va tendre vers une limite non nulle, $\lambda_c(p)$, lorsque F tend vers zero.

$$\lambda(p,F) \underset{F\to 0}{\to} \lambda_c(p) \qquad (3.2.10)$$

Tant que λ est inférieur à $\lambda_c(p)$, la force nécessaire pour atteindre cette déformation est nulle. Lorsque $\lambda_c(p)$ est atteint, suffisament de nouvelles liaisons ont été crées par les grandes déformations du réseau pour empêcher de plus amples

extensions sans qu'il n'en coûte d'énergie élastique. $\lambda_c(p)$ est l'extension relative libre maximum. L'ensemble de ces comportements est représenté dans la figure 3.26, où nous montrons de façon schématique les caractéristiques force-déplacement, en fonction du paramètre p. Ce problème a été considéré par Tang et Thorpe [45] dans une analyse du problème de type champ moyen qui tente d'effacer ou au moins d'estomper les aspects critiques du problème qui sont comme nous allons le voir tout à fait omniprésents [44,46]. Il n'en demeure pas moins que beaucoup des éléments que nous allons tenter de décrire sont illustrés dans le travail numérique publiés par ces auteurs[45].

Dans le plan (λ,p), la ligne $\lambda_c(p)$ dessine un véritable diagramme de phase, séparant deux types de situations : une phase de mécanisme, et une phase rigide. Naturellement, pour $p>p_r$, $\lambda_c(p)$ est identiquement nul, alors que cette même extension libre maximum diverge au seuil de connexité.

Nous pouvons d'ores et déjà nous interroger sur la forme de cette frontière et, en particulier, sur le comportement de $\lambda_c(p)$ au voisinage de p_c et de p_r. Il est naturel de chercher des lois critiques du type

$$\lambda_c(p) \propto (p_r-p)^a \qquad (3.2.11)$$

$$\lambda_c(p) \propto (p-p_c)^{-b} \qquad (3.2.12)$$

Nous pouvons proposer des ordres de grandeurs de a et b selon la schématisation suivante:

- D'une part au voisinage du seuil de rigidité, nous pouvons nous représenter le système comme constitué de larges amas rigides dont la taille maximale est ξ_{cf}, i.e. la longueur de corrélation du problème de percolation de forces centrales. Ces amas sont connectés entre eux par des liaisons, libres de se déformer. Un ordre de grandeur grossier de l'élongation relative libre maximum du système consiste à évaluer sensiblement à un lien l'amplitude du déplacement sur une échelle de ξ. Ainsi,

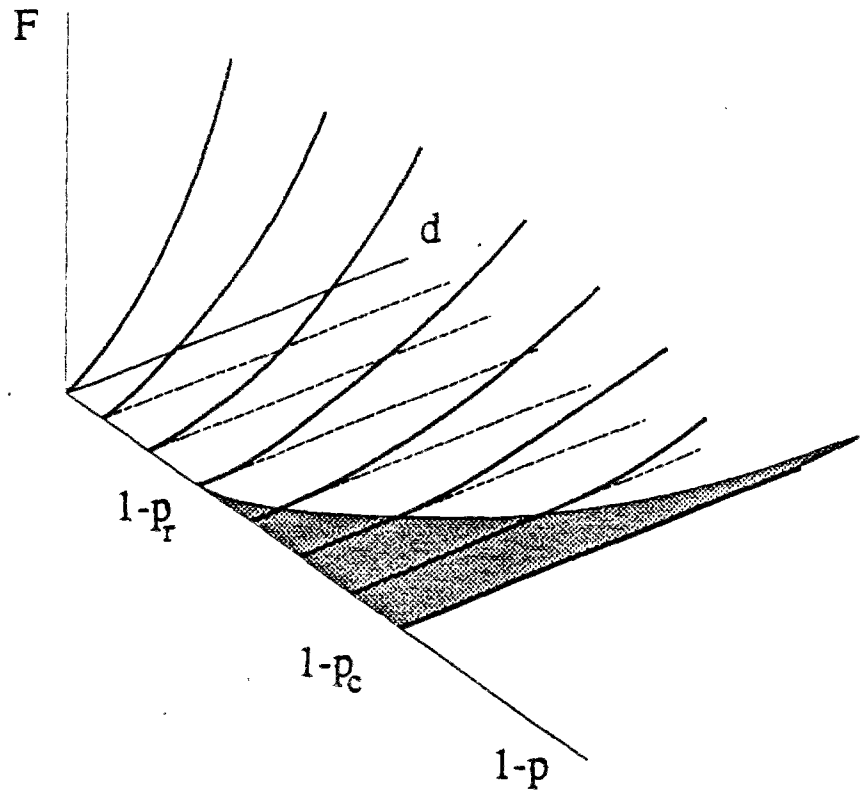


Figure 3.26 : Schématisation du comportement mécanique de réseaux en dessous du seuil de rigidité. Les caractéristiques force (F) -déplacement (D) sont montrées en fonction de p. La zone représenté en grisé, est la trace dans le plan F = 0, du diagramme de phase, rigidité-mécanisme, discuté dans le texte.

$$\lambda_c(p) \propto 1/\xi_{cf}$$
$$\propto (p_r\text{-}p)^{\nu} \qquad (3.2.13)$$

où, comme nous l'avons vu, selon les différentes estimations de cet exposant, $a = \nu$ est compris entre 1 et 4/3.

- D'autre part, en ce qui concerne le comportement au voisinage du seuil de connexité, nous pouvons utiliser la structure connue des plus courts chemins. En effet, on sait que les plus courts chemins, sur une longueur inférieure à la longueur de corrélation du problème de percolation de connexité, ξ_c, ont une dimension fractale de D_{min}. L'extension relative libre maximum sera donc, bien sûr limitée par la longueur des plus courts chemins, soit

$$\lambda_c(p) \leq (\xi_c^{D_{min}} - \xi_c)/\xi_c$$
$$\leq \xi_c^{D_{min}-1}$$
$$\leq (p\text{-}p_c)^{\nu(D_{min}-1)} \qquad (3.2.14)$$

ainsi b est borné par $\nu(D_{min}\text{-}1) = 0.17$. Des expériences effectuées par Gilabert et Benayad sur des systèmes réels [46] ont donné des estimations des exposants a et b en accord raisonnable avec ces suggestions.

Pour une extension de $\lambda_c(p)$, le système arrive juste en limite de déplacement libre. Il s'ensuit que, pour une extension supplémentaire infinitésimale $\lambda_c(p)+\delta\lambda$, la fraction des liens supportant une contrainte non-nulle, i.e. le "squelette" est une structure très peu dense. Au fur et à mesure que la force de traction augmente on assiste à une densification de ce squelette. Ceci est du au fait que de nouveaux liens arriveront en contrainte sous l'effet des grandes déformations. Nous sommes donc en droit d'attendre une variation du module élastique avec la déformation, donnant donc lieu à un comportement élastique non-

linéaire, (hyperélastique). Le fait que $\lambda_c(p)$ constitue une ligne critique suggère une variation du module élastique selon

$$Y \propto (\lambda-\lambda_c(p))^{\phi} \qquad (3.2.15)$$

où ϕ est un nouvel exposant critique. De même le squelette doit voir sa densité, d_{bb}, augmenter avec l'écart à $\lambda_c(p)$ selon

$$d_{bb} \propto (\lambda-\lambda_c(p))^{\psi} \qquad (3.2.16)$$

où ψ est un autre exposant critique. Toujours dans le même esprit, il est raisonnable d'attendre une longueur de corrélation, ξ_λ, qui diverge au seuil $\lambda_c(p)$. Il est ainsi naturel d'introduire tout le florilège usuel de quantités critiques telles qu'étudiées jusqu'à présent.

Il est aussi possible d'envisager le problème renforcé. Dans ce cas, la frontière $\lambda_c(p)$ introduite précédemment reste inchangée. Elle sépare maintenant deux phases : l'une infiniment rigide et l'autre élastique. Les lois d'échelle introduites précédemment auront alors leur contrepartie naturelle [44], sur lesquelles nous n'insisterons pas (divergence du module élastique pour $\lambda \rightarrow \lambda_c(p)$, ...).

Indépendamment de l'aspect non-linéaire du aux grandes déformations, nous voyons poindre différents régimes critiques selon l'ordre relatif des différentes longueurs qui interviennent dans le problème. A savoir, premièrement, la longueur de corrélation ξ_{cf} du problème de percolation de forces centrales. Cette longueur donne la taille typique des plus grands amas rigides. Si nous renormalisons le réseau au dela de cette taille, et de façon à assurer la continuité au voisinage de p_c, il est normal d'introduire la longueur de corrélation ξ_c du problème de percolation de connexité ainsi construit. Cette seconde longueur est, suivant l'idée de la renormalisation, exprimée en unité de ξ_{cf}. Soit au voisinage de p_c, une divergence selon

$$\xi_c \propto \xi_{cf}\,(p\text{-}p_c)^{-\nu} \qquad (3.2.17)$$

$$\propto (p\text{-}p_c)^{-\nu} \qquad (3.2.18)$$

mais également au voisinage de p_r, une seconde divergence due à celle de ξ_{cf} : $\xi_c \propto \xi_{cf}$. Ces deux longueurs sont schématisées dans la figure 3.27.

Il est important de remarquer que ces deux longueurs sont fixes. Elle ne dépendent que du paramètre p que nous avons considéré comme fixe dans cette discussion. Tel n'est pas le cas d' une troisième longueur de corrélation, ξ_λ, qui doit apparaitre selon la loi suggérée ci-dessus lorsque λ s'éloigne de $\lambda_c(p)$.

A quoi correspond cette dernière longueur, ou plus généralement, ce dernier phénomène critique que nous avons introduit ? Il correspond au comportement relatif aux systèmes proches de $\lambda_c(p)$, et pour p distant de p_c et p_r. Nous suggérons, et de façon encore plus spéculative que ce que nous avons évoqué jusqu'à présent, qu'il pourrait s'agir là (pour $\xi_\lambda >> \xi_c$) d'un problème de faible désordre. Ce modèle sera étudié plus précisément au chapitre prochain (Chap. 4). Sans déflorer le sujet de façon prématurée, disons qu'il s'agit d'un régime de faible désordre d'origine exogène (et non endogène comme dans notre problème original (grandes déformations)), où l'enrichissement progressif du milieu supportant effectivement les contraintes est pris en compte par la présence de contacts unilatéraux. Si ce parallèle est légitime, alors pour simplement évoquer l'aspect prédictif de cette approche, nous pouvons par exemple nous attendre à observer un exposant φ de l'ordre de 2 ou 3, soit donc une relation entre force et déplacement selon une loi de puissance avec un exposant de l'ordre de 3 à 4.

Quoiqu'il en soit, nous pouvons schématiser les comportements suivant p et λ.

☆ $p_c < p < p_r$: ★ Faible extension : $\xi_\lambda >> \xi_c$

Régime de faible désordre (domaine C sur la figure 3.27).

☆ $p \approx p_c$ ★ Extension modérée: $\xi_c >> \xi_\lambda >> \xi_{cf}$

Régime de percolation de connexité (domaine B sur la figure 3.27).

☆ $p \approx p_r$ ★ Extension forte: $\xi_{cf} >> \xi_\lambda$

Régime de percolation de forces centrales (domaine A sur la figure 3.27).

Il existe cependant, parmi toutes ces situations complexes, un cas remarquablement simple, mais malheureusement aussi très ponctuel (au sens propre dans le diagramme (λ,p)). Il s'agit du cas d'un réseau de ressorts de longueurs au repos nulle et lorsque le système est au voisinage de p_c. Dans notre situation, il s'agit de la limite où λ tend vers l'infini. Alors, Tang et Thorpe [47] ont montré que l'on pouvait mettre en correspondance simplement le problème élastique avec la conductivité d'un réseau de même topologie, donc au seuil de percolation de connexité. La conductivité du réseau électrique donne alors la force à appliquer de façon à maintenir le système sous tension. La figure 3.28 extraite de la référence [47] montre simultanément la géométrie du réseau initial et celle du réseau élastique déformé.

Pour conclure ce paragraphe, signalons encore quelques points délicats : La prise en compte de non-linéarités de grandes déformations, et en particulier, l'analogie avec les problèmes de contacts unilatéraux, suggèrent encore deux autres éléments qui interviennent naturellement dans les grandes déformations : d'une part les non-linéarités de contacts dues aux encombrements stériques, d'autre part le flambement local de sous-structures en compression. Jusqu'à présent, ces instabilités n'ont jamais été prises en compte dans l'analyse des propriétés critiques de la percolation de forces centrales. Il n'est pas du tout exclu que de tels phénomènes modifient la classe d'universalité du modèle, et donc les exposants

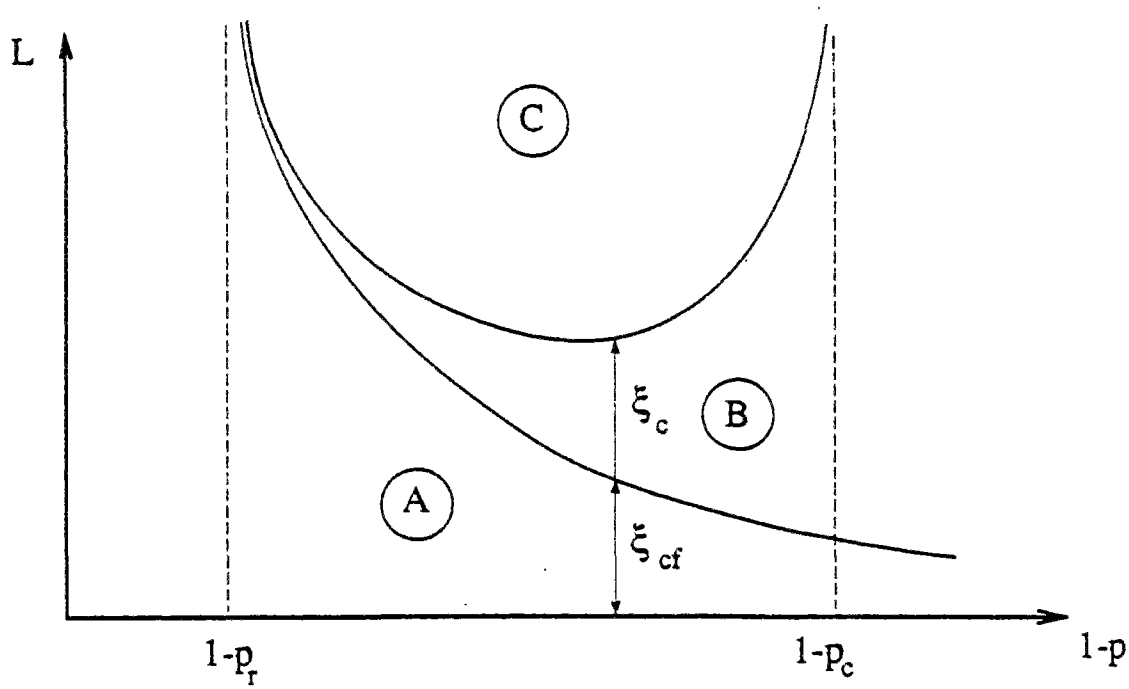


Figure 3.27 : Diagramme de phase L-p illustrant la schématisation proposée pour rendre compte des propriétés élastiques en fonction de la taille du système considérée. Le domaine A est caractéristique du régime de percolation de forces centrales, B du régime de percolation de connexité, et C du domaine de faible désordre.

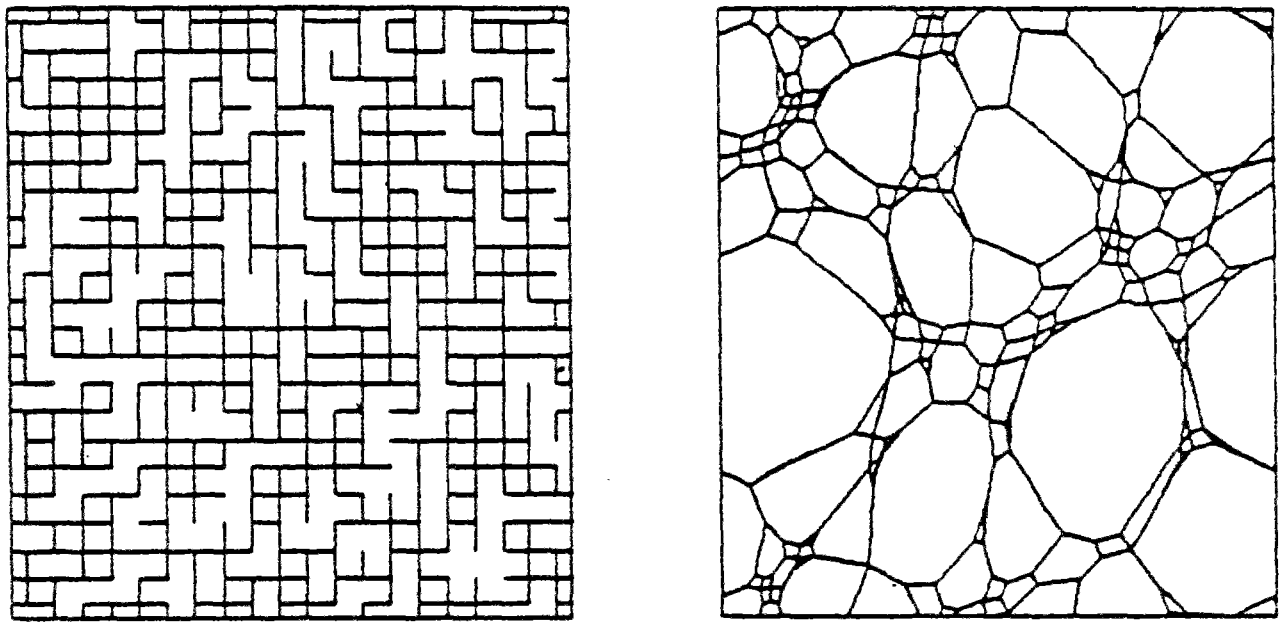


Figure 3.28 : Partant d'une géométrie de réseau carré dilué (a) (ici p=0.7), si chaque lien est un ressort de longueur à vide nulle, le milieu prend une conformation à l'équilibre élastique tel que représentée en (b). Figure extraite de la référence [47], W.Tang et M.F.Thorpe, Phys.Rev.B 36, 3798, (1987)

introduits jusqu'alors. Dans la discussion précédente, le flambement peut induire des multiplicités d'états finaux possibles partant d'une même structure. Nous avons ainsi représenté le domaine accessible $\lambda<\lambda_c(p)$ comme un segment connexe avec une limite bien définie. Pour un système donné, cependant, il est possible de rencontrer plusieurs limites différentes $\lambda_c(p)$ selon telle ou telle configuration choisie après un flambement spécifique. De la même manière, il est aussi possible d'envisager des domaines admissibles non connexes (e.g. $\lambda < \lambda_{c1}(p)$ et $\lambda_{c2}(p) < \lambda < \lambda_{c3}(p)$). Cette multiplicité d'états constitue une difficulté additionnelle de ce problème.

D'autre part, de façon à simplifier la discussion, nous n'avons considéré que l'extension. Il va de soi que le cas général doit englober toutes les positions possibles (en translation et rotation) d'un bord du réseau par rapport à l'autre. Alors apparaît naturellement le cas de la compression uniaxiale et isotrope. Si le problème de l'encombrement stérique est bien pris en compte, alors le seuil de percolation de connexité n'apparaît plus comme une limite du problème. Il a encore un sens jusqu'à p=0. Nous aurions alors à traiter le cas de la fragmentation [48]. Cependant un tel prolongement semble plus proche du jeu d'esprit que d'un quelconque intérêt pratique.

- 3.3 Modèle de Potts antiferromagnétique dilué à trois états à température nulle

Nous n'avons considéré jusqu'à présent que le cas de l'élasticité de forces centrales. Loin d'en avoir épuisé la richesse, nous allons cependant nous arrêter là pour ce problème précis. Nous allons plutôt nous attacher à explorer un modèle *a priori* très éloigné de la percolation de forces centrales, mais qui cependant, comme nous le verrons, partage quelques traits communs avec ce dernier. Il s'agit de la propagation d'ordre dans le modèle de Potts antiferromagnétique de liens à trois états sur réseau triangulaire, dilué, et à température nulle, que nous désignerons dorénavant par 3PAFT [49]. Ce problème a été pour la première fois introduit par Devoret [50] dès 1980 sous le nom évocateur de "percolouration", puis redécouvert récemment par Adler et coll. [49]. Nous remerçions ici J.Vannimenus de nous avoir indiqué le travail original de Devoret.

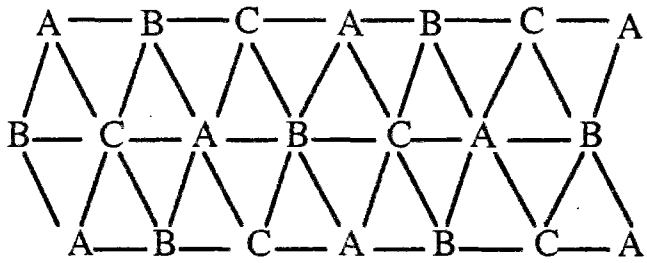
- Modèle complet non-linéaire

Dans ce modèle, chaque site, i, d'un réseau triangulaire est occupé par un spin, σ_i. Ce spin peut prendre trois états : A, B ou C. Chaque lien, ij, présent du réseau triangulaire, a une énergie définie par

$$E_{ij} = J\,\delta(\sigma_i,\sigma_j) \qquad (3.3.1)$$

où J est une constante que nous prendrons égale à 1 dans la suite, et δ est la fonction de Krönecker, qui vaut 1 lorsque les deux spins sont égaux, et 0 lorsqu'ils sont différents. Nous considérons le problème de la configuration du réseau lorsque la température est nulle, et donc nous chercherons l'état ou les états qui minimisent l'énergie totale du système, i.e. la somme sur tous les liens présents de

l'expression donnée ci-dessus (Eq.3.3.1). Il est alors facile de voir que lorsque le réseau est intact, il n'existe que six configurations de spins possibles qui minimisent l'énergie (ici, d'énergie nulle). Ces configurations sont obtenues en répartissant les spins de façon à ce que deux sites voisins n'aient pas le même spin.



La dégénérescence en six états correspond aux six configurations que l'on peut obtenir par permutations de paires de spins (échange A-B par exemple). Nous considérons alors une dilution du réseau. Une fraction (1-p) des liens, choisis aléatoirement, est omise. Alternativement, il est possible d'envisager une dilution de sites. La question que nous nous posons est la suivante : L'ordre des spins se propage-t-il à distance infinie?

Il va de soi que lorsque p est proche de l'unité, la réponse à cette question est oui. Si l'on se fixe deux spins voisins dans un état déterminé (qui n'introduit pas de frustration), avec une probabilité finie, à une distance arbitrairement grande, il existe des spins qui seront dans un état unique à température nulle. Au contraire, lorsque p est faible, le choix de deux spins voisins n'imposera un ordre qu'à distance finie. Il existe donc une valeur de p seuil, p_*, qui séparera le domaine où l'ordre se propage à distance infinie, de celui où l'ordre est de portée finie.

Dans le cas du modèle à deux états, (ferromagnétique ou antiferromagnétique), la propagation d'ordre est simplement liée à l'existence d'un chemin continu de liens présents. Il s'agit donc d'un problème de percolation de connexité. Au contraire, pour le 3PAFT, la connexité n'est pas suffisante à la

propagation d'ordre. En effet, si un spin i est dans l'état A, et si un site voisin est relié à i par un lien, il sera dans l'état B ou C indifféremment, s'il n'existe pas d'autres connections. Un site second voisin, sera alors dans n'importe quel état A, B ou C.

Quel est donc le lien avec la percolation de forces centrales ? Il est vain de chercher une correspondance rigoureuse entre les deux problèmes, mais cependant, le modèle de 3PAFT représente un exemple simple de transmission d'information partielle, au même titre que les barres articulées du modèle de forces centrales. La présence d'un seul lien dans les deux cas ne suffit pas à assurer la rigidité ou l'unicité de l'état du spin d'un site voisin. Il faut donc chercher des cheminements complexes d'informations par des structures plus riches que de simples chemins. De là le caractère non-local du modèle [49]. La figure 3.29 illustre une telle non-localité dans la transmission d'ordre dans le réseau. Les trois liens marqués d'une flèche forme un "canal" juste suffisant à la propagation d'ordre d'un amas à l'autre.

Devoret [50] puis Adler et coll. [49] ont mis en avant cet aspect du problème, en donnant des bornes simples sur le seuil p_* qui excluaient tout lien direct avec un simple problème de connexité. Il est en effet facile de voir que si il existe un amas infini de triangles de liens présents attachés les uns aux autres par un bord commun (et non simplement un sommet) alors l'ordre se propage sur cet amas. Cependant dans le modèle ainsi défini, l'ordre n'est bien sûr pas confiné à cet amas de triangles, et il peut se propager en dehors. Nous obtenons donc ainsi une borne supérieure pour le seuil p_*. Ainsi

$$p_* < p_{tri} \qquad (3.3.2)$$

Le seuil de percolation de triangles ainsi définie est $p_{tri} = 0.775$ [50] ou $p_{tri} = 0.782 \pm 0.004$ [49], pour la dilution de sites.

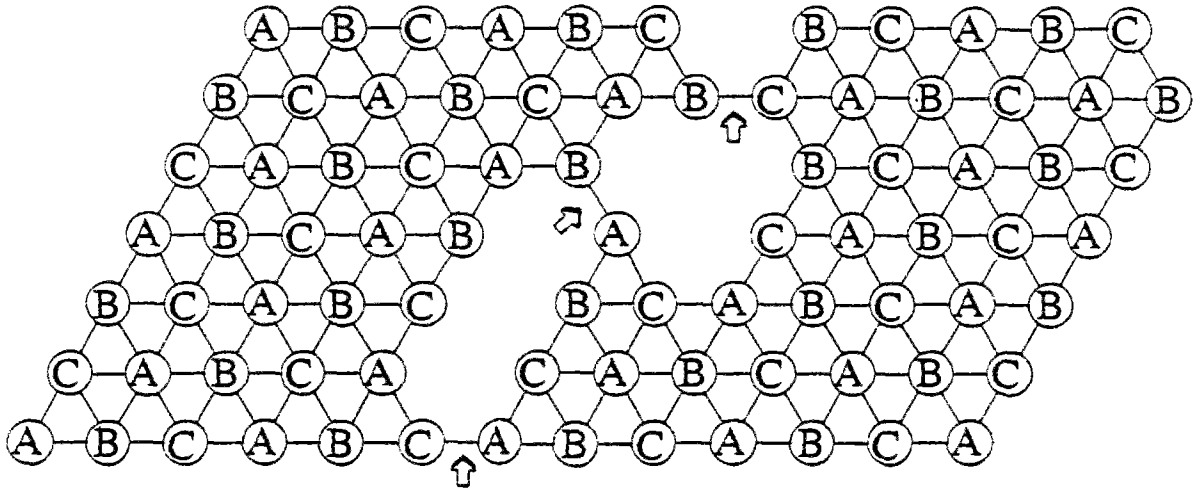


Figure 3.29 : Propagation d'ordre dans le modèle 3PAFT. Les trois liens marqués d'une flèche sont nécessaires et suffisants à la propagation d'ordre de la gauche vers la droite. Ils forment en quelque sorte un "canal unique" bien qu'ils soient fort distant les uns des autres. De là le caractère non-local du problème.

Une borne inférieure est obtenue en cherchant une condition nécessaire à la propagation d'ordre. Devoret [50] a ainsi proposé le seuil de percolation de site du réseau carré. Une meilleure borne est donnée par la référence [49]. Remarquons, suivant Adler et coll., qu'un site doit recevoir deux informations pour être ordonné, donc avoir deux liens présents qui lui soient attachés. Et pour pouvoir transmettre cet ordre, ce site doit avoir encore un troisième lien présent à sa disposition. Sélectionner un amas infini de sites avec trois voisins définit une percolation de "Bootstrap". Pour une dilution de site, cela donne un seuil $p_3 = 0.628 \pm 0.008$. En affinant quelque peu cette condition nécessaire, Adler et al ont introduit une variante de cette percolation de "bootstrap" de seuil cependant voisin : $p'_3 = 0.635 \pm 0.010$

$$p'_3 < p_* \qquad (3.3.3)$$

Nous verrons dans la suite une autre procédure pour améliorer cette borne inférieure.

Devoret a précedemment proposé des bornes similaires

La nature discrète du modèle 3PAFT semble à première vue plus simple à étudier qu'un modèle continu comme le modèle de forces centrales. Il serait même tentant d'y voir là, l'analogue de la formulation Booléenne (cf. Chapitre 2) de la percolation de connexité pour le modèle de forces centrales. En fait, il n'en est rien. La nature discrète du modèle impose de chercher la propagation d'ordre dans une approche d'optimisation combinatoire assez lourde.

Une première estimation du seuil réel a été proposé par Devoret [50], à partir de simulations numériques (pour lesquelles malheureusement fort peu de détails sont donnés): $p_* = 0.72 \pm 0.03$

Une telle méthode a été suivie par Fried et Schick [51] en identifiant, pour chaque amas de triangles, les contraintes sur la configuration de spin de l'amas imposées par les connections du réseau. Nous renvoyons le lecteur à la référence

[50] pour les quelques détails fournis sur l'algorithme suivi par ces auteurs. La conclusion de leur étude est que le seuil de propagation d'ordre en dilution de site vaut :

$$p_* = 0.735 \pm 0.020 \qquad (3.3.4)$$

soit, une valeur bien compatible avec les encadrements cités ci-dessus (Eqs. 3.3.2 et 3.3.3) et le résultat de Devoret. Plus intéressant que la valeur du seuil, cette étude a aussi permis d'apprécier certains exposants critiques :

$$\nu = 1.34 \pm 0.06 \qquad (3.3.5)$$

et

$$\beta = 0.11 \pm 0.05 \qquad (3.3.6)$$

avec la nomenclature habituelle. L'article cependant ne fournit que de très maigres détails sur la procédure suivie dans l'estimation des exposants critiques. Nous verrons par la suite que la définition même d'un état ordonné n'est pas nécéssairement un concept unique et bien défini. Gardons donc ces chiffres à l'esprit comme des ordres de grandeurs.

La conclusion de ce travail provient de la comparaison entre les deux exposants ainsi estimés (3.3.5 et 3.3.6) et les quantités analogues en percolation de connexité ($\nu = 4/3 = 1.33$ et $\beta = 5/36 = 0.14$). La proximité des deux séries de valeurs suggère que le modèle 3PAFT est dans la même classe d'universalité que la percolation usuelle. Si une telle proposition est favorable à nos conclusions précédentes suggérant que la non-localité de la transmission d'information ne jouait aucun rôle dans la classe d'universalité du problème considéré, encore faut-il être prudent. En effet, le modèle 3PAFT est non-local mais de plus il est non-linéaire. Il est en effet impossible de formuler un principe de superposition pour ce problème, contrairement au modèle de forces centrales qui est non-local mais

linéaire. Nous allons voir qu'il est possible de formuler une version linéarisée du modèle qui est soluble, mais qui est différente du modèle original. Cette non-linéarité rend un peu surprenante la conclusion précédente.

- Modèle continu et linéarisation

Nous allons aborder ce problème en deux étapes distinctes. La première consiste à donner au problème une formulation continue, la seconde permettra de linéariser le problème ainsi obtenu et de le résoudre [52]. Nous verrons cependant que le modèle linéarisé, est différent du problème original.

Pour formuler le modèle de 3PAFT en des termes continus, il faut d'abord s'affranchir de l'aspect discret des états de spins possibles. Pour ce faire nous allons associer à chaque état propre A, B et C une direction dans un espace à trois dimensions, $\mathcal{E}$, de façon à ce que ces trois directions soient orthogonales. Par convention, nous noterons l'état A par le vecteur de composantes (1, 0, 0), B par (0, 1, 0) et C par (0, 0, 1). Chaque spin du réseau est alors représenté par un vecteur unitaire dans cet espace $\mathcal{E}$, d'orientation quelconque. Le caractère antiferromagnétique du modèle est traduit par l'expression suivante de l'énergie pour un lien ij:

$$E_{ij} = (\sigma_i.\sigma_j)^2 \qquad (3.3.7)$$

On voit que cette expression est bien équivalente à celle du modèle de départ lorsque l'on astreint les spins à s'orienter le long de l'une des directions propres A, B ou C.

Cette formulation continue a l'intérêt de se prêter à des calculs quantitatifs de la rigidité du système vis à vis de la propagation d'ordre. En effet, supposons que le réseau soit connecté à deux bords sur lesquels nous forçons un certain ordre. Sur le premier par exemple, nous imposons la succession d'états purs suivant A, B, C, A, B, C, A.... Sur le bord opposé, nous fixons les spins

dans la configuration **PA, PB, PC, PA, PB, PC, PA...** où **P** est un opérateur de rotation dans l'espace $\mathcal{E}$, éventuellement combiné à un opérateur de symétrie plane. Un seul de ces deux bords induirait un ordre à énergie nulle dans tout le plan qui lui est attaché pour p=1. Cependant, pour des valeurs quelconques de **P**, ces deux ordres sont incompatibles: le système est donc contraint d'accommoder cette frustration en minimisant son énergie. L'énergie du système en fonction de **P** donne donc une estimation de la "rigidité" du réseau vis à vis de la propagation d'ordre. Le seuil p_* correspond alors à l'annulation de la rigidité pour tout opérateur **P** qui envoie tous les états propres sur d'autres états propres, (produit de toutes les permutations de paires d'états).

Il semble alors raisonnable, dans un premier temps de généraliser cette définition du seuil en considérant tout opérateur **P**. Par voie de conséquence, il est légitime de ne considérer dans un premier temps que de faibles perturbations de l'ordre, i.e. une faible incompatibilité entre les deux ordres imposés. Dans ce cas, si l'on raisonne sur des faibles perturbations des orientations des spins par rapport à leur orientation dans l'état non-déformé (**P=I**), il est possible de linéariser les équations autour de l'équilibre. C'est ce que nous allons faire maintenant.

Nous considérons une faible perturbation autour d'un état pur, par exemple l'état A. Les composantes du spin seront donc $\sigma = (1+\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$, où $\varepsilon_i<<1$ (voir Figure 3.30). La normalisation des spins, impose qu'au premier ordre en ε, $\sigma^2=1$, donc $\varepsilon_1= 0$. Ainsi l'état perturbé s'écrira $(1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$. Pour deux spins σ_i et σ_j reliés par un lien présent, l'énergie sera fonction de l'état de référence des deux spins. Prenons pour exemple de l'état de référence de σ_i, A, et pour σ_j, B. Alors $\sigma_i = (1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ et $\sigma_j = (\eta_1,1,\eta_3)$. L'énergie aura alors la forme suivante :

$$\begin{aligned} E_{ij} &= (\sigma_i.\sigma_j)^2 \\ &= (\eta_1+\varepsilon_2)^2 \end{aligned} \qquad (3.3.8)$$

au second ordre en ε et η. Le minimum d'énergie sera obtenu pour $\varepsilon_2 = -\eta_1$.

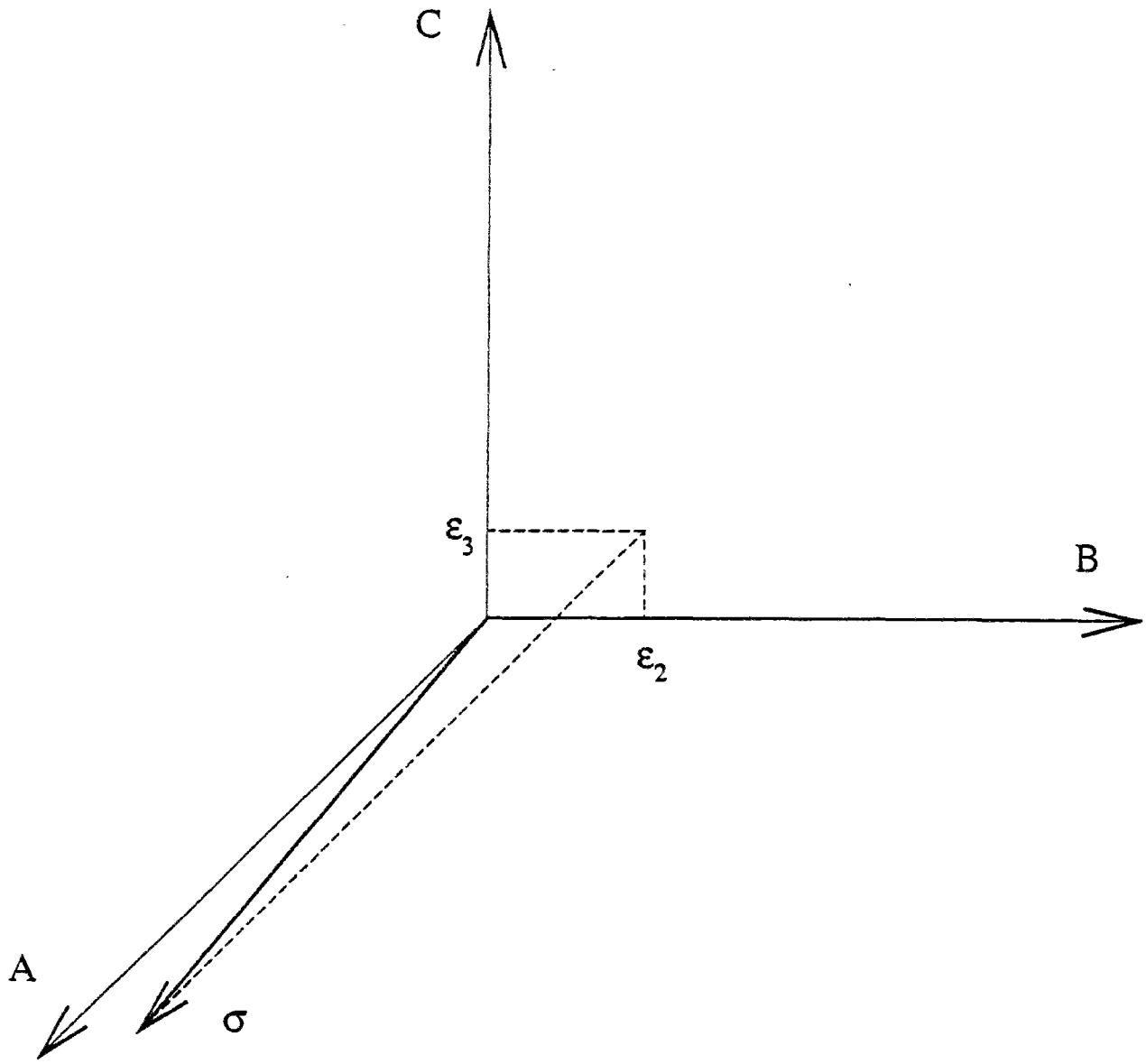


Figure 3.30 : Représentation d'un spin dans l'espace $\mathcal{E}$. La linéarisation consiste à étudier de faibles perturbations d'un spin par rapport à un état de référence donné, parallèle à l'un des trois axes. Dans la figure, l'état de référence est A.

Nous voyons donc que dans cette formulation linéaire du problème, l'opérateur de rigidité élémentaire est dégénéré, comme dans le cas du modèle de forces centrales. Cette dégénérescence est la simple traduction de la partialité de l'information transmise par un lien.

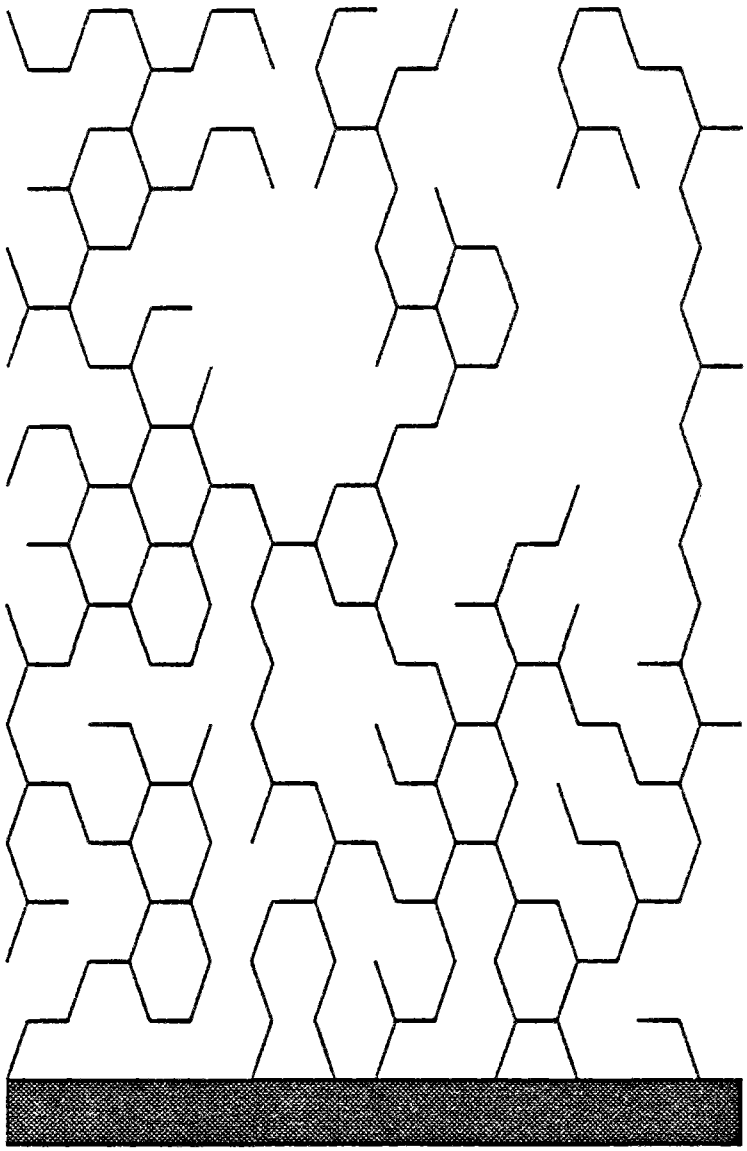
Considérons maintenant un site particulier, i, du réseau, et supposons que son état de référence soit A. Les composantes de σ_i peuvent alors s'écrire $(1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$. Ce site peut être connecté jusqu'à six sites voisins par des liens présents. Parmi ces six sites, trois auront pour référence l'état B, et donc de spin $\sigma_j=(\eta_1{}^j, 1, \eta_3{}^j)$, et trois l'état C, de spin $\sigma_k=(\gamma_1{}^k, \gamma_2{}^k, 1)$. L'énergie des six liens sera ainsi

$$E_i = \sum_j \delta_{ij} (\varepsilon_2+\eta_1^j)^2 + \sum_k \delta_{ik} (\varepsilon_3+\gamma_1^k)^2 \qquad (3.3.9)$$

où δ_{ij} vaut l'unité lorsque le lien ij est présent et 0 sinon. Cette somme peut donc se décomposer naturellement en deux termes : Le premier traduit les interactions entre spins dont les états de références sont A et B, alors que le second traite des interactions AC. L'ensemble même du réseau se découple alors naturellement en trois sous-réseaux de géométrie hexagonale (nid d'abeille), chacun relatif à une interaction particulière. Considérant indépendamment ces trois contributions à l'énergie, E, du réseau, nous voyons que l'on peut symboliquement l'écrire

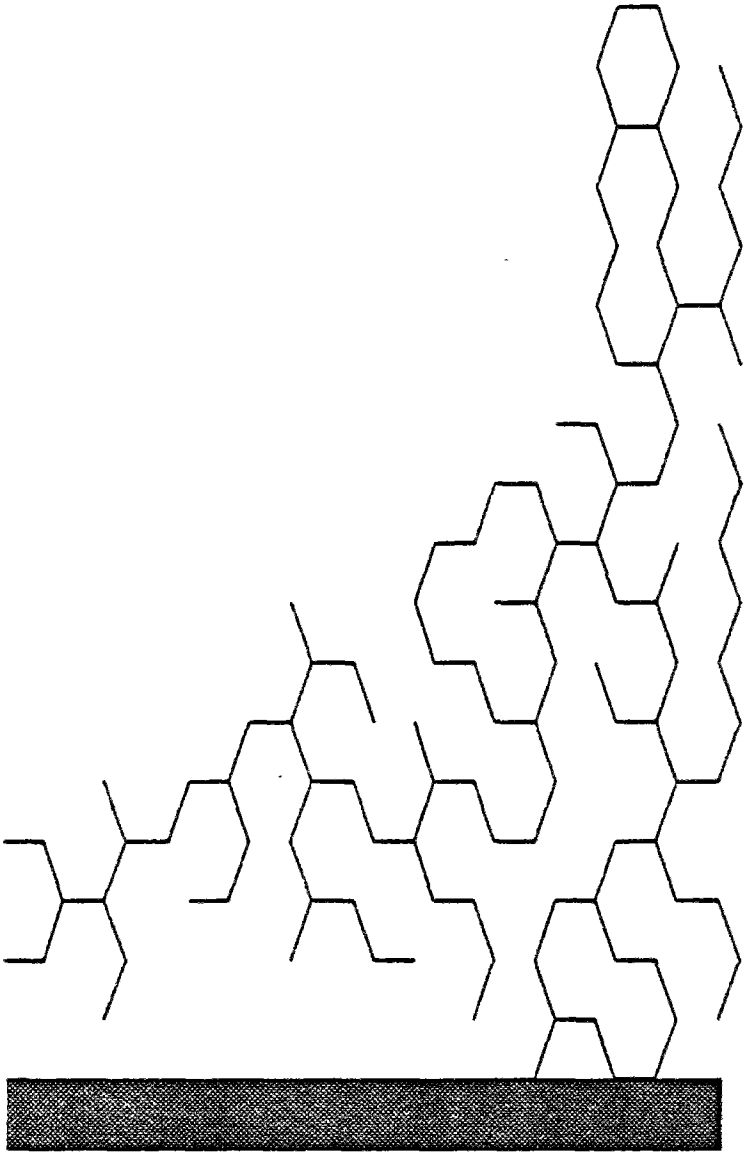
$$E= E_{AB} +E_{BC} +E_{CA} \qquad (3.3.10)$$

De plus la structure de chacun de ces termes est tout à fait analogue à l'expression de l'énergie d'un réseau aléatoire de résistance. Prenons, par exemple, le réseau formé par les interactions de type AB. Le parallèle que l'on peut établir avec un réseau de résistances conduit à l'identification suivante : la seconde composante des spins aux sites de référence A sera interprétée comme un potentiel, alors que la première composante des spins sur les sites de référence B sera



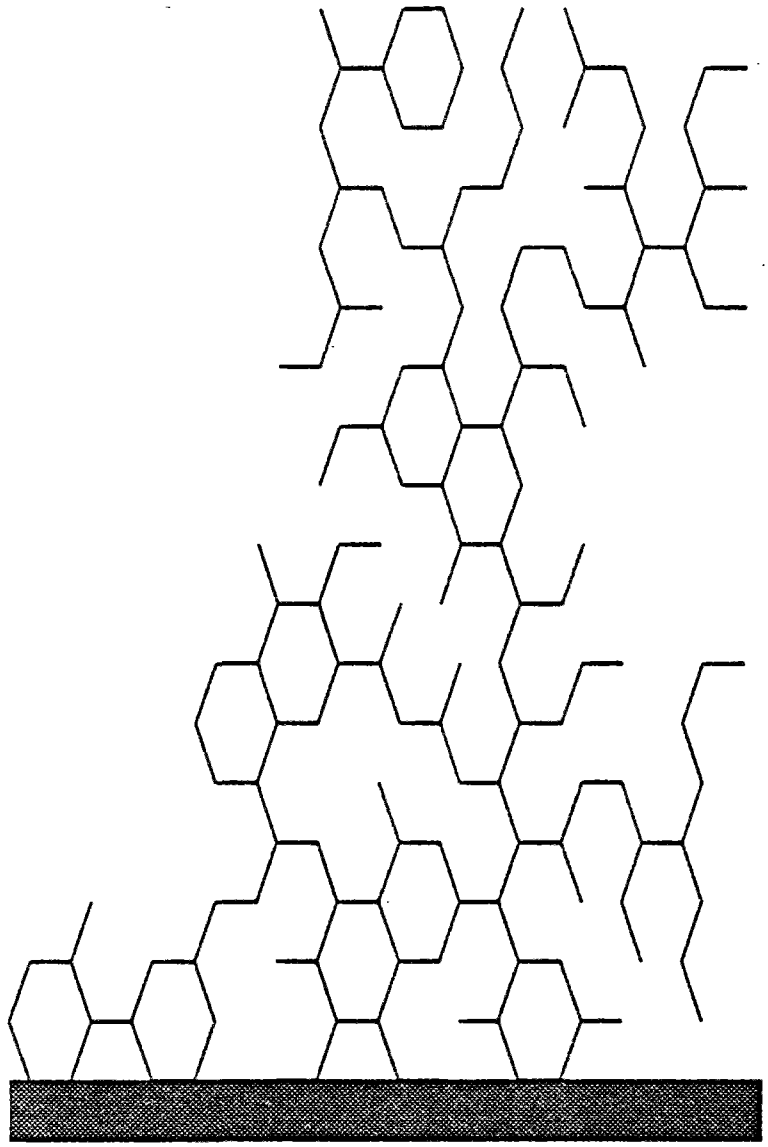
a

Figure 3.31 a: Amas connexe attaché au bord (montré en grisé) où l'ordre est imposé. Cet amas représente la propagation d'ordre de l'un des trois réseaux d'interaction dans le modèle 3PAFT linéarisé.



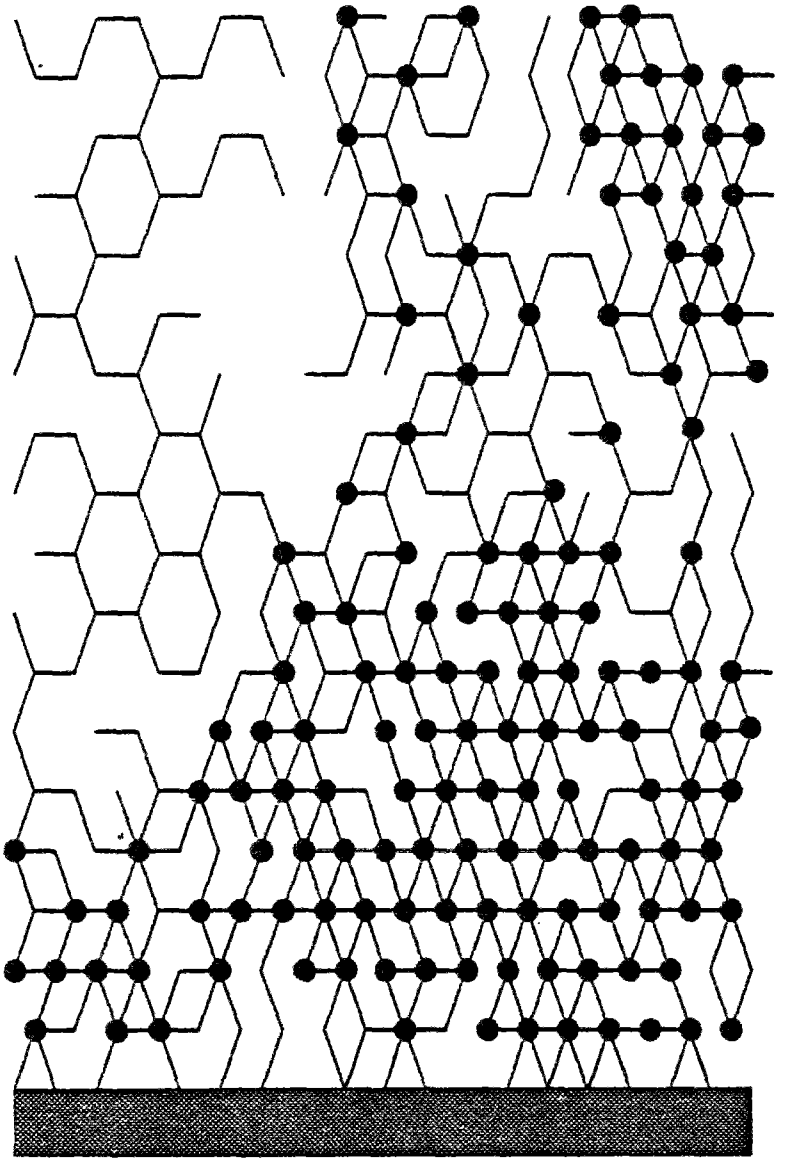
b

Figure 3.31 b: Amas connexe attaché au bord (montré en grisé) où l'ordre est imposé. Cet amas représente la propagation d'ordre de l'un des trois réseaux d'interaction dans le modèle 3PAFT linéarisé.



c

Figure 3.31 c: Amas connexe attaché au bord (montré en grisé) où l'ordre est imposé. Cet amas représente la propagation d'ordre de l'un des trois réseaux d'interaction dans le modèle 3PAFT linéarisé.



d

Figure 3.31 d: Superposition des trois figures précédentes, montrant les sites totalement ordonnés (symbolisés par un cercle ●) et ceux qui le sont partiellement (autres sites) dans le modèle 3PAFT linéarisé.

l'opposé du potentiel. Les conditions aux limites que nous avons choisies, satisfont également à cette interprétation. Le fait d'imposer un état ordonné (non frustré) sur deux bords sera analogue à une condition d'équipotentiel.

Les figures 3.31 a, b et c montrent les trois amas AB, BC et AC connectés à un bord d'un réseau. La superposition des ces trois amas, (Figure 3.31 d) donne la structure des sites recevant une information partielle (car ils n'appartiennent qu'à un seul sous-réseau), ou totale (car ils font partie des deux amas qui sont susceptibles d'emprunter ce site). Les sites totalement déterminés sont symbolisés par un cercle noir sur la figure 3.31 d.

Nous venons donc de résoudre complètement ce modèle 3PAFT linéarisé: Le seuil de propagation d'ordre sera naturellement le seuil de percolation de connexité sur réseau hexagonal, soit pour une dilution de lien p_{*lin}= 0.6527, et pour une dilution de site p_{*lin}= 0.6962. La rigidité, R, du système vis à vis d'un ordre donné, va s'annuler au seuil de propagation d'ordre avec un exposant critique égal à celui de la conductivité d'un réseau de résistances au seuil de percolation, soit t=1.300.

$$R \propto (p-p_{*lin})^t \qquad (3.3.11)$$

Juste au seuil, l'amas infini formé par les sites recevant une information au moins partielle d'un site (ou d'un bord) donné forme un ensemble connecté de dimension fractale, D_{fl}, égale à celle de l'amas infini en percolation de connexité soit

$$D_{fl} = d-\beta/\nu \qquad (3.3.12)$$

Soit D_{fl}= 1.89. Il en va différemment des sites recevant une information totale. Un site dont l'état de référence est A par exemple ne sera complètement défini que si il se trouve simultanément dans l'amas infini du réseau d'interaction AB et dans l'amas infini du réseau AC. La première condition impliquera que ce site n'est pas

dans l'état B, alors que la seconde imposera que ce site n'est pas dans l'état C. Il en va de même pour les sites de type B et de type C. Pour chacun de ces trois types de sites, l'ensemble des sites d'états totalement définis sera donc l'intersection de deux amas infinis dont la structure sera celle d'amas de percolation de connexité. Partant, il n'est pas assuré que cet ensemble soit connexe. Sa dimension fractale, D_{f0}, est facilement obtenue en notant que chacun des trois amas infinis, AB, BC et CA sont indépendants. Ainsi, on peut simplement ajouter les codimensions de deux de ces amas pour obtenir la codimension de l'ensemble des sites d'états complètement déterminés :

$$D_{f0} = d-2\beta/\nu \qquad (3.3.13)$$

soit $D_{f0} = 1.79$. Cette relation est de fait identique à celle que nous avions proposée (Eq. 3.1.15) dans un contexte plus large à propos des systèmes à transmission partielle d'information.

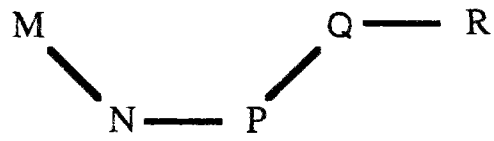
Nous pouvons comparer à présent ce résultat à celui obtenu pour les exposants β'_i de surface en percolation de forces centrales. Nous avions vu que l'exposant β'_1 relatif à un seul degré de liberté figé était identique à celui de la percolation de connexité, β', alors qu'il en allait différemment pour l'exposant β'_0 de rigidité totale. Nous voyons qu'il en est de même dans le modèle 3PAFT linéarisé. Cependant, la relation

$$\beta'_0 = 2\,\beta'_1 \qquad (3.3.14)$$

semble être violée en percolation de forces centrales, traduisant le fait que l'argument d'intersection ne peut s'appliquer car les cheminements des différentes informations partielles ne sont pas indépendants.

Est-ce donc là la solution du problème que nous nous sommes initialement posé ? Certes non ! Parmi les deux pas qui nous séparent du problème

original, l'un est légitime : il s'agit de la généralisation du modèle au cas d'un spin à valeurs continues dans l'espace $\mathcal{E}$. L'autre étape, la linéarisation, a eu quant à elle des effets pervers : Dans le modèle original, nous avions déja remarqué que sur une ligne unidimensionnelle, l'information ne se propageait pas au delà d'un lien. Ainsi sur la ligne MNPQR représentée ci-dessous, l'information issue de M n'affecte que le site N. Les spins des sites P, Q et R peuvent prendre toutes valeurs.



Au contraire dans le modèle linéarisé, si cette ligne s'incrit sur l'un des réseaux hexagonaux relatif à une seule interaction, alors l'information partielle se propage comme un potentiel électrique, tout au long de cette ligne Ainsi par exemple le spin au site Q ne peut pas être dans le même état que celui en M sans qu'il n'en coûte de l'énergie. Ce travers est inhérent à la linéarisation : en effet, nous ne pouvons considérer que de petites modifications d'un spin par rapport à son état de référence. Or la perte d'information au bout de deux pas sur une ligne provient de la possibilité de changer l'état du spin au bout d'un pas, et donc au delà de son état réel, de modifier aussi son état de référence, et par conséquent les types d'interactions supportées par les liens en aval. Un autre exemple est montré dans la figure 3.32 où l'ordre se propage dans le modèle linéaire, alors qu'existe un état, explicité sur la figure, où l'ordre est différent dans les parties gauche et droite du réseau, sans que l'énergie du système ne soit modifiée. Il s'ensuit que le seuil de propagation d'ordre du modèle linéaire est une borne inférieure du seuil du modèle complet original:

$$p_* > p_{*lin} \qquad (3.3.15)$$

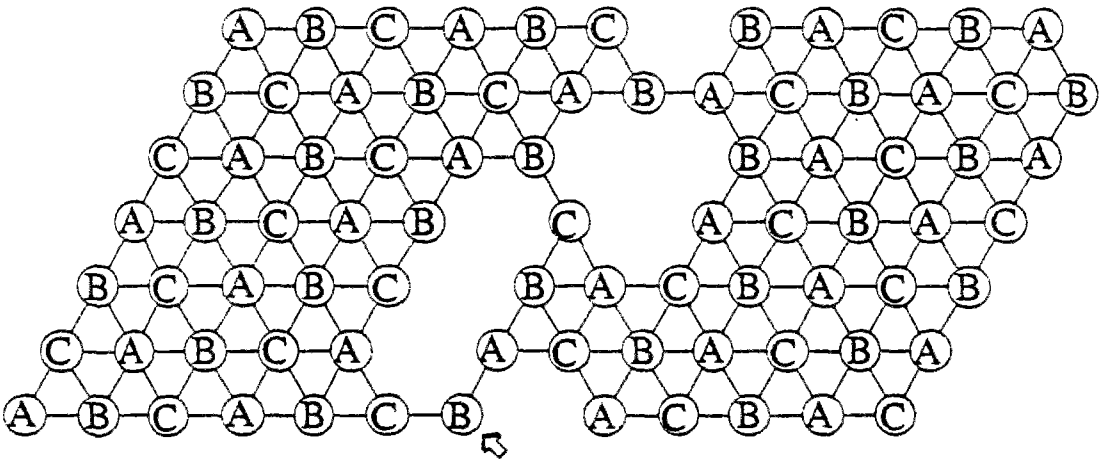


Figure 3.32 : Illustration de la différence entre modèle 3PAFT linéaire et original. Les deux ordres montrés sur cette figure (parties gauche et droite) sont incompatibles. Cependant dans le modèle original, ils n'induisent aucune frustration: l'ordre ne se propage pas. Dans le modèle linéaire, au contraire, les trois sous-réseaux AB, BC et CA sont connexes et donc l'ordre se propage.

Cette borne est bien en accord avec les travaux de Adler et coll. [49] et Fried et Schick [51]. Il nous faut également mentionner le fait que cette borne a déjà été proposée par Devoret dans une note ajoutée aux épreuves de son article ref.[50].

Le fait que la procédure même de linéarisation soit en défaut rend complexe toute approche du problème, car ainsi il ne suffit pas d'envisager un changement individuel de chaque spin et d'en déduire les propriétés de l'ensemble du système par superposition. Au contraire, il faut aussi traiter les situations où deux, trois ... ou un nombre quelconque de spins sont modifiés ensemble. C'est bien là le caractère rebelle des problèmes non-linéaires où le comportement collectif est irréductible à celui de ses constituants.

Il est remarquable de voir que le modèle de percolation de forces centrales présente également un tel caractère : Nous avons en effet assez rapidement évoqué, lors de la définition du modèle, que les phénomènes de flambement étaient *a priori* partie intégrante du modèle, mais exclus de notre approche linéaire. Le flambement est véritablement l'analogue des changements d'état de référence des spins car un tel phénomène modifie non seulement le champ local (déplacement ou spin) mais surtout le type d'interaction qui suit.

Nous pouvons donc résumer les ressemblances et différences entre le modèle 3PAFT et celui de percolation de forces centrales :

Modèle de forces centrales	**3PAFT**
Modèle non-linéaire	Modèle non-linéaire
non-local	non-local
continu (réduction au cas discret inconnue)	discret (extension au cas continu possible)

Modèle de forces centrales linéarisé	**3PAFT linéarisé**

Modèle non-local	Modèle non-local
Exposants critiques indistinguables de percolation de connexité	Exposants critiques égaux à ceux de la ceux de la percolation de connexité
Propriétés originales pour les sites à information partielle	Propriétés originales pour les sites à information partielle
Modèle non découplable	Modèle découplé

Nous voyons donc que, malgré les points communs entre ces deux problèmes, ils ne sont pas identiques. Cependant, une meilleure compréhension d'un modèle est très directement transposable à l'autre. En particulier, les conséquences du caractère non-linéaire des deux modèles envisagés au départ sont certainement à explorer avec plus d'attention.

- Autre modèle

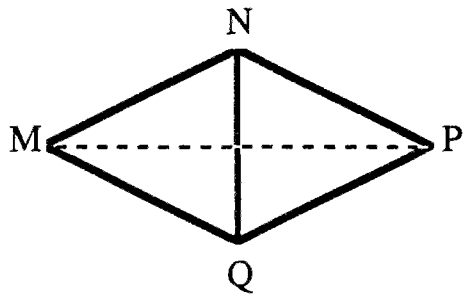
Nous allons maintenant envisager un modèle très proche du modèle 3PAFT original, qui se révèle cependant être abordable. Il s'agit encore de la propagation d'ordre à température nulle pour un modèle de Potts à trois états antiferromagnétique. La différence avec le modèle 3PAFT original est que l'énergie est évaluée sur tous les triangles de trois liens présents, au lieu de l'être sur chaque lien:

$$E = \sum_{\text{triangles } ijk} \delta_{ijk}\, \varphi(\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k) \qquad (3.3.16)$$

Dans cette équation, δ_{ijk} vaut l'unité si les trois liens du triangle formé par les trois sites i, j et k sont présents et zéro sinon. φ est une fonction qui ne vaut zéro que lorsque les trois arguments forment, à des permutations près, le triplet (A, B, C) (les trois états de spins accessibles). Si l'un des états est répété au moins deux fois, la fonction φ prend la valeur unité.

La définition de modèle est donc très voisine de celle utilisée précédemment. Il se trouve que cependant, dans ce cadre, il est possible de définir une procédure simple pour extraire l'ensemble des sites qui sont ordonnés à partir d'une semence donnée. En effet, la forme de l'énergie choisie ici ne permet de transmission d'information qu'entre triangles ayant soit un site commun soit un bord commun.

Remarquons que dans toutes configurations de spins d'énergie minimum, concernant deux triangles accolés par un côté commun, les deux spins aux sites M et P de la figure ci-dessous seront dans le même état.



Ainsi, nous sommes amenés à considérer une liaison "illégitime" dans ce réseau, qui relie M à P. L'ensemble des liaisons de ce type forme trois réseaux triangulaires, $\mathcal{R}_A$, $\mathcal{R}_B$, et $\mathcal{R}_C$, de maille $\sqrt{3}$, par rapport à la maille du réseau triangulaire initial. Chacun de ces réseaux relie des sites de même état de référence dans la situation ordonnée.

Considérons donc l'un de ces réseaux. Il est construit de la manière suivante: si les deux triangles élémentaires MNQ et PNQ, sont présents dans le réseau initial, alors, le lien MP est présent. Si l'un des triangles est manquant, (ou incomplet), le lien MP est absent. Partant d'un bord où l'ordre est imposé, nous pouvons facilement extraire les trois amas, $\mathcal{A}_i$, des sites qui lui sont connectés par l'un des trois réseaux $\mathcal{R}_i$. Chacun des sites de ces amas sera bien évidemment dans un état précis, pour une énergie nulle du réseau. Mais il en existe d'autres : En effet, si un triangle élémentaire quelconque est tel que deux de ses sommets

appartiennent à un amas $\mathcal{A}_i$, alors nécessairement, l'état du troisième sommet est également dans un état bien défini. Cette dernière opération consiste donc à inclure dans chacun des sous réseaux $\mathcal{R}_i$, quelques sites dont l'ordre est imposé par un triangle élémentaire. A partir de ces nouveaux sites, nous pouvons alors envahir de nouveaux amas dans chaque réseau $\mathcal{R}_i$. Nous conservons ces nouveaux amas au même titre que ceux attachés au bord dont l'ordre est originaire. Réitérant ce processus jusqu'à saturation (i.e. jusqu'à ce que l'on ne trouve plus de triangles n'ayant que deux sommets ordonnés), nous obtenons finalement l'ensemble des sites d'ordre imposé.

Le processus de construction de cet ensemble comprend donc deux phases bien spécifiques. La première consiste simplement à extraire les composantes connexes à partir de semences données, alors que la seconde se rapproche de la construction de la percolation de bootstrap. C'est dans cette seconde étape que l'on retrouve la composante non-linéaire du problème étudié. Il n'est en effet pas possible de formuler de principe de superposition dans cet algorithme. De façon plus précise, dans les termes de la formulation Booléenne utilisée au chapitre 2, nous avons affaire ici à une opération Booléenne quadratique : Dans cette écriture, S_i est une variable Booléenne qui prend la valeur "vrai" si le site est ordonné, et "faux" s'il ne l'est pas. La variable T_{ijk} vaut "vrai" si le triangle élémentaire ijk est présent, et "faux" sinon. Enfin le OU est l'itéré du "ou" inclusif, sur tous les triangles élémentaires dont un sommet est i. Alors

$$S_i = OU_{ijk} \{ T_{ijk} S_j S_k \} \qquad (3.3.17)$$

où la juxtaposition tient lieu d'opérateur logique "et".

L'intérêt de cet exemple réside dans le fait qu'une procédure itérative simple permet de résoudre efficacement le problème. Partant, il met en lumière de façon explicite l'aspect non-linéaire, (ici "quadratique") du problème. Cependant, bien des questions restent ouvertes: Quel est le rapport entre ce modèle et le

problème 3PAFT initial? Les classes d'universalité des deux situations sont-elles identiques? Sinon, à quelle raison fondamentale faut-il attribuer l'origine de cette différence?

- Borne sur le seuil de rigidité

Partant de la construction donnée pour le modèle 3PAFT linéarisé, il est possible d'obtenir une borne supérieure sur le seuil de rigidité de percolation de forces centrales. Nous nous rappellons en effet la propriété évoquée au début de ce chapitre, concernant l'existence d'une structure isostatique, analysée par un critère géométrique reposant sur l'existence de trois arbres qui s'évitent mutuellement, qui empruntent les liens du réseau, qui visitent tous les sites d'une structure, et enfin tels qu'ils n'existent pas deux sous-arbres qui couvrent à eux seuls une sous-partie du système. Si l'on impose aux trois arbres de s'incrire chacun sur l'un des trois sous-réseaux hexagonaux que l'on construit à partir du réseau triangulaire initial, il est facile de voir que la dernière propriété sera automatiquement vérifiée. Ainsi, si il est possible de trouver un amas, $\mathcal{A}$, du réseau triangulaire, tel que chaque site de cet amas appartienne aux deux amas connectés des deux réseaux hexagonaux qui passent par ce site, alors, cet amas $\mathcal{A}$ sera une structure génériquement rigide.

Ceci nous amène donc à définir la procédure suivante: partant d'un réseau triangulaire ayant une fraction p de liens présents, nous identifions dans un premier temps, sur chacun des trois réseaux hexagonaux, les amas de liens connectés à un bord donné. Une fois cette première étape effectuée, nous rassemblons ces trois amas sur le réseau triangulaire initial et enlevons les liens des sites qui ne sont atteints que par un seul des deux réseaux triangulaires qui passent par ce site. Après ce filtrage, il faut à nouveau recommencer la première étape, puis le filtrage jusqu'à ce que ce dernier ne modifie plus la structure.

A la limite thermodynamique, il existe une valeur seuil du paramètre p, p_3, telle qu'existe un amas infini à l'issue de la procédure évoquée ci-dessus. Par

construction, nous savons que cette valeur sera supérieure au seuil de percolation de connexité sur réseau hexagonal

$$p_3 > p_c^{hexa} \qquad (3.3.18)$$

Cette valeur seuil n'a pas encore été calculée numériquement, cependant au vu de sa définition, son obtention n'est plus qu'une question de "routine". L'intérêt de ce seuil est qu'il constitue une borne supérieure du seuil de rigidité générique, i.e. incluant éventuellement les non-linéarités de grandes déformations (flambement...).

$$p_r < p_3 \qquad (3.3.19)$$

Il s'agit bien d'une borne car la condition imposée, à savoir que chaque arbre s'inscrive sur un réseau hexagonal distinct, est une condition forte qui n'est pas nécessaire dans le cas général. Bien que simple, ceci constitue, à notre connaissance, l'un des rares résultats obtenus sur ce seuil p_r dans le cadre général de la percolation de forces centrales, étant entendu qu'une borne inférieure est immédiatement fournie par le seuil du modèle linéaire :

$$p_r > p_{r\,lin} \qquad (3.3.20)$$

où $p_{r\,lin}$= 0.642 pour la dilution de liens.

Si nous remarquons enfin que les sites omis par le filtrage ne peuvent en aucun cas transmettre d'information dans le modèle 3PAFT complet, nous obtenons une borne inférieure pour le seuil de propagation d'ordre dans ce modèle

$$p_* > p_3 \qquad (3.3.21)$$

Il s'agit effectivement d'une borne et non d'une égalité, car il est possible de trouver des contre-exemples où il existe un amas infini au sens défini précédemment mais sans que l'ordre ne se propage au travers de la structure.

Comparant les deux inégalités (3.3.19) et (3.3.21), nous voyons que les seuils des deux modèles 3PAFT et forces centrales satisfont à l'inégalité :

$$p_r < p_* \qquad (3.3.22)$$

soulignant ici encore que l'analogie entre les deux modèles ne doit être faite qu'à un niveau de propriétés communes et non d'identité entre modèles.

- 3.4 Percolation et tranport : Synthèse

L'objet de ce paragraphe est de définir un cadre général pour les modèles de percolation à transmission d'information complète ou partielle. Il s'agit donc ici de prendre un peu de recul par rapport aux modèles précis envisagés jusqu'alors et d'en tirer quelques leçons synthétiques.

Nous nous limitons ici au cas des modèles qui sont défini sur réseaux par des champs **U** éventuellement tensoriels d'ordre quelconque, mais prenant des valeurs continues et non discrètes. A partir de ces champs, nous définissons une énergie quadratique en **U**. Nous appelerons ces champs **U** : "déplacement". Les indices bas (latins) de ces champs seront relatifs au site considéré, e.g. $\mathbf{U}_i$ pour le site i. Les (multi-)indices hauts (grecs) seront relatifs aux coordonnées des champs, e.g. $\mathbf{U}_i = U_i^{\alpha}$. Parmi les champs ainsi considérés dans les parties précédentes, nous trouvons les potentiels électriques (et autres analogues comme la température, la pression, la concentration,...), et les déplacements (soit seulement les positions, comme pour le modèle de forces centrales ou le modèle de Born, soit les positions et orientations comme pour le modèle de poutres élastiques)

La première approche est directe : Un lien ne peut transmettre qu'au moins une information scalaire. Ainsi, naturellement, si l'on s'intéresse au champ physique observable, il est nécéssaire qu'il comporte plus d'une information scalaire par site pour que la transmission d'information puisse être partielle. Il suffit alors de définir une énergie E_{ij} par lien ij :

$$2E_{ij} = (U_i^{\alpha} - P_{ij}^{\alpha\beta} U_j^{\beta})\, H^{\alpha\gamma}\, (U_i^{\gamma} - P_{ij}^{\gamma\delta} U_j^{\delta}) \qquad (3.4.1)$$

où $\mathbf{P}_{ij}$ est un opérateur qui donne la valeur du champ **U** au site i en fonction du champ au site j, pour un système au repos (d'énergie nulle). Cet opérateur est généralement l'identité (potentiels, modèle de forces centrales et de Born), mais

dans le cas des systèmes élastiques avec élasticité angulaire, alors **P** couple orientations et positions. **H** est un tenseur symétrique positif, d'ordre 2n, si n est l'ordre des tenseurs **U**. Le rang de cet opérateur définit une transmission d'information, partielle si il est inférieur à n, et totale si il est égal à n.

Le champ conjugué du "déplacement" **U** est une "force" **F** définie au site i pour le lien ij par :

$$F_{ij}^{\alpha} = H^{\alpha\gamma}(U_i^{\gamma} - P_{ij}^{\gamma\delta}U_j^{\delta}) \qquad (3.4.2)$$

La dilution du réseau consiste à sélectionner aléatoirement une fraction p de liens sur lesquels l'énergie E_{ij} telle que donnée par l'Eq.(3.4.1) sera sommée. Le renforcement du réseau consistera au contraire à forcer sur une fraction p de liens ij la condition :

$$U_i^{\alpha} = P_{ij}^{\alpha\beta}U_j^{\beta} \qquad (3.4.3)$$

l'énergie étant alors évaluée sur la fraction restante. Le seuil de percolation correspondra à la fraction p pour laquelle aura lieu, respectivement dans ces deux situations, soit l'annulation soit la divergence de l'énergie ainsi calculée pour des conditions aux limites imposées en termes de déplacements.

Nous prétendons que pour les systèmes à transmission complète d'information, seul P, et donc à travers cet opérateur, les propriétés d'invariance et de symétrie du système, détermine les exposants critiques relatifs au transport du champ sur ces structures. Plus précisément, de par la structure linéaire du problème envisagé, les champs d'énergie nulle seront polynomiaux en les variables d'espace. Soit m le degré maximum de tels polynomes. Cet index peut être obtenu facilement à partir des opérateurs **P** introduits précédemment, en considérant l'opérateur $\mathbf{P}_{ij}$ entre deux points non nécessairement voisins ($\mathbf{P}_{ij}$ peut être obtenu par exemple en multipliant les opérateurs relatifs aux liens d'un chemin particulier de i à j). Cet

opérateur dépend de façon polynomiale en la distance entre i et j. Pour illustrer notre propos, dans le cas du réseau de poutres à une dimension, il est facile de voir que nous pouvons écrire **P** sous la forme :

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.4.4)$$
$$= \mathbf{I}+\mathbf{T}$$

dans la base où la première composante est relative au déplacement transverse, et la seconde à la rotation. Entre deux points distants de x, nous avons

$$\mathbf{P}^x=\mathbf{I}+x\mathbf{T} \qquad (3.4.5)$$

puisque $\mathbf{T}^2 = 0$.

Ecrivons ces champs d'énergie nulle sous la forme générale suivante :

$$\Phi(\mathbf{r}) = \varphi_0 + \varphi_1\mathbf{r} + \varphi_2(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) + \ldots + \varphi_m(\mathbf{r}^m) \qquad (3.4.6)$$

où $\mathbf{r}^m$ est la m-ième puissance de **r**, au sens du produit tensoriel. **r** est la position du point courant. En termes de composantes :

$$\Phi^\alpha(\mathbf{r}) = {\varphi_0}^\alpha + {\varphi_1}^{\alpha\beta} r^\beta + {\varphi_2}^{\alpha\beta\gamma} r^\beta r^\gamma + \ldots \qquad (3.4.6')$$

Dans la cas de l'élasticité, φ_0 est une translation, et φ_1 un opérateur de rotation. La façon usuelle de calculer une rigidité, consiste à imposer aux deux extrémités d'un réseau, deux champs Φ_A et Φ_B distincts. Les rigidités propres (indépendantes de la taille du système s'il est homogène, ou proportionnelles à une puissance entière de cette taille) concernent les cas où ces deux champs ne diffèrent que d'une seule composante. Les autres composantes pourront donc simplement être annulées par application du principe de superposition. Nous appellerons indice de contrôle, p,

l'indice de la composante qui diffère entre Φ_A et Φ_B. Toujours dans le cadre de l'élasticité, pour les déformations planes de milieux bidimensionnels, pour les solides tridimensionnels, il est usuel d'imposer une translation, soit un indice de contrôle p = 0. Pour la rigidité orientationnelle cependant, ainsi que pour la flexion de réseaux bidimensionnels, cet indice de contrôle est 1.

Il est alors tentant, au vu des résultats présentés jusqu'à présent, de conjecturer que l'exposant critique, t', de la rigidité au seuil de percolation sera pour un problème de dilution:

$$t' = t + 2(m-p)\nu \qquad (3.4.7)$$

où t est l'exposant critique de la conductivité en percolation de connexité. De même, pour le renforcement , l'exposant de divergence de la rigidité s'

$$s' = s + 2p\nu \qquad (3.4.8)$$

où s est l'exposant de divergence de la conductivité en percolation de connexité.

Nous pouvons aisément vérifier que ces deux conjectures sont compatibles avec tous les résultats présentés jusqu'à présent : conductivité (perméabilité,...), élasticité avec rigidité angulaire, élasticité pour le modèle de forces centrales, rigidité du modèle 3PAFT linéarisé (dilué ou renforcé). Dans ce dernier cas, il est facile de voir que m = 0 (et donc p également). D'autre part, ces équations ont des conséquences immédiates qui restent à tester, comme par exemple, pour la rigidité orientationnelle qui devrait donc s'annuler au seuil avec un exposant t pour le problème dilué, et diverger avec un exposant s+2ν pour le problème renforcé.

La seconde façon de généraliser les problèmes de transport linéaires tels que vu jusqu'à présent, consiste à utiliser la formulation duale. Si le problème est à transmission d'information totale, la formulation duale sera du même type que

précédemment, mais si l'information n'est que partielle, alors il ne sera plus possible de décomposer l'expression de l'énergie totale en une somme de contributions ne faisant intervenir que deux sites. Nous aurons alors en fonction d'un champ potentiel ψ, défini en chaque site, une énergie par lien qui s'exprime sous la forme

$$2E_{ij} = \Big(\sum_{k(i,j)} a_{k(i,j)} \overset{\alpha}{\psi}_{k(i,j)}\Big)\, H^{\alpha\gamma}\, \Big(\sum_{l(i,j)} a_{l(i,j)} \overset{\beta}{\psi}_{l(i,j)}\Big) \qquad (3.4.9)$$

où k(i,j) et l(i,j) sont des sites qui appartiennent à un voisinage du lien i-j défini aupréalable.

Partant de cette expression, qui constitue une généralisation naturelle de l'équation (3.4.1) il est possible de redéfinir les champs d'énergie nulles, et de refaire un traitement similaire au cas précédent. La seule précaution à prendre est de noter que le champ physique (observable) que l'on impose correspond souvent à une dérivée du champ de potentiel ψ. L'ordre de la dérivation doit donc naturellement intervenir dans la généralisation des équations (3.4.7) et (3.4.8).

Voilà brièvement résumé, la synthèse des résultats présentés jusqu'alors. Ces résultats contiennent comme nous l'avons soulignés tout au cours du texte, nombre de conjectures et d'approximations. Ils ont cependant le mérite de la simplicité, et de la cohérence avec la plupart des résultats numériques publiés sur le sujet.

Dans les chapitres qui suivent, nous ferons référence à la percolation mais plus dans un souci de nous guider dans un cadre plus vaste, que pour apporter de nouveaux éléments d'information sur le sujet.

Références :

1 S.Feng et P.N.Sen — Phys.Rev.Lett. 52, 216, (1984)

2 S.Feng, M.F.Thorpe et E.Garboczi — Phys.Rev.B 31, 276, (1985)

3 E.Garboczi et M.F.Thorpe — Phys.Rev.B 31, 7276, (1985)

E.Garboczi et M.F.Thorpe — Phys.Rev.B 33, 3289, (1986)

4 M.F.Thorpe et E.Garboczi — Phys.Rev.B 35, 8579, (1987)

5 H.Crapo et W.Whiteley — in "Encyclopædia of mathematics and applications" Cambrige Univ.Press. à paraître

6 T.S.Tay et W.Whiteley — Topologie Structurale 11,1, (1985)

7 L.Lovasz et Y.Yemini — SIAM J. Algebraic and Discrete Methods 3, 91, (1982)

8 H.Crapo — prépublication

9 cf. Chapitre 2

10 K.Binder — *in* "Phase Transitions and Critical Phenomena", C.Domb and J.L.Lebowitz (Academic, London) (1983) vol.8, p.1

11 B.P.Watson — Phys.Rev.B 33, 6446, (1986)

12 C.Vanderzande et A.L.Stella — J.Phys.A 20, 3001, (1987)

C.Vanderzande — J.Phys.A 21, 833, (1988)

13 S.Roux et A.Hansen — Phys.Rev.B 38, 5170, (1988)

14 S.Roux et A.Hansen — J.Phys.A 20, L879, (1987)

15 J.Wang et A.Brooks-Harris — Europhys.Lett 6, 157, (1988)

16 S.Roux et A.Hansen — J.Phys.A 21, L941, (1988)

17 L.Solomon — "Elasticité linéaire", Masson, (Paris) (1968)

18 M.A.Lemieux, P.Breton et A.M.S.-Tremblay — J.Physique Lett. 46, L1, (1985)

19 S.Roux et A.Hansen — Europhys.Lett. 6, 301, (1988)

20 A.R.Day, R.R.Tremblay et A.M.S.-Tremblay Phys.Rev.Lett. 56, 2501, (1986)

21 M.Sahimi et J.Goddard Phys.Rev.B 32, 1869, (1985)

22 M.Sahimi et J.Goddard Phys.Rev.B 33, 7848, (1985)

23 S.Arbabi et M.Sahimi J.Phys.A 21, L863, (1988)

24 S.Kirkpatrick Rev.Mod.Phys. 45, 574, (1973)

25 J.G.Zabolitzky, D.J.Bergman et D.Stauffer J.Stat.Phys. 44, 21, (1986)

26 R.Garcia-Molina, F.Guinea et E.Louis Phys.Rev.Lett. 60, 124, (1988)

27 A.R.Day et M.F.Thorpe Phys.Rev.Lett. 61, 2501, (1988)?

28 S.Roux, A.Hansen et E.Guyon Phys.Rev.Lett. 61, 2501, (1988)?

29 R.Garcia-Molina, F.Guinea et E.Louis Phys.Rev.Lett. 61, 2501, (1988)?

30 D.Burton et C.J.Lambert Europhys.Lett. 5, 467, (1988)

31 E.W.Marshall et A.Brooks-Harris Phys.Rev.B 38, 4929, (1988)

32 S.Roux et A.Hansen J.Physique 49, 897, (1988)

33 A.Hansen et S.Roux Phys.Rev.B 40,749, (1989)

34 A.Hansen et S.Roux J.Stat.Phys. 53, 759, (1988)

35 G.G.Batrouni et A.Hansen J.Stat.Phys. 52, 747, (1988)

36 J.Wang et A.Brooks-Harris Phys.Rev.B à paraître

37 J.Wang et A.Brooks-Harris Phys.Rev.Lett. 55, 2459, (1985)

38 T.Travers Thèse, Université de Rennes, (1988)

39 E.Guyon, S.Roux, A.Hansen, D.Bideau, J.P.Troadec et H.Crapo Rep.Prog.Phys. à paraître

40 J.Wang et A.Brooks-Harris Europhys.Lett. 6, 157, (1988)

41 J.Wang et A.Brooks-Harris Phys.Rev.B à paraître

42 R.R.Tremblay, A.R.Day et A.M.S.-Tremblay Phys.Rev.Lett. 56, 1425, (1986)

43 J.Wang et A.Brooks-Harris Phys.Rev.Lett. 56, 1426, (1986)

44 A.Gilabert, S.Roux, E.Guyon et D.Sornette Physica A 157, 570, (1989)

45 W.Tang et M.F.Thorpe Phys.Rev.B 37, 5539, (1988)

H.Yan, A.R.Day et M.F.Thorpe Phys.Rev.B38, 6876, (1988)

46	A.Gilabert, M.Ben Ayad, S.Roux et E.Guyon	J.Physique 49, 1629, (1988)
47	W.Tang et M.F.Thorpe	Phys.Rev.B 36, 3798, (1987)
48	A.Aharony, A.Levi, R.Englman, Z.Jaeger	*in* "Flux, Flow, Fragmention" Annals of the Isr. Phys. Soc., Vol.8, p.112, (1986)
49	J.Adler, R.G.Palmer et H.M.Meyer	Phys.Rev.Lett. 58, 882, (1987)
50	M.Devoret	J. Phys.C 13, 2257, (1980)
51	H.Fried et M.Schick	Phys.Rev.B 38, 954, (1988)
52	S.Roux, A.Hansen et E.Guyon	J.Stat.Phys. 55, 341, (1989)

CALIFORNIE

Jusqu'à présent, nous avons considéré les propriétés de transport de milieux aléatoirement dilués (ou renforcés). Il existe fort peu de situations réelles qui se prêtent à ce type de modèle. Aussi, plus que les résultats cités précédemment, la démarche est importante. Les propriétés de lois d'échelle, en particulier, montrent l'existence de variables réduites, qu'une simple analyse dimensionnelle ne peut fournir. La longueur de corrélation des problèmes de percolation est l'exemple typique d'un concept issu des lois d'échelle, et qui donne une longueur intrinsèquement liée au désordre.

Lorsque l'on étudie un phénomène physique sur une structure désordonnée, où le désordre est pertinent, il est important de connaître le comportement au voisinage du seuil de percolation car il constitue souvent un cas limite de fort désordre. Parfois, les résultats obtenus dans ce cadre constituent un guide précieux pour l'analyse de situations plus réalistes.

Dans ce chapitre et le suivant, nous allons considérer quelques situations où dans une structure désordonnée, va apparaître une structure. Il existe une multitude de situations physiques qui mettent en jeu cette création de structures. Dans un problème de transport linéaire, souvent le champ de "déformation" (ou "gradient de potentiel", ...) se répartit de façon continue sur l'ensemble du milieu qui lui est accessible (le "squelette" en percolation). Si le comportement du milieu est non-linéaire, il existera des situations où ce champ se localisera sur une sous-structure. Le terme de "localisation" est à prendre ici au sens mécanique, (comme pour la localisation d'une bande de glissement), et n'a donc rien à voir avec la "localisation" d'ondes en milieux aléatoires. Les propriétés de ces structures seront fonction à la fois des contraintes appliquées au corps, du désordre de ce milieu, et des lois de comportement locales.

Parmi ces structures, nous pouvons citer :

- un chemin continu.

- une interface (hypersurface sans trou de dimension (d-1) si d est la dimension de l'espace). A deux dimensions, une interface et un chemin seront une seule et même chose.

- une hypersurface de dimension D dans un espace de dimension d.

- une structure isostatique dans un treillis réticulé.

- un ensemble de liens à rompre de façon à accomoder une différence de conditions aux limites. (Dans les sytèmes à transmission d'information partielle, ces structures ne seront, en particulier, pas continues.)

- un amas connexe....

Dans cet esprit, il existe plusieurs façons de construire ces structures. Parfois elle seront définies par des critères globaux, comme des critères d'extrémalité d'une certaine fonctionnelle. Dans d'autres cas, elles résulteront d'un processus de croissance. Le chapitre 4 sera consacré à quelques exemples du premier type, où la fonctionnelle sera une simple pondération de la structure par un champ aléatoire lié au milieu. Le chapitre 5 contiendra des exemples du second type, appliqués au cas de la rupture. Dans ce cas, la croissance sera conditionnée par la structure déjà crée et par l'"interaction" du champ de contrainte au voisinage de cette structure, avec le désordre présent.

Structures Minimales

4.1 Chemins Minimaux en fort désordre

4.1.1 Comportements critiques

- Cas dilué non-dirigé
- Cas dilué dirigé
- Cas renforcé dirigé
- Cas renforcé non-dirigé
- Grand contraste

4.1.2 Comportements en régime dilué

- Réseau carré incliné à $\pi/4$
- Réseau carré droit

4.1.3 Distribution continue large

4.1.4 Lien avec la percolation

4.2 Chemins Minimaux en faible désordre

4.2.1 Renormalisation sur réseaux hiérarchiques

4.2.2 Réseau Euclidien

4.2.3 Arbres et rugosité

4.2.4 Dualité

4.2.5 Modèle de rivières

4.3 Relation avec d'autres modèles

4.3.1 Polymères dirigés en milieu aléatoire

4.3.2 Equation de Burgers avec bruit

4.3.3 Domaines de spins

4.3.4 Interfaces

4.3.5 Modèle d'Eden

4.3.6 Modèles de fronts d'empilement

4.3.7 Etats critiques auto-organisés

4.3.8 Ondes de densité de charge

4.3.9 Verres de spins

4.3.10 Catalyse de surface

4.4 Aspect dynamique : Transport

4.4.1 Réseau de Diodes à seuil

4.4.2 Elasticité d'empilements

4.4.3 Autres applications

4.1 Chemins Minimaux en fort désordre

Nous nous intéressons ici essentiellement au cas bidimensionnel où la structure est un chemin continu (une interface) dirigé ou non. Nous allons aborder quelques cas de désordre représentatifs de beaucoup de situations courantes. Les parties 4.1.1 et 4.1.2 sont largement inspirées du travail de Derrida et Vannimenus [1].

Considérons un réseau régulier, aux liens duquel nous assignons des poids aléatoires x_i choisis de la manière suivante:

$$x_i = 1 \text{ avec probabilité } p \qquad (4.1.1)$$
$$x_i = 0 \text{ avec probabilité } 1\text{-}p$$

Cette situation sera appelée diluée. Par opposition, nous pouvons imaginer un changement d'échelle qui nous donnera une situation renforcée:

$$x_i = \infty \text{ avec probabilité } p \qquad (4.1.2)$$
$$x_i = 1 \text{ avec probabilité } 1\text{-}p$$

Nous distinguerons dans la suite deux situations caractéristiques: d'une part, le cas où les chemins sont dirigés, (le chemin ne doit alors comporter aucun retour en arrière), d'autre part le cas non-dirigé où aucune contrainte n'est imposé sur la forme des chemins.

Nous considèrerons toujours dans ce qui suit un réseau dont la forme globale est rectangulaire de largeur w et de longueur L. Les chemins que nous considérons traversent le réseau dans toute sa longueur. Dans toutes les simulations numériques auxquelles nous nous réfèrerons, les conditions aux limites dans le sens transverse seront périodiques: le réseau aura ainsi la topologie d'un cylindre. A tout chemin, $\mathcal{P}$, qui

traverse le réseau, nous associons une mesure $\mu(\mathcal{P})$ qui est la somme des poids x_i sur tous les liens qui composent le chemin :

$$\mu(\mathcal{P}) = \sum_{i \in \mathcal{P}} x_i \qquad (4.1.3)$$

Nous nous intéressons aux propriétés des chemins qui minimisent $\mu(\mathcal{P})$ sur l'ensemble des chemins. Nous introduisons les notations suivantes:

$$d(w,L,p) = <\min_{\mathcal{P}} \{\mu(\mathcal{P})\}> / L \qquad (4.1.4)$$

où les crochets <...> signifient que l'on prend la moyenne sur les tirages des poids aléatoires. Nous utiliserons de plus les notations suivantes :

$$d(w,p) = \lim_{L \to \infty} d(w,L,p) \qquad (4.1.5)$$

et

$$d(p) = \lim_{w \to \infty} d(w,p) \qquad (4.1.6)$$

d(p) est la caractéristique principale que nous désirons étudier.

Deux remarques préliminaires s'imposent : d'une part pour un chemin choisi aléatoirement, la proportion de x_i sur ce chemin sera p. Or comme le chemin est choisi de façon optimale, nous obtiendrons une mesure plus faible :

$$d(p) \leq p \qquad (4.1.7)$$

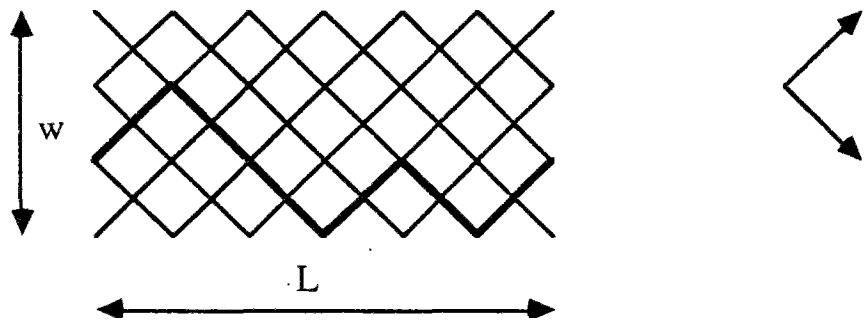
D'autre part, lorsqu'existera un chemin continu de liens de poids nul traversant le réseau, alors d(p) sera nul. Ceci aura lieu dès que p sera inférieur à une valeur p_0, qui correspond au seuil de percolation des liens de poids nul: $p_0 = 1-p_c$.

$$d(p) = 0 \text{ pour tout } p \leq p_0 \qquad (4.1.8)$$

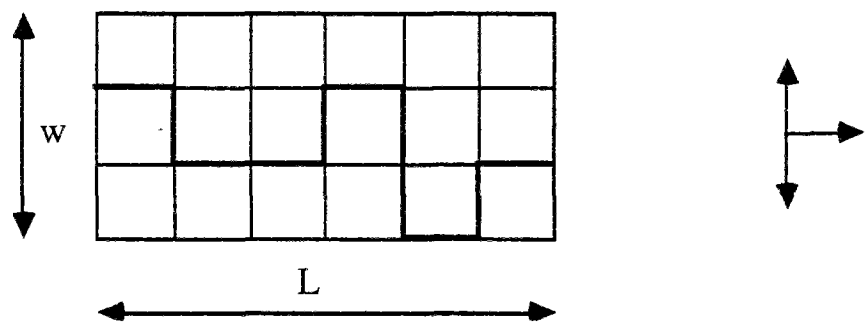
Ces deux simples bornes sont valables pour tous les cas, qu'il s'agisse de chemins dirigés ou non. Dans ce premier cas, il faudra alors considérer le seuil de percolation dirigée.

Nous allons n'étudier que deux réseaux particuliers:

A) le réseau carré dont les axes propres forment un angle de $\pi/4$ avec les bords du réseau. La figure ci-dessous donne les sens de parcours légitimes lorsque les chemins sont dirigés:



B) le réseau carré dont les axes propres sont parallèles aux bords du réseau. Dans ce cas les sens de parcours autorisés sont indiqués sur la figure ci-dessous:



Dans les cas A) et B) le seuil non-dirigé sera $p_0 = 0.5$. Dans le cas A) le seuil dirigé sera $p_0^{dir} = 0.3553$ [2], et dans le cas B), $p_0^{dir} = 0.441$ [3]. Il est bien sûr naturel que p_0^{dir} soit inférieur à p_0 car la contrainte que le chemin soit dirigé reduit l'espace des chemins sur lesquels la minimisation est faite. Plus généralement :

$$d^{dir}(w,L,p) \geq d(w,L,p) \qquad (4.1.9)$$

Les figures 4.1 et 4.2 montrent respectivement pour les cas dirigé et non-dirigé l'allure des variation de d(p). Nous allons principalement nous attacher à caractériser deux cas extrèmes de valeurs de p. D'une part, nous étudierons en 4.1.1 le comportement critique au voisinage du seuil de percolation, et d'autre part, en 4.1.2, nous considèrerons le cas opposé d'un très faible désordre. Nous allons commencer notre étude par le cas le plus simple : paradoxalement, il s'agit du comportement critique.

4.1.1 Comportements critiques

- Cas dilué non-dirigé

Comme nous en avons maintenant l'habitude, nous allons étudier le comportement critique au seuil de percolation par un effet de taille finie. Choisissons pour $p = p_0$, une géométrie de ruban, où la longueur L est très supérieure à la largeur w. Dans ce cas, une seule taille est pertinente, w, puisque la longueur de corrélation, ξ, est infinie ($p = p_0$).

Donnons maintenant un argument simple pour estimer le comportement critique. Dans chaque tronçon de ce ruban de longueur égale à w, la pondération des chemins minimaux de l'ordre de l'unité. En effet, chaque tronçon sera un réseau carré au voisinage de son seuil de percolation effectif, pour lequel cette pondération vaut exactement un par définition du seuil de percolation effectif. Compte tenu des fluctuations de seuils effectifs et des conditions aux limites dans la géométrie ruban, cette pondération moyenne sera sans doute modifiée, mais *a priori* pas de façon critique. Ainsi, sur une longueur L, $\mu(P)$ sera donc de l'ordre du nombre de tronçons de longueur w contenu dans le ruban, soit L/w (cf. Figure 4.3). Donc

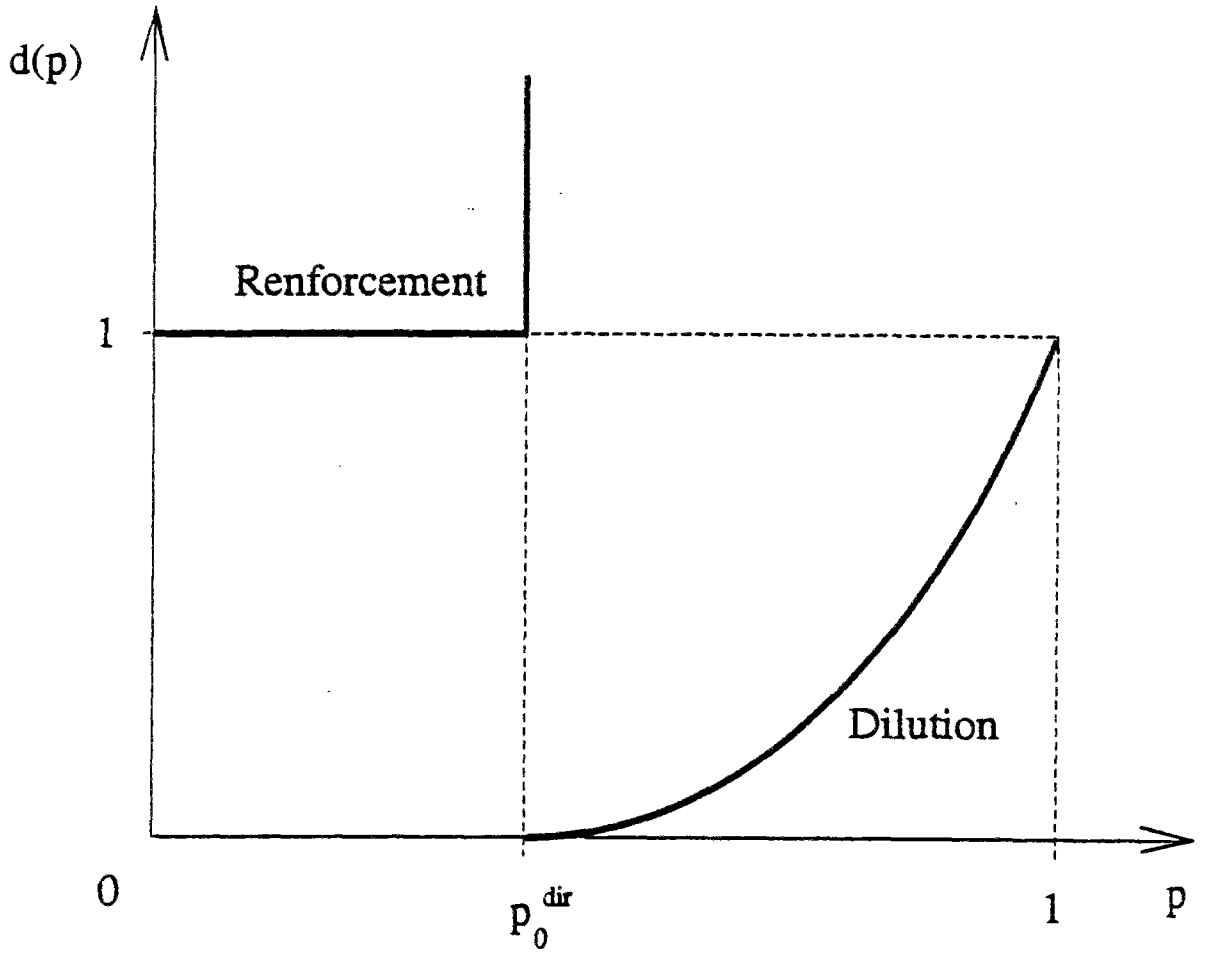


Figure 4.1 : Illustration schématique de d(p) pour les chemins minimaux dirigés en fonction de p, pour deux situations: d'une part, le cas dilué (d<1) et, d'autre part, le cas renforcé où d diverge à $p = p_0^{dir}$.

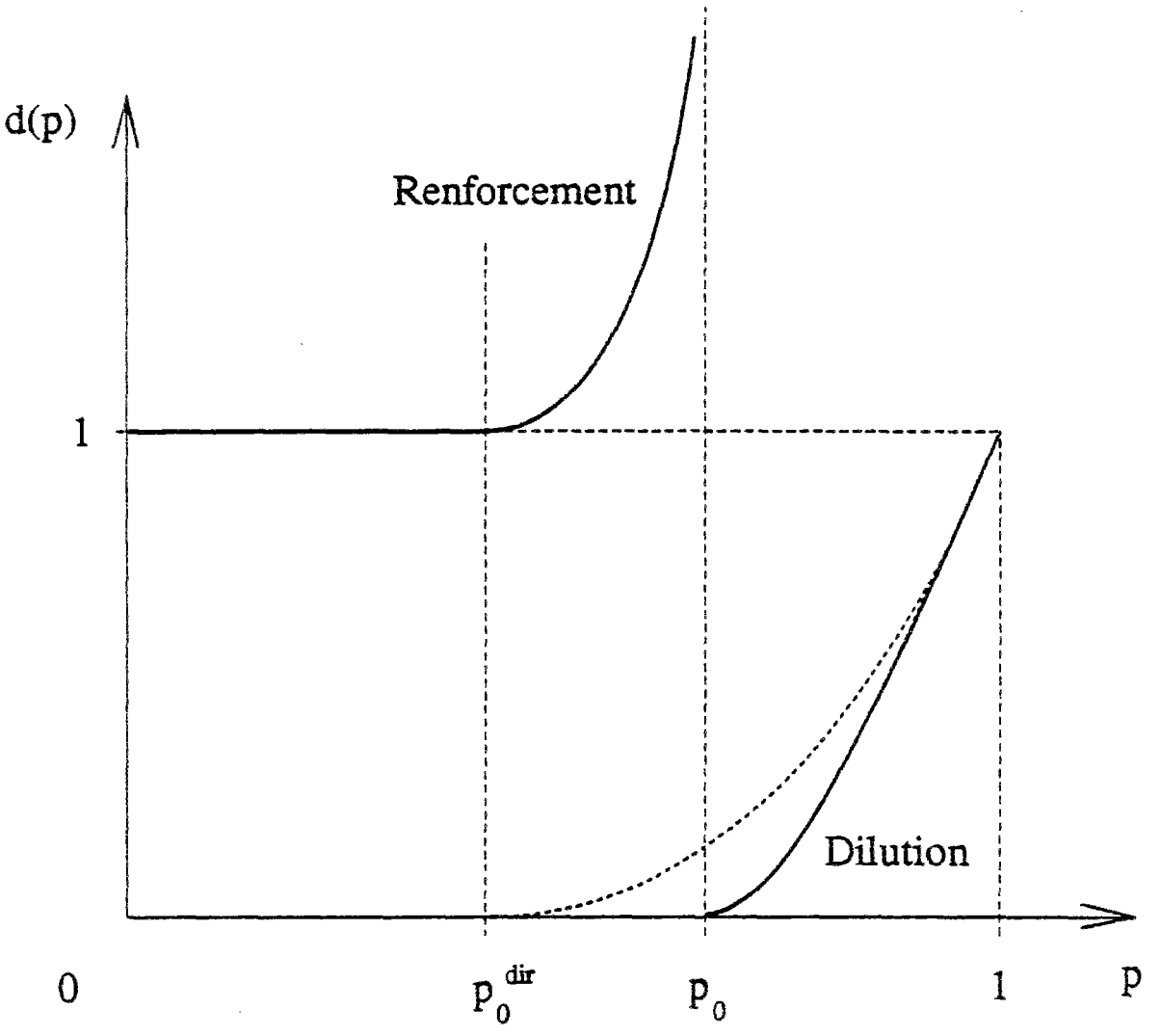


Figure 4.2 : Illustration schématique de d(p) pour les chemins minimaux non-dirigés en fonction de p, pour deux situations: d'une part, le cas dilué (d<1) et, d'autre part, le cas renforcé où d diverge à $p = p_0$. Le cas dirigé (Fig.4.1) est rappelé en pointillé.

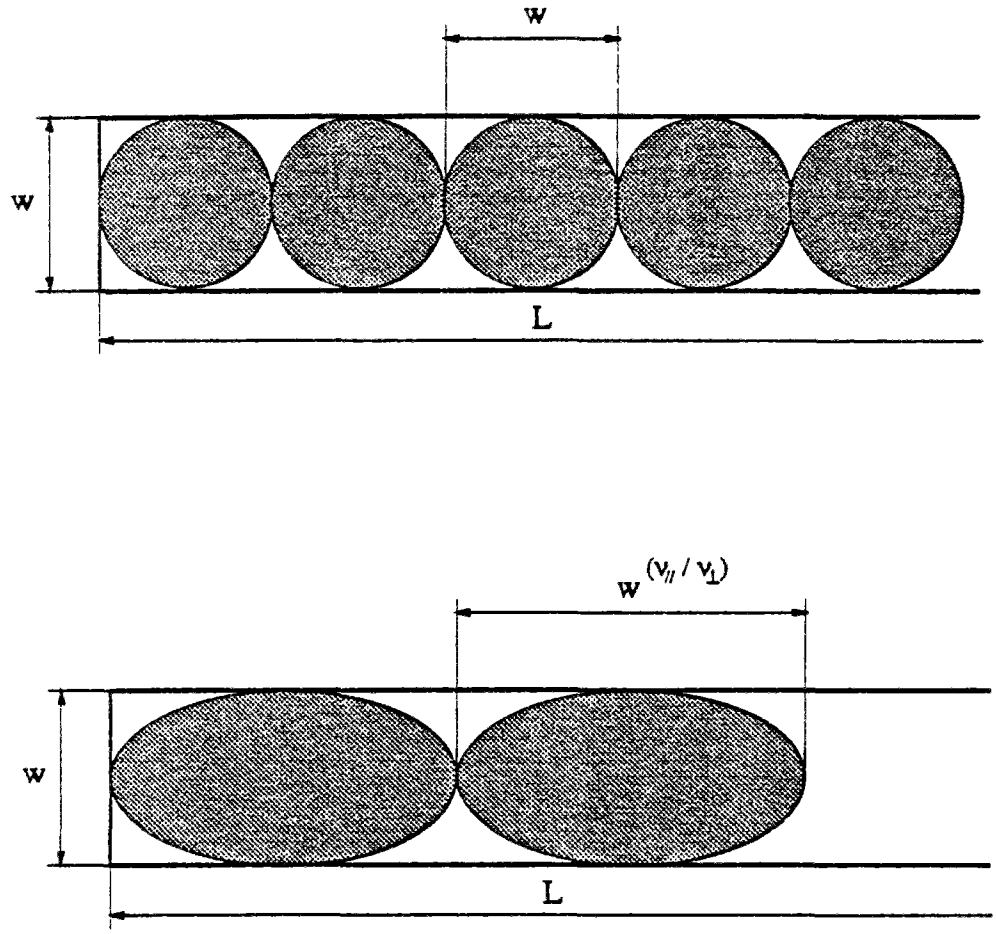


Figure 4.3 : Schématisation de l'estimation de la pondération des chemins minimaux dans la géométrie ruban au seuil de percolation. Dans la figure du haut, les chemins sont non-dirigés, il suffit alors de dénombrer les tronçons de longueur w contenus dans la longueur L. La figure du bas illustre le cas dirigé, où il faut prendre en compte l'anisotropie des longueurs de corrélation longitudinales et transverses.

$$d(w,p_0) \propto w^{-1} \qquad (4.1.10)$$

Utilisant maintenant un argument de taille finie, nous pouvons conclure. Au voisinage du seuil de percolation, nous escomptons un comportement critique du type:

$$d(p) \propto (p-p_0)^{\nu} \qquad (4.1.11)$$

et donc pour une largueur, w, finie

$$\begin{aligned} d(w,p) &\propto (p-p_0)^{\nu}\, \varphi(w/\xi) \qquad (4.1.12) \\ &\propto (p-p_0)^{\nu}\, \varphi(w\,(p-p_0)^{\nu}) \end{aligned}$$

Lorsque w est très petit devant ξ, en écrivant que d(w,p) ne dépend plus de l'écart au seuil $(p-p_0)$, nous obtenons le comportement de φ au voisinage de zéro:

$$\varphi(x) \propto x^{-\nu/\nu} \qquad (4.1.13)$$

Dans ces conditions, au seuil de percolation,

$$d(w,p_0) \propto w^{-\nu/\nu} \qquad (4.1.14)$$

Comparant cette équation à (4.1.10) nous obtenons

$$\nu = \nu \qquad (4.1.15)$$

Soit à deux dimensions, $\nu = 4/3$. Ce résultat a été présenté pour la première fois par Deutscher et Rappaport [4] et repris par de Oliveira [5]. La motivation de ces études était

l'étude des courants maximaux dans un milieu au voisinage du seuil de percolation. Dans une préoccupation voisine, il est possible d'étendre ce type d'approche à un milieu élastique fragile [6], mais nous aurons l'occasion de revenir sur ce résultat au chapitre prochain.

Derrida et Vannimenus [1] ont repris ce problème en étudiant l'énergie d'interface dans le modèle d'Ising dilué à température nulle. Ils ont étayé leur analyse de simulations numériques par matrice de transfert (cf.Annexe), au seuil de percolation, pour des rubans de longueur 10^4 et de largeur variant entre 2 et 7, et de longueur 2.10^3 pour les largeurs 8 et 9. Ils ont ainsi mesuré

$$v/\nu = 0.98 \pm 0.05 \qquad (4.1.16)$$

La figure 4.4 montre des résultats similaires que nous avons obtenus ici encore par simulations numériques par matrice de transfert (w variant de 2 à 10 , pour une longueur de 10^5 et pour w = 15, L = 5.10^4). Nous en tirons une estimation du rapport v/ν en parfait accord avec la valeur précédente

$$v/\nu = 0.99 \pm 0.02 \qquad (4.1.17)$$

Ainsi la proposition $v=\nu$ semble confirmée par ces études numériques. Nous pouvons vérifier que cette égalité est bien compatible avec d'autres comportements critiques étudiés précédemment.

Nous pouvons associer à chaque réseau sur lequel nous calculons un chemin minimal, un réseau électrique formé de résistances dont la valeur, r_i, est égale au poids du lien correspondant, x_i. Injectons à travers ce réseau un courant unité au départ des chemins et recueillons-le à l'arrivée. Au seuil de percolation, nous savons (cf.Chap.2) que la résistance électrique globale du réseau, R, varie comme

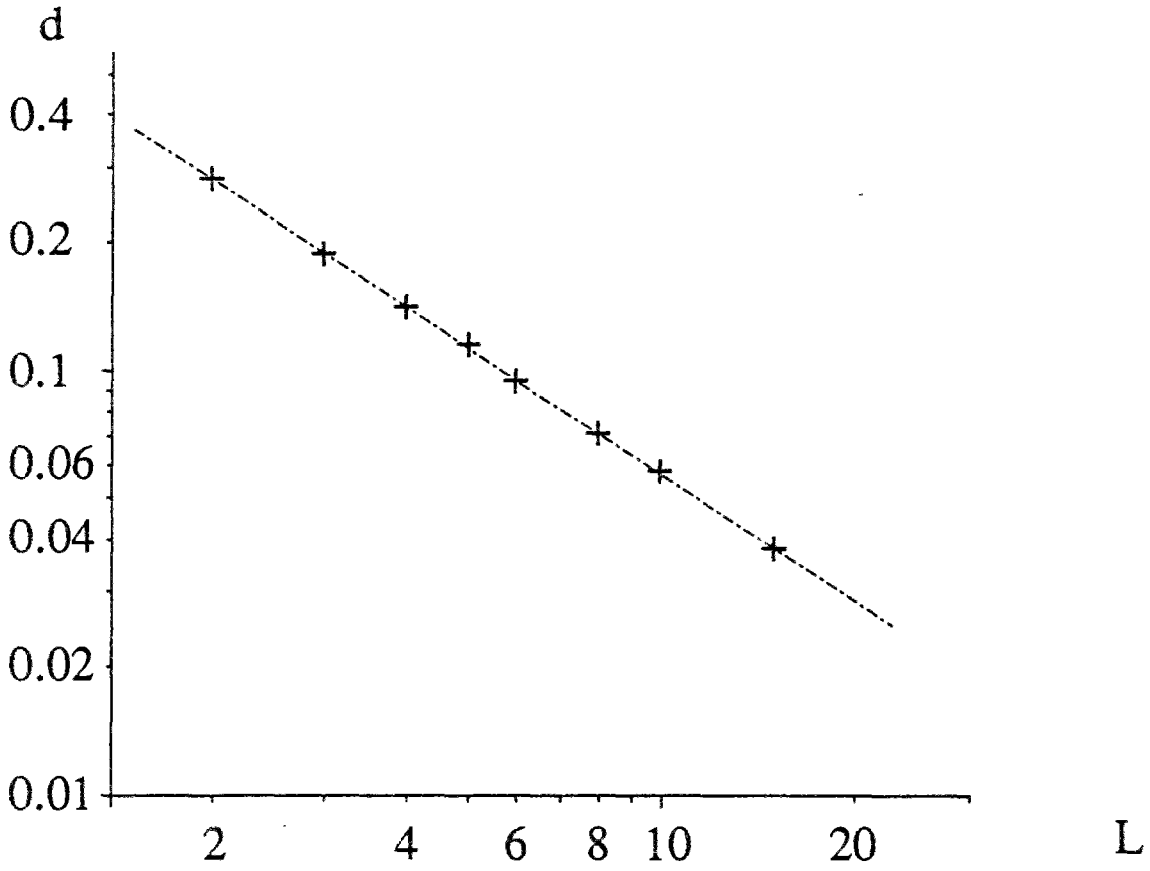


Figure 4.4 : Pondération $d(w,p_0)$ obtenue par simulation numérique par matrice de transfert au seuil de percolation non-dirigée en coordonnées bi-logarithmiques. La droite tracée montre une régression linéaire de pente 0.99. La conjecture de Deutscher et Rappaport donne une pente 1. Les conditions aux limites sont périodiques.

$$R \propto L\, w^{-s/\nu-1} \qquad (4.1.18)$$

à deux dimensions, $s = t = 1.300 \pm 0.001$. Nous pouvons simplement majorer cette résistance en trouvant un champ de courant admissible et en évaluant l'énergie dissipée avec celui-ci. Nous choisissons donc comme champ admissible une situation où l'ensemble du courant est confiné sur l'un des chemins minimaux. L'énergie dissipée sera alors simplement proportionnelle au nombre de liens de poids 1 coupés par ce chemin, et donc

$$\begin{aligned} R &\leq L\, d(w,p_0) \\ &\leq A\, L\, w^{-\nu/\nu} \end{aligned} \qquad (4.1.19)$$

où A est une constante. Nous en déduisons que

$$\nu \leq s + \nu \qquad (4.1.20)$$

ou encore en utilisant $\nu = \nu$, nous déduisons $s \geq 0$, inégalité trivialement satisfaite avec les valeurs communément admises pour s [7].

- Cas dilué dirigé

Les raisonnements tenus jusqu'à présent s'appliquent encore, en prenant en compte les spécificités de la percolation dirigée (cf.Annexe), comme, en particulier, le fait qu'il existe alors deux longueurs de corrélation, l'une parallèle à la direction privilégiée, $\xi_{//}$, et l'autre perpendiculaire, $\xi_{\perp}$, chacune ayant un comportement critique différent:

$$\xi_{//} \propto (p-p_c^{dir})^{-\nu_{//}} \qquad (4.1.21)$$

et

$$\xi_{\perp} \propto (p-p_c^{dir})^{-\nu_{\perp}} \propto \xi_{//}^{\nu_{\perp}/\nu_{//}} \qquad (4.1.22)$$

où, à deux dimensions, $\nu_{//} = 1.7334$ et $\nu_{\perp} = 1.0972$ [2].

Lorsque nous sommes au seuil de percolation dirigée, pour un ruban de largeur w, les chemins minimaux traverseront un lien de poids unité sur chaque tronçon de longueur ℓ telle que

$$\xi_{\perp} = w \qquad (4.1.23)$$

et

$$\xi_{//} = \ell \qquad (4.1.24)$$

soit

$$\ell = w^{\nu_{//}/\nu_{\perp}}$$

Ceci est illustré sur la figure 4.3. Nous obtenons donc facilement la pondération typique des chemins minimaux, L/ℓ et donc

$$d^{dir}(w,p_0^{dir}) \propto w^{-\nu_{//}/\nu_{\perp}} \qquad (4.1.26)$$

soit encore numériquement $\nu_{//} / \nu_{\perp} = 1.58$. (Pour revenir au cas non-dirigé, il suffit dans la formule précédente de poser $\nu_{//} = \nu_{\perp} = \nu$.) La figure 4.5 illustre un tel comportement critique étudié par matrice de transfert sur des rubans de largeur variant entre 2 et 50 pour une longueur de 10^5. La valeur de la pente donne la dépendance

$$d^{dir}(w,p_0^{dir}) \propto w^{-\nu^{dir}/\nu_{\perp}} \qquad (4.1.27)$$

où $\nu^{dir}/\nu_{\perp} = 1.57 \pm 0.02$, soit $\nu^{dir} = 1.72 \pm 0.02$, en excellent accord avec l'estimation précédente.

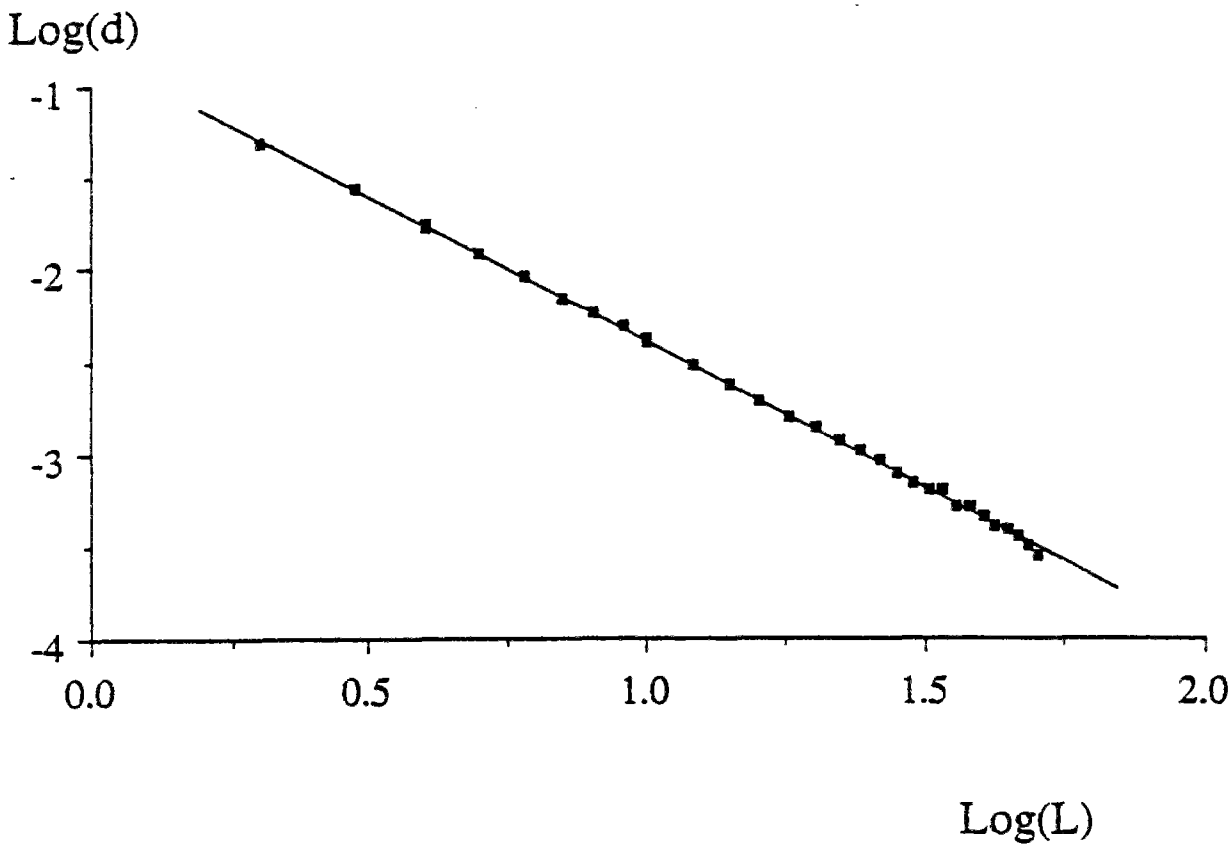


Figure 4.5 : Pondération $d^{dir}(w, p_0^{dir})$ obtenue par simulation numérique par matrice de transfert au seuil de percolation dirigée en coordonnées bi-logarithmiques. La droite tracée montre une régression linéaire de pente 1.57. Un argument simple prédit une pente 1.58 .

Nous pouvons aussi appliquer la borne avec l'exposant de transport s^{dir}, bien que celui-ci n'ait jamais été déterminé à notre connaissance, mis à part au-delà de la dimension critique supérieure [8]. Soit un réseau constitué de diodes alignées dans la même direction. Une proportion p de ces diodes est de résistance unité dans le sens passant, et une proportion 1-p est de résistance nulle. La résistivité du milieu, ρ, s'annule au seuil de percolation dirigée, selon

$$\rho \propto (p_c^{dir} - p)^{s^{dir}} \qquad (4.1.28)$$

Alors, nous avons $s^{dir} + \nu_\perp \geq \nu^{dir}$.

- Cas renforcé dirigé

Rappelons que, dans ce cas, la pondération est soit unité (probabilité 1-p), soit infinie (probabilité p). Si nous considérons dans un premier temps, un réseau carré dont les axes propres sont inclinés à $\pi/4$ par rapport aux bords du réseau, nous nous trouvons dans une situation dégénérée: En effet, dans ce cas, tous les chemins dirigés ont même longueur. Or, comme pour p inférieur à p_0^{dir}, il existe toujours un chemin qui traverse le réseau en évitant tous les obstacles (lien de pondération infinie), il s'ensuit que

$$d^{dir}(p) = 1 \quad \text{pour } p < p_0^{dir} \qquad (4.1.29)$$

Dès que p devient supérieur à p_0^{dir}, il devient impossible de trouver un chemin dirigé qui évite les obstacles, et donc

$$d^{dir}(p) = \infty \quad \text{pour } p > p_0^{dir} \qquad (4.1.30)$$

La transition est donc discontinue comme le montre la figure 4.1 Le réseau carré est-il donc pathologique ? Non! Dans tous les réseaux dirigés où tous les liens ne peuvent être parcourus que dans un seul sens, les chemins dirigés, $\mathcal{P}$, ont une longueur $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ encadrée par

$$\alpha L \leq \mathcal{L}(\mathcal{P}) \leq \beta L \qquad (4.1.31)$$

où α et β sont deux constantes caractéristiques du réseau considéré. Pour p inférieur à p_0^{dir}, d(p) sera inférieur à β, alors que pour p supérieur à la valeur seuil, d(p) sera infini. Cette transition discontinue n'est donc pas spécifique du réseau carré.

- Cas renforcé non-dirigé

Revenons maintenant au cas non-dirigé. L'inégalité que nous avions établie précédemment, $d(w,L,p) \leq d^{dir}(w,L,p)$, nous montre que, pour p inférieur à p_0^{dir}, sur le réseau carré incliné à $\pi/4$,

$$d(w,L,p) = 1 \qquad (4.1.32)$$

Au-delà de p_0^{dir}, le chemin doit revenir en arrière pour contourner les obstacles. Au voisinage de p_0^{dir}, nous avons un comportement du type suivant:

$$d(w,L,p) = 1+A\,(p-p_0^{dir})^x \qquad (4.1.33)$$

Suivant un raisonnement similaire à celui évoqué pour estimer ν^{dir}, nous pouvons estimer à un le nombre de pas supplémentaires effectués pour contourner les obstacles pour toute distance parcourue de l'ordre de la longueur de corrélation longitudinale, soit $x = \nu_{//}$. Ce résultat a été initialement suggéré par D.Dhar [9], et étudié sur un arbre de

Bethe (représentatif d'un amas de percolation au-delà de la dimension critique supérieure) par Barma [10]. L'étude numérique par matrice de transfert de Kantha et Yeomans [11] en deux dimensions confirme la relation $x = \nu_{//}$, puisque $x = 1.73$.

Finalement d(p) doit diverger au voisinage du seuil de percolation selon

$$d(p) \propto (p_0 - p)^{-y} \qquad (4.1.34)$$

Pour estimer y, il suffit de remarquer que la pondération est uniforme sur l'ensemble des liens accessibles. Au voisinage de p_0, cet ensemble forme un réseau au seuil de percolation. Or, nous savons qu'un chemin de longueur minimale, sur un amas de percolation, est un objet fractal de dimension D_{min}. Au voisinage du seuil, sur une longueur égale à la longueur de corrélation, nous aurons donc une pondération des chemins au moins égale à:

$$\mu(\mathcal{P}) \propto \xi^{D_{min}} \qquad (4.1.35)$$

Au-delà de la longueur de corrélation, le réseau forme un milieu homogène, et donc

$$\mu(\mathcal{P}) \propto (L/\xi)\, \xi^{D_{min}} \qquad (4.1.36)$$

ainsi

$$\begin{aligned} d(p) &\propto \xi^{D_{min}-1} \\ &\propto (p_0 - p)^{-\nu(D_{min}-1)} \end{aligned} \qquad (4.1.37)$$

Nous concluons donc $y = \nu(D_{min}-1) = 0.173 \pm 0.002$ à deux dimensions [12]. Il est intéressant de remarquer qu'une telle formule appliquée au cas de la percolation dirigée donne effectivement $y = 0$, soit une discontinuité, car $D_{min} = 1$. Cette relation a été exprimée pour la première fois par Ritzenberg et Cohen [13].

- Grand contraste

Nous avons, jusqu'à présent, considéré des situations extrèmes où le rapport des pondérations était infini. Il est plus fréquent de rencontrer des situations où un tel contraste de pondération est fini. Nous poserons donc

$$x_i = a \quad \text{avec une probabilité } p \qquad (4.1.38)$$
$$x_i = b \quad \text{avec une probabilité } 1\text{-}p$$

avec $a > b$.

Pour le cas dirigé sur réseau carré incliné à $\pi/4$, il est facile de voir que nous avons déjà résolu le problème. En effet, tous les chemins dirigés ayant une longueur identique, si nous soustrayons une quantité δ à tous les poids, nous diminuons $d^{dir}(p)$ de la même quantité δ. Nous pouvons également changer d'échelle en divisant tous les poids par une même quantité et ainsi diminuer $d^{dir}(p)$ d'un même facteur. Si nous soustrayons ainsi b aux x_i, et si nous divisons les poids résultant par (a-b), nous nous ramenons exactement au cas dilué traité précédemment:

$$d^{dir}(p,a,b) = b + (a-b)\, d^{dir}(p) \qquad (4.1.39)$$

où $d^{dir}(p)$ se rapporte au cas dilué. En particulier, nous déduisons que, au seuil,

$$d^{dir}(p,a,b) = b \qquad (4.1.40)$$

Le cas non-dirigé ne se prête pas au premier type de transformation (translation) car la longueur des chemins peut varier (dans le cas où $p > p_0^{dir}$). Cependant, au voisinage du seuil de percolation, nous pouvons obtenir une estimation de d, en calquant le raisonnement fait pour l'estimation de la conductivité d'un milieu

biphasique à fort contraste de propriétés (cf.Chap.2). Plaçons nous au seuil, p_0. Considérant dans un premier temps le problème dilué obtenu en négligeant b devant a, nous pouvons écrire

$$d(L) \propto a\, L^{-v/\nu} \qquad (4.1.41)$$

Si, au contraire, nous considérons que a est infini devant b, nous aurons un problème renforcé et alors

$$d(L) \propto b\, L^{y/\nu} \qquad (4.1.42)$$

Egalant ces deux estimations, nous obtenons une longueur de croisement $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} \propto (a/b)^{\nu/(v+y)} \qquad (4.1.43)$$

qui correspond à une échelle d'homogénéisation du milieu. Au delà de cette longueur, d est constant avec la taille du sytème et vaut :

$$d \propto (a^y\, b^v)^{1/(v+y)} \qquad (4.1.44)$$

soit, à deux dimensions,

$$d \propto a^{0.12}\, b^{0.88} \qquad (4.1.45)$$

A nouveau, appliquant l'équation (4.1.44) au cas des chemins dirigés (y=0), nous obtenons bien le résultat 4.1.40.

Pour conclure cette étude des propriétés critiques des chemins minimaux au voisinage d'un seuil de percolation, nous voyons que nous obtenons des comportements

non-triviaux, que l'on peut cependant approcher sans trop de difficultés. Malgré la simplicité des approches numériques en la matière, il faut noter le manque d'études publiées sur ce sujet. En particulier, la question de la valeur numérique précise de v, et de sa relation à l'exposant de transport s, mérite certainement plus d'attention. Nous allons maintenant aborder une question *a priori* plus simple mais de fait délicate: la situation de faible désordre (p proche de 1).

4.1.2 Comportements en régime dilué

Contrairement au cas précédent, où l'universalité des comportements critiques nous assure une validité des propriétés étudiées pour tous les réseaux de même dimensionalité, nous allons voir que le type de réseau choisi ici, peut sensiblement affecter le comportement de la pondération minimale lorsque p est loin d'un seuil de percolation. Commençons par un cas simple: celui du réseau carré dont les axes forment un angle de $\pi/4$ avec les bords du réseau.

- Réseau carré incliné à $\pi/4$

Dans le cas d'une faible concentration en liens de poids nul, $q = 1-p << 1$, les chemins minimaux seront presque toujours dirigés. Nous nous limiterons donc à cette situation sans justifier davantage cette hypothèse.

Pour un réseau et à une dilution q donnée, un chemin minimal de longueur L, passe par un certain nombre, N, de liens de poids nul. Par définition de d,

$$N = L(1-d) \qquad (4.1.46)$$

La distance typique entre deux liens de poids nul consécutifs sur le chemin sera *l*:

$$l = 1/(1\text{-}d) \qquad (4.1.47)$$

Tous les chemins dirigés qui passent par ces mêmes défauts seront des chemins minimaux (cf. Figure 4.6). Il existe donc un nombre important de ces chemins minimaux, et ceci résulte de la dégénérescence du réseau carré. L'ensemble de ces chemins couvre une surface S de l'ordre de

$$S = L(1\text{-}d)\, l^2 = L/(1\text{-}d) \qquad (4.1.48)$$

Notons qu'il est possible d'avoir des dégénerescences moins simples que celles montrées sur la fuigure 4.6. En particulier, deux chemins minimaux peuvent emprunter des liens de poids nuls différents. Nous aurion alors à superposer differents ensembles de chemins comme ceux schématisés sur la figure 4.6. Cependant ceci n'affecte pas l'argument que nous présentons ici.

Modifions maintenant le réseau en annulant le poids d'un lien choisi aléatoirement. Ce changement augmente q de $\delta q = 1/L^2$. Avec une probabilité $P = S/L^2 = 1/(L(1\text{-}d))$, le lien choisi appartiendra à la surface balayée par les chemins minimaux. Dans ce cas, la variation corrélative de d, $\delta(1\text{-}d)$, sera 1/L. Si, au contraire, le lien choisi est en dehors de la surface S, alors, la pondération d ne sera pas altérée. Donc, en valeurs moyennes,

$$\delta(1\text{-}d) = 1/\{L^2(1\text{-}d)\} \qquad (4.1.49)$$

ou

$$\delta(1\text{-}d)/\delta q = 1/(1\text{-}d) \qquad (4.1.50)$$

A la limite d'un réseau de taille infinie, nous pouvons interpréter cette équation comme une équation différentielle. L'intégration immédiate donne

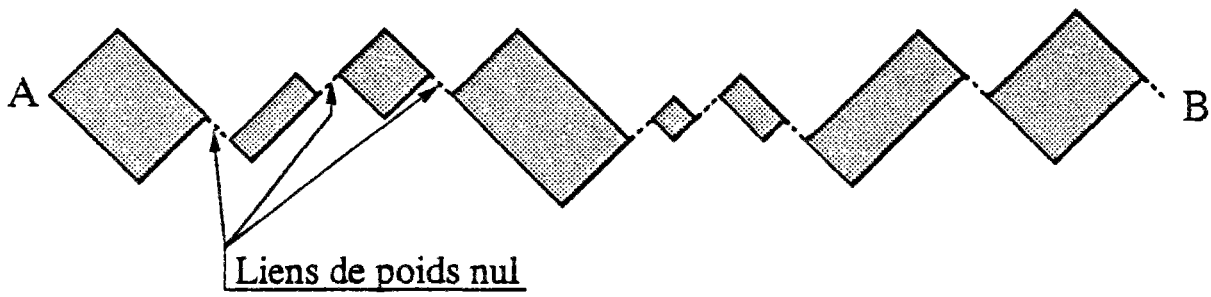


Figure 4.6 : Dans un réseau carré incliné à $\pi/4$ dilué, il existe un nombre très élevé de chemins qui ont la même pondération. Le support des chemins minimaux joignant A à B est représenté sur la figure de façon schématique. L'ensemble de ces chemins passe par un certain nombre de "défauts" (liens en pointillé) où la pondération est nulle. Entre ces défauts, les chemins adoptent une conformation quelconque à l'intérieur de rectangles dessinés en grisé. La grande dégénerescence de ces chemins implique une divergence de la dérivée de d(p) au voisinage de p = 1.

$$d = 1 - \sqrt{2q} \qquad (4.1.51)$$

La figure 4.7 montre d(w,p) obtenu pour une largeur w = 40, et une longueur de 10^5, par matrice de transfert. Nous avons également porté sur le même graphe la fonction obtenue ci-dessus. Nous voyons que l'accord est tout à fait satisfaisant jusqu'à des valeurs de q de l'ordre de 30%. La figure 4.8 montre un tracé bilogarithmique de (1-d) en fonction de q. Nous voyons que lorsque la taille du système augmente, ces courbes se rapprochent de la droite de pente 1/2 prévue.

Il est important de noter que cette variation rapide de d en fonction de p est liée à la dégénérescence des chemins minimaux, qui est progressivement levée par l'adjonction de liens de poids nul supplémentaires. Nous allons voir que ceci n'est pas une propriété générique de tous les réseaux. En particulier, pour le réseau carré dont les axes sont parallèles aux bords du réseau (cf. schéma B montré au début de la partie 4.1) , la situation est différente.

- Réseau carré droit

La figure 4.9 montre en effet que 1-d varie linéairement avec q au voisinage de q = 0. Peut-on estimer théoriquement la valeur de la pente à q = 0 ? Nous ne connaissons pas de réponse simple à cette question. Nous allons cependant reformuler le problème en des termes différents, en s'inspirant très largement du travail de Derrida et Vannimenus [1]. Ceci nous permettra de mieux décrire le processus et de comprendre que (1-d) est bien linéaire en q au voisinage de p = 1. D'autre part, cette nouvelle formulation nous sera utile pour faire le lien avec d'autres problèmes, comme la structure de fronts d'empilement, que nous étudierons plus loin.

Dans la partie qui suit, nous allons dans un premier temps reformuler le problème, puis, par une description approximative du profil construit, nous montrerons que l'on peut estimer la pente à l'origine dans notre problème de départ. Cette estimation

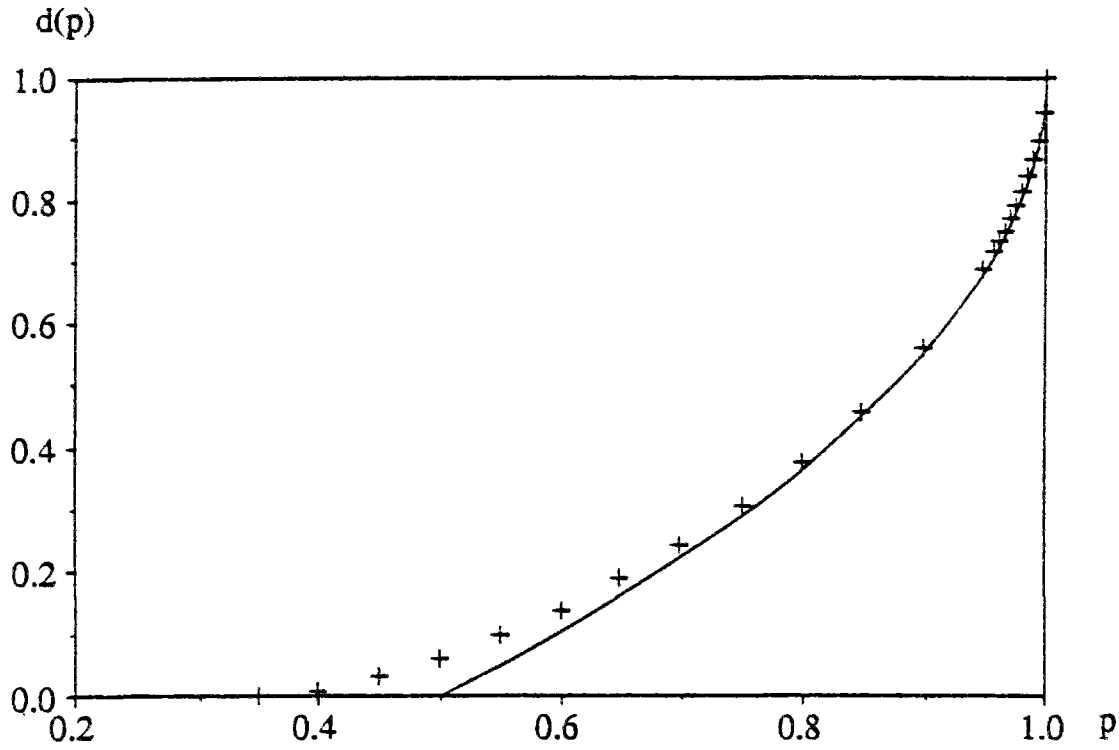


Figure 4.7 : Variation de d(w,p) en fonction de p pour un chemin minimal dirigé sur réseau carré incliné à $\pi/4$. Ces résultats ont été obtenus par simulation numérique par matrice de transfert pour une largeur de ruban de 40 (symboles +). Nous avons tracé sur la même figure la variation d(p) donnée par notre calcul (courbe pleine).

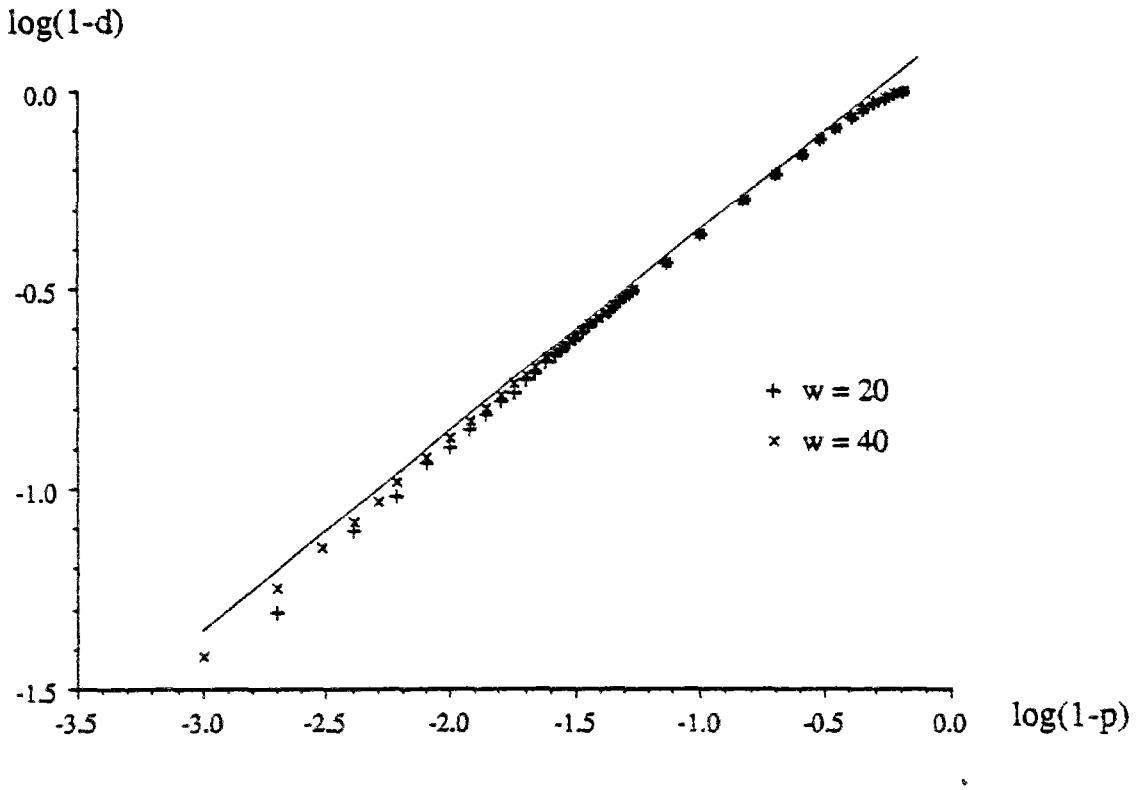


Figure 4.8 : Tracé similaire à la figure précédente en coordonnées bi-logarithmiques: log(1-d(w,p)) en fonction de log(1-p) pour deux largeurs de ruban (20 et 40). Les points calculés se rapprochent pour des grandes largeurs de ruban de la variation prévue montrée par une ligne droite de pente 1/2.

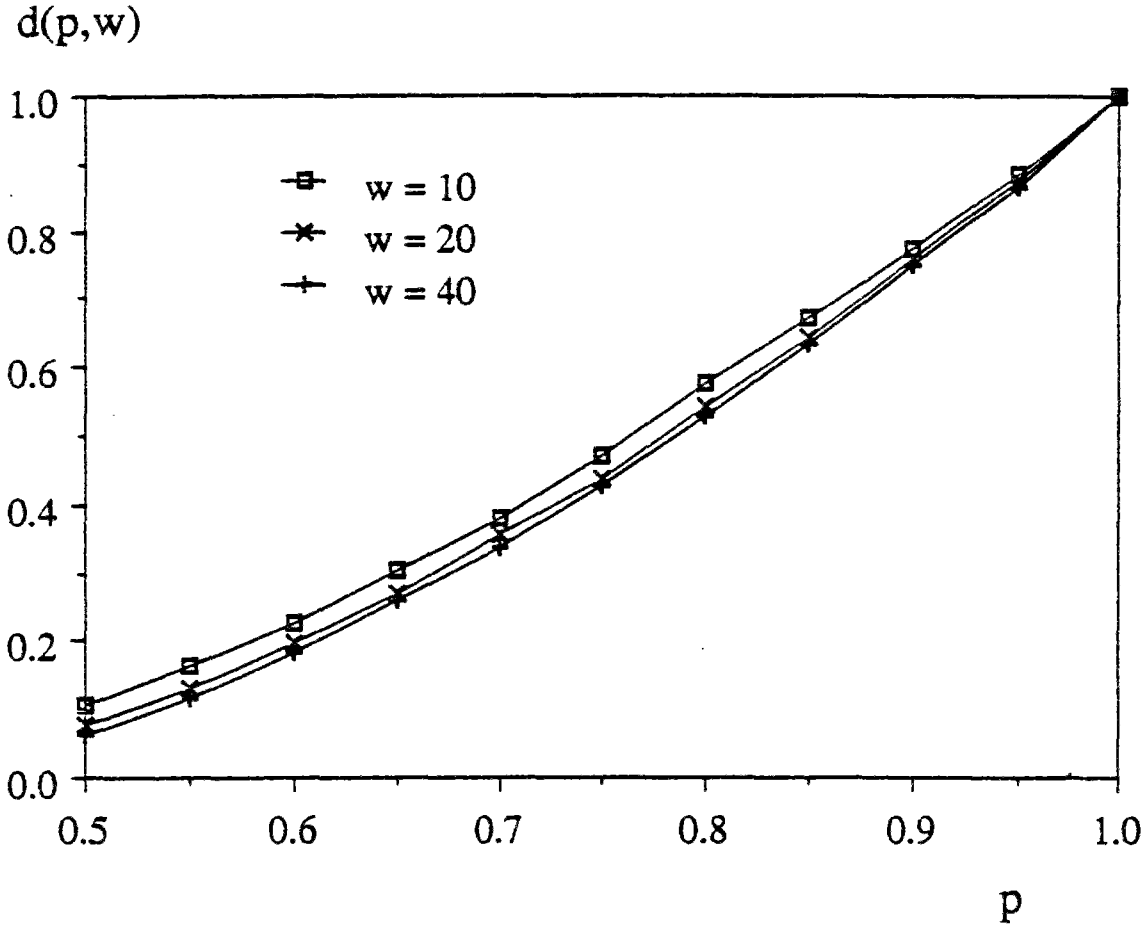


Figure 4.9 : Figure similaire à la figure 4.6, pour un réseau carré droit. Contrairement à ce dernier cas, nous voyons que le comportement au voisinage de p = 1 est linéaire. La pente à l'origine peut être approchée par un calcul qui met en jeu une reformulation du problème, (cf. texte) et qui a le mérite de mettre en lumière différentes analogies utiles pour ce problème.

est par construction approximative, mais cette approche peut simplement être affinée au degré souhaité.

Supposons qu'au bout d'une longueur de ruban égale à L, nous enregistrons, en fonction de la coordonnée i du site sur ce bord, la pondération z_i du chemin minimal qui relie ce site i au bord opposé. Comme chaque lien horizontal a un poids nul ou unité, pour tout site i, nous pouvons encadrer la différence de pondération par:

$$-1 \leq \delta_i = (z_{i+1} - z_i) \leq 1 \qquad (4.1.52)$$

Ainsi, la pente locale δ_i peut prendre trois valeurs: -1, 0, et 1. La figure 4.10 montre un profil typique de z_i en fonction de la côte i du site, ainsi que la dérivée, δ_i. Nous pouvons interpréter le champ dérivé comme une succession de "particules" A (+1), B (-1), et vide (0). Chaque site peut alors être occupé par, au plus, une espèce. L'évolution en fonction de la longueur du ruban peut être vue comme une dynamique de ce "gaz" unidimensionnel de particules. Nous nous intéressons à une faible valeur de q. Si tous les liens avaient une pondération unité (q = 0), les z_i seraient simplement incrémentés d'une unité à chaque longueur additionnelle. Les différences δ_i seraient donc inchangées. Il suffit donc de ne considérer que l'addition de liens de poids nul, de "défauts". Il existe deux types de liens, les longitudinaux et les transverses qui vont chacun avoir un effet différent. Pour un lien longitudinal, l'addition à un site i se traduit par les opérations suivantes:

Addition 1) Nous additionnons à la suite δ_j, la suite a_j telle que : $a_i = 1$ et $a_{i-1} = -1$ et les autres $a_j = 0$.

Filtre haut 2) Si un élément δ_j a une valeur égal à 2, nous retranchons 1 à δ_j et ajoutons 1 à δ_{j+1}. Nous recommençons cette étape jusqu'à ce que tous les δ_j soient inférieurs ou égaux à 1.

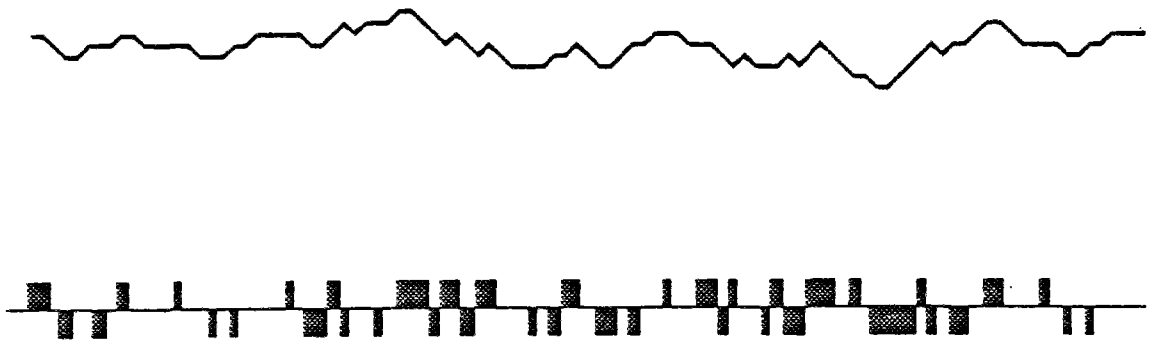


Figure 4.10 : La figure supérieure montre un profil typique de pondération z_i en fonction de la cote i du point d'arrivée du chemin. Le caractère important à remarquer ici est que la dérivée de ce profil ne peut prendre que trois valeurs: -1, 0, et 1. Cette dérivée est montrée en dessous du profil. Nous pouvons alors interpréter cette suite comme un "gaz" de particules unidimensionnel.

Filtre bas 3) Si un élément δ_j a une valeur égal à -2, nous ajoutons 1 à δ_j et retranchons 1 à δ_{j-1}. Nous recommençons cette étape jusqu'à ce que tous les δ_j soient supérieurs ou égaux à -1.

L'addition d'un lien de poids nul, transverse, entre les sites i et i+1, se traduit par les opérations suivantes:

1') Si $\delta_i = 0$, l'addition est sans effet.

2') Si $\delta_i = 1$, alors δ_i devient nul et δ_{i+1} est incrémenté de 1. A la suite de ceci, nous appliquons le "filtre haut" (étape 2 précédente)

3') Si $\delta_i = -1$, alors δ_i devient nul et δ_{i-1} est décrémenté de 1. A la suite , nous appliquons le "filtre bas" (étape 3 précédente)

Dans la limite de faible dilution, il suffit de choisir avec équiprobabilité l'addition d'un lien, soit transverse, soit longitudinal. Puis le site d'attache est choisi aléatoirement sur la largeur du ruban. Nous introduisons également par commodité de langage, le paramètre temps, t, qui est le nombre de liens longitudinaux ajouté au ruban. Partant d'un profil plat, nous constatons que dans un premier temps le profil acquiert une certaine "rugosité" (sur les propriétés de laquelle nous reviendrons), qui sature à un niveau d'équilibre. A ce moment là, les propriétés statistiques de la distribution des δ_i se stabilisent. Ainsi, le profil z_i se translate à "vitesse" constante, en fonction de la densité de liens longitudinaux ajoutées, t/w:

$$< z_i > = \alpha \, t/w \qquad (4.1.53)$$

α est ici plus grand que 1 de par l'effet d'entrainement du à la redistribution des particules dans les opérations de "filtrages" haut et bas. La figure 4.11 montre une telle évolution de $< z_i >w/t$ en fonction du temps, obtenue par simulation numérique en utilisant cette formulation, pour un système de largeur w = 1000 et de "temps" $t = 10^6$. La pente mesurée, α , vaut

$$\alpha = 2.90 \pm 0.02 \qquad (4.1.54)$$

en accord avec le travail de Derrida et Vannimenus : $\alpha = 2.92 \pm 0.02$ [1]. Le retour au problème original se fait sans difficultés: le temps t correspond à une longueur L de ruban telle que

$$t = qw\,L \qquad (4.1.55)$$

et la vitesse d'avancée α est simplement reliée à d par :

$$(1-d) = < z_i > / L \qquad (4.1.56)$$

soit

$$d = 1 - \alpha\, q \qquad (4.1.57)$$

La valeur rapportée de α est donc exactement la pente à l'origine que nous cherchions. Il est ainsi démontré que d est linéaire en q, pour q voisin de 0. La valeur numérique de la pente à p = 1 est donc de l'ordre de 2.9.

Il est apparent, de par la formulation que nous avons proposée, que cette pente est reliée à la taille typique des vallées du profil z_i (cf. Fig.4.10). A défaut de proposer un calcul direct de α, nous allons montrer que cette pente p peut être estimée à partir d'une description de la statistique des suites δ_i.

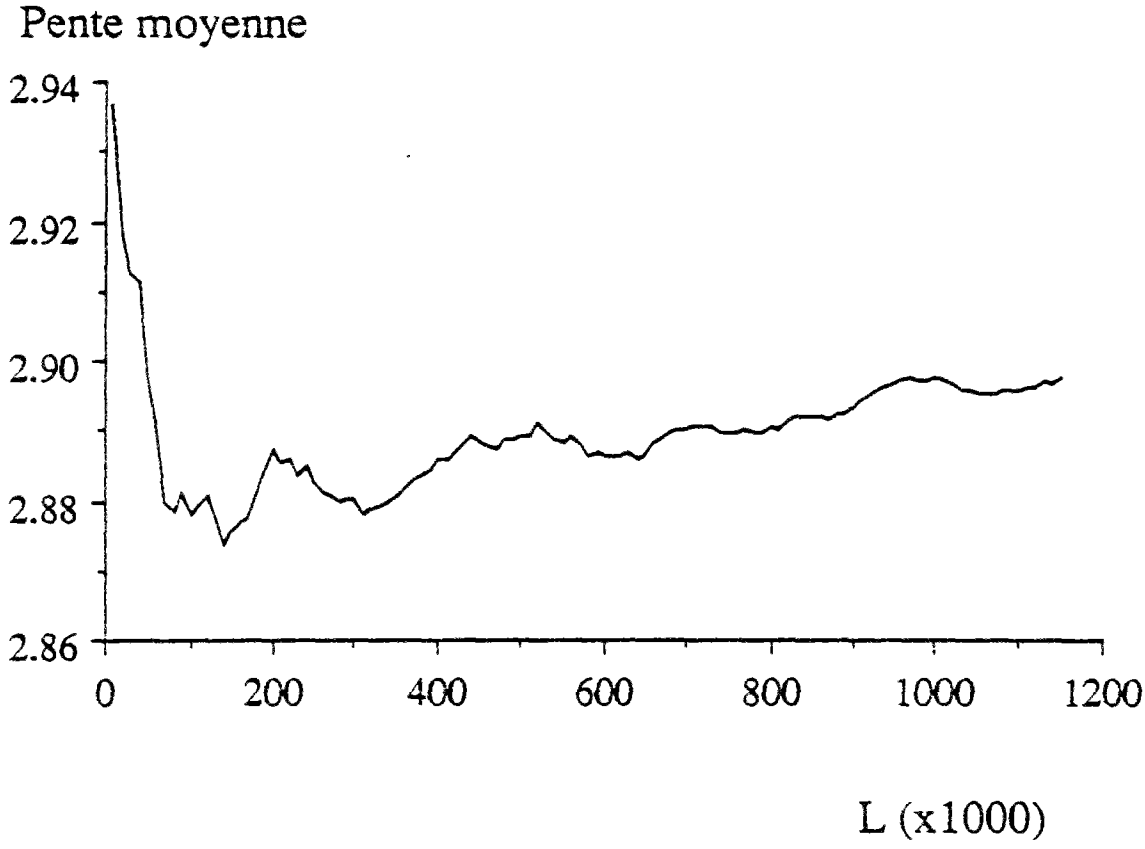


Figure 4.11 : Evolution de la vitesse moyenne de propagation du front pour un système de largeur 1000, enregistré sur une durée $t = 10^6$. Cette vitesse, est directement reliée à la pente à l'origine de la fonction d(p) montrée sur la figure 4.9.

A partir d'une suite, δ_i, nous pouvons analyser la distribution en taille, s, d'amas de particules de type A, ou de type B ou encore de sites vacants. La figure 4.12 montre ces trois distributions dans un diagramme semi-logarithmique. Nous observons qu'aux fluctuations statistiques près, ces distributions se mettent sous la forme :

$$n_A(s) = K_A\, a_A^{\,s} \qquad (4.1.58)$$
$$n_B(s) = n_A(s)$$

où $a_A = 0.37$, et une forme similaire pour les sites vacants

$$n_0(s) = K_0\, a_0^{\,s} \qquad (4.1.59)$$

où $a_0 = 0.40$.

Partant de cette observation, il est tentant de décrire la suite comme un processus de Markov, à savoir en calculant une probabilité de transition $P(\delta_i, \delta_{i+1})$ en supposant que la valeur de δ_{i+1} ne dépend que de δ_i. Nous verrons dans la suite que cette description est approximative, et qu'elle fait partie d'une famille de modèles où l'on décrit de mieux en mieux le processus réel en prenant en compte des corrélations entre éléments consécutifs à différents ordres.

Il existe ainsi un premier modèle où nous nous contentons d'une description sans corrélations: Alors il suffit de se spécifier les probabilités de présence, $P(\delta_i)$, des trois espèces sans considérer leur voisinage. A l'ordre deux, nous prenons en compte les paires de sites. Puis à l'ordre n, les n-uplets de sites. Nous n'allons développer ici que les deux premiers ordres. Pour les comparer aux résultats de la simulation numérique, nous allons donc commencer par donner le lien entre la distribution des statistiques d'amas observés et la valeur du paramètre α qui nous interesse. Puis, nous developperons le calcul complet aux deux ordres de l'approximation.

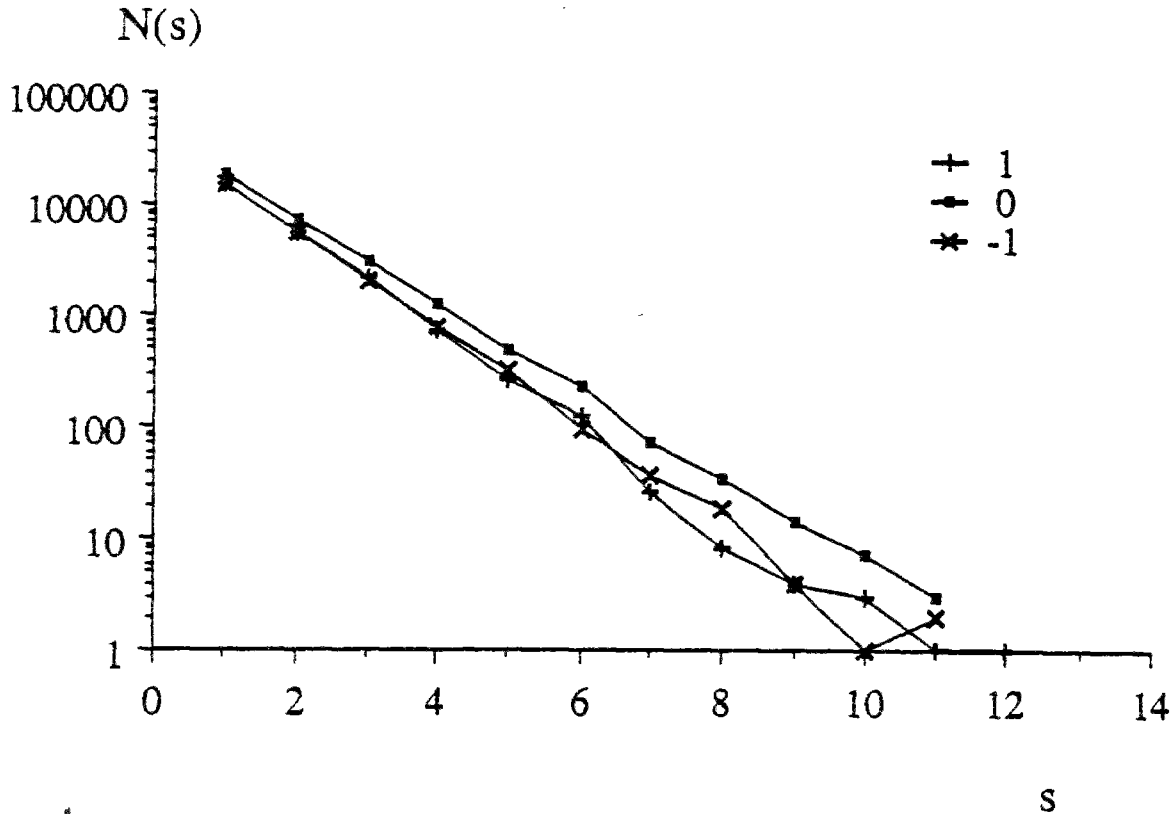


Figure 4.12 : Statistique des "amas" de particules (-1, 0, et 1) le long du profil, obtenue par simulation numérique. Nous constatons que ces distributions sont proches de distributions exponentielles. Ceci suggère de modéliser le profil par un processus de Markov.

En calculant les fréquences relatives de paires (δ_i, δ_{i+1}) consécutives, par simulations numériques, nous obtenons ainsi les probabilités:

δ_{i+1}= δ_i =	A	0	B
A	0.37	0.38	0.25
0	0.31	0.40	0.29
B	0.22	0.42	0.37

Nous pouvons vérifier maintenant simplement que la densité de particules de type A ou B est compatible avec une telle matrice de transition. En effet, si la densité de particules de type A est notée d_A, nous pouvons écrire que le vecteur de composante (d_A, 1-2d_A, d_A) est un vecteur propre de valeur propre 1 de la transposée de la matrice M écrite dans le tableau ci-dessus. On calcule alors que d_A = 0.30, valeur qui concorde parfaitement avec la valeur obtenue par simulation directe : d_A = 0.30.

Connaissant maintenant cette matrice, nous disposons de suffisament d'éléments pour calculer la pente α :

Considérons, en premier lieu, l'addition d'un lien longitudinal. L'étape 1 donne, dans tous les cas, une augmentation d'une unité de la somme $S = \Sigma_i z_i$. Les étapes 2 et 3 sont similaires, il suffit donc d'en considérer une, par exemple la deuxième. Avec une probabilité (1-d_A) (si δ_i vaut 0 ou -1), cette étape ne jouera aucun rôle. Avec une probabilité d_A, il faudra recommencer l'étape 1 mais sur le site voisin et donc augmenter S à nouveau d'une unité. Une nouvelle fois, il faudra appliquer le filtre haut (étape 2) qui sera sans effet avec une probabilité (1-a_A). La probabilité de refaire un cycle, sachant maintenant que le site initialement choisi était tel que δ_i=1, sera a_A. Ainsi la probabilité, p_n, d'augmenter S de n unités, lors de l'itération de l'étape 2, jusqu'à saturation, sera:

$$p_n = d_A \, a_A^{n-1} \, (1-a_A) \qquad (4.1.60)$$

soit en valeur moyenne, S augmentera de $<\Delta S>$, grâce à l'étape 2:

$$<\Delta S> = \Sigma_n \; n \, p_n \qquad (4.1.61)$$
$$= d_A / (1-a_A)$$

Doublant cette quantité pour l'étape 3, et ajoutant 1 pour l'étape 1, nous obtenons finalement pour l'addition d'un lien longitudinal:

$$<\Delta S>_l = 1 + 2d_A / (1-a_A) \qquad (4.1.62)$$

En ce qui concerne les liens transversaux, le calcul est similaire, et nous obtenons alors:

$$<\Delta S>_t = 2d_A / (1-a_A) \qquad (4.1.63)$$

Combinant maintenant ces deux processus, nous pouvons obtenir l'incrément $<\Delta S>$ par unité de "temps", en se souvenant que l'unité de temps correspond à l'addition d'un lien longitudinal,

$$<\Delta S> = <\Delta S>_l + <\Delta S>_t \, (1/4 + 2/8 + 3/16 + ... + n2^{-n-1} + ...)$$
$$= <\Delta S>_l + <\Delta S>_t \qquad (4.1.64)$$

d'où

$$<\Delta S> = 1 + 4d_A / (1-a_A) \qquad (4.1.65)$$

Cette dernière valeur est exactement α. Numériquement, en utilisant les valeurs de d_A et a_A précédemment citées, nous avons $\alpha = 2.90$, en accord avec les estimations

précédentes. L'ensemble des données présentées ici forment donc un tout cohérent, mais au prix de la détermination "numérique" de la matrice de probabilité de transition. Nous avons ainsi réussi à déterminer un paramètre, mais en en introduisant 9 nouveaux! Nous allons voir que cependant, cette matrice peut être obtenue directement sans utiliser de paramètres issus de simulations Monte-Carlo:

Au premier ordre, nous supposerons que la probabilité de trouver une "pente" δ_i est indépendante de la valeur des variables δ aux sites voisins. Dans ce cas, le processus est décrit par trois probabilités. Compte tenu de la symétrie du problème, et de la normalisation des probabilités, il suffit de spécifier un paramètre pour décrire complètement le processus. Notons donc c la probabilité de trouver $\delta = 1$. Pour $\delta = 0$ et -1 respectivement, ces probabilités seront 1-2c et c. Le calcul de la valeur de c sous ces hypothèses est, comme précédemment, dicté par la stabilité des densités. Nous l'explicitons ici en détail. Lors de l'addition d'un lien longitudinal, la prise en compte de toutes les configurations possibles, affectées de leurs probabilités respectives, donne une variation moyenne de c égale à

$$\delta c = (1-3c)/(1-c) \qquad (4.1.66)$$

Si seule cette addition était prise en compte, c vaudrait donc à l'équilibre une valeur telle que $\delta c = 0$, soit $c = 1/3$. Pour un lien transverse, la variation moyenne de c vaut

$$\delta c = -2c^2/(1-c) \qquad (4.1.67)$$

combinant ces deux variations, la stabilité du processus, $\delta c = 0$, donne

$$c = (\sqrt{17} - 3)/4 = 0.281 \qquad (4.1.68)$$

à comparer à la densité précédemment obtenue $d_A = 0.29$. La vitesse d'avancée α sera ainsi calculée

$$\alpha = 1+4c/(1-c)$$
$$= (1+\sqrt{17})/2 = 2.561 \qquad (4.1.69)$$

Nous reprenons maintenant le calcul similaire au second ordre en prenant en compte les distributions de paires. Comme ce cas est sensiblement plus complexe que précédemment, nous ne reproduirons pas tous les calculs détaillés, mais simplement la démarche à suivre. La matrice de transition peut être calculée analytiquement en écrivant sa stabilité vis à vis des additions de liens longitudinaux et transverses. En effet, raisonnant sur la densité de probabilité des paires (δ_i, δ_{i+1}), il est fastidieux, mais facile, de décrire les variations de ces densités en fonction de chaque configuration, affectée de sa probabilité. Dans l'espace à neuf dimensions des densités de chaque paire, nous pouvons ainsi construire une application qui comporte un point fixe stable: à savoir les probabilités de chaque paire en régime stationnaire. Dans la pratique, compte tenu du fait que cette transformation est non-linéaire, il est plus simple de calculer numériquement ce point fixe, avec les règles de récurence exactes. Ce calcul numérique, au contraire de ceux déjà évoqués, est purement déterministe. Il donne la matrice de transition suivante:

$\delta_{i+1}=$ $\delta_i =$	A	0	B
A	0.349	0.396	0.254
0	0.302	0.415	0.283
B	0.228	0.423	0.349

avec une densité $d_A = 0.2940$. L'accord entre ce calcul et les simulations Monte-Carlo rapportées précédemment est satisfaisant. Seule la valeur de a_A est un peu faible. Avec ces estimations, nous calculons, en utilisant la formule (4.1.65) une valeur de α égale à:

$$\alpha = 2.8060 \qquad (4.1.70)$$

soit environ 4% en dessous de la valeur directement mesurée, mais plus proche de cette valeur que l'estimation d'ordre 1 calculée précédemment, $\alpha = 2.561$. L'origine des différences observées entre le calcul exact et les simulations tient au caractère approximatif de la description de la conformation du profil par un processus stochastique Markovien. Il est certain qu'existent des corrélations à plus longues portées que le plus proche voisin, ce qui n'est pas pris en compte dans notre description. Nous pouvons nous convaincre de l'approximation réalisée, en imaginant une série infinie de calculs approchés. Nous pouvons ainsi approcher de plus en plus finement le calcul en prenant en compte les probabilités de triplets de points, puis de quadruplets, mais le calcul devient rapidement fastidieux!

Nous avons vu que la dépendance de d en fonction de p était affine au voisinage de p=1. Pourquoi n'est-ce plus vrai lorsque p est différent de 1? La raison essentielle est que les deux opérations d'addition de liens, soit transverses, soit longitudinaux, ne commutent pas. Il est donc fondamental de savoir dans quel ordre ces opérations sont effectuées. Or, si dans la limite de p proche de 1, ces additions arrivent dans un ordre quelconque, ce n'est plus le cas lorsque la densité de liens de poids nul augmente. Il y aura alors des "rafales" de liens longitudinaux, puis de liens transverses alternativement. De plus, dans chaque rafale, il est impossible de trouver deux liens de poids nul attachés au même site. Il va ainsi se créer des corrélations qui disparaissent dans la limite que nous venons d'étudier.

Nous pouvons percevoir plus nettement le rôle distinct de l'addition des liens dans les deux orientations possibles, en considérant le cas anisotrope, où tous les liens transverses sont de poids unité. Dans ce cas, nous pouvons recommencer les mêmes calculs que précédemment, et montrer que la valeur du paramètre α est sensiblement modifiée.

Au premier ordre, nous obtenons (cf. 4.1.69) une densité $d_A = 1/3$, et donc une vitesse d'avancée, α égale à

$$\alpha = 1+2c/(1-c) = 2 \qquad (4.1.71)$$

Au second ordre nous pouvons obtenir comme point fixe de la matrice de transition:

$\delta_{i+1}=$ $\delta_i =$	A	0	B
A	0.433	0.283	0.283
0	0.383	0.283	0.333
B	0.241	0.326	0.433

et comme densité, $d_A = 0.3508$. Nous pouvons alors également calculer la pente de la relation d fonction de p, pour p proche de l'unité:

$$\alpha = 1+2d_A/(1-a_A) \qquad (4.1.72)$$
$$= 2.2369$$

Ces valeurs sont en excellent accord avec les estimations que nous obtenons par simulations Monte-Carlo directes: $a_A = 0.44$, $d_A = 0.35$ et $\alpha = 2.25$.

D'un point de vue très général, il est intéressant de remarquer que dans beaucoup de situations, la limite d'une faible densité de défauts est généralement source de simplifications. Nous pouvons souvent négliger les intéractions entre défauts et ainsi leur influence sur les propriétés globales du milieu devient additive. Dans un tel cas, il suffit alors de connaître la réponse du système à un seul défaut pour en déduire le comportement pour une faible densité.

Dans notre problème de chemin minimal, ceci n'est pas vrai : La portée des interactions est infinie, mais surtout ces interactions ne décroissent pas avec la distance. Cela impose donc de considérer le chemin comme une structure globale, et non pas comme une suite de liaisons entre défauts. L'homogénéisation ne peut pas s'appliquer, comme souligné par Derrida et Vannimenus [1]. L'exception à cette règle à été vue précédemment dans le cas du réseau incliné à $\pi/4$, où la dégénerescence des chemins entres défauts limite en quelque sorte la portée des interactions, et rend possible un calcul direct avec une précision tout à fait satisfaisante sans grands efforts.

Suivant une suggestion de Vannimenus, il serait extrèmement intéressant de suivre l'importance de la notion de minimum global, en passant progressivement à une optimisation locale (i.e. suivant un environnement de taille décroissante). En particulier le recouvrement entre différents chemins dans ces deux situations est une notion clé.

Nous sommes loin d'avoir épuisé la richesse des chemins minimaux sur réseaux dilués. Citons par exemple le problème du nombre de chemins dirigés sur un milieu dilué, étudié par Nadal et Vannimenus [14], que nous n'aborderons pas.

4.1.3 Distribution continue "large"

Jusqu'à présent, nous n'avons envisagé que le cas d'une distribution bimodale, les poids valant 0 ou 1 dans le cas dilué, ou bien 1 et l'infini dans le cas renforcé, ou encore deux valeurs finies mais très différentes l'une de l'autre dans le cas d'un grand contraste. Nous allons maintenant aborder le cas des distributions continues.

Nous allons voir, en particulier, qu'il existe deux régimes, l'un de fort désordre et l'autre de faible désordre. Le premier régime est exactement un cas d'application de la percolation. Le second, bien que présentant des analogies formelles très proches de la percolation, appartient à une classe d'universalité différente. Voyons tout d'abord le cas d'un fort désordre.

Nous raisonnons toujours sur le cas d'un réseau, sur les liens duquel nous assignons des nombres aléatoires, x_i. Ces poids sont maintenant choisi selon une distribution log-uniforme, i.e., nous tirons des nombres aléatoires, z_i, uniformément distribués sur l'intervalle [0,1] et nous attribuons à x_i la valeur $e^{\lambda z_i}$, où λ est un paramètre fixé. La loi de distribution de x, f(x), est alors simplement

$$f(x)\,dx = dx\,/(\lambda x) \qquad (4.1.73)$$

Plus généralement, partant d'une distribution donnée quelconque, g(z) sur les variables z, nous associons un poids $x=e^{\lambda z}$. Alors,

$$f(x)\,dx= g(\log(x)/\lambda)/(\lambda x)\,dx \qquad (4.1.74)$$

Nous allons nous intéresser ici à la limite du problème lorsque λ tend vers l'infini, i.e. lorsque la distribution des poids est très large.

Suivons maintenant un argument initialement introduit par Ambegaokar, Halperin et Langer [15] dans le cadre de la conduction électrique de milieux hétérogènes à distribution très large (par exemple log-uniforme) de conductivité locale. Cet argument a été utilisé dans différents contextes, (cf. références Charlaix et coll. [16], Tyč et Halperin [17], Le Doussal [18],...). Nous en donnons ici une application différente, bien que très voisine de son cadre original. Nous suivrons pour cela la présentation donnée

dans l'article de Tyč et Halperin [17]. Cela va nous permettre d'établir le lien avec les problèmes de percolation évoqués ci-dessus.

Partant d'un réseau où les valeurs des poids x sont fixés, nous construisons un second réseau, en fonction d'un paramètre X, où nous donnons un poids infini aux liens dont le poids était initialement supérieur à X. Les autres liens gardant leur pondération x. En fonction de ce X, nous pouvons construire la loi de variation de la pondération des chemins minimaux d(X) dans le second réseau. Lorsque X est tel que la proportion de liens de poids fini est inférieur au seuil de percolation (dirigée ou non-dirigée selon le type de chemin considéré), alors la pondération des chemins minimaux est infinie. Nous introduisons donc X_c, tel que:

$$p_c = \int_0^{x_c} f(x)\, dx \qquad (4.1.75)$$

$\log(X_c)$ est proportionnel à λ, comme nous le voyons par un simple changement de variable, en introduisant z_c:

$$p_c = \int_0^{z_c} g(z)\, dz \qquad (4.1.76)$$

alors

$$X_c = e^{\lambda z_c} \qquad (4.1.77)$$

Nous supposerons dans la suite que $g(z_c)$ est fini, non-nul.

Au-delà de X_c, d(X) devient fini et converge, lorsque X tend vers l'infini, vers la valeur de la pondération du chemin minimal du milieu original, d. Lorsque la distribution des poids locaux est très large, la convergence sera extrèmement rapide et l'on s'attend à obtenir un bon ordre de grandeur de d au voisinage immédiat de X_c, par l'estimation de d(X). En fait ce n'est pas directement d(X) que l'on va estimer mais plutôt un majorant de ce nombre. En effet, nous allons changer tous les poids, x_i, finis par la valeur maximale possible, X, ce qui augmentera encore l'estimation de d(X) (cf.

Figure 4.13). Dans ce cadre, nous sommes exactement dans la situation d'une distribution bimodale (cas renforcé) au voisinage du seuil de percolation. Nous connaissons donc la loi de variation critique de la pondération des chemins minimaux :

$$d \leq d(X) \leq d'(X) = A\, X\, (p(X)-p_c)^{-y} \qquad (4.1.78)$$

où A est une constante et y l'exposant critique introduit dans la discussion précédente sur le régime critique du problème renforcé. La Figure 4.13 montre une représentation schématique des trois membres de cette inégalité. d(X) est la courbe en trait plein située à droite de $X=X_c$. Le membre de droite, d'(X), de l'inégalité (4.1.78) est représentée en trait pointillée. Cette dernière courbe n'est pas monotone. Nous constatons, en effet, qu'elle décroît au voisinage immédiat de X_c puis qu'elle croît à nouveau. La première décroissance est due au terme singulier $(p(X)-p_c)^{-y}$ alors que la croissance ultérieure provient de la croissance de X. L'inégalité (4.1.78) étant valable pour toutes valeurs de X, nous pouvons donc optimiser la borne supérieure en nous plaçant au minimum de d'(X). Pour z proche de z_c, nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned} z &= z_c + \delta z \qquad (4.1.79)\\ p &= p_c + g(z_c)\,\delta z + \mathcal{O}(\delta z^2)\\ X &= X_c\,\{1 + \lambda\,\delta z\} + \mathcal{O}(\delta z^2) \end{aligned}$$

Le minimum de d'(X) est atteint pour

$$\delta z = y/(g(z_c)-y)\ \lambda^{-1} \qquad (4.1.80)$$

On calcule aisément que lorsque λ tend vers l'infini, X est de l'ordre de:

$$X = X_c\,\{g(z_c)/(g(z_c)-y)\} \qquad (4.1.81)$$

δz converge bien vers zéro lorsque λ tend vers l'infini, ce qui justifie le développement limité utilisé. d'(X) vaut alors d_+

$$d_+ = A' X_c \lambda^y \qquad (4.1.82)$$

où A' est une nouvelle constante (qui inclut $g(z_c)$).

Nous pouvons refaire la construction précédente en nous rapprochant du cas dilué, en suivant l'approche de Charlaix et coll. [16]. Nous remplaçons tous les poids x_i inférieur à X, par un poids nul, et conservons les autres. Nous obtenons ainsi en fonction de X, une pondération de chemins minimaux telle que représentée schématiquement sur la figure 4.13, par la courbe en trait plein pour x inférieur à X_c. Nous minorons encore cette fonction, en remplaçant toutes les pondérations non-nulles, par leur valeur minimales X. La variation de la pondération alors estimé est d"(X), représenté sur la figure 4.13 en trait pointillé. Il s'agit alors d'un problème dilué, à distribution bi-modale. Nous allons encore nous intéresser au voisinage du seuil de percolation, car il s'agit comme nous allons le montrer du point pertinent dans la limite où λ tend vers l'infini.

$$d(\lambda) \geq d"(X) = B X (p_c - p(X))^v \qquad (4.1.83)$$

où v est l'exposant critique introduit précédemment. Un calcul tout à fait similaire à celui qui vient d'être présenté, donne le maximum de d"(X), d_-:

$$d_- = B' X_c \lambda^{-v} \qquad (4.1.84)$$

Nous obtenons donc ainsi un encadrement de d, (Eqs. 4.1.82 et 4.1.84) qui montre que d est donnée sensiblement par la valeur de la coupure X qui correspond au seuil de

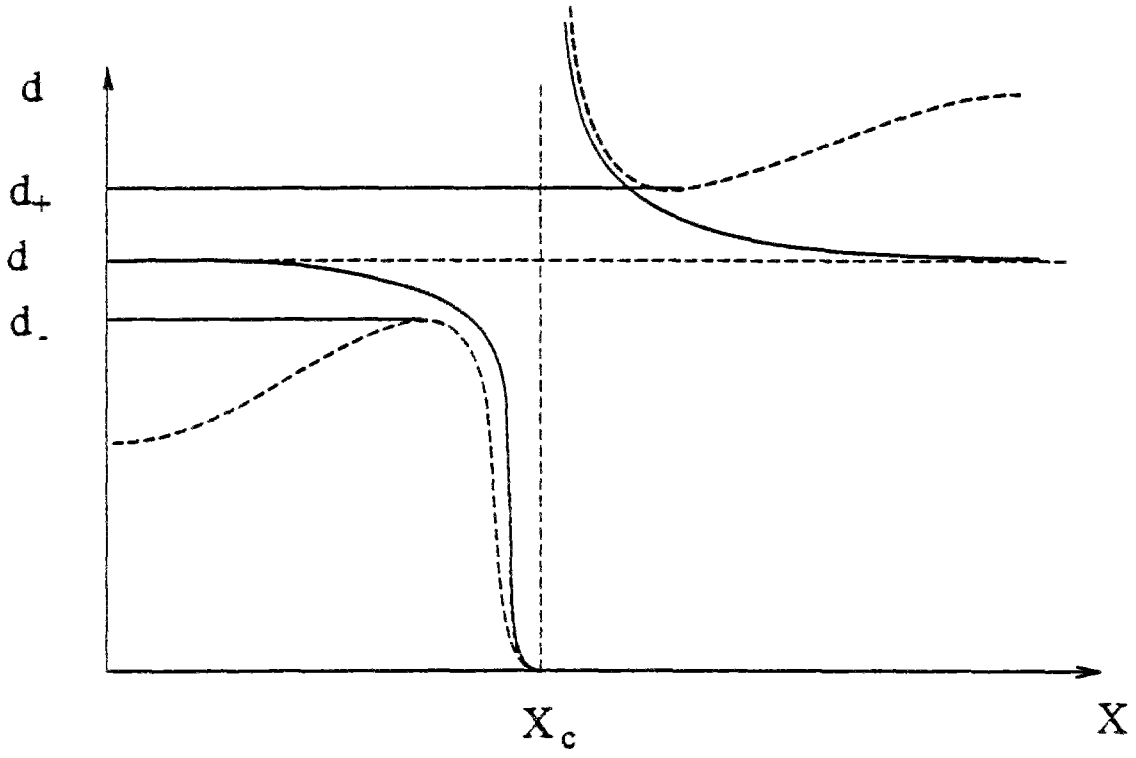


Figure 4.13 : Illustration schématique de la construction faite pour obtenir un encadrement de d pour une distribution exponentiellement large. Une borne supérieure de d, d_+, est obtenue en donnant un poids infini à tous les liens de pondération supérieure à X (courbe pleine pour $X>X_c$) puis en donnant un poids X aux autres liens (courbe pointillée $X>X_c$). Cette construction donne une valeur de d'(X) qui atteint un minimum d_+. La construction symétrique est illustrée pour $X<X_c$ sur le même graphe.

percolation. Cette valeur est assortie d'une dépendance en λ qui est encadrée par deux lois de puissance d'exposant respectifs (-v) et (y). Ceci suggère une loi du type:

$$d(\lambda) \propto X_c \lambda^{-w} \qquad (4.1.85)$$

Nous avons testé ces résultats par simulation numérique par matrice de transfert pour le cas dirigé. Les valeurs de λ considérées vont de 1 à 5, (soit des distribution de nombres aléatoires compris entre 1 et 10 dans le premier cas et entre 1 et 10^5 dans le dernier cas). La largeur des rubans étudiés varie de 2 à 50, et leur longueur est fixée à 10^5. La figure 4.14 montre la variation de $d(\lambda,w)/X_c$ en fonction de l'inverse de la largeur de bande, w. Nous voyons que cette quantité converge vers une constante pour une valeur de λ fixée, lorsque la largeur du réseau tends vers l'infini. Cette valeur asymptotique depend cependant de λ, en accord avec le résultat établi ci dessus. La figure 4.15 montre la valeur asymptotique en fonction de λ. L'accord avec une loi de puissance pour grand λ est satisfaisant. L'exposant w mesuré

$$w = 1.53 \pm 0.05 \qquad (4.1.86)$$

est bien encadré par les bornes données ci-dessus: $0 \leq w \leq 1.73$

Il est important de noter une similitude et une différence essentielle avec le cas du transport électrique où ce type d'approche a été initialement introduit. D'une part, la forme globale du résultat pour la conductivité en toute dimension d'espace [17, 18], est analogue à la loi obtenue pour d (Eq. 4.1.85). Cette correspondance est cependant simplement formelle. En effet, à deux dimension, pour le problème de la conduction électrique, il est possible [17] de montrer par dualité que l'exposant de λ, w, est nul, à la différence de notre situation. D'autre part, nous avons majoré et minoré d(X) de façon très grossière par la limite supérieure ou inférieure de la distribution, alors que dans le cas de la conduction, il est possible de raffiner l'argumentation en utilisant une moyenne

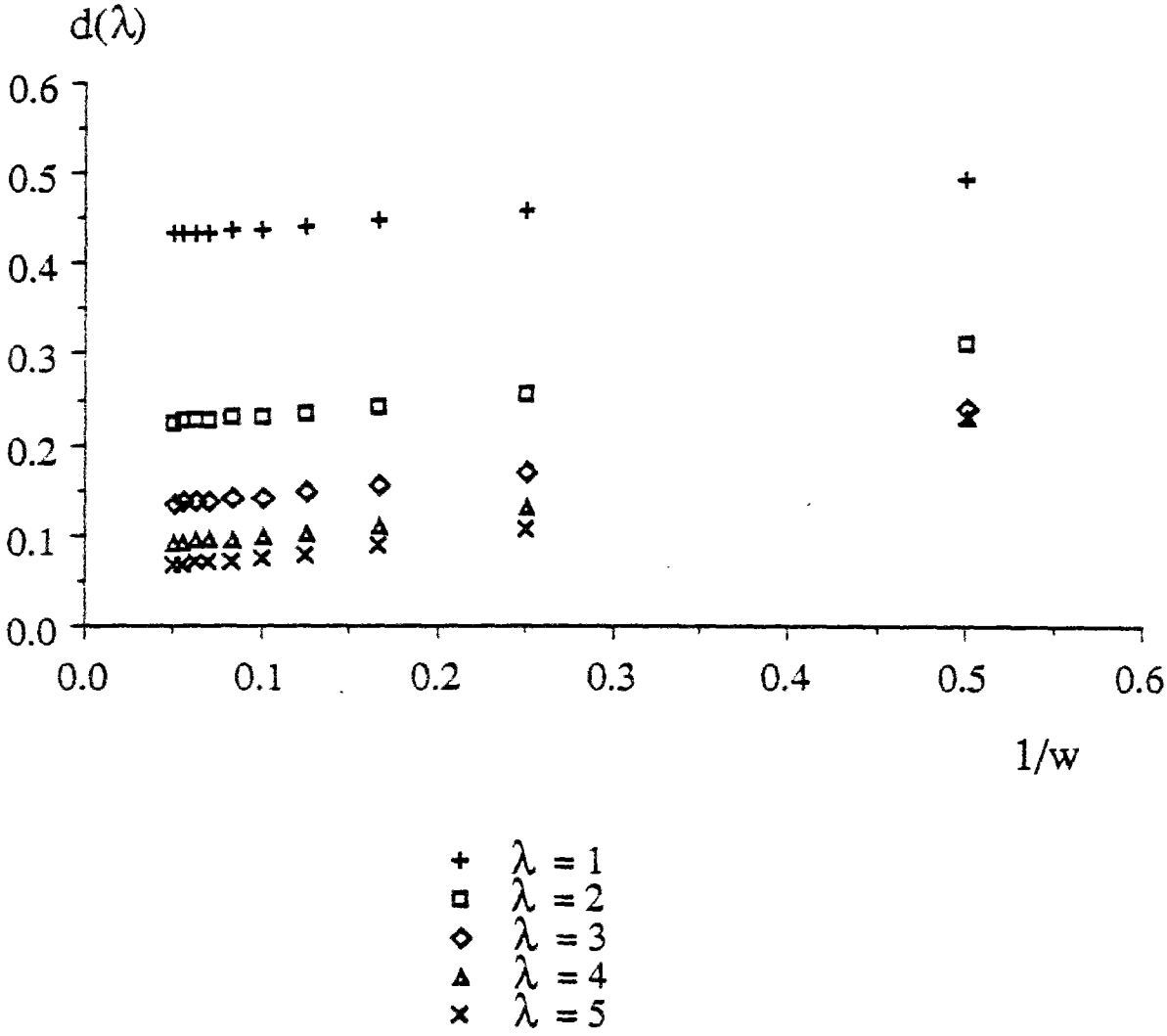


Figure 4.14 : Rapport $d(\lambda)/X_c$ pour différente valeur du paramétre λ (cf texte), en fonction de l'inverse de la largeur du ruban, w, sur lequel d est estimé pour des chemins minimaux dirigés. Ces rapports convergent vers une valeur finie qui dépend de λ.

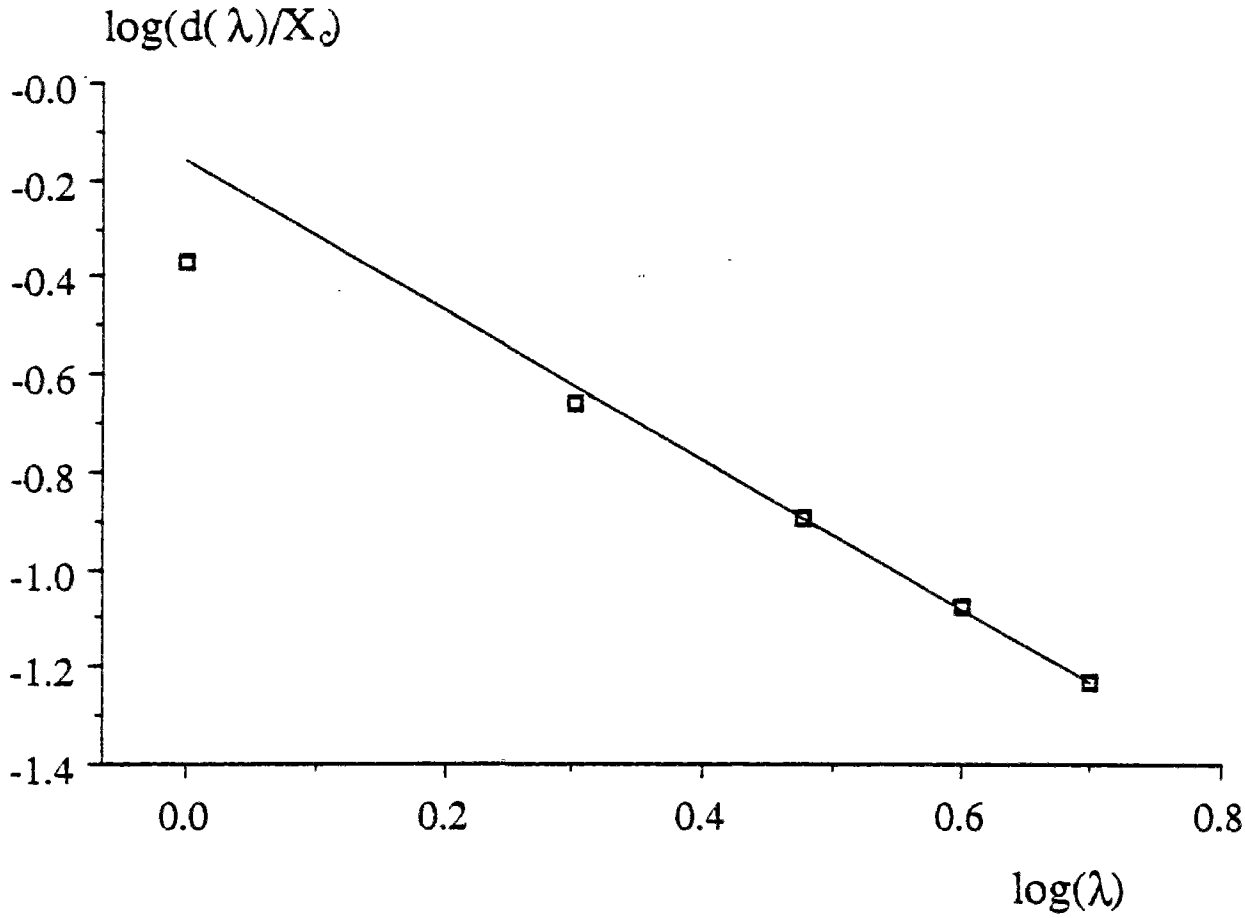


Figure 4.15 : Evolution de la valeur asymptotique d(λ) pour un système de taille infinie en fonction de λ. Les valeurs asymptotiques sont estimées à partir de la figure précédente. d(λ) suit une loi de puissance en λ dont l'exposant est encadré par deux bornes issues d'un modèle de percolation.

arithmétique ou géométrique pour l'estimation des bornes. Dans notre problème, il n'existe pas d'analogue de ces moyennes qui permettraient d'obtenir un encadrement plus strict sur w.

4.1.4 Lien avec la percolation

Nous venons de considérer le cas d'une distribution continue de pondérations x_i et nous avons montré que, dans ce cas, nous pouvions relier ce problème à un problème de percolation. L'idée principale de cette correspondance vient de la propriété suivante. Lorsque la distribution est exponentiellement large, seule la pondération maximale le long du chemin minimum compte. Nous allons revoir cette propriété en comparant la formulation du problème de chemin minimum à celle de la percolation.

Nous avons vu au chapitre 2, une façon simple d'exprimer le seuil de percolation effectif d'un réseau. Rappelons brièvement l'argument [19] : Nous construisons un réseau en attribuant à chaque lien un nombre aléatoire, x_i, équidistribué sur l'intervalle [0,1]. Nous considérons comme présents tous les liens dont le nombre aléatoire x_i est inférieur à un paramètre p, et comme absents les autres liens. Pour qu'un chemin, $\mathcal{P}$, soit constitué de liens présents, il faut que p soit supérieur au maximum des nombres aléatoires rencontrés sur ce chemin. Introduisant une norme, $\|\mathcal{P}\|_\infty$, sur ce chemin selon :

$$\|\mathcal{P}\|_\infty = \max_{i\in\mathcal{P}}(x_i) \qquad (4.1.87)$$

la condition s'exprime par

$$p \geq \|\mathcal{P}\|_\infty \qquad (4.1.88)$$

Le seuil de percolation effectif du réseau sera obtenu en écrivant qu'il existe au moins un chemin qui traverse le réseau pour cette valeur du paramétre p. Ou encore,

$$p_c = \min_{\mathcal{P}} (\|\mathcal{P}\|_\infty) \tag{4.1.89}$$

Si nous introduisons maintenant une distribution uniforme de poids entre 0 et 1, sur ce même réseau nous pouvons introduire une seconde norme sur les chemins, $\|\mathcal{P}\|_1$.

$$\|\mathcal{P}\|_1 = \sum_{i\in\mathcal{P}} (x_i)/L \tag{4.1.90}$$

Dans ces conditions, la pondération des chemins minimaux vaudra

$$d = \min_{\mathcal{P}} (\|\mathcal{P}\|_1) \tag{4.1.91}$$

Nous voyons déjà apparaître la proximité formelle des deux problèmes. Nous pouvons construire également une famille continue de normes, $\|\mathcal{P}\|_\alpha$, qui interpole (et extrapole) ces deux situations. $\|\mathcal{P}\|_\alpha$ est défini par

$$\|\mathcal{P}\|_\alpha = \{\sum_{i\in\mathcal{P}} (x_i^\alpha)/L\}^{1/\alpha} \tag{4.1.92}$$

Il est aisé de voir que dans la limite où α tend vers l'infini, nous retrouvons la norme introduite dans le cas de la percolation. Ceci justifie la notation $\|P\|_\infty$. Une autre limite remarquable de cette famille de normes est obtenue pour α tendant vers 0. Alors,

$$\|\mathcal{P}\|_0 = \prod_{i\in\mathcal{P}} (x_i)^{1/L} \tag{4.1.93}$$

Nous n'allons pas étudier plus avant les propriétés de ces normes. En fait cela est inutile car, par un changement de variable adapté, nous pouvons ramener le problème à une norme unique, disons $\|\mathcal{P}\|_1$, pour une distribution de pondérations x_i différente. En effet, pour une norme a, posons $y_i = x_i^{\alpha}$. Alors y est une pondération distribuée selon la loi p(y) :

$$p(y) = y^{(1-\alpha)/\alpha} \qquad (4.1.94)$$

A la lueur de ce résultat, nous voyons que le paragraphe précédent (4.1.3) n'était rien de plus qu'une discussion directe de la limite où a tend vers l'infini (cf Eq. 4.1.73). Et compte-tenu de la remarque de ce début de paragraphe, il est évident de rencontrer alors un problème de percolation.

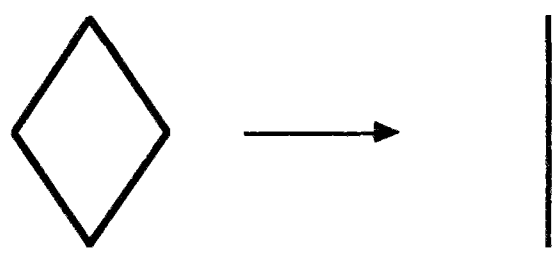
Dans la partie qui suit, (4.2), nous allons nous consacrer spécifiquement au cas d'une distribution uniforme de poids avec une norme $\|\mathcal{P}\|_1$, et toujours considérer comme structure minimale un chemin à deux dimensions.

4.2 Chemins Minimaux en faible désordre

Le parallèle que nous venons d'établir entre le problème de chemin minimum et la percolation n'est que formel pour une distribution autre qu'exponentiellement large. Cependant il constitue un guide précieux pour aborder les propriétés des chemins minimaux dans le cas d'un faible désordre. Toutes les techniques que nous avons pratiquées dans le cadre de la percolation sont directement transposables à ce problème. Nous allons en voir un exemple en étudiant une renormalisation dans l'espace réel sur réseaux hiérarchiques. Nous obtiendrons alors certains résultats qui seront ensuite retouvés dans le cas des réseaux Euclidiens. Finalement, nous expliciterons quelques autres propriétés de ces sytèmes, comme la notion d'"arbres" et l'utilisation de la dualité.

4.2.1 Réseaux hiérarchiques

Suivons l'exemple donné au chapitre 2 de la renormalisation de petites cellules dans l'espace réel. Nous traitons ici d'un réseau hiérarchique, structure diamant, illustré sur la figure 4.16. Ce réseau est obtenu en partant d'un lien unique (génération 1), et en le remplaçant par un losange formé de liens identiques à celui de départ. Cela constitue la génération 2. Puis, chaque lien est lui-même remplacé par un nouveau losange, et l'opération est itérée à l'infini.



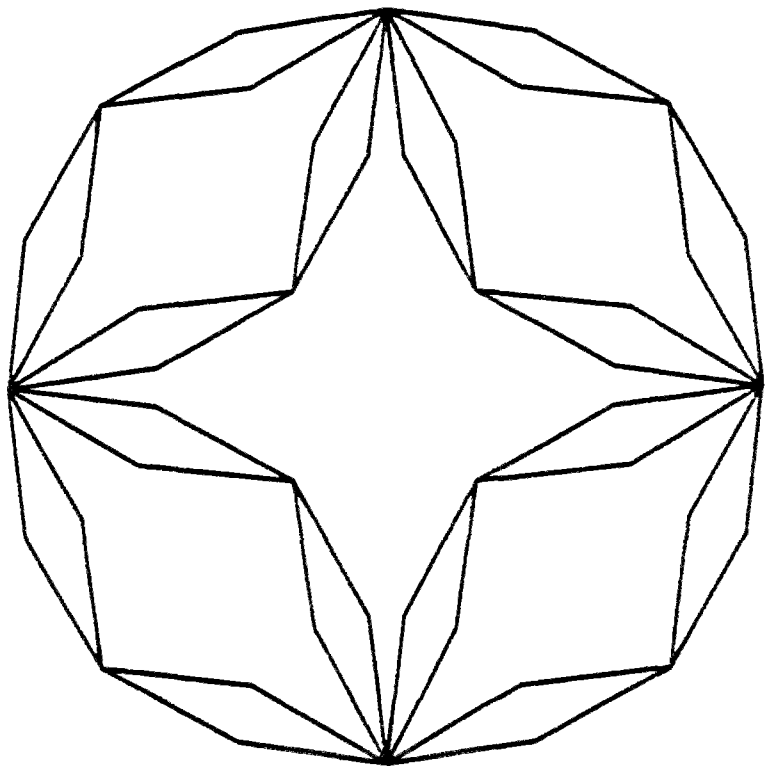


Figure 4.16 : Quatrième génération d'un réseau hiérarchique sur lequel nous étudions les chemins de pondération minimale. La construction de base est montrée dans le texte.

La figure 4.16 montre un tel réseau à la quatrième génération. Ce type de réseau a été considéré [20] pour modéliser un milieu de dimension finie, et il constitue souvent l'un des exemples les plus simples sur lesquels investiger les propriétés de milieux Euclidiens ou fractals lorsque le milieu original est complexe.

La renormalisation consiste alors à partir d'un réseau et à suivre comment ses propriétés évoluent lorsque l'on descend d'une génération. Partant d'un losange formé de quatre liens identiques de propriétés données, quelles sont les caractéristiques à affecter au lien unique qui remplace ce losange à la génération inférieure, si l'on veut que les propriétés de l'ensemble de la structure soit préservées?

Affectons tous les liens, i, d'un poids aléatoire, x_i, distribué sur l'intervalle [0,1] selon une distribution $\varphi(x)$. Puis, pour résoudre exactement le problème que nous nous sommes posé, il faudrait calculer la distribution de poids à attribuer au lien renormalisé $\varphi'(x)$:

$$\varphi'(x) = \mathcal{F}\{\varphi(x)\} \qquad (4.2.1)$$

Nous nous intéressons alors au point fixe de la fonctionnelle $\mathcal{F}$ dans l'espace des distributions de probabilité. Le problème de l'identification d'une telle distribution n'est pas simple : Nous avons à identifier un point fixe dans un espace de dimension infinie (celui des mesures de probabilité). Pour illustrer notre problème, donnons un cas particulier qui est simple et auquel nous nous référerons à plusieurs reprises: Si notre réseau hiérarchique était construit en changeant chaque lien en deux liens identiques montées en série, alors, l'opération de base à effectuer serait l'addition de deux nombres aléatoires à chaque étape. Dans l'espace des mesures de probabilité, la mise en série de deux liens correspond à un produit de convolution de la loi de la variable aléatoire sur chaque lien. Si le second moment est fini, le point fixe de la transformation sera une loi Gaussienne. On sait en effet que cette loi est invariante par un produit de convolution (hormis un facteur d'échelle trivial), et de plus par la loi des grands nombres, ce point

fixe est bien stable. (Ce point fixe n'est au demeurant pas unique: on sait que les processus de Lévy sont également stables dans la même transformation. Ils correspondent à la situation initiale d'une distribution de nombres aléatoires dont le second moment n'existe pas).

Revenant à notre problème, nous cherchons donc les propriétés du (voire des) point(s) fixe(s) de la transformation $\mathcal{F}$ dans l'espace des probabilités en partant d'une distribution donnée. Mais plus que le point fixe lui-même, ce qui va nous interesser ici est comment une distribution donnée va converger vers cette distribution limite.

Compte-tenu de la non-linéarité de la transformation $\mathcal{F}$, nous ne pouvons résoudre exactement ce problème. Nous allons dans la suite proposer une approximation simple, en réduisant l'espace dans lequel nous itérons la transformation. Derrida et Griffiths [21], considérant le même problème, proposent une approche différente, à savoir un calcul perturbatif en partant du cas simplement additif que nous venons de citer, et pour lequel nous connaissons la solution. Leur étude a été généralisée au cas d'une température non-nulle par Cook et Derrida [22]. Notons aussi que le cas d'un espace de dimension infini, représenté par un arbre de Bethe, a également été étudié dans un contexte similaire par Derrida et Spohn [23].

Enfin, de façon à traiter simplement ce problème, nous n'allons pas explorer l'espace complet des distributions, mais nous restreindre à un sous-espace de dimension deux, à savoir les distributions uniformes entre deux valeurs a et b. Comme dans la transformation $\mathcal{F}$, notre sous-espace n'est pas invariant, nous projetons la distribution transformée dans notre sous-espace de départ. Pour définir la projection de la fonctionnelle $\mathcal{F}$ sur ce sous-espace, nous choisissons de garder invariants les deux premiers moments de la distribution. Le problème est alors bien posé, et l'approximation claire. Pour proceder au calcul, nous allons d'abord expliciter la transformation $\mathcal{F}$ puis sa projection dans notre sous-espace, par l'intermédiaire de son action sur les deux premiers moments de la distribution.

Transformation $\mathcal{F}$

Deux types d'opérations sont à considérer: l'addition de deux liens en série et de deux liens en parallèle. Commençons par le premier cas.

Série: Nous cherchons la loi de distribution, ψ, de la somme de deux variables aléatoires indépendantes, x_1 et x_2, distribuées selon la loi $\varphi(x)$. On sait qu'alors ψ est simplement le produit de convolution de φ avec elle-même.

$$\psi = \varphi * \varphi \tag{4.2.2}$$

soit

$$\psi(x) = \int \varphi(x-y)\, \varphi(y)\, dy \tag{4.2.3}$$

Parallèle: Pour deux liens en parallèles, nous cherchons la loi de distribution, $\zeta(x)$, du minimum de deux variables aléatoires indépendantes, x_1 et x_2, distribuées selon la loi $\varphi(x)$. Si nous notons $\Phi(x)$ la loi de distribution cumulée de x

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(y)\, dy \tag{4.2.4}$$

un calcul simple donne alors la loi du minimum

$$\zeta(x) = 2\, \varphi(x)\, (1 - \Phi(x)) \tag{4.2.5}$$

Reste à définir la façon dont nous effectuons la projection d'une distribution quelconque sur une distribution uniforme dans un intervalle [a,b]. Nous retenons comme critère la conservation des deux premiers moments de la distribution. Ainsi, une fois donnés la moyenne $\langle x \rangle$ et l'écart-type $\sigma = (\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2)^{1/2}$, nous déduisons les bornes de l'intervalle

$$a = \langle x \rangle - \sqrt{3}\, \sigma \tag{4.2.6}$$

$$b = \langle x \rangle + \sqrt{3}\, \sigma$$

Application au cas d'une distribution uniforme

Toutes ces règles étant définies, il ne reste qu'à les appliquer: Partant d'une distribution uniforme sur l'intervalle [a,b], nous calculons d'abord pour deux liens en série, la loi de distribution, $\psi(x)$, de la somme:

$$\begin{aligned} 2a < x < a+b \qquad & \psi(x) = (x-2a)/(b-a)^2 \\ a+b < x < 2b \qquad & \psi(x) = (2b-x)/(b-a)^2 \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

Puis pour deux liens en parallèle de loi ψ, nous obtenons la loi Ψ:

$$\begin{aligned} 2a < x < a+b \qquad & \Psi(x) = 2(x-2a)/(b-a)^2 - (x-2a)^3/(b-a)^4 \\ a+b < x < 2b \qquad & \Psi(x) = (2b-x)^3/(b-a)^4 \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

Calculons valeur moyenne, $\langle x \rangle'$, et écart type, σ', de la loi Ψ:

$$\begin{aligned} \langle x \rangle' &= (37a + 23b)/30 \\ &= 2\langle x \rangle - 7\sqrt{3}/15\,\sigma \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

et

$$\begin{aligned} \sigma' &= \sqrt{101}/30\,(b-a) \\ &= \sqrt{303}/15\,\sigma \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

où les variables primées sont relatives à la distribution finale, alors que les variables non primées sont caractéristiques des liens initiaux. Enfin, comme la taille du réseau a doublé dans cette transformation, il faut diviser ces deux quantités par un facteur d'échelle trivial: 2. Finalement, nous obtenons les relations de récurrence très générales, où l'indice désigne la génération des liens considérés:

$$\langle x\rangle_n = \langle x\rangle_{n-1} - \kappa\,\sigma_{n-1} \qquad (4.2.11)$$

$$\sigma_n = \lambda\,\sigma_{n-1}$$

où

$$\kappa = 7\sqrt{3}\,/\,30 \qquad (4.2.12)$$

et $$\lambda = \sqrt{303}\,/\,30$$

La solution de ces équations est triviale, σ_n tend vers zéro exponentiellement :

$$\sigma_n = \lambda^n\,\sigma_0 \qquad (4.2.13)$$

alors que la pondération $\langle x\rangle$ tend vers une limite finie:

$$\langle x\rangle_\infty = \langle x\rangle_0 - \{\kappa/(1-\lambda)\}\,\sigma_0 \qquad (4.2.14)$$

Numériquement, partant d'une distribution uniforme sur l'intervalle [0,1], et utilisant les valeurs de (4.2.12), la limite (4.2.14) donne $\langle x\rangle_\infty = 0.222$.

L'écart-type de la distribution suit une loi de puissance avec la taille du système, L:

$$\sigma \propto L^{1/\mu} \qquad (4.2.15)$$

d'exposant $1/\mu = \log(1/\lambda)/\log(2)$. Pour reprendre l'exemple trivial de la transformation de chaque lien en deux liens en série, la loi des grands nombres nous donne la variation de l'écart-type de la distribution comme proportionnelle à la racine carrée du nombre d'éléments sommés (ici, L). La forme générique est ici semblable, a ceci près que la valeur de l'exposant est différent.

Numériquement, utilisant les valeurs données en (4.2.12), cet exposant vaut $1/\mu = 0.785$, ou $\mu = 1.273$. On observe également une correction à la pondération asymptotique proportionnelle aussi à la taille du système avec le même exposant $1/\mu$.

$$\langle x \rangle - \langle x \rangle_\infty \propto L^{1/\mu} \qquad (4.2.16)$$

Rappelons qu'en étudiant le seuil de percolation d'un système de taille finie, l'écart-type de la distribution des seuils effectifs varie avec la taille selon une loi de puissance:

$$\sigma \propto L^{1/\nu} \qquad (4.2.17)$$

où ν est l'exposant de longueur de corrélation. Il en va de même pour les corrections de seuil. Le parallèle que nous avions établi à un niveau purement formel précédemment, se concrétise ici par l'existence d'un comportement analogue.

Notons également un fait important; dans les relations de récurrence énoncées ci-dessus (Eq. 4.2.11), la forme de la distribution de départ n'intervient que pour la détermination de la pondération asymptotique, et non dans la loi de variation de l'écart-type. Ainsi, si nous avions opté au départ pour une autre distribution (dont tous les moments sont définis), la valeur de λ n'eut pas été modifiée. Cela se comprend aisément, en notant que la distribution converge vers la forme de distribution stable dans la transformation. Cela est vrai pour la transformation approximative que nous avons considéré, mais aussi pour la transformation réelle, complète.

Non-unicité du point fixe

Toujours pour reprendre l'exemple de deux liens en série, quelque soit la forme de la distribution originelle, si le second moment de la distribution existe et est fini, alors la loi de distribution converge vers une loi Gaussienne. Si maintenant le second

moment n'est pas défini, alors, l'attracteur de la transformation ne sera plus une Gaussienne, mais un processus de Levy.

Existe-t-il pour notre exemple une telle multiplicité d'attracteurs? En effet, si la distribution originale n'est pas normalisable, (e.g. s'il existe une singularité en x^{-1} au voisinage de l'origine), nous ne pouvons plus appliquer la transormation précédente. Nous rejoignons alors le cas étudié sur réseau Euclidien à la fin de la partie 4.1, pour une distribution exponentiellement large. Dans ce cas, nous pouvons reprendre le calcul en partant d'une distribution uniforme sur l'intervalle [0,1], et en considérant la norme $\|..\|_\infty$. Reprenons le calcul précédent avec cette norme.

Nous obtenons simplement la forme de la distribution renormalisée,

$$\Psi(x) = 4(x-a)/(b-a)^2\{1-(x-a)^2/(b-a)^2\} \qquad (4.2.18)$$

et tous calculs effectués, nous obtenons des relations de récurrence de la forme donnée en (4.2.11) avec des valeurs numériques différentes :

$$\kappa = \sqrt{3}\,/\,15 \qquad (4.2.19)$$
$$\lambda = 2\sqrt{33}\,/\,15$$

Nous en déduisons un exposant μ différent du précédent : $\mu = \log(2)/\log(1/\lambda) = 2.600$ et un seuil $\langle x\rangle_\infty = (39-\sqrt{33})\,/\,93 = 0.357$.

Nous pouvons dans ce cas particulier, obtenir des informations exactes, sans avoir à recourir à la projection dans un sous-espace de distribution. En effet, partant d'une distribution cumulée $\Phi(x)$, à la génération suivante, nous pouvons écrire la distribution cumulée sous la forme:

$$\mathcal{T}\Phi(x) = \{1-(1-\Phi(x))^2\}^2 \qquad (4.2.20)$$

Le point fixe de la distribution est donc simplement :

$$<x>_\infty = (3-\sqrt{5}) / 2 = 0.382. \qquad (4.2.21)$$

et en calculant la pente de $\Phi(x)$ au point fixe, nous obtenons $1/\lambda = 2 (3 - \sqrt{5}) = 1.527$ ou $\mu = 1.635$. La figure 4.17 illustre l'évolution de la distribution cumulée, $\Phi(x)$, au cours des cinq premières générations.

Ces valeurs numériques ne doivent pas être prises trop litéralement dans une comparaison avec un réseau Euclidien. La figure 4.18 montre deux autres exemples de réseaux hiérarchiques pour lesquels on peut refaire les mêmes calculs et obtenir des résultats sensiblement différents. Ainsi, pour la figure de gauche, nous obtenons facilement :

$$\kappa = \sqrt{3} / 3 \qquad (4.2.22)$$
$$\lambda = \sqrt{3} / 3$$

d'où

$$<x>_\infty = (3-\sqrt{3})/12 = 0.1057 \qquad (4.2.23)$$
$$\mu = 1.262$$

Pour la figure de droite, qui représente un modèle étudié en particulier par de Arcangelis et coll [24], les valeurs sont

$$\kappa = \sqrt{3} / 9 \qquad (4.2.24)$$
$$\lambda = 2\sqrt{6} / 9$$

d'où

$$<x>_\infty = (24-\sqrt{6}) / 57 = 0.378 \qquad (4.2.25)$$
$$\mu = 1.140$$

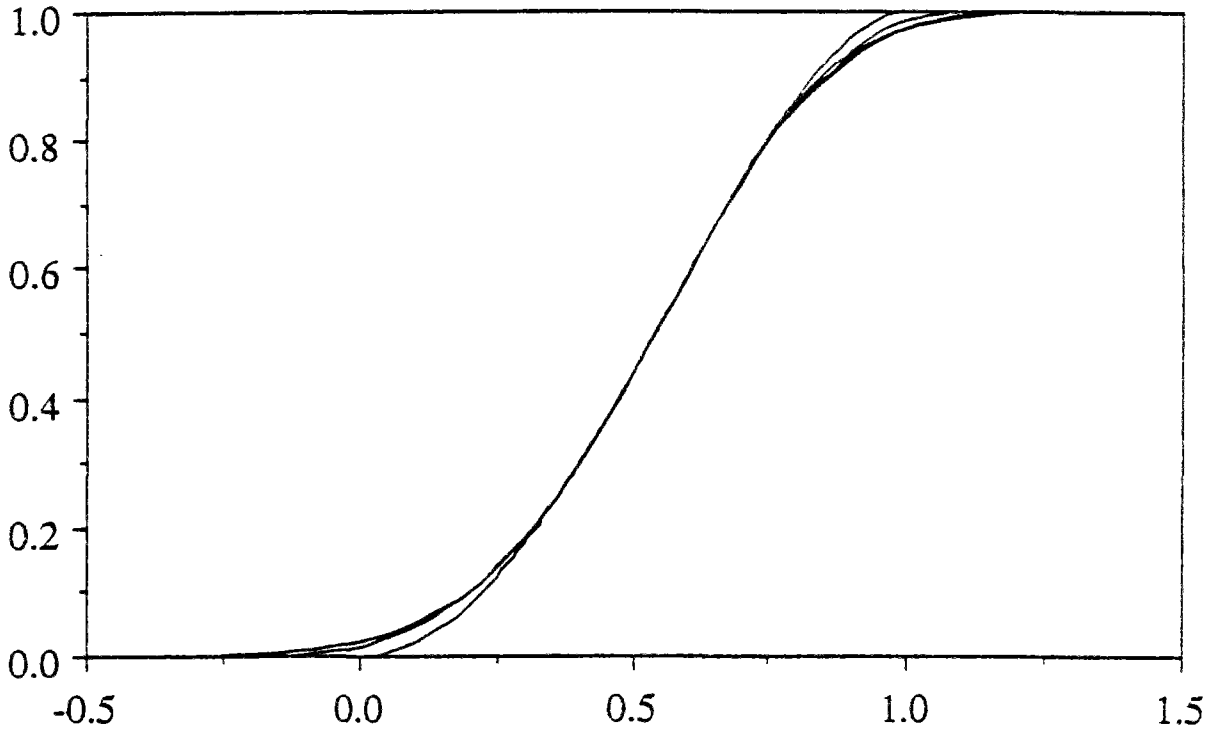


Figure 4.17 : Evolution de la distribution cumulée $\Phi(x)$ en fonction de la génération du réseau pour un problème de percolation sur la géométrie de la figure précédente. La distribution initiale uniforme n'est pas montrée sur la figure. Dans sa partie centrale, la distribution est déjà près de sa forme asymptotique, alors que pour les valeurs extrêmes une dérive est encore visible.

De plus, comme nous l'avions souligné précédemment, notre procédure de calcul est approximative, puisque nous nous restreignons à un sous-espace de distribution de dimension 2. En modifiant simplement le sous-espace de projection, les valeurs calculées sont changées. C'est par exemple le cas si nous projetons la distribution sur une gaussienne, en préservant toujour premier et second moments. Dans ce cas pour le réseau de la figure 4.16 (ainsi que pour le réseau de la figure 4.18 gauche), nous obtenons facilement :

$$\lambda = \{(\pi-1)/2\pi\}^{1/2} = 0.5838 \qquad (4.2.26)$$

soit, numériquement:

$$\mu = 1.288 \qquad (4.2.27)$$

à comparer à $\mu = 1.273$ obtenu précédemment avec des distributions uniformes sur un intervalle.

Nous pouvons tester notre approche par simulation numérique directe. Dans le cas du réseau de la figure 4.16, nous obtenons ainsi une valeur de seuil égale à $\langle x \rangle_\infty = 0.225$, $\lambda = 0.611$ et donc $\mu = 1.407$. La figure 4.19 montre l'évolution de l'écart-type de la distribution sur les vingt premières générations du réseau. L'accord avec nos calculs approximatifs est satisfaisant. Il est sensiblement meilleur que dans le cas de la percolation où nous avions pu comparer le résultat approximé avec la solution exacte. Derrida et Griffiths [21] ont aussi calculé numériquement λ et μ pour ce réseau et ils ont obtenu : $\mu = 1.425$, valeur très voisine de notre estimation.

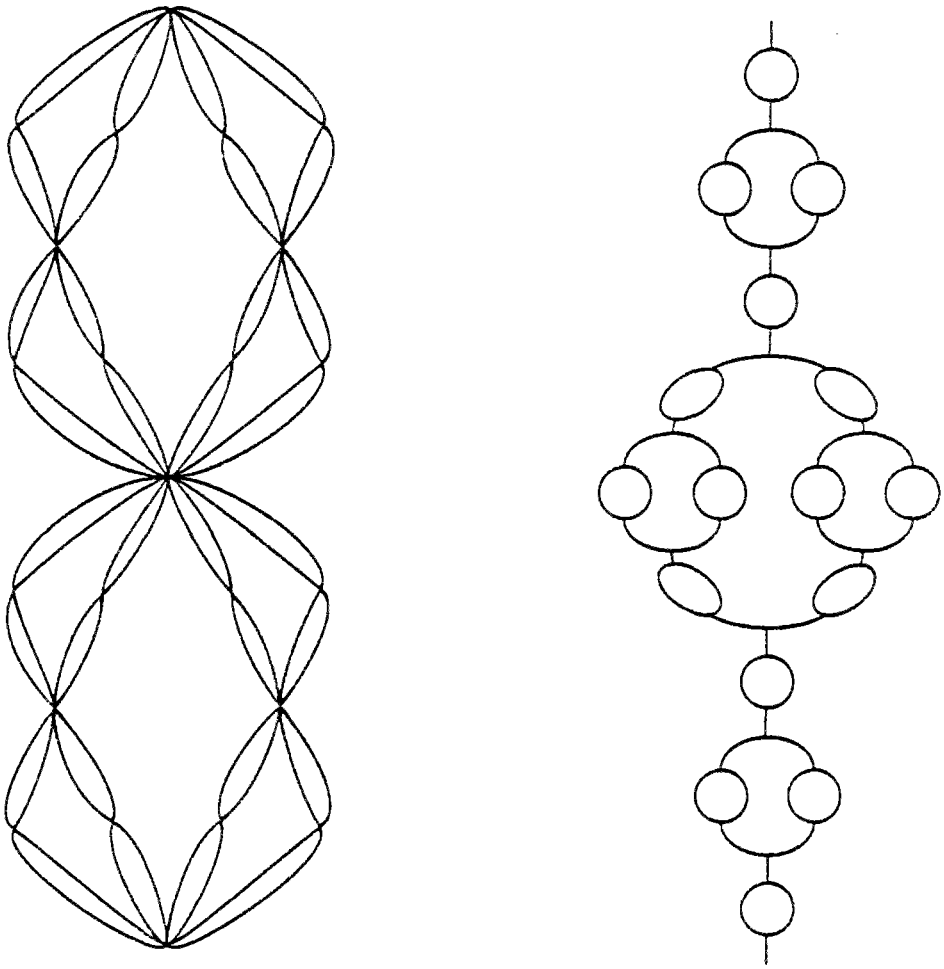


Figure 4.18 : Deux autres réseaux hiérarchiques: celui de gauche ressemble à celui de la figure 4.16, mais l'ordre des opérations, série et parallèle, est inversé. Celui de droite a été introduit par L.de Arcangelis et coll. pour modéliser le squelette d'un réseau de percolation au seuil.

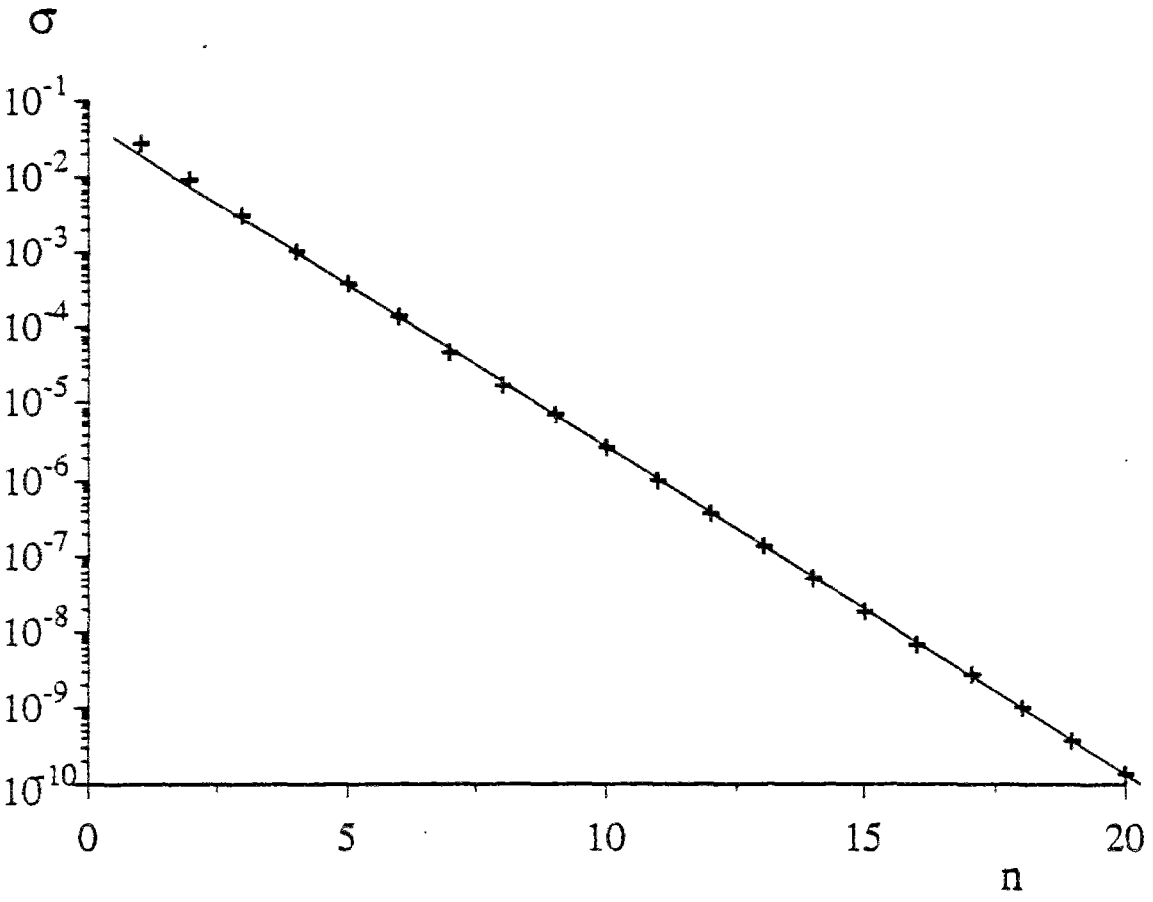


Figure 4.19 : Evolution de l'écart-type de la distribution des pondérations des chemins minimaux, telle que calculée par simulation numérique directe pour le réseau de la figure 4.16, au cours des vingt premières générations.

4.2.2 Réseau Euclidien

Nous allons maintenant revenir au cas d'un réseau Euclidien. Partant d'une distribution uniforme de pondération, répartie entre 0 et 1, il est facile de calculer la pondération des chemins minimaux. Le temps nécessaire à ce calcul pour les chemins dirigés est proportionnel à la largeur, w, et à la longueur, L, des réseaux: $T \propto wL$. Pour les chemins non-dirigés, le temps de calcul est bien supérieur : $T \propto w^3L$. Nous avons traité [25] le cas d'un réseau carré incliné à $\pi/4$ par rapport aux bords du réseau. Deux types de géométrie ont été étudiés: d'une part des réseaux en forme de ruban, $L >> w$, et d'autre part des réseaux aussi long que large $w = L$. Ces deux géométries donnent lieu à des comportements différents.

Dans le cas de la géométrie ruban, nous calculons la pondération d(w,L) des chemins minimaux dans la limite d(w,∞) notée d(w) en fonction de la largeur. Numériquement, pour des longueurs de 5.10^4 à 10^5 et des largeurs de 2 à 100, nous obtenons pour les chemins dirigés:

$$d(w) = d_\infty + A\, w^{-a} \qquad (4.2.28)$$

où $d_\infty = 0.231 \pm 0.002$, et un exposant $a = 1.0$. Pour les chemins non-dirigés, la forme de la loi observée est identique, avec les valeurs $d_\infty = 0.227 \pm 0.002$ et $a = 1.0$.

Lorsque le réseau a une forme carrée, la fonction d(w,w) ne peut être représentée par une loi de la forme (4.2.25). Nous ajoutons une seconde correction :

$$d(w,w) = d_\infty + A\, w^{-a'} + Bw^{-a''} \qquad (4.2.29)$$

Il est alors possible de rendre correctement compte des données obtenues par simulations numériques pour des tailles variant de 3 à 200 (moyennes prises sur 1000 réseaux) pour le problème dirigé. Dans ce cas nous trouvons :

$$d_\infty = 0.231 \pm 0.002 \qquad (4.2.30)$$
$$a' = 0.58$$
$$a'' = 0.91$$

et, pour le cas non-dirigé, pour des tailles variant de 2 à 32 (moyennes sur 500 réseaux), nous obtenons:

$$d_\infty = 0.227 \pm 0.010 \qquad (4.2.31)$$
$$a' = 0.75$$
$$a'' = 1.0$$

Les valeurs de d_∞ sont cohérentes avec les valeurs obtenues avec une géométrie de ruban. En ce qui concerne les exposants, il faut avouer que des ajustements à cinq paramètres ne sont pas très contraignants sur les valeurs de ces paramètres. Notons donc simplement l'ordre de grandeur de l'exposant dominant, et le fait qu'il est "raisonnable" de trouver une correction analytique (soit a"=1). D'autre part, l'adéquation de la courbe obtenue avec les valeurs numériques est tout à fait satisfaisant. Nous avons également étudié l'écart-type, $\sigma(w)$, de la distribution des pondérations. Le tracé bi-logarithmique de $\sigma(w)$ en fonction de w, révèle une loi de puissance, que les chemins soient dirigés (cf. Figure 4.20) ou non (cf. Figure 4.21).

$$\sigma(w) \propto w^{-1/\mu} \qquad (4.2.32)$$

La valeur mesurée de l'exposant $1/\mu$ était dans les deux cas:

dirigé	$1/\mu = 0.71 \pm 0.01$	(4.2.33)
non-dirigé	$1/\mu = 0.75 \pm 0.01$	

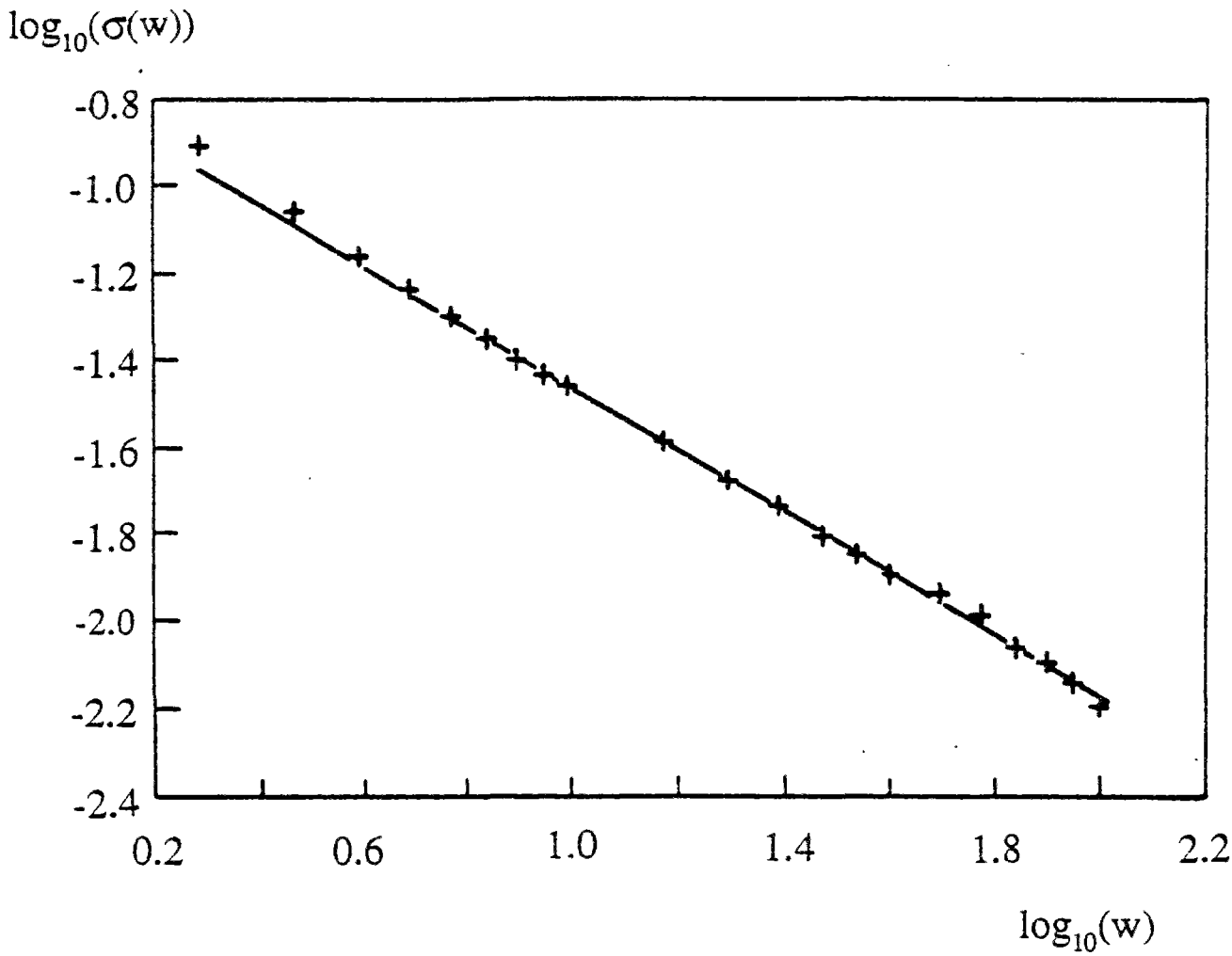


Figure 4.20 : Ecart-type, $\sigma(w)$, de la distribution des valeurs de d(w,w), mesuré sur réseaux de taille w en fonction de w, pour les chemins dirigés minimaux sur réseaux carrés inclinés à $\pi/4$.

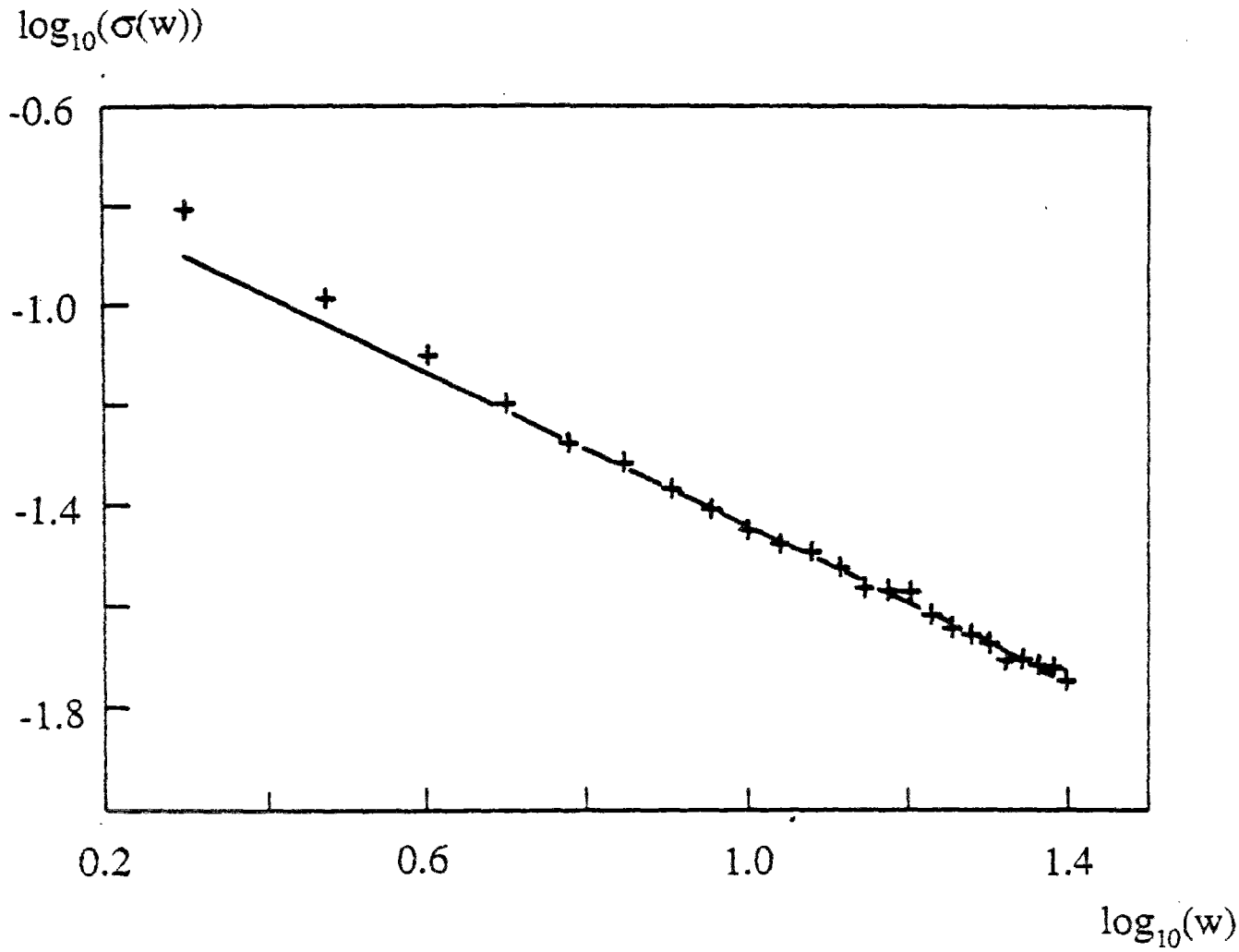


Figure 4.21 : Ecart-type, $\sigma(w)$, de la distribution des valeurs de d(w,w), mesuré sur réseaux de tailles w en fonction de w, pour les chemins non-dirigés minimaux sur réseaux carrés inclinés à $\pi/4$.

Toutes les lois observées dans le cas d'un réseau à géométrie carrée, sont de la même forme que dans le cas des réseaux hiérarchiques. Elles sont aussi identiques à celles observées en percolation en étudiant la variation et l'écart-type de seuils effectifs de réseaux de taille finie. Dans ce cas, et pour la percolation usuelle (isotrope, et de connexité), l'exposant $1/\mu$ est l'inverse de l'exposant de longueur de corrélation, ν. Nous savons qu'à deux dimensions, $\nu = 4/3$, d'où $1/\nu = 3/4$, tout à fait compatible avec la valeur de $1/\mu$ mesurée dans le cas non-dirigé. En ce qui concerne la variation de la valeur moyenne du seuil (Eq. 4.2.26), $a' = 1/\nu$, (toujours en accord), et généralement la seconde correction est analytique ($a'' = 1$).

Il est plus difficile de comparer les résultats obtenus en percolation dirigée avec les chemins dirigés. La forme de la variation du seuil effectif en fonction de la taille du réseau a bien la forme suggérée [19], avec $a' = 1/\nu_{//}$ et $a'' = 1/\nu_{\perp}$. (Compatibles avec les valeurs obtenues puisque $1/\nu_{//} = 0.577$ et $1/\nu_{\perp} = 0.911$.) Mais la variation de l'écart-type n'a pas été mesurée à notre connaissance. L'exposant $1/\mu$ ne peut pas se comparer à l'exposant dominant que l'on aurait pu attendre: $1/\nu_{//}$. Il est plus proche de $2/(\nu_{\perp} + \nu_{//}) = 0.707$ mais une étude du problème équivalent de percolation dirigée est nécessaire, pour étayer cette correspondance.

Nous n'avons pour l'instant que peu mentionné la littérature. La raison principale en est que ce type de problème n'a été considéré que dans des contextes très différents. Le paragraphe 4.3 sera consacré à une discussion plus serrée de la littérature. Disons simplement que dans la plupart des travaux, l'aspect dirigé ou non du problème est présenté comme non-pertinent, et donc, par souci d'efficacité, il est naturel que toutes les études se soient consacrées au problème dirigé. D'autre part, en ce qui concerne les exposants a' et $1/\mu$, des arguments ont été présentés pour leur attribuer la valeur 2/3 à deux dimensions. Des simulations numériques enfin étayent cette suggestion. Nous reviendrons en détail sur ces points dans la partie 4.3, ainsi que dans le paragraphe suivant.

4.2.3 Arbres et Rugosité

Dans un réseau donné, il est facile de construire, pour chaque site, le chemin minimal qui joint ce site à un bord du réseau. L'ensemble de ces chemins remplit complètement le réseau, puisqu'à chaque site correspond un chemin. Ces chemins forment des structures arborescentes, car si deux chemins peuvent se rejoindre en allant vers la base du réseau, en aucun cas un chemin ne peut bifurquer, car si la distribution de poids est continue, la probabilité pour qu'existent deux chemins de même pondération est nulle. La figure 4.22 montre un exemple de réseau carré dont les axes principaux sont parallèles aux bords et où les liens des chemins les plus courts ont été tracés. La figure 4.23 montre l'un de ces arbres, extrait de la figure précédente.

La structure de ces arbres va nous renseigner sur une propriété d'échelle fondamentale dans ce problème. Quelle est la statistique de ces arbres ? Nous pouvons aborder cette question par différents aspects. La plus simple assurément consiste à étudier le nombre, N(h), d'arbres différents (ayant une racine distincte) en fonction de la distance, h, à la base. Nous observons numériquement une loi de puissance:

$$N(h) \propto h^{-1/z} \qquad (4.2.34)$$

Dans la référence [26] nous avions rapporté les résultats d'une première étude numérique sur ce sujet, donnant $1/z = 0.63 \pm 0.02$, pour des réseaux carrés inclinés à $\pi/4$. Nous avons refait ce calcul de façon plus approfondie en considérant 1000 réseaux de largeur 1000 et de hauteur 100. Le résultat est montré sur la figure 4.24. La mesure de la pente donne une estimation de 1/z

$$1/z = 0.66 \pm 0.01 \qquad (4.2.35)$$

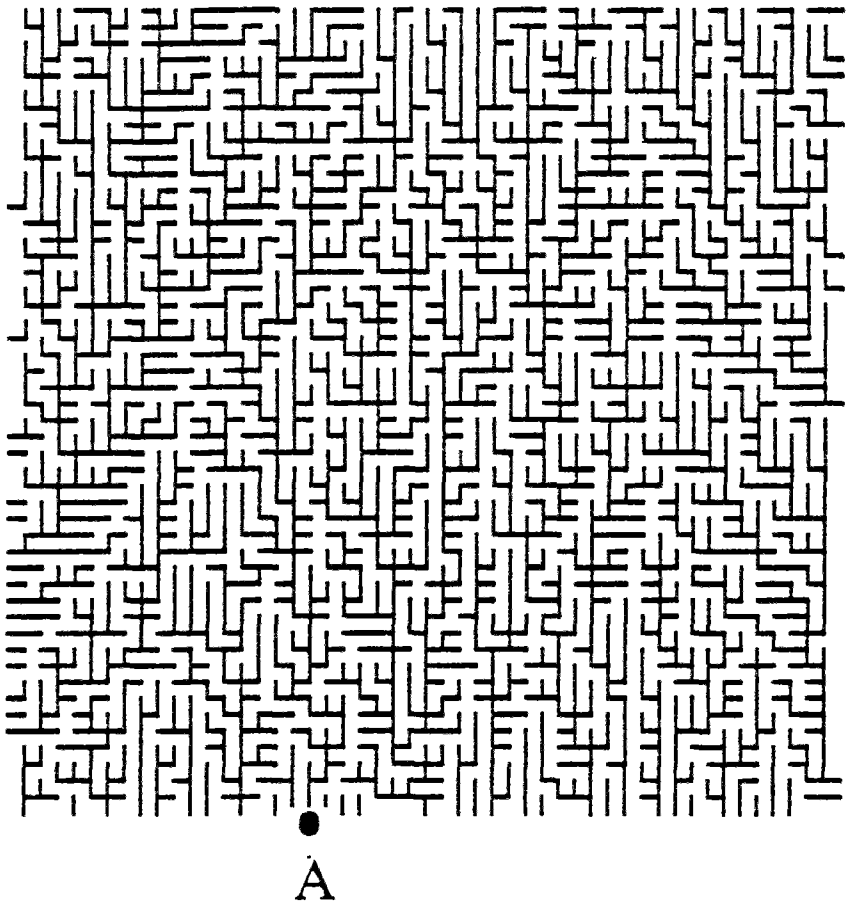


Figure 4.22 : Réseau carré sur lequel ont été représentés les chemins minimaux qui joignent chaque site à la base. L'ensemble de ces liens forme un ensemble dense puisque chaque point est atteint une fois.

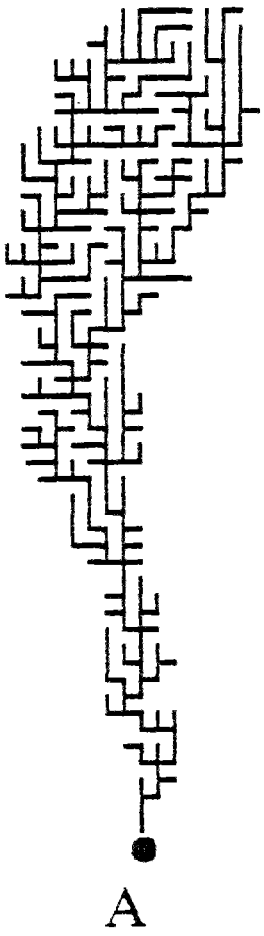


Figure 4.23 : Un arbre particulier a été extrait de la figure précédente. Le nombre de ces arbres qui survivent au-delà d'une hauteur h, suit une loi de puissance.

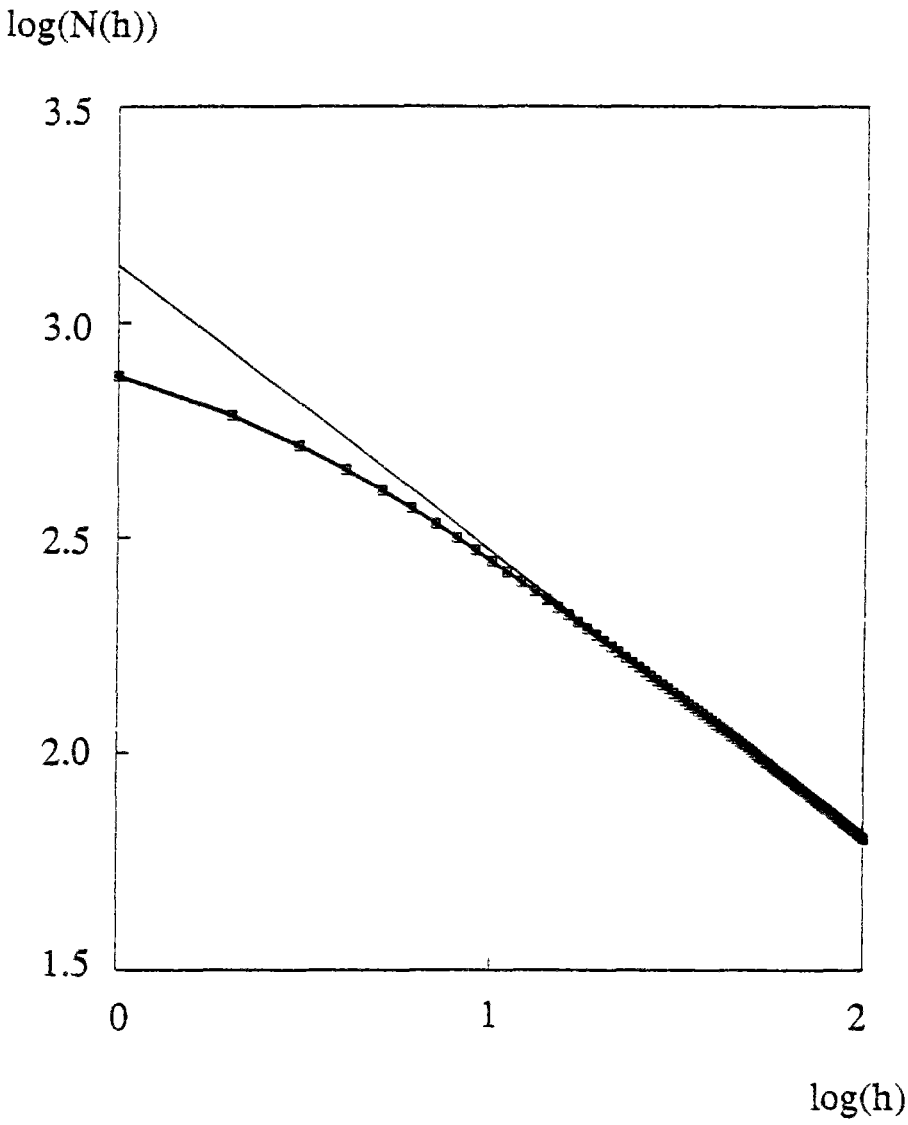


Figure 4.24 : Nombre d'arbres ayant atteint une hauteur h, en fonction de h, en coordonnées bi-logarithmiques, pour des chemins dirigés minimaux. La droite montrée sur la figure a une pente de 0.66.

Nous verrons que plusieurs auteurs proposent la valeur 2/3 pour cet exposant. Ceci est compatible avec notre dernière estimation.

Nous déduisons de cette dépendance que la taille moyenne, S(h), des arbres à une hauteur h, est proportionnelle à

$$S(h) \propto h^{1/z} \qquad (4.2.36)$$

Ce comportement est bien sûr valide pour une hauteur telle que le nombre d'arbres est grand devant l'unité. A très grande hauteur, N(h) va atteindre 1 et alors N(h) restera constamment à cette valeur. La hauteur, h*, qui correspond à ce croisement de comportements, pour un réseau de largeur L varie comme

$$h^* \propto L^{z} \qquad (4.2.37)$$

puisque N(h=1) = L. Nous nous attendons donc à deux régimes: l'un pour des longueurs inférieures à h*, l'autre pour des longueurs supérieures.

Existe-t-il un équivalent de l'exposant z pour la percolation dirigée ? En effet, nous savons qu'il faut introduire deux longueurs de corrélation en percolation dirigée, l'une parallèle, $\xi_{//}$, l'autre perpendiculaire, $\xi_{\perp}$, à la direction privilégiée. Si nous sommes au seuil, la largeur moyenne des amas attachés à un bord du réseau dépend de la distance h à ce bord selon:

$$S(h) \propto h^{\nu_{\perp}/\nu_{//}} \qquad (4.2.38)$$

Ceci découle simplement du fait que S(h) est égal à $\xi_{\perp}$, calculé pour une valeur du paramétre de contrôle qui est tel que $\xi_{//}$ soit égal à h. Numériquement, $\nu_{\perp}/\nu_{//} = 0.633$. Cette valeur est remarquablement proche de 1/z.

Une autre propriété intéressante est la "rugosité". A une hauteur h donnée, nous pouvons estimer l'écart-type de la distribution des pondérations. Cette quantité a déjà été mentionnée au paragraphe précédent (4.2.2). Compte-tenu de ce qui vient d'être dit, il est naturel de chercher à mettre cette rugosité sous la forme d'une loi d'échelle:

$$\sigma = h^{-1/\mu} f(h/h^*) \qquad (4.2.39)$$

Lorsque h/h* est petit devant 1, σ doit être indépendant de L, et donc $f(x) = O(1)$, au voisinage de zéro. Au contraire, lorsque h/h* est grand devant 1, nous pouvons considérer que le réseau se comporte comme s'il était constitué de h/h* réseaux indépendants mis en série. Dans ce cas, l'écart-type σ doit simplement varier comme 1/h. Nous en déduisons que $f(x) \propto x^{1/\mu-1}$ lorsque x tend vers l'infini. Ainsi, nous avons les deux comportements suivants:

pour $h << h^*$ $\quad \sigma \propto h^{-1/\mu}$ (4.2.40)

pour $h >> h^*$ $\quad \sigma \propto h^{-1} L^{\chi}$ (4.2.40')

où $\chi = z(1-1/\mu) \approx 0.5$. Dans l'étude précédemment citée, pour les réseaux carrés, nous sommes dans la situation $h << h^*$ puisque $z = 1.5 > 1$. Nous observons alors la loi (4.2.40) où h = w. Au contraire, pour une géométrie de type ruban, nous sommes dans le second cas, mais σ n'a pas été calculé dans cette situation.

La figure 4.25 illustre les notions de base que nous avons rencontré jusqu'à présent et qui sont tout à fait génériques. La structure du front à un comportement différent selon l'échelle considérée. Cette échelle est défini par un processus diffusif, ou surdiffusif selon les cas, et que nous avons rencontré dans l'étude des "arbres" : il s'agit de la taille typique des arbres. Cette échelle varie donc avec la hauteur du système et sature à la largeur du système pour une hauteur h*.

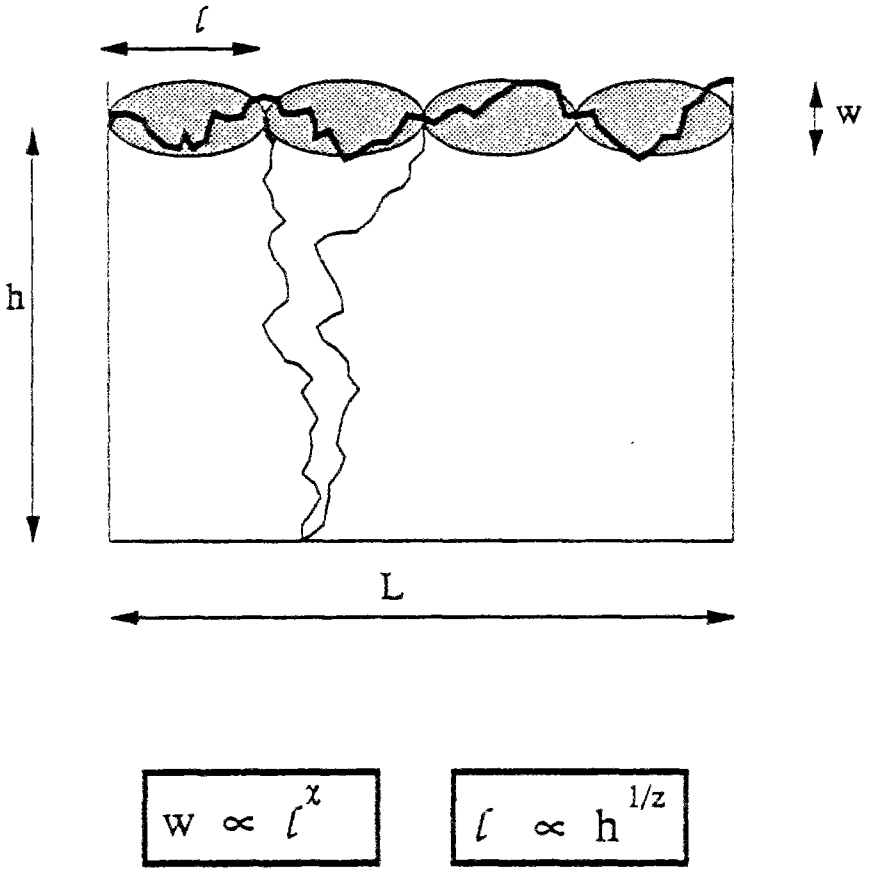


Figure 4.25 : Représentation schématique des problèmes de structure minimale. La structure du front (trait épais), et en particulier sa rugosité, est différente selon l'échelle considérée. Il intervient une longueur d'équilibre ℓ qui provient d'un processus (représenté en trait noir fin), soit diffusif (cas du modèle de rivière) soit super-diffusif (chemin minimum,...). Les relations d'échelle de base sont indiquées pour préciser nos notations.

4.2.4 Modèle de rivières

Avant de conclure ce paragraphe, il est intéressant de considérer un modèle simple voisin de celui des chemins minimaux, qui a l'avantage d'être simplement soluble. Il s'agit du modèle de rivières ("River Model") considéré initialement par Sheidegger [27] puis par Kondoh et coll. [28], Meakin [29] et Roux et coll [26].

Imaginons donc un réseau carré incliné à $\pi/4$. A partir de chaque site, nous choisissons aléatoirement un et un seul lien dirigé vers un bord donné A. Nous construisons ainsi naturellement un ensemble d'arbres analogue à celui que nous avons considéré précédemment. En effet, il remplit densément le plan puisque chaque site appartient à un et un seul arbre. Nous pouvons donc introduire à nouveau, le nombre d'arbres indépendants, N(h,w), en fonction de la distance, h, au bord A, et de la largeur du réseau.

$$N(h,w) \propto w\, h^{-1/z} \qquad (4.2.41)$$

analogue à l'équation (4.2.34). Puisque tous les sites sont atteints par un arbre, la taille moyenne, S(h), de chaque arbre à une hauteur h est

$$S(h) \propto h^{1/z} \qquad (4.2.42)$$

Ces deux équations sont valides tant qu'il reste plus d'un arbre sur la largeur, soit pour une hauteur inférieure à une hauteur limite h*, telle que

$$h^* \propto w^z \qquad (4.2.43)$$

Jusque là, toutes ces propriétés sont similaires à celles observées pour les arbres de chemins minimaux.

Cependant, dans ce modèle très simplifié, l'exposant z peut être déterminé exactement par un argument très simple. Partant d'un site et rejoignant le bord aval A. nous parcourons un chemin unique sans bifurcation. Ce chemin est, par construction même du problème, une marche aléatoire sans biais. Pour construire les arbres qui arrivent à une hauteur h , il est commode de partir de tous les sites situés à cette hauteur et de de suivre leur chemin jusqu'au bord A. Lorsque deux chemins se rejoignent avant d'atteindre le bord A, ils demeurent confondus jusqu'à l'embouchure. L'ensemble de ces trajectoires forment donc uniquement les arbres qui survivent encore à la hauteur h. La probabilité pour que deux chemins appartiennent au même arbre, est donc simplement la probabilité pour que deux marches aléatoires se rejoignent avant un nombre de pas égal à h. Nous pouvons encore simplifier le problème en regardant la distance relative entre les deux marches. Cette distance décrit encore une marche aléatoire (de coefficient de diffusion double). La probabilité de rencontre entre les deux chemins devient ainsi un problème de premier passage. Partant d'une distance d (entre deux points de départ), nous nous intéressons à la distribution des temps de premier passage à une distance nulle, sachant que cette distance effectue une marche aléatoire. Une simple analyse dimensionnelle nous donne la dépendance du temps moyen de premier passage en fonction de la distance d de départ.

$$<t> \propto d^2 \qquad (4.2.44)$$

Ainsi pour une hauteur h donnée, la taille des arbres sera en moyenne

$$S(h) \propto \sqrt{h} \qquad (4.2.45)$$

donc

$$z = 2 \qquad (4.2.46)$$

Meakin [29] dans son analyse des propriétés de ces arbres à introduit trois exposants pour décrire leur statistique, en fonction de la masse, s, de ces arbres intégré depuis leur racine jusqu'à leur fin. Appelant respectivement N_s, ℓ et h le nombre d'arbres de taille s, la largeur maximum et la hauteur maximum de ces arbres, il a observé les trois lois de puissance :

$$N_s \propto s^{-\tau} \qquad (4.2.47)$$
$$\ell \propto s^{\rho_\perp}$$
$$h \propto s^{\rho_{//}}$$

Meakin a montré [29] avec des arguments du même type que ceux introduits précédemment que la largeur maximal d'un arbre est encore de l'ordre de la racine carrée de sa hauteur :

$$\ell \propto \sqrt{h} \qquad (4.2.48)$$

ou encore

$$\rho_{//} = 2\,\rho_\perp \qquad (4.2.49)$$

Puisque les arbres remplissent densemment le plan, nous avons également

$$\rho_{//} + \rho_\perp = 1 \qquad (4.2.50)$$

d'où le résultat,

$$\rho_{//} = 2/3 \qquad (4.2.51)$$
$$\rho_\perp = 1/3$$

Finalement, pour la distribution de tailles, utilisant le fait que le nombre d'arbres de largeur supérieure à ℓ décroît comme ℓ^{-1}, nous obtenons que le nombre d'arbres de taille supérieure à s est proportionnel à $s^{-\rho_\perp}$ d'une part et $s^{1-\tau}$ d'autre part, par définition. Soit

$$\tau = 1+\rho_\perp = 2 - \rho_{//} \qquad (4.2.52)$$

ou $\tau = 4/3$

Les estimations numériques de Meakin [29] sont compatibles avec ces résultats:

$$\rho_{//} = 0.671 \pm 0.004 \qquad (4.2.53)$$
$$\rho_\perp = 0.339 \pm 0.004$$
$$\tau = 1.331 \pm 0.002$$

4.2.5 Dualité

Il est facile de formuler le problème du chemin minimal en terme de problème d'optimisation linéaire [30, 31]. Partant d'un réseau où chaque lien a une pondération aléatoire x_{ij}, nous affectons à chaque site i la valeur, y_i, de la pondération du chemin minimal qui le relie à un bord donné A, multipliée par la distance de i à A. (y_i est simplement la somme des poids x_i sur le chemin minimal.) La pondération minimale, d, du réseau est alors le minimum des y_i sur le bord B opposé à A, divisé par la longueur, L, du réseau. Nous pouvons donc écrire le problème sous la forme:

$$Ld = \text{Max } (y') \qquad (4.2.54)$$

sous les contraintes:

$$1) \quad y_i - y_j \leq x_{ij} \qquad \forall\, ij \in L \qquad (4.2.55)$$

$$2) \quad y' - y_i \leq 0 \qquad \forall\, i \in B$$

La première série d'inégalité étant écrite pour tous les liens ij "légaux", tels qu'existe un chemin de A à B qui aille de j à i. (ceci exclut par exemple l'inégalité obtenue en échangeant les rôles de i et j pour un problème dirigé). La seconde série d'inégalité concerne les sites i qui appartiennent au bord B. Divers algorithmes ont été conçus pour résoudre ce type de problème de façon générique. Ils sont tout à fait inadaptés, dans la pratique, pour des problèmes aussi simples que les chemins dirigés, (ou même non-dirigés). Leur usage est cependant envisageable pour des structures minimales plus complexes (e.g. surface ou sous-ensemble isostatique).

L'intérêt de cette formulation concerne pour l'instant la définition du problème dual. Le terme de dualité est ici utilisé car il s'agit du terme consacré en Mathématiques Appliquées où le problème de "programmation linéaire" a été étudié le plus en détail. Cette dualité n'est pas exactement comparable à la dualité discutée dans les chapitres antérieurs, (Chap.2 et 3).

Il s'agit ici d'intervertir les rôles joués par les inégalités et par les variables. Il y a zwL/2 inégalités de type 1), où z est la coordinance du réseau et w inégalités de type 2). Le nombre de variables est (wL+1). Si nous écrivons le problème primal sous la forme matricielle :

$$\text{Max } ({}^{t}C\, Y) \qquad (4.2.56)$$

$$AY \leq B$$

$$Y \geq 0$$

le problème dual s'exprime sous :

$$\begin{aligned} &\text{Min } ({}^{t}B\,Z) \\ &{}^{t}A\,Z \leq C \\ &Z \geq 0 \end{aligned} \qquad (4.2.57)$$

Reste à traduire cette écriture formelle en:

$$\text{Min } \Big(\sum_{ij \in L} x_{ij} z_{ij} \Big) \qquad (4.2.58)$$

sous les contraintes

$$\begin{aligned} &1) \quad \sum_{j} \varepsilon_{ij} z_{ij} \geq 0 \\ &2) \quad \sum_{j} z_{ij} - z_i \geq 0 \\ &3) \quad \sum_{i} z_i \geq 1 \end{aligned} \qquad (4.2.59)$$

Dans la première série d'inégalité, ε_{ij} vaut 1 si ij est légal et -1 si ji est légal. Les variables z_{ij} correspondent aux contraintes exprimées sur chaque lien interieur au réseau, les variables z_i sont relatives aux secondes contraintes du problème primal. Nous pouvons interpréter z_{ij} comme un courant dans le lien ij et z_i comme un courant sortant du réseau au nœud i du bord B. Dans ces conditions, les inégalités 1 et 2 expriment le fait qu'à chaque nœud du réseau, il sort moins de courant qu'il n'en rentre (les pertes sont positives). La troisième inégalité minore le courant total sortant du réseau par le bord B.

Le "théorème de dualité forte" nous permet alors de conclure directement que le problème dual a une solution optimale, Z*, car le problème primal en a également une, Y*, et que

$${}^{t}C\,Y^* = {}^{t}B\,Z^* \qquad (4.2.60)$$

Il est intéressant de noter que dans le problème original, le domaine convexe limité par les contraintes contenait tout le caractère aléatoire du problème (les poids x_i) alors que la fonction objectif était fixe. Au contraire dans le problème dual, le domaine convexe est toujours identique, mais la direction de la fonction objectif contient uniquement les poids aléatoires.

Nous reviendrons sur cette correspondance de dualité dans la partie 4.4 consacrée aux propriétés de transport.

4.3 Relations avec d'autres modèles

Les problèmes des structures minimales ont souvent été considérés dans la littérature, mais toujours dans des contextes assez différents de celui présenté ici. D'autre part, beaucoup de simulations numériques sur ce sujet sont contradictoires dans une certaine mesure, et finalement, la variété de notations utilisées par différents auteurs rend parfois confuses les comparaisons.

Avant de rentrer dans les détails des différents modèles, réglons d'emblée le point des notations en présentant un tableau de "traduction" d'exposants entre nos notations et celles de quelques articles auxquels nous nous réfèrerons.

Notations :

	1	2	3	4	5	6	7
z	z	α/ν	$\nu_{//}/\nu_{\perp}$	γ	β/α	z	$1/\zeta$
χ	χ	α	α	α	β	x	χ/ζ
$1/\mu$	$1-\omega$	$1-\nu$	$1-\beta$	$1-\beta$	$1-\alpha$	$1-\beta$	$1-\chi$
$1/z$	ν	ν/α	$\nu_{\perp}/\nu_{//}$	$1/\gamma$	α/β	$1/z$	ζ

Références concernées par les numéros

1: Hwa, Kardar, Medina, Zhang, (notons que lorsque ces auteurs parlent de polymères dirigés, ils emploient les notations de 7) [34,37,38,41,45]

2: Ball, Meakin, Ramanlal, Sander [46]

3: Meakin [29]

4: Botet, Jullien, Meakin [68,69,70,77,79,81,82]

5: Family [80]

6: Stauffer, Zabolitsky [71]

7: Bruinsma, Henley, Huse [33,55,62]

Relations :

Ref.	Définitions		Propriétés	
	$\mu = z/(z-\chi)$		$\chi + z = 2$	
1:	$\omega = \chi/z$	$\nu = 1/z$	$\chi + z = 2$	
2:			$\alpha = \frac{2\nu}{1+\nu}$	
3:			$\tau = 2-\nu_{//}$	$\nu_{//} + (d-1)\,\nu_{\perp} = 1$
4:	$\gamma = \alpha/\beta$			
6:	$z = x/\beta$			

Les domaines pour lesquels ont été évoqués des modèles de structure minimale englobent

- Les domaines de spins en champ aléatoire ("random field"), ou avec des couplages de magnitude aléatoire ("random bond" ou "random exchange")

- Les interfaces en milieu aléatoire

- La conformation de polymères dirigés en milieu aléatoire

- L'équation de Burgers avec bruit (et autres équations reliées (Kuramoto-Sivashinski, ...))

- La frontière du modèle d'Eden (modèle de croissance)

- La structure des fronts d'empilement

- Un modèle d'états critiques auto-organisés

- Les ondes de densité de charge

- Certaines réactions chimiques de catalyse

- Les propriétés de transport de certains milieux aléatoires de caractéristique locale non-linéaire à seuil.

- Les propriétés mécaniques d'empilement de particules...

Domaines de spins

L'un des premiers champs, où le concept de structure minimale a été étudié est la stabilité de domaines de spins dans deux situations où apparaît un désordre: champ aléatoire ("random field") [32] et interactions aléatoires ("random bond" ou "random exchange") [33].

Dans le premier cas, nous considérons par exemple le problème d'Ising, soit un système de spins décrit par l'Hamiltonien

$$H = -\sum_{ij} J_{ij}\, \sigma_i \sigma_j \qquad (4.3.1)$$

où J_{ij} prend une valeur constante J pour toute paire de spins voisins, et est nul sinon. Ce système est plongé dans un champ aléatoire h, qui donne la contribution additionnelle ΔH à l'Hamiltonien:

$$\Delta H = -\sum_i h_i\, \sigma_i \qquad (4.3.2)$$

Alors que le premier terme de l'Hamiltonien (4.3.1) a tendance à aligner les spins σ_i tous parallèles les uns aux autres, le second au contraire incite plutôt à orienter les spins localement selon la direction (le signe) du champ h. Partant d'un milieu parfaitement aligné, si nous imaginons qu'un certain domaine de spin, $\mathcal{D}$, se retourne (Figure 4.26), il faut pour étudier la stabilité de ce domaine comparer les deux contributions énergétiques: l'une due au terme (4.3.1), donnera une énergie proportionnelle à la surface, $\partial\mathcal{D}$, du domaine et l'autre (terme (4.3.2)) sera une somme sur tout le domaine du champ local. Il faut donc comparer un terme de surface à un terme de volume où un terme aléatoire est intégré.

Dans le cas des *interactions aléatoires*, le champ h est nul, mais les constantes de couplage J_{ij} varient localement, e.g. de par la présence d'impuretés dans le milieu. Plus précisément, nous écrirons

$$J_{ij} = J + \delta J_{ij} \tag{4.3.3}$$

où δJ_{ij} est un terme fluctuant aléatoire de moyenne nulle. Ici encore, il peut se créer des domaines, $\mathcal{D}$, où la polarisation est l'inverse de celle du milieu environnant. Le terme perturbatif (4.3.3) aura tendance à distordre l'interface de façon à profiter au mieux des constantes de couplage faibles. Dans ce cas, il faudra comparer deux contributions énergétiques: la première comme précédemment tend à minimiser la longueur d'interface totale, et la seconde (due aux termes fluctuants de J_{ij} (4.3.3)) sera une somme de nombres aléatoires à minimiser sur l'interface $\partial\mathcal{D}$. Nous voyons ici poindre le problème que nous avons considéré au paragraphe précédent.

Avant d'examiner plus avant ces modèles, nous allons en présenter une version continue due à Imry et Ma [32]. Pour simplifier la discussion, nous nous restreindrons ici au cas bidimensionnel, soit une interface unidimensionnelle, bien que la discussion en dimension supérieure soit similaire.

Nous allons commencer par le terme d'interface, H_0, dû à la partie régulière de l'Hamiltonien (4.3.1). L'interface, $\partial\mathcal{D}$, est considérée comme dirigée, dans le sens d'un axe x, et donc on la repère par une simple fonction y (x).

$$H_0 = \nu \int_{\partial\mathcal{D}} ds \tag{4.3.4}$$

où s est l'abscisse curviligne le long de l'interface et ν un coefficient proportionnel à la constante de couplage J. Supposons que l'interface soit suffisament régulière pour que l'on puisse considérer la dérivée $\partial y/\partial x$ comme petite devant 1. Nous pourrons alors faire le développement suivant

$$ds = \sqrt{1+ (\partial y/\partial x)^2}\ dx \qquad (4.3.5)$$
$$= (1 + 1/2(\partial y/\partial x)^2)\ dx + O((\partial y/\partial x)^4)$$

H_0 peut alors s'écrire sous la forme suivante si l'interface s'étend sur une longueur L:

$$H_0 = \nu\, L + \nu/2 \int_{\partial \mathcal{D}} (\partial y/\partial x)^2\, dx \qquad (4.3.6)$$

Il est maintenant clair que ν peut être interprété comme une tension superficielle. Dans un espace de dimension d, une interface aura alors une énergie H_0 :

$$H_0 = \nu\, L^{d-1} + \nu/2 \int_{\partial \mathcal{D}} (\nabla y)^2\, d^{d-1}x \qquad (4.3.7)$$

Dans le cas du *champ aléatoire*, il faut de plus considérer l'énergie H_1 due au champ h:

$$H_1 = \int_{\partial \mathcal{D}} \int^{y} h(x,y')\, dy'\, d^{d-1}x \qquad (4.3.8)$$

Pour le cas des interactions aléatoires, introduisant la fonction aléatoire $\mu(x,y)$ qui représente les fluctuations des constantes de couplage, l'énergie additionnelle prend la forme :

$$H_2 = \int_{\partial \mathcal{D}} \mu(x,y)\, d^{d-1}x \qquad (4.3.9)$$

Nous allons dans un premier temps présenter un argument du à Imry et Ma [32] dans le cas du champ aléatoire, et qui donne un bon ordre de grandeur du comportement. Nous l'exposons selon la version de Kardar [34]. Pour un système de

taille L, imaginons une variation de hauteur de l'interface de l'ordre de δy. Nous faisons ici une approximation de fluctuation de hauteur "monochromatique", en ne prenant en compte qu'un seul mode, pour une analyse dimensionnelle. L'énergie H_0 vaut alors

$$H_0 \propto \nu \ (\delta y/L)^2 \, L^{d-1} \qquad (4.3.10)$$
$$\propto \nu \ \delta y^2 \, L^{d-3}$$

où nous avons omis le premier terme constant de (4.3.7). Dans le cas du champ aléatoire, le terme H_1 provient des fluctuations typiques d'une somme de nombres aléatoires, soit la racine carrée du volume du domaine $\mathcal{D}$, d'où

$$H_1 \propto \sqrt{<h^2>} \sqrt{(\delta y \, L^{d-1})} \qquad (4.3.11)$$

Egalant ces deux quantités, nous obtenons la taille typique des fluctuations de l'interface

$$\delta y^* \propto (<h^2>^{1/2}/\nu)^{2/3} \, L^{(5-d)/3} \qquad (4.3.12)$$

En effet, en-dessous de telles rugosités, les fluctuations du champ aléatoire permettront d'abaisser l'énergie de l'interface en prenant une conformation plus rugueuse. Au delà, le coût du à l'augmentation de surface sera très pénalisant. Ainsi en champ aléatoire, les fluctuations δy varieront proportionnellement à la taille du système à la puissance $1/z$, où $1/z = (5-d)/3$. Soit à deux dimensions, $z = 1$, et à trois dimensions, $z = 3/2$. La dimension critique inférieure du problème est $d = 2$, alors que la dimension critique supérieure est $d = 5$.

Pour le cas des interactions aléatoires, le calcul de Imry et Ma, étendu par Nattermann [35], est similaire. Mais H_2 doit remplacer H_1.

$$H_2 \propto <\mu^2>^{1/2} \, L^{(d-1)/2} \qquad (4.3.13)$$

Nous obtenons donc des fluctuations δy de l'ordre de

$$\delta y \propto (<\mu^2>^{1/2} / \nu)^{1/2} L^{(5-d)/4} \qquad (4.3.14)$$

Donc dans le cas des interactions aléatoires, $1/z = (5-d)/4$. Si cette dernière formule est qualitativement correcte, elle est cependant quantitativement fausse, comme nous verrons dans la suite. L'équation (4.3.13) est clairement inadaptée: elle prédit une énergie due aux fluctuations des interactions qui est indépendante de la rugosité. Ainsi une minimisation de l'énergie totale ne conduit pas en fait à l'équation (4.3.14) mais plutôt à $\delta y = 0$! Au contraire dans le cas du champ aléatoire, l'argument est raisonnable, et la prédiction de $1/z = 1$ à d=2, a été obtenue par un traitement beaucoup plus rigoureux par Imbrie [36].

Il est encore possible de calculer la dimension critique inférieure du problème d'interactions aléatoires, en considérant une perturbation par rapport à l'état libre d'une interface à température non-nulle suivant Huse et Henley [33]. Pour obtenir la rugosité de l'interface dans ce cas, il suffit d'égaler le terme H_0 à une énergie thermique de l'ordre de kT . Nous obtenons alors une rugosité:

$$\delta y \propto \sqrt{kT/\nu}\ \ L^{(3-d)/2} \qquad (4.3.15)$$

Ainsi dans un système sans impureté, la rugosité disparait à la limite thermodynamique (L tendant vers l'infini) pour une dimension supérieure à 3. C'est la dimension critique supérieure du problème d'interface libre. Nous pouvons donc partir de cet état, et introduire progressivement le terme perturbateur d'interaction aléatoire. Considérons donc le changement d'échelle suivant:

$$x \rightarrow \lambda x \qquad (4.3.16)$$

$$y \rightarrow \lambda^{1/z} y$$

Sous cette transformation, nous devons modifier aussi

$$\nu \rightarrow \lambda^{a_\nu} \nu \qquad (4.3.17)$$

$$\mu \rightarrow \lambda^{a_\mu} \mu$$

où

$$a_\nu = 3\text{-}d\text{-}2/z \qquad (4.3.18)$$

$$a_\mu = (1\text{-}\ d\ \text{-}\ 1/z)/2$$

La première égalité découle de l'invariance de H_0 et la seconde de la décorrélation du champ μ:

$$<\mu(x,y)\mu(x',y')> = <\mu^2>\ \delta(x\text{-}x')\ \delta(y\text{-}y') \qquad (4.3.19)$$

Ainsi, nous retrouvons la condition d'interface libre en écrivant que a_ν s'annule: soit $1/z = (3\text{-}d)/2$. Pour le problème d'interactions aléatoires, nous examinons la transformation de H_2:

$$H_2 \rightarrow \lambda^{a2}\ H_2 \qquad (4.3.20)$$

où

$$a_2 = a_\mu + d\text{-}1$$

En perturbant l'état libre (soit en fixant $1/z = (3\text{-}d)/2$), nous pouvons voir selon le signe de a_2 si le désordre est pertinent. Il l'est si $a_2 > 0$, et donc si

$$d > 5/3 \qquad (4.3.21)$$

5/3 est donc la dimension critique inférieure de ce problème.

Notons également que Zhang [37] a considéré la superposition d'un champ aléatoire avec un problème d'interactions aléatoires et a montré que dans ce cas, seule la contribution de champ aléatoire était pertinente. D'autre part, Kardar [34] a construit un modèle qui interpole continûment entre ces deux problèmes. Pour ce modèle, il a developpé un argument "à la Imry-Ma" ainsi qu'une approximation de Flory, qui donnent une réponse exacte simplement dans le cas du champ aléatoire.

Les simulations numériques des problèmes de champ aléatoire et d'interactions aléatoires sont nombreuses à deux dimensions (on en trouvera dans la plupart des articles cités en référence dans ces paragraphes), et dans tous les cas, les auteurs trouvent des valeurs d'exposants en accord avec les prédictions théoriques, (avec une précision, lorsqu'elle est citée, de l'ordre de 5 à 10%). Au contraire, à trois dimensions, il en existe très peu à notre connaissance. La raison en est simple: le temps de calcul à trois dimensions (et *a foriori* au-delà) augmente exponentiellement avec la taille du système. Citons le travail de Kardar et Zhang [38] réalisé par matrice de transfert sur des conformations minimales d'interfaces bidimensionnelles en champ aléatoire, ou avec interactions aléatoires. Dans le premier cas, ces auteurs estiment :

$$\chi = 1.28^{+0.15}_{-0.05} \qquad (4.3.22)$$

et

$$1/z = 0.59 \pm 0.07 \qquad (4.3.22')$$

alors que pour les interactions aléatoires :

$$\chi = 1.10 \pm 0.05 \qquad (4.3.23)$$

et

$$1/z = 0.50 \pm 0.08 \qquad (4.3.23')$$

Nous avons jusqu'à présent considéré que le passage au modèle continu était "transparent" et n'affectait pas les propriétés d'échelle du phénomène étudié. Une telle conclusion est peut-être rapide. Nous allons reproduire un argument dû à Grinstein et Ma [39] qui suggère qu'au contraire, le modèle d'Ising en champ aléatoire sur réseau cubique, peut donner lieu à des exposants différents.

Si nous imaginons un domaine de spins sur réseau cubique à d dimensions, limité par une frontière dirigée (d'orientation perpendiculaire à l'un des axes propres du réseau carré), la longueur totale d'interface, et donc l'énergie d'interface, est égale à la taille du réseau L^{d-1} plus la longueur totale d'interface perpendiculaire à la direction privilégiée (cf. Figure 4.27). Si l'on note y(x) la cote de l'interface, ce dernier terme vaut

$$\sum_{x} |y(x+1)-y(x)| \qquad (4.3.24)$$

et donc la version continue est

$$H_0 \propto \int_{\partial \mathcal{D}} (1+|\nabla y|)\, d^{d-1}x \qquad (4.3.24')$$

au lieu de (cf. Eq. 4.3.7)

$$H_0 \propto \int_{\partial \mathcal{D}} (1+(\nabla y)^2)^{1/2}\, d^{d-1}x$$

Appliquant l'argumentation de Imry et Ma à ce nouvel Hamiltonien, nous obtenons

$$1/z = (3-d) \qquad (4.3.25)$$

au lieu de (5-d)/3. A deux dimensions, le cas d'un réseau carré incliné à $\pi/4$ est encore plus particulier, car alors la longueur d'interface est identique pour toute conformation dirigée de l'interface. La seule possibilité pour restaurer un terme stabilisant l'interface

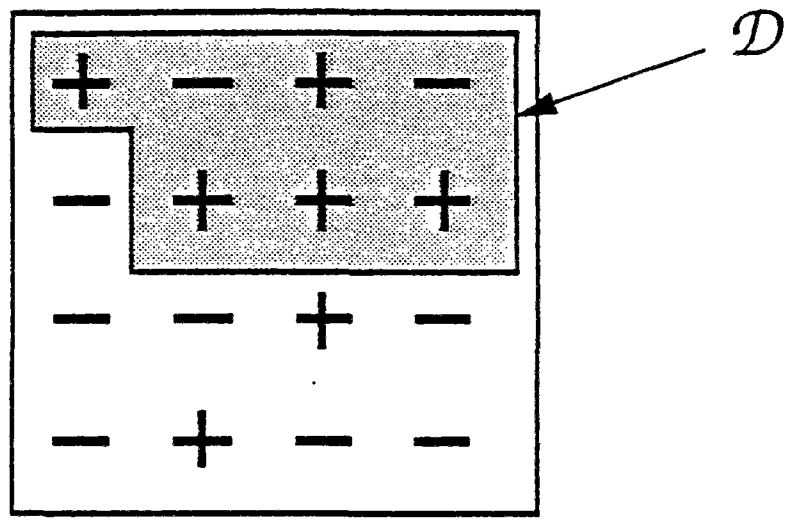


Figure 4.26 : Illustration schématique d'un domaine de spin en champ aléatoire représenté par les signes + et - aux sites du réseau. Le problème est de trouver un domaine optimal, $\mathcal{D}$, qui bénéficie au mieux du champ local sans pour autant créer trop d'interface.

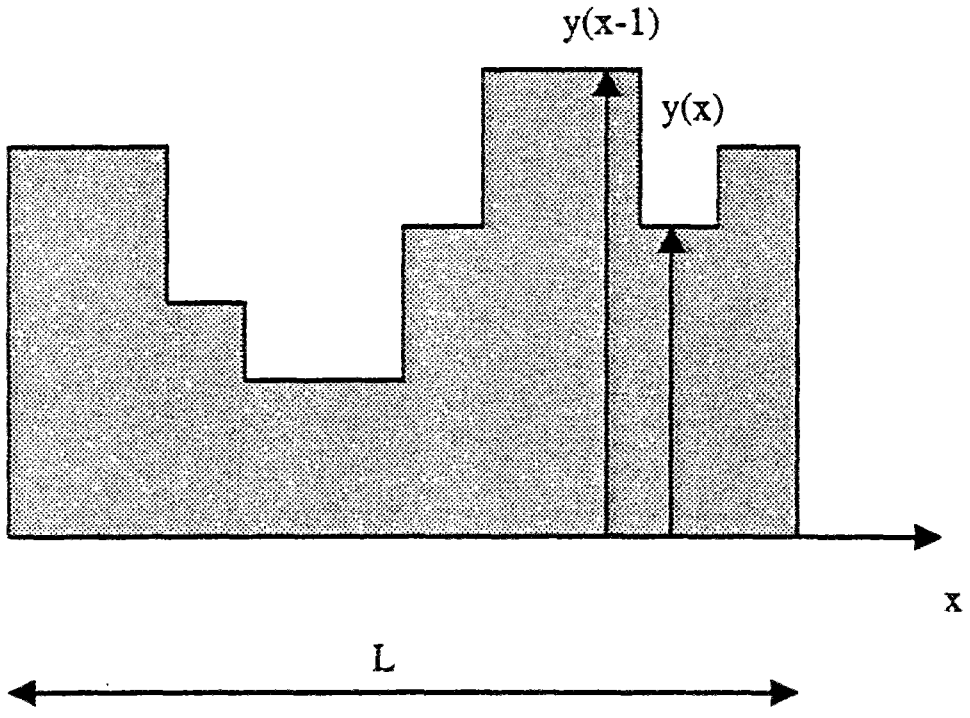


Figure 4.27 : Pathologie du réseau carré (ou cubique en dimension supérieure): la longueur d'interface est égale à la largeur du réseau, L, (somme des portions horizontales), auquel il convient d'ajouter la contribution des portions verticales. Cette dernière est égale à la somme des différences $|y(x+1)-y(x)|$ pour toutes les positions x le long du réseau.

est de prendre en compte l'entropie de conformation de l'interface (comme un terme d'"élasticité entropique", commun pour décrire les propriétés élastiques des polymères).

Utilisant une technique de renormalisation, Fisher [40] a obtenu un développement en $\varepsilon = 5\text{-}d$, pour l'exposant $1/z$, tant pour le cas du champ aléatoire

$$1/z = (5\text{-}d)/3 + O\{(5\text{-}d)^2\} \qquad (4.3.26)$$

que pour le cas des interactions aléatoires

$$1/z = (0.2083)(5\text{-}d) + O\{(5\text{-}d)^2\} \qquad (4.3.26')$$

au voisinage de la dimension critique supérieure, $d_c = 5$.

Un autre résultat essentiel concernant ce problème, à savoir la solution à deux dimensions, a été obtenu par Huse, Henley et Fisher [cf. troisième référence de 33] en établissant une correspondance avec l'équation de Burgers avec bruit.

Equation de Burgers avec bruit

Nous partons encore de l'Hamiltonien (4.3.7 et 4.3.9) obtenu en passant à la limite continue de notre problème de chemin minimum à deux dimensions (ou de façon équivalente, le problème d'Ising avec interactions aléatoires)

$$H_0 = \int_{\partial \mathcal{D}} \{\nu/2\ (\partial y/\partial x)^2 + \mu(x,y)\}\ dx \qquad (4.3.27)$$

Le poids statistique, W(x,y), d'un chemin arrivant en un point (x,y) satisfait alors à l'équation:

$$\partial W(x,y)/\partial x = kT/2\nu\ \partial^2 W(x,y)/\partial y^2 + 1/kT\ \mu(x,y)\ W(x,y) \quad (4.3.27')$$

Nous avons là une équation de diffusion avec un bruit multiplicatif. Pour nous ramener à un bruit additif, suivant Huse, Henley et Fisher [33], (voir également [41]) nous effectuons le changement de variable

$$u(x,y) = -\frac{kT}{\nu}\ \frac{\partial W(x,y)/\partial y}{W(x,y)} \qquad (4.3.28)$$

qui conduit alors à l'équation de Burgers [42]:

$$\partial u/\partial x = kT/2\nu\ \partial^2 u/\partial y^2 - u\ \partial u/\partial y - 1/\nu\ \partial \mu/\partial y \qquad (4.3.29)$$

où le terme non-linéaire $u\partial u/\partial y$ peut être interprété comme un terme convectif. Le terme de bruit $\partial \mu/\partial y$ est impropre, mais il constitue cependant une notation commode. A chaque fois que les propriétés de ce terme seront utilisées, il faudra revenir à l'intégrale de ce terme par rapport à y.

Il est aussi utile de considérer l'équation obtenue à partir de l'équation de départ en effectuant le changement de variable,

$$F(x,y) = - kT \ln(W(x,y)) \qquad (4.3.30)$$

F est l'énergie libre, et u n'est que sa dérivée par rapport à y: $u = \partial F/\partial y$. L'équation (4.3.27') devient alors

$$\partial F/\partial x = (kT/2\nu)\, \partial^2 F/\partial y^2 - 1/2\nu\, (\partial F/\partial y)^2 - \mu(x,y) \qquad (4.3.31)$$

et

$$< \mu(x,y)\, \mu(x',y') > = D\, \delta(x-x')\, \delta(y-y') \qquad (4.3.31')$$

Plus généralement pour un problème d'interfaces dans un espace à d dimensions, nous aurons, en notant $\alpha=kT/2\nu$:

$$\partial F/\partial x = \alpha\, \Delta F - 1/2\nu\, (\nabla F)^2 - \mu(x,y) \qquad (4.3.32)$$

et

$$< \mu(x,y)\, \mu(x',y') > = D\, \delta(x-x')\, \delta^{d-1}(y-y') \qquad (4.3.33)$$

Forster, Nelson et Stephen [43] ont étudié l'équation de Burgers avec bruit par une méthode de renormalisation dynamique et ils ont montré qu'elle donnait lieu à des propriétés d'échelles non-triviales.

Commençons par donner une analyse dimensionnelle simple de ces équations, en effectuant le changement d'échelle suivant:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow A^z x \\ y &\rightarrow A\, y \\ F &\rightarrow A^\chi F \end{aligned} \qquad (4.3.34)$$

De façon à ce que l'équation (4.3.32) soit invariante dans la transformation, nous devons redéfinir les paramètres α, ν, et D de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \alpha &\rightarrow A^{a\alpha}\,\alpha \\ \nu &\rightarrow A^{-a\nu}\,\nu \\ D &\rightarrow A^{aD}\,D \end{aligned} \qquad (4.3.35)$$

où

$$\begin{aligned} a_\alpha &= 2 - z \\ a_\nu &= 2 - \chi - z \\ a_D &= 2\chi - z + d - 1 \end{aligned} \qquad (4.3.36)$$

S'intéressant au régime asymptotique, qui doit être invariant d'échelle, les trois exposants cités ci-dessus ne peuvent être que positifs ou nuls. Si ils sont strictement positifs, alors ils disparaissent lorsque le facteur de renormalisation, A, tend vers zéro, i.e. lorsque les détails locaux de la structure sont estompés ("coarse-graining"). La figure 4.28 montre dans le plan (z,χ) le domaine accessible.

En l'absence de termes non-linéaires, $(1/\nu = 0)$, z et χ sont obtenus en annulant a_α et a_D. Ainsi, $z = 2$ et $\chi = (3\text{-}d)/2$. Un tel résultat a été obtenu dans l'étude de ce modèle particulier, (sans terme non-linéaire), par Edwards et Wilkinson [44]. A deux dimensions,

$$z = 2 \qquad (4.3.37)$$

et $\chi = 1/2$

Ce modèle correspond en fait à la version continue du modèle de rivières [27] exposé précédemment.

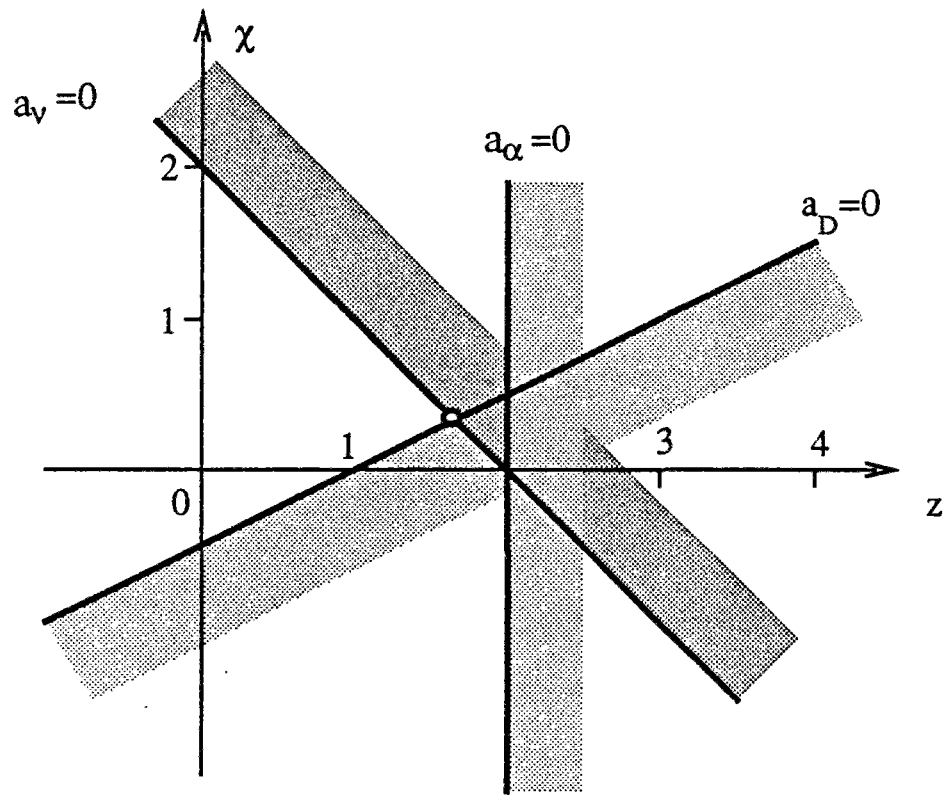


Figure 4.28 : Le domaine accessible dans le plan (z,χ) pour les exposants qui caractérisent les lois d'échelle de l'équation de Burgers avec bruit, est limité par trois demi-plans, dont chacun correspond à un terme de l'équation de Burgers (terme diffusif, terme non-linéaire, et terme de bruit).

Lorsque nous rajoutons une contribution non-linéaire, nous voyons que pour $d > 3$, $a_\nu = (d-3)/2 > 0$, et donc ce terme n'est pas pertinent. La dimension critique supérieure est donc ici 3. En dessous de cette dimension, le terme non-linéaire croît sous la renormalisation et devient donc important. Une analyse naïve conduit à conclure que lorsque la dimension est inférieure à la dimension critique supérieure, 3, et lorsque le terme non-linéaire est présent, les exposants z et χ sont déterminés par l'annulation de deux des trois exposants $a_{...}$ et par la condition que le troisième exposant soit positif (ou nul). En particulier à $d = 2$, cela conduit à $z = 5/3$ et $\chi = 1/3$. Ceci implique également que le terme diffusif disparaît, ($\alpha = 0$), asymptotiquement.

En fait, une analyse plus poussée montre que de telles conclusions sont erronées. En traitant le terme non-linéaire de façon perturbative, Kardar, Parisi et Zhang [41] (leur argument est developpé en détail dans l'article de Medina, Hwa, Kardar et Zhang [45]) ont montré que a_α et a_D étaient modifiés par renormalisation au premier ordre. Au contraire, a_ν n'est pas changé. Cela conduit à l'identité, $a_\nu = 0$, ou

$$z+\chi = 2 \qquad (4.3.38)$$

obtenu par Meakin et coll. [46], et Huse et Henley [34]. Cette relation très générale a le mérite d'être parfaitement vérifiée numériquement (et ce, en toute dimension d'espace). Cette équation traduit l'invariance Galiléenne de l'équation (4.3.31), comme souligné par Medina et coll. [45].

Nous renvoyons le lecteur intéressé par la dérivation de la renormalisation de l'équation (4.3.31) à la référence [45], car elle est un peu technique. Bornons nous ici à citer le résultat à deux dimensions:

$$z = 3/2 \qquad (4.3.39)$$

et

$$\chi = 1/2$$

La relation (4.3.38) est bien sûr valide pour ces valeurs. Pour les dimensions d'espace supérieures, *a priori*, le problème devient simple car nous sommes au dessus de la dimension critique du problème. Cependant une analyse perturbative révèle encore que les non-linéarités sont encore pertinentes pour d=3, et peuvent conduire à des relations d'échelle non-triviales en dimensions strictement supérieures à trois, si le désordre est suffisament fort. Des simulations numériques effectuées par Kardar et Zhang [47] suggèrent qu'alors à trois dimensions,

$$1/z = 0.62 \pm 0.04 \qquad (4.3.40)$$
$$\chi/z = 0.33 \pm 0.02$$

et à quatre dimensions

$$1/z = 0.64 \pm 0.07 \qquad (4.3.41)$$
$$\chi/z = 0.41 \pm 0.04$$

ce qui a amené ces auteurs à suggérer que les valeurs 3/2 et 1/2 pour z et χ respectivement pourraient être superuniverselles, (i.e. indépendantes de la dimension de l'espace). McKane et Moore [48] ont appuyé cette possibilité de superuniversalité par un argument théorique. Notons également que Wolf et Kertesz [49], dans une étude numérique sur la surface du modèle d'Eden (voir ci-après), ont suggéré une autre possibilité, à savoir que

$$\chi = 1/d \qquad (4.3.42)$$

et

$$z = 2-\chi = \frac{(2d-1)}{d} \qquad (4.3.43)$$

Ces conjectures ne sont pas en désaccord avec les simulations numériques précitées. Nous reviendrons sur cette question ultérieurement.

Pour conclure sur le chapitre de l'équation de Burgers avec bruit, mentionnons simplement un rapprochement avec l'équation de Kuramoto-Sivashinski,

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4}+2\psi\frac{\partial\psi}{\partial x}=0 \qquad (4.3.44)$$

qui représente un modèle unidimensionnel de comportement chaotique (turbulence developpée). Une analyse récente de Zalesky [50] a en effet montré que le comportement, à temps long et à grande échelle de cette équation (4.3.44) était identique à celui de l'équation de Burgers avec bruit. Il est remarquable de noter que l'équation (4.3.44) ne contient pas de terme de bruit. En fait, une analyse de la partie linéaire de cette équation montre qu'elle est instable, et cette instabilité suffit à engendrer l'équivalent du bruit de l'équation de Burgers. Chaté et Manneville [51], étudiant le développement de bouffées chaotiques de l'équation de Kuramoto-Sivashinski avec un terme d'amortissement ($\eta\psi$ à ajouter au membre de gauche de l'équation 4.3.44), ont observé une transition pour une valeur du paramètre d'amortissement $\eta_c = 0.078$, entre un régime turbulent ($\eta < \eta_c$) et un régime laminaire ($\eta > \eta_c$). A ce seuil, la répartition spatiale de domaines turbulents montre une structure en amas de toutes tailles, dont la distribution est une loi de puissance, qui, en dessous du seuil, devient une distribution sensiblement exponentielle. La géométrie de ces amas est de fait très évocatrice d'amas de percolation dirigée et certains traits communs entre ces deux phénomènes critiques interpellent l'imagination, comme l'a souligné Pomeau [52]. Dans cet esprit, (mais sans pourtant utiliser exactement le modèle de percolation dirigée), Chaté et Manneville [53] ont modélisé la géométrie des amas turbulents dans le modèle de Kaneko [54]. Ce dernier est voisin de l'équation de Kuramoto-Sivashinski. Il s'agit d'un système d'itérations couplées par diffusion ("coupled maps"). Chaté et Manneville ont mis en correspondance les amas turbulents avec des amas générés dans ce modèle avec ceux d'un réseau d'automates cellulaires probabilistes. Cependant, bien que de telles approches se développent aujourd'hui de plus en plus fréquemment, la correspondance avec des

modèles simplifiés, qui ne retiennent qu'une information très simpliste (ici soit laminaire soit turbulent) n'est pas du tout comprise. Par le biais de l'analogie avec l'équation de Burgers avec bruit, la correspondance avec un problème dirigé (ici les chemins minimaux) constitue peut-être une piste à explorer.

Polymères dirigés en milieu aléatoire

Les polymères dirigés en milieu aléatoire sont une réalisation particulière de la notion de chemin minimal dans un espace de dimension d. Comme exemple plus précis, nous pouvons penser à un polyélectrolyte, dans un gel, aligné dans une direction privilégiée par application d'un champ électrique. En l'absence de désordre, (d'impuretés) les fluctuations transverses δy d'un tel polymère sont de l'ordre de sa longueur L à la puissance 1/z:

$$\delta y \propto L^{1/z} \qquad (4.3.45)$$

où z = 2. Il s'agit simplement d'une marche aléatoire sans biais dans le plan perpendiculaire à la direction privilégiée. Les poids de Boltzmann W(x,y) d'une configuration de polymères en présence de désordre s'écrivent sous la forme de l'équation (4.3.27') que nous avons citée précédemment, et que nous rappelons ici :

$$\partial W(x,y)/\partial x = \gamma \Delta_y W(x,y) + \mu(x,y)\, W(x,y) \qquad (4.3.46)$$

où x est la direction privilégiée, y représente les d-1 autres directions, μ est un bruit Gaussien, et finalement W(x,y) est le poids de Boltzmann d'un polymère partant de (0,0) et finissant au point (x,y). Très généralement, W(x,y) prend la forme

$$W(x,y) \propto \exp\{- \langle f \rangle x - g(y^z/x) \} \qquad (4.3.47)$$

où <f> est une tension linéique. Comme les quantités importantes qui nous intéressent ici sont dans l'exposant de l'exponentielle, cela suggère d'effectuer le changement de variable présenté au paragraphe précédent de façon à nous ramener à une équation de

Burgers avec bruit additif (et non plus multiplicatif comme dans l'équation précédente 4.3.46).

Nous ne reviendrons pas au cas bidimensionnel, où un polymère est analogue à une interface.

Imbibition et Drainage en Milieu Poreux

L'analyse des phénomènes d'imbibition et de drainage d'un milieu poreux, ou plus généralement les interfaces entre deux fluides immiscibles en milieu aléatoire est encore une situation où l'on peut tenter une analyse du type de celle que nous mentionnons dans ce chapitre. Beaucoup des aspects de cette question sont traités en détail dans un article récent de Bruinsma [55]. La tension superficielle (ou linéique) est naturellement donnée par la minimisation d'énergie d'interface entre les deux fluides. Le terme soit de champ aléatoire, soit de liaisons aléatoires, provient de l'énergie d'interface entre les fluides et le milieu poreux, (ou éventuellement la surface rugueuse d'une cellule de Hele-Shaw comme dans l'exemple traité par de Gennes [56]).

Deux questions essentielles se posent dans ce contexte: La première est relative à l'existence, ou la définition, possible d'une tension superficielle effective pour un fluide dans un milieu poreux, et ce sur une échelle spatiale supérieure à la taille des pores. Ce point est encore l'objet de débats animés.

La seconde question est tout autre. Nous nous sommes pour l'instant intéressés à la structure optimale vis-à-vis de critères précis sans nous soucier de la façon dont cet optimum pouvait être atteint. Dans les systèmes magnétiques, l'équilibre est atteint par les fluctuations thermiques qui permettent de franchir les barrières d'énergie séparant différents minima. En effet, on peut montrer que la prise en compte d'une température finie non-nulle ne modifie pas les caractéristiques exposées jusqu'à présent [seconde référence de 33]. Cette atteinte de l'équilibre se fait avec une certaine dynamique qui exploite les effets de taille finie. Cela se traduit dans les faits par des convergences très lentes vers l'équilibre, avec des lois d'évolution qui présentent des exponentielles étirées. Si il n'y a pas de bruit thermique, alors l'interface sera gelée dans le premier minimum trouvé, et cela conduit à des résultats fort différents, probablement très sensibles à la dynamique qui va contrôler le premier obstacle rencontré. Très naturellement, des phénomènes d'hystéresis vont se produire. Bruinsma [55] dans cette

situation suggère l'application d'un critère de type percolation, qu'il nomme "percolation angulaire", en suivant en cela une étude récente de Cieplack et Robbins [57].

Citons encore l'étude expérimentale de Stokes et coll [58] présentant une analyse de l'écoulement de fluides diphasiques en milieu poreux, ou sur une surface rugueuse, en le comparant aux ondes de densité de charge. Nous reviendrons sur ce sujet un plus loin. Disons simplement ici, que le modèle classique d'ondes de densité de charge (Fukuyama et Lee [59], voir Fisher [60]) prend en compte des effets d'incommensurabilité qui n'ont pas lieu d'être dans un milieu poreux. D'autres modèles plus réalistes pour ce phénomène, mais voisins cependant du problème des ondes de densité de charge, et qui reproduisent qualitativement des phénomènes d'accrochage et de désancrage ("pinning" et "depinning") similaires ont été proposés par Koplik et Levine [61] (suivant une dynamique de frontière de domaines dans le problème d'Ising en champ aléatoire analogue à celle de Bruinsma et Aeppli [62]) et Webman [63]. Nous reviendrons sur ces modèles ultérieurement.

Modèle d'Eden

Changeons maintenant complètement de sujet (au moins apparemment) pour nous intéresser à un modèle de croissance, qui compte parmi les plus simples (pour une revue des modèles de croissance stochastiques voir Herrmann [64]). Ce modèle a été introduit par Eden [65] pour modéliser la croissance d'une colonie de cellules. Il conduit à la formation de structure compacte [66] (en toutes dimensions d'espace), dont la surface cependant présente des rugosités [67] dont les propriétés d'échelle ne sont pas triviales.

Commençons par brièvement rappeler les règles du modèle. Partant d'un amas déjà formé, on choisit aléatoirement un site premier voisin de l'amas et on l'inclut à cet amas. Le nombre de fois où cette étape est répétée (i.e. le nombre de sites ajouté à l'amas) constitue son "âge". Le point de départ est généralement choisi comme étant soit un site ponctuel, soit une ligne (cf Figure 4.29), soit une hypersurface de dimension d-1. Ceci constitue le variante la plus simple du modèle. On voit alors qu'il est possible de fermer des ilôts vides à l'intérieur d'un amas. Dans la suite nous excluerons comme sites de croissance possibles ceux qui ne font pas partie de la frontière extérieure. Quoi qu'il en soit, ces ilôts ne modifient pas sensiblement les propriétés des amas formés. Ils sont toujours denses et donc de dimension fractale égale à celle de l'espace [66]. Cependant la géométrie de la frontière elle-même est moins triviale, et se comporte à bien des égard comme les interfaces que nous avons étudiées précédemment.

Il existe d'autres légères variantes [68] du modèle qui se révèlent peu importantes quant aux propriétés d'ensemble asymptotiques (bien qu'elles apparaissent très importantes dans la pratique car elles ont des corrections d'échelle plus ou moins importantes). L'une d'entre elles consiste par exemple à choisir d'abord, avec une probabilité uniforme, un site intérieur (i.e. appartenant à l'amas) voisin de la frontière, puis à choisir à nouveau, si besoin en est, l'un des sites de croissance. Une telle procédure donne donc plus de poids aux sites de croissance qui sont voisins de plusieurs sites de l'amas (parties concaves à l'échelle d'un site) et moins aux sites qui ne possèdent

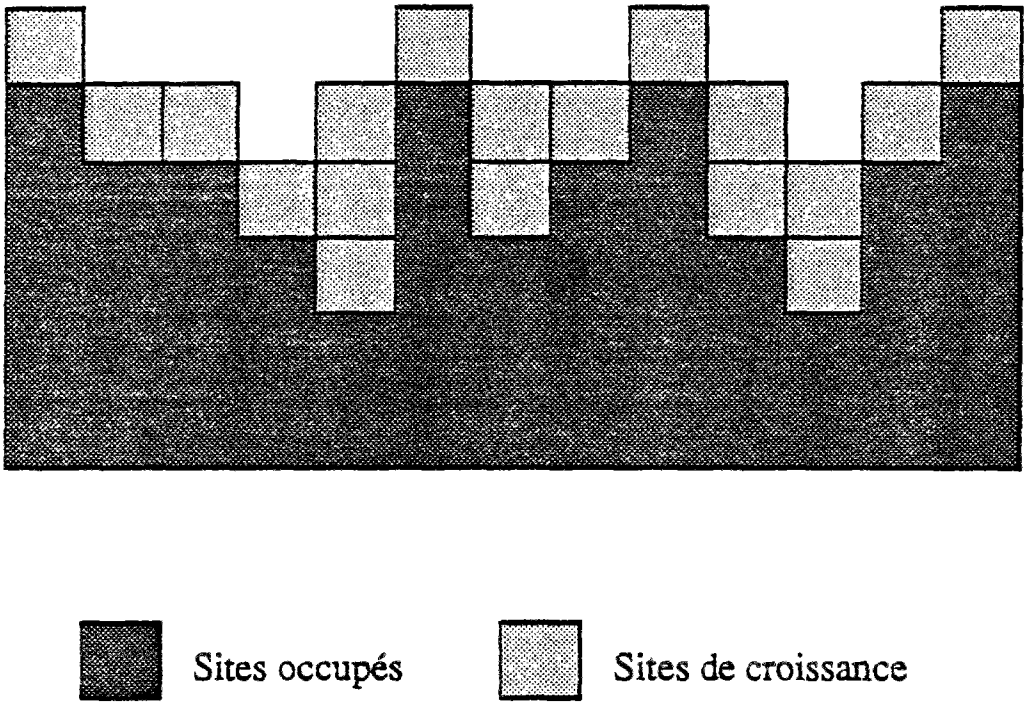


Figure 4.29 : Modèle d'Eden construit à partir d'une ligne. A chaque pas de temps, un site voisin de l'amas, choisi aléatoirement, est incorporé à cet amas. Ce dernier est compact, mais sa frontière est auto-affine.

qu'un voisin (parties convexes ou plates). Certains de ces modèles se prêtent mieux que d'autres à des démonstrations rigoureuses.

La frontière extérieure de l'amas présente un rugosité w, qui évolue avec le temps, t, selon la forme maintenant classique:

$$w = L^{\chi}\, \varphi(t / L^{z}) \qquad (4.3.48)$$

Si l'on part d'une semence linéaire de taille L, il en découle les comportements à temps courts ($t >> L^z$):

$$w \propto t^{\chi/z} \qquad (4.3.49)$$

et à temps longs ($t >> L^z$)

$$w \propto L^{\chi} \qquad (4.3.50)$$

Ce comportement a été pour la première fois identifié pour ce modèle par Jullien et Botet [68].

Les études numériques concernant ces exposants sont nombreuses [49, 67, 68, 69, 70, 71, 72,...]. Sans vouloir être exhaustif, citons simplement les trois études les plus intensives. A deux dimensions,

- les études de Meakin, Jullien et Botet [70] qui donnent $\chi/z = 0.307 \pm 0.007$, $\chi = 0.500 \pm 0.005$ et $z = 1.62 \pm 0.02$,
- celles de Zabolitsky et Stauffer [71] qui fournissent $\chi/z = 0.33$, et $\chi = 0.511 \pm 0.025$ en incluant dans leur analyse des corrections d'échelle. Ces dernières sont dans ce problème tout à fait considérables et, surtout, elles sont non-monotones, c'est-à-dire que l'exposant χ/z apparent commence par décroître (jusqu'à environ 0.26) puis augmente avec la taille du système (sans être stabilisé pour des tailles d'amas de 10^9!). Cette

variation non-monotone est assez curieuse, si l'on se réfère aux corrections d'échelle rencontrées dans d'autres contextes.

- et enfin citons les études de Wolf et Kertész [72] qui utilisent une technique dite de "réduction de bruit" et qui permet d'avoir accès à des systèmes de "très grande" taille effective sur des "petits" réseaux. Ces derniers obtiennent $\chi/z = 0.326 \pm 0.015$.

A trois et quatre dimensions, les études sont bien sûr moins précises et ont conduit dans le passé à des conclusions erronées de par la trop petite taille des systèmes considérés. En particulier, ces études semblaient indiquer que le front avait une largeur qui évoluait proportionnellement au logarithme du rayon (ou de la masse) de l'amas, soit $\chi/z = 0$. A quatre dimensions, il semblait même que la largeur du front puisse saturer à une valeur finie.

Les études de systèmes de grandes tailles par Zabolitzky et Stauffer [71], ou utilisant une technique de réduction de bruit, par Wolf et Kertész [49], montrent que l'exposant χ/z est non nul. Après avoir atteint un minimum, $\chi/z = 0.1$, pour une taille d'amas de l'ordre de 10^3, l'exposant tangent augmente à nouveau. Wolf et Kertész estiment $\chi/z = 0.22 \pm 0.02$ et $\chi = 0.33 \pm 0.01$ à trois dimensions, et $\chi/z = 0.146 \pm 0.015$ et $\chi = 0.24 \pm 0.02$ à quatre dimensions. Ces valeurs leur ont suggéré la conjecture (4.3.42 et 4.3.43) citée précédemment :

$$\chi = 1/d \qquad (4.3.51)$$

et en utilisant $\chi + z = 2$

$$z = 2\text{-}1/d \qquad (4.3.52)$$

Dans le cas bidimensionnel, Kardar, Parisi et Zhang [41] ont suggéré que ce modèle pouvait être décrit par le modèle d'interface minimale discuté précédemment, et gouverné par l'équation

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} = A\,\Delta h + B\,(\nabla h)^2 + \mu(x,t) \qquad (4.3.53)$$

où h(x,t) représente la position de la frontière à un instant t, en supposant que cette frontière puisse être décrite par une simple fonction univaluée (i.e. en excluant tout retour en arrière de la surface). La présence du terme de bruit est naturelle. Le second terme, non-linéaire, provient de l'invariance du modèle par rotation. La figure 4.30 illustre ceci à deux dimensions en considérant à grande échelle (pour passer à une équation continue) une portion de frontière inclinée par rapport à la direction de croissance moyenne d'un angle $\theta = \partial h/\partial x$. Une croissance à la vitesse V normale à la surface, devient dans la direction moyenne, au second ordre en θ, $V(1-(\partial h/\partial x)^2/2)$. En soustrayant le terme trivial V qui traduit l'avancée régulière de la frontière (proportionnel au nombre de particules ajoutées), nous obtenons une contribution du type du second terme de l'équation (4.3.53). Quant au terme diffusif, Δh, irrelevant dans l'analyse des propriétés d'échelle de la rugosité du front, il provient de l' énergie de courbure du front. Si la correspondance avec le modèle continu, établie sur des bases purement qualitatives, se révèle pertinente, nous obtenons à deux dimensions

$$\chi = 1/2 \qquad (4.3.54)$$

et

$$z = 3/2 \qquad (4.3.55)$$

comme le donnait la conjecture précédente (4.3.51, 52). A trois et quatre dimensions, nous avons vu dans l'analyse de Kardar et Zhang [47], qu'existait un point fixe à fort désordre qui donnait des exposants non-triviaux. Ces exposants obtenus numériquement dans l'étude des polymères dirigés en milieu aléatoire, (mentionnés au paragraphe qui est consacré à ce sujet) sont compatibles avec les simulations citées ci-dessus et avec la conjecture de Wolf et Kertész [49] (Eq.(4.3.42 et 4.3.43)).

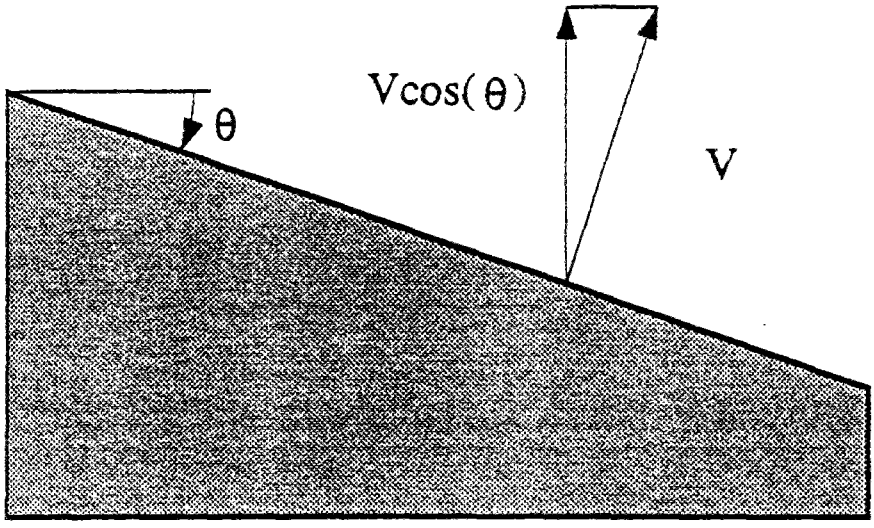


Figure 4.30 : Illustration schématique de l'origine du terme "convectif" non-linéaire dans la description de la croissance de l'interface d'Ising par une équation continue, telle que proposée par Kardar, Parisi et Zhang.

Comment pouvons nous établir le lien entre ce modèle et les chemins minimaux que nous avons considérés jusqu'à présent ? Nous allons présenter une méthode qui permet de faire le lien naturellement.

Considérons un modèle de croissance d'Eden, construit à partir d'une ligne de longueur L, et des conditions aux limites périodiques parallèlement à cette droite (croissance sur un cylindre à partir d'une section droite circulaire). Pour chaque site, i, nous calculons l'intervalle de temps, Δt_i, qui sépare le temps t_{i1} où, pour la première fois ce site s'est trouvé sur la frontière de l'amas, et du temps t_{i2} auquel ce site a été inclus à l'amas, $\Delta t_i = t_{i2} - t_{i1}$. Comme l'amas est compact, chaque site du réseau se verra attribuer un intervalle de temps Δt_i bien défini.

Lorsque la longueur de l'interface aura atteint sa valeur asymptotique, (de fait, après un régime transitoire très bref [71]) la distribution des intervalles de temps se stabilisera. Compte tenu de l'indépendance statistique du choix des sites de croissance, il resulte une loi de distribution de Δt exponentielle :

$$P(\Delta t = n) = x^n (1-x) \qquad (4.3.56)$$

avec $x = 1/\mathcal{L}$, où $\mathcal{L}$ représente la longueur moyenne d'interface, proportionnelle à L. La figure 4.31 montre une telle distribution obtenue numériquement, dans la géométrie définie ci-dessus. De façon à rendre cette distribution indépendante de la taille du système, nous redéfinissons des variables réduites $z_i = (\Delta t_i / L)$. Compte-tenu du fait que $\mathcal{L}$ est proportionnelle à L, $\mathcal{L} = a L$, nous obtenons une loi de distribution des z_i en passant à la limite continue:

$$P(z) = (1/a) \exp(-z/a) \qquad (4.3.57)$$

Cette loi est bien observée numériquement.

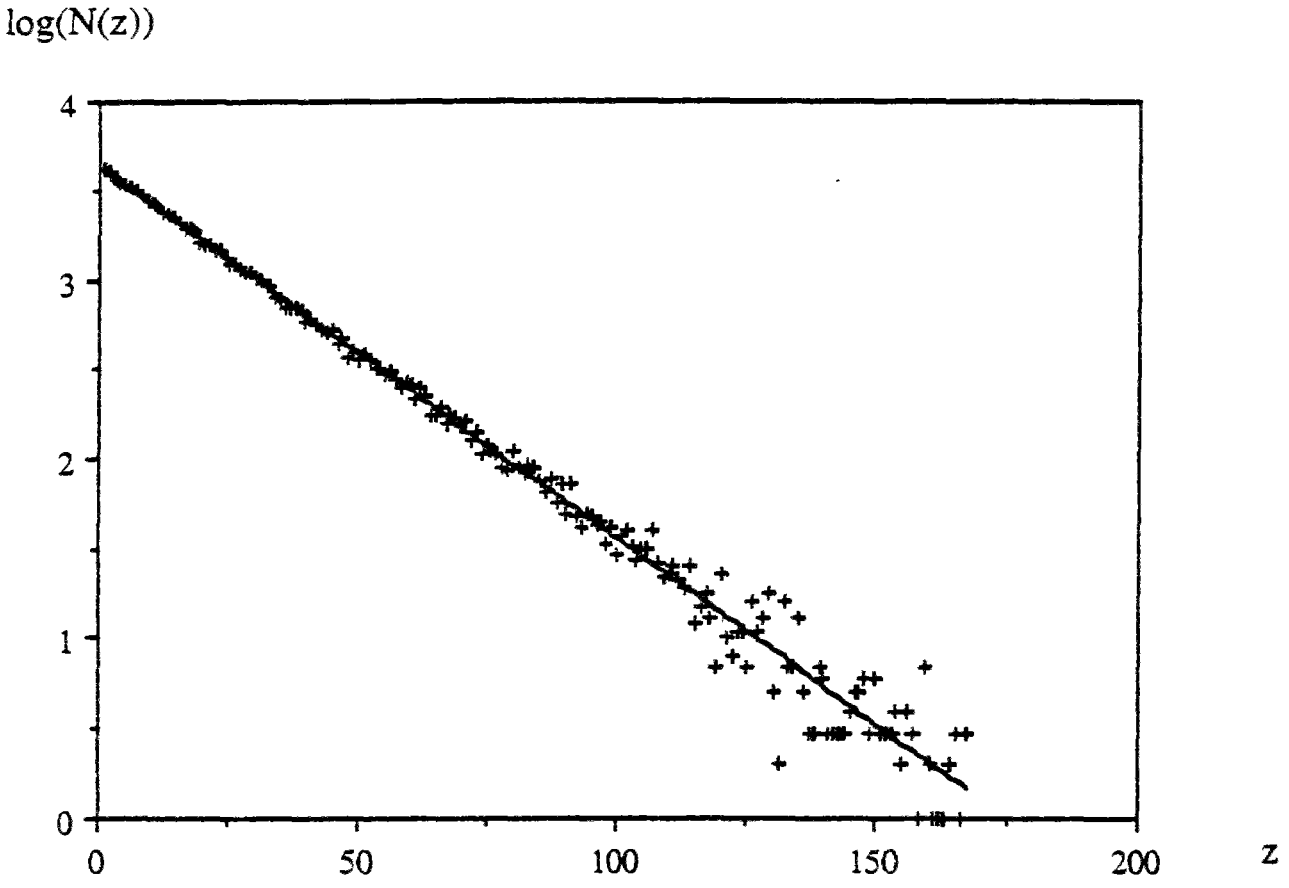


Figure 4.31 : Distribution de pondération locale reconstruite à partir des temps d'attente des sites frontières dans le modèle d'Eden. Cette distribution a été obtenue par simulation numérique. Comme attendu, elle est exponentielle et apparaît donc comme linéaire dans le diagramme semi-logarithmique.

Partant de la construction des variables z_i nous pouvons maintenant reformuler le modèle d'Eden en termes de chemins minimaux. En effet, à chaque site i nous associons une variable y_i définie comme

$$y_i = \mathrm{Min}_{\mathcal{P}_i}\left(\sum_{j\in\mathcal{P}_i} z_j\right) \qquad (4.3.58)$$

où $\mathcal{P}_i$ désigne l'ensemble des chemins joignant le site i à la base. Par construction même, y_i est exactement le temps d'incorporation du site i à l'amas, à un facteur L près, $y_i = t_{i2}/L$.

La correspondance est maintenant claire. L'amas d'Eden à un instant t sera obtenu comme l'ensemble des sites situés à une "distance" de la base y inférieure à $Y = (t/L)$, la distance y étant évaluée comme le minimum de la somme des pondérations aléatoires z_i sur les chemins qui joignent le site i à la base. Enfin, les variables z_i sont distribuées selon la loi de distribution exponentielle (4.3.57).

Partant de cette construction, nous pouvons appréhender les lois d'échelle de la rugosité du front sous un nouveau jour: en comparant ce problème à celui, apparenté, de la percolation sous gradient [73].

Les variables y_i augmentent en moyenne linéairement avec la distance "vraie" à la base, h_i. Nous pouvons donc annuler cette dépendance triviale en divisant les variables y_i par leur cote h_i, $x_i = y_i/h_i$. Dans ce cas, l'amas d'Eden sera l'ensemble connexe des sites dont la variable x est inférieure à $X(h) = Y/h$. Cette formulation est alors très voisine de la percolation sous gradient. Elle est même identique dans le cas où la norme utilisée dans la définition (4.3.58) est la norme "infinie" introduite précédemment (et obtenue on changeant la somme par le maximum dans l'équation (4.3.58)).

Rappelons très brièvement de quoi il s'agit : Supposons que les sites d'un réseau sont présents avec une probabilité p(h) fonction de la distance à un bord, h, et absent sinon. L'amas "infini" sera limité par un front, situé en moyenne à une distance h_c telle que $p(h_c) = p_c$, le seuil de percolation, lorsque le gradient de probabilité, $g = \partial p/\partial h$, sera suffisamment faible. La largeur du front, w, définie comme la rugosité précédente, sera fonction du gradient. Elle suivra la loi:

$$w \propto g^{-\nu/(1+\nu)} \qquad (4.3.59)$$

où ν est l'exposant de la longueur de corrélation. Une façon simple de retrouver ce résultat, consiste à observer que le front s'étend sur une largeur telle qu'en ses extrémités, la distance au seuil, h_c, est inférieure à la longueur de corrélation locale $\xi(h)$. Ou encore

$$w = \xi(h) \propto \{g(h-h_c)\}^{-\nu} \qquad (4.3.60)$$
$$w \propto \{gw\}^{-\nu}$$

qui conduit à la loi d'échelle (4.3.59).

Reformulons cet argument de façon à mieux voir comment l'adapter à notre problème. Plutôt que d'introduire une longueur de corrélation, nous pouvons raisonner à partir des fluctuations de seuil effectif. Pour un système de taille L, les fluctuations de seuils effectifs, $p_c(L)$, varient comme $L^{-1/\nu}$. En percolation sous gradient, la longueur qui va contrôler ces fluctuations sera la taille du front, w. En ce sens, le problème est "local". Ces fluctuations de seuil se traduisent par des fluctuations spatiales de la position du front, dont l'amplitude sera $(w^{-1/\nu}/g)$. Cette même amplitude définit le front lui-même:

$$w = (w^{-1/\nu}/g) \qquad (4.3.61)$$

ce qui permet de retrouver la loi (4.3.59).

Pour les chemins minimaux, nous connaissons des caractéristiques identiques. Nous avons vu, en particulier, que les fluctuations de pondération minimale suivaient une loi d'échelle avec la taille du système, $L^{-1/\mu}$. Dans notre modèle, la taille importante pour ces fluctuations ne sera plus la largeur du front comme précédemment, mais la distance à la base, h. En effet, le problème n'est plus local mais global. Ces fluctuations, proportionnelles à $h^{-1/\mu}$, donneront lieu à un front de largeur w estimée comme ci-dessus, (voir Figure 4.32):

$$w = (h^{-1/\mu})/g \qquad (4.3.62)$$

Finalement, pour conclure, il nous faut connaître le gradient g. Celui-ci s'obtient sans difficulté en notant que la limite X(h) varie selon h comme Y/h. Le gradient sera donc $g \propto Y/h^2 \propto x_\infty/h$. Ainsi

$$w = h^{1-1/\mu} \qquad (4.3.63)$$

ou en utilisant les notations précédentes: $\chi/z = 1-1/\mu$. Compte-tenu des valeurs présentées ci-dessus pour μ, ($\approx 3/2$), nous obtenons $\chi/z = 1/3$ en accord avec les estimations rappelées ci-dessus.

Partant de la correspondance explicitée, nous pouvons tirer une information additionnelle concernant la forme asymptotique de l'amas d'Eden sur réseau, lorsqu'il est généré à partir d'une semence ponctuelle. Pour nous fixer les idées, considérons le cas du réseau carré étudié en particulier de façon intensive par Zabolitsky et Stauffer [71]. La forme générale de l'amas peut être décrite par une ligne frontière que nous repérons en coordonnées polaires $\rho(\theta)$. La connaissance de cette ligne est suffisante car la largeur du front croît moins vite que le rayon de l'amas. De par la construction que nous avons utilisée, $\rho(\theta)$ sera simplement proportionnel à la pondération minimale des chemins sur réseau carré, en imposant une direction moyenne de croissance dans la direction d'angle

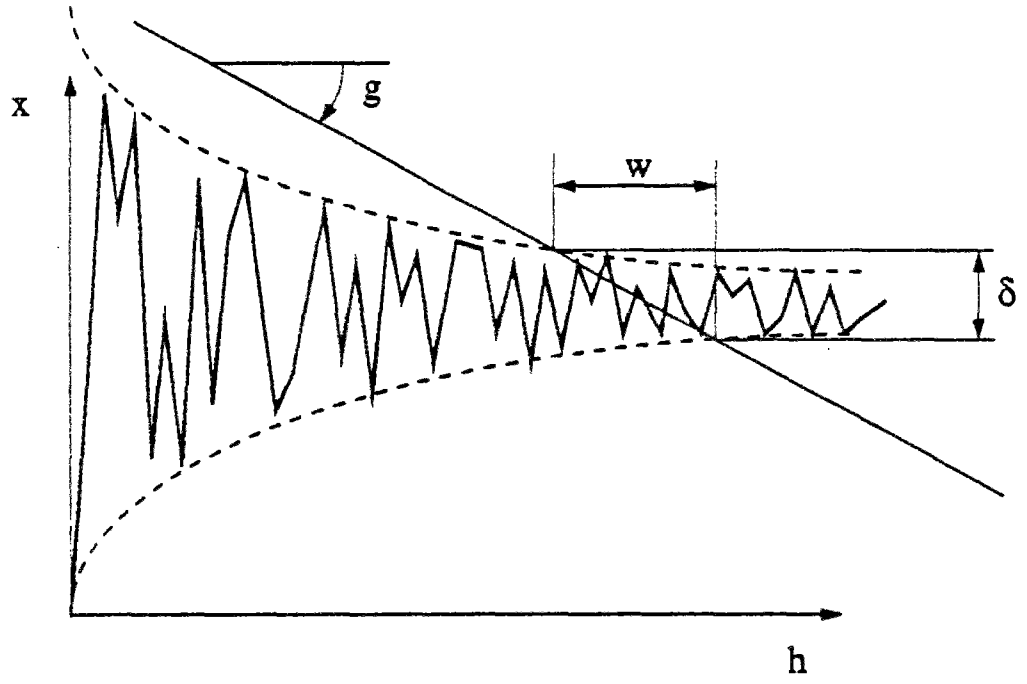


Figure 4.32 : Représentation schématique du gradient dans le problème de chemin minimal. Le seuil effectif local, x, (trait noir) fluctue autour du seuil asymptotique avec une amplitude, δ, fonction de la hauteur, h. (L'enveloppe des fluctuations est représentée en pointillés.) Dans un gradient de probabilité, représenté par la droite de pente -g, le front s'étendra sur une largeur w, qu'il est facile de relier à la hauteur et au gradient, lui-même proportionnel à l'inverse de la hauteur.

polaire θ, (e.g. en partant et en arrivant sur une ligne perpendiculaire à cette direction). Le fait que la pondération minimale varie avec θ donne un profil moyen non-circulaire (circulaire est à entendre ici au sens de la métrique qui permet d'évaluer les distances sur le réseau; pour un réseau carré, un cercle est un carré !). Une étude spécifique de ce problème serait à même de donner précisément la forme asymptotique de l'amas et ce très simplement. Les études de Hirsch et Wolf [74], et celles de Wolf [74], fournissent des informations intéressantes pour poursuivre cette démarche. Ces auteurs ont, en effet, montré que la longueur de l'interface, $\mathcal{L}/L = a$, variait avec la direction de croissance moyenne, et à partir de cette information, ils ont approché la forme asymptotique de l'amas d'Eden. La démarche que nous proposons est très voisine, mais la formulation en termes de chemin minimum suggère que l'obtention du seuil peut se faire de façon très précise, et peu onéreuse à la fois. Notons également le résultat analytique de Dhar sur la forme de l'amas d'Eden en grandes dimensions d'espace.

Dans ces conditions, la croissance d'un amas d'Eden à partir d'une source ponctuelle est inadaptée pour l'analyse du front, puisque la forme du front est variable avec θ et que donc se superpose au gradient radial, une composante transverse du gradient, fonction de l'angle polaire. Au contraire, à partir d'une semence linéïque, la géométrie est invariante, et la position moyenne du front reste invariante (droite).

Modèles de front d'empilement

Ils constituent toute une famille de modèles de croissance que l'on qualifie souvent d' "agrégation ballistique". Les premiers travaux en la matière, par Vold [75] sont assez anciens, et ont été passablement ignorés à cette époque. L'activité autour des fractals puis des objets auto-affines a remis ce sujet à l'honneur.

Un empilement est progressivement construit par addition de particules, sur ou hors réseau. Ces particules sont lâchées initialement avec une égale probabilité sur l'ensemble du milieu (d'où le nom de modèle de "pluie", ou "rain model"), puis se stabilisent dans un petit voisinage de leur point de départ, en fonction de règles que nous allons préciser. Ces dépots successifs modifient ainsi le front de l'empilement, mais pas sa structure. Encore une fois, les empilements ainsi générés sont denses, mais la rugosité de leur front suit la loi d'échelle

$$w = L^{\chi}\, \varphi(t / L^{z}) \qquad (4.3.64)$$

maintenant classique, pour un système de taille L.

Beaucoup de variantes de modèles ont été introduites. Définissons d'abord les plus typiques, en commençant par les modèles sur réseaux.

A:

Modèle de Bensimon, Shraiman et Liang [76] et Meakin, Ramanlal, Sander et Ball [46] (modèles "NN" et "NNN"). Figure 4.33. Partant d'un front plat, sur réseau carré, les particules (sites) sont progressivement ajoutées à une abscisse, x, choisie aléatoirement, et à la cote maximum, z, telle qu'un site voisin soit déjà occupé par un site de l'empilement. Le voisinage étant à entendre ici soit en premier, soit en premier et second voisins. Par construction, ce modèle ressemble de très près au modèle d'Eden. La différence avec celui-ci consiste à ne considérer comme sites de croissance que ceux qui

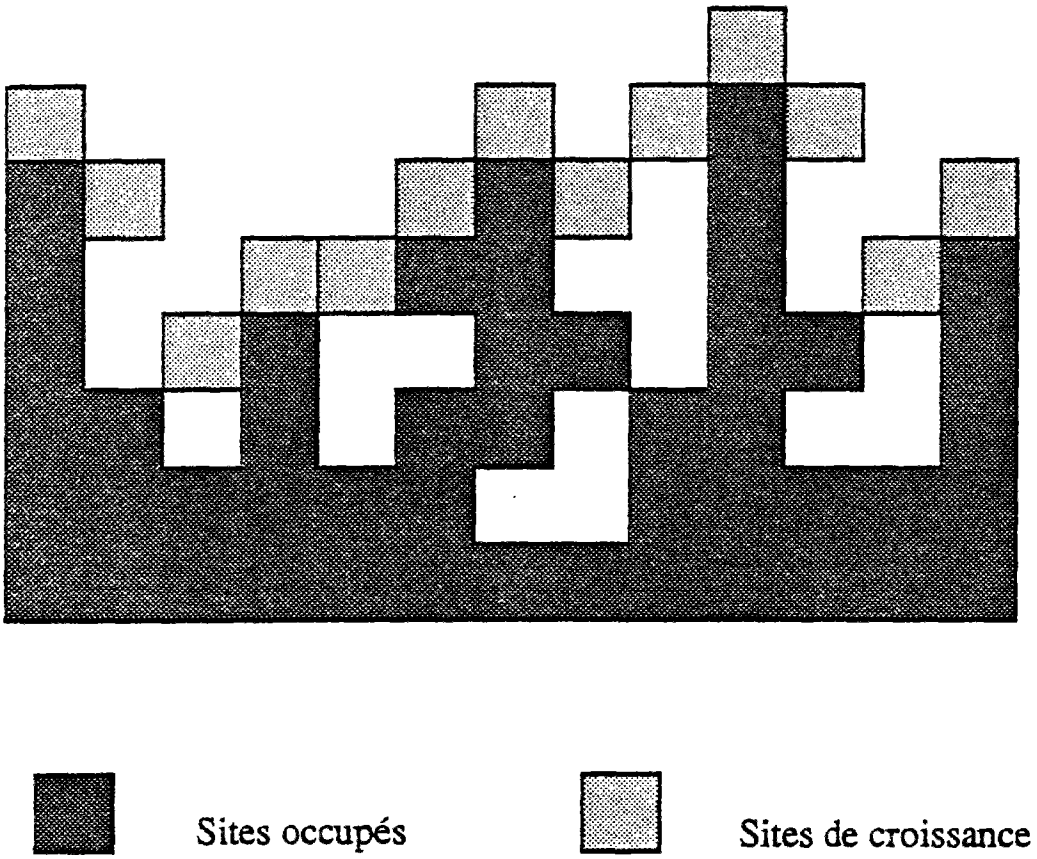


Figure 4.33 : Modèle d'empilement (A). A chaque pas de temps, une "particule" est lâchée au- dessus de l'empilement, et descend verticalement de site en site, jusqu'à ce qu'elle rencontre, dans son voisinage immédiat, un site déjà occupé. Alors, le site occupé par la particule est ajouté au reste de l'empilement.

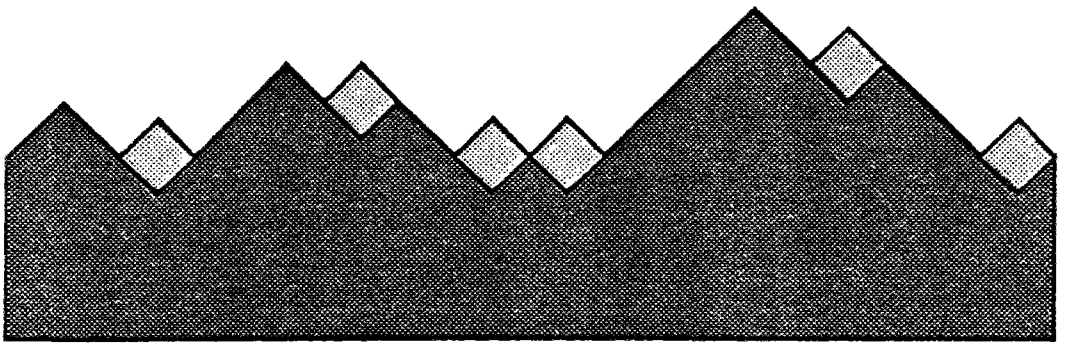
peuvent être atteints les premiers par une trajectoire perpendiculaire à la direction moyenne du front. Or, en tant qu'objet auto-affine, le front du modèle d'Eden a, comme nous l'avons vu précédemment, un nombre de sites de croissance proportionnel à la surface totale du réseau, L^{d-1}. Dans le modèle A, ce nombre est exactement égal à L^{d-1} (il y a un et un seul site de croissance par colonne). La fraction de sites écartés est donc finie (non-nulle) et donc nous nous attendons à observer pour ce modèle un comportement similaire au modèle d'Eden, à savoir formation d'un amas compact de frontière auto-affine, caractérisé par les mêmes exposants que précédemment. Les simulations numériques fournissent les estimations suivantes [46]: $\chi = 0.475$ et $\chi/z = 0.308$. A trois dimensions, ces mêmes auteurs donnent : $\chi = 0.33$ et $\chi/z = 0.24$

B:

Modèle de Meakin, Ramanlal, Sander et Ball [46] ("single step"). Figure 4.34. Sur un réseau carré, incliné à $\pi/4$, le front de départ est constitué de "dents" identiques disposées régulièrement. Le front consiste donc en portions successives de pente soit 1, soit -1. Un minimum quelconque de ce front est choisi avec une égale probabilité pour toutes les vallées, et un site y est ajouté. Ce minimum local devient alors un maximum local. A nouveau, nous pouvons comparer ce modèle au modèle d'Eden. Cette fois-ci, nous restreignons la croissance aux sites ayant deux plus proches voisins déjà occupés. Le mode de construction, sur réseau carré, conduit à des amas compacts de densité unité. Meakin et coll [46] donnent les valeurs suivantes à deux dimensions : $\chi = 0.502$ et $\chi/z = 0.330$ et à trois dimensions : $\chi = 0.363$ et $\chi/z = 0.23$.

C:

Modèle de Meakin et Jullien [77] (Modèle IV). Figure 4.35. Partant d'une géométrie similaire au modèle précédent, les particules sont lâchées avec une densité de probabilité uniforme sur l'ensemble du système. Elles tombent alors verticalement jusqu'à ce qu'elles rencontrent le front, puis suivent la pente locale jusqu'à atteindre un minimum



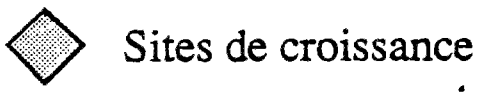


Figure 4.34 : Modèle d'empilement (B). Sur un réseau carré incliné à $\pi/4$, à chaque pas de temps, un minimum local est choisi aléatoirement (avec équiprobabilité), et un site y est alors ajouté. Les sites susceptibles de croître sont indiqués en gris clair.

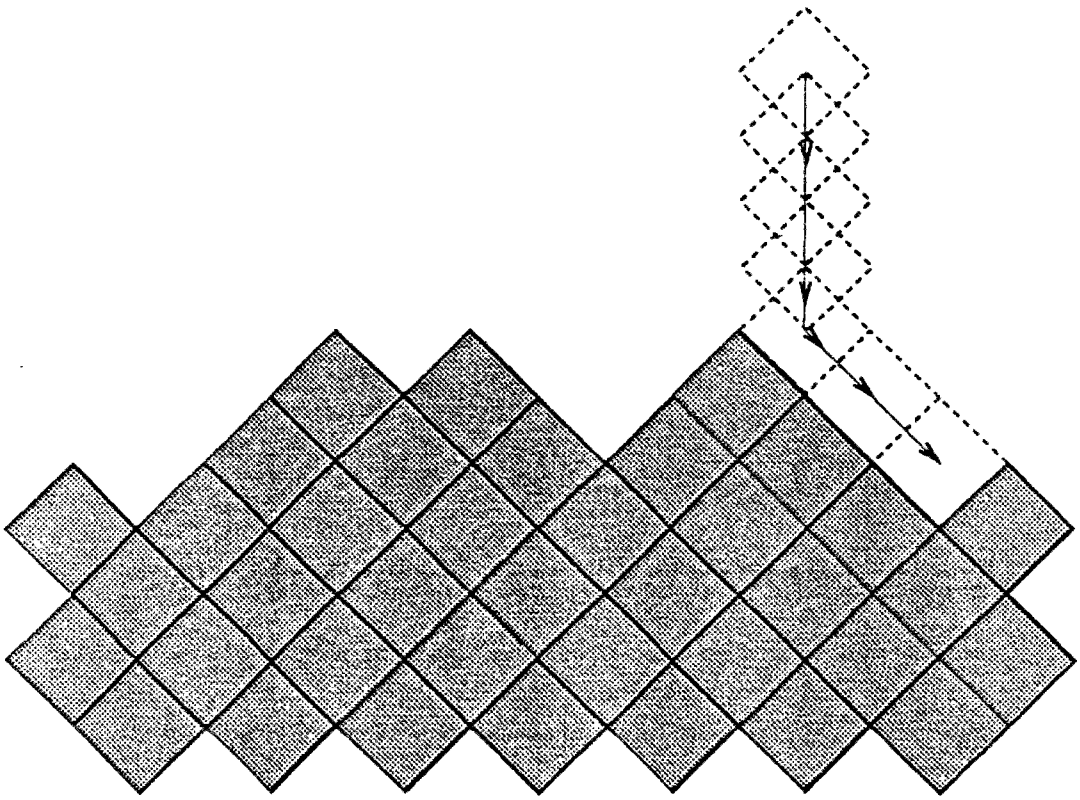


Figure 4.35 : Modèle d'empilement (C). Sur un réseau carré incliné à $\pi/4$, à chaque pas de temps, une colonne est choisie aléatoirement, et une "particule" y est alors placée. Cette particule tombe verticalement, jusqu'à ce qu'elle rentre en contact avec l'empilement, puis elle suit la pente locale jusqu'à arriver dans un minimum local qui est alors occupé. La différence avec le modèle précédent (B) vient de la probabilité de croissance d'un minimum, qui est ici proportionnelle à la largeur de la vallée qui y conduit.

local. Nous voyons donc que ce modèle est très proche du précédent mais maintenant la probabilité de croissance d'un minimum est proportionnelle à la taille de la vallée qui y conduit. Dans ce cas, la connection avec un modèle d'Eden ne peut plus être faite car la répartition des probabilités de croissance n'est plus uniforme. (Pour poursuivre ce type de correspondance, nous pourrions penser au modèle de Niemeyer et coll. [78], avec un exposant η négatif, alors que le modèle d'Eden est obtenu pour $\eta = 0$, et le DLA pour $\eta = 1$. Nous reviendrons sur ce cas au chapitre prochain.) Les résultats obtenus sont les suivants: $\chi \approx 0.5$ et $\chi/z = 0.252 \pm 0.003$.

D:

Modèle de Jullien et Meakin [79]. Il s'agit encore d'un modèle de dépot ballistique sur réseau carré, mais dans ce cas la "densité" de la pluie est élevée. Lorsqu'il n'y a pas d'obstacle, la pluie tombe à vitesse constante. Mais à proximité de l'amas, certaines particules ne peuvent pas tomber car le site qui leur est inférieur est déjà occupé. Ainsi des règles sont définies de façon à donner le mode d'évolution des particules en présence d'obstacles. La règle consiste alors à occuper un site de cote inférieure d'une unité à la position actuelle sur une colonne adjacente, lorsque l'un de ces sites est vacant. Nous voyons alors que pour une faible densité de la "pluie", ce modèle se rapproche du modèle précédent (C), alors que pour une très forte densité, une particule n'aura pas le temps de diffuser jusqu'à un site optimal et ainsi ce modèle rejoint le cas limite du modèle d'Eden. C'est en effet ce qui est observé puisque χ/z varie de 0.23 à 0.325 lorsque la densité de la pluie varie de 0.1 à 0.9 [79].

E:

Modèle de Family [80] illustré sur la figure 4.36. Il s'agit encore d'un cas de croissance à partir d'une pluie uniforme de particules. Cette fois, chaque particule tombe verticalement sur l'amas et va se positionner sur le site le plus bas situé dans un voisinage fixe de son point d'impact. La taille du voisinage considéré n'a pas de conséquence sur

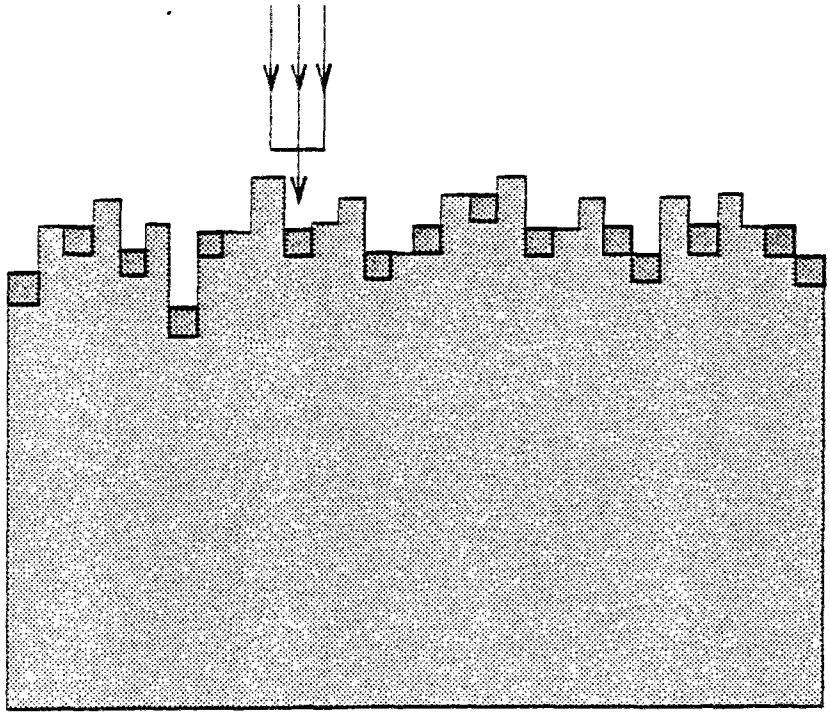


Figure 4.36 : Modèle d'empilement (E). Sur réseau carré droit, une particule est lâchée à une abscisse aléatoire, x, puis occupe le site accessible le plus bas dans un voisinage fixe de son abscisse de départ, $[x-\Delta,x+\Delta]$. Les sites susceptibles de croître sont indiqués en gris foncé, pour $\Delta = 1$.

les propriétés de rugosité du front, tant que le nombre de sites à choisir n'est pas reduit au seul site où l'impact a lieu. Dans ce dernier cas, il est trivial de remarquer que le modèle n'est plus de dimension d, mais qu'il est une superposition de L^{d-1} colonnes sans interactions mutuelles. Alors la rugosité sera simplement proportionnelle à la racine carrée de la hauteur moyenne. Dans le cas général, les simulations numériques donnent [80] $\chi/z = 0.25 \pm 0.01$ et $\chi = 0.48 \pm 0.02$.

Modèles hors-réseau

F:

Modèles de Meakin et Jullien [77] (Modèles I, II et III). Figure 4.37. Il s'agit ici de modéliser le dépot de disques ou de sphères dans un empilement, et de décrire la restructuration locale de chaque particle au moment de son incorporation à l'amas. Différents étapes ont été modélisées. La première (I) consiste simplement à laisser la dernière particule ajoutée à l'endroit même où elle rencontre un obstacle. Dans le second modèle (II), le disque va continuer à rouler sur l'amas, comme sous l'action de la gravité jusqu'à ce qu'il trouve un second contact. Dans le troisième modèle (III) finalement, on impose que chaque particule ait deux contacts stables; dans le cas contraire, elle continue de rouler sous l'action de la gravité jusqu'à ce qu'elle acquiert une situation stable. Toutes ces situations sont considérées hors réseau. La version du troisième modèle sur un empilement cristallin ou sur réseau donne le cas C cité précédemment. Les résultats des simulations se traduisent dans les cas I, II et III par les estimations suivantes:

cas I : $\chi/z = 0.33 \pm 0.03$

cas II : $\chi/z = 0.31 \pm 0.02$

cas III : $\chi/z = 0.31 \pm 0.01$.

A trois dimensions, les simulations numériques de Jullien et Meakin [81] ne permettent pas d'aboutir à une conclusion définitive. En fait, la rugosité en fonction de la hauteur ne montre, en coordonnées bi-logarithmiques, aucun régime en loi de puissance.

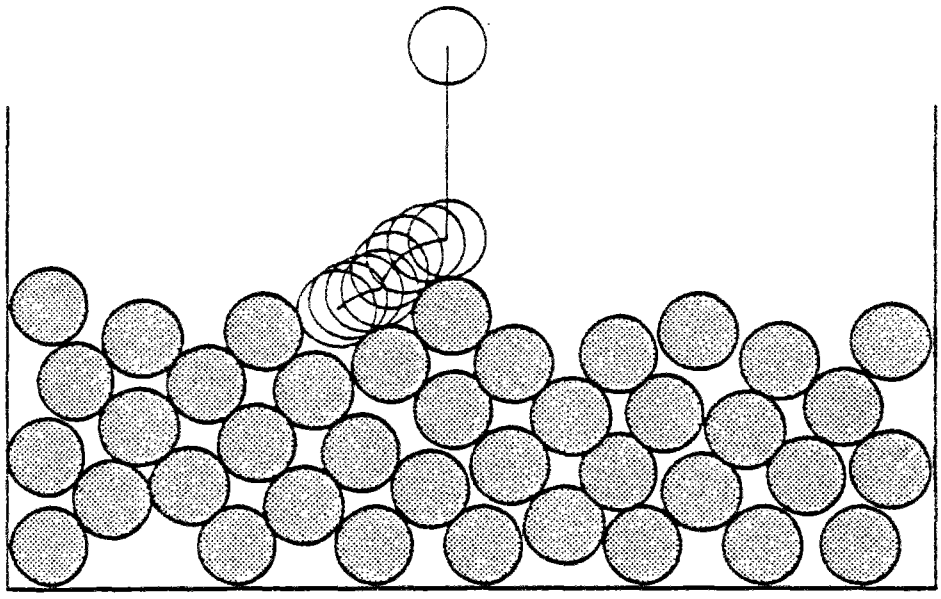


Figure 4.37 : Modèle d'empilement hors réseau (F). Un disque est lâché à une abscisse aléatoire, et tombe verticalement jusqu'à rencontrer l'empilement. Dans la version I, le disque reste alors dans cette position. Dans la version II, le disque continue à rouler jusqu'à établir un second contact. Dans la version III, le mouvement se poursuit jusqu'à obtenir un point d'équilibre stable.

Les simulations rapportées, faites hors réseaux, ne sont utiles que pour des quantités qui se comportent "bien", comme la coordinance locale, ou la compacité mais elles se révèlent mal adaptées à l'étude de la structure du front. Elles permettent également de prendre en compte partiellement la ségrégation dans les empilements de particules de plusieurs tailles [82].

Dans ce qui précède, nous avons délibérement ignoré certains aspects liés à la structure de l'empilement. En particulier, dans le cas d'un dépôt ballistique effectué selon une orientation non-orthogonale au plan, il se développe une anisotropie des contacts selon une direction propre distincte de celle du dépot. Il existe sur ce sujet de nombreuses études incluant certaines références que nous avons déjà citées [46,77]. Ces différentes propriétés se décrivent raisonnablement bien par une théorie de champ moyen [83] et nous ne les traiterons pas.

Que retenir finalement de ces différents modèles ? Malgré les variations des règles qui ont été considérées, les résultats à deux dimensions sont assez nettement répartis en deux groupes : l'un caractérisé par un exposant voisin de $\chi/z = 1/3$, (voire 0.3 comme pour certaines simulations numériques du modèle d'Eden), alors que l'autre est plus proche d'une valeur de $\chi/z = 1/4$.

- Le premier groupe rassemble les modèles A, B, D (forte densité) et F. Nous avons déjà argumenté du fait que les trois premiers cas pouvaient être rangés dans la catégorie des modèles d'Eden avec des règles de sélection de sites de croissance particulières. Le modèle F apparaît comme une version hors réseau de ces variations, ce qui n'a que peu d'incidence sur les lois d'échelle observées, et ce malgré les différents degrés distingués dans ce dernier cas. Suivant les sections précédentes, ces modèles devraient être décrits par une équation de Burgers avec bruit, comme suggéré par Kardar, Parisi et Zhang [41].

- Le second groupe comprend les cas C, D (faible densité) et E. Il est tentant de mettre ces modèles dans la classe du modèle d'Edwards et Wilkinson (équation de diffusion

simple avec bruit), qui se distingue de l'équation de Burgers par l'absence du terme non-linéaire. La justification de cette correspondance n'est cependant pas toujours simple, elle apparait souvent comme *ad hoc*, en fonction des résultats obtenus. Souvenons-nous de la figure 4.30 qui explicitait l'origine du terme non-linéaire de l'équation de Burgers pour le modèle d'Eden. Suivant Kardar et coll., nous avions attribué son apparition à la projection de la vitesse de croissance locale sur la normale au plan moyen du front. Or dans les modèles C et E, la croissance se fait toujours de façon normale. Mais pour le modèle B, cette croissance est également toujours normale, bien que ce modèle appartienne au premier groupe. Et la différence entre B et C provient d'une pondération différente des probabilités des sites de croissance.

Etat critique auto-organisé

Le modèle d'"état critique auto-organisé" ("Self-organized criticality") a été introduit récemment par Bak et coll. [84,85,86]. Ces auteurs mettent plus l'accent sur la philosophie de ce modèle que sur les détails du modèle illustrant ces idées. Nous avons brièvement évoqué l'idée de base de cette auto-organisation d'un état critique, par le caractère attractif et stable du point critique dans la dynamique du phénomène. Néanmoins, nous allons considérer ici spécifiquement le modèle précis que Bak et coll. proposent, à cause des aspects communs que ce modèle partage avec, d'une part le paragraphe précédent, et d'autre part l'ensemble de ce chapitre.

Il s'agit d'un modèle de "tas de sable", avec restructuration locale, restructuration qui affecte non seulement la dernière particule ajoutée, mais aussi éventuellement d'autres particules déjà implantées dans l'empilement. Commençons par présenter les règles du modèle à une dimension.

Sur une ligne, nous imaginons qu'existe un empilement, caractérisé par une série de hauteurs entières, h_i, (une à chaque site i). Nous introduisons les pentes locales $z_i = h_i - h_{i+1}$. Lorsqu'une particule est ajoutée au site i, h_i, est incrémenté d'une unité, donc z_i également, alors que z_{i-1} est décrémenté d'une unité.

$$\begin{aligned} z_i &\rightarrow z_i + 1 \\ z_{i-1} &\rightarrow z_{i-1} - 1 \end{aligned} \qquad (4.3.65)$$

Lorsque la pente locale de l'empilement dépasse une certaine valeur, z_c, alors se produit un réarrangement (une amorce d'avalanche) tel qu'une particule est enlevée du site i et ajoutée au site i+1. Ainsi, pour $z > z_c$:

$$\begin{aligned} z_{i+1} &\rightarrow z_{i+1} + 1 \\ z_i &\rightarrow z_i - 2 \\ z_{i-1} &\rightarrow z_{i-1} + 1 \end{aligned} \qquad (4.3.66)$$

Il est concevable également de symétriser le problème en effectuant l'opération opposée à (4.3.66) lorsque $z_i < z_c$. Cette opération est utile lorsque la pente moyenne imposée est nulle (e.g. conditions aux limites périodiques), mais ne l'est pas pour une pente moyenne positive (cas considéré par Bak et coll.)

Maintenant nous pouvons considérer deux grandes familles de problèmes: D'une part, le système peut recevoir des particules en chaque site et être d'extension infinie, ou bien finie mais avec des conditions aux limites périodiques. D'autre part, le système peut ne servir qu'au transport des particules entre un point où les particules sont fournies au système et un point de sortie.

Dans cette seconde géométrie, à une dimension, le modèle est dégénéré car on peut facilement voir que, dans un système ouvert, l'état où toutes les pentes valent z_c est un état stable de l'empilement. Si un amas existe où tous les z valent z_c, l'addition d'une particule sur cet amas va simplement augmenter z à la limite droite de l'amas et ainsi éventuellement augmenter sa taille, sans changer sa structure.

Dans un système fermé (ou avec par exemple des conditions aux limites périodiques), le système va acquérir un état stationnaire d'équilibre statistique. Partant d'une situation plate ($z_i = 0$), il est impossible d'atteindre un état uniforme de $z_i = z_c$. De façon à rendre la situation plus comparable avec des modèles déjà vus, il est plus simple de symétriser le problème. Dans ces conditions, nous pouvons voir que lorsque z_c vaut 1, le modèle devient identique à celui de la structure des chemins minimaux dans un problème de percolation, dans la limite où la concentration de défaut tend vers 0 (p proche de 1), et où tous les liens du réseau sont présents dans une direction (cas étudié à la fin du paragraphe 4.1). Dans ces conditions, nous pouvons nous attendre à une croissance de la rugosité vers le régime stationnaire, avec les lois d'échelle précédemment

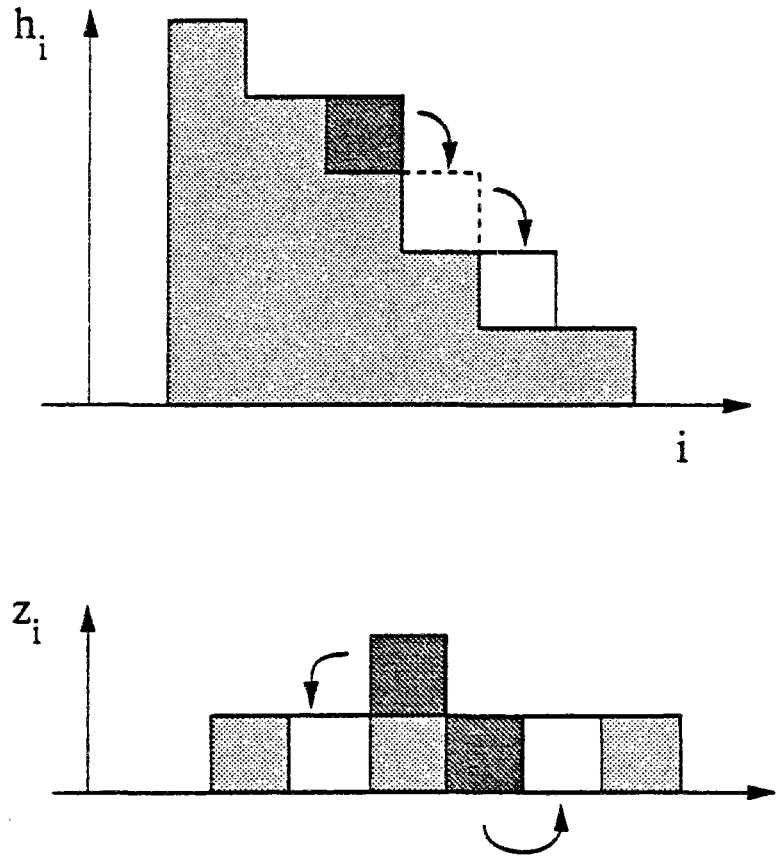


Figure 4.38 : Modèle de "tas de sable" qui illustre le concept d'état critique auto-organisé. A une dimension, l'empilement est représenté sur la figure supérieure, alors que sa dérivée est montrée sur la figure du bas. Lorsque la pente locale excède un certain seuil (comme pour le site représenté en gris foncé), une restructuration locale a lieu (montrée par la flèche) jusqu'à l'obtention d'un profil stable. La transformation globale correspondante sur le profil dérivé est explicitée sur la figure du bas.

évoquées. Nous avons testé ceci par simulations numériques, sur un réseau unidimensionnel, de longueur 200, et pour un nombre de particules ajoutées par sites inférieur à 1000. La rugosité, moyennée sur un millier de réalisations, a l'allure montrée sur la figure 4.39. Nous pouvons extraire de cette courbe l'exposant $\chi = 0.34 \pm 0.02$, qui correspond à l'augmentation de la rugosité avec le nombre de particules ajoutées, pour un système d'extension infinie:

$$\delta y \propto h^{\chi} \qquad (4.3.67)$$

Sur des systèmes de taille plus modeste, nous pouvons étudier le comportement de la rugosité à saturation, en fonction de la taille du système. Cette seconde analyse donne l'exposant χ/ζ,

$$\delta y \propto L^{\chi/\zeta} \qquad (4.3.68)$$

que nous estimons à $\chi/\zeta = 0.55 \pm 0.05$. Ces valeurs sont compatibles avec les estimations proposées ci-dessus $\chi = 1/3$ et $\zeta = 2/3$.

Cependant, en ce qui concerne l'analyse de Bak, le modèle unidimensionnel n'a qu'un intérêt très limité car la géométrie considérée est alors une géométrie ouverte, où la distribution de taille d'amas instables est prépondérante. Or dans un milieu unidimensionnel, nous avons vu que la distribution de taille des amas instables était sensiblement exponentielle, (ce qui explique le succès relatif d'une analyse simple de la géométrie du front par un processus Markovien, tel que vu au paragraphe 4.1). Ceci implique que la distribution des "avalanches" passant une extrémité du système sera aussi exponentielle, et donc le "bruit" sera "blanc" comme l'est la source de particules, dans le cas où les particules sont ajoutées au système à un emplacement quelconque (distribution uniforme). Lorsque la source de particules est toujours localisée au même endroit

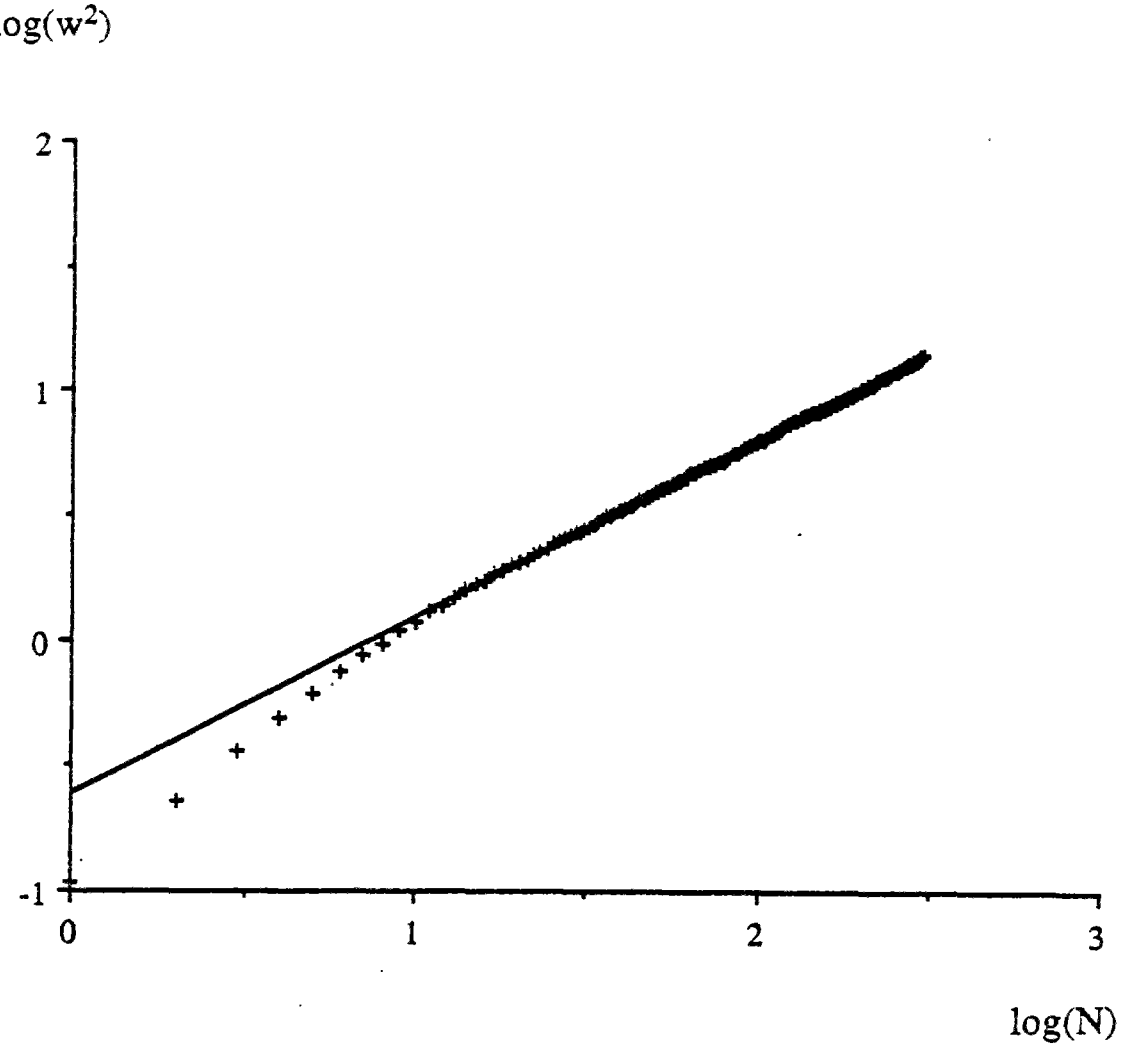


Figure 4.39 : Croissance de la rugosité en fonction du nombre de particules ajoutées au système en coordonnées bi-logarithmiques, pour le modèle de "tas de sable". Ces données ont été obtenues par simulations numériques sur un milieu de longueur 200 avec des conditions aux limites périodiques. Le nombre de particules ajoutées au système est de l'ordre de 1000 par unité de longueur. La rugosité a été moyennée sur un millier de réalisations. La pente de la courbe donne l'exposant χ.

(situation souvent considérée par Bak), le problème est dégénéré, et va tendre vers un état où toutes les pentes sont critiques, donnant encore un bruit "blanc" en sortie.

Cette trivialité du modèle est perdue pour des dimensions d'espace supérieures ou égales à deux. Dans ce cas, la définition du modèle se fait simplement, suivant Bak et coll. [84]. A deux dimensions, nous allons définir, comme montré sur la figure 4.40, sur un réseau carré, les "sites-h" où les particules sont ajoutées. Ils sont situés au milieu des liens, et non, comme habituellement, aux points de jonction des liens. Ces derniers (sites-z) contiendront la pente locale, z. La pente est alors définie comme étant la somme des hauteurs des deux sites-h amont, à laquelle est soustraite la somme des hauteurs des deux sites-h aval. L'addition d'une nouvelle particule se fait donc en ajoutant une unité à la pente du site-z amont, et en décrémentant d'une unité la pente du site z aval. Lorsque la pente excède une certaine valeur critique z_c, alors les deux particules en amont du site-z considéré sont rejetées aux sites-h aval. Prenant un système de coordonnées tel que les deux sites-z amont d'un site-z (i, j) donné, aient pour coordonnées (i, j±1), et les deux sites aval (i±1, j), nous pouvons écrire les règles de réarrangement d'une paire de particules selon

$$\begin{aligned} z(i\pm1,j) &\rightarrow z(i\pm1,j) + 1 \\ z(i,j) &\rightarrow z(i,j) - 4 \\ z(i,j\pm1) &\rightarrow z(i,j\pm1) + 1 \end{aligned} \qquad (4.3.69)$$

Dans ces conditions, l'addition de particules sur le bord amont du réseau (en un point quelconque de ce bord), ne conduit pas à une situation triviale. Au contraire, on constate alors l'existence d'amas instables de toutes tailles jusqu'à celle du système lui-même. Les amas étant alors définis dans un sens large: il s'agit de l'ensemble des sites qui sont modifiés par l'addition d'une nouvelle particule en un point donné. (Attention au fait que la notion d'amas ne forme alors pas de classe d'équivalence). De par la construction du modèle, il est donc apparent que les amas instables ne sont pas

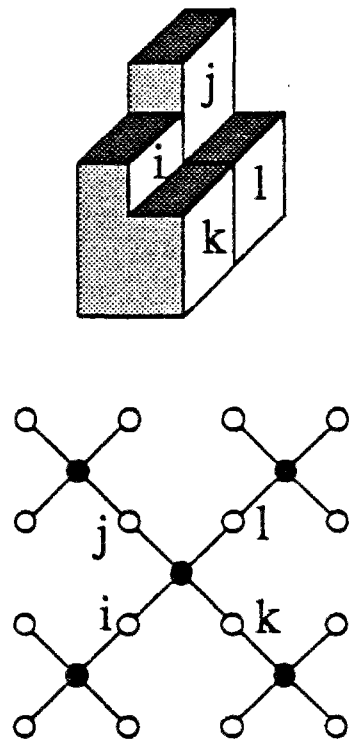


Figure 4.40 : Modèle de "tas de sable" à deux dimensions. Nous montrons l'agencement dans le plan du réseau où les hauteurs sont définies (○) (sites-h), et celui où les dérivées sont évaluées (●) (sites-z). Les transformations de hauteur et de pente, correspondant à une restructuration locale, sont explicitées dans le texte.

simplement des amas de sites connexes étant tous dans l'état limite z_c. Le caractère remarquable du modèle mis en avant par Bak et coll. [84,85,86] est qu'il converge naturellement vers un état statistique critique, (c'est en fait la raison même de sa construction). Mais ce caractère est présent de fait dans tous les modèles que nous avons considérés dans ce chapitre.

Le caractère le plus étudié sur ce modèle se compare difficilement avec les autres modèles introduits jusqu'alors. Il s'agit en l'occurence de la statistique de durée, T, des avalanches, pondérée par la réponse moyenne, s/T, où s est le nombre de particules mises en jeu par la même avalanche. Bak et coll. ont alors observé une loi de puissance pour cette distribution d(T):

$$d(T) \propto T^{-\alpha} \qquad (4.3.70)$$

où $\alpha = 0.43$ à deux dimensions et 0.92 à trois dimensions. Ces auteurs ont également enregistré la distribution, n(s), de taille, s, d'amas et ils ont observé une loi de puissance

$$n(s) \propto s^{1-\tau} \qquad (4.3.71)$$

où $\tau = 2.0$ à deux dimensions et 2.33 à trois dimensions.

Plus généralement, Tang et Bak [85], Wiessenfeld et coll. [86] Bak et coll [87] proposent une correspondance avec les phénomènes critiques habituels, en considérant comme paramètre de contrôle de la transition, la "pente" θ moyenne de l'empilement (figure 4.41). Le paramètre d'ordre est alors le courant J de particules qui sortent du système. Le courant de particules rentrant dans le système, h, est l'analogue d'un champ magnétique. Citons quelques valeurs d'exposants critiques introduits dans cette correspondance:

- paramètre d'ordre, J:

$$J \propto (\theta - \theta_c)^{\beta} \qquad (4.3.72)$$

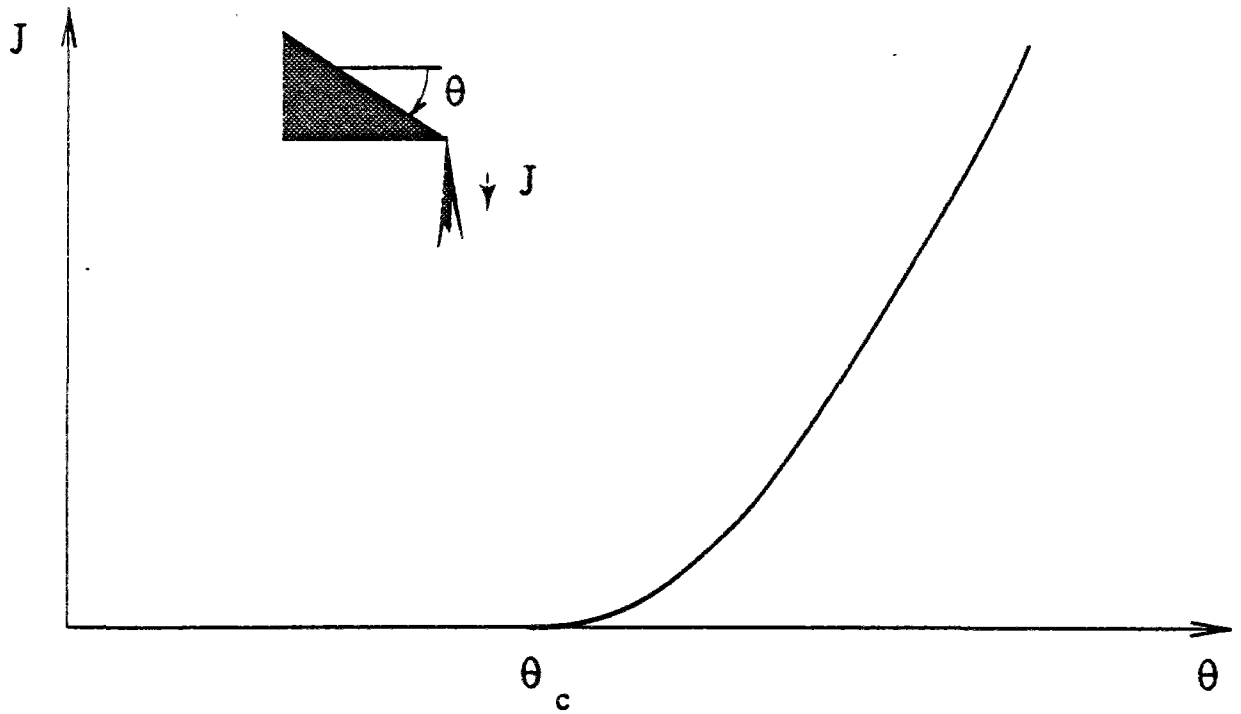


Figure 4.41 : Illustration schématique de la correspondance avec un phénomène critique. Le paramètre de contrôle est la pente moyenne, alors que le courant J qui donne le flux de particules, est le paramètre d'ordre de la transition. Le point critique est repéré par un angle limite θ_c.

- longueur de correlation, ξ:

$$\xi \propto (\theta_c - \theta)^{-\nu} \qquad (4.3.73)$$

- "susceptibilité",χ:

$$\chi \propto (\theta_c - \theta)^{-\gamma} \qquad (4.3.74)$$

- temps de relaxation d'un amas de taille l

$$t \propto l^{z} \qquad (4.3.75)$$

Il est aussi possible de définir la dimension fractale D des amas instables.

Les estimations numériques de ces exposants sont les suivantes, comme données par Tang et Bak [85]:

Dimension d'espace	2	3
β	0.7	0.82
ν	0.74	0.85
γ	1.35	1.7
z	1.29	1.7
D	2.1	3.0

Ceci est relatif à la situation de transport de particules au travers de la structure. Les modèles d'empilement vus précédemment, de par leur géométrie fermée, empêchent toute propagation de particules vers l'extérieur. L'adjonction de particules va donc simplement conduire le système vers le point critique où J = 0, et l'y maintenir. Nous avons déjà remarqué précédemment que l'on pouvait interpréter l'état stationnaire du front d'empilement dans les différents modèles cités comme un état critique. Ne manquait que la terminologie pour les qualifier d' "états critiques auto-organisés".

Hwa et Kardar [88] proposent de décrire le modèle de Bak et coll. par une version continue. Le "relief" est décrit par une fonction continue h(x,t). Le système est supposé alimenté en particules sur un bord et ouvert sur le bord opposé. Il est donc siège

d'un écoulement dont la direction moyenne est désignée par $x_{//}$, alors que la (les) direction(s) perpendiculaire(s) sont notées $x_{\perp}$. Partant de considérations de symétrie, Hwa et Kardar proposent que la hauteur locale h(x,t), est régie par l'équation différentielle:

$$\partial h(x,t)/\partial t = \nu_{//}\partial^2_{//}h + \nu_{\perp}\nabla^2_{\perp}h - \lambda\partial_{//}h^2 + \eta(x,t) \qquad (4.3.76)$$

où les deux premiers termes décrivent une tension superficielle (anisotrope), le troisième prend en compte le couplage à un champ de force (la gravité), et le dernier, η (x,t), est un terme de bruit Gaussien. Cette démarche est analogue à l'introduction précédente de l'équation de Burgers avec bruit pour décrire les interfaces. La solution de cette équation, utilisant des méthodes de renormalisation semblables à celle de la référence [38], donne la loi d'échelle suivante pour la fluctuation de hauteur typique:

$$h \propto x^{\chi}_{//}\, f(x_{\perp}/x^{\zeta}_{//}\,,\, t/x^{z}_{//}) \qquad (4.3.77)$$

où χ, ζ, z sont les exposants de rugosité, d'anisotropie et dynamique respectivement. La valeur de ceux-ci est donnée en fonction de la dimension de l'espace d par

$$\begin{aligned} \chi &= (1\text{-}d)/(7\text{-}d) \\ \zeta &= 3/(7\text{-}d) \\ z &= 6/(7\text{-}d) \end{aligned} \qquad (4.3.78)$$

en dessous de la dimension critique supérieure : 4. Partant de ces exposants de base, Hwa et Kardar proposent des estimations des exposants cités dans la table ci-dessus en accord relatif avec les simulations numériques de Tang et Bak.

Obhukov [89] propose également une approche de théorie des champ pour ce modèle, mais qui diffère de la précédente.

Ondes de densité de charge

Les ondes de densité de charge ("charge density wave") sont encore un sujet très large. Les aspects expérimentaux de cette question (que nous ne traiterons pas) sont revus en détail dans un article récent de Grüner [90]. Nous ne le mentionnons ici que sous un aspect très particulier, à savoir son apparentement au problème d'interface en milieux aléatoire. Nous nous basons ici sur l'article de Fisher [60] pour introduire quelques éléments importants.

Les ondes de densité de charge sont des modulations périodiques de la densité de charge qui apparaissent à basse température dans des systèmes unidimensionnels. Il s'agit d'un mode collectif, engendré par le couplage électron-phonon. Ce mode est très facilement piégé par des impuretés ou des défauts du milieu. Ce piégeage se traduit par quelques effets caractéristiques :

- Conduction Ohmique à faible champ électrique.
- Existence d'un champ électrique seuil E_T , au delà duquel la conductivité est fonction du champ appliqué. Le courant en excès, I', (égal par définition au courant total moins la partie Ohmique obtenue pour un faible champ) varie comme : $I' \propto (E-E_T)^{\lambda}$, où λ est typiquement compris entre 1 et 2, au voisinage du seuil, puis I' proportionnel au champ E, lorsque celui-ci est fort.
- Bruit harmonique cohérent pour $E > E_T$ dont la fréquence fondamentale est proportionelle au courant en excès, I', et dont l'amplitude croît lorsque l'on se rapproche du seuil par valeurs supérieures.
- Interférences entre conduction continue et alternative.
- Effets hystérétiques importants sur des échelles de temps supérieures aux temps microscopiques caractéristiques.

Le modèle de base pour traiter des ondes de densité de charge a été introduit par Fukuyama et Lee [59], et discuté par de nombreux auteurs (voir e.g. les références de l'article de Fisher [60]). Il consiste à introduire une onde de vecteur d'onde k, et de

phase $\phi(r)$ lentement variable, qui interagit faiblement avec des impuretés situées à des positions aléatoires, R_j, du réseau. L'Hamiltonien de ce système s'écrivant

$$H = \int \left\{ \frac{K}{2} (\nabla\phi)^2 - V \sum_j \delta(r-R_j) \cos(kr+\phi(r)) \right\} dr \qquad (4.3.79)$$

où K est une rigidité de la phase, et V une mesure de la force des impuretés. Les positions R_j sont telles que les (kR_j) sont équidistribués sur $[0,2\pi]$. Sans terme inertiel, la dynamique de la phase est dictée par l'équation d'évolution:

$$\frac{d\phi(r)}{dt} = \Gamma \left\{ \frac{neE}{k} - \frac{\delta H}{\delta\phi(r)} \right\} \qquad (4.3.80)$$

où n est une densité de porteurs de charge e, et Γ un coefficient de "frottement".

Fisher propose de considérer un modèle discrétisé voisin du précédent, où n'interviennent que les valeurs de la phase aux points d'accrochage. Dans ce cadre, L'Hamiltonien et l'équation d'évolution peuvent s'écrire :

$$H_0 = (1/2)\sum_{ij} J_{ij} (\varphi_i-\varphi_j)^2 - \sum_j h_j \cos(\varphi_j-\beta_j) \qquad (4.3.81)$$

et

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = -\frac{\delta H_0}{\delta\varphi_j} + F \qquad (4.3.82)$$
$$= \sum_i J_{ij} (\varphi_i-\varphi_j) - h_j \sin(\varphi_j-\beta_j) + F$$

Dans le cas où les constantes de couplage J sont nulles, nous trouvons simplement une superposition de problèmes à une seule particule. On peut voir alors ce problème comme l'évolution d'une particule dans un champ de potentiel, somme d'une contribution harmonique, et d'un terme linéaire. Ceci est représenté schématiquement sur la figure 4.42. Ce cas est exactement soluble et il donne déjà quelques informations intéressantes,

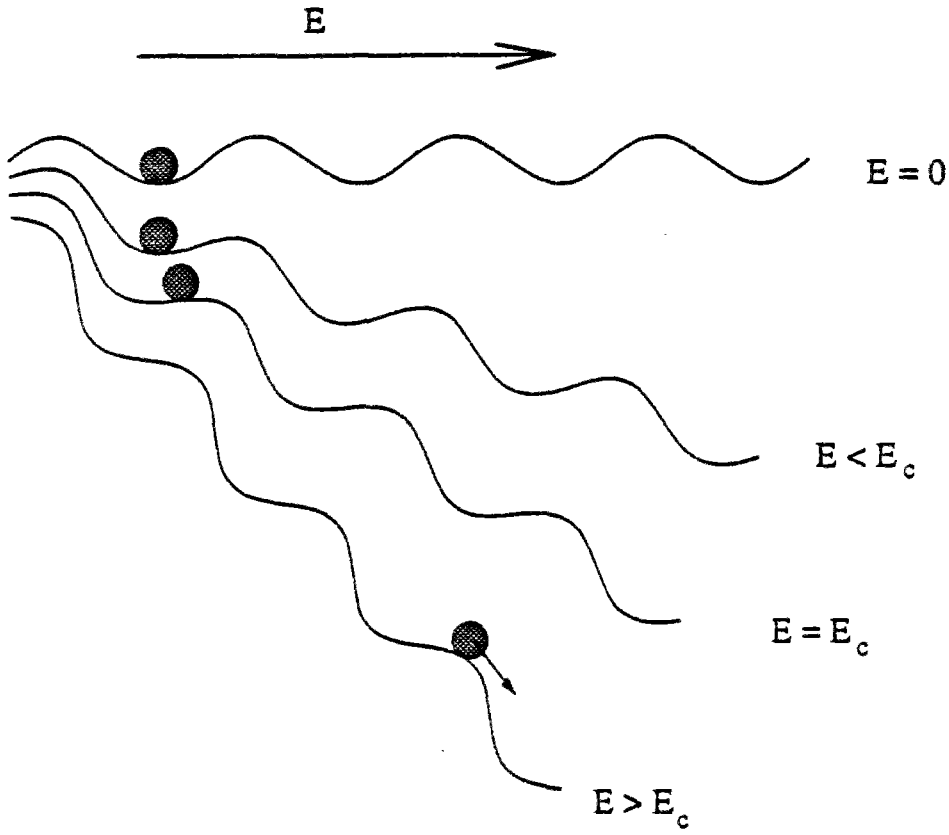


Figure 4.42 : Modèle grossier d'ondes de densité de charge. Ce modèle à une particule est un cas limite du modèle de Fisher pour un couplage faible ou nul. Lorsque le champ E est inférieur à une valeur seuil E_c, la particule est localisée dans un minimum du potentiel sinusoïdal. Au delà, la particule se déplace à vitesse constante (pas d'effet inertiel). Le modèle de Fisher complet, consiste à associer un grand nombre de particules de ce type, liées entre elles par des ressorts de longueur au repos variable, dans le même potentiel sinusoïdal.

comme l'existence d'un seuil, $F_T = h$, au delà duquel, la particule se propage avec une vitesse moyenne, v, fonction de l'écart au seuil

$$v = \sqrt{(F^2 - h^2)} \qquad (4.3.83)$$

alors qu'en dessous du seuil, la polarisabilité diverge comme $(h-F)^{-1/2}$. Ces traits sont qualitativement en accord avec les caractéristiques attendues, mais quantitativement, ils sont très différents. Il est possible de construire une théorie de champ moyen qui prend en compte explicitement les couplages non-nuls J_{ij}. Nous renvoyons à l'article de Fisher [60] pour une discussion approfondie de ce traitement. Donnons seulement quelques résultats :

Lorsque l'accrochage est fort ($\max(h_j)>1$), il existera un champ seuil non nul, qui séparera le régime d'onde ancré (statique), et le régime d'onde propagative à vitesse constante. Dans ce dernier cas, la vitesse de propagation sera fonction de l'écart au champ seuil à la puissance 3/2. Ce point correspond à une transition de phase, et il est caractérisé par une collection d'exposants critiques, obtenus seulement en champ moyen (soit au-delà de la dimension critique supérieure du problème). Il existe donc une longueur de corrélation qui donne la décroissance de la fonction de corrélation de vitesse le long de l'onde. En champ moyen, cette longueur de corrélation diverge comme l'écart au seuil à la puissance -1/2.

Webman [63] a proposé un modèle d'onde de densité de charge particulièrement simple, et qui reproduit un certain nombre de traits caractéristiques de modèles plus complexes. Commençons par la présentation du modèle à une dimension. Sa généralisation à des dimensions supérieures s'obtient trivialement. Il s'agit d'une suite de sites liés entre eux par des ressorts élastiques et connectés à un milieu indéformable par l'intermédiaire de patins secs. Ces derniers sont fixes si la force qui leur est appliquée est inférieure à un seuil fixe, et se déplace à vitesse proportionnelle à la différence entre la

force appliquée et le seuil, si celui-ci est inférieur. Tous les ressorts sont identiques, mais les patins ont des seuils de résistance répartis aléatoirement. De plus, chaque site reçoit une force extérieure constante (on pourra penser à l'action d'un champ électrique sur des particules chargées situées sur ces sites). Nous allons donner une formulation continue de ce modèle, en introduisant la position f(x,t) des sites, fonction de leur position initiale (x) et du temps (t).

$$\partial f(x,t)/\partial t = \Phi\{x, E(t) + \kappa \nabla_x^2 f(x,t)\} \qquad (4.3.84)$$

o ù

$$\begin{aligned} \Phi\{x, y\} &= y - V(x) && \text{si} \quad V(x) < y \\ &= 0 && \text{si} \quad -V(x) < y < V(x) \\ &= -y + V(x) && \text{si} \quad y < -V(x) \end{aligned} \qquad (4.3.85)$$

V(x) représente le seuil local des patins, et κ la raideur des ressorts. Le lien avec le modèle précédent peut se faire facilement en comparant la fonction $\Phi\{x, y\}$, avec la fonction sin() utilisée précédemment (4.3.82). La première fonction peut être vue alors comme une approximation grossière de la seconde, qui a le mérite de ne pas présenter une multiplicité de minima, et donc de rendre le problème partiellement soluble.

Nous nous intéressons au comportement global de la chaine, en fonction du champ appliqué, E(t), qui sera assimilé à une fonction de Heavyside, (nul à $t < 0$, et constant égal à E pour $t > 0$). Commençons par définir pour quel champ E, la chaine sera fixe ou en translation à vitesse constante. Pour traiter ce problème, il est particulièrement commode de considérer des conditions aux limites périodiques $f(x,t) = f(x+L,t)$. Dans ce cas, pour que la chaine soit fixe, il faut pouvoir satisfaire en tout point:

$$-V(x) < \{E + \kappa \partial^2 f(x)/\partial x^2\} < V(x) \qquad (4.3.86)$$

Ceci est illustré sur la figure 4.43. Nous pouvons négliger l'inégalité de gauche si l'on s'intéresse à des champs positifs. Ainsi

$$\partial^2 f(x)/\partial x^2 < \{V(x) - E\}/\kappa \qquad (4.3.87)$$

d'où l'on déduit, en utilisant la périodicité

$$\partial f(L)/\partial x - \partial f(0)/\partial x = 0 < \{<V> - E\}L/\kappa \qquad (4.3.88)$$

où

$$<V> = (1/L) \int_0^L V(x)\, dx \qquad (4.3.89)$$

Ainsi la stationnarité de la chaine requiert que E soit inférieur à <V>. Or pour E=<V>, il est facile de construire une solution fixe f(x), en considérant l'intégrale seconde de V(x). Ainsi, <V> apparaît comme le seuil du problème. Au-delà, la chaine se met en mouvement, avec une vitesse proportionnelle à l'écart au seuil. En effet, si $E = <V> + \varepsilon$, alors, la solution stationnaire est simplement donnée par l'intégrale seconde de $V(x) + \varepsilon$.

Au voisinage du seuil, mais en dessous de celui-ci, $E = <V> - \varepsilon$. Nous pouvons nous interroger sur la distribution des "amas" où $\partial^2 f(x)/\partial x^2$ est égal à la limite supérieure, $\{V(x) - E\}/\kappa$, si l'on part d'un état initial $f(x,t = 0) = 0$. Comme l'indique Webman [63], ce problème est relié à la distribution des premiers passages à zéro de la série

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} i\, x_i \qquad (4.3.90)$$

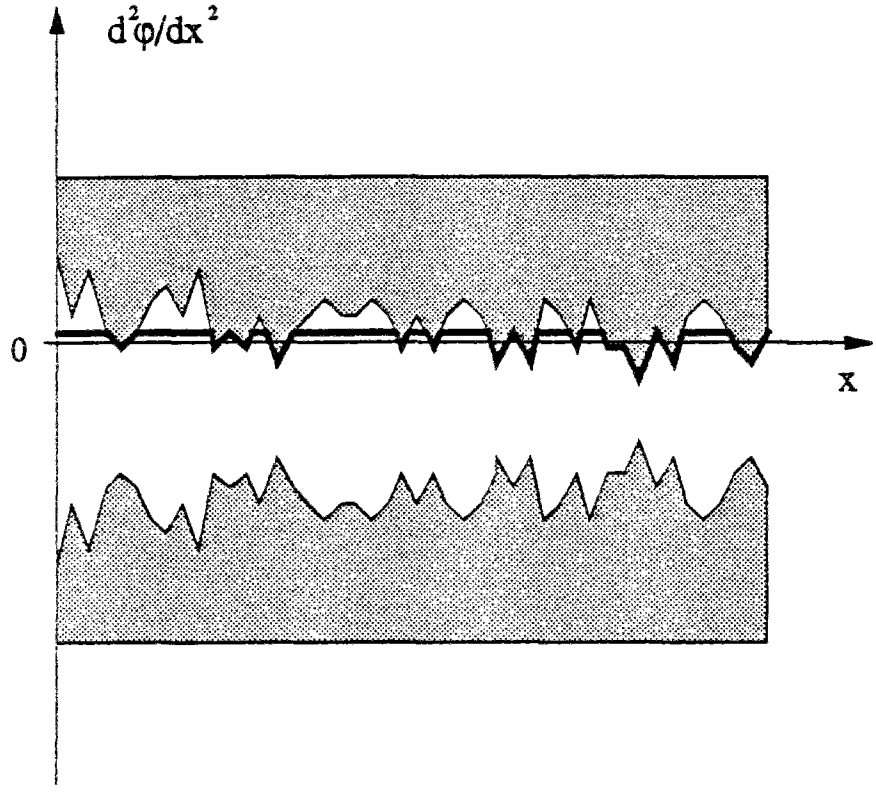


Figure 4.43 : Modèle d'ondes de densité de charge de Webman. La dérivée seconde de la fonction φ est limitée par deux frontières aléatoires schématisées par les zones grisées. L'existence d'une solution stable, avec des conditions aux limites périodiques, impose que l'intégrale de $d^2\varphi/dx^2$ sur une période soit nulle. Une configuration acceptable est montrée par une ligne noire épaisse.

où x est une variable aléatoire de moyenne -ε. Plus précisément, une succession de $S_k > 0$ pour $k \leq n$ et $S_{n+1} < 0$, correspond à un amas de taille n. Ceci fournit une distribution proportionnelle à $L^{-3/2} \exp(-\varepsilon^2 L/2)$. On obtient ainsi facilement un comportement singulier de la polarisation, P, de la chaine :

$$P \propto \langle L^2 \rangle \propto \varepsilon^{-3} \qquad (4.3.91)$$

ainsi que d'autres informations sur la dynamique du phénomène, et sa convergence vers un état stationnaire selon une loi exponentielle étirée. Nous renvoyons le lecteur intéressé à la référence [63].

Le lien avec le modèle précédent de Fukuyama et Lee à fort couplage s'obtient dans la limite où la raideur des ressorts tend vers zéro, ou inversement lorsque le vecteur d'onde k de l'équation (4.3.79) tend vers l'infini.

Il est intéressant de comparer le modèle de Webman à la solution déterministe de l'équation de Burgers, sans bruit, partant d'une configuration aléatoire. Ceci est considéré par exemple dans l'article de Kardar et coll. [41]. Rappelons l'équation de base:

$$\partial f/\partial t = \nu \nabla^2 f + (\lambda/2)(\nabla f)^2 \qquad (4.3.92)$$

partant de $f(x,t=0) = f_0(x)$. La solution est donnée par

$$f(x,t) = \frac{2\nu}{\lambda} \log \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ \frac{\lambda}{2\nu} f_0(y) - \frac{(x-y)^2}{4\nu t} \right\} \frac{d^d y}{(4\pi\nu t)^{d/2}} \right\} \qquad (4.3.93)$$

Le comportement à long temp de cette solution est le suivant : le profil f(x,t) est composé de segments paraboliques, $f_n = A_n - (x-y_n)^2/2\lambda t$, raccordés entre eux par des

discontinuités de ∇f ("ondes de choc") (figure 4.44). Ce profil peut être facilement construit en prenant l'enveloppe convexe du profil initial par les paraboles $f = A - (x-y)^2/2\lambda t$, dont le point courant y se déplace le long du profil initial, avec $A = f_0(y)$. Nous pouvons le voir simplement en appliquant la méthode de la phase stationnaire à l'argument de l'exponentielle dans l'équation 4.3.93. En particulier, une propriété intéressante de ce front est la taille moyenne des segments paraboliques qui s'obtient en fonction de certaines caractéristiques du profil de départ. Kardar et coll. [41] citent le résultat pour un profil aléatoire Gaussien. Nous pouvons généraliser facilement ce résultat à tout profil auto-affine. Rappelons que l'on peut caractériser un tel profil par un exposant, H, dit de Hurst, tel que le profil est statistiquement invariant par la transformation suivante :

$$x \rightarrow Cx \qquad (4.3.94)$$

et $$f(x) \rightarrow C^H f(x)$$

Dans cette transformation, la parabole $f = A - (x-y)^2/2\lambda t$, doit être transformée de la même façon, ce qui impose que le temps (la courbure de la parabole) soit transformé selon

$$t \rightarrow C^{2-H} t \qquad (4.3.95)$$

L'exposant 2-H qui apparaît ici est la dimension fractale locale de recouvrement du profil (rappelons que la dimension fractale globale est simplement 1). Cette transformation donne donc la dépendance de la taille des segments paraboliques avec le temps selon $t^{1/(2-H)}$. Ainsi dans le cas Gaussien, H = 1/2, nous retrouvons un exposant 1/(2-H) = 2/3, qui donne le comportement sur-diffusif déjà cité maintes fois (exposant 1/z).

Il est amusant de noter que la construction du front dont l'évolution est donnée par l'équation de Burgers sans bruit, est symétrique de celle donnée par Webman

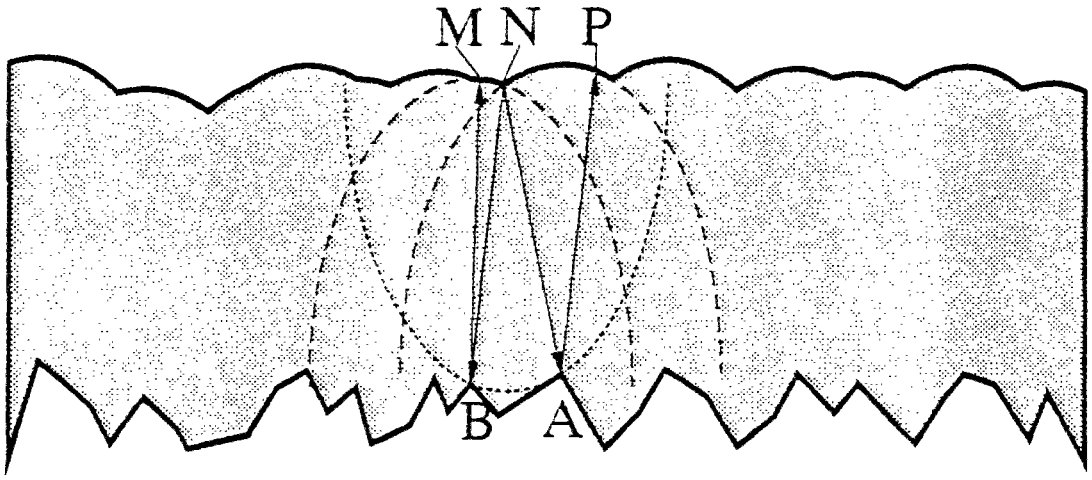


Figure 4.44 : Evolution d'un profil, dictée par l'équation de Burgers sans bruit, lorsque ce profil est initialement auto-affine aléatoire. A long temps, ce profil est composé de portions de paraboles dont la courbure est inversement proportionnelle au temps. Ce profil (...MNP...) s'obtient simplement géométriquement en prenant l'enveloppe convexe du profil initial (...AB...) par des paraboles d'équation déterminée (cf.texte). Il se développe des discontinuités de la dérivée (e.g. en N) qui sont des "ondes de choc".

dans son modèle d'onde de densité de charge, pour trouver la taille des domaines polarisés (argument de retour à l'origine d'une marche aléatoire biaisée, cité ci-dessus).

Sans qu'il ne s'agisse à proprement parler d'ondes de densité de charge, il est intéressant de comparer les modèles précédents avec un problème voisin de dynamique d'une interface en milieu aléatoire, tel que rencontré dans les systèmes d'Ising avec interactions aléatoires. En particulier, Koplik et Levine [61] d'une part et Bruinsma et Aeppli [62] d'autre part, ont considéré le cas d'une telle interface sur laquelle est appliquée une densité de force v, et qui est piégée par un champ aléatoire fixe $\eta(x,y)$. La position de l'interface est repérée par une fonction de x (x est un vecteur dans le plan moyen de l'interface de dimension d-1). Ceci se traduit par l'équation :

$$\partial f(x,t)/\partial t = v + J\, \nabla_x^2 f(x,t) + g\, \eta(x,f(x,t)) \qquad (4.3.96)$$

L'analyse de Bruinsma et Aeppli [62] consiste à construire un argument dimensionnel, du même type que celui de Imry-Ma pour cette équation dynamique. Nous remarquons que le problème discrétisé, originellement (d-1)-dimensionnel, se décompose, en fait, en une superposition de L^{d-1} problèmes unidimensionnels indépendants lorsque la constante de couplage, ou la tension superficielle, J , est très faible. Au contraire, lorsque la constante J est très grande, l'interface se déplaçe sans se déformer. Dans cette limite, le problème est encore unidimensionnel, comme précédemment, mais il est unique. De plus, la force critique de désancrage de l'interface tend vers zéro avec la taille du système. Dans le cas général, (J fini), il est possible de raccorder ces deux situations à une longueur caractéristique $l_0 \propto (g/J)^{2/(d-5)}$ lorsque $d < 5$. Au delà de la dimension 5, l'interface sera toujours rigide. En conséquence, elle ne sera jamais accrochée, puisque la force nécessaire pour provoquer un déplacement à vitesse non-nulle tend vers zéro lorsque la taille du système tend vers l'infini. En dimension inférieure, sur une échelle plus petite que l_0, l'interface sera rigide, alors que pour une distance supérieure, l'interface sera

librement déformable. La force critique pour désancrer l'interface sera à évaluer sur une taille finie, l_0, donc elle sera non-nulle.

Cependant de tels résultats sont obtenus par une analyse dimensionnelle simple, en traitant séparément les d-1 dimensions dans le plan de l'interface et la direction perpendiculaire. Un calcul similaire, en incluant toutes les dimensions de façon équivalente, donne alors une dimension critique de 2. Koplik et Levine [61] ont considéré le même problème, par différentes méthodes analytiques, sans arriver à des conclusions définitives. Ils ont de plus donné les résultats de simulations numériques en dimensions deux, trois et quatre, qui suggèrent que la dimension critique supérieure du problème est quatre, en contradiction avec l'argument précédent de Bruinsma et Aeppli.

En conclusion, la dynamique des interfaces en milieu aléatoire pose toujours nombres de problèmes théoriques. Il s'agit pourtant un sujet d'un intérêt fondamental car, si il est parfois possible de donner des informations concernant la position optimale d'une interface, (son état fondamental), encore faut-il savoir, si cet optimum pourra être atteint, ou si l'interface restera bloquée dans un minimum d'énergie local.

Réactions contrôlées par diffusion

Pour l'analyse de la vulnérabilité des chemins minimaux dans des réseaux à peu de défauts, nous avions déjà évoqué (partie 4.1) une image de "réactions chimiques" dans un milieu unidimensionnel où deux espèces étaient libres de diffuser, de réagir ou encore d'être créées. Nous reprenons ici ce sujet tel qu'étudié précisément dans ce contexte. Nous y trouverons encore des ressemblances frappantes avec les structures minimales en milieu aléatoire.

Nous avons vu deux aspects communs fondamentaux dans tous les modèles cités jusqu'à présent : d'une part un processus de diffusion, et d'autre part un "filtre" à cette diffusion, de façon à ce que la valeur des variables locales ou de leur dérivée n'excède pas certaines limites. Dans le cas de réactions chimiques de surface, ces deux ingrédients sont souvent les briques élémentaires de la plupart des modèles statistiques discrets. Le "filtre" est alors naturellement fourni par une contrainte d'encombrement stérique. Se rajoute ici la condition additionnelle de réaction (annihilation) lorsque deux espèces se rencontrent.

L'un des cas les plus simples consiste en l'étude de la réaction d'annihilation $A+A \rightarrow 0$. Partant d'une répartition uniforme aléatoire de "molécules" de type A, dans un espace de dimension d, nous nous intéressons à l'évolution au cours du temps de la concentration en A, et à la répartition spatiale des molécules. Ces molécules diffusent et réagissent dès qu'elles entrent en contact. La dimension critique supérieure du problème est égale à la dimension de l'espace balayé par une marche aléatoire, soit deux. Dans un espace de dimension supérieure, la répartion des molécules reste sensiblement uniforme dans l'espace, car les marches aléatoires n'étant plus récurrentes, l'évolution ne crée pas de ségrégation spatiale. Dans ce cas, on peut légitimement utiliser une équation de bilan classique :

$$\partial C_A/\partial t = - k_A C_A^2 \qquad (4.3.97)$$

pour la concentration en particules A (k_A est une constante de réaction). Cette équation donne très simplement une diminution de la concentration C_A au cours du temps proportionnelle à t^{-1}:

$$C_A \propto t^{-1} \qquad (4.3.98)$$

Au contraire, dans un espace de dimension inférieure à deux, il se produit une ségrégation __ une déplétion autour de chaque particule sur une longueur, ℓ __ qui augmente avec le temps, au fur et à mesure que la concentration diminue [91,92,93,94]. A une dimension, cette longueur est donnée par la distance sur laquelle les particules ont diffusé, soit proportionnellement à $\sqrt{t}$. La concentration en particules de type A diminue au cours du temps selon

$$C_A \propto 1/\ell \propto t^{-1/2} \qquad (4.3.99)$$

Il est encore possible d'inclure l'effet d'une source répartie de particules qui nourrit le système au fur et à mesure que les réactions d'annihilation ont lieu. Rácz [95] a ainsi démontré que pour une source d'intensité R (densité de particules ajoutées par unité de temps) petite devant 1, la concentration en particules se stabilise à une valeur proportionnelle à $\sqrt[3]{R}$. La méthode employée par Rácz est une mise en correspondance entre ce problème et la dynamique d'un système d'Ising unidimensionnel exactement soluble. Il est aisé de comprendre ce résultat par l'argument suivant : partant d'un site occupé par une particule, la distance parcourue pendant un temps t sera $\ell_d \propto \sqrt{t}$. Pendant ce temps, (Rt) particules seront ajoutées au système par la source. La distance entre ces particules sera donc proportionnelle à $\ell_s \propto 1/(Rt)$. A l'équilibre, au bout d'un temps $t = \tau$, ces deux longueurs seront égales, donnant

$$\tau^{1/2} \propto 1/(R\tau) \qquad (4.3.100)$$

ou

$$\tau \propto R^{-2/3} \qquad (4.3.101)$$

Ce temps τ peut être interprété comme le temps de relaxation du système. Il correspond également au temps moyen de renouvellement des particules dans le système. Nous en déduisons également que la concentration en particules à l'équilibre est proportionnelle à $(R\tau)$ et donc à $R^{1/3}$ comme obtenu par Rácz [95]. Selon cette dernière référence, nous pouvons résumer ces résultats sous la forme suivante de loi d'échelle:

$$C_A(R,t) = t^{-1/2}\, \varphi(R^{2/3}t) \qquad (4.3.102)$$

où la fonction φ a les deux limites

$$\varphi(x) = \mathcal{O}(x^0) \qquad \text{pour } x<<1 \qquad (4.3.103)$$
$$\varphi(x) = \mathcal{O}(x^{1/2}) \qquad \text{pour } x>>1$$

Ce résultat exact est en désaccord avec la prédiction de Zhang [96] qui, pour le même système, prévoit une longueur caractéristique qui diverge lorsque la source tend vers zéro selon $\ell \propto R^{-2/5}$ au lieu de $R^{-1/3}$ comme obtenu précédemment.

Les relations qui précédent ont été généralisées dans le cas où ces réactions ont lieu sur des structures fractales. Il faut alors faire intervenir la dimension spectrale d_s (cf. Chapitre 2). Anacker et coll [97] ainsi que Clément et coll.[98] proposent alors pour la réaction d'annihilation, une décroissance de la concentration avec le temps selon: $C_A \propto t^{-d_s/2}$ lorsque $d_s < 2$.

Notons que nous avons déjà étudié un modèle très similaire à une dimension : le modèle de rivière peut en effet se transcrire comme un processus de réaction chimique

$A + A \rightarrow A$. On retrouve alors une loi de décroissance temporelle similaire à la précédente en l'absence de sources $C_A \propto t^{-1/2}$.

Le problème se complexifie quelque peu lorsque deux espèces différentes, A et B, sont considérées et interagissent pour s'annihiler : $A+B \rightarrow 0$. Chaque espèce A ou B, prise indépendamment, est inerte. Au-delà de la dimension critique supérieure du problème, nous pouvons écrire comme précédemment une équation de bilan

$$\partial C_A/\partial t = \partial C_B/\partial t = - k_{AB} C_A C_B \qquad (4.3.104)$$

Lorsque la concentration des deux espèces est identique à l'instant initial, la concentration de chaque espèce diminue au cours du temps selon la loi de puissance 1/t. Lorsque la concentration en une espèce est très différente de celle de l'autre espèce, par exemple $C_A << C_B$, alors C_A s'annule exponentiellement au temps long, comme $e^{-\alpha t}$, avec une constante de temps $1/\alpha = 1/(k_{AB} C_B)$. Pour une faible dimension d'espace, cependant, nous aurons encore un comportement différent. Toussaint et Wilczek [92] puis Kang et Redner [93] ont étudié ce problème et ont proposé par des arguments simples que la dimension supérieure du problème soit 4. De plus, ils ont prédit, en deçà de la dimension 4, une loi de décroissance de la concentration selon $t^{-d/4}$, si les concentrations de départ sont identiques. Ces prédictions ont été étayées par des simulations numériques à une [92,93] et deux dimensions [92].

Formulons maintenant l'argument que proposent Kang et Redner. Pour un système qui comporte deux espèces dont les concentrations sont différentes à l'instant initial, $C_A(0) > C_B(0)$, la taille maximale, ξ, sur laquelle l'espèce minoritaire peut être dominante est donnée par la loi des grands nombres, en comparant le terme de fluctuation de C_A-C_B, à sa moyenne :

$$(C_A(0)-C_B(0))\xi^d = (C_A(0)^{1/2}+C_B(0)^{1/2})\xi^{d/2} \qquad (4.3.105)$$

ou

$$\xi \propto (C_A(0)^{1/2}-C_B(0)^{1/2})^{-2/d} \qquad (4.3.106)$$

ξ correspond à une longueur caractéristique du système. Moyenné sur une échelle supérieure à ξ le système apparaît alors comme homogène (et constitué exclusivement de molécules de type dominant, et en concentration $C_A(0) - C_B(0)$), alors qu'à une échelle inférieure apparaîtront des domaines où B dominera localement. Le processus qui va réaliser cette "moyenne" est bien sûr ici la diffusion. Ecrivant une loi de diffusion classique, nous voyons que le temps au bout duquel les molécules auront diffusé sur une distance ξ, sera donné par $\tau \propto \xi^2$. Si l'on suppose maintenant que la concentration en une espèce suit une loi de décroissance temporelle en puissance de t, tant que t est inférieur à τ, nous pouvons écrire :

$$C_A(t) = A_A\, t^{-x}\, \varphi_A(t/\tau) \qquad (4.3.107)$$

(et une équation similaire pour C_B) où A_A est une constante et φ_A une fonction d'échelle (différente pour l'espèce dominante et l'espèce dominée, pout $t > \tau$). La différence de concentration entre les deux espèces est bien entendu une constante. Nous pouvons alors écrire

$$C_A(t) - C_B(t) = (A_A-A_B)\, t^{-x}\, \varphi_A(t/\tau) \qquad (4.3.108)$$

et aussi

$$C_A(t) - C_B(t) = \xi^{-2/d}\, (C_A(0)^{1/2}+ C_B(0)^{1/2}) \qquad (4.3.109)$$

Raccordant ces équations pour $t = \tau$, et en égalant les deux puissances de τ, nous obtenons:

$$x = d/4 \qquad (4.3.110)$$

La dimension critique du problème est finalement obtenue en égalant x à sa valeur en champ moyen $x = 1$, d'où $d = 4$.

Ce simple argument permet donc de comprendre les lois d'échelle observées, bien que certains aspects soient ignorés dans cette approche, comme en particulier le fait que nous ayons introduit une répulsion de sphères dures entre particules de même type. Notons également que ce résultat ($x = d/4$) a été démontré de façon plus rigoureuse par Bramson et Lebowitz [99], toujours sans prendre en compte la répulsion de cœurs durs, en mettant ce problème en correspondance avec un problème de marche aléatoire avec pièges.

Nous avons effectué des simulations similaires dans des espaces de dimension 1 à 4. Nous avons disposé en concentrations égales ces deux espèces afin de remplir l'espace de façon compacte, et nous avons laissé le système évoluer. La taille des systèmes considérés était similaire en termes de nombre absolu de particules, soit environ 160 000 (i.e. une taille de système de 20^4 en quatre dimensions, 55^3 en trois dimensions, 400^2 en deux dimensions et 16.10^4 en une dimension). Les figures 4.45 à 4.48 montrent la variation de concentration d'une des deux espèces pour ces quatre dimensions d'espace en fonction du temps. Il est clair sur les figures, qu'après un premier regime transitoire, la décroissance de la concentration suit une loi de puissance, t^{-x}, dont l'exposant x mesuré est donné ci-dessous en fonction de la dimension de l'espace :

d =	x =	T.W., K.R.
1	0.25	1/4
2	0.58	1/2
3	0.87	3/4
4	0.99	1
"∞"	1.0	1

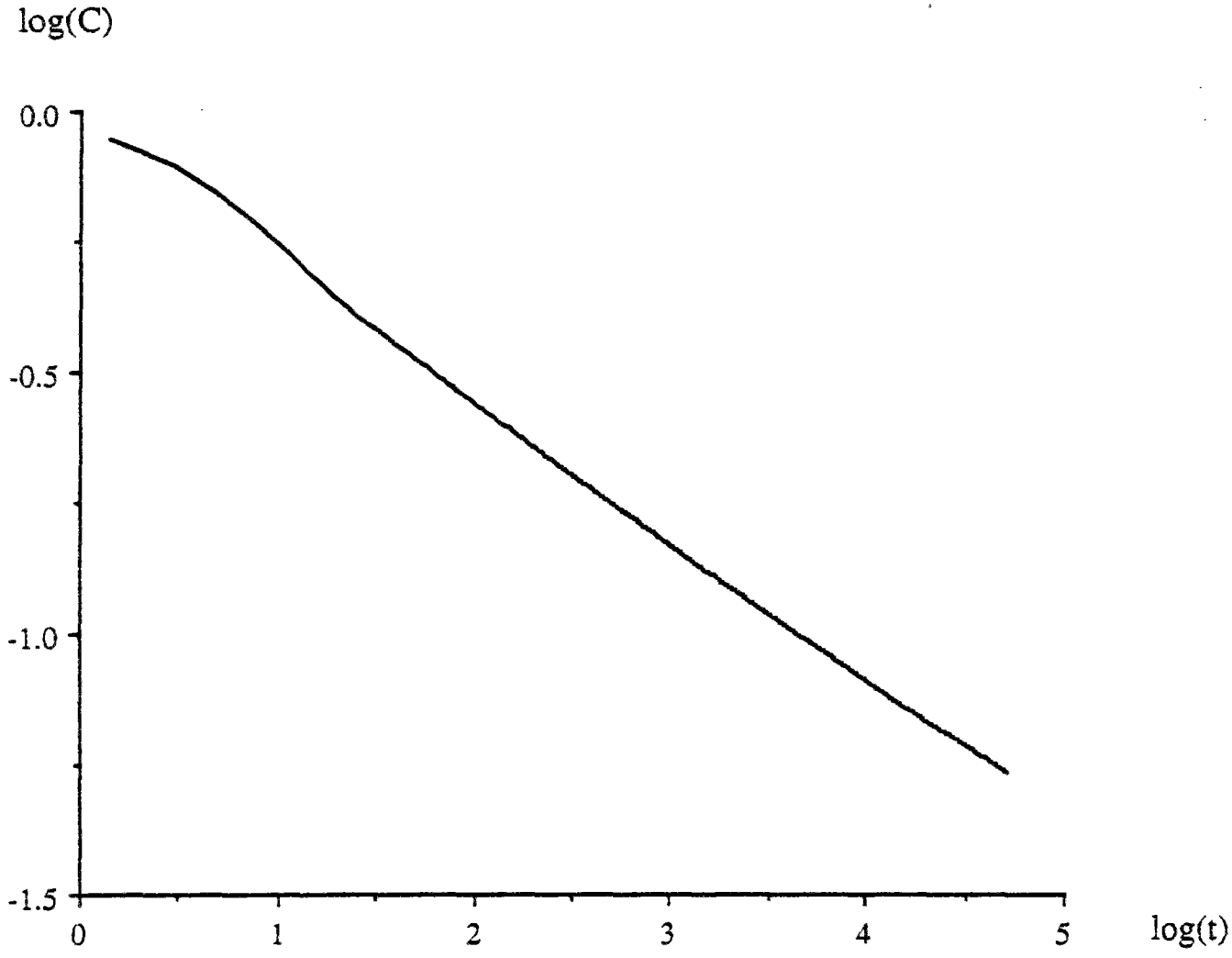


Figure 4.45 : Concentration en espèce A ou B, lors de la réaction A+B → 0, au cours du temps t, en coordonnées bi-logarithmiques. A l'instant initial, les deux concentrations sont identiques. La dimension de l'espace est ici 1. La droite montre la loi de puissance estimée, de pente 0.25.

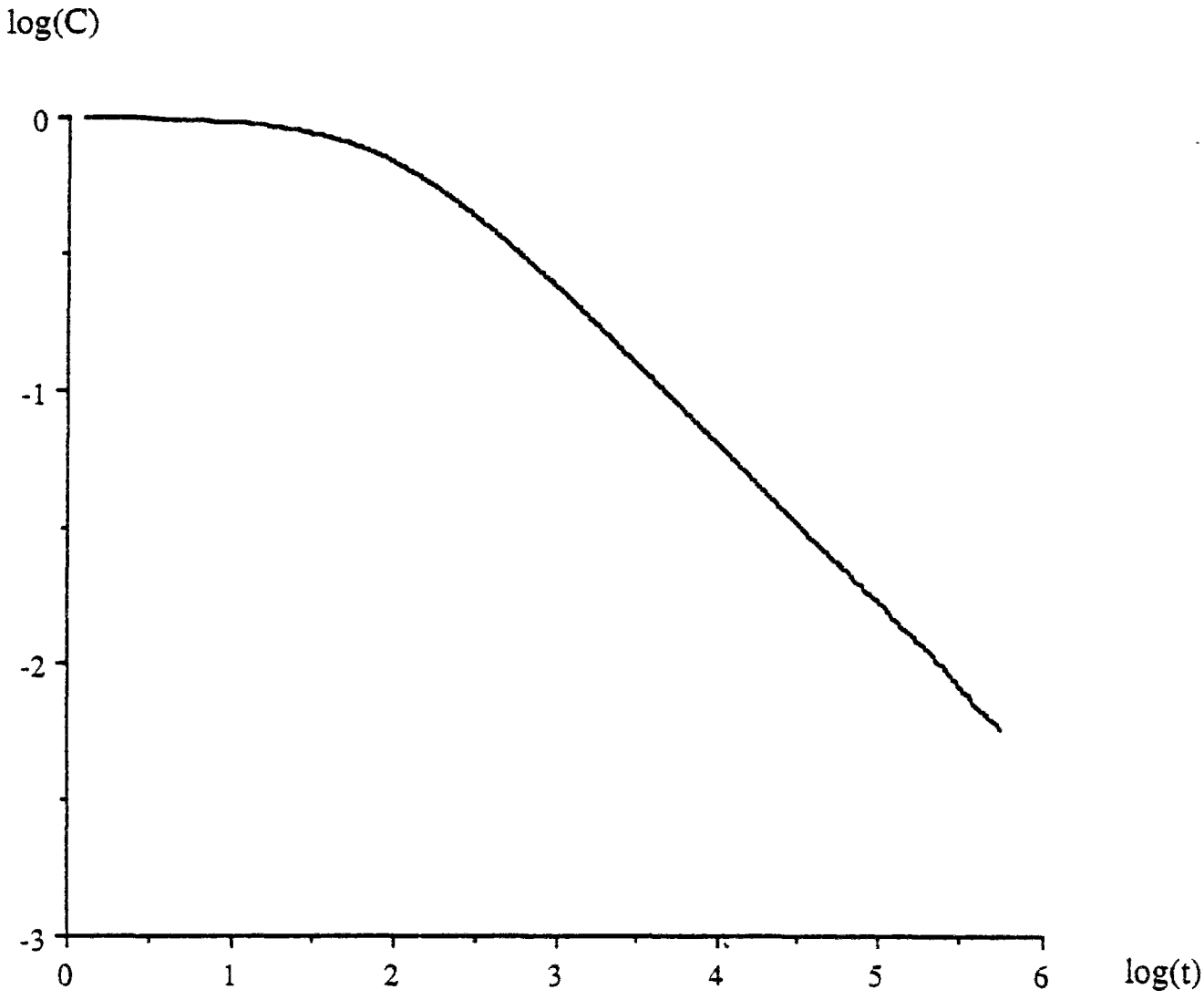


Figure 4.46 : Concentration en espèce A ou B, lors de la réaction A+B → 0, au cours du temps t, en coordonnées bi-logarithmiques. A l'instant initial, les deux concentrations sont identiques. La dimension de l'espace est ici 2. La droite montre la loi de puissance estimée, de pente 0.58.

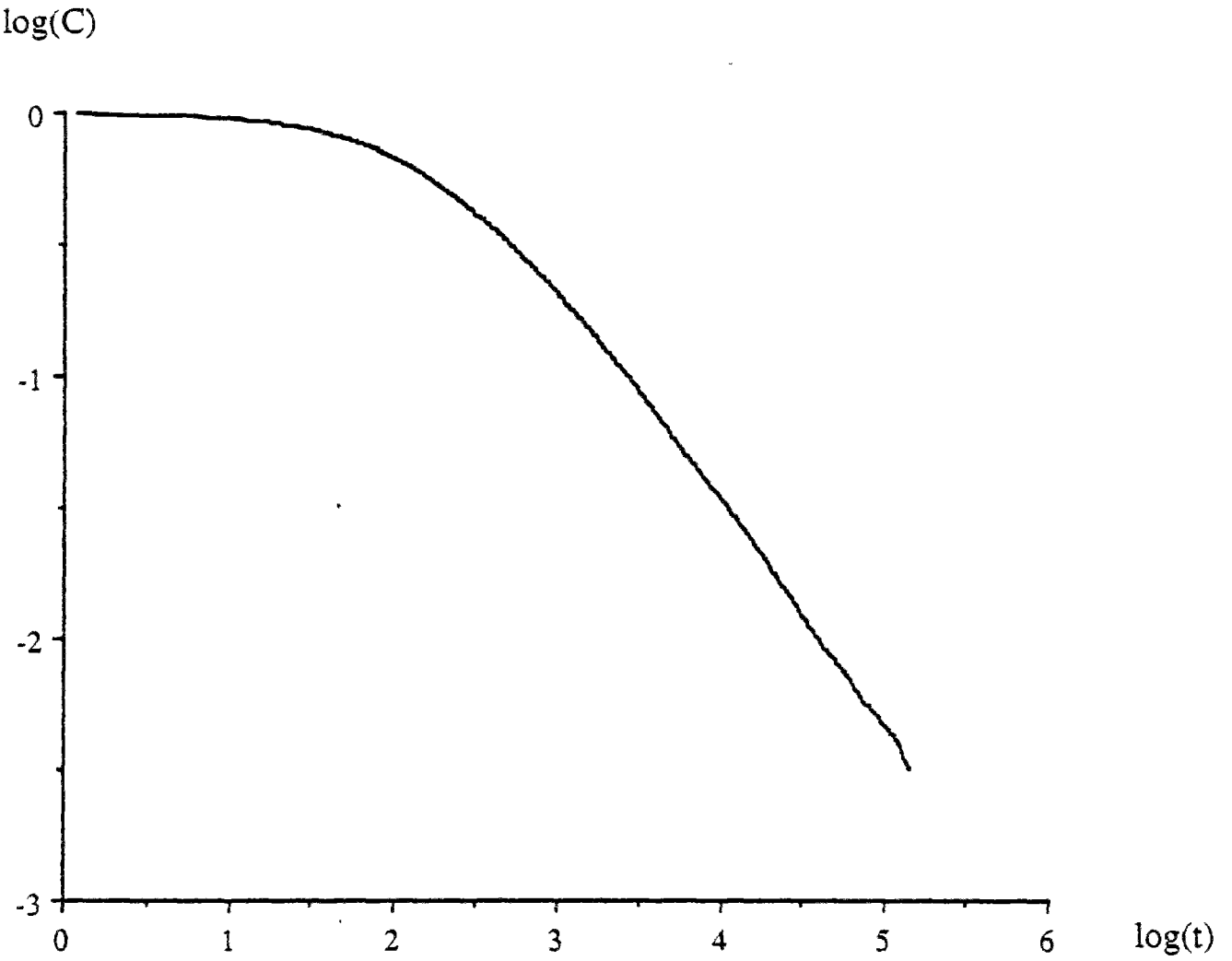


Figure 4.47 : Concentration en espèce A ou B, lors de la réaction A+B → 0, au cours du temps t, en coordonnées bi-logarithmiques. A l'instant initial, les deux concentrations sont identiques. La dimension de l'espace est ici 3. La droite montre la loi de puissance estimée, de pente 0.87.

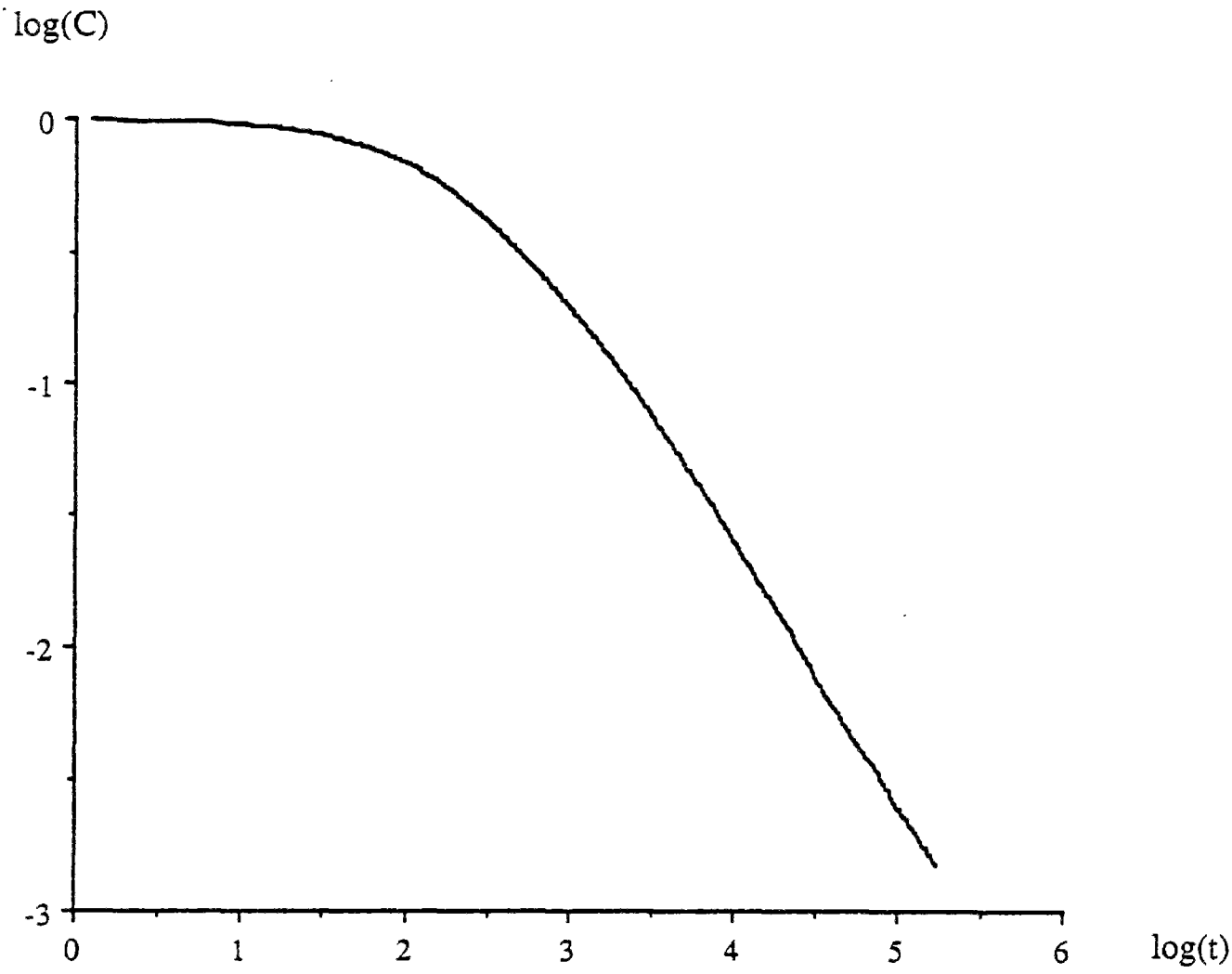


Figure 4.48 : Concentration en espèce A ou B, lors de la réaction A+B → 0, au cours du temps t, en coordonnées bi-logarithmiques. A l'instant initial, les deux concentrations sont identiques. La dimension de l'espace est ici 4. La droite montre la loi de puissance estimée, de pente 0.99.

La dernière ligne de ce tableau, où la dimension de l'espace est notée symboliquement ∞, correspond au cas où, par diffusion, une particule peut rejoindre n'importe quel autre site du réseau en un seul pas de temps. La troisième colonne représente la prédiction de Toussaint et Wilczek [92] et de Kang et Redner [93].

Notons également que Meakin et Stanley [100] ont effectué des simulations numériques sur ce problème en dimensions deux et trois (et sur amas de percolation). Leurs résultats sont présenté sous la forme de courbes sans que les pentes mesurées ne soient spécifiées. Des mesures grossières effectuées à partir de leurs courbes donnent respectivement 0.6 et 0.9 en dimensions deux et trois. Nous voyons que l'accord entre la prédiction et les simulations numériques n'est pas satisfaisant pour ces deux dimensions. Comment expliquer ces différences, et en particulier le fait que le résultat exact ne soit pas observé ?

Nous allons revenir sur le cas de la dimension finie après avoir traité le cas de la dimension "infinie". Dans ce dernier cas, il est évident qu'aucune déplétion ne peut exister au voisinage des sites pour la simple raison que la notion même de voisinage n'a pas de sens. La seule variation à considérer par rapport à l'équation de bilan donnée ci-dessus (4.3.104), provient de la répulsion de cœurs durs des particules de même espèce. Ceci se traduit sans peine par l'équation suivante, où nous avons utilisé $C_A = C_B$:

$$\partial C_A / \partial t = - C_A^2 (1-C_A) \qquad (4.3.111)$$

ce qui fournit la loi d'évolution suivante:

$$1/C_A - \log(C_A/(1-C_A)) = t \qquad (4.3.111')$$

cette relation est en accord avec le terme dominant donné précédemment, $C_A \propto t^{-1}$, mais il existe un terme de correction logarithmique même pour une dimension d'espace infinie. La forme de l'équation (4.3.111') est bien vérifiée numériquement pour un système de

taille comparable à celle utilisée dans les précédentes simulations (160 000 particules) (cf. figure 4.49)..

Revenons maintenant au cas d'une dimension finie. Pour comprendre les résultats exposés ci-dessus, il faut dans un premier temps nous interroger sur un trait essentiel des processus de diffusion qui interviennent dans ces systèmes denses. Nous avons introduit une contrainte d'occupation des sites par au plus une particule, et donc si la densité est forte, un grand nombre de mouvements de particules sera interdit. Dans ce cas, les particules seront bloquées dans leur position initiale. Cette contrainte est suffisante comme nous allons le voir pour modifier la loi de diffusion. (Un certain nombre de problèmes reliés à ce dernier a été étudié en détail dans un article de revue de Fisher [101]). En particulier, dans un espace de dimension unité, la diffusion sera génée. La distance moyenne $<d^2>^{1/2}$ parcourue en un temps t par une particule sera alors proportionnelle à t^y où y est un exposant caractéristique. Des simulations numériques indiquent (cf. Figure 4.50) que y = 0.25 à une dimension. Il va également de soi que ce régime est caractéristique des concentrations élevées, alors qu'à basse concentration, nous devons retrouver une loi de diffusion usuelle, y = 1/2, sur une échelle de temps telle que les particules ne se voient pas, soit $t^{1/2} < 1/C$, où C est la concentration en particules. La situation est différente lorsque les particules sont réparties dans un gradient spatial, avec par exemple une source de particules en un point et un puits en un autre point. Dans ce cas, le courant de "diffusion" ne sera plus linéaire avec la différence de concentration entre la source et le puits. Il augmentera plus rapidement, donnant lieu à un comportement apparemment sur-diffusif. Il en ressort que la décroissance des concentrations en chaque espèce lors de la réaction $A+B \rightarrow 0$, sera plus rapide que prévu lorsque la concentration en chaque espèce ne sera pas voisine de zéro. Cependant à long terme, et pour un système de très grande taille, la diffusion redevient normale. Nous nous attendons alors à retrouver les prédictions citées ci-dessus. Il n'en demeure pas moins que le régime concentré présente un intérêt pratique évident (soit dans les premiers temps de la réaction, soit pour le régime stationnaire lorsque des sources sont

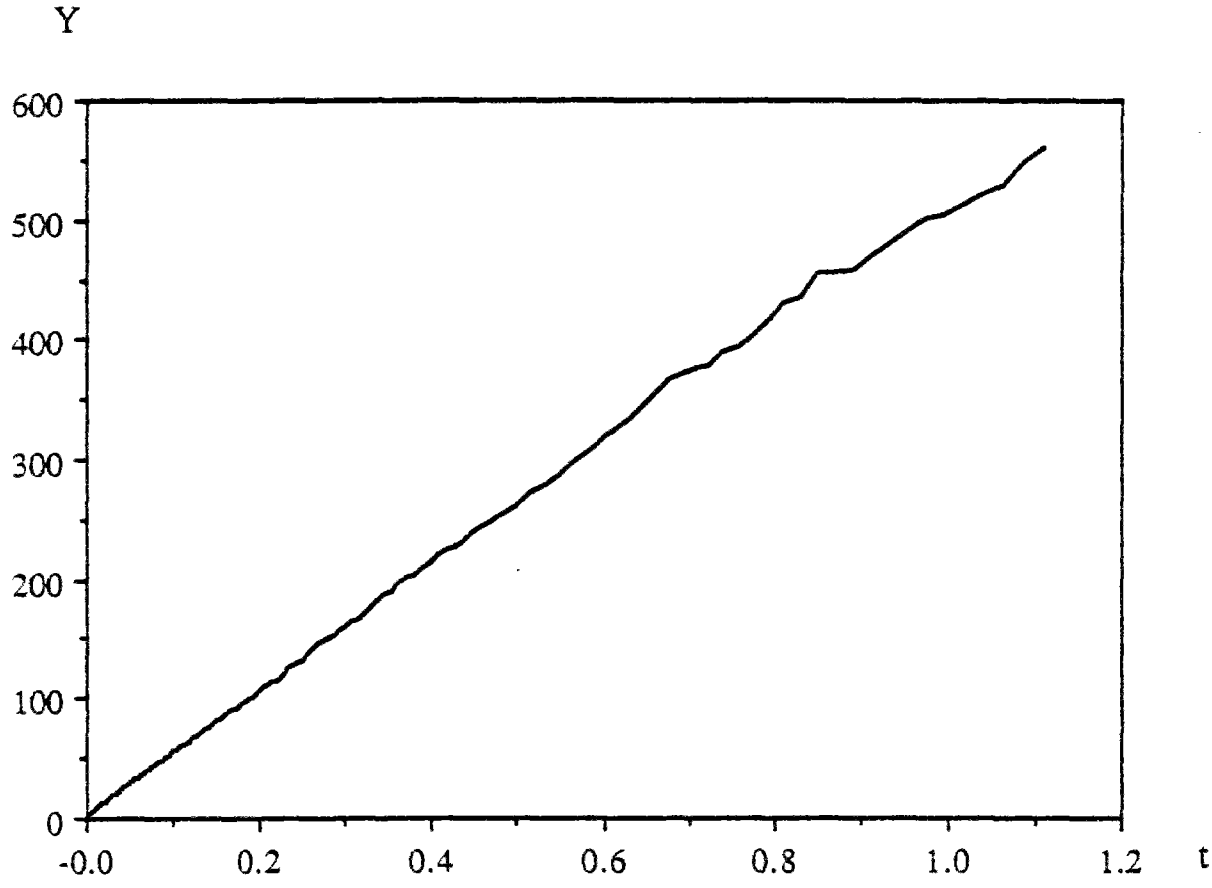


Figure 4.49 : $Y=\{1/C_A - \log(C_A/(1-C_A))\}$ en fonction du temps t, pour un espace de dimension "infinie" où chaque particule peut rejoindre n'importe quel site en un seul pas de temps. Il est aisé de voir que dans ce cas, nous nous attendons à trouver une relation linéaire entre Y et t.

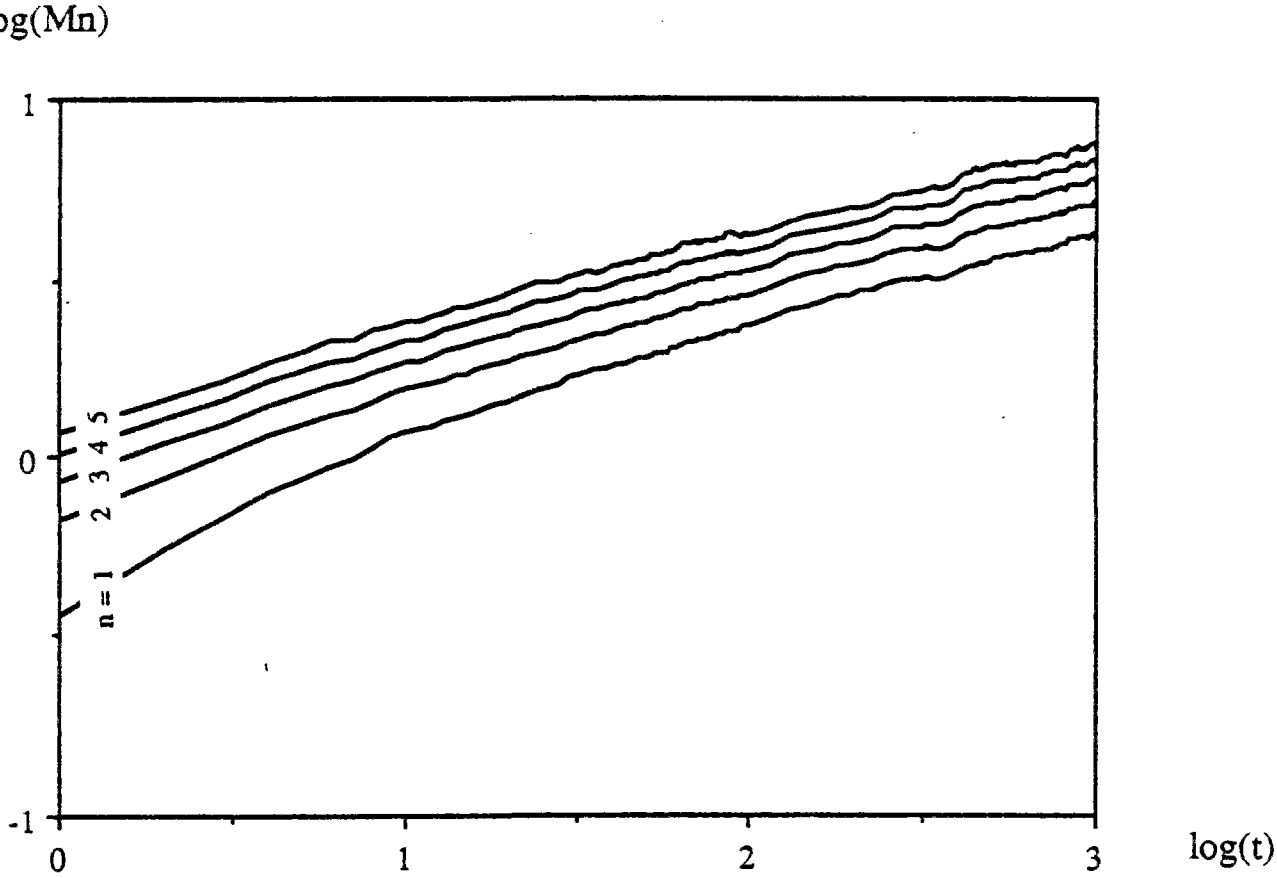


Figure 4.50 : Diffusion dans un espace à une dimension dans lequel la densité de particules est finie (ici 50%), avec une répulsion de cœurs durs. Sont montrés en coordonnées bi-logarithmiques différents moments $\langle(x-\langle x\rangle)^n\rangle^{1/n}$ pour n variant de 1 à 5, en fonction du temps t. Tous ces moments suivent une croissance similaire en $t^{1/4}$.

considérées), et notre argument suggère alors une loi de décroissance différente de la prédiction asymptotique (d/4). C'est en effet ce qu'indiquent les simulations numériques citées auparavant. Une analyse plus poussée de ce régime concentré et de la transition vers le régime dilué mériterait une étude en soi. De plus un premier pas pour prendre en compte la diffusion en régime concentré consiste à corriger la loi de diffusion par un terme non-linéaire comme dans l'équation de Burgers. Un exemple de ce type d'approche qui donne un comportement original par rapport au régime dilué, est fourni par l'étude, par van Beijeren et coll. [102], de la dispersion résultant de l'application d'un terme convectif d'ensemble, et qui est décrit par une équation de Burgers.

Il va de soi que pour la réaction d'annihilation $A+A \rightarrow 0$, ou encore la réaction de coagulation $A+A \rightarrow A$, la diffusion est normale ($y = 1/2$) en toutes dimensions d'espace, puisque les contraintes d'encombrement ne jouent pas. Ainsi l'observation des lois prévues théoriquement ne présente aucune difficulté [92, 100].

La relation avec les chemins minimaux peut se faire en suivant l'approche de Zhang [96]. Nous commençons par décrire la cinétique de la réaction et de la diffusion pour la réaction $A+B \rightarrow 0$, par le système d'équations :

$$\partial C_A(x,t)/\partial t = \sigma \Delta C_A(x,t) - C_A(x,t)C_B(x,t) + R\eta_A(x,t) \qquad (4.3.112)$$

$$\partial C_B(x,t)/\partial t = \sigma \Delta C_B(x,t) - C_A(x,t)C_B(x,t) + R\eta_B(x,t) \qquad (4.3.112')$$

où le dernier terme de chaque équation représente un terme de source aléatoire. $C_A(x,t)$ est la probabilité de trouver une particule de type A à l'instant t en x ($0 \leq C_A \leq 1$). Traitant maintenant de l'écart de concentration entre A et B, nous obtenons simplement pour $\gamma = (C_A - C_B)/2$:

$$\partial\gamma(x,t)/\partial t = \sigma \Delta\gamma(x,t) + R\eta_\gamma(x,t) \qquad (4.3.113)$$

et

$$|\gamma(x,t)| \leq 1 \qquad (4.3.113')$$

L'équation (4.3.113) peut alors être comprise comme l'équation de Langevin d'un système d'Hamiltonien H

$$H = (\sigma/R^2) \int (1/2) \{\nabla\gamma(x,t)\}^2 \, d^dx \qquad (4.3.114)$$

Cet Hamiltonien peut à son tour s'interpréter comme décrivant une interface, de tension superficielle (σ/R^2), et la contrainte $|\gamma(x,t)| \leq 1$ traduit alors la limitation de cette interface à rester entre deux plans de cotes $\gamma = \pm 1$. La dimension critique supérieure du problème est alors 2, en accord avec l'analyse précédente en l'absence de sources. Notons toutefois que cette approche ne prend pas en compte les effets de contraintes stériques qui limitent la diffusion. Passons sur les méthodes utilisées pour en arriver aux conclusions de cette étude. Zhang conclut qu'il existe une longueur de ségrégation pour chaque espèce pour une dimension d'espace inférieure ou égale à 2, donnée par

$$\ell \propto \sigma/R^2 \qquad \text{pour d=1} \qquad (4.3.115)$$
$$\ell \propto \exp(\sigma/R^2) \qquad \text{pour d=2}$$

Au delà de la dimension 2, les effets de ségrégation ne sont plus pertinents. Notons que Clément et coll.[103] dans leur analyse des configurations stationnaires aboutissent à des conclusions différentes de Zhang [96]. Nous avions déjà mentionné que pour le cas de la réaction $A+A \rightarrow 0$, les résultats de ce dernier article étaient contraires au résultat exact de Rácz [95].

Autres applications

Il existe un grand nombre d'autres applications aux concepts de chemins minimaux en milieu aléatoire. Il suffit de penser à toutes les formulations de problèmes linéaires où la solution apparaît comme le minimum d'une fonctionnelle linéaire à évaluer sur un milieu qui peut être hétérogène. Pour ne citer que deux exemples, pensons au principe de Fermat en optique classique, appliqué à la propagation de la lumière dans un milieu hétérogène dont l'indice local serait une quantité fluctuante, ou encore, à la fracture d'un milieu bidimensionnel micro-fissuré ou poreux que l'on peut appréhender en recherchant la ligne qui minimise la longueur de milieu sain à casser, comme le fait Jeulin [104].

Nous allons mentionner ici quelques cas qui mettent en lumière des aspects originaux par rapport à ce qui a été présenté jusqu'à présent.

- Interférences

Lorsque nous avons évoqué l'optique au début de ce paragraphe, cela était dans le cadre du principe de Fermat (minimisation du chemin optique). Il est cependant important si l'on aborde cette question de s'interroger sur le rôle des interférences. C'est ce qu'ont fait Medina et coll. [105] en étudiant deux problèmes : le premier est le calcul de la fonction de corrélation de paires de spins dans le modèle de verres de spins de Edwards-Anderson à haute température sur réseau carré. Dans ce calcul intervient la somme, Z_{AB}, sur tous les chemins dirigés, P, qui relient deux points A et B, du produit le long de ces chemins des nombres +1 ou -1 répartis aléatoirement en concentration égale sur les liens du réseau. Le second problème modélise l'interférence quantique entre chemins qui résulte de diffusion multiple sur des impuretés. Dans ce dernier cas, le calcul est similaire au précédent, à ceci près que maintenant, les liens portent une phase arbitraire θ, comprise entre 0 et 2π. Il faut alors considérer la somme ψ_{AB} sur tous les chemins du

produit sur chaque chemin des facteurs $e^{i\theta}$ rencontrés sur les liens traversés. Nous considèrons ensuite l'intensité $W_{AB} = \psi_{AB}\psi^*_{AB}$. Pour ces deux situations, le comportement de chaque moment de Z_{AB} et de W_{AB} est identique. Medina et coll. [105] trouvent par la méthode des répliques, et également par simulations numériques, que $<\log(Z_{AB})>$ (et $<\log(W_{AB})>$) varie comme t^{ω} où t est la distance AB. De plus, utilisant Z ou W comme des poids statistiques, il est possible calculer les fluctuations typiques transverses, $<x^2>$ des chemins qui dominent ces sommes moyennes.$<x^2>$ varie comme $t^{2\nu}$. A deux dimensions, $\omega = 1/3$ et $\nu = 2/3$. Notant également que Zhang, étudiant le même problème trouve que $\nu = 3/4$ [105].

- Modèles non-locaux

Ces notions de chemins ou d'interfaces minimaux, se généralisent sans peine au cas d'un modèle non-local (au moins sur le plan conceptuel). Ainsi par exemple dans le cas d'un réseau de forces-centrales (chapitre 3), nous pouvons définir un ensemble de liens à rompre de façon à rendre non-rigide une structure déterminée. Cet ensemble représente alors l'analogue d'un "chemin" pour un problème local, bien qu'*a priori* il ne s'agisse pas d'un ensemble connexe. Attribuant à ces liens un nombre aléatoire, représentant par exemple une énergie d'interface, nous pouvons rechercher l'énergie minimum à dépenser pour casser la structure, et la conformation de la fracture. Il en va de même pour la démarche inverse sur laquelle nous reviendrons plus loin : quel est l'ensemble minimum de liens à établir pour rendre rigide la structure ? Cette question est importante pour le comportement élastique d'empilements désordonnés.

Repensons également à la définition du problème de propagation d'ordre dans le modèle de Potts à trois états anti-ferromagnétique dilué à température nulle (3PAFT décrit au chapitre 3) [106]. Nous avions introduit un seuil de dilution en essayant d'imposer deux ordres incompatibles aux deux extrémités du réseau, et en regardant le comportement de l'énergie du système dans son état fondamental, en fonction de la taille

du système. Ceci correspond en fait simplement à définir une "interface généralisée" et à étudier son énergie. L'ordre ne se propage plus lorsque cette énergie tend vers zéro avec la taille du système. Cette interface, où se localise la "frustration" du système, n'est pas une structure connexe. C'est un objet complexe au même titre que les structures minimales évoquées pour les réseaux de forces centrales, très difficile à obtenir dans la pratique. Cela traduit, en d'autres termes, les difficultés d'étude de ces problèmes non-locaux, que nous avions longuement évoquées au chapitre 3.

Le problème des verres de spins est un sujet immense, d'une difficulté considérable et nous n'allons que le mentionner car l'étude des interfaces dans ce modèle constitue une voie d'approche alternative à beaucoup d'autres démarches, comme suggéré par Derrida et Vannimenus [1] et Bray et Moore [107]. En effet, en partant de l'état fondamental comme référence, il est possible de renverser les spins sur un côté du réseau, et de regarder où se localise la frustration introduite par ces conditions aux limites. La localisation est ici naturelle comme pour le modèle 3PAFT car elle résulte de la nature discrète du modèle. L'étude de l'énergie de cette interface en fonction de la taille du système permet en principe de localiser le point critique de la transition. Notons qu'ici encore l'obtention de cette structure n'est pas facile. En principe le temps de calcul sur un ruban croît comme l'exponentielle de la largeur du ruban. Il en va d'ailleurs de même pour l'étude d'interfaces bidimensionnelles continues dans un milieu tridimensionnel [38,108]. Cela n'empêche pas l'étude de ces modèles, mais les tailles considérées sont nécessairement très limitées, et pour des problèmes aussi complexes que les verres de spins, les conclusions que l'on peut en tirer sont assez fragiles.

- Sensibilité au bruit

Une caractéristique intéressante de ces structures minimales a été étudiée par Zhang [109]. Il s'agit de la stabilité de ces structures vis à vis du bruit. Partant d'un réseau carré dont les liens portent des nombres aléatoires, x_i, équidistribués sur [0,1],

nous avons déjà évoqué un certain nombre de propriétés du chemin minimal dirigé qui traverse la structure en étant issu d'un point fixe A. Appelons B l'extrémité de ce chemin. En particulier la distance de A à B projetée sur l'axe perpendiculaire à la direction de la marche dirigée, est proportionnelle à la longueur du chemin, h, à la puissance 1/z

$$<d_{AB}^{2}>^{1/2} \propto h^{1/z} \qquad (4.3.116)$$

Perturbons maintenant le réseau en changeant les nombres aléatoires x_i, par une petite perturbation, $x_i' = x_i + \varepsilon\, y_i$, où ε est petit devant l'unité. Il en résulte éventuellement une modification du chemin minimal qui devient AB'. La distance moyenne entre B et B' suit alors une loi de puissance de la longueur du chemin :

$$<d_{BB'}> \propto h^{\rho} \qquad (4.3.117)$$

A deux dimensions, Zhang [109] a estimé numériquement que $\rho = 0.83 \pm 0.02$. Feigelman et Vinokur [109] ont proposé un argument simple qui relie cet exposant à ceux précédemment définis. En effet, la fluctuation de pondération du chemin AB lorsque le bruit est ajouté, vaut $\Delta \propto \varepsilon\, h^{1/2}$ (comme somme de h nombres aléatoires indépendants). Or les fluctuations typiques de pondération des chemins dans un environnement fixe varient comme $\delta \propto h^{1-1/\mu}$. La probabilité P pour que le bruit donne lieu à un nouveau chemin minimal (distinct du précédent) est proportionnelle à

$$P \propto \Delta/\delta \propto \varepsilon\, h^{1/\mu-1/2} \qquad (4.3.118)$$

La distance typique entre B et B' sera donc proportionelle à P et à la distance typique d_{AB} précédemment introduite. Ainsi

$$d_{BB'} \propto \varepsilon\, h^{1/\mu-1/2+1/z} \qquad (4.3.119)$$

soit numériquement, $\rho = 1/\mu+1/z-1/2 = 5/6$. Comme cet exposant est supérieur à 1/z, il va de soi que lorsque le bruit augmente, les deux chemins AB et AB' vont devenir indépendants et alors, $d_{BB'}$ va devenir proportionnel à $h^{1/z}$. L'écriture d'une simple loi d'échelle indique que l'amplitude de bruit, ε^*, pour laquelle ce changement de régime aura lieu, sera proportionnelle à $\varepsilon^* \propto h^{1/2-1/\mu}$. A cette amplitude de bruit (ou à cette hauteur), la probabilité de saut P sera de l'ordre de l'unité.

Conclusion

Les points communs à tous les modèles que nous avons considérés dans ce chapitre sont

- l'existence d'un caractère aléatoire,
  - -soit "gelé" ("quenched"), i.e. fixé une fois pour toutes au début du modèle (comme les pondérations que nous affectons aux liens d'un réseau),
  - -soit "recuit" ("annealed"), i.e. déterminé au fur et à mesure de la construction du modèle (comme le choix d'un site de croissance)
- Un aspect non-linéaire à seuil,
  - - ceci apparait souvent sous la forme d'une condition de filtre. Au-delà d'un seuil limite, un processus de réarrangement apparait qui stabilise le système dans un état statistique (de par le bruit imposé au système)

Partant donc de ces deux ingrédients simples, nous avons vu que la plupart de ces modèles convergeaient naturellement vers un état statistique critique, où apparaissait donc très naturellement des lois d'échelle. Il est amusant cependant de constater que la plupart des inventeurs d'un modèle de ce type se sont étonnés de son caractère critique, sans essayer d'établir un lien avec d'autres modèles voisins. (cf. par exemple l'absence complète de références mutuelles entre articles traitant différentes rubriques de ce paragraphe 4.3.)

4.4 Aspect dynamique : Transport

Jusqu'à présent, nous nous sommes essentiellement attachés à définir des propriétés géométriques ou reliées à la géométrie. Nous nous tournons maintenant vers des propriétés de transport qui font intervenir la notion de chemin minimal. Cependant, ces modèles font partie intégrante d'une famille de problèmes non-linéaires décrivant l'évolution de milieux controlés par une équation de type Laplacien nul, en milieu aléatoire. A ce titre, ils pourraient figurer au chapitre suivant. Ceci permet, en quelques sortes, d'établir une liaison naturelle entre ces deux types de problème.

Réseaux de Diodes

Considérons une diode modèle ayant la caractéristique montrée sur la figure 4.51. Lorsque la différence de potentiel aux bornes de cet élément, v, n'excède pas un seuil, v_g, alors la diode est isolante. Au delà, la diode est passante et a une conductivité tangente constante, g, que nous choisirons égale à l'unité dans toute la suite. Ainsi le courant traversant cet élément s'écrit:

$$\begin{aligned} i &= g(v+v_g) && \text{si } v < -v_g \\ i &= 0 && \text{si } -v_g < v < v_g \\ i &= g(v-v_g) && \text{si } v_g < v \end{aligned} \qquad (4.4.1)$$

Nous construisons, suivant la référence [110], un réseau régulier avec des diodes dont la caractéristique est décrite par ces relations. En outre, nous supposons que les seuils de chaque diode sont distribués aléatoirement, uniformément sur l'intervalle [0,1]. Les conductances locales des diodes dans leur état passant, sont toutes identiques. Quel est le comportement global du réseau ? La figure 4.51 montre qualitativement la réponse à cette

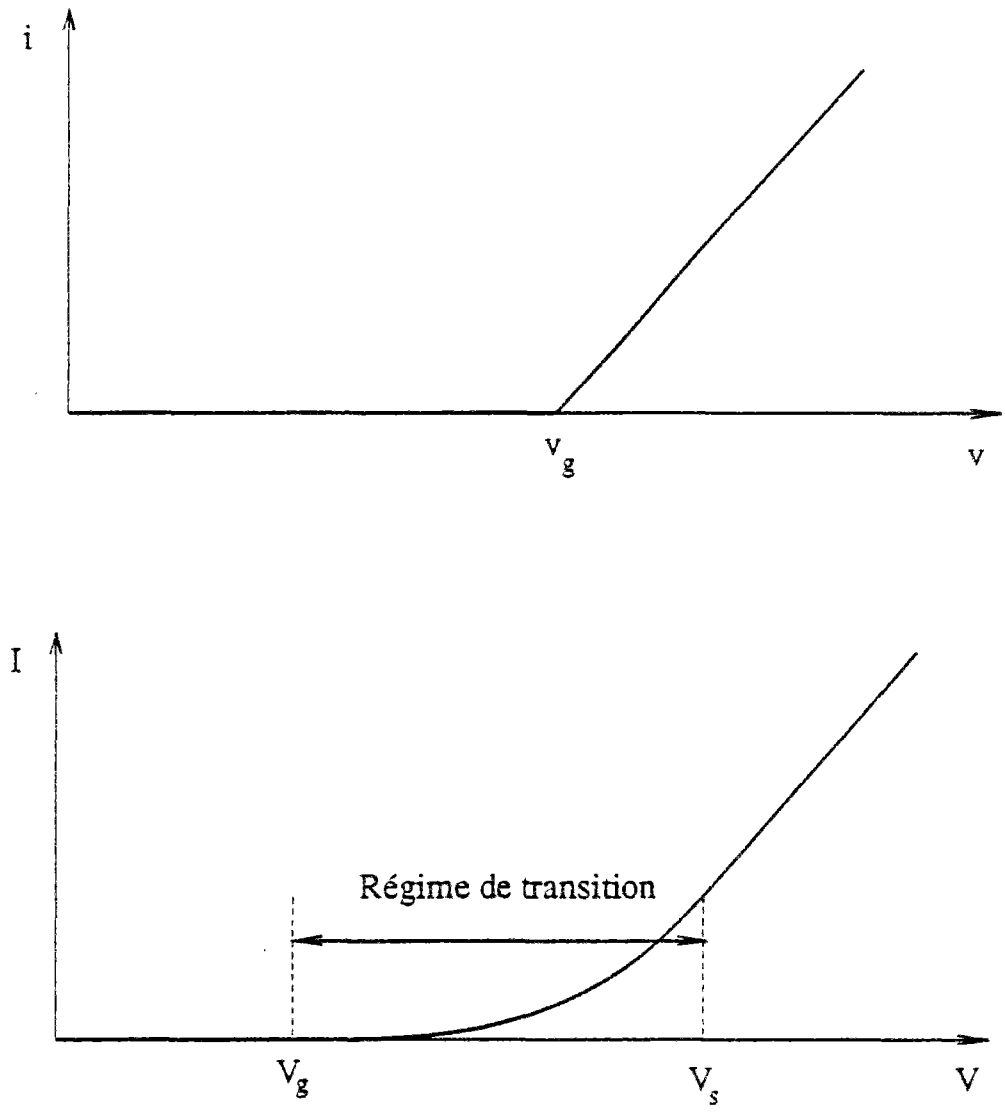


Figure 4.51 : -haut : Caractéristique d'une diode considérée dans notre étude. Tant que la différence de potentiel n'excède pas un seuil local v_g, l'élément est isolant. Au-delà il devient conducteur, avec une conductivité tangente constante, (égale à 1). La partie v<0 de la caractéristique s'obtient par une symétrie autour de l'origine.

-bas : Représentation schématique de la caractéristique globale d'un réseau de diodes du type précédent, où les seuils v_g sont distribués aléatoirement sur l'intervalle [0,1].

question. Comme toutes les caractéristiques locales sont symétriques par rapport à l'origine, il en est de même de la caractéristique globale. Par ailleurs, deux comportements sont simples à comprendre:

- Lorsque la différence de potentiel globale, V, est grande, $V > V_s$, toutes les diodes sont dans leur état passant. Alors la conductivité tangente du réseau, G, est celle d'un réseau régulier de résistances identiques. La caractéristique s'écrit donc :

$$I = G\,(V-V_0) \tag{4.4.2}$$

où V_0 est la différence de potentiel globale résultant de générateurs de tension de force v_g sur chaque lien. Ainsi, V_0 vaudra simplement

$$V_0 = (\langle v_g \rangle\, L) \tag{4.4.3}$$

où L est la taille du système (nombre de rangs en série), et $\langle v_g \rangle$ la valeur moyenne des seuils locaux.

- Lorsque la différence de potentiel globale, V, est faible, $V < V_g$, toutes les diodes sont dans leur état isolant. Le réseau est donc également isolant. Pour le cas limite $V=V_g$, il faut trouver une répartition de potentiel dans le réseau telle qu'aucune diode ne soit dans un état passant, soit $v_i<v_{gi}$, pour tout lien i. Si l'on imagine maintenant un chemin P qui relie les deux électrodes, nous aurons nécessairement:

$$V = \sum_{i \in \mathcal{P}} v_i < \sum_{i \in \mathcal{P}} v_{gi} \tag{4.4.4}$$

d'où

$$V_g < V_{g0} = \min_{\mathcal{P}} \left\{ \sum_{i \in \mathcal{P}} v_{gi} \right\} \tag{4.4.5}$$

Nous reconnaissons dans cette dernière expression, la notion de chemin minimal que nous avons étudié tout au long de ce chapitre. Il est aisé de se convaincre que cette borne supérieure sur V_g est en fait une égalité. En effet, pour que le milieu conduise, il faut qu'existe au moins un chemin continu de diodes passantes, d'où $V_g > V_{g0}$. Ainsi $V_g = V_{g0}$.

- Finalement entre V_g et V_s, le milieu est conducteur, mais toutes les diodes ne sont pas passantes. Ainsi, la conductivité augmente progressivement, donnant lieu à un comportement non-linéaire. Ce dernier régime non-linéaire est principalement celui qui nous intéresse ici.

Nous avons analysé la notion de chemin minimal en termes de phénomène critique et en particulier, nous avons maintes fois comparé ce point critique à un seuil de percolation. Nous nous attendons donc naturellement à trouver un comportement critique de la conductivité au voisinage de V_g. Nous voyons également que le champ électrique, V/L, joue le rôle de paramètre de contrôle.

Il se trouve donc que, grâce à la non-linéarité "à seuil" des diodes que nous avons introduites, le point critique se traduit simplement par l'apparition d'une conductivité non-nulle. Il est dès lors très simple de concevoir un mécanisme qui fasse apparaître ce point critique comme attracteur de la dynamique du système, comme dans le cas du modèle de "tas de sable" [84-87] discuté lors des états critiques auto-organisés. En effet, supposons que l'une des électrodes de notre réseau de diodes soit connecté à l'une des bornes d'un condensateur, alors que la borne opposée est alimentée par un générateur de courant dont le débit est supposé très faible. Lorsque la tension du condensateur dépassera V_g, le courant circulera dans le réseau abaissant ainsi la charge. Au contraire, si cette tension est inférieure, le réseau étant isolant, la charge du condensateur augmentera. Si maintenant, le générateur de courant débite une intensité plus importante, alors, nous nous écarterons du point critique, comme sous l'effet d'un champ extérieur, dans une transition de phase magnétique. Pour établir une comparaison avec le modèle de "tas de sable", nous pouvons dresser le dictionnaire suivant:

Modèle	Modèle de Bak	Ondes de densité de charge	Réseau de diodes
Paramètre de contrôle	Angle de rotation	Champ électrique	Tension
Paramètre d'ordre	Flux de particules	Courant	Courant
Champ extérieur ou	Source de particule Vitesse de rotation		Générateur de courant Générateur de tension

Enfin, pour compléter l'analogie, rappelons que dans les deux situations, il existe un mécanisme non-linéaire à seuil qui permet de limiter un régime stable ou isolant, par un mécanisme dissipatif, soit la conduction de particules (modèle de Bak), soit la conduction de courant (réseaux de diodes).

La comparaison avec d'autres sujets évoqués dans la partie précédente est également instructive. En particulier, de par son caractère dynamique, la conduction d'un réseau de diodes se rapproche du phénomène des ondes de densité de charge. Nous verrons que cette comparaison dépasse le strict cadre qualitatif, car le comportement critique de la conductivité au voisinage du seuil de conduction que nous proposons est similaire à celui obtenu par Fisher [60] dans sa théorie de champ moyen évoquée au paragraphe précédent (4.3).

Nous nous sommes déjà attachés à définir les propriétés critiques géométriques de cette transition. Nous allons maintenant essentiellement considérer les propriétés dynamiques de transport.

Il est facile, dans ce cadre, de calculer exactement le point critique effectif, V_g, par un algorithme de matrice de transfert déjà évoqué précédemment. D'autre part la répartition de potentiel peut s'obtenir de plusieurs manières. La plus simple consiste à utiliser un algorithme de relaxation de Gauss-Seidel avec les lois non-linéaires de chaque diode. Une tension ou un courant est alors imposé aux bornes du réseau. Tant que l'on

reste à distance finie du seuil de conduction, la solution s'obtient sans problème autre qu'une vitesse de convergence de plus en plus lente au fur et à mesure que l'on s'approche du seuil. Cette technique a été utilisée dans la référence [110] dont nous présenterons les résultats ci-dessous.

Il existe également d'autres possibilités pour aborder le problème. Nous pouvons en effet remarquer que la caractéristique, pour tout système de taille finie, se compose d'intervalles de potentiels, $[V_i, V_{i+1}]$, dans lesquels la répartition des liens conducteurs et isolants est fixe. Ainsi dans chaque intervalle, la caractéristique du réseau est affine, et elle correspond à un problème linéaire. Il est ainsi possible, en résolvant deux distributions de potentiel dans le réseau pour deux conditions aux limites différentes (par exemple V = 0 et V = 1), de déduire la répartition de potentiels locaux pour toutes conditions aux limites.

$$v_i(V) = v_i(V=0) + V\{\, v_i(V=1) - v_i(V=0) \,\} \qquad (4.4.6)$$

Ainsi, partant du régime où toutes les diodes sont passantes, il est possible de calculer la tension, V_n, pour laquelle la première diode deviendra isolante.

$$V_n = \max_i \{ \{ v_{gi} - v_i(V=0) \} / \{ v_i(V=1) - v_i(V=0) \} \} \qquad (4.4.7)$$

Après avoir rendu isolante la diode correspondant à ce maximum, il faut recalculer la caractéristique du réseau pour la nouvelle géométrie. Pour ce faire, un seul calcul suffit car connaissant V_n et la caractéristique au-delà, nous connaissons le point extrême de la caractéristique de l'intervalle $[V_{n-1}, V_n]$. Puis, le calcul de V_{n-1} est similaire à (4.4.7). De proche en proche, nous obtenons ainsi exactement, par une suite de problèmes linéaires, l'ensemble de la caractéristique. Cette technique est actuellement [111] en cours d'implementation. Nous aurons l'occasion de revenir sur ce type d'algorithme pour le cas de la rupture fragile au chapitre prochain.

Utilisant la première technique, une étude numérique [110] sur réseau carré, a donné les résultats suivants : le régime de transition entre V_g et V_s est caractérisé par une caractéristique globale de la forme

$$I \propto ((V-V_g)/L)^{\theta} \qquad (4.4.8)$$

où $\theta = 2.0 \pm 0.1$ (ceci lorsque l'on s'intéresse à des variations de potentiel supérieures à la taille typique des intervalles $[V_i,V_{i+1}]$). La figure 4.52 montre en coordonnées bilogarithmiques l'écart au seuil $(V-V_g)$ en fonction du courant I pour des réseaux de tailles différentes jusqu'à 100×100. Nous distinguons trois régimes sur cette courbe. Pour un fort courant, nous retrouvons le régime Ohmique ($V>V_s$). A plus faible courant, nous trouvons le régime décrit par l'équation (4.4.8). Puis enfin à très faible intensité, nous observons un dernier régime Ohmique. Il est facile de comprendre l'origine de celui-ci. Le réseau a une caractéristique affine sur chaque intervalle $[V_i,V_{i+1}]$, et donc en particulier pour le premier intervalle $[V_g, V_1]$, où $I = G(V-V_g)$. Pour un réseau de taille finie, $V_1>V_g$, et donc dans la représentation de la figure 4.52, le régime $V<V_1$, donnera une caractéristique de pente unité.

Comment peut-on comprendre le comportement intermédiaire (4.4.8) ? Nous proposons un argument de champ moyen qui rend compte de la loi observée. Pour une différence de potentiel V imposée aux bornes du réseau, la tension moyenne aux bornes des liens, vaut en moyenne V/L. La proportion d'éléments conducteurs sera p(V) telle que

$$V/L = \int_0^{p(V)} f(x)\,dx \qquad (4.4.9)$$

où $f(v_g)\,dv_g$ est la distribution statistique des seuils locaux. Soit, pour une distribution uniforme entre 0 et 1, p(V) = V/L. Sur réseau carré, dans le cas d'une dilution aléatoire,

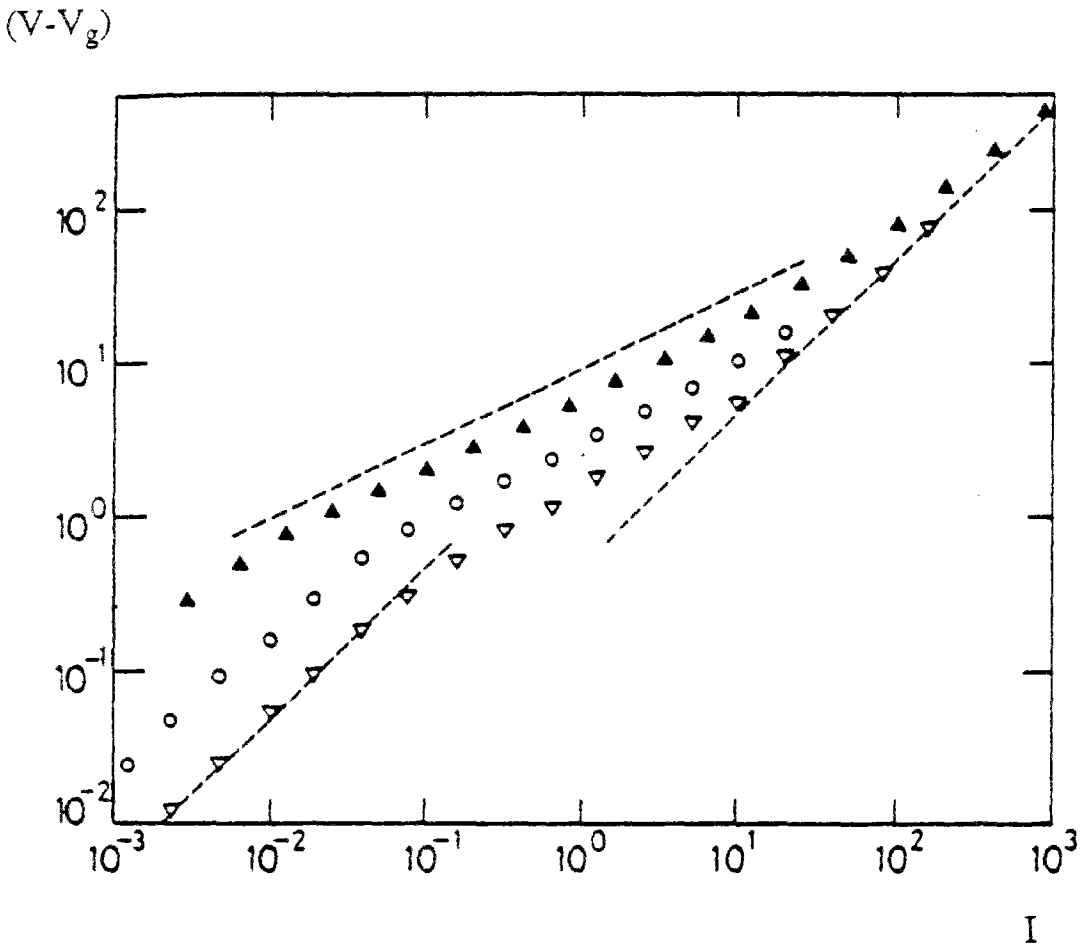


Figure 4.52 : Ecart au seuil, $V-V_g$, en fonction du courant, I, obtenu numériquement pour des réseaux de tailles 5 (▽), 20 (○) et 100 (▲), par relaxation de Gauss-Seidel. La pente de cette courbe dans la gamme intermédiaire fourni l'exposant $\theta = 2.0 \pm 0.1$.

la conductance G du réseau est bien décrite par une méthode auto-cohérente [112] tant que l'on évite le voisinage immédiat du seuil de percolation (p=1/2). Cette méthode fournit

$$G(p) = G_0(2p-1) \qquad (4.4.10)$$

où G_0 est la conductance du réseau pour p=1. En éliminant p, nous obtenons

$$G(V) = G_0\,(2V/L-1) \qquad (4.4.11)$$

ou puisque G(V) = dI/dV, la caractéristique s'écrit

$$I = \int_{L/2}^{V} G(V)\,dV \qquad (4.4.12)$$

ou

$$I/L = G_0\,(V/L-1/2)^2 \qquad (4.4.13)$$

Nous voyons que cette prédiction est raisonnable, dans la mesure où nous avons une croissance quadratique du courant avec l'écart au seuil. Le seuil évalué par cette méthode V/L = 1/2 est un peu surestimé, puisque dans cette géométrie $V_g/L = 0.46$. En effet, ce seuil est exactement le double de la pondération minimale asymptotique rapportée au paragraphe 4.2, $\langle x \rangle_\infty$, puisque nous travaillons sur un réseau carré orienté à $\pi/4$. Le nombre de liens d'un chemin dirigé traversant le réseau de taille L, est donc 2L.

A partir de l'analogie avec un phénomène critique, nous nous attendions à une loi du type de (4.4.8), avec un exposant θ critique universel. Or l'explication que nous venons de proposer ne peut pas donner de réponse correcte pour une situation très hétérogène (où très peu de liens sont conducteurs) comme c'est le cas au voisinage du seuil. Il est donc possible de se trouver face à une situation semblable à celle rencontrée

en percolation. Rappelons en effet que nous obtenons sur réseau carré un comportement critique pour la conductivité valable au voisinage immédiat du seuil p_c,

$$G \propto (p-p_c)^t \qquad (4.4.14)$$

où t = 1.30 (cf. Chap.2). Au contraire, loin du seuil, le comportement n'est plus critique, mais il peut être bien décrit par une théorie auto-cohérente (4.4.9), et donc avec un exposant apparent "t" = 1. Dans notre problème de diodes, il est tout à fait possible que la loi observée (4.4.8), avec $\theta = 2$, ne soit valable que pour un courant fini, et qu'au voisinage immédiat du seuil, apparaisse un comportement critique avec θ différent de 2. La méthode utilisée dans l'étude [110] ne permet pas de trancher, mais nous espérons que la seconde méthode, beaucoup plus précise, permettra d'avoir accès au comportement précisément au voisinage du seuil. Notons enfin que le parallèle avec la percolation est de même nature que celui avec le modèle d'état critique auto-organisé: ils doivent tous deux être pris à un niveau formel, et non pas quantitatif.

Nous pouvons tenter d'aborder l'estimation de l'exposant θ critique par le biais d'un argument de taille finie. En effet, nous pouvons introduire une longueur de corrélation, $\xi_{//}$, parallèle à la direction du courant, qui diverge au voisinage du seuil selon

$$\xi_{//} \propto ((V-V_g)/L)^{-\nu_{//}} \qquad (4.4.15)$$

En utilisant les lois de fluctuation du seuil effectif en fonction de la taille du système, nous déduisons l'estimation de $\nu_{//} = z = 3/2$ (et de même, nous pourrions introduire une longueur de corrélation transverse, qui diverge avec un exposant $\nu_{\perp} = 1$). Au seuil $V=V_g$, nous savons que la structure conductrice est réduite au chemin minimum, de longueur L, et donc $G(V_g) = 1/L$. Ecrivant maintenant la loi d'échelle pour la conductance

$$G(V) = ((V-V_g)/L)^{\theta-1}\ \varphi(\ L/\xi_{//}) \qquad (4.4.16)$$

nous obtenons pour $L > \xi_{//}$,

$$G(L) \propto L^{(1-\theta)/\nu_{//}} \qquad (4.4.17)$$

et donc en utilisant le résultat $G(L) \propto L^{-1}$, nous concluons $\theta = 1+ \nu_{//} = 5/2$. Rappelons que le comportement critique vrai obtenu pour ce modèle, (i.e. au voisinage immédiat du seuil), n'a jamais été observé. Cette prédiction reste donc à vérifier. Ceci est d'autant plus important que l'exposant θ au voisinage du seuil de conduction est universel, alors que la valeur "θ" = 2 est une simple conséquence de la distribution de seuils choisie. Nous proposons dans le paragraphe suivant un calcul qui conforte cependant cette prédiction dans une géométrie modèle. Il s'agit de la caractéristique d'un réseau de diodes à seuil aléatoire, disposé selon la géométrie hiérarchique (un tel réseau à la quatrième génération est représenté sur la figure 4.16) que nous avons étudiée au paragraphe 4.2.

Réseau hiérarchique

Nous pouvons calculer simplement par simulations numériques la réponse courant-tension pour un réseau hiérarchique diamant dont les liens ont le comportement illustré sur la figure 4.51. Comme nous l'avons souligné au paragraphe 4.2, il suffit de combiner alternativement les règles d'addition de liens en série puis en parallèle.

Parallèle : Appelons $i = \varphi(v)$ et $i= \varphi'(v)$, les caractéristiques de deux liens. Une fois mis en parallèle, ces deux liens auront une caractéristique $i = \Phi(v)$, où

$$\Phi(v) = \varphi(v) + \varphi'(v) \qquad (4.4.18)$$

Série : Inversons les fonctions caractéristiques élémentaires: $v = \varphi^{-1}(i)$, et $v = \varphi'^{-1}(i)$. Si les deux liens sont disposés en série, la caractéristique globale vaudra $v = \Phi^{-1}(i)$:

$$\Phi^{-1}(i) = \varphi^{-1}(i) + \varphi'^{-1}(i) \qquad (4.4.19)$$

Les figures 4.53 a et 4.53 b montrent la caractéristique, I fonction de V, et I fonction de $V-V_g$ (en coordonnées bilogarithmiques) respectivement, obtenue pour 10 générations. Partant des forts courant, nous distinguons nettement trois régimes :

- Dans un premier temps, la conductivité tangente est constante, et la courbe tend vers une asymptote de pente 1 pour $I >> 1$.
- Lorsque certains éléments commencent à devenir isolants, la pente $d\{\log(i)\}/d\{\log(V-V_g)\}$ augmente sensiblement pour atteindre la valeur 2. Ce régime est similaire a celui que nous avons observé sur réseau Euclidien. Nous pouvons le mettre en évidence simplement si nous utilisons la détermination du seuil qui découle de l'argument de champ moyen donné ci-dessus, "V_g/L" = 1/2.
- Finalement, au voisinage du point critique, la caractéristique change à nouveau de pente, pour se stabiliser vers $\theta = 2.4 \pm 0.1$. Ce régime est montré dans la figure 4.53b, où nous avons utilisé la valeur du seuil asymptotique "V_g/L" = 0.444 (cf. partie 4.2). Nous pouvons comparer θ à l'exposant $1+\nu_{//} = 2.4$ obtenu pour ce problème dans la partie 4.2. Ceci conforte notre prédiction.

Nous avons ici considéré des caractéristiques locales symétriques, mais il eut été également possible de ne trouver de régime conducteur que pour un courant positif. Si maintenant nous orientons toutes les diodes dans le même sens, ceci matérialise le cas d'un problème dirigé. Ce problème a été étudié expérimentalement par Gilabert [113], et le comportement collectif observé pour le réseau est similaire à celui rapporté ci-dessus, avec un exposant de champ moyen θ apparent toujours égal à 2.

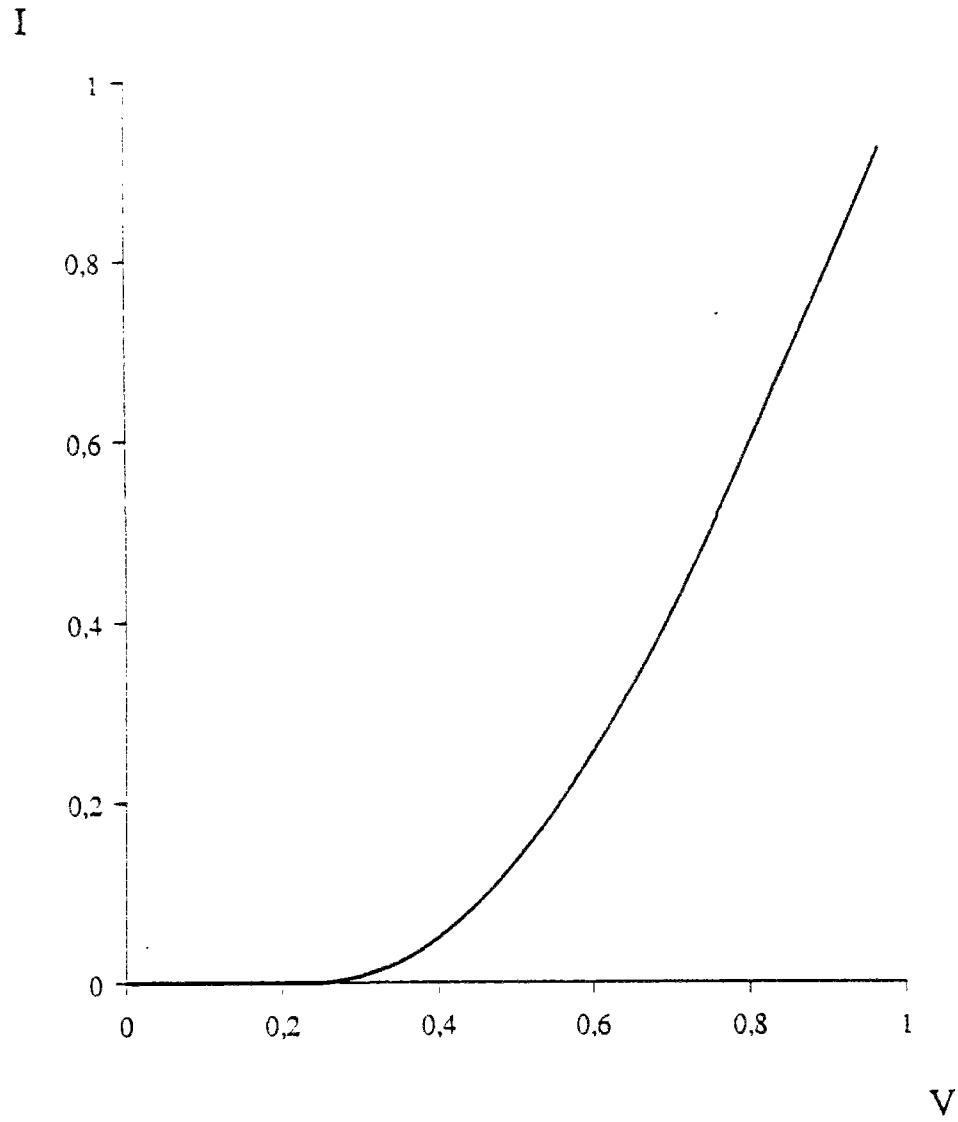


Figure 4.53 a : Caractéristique I fonction de V pour un réseau hiérarchique diamant à la dixième génération. Trois régimes sont visibles sur cette courbe: en partant des forts potentiels, nous trouvons un régime à conductivité tangente constante (pente 1), un régime quadratique (pente 2), et enfin le régime isolant. La figure suivante montre qu'en fait existe un régime critique près du seuil de conduction.

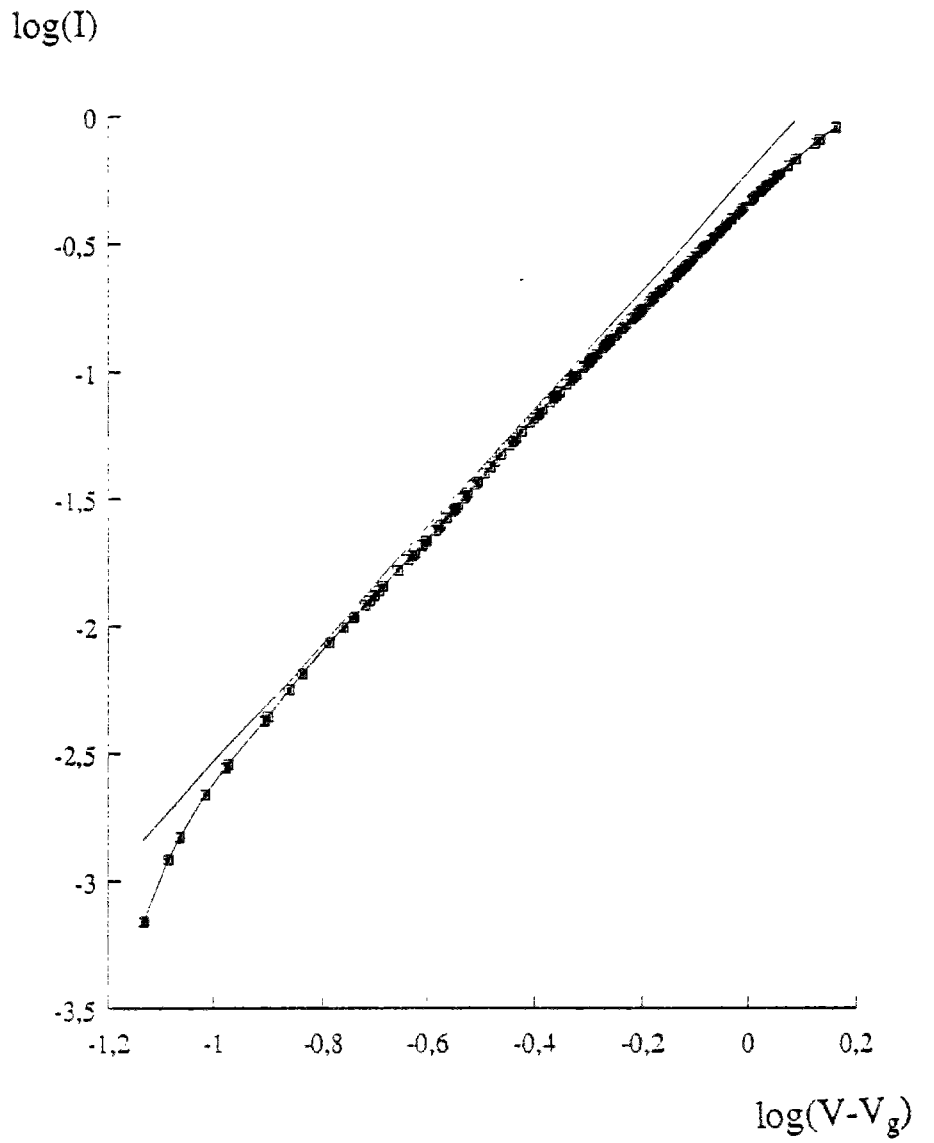


Figure 4.53 b : Caractéristique log(I) fonction de $\log(V-V_g)$ pour un réseau hiérarchique diamant à la dixième génération. Nous voyons le régime critique, où V_g est pris égal à sa valeur asymptotique, 0.222. Nous indiquons pour comparaison une droite de pente $\theta = 2.4$. Pour $V_g = 0.25$, nous trouvons plus loin du seuil, la valeur champ-moyen $\theta = 2$.

Autres caractéristiques et exemples d'application

Dans la discussion ci-dessus, nous avons considéré un réseau électrique de diodes. Il va de soi qu'un tel système n'est pas fréquemment rencontré dans la réalité. Il y a cependant des systèmes très proches de celui-ci, comme par exemple un fluide de Bingham [114] dans un milieu poreux, qui présente plus d'intérêt au niveau des applications. Rappelons qu'un fluide de Bingham, est un fluide non-Newtonien, qui a un comportement plastique. Au-dessus d'une certaine contrainte de cisaillement τ_c, le fluide s'écoule avec une loi du type :

$$\dot{\gamma} = (\tau - \tau_c)^n \qquad (4.4.20)$$

où $\dot{\gamma}$ est le taux de déformation, et l'exposant n est une constante pour le fluide considéré (typiquement $1 \leq n \leq 2$). Lorsque ce fluide est mis dans un capillaire soumis à une différence de pression p, le débit, q, sera nul en dessous d'une pression critique, puis croîtra selon une loi de puissance de l'écart au seuil,

$$q = K\,(p-p_c)^n \qquad (4.4.21)$$

où K est une perméabilité. Dans un milieu poreux, assimilant chaque pore à un capillaire dont le rayon est aléatoire, nous aurons une distribution locale de seuils de pression, p_c, mais aussi, corrélativement, de perméabilité locale K. Ce dernier effet n'a pas été pris en compte dans le modèle précédent (les conductivités tangentes étaient identiques), mais qualitativement, nous escomptons un comportement similaire. Ce cas mérite de fait une attention plus approfondie, car une analyse quantitative de la caractéristique globale est susceptible de fournir des renseignements importants sur la distribution de taille des pores dans le milieu.

Comme nous l'avions souligné au chapitre 2, la transformation de dualité est également valide pour des comportements non-linéaires [115]. Dans notre situation, cela se réduit à l'échange formel des potentiels et des courants, et au passage au réseau dual (défini au chapitre 2). Nous avons aussi une illustration concrète de la formulation en termes de problème d'optimisation linéaire vu au paragraphe 4.2. La dualité que nous avions vu alors était formellement une transposition matricielle. Nous voyons ici que l'interprétation en potentiel (primal) puis en courant (dual) recouvre les mêmes concepts. Cette notion de dualité ne comporte pas de formulation potentielle simple du problème dans le cas non-linéaire. Ainsi la caractéristique duale d'une diode s'interprète comme un régime supra-conducteur, tant que l'intensité n'excède pas une valeur seuil, v_g, suivi d'un régime à conductivité tangente constante. Dans un cas élastique, ceci serait un comportement parfaitement plastique (à module plastique constant).

Il existe également un autre problème de transport qui est critique pour le même point. Nous pouvons voir sur la figure 4.51 que la caractéristique de la diode est constituée d'un régime à faible tension où la résistance tangente R_1 tend vers l'infini, suivi d'un régime à forte tension, où cette résistance tangente R_2 vaut l'unité. Si nous changeons en effet d'échelle pour mesurer le courant, nous pouvons fixer R_1 à l'unité, et dès lors faire tendre R_2 vers 0. La caractéristique est montrée sur la figure 4.54 (haut). Nous écrirons cette caractéristique de la façon suivante

$$\begin{aligned} v &= i \quad && \text{pour } |i| < v_g \\ v &= v_g \quad && \text{pour } i > v_g \\ v &= -v_g \quad && \text{pour } i < -v_g \end{aligned} \qquad (4.4.22)$$

Un réseau constitué de ces diodes v_g distribué aléatoirement a alors la caractéristique montrée sur la figure 4.54 (bas). Pour un courant positif, nous distinguons trois phases:

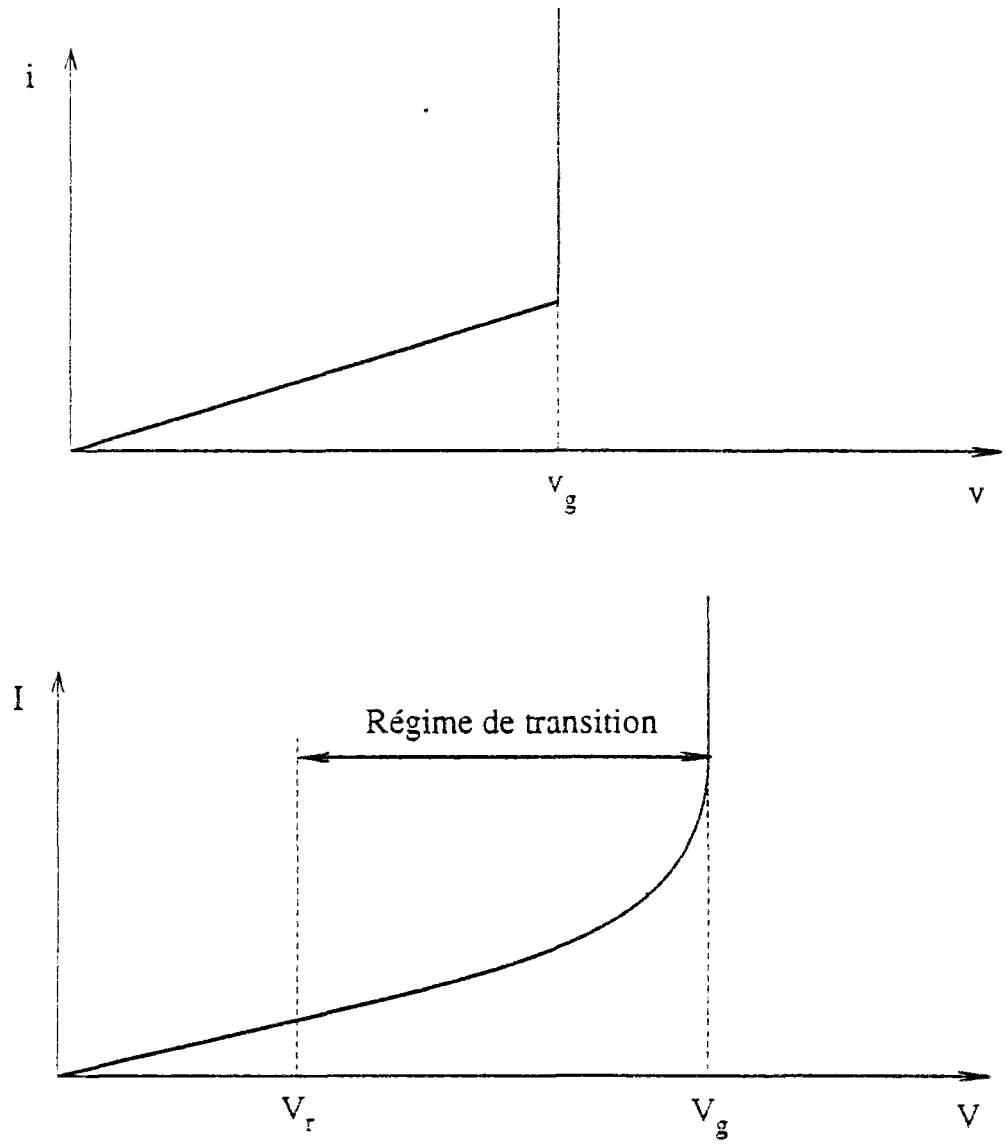


Figure 4.54 : -haut : Caractéristique d'une diode considérée dans notre étude, après une remise à l'échelle des intensités. Tant que le courant n'excède pas un seuil local v_g, l'élément est conducteur. Au-delà, sa resistivité tangente s'annule.

-bas : Représentation schématique de la caractéristique globale d'un réseau de diodes du type précédent, où les seuils v_g sont distribués aléatoirement sur [0,1].

$$\begin{aligned} V &= G_0 I && \text{pour } V < V_r \\ (V_g - V) &\propto (I_g - I)^{\varpi} && \text{pour } V_r < V < V_g \\ V &= V_g && \text{pour } I > I_g \end{aligned} \qquad (4.4.23)$$

Nous avons introduit le premier régime pour inclure le cas de distributions de seuil quelconques, mais dans le cas qui va nous intéresser, (distribution uniforme sur [0,1]), V_r est nul. Le comportement critique est encore apparent ici sous la forme de la loi intermédiaire ($V_r < V < V_g$), avec un exposant ϖ. Ce comportement n'a pas encore été étudié numériquement à notre connaissance. Nous pouvons proposer une estimation de l'exposant ϖ, loin du seuil, par un calcul en champ moyen analogue au cas précédent (celui qui nous avait permis d'obtenir $\theta = 2$). Pour ce faire, il faut maintenant raisonner en termes de courant. Supposant ce champ uniforme, le nombre d'éléments dont la résistance tangente est nulle est de l'ordre de $p(I) = I/L$, si nous partons d'une distribution uniforme de seuil entre 0 et 1. La résistance tangente de l'ensemble du réseau R(I) sera donnée par une théorie auto-cohérente comme ci-dessus, par $R(I) = R_0(1-2p(I))$ (cf. Eq.(4.4.10)). Soit en intégrant,

$$(V_g - V)/L = R_0 (1/2 - I/L)^2 \qquad (4.4.24)$$

ou $\varpi = 2$. La valeur de $I_g/L = 1/2$ provient simplement de l'intensité qui correspond à l'annulation de la résistance tangente dans le calcul auto-cohérent dont nous nous servons. Comme précédemment, cette valeur est approximative, puisque la réponse attendue est 0.46. Au même titre, dans l'intégration, la valeur de V_g/L que l'on obtient en écrivant que la caractéristique passe par l'origine, soit $V_g/L = R_0/4$, est simplement indicatrice d'un ordre de grandeur.

Nous avons effectué quelques simulations numériques préliminaires de ce problème sur réseau carré, jusqu'à des tailles de 25×25, en utilisant la formulation duale (échange formel des courants et des tensions dans la figure 4.54) (figure 4.55 a). Nous

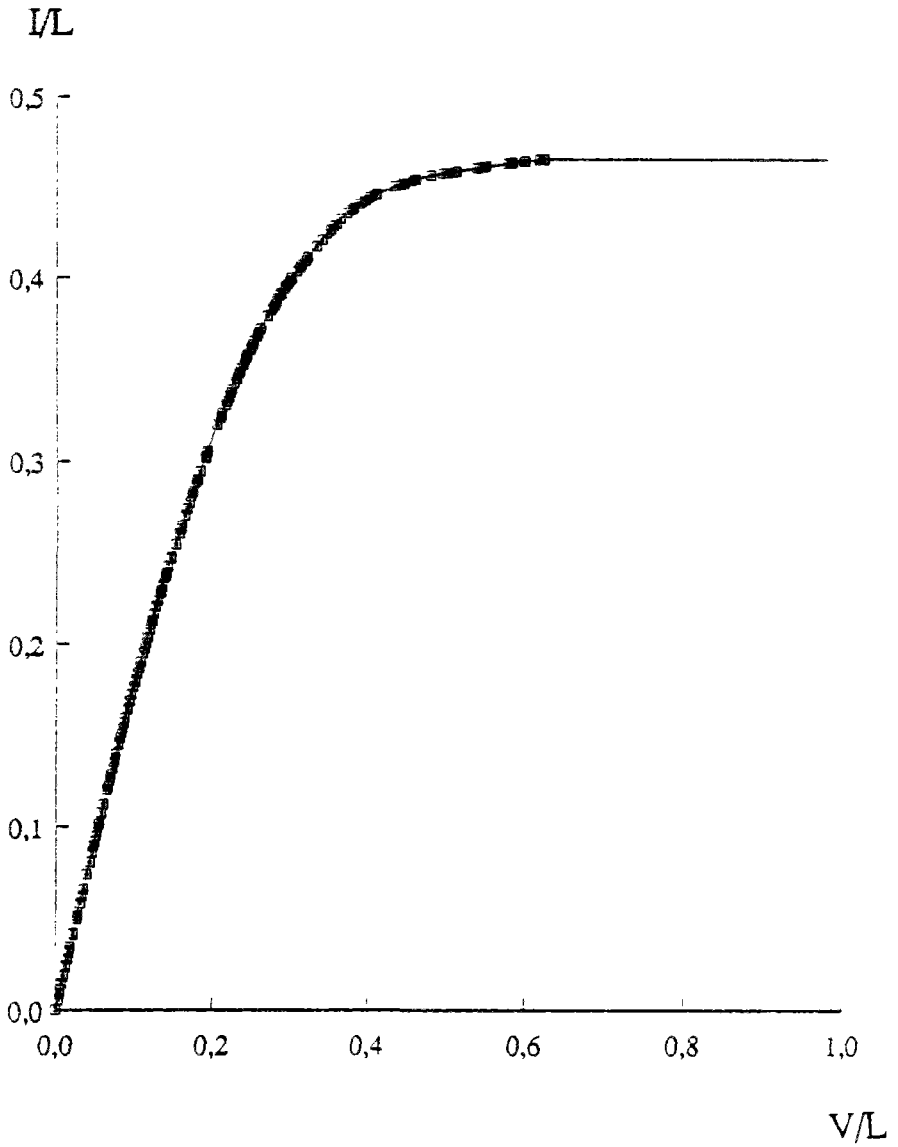


Figure 4.55 a: Caractéristique mesurée pour le problème représenté sur la figure précédente en échangeant potentiel et courant. Chaque point sur la courbe représente la saturation d'un lien, sur un réseau carré 25×25.

observons le régime quadratique prédit par l'argument précédent, si nous utilisons les valeurs des seuils prédits par ce même argument, (ici, (0.5, 0.5)). L'accord entre la courbe mesurée et la prédiction est tout à fait satisfaisant si l'on ne s'approche pas trop près du point de saturation (V_g/L, I_g/L). Au voisinage de ce point, il faut connaître précisément ses coordonnées pour obtenir des estimations valables des exposants critiques. La figure 4.55b montre en coordonnées bilogarithmiques (0.46 - I/L) en fonction de (0.66 - V/L). La valeur numérique (0.66) est déterminée en essayant de minimiser la courbure alors que l'autre seuil (0.46) est donnée par l'étude numérique directe de ce problème (partie 4.2). Dans ce cas, nous mesurons au voisinage immédiat du seuil critique, un exposant $\varpi = 1.45 \pm 0.15$, mais, au-delà, la pente semble être de l'ordre de 3.3. Un examen plus attentif indique que cette dernière portion, loin du seuil, est en fait incurvée. Comme nous l'avons mentionné ci-dessus, la "bonne" description de cette seconde partie doit se faire en utilisant les seuils obtenus par l'argument de champ moyen.

Il n'est pas possible dans ce cas d'obtenir l'exposant ϖ au point critique par l'utilisation de fonction d'échelle, car la géométrie des liens isolants et resistifs pour $V=V_g$, n'est pas connu, contrairement au premier problème évoqué dans cette partie. La figure 4.56 montre un exemple typique de repartition géométrique des liens de différents états.

Notons également qu'il est possible de définir un "squelette" dans ce problème, dont la densité s'annule au seuil de saturation. Ce squelette n'est pas defini dans ce problème par le support du courant car tous les liens portent un courant. Il faut concevoir alors cet ensemble de façon différentielle: Le "squelette" sera l'ensemble des liens i dont la tension v_i augmente avec la différence de potentiel globale, $\partial v_i(V)/\partial V > 0$. Sont ainsi exclus du squelette les liens dont l'état tangent est isolant, mais également les liens qui sont "écrantés" par ces derniers. La notion de "squelette" recouvre alors naturellement le caractère "actif" ou non des liens du réseau. De plus, au seuil de saturation, le squelette disparaît. Nous remarquerons le parallèle qu'il existe entre le

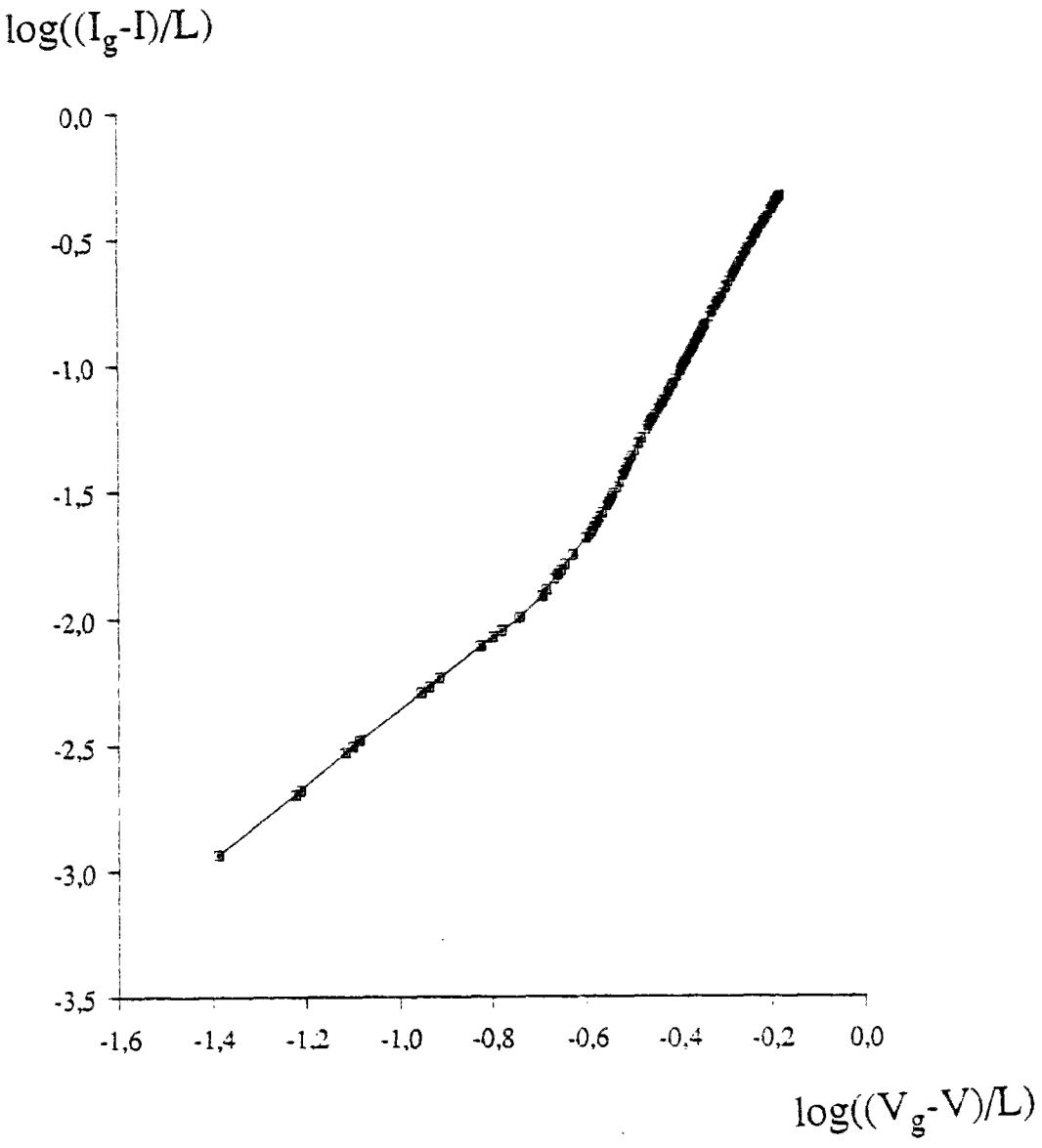


Figure 4.55 b: Caractéristique de la figure précédente en coordonnées bilogarithmiques $\log(I_g\text{-}I)$ fonction de $\log(V_g\text{-}V)$. Les deux régimes visibles ont des pentes apparentes de 1.45, et 3.3. Le premier régime est valide près du point critique; le second au contraire n'est qu'apparent, comme discuté dans le texte.

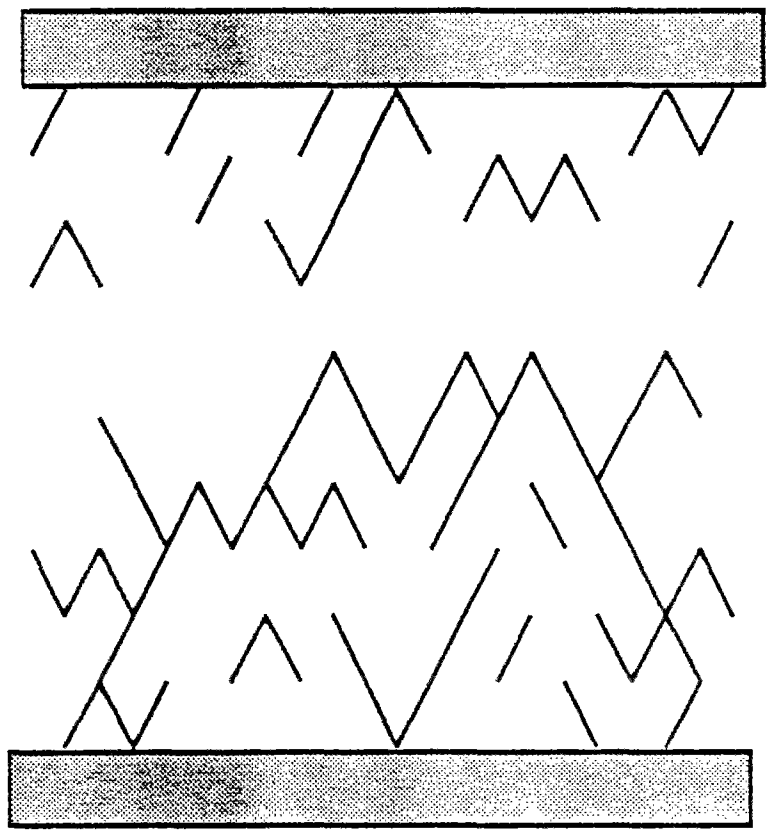


Figure 4.56 : Exemple de répartition des liens dont l'état tangent est isolant. Sont dessinés en noir sur la figure les liens duaux, au seuil de saturation $V=V_g$. Les conditions aux limites latérales sont périodiques. L'existence d'un amas continu (en trait gras) implique qu'il n'existe plus de chemin dirigé formé exclusivement de liens résistifs joignant le bord inférieur au bord supérieur.

squelette que nous avons ainsi défini, et la notion simple de squelette qui émerge naturellement en percolation dirigée. La construction des deux objets est similaire. La seule différence qui existe entre ces deux problèmes, vient du caractère non-aléatoire de la saturation des liens dans le problème des diodes.

La figure 4.57 indique la proportion des éléments dont l'état tangent est isolant, en fonction du potentiel. Nous voyons sur la figure, que cette proportion évolue d'abord linéairement, en accord avec l'argument de champ moyen, puis beaucoup moins vite.

Disposant de ces deux comportements limites, diodes isolantes puis conductrices, et éléments resistifs puis supraconducteurs, il est facile d'extrapoler au cas d'éléments d'abord très résistifs, puis bons conducteurs, mais avec deux conductivités tangentes finies non-nulles [116]. Le calcul est tout à fait similaire à celui qui a été présenté en percolation (chapitre 2), ou pour la longueur des chemins minimaux (partie 4.1). Citons simplement le résultat: si nous appelons a et b les conductivités tangentes dans les deux régimes, avec a << b, nous aurons une intensité I_c au point critique $V=V_g$:

$$I_c \propto (a^{\theta}\, b^{-1/\varpi})^{1/(\theta-1/\varpi)} \qquad (4.4.25)$$

Si nous utilisons dans cette expression les valeurs de θ et ϖ obtenues en champ moyen, I_c sera proportionnel à $(a^4/b)^{1/3}$.

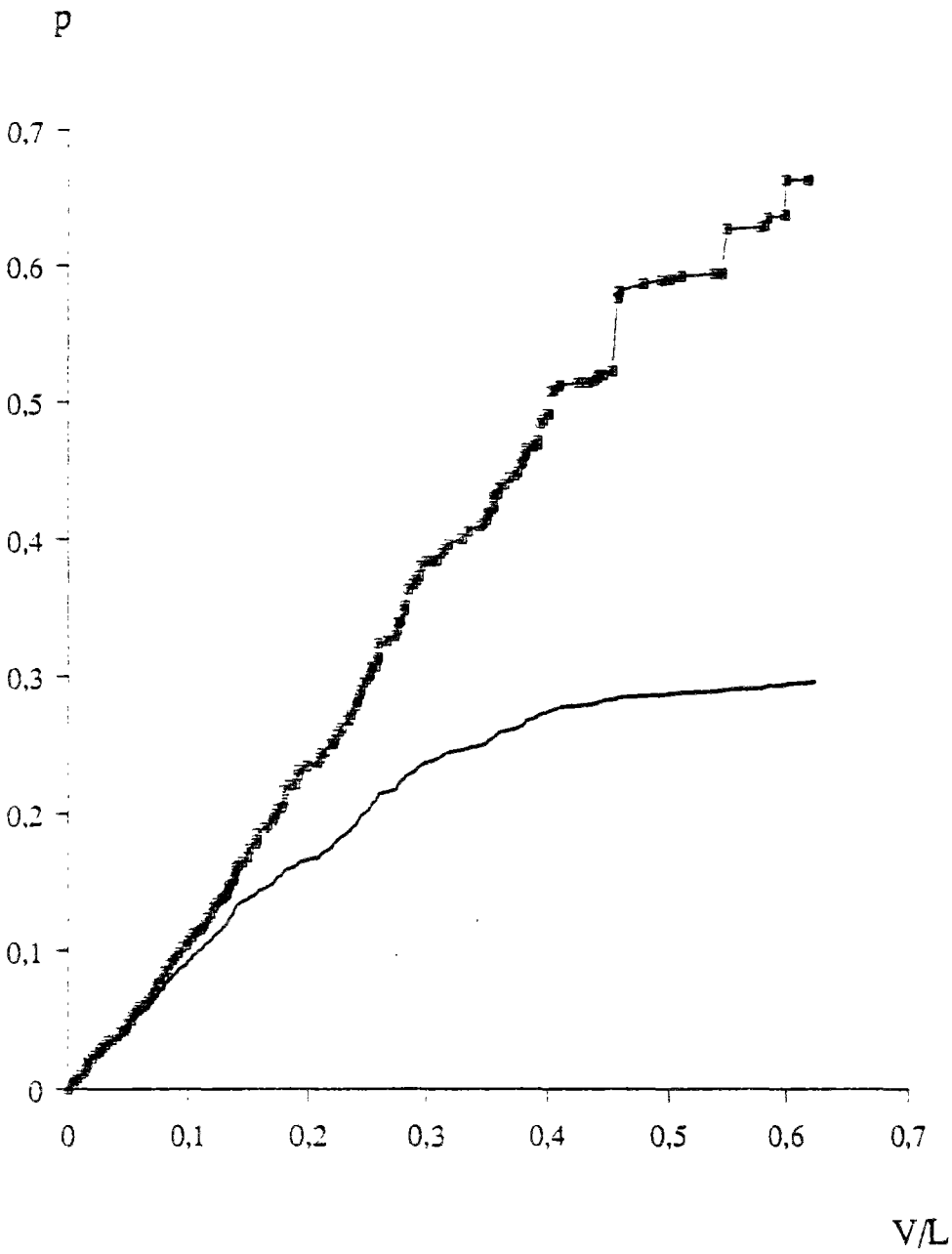


Figure 4.57 : Proportion p de liens dont l'état tangent est isolant (courbe en trait épais noir), et proportion de liens n'appartenant pas au squelette (symboles ❐) en fonction du potentiel, V.

Elasticité d'empilements

Dans les chapitres deux et trois, nous avons insisté sur les analogies électriques et mécaniques. Nous allons nous intéresser ici au cas mécanique correspondant à la situation du réseau de diodes. Le problème du contact élastique entre deux corps donne en effet lieu à des non-linéarités du même type que pour les diodes individuelles. Dès que les corps rentrent en contact, la force qu'ils exercent l'un sur l'autre est fonction de la distance δ de leur centre évaluée à partir du point de contact ($\delta = 0$). Cette relation dépend précisément de la géométrie de la surface des corps au point de contact. Dans le cas tridimensionnel, où la géométrie des surfaces est régulière (i.e. si elles peuvent être représentées par la surface du second degré osculatrice) alors Hertz [117] a établi la relation :

$$F \propto \delta^m \qquad (4.4.26)$$

où $m = 3/2$. Pour deux cylindres au contact le long de leur génératrice, la relation est linéaire (à une correction logarithmique près que nous oublions ici), soit $m = 1$. Cette relation peut également être différente pour deux corps à surface rugueuse.

Dans un empilement désordonné, la répartition des distances entre particules pourra être, en première approximation, considéré comme aléatoire [121], si bien que beaucoup de particules voisines seront séparées par une faible distance, lorsque l'empilement est au repos. Si maintenant nous appliquons une compression sur l'empilement, nous amènerons un certain nombre de particules au contact, augmentant ainsi le module élastique de l'empilement, comme augmentait précédemment la conductivité du réseau avec le potentiel appliqué. Nous aurons donc encore affaire à un comportement collectif non-linéaire original résultant de l'interaction entre une non-linéarité locale et un désordre ici de nature géométrique.

Une étude expérimentale, réalisée par Travers et coll. [118,119], sur un empilement quasi-ordonné de cylindres parallèles, a révélé en effet une relation entre force appliquée, F, et déplacement, D, selon une loi de puissance

$$F \propto D^M \qquad (4.4.27)$$

où l'exposant M macroscopique, M = 3.5 ± 0.5 [118], est beaucoup plus élevé que l'exposant microscopique de la loi de Hertz (m = 1.5).

Ce problème a été modélisé, en ce qui concerne son aspect élastique par Stauffer et coll. [120]. Partant d'un empilement bidimensionnel de disques réguliers, dont les centres sont situés aux nœuds d'un réseau triangulaire, une petite perturbation des rayons est ajoutée. Chaque disque i aura alors un rayon $R+\delta R_i$ tel que $<\delta R_i> << R$. L'empilement est maintenu sur trois de ses cotés par des parois rigides, alors que sur le quatrième un piston applique une force F de compression (Figure 4.58). Par rapport à la situation initiale où tous les disques avaient le même rayon, l'empilement "gonfle". Nous notons D_0 le niveau du piston lorsque la force est nulle. Dans le cas non perturbé, D_0 est nul par définition de l'origine du déplacement. Lorsque deux disques i et j sont en contact, la force, F_{ij}, qu'ils exercent l'un sur l'autre est supposée centrale et fonction du déplacement des centres u_i et u_j selon

$$F = k\,((u_i - u_j)n_{ij} - \delta R_i - \delta R_j)^m\, n_{ij} \qquad (4.4.28)$$

où n_{ij} est un vecteur normal aligné sur l'axe des centres i-j. Plusieurs situations ont été étudiées : m = 1 et m = 3/2 (contact de Hertz classique), ainsi que plusieurs désordres (δR uniforme, bimodal, ..) sans qu'il ait été possible de percevoir numériquement des conséquences appréciables sur la caractéristique force-déplacement de l'empilement. La technique numérique utilisée était ici encore la surrelaxation de Gauss-Seidel, sans que soit prises en compte les grandes déformations du réseau (n_{ij} dans l'équation (4.4.24) est

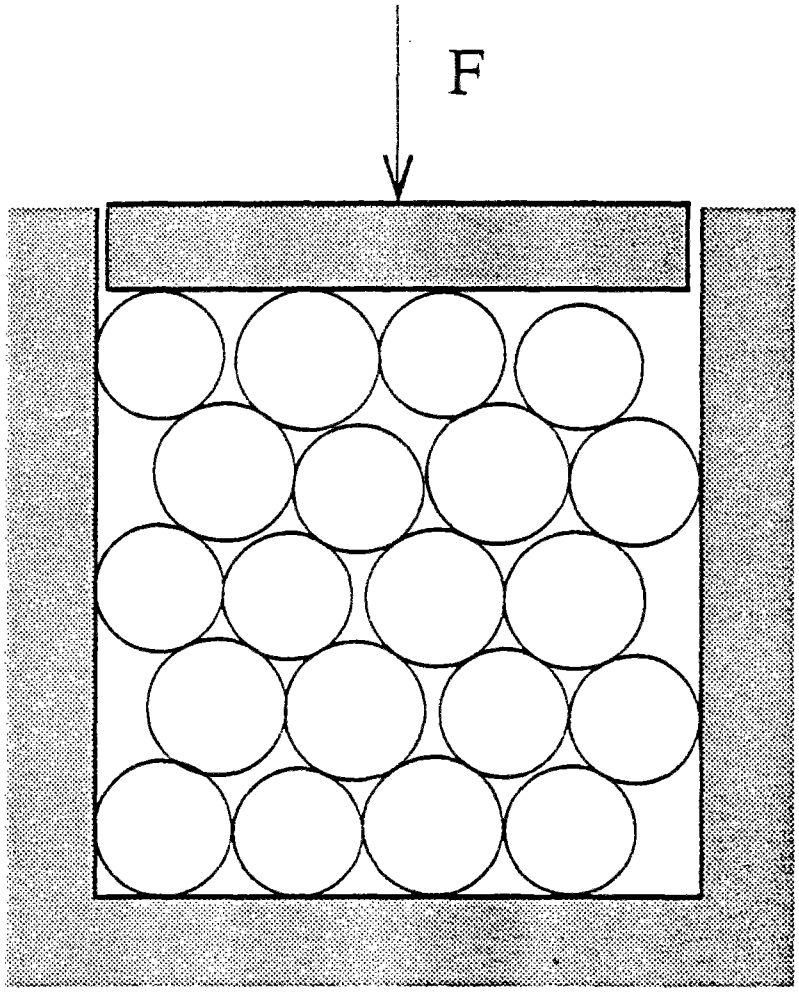


Figure 4.58 : Géométrie de l'empilement désordonné. Il est confiné sur trois de ses cotés par des bords rigides indéformables, alors que sur le quatrième est appliquée une force de compression F.

considéré dans l'état non-déformé). Comme précédemment, la loi observée entre force et déplacement pour l'ensemble du système peut s'écrire sous la forme

$$F \propto (D-D_0)^M \qquad (4.4.29)$$

avec $M = 3.5 \pm 0.5$ (Figure 4.59). La précision sur cet exposant est très faible car contrairement au cas précédent, la valeur de l'expansion à vide D_0 n'est pas connue *a priori*. En fait, D_0 est estimé en cherchant la meilleure valeur qui donne un comportement en loi de puissance pour la relation (4.4.29).

Dans cette correspondance entre problèmes élastique et électrique, une question se pose de façon évidente: Quelle est la structure minimale responsable de la rigidité de l'empilement ? Nous appellerons cette structure le "squelette" dans la suite. En particulier, nous avons vu que pour le cas scalaire (le réseau de diode) le chemin minimal avait une structure auto-affine. Or pour le problème d'empilement, la sructure anisotrope n'est pas évidente, en particulier si l'on conçoit une compression isotrope. A-t-on alors affaire à une structure fractale (comme le squelette d'un amas de percolation) ou bien à une structure dense ?

La structure du squelette est en fait dense, comme nous allons le voir après avoir ouvert une parenthèse qui nous aidera à comprendre ce résultat.

Dilution aléatoire

Dodds [121] pour modéliser le réseau de contact d'un empilement a introduit un modèle très simple. Il s'agit de considérer un réseau de Voronoï, et de couper aléatoirement des liens de ce réseau de façon à rétablir la coordinance réelle des empilements étudiés (4 à deux dimensions, au lieu de 6 dans le réseau intact). Nous procédons dans cet esprit, et partant du réseau triangulaire nous enlevons une fraction (1-p) des liens choisis aléatoirement [122].

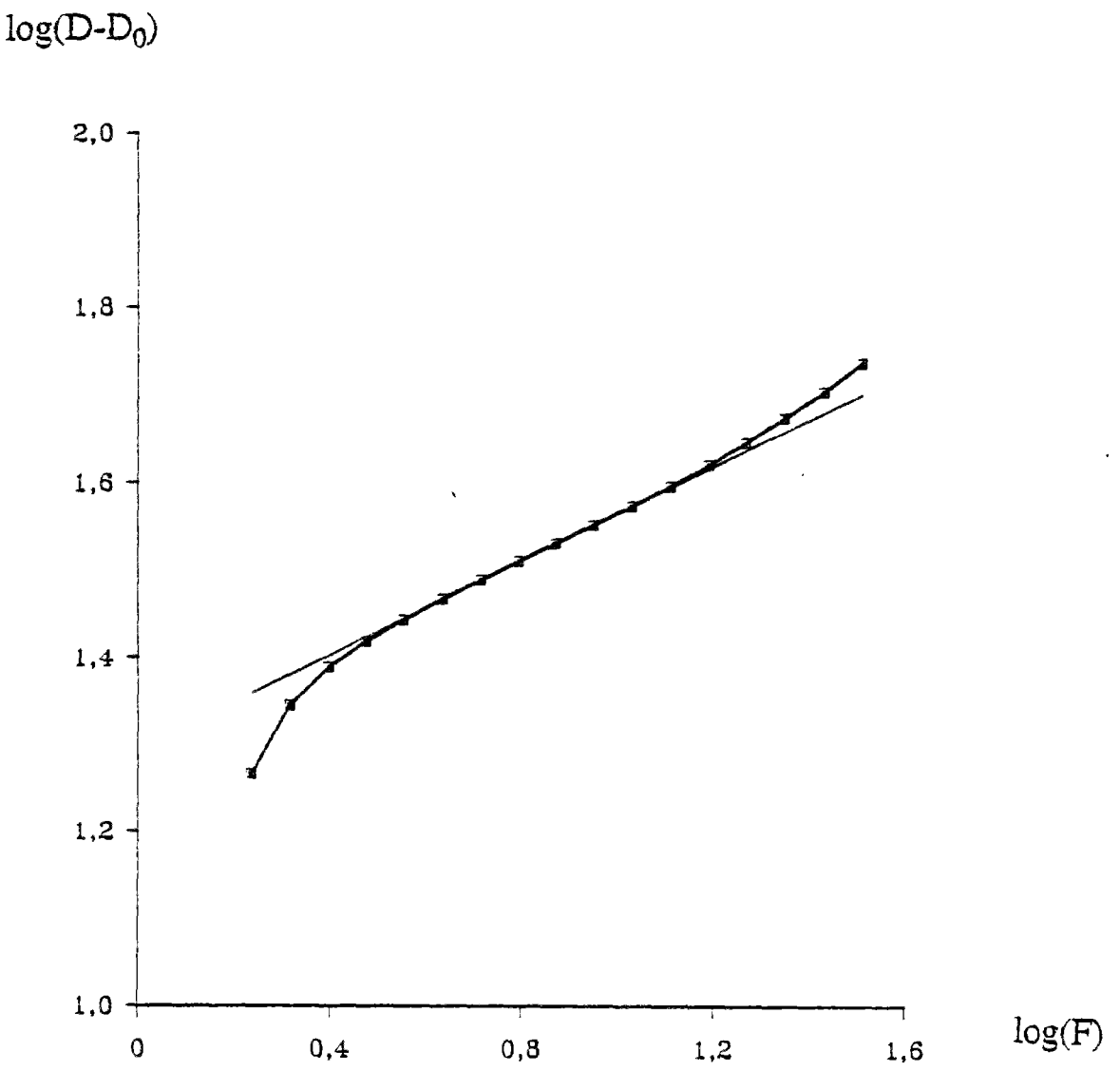


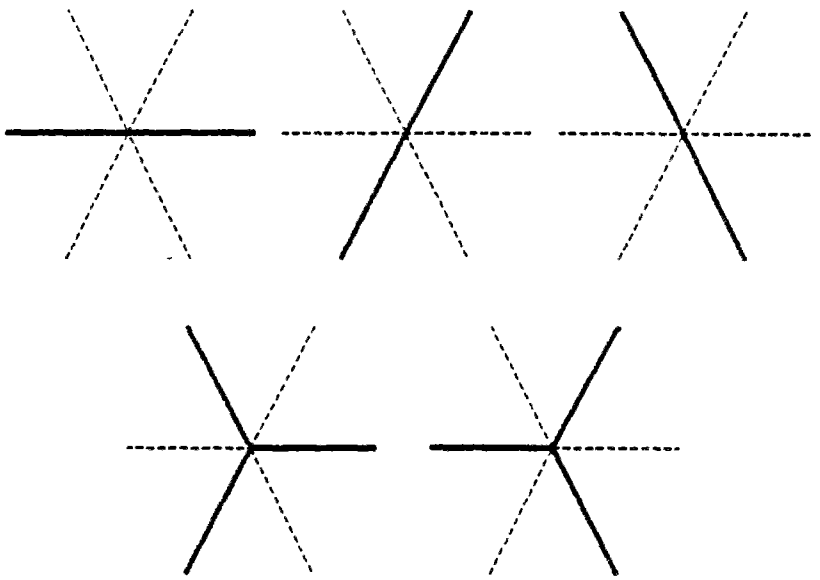
Figure 4.59 : Caractéristique de déplacement ($D-D_0$) en fonction de la force F appliquée à l'empilement, en coordonnées bilogarithmiques. La pente de cette courbe dans le régime intermédiaire est estimée à $1/M = 0.28$.

Partant de ce réseau dilué, nous savons *a priori* que certains liens ne peuvent supporter aucune force, et ce pour de simples considérations d'équilibre, avec la condition de positivité de la force de contact. La figure 4.60 montre les cinq configurations de liens autour d'un site qui sont acceptables (hormis la superposition de plusieurs d'entre elles). Ainsi, il est possible simplement de filtrer le réseau dilué, jusqu'à l'obtention d'une structure stable. Appelons q(p) la densité moyenne de liens dans le réseau filtré. La figure 4.61 montre cette densité en fonction de p, pour des réseaux de taille 100×100 (un point par réseau). A partir de cette figure, il est apparent que la transition observée à $p \approx 0.84$ est du premier ordre. Ceci n'est pas surprenant si l'on note que la construction proposée est une percolation dite de "bootstrap" qui conduit dans certains cas à des transitions du premier ordre.

Nous pouvons aussi démontrer ce résutat en notant la propriété suivante: la forme des configurations acceptables est telle qu'une force locale ne peut que se propager en ligne droite, ou bifurquer sur deux directions à $2\pi/3$. La structure du squelette qui en découle contiendra un pavage du plan avec des hexagones dont la longueur des côtés peut fluctuer mais dont l'orientation est fixe, puisqu'ils s'incrivent sur un réseau triangulaire régulier (figure 4.62). Si ℓ désigne la taille moyenne des cotés, la densité de ce pavage sera de l'ordre du rapport entre périmètre et surface des hexagones, soit $1/\ell$. Or, dès que le réseau est dilué, $p<1$, la longueur des segments linéaires que l'on peut extraire du réseau est distribuée selon une exponentielle. La longueur moyenne est $p/(1-p)$. Combinant ces deux résultats, nous en déduisons que la densité du squelette est supérieure à $C(1-p)/p$, où C est une constante géométrique. Il s'ensuit que la densité du squelette ne peut que s'annuler avec une discontinuité.

Une autre façon de visualiser le résultat est d'imaginer une droite de longueur supérieure à ℓ, inscrite dans l'empilement. La probabilité que cette droite ne coupe pas un lien du squelette est exponentiellement faible (avec la taille de la droite). Ceci implique encore que la densité du squelette est finie.

Configurations acceptables



Configuration interdite

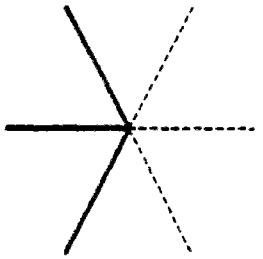


Figure 4.60 : Configurations acceptables de liens autour d'un site, avec la contrainte de positivité de chaque force, et d'équilibre aux nœuds. Ces cinq configurations, et toutes leurs superpositions, sont les seuls arrangements acceptables. La configuration du bas représente un exemple où aucun lien présent ne peut supporter de contrainte.

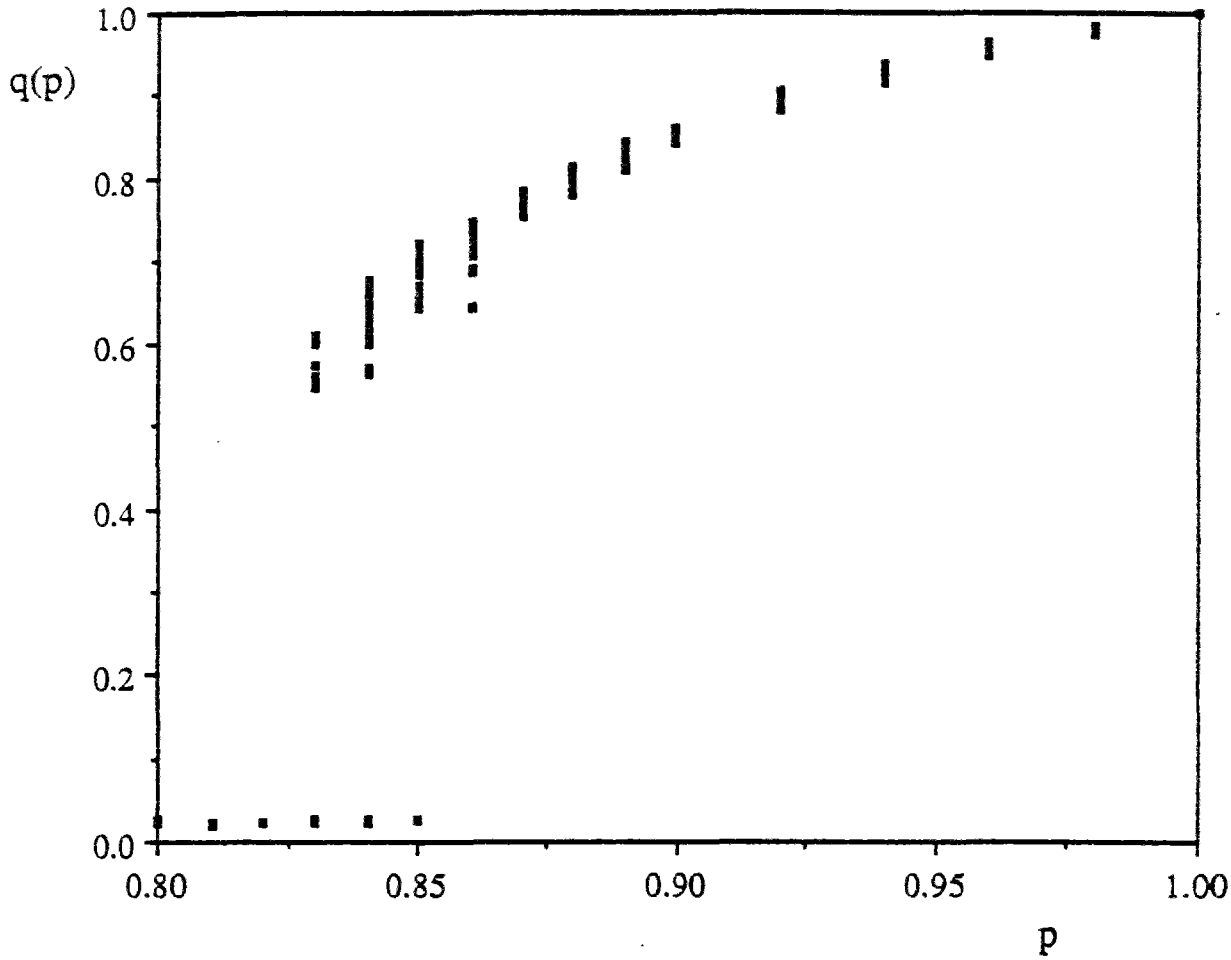


Figure 4.61 : Concentration de liens présents q(p) dans un réseau filtré, en fonction de la densité de lien initiale. Pour p=0.84, nous observons une transition de phase du premier ordre, qui se traduit par une discontinuité de la concentration q(p).

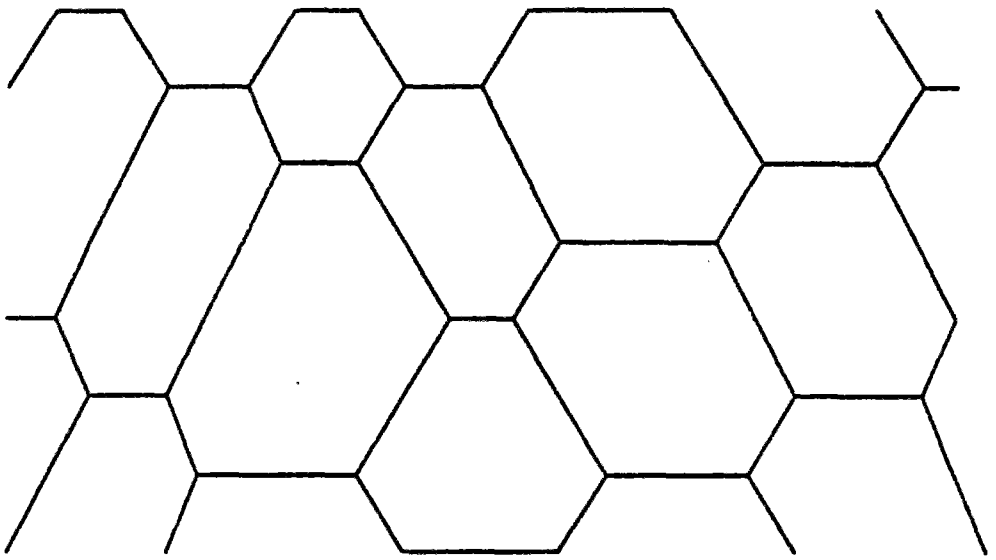


Figure 4.62 : Exemple schématique de pavage du plan par des hexagones irréguliers. Le squelette doit contenir un tel pavage, dont la maille est limitée par une fonction décroissante de la proportion de liens présents. Ceci permet d'établir que la transition de filtrage est du premier ordre.

En-deçà du seuil de 84%, le système n'est plus rigide: il se restructurera donc sous l'effet d'une force appliquée, en modifiant sa géométrie de façon à revenir dans une conformation rigide.

Fermons maintenant la parenthèse sur ce modèle simpliste de dilution aléatoire, pour revenir à notre problème initial.

La Figure 4.63 montre la densité du squelette en fonction du déplacement. Nous voyons sur cette figure, que cette densité est toujours supérieure à 30%, et donc conforme à l'image que nous en avons dans le processus de dilution aléatoire. Si nous choisissons la densité de ce squelette comme paramètre d'ordre, la transition apparaît du premier ordre.

Dans la comparaison entre le problème du réseau de diodes et celui de l'élasticité d'empilements, nous avons deux différences essentielles à prendre en compte:
- la première est la nature même du problème qui passe de "scalaire" à "vectoriel"
- la seconde concerne le caractère non-local du problème de forces centrales

Pour préciser le rôle de chacune de ces différences, il apparaît intéressant de discuter un cas intermédiaire, où l'élasticité est modélisée de manière satisfaisante, (formulation invariante par translation et rotation), mais où la localité du réseau de diode est préservée. Pour ce faire, nous introduisons un réseau de poutres encastrées aux nœuds, déjà discuté au chapitre 2. Plutôt que de construire une caractéristique locale qui redonne une caractéristique locale similaire à celle des diodes (par l'intermédiaire de "jeu" dans les liaisons par exemple), nous supposerons que, comme pour les réseaux de diodes, seul un chemin minimal supporte la structure au seuil de déplacement. A ce point, il est dès lors facile de calculer la raideur de la structure. L'essentiel de l'énergie proviendra de la flexion des liens. Or les fluctuations transverses du chemin minimal donnent un "bras de levier" moyen qui varie comme la taille du système à la puissance $L^{1/z}$. La raideur de ce chemin, E, sera donc:

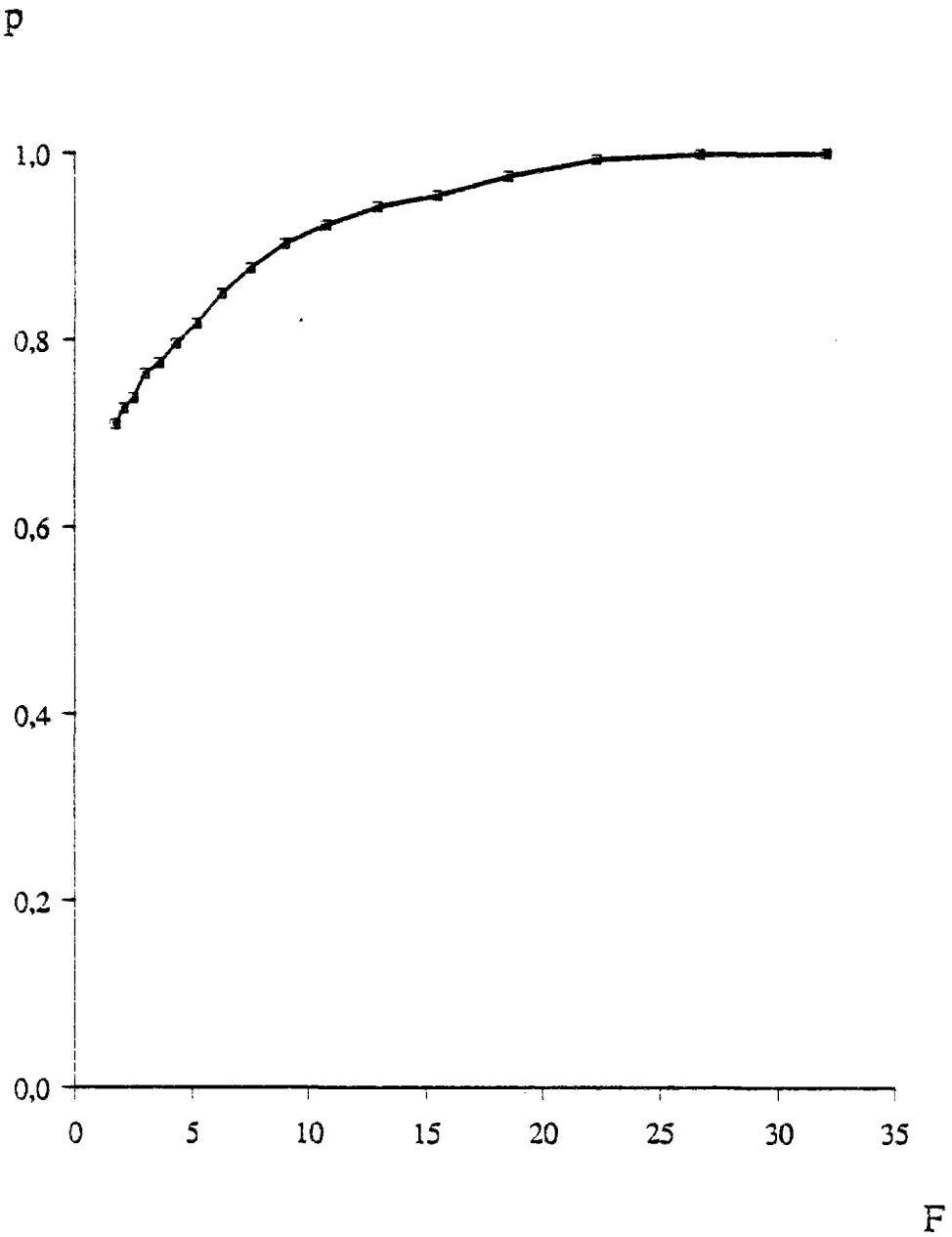


Figure 4.63 : Densité du squelette p en fonction de la force F. Nous obtenons ici encore une transition du premier ordre, comme dans l'exemple de la dilution aléatoire.

$$E \propto L^{-(1+2/z)} \qquad (4.4.30)$$

En couplant cette dernière estimation avec une loi d'échelle, comme début de cette partie, nous ecrirons que l'évolution du module élastique varie au voisinage du seuil comme $E \propto (D-D_0)^{M-1}$ et donc

$$(M-1)/\nu_{//} = 1+2/z \qquad (4.4.31)$$

soit en utilisant $z = \nu_{//}$:

$$M = \nu_{//} + 3 \qquad (4.4.32)$$

Numériquement, M = 4.5 au voisinage immédiat du seuil de rigidité. Il est intéressant de comparer cette relation avec l'équivalent obtenu pour le réseau de diode: $\theta = \nu_{//} + 1$. La différence entre ces deux exposant est $2\nu_{\perp} = 2$. On pourra rapprocher cette relation $M = \theta + 2\nu_{\perp}$ de la relation équivalente en percolation (Chapitre 2) où $\tau = t + 2\nu$ (τ et t sont à comparer respectivement à M-1 et θ-1).

Que dire maintenant de la non-localité ? Elle est manifeste dans l'opération de filtrage que nous avons introduit pour la dilution aléatoire. En effet l'opération similaire de filtrage dans un problème local, comme celui du réseau de diodes, ou encore du réseau de poutres considéré ci-dessus, consiste simplement à enlever les liens aux sites de coordinance locale unité. Or ce filtrage ne joue aucun rôle, pour les propriétés de topologie globale du réseau, ici comme en percolation (dans ce dernier cas, ce filtrage ne modifie pas le caractère de la transition, et n'affecte certaines propriétés critiques, comme l'exposant du paramètre d'ordre, qu'au-delà de la dimension critique supérieure.

Références :

1	B.Derrida et J.Vannimenus	Phys.Rev.B 27, 4401, (1983)
2	J.W.Essam, K.De'Bell, J.Adler et F.M.Bhatti	Phys.Rev.B33, 1982, (1986)
3	S.Roux	non publié
4	G.Deutscher et M.L.Rappaport	J.Physique Lett. 40, L219, (1979)
5	M.J. de Oliveira	J.Phys.C 14, L317, (1981)
6	E.Guyon, S.Roux et D.J.Bergman	J.Physique 48, 903, (1987)
7	J.M.Normand, H.J.Herrmann et M.Hajjar	J.Stat.Phys.52, 441, (1988)
8	B.C.Harms et J.P.Straley	J.Phys.A 15, 1865, (1982)
9	D.Dhar	J.Phys.A 15, 1859, (1982)
10	M.Barma	J.Phys.A 18, L277, (1985)
	M.Barma et P.Ray	Phys.Rev.B 34, 3403, (1986)
11	M.Kantha et J.M.Yeomans	J.Phys.A 20, L235, (1987)
12	H.J.Herrmann et H.E.Stanley	J.Phys.A 21, L829, (1988)
13	A.L.Ritzenberg et R.J.Cohen	Phys.Rev.B 30, 4038, (1984)
14	J.P.Nadal et J.Vannimenus	J.Physique 46,17,(1985)
15	V.Ambegaokar, B.I.Halperin et J.S.Langer	Phys.Rev.B 4, 2612, (1971)
16	E.Charlaix, E.Guyon et S.Roux	Transp.Por.Media, 2, 31, (1987)
17	S.Tyč et B.I.Halperin	Phys.Rev.B 39, 877, (1989)
18	P.le Doussal	Phys.Rev.B 39, 881, (1989)
19	A.Hansen et S.Roux	J.Phys.A 20, L873, (1987)
20	A.N.Berker et S.Ostlund	J.Phys.C 12, 4961, (1979)
	M.Kaufman et R.B.Griffiths	Phys.Rev.B 30, 244, (1984)
21	B.Derrida et R.B.Griffiths	Europhys.Lett. 8, 111, (1989)
22	J.Cook et B.Derrida	Europhys.Lett. 10, 195, (1989)
23	B.Derrida et H.Spohn	J.Stat.Phys.51, 817, (1988)
24	L.de Arcangelis, A.Coniglio et S.Redner	Phys.Rev.B 34, 4656, (1986)
25	S.Roux, A.Hansen et E.Guyon	J.Physique 48, 2125, (1987)

26 S.Roux, D.Stauffer et H.J.Herrmann J.Physique 48, 341, (1987)

27 A.E.Sheidegger Bull. I.A.S.H. 12, 15, (1967)

28 H.Kondoh, M.Matsushita et Y.Fukuda J.Phys.Soc.Japan 56, 1913, (1987)

29 P.Meakin J.Phys.A 20, L1113, (1987)

30 W.H.Press, B.P.Flannery, S.A.Teukolsky et W.T.Vetterling
"Numerical Recipies",
Cambridge Univ. Press. (1986)

31 P.Jaillet Les Cahiers du CERMA, 7, 116, (1987)

32 Y.Imry et S.K.Ma Phys.Rev.Lett. 35, 1399, (1975)

33 D.A.Huse et C.L.Henley Phys.Rev.Lett. 54, 2708, (1985)

et M.Kardar Phys.Rev.Lett. 55, 2923, (1985)

et D.A.Huse, C.L.Henley et D.S.Fisher Phys.Rev.Lett. 55, 2924, (1985)

34 M.Kardar J.Appl.Phys. 61, 3601, (1987)

35 T.Nattermann J.Phys.C 18, 6661, (1985)

36 J.Z.Imbrie Phys.Rev.Lett. 53, 1747, (1984)

37 Y.C.Zhang J.Phys.A 19, L941, (1986)

38 M.Kardar et Y.C.Zhang Europhys.Lett. 8, 233, (1989)

39 G.Grinstein et S.K.Ma Phys.Rev.B 28, 2588, (1983)

40 D.S.Fisher Phys.Rev.Lett. 56, 1964, (1986)

41 M.Kardar, G.Parisi et Y.C.Zhang Phys.Rev.Lett. 56, 889, (1986)

42 J.M.Burgers "The Non-linear Diffusion Equation"
Reidel, (Boston), (1974)

43 D.Forster, D.R.Nelson et M.J.Stephen Phys.Rev.A 16, 732, (1977)

44 S.F.Edwards et D.R.Wilkinson Proc.R.Soc.A 381,17 (1982)

45 E.Medina, T.Hwa, M.Kardar et Y.C.Zhang
Phys.Rev. A 39, 3053, (1989)

46 P.Meakin, P.Ramanlal, L.M.Sander et R.C.Ball
Phys.Rev.A 34, 5091, (1986)

47 M.Kardar et Y.C.Zhang Phys.Rev.Lett. 58, 2087, (1987)

48	A.J.McKane et M.A.Moore	Phys.Rev.Lett. 60, 527, (1988)
49	D.E.Wolf et J.Kertész	Europhys.Lett. 4, 651, (1987)
50	S.Zalesky	Physica D 34, 427, (1989)
51	H.Chaté et P.Manneville	Phys.Rev.Lett. 58, 112, (1987)
52	Y.Pomeau	in "Spatiotemporal coherence and chaos in physical systems", Los Alamos, (1986), Physica D, 23, 3 ,(1986)
53	H.Chaté et P.Manneville	C.R.A.S. 304, II, 47, (1987)
et	H.Chaté	Thèse
54	K.Kaneko	Prog.Theor.Phys. 74, 1033, (1985)
55	R.Bruinsma	Compte-rendu de "Hydrodynamic of dispersed media" (4th EPS conference on liquid state) Arcachon 1988, North-Holand à paraître
56	P.G. de Gennes	Rev.Mod.Phys. 57, 827, (1985)
et	P.G. de Gennes	J.Physique 47, 1541, (1986)
57	M.Cieplack et M.O.Robbins	Phys.Rev.Lett. 60, 2042, (1988)
58	J.P.Stokes, A.P.Kushnick et M.O.Robbins	Phys.Rev.Lett. 60, 1386, (1988)
59	H.Fukuyama et P.A.Lee	Phys.Rev.B 17, 3970, (1979)
60	D.S.Fisher	Phys.Rev.B 31, 1396, (1985)
61	J.Koplik et H.Levine	Phys.Rev.B 32, 280, (1985)
62	R.Bruinsma et G.Aeppli	Phys.Rev.Lett. 52, 1547, (1984)
63	I.Webman	Phil.Mag.B 56, 743, (1987)
64	H.J.Herrmann	Phys.Rep.136,153, (1986)
65	M.Eden	Proc. 4th Berkeley Symp. on Mathematics, Statistics and Probability, Vol IV, p.233, ed. F.Neyman, (Berkeley, Univ.of Calif. Press) (1961)

66 D.Dhar Phys.Rev.Lett. 54, 2058, (1985)

67 M.Plischke et Z.Rácz Phys.Rev.Lett. 53, 415, (1984)

68 R.Jullien et R.Botet Phys.Rev.Lett. 54, 2055, (1985)

69 H.P.Peters, D.Stauffer, H.P.Holters et K.Loewenich
Z.Phys.B 34, 399, (1979)

et P.Freche, D.Stauffer et H.E.Stanley J.Phys.A 18, L1163, (1985)

et R.Jullien et R.Botet J.Phys.A 18, 2279, (1985)

et M.Plischke et Z.Rácz Phys.Rev.A 32, 3825, (1985)

et Z.Rácz et M.Plischke Phys.Rev.A 31, 985, (1985)

70 P.Meakin, R.Botet et R.Jullien Europhys.Lett. 1, 609, (1986)

71 J.G.Zabolitzky et D.Stauffer Phys.Rev.A 34, 1523, (1986)

et D.Stauffer et J.G.Zabolitzky Phys.Rev.Lett. 57, 1809, (1986)

72 D.E.Wolf et J.Kertész J.Phys.A 20, L257, (1987)

et J.Kertész et D.E.Wolf J.Phys.A 21, 747, (1988)

73 B.Sapoval, M.Rosso et J.F.Gouyet J.Physique Lett. 46, L149, (1985)

et M.Rosso, J.F.Gouyet et B.Sapoval Phys.Rev. B 32, 6053, (1985)

74 R.Hirsch et D.E.Wolf J.Phys.A 19, L251, (1986)

et D.E.Wolf J.Phys.A 20, 1251, (1987)

75 M.Vold J.Coll.Sci. 14, 168, (1959)

76 D.Bensimon, B.Shraiman et S.Liang Phys.Lett. 102A, 238, (1984)

77 P.Meakin et R.Jullien J.Physique 48, 1651, (1987)

78 L.Niemeyer, L.Pietronero et H.J.Wiesmann
Phys.Rev.Lett. 52, 1033, (1984)

79 R.Jullien et P.Meakin J.Phys.A 22, L219, (1989)

80 F.Family J.Phys.A 19, L441, (1986)

81 R.Jullien et P.Meakin Europhys.Lett. 4, 1385, (1987)

82 R.Jullien et P.Meakin Europhys.Lett. 6, 629, (1988)

83 P.Ramanlal et L.M.Sander Phys.Rev.Lett. 54, 1828, (1985)

84 P.Bak, C.Tang et K.Wiesenfeld Phys.Rev.Lett. 59, 381, (1987)

et	P.Bak, C.Tang et K.Wiesenfeld	in "Directions in Chaos", vol.2,Hao Bai-Lin ed., World Scientific, Singapore, (1988)
85	C.Tang et P.Bak	Phys.Rev.Lett. 60, 2347, (1988)
86	K.Wiesenfeld, C.Tang et P.Bak	J.Stat.Phys. 54, 1441, (1989)
87	P.Bak, C.Tang et K.Wiesenfeld	Phys.Rev.A 38, 364, (1988)
88	T.Hwa et M.Kardar	Phys.Rev.Lett. 62, 1813, (1989)
89	S.P.Obukhov	in "Random fluctuations and pattern Growth", eds. H.E.Stanley et N.Ostrowsky, Kluwer, Dordrecht, (1988)
90	G.Grüner	Rev.Mod.Phys. 60, 1129, (1988)
91	A.A.Ovchinnikov et Y.B.Zeldovitch	Chem.Phys. 28, 215 (1978)
92	D.Toussaint et F.Wilczek	J.Chem.Phys. 78, 2642, (1983)
93	K.Kang et S.Redner	Phys.Rev.Lett. 52, 955, (1984)
94	J.L.Spouge	Phys.Rev.Lett. 60, 871, (1988)
et	J.L.Spouge	J.Phys.A 21, 4183, (1988)
95	Z.Rácz	Phys.Rev.Lett. 55, 1707, (1985)
et	Z.Rácz	Phys.Rev.A 32, 1129, (1985)
96	Y.C.Zhang	Phys.Rev.Lett. 59, 1726, (1987)
97	L.W.Anacker et R.Kopelman	J.Chem.Phys. 81, 6402, (1984)
et	L.W.Anacker, R.P.Parson et R.Kopelman	J.Phys.Chem. 89, 4758, (1985)
98	E.Clément, L.M.Sander et R.Kopelman	Phys.Rev.A 39, 6472, (1989)
99	M.Bramson et J.L.Lebowitz	Phys.Rev.Lett. 61, 2397, (1988)
100	P.Meakin et H.E.Stanley	J.Phys.A 17, L173, (1984)
101	M.E.Fisher	J.Stat.Phys. 34, 667, (1984)
102	H.van Beijeren, R.Kutner et H.Spohn	Phys.Rev.Lett. 54, 2026, (1985)
103	E.Clément, L.M.Sander et R.Kopelman	Phys.Rev.A 39, 6455, (1989)
	et	Phys.Rev.A 39, 6466, (1989)
104	D.Jeulin	Revue Phys.Appl. 23, 549, (1988)

105 E.Medina, M.Kardar, Y.Shapir et X.R.Wang
Phys.Rev.Lett. 62, 941, (1989)
et Y.C.Zhang Phys.Rev.Lett. 62, 979, (1989)
106 J.Adler, R.G.Palmer et H.Meyer Phys.Rev.Lett. 58, 882, (1987)
107 A.J.Bray et M.A.Moore Phys.Rev.Lett. 58, 57, (1987)
108 Y.Kantor et M.V.Jarić prépublication
109 Y.C.Zhang Phys.Rev.Lett. 59, 2125, (1987)
et T.Nattermann Phys.Rev.Lett. 60, 2701, (1988)
et Y.C.Zhang Phys.Rev.Lett. 60, 2702, (1988)
et M.V.Feigel'man et V.M.Vinokur Phys.Rev.Lett 61, 1139, (1988)
et Y.C.Zhang Phys.Rev.Lett 61, 1139, (1988)
110 S.Roux et H.J.Herrmann Europhys.Lett.4, 1227, (1987)
111 A.Hansen, S.Roux et E.L.Hinrichsen prépublication
112 S.Kirkpatrick Rev.Mod.Phys. 45, 574, (1973)
113 A.Gilabert, S.Roux et E.Guyon J.Physique 48, 1609, (1987)
114 H.Van Damme, C.Laroche, L.Gatineau et P.Levitz
J.Physique 48, 1121, (1987)
115 S.Roux, H.J.Herrmann, A.Hansen et E.Guyon
C.R.Acad.Sci. 305, II, 943, (1987)
116 J.P.Troadec communication privée
117 A.E.H.Love "A treatise on the mathematical theory of elasticity", Dover, (New York), (1944)
et L.Solomon "Elasticité linéaire", Masson, (Paris),(1968)
118 T.Travers, D.Bideau, A.Gervois,J.P.Troadec et J.C.Messager
J.Phys.A 19, L1033, (1986)
119 T.Travers, M.Ammi, D.Bideau, A.Gervois, J.C.Messager et J.P.Troadec
J.Physique 49, 939, (1988)
120 D.Stauffer, H.J.Herrmann et S.Roux J.Physique 48, 347, (1987)
et H.J.Herrmann, D.Stauffer et S.Roux Europhys.Lett. 3, 265, (1987)

121 J.A.Dodds Nature 256, 187, (1975)

122 S.Roux, D.Bideau et C.Weill J.Phys.Cond.Matt. 1, 5799, (1989)

CALIFORNIE

Nous venons de voir quelques propriétés de structures minimales définies sur un milieu désordonné. Le critère que nous avons retenu était de nature purement géométrique (essentiellement une somme de nombres aléatoires sur la structure). Dans cette classe de problème, il n'y a pas de caractère dynamique, ou d'évolution de la structure, mis à part dans les dernières situations (empilements et réseaux de diodes).

Nous allons aborder une nouvelle classe de problème qui se distingue de la précédente par deux aspects importants:

- Le milieu évolue à chaque pas de temps en partant d'un état initial intact.

- Cette évolution est fonction d'un champ de potentiel (ou d'un champ de déplacement) qui satisfait l'équation de Laplace (ou l'équation de Lamé dans le cas élastique), et ce avec des conditions aux limites qui dépendent de l'état actuel du milieu.

Comme dans l'ensemble de ce mémoire, nous étudierons spécifiquement l'évolution du milieu en présence de désordre, ou de bruit.

La différence avec le chapitre précédent est de fait moins nette que ne le laisse penser notre présentation. En effet, le problème du réseau de diode à seuils, ou celui de l'élasticité d'empilements désordonnés, sont effectivement dans cette dernière classe. Ils sont également part du problème précédent car leur seuil respectif peut être exprimé sous la forme de simples critères géométriques de minimalité, sans prendre en compte l'aspect évolutif des propriétés de transport.

Dans ce qui suit, après une courte introduction du sujet et du contexte, nous suivrons un plan voisin de celui du chapitre précédent : nous passerons rapidement sur un cas de désordre simple: la dilution aléatoire du milieu. Dans ce cadre, nous verrons le cas limite du voisinage du seuil de percolation, ainsi que le cas d'un désordre faible. La dilution nous permettra d'aborder d'autres types de désordres gelés (inscrits dans la géométrie du milieu dès l'instant initial), tels qu'une distribution aléatoire de seuils de rupture. Ce dernier exemple nous permettra en particulier d'étudier les différences entre le cas d'une fissure unique et celui d'un milieu où les fissures peuvent être nucléees en tout site du milieu. Ces différents modèles nous permettront d'observer des lois d'échelle

à validité très large, et d'autres, au contraire, fonctions très sensibles de la "force" du désordre.

Nous étudierons ensuite certains cas de désordres recuits (choix aléatoires recommencés à chaque instant, et donc fonctions exclusivement de l'état présent du système). Nous commencerons par l'exemple classique de l'agrégation limitée par diffusion, et ses différentes variantes (rupture de diélectriques), dont nous rappellerons très brièvement quelques caractéristiques importantes. Ceci nous amènera très naturellement à l'étude de l'équivalent mécanique. Puis abandonnant une condition de connexité de la fracture générée, nous verrons que cette "délocalisation" donnera lieu à un processus qui "ressemble" à un problème de percolation.

Finalement, nous conclurons ce chapitre en nous interrogeant sur la différence entre les modèles à désordre recuit et ceux à désordre gelé, et sur la possibilité de décrire ces deux types de problèmes dans un cadre unique. Nous examinerons également la contrainte de connexité et ses effets dans les deux situations précédentes.

Ainsi, si le lecteur désire avoir une vision globale de l'ensemble de ce chapitre, nous lui suggérons de parcourir rapidement la partie 5.4, mais la discussion des différents modèles est présentée dans les parties 5.2 et 5.3.

Modèles de fracture de milieux hétérogènes

5.1 Présentation du problème

5.1.1 Rupture fragile

5.1.2 Types de désordre: "Gelé" et "Recuit"

5.1.3 Contrainte de connexité

5.1.4 Différentes approches.

5.2 Désordre gelé

5.2.1 Dilution

5.2.2 Distribution de coefficient de transport

5.2.3 Distribution des seuils de rupture

- Réseau hiérarchique
- étroite
- très large
- intermédiaire

5.2.4 Cas d'une fissure unique

5.2.5 Autres modèles reliés : Bouchage

5.2.6.Conclusion sur le désordre figé

5.3 Désordre recuit

5.3.1 Agrégation limitée par diffusion, modèle de rupture de diélectrique

5.3.2 Modèle de croissance de fracture unique

5.3.3 Abandon du critère de connexité

5.3.4 Comparaison avec le désordre figé

5.4 Correspondance entre désordres

5.4.1 Seuils effectifs

5.4.2 Nouvelle analyse des modèles à désordre "recuit"

5.4.3 Conclusion

Concernant le thème général des approches statistiques de la fracture des milieux aléatoires, donnons deux références de bases: Le compte rendu de l'école de Cargèse 1989, "Disorder and Fracture" [1] et le livre "Statistical Physics of Fracture" [2]. Centrés sur le problème de l'agrégation limitée par diffusion, nous citerons l'ouvrage de Jullien et Botet "Aggregation and Fractal Aggregates" [3], celui de Vicsek "Fractal Growth Phenomena"[4], celui de Feder "Fractals" [5], et enfin les articles de revue de Herrmann [6] et Meakin [7].

5.1 Présentation du problème

Comme au chapitre précédent, nous considérons la réponse globale d'un système présentant à la fois du désordre et un comportement non-linéaire. Dans le cas de la rupture fragile, cette non-linéarité est particulièrement "forte" puisqu'il s'agit d'une discontinuité d'ordre zéro de la caractéristique. Ceci donne naturellement une sensibilité extrême au désordre. En conséquence, le type d'approche que nous tentons de développer dans ce chapitre est particulièrement adapté à nombre de situations physiques de milieux hétérogènes. Nous aurons l'occasion de voir à la fin de cette section que la prise en compte d'un comportement d'endommagement adoucissant au niveau microscopique pose des problèmes de stabilité et que certaines approches où le désordre n'est pas considéré explicitement, nécessitent des artifices stabilisants __ nommés limiteurs de localisation __ de façon à donner une réponse objective (indépendante de la discrétisation du milieu).

Notre approche est ici bien différente: Nous partons d'un cas extrèmement simple de comportement local, nous introduisons un désordre sous une forme très élémentaire, et nous tentons d'en dégager les traits les plus généraux possibles, par des approches de type lois d'échelle. Pour comparer cette approche avec la démarche précédente, nous introduisons explicitement le désordre comme facteur stabilisant de la

localisation, sans postuler implicitement une caractéristique du milieu invariante d'échelle. Notre propos ici n'est pas de tenter de modéliser tel ou tel matériau spécifique, mais plutôt de partir des cas les plus simples, qui déjà posent un grand nombre de problèmes de compréhension et de modélisation.

5.1.1 Rupture fragile

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons principalement à des caractéristiques globales de systèmes désordonnés dont la caractéristique des éléments microscopiques constitutifs est représentée sur la figure 5.1: que ce soit, dans un cadre de transport électrique ou mécanique, (ou autre), nous avons un premier régime linéaire caractérisé par un module élastique, ou une conductance, constantes. Au delà d'un seuil limite, l'élément "casse" : le module élastique est réduit irréversiblement à zéro. Aucune plasticité n'est prise en compte dans ce modèle. Même lorsque la réponse globale d'un système présente une "allure" de rupture ductile, toute décharge du milieu le conduit à l'origine des déplacements, avec un module élastique constant, comme schématisé sur la figure 5.1 (bas). Malgré la simplicité des caractéristiques locales, nous verrons dans la suite que nous pouvons obtenir au niveau de l'ensemble du réseau les trois allures de comportements schématisées sur la figure 5.2. Du haut vers le bas, le désordre est de plus en plus fort:

• Nous avons représenté en haut une rupture de type II, qui n'est contrôlée ni en force au delà de F_c, ni en déplacement au delà de D_c. L'observation de ce type de caractéristique nécessite l'emploi d'un système de mesure qui réagit de façon active dès que le module élastique de la pièce étudiée diminue.

• Au milieu de la figure est schématisée une rupture de type I, toujours contrôlée en déplacement, mais non en force. La partie descendante de la caractéristique traduit une phase adoucissante.

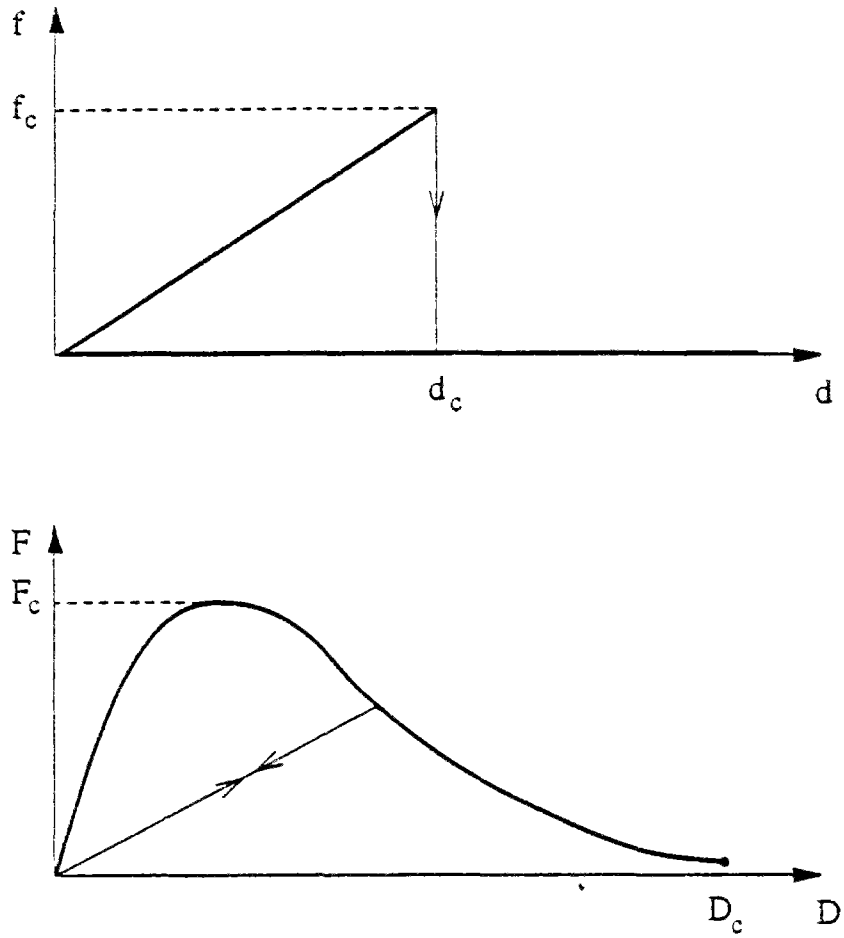


Figure 5.1 : Caractéristique de rupture fragile d'un élément constitutif d'un milieu désordonné (haut). Nous nous intéressons à la réponse globale de ce milieu représenté schématiquement en bas. L'axe horizontal représente soit un déplacement (cas mécanique) soit un potentiel (cas électrique). L'axe vertical mesure respectivement soit une force, soit un courant. Nous ne prendrons jamais en compte de caractère plastique, et donc toute décharge du système le conduit à l'origine des déplacements, comme schématisé par le trait fin de la figure du bas.

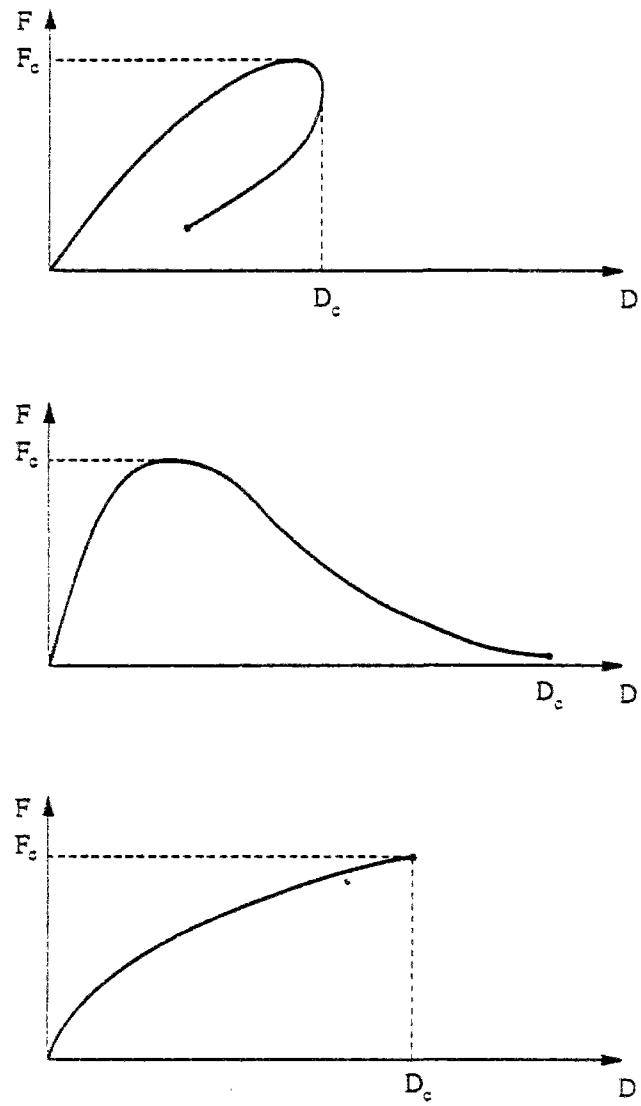


Figure 5.2 : Différents types de caractéristiques de rupture. Du haut vers le bas, nous distinguons la *rupture de type II*, qui présente un point de rebroussement, et qui n'est contrôlée ni en contrainte, ni en déformation; puis la rupture non contrôlée en contrainte, ou *de type I*, révélant un caractère adoucissant (la pente devient négative après un maximum). Enfin la rupture toujours contrôlée que nous appellerons *de type 0*. L'observation expérimentale de ce type de caractéristique requiert l'utilisation de systèmes actifs.

• En bas, est représenté un type de rupture toujours contrôlé en force et en déplacement. Pour un milieu continu, ce dernier type de comportement semble voisin du type II. Pour les modèles sur réseaux que nous étudierons, au contraire, cette distinction est très claire car simplement fonction des forces et déplacements pour le dernier lien cassé. Par commodité de langage, nous appellerons ce dernier cas, rupture de type 0, bien que cette appellation ne soit pas standard au même titre que les deux précédentes.

Comme nous l'avons fait jusqu'à présent, nous décrivons le milieu considéré de façon discrète. Pour le cas électrique, nous aurons un réseau régulier de "fusibles" parfaits, et pour le cas mécanique, nous traiterons en parallèle le réseau de poutres encastrées aux nœuds (cf. Chapitre 2), et le treillis réticulé de barres élastiques fragiles (cf. Chapitre 3). Cela nous permettra de discerner les particularités induites par le caractère non-local de ce second modèle.

Nous préfèrerons cette approche à la démarche alternative qui consiste à utiliser une méthode d'éléments finis. Notons cependant que pour certains modèles, une approche très voisine de la notre a été menée sur ce type de discrétisation [8], et elle semble donner, au moins qualitativement, des résultats similaires. La méthode des éléments finis propose une discrétisation "formelle" de l'élasticité, alors que les réseaux de poutres ou les treillis réticulés sont des discrétisations "physiques" du même problème. La différence de fond entre ces deux démarches se situe véritablement dans le traitement des "coupures" microscopiques: à savoir comment représenter de façon réaliste les fluctuations de contraintes locales dans un milieu hétérogène. Nous pensons que ces deux modélisations doivent conduire à des comportements globaux de structures macroscopiques équivalents.

- Dualité

Nous ne traiterons, sauf exception, que du cas de la rupture fragile. Il est cependant intéressant de noter que par dualité, les modèles dont nous traiterons peuvent

traduire des réalités différentes, grâce à une correspondance simple. Notons cependant que ces correpondances ne sont valides que dans le cas bidimensionnel.

Nous ne redévelopperons pas à nouveau les correspondances de dualité explicitées au chapitre 2, mais nous en utiliserons les résultats. Pour le cas électrique, il suffit d'échanger les rôles joués par les courants et les tensions, et de passer dans le réseau dual. La caractéristique microscopique devient alors celle du *"claquage" d'un diélectrique*, qui présente un premier régime résistif, jusqu'à une différence de potentiel seuil où le diélectrique devient très bon conducteur et ce, de façon irréversible. Nous nous réfèrerons à ce type de loi de comportement sous le nom de *"fusible dual"* dans la suite. Nous pouvons également penser à des applications autres, par exemple l'écoulement dans un milieu poreux d'un fluide non-Newtonien (dont la caractéristique à travers un capillaire est similaire à celle montrée dans la figure 1 (haut) ou à son symétrique par rapport à l'axe de direction (1,1)).

Pour le cas mécanique, la situation est plus complexe, mais également plus limitée car les modèles obtenus par dualité sont peu réalistes. En effet, il faut imaginer le comportement "rigidifiant" suivant : au-delà d'une contrainte seuil, le lien individuel doit devenir infiniment rigide. Si nous acceptons un instant ce type de caractéristique "d'école", nous obtenons un comportement similaire entre :

- d'une part, la rupture fragile d'un milieu élastique bi-dimensionnel, sollicité dans son plan, et le comportement rigidifiant d'un milieu sollicité perpendiculairement à son plan (e.g. flexion)
- d'autre part, de façon symétrique, la rupture d'un milieu sollicité en déplacement perpendiculairement à son plan, et le comportement rigidifiant d'un milieu sollicité dans son plan.

5.1.2 Types de désordre: "Gelé" et "Recuit"

Nous avons déjà eu l'occasion de rencontrer différents exemples de désordre tant "recuit" que "gelé". Nous y avons fait allusion en particulier au chapitre précédent. Cette distinction n'a lieu d'être que pour un milieu dont on étudie une évolution "dynamique". Le désordre gelé consiste alors à introduire le désordre au départ, avant toute évolution et ne plus le modifier ultérieurement. Par exemple, dans la "percolation d'invasion", tous les sites du réseau se voient attribuer un nombre aléatoire initialement, puis l'amas est construit en envahissant le site accessible qui porte le plus bas nombre aléatoire. Il n'est pas possible de reconstruire ce modèle avec un désordre recuit.

Pour un désordre recuit, l'évolution du système est déterminée à chaque pas de temps par un choix aléatoire qui se fait alors simplement. Dans ce cas, le désordre est fonction de la géométrie du milieu. En quelques sortes, on oublie les choix précédents. Un exemple de désordre recuit est fourni par le modèle d'Eden. A chaque pas de temps, un site quelconque de la frontière de l'amas est envahi avec équiprobabilité. Le choix d'un site n'est affecté par les choix précédents que dans la mesure où la géométrie de l'amas a changé. Nous verrons que le modèle d'Agrégation Limitée par Diffusion (DLA) est également un modèle recuit.

Exceptionnellement, pour le modèle d'Eden, nous avions pu construire un modèle gelé qui lui était équivalent (cf. Chapitre 4). Nous tenterons une démarche similaire à la fin de ce chapitre pour certains modèles de fracture. Notons également que si, sur le plan théorique, il n'existe pas, à notre connaissance, de modèle de DLA avec désordre gelé, expérimentalement, des structures similaires au DLA ont été obtenues aussi bien avec un désordre recuit (bruit) qu'un désordre gelé (hétérogénéité d'un milieu) (voir e.g. Ref.[9,10]).

5.1.3 Contrainte de connexité

Dans la cas de la rupture de diélectriques, la structure formée doit conduire les charges électriques depuis une électrode jusqu'à l'autre. Ainsi, naturellement, nous nous attendons à obtenir une structure continue. Ceci n'est plus vrai pour le cas inverse où le milieu devient isolant après rupture. Ceci suggère d'étudier deux situations distinctes:

- d'une part, la croissance d'une fracture unique, en restreignant la croissance aux sites plus proches voisins de la structure déjà générée,
- d'autre part, la rupture homogène du milieu, sans contrainte sur la position des nouveaux sites.

Dans certaines situations, comme en percolation, il est possible de ne générer qu'un amas infini, par la percolation dite "d'invasion" [11], en utilisant une contrainte de connexité. Cependant les propriétés de l'amas ainsi généré, sont identiques à celles de l'amas infini en percolation usuelle. Nous pouvons aussi comprendre le développement temporel de l'invasion par l'utilisation des propriétés statiques de la percolation usuelle [12].

La question se posera donc de comprendre l'effet d'un critère de connexité additionnel imposé dans un problème de rupture. Inversement, pour l'agrégation limitée par diffusion, nous étudierons le comportement en nous affranchissant de la contrainte de connexité naturellement présente. Nous verrons que ceci nous permet de définir un problème qualitativement comparable à la percolation, présentant un point critique, et caractérisé par des exposants différents de la percolation usuelle.

5.1.4 Différents critères

Les critères de rupture définissent en partie les modèles que nous allons discuter. Il faut donc s'attacher à les caractériser au mieux. Dans la plupart des modèles à désordre figé que nous allons introduire dans la suite, le critère de rupture est local. Nous nous donnerons des contraintes seuils, ou des courants seuils, qui provoqueront la rupture locale.

Il faut ici souligner la différence avec la plupart des approches classiques de la rupture, où un critère global est utilisé: le critère de Griffith [13], (voir e.g. Ref.[14]). Ce critère peut s'exprimer de la façon suivante: une fissure se propage si la variation d'énergie élastique qu'elle permet, compense le coût énergétique de la création d'une nouvelle interface. Plus précisément, quantifions ce critère dans le cas d'un milieu discret, un réseau. Supposons que ce réseau soit soumis à une force constante F. Appelons k_0 sa raideur. Son énergie potentielle élastique sera donc

$$E_0 = (1/2)\ \frac{F^2}{k_0} \qquad (5.1.1)$$

Soit k_i la raideur du réseau lorsque le lien i est rompu. Son énergie élastique est, dans ces conditions,

$$E_i = (1/2)\ \frac{F^2}{k_i} \qquad (5.1.2)$$

Dans le même temps, le travail de la force F vaudra: $W = 2\ (E_i - E_0)$. L'énergie disponible pour casser le lien sera $W - (E_i - E_0)$. En terme de bilan énergétique, la rupture du lien n'est donc possible que lorsque

$$(1/k_i - 1/k_0) > 2e_i/(F^2) \qquad (5.1.3)$$

si e_i désigne l'énergie de rupture du lien. Cette quantité représente la création d'une nouvelle "interface" à un niveau discret. Ainsi, la rupture du réseau progressera si

$$F > F_c = \min_i \left\{ \sqrt{\frac{2e_i k_0 k_i}{(k_0 - k_i)}} \right\} \qquad (5.1.4)$$

Ce critère est global car la quantité fondamentale qui intervient dans ces équations est la variation de module élastique consécutive à la rupture d'un lien. Or cette quantité est fonction de l'ensemble du réseau, et non simplement du lien considéré. L'hypothèse de Griffith, consiste à considérer que la rupture peut se produire de façon quasistatique, sans dissipation d'énergie autre. Ainsi, dès que F dépasse la valeur F_c, la rupture progresse.

Pour légitimer cette approche, il faut concevoir la rupture comme un phénomène thermodynamique à l'équilibre. En d'autres termes, pour que le système puisse opter pour son évolution énergétiquement la plus favorable, il faut qu'il explore son environnement dans un espace de configuration, où la position du milieu est définie par ses liens présents et absents. Cette exploration suppose qu'intrinsèquement, la rupture d'un lien est un processus réversible. Poursuivant dans cet esprit, nous voyons que cette description est extrémement simpliste, et que, pour la rendre réaliste, il faudrait considérer une variation continue de la raideur d'un lien, et non simplement les deux états possibles intact ou cassé. Il faudrait également prendre en compte une exploration continue de l'espace de configuration où tous les liens pourraient évoluer simultanément. La complexité d'une telle approche, si elle se veut réaliste, rend prohibitif tout calcul analytique, et oblige à l'emploi de techniques de dynamique moléculaire, mais alors le critère de Griffith doit naturellement émerger et non être une règle de base du modèle.

Cependant, il est toujours possible de faire un bilan énergétique une fois qu'une fracture s'est propagée. Dans ces conditions, il est évident que le critère de Griffith sera satisfait. Inversement, lorsque ce critère est satisfait, il est possible que la fracture ne se propage pas. Nous retiendrons de ce critère de Griffith une condition simplement nécessaire pour que la rupture se produise. Dans cet esprit, beaucoup de

modifications au critère de Griffith ont été suggérées pour prendre en compte différentes dissipations d'énergies (par déformations plastiques, par viscosité, par rayonnement de phonons, par dissipation thermique, ...). Cependant il est souvent difficile de quantifier indépendamment de la rupture elle-même ces différents facteurs, et ainsi ces améliorations ont souvent plus une vertu descriptive que prédictive.

La seconde raison pour laquelle la formulation de Griffith s'est imposée de nos jours dans la plupart des approches "classiques" de la rupture, provient de l'analyse du champ de contrainte local au voisinage d'une fissure unique. Il est bien connu que la solution élastique de la répartition des contraintes au voisinage d'un pointe de fissure présente une singularité en $1/\sqrt{r}$, où r représente la distance à la pointe de la fissure. Les déformations présentent également une singularité similaire puisque le milieu est élastique par hypothèse. Il apparait donc impossible dans ce cadre de définir à l'échelle du milieu continu une contrainte seuil. Si l'on veut s'en tenir à un critère sur les contraintes, il faut alors introduire, suivant Irwin [15], le facteur d'intensité de contrainte, K, qui donne le poids de la solution singulière. Or nous pouvons montrer que ce facteur d'intensité de contrainte (ou plus exactement son carré) peut être relié dans le cas d'une fissure unique au taux de restitution d'énergie qui apparait dans le critère de Griffith. Cette correspondance relie donc un critère en contrainte à un critère énergétique. Elle ne peut cependant être établie que dans le cas d'une fissure unique.

Nous venons de mentionner la divergence de la contrainte au voisinage de la pointe de fissure. Cette divergence, n'est bien sûr pas acceptable à un niveau local. D'autres mécanismes interviennent lorsque la contrainte est trop forte: plasticité, endommagement, décohésion, ... Ces phénomènes introduisent naturellement une coupure inférieure, ξ, à l'échelle où la solution élastique est acceptable. Dans le cas de plasticité, citons le travail d'Irwin [15] qui a mis en évidence le concept de rayon plastique, pour désigner cette longueur caractéristique, ξ. A l'échelle atomique, Barenblatt [16] a introduit un concept similaire dans le cas où le mécanisme limitant la divergence de la contrainte était du à la décohésion. Enfin, modélisant la rupture des céramiques,

Buresch [17] a obtenu un résultat semblable en introduisant un endommagement diffus au voisinage d'une pointe de fissure, endommagement limité dans une zone d'extension ξ. Partant de ces observations, il ne semble pas déraisonnable de donner un critère de rupture fondé sur la contrainte réelle observée à l'échelle ξ. C'est d'ailleurs implicitement ce que font les trois références citées précédemment (Irwin [15], Barenblatt [16] et Buresch [17]). L'existence d'une coupure inférieure en distance, et donc d'une contrainte seuil définie à cette échelle, nous permet de faire alors un lien naturel avec les approches que nous poursuivrons dans la suite. Nous modéliserons la rupture de milieux inhomogènes, à une échelle égale (ou supérieure) à ξ, en décrivant de façon très grossière la caractéristique à cette échelle, mais en prenant en compte explicitement le désordre.

Si nous considérons le milieu à une échelle suffisament grande, au niveau local, la rupture peut être modélisée par un seuil de rupture local. Nous pouvons en effet supposer que le temps de rupture d'un lien est court devant la relaxation du champ de contrainte dans le réseau. Dans ce cas, nous serons toujours, au niveau d'un lien, sous une condition aux limites de type force constante, qui donne lieu à une rupture non-contrôlée dès que le seuil est atteint, dans un milieu homogène (ici le lien). Cette description s'appliquera donc à un niveau mésoscopique, et nous oublierons les processus qui conduisent à la définition des propriétés de rupture de ces liens. C'est pourquoi nous utiliserons un critère local de rupture, à savoir une contrainte locale seuil. Puis, en introduisant un désordre dans la structure, nous observerons des comportements collectifs du système à grande échelle qui redonneront des caractéristiques de rupture plus complexes, et sans doute plus réalistes.

Ainsi, la "philosophie" de notre approche consiste à partir des caractères locaux les plus simples, et à étudier les comportements collectifs qui résultent de la prise en compte de désordre.

Quel est donc l'intérêt de prendre en compte explicitement le désordre? La description usuelle du problème que nous considérons est la théorie de l'endommagement. De façon très schématique, cette théorie propose une description du

comportement mécanique en partant, à un niveau local (mésoscopique), d'une caractéristique qui prend déjà en compte un comportement moyen résultant d'interactions complexes, et éventuellement de désordre à une échelle plus microscopique. Ce comportement est alors considéré comme ne présentant plus de fluctuations statistiques. Ce type d'hypothèse peut se concevoir lorsque l'on étudie les propriétés élastiques d'un composite: il existe en effet alors une échelle où la description en terme de milieu homogène équivalent peut s'appliquer. Au contraire pour la rupture, ce type d'hypothèse ne va pas de soi. Le comportement microscopique qui gouverne la réponse macroscopique d'un système est rarement le comportement "moyen" pour la rupture fragile. Il s'agit plutôt de comportements rares, (les cas "rares", où la résistance du milieu est beaucoup plus faible que la moyenne, ont un rôle très important). En conséquence, négliger les fluctuations présentes à une échelle locale n'est pas innocent, et peut avoir des conséquences tout à fait considérables.

Prenons un exemple précis: le comportement adoucissant. Ce type de comportement, où le module élastique tangent peut être négatif, est observé expérimentalement à des échelles tout à fait macroscopiques [18]. Or si l'on impose un tel comportement à une échelle microscopique sans prendre en compte les fluctuations des caractéristiques, il est facile de voir que le système est instable [19] : l'endommagement va être localisé. Si l'on utilise cette loi de comportement sur un code d'éléments finis, la réponse globale du système va dépendre de la taille du maillage __ propriété dite de "non-objectivité". Cette observation est généralement considérée comme un vice de la description, et de nombreux efforts ont été déployés pour s'affranchir de cette dépendance. Certains auteurs [20, 21] ont proposé d'ajouter des contributions énergétiques supplémentaires, qui pénalisent la localisation, sous la forme de termes en gradient des déformations. D'autres [22, 23] se sont orientés sur une formulation non-locale de l'endommagement. Dans toutes ces approches, une nouvelle échelle est introduite, soit dans le terme énergétique additionnel pour le premier cas, soit dans le noyau de la fonction de pondération pour le second cas. Si ces approches sont

esthétiquement plus satisfaisantes que la simple règle de fixer à une échelle fixe la taille du maillage en éléments finis, elles ne s'en distinguent que peu dans l'esprit: le concept important est l'existence d'une échelle de longueur associée à la description. En d'autres termes, la propriété de non-objectivité, signifie que la loi de comportement imposée au niveau local n'est pas invariante d'échelle.

Une fois cette observation faite, il convient de s'interroger sur la façon dont cette loi évolue avec l'échelle à laquelle est faite la description. L'échelle microscopique introduite précédemment est-elle une constante caractéristique du matériau ? La modélisation proposée suffit-elle à rendre compte correctement des propriétés du matériau à toutes les tailles ? Autant de questions aujourd'hui ouvertes. Les exemples que nous avons étudiés numériquement nous incitent à penser que la réponse à apporter à ces questions est parfois négative, car les changements d'échelle ne semblent pas se traduire de façon aussi simple (l'échelle locale introduite précédemment semble changer avec la taille globale du système considéré). Il serait souhaitable de pousser plus avant une comparaison quantitative de ces effets de taille entre modèle et expériences sur matériaux standards.

Dans cette analyse, notre démarche se place donc comme complémentaire de la description usuelle. Nous nous proposons en effet d'étudier plus précisémment comment le désordre peut fournir un facteur stabilisant naturel qui limite l'instabilité de localisation, et en conséquence, nous analyserons l'influence de ce désordre sur l'effet de taille.

5.2 Désordre gelé

Nous allons dans cette partie étudier un certain nombre de situations de désordre gelé, à savoir la dilution, la distribution des coefficients de transport locaux, et finalement la distribution des seuils de rupture. A la suite de ceci, nous présenterons quelques résultats obtenus en imposant en plus une contrainte de connexité sur la fissure créée. Pour chacune de ces situations, nous considèrerons essentiellement le cas de la rupture électrique (fusibles), mais nous mentionnerons également la correspondance avec d'autres types de lois de comportements, (e.g. fusible dual, élastique fragile, etc...).

5.2.1 Dilution

L'une des façons les plus simples pour introduire un désordre de nature géométrique dans une structure est la dilution aléatoire. Sur réseau, une fraction p de liens choisis aléatoirement est présente et possède les caractéristiques locales à étudier, i.e. soit un comportement de fusible, soit de "fusible dual", soit encore élastique fragile. La fraction manquante, q=1-p, est supposée respectivement isolante, supra-conductrice, ou infiniment souple. L'ensemble des liens présents est supposé avoir une caractéristique exactement semblable. Nous noterons v_c, i_c, d_c ou f_c la tension, l'intensité, le déplacement ou la force locale qui correspondent à la rupture d'un lien individuel. A l'échelle du réseau, ces quantités seront notées en lettres capitales V_c, I_c, D_c ou F_c

Trois cas sont à distinguer:

• p=1. Ceci correspond à la situation d'un réseau intact, sans défaut. Le réseau a alors le comportement idéal de chacun de ces constituants hormis un facteur d'échelle trivial: Ainsi par exemple, si nous notons L la taille du système

$$I_c = i_c L \qquad (5.2.1)$$

et

$$V_c = v_c L \qquad (5.2.2)$$

Cette solution apparaît comme paradoxale en un certain sens puisque la ruine de la structure se traduit par la rupture de chacun de ses constituants! Ce comportement est pourtant instable, car dès que le moindre désordre est présent dans la structure, il est évident que seule une fissure unique se développe, donnant lieu à une interface plate (fusibles, ou rupture fragile), ou encore à un chemin (fusible dual) qui traverse le système. Quoiqu'il en soit, l'étude de la rupture initiée par un défaut unique, indique que la rupture est alors toujours catastrophique, puisque dès qu'un lien casse, l'ensemble de la structure est fragilisé, en ce sens qu'une tension inférieure est nécessaire pour propager la fissure. Ainsi les relations simples (5.2.1 et 5.2.2) restent valables malgré cette instabilité.

• $p = p_c$. Au voisinage du seuil de percolation (voir le chapitre 2), le comportement peut être décrit par des lois simples sur lesquelles nous reviendrons.

• $p_c << p << 1$. Entre les deux cas extrêmes précités, il existe toute une gamme de concentration __ expérimentalement la plus fréquente __ pour laquelle il est possible de donner des estimations du comportement collectif, en faisant appel à la notion de plus grand défaut.

Nous allons maintenant discuter ces deux derniers cas, en commençant par la percolation.

Voisinage du seuil de percolation

Le comportement en rupture au voisinage du seuil de percolation peut être estimé en utilisant la description de l'amas infini, en terme de super-réseau, construit à l'échelle de la longueur de corrélation, ξ. Cette notion a été largement discutée au chapitre 2. Considérons pour commencer le cas d'un réseau de fusible. Pour un système (hypercube) de taille L dans un espace de dimension d, le comportement est suppposé être

homogène au delà de la longueur ξ. Il suffit donc de se placer à cette échelle pour construire une cellule élémentaire représentative. La différence de potentiel aux bornes d'un réseau de taille ξ est donnée par $V\xi/L$, et le courant par $I(\xi/L)^{d-1}$. A l'échelle ξ la structure qui conduit le courant, le squelette, comporte un certain nombre d'"étranglements" où l'ensemble du courant doit passer. Ces étranglements sont éventuellement réduits à la taille d'un lien unique, lien "sensible", puisque l'on sait que le nombre moyen de tels liens sur un macro-lien, diverge avec sa taille selon une loi de puissance (ξ^{-1}) [24]. La rupture d'un macro-lien aura donc lieu, lorsque

$$I_c \propto i_c (L/\xi)^{d-1} \qquad (5.2.3)$$

Si nous utilisons maintenant la loi de variation de la longueur de corrélation avec p, i.e. $\xi \propto (p-p_c)^{-\nu}$, nous obtenons:

$$I_c \propto i_c (L)^{d-1}(p-p_c)^{\nu(d-1)} \qquad (5.2.4)$$

Nous savons également (cf. Chapitre 2) que la conductance du réseau varie comme

$$G \propto g (p-p_c)^t (L)^{d-2} \qquad (5.2.5)$$

où le facteur L^{d-2} "traduit" la conductivité en conductance, et g est la conductance d'un lien unique. Il découle dès lors simplement que la différence de potentiel à laquelle se produit la ruine de la structure vaut

$$\begin{aligned} V_c &= I_c/G \\ &\propto (i_c/g)\, L\, (p-p_c)^{-t+\nu(d-1)} \end{aligned} \qquad (5.2.6)$$

Remarquons que la valeur numérique de ce dernier exposant à deux dimensions vaut ν-t = 0.033, soit une annulation très "lente" du potentiel de rupture. En termes physiques, la fragilisation du réseau due à la forte dilution est presque compensée par l'accroissement corrélatif de la résistivité.

Nous avions déjà mentionné ces résultats au chapitre précédent, à propos de chemins minimaux sur une structure au seuil de percolation. En voici donc donnée la justification. Il est à remarquer que cet argument est extrèmement "rustique" et, en particulier, qu'il ne tient pas compte d'éventuelles fluctuations dans la structure du milieu à une échelle supérieure à ξ. Une justification de ce type de propriété peut être trouvée dans certaines simulations numériques qui indiquent que la distribution de courant au delà du courant typique est exponentielle. Dans le même ordre d'idées, un résultat exact a été obtenu par Kunz et Souillard [25] concernant la taille maximum des amas finis au-dessus de p_c. Plus précisément, ces auteurs ont prouvé que la probabilité pour qu'un site appartienne à un amas fini de taille n, variait comme $\exp(-b(p)\, n^{(d-1)/d})$ en fonction de $n >> \xi^D$, où b(p) est une fonction de p, et D est la dimension fractale des amas. Ce résultat indique que la coupure donnée par la longueur de corrélation est brutale.

Beaucoup de références ont donné les résultats précédents. Pour ne citer que les plus récentes, mentionnons les références [26-29].

Abordons maintenant le cas des réseaux de "fusibles duaux" qui deviennent infiniment conducteurs lorsque le courant qui les traverse a dépassé une valeur seuil. Toujours dans le cas de la dilution aléatoire, au voisinage du seuil de percolation, nous pouvons appliquer directement les mêmes concepts que précédemment, en échangeant les rôles respectifs joués par la tension et le courant pour les critères de rupture. p désigne la concentration en fusibles duaux, et (1-p) celle des liens supraconducteurs. Nous utiliserons par commodité de langage la notation p_c pour désigner le seuil, mais par rapport à l'utilisation précédente de cette notation, le nouveau p_c sera le complément à 1 de l'ancien. Typiquement, le super-réseau sera constitué d'amas finis supra-conducteurs, de taille ξ, et séparés par des ponts de longueur de l'ordre de l'unité. Ces "ponts" sont

l'équivalent des liens sensibles dans le problème précédent. La différence de potentiel aux bornes d'un réseau de taille ξ est donnée par $V\xi/L$, et le courant par $I(\xi/L)^{d-1}$. La rupture aura donc lieu lorsque la tension sera de l'ordre de l'unité. Soit

$$V_c \propto v_c (L/\xi) \qquad (5.2.7)$$

Nous en déduisons

$$V_c \propto v_c L (p-p_c)^{\nu} \qquad (5.2.8)$$

Quant au courant critique, nous utilisons la divergence de la conductance du réseau selon:

$$G \propto g (p-p_c)^{-s} (L)^{d-2} \qquad (5.2.9)$$

soit

$$I_c \propto g v_c (p-p_c)^{\nu-s} (L)^{d-1} \qquad (5.2.10)$$

Nous vérifions bien que dans le cas bidimensionnel, les résultats obtenus sont identiques à ceux du réseau de fusibles, en échangeant courant et potentiel, puisque à deux dimensions s=t (cf. Chapitre 2 pour la démonstration). Cette correspondance peut simplement être établie par dualité.

Reste à traiter le cas d'un réseau constitué d'éléments élastiques fragiles. Nous nous placerons ici dans le cas d'un réseau de poutres encastrées aux nœuds. Le mode de déformation privilégié est la flexion locale [30]. Ce sera encore ici le mode qui provoquera la rupture [26]. Nous utilisons encore la description en termes de super-réseau. Appliquant une contrainte σ sur le système, nous aurons pour un cube de taille ξ, une force $F = \sigma \xi^{d-1}$, mais également un moment de flexion de l'ordre de $F \xi = \sigma \xi^{d}$. La rupture aura lieu lorsque ce moment dépassera une valeur critique m_c:

$$\sigma_c = m_c\,(p-p_c)^{\nu d} \qquad (5.2.11)$$

La déformation ε_c correspondante sera donnée par

$$\varepsilon_c = k\,m_c\,(p-p_c)^{\nu d-\tau} \qquad (5.2.12)$$

où l'exposant τ est celui qui gouverne l'annulation du module élastique au seuil, et k une constante élastique locale. Si nous utilisons la conjecture $\tau = t + 2\nu$, ce dernier exposant peut s'écrire $\nu(d-2)-t$.

Dans le cas que nous venons de traiter, les déformations étaient supposées se placer dans l'espace du milieu, et donc à deux dimensions, il s'agissait des déformations dans le plan. Pour traiter des déformations hors du plan, nous pouvons utiliser la correspondance de dualité que nous avons explicitée au chapitre 2. Si une rotation, θ, est appliquée sur un bord du réseau, à l'échelle ξ nous aurons une rotation hors du plan $\theta(\xi/L)$ et des déplacements de l'ordre de $\theta(\xi^2/L)$. Lorsque ces derniers dépasseront une valeur seuil, nous aurons une rupture en flexion pour :

$$\theta_c \propto d_c\,L\,(p-p_c)^{-2\nu} \qquad (5.2.13)$$

et un couple global appliqué à la structure M_c

$$M_c \propto k\,d_c\,L\,(p-p_c)^{\sigma-2\nu} \qquad (5.2.14)$$

où σ désigne l'exposant critique qui caractérise la divergence du module élastique pour un réseau d'éléments élastiques ou infiniment rigides au seuil de percolation, pour des déformations dans le plan. (cf. Chapitre 2).

Nous résumons les différents exposants critiques obtenus dans le tableau suivant.

composant	fusible	fusible dual	élastique fragile
densité de courant ou contrainte	$\nu(d-1)$	$\nu - s$	νd
champ électrique ou déformation	$\nu(d-1) - t$	ν	$\nu d - \tau$

Exposants critiques des différents seuils pour trois comportements en percolation

Rappelons que ces estimations qui supposent une structure très régulière du super-réseau sont sujettes à caution. Leur vérification par simulations numériques est difficile et coûteuse.

De Arcangelis et coll [31] ont étudié les propriétés de rupture de réseaux de fusibles dilués, au voisinage du seuil de percolation. Ces auteurs rapportent essentiellement trois comportements critiques. Le premier concerne la différence de potentiel à laquelle doit être soumis le réseau pour provoquer la rupture du dernier lien V_{fin}. Cette quantité semble diverger selon

$$V_{fin} \propto (p-p_c)^{-z} \qquad (5.2.15)$$

avec un exposant z estimé à 0.48±0.08. Dans toute cette étude p désigne la proportion de fusibles présents avant que la rupture ne commence. Le second comportement critique donné par de Arcangelis et coll est relatif à la conductivité juste avant la rupture finale du réseau, G_{fin}. Cette quantité tend vers zéro au seuil de percolation selon

$$G_{fin} \propto (p-p_c)^{\nu} \qquad (5.2.16)$$

où $\nu = 0.53 \pm 0.10$. Il est difficile d'obtenir une prédiction quelconque concernant ces exposants, hormis l'égalité $\nu = z$. Celle-ci s'obtient simplement en écrivant que l'intensité de rupture finale, I_{fin}, est égale à l'unité. En effet, si un seul lien reste à rompre pour disconnecter le réseau en deux parties, tout le courant injecté dans le réseau passe par ce lien unique. Or $I_{fin} = G_{fin} V_{fin}$, ce qui conduit à l'égalité

$$z = \nu \qquad (5.2.17)$$

en accord avec les estimations numériques rapportées ci-dessus. Finalement, de Arcangelis et coll ont également étudié le nombre de fusibles brûlés à la fin de la rupture, N_b, rapporté à la section du réseau, $n_b = N_c/L^{d-1}$, qui varie comme

$$n_b \propto (p-p_c)^x \qquad (5.2.18)$$

où $x = 1.40 \pm 0.15$. Il est facile dans ce cas de prédire que ce nombre est en tout état de cause supérieur à la longueur du chemin minimal défini sur ce même réseau et qui évite les liens présents. Or cette dernière quantité a été estimée au voisinage du seuil de percolation au chapitre 3, et varie comme $(p-p_c)^{\nu}$ où ν est voisin de ν comme conjecturé par Deutscher et Rappaport [32] et vérifié numériquement par Derrida et Vannimenus [33] (cf. chapitre précédent). Ainsi $x \leq \nu = 4/3$ à deux dimensions.

Duxbury et coll. [29] dans leur étude de la rupture en dilution quelconque ont obtenu les résultats suivant pour le réseau de fusibles à deux dimensions. Le nombre de fusibles brûlés à la fin de la rupture rapporté à la section du réseau, $n_b = N_c/L^{d-1}$, varie comme indiqué (5.2.15) avec un exposant $x = 1.2 \pm 0.2$, valeur cohérente avec l'estimation de de Arcangelis [31] et la borne $x \leq \nu$.

En ce qui concerne le champ électrique à la rupture, V_c/L, au contraire de la prédiction obtenue ci-dessus (cf tableau), et de la simulation précédente, Duxbury et coll.

[29] estiment à partir de données numériques que V_c/L sature à une valeur finie, $V_c/L = 1.00 \pm 0.05$ sur un réseau carré. En fait une telle affirmation suggère une précision extraordinaire dans les mesures puisque l'annulation prévue est caractérisée par un exposant $\nu - t = 0.033$. Nous jugeons hors de propos une telle conclusion, ainsi d'ailleurs que les commentaires aggressifs dans cet article concernant des études antérieures sur ce sujet...

Concernant le cas fusible dual, Beale et Duxbury [34] proposent une correction au terme dominant vu ci-dessus, correction qui prend en compte les effets de taille finie de manière semblable au cas des dilutions loin du seuil de percolation (et sur lesquelles nous reviendrons abondamment dans la suite).

$$V_c/L = 1/\{A(p)+B(p)\log(L)\} \qquad (5.2.19)$$

Le coefficient B(p) variant comme indiqué précédemment, $B(p) \propto (p-p_c)^{-\nu}$. L'étude numérique donne alors l'estimation de cet exposant 1.46 ± 0.22, en accord raisonnable avec la prédiction, compte-tenu des incertitudes, et du fait que le point étudié le plus près du seuil était $p = 0.55$, pour un seuil de $p_c = 0.5$.

Le cas de la percolation continue a été considéré par Sornette [28]. Nous renvoyons le lecteur intéressé à cette référence pour plus de détails.

Dilution loin du seuil de percolation

Après une première étude du sujet par de Arcangelis et coll. [31], l'essentiel des travaux dans ce domaine, (désordre de dilution), tant analytiques que numériques, a été effectué par Duxbury, Beale, Leath, et Li [29, 34, 35, 36]. Nous commençons cette partie en rappelant les principaux éléments de leurs arguments théoriques concernant la tension et le courant critique de rupture. Puis nous donnerons leurs résultats numériques, avant d'aborder un autre point important de leur analyse: la probabilité de ruine d'un milieu en fonction du courant global ou de la contrainte appliquée. Nous suivons Duxbury et coll. [29] pour la présentation des résultats, sauf mention explicite du contraire.

La prédiction du courant ou de la tension de rupture se fait en deux temps: nous commençons par analyser l'effet de défauts de formes simples, puis en quantifiant leur probabilité d'existence, nous obtenons V_c et I_c. Au voisinage d'une "fissure" de forme rectiligne à deux dimensions, ou de disque à trois dimensions, orientée perpendiculairement au sens du courant, le courant va se concentrer sur les bords du défaut (Figure 5.3), donnant un courant supplémentaire par rapport à la contribution moyenne qui est proportionnel à la racine carrée du courant qui est écranté par cet obstacle. Ainsi, à deux dimensions, pour un défaut de longueur n, le courant maximum à la pointe du défaut sera donné par i*

$$i^* = \langle i \rangle (1 + k\sqrt{n}) \qquad (5.2.20)$$

où $\langle i \rangle$ est le courant moyen. Cette estimation n'est valide que pour un défaut de taille faible devant la largeur du réseau. A trois dimensions, pour un disque formé par n liens coupés, le courant dévié est à répartir sur les $\sqrt{n}$ liens périphériques, soit de l'ordre de $\sqrt{n}$

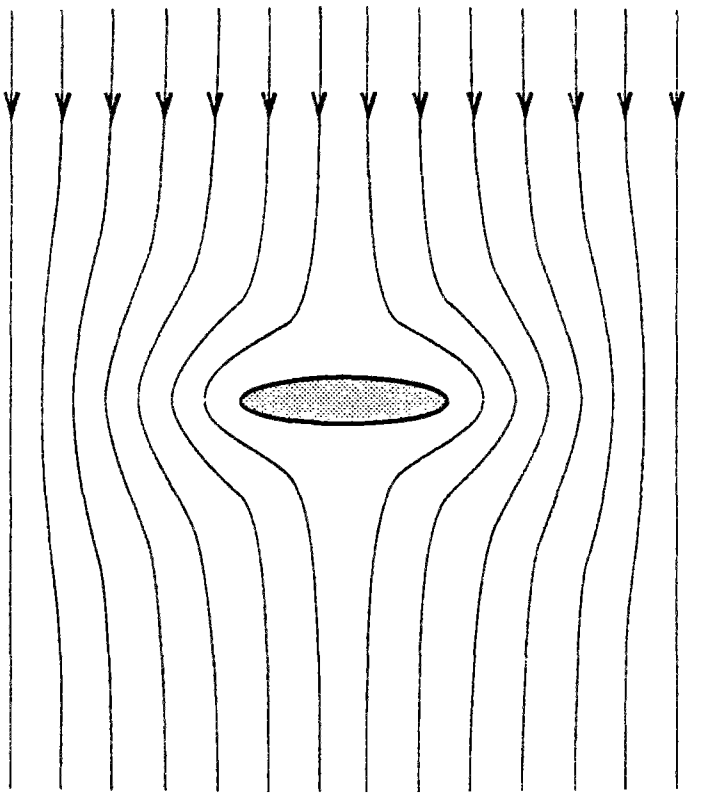


Figure 5.3 : Une configuration typique de défaut qui induit sur le bord une concentration de courant (ou de contrainte) propre à propager la fissure.

par liens. Pour chacun, la singularité du champ de potentiel au voisinage du bord est telle que le courant porté par ces liens périphériques sera proportionnel au courant dévié, soit

$$i^* = \langle i \rangle (1 + k\, n^{1/4}) \qquad (5.2.21)$$

Plus généralement, nous aurons une contribution additionnelle pour les liens les plus chauds, de l'ordre de $n^{1/(2(d-1))}$. Cependant, ces défauts ne sont pas ceux qui concentrent le plus de courant, et donc les plus dangereux. Il en existe d'autres (Figure 5.4), de taille n, qui conduisent l'ensemble du courant qu'ils dévient sur un seul lien, donnant ainsi lieu à des concentrations de courant locales de l'ordre de n, au lieu de $n^{1/(2(d-1))}$. Dans la suite, nous noterons α l'exposant qui caractérise la concentration de courant au voisinage d'un défaut de taille n, $i^* \propto n^{\alpha}$. Il est cependant important de noter que les défauts qui concentrent le plus de courant ne sont pas toujours les plus à même de se propager. Ainsi dans l'exemple de la figure 5.4, la concentration de courant conduira à la rupture du lien central, puis nous serons dans une situation similaire au disque de la figure précédente 5.3.

Généralement, pour un défaut de forme quelconque placé dans un milieu homogène, les défauts correspondants aux forts α disparaîtront les premiers, et ce de façon contrôlée, i.e. avec une augmentation simultanée du courant global pour rompre les liens suivants. La rupture catastrophique du milieu, i.e. avec une décroissance du courant nécessaire à la rupture suivante, n'ayant lieu que si une interface ayant une frontière convexe, donc sensiblement pour $\alpha = 1/(2(d-1))$, peut se propager. Dans la discussion qui précède, nous avons considéré un défaut unique, et non une collection de défauts qui interagissent, écrantant, ou renforçant les concentrations locales de courant.

Maintenant, nous quantifions la probabilité d'existence d'un défaut de n liens ayant une conformation donnée. Lorsque la taille de ce défaut est faible devant celle du système, L , nous pouvons estimer cette probabilité, P(n), à

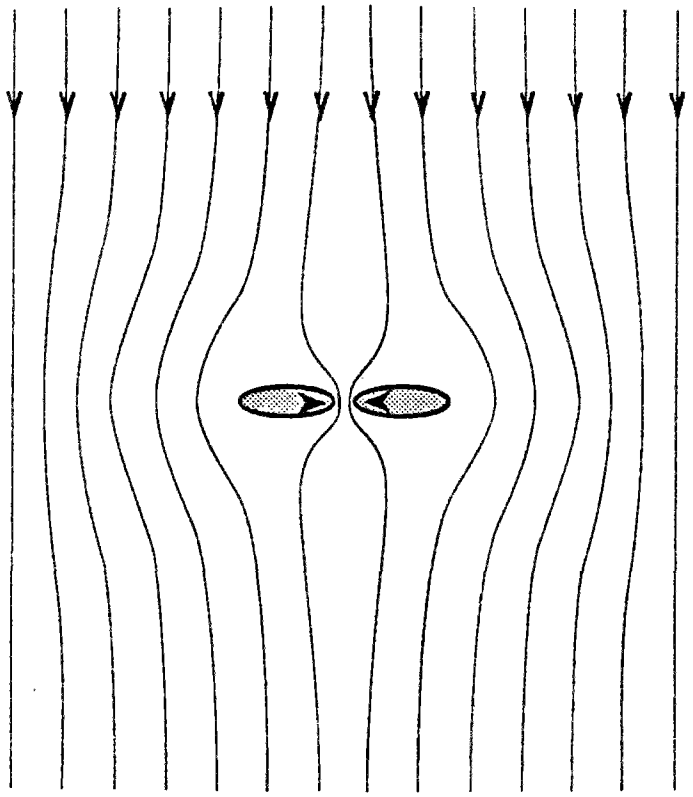


Figure 5.4 : Une configuration de défauts qui concentre plus de courant que dans l'exemple de la figure précédente. Cependant, après la rupture de la zone centrale indiquée par deux chevrons, (la plus fragile), le défaut sera du même type que précédemment.

$$P(n) = L^d(1-p)^n \qquad (5.2.22)$$

Encore une fois, cette mesure est approximative, car nous ignorons l'environnement de ce défaut. Pour prendre un exemple précis, à deux dimensions, si nous ajoutons à une fissure rectiligne deux trous circulaires aux deux extrémités de la fissure, alors tout en augmentant la taille du défaut, nous réduisons la concentration de courant, et donc la fragilité du défaut. Nous reviendrons sur la discussion de ce point à la fin de cette partie. Admettons pour l'instant ce résultat pour poursuivre l'argumentation de Duxbury et coll.. Le défaut de plus grande taille sera obtenu en écrivant que P(n) est de l'ordre de l'unité, soit encore

$$n_c \propto \left(\frac{-d}{\log(1-p)}\right) \log(L) \qquad (5.2.23)$$

Soulignons le résultat fondamental obtenu ici, moyennant force hypothèses: la taille maximale du défaut que l'on est susceptible de rencontrer varie logarithmiquement avec la taille du réseau. Combinant cette taille critique avec la concentration de courant, en écrivant que i*=1, nous obtenons

$$I_c/L = 1/\{1+K\,(\log(L))^{\alpha}\} \qquad (5.2.24)$$

Similairement, Duxbury et coll. [29, 35, 36] proposent que la tension critique, V_c/L, est

$$V_c/L = \left\{\sigma(p)\{1+K\,(\log(L))^{\alpha}\}\right\}^{-1} \qquad (5.2.25)$$

où $\sigma(p)$ est la conductivité du réseau. Cette relation est valide pour le premier lien brûlé, mais pas nécessairement pour le champ électrique qui correspond à la rupture complète du réseau. En effet comme nous l'avons mentionné précédemment, il est possible, sinon

probable, que dans un premier temps quelques liens très fortement sollicités rompent, sans entraîner pour autant la rupture catastrophique du milieu. Ceci se traduit dans la pratique par un exposant α qui peut différer lorsque l'on traite du premier lien brûlé ou de la rupture de l'ensemble du réseau.

Pour le problème des fusibles duaux, Beale et Duxbury [34] proposent exactement le même calcul et donc ils obtiennent les mêmes résultats, avec un exposant α qui cette fois vaut 1 de par l'effet attractif des défauts vis à vis du courant (plutôt que répulsif dans le cas précédent). Dans ce cas, en effet, le défaut le plus dangereux sera un segment linéaire aligné dans le sens du courant, en toutes dimensions d'espace.

Ne s'intéressant qu'aux courants les plus forts dans les réseaux dilués ou hétérogènes, mentionnons encore les simulations de Kahng et coll. [37], qui ont montré que la plus grande tension locale présentait un maximum en fonction de la dilution du système, et que la valeur de ce maximum semblait augmenter comme le logarithme du logarithme de la taille du système. Les travaux analytiques de Machta et Guyer [38] et les simulations numériques de Chan et coll. [39] et de Helsing et coll. [40], ont considéré les courants les plus forts à deux et trois dimensions dans des réseaux constitués de deux types de résistances. Leur approche montre que localement les configurations qui semblent concentrer le plus de courant ont une forme de cône. A l'intérieur du cône dont l'axe est selon la direction moyenne de parcours du courant, se trouvent les bons conducteurs, alors qu'à l'extérieur se trouvent les mauvais conducteurs. Encore une fois toutes ces approches analytiques présentent des arguments locaux du même esprit que ceux de Duxbury et coll. [29, 34-36]. Ils sont donc légitimes des mêmes critiques. Citons encore le travail récent de Li et Duxbury qui considère les lois d'échelles suivies par les moments d'ordre élevé de la distribution des courants, en fonction de la taille du système dilué étudié [41]. Nous savons en effet que le moment d'ordre n, va être gouverné par le maximum de la distribution lorsque n tend vers l'infini, leurs résultats précédents se transposent donc sans peine dans ce cadre.

Voici donc résumés les principaux résultats concernant les estimations de I_c et V_c proposés dans la littérature. Nous avons mentionné certaines faiblesses de cet argument. Assurément l'une des plus graves approximations concerne la prise en compte d'un défaut unique comme si son environnement local était un milieu homogène (p=1). L'interaction des défauts entre eux rend difficile sinon impossible une discussion exacte dans un environnement représentatif. Dans la limite diluée, p proche de 1, il est possible de donner des informations supplémentaires sur la forme des défauts: en effet, dans cette limite, les défauts coïncident avec la notion d'animal. Or nous savons [42, 43] que les animaux sont des objets anisotropes, mais dont le rapport entre grand et petit axe principal d'inertie tend vers une constante bien définie. Partant de ce résultat, il n'est pas évident qu'un grand défaut introduise une forte concentration de courant. Si l'on approxime cet objet par un ellipsoïde, son excentricité étant imposée par le rapport A, la concentration de courant sera indépendante de la taille du défaut (si il est beaucoup plus petit que la taille du milieu). Pour obtenir un défaut ayant une forme donnée, il faut introduire un terme de forme supplémentaire. L'anisotropie moyenne des animaux étant fixe, pour générer un animal de taille donnée, il faut restreindre la probabilité par un facteur encore probablement exponentiel. Cependant un tel argument ne suffit pas à renverser la suggestion de Duxbury et coll.. Quelque soit le choix d'une configuration contenue dans un domaine de taille ℓ (nous posons $m=\ell^d$), un calcul exact de la probabilité de présence de cet objet sera toujours plus grand que q^m. Ainsi pour un système de taille L, la taille du défaut maximum tendra vers l'infini au moins comme le logarithme de L. L'argument est donc extrèmement robuste aux détails du calcul.

Le vice profond de l'argument est d'être <u>local</u>. Dans tous ces calculs, nous ignorons toujours l'environnement du défaut. Prenons un cas extrême, en nous plaçant dans l'exemple précédent, (à savoir un défaut dans un domaine de taille ℓ). Il est facile d'imaginer un autre défaut qui annule l'effet du précédent. Définissons pour ce faire une sphère qui entoure complétement le défaut et choisissons ce second défaut comme constitué de l'ensemble des liens qui interceptent la surface de la sphère (figure 5.5). La

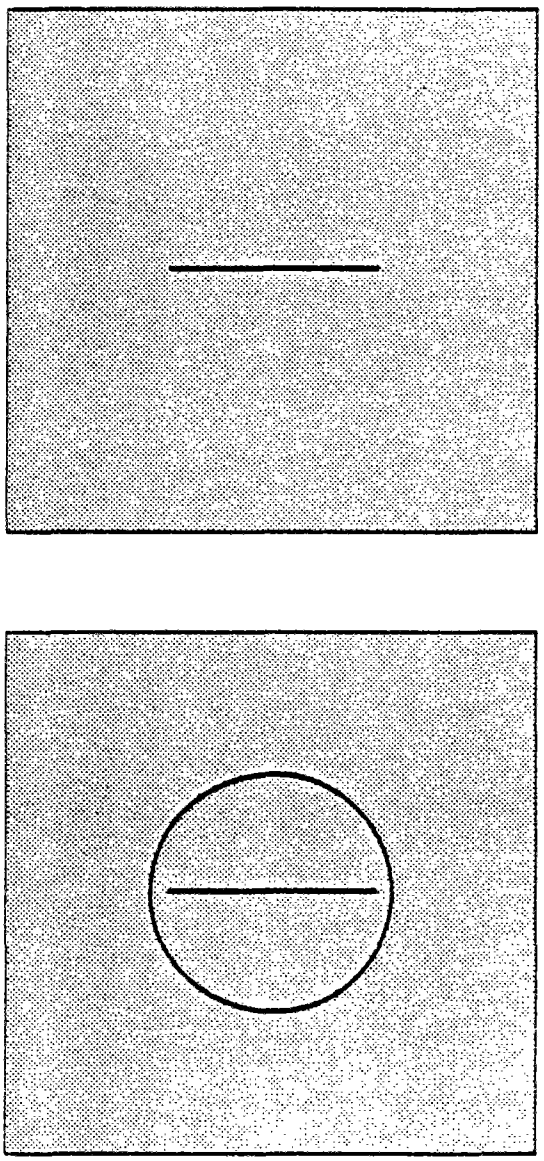


Figure 5.5 : Le défaut d'une argumentation locale dans l'estimation des configurations les plus dangereuses pour la rupture est de négliger l'environnement des défauts. Nous l'illustrons de façon schématique ici. En haut est représentée une fissure linéaire qui produit une singularité de contrainte au voisinage des pointes. En bas, le même défaut est maintenant inclus dans une "sphère" de liens coupés qui "efface" la singularité précédente, puisque la concentration de contrainte est maintenant finie, y compris dans la limite d'un milieu continu. Pourtant les deux défauts ont sensiblement la même probabilité d'existence.

probabilité de présence de ce second défaut sera du même ordre de grandeur que celle du premier. Pourtant la concentration de courant sur la surface de la sphère sera une constante (3 à deux dimensions), au lieu de diverger dans le cas d'un disque. L'exemple de la sphère est bien sûr un cas simpliste, mais l'idée essentielle qui n'est pas pris en compte dans le calcul de Duxbury et coll., est que si un grand défaut a une probabilité de l'ordre de l'unité d'exister, alors, il est aussi possible de créer d'autres défauts qui annuleront l'effet du premier avec la même probabilité.

Comment pouvons nous alors parer à cette réfutation ? Nous prétendons qu'il est impératif pour forger un argument raisonnable qu'il soit global, i.e. qu'il prenne en compte des structures, mais aussi leur environnement, et ce sur une échelle de l'ordre de la taille du système. Ceci est d'ailleurs naturel car la répartition des courants dans la structure est également et au même titre un phénomène par essence global. Une façon simple de s'en convaincre consiste à remarquer que la fonction de Green d'un problème harmonique dans un milieu infini, a une décroissance lente à l'infini, (loi de puissance), qui indique que la portée des interactions est infinie. Si nous essayons de quantifier plus précisément un argument "global", en posant $\ell = L$, nous voyons que l'argument de Duxbury ne conduit plus à la solution précédente. Cependant dans un tel cas, il est également évident qu'il faut prendre en compte la multiplicité de configuration de défauts qui donne une contribution exponentiellement croissante avec la taille du système...

En bref, la prédiction forte de Duxbury n'est pas prouvée par leur argument qui est local.

Nous allons maintenant discuter les vérifications de ces prédictions par simulations numériques. Précisons d'emblée que ces simulations sont généralement très longues et difficiles, car les quantités à étudier sont très sensibles à des défauts mêmes rares et donc les fluctuations sont très importantes.

Pour les réseaux de fusibles, les simulations ont été faites sur des réseaux bidimensionnels carrés, jusqu'à des tailles de 200×200, et pour des concentrations p variant entre 0.5 (le seuil de percolation) et 0.90. Leur étude révèle que le comportement

de la tension pour laquelle le premier lien brûle, V_1, et celle pour laquelle l'ensemble du réseau brûle, V_c, est qualitativement similaire, bien qu'une différence sensiblement constante avec la taille du système subsiste. A partir de cette constatation, l'essentiel des comparaisons entre calcul et prédictions ont été faites sur les tensions et intensités qui correspondent à la première rupture dans chaque réseau. Il va de soi que dans cette limite, les simulations sont beaucoup moins onéreuses. Les courbes montrant (L/V_1) en fonction du logarithme de la taille du système, à p constant, présentent une légère concavité vers le bas, au lieu d'être rectilignes comme prévu (Eq. 5.2.25) pour $\alpha = 1$. Ceci n'exclut pourtant pas la validité de la prédiction, mais il est probable que d'autres formes puissent rendre compte des évolutions observées de manière aussi satisfaisante comme le reconnaissent d'ailleurs Duxbury et coll.. En ce qui concerne les intensités I_1/L, les courbes montrant L/I_1 en fonction du logarithme de la taille du système, donnent des comportements tout à fait linéaires dans la gamme de taille 6 à 200. Nous verrons cependant dans la suite que ces données sont compatibles avec d'autres formes de lois. Nous avons tracé sur la figure 5.6 la loi attendue pour I_c/L par l'argument de Duxbury, Eq. 5.2.24, en fonction de $L^{-2/3}$. Les valeurs numériques des coefficients intervenant dans cette relation ont été ajustées aux valeurs obtenues par simulations numériques pour $p = 0.8$ par Duxbury. Nous voyons sur la courbe qu'il est extrèmement difficile de différencier la loi attendue d'autres lois comme $I_c/L = A + BL^{-2/3}$, sur une gamme de taille variant entre 10 et 200, soit les valeurs typiques considérées dans ce dernier travail.

Pour les fusibles duaux, Beale et Duxbury proposent des simulations similaires en dimensions deux et trois. En fait, à deux dimensions, par dualité, les résultats sont comparables à ceux du problème précédent. Les tailles étudiées ici sont de 10 à 100. Pour le cas tridimensionnel, de façon similaire L/I_1 varie de façon sensiblement linéaire avec log(L) pour L variant de 10 à 35. Ces simulations ne peuvent en aucun cas donner d'estimations de l'exposant α.

Le cas élastique fragile a aussi été étudié numériquement avec un désordre de dilution. Cette étude a été effectuée par Beale et Srolowitz [44]. Le réseau de départ était

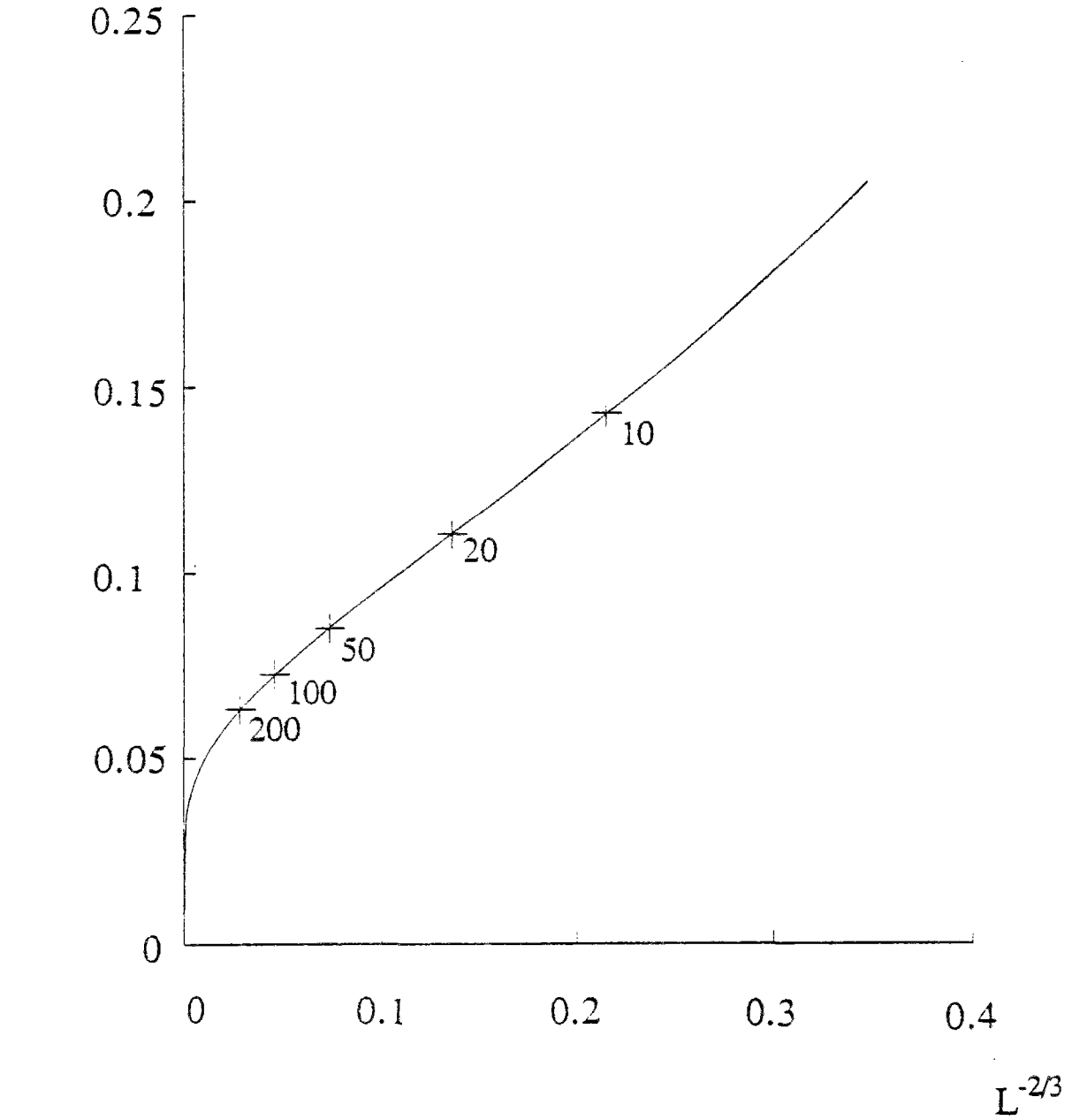


Figure 5.6 : Tracé de la fonction donnant le courant de rupture dans un réseau dilué en fonction de la taille du système selon l'argument de Duxbury, 1/(A+Blog(L)), en fonction de la taille du système à la puissance -2/3. Quelques tailles sont indiquées explicitement. Nous voyons qu'il est extrêmement difficile de distinguer cette courbe d'une ligne droite sur une gamme de tailles allant de 10 à 200. Les valeurs de A et B ont été extraites des données de Duxbury et al [29] pour p=0.6.

un treillis triangulaire réticulé de barres élastiques fragiles libres de pivoter aux nœuds du réseau. Une fraction (1-p) de barres est choisie aléatoirement et enlevée. Dans les simulations numériques, Beale et Srolowitz ont pris en compte les grandes déformations. Il y a donc deux sources de non-linéarités dans ce modèle, d'une part la loi de comportement globale, et d'autre part les modifications de géométrie entre l'état déformé et l'état initial. Il va de soi que ce dernier point devient de plus en plus important au fur et à mesure que la rupture se propage. D'autre part la prise en compte des grandes déformations impose une échelle de force. En effet, pour que l'allongement des barres soit une fraction finie de la longueur initiale disons $\delta l = \lambda l_0$, il faut appliquer une force locale f_{gd} proportionnelle à λ et au module élastique des barres k, $f_{gd} = A\lambda k$. La rupture d'une barre donne une seconde échelle de force f_c. Ainsi, les résultats sont *a priori* fonctions du rapport entre ces deux échelles. Beale et Srolowitz [44] n'ont considéré qu'une seule valeur de ce rapport, et donc il est impossible d'en extraire les aspects qui proviennent de telle ou telle source de non-linéarité. Mis à part cet aspect un peu technique, les résultats obtenus par ces auteurs sont similaires à ceux obtenus pour les réseaux de diodes.

Mentionnons encore quelques autres extensions des résultats précédents obtenus par le même groupe:

• L'effet d'une rupture incomplète peut dans certains cas arrêter la propagation de la rupture. Li et coll. [45] et Li et Duxbury [46] ont donc considéré un réseau constitué d'éléments (fusibles) qui conservent une certaine conductivité après avoir brûlé.

• Le modèle de Born (dont nous avons déjà discuté au chapitre 2 la validité quelque peu sujette à caution en ce qui concerne un quelconque solide élastique) se prête naturellement au même exercice, sans modifier un iota aux conclusions précédentes. C'est ce qu'on découvert Hassold et Srolowitz [47].

• D'intérêt physique sensiblement supérieur, le problème de la transition supraconducteur-conducteur peut encore être abordé par le même biais. Le problème est alors un peu plus complexe, car deux problèmes potentiels (pour la phase dans le

domaine supraconducteur et pour le potentiel dans le domaine normal) doivent être résolus simultanément avec pour seul couplage, la définition d'une interface commune, le long de laquelle les solutions doivent se raccorder. Les conclusions de cette étude par Leath et Tang [48] sont néanmoins tout à fait semblables aux précédentes.

Il existe une autre propriété d'intérêt fondamental pour les problèmes de rupture de milieux désordonnés. Il s'agit de la probabilité de ruine, également étudiée par Duxbury et coll. [49]. Avant d'aborder ce sujet, nous allons ouvrir une parenthèse pour donner un résultat statistique simple qui nous sera utile dans la suite, et dont on trouvera tous les détails dans le livre de Gumbel [50] sur les "statistiques extrêmes" .

Considérons une variable aléatoire, x, distribuée selon une loi p(x), pour x appartenant à l'intervalle [0, +∞[. Appelons $P_N(y)$ la probabilité qu'au cours de N tirages indépendants, la variable x soit inférieure à y. Alors $P_N(y)$ s'écrit

$$P_N(y) = \left\{ \int_0^y p(x)\ dx \right\}^N \qquad (5.2.26)$$

Soit pour N>>1,

$$P_N(y) = \exp\left\{ -N \int_y^\infty p(x)\ dx \right\} \qquad (5.2.27)$$

Ces lois vont nous servir à estimer des probabilités de ruine de réseaux. Dans ce cas, le facteur N représente le nombre de volumes élémentaires représentatifs contenu dans un système lorsque un tel concept existe. Si nous appelons L la taille du système, N varie comme L^d. Dans le cas où la distribution p(x) décroit exponentiellement, nous trouvons pour $P(L,y)=P_{(L^d)}(y)$:

$$P(L,y) = \exp\{ -AL^d \exp(-By) \} \qquad (5.2.28)$$

où A et B sont des constantes. A est de l'ordre du volume de la cellule élémentaire représentative, et B est de l'ordre de la valeur moyenne de x. Au contraire, si la loi p(x) décroît selon une loi de puissance, $p(x) = Bx^{-m-1}$, alors

$$P(L,y) = \exp\{ -C L^d y^{-m}\} \qquad (5.2.29)$$

Nous reconnaissons ici la loi de Weibull [51]. L'exposant m qui intervient dans cette loi est appelé conventionnellement "module de Weibull". Cette forme de loi est généralement utilisée pour apprécier les distributions statistiques de rupture de matériaux. Dans ce cas, y est la différence entre une contrainte σ appliquée et une contrainte intrinsèque σ_0 caractéristique du matériau. Pour des matériaux comme les céramiques, les modules m rencontrés dans les situations courantes se situent dans la gamme 5 à 40. Plus ce module est élevé, plus la distribution est étroite. Le module m est aujourd'hui, dans la pratique, considéré comme un paramètre intrinsèque du matériau. Il est intéressant de noter que cette distribution prend en compte un effet de taille, (dépendance en L). Cependant l'assise théorique de cette forme de loi statistique est faible. De plus la distinction entre une loi de puissance avec un exposant de l'ordre de 10 à 40, et une loi exponentielle est difficilement appréciable, sans disposer d'une vaste gamme de taille.

Les références [29, 34, 36, 44, 45, 46, 47, 48, 49] utilisent les résultats précédents de la façon suivante: nous avons vu que la base de leur argumentation reposait sur une estimation du plus grand défaut dans une structure diluée de façon aléatoire. Or nous savons par une preuve de Kunz et Souillard [25] que la probabilité pour qu'un site appartienne à un amas fini de taille supérieure à n, varie exponentiellement avec n pour n grand lorsque p est différent du seuil de percolation. Pour une configuration de défaut donnée, il est alors possible d'encadrer sa probabilité de présence par deux lois exponentielles en utilisant ce dernier résultat. Maintenant, nous pouvons appliquer le résultat établi ci-dessus pour un milieu de taille L, en le décomposant en volume élémentaire représentatif, i.e. qui est déjà large devant la taille maximale des défauts.

Nous obtenons alors la première forme de loi, exponentielle d'exponentielle pour la distribution de défauts de taille n. En substituant la valeur du courant critique, nous pouvons écrire que la probabilité pour que le réseau résiste à un courant I varie comme P(I,L):

$$P(I,L) = \exp\{-A\, L^d \exp(-B\, (I/L)^{-1/\alpha})\} \qquad (5.2.30)$$

Une loi de Weibull serait naturellement intervenue dans cette expression si la distribution de défaut avait eu une décroissance en loi de puissance pour grandes tailles. Un calcul très voisin peut être effectué en percolation, et il conduit à la même conclusion [28]. Dans cette même référence, Sornette a également montré que dans le cas de la percolation continue, la loi devenait du second type (Weibull).

Les prédictions de Duxbury et coll. sont étayées de simulations numériques qui montrent clairement que la loi exponentielle d'exponentielle permet un meilleur ajustement des données de simulations numériques qu'une loi de Weibull. Ceci est d'autant plus important que la différence se fait sentir de façon plus sensible pour les grandes tailles, et donc généralement le domaine des extrapolations entre expériences de laboratoire et réalisation d'ouvrages d'art, ou de pièces grandeur réelle.

En conclusion de cette partie sur le désordre de dilution sur réseau Euclidien, disons qu'il est possible d'obtenir des prédictions théoriques comparables aux données de simulations numériques moyennant des hypothèses simplificatrices extrèmement sévères. Nous aurons l'occasion de revenir sur le fait que d'autres prédictions peuvent cependant rendre compte de ces données de façon aussi acceptable. Enfin, ces comportements moyens peuvent se traduire en termes de lois de distribution de contrainte à la rupture, qui sous des hypothèses assez faibles donnent des distributions exponentielles d'exponentielle qui semblent bien vérifiées par simulations numériques. Soulignons que cette dernière conclusion n'est pas asservie à la validité du premier résultat.

- Dilution sur le réseau hiérarchique

Comme dans le chapitre précédent, nous allons considérer la géométrie modèle du réseau hiérarchique diamant pour tester les prédictions précédentes de Duxbury et coll. Cette géométrie modèle se prête à des calculs analytiques et à des simulations numériques sur des réseaux de grande taille. De plus, le réseau hiérarchique, comme nous l'avons vu pour les structures minimales, capture (qualitativement si ce n'est quantitativement) les grands traits des géométries Euclidiennes.

La structure que nous allons étudier ici est le réseau hiérarchique "diamant", dont la (n+1)ième génération est composée d'un "losange" de quatre réseaux de la génération n, (deux à deux les réseaux sont disposés en série puis l'ensemble en parallèle). Nous reproduisons à des fins de clarté la figure 5.7 montrant ce réseau à la deuxième génération, réseau que nous avions déjà introduit au chapitre précédent.

Nous pouvons sur ce réseau disposer une proportion p de fusibles identiques, et étudier la rupture de l'ensemble. Le seuil de percolation de ce réseau a été calculé au chapitre précédent: $p_c = (\sqrt{5} -1)/2 \approx 0.618$. Nous considérons donc une fraction présente de liens supérieure à ce seuil.

En ce qui concerne le courant maximum dans le réseau pour un courant total unité, nous allons procéder en deux temps: Nous montrerons d'abord que l'argument de Duxbury peut être adapté à la géométrie du réseau hiérarchique, puis nous donnerons d'abord un argument rapide pour évaluer la distribution, avant de discuter le bien-fondé des approximations effectuées.

Pour que l'étude de ce système modèle ait une quelconque vertu, il faut dans un premier temps voir comment les arguments exposés précédemment s'adaptent (ou ne s'adaptent pas) au réseau hiérarchique. Nous avons vu que l'estimation de Duxbury reposait sur deux notions: d'une part la distribution de courant au voisinage d'un défaut de géométrie simple imposée, puis l'estimation de la probabilité de présence de ce défaut. En ce qui concerne la forme du défaut, nous considérerons une simple ligne de 2^k-1 liens

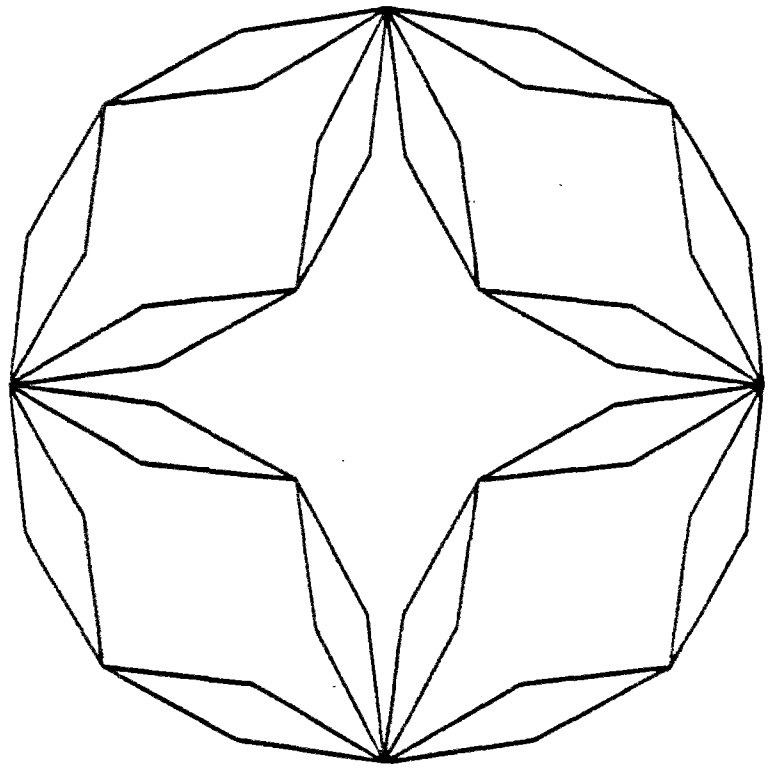


Figure 5.7 : Réseau hiérarchique diamant à la seconde génération. D'une génération à la suivante, chaque lien est remplacé par quatre liens disposés en losange. Ce modèle permet d'obtenir simplement des informations sur des systèmes de tailles conséquentes, et avec de bonnes statistiques, tout en gardant la plupart des comportements qualitatifs des réseaux euclidiens bidimensionnels.

manquant en parallèle dans un sous-réseau à la génération k, dans un réseau à la génération n > k. Un calcul simple mais un peu long conduit au résultat suivant : le courant maximum supporté par un lien est de la forme $j \propto A^{(n-k)}$ où A varie entre 3/2 et 2 selon que n>>k ou n-k<<n. Le cas limite A = 2 peut être obtenu simplement en appliquant une règle de partage approximative: à chaque génération, lorsque les deux branches en parallèle conduisent, alors le courant est également réparti (indépendamement de la conductance des branches), et si une seule branche conduit, alors l'ensemble du courant y passe. Les permutations de liens cassés dans le sous réseau à la génération k sont de l'ordre de 2^k, et le choix de ce sous-réseau particulier peut se faire de 4^{n-k} façons. Ainsi le nombre de configurations portant un tel courant est $4^n 2^{-k}$. Si nous appelons p la probabilité de présence d'un lien, l'application de l'argument de Duxbury conduit à l'estimation de k:

$$2^k \propto \frac{n \log(4)}{\log(1/(1-p))} \qquad (5.2.31)$$

Soit en termes de longueur de défaut $\ell = 2^k$, et de réseau $L = 2^n$, $\ell \propto \log(L)$, conclusion semblable à celle obtenue sur réseau Euclidien. Nous pouvons alors conclure en calculant le plus grand courant dans le réseau suivant le calcul de Duxbury:

$$j_{max} \propto \left(\frac{2\log(L)}{\log(1/(1-p))}\right)^{\log(A)/\log(2)} \qquad (5.2.32)$$

Nous allons voir maintenant que cette conclusion, identique à celle trouvée sur réseau Euclidien, est fausse.

Par commodité, introduisons $\varepsilon_0 = 1-p$, la probabilité d'avoir un lien absent, à la génération zéro. A la première génération, cette probabilité sera de l'ordre de $\varepsilon_1 = 4\,\varepsilon_0^2$ lorsque ε est petit devant l'unité. Notons ε_n cette probabilité à la nième génération. Un calcul rapide donne

$$\varepsilon_n = (1/4)\ (4\ \varepsilon_0)^{2^n} \qquad (5.2.33)$$

ε tend donc vers zéro comme l'exponentielle de la taille du système.

Caractérisons un réseau par deux nombres: sa conductance g, et la densité de courant maximum qu'il porte, j. Normalisons j à la densité de courant que l'on obtiendrait pour p=1 (j est donc égal au courant maximum parcourant un lien pour un courant total imposé égal à la taille du système). Partons de deux réseaux caractérisés par (g_1, j_1) et (g_2, j_2). Lorsque ces deux réseaux sont assemblés en série, la conductance totale est $G= g_1g_2/(g_1+g_2)$, et la densité de courant maximum est $J= \max(j_1, j_2)$. Si ces deux réseaux sont en parallèle, alors $G = g_1+g_2$, et $J= (2/G)\max(g_1j_1, g_2j_2)$. Ces formules sont utiles pour une simulation directe de l'évolution de j avec la taille du système. Cependant pour un calcul direct, on préfèrera une description plus grossière: Lorsque l'on assemble quatre réseaux pour passer d'une génération (n-1) à la suivante n, deux cas peuvent se présenter : soit les quatre réseaux conduisent, auquel cas la concentration de courant sera de l'ordre de la concentration à la génération précédente, soit l'un des quatre réseaux ne conduit pas le courant et alors la concentration de courant sera doublée d'une génération à l'autre. Les évènements correspondant à la présence de plusieurs réseaux isolants sont très rapidement de probabilité négligeable. Avec ce schéma simpliste, il est facile de calculer la probabilité P_m de trouver une concentration de courant $j=2^m$ dans un réseau à la génération n>m. P_m sera dominé par la probabilité pour que les m premières générations soient celles où j est doublé. Ainsi

$$\begin{aligned} P_m &\propto \prod_{k=1}^{m-1} \varepsilon_k \qquad (5.2.34) \\ &\propto A\ \varepsilon_m \end{aligned}$$

où A est une loi de puissance de j. La probabilité de trouver une concentration de courant j est donc un loi exponentielle de j. Notons que l'expression précédente de P_m est indépendante de la génération du réseau pourvu que n soit plus grand que m. Plus

précisément, nous avons remplacé toutes les possibilités d'obtenir une concentration de courant par la configuration la plus probable. En fait, toutes les autres configurations peuvent être resommées comme des séries géométriques qui n'interviennent que dans le préfacteur de l'exponentielle (loi de puissance en j). Ainsi, si l'on se limite à la génération n, la loi exponentielle sera tronquée typiquement pour des valeurs de j correspondant à 2^n. Ainsi pour des systèmes de faible taille, nous nous attendons à trouver un premier régime où la valeur moyenne de la concentration de courant sera gouvernée par cette coupure supérieure, cependant lorsque la taille du système augmente, nous devons tendre vers le régime asymptotique où les moments de j ne sont plus sensibles à la coupure supérieure de la distribution.

Dans la description grossière que nous avons faite du passage d'une génération à l'autre, nous avons obtenu que la concentration de courant locale dans un réseau hiérarchique dilué était finie et ne divergeait logarithmiquement avec la taille du système, selon la loi suggérée par Duxbury, que pour des systèmes de petite taille. Il est possible d'affiner l'argument, mais sans en changer les conclusions. Le point le plus criticable dans la démarche précédente est de considérer que lorsque les quatre réseaux sont conducteurs, alors la concentration de courant reste fixe. Pour préciser ce point, il faut d'abord discuter de la distribution des conductances. Soit $F_n(g)$ cette distribution à la nième génération. Elle tend vers une distribution de Dirac centrée sur g_∞ lorsque n tend vers l'infini, lorsque p est supérieur à p_c. Notons donc $g_\infty(1+\alpha)$ la conductance d'un réseau, où α représente la partie fluctuante de la conductance. Lorsque $\alpha << 1$, il est facile de voir que lorsque l'on passe d'une génération à la suivante, la nouvelle valeur de α est la valeur moyenne des quatre α des réseaux constitutifs (au premier ordre en α). Ainsi, la distribution de α va tendre vers une loi gaussienne d'écart-type proportionnel à $1/\sqrt{4^n} = 1/L$ où L est la taille du système.

Ayant établi ce résultat, nous pouvons revenir sur la question des concentrations de courant. Plaçons-nous dans la situation où ε_n est voisin de zéro, et où l'écart-type de la distribution des conductances est faible. Suivant les formules que nous

indiquions au début de ce paragraphe, nous pouvons écrire la concentration j à la génération n+1, en fonction d'une __ disons j_1 __ des quatre concentrations des sous-réseaux constitutifs sous la forme $j = 2j_1g_1/(g_1+g_2)$. Nous pouvons maintenant calculer un majorant du facteur multiplicatif $2g_1/(g_1+g_2)$ à partir de l'écart-type de la distribution gaussienne des conductances. Ce majorant sera de la forme $(1+ 2^{-n}K)$ où K est une constante. Itérant le produit de ces facteurs multiplicatifs de la génération n à l'infini, nous obtenons comme "gain" maximum M

$$M = \prod_{k=n}^{\infty}(1+ 2^{-k}K) < \exp(2K\, 2^{-n}) \qquad (5.2.35)$$

soit un facteur fini. Ainsi, l'estimation grossière de la constance de j au-delà d'un nombre fini d'étapes pour l'estimation de P_m est valide.

Nous allons maintenant donner les résultats de quelques simulations numériques effectuées sur le réseau hiérarchique. Nous allons ainsi pouvoir tester directement les courants les plus forts dans un réseau dilué, puis nous intéresser au processus de rupture global du réseau et non plus du premier lien.

La figure 5.8 montre le logarithme de la valeur moyenne du courant maximum, log(j), en fonction du logarithme du logarithme de la génération du réseau, log(n) = log{log(L)/log(2)}. Nous voyons que dans un premier temps, log(j) est proportionnel à log(n) (cf.la droite de pente 1 montrée sur le graphe), avant de saturer à une valeur constante. Ceci montre que le régime prévu par l'argument de Duxbury n'est valable que pour un régime transitoire correspondant aux faibles tailles. La dilution choisie ici est p = 0.8. La saturation n'est perceptible que pour des réseaux à la génération 10, soit une taille de $10^3 \times 10^3$. Si nous comparons ceci aux simulations numériques sur réseaux Euclidiens, nous voyons qu'il est difficile de démontrer par simulations numériques directes un régime qui n'est atteint que pour des tailles supérieures à 1000. Pour le réseau hiérarchique, nous pouvons atteindre des générations de 20 soit des tailles de réseaux équivalents de l'ordre de 10^6!

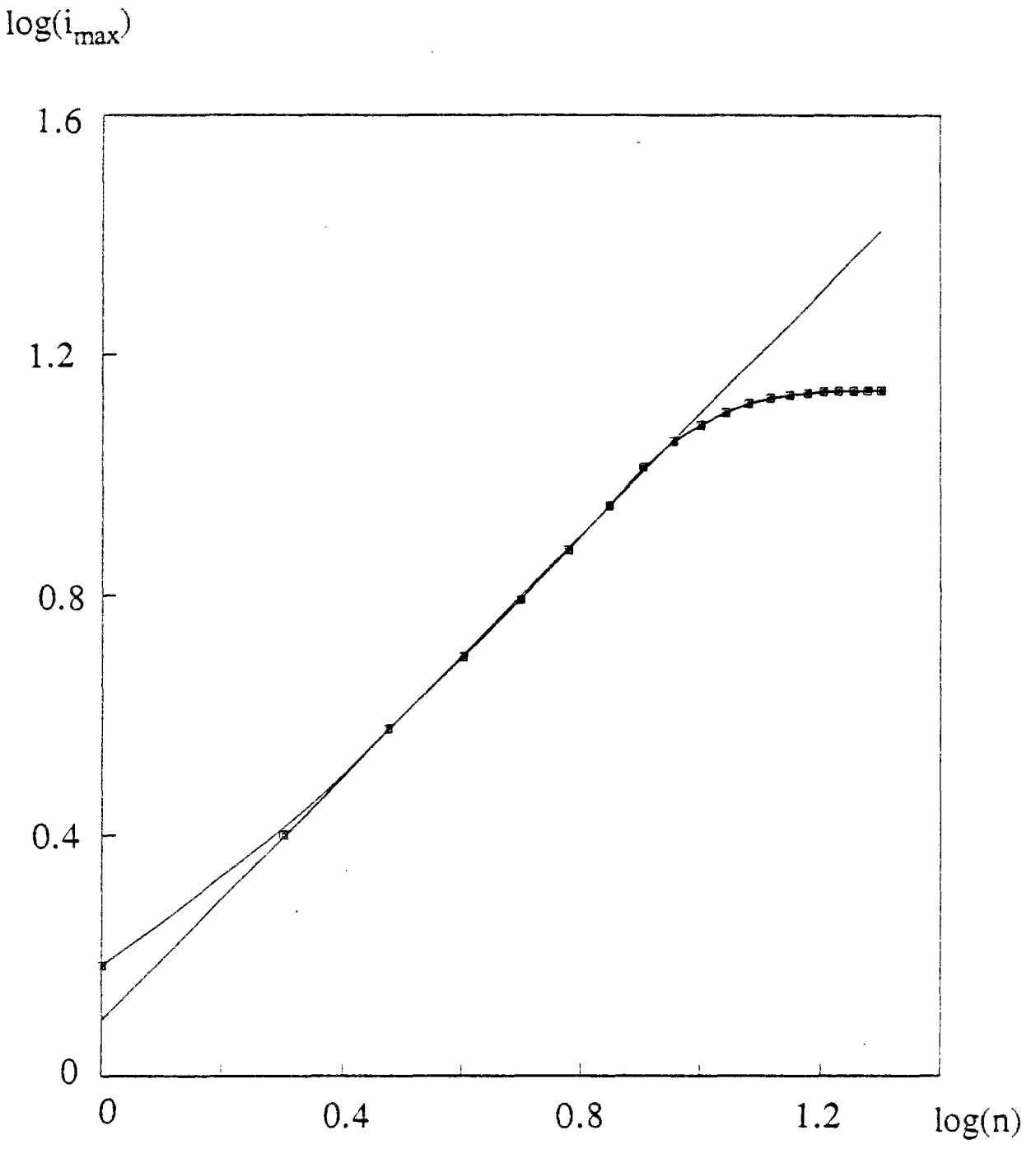


Figure 5.8 : Courant maximum circulant dans le réseau hiérarchique pour une dilution de p=0.8 en fonction du logarithme de la génération, log(n) = log(log(L)/log(2)). La pente de la droite montrée sur la figure est 1. Nous observons donc un changement de régime pour une taille équivalente de L = 1000, où la distribution sature à une valeur finie.

En ce qui concerne la rupture globale du réseau, nous sommes sensiblement plus limités en taille: Nous nous sommes restreints pour l'instant à des générations maximum de l'ordre de 8, soit des tailles équivalentes de 256. Les calculs que nous présentons dans la suite sont en tout état de cause préliminaires. Ils ont été effectués sur un micro-ordinateur et doivent prochainement être utilisés sur des calculateurs plus puissants sur lesquels des générations de l'ordre de 14 (taille de 16000) semblent à portée de main.

Même sur d'aussi faibles tailles, nous pouvons observer des effets intéressants qui contrastent sans nul doute avec les prédictions faites sur réseaux Euclidiens.

Nous distinguerons deux points particuliers sur la caractéristique potentiel-courant. D'une part le point de rupture non contrôlée en courant (dont les propriétés sont repérées par un indice b), d'autre part le point de rupture final (indice f). Les courbes 5.9, 5.10 et 5.11 présentent respectivement le nombre de liens cassés, N_b, et N_f, la densité de courant, I_b/L, et I_f/L, et le potentiel, V_b/L, et V_f/L, pour les deux points cités précédemment en fonction de la génération des réseaux considérés. Nous observons que le nombre de liens cassés qui correspond à la rupture du réseau croît très vite avec la génération. Ainsi une seconde hypothèse fondamentale du calcul précédent sur réseaux Euclidiens qui consistait à assimiler la rupture du premier lien à celle de l'ensemble du réseau est certainement fausse sur réseau hiérarchique. Sur la figure 5.9, les pentes tangentes des courbes N_b et N_f en fonction de n pour les dernières tailles étudiées sont respectivement de 1.70 et 1.01. Comme N_b est inférieur à N_f, par principe, il va de soi que ces exposants ne sont pas à leurs valeurs asymptotiques. De plus, compte-tenu de la courbure très marquée des deux tracés, il n'est pas déraisonnable de s'attendre à ce que ces deux pentes puissent augmenter, pour atteindre la valeur 2. Ceci correspondrait à la rupture d'une proportion finie de liens. Clairement cette question mérite une étude numérique sur des systèmes de taille supérieure.

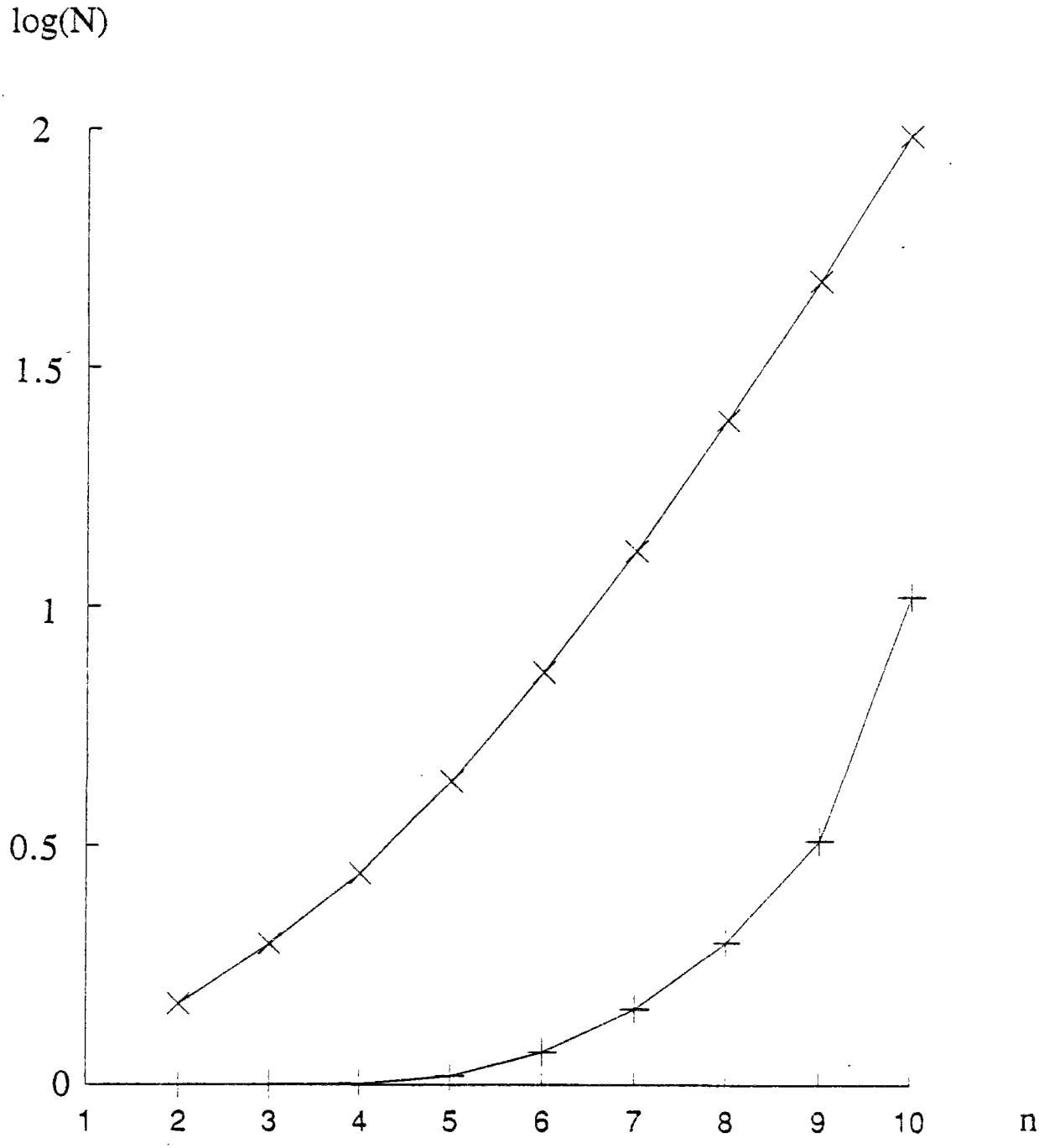


Figure 5.9 : Nombre moyen de liens cassés en fonction de la génération du réseau hiérarchique, pour deux points particuliers de la caractéristique. D'une part le point de rupture non contrôlée en intensité, (symboles +) et d'autre part le point de rupture finale, (symboles ×). Nous voyons que la première courbe augmente rapidemment, en contradiction avec l'hypothèse de Duxbury et al. La dilution est de $p = 0.8$.

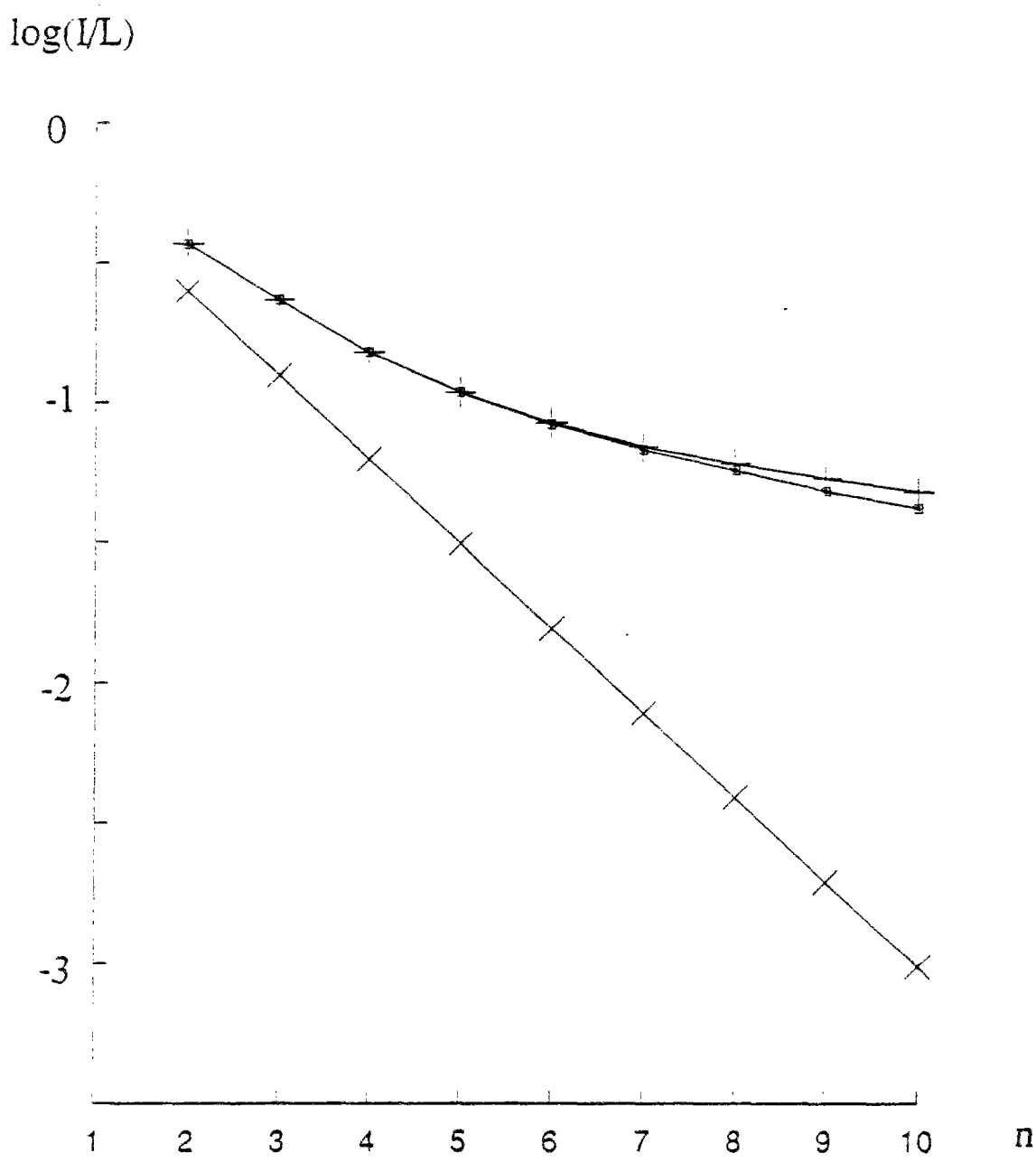


Figure 5.10 : Logarithme de la densité de courant en fonction de la génération du réseau hiérarchique pour le point de rupture initiale, (symboles ⊐), le point de rupture non contrôlée en intensité, (symboles +) et le point de rupture finale, (symboles ×). La dilution est p = 0.8.

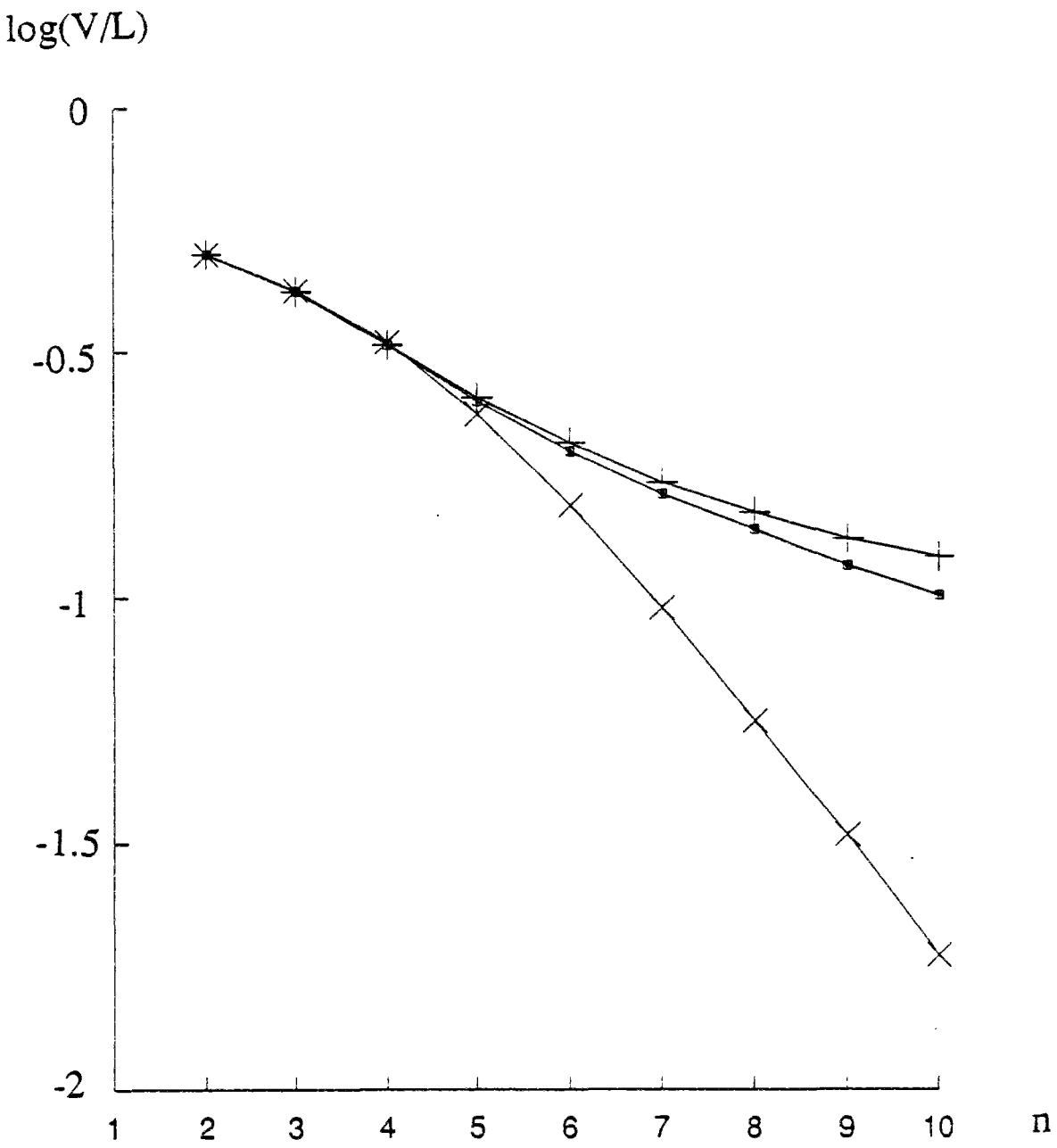


Figure 5.11 : Logarithme de la tension en fonction de la génération du réseau hiérarchique pour le point de rupture initiale, (symboles ❑), le point de rupture non contrôlée en intensité, (symboles +) et le point de rupture finale, (symboles ×). La dilution est p = 0.8. Le croisement des deux courbes indique une transition d'une rupture de type I vers une rupture de type II (voir figure 5.2).

La figure 5.10 montre l'évolution des densités de courant. Nous avons reporté, sur la figure 5.12, L/I en fonction de log(log(L)) qui devrait donner une droite si la prédiction de Duxbury était correcte. Bien que les systèmes soient de taille modeste, il est clair que ce tracé n'est pas satisfaisant, même pour la rupture du premier lien. Nous proposons sur la figure 5.13, l'évolution de I/L en fonction de l'inverse de la taille à la puissance η, $1/L^{\eta}$. Pour le point de rupture non contrôlée en intensité, ce tracé semble révéler un accord tout à fait raisonnable avec une loi affine:

$$I/L = A + B/L^{\eta} \qquad (5.2.36)$$

qui suggère l'existence d'une densité de courant critique, A, finie pour des systèmes de taille infinie. Numériquement, le meilleur ajustement est obtenu pour $\eta = 0.62$ et $A = 0.041$ pour une dilution initiale de $p = 0.8$.

Finalement, la courbe 5.11 montre la tension V/L en fonction de la génération du système. Comme pour les densités de courant, les valeurs des tensions chutent avec la génération. Nous pouvons chercher comme précédemment le comportement asymptotique. La correction qui s'accorde le mieux avec les données (voir la figure 5.14) est une loi du type

$$V/L = A' + B'/L^{\eta'} \qquad (5.2.37)$$

avec $\eta' = 0.53$, soit une valeur légèrement inférieure à celle obtenue pour les courants (0.62). Le seuil vaut alors A'=0.095. Ici encore, il est nécessaire d'étudier de plus grands systèmes pour confirmer ou infirmer de tels comportements.

En conclusion, l'étude du réseau hiérarchique diamant a montré deux faiblesses dans l'argumentation précédente de Duxbury et coll. : d'une part, le calcul du plus grand courant en fonction de la taille du système montre que celui-ci sature après une première phase transitoire, d'autre part, la rupture totale du réseau nécessite un nombre de

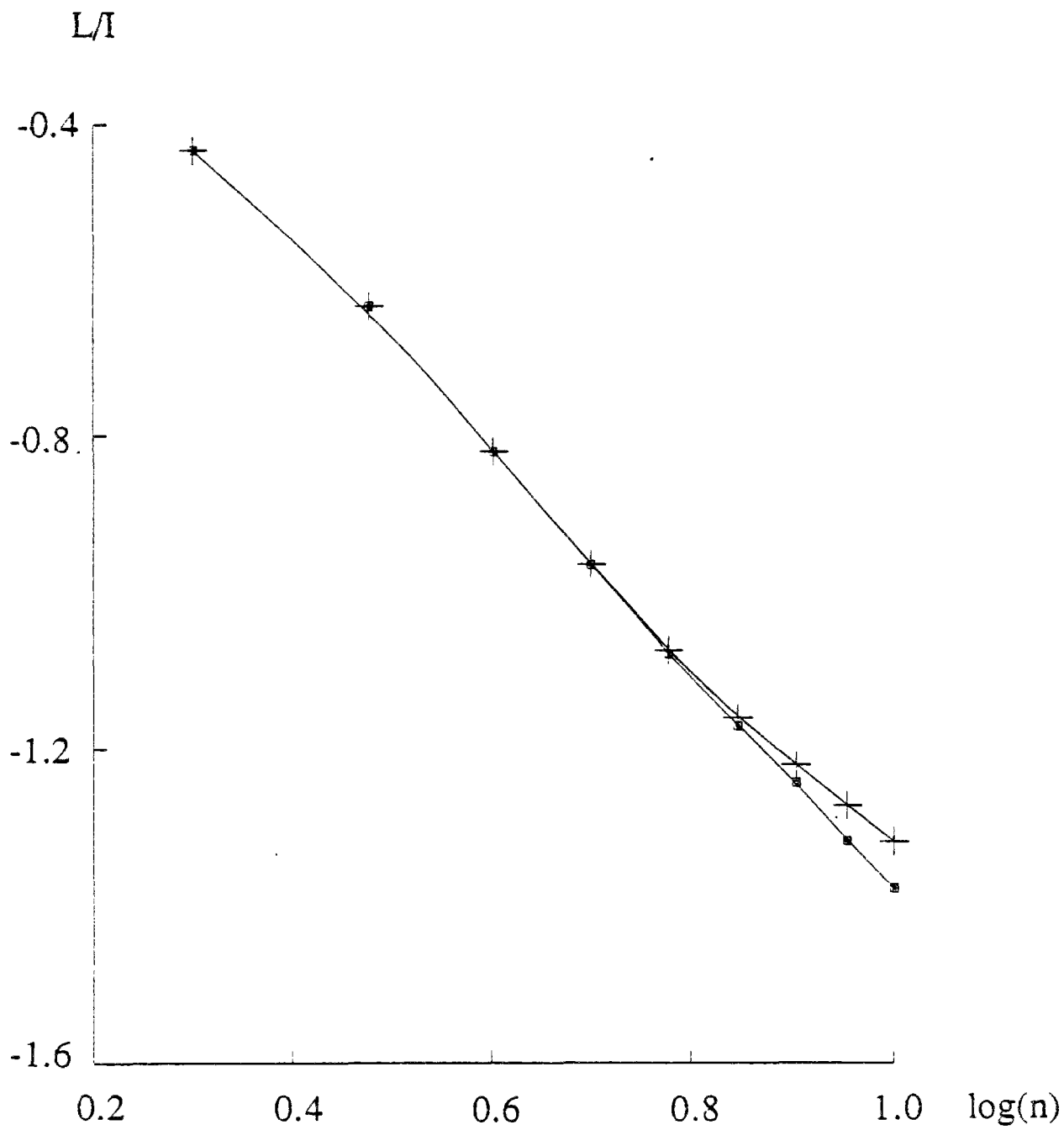


Figure 5.12 : Inverse de la densité de courant , L/I, en fonction du logarithme de la génération log(n)= log(log(L)/log(2)), pour le premier lien cassé (symboles ⊐), et le point de rupture non contrôlée en intensité (symboles +). Ces courbes devraient être des droites suivant les prédictions de Duxbury et al.

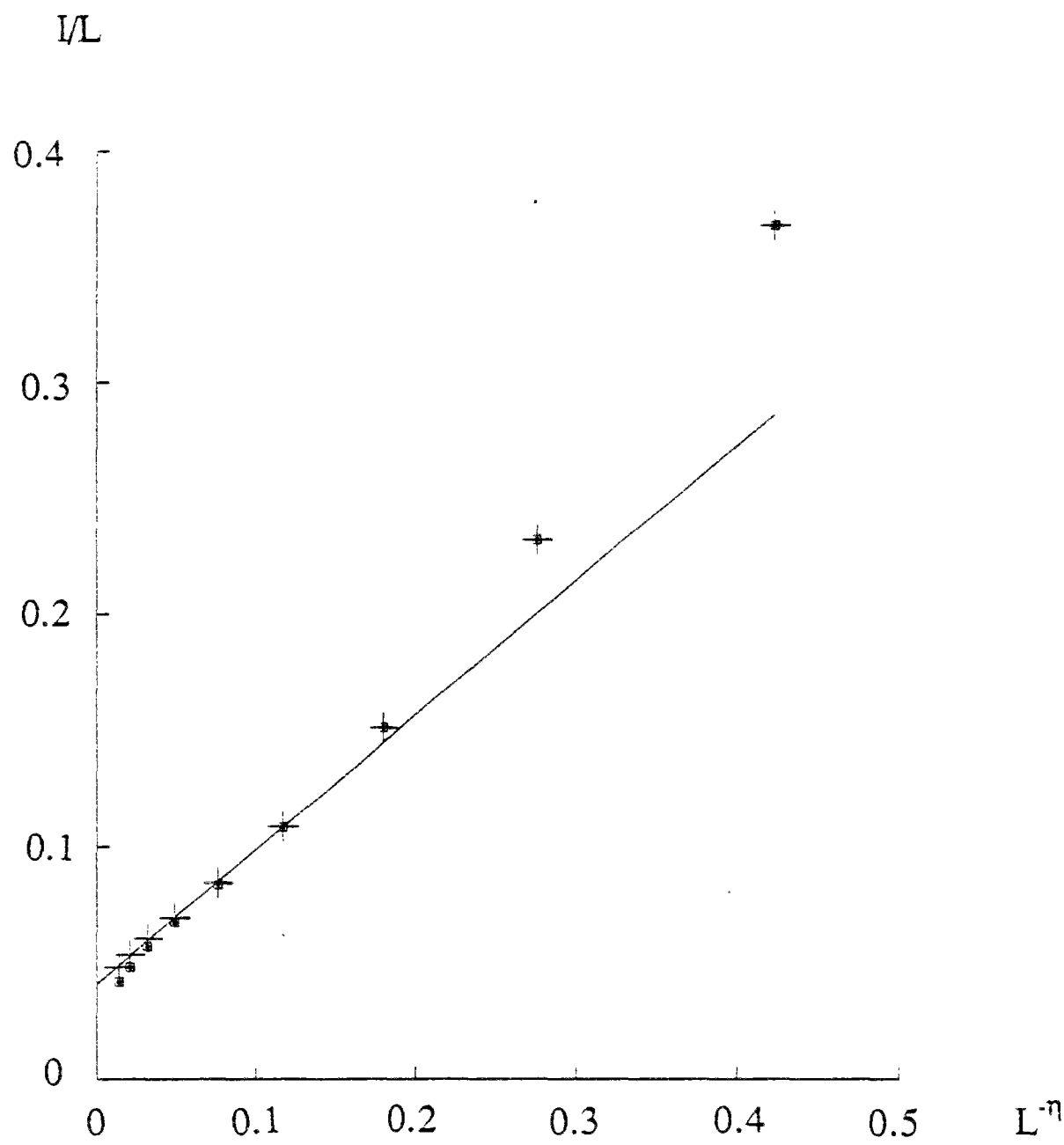


Figure 5.13 : Densité de courant , I/L, en fonction de l'inverse de la taille du système à la puissance $\eta = 0.62$, $1/L^{\eta}$, pour le point de rupture non contrôlée en intensité (symboles +), et le point de rupture initial (symboles □).

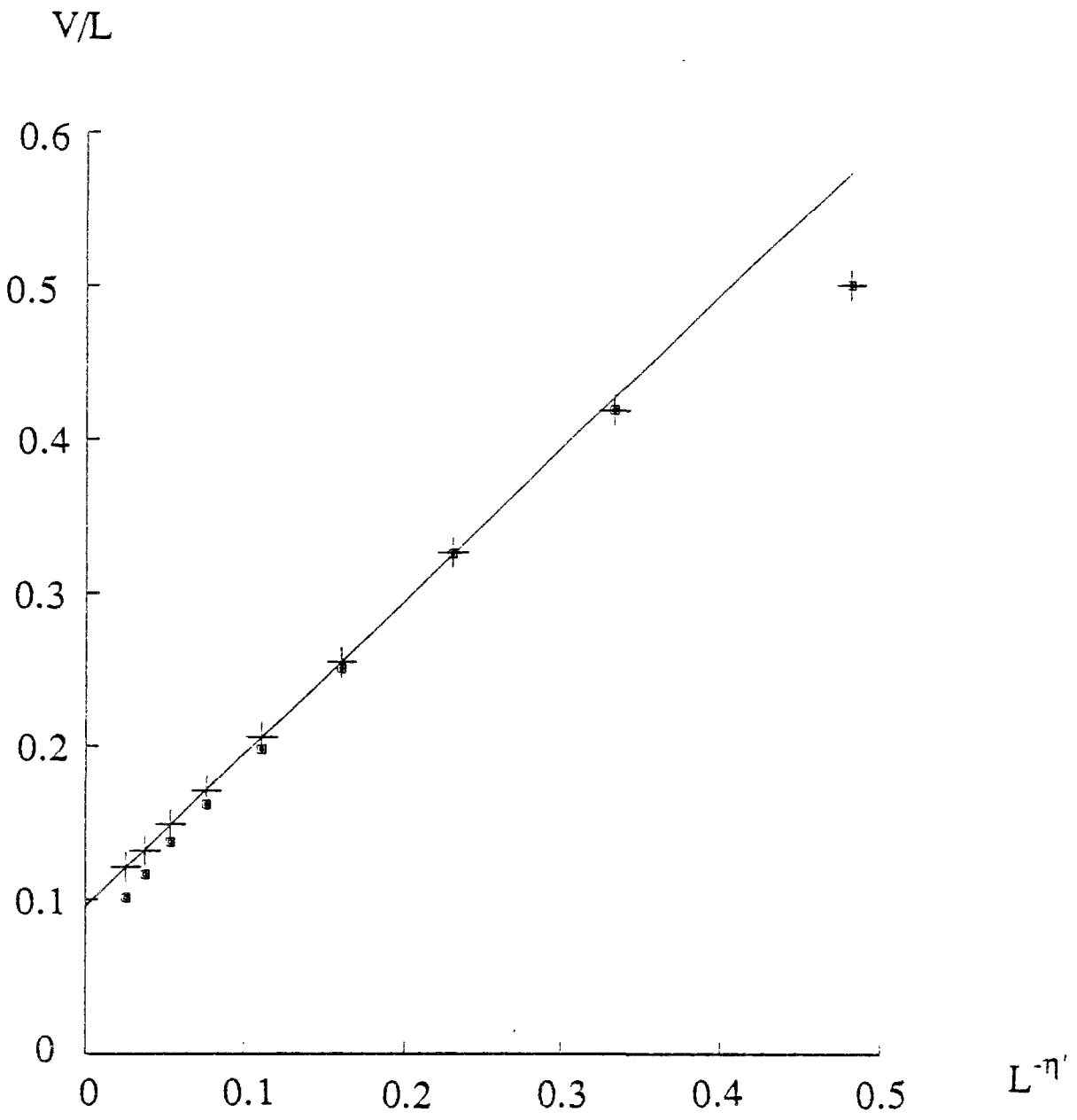


Figure 5.14 : Tension par unité de longueur, V/L, en fonction de l'inverse de la taille du système à la puissance $\eta' = 0.53$, pour le point de rupture non contrôlée en intensité (symboles +), et le point de rupture initiale (symboles ❑).

liens croissant très rapidement avec la taille du système. Ces deux résultats jettent donc un doute sérieux sur les résultats précédents, mais révèlent en même temps que l'étude de ces problèmes par voie simplement numérique nécessite des tailles de système tout à fait importantes pour s'affranchir des régimes transitoires. Typiquement, des tailles de systèmes supérieures à 1000 semblent indispensables. Nous abandonnons là la rupture des milieux dilués pour aborder d'autres formes de désordre.

5.2.2 Distribution des coefficients de transport

Le cas précédent de la dilution peut être vu comme un cas extrême de distribution de coefficient de transport où la conductance des liens est par exemple soit unité avec une probabilité p, soit nulle avec une probabilité complémentaire.

Le choix se présente ensuite sur le critère de rupture à adopter. En effet, les variations de conductivité locale rendent différents les critères qui étaient tous équivalents dans le cas précédent. Les choix les plus simples consistent à ne pas introduire de désordre supplémentaire, et donc à imposer soit

- une tension critique unique, v_c, mais alors le courant critique sera distribué puisque $i_c = g\ v_c$.
- un courant critique unique, i_c, mais la tension sera distribuée
- une dissipation critique unique, e_c, mais alors la tension et le courant seront distribués, puisque $i_c = \sqrt{g e_c}$ et $v_c = \sqrt{e_c / g}$

La seule étude que nous connaissions sur ce sujet a été conduite par Takayasu [52, 53]. Nous la citons donc, bien qu'elle ne soit pas comparable aux efforts déployés dans d'autres types de désordre.

Le réseau est constitué de fusibles duaux de résistance initiale $R_i = 1+x$ où x est un nombre aléatoire uniformément distribué entre 0 et 1. Les potentiels de rupture sont tous égaux à une valeur unité. Une tension est appliquée au réseau de façon à ce qu'au moins un fusible devienne supra-conducteur. Puis sans modifier la tension

extérieure appliquée, la distribution des potentiels est recalculée et tous les fusibles soumis à une tension qui excède leur seuil de rupture deviennent supra-conducteurs. La procédure est répétée jusqu'à l'obtention d'un amas supra-conducteur qui traverse le réseau. La dimension fractale de l'amas obtenu est estimée à 1.58 ± 0.12 sur des réseaux de taille jusqu'à 32×32. La rupture simultannée de plusieurs liens est un choix curieux qui ne semble fondé sur aucune interprétation physique particulière. Il faudrait imaginer des temps de relaxation des potentiels dans le réseau très longs devant celui de la rupture des liens. Les interactions entre défauts sont alors très largement négligées car peu de redistributions ont lieu.

5.2.3 Distribution des seuils de rupture

Comme ci-dessus, avant d'aborder le problème délicat du comportement de milieux fragiles désordonnés dans une géométrie Euclidienne régulière, nous allons étudier le problème plus simple d'une géométrie modèle, le réseau hiérarchique, qui comme nous l'avons vu au chapitre précédent, donne une bonne idée du comportement sur réseaux Euclidiens. Nous allons d'abord étudier un modèle très simple de redistribution des efforts au sein de la structure, pour lequel des résultats peuvent être obtenus analytiquement, puis nous considèrerons le cas de la redistribution réaliste des efforts, mais alors par voie simplement numérique.

- Réseau hiérarchique avec redistribution des efforts hiérarchique

Avant d'aborder le problème du réseau hiérarchique, nous allons rappeler quelques résultats obtenus sur une structure voisine, unidimensionnelle. Le problème avait été initialement étudié par Smalley et coll. [54] et Turcotte et coll. [55], dans un contexte de techtonique, bien que le modèle soit directement issu de modèles de composites à fibres alignées étudiés par Harlow et Phœnix [56].

La géométrie du modèle est rappelée dans la figure 5.15. Imaginons des fibres parallèles regroupées par paires formant des "macro-fibres" de génération deux. Ces paires sont elles-mêmes rassemblées deux à deux, et ainsi de suite, à toutes générations. Cette structure hiérarchique que l'on peut représenter schématiquement par un arbre dessiné sur la figure 5.15 définit de plus la façon dont une force imposée sur l'ensemble de la structure se répartie sur chaque fibre. Une macro-fibre à une génération quelconque ne peut être que dans deux états: rompue ou résistante. Elle est dite résistante si elle contient au moins une fibre élémentaire intacte. Soit une macro fibre résistante soumise à une force F. Si elle constituée de deux fibres résistantes, chacune sera soumise à une force F/2, alors que si l'une de ces fibres est rompue, l'autre supportera l'intégralité

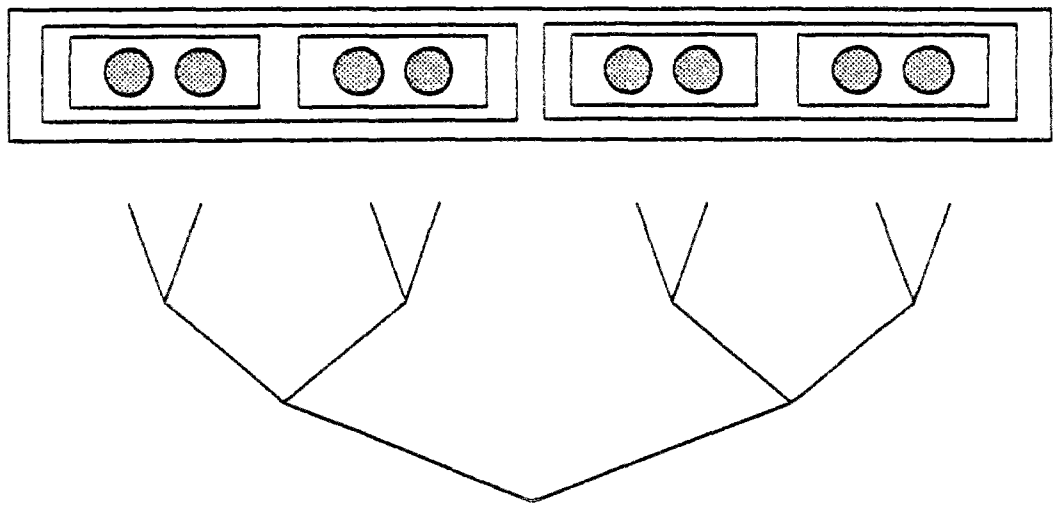


Figure 5.15 : Modèle hiérarchique unidimensionnel de Smalley et coll. [54, 55]. Il représente un composite à fibres composé d'éléments regroupés hiérarchiquement en paires. Les paires sont ensuite regroupées deux à deux, ceci à toutes les générations. Dans ce modèle simple, la structure hiérarchique géométrique en arbre schématisée en bas sert à distribuer les contraintes locales.

de l'effort F. Ce partage, quand il a lieu, est toujours égalitaire, et n'est pas fonction par exemple du module élastique de chaque groupe de fibres. Cette règle est en fait assez voisine de l'approximation utilisée précédemment dans le cas de la dilution sur réseau hiérarchique, comme nous aurons l'occasion d'y revenir.

Chaque fibre élémentaire est caractérisée par une force de rupture, f_c. Ces seuils sont distribués aléatoirement selon une loi de distribution cumulée $P_0(f_c)$. Nous cherchons alors la loi de distribution de la résistance de l'ensemble du système à la génération n, $P_n(\sigma)$ où nous avons appelé σ la contrainte (ou la densité de courant pour le cas des fusibles) $\sigma = 2^{-n} F$.

De par les règles de partage énoncées ci-dessus, il est aisé d'écrire la relation de récurrence liant $P_{n+1}(\sigma)$ à $P_n(\sigma)$:

$$P_{n+1}(\sigma) = P_n(\sigma)^2 + 2 P_n(2\sigma) (1-P_n(\sigma)) \qquad (5.2.38)$$

En effet, pour que la structure à la génération n+1 résiste à une contrainte σ il faut que soit les deux macro-fibres à la génération n résistent à la même contrainte (premier terme du membre de droite), soit que l'une casse et que l'autre résiste à une contrainte double (second terme). Smalley et coll. [54] et Turcotte et coll. [55] ont étudié cette relation de récurrence dans un sous-espace de fonctions: les distributions de Weibull. Ces lois ne sont pas stables vis à vis de la transformation (5.2.38), et donc à chaque itération ces auteurs ont projeté la distribution obtenue dans l'espace des distributions de Weibull. Ceci donne à la solution qu'ils ont obtenue un caractère approximatif. En fait, une solution analytique très générale de ce problème a été proposée très récemment par Gabrielov et Newman [57], solution étayée de simulations numériques par Newman et Gabrielov [58] qui confirment leurs conclusions. Nous ne mentionnerons donc que cette solution sous les hypothèses suivantes sur la distribution de départ:

• $P_0(0) = 1$ et $P_0(\sigma)$ tend vers zéro lorsque σ tend vers l'infini : Il n'y a pas de fibres infiniment résistantes.

• $P_0(\sigma)$ est inférieure à 1 pour tout σ positif non nul: Il existe des fibres de seuil de rupture arbitrairement faible.

• $P_0(\sigma)$ tend vers 0 plus rapidement que $1/\sigma$ lorsque σ tend vers l'infini. Rien n'impose *a priori* une telle condition, si ce ne sont les exigences de la convergence vers un point fixe précis.

Sous ces conditions, Gabrielov et Newman ont pu démontrer que la largeur de la distribution $dP_n(\sigma)/d\sigma$ tendait vers zéro, i.e. la distribution des contraintes seuils se concentre sur une valeur précise lorsque n tend vers l'infini. De plus, définissons la contrainte, σ_n, à laquelle $P_n(\sigma_n) = K$, où K est une constante quelconque strictement entre 0 et 1. σ_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Plus précisément,

$$\sigma_n \propto 1/\log(n) \qquad (5.2.39)$$

soit encore $\sigma_n \propto 1/\log(\log(L))$. Cette décroissance est extrèmement lente, et dans beaucoup de situations pratiques (voire toutes !), il est difficile de distinguer une telle décroissance d'une valeur constante.

Notons également que les hypothèses énoncées ci-dessus sont véritablement nécessaires à l'obtention de ce résultat. En effet, si $P_0(\sigma)$ est identiquement égal à l'unité pour une valeur de $\sigma=\sigma_{min}$ non nulle, alors à toutes générations $P_n(\sigma_{min})=1$. Sous réserve que $P_0(\sigma)$ tende vers zéro plus rapidement que $1/\sigma$, alors la distribution va tendre vers une fonction échelon, avec une valeur seuil qui sera la plus grande contrainte σ pour laquelle $P_0(\sigma) = 1$. Enfin remarquons que $P(\sigma) = A/\sigma$ pour $\sigma \geq A$ et $P(\sigma) = 1$ pour $\sigma \leq A$ est une distribution invariante dans la transformation (5.2.38), et donc une décroissance plus rapide que $1/\sigma$ est nécessaire pour converger vers la fonction échelon. Lorsque la décroissance est plus lente que $1/\sigma$, alors, il est facile de montrer que $P_n(\sigma)$ est une fonction croissante de n. L'identification du (ou des) point(s) fixe(s) correspondant à cette situation reste à faire.

Revenons maintenant sur le cas du réseau hiérarchique "diamant", rappelé ci-dessus sur la figure 5.7. Nous voyons que la différence essentielle avec la structure étudiée ci-dessus est la mise en série de deux macro-fibres à chaque génération. Partant, il est tentant de généraliser le modèle précédent au réseau diamant. Sornette [59] a étudié un tel modèle. Ici encore la répartition des efforts dans la structure se fait par une règle de partage simple, distinguant simplement entre deux états : rompu ou non. Sous ces hypothèses, il est aisé de reconstruire la relation de récurrence:

$$P_{n+1}(\sigma) = P_n(\sigma)^4 + 2\, P_n(2\sigma)^2\, (1-P_n(\sigma)^2) \qquad (5.2.40)$$

Nous sommes alors confrontés à un problème d'itération de fonctions et à la recherche d'un point fixe dans l'espace des distributions comme précédemment. Suivant Sornette [59], nous pouvons remarquer que si il est légitime de négliger le second terme de l'équation 5.2.40, alors les lois de Weibull sont stables. En effet, posons $P_n(\sigma) = \exp(-(\sigma/\lambda)^m)$. Si l'on néglige la seconde contribution de (5.2.40) devant la première, (pour $m>>1$ et $\sigma>>\lambda$), alors

$$P_{n+1}(\sigma) = \exp(-4\ (\sigma/\lambda)^m) = P_n(4^{1/m}\,\sigma) \qquad (5.2.41)$$

et l'on observe une simple remise à l'échelle des contraintes d'un facteur $4^{1/m}$. Ceci indique la loi d'échelle suivante sur les contraintes:

$$\sigma \propto L^{-2/m} \qquad (5.2.42)$$

D'où l'on déduit une loi d'échelle équivalente sur les déformations $\varepsilon \propto L^{-2/m}$. Ainsi pour une distribution initiale des contraintes de rupture très étroite (grand m), la contrainte de rupture moyenne décroît très lentement, alors que pour une distribution large, disons m=2, elle diminue beaucoup plus rapidement. Pour le cas précis m=2, la force moyenne

de rupture est constante, indépendamment de la taille du système. Nous aurons l'occasion de revenir sur cette propriété dans la suite.

(Notons en passant que la loi d'échelle obtenue par Sornette (exposant γ de la référence [59]) sur le nombre de liens cassés dans le cas des distributions de Weibull est certainement fausse; en fait une telle information est hors de portée à partir de l'équation 5.2.40. Il faudrait formuler une seconde équation de récurrence sur le nombre de liens cassés, mais une telle loi ne peut que difficilement s'exprimer sans faire nombre d'hypothèses très restrictives).

Suivant la démarche suivie pour l'étude de Newman et Gabrielov [58], nous pouvons définir la valeur de σ_n pour laquelle $P_n(\sigma_n) = K$. Pour fixer un nombre, nous avons choisi $K = 0.5$. Ainsi σ_n représente la valeur de la contrainte pour laquelle la moitié des réseaux de génération n cassent. La figure 5.16 montre les résultats d'une simulation numérique typique partant d'une distribution de Weibull de module $m= 3$. Sur la figure, nous avons montré les points calculés en utilisant la relation de récurrence 5.2.40, $\log(\sigma_n)$, en fonction de n et une droite de pente $(2/m)\log(2)$. On observe que l'évolution de σ_n ne suit la loi 5.2.41 que pour une ou deux générations. Ensuite, la décroissance de la contraine de rupture est beaucoup moins forte.

Le raisonnement tenu est ici assez approximatif puisque nous nous sommes placés dans une situation telle que disparaisse le terme le plus difficile à prendre en compte, à savoir celui qui traduit la redistribution des efforts. Nous retrouvons alors la loi du maillon le plus faible, puisque la redistribution n'est pas prise en compte. Numériquement, on constate que le second terme a donc une importance dominante même pour les lois de Weibull à décroissance rapide. Nous n'avons montré sur la figure 5.16 que le cas $m= 3$, mais, une conclusion semblable prévaut également pour les valeurs de m supérieures. L'effet de cette contribution additionnelle est en quelques sortes d'augmenter le module de Weibull à chaque étape de la transformation. Nous retrouvons donc "presque" le résultat de Sornette pour m tendant vers l'infini. Soyons plus précis:

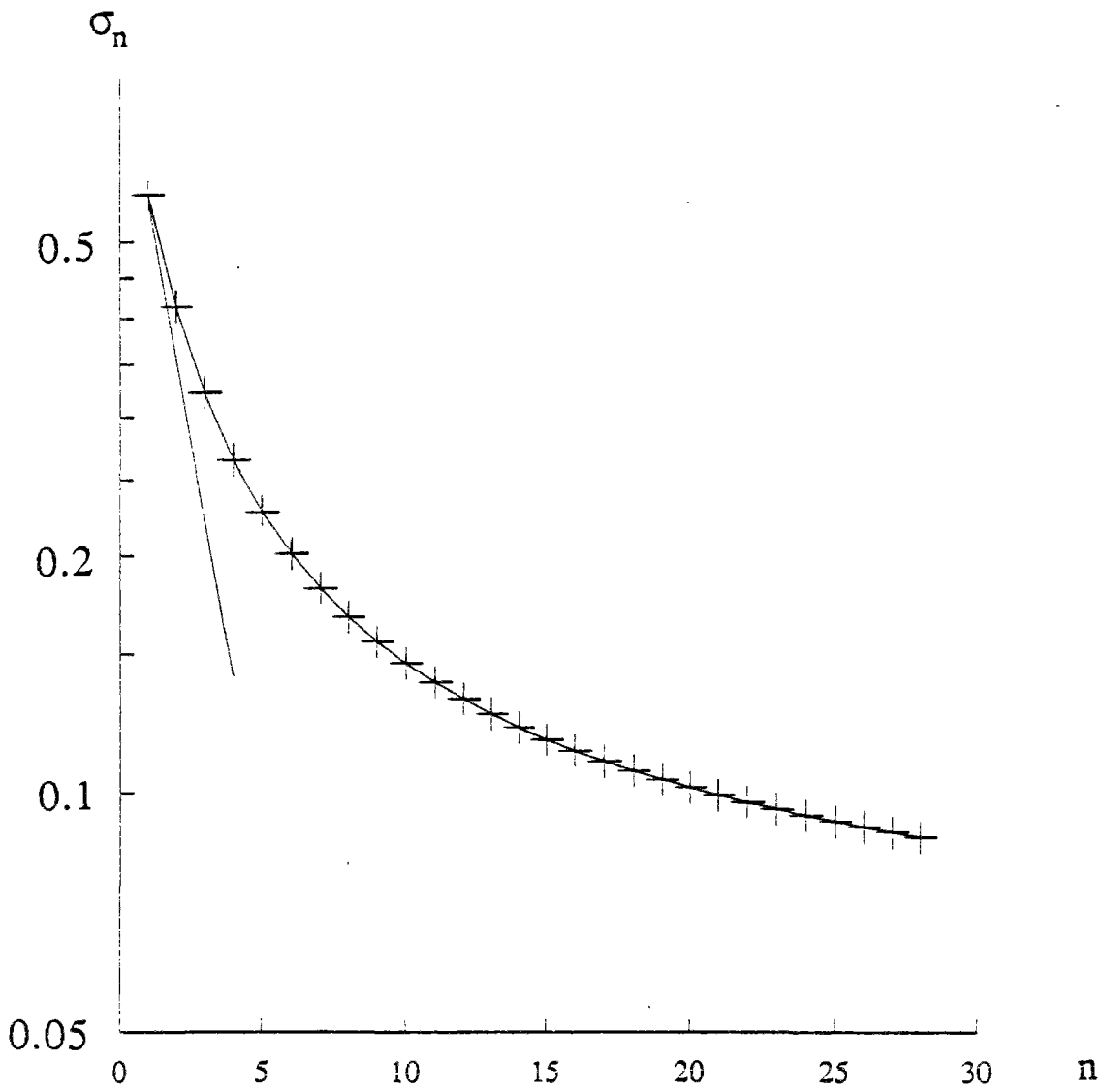


Figure 5.16 : Evolution de la contrainte σ_n pour laquelle la moitié des réseaux hiérarchiques de génération n cassent en fonction de la génération du réseau, en coordonnées semi-logarithmiques. La prédiction de Sornette est montrée par la droite tangente à la courbe pour les premières générations. On voit que le comportement asymptotique de la contrainte σ_n s'écarte notablement de ce comportement pour les réseaux de grandes tailles.

Guidé par la similitude des transformations (5.2.40) et (5.2.38), il est possible de calquer l'argument de Gabrielov et Newman pour l'équation (5.2.40), et obtenir un résultat similaire à (5.2.39) sous des hypothèses semblables. En effet chaque propriété nécessaire (A à E suivant la référence [57]) est vérifiée pour notre réseau hiérarchique. Ainsi la décroissance obtenue pour la contrainte σ suit une loi très lente:

$$1/\sigma \propto \log^{\mu}(\frac{\log(L)}{\log(2)}) \qquad (5.2.43)$$

avec un exposant $\mu = 1$ dans le cas du réseau hiérarchique. La figure 5.17 montre $1/\sigma$ en fonction de $\log(n) = \log(\log(L))$ obtenue pour le même cas que précédemment, à savoir une loi de Weibull de module $m = 3$. On constate en effet qu'après un régime transitoire, la quantité $(1/\sigma)$ suit une relation sensiblement linéaire avec $\log(n)$. Ainsi, le résultat de Sornette n'est une approximation satisfaisante que sur les premières itérations de la transformation, et pour les lois de Weibull à fort module, alors que le résultat de Gabrielov s'applique aux comportements asymptotiques.

Un point remarquable de la transformation (5.2.40) est que $P_n(\sigma)$ ne dépend que des valeurs de la contrainte égales ou supérieures à σ aux générations inférieures. Ainsi, si il existe une contrainte minimum où tous les liens résistent, $P_0(\sigma_{min}) = 1$, cette propriété sera conservée à toutes générations, mais n'affectera pas le comportement aux contraintes supérieures à σ_{min}. Ceci est similaire au cas précédent étudié par Smalley et coll. [54, 55].

Avant de clore la discussion de la rupture du réseau hiérarchique avec la loi de distribution des contraintes locales suivant les règles simples énoncées ci-dessus, il convient de s'interroger sur la validité de tels comportements. En effet nous avons vu que le comportement asymptotique était totalement dominé par les effets de redistribution des contraintes dans la structure, ainsi il est difficile de généraliser le résultat précédent au cas de redistributions plus réalistes. Ceci est d'autant plus sensible qu'une modification

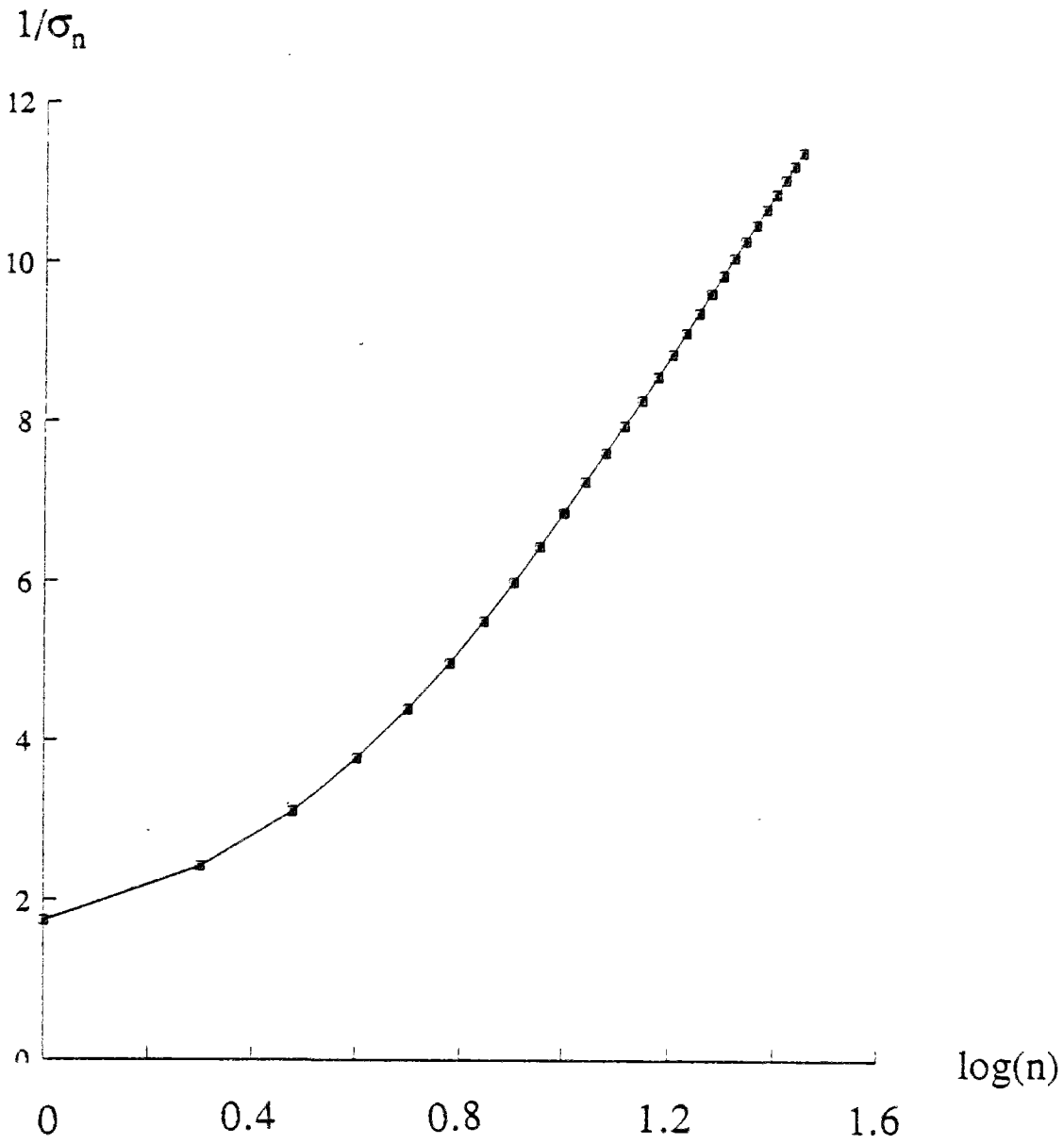


Figure 5.17 : Inverse de la contrainte σ_n pour laquelle la moitié des réseaux hiérarchiques de génération n casse en fonction du logarithme de la génération n. Le comportement sensiblement linéaire de σ_n en fonction de n confirme le résultat de Gabrielov et Newman [57] adapté au réseau hiérarchique. La décroissance de σ_n est proportionnelle au logarithme du logarithme de la taille du système.

apparemment mineure de l'équation 4.2.30, comme par exemple une division par 2 du deuxième terme de cette équation de recurrence, nous fais sortir du cadre d'application du théorème de Gabrielov et Newman, et redonne toute sa validité à l'analyse de Sornette!

- Modèle hiérarchique avec redistribution réaliste

Nous avions opté précédemment pour un langage "mécanique" compte tenu des références sur le sujet qui ont toutes considéré le problème en termes de composites à fibres alignées. Cependant, si ceci est adapté au modèle de Smalley et coll., la géométrie à adopter pour employer ce langage est plus difficile à justifier pour le cas du réseau diamant. Nous délaissons donc maintenant l'aspect géométrique du problème pour nous concentrer sur la *topologie* du milieu. En conséquence, nous adoptons maintenant un langage de rupture électrique (fusibles).

Le modèle que nous considérons dans ce paragraphe est très voisin du précédent à ceci près que la redistribution des courants est plus réaliste que précédemment: à chaque étape, nous mettons à l'équilibre la structure en fonction de la conductance locale, en résolvant les lois de Kirchhoff en chaque nœud. Au lieu des deux "états" considérés ci-dessus pour la redistribution, nous avons maintenant un continuum d'états caractérisés par leur conductance. C'est bien ce continuum qui invalide la modélisation précédente.

Il est possible d'obtenir un résultat très simple, mais qui a le mérite de faire le lien avec deux points critiques étudiés abondamment : la percolation et les chemins minimaux. En effet, si l'on essaie de suivre l'évolution de l'intensité maximale qui provoque la rupture du réseau, I_c, d'une génération à l'autre, nous devons examiner comment cette quantité évolue dans les deux opérations de base qui composent la structure: l'addition de deux liens en série et l'addition de deux liens en parallèle.

En ce qui concerne l'addition en série, l'opération se fait sans difficulté. Appelons I_{c1} et I_{c2} les deux intensités maximales que peuvent supporter les liens que nous disposons en série. L'intensité maximale résultante, I_{c3}, est simplement le minimum de I_{c1} et I_{c2}.

$$I_{c3} = \min(I_{c1}, I_{c2}) \qquad (5.2.44)$$

Au contraire, pour l'addition en parallèle, il est impossible de prédire la valeur du courant maximum, I_{c4}, sans connaître l'ensemble de la caractéristique des deux liens. En effet, le maximum de I peut être atteint *a priori* en n'importe quel potentiel. Il s'ensuit que le problème doit être traité directement par simulation numérique en suivant l'ensemble de la caractéristique de chaque lien. Nous reviendrons sur les résultats de ces calculs. Il est toutefois possible de proposer des bornes pour cette intensité. En effet,

$$\max(I_{c1}, I_{c2}) \leq I_{c4} \leq (I_{c1} + I_{c2}) \qquad (5.2.45)$$

La borne supérieure est atteinte lorsque les deux maxima des caractéristiques des liens mis en parallèle se situent au même potentiel. La borne inférieure au contraire correspond au cas où l'une des intensités est nulle (ou négligeable) lorsque l'autre atteint son maximum. Dans le cas où le désordre est peu important, nous nous attendons à être dans la première situation.

Nous reconnaissons dans ces deux bornes, deux situations que nous avons étudiées au chapitre précédent (partie 4.2). La combinaison alternative de minimum et de maximum, conduit à un problème de percolation. Plus précisément, si nous choisissons systématiquement la borne inférieure dans l'inégalité (5.2.45), nous savons que l'intensité obtenue, I_{c-}, converge vers une limite finie avec les générations du réseau. Appelant L la taille du réseau ($L=2^n$ où n est le nombre de générations), nous aurons

$$I_{c-} = x_\infty + A\, L^{-1/\nu} \qquad (5.2.46)$$

où x_∞= 0.618 si nous partons d'une distribution uniforme de seuils de rupture entre 0 et 1. ν est l'exposant de la longueur de corrélation (ν = 1.635), et A est une constante. Sur un réseau Euclidien de dimension deux, la valeur de l'exposant ν est 4/3. De plus les fluctuations de I_c diminuent au seuil comme

$$\sqrt{\langle I_{c-}^2 \rangle - \langle I_{c-} \rangle^2} \propto L^{-1/\nu} \qquad (5.2.47)$$

Il faut remarquer que la densité de courant, I/L, (quantité intensive, au contraire de I) tend donc vers 0 comme L^{-1}.

Si au contraire, nous ne prenons que les bornes supérieures de l'inégalité (5.2.45), alors nous trouvons une combinaison alternative de minimum et de somme. Cela correspond très exactement aux opérations que nous effectuons pour calculer la longueur d'un chemin minimum, sur le réseau dont les liens portent une pondération aléatoire (cf. chapitre précédent). Rappelons que l'on trouve dans ce cas que la densité de courant I_{c+}/L, converge vers un seuil bien défini :

$$I_{c+}/L = x_\infty + A'\, L^{-1/\mu} \qquad (5.2.48)$$

où x_∞ = 0.225 dans le cas d'une distribution uniforme de seuils de rupture entre 0 et 1. μ est un exposant caractéristique dont la valeur est μ = 1.407 (cf. paragraphe 4.2). Sur un réseau Euclidien de dimension deux, la valeur de l'exposant μ est 3/2. Les fluctuations du courant maximum varient dans ce cas comme

$$\frac{\sqrt{\langle I_{c+}^2 \rangle - \langle I_{c+} \rangle^2}}{L} \propto L^{-1/\mu} \qquad (5.2.49)$$

Si nous combinons ces deux résultats, nous obtenons

$$K/L < I_c/L < K' \qquad (5.2.50)$$

et la comparaison entre les deux résultats (5.2.47) et (5.2.49) suggère que

$$\frac{\sqrt{\langle I_c^2\rangle - \langle I_c\rangle^2}}{\langle I_c\rangle} \propto L^{-1/\mu} \qquad (5.2.51)$$

où μ est un exposant caractéristique ayant les "dimensions" d'un exposant de longueur de corrélation.

La borne supérieure de l'inégalité (5.2.45) peut être affinée. En effet, dans le cas où deux caractéristiques sont voisines, l'intensité maximum que peut supporter la mise en parallèle des deux liens considérés ne sera pas nécessairement de l'ordre de la somme des deux intensités maximales. Supposons que l'on parte de deux caractéristiques de rupture fragile simples, de même conductance unité jusqu'à la rupture qui est supposée se produire pour deux seuils distincts i_1 et i_2. L'intensité maximum de ces deux liens en parallèle sera i_p

$$i_p = \max\left\{ \max(i_1,i_2),\, 2\min(i_1,i_2) \right\} \qquad (5.2.52)$$

Lorsque $\min(i_1,i_2) > \max(i_1,i_2)/2$, la mise en parallèle se réduit donc à $i_p = 2\ \min(i_1,i_2)$. D'une génération à l'autre, soit en combinant série et parallèle, nous pouvons obtenir comme intensité limite, deux fois le minimum des quatre intensités maximum supportables. Si l'inégalité $\min(i_1,i_2) > \max(i_1,i_2)/2$ se poursuit sur plusieurs générations, nous obtiendrons finalement comme densité de courant limite, I_c/L, exactement le minimum de toutes les densités limites intervenant dans le réseau. Cette densité de courant va donc converger vers le minimum de la distribution des seuils de rupture et ce suivant la loi :

$$\int_0^{I_c/L} p(i_c)\ di_c = \frac{1}{L^2} \qquad (5.2.53)$$

Cette convergence très rapide aura lieu par exemple lorsque la distribution des seuils de rupture sera très étroite autour d'une valeur non nulle, et donc que la rupture du lien le plus sensible sera suffisante pour entraîner la ruine de l'ensemble du milieu. Il va de soi cependant que lorsque la distribution de seuils atteint la valeur zéro, avec une probabilité non nulle, un tel calcul ne peut être itéré à l'infini. Il s'applique par contre dans le cas où les seuils sont distribués dans l'intervalle [a,b], avec (b-a) << a. Nous verrons dans la suite que ce cas rejoint l'analyse proposée par Khang et coll. [60] pour les réseaux euclidiens. Ce résultat montre également l'importance du comportement au voisinage de l'origine de la distribution des courants seuils locaux. Selon que cette distribution est continue jusqu'à zéro ou bien possède une borne inférieure, nous aurons des comportements asymptotiques différents.

Cependant, au-delà de la stricte application des bornes obtenues, dans les deux situations extrêmes considérées, nous avons une convergence stricte de l'intensité I_c. C'est aussi probablement le cas de l'ensemble de la caractéristique. Dans ce cas, lorsque les fluctuations deviennent faibles, les maxima des deux caractéristiques vont coïncider. Alors, la borne qu'il est légitime d'utiliser sera la borne supérieure de l'inégalité (5.2.50). En conséquence, nous nous attendons à obtenir comme point fixe pertinent de la construction hiérarchique du réseau, celui qui provient de la notion de chemin minimal (sous l'hypothèse évidente que la caractéristique globale converge vers une loi unique).

Pour tester cette conjecture, nous avons effectué des simulations numériques sur le réseau hiérarchique, en obtenant la caractéristique exacte du réseau par addition successive soit des caractéristiques v(i) des liens mis en série, soit des caractéristiques i(v) des liens mis en parallèle. Nous avons effectué ces simulations pour quelques distributions de seuils, mais nous n'expliciterons dans la suite que le cas de la distribution uniforme entre 0 et 1. Ce dernier cas est en effet tout à fait représentatif de la plupart des

distributions que nous avons étudiées (loi de puissance au voisinage de l'origine, loi de Weibull...) lorsqu'elles sont continues jusqu'à zéro, (i.e. lorsqu'il existe des liens de résistance arbitrairement faible). Les analyses des données sont inspirées soit des considérations précédentes, soit des résultats obtenus sur réseaux Euclidiens que nous présenterons dans la suite de ce chapitre.

Le premier résultat concerne les caractéristiques globales du système. Comme pour le cas de la dilution, nous nous intéressons à deux points importants : d'une part, le point où le courant nécessaire à la rupture atteint son maximum (indice b), et d'autre part, le point de rupture final où le dernier lien est rompu (indice f). En ce qui concerne le nombre de liens cassés, N_b et N_f, montrés sur la figure 5.18, nous observons un comportement très proche d'une loi de puissance:

$$N_b \propto L^{\gamma_b} \qquad (5.2.54)$$

et

$$N_f \propto L^{\gamma_f} \qquad (5.2.55)$$

avec deux exposants mesurés sur les deux dernières générations $\gamma_b = 1.73$ et $\gamma_f = 1.70$. Comme évidemment $N_b < N_f$, nous devons obtenir $\gamma_b < \gamma_f$. Compte tenu de la faible taille des systèmes considérés, il semble que $\gamma_b = \gamma_f \approx 7/4$. Nous verrons que pour le réseau Euclidien une telle loi est aussi observée, avec des exposants remarquablement proches de ceux-ci.

En ce qui concerne les courants, I_b croît avec la taille du système. La figure 5.19 montre une légère concavité qui indique que I_b croît plus vite que L^{α_b} où $\alpha_b \approx 0.75$. Ce dernier exposant est donc une borne inférieure. I_f quant à lui est presque constant, à une valeur de l'ordre de 0.5. Ceci peut aisément se comprendre, puisque le dernier lien à casser pour disconnecter la structure supporte l'ensemble du courant, il suffit que ce lien soit unique pour que le courant critique sature à la valeur moyenne du seuil, soit pour une distribution uniforme entre 0 et 1: $I_f = 1/2$. La légère décroissance de

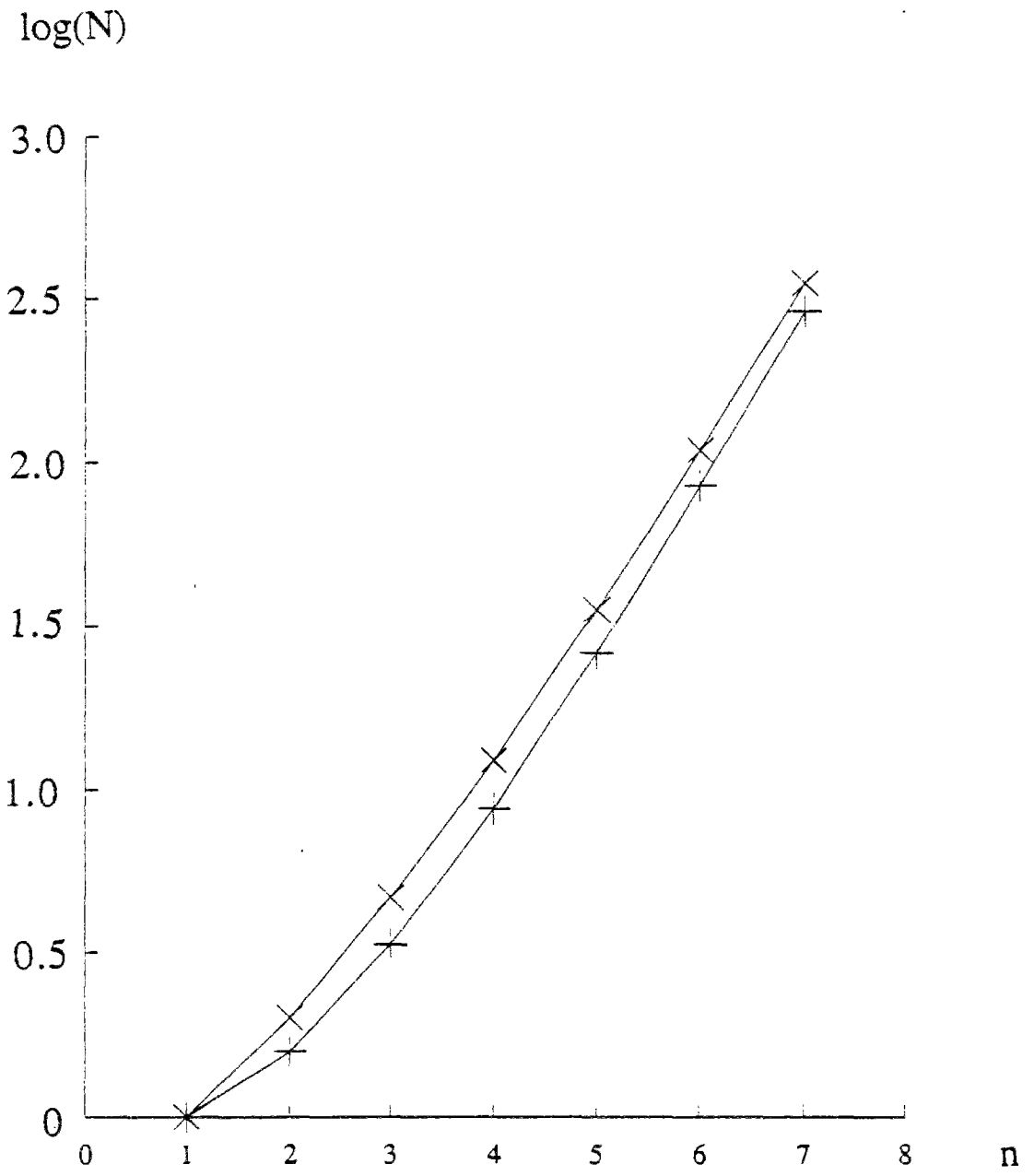


Figure 5.18 : Logarithme du nombre de liens cassés au point de rupture non-contrôlée en courant (symboles +) et au point de rupture finale (symboles ×) en fonction de la génération du réseau hiérarchique. Les seuils de rupture des liens sont distribués uniformément entre 0 et 1.

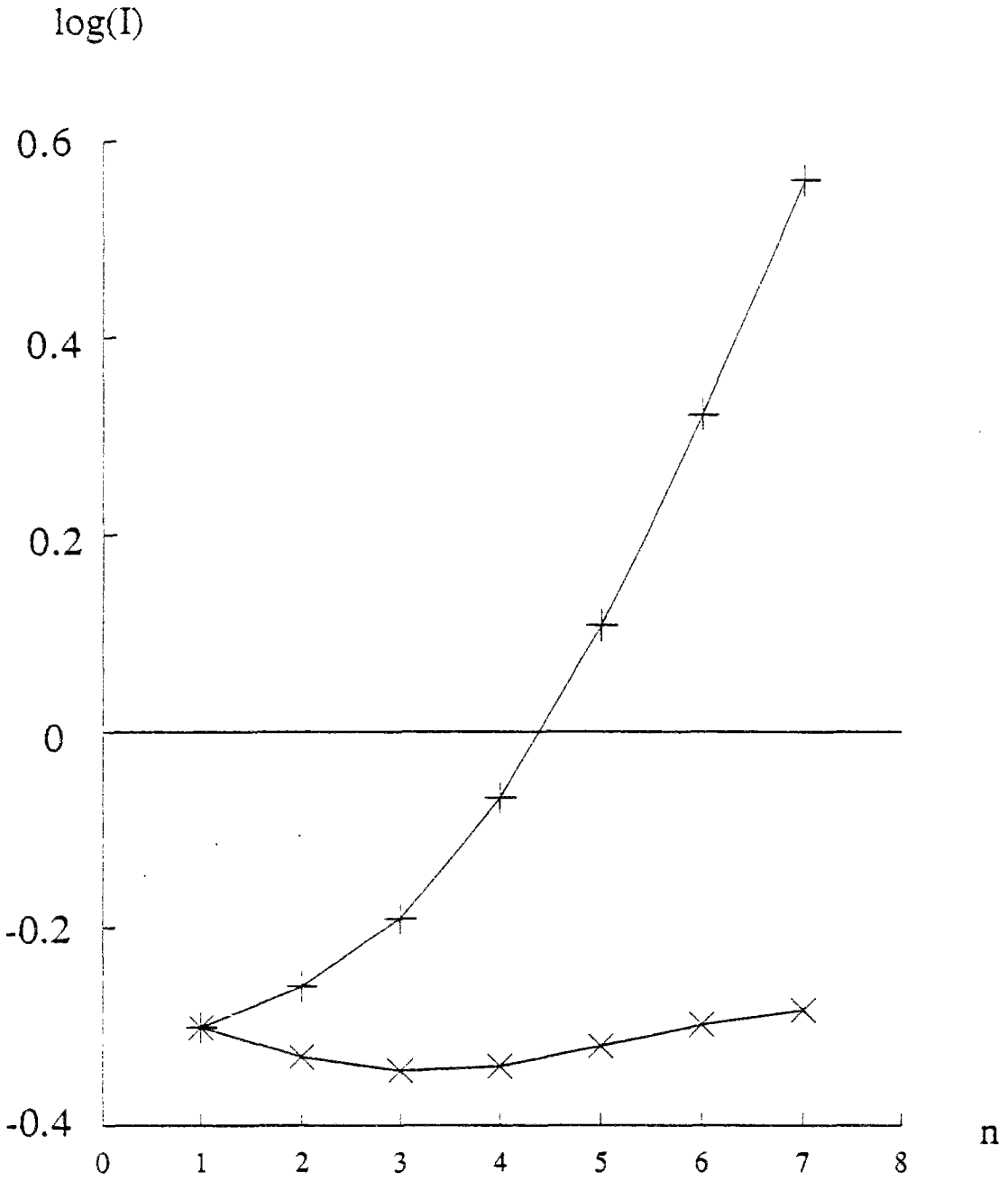


Figure 5.19 : Logarithme du courant au point de rupture non-contrôlée en courant (symboles +) et au point de rupture finale (symboles ×) en fonction de la génération du réseau hiérarchique. Les seuils de rupture des liens sont distribués uniformément entre 0 et 1.

I_f observée pour les générations 2 à 5, suggère que pour les systèmes de petites tailles, le nombre de liens sensibles peut être supérieur à l'unité juste avant la rupture totale du système.

Finalement, les courants V_b et V_f sont montrés sur la figure 5.20. On constate que si dans un premier temps $V_b < V_f$, cette inégalité se renverse à la septième génération. Ceci montre une transition entre une rupture de mode I et une rupture de mode II, (cf.Figure 5.2). Le potentiel V_b augmente plus vite qu'une loi de puissance en L^{β_b}, avec $\beta_b = 0.67$ mesuré sur les deux dernières générations. Au contraire V_f augmente moins vite que L^{β_f}, avec $\beta_f = 0.34$.

Finalement, suivant les résultats obtenus dans le cas des réseaux Euclidiens [61-64] nous avons tenté de remettre à l'échelle les caractéristiques de rupture I(V) pour différentes générations, en définissant des variables réduites, sous la forme

$$I/L^{\alpha} = \Phi(V/L^{\beta}) \qquad (5.2.56)$$

On constate alors que pour les premières générations, l'accord est tout à fait satisfaisant pour des exposants $\alpha = \beta \approx 0.75$. Au fur et à mesure que la taille du système augmente, il apparaît que ces deux exposants augmentent corrélativement, pour être de l'ordre de 0.9 pour la septième génération. La Figure 5.21 montre de telles caractéristiques pour les générations 3, 4, 5 et 6 remises à l'échelle suivant la transformation (5.2.56) avec des exposants $\alpha = \beta = 0.9$. Il apparaît que la partie de la caractéristique correspondant aux faibles courants, et faibles potentiels, tombe sur une courbe unique pour les générations 4 à 6. Cet accord est valable presque jusqu'au maximum de la caractéristique de la génération la plus élévée. Avec des valeurs plus faibles des exposants, il est possible d'obtenir un meilleur accord pour les plus faibles tailles mais la tendance à s'écarter du comportement moyen est alors nettement marquée pour les plus fortes tailles. Par ailleurs, nous constatons que pour un plus fort désordre, comme pour une distribution de seuils $p(i_c) = 1/(2\sqrt{i_c})$ entre 0 et 1, des valeurs des exposants $\alpha = \beta \approx 0.75$ conviennent

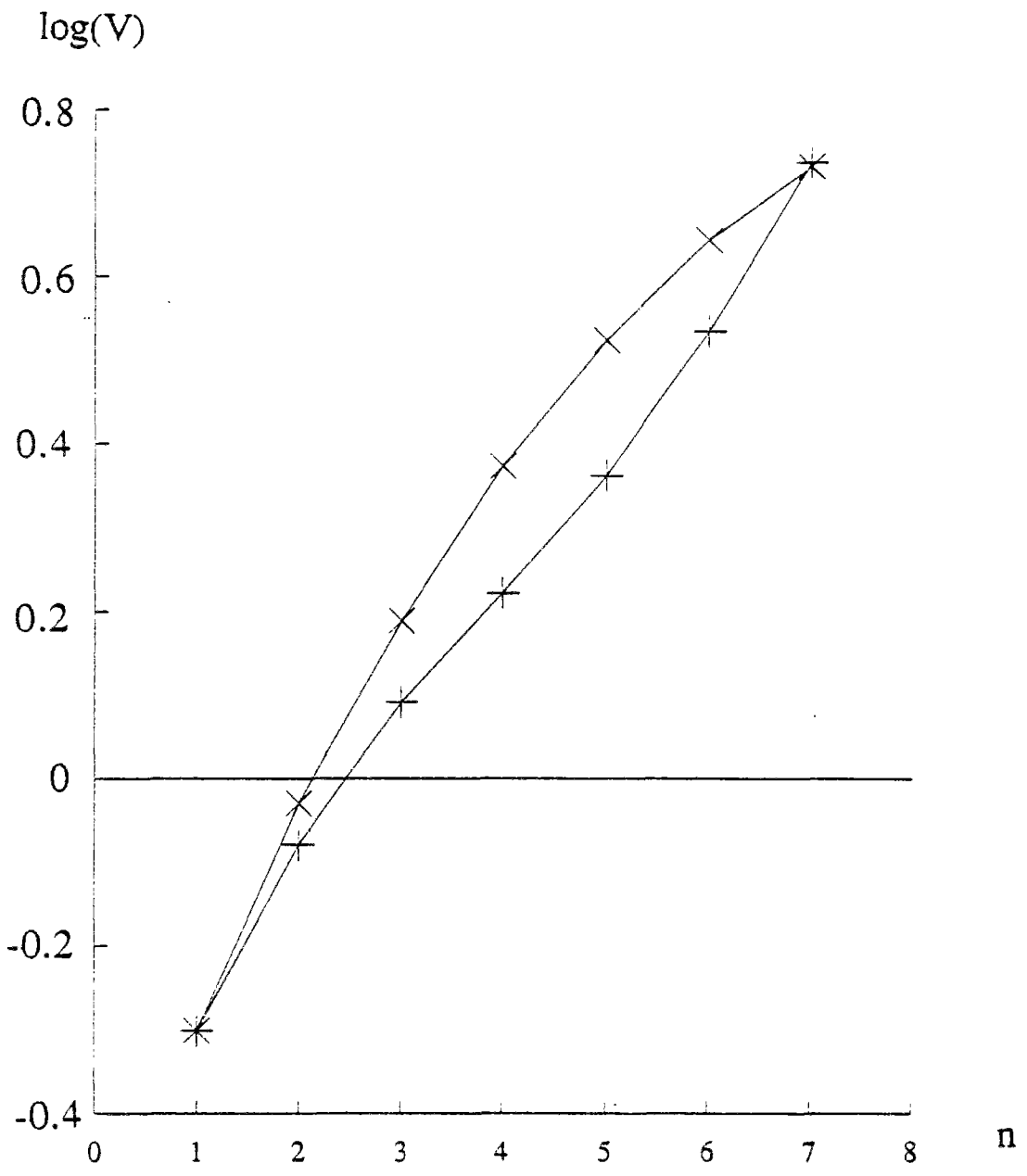


Figure 5.20 : Logarithme de la tension au point de rupture non-contrôlée en courant (symboles +) et au point de rupture finale (symboles ×) en fonction de la génération du réseau hiérarchique. Les seuils de rupture des liens sont distribués uniformément entre 0 et 1.

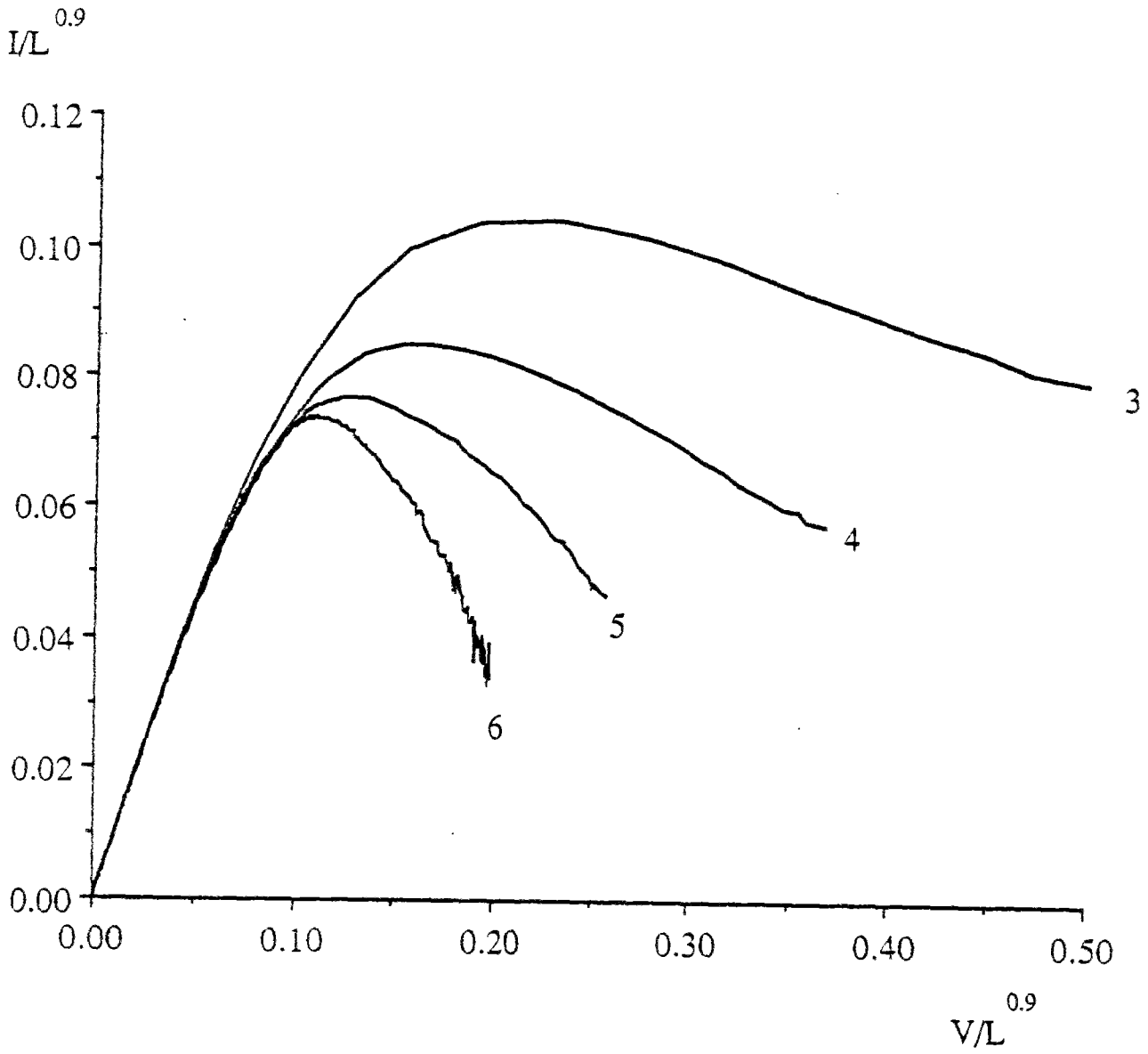


Figure 5.21: Caractéristique courant-tension de rupture de réseaux hiérarchiques remises à l'échelle selon la transformation I/L^{α} fonction de V/L^{β} pour $\alpha = \beta = 0.9$. Ces valeurs permettent d'ajuster le mieux possible les caractéristiques sur une courbe unique, dans les premiers stades de la rupture. Lorsque la taille du système augmente, les exposants α et β se rapprochent de l'unité. Symétriquement, pour des distribution de seuils très larges, ces exposants diminuent.

sur une plus large gamme de taille. Si l'on se fie aux évolutions rapportées pour I_b et V_b en fonction de la taille, on constate également que l'exposant tangent en fonction de la taille du système augmente sensiblement, et n'est certainement pas stabilisé à une valeur constante pour les plus grandes tailles étudiées.

Au vu de ces résultats, il semble que les valeurs asymptotiques de α et β qui permettent de rendre compte de l'évolution des caractéristiques avec la taille du système tendent vers l'unité. Si nous comparons ceci avec le cas étudié précédemment de la redistribution hiérarchique des courants à l'intérieur du réseau, il semble que les propriétés observées soient qualitativement comparables. En effet, sur quelques générations, ou pour un désordre très fort, le comportement sur quelques générations suit approximativement le comportement (5.2.56) pour des distributions de seuils suivant initialement une loi de Weibull. Puis, en itérant la transformation, une dérive se dessine vers une décroissance très lente de la densité de courant critique (en 1/log(log(L))) difficile à distinguer d'une constante sur une faible gamme de taille. Dans les notations précédentes, α et β convergent vers l'unité. Nous voyons donc un accord qualitatif.

Les remarques précédentes incitent ainsi à chercher une éventuelle convergence de la densité de courant vers une limite finie. Plus précisément, compte tenu des parallèles faits avec la percolation et les chemins minimaux, nous cherchons un comportement du type (5.2.48)

$$I_b/L = i_\infty + A/L^{1/\varpi} \qquad (5.2.57)$$

La figure 5.22 montre une telle tentative. Nous obtenons donc un accord tout à fait satisfaisant pour un seuil $i_\infty = 0.025$ et un exposant $\varpi = 1.0$. Une analyse semblable pour la tension :

$$V_b/L = v_\infty + A/L^{1/\varpi'} \qquad (5.2.58)$$

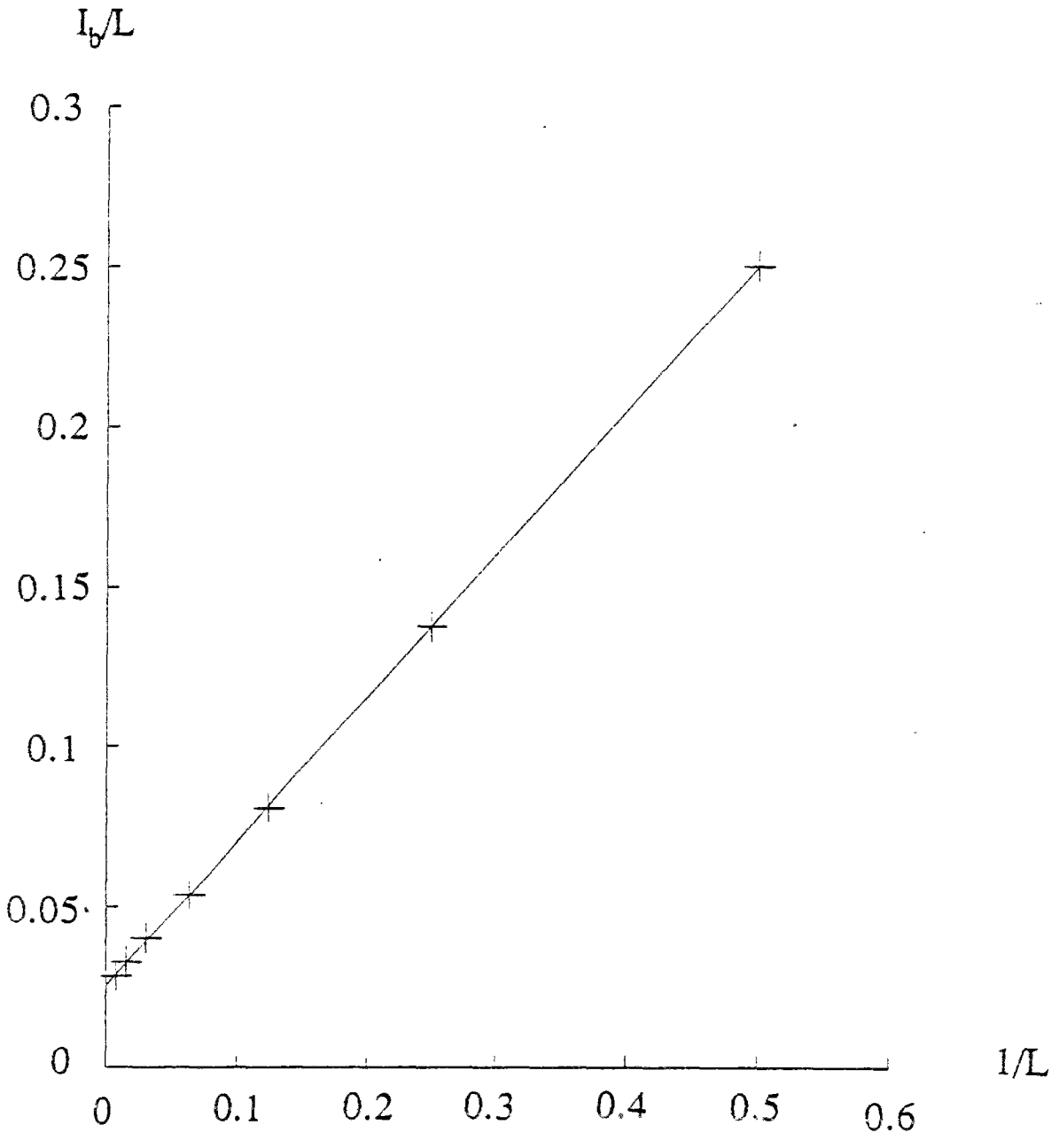


Figure 5.22 : Densité de courant de rupture, I_b/L, en fonction de l'inverse de la taille du système, 1/L. La droite représente le meilleur ajustement. Cette loi semble indiquer une densité de courant asymptotique, i_∞, non nulle. La distribution des seuils est uniforme entre 0 et 1. Le réseau est hiérarchique diamant.

donne un seuil asymptotique $v_\infty = 0.028$ et un exposant $\varpi' = 1.25$. La figure 5.23 montre V_b/L en fonction de $L^{-1/\varpi'}$ pour $\varpi' = 1.25$. Un effet de taille est clairement visible pour les faibles tailles (au contraire du cas précédent pour le courant). Les estimations précédentes sont fondées sur le meilleur ajustement des données par la forme de loi (5.2.57) et (5.2.58). Notons cependant que la barre d'erreur sur ϖ' est assez large compte tenu de la courbure des données. Il est par exemple possible d'obtenir un ajustement raisonnable pour $\varpi' = 1.35$, auquel cas la valeur du seuil $v_\infty = 0.025$. Il est d'autre part évident que

$$v_\infty \geq i_\infty \qquad (5.2.59)$$

puisque la conductivité est toujours inférieure ou égale à 1. Ainsi, il est possible que la rupture du système tende asymptotiquement vers une caractéristique de rupture fragile identique à celle d'un simple lien, puisque l'égalité $v_\infty = i_\infty$ n'est pas exclue par notre analyse. Dans ce cas en effet, l'intensité maximale I_b serait atteinte pour une conductivité de 1.

Nous pouvons tenter une analyse similaire concernant le nombre de liens cassés N_b, en cherchant une loi du type

$$N_b/L^2 = n_\infty + A/L^{1/\varpi''} \qquad (5.2.60)$$

La figure 5.24 montre le meilleur accord obtenu, qui correspond à $n_\infty = 0.0135$ et $\varpi''=1.30$. Comme dans le cas de la tension, d'importantes corrections sont visibles pour les systèmes de petites tailles.

Remarquons que les faibles valeurs des constantes i_∞, v_∞ et n_∞ justifient qu'il est facile de considérer que ces valeurs asymptotiques sont nulles en analysant les données de simulations numériques. En effet, comme nous pouvons le voir sur les trois dernières figures 5.22 à 5.24, le terme correctif est souvent grand devant la valeur

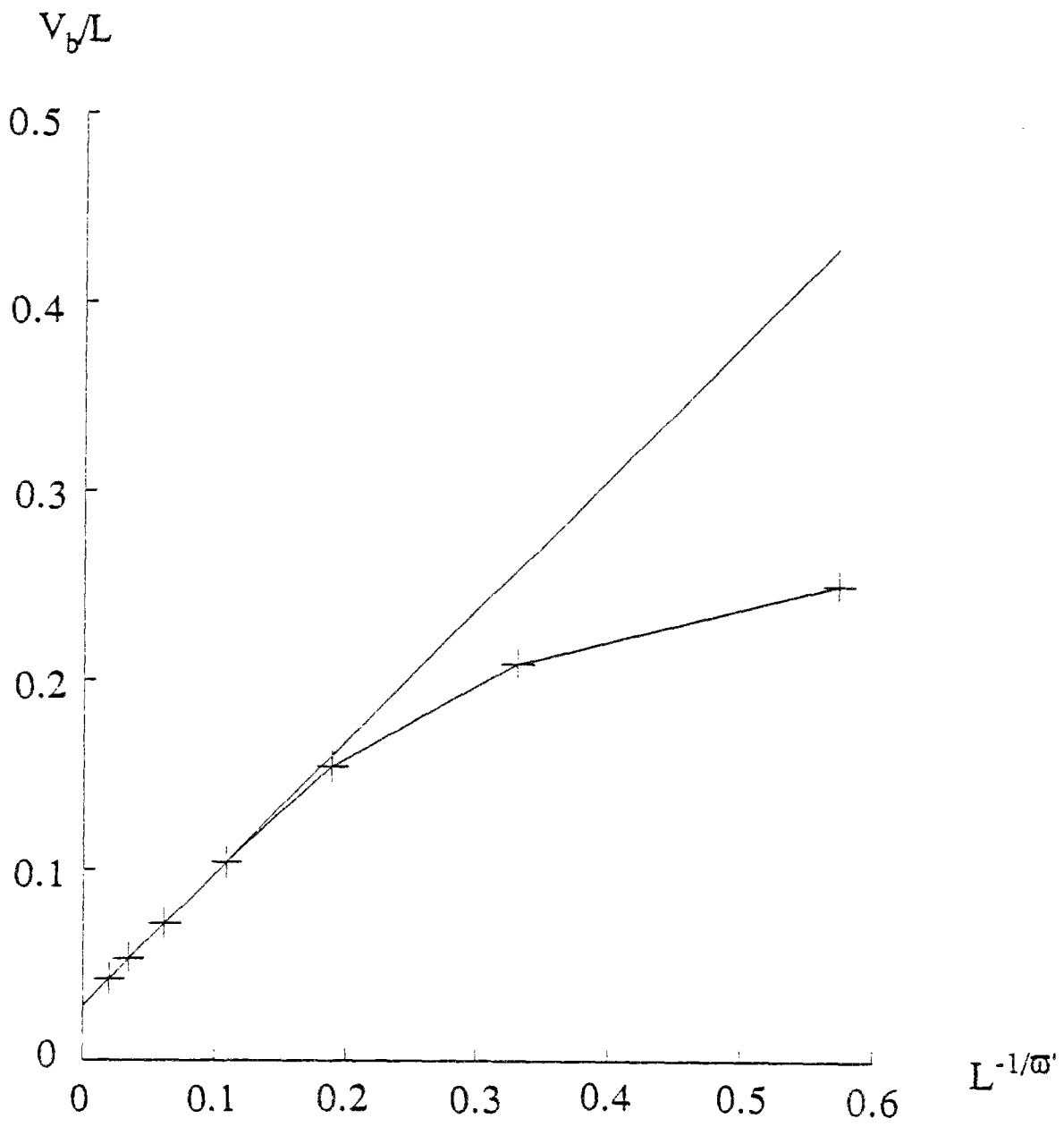


Figure 5.23 : Tension de rupture, V_b/L, au point de rupture non conrôlée en courant en fonction de l'inverse de la taille du système à la puissance $1/\varpi'$, $1/L^{1/\varpi'}$, où $\varpi' = 1.25$. La droite représente le meilleur ajustement. Cette loi semble indiquer une tension asymptotique, v_∞, non nulle. La distribution des seuils est uniforme entre 0 et 1. Le réseau est hiérarchique diamant.

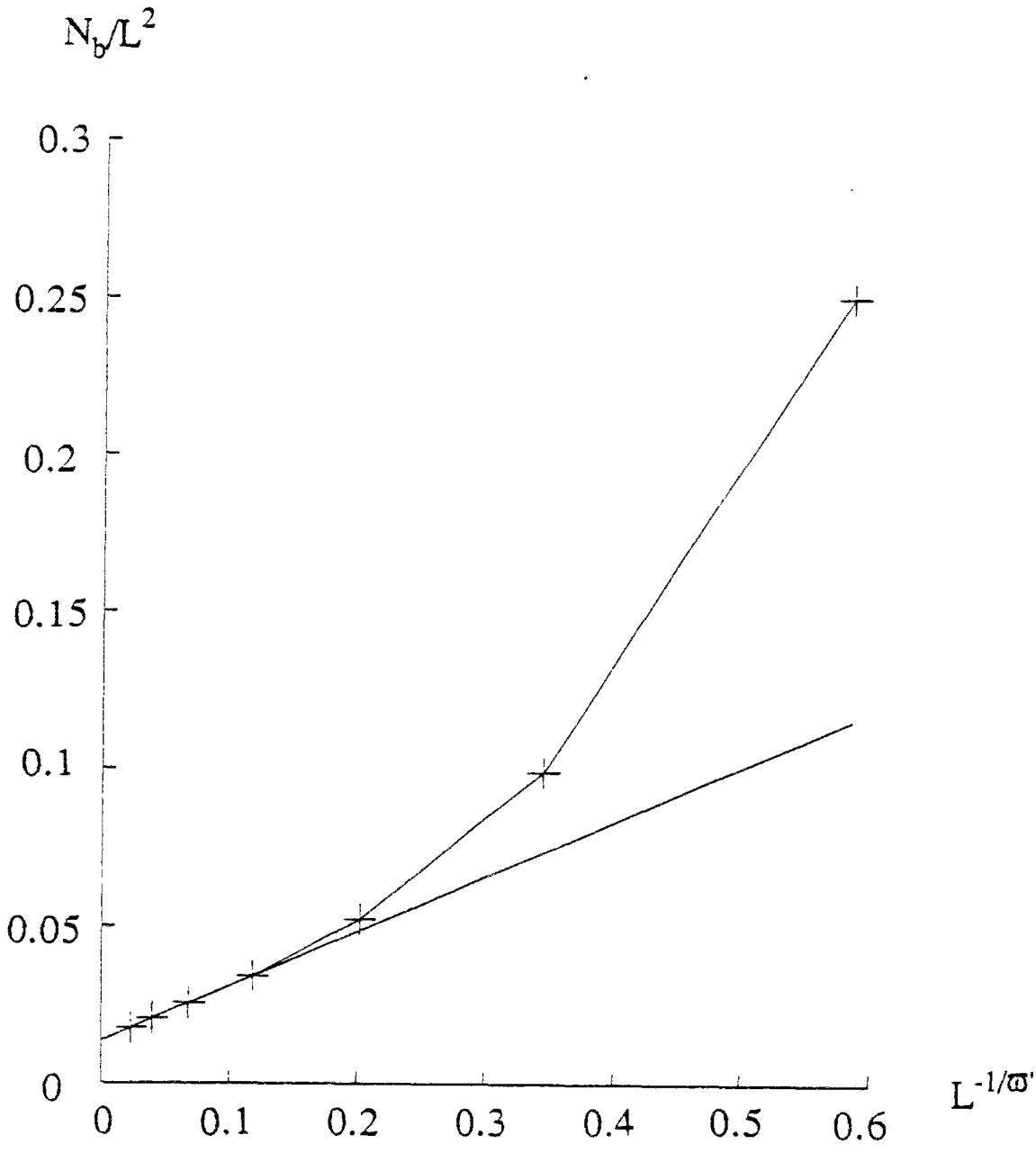


Figure 5.24 : Densité de liens cassés, N_b/L^2, au point de rupture non conrôlée en courant en fonction de l'inverse de la taille du système à la puissance $1/\varpi''$, $1/L^{1/\varpi''}$, où $\varpi'' = 1.30$. La droite représente le meilleur ajustement. Cette loi semble indiquer une densité asymptotique, n_∞, non nulle. La distribution des seuils est uniforme entre 0 et 1. Le réseau est hiérarchique diamant.

asymptotique. Notons enfin que si l'exposant ϖ est sensiblement inférieur aux deux exposants de longueur de corrélation rencontré jusqu'alors, $\nu = 1.635$ pour la percolation et $\mu = 1.407$ pour les chemins minimaux, les exposants ϖ' et ϖ'' se comparent raisonnablement avec μ. Par contre, ils semblent distincts (inférieurs) des exposants similaires obtenus pour le cas de la dilution (où ϖ et ϖ' sont à comparer à $1/\eta$ et $1/\eta'$). En tout état de cause, une étude plus complète de ces différents cas reste à faire. Comme nous l'avons déjà souligné, les tailles que nous avons considéré jusqu'à présent sont largement inférieures à ce que l'on peut réaliser, sur un calculateur de taille raisonnable.

En conséquence, si le comportement asymptotique du système semble trivial (puisque identique à celui de ces constituants, à un changement d'échelle près) la convergence vers ce point particulier est caractérisée par des lois d'échelles non triviales, même pour le cas d'une géométrie aussi simpliste que pour le réseau hiérarchique.

Nous allons maintenant quitter les réseaux hiérarchiques pour nous pencher sur les réseaux Euclidiens. Nous verrons que, bien que ces derniers soient beaucoup plus difficiles à étudier, tant numériquement qu'analytiquement, la plupart des comportements vus sur réseaux hiérarchiques se retrouvent qualitativement et parfois quantitativement.

-Réseau Euclidien

Nous allons maintenant revenir à des géométries plus "naturelles": les réseaux Euclidiens. Nous allons commencer par donner la procédure générale qui permet d'aborder ces problèmes. Ceci permettra de définir les concepts de base qui nous seront utiles dans les discussions ultérieures. Puis, nous présenterons un moyen d'étude des premiers stades de la rupture, qui repose sur un argument "à la Flory" [65], et qui nous permettra d'obtenir une classification des modes de rupture en fonction du comportement à l'origine de la distribution des seuils. Par la suite, nous rappellerons les résultats publiés dans la littérature pour différentes distributions de seuils de rupture des fusibles, v_c, alors que les conductivités sont identiques dans tout le réseau:

- distribution uniforme de seuils entre [1-w/2, 1+w/2], pour $w \leq 2$.[60, 65]
- distribution très large, avec $p(v_c) \sim v_c^{-x}$ au voisinage de $v_c = 0$ lorsque x tend vers 1. [66, 67]
- distributions intermédiaires: [61-64]. Les distributions considérées sont les suivantes:
  - $p(v_c)$ est une loi de puissance pour v_c compris entre 0 et 1,
  - $p(v_c)$ est une loi de Weibull, avec un module compris entre 2 et 10

Le second cas donne une situation tout à fait simple, à savoir un problème de percolation avec "écrantage". En contrepartie, cette situation est tout à fait pathologique, en ce sens qu'elle correspond à une distribution infiniment large. Il est cependant intéressant de considérer ce cas extrême car il donne une idée des types de lois auxquelles nous pouvons nous attendre. La première situation, est déjà plus complexe, bien que certains résultats puissent être obtenus dans ce cadre. Le dernier cas finalement, correspond aux situations les plus courantes, et où seules les simulations numériques directes permettent jusqu'à présent d'obtenir des informations. Ces résultats numériques ont cependant permis d'obtenir des lois d'échelle originales qui permettent de rendre compte de manière satisfaisante de l'évolution des caractéristiques observées avec la taille

du système. Nous conclurons ce paragraphe par une comparaison des résultats obtenus avec le cas du réseau hiérarchique diamant.

- Algorithme

L'un des problèmes de base qui se pose lors de l'étude de la rupture consiste à définir le type de contrôle que l'on applique au système. Expérimentalement, lorsque l'on étudie la rupture mécanique d'un milieu, soit un déplacement, soit une contrainte est imposé. Bien entendu, ces deux conditions aux limites ne sont pas équivalentes. Dans beaucoup de situations, on observe un comportement "adoucissant", où la rupture est contrôlée en déplacement, mais non en contrainte ("type I"). Dans d'autres cas, même lorsqu'il n'y a pas de branche adoucissante jusqu'à la rupture totale, la rupture catastrophique, n'est pas obtenue pour le même point de la caractéristique ("type II", cf. figure 5.2). De plus, cette distinction est assez schématique, car en pratique, il existe toujours des liaisons élastiques entre la pièce à étudier et les points où le déplacement (ou la contrainte) est imposé. En conséquence les conditions réelles sont toujours intermédiaires entre ces deux situations. L'"idéal" pour pouvoir mesurer l'ensemble de la caractéristique, consisterait à contrôler une quantité qui est toujours monotone dans la rupture, comme le module élastique, ou la surface de fissure créée. Ceci est en pratique irréaliste, car, il faut pour cela disposer de conditions aux limites actives, et non passives. Ces dispositifs ont alors une dynamique propre, qui interfère avec la dynamique de la propagation de la fissure... Il en va bien entendu de même pour la rupture électrique d'un réseau de fusibles.

Quoiqu'il en soit, dans les simulations numériques, il est possible d'imposer tout contrôle imaginable. Cependant, dans le détail du calcul, il est en fait un seul contrôle qui soit bien défini, dans une évolution élastique fragile où n'intervient aucune dynamique. Il s'agit de "piloter" le nombre de fusibles brûlés. Ensuite, sur la caractéristique, il est toujours possible de calculer la réponse exacte à une condition aux

limites plus réaliste. Pourquoi ce choix est-il le seul ? Dans les modèles que nous considérons ici, la rupture est un processus déterministe. Connaissant les seuils locaux, et la géométrie du système à un instant donné, nous savons que la caractéristique est linéaire jusqu'à la rupture d'un lien, pour lequel, nous pouvons aisément calculer la tension ou l'intensité globale du réseau. Par contre au delà de ce point, et en particulier pour brûler un second fusible, il faut recalculer la distribution des potentiels dans le réseau. Ceci nous amène naturellement à procéder de liens en liens. Certaines études ont essayé de brûler plusieurs liens à chaque étape du calcul, par souci d'économie de temps de calcul. Nous jugeons cette procédure dangereuse, et actuellement impossible à interpréter proprement.

Dans le détail, la procédure de calcul s'effectue comme suit:

1. Imposant une tension unité, les potentiels u_i sont calculés en chaque site i. Durant cette étape, les caractéristiques des liens sont considérées comme linéaires, i.e. avec une conductance unité ou zéro selon que le lien est déjà brûlé ou non.
2. Calcul du lien le plus sollicité. Pour ce faire, nous imaginons que l'on impose une tension V à l'ensemble du réseau. Dans ce cas, les potentiels aux nœuds i seront Vu_i. Pour que l'on reste dans le régime linéaire, il est nécessaire que pour tous les liens i-j

$$|u_i-u_j| V < v_{ijc} \qquad (5.2.61)$$

où v_{ijc} désigne la tension seuil du lien ij. Ainsi V est limité par un seuil macroscopique V_c, qui est

$$V_c = \min_{ij} \{v_{ijc}/(|u_i-u_j|)\} \qquad (5.2.62)$$

Nous connaissons donc le lien qui est le premier à rompre, et le point limite de la caractéristique globale. Après avoir enregistré les différentes quantités importantes en ce point, ce lien (où le minimum de (5.2.62) est atteint) est enlevé, et le calcul est réitéré

jusqu'à la rupture totale du réseau. Il est donc évident que la rupture est "contrôlée" en nombre de liens cassés.

Toutes les quantités physiques que nous rapportons sont ensuite moyennées sur différentes réalisations à nombre de liens cassés constant (et pour les réalisations qui ne sont pas rompues à ce stade). Notons donc que le nombre de réseaux sur lesquels les quantités observables sont moyennées diminue avec n.

- Approche de "Flory"

A partir de l'équation (5.2.62), il apparaît clairement deux éléments importants. La tension à la rupture est le rapport entre deux valeurs: d'une part le seuil de rupture local, distribué aléatoirement, et d'autre part, le courant local pour une tension extérieure unité. Si nous partons d'une géométrie initiale uniforme, la distribution des courants sera une distribution de Dirac. Le premier lien à casser sera donc simplement le plus fragile: celui qui réalise le minimum de v_c. A partir de ce point, lorque la rupture progresse, la distribution des courants s'élargit. Dès lors, nous aurons une compétition entre les deux distributions, celle des seuils de rupture et celle des courants. Dans le cas d'un milieu avec très peu de désordre, c'est la distribution des courants qui l'emporte très rapidement, et donc la rupture a lieu à l'endroit où le courant est le plus fort. Au contraire, s'il y a beaucoup de désordre, c'est le lien le plus fragile qui casse, "presque" indépendamment du courant qui le traverse. Cette propriété met en lumière l'intérêt de distinguer nettement les situations à fort ou à faible désordre. Nous allons maintenant décrire plus quantitativement cette discussion suivant la référence [65].

Présentons d'abord en quelques mots l'approche que nous allons présenter. Au voisinage d'un lien cassé, le courant (ou la contrainte) est généralement plus élevé qu'ailleurs. Si seul cet effet comptait, nous aurions tendance à ne trouver qu'une seule fissure dont le développement ne serait jamais contrôlé. Mais nous devons également tenir compte de la fragilité des liens. Plus nous nous éloignons d'un lien cassé donné,

plus nous trouvons de liens et donc plus fragile sera le lien le plus fragile. Ce second effet est donc antagoniste au premier. De façon imagée, nous parlerons du premier effet comme attractif ("énergétique") et du second comme répulsif ("entropique"). Partant de la simple idée de trouver le meilleur compromis entre ces deux effets, nous allons pouvoir obtenir une formulation très générale du problème applicable à toutes les situations de désordre gelé, où le désordre n'est présent que dans les seuils de rupture et où la proportion de liens cassés est faible.

Considérons un réseau homogène infini dans lequel un lien a été enlevé. A l'infini, une densité de courant unité est imposée. Comment se répartit le courant autour de ce défaut ? Par linéarité, il suffit d'ajouter à la solution correspondant au réseau intact, (i.e. un champ uniforme de densité de courant unité), le champ engendré par une source de courant unité placé sur le lien manquant. Nous appellerons respectivement J_{ij} et K_{ij} ces deux champs de courant pour le lien ij. Soit r la distance entre un lien et le défaut initial. La dépendance de K en r est obtenue simplement (champ dipolaire):

$$K \propto r^{-d} \qquad (5.2.63)$$

Lorsque K et J sont orientés dans le même sens, le courant circulant dans le lien est augmenté par la présence du défaut. Cette augmentation rend plus aisée la rupture de ce lien. Dans ce cas, nous parlerons de champ *attractif*. Lorsque K et J sont en sens opposé, le champ K sera dit *répulsif*. Nous pouvons maintenant "classer" les liens en fonction de leur champ attractif. Si nous appelons n(I)dI le nombre de liens soumis à un champ attractif K compris entre I et I+dI, alors nous avons simplement

$$n(I)\, dI \propto I^{-2}\, dI \qquad (5.2.64)$$

en toutes dimensions d'espace. Cette équation est légitimée par l'invariance par dilatation du champ dipolaire, à grande échelle.

Pour trouver la valeur de la différence de potentiel qui correspond à la rupture d'un lien, nous devons chercher le minimum du rapport (5.2.62). Soit pour une conductance unité des liens:

$$V_c = \min_{ij} \{v_{ijc}/(J_{ij}+K_{ij})\} \qquad (5.2.65)$$

Pour identifier ce minimum, nous allons procéder en deux temps: Dans un premier temps, nous allons chercher le minimum de ce rapport parmi tous les liens qui portent un même champ attractif, puis nous chercherons à minimiser cette quantité par rapport au champ attractif.

Fixons donc le champ K à une valeur finie K = I. Nous avons déjà évalué le nombre, n(I), de liens qui portent un courant K = I. Il suffit donc maintenant de trouver le minimum de n(I) seuils v_{ijc} (puisque J et K sont constants) tous distribués selon la même loi $p(v_c)$. La solution est donnée par la valeur v(I) telle que

$$\int_0^{v(I)} p(v_c)\, dv_c = \frac{1}{n(I)} \qquad (5.2.66)$$

Cette équation implicite définit donc la valeur du seuil minimum parmi tous les liens qui portent un champ attractif I. La valeur du potentiel global de rupture sera ainsi la valeur minimum sur I du rapport :

$$V_c = \min_I \left\{ \frac{v(I)}{J+I} \right\} \qquad (5.2.67)$$

Après avoir obtenu la valeur du potentiel, nous pouvons remonter à la valeur de $I=I_c$ pour laquelle ce minimum est atteint, puis, en utilisant l'équation (5.2.63) la distance entre défauts, δ.

$$\delta \propto I_c^{-1/d} \qquad (5.2.68)$$

Nous allons utiliser cette démarche pour plusieurs distributions $p(v_c)$ pour en tirer une classification, mais avant quelques remarques s'imposent:

• Nous nous sommes placés d'emblée dans un milieu infini, et nous ne nous sommes pas souciés du comportement à très courte distance d'un défaut. Cependant, il va de soi qu'il existe toujours une coupure inférieure, ℓ (pour nous, il s'agit ici de la maille du réseau, mais dans le cas d'un matériau il s'agira de la taille inférieure à laquelle la description en terme de rupture fragile s'applique), et une coupure supérieure, L, (la taille du système). Les distances entre points de rupture, δ, que l'on obtient finalement peuvent dès lors être de trois types que nous rencontrerons explicitement dans la suite. Soit cette distance est entre les deux tailles limites $\ell < \delta < L$, il s'agira alors d'une facture avec endommagement localisé. Soit $\delta = \ell$, et alors la rupture se produira brutalement, sans endommagement. Enfin $\delta = L$, et la rupture consistera en un endommagement diffus réparti de façon homogène dans le milieu (au moins dans un premier temps). La figure 5.25 illustre les trois différents types de fracture que l'on peut rencontrer.

• Les hypothèses utilisées traitent exclusivement le cas d'un défaut unique. Pour continuer à appliquer l'argumentation, il faut discuter selon les cas: Si $\delta = \ell$ le premier défaut va se développer, et alors, l'argument est bien sûr de nouveau applicable, et puisque la concentration de courant est augmentée nous trouverons encore $\delta = \ell$ pour le troisième lien cassé, et ainsi de suite jusqu'à rupture totale du milieu. Si $\ell < \delta < L$, alors le groupe de deux défauts est plus attractif que le défaut initial, et en conséquence δ ne peut que diminuer avec le développement de la rupture. Nous nous attendons donc à obtenir une rupture fragile à une échelle supérieure à la première valeur de δ. Le nombre maximum de liens à casser avant d'arriver à une rupture catastrophique du milieu sera au plus de l'ordre de δ. Enfin lorsque $\delta = L$, la rupture des premiers liens est décorrélée. Nous pouvons dans ce cas négliger les interactions des champs de courant induits par plusieurs défauts tant que la distance qui les sépare reste grande. Ainsi nous pouvons appliquer à nouveau le même argument mais en modifiant la coupure supérieure en

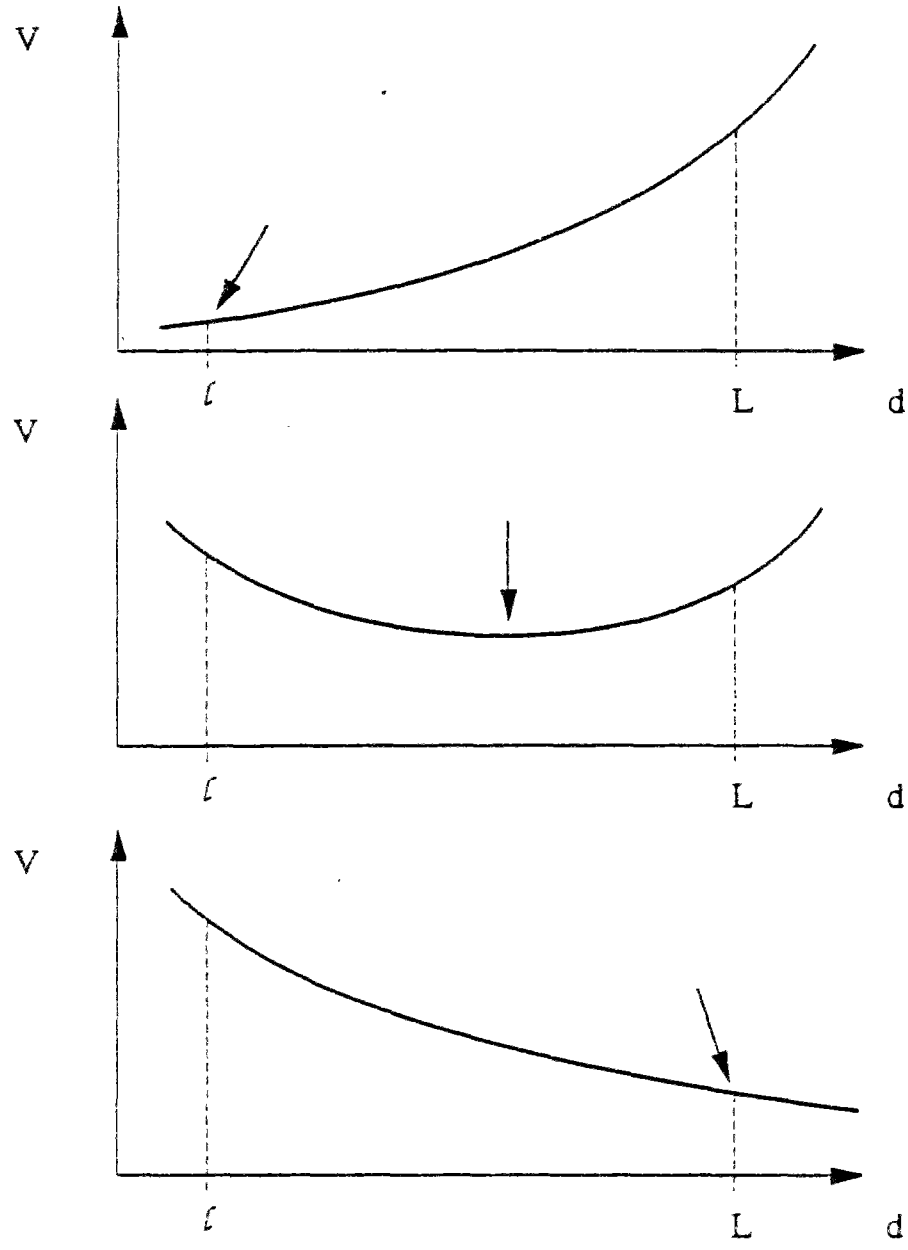


Figure 5.25 : Suivant l'argument "à la Flory", nous pouvons trouver trois types de rupture. Nous présentons trois allures schématiques de la variation du potentiel de rupture à minimiser en fonction de la distance. Sur la figure du haut le minimum est atteint pour une distance égale à la coupure inférieure, ℓ. Il s'agit d'une rupture brutale sans endommagement. La figure centrale donne le cas le plus général, d'une distance entre fissures intermédiaire entre ℓ et L. Il y a alors endommagement localisé. Enfin en bas, le minimum est atteint pour une distance L. Nous aurons un endommagement diffus dans l'ensemble du système.

longueur, L', qui devient alors la distance entre fissures, i.e. $L' = (n^{-1/d})L$. Nous obtiendrons alors une approximation conservative puisque l'interaction des défauts est négligée, et leur répartition est supposée homogène.

• L'argument présenté exprime un équilibre entre d'une part l'effet attractif des défauts par la concentration de courant dans leur voisinage, et d'autre part l'effet répulsif de la distribution aléatoire des seuils. Ce dernier effet peut en ce sens être qualifié d'"entropique", alors que le premier est "énergétique". Dans cette acception, l'argument développé ci-dessus peut être rapproché de la méthode de Flory pour les polymères. Dans ce langage, lorsque $\delta = \ell$, la rupture est dominée par l'attraction entre défauts, lorsque $\delta = L$, elle est "entropique" et donc dominée par la répartition aléatoire des seuils de rupture, et finalement pour $\ell < \delta < L$, la fracture résulte d'un compromis entre les contributions énergétiques et entropiques.

Appliquons maintenant les résultats explicités ci-dessus à différentes distributions. Commencons par une distribution des seuils de rupture uniforme sur l'intervalle $[v_0,v_1]$. Dans cas, nous calculons facilement v(I) grace à (5.2.66):

$$v(I) = v_0 + (v_1-v_0)/n(I) \qquad (5.2.69)$$

et donc, en posant $n(I) = 1/(AI^2)$

$$V_c = \min\left\{\frac{v_0+(v_1-v_0)AI^2}{J+I}\right\} \qquad (5.2.70)$$

Il est facile de voir que V_c atteint son minimum pour une valeur finie de I_c,

$$I_c = \sqrt{J^2 - \frac{v_0}{A(v_1-v_0)}} - J \qquad (5.2.71)$$

et donc δ est fini dès que v_0 est strictement positif. Nous sommes donc dans le cas d'une rupture avec endommagement localisé (cf. figure 5.25, centre). Quelque soit la taille du

système (L>δ), le nombre de liens à casser avant une rupture catastrophique est fini et au plus de l'ordre de δ.

Lorsque v_0 tend vers zéro alors I_c s'annule et donc δ diverge. Ainsi pour toutes tailles du système, nous serons contrôlés par la coupure longue, L. Ce cas correspond à la rupture "entropique" citée ci-dessus (figure 5.25, bas). Il est donc crucial d'avoir une distribution de seuils continue ou non jusqu'à zéro. Nous allons revoir ceci pour d'autres types de distribution, comme nous l'avions déjà vu pour le réseau hiérarchique.

Khang et coll. [60] ont étudié numériquement et analytiquement le cas d'une distribution uniforme sur un intervalle. Nos conclusions sont tout à fait cohérentes avec celles qu'ils présentent et que nous rappellerons ci-dessous.

Ayant constaté l'importance du comportement près de zéro de la distribution uniforme, nous considérons maintenant des distributions qui s'annulent à zéro selon une loi de puissance:

$$p(v_c) \propto v_c^{\alpha-1} \qquad (5.2.72)$$

Dans cette famille, nous trouvons par exemple les lois de Weibull, puisque alors $p(v_c) = \exp\{-(\sigma/\sigma_0)^m\}\ m\ \sigma^{m-1}/\sigma_0^m$ et donc au voisinage de zéro un comportement de la forme (5.2.72) avec $\alpha = m$. Nous calculons facilement v(I) grâce à (5.2.66):

$$v(I) = A^{1/\alpha}\, I^{2/\alpha} \qquad (5.2.73)$$

et donc

$$V_c = \min\left\{\frac{A^{1/\alpha} I^{2/\alpha}}{J+I}\right\} \qquad (5.2.74)$$

Deux cas sont alors à distinguer selon les valeurs de α:

• $\alpha<2$: Dans ce cas, le minimum de V_c est atteint pour $I_c = 0$. Et donc en fait, pour un réseau de taille finie, la valeur de I_c est fixée par δ=L. Nous retrouvons donc ainsi le cas précédent de la distribution uniforme continue jusqu'à zéro. La rupture est donc "entropique".

• $\alpha\geq2$: Le rapport $I^{2/\alpha}/(J+I)$ est montré schématiquement en fonction de I sur la figure 5.26. Nous voyons dans ce cas que le minimum, 0, est atteint pour $I_c= 0$ et I_c tendant vers l'infini. Il va de soi qu'alors ce sont les deux coupures en longueur qui vont déterminer le comportement. La coupure inférieure est fixe, $\delta = \ell$ A ce point, $I_c \propto \delta^{-2}$. Connaissant cette valeur, il est possible de calculer Δ, la distance pour laquelle $I_c^{2/\alpha}/(J+I_c)$ sera égal à sa valeur pour une distance δ. Maintenant, si L est inférieur à Δ, alors la rupture sera dominée par la contribution du champ attractif. Elle sera locale, et donc non contôlée. Si L est supérieur à Δ, alors la rupture sera dominée par la contribution entropique. Dans ce dernier cas, nous pouvons poursuivre l'argument comme exposé ci-dessus. Le régime entropique persistera jusqu'à ce que la distance moyenne entre micro-fissures atteigne la valeur Δ. Ceci sera atteint pour une concentration critique en micro-fissures $C^* = (\ell/\Delta)^d$. Pour cette concentration, nous nous attendons donc à transiter brutalement vers un mode de rupture fragile. En fonction du paramètre α, nous voyons donc que la concentration critique qui correspond à la localisation de l'endommagement et à la rupture fragile du système, diminue avec α, et perd son sens pour $\alpha = 2$. Formellement, cette concentration diverge lorsque α s'approche de deux, ce qui signifie clairement que notre argument n'est plus applicable.

Il faut cependant faire preuve de prudence quant à la dernière prédiction concernant l'existence d'une concentration critique finie puisqu'elle suppose une répartition homogène des fissures et néglige les effets d'interactions qui peuvent modifier sensiblement le comportement global comme nous l'avons déjà vu. Il n'en demeure pas moins que la distinction entre les deux régimes, α supérieur ou inférieur à deux, subsiste et mérite une étude numérique directe qui reste à faire.

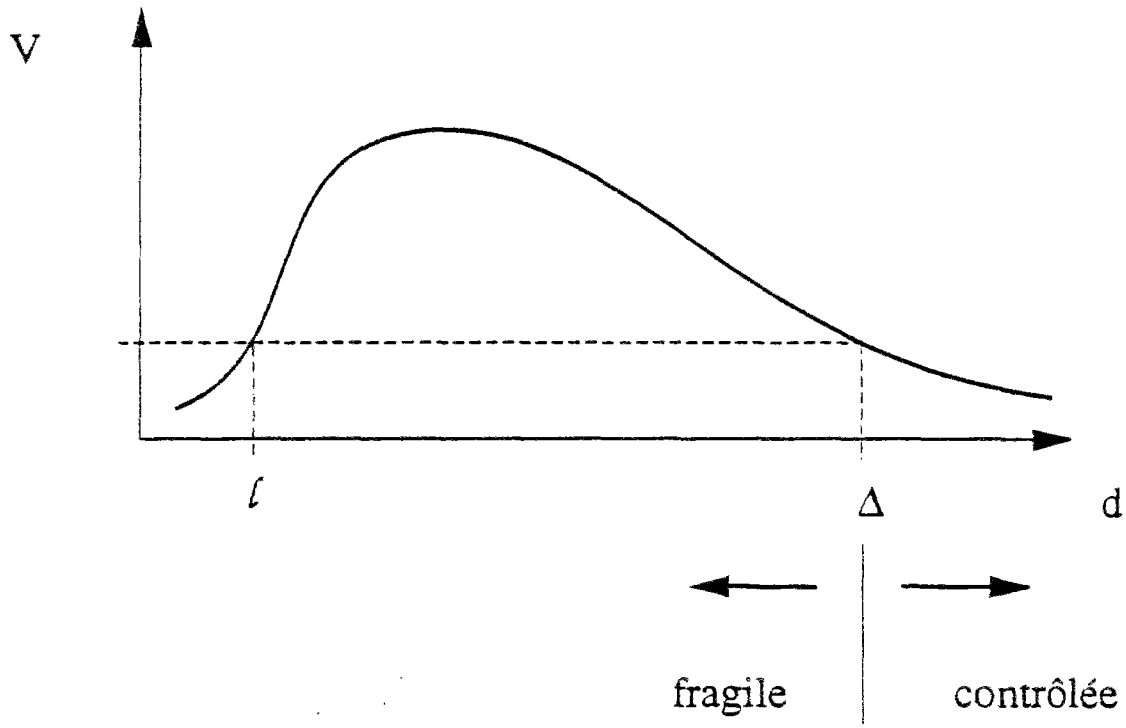


Figure 5.26 : L'argument "à la Flory" appliqué au cas d'une distribution en loi de puissance au voisinage de l'origine, conduit à minimiser la fonction schématisée ci-dessus en fonction de la distance d. Après avoir introduit la distance Δ où le potentiel de rupture est égal à celui de la coupure inférieure, nous pouvons distinguer deux régimes. Si L est supérieur à Δ, la rupture sera "entropique", dominée par le désordre et contrôlée. Si L est inférieur à Δ, la rupture sera fragile.

Nous allons maintenant revenir sur le cas de la distribution uniforme de seuils, et développer l'argument donné par Khang et coll. [60] qui comme nous allons le voir est voisin de l'argument de Flory.

- Distribution étroite de seuils

Dans ce cas, nous qualifions d'étroites les distributions de seuils de rupture, uniformes entre 1-w/2 et 1+w/2, où w est un paramètre libre qui représente la largeur de la distribution. Naturellement, $0 < w < 2$. Pour $w = 0$, nous retrouvons le cas du milieu uniforme homogène. Nous savons que dans ce cas, il suffit de rompre un seul lien, pour que la rupture se propage de façon non contrôlée jusqu'à la rupture complète du réseau. Pour $w = 2$, nous avons une distribution uniforme de 0 à 2. Nous retrouverons cette situation au paragraphe suivant. Khang, Batrouni, Redner, de Arcangelis et Herrmann [60] ont étudié cette situation par simulations numériques.

Ils ont observé une transition entre ce qu'ils ont appelé une rupture "fragile" et une rupture "ductile", lorsque le paramètre w tend vers 2. Les termes de "ductile" et "fragile" se réfèrent à la forme de la caractéristique observée. Le détail de l'algorithme étant similaire à ce que nous avons considéré depuis le début de ce paragraphe, la plasticité n'est bien sûr pas prise en compte dans ce modèle. Nous utiliserons donc la terminologie de "non-contrôlée en tension" pour fragile, et contrôlée en tension pour ductile.

Lorsque w est inférieur à une valeur w_0, la rupture du premier lien est suffisante pour entraîner la ruine complète du réseau, si la tension est maintenue constante. Cette valeur de w_0 peut se calculer exactement à partir de la distribution des potentiels dans un réseau contenant un seul défaut. En particulier, sachant que sur un réseau carré le courant le plus fort qui passe dans un lien du réseau est $4/\pi$ si le courant dans le réseau intact est 1, nous pouvons calculer la largeur de la distribution qui assure la rupture d'un lien voisin. Nous donnons ici simplement la réponse :

$$w_0 = 2(4-\pi)/(2\pi) \approx 0.24 \qquad (5.2.75)$$

Cette valeur quantifie la valeur du champ attractif pour une longueur correspondant à la coupure inférieure ζ la maille du réseau. Dans ce cas, la tension moyenne de rupture de l'ensemble du réseau sera

$$V_b = L \left\{ (1-w/2) + \frac{w}{L^2+1} \right\} \qquad (5.2.76)$$

Le premier terme (1-w/2) indiquant simplement la borne inférieure de la distribution des seuils, et donnant donc le plus fragile, alors que le facteur w/L^2 provient simplement de la distance typique entre deux seuils consécutifs.

Lorsque w dépasse la valeur w_0, il est possible que plusieurs liens puissent être rompus sans pour cela entraîner de rupture non-contrôlée en tension. Cependant, le point essentiel de la discussion proposée par Khang et coll consiste à suggérer que le nombre de liens à casser pour entraîner la rupture à tension imposée, tend vers une constante finie lorsque la taille du système augmente à w fixe. Pour obtenir ce résultat, ces auteurs supposent que les premiers liens cassés seront les plus fragiles, et donc leur situation mutuelle sera décorrélée. Supposant que ces n liens cassés sont loin les uns des autres, nous retrouvons n problèmes indépendants. Appliquant pour chacun d'eux l'argument présenté ci-dessus, nous trouvons aisément que parmi les 2n liens voisins des n ruptures locales, le seuil le plus bas sera de l'ordre de

$$u_{bord}(n) = (1-w/2) + \frac{w}{2n+1} \qquad (5.2.77)$$

De plus, le nième lien le plus fragile sera donné par

$$v_c(n) = 1 - w/2 + nw/L^2 \qquad (5.2.78)$$

Comparant ces deux résultats, nous voyons que la rupture de l'ensemble du réseau se produira lorsque le nombre de liens cassés aura atteint une valeur limite $n_c(w)$. Utilisant le fait que le courant dans le lien adjacent à une rupture locale d'un lien unique est $4/\pi$, nous écrivons que $4/\pi\ v_c(n) = u_{bord}(n)$, soit

$$n_c(w) = \frac{w}{(2-w)} \left\{ \frac{1}{w_0} - \frac{1}{w} \right\} \qquad (5.2.79)$$

Puis afin de préciser la frontière entre régime non-contrôlé en tension, et régime adoucissant, Khang et coll limitent leur argument précédent par la notion d'indépendance statistique entre liens rompus. Cette indépendance est définie de manière *ad hoc* en évaluant le nombre de liens à rompre pour créer pour la première fois un défaut linéaire de longueur 2 (paire de liens adjacents). Ce nombre de l'ordre de L, donne une estimation de la limite de validité de l'argument précédent, à savoir que la rupture sera non-contrôlée pour une valeur de w, qui dépend de la taille du système, et tend vers 2 lorsque L tend vers l'infini. La transition entre le régime adoucissant et le régime non-contrôlé étant fourni par la condition que $n_c(w)$ est toujours dans le domaine des liens rompus indépendants.

Finalement, dans le dernier régime, adoucissant, un argument similaire à celui exprimé par Duxbury et coll. [29, 34-36] donne lieu à un plus grand défaut, avant la rupture finale, dont la taille est proportionnelle au logarithme de la taille du système.

Ces différents arguments sont testés numériquement et un bon accord est obtenu pour le nombre de liens à casser avant la rupture en fonction de la taille du système, ainsi que pour la valeur moyenne des seuils locaux des liens cassés en fonction de leur nombre. Notons finalement, que s'intéressant à la probabilité de rupture en fonction du courant appliqué, un excellent accord est obtenu avec une loi exponentielle d'exponentielle comme suggéré par Duxbury et coll [49].

- Distribution de seuils infiniment large

Dans le cas d'un fort désordre, au début de la rupture, les liens qui cassent sont les plus fragiles, "presque" indépendamment du courant qui les parcourt. Pour reprendre la terminologie précédente, il s'agit de la rupture "entropique". Nous tentons ici de répondre à la question : Dans quelle situation un tel processus sera-t-il légitime jusqu'à la fin du processus ?

Commençons par préciser ce qui se passe dans ce cadre avant d'en arriver à la distribution des seuils qu'il est nécessaire de considérer. Pour pouvoir appliquer cette règle de rupture, il faut que la distribution des seuils de rupture soit à tout instant beaucoup plus large que la distribution des courants. Plus précisément, le rapport entre deux seuils consécutifs doit être tel que

$$\{v_{c\,n+1}/\, v_{c\,n}\} >> (i_{max}/i_{min}) \qquad (5.2.80)$$

soit, si nous prenons une distribution log-uniforme par exemple

$$\log(v_{c\,max})-\log(v_{c\,min}) >> \{\log(i_{max})-\log(i_{min})\}L^d \qquad (5.2.81)$$

Mais pour qu'il en soit ainsi, il faut bien entendu exclure les liens qui ne portent aucun courant. Sinon le terme de droite de l'inégalité précédente diverge. Ceci explique l'usage du terme "presque" que nous avons utilisé ci-dessus. Ainsi, nous pouvons considérer le cas limite de fort désordre comme la rupture progressive des liens les plus fragiles par ordre de seuil de rupture croissant, avec de plus la condition que chaque lien cassé porte un courant non nul.

Mis à part cette dernière clause restrictive, nous aurions reconnu là un processus de percolation, le seuil de rupture des liens donnant simplement l'ordre dans

lequel les liens sont enlevés. Le modèle de rupture dans ce cas sera donc qualifié de *percolation avec écrantage* [66]. En fait, la prise en compte de la condition d'écrantage est possible, sans peine. La raison en est simplement que la coupure d'un lien qui est déjà écranté, ne modifie en rien les propriétés de transport sur le reste de la structure, et donc dans un processus de percolation écrantée, il suffit de considérer une évolution usuelle d'un problème et "oublier" la coupure d'un lien à chaque fois que cette rupture a lieu sur un lien écranté.

Plus quantitativement, nous appelons r la proportion de liens cassés dans la percolation avec écrantage, et q la proportion de liens cassés dans un processus de percolation simple que nous considérons en parallèle avec la même distribution de seuils de rupture. q_c et r_c désignent respectivement pour ces deux paramètres le point de percolation. Nous nous référons maintenant aux propriétés vues au chapitre 2 concernant la percolation usuelle. A une valeur de q donnée, quelle est la proportion de liens écrantés? Pour répondre à cette question, il suffit de noter que les liens qui ne sont pas écrantés portent un courant non nul, et donc, ils font partie du squelette, dont la dimension fractale D_b est connue. Considérons comme habituellement, que le réseau est homogène au-delà d'une échelle ξ donnée par la longueur de corrélation, la proportion de liens non-écrantés, c_a, varie comme

$$c_a \propto \xi^{D_b-d} \tag{5.2.82}$$

ou en fonction de q

$$c_a \propto (q_c-q)^{\nu(d-D_b)} \tag{5.2.83}$$

Si nous coupons une fraction dq de liens dans la percolation usuelle, la proportion dr équivalente sera donnée par

$$\frac{dr}{dq} \propto c_a \qquad (5.2.84)$$

$$\propto (q_c - q)^{\nu(d-D_b)}$$

Cette dernière relation s'intègre immédiatement, donnant

$$(r_c - r) \propto (q_c - q)^{\nu(d-D_b)+1} \qquad (5.2.85)$$

Nous avons donc là, le moyen de relier le paramètre de contrôle de la percolation usuelle, avec celui de la percolation avec écrantage. Nous introduisons donc la notation

$$\lambda = \frac{1}{1+\nu(d-D_b)} \qquad (5.2.86)$$

ou

$$\lambda = \frac{1}{1+\beta_b}$$

où nous avons utilisé $D_b = d - \beta_\beta/\nu$. L'exposant λ joue le rôle d'"accélérateur". En effet, en fonction de l'écart au seuil, les exposants de la percolation usuelle qui concernent des quantités non affectées par l'écrantage sont ici multipliés par un facteur λ. Par exemple, la longueur de corrélation diverge selon

$$\xi \propto (r_c - r)^{-\lambda\nu} \qquad (5.2.87)$$

La conductivité s'annule en fonction du nombre de liens cassés selon

$$G \propto (r_c - r)^{-\lambda t} \qquad (5.2.88)$$

A deux dimensions, utilisant $D_b = 1.62$ [68], nous obtenons $\lambda = 0.66$. A trois dimensions, $D_b = 1.75$ [69], d'où $\lambda = 0.47$. A la dimension critique supérieure de ce problème, d = 6, nous obtenons $\lambda = 1/3$.

Pour les quantités géométriques, il faut prendre garde à ce que les liens non coupés n'affectent pas les propriétés considérées. Ainsi, par exemple, la dimension fractale de l'amas infini est certainement réduite, alors que l'application immédiate des règles données ci-dessus conduirait à $D' = d - \lambda\beta/\lambda\nu = d - \beta/\nu = D$ soit une dimension fractale inchangée.

Une autre conséquence de notre calcul concerne les propriétés étudiées au seuil de rupture, en fonction de la taille du système. Ainsi, la conductivité moyenne, <G>, en fonction de la taille du système, L, juste avant la rupture varie comme

$$<G> \propto L^{-t/\nu} \qquad (5.2.89)$$

soit comme en percolation. De même, la distribution des courants locaux juste avant la rupture, est multifractale, et elle est caractérisée par le même spectre qu'en percolation.

Cette dernière propriété peut nous permettre de quantifier plus précisément la condition (5.2.81). Pour un réseau de taille L, nous savons qu'au seuil de rupture, le rapport entre le courant le plus fort et le plus faible (non nul) est donné simplement par

$$\log(i_{max}) - \log(i_{min}) = (\alpha_{max} - \alpha_{min}) \log(L) \qquad (5.2.90)$$

où α_{max} et α_{min} sont les deux valeurs extrêmes du spectre multifractal. Dans ces conditions, la largeur de la distribution des seuils de rupture doit satisfaire

$$\log(v_{c\,max}) - \log(v_{c\,min}) >> (\alpha_{max} - \alpha_{min}) \log(L)\, L^2 \qquad (5.2.91)$$

ou

$$\frac{v_{c\,max}}{v_{c\,min}} >> L^{(\alpha_{max} - \alpha_{min})} \exp(L^2)$$

Ainsi la distribution doit être exponentiellement large avec la taille du système. Ceci est d'autant plus vrai que la différence (α_{max}-α_{min}) augmente apparemment avec la taille du système et qu'il a été conjecturé [70] qu'elle divergeait avec L. Quoiqu'il en soit, cette divergence est négligeable devant le terme en exponentielle de L^2.

Nous pouvons reformuler le problème comme pour le cas d'un réseau dont la conductivité locale est distribuée selon une loi exponentiellement large. Partons d'un réseau de taille donnée, et d'une distribution de seuil $v_c = \exp(A\ x)$, où les nombres x sont distribués selon une loi quelconque fixée d'avance. Lorsque A tend vers l'infini, la rupture du réseau s'exprime sous la forme d'un problème de percolation avec écrantage. Inversement, nous pouvons aussi considérer des distributions selon une loi de puissance: la probabilité de v_c, $p(v_c)$ étant singulière au voisinage de 0, $p(v_c) \sim v_c^{-x}$. Lorsque l'exposant x tend vers 1, nous retrouvons la percolation avec écrantage. Ceci justifie le qualificatif d' "infiniment désordonné" utilisé pour qualifier de telles situations.

Quelle est la caractéristique de réseaux constitués d'éléments à seuil ainsi distribué? Il va de soi que dans cette situation, la densité de courant I/L^{d-1} et la tension V/L de rupture globale sont imposées par les seuils locaux. Ces deux quantités suivront sensiblement la même loi que la distribution cumulée des seuils locaux. La rupture sera ici toujours contrôlée, aussi bien en potentiel qu'en courant! Il s'en suit que V/L et I/L^{d-1} tendent vers une constante avec la taille du système tant que le modèle de percolation avec écrantage est applicable (cf. équation 5.2.81).

Avant de clore ce sujet, il est intéressant de noter que la notion d'écrantage a déjà été introduite dans d'autres contextes pour des modèles de percolation. En l'occurence, il s'agit de percolation d'invasion introduite par Wilkinson et Willemsen [11], lorsqu' un fluide envahit de façon très lente un milieu poreux rempli d'un autre fluide immiscible. La prise en compte de l'incompressibilité du fluide envahi impose de limiter la croissance possible aux seuls sites qui ne sont pas écrantés. Cependant, il est possible de relier la percolation d'invasion sans contrainte d'écrantage à la percolation

usuelle [12]. De la même façon, nous nous attendons ici à pouvoir comparer les deux phénomènes. Ainsi, par exemple, la dimension fractale de la fracture doit être comparable à celle de l'amas envahi, soit à deux dimensions, D = 1.81± 0.02, comme obtenu par Furuberg et coll [71]. Rappelons que cette dimension ne peut pas être directement obtenue à partir de la correspondance que nous avons établie avec la percolation usuelle, car l'"oubli" des liens écrantés modifie les propriétés de connexité.

Avant de passer, à un désordre différent, (distribution intermédiaire), notons que nous obtenons sur réseau Euclidien l'une des bornes que nous avions indiquée pour le modèle hiérarchique, à savoir un processus de percolation.

- distribution de seuils intermédiaire

Entre le cas d'une distribution infiniment large et uniforme sur un intervalle fini, existe une foultitude de cas intermédiaires. Notre propos n'est bien entendu pas de couvrir de façon exhaustive ces distributions, mais de citer quelques résultats obtenus dans la littérature.

Nous allons ici considérer essentiellement les travaux numériques de de Arcangelis et Herrmann [62] sur les réseaux de fusibles, et en parallèle, les simulations effectuées sur deux problèmes mécaniques de rupture fragile: d'une part un treillis réticulé [63] et d'autre part un réseau de poutres encastrées [64]. Nous nous étendrons essentiellement sur le cas électrique. Le lecteur interessé par les aspects spécifiquement mécaniques est priés de se reporter aux références ci-dessus. Quoiqu'il en soit, les obsservations sur le cas électriques sont tout à fait comparables au cas électrique, mais la difficulté numérique légèrement moindre pour ce dernier problème permet de pousser les calculs sur des gammes de tailles plus importantes, (facteur ici crucial).

Les distributions étudiées sont les suivantes,

- $p(v_c)$ est une loi de puissance pour v_c compris entre 0 et 1, et
- $p(v_c)$ est une loi de Weibull, avec un module compris entre 2 et 10

Les lois de puissance sont choisies telles que $p(v_c) = (1-x)\ v_c^{-x}$, où $x<1$, et v_c est dans l'intervalle [0,1]. Dans le cas $x = 0$, nous retrouvons la situation précédente (cf. argument de Flory et simulation de Khang et coll. [60]) qui conduisait à un régime adoucissant, mis à part un facteur d'échelle de 2 sur le seuil. Comme dans ces modèles, il n'existe pas d'échelle de seuil autre que celle donnée par la distribution elle-même, ces deux distributions sont équivalentes.

L'approche suivie était cette fois-ci, purement numérique. L'ensemble des caractéristiques obtenues pour une taille et une distribution données, peut être mis sous la forme de plusieurs séries indexées par n, le nombre de liens rompus. Ces séries comprennent

- la tension de rupture globale, $V_c(n)$
- le courant de rupture global, $I_c(n)$
- la conductance G(n)
- le courant local dans le lien rompu pour une tension globale unité, $i_c(n)$
- la distribution complète du courant dans l'ensemble du réseau.
- etc...

Dans toutes ces simulations, ces quantités ont été moyennées sur différentes réalisations. Disposant donc d'une série de fonctions de n, pour différentes tailles de système, l'approche suivie a été de rassembler ces données sous la forme de lois uniques à un désordre donné. Pour ce faire, différentes transformations sur les paramètres mesurés ont été essayées, et finalement des résultats tout à fait satisfaisant ont été obtenus en définissant des variables réduites:

- Potentiel global réduit $U=V_c/L^{\alpha}$
- Intensité globale réduite $J=I_c/L^{\beta}$
- Nombre de liens rompus $m=n/L^{\gamma}$

Sous cette forme, la caractéristique $V_c(I_c)$ peut s'écrire

$$U = \Phi(J) \qquad (5.2.92)$$

forme qui correspond à la loi d'échelle

$$V_c/L^{\alpha} = \Phi(I_c/L^{\beta}) \qquad (5.2.93)$$

De même, la conductance (comme la tension ou l'intensité réduites) s'exprime en fonction du nombre de fusibles brûlés selon

$$G = \Psi(m) = \Psi(n/L^{\gamma}) \qquad (5.2.94)$$

où Ψ est une fonction unique dépendant simplement du désordre, (i.e. de la distribution des seuils). Ces transformations font intervenir des exposants α, β, γ... qui peuvent se comparer à des exposants critiques dans le domaine des transitions de phase. Les exposants apparaissent assez peu sensibles aux différentes formes de distributions choisies. Quantitativement, α varie de 0.80 à 0.92, ces deux valeurs extrêmes étant atteintes pour la loi de puissance avec un exposant -0.5 au voisinage de zéro, et la distribution de Weibull avec un module m= 10, respectivement. β varie entre 0.83 et 0.88, et γ entre 1.70 et 1.85. Ces valeurs et les formes mêmes des lois d'échelle obtenues, sont incompatibles avec les lois de Duxbury et coll. [29, 34-36, 44-49] dans le cas de la dilution.

Il convient également de remarquer que ces lois ne sont valables que jusqu'au maximum du courant supporté par le réseau, ou parfois avant. Au-delà de cette valeur, les caractéristiques ont tendance à s'"effondrer" brutalement, ressemblant en cela de plus en plus à la caractéristique locale, lorsque la taille du système augmente. Dans le cas où le maximum du courant supporté fait encore partie du régime bien décrit par les lois d'échelle, nous savons que le nombre de liens rompus à ce point, augmente avec la taille du système selon la loi de puissance

$$n \propto L^{\gamma} \qquad (5.2.95)$$

puisque m est constant. La valeur de l'exposant γ, inférieure à 2, implique que la concentration en défaut au point de rupture catastrophique en courant tend vers zéro. Plus généralement, la loi de puissance (5.2.95) est presque toujours trouvée, mais lorsque les lois d'échelle (5.2.93) n'incluent pas le maximum de la caractéristique, l'exposant γ de la relation (5.2.95) est inférieur à celui trouvé dans (5.2.94). Pour une loi de Weibull avec $m = 10$, $\gamma = 0.95$, alors que pour $m = 5$, $\gamma = 1.36$. Il en est d'ailleurs de même du point de rupture ultime, i.e. lorsque le milieu est coupé en deux parties disjointes.

Si l'on remarque que les premiers liens rompus, le seront par ordre de résistance croissante, il semble légitime de décrire ce tout premier stade de la rupture par une dilution aléatoire. Dans ce cas, nous savons que la conductance, pour un petit nombre de liens cassés, n, suivra une décroissance linéaire avec n. Si nous imposons maintenant que ce premier stade soit bien décrit par les lois d'échelle introduites précédemment, nous obtenons simplement des relations entre les trois exposants α, β et γ.

$$\alpha = \beta = \gamma - 1 \qquad (5.2.96)$$

Ces relations sont raisonnablement vérifiées numériquement dans les cas de fort désordre.

Un dernier résultat important a été obtenu dans ces études. Il concerne la distribution des courants. Deux points particuliers ont été choisis: le premier est le point de rupture non-contrôlée en courant, et le second est le point de rupture ultime. L'évolution des moments de la distribution des courants avec la taille du système révèle que le premier point ne présente pas de caractère multifractal. Tous les moments suivent la même loi de variation. En revanche, le point de rupture ultime, montre une distribution de courant multifractale, dont chaque moment est gouverné par un exposant différent (cf.

Chapitre 2). L'analyse plus détaillée des données montre que le support du courant est de dimension deux. Le squelette n'est pas fractal. Les moments les plus élevés ont un support dont la dimension fractale est de l'ordre de zéro. Ceci signifie dans la pratique, qu'un seul lien (voire quelques uns) supporte un très fort courant. Il ne semble pas que le spectre multifractal soit pour autant réduit à deux singularités, comme ce serait le cas pour la rupture d'un milieu homogène. Celui-ci comporte naturellement un point correspondant à l'ensemble du réseau, de coordonnées dans le plan (f,α): $f = 2$, $\alpha = 1$ et un point, pour les courants les plus forts, de coordonnées $f = 0$ et $\alpha = 0$. (Il va de soi que ce α n'a aucun rapport avec l'exposant qui intervient dans la définition de la tension réduite.)

Les deux problèmes mécaniques correspondants donnent des résultats très comparables. Citons pour mémoire les exposants obtenus, dans la correspondance tension-déplacement, courant-force:

- pour le réseau de forces centrales (treillis réticulé) [63]:

$$\alpha = \beta = \gamma - 1 = 0.68 - 0.77 \qquad (5.2.97)$$

- et pour le réseau de poutres encastrées [64]:

$$\alpha = \beta = \gamma - 1 = 0.65 - 0.85 \qquad (5.2.98)$$

Pour conclure ce paragraphe, résumons en quelques mots. L'analyse des simulations a révélé des lois d'échelle qui rendent compte de l'effet de taille, à un désordre donné. Ces lois d'échelle décrivent la plus grande partie de la caractéristique. Les valeurs des exposants intervenant dans la définition des variables réduites semblent extrèmement stables vis à vis du désordre, et du modèle considéré, électrique ou mécanique. Enfin, l'existence d'un spectre multifractal au point de rupture ultime suggère qu'il s'agit peut-être là d'un point critique.

- Comparaison avec le réseau hiérarchique diamant

Le processus de rupture apparaît en trois stades :

- le premier correspond à l'initiation de ruptures locales indépendantes, similaire à un processus de dilution aléatoire.
- puis apparaît un régime où la distribution des courants entre en "compétition" avec le désordre dans les seuils locaux. Dans ce régime, des lois d'échelle sont observées qui rendent compte de l'effet de taille de façon non triviale.
- puis finalement un dernier régime gouverne la rupture finale du milieu. Ce dernier régime est similaire à celui qui se passe dans un milieu homogène.

Le second stade est le plus original. Il est cependant très difficile d'abord théorique, et c'est la raison pour laquelle, les approches analytiques faites dans ce problème ont toujours supposé implicitement un passage brutal du premier au dernier stade. Il se trouve en effet que les deux limites de fort et de faible désordre ne laissent pas paraître l'existence de ce régime intermédiaire. Le fort désordre en reste toujours au premier stade, alors que le faible désordre correspond à de très petits régimes 1 et 2.

Nous avons vu pour le réseau hiérarchique que l'intensité maximum supportée par le réseau était comprise entre deux limites. L'une correspondant à un régime de percolation, pour un très fort désordre, et l'autre étant donnée par la construction des chemins minimaux. Nous avons également vu que dans le cas d'un très faible désordre, la rupture était dictée par le lien le plus faible.

Pour les réseaux Euclidiens, nous avons vu le cas d'une distribution très étroite où nous obtenons une résultat similaire à celui évoqué ci-dessus. Puis dans le cas d'un très fort désordre, nous sommes conduits également à une situation de type percolation. Restent finalement à comparer les distributions intermédiaires. Si l'on se fonde sur la convergence des caractéristiques vers une loi bien définie, nous nous

attendons à trouver une situation dictée par les lois d'échelle des chemins minimaux. Ainsi à deux dimensions,

$$I_c/L \propto A + BL^{-2/3} \qquad (5.2.99)$$

Cette loi est de fait voisine de celle obtenue de manière empirique par de Arcangelis et coll. [61]. Si l'on suppose que la correction B est assez faible, I_c doit varier linéairement avec L. Cela se compare favorablement avec la tendance marquée à un exposant de l'ordre de l'unité pour les faibles désordres. Lorsque le désordre augmente, il est vraisemblable que la combinaison $AL+BL^{1/3}$ conduise à une loi de puissance apparente avec la taille du système dont l'exposant est plus faible que 1.

De plus il est possible qu'entre les deux cas extrêmes, existent des comportements intermédiaires caractérisés par des lois de puissance similaires. Il semble alors raisonnable d'attendre une loi intermédiaire entre percolation et chemins minimaux. Soit, en ne gardant que les termes dominants,

$$C/L < I_c/L < A \qquad (5.2.100)$$

Les lois observées par de Arcangelis et coll. [61-64] satisfont bien à cette condition, puisque $I_c/L \propto L^{\beta-1}$, avec $\beta < 1$. Pour faire le parallèle avec notre discussion des chemins minimaux sur réseau diamant, ces lois intermédiaires, si elles existent, correspondent aux distributions de Lévy pour le problème de la somme de nombres aléatoires.

Dans cette comparaison, nous avons pour l'instant négligé le cas de la dilution discuté par Duxbury et coll.. Les simulations directes de ce type de désordre sur réseau hiérarchique indiquent que ce problème se comporte de manière qualitativement similaire. Ceci suggère de réanalyser les données de Duxbury dans cette perspective. C'est dans cet esprit que nous avons tenté de montrer dans la figure 5.6 que les données

numériques publiées étaient compatibles avec d'autres lois comme par exemple la relation 5.2.99. En effet, nous avons extrait de leurs courbes I/L fonction de L, celle qui montrait l'évolution de I_c/L la "plus variable" possible. En effet, sinon toutes formes correctrices à un terme constant donnent un bon accord avec les données. Nous avons donc considéré le cas de la dilution à 60% (Figure 12b de la référence [29]). Nous avons extrait de leurs données la loi de la forme qu'ils proposent, qui rend le mieux compte des résultats, soit $I/L = 1/(0.21+ 6.79 \log(L))$. Puis nous avons tracé cette loi supposée exacte en fonction de $L^{-2/3}$. Dans la gamme de taille 6 à 200, il apparaît impossible de distinguer cette courbe d'une droite. Ainsi, en pratique, il est exclut de pouvoir trancher directement en utilisant ce type de représentation. Une réponse plus nette peut éventuellement être apportée en considérant les fluctuations autour de la valeur du seuil effectif. En effet, nous escomptons, si la notion de chemin minimal s'applique, que ces fluctuations diminuent lorsque la taille du système augmente selon la même loi de puissance $L^{-2/3}$ que les corrections. Cette prédiction, sans constante inconnue peut sans doute être testée directement. Nous ne disposons pas encore de données sur ce point. La différence de comportement observée sur réseau hiérarchique entre le cas dilué et les distributions aléatoires de seuils méritent certainement des éclaircissements ... qui restent à expliciter!

Avant de passer à une nouvelle propriété originale, observée tant dans le modèle hiérarchique que sur réseaux Euclidiens, il nous faut ouvrir une parenthèse.

- Un fantôme de la multifractalité

Supposons que nous partions d'un réseau de résistances (et non de fusibles) intact, i.e. à $p = 1$. Entre deux bords de ce réseau est appliquée une tension V=1. Nous dégradons *alétoirement* ce réseau pour aller jusqu'au seuil de percolation. Cependant, à chaque fois qu'un lien est choisi, avant de le couper, nous enregistrons le courant i qui le traverse. Quelle est la forme de la distribution des courants i que nous avons intégrée

entre p= 1 et p= p_c ? La réponse à cette question a été apportée récemment [72]. Il se trouve que cette distribution peut être simplement reconstruite à partir du spectre multifractal de la distribution de l'ensemble des courants circulant dans le réseau lorsque nous sommes exactement au seuil de percolation. Curieusement, cette procédure, qui ne nécessite pas de connaissance *a priori* du seuil de percolation, permet d'avoir accès à des informations spécifiques du régime critique. Nous ne redériverons pas la construction qui permet d'obtenir la distribution, mais nous nous bornerons à citer le résultat: La distribution, n(i), des courants circulant dans les liens coupés entre p = 1 et p = p_c est constituée de deux lois de puissance, l'une à fort courant, et l'autre à faible courant. La séparation entre ces deux régimes a lieu pour le courant, i_0, qui passe dans les liens du réseau lorsqu'il est intact.

$$n(i) \propto i^{-\varphi_+} \qquad \text{pour } i > i_0 \qquad (5.2.101)$$

et $$n(i) \propto i^{\varphi_-} \qquad \text{pour } i < i_0$$

Les deux exposants, φ_+ et φ_-, sont obtenus en traçant les deux tangentes au spectre multifractal, dans le plan (f, α), à partir du point de coordonnées f = d+1/ν, et α =1. d est la dimension de l'espace et ν est l'exposant de la longueur de corrélation. (Notons qu'un facteur additionel de 1, dans l'expression de f citée dans la référence [72], est erroné).

Le problème tel que nous l'avons présenté, semble tout à fait académique. Cependant, ce n'est qu'un exemple, et le même type de résultat peut être adapté pour tout phénomène qui tend vers un point critique, lorsque l'on considère une quantité qui présente un caractère multifractal. Un exemple plus réaliste est fourni par l'étude des sauts de conductivité dans le même problème de dilution entre p = 1 et p = p_c. En effet, la conductivité d'un réseau varie de façon d'abord quasi-continue, puis par paliers successifs lorsque l'on se rapproche du seuil. La distribution des sauts de conductivité entre chaque lien enlevé, intégrée entre p=1 et p_c, présente le même caractère de distribution à deux lois de puissance. Khang et coll. [73] et J.N. Roux et Wilkinson [74] ont observé ces distributions respectivement à deux et trois dimensions, par simulations

numériques. Cette propriété découle simplement ici encore de l'existence d'une distribution multifractale de sauts de conductivité, lorsque l'on est exactement au seuil de percolation [75]. Ceci peut s'inférer de la dépendance du saut de conductivité avec le courant qui parcourt le lien à couper. Plus l'intensité i sera forte, plus la différence entre les deux conductivités ΔG __ entre avant et après que l'on ait coupé le lien __ sera grande. Cependant, cet argument est purement qualitatif, et toute tentative de formalisation de celui-ci se heurte à la non-linéarité de la fonction qui relie i à ΔG. Notons également qu'il en va de même pour les sauts de résistance.

Nous pouvons maintenant refermer cette parenthèse pour traduire cette propriété pour notre problème de rupture. Nous nous référerons à cette propriété sous le nom de *"fantôme de multifractalité"*.

- Sauts de résistance et de conductance

Nous avons vu que dans le cas de certaines distributions de seuils de rupture, la distribution des courants au point ultime de rupture était multifractale. Dans ce cas, nous nous attendons à ce que la distribution des sauts de conductance le soit également. Dès lors, si nous voyons la rupture comme un phénomène critique qui se développe pour atteindre son point critique juste à la rupture ultime, il est tentant de suggérer que la distribution des sauts de conductance et de résistance pourrait présenter la forme précédente (5.2.101).

Certaines simulations numériques préliminaires __ effectuées avec Hansen et Hinrichsen __ montrent effectivement de telles propriétés pour les réseaux Euclidiens.

Dans le cas du réseau hiérarchique, nous obtenons encore le même type de propriété. La figure 5.27 montre la distribution cumulée des sauts de conductance pour une distribution de seuils uniforme entre 0 et 1, et des réseaux à la septième génération. Les deux distributions cumulées soit à partir de $\Delta G = 0$, $N_1(\Delta G) = \int_0^{\Delta G} n(x)dx$, soit jusqu'à l'infini, $N_2(\Delta G) = \int_{\Delta G}^{\infty} n(x)dx$, tracées en coordonnées logarithmiques en fonction

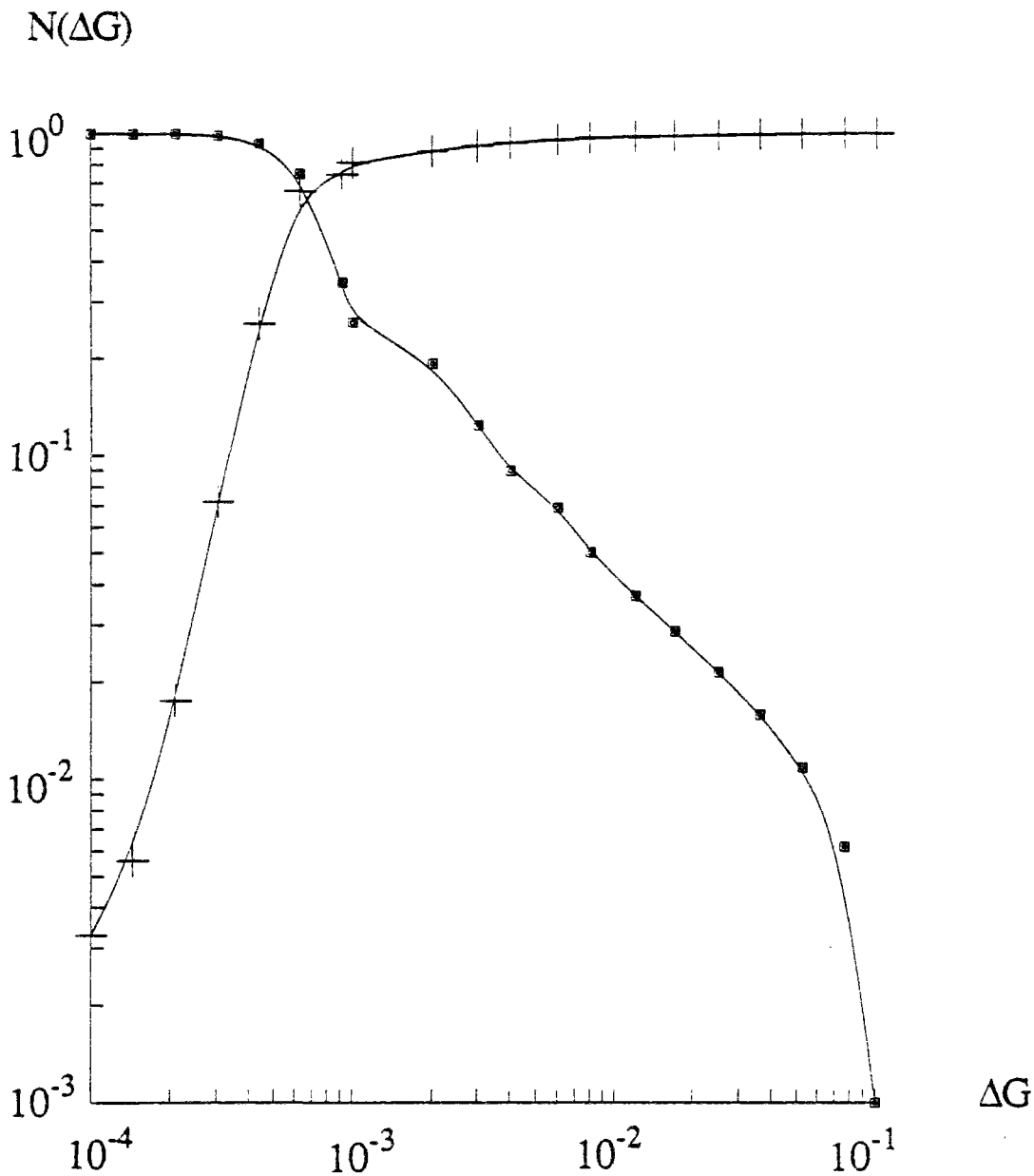


Figure 5.27 : Histogrammes cumulés des sauts de conductance au cours de la rupture, en coordonnées bi-logarithmiques. L'un représente la distribution cumulée à partir de zéro jusqu'au point courant, et le second la distribution cumulée du point courant jusqu'à l'infini. Ces histogrammes ont été enregistrés à la septième génération du réseau hiérarchique diamant, pour une distribution uniforme de seuils de rupture. Les deux lois de puissance sont caractéristiques du développement d'une distribution multifractale.

de log(ΔG), montrent bien les deux lois de puissance attendues. Nous obtenons deux exposants φ_+ et φ_-, pour ΔG,

$$\varphi_+ = 1.84 \qquad (5.2.102)$$
$$\varphi_- = 2.5$$

La figure 5.28 montre les distributions cumulées de sauts de résistance. Comme nous pouvons le voir sur la figure, seul l'exposant φ_+ est mesurable:

$$\varphi_+ = 1.57 \qquad (5.2.103)$$

Pour tester la stabilité de ces résultats, nous avons effectué un calcul similaire pour une autre distribution de seuils singulière en 0, $p(v_c) \propto v_c^{-1/2}$. Nous obtenons dans ce cas, pour les sauts de conductance:

$$\varphi_+ = 2.01 \qquad (5.2.104)$$
$$\varphi_- = 1.17$$

et pour les sauts de résistance

$$\varphi_+ = 1.68 \qquad (5.2.105)$$

L'exposant qui varie le plus entre ces deux exemples de distribution est l'exposant φ_-, mais l'on sait que les lois d'échelle sur les moments négatifs ont parfois des comportements pathologiques. Nous n'accorderons donc pas de poids trop important à cette variation. Les deux exposants relatifs aux grands sauts de résistance et de conductance semblent beaucoup plus stables, et à la précision de nos mesures, il n'est pas exclut qu'ils se stabilisent à une même valeur pour des systèmes de plus grande taille.

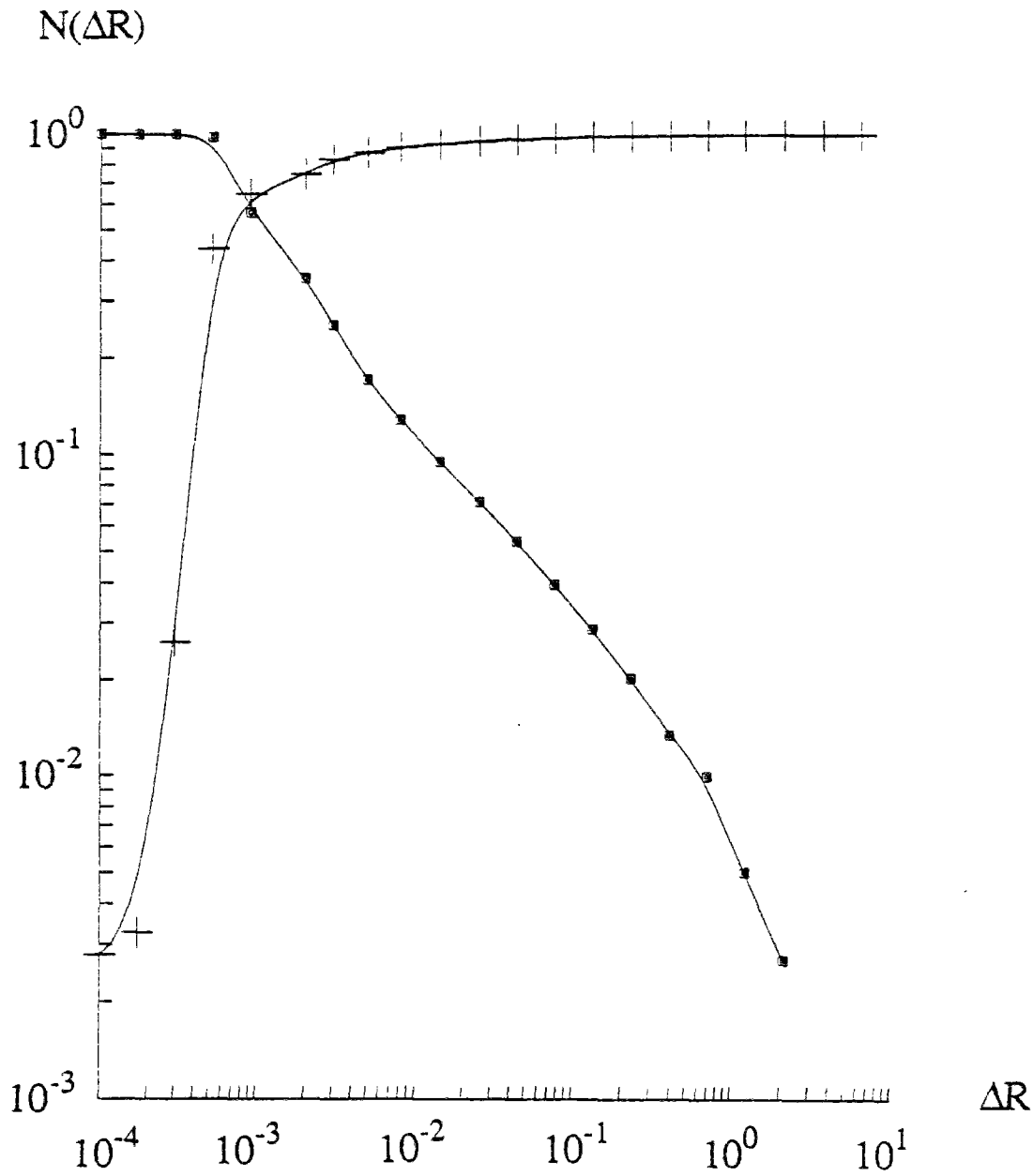


Figure 5.28 : Histogrammes cumulés des sauts de résistance au cours de la rupture, en coordonnées bi-logarithmiques. L'un représente la distribution cumulée à partir de zéro jusqu'au point courant, et le second la distribution cumulée du point courant jusqu'à l'infini. Ces histogrammes ont été enregistrés à la septième génération du réseau hiérarchique diamant, pour une distribution uniforme de seuils de rupture. Les deux lois de puissance sont caractéristiques du développement d'une distribution multifractale.

Pour proposer une comparaison avec un cas plus simple, nous pouvons citer les valeurs des exposants φ_+, obtenus en percolation sur réseaux Euclidiens à deux dimensions: les sauts de conductance ont un exposant

$$\varphi_+ = 1.78 \qquad (5.2.106)$$

et les sauts de résistance

$$\varphi_+ = 1.63 \qquad (5.2.107)$$

Ces exposants semblent donc remarquablement stables. Cependant, rappelons que la topologie du réseau est importante pour la détermination d'exposants critiques, et en ce sens, la comparaison ne doit indiquer qu'un ordre de grandeur.

La transposition au cas mécanique est triviale: l'histogramme des sauts de module élastique (ou de souplesse) doit suivre une loi de puissance, caractérisée par un exposant universel. Cette loi est particulièrement simple et devrait être aisément observable expérimentalement sur des matériaux fragiles. Peut-être la voie d'étude la plus simple, mais malheureusement indirecte, consisterait-elle à étudier le spectre d'émission de bruit, lors de l'endommagement.

Sans anticiper sur la suite disons que *dans tous les modèles* que nous avons étudiés, l'histogramme de ces sauts présente un tel caractère. Il s'agit semble-t-il d'un résultat nouveau et original, dont nous voudrions souligner ici le caractère fondamental, en relation avec le caractère critique de la rupture.

5.2.4 Cas d'une fissure unique

Parmi les multiples difficultés que nous rencontrons dans la modélisation de la fracture, l'une d'elles est la prise en compte des interactions entre différentes fissures, et la nucléation de nouvelles. Aussi est-il intéressant d'essayer de cerner l'influence de ce facteur, en limitant, de façon artificielle, le nombre de fissures. Nous allons présenter ici rapidement quelques tentatives préliminaires faites en ce sens, en considérant la croissance d'une fissure unique avec un désordre gelé. Ceci nous permettra, de plus, de faire le lien avec certains modèles à désordre recuit, où cette contrainte de connexité est naturellement considérée, comme le DLA, ou encore le modèle de rupture de diélectrique sur lesquels nous aurons l'occasion de revenir dans la section prochaine.

Plus précisément, nous gardons les mêmes règles que précédemment, (i.e. en introduisant une distribution de seuils de rupture locaux), mais en ajoutant la contrainte impérative de préserver le caractère connexe de la fissure générée. Ainsi nous calculons le minimum sur tous les liens ij situés sur la frontière de la fracture du rapport (cf. Eq. 5.2.62)

$$V_c = \min_{ij} \{ v_{ijc}/(|u_i - u_j|) \} \qquad (5.2.108)$$

La fracture est initiée au centre du réseau.

- Réseau hiérarchique

Maintenant que nous avons spécifié les règles du modèle, voyons quelques résultats obtenus sur le réseau hiérarchique.

La procédure de calcul est tout à fait similaire au cas précédent, à ceci près que l'on implémente la condition de connexité de la fracture. Pour des raisons de simplicité, nous avons en fait considéré le problème dual, où les liens deviennent supraconducteurs après avoir atteint un seuil critique. Initialement, les seuls liens

susceptibles de devenir supraconducteurs, sont ceux qui sont attachés à un sommet du réseau, où le potentiel est fixé à zéro. Une différence de potentiel est imposée avec le nœud opposé. Au fur et à mesure que la "fracture" se développe, la résistance chute. Finalement, la rupture est complète lorsque la résistance est nulle, i.e. lorsque l'amas a atteint le sommet opposé à son point d'initiation.

Nous avons enregistré le nombre moyen de liens contenus dans l'amas en fonction de la génération du réseau, n. Nous obtenons généralement une loi de puissance avec la taille $L = 2^n$, qui nous permet de définir une dimension fractale D_f :

$$N \propto L^{D_f} \qquad (5.2.109)$$

La figure 5.29 montre un tel exemple de comportement, pour une distribution de seuil uniforme entre 0 et 1. La dimension fractale mesurée vaut alors 1.15. Le tableau suivant donne quelques dimensions fractales mesurées en fonction de l'exposant α de la singularité de la distribution des seuils, $p(v_c) \propto v_c^{-\alpha}$.

α	D_f
-1	1.08
0	1.15
0.25	1.21
0.5	1.25
0.75	1.32
1⁻	1.60

Nous voyons que cette dimension augmente avec la force de la singularité. Nous avons indiqué dans le tableau ci-dessus le cas limite $\alpha = 1$. Il va de soi qu'une telle limite ne doit pas être abordée directement, car la distribution de seuil n'est plus à proprement parler une distribution de probabilité (elle n'est pas normalisable). En fait il s'agit là

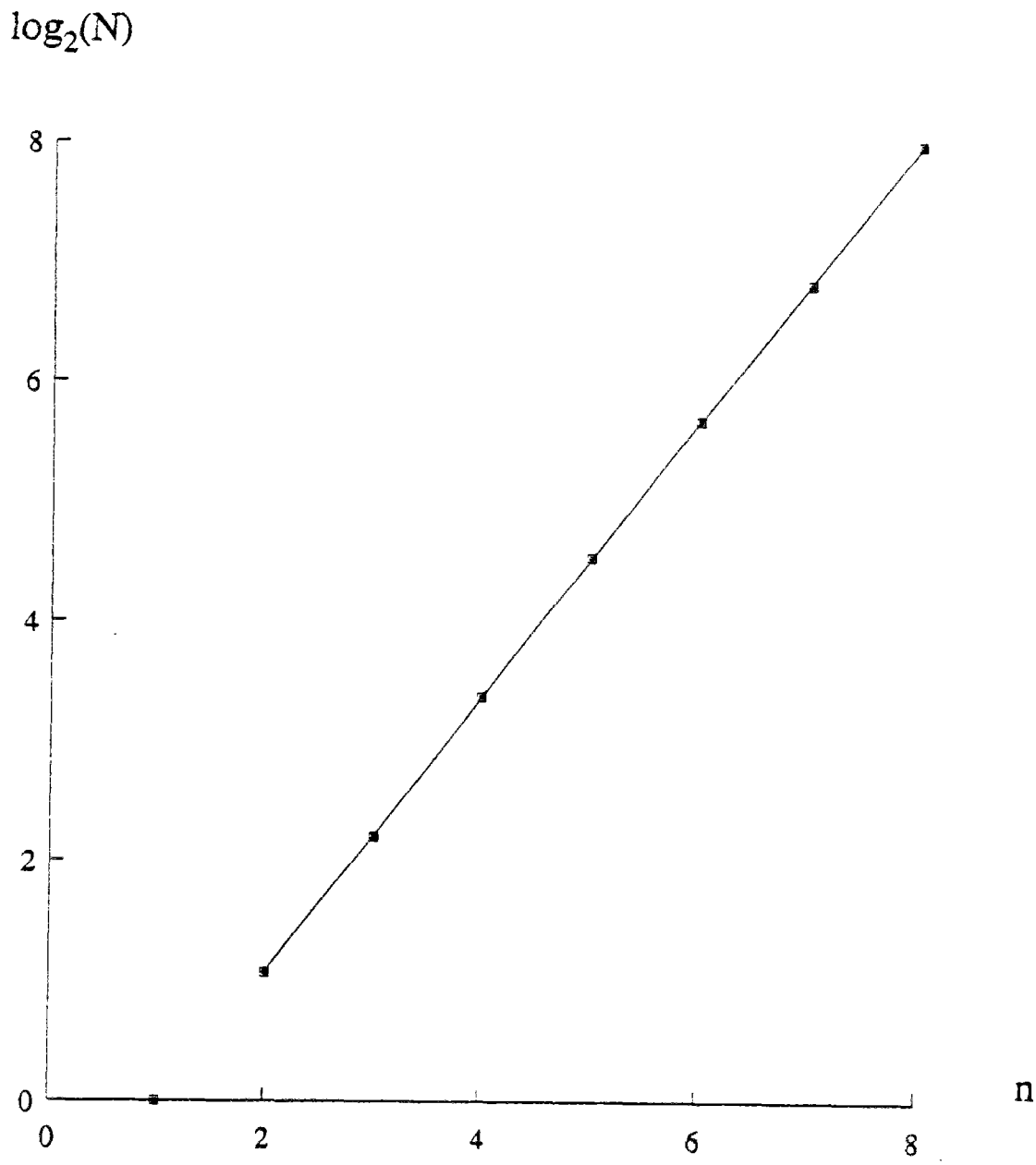


Figure 5.29 : Logarithme du nombre moyen de liens cassés, $\log_2(N)$, dans le modèle de fracture unique à distribution de seuil uniforme, en fonction de la génération, n, du réseau hiérarchique. La régression linéaire montrée a une pente qui correspond à une dimension fractale de 1.15.

d'une situation que nous avons rencontrée précédemment: la limite de désordre "infini". Dans ce cas, seule la distribution des seuils est importante, et l'on peut "oublier" le courant porté par les liens, dans la mesure où il n'est pas strictement nul. Le lien qui devient supra-conducteur à chaque pas de temps, est celui qui réalise le minimum des seuils sur l'ensemble des liens susceptibles d'être ajoutés à l'amas. Nous reconnaissons là la percolation d'invasion, avec écrantage. Nous savons que l'amas généré est dans ce cas fractal, et pour un réseau Euclidien à deux dimensions, sa dimension fractale est 1.81 [11,71]. Pour le réseau hiérarchique, nous obtenons une dimension fractale de 1.6 comme le montre la figure 5.30.

Une autre propriété importante concerne l'évolution des propriétés de transport au cours de la rupture. Comment varie la résistance, R, avec le nombre, N, de liens supraconducteurs ? La chute de résistance, peut être reliée à une taille effective d'amas. En effet, nous pouvons comparer cette chute à celle que produirait un amas compact, et obtenir ainsi une taille effective. Si cette taille effective est comparable (en cours de croissance) à la variation que nous obtenons en considérant le processus fini, nous obtenons la relation suivante

$$1\text{-}R \propto N^{\delta} \qquad (5.2.110)$$

où l'exposant δ est relié à la dimension fractale D_f par $\delta = 2/D_f$. La figure 5.31 montre log(1-R) en fonction de log(N), et une droite de pente $2/D_f$ pour comparaison, pour le cas de la distribution uniforme, sur réseau hiérarchique à la cinquième génération. L'accord est satisfaisant. Il indique donc que le développement de la fracture est bien auto-similaire, et que la loi (5.2.109) que nous avons obtenue ne correspond pas simplement à la structure de l'amas *à la fin* du processus. A chaque stade de la croissance la structure est bien fractale de dimension D_f, et ce jusqu'à la rupture finale.

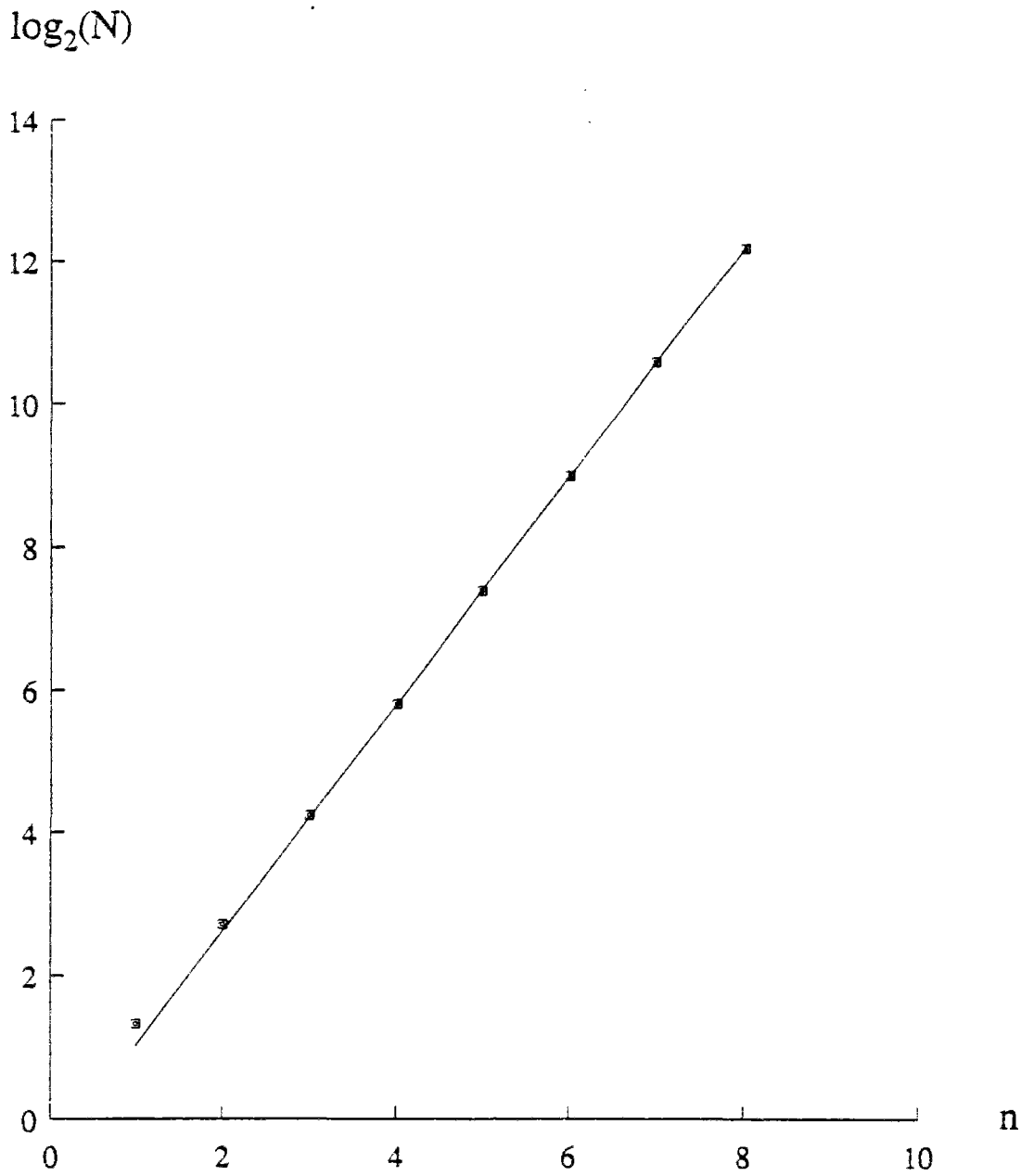


Figure 5.30 : Logarithme du nombre moyen de liens cassés, $\log_2(N)$, dans le modèle de fracture unique à distribution de seuil infiniment large, en fonction de la génération, n, du réseau hiérarchique. Ce modèle correspond à la percolation d'invasion avec écrantage. La régression linéaire montrée a une pente qui correspond à une dimension fractale de 1.60.

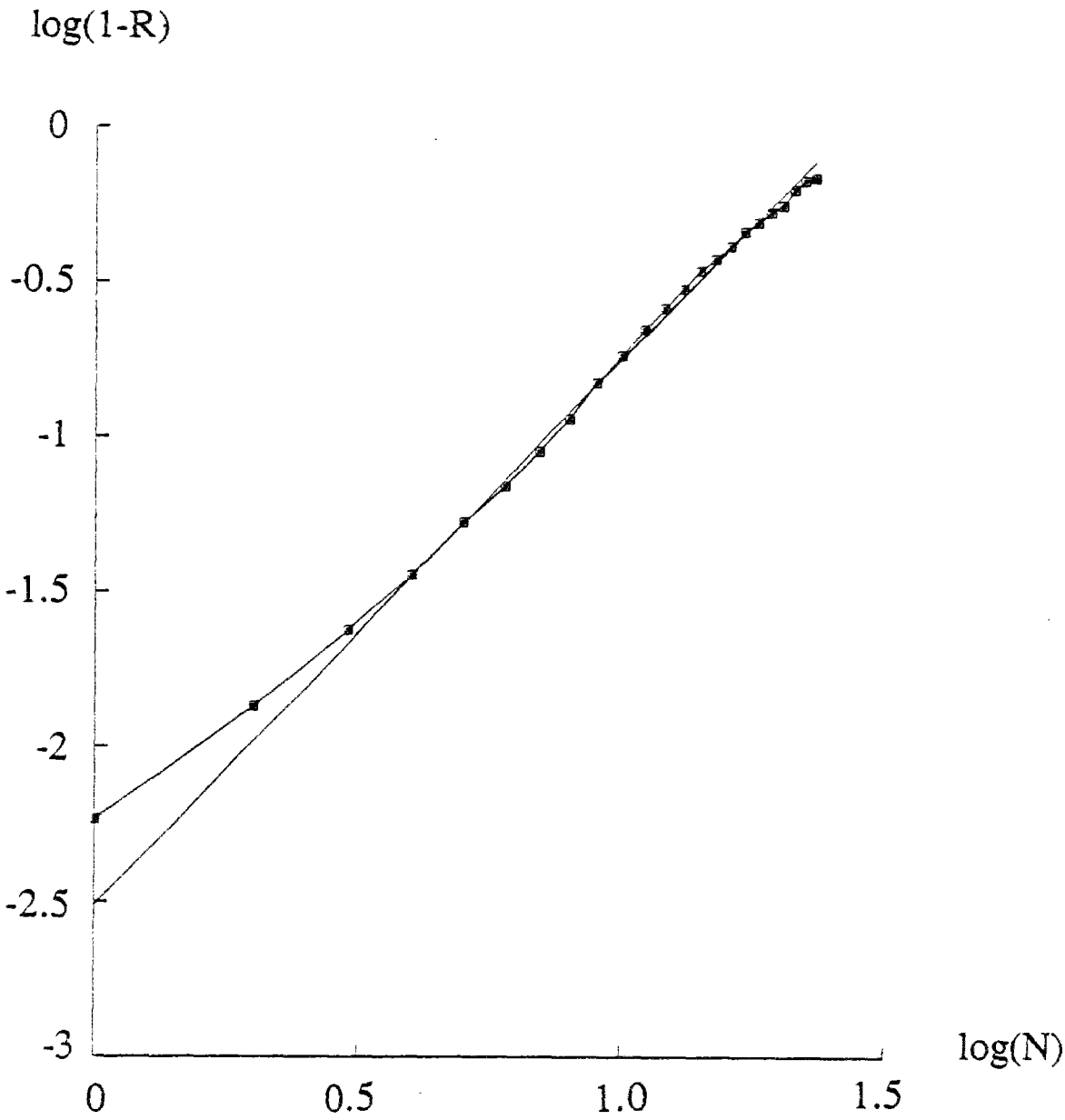


Figure 5.31 : Variation de résistance, log(1-R), avec le nombre de liens cassés, log(N), pour le modèle de fracture unique à distribution de seuil uniforme sur réseau hiérarchique à la génération 5. La droite montrée a une pente $2/D_f$ où D_f est la dimension fractale.

- Réseaux Euclidiens

Revenons maintenant au cas des réseaux Euclidiens. La figure 5.32 montre un exemple de fracture obtenue sur réseau carré, avec une distribution de seuils singulière à l'origine, $p(v_c) \propto v_c^{-1/2}$. Pour obtenir la dimension fractale de la fracture, nous introduisons le rayon de giration, R_g

$$R_g^2 = \sum_{\text{sites } i} (x_i - x_g)^2 \qquad (5.2.111)$$

où x_i désigne le vecteur position du site i appartenant à la fracture, et x_g la position du centre de gravité de l'ensemble. Cependant, ce rayon de giration n'est pas suffisant pour caractériser entièrement la structure obtenue. Il est évident dans la figure 5.32 que l'amas est fortement anisotrope. Nous définissons donc le tenseur d'inertie géométrique de l'amas, dont les composantes $\alpha\beta$ sont

$$I_{\alpha\beta} = = \sum_{\text{sites } i} (x_i^\alpha - x_g^\alpha)(x_i^\beta - x_g^\beta) \qquad (5.2.112)$$

où x^α désigne la coordonnée α du vecteur x. Les lois d'échelle des deux valeurs propres du tenseur d'inertie moyen, I_L et I_S, en fonction du nombre de liens de la fracture, N, sont en effet différentes dans la plupart des cas étudiés. Les indices L et S se réfèrent respectivement à la plus grande et la plus petite des valeurs propres.

$$I_L \propto N^{\gamma_L} \qquad (5.2.113)$$
$$I_S \propto N^{\gamma_S}$$

La trace du tenseur d'inertie, $I_{\alpha\alpha}$, est égale au carré du rayon de giration. Or $R_g \propto N^{1/D_f}$. Nous pouvons donc relier la dimension fractale effective à l'exposant γ_L par

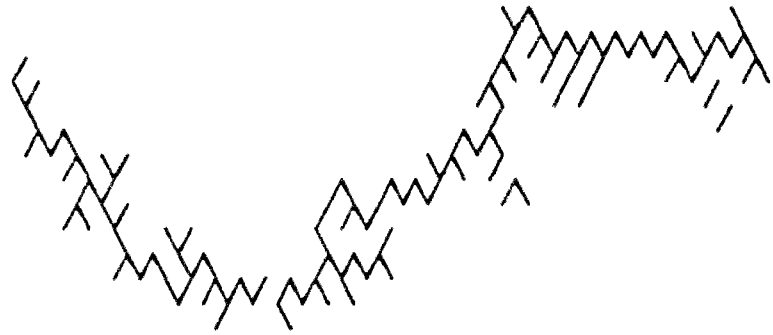


Figure 5.32 : Un exemple de fracture générée par le modèle à désordre gelé, avec une contrainte de connexité. Dans ce cas, la distribution de seuils était $p(v_c) \propto 1/\sqrt{v_c}$. Ne sont représentés que les liens qui ont été rompus. La fissure correspond à l'ensemble des liens duaux de ceux dessinés ici. On remarquera qu'alors cette fissure est bien connexe. Sa "dimension fractale" est 1.23.

$$D_f = \frac{2}{\gamma_L} \qquad (5.2.114)$$

Suivant enfin le résultat déjà évoqué pour le réseau hiérarchique, il est possible de définir une taille effective de la fracture au cours de son évolution, en considérant la diminution de conductance G, due à la présence de cette fracture. (Dans le cas précédent, nous avions considéré la diminution de résistance car nous traitions du cas dual). Nous aurons alors

$$1\text{-}G \propto N^{\delta} \qquad (5.2.115)$$

L'exposant δ est également relié à la dimension fractale par la relation:

$$\delta = 2/D_f \qquad (5.2.116)$$

La table suivante donne quelques valeurs d'exposants, D_f, γ_L, γ_S et δ mesurés en fonction de la singularité à l'origine, α, de la distribution de seuils, $p(v_c) \propto v_c^{-\alpha}$.

α	D_f	γ_L	γ_S	δ
0	1.10			1.7
0.25	1.15	1.78	1.35	
0.5	1.23	1.69	1.28	
0.75	1.33	1.55	1.30	
0.875	1.45	1.45	1.35	
1^-	1.81			1.1

Quelques valeurs d'exposants définis ci-dessus pour le modèle de fracture unique avec désordre gelé. Les valeurs laissées en blanc n'ont pas été calculées.

Nous constatons que les quelques valeurs calculées satisfont approximativement aux relations entre exposants énoncées précédemment (Eqs.(5.2.114) et (5.2.116)). Les valeurs sont aussi assez proches de celles obtenues pour le modèle hiérarchique, bien qu'*a priori* non directement comparables. D'autres formes de distribution ont été essayées, comme une distribution de Weibull avec un module m= 5. Dans ce cas, la dimension fractale obtenue est très voisine de l'unité (la valeur mesurée est $D_f \approx 1.05$).

Ce modèle donne lieu également à une caractéristique courant-tension que nous n'avons pas encore étudiée. Il est évident que les données rapportées ici sont très préliminaires et méritent une étude plus complète. Nous aurons en fait l'occasion de revenir sur ce sujet dans la partie 5.4, pour motiver une telle étude, mais nous n'apporterons pas de nouveaux résultats.

5.2.5 Autres modèles reliés

L'ingrédient essentiel de notre problème est la présence simultanée d'un comportement non-linéaire (discontinu) et d'un désordre local. Nous avons consacré l'essentiel de notre effort sur la fracture, mais il va de soi que ce type d'étude peut s'appliquer à de nombreux autres domaines. En particulier, un autre cas est particulièrement important compte-tenu de ses applications: il s'agit de la transition supraconducteur-conducteur. La figure 5.33 montre de façon schématique une caractéristique microscopique et une caractéristique macroscopique correspondant à une distribution aléatoire de courants critiques locaux. Nous avions déjà cité le travail de Leath et Tang [48] à propos de ce problème avec un désordre de dilution. Cette transition supraconducteur-conducteur est très voisine de la rupture, et relève du même type d'analyse [76]. Cependant, un certain nombre de traits lui sont spécifiques.

Il existe l'analogue de l'instabilité de localisation. En effet, supposons que l'on parte d'un fort courant tel que tous les liens soient dans leur état de conduction

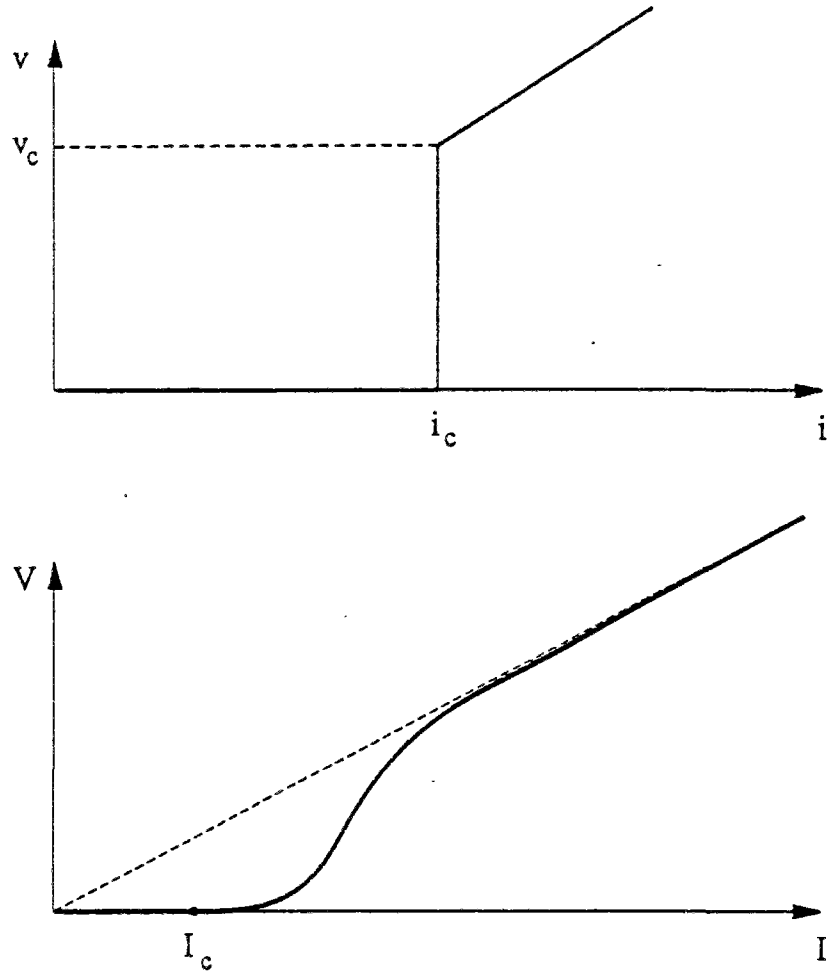


Figure 5.33 : Une caractéristique courant-tension microscopique (haut) d'un lien élémentaire. Lorsque ce lien est parcouru par un fort courant, il est Ohmique, avec une résistance finie. Lorsque ce courant tombe au-dessous d'un courant critique i_c, le lien devient supraconducteur. Un système constitué de liens de ce type avec des courants critiques locaux distribués aléatoirement présente une caractéristique schématisée en bas.

Ohmique. Puis nous réduisons le courant total, jusqu'à ce qu'un lien transite vers l'état supraconducteur. Celui-ci va "attirer" plus de courant, et il va donc diminuer la densité de courant qui passe en parallèle, et accroître la densité de courant amont et aval. Ainsi, si la distribution de courant critique est étroite, un amas de liens supraconducteurs va croître perpendiculairement à la direction de parcours du courant. Cet amas sera l'analogue d'une fissure.

Cependant, lorsque tel amas traversera le milieu de part en part, le système total ne sera pas supraconducteur (puisque le sens de parcours du courant est perpendiculaire). Ainsi, le processus continuera par croissance de ces amas supraconducteurs, et nucléation de nouveaux, jusqu'à ce que l'ensemble du milieu ne forme plus qu'un seul amas. Dans les derniers stades, il ne restera en fait plus qu'une simple frontière de liens normaux séparant deux amas supra-conducteurs.

Il existe un phénomène d'écrantage similaire à celui que nous avons rencontré pour la rupture: lorsqu'un ensemble de liens normaux est entouré de liens supraconducteurs, le courant qui traverse cet amas est bien sûr nul, et ainsi il transite automatiquement à l'état supraconducteur.

A son stade terminal, il est possible de caractériser la transition par un comportement très voisin de celui de la percolation, à un niveau qualitatif. Les valeurs des exposants critiques caractérisant cette transition sont bien sûr différentes.

Un certain nombre des caractéristiques que nous avons rapportées peut être directement analysé expérimentalement. En particulier, le développement d'amas supraconducteurs perpendiculairement au sens de parcours du courant doit être visible dans une localisation du gradient de potentiel sur des zones étroites (d'autant plus que le milieu est peu désordonné), et par des mesures de conductivité transverse [77].

5.2.6. Conclusion sur le désordre figé

En conclusion de cette première section sur les modèles à désordre gelé, nous voudrions souligner les points suivants:

• L'abord analytique des problèmes de rupture, tant pour un désordre de dilution que pour une distribution aléatoire de seuils, pose un grand nombre de difficultés. De plus l'étude numérique de ce problème requiert des tailles de système tout à fait considérables pour s'affranchir des comportements transitoires spécifiques des petites tailles.

• En conséquence, il s'avère extrèmement utile de développer des systèmes plus simples qui conservent cependant les caractéristiques essentielles des systèmes réels. En ce sens, nous avons considéré des lois de comportement très simples, tant pour le comportement mécanique qu'électrique. Nous avons modélisé le milieu par un réseau discret régulier. Le désordre a été introduit de manière très élémentaire. Malgré cela, les réseaux bidimensionnels sont encore trop complexes pour pouvoir faire l'objet de simulations qui démontrent sans faille telle ou telle prédiction. Cependant, il semble que le réseau hiérarchique soit, pour ce problème, parfaitement adapté à la situation, car il permet de faire très simplement des calculs sur de grands systèmes avec une bonne statistique, tout en conservant un comportement très voisin du cas bidimensionnel régulier.

• Soulignons cependant déjà un point qui nous apparaît fondamental. La plupart des études suggèrent que le point final de rupture est un point *critique*. Cet aspect du problème suggère des analyses en termes de lois d'échelle, et une prise en compte des effets de taille finie comme outil d'investigation. Un exemple d'utilisation de ces notions nous a ainsi conduit à étudier la distribution des sauts de conductivité (ou de module élastique) au cours de la rupture, et à observer le comportement qualitatif attendu. Cette propriété devrait être observable expérimentalement.

Ainsi, il nous semble utile (sinon nécessaire) d'approfondir le plus possible l'étude des réseaux hiérarchiques pour y tester tous les comportements souhaités, en variant à loisir, les types de désordre et les distributions, avant de passer au cas des

milieux bidimensionnels électriques, puis finalement mécaniques. Une certaine modestie est à mettre en avant dans ce type d'étude, en ce qui concerne les buts à atteindre, au moins dans un premier temps. C'est à ce prix qu'une meilleure compréhension du problème pourra être gagnée.

Nous allons maintenant nous tourner vers un autre type de désordre, en étayant notre description, d'analyses du réseau hiérarchique diamant. Nombre des résultats que nous présenterons seront tout à fait préliminaires. Ils sont là pour placer en quelques sortes des jalons sur la longue route à parcourir. En particulier, il est probable que des connexions multiples existent entre beaucoup de ces modèles. Ces connexions doivent être testées, en particulier sur le réseau hiérarchique, et en conséquence, les résultats que nous citerons, peuvent constituer un point de départ utile pour avérer ces éventuelles correspondances. Nous tenterons en particulier ce type d'approche dans la quatrième section (5.4) de ce chapitre.

5.3 Désordre recuit

Jusqu'à présent, le désordre était inscrit dans la structure du problème dès le début du problème et n'était pas modifié par l'évolution du milieu. Nous avons déjà qualifié ce type de désordre de figé, ou gelé ("quenched disorder"). La constance dans le temps est le trait caractéristique de cette situation. Cette description s'applique donc à un système où le désordre est inscrit dans la constitution ou la géométrie du milieu. Par opposition, pour les problèmes d'évolution, il est d'usage de considérer le cas où ce désordre est susceptible de varier dans le temps. Ce dernier type sera dit recuit ("annealed"). Pour la discussion qui va suivre, il est utile d'introduire ce désordre sous la forme d'une fonction aléatoire, $\mu(x,t)$, dépendant de l'espace, x, et du temps, t. Nous avons toujours considéré la situation où $\mu(x,t)$ est décorrélé en espace

$$<\mu(x,t)\mu(y,t')> = A(t,t')\,\delta(x-y) \qquad (5.3.1)$$

où δ est la distribution de Dirac spatiale, et A une distribution de t et t'. Le cas du désordre gelé correspond pour nous à $\mu(x,t) = \mu(x)$. Le désordre recuit que nous considèrerons sera également décorrélé en temps:

$$<\mu(x,t)\mu(y,t')> = A\,\delta(x-y)\,\delta(t-t') \qquad (5.3.2)$$

où A est alors une constante.

Dans les cas physiques réalistes, il existe généralement une constante de temps de corrélation du bruit, τ_{correl}. De plus, comme nous considérons un problème d'évolution, le processus élémentaire de croissance (e.g. la rupture d'un lien, ...) requiert lui aussi un certain temps, τ_{elem}. Les deux cas de désordre recuit et gelé correspondent aux deux situations extrèmes où ces deux constantes de temps sont très distantes, respectivement $\tau_{correl} << \tau_{elem}$ et $\tau_{elem} << \tau_{correl}$. Il existe bien sûr une vaste classe de

situations où la portée des corrélations tant spatiales que temporelles est infinie. Bien que potentiellement très riches nous ne considèrerons pas ces cas ici.

5.3.1 Agrégation limitée par diffusion, modèle de rupture de diélectrique

L'un des modèles de croissance à désordre recuit les plus étudiés au cours de ces dernières années est certainement l'*agrégation limitée par diffusion* ou DLA. Ce modèle constitue l'un des exemples les plus simples de phénomènes hors d'équilibre, où la physique statistique est susceptible d'apporter quelques lumières, et suivant Kadanoff [78] il constituera peut-être la voie par laquelle la théorie des phénomènes critiques sera généralisée aux phénomènes hors d'équilibre. De façon beaucoup plus modeste, le modèle de DLA constitue un exemple simple de rupture avec désordre recuit. Bien que ce modèle très simple se soit avéré très versatile dans ses applications, le volume des études consacrées à son sujet dépasse de très loin ses applications potentielles, mais notre propos n'est pas ici de débattre de ce point. Il faut cependant souligner ici que malgré les abondantes données accumulées sur le sujet, une compréhension complète du problème reste à trouver.

Nous avons déjà signalé les références [3-7] qui traitent le sujet dans le détail. Nous renvoyons le lecteur à ces références pour de plus amples informations sur ce sujet. Nous nous contenterons ici de rappeler les quelques propriétés utiles à notre discussion ultérieure. Nous allons d'abord décrire rapidement le modèle, puis citer quelques cas d'applications, et nous étendre plus vers ses généralisations dans le cadre de la rupture.

- Définition du modèle (première version)

Considérons un réseau infini où un amas (un ensemble connexe de sites) est fixé. Une particule, lâchée à l'infini, diffuse librement jusqu'à venir sur l'un des sites voisins de l'amas. Ce site est alors incorporé à l'amas. Une nouvelle particule est ensuite

de nouveau lâchée à l'infini. Dès qu'elle arrive en contact avec le nouvel amas, le site sur lequel elle se trouve est ajouté à l'amas, et ainsi de suite, le processus est itéré. Comme d'habitude, nous parlerons de la masse de l'amas, M, pour désigner le nombre de sites qu'il contient.

Plusieurs géométries sont souvent utilisées: L'amas de départ peut être réduit à un site (c'est le cas le plus courant), ou bien, il peut être une ligne infinie. Ce dernier cas est parfois dénommé "Random Deposition Model" pour le distinguer du premier cas. Nous verrons que ce dernier type de géométrie présente l'intérêt de bien permettre de différencier les deux directions principales, parallèle ou perpendiculaire à la direction moyenne de croissance, sans être trop sensible aux détails du réseau.

Il est bien sûr possible de définir le modèle de DLA hors réseau. Dans ce dernier cas, il faut cependant se donner une taille finie de particules qui joue le rôle de coupure inférieure en distance. Cette coupure est tout à fait analogue à la coupure en distance que l'on introduit également pour la fracture (rayon plastique, ou de la zone d'endommagement localisé en pointe de fissure, ou de la zone de comportement non-linéaire due à la décohésion à l'échelle microscopique).

Cette présentation du problème est celle qui est choisie pour la mise en œuvre pratique pour des questions d'efficacité. Actuellement, il a été possible de générer ainsi des amas composés de plus de 10^6 sites hors réseau [79].

- Autre formulation (seconde version)

Il est possible de reformuler le problème aisément en utilisant l'analogie entre la théorie du potentiel et la diffusion libre d'une particule. En effet, donnons nous un amas et résolvons l'équation de Laplace pour le potentiel V(x)

$$\Delta V = 0 \qquad (5.3.3)$$

dans un espace infini, avec les conditions aux limites suivantes:

• sur l'amas :

$$V(x) = 0 \qquad (5.3.4)$$

• à l'infini :

$$V(x) = 1 \qquad (5.3.4')$$

La probabilité, p_i, pour qu'une particule lâchée de l'infini atteigne pour la première fois un site i frontière de l'amas est donnée par le gradient de potentiel V en ce site i, ou, puisque le potentiel est nul sur l'amas lui-même :

$$p_i = V_i \qquad (5.3.5)$$

Cette probabilité est la seule quantité que nous devons connaître pour faire croître l'amas. Ainsi la transposition de l'algorithme précédent se traduit en termes simples ici: Partant d'un amas réduit à un site (ou une droite), la probabilité de croissance de l'amas en un site premier voisin de l'amas est donnée par le potentiel en ce site, lorsque ce potentiel satisfait à l'équation de Laplace (5.3.3) et aux conditions aux limites (5.3.4). Au prix de la résolution de l'équation de Laplace dans l'ensemble du domaine pour chaque site ajouté à l'amas, nous avons donné une seconde formulation du problème équivalente à la première version.

Cette formulation met l'accent sur la difficulté d'étude théorique de ce type de problème dans la limite continue: il s'agit en effet d'un problème avec conditions aux limites variables dans le temps (problème d'évolution dit à frontière libre). La vitesse normale, U, de croissance de la frontière de l'amas est

$$U(x,t) = A\ (\nabla_x V(x,t).n) + \mu(x,t) \qquad (5.3.6)$$

où V(x,t) est le potentiel harmonique qui satisfait aux conditions aux limites relatives à la position de l'amas au temps t, n est un vecteur normal extérieur à la frontière de l'amas et η est un bruit gaussien décorrélé en temps et espace.

- Applications

Ce modèle a été introduit par Witten et Sanders [80] en 1981. Il était alors conçu pour modéliser la croissance d'un amas par diffusion puis collage de particules. La seconde formulation a mis en lumière l'applicabilité du même modèle pour décrire d'autres situations physiques *a priori* très éloignées de l'agrégation limitée par diffusion.

L'une des applications les plus riches concerne l'instabilité de Saffman-Taylor [81]. Il s'agit du problème de l'injection d'un fluide peu visqueux dans un second fluide beaucoup plus visqueux et immiscible avec le premier dans une cellule de Hele-Shaw (présentant des hétérogénéités), ou encore un milieu poreux. En effet, dans ce cas, la distribution de pression dans le fluide le plus visqueux satisfait à l'équation de Laplace, avec une condition de pression uniforme à l'infini, et dans le fluide injecté peu visqueux, cette pression sera quasiment uniforme. La vitesse de déplacement normal de l'interface sera alors proportionnelle au gradient de pression local. Nous sommes donc dans les conditions précitées si le terme de bruit décorrélé en temps et en espace peut être introduit. Lorsque le milieu poreux est irrégulier [10], ou encore lorsque des irrégularités sont placées dans la cellule de Hele-Shaw [9], alors des structures similaires à des amas de DLA sont observées, pourvu que la vitesse d'injection soit suffisamment rapide. On remarquera qu'alors, la condition de décorrélation en temps est loin d'être vérifiée. Beaucoup de variations sur ce thème ont été étudiées, comme le cas de fluides miscibles, de fluides non-Newtoniens (polymères en solution), jusqu'au cas des fluides de Bingham (e.g. argiles) qui interpolent continuement entre les propriétés d'un fluide et celles d'un solide. Dans ce dernier exemple, suivant les expériences de Van Damme [82], en variant

la concentration en eau dans le milieu envahi, nous passons de l'instabilité de Saffman-Taylor proprement dite à la fracture.

L'électrodéposition, dans certaines conditions [83], réalise une seconde application simple. En effet, d'une part le champ électrique dans l'électrolyte satisfait à l'équation de Laplace avec une condition aux limites de potentiel constant sur l'électrode sur laquelle se fait le dépôt, et d'autre part, le taux de croissance locale de l'électrode est proportionnel au gradient de champ électrique au voisinage de l'électrode. (Nous ne développons pas tous les phénomènes physiques qui concourent à nous éloigner des conditions idéales mentionnées ci-dessus, comme la convection des ions sous l'action du champ électrique, ou par le mouvement du fluide, la diffusion des ions influencée par les variations de concentrations locales, ...)

Le claquage de milieux diélectriques qui deviennent conducteurs est également une situation voisine du modèle de DLA, et par là, introduit un lien naturel avec les problèmes de fracture que nous avons considérés jusqu'à présent. Niemeyer et coll [84] ont en effet proposé une extension du modèle original qui modélise le claquage de diélectrique. En effet, si la conductivité électrique du diélectrique claqué est très supérieure à celle du diélectrique sain, alors le champ électrique dérive d'un potentiel qui satisfait à l'équation de Laplace et aux conditions aux limites voulues. La raison pour laquelle il faut cependant étendre le modèle initial du DLA, est que la vitesse de claquage n'est pas nécessairement proportionnelle au champ électrique local. Niemeyer et coll. [84] ont alors proposé de décrire cette vitesse comme proportionnelle au gradient de potentiel élevé à la puissance η, où η est un paramètre du modèle. Pour reprendre les notations précédentes, nous écrirons la vitesse normale de la frontière

$$U(x,t) = A\,(\nabla_x V(x,t).n)^{\eta} + \mu(x,t) \qquad (5.3.7)$$

Ce modèle est alors nommé "Dielectric breakdown model" ou DBM. Bien sûr, dans le cas où $\eta = 1$, nous retrouvons le DLA. Pour la valeur de $\eta = 0$, la vitesse de croissance

locale est indépendante du champ de potentiel, et nous retouvons là le modèle d'Eden (vu au chapitre précédent).

Nous ne mentionnons qu'en passant une variante de ce problème que l'on rencontre dans la pratique sous le nom de "Figures de Lichtenberg" [85]. Dans cette situation, le champ électrique est engendré par des charges piégées dans le diélectrique. Les conditions aux limites sont donc d'une nature tout à fait différente du modèle DBM initial, et donnent lieu en conséquence à des comportements sensiblement différents. Ces figures remplissent l'espace de façon dense. Peu d'études ont été consacrées à ce sujet, en relation avec la structure du DLA.

- Propriétés caractéristiques

Voyons maintenant quelques propriétés de base de la structure de l'amas ainsi généré par le modèle de DLA.

Partant d'un amas de forme circulaire, il existe une solution simple du problème qui consiste à faire croître le rayon du cercle avec le temps. Cette solution est instable, et toute perturbation de la forme du contour est amplifiée exponentiellement. Cette instabilité de la géométrie de l'amas est fondamentale dans la compréhension du modèle. Elle va se traduire dans la pratique par la formation de "doigts" qui vont ensuite subir une seconde instabilité de dédoublement ("tip-splitting"). Ainsi la forme de l'amas sera constituée d'arborescences ayant pour racine l'amas initial. La figure 5.34 montre un tel amas obtenu numériquement par P.Meakin [86] selon le premier algorithme hors réseau et qui contient 50000 particules. Il est facile de comprendre qualitativement l'origine de cette instabilité: au voisinage d'une pointe, le gradient de champ électrique sera très fort, et donc la croissance plus rapide, alors qu'une zone en retrait verra un champ électrique de plus en plus faible, et donc aura une vitesse de croissance moins importante.

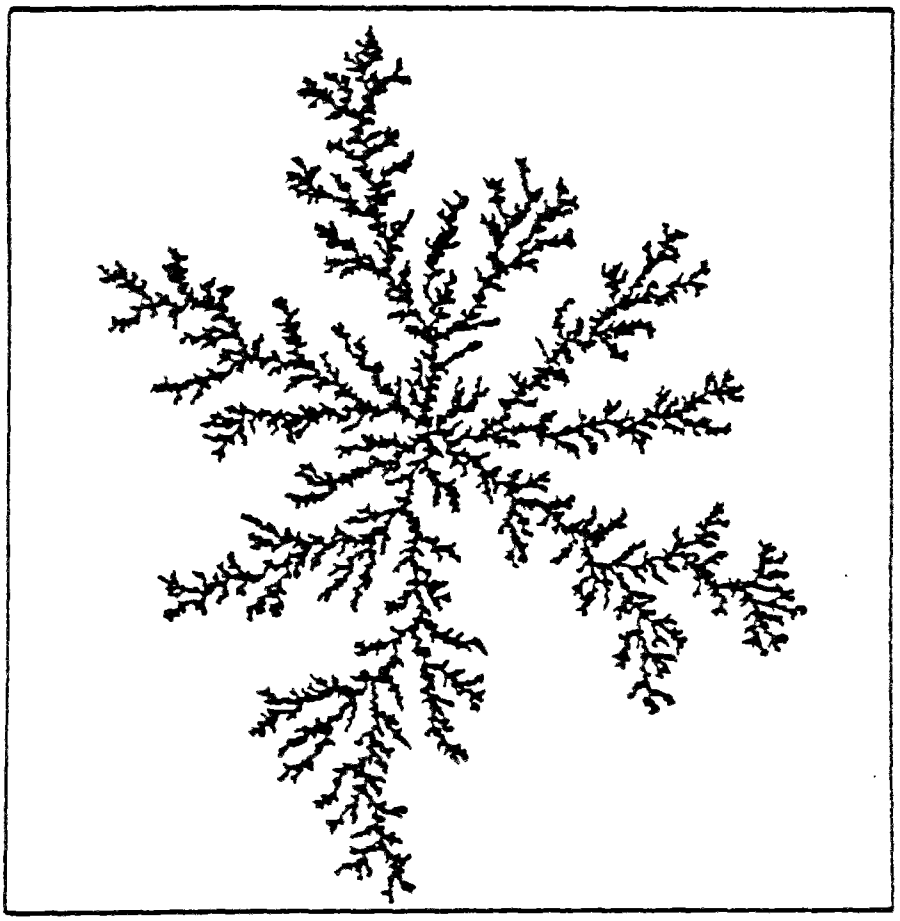


Figure 5.34 : Un amas de DLA contenant 50000 sites généré hors réseau par Meakin. (Extrait de la référence [86].)

La première chose à remarquer est bien sur la structure extrèmement branchée et peu dense de la figure formée. La masse de cet amas, M, croît moins vite que la surface d'un disque ayant son rayon de giration, R_g. Plus précisément la loi qui relie M à R_g est une loi de puissance qui donne la "dimension fractale" de l'amas:

$$M \propto R_g^{Df} \qquad (5.3.8)$$

avec, à deux dimensions, D_f = 1.71. Nous avons mis "dimension fractale" entre guillemets car nous verrons par la suite que cet amas n'est localement pas isotrope, et qu'en conséquence, le concept de dimension fractale est ici à considérer avec précaution. L'amas obtenu n'est statistiquement invariant d'échelle que si la position du centre est maintenue fixe. A trois dimensions, la dimension fractale du DLA est 2.50 [7].

Lorsque l'on observe de près la structure locale d'une partie de l 'amas, on se rend compte qu'il est possible d'identifier la direction moyenne de croissance. En d'autres termes, si l'on part d'une semence initiale ponctuelle, la structure dans la direction de croissance moyenne (radiale) ou perpendiculaire (tangente) est différente. Dans ces conditions, la géométrie d'étude est importante, et évidemment la croissance à partir d'une semence ponctuelle n'est pas la mieux adaptée. Si l'on part d'une ligne infinie, les deux directions principales perpendiculaire et parallèle à la ligne de départ restent fixes par rapport au réseau support et permettent de s'affranchir (dans un premier temps) des effets spécifiques du réseau susceptibles d'interférer avec cette anisotropie intrinsèque. Dans ces conditions, deux lois d'échelle différentes peuvent être mises en évidence selon la direction investiguée. D'abord dans cette géométrie, la densité, ρ, est fonction de la distance, h, à la ligne de départ.

$$\rho \propto h^{-\alpha_{//}} \qquad (5.3.9)$$

Cet exposant est relié à la dimension fractale précédente selon : $\alpha_{//} = d\text{-}D_f \approx 0.3$. Lorsque l'on étudie la décroissance de la fonction de corrélation à deux points, C, selon la direction, x, perpendiculaire à la direction moyenne de croissance, on observe [87] que les données peuvent être décrites par la fonction d'échelle suivante

$$C(x,h) = h^{-\alpha_{//}} \varphi(x\, h^{-\delta}) \qquad (5.3.10)$$

où $\delta \approx 0.8$. Lorsque $x << h^{\delta}$, C(x) suit une loi de puissance de x:

$$C(x,h) \propto x^{-\alpha_{\perp}} \qquad (5.3.11)$$

où $\alpha_{\perp} \approx 0.42$ est un nouvel exposant. Lorsque $x >> h^{\delta}$, la fonction de corrélation C(x) est alors indépendante de x. Le croisement entre ces deux comportements donne la relation $\delta = \alpha_{//}/\alpha_{\perp}$, approximativement satisfaite. Ces relations montrent clairement que les lois d'échelle dans les deux directions transverse et longitudinale sont différentes. Ainsi la structure locale d'un amas de DLA est-elle plutôt auto-affine qu'auto-similaire. Cela justifie les réserves que nous avions évoquées sur l'utilisation du concept de dimension fractale. Ces résultats se transposent sans peine théoriquement à la structure d'un amas de DLA construit à partir d'une semence ponctuelle. On observe bien dans ce cas des exposants similaires à ceux de la géométrie linéaire dans les directions radiales et tangentes [88, 89].

Une autre caractéristique importante de ce problème est la sensibilité à la structure du milieu sur lequel croît l'amas. En effet sur un réseau carré, et partant d'une semence ponctuelle, on observe que pour de très gros amas (10^6-10^9 sites), la forme moyenne de l'amas évolue, pour ressembler de plus en plus à une croissance dendritique en croix alignée sur les directions propres du réseau carré. Cet effet est dû à l'anisotropie du réseau, et n'apparaît pas pour les amas engendrés hors réseau. Nous aurons l'occasion de revenir sur cette notion à propos de la technique dite de "réduction de bruit".

La croissance de l'amas a lieu préférentiellement près des pointes comme nous l'avons déja mentionné, alors que les sites situés au cœur de l'amas seront écrantés par le reste de l'amas et donc auront une probabilité de croissance sensiblement plus faible. La structure de l'amas au cœur sera donc progressivement figée, au fur et à mesure de la croissance. Il apparaît donc particulièrement important de caractériser la distribution des probabilités de croissance sur la surface de l'amas.

L'étude de cette distribution a révélé une propriété que nous avons déjà observée dans le chapitre 2, à savoir son caractère multifractal. En effet, tracé en coordonnées bi-logarithmiques, l'histogramme de ces probabilités suit une fonction universelle indépendante de la taille du système et de la structure du réseau (tant que la taille de l'amas n'est pas telle que la structure en dendrite apparaisse). Plus précisément, appelons $\alpha = \log(p)/\log(L)$, le logarithme de la probabilité de croissance en un site divisé par le logarithme de la taille du système. Alors, le nombre de sites, $n(p)dp$, qui ont une probabilité comprise entre p et p+dp, suit la loi

$$n(p) \propto L^{f(\alpha)} \qquad (5.3.12)$$

où $f(\alpha)$ est le spectre multifractal. Nous en déduisons que les moments de la distribution suivent une loi de puissance avec la taille du système, et que les exposants de ces lois de puissance, en fonction de l'ordre du moment considéré donnent une information équivalente à la fonction $f(\alpha)$. Ce point a été vu en détail au chapitre 2, et nous ne faisons que rappeler le résultat ici: Soit M_n le nième moment de la distribution des probabilités, et L la taille du système. M_n suit la loi

$$M_n = \sum_i p_i^n \propto L^{y(n)} \qquad (5.3.13)$$

où y(n) est un exposant universel. La transformée de Legendre de y(n) donne le spectre multifractal:

$$\alpha = \frac{\partial y}{\partial n} \qquad (5.3.14)$$

et

$$f(\alpha) = y(n) - n\,\alpha \qquad (5.3.15)$$

Ainsi, le moment d'ordre zéro donne la dimension fractale de la surface de l'amas, dimension qui est identique à celle de l'amas lui-même car peu de boucles existent. Le premier moment M_1 est rigoureusement égal à l'unité par normalisation de p, d'où l'on déduit $y(1) = 0$. La droite $f = -\alpha$ est donc tangente au spectre. Makarov a montré rigoureusement [90] que de plus la valeur de α en ce point était $\alpha = -1$. Turkevich et Scher [91] ont suggéré que la valeur de α pour les probabilités contribuant au moment d'ordre infini (les sites où la croissance est le plus probable) est reliée à la dimension fractale elle-même selon :

$$\alpha_{max} = 1\text{-}D_f \qquad (5.3.16)$$

relation qui semble être bien vérifiée numériquement.

Nous avons vu rapidement l'importance des fluctuations et donc du bruit dans la croissance d'un amas de DLA, et également la sensibilité à la structure du milieu qui supporte l'amas. Cependant, cette sensibilité ne s'exprime que pour de très grandes tailles de système. Une simple façon de comprendre ceci est de remarquer que l'influence relative du bruit diminue avec la taille du système. Dans cet esprit, des tentatives ont été faites pour "réduire le bruit" sur des amas de plus faible taille de façon à percevoir la structure asymptotique sans recourir à des tailles réelles démesurées.

L'une des approches les plus naturelles pour réduire le bruit consiste donc à "renormaliser" l'espace réel. Imaginons que chaque site du réseau soit lui-même un micro-réseau de petite taille. Pour qu'un amas traverse ce micro-réseau, il faudra en moyenne un nombre m de sites occupés. Pour simplifier, oublions le détail de la

structure à l'intérieur d'un micro-réseau, et considérons-les comme des sites simples. Dénombrons alors les marches aléatoires qui partant de l'infini atteignent l'un des "sites" (micro-réseaux) frontière de l'amas. Dès qu'un site a été atteint par m marches aléatoires, nous décidons que ce site est occupé (l'amas construit sur le micro-réseau qui le constitue a alors atteint la frontière opposée). Ceci nous permet de redéfinir les nouveaux sites frontières et de recommencer. Lorsque le paramètre m vaut l'unité, nous avons un micro-réseau d'une maille, et nous retrouvons donc le problème original. Lorsque m est plus grand que l'unité, cet algorithme est appelé "réduction de bruit". Il a été introduit par Tang [92] et Szép et coll. [93] et utilisé largement par la suite [94, 95, 96]. On observe effectivement pour des amas construits sur réseau le passage progressif du DLA usuel hors réseau, à la structure dendritique en augmentant soit la réduction de bruit (le paramètre m), soit la taille du système. La prise en compte de la réduction de bruit et des différentes structures de l'amas sur réseau (incluant les dendrites) peut se faire en termes de lois d'échelle. Cependant cette description est relativement complexe dans le détail, et n'éclaire pas le problème sous un jour nouveau. Nous renvoyons le lecteur à la référence [97] (et aux autres références qui y sont citées) pour cette description.

- Dualité

A deux dimensions, il est toujours possible d'utiliser la dualité pour construire un modèle équivalent au DLA. Nous reprenons la correspondance utilisée déjà maintes fois. L'amas de DLA représente alors une structure isolante (e.g. une fracture) dans un milieu conducteur. Une chute de potentiel globale est imposée à l'infini. L'amas croît par adjonction successive de liens du réseau dual, liens choisis dans le réseau primal, avec une probabilité proportionnelle au courant qui les parcourt.

A trois dimensions, le DLA dual n'est plus équivalent au DLA. En effet, ce dernier consiste en un amas de structure arborescente. Dans un milieu fini, la fin de la croissance correspond à l'existence d'un chemin continu à travers la structure. Ce modèle

décrit la rupture d'un diélectrique qui devient bon conducteur, une fois claqué. L'amas engendré dans le modèle dual est construit sur le réseau dual et il est formé de plaquettes. Dans un milieu fini, la fin de la croissance correspond à l'existence d'une surface continue sans trous, qui sépare le milieu en deux parties distinctes. Ce modèle schématise la rupture électrique dans le cas où les liens cassés sont isolants. Aucune étude à notre connaissance n'a été consacrée au modèle DLA dual à trois dimensions.

- Le modèle de rupture de diélectrique (DBM)

Nous avons précédemment donné quelques indications sur ce problème introduit par Niemeyer et coll. [84]. Rappelons que la relation entre la probabilité de croissance locale, p, et le gradient de champ de potentiel, ∇V, est donnée par une loi de puissance

$$p \propto |\nabla V|^{\eta} \qquad (5.3.17)$$

Les propriétés des amas générés selon le modèle DBM, avec différentes valeurs du paramètre η, sont tout à fait similaires à celles obtenues dans le cas du DLA, à ceci près que les valeurs numériques des exposants sont différentes. La table ci-dessous donne la valeur de la dimension fractale obtenue pour quelques valeurs de η, à deux dimensions, suivant la seconde référence [84]:

η	D_f
0	2.00
0.5	1.92
1	1.70
2	1.43
∞	1.00

Valeur de la dimension fractale pour quelques valeurs du paramètre η pour le modèle DBM [84].

La dimension fractale chute de façon très brutale quand η augmente. Pour $\eta = 0$, nous retrouvons le modèle d'Eden , puisqu'alors, la probabilité de croissance est uniforme pour tous les sites frontières. L'amas obtenu est dans ce cas compact, comme nous l'avions vu au chapitre précédent. Lorsque η tend vers l'infini, une simple ligne droite est générée.

Nous allons maintenant étudier très rapidement ces modèles sur le réseau hiérarchique, avant de considérer le cas élastique correspondant au DLA et au DLA dual.

- Réseau hiérarchique

Montrons que le réseau hiérarchique se prête encore une fois simplement à ce type de modèle. Nous suivons ici une démarche similaire au cas de la croissance d'une fracture unique en désordre gelé. Nous passons également ici au modèle dual, en considérant comme supraconducteur les liens qui appartiennent à l'amas.

L'amas est initié sur un sommet du réseau, où le potentiel est fixé à zéro, alors qu'au sommet opposé, un potentiel unité est imposé. La croissance s'arrête lorsque l'amas a rejoint ce dernier sommet. Nous enregistrons la masse moyenne des amas, N, en fonction de la génération du réseau n. Utilisant la taille du réseau $L = 2^n$, nous obtenons directement la dimension fractale suivant

$$N \propto L^{Df} \qquad (5.3.18)$$

Les figures 5.35 et 5.36 montrent de telles relations obtenues pour $\eta = 1$ et 2 respectivement. On observe bien une loi de puissance. Les valeurs des dimensions fractales pour différentes valeurs de η sont données dans la table suivante:

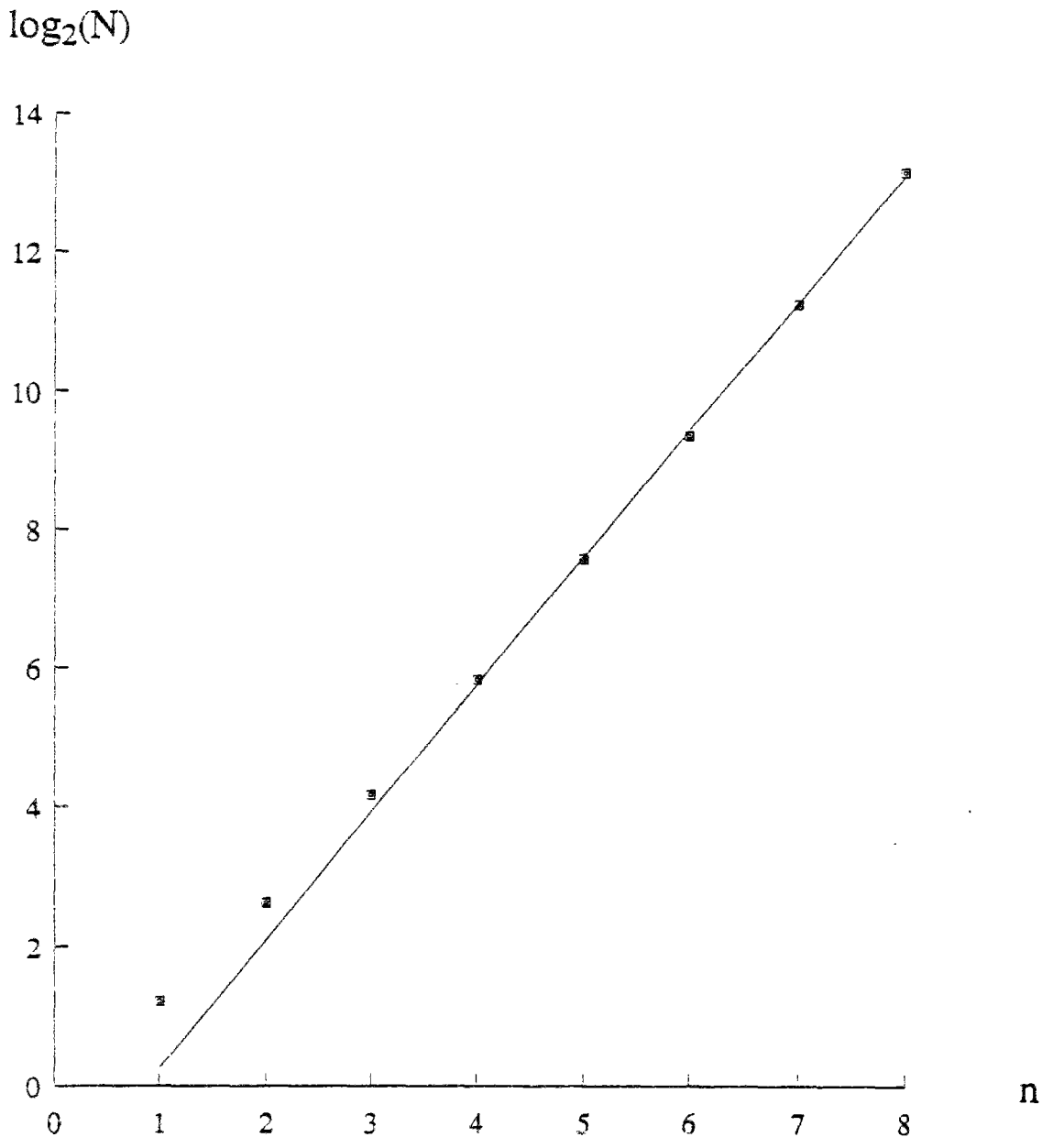


Figure 5.35 : Logarithme de la masse moyenne d'un amas de DLA dual, $\log_2(N)$, sur réseau hiérarchique en fonction de la génération, n, du réseau. La ligne droite correspond à un meilleur ajustement, et sa pente donne la dimension fractale de l'amas soit ici, 1.81.

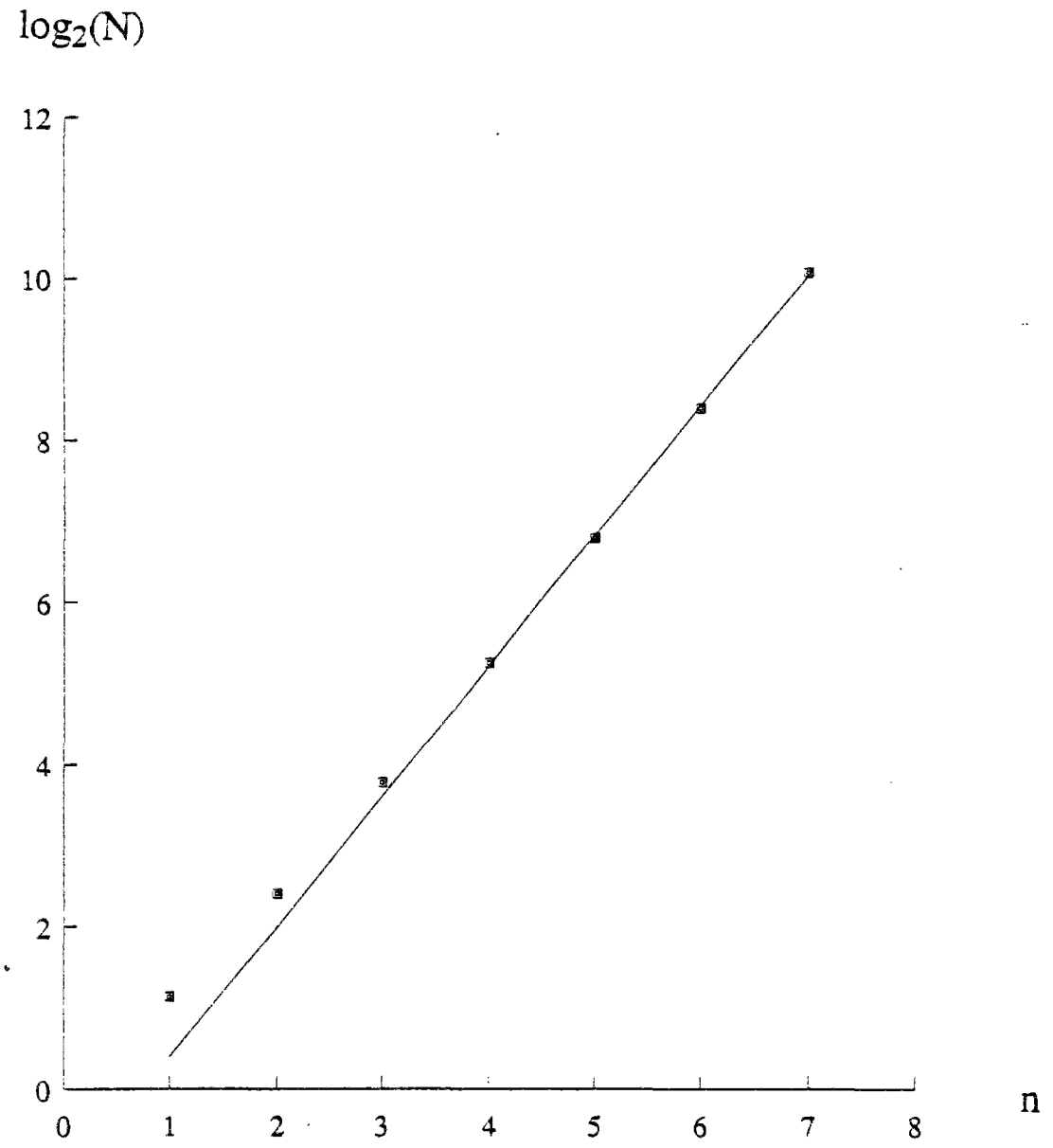


Figure 5.36 : Logarithme de la masse moyenne d'un amas du modèle DBM dual avec $\eta = 2$, $\log_2(N)$, sur réseau hiérarchique en fonction de la génération, n, du réseau. La ligne droite correspond à une meilleur ajustement, et sa pente donne la dimension fractale de l'amas soit ici, 1.64.

η	D_f	Nom
0	2	Eden
0.5	1.90	
1	1.81	DLA
2	1.64	
3	1.45	
4	1.34	
∞	1	

Dimensions fractales du modèle DBM sur réseau hiérarchique en fonction de η.

Nous observons bien une tendance similaire à celle rapportée dans le cas des réseaux Euclidiens, même si les valeurs des dimensions fractales sont bien entendu différentes. Ici encore, l'intérêt de ce type de modèle est de fournir une base qualitative de comparaison, sur laquelle peuvent être testées toutes suggestions de relation entre différents modèles.

Nous avons déjà mentionné dans le cas du DLA sur réseau Euclidien que la distribution de probabilité de croissance sur la frontière de l'amas était multifractale. Nous en déduisons donc que la distribution des courants circulant sur le bord d'un amas de DLA dual est également multifractale. D'après la remarque que nous avions faite précédemment (pour le modèle de fractures multiples avec désordre gelé), nous nous attendons donc à une distribution multifractale des sauts de conductance et de résistance du milieu dans lequel croît cet amas. Partant de cette remarque, la distribution des sauts de conductance et de résistance pendant l'ensemble de la croissance, doit présenter deux lois de puissance (cf. le paragraphe intitulé " un fantôme de multifractalité" dans la partie 5.2). C'est en effet ce que nous observons. La figure 5.37 montre en coordonnées bi-logarithmiques deux histogrammes cumulés des sauts de conductance, l'un à partir de zéro et jusqu'au point courant, et l'autre du point courant jusqu'à l'infini. Nous obtenons ainsi les deux comportements:

$$N(\Delta G) \propto \Delta G^{\varphi+} \qquad (5.3.19)$$

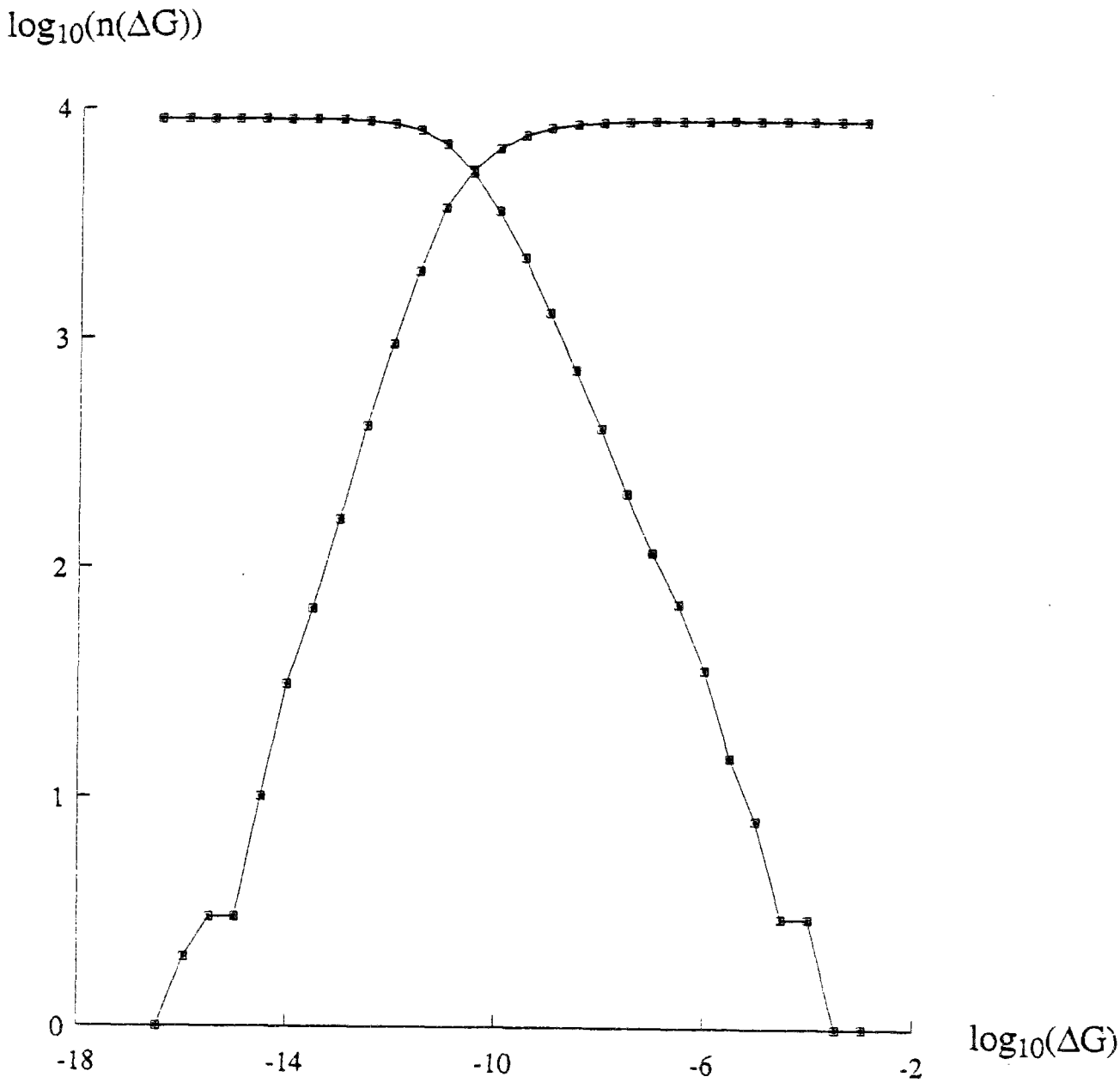


Figure 5.37 : Histogrammes cumulés des sauts de conductance au cours de la rupture pour le modèle DLA, en coordonnées bi-logarithmiques. L'un représente la distribution cumulée à partir de zéro jusqu'au point courant, et le second la distribution cumulée du point courant jusqu'à l'infini. Ces histogrammes ont été enregistrés à la huitième génération du réseau hiérarchique diamant. Les deux lois de puissance sont caractéristiques du développement d'une distribution multifractale.

pour les faibles sauts, avec un exposant $\varphi_+ = 0.76$ et, pour les grands sauts,

$$N(\Delta G) \propto \Delta G^{-\varphi_-} \qquad (5.3.20)$$

où $\varphi_- = 0.54$.

De même pour les sauts de résistance, la figure 5.38 montre les deux histogrammes cumulés comme précédemment. Les deux exposants mesurés sont dans ce cas:

$$\varphi_+ = 0.75 \qquad (5.3.21)$$
$$\varphi_- = 0.38$$

Cette propriété n'a pas encore été étudiée dans le cas des réseaux Euclidiens. Cependant l'ubiquité de tels comportements que nous rencontrons en fait dans tous les modèles de ce chapitre en font une propriété extrèmement utile car directement mesurable, alors que, dans le cas du DLA par exemple, le concept de distribution multifractale des probabilités de croissance n'est aujourd'hui accessible en pratique que par simulations numériques [98, 99].

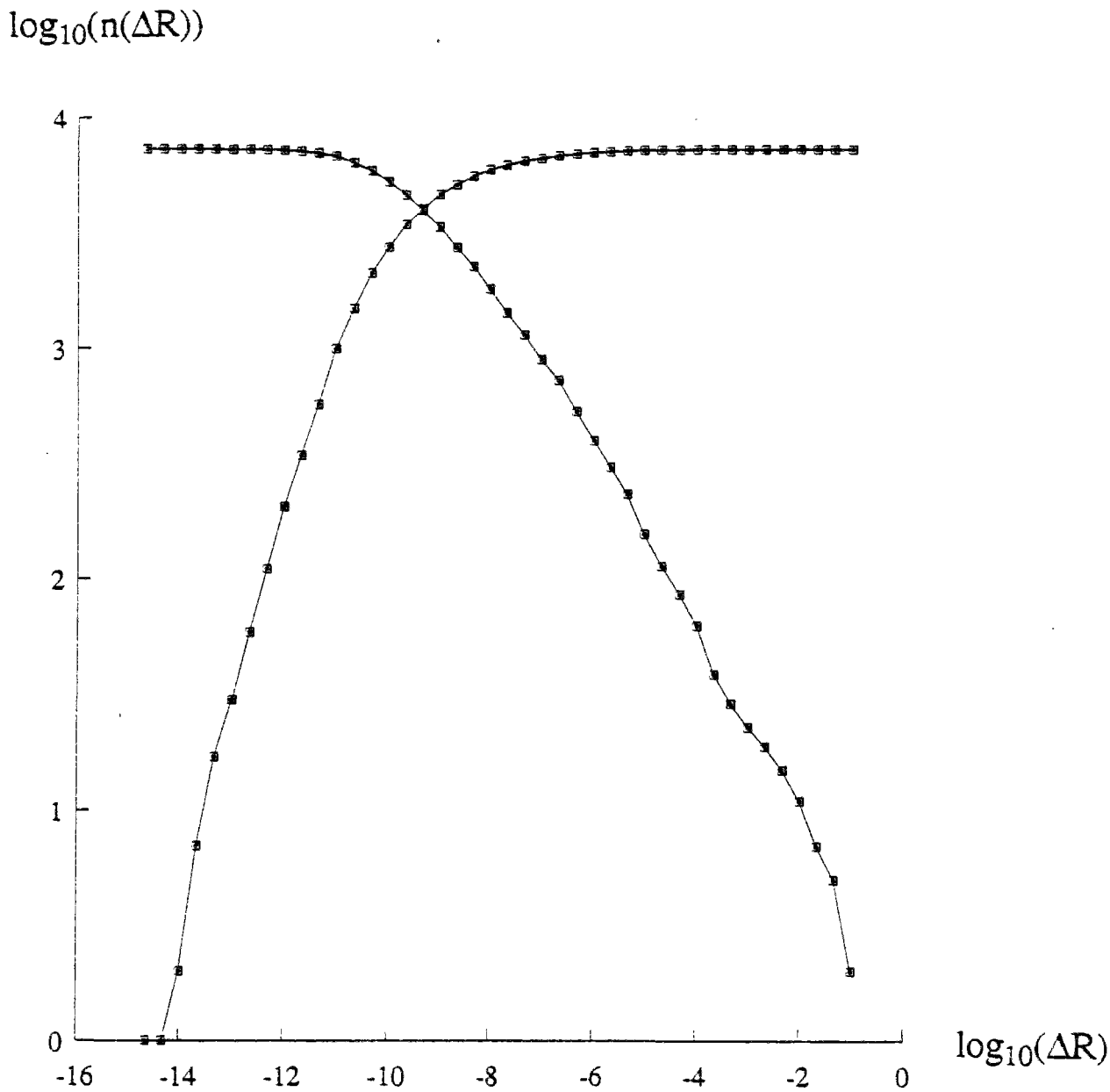


Figure 5.38 : Histogrammes cumulés des sauts de résistance au cours de la rupture pour le modèle DLA, en coordonnées bi-logarithmiques. L'un représente la distribution cumulée à partir de zéro jusqu'au point courant, et le second la distribution cumulée du point courant jusqu'à l'infini. Ces histogrammes ont été enregistrés à la huitième génération du réseau hiérarchique diamant. Les deux lois de puissance sont caractéristiques du développement d'une distribution multifractale.

5.3.2 Modèle de croissance de fracture élastique unique

Nous allons maintenant construire le modèle élastique correspondant, modèle baptisé FGM ("Fracture Growth Model"). La correspondance la plus naturelle se fait à partir du DLA dual. Nous avons vu qu'à deux dimensions, les modèles DLA et DLA dual étaient équivalents. Nous considérons donc un milieu élastique dans lequel une fissure a été initiée. A grande distance de cette fissure, une contrainte simple (ou de façon équivalente, une déformation simple) est imposée. Par simple, nous entendons essentiellement trois cas : soit une traction uniaxiale, soit une traction isotrope, soit encore un cisaillement simple. La croissance de la fissure se fait en choisissant dans son voisinage un volume élémentaire où la fissure pénètrera, avec une probabilité proportionnelle à une fonction (homogène de degré un) de la contrainte locale évaluée à distance finie de la fissure (cette distance sera typiquement la coupure inférieure dans un problème continu, i.e. un rayon plastique, ou la taille de la zone endommagée en pointe de fissure, ... ou la maille pour une discrétisation sur réseau) (figure 5.39). La correspondance avec un problème de DLA dual se fait très naturellement. Dans l'ensemble du milieu sain, l'opérateur de Laplace est changé en l'opérateur de Lamé. La densité de courant à l'infini est similaire à la contrainte imposée, enfin sur l'amas, la condition de courant nul devient une condition de bord libre, i.e. la contrainte normale est nulle. Nous avons mentionné une fonction homogène de la contrainte pour définir la probabilité. Cette fonction est notre critère de rupture local. Nous imposons ici l'homogénéité de façon à définir facilement une correspondance avec le DLA et le DBM, mais ceci n'est bien sûr pas nécessaire. Une fonction simple peut être la racine carrée de la densité d'énergie élastique (la racine assure que cette fonction est homogène de degrè un). Comme pour le DLA dual, le modèle FGM à trois dimensions, va permettre de générer une surface sans trou qui s'étendra à travers le milieu.

A deux dimensions, il est possible de construire un équivalent élastique au modèle DLA primal. Il a également un sens physique clair. Si nous appliquons la

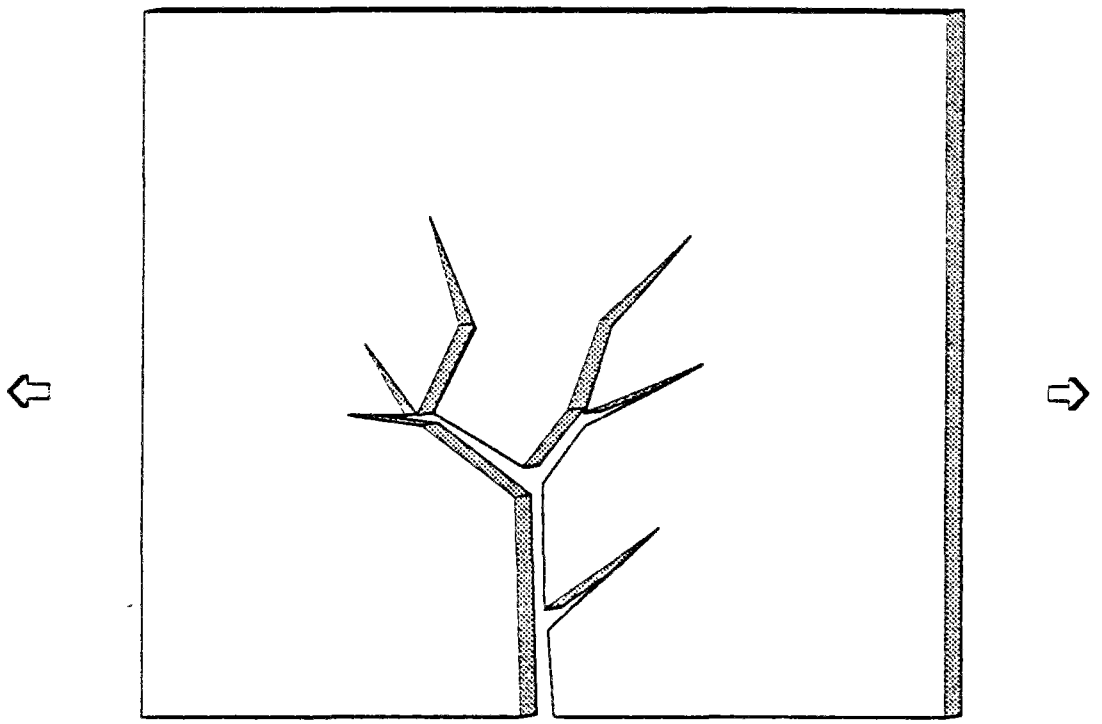


Figure 5.39 : Modèle de croissance de fissure à désordre recuit FGM. Dans la géométrie montrée ci-dessus, une traction est exercée sur les deux bords gauche et droit. Les deux autres bords sont libres. Une fissure progresse de façon aléatoire, avec une probabilité de rupture proportionnelle à une fonction de la contrainte locale.

correspondance habituelle, nous aboutissons à la formulation suivante. Dans un milieu infini sur lequel est imposée une déformation (ou contrainte) simple à l'infini, nous plaçons un amas constitué de liens infiniment rigides (indéformables). Nous choisissons un lien voisin de cet amas avec une probabilité proportionnelle à une fonction homogène de la contrainte locale et nous le transformons en lien indéformable. Nous répétons cette procédure jusqu'à l'obtention d'un amas rigide de taille souhaitée. Ce modèle est *stricto sensus* l'analogue élastique du modèle DLA primal. Il est évident que peu de situations physiques se prêtent à ce genre de modèle. Cependant, à deux dimensions, nous avons encore la possibilité d'appliquer la transformation de dualité vue dans le cas élastique sur modèle discret plusieurs fois (chapitres deux et trois). Ainsi nous transformons un problème de déformation *dans le plan* en un problème de déformation *hors du plan* (e.g. flexion de plaque) tout en échangeant souplesse et raideur. Il est alors facile de se convaincre que le modèle obtenu, et que nous appellerons FGM dual, décrit la fracture pour une plaque sollicitée hors de son plan (cf. figure 5.40). En revanche, à trois dimensions, il n'existe pas une telle correspondance.

L'essentiel des études que nous rapportons concerne le modèle FGM à deux dimensions, pour une déformation dans le plan, discrétisé sur réseau par le modèle de forces centrales (treillis réticulé). Dans ce cas, la fonction qui donne la probabilité de rupture locale est simplement la valeur absolue de l'effort normal dans une barre (i.e. un lien). Remarquons qu'alors la compression et la traction sont parfaitement symétriques. Nous mentionnerons également quelques travaux effectués récemment sur les réseaux de poutres encastrées. Dans ce cas, nous discuterons plus précisément du critère de rupture. Actuellement, à notre connaissance personne ne s'est intéressé au modèle FGM dual à deux dimensions, ou simplement au modèle FGM en dimensions trois.

Les premières études du modèle FGM sont dues à Guinea et coll. [100], Louis et coll. [101] et Louis et Guinea [102]. Dans les simulations numériques qu'ils rapportent, la taille du système considéré est de 100×100, et les amas comptent jusqu'à 1500 liens rompus. S'agissant du modèle de forces centrales, le réseau support est bien

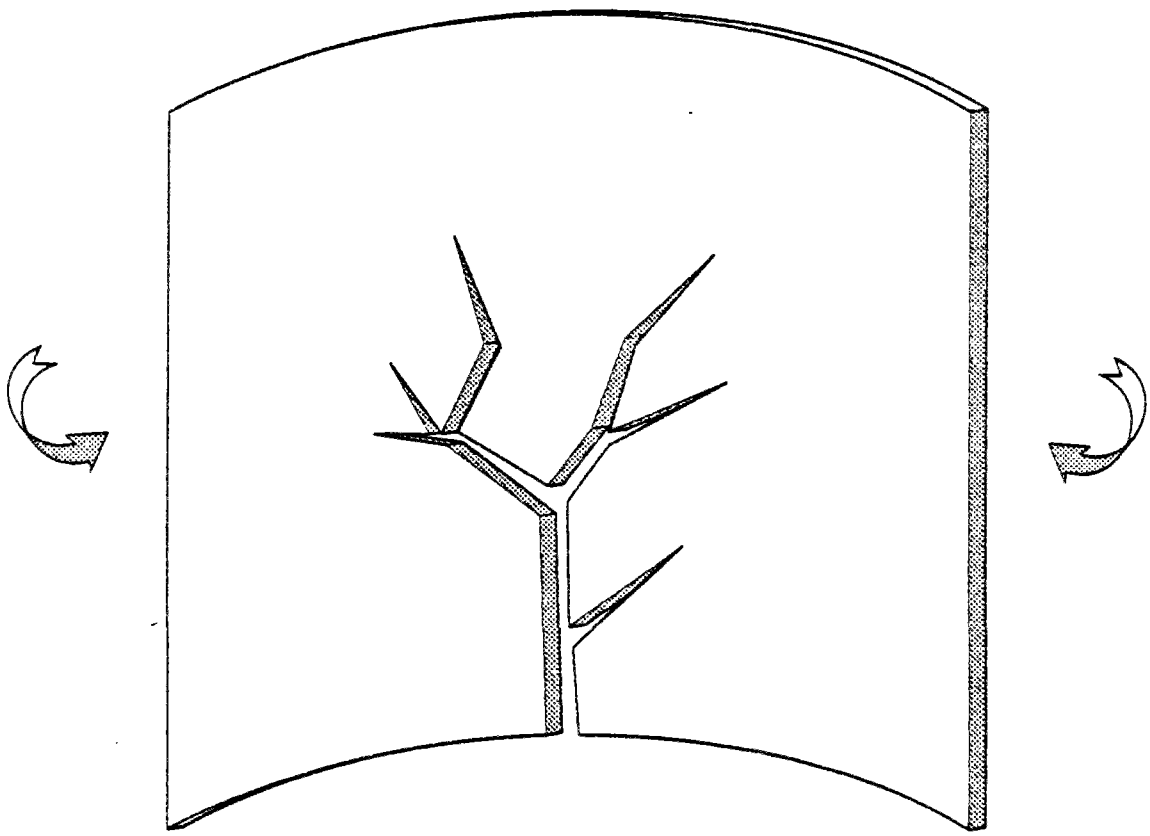


Figure 5.40 : A deux dimensions, le modèle FGM admet un problème dual, qui correspond à la rupture en flexion d'une plaque. Ce modèle *n'est pas équivalent* au problème primal, contrairement au modèle de DLA, qui est invariant par dualité. Il n'a cependant jamais été étudié à notre connaissance.

sûr un réseau triangulaire. Deux types de sollicitations ont été étudiés. D'une part, une extension isotrope, d'autre part, un cisaillement simple. Leur conclusion, quant à la structure des amas observés, était que la dimension fractale était tout à fait comparable à celle du DLA. Plus précisément, dans la référence [101], ces auteurs donnent les estimations suivantes pour les dimensions fractales

$$D_f = 1.62 \pm 0.05 \qquad (5.3.22)$$

et

$$D_f = 1.64 \pm 0.05$$

obtenues respectivement pour la traction isotrope et le cisaillement. Dans la référence [102], ces estimations sont respectivement 1.55 ± 0.05 et 1.60 ± 0.05.

Ces nombres sont légèrement inférieurs à la valeur communément admise pour le DLA, (1.71), mais la taille des systèmes étudiés est aussi sensiblement plus faible que pour le DLA. Cette limitation, commune à toutes les études que nous citerons dans la suite, provient du fait qu'il n'existe pas d'algorithme qui évite d'avoir à résoudre l'ensemble des déplacements élastiques dans le milieu sain environnant (comme la formulation en termes de marches aléatoires pour le DLA).

Un sérieux problème concerne ici les techniques numériques utilisées pour résoudre le problème. Dans la plupart des cas, il faut utiliser un algorithme de relaxation, et le temps de calcul peut rapidement devenir prohibitif lorsque la taille du système augmente. Mais en contrepartie, il faut aussi étudier de grands systèmes pour obtenir des conclusions fiables. Aussi, un compromis est-il à trouver entre la précision de la résolution des équations, et la taille du système considéré.

Que se passe-t-il lorsque la relaxation est imparfaite ? Suivant un argument de Herrmann [103, 104] (notons que dans cette dernière référence, les effets d'une relaxation partielle sont opposés à ceux que nous décrivons maintenant, à cause des règles du modèle) , les modes longs ne seront pas à l'équilibre (le temps de relaxation d'un mode varie comme le carré de sa longueur d'onde), en conséquence la structure très locale

sera satisfaisante, mais deux parties opposées de l'amas s'"ignoreront". Dans ce cas, la dimension fractale attendue est celle de l'espace environnant, (soit ici deux).

Dans le cas des études rapportées ci-dessus, la convergence du schéma numérique utilisé est certainement peu fiable, et nous aurons l'occasion de discuter plus loin de la validité de ces résultats.

Signalons aussi que d'autres difficultés numériques sont également présentes dans ce modèle, comme l'effet de la proximité des frontières du réseau. Il est possible de s'affranchir de cet inconvénient en utilisant une formulation intégrale (faisant usage des fonctions de Green) ("Boundary element method") mais cette technique est très lourde à mettre en œuvre (voir le travail d'Amitrano et coll pour le DLA [98]).

Avec Hinrichsen et Hansen [105] nous avons étudié ce même problème mais avec des conditions aux limites différentes. Nous partons d'un réseau triangulaire de taille L par L. Sur le bord supérieur, un déplacement vertical (traction uniaxiale) ou horizontal (cisaillement simple) est imposé, alors que le bord inférieur est maintenu fixe. Dans le sens horizontal, les conditions aux limites sont périodiques. La fracture est initiée au centre du réseau. Les figures 5.41, 5.42 et 5.43 montrent trois amas obtenus. Dans le premier cas (figure 5.41) il s'agit du modèle FGM pour une traction uniaxiale. Le second cas, 5.42, correspond à un cisaillement. La dernière figure, 5.43, illustre le modèle DLA dual dans une géométrie identique aux cas précédents. Le réseau est toujours triangulaire. Le bord inférieur est à un potentiel nul, et le bord supérieur est à un potentiel unité. Comme le DLA a une structure bien connue par de nombreuses autres études mais pour des conditions aux limites différentes, cela permet de vérifier simplement, que la proximité du bord dans la direction verticale, ou l'interaction de l'amas avec lui-même (via les conditions de périodicité) dans la direction horizontale, n'induisent pas de perturbations trop sensibles.

La taille des réseaux étudiés est de 64×64, soit une petite taille comparée à celles des autres études. La définition du voisinage est telle que la fissure générée est connexe dans le réseau dual. La résolution numérique des déplacements utilise une

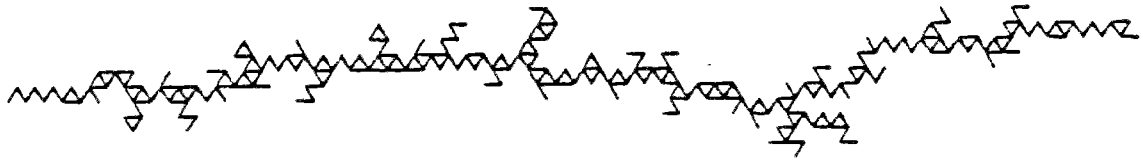


Figure 5.41 : Un exemple de fissure générée dans le modèle FGM dans une sollicitation de traction uniaxiale. Les conditions aux limites sur les bords verticaux sont périodiques, alors que le déplacement est imposé sur les deux bords horizontaux.

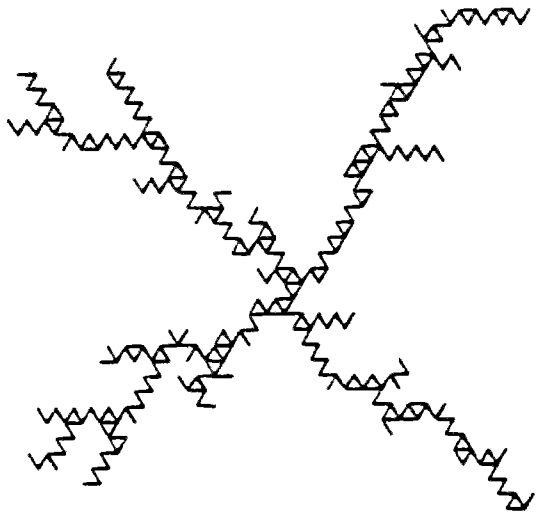


Figure 5.42 : Un exemple de fissure générée dans le modèle FGM dans une sollicitation de cisaillement simple. Les conditions aux limites sur les bords verticaux sont périodiques, alors que le déplacement est imposé sur les deux bords horizontaux.

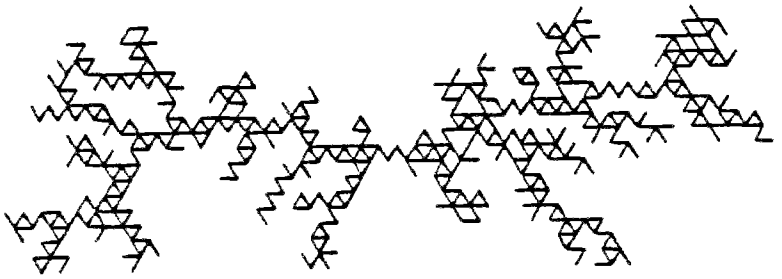


Figure 5.43 : Un exemple de fissure générée dans le modèle DLA dual dans une géométrie similaire aux deux cas précédent. Les conditions aux limites sur les bords verticaux sont périodiques, alors que la différence de potentiel est imposée sur les deux bords horizontaux.

technique de gradient conjugué, avec une précision de 10^{-10}. Cette précision est très largement supérieure à celle utilisée dans les autres études (de l'ordre de 10^{-2}). Comme nous l'avons déjà mentionné ci-dessus, nous devons toujours choisir un compromis entre la taille du système étudié et la précision de la résolution des équations. Nous préférons un réseau plus petit mais une bonne précision plutôt que l'inverse. Nous reviendrons sur ce point ultérieurement.

La première analyse que nous pratiquons consiste à étudier l'évolution du rayon de giration avec le nombre de liens de l'amas. La loi de puissance observée (Eq.5.3.8) permet de définir une dimension fractale effective. Nous obtenons ainsi respectivement 1.22, 1.35, et 1.65 pour la traction, le cisaillement et le DLA. Cependant, un simple coup d'œil aux structures observées suffit à se convaincre de l'inadaptation d'un tel concept pour caractériser les structures géométriques obtenues. La figure 5.41 montre en effet une fracture très allongée, alors que pour le cisaillement, figure 5.42, la structure obtenue est en forme de croix. Pour mieux caractériser ces objets, nous introduisons le tenseur d'inertie géométrique, défini par la somme sur tous les sites de l'amas de

$$I_{ij} = \frac{1}{M} \sum_{site} (x_i - x_{ig})\,(x_j - x_{jg}) \qquad (5.3.23)$$

où x_i est la coordonnée i de la position d'un site et x_{ig} est la coordonnée correspondante du centre de gravité de l'amas. Nous avions déjà utilisé une telle procédure pour les amas générés dans le cas du désordre gelé. La trace du tenseur d'inertie, I_{ii}, est donc le carré du rayon de giration. Les valeurs propres de ce tenseur I suivent des lois de croissance avec la masse de l'amas, M, similaires à (5.2.113):

$$I_L \propto M^{\gamma_L} \qquad (5.3.24)$$

$$I_S \propto M^{\gamma_S}$$

où les indices L et S dénotent respectivement la plus grande et la plus petite des valeurs propres. La somme $I_L + I_S$ étant égale au rayon de giration, nous pouvons relier la dimension fractale D_f au plus grand des exposants γ introduits:

$$D_f = 2/\gamma_L \qquad (5.3.25)$$

La différence d'exposants $(\gamma_L - \gamma_S)$ n'intervenant que dans un terme correctif. Ceci est similaire au cas étudié pour le DLA où seule la loi d'échelle sur la longueur dans le sens de la croissance moyenne (par l'exposant $\alpha_{//}$) intervient dans l'expression de la dimension fractale.

Dans le cas de la traction simple, ces exposants valent $\gamma_L = 1.63$ et $\gamma_S = 1.32$. Nous retrouvons bien l'égalité (5.3.) aux incertitudes de mesure près. En ce qui concerne le cisaillement, de par la structure cruciforme de l'amas, il découle $\gamma_L \approx \gamma_S$. Leurs valeurs sont respectivement 1.50 et 1.59. Remarquons que le plus grand moment d'inertie, I_L, a un plus faible exposant que I_S. Il est donc clair que ceci est un effet de taille finie, et que pour des systèmes plus grands, ces deux exposants doivent se rejoindre. Si l'on note de plus que la courbure de $\log(I_L)$ en fonction de $\log(M)$ est supérieure à celle de $\log(I_S)$ en fonction de $\log(M)$, il semble que la valeur asymptotique commune de γ_L et γ_S soit plus proche de 1.59 que de 1.50.

Si l'on remarque que le cisaillement simple peut être vu comme la superposition d'une traction dans une direction (1,1) et d'une compression dans le sens (1,-1), il est tentant de voir l'amas généré dans le cisaillement comme étant formé de deux amas de traction simple perpendiculaires (en effet, dans notre modèle la traction et la compression sont rigoureusement identique car seule la valeur absolue de la force locale intervient). Si une telle hypothèse est exacte, alors au centre de la structure, et donc pour des amas de faible taille, l'"interaction" entre ces deux amas devrait donner lieu à une dimension fractale effective plus forte. Puis lorsque les extrémités de chaque branche s'éloignent, alors on peut négliger l'interférence des amas, et seul l'exposant γ_L de la

traction simple devrait intervenir. On constate qu'effectivement, les exposants γ pour le cisaillement sont très voisins de γ_L pour la traction simple.

Un dernier point important concerne l'évolution du module élastique avec le nombre de liens cassés, comme nous l'avions déjà noté pour le modèle de croissance de fissure unique avec désordre gelé. On observe en effet une décroissance du module élastique Y avec M selon

$$Y_0\text{-}Y \propto M^{\delta} \qquad (5.3.26)$$

où Y_0 est le module élastique initial du milieu intact. Les valeurs mesurées de δ sont 1.50 et 1.45 pour la traction et le cisaillement respectivement. Une loi similaire est observée pour la conductivité dans le cas du DLA dual, avec un exposant $\delta = 1.17$. Cette forme de loi peut être facilement comprise en étudiant la réduction de module élastique d'un milieu dans lequel a été percé un trou circulaire de rayon R. Cette réduction est proportionnelle au carré du rayon R. $(Y_0\text{-}Y)$ peut donc s'interpréter comme une estimation de la taille effective de l'amas, estimée sur son influence sur les propriétés de transport, et non sur des critères géométriques comme pour R_g. De fait, ces estimations sont très voisines car l'exposant δ est égal à γ_L, aux incertitudes de mesure près. Plus généralement, l'étude des moments de la distribution des forces dans l'ensemble du milieu permet de construire une hiérarchie infinie de tailles effectives [106]. Il est intéressant de comparer cette construction, avec l'étude de la distribution des forces sur la surface de chaque amas, qui donne lieu comme nous l'avons mentionné dans le cas du DLA à une structure multifractale. La différence entre ces deux notions rappelle la distinction entre les exposants critiques de surface et de masse pour les phénomènes critiques.

Les conclusions de notre étude sont donc contraires à celles de Louis et coll [100-102]. Deux raisons peuvent éventuellement expliquer cette différence de comportement. La première raison que nous avons déjà évoquée concerne la sensibilité

de l'algorithme, qui est un paramètre crucial dans ce type de modèle. La seconde raison concerne les règles de voisinage. A quel degré de connexité considérera-t-on que deux liens sont voisins l'un de l'autre ? Nous reviendrons sur ces deux notions en discutant l'article de Meakin et coll.[107]

Quelle peut être l'origine de la différence entre la structure obtenue pour le modèle FGM et celle du DLA? Nous pensons que la raison majeure provient des symétries spécifiques de l'élasticité. Si l'on veut exprimer le problème en termes de variables scalaires, (e.g. potentiel d'Airy) au lieu de la formulation vectorielle habituelle, il faut pour l'élasticité résoudre une équation *biharmonique*, pour déterminer le champ à l'intérieur de l'amas. La probabilité de croissance locale, est alors fonction de la dérivée seconde de ce champ. Si l'on suit certaines approches comme celle de Turkevich et Scher [91], ou encore celle de Halsey [108], la dimension fractale est liée à la singularité de la solution de l'équation de Laplace autour d'un point anguleux. Dans la cas de l'élasticité, la singularité du champ de déplacement autour d'un point anguleux est différente de celle de l'équation de Laplace [109] et donc il ne semble pas possible de réconcilier les deux solutions hors d'un plan purement *qualitatif*.

Meakin et coll. [107] ont récemment étudié en détail le modèle FGM en le généralisant à la manière du modèle de rupture de diélectrique (modèle DBM introduit par Niemeyer et coll. [84]). Dans ce cas, la rupture d'un lien se fait avec une probabilité proportionnelle à la puissance η de la force qu'il supporte. Meakin et coll. ont étudié trois valeurs de η: 0.5, 1 et 2. Pour chaque valeur, trois types de règles de voisinage __ définissant les liens susceptibles d'être rompus à chaque étape du calcul __ ont été considérées. Enfin deux sollicitations ont été choisies: d'une part une extension isotrope, et d'autre part un cisaillement simple. Les réseaux étudiés avaient une taille de 160 par 160, et la résolution de la distribution des forces dans la structure était effectuée par relaxation.

Les règles de voisinage permettent de définir quels liens sont susceptibles de "croître" à la surface d'un amas. Une règle de voisinage est définie par l'identification des liens qui sont choisis comme voisins d'un lien ij. Dans l'étude de Meakin et coll [107], les trois types de voisinage étudiés (montrés dans la figure 5.44) étaient :

- I : les quatre liens qui entourent le lien ij
- II : les dix liens qui ont une extrémité commune avec le lien ij
- III : les dix-huit liens qui ont pour extrémité un site voisin de i ou j.

La seule caractéristique rapportée pour ces différents cas est la dimension fractale. Nous reproduisons ci-dessous leurs résultats:

$\eta = 1$

Règle de Voisinage	Extension isotrope	Cisaillement simple
I	1.35	1.42
II	1.51	1.62
III	1.66	1.65

$\eta = 2$

Règle de Voisinage	Extension isotrope	Cisaillement simple
I	1.12	1.17
II	1.16	1.49
III	1.45	1.60

enfin pour $\eta = 0.5$, dans tous les cas la dimension fractale était comprise entre 1.9 et 2. Notons que le seul cas comparable avec la référence précédente est $\eta=1$, avec une règle de voisinage I et une sollicitation de cisaillement. Dans ce cas, la dimension fractale obtenue par Meakin et coll., 1.42, est comparable avec celle de Hinrichsen et coll [105] : 1.35.

Dans le cas du DLA, il a été montré numériquement, que les règles de voisinage n'ont pas d'influence sensible sur le comportement des systèmes de grande taille. Pour le modèle FGM, nous voyons qu'il apparaît des différences sensibles selon la

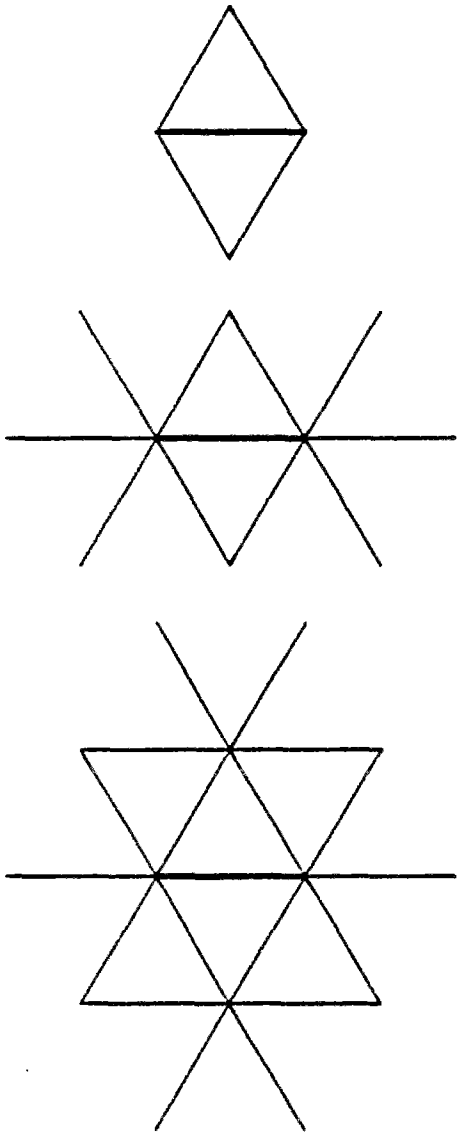


Figure 5.44 : Différentes règles de voisinage étudiées par Meakin et coll. [107] pour choisir les liens susceptibles de rompre dans le modèle FGM. Les liens dessinés autour du lien central (dessiné en gras) définissent ses voisins. De haut en bas, on distingue les règles I, II et III. Les figures 5.41 à 5.43 ont été obtenues à partir de la règle de voisinage I.

règle de voisinage choisie. Devant de telles variations, Meakin et coll. [107] concluent qu'il est impossible d'obtenir une estimation fiable sans recourir à des tailles très supérieures. Or devant les temps de calculs requis par ce type de simulation, il est actuellement impossible d'atteindre des tailles très supérieures (gagner une décade en taille revient à dépenser sensiblement 10^4 fois plus de temps de calcul !). Ces auteurs suggèrent même qu'un régime universel (indépendant des règles de voisinage) puisse ne pas exister pour le FGM.

Nous ne partageons pas de conclusions aussi pessimistes. Le modèle de forces centrales est, comme nous l'avons vu au chapitre 3, un modèle *non-local*. En ce sens, la définition du voisinage est importante. Si l'on veut interpréter les liens cassés comme duaux d'une fissure unique (connexe), alors la règle I s'impose. Si l'on s'affranchit de cette définition, il est vraisemblable que le caractère non-local amplifie les déviations par rapport au régime asymptotique à petite échelle (quelques mailles de réseau). Nous verrons en effet que dans le cas extrême où le voisinage est étendu à l'ensemble du réseau, alors la concentration de liens cassés à la rupture du réseau est finie (elle correspond alors à une "dimension fractale" de 2). Cet effet doit donc donner une dimension fractale apparente supérieure aux petites tailles et ce de façon plus prononcée au fur et à mesure que l'on élargit la définition du voisinage. A grande distance, un autre effet intervient. Nous avons déjà mentionné que la précision du calcul était un effet extrèmement important. Dans le travail de Meakin et coll., la précision requise était de 10^{-2}, (à comparer à 10^{-10} dans notre référence [105]). Comme nous l'avons déjà mentionné précédemment, l'effet de cette très faible précision est de faire tendre la dimension fractale vers 2, à nouveau. Lorsque la définition du voisinage est plus large, la vitesse de croissance de l'amas (variation du rayon de giration en fonction du nombre de liens cassés) est supérieure, et donc si la précision est maintenue identique, une mauvaise relaxation sera ressentie plus tôt. Cette discussion est bien sûr qualitative, cependant, elle indique que la plage, où le comportement est à évaluer, s'amenuise aussi bien à petite qu'à grande échelle. Ces deux effets concourent simultanément à augmenter la dimension

fractale apparente lorsque l'on passe du modèle I au modèle II puis au III. C'est bien en effet la tendance observée.

En conséquence, nous jugeons prématuré de tirer des conclusions définitives sur l'universalité des fractures obtenues. D'autres études sont bien sûr nécessaires pour éclaircir certains points quant aux conditions aux limites, et aux règles de voisinage. Cependant, nous ne partageons pas le pessimisme de Meakin, et nous restons confiant quant à la validité des résultats que nous avons présentés.

Meakin [107] a suggéré le parallèle entre le modèle FGM où certaines directions sont parfois favorisées, comme pour la traction uniaxiale, et une variante anisotrope du DLA étudiée par Ball et coll. [110]. Pour définir ce dernier modèle, nous reprenons la première formulation du DLA avec des marches aléatoires. Lorsqu' une marche aléatoire atteint la surface de l'amas, le site atteint n'est ajouté à l'amas qu'avec une *probabilité* finie. Dans le cas contraire, la marche continue comme si l'amas était isolant (et non équipotentiel). Si nous nous arrêtons là, alors l'amas généré a toujours à grande échelle la même structure, mais à petite échelle il apparaît compact [111]. La probabilité finie introduite ne fait que modifier la coupure inférieure du réseau. Le modèle de Ball et coll. introduit de plus une anisotropie dans la probabilité de collage des marches aléatoires. Lorsque la marche atteint l'amas selon la direction x alors la probabilité est plus forte lorsqu'elle atteint l'amas dans la direction y. Dans ce cas, ces auteurs ont constaté que l'amas prend une forme allongée dans le sens de la probabilité la plus forte, mais surtout, les lois d'échelle sont sensiblement modifiées. La longueur de l'amas dans la direction x, L, et sa largeur dans la direction y, ℓ, suivent la dépendance suivante avec la masse:

$$L \propto M^{2/3} \qquad (5.3.27)$$

$$\ell \propto M^{1/3}$$

Ainsi, l'introduction d'une anisotropie dans les probabilités de croissance affecte considérablement la structure de l'amas. Meakin et coll., en faisant cette comparaison suggèrent que le problème élastique contient intrinsèquement ce type d'anisotropie, et que c'est elle qui est responsable de la différence de structure entre le FGM et le DLA.

Ici encore, nous sommes en désaccord avec cette suggestion. Nous savons en effet que le DLA est intrinsèquement anisotrope: la structure est différente selon la direction moyenne de croissance et la direction perpendiculaire (cf. la discussion précédente sur les exposants $\alpha_{//}$ et $\alpha_{\perp}$). Nous pensons que l'aspect anisotrope des amas obtenus en traction uniaxiale (et des branches de la fissure pour un cisaillement) est beaucoup plus comparable à cette anisotropie intrinsèque, plutôt qu'à la sensiblité à une anisotropie extrinsèque comme dans le modèle de Ball et coll.

-Réseau de poutres

A notre connaissance, une seule étude a été consacrée à d'autres modélisations de l'élasticité sur réseau. Il s'agit d'un travail récent de Herrmann et coll [112] et Herrmann [104]. Le modèle étudié est un modèle de poutres encastrées sur réseau carré. Les auteurs se sont intéressés à trois modèles de fracture déterministes où le bruit ne joue plus aucun rôle. Chaque lien i est caractérisé par un nombre, p_i, qui représente un critère de rupture usuel [113].

$$p_i = (f^2 + q \max(m)) \qquad (5.3.28)$$

où f est la force normale dans le lien, m le moment fléchissant, max(m) le maximum de m le long de la poutre (et donc à l'une des deux extrémités) et q un paramètre libre du modèle. Remarquons ici que ce critère remplace la fonction homogène de la contrainte dont nous parlions dans l'introduction du modèle FGM.

Dans le premier modèle (I), les liens qui réalisent le maximum de p sont cassés à chaque pas de temps, puis l'ensemble du réseau est remis à l'équilibre. Dans les deux autres modèles (II et III), un effet de mémoire est pris en compte. Dans le deuxième modèle, à chaque pas de temps, le (ou les) lien(s) cassé(s) réalise(nt) le maximum de

$$p^{\eta} + f\, p_{-1}^{\eta} \qquad (5.3.29)$$

où p_{-1} est la valeur de p au pas de temps précédent, et η est un paramètre libre du modèle. f est un paramètre qui quantifie la permanence de l'information. Lorsque f=0, nous retrouvons le premier modèle. Dans le troisième modèle, chaque lien i est doté d'un compteur, c_i. Ce compteur est mis à jour à chaque pas de temps selon

$$c = \alpha_{min}\, p^{\eta} + f'\, c_{-1} \qquad (5.3.30)$$

où c_{-1} est la valeur de c au pas de temps précédent, et α_{min} est le minimum sur tous les liens de $\alpha = (1\text{-}c)p^{\eta}$. Le lien cassé à chaque pas de temps est celui qui réalise le maximum de c. Lorsque f' tend vers zéro, ce modèle III devient équivalent au modèle II. Lorsque f'=1, ce modèle correspond à une réduction de bruit infinie pour le modèle FGM.

Le modèle I donne des structures qui n'ont rien de fractal, mais dont la forme est cependant beaucoup plus complexe que dans le cas du DLA usuel où seules des droites auraient été générées. Le modèle II donne des structures fractales, comme l'exemple montré sur la figure 5.45. Par exemple, pour $\eta = 0.7$ et $q = 0$, la dimension fractale mesurée vaut $D_f = 1.25$. Cette dimension n'est pas sensible aux caractéristiques élastiques des poutres, mais par contre elle dépend sensiblement de la valeur de η. Pour $\eta = 0.5$ et q=0, la dimension fractale vaut $D_f = 1.15$. Dans ce dernier cas, le critère p_i se réduit à la valeur absolue de la force normale. Le modèle III donne également des amas

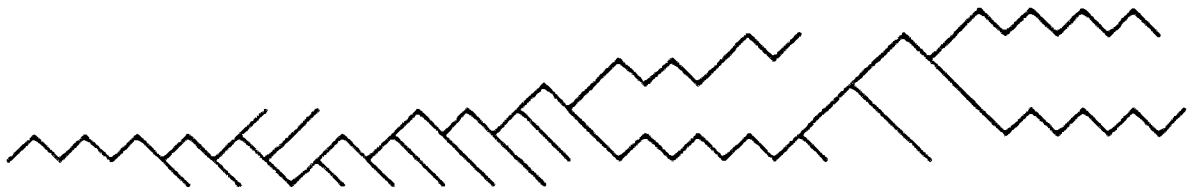


Figure 5.45 : Exemple de fissure obtenue par un algorithme déterministe de rupture sur un réseau de poutres. Il s'agit du modèle 2 de l'étude de Herrmann et coll. [112]. Seule une moitié de la fissure est représentée. Elle est symétrique par rapport à son centre situé à gauche sur la figure. La sollicitation imposée est un cisaillement simple. La figure est extraite de cette référence.

fractals de dimension supérieure. Il est remarquable d'obtenir des structures si complexes avec des algorithmes si simples.

Mentionnons pour conclure sur le cas élastique, que des images d'amas du modèle FGM en forces centrales avec réduction de bruit peuvent être trouvées dans l'article de Fernandez et coll.[114]. López-Sancho et coll.[115] ont étudié une variante du modèle FGM où les liens ont un caractère plastique une fois qu'ils appartiennent à l'amas. Dans ce cas, il n'y a plus d'écrantage, et le modèle d'Eden est retrouvé. Enfin le modèle de Born étudié par Yan et coll. [116] donne des résultats similaire au DLA aux imprécisions de mesure près.

5.3.3 Abandon du critère de connexité

Après avoir considéré les modèles à désordre recuit où une seule fracture est générée, nous allons nous affranchir du cadre de la fracture unique. Le modèle que nous allons donc étudier maintenant consiste simplement à casser des liens aléatoirement, avec une probabilité proportionnelle à la puissance η du courant porté par ce lien. Comme nous l'avons déjà fait plusieurs fois, nous allons nous familiariser avec ce modèle sur le réseau hiérarchique diamant avant de revenir au cas des réseaux Euclidiens.

- Réseau hiérarchique diamant

Voyons d'abord comment mettre en œuvre simplement ce principe sur le modèle hiérarchique. Pour caractériser l'histoire complète d'un réseau, depuis son état intact jusqu'à la rupture, nous introduisons deux séquences de nombres, indexées par le nombre de liens cassés, g_i et m_i. g_i est la conductance du réseau, et m_i est le moment d'ordre η des courants circulant dans le réseau pour un courant total unité. Nous allons voir que la connaissance de ces deux séquences pour quatre réseaux à la génération n, permet simplement de construire l'histoire d'un réseau à la (n+1) génération. Comme toujours, nous commençons par assembler deux liens en séries, puis nous les groupons en parallèle.

• Série: soient n_1 et n_2 les nombres de liens cassés dans chacun des deux réseaux. Quelle est la probabilité, p_i, de choisir un lien dans le réseau i ? Cette probabilité est proportionnelle à la somme des courants circulant dans ce réseau, pour un courant total imposé unité. Elle est donc proportionnelle au moment d'ordre η de la distribution des courants, soit

$$p_i = \frac{m_i}{m_1+m_2} \qquad (5.3.31)$$

si m_i désigne le moment η dans le réseau i. Avec cette probabilité, n_i est incrémenté d'une unité, puis le même processus est reitéré. En même temps, la séquence (g,m) correspondant à l'ensemble des deux réseaux est construite.

• Parallèle : Nous reprenons la même formulation. La probabilité p_i dépend maintenant du courant qui circule dans chaque réseau. Soit g_1 et g_2 la conductance des deux réseaux en parallèle. Le courant circulant dans le réseau i est donné par $g_i/(g_1+g_2)$. Le moment d'ordre η, est donc égal à M

$$M = \frac{m_1 g_1^{\eta} + m_2 g_2^{\eta}}{(g_1 + g_2)^{\eta}} \tag{5.3.32}$$

et donc la probabilité p_i peut s'écrire

$$p_i = \frac{m_i g_i^{\eta}}{m_1 g_1^{\eta} + m_2 g_2^{\eta}} \tag{5.3.33}$$

Nous voyons donc que la connaissance de m_i et g_i permet de reconstruire cette même séquence pour l'ensemble des deux liens en parallèle, et de calculer la probabilité de casser un lien dans le réseau i, et donc de savoir quel index incrémenter à chaque pas de temps.

Dans le modèle hiérarchique, deux valeurs de η sont particulières, en ce sens que l'une des deux séquences n'est plus nécessaire. Pour $\eta = 0^+$, il suffit de connaître les moments, m_i, ou de façon équivalente la proportion de liens portant un courant non nul. Pour $\eta = 1$, les moments m_i donnent exactement la longueur du réseau, et sont donc constants dans tout le processus. Ainsi, pour deux liens en séries, $p_i = 1/2$ (cf Eq.(5.3.31)), alors que pour deux liens en parallèle la probabilité est donnée par $p_i = g_i/(g_1 + g_2)$ (Eq.(5.3.33)).

Partant de ces considérations nous pouvons nous interroger sur la stabilité du processus.

- Stabilité

Nous allons commencer par montrer que dans certains cas, l'instabilité est intrinsèque aux modèles que nous considérons, et qu'en conséquence, il est impossible de considérer la réponse moyenne du système sans les fluctuations qui lui sont inhérentes.

Imaginons un ensemble S formé de deux éléments en série S_1 et S_2. La règle du jeu est la suivante : Nous imposons un courant unité à travers le système S. Nous choisissons l'un des deux éléments $S_i = S_1$ ou S_2, avec une probabilité p_i proportionnelle au moment, M_i, d'ordre η de la distribution des courants dans chaque élément. Une fois l'un des éléments choisi, nous coupons un lien de cet élément, et nous recommençons l'opération jusqu'à rupture de l'ensemble. Nous imaginons que chaque élément S_i est composé d'un très grand nombre de liens élémentaires, et qu'il possède une caractéristique (identique pour S_1 et S_2) que l'on représente par la relation moyenne entre le moment m et le nombre d'éléments coupés, n, dans l'élément:

$$m = \varphi(n) \qquad (5.3.34)$$

Le problème que nous nous posons est le suivant (voir figure 5.46): supposons qu'un nombre n_i de liens ait été coupé dans l'élément i (pour i = 1 et 2), et que n_1 et n_2 soient voisins mais cependant différents, $n_1 - n_2 << n_1$. Comment la différence $n_1 - n_2$ évolue-t-elle avec le nombre total de liens cassés dans la structure S ?

D'après les règles de choix des éléments, nous obtenons :

$$p_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \qquad (5.3.35)$$

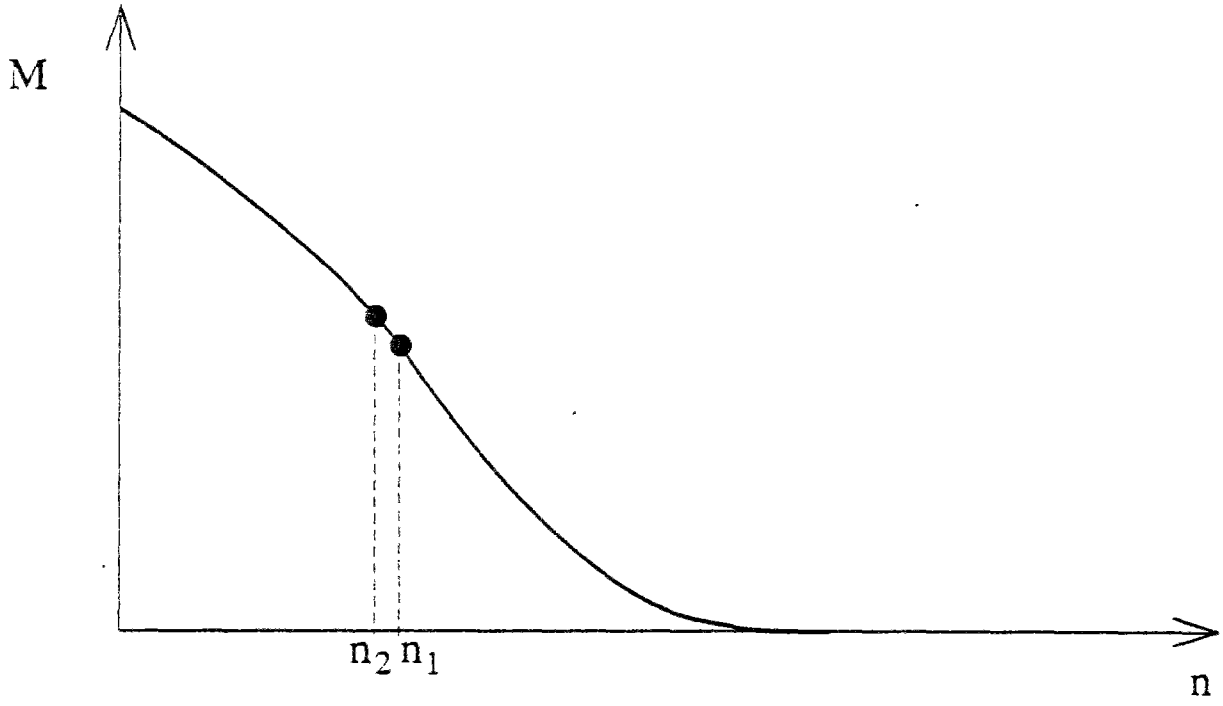


Figure 5.46 : Pour illustrer le caractère instable de certains modèles, nous imaginons la construction suivante. Deux éléments en série, dont n_1 et n_2 représentent le nombre de liens cassés, sont supposés caractérisés par une relation unique entre M et n. La probabilité de casser un lien dans l'élément i est proportionnelle à M_i. Lorsque M est une fonction décroissante de n, le système est stable.

et de même pour p_2, en échangeant les indices 1 et 2. Or, la variation du nombre n_i peut s'écrire $dn_i = p_i\, dn$. Donc,

$$\frac{d(n_1-n_2)}{dn} = \frac{(m_1-m_2)}{(m_1+m_2)} \qquad (5.3.36)$$

et donc au premier ordre en la différence (n_1-n_2)

$$\frac{d(n_1-n_2)}{dn} = \frac{(n_1-n_2)}{2}\,\frac{\varphi'(n_1)}{\varphi(n_1)} \qquad (5.3.37)$$

Ainsi si $\varphi(n)$ est une fonction décroissante, la différence (n_1-n_2) diminuera avec n, alors que si $\varphi(n)$ est croissante, (n_1-n_2) sera croissant avec n. La première situation sera donc qualifiée d'instable, alors que la seconde sera stable. Le sens physique de cette éventuelle instabilité se comprend bien: Lorsqu' un lien est enlevé dans un élément, selon que la probabilité relative de choisir le *même* élément au pas de temps ultérieur augmente ou diminue la situation sera instable ou stable respectivement. Dans cette analyse, nous n'avons pas pris en compte un élément fondamental: le bruit. Nous ne pensons pas que cela affecte le caractère *stable* ou *instable* du processus même si la solution dépend quantitativement de ce bruit.

Il se trouve qu'il est facile de dire d'ores et déjà quelles seront les situations stables et instables. En effet, dans les cas qui nous intéressent, m est le moment d'ordre η des courants qui circulent dans l'élément pour une courant total unité. Lorsque η sera inférieur à un, m __ ou $\varphi(n)$ __ sera une fonction décroissante de n, et donc le comportement sera stable. Lorsque η sera supérieur à un, $\varphi(n)$ sera une fonction croissante de n donc instable. Pour $\eta = 1$, les moments seront constants par conservation du courant, et donc dans le traitement ci-dessus, l'équilibre sera indifférent. En fait, dans ce cas nous pouvons appliquer la loi des grands nombres, et donc la différence (n_1-n_2) en valeur typique augmentera comme la racine carrée du nombre total de liens (n_1+n_2).

Dans le cas où l'on rencontre une telle instabilité, nous pouvons nous attendre à ce que le nombre de liens cassés correspondant à une situation physique donnée (e.g. pour une conductance du milieu fixée), varie moins vite que le nombre total de liens dans le système. En conséquence, nous nous attendons donc à trouver une dimension fractale inférieure à celle de l'espace environnant. La valeur de la dimension fractale va bien sûr dépendre de la présence ou non de bruit dans le processus de croissance.

Pour aborder le problème pour le réseau hiérarchique complet, nous devons également traiter le problème de deux éléments en parallèle. Plutôt que de refaire le calcul, nous proposons de définir les moments, m', à tension unité (plutôt qu'à courant total constant, m). La correspondance est alors évidente :

$$m' = m\, g^{\eta} \qquad (5.3.38)$$

et les conclusions seront similaires au cas précédent, en remplaçant m par m'. En revanche il n'est pas possible de prédire d'emblée en fonction de η quelle situation sera stable et quelle situation sera instable. Nous pouvons répondre pour quelques cas particuliers:

• Pour η =0, m' sera encore proportionnel à la densité du squelette. Nous serons dans une situation stable.

• Pour η = 1 et η = 2, m' sera proportionnel à la conductance et donc le processus sera encore stable.

• Pour η plus grand, il est impossible de répondre à la question pour l'ensemble du processus. Une chose est cependant certaine: A la fin du processus, la conductivité doit s'annuler. En conséquence, puisque les moments m sont tous bornés, la *fin* du processus est toujours stable. Il se peut cependant que la phase initiale soit, elle, instable.

Soulignons que le traitement que nous avons proposé est approximatif, dans la mesure où nous n'avons pas considéré de fluctuations de la caractéristique $\varphi(n)$, mais seulement des fluctuations d'histoire (de n) entre différents éléments. En conséquence,

nous n'avons, *stricto sensus*, qu'une condition nécessaire pour que l'instabilité se produise, mais pas de condition suffisante.

Il est important de souligner le parallèle que l'on peut faire avec la localisation de l'endommagement dans un milieu adoucissant. Cette instabilité de localisation a déjà été signalée dans la première partie de ce chapitre, avec les différents remèdes qui lui sont apportés pour la formulation numérique d'un schéma "objectif" (i.e. indépendant de la maille de la discrétisation en éléments finis par exemple). Il est bien sûr possible d'adapter les mêmes remèdes dans le cas présent, mais dans ce cas, il est évident que l'on ne pourra prédire correctement le changement d'échelle. Même le simple concept de dimension fractale est alors perdu dans cette "régularisation". Nous pensons qu'il en va de même pour la localisation de l'endommagement en milieu adoucissant. Le mécanisme de l'instabilité est identique. Stabiliser "de force" les modes courts tout en gardant le caractère instable des modes longs, ne permet en aucun cas de reproduire le comportement réel dans les changements d'échelle (en particulier au niveau de la structure géométrique).

- Simulations numériques pour le réseau hiérarchique

Abordons maintenant les simulations numériques de ce problème. Commençons par le cas le plus simple : $\eta = 0^+$. Nous savons que dans ce cas, nous avons un problème de percolation avec écrantage. Rappelons qu'alors l'exposant de longueur de corrélation, $\nu(\eta = 0^+)$, est corrigé par : $\nu(\eta = 0^+) = \nu/(1+\beta_{bb})$ où ν est l'exposant de la longueur de corrélation en percolation usuelle sur réseau hiérarchique, et β_{bb} l'exposant critique de la densité du squelette. Soit, après un calcul simple, utilisant $\nu = 1/(2-2x) = 1.634$, et $\beta_{bb}/\nu = x$, où $x = -\log(p_c)/\log(2)$, et $p_c = (\sqrt{5}-1)/2$, nous obtenons numériquement $\nu(\eta = 0^+) = 0.766$.

La mesure par simulation numérique directe de ce cas particulier permet de tester simplement la méthode. Nous avons donc enregistré la valeur moyenne du seuil

effectif de percolation avec écrantage, $p_c(n)$, en fonction de la génération du système, n, ainsi que l'écart-type de cette distribution; $\sigma(n)$. Appelant $L = 2^n$ la taille du système, nous escomptons les lois suivantes:

$$p_c(L) = p_{c\infty} + A\, L^{-1/\nu} \qquad (5.3.39)$$

et

$$\sigma(L) \propto L^{-1/\nu} \qquad (5.3.40)$$

où nous avons omis l'indice $\eta = 0^+$, pour alléger l'écriture. La figure 5.47 montre $1\text{-}p_c(n)$ en fonction de $L^{-1/\nu}$ pour des réseaux jusqu'à la huitième génération. Nous voyons que l'accord avec la forme (5.3.39) est excellent pour les valeurs suivantes des paramètres: $p_{c\infty} = 0.777$, $A = -0.589$, $1/\nu = 1.30$. Cette dernière valeur indique $\nu = 0.77$, en bon accord avec notre attente (0.766). En revanche, la figure 5.48 montre l'évolution de $\log_2(\sigma(n))$ en fonction de $n = \log_2(L)$. Nous estimons la pente asymptotique à la valeur 0.9, indiquée sur la figure. Nous sommes très loin de la valeur -1.30 escomptée. Comment expliquer cette différence de comportement ?

Nous suggérons que la réponse à cette question peut provenir d'une anisotropie du milieu pour les valeurs de η différentes de zéro. Par anisotropie, nous entendons que le point critique peut être caractérisé par la divergence de deux longueurs de corrélation, l'une parallèle (indice //) au sens du courant, l'autre perpendiculaire (indice $\perp$), chaque longueur ayant un exposant critique différent, $\nu_{//}$ et $\nu_\perp$. En effet, dans ce cas, les relations (5.3.39 et 5.3.40) doivent être adaptées.

Nous supposerons que $\nu_\perp \geq \nu_{//}$, comme il est probable pour les modèles où η est strictement positif, puisque les fractures ont tendance à se développer perpendiculairement au sens du courant. Comme pour le modèle hiérarchique, nous supposerons que la largeur du réseau, L, est égale à sa longueur. La distribution des seuils est fixée par la première longueur de corrélation qui atteint L. Dans notre cas, par hypothèse, il s'agit de $\xi_\perp$. Ainsi la distance au seuil asymptotique est de l'ordre de $\Delta p \propto$

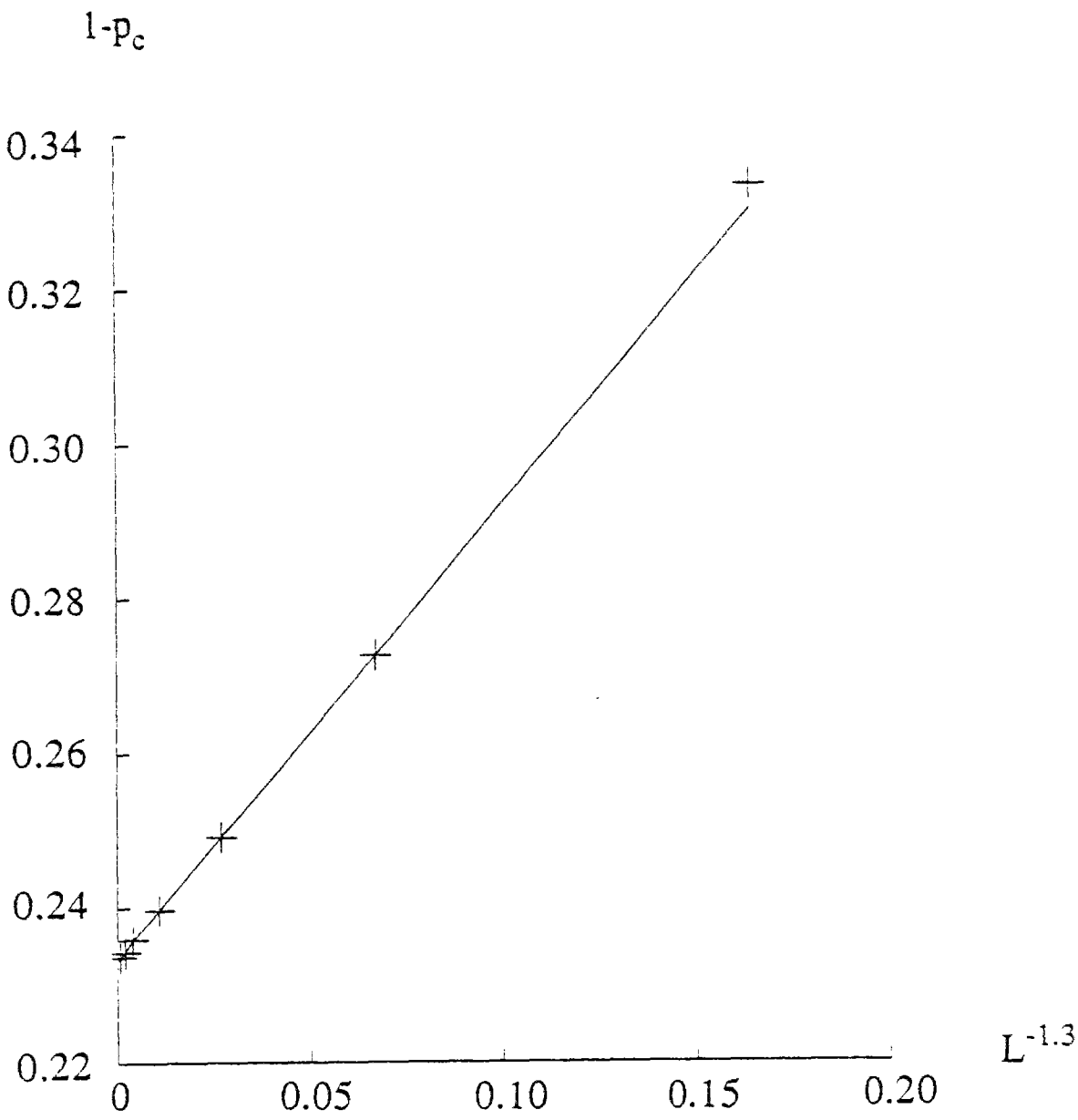


Figure 5.47 : Seuil effectif, 1-p_c(n), du modèle de percolation avec écrantage sur réseau hiérarchique, en fonction de la taille du système à la puissance -1/ν = 1.30, $L^{-1/\nu}$.

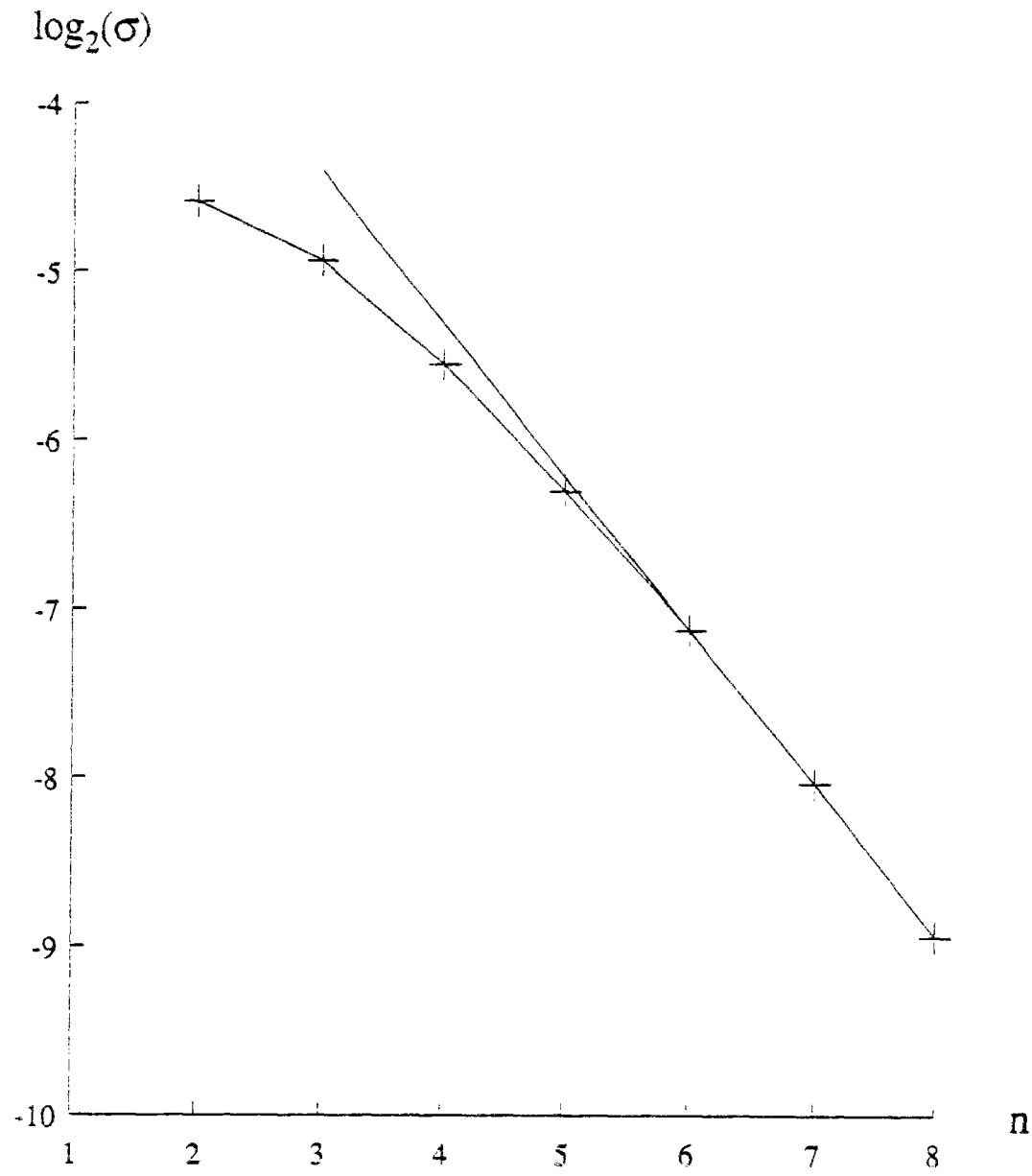


Figure 5.48 : Logarithme de l'écart-type de la distribution de seuil effectif, $\log_2(\sigma(n))$, du modèle de percolation avec écrantage sur réseau hiérarchique, en fonction de la génération du réseau. La droite montrée a une pente de 0.9.

$L^{-1/\nu_\perp}$. La première correction au seuil asymptotique est donnée par une loi de puissance avec un exposant $1/\nu_\perp$, soit, dans le cas général:

$$p_c(L) = p_{c\infty} + A\, L^{-x} \qquad (5.3.41)$$

où $x = 1/\max(\nu_\perp, \nu_{//})$. Si à ce point la longueur du réseau était égale à $\xi_{//} = L^{\nu_{//}/\nu_\perp}$, alors, l'écart-type de la distribution serait aussi donné par une loi similaire à l'écart au seuil: $\sigma_0(L) \propto L^{-1/\nu_\perp}$. Mais puisque $L > \xi_{//}$, alors nous pouvons considérer que nous avons de l'ordre de $L/\xi_{//}$ réseaux *indépendants* en série. L'écart-type de la distribution du seuil effectif pour des réseaux de taille L par L, $\sigma(L)$, sera donc relié à l'écart-type $\sigma_0(L)$ selon

$$\sigma(L) \propto \sigma_0(L)\, (L/\xi_{//})^{-1} \qquad (5.3.42)$$

en supposant que la distribution des seuils a une décroissance rapide pour les faibles valeurs de seuil. Nous obtenons finalement la dépendance en taille suivante

$$\sigma(L) \propto L^{-y} \qquad (5.3.43)$$

où

$$y = \frac{1+\nu_\perp-\nu_{//}}{\nu_\perp} \qquad (5.3.44)$$

Ainsi, nous retrouvons dans le cas isotrope, $\nu_\perp=\nu_{//}$, l'égalité $x= y = 1/\nu$. Mais dès que le problème est anisotrope, $\nu_\perp$ et $\nu_{//}$ suivent des lois d'échelle différentes. Dans ce cas, la mesure des deux exposants x et y, permet de remonter simplement aux deux valeurs des exposants de longueur de corrélation:

$$\nu_\perp = 1/x \qquad (5.3.45)$$
$$\nu_{//} = 1 + \frac{(1-y)}{x}$$

Dans le cas qui nous intéresse, $\eta = 0^+$, les formules (5.3.45) suggèrent

$$\nu_\perp = 0.77 \qquad (5.3.46)$$
$$\nu_{//} = 1.08$$

La mesure de $\nu_\perp$ est donc en accord avec notre suggestion, $\nu/(1+\beta_{bb})$, mais en revanche nous ne disposons pas d'estimation théorique de $\nu_{//}$.

Comment donc se fait-il que le modèle de percolation avec écrantage soit anisotrope alors que la percolation simple ne l'est pas ? Nous ne disposons pas de preuve du caractère anisotrope de ce modèle, mais nous pouvons simplement mentionner un argument qui rend plausible une telle propriété sur le réseau hiérarchique. Ce réseau possède en effet la propriété que chacun de ces liens ne peut être parcouru que dans un seul sens, une fois la différence de potentiel appliquée entre deux sommets opposés. Quelque soit la configuration de liens présents ou absents, un lien donné ne peut voir le courant qui le traverse changer de sens par rapport à l'état initial (réseau intact). Cette particularité provient de la topologie du réseau. On peut ainsi, par exemple, se convaincre facilement que la percolation dirigée sur réseau diamant est identique à la percolation usuelle, et, comme les longueurs de corrélation transverse et longitudinale sont identiques, on préfèrera oublier le qualificatif de dirigée dans ce cas. Cependant, lorsque l'on prend en compte explicitement les effets d'écrantage, on brise la symétrie entre les deux directions, puisque les liens écrantés dépendront de la direction de la différence de potentiel globale. Dans le cas du réseau Euclidien, un tel effet de directionalité n'existe pas, et il est probable que, pour $\eta = 0^+$, le problème reste isotrope. En effet, les effets d'écrantage peuvent être définis de façon purement géométrique, sans souci de la direction moyenne du courant. Il est néanmoins vraisemblable que pour des valeurs de η strictement positives, le problème devienne anisotrope également dans le cas Euclidien.

Reprenons maintenant notre analyse des résultats des simulations numériques pour ce modèle de rupture sur réseau hiérarchique. Le cas $\eta = 1$ se comporte

qualitativement de manière similaire à $\eta = 0^+$. Quantitativement, la relation (5.3.41) est vérifiée avec les constantes suivantes:

$$1 - p_c = 0.143$$
$$x = 0.7 \qquad (5.3.47)$$

soit $\nu_\perp \approx 1.45$.

L'écart-type de la distribution se comporte approximativement suivant une loi de puissance (5.3.43) d'exposant $y \approx 0.7$, qui conduit à l'estimation $\nu_{//} = \nu_\perp$. Il semblerait donc que l'anisotropie observée précédemment pour $\eta = 0^+$, disparaisse pour $\eta = 1$! Cette observation jette un doute sur la validité de notre interprétation précédente. Reste alors à expliquer la différence observée entre x et y pour $\eta = 0^+$...

Nous nous souvenons par ailleurs, que pour $\eta > 1$, la mise en série de deux éléments conduit à un comportement instable, instabilité qui est peut-être compensée par la stabilité de la configuration en parallèle, pour les faibles valeurs de η. Lorsque η est grand, nous nous attendons cependant à ce que l'instabilité de la configuration série puisse entraîner une croissance du nombre de liens nécessaires à la rupture inférieure à la masse totale du système. Si tel est le cas, nous pouvons définir un exposant, γ, (similaire à celui que nous avions introduit pour le problème du désordre gelé), tel que le nombre de liens rompus, N, au point de rupture finale d'un milieu de taille L, varie selon:

$$N \propto L^\gamma \qquad (5.3.48)$$

avec $\gamma < 2$. Dans ce cas évidemment, le seuil de rupture correspond à une proportion $p_c = 1$ de liens présents. La figure 5.49 illustre schématiquement le comportement de γ en fonction du paramètre η du modèle. Nous avons introduit une valeur critique de $\eta = \eta_c$ pour laquelle $\gamma = 2$ si $\eta < \eta_c$ et $\gamma < 2$ si $\eta > \eta_c$. Notre argument concernant

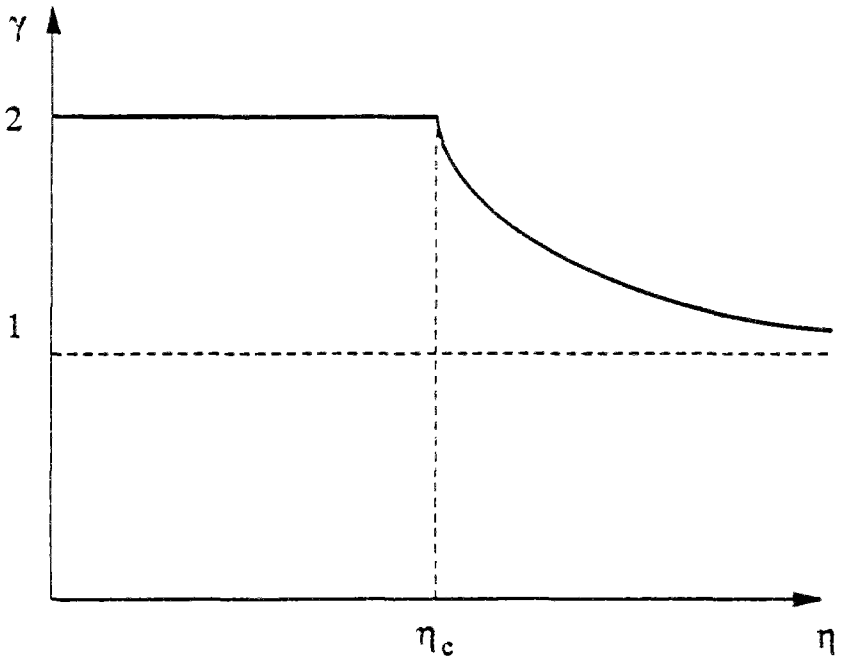


Figure 5.49 : Evolution schématique proposée pour l'exposant γ, en fonction de η. Au-delà d'une valeur critique de $\eta = \eta_c$, l'exposant γ devient inférieur à la dimension de l'espace, révélant le caractère instable du modèle.

l'instabilité montre que $\eta_c \geq 1$. Les résultats numériques que nous avons présentés ci-dessus suggèrent que p_c est toujours fini pour $\eta = 1$ et donc $\eta_c > 1$.

Pour $\eta = 2$, il est difficile de trancher entre les deux formes possibles. En cherchant une solution de la forme (5.3.41), nous obtenons

$$1-p_c = 0.044 \qquad (5.3.49)$$
$$x = 0.6$$

et, utilisant l'écart-type: $y = 0.66$, soit encore $\nu_{//} = \nu_{\perp}$. Les figures 5.50 et 5.51 montrent ces comportements pour le seuil et l'écart-type. Nous voyons que la relation (5.3.41) n'est pas très satisfaisante dans la mesure où les corrections sont très grandes devant la valeur asymptotique. La faible valeur numérique de $1-p_c$ suggère de considérer la forme (5.3.46). La figure 5.52 montre le logarithme de base 2 de N en fonction de la génération du réseau, n. La régression linéaire montrée sur le graphe a une pente

$$\gamma = 1.80 \qquad (5.3.50)$$

valeur proche de 2, et compte-tenu de la courbure marquée de ce dernier graphe, une valeur $\gamma = 2$, n'est certainement pas exclue.

Pour $\eta = 3$, la situation est très voisine. La relation (5.3.46) semble plus satisfaisante, et nous obtenons dans ce cas, comme le montre la figure 5.53,

$$\gamma = 1.78 \qquad (5.3.51)$$

L'écart-type de la distribution suit bien une loi de puissance (Eq.5.3.43) avec $y = 0.66$. Pour $\eta = 4$, l'exposant γ baisse légèrement. Nous obtenons dans ce cas, $\gamma = 1.73$. De même $y = 0.63$.

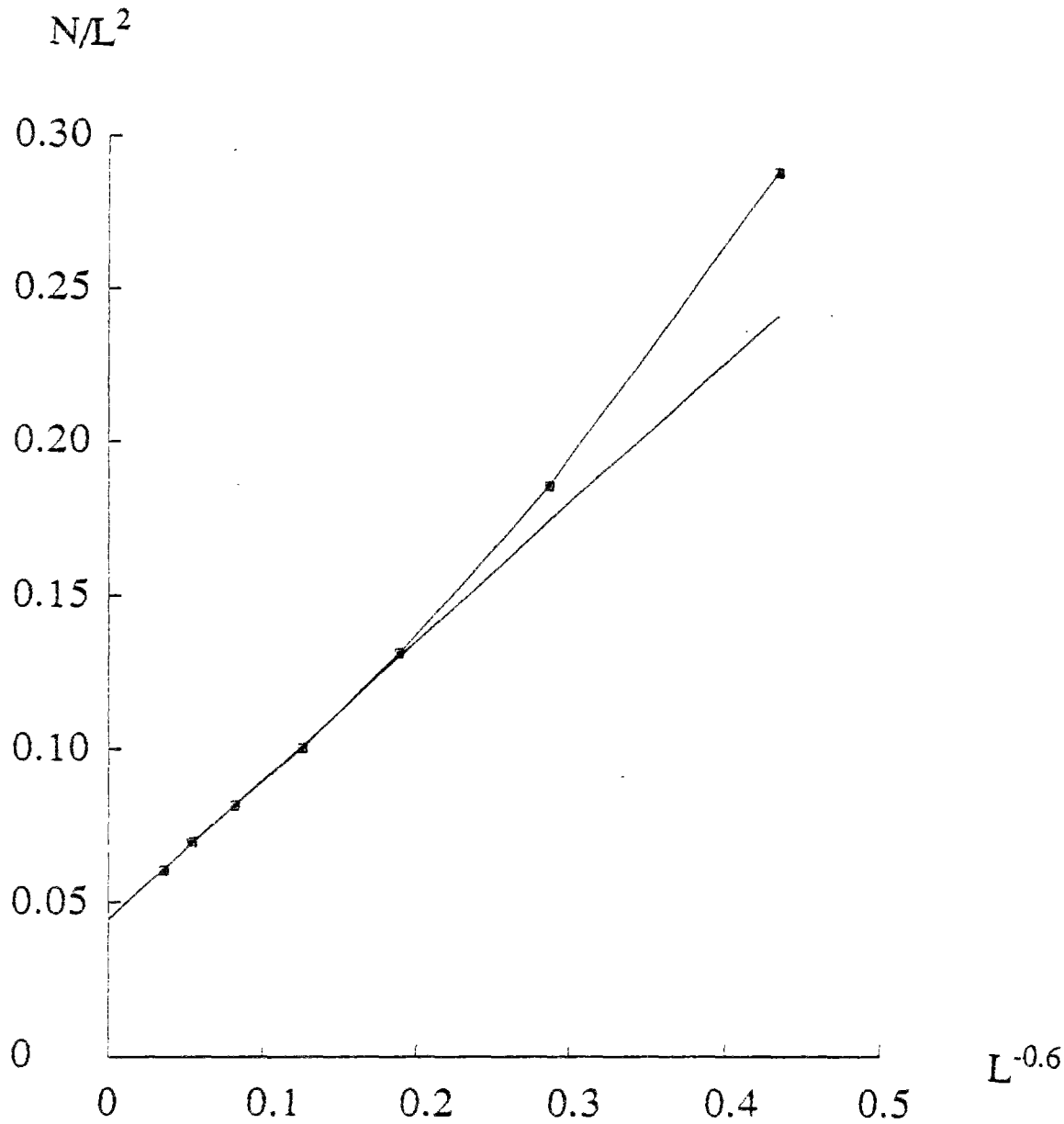


Figure 5.50 : Concentration de liens cassés en fonction de la taille du réseau hiérarchique à la puissance -0.6 = $-1/\nu_\perp$, $L^{-1/\nu_\perp}$. La valeur de η est ici 2. Ce tracé est l'une des évolutions possibles suggérées dans le texte.

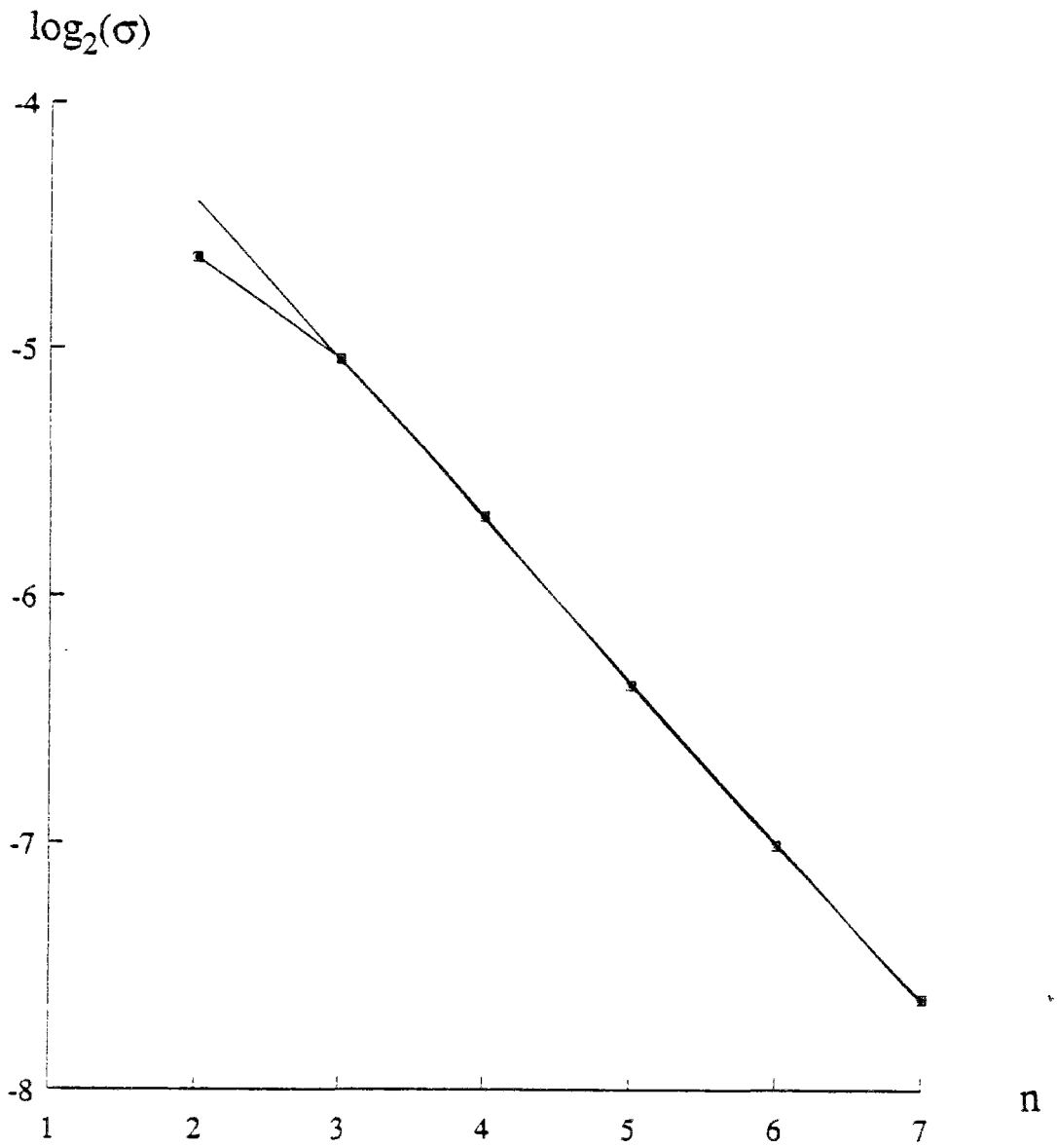


Figure 5.51 : Logarithme de l'écart-type de la concentration de liens cassés à la rupture, $\log_2(\sigma)$ en fonction de la génération n du réseau hiérarchique, pour $\eta = 2$.

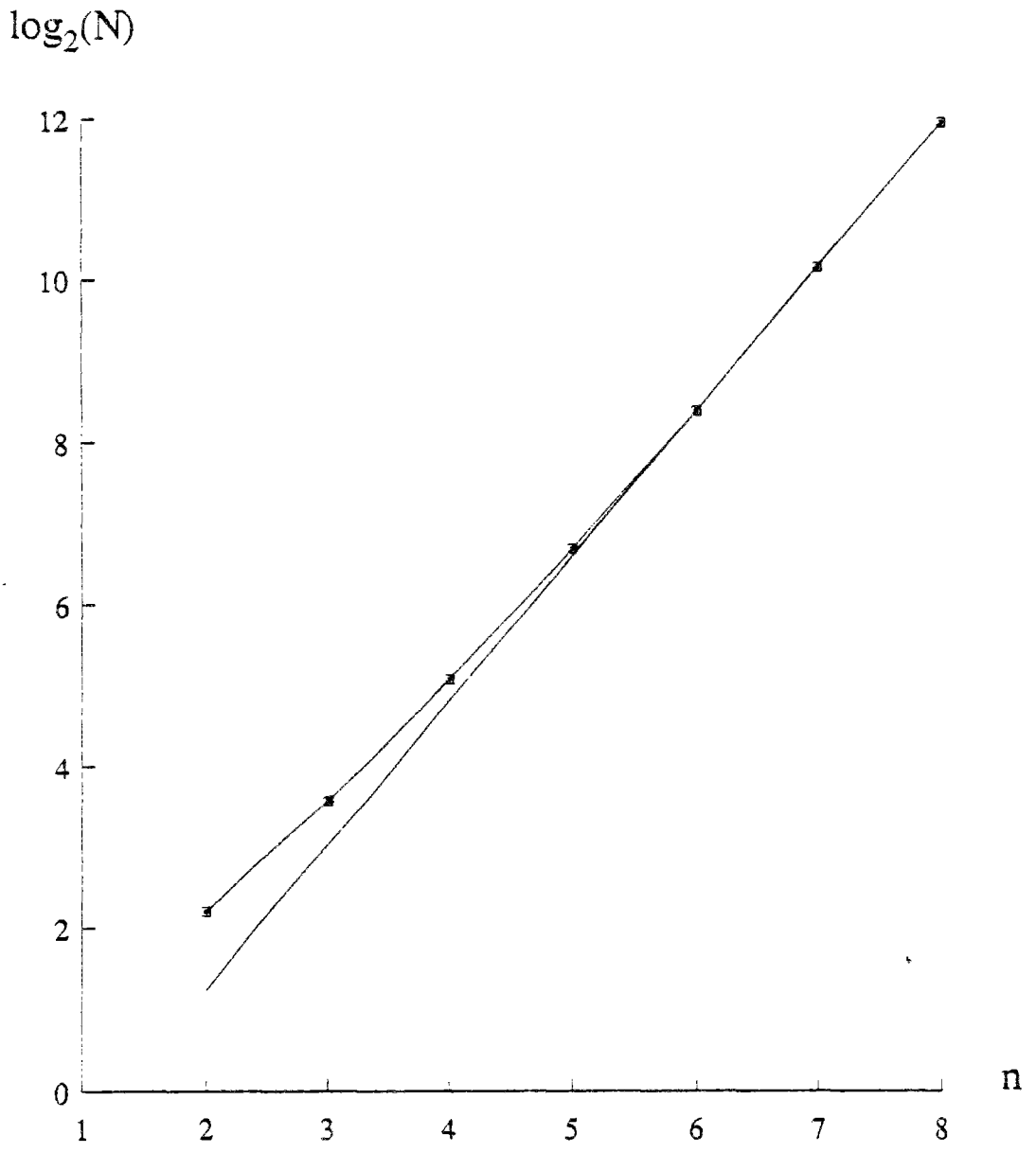


Figure 5.52 : Logarithme du nombre de liens cassés à la rupture, $\log_2(N)$ en fonction de la génération n du réseau hiérarchique, pour $\eta = 2$. Ce tracé correspond à la forme alternative du comportement asymptotique.

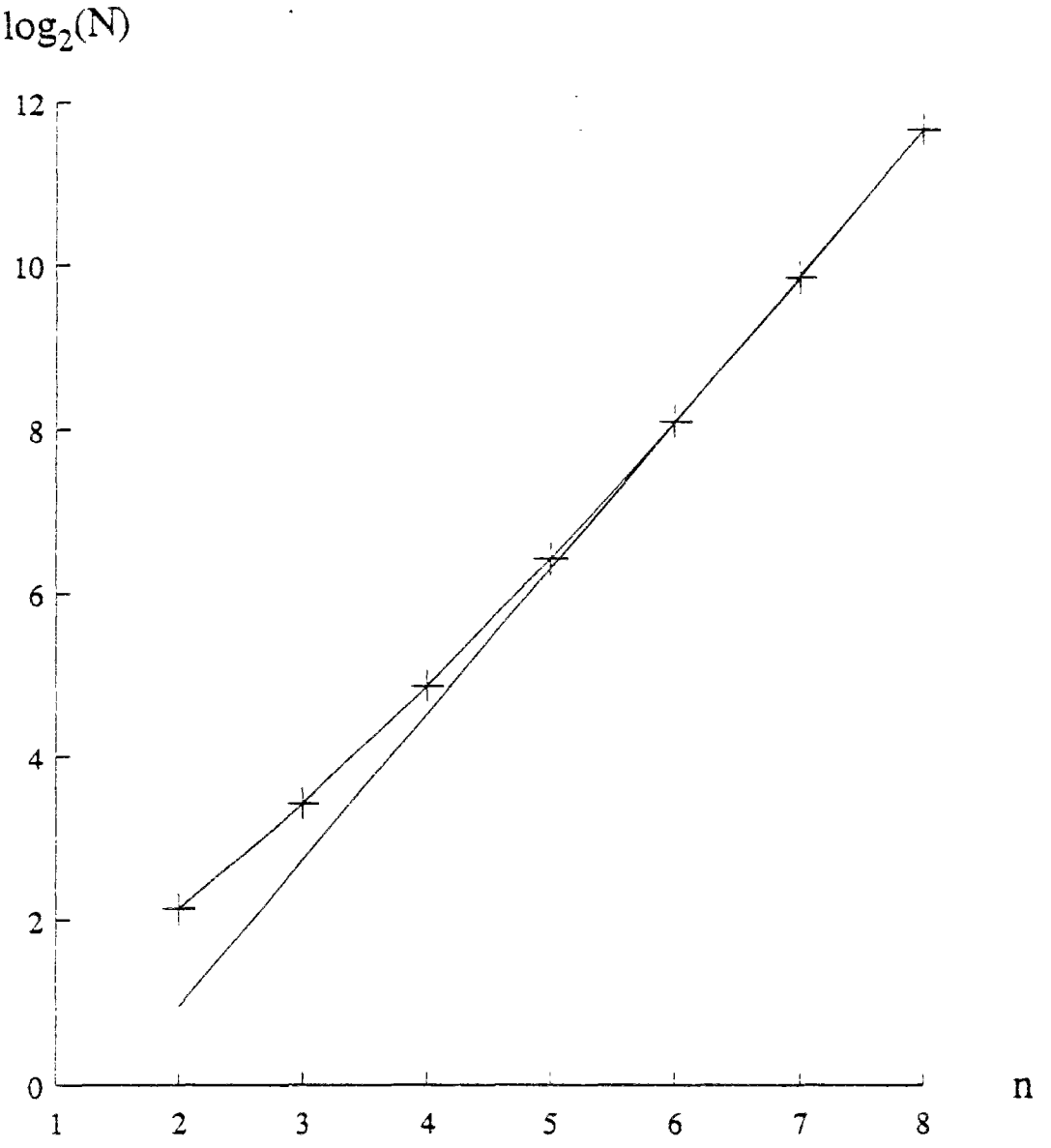


Figure 5.53 : Logarithme du nombre de liens cassés à la rupture, $\log_2(N)$ en fonction de la génération n du réseau hiérarchique, pour $\eta = 3$. Ce tracé correspond à la forme alternative du comportement asymptotique.

La constance des valeurs numériques de γ est frappante. De plus cette valeur est très voisine de celle obtenue pour le cas de la rupture avec désordre gelé, tant pour le cas de la dilution que pour le cas de la distribution de seuil de rupture. Comme dans ces derniers cas, nous sommes confrontés ici au choix entre une loi asymptotique correspondant à un exposant $\gamma < 2$ et une concentration asymptotique de liens cassés finie (et donc $\gamma = 2$). Clairement, pour répondre avec plus de sécurité, à cette question, nous devons mener les simulations numériques à des générations plus élevées, ce qui est certainement réaliste (jusqu'à un ordre 12 ou 13).

- Simulations numériques dans le cas Euclidien

Dans le cas de réseaux Euclidiens, nous avons effectué des simulations numériques qui suggèrent les résultats suivants:

Le cas de la percolation avec écrantage a été étudié dans la référence [66]. Nous n'y reviendrons pas.

Pour $\eta = 1$, la concentration de liens cassés au point de rupture final semble tendre vers une constante finie. Sur réseau triangulaire, ce seuil (proportion de liens présents) est de l'ordre de 0.42. La figure 5.54 montre une configuration typique de liens cassés au point de rupture final sur réseau carré. L'amas infini est montré sur la figure 5.55. Pour $\eta = 2$, nous rencontrons la même difficulté que pour le réseau hiérarchique. Si nous cherchons un seuil asymptotique en portant la concentration de liens cassés à la rupture en fonction de la taille du système à la puissance -x, alors nous obtenons un seuil de l'ordre de 0.24. Inversement, si nous portons le logarithme du nombre de liens cassés en fonction de la taille du système, alors, nous obtenons une loi de puissance d'exposant 1.87. La qualité de ces deux tracés ne permet pas de trancher facilement entre ces deux options. Pour $\eta = 4$, cependant la situation semble plus claire. Dans ce cas, la seconde forme donne des résultats plus satisfaisants, avec un exposant 1.66 nettement inférieur à 2 (la valeur attendue si il existe une concentration asymptotique non nulle).

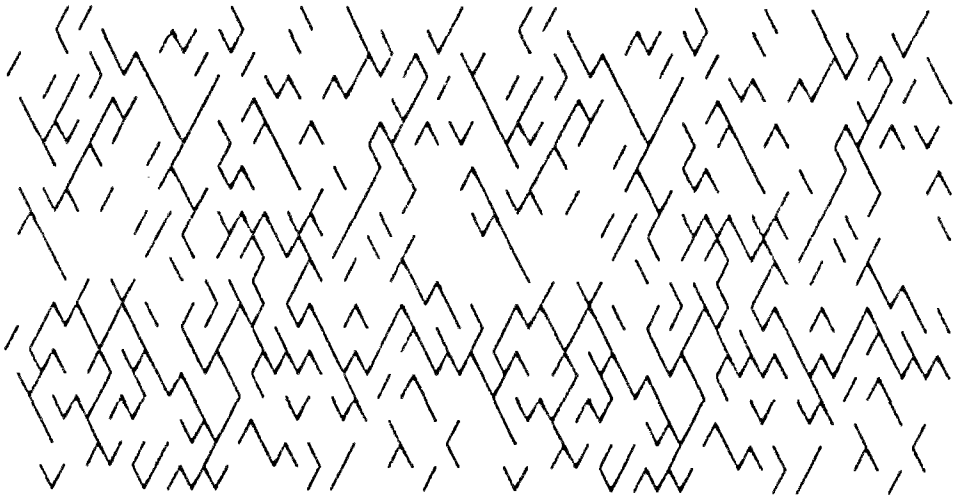


Figure 5.54 : Exemple de liens cassés dans le modèle de rupture DA au stade final. Pour illustrer les conditions aux limites périodiques horizontalement, deux réseaux ont été dessinés côte à côte. Une différence de potentiel était appliquée entre les bords supérieur et inférieur du réseau.

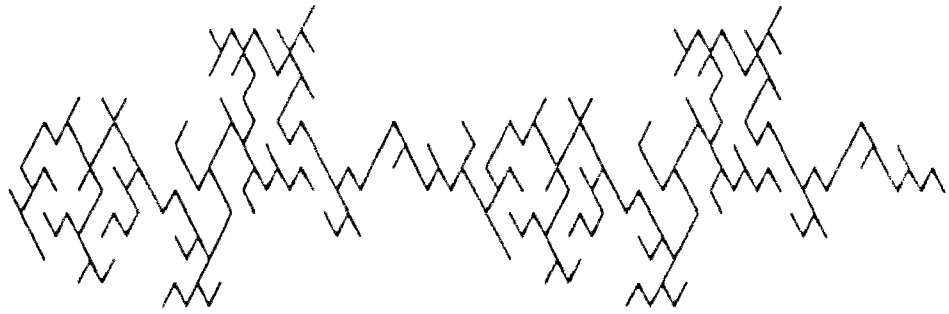


Figure 5.55 : L'amas infini de la figure précédente a été extrait. Comme précédemment deux réseaux ont été représentés. Par construction, cet amas ne contient pas de boucles.

La statistique d'amas est bien sûr facile à caractériser. Elle se fait naturellement dans le réseau dual, ici le seul qui ait un sens physique. Nous obtenons au seuil une distribution d'amas en loi de puissance. Le nombre n_s d'amas de taille s varie selon

$$n_s \propto s^{-\tau(\eta)} \qquad (5.3.52)$$

avec $\tau(\eta = 1) \approx 2.5$, valeur différente de la percolation où $\tau(\eta = 0) = 1 + d/D_f = 2.05$, ou même de la percolation avec écrantage car alors $\tau(\eta = 0^+) = 1 + d/D_f' = 2.15$, où D_f' est directement emprunté (bien que cela mérite vérification) de la percolation *d'invasion* avec écrantage [11, 71].

Nous avons également étudié les moments de la distribution des courants juste avant la rupture finale, pour une tension imposée constante.

$$M_n = \sum_{\text{liens}} i^n \propto L^{y(n)} \qquad (5.3.53)$$

Ces exposants, y(n), permettent d'identifier un comportement multifractal. Le tableau suivant donne pour différents ordres, n, de moments, les valeurs des exposants y(n) pour quatre choix de η. Pour le cas $\eta = 0^+$, les exposants sont identiques à ceux de la percolation usuelle, puisque les zones écrantées ne participent pas à ces propriétés.

n \ η	0	1	2	4
0	1.62	1.95	2.00	2.00
2	-0.97	-0.62	-0.41	-0.28
4	-3.10	-2.06	-1.43	-1.08
6	-5.06	-3.35	-2.28	-1.70
8	-7.01	-4.63	-3.09	-2.32
10	-8.95	-5.86	-3.86	-2.94

Valeurs des exposants critiques de quelques moments de la distribution des courants au stade final de la rupture pour quatre valeurs de η.

Remarquons que pour $\eta>1$, (et probablement aussi pour $\eta = 1$, pour des tailles de système suffisamment grandes), l'exposant du moment d'ordre zéro, qui donne la dimension fractale du squelette, est égal à deux, soit la dimension de l'espace. Ce support n'est donc pas fractal, pour ces valeurs de η.

- Fantôme de multifractalité

Lorsque nous fracturons un réseau à partir de l'état intact, il est facile d'enregistrer la distribution totale (jusqu'à la rupture) des intensités dans les liens cassés, ainsi que les sauts de conductance et de résistance. Nous avions déjà évoqué ce type d'analyse à propos des modèles à désordre gelé ("fantôme de multifractalité"). Nous rapportons ici les résultats obtenus pour $\eta = 1$ et nous les comparons aux valeurs correspondantes obtenues en percolation (avec ou sans écrantage cela est indifférent). Appelons φ_+ et φ_- les deux pentes de l'histogramme de ces quantités affectées d'un indice i, g et r pour respectivement le courant, les sauts de conductance et la résistance.

	$\eta = 0^+$	$\eta = 1$
φ_{i+}	***	0.5
φ_{i-}	2.55	2.6
φ_{g+}	***	-0.2
φ_{g-}	2.8	2.8
φ_{r-}	1.63	1.7

Valeurs des exposants des histogrammes de distribution des courants et des sauts de conductance et de résistance comparées entre la percolation ($\eta = 0$) et le modèle avec $\eta = 1$ sur réseaux Euclidiens.

Pour les faibles valeurs des courants et des sauts de conductance, nous savons par des études sur de grands systèmes (actuellement hors de portée des modèles pour $\eta > 0$), que le spectre multifractal se comporte de manière "pathologique" (cf. chapitre 2). En conséquence, les valeurs de φ_{i-} et φ_{g-}, pour le modèle de fracture sont à considérer avec prudence. Pour les sauts de résistance, cet effet pathologique est facilement visible, en conséquence, nous n'avons pas mentionné ces chiffres.

Nous voyons qu'il est impossible de distinguer ces deux séries de valeurs numériques. Ceci suggère qu'une correspondance avec la percolation est éventuellement possible. Nous ne disposons malheureusement pas d'estimations de ν permettant un test direct.

Les séries de nombres que nous avons mentionnées n'ont au fond qu'un intérêt: celui de permettre de tester des hypothèses, ou des modèles, qui feraient le lien soit avec la percolation (ou entre différentes valeurs de η pour le même modèle) soit encore avec d'autres cas connus.

- Liens sensibles

Donnons un argument qui montre que la transposition des résultats de la percolation n'est pas toujours immédiate. Nous avons déjà maintes fois utilisé le résultat de Coniglio [24] reliant la dimension fractale des liens sensibles, D_{scb}, à l'exposant critique de la longueur de corrélation, ν, en percolation:

$$D_{scb} = 1/\nu \qquad (5.3.54)$$

Sous réserve que l'anisotropie puisse être négligée, nous allons montrer que l'égalité ci-dessus doit être remplacée par une autre relation entre exposants critiques que nous démontrons ci-dessous.

Notons r la proportion de liens présents. Raisonnons sur le schéma du super-réseau. Nous pouvons ainsi facilement utiliser la notion de liens sensibles, à l'échelle de la longueur de corrélation. La longueur de corrélation ξ augmente à cause de la rupture des liens sensibles. En effet, la rupture d'un lien à l'intérieur d'un amas de boucles ("blob") ne modifie pas le maillage du super-réseau. Ainsi, nous pouvons écrire

$$\frac{d\xi}{\xi} \propto P_{scb}\, dr \qquad (5.3.55)$$

où P_{scb} désigne la probabilité de couper un lien sensible. Compte-tenu des règles du modèle, cette probabilité peut s'écrire

$$P_{scb} \propto \xi^{Dscb} \frac{\max(i)^{\eta}}{\int i^{\eta} n(i)\, di} \qquad (5.3.56)$$

où

$$n(i) \propto \xi^{f\{\log(i)/\log(\xi)\}-d} \qquad (5.3.57)$$

et max(i)= 1 dans l'ensemble à courant total constant. La fonction $f(\alpha)$ dans ces expressions est le spectre multifractal de la distribution des courants du modèle correspondant, à courant constant. Posons α_0 la valeur de log(i)/log(ξ) telle que $f'(\alpha_0) = -\eta$ alors,

$$P_{scb} \propto \xi^{D_{scb} + d - \eta\alpha_0 - f(\alpha_0)} \qquad (5.3.58)$$

mais d'autre part, puisque $\xi \propto \Delta r^{-\nu(\eta)}$, où Δr dénote l'écart au seuil,

$$\frac{d\xi}{\xi} \propto \xi^{1/\nu(\eta)}\, dr \qquad (5.3.59)$$

ainsi, $P_{scb} \propto \xi^{1/\nu(\eta)}$. Combinant ces deux expressions pour P_{scb}, nous obtenons

$$D_{scb} = 1/\nu(\eta) + f(\alpha_0) + \eta\ \alpha_0 - d \qquad (5.3.60)$$

Soit une valeur *différente* de $1/\nu(\eta)$ dans le cas général. Si nous appliquons cette équation au cas $\eta = 2$, nous remarquons que $f(\alpha_0) + \eta\ \alpha_0$ est l'exposant du second moment dans l'ensemble à courant constant, $y_I(2)$, soit encore l'opposé de l'exposant du second moment dans l'ensemble à tension constante, $-y_V(2)$. Le tableau figurant dans les pages précédentes donne $y_V(2) = -0.62$, soit finalement $D_{scb} = 1/\nu(\eta=2) - 1.38$. Le fait que D_{scb} soit positif impose alors $\nu(\eta=2) < 0.72$. Ceci bien sûr dans la mesure où ces idées sont applicables (i.e. pas d'anisotropie, et schéma du super-réseau acceptable).

Nous retrouvons dans le cas de la percolation avec écrantage, $\eta = 0^+$,

$$D_{scb} = (1+\beta_{bb})/\nu + D_{bb} - d \qquad (5.3.61)$$
$$= 1/\nu$$

soit le résultat de Coniglio.

Lorsque η tend vers l'infini, $\eta\alpha_0 = 0$, $1/\nu(\eta) = d$ et donc $D_{scb} = f(\alpha_{max})$ résultat cohérent puisque les liens sensibles sont bien sûr ceux qui contribuent au moment d'ordre infini. Soulignons que dans ce dernier résultat, le spectre $f(\alpha)$ est celui qui correspond au modèle DA étudié et non celui de la percolation.

Nous retiendrons donc, en conclusion pour ce modèle, le parallèle qualitatif avec la percolation, pour les faibles valeurs de η:

- existence d'un seuil fini.
- existence d'exposants critiques caractérisant le dernier stade
- distribution multifractale des courants, et des sauts de résistance et de conductance.

et pour les fortes valeurs de η, une instabilité qui donne un seuil nul avec de plus une croissance du nombre de liens cassés selon une loi de puissance de la taille du système.

5.3.4 Comparaison avec le désordre figé

Ainsi pour conclure, soulignons que la prise en compte d'un désordre recuit donne des effets sensiblement similaires à la prise en compte d'un désordre gelé. Ceci est vrai pour les modèles à fissure unique, où l'on génère ainsi des structures fractales. Ceci est également vrai pour les modèles sans contraintes de connexité où l'on passe d'un régime de percolation avec écrantage dans les situations de fort désordre, à une rupture unique. Pour les valeurs de η supérieures à η_c, l'existence d'un exposant γ caractérisant la croissance du nombre de liens cassés avec la taille du système est similaire à certaines observations faites pour le cas du désordre gelé [61-64].

Ceci nous amène à nous interroger naturellement sur le passage de l'un à l'autre type de désordre. C'est à une telle question que la prochaine section tente d'apporter quelques éléments de réponse.

Il est aussi à remarquer que pour les modèles à désordre recuit, la notion de caractéristique est absente. Il est impossible de définir un courant de rupture ou une

contrainte de rupture. Les seules quantités observables sont donc la conductivité, ou le module élastique, et le nombre de liens cassés. Ceci rend donc plus intéressant toute tentative de réconcilier ces deux types de désordre, car alors, il serait possible de définir une caractéristique associée à une rupture avec désordre recuit.

5.4 Correspondance entre désordres

Jusqu'à présent, nous avons vu quatre modèles de rupture à désordre recuit (A) et gelé (Q), et où une seule fracture était générée (S) ou sans restriction de connexité (D). Soit pour refaire le lien avec notre présentation précédente:

- Modèle DQ: (désordre gelé, sans connexité requise).

  C'est le premier type de modèle que nous avons étudié. Le désordre était essentiellement introduit dans la distribution des résistances à la rupture.

- Modèle SQ: (désordre gelé, une seule fracture).

  Modèle similaire au précédent à ceci près qu'une seule fissure était générée.

- Modèle DA: (désordre recuit, sans connexité requise).

  Modèle de rupture où les liens sont rompus avec une probabilité proportionnelle à la force ou au courant qu'ils portent.

- Modèle SA: (désordre recuit, une seule fracture).

  Identique au précédent avec une seule fissure générée. C'est dans cette famille que l'on a trouvé le modèle d'agrégation limitée par diffusion DLA et ses variantes.

Désordre	Fissure unique	Fissures multiples
Recuit	**SA**	**DA**
Gelé	**SQ**	**DQ**

Nomenclature des différents modèles considérés dans ce chapitre

Dans les modèles à désordre recuit, nous avons modulé l'importance du désordre, en introduisant un paramètre η, comme exposant du gradient de potentiel (ou de la contrainte) dans le calcul de la probabilité de rupture d'un lien. ($p \propto (\nabla V)^{\eta}$).

Lorsque η tend vers l'infini, le rôle des fluctuations devient nul, et l'on obtient une rupture linéaire (dans les cas de sollicitations simples). Lorsque η tend vers zéro, la distribution de force ou de courant n'intervient plus (η=0), ou simplement dans la distinction entre courant nul et non nul ($\eta=0^+$). Dans cette limite, DA devient un problème de percolation (η=0) ou de percolation avec écrantage ($\eta=0^+$). SA devient un modèle d'Eden (pour lequel l'écrantage ne joue aucun rôle sensible).

Dans les modèles à désordre gelé, l'importance du désordre peut être modulée en jouant sur la distribution des seuils de rupture au voisinage de l'origine. Notons α, la singularité de cette distribution $p(v_c) \propto v_c^{-\alpha}$. Lorsque p tend vers une distribution de Dirac, la fissure créée est linéaire pour les sollicitations simples. Lorsque α tend vers 1, (cas que nous avons appelé "désordre infini"), le modèle DQ tend vers un problème de percolation avec écrantage. Dans cette même limite, SQ devient la percolation d'invasion (avec écrantage).

Modèle	Faible désordre	Fort désordre
DA	Fracture linéaire	Percolation avec écrantage
SA	Fracture linéaire	Eden
DQ	Fracture linéaire	Percolation avec écrantage
SQ	Fracture linéaire	Percolation d'invasion avec écrantage

Comportements des quatre modèles dans les limites de désordres faible et fort.

Le parallèle entre ces quatre familles de modèle est frappant. La comparaison entre ces modèles (et en fait la motivation pour étudier les deux modèles hybrides DA et SQ) nous a été suggérée par Herrmann.

Nous allons maintenant tenter un exercice de voltige entre ces modèles. L'idée essentielle étant de "fabriquer" une distribution de seuil de rupture __ donc de trouver un désordre gelé __ qui redonne les mêmes caractéristiques qu'un modèle à désordre recuit choisi au préalable.

Avertissons tout de suite le lecteur que la suite de cette section vise à la construction d'un tel cadre, mais qu'il ne s'agit ici que d'un travail très préliminaire qui demande encore maintes vérifications et éclaircissements. Quelques simulations réalisées avec Hinrichsen et Hansen suggèrent qu'une telle correspondance est en effet possible, mais un certain nombre de questions restent encore en suspens.

5.4.1 Reconstruction des seuils

Partons d'un modèle à désordre recuit et, pour des raisons qui apparaîtront plus clairement ultérieurement, n'imposons pas de conditions de connexité sur la fracture. Nous traitons donc d'un modèle DA. Le paramètre η de ce modèle est choisi quelconque. Nous voulons alors trouver la distribution de seuils de rupture qui donne, lorsque nous l'utilisons dans le modèle DQ, la même séquence de liens cassés. Nous voulons en fait nous assurer de cette équivalence au sens statistique (sur les valeurs moyennes, ou les distributions, de quantités physiques mesurables). Pour obtenir cette information, nous allons dans un premier temps forger un algorithme qui donne pour chaque réseau une distribution de seuil qui lui est associée. Dans cette construction, chaque lien se voit attribuer un seuil. Nous vérifierons dans un deuxième temps que la seule donnée de la distribution, (et non la répartition spatiale exacte) est suffisante pour retrouver, au sens statistique, un modèle gelé équivalent.

Pour fixer les idées, prenons l'exemple d'un réseau électrique. A chaque lien ij sont associées deux variables : d'une part une différence de potentiel $u_{ij}=(v_i-v_j)$, et d'autre part, une variable accessoire, x_{ij}, qui, sous certaines conditions, sera interprétée comme un seuil de rupture. Cette variable x_{ij} dépend du stade d'avancée de la rupture dans le réseau. Dans la suite, par commodité d'écriture, nous noterons les liens par un seul indice (u_i sera ainsi la tension du lien i).

A l'instant initial, les variables x_i sont initialisées à 0. La distribution des courants est calculée, et un lien est choisi selon les règles du modèle DA avec lesquelles

nous n'interfèrerons pas. Soit j ce lien et u_j la tension à laquelle il était soumis avant rupture. De façon à reproduire la même rupture dans un modèle gelé , il faut que le lien j réalise le minimum du rapport (c_i/u_i) où c_i est le seuil de rupture du lien i.

Fixons donc, par convention, pour le premier lien $c_j = 1$. Pour tous les autres liens i

$$\frac{c_i}{u_i} \geq \frac{c_i}{u_j} \qquad (5.4.1)$$

Nous pouvons donc, pour chaque lien intact, calculer la valeur limite inférieure que le seuil peut valoir. Cette limite est enregistrée dans la variable accessoire

$$x_i = \frac{u_i}{u_j} c_j \qquad (5.4.2)$$

A l'instant ultérieur, un nouveau lien est choisi, après que les courants aient été recalculés, selon les règles du modèle DA. Soit j(2) ce lien. Puisque le seuil de ce lien doit satisfaire $c_{j(2)} \geq x_{j(2)}$, nous choisissons cette borne, $c_{j(2)} = x_{j(2)}$. Tous les autres liens intacts doivent satisfaire $\frac{c_i}{u_i} \geq \frac{c_{j(2)}}{u_{j(2)}}$ avec les nouveaux courants calculés. Nous devons donc mettre à jour les bornes inférieures sur les seuils des liens i selon:

$$x_i' = \text{Max}\ (x_i, \frac{u_i}{u_{j(2)}} x_{j(2)}) \qquad (5.4.3)$$

où x_i' est la nouvelle valeur de x_i, et x_i l'ancienne. La suite de la procédure est maintenant claire: Nous réitérons la mise à jour pour tous les liens intacts:

$$x_i(t+1) = \text{Max}\ (x_i(t), \frac{u_i(t)}{u_{j(t)}(t)} x_{j(t)}(t)) \qquad (5.4.4)$$

et

$$c_{j(t)} = x_{j(t)}(t) \qquad (5.4.5)$$

à chaque pas de temps t. Dans ces équations, nous avons noté j(t) le lien cassé au temps t d'après le modèle DA.

A la fin du processus, i.e. lorsque le réseau est fracturé, nous disposons, pour tous les liens rompus, de leurs seuils de rupture. Si nous traitons maintemant le problème DQ avec les seuils calculés précédemment, il va de soi que nous obtenons alors la *même* évolution.

L'hypothèse fondamentale que nous faisons maintenant consiste à "négliger" d'éventuelles corrélations spatiales existant dans la répartition des seuils. Nous enregistrons la distribution des seuils et les distribuons aléatoirement sur le réseau. Nous voyons maintenant la raison de notre choix pour la version DA sans contrainte de connexité, et non SA, comme modèle de départ. En effet la contrainte de connexité introduit de fait des corrélations spatiales qu'il est impossible de négliger. Nous allons voir cependant que la prise en compte, au moins partielle de ces corrélations est possible.

Avant d'étudier la variation de ces distributions avec la taille du système, illustrons dans un cas précis la construction précédente. La figure 5.56 montre en coordonnées bi-logarithmiques la distribution des seuils reconstruits à partir du modèle DA pour $\eta = 1$, pour une taille de réseau de 32. Remarquons que cette distribution est extrèmement large, (plus de huit décades), comme nous pouvions nous y attendre dans la mesure où la densité des liens cassés à la rupture, pour le modèle DA, était très grande comparée à celle obtenue pour les modèles DQ considérés précédemment (lois de puissance). Il faut donc un fort désordre pour reproduire le modèle DA. Une fois cette distribution obtenue, il faut maintenant s'interroger sur la façon dont cette distribution varie avec la taille du système considéré.

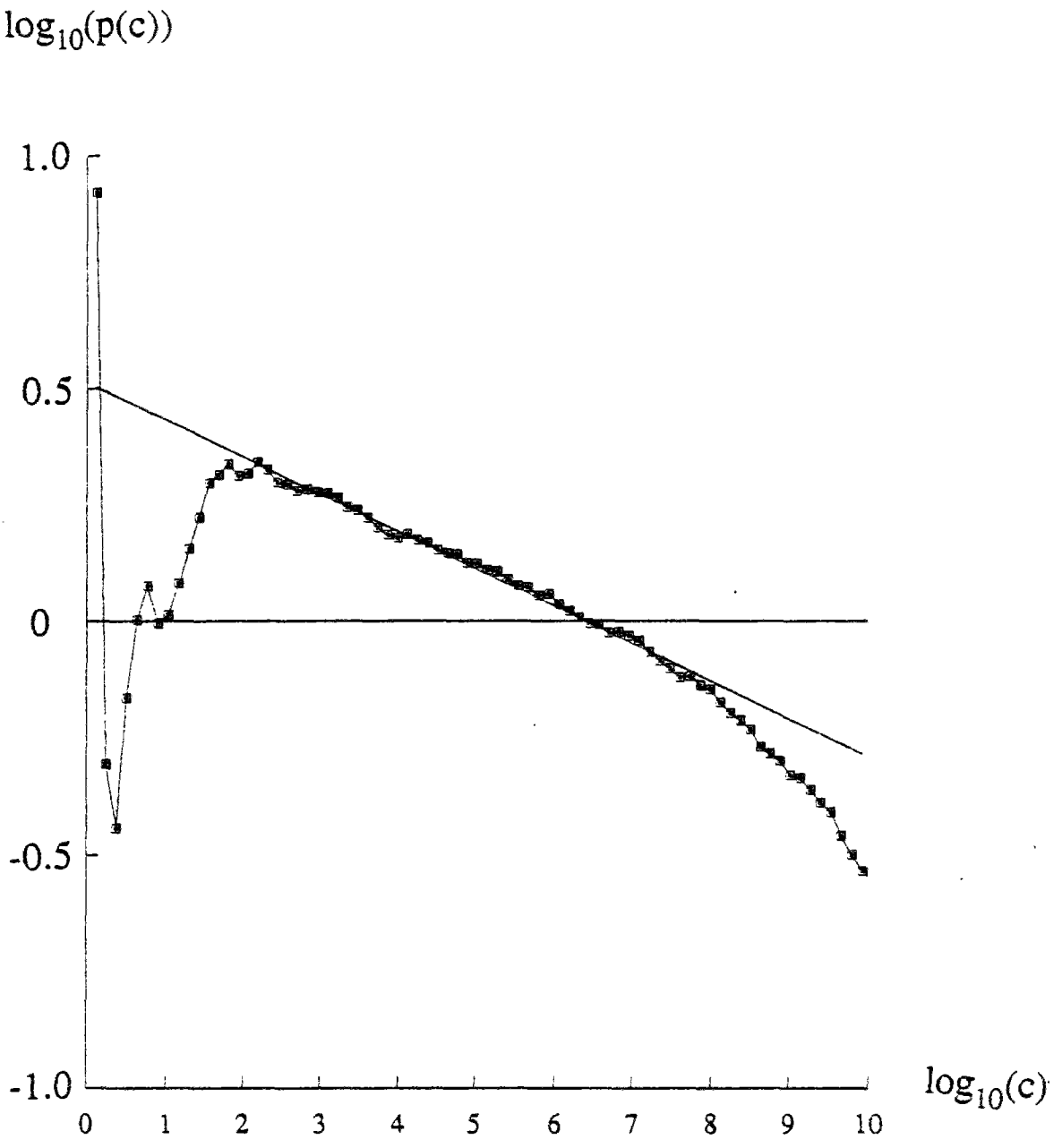


Figure 5.56 : Histogramme en coordonnées bi-logarithmiques de la distribution des seuils reconstruits à partir du modèle DA pour $\eta = 1$ pour un réseau de taille 32.

- Effet de taille

Nous avons l'habitude de raisonner sur des situations où la distribution des seuils est fixe (i.e. indépendante de la taille du système étudié). Commençons par montrer qu'il est illusoire d'espérer trouver une telle situation ici.

Nous sommes partis des modèles DA. Nous savons que pour ces modèles, la distribution des tensions u_i devient de plus en plus large, au fur et à mesure que l'on se rapproche du seuil de rupture du réseau, (comme en percolation). A ce point précis, la distribution est multifractale et donc a une largeur qui dépend de la taille du système. Si le spectre multifractal est régulier, le rapport (u_{max}/u_{min}) varie au seuil comme une loi de puissance de la taille du système:

$$\frac{u_{max}}{u_{min}} \propto L^{\alpha_{max}-\alpha_{min}} \qquad (5.4.6)$$

Plus généralement, lorsque l'on est loin de la rupture finale, le rapport u_{max}/u_{min} dépend de la longueur de corrélation, ξ, selon $u_{max}/u_{min} \propto \xi^{\alpha_{max}-\alpha_{min}}$. Nous savons qu'éventuellement des problèmes peuvent se poser, par exemple en percolation, où la distribution des courants les plus faibles évolue avec la taille du système, et ne retombe pas sur un spectre multifractal bien défini. Nous avons discuté ce point précédemment au chapitre 2.

Dans la mesure où un rapport de courants intervient dans la mise à jour des seuils, la distribution obtenue varie avec la taille du système. C'est en effet ce que nous observons pour $\eta = 1$ et $\eta = 2$. La largeur de la distribution des seuils croît très rapidement *avec la taille* du système.

Partant de cette observation, quelle forme de loi peut rendre compte de cette dépendance en taille ? Une réponse à cette question est naturellement suggérée par la distribution des courants dans le réseau à partir desquels les seuils sont calculés. Il s'agit d'une distribution multifractale:

$$\frac{\log(n(c))}{\log(L)} = f\left(\frac{\log(c)}{\log(L)}\right) \qquad (5.4.7)$$

Hansen a analysé cette distribution en normalisant les seuils, c, de façon à ce que le second moment soit fixe, avant d'effectuer une moyenne pour différents réseaux d'une même taille. (Cette prescription est similaire à la définition d'un "ensemble" à courant constant, ou à tension constante, pour le cas des distributions de courant dans un réseau de percolation.) Dans ce cas, il semble que la forme 5.4.7 permette de rendre effectivement compte de distributions relatives à différentes tailles. La figure 5.57 montre le résultat obtenu pour le cas $\eta = 1$, pour différentes tailles.

Voyons maintenant comment les deux limites de désordres faible et fort rentrent dans ce cadre. Dans le cas où η tend vers l'infini, la fracture se réduit à une simple ligne droite de liens cassés. Nous pouvons montrer simplement que la distribution des seuils de rupture tend, lorsque la taille du système tend vers l'infini, vers une distribution de Dirac. Ce résultat est bien cohérent avec notre attente: le modèle DQ où la distribution des seuils de rupture est un Dirac, donne effectivement des fractures linéaires.

Dans le cas où $\eta = 0^+$, la distribution des seuils est extrêmement large, et elle est telle que la distribution des courants, même au seuil de percolation, reste toujours plus étroite, puisque les tensions locales intervenant dans les mises à jour des seuils, Eq.(5.4.4), sont tirées aléatoirement dans ce spectre multifractal. Ceci, joint à la remarque concernant la pathologie de la distribution des courants faibles en percolation, *implique* que la distribution possède une singularité à l'origine suivant $p(c) \propto c^{-1}$. Nous sommes donc bien dans le cadre décrit au paragraphe 5.2 d'un désordre "infini".

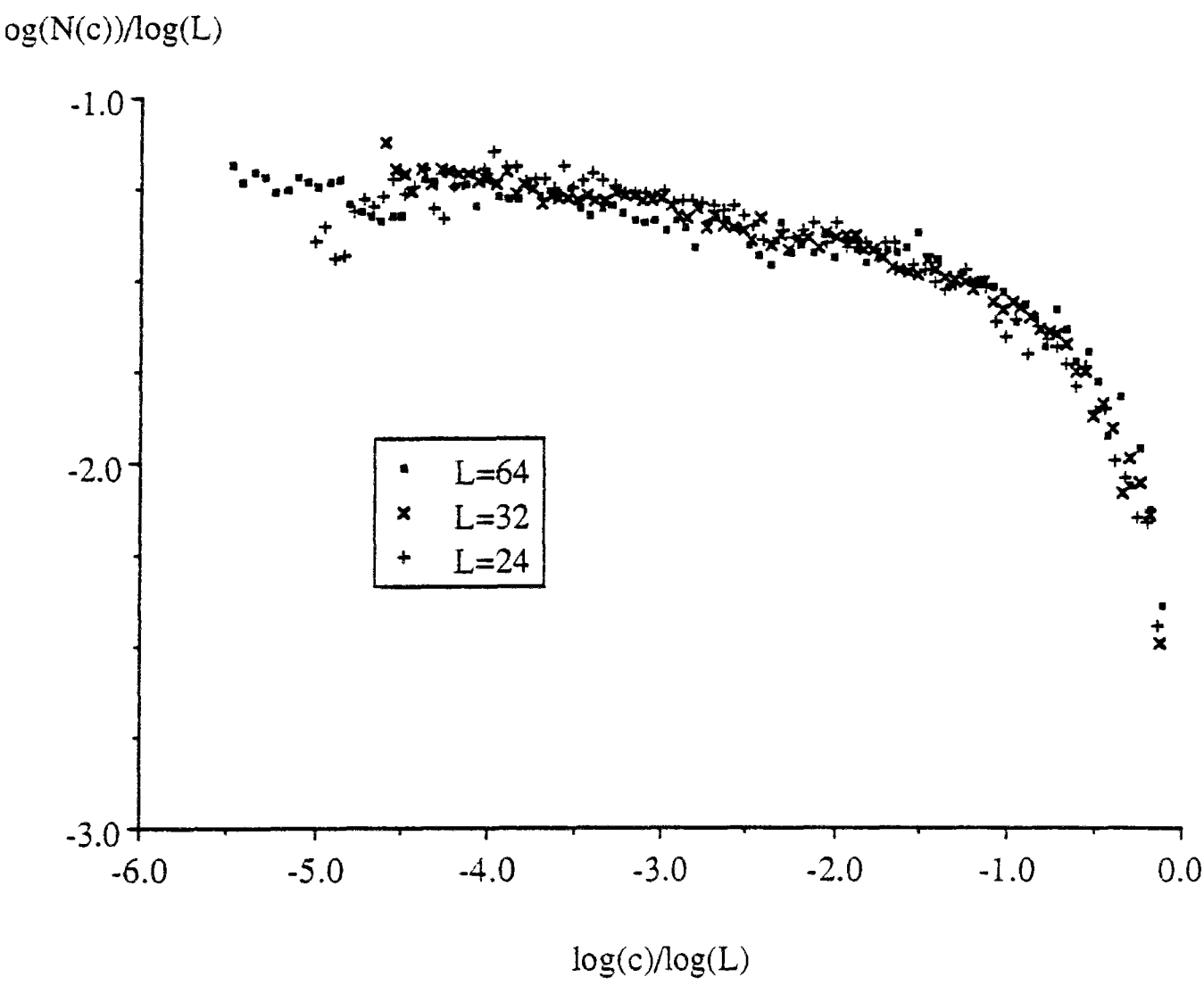


Figure 5.57 : Représentation multifractale de la distribution des seuils reconstruits pour le modèle DA avec $\eta = 1$. Ces différentes distributions, dont le second moment est normalisé, correspondent à quelques tailles de réseaux (L = 24, 32, 64) remis à l'échelle. La partie centrale de cette distribution (dont l'importance augmente avec la taille du système) révèle le développement d'un comportement singulier en loi de puissance.

5.4.2 Les distributions invariantes d'échelle

Revenons à présent sur les modèles à désordre gelé que nous avons étudiés précédemment. Nous nous sommes fixés une distribution de seuil au préalable, et nous avons ensuite étudié l'effet de taille *sans varier* cette distribution.

Pour reprendre l'analyse précédente, nous avons deux grandes familles de distributions à considérer: d'une part les distributions qui rentrent dans le cadre des distributions multifractales, et d'autre part, celles qui ne sont pas invariantes d'échelle dans ce cadre.

• Les distributions invariantes d'échelle:

Comme nous l'avons vu précédemment, il faut que la distribution des seuils puisse se mettre sous la forme de l'équation (5.4.7). En fait, nous avons déjà considéré toute une famille de telles distributions, à savoir les distributions singulières à l'origine, $p(c) \propto c^{-\alpha}$, et limitées par exemple à $c = 1$. En effet, dans ce cas, la distribution a un spectre multifractal associé qui n'est pas trivial: il s'agit d'une droite de pente $1-\alpha$, montrée sur la figure 5.58. Il y a deux façons simples de concevoir ceci:

• la première consiste à tracer en coordonnées bilogarithmiques cette distribution.

• la seconde consiste simplement à remarquer que le minimum des seuils obtenu dans un milieu de taille L, est tel que $c_{min}^{1-\alpha} = L^{-d}$. Soit encore $\log(c_{min})/\log(L) = -d/(1-\alpha)$, alors qu'à ce point la dimension fractale de l'ensemble des liens qui possèdent un tel seuil est nulle par construction. Ainsi le point de coordonnées $(-d/(1-\alpha), 0)$ est un point de ce spectre. Pour contruire un second point, il suffit de considérer une valeur finie du seuil, par exemple $c = 0.5$. Dans ce cas, $\log(c)/\log(L) = 0$, et la dimension fractale du support des liens qui portent ce seuil est d. Ainsi, (0,d) est un second point de ce spectre. Il est alors facile de se convaincre que le spectre est linéaire entre ces deux extrémités.

Il existe une autre famille de distributions invariantes d'échelle, ce sont celles qui possèdent une singularité à l'infini, $p(c) \underset{\infty}{\propto} c^{-\beta}$. Nous n'avons jamais étudié ce cas jusqu' à présent, mais il est certain qu'il mérite une étude approfondie également. Il

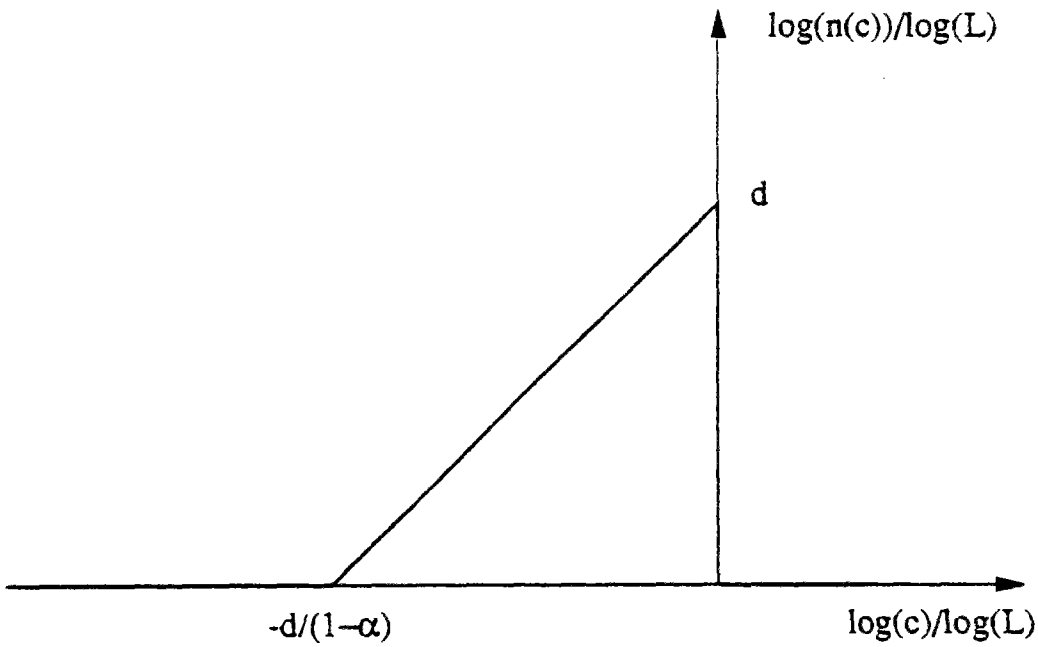


Figure 5.58 : Représentation schématique du spectre multifractal d'une distribution de seuils singulière à l'origine selon $p(c) \propto c^{-\alpha}$. d désigne la dimension de l'espace.

correspond physiquement à étudier le comportement d'un système qui comprend des éléments de très grande résistance à la rupture. Si ces éléments sont en nombre suffisant, il est tout à fait possible que cela affecte les propriétés du système. Souvenons nous, par exemple, que l'une des conditions d'application du résultat de Gabrielov et Newman [57] que nous avons discuté dans la partie 5.2, est que la distribution des seuils de rupture décroisse plus rapidement que c^{-2} à l'infini. Cela se traduit immédiatement dans notre langage de spectre multifractal, par la condition que log(c)/log(L) soit inférieur à d.

• Les distributions non-invariantes d'échelle:

Ce sont bien entendu les plus fréquentes. Cependant, lorsque l'on considère la limite thermodynamique d'un système de taille infinie, toute distribution va converger vers un spectre bien défini. Nous prétendons que seul ce spectre est important, pour déterminer les propriétés asymptotiques du comportement à la rupture des systèmes désordonnés. Prenons un exemple simple, que nous avons déjà rencontré dans la partie 5.2 : Lorsque la distribution des seuils est uniforme sur un intervalle, et si la borne inférieure est nulle alors nous venons de voir que le spectre mutifractal est non trivial __ il s'agit d'une fonction affine entre les points de coordonnées (-d, 0) et (0, d) __ et ce pour toutes les valeurs de la borne supérieure. Si au contraire la borne inférieure est non nulle, alors le spectre asymptotique sera une distribution de Dirac. Bien sûr, dans ce cas, pour des systèmes de faible taille, la représentation (5.4.7) donnera une distribution non réduite à une distribution de Dirac, mais il est facile de montrer que ceci n'est qu'un régime transitoire. Or les conclusions de Khang et coll.[60] et les nôtres [65] se traduisent effectivement par un comportement différent selon que la borne inférieure est nulle ou non. L'argument "à la Flory" nous avait même donné une taille limite pour le croisement ("cross-over") entre ces deux régimes.

Cette discussion justifie *a posteriori* notre choix pour l'étude des distributions singulières à l'origine dans le cas d'un désordre gelé. Les résultats que nous avons obtenus avec l'argument de Flory, sur le comportement à l'origine de la distribution des

seuils se traduisent également très naturellement dans cette approche. Nous avions alors établi une différence de comportement pour des singularités à l'origine, α, inférieures ou supérieures à deux. En terme de spectre multifractal, ce critère s'exprime par une condition sur la valeur minimale de log(c)/log(L) (inférieure ou supérieure à -d).

Revenons maintenant sur la forme des distributions obtenues dans la construction exposée précédemment. La figure 5.57 montre cette distribution dans le cas $\eta = 1$. Nous voyons que la partie centrale de cette distribution est approximativement linéaire. Elle se termine pour les fortes et les faibles valeurs du seuil par une chute très brutale. D'autre part, la coupure supérieure de cette distribution est indépendante de la taille du système, alors que la coupure inférieure est de plus en plus petite, au fur et à mesure que la taille du système augmente. L'évolution de ces coupures dépend ici nettement du choix de la normalisation que nous avons effectué. Dans le cas de la figure 5.57, nous avons choisi le second moment de la distribution comme constant. Ainsi, ce moment étant gouverné par la coupure supérieure, celle-ci est gardée fixe par construction. Au contraire, si nous n'avions pas introduit cette normalisation, par exemple en choisissant le premier seuil fixé à l'unité comme indiqué dans la description de l'algorithme, nous aurions alors gardé la coupure inférieure fixe. Mais dans ce cas, les fluctuations statistiques rendent le résultat extrèmement bruyant, et difficile à analyser.

Ces remarques sont un peu "techniques". La conséquence essentielle à retenir pour nous sera que se développe progressivement un comportement singulier à l'infini, $p(c) \underset{\infty}{\propto} c^{-\beta}$, avec $\beta = 1-p$, où p désigne la pente de la partie centrale de l'histogramme. Ce comportement est déjà développé sur trois décades pour des réseaux de taille 20, et six décades pour des réseaux de taille 32.

Concernant le cas de la percolation, (DA $\eta = 0$), nous avions noté précédemment que la distribution était une loi de puissance $p(c) \underset{0}{\propto} c^{-1}$, au voisinage de zéro. Cette distribution, comme nous l'avons déjà signalé à plusieurs reprises n'est pas normalisable. Il faut donc introduire une coupure inférieure dans tous les cas pratiques.

Cette coupure inférieure varie avec la taille du système. Si maintenant nous fixons cette coupure inférieure à une valeur constante, alors la coupure *supérieure* augmente avec la taille du système, et nous obtenons alors à la limite thermodynamique une distribution qui possède le même comportement à l'infini $p(c) \underset{\infty}{\propto} c^{-1}$. En terme de spectre multifractal, nous avons une fonction constante.

A priori, d'après ce qui précéde, toute distribution multifractale aurait pu convenir. Comment se fait-il que soit générée une distribution aussi simple qu'une droite dans le spectre multifractal, i.e. une loi de puissance pour la distribution ? Clairement une telle question demande une réponse quantitative. Nous nous contenterons simplement de suggérer ici la raison suivante: Un élément clé est que le comportement global qui nous intéresse ici résulte de l'intégration d'information provenant de tous les stades de développement du point critique. Ce point n'est pas le seul à contribuer à la détermination des seuils de ruptures locaux, mais aussi d'autres points du développement de la rupture, où la longueur de corrélation est finie. Cette situation nous rappelle ce que nous avons baptisé le "fantôme de multifractalité" (cf.partie 5.2) où, en intégrant des informations sur les courants, ou les sauts de conductance et de résistance, à tous les stades de la rupture, nous avions obtenu une distribution constituée de deux lois de puissance. Cette distribution était alors naturellement reliée au spectre[†] multifractal observé au point critique.

Nous pensons que la situation est similaire dans ce cas. Cependant la forme de la relation de mise à jour des seuils (5.4.4) rend difficile une construction similaire. Encore une fois, ce point mérite d'être développé. C'est en effet le passage obligé entre les modèles à désordre gelé et recuit. Il est probable que, si une telle construction existe, nous soyons capables de calculer la distribution des seuils à partir de la simple connaissance du spectre multifractal des courants dans le modèle DA correspondant.

[†] Certains esprits pourront noter qu'il est normal qu'un fantôme ressemble à un spectre !

Voici tracé à grandes lignes la correspondance entre désordre recuit et gelé que nous suggérons. Il reste alors une dernière étape: comme adapter cette procédure aux modèles à fissure unique ? C'est l'objet du paragraphe prochain.

5.4.3 Modèles à fissure unique

Nous nous sommes cantonnés pour l'instant aux modèles sans contrainte de connexité. Comment transposer ces résultats pour les modèles à fissure unique, et donc trouver une correspondance entre SQ et SA? Il faut alors prendre en compte les effets de taille précédemment décrits. Cependant, les modèles SA sont généralement définis dans des milieux infinis, limite où bien sûr, la forme générale (5.4.107) doit être adaptée. On remédie sans peine à cette difficulté de la façon suivante: si nous partons d'une semence initiale ponctuelle, il faut disposer, autour de ce point, des seuils de rupture tirés selon une distribution *fonction de leur distance à la semence.* C'est ainsi que l'effet de taille retrouve son sens physique. Lorsque l'on prend un réseau de taille L finie, l'étape ultime dans l'attribution des seuils se fait alors avec une distribution qui est exactement adaptée à la géométrie calculée, puisque correspondant à un réseau de taille L.

Nous faisons ici l'hypothèse additionnelle que les distributions des seuils correspondant aux modèles DA et SA sont *identiques* pour une même valeur de η.

Ceci a pour effet d'introduire un *gradient effectif* dans la répartition des seuils autour de la semence. Nous voyons donc que cet effet de taille permet de rendre compte, au moins partiellement, des corrélations spatiales attendues pour les modèles SA. L'introduction de ce gradient spatial permet aussi de comprendre les lois d'échelles différentes obtenues selon la direction de croissance moyenne et perpendiculairement à celle-ci (l'anisotropie des modèles SA se traduit par une anisotropie due au gradient spatial de seuil pour les modèles SQ).

En collaboration avec Hansen et Hinrichsen, nous avons donc identifié une distribution de seuils pour le modèle DA avec $\eta = 1$, puis nous l'avons utilisé pour

étudier le modèle SQ. Le résultat obtenu étant à comparer avec le modèle SA correspondant à $\eta = 1$: i.e. le DLA. Outre l'aspect qualitativement semblable de cette figure avec un amas de DLA obtenu dans les mêmes conditions (SA η=1), nous pouvons calculer la dimension fractale de l'amas. Nous avons mesuré $D_f = 1.65$, dont l'accord avec le résultat escompté (1.7) est tout à fait satisfaisant. Ces simulations sont encore cependant à un stade tout à fait préliminaire, et il serait prématuré d'en tirer des conclusions définitives. Elles suggèrent cependant que cette démarche a de bonne chance d'aboutir au résultat escompté.

A partir des considérations précédentes, il est naturel de s'interroger sur la structure des amas engendrés par le modèle SQ avec des distributions en loi de puissance pour des seuils supérieurs à 1. Nous avons testé très rapidement cette question sur le réseau hiérarchique (pour la version duale de SQ, comme dans la partie 5.2). La figure 5.59 montre le logarithme du nombre moyen de liens cassés en fonction de la génération du système. Nous observons une loi de puissance correspondant à une dimension fractale de 1.25, pour une distribution $p(c) = (1/2)\ c^{-3/2}$. Ce résultat est similaire qualitativement à celui que nous avons rencontré précédemment (partie 5.2) pour une distribution singulière près de l'origine. Le tableau ci-dessous donne quelques valeurs de la dimension mesurée en fonction de l'exposant β de la loi de puissance.

β	D_f
1.25	1.34
1.33	1.30
1.5	1.25
1.66	1.20
2	1.15

Quelques dimensions fractales pour le modèle SQ sur réseau hiérarchique en fonction de l'exposant β de la loi de puissance gouvernant la distribution des seuils, $p(c) \propto c^{-\beta}$ pour $c \geq 1$.

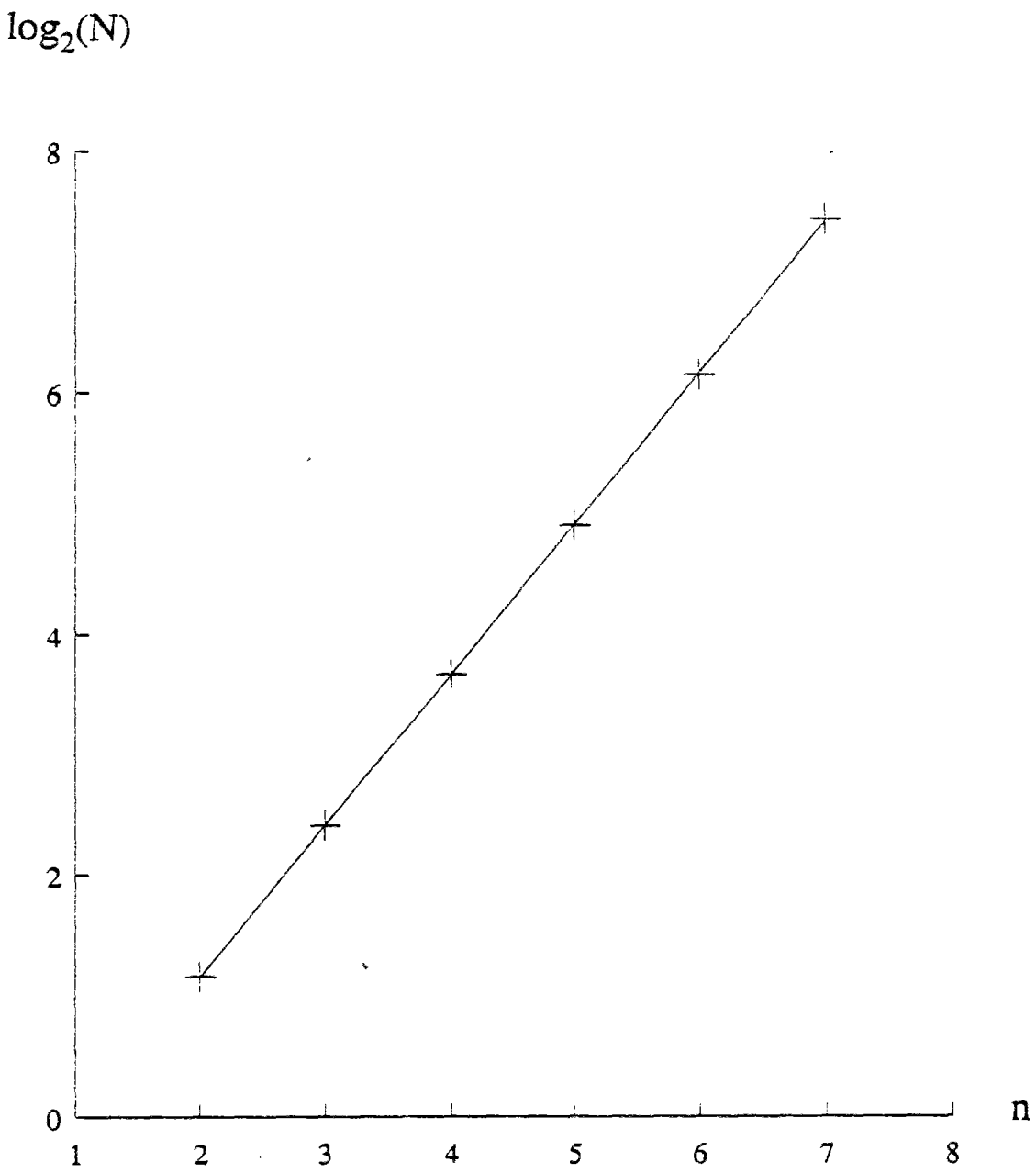


Figure 5.59 : Logarithme du nombre de liens cassés, $\log_2(N)$, en fonction de la génération, n, du réseau hiérarchique, pour le modèle SQ, avec une distribution de seuil selon une loi de puissance, $p(c) = (1/2)c^{-1.5}$ pour $c \geq 1$. La pente de la droite donne la dimension fractale, soit ici 1.25.

Ainsi, si l'on s'en tient à la dimension fractale comme critère d'identification, il semble raisonnable de pouvoir reproduire le DLA, et les autres modèles à désordre recuit (DBM, et autres SA) par le modèle SQ. Voyons maintenant le cas limite où β tend vers 1.

La limite du modèle d'Eden

Pour illustrer les idées précedentes concernant les modèles à fissure unique, voyons comment se traduit le cas limite $\eta = 0$: nous savons que, dans cette limite, le modèle SA devient équivalent au modèle d'Eden. Notre hypothèse concernant l'identité de distribution pour les modèles D et S à même η, nous conduit donc à prendre la distribution de seuils construite pour le modèle DA à $\eta = 0$, soit la distribution $p(c) \propto c^{-1}$. Cette limite est bien sûr pathologique et elle nous conduit à une construction plus subtile que dans les cas précédents, mais qui a le mérite de bien illustrer la notion de gradient effectif.

Les coupures de la distribution sont maintenant fondamentales. La coupure supérieure de la distribution augmente rapidement avec la taille du système, dans la procédure de reconstruction comme discuté précédemment. Nous reprenons la règle précédente qui consiste à utiliser localement une distribution adaptée à la taille du système qui inclut le site considéré et la semence. Nous serons donc confrontés à un problème de *percolation* (car $\eta = 0$) *d'invasion* (puisqu'un seul amas est généré) *dans un gradient* (car la distribution est d'autant plus large que l'on s'éloigne de la semence). Ceci est bien cohérent avec notre attente dans la mesure où:

- l'amas généré est compact
- la frontière de l'amas est auto-affine
- la longueur de la frontière de l'interface est proportionnelle à la taille du système.

Cependant, il faut noter quelques points qui restent à éclaircir. Le gradient introduit n'est pas usuel. En effet, la borne inférieure de la distribution reste constante,

mais la borne supérieure augmente. Le seuil de percolation local augmente également comme la borne supérieure, et justifie donc la notion de gradient utilisé ici. La prise en compte de cette forme de variation locale n'a jamais été considérée à notre connaissance. La rugosité de la frontière du modèle d'Eden suit une loi d'échelle bien établie avec la taille de l'amas (cf. chapitre 4). Il faudrait donc pouvoir retrouver cette loi dans le cadre du présent modèle. Cependant, il nous manque ici la forme précise de la variation de la coupure supérieure avec la taille du système. Cette question devrait pouvoir être résolue prochainement, à l'aide de simulations numériques.

Notons également que pour le modèle d'Eden, qui est naturellement un modèle à désordre recuit, nous avions, au chapitre précédent, construit une correspondance avec un modèle à désordre gelé, à savoir les chemins minimaux avec une distribution de pondération locale suivant une loi exponentielle. Nous avions alors vu que ce problème définissait un gradient local dans la direction de croissance moyenne. Cependant dans cette dernière construction, de fortes corrélations existent de par la nature même de la notion de *chemin* sous-jacente. La nouvelle correspondance que nous proposons ici, invite à oublier ces corrélations, en introduisant simplement une distribution de seuils variable avec la distance qui reproduit les mêmes tendances moyennes.

Nous voyons donc que la dépendance en taille redonne certains caractères attendus pour les amas SA, et permet de comprendre simplement la correspondance entre modèles. En particulier, la notion d'anisotropie émerge naturellement de la forme des distributions de seuils invariantes d'échelle. Cependant, il est évident que beaucoup de travail reste à faire pour démontrer la validité d'une telle construction.

Soulignons un intérêt simple de la construction que nous proposons. Les modèles à désordre recuit sont naturellement privés de la notion de caractéristique. Il n'y a en effet pas d'échelle de courant ou de tension. Si notre construction est avérée valide,

alors nous disposerons d'une telle caractéristique, qui apportera des renseignements précieux sur le comportement global du système.

5.4.4 Conclusion

Une situation similaire existe pour un exemple simple: la somme de nombres aléatoires. Formons la somme de n variables distribuées selon une loi p(x). L'effet de taille ici se réduit à étudier la dépendance en n de cette somme. Deux cas existent: soit le second moment de la distribution p(x) existe auquel cas, pour les propriétés qui nous intéressent, la distribution est de fait invariante et nous pouvons appliquer le théorème de la limite centrale. Soit le second moment est infini, et nous serons alors sensibles à la coupure de la distribution qui dépend de n. Dans ce cas, nous disons que la distribution "effective" change avec n, et la somme des nombres aléatoires ne suit plus une loi Gaussienne asymptotiquement mais plutôt une distribution de Lévy. Il est d'ailleurs à remarquer que, dans ce problème également, le critère de convergence ou non vers la loi Gaussienne s'exprime simplement, en utilisant la représentation de la distribution initiale de nombres aléatoires sous la forme d'une distribution multifractale. Le point de tangence de ce spectre avec une droite de pente 2 détermine le comportement asymptotique de la somme.

Dans le cas de la fracture, il nous faut trouver le bon "critère" pour savoir si la distribution des seuils varie "effectivement" avec la taille du système. Il va de soi que ce critère repose sur le comportement de la distribution au voisinage de zéro et de l'infini, mais nous ne pouvons malheureusement être plus précis aujourd'hui. L'identification précise de ce critère (analogue du second moment pour le théorème de la limite centrale), et des comportements résultant de cas non-réguliers (analogue des distributions de Lévy) est évidemment le but de l'ensemble de ce chapitre. Nous avons ainsi essayé de poser quelques jalons sur cette voie, mais beaucoup reste à faire. Soulignons avant de conclure, le rôle clé joué par l'aspect critique du phénomène de rupture à son stade terminal, et en conséquence la nécessité d'utiliser les effets de taille pour étudier ces comportements.

Comme nous l'avons mentionné au début de ce paragraphe, cette dernière étude concernant une correspondance entre désordre recuit et désordre gelé est tout à fait préliminaire, et beaucoup de choses restent à faire. Cependant les quelques résultats obtenus sont tout à fait encourageants et suggèrent que cette correspondance existe.

5.5.1 Avant de conclure...

Avant de conclure, nous voudrions encore mentionner quelques approches statistiques de la fracture de milieux désordonnés que nous avons pour l'instant passées sous silence.

Family et coll. [117] ont considéré un modèle de rupture de diélectrique qui associe désordres gelé et recuit de la façon suivante: Partant du modèle de rupture de diélectrique DBM que nous avons discuté dans la partie 5.3, une modification est introduite en pondérant par un facteur aléatoire le gradient de potentiel local. Ainsi, si v_i est la tension locale sur un lien frontière de l'amas, la probabilité de croissance sera $x_i v_i^{\eta}$, où x_i est un nombre aléatoire équidistribué sur l'intervalle [0,1]. Il ressort de leur étude que la perturbation due au désordre gelé ne change pas la dimension fractale des amas générés, mais elle empêche ou retarde la transition vers la génération de dendrites.

Chakrabarti et coll. [118] ont abordé le problème de la rupture d'un point de vue très microscopique. Ils ont simulé par dynamique moléculaire la fracture d'un milieu constitué d'atomes interagissant avec un potentiel de Lennard-Jones, à deux dimensions. Cependant la complexité de ce genre d'approche et sa lourdeur, font que peu de conclusions quantitatives peuvent être tirées de cette étude. Notons cependant l'observation d'une phase de "mécanisme", où le système, bien que toujours connecté ne possède plus de raideur sans exercer de grandes déformations. Nous avions à ce propos mentionné ce travail dans le chapitre 3. Notons également que Chakrabarti et coll.[119] et Ray et coll. [120, 121] ont également étudié la fracture d'un milieu élastique au voisinage du seuil de percolation.

Rundle et coll. [122-124] ont étudié la fracture d'une interface, dans un formalisme qui établit un parallèle formel avec la théorie de la nucléation. Ainsi, au dessus d'une certaine taille, une microfissure devient instable et se propage, alors qu'au-dessous de cette taille critique elle est contrôlée. Ceci permet aux auteurs de définir une taille caractéristique en tête de fissure, où un endommagement local est initié. Cependant

dans ce problème, le désordre n'est pas pris en compte. Il n'intervient que de façon très rudimentaire dans la nucléation de nouvelles fissures. Cette théorie qui se veut une généralisation des travaux de Griffith, a au moins l'avantage de prendre en compte une multitude de fractures, en y incorporant une analyse voisine de celle de Barenblatt [16].

Termonia et coll. [125-126] ont étudié un modèle de rupture de polymères où la rupture est thermiquement activée. En effet, la probabilité de rupture d'un lien est proportionnelle à $\exp\{(E_i\text{-}U)/kT\}$ où U est une énergie d'activation choisie constante, E_i l'énergie élastique du lien, k le facteur de Boltzmann et T une température. Pour différents modules élastiques dans les directions x et y, ces auteurs ont mesuré la dimension fractale de la fracture obtenue sous traction simple. La valeur de celle-ci, $D_f = 1.27 \pm 0.02$, semble très stable.

Finalement signalons encore une étude de Meakin [127], concernant la fracture d'un milieu initiée par des contraintes internes. Dans ce cas, l'approche suivie est similaire au modèle précédent, en considérant une rupture locale thermiquement activée. Dans cette géométrie, les fissures divisent le milieu en domaines. D'une certaine façon, la géométrie obtenue est duale d'une situation que nous avons mentionnée rapidement dans partie 5.3: les figures de Lichtenberg. Dans ce dernier cas, la rupture d'un milieu est causée par une distribution de charges électriques au sein du milieu. Les figures obtenues sont des structures arborescentes (sans boucle) qui remplissent l'espace de façon dense.

5.5.2 Conclusion

Nous en venons donc à la conclusion de ce chapitre, où nous voudrions souligner quelques points forts.

La rupture d'un matériau homogène est un processus *instable*. Elle donne lieu à un phénomène de *localisation* de la fracture, qui est décrit par une évolution *non-linéaire*. Comme stabilisation naturelle et physique de cette instabilité, nous avons mis en avant le rôle joué par le *désordre*.

Dans l'étude de la rupture de milieux désordonnés, nous avons distingué deux grandes familles de désordre: un désordre *gelé*, constant dans le temps et décorrélé en espace, et un désordre *recuit*, décorrélé en espace et en temps. Nous avons également distingué nettement deux familles de modèle: ceux où une seule fissure est engendrée et ceux ou aucune contrainte de connexité n'est imposée.

Pour cette dernière situation, deux grandes catégories de désordre gelé ont été étudiées : d'une part le *désordre de dilution*, et d'autre part la *distribution aléatoire des seuils de rupture*. Dans le premier cas, nous avons montré sur la géométrie simple du réseau hiérarchique que la prédiction théorique de Duxbury ne décrivait qu'un régime transitoire caractéristique des "petites" tailles des systèmes étudiés, mais qu'elle était fausse pour des systèmes de grande taille. Dans le second cas, nous avons montré qu'un doute susbsistait quant au comportement asymptotique de la rupture: Soit la proportion de liens cassés tend vers zéro selon une loi de puissance, soit elle tend vers une constante finie. Il s'avère très difficile de trancher entre ces deux hypothèses, mais en utilisant un réseau hiérarchique, il semble probable que nous puissions prochainement arriver à une conclusion ferme. Dans ce cas également, la différence entre le comportement mécanique et le simple cas électrique ne semble pas déterminante quant aux lois d'échelles observées.

La version à désordre recuit de ce modèle, (sans contrainte de connexité), montre un comportement tout à fait similaire, où là cependant, il semble clair qu'une valeur limite du paramètre de contrôle du désordre sépare un régime à concentration finie de liens cassés à la rupture, d'un régime où cette concentration décroît jusqu'à zéro selon une loi de puissance. Le parallèle entre les modèles à désordres gelé et recuit est alors frappant.

Les modèles à fissure unique, dans un désordre gelé donnent lieu à des structures fractales pour des distributions de seuils singulières à l'origine ou en loi de puissance à l'infini. Il en va de même pour les modèles à désordre recuit.

Abordant cette question par divers biais, nous avons tenté de montrer que le seul caractère important dans le désordre initial était *son spectre multifractal*, soit, dans les cas courants, son comportement asymptotique, au voisinage de l'origine ou de l'infini.

Par ailleurs, le stade ultime de la rupture est caractérisé par le développement d'un *point critique*. Ce phénomène est à rattacher à la notion de phénomène critique auto-organisé que nous avons mentionné au chapitre 1. L'évolution non-linéaire jointe au désordre engendre naturellement ce caractère critique. Nous avons à ce point identifié dans certains cas quelques exposants critiques, et souvent une distribution de courant multifractale. Si cette notion est intéressante conceptuellement, elle n'est que très difficilement observable expérimentalement.

Cependant, nous avons montré dans *tous* les modèles étudiés, que la forme de la distribution des sauts de conductance et de résistance intégrés pendant toute la rupture, *découlait* de ce caractère multifractal. Nous obtenons alors toujours deux lois de puissance, l'une caractérisant les grands sauts et l'autre les petits. Cette propriété est, elle, bien *observable expérimentalement*, et constitue la plus claire évidence du comportement critique du phénomène.

Il faut souligner cette dernière propriété compte-tenu de la maigreur (mais sans doute est-ce du à notre méconnaissance de la littérature) des analyses expérimentales

pertinentes dans l'esprit de ce que nous avons rapporté. Il existe quelques analyses du caractère fractal de fractures fragiles, [117-120]. Mais peu d'entre ces analyses semblent vraiment satisfaisantes.

Références :

1	J.C.Charmet, E.Guyon et S.Roux eds.	*"Disorder and Fracture"*, Compte-Rendu de Cargèse NATO ASI (1989), à paraître.
2	H.J.Herrmann et S.Roux eds.	*"Statistical Physics of Fracture"*, en préparation
3	R.Jullien et R.Botet	*"Aggregation and Fractal Aggregates"*, World Sci. Pub., Singapore, (1987)
4	T.Vicsek	*"Fractal Growth Phenomena"*, World Sci. Pub., Singapore, (1989)
5	J.Feder	*"Fractals"*, Plenum Press, New York, (1988)
6	H.J.Herrmann	Phys.Rep. 36, 153, (1986)
7	P.Meakin	*in "Phase Transition and Critical Phenomena"*, vol.12, C.Domb et J.L.Lebowitz eds., Academic Press, New York, (1987)
8	P.Rossi et S.Richer	Materials and Structures, 20, (1987)
9	K.J.Måløy, J.Feder et T.Jøssang	Phys.Rev.Lett. 55, 2681, (1985)
10	R.Lenormand et C.Zarcone	Phys.Rev.Lett. 54, 2226, (1985)
11	D.Wilkinson et J.Willemsen	J.Phys.A 16, 3365, (1983)
12	S.Roux et E.Guyon	J.Phys.A 22, 3693, (1989)
13	A.A.Griffith	Phil.Trans.Roy.Soc. 221, 163, (1920)
14	H.D.Bui	*"Mécanique de la rupture fragile"*, Masson, (Paris) (1978)
15	G.R.Irwin	Appl.Mat.Res. 3, 65, (1964)
16	G.I.Barenblatt	Adv.Appl.Mech 7, 55, (1962)

17 F.Buresch *in "Fracture Mechanics of Ceramics"*, p.835 R.C.Bradt, D.P.H.Haselman et F.F.Lange eds., Plenum Press, New York, (1978)

18 J.Mazars et G.Pijaudier-Cabot J.Eng.Mech.Div. ASCE, à paraître

19 Z.P.Bažant J.Eng.Mech.Div. ASCE 102, 331, (1976)

voir également pour une couverture assez complète du sujet: J.Mazars et Z.P.Bažant eds.*"Cracking and Damage : Strain Localisation an Size Effects"* Elsevier, (1989)

20 Z.P.Bažant J.Eng.Mech.Div. ASCE 110, 1693, (1984)

21 E.C.Aifantis J.Eng.Mat.Tech. 106, 326, (1984)

22 Z.P.Bažant, T.B.Belytschko et T.P.Chang J.Eng.Mech.Div. ASCE 110, 1666, (1984)

23 T.B.Belytschko, Z.P.Bažant, Y.W.Hyun et T.P.Chang Computers and Structures 23, 163, (1986)

24 A.Coniglio Phys.Rev.Lett. 46, 250, (1981)

25 H.Kunz et B.Souillard J.Stat.Phys. 19, 77, (1978)

26 E.Guyon, S.Roux et D.J.Bergman J.Physique 48, 903, (1987)

27 A.Gilabert, C.Vanneste, D.Sornette et E.Guyon J.Physique 48, 763, (1987)

28 D.Sornette J.Physique 49, 889, (1988)

D.Sornette J.Physique 49, 1365, (1988)

29 P.M.Duxbury, P.L.Leath et P.D.Beale Phys.Rev.B 36, 367, (1987)

30 S.Roux J.Phys.A 19, L351, (1986)

31 L.de Arcangelis, S.Redner et H.J.Herrmann J.Physique Lett.46, L585, (1985)

32 G.Deutscher et M.L.Rappaport J.Physique Lett.40, L219, (1979)

33 B.Derrida et J.Vannimenus Phys.Rev.B 27, 4401, (1983)

34 P.D.Beale et P.M.Duxbury Phys.Rev.B 37, 2785, (1988)

35 P.M.Duxbury, P.D.Beale et P.L.Leath Phys.Rev.Lett. 57, 1052, (1986)

36 Y.S.Li et P.M.Duxbury Phys.Rev.B 36, 5411, (1987)

37 B.Kahng, G.G.Batrouni et S.Redner J.Phys.A 20, L827, (1987)

38 J.Machta et R.A.Guyer Phys.Rev.B 36, 2142, (1987)

39 S.K.Chan, J.Machta et R.A.Guyer Phys.Rev.B 39, 9236, (1989)

40 J.Helsing, J.Axell et G.Grimvall Phys.Rev.B 39, 9231, (1989)

M.Soderberg Phys.Rev.B35, 352, (1986)

41 Y.S.Li et P.M.Duxbury *"From moduli scaling to breakdown scaling: a moment spectrum analysis"*, prépublication

42 V.Privman, F.Family et A.Margolina J.Phys.A 17, 2837, (1984)

43 F.Family, T.Vicsek et P.Meakin Phys.Rev.Lett. 55, 641, (1985)

44 P.D.Beale et D.J.Srolovitz Phys.Rev.B 37, 5500, (1988)

45 Y.S.Li , P.M.Duxbury et A.C.Orrick Phys.Rev.B 37, 5629, (1988)

46 Y.S.Li et P.M.Duxbury Phys.Rev.B 38, 9257, (1988)

47 G.N.Hassold et D.J.Srolovitz Phys.Rev.B 39, 9273, (1989)

48 P.L.Leath et W.Tang Phys.Rev.B 39, 6485, (1989)

49 P.M.Duxbury et P.L.Leath J.Phys.A 20, L411, (1987)

50 E.J.Gumbel *"Statistics of extremes"* Columbia Univ. Press. (New York, 1958)

51 W.Weibull J.Appl.Mech. 18, 293, (1951)

et S.M.Weiderhorn Ann.Rev.Mater.Sci. 14, 373, (1984)

52 H.Takayasu Phys.Rev.Lett. 54, 1099, (1985)

53 H.Takayasu *in "Fractals in Physics"* L.Pietronero et E.Tossati eds. Elsevier, Amsterdam (1986) p.181

54 R.F.Smalley, D.L.Turcotte et S.A.Solla J.Geophys.Res. 90, 1894, (1985)

55 D.L.Turcotte, R.F.Smalley et S.A.Solla
Nature 313, 671, (1985)

56 D.G.Harlow et S.L.Phœnix J.Comp.Mat. 12, 195, (1978)

D.G.Harlow et S.L.Phœnix J.Comp.Mat. 12, 314, (1978)

57 A.M.Gabrielov et W.I.Newman *"Failure of hierarchical distributions of fiber bundles II"* prépublication (1989)

58 W.I.Newman et A.M.Gabrielov *Failure of hierarchical distributions of fiber bundles I"* prépublication (1989)

59 D.Sornette J.Physique 50, 745, (1989)

60 B.Kahng, G.G.Batrouni, S.Redner, L.de Arcangelis et H.J.Herrmann
Phys.Rev.B 37, 7625, (1988)

61 L.de Arcangelis, A.Hansen, H.J.Herrmann et S.Roux
Phys.Rev.B 40, 877, (1989)

62 L.de Arcangelis et H.J.Herrmann Phys.Rev.B 39, 2678, (1989)

63 A.Hansen, S.Roux et H.J.Herrmann J.Physique 50, 733, (1989)

64 H.J.Herrmann, A.Hansen et S.Roux Phys.Rev.B 39, 637, (1989)

65 S.Roux et A.Hansen *"Early stages of rupture of disordered materials"*, prépublication (1989)

66 S.Roux, A.Hansen, H.J.Herrmann et E.Guyon
J.Stat.Phys. 52, 237, (1988)

67 M.Sahimi et J.Goddard Phys.Rev.B 33, 7848, (1986)

68 G.G.Batrouni, A.Hansen et M.Nelkin
J.Physique 48, 771, (1987)

69 H.J.Herrmann et H.E.Stanley Phys.Rev.Lett. 53, 1121, (1984)

70 G.G.Batrouni, A.Hansen et S.Roux Phys.Rev.A 38, 3820, (1988)

71 L.Furuberg, J.Feder, A.Aharony et T.Jøssang
Phys.Rev.Lett. 61, 2117, (1989)

72 S.Roux et A.Hansen Europhys.Lett. 8, 729, (1989)

73 G.G.Batrouni, B.Kahng et S.Redner J.Phys.A 21, L23, (1988)

74 J.N.Roux et D.Wilkinson Phys.Rev.A 37, 3921, (1988)

75 S.Roux, A.Hansen et S.Redner *"Multifractality of Conductance Jumps in Percolation"* prépublication (1989)

76 E.L.Hinrichsen, S.Roux et A.Hansen *"The Conductor-Superconductor Transition in Disordered Superconducting Materials"* prépublication (1989)

77 J.Bok et G.Deutscher communications privées

78 L.P.Kadanoff *in "Stat Phys 17"*, C.Tsallis Ed. à paraître

79 voir e.g. la référence [7]

80 T.A.Witten et L.M.Sander Phys.Rev.Lett.47, 1400, (1981)

81 D.Bensimon, L.P.Kadanoff, S.Liang, B.I.Shraiman et L.Tang Rev.Mod.Phys. 58, 977, (1986)

82 H.Van Damme, C.Laroche, L.Gatineau et P.Levitz J.Physique 48, 1121, (1987)

H.Van Damme, E.Alsac, C.Laroche et L.Gatineau Europhys.Lett. 5, 25, (1988)

83 M.Matsushita, M.Sano, Y.Hayakawa, H.Honjo et Y.Sawada Phys.Rev.Lett. 53, 286, (1984)

84 L.Niemeyer, L.Pietronero et H.J.Wiesmann Phys.Rev.Lett. 52, 1033, (1984)

L.Pietronero et H.J.Wiesmann J.Stat.Phys. 36, 909, (1984)

85 V.P.Brix Phys. Bl. 41, 141, (1985)

86 P.Meakin J.Colloid Interface Sci. 105, 240, (1985)

87 P.Meakin, J.Kertész et T.Vicsek J.Phys.A 21, 1271, (1988)

88 P.Meakin et T.Vicsek Phys.Rev.A 32, 685, (1985)

89 M.Kolb J.Physique Lett. 46, 631, (1985)

90 N.G.Makarov Proc.London Math.Soc. 51, 369, (1985)

91 L.A.Turkevich et H.Scher Phys.Rev.Lett. 55, 1026, (1985)

92 L.Tang Phys.Rev.A 31, 1977, (1985)

93 J.Szép, J.Cserti et J.Kertész J.Phys.A 18, L413, (1985)

94 J.Kertész et T.Vicsek J.Phys.A 19, L257, (1986)

95 J.Kertész, T.Vicsek et P.Meakin Phys.Rev.Lett. 57, 3303, (1986)

96 P.Meakin, F.Family et T.Vicsek J.Colloid Interface Sci. 117, 394, (1987)

97 F.Moreira, R.R.Freire et C.M.Chaves
Phys.Rev.A 40, 2225, (1989)

98 C.Amitrano, A.Coniglio et F.di Liberto
Phys.Rev.Lett. 57, 1016, (1986)

99 Y.Hayakawa, S.Sato et M.Matsushita Phys.Rev.A 36, 1963, (1987)

100 F.Guinea, O.Plá et E.Louis *"Fragmentation, Form and Flow in Fractured Media"*, R.Englman et Z.Jaeger eds., Ann.Isr.Phys.Soc. 8, 587, (1986)

101 E.Louis, F.Guinea et F.Flores *in "Fractals in Physics"* L.Pietronero et E.Tossati eds. Elsevier, Amsterdam (1986), p.117

102 E.Louis et F.Guinea Europhys.Lett. 3, 871, (1987)

103 H.J.Herrmann communication privée

104 H.J.Herrmann Physica D 38, 242, (1989)

105 E.L.Hinrichsen, A.Hansen et S.Roux Europhys.Lett.8, 1, (1989)

106 E.L.Hinrichsen, A.Hansen et S.Roux J.Phys.A 22, L795, (1989)

107 P.Meakin, G.Li, L.M.Sander, E.Louis et F.Guinea
J.Phys.A 22, 1393, (1989)

108 T.C.Halsey, P.Meakin et I.Procaccia Phys.Rev.Lett. 56, 854, (1986)

109 voir e.g. C.Atkinson, J.M.Bastero et J.M.Martínez-Esnaola
Eng.Fracture Mech. 31, 637, (1988)

110 R.C.Ball, R.M.Brady, G.Rossi et B.R.Thompson

Phys.Rev.Lett. 55, 1406, (1985)

111 P.Meakin Phys.Rev.A 26, 1495, (1983)

112 H.J.Herrmann, J.Kertész et L. de Arcangelis
Europhys.Lett. 10, 147, (1989)

113 J.Salençon *"Calcul à la Rupture et Analyse Limite"*
Presses de l' E.N.P.C., Paris, (1983)

114 L.Fernandez, F.Guinea et E.Louis J.Phys.A 21, L301, (1988)

115 M.P.López-Sancho, F.Guinea et E.Louis
J.Phys.A 21, L1079, (1988)

116 H.Yan, G.Li et L.M.Sander Europhys.Lett. 10, 7, (1989)

117 F.Family, Y.C.Zhang et T.Vicsek J.Phys.A 19, L733, (1986)

118 B.K.Chakrabarti, D.Chowdhury et D.Stauffer
Z.Phys.B 62, 343, (1986)

119 B.K.Chakrabarti, K.K.Bardhan et P.Ray
J.Phys.C 20, L57, (1987)

120 P.Ray et B.K.Chakrabarti J.Phys.C 18, L185, (1985)

121 P.Ray et B.K.Chakrabarti Sol.Stat.Comm. 53, 477, (1985)

122 J.B.Rundle et W.Klein Phys.Rev.Lett. 63, 171, (1989)

123 J.B.Rundle J.Geophys.Res. 94, 2839, (1989)

124 J.B.Rundle et W.Klein *"Origin of the fracture process zone: a non-classical thermodynamic approach to the fracture of cohesive solids"* prépublication (1989)

125 Y.Termonia, P.Meakin et P.Smith Macromol. 18, 2246, (1985)

126 Y.Termonia et P.Meakin Nature 320, 429, (1986)

127 P.Meakin Thin Film Solids 151, 165 (1987)

128 B.B.Mandelbrot, D.E.Passoja et A.J.Paullay
Nature 308, 721, (1984)

129 M.Coster et J.L.Chermant "Précis d'Analyse d'Images", CNRS, (1985)

130 C.S.Pande, L.E.Richards, N.Louat, B.D.Dempsey et A.J.Schwoeble Act.Met. 35, 1633, (1987)

131 Z.Q.Mu et C.W.Lung J.Phys.D 21, 848, (1988)

C.W.Lung et S.Q.Mu Phys.Rev.B 38, 11781, (1988)

C.W.Lung et S.Z.Zhang Physica D 38, 242, (1989)

Conclusion

Nous en venons maintenant à la conclusion de ce travail. Plutôt que de résumer les différents résultats présentés, nous allons brièvement discuter le rôle joué par le désordre dans notre étude, particulièrement à la lumière de la fin du dernier chapitre (5.4).

De façon très schématique, tous les problèmes que nous avons considérés peuvent se formuler de la façon suivante: Quel est le comportement collectif d'un milieu constitué d'éléments ayant une caractéristique aléatoire dont la distribution de probabilité est donnée ? Nous nous sommes restreints à deux grandes familles de caractéristiques élémentaires: d'une part le transport linéaire (Chapitres 2 et 3) et d'autre part les caractéristiques non-linéaires à seuil (Chapitres 4 et 5).

Il existe deux grandes familles de comportements globaux. D'une part, la situation *"normale"* où l'ensemble du système se comporte comme ses constituants élémentaires. Dans ce cas, la réponse sera généralement indépendante de la taille du système, et très rapidement, il sera possible d'utiliser des techniques d'homogénéisation pour décrire le système. D'autre part, il existe souvent des situations *"anormales"* où la réponse dépend de la taille du système. Ce sont de fait ces situations "anormales" qui nous ont intéressées dans l'ensemble de ce mémoire. Rappelons brièvement, dans quelles conditions elles apparaissent.

En ce qui concerne le cas du transport linéaire, nous avons beaucoup insisté sur la percolation (Chapitres 2 et 3) qui représente le *seul* cas de comportement non-trivial en dimension supérieure à un. En effet à une dimension, le problème du transport linéaire d'un milieu désordonné se réduit à une simple somme de nombres aléatoires, et dans ce cas nous pouvons appliquer tous les résultats connus à ce propos. Ainsi à côté du cas usuel trivial, où les propriétés de transport tendent vers celles d'un milieu homogène équivalent, nous trouvons *le* cas "anormal", où les coefficients de transport locaux suivent des distributions de Lévy. Ainsi Hulin et coll. [1] ont montré que dans ce cas, on

pouvait simplement retrouver des dépendances en taille non-triviales. Au-delà de la dimension un, les distributions de coefficients de transport selon des lois de puissance ne sont plus stables, et l'on retombe dans le cas normal, à moins de pousser le désordre jusqu'à "sa limite extrême" , (i.e. ce que nous avons appelé le désordre "infini" au chapitre précédent, où les coefficients de transport locaux sont distribués selon une loi $p(x) \propto x^{-1}$). Dans ce cas, comme nous l'avons vu au chapitre 4, Ambegaokar et coll. [2] ont démontré que l'on pouvait utiliser la percolation pour obtenir des informations sur le comportement moyen.

En ce qui concerne le transport non-linéaire, la situation est différente. Dans ce cas, il faut distinguer nettement deux grandes catégories: les comportements stables, où la caractéristique de chaque élément est croissante (e.g. chapitre 4) et les comportements instables (e.g. chapitre 5). Dans le premier cas, et pour des comportements individuels linéaires par morceaux, nous avons vu que même le régime de faible désordre donnait lieu à des comportements non triviaux. Là encore, un désordre "infini" correspond à la percolation. Il se trouve que pour ce problème également, (chemins minimaux) les distributions de Lévy ne sont pas stables, et qu'après un régime transitoire, on retombe dans le cas d'un faible désordre (au-delà de la dimension un). Notons cependant que pour le problème voisin des chemins *"maximaux"* les distributons de Lévy sont stables et permettent alors de construire tout un ensemble de comportements anormaux. Ceci permet finalement d'obtenir *l'ensemble* des comportements asymptotiques du problème, avec leurs bassins d'attractions [3].

Finalement, les comportements non-linéaires instables donnent lieu à des situations beaucoup plus complexes, où apparemment, (cf.chapitre 5) certains régimes de grand désordre, (lois de puissance à l'infini, où près de l'origine) mais non "infinis" (cf. chapitres 4 et 5), révèlent des comportements collectifs tout à fait originaux. En particulier, l'évolution du comportement en fonction de la taille traduit souvent une auto-similarité, ou une auto-affinité, interne.

Pour le transport non-linéaire, le concept de criticalité auto-organisé [4] semble être un paradigme intéressant. Aussi bien dans les réseaux de diodes, que dans le cas de la rupture, nous avons rencontré cette notion de point critique qui émerge naturellement. Ceci se traduit dans la pratique, par l'existence soit de structures géométriques fractales, ou auto-affines, soit (et de manière non exclusive) de variation des quantités physiques globales avec la taille du système, soit encore de distributions de quantités physiques locales selon des lois de puissance.

Enfin, dans tous les exemples que nous avons étudiés, nous avons mis l'accent sur les structures géométriques sur lesquelles se localisait le transport, le "squelette", ou encore les structures qui empêchaient le transport (e.g. fracture). Nous avons souvent eu l'occasion d'identifier pour ces structures des lois d'échelles non-triviales. Il serait cependant réducteur de se limiter aux seuls aspects géométriques du problème.

Finalement, comme nous l'avons mentionné à maintes reprises, nous n'avons souvent fait que poser quelques jalons et beaucoup reste à faire. Nous sommes cependant convaincu que ce type d'approche est promis à un bel avenir et permettra de jeter un regard neuf sur beaucoup de problèmes appliqués en sciences des matériaux, où par ailleurs, certaines lois d'échelle ont déjà été identifiées de façon empirique. Reste alors à comprendre l'origine physique de ces lois, et à en faire ressortir l'éventuelle universalité.

Références

1 J.P.Hulin, J.P.Bouchaud et A.Georges *"Strongly disordered chain of impedances: Theoretical analysis and numerical results"* prépublication (1989)

2 V.Ambegaokar, B.I.Halperin et J.S.Langer Phys.Rev.B 4, 2612, (1971)

3 S.Roux, L.da Silva, A.Hansen, L.Lucena et R.Pandey en préparation

4 P.Bak, K.Wiessenfeld et C.Tang Phys.Rev.Lett. 59, 381, (1987)

CALIFORNIE

Liste de publications
I Journaux Scientifiques à comité de lecture

1-S.Roux

"Flory calculation of the fractal dimensionality of the shortest path in a percolation cluster"
J. Phys. A 18, L395, (1985)

2-S.Roux

"Bornes supérieures pour les exposants critiques de transport en percolation"
C. R. Acad. Sci. (Paris) 301, II, 367, (1985)

3-S.Roux et E.Guyon

"Mechanical percolation : a small beam lattice study"
J. Physique Lett. 46, L999, (1985)

4-E.Charlaix, E.Guyon et S.Roux

"Permeability of a random array of fractures of widely varying apertures"
Transport in Porous Media 2, 31, (1987)

5-S.Roux

"Relation between elastic and scalar transport exponent in percolation"
J. Phys. A 19, L351, (1986)

6-S.Roux, C.Mitescu, E.Charlaix et C.Baudet

"Transfer-matrix algorithm for convection-biased diffusion"
J. Phys. A 19, L687, (1986)

7-S.Roux

"Generalized Brownian motion and elasticity"
J. Stat. Phys. 48, 201, (1987)

8-S.Roux

"Simple determination of a critical exponent on a micro-computer"
Eur. J. Phys. 8, 186, (1987)

9-B.Gauthier-Manuel, E.Guyon, S.Roux, S.Gits et F.Lefaucheux
"Critical viscoelastic study of the gelation of silica particles"
J. Physique (Paris) 48, 869, (1987)

10-S.Roux, D.Stauffer et H.J.Herrmann
"Simulation of a disordered system of cylinders: I Geometrical behavior"
J. Physique (Paris) 48, 341, (1987)

11- D.Stauffer, H.J.Herrmann et S.Roux
"Simulation of a disordered system of cylinders: II Mechanical behavior"
J. Physique (Paris) 48, 347, (1987)

12- H.J.Herrmann, D.Stauffer et S.Roux
"Violation of 'linear elasticity' due to randomness"
Europhys. Lett. 3, 265, (1987)

13-S.Roux et C.D.Mitescu
"Hierarchy of current cumulants on a Sierpinski gasket "
Phys. Rev. B 35, 898, (1987)

14-S.Roux et H.J.Herrmann
"Disorder-induced non-linear conductivity"
Europhys. Lett. 4, 1227, (1987)

15-S.Roux et E.Guyon
"Uniformly biased diffusion in a random medium"
Europhys. Lett. 4, 175, (1987)

16-E.Guyon, S.Roux et D.J.Bergman
"Critical behavior of electric and elastic failure thresholds in percolation"
J. Physique (Paris) 48, 903, (1987)

17-J.Vareille, E.Guyon et S.Roux
"Mechanical properties of random arrays of short carbon fibers"
Rev. Physique App. 22, 1361, (1987)

18- J.Wu, E.Guyon, A.Palevski, S.Roux et I.Rudnick

"Modes de flexion d'une plaque mince au voisinage d'un seuil de percolation"

C. R. Acad. Sci. (Paris) 305, serie II, 323, (1987)

19-A.Hansen et S.Roux

"Application of 'logical transport' to determine the directed and isotropic percolation threshold"

J. Phys. A 20, L873, (1987)

20-S.Roux et A.Hansen

"Critical behavior of anisotropic 'super-elastic' central-force percolation"

J. Phys. A 20, L879, (1987)

21-S.Roux, H.J.Herrmann, A.Hansen et E.Guyon

"Relations entre différents types de comportements non-linéaires de réseaux désordonnés"

C. R. Acad. Sci. (Paris), 305, II, 943, (1987)

22-S.Roux, A.Hansen et E.Guyon

"Criticality in non-linear transport properties of heterogeneous materials"

J. Physique (Paris) 48, 2125, (1987)

23- E.Guyon, A.Hansen et S.Roux

comment on :"Resistance to the flow of fluids through simple and complex porous media whose matrices are composed of randomly packed spheres"

J. Fluid Eng. 109, 274, (1987)

24-S.Roux et A.Hansen

"Transfer-matrix study of the superconducting diamagnetism at percolation threshold"

Europhys. Lett. 5, 473, (1988)

25-A.Gilabert, S.Roux et E.Guyon

"Current-voltage characteristic of a non-linear resistor network"

J. Physique (Paris) 48,1609, (1987)

26-G.G.Batrouni, A.Hansen et S.Roux
"Negative moments of the current spectrum in the random resistor network"
Phys. Rev. A 38, 3820, (1988)

27-S.Roux et A.Hansen
"A new algorithm to extract the backbone in a random resistor network"
J. Phys. A 20, L1281, (1987)

28-S.Roux, A.Hansen, H.J.Herrmann et E.Guyon
"Rupture of heterogeneous media in the limit of infinite disorder"
J. Stat. Phys. 52, 237, (1988)

29-S.Roux, E.Guyon et D.Sornette
"Hull percolation"
J. Phys. A 21, L475, (1988)

30-S.Roux et A.Hansen
"Transfer-matrix study of the elastic properties of central-force percolation"
Europhys. Lett. 6, 301, (1988)

31-S.Roux et A.Hansen
"Surface exponent in percolation and central-force percolation"
Phys. Rev. B 38, 5170, (1988)

32-A.Hansen et S.Roux
"Universality class of central-force percolation"
Phys. Rev. B 40, 749, (1989)

33-S.Roux et A.Hansen
"Anomalous viscous retardation of a mechanical wave at percolation threshold"
J. Physique(Paris) 49, 897, (1988)

34-R.Cytermann, E.Guyon et S.Roux
"Revisiting the transport properties of weakly sintered materials"
Powder Met. Int. 20, 23, (1988)

35- S.Roux, A.Hansen et E.Guyon

Comment on "Percolation in isotropic elastic media" by Garcia-Molina, F.Guinea and E.Louis

Phys. Rev. Lett. 61, 2501, (1988)

36-A.Hansen et S.Roux

"Multifractality in elastic percolation"

J. Stat. Phys. 53, 759, (1988)

37- H.J.Herrmann, A.Hansen et S.Roux

"Fracture of disordered, elastic lattices in two dimensions"

Phys. Rev. B 39, 637, (1989)

38- A.Hansen et S.Roux

"Multifractality and non-linear behavior of the diamagnetic susceptibility in a superconducting network at percolation"

J. Physique (Paris) 49, 1379, (1988)

39- A.Hansen, S.Roux et H.J.Herrmann

"Rupture of central-force lattices"

J. Physique (Paris) 50, 733, (1989)

40- L.de Arcangelis, A.Hansen, H.J.Herrmann et S.Roux

"Scaling laws in fracture"

Phys. Rev. B 40, 877, (1989)

41- E.Hinrichsen, A.Hansen et S.Roux

"A fracture growth model"

Europhys. Lett. 8, 1, (1989)

42- A.Gilabert, M.Ben-Ayad, S.Roux et E.Guyon

"Experimental study of the elastic properties of a triangular lattice"

J. Physique (Paris) 49, 1629, (1988)

43- S.Roux et A.Hansen

"Scalar formulation of central-force percolation in two dimensions"

J. Phys. A 21, L941, (1988)

44- S.Roux, A.Hansen et E.Guyon

"Propagation of order in the dilute antiferromagnetic 3-state Potts model "

J. Stat. Phys. 55, 341, (1989)

45- L.da Silva, A.Hansen et S.Roux

"Spreading of damage in deterministic cellular automata as a percolation problem"

Europhys. Lett.8, 47, (1989)

46- A.Hansen, E.L.Hinrichsen et S.Roux

"Hierarchy of effective sizes of DLA clusters"

J. Phys. A 22, 795, (1989)

47- A.Gilabert, S.Roux, E.Guyon et D.Sornette

"Free deformation of a random spring network"

Physica A 157, 570, (1989)

48- E.Guyon, A.Hansen, E.L.Hinrichsen et S.Roux

"Critical behaviors of central-force lattices"

Physica A 157, 580, (1989)

49- S.Roux et A.Hansen

"Off-threshold multifractality in percolation"

Europhys. Lett. 8, 729, (1989)

50- A.Hansen, P.M.Lam et S.Roux

"Surface order parameter in three dimension percolation"

J. Phys. A 22, 2635, (1989)

51- D.Sornette et S.Roux

"On the validity of 'fractal' finite element method"

Accepté à J. Acoust. Soc. Am.

52- D.Sornette, M.Lagier, S.Roux et A.Hansen
"Piezo-electricity in percolation"
J. Physique (Paris) 50, 2201, (1989)

53-S.Roux et E.Guyon
"Temporal development of invasion percolation"
J. Phys. A 22, 3693, (1989)

54-V.Prunet, R.Blanc, S.Roux et E.Guyon
"Flexural elasticity of percolation lattices"
J. Phys. Cond. Mat. 1, 4723, (1989)

55-S.Roux, D.Bideau et C.Weill
"First-order phase transition in piling problems"
J. Phys. Cond. Mat. 1, 5799, (1989)

56-A.Hansen et S.Roux
"A geometrical interpretation of the chaotic state of inhomogeneous deterministic cellular automata"
Physica A 160, 275, (1989)

57- E.Guyon, S.Roux, A.Hansen, H.Crapo, D.Bideau et J.P.Troadec
"Non-local and non-linear problems in mechanics of disordered systems: Applications to granular media and rigidity problems"
Accepté à Rep. Prog. Phys.

58- S.Roux et A.Hansen
"Early stages of rupture of disordered materials"
Accepté à Europhys.Lett. (1990)

59- E.Guyon, C.D.Mitescu, J.P.Hulin et S.Roux
"Fractals and percolation in porous media and flows ?"
Physica D 38, 172, (1989)

60-E.L.Hinrichsen, S.Roux et A.Hansen

"The conductor-superconductor transition in disordered superconducting materials"
en preparation

II Compte-Rendus de rencontres et Cours

1-S.Roux et E.Guyon

"Transport exponents in percolation"
in N.Ostrowski,E.Stanley (editors) "On growth and forms"
(Cargese 1985) Martinus Nijhoff Pub., Dordrecht , Netherland (1986)

2-E.Charlaix, E.Guyon et S.Roux

"Critical effects in the permeability of heterogeneous porous media"
in "Flux, Flow, Fragmentation" Annals Isr. Phys. Soc. vol.8 (1986)

3-E.Guyon et S.Roux

"Mechanical properties of random matter"
Chapt.4 : "The Physics of Random Matter" , "Chance and matter",
Les Houches(86), J.Souletie, J.vannimenus and R.Stora ed., Elsevier (1987)

4- E.Guyon, S.Roux et A.Hansen

"Non-local and non-linear problems in the physics of disordered media"
in "Far from equilibrium phase transitions" Proceeding Sitges 88, Lecture Notes in Physics n°319, Springer Verlag (1989)

5- S.Roux

"Méthodes statistiques de la physique du désordre"
Proceeding de l'école d'été "Physique des milieux inhomogènes" Oran88

6- L.da Silva, A.Hansen et S.Roux

"Spreading of damage and percolation in deterministic cellular automata"
Proceeding of the Worshop on Cellular automata Orsay 88
à paraître dans J.Stat.Phys.

7-S.Roux et A.Hansen

"Introduction to multifractality"

Proceeding of "Disorder and Fracture", Cargese 89

8-H.J.Herrmann, L.de Arcangelis, A.Hansen et S.Roux

"Scaling laws and fractal patterns in fracture"

Proceeding "32ème colloque Metallurgie INSTN" 89

9-S.Roux et A.Hansen

"Criticality in elastic and geometrical properties of random loose packing"

Proceeding of "Powder and Grains", Clermont-Ferrand 89, J.Biarez et R.Gourvès Eds., Balkema, Rotterdam, (1989) p.249

10- A.Hansen, E.L.Hinrichsen et S.Roux

" Bruddmekanikk fra en ny synsvinkel"

Accepté à Teknisk Ukeblad

11- A.Hansen, E.L.Hinrichsen and S.Roux

"Statistical models of breakdown and fracture"

Proceeding of the 3rd Nordic Symposium on Computer simulation

Livres

1- H.J.Herrmann and S.Roux eds.

"Statistical Models of Fracture of Disordered Media"

Elsevier, (1990)

à paraître

2- J.C. Charmet, E.Guyon and S.Roux eds.

"Disorder and Fracture"

Proceeding of Cargese Scientific Institute

Plenum Press, (1990)

à paraître

Autres Publications

- E.Guyon et S.Roux
  "Les matériaux hétérogènes"
  La Recherche n°191, 18, 1050, (1987)

- C.Bétrencourt, J.C.Deroche, E.Guyon et S.Roux
  "Le T.D. dont vous êtes le héros"
  Bull.Union des Physiciens

Réalisé avec le concours du Service Imprimerie de la 5 eme Circonscription
1 Place Aristide-Briand - 92195 Meudon Cedex - Tél.45 34 75 50 - Télex 20 135