

Modélisation du découpage d'un sol par jets liquides sous forte pression

François Gilbert

▶ **To cite this version:**

François Gilbert. Modélisation du découpage d'un sol par jets liquides sous forte pression. Matériaux. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1981. Français. NNT : . tel-00529367

HAL Id: tel-00529367

https://pastel.hal.science/tel-00529367

Submitted on 25 Oct 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

135

NS 10812 (4)
NS 10812 (2)

Modélisation du découpage d'un sol par jets liquides sous forte pression

THÈSE PRÉSENTÉE A PARIS

À L'ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,

PAR M. FRANÇOIS GILBERT

POUR OBTENIR LE DIPLÔME DE DOCTEUR-INGÉNIEUR

SPECIALITE GENIE CIVIL

OPTION MECANIQUE ET STRUCTURES

SOUTENUE A PARIS LE 10 JUIN 1981 DEVANT LE JURY COMPOSE DE

MM. J. MANDEL,	Président
L. BRUN,	Rapporteur
P. DUPEUBLE,	
P. HABIB,	
J. LEMAITRE,	
F. SCHLOSSER.	

E.N.P.C.
DOC10937

10 10

Avant-propos

Je remercie tout d'abord Monsieur le Professeur J. Mandel qui m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse.

Monsieur le Professeur P. Habib, Directeur du Laboratoire de Mécanique des Solides, m'a permis d'y entrer et a été mon Directeur de Recherche ; qu'il soit remercié pour cela, pour la confiance qu'il m'a témoignée et pour avoir accepté de faire partie de mon jury.

Ma reconnaissance va aussi à Monsieur le Professeur J. Salençon, Directeur de Formation à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, dans le cadre de laquelle a été préparée cette thèse.

Je suis particulièrement reconnaissant envers Monsieur le Professeur L. Brun, qui a bien voulu être mon rapporteur et me faire profiter de ses conseils.

J'adresse également mes remerciements à Monsieur P. Dupeuble et à Messieurs les Professeurs J. Lemaître et F. Schlosser qui ont accepté de faire partie de mon jury.

Ce travail doit beaucoup à l'intérêt constant qu'y a porté Monsieur M.P. Luong dont la disponibilité, les conseils et les encouragements ne se sont jamais démentis.

Je tiens à exprimer ma gratitude à Messieurs G. Bouron, R. Barre et J.C. Eytard pour la partie expérimentale de cette thèse, qui a pu être menée à bien grâce à leur compétence.

J'ai été très sensible au soin apporté à la réalisation matérielle de cette thèse par Mesdames D. Chassaing et M. Ratni et par Monsieur P. Lemattre, à qui sont dues les figures.

Je suis redevable à l'ensemble de mes collègues pour les fructueuses discussions que j'ai eues avec eux et l'attention amicale qu'ils ont portée aux problèmes que je leur ai soumis, parfois très éloignés de leurs préoccupations.

Enfin, je ne saurais oublier le soutien que beaucoup m'ont apporté, à l'intérieur et hors du laboratoire, par leur présence et leur amitié, en particulier Mademoiselle P. Tardivon.

MODELISATION DU DECOUPAGE D'UN SOL PAR JETS LIQUIDES SOUS FORTE PRESSION

THÈSE DE DOCTORAT D'INGÉNIEUR
DE L'ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES

Spécialité Génie Civil

Option Mécanique et Structures

PREPAREE AU LABORATOIRE DE MECANIQUE DES SOLIDES
DE L'ECOLE POLYTECHNIQUE

par François GILBERT

Directeur de Formation : M. J. SALENÇON

Directeur de Recherche : M. P. HABIB

Conseiller de Recherche: M. M.P. LUONG

Résumé

Les techniques de découpage de matériaux par jets liquides sont aujourd'hui assez largement utilisées dans l'industrie et leur application en géotechnique au découpage de sols semble prometteuse.

Cependant le développement du découpage par jets liquides dans le domaine du génie civil nécessite la construction et la vérification de modèles théoriques tenant compte des particularités physiques et mécaniques des sols tout en recherchant la compréhension des mécanismes mis en jeu au niveau des grains.

Il n'existe pas actuellement, pour le découpage des sols, d'instrument de prévision raisonnée satisfaisant. Les recherches entreprises sur ce sujet au Laboratoire de Mécanique des Solides ont pour objet l'élaboration d'un tel outil, autant que possible simple à manier et suffisamment représentatif.

La première partie (introduction) délimite tout d'abord le cadre de l'étude ; on fait ensuite le point sur les calculs existants concernant le creusement de trous ou de tranchées dans le sol au moyen de jets liquides. Les observations des auteurs antérieurs et des raisons d'ordre mathématique et technique imposent alors, pour cerner les phénomènes physiques en jeu, de s'intéresser à un problème particulier, celui du découpage d'une tranchée rectiligne de profondeur constante dans un sol, à l'aide d'un jet quasi-continu d'eau pressurisée à quelques dizaines de MPa.

L'approche retenue et le type de modélisation qui s'en déduit, visent délibérément la simplicité par de nombreuses approximations (autant que possible vérifiées par la suite), la considération de comportements mécaniques "idéaux" et le souci de limiter au maximum l'introduction de grandeurs non mesurables par ailleurs.

Le modèle adopté est décrit dans la deuxième partie où on se donne le comportement du jet libre dans l'air et celui du sol, ainsi que l'expression des conditions au contact entre le jet et le sol.

Le dispositif créant le jet et le jet lui-même sont caractérisés essentiellement par un coefficient de contraction et un nombre d'Euler, qui permettent d'accéder aux grandeurs technologiquement intéressantes. La considération de nombres sans dimension et l'observation de la stabilité latérale du jet permettent de tester la validité des hypothèses simplificatrices.

On admet que le sol présente un comportement élastique linéaire en contrainte effective et possède un critère de rupture du type Coulomb-Hvorslev ; l'infiltration de l'eau y est régie par la loi de Darcy.

La trainée d'un grain situé sur la surface de découpage est supposée proportionnelle à la pression localement exercée par le fluide sur le sol, cette pression étant due à la courbure des lignes de courant moyennes.

L'érosion du sol se produit alors par arrachement continuel des grains le long d'une surface mobile à calculer.

L'exploitation du modèle dans le cas bidimensionnel et pour un sol où la phase eau est initialement discontinue (sol désigné dans le texte, en abrégé, par "sol P.E.D.") fait l'objet de la troisième partie.

Après résolution des équations, on vérifie les diverses approximations faites et on compare les prévisions théoriques du modèle aux résultats d'expériences de laboratoire. On détermine en particulier la profondeur théorique de la tranchée obtenue dans des conditions données et le volume déblayé par unité de temps. Le modèle fait apparaître des valeurs critiques d'interprétation technologique intéressante et fournit des ordres de grandeur précisant son domaine d'application.

La quatrième partie est consacrée aux extensions possibles du modèle. On revient tout d'abord sur certaines implications et hypothèses sous-jacentes, puis on discute le cas d'un sol initialement saturé en eau, pour lequel la résolution, plus compliquée, n'a pas encore été faite. Ceci permet d'aborder à la fois les limites du modèle et les possibilités d'adaptation aux jets submergés.

On voit alors, en conclusion, l'intérêt de ce type de modèle de découpage simplifié, qui se veut en même temps instrument de prévision pratique par les ordres de grandeur qu'il fournit et outil de réflexions physiques par les relations qu'il suppose réalisées et les questions auxquelles il renvoie.

Sommaire

NOTATIONS PRINCIPALES p. 11

I - INTRODUCTION

A - CADRE DE L'ÉTUDE p. 17

1 - POSITION DU PROBLÈME
2 - TYPES DE JETS
3 - UTILISATION DES JETS COUPANTS

B - DÉMARCHES ANTÉRIEURES p. 24

1 - JETS LIBRES PULSÉS
2 - JETS LIBRES CONTINUS

C - APPROCHE RETENUE p. 29

1 - CONSIDÉRATIONS TECHNIQUES
2 - CONSIDERATIONS MATHÉMATIQUES

II - DESCRIPTION DU MODELE THEORIQUE

A - LE JET LIBRE DANS L'AIR p. 33

1 - HYPOTHESES
2 - JUSTIFICATIONS
3 - RESULTATS

B - COMPORTEMENT DU SOL p. 43

1 - ASPECT CINEMATIQUE
2 - LOI DE DARCY
3 - SQUELETTE SOLIDE

C - CONTACT ENTRE LE JET ET LE SOL p. 57

1 - HYPOTHESES GEOMETRIQUES
2 - RELATION FONDAMENTALE DE LA DYNAMIQUE
3 - CONDITION A L'INTERFACE

III - EXPLOITATION

A - RESOLUTION POUR UN SOL A PHASE EAU DISCONTINUE p. 69

1 - REVUE DES EQUATIONS
2 - SOLUTION APPROCHEE
3 - ALLURE DU PHENOMENE

B - VERIFICATION DES HYPOTHESES p. 100

1 - HYPOTHESES SUR LE DECOUPAGE
2 - JETS UTILISES
3 - NOMBRES ADIMENSIONNELS DU JET

C - COMPARAISON AVEC L'EXPERIENCE p. 114

1 - PRINCIPE DES EXPERIENCES ET DIFFICULTES
2 - RESULTATS
3 - CONDITIONS A VERIFIER

IV - EXTENSIONS POSSIBLES

A - IMPLICATIONS DU MODELE p. 133

B - CAS D'UN SOL SATURE p. 140

C - POSSIBILITES D'ADAPTATION AUX JETS SUBMERGES p. 144

V - CONCLUSION p. 145

BIBLIOGRAPHIE p. 149

Notations principales

A	aire d'une section du jet
a	célérité du son dans l'eau
$a' = \frac{f}{d.tg\varphi}$	
b	facteur de forme
$b' = \frac{C}{d.tg\varphi}$	
C	cohésion effective du sol
c	fraction volumique moyenne de grains dans l'écoulement au-delà de la surface de découpage (concentration volumique)
D	diamètre du jet
$\bar{\bar{\mathcal{D}}}$	tenseur de vitesse de déformation
d	taille des grains
E	module d'Young du sol
$\mathcal{E}$	nombre d'Euler
e	épaisseur du jet
E_s	énergie volumique de découpage
e'	épaisseur de la zone mouillée
$\mathcal{F}$	nombre de Froude
f	coefficient de frottement équivalent

g accélération de la pesanteur

$\mathcal{H}$ profondeur adimensionnelle

h profondeur de la tranchée

$\mathcal{H}'$ valeur approchée de la fonction $\mathcal{H}$

h_c hauteur caractéristique (distance buse-matériau)

I_1^* trace du tenseur de contrainte effective (premier invariant)

$K = \frac{\rho_e g k}{\eta}$ perméabilité (m/s)

k perméabilité intrinsèque (m^2) supposée homogène et isotrope

L_B longueur de rupture du jet

$\mathcal{M}$ nombre de Mach

m coefficient de contraction du jet

n coordonnée selon la normale au fond $\bar{\beta}$

P pression sur la surface de découpage

$\mathcal{P}$ puissance cinétique du jet

p pression

P_a pression atmosphérique (Pa = 0 par convention)

P_r pression en amont de la buse

Q_m débit massique du jet

Q_v débit volumique du jet

R rayon de courbure de la surface de découpage :

$$R = \frac{ds}{d\alpha}$$

$\mathcal{R}$ nombre de Reynolds du jet

R_o repère lié à la buse

R_Ω repère lié au sol

$\mathcal{R}_{sol}$ nombre de Reynolds de l'écoulement dans le sol

$\mathcal{S}$ surface balayée par unité de temps ; également $\mathcal{S} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy}$

$\mathcal{S}$ nombre de Strouhal

$\mathcal{s}$ surface balayée adimensionnelle

s abscisse curviligne le long de la surface de découpage

$\mathcal{S}^* = \sigma_{xx}^* + \sigma_{yy}^*$

t_c période de modulation du débit de la buse

$\bar{U}$ champ de vitesse apparente de l'eau dans le sol (vitesse de filtration)

$\bar{u}_e$ champ de vitesse réelle moyenne de l'eau dans le sol

$\bar{u}_.$ champ de vitesse réelle moyenne des grains

V vitesse de balayage

V_c vitesse de balayage critique

V_I vitesse intrinsèque

$\mathcal{W}$ nombre de Weber

w vitesse de l'eau dans le jet

$\mathcal{Z}$ nombre d'Ohnesorge

$\bar{\alpha}$ tangente au fond (orientée dans le sens des s croissants)

α angle de la tangente au fond avec la direction de balayage :

$\alpha = (\bar{x}, \bar{\alpha}) \leq 0$, avec $\bar{V} = V\bar{x}$ $(V > 0)$

$\bar{\beta}$ normale extérieure au sol le long de la surface de découpage

$\beta = (\bar{x}, \bar{\beta}) = \alpha + \frac{\pi}{2}$

$\bar{\beta}'$ normale intérieure à la zone saturée du sol à la limite avec la zone non saturée

$\bar{\bar{\varepsilon}}$ tenseur de déformation (en petites déformations)

η viscosité dynamique de l'eau

ν coefficient de Poisson

ρ masse volumique de l'eau (avec l'indice e lorsqu'il y a risque de confusion : ρ_e)

σ constante de tension superficielle entre l'eau et l'air

$\bar{\bar{\sigma}}$ tenseur de contrainte totale : $\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{\sigma}}^* - p\,\bar{\bar{\mathbb{1}}}$

$\bar{\bar{\sigma}}^*$ tenseur de contrainte effective

τ cisaillement sur la surface de découpage

φ angle de frottement interne effectif du sol

χ pression d'arrêt du jet

χ_c pression d'arrêt critique

Ψ_0, Ψ_1, Ψ_2 fonctions servant à calculer $\mathcal{H}'$

ω porosité

$\bar{\bar{\mathbb{1}}}$ tenseur de Kronecker

Symboles : Δ laplacien

$\#$ "de l'ordre de grandeur de"

Sol P.E.D. : Sol à phase eau discontinue

Indices : s section de sortie de la buse

$*$ section contractée du jet

o section d'attaque du sol par le jet

La convention de signe adoptée pour les contraintes et les déformations est celle de la mécanique des milieux continus : on comptera ainsi positivement une traction ou une extension.

1

Introduction

A - CADRE DE L'ETUDE

1 - POSITION DU PROBLEME

Il est possible sous certaines conditions d'entamer un solide ou un assemblage de particules solides avec un liquide. Qu'on songe par exemple aux effets des vagues et des courants marins, à l'érosion par les cours d'eau, aux conséquences de la pluie à l'aplomb d'une gouttière percée ou aux problèmes d'érosion par cavitation dans les installations hydrauliques.

Les mécanismes exacts de ces divers phénomènes sont encore assez mal connus. Cependant l'intuition suggère, l'expérience montre et, lorsqu'elle existe et est en accord avec l'expérience, la théorie confirme que ces mécanismes sont (en un sens à préciser) d'autant plus efficaces qu'ils agissent sur une portion de solide plus petite. De cette observation simple découle l'idée du découpage par jets liquides, dans lequel on projette à grande vitesse un débit fluide sur un matériau (figure I1) ; il se produit alors, au voisinage de l'impact du jet, dans le matériau un ou plusieurs phénomènes (déformation, fracturation, arrachement ...) conduisant à un changement de forme et éventuellement à une perte de masse du matériau : c'est le cas des sols (1) en particulier.

(1) *Le découpage par jets liquides des métaux et des matières plastiques ne fournit généralement pas de débris, ce qui en fait une méthode particulièrement propre. Pour tous les matériaux la présence d'un liquide supprime les problèmes de poussières dans l'air.*

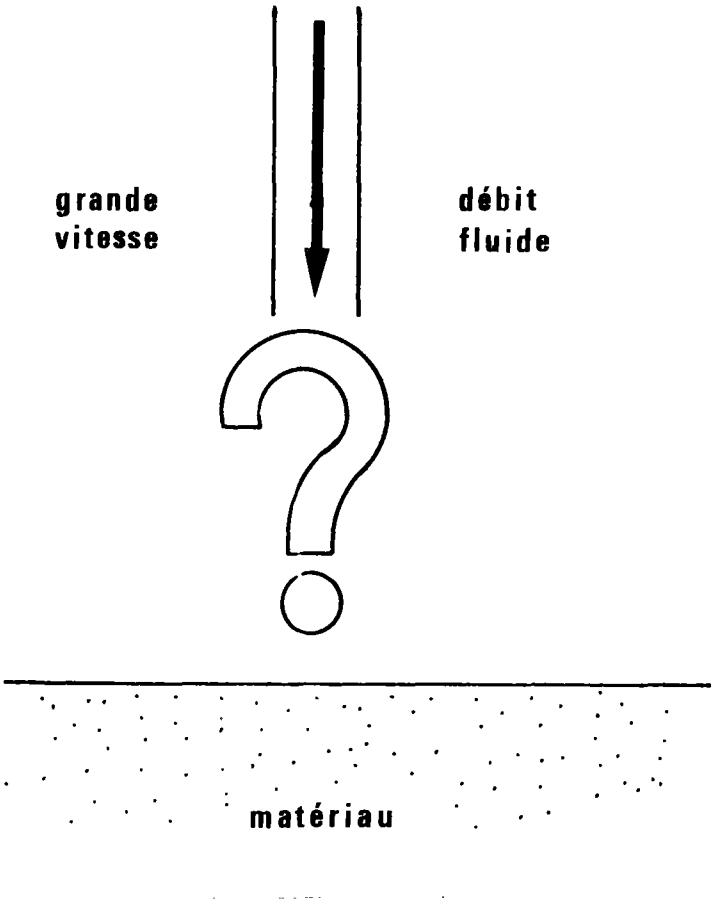


Figure I-1 : Découpage par jets liquides

Diverses techniques de découpage par jets liquides sont actuellement utilisées dans l'industrie et l'application en géotechnique au découpage de sols semble prometteuse pour le creusement de trous et surtout de tranchées dans des sols saturés ou non. La flexibilité de ces techniques devrait permettre leur adaptation au cas de travaux en haute mer (off-shore) en utilisant des jets submergés.

Le développement de telles techniques dans le domaine du génie civil nécessite la construction et la vérification de modèles théoriques tenant compte des particularités physiques et mécaniques des sols et recherchant la compréhension des mécanismes mis en jeu au niveau des grains. De telles études empruntent nécessairement à la fois à la mécanique des fluides et à la mécanique des sols.

Les recherches entreprises sur le sujet au Laboratoire de Mécanique des Solides ont pour objet l'étude du mécanisme de découpage d'un sol cohérent et l'élaboration d'un modèle théorique autant que possible simple et fiable fournissant des prévisions de capacité d'un jet à creuser une tranchée aisément vérifiables. Les deux aspects sont naturellement intimement liés.

2 - TYPES DE JETS

Appelons jet une région de l'espace non limitée par des parois solides et d'étendue limitée dans laquelle les vitesses fluides sont grandes. Ce jet est créé à l'aide d'une installation hydraulique (pompe, multiplicateur de pression...) alimentée en énergie et en fluide. Le fluide s'échappe au travers d'un ajutage plus ou moins bien dessiné, appelé buse, qui assure la transformation de l'énergie de pression du fluide en vitesse et donc en énergie cinétique et donne au jet sa forme initiale. Dans notre cas, le fluide sera simplement de l'eau, mais d'autres choix sont possibles et utilisés (eau plus polymères par exemple).

De manière générale, on peut distinguer diverses sortes de jets selon plusieurs critères :

a) la nature du milieu dans lequel se trouve le jet à la sortie de la buse : le jet liquide est libre s'il est entouré par un gaz et submergé si le milieu ambiant est un liquide. Le comportement hydraulique est assez différent dans les deux cas : si un jet libre conserve ses caractéristiques sur une certaine distance, par contre un jet submergé diffuse immédiatement dans le milieu environnant dès la sortie de la buse. Il n'est plus question de négliger les effets d'entrainement dans ce cas (figure I2).

b) l'allure du débit à la sortie de la buse en fonction du temps : on distinguera jets continus (débits constants),modulés (débits variables) et pulsés (débits interrompus),(figure I3).

c) l'ordre de grandeur des vitesses à la sortie de la buse : la position par rapport à la célérité du son est un paramètre essentiel du comportement du jet.

Ces distinctions correspondent à un souci de classement en même temps qu'elles reflètent des contraintes techniques : avec un liquide les jets supersoniques sont pour des raisons évidentes toujours des jets pulsés ...

3 - UTILISATION DES JETS COUPANTS

On utilise actuellement pour le découpage, le nettoyage (décapage) ou l'assistance au découpage par des outils conventionnels, des jets liquides dans de nombreux cas. Citons comme matériaux découpés soit industriellement, soit à titre expérimental :

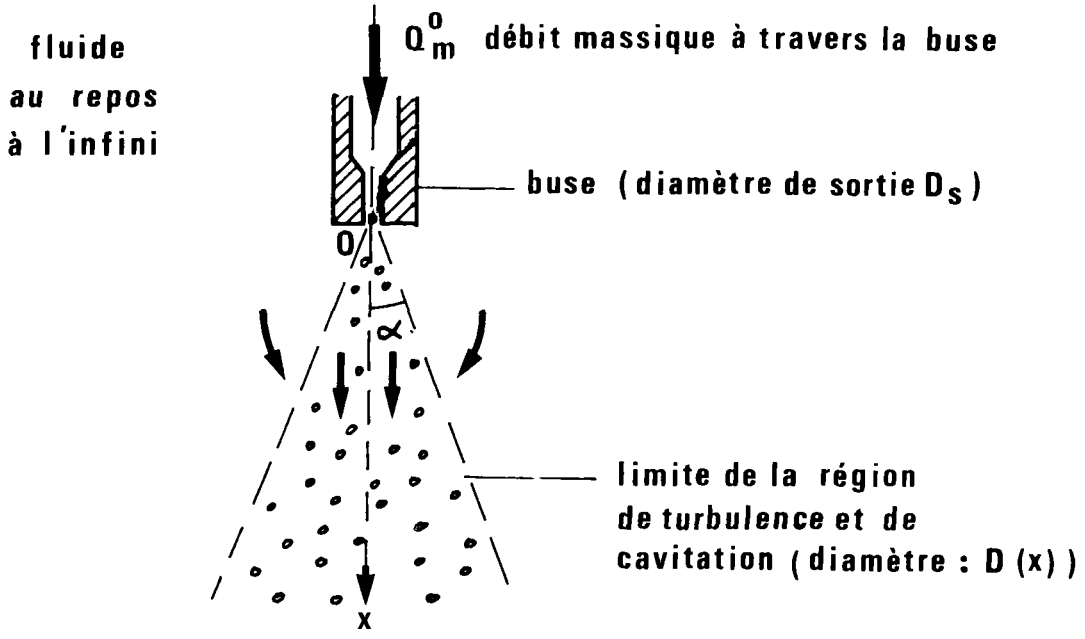


Figure I-2 : Jet submergé d'axe x *(d'après LANDAU et LIFCHITZ 1971) :*
Pour un nombre de Reynolds de la buse : $\mathcal{R} = \frac{w_s D_s \rho}{\eta}$

(D_s *diamètre de sortie de la buse,* ρ *masse volumique du fluide utilisé,* η *sa viscosité dynamique,* w_s *vitesse moyenne à la sortie de la buse, définie par :* $Q_m^o = \rho \frac{\pi}{4} D_s^2 w_s$

où Q_m^o *est le débit massique de la buse) assez important, il se forme en aval de la buse une région turbulente, avec le plus souvent des phénomènes complexes de cavitation, en forme de cône d'angle* 2α *compris entre 25 et 30° : c'est cette région qu'on appelle jet.*
La vitesse moyenne w *dans une section droite du jet décroit comme l'inverse de la distance* x *au sommet* O *du cône, sommet à peu près confondu avec la sortie de la buse ; par contre le débit massique* Q_m *du jet est à peu près proportionnel à cette distance* x *(aspiration du fluide extérieur par le jet) lorsqu'elle est grande devant le diamètre de sortie de la buse* D_s *:* $Q_m \simeq 3 Q_m^o \cdot \frac{x}{D_s}$

Le nombre de Reynolds du jet, défini par : $\mathcal{R}' = \frac{w D \rho}{\eta}$
est pratiquement constant le long du jet.

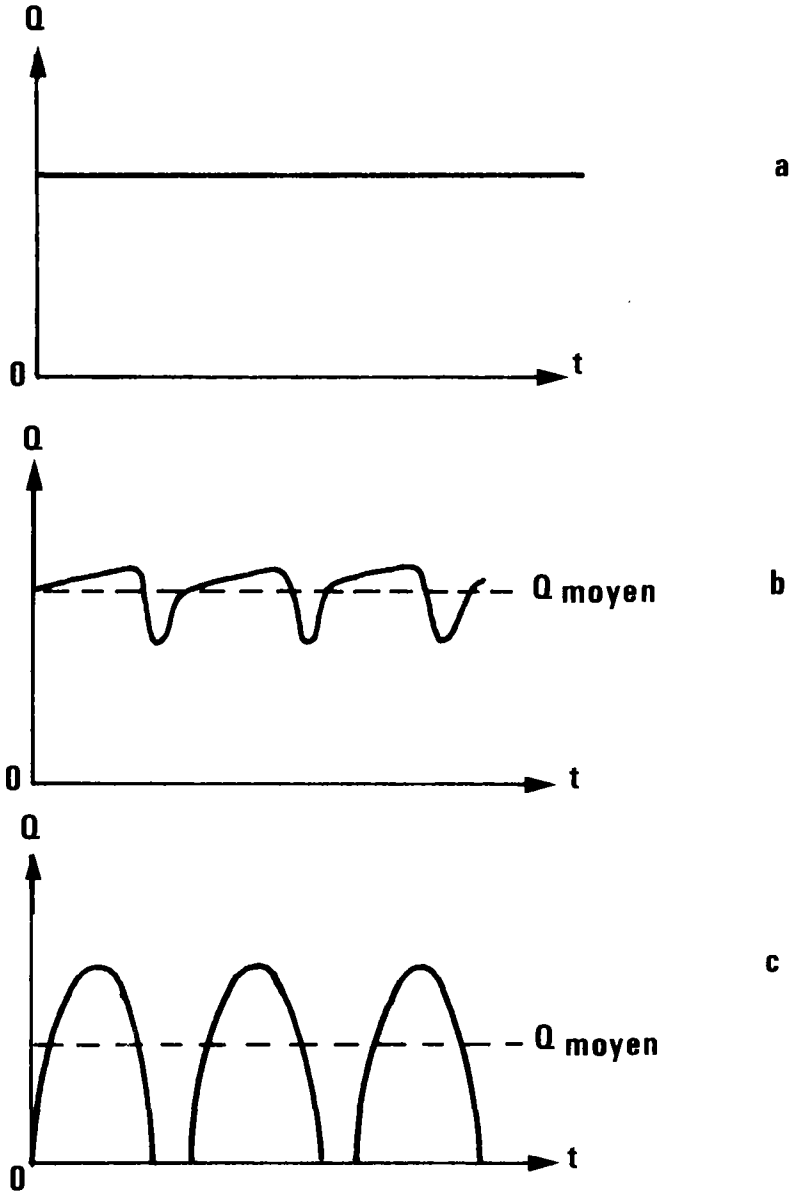


Figure I-3 : Jet libre : débit à l'origine en fonction du temps pour un jet continu (a), modulé (b) ou pulsé (c)

- des mousses et d'autres matières plastiques, ainsi que le cuir et le caoutchouc (2)
- divers matériaux tissés et fibreux, dont le bois, le carton, le papier et la laine de verre
- la glace (3)
- des produits alimentaires surgelés
- les métaux
- le béton
- les roches (4)
- les sols

Cette diversité est la marque de l'intérêt apporté dans le monde au découpage par jets liquides. (On trouve des travaux provenant des Etats-Unis, d'U.R.S.S., du Canada, du Japon, de Suède, d'Allemagne, d'Angleterre et d'Italie en particulier).

Vu le nombre de matériaux découpés et les différentes sortes de jets utilisés, il n'existe pas de modèle universel de découpage par jets liquides ; on peut seulement tenter des regroupements par types de mécanisme le plus probable en fonction des caractéristiques des matériaux, pour une structure de jet donnée.

Il est alors intéressant de donner les grandes lignes des calculs existants sur le découpage par jets liquides.

(2) *découpage des peaux et industrie de la chaussure en particulier*

(3) *pour le dégagement de parois de quais en hiver*

(4) *dans un certain nombre de mines et de carrières, le plus souvent pour assister des outils "mécaniques".*

B - DEMARCHES ANTERIEURES

La majeure partie des calculs est consacrée aux jets libres pulsés ou continus et ne concerne que rarement nommément les sols.

1 - JETS LIBRES PULSES

On considère l'impact d'une goutte de forme donnée, généralement très simplifiée (figure I4), sur un plan. Au moment du choc sont générées des ondes de contraintes à la fois dans la goutte liquide et dans le solide. Lorsque les contraintes calculées élastiquement dépassent un certain critère on conclut qu'il y a rupture, mais il est difficile d'en dire plus sans recourir à l'expérience. L'érosion par le jet est plus ou moins explicitement considérée comme la somme des effets identiques des diverses gouttes.

On s'intéresse généralement à la formation de cratères ou de trous sur des matériaux variés, mais le cas des sols ne semble pas envisagé.

FIELD (1966) donne l'ordre de grandeur du pic de pression et de sa durée lors de l'impact d'une goutte cylindrique sur un solide indéformable (phénomène du "marteau hydraulique").

HANCOX et BRUNTON (1966) posent un problème analogue mais tiennent compte de la valeur finie des ondes de compressibilité dans un solide élastique. Leur approche est encore très simplifiée et pratiquement unidimensionnelle.

HUANG, HAMMITT et YANG (1973) ainsi que GLENN (1974) étudient en détail le comportement de la goutte pendant le choc (forme de la goutte, répartition des pressions en espace et en temps).

PETERSON (1973) calcule les contraintes dans un solide supposé élastique soumis à l'impact d'une goutte à l'aide de diverses hypothèses simplificatrices sur le comportement de la goutte : il néglige, en particulier, le cisaillement à la surface du solide. Un travail analogue est dû à HWANG et HAMMITT(1976).

Notons que la plupart des études sont très nettement axées sur la mécanique des fluides et laissent plus ou moins de côté le solide.

2 - JETS LIBRES CONTINUS

Des études essentiellement expérimentales (roches) sont dues à FARMER et ATTEWELL (1964), BROOK et SUMMERS (1968), qui envisagent aussi des jets interrompus, et LEACH et WALKER (1966) qui introduisent un type de répartition de pression à la surface d'un solide lors de l'impact d'un jet continu souvent repris depuis (figure I5).

POWELL et SIMPSON (1968) utilisent cette distribution de pression et l'hypothèse que les cisaillements à la surface sont négligeables pour calculer un champ de contraintes élastiques dans le solide intact. Ils discutent ensuite en fonction d'un critère la possibilité de fracture.

REHBINDER (1976) s'intéresse au cas d'une roche perméable, saturée en eau, soumise à l'action d'un jet continu d'eau. Admettant une distribution de pression à la surface voisine de celle de LEACH et WALKER et appliquant en régime permanent la loi de Darcy, il calcule une distribution harmonique de pression dans toute la roche. Il constate alors qu'à la surface du "solide", au-delà de quelques rayons du jet, le gradient de la pression est dirigé vers l'intérieur de la roche, de sorte que les grains sont soumis à une force dirigée vers l'extérieur, d'où possibilité d'érosion. Il considère ensuite un jet balayant la roche (même référence 1976 et 1977, 1980) à vitesse constante et introduit

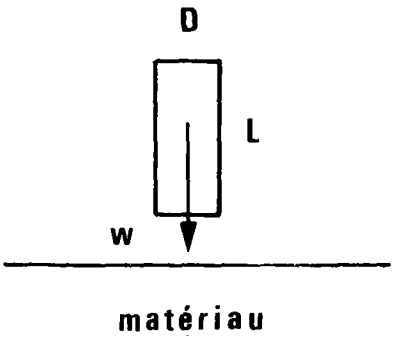


Figure I-4 : Principe des modèles d'impacts de gouttes (D largeur ou diamètre de la goutte, L sa longueur, w sa vitesse avant le choc)

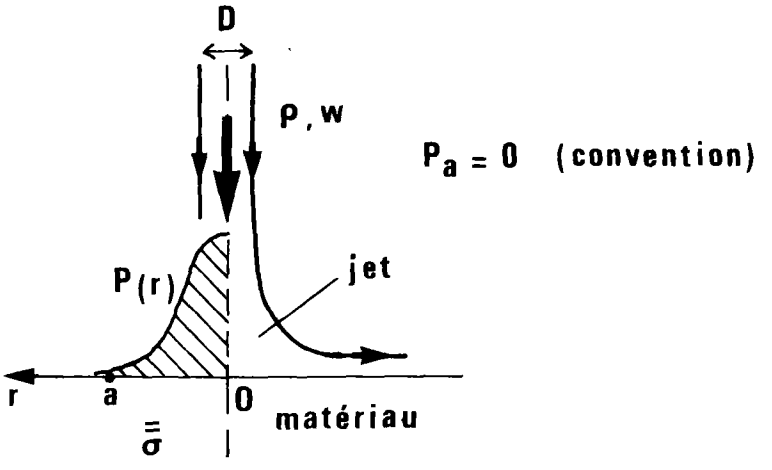


Figure I-5 : Modèle continu statique (D diamètre du jet, w sa vitesse, ρ la masse volumique du fluide)

On représente les efforts exercés par le jet sur le matériau (LEACH et WALKER 1966) en négligeant les efforts de cisaillement et en adoptant pour la pression exercée par le jet à la surface du matériau une répartition de la forme :

$$P(r) = \frac{1}{2} \rho w^2 . f\left(\frac{r}{a}\right)$$

(P pression exercée, r distance à l'origine O, a distance au-delà de laquelle on peut négliger les effets de la pression) avec ($\frac{1}{2}\rho w^2$ = pression d'arrêt) : $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ et f et a/D tels que :

$$\int_0^a 2\pi r P(r)\, dr = \left(\frac{\pi}{4} D^2\right) \cdot \rho w^2$$

(théorème d'Euler).

un temps d'exposition (rapport du diamètre du jet à la vitesse de balayage) durant lequel les grains peuvent être arrachés. Pour une roche initialement sèche, il confond alors la perte d'épaisseur par unité de temps de la roche (vitesse de creusement) avec soit la vitesse de filtration de l'eau (encore appelée vitesse apparente) soit sa vitesse microscopique moyenne (ou vitesse réelle moyenne), qui ne sont pas distinguées l'une de l'autre dans les articles de 1976 et 1977. Grâce à cette assimilation, il est possible, avec quelques hypothèses simplificatrices, de calculer la profondeur de la tranchée obtenue en fonction de diverses grandeurs mesurables ou empiriques.

CROW (1973) considère le découpage d'une tranchée dans une roche, à vitesse de balayage constante. Il constate que dans un repère lié à la buse le phénomène est stationnaire (figure I6). Mettant l'accent sur les forces centrifuges dans le jet, il calcule la pression exercée sur les grains en fonction d'un cisaillement de surface qu'il relie à des phénomènes de cavitation derrière les grains. Il introduit également la perméabilité avec une loi de Darcy presque exacte (au facteur porosité près : voir page 52) et aboutit par des considérations sur les grains à un critère d'arrachement en fonction des pressions et des efforts de cisaillement. Il détermine ainsi la forme de la tranchée (bidimensionnelle) et sa profondeur.

HASHISH et REICHMAN (1980) et DU PLESSIS et HASHISH (1980) étudient le découpage de diverses roches et du béton à vitesse de balayage élevée. Ils introduisent pour décrire le comportement de ces matériaux un modèle de fluide de Bingham.

Il existe également un certain nombre de calculs sur les jets submergés pour le découpage.

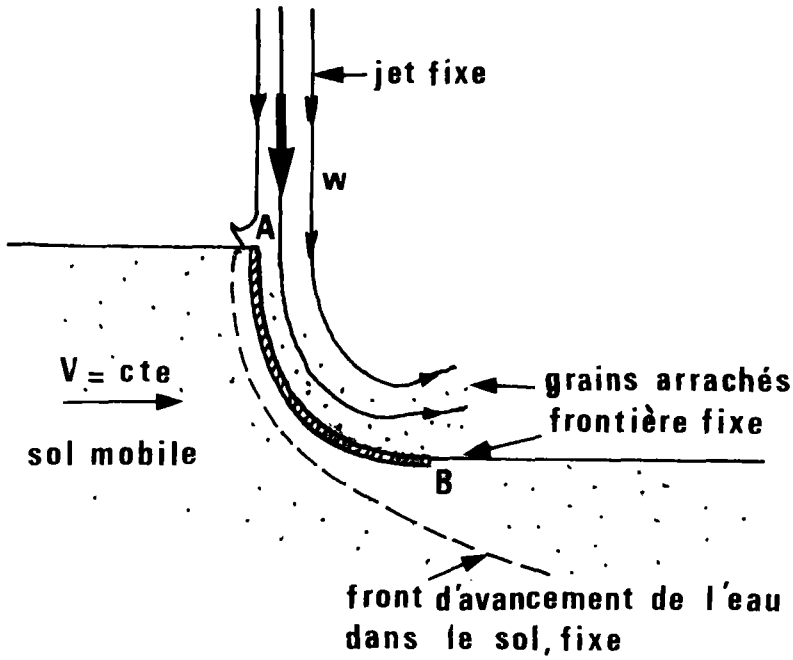


Figure I-6 : Découpage d'une tranchée dans un sol initialement non saturé en eau, dans un repère lié à la buse : w est la vitesse du jet, V la vitesse de balayage, AB la surface de rupture.

C - APPROCHE RETENUE

Afin de comprendre le mécanisme du découpage d'un sol par un jet liquide, nous allons modéliser le creusement d'une tranchée rectiligne de profondeur constante dans un sol à l'aide d'un jet d'eau continu ou quasi-continu (ce terme sera précisé plus tard) pressurisé à quelques dizaines de MPa et agissant à l'air libre.

Cette démarche est dictée par les raisons qui suivent :

1 - CONSIDERATIONS TECHNIQUES

On n'utilise pratiquement des jets pulsés que quand on ne peut pas faire autrement. C'est le cas lorsqu'on désire découper des matériaux très résistants comme des métaux : pour avoir des pressions importantes dans la zone d'impact il faut disposer de jets très rapides, supersoniques. En amont de la buse, on doit alors développer des pressions très élevées difficiles,voire impossibles,à obtenir en continu.

Ce n'est absolument pas le cas pour les sols, pour lesquels on peut se contenter de pressions "modérées", de l'ordre de la dizaine de MPa (cent fois la pression atmosphérique).

Il est vrai que les machines hydrauliques ne fournissent pas non plus pour ces différences de pressions un débit absolument constant au cours du temps, qu'il s'agisse de pompes à pistons ou de multiplicateurs dynamiques (ceci peut d'ailleurs s'améliorer en intercalant des systèmes de compensation pneumatique ou en augmentant le nombre de chambres de ces machines - et leur prix-).

En ce sens les jets réels sont presque toujours modulés, mais il n'est pas toujours nécessaire d'en tenir compte, le critère étant l'ordre de grandeur de la période (temporelle), pour des variations périodiques du débit ; cette période est rapportée à un temps propre du jet et si le

rapport obtenu est suffisamment grand, on peut considérer valablement un jet continu moyen (5).

La schématisation par un jet continu, qui a pour elle l'avantage de la simplicité, est donc valable sous certaines réserves du point de vue hydraulique.

D'un autre côté, il est plus simple de procéder à des expériences à l'air libre que sous l'eau, en l'absence d'installations prévues à cet effet.

Certains auteurs utilisent pour justifier une utilisation générale des modèles d'impacts de gouttes l'argument suivant : un jet d'eau dans l'air se dissocie toujours en gouttes. C'est bien sûr exact, que le jet soit initialement continu ou non. En dehors des effets d'inversion de section, qui se présentent pour toutes les sections de buse autres que la section circulaire, du changement de conditions aux limites à la sortie de la buse et d'une éventuelle modulation initiale du débit, tous facteurs excitants, les jets que l'on considère sont soumis à diverses causes d'instabilité : turbulence elle-même (aux nombres de Reynolds auxquels on se place), mécanismes d'entraînement de l'air et de mélange au jet, pesanteur et action de la tension superficielle en particulier ...

Cependant l'ordre de grandeur de distance à laquelle le jet est complètement dissocié en gouttes est souvent grand ; en se plaçant nettement au-dessous un jet continu n'a rien d'une fiction. De plus, aux distances où le jet s'est désagrégé en gouttes, dans bien des cas celles-ci tombent à l'intérieur d'une zone grande devant le diamètre de sortie de la buse, de manière aléatoire, ce qui ôte de l'intérêt à la méthode. A des distances un peu plus faibles, on peut observer sous certaines conditions des oscillations latérales d'ensemble assez marquées qui conduisent au même résultat global (6).

(5) *Dans le cas contraire la modulation conduit à une rupture (dans l'air) assez rapide du jet en gouttes. Ceci peut être volontaire parfois (imprimantes ultra-rapides à jets d'encre).*

(6) *Ceci ne signifie pas que les variations du jet sont forcément néfastes pour le découpage dans tous les cas !*

Compte tenu de ces divers problèmes assez complexes, il semble raisonnable de s'intéresser dans la suite à un jet d'eau continu dans l'air, de section circulaire, et d'opérer à des distances pas trop grandes le découpage, en vérifiant si possible que le jet ne s'est pas dissocié aux distances considérées.

2 - CONSIDERATIONS MATHEMATIQUES

Elles se résument à ceci : "il est beaucoup plus facile de modéliser le creusement d'une tranchée que d'un trou".

En effet dans le cas d'un jet balayant le sol à vitesse constante il suffit de se placer, comme le propose Crow, dans un repère lié à la buse (donc en translation uniforme) pour obtenir un phénomène stationnaire : dans un tel repère le jet est fixe et le sol mobile ; la surface de découpage et la limite de la zone mouillée (pour un sol initialement sec) sont inconnues mais fixes (figure I6).

Par contre pour le creusement d'un trou il n'existe aucun repère dans lequel le phénomène soit stationnaire : la géométrie inconnue varie à chaque instant, ce qui exige a priori des calculs pas à pas plus délicats. Les calculs existants sur un jet fixe (ou pénétrant progressivement dans le sol), assez simples, butent en effet sur cette contradiction : pour calculer l'avancement du trou on a besoin des contraintes et des pressions mais on les calcule à géométrie fixée, généralement le matériau non entamé, de sorte qu'on postule plus ou moins explicitement que le jet ne creuse pas ! Au mieux, on obtient ainsi la pression au-dessous de laquelle il ne se passe rien.

Ce problème d'évolution avec une ou deux surfaces "libres" mobiles, selon que le sol est initialement saturé ou sec, se complique également pour une raison supplémentaire : on peut supposer que, passée une certaine profondeur, l'évacuation des débris se fait moins bien, ce qui change les conditions aux limites et les efforts appliqués ; en quelque sorte

le jet à ce moment n'arrive plus, à la limite, à atteindre le sol intact. Il est bien sûr difficile de prévoir l'importance de ce type de phénomènes d'engorgement et la manière de le formaliser.

A l'évidence, ceci ne se produit pas lors du creusement d'une tranchée dans le sol lorsque le régime est établi (il faut naturellement supposer la possibilité pour l'eau de s'échapper de la tranchée en transportant les débris mais cette hypothèse est ici nettement moins arbitraire).

Par souci de simplicité mathématique on considèrera donc le creusement d'une tranchée ; on n'y perd d'ailleurs pas en intérêt pratique pour les applications.

A la fin de cette première partie se dégage la méthode d'approche du découpage des sols à mettre en oeuvre dans la suite :

- considérer un jet continu liquide balayant à vitesse constante un sol ;
- faire des hypothèses simplificatrices sur le jet dans l'air ;
- adopter un comportement simple du sol ;
- modéliser le contact entre le jet et le sol, et le mécanisme supposé du découpage ;
- résoudre dans un cas simple, discuter les résultats et comparer avec des expériences de laboratoire aussi voisines que possible des conditions du modèle.

2

Description du modèle théorique

A - LE JET LIBRE DANS L'AIR

1 - HYPOTHESES

On considère un jet d'eau à section circulaire (il y a donc symétrie de révolution autour de l'axe de la buse) turbulent continu ou quasi-continu au contact de l'air (figure II1).

On néglige l'entraînement de l'air et les effets de la pesanteur et on suppose l'eau incompressible et non dilatable.

On admet que pour les distances de la buse au matériau considérées la stabilité latérale est assurée et qu'il n'y a pas dissociation du jet en gouttes.

On tient compte globalement des pertes de charge et du phénomène de contraction du jet.

On prend les vitesses à peu près uniformes dans une section du jet ce qui autorise à parler de la vitesse du jet (quotient du débit volumique par l'aire de la section droite considérée).

Il est nécessaire, pour la suite, d'introduire les notations suivantes :

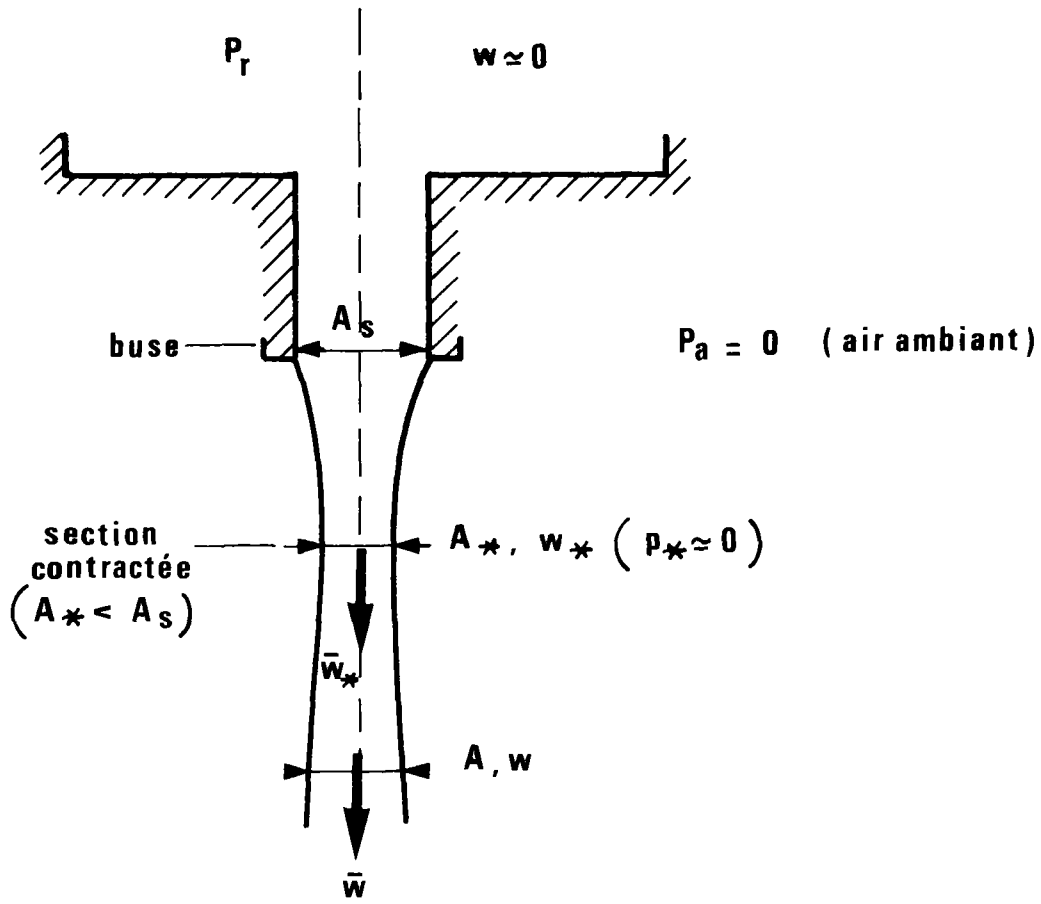


Figure II-1 : Schématisation d'un jet :

*(A section du jet, w vitesse du jet, P_r pression en amont, P_a pression atmostphérique; ici l'indice s se rapporte à la section de sortie de buse et * à la section contractée du jet.)*

w vitesse de l'eau dans le jet (w_s à la sortie de la buse et w_* dans la section contractée)

A section du jet (A_s section de sortie de la buse et A_* aire de la section contractée)

p pression de l'eau : on prend par convention la pression atmosphérique P_a nulle ; les pressions que l'on considère sont donc des surpressions par rapport à la pression atmosphérique et non des pressions absolues.

P_r pression mesurée en amont de la buse (dans une zone de section grande devant la section de la buse, où la vitesse est donc faible)

ρ masse volumique de l'eau ($v = \frac{1}{\rho}$ son volume massique)

η viscosité dynamique de l'eau

σ tension superficielle de l'eau au contact de l'air

a célérité du son dans l'eau (à la pression atmosphérique et à température ambiante)

g accélération de la pesanteur

D diamètre du jet $\left(A = \frac{\pi}{4} D^2 \right)$, D_s diamètre de sortie de la buse, D_* diamètre de la section contractée

h_c hauteur caractéristique (distance buse-matériau)

t_c période de modulation du débit de la buse

Q_m débit massique du jet $\left(Q_m = \rho A w \right)$

Q_v débit volumique du jet $\left(Q_v = A w \right)$

T température absolue

$\alpha = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p$ coefficient de dilatation de l'eau

$\chi_T = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T = +\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T > 0$ coefficient de compressibilité isotherme de l'eau

γ indice adiabatique de l'eau (rapport des chaleurs massiques à pression constante et à volume constant de l'eau $\gamma = C_p / C_v$)

2 - JUSTIFICATIONS

Sous quelles conditions l'hypothèse simplificatrice $\rho = cte$ qui assure pour tout le fluide le découplage thermo-mécanique est-elle valable ?

Le fluide (eau) étant défini par deux variables d'état (par exemple p et T) on a, avec les notations précédentes :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \chi_T \, dp - \alpha \, dT$$

soit T_c un écart de température caractéristique et prenons P_r pour pression caractéristique ; alors si dans le domaine de variables d'état considéré :

$$\chi_T P_r \ll 1 \quad \text{et} \quad |\alpha| T_c \ll 1$$

cela entraîne que : $\boxed{\rho \simeq cte}$

A la température ambiante et aux pressions inférieures à 50 MPa on a pour l'eau :

$$\left| \begin{array}{l} \chi_T \# 5.10^{-10} \ Pa^{-1} \\ |\alpha| \leqslant 3.10^{-4} \ K^{-1} \end{array} \right. \qquad (7)$$

de sorte que la deuxième condition $|\alpha| T_c \ll 1$ est toujours réalisée même pour des écarts de température assez importants.

(7) χ_T *est positif (stabilité de l'équilibre de compression isotherme) mais* α *a un signe quelconque a priori : à la pression atmosphérique* α *change de signe à 4°C pour l'eau.*
En ce qui concerne l'influence sur le solide de variations de température on sait que la température moyenne dans une section du jet reste pratiquement constante ; on pense cependant qu'une élévation de température importante (plusieurs dizaines de degrés par exemple) est susceptible de se produire très localement le long de l'interface plus ou moins rugueuse entre le jet et le solide, par suite des phénomènes de frottement. Dans le cas de matériaux dont la résistance mécanique et le comportement dépendent très fortement de la température (comme certaines matières plastiques qui deviennent pâteuses bien avant 100°C) il y aurait sans doute lieu de tenir compte des variations de température non pas pour le fluide mais pour la surface du solide lors du découpage. Ce type d'effet de couplage thermo-mécanique dans le solide est par contre tout à fait négligeable pour les sols, les métaux et les roches.

On sait que : $a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S$ (S entropie du fluide).
Il vient alors par application du théorème de Reech la relation :

$$\chi_T = \frac{\gamma}{\rho a^2}$$

si bien qu'on exprime plus classiquement la condition $\chi_T P_r \ll 1$ sous la forme :

$$\gamma . \frac{P_r}{\rho w_*^2} . \left(\frac{w_*}{a}\right)^2 \ll 1$$

qui se simplifie pour l'eau qui a un indice adiabatique pratiquement égal à l'unité (la relation de Mayer :

$$C_p - C_v = T . \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v . \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p > 0$$

donne :

$$\gamma = 1 + \frac{a^2 T}{\rho C_v \chi_T}$$

et, compte tenu de : $\rho \simeq 10^3 \ kg.m^{-3}$

et : $C_v \simeq 4,18 . 10^3 \ J.kg^{-1}.K^{-1}$,

le deuxième terme est négligeable).

On voit donc qu'il suffit de :

$$\boxed{\frac{P_r}{\rho w_*^2} . \left(\frac{w_*}{a}\right)^2 \ll 1}$$

On considérera les nombres sans dimension suivants avec toujours les mêmes notations :

coefficient de contraction : $m = \frac{A_*}{A_s} < 1$

Euler : $\mathcal{E} = \frac{P_r}{\rho w_*^2} \geqslant \frac{1}{2}$

Reynolds : $\mathcal{R} = \frac{w_s D_s \rho}{\eta}$

Mach : $\mathcal{M} = \frac{w_*}{a}$

Froude : $\mathcal{F} = \frac{w_*^2}{2 g h_c}$

Strouhal : $\mathcal{S} = \frac{D_*}{w_* t_c}$

Weber : $\mathcal{W} = \frac{D_* \rho w_*^2}{\sigma}$

(Ohnesorge : $\mathcal{Z} = \frac{\eta w_*}{\sigma} = \frac{\mathcal{W}}{\mathcal{R}'}$ où $\mathcal{R}' = \frac{\mathcal{R}}{\sqrt{m}}$)

(On prend parfois pour ces nombres sans dimension des définitions différentes, par exemple : $\underset{\sim}{\mathcal{E}} = 2\mathcal{E}$, $\underset{\sim}{\mathcal{F}} = \sqrt{2\mathcal{F}}$, $\underset{\sim}{\mathcal{S}} = \frac{1}{\mathcal{S}}$, $\underset{\sim}{\mathcal{W}} = \frac{1}{\mathcal{W}}$, l'usage étant indécis pour les nombres autres que $\mathcal{R}$, m et $\mathcal{M}$.)

Le coefficient m traduit le phénomène bien connu de contraction : le nombre d'Euler introduit ici caractérise l'importance des pertes de charge (en fluide parfait $\mathcal{E} = \frac{1}{2}$).

$\mathcal{R}$ est le nombre de Reynolds de la buse (celui du jet pour la section contractée est : $\mathcal{R}' = \mathcal{R}/\sqrt{m}$), rapport des effets d'inertie aux effets de viscosité.

Le nombre de Mach rapporte les effets d'inertie aux effets de compressibilité, celui de Froude les effets d'inertie aux effets de pesanteur.

Le nombre de Strouhal permet d'évaluer l'importance des effets instationnaires : on dira le jet quasi-continu s'ils sont négligeables.

Le nombre de Weber caractérise l'importance des effets de tension superficielle par rapport aux effets de l'inertie ; enfin le nombre d'Ohnesorge qui n'est pas indépendant des précédents mesure l'importance des effets visqueuxpar rapport aux effets de la tension superficielle : il intervient dans les calculs de rupture de jet par instabilités liées à la tension superficielle de manière évidente.

Les hypothèses faites se traduisent alors par :

$\mathcal{R} > \mathcal{R}_{critique} \# 3.10^3$	: régime turbulent
$\mathcal{M}^2 \ll 1$	: $\rho \simeq cte$
$\mathcal{F} \gg 1$	: pesanteur négligeable
$\mathcal{S} \ll 1$	: jet quasi-continu
$\mathcal{W} \gg 1$	: pas de dissociation en gouttes
$m < 1$	: contraction
$\mathcal{E} \geqslant \frac{1}{2}$	: pertes de charge

On doit faire les remarques suivantes :

- si le jet est turbulent à la sortie de la buse, il le reste ensuite : il suffit de comparer $\mathcal{R}$ à un nombre de Reynolds critique $\mathcal{R}_{critique}$ de tuyauterie.
- en dehors de la condition thermique toujours réalisée l'hypothèse de masse volumique constante s'écrit comme on l'a vu :

$$\gamma \times \varepsilon \times \mathcal{M}^2 \ll 1$$

avec $\gamma \simeq 1$ et $\varepsilon \geqslant \frac{1}{2}$ (mais jamais très grand) soit : $\mathcal{M}^2 \ll 1$

- on peut noter que $2gh_c$ est le carré de la vitesse prise par un corps lâché immobile dans une chute de hauteur h_c d'où une interprétation très intuitive du nombre de Froude.
- le nombre de Strouhal peut être considéré comme le quotient d'une "période propre" du jet par la période de la modulation extérieure de débit, ou comme une fréquence réduite.
- la condition $\mathcal{W} \gg 1$ n'apporte en fait qu'une réponse partielle à la question de la dissociation du jet, ce qui est physiquement évident. Elle ne dit rien bien entendu sur le phénomène de stabilité latérale, en particulier. Cependant certains auteurs (PHINNEY 1973) calculent une longueur de rupture d'un jet continu circulaire, notée L_B, et proposent des formules du type :

$$\frac{L_B}{D_*} = \Lambda(\mathcal{R}') . \sqrt{\mathcal{W}} . (1 + 3\mathcal{Z})$$

avec en première approximation $\Lambda \simeq 5$ en régime laminaire et $\Lambda \simeq 1$ en régime turbulent. On verra que pour les jets utilisés $\mathcal{Z}$ est de l'ordre de grandeur de l'unité et D_* fixe connu. La connaissance de $\mathcal{W}$ est alors essentielle pour calculer, en admettant ce type de calculs, l'ordre de grandeur de "la" longueur de rupture et comparer aux distances utilisées buse-matériau, c'est-à-dire à h_c.

3 - RESULTATS

S'il existe une zone de distances à l'intérieur de laquelle le jet ne diverge que lentement, soit :

$$A \simeq A_* \quad , \quad w \simeq w_*$$

pour un certain intervalle de pressions P_r et une buse donnée, alors le modèle est suffisant.

Ceci signifie que si on connaît le nombre d'Euler et le coefficient de contraction en fonction du nombre de Reynolds par exemple (ou de la pression P_r), on est capable de calculer les grandeurs technologiques suivantes , à l'intérieur de cette zone de distances :

- la vitesse moyenne dans une section (w)
- l'aire de la section droite du jet (A)
- le débit du jet
- sa pression d'arrêt définie par : $\pi = \rho \frac{w^2}{2}$ (puisque $p \simeq P_a = 0$)
- sa puissance cinétique qui est l'énergie cinétique traversant par unité de temps une section droite du jet.

On obtient immédiatement :

$w = \sqrt{\frac{P_r}{\rho \xi}}$	vitesse moyenne du jet
$A = m A_S \quad (D = \sqrt{m}\, D_S)$	section du jet (D diamètre du jet)
$Q_V = A w = m A_S \sqrt{\frac{P_r}{\rho \xi}}$	débit volumique du jet
$Q_m = \rho Q_V = m A_S \sqrt{\frac{\rho P_r}{\xi}}$	débit massique
$\pi = \rho \frac{w^2}{2} = \frac{P_r}{2\xi} \quad (\pi \leqslant P_r)$	pression d'arrêt
$\mathcal{P} = Q_V \pi = \rho m \frac{A_S}{2} \cdot \left(\frac{P_r}{\rho \xi}\right)^{3/2}$	puissance cinétique du jet,

où P_r, ρ, ξ, m et A_S sont aisément mesurables.

Notons tout de suite qu'avec le matériel utilisé on vérifie qu'il existe une zone où le jet diverge assez lentement et que, de plus, dans une large gamme de nombres de Reynolds, on peut admettre pour une buse donnée que :

$$\varepsilon = cte \quad \text{et} \quad m = cte$$

B - COMPORTEMENT DU SOL

1 - ASPECT CINEMATIQUE

Un sol peut être considéré comme un milieu discontinu inerte à plusieurs constituants (air, eau susceptible de circuler, grains + eau liée).

La modélisation par un milieu continu nécessite l'introduction de grandeurs semi-locales et d'éléments de volume grands devant les dimensions caractéristiques des constituants mais assez petits devant les longueurs caractéristiques du problème macroscopique, appelés volumes représentatifs élémentaires, ou en abrégé VRE. Les grandeurs semi-locales sont des moyennes de grandeurs microscopiques, calculées d'une manière à préciser, à l'échelle des VRE.

De manière générale soit un tel milieu "fabriqué" à partir de n constituants B_α (α variant de 1 à n) et un point M dans ce milieu pris dans n'importe quel constituant. Si $\mathcal{D}$ est un domaine de la taille d'un VRE, de volume V , soit V_α le volume compris dans $\mathcal{D}$ occupé par le constituant B_α et m_α la masse de B_α contenue dans $\mathcal{D}$. Alors en M les définitions semi-locales suivantes ont un sens :

- fraction volumique de B_α en M : $\omega_\alpha = \frac{V_\alpha}{V}$ $\left(\sum_\alpha \omega_\alpha = 1\right)$
- masse volumique "vraie" de B_α en M : $\rho_\alpha = \frac{m_\alpha}{V_\alpha}$
- masse volumique apparente de B_α en M : $\rho'_\alpha = \frac{m_\alpha}{V} = \omega_\alpha \rho_\alpha$

Calculons le flux massique du constituant B_α à travers une surface géométrique.

Soit tout d'abord autour d'un point M un élément de surface orientée dA de normale $\bar{n}$, de dimensions comparables à celles d'un VRE ; il passe par unité de temps à travers dA et dans le sens de $\bar{n}$ un flux massique dQ_α $(d\bar{A}=\bar{n}\,dA)$ du constituant B_α proportionnel à dA :

$$dQ_\alpha (d\bar{A}) = q_\alpha (\bar{n})\, dA$$

Les débits massiques unitaires $q_\alpha(\bar{n})$ sont tels que :

$$q_\alpha (-\bar{n}) = - q_\alpha (\bar{n})$$

D'autre part la considération du flux sortant d'un tétraèdre élémentaire (figure II2) fournit avec des notations évidentes :

$$q_\alpha (\bar{n})\, dA + \sum_{i=1}^{3} q_\alpha (-\bar{e}_i)\, dA_i = 0$$

soit finalement : $q_\alpha (\bar{n}) = \bar{\varphi}_\alpha \cdot \bar{n}$

en posant au point M : $\underline{\bar{\varphi}_\alpha = \sum_{i=1}^{3} q_\alpha (\bar{e}_i)\, \bar{e}_i}$ (8)

($\bar{e}_i$ vecteurs unitaires portés par les axes de coordonnées).

On a finalement pour le constituant B_α :

$$\underline{dQ_\alpha (d\bar{A}) = \bar{\varphi}_\alpha \cdot \bar{n}\, dA}$$

Je pose alors par définition :

$\bar{U}_\alpha(M) = \dfrac{\bar{\varphi}_\alpha(M)}{\rho_\alpha (M)}$: champ de vitesse apparente de B_α en M

$\bar{u}_\alpha(M) = \dfrac{\bar{U}_\alpha(M)}{\omega_\alpha (M)}$: champ de vitesse réelle moyenne de B_α en M

(8) *$\bar{\varphi}_\alpha(M)$ indique au point M la direction dans laquelle $q_\alpha(\bar{n})$ est maximal.*

Ces deux champs ont bien les dimensions d'une vitesse, ne dépendent que du point considéré (alors que les définitions qu'on trouve habituellement dépendent a priori de la surface qui a servi à leur introduction), sont définis partout à l'intérieur du milieu et non seulement sur le constituant B_α et sont "suffisamment" réguliers.

Des égalités : $\rho_\alpha \overline{U}_\alpha = \rho_\alpha \omega_\alpha \overline{u}_\alpha = \rho'_\alpha \overline{u}_\alpha$ on déduit :

Pour évaluer le flux massique à travers une surface du constituant B_α, on peut utiliser :
- soit le champ de vitesse <u>apparente</u> $\overline{U}_\alpha$ et la masse volumique <u>vraie</u> ρ_α
- soit le champ de vitesse <u>réelle</u> moyenne $\overline{u}_\alpha$ et la masse volumique <u>apparente</u> ρ'_α :

$$dQ_\alpha(\overline{dA}) = \rho_\alpha \overline{U}_\alpha \cdot \overline{n}\, dA = \rho'_\alpha \overline{u}_\alpha \cdot \overline{n}\, dA$$

Ecrivons en particulier l'équation de continuité (semi-locale) pour le constituant B_α : considérons à cet effet un domaine géométrique Ω de dimensions supérieures à celles d'un VRE. Il contient une masse M_α de B_α :

$$M_\alpha = \int_\Omega \rho'_\alpha \, d\varpi = \int_\Omega \rho_\alpha \omega_\alpha \, d\varpi$$

Ω étant fixe on a ($\overline{n}$ normale extérieure à Ω) :

$$\dot{M}_\alpha(\Omega) = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}(\rho_\alpha \omega_\alpha)\, d\varpi$$

$$= -\int_{\partial\Omega} dQ_\alpha(\overline{n}, dA)$$

$$= -\int_{\partial\Omega} \rho_\alpha \overline{U}_\alpha \cdot \overline{n}\, dA$$

La formule de la divergence est applicable à $\rho_\alpha \overline{U}_\alpha$ soit pour chaque constituant B_α les formes équivalentes :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_\alpha \omega_\alpha) + \operatorname{div}(\rho_\alpha \overline{U}_\alpha) = 0$$

$$\frac{\partial \rho'_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho'_\alpha \overline{u}_\alpha) = 0$$

$$\frac{d}{d_\alpha t}(\rho_\alpha \omega_\alpha) + \rho_\alpha \omega_\alpha \operatorname{div} \overline{u}_\alpha = 0$$

où $\frac{d}{d_\alpha t}$ est la dérivée de transport en suivant B_α définie par :

$$\frac{d}{d_\alpha t} = \frac{\partial}{\partial t} + u_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Montrons que $\rho_\alpha \overline{u}_\alpha$ est la moyenne sur le constituant B_α du produit $\rho_\alpha^r \overline{u}_\alpha^r$, l'indice r se rapportant aux grandeurs microscopiques réelles. Commençons par prolonger le produit $\rho_\alpha^r \overline{u}_\alpha^r$ à tout le milieu en posant par convention :

$$\rho_\alpha^r \overline{u}_\alpha^r = 0 \quad \text{hors de } B_\alpha .$$

Considérons tout d'abord un élément de surface plane $\mathcal{S}$ de normale orientée $\overline{a}$ et de dimensions comparables à celles d'un VRE et soit $\mathcal{S}_\alpha$ la partie de $\mathcal{S}$ occupée par B_α et :

$$\langle \rho_\alpha^r \overline{u}_\alpha^r \rangle_{\mathcal{S}} = \frac{1}{\mathcal{S}_\alpha} \int_{\mathcal{S}_\alpha} \rho_\alpha^r \overline{u}_\alpha^r \, dA \qquad \text{par définition.}$$

En raison du prolongement l'intégrale peut être étendue à $\mathcal{S}$ et :

$$\overline{a} . \langle \rho_\alpha^r \overline{u}_\alpha^r \rangle_{\mathcal{S}} = \frac{1}{\mathcal{S}_\alpha} \overline{a} . \int_{\mathcal{S}} \rho_\alpha^r \overline{u}_\alpha^r \, dA = \frac{1}{\mathcal{S}_\alpha} \int_{\mathcal{S}} \rho_\alpha^r \overline{u}_\alpha^r . \overline{dA}$$

L'intégrale $\int_{\mathcal{S}} \rho_\alpha^r \overline{u}_\alpha^r . \overline{dA}$ est le flux massique de B_α à travers $\mathcal{S}$ soit : $\rho_\alpha \omega_\alpha \overline{u}_\alpha . \overline{a} \mathcal{S}$ d'où : $\overline{a} . \langle \rho_\alpha^r \overline{u}_\alpha^r \rangle_{\mathcal{S}} = \frac{\omega_\alpha \mathcal{S}}{\mathcal{S}_\alpha} . \rho_\alpha . \overline{a} . \overline{u}_\alpha$

(Remarque : pour un milieu statistiquement isotrope : $\mathcal{S}_\alpha = \omega_\alpha \mathcal{S}$)

Considérons maintenant un domaine $\mathcal{D}$ de dimensions comparables à celles d'un VRE et une droite quelconque Δ de direction $\bar{a}$ (ne rencontrant pas forcément $\mathcal{D}$), λ la coordonnée selon $\bar{a}$. On projette orthogonalement $\mathcal{D}$ sur Δ d'où pour $\mathcal{D}$ assez régulier (simplement connexe) un segment repéré par exemple $\lambda = 0$ à $\lambda = \ell$. Appelons $\mathcal{S}(\lambda)$ l'ensemble des points de $\mathcal{D}$ se projetant sur Δ en $M(\lambda)$. Alors si $\mathcal{D}_\alpha$ (de volume V_α) est la partie de $\mathcal{D}$ occupée par $\mathcal{B}_\alpha$:

$$\langle \rho_\alpha^r \bar{u}_\alpha^r \rangle_{\mathcal{D}} = \frac{1}{V_\alpha} \int_{\mathcal{D}_\alpha} \rho_\alpha^r \bar{u}_\alpha^r \, d\varpi = \frac{1}{V_\alpha} \int_{\mathcal{D}} \rho_\alpha^r \bar{u}_\alpha^r \, d\varpi$$

vaut : $\langle \rho_\alpha^r \bar{u}_\alpha^r \rangle_{\mathcal{D}} = \frac{1}{V_\alpha} \int_0^\ell d\lambda \int_{\mathcal{S}(\lambda)} \rho_\alpha^r \bar{u}_\alpha^r \, dA$ (figure II3)

et $\bar{a} \cdot \langle \rho_\alpha^r \bar{u}_\alpha^r \rangle_{\mathcal{D}} = \frac{1}{V_\alpha} \int_0^\ell d\lambda \int_{\mathcal{S}(\lambda)} \rho_\alpha^r \bar{u}_\alpha^r \cdot \overline{dA}$

Or : $\int_{\mathcal{S}(\lambda)} \rho_\alpha^r \bar{u}_\alpha^r \cdot \overline{dA} = \mathcal{S}_\alpha(\lambda) \, \bar{a} \cdot \langle \rho_\alpha^r \bar{u}_\alpha^r \rangle_{\mathcal{S}(\lambda)} = \omega_\alpha \mathcal{S}(\lambda) \rho_\alpha \bar{a} \cdot \bar{u}_\alpha$

comme vu précédemment soit :

$$\bar{a} \cdot \langle \rho_\alpha^r \bar{u}_\alpha^r \rangle_{\mathcal{D}} = \rho_\alpha \bar{a} \cdot \bar{u}_\alpha \times \frac{\omega_\alpha}{V_\alpha} \int_0^\ell \mathcal{S}(\lambda) d\lambda = \bar{a} \cdot \rho_\alpha \bar{u}_\alpha$$

ou : $\bar{a} \cdot \langle \rho_\alpha^r \bar{u}_\alpha^r \rangle_{\mathcal{D}} = \bar{a} \cdot \rho_\alpha \bar{u}_\alpha$ quelque soit $\bar{a}$ d'où :

$$\rho_\alpha \bar{u}_\alpha = \langle \rho_\alpha^r \bar{u}_\alpha^r \rangle_{\mathcal{D}} = \frac{1}{V_\alpha} \int_{\mathcal{D}_\alpha} \rho_\alpha^r \bar{u}_\alpha^r \, d\varpi$$

pour tout $\mathcal{D}$ assez régulier de dimensions comparables à celles d'un VRE.

(si le constituant $\mathcal{B}_\alpha$ est incompressible on a $\rho_\alpha = \rho_\alpha^r = cte$, ce qui justifie l'appellation de champ de vitesse réelle moyen pour $\bar{u}_\alpha$ a fortiori).

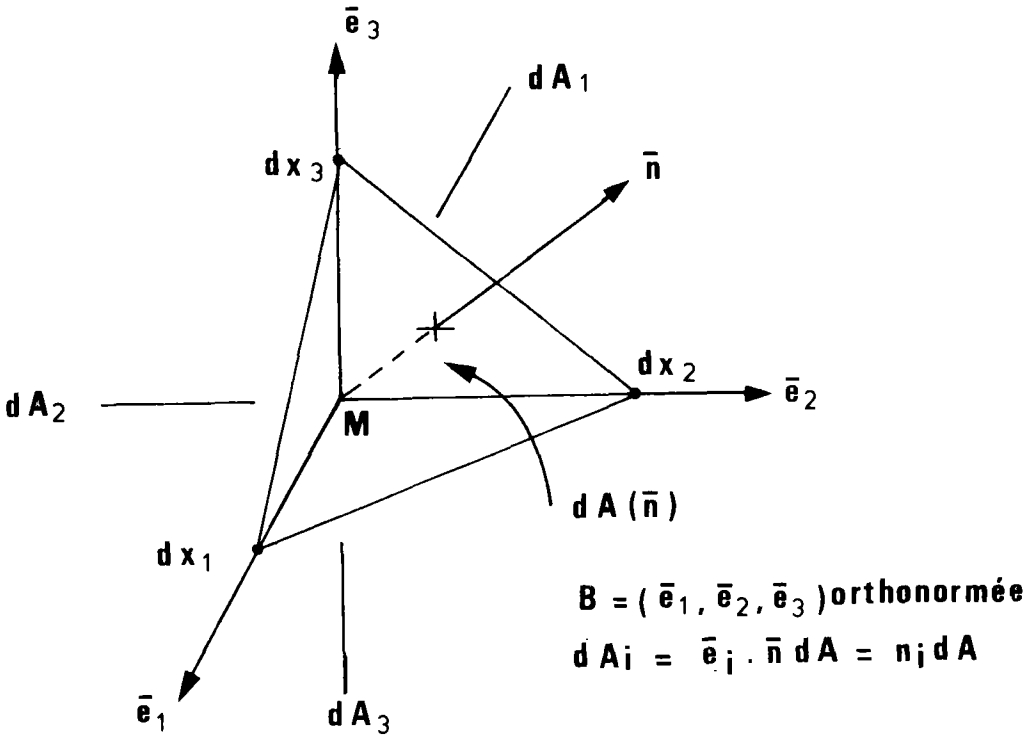


Figure II-2 : Tétraèdre élémentaire

(**dA** *aire de la face du tétraèdre de normale extérieure* $\bar{n}$, dA_i *aire de la face correspondant à* $-\bar{e}_i$, $\bar{e}_i$ *étant le i-ème vecteur unitaire)*

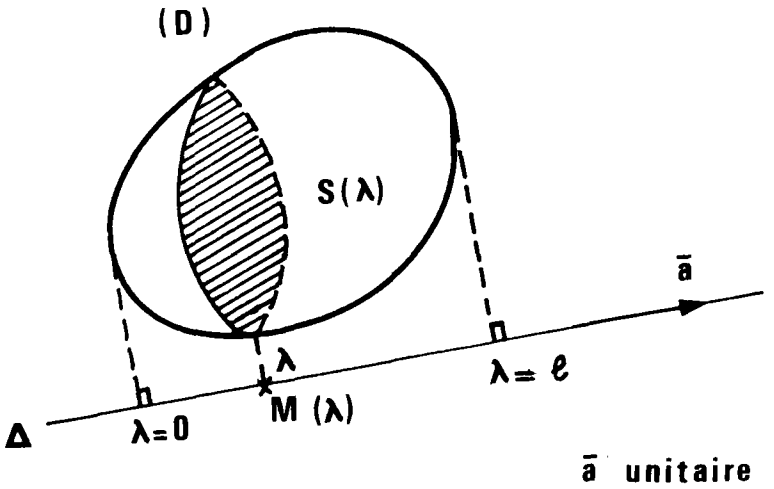


Figure II-3 : Moyenne de la vitesse d'un constituant sur un domaine de dimensions comparables à celles d'un VRE.

Applications à un milieu poreux saturé en eau :

On a besoin de deux indices : e pour l'eau et $\bullet$ pour les grains ("squelette solide").

On a : $\omega_e = \omega$ (porosité) $= \dfrac{\text{volume des fluides}}{\text{volume total}}$

$\omega_\bullet = 1-\omega = \dfrac{\text{volume des solides}}{\text{volume total}}$

La masse volumique du sol saturé est :

$$\rho = \omega \rho_e + (1-\omega)\rho_\bullet \qquad \left(\rho = \sum_\alpha \rho_\alpha^* = \sum_\alpha \omega_\alpha \rho_\alpha\right)$$

- ρ_e masse volumique de l'eau
- $\rho_\bullet$ masse volumique des grains
- $\bar{u}_\bullet$ champ de vitesse réelle moyenne des grains
- $\bar{u}_e$ champ de vitesse réelle moyenne de l'eau (dite aussi vitesse microscopique moyenne de l'eau)
- $\bar{U}$ champ de vitesse apparente de l'eau (vitesse de filtration)

$$\bar{U} = \omega \bar{u}_e$$

Compte tenu de ces notations, il est possible d'affirmer que :

a) les lois de comportement du squelette solide se rapportent au champ $\bar{u}_\bullet$.

b) s'il existe une frontière $\mathcal{S}$ de normale $\bar{\nu}$ entre une zone saturée et une zone sèche, la célérité de cette frontière est :

$$(\bar{\nu}.\bar{u}_e)\,\bar{\nu} = \frac{1}{\omega}\,(\bar{\nu}.\bar{U})\,\bar{\nu} \qquad (9)$$

c) les équations de continuité s'écrivent si $\rho_e = cte$ et $\rho_\bullet = cte$ (10) sous des formes équivalentes entre elles:

(9) *et non* $(\bar{\nu}.\bar{U})\,\bar{\nu}$ *comme on l'écrit souvent.*

(10) *on prend classiquement l'eau et les grains incompressibles mais pas le sol (variations de la porosité par réarrangement des grains en contact) !*

eau	grains
$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \operatorname{div}(\omega \bar{u}_e) = 0$	$-\frac{\partial \omega}{\partial t} + \operatorname{div}\left[(1-\omega)\bar{u}_\bullet\right] = 0$
$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \operatorname{div} \bar{U} = 0$	$-\frac{d\omega}{d_\bullet t} + (1-\omega).\operatorname{div} \bar{u}_\bullet = 0$
$\frac{d\omega}{d_e t} + \omega.\operatorname{div} \bar{u}_e = 0$	

d'où en suivant le mouvement des grains :

$$\frac{1}{1-\omega}\frac{d\omega}{d_\bullet t} = \operatorname{div} \bar{u}_\bullet = -\operatorname{div}\left[\omega\left(\bar{u}_e - \bar{u}_\bullet\right)\right]$$

relation essentielle pour la suite.

(Rappelons que par définition : $\frac{d}{d_\bullet t} = \frac{\partial}{\partial t} + u_\bullet^i \frac{\partial}{\partial x^i}$

$\frac{d}{d_e t} = \frac{\partial}{\partial t} + u_e^i \frac{\partial}{\partial x^i}$)

2 - LOI DE DARCY

Il est possible sous certaines conditions de prolonger la pression du fluide dans les grains, puis par des procédures d'homogénéisation de définir une pression macroscopique, assez régulière, à valeurs sur tout le milieu.

On cherche ensuite à relier les variations de cette pression, notée p dans la suite, aux mouvements macroscopiques du fluide (vitesse apparente de l'eau ici).

Lorsqu'on peut négliger les effets de la pesanteur, on obtient en l'absence de mouvements macroscopiques du squelette solide, c'est-à-dire pour $\bar{u}_\bullet = 0$, une relation de la forme :

$$\bar{U} = \omega \bar{u}_e = -\frac{\bar{\bar{k}}}{\eta} \overline{grad}\, p \qquad \text{(loi de Darcy)} \qquad (11)$$

p	pression macroscopique
$\bar{\bar{k}}$	tenseur symétrique de perméabilité intrinsèque, défini positif, qui a la dimension d'une surface (m^2)
η	viscosité dynamique du fluide
ω	porosité du milieu
$\bar{U}$	champ de vitesse apparente du fluide (vitesse de filtration)
$\bar{u}_e$	champ de vitesse réelle moyenne du fluide

A la limite du milieu poreux, avec certaines réserves liées à l'importance du gradient normal de p, la pression macroscopique se confond avec la pression au sens habituel (dans l'écoulement extérieur du fluide par exemple) : par abus de langage on dira que "la" pression est continue à la limite du milieu (ENE et SANCHEZ-PALENCIA 1975).

Lorsque l'écoulement est régi par les équations de Navier-Stokes, la loi de Darcy peut être considéréesous certaines conditions comme une conséquence de la linéarité aux faibles vitessesdes équations de Navier-Stokes (MATHERON 1967). On considère expérimentalement que la loi de Darcy est applicable tant que :

$$\mathcal{R}_{sol} = \frac{U_c \sqrt{k}\, \rho_e}{\eta} < 10 \qquad \left(k = \frac{1}{3} tr(\bar{\bar{k}})\right)$$

où U_c est une vitesse apparente caractéristique. On a ainsi défini un nombre de Reynolds de l'écoulement dans le sol.

(11) *si on tient compte de la pesanteur on écrit :*

$$\bar{U} = -\frac{\bar{\bar{k}}}{\eta}(\overline{grad}\, p + \rho_e g\, \overline{grad}\, z) = -\bar{\bar{K}}\, \overline{grad}\, h \;,\quad \bar{\bar{K}} = \frac{\rho_e g}{\eta}\bar{\bar{k}},$$

avec la charge $h = \frac{p}{\rho_e g} + z$ (z *verticale ascendante*) *si* $\rho_e = cte$ *et sinon, en faisant l'hypothèse d'un comportement isotherme :*

$h = z + \frac{1}{g}\int_{p_0}^{p} \frac{dp'}{\rho_e(p')}$ *(DE MARSILY 1976).* $\bar{\bar{K}}$ *a les dimensions d'une vitesse et dépend du fluide et du sol.*

Cependant une telle expression de la loi de Darcy n'est valable qu'en l'absence de mouvement des grains. Pour obtenir une forme objective il faut faire intervenir le mouvement relatif soit (DE MARSILY 1976) :

$$\bar{u}_e - \bar{u}_s = -\frac{\bar{\bar{k}}}{\eta\omega}\,\overline{grad}\,p \qquad \text{ou}$$

$$\bar{U} - \omega\,\bar{u}_s = \omega\,(\bar{u}_e - \bar{u}_s) = -\frac{\bar{\bar{k}}}{\eta}\,\overline{grad}\,p \qquad (12)$$

Ceci admis, on montre, pour un milieu à perméabilité intrinsèque homogène et isotrope (indépendante de l'écoulement c'est-à-dire que $\mathcal{R}_{sol}$ est assez faible) et un fluide de viscosité dynamique constante, que :

$$div\,\bar{u}_s = +\frac{k}{\eta}\,\Delta p$$

(puisque comme on l'a vu : $div\,\bar{u}_s = -div\left[\omega\,(\bar{u}_e - \bar{u}_s)\right]$

$$= div\left(\frac{\bar{\bar{k}}}{\eta}\,\overline{grad}\,p\right)$$

avec $\bar{\bar{k}} = k\,\bar{\bar{1}}$, et $k = cte, \eta = cte$. $\bar{\bar{1}}$ est le tenseur identité)

Si $\bar{\bar{D}}$ est le tenseur de vitesse de déformation associé au champ de vitesse réelle moyenne $\bar{u}_s$ des grains, sous les conditions imposées, est réalisée la propriété suivante :

$$\Delta p = \frac{\eta}{k}\,tr(\bar{\bar{D}})$$

(12) *Crow (1973) prend, avec nos notations :*

$$\bar{U} = \bar{u}_s - \frac{\bar{\bar{k}}}{\eta}\,\overline{grad}\,p$$

qui n'est pas satisfaisant.

3 - SQUELETTE SOLIDE

On admet l'hypothèse de décomposition de Terzaghi :

- le tenseur de contraintes macroscopique est de la forme :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{\sigma}}^* - p\,\bar{\bar{\mathbb{1}}}$$

où p est la pression macroscopique utilisée dans la loi de Darcy,

- le comportement du squelette solide ne dépend que du tenseur $\bar{\bar{\sigma}}^*$, dit tenseur des contraintes effectives,

- la relation fondamentale de la dynamique s'écrit encore

$$\overline{div}\ \bar{\bar{\sigma}} = \overline{div}\ \bar{\bar{\sigma}}^* - \overline{grad}\ p = 0$$

(équations d'équilibre en l'absence de forces d'inertie d'entraînement)

Tout se passe alors comme si on avait un milieu solide continu où les contraintes seraient les contraintes effectives, soumis à une densité volumique d'efforts extérieurs égale au gradient de la pression macroscopique au signe près.

Considérons la loi de comportement la plus simple possible : l'élasticité linéaire (en contrainte effective) en petites déformations.

Le champ de vitesse $\bar{u}_s$ étant a priori peu différent du champ d'un torseur distributeur, on se place dans un repère R_Ω lié au sol :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\,\bar{\bar{\sigma}}^* - \frac{\nu}{E}\,I_1^*\,\bar{\bar{\mathbb{1}}}\ ,\quad I_1^* = tr(\bar{\bar{\sigma}}^*)$$

ν coefficient de Poisson, E module d'Young

$$\text{et}\quad tr(\bar{\bar{\mathcal{D}}}) \simeq \frac{1-2\nu}{E}\left(\frac{\partial I_1^*}{\partial t}\right)_{R_\Omega} \qquad (13)$$

(13) *on confond dans* R_Ω $\bar{\bar{\mathcal{D}}}$ *et* $\dfrac{\partial \bar{\bar{\varepsilon}}}{\partial t}$

La trace de $\overline{\overline{\mathcal{D}}}$ est connue par ailleurs en fonction du laplacien de la pression. Supposons maintenant que R_Ω soit en translation uniforme par rapport au repère R_0 du laboratoire. Les équations de compatibilité qui permettent d'éliminer les déformations s'écrivent (GERMAIN 1979) :

$$\frac{1}{1+\nu} I_{1,ij}^{*} + \Delta\sigma_{ij}^{*} + f_{i,j} + f_{j,i} + \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} f_{k,k} = 0$$

où la densité volumique est seulement : $\overline{f} = -\overrightarrow{grad}\, p$

On peut imaginer plusieurs mécanismes de découpage (figure II4), en particulier :

a) grandes déformations : le jet repousse le matériau devant lui et l'écarte sans créer de débris : ce cas peut être celui d'un métal ou d'une matière plastique, non d'un sol ;
b) fracturation : le jet s'infiltre dans le matériau par un réseau de fentes préexistantes qui s'écartent d'autant plus que la pression du fluide est plus importante à l'intérieur. L'ouverture des fentes diminuant les pertes de charge augmente les efforts de pression possibles en fond de fissure et l'évolution conduit rapidement à l'"éclatement" d'une partie du matériau. Un tel mécanisme semble bien adapté à certaines roches.
c) érosion par arrachement : les grains situés en surface sont soumis à des efforts importants par le jet (voir C). On caractérise alors leur possibilité de résister à ces efforts par un critère de rupture en contraintes effectives : les grains sont arrachés lorsque ce critère est atteint.

C'est ce dernier type de mécanisme que nous avons retenu pour le sol, avec un critère de rupture du type Coulomb-Hvorslev supposé atteint sous la première couche de grains (profondeur notée d) soit :

$$|\tau| = C - \sigma^* \operatorname{tg} \varphi \qquad (14)$$

le long d'une surface de rupture située à la profondeur d sous la surface du sol (τ cisaillement, σ^* contrainte effective normale, C cohésion, φ angle de frottement interne), les grains "s'arrachant" à leur base.

Il est bien sûr peu satisfaisant de modéliser un phénomène local de surface, microscopique, à l'aide d'équations macroscopiques sans plus de précautions.

En l'absence d'une analyse plus fine, sans doute très délicate, on s'en contentera.

Un avantage de la position adoptée est qu'elle n'est pas en contradiction avec les habitudes prises en mécanique des sols (15); on évite ainsi d'introduire des grandeurs trop spécifiquement liées aux phénomènes de découpage par jets et dont l'origine risquerait d'être pour le moins obscure. Mieux vaut tenter d'épuiser l'explication par des notions "classiques" auparavant.

Il reste maintenant à schématiser les efforts exercés par le jet sur le sol lors du balayage de celui-ci. On pourra alors, au moins théoriquement, déterminer la forme de la surface de découpage et donc résoudre le problème que nous nous sommes posé.

(14) σ^* *est négative en compression.*

(15) *On schématise toujours macroscopiquement un ensemble de phénomènes microscopiques mal connus !*

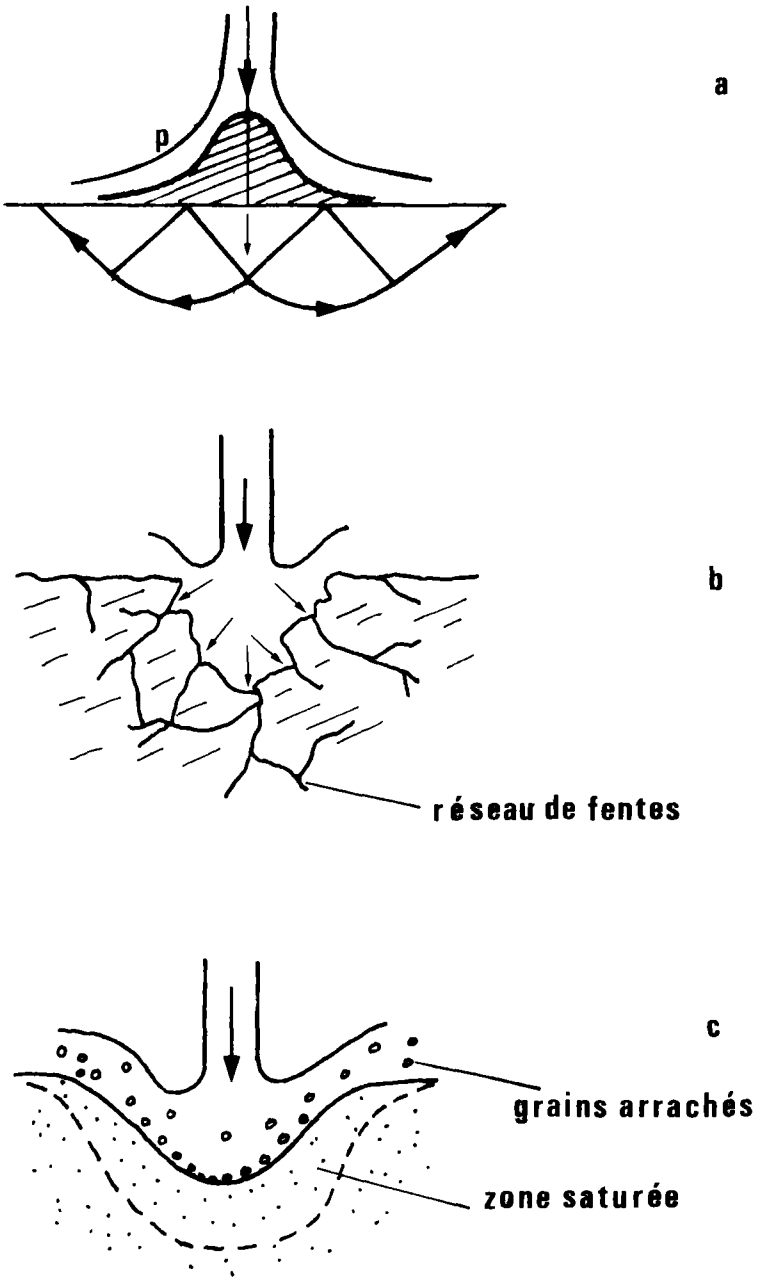


Figure II-4 : Trois modes de découpage schématisés :

a - grandes déformations
b - fracturation
c - érosion

C - CONTACT ENTRE LE JET ET LE SOL

1 - HYPOTHESES GEOMETRIQUES

On considère comme annoncé un jet d'eau balayant à vitesse constante un sol et le découpant. Le jet arrive verticalement.

On se limitera dans la suite par souci de simplicité à des calculs bidimensionnels qui concernent donc plus un rideau d'eau qu'un jet circulaire. Ceci revient à considérer dans les calculs une tranchée assez large et un jet (hypothétique) à section rectangulaire très allongée dans le sens perpendiculaire à l'axe de la tranchée. On admettra ensuite qu'on peut transposer les résultats à un jet circulaire.

On sait que dans un repère lié à la buse le phénomène est stationnaire ; la surface du sol dans l'approximation bidimensionnelle est constituée, en faisant une coupe dans l'axe de la tranchée, de deux demi-droites correspondant au sol non encore entamé et à la tranchée déjà réalisée, reliées par une courbe qu'on peut supposer convexe et qui est la trace de la surface de découpage (figure II5).

On se donne a priori les tangentes aux points extrêmes A et B de la courbe, verticale et horizontale.

Il existe dans le sol une zone saturée en eau dont l'importance dépend des conditions initiales et de l'infiltration dans le sol de l'eau du jet mais qui est,elle aussi,fixe.

Je dis alors que la connaissance de l'arc AB ("courbe de découpage") suffit, sous certaines conditions, pour déterminer les efforts appliqués au contact entre le jet et le sol. C'est presque évident.

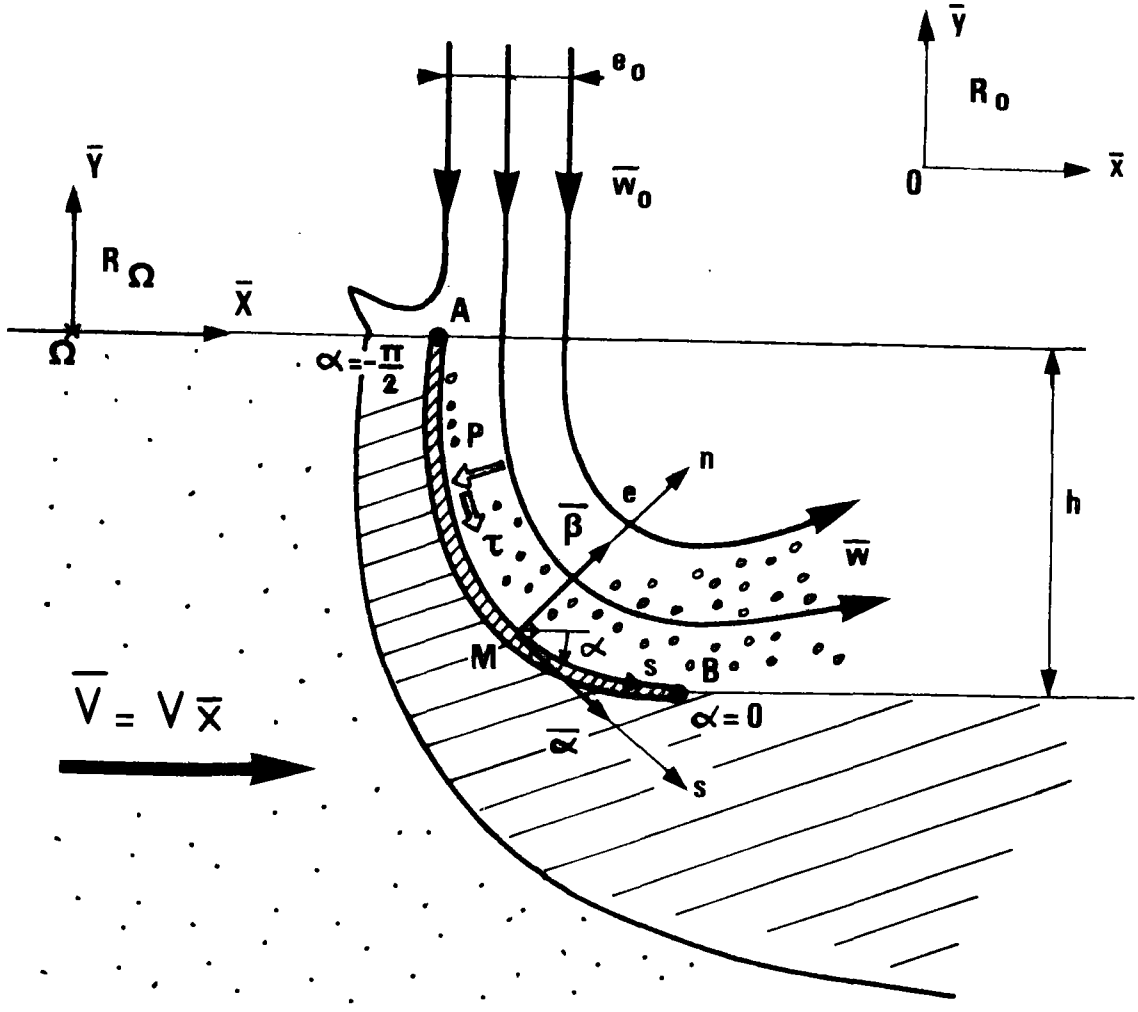


Figure II-5 : Contact entre le jet et un sol, à vitesse de balayage constante ; la figure est faite dans un repère lié à la buse (R_o), pour lequel le sol est mobile (repère R_Ω lié au sol, en translation uniforme).

surface de rupture

zone saturée en eau

zone non saturée

Notons bien sûr que si on connaît la forme de la surface de découpage, on a la profondeur de la tranchée, qui est le paramètre intéressant l'ingénieur (on ne peut bien sûr atteindre la largeur avec un modèle bidimensionnel...).

On suppose que les grains arrachés ne se redéposent pas après le point B avant une grande distance. Lorsqu'il s'agit de grains "petits" le transport se fait par suspension (et non par charriage et saltation) dans un écoulement qui est au moins sur une assez grande distance turbulent et où en fait, la concentration en grains est faible. On peut donc considérer cette condition comme remplie.

On fait encore les hypothèses géométriques suivantes : la taille d des grains est petite devant l'épaisseur e du jet, elle-même petite devant le rayon de courbure R de la courbe de découpage :

$$d \ll e \ll R$$

taille des grains — épaisseur du jet — rayon de courbure du fond

On peut donc parler de "la" courbure du jet et de la forme moyenne du fond.

s sera l'abscisse curviligne du fond et α l'angle de la tangente au fond (orientée vers les s croissants) avec la vitesse moyenne du sol $\bar{V}$ $(\vec{u}_* \simeq \bar{V})$, opposée de la vitesse de balayage. Naturellement, on a :

$$\alpha = (\bar{x}, \bar{\alpha}) \leqslant 0 \quad , \quad R = \frac{ds}{d\alpha} > 0$$

(figure II5). On désignera par n la coordonnée selon la normale extérieure $\bar{\beta}$ au sol.

2 - RELATION FONDAMENTALE DE LA DYNAMIQUE

On sait (voir par exemple MANDEL 1966 avec d'autres notations) que les équations de Navier-Stokes d'un fluide incompressible turbulent en écoulement permanent sont, en l'absence de forces de masse, pour le mouvement moyen :

$$-\overline{\mathrm{grad}}\, p + \eta\, \overline{\Delta}\, \overline{w} + \overline{\mathrm{div}}\, \overline{\overline{\mathcal{C}}} = \rho\, \overline{\overline{\mathrm{grad}}}\, \overline{w} \cdot \overline{w}$$

où on peut négliger le deuxième terme du premier membre devant le troisième sauf au voisinage des parois, avec :

p	pression dans le fluide
$\overline{w}$	champ de vitesse (moyen)
$\overline{\overline{\mathcal{C}}}$	tenseur de turbulence ($\overline{\overline{\mathcal{C}}}(M)$ est la valeur moyenne au cours du temps, en M , de $\rho\, \overline{w'} \otimes \overline{w'}$ où $\overline{w'}(M,t)$ est la vitesse d'agitation turbulente)
ρ	masse volumique du fluide
η	sa viscosité dynamique

On suppose les différentes hypothèses vérifiées (16).

Supposons qu'en projection sur la normale extérieure au fond on puisse négliger le terme de viscosité et le terme de turbulence ; on ne garde que les effets d'inertie (forces centrifuges) soit :

$$\frac{\partial p}{\partial n} \simeq -\rho \frac{w^2}{R}$$

où $R(s,n)$ est pour le moment le rayon de courbure d'un filet fluide et n la coordonnée selon la normale au filet, que l'on confondra dans la suite avec la normale au fond.

(16) c'est-à-dire $\mathcal{M}^2 \ll 1$ ($\rho \simeq$ cte) , $\mathcal{R} > \mathcal{R}_{critique}$ (turbulence), $\mathcal{S} \ll 1$ (écoulement à peu près permanent), $\mathcal{F} \gg 1$ (pas de force de masse).

Dans la section correspondant au point A , en prenant la vitesse uniforme $(\bar{w}_o)$ et le rayon de courbure voisin de celui du fond R_o il vient pour la pression sur le fond P_o (puisque la pression est nulle du côté libre du jet) : (17)

$$R_o P_o \simeq 2 e_o \Pi \qquad \left(\Pi = \frac{1}{2}\rho w_o^2\right)$$

Considérons d'autre part une portion de jet comprise entre les abscisses s et $s+ds$ et délimitée par les normales au fond correspondantes (figure II 6) et écrivons en projection sur la tangente $\bar{\alpha}$ au fond le théorème d'Euler exprimant en régime permanent l'égalité de la résultante des forces extérieures appliquées à un domaine fixe et du flux de quantité de mouvement sortant de ce domaine. Il vient la relation approximative :

$$\tau \simeq -\frac{d}{ds}\left\{\int_0^{e(s)} (p+\rho w^2)\, dn\right\}$$

τ cisaillement sur le fond

p pression

ρ masse volumique

w vitesse

$e(s)$ épaisseur du jet

s abscisse sur le fond

n coordonnée selon la normale au fond $\bar{\beta}$.

(17) *l'ordre de grandeur de la différence de pression entre les deux côtés du jet est ici :* $\rho w^2 \frac{e}{R}$ *et la surpression capillaire de l'ordre de* $\frac{\sigma}{R}$ *(dans l'approximation bidimensionnelle). Le rapport de la pression sur le fond à la surpression capillaire est voisin du nombre de Weber du jet et on a supposé* $\mathcal{W} \gg 1$ *; on peut donc négliger les phénomènes liés à la capillarité et écrire que la pression dans le jet est nulle sur le côté en contact avec l'air.*

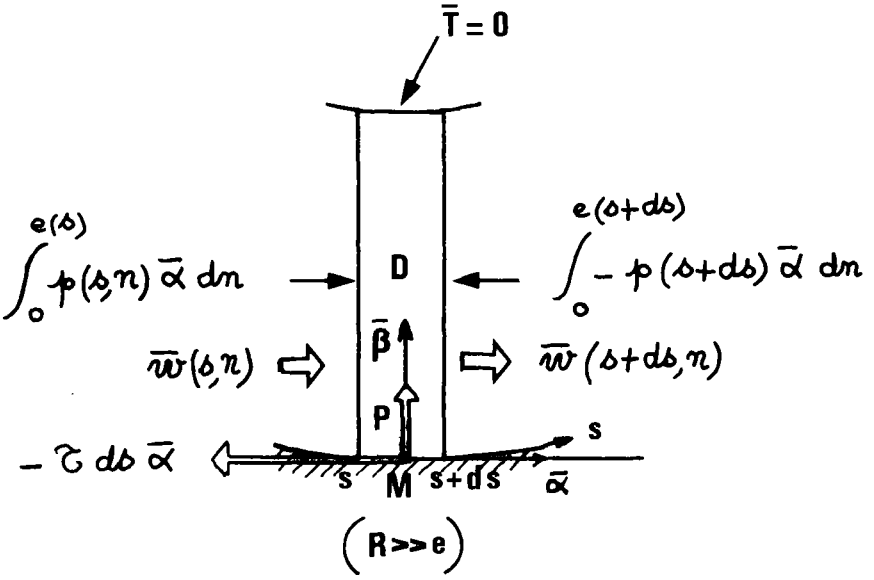


Figure II 6 : Application à une portion élémentaire du jet du théorème d'Euler en projection sur la tangente au fond :

$$\bar{\alpha}\cdot\int_{\partial D}\bar{T}\,dA = \bar{\alpha}\cdot\int_{\partial D}\rho(\bar{w}\cdot\bar{n})\,\bar{w}\,dA$$

Il vient en négligeant les termes autres que la pression sauf sur le fond :

$$-\tau\,ds - d\left(\int_0^{e(s)} p(s,n)\,dn\right) = d\left(\int_0^{e(s)} \rho w^2(s,n)\,dn\right)$$

Ceci étant, on peut éliminer la vitesse des relations précédentes soit :

$$\tau \simeq - \frac{d}{ds} \left\{ \int_0^{e(s)} \left(p - R \frac{\partial p}{\partial n} \right) dn \right\}$$

ou en intégrant par parties:

$$\tau \simeq - \frac{d}{ds} \left\{ \left[-Rp \right]_0^{e(s)} + \int_0^{e(s)} p \left(1 + \frac{\partial R}{\partial n} \right) dn \right\}$$

On néglige les variations de R avec n et comme $e \ll R$ on ne garde finalement que :

$$\tau \simeq + \frac{d}{ds} \left(\left[Rp \right]_0^{e(s)} \right)$$

avec $p(s, n=e(s)) \simeq 0$ (remarque 17) soit : $\tau \simeq - \frac{d}{ds} \left(R(s,0)\, p(s,0) \right)$

En désignant maintenant sans autre précision par :

- τ le cisaillement sur le fond
- P la pression sur le fond
- R le rayon de courbure du fond $ds/d\alpha$,

on obtient :

$$\tau \simeq - \frac{d}{ds} \left(RP \right)$$

ou

$$R\tau \simeq - \frac{d}{d\alpha} \left(RP \right)$$

relation liant cisaillement et pression sur le fond à la géométrie.

Remarquons que cette formule est extrêmement approchée ; en particulier son utilisation dans le cas d'un fluide supposé parfait et en écoulement laminaire (pour lequel $\tau \equiv 0$), qui semblerait a priori possible vu les hypothèses simplificatrices faites, conduit à des contradictions. Une description plus rigoureuse des efforts exercés par le fluide serait donc souhaitable ; on est malheureusement de toute façon limité par l'incertitude sur le comportement du fluide à l'interface avec le sol. Il faut en effet se donner en plus une relation sur le fond, c'est-à-dire une loi de frottement, pour achever la détermination de τ et de P à la surface du sol.

3 - CONDITION A L'INTERFACE

On doit se donner une condition au contact entre le fluide et le matériau mais on ne sait pas laquelle adopter.

On a en effet un problème de couches limites en régime turbulent sur une géométrie courbe inconnue (l'arc AB).

La surface est constituée de grains, en train de s'arracher, et l'eau s'infiltre dans le sol : ce sont des conditions aux limites qu'on n'a pas l'habitude de traiter et qui requièrent certainement des précautions.

Les grains en suspension, même peu nombreux, risquent de modifier un peu les conditions de l'écoulement, surtout au voisinage du fond.

Il faudrait semble-t-il tenir compte également d'une troisième phase, gazeuse. En effet de l'air est toujours entraîné par le jet et il y a de l'air entre les grains du sol, au moins au voisinage de la surface, que le sol soit initialement sec ou "saturé". Notons que de toute façon un sol dit saturé l'est rarement complètement : il contient des bulles d'air au milieu de la phase eau, non connectées entre elles mais pouvant représenter 10% du volume fluide pour donner un ordre de grandeur. La présence de bulles d'air le long de la surface de découpage peut avoir une importance en raison des variations de pression à l'intérieur du jet qui peuvent entraîner des variations brutales de taille des bulles (phénomènes de cavitation gazeuse). On peut penser qu'il y a entraînement notable d'air au point d'attaque du sol par le jet (point A) et éventuellement des effets derrière chaque grain situé sur la surface de découpage. Certains auteurs suggèrent même (CROW 1973) qu'il y aurait une poche

de cavitation de vapeur (à la pression de vapeur saturante de l'eau) derrière chaque grain lors du découpage par jets à très grande vitesse : ceci serait une explication du cisaillement macroscopique par microcavitation de vapeur.

On voit que le problème peut être complexe.

S'il faut faire une hypothèse simple, nous supposerons que chaque grain subit une traînée proportionnelle à la pression sur le fond :

ceci équivaut à une loi de frottement solide sur la limite lisse $R(\alpha)$ du milieu continu théorique considéré dans le modèle :

$$\tau = f\, P \quad \text{avec} \quad f = cte > 0$$

Cette hypothèse, que nous adopterons pour la suite, ne semble pas complètement absurde.

Elle a surtout l'avantage de permettre d'intégrer immédiatement la relation :

$$R\tau \simeq -\frac{d}{d\alpha}(RP)$$

avec : $R_o P_o \simeq 2 e_o \chi$ comme condition en $\alpha = -\frac{\pi}{2}$. (18)

(18) *Remarquons qu'on a pris un jet arrivant verticalement, mais cela n'a rien d'obligatoire dans le modèle ; il suffit de petites modifications pour traiter le cas plus général.*

Il vient :

$$R\,P = 2 e_0 \lambda \exp\left[-f\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right] \quad , \quad R = \frac{ds}{d\alpha} \quad , \quad \tau = f\,P$$

ou

$$P(s) = \frac{2 e_0 \lambda}{f} \exp\left(-f\frac{\pi}{2}\right) \frac{d}{ds}\left(-\exp\left(-f\alpha\right)\right)$$

$$\tau(s) = f\,P(s)$$

De même, compte tenu de ce que d (taille des grains) est petite devant les autres dimensions du problème, on peut réécrire le critère de rupture sous une forme différente (voir l'équation de la page 55).

- on identifie le cisaillement sur la surface de rupture à τ cisaillement sur le fond.
- on remplace la contrainte effective normale sur la surface de rupture σ^* par $-\,d \times \left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_{surface}$

Ceci découle immédiatement de l'écriture des équations d'équilibre au voisinage de la surface en négligeant les variations selon la coordonnée s et en se rappelant que R est très grand devant d .

On peut alors "ramener" le critère de rupture de Coulomb-Hvorslev à la surface pour le problème considéré, sous la forme :

$$|\tau| = f\,P = C + d \cdot \frac{\partial p}{\partial n} \cdot tg\,\varphi \qquad \text{ou :}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial n} + a' p = b' \quad \text{avec} \quad a' = \frac{f}{d\,tg\varphi} \quad , \quad b' = \frac{C}{d\,tg\varphi}$$

et $p = P(s)$ donnée ci-dessus.

(forme déjà proposée très empiriquement par Crow en 1973)

On s'est donc donné les efforts en fonction de la géométrie et on a réécrit le critère de rupture sous une forme sans doute moins correcte mais plus pratique, comme on le verra par la suite.

3

Exploitation

A - RESOLUTION POUR UN SOL A PHASE EAU DISCONTINUE

On considère un sol où initialement la phase eau est discontinue (sol "P.E.D." en abrégé) et ne circule pas : on parlera également de "sol sec", mais en se rappelant qu'un tel sol contient encore pas mal d'eau !
Il y aura alors dans le sol durant le découpage deux zones : une zone P.E.D. et une zone saturée en eau (infiltration).

1 - REVUE DES EQUATIONS

Tout d'abord le phénomène étant permanent dans le repère R_o lié à la buse, par rapport auquel le repère R_Ω lié au sol est en translation uniforme de vitesse $\overline{V}$:

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right)_{R_\Omega} = V^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

où les x^i sont les coordonnées dans R_o . Avec le choix d'axes orthonormés fait :

$$\overline{V} = V\,\overline{x}\,,\ V>0 \quad (\overline{x}^2=1)$$

d'où $\boxed{\left.\frac{\partial}{\partial t}\right)_{R_\Omega} = V \frac{\partial}{\partial x}}$. On pourra écrire

en particulier que : $\boxed{\left.\frac{\partial I_1^*}{\partial t}\right)_{R_\Omega} = V \frac{\partial I_1^*}{\partial x}}$

Ensuite, on se place en déformation plane : $\bar{z}$ est direction principale et d'après l'élasticité :

$$\sigma^*_{zz} = \nu \left(\sigma^*_{xx} + \sigma^*_{yy} \right) = \nu S^*$$

où on pose S^* trace du tenseur de contrainte effective dans le plan $\bar{x}, \bar{y}$:

$$S^* = \sigma^*_{xx} + \sigma^*_{yy} = \frac{I_1^*}{1+\nu}$$

On peut donc écrire, puisque :

$$\Delta p = \frac{\gamma}{k} \, tr(\bar{\bar{\mathcal{D}}}) \quad \text{et} \quad tr(\bar{\bar{\mathcal{D}}}) \simeq \frac{1-2\nu}{E} \left(\frac{\partial I_1^*}{\partial t} \right)_{R_\Omega},$$

$$\boxed{\Delta p = (1+\nu)(1-2\nu) \frac{\gamma V}{k E} \cdot \frac{\partial S^*}{\partial x}} \qquad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \text{ ici} \right)$$

équation qui résume pour le problème envisagé l'influence sur la pression d'un réarrangement des grains modifiant la porosité (analogue ici d'une équation de consolidation), valable seulement dans la zone saturée.

Les équations d'équilibre s'écrivent (on néglige les forces d'inertie) :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial \sigma^*_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma^*_{xy}}{\partial y} &= \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial \sigma^*_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma^*_{yy}}{\partial y} &= \frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned}}$$

ou, à deux dimensions : $\overline{div}\, \bar{\bar{\sigma}}^* = \overline{grad}\, p$

De leur côté, les six équations de compatibilité se réduisent à une en déformation plane :

$$\Delta S^* = -\frac{1}{1-\nu} \operatorname{div} \bar{f}$$

soit ici :

$$\boxed{\Delta S^* = \frac{1}{1-\nu} \Delta p}$$

qui permet, compte tenu des équations d'équilibre (et de $\sigma^*_{zz} = \nu S^*$) de retrouver les autres.

Les déplacements étant éliminés, on peut distinguer :
(figure III1)

- une zone saturée en eau dans laquelle l'eau s'infiltre à partir du jet sous l'effet des différences de pression. La phase eau peut être considérée comme continue et circule selon la loi de Darcy ; l'équation de "consolidation" vue ci-dessus y est valable et on y dispose de quatre équations :

$$\frac{\partial \sigma^*_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma^*_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x} \qquad \text{équilibre}$$

$$\frac{\partial \sigma^*_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma^*_{yy}}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\Delta S^* = \frac{1}{1-\nu} \Delta p \qquad \text{compatibilité}$$

$$\Delta p = (1+\nu)(1-2\nu) \cdot \frac{\eta V}{k E} \cdot \frac{\partial S^*}{\partial x} \qquad \text{consolidation}$$

avec $S^* = \sigma^*_{xx} + \sigma^*_{yy}$ pour les quatre inconnues :

$$\sigma^*_{xx}, \sigma^*_{yy}, \sigma^*_{xy}, p .$$

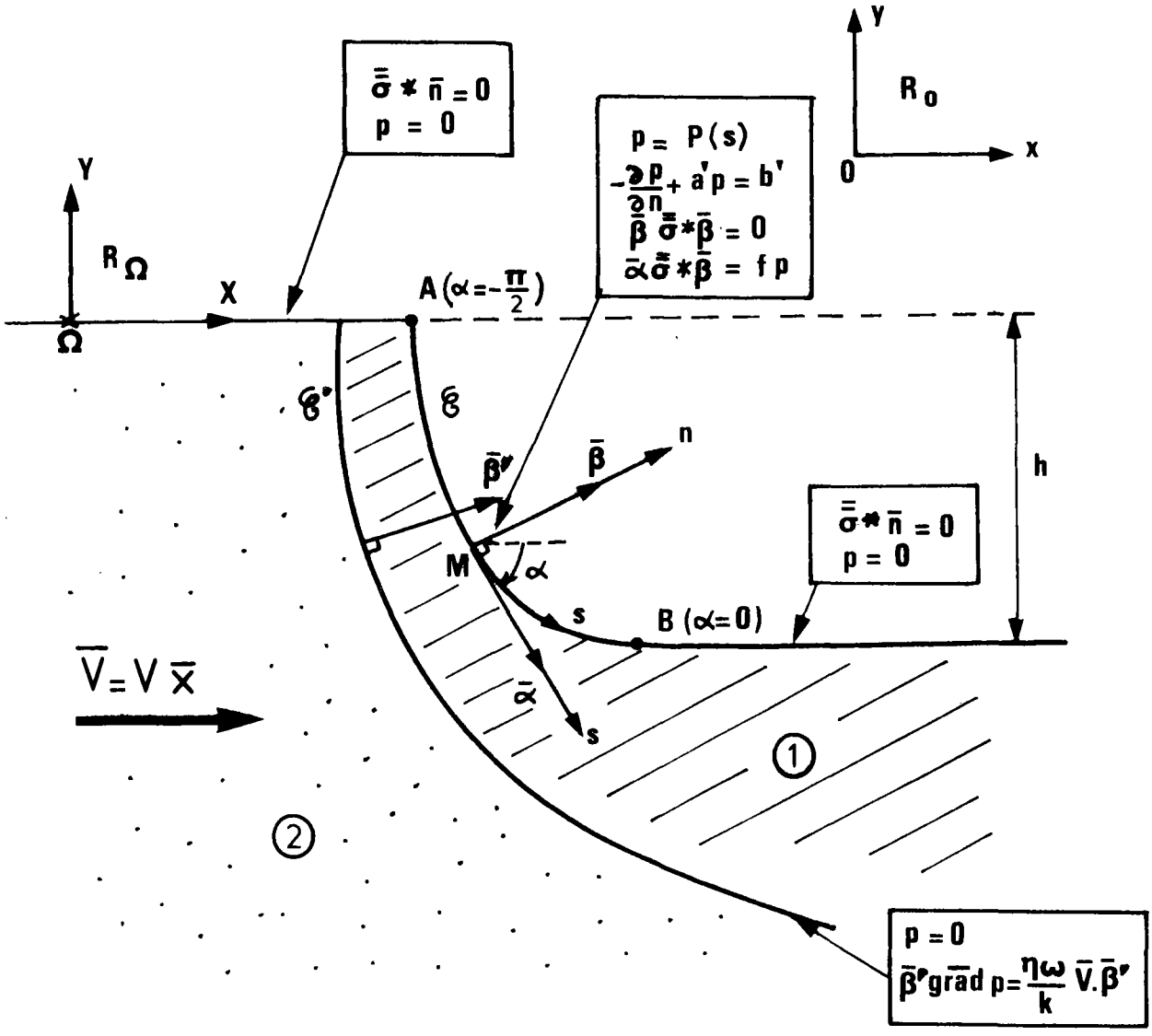


Figure III-1 : Géométrie et conditions aux limites pour le découpage d'un sol initialement sec :

① *Zone saturée en eau*
② *Zone sèche (Sol P.E.D.)*
$\mathcal{C}$ *Surface de découpage (arc AB)*
$\mathcal{C}'$ *Limite entre les zones ① et ②*
R_0 *Repère fixe (lié à la buse)*
R_Ω *Repère mobile (lié au sol)*

- plus loin dans le sol une zone où la phase eau est discontinue et ne circule pas ; elle est constituée d'eau liée et d'eau de rétention capillaire seulement. Brièvement parlant, on dit que le sol est sec. La pression macroscopique n'a ici plus de sens : on peut la poser nulle par convention ; alors il n'y a plus lieu de distinguer contrainte totale et contrainte effective.
On a une équation de moins (consolidation) et une inconnue de moins (la pression). Il reste très classiquement :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \qquad \text{équilibre}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0$$

$$\Delta S = 0 \quad (S = \sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \qquad \text{compatibilité}$$

soit trois équations pour les trois inconnues $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$.

Les équations à respecter dans les deux zones étant posées, il faut les assortir de conditions aux limites.

Ces conditions ont déjà été en partie exprimées pour la surface de découpage : l'effort normal s'y réduit à la pression $P(\delta)$ fonction connue de la géométrie $\delta(\alpha)$ soit ($\bar{\alpha}$ tangente à la courbe de découpage, $\bar{\beta}$ normale extérieure au sol le long de cette courbe) en tout point :

$$p = P(\delta)$$

$$\bar{\beta}\,\bar{\bar{\sigma}}^*\,\bar{\beta} = 0$$

$$\left(T_n = \bar{\beta}.\bar{T} = \bar{\beta}\,\bar{\bar{\sigma}}\,\bar{\beta} = -p \quad \text{avec} \quad \bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{\sigma}}^* - p\,\bar{\bar{\mathbb{I}}} \right)$$

La contrainte tangentielle (cisaillement) est proportionnelle à la pression :

$$\tau = \bar{\alpha}\,\bar{\bar{\sigma}}^{*}\,\bar{\beta} = f\,p$$

Le gradient de la pression, selon la normale à la courbe de découpage, vérifie le critère de rupture :

$$-\frac{\partial p}{\partial n} + a'p = b'$$

où $a' = \dfrac{f}{d\,tg\varphi}$, $b' = \dfrac{C}{d\,tg\varphi}$, $p = P(s) = \dfrac{2e_0\chi}{f}\cdot e^{-f\frac{\pi}{2}}\cdot\dfrac{d}{ds}\left(-e^{-f\alpha}\right)$

avec

f	coefficient de frottement
C	cohésion
φ	angle de frottement interne
d	taille des grains
e_0	largeur du jet au bord d'attaque
χ	pression d'arrêt du jet
s	abscisse curviligne
α	angle de la tangente au fond $\bar{\alpha}$ avec l'axe des x
$\bar{\alpha}$	tangente au fond $(\bar{\alpha}^2 = 1)$
$\bar{\beta}$	normale extérieure au fond $(\bar{\beta}^2 = 1)$
n	coordonnée selon $\bar{\beta}$

Ces conditions sont surabondantes ce qui est normal puisque la géométrie $s(\alpha)$ n'est pas quelconque.

Sur le reste de la frontière du matériau on négligera les efforts par rapport à ceux dans la zone de découpage ; on écrira :

$$\overline{\overline{\sigma}} \cdot \bar{n} \simeq 0$$
$$p \simeq 0$$

($\bar{n}$ normale extérieure au sol)

Cette approximation est pleinement justifiée devant le jet dans la zone non encore découpée (à l'exception du proche voisinage du bord d'attaque qui nécessiterait une analyse plus rigoureuse) ; elle l'est un peu moins dans la tranchée déjà creusée où on néglige le cisaillement sur le fond (la pression est ici de toutes façons négligeable). Là encore le comportement à l'extrêmité de la surface de découpage (où on passe brutalement d'un rayon de courbure fini à un rayon infini) demanderait à être précisé, spécialement en ce qui concerne la pression au voisinage.

A l'infini, les contraintes doivent tendre assez rapidement vers zéro.

Sous la zone saturée s'étend la zone sèche du sol.

A la limite de la zone saturée, on doit écrire la continuité des contraintes et la nullité de la pression, à la pression capillaire (tension superficielle) entre les grains près, que nous négligerons (19).

Nous écrirons donc sur cette limite entre les deux zones :

$$p = 0$$

(19) *Pour un rayon des ménisques de l'ordre du micron, la pression côté eau, négative (succion), atteint l'ordre de grandeur de 10^5 Pa (1 atmosphère). Cet effet essentiel pour la nature peut ici être négligé devant l'ordre de grandeur des pressions créées par le jet.*

La position, inconnue, de cette limite est fixe dans le repère lié à la buse. Or, la célérité de cette surface est comme on l'a vu :

$$(\bar{\beta}'.\bar{u}_e)\,\bar{\beta}'$$

($\bar{\beta}'$ normale intérieure à la zone saturée , $\bar{\beta}'^2 = 1$)
avec : $\bar{u}_e = \frac{\bar{U}}{\omega}$ et $\bar{U} \simeq \omega\bar{V} - \frac{k}{\eta}\,\overline{grad}\,p$ ($\bar{u}_. \simeq \bar{V}$).
Il faut écrire la nullité du produit $\bar{\beta}'.\bar{u}_e$ (vitesse microscopique moyenne normale de l'eau) d'où la relation :

$$\boxed{\bar{\beta}'.\overline{grad}\,p = \frac{\eta\omega V}{k}\,\bar{\beta}'.\bar{x}} \quad \left(\bar{V} = V\bar{x}\right) \qquad (20)$$

qui exprime la proportionnalité du gradient (normal) de la pression à la vitesse de balayage et à l'inverse de la perméabilité intrinsèque. On voit également que le gradient de pression est d'autant plus important que la limite de la zone est plus proche de la verticale (figure III1).

2 - SOLUTION APPROCHEE

L'ensemble d'équations à résoudre est encore complexe en raison des conditions aux limites et de la géométrie (deux frontières inconnues à déterminer).

Il est tentant d'en chercher une solution approchée ; c'est ce que nous allons faire. On verra que les résultats trouvés ressemblent beaucoup à ceux de Crow, qu'on retrouve dans un cadre plus général et plus satisfaisant.

(20) *On a même :* $\overline{grad}\,p = \frac{\eta\omega V}{k}(\bar{\beta}'.\bar{x})\,\bar{\beta}'$ *puisque la pression est constante (nulle) à la limite de la zone.*

Indiquons tout de suite l'approximation supplémentaire faite ici, sous réserve de vérification : je néglige la compressibilité du sol et je suppose la zone mouillée (saturée) d'épaisseur, notée e', partout faible devant le rayon de courbure de la surface de découpage, en même temps que supérieure à la taille d des grains :

$$\boxed{d < e' \ll R}$$

On peut alors découpler le calcul des contraintes de l'estimation des pressions et le problème est résolu.

Les équations d'équilibre et de compatibilité (= Beltrami) suggèrent que les contraintes et la pression, dont les valeurs caractéristiques sont les mêmes (21), admettent de plus mêmes longueurs caractéristiques, de l'ordre de grandeur de e' si leur comportement dans l'épaisseur est assez régulier.

Ceci étant l'ordre de grandeur du terme :

$(1+\nu)(1-2\nu) \cdot \frac{\eta V}{k E} \cdot \frac{\partial S^*}{\partial x}$ dans l'équation de consolidation,

par rapport à $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$ ou $\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}$ est donné par :

$$(1+\nu)(1-2\nu)\frac{\eta V}{k E}\, e'$$

On va supposer que : $\boxed{(1-2\nu)\frac{\eta V e'}{k E} \ll 1}$

l'épaisseur e' restant à évaluer plus précisément.

(21) *l'épaisseur de la zone saturée est macroscopiquement faible et à la limite avec la zone sèche la pression a été entièrement reportée sur le squelette solide.*

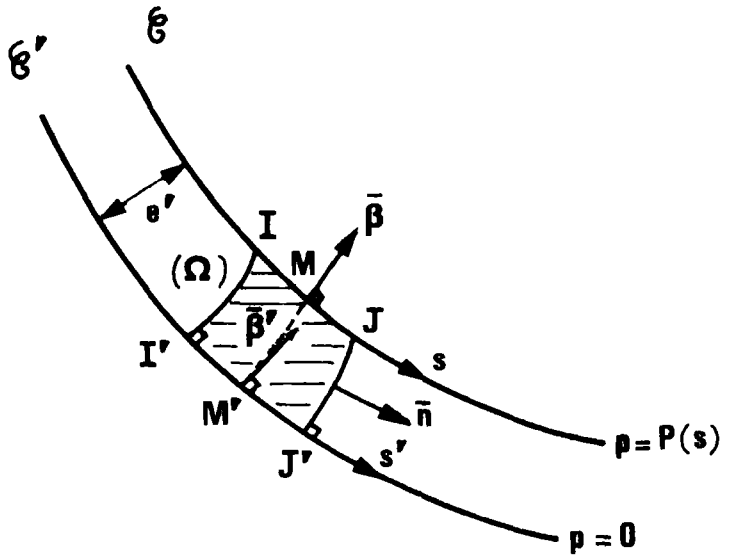


Figure III-2 : Calcul du gradient normal de la pression sur la surface de découpage (compressibilité du sol négligée et épaisseur mouillée faible) :

(Ω) est délimité par deux orthogonales aux lignes d'égales pressions (II' et JJ') et compris entre la ligne $p=0$ (limite inférieure de la zone mouillée) et la surface de découpage (limite supérieure).

$$\Delta p \simeq 0 \rightarrow 0 \simeq \int_{\Omega} \Delta p \, d\varpi = \int_{\partial\Omega} \overline{grad}\, p \cdot \bar{n} \, dA \rightarrow$$

$$\int_{I}^{J} \bar{\beta} \cdot \overline{grad}\, p(M)\, ds = \int_{I'}^{J'} \bar{\beta}' \cdot \overline{grad}\, p\,(M')\, ds'$$

II' et JJ' sont normales à $\mathcal{C}'$ et approximativement à $\mathcal{C}$ (puisqu'on a supposé pour transformer le critère de rupture que $\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{dP}{ds}(s)$ est faible devant $\frac{\partial p}{\partial n}$ au voisinage de la surface). Compte tenu de ce que e' est faible devant le rayon de courbure de $\mathcal{C}$ on confond $\bar{\beta}$ et $\bar{\beta}'$ lorsque la longueur de IJ tend vers zéro, IJ et $I'J'$ ont alors même longueur et :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \bar{\beta} \cdot \overline{grad}\, p\,(M) \simeq \bar{\beta}' \cdot \overline{grad}\, p\,(M') = \frac{\eta \omega V}{k} \bar{\beta}' \cdot \bar{x} \simeq \frac{\eta \omega V}{k} \bar{\beta} \cdot \bar{x}$$

Si $(1-2\nu)\,\frac{\eta V e'}{k E}$ (ν coefficient de Poisson du sol, E module d'Young, η viscosité dynamique de l'eau, V vitesse de balayage du jet, e' épaisseur mouillée, k perméabilité intrinsèque) est assez petit devant l'unité on pourra écrire :

$$\Delta p \simeq 0 \Leftrightarrow \text{compressibilité négligeable}$$

d'où l'on déduit (figure III2) qu'en première approximation, le gradient de pression normal, sur la surface de découpage, a la même expression qu'au contact entre la zone saturée et la zone sèche :

$$\frac{\partial p}{\partial n}(M) = \vec{\beta}.\overrightarrow{grad}\,p(M) \simeq \frac{\eta\omega V}{k}\,\vec{\beta}.\vec{x}$$

($\vec{\beta}$ normale extérieure en M à la surface de découpage).

Ceci équivaut à négliger (dans un repère lié à la buse) l'infiltration de l'eau dans le sol, c'est-à-dire à écrire :

$$U_n = \vec{\beta}.\vec{U} \simeq 0$$

sur la surface de découpage, ce qui n'est pas absurde étant donnée l'hypothèse que la zone saturée est de faible épaisseur (22). Cette nullité du flux d'infiltration n'est bien sûr valable que dans un repère lié à la buse : pour un observateur lié au sol il y a bien infiltration !

On peut alors, avec cette estimation du gradient normal de la pression, avoir l'ordre de grandeur de l'épaisseur mouillée tant que $\vec{\beta}.\vec{x}$ est assez différent de zéro : (23)

$$e' \# \frac{k\,P(\delta)}{\eta\omega V}$$

(22) *on ne voit pas très bien par où l'eau pourrait s'échapper....*
(23) $P(\delta) \# e'\,\frac{\partial p}{\partial n}$ ...

Il faut donc :

$$d < \frac{k \cdot P(\delta)}{\eta \omega V} \ll R$$

et :

$$(1-2\nu)\ \frac{P(\delta)}{\omega E} \ll 1$$

en reprenant les hypothèses de la page 77.

Ceci étant, on peut considérer le problème résolu puisque le critère de rupture s'écrit :

$$-\frac{\partial p}{\partial n} + a' p = b'$$

où $\frac{\partial p}{\partial n}$ et p à la surface ont des expressions connues en fonction de la géométrie :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\eta \omega V}{k}\ \overline{\beta}.\overline{x}$$
$$p = P(\delta)$$

On a alors la géométrie sous forme paramétrée (rayon de courbure de la surface en fonction de la tangente au fond) :

$$R = R(\alpha)$$

et par intégration la profondeur de la tranchée. On peut alors, si on le veut, calculer les contraintes partout dans le matériau et les déformations.

Introduisons une grandeur V_I qui a les dimensions d'une vitesse et que nous appellerons vitesse intrinsèque car elle ne dépend (à la viscosité dynamique de l'eau près) que des caractéristiques du sol, égale à :

$$V_I = \frac{k C}{\eta \omega d \operatorname{tg}\varphi}$$

(la signification des notations est rappelée page 82)

En remarquant (figure III1 par exemple) que :

$$h = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (-\sin\alpha)\, R(\alpha)\, d\alpha \qquad (\sin\alpha \leqslant 0)$$

on introduit les deux fonctions sans dimension de f et $\frac{V}{V_I}$:

$$\mathcal{H}\left(f, \frac{V}{V_I}\right) = f \cdot e^{-f\frac{\pi}{2}} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\lambda \cdot e^{f\lambda} \cdot d\lambda}{1 + \left(\frac{V}{V_I}\right)\sin\lambda}$$

$$\mathcal{S}\left(f, \frac{V}{V_I}\right) = \frac{V}{V_I} \cdot \mathcal{H}\left(f, \frac{V}{V_I}\right)$$

La solution s'écrit comme on peut le vérifier aisément :

$$\tau = C\left(1 + \frac{V}{V_I}\cdot(-\sin\alpha)\right)$$ Cisaillement à la surface

$$P = \frac{C}{f}\left(1 + \frac{V}{V_I}\cdot(-\sin\alpha)\right)$$ Pression à la surface

$$R = \frac{2e_o\chi f}{C} \cdot \frac{\exp\left[-f\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right]}{1 + \frac{V}{V_I}\cdot(-\sin\alpha)}$$ Rayon de courbure de la surface de découpage

$$h = \frac{2e_o\chi}{C} \cdot \mathcal{H}\left(f, \frac{V}{V_I}\right)$$ Profondeur de la tranchée

$$S = hV = \frac{2e_o\chi V_I}{C} \cdot \mathcal{S}\left(f, \frac{V}{V_I}\right)$$ Surface balayée par unité de temps (surface découpée)

$$E_s = \frac{C}{V_I}\sqrt{\frac{\chi}{2\rho}} \cdot \frac{1}{\mathcal{S}\left(f, \frac{V}{V_I}\right)}$$ Energie volumique de découpage

$$V_I = \frac{k\,C}{\eta\omega d\, tg\varphi}$$ Vitesse intrinsèque ,

$\mathcal{H}$ et $\mathcal{S}$ connues et :

k	perméabilité intrinsèque du sol
ω	porosité
d	taille des grains
C	cohésion
φ	angle de frottement interne
f	coefficient de frottement
e_o	largeur du jet dans l'air
Π	pression d'arrêt du jet
ρ	masse volumique de l'eau
η	viscosité dynamique de l'eau
V	vitesse de balayage
α	angle de la tangente au fond avec l'horizontale $\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant 0\right)$

L'énergie volumique de découpage (souvent appelée énergie spécifique) est par définition le quotient de la puissance cinétique du jet par le volume déblayé par unité de temps. Cette grandeur dont l'intérêt technologique est évident, puisqu'elle mesure en quelque sorte l'efficacité du mode de découpage adopté, a les dimensions d'une contrainte.

Montrons que E_S a bien l'expression proposée : on a vu que la puissance cinétique d'un jet (flux d'énergie cinétique à travers une section droite du jet) est :

$$P = Q_V \Pi \qquad (Q_V \text{ débit volumique})$$

soit par unité de largeur : $P/L = e_o w_o \Pi$ où $w_o = \sqrt{\frac{2\Pi}{\rho}}$.

Le volume déblayé devient par unité de largeur la surface balayée S d'où :

$$E_S = \frac{P/L}{S} = \frac{e_o w_o \Pi}{kV}$$

et la formule annoncée.

Nous allons tracer l'allure des courbes obtenues pour les différentes grandeurs calculées.

Notons cependant dès à présent que les pressions exigées à la surface peuvent être très importantes lorsque les vitesses de balayage (V) sont assez grandes par rapport à la vitesse intrinsèque du sol (V_I). Les valeurs maximales sont atteintes au voisinage du bord d'attaque (voir la formule donnant la pression P le long de la surface de découpage) où :

$$P = \frac{C}{f}\left(1 + \frac{V}{V_I}\right)$$

Or, on sait que la pression dans un jet est toujours majorée par la pression d'arrêt χ :

$$P \leqslant \chi$$

d'où une conséquence importante pour le modèle :

si $\chi < \frac{C}{f}\left(1 + \frac{V}{V_I}\right)$, le jet ne creuse pas.

Il existe donc une pression d'arrêt critique (à vitesse de balayage fixée) χ_c au-dessous de laquelle le sol n'est pas entamé d'après le modèle et une vitesse de balayage critique (à pression d'arrêt fixée) V_c au-dessus de laquelle le jet ne creuse pas et :

$\chi_c \# \frac{C}{f}\left(1 + \frac{V}{V_I}\right)$	pression d'arrêt critique
$V_c \# V_I\left(\frac{\chi f}{C} - 1\right)$	vitesse de balayage critique

3 - ALLURE DU PHENOMENE

En gardant présent à l'esprit le fait que les résultats sont la conséquence de nombreuses approximations, on peut détailler les formules obtenues.

a) Efforts sur la surface de découpage

Ecrivons le cisaillement à la surface en fonction de l'angle α :

$$\tau = C + \frac{\eta \omega d \, tg\varphi \, V}{k} (-\sin\alpha)$$

Il est maximal au bord d'attaque et diminue ensuite pour se réduire à la cohésion à la fin de la surface de découpage (on a vu qu'on posait $\tau \simeq 0$ au fond de la tranchée déjà creusée) (figure III3).

Le cisaillement à exercer augmente lorsque la perméabilité intrinsèque diminue (k) : il est plus facile d'entamer un matériau très perméable où l'eau s'infiltre facilement qu'un matériau à peu près imperméable. On voit d'ailleurs que, comme bien souvent, la quantité importante n'est pas la perméabilité intrinsèque k mais le rapport k/ω où ω est la porosité : c'est naturel car le champ $\vec{u}_e$ (champ de vitesse réelle moyenne de l'eau) a une signification physique, comme moyenne du champ de vitesse microscopique de l'eau lorsqu'elle est incompressible, que n'a pas le champ de vitesse apparente $\vec{U}$ qui fait intervenir k seulement.

Le cisaillement est en outre une fonction croissante de la cohésion et de l'angle de frottement interne ; il augmente avec la taille des grains (rugosité) et la viscosité du fluide (24) et doit être d'autant plus important que la vitesse de balayage choisie est plus élevée (figure III4).

(24) *il ne s'agit pas là d'une condition liée à l'écoulement extérieur, puisqu'il est turbulent, mais à l'infiltration comme il est facile de s'en rendre compte.*

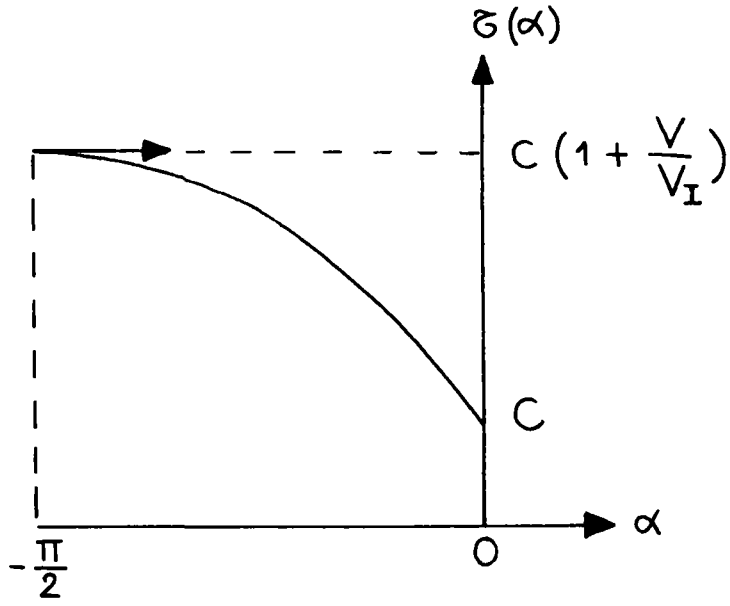


Figure III-3 : Cisaillement sur la surface de découpage en fonction de l'angle de la tangente à cette surface avec l'horizontale. ($\alpha = 0$ correspond à la fin de la surface de découpage)

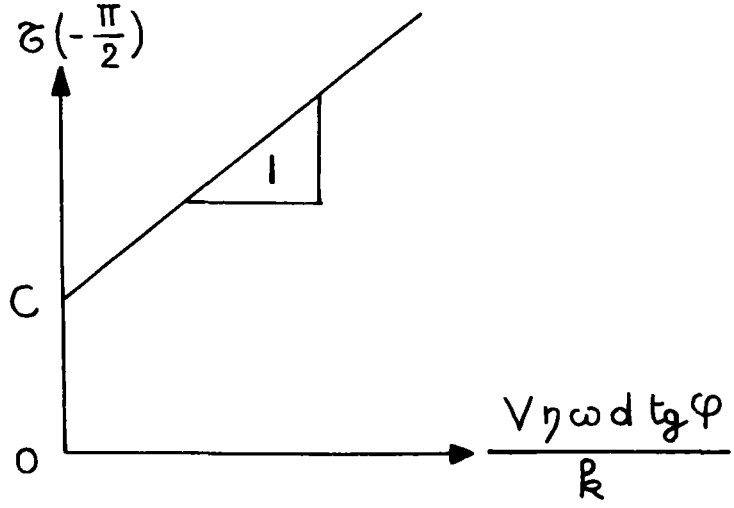


Figure III-4 : Cisaillement au bord d'attaque en fonction de $\frac{V\eta\omega d.tg\varphi}{k}$ *:*
c'est une droite de pente unité.

On retient schématiquement :

$$d\nearrow,\ V\nearrow,\ C\nearrow,\ \varphi\nearrow,\ \eta\nearrow \Rightarrow \tau\nearrow$$
$$k/\omega\ \nearrow \Rightarrow \tau\searrow$$

Les mêmes remarques valent pour la pression sur la surface de découpage ; de plus, la pression à exercer par le jet augmente lorsque le coefficient de frottement f diminue. Remarquons que le coefficient f doit être évalué d'après les résultats d'expérience ; n'en ayant pas suffisamment à notre disposition, nous lui donnerons une valeur arbitraire ; on se doute que f doit plus ou moins dépendre du matériau découpé comme étant en liaison avec l'état de surface. Il est difficile d'en dire plus.

b) Forme du front de découpage

Le rayon de courbure local est proportionnel à l'épaisseur du jet et à sa pression d'arrêt et inversement proportionnel à la quantité :

$$C + \frac{\eta\omega d\,\mathrm{tg}\varphi V}{k}(-\sin\alpha)$$

déjà vue plus haut. On peut donc retenir que :

$$d\nearrow,\ V\nearrow,\ C\nearrow,\ \varphi\nearrow,\ \eta\nearrow \Rightarrow R\searrow \qquad (25)$$
$$\frac{k}{\omega}\nearrow,\ e_0\nearrow,\ \chi\nearrow \Rightarrow R\nearrow$$

Il est intéressant de représenter (figure III 5) l'allure du front de découpage pour différentes vitesses de balayage V, tous les autres paramètres étant fixés. Il est facile de voir que, aux faibles valeurs du rapport de la vitesse de balayage à la vitesse intrinsèque, les formes se ressemblent beaucoup : elles

(25) *pour f assez faible (inférieur à $\frac{2}{\pi}$ ....), le rayon $R(\alpha)$ est une fonction croissante de f, pour tout α .*

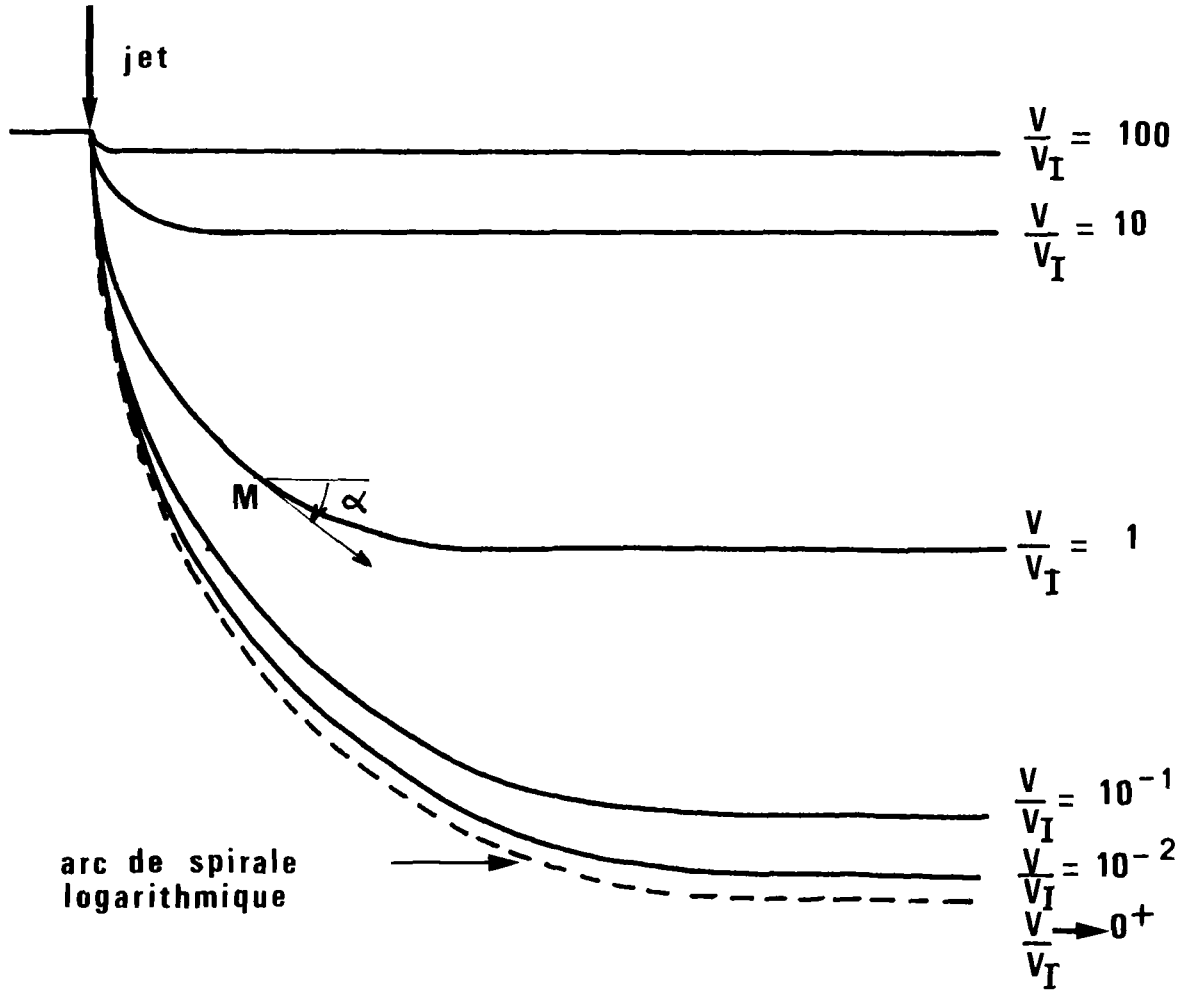


Figure III-5 : Allure du front de découpage en fonction de la vitesse de balayage V *rapportée à la vitesse intrinsèque* V_I :

On a représenté pour diverses valeurs du rapport V / V_I *la forme de la tranchée obtenue, en unités arbitraires (et avec* f *fixé à 0,5) : pour un sol donné le graphique donne les profondeurs relatives des tranchées obtenues à diverses vitesses de balayage supposées inférieures à la vitesse de balayage critique, tous les autres paramètres étant fixés.*

diffèrent peu d'un arc de spirale logarithmique qui est la forme limite lorsque la vitesse de balayage tend vers zéro. Les différences s'accusent lorsque la vitesse de balayage augmente, surtout au voisinage du bord d'attaque, ce que montre l'équation du rayon de courbure. Passée une certaine vitesse, le jet ne creuse plus que faiblement (ou plus du tout si on dépasse la vitesse critique).

c) Profondeur de la tranchée et surface balayée

La profondeur h de la tranchée et la surface balayée $\mathcal{S}$ sont proportionnelles à la largeur du jet et à sa pression d'arrêt (figure III 7), lorsqu'elle est supérieure à la pression d'arrêt critique.

Pour évaluer les variations avec la vitesse de balayage, il est pratique de tracer (figure III 6) les fonctions sans dimensions déjà introduites :

$\mathcal{H}\left(f, \frac{V}{V_I}\right)$	profondeur adimensionnelle
$\mathcal{S}\left(f, \frac{V}{V_I}\right)$	surface balayée adimensionnelle

dont les expressions sont connues.

Aux faibles vitesses de balayage (par rapport à la vitesse intrinsèque) la profondeur de la tranchée est maximale et à peu près constante (intégration de l'arc de spirale logarithmique) et la surface balayée très faible. En augmentant la vitesse de balayage (tout en restant au-dessous de la vitesse critique) la profondeur de la tranchée décroît jusqu'à être inversement proportionnelle à la vitesse de balayage, tandis que la surface balayée croît sans arrêt en tendant vers une valeur limite pour V/V_I infini.

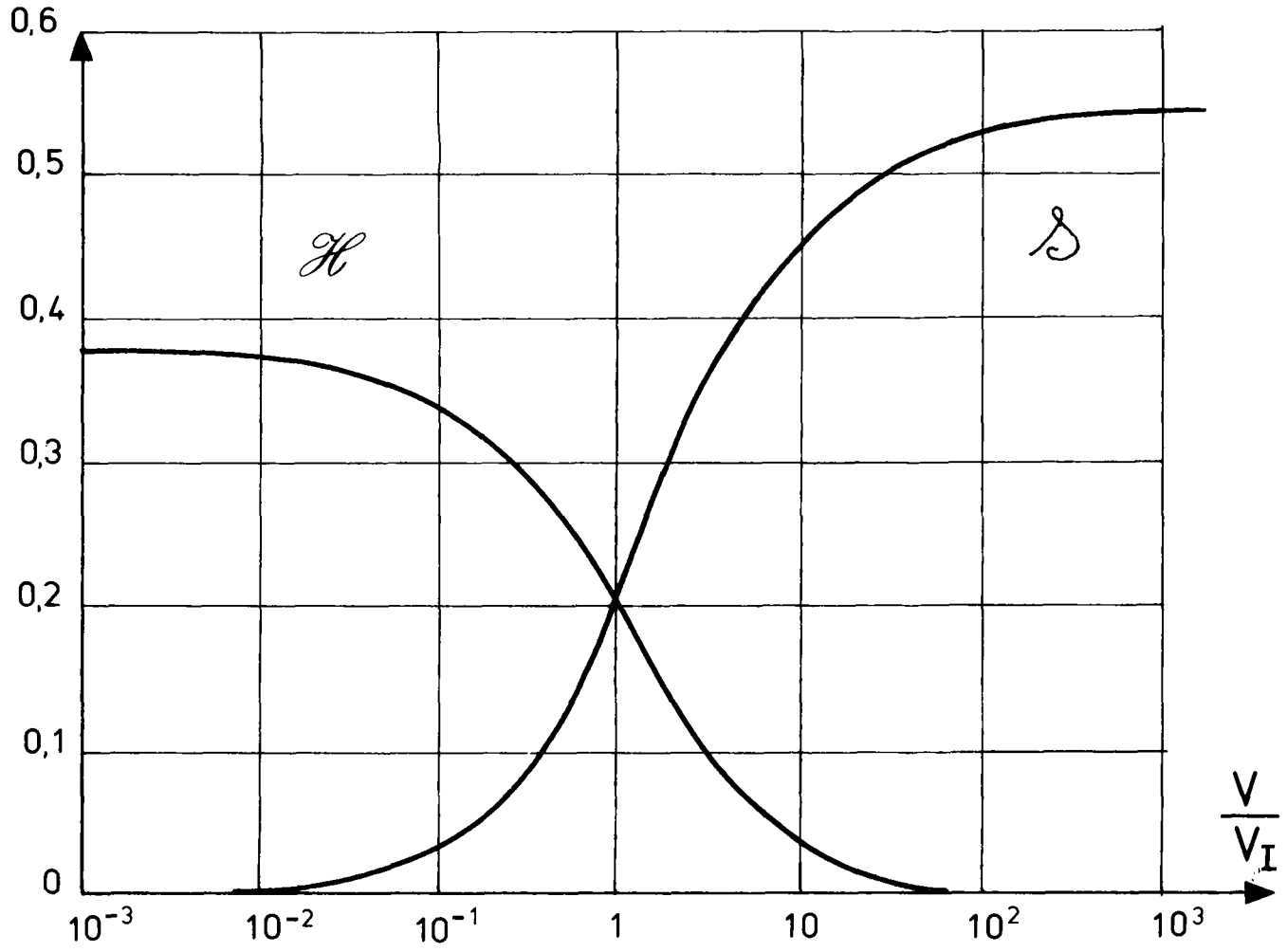


Figure III-6 : Profondeur dimensionnelle $\mathscr{H}$ et surface balayée adimensionnelle $\mathscr{S}$ en fonction de la vitesse de balayage adimensionnelle V/V_I (pour $f = 0,5$).

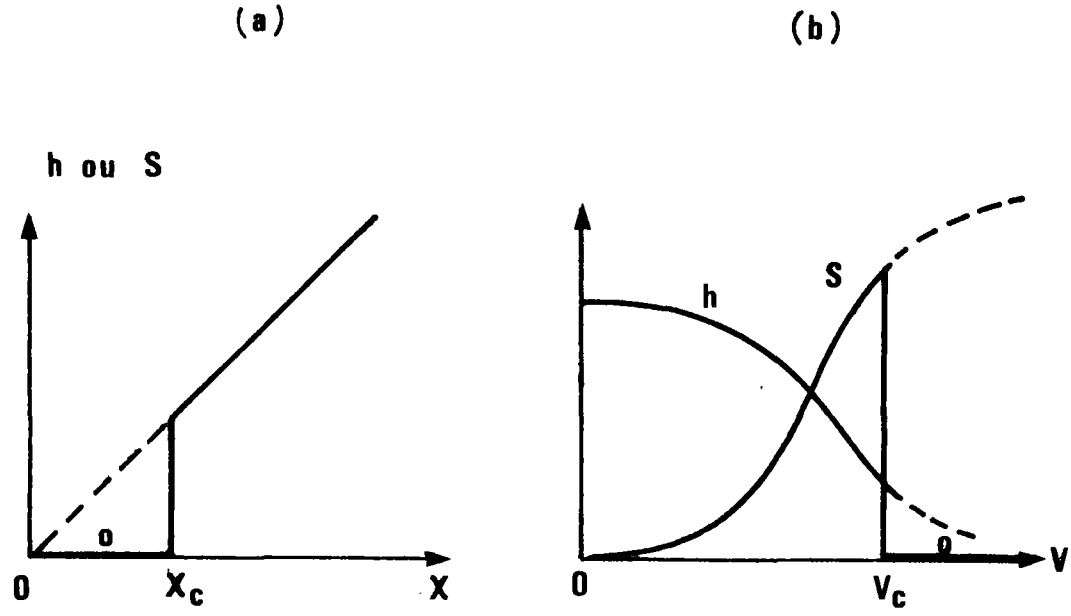


Figure III-7 : Profondeur h *de la tranchée et surface balayée* S *pour un sol donné et une buse fixée :*

a - en fonction de la pression d'arrêt du jet X *(ou de la pression* P_r *) à vitesse de balayage* V *fixée.*

b - en fonction de la vitesse de balayage V *, à pression d'arrêt du jet* X *fixée.*

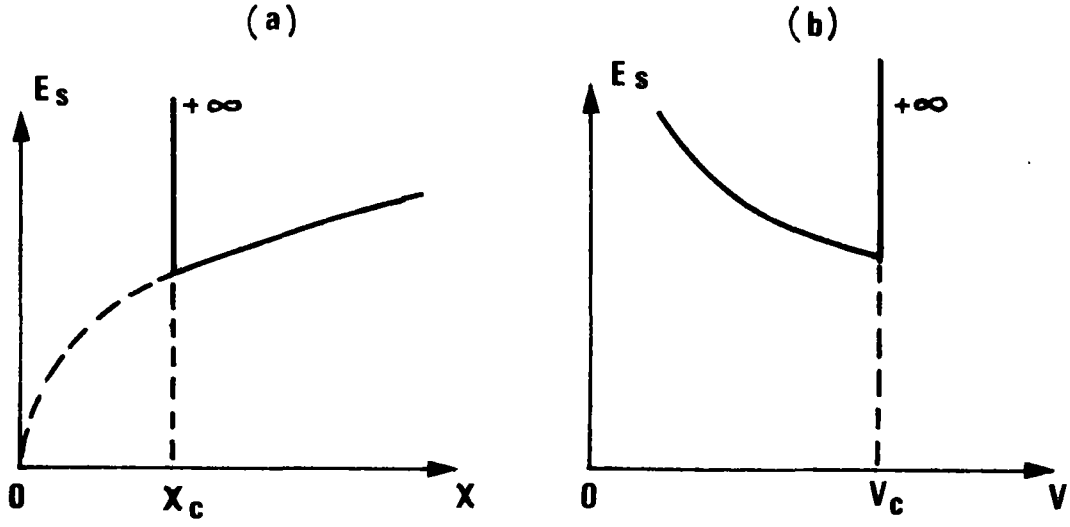


Figure III-8 : Energie volumique de découpage d'un sol : les cas (a) et (b) correspondent à ceux de la figure précédente.

L'étude montre que la profondeur de la tranchée et la surface balayée sont bien des fonctions décroissantes de la cohésion, tous les autres paramètres étant fixés. Cependant aux grandes vitesses de balayage elles n'en dépendent pratiquement plus, sous réserve que le jet creuse encore, c'est-à-dire que la vitesse critique ne soit pas dépassée : les courbes de $\mathcal{H}$ et de $\mathcal{S}$ sont en effet à arrêter, pour chaque problème particulier, à la vitesse de balayage critique V_c :

$$V_c \# V_I \cdot \left(\frac{\chi f}{C} - 1 \right)$$

Pour des essais "courants" le rapport V_c / V_I est assez grand devant l'unité mais nullement énorme (pour fixer les idées en prenant $f \simeq 0{,}5$ $C \# 10^5$ Pa et $\chi \# 20$ MPa, V_c/V_I est de l'ordre de grandeur de 100).

Il est intéressant d'étudier mathématiquement plus en détail, sans se préoccuper de sa signification physique pour le moment, la fonction $\mathcal{H}\left(f, \frac{V}{V_I}\right)$ $\left(f>0, \frac{V}{V_I}>0\right)$, le comportement de la fonction $\mathcal{S}\left(f, \frac{V}{V_I}\right)$ s'en déduisant, compte tenu de :

$$\mathcal{S}\left(f, \frac{V}{V_I}\right) = \frac{V}{V_I} \cdot \mathcal{H}\left(f, \frac{V}{V_I}\right)$$

On a par définition :

$$\mathcal{H}\left(f, \frac{V}{V_I}\right) = f \cdot e^{-f\frac{\pi}{2}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\lambda \cdot e^{f\lambda} \cdot d\lambda}{1 + \left(\frac{V}{V_I}\right)\sin\lambda} > 0$$

ou :

$$\mathcal{H}\left(f, \frac{V}{V_I}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\mu \cdot e^{-f\mu} \cdot f\,d\mu}{1 + \left(\frac{V}{V_I}\right)\cos\mu}$$

$$\left(\mu = \frac{\pi}{2} - \lambda = \frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

d'où lorsque

$$\frac{V}{V_I} \to 0 \quad , \quad \mathcal{H} \simeq \Psi_1(f) = \frac{f}{1+f^2}\left(f + e^{-f\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$\frac{V}{V_I} \to +\infty \quad , \quad \mathcal{H} \simeq \frac{\Psi_2(f)}{\frac{V}{V_I}} \quad \text{avec} \quad \Psi_2(f) = 1 - e^{-f\frac{\pi}{2}}$$

et $\mathcal{H}$ une fonction strictement décroissante de V/V_I.

Lorsque f tend vers zéro, $\mathcal{H}$ tend vers zéro pour toute valeur de $\frac{V}{V_I}$:

$$\lim_{f \to 0^+} \mathcal{H}\left(f, \frac{V}{V_I}\right) = 0$$

Une intégration par parties fournit ensuite :

$$\mathcal{H}\left(f, \frac{V}{V_I}\right) = \frac{1}{1 + \frac{V}{V_I}} - \mathcal{J}\left(f, \frac{V}{V_I}\right) \quad \text{et :}$$

$$0 \leqslant \mathcal{J}\left(f, \frac{V}{V_I}\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\mu \cdot e^{-f\mu} \cdot d\mu}{\left(1 + \frac{V}{V_I}\cos\mu\right)^2} < \Psi_3(f) = \frac{1 - e^{-f\frac{\pi}{2}}}{f}$$

soit, comme $\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial f} < 0$ et $\lim_{f \to +\infty} \Psi_3(f) = 0$:

$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f} > 0$: $\mathcal{H}$ fonction croissante de f

$\lim_{f \to +\infty} \mathcal{H}\left(f, \frac{V}{V_I}\right) = \frac{1}{1 + \frac{V}{V_I}}$: $\mathcal{H}$ admet une limite finie lorsque f tend vers l'infini

(figure III 9)

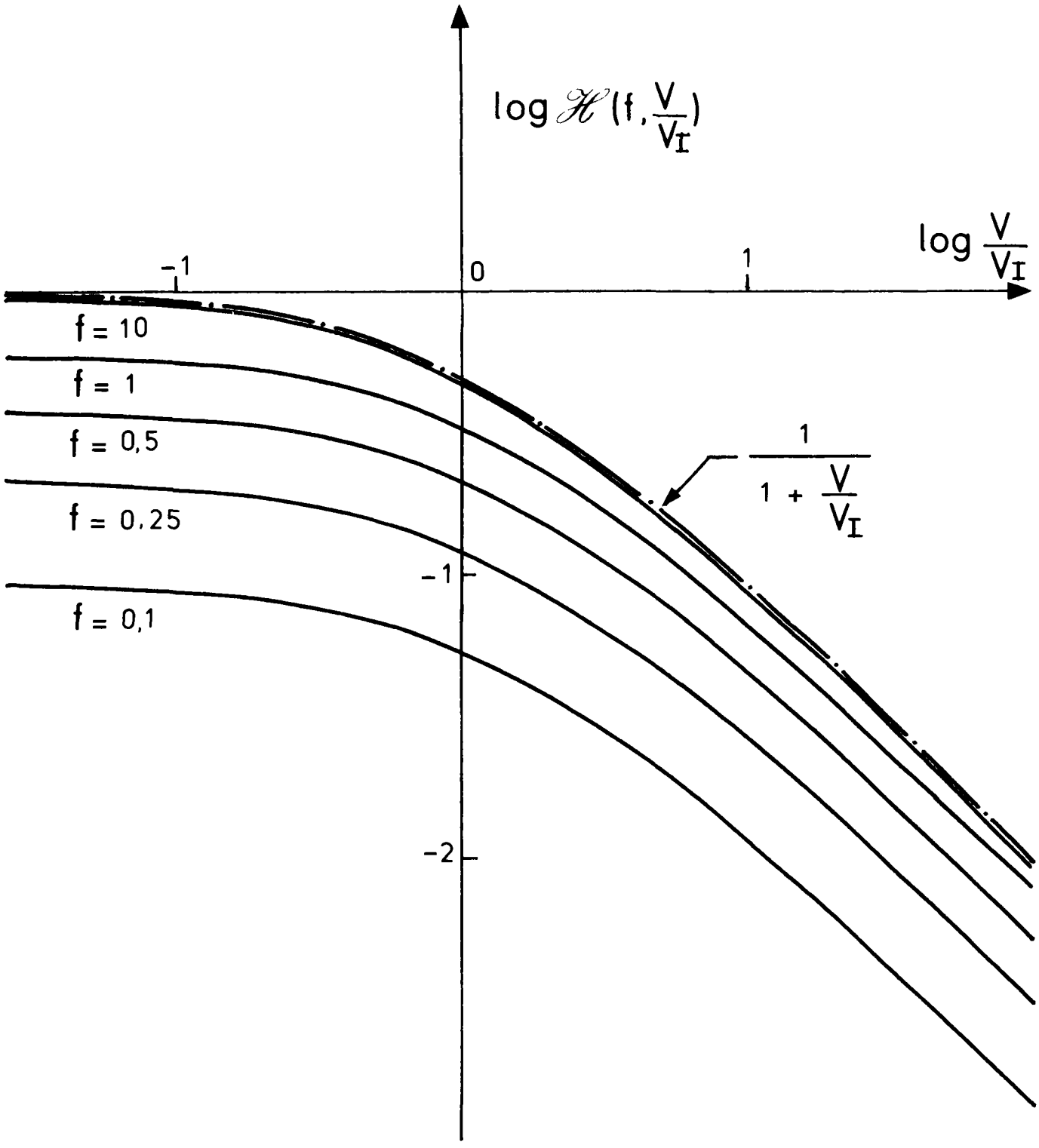


Figure III-9 : Profondeur adimensionnelle $\mathscr{H}(f, \frac{V}{V_I})$ *en fonction de la vitesse de balayage adimensionnelle* V/V_I *pour différentes valeurs du coefficient de frottement équivalent* f *, en coordonnées bilogarithmiques.*

Ce dernier résultat montre qu'au delà d'une certaine valeur de f , il importe peu de connaître ce paramètre avec précision. On a d'ailleurs pour tout f positif :

$$0 < \frac{\partial \mathcal{H} / \mathcal{H}}{\partial f / f} < 1$$

(En effet $\mathcal{H}$ est une fonction croissante de f et on peut écrire :

$$\mathcal{H} = f . e^{-f\frac{\pi}{2}} . \mathcal{J}\left(\frac{\pi}{2}, f, \frac{V}{V_I}\right) ,$$

la fonction $\mathcal{J}\left(\theta, f, \frac{V}{V_I}\right) = \int_0^\theta \frac{\sin\lambda . e^{f\lambda} . d\lambda}{1 + \frac{V}{V_I}\sin\lambda} > 0$ vérifiant :

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial f}\left(\theta, f, \frac{V}{V_I}\right) = \theta\, \mathcal{J}\left(\theta, f, \frac{V}{V_I}\right) - \int_0^\theta \mathcal{J}\left(\eta, f, \frac{V}{V_I}\right) d\eta$$

d'où : $$\frac{\partial \mathcal{H} / \mathcal{H}}{\partial f / f} = 1 - \frac{f}{\mathcal{J}\left(\frac{\pi}{2}, f, \frac{V}{V_I}\right)} \cdot \int_0^{\pi/2} \mathcal{J}\left(\eta, f, \frac{V}{V_I}\right) d\eta < 1$$)

Considérons alors la fonction :

avec
$$\mathcal{H}'\left(f, \frac{V}{V_I}\right) = \frac{\Psi_1(f)}{1 + \Psi_0(f)\frac{V}{V_I}} > 0$$
$$\Psi_0(f) = \frac{\Psi_1(f)}{\Psi_2(f)}$$

On montre aisément que la fonction $\mathcal{H}'$ a un comportement voisin de celui de $\mathcal{H}$ ($\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial\left(\frac{V}{V_I}\right)} < 0$, $\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial f} > 0$, $\mathcal{H}' \simeq \Psi_1(f)$ lorsque $\frac{V}{V_I} \to 0+$, $\mathcal{H}' \simeq \frac{\Psi_2(f)}{V/V_I}$ lorsque $\frac{V}{V_I} \to +\infty$, $\lim_{f \to 0+} \mathcal{H}'\left(f, \frac{V}{V_I}\right) = 0$, $\lim_{f \to +\infty} \mathcal{H}'\left(f, \frac{V}{V_I}\right) = \frac{1}{1 + \frac{V}{V_I}}$)

et on observe graphiquement que pour :

$$f \geqslant 0{,}1 \quad , \quad \mathcal{H}\left(f, \frac{V}{V_I}\right) \simeq \mathcal{H}'\left(f, \frac{V}{V_I}\right) \quad \text{à 10\% près}$$

Cette approximation peut être considérée comme amplement satisfaisante et on garde :

$$f \geqslant 0{,}1 \quad : \quad \mathcal{H}\left(f, \frac{V}{V_I}\right) \simeq \frac{\Psi_1(f)}{1 + \Psi_0(f)\frac{V}{V_I}}$$

$$\Psi_1(f) = \frac{f}{1+f^2}\left(f + e^{-f\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$\Psi_0(f) = \Psi_1(f) / \Psi_2(f) \qquad \text{(figure III 10)}$$

$$\Psi_2(f) = 1 - e^{-f\frac{\pi}{2}}$$

d) Energie volumique de découpage

Elle s'écrit :

$$E_S = \frac{\eta \omega d . tg\varphi}{k} \cdot \sqrt{\frac{\chi}{2\rho}} \cdot \frac{1}{\mathcal{S}\left(f, \frac{V}{V_I}\right)}$$

Elle est infinie lorsque le jet ne creuse pas (figure III 8) :

- vitesse de balayage supérieure à la vitesse critique
- ou pression d'arrêt du jet trop faible, inférieure à la pression d'arrêt critique.

Elle est proportionnelle à la racine carrée de la pression d'arrêt du jet et indépendante de sa section et ne dépend de la cohésion et de la vitesse de balayage que par l'intermédiaire du groupement :

$$\frac{V}{V_I}$$

Il est facile de voir que c'est une fonction décroissante de la vitesse de balayage et croissante de la cohésion, tous les autres paramètres étant fixés. Si la vitesse critique est assez élevée, cette dépendance est cependant faible aux grandes vitesses.

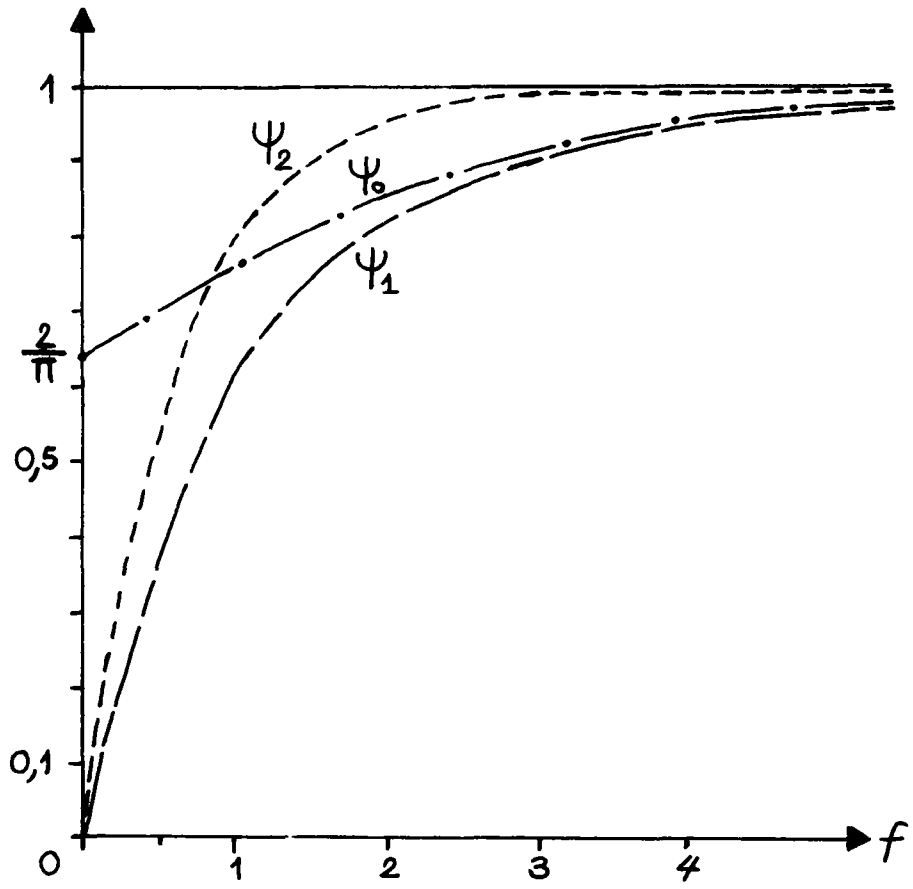


Figure III-10 : Fonctions du coefficient de frottement équivalent f intervenant dans le calcul de la valeur approchée $\mathcal{H}'$ de la fonction $\mathcal{H}(f, V/V_I)$:

$$\begin{cases} \Psi_0(f) = \Psi_1(f) / \Psi_2(f) \\ \Psi_1(f) = \dfrac{f}{1+f^2} \cdot \left(f + e^{-f\frac{\pi}{2}} \right) \\ \Psi_2(f) = 1 - e^{-f\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

On a facilement :

$$\frac{\chi}{\rho} \nearrow \Rightarrow E_s \nearrow$$

$$V \nearrow \Rightarrow E_s \searrow$$

$$\varphi \nearrow, C \nearrow, d \nearrow, \eta \nearrow \Rightarrow E_s \nearrow$$

$$\frac{k}{\omega} \nearrow \Rightarrow E_s \searrow$$

Il est possible de chercher une signification physique, dans le cadre du modèle, à ces diverses implications, qui ne sont pas toutes intuitives.

Les deux premières indiquent grossièrement que le rendement (qualifié ici par l'énergie volumique de découpage) est meilleur lorsqu'on utilise des jets à faible pression en balayant rapidement le sol : ce n'était pas évident a priori. Il reste qu'on est limité par l'existence des valeurs critiques.

Il est par contre naturel que l'énergie requise pour le découpage augmente en même temps que la cohésion et l'angle de frottement interne.

On peut se dire également que plus les grains sont gros ("taille" d à définir de façon plus précise sur un sol réel) plus la surface de rupture est, de manière toute relative, profonde, ce qui justifie l'augmentation de l'énergie volumique de découpage.

L'explication de l'influence du rapport k/ω et de la viscosité dynamique η (26) (il faut pour cela, imaginer ici de découper avec un autre liquide que l'eau), en dehors des considérations sur

(26) *on a vu (note 24) que cette influence est à raccorder à l'écoulement intérieur et non extérieur, pour ce modèle.*

le gradient de pression, me semble liée à la dissipation dans l'écoulement d'infiltration, dont on sait (MATHERON 1967) qu'elle dépend de la viscosité du fluide et de la perméabilité du sol : une augmentation de la viscosité dynamique et une diminution de la perméabilité conduiraient à augmenter l'énergie dissipée dans le sol, donc à requérir une énergie plus importante au niveau du jet pour arracher une quantité de sol donnée.

e) Tableau d'influence des paramètres

L'influence des divers paramètres du modèle sur les résultats de découpage peut être résumée dans le tableau suivant qui reprend l'essentiel des indications précédentes mais où on a remplacé la pression d'arrêt Π par sa valeur en fonction de P_r et $\mathcal{E}$ et la largeur du jet e_o par le diamètre $D = \sqrt{m}.D_s$ du jet (D_s diamètre de sortie de la buse) :

	m	$\mathcal{E}$	D_s	P_r	V	C	φ	$\frac{k}{\omega}$	d	η
V_I	o	o	o	o	o	+	−	+	−	−
V_c	o	−	o	+	o	−	−	+	−	−
Π_c	o	o	o	o	+	+	+	−	+	+
h	+	−	+	+	−	−	−	+	−	−
S	+	−	+	+	+	−	−	+	−	−
E_s	o	−	o	+	−	+	+	−	+	+

\+ indique une fonction croissante

− indique une fonction décroissante

o indique l'absence d'influence

Notons que pour l'énergie volumique de découpage E_s ce n'est pas en fait P_r qui intervient mais le rapport P_r/ρ (ρ masse volumique du liquide utilisé dans le jet).

Nous allons devoir maintenant vérifier les hypothèses faites pour la résolution, tester le modèle de jet choisi, puis enfin comparer les prévision du modèle à l'expérience, sous réserve de disposer d'assez d'informations pour ce faire.

B - VERIFICATION DES HYPOTHESES

Il faut d'abord voir sous quelles conditions les résultats du modèle de découpage sont en accord avec les hypothèses faites. On verra qu'il y a en effet des cas où il peut y avoir contradiction dans la partie C.

Une étude succinte des caractéristiques des jets obtenus à l'aide d'un dispositif expérimental décrit suit.

Les renseignements fournis permettent enfin de tester la validité des hypothèses simplificatrices admises pour le jet.

On notera que certaines hypothèses sont difficilement vérifiables ou obligatoirement très approximatives.

1 - HYPOTHESES SUR LE DECOUPAGE

Elles sont de deux natures : géométrique et mécanique.

Nous avons tout d'abord supposé que l'épaisseur du jet était grande devant la taille des grains et petite devant le rayon de courbure de la surface de découpage : nous ne vérifierons cette deuxième affirmation que dans la section d'entrée (bord d'attaque) faute d'une étude hydraulique complète.

L'épaisseur de la zone mouillée a été admise petite devant le rayon de courbure de la surface de découpage mais supérieure à la taille des grains.

Nous avons d'autre part négligé au voisinage de la surface de découpage les dérivées le long de la surface par rapport aux dérivées normales, en particulier pour la pression (d'où la modi-

fication du critère de rupture de Coulomb-Hvorslev), et admis qu'on pouvait ne pas tenir compte des effets de compressibilité du sol.

On doit enfin vérifier la validité de la loi de Darcy.

Il faut ainsi avoir : (7 conditions)

$$d \ll e_0 \ll R$$

$$d < e' \ll R$$

$$\left|\frac{\partial p}{\partial s}\right| \ll \left|\frac{\partial p}{\partial n}\right| \quad \text{sur } \mathcal{C}$$

$$(1-2\nu)\,\frac{\eta V e'}{k E} \ll 1$$

$$\mathcal{R}_{sol} = \frac{\omega V \sqrt{k}\,\rho_e}{\eta} < 10 \qquad (27)$$

On obtient aisément les ordres de grandeurs suivants :

$$R \# 2e_0 \cdot \frac{\chi}{C} \cdot \frac{f}{1 + \frac{V}{V_I}}$$

$$e' \# \frac{P(s)\,k}{\eta \omega V} \quad (\text{déjà vu})$$

$$P(s) \# \frac{C}{f} \cdot \left(1 + \frac{V}{V_I}\right)$$

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{dP}{ds} \# \frac{1}{2e_0 \chi} \cdot \frac{C^2}{f^2} \cdot \frac{V}{V_I} \cdot \left(1 + \frac{V}{V_I}\right)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} \# \frac{\eta \omega V}{k}$$

(27) *en prenant pour vitesse apparente de l'eau par rapport au sol* ωV *comme grandeur caractéristique.*

La condition $\left|\frac{\partial p}{\partial \delta}\right| \ll \left|\frac{\partial p}{\partial n}\right|$ est alors toujours réalisée dès lors que $e' \ll R$. Il peut être pratique d'introduire les quantités sans dimension :

$$\left|\begin{array}{l} \Pi_1 = \dfrac{d}{2e_o} \\ \Pi_2 = \dfrac{C}{\pi} \\ \Pi_3 = \dfrac{1-2\nu}{\omega} \cdot \dfrac{C}{E} \\ \Pi_4 = \dfrac{\eta \omega dV}{k C} = \dfrac{1}{tg\varphi} \cdot \dfrac{V}{V_I} \\ \Pi_5 = \dfrac{1}{f}\left(tg\varphi + \dfrac{kC}{\eta \omega dV}\right) = \dfrac{tg\varphi}{f} \cdot \left(1 + \dfrac{V_I}{V}\right) \end{array}\right.$$

d'où les conditions restantes : (6 conditions)

$$\frac{d}{2e_o} = \Pi_1 \ll 1$$

$$\frac{e_o}{R} \# \Pi_2 \Pi_4 \Pi_5 \ll 1$$

$$\frac{e'}{d} \# \Pi_5 > 1$$

$$\frac{e'}{R} \# \Pi_1 \Pi_2 \Pi_4 \Pi_5^2 \ll 1$$

$$(1-2\nu)\frac{2V e'}{k E} \# \Pi_3 \Pi_4 \Pi_5 \ll 1$$

$$\mathcal{R}_{sol} = \frac{\omega V \sqrt{k} \cdot Pe}{\eta} < 10$$

en dehors desquelles on ne peut faire confiance au modèle que très qualitativement.

2 - JETS UTILISES

Il s'agit de jets à section circulaire (les seuls utilisables pratiquement en raison des instabilités des autres sections, et les seuls pour lesquels on trouve dans le commerce des buses) obtenus grâce à un multiplicateur dynamique de pression SCHMIDT + KRANZ à double effet, de rapport 59. La source de basse pression est l'air comprimé du réseau (partiellement détendu éventuellement) à environ + 0,7 MPa et le liquide comprimé à haute pression (quelques dizaines de MPa) est l'eau "courante". On utilise deux buses différentes, notées ① et ② dans la suite : l'une, la buse ① , est un simple tube cylindrique de notre fabrication, de 0,8 mm de diamètre intérieur (et aux performances médiocres), la seconde ② est fabriquée par la firme SEITZ avec des moyens de précision et a un diamètre de sortie de 0,2 mm. On visualise le signal de pression juste en amont de la buse, grâce à un capteur, sur l'écran d'un oscilloscope numérique NICOLET qui permet de conserver et d'étudier le signal.

On cherche les valeurs du nombre d'Euler $\mathcal{E}$ et du coefficient de contraction m en régime turbulent établi, ainsi qu'une évaluation de la plus ou moins grande stabilité du jet . Il est en effet indispensable de connaître $\mathcal{E}$ et m pour pouvoir calculer l'épaisseur "initiale" du jet e_0 (au voisinage du bord d'attaque) et sa pression d'arrêt Π .

a) Mesures de débit

On établit à partir du signal de pression qui est légèrement modulé (deux creux par cycle - correspondant aux changements de sens de translation du piston central -, le reste étant pratiquement plat) une pression "moyenne" à laquelle on se rapporte pour toutes les

mesures et qu'on identifie à la pression P_r du modèle continu.

On mesure le volume écoulé durant un temps fixé et on en déduit la courbe du débit volumique Q_V en fonction de la pression P_r (figure III.14).

L'égalité

$$Q_V = \frac{m}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot A_s \cdot \sqrt{\frac{P_r}{\rho}}$$

fournit alors la quantité $m/\sqrt{\varepsilon}$ en fonction de la pression.

On trouve que, aux incertitudes de mesures près, le débit est proportionnel à la racine carrée de la pression dans un intervalle assez large (environ 2 à 30 MPa) soit :

$$\frac{m}{\sqrt{\varepsilon}} = \text{cte} \quad \text{(à moins de 5\% près)}$$

pour une buse donnée.

b) Mesures de forces

Considérons une veine fluide (jet) en régime permanent abordant une plaque plane (ou un obstacle plan de dimensions grandes devant le diamètre du jet) placée perpendiculairement à la direction moyenne du jet (MANDEL 1966). On suppose que, suffisamment à l'amont de l'obstacle, les filets moyens sont parallèles et de même vitesse w (la pression dans le jet est alors à peu près constante et égale, aux effets de tension superficielle près, à la pression atmosphérique extérieure, nulle d'après nos conventions) et que la vitesse de sortie v est tangentielle à l'obstacle plan (figure III-11).

L'application du théorème d'Euler en projection sur l'axe du jet à un domaine fixe fluide assez grand autour du point d'impact, limité par une section d'entrée où la vitesse est $\overline{w}$ est une section de sortie définie comme ci-dessus, fournit en incidence normale (sous réserve de négliger les cisaillements sur les sections de sortie) la valeur de la force totale exercée par le jet sur l'obstacle :

$$\overline{F} = Q_m w \overline{z} \quad (\overline{z} \text{ axe du jet, } Q_m \text{ débit massique})$$
$$= F \overline{z}$$

soit :
$$F = \frac{m}{g} \cdot A_s P_r \cdot \frac{A_*}{A}$$

Le dispositif de mesure utilisé (figure III 12) évalue la somme des efforts exercés sur un plateau de balance électronique sur lequel on projette le jet. Un bécher spécial est interposé pour éviter d'inonder la balance ; il comporte un système d'évacuation de l'eau sur le côté qui permet d'assurer un régime permanent. Outre la tare solide connue les efforts comprennent la force F et le poids F_o d'eau dans le dispositif. On évalue $F + F_o$ après avoir mesuré F_o en faisant se briser le jet sur l'obstacle tenu légèrement au-dessus du fond du bécher.

Cette méthode fruste fournit tout d'abord pour le matérial utilisé la fonction $F_o\,(Q_V)$ qui apparaît à peu de choses près comme linéaire, puis par différence la force sur l'obstacle F . (figures III 13 et III 14)

On constate alors que dans un intervalle assez large (pour des distances de la buse à l'obstacle comprises entre 20 et 200 mm) la force est constante ou presque, d'où

$$A \simeq A_* \quad , \quad w \simeq w_*$$

et la stabilité latérale semble satisfaisante.

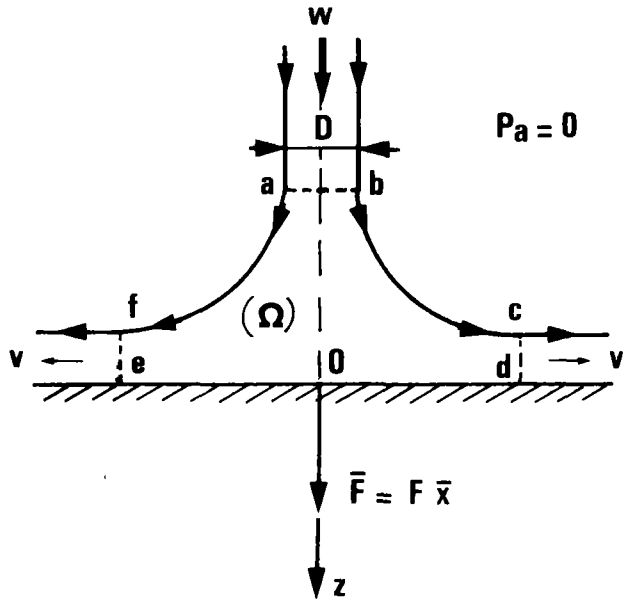


Figure III-11 : Force totale exercée par un jet sur un obstacle plan (le domaine fixe Ω est délimité par l'obstacle, l'extérieur du jet et les sections ab, cd et ef), en incidence normale.

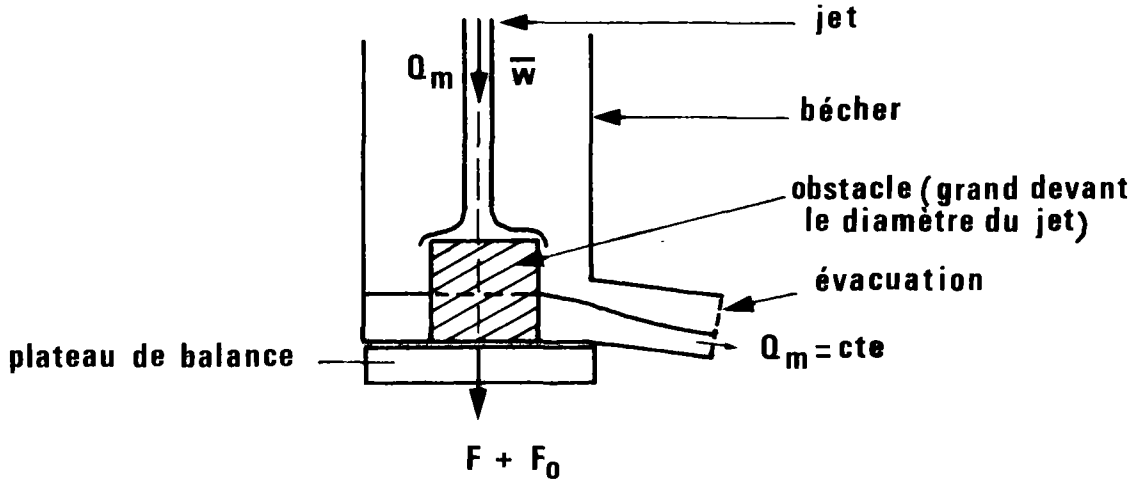


Figure III-12 : Mesure de la force exercée F par le jet en régime permanent sur l'obstacle. (outre la tare solide décomptée, la balance mesure la somme de F et du poids d'eau F_0 présent dans le dispositif, F_0 s'évaluant en dissociant l'obstacle du bécher)

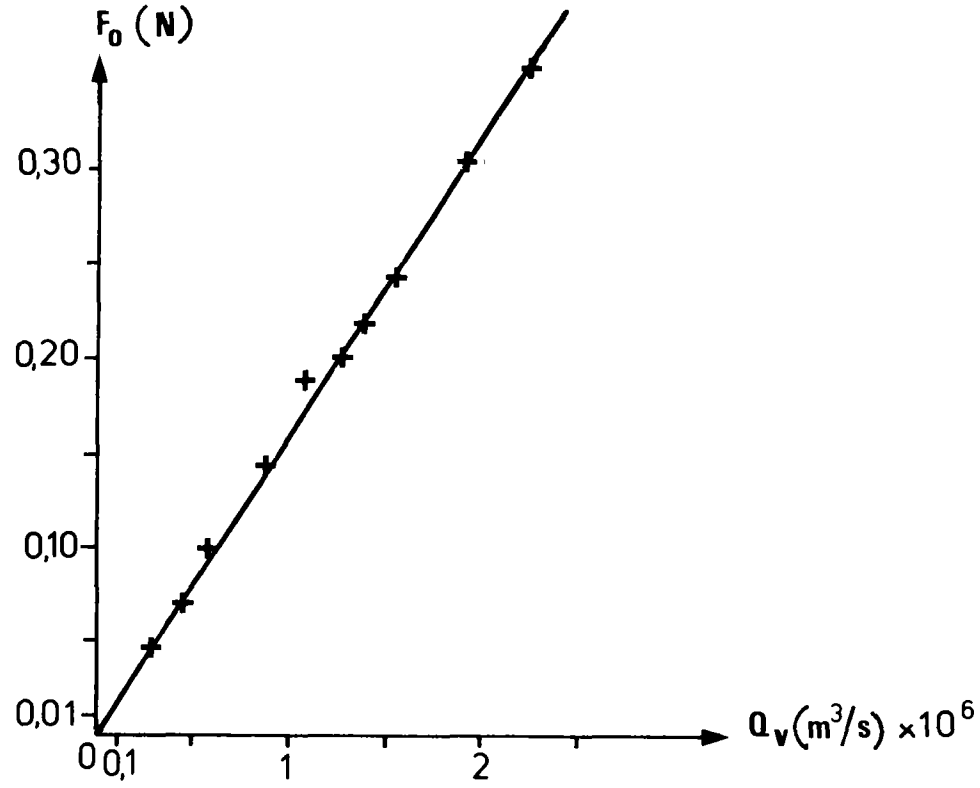


Figure III-13 : Poids d'eau dans le dispositif utilisé en fonction du débit

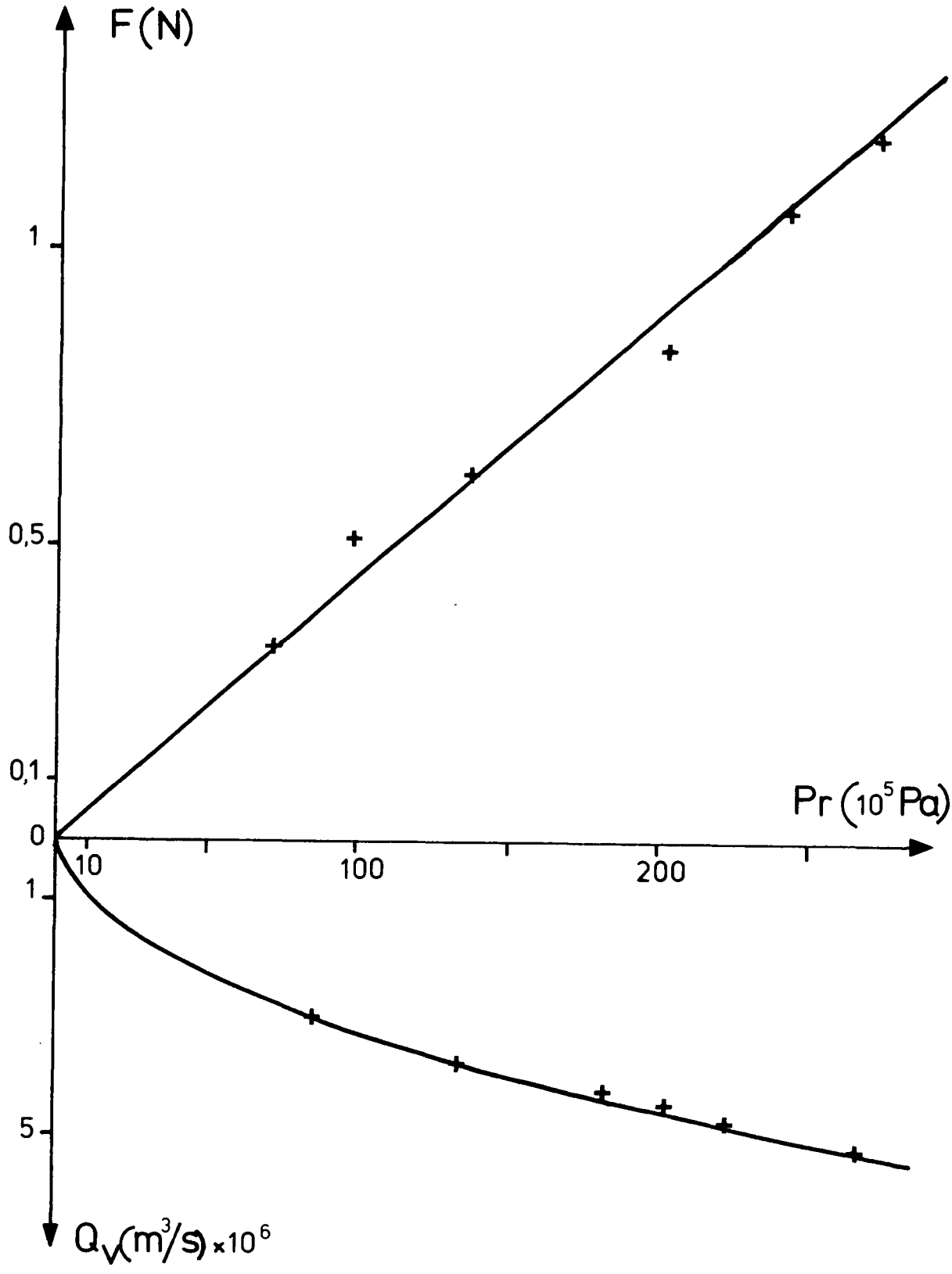


Figure III-14 : Débit du jet et force exercée sur un obstacle en fonction de la pression : exemple de la buse n° ② .

Se plaçant ensuite à une distance fixe dans cet intervalle (75 mm en l'occurence) on obtient en fonction de la pression que :

$$\frac{m}{\mathcal{E}} = cte \quad \text{(à moins de 10\% près)}$$

pour une buse donnée.

D'où dans l'intervalle de pressions utilisées pour une buse donnée :

$$\mathcal{E} = cte, \quad m = cte$$

Les valeurs obtenues sont :

buse numéro	①	②
diamètre de sortie D_s (mm)	0,8	0,2
nombre d'Euler $\mathcal{E}$	1,60	0,52
coefficient de contraction m	0,40	0,74

La buse SEITZ a ainsi comme on pouvait s'en douter un bien meilleur comportement que l'autre :

- faible nombre d'Euler se rapprochant de 1/2
- coefficient de contraction élevé, plus proche de 1.

Remarquons qu'il n'était pas a priori évident qu'on trouverait pour $\mathcal{E}$ et m des constantes en fonction du nombre de Reynolds (ou de la pression). Les calculs existants pour m supposent un fluide parfait (alors $\mathcal{E} = 1/2$) en écoulement laminaire (MANDEL 1966): ils donnent bien une valeur constante quelle que soit la pression mais avec des hypothèses tout à fait différentes ! Par contre les formules de pertes de charge dans les conduites en régime turbulent suggèrent bien : $\mathcal{E} = cte$, mais seulement pour une conduite "fermée".

3 - NOMBRES ADIMENSIONNELS DU JET

- Les restrictions sur $\mathcal{E}$ et m $\left(\mathcal{E} \geqslant \frac{1}{2}\ ,\ m < 1\right)$ sont vérifiées.

- Le régime est turbulent (sauf à très basses pressions) :

$$\mathcal{R} = \frac{w_s D_s \rho}{\eta} = \frac{m}{\sqrt{\mathcal{E}}} \cdot \frac{D_s}{\eta} \cdot \sqrt{\rho P_r} > \mathcal{R}_{critique}$$

En effet : $\mathcal{R}_{critique} \# 3.10^3$ et à $P_r = 5$ MPa, pour les deux buses testées, $\mathcal{R} \# 1{,}5\ 10^4$

- La masse volumique de l'eau est à peu près constante :

$$\mathcal{M}^2 = \frac{P_r}{\rho\, a^2\, \mathcal{E}} \ll 1$$

puisque $a \simeq 1400$ m/s et qu'à $P_r = 25$ MPa et avec la buse donnant les plus grandes vitesses $\mathcal{M}^2$ n'est encore que de l'ordre de $2{,}5\ 10^{-2}$.

- Les effets de pesanteur sont négligeables aux distances utilisées :

$$\mathcal{F} = \frac{P_r}{2\rho g h_c \cdot \mathcal{E}} \gg 1$$

à $h_c = 200$ mm avec la buse ① et $P_r = 5$ MPa, $\mathcal{F}$ vaut déjà 900.

- Le jet est "quasi-continu" :

$$\mathcal{S} = \frac{D_s}{t_c} \cdot \sqrt{\frac{\rho m \mathcal{E}}{P_r}} \ll 1$$

Pour la buse ① avec $P_r = 5$ MPa, t_c étant de l'ordre de grandeur de la seconde, $\mathcal{S}$ vaut à peu près 10^{-5}.

On peut négliger les effets de tension superficielle :

$$\mathcal{W} = \frac{\sqrt{m}}{\varepsilon} \cdot \frac{D_s P_r}{\sigma} \gg 1$$

Avec $\sigma \# 8.10^{-2}$ N/m , la buse ① ou la buse ② et à $P_r = 5$ MPa , $\mathcal{W} > 10^4$. La longueur de rupture calculée est grande devant les distances considérées :

$$L_B \# D_s . \sqrt{m \mathcal{W}} . (1 + 3Z) \quad (28)$$

. soit dans les cas à peu près quelconques pour une buse de section assez grande comme la buse 1 :

à 5 MPa la formule donne $L_B \simeq 2{,}75$ m

. soit seulement aux pressions suffisamment élevées pour une buse de très faible section (buse 2) :

à 10 MPa on obtient $L_B \simeq 0{,}23$ m ici.

Il convient donc d'opérer assez près et on fait choix d'une distance voisine de 75 mm (donc le tiers de la longueur de rupture calculée à 10 MPa) dans la suite des essais, et ce pour les deux buses.

(28) $L_B \# D_s \cdot \sqrt{\frac{m D_s P_r}{\varepsilon \sigma}} \cdot \left(1 + 3\frac{2}{\sigma}\sqrt{\frac{P_r}{\rho \varepsilon}}\right)$ *en développant.*

C - COMPARAISON AVEC L'EXPERIENCE

1 - PRINCIPE DES EXPERIENCES ET DIFFICULTES

Les expériences de découpage de sols menées (figure III-15) reproduisent autant que possible des conditions du modèle théorique.

Ainsi le multiplicateur dynamique de pression fournit pour des raisons techniques un débit d'eau haute pression modulé et non continu, comme il serait souhaitable pour comparer la théorie et l'expérience de manière parfaitement satisfaisante. Cependant, l'installation fonctionne dans des conditions telles que le jet est quasi-continu $\left(S \ll 1\right)$ de sorte que la comparaison est possible. Le signal de pression est enregistré juste en amont de la buse dans une zone où la section est assez grande pour que, aux débits utilisés, la vitesse moyenne soit assez faible (29).

L'échantillon de sol à découper est placé sur un chariot mobile entraîné par un moteur électrique (treuil), à distance pas trop grande de la buse (environ 75 mm) : il est en effet techniquement plus simple dans le cas d'échantillons petits de déplacer le sol à vitesse constante que le jet. On utilise comme échantillons des cylindres de 75 mm de diamètre, donc grands devant la taille du jet, de sorte qu'un régime stationnaire puisse s'instaurer lors du découpage de la partie centrale de l'échantillon (les valeurs de profondeurs de tranchées mesurées sur les bords n'ont pas grande signification).

Les repères introduits précédemment sont évidemment liés, R_o au laboratoire et R_Ω au chariot mobile.

(29) *Plus précisément le capteur de pression, placé sur le côté de l'écoulement, enregistre* P_r *alors que le terme physiquement significatif est, comme on le sait,* $P_r + \frac{1}{2}\rho w_r^2$ (P_r *pression de l'eau,* ρ *sa masse volumique et* w_r *sa vitesse moyenne au niveau du capteur de pression). L'erreur commise est faible si:* $\frac{1}{2}\rho w_r^2 \ll P_r$ *ou, en introduisant le diamètre* D_r *dans la zone considérée, si:*

$$D_r \gg \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{\pi}} \cdot \left(\frac{\rho Q_v^2}{P_r}\right)^{1/4} ,$$

condition qui est réalisée avec l'installation utilisée.

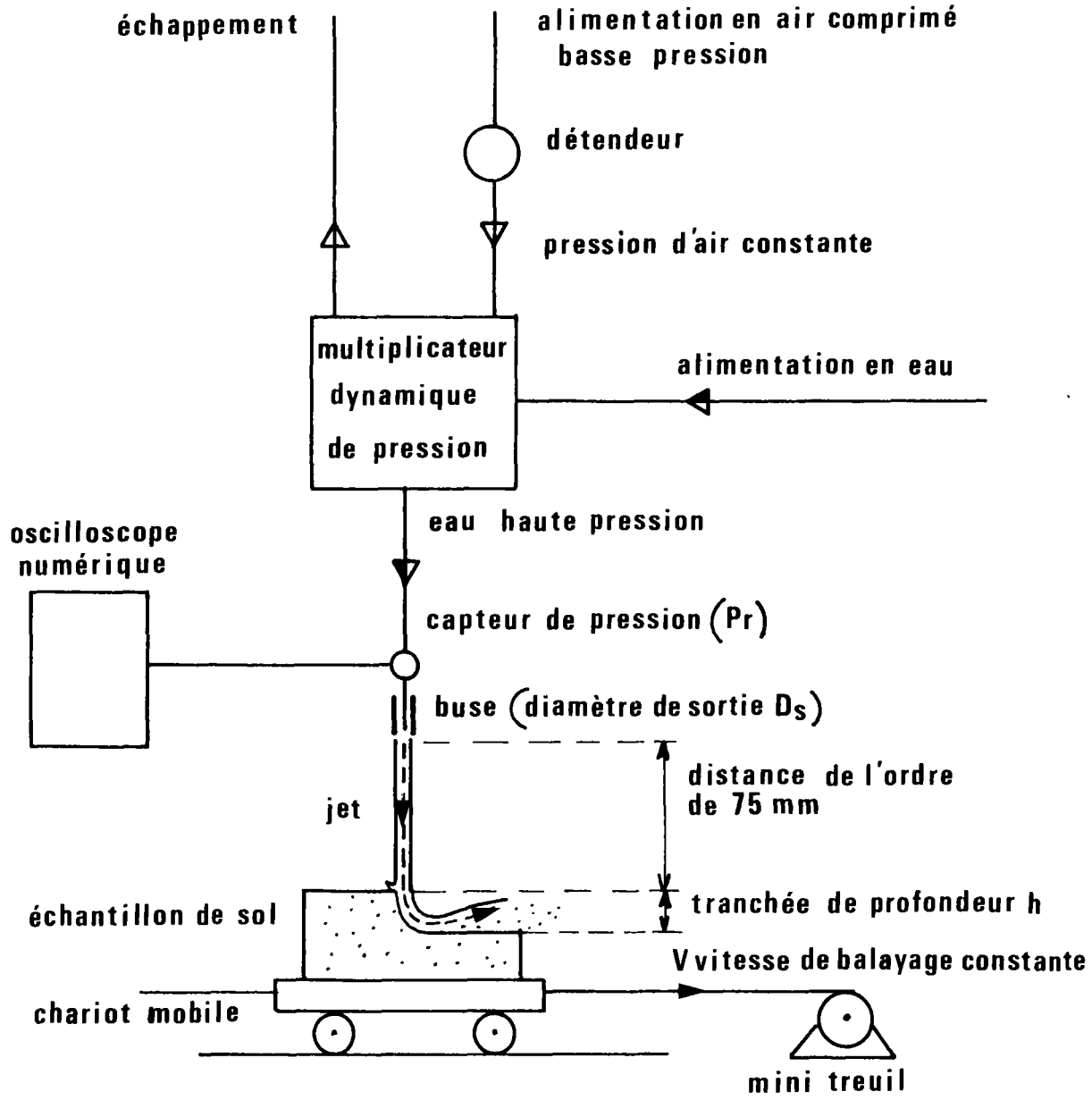


Figure III-15 : Schéma de principe des expériences de découpage.

On mesure pour un sol donné et des valeurs de la pression et de la vitesse de balayage fixées la profondeur h de la tranchée dans la partie centrale de l'échantillon. La largeur de la tranchée, quoique supérieure au diamètre du jet pour des raisons diverses, est difficilement mesurable avec précision car trop faible (elle varie de plus avec la profondeur pour donner une forme en v très fermé). On ne peut non plus évaluer avec l'installation utilisée le volume déblayé. Aussi se contente-t-on de mesurer la profondeur atteinte.

Ici apparaît une difficulté : le modèle de jet adopté concerne bien un jet à section circulaire mais le modèle de découpage est bidimensionnel (jet "plan" ou très allongé perpendiculairement à la vitesse de balayage). On postule donc l'existence d'un facteur de forme à peu près constant b permettant de passer des jets plans aux jets circulaires par :

$$h\,(\text{jet circulaire}) = b\,.\,h\,(\text{jet plan théorique})$$

$b \simeq cte$: facteur de forme

Ce type d'hypothèse, classique, se justifie si le coefficient b ne dépend effectivement pas de l'installation utilisée et des conditions d'expérience (sol, vitesse de balayage, pression ....) et n'est ni très petit ni très grand devant l'unité (on pourrait sinon supposer que les phénomènes sont assez différents dans les deux cas de figure) pour permettre la transposition.

Ceci admis, j'écris en remplaçant la largeur e_o par le diamètre D du jet et la pression d'arrêt π par sa valeur :

$$(30)\quad h = b\,\frac{\sqrt{m}}{\mathcal{E}}\cdot\frac{D_s P_r}{C}\cdot \mathcal{H}\left(f, \frac{V}{V_I}\right) \quad , V_I = \frac{k\,C}{\eta\,\omega\,d\,\mathrm{tg}\varphi},$$

$\mathcal{H}$ connue .

(30) *Signification des différents termes : voir par exemple la liste des principales notations.*

Cette formule à laquelle nous avons été conduit mérite qu'on s'y arrête quelque peu.

Tout d'abord l'influence sur la profondeur de la tranchée des différences de forme géométrique entre la théorie bidimensionnelle et l'expérience sur des jets circulaires n'y apparait qu'au travers d'un coefficient multiplicatif, supposé constant, le facteur de forme b , à déterminer expérimentalement.

Sous les hypothèses faites le comportement du jet est résumé par la connaissance de son coefficient de contraction m et de son nombre d'Euler $\mathcal{E}$, adjointe à la donnée du diamètre de sortie de la buse D_S et de la pression P_r en amont de celle-ci ; on connaît en outre la vitesse de balayage V du sol par le jet.

Le comportement du sol est caractérisé par :

- sa cohésion C ,
- un coefficient de frottement équivalent f à l'interface entre le jet et le sol,
- une vitesse intrinsèque V_I à laquelle on rapporte V pour obtenir une vitesse de balayage adimensionnelle V/V_I .

Cette vitesse intrinsèque V_I du sol dépend de la cohésion C et de l'angle de frottement interne φ du sol, de sa porosité ω et de sa perméabilité intrinsèque k ainsi que de la taille des grains d. Elle fait également intervenir la viscosité dynamique de l'eau η (31).

(31) *à ce titre, la vitesse intrinsèque ne l'est pas totalement mais on se permettra cet écart de langage....*

On peut pour tester la validité du modèle proposé, donner les résultats de deux types d'expériences :
a) à vitesse de balayage constante et pression variable,
b) à pression constante et vitesse de balayage variable,

menées sur divers sols avec les deux buses testées.

Il va en effet de soi que la pression et la vitesse de balayage sont les deux seuls grandeurs qu'on puisse faire varier en continu (au moins théoriquement) à volonté.

Les autres grandeurs ne peuvent être commandées (comme les caractéristiques du sol) et certaines doivent être demandées à l'expérience (b et f).

Remarquons que la vitesse intrinsèque V_I n'est clairement définie que pour un sol hypothétique dont tous les grains auraient la même taille et la même forme, sphérique de préférence (alors le paramètre d introduit n'est autre que le diamètre des grains).

De plus, sa détermination suppose en particulier la connaissance de la perméabilité intrinsèque du sol, dont on sait qu'elle est difficile à définir et à mesurer avec précision en régime non permanent. Or, c'est bien le cas pour le sol lors du découpage : l'écoulement d'infiltration n'est permanent que dans un repère lié à la buse et non dans un repère lié au sol. L'hypothèse même de validité de la loi de Darcy en régime non permanent, pour classique qu'elle soit, n'est qu'approchée et on sait que le coefficient de perméabilité observé dépend plus ou moins fortement du caractère variable ou permanent de l'écoulement.

On fait ici abstraction de ces difficultés et de celles relatives à la cohésion C et à l'angle de frottement interne φ (cohésion effective et angle de frottement effectif). Ainsi, on prend pour perméabilité intrinsèque k dans les conditions d'expérience la valeur mesurée au perméamètre à charge variable, pour lequel la charge évolue de manière très lente (32) (voir le paragraphe suivant). On obtient donc plus un ordre de grandeur qu'une valeur précise de V_I .

On pourrait songer à utiliser les conditions critiques pour évaluer les ordres de grandeur de la vitesse intrinsèque V_I et du coefficient de frottement équivalent f pour divers sols (f dépend en effet a priori du sol par l'intermédiaire de l'état de surface de la surface de découpage).

Supposons, en effet, qu'on arrive à tracer pour un sol donné une partie suffisante de la courbe :

$$\chi = \chi_c(V)$$

(on balaye par exemple à vitesse constante V en augmentant à chaque passage la pression P_r jusqu'à ce que le jet se mette à creuser, c'est-à-dire que : $\chi = \chi_c(V)$), alors la comparaison avec la formule approchée prévoyant une relation linéaire de la forme :

$$\chi_c \# \frac{C}{f} \cdot \left(1 + \frac{V}{V_I}\right)$$

(32) *Rappelons que le perméamètre à charge constante n'est utilisable qu'avec des matériaux très perméables (sable non argileux par exemple).*

fournit les ordres de grandeur suivants :

$$V_I \# \frac{\chi_2 V_1 - \chi_1 V_2}{\chi_1 - \chi_2} > 0$$

$$f \# \frac{G(V_1 - V_2)}{\chi_2 V_1 - \chi_1 V_2} > 0$$

où V_1 et V_2 sont deux vitesses de balayage particulières et :

$$\chi_1 = \chi_c(V_1), \quad \chi_2 = \chi_c(V_2)$$

Cette idée d'utilisation du modèle est naturelle; la possibilité d'estimer ainsi f et V_I reste cependant essentiellement théorique pour les raisons suivantes :

- ce type de méthode consomme tout d'abord de nombreux échantillons : en effet, après quelques passages du jet (deux ou trois maximum en pratique) sur un même échantillon, celui-ci est mouillé au voisinage de la surface, qu'on ait creusé ou non, et son comportement est modifié : en toute rigueur, pour chaque vitesse de balayage V, il faudrait changer d'échantillon après chacun des tests effectués à χ fixé, jusqu'à obtention de $\chi_c(V)$.

- à cette difficulté pratique, somme toute mineure, vient s'en ajouter une seconde : certains des paramètres dont dépend la vitesse intrinsèque possèdent un très large intervalle de variation ; pour la perméabilité intrinsèque, cela se chiffre en puissances de dix. En conséquence on peut trouver selon les sols des valeurs très différentes de vitesse intrinsèque V_I (s'échelonnant par exemple entre 10^{-5} et 1 m/s).

Supposons qu'on porte sur un graphique des valeurs de π_c ou de π_c/C en fonction de V obtenues expérimentalement pour un sol donné et que l'ajustement sur une droite paraisse possible : f et V_I sont alors déterminés par la connaissance de deux paramètres fixant la droite d'ajustement, par exemple la pente de cette droite et son ordonnée à l'origine. La détermination de f et V_I n'est donc précise que si la droite d'ajustement est nettement distincte, dans les coordonnées utilisées, à la fois d'une droite passant par l'origine et d'une parallèle à l'axe des abscisses. Il faut pour cela utiliser des vitesses de balayage V ni très petites ni très grandes devant la vitesse intrinsèque inconnue V_I (soit des valeurs comprises approximativement entre $V_I/10$ et $10\,V_I$).

Pour pouvoir tester de manière totalement satisfaisante des sols suffisamment divers il faudrait donc disposer d'un banc d'essai permettant d'obtenir des vitesses de balayage très différentes (de plusieurs puissances de dix) avec la même précision relative.

Cette remarque est naturellement valable aussi bien pour des essais de profondeur de tranchée obtenue que pour des tentatives de détermination de la pression d'arrêt critique, puisqu'intervient à chaque fois le rapport V/V_I .

- on peut ensuite remarquer, sur un plan plus théorique, que la formule approchée :

$$\pi_c \# \frac{C}{f}\left(1 + \frac{V}{V_I}\right)$$

ne fournit en fait qu'un majorant de la pression d'arrêt critique et non sa valeur "exacte" d'où l'introduction d'une erreur systématique plus ou moins importante, même dans le cadre du modèle.

- il convient enfin de noter que, dans la pratique, la pression d'arrêt critique n'est pas toujours clairement définie. Si on opère, par exemple, à pression constante en faisant varier la vitesse de balayage, on sait qu'on n'observe pas obligatoirement de transition brutale entre une situation où le jet creuse une tranchée de profondeur faible mais constante et une situation où le jet ne creuse pas du tout. Le passage est souvent progressif lorsqu'on augmente la vitesse de balayage ou qu'on diminue la pression ; en même temps que la profondeur moyenne de la tranchée décroit, son aspect se modifie en ce sens qu'elle devient de plus en plus irrégulière jusqu'à devenir discontinue : à certains endroits, semble-t-il, le jet a creusé et à d'autres non (de toute façon le repèrage visuel d'une tranchée profonde d'une fraction de millimètre est délicat sur un matériau dans la surface est souvent assez irrégulière...).

On peut supposer que l'influence des hétérogénéités du sol devient prépondérante dans ces conditions ou, en d'autres termes, que la tranchée de profondeur à peu près constante n'est plus une solution stable du problème ; la modélisation proposée n'est alors plus adaptée.

Il reste qu'il vaudrait peut-être mieux par conséquent parler de "zone critique" que de conditions critiques, la détermination expérimentale de pressions d'arrêt ou de vitesses de balayage critiques reposant forcément sur une part de convention.

L'utilisation des formules donnant les conditions critiques se restreint ainsi à vérifier que les ordres de grandeur obtenus n'introduisent pas de contradiction insurmontable avec les résultats de creusement observés.

On estime donc la vitesse intrinsèque par la formule :

$$V_I = \frac{k\,C}{\eta\,\omega\,d\,\mathrm{tg}\varphi}$$

et on vérifie ensuite que la valeur trouvée est compatible avec l'allure des essais à pression constante et vitesse de balayage variable.

Du fait que les courbes de profondeur adimensionnelle en fonction de la vitesse de balayage adimensionnelle ont des allures très voisines lorsque le coefficient de frottement équivalent f varie il est difficile de séparer la détermination de b de celle de f (rappelons que f dépend a priori du sol considéré contrairement à b).

Ceci est particulièrement apparent sur l'approximation proposée :

$$\mathcal{H}\left(f, \frac{V}{V_I}\right) \simeq \frac{\Psi_1(f)}{1 + \Psi_0(f) \cdot \frac{V}{V_I}}$$

$\Psi_0(f)$ augmente en effet lentement avec f mais reste compris entre $2/\pi \simeq 0{,}637$ et 1 : l'erreur systématique introduite sur le dénominateur en choisissant une valeur intermédiaire quelconque, par exemple $0{,}8$, risque fort d'être inférieure à l'incertitude due au manque de précision sur V_I . Autrement dit, les expériences déterminant la profondeur de tranchée vont fixer le produit $b.\Psi_1(f)$ et non b et f indépendamment.

(On a tracé les courbes donnant $\mathcal{H}$ et les fonctions Ψ (figures III-9 et 10) jusqu'à des valeurs relativement élevées de f ; on peut cependant supposer que le coefficient de frottement équivalent n'est jamais très grand devant l'unité.)

Tout ceci étant dit, on va voir s'il est possible d'obtenir un accord, au moins qualitatif, entre l'expérience et le modèle. On dispose pour le moment d'assez peu de mesures, de sorte qu'on peut difficilement espérer plus.

2 - RESULTATS

On dispose de deux matériaux, tous deux argileux :

- une marne argileuse

- de l'argile de Provins consolidée.

Les propriétés en sont malheureusement assez dispersées, ne serait-ce que la cohésion, ce qui empêche beaucoup de comparaisons.

On trace, pour différents cas de figures, les variations de la profondeur de la tranchée avec la pression (figure III 16) et avec la vitesse de balayage (figure III 17).

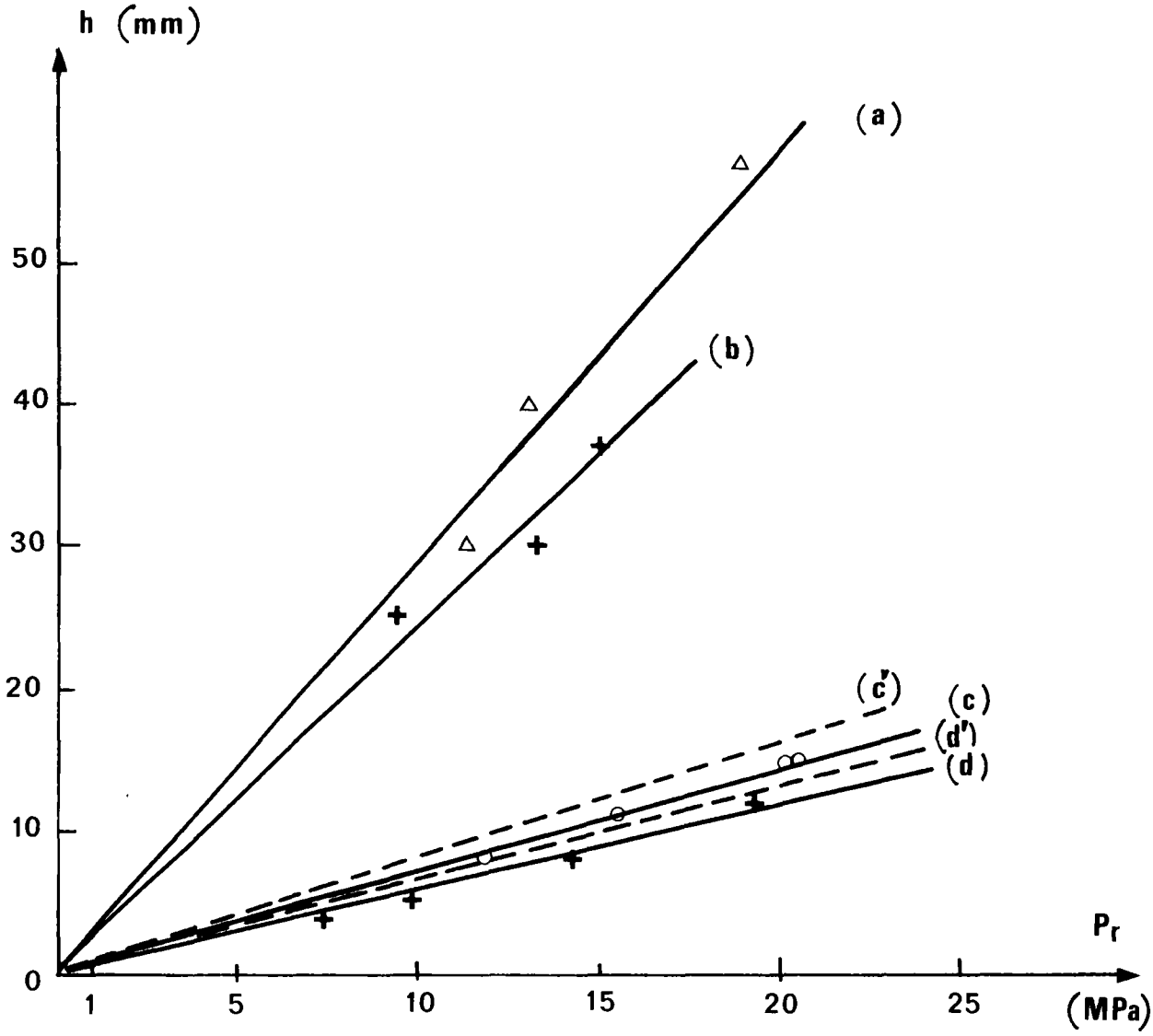


Figure III-16 : Variations de la profondeur de la tranchée avec la pression :

a. argile C = 0,4 10^5 Pa, buse n° ②, V ≃ 9.10^{-3} m/s (distance commune à toutes les expériences : environ 75 mm entre la buse et le sol).

b. argile C = 0,65 10^5 Pa, buse n° ②, V ≃ 6.10^{-3} m/s

c. marne argileuse C = 4.10^5 Pa, buse n° ①, V ≃ 7.10^{-3} m/s

d. marne argileuse C = 4.10^5 Pa, buse n° ①, V ≃ 10^{-2} m/s

c' et d' valeurs calculées de c et d avec :

$f = 0,5 \quad b = 6 \quad V_I = 5.10^{-3}$ m/s

(faute de connaître la vitesse intrinsèque de l'argile de Provins utilisée en a et b on ne peut tracer de valeurs calculées correspondantes).

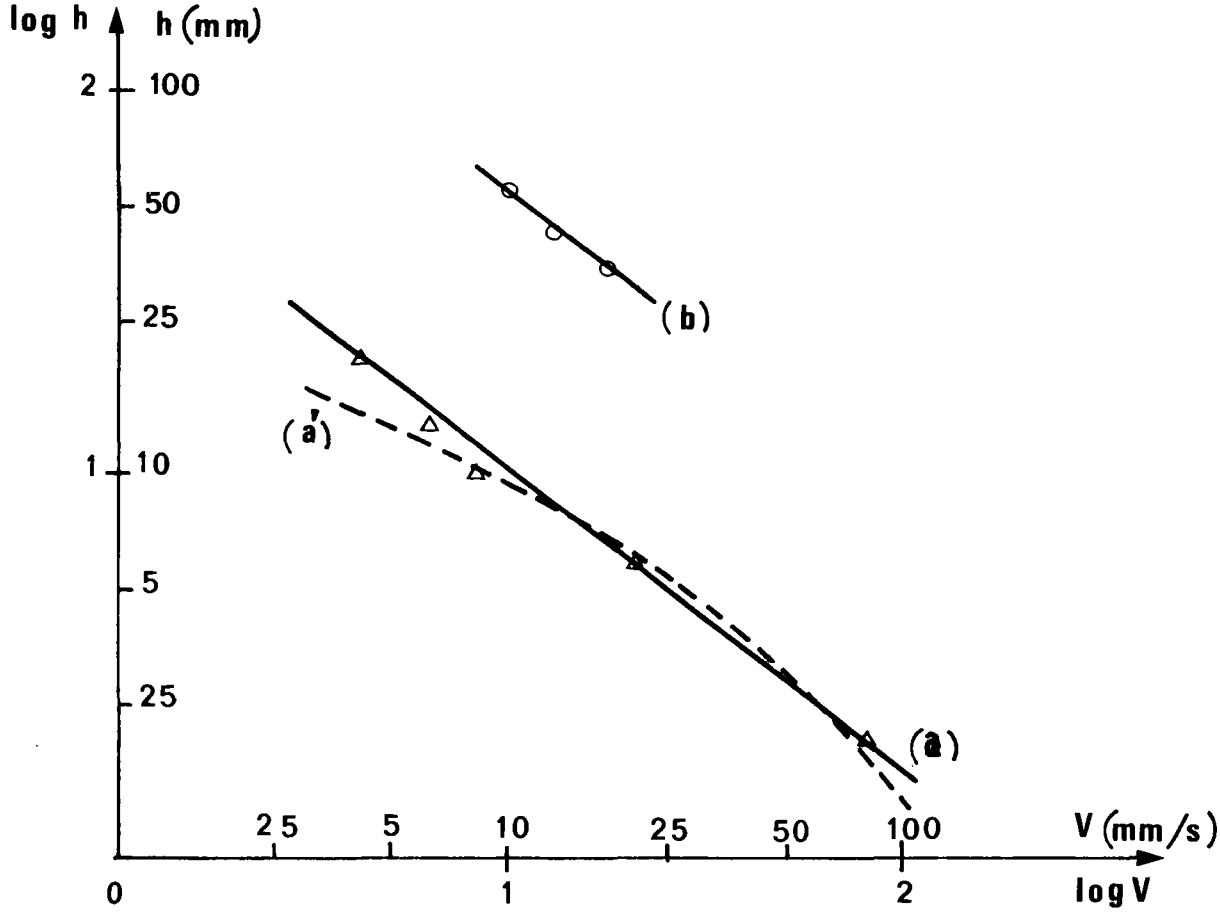


Figure III-17 : Variations de la profondeur de la tranchée avec la vitesse de balayage :

a. marne argileuse : C = 7.10^5 Pa, buse n° ①,
$P_r \simeq 23,5$ MPa *, distance 80 mm*

b. argile : C = 0,65 10^5 Pa, buse n° ②,
$P_r \simeq 17,5$ MPa *, distance 79 mm*

a' valeurs calculées de a avec : $V_I = 5.10^{-3}$ m s^{-1}, $f = 0,5$ *et* $b = 6$

On peut, en première approximation, admettre que la profondeur est proportionnelle à la pression P_r , ce que le modèle prévoit.

Ensuite, les variations avec la vitesse sont assez rapides ; la comparaison avec la courbe théorique de $\mathcal{H}$ en fonction de V/V_I en coordonnées bilogarithmiques suggère qu'on est un peu au-delà de la vitesse intrinsèque mais pas beaucoup (33).

Nous avons alors voulu évaluer la vitesse intrinsèque correspondant à la marne argileuse (nous n'avons pas encore la valeur pour l'argile de Provins). Admettant $d = 2.10^{-6}$ m et $\varphi = 20°$, pour $C = 7.10^5$ Pa , on mesure la porosité ω au porosimètre ($\omega \simeq 0{,}29$ soit un indice des vides de 0,41) et la perméabilité intrinsèque k à l'aide d'un perméamètre à charge variable construit par le laboratoire.

On mesure pour cela la charge à laquelle est soumise l'échantillon en fonction du temps (voir par exemple DE MARSILY 1976) sur une longue période (plusieurs semaines) et on trace, si H est cette charge, la courbe $-\ln H$ en fonction du temps. Cette courbe est d'après la théorie une droite de pente :

$$\frac{k \rho_e g}{\eta} \cdot \frac{1}{\ell} \cdot \left(\frac{D_e}{D_t} \right)^2$$

(33) *Notons à ce propos que le modèle prévoit qu'on a toujours* $d(\log h) / d(\log V)$ *inférieur en valeur absolue à un (c'est le cas ici) quels que soient la vitesse de balayage et le coefficient de frottement.*

où

k	perméabilité intrinsèque
ρ_e	masse volumique de l'eau
η	sa viscosité dynamique
g	accélération de la pesanteur
ℓ	épaisseur de l'échantillon
D_e	diamètre de l'échantillon
D_t	diamètre du tube (figure III 18)

On obtient bien une droite dans notre cas (figure III 19) et on aboutit à une perméabilité intrinsèque extrêmement faible :

$$k \simeq 1{,}45 \cdot 10^{-18}\ m^2$$

(correspondant à un $K = \frac{k \rho_e g}{\eta} \simeq 1{,}4 \cdot 10^{-9}$ cm/s) soit :

$$V_I \# 5 \cdot 10^{-3}\ m/s$$

qui est un résultat plausible: la remarque sur le rapport V/V_I dans les essais de vitesses est vérifiée.

En considérant (bien que ce soit très approché) que la vitesse intrinsèque est la même pour tous les échantillons de marne argileuse on aboutit, en imposant par exemple :

$$f = 0{,}5$$

à un accord qualitatif sur les essais menés avec ce matériau en prenant :

$$b \simeq 6$$

Faute d'avoir des résultats suffisants avec d'autres matériaux que celui-ci, on est obligé d'en rester sur ces suppositions.

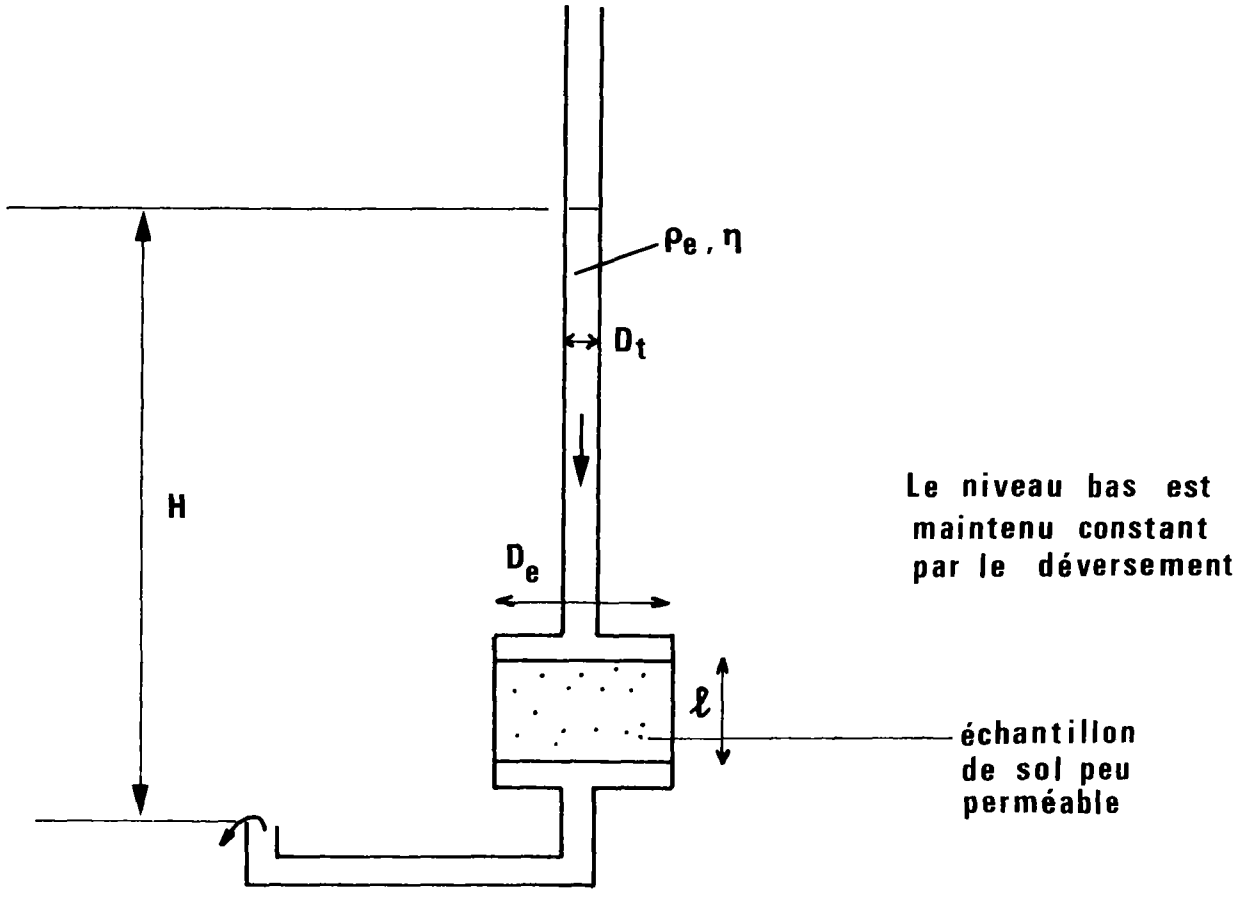


Figure III-18 : Perméamètre à charge variable

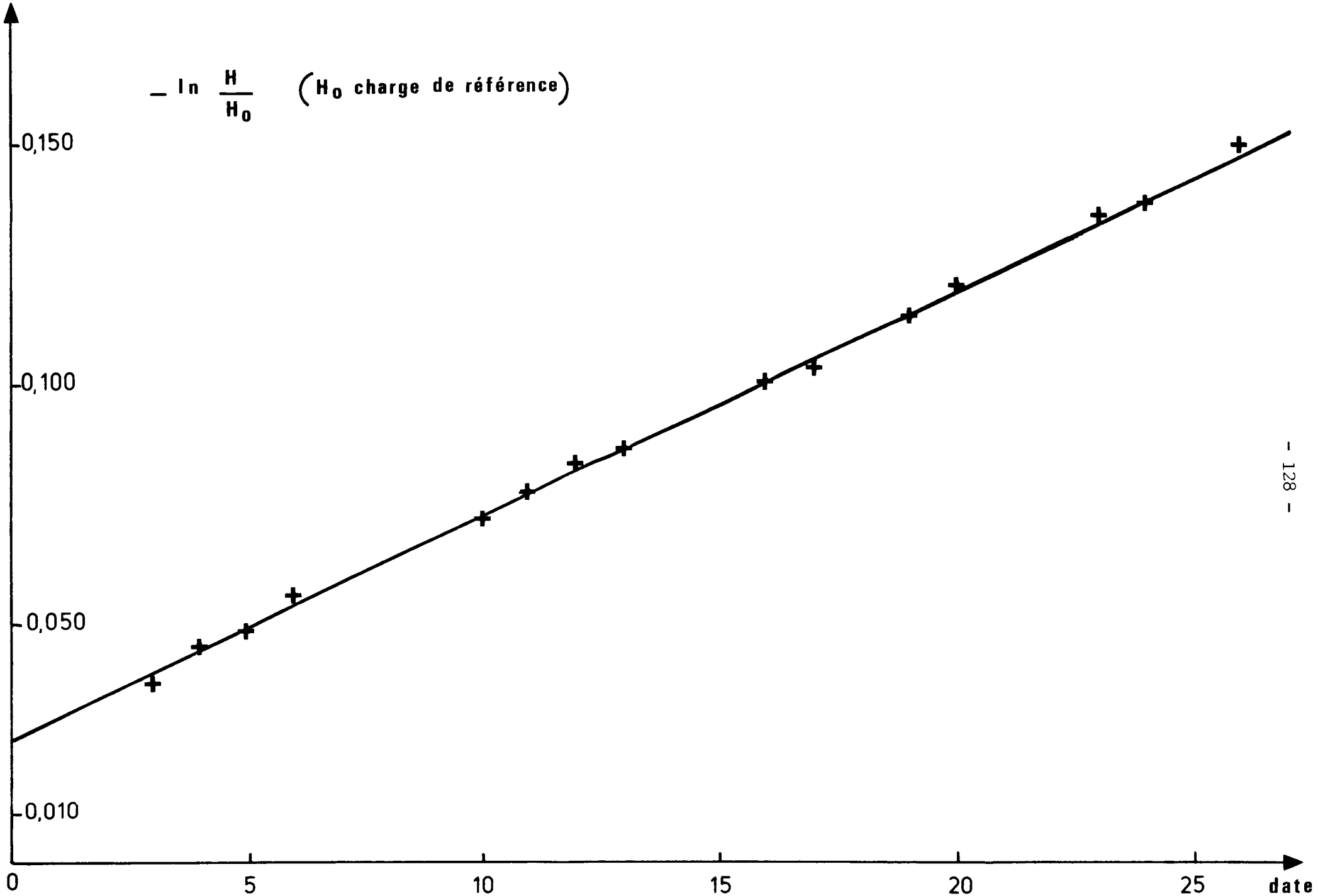


Figure III-19 : Essai de perméabilité de la marne argileuse testée.

On peut seulement tracer les valeurs "théoriques" ainsi trouvées ($avec\ V_I = 5.10^{-3} m/s$, $f = 0,5$, $b \simeq 6$) : ce sont les courbes tracées en pointillé (figures III 16 et III 17).

On voit en particuler sur cet exemple l'importance de connaître la vitesse intrinsèque V_I d'un sol donné pour prévoir son découpage.

3 - CONDITIONS A VERIFIER

Ce sont les conditions géométriques et mécaniques à respecter vues au B1. On va voir les ordres de grandeur pour la marne argileuse pour laquelle on prend par exemple : $\nu \# 0,40$ et $E \simeq 10^7$ Pa (ceci d'après une courbe de compression simple) ; on suppose le jet pressurisé à 20 MPa avec la buse ① et on prend une vitesse de balayage moyenne soit 10^{-2} m/s . Ainsi :

$D_S = 8.10^{-4}$ m
$m = 0,40$
$\Big\} \longrightarrow e_o \simeq 5.10^{-4} m$ ($1/2$ mm)

$\xi_\delta = 1,60$
$P_r = 20$ MPa ($\simeq 200$ atm)
$\Big\} \longrightarrow \chi \simeq 6,2$ MPa

$\eta \simeq 10^{-3}$ Pl (1 Pl = 1 kg m^{-1} s^{-1})
$\rho_e = 10^3$ kg m^{-3}
$V = 10^{-2}$ m/s
$f = 0,5$
$C \simeq 4.10^5$ Pa
$\varphi \simeq 20°$
$E \simeq 10^7$ Pa
$\nu \simeq 0,40$
$d \simeq 2\ 10^{-6} m$
$k \simeq 1,45\ 10^{-18}$ m^2
$\omega \simeq 0,29$

$$\rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \pi_1 = 2.10^{-3} \\ \pi_2 = 6{,}4.10^{-2} \\ \pi_3 = 2{,}7.10^{-2} \\ \pi_4 = 5{,}5 \\ \pi_5 = 1{,}08 \\ \mathcal{R}_{sol} = 3{,}5\ 10^{-6} \end{array} \right.$$

soit :

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{d}{2e_o} = \pi_1 = 2.10^{-3} \ll 1 \\ \dfrac{e_o}{R} \# \pi_2\pi_4\pi_5 = 0{,}38 < 1 \text{ mais non } \ll 1 \\ \dfrac{e'}{d} \# \pi_5 = 1{,}08 > 1 \ , \ \dfrac{e'}{R} \# \pi_1\pi_2\pi_4\pi_5^2 = 8{,}2.10^{-4} \ll 1 \\ (1-2\nu)\dfrac{\eta V e'}{k E} \# \pi_3\pi_4\pi_5 = 0{,}16 < 1 \text{ mais non } \ll 1 \\ \mathcal{R}_{sol} = 3{,}5.10^{-6} < 10 \end{array} \right.$$

Les différentes conditions sont vérifiées, de manière plus ou moins large.

On remarque, comme on pouvait s'y attendre vu la très faible perméabilité de ce sol, que l'eau ne rentre pratiquement pas dans le matériau (on peut d'ailleurs se demander si la loi de Darcy a le moindre sens sur une épaisseur voisine de celle d'un grain : c'est pourtant bien ce que nous avons supposé pour évaluer le terme de contrainte effective normale sur la surface de rupture ; il est probable qu'à ce niveau c'est l'analyse même en termes de milieux continus qui est en défaut ...).

On voit également que la géométrie du jet est telle que la largeur du jet soit assez petite devant le rayon de courbure de la surface de découpage, mais non très petite (il s'agit là de la buse la plus large) : une étude hydraulique plus précise serait profitable.

De même, on ne peut négliger l'élasticité (incompressibilité) qu'en première approximation.

Il reste donc beaucoup d'améliorations à apporter et de mesures à effectuer.

On peut calculer sur l'exemple précédent la zone où se situent les valeurs critiques : (avec $V_I \# 5.10^{-3} m/s$)

$$V_c \# V_I \left(\frac{\pi f}{C} - 1 \right) \# 3{,}5.10^{-2} m/s$$

$$\tau_c \# \frac{C}{f} \left(1 + \frac{V}{V_I} \right) \# 2{,}4 \text{ MPa}$$

L'ordre de grandeur de la vitesse critique est un peu trop petit (puisqu'on creuse encore à $V = 8.10^{-2} m/s$) : cela peut tenir à de nombreuses causes (mauvaise estimation de la vitesse intrinsèque ou du coefficient de frottement équivalent par exemple).

4

Extensions possibles

A - IMPLICATIONS DU MODELE

Le modèle présenté est assez simpliste et néglige de nombreux phénomènes. D'autre part sa vérification, si elle est possible, réclame des expériences assez nombreuses.

On ne peut donc lui accorder qu'une confiance relative et lui demander surtout des ordres de grandeur.

En particulier, il ne tient compte que d'un seul mécanisme. Or, l'expérience montre sur certaines échantillons fendillés, à l'évidence, un second mécanisme déjà mentionné : l'eau s'infiltre dans les fentes, les élargit et fait en quelque sorte "éclater" l'échantillon par l'intérieur. Un tel modèle ne peut en tenir compte.

Sous ces réserves et en tenant compte des problèmes de changement d'échelle pour "sortir du laboratoire" on peut faire les deux remarques suivantes :

a) tout d'abord les performances de découpage dépendent très largement de la position de la vitesse de balayage par rapport à une vitesse intrinsèque dont il importe de connaître l'ordre de grandeur. Cette vitesse intrinsèque se définit à partir des grandeurs suivantes :

- cohésion et angle de frottement interne effectifs
- perméabilité intrinsèque du sol et porosité
- taille des grains

et de la viscosité dynamique du fluide utilisé. Ce résultat, indépendamment de la formule exacte donnant la vitesse intrinsèque, parait plausible.

b) pour les applications la grandeur technologiquement la plus intéressante est l'énergie volumique de découpage E_S :

$$E_S = \frac{\text{puissance cinétique du jet}}{\text{volume déblayé par unité de temps}}$$

E_S est une fonction croissante de la cohésion et de l'angle de frottement interne ainsi que de la taille des grains et de la viscosité dynamique du fluide utilisé. Plus le milieu est imperméable, plus elle augmente.

L'énergie volumique de découpage croît lorsque la pression du jet augmente : elle est donc minimale au voisinage de la pression critique P_c ($P_c = 2\xi \pi_c$ où ξ est le nombre d'Euler et π_c la pression d'arrêt critique) : au-dessous le jet ne creuse théoriquement plus.

De même, elle décroît lorsque la vitesse de balayage augmente : elle est minimale au voisinage de la vitesse de balayage critique V_c ; au-dessus le jet ne creuse théoriquement plus.

D'où une remarque qui n'était pas forcément évidente :

Il est donc avantageux d'opérer à basse pression et vitesse élevée, quitte à faire plusieurs passages.

Les conditions critiques apparaissent ainsi comme des valeurs limites permettant d'obtenir une efficacité maximale en minimisant l'énergie volumique de découpage.

Revenons sur quelques hypothèses sous jacentes au modèle : nous avons par exemple admis qu'on pouvait passer des formules de profondeur calculée à deux dimensions à celles valables pour des jets circulaires par simple multiplication par un coefficient constant, le facteur de forme b , indépendant de l'installation utilisée et du sol considéré.

On peut alors transposer les raisonnements sur la profondeur ; nous l'avons également fait sur l'énergie volumique de découpage sans préciser d'ailleurs le coefficient à faire intervenir, implicitement supposé constant. Il est facile de voir que ceci signifie comme hypothèse supplémentaire que la largeur de la tranchée est proportionnelle au diamètre du jet et que le coefficient de proportionnalité (supérieur ou égal à un) est effectivement une constante indépendante du jet et du sol.

Il n'en est rien pour le jet dès lors qu'il est suffisamment affecté par des phénomènes d'instabilité latérale : la largeur (et la profondeur) de la tranchée dépend alors de la distance buse-sol et de la pression du jet. Le modèle ne tient pas compte de ces propriétés.

On a ensuite supposé que les grains en suspension ne modifiaient pas de manière trop importante l'écoulement. Remarquons tout d'abord qu'on connait la fraction volumique moyenne c de grains (concentration volumique) dans l'écoulement au-delà de la surface de découpage. Ainsi pour le problème bidimensionnel, on a (en ne tenant pas compte de l'air entraîné) :

$$c = \frac{\mathcal{S}(1-\omega)}{\frac{Q_v}{L} + \mathcal{S}(1-\omega)} \simeq \frac{\mathcal{S}(1-\omega)}{Q_v/L}$$

où Q_v / L est le débit volumique d'eau par unité de largeur, égal au débit dans la section d'entrée, au débit d'infiltration (très faible) près :

$$Q_v \simeq e_o w_o L$$

soit : $$\boxed{c \simeq \frac{V_I \sqrt{2\rho\chi}}{G} \cdot \delta\left(f, \frac{V}{V_I}\right) \cdot (1-\omega)}$$

qui est généralement très petit devant l'unité de sorte que l'écoulement est a priori globalement peu perturbé.

Il reste en particulier turbulent, la viscosité dynamique équivalente η_e du mélange à c faible restant voisine de la viscosité dynamique η du fluide seul :

$$\eta_e \simeq \eta \left(1 + \frac{5}{2} c\right)$$

(formule d'Einstein, voir par exemple LANDAU et LIFCHITZ 1971).

Par contre la question de savoir dans quelle mesure les grains "suivent" le mouvement du fluide est complexe : la réponse dépend des tailles comparées des grains et de l'écoulement ainsi que des caractéristiques du mouvement turbulent (vitesses de fluctuations, longueurs et temps de corrélations) (FORTIER 1967). Ce problème peut avoir une certaine importance dans le cas, qui semble d'ailleurs peu probable, où les grains resteraient essentiellement près du fond, modifiant ainsi les conditions d'interface.

Notons à ce propos qu'il est parfaitement possible de s'affranchir, au moins conceptuellement, de l'hypothèse à l'interface fluide-sol :

$$\tau = f\, P \,, \quad f = cte$$

Supposons en effet que le long de la surface de découpage le rapport τ/P ne reste pas constant ; en un point d'abscisse curviligne s où la normale extérieure au fond $\bar{\beta}$ fait un angle β avec l'horizontale :

$$0 \leqslant \beta = (\bar{x}, \bar{\beta}) = \alpha + \frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}$$

on peut définir la fonction :

$$\boxed{f(\beta) = \frac{\tau(s)}{P(s)} > 0}$$

Le coefficient de frottement équivalent f devient ainsi une grandeur locale variant le long de la surface de découpage. On ne se préoccupe pas ici des arguments physiques dont dépend ce coefficient (puisque l'angle β n'en est pas un ...) mais de la possibilité de résoudre mathématiquement le problème de la détermination de la profondeur h de la tranchée obtenue dans le cas où f est une fonction à préciser (strictement positive, bornée et assez régulière pour $0 \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{2}$).

On constate aisément que la résolution ne présente aucune difficulté supplémentaire, $\mathcal{H}$ devenant simplement une fonctionnelle de f , ce qu'on note :

$$\boxed{\mathcal{H} = \mathcal{H}\left([f], \frac{V}{V_I}\right)},$$

l'expression de cette fonctionnelle étant :

$$\boxed{\mathcal{H} = \int_0^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\mu \cdot f(\mu) \cdot \exp\left(-\int_0^{\mu} f(\beta)\,d\beta\right) \cdot d\mu}{1 + \frac{V}{V_I} \cdot \cos\mu} > 0}$$

soit :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{1 + \frac{V}{V_I}} - \mathcal{J}\left([f], \frac{V}{V_I}\right)$$

avec :

$$\mathcal{J} = \int_0^{+\pi/2} \frac{\sin\mu \cdot \exp\left(-\int_0^{\mu} f(\beta)\,d\beta\right) \cdot d\mu}{\left(1 + \frac{V}{V_I}\cos\mu\right)^2} > 0 .$$

Ceci montre que $\mathcal{H}$ est une fonctionnelle strictement croissante de f (à V/V_I fixé), au sens suivant :

$$\forall (f,f') \;/\; \forall \beta \in]0,\tfrac{\pi}{2}[\;\; f(\beta) < f'(\beta) \text{ , alors : } \mathcal{H}\left([f],\frac{V}{V_I}\right) < \mathcal{H}\left([f'],\frac{V}{V_I}\right)$$

et qu'elle est bornée supérieurement par $\dfrac{1}{1 + \dfrac{V}{V_I}}$.

Si on connait un encadrement pour f on en connait un pour $\mathcal{H}$, à V/V_I fixé :

$$\left.\begin{array}{l} f_1 \in \mathbb{R}^{+*} \\ f_2 \in \mathbb{R}^{+*} \\ \forall \beta \in]0, \frac{\pi}{2}[\quad f_1 \leqslant f(\beta) \leqslant f_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{H}\left(f_1, \frac{V}{V_I}\right) \leqslant \mathcal{H}\left([f], \frac{V}{V_I}\right) \leqslant \mathcal{H}\left(f_2, \frac{V}{V_I}\right)$$

Autrement dit, connaissant l'allure des courbes $\mathcal{H}(f, V/V_I)$ (f réel positif) précédemment tracées (figure III 9) on est assuré, pour peu que f_1 et f_2 ne soient pas trop éloignés l'un de l'autre, que l'allure de la courbe de $\mathcal{H}([f], V/V_I)$ en fonction de V/V_I est semblable, dans le cas où les bornes f_1 et f_2 sont indépendantes de la vitesse de balayage V .(On ne demande pas par contre, que f_1 et f_2 soient indépendants du sol et des caractéristiques du jet).

L'obtention d'une formule donnant $\mathcal{H}$ en fonction de f variant de façon quelconque permet d'étendre la théorie proposée sous réserve de pouvoir préciser les arguments et la forme de la fonction f .

On peut par exemple se donner une loi de variation en fonction de la pression P (supposée rapportée à une grandeur adéquate pour obtenir une quantité sans dimension) soit $f = \Phi(P)$. Le cisaillement τ étant connu par ailleurs en fonction de l'angle α on en déduit $P(\alpha)$ par $\tau(\alpha) = \Phi(P)P$ et f est alors connu en fonction de l'angle α ou β soit $f(\beta)$. On peut alors utiliser directement l'expression trouvée pour la fonctionnelle $\mathcal{H}$ et étudier ses propriétés.

On retiendra que la profondeur adimensionnelle $\mathcal{H}$ est toujours majorée par la quantité :

$$\frac{1}{1 + \frac{V}{V_I}}$$

et que l'hypothèse assez arbitraire d'un coefficient de frottement équivalent f constant le long de la surface de découpage peut être sans dommage remplacée par celle, plus large, d'une variation de f entre deux bornes (indépendantes de la vitesse de balayage), qui donne des résultats assez voisins pour la profondeur de la tranchée.

Remarquons enfin que certains auteurs défendent le point de vue selon lequel définir une cohésion unique pour les phénomènes de volume et de surface n'a pas de sens. Le découpage étant un phénomène de surface serait alors caractérisé par des grandeurs différentes ; il subsisterait cependant un lien pour des raisons physiques évidentes entre les cohésions C (et les angles de frottement φ) de volume et de surface, ce qui laisserait aux calculs effectués une signification, qualitative tout au moins.

B - CAS D'UN SOL SATURE

Pour un sol initialement saturé, il n'y a par définition pas de zone sèche et les équations se réduisent dans tout l'intérieur du matériau aux équations déjà vues (en déformation plane) d'équilibre, de compatibilité et de consolidation :

$$\overline{\operatorname{div}}\ \overline{\overline{\sigma}}^{*} = \overline{\operatorname{grad}}\ p$$

$$\Delta S^{*} = \frac{1}{1-\nu}\,\Delta p \qquad (S^{*} = \sigma_{xx}^{*} + \sigma_{yy}^{*})$$

$$\Delta p = (1+\nu)(1-2\nu)\,\frac{\gamma V}{k E}\cdot\frac{\partial S^{*}}{\partial x}$$

avec les conditions aux limites : (figure IV 1)

- sur la surface de découpage :

$p = P(s)$	pression fonction de la géométrie
$-\frac{\partial p}{\partial n} + a' p = b'$	critère de rupture
$\overline{\beta}\,\overline{\overline{\sigma}}^{*}\overline{\beta} = 0$	effet normal nul en contrainte effective
$\overline{\alpha}\,\overline{\overline{\sigma}}^{*}\overline{\beta} = f p$	cisaillement proportionnel à la pression (condition à l'interface)

- sur le reste de la frontière : ($\overline{n} = \overline{y}$ vecteur normal)

$$\left.\begin{array}{l} p \simeq 0 \\ \overline{\overline{\sigma}}^{*}\,\overline{n} \simeq 0 \end{array}\right\}$$ pas d'efforts extérieurs

- à l'infini dans le matériau :

$$\left.\begin{array}{l} p \to 0 \\ \overline{\overline{\sigma}}^{*} \to 0 \end{array}\right\}$$ assez vite

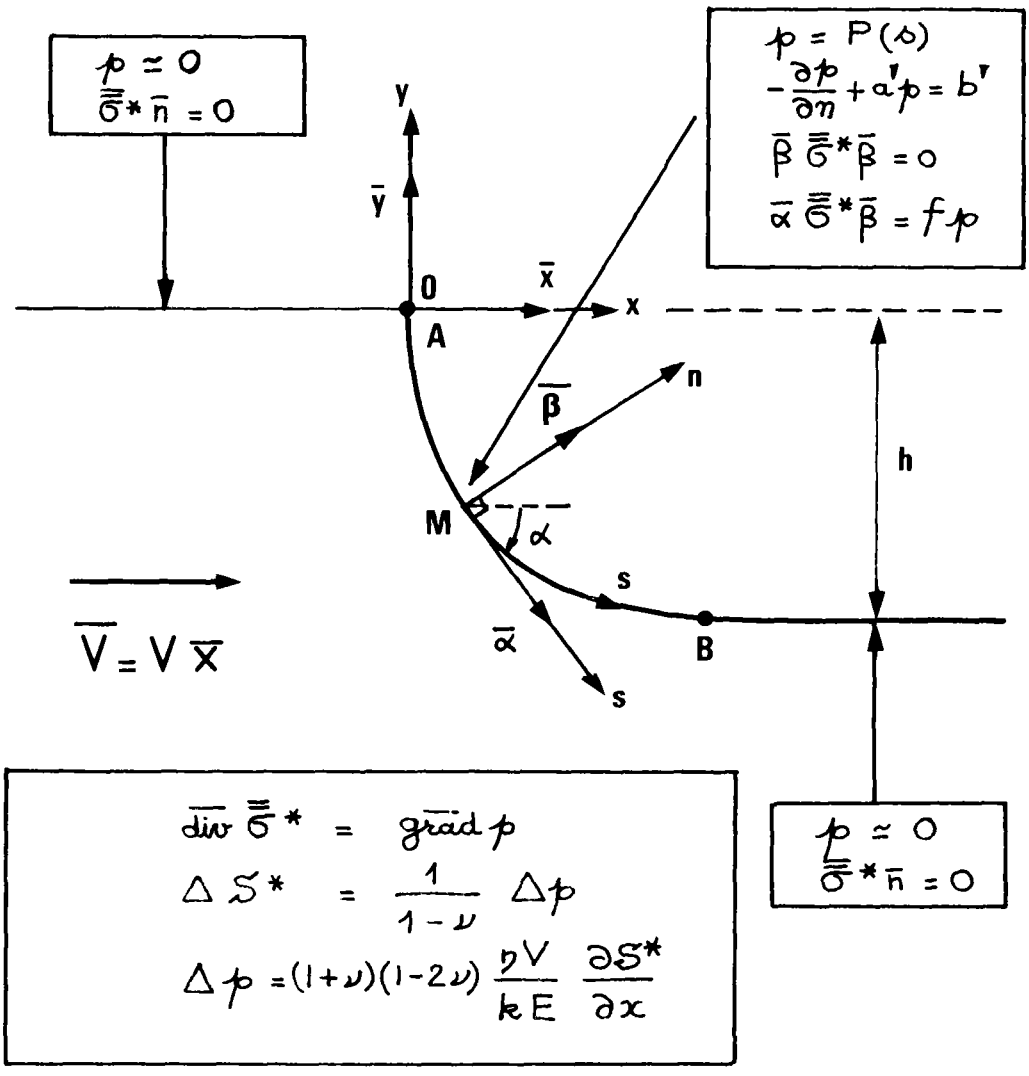


Figure IV-1 : Découpage d'un sol saturé.

On cherche l'arc AB tel que ces conditions soient réalisées.

Il apparait immédiatement deux modifications importantes par rapport au cas d'un sol initialement sec :

a) il y a une frontière inconnue en moins avec les conditions à exprimer sur celle-ci :
Ainsi on ne peut plus évaluer a priori l'importance du gradient de pression au voisinage de la surface (= le terme $\partial p / \partial n$).

b) il est indispensable de tenir compte de la compressibilité (élastique) du sol car sinon le modèle fournit un résultat absurde.

Ecrivons en effet : $\nu = 1/2$ ou : $E \to +\infty$. Alors, on a : $\Delta p = 0$ partout avec des valeurs aux limites données (et surabondantes sur l'arc à déterminer !) : le problème du calcul de la pression se découple de celui des contraintes et peut se résoudre seul. C'est le même résultat qu'en sol sec nous avions obtenu comme première approximation, mais on constate ici que la vitesse de balayage n'intervient plus dans la détermination du problème (alors qu'elle intervenait en sol sec par la condition de fixité de la zone mouillée).
En conséquence, l'arc AB et la hauteur h ne dépendent explicitement pas de la vitesse de balayage : il n'y a pas de limite à la surface balayée et on peut avoir une énergie volumique de découpage aussi faible qu'on le veut, sous réserve bien sûr de respecter les conditions critiques.

Une telle schématisation, qui aboutit pour la profondeur de la tranchée en fonction de la vitesse de balayage à un créneau, me semble avoir peu de sens physique.

On supposera dans la suite que : $\nu \neq \frac{1}{2}$, E fini .

Il est alors en particulier possible de rendre le problème adimensionnel en prenant :

$P_c = C$ pression ou contrainte caractéristique

$L_c = \frac{kC}{\eta\omega V}$ longueur caractéristique

En posant : $\mathcal{N} = (1+\nu)(1-2\nu)\frac{C}{\omega E}$

$$\mathcal{A} = \exp\left(-f\frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{2e_0\chi.\eta.\omega.V}{k.C^2}$$

<u>on obtient en variables sans dimension</u> (y compris le rayon de courbure $R(\alpha)$ de la surface de découpage) :

$$\left|\begin{array}{l} \overline{\text{div}}\ \overline{\overline{\sigma}}^* = \overline{\text{grad}}\, p \\ \Delta S^* = \frac{1}{1-\nu}\Delta p \\ \Delta p = \mathcal{N}.\frac{\partial S^*}{\partial x} \end{array}\right.$$

et les conditions aux limites :

- sur la surface de découpage :

$$\left|\begin{array}{l} p = \mathcal{A}.\frac{e^{-f\alpha}}{R(\alpha)} \\ -\left(\frac{V}{V_I}\right)\frac{\partial p}{\partial n} + fp = 1 \\ \overline{\beta}\ \overline{\overline{\sigma}}^*\overline{\beta} = 0 \ , \ \overline{\alpha}\ \overline{\overline{\sigma}}^*\overline{\beta} = fp \end{array}\right.$$

- sur le reste de la frontière :

$$\left|\begin{array}{l} p \simeq 0 \\ \overline{\overline{\sigma}}^*\overline{n} \simeq 0 \end{array}\right.$$

- et à l'infini :

$$\left|\begin{array}{l} p \to 0 \\ \overline{\overline{\sigma}}^* \to 0 \end{array}\right. .$$

L'intérêt de ce type de manipulations est qu'il fait apparaître à nouveau les mêmes grandeurs, telles que le rapport de la vitesse de balayage à la vitesse intrinsèque et les divers produits sans dimension ; ainsi :

$$\mathcal{N} = (1+\nu)\,\pi_3, \quad \mathcal{A} = e^{-f\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\pi_4}{\pi_1 \pi_2}, \quad \frac{L_c}{d} = \frac{1}{\pi_4} = \operatorname{tg}\varphi \cdot \frac{V_I}{V}$$

Il reste qu'on ne voit pas comment simplifier le problème de la détermination de la surface de découpage. La solution n'est pas connue pour le moment et la résolution numérique n'est sans doute pas des plus simples, même si elle est faisable (en se servant en particulier comme guide de la solution approchée en sol sec).

C - POSSIBILITES D'ADAPTATION AUX JETS SUBMERGES

La marche à suivre se déduit immédiatement des considérations précédentes :

a) il faut mettre en évidence les caractéristiques principales d'un jet submergé, dont on sait par exemple qu'il "diffuse" en même temps qu'il "aspire" le fluide extérieur : l'influence de la distance buse-matériau est essentielle à prendre en compte ;

b) ceci étant fait, étudier l'impact sur un obstacle et les conditions aux limites du sol qui s'en déduisent : les conditions hydrauliques sont bien sûr très différentes ;

c) enfin traiter le sol comme saturé et compressible par des méthodes proches de celles applicables au sol saturé à l'air libre.

L'ensemble est a priori assez complexe à traiter !

5

Conclusion

Le modèle présenté a, à la fois, comme avantage et comme inconvénient sa (relative) simplicité.

Le grand nombre d'hypothèses simplificatrices faites et le choix systématique de comportements linéaires idéaux interdisent sans doute d'en faire un outil d'une grande précision.

Il permet cependant de raisonner à l'intérieur d'un cadre possédant une certaine cohérence et par là de mieux comprendre les mécanismes en jeu lors du découpage d'un sol par un jet liquide.

La première prévision pratique est celle de l'ordre de grandeur de l'efficacité d'une telle méthode de découpage : profondeurs atteintes, énergie volumique de découpage ... Un modèle apportant des réponses à ces questions a une utilité indéniable, sous réserve de vérifications expérimentales suffisantes.

L'utilisation d'un tel modèle suppose la connaissance d'un certain nombre de grandeurs caractéristiques du jet et du sol (taille des grains, porosité, perméabilité intrinsèque, cohésion et angle de frottement interne) dont la définition n'est pas toujours claire ou qui ne sont pas forcément connues avec une grande précision, comme la perméabilité intrinsèque.

Un modèle plus compliqué permettrait peut-être d'éviter l'introduction de grandeurs empiriques, telles le coefficient de frottement équivalent à la surface f ou le facteur de forme b rendant compte du passage de deux à trois dimensions. Cependant, à moins de rentrer dans une analyse beaucoup plus détaillée des phénomènes, il n'est pas certain que le gain en précision théorique soit significativement intéressant : on risque de toute façon d'être bloqué par l'imprécision de la mesure des caractéristiques du sol en place.

Un tel modèle apparaît donc plutôt comme un outil de réflexion physique sur la base d'hypothèses minimales et fournissant des prévisions approchées. Il permet de classer les phénomènes et de susciter des questions auxquelles on ne songerait pas forcément sinon.

On voit ainsi, pour le mécanisme considéré, qu'en sol "sec" (sol P.E.D.) le découpage est en grande partie commandé par les phénomènes d'infiltration en surface.

Il semble qu'à l'inverse en sol saturé la compressibilité du sol joue un rôle essentiel pour le découpage.

Le cadre est suffisamment souple pour permettre, en modifiant les conditions hydrauliques, de l'adapter au cas des jets submergés (travaux sous-marins).

Dans le cas d'un sol initialement "sec" on a pu fournir des indications technologiquement intéressantes sur l'efficacité de la méthode de découpage par jets liquides, en mettant en évidence le rôle joué par une vitesse intrinsèque

de balayage du sol et en montrant l'existence de valeurs critiques pour la pression d'arrêt du jet et la vitesse de balayage, valeurs susceptibles d'interprétation technologique.

Plus précisément, on montre dans le cadre du modèle :

a) que les performances de découpage dépendent de manière essentielle du rapport de la vitesse de balayage à une vitesse intrinsèque de balayage déterminée à partir des caractéristiques du sol ;

b) qu'en adoptant comme critère d'efficacité l'énergie volumique de découpage, il est avantageux d'opérer à basse pression et vitesse de balayage élevée, quitte à faire plusieurs passes pour atteindre le résultat souhaité ;

c) qu'au-dessous d'une certaine pression et au-delà d'une certaine vitesse de balayage le jet ne creuse plus : les valeurs limites sont dites critiques ;

d) qu'en conséquence, les conditions critiques apparaissent comme des conditions limites permettant d'obtenir une efficacité maximale en minimisant l'énergie volumique de découpage.

On notera enfin qu'à l'évidence l'extension d'un tel modèle au cas d'un sol saturé ou de travaux en haute mer (off-shore) utilisant des jets submergés suppose l'utilisation de méthodes de résolution numériques par éléments finis, dont la mise en oeuvre peut être délicate, compte tenu des particularités du problème.

Bibliographie

BROOK N., SUMMERS D.A.,(1968), *The penetration of rock by high-speed water jets,* Int. J. Rock Mech. Min. Sci., 6, pp. 249-258.

CROW S.C., (1973), *A theory of hydraulic rock cutting,* Int. J. Rock Mech. Min. Sci., 10, 6, pp 567-584.

DE MARSILY G., (1976), *Cours d'hydrogéologie,* Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.

DU PLESSIS M.P., HASHISH M., (1980), *Experimental and theorical investigation of hydraulic cutting of a western Canadian coal,* Proc. of the 5th International Symposium on Jet Cutting Technology, Hanover, Paper E3.

ENE H.I., SANCHEZ-PALENCIA E., (1975), *Equations et phénomènes de surface pour l'écoulement dans un modèle de milieu poreux,* Journal de Mécanique, 14, 1, pp. 73-108.

FIELD J.E., (1966), *Stress waves, deformation and fracture caused by liquid impact,* Proc. Royal Society A, 260, pp. 86-93.

FORTIER A., (1967), *Mécanique des suspensions,* Masson, Paris.

FARMER I.W., ATTEWELL P.B., (1964), *Rock penetration by high velocity water jet, a review of the general problem and an experimental study,* Int. Rock Mech. Min. Sci., 2, pp. 135-153.

GERMAIN P., (1979), *Cours de Mécanique,* Ecole Polytechnique.

GLENN L.A., (1974), *On the Dynamics of Hypervelocity Liquid Jet Impact on a Flat Rigid Surface,* Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP), 25, pp. 383-398.

HANCOX N.L., BRUNTON J.H., (1966), *The erosion of solids by the repeated impact of liquid drops,* Proc. Royal Society A, 260, pp. 121-139.

HASHISH M., REICHMAN J.M., (1980), *Analysis of waterjet cutting at high traverse rates,* Proc. of the 5th International Symposium on Jet Cutting Technology, Hanover, Paper B2.

HUANG Y.C., HAMMITT F.G., YANG W.J., (1973), *Hydrodynamic phenomena during high-speed collision between liquid droplet and rigid plane,* Transactions of the ASME, Journal of Fluids Engineering, June 1973, pp. 276-292.

HWANG J.B., HAMMITT F.G., (1976), *Transient distribution of the stress produced by the impact between a liquid drop and an aluminium body,* Proc. of the 3th International Symposium on Jet Cutting Technology, Chicago, Paper A1.

LANDAU L., LIFCHITZ E., (1971), Mécanique des Fluides, Mir, Moscou.

LEACH S.J., WALKER G.L., (1966), *Some aspects of rock cutting by high speed water jets,* Proc. Royal Society A, 260, pp. 295-308.

MANDEL J., (1966), *Cours de Mécanique des Milieux Continus,* Gauthier-Villars, Paris.

MATHERON G., (1967), *Eléments pour une théorie des milieux poreux,* Masson, Paris.

PETERSON F.B., (1973), *Some considerations of material response due to liquid-solid impact,* Transactions of the ASME, Journal of Fluids Engineering, June 1973, pp. 263-270.

POWELL J.H., SIMPSON S.P., (1969), *Theoretical study of the mechanical effects of water jets impinging on a semi-infinite elastic solid,* Int. J. Rock Mech. Min. Sci., 6, pp. 353-364.

PHINNEY, (1973), J Fl Mech., 60, pp. 689-701.

REHBINDER G., (1976), *Some aspects on the mechanism of erosion of rock with a high speed water jet,* Proc. of the 3th International Symposium on Jet Cutting Technology, Chicago, Paper E1.

REHBINDER G., (1977), *Slot cutting in rock with a high speed water jet,* Int. J. Rock Mech. Min. Sci. + Geomech. Abstr., 14, pp. 229-234.

REHBINDER G., (1980), *A theory about cutting rock with a water jet,* Rock Mechanics, 12, pp. 247-257.