

Sur la modélisation du changement de phase solide : application aux matériaux à mémoire de forme et à l'endommagement fragile partiel

Ziad Moumni

▶ **To cite this version:**

Ziad Moumni. Sur la modélisation du changement de phase solide : application aux matériaux à mémoire de forme et à l'endommagement fragile partiel. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1995. Français. NNT : . tel-00529370

HAL Id: tel-00529370

https://pastel.hal.science/tel-00529370

Submitted on 25 Oct 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NS 19084 (4)

NS 19 084 (4)

THÈSE

présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTEUR

DE

l'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

Spécialité : STRUCTURES ET MATÉRIAUX

par

Ziad MOUMNI

Sujet de thèse

Sur la modélisation du changement de phase solide : application aux matériaux à mémoire de forme et à l'endommagement fragile partiel.

soutenue le 18 Janvier 1995
devant le jury composé de :

Président :	**M. Pierre LADEVEZE**
Rapporteurs :	**M. Michel POTIER FERRY** **M. Christian LEXCELLENT**
Examinateurs :	**M. Huy Duong BUI** **M. Michel FREMOND** **M. Quoc Son NGUYEN**

E.N.P.C.
INV02091

AVANT-PROPOS

Je voudrais avant tout remercier Monsieur P. BEREST, *directeur du Laboratoire de Mécanique des Solides à l'Ecole Polytechnique pour m'avoir accueilli au sein de ses équipes de recherche, me permettant ainsi d'évoluer dans un cadre scientifique exceptionnel.*

Le Professeur P. LADEVÈZE *m'a fait l'honneur de s'intéresser à ce travail et d'en présider le jury. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.*

Mes remerciments vont aussi à Messieurs M. POTIER FERRY ET C. LEXCELLENT *qui ont bien voulu accepter la lourde tâche d'être rapporteurs de cette thèse. Leurs critiques et suggestions m'ont été d'une grande utilité pour sa présentation finale.*

Monsieur H.D. BUI *a toujours manifesté un vif intérêt pour cette thèse. Il m'a fait l'honneur d'être membre du jury. Qu'il soit assuré de ma sincère reconnaissance.*

Je voudrais également exprimer ma gratitude à Monsieur M. FRÉMOND *avec qui j'ai eu beaucoup de discussions fructueuses qui m'ont aidé à élaborer ce travail.*

C'est tout particulièrement à Monsieur Q.S. NGUYEN *que je voudrais exprimer mon humble gratitude. J'ai eu tout au long de ma thèse un grand plaisir à entreprendre mes recherches sous sa direction tant ses domaines de compétences sont vastes et riches. Je veux aussi le remercier pour sa disponibilité car il a toujours été présent pour m'encourager dans les moments de doute et d'incertitude.*

Quelques résultats de calcul numériques figurent dans ce travail. Il n'ont pu être réalisé que grâce à mon ami H. MAITOURNAM. *Son aide constante et son amicale sollicitude à mon égard ne peuvent se résumer en quelques mots. Je lui exprime ici ma profonde reconnaissance.*

Mon ami X. CHATEAU *m'a souvent conseillé et soutenu. Je lui adresse mes sincères remerciments.*

Mes remerciments s'adressent à tous ceux avec qui j'ai eu le plaisir de travailler, notamment P. Ballard, A. Constantinescu, H. Maigre, C. Stolz, A. Ouakka, ainsi que tous mes collègues du L.M.S.

Table des matières

Introduction générale 4

I Changement de phase réversible. 11

1 Cadre théorique de la modélisation 13
1.1 Introduction . . . 13
1.2 Méthode des deux potentiels . . . 13
1.3 Méthode des deux potentiels en présence de liaisons internes. . . . 15
1.4 Conclusion . . . 17

2 Changement de phase réversible. 19
2.1 Introduction . . . 19
2.2 Cas unidimensionnel . . . 19
2.3 Généralisation tridimensionnelle . . . 24
2.4 Conclusion . . . 26

3 Exemples d'illustration 27
3.1 Introduction . . . 27
3.2 Fissure en mode I . . . 27
3.2.1 Formulation du problème . . . 27
3.2.2 Méthode de calcul . . . 29
3.2.3 Simulation numérique et résultat . . . 30
3.3 Torsion d'un cylindre de section triangulaire . . . 32
3.3.1 Position du problème . . . 32
3.3.2 Méthode de calcul . . . 33
3.3.3 Résultats . . . 34
3.4 Problème de fissure en mode III. . . . 36
3.4.1 Formulation du problème . . . 36
3.4.2 Méthode d'hodographe . . . 39
3.4.3 Résolution du problème . . . 42
3.4.4 Solution du problème . . . 42
3.4.5 Résolution numérique. . . . 45
3.5 Conclusion . . . 48

4 Stabilité et changement de phase. 49
4.1 Introduction. . . . 49
4.2 Rappels des résultats sur la stabilité d'un système conservatif avec liaisons internes parfaites. . . . 49
4.2.1 Exemple simple . . . 49
4.2.2 Formulation du problème d'équilibre pour un système conservatif. . . 52
4.2.3 Critère de la seconde variation du lagrangien. . . . 53
4.3 Application au modèle de matériau avec changement de phase . . . 55
4.4 Conclusion . . . 58

II Modélisation des matériaux à mémoire de forme. 61

5 A propos des alliages à mémoire de forme 63
5.1 Introduction . . . 63
5.2 Propriétés thermo-mécaniques des alliages à mémoire de forme . . . 63
5.2.1 Description des phénomènes. . . . 63
5.2.2 Mécanisme de la transformation martensitique . . . 65
5.2.3 La pseudo-élasticité . . . 67
5.2.4 Les alliages à mémoire de forme courants. . . . 68
5.2.5 Application des matériaux à mémoire de forme. . . . 69

6 Modélisation des alliages à mémoire de forme 71
6.1 Introduction . . . 71
6.2 Modélisation de l'effet mémoire de forme dans le cas unidimensionnel. . . . 71
6.2.1 Comportement à basse température $T < T_0$ . . . 74
6.2.2 Comportement à température moyenne $T_0 < T < T_c$ . . . 74
6.2.3 Comportement à haute température $T > T_c$ . . . 75
6.2.4 Discussion . . . 75
6.2.5 Exemple simple d'illustration : flexion d'une poutre . . . 77
6.3 Modélisation de la pseudo-élasticité (l'hystérésis). . . . 82
6.3.1 Introduction . . . 82
6.3.2 Choix de l'énergie d'interaction . . . 82
6.3.3 Changement de phase non dissipatif. . . . 83
6.3.4 Changement de phase dissipatif. . . . 84
6.3.5 Discussion . . . 89
6.4 Conclusion . . . 90

III Modélisation de l'endommagement fragile partiel. 93

7 Présentation du problème d'endommagement 95

8 Loi de comportement. 99
8.1 Introduction . . . 99
8.2 Modèle rhéologique. . . . 99
8.2.1 Lois d'état . . . 100
8.2.2 Pseudo-potentiel de dissipation . . . 101
8.2.3 Loi d'évolution . . . 101
8.3 Loi de comportement en vitesse. . . . 103
8.3.1 Matériau sain : $z = 0$ . . . 103
8.3.2 Matériau partiellement endommagé : $0 < z < 1$ . . . 106
8.3.3 Matériau complètement endommagé : $z = 1$. . . . 108
8.3.4 Résumé . . . 108
8.4 Généralisation tridimentionnelle . . . 110
8.5 Formulation du problème d'endommagement . . . 112
8.6 Problème en vitesse . . . 113
8.6.1 Loi de comportement en vitesse. . . . 113
8.6.2 Formulation locale du problème en vitesse. . . . 115

8.7 Analyse de stabilité. 116
8.7.1 Rappel des résultats. 116
8.7.2 Application au modèle d'endommagement. 117
8.8 Conclusion 117

9 Simulation numérique **119**
9.1 Introduction 119
9.2 Position du problème 120
9.2.1 Hypothèse du régime permanent 120
9.3 Algorithme de résolution 124
9.4 Résultats numériques 126
9.5 Conclusion 129

Conclusion générale **130**

ANNEXES **133**

A Modélisation de l'effet mémoire de forme **135**
A.1 Loi de comportement à basse température. 136
A.2 Loi de comportement à température moyenne. 138
A.3 Loi de comportement à haute température. 140

B Modélisation de l'hystérésis. **141**
B.1 Transformation de phase directe 141
B.2 Transformation de phase inverse 145

C Loi de comportement en vitesse **151**
C.1 Matériau sain : $z = 0$ 152
C.2 Matériau partiellement endommagé : $0 < z < 1$ 155
C.3 Matériau complètement endommagé : $z = 1$ 157

Introduction générale

L'étude des lois de comportement est un des domaines clé de la mécanique des matériaux solides. Ces lois peuvent être élaborées de façon purement phénoménologique à la lumière de faits expérimentaux. Toutefois. pour les écrire, on recourt souvent aux méthodes générales de la thermodynamique.

On sait que les équations d'état qui généralisent les relations de Gibbs s'obtiennent à partir de l'expression de l'énergie libre, par la méthode de Coleman par exemple, lorsque les variables d'état sont indépendantes [4] [1]. Ces lois, jointes aux lois complémentaires d'évolution [7], définissent le comportement du matériau. Il s'agit de la méthode des deux potentiels [4], [5], [7] et [12]. Elle consiste principalement en l'introduction de deux potentiels : le potentiel thermodynamique $\mathcal{W}$ et le potentiel de dissipation $\mathcal{D}$, exprimés en fonction des variables d'état et de leurs vitesses.

Dans le cas où ces variables sont liées, la méthode de Coleman ne peut plus être appliquée puisque leurs variations doivent être compatibles avec les liaisons internes. C'est pourquoi Frémond [6], se basant sur l'analyse convexe, a fourni une extension de la méthode des deux potentiels. Il y introduit les notions de sous-gradients et de fonctions indicatrices des ensembles des variables d'état admissibles.

D'une manière plus classique, nous avons choisi de présenter les résultats obtenus par Frémond suivant le formalisme de Lagrange. Les équations d'état s'écrivent en fonction du lagrangien du système donné par :

$$\mathcal{L} = \mathcal{W} - \lambda_i h_i, \qquad \lambda_i \geq 0 \quad h_i \geq 0 \quad \lambda_i h_i = 0.$$

Les λ_i sont les multiplicateurs de Lagrange associés aux liaisons internes h_i.

La dissipation intrinsèque se réduit à :

$$d_i = \mathcal{A}\dot{\alpha} \quad \mathcal{A} = -\mathcal{L}_{,\alpha},$$

$\mathcal{A}$ étant la force thermodynamique associée à sa variable duale α dans l'expression de l'énergie.

La signification physique des multiplicateurs de Lagrange et des équations d'état dépend du phénomène considéré. L'obligation pour ces multiplicateurs d'être positifs est à interpréter pour chaque cas particulier.

C'est dans ce cadre que nous avons choisi d'aborder la modélisation du changement de phase solide et par conséquent des matériaux à mémoire de forme et de l'endommagement fragile partiel.

[1] Toutes les références bibiliographiques de l'introduction correspondent à la liste donnée en fin de première partie.

Notre plan d'étude est le suivant :

Première partie

Nous commençons par présenter le cadre théorique de la modélisation, à savoir la méthode des deux potentiels en présence de liaisons internes. Ensuite, nous considérons le changement de phase solide réversible : suite à des sollicitations mécaniques, le matériau change de microstructure. Cela se traduit macroscopiquement par une variation des caractéristiques mécaniques (par exemple, la rigidité élastique passe de K_1 à K_2). Le matériau retrouve sa microstucture initiale quand cesse la sollicitation. Aucune déformation permanente ne subsiste.

Afin d'illustrer notre modèle, nous avons choisi de traiter quelques exemples numériques (fissure en mode I et torsion d'un cylindre de section triangulaire) en proposant un programme de calcul utilisant la méthode des éléments finis. Dans le but de valider ce dernier, nous avons établi une comparaison entre les résultats numériques et analytiques d'un même problème, celui de la fissure en mode III.

Enfin, dans le cadre général de l'étude de la stabilité des phénomènes dissipatifs indépendants du temps physique [15], nous considérons le problème de stabilité en présence de liaisons internes. Les résultats obtenus ont pu ainsi être appliqués au cas où le changement de phase est réversible.

Deuxième partie

L'originalité du comportement des matériaux à mémoire de forme est abordée dans le premier chapitre de cette partie : ces matériaux peuvent subir des déformations permanentes de quelques pour cent et retrouver leur forme première par simple élévation de température (effet mémoire de forme). Ils peuvent également présenter des déformations *réversibles* très importantes par rapport aux déformations élastiques (pseudo-élasticité). Les métallurgistes expliquent ce comportement inhabituel par un changement de phase à l'état solide, *la transformation martensitique*. A température élevée, le matériau se trouve dans une phase hautement symétrique (austénite) et à basse température, dans une phase moins symétrique (martensite). Le passage d'une phase à l'autre peut s'effectuer sur simple variation de température ou de contrainte.

Dans le second chapitre, nous considérons un modèle dérivé de celui étudié dans la première partie. Nous tenons toutefois compte de la température et de l'énergie d'interaction entre les phases. Il nous est alors possible de simuler les phénomènes décrits ci-dessus.

Troisième partie

L'endommagement fragile y est envisagé comme un changement de phase irréversible. Microscopiquement, cela se manifeste non plus par une modification de la microstructure, mais par des microfissures. Macroscopiquement, on observe une dégradation irréversible des caractéristiques élastiques. Le matériau garde après cette dégradation une rigidité résiduelle, d'où le caractère partiel de l'endommagement.

Afin de décrire ce phénomène évolutif, nous exploitons encore le modèle présenté en première partie. Cependant, par le choix d'un pseudo-potentiel de dissipation, nous

parvenons à rendre compte du caractère irréversible de l'endommagement, ce qui nous amène à formuler le problème en vitesse. Ensuite, comme pour le cas réversible, nous traitons le problème de stabilité d'un matériau à endommagement fragile partiel dans le cadre général de l'étude de stabilité des systèmes dissipatifs [15].

Enfin, nous illustrons nos propos par une simulation numérique du mouvement permanent d'une fissure en mode I en milieu endommageable au sens décrit ci-dessus.

Mots clés : méthode des deux potentiels, variables d'état liées, lagrangien, multiplicateurs de Lagrange, déformations locales, convexification, dissipation, loi de normalité, transformation martensitique, hystérésis, endommagement, problème en vitesse, stabilité, éléments finis, régime permanent.

Partie I

Changement de phase réversible.

Chapitre 1

Cadre théorique de la modélisation

1.1 Introduction

Nous présentons, suivant le formalisme de Lagrange, la méthode des deux potentiels lorsque les variables d'état sont liées. Les liaisons internes sont prises en compte dans l'expression de l'énergie potentielle par l'intermédiaire des multiplicateurs de Lagrange. L'inégalité de Clausius-Duhem reste vérifiée.

1.2 Méthode des deux potentiels

L'état thermodynamique d'un milieu matériel en un point et à un instant t est complètement défini par la connaissance des valeurs, à cet instant, d'un certain nombre de variables ne dépendant que du point considéré (postulat de l'état local). Elles sont appelées variables d'état ou variables thermodynamiques. Par exemple, pour un solide et sous l'hypothèse de petites perturbations, le système $(\epsilon, T, \beta, \alpha)$ représentant respectivement la déformation, la température et un ensemble de variables internes réversibles et irréversibles est un système de variables d'état. Dans le cas où ces dernières sont indépendantes et où $\mathcal{W}(\epsilon, \alpha, \beta, T)$ désigne la densité volumique d'énergie libre, le premier principe, exprimant la conservation de l'énergie et le second principe, sous forme de l'inégalité de Clausius-Duhem, permettent d'écrire la dissipation intrinsèque sous la forme :

$$d_i = \sigma\dot{\epsilon} - (\mathcal{W}_{,\epsilon}\,\dot{\epsilon} + \mathcal{W}_{,\alpha}\,\dot{\alpha} + \mathcal{W}_{,\beta}\,\dot{\beta} + \mathcal{W}_{,T}\,\dot{T}) - S\dot{T} \geq 0 \tag{1.1}$$

et conduisent aux équations d'état suivantes :

$$\sigma = \mathcal{W}_{,\epsilon}\,, \quad S = -\mathcal{W}_{,T}\,, \quad 0 = \mathcal{W}_{,\beta} \tag{1.2}$$

lorsque l'on convient que les évolutions à paramètres internes irréversibles bloqués et à température uniforme sont réalisables et réversibles, i.e à dissipation intrinsèque identiquement nulle. Seules les variations des paramètres α caractérisent les évolutions irréversibles du matériau. C'est le cas lorsque la déformation ϵ n'est pas directement un mécanisme de dissipation.
Dans ces conditions, la dissipation intrinsèque se réduit à :

$$d_i = -\mathcal{W}_{,\alpha}\,\dot{\alpha} = \mathcal{A}\dot{\alpha} \geq 0 \quad \text{avec} \quad \mathcal{A} = -\mathcal{W}_{,\alpha}\,. \tag{1.3}$$

Le comportement du matériau est complètement défini par l'ajout de lois complémentaires liant les variations des paramètres internes irréversibles α aux valeurs de $\mathcal{A}$, ces relations devant vérifier (1.3). L'adoption du formalisme des matériaux standards généralisés [8] fondée sur l'hypothèse du mécanisme dissipatif normal est un moyen d'assurer le respect de l'inégalité exprimant le second principe.

Un mécanisme dissipatif normal est défini en supposant l'existence d'une fonction $\mathcal{D}(\alpha, \dot{\alpha})$, définie pour tout $\dot{\alpha}$, semi continue inférieurement, non négative, convexe par rapport à $\dot{\alpha}$ et nulle en $\dot{\alpha} = 0$. On associe à $\dot{\alpha}$ la force généralisée $\mathcal{A}$ grâce à l'hypothèse de normalité :

$$\mathcal{A} \in \partial\mathcal{D}(\dot{\alpha}) \tag{1.4}$$

$\partial\mathcal{D}(\dot{\alpha})$ désigne le sous-gradient de $\mathcal{D}$ au point $\dot{\alpha}$.
Par conséquent, la fonction dual $\mathcal{D}^*$ obtenue par le transformé de Legendre-Fenchel de $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{D}^*(\mathcal{A}) = \sup_{\dot{\alpha}}[\mathcal{A}\dot{\alpha} - \mathcal{D}(\dot{\alpha})]$$

est s.c.i, convexe, positive et nulle pour $\mathcal{A} = 0$. De plus, il est connu [22] que les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$\mathcal{A} \in \partial\mathcal{D}(\dot{\alpha}) \Longleftrightarrow \dot{\alpha} \in \partial\mathcal{D}^*(\mathcal{A}) \Longleftrightarrow \mathcal{A}\dot{\alpha} = \mathcal{D}(\dot{\alpha}) + \mathcal{D}^*(\mathcal{A}). \tag{1.5}$$

On en déduit que si l'on introduit un pseudo-potentiel $\mathcal{D}$ vérifiant les hypothèses ci-dessus, l'inégalité (1.3) est automatiquement satisfaite.

Dans ce mémoire, on s'intéressera aux processus indépendants du temps physique. Dans ce cas, le pseudo-potentiel des dissipations $\mathcal{D}$ est une fonction positivement homogène de degré 1 par rapport à $\dot{\alpha}$:

$$\forall m \geq 0 \quad \mathcal{D}(\alpha, m\dot{\alpha}) = m\mathcal{D}(\alpha, \dot{\alpha}) \tag{1.6}$$

Ces fonctions sont habituellement introduites en plasticité incrémentale, en frottement sec, en endommagement fragile et en rupture fragile [15]. Une fonction satisfaisant (1.6) n'est pas différentiable au point $\dot{\alpha} = 0$, mais admet des dérivées directionnelles. Comme $\mathcal{D}$ est convexe, ces derivées définissent, dans l'espace des forces, une surface limitant un domaine convexe $\mathcal{C}$ appelé convexe des forces admissibles (dans ce cas, $\mathcal{D}^*$ est la fonction indicatrice de $\mathcal{C}$).

L'équation (1.4) indique, dans ce cas, que la force $\mathcal{A}$ associée à une vitesse $\dot{\alpha}$ doit appartenir à la surface de ce convexe et vérifier la loi de normalité :

$$\dot{\alpha} = N_{\mathcal{C}}(\mathcal{A}) \tag{1.7}$$

où $N_{\mathcal{C}}(\mathcal{A})$ est un opérateur qui fait correspondre à un point $\mathcal{A}$ de la surface délimitant $\mathcal{C}$ la direction d'un vecteur normal extérieur (cf figure 1.1).

Finalement, le potentiel $\mathcal{D}(\alpha, \dot{\alpha})$, fonction éventuelle de l'état, définit le comportement irréversible du matériau alors que son comportement réversible est défini à l'aide du potentiel thermodynamique $\mathcal{W}$ par les équations d'état (1.2). Les équations (1.2), (1.4)

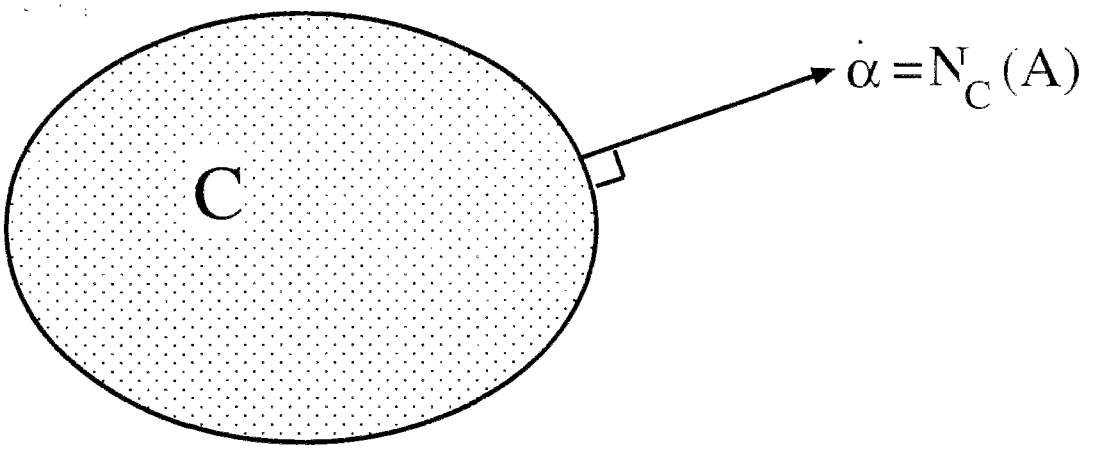


Figure 1.1: *Mécanisme d'évolution des variables irréversibles.*

traduisent la loi de comportement suivant la méthode des deux potentiels.

Lorsque les variables d'état ne sont pas indépendantes, le raisonnement précédent peut encore être directement appliqué grâce à l'introduction de fonctions indicatrices et de sous-gradients comme le montre Frémond [6]. Mais le traitement traditionnel des liaisons repose aussi sur la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

1.3 Méthode des deux potentiels en présence de liaisons internes.

On s'intéresse ici à un système de variables d'état $(\epsilon, \alpha, \beta, T)$ liées par des équations de liaisons internes :

$$g(\epsilon, \alpha, \beta, T) = 0. \tag{1.8}$$
$$h(\epsilon, \alpha, \beta, T) \geq 0 \tag{1.9}$$

Du fait que les variations des variables d'état doivent être compatibles avec les contraintes (1.8) et (1.9) , i.e vérifier :

$$g_{,\epsilon}\,\dot{\epsilon} + g_{,\alpha}\,\dot{\alpha} + g_{,\beta}\,\dot{\beta} + g_{,T}\,\dot{T} = 0, \tag{1.10}$$
$$h_{,\epsilon}\,\dot{\epsilon} + h_{,\alpha}\,\dot{\alpha} + h_{,\beta}\,\dot{\beta} + h_{,T}\,\dot{T} \geq 0 \text{ si } h = 0. \tag{1.11}$$

la méthode de Coleman [5] ne peut plus être adoptée de la manière habituellement rencontrée en mécanique des milieux continus. Des restrictions, imposées par ces liaisons, sont à prendre en compte.

On élabore alors une méthode fondée sur le formalisme de Lagrange qui nous permet de tenir compte des liaisons (1.8) et (1.9) et nous fournit des lois de comportement admissibles thermodynamiquement (vérification de l'inégalité de Clausius-Duhem).

Nous supposons que toutes les liaisons sont parfaites au sens que les réactions associées dérivent d'un potentiel [1] donné par :

$$\mathcal{W}_l = -\lambda g - \mu h \text{ avec } \mu \geq 0 \text{ et } \mu h = 0. \tag{1.12}$$

Par conséquent, la densité d'énergie libre du matériau devient :

$$\mathcal{L} = \mathcal{W} + \mathcal{W}_l \tag{1.13}$$

qui représente le lagrangien associé.

Les équations d'état, qui définissent les forces associées aux variables d'état, s'écrivent maintenant en fonction du lagrangien par :

$$\sigma^r = \mathcal{L}_{,\epsilon} = \mathcal{W}_{,\epsilon} - \lambda g_{,\epsilon} - \mu h_{,\epsilon} \tag{1.14}$$
$$-\mathcal{B} = \mathcal{L}_{,\beta} = \mathcal{W}_{,\beta} - \lambda g_{,\beta} - \mu h_{,\beta} \tag{1.15}$$
$$-\mathcal{A} = \mathcal{L}_{,\alpha} = \mathcal{W}_{,\alpha} - \lambda g_{,\alpha} - \mu h_{,\alpha} \tag{1.16}$$
$$-S = \mathcal{L}_{,T} = \mathcal{W}_{,T} - \lambda g_{,T} - \mu h_{,T} \tag{1.17}$$

σ^r désigne le tenseur des contraintes réversibles. $\mathcal{B}$ est la force thermodynamique associée à β.

D'autre part, d'après l'équation (1.12), les relations $\lambda g = 0$ et $\mu h = 0$ sont satisfaites à chaque instant. En les dérivant par rapport au temps, nous obtenons :

$$\lambda g_{,\epsilon}\,\dot{\epsilon} + \lambda g_{,\alpha}\,\dot{\alpha} + \lambda g_{,\beta}\,\dot{\beta} + \lambda g_{,T}\,\dot{T} = 0, \tag{1.18}$$
$$\mu h_{,\epsilon}\,\dot{\epsilon} + \mu h_{,\alpha}\,\dot{\alpha} + \mu h_{,\beta}\,\dot{\beta} + \mu h_{,T}\,\dot{T} = 0. \tag{1.19}$$

Ces relations expriment que les réactions généralisées associées aux liaisons internes ne travaillent jamais dans l'évolution réelle.

En remplaçant (1.14)(1.15)(1.16) (1.17)(1.18)(1.19) dans l'expression de la dissipation (1.1), on obtient :

$$d_i = (\sigma - \sigma^r)\dot{\epsilon} + \mathcal{B}\dot{\beta} + \mathcal{A}\dot{\alpha} \geq 0. \tag{1.20}$$

La méthode de Coleman peut maintenant s'appliquer à cette expression comme si les variables étaient indépendantes :

β est par définition une variable réversible, la force associée $\mathcal{B}$ doit être nulle :

$$\mathcal{B} = 0\ ; \tag{1.21}$$

si l'on suppose que la déformation n'est pas un mécanisme dissipatif [2], alors :

$$\sigma = \sigma^r. \tag{1.22}$$

[1] Ceci est une implication de la définition même des liaisons parfaites. Par exemple, une liaison bilatérale $g(u)$ (u désigne ici un vecteur de paramètres de déplacement d'un système mécanique quelconque) est parfaite si les réactions R mises en jeu ne travaillent pas ($R\delta u = 0$) dans toute vitesse virtuelle δu compatible avec la liaison , c'est-à-dire vérifiant $g_{,u}\,\delta u = 0$. Le théorème des multiplicateurs de Lagrange implique donc l'existence d'un réel λ telque $R = \lambda g_{,u}$. Par conséquent, R dérive d'un potentiel $\mathcal{W}_l = -\lambda g$. Le raisonnement est le même pour une liaison unilatérale, sauf qu'il faut tenir compte du signe des multiplicateurs.

[2] Cette hypothèse sera admise dans tous le reste de ce mémoire.

Finalement les équations (1.21) (1.22) montrent que la dissipation s'écrit :

$$d_i = \mathcal{A}\dot{\alpha} \geq 0 \quad \text{avec} \quad \mathcal{A} = -[\mathcal{W}_{,\alpha} - \lambda g_{,\alpha} - \mu h_{,\alpha}] = -\mathcal{L}_{,\alpha} \tag{1.23}$$

Ceci assure automatiquement la réversibilité du processus quand $\dot{\alpha} = 0$ et fournit l'expression des forces dissipatives $\mathcal{A}$ en fonction du lagrangien quand l'évolution est irréversible $\dot{\alpha} \neq 0$.

Il est important de noter que lorsqu'une contrainte h^j ou g^j dépend seulement du paramètre irréversible α : $h^j = h^j(\alpha)$ ou $g^j = g^j(\alpha)$, il n'est pas nécessaire d'en tenir compte dans l'expression du lagrangien pour obtenir la force dissipative $\mathcal{A}$. En effet, d'après (1.18) et (1.19) , on a $\mu h = 0$ et $\lambda \dot{g} = 0$. Dans le cas présent, on a :

$$\mu \dot{h} = \mu h_{,\alpha}\, \dot{\alpha}, \tag{1.24}$$

$$\lambda \dot{g} = \lambda g_{,\alpha}\, \dot{\alpha}. \tag{1.25}$$

d'où :

$$\lambda g_{,\alpha} = 0, \mu h_{,\alpha} = 0 \text{ et } \mathcal{A} = -\mathcal{W}_{,\alpha} \tag{1.26}$$

Les équations d'état sont finalement obtenues en remplaçant l'énergie $\mathcal{W}$ par le lagrangien $\mathcal{L}$ dans les équations (1.2) et (1.3). La signification des multiplicateurs de Lagrange et des équations d'état résulte des considérations physiques du phénomène considéré. L'obligation pour ces multiplicateurs d'être non négatifs (pour les liaisons unilatérales) s'interprète pour chaque cas en particulier.

1.4 Conclusion

Une extension de la méthode des deux potentiels en présence de liaisons internes a été formulée dans ce chapitre. Les équations d'état sont en effet écrites en fonction du lagrangien et l'évolution des paramètres internes irréversibles est décrite par le pseudo-potentiel de dissipation. L'admissibilité thermodynamique de la loi de comportement, en vertu du second principe, a pu ainsi être assurée.

Les deux présentations, suivant le formalisme de Lagrange ou le formalisme de Moreau, se révèlent strictement équivalentes.

Dans les chapitres suivants, cette méthode sera utilisée pour la description du changement de phase solide/solide dans le cas réversible (transformation martensitique) et irréversible (pseudo-élasticité des matériaux à mémoire de forme) ainsi que de l'endommagement fragile partiel.

Chapitre 2

Changement de phase réversible.

2.1 Introduction

Certains solides peuvent présenter plus d'une structure microscopique ou autrement dit plus d'une phase. Le passage d'une phase à l'autre est provoqué par un chargement thermomécanique.

Dans ce chapitre, nous considérons le cas où la transformation de phase est réversible : le matériau retrouve sa micro-structure initiale lorsque cesse la sollicitation.

La modélisation rentre dans le cadre des matériaux standards généralisés avec des variables d'état non indépendantes. Nous mettons en œuvre ici le formalisme présenté dans le chapitre précédent.

Nous commençons par examiner la loi de comportement unidimensionnelle en nous basant sur un modèle rhéologique simple. Une généralisation tridimensionnelle est ensuite traitée.

2.2 Cas unidimensionnel

Soit un matériau pouvant exister sous forme de deux phases élastiques. Le changement de phase est alors provoqué par des actions mécaniques favorisant soit l'une ou l'autre des phases. On suppose que la transformation se fait par l'intermédiaire d'une zone dans laquelle les deux phases peuvent coexister sous forme d'un mélange fin. A l'échelle microscopique, cela se traduit par une variation de la microstructure (on reviendra plus en détail sur ce point dans les chapitres suivants) qui peut se manifester macroscopiquement par un changement des caractéristiques mécaniques (module de cisaillement, rigidité etc...).

Pour ce faire, on considère un modèle rhéologique unidimensionnel représenté par le montage en série (cf figure (2.1)) . Il s'agit d'un modèle de ressorts défini par les variables d'état :

- ϵ : déformation macroscopique,
- e : déformation locale de la phase 1 (phase-mère),
- f : déformation locale de la phase 2 (phase-produit),
- z : proportion de la phase produit.

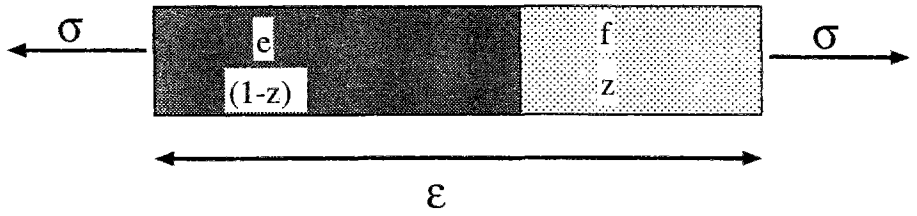


Figure 2.1: *modèle rhéologique.*

Ce sont des variables liées par des liaisons internes évidentes :

$$(1-z)e + zf - \epsilon = 0, \tag{2.1}$$
$$z \geq 0, \tag{2.2}$$
$$1-z \geq 0. \tag{2.3}$$

Afin de simplifier la présentation, on s'est placé en isotherme. Seul l'aspect mécanique sera discuté.

Puisque le milieu possède deux phases, il est naturel d'écrire que l'énergie de déformation emmagasinée est constituée par l'énergie relative à chacune d'elles, augmentée éventuellement, de l'énergie d'interaction ($I(z)$) entre elles :

$$\mathcal{W}_{def} = (1-z)U(e) + zV(f) + I(z). \tag{2.4}$$

Pour fixer les idées, on se place en petites perturbations et on admet que :

$$U(e) = \frac{1}{2}K_1 e^2 \quad V(f) = \tfrac{1}{2}K_2 f^2 + \ell \quad r = \frac{K_1}{K_2} > 1. \tag{2.5}$$

K_α ($\alpha = 1, 2$) étant les modules de rigidité respectifs de chacune des phases. ℓ est une constante positive, caractéristique du matériau représentant l'énergie de changement de phase. Si la force est contrôlée, l'énergie potentielle totale du système est :

$$E_d = \mathcal{W} - \sigma\epsilon.$$

Pour tenir compte des liaisons existant entre les variables d'état, on introduit les multiplicateurs λ, $\lambda_1 \geq 0$ et $\lambda_2 \geq 0$ associés respectivement à la liaison bilatérale et aux deux liaisons unilatérales. La positivité des multiplicateurs de Lagrange associés aux conditions unilatérales impose des restrictions que l'on interprètera physiquement.

Le lagrangien associé s'écrit :

$$\mathcal{L}(\epsilon, e, f, z, \lambda, \lambda_1, \lambda_2) = (1-z)U(e) + zV(f) + I(z) - \sigma\epsilon - \lambda((1-z)e + zf - \epsilon)$$
$$-\lambda_1(1-z) - \lambda_2 z.$$

Les équations d'équilibre, obtenues par la première variation de l'énergie potentielle, s'écrivent :

$$\mathcal{L}_{,\epsilon} = \quad \lambda - \sigma \quad = 0 \tag{2.6}$$
$$\mathcal{L}_{,e} = \quad (1-z)[U'(e) - \lambda] \quad = 0 \tag{2.7}$$
$$\mathcal{L}_{,f} = \quad z[V'(f) - \lambda] \quad = 0 \tag{2.8}$$
$$\mathcal{L}_{,z} = \quad V(f) - U(e) - \lambda(f-e) + I'(z) + \lambda_1 - \lambda_2 \quad = 0 \tag{2.9}$$
$$\mathcal{L}_{,\lambda} = \quad (1-z)e + zf - \epsilon \quad = 0 \tag{2.10}$$

auxquelles s'ajoutent les liaisons et les relations associées :

$$\lambda_1 \geq 0 \quad et \quad \lambda_1(1-z) = 0 \tag{2.11}$$
$$\lambda_2 \geq 0 \quad et \quad \lambda_2 z = 0 \tag{2.12}$$

L'interprétation physique de (2.6), (2.7) et (2.8) est immédiate ; du fait que l'on adopte un modèle en série et d'après la figure (2.1), on obtient :

$$\text{Si} \quad z \neq 1 \quad \text{et} \quad z \neq 0 \Longrightarrow \sigma = U'(e) = V'(f)$$

Ceci montre que le multiplicateur λ est la contrainte σ.

On suppose, dans la suite de ce chapitre, que l'énergie d'interaction entre les deux phases est nulle.

Pour $\mathrm{I}(z) = 0$, la loi de comportement s'obtient par la positivité des multiplicateurs de la manière suivante :

- **Si** $z = 0$.

La résolution du système formé, par les équations (2.6)-(2.12) donne dans ce cas :

$$\lambda = \sigma, \ \lambda = K_1\epsilon, \ e = \epsilon, \ \lambda_1 = 0, \ \text{et} \ \lambda_2 = \frac{1}{2}K_2 f^2 - \frac{1}{2}K_1\epsilon^2 + \ell - K_1\epsilon(f-\epsilon). \tag{2.13}$$

La valeur de f est arbitraire : dans les équations f est toujours multipliée par z et le fait que z soit nulle rend cette quantité indeterminée. Ceci est en accord logique avec la physique du phénomène. En effet, il est tout à fait normal de ne pas avoir d'informations sur la déformation locale de la phase-produit ; par hypothèse, cette dernière n'existe pas ($z = 0$).

D'après la méthode de Lagrange, les multiplicateurs doivent être positifs. C'est pourquoi le signe de λ_2 doit être discuté : λ_2 dépend de la valeur arbitraire f. Il suffit donc que son minimum par rapport à f soit positif pour que λ_2 soit positif quelle que soit f. Par ailleurs :

$$\lambda_{2,f} = K_2 f - K_1\epsilon,$$
d'où
$$\lambda_{2,f} = 0 \Longrightarrow f = \frac{K_1}{K_2}\epsilon = r\epsilon$$
et
$$\lambda_{2,ff} = K_2 \geq 0.$$

Par conséquent, le minimum de λ_2 est :

$$\begin{aligned}\lambda_2^* &= \frac{1}{2}K_2 r^2\epsilon^2 - \frac{1}{2}K_1\epsilon^2 + \ell - K_1\epsilon^2(r-1)\\ &= \frac{1}{2}K_1\epsilon^2 + \ell - \frac{1}{2}K_1 r\epsilon^2\end{aligned}$$

La condition $\lambda_2 \geq 0$ exige alors que l'état $z = 0$ ne soit physiquement admissible que si :

$$\epsilon^2 \leq \frac{2\ell}{K_1(r-1)} = E^2$$

- **Si** $z = 1$.

Les calculs sont similaires à ceux du cas précédent :

$$\lambda = \sigma,\ \lambda = K_2\epsilon,\ f = \epsilon,\ \lambda_2 = 0,\ \text{et}\ \lambda_1 = \frac{1}{2}K_1 e^2 - \frac{1}{2}K_2\epsilon^2 - \ell + K_2\epsilon(\epsilon - e). \quad (2.14)$$

Ici aussi, le signe de λ_1 sera discuté : λ_1 dépend de la valeur arbitraire e. Il suffit alors que son minimum par rapport à e soit positif pour que λ_1 soit toujours positif. Par ailleurs :

$$\begin{aligned}\lambda_{1,e} &= K_1 e - K_1\epsilon,\\ \text{d'où}&\\ \lambda_{1,e} = 0 &\implies e = \frac{K_2}{K_1}\epsilon = \frac{1}{r}\epsilon\\ \text{et}&\\ \lambda_{1,ee} &= K_1 \geq 0.\end{aligned}$$

Par conséquent, λ_1 atteint son minimum pour la valeur :

$$\begin{aligned}\lambda_1^* &= -\frac{1}{2}\frac{K_1}{r^2}\epsilon^2 + \frac{1}{2}K_2\epsilon^2 - \ell + K_2\epsilon^2(1 - \frac{1}{r})\\ &= \frac{1}{2}K_2\epsilon^2 - \ell - \frac{1}{2}\frac{K_2}{r}\epsilon^2\end{aligned}$$

La condition $\lambda_1 \geq 0$ exige que l'état $z = 1$ ne soit physiquement admissible que si :

$$\epsilon^2 \geq \frac{2\ell r}{K_2(r-1)} = F^2$$

- **Si** $0 < z < 1$.

Nous aurons, pour ce troisième cas, des calculs encore similaires à ceux des deux autres. On obtient :

$$\lambda = \sigma,\ \lambda = K_1 e = K_2 f,\ |e| = E,\ |f| = F,\ \lambda_2 = 0.\ \lambda_1 = 0,\ \text{et}\ z = \frac{|\epsilon| - E}{F - E}. \quad (2.15)$$

$$E \leq |\epsilon| \leq F$$

Finalement, la loi de comportement s'écrit :

$$|\epsilon| \leq E \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} z = 0 \\ \sigma = K_1 \epsilon \end{cases} \tag{2.16}$$

$$E \leq |\epsilon| \leq F \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} z = \dfrac{|\epsilon| - E}{F - E} \\ \sigma = \sqrt{\dfrac{2\ell K_1}{(r-1)}} \end{cases} \tag{2.17}$$

$$|\epsilon| \geq F \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} z = 1 \\ \sigma = K_2 \epsilon \end{cases} \tag{2.18}$$

Ce qui conduit à la courbe contrainte-déformation de la figure (2.2 a) : nous ne représentons ici que le comportement dans le quadrant ($\sigma \geq 0, \epsilon \geq 0$). Ceci restera valable pour tout au long de ce mémoire.

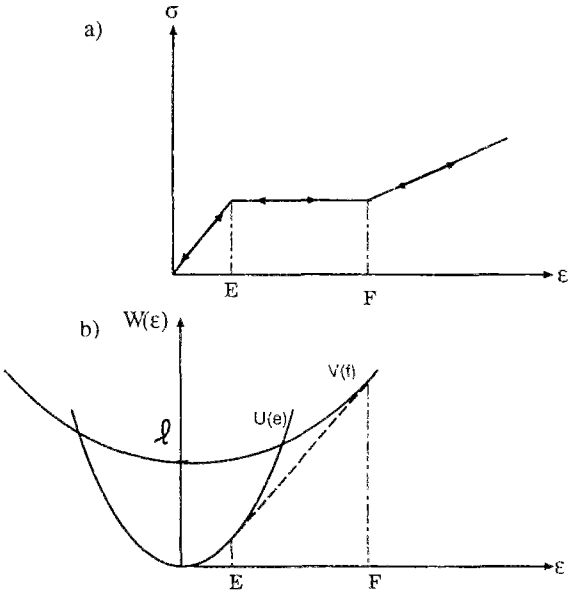


Figure 2.2: *Convexification de l'énergie,*
a: courbe contrainte-déformation .
b: courbe d'énergie associée.

La correspondance $\sigma - \epsilon$ peut être décrite par une énergie convexe $\mathcal{W}(\epsilon)$ qui dérive de $U(\epsilon)$ et $V(\epsilon)$ par une opération de convexification (cf. figure (2.2 b). La condition de positivité des multiplicateurs associés aux liaisons unilatérales peut s'interpréter géométriquement de la façon suivante :

par exemple pour $z = 0$:

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= -U(e) + V(f) - \lambda(f - e) \\ &= -U(\epsilon) + V(f) - U'(\epsilon)(f - \epsilon) \end{aligned}$$

$$\text{et} \qquad \lambda_2 \geq 0 \implies V(f) \geq U(\epsilon) + U'(\epsilon)(f - \epsilon) \tag{2.19}$$

L'équation (2.19) montre que la courbe V doit se placer au-dessus de la droite $\mathcal{D}^f_\epsilon$ d'équation : $U(\epsilon) + U'(\epsilon)(f - \epsilon)$, ce qui exclut une portion de la courbe U. En effet, pour ϵ donné, soit ϵ_0, on a :

$$\mathcal{D}^f_{\epsilon_0} : y = U(\epsilon_0) + U'(\epsilon_0)(f - \epsilon_0)$$

Il est aisé de remarquer que cette droite a le même coefficient directeur que la tangente à la courbe U au point ϵ_0, en l'occurence $U'(\epsilon_0)$. La figure (2.2 b) montre que tant que ϵ_0 est inférieure à E, cette tangente ainsi que la droite $\mathcal{D}^f_{\epsilon_0}$ restent au-dessous de la courbe V. Par contre, dès que ϵ_0 dépasse E, ces deux dernières coupent la courbe V et une portion de celle-ci vient se placer sous $\mathcal{D}^f_{\epsilon_0}$. Ceci contredit la condition de positivité de λ_2 (2.19). Donc, selon cette condition, seules les ϵ inférieures à E sont admissibles.
Le même raisonnement peut être appliqué au cas $z = 1$, et la condition de positivité de λ_1 exige que la courbe $U(e)$ soit placée au-dessus de la droite d'équation $V(\epsilon) + V'(\epsilon)(e - \epsilon)$, ce qui exclut une branche de la courbe V.

2.3 Généralisation tridimensionnelle

Nous supposons que le changement de phase se manifeste macroscopiquement par une variation du module de cisaillement. Le module de compressibilité volumique reste identique pour les deux phases. Toutefois, il est également possible de considérer le cas où le module de compressibilitè volumique change. Cela n'a pas été envisagé dans ce mémoire.

Les densités d'énergie de chaque phase sont :

$$U(e, \theta) = \mu_1 e_{ij} e_{ij} + \frac{1}{2} K \theta_\epsilon^2 \tag{2.20}$$

$$V(f, \theta) = \mu_2 f_{ij} f_{ij} + \frac{1}{2} K \theta_\epsilon^2 + \ell \tag{2.21}$$

Les liaisons internes entre les variables d'état s'écrivent :

$$(1 - z)e_{ij} + z f_{ij} - \epsilon'_{ij} = 0 \tag{2.22}$$

$$z \geq 0 \tag{2.23}$$

$$1 - z \geq 0 \tag{2.24}$$

La densité d'énergie de l'ensemble est la somme des contributions de chaque phase :

$$\mathcal{W}_{def} = (1 - z)U + zV + I(z). \tag{2.25}$$

μ_α ($\alpha = 1, 2$) étant les modules de cisaillement respectifs de chaque phase. K le module de compréssibilité volumique, ϵ'_{ij} la partie déviatorique du tenseur déformation et θ_ϵ sa trace.

Comme dans le cas unidimensionnel, nous tenons compte des liaisons existant entre les variables d'état [(2.23):(2.24)], on introduit les multiplicateurs λ_{ij}, $\lambda_1 \geq 0$ et $\lambda_2 \geq 0$ associés respectivement à la liaison bilatérale et aux deux liaisons unilatérales. Le lagrangien associé s'écrit :

$$\mathcal{L} = (1 - z)U + zV + I(z) - \lambda_{ij}((1 - z)e_{ij} + z f_{ij} - \epsilon'_{ij}) - \lambda_1(1 - z) - \lambda_2 z. \tag{2.26}$$

Les lois d'état en terme de lagangien s'écrivent :

$$\mathcal{L}_{,\epsilon'_{ij}} = \lambda_{ij} = \sigma'_{ij} \tag{2.27}$$
$$\mathcal{L}_{,\theta} = K\theta_c = P \tag{2.28}$$
$$\mathcal{L}_{,e_{ij}} = (1-z)[U'(e_{ij}) - \lambda_{ij}] = 0 \tag{2.29}$$
$$\mathcal{L}_{,f_{ij}} = z[V'(f_{ij}) - \lambda_{ij}] = 0 \tag{2.30}$$
$$\mathcal{L}_{,z} = V - U - \lambda_{ij}(f_{ij} - e_{ij}) + I'(z) + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \tag{2.31}$$
$$\mathcal{L}_{,\lambda_{ij}} = (1-z)e_{ij} + zf_{ij} - \epsilon'_{ij} = 0 \tag{2.32}$$

auxquelles s'ajoutent les liaisons et les relations associées :

$$\lambda_1 \geq 0 \quad et \quad \lambda_1(1-z) = 0 \tag{2.33}$$
$$\lambda_2 \geq 0 \quad et \quad \lambda_2 z = 0 \tag{2.34}$$

σ'_{ij} étant la partie déviatorique du tenseur des contraintes et P le tiers de sa trace.

Pour I$(z) = 0$, la loi de comportement s'obtient de la même manière que dans le cas unidimensionnel :

- ***Si*** $z = 0$.

Les équations [(2.27)-(2.34)] donnent :

$$\begin{cases} \lambda_{ij} = \sigma'_{ij} \\ \lambda_{ij} = 2\mu_1\epsilon'_{ij} \\ P = K\theta_c \\ e_{ij} = \epsilon'_{ij} \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = \mu_2 f_{ij} f_{ij} - \mu_1\epsilon'_{ij}\epsilon'_{ij} + \ell - 2\mu_1\epsilon'_{ij}(f_{ij} - \epsilon'_{ij}). \\ f_{ij} \quad \text{est arbitraire} \end{cases} \tag{2.35}$$

En dérivant λ_2 par rapport à f, on trouve :

$$\lambda_2 \geq \lambda_2^* = \mu_1(1-\eta)\epsilon'_{ij}\epsilon'_{ij} + \ell$$
$$\eta = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Donc la condition $\lambda_2 \geq 0$ exige que l'état $z = 0$ ne soit physiquement admissible que si :

$$\epsilon'_{ij}\epsilon'_{ij} \leq \frac{\ell}{\mu_1(\eta - 1)} = E^2$$

Le calcul est exactement le même pour le cas $z = 1$ et $0 < z < 1$, ce qui donne la loi de comportement suivante :

$$|\epsilon'_{ij}| \leq E \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} z = 0 \\ \sigma'_{ij} = 2\mu_1 \epsilon'_{ij} \\ P = K\theta \end{cases} \tag{2.36}$$

$$E \leq |\epsilon'_{ij}| \leq F \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} z = \dfrac{|\epsilon'_{ij}| - E}{F - E} \\ \sigma'_{ij} = \dfrac{2\mu_1\mu_2\epsilon'_{ij}}{\mu_1 z + (1-z)\mu_2} \\ P = K\theta \end{cases} \tag{2.37}$$

$$|\epsilon'_{ij}| \geq F \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} z = 1 \\ \sigma'_{ij} = 2\mu_2 \epsilon'_{ij} \\ P = K\theta \end{cases} \tag{2.38}$$

$$|\epsilon'| = \sqrt{\epsilon'_{ij}\epsilon'_{ij}} \quad E = \sqrt{\frac{\ell\mu_2}{\mu_1^2 - \mu_1\mu_2}} \quad F = \sqrt{\frac{\ell\mu_1}{\mu_1\mu_2 - \mu_2^2}}$$

2.4 Conclusion

La méthode des deux potentiels, étendue au cas des variables d'état non indépendantes, l'adoption d'un modèle rhéologique simple en série et l'hypothèse selon laquelle il existe une zone où les deux matériaux peuvent coexister nous ont permis d'écrire une loi de comportement capable de simuler le changement de phase solide/solide au sens défini au début de ce chapitre. Une généralisation tridimensionnelle a également été formulée sous l'hypothèse de l'isotropie élastique de chaque phase. Cette généralisation va nous permettre d'introduire la loi de comportement dans des codes de calcul et ce, pour résoudre numériquement des problèmes de structure. Ceci fera l'objet du chapitre suivant où quelques exemples numériques et analytiques sont présentés.

Chapitre 3

Exemples d'illustration

3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la présentation de quelques exemples numériques simples mettant en œuvre la méthode des éléments finis. Ils sont destinés à illustrer la méthode des deux potentiels avec des variables internes liées via la loi de comportement "changement de phase solide/solide" écrite précédemment.

Le premier problème considéré est celui d'une plaque fissurée sollicitée en mode I et le second celui de la torsion d'un cylindre de section triangulaire.

On se propose dans les deux cas de déterminer les différents champs mécaniques mis en jeu, c'est-à-dire les champs des contraintes, des déformations et de la proportion de phase.

Enfin, une étude complète - analytique (utilisant la méthode d'hodographe), et numérique (utilisant la méthode des éléments finis) - du problème d'une plaque fissurée en mode III est réalisée. La comparaison des résultats se révèle satisfaisante et cela nous permet en définitive de valider le programme ' éléments finis' mis au point.

3.2 Fissure en mode I

Cet exemple simule numériquement le problème d'équilibre d'une fissure dans une plaque homogène de hauteur $2h$. Son matériau obéit à la loi de comportement écrite précédemment (changement de phase). Le chargement correspond à ce qu'on appelle le mode I.

3.2.1 Formulation du problème

Le problème posé est celui d'une fissure définie de la façon suivante :

Le système des coordonnées est choisi de façon à ce que la fissure se trouve dans le plan $y = 0$, que l'axe z soit parallèle aux lèvres de la fissure et que l'origine soit au front de la fissure (cf. figure (3.1)). Evidemment, le domaine matériel est l'extérieur de la demi-droite ($x < 0, y = 0$) dans le plan (x, y) .

Le problème revient à déterminer, dans le repère (x, y), les champs $\sigma(x, y), \epsilon(x, y)$, $z(x, y), u(x, y)$ vérifiant les conditions suivantes :

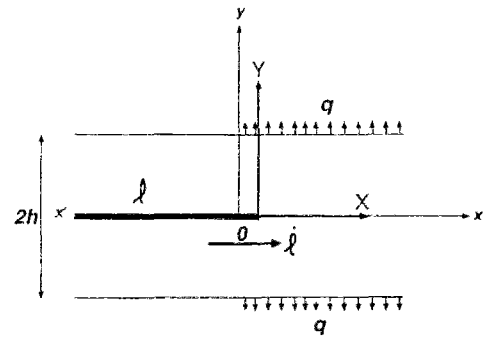


Figure 3.1: *Plaque fissurée sollicitée en mode I.*

• conditions statiques :

$$div\sigma = 0 \tag{3.1}$$

• conditions de liaison :

$$u_2(x,0) = 0 \quad \text{pour} \quad x \geq 0 \tag{3.2}$$

• conditions aux limites :
- dues à la fissure :

$$\sigma_{22}(x,0) = 0 \quad \sigma_{12}(x,0) = 0 \quad \forall x \leq 0 \tag{3.3}$$

- dues aux chargements :

$$\sigma_{22}(x,h) = q \quad \sigma_{12}(x,h) = 0 \quad \forall x \geq 0 \tag{3.4}$$

- à l'infini :

$$x \longrightarrow +\infty \quad \sigma_{12} = \sigma_{11} = 0 \quad \sigma_{22} = q \tag{3.5}$$

$$x \longrightarrow -\infty \quad \sigma_{12} = \sigma_{11} = 0 \quad \sigma_{22} = 0 \tag{3.6}$$

• la loi de comportement :

$$|\epsilon'_{ij}| \leq E \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} z = 0 \\ \sigma'_{ij} = 2\mu_1 \epsilon'_{ij} \\ P = K\theta \end{cases} \tag{3.7}$$

$$E \leq |\epsilon'_{ij}| \leq F \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} z = \dfrac{|\epsilon'_{ij}| - E}{F - E} \\ \sigma'_{ij} = \dfrac{2\mu_1\mu_2\epsilon'_{ij}}{\mu_1 z + (1-z)\mu_2} \\ P = K\theta \end{cases} \tag{3.8}$$

$$|\epsilon'_{ij}| \geq F \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} z = 1 \\ \sigma'_{ij} = 2\mu_2 \epsilon'_{ij} \\ P = K\theta \end{cases} \tag{3.9}$$

$$|\epsilon'| = \sqrt{\epsilon'_{ij}\epsilon'_{ij}} \quad E = \sqrt{\frac{\ell\mu_2}{\mu_1^2 - \mu_1\mu_2}} \quad F = \sqrt{\frac{\ell\mu_1}{\mu_1\mu_2 - \mu_2^2}}$$

3.2.2 Méthode de calcul

On se sert, pour notre simulation, de la méthode des éléments finis. Vu la symétrie du problème (géométrie et chargement), seule la partie supérieure de la plaque est considérée. Le maillage de la figure (3.2) est réalisé. Pour des raisons d'économie de temps de calcul, seule la région proche de la pointe de la fissure possède un maillage fin.

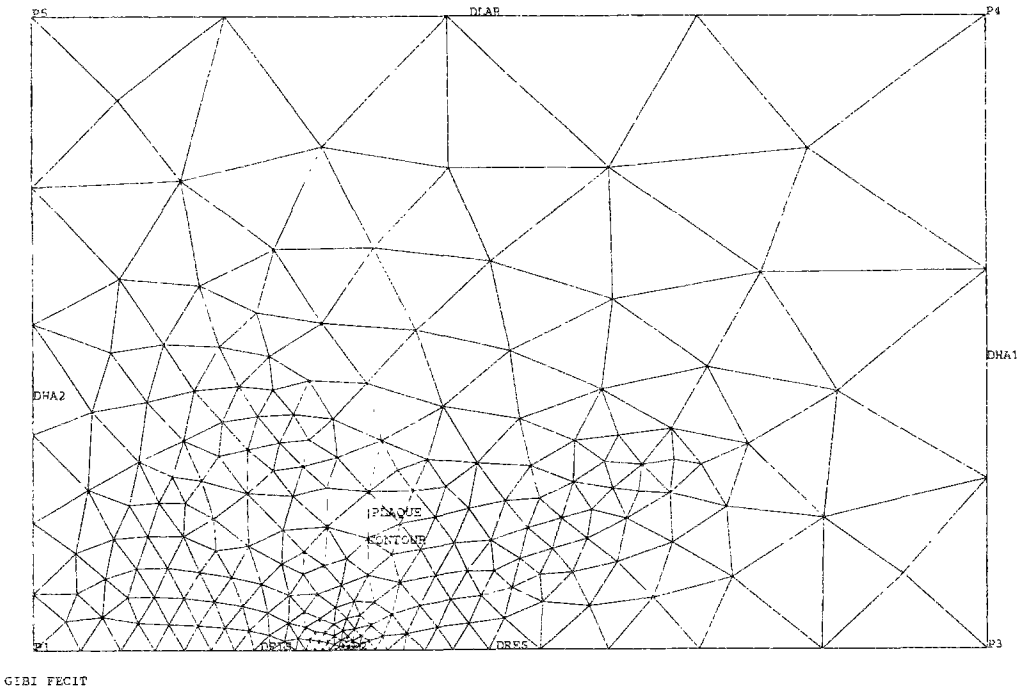


Figure 3.2: *Maillage : fissure en mode I.*

Les étapes générales du calcul sont les suivantes :

1. On commence par résoudre un problème d'élasticité avec les caractéristiques du matériau initial, c'est-à-dire :
   - $\mu_n = \mu_1$
   - $K_n = K$
   - $z_n = 0$

où n représente le point courant du maillage.

2. On calcule les nouvelles valeurs de z_n en utilisant le critère donné par le déviateur du champ des déformations obtenues par la première résolution du problème d'élasticité.

3. Si pour tous les points, les valeurs de z_n sont nulles, alors la solution du problème d'élasticité est retenue. Les déformations ne sont pas assez importantes pour provoquer un changement de phase.

4. Dans le cas contraire, on calcule les nouvelles caractéristiques du matériau qui dépendent de z_n et avec lesquelles on reformule un problème d'élasticité à constantes hétérogènes. On arrête les calculs lorsque les valeurs de z_n à l'itération $i+1$ sont proches de celles obtenues à l'itération i suivant un critère de convergence approprié.

3.2.3 Simulation numérique et résultat

A ce stade, on cherche uniquement à donner des exemples d'illustration permettant de montrer que le modèle se prête à des résolutions numériques. Les constantes élastiques choisies ne correspondent pas à des valeurs réelles. Ceci n'affecte en rien la crédibilité des calculs.

L'algorithme ainsi construit converge en une trentaine d'itérations (cf. figure (3.3)).

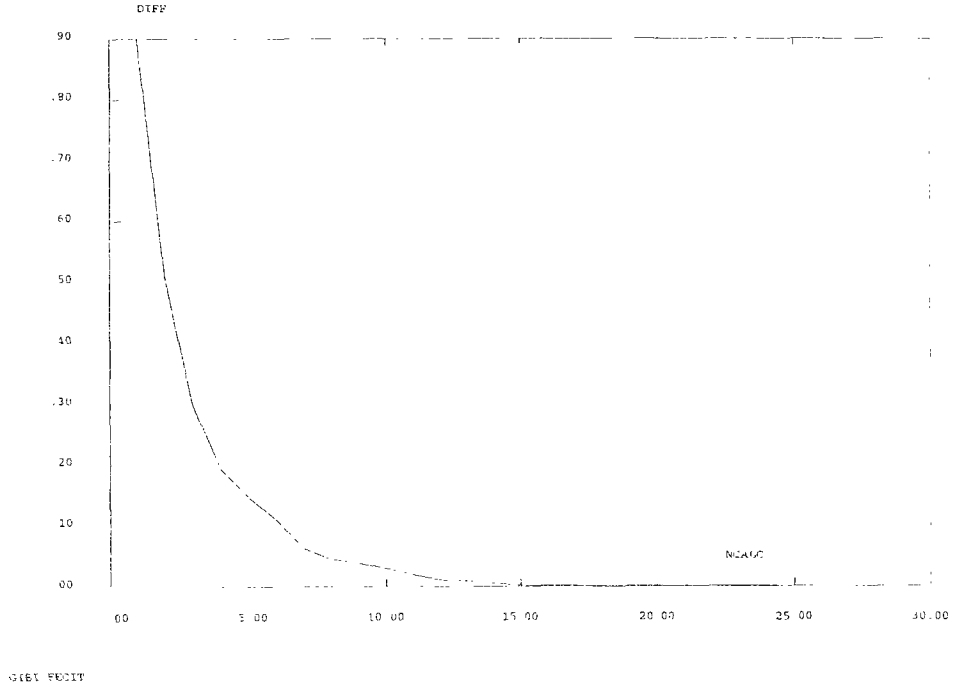


Figure 3.3: *Courbe de convergence des calculs mode I.*

Les résultats obtenus sont satisfaisants. En effet, le changement de phase se produit à la pointe de la fissure, là où les déformations sont maximales (cf. figure (3.4) et figure (3.5)). Cela est conforme à la loi de comportement déjà écrite.

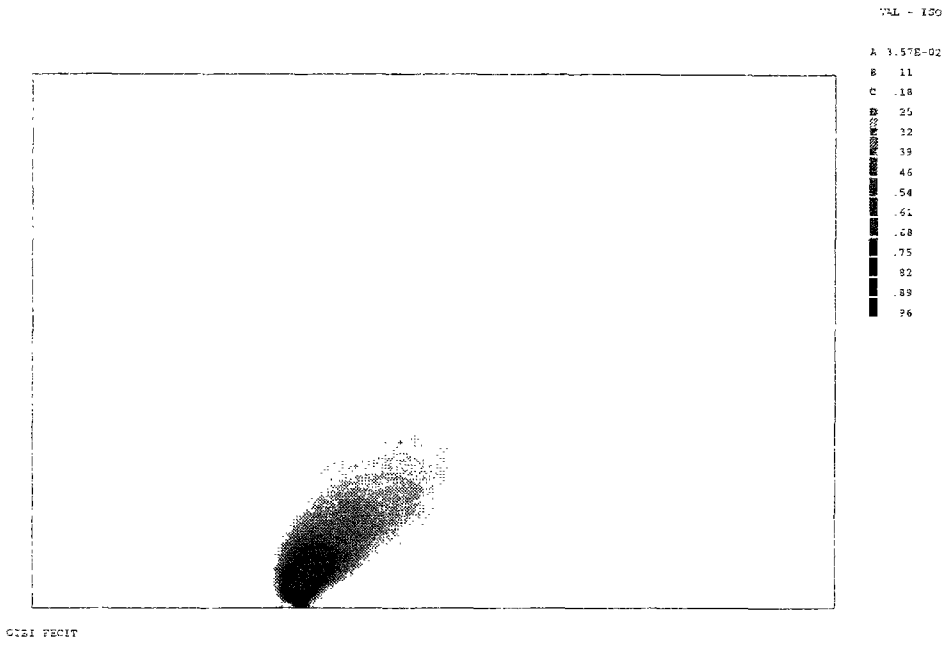


Figure 3.4: *Isovaleurs de la proportion de phase : fissure en mode I .*

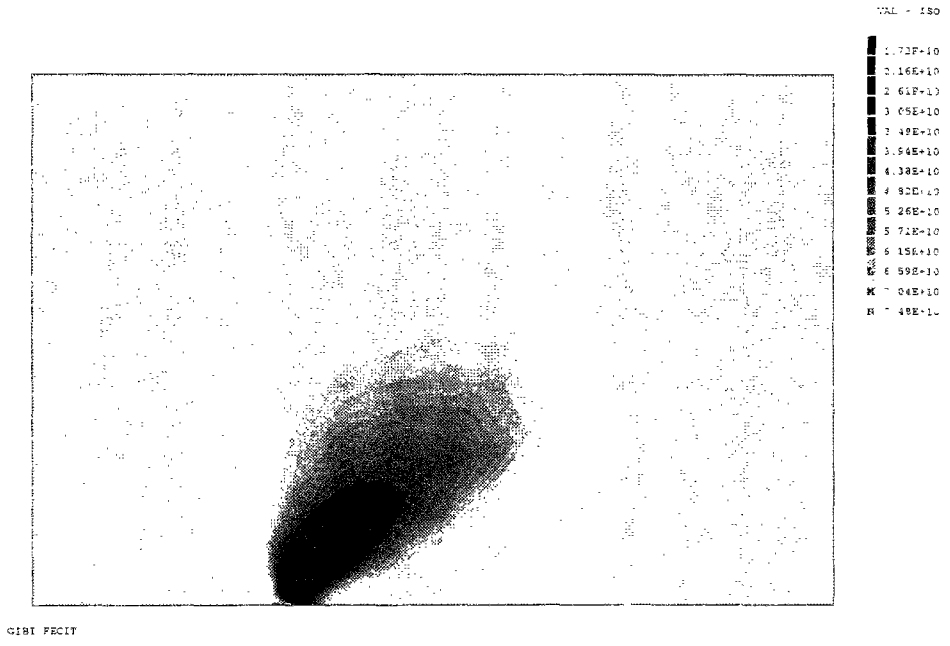


Figure 3.5: *Isovaleurs de coefficient de cisaillement : fissure en mode I*

3.3 Torsion d'un cylindre de section triangulaire

3.3.1 Position du problème

On désigne par Oxyz le système des coordonnées cartésiennes du repère orthonormé utilisé.

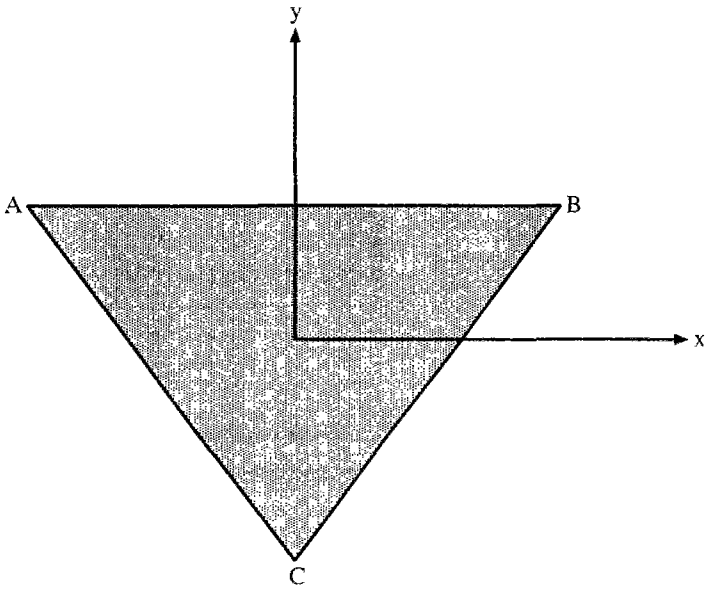


Figure 3.6: *Section du cylindre.*

L'équilibre isotherme d'un cylindre d'axe parallèle à Oz fig(3.6), de longueur l est étudié. On appelle Ω la section droite courante de la barre ; Ω_0 et Ω_l désignent les extrémités des cotes z = 0 et z = l. Ce cylindre n'est soumis à aucune force sur sa surface latérale; un couple de torsion C d'axe parallèle à Oz est exercé sur chacune des bases.
Il s'agit donc du problème classique de la torsion d'un cylindre. Suivant l'usage [18], on cherche d'abord une solution de la forme :

$$u_1 = -\xi z y \tag{3.10}$$
$$u_2 = \xi z x \tag{3.11}$$
$$u_3 = \xi \varphi(x, y) \tag{3.12}$$

avec ξ une constante et φ une fonction de (x,y) à déterminer. ξ représente géométriquement l'angle de rotation relatif entre deux sections du cylindre distantes de l'unité.
La matrice des déformations linéarisées s'écrit :

$$\epsilon = \epsilon' = \xi \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}(\varphi_{,x} - y) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\varphi_{,y} + x) \\ \frac{1}{2}(\varphi_{,x} - y) & \frac{1}{2}(\varphi_{,y} + x) & 0 \end{bmatrix}$$

La loi de comportement permet d'écrire le tenseur des contraintes :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' = \xi \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mu(z)(\varphi_{,x} - y) \\ 0 & 0 & \mu(z)(\varphi_{,y} + x) \\ \mu(z)(\varphi_{,x} - y) & \mu(z)(\varphi_{,y} + x) & 0 \end{bmatrix}$$

avec

$$\mu(z) = \begin{cases} \mu_1 & si \quad |\epsilon'| \leq E \\ \dfrac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 z + (1-z)\mu_2} & si \quad E \leq |\epsilon'| \leq F \\ \mu_2 & si \quad |\epsilon'| \geq F \end{cases} \tag{3.13}$$

Les équations d'équilibre deviennent :

$$div(\mu(z)\nabla\varphi) + x\mu_{,y} - y\mu_{,x} = 0 \tag{3.14}$$

et les conditions aux limites à :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = n_x y - n_y x \tag{3.15}$$

Le problème se réduit donc à la détermination de φ. Or, l'équation (3.14) est exactement celle d'un problème thermique avec une conductivité dépendant du point et une source d'énergie volumique $x\mu_{,y} - y\mu_{,x}$. Il suffit de remplacer la température par la fonction φ et la conductivité thermique par $\mu(z)$. Les conditions aux limites sont également imposées par analogie. En effet , $\dfrac{\partial \varphi}{\partial n}$ correspond à un flux à travers la surface de normale $\vec{n}$.

3.3.2 Méthode de calcul

La méthode numérique utilisée est celle des éléments finis. Vu l'indépendance du problème par rapport à la cote z, seule une section est modélisée. On réalise le maillage de la figure (3.7).

L'algorithme de calcul est similaire à celui du cas de la fissure en mode I. Une légère différence réside cependant dans le fait qu'au lieu de faire des calculs élastiques successifs, on réalise des calculs thermiques.

Pour une section triangulaire, on aura :

• sur le côté AB

$$\vec{n}_{AB} = (0,1) \implies \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -x.$$

• sur le côté BC

$$\vec{n}_{BC} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}) \implies \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\sqrt{3}}{2} y + \frac{1}{2} x.$$

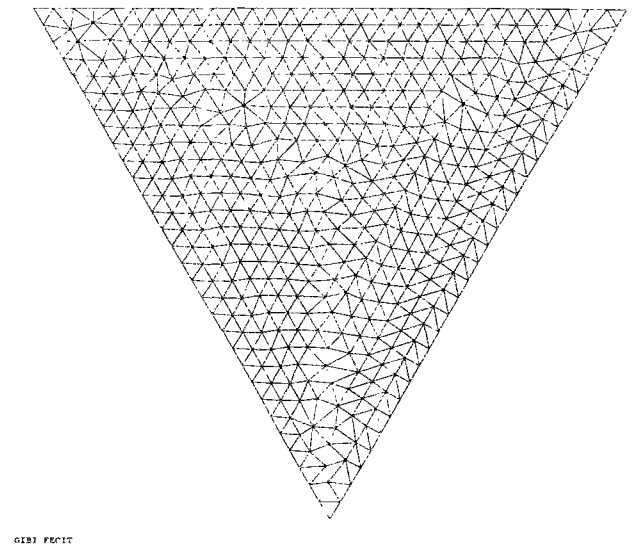


Figure 3.7: *Maillage : torsion d'un cylindre de section triangulaire .*

• sur le côté AC

$$\vec{n}_{AC} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) \implies \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{1}{2}x.$$

Il s'agit donc d'appliquer un flux linéaire sur chaque droite du bord du triangle.

3.3.3 Résultats

Comme dans le cas du problème de fissure sollicitée en mode I, l'algorithme converge en une trentaine d'itérations (cf. figure (3.8)). On remarque un changement de phase se produisant aux pieds des hauteurs (cf. figure (3.10)). Cela est logique du fait que le cisaillement est maximal dans cette région (cf. figure (3.9)).

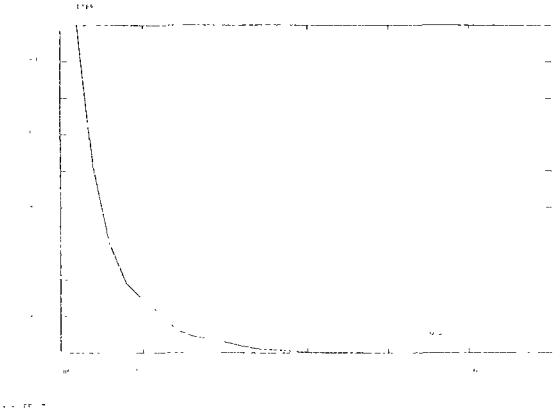


Figure 3.8: *Courbe de convergence des calculs : torsion d'un cylindre.*

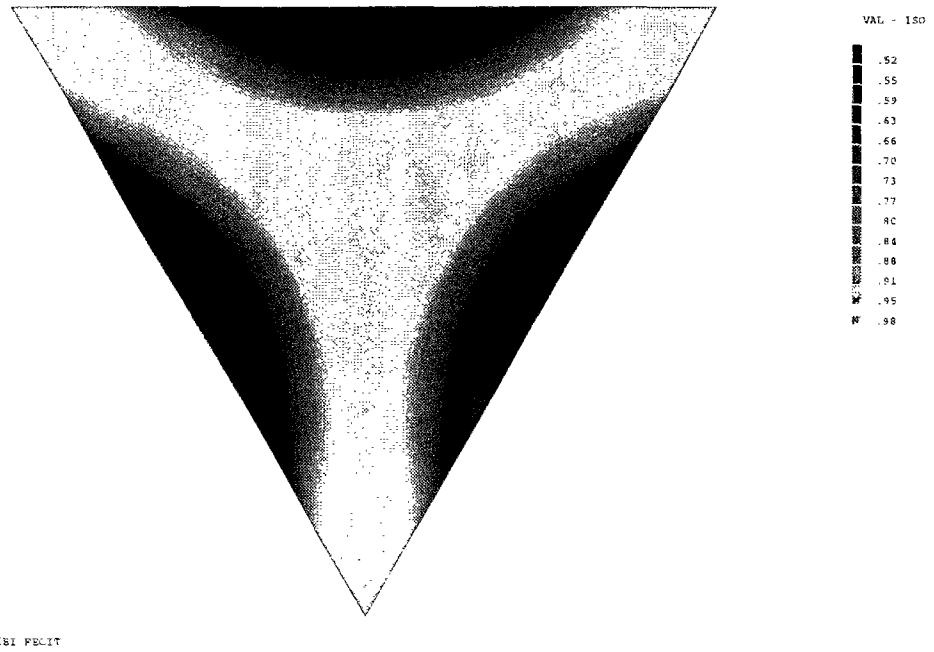


Figure 3.9: *Isovaleurs des déformations équivalentes : torsion d'un cylindre .*

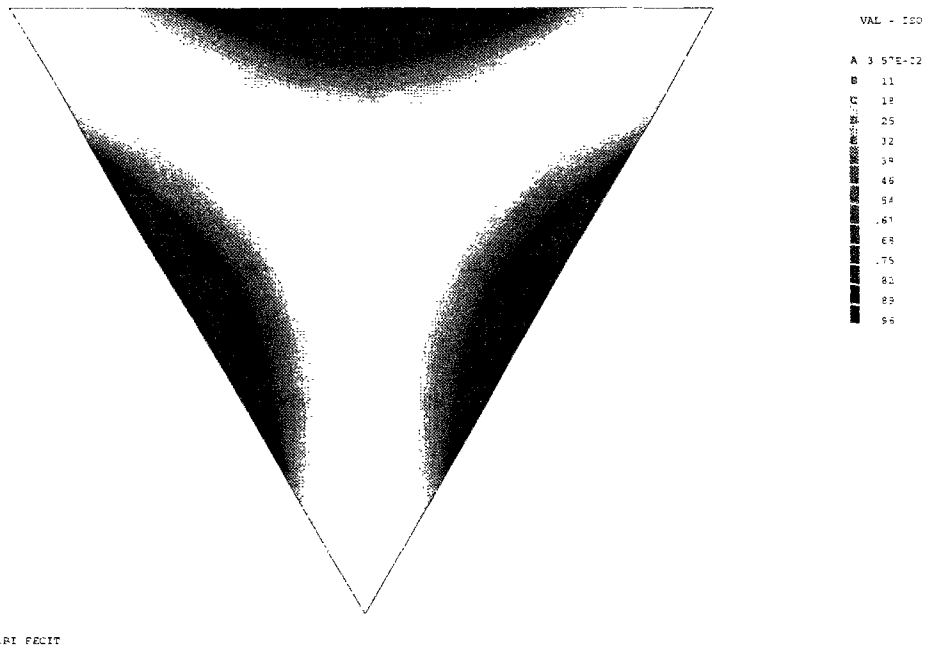


Figure 3.10: *Isovaleurs de la proportion de phase : torsion d'un cylindre .*

3.4 Problème de fissure en mode III.

Nous souhaitons résoudre ici analytiquement et numériquement le problème d'une fissure en mode anti-plan. Cela nous permet de valider notre modèle en comparant les résultats obtenus. Le choix du problème de fissure en mode anti-plan nous a été dicté du fait de sa simplicité (le problème possède une seule inconnue) mais aussi parce qu'il est abondamment considéré dans la littérature.

Nombreuses sont les analyses qui, dans le cadre de l'élasticité finie, ont permis la construction de solutions asymptotiques du problème de fissure en mode anti-plan [1], [9], [19], [20], [21]. La classe des matériaux utilisés possède une loi de comportement telle qu'à partir d'un certain rang de déformation les équations d'équilibre perdent leur ellipticité. La solution du problème engendre par conséquent des lignes ou des surfaces au travers desquelles le gradient de déplacement présente une discontinuité finie. On parle donc de lignes de choc considérées comme des limites entre des phases différentes du matériau. Ceci a déjà fait l'objet de plusieurs modèles de changement de phase solide/solide.

Dans le cadre de notre analyse, on reste toujours dans l'hypothèse des petites perturbations. De plus, on suppose que, suffisamment loin de la fissure, la solution est celle prédite par la théorie de l'élasticité linéaire classique comme si l'on était en présence d'une seule phase élastique : la phase-mère. Ensuite, à l'aide de la méthode d'hodographe, bien connue en mécanique des fluides, et par des conditions de raccord, on construit une solution complète du problème qui permet de localiser les régions dans lesquelles chaque phase existe par l'intermédiaire des expressions analytiques du paramètre interne z qui représente la proportion de phase transformée.

La différence principale entre notre solution et celles obtenues en utilisant les modèles introduits ci-dessus réside dans le fait que le changement de phase est ici donné par un paramètre local plutôt que par des lignes de choc.

Enfin, nous traitons le problème numériquement au moyen de la méthode des éléments finis. La comparaison des résultats se révèle satisfaisante.

3.4.1 Formulation du problème

Déformation anti-plane : définition

On considère un corps $\mathcal{B}$ occupant un volume infiniment long avec des génératrices parallèles à l'axe z. On note $\Re$ une section du corps $\mathcal{B}$ dans le plan (x, y).

On dit que l'on est en situation anti-plane si u_1 et u_2 sont nuls et si u_3 ne dépend que de x et y :

$$u_1 = 0 \quad u_2 = 0 \quad u_3 = u(x, y).$$

De plus, si le gradient de u est constant, la déformation est dite glissement simple. Sa norme $|\nabla u|$ représente l'amplitude du glissement. Dans ce cas, u prend la forme suivante :

$$u = k^\alpha x_\alpha, \alpha = 1, 2$$

où k_α uniforme sur $\Re$.

Position du problème

Le problème est celui d'une fissure définie de la manière suivante (cf. figure (3.11)):

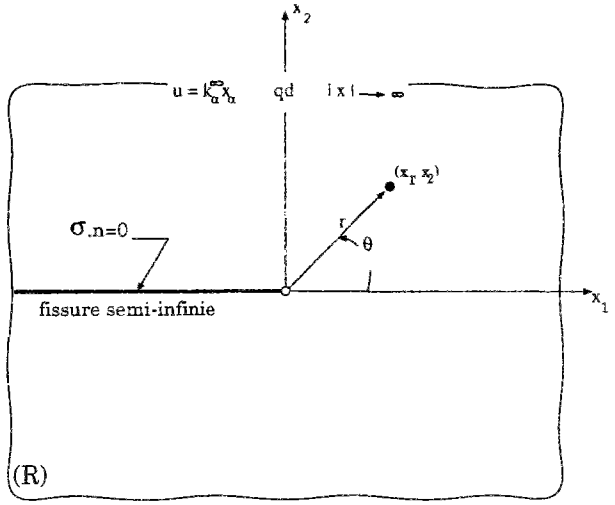


Figure 3.11: *Schématisation du système de coordonnées attaché à la pointe de la fissure.*

Le système de coordonnées est choisi de manière à ce que la fissure soit dans le plan y=0, que l'axe z soit parallèle aux lèvres de la fissure et que l'origine soit au front de la fissure. La figure montre la section $\Re$ de $\mathcal{B}$ dans le plan z=0. Evidemment, le domaine matériel $\Re$ est l'extérieur de la demi-droite (x<0, y=0) dans le plan (x, y).

On limite notre attention uniquement au cas où le corps est l'objet d'un glissement simple à l'infini, parallèle aux lèvres de la fissure. Cela veut dire que les composantes du vecteur déplacement satisfont les conditions suivantes :

$$u_\alpha = 0, \quad u_3 = u = k^\infty y \qquad x^2 + y^2 \longrightarrow +\infty \quad (-\infty < z < \infty)$$

avec k^∞ est l'amplitude du glissement à l'infini.

Du fait que l'on se trouve en situation anti-plane, toutes les composantes de ϵ sont alors nulles, sauf $\epsilon_{13} = \epsilon_{31}$ et $\epsilon_{23} = \epsilon_{32}$:

$$\epsilon = \epsilon' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}u_{,1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}u_{,2} \\ \frac{1}{2}u_{,1} & \frac{1}{2}u_{,2} & 0 \end{bmatrix}$$

Pour simplifier les calculs, on écrit la loi de comportement sous forme d'une relation entre le cisaillement équivalent $(\sigma'_{ij}\sigma'_{ij})^{\frac{1}{2}}$ et le module du gradient de u; $|\nabla u|$. Pour cela,

on note :

$$(\sigma'_{ij}\sigma'_{ij})^{\frac{1}{2}} = \tau \quad et \quad (\epsilon'_{ij}\epsilon'_{ij})^{\frac{1}{2}} = k = \frac{1}{\sqrt{2}} |\boldsymbol{\nabla} u| .$$

la loi de comportement s'écrit dans ce cas :

$$k \leq E \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} z = 0 \\ \tau(k) = 2\mu_1 k \end{cases} \tag{3.16}$$

$$E \leq k \leq F \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} z = \dfrac{k - E}{F - E} \\ \tau(k) = \dfrac{2\mu_1\mu_2 k}{\mu_1 z + (1 - z)\mu_2} \end{cases} \tag{3.17}$$

$$k \geq F \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} z = 1 \\ \tau(k) = 2\mu_2 k \end{cases} \tag{3.18}$$

$$F = \sqrt{\frac{\ell\mu_1}{\mu_1\mu_2 - \mu_2^2}} \quad E = \sqrt{\frac{\ell\mu_2}{\mu_1^2 - \mu_1\mu_2}}$$

Le tenseur des contraintes ainsi que son déviateur sont donnés par :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mu(z)u_{,1} \\ 0 & 0 & \mu(z)u_{,2} \\ \mu(z)u_{,1} & \mu(z)u_{,2} & 0 \end{bmatrix}$$

En les introduisant dans les équations d'équilibre, celles-ci se réduisent à :

$$(\mu(z)u_{,\alpha})_{,\alpha} = 0 \quad \forall (x, y) \quad \in \Re. \tag{3.19}$$

De même les conditions aux limites dues à la fissure se réduisent à :

$$u_{,2}(x, y = \pm 0) = 0 \quad \forall \quad x < 0 \tag{3.20}$$

De plus, une approximation logique, contribuant à résoudre le problème, s'impose. Elle consiste à anticiper sur le fait que, assez loin de la fissure, les déformations ne sont pas suffisantes pour provoquer un changement de phase. Par conséquent, dans cette région, la solution peut être approchée par la solution asymptotique du problème d'une fissure en mode III, mais avec les caractéristiques élastiques de la phase-mère ($\mu(z) = \mu_1$ pour tous les points de la structure (3.21)) . Ensuite, on suppose que cette solution se raccorde

continuellement à la solution du problème dans le voisinage de la fissure. Ceci ajoute au problème une nouvelle condition à l'infini :

$$r \longrightarrow \infty \qquad \begin{cases} u \approx \frac{K_{III}}{\mu_1}\sqrt{\frac{2r}{\pi}}\sin(\frac{\theta}{2}) \\ u_{,x} \approx -\frac{K_{III}}{\mu_1}(2\pi r)^{-1/2}\sin(\frac{\theta}{2}) \\ u_{,y} \approx \frac{K_{III}}{\mu_1}(2\pi r)^{-1/2}\cos(\frac{\theta}{2}) \end{cases} \tag{3.21}$$

$K_{III} = \mu_1 k^\infty \sqrt{\pi a}$ est le facteur d'intensité de contrainte dans le cas d'une fissure en mode anti-plan, de longueur a, soumise à un glissement simple d'amplitude k^∞ dont le matériau est celui de la phase-mère.

Finalement, le problème consiste à trouver u vérifiant les équations (3.19),(3.20) et (3.21). Pour ce faire, on utilise la méthode d'hodographe dont on explique le principe dans le paragraphe qui suit.

3.4.2 Méthode d'hodographe

La méthode d'hodographe est essentiellement utilisée pour les problèmes d'écoulement subsonique . Elle a été exploitée par Knowles et Sternberg [10] [11] et Abeyaratne [1] pour résoudre le problème d'une fissure en *"mode III"* en élasto-statique finie. Ouakka et Stolz [17] l'ont utilisée afin de localiser les domaines hyperboliques pour le problème de fissure en mode III dans le cas d'un matériau trilinéaire.

Dans cette transformation, les composantes $u_{,x}$ *et* $u_{,y}$ du gradient de déplacement deviennent de nouvelles variables indépendantes ξ_α. Elle est définie par :

$$(x, y) \longrightarrow (\xi_1, \xi_2) \qquad : \qquad \xi_1 = u_{,x}(x, y) \quad \text{et} \quad \xi_2 = u_{,y}(x, y) \tag{3.22}$$

L'image du plan physique $\Re$ par cette application, notée $\Re^{\mathcal{H}}$, est appelée plan d'hodographe dans lequel les ξ_α sont les coordonnées cartésiennes. Le champ u apparaît comme un potentiel si l'on pose $du = \xi_1 dx + \xi_2 dy$.

Ainsi que l'on va le montrer, la méthode d'hodographe sert à transformer l'équation non-linéaire que doit vérifier u en une équation linéaire sur sa transformée de Legendre.

L'application (3.22) est supposée bi-univoque, continûment différentiable sur $\Re$. Cette propriété nécessite alors que son jacobien $H = u_{,xx}u_{,yy} - u_{,xy}^2$ soit non nul sur $\Re$.

Soit U, la transformée de Legendre de u définie par :

$$U(\xi_1, \xi_2) = xu_{,x}(x, y) + yu_{,y}(x, y) - u(x, y) \qquad \forall (x, y) \in \Re \tag{3.23}$$

En dérivant U par rapport à ξ_α et en utilisant (3.22), on obtient les relations *"duales"* respectivement de (3.22) et de (3.23) , suivantes :

$$\begin{cases} x = \dfrac{\partial U}{\partial \xi_1}(\xi_1, \xi_2), y = \dfrac{\partial U}{\partial \xi_2}(\xi_1, \xi_2) & sur \quad \Re^{\mathcal{H}} \\ u = \xi_\alpha \dfrac{\partial U}{\partial \xi_\alpha}(\xi_1, \xi_2) - U(\xi_1, \xi_2) & sur \quad \Re^{\mathcal{H}} \end{cases} \tag{3.24}$$

Afin de convertir le problème aux limites (3.19)(3.20)(3.21) ayant la fonction u comme inconnue sur $\Re$ en un problème en U sur $\Re^{\mathcal{H}}$, il est intéressant dans un premier temps, de déterminer la nature du domaine *"inconnu"* $\Re^{\mathcal{H}}$ en utilisant(3.20)(3.21). En effet, l'écriture de (3.22) en coordonnées polaires (R, Φ) dans le plan d'hodographe $\Re^{\mathcal{H}}$ devient :

$$\begin{cases} \xi_1 = R\cos\Phi \\ \xi_2 = R\sin\Phi \end{cases} \tag{3.25}$$

Si l'on se sert des formules (3.25) , les conditions aux limites impliquent :

$$r \longrightarrow \infty \qquad -\pi \leq \theta < \pi \qquad \begin{cases} R = \dfrac{K_{III}}{\mu_1 \sqrt{\pi}} \dfrac{1}{\sqrt{2r}} \\ \Phi = \dfrac{1}{2}(\pi + \theta) \end{cases} \tag{3.26}$$

On voit que les points placés assez loin de l'origine dans le plan $\Re$ se transforment en des points assez voisins de l'origine du plan $\Re^{\mathcal{H}}$.

Etablissons l'équation différentielle en (R, Φ) dans le plan $\Re^{\mathcal{H}}$. En utilisant (3.25) (3.19), l'équation du mouvement s'écrit :

$$\frac{\partial(\mu(R)R\cos\Phi)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu(R)R\sin\Phi)}{\partial y} = 0$$

en effet,

$$z = z(k) = z(|\boldsymbol{\nabla} u|) = z(R).$$

ou encore :

$$(\mu R)' \left[\cos\Phi \tfrac{\partial R}{\partial x} + \sin\Phi \tfrac{\partial R}{\partial y}\right] + \mu R \left[-\sin\Phi \tfrac{\partial \Phi}{\partial x} + \cos\Phi \tfrac{\partial \Phi}{\partial y}\right] = 0 \tag{3.27}$$

Le (') indique une différentiation par rapport à R.

A ce stade, on a besoin d'écrire $\dfrac{\partial R}{\partial x}$, $\dfrac{\partial R}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}$ en fonction de R, Φ et de $U(R, \Phi)$. Pour cela, en employant les coordonnées polaires (R, Φ) , la première formule qui apparaît dans (3.24) devient :

$$\begin{cases} x = \cos\Phi \dfrac{\partial U}{\partial R} - \dfrac{\sin\Phi}{R} \dfrac{\partial U}{\partial \Phi} \\ y = \sin\Phi \dfrac{\partial U}{\partial R} + \dfrac{\cos\Phi}{R} \dfrac{\partial U}{\partial \Phi} \end{cases} \tag{3.28}$$

Or, on a :

$$\begin{cases} dx = \alpha d\Phi + \beta dR \\ dy = \gamma d\Phi + \delta dR \end{cases}$$

En supposant que le jacobien $\nu = \alpha\delta - \beta\gamma$ du système ci-dessus est non nul, on obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = \dfrac{\delta}{\nu} & \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = -\dfrac{\beta}{\nu} \\ \dfrac{\partial R}{\partial x} = -\dfrac{\gamma}{\nu} & \dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\alpha}{\nu} \end{cases}$$

où

$$\alpha = -\sin\Phi \frac{\partial U}{\partial R} - \frac{\cos\Phi}{R}\frac{\partial U}{\partial \Phi} + \cos\Phi \frac{\partial^2 U}{\partial R \partial \Phi} - \frac{\sin\Phi}{R}\frac{\partial^2 U}{\partial \Phi^2}$$

$$\beta = \cos\Phi \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \frac{\sin\Phi}{R^2}\frac{\partial U}{\partial \Phi} - \frac{\sin\Phi}{R}\frac{\partial^2 U}{\partial R \partial \Phi}$$

$$\gamma = \cos\Phi \frac{\partial U}{\partial R} - \frac{\sin\Phi}{R}\frac{\partial U}{\partial \Phi} + \sin\Phi \frac{\partial^2 U}{\partial R \partial \Phi} + \frac{\cos\Phi}{R}\frac{\partial^2 U}{\partial \Phi^2}$$

$$\delta = \sin\Phi \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} - \frac{\cos\Phi}{R^2}\frac{\partial U}{\partial \Phi} + \frac{\cos\Phi}{R}\frac{\partial^2 U}{\partial R \partial \Phi}$$

Ainsi, l'équation peut s'écrire :

$$(\mu(R)R)' \left[-\gamma\cos\Phi + \alpha\sin\Phi\right] + \mu(R)R\left[-\delta\sin\Phi - \beta\cos\Phi\right] = 0$$

ou encore, en tenant compte des expressions de α, β, γ et δ :

$$(\mu(R)R)' \left[\frac{\partial U}{\partial R} + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 U}{\partial \Phi^2}\right] + \mu(R)R\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} = 0 \tag{3.29}$$

L'équation écrite dans le plan de l'hodographe est bien linéaire et homogène de degré 1 en U. Les conditions aux limites imposées dans le plan physique ont pour équivalent dans le plan de l'hodographe :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \Phi} = 0 & \grave{a} \quad \Phi = 0 \quad et \ \grave{a} \quad \Phi = \pi, \qquad \forall R > 0. \\ U = \dfrac{K_{III}^2}{2R\mu_1^2\pi}\cos\Phi & quand \quad R \longrightarrow 0, \quad 0 \leq \Phi \leq \pi. \end{cases} \tag{3.30}$$

De plus, u est lié à U par la formule :

$$u = R^2 \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{U}{R}\right) \tag{3.31}$$

L'existence d'une solution U du problème aux limites, ainsi posé dans le plan de l'hodographe , entraînera l'existence d'une solution u dans le plan physique moyennant la formule (3.31).

3.4.3 Résolution du problème

On donne ci-dessous la solution exacte du problème (3.29) (3.30) et par conséquent du problème (3.19) (3.20) (3.21). Ensuite, en se servant de la loi de comportement (3.16) (3.17) (3.18), la méthode d'hodographe nous permet de déterminer analytiquement les régions de phase-mère et de phase-produit dans le plan $\Re$.

La forme des conditions aux limites nous conduit à chercher $U(R,\Phi)$ sous la forme :

$$U(R,\Phi) = RI(R)\cos\Phi \qquad \forall R > 0, \quad 0 \leq \Phi \leq \pi. \tag{3.32}$$

En l'injectant dans l'équation (3.29), on trouve :

$$I(R) = \frac{\sqrt{2}K_{III}^2}{\mu_1 \pi} \int_R^\infty \frac{dt}{\tau(t)t^2} \qquad \forall R > 0 \tag{3.33}$$

Les coordonnées polaires (r,θ) dans le plan physique sont reliées au couple (R,Φ) des coordonnées polaires dans le plan d'hodographe par la relation duale qui s'écrit en tenant compte de (3.32) (3.33) :

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta = a(R) - b(R)\cos 2\Phi \\ y &= r\sin\theta = -b(R)\sin 2\Phi \qquad (0 < R < \infty, \ 0 \leq \Phi \leq \pi) \end{aligned}\right\} \tag{3.34}$$

avec : $\quad a(R) = I(R) + \dfrac{R}{2}I'(R) \quad$ et $\quad b(R) = -\dfrac{R}{2}I'(R)$

Ainsi, pour chaque $r > 0$ et pour chaque $\theta \in [-\pi,\pi]$, on cherche le couple $(R = R(r,\theta), \Phi = \Phi(r,\theta))$ où $R > 0$ et $0 \leq \Phi \leq \pi$. Une fois $R = R(r,\theta)$ et $\Phi = \Phi(r,\theta)$ connus, la deuxième relation duale, en utilisant (3.31), donne la forme du déplacement et du paramètre interne z suivante :

$$u(x,y) = R^2 I'(R)\cos\Phi \tag{3.35}$$

$$z = \frac{\dfrac{R}{\sqrt{2}} - E}{F - E} \tag{3.36}$$

3.4.4 Solution du problème

Pour chaque branche de la courbe $\tau(k) = k$, on calcule $I(R)$, $a(R)$ et $b(R)$. Ensuite, grâce aux formules (3.35) (3.36), on obtient analytiquement les expressions u et z en fonction des coordonnées des points du plan physique et des caractéristiques élastiques de chaque phase.

Si $\boldsymbol{k \leq E}$

$$I(R) = \frac{K_{III}^2}{\mu_1 \pi}\left[\int_R^{\sqrt{2}E} \frac{dt}{\mu_1 t^3} + \int_{\sqrt{2}E}^{\sqrt{2}F} \frac{dt}{At^2} + \int_{\sqrt{2}F}^{\infty} \frac{dt}{\mu_2 t^3}\right] \tag{3.37}$$

$$= \frac{K_{III}^2}{\mu_1 \pi}\left[\frac{1}{2\mu_1 R^2} + \frac{1}{A}\left(\frac{F-E}{F.E}\right) + \frac{1}{4\mu_2 F^2} - \frac{1}{4\mu_1 E^2}\right] \tag{3.38}$$

avec

$$A = 2\sqrt{\frac{l\mu_1\mu_2}{\mu_1 - \mu_2}} \tag{3.39}$$

Par les formules (3.34), on a:

$$R = \sqrt{\frac{K_{III}^2}{2\mu_1^2 \pi \left((x-H)^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}}}} \tag{3.40}$$

avec

$$H = \frac{K_{III}^2}{\mu_1 \pi}\left[\frac{1}{A}\left(\frac{F-E}{F.E}\right) + \frac{1}{4\mu_2 F^2} - \frac{1}{4\mu_1 E^2}\right] \tag{3.41}$$

Or, la condition $R < \sqrt{2}E$ impose que cette solution ne soit valable qu'à l'extérieur du cercle du centre $\Omega_1(H,0)$ et de rayon $\frac{K_{III}^2}{4\mu_1^2 E^2 \pi}$, noté C_1.

Afin simplifier les calculs, on opère un changement de repère d'origine Ω_1. On appelle (r_1, θ_1) les coordonnées polaires pour ce nouveau repère. L'expression de R devient :

$$R = \sqrt{\frac{K_{III}^2}{2\mu_1^2 \pi r_1}} \tag{3.42}$$

$$\Phi = \frac{\pi + \theta_1}{2}. \tag{3.43}$$

Les solutions u et z sont obtenues à l'aide des formules (3.35) (3.36) :

$$u_1 = \frac{K_{III}}{\mu_1}\sqrt{\frac{2r_1}{\pi}} sin\frac{\theta_1}{2} \tag{3.44}$$

$$z = 0 \tag{3.45}$$

Si $\boldsymbol{k \geq F}$

Les calculs sont semblables à ceux du cas précédent. En effet, dans ce cas :

$$I(R) = \frac{K_{III}^2}{\mu_1 \pi}\left[\int_R^{\infty} \frac{dt}{\mu_2 t^3}\right] \tag{3.46}$$

$$= \frac{K_{III}^2}{\mu_1 \pi}\left[\frac{1}{2\mu_2 R^2}\right]. \tag{3.47}$$

En employant les formules (3.34), on obtient :

$$R = \sqrt{\frac{K_{III}^2}{2\mu_1\mu_2 \pi \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}}}} \tag{3.48}$$

avec

$$K_{III} = \mu_1 k^{\infty}\sqrt{\pi a} \tag{3.49}$$

La condition $R > \sqrt{2}F, (R = \sqrt{2}k)$ implique que cette solution est valable à l'intérieur du cercle de centre O(0, 0) et de rayon $\frac{K_{III}^2}{4\mu_1\mu_2\pi F^2}$ que l'on note C_2. La solution est :

$$u_3 = (\frac{\mu_1}{\mu_2})^{\frac{1}{2}} K_{III}\sqrt{\frac{2r}{\pi}}sin\frac{\theta}{2} \tag{3.50}$$

$$z = 1 \tag{3.51}$$

Si $\boldsymbol{E < k < F}$
Nous obtenons :

$$I(R) = \frac{K_{III}^2}{\mu_1\pi}\left[\frac{1}{4\mu_2F^2} + \frac{\sqrt{2}}{AR} - \frac{1}{AF}\right]. \tag{3.52}$$

$$\tag{3.53}$$

Les formules (3.34) donnent par conséquent les résultats suivants :

$$R = \frac{K_{III}^2}{\sqrt{2}\mu_1\mu_2\pi F}\frac{\left(x + \frac{K_{III}^2}{4\mu_1\mu_2\pi F^2}\right)}{\left(x + \frac{K_{III}^2}{4\mu_1\mu_2\pi F^2}\right)^2 + y^2}. \tag{3.54}$$

$$z = \frac{\frac{R}{\sqrt{2}} - E}{F - E} \tag{3.55}$$

$$u_2 = \frac{K_{III}^2}{\sqrt{2}\mu_1\mu_2\pi F}\sqrt{1 + \frac{y}{\sqrt{\left(x + \frac{K_{III}^2}{4\mu_1\mu_2\pi F^2}\right)^2 + y^2}}}. \tag{3.56}$$

La condition $\sqrt{2}E < R < \sqrt{2}F$ implique que cette solution est valable dans le domaine constitué par l'intersection de l'extérieur du cercle C_2 et du cercle C_1 fig(3.12)

Le centre du cercle C_1 se trouve sur l'axe des abscisses positives, H étant positif. De plus, C_1 intercepte l'axe des abscisses négatives au même point que le cercle C_2. Soit le point $B(-\frac{K_{III}^2}{4\mu_1\mu_2\pi F^2}, 0)$. La figure (3.12) donne les domaines de validité des solutions u_1, u_2, u_3.

Afin de pouvoir comparer ces résultats avec le calcul numérique, on a - à l'aide de castem 2000 - tracé les isovaleurs de la proportion de phase z en utilisant ses expressions analytiques. Le calcul consiste à :

- réaliser un maillage de la plaque (identique à celui utilisé pour le calcul numérique)
- extraire les coordonnées de chaque point du maillage.
- à l'aide de ces coordonnées, calculer la valeur de z via les formules analytiques (3.45), (3.51) et (3.55)

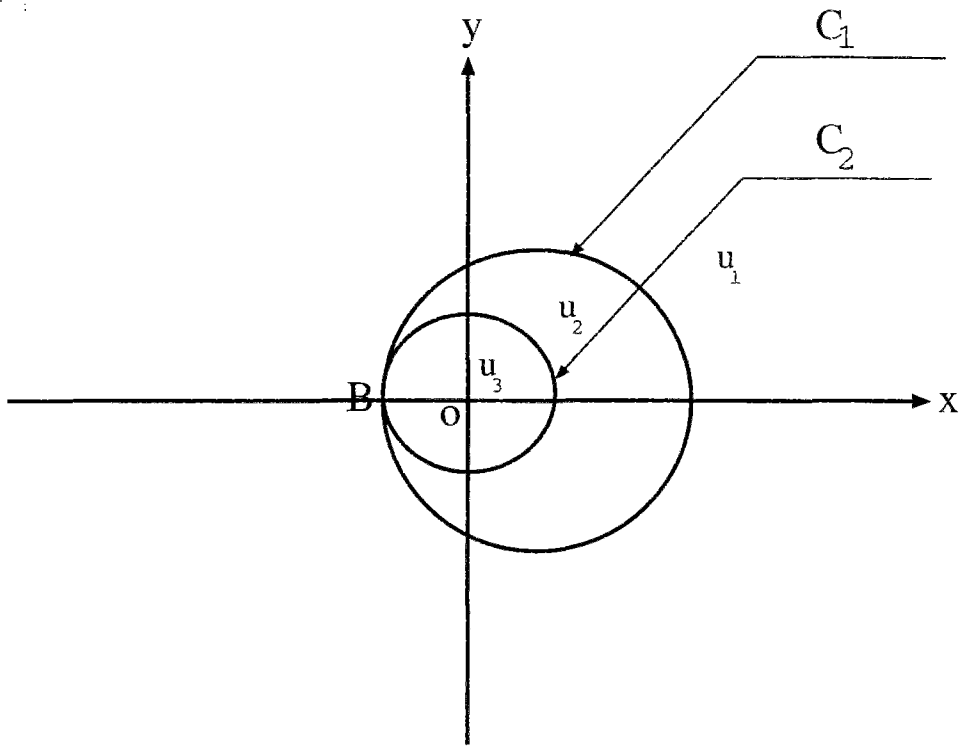


Figure 3.12: *Domaine de validité des solutions.*

- construire un champ par points contenant toutes les valeurs locales calculées

- tracer ce champ.

Les résultats de ce calcul sont représentés sur la figure (3.14). Ils seront utilisés ensuite pour établir une validation de l'algorithme numérique par comparaison avec les résultats numériques de ce même problème, traité dans le paragraphe suivant.

3.4.5 Résolution numérique.

Nous nous proposons de résoudre numériquement le problème la fissure en mode III. On emploie dans ce sens la méthode des éléments finis. L'algorithme de calcul est identique à celui utilisé pour les autres exemples déjà présentés.

Position du problème.

Nous considérons le même solide qu'au paragraphe précédent. Etant donné que l'on se trouve en mode anti-plan, le problème consiste à trouver u vérifiant :

$$(\mu(z)u_{,\alpha})_{,\alpha} = 0 \qquad \forall\ (x,y) \in \Re \tag{3.57}$$

$$u_2 = 0 \qquad \forall\ x < 0 \tag{3.58}$$

$$u = k^{\infty}h \qquad pour\ x_2 = h \tag{3.59}$$

avec

$$\mu(z) = \begin{cases} \mu_1 & si \quad |\nabla u| \leq \sqrt{2}E \\ \dfrac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 z + (1-z)\mu_2} & si \quad \sqrt{2}E \leq |\nabla u| \leq \sqrt{2}F \\ \mu_2 & si \quad |\nabla u| \geq \sqrt{2}F \end{cases} \tag{3.60}$$

Calculs et résultats.

Comme dans le cas de la torsion d'un cylindre de section triangulaire, on opère une analogie identique avec le calcul thermique :

- le déplacement anti-plan u sera considéré comme étant une température T
- et le coefficient de cisaillement μ comme étant le coefficient de conductivité thermique.

On réalise le maillage de la figure (3.13) :

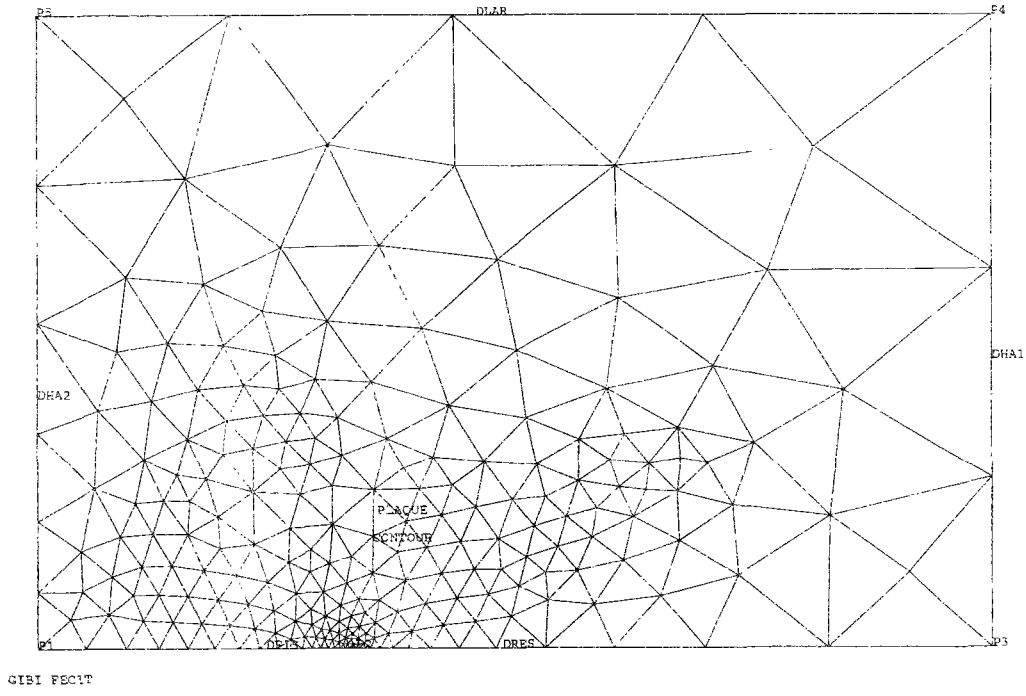


Figure 3.13: *Maillage : fissure en mode III.*

Les conditions aux limites sont elles aussi imposées par analogie. En effet, pour créer la fissure, on bloque le déplacement u sur la droite P_2P_3. Cela revient à imposer une température nulle et à libérer de toute contrainte la droite P_1P_2 (ce qui constitue la fissure). Ensuite, on impose un déplacement (donc la température) sur la droite (P_4P_5).

Nous avons une convergence des calculs au bout d'une trentaine d'itérations. La fig(3.15) montre les isovaleurs du paramètre z. Leur allure nous semble en parfaite harmonie avec celle de la figure (3.14) données par le calcul analytique. Cet état de fait nous permet de conclure quant à la validité de notre algorithme de calcul.

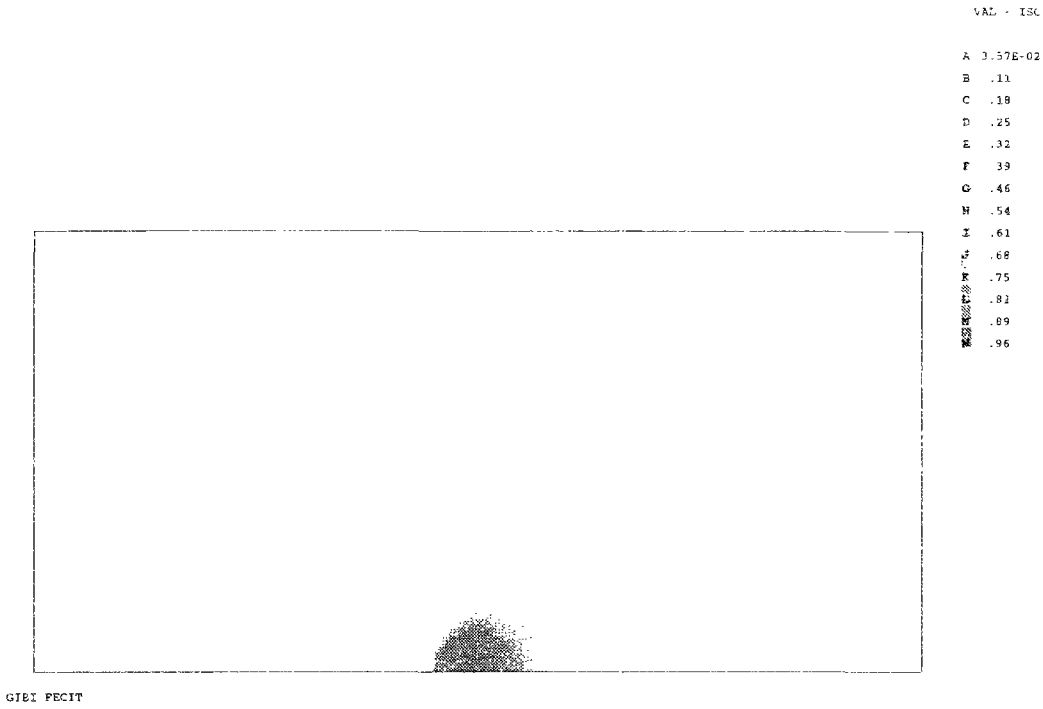


Figure 3.14: *Isovaleurs de la proportion de phase (mode III) : numérique .*



Figure 3.15: *Isovaleurs de la proportion de phase (mode III) : résultat analytique*

3.5 Conclusion

Les problèmes en mécanique des solides solvables analytiquement sont rares. Le recours au calcul numérique est souvent inévitable. Dans ce chapitre, on a montré, via quelques exemples numériques, que le modèle 'changement de phase solide/solide', présenté dans le chapitre précédent, peut se prêter à une utilisation numérique indispensable pour le calcul des structures. En outre, on a validé l'algorithme mis au point par une comparaison entre les résultats numériques et analytiques d'un même problème, celui la fissure en mode III.

Chapitre 4

Stabilité et changement de phase.

4.1 Introduction.

La stabilité d'un matériau avec changement de phase fait l'objet de ce chapitre.

L'analyse de stabilité des systèmes conservatifs sous liaisons parfaites est relativement classique en théorie de stabilité élastique. Nous rappelons dans un premier temps, les principaux résultats (cf. Nguyen Q.S [16]). Nous commencons pour cela, par traiter un exemple simple [16] permettant une mise en évidence des différents problèmes à prendre en considération. Ensuite, nous formulons le problème d'équilibre en terme du lagrangien pour un système soumis à des liaisons. On montre qu'une position d'équilibre est définie par la condition de stationnarité du lagrangien analogue à la condition de stationnarité de l'énergie potentielle totale pour un système libre de liaisons. La stabilité de cette position d'équilibre est ensuite envisagée : sous les contraintes de liaisons, la condition de minimum local de l'énergie potentielle des efforts donnes forme un critère de stabilité. La combinaison des conditions de minimum local et de stationnarité du lagrangien permet d'obtenir le critère de la seconde variation du lagrangien [3] et [2]. Cette analyse est ici appliquée au cas du matériau avec changement de phase. La stabilité de ce matériau est déterminée en fonction de l'énergie d'interaction entre les deux phases.

4.2 Rappels des résultats sur la stabilité d'un système conservatif avec liaisons internes parfaites.

4.2.1 Exemple simple

Considérons d'abord l'équilibre sous l'action de la pesanteur d'un point matériel de masse m, de coordonnées $(x_1, x_2. x_3)$, astreint à se déplacer sur une surface support d'équation :

$$h(x_1, x_2, x_3) = x_3 - l(x_1, x_2) = 0.$$

Une telle situation peut faire penser au cas d'une bille de rayon r se déplaçant sans frottement à l'intérieur d'une fente de largeur $d = 2r$ constituée de deux surfaces matérielles parallèles à une surface moyenne admettant pour équation $h(x_1, x_2, x_3) = 0$ (cf. figure (4.1)).

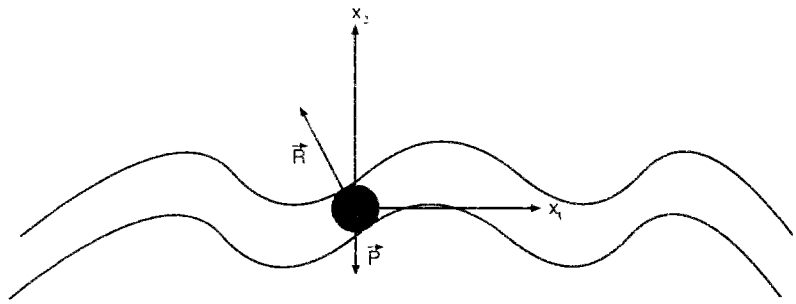


Figure 4.1: *Forces agissant sur la bille : liaison bilatérale.*

La bille subit l'action de la pesanteur et la réaction des surfaces servant de support. En l'absence de frottement, cette réaction est une force normale au support et s'écrit donc sous la forme :

$$R_i = \lambda \frac{\partial h}{\partial x_i}, \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{R} = \lambda h_{,\mathbf{x}}$$

où le vecteur $h_{,\mathbf{x}}$ fixe une direction de la normale et le coefficient λ désigne un nombre de signe quelconque définissant le module et le sens de la force de réaction.

L'équilibre statique de la bille se traduit par l'équilibre des forces :

$$\begin{cases} \lambda h_{,x_1} = 0 \\ \lambda h_{,x_2} = 0 \\ -mg + \lambda h_{,x_3} = 0 \end{cases}$$

Les positions d'équilibre possibles du système sont donc caractérisées par :

$$\begin{cases} h_{,x_1} = 0 \\ h_{,x_2} = 0 \\ \lambda = \dfrac{mg}{h_{,x_3}} \quad \text{si} \quad h_{,x_3} \neq 0 \end{cases}$$

Ce sont ainsi des bosses ou des creux de la surface support fig(4.1).

D'une façon intuitive, un tel équilibre est stable s'il s'agit d'un creux, i.e. un minimum local de l.

Il est à noter que la réaction du support ne travaille pas dans une vitesse virtuelle compatible avec la liaison, c'est-à-dire vérifiant :

$$\delta\mathbf{x} \cdot h_{,\mathbf{x}} = 0 \tag{4.1}$$

En effet, en multipliant l'équation (4.1) par λ, on obtient :

$$\delta\mathbf{x} \cdot \lambda h_{,\mathbf{x}} = 0 \Longrightarrow \delta\mathbf{x} \cdot \mathbf{R} = 0$$

Exprimons maintenant l'équilibre comme étant le résultat d'une condition de stationnarité de l'énergie potentielle totale du système. Vu l'expression de $\mathbf{R}$. on peut déduire qu'elle dérive d'une énergie potentielle $E_l = -\lambda h(\mathbf{x})$. De plus, la contribution de la pesanteur à l'énergie potentielle du système est :

$$E_d(\mathbf{x}) = mgx_3$$

Introduisons le lagrangien associé $L(\mathbf{x}, \lambda)$ qui n'est autre que l'énergie potentielle du système en tenant compte de la force de liaison, définie par :

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}) = E_d(\mathbf{x}) - \lambda h(\mathbf{x})$$

Les équations d'équilibre statique précédentes s'écrivent également sous la forme :

$$\mathcal{L}_{,\mathbf{x}} = 0$$

Ceci montre que l'équilibre de la bille est défini par la condition de stationnarité du lagrangien associé. Une généralisation de ce résultat sera donnée ultérieurement.

Si la liaison imposée est unilatérale au sens suivant :

$$h(\mathbf{x}) = x_3 - l(x_1, x_2) \geq 0,$$

la situation rencontrée est celle de la même bille pesante se déplaçant dans une région de l'espace limitée par une seule surface matérielle d'équation $x_3 = g(x_1, x_2)$ (cf. figure (4.2)).

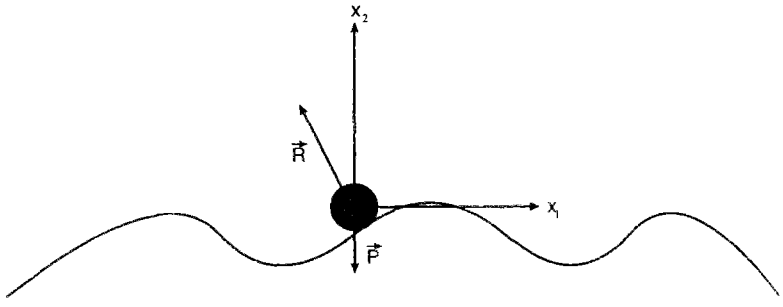


Figure 4.2: *Forces agissant sur la bille : liaison unilatérale.*

Si le contact est sans frottement, $\mathbf{R}$ admet encore l'expression précédente avec en plus la condition :

$$\lambda \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda h = 0$$

imposée par la physique de contact.

En résumé, cet exemple nous permet de tirer les remarques suivantes :

- l'équilibre de la bille est défini par la condition de stationnarité du lagrangien associé,
- les équilibres stables sont *intuitivement* des creux du support sur lequel roule la bille et sont par conséquent des minima locaux de l'énergie potentielle.

4.2.2 Formulation du problème d'équilibre pour un système conservatif.

Soit un système mécanique défini par des paramètres de déplacement $\mathbf{u} = (u_i)$, $i = 1, I$ liés par des liaisons parfaites bilatérales, $k(u) = 0$ et unilatérales $h(u) \geq 0$. On suppose qu'il est conservatif, ce qui veut dire que les forces intérieures et extérieures auxquelles il est soumis dérivent d'une énergie potentielle $E_d(u)$. Pour tenir compte de ces liaisons, on introduit le lagrangien associé :

$$\mathcal{L}(u, \lambda, \nu) = E_d(u) - \lambda h(u) - \nu k(u) \tag{4.2}$$

Proposition :
Une position d'équilibre statique est définie par les fonctions inconnues $(u^{eq}, \lambda^{eq}, \nu^{eq})$, *solution des équations suivantes :*

$$L_{,u} = 0 \tag{4.3}$$

$$k(u) = 0 \tag{4.4}$$

$$\lambda \geq 0, \quad h(u) \geq 0 \qquad et \qquad \lambda h(u) = 0 \tag{4.5}$$

Démonstration.

Il est bien connu que, pour un système conservatif, l'équilibre est obtenu - via le principe des puissances virtuelles - par la première variation de l'énergie potentielle totale. On va montrer que dans ce cas (présence des liaisons), en tenant compte du travail des efforts de liaison, cette première variation s'identifie à celle du lagrangien associé.

Comme pour l'exemple de la bille, la condition de compatibilité d'une vitesse virtuelle δu avec les liaisons $h(u) \geq 0$ et $k(u) = 0$ s'exprime par :

$$\begin{cases} h_{,u}\, \delta u \geq 0 & \text{si} \quad h(u) = 0 \\ \delta u \quad \text{quelconque} & \text{si} \quad h(u) > 0. \end{cases} \tag{4.6}$$

$$k_{,u}\, \delta u = 0 \tag{4.7}$$

Le travail virtuel des réactions de liaison, positif (resp. nul) par définition de la liaison parfaite unilatérale (resp. bilatérale). dans un mouvement virtuel compatible avec les deux types de liaison s'écrit :

$$\delta W_l^{un} = R_l^{un} \delta u \geq 0 \quad \delta u \quad \text{vérifiant les conditions} \quad (4.6) \tag{4.8}$$

$$\delta W_l^{bi} = R_l^{bi} \delta u = 0 \quad \delta u \quad \text{vérifiant les conditions} \quad (4.7) \tag{4.9}$$

Le théorème de Lagrange appliqué à (4.6) ,(4.8) et (4.7). (4.9) implique l'existence d'un réel λ non négatif pour la liaison unilatérale et un réel ν quelconque pour la liaison bilatérale tel que :

$$R_l^{un} = \lambda h_{,u} \qquad \lambda > 0 \quad \text{pour la liaison unilatérale} \tag{4.10}$$
$$R_l^{bi} = \nu k_{,u} \quad \text{pour la liaison bilatérale.} \tag{4.11}$$

On peut déduire des expressions (4.11) (4.11) que les efforts de liaison dérivent des deux potentiels E_l^1 et E_l^2 pour chaque type de liaison :

$$E_l^1 = -\lambda h(u) \tag{4.12}$$
$$E_l^2 = -\nu k(u) \tag{4.13}$$

Par conséquent, l'énergie potentielle totale du système est :

$$E = E_d + E_l^1 + E_l^2. \tag{4.14}$$

Or, on sait que pour un système conservatif, les premières variations de l'énergie potentielle traduisent l'équilibre, c'est-à-dire :

$$E_{,u}(u^{eq})\delta_u = 0 \qquad \forall \quad \delta_u \in U^{ad}. \tag{4.15}$$

U^{ad} étant le champ des vitesses virtuelles cinématiquement admissibles.

En remplaçant E_l^1 et E_l^2 par leurs valeurs suivant (4.12) et (4.13), on obtient le résultat souhaité :

$$\mathcal{L}_{,u}(u^{eq})\delta_u = 0 \qquad \forall \quad \delta u \in U^{ad}. \tag{4.16}$$

4.2.3 Critère de la seconde variation du lagrangien.

Une fois déterminée la position d'équilibre, définie par (4.16), nous nous intéressons à sa stabilité dans le sens suivant : elle est dite stable si une petite perturbation de position ou de vitesse initiale donne un mouvement perturbé qui lui est toutefois toujours proche.

Nous allons pour cela nous ramener aux conditions de l'établissement du théorème de Lejeune Dirichlet, à savoir la propriété de conservation de l'énergie totale. En effet, la relation $\lambda h = 0$, valable dans tous les cas et à tout instant, donne après dérivation par rapport au temps :

$$\dot{\lambda} h + h\dot{\lambda} = 0 \tag{4.17}$$

lorsque la liaison est effective, c'est-à-dire $h = 0$. on obtient :

$$\dot{\lambda} h = \lambda h_{,u}\, \dot{u} \tag{4.18}$$
$$= R_l \dot{u} = 0 \tag{4.19}$$

On constate que les réactions de liaison ne travaillent pas dans le mouvement perturbé. Ce résultat permet de conclure que la propriété de conservation de l'énergie totale, composé de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique , reste valable et se réduit à :

$$E_d(u(t)) + C_t = cte \quad \forall \quad t > 0 \tag{4.20}$$

où C_t désigne l'énergie cinétique du système.

On se place ainsi sous les hypothèses du théorème de Lejeune Dirichlet tel qu'il est utilisé en élasticité classique. La proposition suivante en découle :

l'équilibre est stable s'il réalise un minimum local de l'énergie potentielle des efforts donnés $E_d(u)$ sous les contraintes de liaisons.

Comme en élasticité classique, la combinaison de la propriété de minimum local et de la stationnarité du lagrangien peut conduire à un critère de seconde variation du lagrangien ;

Notons V l'espace des vitesses virtuelles compatibles avec les liaisons $h(u) \geq 0$ et $k(u) = 0$:

$$V = \left\{ \delta u \in U^{ad} / \delta k = k_{,u}\, \delta u = 0 \quad \text{et} \quad \delta h = h_{,u}\, \delta u \geq 0 \quad \text{si} \quad h = 0 \text{ avec } u = u^{eq} \right\} \tag{4.21}$$

Par définition, V est inclus dans U^{ad}, ensemble des vitesses virtuelles δu cinématiquement admissibles.

Soit V_0, un sous-ensemble de V :

$$V_0 = \{ \delta u \in V / \delta h = 0 \quad \text{si} \quad \lambda^{eq} > 0 \} \tag{4.22}$$

appelé ensemble des vitesses admissibles. Soit une courbe d'évolution $u(\tau)$ continue par rapport au paramètre de temps cinématique τ et vérifiant la condition initiale $u(0) = u^{eq}$ ainsi que les conditions de liaisons. Effectuons un développement asymptotique de u autour de $u(0)$:

$$u(\tau) = u^{eq} + \delta u \cdot \tau + u_2 \frac{\tau^2}{2} + \ldots \tag{4.23}$$

alors $\delta u \in V$ par définition. Les variations correspondantes de E_d et de L sont :

$$E_d(u_\tau) = E_d^{eq} + \delta E_d \tau + \delta_2 E_d \frac{\tau^2}{2} + \ldots \tag{4.24}$$

$$\mathcal{L}(u(\tau), \lambda^{eq}, \nu^{eq}) = \mathcal{L}^{eq} + \delta \mathcal{L} \tau + \delta_2 \mathcal{L} \frac{\tau^2}{2} + \ldots \tag{4.25}$$

Etant donné que V est inclus dans U^{ad}, et que la position étudiée est une position d'équilibre, on obtient alors :

$$\delta \mathcal{L} = 0 \qquad \forall \quad \delta u \in V \tag{4.26}$$

Si δu appartient à $V - V_0$, alors $\lambda \delta h > 0$. On a de plus:

$$\delta E_d = \delta \mathcal{L} + \lambda \delta h. \tag{4.27}$$

On trouve par conséquent :

$$\delta E_d > 0 \qquad \forall \quad \delta u \in V - V_0 \tag{4.28}$$

La position d'équilibre étudiée réalise donc un minimum de E_d dans l'ensemble des mouvements appartenant à $V - V_0$.

En revanche, si δu appartient à V_0, on a $\lambda \delta h = 0$ et :

$$\delta E_d = \delta \mathcal{L} = 0 \qquad \forall \ \delta u \in V_0 \tag{4.29}$$

Par définition du lagrangien, on obtient également :

$$E_d(u(\tau)) \geq \mathcal{L}(u(\tau), \lambda^{eq}, \nu^{eq}) \tag{4.30}$$
$$E_d(u^{eq}) = \mathcal{L}(u^{eq}, \lambda^{eq}, \nu^{eq}) \tag{4.31}$$

Ainsi si le lagrangien est localement minimum à l'équilibre dans V_0, il en sera de même pour l'énergie potentielle.

D'autre part :

$$\delta_2 \mathcal{L} = \delta u \cdot \mathcal{L}_{,uu^{eq}} \cdot \delta u + \mathcal{L}_{,u^{eq}} \cdot u_2 = \delta u \cdot \mathcal{L}_{,uu^{eq}} \cdot \delta u \tag{4.32}$$

Pour que E_d soit localement minimum, il suffit que :

$$\delta u \cdot \mathcal{L}_{,uu} \cdot \delta u > 0 \qquad \forall \ \delta u \in V_0 \tag{4.33}$$

D'ou la proposition suivante :

un équilibre est stable :

- si la seconde variation du lagrangien est strictement positive dans V_0

- ou si V_0 est vide.

4.3 Application au modèle de matériau avec changement de phase

Nous appliquons dans ce paragraphe le critère de seconde variation du lagrangien afin d'étudier la stabilité d'un matériau avec changement de phase.

Pour ce faire, on considère le même modèle rhéologique de la figure (2.1) . Les liaisons auxquelles le système est soumis sont :

$$(1 - z)e + zf - \epsilon = 0 \tag{4.34}$$
$$z \geq 0 \tag{4.35}$$
$$1 - z \geq 0 \tag{4.36}$$

qui représentent des liaisons parfaites lorsque le phénomène de changement de phase est supposé réversible. Pour garder les mêmes notations qu'au paragraphe précédent, on note :

$$u = (\epsilon, e, f, z) \tag{4.37}$$
$$\delta u = (\delta\epsilon, \delta e, \delta f, \delta z) \tag{4.38}$$

Il s'agit ici de l'étude de stabilité d'un modèle de matériau avec changement de phase d'énergie libre :

$$\mathcal{W}_{def} = (1 - z)U(e) + zV(f) + I(z). \tag{4.39}$$

Si l'on suppose que la force est contrôlée, le lagrangien du système s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\epsilon, e, f, z, \nu, \lambda_1, \lambda_2) &= (1-z)U(e) + zV(f) + I(z) - \nu((1-z)e + zf - \epsilon) \\ &\quad -\lambda_1(1-z) - \lambda_2 z - \sigma\epsilon.\end{aligned} \tag{4.40}$$

La stabilité du matériau s'obtient par le critère de seconde variation du lagrangien en considérant les différents états de déformation obtenus par la positivité des multiplicateurs de Lagrange (paragraphe ..) :

- ***Si*** $\epsilon \leq E$

Les calculs du paragraphe (2.2) donnent :

$$u^{eq} = (\epsilon, \epsilon, f, 0) \tag{4.41}$$

$$\lambda_2^{eq} > 0 \tag{4.42}$$

L'ensemble des vitesses virtuelles compatibles à l'équilibre est par conséquent :

$$V = \{\delta u / \quad \delta\epsilon \text{ et } \delta f \text{ sont arbitraires}, \delta z(f-\epsilon) + \delta e - \delta\epsilon = 0 \text{ et } \delta z \geq 0\}$$

l'ensemble des vitesses admissibles est donné par :

$$V_0 = \{\delta u \in V \quad / \quad \delta z = 0\}$$

Etudions maintenant la positivité, dans V_0, de la forme quadratique $\delta^2\mathcal{L} = [\delta u][\mathcal{L}_{,uu}^{eq}][\delta u]$ avec :

$$\mathcal{L}_{,uu}(u^{eq}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (K_2 f - \sigma) \\ 0 & 0 & (K_2 f - \sigma) & I''(z) \end{bmatrix}$$

ainsi

$$\delta^2\mathcal{L} = K_1\delta^2\epsilon + I''(z)\delta^2 z + 2(K_2 f - \sigma)\delta f \delta z.$$

En ne prenant en compte que les vitesses virtuelles appartenant à V_0 :

$$\delta^2\mathcal{L} = K_1\delta\epsilon^2 \geq 0$$

L'état de déformation considéré est par conséquent stable. Ceci est prévisible compte tenu de la pente positive de la portion considérée de la courbe contrainte-déformation (cf. figure 4.3).

- ***Si*** $\epsilon \geq F$

L'équilibre est défini dans ce cas par :

$$u^{eq} = (\epsilon, e, \epsilon, 1) \tag{4.43}$$

$$\lambda_1^{eq} > 0 \tag{4.44}$$

L'ensemble des vitesses admissibles V_0 correspond à :

$$V_0 = \{\delta u/\delta\epsilon \quad \text{et} \quad \delta e \quad \text{sont arbitraires}, \delta f = \delta\epsilon, \delta z = 0\}$$

La matrice des dérivées secondes est :

$$\mathcal{L}_{,uu}(u^{eq}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-K_1 e + \sigma) \\ 0 & 0 & K_2 & 0 \\ 0 & (-K_1 e + \sigma) & 0 & I''(z) \end{bmatrix}$$

Pour $\delta u \in V_0$, on a :

$$\delta^2\mathcal{L} = K_2\delta\epsilon^2 \geq 0$$

La variation seconde du lagrangien reste positive, et l'état de déformation stable.

- ***Si*** $\boldsymbol{E < \epsilon < F}$

Le calcul donne ici :

$$u^{eq} = (\epsilon, E, F, z \neq 0 \text{ et } 1) \tag{4.45}$$

L'ensemble des vitesses admissibles correspond à :

$$V_0 = \{\delta u/\delta\epsilon \quad \text{et} \quad \delta z \quad \text{sont arbitraires}, \delta z(F - E) + (1 - z)\delta e + z\delta f - \delta\epsilon = 0\}$$

La matrice $\mathcal{L}_{,uu}$ est donnée par :

$$\mathcal{L}_{,uu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-z)K_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & zK_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I''(z) \end{bmatrix}$$

d'où :

$$\delta^2\mathcal{L} = (1 - z)K_1\delta e^2 + zK_2\delta f^2 + I''(z)\delta z^2.$$

Donc $\delta^2\mathcal{L}$, parmi les vitesses admissibles, n'est strictement positive que s'il existe une énergie d'interaction convexe $I''(z) > 0$.

On verra plus loin que l'existence de cette énergie provoquera un changement dans la pente de la portion de la courbe contrainte-déformation :

Si $I(z)$ est convexe ($I''(z) > 0$), alors la pente est positive et l'état de déformation considéré est stable fig(4.3).

Cette proprieté de stabilité du matériau, assure que la densité d'énergie élastique, obtenue implicitement en remplaçant e, f et z par leurs valeurs en fonction de ϵ est convexe par rapport à cet argument.

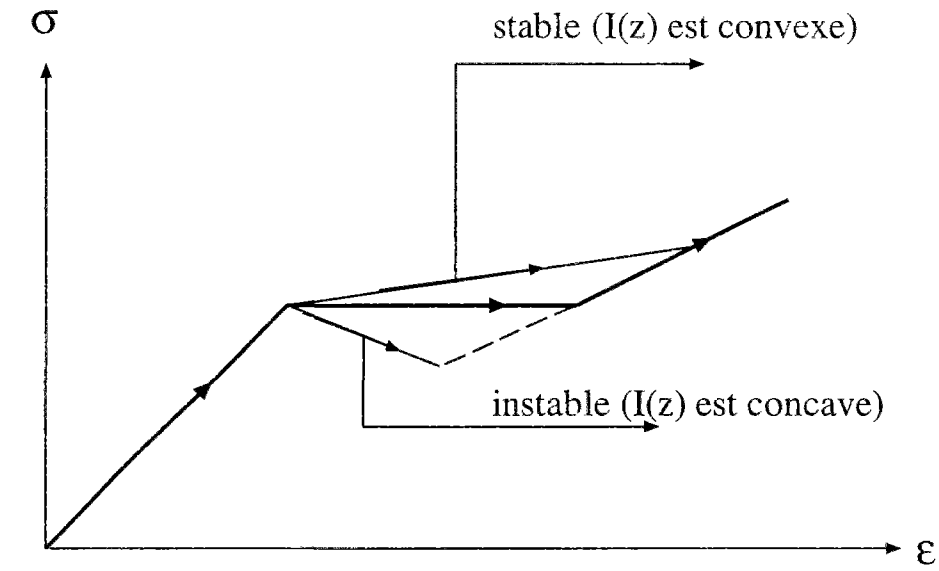


Figure 4.3: *Influence de l'énergie d'interaction sur la stabilité du matériau.*

4.4 Conclusion

L'étude de la stabilié du modèle de changement de phase montre que, dans la zone de transition, la stabilité du matériau est liée à la convexité de l'énergie d'interaction entre les deux phases.

Nous verrons par la suite que cette énergie $I(z)$ joue un rôle très important dans la modélisation de l'hystérésis des matériaux à mémoire de forme.

Référence bibliographique de la première partie.

[1] Abeyaratne R., *Discontinuous deformation gradients away from the tip of a crack in anti-plane shear*, J. of elasticity, Vol. 11, pp :373-393, 1981.

[2] Chateau X., *Sur quelques problèmes liés à la modélisation mécanique de l'emboutissage*, Thèse de l'Ecole Polytechnique, 1992.

[3] Chateau X. et Nguyen Q. S., Bucling of elastic structures in unilateral contact with or without fiction , Eur. J. Mech, 10 No 1, pp :71-89, 1991.

[4] Coleman B. D., *Thermodynamics of materials with memory* , Arch. rat. Mech anal , Vol. 17, pp : 1-46, 1964.

[5] Coleman B. D., *Thermodynamics of materials with memory* , C.I.S.M , Udine, 1971.

[6] Frémond M., *Sur l'inégalité de Clausius -Duhem*, C.R.A.S tome 311, série II p. 757-762, 1990.

[7] Germain P., *Cours de mécanique des milieux continus*, Masson, Paris, 1973.

[8] Halphen B. et Nguyen Q.S., *Sur les matériaux standards généralisés*, Journal de mécanique, Vol.14 Num 1, pp 39-63, 1975.

[9] Knowles J. K., *The finite anti-plane shear field near the tip of a crack for a class of incompressible elastic solids* , Int. J. of fracture, Vol. 63, pp :321-336, 1977.

[10] Knowles J. K. & Stenberg E., *Anti-plane shear fields whith discontinuous deformations gradients near the tip of crack in finite elastostatics* , J. of elasticity. Vol. 11, pp : 129-164, 1981.

[11] Knowles J. K. & Stenberg E., *Discontinuous deformation gradients near the tip of crack in finite anti-plane shear : an example* , J. of elasticity, Vol. 10, No 1, pp : 81-110, 1980.

[12] Mandel J., *Variables cachées, puissance dissipé, dissipativité normal* , Sciences et techniques de l'armement, 4e fascicule, 1979.

[13] Moumni Z. et Nguyen Q.S., *Etude d'un modèle de changement de phase : application à l'endommagement fragile, progressif et partiel,* Colloque National en Calcul des Structures, Giens 1993.

[14] Nguyen Q.S., *On the elastic-plastic initial boundary value problem and its numerical integration*, Int.J.Num.Meth, Vol 11, pp 817-832, 1977.

[15] Nguyen Q.S., *Bifurcation and stability of time-independent standard dissipative systems*, C.I.S.M, Udine, 1990.

[16] Nguyen Q.S., *Stabilité des systèmes élastiques* , Cours de D.E.A, Ecole Polytechnique, 1993.

[17] Ouakka A., *Approches stationnaires en mécanique non-linéaire* , Thèse E.N.P.C. 1993.

[18] Salençon. J, *Mécanique des milieux continus*, Edition Ecole polytechnique, 1989.

[19] Silling S.A., *Numerical studies of loss of ellipticity near singularities in an elastic material*, J. of elasticity, Vol. 19, pp : 241-284, 1988.

[20] Silling S.A., *Consequence of the Maxwell relation for anti-plane shear deformations of an elastic solid*, J. of elasticity, Vol. 19, pp : 213-239 1992.

[21] Silling S.A., *Dynamic growth of martensitic plates in a elastic material in elastic material*, J. of elasticity, Vol. 28, pp : 143-164, 1992.

[22] Schwartz L., *Analyse Hilbertienne* , édition Hermann, Paris, 1979.

Partie II

Modélisation des matériaux à mémoire de forme.

Chapitre 5

A propos des alliages à mémoire de forme

5.1 Introduction

Les matériaux à mémoire de forme ont des comportements inhabituels par rapport aux matériaux "classiques" . Ils peuvent présenter des déformations **réversibles très importantes** par rapport aux déformations élastiques ou des déformations permanentes qui **disparaissent** par simple élévation de température. Cette dernière propriété est à l'origine de la dénomination *matériaux à mémoire de forme* : le matériau se "rappelle" et retrouve sa forme initiale après avoir été déformé d'une manière non élastique.

Il est bien établi que ce comportement est dû à un changement de phase solide/solide [1] [3] [6], à savoir la transformation martensitique.

Dans ce chapitre, nous donnons une brève description de ces deux phénomènes qui confèrent aux matériaux à mémoire de forme leurs particularités. Cela nous permettra ensuite de les modéliser à l'aide du modèle introduit dans la première partie de ce mémoire.

5.2 Propriétés thermo-mécaniques des alliages à mémoire de forme

5.2.1 Description des phénomènes.

Un fil en alliage à mémoire de forme peut être déformé d'une manière non élastique comme beaucoup d'autres fils. Il possède toutefois la propriété de reprendre sa forme initiale après avoir été chauffé et de la garder (cf. figure (5.1)).

Ce phénomène s'explique par la forte sensibilité de la loi de comportement du matériau aux variations de la température : si on applique - à basse température - un chargement à un matériau à mémoire de forme, on obtient une déformation résiduelle après la décharge (cf. figure (5.2)). La différence entre ce comportement et la plasticité "classique", réside dans le fait qu'une fois atteinte la limite élastique de la phase-mère. on observe un écoulement quasi-plastique jusqu' à une certaine valeur de la déformation (ϵ_2 sur la figure (5.2)) à partir de laquelle on aura de nouveau un comportement élastique.

Si on répète l'expérience à une température supérieure, la décharge n'entraîne pas de déformation résiduelle. Néanmoins, le trajet de charge et décharge n'est pas le même ,

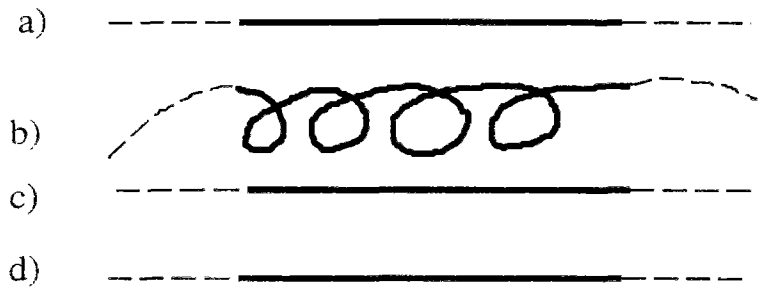


Figure 5.1: *Effet mémoire de forme dans un fil en alliage à mémoire de forme*
a: état initial sans déformation,
b: déformation du fil à la même température,
c: retour à la forme initiale par chauffage,
d: le fil garde sa forme même après refroidissement. .

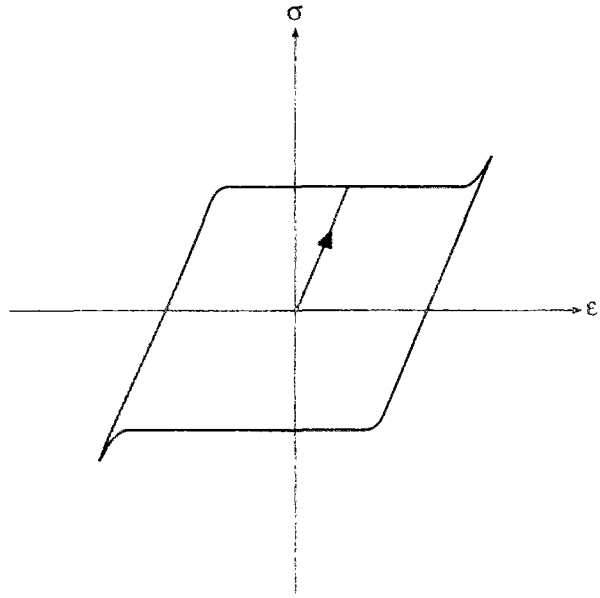


Figure 5.2: *Comportement à basse température : quasi-plasticité.*

d'où la présence d'un hystérésis (cf. figure (5.3)). Ce comportement est nommé *pseudo-élasticité.*

A très haute température, le matériau se comporte élastiquement sans "anomalie" (cf. figure (5.4)).

L'effet mémoire de forme peut être expliqué à partir de ces trois courbes contraintes-déformations de la manière suivante : sur la figure (5.2), on observe qu'à une contrainte nulle correspond une déformation résiduelle ϵ_1. Lorsque l'on porte le matériau à très haute température, le comportement de ce dernier est alors celui représenté dans la figure (5.4) : à une contrainte nulle correspond une déformation nulle. Ceci nous montre que, lors du chauffage, des phénomènes internes (transformation martensitique [1] [10] [7]) se sont produits et ont fait disparaître la déformation résiduelle.

Ce changement de phase à l'état solide peut être d'origine thermique ou induit par la contrainte : à haute température, le corps non chargé se trouve dans une phase hautement symétrique appelée austénitique et à faible température dans une phase moins symétrique

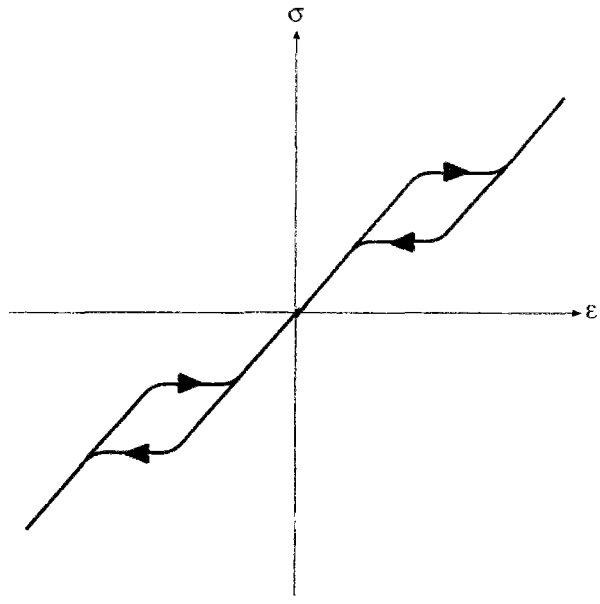


Figure 5.3: *Comportement à température moyenne : pseudo-élasticité.*

appelée martensitique. Le passage d'une phase à l'autre se fait par simple variation de température ou alors par variation de contrainte.

5.2.2 Mécanisme de la transformation martensitique

La transformation martensitique est un changement de phase à l'état solide dû à une déformation inélastique du réseau cristallin. Elle se produit sans diffusion par un mouvement coopératif des atomes. La vitesse de transformation est proche de la vitesse du son ($= 10^3 m/s$).

Cette transformation se produit de façon telle que l'interface entre la martensite formée et la phase-mère, en l'occurence l'austénite, devient un plan invariant (plan d'habitat) afin de minimiser l'énergie d'interaction entre les deux phases.

Les caractéristiques cristallographiques de cette transformation sont maintenant bien connues. Elles consistent en trois opérations:

- une transformation du réseau cristallin (déformation de bain),
- une transformation à réseau invariant (glissement, maclage) et
- une rotation.

Dans un monocristal d'austénite, il existe 24 possibilités d'orientation de la martensite, appellées variantes. Elles sont caractérisées par des plans d'habitat et des cisaillements d'orientation différentes.

Ainsi qu'on l'a déjà mentionné, la transformation martensitique peut être d'origine thermique ou induite par l'application d'une contrainte. Il existe donc des températures, dépendant du matériau, qui la caractérisent.

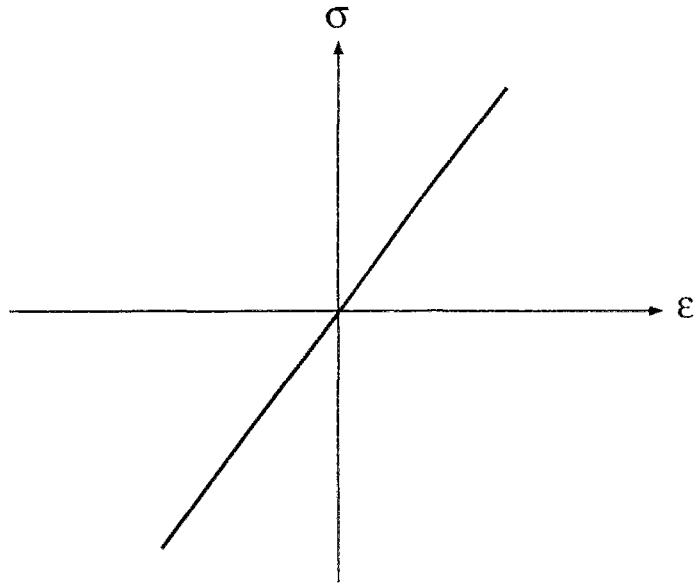


Figure 5.4: *Comportement à très haute température.*

La température M_s : il s'agit de la température de début de transformation martensitique en l'absence de déformation. Au-dessus de M_s la structure est entièrement austénitique, en-dessous l'austénite peut être partiellement ou totalement transformée.

La température M_f : il s'agit de la température de fin de transformation martensitique en l'absence de déformation. En-dessous de cette température, la structure est entièrement martensitique.

La température A_s : il s'agit de la température de début de transformation inverse (austénitique) en l'absence de déformation. En-dessous de A_s, la structure est entièrement martensitique, au-dessus, la martensite peut être partiellement ou totalement transformée.

La température A_f : il s'agit de la température de fin de transformation inverse en l'absence de déformation. Au-dessus de cette température, la structure est entièrement austénitique.

La température M_d : c'est la température maximale de formation de martensite induite par les contraintes.

Remarques

En général, les températures $M_s \neq A_f$ et $M_f \neq A_s$. cela se traduit dans le diagramme (σ, T) par un décalage des droites définissant les frontières entre les domaines [austénite]/[austénite + martensite]/[martensite] (cf. figure (5.5)). Ce décalage est le résultat d'une dissipation d'énergie mécanique (transformée en chaleur).

Ce diagramme (σ, T) montre qu'à une température constante T supérieure à M_s, la transformation martensitique peut s'obtenir par l'application d'une contrainte σ_s. Il s'agit alors de martensite induite par les contraintes.

A une température ($T < M_f$), l'état du matériau est martensitique sous forme de variantes auto-accommodantes. Sous l'effet d'une contrainte une déformation macroscopique est obtenue. Cette dernière n'est pas due à un changement de phase mais c'est défomation par réorientation des variantes due au mouvement des interfaces entre celles-ci.

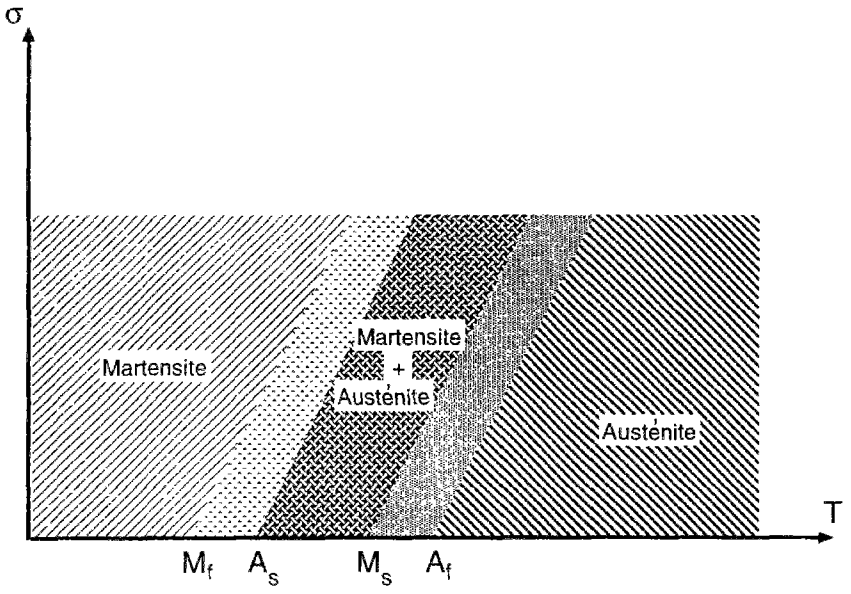


Figure 5.5: *Domaines de stabilité de l'austénite et de la martensite.*

La transformation martensitique possède deux grands domaines d'application :
- les traitements thermiques des aciers et
- les alliages à mémoire de forme : effet mémoire de forme, pseudo-élasticité.

Dans le paragraphe suivant, une explication - via la transformation martensitique - du comportement pseudo-élastique des alliages à mémoire de forme est donnée.

5.2.3 La pseudo-élasticité

Dans ce paragraphe, nous souhaitons analyser de près le comportement pseudo-élastique des matériaux à mémoire de forme (cf. figure (5.6)). Ce comportement est observé à une température supérieure à M_s. Le matériau non déformé est alors constitué d'une seule phase, l'austénite (cf. figure (5.5)). Si, à partir d'un état initial non chargé, on applique une contrainte, la courbe contrainte-déformation (cf. figure (5.7)) suit une droite élastique jusqu'à une certaine valeur de la contrainte σ_m . C'est là que débute la transformation de phase. On observe une ligne d'écoulement comparable à celle observée en plasticité parfaite. Les points situés sur cette ligne correspondent à des états successifs de passage de l'austénite à la martensite. Lorsque toute l'austénite est transformée, la courbe reprend une droite élastique mais cette fois avec un matériau à microstructure martensitique. Lors de la décharge, la transition inverse se produit et on passe de la martensite à l'austénite. La contrainte à partir de laquelle la transformation commence est inférieure à σ_m notée ici σ_a (cf. figure (5.7)). cela engendre la formation d'une boucle d'hystérésis. Lorsque le matériau est complètement déchargé, il retrouve sa microstructure initiale. Si on recommence l'essai à une température supérieure, on constate que la contrainte à partir de laquelle la transformation commence croît avec la température (cf figure (5.6)).

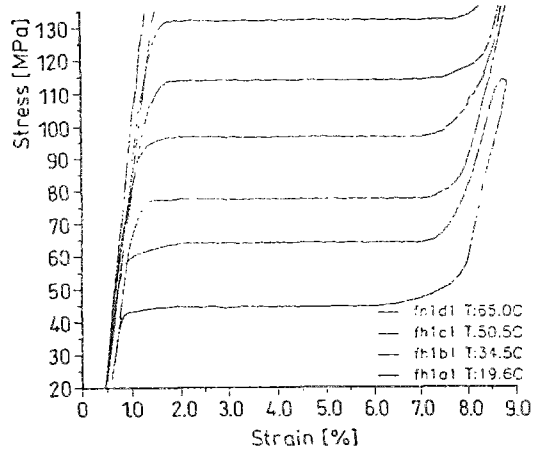


Figure 5.6: *Pseudo-élasticité : courbe expérimentale, Müller 1993.*

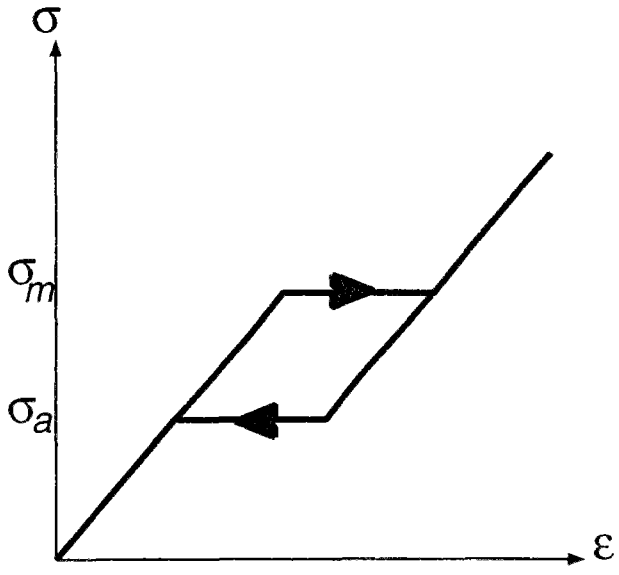


Figure 5.7: *Pseudo-élasticité : idéalisation.*

5.2.4 Les alliages à mémoire de forme courants.

L'effet mémoire de forme a été observé pour la première fois vers 1938 sur des alliages or-cadium. Mais la possibilité d'utiliser ce phénomène dans des applications industrielles n'a débuté que vers 1962 après avoir remarquè que les alliages nickel-titane possédaient également cette propriété. La difficulté d'élaborer des monocristaux de cet alliage a rendu difficile la compéhension des aspects métallurgiques associés à l'effet mémoire de forme. Cette difficulté a été surmontée vers les années quatre-vingt par l'apparition des alliages à base de cuivre beaucoups moins coûteux et offrant la possibilité d'élaborer des monocristaux. Actuellement deux familles d'alliages, les nickel-titane et les bases cuivre (Cu-Zn-Al, Cu-Al-Ni), assurent l'essentiel de ce développement bien que de très nombreux autres alliages à base de fer (Fe-Mn-Si) présentent les mêmes propriétés.

5.2.5 Application des matériaux à mémoire de forme.

Nous donnons dans ce paragraphe une liste non exhaustive des secteurs industriels concernés par l'utilisation des alliages à mémoire de forme :

- industrie aérospatiale : antenne de satellite (NASA), manchon de raccordement et d'étanchéité pour tuyauterie d'avion militaire (F-14) ;

- applications biomédicales : fil dentaire, fil de localisation pour mammographie, réduction de fracture;

- industrie électrique : capteurs électriques ;

- industrie mécanique : capteurs thermiques.

Il est évident que cette liste est loin d'être exhaustive. Il existe certainement d'autres applications intéressantes des alliages à mémoire de forme.

Pour plus de détail , nous renvoyons le lecteur intéressé au livre de Pattor et Berveiller [10].

Chapitre 6

Modélisation des alliages à mémoire de forme

6.1 Introduction

Il s'agit maintenant de modéliser les deux principaux phénomènes qui confèrent aux alliages à mémoire de forme leurs principales particularités à savoir :
la pseudo-élasticité et *l'effet mémoire de forme.*

Frémond [1] a proposé une description macroscopique de ces phénomènes. Sa démarche - basée sur l'analyse convexe - permet une extension de la méthode des deux potentiels. Il y introduit en effet les notions de sous-gradients et de fonctions indicatrices des ensembles des variables d'état admissibles [2].

Müller [6], quant à lui, s'est servi d'une énergie libre non convexe pour modéliser la transition de phase. Il a tenu à formuler cette énergie en appliquant les principes de la mécanique statistique. Il a pu ainsi simuler la pseudo-élasticité en exploitant les conséquences de la non-convexité.

Notre modélisation est directement inspirée des discussions de ces auteurs. Nous commencerons par écrire le modèle dans le cas unidimensionnel en tenant compte de la température. Le facteur température nous rendra possible la description de l'effet mémoire de forme que nous illustrerons par un exemple simple, celui d'une poutre en flexion. L'hypothèse du comportement dissipatif ainsi que le choix judicieux du pseudo-potentiel de dissipation nous amèneront ensuite à modéliser la boucle d'hystérésis (pseudo-élasticité) [8] [12].

6.2 Modélisation de l'effet mémoire de forme dans le cas unidimensionnel.

Comme nous l'avons déjà mentionné, la particularité du comportement des alliages à mémoire de forme est due à la transformation martensitique. Cela explique qu'une modélisation du type "changement de phase" soit nécessaire à la simulation des phénomènes observés. Ce paragraphe présente un modèle dérivé de celui écrit dans la première partie.

Les deux modèles diffèrent principalement par le choix de la forme de l'énergie élastique relative à chaque phase et par la prise en compte de la température.

Nous nous plaçons dans le cas où deux variantes de martensite, M^+ et M^-, peuvent se former. Pour simplifier la présentation, nous adoptons (comme Frémond [1]) les notations suivantes :

- T_0, la température au-dessous de laquelle les deux variantes de martensite existent de façon préférentielle.

- T_c, la température au-dessus de laquelle l'austénite est la seule phase existante. Nous supposons qu'au dessus de cette température la martensite ne peut plus être induite par la contrainte.

Entre T_0 et T_c les trois phases peuvent exister et leurs proportions sont fixées par les actions mécaniques.

La loi de comportement est établie selon une démarche identique à celle adoptée précédemment (cf. première partie) . Pour simplifier la présentation, nous ne donnons ici que les résultats obtenus. Nous renvoyons le lecteur à l'annexe A pour les détails du calcul. Notre modélisation est fondé sur le modèle rhéologique de la figure (6.1). Ce dernier est caractérisé par :

- ϵ : déformation macroscopique,
- e : déformation locale de la phase austénitique,
- f : déformation locale de la variante M^- de la phase martensitique,
- m : déformation locale de la variante M^+ de la phase martensitique,
- x : proportions de la phase austénitique,
- y : proportions de la phase martensitique M^- ,
- z : proportions de la phase martensitique M^+.

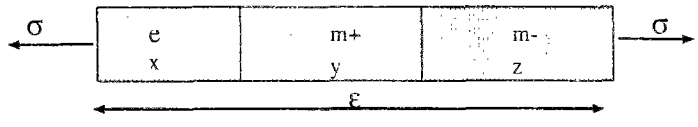


Figure 6.1: *modèle rhéologique.*

Puisque le milieu possède trois phases, il est naturel d'écrire que l'énergie libre est constituée par l'énergie relative à chaque phase augmentée éventuellement de l'énergie d'interaction entre elles :

$$\mathcal{W} = xU(e) + yV(f) + zW(m) + I(x, y, z). \tag{6.1}$$

avec cf. figure (6.1) :

$$\begin{aligned} U(e) &= \tfrac{1}{2}Ke^2, \\ V(f) &= \tfrac{1}{2}K(f+\epsilon_0)^2 + C(T), \\ W(m) &= \tfrac{1}{2}K(m-\epsilon_0)^2 + C(T), \end{aligned} \tag{6.2}$$

Nous avons supposé (suivant la littérature) que la phase austénitique et la martensitique possèdent la même rigidité élastique K. $\epsilon_0 > 0$ est la déformation à l'origine de l'incompatibilité des déformations entre les phases. $C(T)$ est une constante dépendant de la tempèrature de la manière suivante :

$$\begin{aligned} &C(T) < 0 \text{ si } T < T_0, \\ &C(T) > 0 \text{ si } T_0 < T < T_c, \\ &C(T) \longrightarrow +\infty \text{ si } T \longrightarrow T_c. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Enfin, par souci de simplicité, nous supposons que l'énergie d'interaction est nulle. Nous allons en tenir compte ensuite pour modéliser l'hystérésis.

On note λ, λ_1, λ_x, λ_y, et λ_z les multiplicateurs de Lagrange associés aux liaisons évidentes suivantes :

$$xe + yf + zm - \epsilon = 0, \tag{6.4}$$
$$x + y + z = 1, \tag{6.5}$$
$$x \geq 0, \tag{6.6}$$
$$y \geq 0, \tag{6.7}$$
$$z \geq 0. \tag{6.8}$$

Le lagrangien s'écrit :

$$\mathcal{L} = \mathcal{W} - \lambda(xe + yf + zm - \epsilon) - \lambda_1(x + y + z - 1) - \lambda_x x - \lambda_y y - \lambda_z z. \tag{6.9}$$

Les lois d'état s'écrivent :

$$\mathcal{L}_{,\epsilon} = \lambda = \sigma, \tag{6.10}$$
$$\mathcal{L}_{,e} = x(Ke - \lambda) = 0, \tag{6.11}$$
$$\mathcal{L}_{,f} = y(K(f+\epsilon_0) - \lambda) = 0, \tag{6.12}$$
$$\mathcal{L}_{,z} = z(K(m-\epsilon_0) - \lambda) = 0, \tag{6.13}$$
$$\mathcal{L}_{,x} = \frac{1}{2}K(e)^2 - \lambda e - \lambda_1 - \lambda_x = 0, \tag{6.14}$$
$$\mathcal{L}_{,y} = \frac{1}{2}K(f+\epsilon_0)^2 + C(T) - \lambda f - \lambda_1 - \lambda_y = 0, \tag{6.15}$$
$$\mathcal{L}_{,z} = \frac{1}{2}K(m-\epsilon_0)^2 + C(T) - \lambda m - \lambda_1 - \lambda_z = 0. \tag{6.16}$$

auxquelles s'ajoutent les liaisons et les relations associées :

$$\lambda_x \geq 0, \quad \lambda_y \geq 0 \quad \lambda_z \geq 0 \quad \text{avec} \quad \lambda_x x = 0, \lambda_y y = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_z z = 0 \tag{6.17}$$

La résolution de ce système ne pose pas de difficulté particulière. Il est facile de vérifier que dans ce cas : ($I(z) = 0, U(\epsilon), V(\epsilon), W(\epsilon)$ sont convexes) ces équations permettent d'obtenir un modèle d'élasticité non linéaire avec une énergie élastique convexe. Cette énergie est obtenue, via la positivité des multiplicateurs de Lagrange, par une opération de convexification de U, V et W (cf. chapitre 2).

6.2.1 Comportement à basse température $T < T_0$

Dans ce cas, $C(T) < 0$, les énergies associés à chaque phase ainsi que l'opération de convexification sont représentés sur la figure (6.2 a). Il est facile de constater que cette énergie (obtenue implicitement par convexification)correspond à la courbe contrainte-déformation de la figure (6.2 b).

La résolution du système d'équation ([6.10]-[6.17]), détaillée en annexe A, permet d'obtenir la loi de comportement suivante :

$$\epsilon \leq -\epsilon_0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 0, y = 1, z = 0 \\ \sigma = K(\epsilon + \epsilon_0) \end{cases} \tag{6.18}$$

$$-\epsilon_0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = \dfrac{\epsilon - \epsilon_0}{-2\epsilon_0} \\ z = 1 - \dfrac{\epsilon - \epsilon_0}{-2\epsilon_0} \\ \sigma = 0 \end{cases} \tag{6.19}$$

$$\epsilon \geq \epsilon_0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 0, y = 0, z = 1 \\ \sigma = K(\epsilon - \epsilon_0) \end{cases} \tag{6.20}$$

6.2.2 Comportement à température moyenne $T_0 < T < T_c$

Dans ce cas, $C(T) > 0$, les énergies associés à chaque phase ainsi que l'opération de convexification sont représentés sur la figure (6.3 a). De même que pour le cas précédent, la correspondance entre l'énergie convexifiée et la courbe contrainte-déformation de la figure (6.3 b) est claire.

La loi de comportement s'écrit dans ce cas :

$$-E \leq \epsilon \leq E \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 1, y = 0, z = 0 \\ \sigma = K\epsilon \end{cases} \tag{6.21}$$

$$E \leq \epsilon \leq F \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} y = 0, \\ x = \dfrac{F - \epsilon}{\epsilon_0} \\ z = 1 - x \\ \sigma = \dfrac{C(T)}{\epsilon_0}. \end{cases} \tag{6.22}$$

$$\epsilon \geq F \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 0, y = 0, z = 1 \\ \sigma = K(\epsilon - \epsilon_0) \end{cases} \tag{6.23}$$

$$-F \leq \epsilon \leq -E \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} z = 0, \\ x = \dfrac{F + \epsilon}{\epsilon_0} \\ y = 1 - x \\ \sigma = \dfrac{-C(T)}{\epsilon_0}. \end{cases} \tag{6.24}$$

$$\epsilon \leq -F \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 0, y = 1, z = 0 \\ \sigma = K(\epsilon + \epsilon_0) \end{cases} \tag{6.25}$$

$$E(T) = \frac{C(T)}{K\epsilon_0}, \quad F(T) = \frac{C(T) + K\epsilon_0^2}{K\epsilon_0},$$

6.2.3 Comportement à haute température $T > T_c$

Puisque la constante $C(T)$ tend vers l'infini, seule l'énergie de la phase austénitique apparaît sur la figure (6.4 a). Cette énergie est par définition convexe. Nous obtenons par conséquent la courbe contrainte-déformation de la figure (6.4 b).

La loi de comportement s'écrit :

$$\forall\ \epsilon \qquad x = 1, y = 0, z = 0 \qquad et \qquad \sigma = K\epsilon. \tag{6.26}$$

6.2.4 Discussion

Dans le cas non dissipatif, cette simple modélisation décrit l'effet mémoire de forme : à basse température, un état de déformation ($\sigma = 0$, $\epsilon = \epsilon_0$) est un état d'équilibre (cf. figure 6.2 b), ϵ_0 étant une déformation permanente. A haute température, cet état n'est plus un état d'équilibre, la déformation permanente ayant disparu ($\sigma = 0$, $\epsilon = 0$ cf. figure 6.4 b). C'est l'effet mémoire de forme [1] : une simple élévation de température permet à l'alliage de reprendre sa forme première.

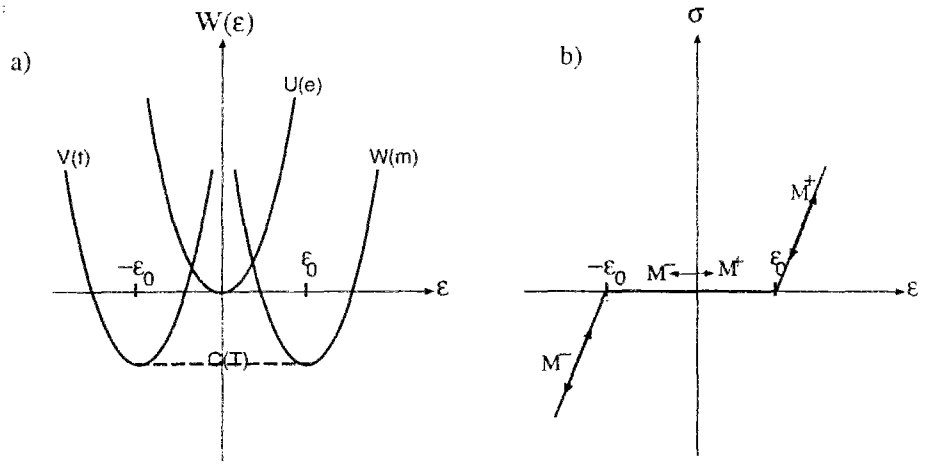


Figure 6.2: *Loi de comportement à basse température : $T < T_0$,*
a: convexification de l'énergie,
b: courbe contrainte-déformation associée.

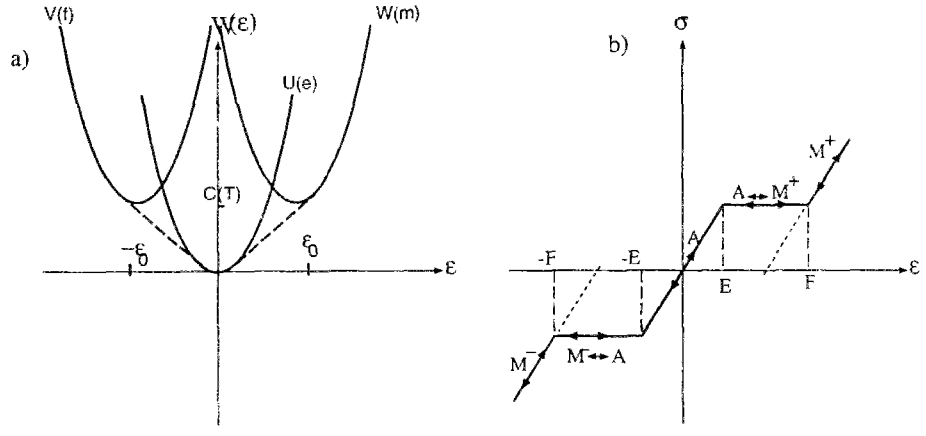


Figure 6.3: *Loi de comportement à température moyenne : $T_0 < T < T_c$,*
a: convexification de l'énergie,
b: courbe contrainte-déformation associée.

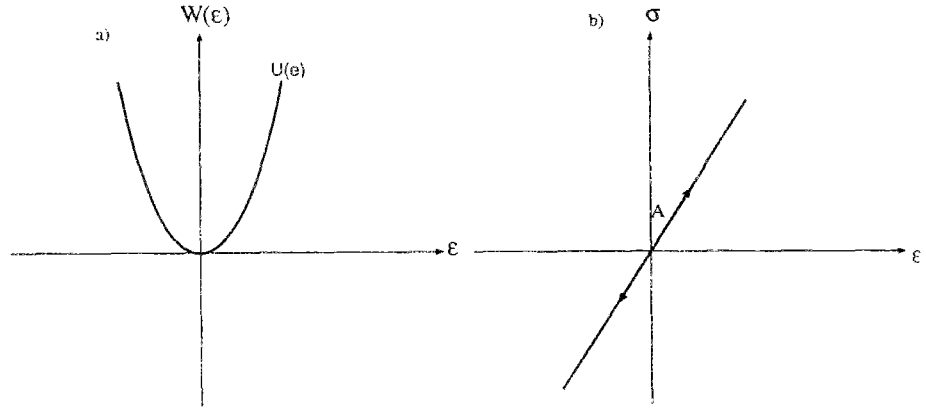


Figure 6.4: *Loi de comportement à haute température moyenne : $T > T_c$.*
a: convexification de l'énergie,
b: courbe contrainte-déformation associée.

6.2.5 Exemple simple d'illustration : flexion d'une poutre

Nous considérons la flexion de la poutre console en matériau à mémoire de forme définie sur la figure 6.5 : le matériau obéit à la loi de comportement établie dans le paragraphe

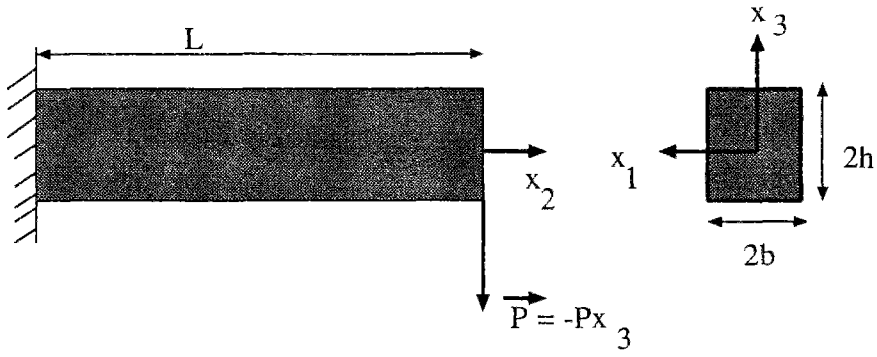


Figure 6.5: *Poutre en flexion.*

précédent, à savoir :

$$T > T_c, \qquad \sigma = K\epsilon \tag{6.27}$$

$$T < T_0 \quad \begin{cases} \sigma = K(\epsilon - \epsilon_0) \text{ pour } \sigma > 0, \\ \sigma = K(\epsilon + \epsilon_0) \text{ pour } \sigma \leq 0. \end{cases} \tag{6.28}$$

Nous nous limiterons à l'illustration de l'effet mémoire de forme et dans ce sens, nous avons tenu à simplifier notre exemple en omettant la pseudo-élasticité. La loi de comportement de la poutre est représentée sur la figure (6.6)

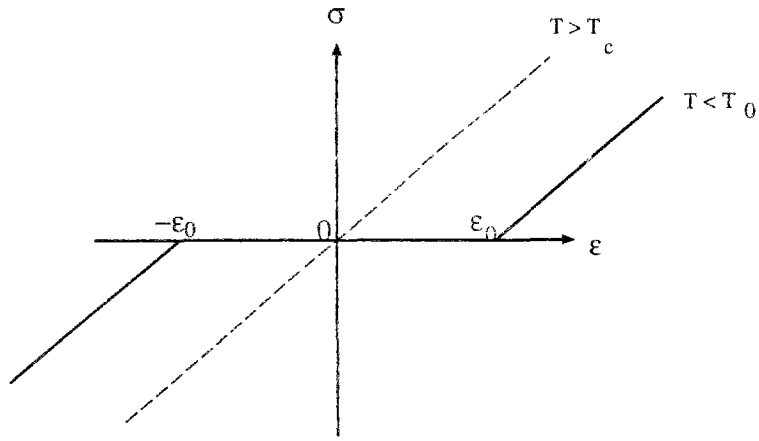


Figure 6.6: *loi de comportement locale de la poutre.*

Comportement global de la poutre Nous nous plaçons dans l'hypothèse de Bernouilli : *toute section droite normale à la fibre moyenne le reste après déformation.*. Il s'en suit que la déformation dans la section de la poutre est fournie par:

$$\epsilon = -x_3 v''(x_2) \tag{6.29}$$

$v(x_2)$ désigne la flèche de la poutre et ϵ la déformation selon l'axe x_2. Le moment fléchissant M nous est donné par :

$$M = -\int_s x_3 \sigma ds. \tag{6.30}$$

Deux cas se présentent :

- $\boldsymbol{P > 0}$

Suivant le signe de x_3, nous adopterons la loi de comportement adéquate. Il s'en suit :

$$M = -\int_{-b}^{b} dx_1 \{\int_0^h (-Kx_3 v'' - K\epsilon_0) x_3 dx_3 + \int_{-h}^{0} (-Kx_3 v'' + K\epsilon_0) x_3 dx_3\}. \tag{6.31}$$

En effet, dans le cas où $P > 0$, nous avons les implications suivantes :

$$\begin{cases} x_3 > 0 \Longrightarrow \sigma > 0 \\ x_3 < 0 \Longrightarrow \sigma < 0 \end{cases} \tag{6.32}$$

d'où :

$$M = KIv'' + 2bh^2 K\epsilon_0 \tag{6.33}$$

avec : $I = \dfrac{4bh^3}{3}$.

- $\boldsymbol{P < 0}$

Un calcul identique montre que pour $P < 0$, on obtient :

$$M = KIv'' - 2bh^2 K\epsilon_0 \tag{6.34}$$

On remarque que $M = P(x_2 - L)$. Il est possible, si l'on intègre les relations précédentes (6.33) (6.34), de trouver la loi de comportement globale liant l'effort P et la flèche à l'extrémité de la poutre. Le calcul aura pour résultat :

$$KIv(x_2) = \frac{(x_2 - L)^3}{6} P + Kbh^2 \epsilon_0 x_2^2 - P\frac{L^2}{2} x_2 + P\frac{L^3}{6} \quad \text{si} \quad P < 0 \tag{6.35}$$

$$KIv(x_2) = \frac{(x_2 - L)^3}{6} P - Kbh^2 \epsilon_0 x_2^2 - P\frac{L^2}{2} x_2 + P\frac{L^3}{6} \quad \text{si} \quad P > 0. \tag{6.36}$$

En remplaçant x_2 par L dans les équations (6.36) et (6.36), nous aurons :

$$v(L) = \frac{-L^3}{3KI} P + \frac{3\epsilon_0 L^2}{4h} \quad \text{si} \quad P < 0, \tag{6.37}$$

$$v(L) = \frac{-L^3}{3KI} P - \frac{3\epsilon_0 L^2}{4h} \quad \text{si} \quad P > 0. \tag{6.38}$$

(6.39)

Ceci nous fournit la loi de comportement globale de la poutre (cf. figure 6.7).

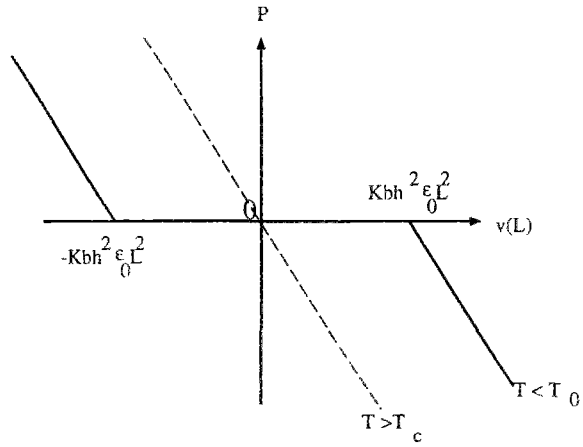


Figure 6.7: *Comportement global de la poutre .*

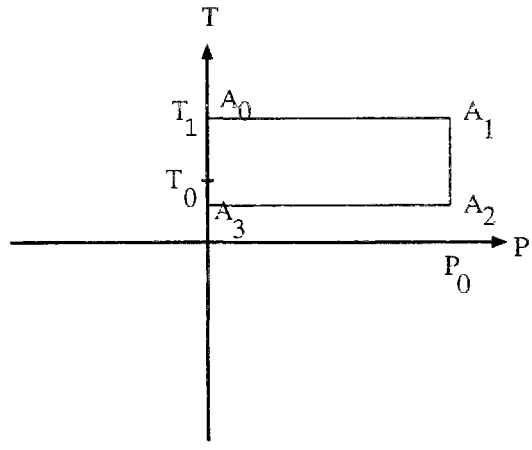


Figure 6.8: *Trajet de chargement*

Effet mémoire de forme Soit un état initial de la poutre défini par une température $T_1 > T_c$ et un chargement mécanique nul $P = 0$. Nous nous proposons de réaliser le trajet de de chargement de la figure (6.8).

Sur le trajet A_0A_1 : la température reste égale à T_1, le matériau de la poutre obéit alors à la loi de comportement élastique classique, soit :

$$\sigma = K\epsilon \tag{6.40}$$

nous pouvons toutefois faire usage des équations établies précédemment mais en annulant ϵ_0, d'où :

$$v(L) = \frac{-L^3}{3KI}P_0 \tag{6.41}$$

Sur le trajet A_1A_2 : P est maintenant constante ($= P_0$) cependant que la température diminue. Comme en A_1, la flèche $v(L)$ a une valeur négative. La figure (6.9) montre que la loi de comportement de A_1 à A_2 est :

$$KIv(x_2) = \frac{(x_2 - L)^3}{6}P_0 - Kbh^2\epsilon_0 x_2^2 - P\frac{L^2}{2}x_2 + P\frac{L^3}{6} \tag{6.42}$$

et

$$v(L) = \frac{-L^3}{3KI}P_0 - \frac{3\epsilon_0 L^2}{4h}. \tag{6.43}$$

On note que la flèche reste négative et augmente en valeur absolue.

Sur le trajet A_2A_3 : la température reste fixée à une valeur $T < T_0$ et P passe de P_0 à 0. Nous obtenons :

$$v(L) = \frac{-3L^2\epsilon_0}{4h} \tag{6.44}$$

Effet mémoire de forme :sur le diagramme de la figure (6.9), on relève que si l'on suit le trajet A_3A_0 qui nous ramène à l'état initial ($P = 0, T = T_c$), la déformation de la poutre disparaît. C'est l'effet mémoire de forme : une simple élévation de température fait reprendre à la poutre sa forme initiale.

Dans le cas où l'on impose une charge P négative, la déformée de la poutre est en valeur absolue identique à celle trouvée précédemment mais de signe opposé (cf. figure 6.10).

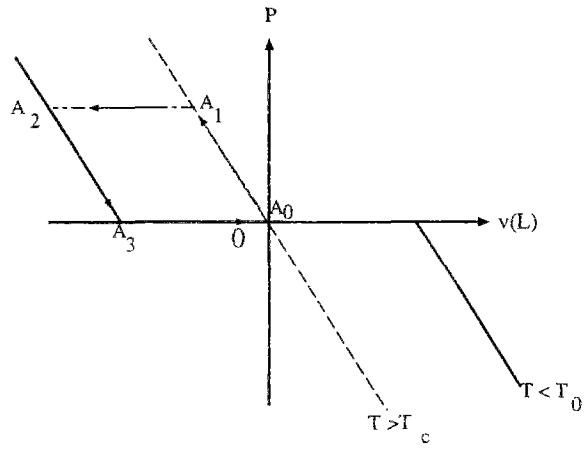


Figure 6.9: *Trajet suivi par la poutre $P > 0$.*

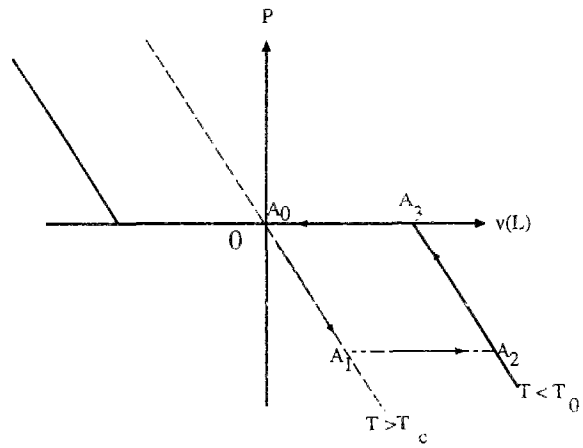


Figure 6.10: *Trajet suivi par la poutre $P < 0$.*

6.3 Modélisation de la pseudo-élasticité (l'hystérésis).

6.3.1 Introduction

A température moyenne ($T_0 < T < T_c$), les alliages à mémoire de forme font preuve d'un comportement pseudo-élastique : le trajet de charge et de décharge n'est pas le même et la courbe contrainte déformation présente un hystérésis (figure (5.3)).

Notre interprétation de l'hystérésis est fondée sur l'irréversibilité du changement de phase essentiellement attribuée à une dissipation. Cette dissipation est engendrée par l'incompatibilité des déformations des différentes phases aux interfaces.

La figure (6.3) montre que seul une variante de martensite M^+ ou M^- - selon qu'on ait en traction ou compression - peut se former. Pour simplifier la présentation de ce paragraphe nous adoptons donc le modèle rhéologique bi-phasique représenté par la figure (6.11) et caractérisé par :

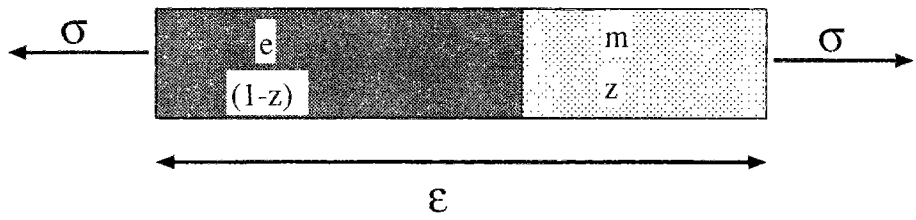


Figure 6.11: *modèle rhéologique.*

- ϵ : déformation macroscopique,
- e : déformation locale de l'austénite (phase-mère).
- m : déformation locale de la variante martensitique M^+ (phase-produit).
- z : proportion de la phase produit.

Seul l'aspect mécanique sera discuté ici. La température est supposée constante.

6.3.2 Choix de l'énergie d'interaction

La phase martensitique et la phase austénitique coexistent dans la zone de transition. On relève une incompatibilité des déformations entre les deux phases aux interfaces qui les séparent. La formation de ces dernières nécessite une énergie supplémentaire que nous appelons énergie d'interaction. Dans notre modélisation de l'hystérésis, cette énergie joue un rôle très important du fait que la forme de la courbe $\sigma - \epsilon$ lui est intimement liée.

Le choix de l'énergie d'interaction est basé sur les considérations physiques suivantes :

$I(z)$ est d'une part proportionnelle à ϵ_0^2 (la déformation ϵ_0 est à l'origine de l'incompatibilité des déformations entre les deux phases) et d'autre part à $z(z-1)$ (cette quantité est proportionnelle au nombre d'interfaces [6]).

Nous adoptons pour $I(z)$ la forme suivante :

$$I(z) = \frac{P{\epsilon_0}^2}{2(1-\frac{P}{K})} z(z-1)$$

P < 0 , ϵ_0 >0 sont des constantes caractéristiques du matériau pouvant être detérminées par un simple essai de traction. Le lagrangien s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\epsilon, e, m, z, \lambda, \lambda_1, \lambda_2) &= (1-z)U(e) + zW(m) + I(z) - \lambda((1-z)e + zm - \epsilon) \\ &\quad -\lambda_1(1-z) - \lambda_2 z.\end{aligned}$$

U et W ayant les même expressions que ci-dessus.

6.3.3 Changement de phase non dissipatif.

Compte tenu de l'énergie d'interaction, un calcul similaire à celui du chapitre précédent permet d'obtenir la loi de comportement suivante :

$$\epsilon \leq E \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} z = 0 \\ \sigma = K\epsilon \end{cases} \tag{6.45}$$

$$E \leq \epsilon \leq F \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} z = \dfrac{(K-P)\epsilon - L}{K\epsilon_0} \\ \sigma = P\epsilon + L \end{cases} \tag{6.46}$$

$$\epsilon \geq F \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} z = 1 \\ \sigma = K(\epsilon - \epsilon_0) \end{cases} \tag{6.47}$$

$$E = \frac{C(T) + I'(0)}{K\epsilon_0}, \quad F = \frac{C(T) + I'(1) + K{\epsilon_0}^2}{K\epsilon_0}, \quad L = \frac{C(T)}{\epsilon_0}(1 - \frac{P}{K}) - \frac{P}{2}\epsilon_0,$$

ce qui conduit à la courbe contrainte - déformation de la figure (6.12)

Une augmentation de la température ($T_0 < T < T_c$) fait croître la constante $C(T)$ et par suite la contrainte-seuil à partir de laquelle le changement de phase commence. Nous verrons ci-après que ceci entraîne une élévation de l'hystérésis conformément à l'expérience [8].

Selon la pente négative que présente la courbe contrainte -déformation, nous pouvons déduire que les états d'équilibre correspondants sont instables. Cela peut être démontré par le critère de seconde variation du lagrangien. En effet, pour $E < \epsilon < F$, on

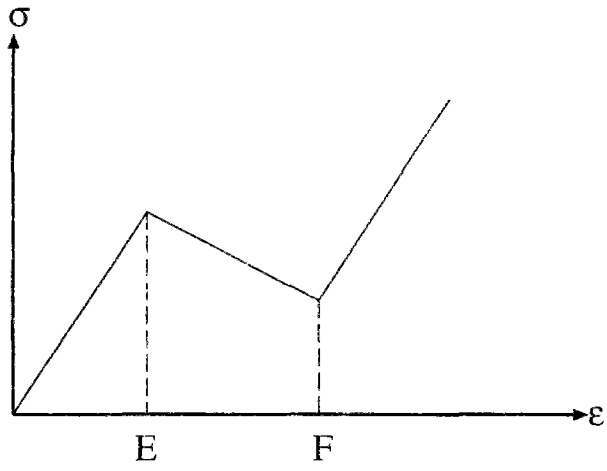


Figure 6.12: *Courbe contrainte-déformation dans le cas réversible avec prise en compte de l'énergie d'interaction.*

doit discuter la positivité de la matrice $\mathcal{L}_{,uu}$ avec u = (ϵ, e, m, z) et

$$\mathcal{L}_{,uu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K(1-z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Kz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I'' \end{bmatrix}$$

sur l'ensemble des vitesses admissibles ($\delta\epsilon$ arbitraire, δz arbitraire, $\delta z(e-m)+z\delta e+(1-z)\delta m-\delta\epsilon = 0$.) Or $I'' = \dfrac{P{\epsilon_0}^2}{1-\frac{P}{K}} < 0$. Il est clair que la seconde variation du lagrangien n'est pas strictement positive sur l'ensemble des vitesses admissibles (cf. chapitre, stabilité et changement de phase, première partie).

6.3.4 Changement de phase dissipatif.

Lors de la modélisation de la boucle d'hystérésis, on suppose que le changement de phase est irréversible. Une dissipation est ainsi engendrée. On en tient compte en s'inspirant de la plasticité et en supposant que le processus est indépendant du temps physique.
Mais pour cela, nous commençons d'abord par calculer la force thermodynamique associée à la variable interne z :

$$\mathcal{A} = -\mathcal{L}_{,z} \tag{6.48}$$

$$= -\frac{1}{2}K(m-\epsilon_0)^2 + \frac{1}{2}Ke^2 - C(T) - I'(z) + \lambda(m-e). \tag{6.49}$$

Nous introduisons ensuite le potentiel de dissipation $\mathcal{D}$ suivant dont l'expression dépend de l'état actuel :

$$\mathcal{D} = \begin{cases} [-I'(z) + I'(0)]\,\dot{z} & \text{si } \dot{z} > 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq z < 1 \\ [-I'(z) + I'(1)]\,\dot{z} & \text{si } \dot{z} < 0 \quad \text{et} \quad 0 < z \leq 1 \end{cases} \tag{6.50}$$

On montre facilement que pour $0 < z < 1$:

$$-I'(z) + I'(0) > 0 \tag{6.51}$$
$$-I'(z) + I'(1) < 0. \tag{6.52}$$

Ceci implique que le produit $D_{,\dot{z}}\,\dot{z} = \mathcal{A}\dot{z} = d_i > 0$ où d_i est la dissipation intrinsèque, d'où la vérification de l'inégalité de Clausius-Duhem.

A ce potentiel correspond un domaine des forces admissibles dépendant de l'état actuel par l'intermédiaire de z :

$$\mathcal{C}(z) = \{\mathcal{A}/I'(1) \leq \mathcal{A} + I'(z) \leq I'(0)\}. \tag{6.53}$$

Afin d'écrire la loi de normalité associée, on définit respectivement pour la charge et la décharge deux fonctions seuils :

$$f_1(z) = \mathcal{A} + I'(z) - I'(0) \tag{6.54}$$
$$f_2(z) = -\mathcal{A} - I'(z) + I'(1) \tag{6.55}$$

Loi de comportement.

La loi de comportement est obtenue sous forme incrémentale. Cela est imputable au caractère dissipatif du phénomène. Nous l'exprimons ici en usant de la loi de normalité (comme dans le cas de l'endommagememt partiel) pour chaque cas de transformation : transformation de phase austénite → martensite et transformation inverse.

Transformation de phase austénite → martensite. La transformation de phase directe, austénite → martensite, se produit lorsque la force thermodynamique $\mathcal{A}$ atteint le seuil donné par l'équation ($f_1(z) = 0$). L'évolution du paramètre interne z résulte de la loi de normalité :

$$\dot{z} = 0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} f_1 < 0 & \text{trajet 1 sur la figure (6.13)} \\ ou & \\ f_1 = 0 \quad \text{et} \quad \dot{f}_1 < 0 & \text{trajet 2 sur la figure (6.13)} \end{cases} \tag{6.56}$$

$$\dot{z} = \Delta_1 \frac{\partial f_1}{\partial \mathcal{A}} \quad \text{si} \quad \begin{cases} f_1 = 0 \quad \text{et} \quad \dot{f}_1 = 0 & \text{trajet 3 sur la figure (6.13)} \end{cases} \tag{6.57}$$

Δ_1 est detérminé par la condition de cohérence $\dot{f}_1 = 0$
En dérivant les équations d'état par rapport au temps, nous obtenons un système d'équation dont la résolution donne la loi de comportement en vitesse. Nous en fournissons ci-dessous les résultats. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à l'annexe B.

Les calculs développés peuvent être résumés comme suit :

Si $z = 0$, seule la phase austénitique existe.

$$\epsilon < \frac{I'(0) + C(T)}{K\epsilon_0} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{z} = 0 \\ \dot{\sigma} = K\dot{\epsilon} \\ \dot{e} = \dot{\epsilon} \end{cases} \tag{6.58}$$

$$\epsilon = \frac{I'(0) + C(T)}{K\epsilon_0} \text{ et } \dot{\epsilon} < 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{z} = 0 \\ \dot{\sigma} = K\dot{\epsilon} \\ \dot{e} = \dot{\epsilon} \end{cases} \tag{6.59}$$

$$\epsilon = \frac{I'(0) + C(T)}{K\epsilon_0} \text{ et } \dot{A} + I''(z)\dot{z} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{z} = \dfrac{\dot{\epsilon}}{\epsilon_0} > 0 \\ \dot{\sigma} = 0 \\ \dot{e} = 0 \end{cases} \tag{6.60}$$

Si $0 < z < 1$, les deux phases, martensitique et austénitique, coexistent.

$$\epsilon < \frac{I'(0) + C(T) + Kz\epsilon_0^2}{K\epsilon_0} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{z} = 0 \\ \dot{m} = \dot{\epsilon} \\ \dot{e} = \dot{\epsilon} \\ \dot{\sigma} = K\dot{\epsilon} \end{cases} \tag{6.61}$$

$$\epsilon = \frac{I'(0) + C(T) + Kz\epsilon_0^2}{K\epsilon_0} \text{ et } \dot{\epsilon} < 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{z} = 0 \\ \dot{m} = \dot{\epsilon} \\ \dot{e} = \dot{\epsilon} \\ \dot{\sigma} = K\dot{\epsilon} \end{cases} \tag{6.62}$$

$$\epsilon = \frac{I'(0) + C(T) + Kz\epsilon_0^2}{K\epsilon_0} \text{ et } \dot{\mathcal{A}} + I''(z)\dot{z} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{z} = \dfrac{\dot{\epsilon}}{\epsilon_0} > 0 \\ \dot{\sigma} = 0 \\ \dot{e} = \dot{m} = 0 \end{cases} \tag{6.63}$$

Si $z = 1$, seule la phase martensitique existe.

$$\begin{cases} \dot{z} = 0 \\ \dot{m} = \dot{\epsilon} \\ \dot{\sigma} = K\dot{\epsilon} \end{cases} \tag{6.64}$$

Transformation de phase martensite → austénite. La décharge entraîne une transformation de phase inverse, martensite → austénite. Elle se produit lorsque la force thermodynamique $\mathcal{A}$ atteint le seuil donné ici par l'équation $(f_2(z) = 0)$. Comme dans le cas de la transformation directe, l'évolution est obtenue par la loi de normalité :

$$\dot{z} = 0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} f_2 < 0 & \text{trajet 4 sur la figure (6.13)} \\ ou & \\ f_2 = 0 \quad \text{et} \quad \dot{f}_2 < 0 & \text{trajet 5 sur la figure (6.13)} \end{cases} \tag{6.65}$$

$$\dot{z} = \Delta_2 \frac{\partial f_2}{\partial \mathcal{A}} \quad \text{si} \quad \left\{ f_2 = 0 \quad \text{et} \quad \dot{f}_2 = 0 \quad \text{trajet 6 sur la figure (6.13)} \right. \tag{6.66}$$

Δ_2 est déterminé par la condition de cohérence $\dot{f}_2 = 0$

Les calculs sont analogues à ceux du cas précédent.

Si $z = 1$, seule la phase martensitique existe.

$$\epsilon > \frac{I'(1) + C(T) + K\epsilon_0^2}{K\epsilon_0} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{z} = 0 \\ \dot{\sigma} = K\dot{\epsilon} \\ \dot{m} = \dot{\epsilon} \end{cases} \tag{6.67}$$

$$\epsilon = \frac{I'(1) + C(T) + K\epsilon_0^2}{K\epsilon_0} \text{ et } \dot{\epsilon} > 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{z} = 0 \\ \dot{\sigma} = K\dot{\epsilon} \\ \dot{m} = \dot{\epsilon} \end{cases} \tag{6.68}$$

$$\epsilon = \frac{I'(1) + C(T) + K\epsilon_0^2}{K\epsilon_0} \text{ et } \dot{\mathcal{A}} + I''(z)\dot{z} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{z} = \dfrac{\dot{\epsilon}}{\epsilon_0} < 0 \\ \dot{\sigma} = 0 \\ \dot{m} = 0 \end{cases} \tag{6.69}$$

Si $0 < z < 1$, les deux phases, martensitique et austénitique, coexistent.

$$\epsilon > \frac{I'(1) + C(T) + Kz\epsilon_0^2}{K\epsilon_0} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{z} = 0 \\ \dot{m} = \dot{\epsilon} \\ \dot{e} = \dot{\epsilon} \\ \dot{\sigma} = K\dot{\epsilon} \end{cases} \tag{6.70}$$

$$\epsilon = \frac{I'(1) + C(T) + Kz\epsilon_0^2}{K\epsilon_0} \text{ et } \dot{\epsilon} > 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{z} = 0 \\ \dot{m} = \dot{\epsilon} \\ \dot{e} = \dot{\epsilon} \\ \dot{\sigma} = K\dot{\epsilon} \end{cases} \tag{6.71}$$

$$\epsilon = \frac{I'(1) + C(T) + Kz\epsilon_0^2}{K\epsilon_0} \text{ et } \dot{\mathcal{A}} + I''(z)\dot{z} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{z} = \dfrac{\dot{\epsilon}}{\epsilon_0} < 0 \\ \dot{\sigma} = 0 \\ \dot{e} = \dot{m} = 0 \end{cases} \tag{6.72}$$

Si $z = 0$, seule la phase austénitique existe.

$$\begin{cases} \dot{z} = 0 \\ \dot{e} = \dot{\epsilon} \\ \dot{\sigma} = K\dot{\epsilon} \end{cases} \tag{6.73}$$

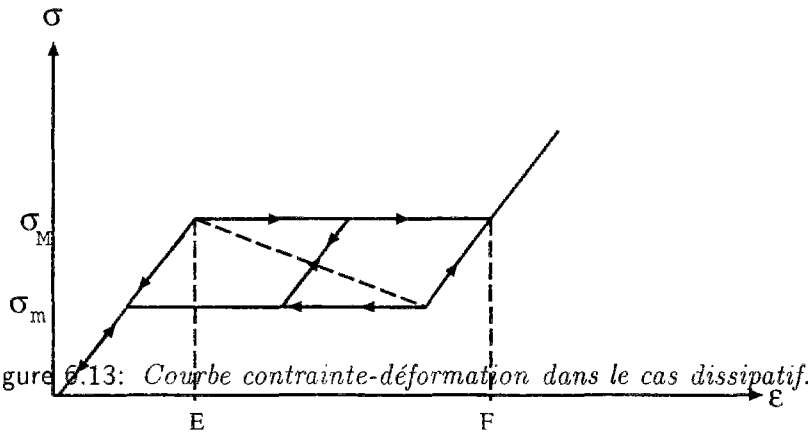


Figure 6.13: *Courbe contrainte-déformation dans le cas dissipatif.*

$$\sigma_m = K\frac{I'(1) + C(T) + K\epsilon_0^2}{K\epsilon_0}, \sigma_a = K\frac{I'(0) + C(T)}{K\epsilon_0}.$$

6.3.5 Discussion

La loi de comportement en vitesse, mentionnée supra, décrit tout le processus de changement de phase à l'origine du comportement pseudo-élastique : tant que la contrainte n'a pas atteint la valeur σ_m ($f_1 < 0$), le matériau reste à l'état austénitique ($z = 0$ et $\dot{z} = 0$). Une fois cette valeur atteinte ($f_1 = 0$), le changement de phase direct commence ($\dot{z} > 0$). Il se produit à contrainte constante ($\dot{\sigma} = 0$) d'une manière comparable à la plasticité parfaite. Lorsque la phase austénitique est entièrement transformée en martensite ($z = 1$), la transformation directe ne peut plus se produire ($\dot{z} = 0$).

Si maintenant nous effectuons une décharge à partir de cet état, la loi de comportement montre que tant que σ_a n'est pas atteinte ($f_2 < 0$), le matériau reste à l'état martensitique ($z = 1$ et $\dot{z} = 0$). La transformation inverse débute pour $\sigma = \sigma_a$ ($f_2 = 0$). Elle se produit de la même manière que pour la transformation directe à l'exception faite qu'ici $\dot{z}$ est négatif.

Supposons que nous arrêtions la charge avant qu'elle n'ait atteint la seconde branche élastique et que nous procédions à une décharge, l'état du matériau suit alors une droite à l'intérieur de l'hystérésis parallèle aux deux branches élastiques. Le fait que $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$ interdise à σ d'atteindre zéro. Quand $\mathcal{A} = -I'(z) + I'(1)$ ($f_2 = 0$), la transformation inverse se déclenche ($\dot{z} < 0$). D'une manière similaire, la décharge peut être interrompue. Le matériau aura un comportement analogue au précédent.

L'aire de la boucle d'hystérésis représente la quantité d'énergie dissipée. Ceci se vérifie si l'on calcule la dissipation totale pendant un cycle de chargement. D'une part, sur la courbe contrainte déformation l'aire S_h de la boucle est donnée par :

$$S_h = (\sigma_m - \sigma_a)\epsilon_0 = \frac{P\epsilon_0^2}{\frac{P}{K} - 1} \tag{6.74}$$

et d'autre part, la dissipation totale est obtenue par :

$$
\begin{aligned}
D &= \int_0^T d_i dt && (6.75)\\
&= \int_0^{\frac{T}{2}} (-I'(z) + I'(0))\dot{z}dt + \int_{\frac{T}{2}}^T (-I'(z) + I'(1))\dot{z}dt && (6.76)\\
&= I'(0) - I'(1) && (6.77)\\
&= \frac{P\epsilon_0^2}{\frac{P}{K} - 1} && (6.78)
\end{aligned}
$$

Dans ce calcul nous avons supposé que chaque transformation (directe et inverse)se fait en un demi-cycle : $z(0) = 0, z(\frac{T}{2}) = 1, z(T) = 0$).

L'aire de l'hystérésis est une constante indépendante de la température, ce qui est en accord avec l'expérience [7]. Il s'agit d'une caractéristique du matériau proportionnelle à ϵ_0 qui est justement à l'origine de l'incompatibilité de déformations entre les deux phases.

6.4 Conclusion

Un modèle décrivant le comportement des alliages à mémoire de forme (effet mémoire de forme et pseudo-élasticité) a pu être élaboré au cours de cette seconde partie.

Afin de modéliser ces phénomènes, nous avons choisi d'adopter une démarche analogue à celle développée en première partie en tenant toutefois compte ici du facteur température. Cela nous a permis de décrire l'effet mémoire de forme.

Nous avons par la suite introduit une énergie d'interaction entre phases dont une interprétation physique a également été donnée. Considérer que le changement de phase se produit de manière irréversible et introduire un potentiel de dissipation qui dépende de l'état actuel nous a amenés à modéliser la boucle d'hystérésis observée expérimentalement [6].

Il est à noter que l'introduction du comportement irréversible a stabilisé le modèle. En effet, la figure (6.13) ne montre plus de portions de courbes avec une pente négative.

Ce modèle peut facilement être étendu au cas tridimensionnel. Il suffit en effet de remplacer les variables scalaires par des variables tensorielles [4] [5].

Références bibliographiques de la deuxième partie.

[1] Frémond M. *Matériaux à mémoire de forme*, C. R. Acad. Sci. Paris, 301 série II, 1987, p. 239-244.

[2] Frémond M. *Sur l'inégalité de Clausius -Duhem*, C.R.A.S tome 311, série II p. 757-762, 1990.

[3] Falk F. *Model free energy, mechanics, and thermodynamics of shape memory alloys* Acta Metallurgica Vol 28, pp. 1773-1780, 1980.

[4] Moumni Z. et Nguyen Q.S. *Etude d'un modèle de changement de phase : application à l'endommagement fragile, progressif et partiel*, Colloque national en calcul des structures, Giens 1993.

[5] Moumni Z. et Nguyen Q.S. *Modélisation de l'hystérésis pour les alliages à mémoire de forme*, Colloque national Mecamat, Poitier 1994.

[6] Muller I. *On the size of the hysteresis in pseudoelasticity* , Conti. Mech. Thermodyn., 1, p.125-142, 1989.

[7] Muller I. and Xu H., *On the pseudoelastic hysteresis* , Acta met. mater., 39, 3, 263-271 1990.

[8] Muller I. and Xu H., *Non equilibrium thermodynamics of pseudoelasticity* , Continuum Mechanics and themodynamics. 5, 3, 163-204 1993.

[9] Nguyen Q.S. *Bifurcation and stability of time-independent standard dissipative systems*, C.I.S.M, Udine, 1990.

[10] Patoor E. Berveiller M. *Les alliages à mémoire de forme*, edition Hermes, paris, 1990.

[11] Pattor E., Eberhardt A. et Berveiller M. *Potentiel pseudoelastique et plasticité de transformation martensitique dans le mono et polycristaux metalliques* , Acta metall, Vol 35, No. 11 pp. 2779-2789, 1987.

[12] Ranieki B., Lexcellent Ch. et Tanaka K. *Thermodynamic models of pseudoelastic behaviour of shape memory alloys*.Arch Mech, 44, 3, pp. 261-288, 1992.

Partie III

Modélisation de l'endommagement fragile partiel.

Chapitre 7

Présentation du problème d'endommagement

L'endommagement est un phénomène évolutif irréversible dû à l'apparition et au développement de défauts (micro-fissuration, micro-vides, ...) au niveau de la microstructure. Cela se traduit macroscopiquement par une perte de rigidité du matériau [8],[11].

Plusieurs modèles ont été proposés pour simuler ce comportement. Ils sont tous fondés sur l'introduction d'une variable interne $\alpha(x,t)$ qui mesure le degré d'altération des caractéristiques mécaniques du matériau. Une fois cette variable choisie, le problème réside dans la description de son évolution quand un certain critère (en déformation, en contrainte ou en énergie) est atteint.

Dans le cas où l'endommagement est un phénomène évolutif indépendant du temps physique, il est qualifié d'élastique-fragile : le matériau reste élastique mais ces caractéristiques mécaniques (module de Young, module de cisaillement ...) sont irréversiblement affectées par les déformations auxquelles il est soumis. Suivant que le matériau garde ou non une rigidité résiduelle, on distingue l'endommagement partiel de l'endommagement total. Dans chacun de ces cas, la dégradation peut être progressive ou brutale (cf. figure 7.1) [2], [4], [3],[5]. [11].

Nous souhaitons présenter ici un modèle d'endommagement fragile, progressif et partiel au sens suivant : un matériau élastique 1 (sain) se transforme localement en un matériau élastique 2 (endommagé) via une zone dans laquelle les deux matériaux peuvent coexister à l'échelle microscopique (partiellement endommagée) (cf figure 7.2) . Ceci se traduit macroscopiquement par une dégradation des caractéristiques élastiques (cf figure 7.3). Pour ce faire, nous considérons un paramètre interne z qui représente la proportion volumique de la partie endommagée ($z \in [0,1]$). Le solide Ω se partage par conséquent en trois zones : une zone saine ($z = 0$), une zone partiellement endommagée ($0 < z < 1$) et une zone complètement endommagée ($z = 1$). (cf figure 7.4).

Il est clair que ce modèle est très similaire à celui du changement de phase solide/solide introduit dans la première partie de ce mémoire. Il suffit de considérer l'endommagement comme étant un changement de phase c'est-à-dire comme la transformation d'un matériau sain (phase-mère) en un matériau endommagé (phase-produit). La différence principale entre les deux modèles réside dans le caractère irréversible de l'endommagement. Nous en tenons compte par le choix judicieux du pseudo-potentiel de dissipation. Ce dernier nous permet, sous l'hypothèse du mécanisme dissipatif normal [6], d'écrire la loi d'évolution du

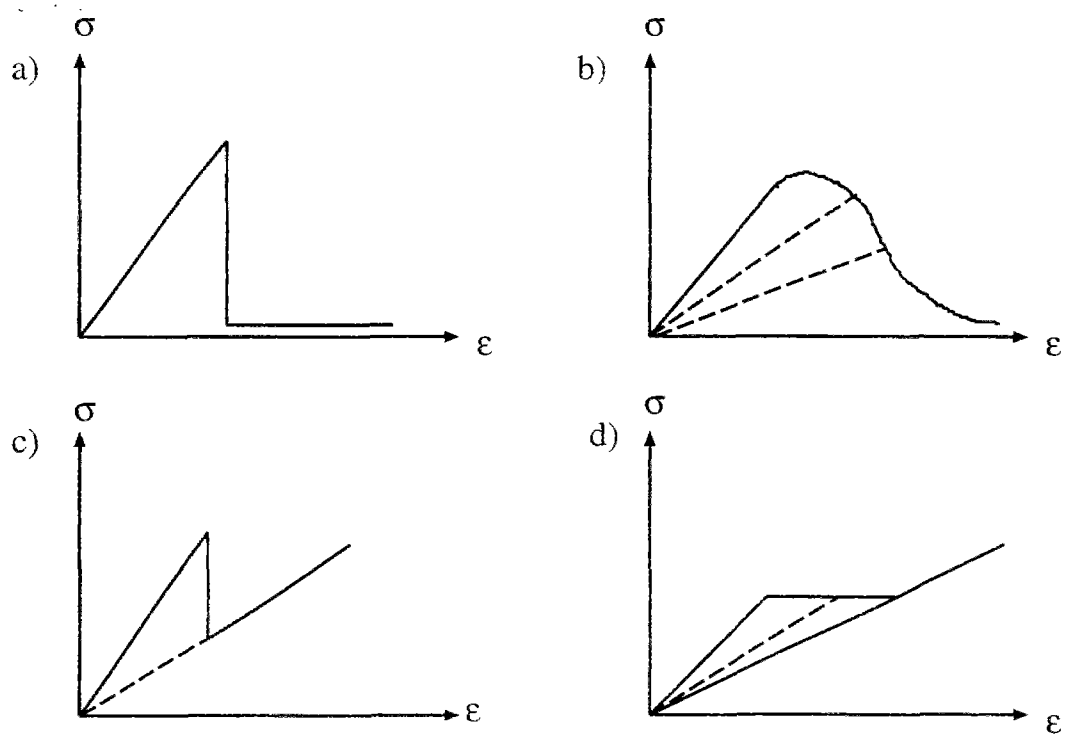


Figure 7.1: *Modèles d'endommagement fragile*
a: brutal total ,
b: progressif total.
c: brutal partiel,
d: progressif partiel. .

paramètre interne z (loi de normalité) sous forme d'une expression en vitesse ($\dot{z} \in N_{\mathcal{C}}(\mathcal{A})$). De ce fait, la nature incrémentale du comportement est mise en évidence et conduit à l'étude du problème en vitesse.

Cette partie s'articule en deux chapitres. Notre objectif, dans le second chapitre, est l'écriture de la loi de comportement d'endommagement fragile partiel. Pour y parvenir, nous considérons un simple modèle rhéologique en série, et par le biais de la méthode des deux potentiels avec des variables d'état liées, nous définissons les forces thermodynamiques via les lois d'état. L'évolution de l'endommagement est ensuite décrite grâce au potentiel de dissipation et au principe de dissipation maximale de Hill (loi de normalité). Les équations d'état ainsi que leurs dérivées par rapport au temps nous permettent d'écrire la loi de comportement en vitesse.

Une généralisation tridimensionnelle est ensuite étudiée. Nous formulons alors le problème d'endommagement pour une structure massive de géométrie quelconque. Les champs de contrainte et de déformation solutions devront vérifier un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires extrêmement difficile à résoudre. Une première simplification consiste à étudier le problème en vitesse à chaque instant t fixé. La solution globale est obtenue par intégration par rapport au temps.

Le troisième chapitre sera l'occasion pour nous d'expliciter le recours au calcul numérique par l'écriture d'un programme de calcul utilisant la méthode des éléments finis

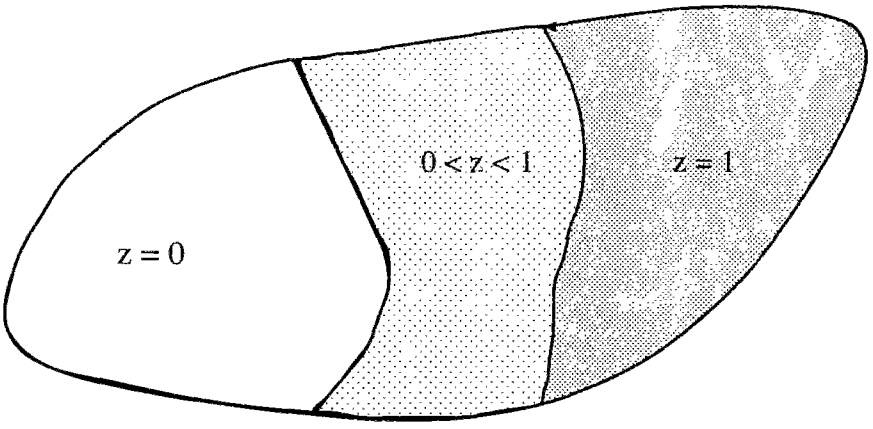


Figure 7.2: *Solide endommageable partiellement.*

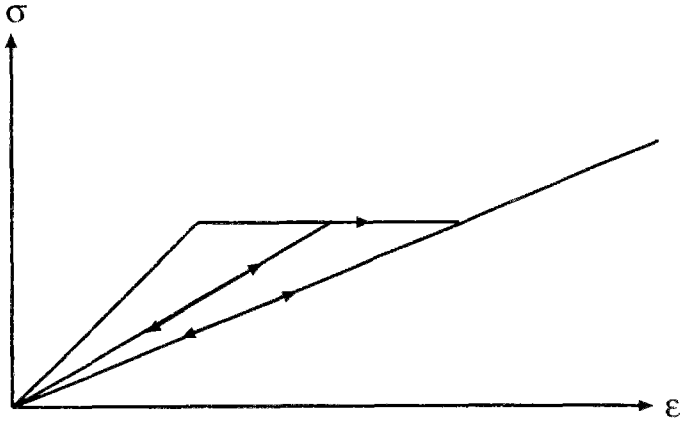


Figure 7.3: *Endommagement fragile progressif partiel .*

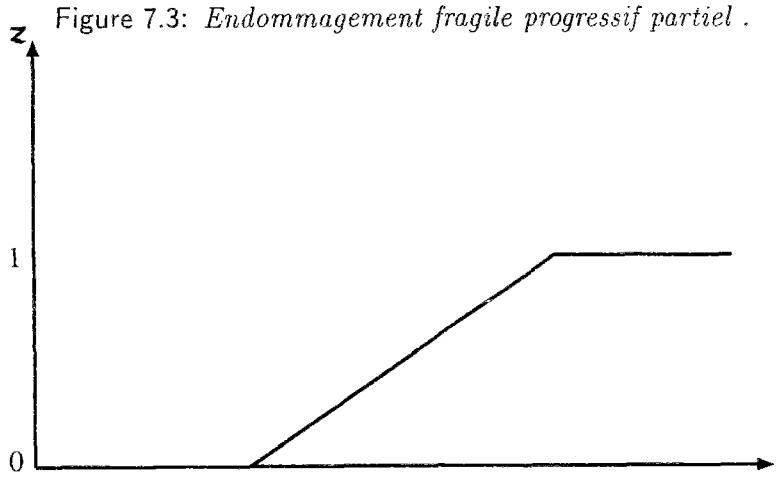


Figure 7.4: *Paramètre d'endommagement.*

pour simuler ce comportement incrémental. Comme exemple d'illustration, nous traitons le problème d'une fissure sollicitée en mode I. Nous nous plaçons en régime permanent et nous analysons la distribution d'endommagement au voisinage de la fissure lors de son mouvement. Une méthode itérative fondée sur une discrétisation implicite est réalisée. Les résultats qualitatifs obtenus sont satisfaisants.

Chapitre 8

Loi de comportement.

8.1 Introduction

Nous nous intéressons dans ce chapitre à l'écriture de la loi de comportement simulant l'endommagement fragile partiel. L'endommagement sera considéré comme un changement de phase irréversible. Nous nous rapprochons ainsi de la formulation mathématique introduite dans la première partie de ce mémoire. L'évolution locale du phénomène sera par conséquent décrite par la méthode des deux potentiels en présence de liaisons internes.

Notre modélisation se fonde sur un modèle rhéologique identique à celui utilisé précédemment avec toutefois une légère dissemblance. En effet, la signification physique des variables d'état n'est pas la même.

Notre étude se limite ici à une description purement mécanique ; le potentiel thermodynamique se réduit en fait à l'énergie mécanique réversible. Le potentiel de dissipation associé est une fonction convexe positivement homogène de degré 1 ou autrement dit, le système obéit au principe de dissipation maximale en ce qui concerne l'évolution de l'endommagement. Nous supposons toujours l'existence d'une zone de transition dans laquelle les deux matériaux peuvent coexister. Nous supposons également que seul le module de cisaillement est affecté par l'endommagement ; le module de compressibilité volumique reste le même pour les deux matériaux, le sain et l'endommagé.

Nous commençons par écrire la loi de comportement dans le cas unidimensionnel pour ensuite passer au cas tridimensionnel. Nous pourrons ainsi formuler le problème global d'évolution d'une structure endommageable au sens défini précédemment. Cependant la loi d'évolution étant une loi en vitesse, le problème s'avère de nature incrémental : il nous faut donc suivre de proche en proche l'évolution du système et c'est pourquoi on se propose d'écrire le problème en vitesse. Il se présente formellement comme un problème d'élasticité non linéaire avec comme inconnues les champs de vitesse.

8.2 Modèle rhéologique.

Considérons le modèle rhéologique unidimensionnel à montage en série (cf. figure 8.1). Il s'agit d'un modèle de ressorts caractérisé par les variables d'état :

- ϵ : déformation macroscopique,
- e : déformation locale du matériau sain,

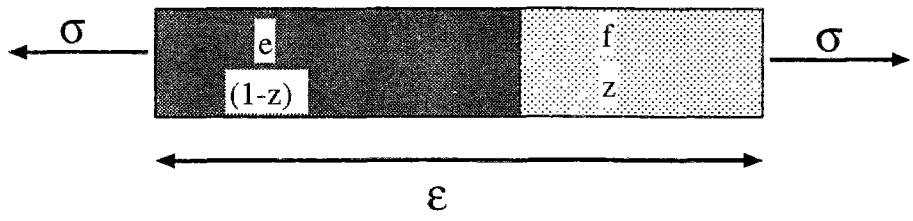


Figure 8.1: *modèle rhéologique.*

- f : déformation locale du matériau endommagé,
- z : proportion du matériau endommagé.

Ce sont des variables liées par des liaisons internes évidentes :

$$(1-z)e + zf - \epsilon = 0, \tag{8.1}$$
$$z \geq 0, \tag{8.2}$$
$$1-z \geq 0. \tag{8.3}$$

8.2.1 Lois d'état

L'énergie de déformation emmagasinée est constituée par l'énergie relative à chaque matériau et, éventuellement, par l'énergie d'interaction entre eux :

$$\mathcal{W}_{def} = (1-z)U(e) + zV(f) + I(z). \tag{8.4}$$

On admettra que :

$$U(e) = \frac{1}{2}K_1 e^2 \quad V(f) = \tfrac{1}{2}K_2 f^2 \quad r = \frac{K_1}{K_2} > 1. \tag{8.5}$$

K_α $(\alpha = 1, 2)$ étant les modules de rigidité respectifs des matériaux sain et endommagé.

Pour simplifier, on suppose que la température est uniformément constante (seul l'aspect mécanique sera discuté) et que l'énergie d'interaction est nulle.

Pour tenir compte des liaisons existant entre les variables d'état, on introduit le multiplicateur λ associé à la liaison bilatérale.

Le lagrangien associé s'écrit :

$$\mathcal{L}(\epsilon, e, f, z, \lambda) = (1-z)U(e) + zV(f) - \lambda((1-z)e + zf - \epsilon). \tag{8.6}$$

Notons que les deux liaisons unilatérales ne sont pas prises en considération. L'explication en a déjà été donnée dans le premier chapitre de la première partie. Nous la rappelons toutefois ci-dessous :

Si une liaison dépend uniquement du paramètre irréversible, il n'est pas nécessaire d'en tenir compte dans l'expression du lagrangien pour obtenir la force thermodynamique associée à la variable irréversible z.

Nous tiendrons ultérieurement compte de ces liaisons dans l'expression du pseudo-potentiel de dissipation.

Les équations d'état s'écrivent :

$$\mathcal{L}_{,\epsilon} = \lambda = \sigma, \tag{8.7}$$
$$\mathcal{L}_{,e} = (1-z)[U'(e) - \lambda] = 0, \tag{8.8}$$
$$\mathcal{L}_{,f} = z[V'(f) - \lambda] = 0, \tag{8.9}$$
$$-\mathcal{L}_{,z} = -V(f) + U(e) + \lambda(f-e) = \mathcal{A}, \tag{8.10}$$
$$\mathcal{L}_{,\lambda} = (1-z)e + zf - \epsilon = 0. \tag{8.11}$$

Il est clair que ces lois permettent de définir les forces themodynamiques $(\sigma, \mathcal{A})$ associées à leurs variables duales dans l'expression de l'énergie (ϵ, z). Mais en aucun cas, elles ne peuvent décrire l'évolution de l'endommagement. Il nous faudra si l'on souhaite y parvenir introduire des lois complémentaires via le pseudo-potentiel de dissipation. Ce sera l'objet du point suivant.

8.2.2 Pseudo-potentiel de dissipation

Pour que l'irréversibilité de l'endommagement soit prise en compte, on postule que la densité d'énergie dissipée par unité de masse suite à la perte locale de la rigidité est égale à $\mathcal{K}$, constante positive caractéristique du matériau.

Le pseudo-potentiel de dissipation pourra donc être défini comme suit :

$$\mathcal{D}(\dot{z}) = \begin{cases} \mathcal{K}\dot{z} & si \quad \dot{z} \geq 0 \\ +\infty & si \quad \dot{z} < 0 \\ 0 \leq z < 1 \end{cases} \tag{8.12}$$

Il résulte de cette expression que le pseudo-potentiel de dissipation est convexe (cf. figure 8.2), positivement homogène de degré 1 par rapport à $\dot{z}$, ce qui assure l'indépendance du phénomène vis-à-vis du temps. En outre, le caractère irréversible de l'endommagement ressort parfaitement. Nous imposons en effet au potentiel des valeurs non physiquement admissibles $(+\infty)$ pour $\dot{z} < 0$; z ne peut par conséquent décroître.

Il faut noter enfin que le potentiel en question n'est pas défini pour $z = 1$: l'endommagement ne peut plus évoluer du fait que l'on se trouve en présence d'un matériau élastique non endommageable de rigidité $K_2 \neq 0$ (la charge n'entraîne aucune dissipation), d'où le caractère partiel de l'endommagement.

La force thermodynamique associée à la variable z est donnée par la loi complémentaire :

$$\mathcal{A} = \mathcal{D}_{,\dot{z}} \tag{8.13}$$

8.2.3 Loi d'évolution

Dans le cas de phénomènes irréversibles indépendants du temps, le pseudo-potentiel de dissipation n'est pas différentiable en $\dot{z} = 0$ (parce qu'il est positivement homogène

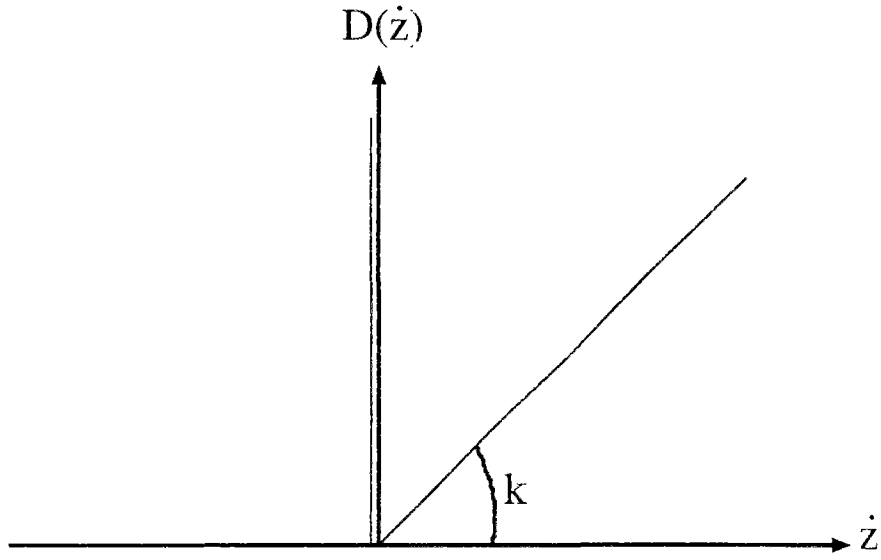


Figure 8.2: *Pseudo-potentiel de dissipation.*

de degré 1 par rapport à cet argument), l'équation (8.13) reste toutefois valable si l'on considère $\mathcal{D}_{,\dot{z}}$ comme un sous-gradient au sens de l'analyse convexe [12]. Un domaine des forces admissibles, $\mathcal{C}$, pourra de ce fait être associé au potentiel de dissipation $\mathcal{D}(z,\dot{z})$. $\mathcal{C}$ représentant l'ensemble des sous-gradients de $\mathcal{D}$ au point $\dot{z}=0$:

$$\mathcal{C} = \{\mathcal{A}/\mathcal{A} \leq \mathcal{K}\} \tag{8.14}$$

Une force associée à $\dot{z} \neq 0$ par l'équation (8.13) doit donc appartenir à $\mathcal{C}(z)$ de manière à ce que l'évolution soit donnée par la loi de normalité :

$$\dot{z} = N_{\mathcal{C}}(\mathcal{A}). \tag{8.15}$$

ou $N_{\mathcal{C}}(\mathcal{A})$ est un opérateur qui associe à tout point $\mathcal{A}$ du bord de $\mathcal{C}$ la direction d'une normale extérieure (cf. figure 8.3).

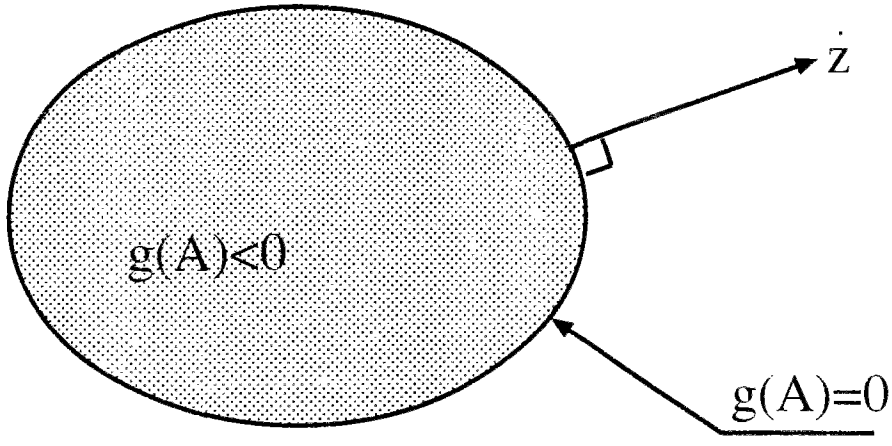


Figure 8.3: *mécanisme d'évolution du paramètre d'endommagement.*

$C(z)$ est souvent défini par une fonction-critère. Elle s'exprime ici par :

$$g = \mathcal{A} - \mathcal{K} \tag{8.16}$$

de sorte que la loi de normalité s'écrit :

$$\dot{z} = \Lambda \frac{\partial g}{\partial A} \tag{8.17}$$

$$\begin{cases} \Lambda = 0 \quad si \quad g < 0 \quad ou \quad g = 0 \quad et \quad \dot{g} < 0 \\ \Lambda > 0 \quad si \quad g = 0 \quad et \quad \dot{g} = 0 \end{cases} \tag{8.18}$$

8.3 Loi de comportement en vitesse.

La nature incrémentale du comportement étudié ressort naturellement de l'équation (8.17). Le problème ne peut donc être résolu que pas à pas, via une formulation en vitesse. C'est pourquoi une écriture de la loi de comportement sous forme incrémentale s'impose. Il s'agit d'exprimer les vitesses des contraintes $\dot{\sigma}$ et du paramètre d'endommagement $\dot{z}$ en fonction de $\dot{\epsilon}$. Pour y parvenir, on dérive les équations d'état [(8.7):(8.11)] par rapport au temps et on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{,\epsilon\epsilon}\dot{\epsilon} + \mathcal{L}_{,\epsilon e}\dot{e} + \mathcal{L}_{,\epsilon f}\dot{f} + \mathcal{L}_{,\epsilon z}\dot{z} + \mathcal{L}_{,\epsilon\lambda}\dot{\lambda} = \dot{\sigma}, \\ \mathcal{L}_{,e\epsilon}\dot{\epsilon} + \mathcal{L}_{,ee}\dot{e} + \mathcal{L}_{,ef}\dot{f} + \mathcal{L}_{,ez}\dot{z} + \mathcal{L}_{,e\lambda}\dot{\lambda} = 0, \\ \mathcal{L}_{,f\epsilon}\dot{\epsilon} + \mathcal{L}_{,fe}\dot{e} + \mathcal{L}_{,ff}\dot{f} + \mathcal{L}_{,fz}\dot{z} + \mathcal{L}_{,f\lambda}\dot{\lambda} = 0, \\ \mathcal{L}_{,z\epsilon}\dot{\epsilon} + \mathcal{L}_{,ze}\dot{e} + \mathcal{L}_{,zf}\dot{f} + \mathcal{L}_{,zz}\dot{z} + \mathcal{L}_{,z\lambda}\dot{\lambda} = -\dot{A}, \\ \mathcal{L}_{,\lambda\epsilon}\dot{\epsilon} + \mathcal{L}_{,\lambda e}\dot{e} + \mathcal{L}_{,\lambda f}\dot{f} + \mathcal{L}_{,\lambda z}\dot{z} + \mathcal{L}_{,\lambda\lambda}\dot{\lambda} = 0. \end{cases} \tag{8.19}$$

Ce système, résolu pour chaque valeur de z ($z = 0.0 < z < 1, z = 1$), nous donne le résultat prévu : on se place à l'instant t où l'on suppose connus les champs σ, ϵ et z et par l'entremise de la loi d'évolution (8.17) et des équations d'état, on se propose de déterminer les relations qui lient les vitesses de ces quantités, à savoir $\dot{\sigma}$, $\dot{\epsilon}$ et $\dot{z}$.

8.3.1 Matériau sain : $z = 0$

Soit un point matériel appartenant à la partie saine du matériau. Les équations d'état donnent dans ce cas :

$$\begin{cases} e = \epsilon \\ \sigma = K_1 \epsilon \\ \mathcal{A} = U(e) - V(f) - \sigma(e - f) \\ f \text{ est arbitraire} \end{cases} \tag{8.20}$$

De cet état, on suppose qu'un incrément de chargement entraîne une variation de l'état des contraintes, des déformations et du champ d'endommagement. Pour obtenir les relations qui lient ces différentes quantités, on utilise la loi de normalité :

• **$g < 0$ (1 sur la figure 8.4)**

Le critère n'est pas atteint en ce point ($\mathcal{A}$ est à l'intérieur du convexe des forces admissibles). Les déformations (ou les contraintes) ne sont pas assez importantes pour endommager localement le matériau. Cette condition ($g < 0$) peut être exprimée en fonction de la déformation macroscopique de la manière suivante :

$$g < 0 \implies \mathcal{A} < \mathcal{K} \tag{8.21}$$

avec

$$\mathcal{A} = U(\epsilon) - V(f) - \sigma(\epsilon - f) \tag{8.22}$$

On remarque que $\mathcal{A}$ dépend de la valeur arbitraire f. On a donc un ensemble de forces admissibles qui doivent vérifier le critère $\mathcal{A}_f < \mathcal{K}$. On entreprend une démarche semblable à celle utilisée pour discuter de la positivité des multiplicateurs de Lagrange (cf. le premier chapitre de la première partie). En effet, il suffit que la force maximale par rapport à f vérifie le critère pour que l'on ait :

$$\forall\ f \quad \mathcal{A}_f < \mathcal{K}.$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{,f} &= -K_2 f + K_1 \epsilon, \\ \text{d'où} & \\ \mathcal{A}_{,f} = 0 &\implies f = \frac{K_1}{K_2}\epsilon = r\epsilon \\ \text{et} & \\ \mathcal{A}_{,ff} &= -K_2 \leq 0. \end{aligned} \tag{8.23}$$

Par conséquent, le maximum de $\mathcal{A}$ est :

$$\mathcal{A}^* = -\frac{1}{2}K_1\epsilon^2 + \frac{1}{2}K_1 r\epsilon^2$$

La condition $\mathcal{A} < \mathcal{K}$ donne donc :

$$\epsilon^2 < \frac{2\mathcal{K}}{K_1(r-1)}$$

La loi de normalité (8.18) indique dans ce cas :

$$\dot{z} = 0.$$

et l'introduction de cette valeur dans le système (8.19), fournit la solution suivante :

$$\dot{c} = \dot{\epsilon} \qquad\qquad \dot{\sigma} = K_1\dot{\epsilon}.$$

• $g = 0$ et $\dot{g} < 0$ (**2 sur la figure 8.4**)

Le critère est atteint (A est sur le bord du convexe). Etant donné que nous nous trouvons en un état de décharge ($\dot{g} < 0$), la loi de normalité fournit :

$$\dot{z} = 0$$

Rien ne change en ce qui concerne le résultat de la résolution du système (8.19) si ce n'est que le critère s'exprime différemment :

$$g = 0 \Longrightarrow \epsilon^2 = \frac{2\mathcal{K}}{K_1(r-1)} \tag{8.24}$$

$$\dot{g} < 0 \implies \dot{A} < 0 \tag{8.25}$$

Cette condition peut être explicitée en fonction de la vitesse de la déformation macroscopique, de la manière suivante :

$$\dot{A} = K_1 e\dot{e} - K_2 f\dot{f} - \lambda(\dot{e} - \dot{f}) - \dot{\lambda}(e - f). \tag{8.26}$$

Il suffit de remplacer toutes les variables ainsi que leurs vitesses figurant dans l'expression de $\dot{A}$ par leurs valeurs en fonction de ϵ et $\dot{\epsilon}$. En effet, les équations (8.20),(8.23) impliquent que :

$$e = \epsilon, \tag{8.27}$$
$$f = r\epsilon. \tag{8.28}$$

D'autre part, la dérivée par rapport au temps de l'équation (8.8) donne :

$$(1 - z)[K_1\dot{e} - \dot{\lambda}] - \dot{z}[K_1 e - \lambda] = 0$$

or $z = 0$ et $\dot{z} = 0$ (loi de normalité), d'où :

$$K_1\dot{e} = \dot{\lambda} \tag{8.29}$$

En outre, en dérivant par rapport au temps l'équation (8.11) et en remplaçant z et $\dot{z}$ par leurs valeurs nous obtenons :

$$\dot{e} = \dot{\epsilon} \tag{8.30}$$

d'où :

$$\dot{A} = (K_1 - K_2)r\epsilon\dot{\epsilon}$$

par conséquent, puisque $K_1 > K_2$, on a :

$$\dot{A} < 0 \Longrightarrow \epsilon\dot{\epsilon} < 0$$

Ceci est en parfaite correspondance avec la figure (8.4), le point 2 montre en effet que la décharge correspond bien à $\epsilon\dot{\epsilon} < 0$.

• $g = 0$ et $\dot{g} = 0$ (**3 sur la figure 8.4**)

Le critère est maintenant atteint au point considéré ($\mathcal{A}$), cela est suivi d'une charge. L'endommagement évolue suivant la loi de normalité :

$$\dot{z} = \Lambda \frac{\partial g}{\partial A} \tag{8.31}$$

le multiplicateur Λ est déterminé par la condition $\dot{g} = 0$ qui se traduit dans notre cas par :

$$\dot{\mathcal{A}} = 0. \tag{8.32}$$

En reportant cette condition dans le système (8.19), on obtient par la résolution de celui-ci la loi de comportement incrémentale suivante :

$$\dot{\sigma} = 0 \qquad \dot{e} = \dot{f} = 0 \qquad \dot{z} = \frac{\dot{\epsilon}}{(r-1)\epsilon}$$

Les résultats obtenus imposent quelques remarques : les vitesses des déformations locales sont nulles ($\dot{e} = \dot{f} = 0$). Ceci est lié au fait que l'endommagement se produit à contrainte constante d'une manière comparable à la plasticité parfaite. L'évolution de l'endommagement est donc fonction de la vitesse de déformation macroscopique $\dot{\epsilon}$.

8.3.2 Matériau partiellement endommagé : $0 < z < 1$

On suppose maintenant qu'on se place dans un point partiellement endommagé ($z \neq 0$). La démarche reste la même et les équations d'état donnent :

$$\lambda = \sigma, \tag{8.33}$$

$$f = \frac{r\epsilon}{(1-z)+rz}, \tag{8.34}$$

$$e = \frac{\epsilon}{(1-z)+rz}, \tag{8.35}$$

$$\sigma = \frac{K_1\epsilon}{(1-z)+rz}, \tag{8.36}$$

$$\mathcal{A} = U(e) - V(f) + \lambda(f-e). \tag{8.37}$$

• $g < 0$ (**4 sur la figure 8.4**)

Comme pour le cas précédent ($z = 0$), nous commençons par calculer la force thermodynamique associée à z :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}K_2e^2 - \frac{1}{2}k_2f^2 + \lambda(f-e).$$

En remplaçant e , f , λ par leur valeurs données par (8.33) (8.34) (8.35) et (8.36) dans $\mathcal{A}$, on obtient :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\frac{K_1\epsilon^2(r-1)}{(rz+(1-z))^2}.$$

La condition exprimant que le critère n'est pas atteint s'écrit maintenant en fonction de la valeur actuelle de z par :

$$g < 0 \Longrightarrow \mathcal{A} < \mathcal{K} \Longrightarrow \epsilon^2 < \frac{2\mathcal{K}(rz + (1-z))^2}{K_1(r-1)} \text{ avec } r = \frac{K_1}{K_2}$$

et la loi de normalité donne :

$$\dot{z} = 0$$

Le système devient:

$$\left\{\begin{array}{lllll} \dot{\lambda} & & & & = \dot{\sigma}, \\ (1-z)K_1\dot{e} & + & (-K_1 e + \lambda)\dot{z} & - & (1-z)\dot{\lambda} & = 0, \\ zK_2\dot{f} & + & (K_2 f + \lambda)\dot{z} & - & z\dot{\lambda} & = 0, \\ (-K_1 e + \lambda)\dot{e} & + & (K_2 f - \lambda)\dot{f} & - & (f-e)\dot{\lambda} & = -\dot{\mathcal{A}}, \\ (1-z)\dot{e} & + & z\dot{f} & + & (f-e)\dot{z} & = \dot{\epsilon}. \end{array}\right. \tag{8.38}$$

En reportant la valeur de $\dot{z}$ dans ce système et en le résolvant, on obtient le résultat suivant :

$$\dot{\lambda} = \dot{\sigma}, \tag{8.39}$$

$$\dot{f} = \frac{r\dot{\epsilon}}{(1-z)+rz}, \tag{8.40}$$

$$\dot{e} = \frac{\dot{\epsilon}}{(1-z)+rz}, \tag{8.41}$$

$$\dot{\sigma} = \frac{K_1\dot{\epsilon}}{(1-z)+rz}. \tag{8.42}$$

La présence da la valeur actuelle de z dans ces formules nous éclaire sur le caractère partiel de l'endommagement. En effet, l'hypothèse selon laquelle nous avons admis que les deux matériaux (sain et endommagé) peuvent coexister dans la zone de transition est à l'origine de cette présence. En un point de cette zone, le matériau a un comportement élastique mais de rigidité $K_2 < K(z) = \dfrac{K_1K_2}{K_1z + (1-z)K_2} < K_1$.

• $\boldsymbol{g = 0}$ et $\boldsymbol{\dot{g} < 0}$ **(5 sur la figure 8.4)**

Les résultats sont exactement les mêmes que pour le cas précédent. Nous exprimons seulement les conditions traduisant le fait que le critère est atteint ($g = 0$), mais que cela est suivi d'une décharge ($\dot{g} < 0$) :

$$\begin{aligned} g = 0 &\Longrightarrow \mathcal{A} = \mathcal{K} \\ &\Longrightarrow \epsilon^2 = \frac{2\mathcal{K}((1-z)+rz)^2}{K_1(r-1)} \end{aligned} \tag{8.43}$$

et un simple calcul, semblable au cas $z = 0$ montre que

$$\dot{g} < 0 \implies \dot{\mathcal{A}} < 0, \tag{8.44}$$

$$\implies \epsilon\dot{\epsilon} < 0. \tag{8.45}$$

• $g = 0$ et $\dot{g} = 0$ (**6 sur la figure 8.4)**

Il s'agit d'un point de la structure partiellement endommagée, dans lequel le critère est atteint, en état de charge. L'endommagement évolue avec une vitesse $\dot{z}$ donnée par :

$$\dot{z} = \Lambda \frac{\partial g}{\partial A}. \tag{8.46}$$

Les conditions $g = 0$ et $\dot{g} = 0$ s'expriment respectivement par :

$$\epsilon^2 = \frac{2\mathcal{K}(r(1-z)+z)^2}{K_2(1-r)} \tag{8.47}$$

$$\dot{\mathcal{A}} = 0 \tag{8.48}$$

Par conséquent, la résolution du système (8.38) donne :

$$\dot{\sigma} = 0 \qquad \dot{f} = 0 \qquad \dot{e} = 0.$$

$$\dot{z} = \frac{\dot{\epsilon}((1-z)+rz)}{(r-1)\epsilon}$$

8.3.3 Matériau complètement endommagé : $z = 1$.

D'après l'expression du pseudo-potentiel de dissipation et l'hypothèse selon laquelle, pour $z = 1$, le matériau est élastique de module de rigidité K_2, l'endommagement ne peut plus se produire. Ainsi, la vitesse d'évolution de z est identiquement nulle :

$$\dot{z} = 0.$$

Les équations d'état donnent dans ce cas :

$$f = \epsilon \qquad \sigma = K_2\epsilon \qquad e \text{ est arbitraire}$$

et la résolution du système (8.38) permet d'obtenir la loi de comportement incrémentale suivante :

$$\dot{f} = \dot{\epsilon} \qquad \dot{\sigma} = K_2\dot{\epsilon}.$$

8.3.4 Résumé

Les calculs développés ci-dessus peuvent être résumés de la manière suivante :

Si $z = 0$

$$|\epsilon| < E(0) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{z} = 0 \\ \dot{\sigma} = K_1 \dot{\epsilon} \\ \dot{e} = \dot{\epsilon} \end{cases} \tag{8.49}$$

$$|\epsilon| = E(0) \text{ et } \epsilon\dot{\epsilon} < 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{z} = 0 \\ \dot{\sigma} = K_1 \dot{\epsilon} \\ \dot{e} = \dot{\epsilon} \end{cases} \tag{8.50}$$

$$|\epsilon| = E(0) \text{ et } \dot{A} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{z} = \dfrac{\dot{\epsilon}}{(r-1)\epsilon} \\ \dot{\sigma} = 0 \\ \dot{e} = \dot{f} = 0 \end{cases} \tag{8.51}$$

Si $0 < z < 1$

$$|\epsilon| < E(z) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{z} = 0 \\ \dot{f} = \dfrac{r\dot{\epsilon}}{(1-z)+rz} \\ \dot{e} = \dfrac{\dot{\epsilon}}{(1-z)+rz} \\ \dot{\sigma} = \dfrac{K_1\dot{\epsilon}}{(1-z)+rz} \end{cases} \tag{8.52}$$

$$|\epsilon| = E(z) \text{ et } \epsilon\dot{\epsilon} < 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{z} = 0 \\ \dot{f} = \dfrac{r\dot{\epsilon}}{(1-z)+rz} \\ \dot{e} = \dfrac{\dot{\epsilon}}{(1-z)+rz} \\ \dot{\sigma} = \dfrac{K_1\dot{\epsilon}}{(1-z)+rz} \end{cases} \tag{8.53}$$

$$|\epsilon| = E(z) \text{ et } \dot{A} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{z} = \dfrac{\dot{\epsilon}((1-z)+rz)}{(r-1)\epsilon} \\ \dot{\sigma} = 0 \\ \dot{e} = \dot{f} = 0 \end{cases} \tag{8.54}$$

Si $z = 1$

$$\begin{cases} \dot{z} = 0 \\ \dot{f} = \dot{\epsilon} \\ \dot{\sigma} = K_2 \dot{\epsilon} \end{cases} \tag{8.55}$$

$$E(z) = \frac{2K(rz + (1-z))^2}{K_1(r-1)}$$

Ce qui conduit à la courbe contrainte-déformation de la fig.(8.4) (seuls les points situés dans le quadrant ($\sigma \geq 0, \epsilon \geq 0$) sont représentés).

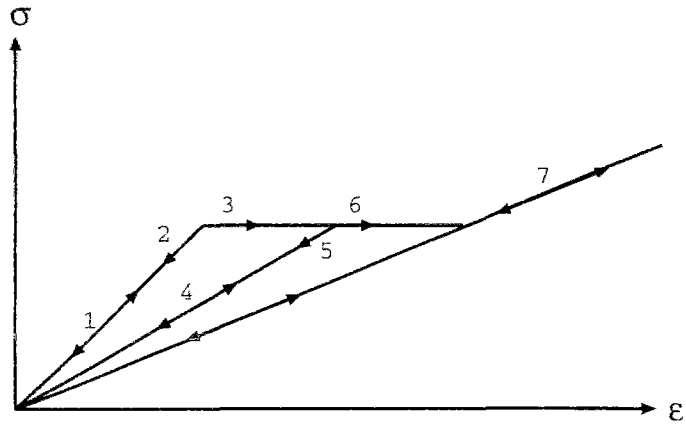


Figure 8.4: *Courbe contrainte déformation.*

Ces calculs seront ultérieurement généralisés dans le cas tridimensionnel. Nous formulons par conséquent le problème en vitesse nécessaire à l'analyse numérique des structures à endommagement fragile partiel.

8.4 Généralisation tridimentionnelle

Si on suppose, afin d'alléger le formalisme. la température uniforme, l'état local du matériau se trouve défini par la déformation macroscopique $\boldsymbol{\epsilon}$, les déformations locales : $\boldsymbol{e}$ pour le matériau sain. $\boldsymbol{f}$ pour le matériau endommagé ainsi que la variable interne z représentant la proportion volumique du matériau endommagé. On définit le potentiel thermodynamique associé à chaque phase par :

$$U(\boldsymbol{e}, \theta) = \mu_1 \boldsymbol{e} : \boldsymbol{e} + \frac{1}{2} K \theta^2 \tag{8.56}$$

$$V(\boldsymbol{f}, \theta) = \mu_2 \boldsymbol{f} : \boldsymbol{f} + \frac{1}{2} K \theta^2 \tag{8.57}$$

μ_α ($\alpha = 1, 2$) étant les modules de cisaillement respectifs de chaque phase et θ la trace du tenseur déformation.

Comme dans le cas unidimensionnel, les contraintes existant entre les variables d'état s'écrivent :

$$\begin{aligned} (1-z)\boldsymbol{e} + z\boldsymbol{f} - \boldsymbol{\epsilon}^d &= 0 && (8.58)\\ z &\geq 0 && (8.59)\\ 1-z &\geq 0 && (8.60) \end{aligned}$$

$\boldsymbol{\epsilon}^d$ désigne la partie déviatorique du tenseur déformation.

La densité d'énergie de la structure est par conséquent :

$$\mathcal{W}_{def} = (1-z)U + zV \tag{8.61}$$

Nous supposons que l'énergie d'interaction entre les deux phases est nulle

On introduit le tenseur des multiplicateurs $\boldsymbol{\lambda}$ associés aux liaisons bilatérales. Le lagrangien associé s'écrit :

$$\mathcal{L} = (1-z)U + zV - \boldsymbol{\lambda}((1-z)\boldsymbol{e} + z\boldsymbol{f} - \boldsymbol{\epsilon}^d). \tag{8.62}$$

Le tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ et la force thermodynamique $\mathcal{A}$ associée à la variable d'endommagement z dérivent des lois d'état :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{L}_{,\boldsymbol{\epsilon}} \qquad\qquad \mathcal{A} = -\mathcal{L}_{,z} \tag{8.63}$$

Puisque le paramètre d'endommagement est toujours un scalaire, nous gardons la même définition pour le pseudo-potentiel de dissipation, à savoir :

$$\mathcal{D}(\dot{z}) = \begin{cases} \mathcal{K}\dot{z} & si \quad \dot{z} \geq 0 \\ +\infty & si \quad \dot{z} < 0 \\ 0 \leq z < 1 \end{cases} \tag{8.64}$$

Le convexe des forces admissibles est par conséquent défini comme suit :

$$\mathcal{C} = \{\mathcal{A}/\mathcal{A} \leq \mathcal{K}\} \tag{8.65}$$

La loi d'évolution s'écrit :

$$\dot{z} = \Lambda \frac{\partial g}{\partial A} \tag{8.66}$$

$$\begin{cases} \Lambda = 0 \quad si \quad g < 0 \quad ou \quad (g = 0 \quad et \quad \dot{g} < 0) \\ \Lambda > 0 \quad si \quad g = 0 \quad et \quad \dot{g} = 0 \end{cases} \tag{8.67}$$

avec

$$g = \mathcal{A} - \mathcal{K} \tag{8.68}$$

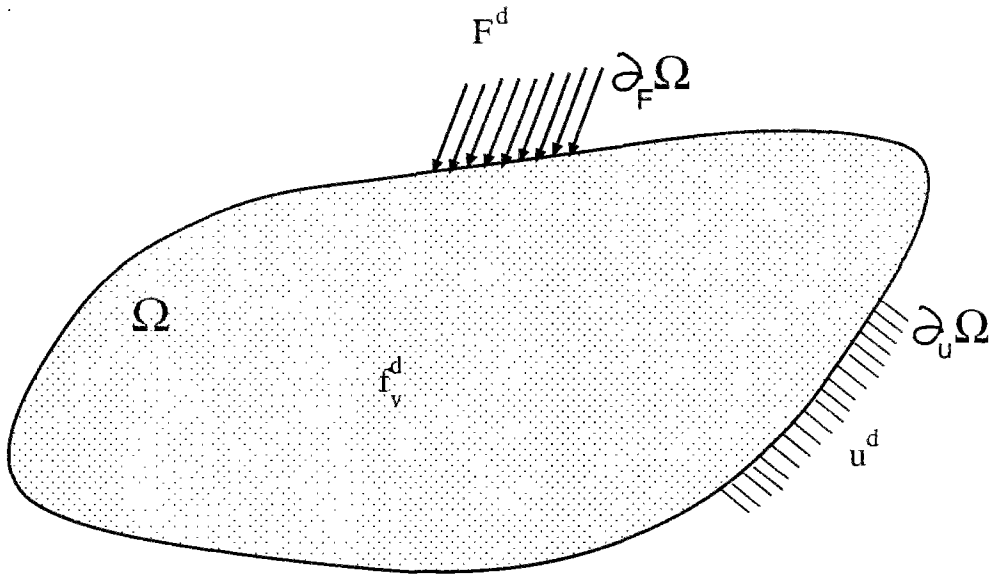


Figure 8.5: *Structure à endommagement fragile partiel .*

8.5 Formulation du problème d'endommagement

Nous considérons, sous l'hypothèse des petites perturbations, un solide occupant une région bornée de l'espace $\Omega \in \mathcal{R}^n$ $(n = 1, 2, 3)$. Ce solide est soumis à des forces de volumes $\boldsymbol{f}_v^d(\boldsymbol{x}, t)$, $t \in [0, T]$ $T > 0$, des forces surfaciques $\boldsymbol{F}^d(\boldsymbol{x}, t)$ sur une partie $\partial_F\Omega$ du bord $\partial\Omega$ (de normale extérieure $\boldsymbol{n}$) de Ω, et des déplacements donnés $\boldsymbol{u}^d(\boldsymbol{x}, t)$ sur la partie complémentaire $\partial_u\Omega$ de $\partial\Omega$ (cf. figure 8.5). Nous supposons que le solide est constitué d'un matériau endommageable suivant la loi établie dans le paragraphe précédent (8.62) à (8.67).

Afin de connaître l'évolution du comportement de la structure durant l'intervalle de temps $[0, T]$, nous sommes amenés à résoudre le problème aux limites quasi-statique et non linéaire $(\mathcal{P})$ suivant : il s'agit de trouver $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$, $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, t)$ et $z(\boldsymbol{x}, t)$ définies pour tout $\boldsymbol{x} \in \Omega$ et $0 \leq t \leq T$ et satisfaisant :
les équations d'équilibre

$$div\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f}_v^d(\boldsymbol{x}, t) = 0 \qquad \text{dans } \Omega X[0, T] \tag{8.69}$$

les conditions de compatibilité

$$\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}[\boldsymbol{\nabla u} + (\boldsymbol{\nabla u})^T] \qquad \text{dans } \Omega X[0, T] \tag{8.70}$$

les relations de comportement (8.62) à (8.67)

(8.71)

les conditions aux limites

$$\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n} = \boldsymbol{F}^d \qquad \text{sur } \partial_F\Omega X[0, T] \tag{8.72}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^d \qquad \text{sur } \partial_u\Omega X[0, T] \tag{8.73}$$

les conditions initiales

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}) \qquad \text{dans } \Omega \tag{8.74}$$

$$z(\boldsymbol{x},0) = z_0(\boldsymbol{x}) \qquad \text{dans } \Omega \tag{8.75}$$

Il est clair qu'une résolution directe du problème aux limites s'avère difficile. Une première simplification consiste à étudier pour **chaque** t **fixé**, le problème partiel suivant appelé *problème en vitesse.*

8.6 Problème en vitesse

Supposons que à un instant t donné au cours du processus de déformation du solide, soit connue la distribution des contraintes et de l'endommagement, notre attention se porte alors sur la réponse du solide pour une variation infinitésimale du chargement extérieur représentée par les vitesses des forces volumiques $\dot{\boldsymbol{f}}_v^d(\boldsymbol{x},t)$, des forces surfaciques $\dot{\boldsymbol{F}}^d(x,t)$ sur une partie $\partial_F\Omega$ du bord $\partial\Omega$ (de normale extérieure $\boldsymbol{n}$) de Ω et des déplacements donnés $\dot{\boldsymbol{u}}^d(\boldsymbol{x},t)$ sur la partie complémentaire $\partial_u\Omega$ de $\partial\Omega$.

8.6.1 Loi de comportement en vitesse.

Avant de formuler le problème à résoudre, nous nous proposons , comme dans le cas unidimensionnel, d'écrire la loi de comportement en vitesse : nous supposons connue la vitesse de déformation $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$; il s'agit alors de déterminer les vitesses $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$, $\dot{z}$, $\dot{\boldsymbol{e}}$ et $\dot{f}$ en fonction de $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$, $\boldsymbol{\epsilon}$ et z. La démarche est exactement la même que dans le cas unidimensionnel. Nous donnerons ici uniquement les résultats des calculs (le lecteur trouvera les détails en annexe C) :

Si $z = 0$

$$|\boldsymbol{\epsilon}^d| < E(0) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{z} = 0 \\ \dot{\boldsymbol{S}} = 2\mu_1 \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d \\ \dot{P} = K\dot{\theta} \\ \dot{\boldsymbol{e}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d \end{cases} \tag{8.76}$$

$$|\boldsymbol{\epsilon}^d| = E(0) \text{ et } \dot{\mathcal{A}} < 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{z} = 0 \\ \dot{\boldsymbol{S}} = 2\mu_1 \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d \\ \dot{P} = K\dot{\theta} \\ \dot{\boldsymbol{e}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d \end{cases} \tag{8.77}$$

$$|\epsilon^d| = E(0) \text{ et } \dot{\mathcal{A}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{z} = \dfrac{\dot{\epsilon}^d : \epsilon^d}{(\eta - 1)\epsilon^d : \epsilon^d} \\ \dot{\boldsymbol{S}} = 2\mu_1 \dfrac{\dot{\epsilon}^d(\epsilon^d : \epsilon^d) - (\dot{\epsilon}^d : \epsilon^d).\epsilon^d}{\epsilon^d : \epsilon^d} \\ \dot{P} = K\dot{\theta} \\ \dot{\boldsymbol{e}} = \dfrac{\dot{\epsilon}^d(\epsilon^d : \epsilon^d) - (\dot{\epsilon}^d : \epsilon^d).\epsilon^d}{\epsilon^d : \epsilon^d} \\ \dot{\boldsymbol{f}} = \eta \dfrac{\dot{\epsilon}^d(\epsilon^d : \epsilon^d) - (\dot{\epsilon}^d : \epsilon^d).\epsilon^d}{\epsilon^d : \epsilon^d} \end{cases} \tag{8.78}$$

Si $0 < z < 1$

$$|\epsilon^d| < E(z) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{z} = 0 \\ \dot{\boldsymbol{f}} = \dfrac{\eta\dot{\epsilon}^d}{(1-z) + \eta z} \\ \dot{\boldsymbol{e}} = \dfrac{\dot{\epsilon}^d}{(1-z) + \eta z} \\ \dot{\boldsymbol{S}} = 2\mu_1 \dfrac{\dot{\epsilon}^d}{(1-z) + \eta z} \\ \dot{P} = K\dot{\theta} \end{cases} \tag{8.79}$$

$$|\epsilon^d| = E(z) \text{ et } \dot{\mathcal{A}} < 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{z} = 0 \\ \dot{\boldsymbol{f}} = \dfrac{\eta\dot{\epsilon}^d}{(1-z) + \eta z} \\ \dot{\boldsymbol{e}} = \dfrac{\dot{\epsilon}^d}{(1-z) + \eta z} \\ \dot{\boldsymbol{S}} = 2\mu_1 \dfrac{\dot{\epsilon}^d}{(1-z) + \eta z} \\ \dot{P} = K\dot{\theta} \end{cases} \tag{8.80}$$

$$|\epsilon^d| = E(z) \text{ et } \dot{\mathcal{A}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{z} = \dfrac{\dot{\epsilon}^d : \epsilon^d((1-z) + \eta z)}{(\eta - 1)\epsilon^d : \epsilon^d} \\ \dot{\boldsymbol{S}} = 2\mu_1 \dfrac{\dot{\epsilon}^d(\epsilon^d : \epsilon^d) - (\dot{\epsilon}^d : \epsilon^d).\epsilon^d}{((1-z) + \eta z)\epsilon^d : \epsilon^d} \\ \dot{P} = K\dot{\theta} \\ \dot{\boldsymbol{e}} = \dfrac{\dot{\epsilon}^d(\epsilon^d : \epsilon^d) - (\dot{\epsilon}^d : \epsilon^d).\epsilon^d}{((1-z) + \eta z)\epsilon^d : \epsilon^d} \\ \dot{\boldsymbol{f}} = \eta \dfrac{\dot{\epsilon}^d(\epsilon^d : \epsilon^d) - (\dot{\epsilon}^d : \epsilon^d).\epsilon^d}{((1-z) + \eta z)\epsilon^d : \epsilon^d} \end{cases} \tag{8.81}$$

Si $z = 1$

$$\begin{cases} \dot{z} = 0 \\ \dot{f} = \dot{\epsilon}^d \\ \dot{S} = 2\mu_2 \dot{\epsilon}^d \\ \dot{P} = K\dot{\theta} \end{cases} \tag{8.82}$$

$$|\epsilon^d| = \sqrt{\epsilon^d : \epsilon^d}, E(z) = \frac{K(\eta z + (1-z))^2}{\mu_1(\eta - 1)}$$

8.6.2 Formulation locale du problème en vitesse.

La structure incrémentale des lois de comportement nous permet de discuter la réponse incrémentale de la structure associée à une vitesse des données à partir d'un état actuel quelconque. D'une façon plus précise, il s'agit de déterminer les champs de vitesses $\dot{\sigma}$, $\dot{z}$, $\dot{\epsilon}$ lorsque l'on impose une vitesse des données en force et en déplacement. Ces champs permettent de mieux comprendre l'évolution de la structure étudiée.

A chaque instant, l'état actuel, c'est-à-dire les contraintes, les déformations et le champ d'endommagement, étant supposé connu, on souhaite déterminer les champs de vitesses $\dot{\sigma}$, $\dot{z}$, $\dot{\epsilon}$ en fonction de l'état actuel et des vitesses de données :

$$\dot{\sigma} = \dot{\sigma}(\sigma, z, \epsilon, \dot{f}_v^d, \dot{F}^d, \dot{u}^d) \tag{8.83}$$

$$\dot{\epsilon} = \dot{\sigma}(\sigma, z, \epsilon, \dot{f}_v^d, \dot{F}^d, \dot{u}^d) \tag{8.84}$$

$$\dot{z} = \dot{z}(\sigma, z, \epsilon, \dot{f}_v^d, \dot{F}^d, \dot{u}^d) \tag{8.85}$$

Cette dépendance est évidemment assez complexe. Elle correspond à la résolution du problème aux dérivées partielles qui consiste à déterminer $\dot{\sigma}$, $\dot{z}$ et $\dot{u}$ vérifiant :
les équations d'équilibre

$$div\dot{\sigma} + \dot{f}_v^d(x, t) = 0 \qquad \text{dans } \Omega \tag{8.86}$$

les conditions de compatibilité

$$\dot{\epsilon}(\dot{u}) = \frac{1}{2}[\nabla\dot{u} + (\nabla\dot{u})^T] \qquad \text{dans } \Omega \tag{8.87}$$

les relations de comportement en vitesse (8.76) et (8.82)

(8.88)

les conditions aux limites

$$\dot{\sigma}.n = \dot{F}^d \qquad \text{sur } \partial_F\Omega \tag{8.89}$$

$$\dot{u} = \dot{u}^d \qquad \text{sur } \partial_u\Omega \tag{8.90}$$

Il s'agit d'un problème aux dérivées partielles non-linéaire. La non-linéarité provient de la loi de comportement en vitesse. En effet, la correspondance $\dot{\epsilon}$, $\dot{\sigma}$ n'est pas linéaire.

Ces équations sont celles de l'élasticité non-linéaire, avec comme variables les champs de vitesse.

8.7 Analyse de stabilité.

Nous appliquons, dans ce paragraphe, les résultats généraux de l'analyse de stabilité et de bifurcation des systèmes dissipatifs (cf. Nguyen Q.S [15]) à l'étude de stabilité du matériau à endommagement fragile partiel.

8.7.1 Rappel des résultats.

Soit un système défini par les paramètres $q(u,\alpha)$ où u représente les paramètres réversibles, α les paramètres irréversibles, et $\lambda(t)$ un paramètre de contrôle (en force ou en déplacement). On désigne par $\mathcal{W}(q,\lambda)$ l'énergie libre du système et par $\mathcal{D}(\dot{\alpha},q,\lambda)$ son pseudo-potentiel de dissipation tel que (voir chapitre 1) :

$$\mathcal{A} = \mathcal{D}_{,\dot{\alpha}}(\alpha,\dot{\alpha}). \tag{8.91}$$

Dans le cas où le processus est indépendant du temps physique, $\mathcal{D}$ est positivement homogène de degré un :

$$\forall m \geq 0 \quad \mathcal{D}(m\dot{\alpha},q,\lambda) = m\mathcal{D}(\dot{\alpha},q,\lambda) \tag{8.92}$$

L'évolution quasi-statique du système est obtenue par la résolution des équations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{,u} &= 0, && (8.93)\\ \mathcal{A} &= -\mathcal{W}_{,\alpha}, && (8.94)\\ \dot{\alpha} &= N_C(\mathcal{A}), && (8.95)\\ \dot{q}(0) &= q^0. && (8.96) \end{aligned}$$

Etant donné la nature incrémentale de la loi de normalité, nous sommes amenés à étudier le problème en vitesse. Ce dernier peut être formulé sous la forme d'une inéquation variationnelle. En effet, on montre [15] que pour un incrément de chargement $\dot{\lambda}$ donné, la vitesse $(\dot{u},\dot{\alpha})$ est solution de l'inéquation suivante :

$$\begin{aligned} &(\mathcal{W}_{,uu}.\dot{u} + \mathcal{W}_{,u\alpha}.\dot{\alpha} + \mathcal{W}_{,u\lambda}.\dot{\lambda}).\delta u + (\mathcal{W}_{,u\alpha}.\dot{u} + \mathcal{W}_{,\alpha\alpha}.\dot{\alpha} + \mathcal{W}_{,\alpha\lambda}.\dot{\lambda}).(\delta\alpha - \dot{\alpha})\\ &+\dot{q}(\mathcal{D}_{,q}(\delta\alpha,q,\lambda) - \mathcal{D}_{,q}(\dot{\alpha},q,\lambda)) + \dot{\lambda}(\mathcal{D}_{,\lambda}(\delta\alpha,\delta q,\lambda) - \mathcal{D}_{,\lambda}(\dot{\alpha},\delta q,\lambda)) \geq 0\\ &\qquad\qquad \forall\ \delta q \in U^{ad}. \end{aligned} \tag{8.97}$$

U^{ad} désigne l'ensemble des vitesses admissibles avec les données en déplacement.

Il est établi dans [15] qu'une condition suffisante de stabilité d'un état d'équilibre du système est fournie par la condition d'existence d'une solution $(\dot{u},\dot{\alpha})$ associée à $\dot{\lambda}$. Ceci s'exprime par l'inéquation variationnelle suivante :

$$\delta q.\mathcal{W}_{,qq}.\delta q + \delta q\mathcal{D}_{,q}(\delta\alpha,q,\lambda) > 0 \ \forall\ \delta q \in U^{ad}. \tag{8.98}$$

Pour un système avec liaisons internes, cette condition peut s'écrire en fonction du lagrangien associé :

$$\delta q.\mathcal{L}_{,qq}.\delta q + \delta q\mathcal{D}_{,q}(\delta\alpha,q,\lambda) > 0 \ \forall\ \delta q \in V_0. \tag{8.99}$$

$$V_0 = \left\{\delta q \in U^{ad} \text{ et } \delta q \text{ compatible avec les liaisons internes.}\right\}$$

8.7.2 Application au modèle d'endommagement.

Nous rappelons que le lagrangien du système ainsi que son pseudo-potentiel de dissipation sont donnés par :

$$\mathcal{L}(\epsilon, e, f, z, \lambda) = (1-z)U(e) + zV(f) + I(z) - \lambda((1-z)e + zf - \epsilon). \tag{8.100}$$

avec

$$U(e) = \frac{1}{2}K_1 e^2 \quad V(f) = \tfrac{1}{2}K_2 f^2 \quad r = \frac{K_1}{K_2} > 1. \tag{8.101}$$

et

$$\mathcal{D}(\dot{z}) = \begin{cases} \mathcal{K}\dot{z} & si \quad \dot{z} \geq 0 \\ +\infty & si \quad \dot{z} < 0 \\ 0 \leq z < 1 \end{cases} \tag{8.102}$$

Nous adoptons la notation suivante :

$$q = (\epsilon, e, f, z), \delta q = (\delta\epsilon, \delta e, \delta f, \delta z)$$

Dans la zone de transition, $0 < z < 1$, le critère de stabilité s'écrit :

$$(1-z)K_1\delta e^2 + zK_2\delta f^2 + I''(z)\delta z^2 > 0 \ \forall \ \delta q \ \in \ V_0$$

$$V_0 = \{\delta q / \delta z(f-e) + (1-z)\delta e + z\delta f - \delta\epsilon = 0 \text{ et } \delta z \geq 0.\}$$

Nous sommes amenés à étudier la positivité de la seconde variation du lagrangien. Ceci est dû au fait que le potentiel de dissipation ne dépende pas de l'état actuel, le second terme de l'inéquation (8.99) étant nul. La stabilité du matériau, à contrainte contrôlée, n'est donc assurée que s'il existe une énergie d'interaction convexe par rapport à z. Ceci se manifeste sur la courbe contrainte déformation par une pente positive dans la zone de transition. Mais cette situation peut également être obtenue à $I(z) = 0$. Il suffit de considérer un potentiel de dissipation dépendant de l'état actuel via la valeur de z. Nous pouvons par exemple prendre un seuil d'endommagement $\mathcal{K}$ dépendant d'une manière croissante de z. Ceci est comparable à l'écrouissage positif en plasticité. Le critère de stabilité devient :

$$(1-z)K_1\delta e^2 + zK_2\delta f^2 + \mathcal{K}_{,z}\,\delta z^2 > 0 \ \forall \ \delta q \ \in \ V_0$$

La stricte positivité est également assurée dans ce cas.

8.8 Conclusion

Après avoir généralisé la loi de comportement en vitesse dans le cas tridimensionnel, nous avons formulé le problème d'endommagement fragile partiel. Il s'agit d'un problème

incrémental. Il est donc nécessaire de tenir compte de l'histoire de l'évolution dans sa totalité avant l'instant t pour trouver la solution à cet instant. Le problème est déterminé pas à pas via le problème en vitesse se présentant formellement comme un problème d'élasticité non-linéaire, si ce n'est qu'ici les inconnues sont des champs de vitesse.

Dans le cas général de chargement et de géométrie, la résolution analytique du problème en vitesse est elle-même assez difficile, le recours au calcul numérique s'avère par conséquent inévitable.

Nous proposons, dans ce qui suit , un programme d'éléments finis simulant ce comportement.

Chapitre 9

Simulation numérique

9.1 Introduction

Nous avons vu que la résolution directe du problème d'endommagement n'est pas simple. Cette difficulté est due à la non-linéarité de la loi de comportement. Une simplification possible consiste à étudier le problème en vitesse, puis par une intégration par rapport au temps, à remonter à la solution globale.

Nous présentons dans ce chapitre un algorithme itératif permettant d'analyser numériquement le problème en question. L'algorithme est comparable à celui de l'élastoplasticité dont la convergence théorique a été démontrée par Nguyen Quoc Son [14]. La méthode consiste à résoudre, à chaque itération, un problème élastique avec des caractéristiques mécaniques dépendant des valeurs du champ d'endommagement de l'itération précédente

Comme support de présentation, nous avons choisi d'analyser la distribution des contraintes et de l'endommagement lors du mouvement permanent d'une fissure en mode I dans un milieu partiellement endommageable.

Une fissure dans un solide est en général idéalisée par une surface de discontinuité dont le front est une ligne telle que les déformations tendent à l'infini au voisinage de cette ligne. Dans la réalité, le voisinage de la fissure est endommagé et microfissuré sur une certaine épaisseur. Selon notre modélisation, le solide comporte trois zones. Une première zone, le long des lèvres de la fissure, où le matériau est complètement endommagé ($z = 1$). une deuxième zone partiellement endommagée ($0 < z < 1$) et enfin une troisième zone saine ($z = 0$).

Nous donnons une formulation du problème de mouvement permanent de fissure. Ce dernier revient à résoudre un problème de type élastique avec une loi de comportement non locale. Une méthode itérative basée sur une discrétisation implicite est réalisée. Cette méthode trouve son origine dans un algorithme élastoplastique stationnaire que l'on doit à Nguyen Q.S [16] et formulé initialement pour un matériau élastique parfaitement plastique. Dang Van et Maitournam [7] l'ont étendu au cas du matériau standard écrouissable afin de traiter le problème du rail.

Les résultats numériques obtenus témoignent du fait que le modèle d'endommagement peut se prêter à une simulation numérique.

9.2 Position du problème

Nous considérons le mouvement permanent d'une fissure sollicitée suivant le mode I en déformation plane (cf. figure 9.1).

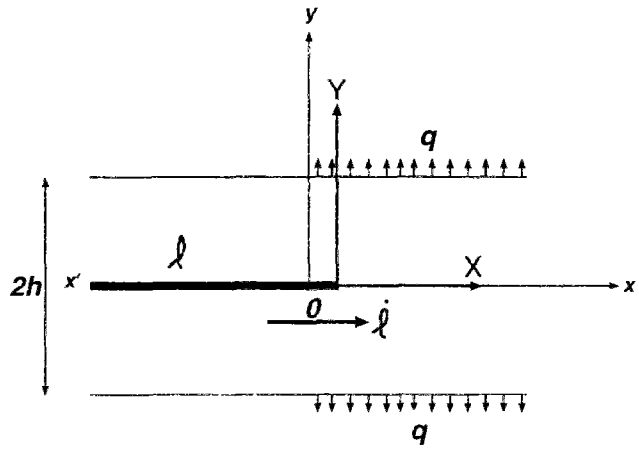


Figure 9.1: *Plaque fissurée sollicitée en mode I.*

Il s'agit d'une plaque de hauteur $2h$ et de longueur infinie suivant $x'Ox$, soumise à des efforts de traction q sur les bords inférieur et supérieur (cf. figure 9.1) . La fissure est centrale et correspond à la demi-droite $x'O$. Les contraintes à l'infini suivant $x'x$ sont nulles. Le matériau est supposé initialement sain, sans endommagement.

Nous cherchons à déterminer les champs de contraintes, de déformations et d'endommagement dans le voisinage de la fissure, à l'état permanent en postulant l'existence de celui-ci.

9.2.1 Hypothèse du régime permanent

Nous faisons l'hypothèse du régime permanent par rapport au repère lié à la pointe de la fissure. Cela signifie que, pour un observateur lié à ce repère, les grandeurs physiques sont indépendantes du temps. Il s'en suit que la dérivée particulaire d'une quantité A liée à la matière devient :

$$\dot{A} = -\dot{l}A_{,x} \tag{9.1}$$

où $\dot{l}$ est la vitesse d'avancement de la fissure et x la coordonnée selon $\boldsymbol{e}_1$.

Cette dernière relation est une conséquence de l'hypothèse de petites perturbations. Nous allons l'établir dans ce qui suit.

$\boldsymbol{R}$ est le référentiel lié à la pointe de la fissure dans lequel le problème est stationnaire, $\boldsymbol{R}^*$, le référentiel se déplaçant à la vitesse $-\dot{l}$ par rapport à $\boldsymbol{R}$. Les repères choisis dans les deux référentiels coïncident à l'instant initial.

On se place en variables eulériennes. Un point matériel M de la configuration de référence (à l'instant initial) va occuper la m dans la configuration actuelle (à l'instant t). Soit M^* le point géométrique de $\boldsymbol{R}^*$ coïncidant avec la de M de $\boldsymbol{R}$ (cf. figure 9.2).

On a :

$$\vec{Om} = \vec{OM} + \vec{MM^*} + \vec{M^*m} \tag{9.2}$$

$$x^i = X^i + l(t) + r^i(X^i, t) \tag{9.3}$$

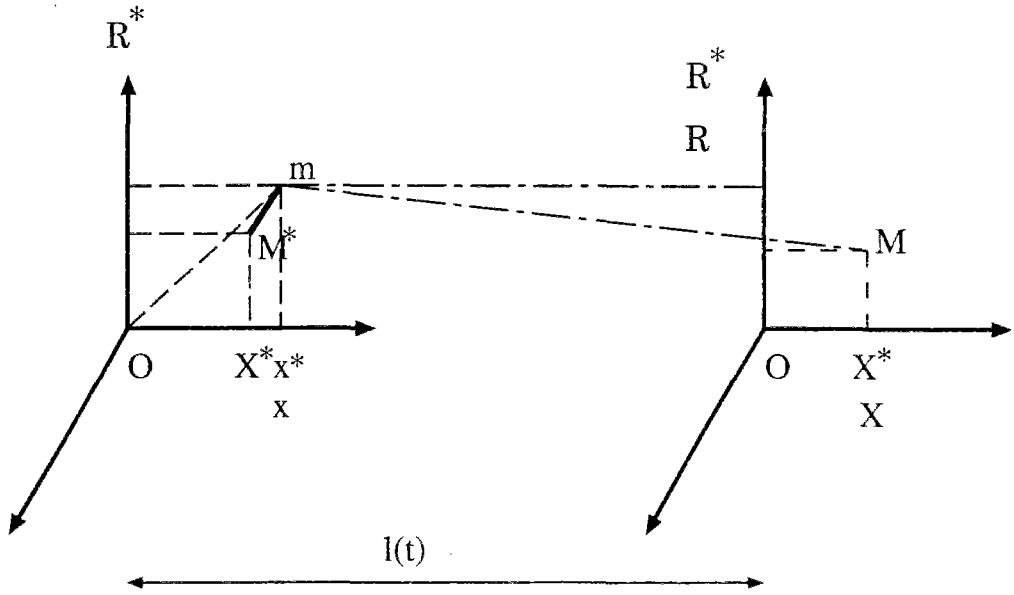


Figure 9.2: *a) Etat de référence initial* *b) Etat actuel.*

$$v_r^i = \frac{\partial r^i}{\partial t} \tag{9.4}$$

La vitesse absolue du point m est donnée par :

$$v^i = v_r^i - \dot{l}(t) \tag{9.5}$$

La dérivée particulaire d'une grandeur A liée à la matière s'écrit :

$$\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial t} + v^i \frac{\partial A}{\partial x^i} \tag{9.6}$$

$$= \frac{\partial A}{\partial t} + (v_r^i - \dot{l}(t)) \frac{\partial A}{\partial x^i} \tag{9.7}$$

L'hypothèse du régime permanent permet d'annuler toutes les dérivées par rapport au temps et l'hypothèse des petites perturbations permet de négliger le produit $(v_r^i \frac{\partial A}{\partial x^i})$ par rapport au terme $(-\dot{l}(t)\frac{\partial A}{\partial x^i})$. On retrouve alors la relation (9.1).

Dans le repère local $X = x - l, Y = y$, il s'agit de déterminer les champs $\boldsymbol{\sigma}(X,Y)$, $\epsilon(X,Y)$, $z(X,Y)$ vérifiant les conditions suivantes :
• conditions statiques :

$$div\boldsymbol{\sigma} = 0 \tag{9.8}$$

• conditions de liaison :

$$u_2(X,0) = 0 \quad \text{pour} \quad X \geq 0 \tag{9.9}$$

• conditions aux limites :
- dues à la fissure :

$$\sigma_{22}(X,0) = 0 \quad \sigma_{12}(X,0) = 0 \quad \forall X \leq 0 \tag{9.10}$$

- dues aux chargements :

$$\sigma_{22}(X,h) = q \quad \sigma_{12}(X,h) = 0 \quad \forall X \geq 0 \tag{9.11}$$

- à l'infini :

$$X \longrightarrow +\infty \quad \sigma_{12} = \sigma_{11} = 0 \quad \sigma_{22} = q \tag{9.12}$$

$$X \longrightarrow -\infty \quad \sigma_{12} = \sigma_{11} = 0 \quad \sigma_{22} = 0 \tag{9.13}$$

• La loi de comportement : l'hypothèse du régime permanent affecte la loi de comportement. Nous avons établi dans le chapitre précédent que cette dernière s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu(z).\boldsymbol{\epsilon}^d + K\theta \tag{9.14}$$

Dans la zone endommagée correspondant à $g(\mathcal{A}) = 0$, la règle de normalité est vérifiée :

$$\dot{z} = \Lambda \frac{\partial g}{\partial \mathcal{A}}. \tag{9.15}$$

Le multiplicateur Λ est donnée en fonction de $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ par :

$$\Lambda = \frac{((1-z)+\eta z)}{(\eta - 1)} \frac{< \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d >}{\boldsymbol{\epsilon}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d} \tag{9.16}$$

$< \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d >$ désignant la partie positive de $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d$.

Or, en régime permanent, $\dot{z} = -\dot{l} z_{,x}$, $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d = -\dot{l} \boldsymbol{\epsilon}^d{}_{,x}$; nous avons donc quelle que soit la vitesse d'avancement $\dot{l}$, la relation :

$$\forall \qquad (X,Y) \qquad z_{,x} = \frac{((1-z)+\eta z)}{(\eta - 1)} \frac{< \boldsymbol{\epsilon}^d{}_{,x} : \boldsymbol{\epsilon}^d >}{\boldsymbol{\epsilon}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d} \tag{9.17}$$

Nous supposons d'autre part que le matériau est initialement à l'état naturel sans endommagement, ce qui revient à :

$$\lim_{X \to +\infty} z(X,Y) = 0 \qquad \forall \qquad Y \tag{9.18}$$

Les équations (9.17) (9.18) permettent de calculer $z(X,Y)$ à partir de la répartition de la déformation $\boldsymbol{\epsilon}(X,Y)$. Nous obtenons en effet :

$$\frac{(\eta-1)z_{,x}}{(\eta-1)z+1} = \frac{< \boldsymbol{\epsilon}^d{}_{,x} : \boldsymbol{\epsilon}^d >}{\boldsymbol{\epsilon}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d} \tag{9.19}$$

$$\Longrightarrow \quad \int_X^\infty \frac{(\eta-1)z_{,x}}{(\eta-1)z+1}(\xi,Y)d\xi = \int_X^\infty \frac{< \boldsymbol{\epsilon}^d{}_{,x} : \boldsymbol{\epsilon}^d >}{\boldsymbol{\epsilon}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d}(\xi,Y)d\xi \tag{9.20}$$

$$\Longrightarrow \quad [\ln((\eta-1)z+1)]_X^{+\infty} = \int_X^\infty \frac{< \boldsymbol{\epsilon}^d{}_{,x} : \boldsymbol{\epsilon}^d >}{\boldsymbol{\epsilon}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d}(\xi,Y)d\xi \tag{9.21}$$

d'où

$$z(X,Y) = \frac{e^{\int_X^\infty \frac{< \boldsymbol{\epsilon}^d{}_{,x} : \boldsymbol{\epsilon}^d >}{\boldsymbol{\epsilon}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d}(\xi,Y)d\xi} - 1}{(\eta-1)} \tag{9.22}$$

Remarque

Dans le cas d'une charge, la quantité $\dfrac{<\boldsymbol{\epsilon}^d{}_{,x} : \boldsymbol{\epsilon}^d>}{\boldsymbol{\epsilon}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d}$ *est intégrable et on obtient :*

$$\int_X^{\infty} \frac{(\eta-1)z_{,x}}{(\eta-1)z+1}(\xi,Y)d\xi = \int_X^{\infty} \frac{\boldsymbol{\epsilon}^d{}_{,x} : \boldsymbol{\epsilon}^d}{\boldsymbol{\epsilon}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d}(\xi,Y)d\xi \tag{9.23}$$

$$\Longrightarrow \quad [\ln((\eta-1)z+1)]_X^{+\infty} = [\ln\sqrt{\boldsymbol{\epsilon}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d}]_X^{+\infty} \tag{9.24}$$

$$d'où \quad z(X,Y) = \frac{\sqrt{\boldsymbol{\epsilon}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d(X)} - \sqrt{\boldsymbol{\epsilon}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d(+\infty)}}{(\eta-1)\sqrt{\boldsymbol{\epsilon}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d(+\infty)}}. \tag{9.25}$$

Cette formule ressemble beaucoup à celle obtenue pour le cas réversible (cf. chapitre2 de la première partie) avec $E = \sqrt{\boldsymbol{\epsilon}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d(+\infty)}$, $F = \eta\sqrt{\boldsymbol{\epsilon}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d(+\infty)}$. *Ceci est logique du fait que, dans le cas de charge, le calcul ne fait pas la différence entre un phénomène réversible et irréversible.*

La formule (9.22) montre que l'état d'endommagement en un point (X,Y) dépend de l'état de déformation en amont aux points $(\zeta, Y), X \leq \zeta \leq +\infty$. Ce qui est physiquement naturel. Le problème à résoudre est, par conséquent, élastique avec une loi de comportement non locale.

9.3 Algorithme de résolution

On effectue le calcul numérique sur un domaine fini discrétisé. Les points de discrétisation où sont définis les déplacements sont les intersections de deux familles de lignes respectivement parallèles et orthogonales à Ox. Les points de gauss où sont déterminés les contraintes, les déformations et l'endommagement sont alignés dans la direction d'avancement de la fissure. Les points de même ordonnée Y sont numérotés dans la direction opposée au mouvement (cf. figure 9.3). Pour une côte Y donnée, z_n est la valeur de l'endommagement au point de gauss numéroté n. Connaissant la valeur de z à l'infini, la relation (9.22) permet de définir partout l'endommagement $z(\epsilon)$ et la contrainte associée à un champ de déformation ϵ.

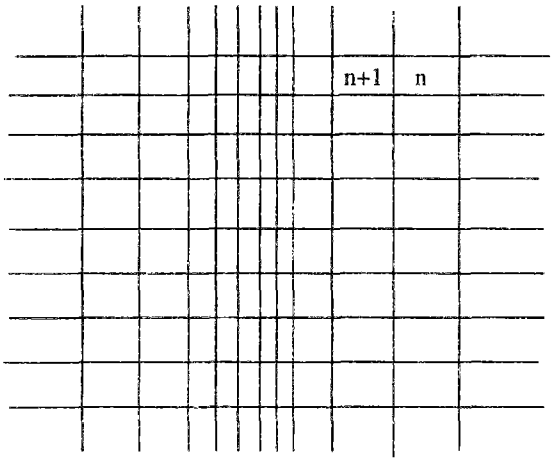


Figure 9.3: *Discrétisation spatiale par éléments finis.*

Le problème sera résolu par itération successive selon le schéma suivant :

- on commence par résoudre un problème élastique en supposant le matériau initialement sain (μ_1, K);
- on détermine à l'itération i les distributions d'endommagement $z(\epsilon^i)$ et de force thermodynamique $\mathcal{A}(\epsilon^i)$ associées à la déformation totale ϵ^i.
- ϵ^{i+1} est alors la solution du problème élastique avec des caractéristiques mécaniques $(\mu(z(\epsilon^i)), K)$ dépendant de $z(\epsilon^i)$;
- on arrête le processus lorsque la force thermodynamique $\mathcal{A}(\epsilon^{i+1})$ vérifie le critère avec l'erreur voulue.

Nous avons vu dans les paragraphes précédents que l'hypothèse du régime permanent concerne uniquement la loi de comportement. Nous proposons sa discrétisation de la manière implicite suivante :

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} &= 2\mu(z_{n+1})\epsilon^d_{n+1} + K\theta_{n+1} \\ z_{n+1} - z_n &= \Lambda \frac{\partial g}{\partial \mathcal{A}_{n+1}} \\ \Lambda \geq 0 \quad g(\mathcal{A}_{n+1}) \leq 0 \quad & \Lambda g(\mathcal{A}_{n+1}) = 0 \end{aligned} \tag{9.26}$$

Concevoir une pareille discrétisation revient à écrire la loi de normalité au point d'arrivée $n+1$; elle assure le respect du critère d'endommagement dans toute la structure.

L'algorithme de calcul correspond aux étapes suivantes :

i) première étape

Nous commençons par déterminer la solution purement élastique en supposant que la structure est initialement saine, donc élastique, avec des constantes élastiques μ_1, K : $\boldsymbol{\epsilon}^{el}$, $\boldsymbol{\sigma}^{el}$ et $\mathcal{A}^{el}$. On note $\boldsymbol{\epsilon}^i$, $\boldsymbol{\sigma}^i$, $\mathcal{A}^i$, z^i les solutions à l'itération i.

ii) deuxième étape

On initialise : $\boldsymbol{\sigma}^1 = \boldsymbol{\sigma}^{el}$, $\boldsymbol{\epsilon}^1 = \boldsymbol{\epsilon}^{el}$, $z^1 = z(+\infty) = 0$, $\mathcal{A}^1 = \mathcal{A}^{el}$.

iii) troisième étape

Nous définissons :

$$\mathcal{A}^* = \frac{\mu_1(\eta-1)\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{d(i)} : \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{d(i)}}{((\eta-1)z_n^{(i+1)}+1)^2}$$

Si $g(\mathcal{A}^*) < 0$, alors l'élément $n+1$ ne s'endommage pas et on a :

$$z_{n+1}^{(i+1)} = z_n^{(i+1)}$$

Si $g(\mathcal{A}^*) \geq 0$, alors :

$$z_{n+1}^{(i+1)} = z_n^{(i+1)} + \Lambda \frac{\partial g}{\partial \mathcal{A}_{n+1}} \tag{9.27}$$

$$g(\mathcal{A}_{n+1}^{i+1}) = 0 \tag{9.28}$$

iii) quatrième étape

Les équations (9.27) (9.28) permettent de calculer z_{i+1} en tout point. Le problème élastique avec $(\mu(z^{i+1}), K)$ est résolu. Un champ de déformation cinématiquement admissible $\boldsymbol{\epsilon}^{i+1}$, un champ de contrainte statiquement admissible $\boldsymbol{\sigma}^{i+1}$ et un champ de force thermodynamique $\mathcal{A}^{i+1}$ sont déterminés. Si $\mathcal{A}^{i+1}$ vérifie le critère, alors la solution est bonne ; sinon on revient à la troisième étape.

Remarque :*Nguyen et Rahimian [16] ont étudié le même problème pour un matériau parfaitement plastique. Ils ont présenté un algorithme de même architecture, fondé sur une discrétisation implicite. Nguyen [14] a étudié la convergence théorique du schéma implicite dans le cas de l'élastoplasticité et a prouvé sa convergence dans le cas de l'écrouissage positif. Dang Van et Maitournam [7] et Maitournam [9] ont présenté une application pour l'analyse des structures soumises à des roulements répétés.*

9.4 Résultats numériques

Le maillage a été réalisé à l'aide d'un mailleur automatique de MODULEF. Nous nous intéressons au domaine proche de l'extrémité de la fissure. Le maillage dans cette zone est plus dense que dans le reste de la plaque (cf. figure 9.4).

La solution est obtenue par approximations successives en recalculant à chaque itération la matrice de rigidité qui dépend du paramètre d'endommagement z. La convergence est obtenue au bout d'une dizaine d'itérations.

La figure (9.5) montre les isovaleurs du paramètre d'endommagement z. Nous remarquons que l'endommagement, lors du mouvement de la fissure, est bien simulé par la zone rouge ($z = 1$). L'hypothèse du régime permanent explique que l'endommagement apparaisse tout au long de la fissure : la fissure se "rappelle", lors de son mouvement, de son état antérieur. La zone de transition correspondant aux valeurs $0 < z < 1$ se situe le long de l'interface entre les deux matériaux (sain et endommagé) simulant ainsi le caractère progressif du phénomène.

Sur les figures (9.6) et (9.7) sont représentées les isovaleurs respectivement des contraintes et des déformations équivalentes, maximales à la pointe de la fissure (ce qui est physiquement naturel). La forme des isovaleurs se rapproche de celle de la zone plastique en déformation plane pour un matériau élastoplastique.

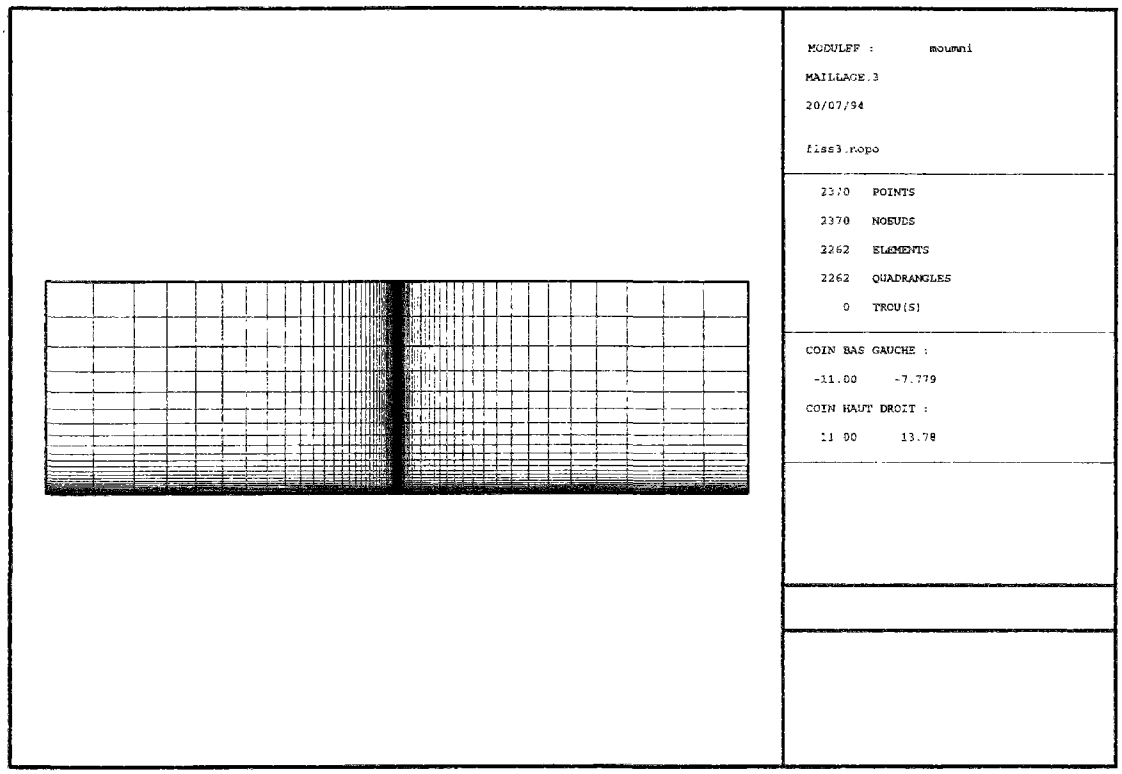


Figure 9.4: *maillage de la structure .*

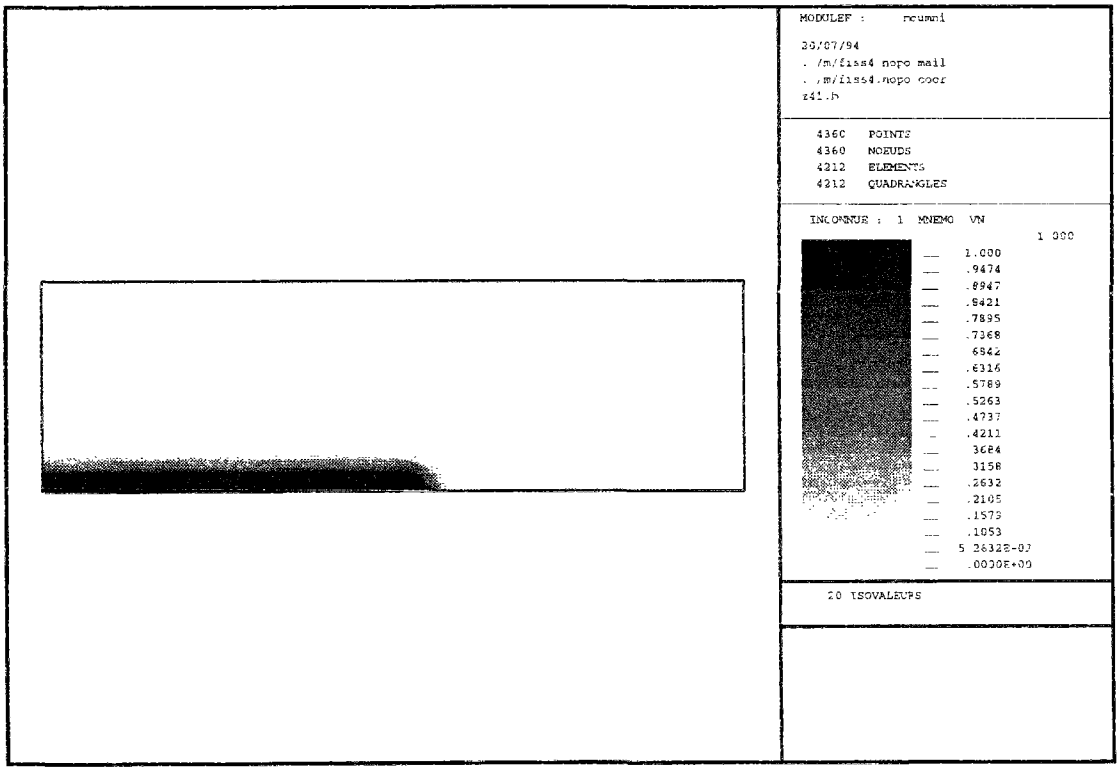


Figure 9.5: *isovaleurs du paramètre d'endommagement.*

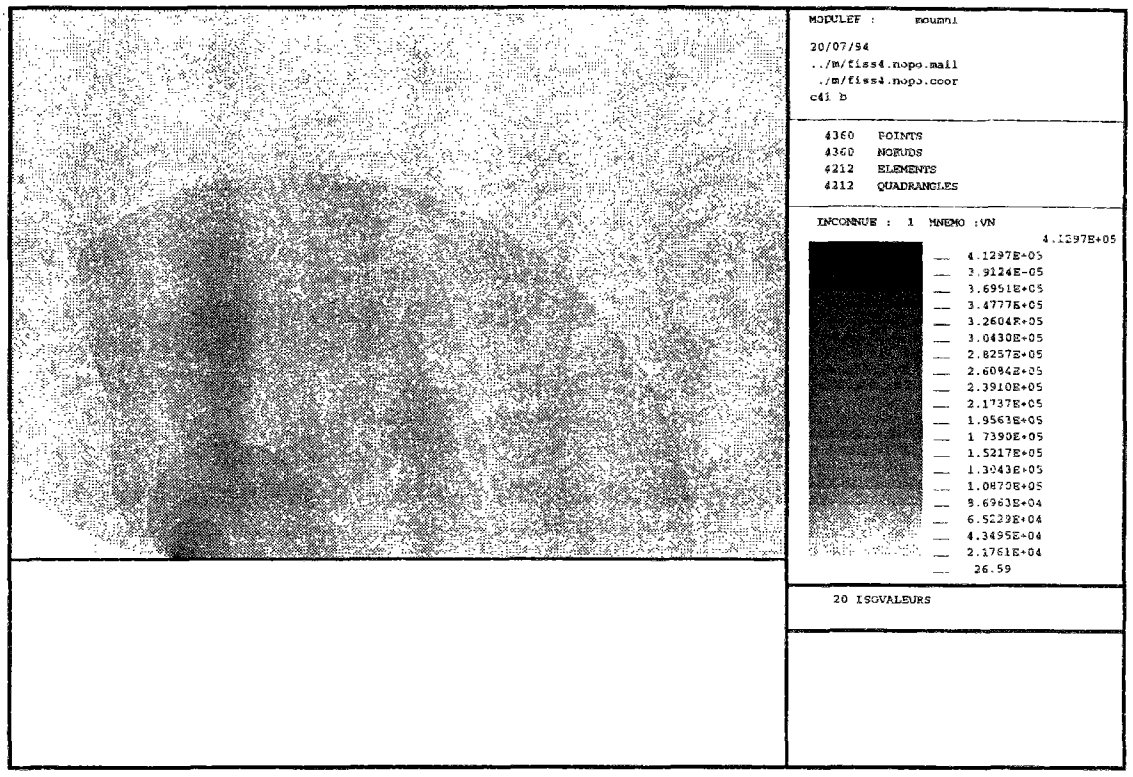


Figure 9.6: *isovaleurs des contraintes équivalentes .*

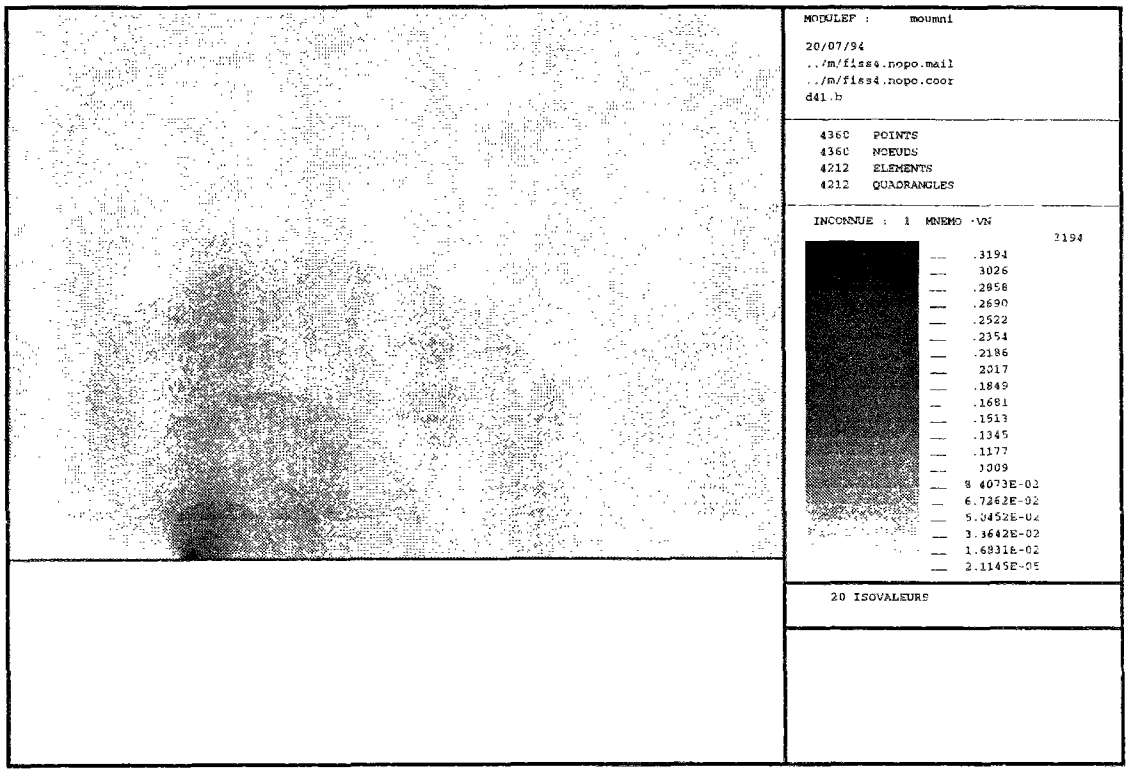


Figure 9.7: *isovaleurs des déformations équivalentes.*

9.5 Conclusion

Le modèle d'endommagement peut se prêter à une utilisation numérique. Nous avons considéré pour le montrer le mouvement permanent d'une fissure pour un matériau endommageable partiellement à notre sens. Un programme de calcul stationnaire, fondé sur un algorithme implicite a été mis au point. Les résultats qualitatifs obtenus sont satisfaisants comme le témoignent les figures (9.5)(9.6)(9.7).

Références bibliographiques de la troisième partie.

[1] Bui H.D., *Mécanique de la rupture fragile.* Masson, Paris, 1978.

[2] Bui H.D., Ehrlacher A., Renard C. *Propagation d'une zone endommagée dans un solide élastique fragile en mode I et régime permanent*, C.R.A.S tome 295. série II p917, 1982.

[3] Demz K., Mroz Z.. *Stability conditions of brittle plastic structures with propagating damage surface*, J.Struct.Mech., 13, p 95-112, 1985.

[4] Ehrlacher A., *Contribution à l'étude thermodynamique de la progression de fissure et à la mécanique de l'endommagement brutal*, Thèse de doctorat d'état, paris VI, 1985.

[5] Francford G. et Marigo J.J. *Mathematical analysis of damage evolution in a brittle continous medium* in " Mécanique, modélisation numérique et dynamique des matériaux", Publication du L.M.A Num 124, C.N.R.S, pp 245-27, 1991.

[6] Halphen B. et Nguyen Q.S. *Sur les matériaux standards généralisés*, Journal de mécanique, Vol.14 Num 1, pp 39-63, 1975.

[7] Dang Van K. and Maitournam H., *Steady state flow in classical elastoplasticity : application to repeated rolling and sliding contact*, J.M.P.S, Vol 41, Num 11, pp 1691-1710, 1993.

[8] Lemaitre J. et Chaboche J.L., *Mécanique des matériaux solides* , Dunod Paris, 1985.

[9] Maitournam H., *Formulation et résolution numérique des problèmes thermoviscoplastiques en régime permanent*, Thèse de doctorat, E.N.P.C, 1989.

[10] Marigo J.J., *Etude numérique de l'endommagement*, E.D.F, bulletin de la direction des études et recherches, série C, 1982.

[11] Marigo J.J., *Formulation d'une loi d'endommagement d'un matériau élastique*, C.R.A.S, t292, série II, pp 1309-1312, 1981.

[12] Moreau J.J., *On unilateral constraints. friction and plasticity* , Cours CIME, Bressanone 1973, edition Cremonese, Roma 1974.

[13] Moumni Z. et Nguyen Q.S., *Etude d'un modèle de changement de phase : application à l'endommagement fragile, progressif et partiel*, Colloque National en Calcul des Structures, Giens 1993.

[14] Nguyen Q.S., *On the elastic-plastic initial boundary value problem and its numerical integration*, Int.J.Num.Meth, Vol 11, pp 817-832, 1977.

[15] Nguyen Q.S., *Bifurcation and stability of time-independent standard dissipative systems*, C.I.S.M, Udine, 1990.

[16] Nguyen Q.S. et Rahimian M., *Mouvement permanent d'une fissure en milieu élastoplastique*, Journal de Mécanique Appliqué, Vol. 5, Num 1, 1981.

[17] Stolz C., *Anélasticité et Stabilité*. Thèse de doctorat d'état, paris VI. 1987.

Conclusion générale

Le changement de phase est un phénomène à prendre en considération lorsque l'on souhaite expliquer le comportement de certains matériaux solides, notamment celui des matériaux à mémoire de forme.

C'est dans le cadre de la théorie des matériaux standards généralisés que nous avons choisi de décrire ce comportement.

Nous avons, dans un premier temps, pris soin d'étendre la méthode des deux potentiels, en envisageant le cas où les variables d'état sont liées. Ces liaisons, nous en avons tenu compte, dans un souci de simplicité, selon le formalisme des multiplicateurs de Lagrange. Les équations d'état ont pu alors être écrites en fonction du lagrangien. Le potentiel de dissipation nous a permis, quant à lui, de décrire l'évolution des variables internes irréversibles.

Nous avons d'abord analysé le cas où le changement de phase est **réversible**. On aboutit à un modèle d'élasticité non linéaire et, sous l'hypothèse d'isotropie de chaque phase, on parvient à une généralisation tridimensionnelle. Ce qui, dans une optique de résolution numérique, revêt un intérêt certain. Des exemples d'illustration nous ont servi à souligner la possibilité d'élaboration d'algorithmes aisément utilisables dans les codes éléments finis traditionnels.
L'analyse du problème de la stabilité du matériau et de la réponse globale d'une structure se révèle être un cas particulier de l'étude de la stabilité d'une structure élastique soumise à des liaisons parfaites. Il a été établi, dans ce cas, que la stabilité d'une position d'équilibre est assurée lorsque la seconde variation du lagrangien est strictement positive sur un ensemble de vitesses admissibles.
En appliquant ces résultats à notre modèle, nous avons constaté que la stabilité du matériau est en fait intimement liée à la convexité de l'énergie d'interaction entre les phases.
En nous inspirant des travaux de Frémond et Müller, nous avons proposé comme application directe, une description simple de l'effet mémoire de forme.

Ensuite, le cas où le changement de phase est **irréversible** a été considéré. On aboutit à une loi incrémentale comparable à la loi de comportement plastique. Par des choix judicieux du pseudo-potentiel de dissipation, nous avons pu décrire aussi bien le comportement pseudo-élastique (hystérésis) des matériaux à mémoire de forme que l'endommagement fragile partiel. Notre modèle s'avère utile pour expliquer la perte de rigidité due à l'extension de l'endommagement local, comme la microfissuration ou le délaminage partiel entre les couches des composites stratifiés.

L'étude de la stabilité d'un matériau à endommagement fragile partiel montre, comme pour le cas réversible, que la convexité de l'énergie d'interaction joue un rôle primordial.

Dans un but d'illustration, nous avons élaboré un algorithme de calcul fondé sur un schéma implicite simulant ce comportement incrémental. Comme support de présentation, nous avons décrit le mouvement permanent d'une fissure en milieu partiellement endommageable. Les résultats obtenus attestent du fait que le modèle se prête à une mise en œuvre numérique utilisable en calcul des structures.

Notre modélisation présente les avantages suivants :

- une simplicité et une maniabilité certaines : le choix judicieux du pseudo-potentiel de dissipation permet de modéliser des phénomènes aussi différents que la pseudo-élasticité des matériaux à mémoire de forme et l'endommagement fragile partiel;

- la possibilité d'une généralisation tridimensionnelle ; ce qui permet la construction d'algorithmes en vue d'une mise en œuvre numérique.

La réponse à la question d'existence et d'unicité de la solution n'a pas été abordée au cours de cette monographie, ceci fait l'objet d'un travail en cours.

ANNEXES

Annexe A

Modélisation de l'effet mémoire de forme

On développe ici les calculs qui nous ont permis d'obtenir la loi de comportement des matériaux à mémoire de forme dans le cas non dissipatif. Il s'agit de résoudre le système d'équations [(A.4)-(A.13)] où les inconnus sont $(x, y, z, e, f, m, \sigma)$, ϵ est supposée une donnée du problème. Le lagrangien s'écrit :

$$\mathcal{L} = \mathcal{W} - \lambda(xe + yf + zm - \epsilon) - \lambda_1(x + y + z - 1) - \lambda_x x - \lambda_y y - \lambda_z z. \tag{A.1}$$

avec

$$\mathcal{W} = xU(e) + yV(f) + zW(m). \tag{A.2}$$

avec

$$\begin{aligned} U(e) &= \tfrac{1}{2}Ke^2, \\ V(f) &= \tfrac{1}{2}K(f + \epsilon_0)^2 + C(T), \\ W(m) &= \tfrac{1}{2}K(m - \epsilon_0)^2 + C(T), \end{aligned} \tag{A.3}$$

Les lois d'état s'écrivent :

$$\begin{aligned} \sigma &= \mathcal{L}_{,\epsilon} = \lambda, && \text{(A.4)} \\ \mathcal{L}_{,e} &= x(Ke - \lambda) = 0, && \text{(A.5)} \\ \mathcal{L}_{,f} &= y(K(f + \epsilon_0) - \lambda) = 0, && \text{(A.6)} \\ \mathcal{L}_{,z} &= z(K(m - \epsilon_0) - \lambda) = 0, && \text{(A.7)} \\ \mathcal{L}_{,x} &= \frac{1}{2}K(e)^2 - \lambda\epsilon - \lambda_1 - \lambda_x = 0, && \text{(A.8)} \\ \mathcal{L}_{,y} &= \frac{1}{2}K(f + \epsilon_0)^2 + C(T) - \lambda f - \lambda_1 - \lambda_y = 0, && \text{(A.9)} \\ \mathcal{L}_{,z} &= \frac{1}{2}K(m - \epsilon_0)^2 + C(T) - \lambda j - \lambda_1 - \lambda_z = 0, && \text{(A.10)} \\ xe + yf + zm &= \epsilon, && \text{(A.11)} \\ x + y + z &= 1. && \text{(A.12)} \end{aligned}$$

Auxquelles s'ajoutent les liaisons et les relations associées :

$$\lambda_x \geq 0, \quad \lambda_y \geq 0 \quad \lambda_z \geq 0 \quad \text{avec} \quad \lambda_x x = 0, \lambda_y y = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_z z = 0 \tag{A.13}$$

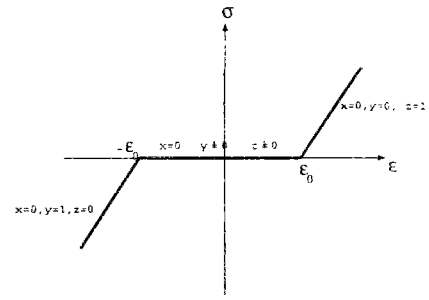


Figure A.1: *loi de comportement à basse température.*

A.2 Loi de comportement à température moyenne.

Il n'est pas nécessaire de refaire les calculs. Il suffit d'examiner les changements que peut engendrer l'hypothèse $C > 0$ sur les calculs précédents. Par exemple :

- **Si $x = 0, y = 0, z = 1$.**

La résolution du système [(A.4)-(A.13)] donne le même résultat que précédement. En revanche, la positivité des multiplicateurs de Lagrange implique dans ce cas :

$$\lambda_x > 0 \Longrightarrow \epsilon > \frac{C + K\epsilon_0^2}{K\epsilon_0} \tag{A.28}$$

$$\lambda_y > 0 \Longrightarrow \epsilon > \epsilon_0. \tag{A.29}$$

Il clair qu'il suffit que $\epsilon > \dfrac{C + K\epsilon_0^2}{K\epsilon_0}$ pour que les deux conditions (A.28) et (A.29) soient

Ceci est impossible, du fait que C est srictement positive. Cette situation n'est donc pas physiquement réalisable.

- **Si $x = 1, y = 0, z = 0$.**

Contrairement au cas $C < 0$, les deux multiplicateurs λ_y et λ_z peuvent être positifs en même temps. Ce qui donne :

$$\sigma = K\epsilon.$$

et un domaine d'amissibilité :

$$-\frac{C}{K\epsilon_0} < \epsilon < \frac{C}{K\epsilon_0}.$$

- **Si $x \neq 0, y \neq 0, z = 0$.**

Nous obtenons dans ce cas :

$$\begin{aligned} \lambda &= Ke, \\ &= K(f + \epsilon_0), && \text{(A.32)} \\ \lambda_1 &= \frac{K(f+\epsilon_0)^2}{2} + C(T) - \lambda f, \\ &= \frac{Ke^2}{2} - \lambda e, && \text{(A.33)} \end{aligned}$$

$$\lambda_z > 0, \quad \lambda_x = 0, \quad \lambda_y = 0. \qquad \text{(A.34)}$$

d'après (A.32) et (A.33) on a :

$$\lambda = \sigma = \frac{-C}{\epsilon_0},$$

d'où

$$\begin{aligned} f &= -\frac{C + K\epsilon_0^2}{K\epsilon_0} && \text{(A.35)} \\ e &= -\frac{C}{K\epsilon_0} && \text{(A.36)} \end{aligned}$$

en remplaçant dans l'équation (A.11), nous obtenons :

$$\begin{aligned} x &= \frac{K\epsilon\epsilon_0 + C + K\epsilon_0^2}{K\epsilon_0^2} && \text{(A.37)} \\ y &= 1 - x. && \text{(A.38)} \end{aligned}$$

La condition $0 < x < 1$ implique :

$$-\frac{C + K\epsilon_0^2}{K\epsilon_0} < \epsilon < -\frac{C}{K\epsilon_0},$$

- **Si $x \neq 0, y = 0, z \neq 0$.**

Le calcul est similaire que pour le cas ci-dessu. On trouve :

$$\sigma = \frac{C}{\epsilon_0}$$

$$\frac{C}{K\epsilon_0} < \epsilon < \frac{C + K\epsilon_0^2}{K\epsilon_0},$$

Ceci conduit à la courbe-contrainte déformation représentée par la figure (A.2). On note $E = \frac{C}{K\epsilon_0}$ et $F = \frac{C + K\epsilon_0^2}{K\epsilon_0}$.

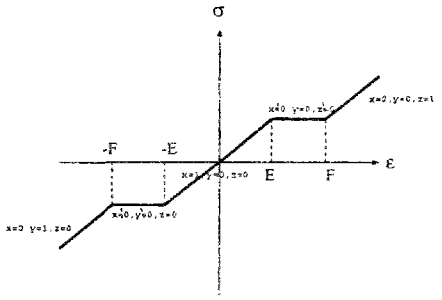


Figure A.2: *loi de comportement à température moyenne.*

A.3 Loi de comportement à haute température.

Nous avons fait l'hypothèse que C tend vers l'infini. Il suffit d'examiner l'implication de cette hypothèse pour chaque cas en utilisant les équations précédentes pour constater que :

$$\forall\ \epsilon\ \ \sigma = K\epsilon.$$

Ceci conduit à la courbe-contrainte déformation représentée par la figure (A.3).

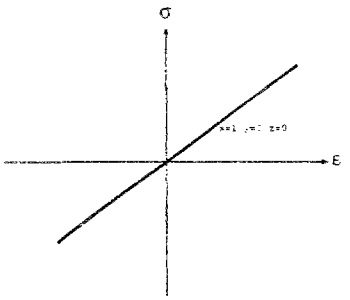


Figure A.3: *loi de comportement à haute température.*

Annexe B

Modélisation de l'hystérésis.

Nous présentons dans cette annexe les calculs ayant permis l'établissement de la loi de comportement incrémentale modélisant la pseudo-élasticité des matériaux à mémoire de forme (l'hystérésis). Nous commençons par rappeler les lois d'état :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{,\epsilon} &= \sigma = \lambda, && \text{(B.1)}\\
\mathcal{L}_{,e} &= (1-z)(Ke-\lambda) = 0, && \text{(B.2)}\\
\mathcal{L}_{,f} &= z(K(m-\epsilon_0(T))-\lambda) = 0, && \text{(B.3)}\\
\mathcal{L}_{,z} &= \frac{1}{2}K(m-\epsilon_0(T))^2 - \frac{1}{2}Ke^2 + C(T) - \lambda(m-e) = -\mathcal{A}, && \text{(B.4)}
\end{aligned}$$

auxquelles s'ajoutent les liaisons et les relations associées :

$$\lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0 \quad \text{avec} \quad \lambda_1 z = 0 \quad et \quad \lambda_2(1-z) = 0.$$

Pour obtenir la loi incrémentale, nous dérivons le système précédent par rapport au temps. Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda} &= \dot{\sigma}, && \text{(B.5)}\\
(1-z)K\dot{e} + (-Ke+\lambda)\dot{z} - (1-z)\dot{\lambda} &= 0, && \text{(B.6)}\\
zK\dot{m} + (K(m-\epsilon_0)-\lambda)\dot{z} - z\dot{\lambda} &= 0, && \text{(B.7)}\\
(-Ke+\lambda)\dot{e} + (K(m-\epsilon_0)-\lambda)\dot{m} + I''(z)\dot{z} + (e-m)\dot{\lambda} &= -\dot{\mathcal{A}}, && \text{(B.8)}\\
(1-z)\dot{e} + z\dot{m} + (m-e)\dot{z} &= \dot{\epsilon}. && \text{(B.9)}
\end{aligned}$$

Nous nous proposons de résoudre ce système dans les deux cas de transformation : transformation directe (austénite $\longrightarrow$ martensite) et transformation inverse (martensite $\longrightarrow$ austénite).

B.1 Transformation de phase directe

Nous supposons qu'au cours du processus de chargement, l'état du matériau (z, σ, ϵ) est connu à l'instant t. A l'instant $t + dt$, les vitesses de ces variables s'obtiennent de la manière suivante :

$\underline{z = 0}$ **:Austénite uniquement.**

Les équations d'état donnent :

$$\begin{cases} e = \epsilon, \\ \sigma = K\epsilon, \\ \mathcal{A} = -\frac{1}{2}K(m-\epsilon_0(T))^2 + \frac{1}{2}Ke^2 - C(T) - I'(z) + \sigma(m-e), \\ \text{m est arbitraire.} \end{cases} \tag{B.10}$$

Pour obtenir les relations qui lient $(\dot{\sigma}, \dot{e}, \dot{m}, \dot{z}, \dot{\epsilon})$, on utilise la loi de normalité :

- **$f_1 < 0$ (1 sur la figure B.1)**

Cette condition peut être exprimée en fonction de la déformation macroscopique de la manière suivante :

$$f_1 < 0 \Longrightarrow \mathcal{A} < -I'(z) + I'(0). \tag{B.11}$$

On remarque que $\mathcal{A}$ dépend de la valeur arbitraire m. On a donc un ensemble de forces admissibles qui doivent vérifier le critère $\mathcal{A}_m < -I'(z) + I'(0)$. On entreprend une démarche semblable à celle utilisée pour discuter de la positivité des multiplicateurs de Lagarange. En effet, il suffit que la force maximale par rapport à m vérifie le critère pour que l'on ait :

$$\forall\ m \quad \mathcal{A}_m < -I'(z) + I'(0).$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{,m} &= -K(m-\epsilon_0) + K\epsilon, \\ \text{d'où} & \\ \mathcal{A}_{,m} = 0 &\Longrightarrow m = \epsilon + \epsilon_0, \\ \text{et} & \\ \mathcal{A}_{,mm} &= -K \leq 0. \end{aligned} \tag{B.12}$$

Par conséquent, le maximum de $\mathcal{A}$ est :

$$\mathcal{A}^* = -C(T) - I'(z) + K\epsilon\epsilon_0.$$

La condition $\mathcal{A} < -I'(z) + I'(0)$ donne donc :

$$\epsilon < \frac{I'(0) + C(T)}{K\epsilon_0}.$$

Dans ce cas la loi de normalité montre que :

$$\dot{z} = 0,$$

et l'introduction de cette valeur dans le système (B.5-B.9), fournit la solution suivante :

$$\dot{e} = \dot{\epsilon} \qquad \dot{\sigma} = K\dot{\epsilon}.$$

• $f_1 = 0$ et $\dot{f}_1 < 0$ **(2 sur la figure B.1)**

La loi de normalité donne :

$$\dot{z} = 0,$$

et

$$f_1 = 0 \Longrightarrow \epsilon = \frac{I'(0) + C(T)}{K\epsilon_0}, \tag{B.13}$$

$$\dot{f}_1 < 0 \implies \dot{\mathcal{A}} < -I''(z)\dot{z}. \tag{B.14}$$

Cette condition peut être explicitée en fonction de la vitesse de la déformation macroscopique de la manière suivante :

Il suffit de remplacer toutes les variables et leurs vitesses qui figurent dans l'expression de $\dot{\mathcal{A}}$ (B.8) par leurs valeurs en fonction de ϵ et $\dot{\epsilon}$. En effet, les équations (B.10), (B.12) impliquent que :

$$e = \epsilon, \tag{B.15}$$
$$m = \epsilon + \epsilon_0, \tag{B.16}$$

d'autre part l'équation (B.10) montre que :

$$\lambda = K\epsilon$$

et les équations (B.6) et (B.9) montre que :

$$K\dot{e} = \dot{\lambda}, \tag{B.17}$$
$$\dot{e} = \dot{\epsilon}, \tag{B.18}$$

en remplaçant dans (B.8) nous obtenons :

$$\dot{\mathcal{A}} = -I''(z)\dot{z} + \epsilon_0 K\dot{\epsilon}$$

par conséquent, puisque $\epsilon_0 > 0$, on a :

$$\dot{\mathcal{A}} < -I''(z)\dot{z} \Longrightarrow \dot{\epsilon} < 0.$$

Ceci est en parfaite correspondance avec la figure (B.1), le point 2 montre en effet que la décharge correspond bien à $\dot{\epsilon} < 0$.

• $f_1 = 0$ et $\dot{f}_1 = 0$ **(3 sur la figure B.1)**

La transformation de phase directe évolue suivant la loi de normalité :

$$\dot{z} = \Delta_1 \frac{\partial f_1}{\partial A} \tag{B.19}$$

Le multiplicateur Δ_1 est déterminé par la condition $\dot{f}_1 = 0$ qui se traduit dans notre cas par :

$$\dot{\mathcal{A}} + I''(z)\dot{z} = 0. \tag{B.20}$$

En reportant cette condition dans le système (B.5-B.9), sa résolution permet d'obtenir la loi de comportement incrémentale suivante :

$$\dot{\sigma} = 0 \qquad \dot{e} = 0 \qquad \dot{z} = \frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon_0} > 0.$$

$0 < z < 1$ **Mélange austénite-martensite**

On suppose maintenant que nous nous plaçons dans un point où les deux phases coexitent ($z \neq 0$). La démarche reste la même et les équations d'état donnent :

$$\begin{aligned} \lambda &= \sigma, && \text{(B.21)} \\ m - e &= \epsilon_0, && \text{(B.22)} \\ e &= \epsilon - z\epsilon_0, && \text{(B.23)} \\ \sigma &= K(\epsilon - z\epsilon_0). && \text{(B.24)} \\ \mathcal{A} &= -C(T) - I'(z) + \sigma\epsilon_0. && \text{(B.25)} \end{aligned}$$

• $f_1 < 0$ **(4 sur la figure B.1)**

La condition exprimant que le critère n'est pas atteint s'écrit maintenant en fonction de la valeur actuelle de z par :

$$f_1 < 0 \Longrightarrow \mathcal{A} < -I'(z) + I'(0) \Longrightarrow \epsilon < \frac{I'(0) + C(T) + Kz\epsilon_0^2}{K\epsilon_0}$$

et la loi de normalité donne :

$$\dot{z} = 0.$$

En remplaçant dans le système (B.5-B.9) :

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= \dot{\sigma}, && \text{(B.26)} \\ \dot{m} &= \dot{\epsilon}, && \text{(B.27)} \\ \dot{e} &= \dot{\epsilon}, && \text{(B.28)} \\ \dot{\sigma} &= K\dot{\epsilon}. && \text{(B.29)} \\ & && \text{(B.30)} \end{aligned}$$

• $f_1 = 0$ et $\dot{f}_1 < 0$ **(5 sur la figure B.1)**

Les résultats sont exactement les mêmes que pour le cas précédent. Nous exprimons uniquement les conditions traduisant le fait que le critère est atteint ($f_1 = 0$) suivi d'une décharge ($\dot{f}_1 < 0$) :

$$f_1 = 0 \implies \epsilon = \frac{I'(0) + C(T) + Kz\epsilon_0^2}{K\epsilon_0}. \qquad \text{(B.31)}$$

Un simple calcul semblable au cas $z = 0$ montre que

$$\begin{aligned} \dot{f}_1 < 0 &\implies \dot{\mathcal{A}} + I''(z)\dot{z} < 0, && \text{(B.32)} \\ &\implies \dot{\epsilon} < 0. && \text{(B.33)} \end{aligned}$$

• $f_1 = 0$ et $\dot{f}_1 = 0$ (**6 sur la figure B.1)**

La transformation de phase directe évolue avec une vitesse $\dot{z}$ donnée par :

$$\dot{z} = \Delta_1 \frac{\partial f_1}{\partial A}, \tag{B.34}$$

les conditions $f_1 = 0$ et $\dot{f}_1 = 0$ s'expriment respectivement par :

$$\epsilon = \frac{I'(0) + C(T) + Kz\epsilon_0^2}{K\epsilon_0}, \tag{B.35}$$

$$\dot{A} + I''(z)\dot{z} = 0. \tag{B.36}$$

Par conséquent, la résolution du système (B.5-B.9) donne :

$$\dot{\sigma} = 0, \qquad \dot{m} = 0, \qquad \dot{e} = 0,$$

$$\dot{z} = \frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon_0} > 0.$$

$z = 1$:**Martensite uniquement (7 sur la figure B.1)** .

D'après l'expression du pseudo-potentiel de dissipation et l'hypothèse selon laquelle pour $z = 1$ le matériau est de nouveau élastique de module de rigidité K, la transformation de phase directe ne peut plus se produire. Ainsi, la vitesse d'évolution de z est identiquement nulle :

$$\dot{z} = 0,$$

les équations d'état donnent dans ce cas :

$$m = \epsilon, \qquad \sigma = K(\epsilon - \epsilon_0),$$

et la résolution du système (B.5-B.9) permet d'obtenir la loi de comportement incrémentale suivante :

$$\dot{m} = \dot{\epsilon}, \qquad \dot{\sigma} = K\dot{\epsilon}.$$

B.2 Transformation de phase inverse

Les calculs restent identiques à ceux du cas précédent. La seule différence réside dans le fait que dans ce cas l'évolution du changement de phase est gouvernée par la fonction f_2.

$z = 1$: **Martensite uniquement** .

Les équations d'état donnent :

$$\begin{cases} f = \epsilon, \\ \sigma = K(\epsilon - \epsilon_0), \\ \mathcal{A} = -\frac{1}{2}K(m - \epsilon_0(T))^2 + \frac{1}{2}K\epsilon^2 - C(T) - I'(z) + \sigma(m - e), \\ \text{e est arbitraire.} \end{cases} \tag{B.37}$$

- **$f_2 < 0$ (8 sur la figure B.1)**

Cette condition peut être exprimée en fonction de la déformation macroscopique de la manière suivante :

$$f_2 < 0 \Longrightarrow \mathcal{A} > -I'(z) + I'(1) \tag{B.38}$$

La condition $\mathcal{A} > -I'(z) + I'(1)$ donne :

$$\epsilon > \frac{I'(1) + C(T) + K\epsilon_0^2}{K\epsilon_0}$$

Dans ce cas, la loi de normalité montre que :

$$\dot{z} = 0,$$

et l'introduction de cette valeur dans le système (B.5-B.9), fournit la solution suivante :

$$\dot{m} = \dot{\epsilon}, \qquad \dot{\sigma} = K\dot{\epsilon}.$$

- **$f_2 = 0$ et $\dot{f}_2 < 0$ (9 sur la figure B.1)**

La loi de normalité donne :

$$\dot{z} = 0,$$

et

$$f_2 = 0 \Longrightarrow \epsilon = \frac{I'(1) + C(T) + K\epsilon_0^2}{K\epsilon_0}, \tag{B.39}$$

$$\dot{f}_2 < 0 \implies \dot{\mathcal{A}} > -I''(z)\dot{z}, \tag{B.40}$$

d'où

$$\dot{\epsilon} > 0.$$

- **$f_2 = 0$ et $\dot{f}_2 = 0$ (10 sur la figure B.1)**

La transformation de phase inverse évolue suivant la loi de normalité :

$$\dot{z} = \Delta_2 \frac{\partial f_2}{\partial \mathcal{A}} \tag{B.41}$$

le multiplicateur Δ_2 est déterminé par la condition $\dot{f}_2 = 0$ qui se traduit dans notre cas par :

$$\dot{\mathcal{A}} + I''(z)\dot{z} = 0. \tag{B.42}$$

En reportant cette condition dans le système (B.5-B.9), sa résolution permet d'obtenir la loi de comportement incrémentale suivante :

$$\dot{\sigma} = 0, \qquad \dot{e} = 0, \qquad \dot{z} = \frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon_0} < 0.$$

$0 < z < 1$ **Mélange austénite-martensite**

La démarche reste la même et les équations d'état donnent :

$$\begin{aligned}
\lambda &= \sigma, && \text{(B.43)}\\
m - e &= \epsilon_0, && \text{(B.44)}\\
e &= \epsilon - z\epsilon_0, && \text{(B.45)}\\
\sigma &= K(\epsilon - z\epsilon_0), && \text{(B.46)}\\
\mathcal{A} &= -C(T) - I'(z) + \sigma\epsilon_0. && \text{(B.47)}
\end{aligned}$$

- $f_2 < 0$ **(11 sur la figure B.1)**

La condition exprimant que le critère n'est pas atteint s'écrit maintenant en fonction de la valeur actuelle de z par :

$$f_2 < 0 \Longrightarrow \mathcal{A} > -I'(z) + I'(1) \Longrightarrow \epsilon > \frac{I'(1) + C(T) + Kz\epsilon_0^2}{K\epsilon_0},$$

et la loi de normalité donne :

$$\dot{z} = 0,$$

En remplaçant dans le système (B.5-B.9) :

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda} &= \dot{\sigma}, && \text{(B.48)}\\
\dot{m} &= \dot{\epsilon}, && \text{(B.49)}\\
\dot{e} &= \dot{\epsilon}, && \text{(B.50)}\\
\dot{\sigma} &= K\dot{\epsilon}. && \text{(B.51)}\\
& && \text{(B.52)}
\end{aligned}$$

- $f_2 = 0$ et $\dot{f}_2 < 0$ **(12 sur la figure B.1)**

$$\begin{aligned}
f_2 = 0 &\Longrightarrow \epsilon = \frac{I'(1) + C(T) + Kz\epsilon_0^2}{K\epsilon_0}, && \text{(B.53)}\\
\dot{f}_2 < 0 &\Longrightarrow \dot{\mathcal{A}} + I''(z)\dot{z} > 0, && \text{(B.54)}\\
&\Longrightarrow \dot{\epsilon} > 0. && \text{(B.55)}
\end{aligned}$$

• $f_2 = 0$ et $\dot{f}_2 = 0$ **(13 sur la figure B.1)**

La transformation de phase inverse évolue avec une vitesse $\dot{z}$ donnée par :

$$\dot{z} = \Delta_2 \frac{\partial f_2}{\partial A} < 0 \tag{B.56}$$

les conditions $f_2 = 0$ et $\dot{f}_2 = 0$ s'expriment respectivement par :

$$\epsilon = \frac{I'(1) + C(T) + Kz\epsilon_0^2}{K\epsilon_0}, \tag{B.57}$$

$$\dot{A} + I''(z)\dot{z} = 0. \tag{B.58}$$

Par conséquent, la résolution du système (B.5-B.9) donne :

$$\dot{\sigma} = 0, \qquad \dot{m} = 0, \qquad \dot{e} = 0.$$

$$\dot{z} = \frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon_0} < 0.$$

$\underline{z = 0}$: **Austénite uniquement**.

D'après l'expression du pseudo-potentiel de dissipation et l'hypothèse selon laquelle pour $z = 0$, le matériau est de nouveau élastique de module de rigidité K, la transformation de phase inverse ne peut plus se produire. Ainsi, la vitesse d'évolution de z est identiquement nulle. On retrouve donc l'état initial :

$$\dot{z} = 0$$

$$e = \epsilon \qquad \sigma = K\epsilon$$

et la résolution du système (B.5-B.9) permet d'obtenir la loi de comportement incrémentale suivante :

$$\dot{e} = \dot{\epsilon} \qquad \dot{\sigma} = K\dot{\epsilon}.$$

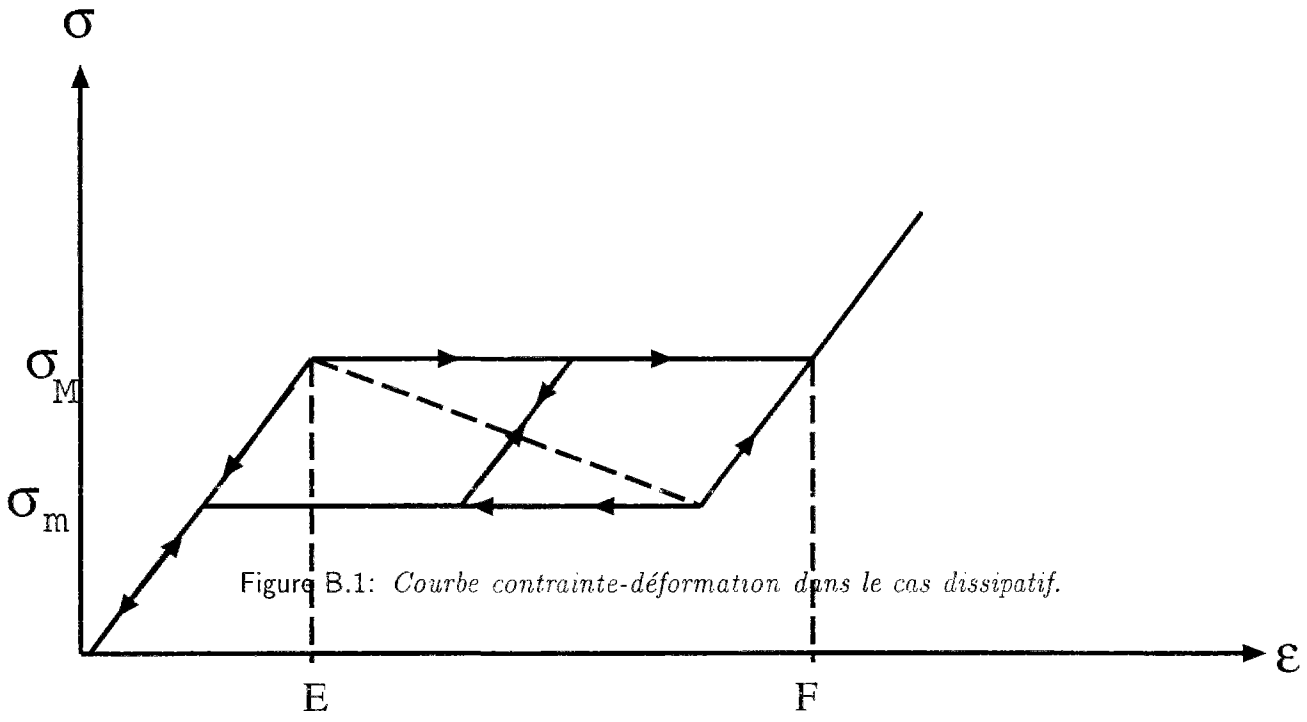


Figure B.1: *Courbe contrainte-déformation dans le cas dissipatif.*

Annexe C

Loi de comportement en vitesse

Nous développons ici les calculs qui nous ont permis d'établir de la loi de comportement en vitesse dans le cas tridimensionnel (cf chapitre 3 paragraphe 3.4.1). Les quantités en gras désignent des tenseurs d'ordre deux.

Le lagrangien du système tridimensionnel s'écrit :

$$\mathcal{L} = (1-z)U + zV - \boldsymbol{\lambda}((1-z)\boldsymbol{e} + z\boldsymbol{f} - \boldsymbol{\epsilon}^d). \tag{C.1}$$

avec

$$U(\boldsymbol{e},\theta) = \mu_1 \boldsymbol{e} : \boldsymbol{e} + \frac{1}{2}K\theta^2 \tag{C.2}$$

$$V(\boldsymbol{f},\theta) = \mu_2 \boldsymbol{f} : \boldsymbol{f} + \frac{1}{2}K\theta^2 \tag{C.3}$$

les lois d'état écrites en fonction du lagrangien donnent :

$$\mathcal{L}_{,\boldsymbol{\epsilon}^d} = \quad \boldsymbol{\lambda} \quad = \boldsymbol{S} \tag{C.4}$$

$$\mathcal{L}_{,\theta} = \quad K\theta \quad = P \tag{C.5}$$

$$\mathcal{L}_{,\boldsymbol{e}} = \quad (1-z)[U'(\boldsymbol{e}) - \boldsymbol{\lambda}] \quad = 0 \tag{C.6}$$

$$\mathcal{L}_{,\boldsymbol{f}} = \quad z[V'(\boldsymbol{f}) - \boldsymbol{\lambda}] \quad = 0 \tag{C.7}$$

$$\mathcal{L}_{,z} = \quad V - U - \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{e}) \quad = -\mathcal{A} \tag{C.8}$$

$$\mathcal{L}_{,\boldsymbol{\lambda}} = \quad (1-z)\boldsymbol{e} + z\boldsymbol{f} - \boldsymbol{\epsilon}^d \quad = 0 \tag{C.9}$$

Afin d'obtenir la loi de comportement en vitesse, nous avons dérivé les équations d'état par rapport au temps. Le système suivant est par conséquent obtenu :

$$\left\{\begin{array}{lllllll}
\mathcal{L}_{,\boldsymbol{\epsilon}^d\boldsymbol{\epsilon}^d}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d & +\mathcal{L}_{,\boldsymbol{\epsilon}^d\boldsymbol{e}}\dot{\boldsymbol{e}} & +\mathcal{L}_{,\boldsymbol{\epsilon}^d\boldsymbol{f}}\dot{\boldsymbol{f}} & +\mathcal{L}_{,\boldsymbol{\epsilon}^d z}\dot{z} & +\mathcal{L}_{,\boldsymbol{\epsilon}^d\boldsymbol{\lambda}}\dot{\boldsymbol{\lambda}} & +\mathcal{L}_{,\boldsymbol{\epsilon}^d\theta}\dot{\theta} & =\dot{\boldsymbol{S}}. \\
\mathcal{L}_{,\boldsymbol{e}\boldsymbol{\epsilon}^d}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d & +\mathcal{L}_{,\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}}\dot{\boldsymbol{e}} & +\mathcal{L}_{,\boldsymbol{e}\boldsymbol{f}}\dot{\boldsymbol{f}} & +\mathcal{L}_{,\boldsymbol{e}z}\dot{z} & +\mathcal{L}_{,\boldsymbol{e}\boldsymbol{\lambda}}\dot{\boldsymbol{\lambda}} & +\mathcal{L}_{,\boldsymbol{e}\theta}\dot{\theta} & =0. \\
\mathcal{L}_{,\boldsymbol{f}\boldsymbol{\epsilon}^d}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d & +\mathcal{L}_{,\boldsymbol{f}\boldsymbol{e}}\dot{\boldsymbol{e}} & +\mathcal{L}_{,\boldsymbol{f}\boldsymbol{f}}\dot{\boldsymbol{f}} & +\mathcal{L}_{,\boldsymbol{f}z}\dot{z} & +\mathcal{L}_{,\boldsymbol{f}\boldsymbol{\lambda}}\dot{\boldsymbol{\lambda}} & +\mathcal{L}_{,\boldsymbol{f}\theta}\dot{\theta} & =0. \\
\mathcal{L}_{,z\boldsymbol{\epsilon}^d}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d & +\mathcal{L}_{,z\boldsymbol{e}}\dot{\boldsymbol{e}} & +\mathcal{L}_{,z\boldsymbol{f}}\dot{\boldsymbol{f}} & +\mathcal{L}_{,zz}\dot{z} & +\mathcal{L}_{,z\boldsymbol{\lambda}}\dot{\boldsymbol{\lambda}} & +\mathcal{L}_{,z\theta}\dot{\theta} & =-\dot{A}. \\
\mathcal{L}_{,\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\epsilon}^d}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d & +\mathcal{L}_{,\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{e}}\dot{\boldsymbol{e}} & +\mathcal{L}_{,\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{f}}\dot{\boldsymbol{f}} & +\mathcal{L}_{,\boldsymbol{\lambda}z}\dot{z} & +\mathcal{L}_{,\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}}\dot{\boldsymbol{\lambda}} & +\mathcal{L}_{,\boldsymbol{\lambda}\theta}\dot{\theta} & =0. \\
\mathcal{L}_{,\theta\boldsymbol{\epsilon}^d}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d & +\mathcal{L}_{,\theta\boldsymbol{e}}\dot{\boldsymbol{e}} & +\mathcal{L}_{,\theta\boldsymbol{f}}\dot{\boldsymbol{f}} & +\mathcal{L}_{,\theta z}\dot{z} & +\mathcal{L}_{,\theta\boldsymbol{\lambda}}\dot{\boldsymbol{\lambda}} & +\mathcal{L}_{,\theta\theta}\dot{\theta} & =\dot{P}.
\end{array}\right. \tag{C.10}$$

Le but du calcul est la détermination pour chaque valeur de z ($z = 0, 0 < z < 1, z = 1$) $\dot{\boldsymbol{S}}$, $\dot{P}$, $\dot{\boldsymbol{e}}$, $\dot{\boldsymbol{f}}$ et $\dot{z}$ en fonction de $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$.

C.1 Matériau sain : $z = 0$

Soit un point matériel appartenant à la partie saine du matériau. Les équations d'état donnent dans ce cas :

$$\left\{\begin{array}{c}
\boldsymbol{e} = \boldsymbol{\epsilon}^d \\
\boldsymbol{S} = 2\mu_1\boldsymbol{\epsilon}^d \\
\mathcal{A} = U(\boldsymbol{e}) - V(\boldsymbol{f}) - \boldsymbol{S} : (\boldsymbol{e} - \boldsymbol{f}) \\
\boldsymbol{f} \text{ est arbitraire}
\end{array}\right. \tag{C.11}$$

• $g < 0$

Cette condition ($g < 0$) peut être exprimée en fonction de la déformation macroscopique de la manière suivante :

$$g < 0 \implies \mathcal{A} < \mathcal{K} \tag{C.12}$$

avec

$$\mathcal{A} = U(\boldsymbol{\epsilon}^d) - V(\boldsymbol{f}) - \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\epsilon}^d - \boldsymbol{f}) \tag{C.13}$$

On remarque que $\mathcal{A}$ dépend de la valeur arbitraire $\boldsymbol{f}$. On a donc un ensemble de forces admissibles qui doivent vérifier le critère $\mathcal{A}_{\boldsymbol{f}} < \mathcal{K}$. . Il suffit que la force maximale par rapport à $\boldsymbol{f}$ vérifie critère pour que l'on ait :

$$\forall\ \boldsymbol{f} \quad \mathcal{A}_{\boldsymbol{f}} < \mathcal{K}.$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \mathcal{A},_{\boldsymbol{f}} &= -2\mu_2 \boldsymbol{f} + 2\mu_1 \boldsymbol{\epsilon}^d, \\ \text{d'où} & \\ \mathcal{A},_{\boldsymbol{f}} = 0 &\implies \boldsymbol{f} = \frac{\mu_1}{\mu_2}\boldsymbol{\epsilon}^d = \eta \boldsymbol{\epsilon}^d, \eta = \frac{\mu_1}{\mu_2} \\ \text{et} & \\ \mathcal{A},_{\boldsymbol{ff}} &= -2\mu_2 \leq 0. \end{aligned} \tag{C.14}$$

Par conséquent, le maximum de $\mathcal{A}$ est :

$$\mathcal{A}^* = -\mu_1 \boldsymbol{\epsilon}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d + \mu_1 \eta \boldsymbol{\epsilon}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d$$

La condition $\mathcal{A} < \mathcal{K}$ donne donc :

$$\boldsymbol{\epsilon}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d < \frac{\mathcal{K}}{\mu_1(\eta - 1)}$$

Dans ce cas, la loi de normalité (8.18) montre que :

$$\dot{z} = 0.$$

et l'introduction de cette valeur dans le système (C.10) fournit la solution suivante :

$$\dot{\boldsymbol{e}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d \qquad \dot{\boldsymbol{S}} = 2\mu_1 \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d \qquad \dot{P} = K\dot{\theta}$$

• $\boldsymbol{g} = 0$ et $\dot{\boldsymbol{g}} < 0$

Le critère est atteint ($\mathcal{A}$ est sur le bord du convexe). Etant donné que nous nous trouvons en état de décharge ($\dot{g} < 0$), la loi de normalité donne :

$$\dot{z} = 0$$

De point de vue du résultat de la résolution du système rien ne change si ce n'est que le critère s'exprime différemment. En effet, exprimé en déformation, ce dernier s'écrit :

$$g = 0 \implies \boldsymbol{\epsilon}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d = \frac{\mathcal{K}}{\mu_1(\eta - 1)} \tag{C.15}$$

$$\dot{g} < 0 \implies \dot{\mathcal{A}} < 0 \tag{C.16}$$

Cette condition peut être explicitée en fonction de la vitesse de la déformation macroscopique, de la manière suivante :

$$\dot{\mathcal{A}} = 2\mu_1 \boldsymbol{e} : \dot{\boldsymbol{e}} - 2\mu_2 \boldsymbol{f} : \dot{\boldsymbol{f}} - \boldsymbol{\lambda} : (\dot{\boldsymbol{e}} - \dot{\boldsymbol{f}}) - \dot{\boldsymbol{\lambda}} : (\boldsymbol{e} - \boldsymbol{f}). \tag{C.17}$$

Il suffit de remplacer toutes les variables et leurs vitesses qui figurent dans l'expression de $\dot{\mathcal{A}}$ par leurs valeurs en fonction de $\boldsymbol{\epsilon}^d$ et $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d$. En effet, les équations (C.11),(C.14) impliquent que :

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{\epsilon}^d, \tag{C.18}$$

$$\boldsymbol{f} = \eta \boldsymbol{\epsilon}^d \tag{C.19}$$

d'autre part la dérivée par rapport au temps de l'équation (C.6) donne :

$$(1-z)[2\mu_1\dot{\boldsymbol{e}}-\dot{\boldsymbol{\lambda}}]-\dot{z}[2\mu_1\boldsymbol{e}-\boldsymbol{\lambda}]=0$$

or $z=0$ et $\dot{z}=0$ (loi de normalité), d'où :

$$2\mu_1\dot{\boldsymbol{e}}=\dot{\boldsymbol{\lambda}}. \tag{C.20}$$

De plus en dérivant par rapport au temps l'équations (C.9) et en remplaçant z et $\dot{z}$ par leurs valeurs, nous obtenons :

$$\dot{\boldsymbol{e}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d \tag{C.21}$$
$$\tag{C.22}$$

d'où :

$$\dot{\mathcal{A}}=2(\mu_1-\mu_2)\eta\boldsymbol{\epsilon}^d:\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d$$

par conséquent, on a :

$$\dot{\mathcal{A}}<0\Longrightarrow\boldsymbol{\epsilon}^d:\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d<0$$

• $\boldsymbol{g}=0$ et $\dot{\boldsymbol{g}}=0$

Le critère est maintenant atteint au point considéré ($\mathcal{A}$) avec une charge. L'endommagement évolue suivant la loi de normalité :

$$\dot{z} = \Lambda\frac{\partial g}{\partial\mathcal{A}} \tag{C.23}$$

Le multiplicateur Λ est déterminé par la condition $\dot{g}=0$ qui se traduit dans notre cas par :

$$\dot{\mathcal{A}}=0. \tag{C.24}$$

En reportant cette condition dans le système (C.10), sa résolution permet d'obtenir la loi de comportement incrémentale. En effet, le système devient dans ce cas :

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \dot{\boldsymbol{S}} \tag{C.25}$$
$$K\dot{\theta} = \dot{P} \tag{C.26}$$
$$(2\mu_1\dot{\boldsymbol{e}}-\dot{\boldsymbol{\lambda}})-\dot{z}(2\mu_1\boldsymbol{e}-\boldsymbol{\lambda}) = 0 \tag{C.27}$$
$$\dot{z}(2\mu_2\boldsymbol{f}-\boldsymbol{\lambda}) = 0 \tag{C.28}$$
$$-2\mu_1\boldsymbol{e}:\dot{\boldsymbol{e}}+2\mu_2\boldsymbol{f}:\dot{\boldsymbol{f}}+\dot{\boldsymbol{\lambda}}:(\boldsymbol{e}-\boldsymbol{f})+\boldsymbol{\lambda}:(\dot{\boldsymbol{e}}-\dot{\boldsymbol{f}}) = 0 \tag{C.29}$$
$$\dot{\boldsymbol{e}}+\dot{z}(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{e})-\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d = 0 \tag{C.30}$$

les équations (C.4), (C.6), (C.25) et (C.27) impliquent que :

$$2\mu_1\boldsymbol{e} = \boldsymbol{S} \tag{C.31}$$
$$2\mu_1\dot{\boldsymbol{e}} = \dot{\boldsymbol{S}} \tag{C.32}$$

d'autre part, $\dot{z}\neq 0$ l'équation (C.28) donne :

$$2\mu_2\dot{\boldsymbol{f}}=\dot{\boldsymbol{S}} \tag{C.33}$$

en reportant (C.32) et (C.33) dans (C.29) on obtient :

$$\dot{\boldsymbol{S}} : (\boldsymbol{f} - \boldsymbol{e}) = 0 \tag{C.34}$$

or on sait que :

$$\boldsymbol{f} = \eta \boldsymbol{e}$$

d'où

$$\dot{\boldsymbol{S}} : ((\eta - 1)\boldsymbol{e}) = 0. \tag{C.35}$$

En remplaçant $\dot{\boldsymbol{S}}$ par sa valeur en fonction de $\boldsymbol{e}$ en utilisant (C.32), on obtient :

$$\boldsymbol{e} : \dot{\boldsymbol{e}} = 0 \tag{C.36}$$

L'équation (C.36) est analogue à celle que donne $\dot{e} = 0$ dans le cas unidimensionnel. Elle est utile si on veut obtenir la valeur de $\dot{z}$. En effet, il suffit de multiplier l'équation (C.30) par $\boldsymbol{e}$:

$$\dot{z}(\eta - 1)\boldsymbol{e} : \boldsymbol{e} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d : \boldsymbol{e} \tag{C.37}$$

or $\boldsymbol{e}$ s'exprime en fonction de $\boldsymbol{\epsilon}^d$ par :

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{\epsilon}^d \tag{C.38}$$

d'où

$$\dot{z} = \frac{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d}{(\eta - 1)\boldsymbol{\epsilon}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d} \tag{C.39}$$

les autres quantités s'obtiennent simplement en utilisant les équations (C.30) (C.32) (C.33) et ceci en remplaçant $\dot{z}$ par sa valeur :

$$\dot{\boldsymbol{e}} = \frac{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d(\boldsymbol{\epsilon}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d) - \boldsymbol{\epsilon}^d(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d)}{(\boldsymbol{\epsilon}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d)} \tag{C.40}$$

$$\dot{\boldsymbol{f}} = \eta \frac{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d(\boldsymbol{\epsilon}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d) - \boldsymbol{\epsilon}^d(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d)}{(\boldsymbol{\epsilon}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d)} \tag{C.41}$$

$$\dot{\boldsymbol{S}} = 2\mu_1 \frac{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d(\boldsymbol{\epsilon}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d) - \boldsymbol{\epsilon}^d(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d)}{(\boldsymbol{\epsilon}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d)} \tag{C.42}$$

C.2 Matériau partiellement endommagé : 0< z <1

On suppose maintenant que nous nous plaçons en un point partiellement endommagé ($z \neq 0$). La démarche reste la même si ce n'est que dans ce cas la valeur de z apparaît dans les formules. Les équations d'état donnent :

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{S} \tag{C.43}$$

$$K\theta = P \tag{C.44}$$

$$\boldsymbol{f} = \frac{\eta \boldsymbol{\epsilon}^d}{(1 - z) + \eta z} \tag{C.45}$$

$$\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{\epsilon}^d}{(1 - z) + \eta z} \tag{C.46}$$

$$\boldsymbol{S} = \frac{2\mu_1 \boldsymbol{\epsilon}^d}{(1 - z) + \eta z} \tag{C.47}$$

$$\mathcal{A} = U(\boldsymbol{e}) - V(\boldsymbol{f}) + \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{e}) \tag{C.48}$$

• $g < 0$

Comme dans le cas précédent ($z = 0$), nous commençons par calculer la force thermodynamique associée à z :

$$\mathcal{A} = \mu_1 \boldsymbol{e} : \boldsymbol{e} - \mu_2 \boldsymbol{f} : \boldsymbol{f} + \boldsymbol{\lambda} : (\boldsymbol{f} - \boldsymbol{e})$$

En remplaçant $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{f}$, λ par leur valeurs fournies par (C.45) (C.46) (C.47) dans $\mathcal{A}$, on obtient :

$$\mathcal{A} = \frac{\mu_1 \boldsymbol{\epsilon}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d (\eta - 1)}{(\eta z + (1 - z))^2}$$

La condition exprimant que le critère n'est pas atteint s'écrit maintenant en fonction de la valeur actuelle de z par :

$$g < 0 \Longrightarrow \mathcal{A} < \mathcal{K} \Longrightarrow \boldsymbol{\epsilon}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d < \frac{\mathcal{K}(\eta z + (1 - z))^2}{\mu_1 (\eta - 1)} \text{ avec } \eta = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

et la loi de normalité donne :

$$\dot{z} = 0$$

En reportant la valeur de $\dot{z}$ dans ce système et en le résolvant, on obtient le résultat suivant :

$$\dot{\lambda} = \dot{S} \tag{C.49}$$

$$K\dot{\theta} = P \tag{C.50}$$

$$\dot{\boldsymbol{f}} = \frac{\eta \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d}{(1 - z) + \eta z} \tag{C.51}$$

$$\dot{\boldsymbol{e}} = \frac{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d}{(1 - z) + \eta z} \tag{C.52}$$

$$\dot{\boldsymbol{S}} = \frac{2\mu_1 \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d}{(1 - z) + \eta z} \tag{C.53}$$

• $g = 0$ et $\dot{g} < 0$

Les résultats sont exactement les mêmes que pour le cas précédent. Nous exprimons seulement les conditions traduisant le fait que le critère est atteint ($g = 0$) suivi d'une décharge ($\dot{g} < 0$) :

$$g = 0 \Longrightarrow \mathcal{A} = \mathcal{K} \tag{C.54}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\epsilon}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d = \frac{\mathcal{K}(\eta z + (1 - z))^2}{\mu_1 (\eta - 1)} \tag{C.55}$$

et

$$\dot{g} < 0 \Longrightarrow \dot{\mathcal{A}} < 0 \tag{C.56}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\epsilon}^d : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d < 0 \tag{C.57}$$

• $g = 0$ et $\dot{g} = 0$

Il s'agit d'un point de la structure partiellement endommagée, dans laquelle le critère est atteint, en état de charge. L'endommagement évolue avec une vitesse $\dot{z}$ donnée par :

$$\dot{z} = \Lambda \frac{\partial g}{\partial \mathcal{A}} \tag{C.58}$$

Les conditions $g = 0$ et $\dot{g} = 0$ s'expriment respectivement par :

$$\boldsymbol{\epsilon}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d = \frac{\mathcal{K}((1-z)+\eta z)^2}{\mu_1(r-1)} \tag{C.59}$$

$$\dot{\mathcal{A}} = 0 \tag{C.60}$$

Le calcul est identique au précédent si ce n'est que z est non nul. On obtient le résultat suivant :

$$\dot{z} = \frac{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d((1-z)+\eta z)}{(\eta-1)\boldsymbol{\epsilon}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d} \tag{C.61}$$

$$\dot{\boldsymbol{e}} = \frac{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d(\boldsymbol{\epsilon}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d) - \boldsymbol{\epsilon}^d(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d)}{(\boldsymbol{\epsilon}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d)((1-z)+\eta z)} \tag{C.62}$$

$$\dot{\boldsymbol{f}} = \eta \frac{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d(\boldsymbol{\epsilon}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d) - \boldsymbol{\epsilon}^d(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d)}{(\boldsymbol{\epsilon}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d)((1-z)+\eta z)} \tag{C.63}$$

$$\dot{\boldsymbol{S}} = 2\mu_1 \frac{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d(\boldsymbol{\epsilon}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d) - \boldsymbol{\epsilon}^d(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d)}{(\boldsymbol{\epsilon}^d : \boldsymbol{\epsilon}^d)((1-z)+\eta z)} \tag{C.64}$$

C.3 Matériau complètement endommagé : $z = 1$

D'après l'expression du pseudo-potentiel de dissipation et l'hypothèse selon laquelle pour $z = 1$ le matériau est élastique de module de cisaillement μ_2, l'endommagement ne peut plus se produire. Ainsi, la vitesse d'évolution de z est identiquement nulle :

$$\dot{z} = 0$$

les équations d'état donnent alors :

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{\epsilon}^d \qquad \boldsymbol{S} = \mu_2 \boldsymbol{\epsilon}^d \qquad \boldsymbol{e} \text{ est arbitraire}$$

et la résolution du système (C.10) permet d'obtenir la loi de comportement incrémentale suivante :

$$\dot{\boldsymbol{f}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d \qquad \dot{\boldsymbol{S}} = 2\mu_2 \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d \qquad \dot{P} = K\dot{\theta}.$$