



Optimisation de l'utilisation des explosifs en génie civil

Qiang Zeng

► To cite this version:

Qiang Zeng. Optimisation de l'utilisation des explosifs en génie civil. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1995. Français. NNT: . tel-00529371

HAL Id: tel-00529371

<https://pastel.hal.science/tel-00529371>

Submitted on 25 Oct 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NS 19 848 (4)

X

THESE

présentée pour l'obtention du Diplôme de

Docteur de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées

Spécialité : Structures et Matériaux

par

Qiang ZENG

Sujet de thèse

Optimisation de l'utilisation des explosifs en Génie Civil

soutenue le 20 novembre 1995

devant le jury composé de :

MM. : P. BEREST	Président
R. GIBERT	Rapporteur
Y. SIFRE	Rapporteur
F. ARNAUDEAU	Examineur
R. CHERET	Examineur
A. EHRLACHER	Examineur
J. ZARKA	Examineur

AD



Remerciements

Je souhaite exprimer ma reconnaissance à Monsieur P.BEREST, Directeur du Laboratoire de Mécanique des Solides de l'Ecole Polytechnique, pour la confiance qu'il m'a accordée en me permettant de préparer cette thèse.

Je remercie Monsieur Y. SIFFRE (son expérience m'a permis de préciser rapidement les objectifs de ce travail) et Monsieur R. GIBERT d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse, malgré leur importante charge de travail.

Mes remerciements s'adressent également à Messieurs R.CHERET, F. ARNAUDEAU, A.EHLACHER qui ont bien voulu s'intéresser à mon travail et accepter d'être membres de ce jury.

Je pense aussi à mes collègues du Laboratoire, dont P. NAVIDI (qui m'a apporté une aide appréciable), M. TERRIEN, B. KLOSOWICZ ainsi que tous le personnel de la société CADLM où j'ai réalisé la plupart de mes travaux.

Cette thèse a été réalisée avec le concours financier de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées et du Laboratoire de Mécanique des Solides de l'Ecole Polytechnique, je les en remercie vivement.

Je ne serais être assez reconnaissant à ma soeur Yan et mon beau-frère Joël JACUBOWICZ qui m'ont fait venir en France et m'ont soutenu durant ma thèse.

Enfin je remercie tout particulièrement Monsieur J. ZARKA, directeur de ma thèse, pour sa disponibilité, ses conseils et encouragements permanents ainsi que sa patience pour les nombreuses lectures-corrrections.

Table des Matières

1	Introduction Générale	5
I	Détonation des Explosifs	7
2	Introduction	9
3	Notions générales sur les explosifs	11
3.1	Substances explosives	11
3.2	Classification des explosifs	11
3.3	Détonation des explosifs	13
3.4	Caractéristiques des explosifs	13
4	La théorie de la détonation des explosifs	17
4.1	Onde de choc dans un fluide	17
4.1.1	Expressions mathématiques fondamentales pour une onde de choc .	17
4.1.2	Propriétés de la courbe de Hugoniot (h)	19
4.2	Propagation de l'onde de détonation	20
4.2.1	Théorie de Chapman-Jouguet	20
4.2.2	Discussions sur la théorie de Chapman-Jouguet	24
4.2.3	Zone de la réaction	26
5	Simulation numérique de la détonation	31
5.1	Introduction	31
5.2	Description continue du fluide réactif	31
5.3	Équations d'état	33
5.3.1	Généralités	33
5.3.2	Équations d'état du type pseudo-potentiel	35
5.4	Loi de décomposition	36
5.5	Estimations analytiques d'état des produits explosifs	37
5.6	Introduction au système RADIOSS	40
5.6.1	Système des équations	41
5.6.2	Schéma numériques	42
5.6.3	Conditions aux limites	42
5.6.4	Lois de comportement	43
5.6.5	Calcul de l'écoulement avec détonation du modèle de Wilkins . . .	43
5.7	Exemples numériques	43

5.7.1	Détonation plane	44
5.7.2	Détonation sphérique dans l'eau	44
5.7.3	Couplage avec un milieu solide élastique	50
6	Points essentiels de la partie	55
	Bibliographie de la Partie I	57
II	Modélisation de la Fracturation des Roches	59
7	Introduction	61
7.1	La description générale des roches	61
7.1.1	Classifications	61
7.1.2	Propriétés mécaniques des roches	62
8	Comportement dynamique des roches	67
8.1	Homogénéisation	68
8.1.1	Méthodes d'homogénéisation	68
8.1.2	Quelques résultats d'homogénéisation	71
8.2	Lois de comportement élastique avec endommagement	75
8.2.1	Endommagement isotrope	76
8.2.2	Endommagement anisotrope	76
8.2.3	Critère d'endommagement	78
8.2.4	Evolution cinématique de l'endommagement	79
8.3	Modèle proposé	82
8.3.1	Définition du tenseur d'endommagement	82
8.3.2	Critère d'endommagement	82
8.3.3	Lois d'évolution des endommagements	83
8.3.4	Tenseurs élastiques effectifs	83
8.3.5	Écriture de la loi en incréments	83
8.3.6	Prédiction de la taille de fragments	84
8.3.7	Validité du modèle	87
9	Prédiction des résultats de tirs dans la roche	89
9.1	Observations expérimentales et mécanismes de fracturation	89
9.2	Solutions du problème des cavités	91
9.2.1	Présentation mathématique du problème	91
9.2.2	Cavité sphérique	92
9.2.3	Cavité cylindrique circulaire	98
9.3	Modèles numériques	100
9.4	Simulation avec RADIOSS	103
9.4.1	Calculs avec fonction de pression donnée	103
9.4.2	Calculs avec détonation	108
10	Points essentiels de la partie	111
	Bibliographie de la Partie II	113

III Optimisation des Tirs	117
11 Introduction	119
12 Conception des tirs	121
12.1 Définition des paramètres de foration	121
12.2 Définition des paramètres de fragmentation	123
12.3 Le choix des variables de conception	123
12.3.1 Choix des paramètres de foration	123
12.3.2 Choix du type d'explosif et de la quantité de charge	124
12.3.3 Choix du retard d'initiation	124
12.3.4 Choix du mode d'amorçage	125
13 Analyse de l'influence des paramètres par simulations numériques	127
13.1 Influence des propriétés mécaniques du rocher	127
13.1.1 Macro-discontinuités	127
13.1.2 Différentes couches de matériaux en profondeur	128
13.1.3 Caractéristiques dynamiques	130
13.1.4 Influence de l'endommagement sur l'atténuation	131
13.2 Influence des caractéristiques des explosifs	135
13.2.1 Modes d'amorçage	135
13.2.2 Temps de retard	136
13.2.3 La partition d'énergie explosive	137
14 Méthodes d'apprentissage automatique et d'optimisation	139
14.1 L'apprentissage automatique	139
14.1.1 SEA: Générateur de Systèmes Experts par Apprentissage automatique	140
14.1.2 Le choix des descripteurs	141
14.2 L'optimisation	143
14.2.1 Méthodes traditionnelles	143
14.2.2 Méthodes évolutionnistes	144
15 Optimisation couplée à l'apprentissage automatique	149
15.1 La recherche des règles par l'apprentissage automatique	149
15.1.1 Coefficient polytropique	149
15.1.2 Loi de propagation	151
15.1.3 Volume endommagé	152
15.2 Exemple d'optimisation	153
16 Points essentiels de la partie	155
17 Conclusion générale	157
Bibliographie de la Partie III	159

A	Formulations en grandes transformations	161
A.1	Description des grandes déformations	161
A.1.1	Géométrie	161
A.1.2	Cinématique	162
A.1.3	Tenseurs déformations	162
A.1.4	Configuration "Lagrangienne Réactualisée"	163
A.1.5	Configuration intermédiaire	163
A.2	Description dynamique	163
A.2.1	Tenseurs contraintes	163
A.2.2	Équations dynamiques	164
A.3	Relations de Comportement	164
B	La propagation des ondes élastiques	167
B.1	Les équations générales dans le milieu élastique	167
B.1.1	Onde plane 3D	168
B.1.2	Onde sphérique	168
B.1.3	Onde cylindrique circulaire	168
B.1.4	Onde de surface de Rayleigh	169
B.1.5	Atténuation des ondes	170

Chapitre 1

Introduction Générale

L'utilisation des explosifs en génie civil a d'importantes applications depuis des siècles, e.x. : extraction de roche dans la construction de voies de communication, (voir dans la figure 1.1), excavation pour tunnel souterrain, démolition de bâtiments, exploitation minière ...

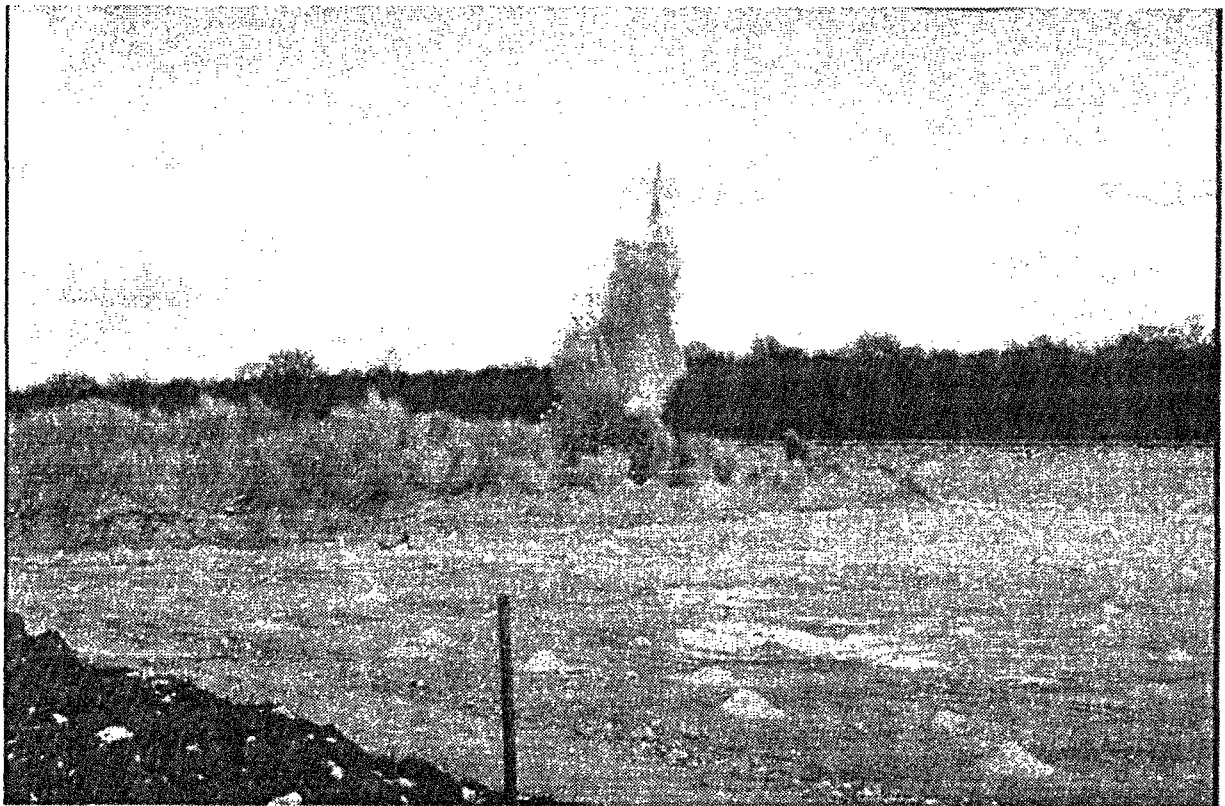


Figure 1.1 Exemple de tir séquentiel (amorçage au fond du trou)

La conception de ces opérations, dites tirs de mine ("rock blasting") est une tâche délicate. Il s'agit de choisir le type d'explosif, sa distribution géométrique et les différentes façons de déclencher les tirs pour une géologie donnée. Le meilleur résultat des tirs pour un volume de roches abattues a pour objectif la qualité de la fragmentation pour un coût de revient donné sans violer les conditions de sécurité ; c'est là, une solution optimisée.

En raison de la complexité du problème, les techniques des tirs sont restées durant de nombreuses années un art où l'expérience du praticien prend une part dominante. Les

ouvrages classiques [LK63],[Hin59],[Hem]... montrent des expériences dans lesquelles les formules empiriques sont les principaux outils à la conception.

Les facteurs qui influencent le résultat des tirs sont nombreux. Nous citons ci-dessous les principaux :

- caractéristiques des explosifs pour le dégagement d'énergie explosive
- caractéristiques mécaniques des roches
- caractéristiques du plan de tirs qui décrivent la géométrie de foration
- caractéristiques du système d'initiation des tirs.

L'expérience montre qu'une distribution des explosifs dans le massif rocheux avec les temps de retards d'initiation conduit à un meilleur résultat.

Du point de vue mécanique, l'utilisation des explosifs dans l'excavation d'un massif rocheux implique deux branches théoriquement difficiles : la première sur la mécanique des explosifs, i.e. la détonique ; et la deuxième sur la mécanique de roches en dynamique. Leur difficulté commune est le couplage des problèmes locaux/globaux. Pour la première, il s'agit du couplage physique/chimique fortement non linéaire; et pour la deuxième, il s'agit de tenir compte des défauts (notamment des fissures) du milieu rocheux (la modélisation du comportement statique pour un simple essai en compression est déjà assez compliquée). L'étude sur ces deux branches est encore en cours de développement.

Néanmoins, la prévision fondée sur les modèles mathématiques des résultats des tirs est une nécessité en raison de motifs économiques évidents (les essais expérimentaux ainsi que l'acquisition des informations sont coûteux et les modèles quasi-empiriques ne sont valables que pour des problèmes spécifiques). Les résultats analytiques de problèmes de cavités [Sha42], [Duv50], [Fav69]... sous certaines hypothèses bien fortes étaient la principale base de la prévision rationnelle. Depuis ces dernières années, des progrès considérables, liés à la puissance des ordinateurs ainsi qu'aux traitements numériques avancés permettent de développer des outils (simulateurs) plus sophistiqués pour la prévision de la qualité, ou bien encore pour approcher une conception optimisée. Notre recherche a été motivée dans cette direction.

Ce travail consiste principalement en trois parties :

1. La détonation des explosifs
2. La modélisation de la fracturation des roches
3. L'optimisation des tirs

Partie I

Détonation des Explosifs

Chapitre 2

Introduction

L'idée de dégager de l'énergie thermique à partir de réactions chimiques remonte aux origines de l'humanité mais celle de dégager de l'énergie mécanique à partir de réactions chimiques n'est apparue que récemment. C'est vers 1630 que la poudre noire (inventée par les chinois dès nos premiers siècles) est pour la première fois utilisée pour ses vertus «brisantes» dans une exploitation minière en Hongrie. En 1846, le chimiste italien A. Sobrero découvrit un nouveau produit, la nitroglycérine, qui a des propriétés différentes de celles de la poudre noire. Même en faible quantité ou/et sans confinement, ce produit liquide explose bien plus violemment. Cette découverte montra un nouveau processus d'explosion des substances : la détonation. Une dizaine d'années après, A. Nobel mit au point un nouveau type d'amorçage qui déclenchait l'explosion de la nitroglycérine par percussion ou brusque augmentation de pression : l'onde de choc (détonateur). Les divers détonateurs et explosifs détonants étaient ensuite développés par lui et ses continuateurs.

La modélisation de ce phénomène complexe fondée sur une théorie physico-chimique progresse beaucoup moins rapidement que ses diverses applications.

Dans cette partie, nous commencerons brièvement par une introduction des notions concernant les substances explosives, leurs classifications et leurs caractéristiques, ainsi que de la théorie de l'onde de choc dans un fluide quelconque. Ensuite, nous expliquerons la théorie de la propagation de la détonation. Enfin, nous ferons une synthèse sur des simulations numériques de la détonation notamment de celles que nous retiendrons pour notre problème.

Cette partie est extraite des travaux élaborés par des chercheurs du CEA, particulièrement des ouvrages de Chéret [Che88].

Chapitre 3

Notions générales sur les explosifs

3.1 Substances explosives

Une substance est explosive si sous l'influence de la chaleur ou d'une action mécanique particulière elle est susceptible de se transformer très rapidement en produisant un grand volume de gaz porté à haute pression.

La transformation est une *combustion*, c'est à dire un phénomène chimique de décomposition.

Trois cas courants conduisent à des substances explosives :

1. Un mélange intime d'un combustible accepteur d'oxygène et d'un comburant susceptible d'apporter facilement cet oxygène. e.x. cas de la "poudre noire"
2. Des composés exothermiques dont l'édifice moléculaire associe des éléments réducteurs (carbone, hydrogène) à des éléments oxygènes. L'édifice peut être détruit par toute excitation mécanique ou calorifique et la combustion sera totale en quelques fractions de seconde. De tels phénomènes de combustion interne entre groupements porteurs d'oxygène (e.x. NO_2) et des éléments facilement oxydables sont à l'origine de la plupart des molécules explosives.
3. On utilise quelquefois, des composés définis endothermiques qui libèrent l'énergie de formation de la molécule.

3.2 Classification des explosifs

Les classifications des explosifs ne sont pas strictes; on cite ci-dessous trois sortes de classifications.

- Par applications :
 1. explosifs militaires (presque toujours corps purs brisants)
 2. explosifs commerciaux
- Par état de phases initiaux :
 1. explosifs gazeux

2. explosifs liquides

3. explosifs solides

Les explosifs utilisés en génie civil sont souvent des explosifs chimiques commerciaux. On distingue deux types de décomposition des explosifs chimiques :

1. Déflagration

La combustion thermique, avec un rôle majeur, se propage par conduction thermique dans le matériau. La réaction chimique de décomposition est plus lente que le transfert thermique.

2. Détonation

La décomposition explosive se propage à la fois avec l'onde de choc et par la réaction de combustion.

Les explosifs chimiques sont encore de deux types :

1. explosif primaire (amorçage)

Un ensemble métastable (sensible) qui sous une faible énergie extérieure, atteint tout de suite le régime de la détonation. (il est presque toujours amorcé par ignition).

2. explosif secondaire

Sa détonation n'est amorcée que par la détonation d'un autre explosif (primaire) e.x. le T.N.T. ou pentrite.

Les explosifs chimiques (commerciaux) de détonation sont fréquemment utilisés en génie civil, parmi eux, on trouve les deux types d'explosifs traditionnels :

1. Les dynamites :

Ce sont des mélanges contenant de la Nitroglycérine (10% ~ 90%)

2. Les explosifs nitratés :

Ce sont des mélanges renfermant un pourcentage important de Nitrate d'Ammonium et de sensibilisants.

Dans la suite de ce texte, nous ne nous intéresserons désormais qu'au cas de la détonation des explosifs chimiques commerciaux.

Rq: Cette classification est très schématique car le mode de décomposition d'une substance explosive est en général fonction de l'excitation à l'origine de cette décomposition.

La différence entre la déflagration et la détonation sera présentée plus précisément dans le rappel sur la théorie de détonation.

3.3 Détonation des explosifs

Le processus de la détonation peut être décrit ainsi :

L'explosif est perturbé par une onde de choc (ou par la chaleur) qui le chauffe avec une grande pression, la réaction chimique est donc déclenchée ; cela dégage un grand volume de gaz porté à haute température et conduit à la formation de l'onde de détonation . L'explosif se consume alors 10^3 à 10^8 fois plus vite que dans le cas d'une combustion ; le processus est supposé souvent comme un processus *adiabatique*.

Le schéma de la propagation de détonation est considéré comme la résultante d'une

Onde de choc et d'une Onde de combustion.

Trois caractéristiques importantes sont à souligner dans le processus de détonation :

- a) La réaction chimique est souvent exothermique
- b) La vitesse de la propagation de la détonation est de l'ordre de 10^3 à 10^4 m/s tandis que le temps de la décomposition d'un édifice de 1cm est de l'ordre de 10^{-5} à 10^{-6} s.
- c) La réaction chimique produit un grand volume de gaz.

3.4 Caractéristiques des explosifs

Les explosifs peuvent être caractérisés par :

- 1. La densité ρ_e
- 2. La vitesse de détonation D
- 3. L'énergie dégagée des explosifs E_e

La valeur d'énergie est estimée au moyen de différents tests telles que :

CUP (Coefficient d'Utilisation Pratique)

On fait détoner dans des blocs de plomb et l'on compare l'évasement provoqué avec celui de référence : $CUP = 100 \cdot 15 / m_e$; m_e est la masse d'explosif nécessaire pour obtenir le même évasement que celui obtenu avec 15g d'acide picrique.

TMB (Tavelle au Mortier Balistique)

$$TMB = 100(1 - \cos\alpha_e) / (1 - \cos\alpha_m) ;$$

α_e, α_m étant respectivement les angles de recul du pendule avec 10g d'explosif testé et 10g de mélinite de référence.

Ces méthodes ne donnent que des valeurs relatives de l'énergie des explosifs testés ; de plus, seule l'énergie des gaz est évaluée dans le TMB.

Tir en immersion

Une charge tirée dans l'eau génère une onde de choc et un volume de gaz qui oscille autour de sa position d'équilibre. On mesure :

i) l'énergie de choc par unité de masse (J/kg) :

$$E_c = \frac{4\mu\pi r^2}{m_c \rho_0 c_0} \int p^2(t) dt \quad (3.1)$$

où :

m_c : masse de la charge

r : distance charge-capteur

ρ_0 : masse volumique de l'eau

p : pression

c_0 : vitesse du son dans l'eau

$\mu(\rho, D)$: coefficient d'absorption d'énergie de choc par l'eau

ii) l'énergie de gaz par unité de masse (J/kg) :

$$E_g = \frac{1}{1.14^3 m_c} \frac{p_h^{\frac{5}{2}}}{\rho_0^{\frac{3}{2}}} t_b^3$$

où :

p_h : pression hydrostatique à la profondeur d'immersion de la charge (Pa)

t_b : première pseudo-période d'oscillation de la bulle gazeuse (s)

L'énergie totale de la détonation est alors simplement :

$$E_e = E_c + E_g$$

4. Le diamètre critique de détonation ϕ_c

qui est le diamètre minimal pour que l'onde de détonation puisse se propager.

5. La sensibilité à l'amorçage S

définie par l'énergie de choc qui donne lieu à une probabilité d'explosion de 50%

6. Il est aussi possible de prendre Q_v , énergie de chaleur dégagée à volume constant, comme une des caractéristiques des explosifs.

R.q: La définition générale de l'énergie de choc [R⁺93] est l'énergie dégagée pendant l'amorçage de détonation jusqu'au moment où l'extension du trou de charge atteint sa valeur maximale. Sa valeur dépend non seulement des caractéristiques des explosifs mais aussi du milieu adjacent.

L'explosif qui a un rapport E_c/E_g relativement petit est intéressant pour certaines opérations en génie civil, puisqu'il provoque une zone endommagée réduite autour du champ d'opération sans diminuer le travail à effectuer.

Au niveau du calcul, ρ_e , D , E_e sont les facteurs les plus importants. Normalement, des valeurs élevées signifie que l'explosif est plus brisant. Dans le chapitre suivant, on comprendra mieux leur signification.

On donne les principales caractéristiques des explosifs commercialisés en France dans le tableau (3.1), avec les abréviations suivantes :

H	:	humidité	F	:	froid	C	:	chaud
—	:	non mesurable						
?	:	non déterminé						
B	:	bonne	M	:	moyenne,	D	:	douteuse
CSE	;	coefficient	de		auto excitation			

Type	ϕ_c	ρ_e	D	CFE	Energie			Résistance		
d'explosif	mm		m/s	cm	CUP	TMB	E_e	H	F	C
DYNAMITES GOMMES										
GommeBAM										
Sofranex		1.4	3000	5	130	125	3000	B	M	D
GommeF15	< 30	à	à	à	à	à	à			
GommeC1~2		1.5	7000	15	145	145	5000			
Titadyn25,40										
DYNAMITES PULVERULENTES										
Minex F13S		1.0	1500	2	40	40	1500	M	M	D
GC 16	< 30	à	à	à	à	à	à			
GC 20		1.2	3000	5	110	115	3000			
NITRATES										
N31R		1.0	3500	3	80	80	3000	M	B	M
N40R	< 30	à	à	à	à	à	à			
N7bis		1.15	4500	6	140	130	4000			
NITRATES FIOULS ORDINAIRES										
D7 fioul	50					110		D	B	M
	à	0.8	3000	—	—	à	2700			
Anfotitel	55					125				
NITRATES FIOULS A L'ALUMINIUM										
Nitral	25		3000			120		D	B	M
N135	à	0.9	à	—	—	à	3000			
Anfotite	50		3500			130				
GELS										
Sigma6										
Sigma605		1.15	3500	3		90	3000	B	M	M
Gelsurite2000	< 30	à	à	à	—	à	à			
Gelsurite3000		1.4	4000	7		120	4000			
Titagel1000										
Irémite85,110										
Sigma8	40	1.1	3800			110		B	M	M
Sigma85,89	à	à	à	—	—	à	?			
Sigma89A	65	1.4	4500			120				
EMULSIONS										
GelsuriteE1	20		4500					B	M	M
GelsuriteEP1	à	1.3	à	—	—	105	2900			
Emultitel100	40		5500							
NITRATES FIOULS ALOURDIS										
Gemulsite	40	1.0	2800			100		M	M	M
Emultite35	à	à	à	—	—	à	2900	à		
Anfogel	90	1.3	3000			120		B		

Tableau 3.1 Différents types d'explosifs commerciaux

Chapitre 4

La théorie de la détonation des explosifs

Le phénomène de la propagation de détonation est extrêmement complexe :

En premier lieu, il s'agit d'un processus physico-chimique d'interaction fortement non linéaire où les calculs théoriques sont intrinsèquement impossibles.

En second lieu, la détonation fait intervenir deux échelles spatiales très différentes. La région où se produisent les réactions chimiques critiques à l'intérieur de l'explosif ou *zone de réaction* est en général de 100 à 1000 fois plus petite que la zone où les produits de détonation libèrent leur énergie. Cependant, la façon dont les produits de détonation transfèrent leur énergie au matériau inerte environnant, influe sur la propagation des réactions chimiques explosives et implique qu'il est difficile d'étudier les deux mécanismes séparément.

En troisième lieu, on connaît mal les propriétés physiques et chimiques des matériaux soumis à des températures et pressions extrêmement élevées comme celles qui règnent au moment de la détonation (relation entre les variables d'état et façon dont le mélange réagit pour former de nouvelles entités chimiques).

Récemment, grâce aux progrès de l'analyse théorique, des méthodes numériques avancées et des techniques de mesure, nos connaissances se sont cependant améliorées.

Au *XIX^e* siècle, les chercheurs qui étudiaient les gaz explosifs avaient remarqué que la propagation d'une onde de détonation dans un gaz était semblable à celle d'une onde de choc que nous allons rappeler brièvement.

4.1 Onde de choc dans un fluide

4.1.1 Expressions mathématiques fondamentales pour une onde de choc

En absence de couple volumique, dans un domaine $\mathcal{D}$ arbitraire du système ψ , la conservation de la masse, de la quantité du mouvement et de l'énergie, ainsi que le second principe de la thermodynamique s'écrivent classiquement :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho dV &= 0 \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho \vec{u} dV &= \int_{\partial \mathcal{D}} \vec{T} dS + \int_{\mathcal{D}} \vec{f} dV\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho(e + \vec{u}\vec{u}/2) dV &= \int_{\partial\mathcal{D}} (\vec{u}^t \boldsymbol{\sigma} - \vec{q}) \vec{n} dS + \int_{\mathcal{D}} (\vec{u} \vec{f} + \ell) dV \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho s dV &\geq \int_{\mathcal{D}} \frac{\ell}{T} dV - \int_{\partial\mathcal{D}} \vec{q} \vec{n} dS\end{aligned}$$

soit encore sous forme locale :

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{u} &= 0 & \| \rho \vec{u} \vec{N} \| &= 0 \\ \rho \frac{d\vec{u}}{dt} &= \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \vec{f} & \| M \vec{w} - \boldsymbol{\sigma} \vec{N} \| &= 0 \\ \rho \frac{de}{dt} &= \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \operatorname{div} \vec{q} + \ell & M \| e + \vec{w} \vec{w} / 2 \| &= \| \vec{w}^t \boldsymbol{\sigma} - \vec{q} \| \vec{N} \\ \rho \frac{ds}{dt} + \operatorname{div} \left(\frac{\vec{q}}{T} \right) - \frac{\ell}{T} &\geq 0 & \| M s + \vec{q} \vec{N} \| &\geq 0\end{aligned}\tag{4.1}$$

où :

les variables sont continues dans $\psi(t)$ sauf éventuellement sur une surface mobile Σ , de normale $\vec{N}$; $\vec{\delta}$ désigne la célérité de propagation de Σ (si $t = f(\vec{x})$ est l'équation de Σ , alors $\vec{\delta} = \operatorname{grad}(f)/|\operatorname{grad}(f)|^2$) ; $\vec{u}$ est le vecteur *vitesse* de la <particule>; le vecteur $\vec{w} = \vec{u} - \vec{\delta}$ est la vitesse d'une <particule> de ψ relativement à Σ ; $M = \rho_0 w_0 = \rho_1 w_1$; et $\mathbf{D} = \operatorname{grad}(\vec{u})$;

Les relations de saut sur Σ sont les expressions essentielles pour l'onde de choc.

Dans le cas d'un «fluide parfait», on a de plus :

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} \text{ et } q_i = 0\tag{4.2}$$

Désignant par les indices 0, 1 les points de part et d'autre de la discontinuité, en exprimant le vecteur $\vec{w}$ dans le repère local de Σ , i.e. $\vec{w} = (w \vec{N}, w_\tau \vec{\tau})^t$ et en éliminant $M = \rho_1 w_1 = \rho_0 w_0$, les relations de saut deviennent :

$$\begin{aligned}w_{\tau 1} - w_{\tau 0} &= 0 \\ w_1^2 &= v_1^2 \frac{p_1 - p_0}{v_0 - v_1} \\ w_0^2 &= v_0^2 \frac{p_1 - p_0}{v_0 - v_1} \\ e_1 - e_0 &= \frac{1}{2} (p_0 + p_1) (v_0 - v_1)\end{aligned}\tag{4.3}$$

Il est possible d'écrire encore :

$$p_1 - p_0 = M^2 (v_1 - v_0)$$

Cette équation décrit l'état équilibre sur Σ , dans le plan (p, v) , cela représente une ligne droite dite droite de Rayleigh :

$$R \equiv p - p_0 - M^2 (v - v_0) = 0$$

La dernière équation du (4.3) décrit la condition adiabatique. Dans le plan (p, v) , associée à une équation d'état, elle représente une courbe dite courbe de Hugoniot :

$$h \equiv e - e_0 - \frac{1}{2}(p_0 + p)(v_0 - v) = 0$$

Etant donné l'état 0, l'état 1 sera déterminé par le point d'intersection de la courbe de Hugoniot et la droite de Rayleigh.

4.1.2 Propriétés de la courbe de Hugoniot (h)

La courbe de Hugoniot (h) représente l'état perturbé par une onde de choc. On désigne l'état amont par celui des états 1 et 0 de plus faible entropie ; l'autre s'appelle l'état aval.

L'étude de (h) pour une équation d'état arbitraire a été faite par Bethe[Bet42]. On rappelle ci-dessous les principaux résultats.

- a) – le long de (h), l'entropie aval s_1 est une fonction monotone croissante de w_0 ;
- La célérité normale w_0 est égale à la célérité du son a_0 ($a^2 = -v^2 \frac{\partial p}{\partial v}(v, s)$) au point (v_0, s_0) ;
- (h) et l'isentropique de l'état 0 ont un contact d'ordre 3 au point (v_0, s_0) ;

Les propriétés ci-dessus découlent les propriétés fondamentales suivantes :

- En amont, la célérité normale est plus grande que la célérité du son;
- En aval, la célérité normale est plus petite que la célérité du son;

b) avec les inégalités :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}(v, s) > 0 \quad (4.4)$$

$$v \frac{\partial p}{\partial e}(v, e) > -2. \quad (4.5)$$

Bethe a démontré que la courbe continue de (h) dans le plan (v, s) est définie pour toute valeur de s supérieure ou égale à une valeur $\tilde{s} < s_0$. Le résultat montre en particulier que :

- L'état aval est plus dense que l'état amont;

Avec l'inégalité supplémentaire :

$$\frac{\partial p}{\partial v}(v, e) < 0 \quad (4.6)$$

il a démontré encore que le long de (h) :

- e est une fonction monotone croissante de $s \in [\tilde{s}, +\infty]$
- p est une fonction monotone croissante de $s \in [s_0, +\infty]$
- p reste inférieure à p_0 pour $s < s_0$

ce qui conduit à :

– *La pression dans l'état aval est plus forte que dans l'état amont.*

Supposons donné l'état amont ainsi que la célérité normale à l'amont (nécessairement plus grande que la célérité du son à l'aval). Considérons l'entropie aval, comme elle est liée à la célérité normale amont par une relation monotone croissante, elle se trouve déterminée sans ambiguïté par les données initiales. A l'aval, le volume massique, la pression et l'énergie interne massique le sont également, puisque toutes les variables d'état sont les fonctions monotones de l'entropie. D'où la conclusion :

Lorsque les trois conditions (4.4),(4.5),(4.6) sont vérifiées, la donnée de l'état amont et la célérité normale amont déterminent sans ambiguïté l'état aval.

Géométriquement, cela est équivalent à :

La droite de Rayleigh coupe la projection de (h) sur le plan (v,p) en un point et un seul.

4.2 Propagation de l'onde de détonation

4.2.1 Théorie de Chapman-Jouguet

En plus de la transformation physique, la propagation de la détonation marque également une transformation chimique.

En effectuant des recherches sur les explosifs gazeux, Jouguet [Jou17] décrit le schéma de la détonation comme une onde de choc suivie par une onde de combustion :

- Onde de choc au sens de couche de transition mobile, siège d'intenses phénomènes de transport, suffisamment étroite pour être assimilable, pour les besoins du calcul, à une surface de discontinuité de la vitesse matérielle, où ces mêmes phénomènes de transport sont négligeables.
- Onde de combustion au sens que le mélange étant «à réaction vive, où nous avons dit qu'on pouvait observer des réactions pratiquement instantanées», la composition chimique varie elle aussi instantanément à la traversée de la surface.

Chapman[Cha99] et Jouguet ont imposé une condition de plus sur l'état des produits explosifs.

Jouguet montre que la vitesse minimale de l'onde de détonation correspond à la vitesse d'une onde sonore se propageant dans les produits de détonation chauds, comprimés et en mouvement. Il a tenté d'expliquer physiquement l'hypothèse de Chapman selon laquelle une onde de détonation stable se propage dans les conditions imposées par la vitesse minimale de détonation ; dès qu'une onde de détonation tend à se propager à une vitesse plus grande que cette vitesse minimale sous l'impulsion d'onde de choc suffisamment violente, une onde de raréfaction se propage à travers l'explosif, rattrape l'onde de détonation et la ralentit.

L'étude sur les relations de saut demande l'introduction des nouvelles variables pour décrire la transformation chimique.

Courbe de Crussard

L'hypothèse de Jouguet implique que, dans une onde réactive, le fluide parfait subit une modification discontinue de son état physique et de son identité chimique. Deux variables scalaires ne suffisent plus à le décrire dans l'écoulement. A priori on pourrait songer à introduire, en plus du vecteur $\mathbf{q}$ à deux dimensions qui décrit l'état physique, le vecteur $\mathbf{N}$ à Λ dimensions qui représente les concentrations des Λ espèces chimiques présentes dans tout l'écoulement. Toutefois, dans le cas où l'on suppose que l'onde sépare un milieu de composition dit *amont* et un milieu $\mathbf{N}_1$ en équilibre chimique dit *aval*, on peut simplifier la représentation du fluide en généralisant la notion de degré d'évolution chimique de Von Neuman, plus précisément en supposant qu'il existe une variable d'état m telle que :

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_0 + m [\mathbf{N}_1(\mathbf{q}) - \mathbf{N}_0]$$

La discontinuité de l'onde réactive est représentée donc par la discontinuité de $(\mathbf{q}, m)$.

On définit une courbe sur la surface $(\mathcal{D})$ des états d'équilibre chimique des *produits* de détonation, dit la courbe de Crussard par :

$$H \equiv e - e_0 - \frac{1}{2}(p - p_0)(v_0 - v)$$

où l'indice 0 représente l'état de la substance réactive avant réaction.

La conservation de la masse nous donne :

$$M = \rho_0 w_0 = \rho w = \sqrt{\frac{p - p_0}{v_0 - v}} \quad (4.7)$$

La distinction mathématique entre la détonation et la déflagration est la suivante :

- La partie où $p \geq p_0$ s'appelle l'arc de détonation (H_+) ;
- la partie où $p \leq p_0$ s'appelle l'arc de déflagration (H_-) ;

Propriétés de l'arc de détonation (H_+)

Points de Chapman-Jouguet sur (H_+) La condition de Chapman-Jouguet définit le point de C.-J. où :

$$w = a \equiv v \sqrt{-\frac{\partial p}{\partial v}(v, s)} \quad (4.8)$$

elle est équivalente à $\frac{\partial p}{\partial v}(v, s) + M^2 = 0$.

On a les propriétés du point de C.-J. sur (H_+) :

1. Dans le plan (p, v) , points de C.-J. sont les points de contact des tangentes issues de (v_0, p_0) à la projection de (H) .
2. A l'aide des formules des potentiels thermodynamiques, des relations différentielles sur (H) et sous les hypothèses de Hayes ((4.4), (4.6) et $\frac{\partial p}{\partial e}(v, e) > 0$), la détonation C.-J. sur (H_+) vérifie :
 s, M aux points de C.-J. prennent les valeurs minimales sur (H_+) .

Points à l'infini Si A désigne le point de $(\mathcal{D})$ défini par $(v_A = v_0, p_A = p_0)$, physiquement, on a l'inégalité : $e_A - e_0 \neq 0$, autrement dit, A est hors de (H) .

La courbe de Hugoniot (h^D) d'un point $D \in (\mathcal{D})$ est définie par :

$$h^D \equiv e - e_D - \frac{1}{2}(p + p_D)(v_D - v) = 0$$

Le point courant a de (h^A) et sa puissance analytique $H(a)$ s'écrit :

$$H(a) = e_A - e_0$$

B désigne le point de (H) défini par $(v_B = v_0, e_B = e_0)$. Le point courant b de (h^B) et sa puissance analytique $H(b)$ s'écrit :

$$H(b) = \frac{1}{2}(p_B - p_0)(v_0 - v_b)$$

Avec l'hypothèse $\frac{\partial p}{\partial e}(v, e) > 0$, le point B vérifie :

$$\frac{p_B - p_0}{e_A - e_0} < 0 \quad (4.9)$$

On peut donc déduire que (H_+) est compris entre (h^A) et (h^B) .

Intersection de (H) et de (R_μ^0) Considérons un point D quelconque de (H) , et supposons que l'intersection de (H) et de (R_μ^0) ne soit pas vide et que D en soit le point de plus faible densité, on peut montrer que l'intersection de (H) et de (R_μ^0) doit être l'un des quatre cas suivants :

1. $(H) \cap (R_\mu^0)$ comprend, en plus de D , un point D' distinct de D .

Alors, on a nécessairement $\rho_{D'} > \rho_D$, $w_D > a_D$,

donc aussi $(s, \rho, e, p)_{D'} > (s, \rho, e, p)_D$; $w_{D'} < a_{D'}$.

2. $(H) \cap (R_\mu^0)$ se compose de points confondus en D .

Alors, on a $w_D = a_D$; le point D est un point de C.-J.

3. $(H) \cap (R_\mu^0)$ ne comprend pas d'autre point que D .

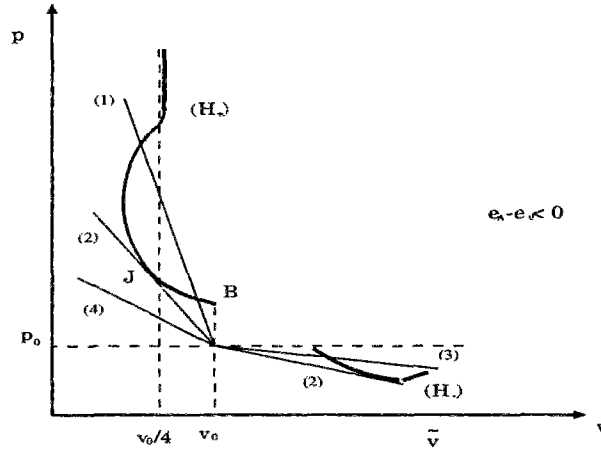
Alors, on a nécessairement $w_D < a_D$.

4. $(H) \cap (R_\mu^0)$ ne comprend aucun point.

Le schéma est dans la figure (4.1) :

En particulier lorsque $\mu \rightarrow \infty$, les points $B(v_0, p_B)$ et $C(v_0/4, +\infty)$ d'intersection de (H) et de (R_μ^0) sont tels que :

$$w_B > a_B, w_C < a_C \quad (4.10)$$

Figure 4.1 Intersections de (H) et de (R_μ^0)

Condition nécessaire et suffisante d'existence et l'unicité de la détonation de C.-J. On peut montrer que :

- la condition nécessaire et suffisante d'existence de la détonation de C.-J. est que (H_+) n'ait aucun point tel que :

$$p = p_0.$$

L'intersection de (H) et de $p = p_0$ est définie par :

$$f(v) = e(v, p_0, 1) - e(v_0, p_0, 0) - p_0(v_0 - v) = 0$$

et $f'(v) = \frac{\partial e}{\partial v}(v, p_0, 1) + p_0 = \left[T \frac{c_p c_v}{c_p - c_v} \frac{\partial p}{\partial e}(v, e, 1) \right]_{p=p_0}$ est positif si bien le maximum de $f(v)$ dans l'intervalle $v < v_0$ est $f(v_0) = e_A - e_0$; par conséquent, pour qu'il existe au moins une détonation C.-J., il faut et il suffit que $e_A - e_0 < 0$, c'est à dire :

$$e(v_0, p_0, 1) < e(v_0, p_0, 0) \quad (4.11)$$

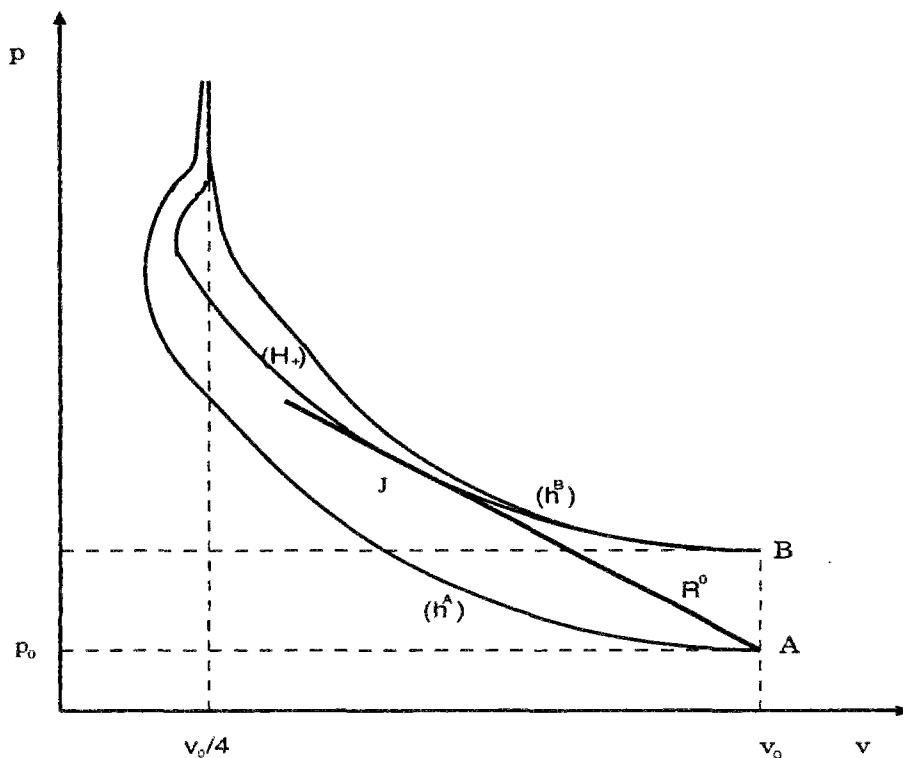
- le point de C.-J. est un point unique J de la détonation C.-J.

De ce qui précède, on peut aussi retenir que $w < a$ sur l'arc [CJ] dit des détonations fortes, et $w > a$ sur l'arc [BJ] dit des détonations faibles.

Enfin, la valeur D_{cj} de w_0 , par (4.7), est la plus petite valeur que puisse prendre w_0 sur (H_+) .

- La condition $a(v_0, p_0, 1) > a(v_0, p_0, 0)$ est suffisante pour que D_{cj} soit supérieure à la célérité du son dans la substance réactive initiale, et donc que toute détonation soit supersonique relativement à l'amont.

Les courbes schématisées sur le plan (p, v) sont représentées dans la figure (4.2)

Figure 4.2 Courbes dans plan (p, v)

4.2.2 Discussions sur la théorie de Chapman-Jouguet

Résultats expérimentaux

La caractéristique mesurée de la détonation, la plus courante et la plus importante, est la vitesse de la propagation de détonation D . Selon la géométrie de l'éprouvette explosive, soit un tube du diamètre d (ou une cartouche) soit une sphère du rayon r (de mesure plus difficile), il se produit soit une onde plane ($\Sigma \simeq$ surface plane) soit une onde sphérique ($\Sigma \simeq$ surface sphérique).

On rappelle ici seulement trois observations sur D :

1. En fonction de d

La célérité D^P des ondes planes peut être approchée par une relation linéaire en $1/d$ de la forme

$$D^P = D_{(d \rightarrow \infty)}^P \left(1 - \frac{a}{d}\right), \quad a > 0$$

où a est une longueur dont la valeur dépend à la fois du milieu réactif et du milieu adjacent.

Il existe une valeur minimale de d (diamètre critique) pour que la détonation puisse se propager.

2. En fonction de r

La célérité D^S des ondes sphériques tend vers une limite $D_{(r \rightarrow \infty)}^S$

3. En fonction de la distance de l'amorçage L (onde plane)

Le résultat est souvent comme indiqué sur la figure (4.3) :

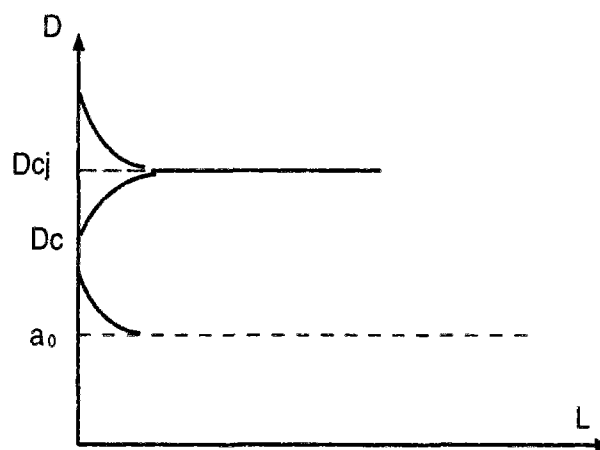


Figure 4.3 Vitesse de détonation

Il existe une vitesse critique D_c à partir de laquelle la détonation peut se propager. ($D_c > a_0$, vitesse du son dans son état initial)

Il existe aussi une période où la vitesse de détonation n'est pas stationnaire.

En ce qui concerne des explosifs en génie civil (moins brisants), la variation de la vitesse de détonation et l'écart à la condition de C.-J. sont encore plus importantes.

Interprétation des résultats

En raison de la précision des équipements de mesures de l'époque, une vitesse de détonation mesurée non constante était considérée comme une erreur expérimentale.

Aujourd'hui, la validité de la théorie de Chapman-Jouguet est remise en question, car elle ne rend pas clairement compte des phénomènes physiques. La condition de C.-J. signifie que la propagation de l'onde explosive est indifférente aux conditions aux limites en arrière (quel que soit le mode d'amorçage). Des observations plus récentes montrent qu'il existe une zone de réaction chimique juste à l'arrière du front du choc donc une réaction chimique non instantanée qui dépend naturellement de l'état physique du milieu concerné ; Zeldovich, Neumann et Doering conçoivent la première explication physique de l'initiation des réactions chimiques par l'onde de choc et du transfert d'énergie à l'ensemble des produits de détonation dit modèle de Z.N.D.[FD79], Selon eux, juste derrière l'onde de choc, l'explosif se trouve dans un état tel qu'aucune réaction chimique n'a encore eu lieu, plus en arrière, à la limite de la zone de réaction, l'explosif a atteint un état dans lequel l'équilibre chimique est atteint ; entre l'onde de choc et l'extrémité de la zone de réaction il existe une graduation d'état où l'explosif a partiellement réagi, c.à.d. une zone de réaction qui est le siège d'une succession d'états chimiques d'équilibres.

Le processus de détonation est décrit comme sur la figure suivante (voir la figure 4.4) :

Perturbé par l'onde de choc, l'explosif passe brutalement de l'état initial 0 à l'état Z, au point Z, la réaction chimique commence et passe sur la droite de Rayleigh (R) jusqu'à l'état de C.-J.. Pendant ce temps, la pression diminue de P_Z à P_{cj} .

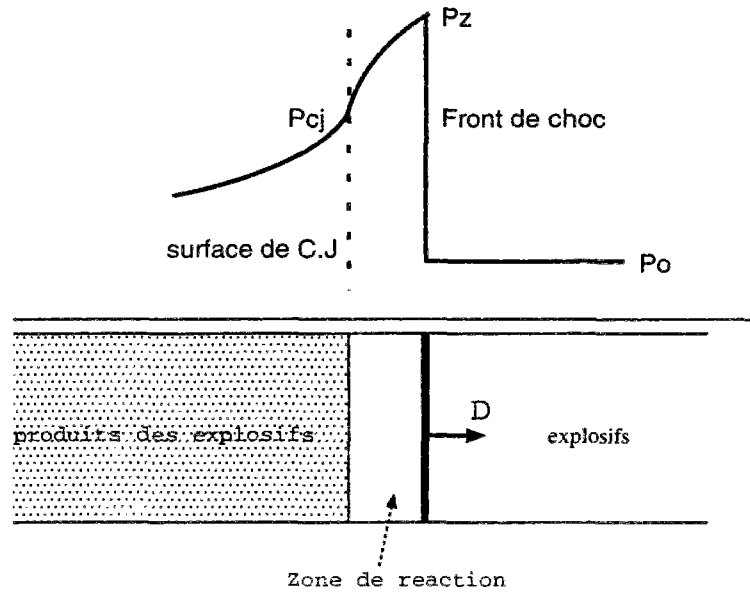


Figure 4.4 Modèle de Z.N.D.

Dans la partie suivante du texte, la détonation est considérée comme une zone de forts gradients dans un *fluide réactif dissipatif* et on analyse cette zone par la méthode des développements asymptotiques.

4.2.3 Zone de la réaction

Suivant l'idée de Germain & Guiraud [GG66] qui ont étudié les ondes de choc en considérant les effets dissipatifs comme une perturbation singulière du modèle de Hugoniot en fluide parfait, la détonation est considérée comme une zone de forts gradients dans un fluide réactif dissipatif de Navier-Fourier.

Evolution des espèces chimiques

On admet l'existence d'un état d'équilibre thermodynamique local $\mathbf{q}$ en tout point de l'écoulement.

On suppose aussi que la transformation chimique est une réaction d'ordre zéro du type $\mathcal{E}_0 \rightarrow \mathcal{E}$ telle que

$$\frac{dx}{dt} = (1 - x)S(\mathbf{q}, x)$$

où $x \in [0, 1]$ désigne la fraction massique de $\mathcal{E}$ en chaque point de l'espace à instant t . En admettant l'existence d'une variable d'état $m \in [0, 1]$

- telle que la composition chimique $\mathbf{N}$ soit déterminée en fonction de $(\mathbf{q}, m)$ par la relation :

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_0 + m [\mathbf{N}_1(\mathbf{q}) - \mathbf{N}_0]$$

- régie par une loi de la forme :

$$\frac{dm}{dt} = (1 - m)S(\mathbf{q}, m) \quad (4.12)$$

Les propriétés de S sont associées à la condition d'amorçage de la réaction chimique, telles que

- il existe un voisinage V de $\mathbf{q}_0$ tel que $S(\mathbf{q}, m) = 0$ pour $\mathbf{q} \in V$
- $S(\mathbf{q}, m) > 0$ pour $m \in]0, 1]$

La condition du type $S(s, m)$ est adaptée pour la détonation et celle du type $S(T, m)$ est adaptée pour la déflagration.

Solution du Système d'équations en nouvelles variables locales

Le système d'équations contient maintenant les équations de conservation d'un fluide dissipatif de Navier-Fourier ($\mathbf{\Pi} \neq \mathbf{0}$) et l'équation de la loi de l'évolution chimique. En développant les dérivées particulières de façon à séparer les dérivations par rapport aux variables d'espace et celle par rapport au temps, pour le cas où $f_i = l = 0$, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 \\ \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p \mathbf{1} + \mathbf{\Pi}) &= 0 \\ \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla s + \frac{v}{T} [\nabla \cdot \mathbf{q} + \text{tr}(\mathbf{\Pi} \cdot \nabla \mathbf{u})] &= 0 \\ \frac{\partial m}{\partial t} &= (1 - m)S(\mathbf{q}, m) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Les changements de variables sont effectués pour faciliter l'analyse :

1. Changement de variables (x_1, x_2, x_3, t) aux variables d'Euler $(z\vec{N}, \xi'\vec{N}', \xi''\vec{N}'', t)$ où $\vec{N}, \vec{N}', \vec{N}''$ sont respectivement la direction normale et les directions principales de $\Sigma(t)$.
2. Introduction de variables sans-dimension pour les
 - trois caractéristiques principales :
 $\tilde{L}, \tilde{D}, \tilde{p}$ qui mesurent la portée des perturbations par dissipation d'origine thermo-mécanique;
 - deux caractéristiques secondaires :
 L, L' qui mesurent la portée des perturbations par écart à l'équilibre chimique.

3. Introduction d'une variable indépendante interne :

Le paramètre de perturbation choisi est $\varepsilon = L/\tilde{L}$ ($L'/\tilde{L}$ n'est pas retenu parce que $L' \ll L$ durant la détonation); une variable indépendante interne est définie par : $\zeta = Z/\varepsilon = z/L$.

Avec les notions et définitions introduites plus haut, une solution approchée à l'ordre $0(\varepsilon)$ près du système d'équations, au voisinage d'une onde de détonation, peut être résumée sous la forme :

en désignant par $\mathbf{q}$ l'état d'équilibre thermodynamique local et par $\mathbf{Y}$ le vecteur $(\mathbf{u}, \mathbf{q}, m)$, on cherche

une solution $\mathbf{Y}^{(0)}(\zeta, \bar{\xi}', \bar{\xi}'', \bar{t})$ du système d'équations où $\varepsilon = 0$,

une solution $^{(0)}\mathbf{Y}^-(Z, \bar{\xi}', \bar{\xi}'', \bar{t})$ du système d'équations où $\varepsilon = 0, Z \leq 0$,

une solution $^{(0)}\mathbf{Y}^+(Z, \bar{\xi}', \bar{\xi}'', \bar{t})$ du système d'équations où $\varepsilon = 0, Z \geq 0$,

telle que :

$$\mathbf{Y}^{(0)}(-\infty, \bar{\xi}', \bar{\xi}'', \bar{t}) = ^{(0)}\mathbf{Y}^-(-0, \bar{\xi}', \bar{\xi}'', \bar{t}) = \mathbf{Y}_0(\bar{\xi}', \bar{\xi}'', \bar{t})$$

$$\mathbf{Y}^{(0)}(+\infty, \bar{\xi}', \bar{\xi}'', \bar{t}) = ^{(0)}\mathbf{Y}^+(+0, \bar{\xi}', \bar{\xi}'', \bar{t}) = \mathbf{Y}_1(\bar{\xi}', \bar{\xi}'', \bar{t})$$

où $\mathbf{Y}_0$ est l'état amont de la substance explosive dans le modèle du fluide parfait et $\mathbf{Y}_1$ désigne un état de l'arc de détonation (H_+) de la courbe de Crussard d'origine $\mathbf{q}_0$, sous réserve de prolonger

$^{(0)}\mathbf{Y}^-$ pour $Z > 0$ uniformément par $\mathbf{Y}_0$

$^{(0)}\mathbf{Y}^+$ pour $Z < 0$ uniformément par $\mathbf{Y}_1$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^{(0)} + ^{(0)}\mathbf{Y}^- + ^{(0)}\mathbf{Y}^+ - \mathbf{Y}_0 - \mathbf{Y}_1 \quad (4.14)$$

constitue donc l'approximation recherchée.

Les vecteurs $\mathbf{Y}^{(0)}, ^{(0)}\mathbf{Y}^-, ^{(0)}\mathbf{Y}^+, \mathbf{Y}$ sont respectivement appelés structures interne, externe amont, externe aval, composite de rang 0.

Célérité normale amont approchée

De façon générale, w_0 varie avec la position de la surface $\Sigma(t)$. A priori cette dépendance résulte à la fois :

de l'influence globale des conditions aux frontières de l'écoulement des produits de détonation

de l'influence locale de l'état amont $\mathbf{q}_0(\xi', \xi'', t)$

w_0 varie d'autant moins que la courbure moyenne est plus faible. Ce fait conduit à admettre que $w_0(\xi', \xi'', t)$ peut être généralement approché par :

$$w_0(.) = D^{(0)}[\mathbf{q}_0(.)] + 0(\varepsilon)D^{(1)}[\mathbf{q}_0(.), .]$$

avec

$$D^{(0)}[\mathbf{q}_0(.)] \geq D_{cj}[\mathbf{q}_0(.)]$$

Dans ces conditions, l'état $\mathbf{Y}_1$ à considérer pour la recherche des structures de rang 0 est défini sur (H_+) par $w_0 = D^{(0)}$.

Il faut insister que le cas $D^{(0)} = D_{cj}$ peut survenir alors que w_0 peut être supérieur, égal ou inférieur à D_{cj} ; ce cas, qui sera traité dans la suite, est désigné sous le nom de quasi détonation C.-J., pour montrer qu'il contient celui de la détonation de C.-J. au sens strict ($w_0 = D_{cj}$) mais ne s'y réduit pas.

Structure interne de rang 0

On résume les résultats pour le cas où l'explosif et ses produits de détonation sont traités comme des gaz polytropiques :

1. Dans une détonation forte ($w_1 < a_1$), $(v, T, m)^{(0)}$ atteint *exponentiellement* l'état aval. Dans la détonation quasi C.-J. ($w_1 = a_1$), $(v, T, m)^{(0)}$ atteint l'état aval de façon *hyperbolique* pour v et T , et de façon *exponentielle* pour m .

Ces deux comportements, analytiquement distincts, le sont aussi physiquement dans la mesure où l'approche aval de la détonation forte dépend de la loi cinétique $\mathcal{S}(\mathbf{q}, m)$ alors que l'autre n'en dépend pas.

2. Il est impossible d'avoir une détonation faible, et il apparaît que :

$$w_1 < a_1 \Leftrightarrow D^{(0)} > D_{cj}$$

$$w_1 = a_1 \Leftrightarrow D^{(0)} = D_{cj}$$

Structure externe de rang 0

On introduit la notion d'une *détonation simple* qui apparaît dans tous les cas expérimentaux courants, si les conditions suivantes sont vérifiées :

- l'état amont est uniforme

on a donc :

$$\frac{\partial \mathbf{Y}_1}{\partial \xi'} = \frac{\partial \mathbf{Y}_1}{\partial \xi''} = \frac{\partial \mathbf{Y}_1}{\partial t} = 0$$

- l'état amont est au repos

on a donc :

$$W_{r1} = 0$$

Les résultats pour la détonation simple sont donnés dans le tableau (4.1).

Détonation	Forte	Quasi C.J.
$\frac{u-u_1}{u} =$	$\frac{2a_1^2}{a_1^2 - w_1^2} \frac{Z}{R_m} + 0\left(\frac{Z}{R_m}\right)$	$\pm \sqrt{\beta_1} \frac{Z}{R_m} + 0\left(\frac{Z}{R_m}\right)$
$\frac{v-v_1}{v} =$	$\frac{2u_1 v_1}{a_1^2 - w_1^2} \frac{Z}{R_m} + 0\left(\frac{Z}{R_m}\right)$	$\pm 2 \frac{u_1}{a_1} \sqrt{\beta_1} \frac{Z}{R_m} + 0\left(\frac{Z}{R_m}\right)$

Tableau 4.1 Détonation simple de la structure externe

où $\frac{1}{R_m} = \frac{1}{R'} + \frac{1}{R''}$ est la courbure moyenne.

Structure composite de rang 0 d'une détonation simple

Avec la définition de la détonation simple, la solution de la structure composite de rang 0 (4.14) se réduit à :

$$\mathbf{Y}(z, \xi', \xi'', t) = \mathbf{Y}^{(0)}\left(\frac{z}{L}\right) + {}^{(0)}\mathbf{Y}^+\left(\frac{\xi'}{\bar{L}}, \frac{\xi''}{\bar{L}}, \frac{\bar{D}t}{\bar{L}}\right) - \mathbf{Y}_1$$

On définit aussi une *détonation autonome* par :

la propagation de détonation est assurée par le seul dégagement d'énergie chimique à l'exclusion de toute onde de compression remontant l'écoulement des produits jusqu'au choc igniteur.

Les résultats aux voisinage de l'état aval montrent alors que :

- La représentation des résultats contient bien des termes affectés par la dissipation thermo-mécanique.
- La détonation quasi C.-J. ne peut en aucune façon être considérée comme la limite de la détonation forte lorsque $D^{(0)}$ tend vers $D_{cj} + 0$.
- Dans la détonation quasi C.-J., au voisinage de l'état aval, (u, v, T) ne dépend que des variables d'état et des coefficients de transport calculés dans l'état de C.-J., et donc indépendant de la loi cinétique $\mathcal{S}(q, m)$.
- Une détonation quasi C.-J. est nécessairement de courbure positive.
- Une détonation de courbure négative est nécessairement forte.
- Une détonation autonome de courbure positive est nécessairement une détonation quasi C.-J..
- La détonation simple divergente (de courbure positive) se propage nécessairement avec une célérité constante à $0(\varepsilon)$ près.

Les conclusions ci-dessus sont essentielles pour l'interprétation des résultats expérimentaux où la courbure est connue.

Par exemple, on peut indiquer que :

une détonation sphérique convergente est forte

une détonation sphérique divergente est quasi C.-J.

une détonation axisymétrique concave est forte

une détonation axisymétrique convexe est quasi C.-J.

Chapitre 5

Simulation numérique de la détonation

5.1 Introduction

La complexité du phénomène nécessite des simplifications pour chaque problème traité. On distingue deux catégories de simulation : la première s'intéresse à ce qui se passe dans les milieux explosifs (e.x. calcul des caractéristiques des explosifs) et la seconde se préoccupe de la réponse mécanique du milieu où l'explosif effectue son travail, i.e. calcul de l'écoulement avec détonation. Nous sommes ici concernés plus sur la seconde catégorie de simulation dans laquelle les phénomènes locaux sont supposés découplés ou négligeables. On peut trouver les modélisations générales dans les ouvrages classiques [FD79][Mad79] et les travaux récents [B⁺93]...

En général, les simulations numériques admettent des simplifications sur :

- la réduction du fluide réactif à un fluide à deux composants, «la substance initiale», et une «substance finale» $\iff$ (produits de détonation).
- ces deux substances sont séparément en équilibre thermo-chimique.
- la description continue du fluide réactif, en l'absence des forces extérieures ($\vec{f} = 0$)

Le problème des discontinuités est traité de la manière suivante :

La pseudo-viscosité de Von Neumann et Richtmyer [NR50] sert pour la discontinuité des variables thermomécaniques (onde de choc).

En ce qui concerne la discontinuité des variables thermo-chimiques, le changement de composants est régi par une loi de décomposition, autrement dit, le milieu actif ne se distingue des milieux inactifs que par cette loi.

Dans ce chapitre, nous donnerons d'abord une description continue du fluide réactif à deux composants ; nous indiquerons ensuite les fonctions essentielles pour résoudre le système d'équations ; nous décrirons également une approche analytique de l'état des produits explosifs et nous ferons enfin une introduction brève du programme RADIOSS de MECALOG que nous avons retenu pour les calculs sur quelques exemples simples.

5.2 Description continue du fluide réactif

- Équations de bilan pour chaque composant

Dans les équations de bilan par espèce, l'indice k en position haute pour repérer l'espèce ne prend que les valeurs $k = a$ et $k = b$ (qui correspondent les deux substances définies ci-dessus). La sommation sur l'indice k n'est pas effectuée dans les bilans. Pour un fluide parfait, les équations de bilan s'écrivent :

$$\begin{aligned}\frac{d^k \rho^k}{dt} &= -\rho^k u_{j,j}^k + P^k \\ \rho^k \frac{d^k u_i^k}{dt} &= -p_{,i}^k - P^k u_i^k \\ \frac{d^k e^k}{dt} &= -p^k \frac{d^k v^k}{dt} - P^k v^k (e^k + p^k v^k - \frac{1}{2} u_i^k u_i^k)\end{aligned}$$

avec $P^a = -P^b$, le taux de production volumique de l'espèce a ou b .

• Équations de bilan pour le mélange

On considère un algorithme hydrodynamique standard associé au système d'équations aux dérivées partielles :

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho u_{i,i} \quad (5.1)$$

$$\rho \frac{du_i}{dt} = -p_{,i} \quad (5.2)$$

$$\frac{de}{dt} = -p \frac{dv}{dt} \quad (5.3)$$

$$e = E(p, v) \quad (5.4)$$

On ajoute, de façon plus ou moins empirique, une loi de décomposition qui exprime la réactivité de l'état du mélange :

$$\frac{1}{1-m} \frac{dm}{dt} = S(a, b, m)$$

Les variables du mélange en fonction des variables des deux espèces s'écrivent :

$$\begin{aligned}v &= (1-m)v^a + mv^b && \text{définition de } m \\ e &= (1-m)e^a + me^b && \text{additivité de l'énergie interne} \\ e^a &= E^a(v^a, p^a) \\ e^b &= E^b(v^b, p^b) \\ p &= p^a = p^b && \text{hypothèse de mélange isobar} \\ T^a &= T^b && \text{hypothèse de mélange isotherme}\end{aligned}$$

On obtient donc un système de onze équations à onze inconnues.

Le choix d'un scalaire m au lieu du taux de production volumique P^k comme inconnue est plus convenable au calcul numérique. L'inconvénient de ce choix est la complexité de la détermination de la fonction de réactivité S .

Il reste à déterminer les équations d'état du mélange et la fonction de réactivité (loi de décomposition).

5.3 Équations d'état

La détermination des équations d'état apparaît difficile notamment pour les produits de détonation. D'une part, l'existence éphémère de la substance finale dans le processus de détonation oblige de procéder indirectement, D'autre part, une équation d'état générale nécessite une lourde description physico-chimique complète des compositions atomiques pour chaque espèce ou/et phase.

On rappelle la démarche générale à partir de la thermodynamique chimique et de la dynamique des fluides moléculaires ainsi que quelques équations pratiques utilisées dans les codes numériques.

5.3.1 Généralités

Les expériences élémentaires montrent que :

- Les produits de détonation présentent tous les aspects d'un fluide
- Lorsque l'explosif est du type organique (i.e. constitué d'atomes de carbone, d'oxygène, d'hydrogène et d'azote), la phase condensée comme du carbone libre peut figurer dans les produits de détonation.

Pour réduire cette complexité de la coexistence des différentes phases, trois hypothèses sont retenues sur les produits de détonation :

1. ils forment un mélange macroscopiquement homogène d'une phase gazeuse et de J phases condensées, au regard desquelles l'énergie interne et le volume sont additifs,
2. ils se comportent comme fluide unique qui, à la pression et à la température, possède un volume massique et une énergie interne massique
3. ils sont en équilibre chimique.

Ces hypothèses conduisent à introduire :

- la composition atomique de la substance explosive, des variables propres à chacune des espèces et/ou phases,
- la liste des espèces potentiellement présentes dans le mélange et de la(des) phase(s) de chaque espèce.

Les fonctions d'état à déterminer sont respectivement une fonction qui donne la pression dans la phase gazeuse et les fonctions qui donnent la pression pour chaque phase condensée.

La détermination de ces fonctions est difficile puisque l'expérience ne peut fournir d'information que pour les restrictions à chaque espèce chimique prise isolément, et les volumes et les températures considérés font que les répulsions entre molécules des diverses espèces ne sont pas négligeables. C'est la raison pour laquelle on trouve dans la littérature diverses estimations des équations d'états[Mad79][Vid69]...dont certaines sont résumées ici.

Estimations pour la phase gazeuse

En introduisant une fonction de partition $\mathcal{Z}(v, T, .N^i.)$ (N^i nombre de moles de l'espèce i dans l'unité de masse du mélange), la thermodynamique statistique montre que l'énergie libre massique du mélange s'écrit:

$$f = -NRT \text{Log} \mathcal{Z}$$

où f, N, v sont les variables de la partie de phase gazeuse ; R est le produit de la constante de Boltzmann k par le nombre d'Avogadro.

La pression s'écrit :

$$p = -\frac{\partial f}{\partial v}(v, T, .N^i.) = NRT \frac{\partial \text{Log} \mathcal{Z}}{\partial v}$$

Le choix de $\frac{\partial \text{Log} \mathcal{Z}}{\partial \text{Log} v} = 1 + x e^{\beta x}$ conduit une équation d'état de B.W.K (Becker-Kistiakowsky-Wilson):

$$\frac{pv}{NRT} = 1 + x e^{\beta x} \quad (5.5)$$

avec

$$x = \frac{K}{v(T+\theta)^\alpha} \quad K = \kappa \sum N^i k^i$$

où κ, β sont les coefficients à identifier ; la dimension du covolume d'espèce (i) k^i est calculé soit directement par le covolume géométrique soit par la courbe de Hugoniot expérimentale de chaque espèce moléculaire. $\theta = 400$ est retenu par Cowan et Fickett[CF56] pour éviter que la pression ne tende vers l'infini lorsque la température tend vers zéro et pour garder une valeur positive à $(\frac{\partial p}{\partial T})_v$.

En découplant la contribution thermique et celle du potentiel d'interaction moléculaire, l'équation d'état s'écrit :

$$p = p(v, .N^i.) + B(v, .N^i.)T \quad (5.6)$$

La partie du potentiel d'interaction moléculaire contient souvent un terme principal à caractère répulsif et un terme de perturbation à caractère attractif et s'exprime en fonction des dimensions moyennes des molécules et de leurs distances à l'équilibre à l'aide des fonctions de partitions. L'équation (5.6) conduira plusieurs équations d'états.

Estimations pour les phases condensées

L'estimation des équations d'état des phases condensées est relativement simple. En fonction des explosifs concernés, l'hypothèse d'incompressibilité peut être ou non retenue pour simplifier la détermination.

On donne ici un modèle classique proposé par Cowan R.D. et Fickett W. [CF56] :

$$p = a(\eta) + b(\eta) \frac{T}{10^3} + c(\eta) \left(\frac{T}{10^3} \right)^2$$

$$a(\eta) = -2467 + 6769\eta - 6956\eta^2 + 3040\eta^3 - 386\eta^4$$

$$b(\eta) = -19.54 + 23.37\eta$$

$$c(\eta) = 0.61785 - 0.57995\eta^{-1} + 0.2278\eta^{-2}$$

$$\text{où } \eta = \rho/\rho^0(p^0, T^0)$$

5.3.2 Équations d'état du type pseudo-potentiel

Découpler l'état et le mouvement est l'idée de Wilkins [Wil67] : les substances (a) et (b) n'interviennent pas individuellement, seules interviennent les inconnues du mélange p, v, m ; ensuite, une fonction de pseudo-potentiel $p(v, e)$ est introduite comme une «boîte noire» après élimination de la température entre les fonctions $e(v, T)$ et $p(v, T)$.

Cet emploi «en aveugle» de la fonction d'état, remplace l'hypothèse isotherme par une hypothèse d'évolution isentropique.

A l'aide des identités des potentiels thermodynamiques :

$$Tds = \left[p + \frac{\partial e}{\partial v}(v, p) \right] dv + \left[\frac{\partial e}{\partial p}(v, p) \right] dp$$

$ds = 0$ s'écrit :

$$\left[p - \frac{\frac{\partial p}{\partial v}(v, e)}{\frac{\partial p}{\partial e}(v, e)} \right] dv + \left[\frac{\partial p}{\partial e}(v, e) \right]^{-1} dp = 0$$

où apparaît le caractère suffisant de la «boîte noire».

Cette idée intéressante, permet d'établir un modèle phénoménologique (semi-empirique) qui évite les calculs thermo-chimiques souvent itératifs et de diminuer considérablement le temps de calculs (il ne reste que e, v, p, m comme inconnues). Comme toute simplification, l'utilisation est naturellement limitée. Puisque les variables moléculaires n'interviennent pas et que l'on s'intéresse plutôt à la période de détente des produits explosifs (gazeux), les valeurs sont toujours prises en moyenne.

Les chercheurs proposent des modèles pour les différents groupes d'explosifs. On donne les suivants :

- gaz brûlé

C'est un modèle polytropique où l'on écrit :

$$e = pv/(\tilde{\gamma} - 1) \quad \text{avec } \tilde{\gamma} > 1 \quad (5.7)$$

Un processus isentropique ($\Gamma = (-\frac{\partial \text{Log}(p)}{\partial \text{Log}(v)})_s$ constante) est la première approche, on a donc :

$$pv^{\tilde{\gamma}} = A(s) = \text{Const} \rightarrow \tilde{\gamma} = \Gamma_i$$

- gaz brûlé modifié

Un développement au premier ordre de Taylor autour d'un point issue de l'isentropie donne deux choix :

$$e(p, v) = e_i + \frac{v}{G_i(v)}(p - p_i) + 0(p - p_i)^2 \quad (5.8)$$

$$e(p, v) = e_i + \frac{p}{\alpha}(v - v_i) + 0(v - v_i)^2$$

où l'indice i indique l'état isentropique.

Les deux équations sont respectivement l'équation d'état où $G = v \frac{\partial p}{\partial e}$ constant (de Grüneisen) et celle où $\alpha = p/(\frac{\partial e}{\partial v})$ constant.

Équation d'état de J.W.L (Jones, Wilkins, Lee)[Dbr81] :

On suppose un processus isentropique issu du point à l'état final de détonation sous la forme suivante:

$$p_i = a \exp(-R_1 V) + b \exp(-R_2 V) + CV^{-\omega+1}$$

avec $V = v/v_0$ volume spécifique relatif.

Les termes exponentiels assurent le raccordement en conservant le caractère calculable de l'intégrale de cette équation.

Après l'intégration de l'équation isentropique $de = -p_i dv$, et en prenant $\omega = G_i$, on a :

$$p = A(1 - \frac{\omega}{R_1} V)e^{-R_1 V} + B(1 - \frac{\omega}{R_2} V)e^{-R_2 V} + \frac{\omega E}{V} \quad (5.9)$$

avec E énergie interne par unité de volume.

Cette équation est intégrée dans le système RADIOSS.

R.q : Cette équation d'état a besoin d'une connaissance de l'état final de détonation. La température n'intervient pas dans le calcul (bien qu'elle soit théoriquement calculable, sa valeur serait peu crédible).

5.4 Loi de décomposition

Vue la nature de m , inconnue macroscopique indicatrice du degré d'avancement de la transformation fictive $(a) \rightarrow (b)$ à laquelle on réduit l'évolution chimique de l'explosif, la détermination de la fonction S ne résulte que de l'analyse phénoménologique d'un va-et-vient entre expériences numériques et expériences physiques. On donne ici les principes des deux grandes familles de loi de réactivité et quelques formules utiles qui nous concernent.

La première («bulk burn») est celle où l'on suppose que le mélange est suffisamment intime pour que $\dot{m}/\dot{t}$ puisse être considéré comme résultant directement d'une transformation en volume. Cette hypothèse s'assortit bien avec les hypothèses homobar et homotherme, ainsi qu'avec une fonction S ayant pour argument les grandeurs d'état du mélange.

La seconde («surface burn») est celle où l'on suppose que, pendant une phase non négligeable, m progresse vers 1 par expansion divergente de fronts de flamme, chacun de ces fronts ayant pour origine un point chaud (hot spot) et séparant la composante finale (b) chaude à l'intérieur de la composante (a) froide à l'extérieur. Cette hypothèse peut être ou non assortie de l'hypothèse isobare ; par contre elle est incompatible avec l'hypothèse isotherme pour laquelle un substitut possible est celui de l'évolution isentropique de (a) à l'aval du choc igniteur.

Parmi la famille de («bulk burn»), la loi la plus simple dite «C.-J. volume burn» s'écrit :

$$m = \frac{v_0 - v}{v_0 - v_{cj}}$$

Cette loi très simple, ne dépend que du volume, de plus, elle prend une forme stationnaire. On l'accompagne d'une équation d'état du type pseudo-potentiel ; le calcul de la pression est effectuée simplement par $p = mp^b(v, e)$.

Cette loi est efficace pour les écoulements 1-D rectilignes et 1-D convergents, mais moins adaptée aux écoulements 1-D divergents et écoulements 2-D.

En ajoutant l'influence de la température pendant l'évolution, on trouve la loi dite «Arrhenius burn» :

$$\dot{m} = (1 - m)Z^\# \exp\left(-\frac{T^\#}{T}\right)$$

où $Z^\#, T^\#$ sont des constantes.

Cette loi fait reposer l'avancement de la transformation (a)→(b) non sur la compression en volume du mélange, mais sur l'échauffement de (a).

Pour rendre compte de l'influence de paramètres d'agrégat ou de texture cristalline d'un explosif solide hétérogène, les termes en pression sont ajoutés à coté de la famille de («volume burn») et les termes de cinétique agrégataire couplés ou découplés sont introduits à coté de la famille de («surface burn»).

R.q : Associée avec une loi de décomposition, l'usage d'une équation d'état du type pseudo-potentiel (sous l'hypothèse d'évolution isentropique) conduit à une évolution non isentropique pendant la réaction chimique, puisque :

$$Tds = de + pdv = \frac{\partial e}{\partial v} dv + \frac{\partial e}{\partial m} dm + pdv = \frac{\partial e}{\partial m} dm \neq 0$$

5.5 Estimations analytiques d'état des produits explosifs

Le calcul «standards», utilisant le pseudo-potentiel, a besoin d'une connaissance de l'état final de détonation.

Il est commode de prendre en considération les circonstances accompagnant souvent un édifice explosif :

- les conditions de fabrication autorisent généralement une détonation simple,
- les conditions sur le bord d'amorçage autorisent généralement une détonation autonome,
- les conditions sur le bord libre et/ou sur le bord d'amorçage conduisent généralement à un écoulement avec détonation de courbure positive.

En vertu des règles de propagation (Chapitre 4), la détonation est le plus souvent de nature quasi C.-J. et l'unicité de C.-J. est démontrée sous certaines inégalités. On peut donc approcher la détermination d'état final par l'état de détonation C.-J. pour beaucoup d'applications.

Le domaine usuel d'évolution thermodynamique des produits de détonation se trouve être une étroite bande de ($\mathcal{D}$) bordée par l'isentropique $s = s_{cj}$, et encadrant la pression p_{cj} :

$$s_{cj} \leq s \ll 2s_{cj} \quad \frac{v_{cj}}{2} \ll v < \infty$$

Dans [Che87], nous extrayons trois informations sur la variation de $\Gamma_i(v)$:

- aux grandes dilutions, sa valeur est celle d'un gaz idéal composé de molécules diatomiques et triatomiques, donc comprise entre $7/5$ et $9/7$;
- aux grandes compressions, sa valeur est celle d'un gaz idéal composé de nucléons et d'électrons, donc voisine de $5/3$;
- dans l'état de C.-J., sa valeur Γ_{cj} ne diffère pas de 3 de plus de 20%.

La variation la plus simple de Γ est donc de la forme indiquée sur la figure (5.1) :

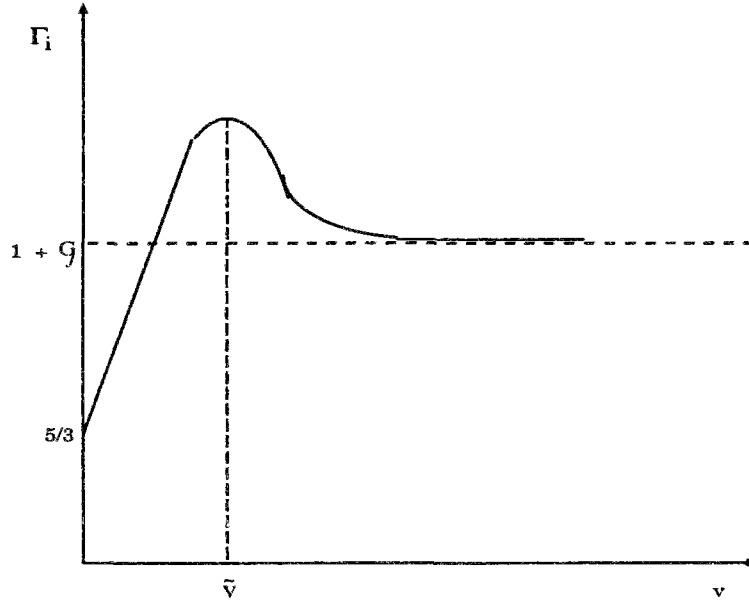


Figure 5.1 Variation de Γ_i

monotone croissante pour $v \leq \tilde{v}$, séparée par le point maximal $\Gamma(\tilde{v})$, monotone décroissante pour $\tilde{v} \leq v < +\infty$, jusqu'à la valeur asymptotique. La définition même de Γ_i

$$\frac{dp_i}{dv} = -\Gamma_i \frac{p_i}{v} \quad (5.10)$$

et sa conséquence immédiate

$$\frac{d^2 p_i}{dv^2} = -\frac{\Gamma_i}{v} \frac{dp_i}{dv} - \frac{p_i}{v} \frac{d\Gamma_i}{dv} + \Gamma_i \frac{p_i}{v^2}$$

montrent que la condition de courbure positive de l'isentropique est certainement satisfaite dans tout intervalle où la fonction $\Gamma_i(v)$ est elle-même décroissante, et qu'il découle naturellement l'idée de rechercher une représentation de $(\mathcal{D})$ dans le domaine $(\tilde{v} \leq v < +\infty, s_{cj} \leq s \ll 2s_{cj})$ à partir d'une fonction $\Gamma_i(v)$ qui soit maximum $\tilde{\Gamma}$ en $v = \tilde{v}$ et décroisse vers $\Gamma_\infty = 1 + G = \gamma$ (γ de gaz idéal) lorsque v croît de $\tilde{v}$ à l'infini.

La variation d'énergie interne massique peut être mise sous la forme:

$$e_i(v) - e_i(\infty) = \frac{vp_i(v)}{\Gamma_i(v) - 1} + 0(\tilde{\Gamma} - \Gamma_\infty) \quad (5.11)$$

La représentation de Γ_i sur la demi-droite $v > \tilde{v}$ avec le modèle d'un potentiel intermoléculaire depuis la distance d'équilibre jusqu'à l'infini nous permet de poser :

$$\Gamma_i(v) = 1 + \mathcal{G} + R \left[\frac{l+1}{(1 + \text{Log} \frac{v}{\tilde{v}})^{m+1}} - \frac{m+1}{(1 + \text{Log} \frac{v}{\tilde{v}})^{l+1}} \right] \quad (5.12)$$

$$R > 0 ; \quad l > m \geq 0$$

qui montre que $d\Gamma_i/dv$ vaut zéro aux deux extrémités de l'intervalle $(\tilde{v}, +\infty)$, est négatif partout ailleurs, et passe par un minimum pour une valeur unique.

Les conséquences que l'on peut tirer par l'étude de la variation de $\Gamma_i(v)$ ci-dessus sont les suivantes :

1. l'estimation des valeurs des paramètres dans une équation d'état du type pseudo-potentiel

$$e_i(v) - e_0 = e_i^\infty - e_0 + \frac{v p_i(v)}{\Gamma_i(v) - 1} + 0(\tilde{\Gamma} - \Gamma_\infty)$$

où la variation $e_i^\infty - e_0$ d'énergie interne massique entre la substance finale infiniment détendue à entropie constante ($s \ll 2s_{cj}$) et la substance initiale est calculable en fonction de l'état C.-J.:

$$e_i^\infty - e_0 = e_{cj} - e_0 - \frac{v p_{cj}}{\Gamma_{cj} - 1} + 0(\tilde{\Gamma} - \Gamma_\infty)$$

Les relations de saut, la condition de C.-J et la relation polytropique locale de l'état C.-J. ($\Gamma_{cj} = a_{cj}^2/(p_{cj}v_{cj})$) conduisent à:

$$\begin{aligned} \Gamma_{cj} &= \frac{\rho_0 D_{cj}^2}{p_{cj} - p_0} - 1 \\ v_{cj} &= v_0 \frac{\Gamma_{cj}}{\Gamma_{cj} + 1} \end{aligned}$$

qui peuvent être utilisées pour déterminer Γ_{cj} puis v_{cj} à partir de D_{cj} (estimé par D_∞^p) et de p_{cj} (estimé par un code numérique).

Lorsqu'on néglige p_0 devant p_{cj} , on a :

$$\begin{cases} \frac{a_{cj}}{D_{cj}} = \frac{v_{cj}}{v_0} = \frac{\Gamma_{cj}}{\Gamma_{cj} + 1} \\ p_{cj} = \rho_0 \frac{D_{cj}^2}{\Gamma_{cj} + 1} \\ e_{cj} - e_0 = \frac{p_{cj} v_{cj}}{2\Gamma_{cj}} \end{cases} \quad (5.13)$$

si bien que à $0(\tilde{\Gamma} - \Gamma_\infty)$ près

$$e_i^\infty - e_0 = -\frac{\Gamma_{cj} + 1}{2\Gamma_{cj}(\Gamma_{cj} - 1)} p_{cj} v_{cj} = -\frac{p_{cj} v_0}{2(\Gamma_{cj} - 1)} = -\frac{D_{cj}^2}{2(\Gamma_{cj}^2 - 1)} \quad (5.14)$$

et finalement

$$e_i(v) - e_0 = \frac{vp_i(v)}{\Gamma_i(v) - 1} - \frac{D_{cj}^2}{2(\Gamma_{cj}^2 - 1)} + 0(\tilde{\Gamma} - \Gamma_\infty)$$

On peut tirer de (5.14) un résultat simple : si les produits de détonation se détendaient complètement à partir de l'état C.-J., alors chaque unité de masse d'explosif verrait son énergie interne diminuer, à partir de l'état initial, de :

$$\Delta e = \frac{D_{cj}^2}{2(\Gamma_{cj}^2 - 1)} + 0(\tilde{\Gamma} - \Gamma_\infty)$$

Ce résultat a une importance pratique : la quantité Δe donne, en quelque sorte, une mesure de l'énergie massique maximum à attendre d'un explosif. En ce sens, Δe ou une fraction conventionnelle de Δe peut être choisie comme énergie massique de l'explosif dans la variante dite «avec dégagement d'énergie» de l'algorithme de calcul d'un écoulement avec détonation.

2. un modèle avec la variation de Γ_i ($\tilde{v} \leq v < +\infty$)

En notant que $e_i(v) - e_i^\infty = \int_v^\infty p_i(v)dv$, l'équation (5.8) devient :

$$p = p_i(v) - \frac{G_i(v)}{v} \int_v^\infty p_i(v)dv + \frac{G_i(v)}{v} (e - e_i^\infty) \quad (5.15)$$

$G_i(v)$ peut être supposée constante : $G_i(v) \equiv \mathcal{G} = Cte$;

L'intégration de l'équation (5.10) avec la forme de $\Gamma_i(v)$ (5.12) en négligeant le terme «attractif» (i.e. $m = 0$) nous conduit à :

$$\frac{p_i}{\tilde{p}} = y^{-(1+\mathcal{G})} \eta^{-R(l+1)} \exp \left[\frac{R}{l} (1 - \eta^{-l}) \right]$$

où $y = v/\tilde{v}$ et $\eta = 1 + \text{Log} \frac{v}{\tilde{v}}$;

Avec les identités $p_i(v_{cj}) = p_{cj}$ et $\Gamma_i(v_{cj}) = \Gamma_{cj}$, il ne reste que trois coefficients à identifier.

5.6 Introduction au système RADIOSS

RADIOSS est un système qui permet de simuler numériquement la plupart des phénomènes dynamiques transitoires non-linéaires. Ce système de programmes a été développé par MECALOG à partir de 1986. Il offre un environnement (pour les pré-traitements et les post-traitements ainsi qu'une animation avec rendu réaliste) et plusieurs moteurs de résolution pour les problèmes en mécanique des solides et des fluides. On en donne ici seulement un bref résumé :

5.6.1 Système des équations

- La configuration de référence est celle de Lagrangienne Réactualisée afin de prendre en compte les grandes transformations (Annexe A), et le repère de référence peut être un repère fixe dit formulation Lagrangienne ; un repère mobile matériel dit formulation Eulérienne ou un repère mobile avec une vitesse arbitraire $\vec{w}$ dit formulation ALE (Arbitraire-Lagrange-Euler) [HAC74], [DGH82] selon le problème traité.

$$\text{si } \vec{w} = \begin{cases} 0 & \Rightarrow \text{formulation Lagrangienne} \\ \vec{v} & \Rightarrow \text{formulation Eulérienne} \end{cases}$$

où $\vec{v}$ est la vitesse particulière.

Dans une formulation Eulérienne, les points nodaux qui marquent le maillage restent fixes dans l'espace et les points matériels se déplacent sur cette grille. Cela ne permet pas facilement de suivre l'histoire de la déformation ni vérifier les conditions cinématiques (conditions aux limites cinématiques et les conditions de liaisons cinématiques).

Dans une formulation Lagrangienne, les points nodaux sont les points matériels et ils se déplacent. Cela provoque de grandes distorsions du maillage et des problèmes numériques éventuels

Dans une représentation ALE, les points nodaux et les points matériels ont des mouvements indépendants. Cela permet d'assurer à tout instant à la fois le contrôle du maillage déformé et les conditions cinématiques. Elle est adaptée aux problèmes en grands déplacements et aux interactions fluide-structure.

Il y a trois choix d'option à calculer la vitesse de grille. Par exemple, la formule de Donea s'écrit :

$$\mathbf{w}_I(t + \frac{\Delta t}{2}) = \frac{1}{N} \sum_J \mathbf{w}_I(t - \frac{\Delta t}{2}) + \frac{1}{N^2} \frac{\alpha}{\Delta t} \sum_J L_{IJ}(t) \sum_J \frac{\mathbf{u}_J(t) - \mathbf{u}_I(t)}{L_{IJ}(t)}$$

avec la condition $1 - \gamma < \mathbf{w}/\mathbf{v} < 1 + \gamma$

où N est le nombre de noeuds connectés au noeuds I ; L_{IJ} est la distance entre les noeuds I et J ; α, γ sont les coefficients de données.

- Le système des équations du problème mécanique dans un milieu continu s'écrit sous la forme locale :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \vec{f} &= \rho \vec{\gamma} & \text{dans } \mathcal{D} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} &= \vec{T}_d & \text{sur } \partial_s \mathcal{D} \\ \vec{v} &= \vec{v}_d & \text{sur } \partial_v \mathcal{D} \end{cases}$$

où les notations sont celles classiques [LC85] (pour le milieu fluide, on a aussi l'équation de la conservation de masse)

- La discrétisation spatiale est effectuée par la méthode des éléments finis pour le milieu solide et par la méthode des différences finies pour le milieu fluide.

Sous forme globale matricielle, le système d'équations à résoudre s'écrit :

$$\mathbf{M} \left\{ \frac{dv}{dt} \right\} = \{F^{ext}\} + \{F^{bod}\} + \{F^{trm}\} - \{F^{int}\} + \{F^{hgr}\}$$

où le champ de v est discrétisé sur chaque élément fini par une fonction de forme Φ :

$$v_i = [\Phi_I] \cdot [v_i^I] \quad i = 1, 3; I = 1, n$$

et

$\mathbf{M} = \sum_e \int_V \rho [\Phi_I] [\Phi_J] dV$	Matrice de masse
$\{F^{ext}\} = \sum_e \int_S \Phi_I F_i dS$	Vecteur des forces extérieures
$\{F^{bod}\} = \sum_e \int_V \rho \Phi_I f_i dV$	Vecteur des forces volumiques
$\{F^{int}\} = \sum_e \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial \Phi_I}{\partial x_j} dV$	Vecteur des forces intérieures
$\{F^{hgr}\} = \sum_e f^{hgr}$	Vecteur des forces dues aux modes énergie nulle
$\{F^{trm}\} = \sum_e f_{il}^{trm}$	Vecteur des forces dues au transport convectif

En prenant une matrice de masse diagonale, les équations se résolvent directement de façon explicite (sans assemblage de matrice de rigidité et sans inversion de matrices). L'utilisation d'un seul point d'intégration réduit aussi fortement le coût du calcul en tenant compte de modes d'énergie nulle [KF78].

5.6.2 Schéma numériques

- Le schéma explicite a été pris pour la résolution des intégrations temporelles car il s'adapte bien aux problèmes de propagation et des contacts.

La vitesse ainsi que le déplacement sont calculés à partir de l'accélération par différence finie centrée :

$$\mathbf{v}(t + \frac{\Delta t}{2}) = \mathbf{v}(t - \frac{\Delta t}{2}) + \boldsymbol{\gamma}(t) \cdot \Delta t$$

$$\mathbf{u}(t + \Delta t) = \mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t + \frac{\Delta t}{2}) \cdot \Delta t$$

où Δt est lié à un critère de stabilité.

L'astuce essentielle des programmes de calculs tel RADIOSS réside dans cette intégration directe explicite du système des équations.

5.6.3 Conditions aux limites

En plus des conditions aux limites classiques (forces imposées, vitesses imposées), RADIOSS offre des nombreuses possibilités pour modéliser notamment divers types d'interfaces qui sont éventuellement en contact au cours de calculs. On cite ici les deux suivantes :

1. Interfaces entre un matériau Lagrangien et un matériau ALE pour les problèmes d'interaction fluide-structure.
2. Interfaces entre deux matériaux Lagrangien pour les problèmes d'impact ou de contact avec frottement dans la direction tangentielle.

5.6.4 Lois de comportement

- Plusieurs lois de comportement ont été intégrées dans RADIOSS (une vingtaine actuellement) pour les divers comportements mécaniques ou/et thermiques des solides et des fluides. Les lois de comportement sont écrites sous forme incrémentale du type:

$$\dot{\sigma} = f(\dot{\epsilon}, \sigma, \mathbf{Y})$$

où $\mathbf{Y}$ représente des variables d'état inélastique.

Prenant en compte les grands déplacements et éventuellement les grandes déformations, RADIOSS corrige systématiquement la partie rotationnelle du taux de contraintes associé à la dérivée de Jaumann (Annexe A).

En grande déformation, la loi de comportement doit satisfaire en effet au principe d'objectivité. (Annexe A).

- RADIOSS permet aux utilisateurs d'écrire leurs propres lois de comportement.

5.6.5 Calcul de l'écoulement avec détonation du modèle de Wilkins

En introduisant la viscosité artificielle q qui représente le terme non isentropique de l'onde de choc, les équations du mouvement avec la viscosité q de Von Neumann et Richtmyer s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\int (p + q) \tilde{n} ds}{M} &= 0 \\ de + (p + q) dv &= 0 \end{aligned}$$

avec

$$q = q_a \rho l \left(\frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t} \right)^2 - q_b \rho c \left(\frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t} \right)$$

où $l = V^{1/3}$ est la dimension d'élément, q_a, q_b sont les constantes et c la vitesse du son. L'équation d'état du type pseudo-potentiel $p = p(v, e)$ est celle de J.W.L.:

$$p = A \left(1 - \frac{\omega}{R_1} V \right) e^{-R_1 V} + B \left(1 - \frac{\omega}{R_2} V \right) e^{-R_2 V} + \frac{\omega E}{V}$$

La loi de décomposition est celle de «volume burn»

$$\begin{aligned} m &= \frac{1 - V}{1 - V_{ej}} \\ p &= mp(E, V) \end{aligned}$$

5.7 Exemples numériques

On donne ici les trois exemples de calculs suivants :

5.7.1 Détonation plane

C'est une cartouche d'explosif T.N.T. enveloppée par un matériau infiniment rigide, amorcée à une extrémité, de diamètre 50mm, et de longueur 200 mm.

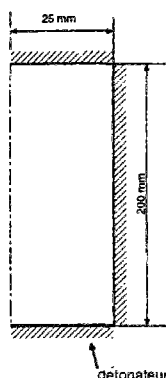


Figure 5.2 Configuration de l'exemple 1

Le problème est modélisé par une structure axisymétrique encastrée aux bords montrée dans la figure (5.2). On place ensuite un détonateur du type ligne au bord. Les coefficients retenus dans l'équation d'état de J.W.L. sont dans le tableau (5.1) :

$A(10^5 \text{ Mpa})$	$B(10^5 \text{ Mpa})$	R_1	R_2	ω
3.712	0.0323	4.15	0.95	0.3
$\rho_0(\frac{\text{g}}{\text{cm}^3})$	$E_0(10^5 \text{ Mpa} \cdot \frac{\text{cm}^3}{\text{cm}^3})$	$p_{cj}(10^5 \text{ Mpa})$	$D_{cj}(\text{cm}/\mu\text{s})$	
1.54	0.09	0.21	0.693	

Tableau 5.1 Les paramètres d'état de J.W.L

Le calcul avec RADIOSS a donné les résultats suivants :

La figure (5.3) montre les pressions en fonction du temps des éléments 1,51,101,151 qui se trouvent respectivement à la distance verticale du détonateur de 0, 50,100,150 (mm).

La figure (5.4) montre le comportement (pression en fonction du volume massique) d'élément 51.

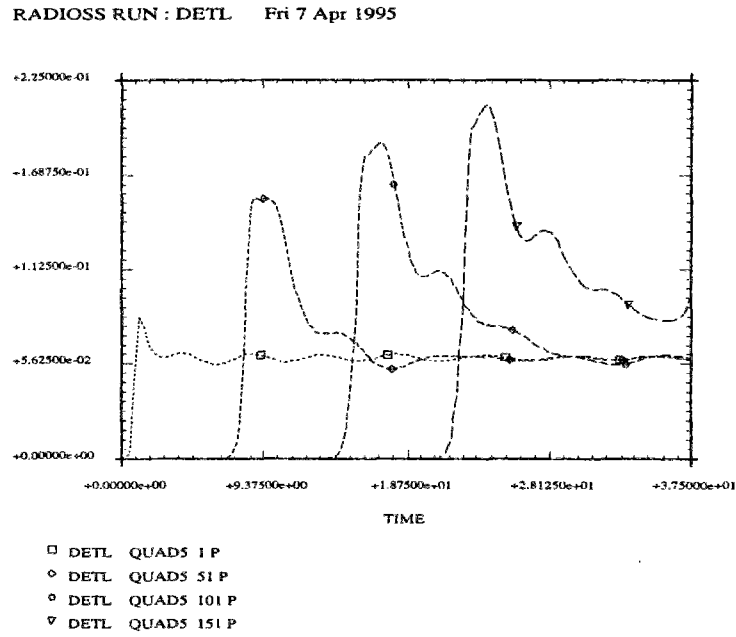
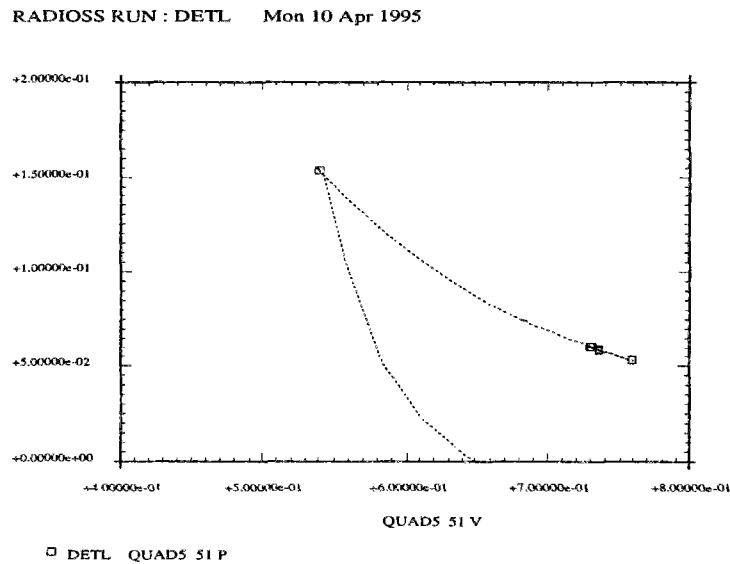
Cet exemple montre que

1. La vitesse de détonation (D_{cj}) dans le calcul est invariante.
2. Le pic de pression ne correspond pas généralement à la valeur de C.-J.; en revanche, à cause du confinement, il s'en rapproche de plus en plus avec la distance du détonateur, c'est la loi de décomposition «volume burn» qui est responsable de ce phénomène.

5.7.2 Détonation sphérique dans l'eau

C'est une simulation du tir en immersion où une boule explosive du rayon $r = 40\text{mm}$ est placée sous l'eau à 5000m de profondeur amorcée au centre. Ceci génère une onde de choc et un volume de gaz dans l'eau qui oscille autour de sa position d'équilibre.

Le problème est modélisé par une structure axisymétrique de taille $5\text{m} \times 5\text{m}$ pour que l'onde de réflexion n'influence pas le résultat pendant la période intéressée, la pression

Figure 5.3 Pressions($10^5 Mpa$) en fonction du temps(μs) (TNT)Figure 5.4 Pression($10^5 Mpa$)-volume massique d'élément 51 (TNT)

hydrostatique est représentée par une pression permanente imposée sur le bord supérieur de la structure grâce au faible rapport $5m : 5000m$.

L'eau sous sollicitation d'explosion est considérée comme un fluide compressible non-visqueux, l'équation d'état prise était du type :

$$p = C_0 + C_1\mu + C_2\mu^2 + C_3\mu^4 + (C_4 + C_5\mu)\rho_0 e$$

où $\mu = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$;

Les coefficients sont obtenus en simplifiant ceux de Donea [DGH82] tels que :

	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	e_0
val.($10^5 Mpa$)	0.	0.1975	0.1544	-0.02547	0.28e-5	0.28e-5	0.

Trois calculs sont d'abord effectués en utilisant trois types d'explosifs de degré de «brisance» différente; les coefficients correspondants avec les mêmes unités que l'exemple précédent sont dans le tableau (5.2) (aimablement communiqués par le centre de Gramat) :

Explosif	A	B	R_1	R_2	ω	ρ_0	E_0	p_{cj}	D_{cj}
1	9.8968	0.015868	4.72	1.0	0.4	1.861	0.096	0.37	0.8854
2	3.53914	0.0345174	4.15	0.9	0.35	1.605	0.059	0.21	0.6810
3	8.1299	-1.3498	5.0	3.5	0.6	1.782	0.0594	0.12	0.5700

Tableau 5.2 Trois types d'explosifs brisants

Les trois explosifs correspondent aux cas de trois explosifs respectivement très brisant, peu brisant et à fort effet de gaz qui portent respectivement les noms ESAIS(S), ESAIM(M) et ESAIF(F).

Les résultats des trois calculs sur la première pseudo-période d'oscillation (déplacement radial de l'eau à l'interface en fonction du temps) sont dans la figure (5.5) :

RADIOSS RUN : ESAIF ESAIM ESAIS Fri 7 Apr 1995

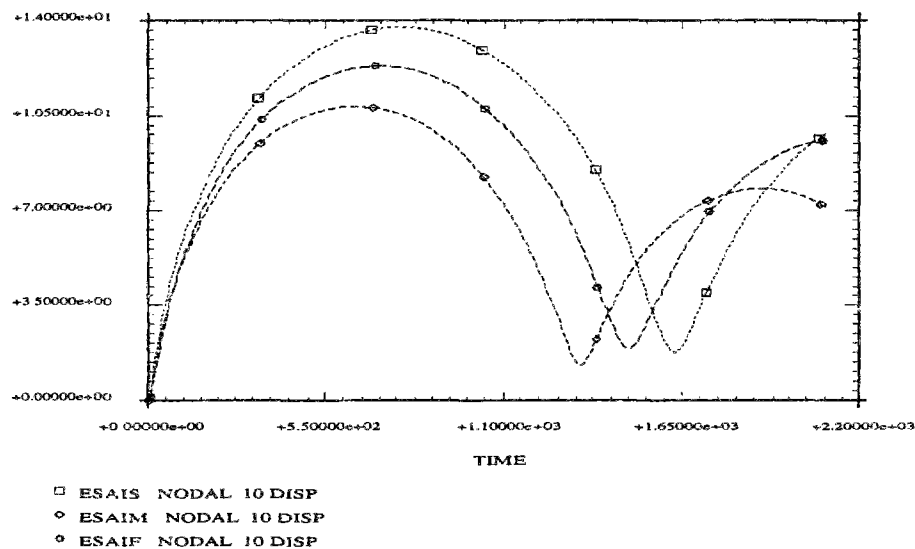
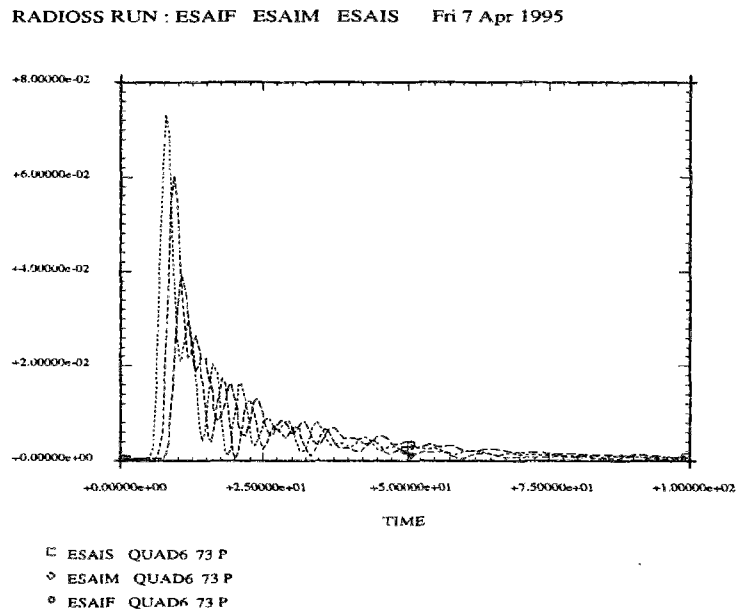
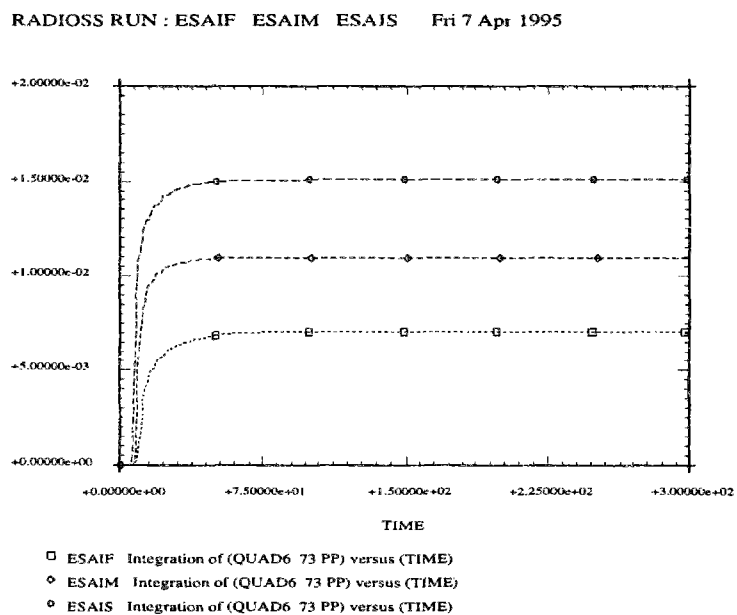


Figure 5.5 Déplacements(cm) en fonction du temps(μs) des explosifs brisants

Les résultats du profil de pression ainsi que de la valeur de $P = \int p^2(t)dt$ à l'interface explosif eau sont dans les figures (5.6 et 5.7) :

Comme évoquée dans le chapitre 3, l'énergie de gaz est proportionnelle au cube de la première pseudo-période et l'énergie de choc est proportionnelle à $P = \int p^2(t)dt$.

Les rapports entre les trois explosifs sur les deux énergies sont à peu près :

Figure 5.6 Pressions($10^5 Mpa$) en fonction du temps(μs) (Explosion dans l'eau)Figure 5.7 $\int p^2(t)dt$ en fonction du temps (μs)(Explosion dans l'eau)

énergie de choc		énergie de gaz	
S/M	F/M	S/M	F/M
1.3636	0.636	1.865	1.424

On peut donc en tirer la conséquence suivante :

L'explosif le plus brisant (caractérisé par les valeurs de E_0 , p_{cj} , D_{cj}) correspond généralement à un profil de pression plus grand en hauteur (dont la montée est plus rapide) et à une énergie de choc plus importante.

En revanche, la caractéristique de l'énergie de gaz n'est pas très claire en raison du nombre important des coefficients dans J.W.L. et du nombre insuffisant des données sur les explosifs (pour J.W.L.).

On fait ensuite deux calculs en utilisant l'équation d'état du gaz polytropique avec $\tilde{\gamma}$ constant, i.e. :

$$e = pv/(\tilde{\gamma} - 1).$$

Ceci est fait simplement en imposant $A = B = 0, \omega = \tilde{\gamma} - 1$ dans J.W.L.. Les paramètres des deux explosifs sont dans le tableau (5.3) :

Explosif	ω	$\rho_0(g/cm^3)$	$E_0(10^5 Mpa \cdot cm^3/cm^3)$	$p_{cj}(10^5 Mpa)$	$D_{cj}(cm/\mu s)$
1	1.5	0.9	0.0077	0.02067	0.2835
2	2.0	0.9	0.0077	0.02756	0.3500

Tableau 5.3 Deux types d'explosifs fictifs

L'intérêt de l'usage de cette équation d'état est que :

il y a peu de coefficients à connaître, dans la mesure où les caractéristiques des explosifs sont souvent des documents secrets. E_0, ρ_0 sont identiques pour les deux explosifs, D_{cj}, p_{cj} sont calculés (estimation) d'après les équations (5.14), (5.13).

Les résultats de la première pseudo-période d'oscillation, du profil de pression ainsi que de $\int p^2(t)dt$ à l'interface sont dans les figures (5.8, 5.9 et 5.10) :

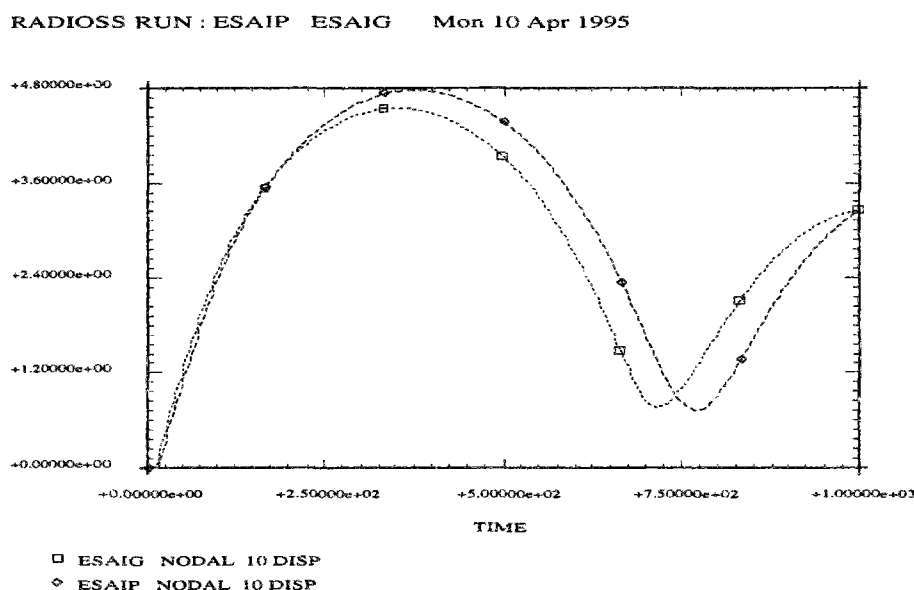


Figure 5.8 Déplacements (cm) en fonction du temps (μs) (Explosifs fictifs)

Les noms ESAIP(P) et ESAIG(G) correspondent aux cas des explosifs 1 et 2 du tableau (5.3). Les rapports entre les deux explosifs sur les deux énergies sont de l'ordre de :

énergie de choc	énergie de gaz
G/P	P/G
1.216	1.035

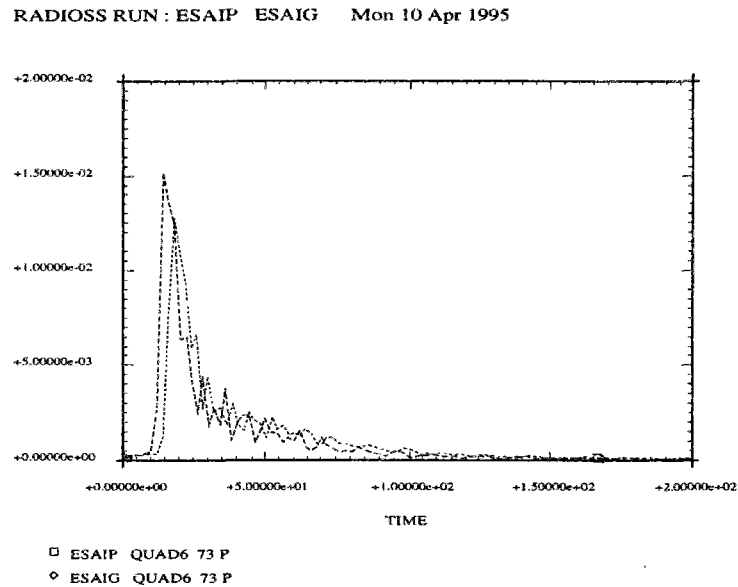


Figure 5.9 Pressions($10^5 Mpa$) en fonction du temps (μs) (Explosifs fictifs)

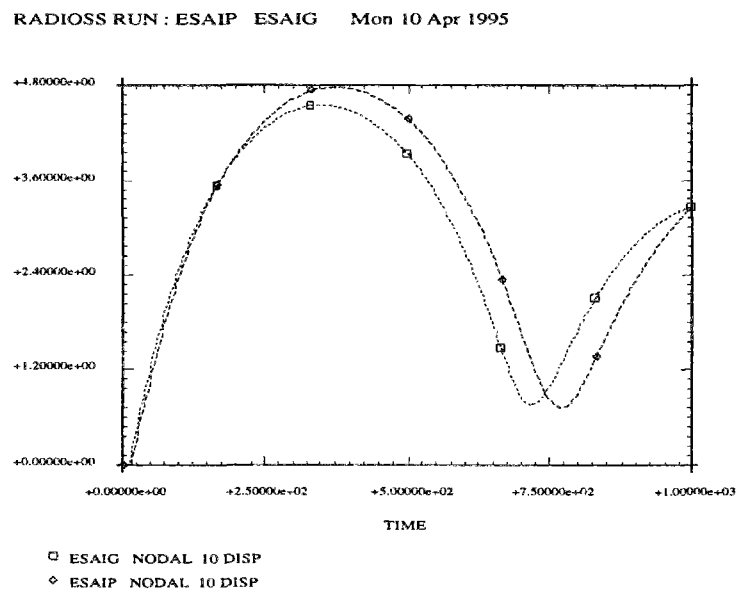


Figure 5.10 $\int p^2(t)dt$ en fonction du temps (μs) (Explosifs fictifs)

Puisque l'énergie interne infiniment détendue est négligeable devant l'énergie interne initiale, l'énergie dégagée par l'explosif peut être approchée par l'énergie interne initiale E_0 , le résultat montre l'influence du coefficient du gaz polytropique $\tilde{\gamma}$ sur la partition de l'énergie de l'explosif, tel que :

une valeur de $\tilde{\gamma}$ grande conduira à un rapport élevé entre l'énergie de choc et l'énergie de gaz.

Par conséquent, $\tilde{\gamma}$ peut être une caractéristique de la partition d'énergie explosive.

5.7.3 Couplage avec un milieu solide élastique

On place maintenant une cartouche explosive TNT (tableau (5.1)) de diamètre 50mm de longueur 450mm dans un trou de longueur 750mm avec un confinement parfait (confiné par le même matériau solide) et qu'on l'amorce au fond du trou.

Le problème est encore modélisé en axisymétrie en prenant l'axe sur la cartouche d'explosif.

Le couplage fluide-structure est traité de la façon suivante :

Le milieu explosif est en formulation ALE, et le milieu solide est en formulation Lagrangienne. Une interface du type Langrange-ALE est ajoutée à l'interface solide explosif qui assure simplement la continuité des vitesses nodales normales à l'interface.

La figure (5.11) montre les maillages déformés respectivement au temps $t = 0.02ms$, $0.04ms$ et $0.1ms$. L'échelle de déplacements est de 5.0.

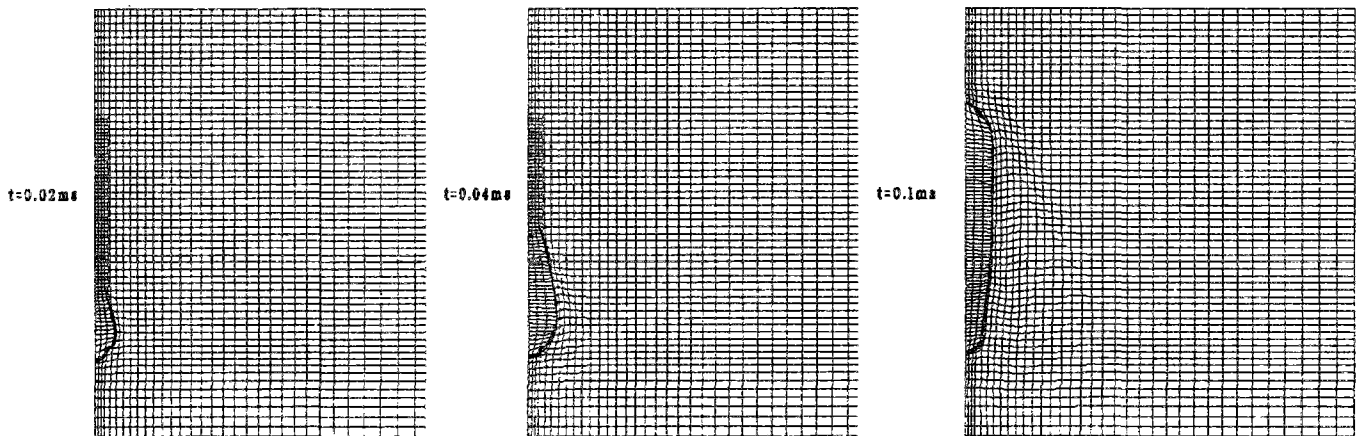


Figure 5.11 La propagation des ondes (TNT)

D'abord l'onde de détonation se propage verticalement de bas vers le haut et génère ensuite successivement les ondes divergentes dans le milieu solide. Cela est encore plus clair si l'on regarde les ondes de compression (présentées par la contrainte minimale) dans la figure (5.12) au temps $t = 0.1ms$ et $0.2ms$.

Le résultat montre la limite de l'approche du chargement de l'explosion par un profil de pression seulement fonction du temps, lorsque le mode d'amorçage est du type ponctuel.

Les résultats montrent aussi la réussite du contrôle des maillages déformés par la formulation ALE.

La figure (5.13) donne les profils de pression en fonction du temps aux quatre positions respectivement de bas vers le haut ; les profils ne sont pas tout à fait identiques (mis à part les délais) notamment pour leur amplitude quasi-stationnaire.

On a effectué un autre calcul en prenant un explosif moins brisant dont les paramètres dans l'équation d'état de J.W.L (avec $A=B=0$) sont dans le tableau (5.4) :

Les figures (5.14) à (5.16) donnent respectivement les déplacements, les contraintes de compression et les profils des pressions en fonction du temps aux quatre positions. L'échelle

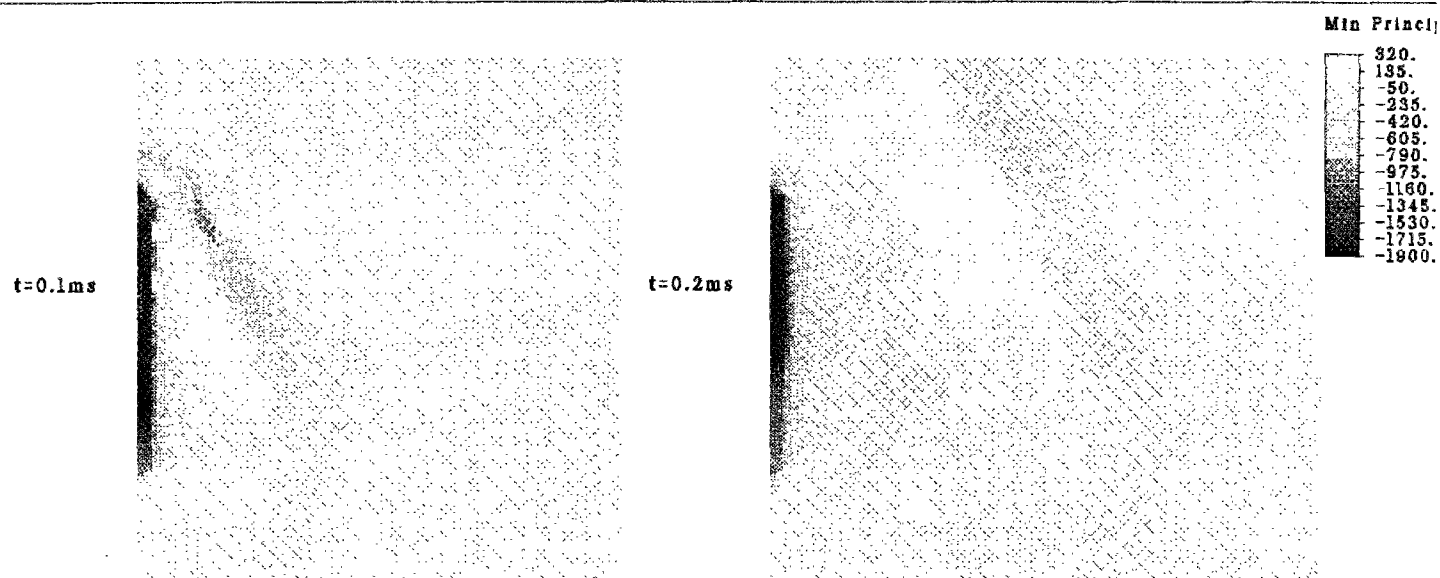
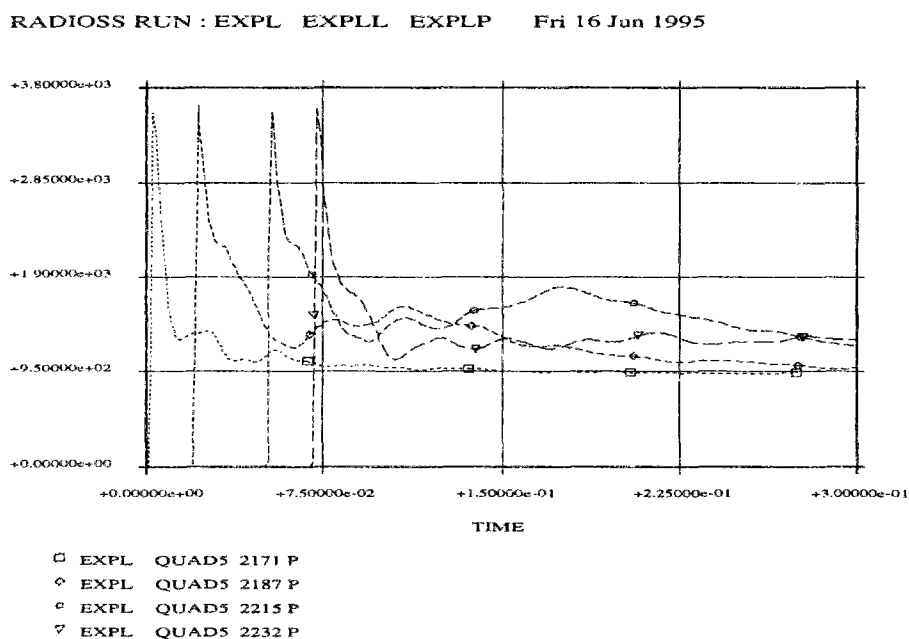


Figure 5.12 Les ondes de compression (TNT)

Figure 5.13 Pressions(Mpa) en fonction du temps (ms)(TNT)

de déplacements ici est de 10.0.

Il est facile de constater la similitude des résultats de ces deux calculs.

Cela favorise en principe la simplification d'un usage de l'équation d'état polytropique avec $\tilde{\gamma}$ constant.

Ces calculs montrent aussi que la limite de l'approche du chargement de l'explosion par

ω	$\rho_0(g/cm^3)$	$E_0(10^5 Mpa \cdot cm^3/cm^3)$	$p_{cj}(10^5 Mpa)$	$D_{cj}(cm/\mu s)$
1.8	0.9	0.0077	0.02756	0.4000

Tableau 5.4 Coefficients d'explosif fictif

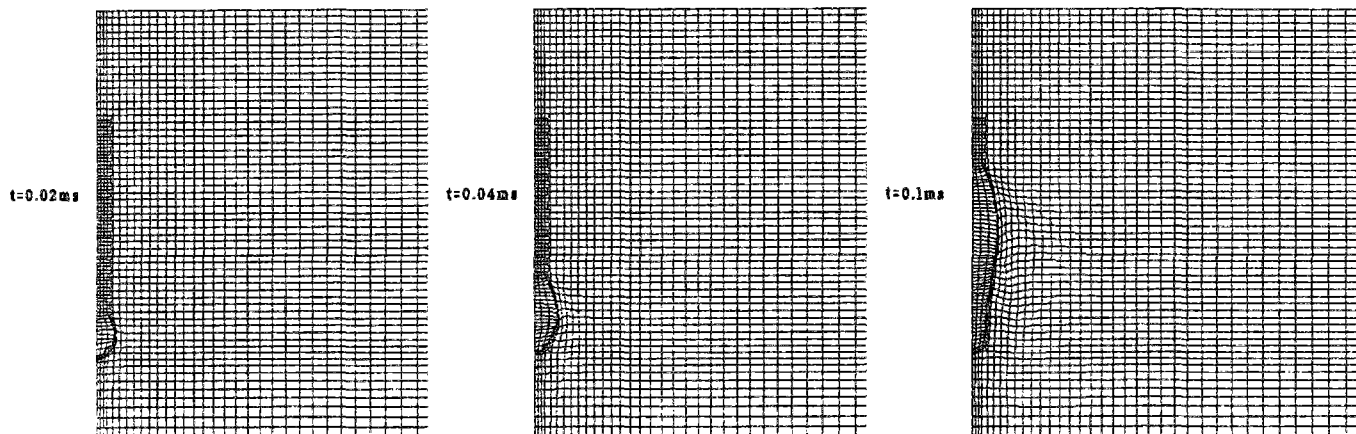


Figure 5.14 La propagation des ondes (explosifs fictifs)

un profil de pression est plus significative, lorsque le rapport entre la vitesse de détonation et la vitesse d'onde longitudinale du milieu adjacent est moins important.

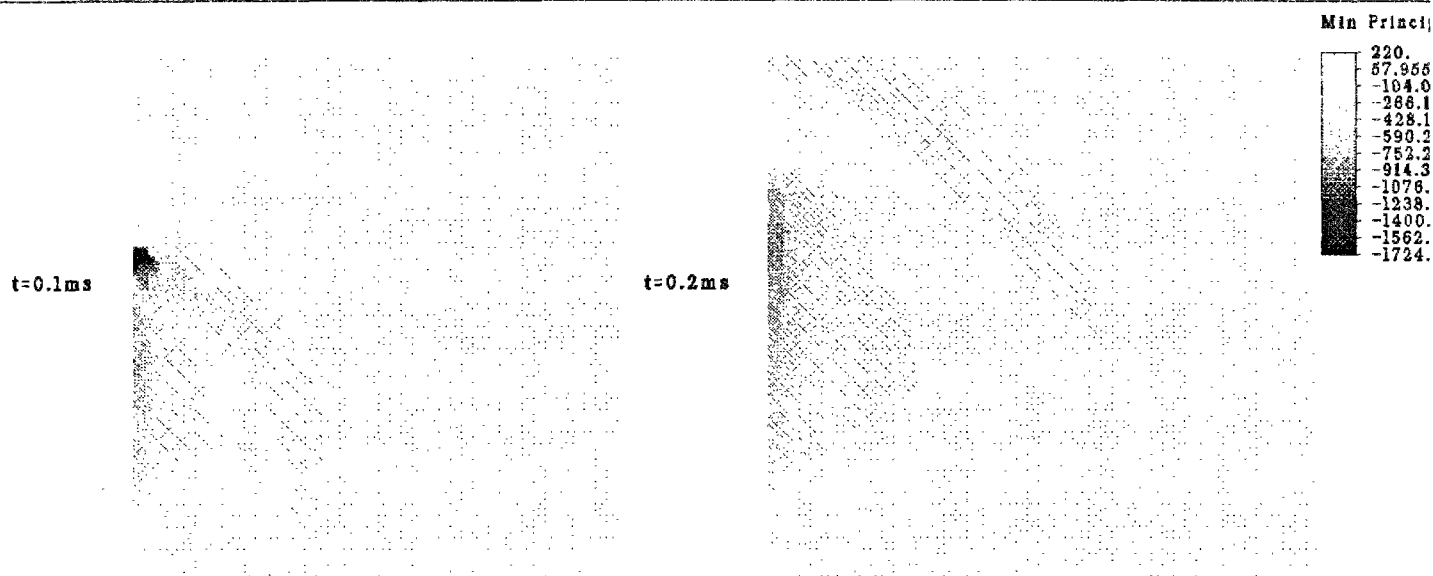
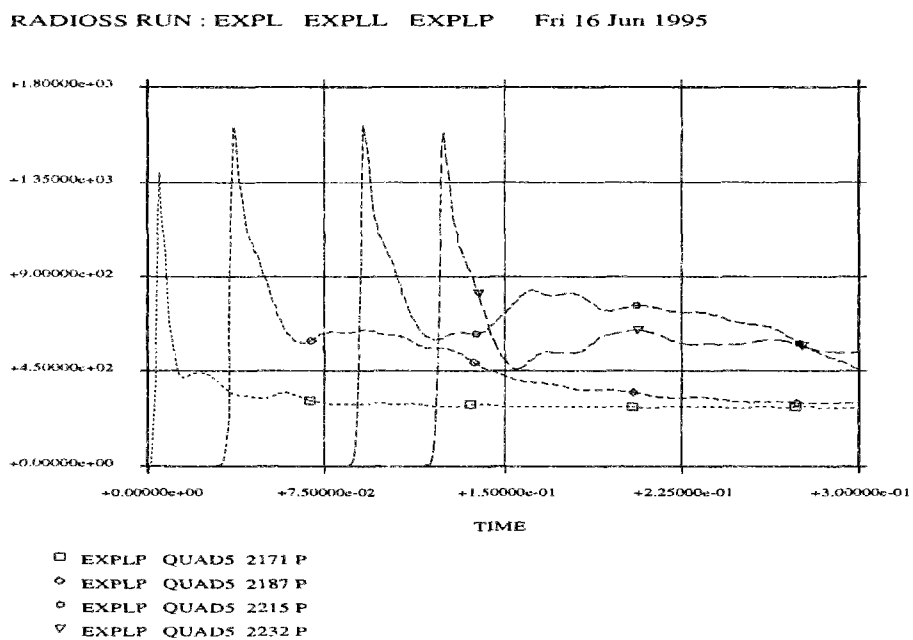


Figure 5.15 Les ondes de compression (explosifs fictifs)

Figure 5.16 Pressions(Mpa) en fonction du temps(ms) (explosifs fictifs)

Chapitre 6

Points essentiels de la partie

La modélisation simplifiée (fondée principalement sur la théorie de Chapman-Jouguet) de la détonation des explosifs suffit relativement bien aux calculs de l'écoulement avec détonation ou aux calculs complets (couplage fluide-structure). La clef de cette modélisation est le comportement des explosifs au cours de la détonation (notamment pour les produits des explosifs), c.à.d. le choix de l'équation d'état et la loi de décomposition.

En ce qui concerne l'équation d'état des produits explosifs, le modèle du type gaz polytropique avec le coefficient $\Gamma = \frac{\partial \text{Log } p}{\partial \text{Log } v}$ variant, comme proposé par Chéret (équation (5.15)), apparaît répondre au compromis entre la pratique et la théorie.

La fonction $\Gamma(v)$ peut être encore simplifiée, e.x. on pourrait envisager de linéariser par morceau cette fonction dans la période ($\bar{v} \leq v < \infty$). Le choix des coefficients à identifier ainsi que la validité du modèle sont déterminés par des expériences.

Cependant, la question sur la validité du modèle de Chapman-Jouguet pour les explosifs utilisés en génie civil se pose, puisque ceux sont souvent des explosifs peu brisants (la zone de réaction est plus épaisse). Même si on ne s'intéresse qu'à la partie globale où la détonation est comme une sorte de sollicitation effective, l'influence de la zone de réaction peut-elle être négligée?

De plus, il arrive souvent que les substances explosives ont partiellement réagi; théoriquement il serait possible de proposer des lois plus sophistiquées, mais l'identification des coefficients resterait un problème hors de nos moyens actuels.

La caractéristique du rapport énergie de gaz/énergie de choc par le coefficient polytropique semble bien pratique. Ceci est faisable au moins dans le cas de l'explosion dans eau.

Bibliographie de la Partie I

- [B⁺93] John B. Bdzil et al. Multidimensional detonation front propagation in condensed phase high explosives. Rocquencourt, France, 1993. CEA-EDF-INRIA.
- [Bet42] H.A. Bethe. On the theory of shock waves for an arbitrary equation of stat. Technical Report 544, O.S.R.D., 1942.
- [CF56] R.D. Cowan and W. Fickett. Calculation of the detonation properties of solid explosives with the kistia-kowsky-wilson equation of state. *J. Chem. Physics*, 24:932, 1956.
- [Che87] R. Chéret. Représentation quasi polytropique de la surface d'état des produits de détonation d'un explosif condensé. *Comptes Rendus Acad. Sc. Paris*. 305, page 1337, 1987.
- [Che88] R. Chéret. *La Détonation Des Explosifs Condensés*, volume 1 of *Scientifique*. MASSON, 1988.
- [Cha99] D.L. Chapman. On the rate of explosions in gases. *philosophical magazine*, 1899.
- [Dbr81] B.M. Dbratz. *properties of chemical explosives and explosive simulants*. March 16, 1981.
- [DGH82] J. Donea, S. Giuliani, and J.P. Halleux. An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 33:689–723, 1982.
- [Duv50] W.I. Duvall. Vibration associated with a spherical cavity in an elastic medium. *U.S. Bureau of Mines*, RI(4692), 1950.
- [Fav69] R.F. Favreau. Generation of strain waves in rock by an explosion in a spherical cavity. *Journal of Geophysical Research*, 74(17):4267–4280, 1969.
- [FD79] W. Fickett and W.C. Davis. *Detonation*. University of California Press, 1979.
- [GG66] P. Germain and J.P. Guiraud. Conditions de choc et structure des ondes de choc dans un écoulement non stationnaire de fluide dissipatif. *J. Math. pures et appli.*, page 311, 1966.
- [HAC74] C.W. Hirt, A.A. Amsden, and J.L. Cook. An arbitrary lagrangian-eulerian computing method for all flow speeds. *J. of Computational Physics*, 14:227–253, 1974.

- [Hem] Gary.B. Hemphill. *Blasting Operations*.
- [Hin59] K. Hino. *Theory and practice of blasting*. Nippon Kayaku Co Ltd., 1959.
- [I.U67] I.U.T.A.M. *Symposium High Dynamic Pressures*, Paris, 1967. Dunod.
- [Jou17] E. Jouguet. *Mécaniques des explosifs*. Octave Doin, 1917.
- [KF78] D. Kosloff and Gerald A. Frazier. Treatment of hourglass patterns in low order finite element codes. *Int. J. for Num. and Analy. Methodes in Geomeca.*, 2:57–72, 1978.
- [LC85] J. Lemaitre and J.L. Chaboche. *Mécanique des Matériaux Solides*, volume 1. Dunod, 1985.
- [LK63] U. Langefors and B. Kilhlström. *The Modern Technique of Rock Blasting*, volume 1. JOHN WILEY and SON, 1963.
- [Mad79] Charles L. Mader. *Numerical Modelling Of Detonation*, volume 1. University of CALIFORNIA Press, 1979.
- [NR50] Von Neumann and J. Richtmayer. A method for the numerical calculation of hydrodynamical shock. *J. of applied physics*, 1950.
- [R⁺93] A. Rustan et al. *Definitions Of Blasting Terms And Symbols*. Luleå University of Technology, 1993.
- [Sha42] J.A. Sharpe. The production of elastic wave by explosive pressure, part i - theory and empirical field observations. *Geophysics*, 7(2):144–154, 1942.
- [Vid69] A. Vidart. Compraraison de deux equations d'état pour le calcul des explosifs condensés. In *Symposium High Dynamic Pressures* [I.U67].
- [Wil67] Mark L. Wilkins. Calcul de détonations mono et bidimensionnelles. In *Symposium High Dynamic Pressures* [I.U67].

Partie II

Modélisation de la Fracturation des Roches

Chapitre 7

Introduction

La simulation de la fracturation des roches par des explosifs nécessite une connaissance précise du comportement de ce type de matériaux fragiles soumis à des chargements rapides où en effet les vitesses de déformation sont de l'ordre de $10^0/s$ à $10^3/s$ et plus.

Dans cette partie, nous donnerons d'abord brièvement une introduction des propriétés mécaniques des roches. Nous nous concentrerons ensuite sur le comportement mécanique sous des chargements dynamiques et nous proposerons une modélisation en nous inspirant des divers progrès réalisés ces dernières années. Nous présenterons enfin les travaux réalisés par simulation sur :

certaines solutions analytiques des problèmes de cavités dans le cadre de la propagation d'onde élastique,

les mécanismes de fragmentation,

ainsi que les calculs effectués avec RADIOSS notamment lors d'un tir dans la roche avec divers modèles mécaniques comme le modèle proposé, avec des modèles géométriques différents et couplés avec ou sans la détonation.

7.1 La description générale des roches

7.1.1 Classifications

Dans le sens le plus large, les géologues appellent "roche" toute masse minérale. La pétrographie classe les roches en trois grands groupes :

- les roches éruptives provenant de la solidification du magma
- les roches sédimentaires formées à partir de dépôts d'éléments
- les roches métamorphiques résultant des modifications subies par des roches

Nous donnons ici certaines familles des roches dans le tableau (7.1) suivant la terminologie classique pour les dénominations pétrographiques :

Ces différents processus diagénétiques font que les roches présentent des compositions minéralogiques et des textures extrêmement variées, dont la description précise fournit au mécanicien des informations toujours précieuses.

Roches éruptives	Famille des granites	Famille des diorites	Famille des basaltes et gabbros	
	granites,granulite, granodiorite,syénite, microgranite,trachyte rhyodacite,rhyolite	diorite,amprophre microdiorite,andésite, dacite trachyandésite diorite quartzique	gabbro, dolérite, diabase, ophite, basalte, trapp	
Roches sédimentaires	Roches sédimentaires carbonatées	Roches sédimentaires siliceuses	Roches sédimentaires silico alumineuses	Roches salines
	calcaires,craies dolomies,travertins cargneules	grès, silex grès quartzites meulière,arkoses	argiles,marnes	sel gemme roches sulfatées potasse
Roches métamorphiques	Roches métamorphiques massives		Roches métamorphiques schisteuses	
	gneiss,amphibolites, cornéennes, quartzites, marbres, calcaires,leptynine critallins, leptynine		schistes, micaschistes,phyllades, calcschistes,schistes tachetés, schistes, schistes cristallins	

Tableau 7.1 Table Classification des roches

Du point de vue mécanique, on distingue les formations meubles, i.e. les sols, et les formations cohérentes, i.e. les roches. Dans les sols, il n'existe pas de liaisons solides entre les grains; Par contre, dans les roches, des liaisons solides entre les grains leur confèrent une cohésion réelle. Néanmoins, la frontière entre les sols et les roches est difficile à définir par un critère simple.

7.1.2 Propriétés mécaniques des roches

Les roches [P⁺76] sont des solides particulièrement complexes du fait de l'hétérogénéité des constituants et des défauts de structure. La présence de discontinuités est le facteur essentiel du comportement mécanique du milieu rocheux quelle que soit l'échelle considérée:

- les roches sont des milieux polycristallins hétérogènes - composés de grains appartenant à des espèces minérales diverses et qui sont de tailles et de formes variées. La modélisation du comportement global des roches est faite généralement à l'aide d'une homogénéisation proposée par divers auteurs
- les roches sont des milieux discontinus. L'assemblage des grains d'une roche n'est jamais parfait ; il peut subsister des vides appelés pores ; les principales roches poreuses sont les roches sédimentaires, et la dimension des pores est de l'ordre de grandeur des grains. Il y a en outre généralement de nombreux défauts intercristallins. Ces défauts sont désignés sous le terme générale de fissures. On considère que les fissures sont des coupures à bords parallèles d'extension limitée. Les lèvres des fissures sont très rapprochées et peuvent être localement en contact. Le rapport entre la longueur et l'ouverture des fissures est l'ordre de 10^3 à 10^4 .
- les cristaux des roches ont une anisotropie qui leur est propre, liée au système cristallin auquel ils appartiennent. Mais l'anisotropie la plus importante du point vue mécanique résulte de la fissuration.

Propriétés mécaniques observées

L'observation des comportements mécaniques des roches en laboratoire souligne les principales propriétés suivantes :

- non symétrie de la résistance en traction et en compression, la valeur en compression est environ 10 fois la valeur en traction.
- l'effet d'échelle, les résistances décroissent au fur et à mesure de l'augmentation de la taille des éprouvettes.
- les essais en compression

Le résultat des essais en compression avec une pression de confinement est généralement représenté comme dans la figure 7.1 suivante :

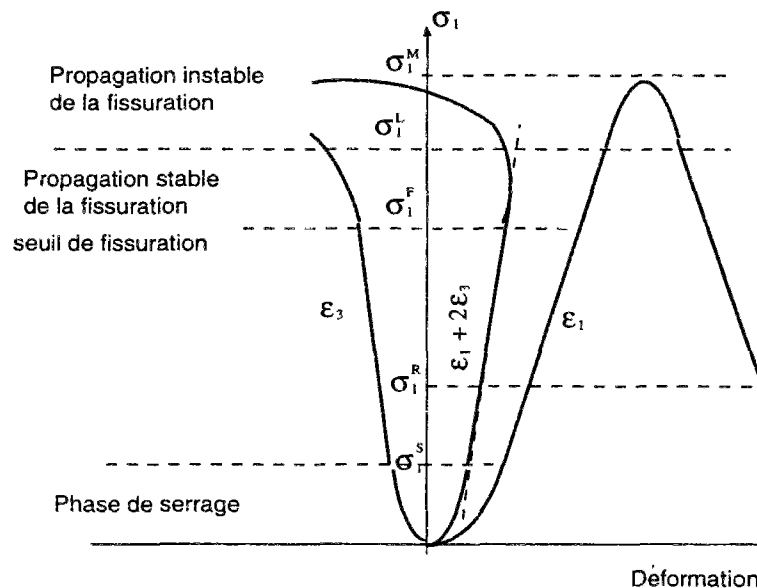


Figure 7.1 Principales phases du comportement d'une roche d'un essai de compression

La non linéarité apparaît dans les périodes de serrage des fissures (et des pores), de la propagation stable de fracture accompagnant une dilatance du volume, de la propagation instable de fracture. On observe également :

- une dépendance de la pression de confinement (le comportement passe de celui fragile à celui ductile)
- l'effet thermique et l'effet hydrique
- l'effet de la vitesse de chargement, lorsque les vitesses de déformation sont de l'ordre de $10^0/s$ à $10^3/s$ et plus.

Caractéristiques des roches

Les caractéristiques des roches sont souvent représentées par :

- Densité ρ_r
- Porosité $n = \frac{V_v}{V_t}$ le rapport entre le volume vide et le volume total
- Résistance à la traction R_t et à la compression R_c
- Module d'Young E
- Vitesse de propagation d'onde longitudinale c_1
- Vitesse de propagation d'onde transversale c_2
- L'état de fracturation du massif

Il est conditionné par toute interruption physique du massif : stratification, schistosité, foliation, diaclases, failles, fractures ...

On donne ici les caractéristiques de l'état de fracturation du point de vue des géotechniciens :

1. l'orientation ou angle du plan moyen de la fracture avec le Nord ;
2. le pendage ou angle du plan moyen de la fracture avec l'horizontale ;
3. la continuité ou longueur apparente de la fracture sur le plan du front ;
4. la fréquence de la famille lorsque nous pouvons rattacher la fracturation à une famille ;
5. l'intervalle de discontinuité ID moyen ou distance mesurée entre les plans de fractures rencontrés.

Voici quelques caractéristiques des différents rochers (celles de l'air et de l'eau servant de référence) présentées dans le tableau (7.2) :

Formations	Vitesse(m/s) logitudinale	Masse(g/cm^3) volumique	Résistance en compression (Mpa)	Résistance en traction (Mpa)
air	330			
eau douce	1450	1.0		
grès	2100-3500	1.8-2.7	30-80	2-3
argiles	1200-2500	1.5		
calcaires	4000-5000	2.4-2.7	80-180	3-6
sel gemme	4500-6500	2.1-2.4		
micashistes	3500-4900	2.7-3.0	130	
quartzites	6000	2.6-2.7	250-300	20
gneiss	4400-5200	2.5-2.7	200	3-10
amphibolites	5800-6500	3.1-3.3		
granites	4000-6000	2.5-2.7	125-250	5-10
diorites	5500-6500	2.7-3.3	320	
basaltes	5500-6500	2.7-3.1	350	10-25

Tableau 7.2 Caractéristiques pour certains matériaux

Chapitre 8

Comportement dynamique des roches

Les modèles classiques du type élastique, élasto-plastique, viscoplastique [Hil67], [Man71], [Zar68] ... sont largement utilisés pour modéliser les comportements des matériaux, notamment pour les métaux.

L'extension aux matières polycristalines hétérogènes comme la roche est faite naturellement d'une part en modifiant la partie plastique (la fonction du seuil élastique, le potentiel plastique...) pour la non linéarité [Civ94], et d'autre part, en introduisant la théorie de la mécanique de l'endommagement pour l'effet de faiblesse du matériau sans quitter le domaine du milieu continu. Ce genre de modèle phénoménologique néglige les détails de l'activité des micro-défauts du matériau qui sont justement la cause (notamment les micro-fissures) de comportements différents et pour se rapprocher des résultats expérimentaux, on introduit souvent des variables qui n'ont pas de sens physique et donc sont peu généralisables. L'avantage d'un tel type de modélisation est qu'on en connaît bien les formulations mathématiques et qu'il n'intervient que des variables macro-physiques, ce qui favorise les calculs numériques peu coûteux. Par ailleurs, dans la plupart des travaux de génie civil, les matériaux principaux sont des roches ou des bétons et l'état de contraintes est généralement en compression avec une pression hydrostatique élevée ; il en résulte que l'influence des micro-fissures est négligeable, et ce type de modèle, peut être donc encore conservé. On trouve souvent dans les codes de calculs cette modélisation en général associée au critère de Mohr-Coulomb, à un critère de Drucker-Prager, à un critère parabolique ou à celui de Chen [HC85] pour le béton...

Mais lorsque l'échelle de défauts devient importante, lorsque globalement les activités des micro-défauts ne peuvent pas être négligées, la modélisation doit suivre des voies différentes; c'est le cas de la fragmentation des roches. Il faut donc atteindre une connaissance de la micro-échelle et à l'aide d'études de micromécanique, établir des modèles à la fois précis et pratiques. Les descripteurs des fissures dans ce cas doivent intervenir explicitement ou implicitement dans la loi. Du point de vue pratique, il est très coûteux de modéliser toutes les fissures du matériau, même s'il y a des fissures dont la dimension a dépassé la limite de la micro-dimension. C'est la raison pour laquelle nous avons choisi de travailler dans le cadre de la mécanique de l'endommagement plutôt que celui de la mécanique de rupture. Dans un tel modèle "continu", certaines variables mécaniques représentent des valeurs moyennes et des techniques d'homogénéisation permettent de conserver un milieu homogène, autrement dit, un compromis entre modèle du milieu fissuré et modèle du milieu continu.

Dans la suite de ce travail, nous nous efforcerons de représenter le comportement global homogénéisé de ces matériaux en retenant les observations de Shockey [S⁺74] qui a constaté après des essais d'impact sur la Novaculite de l'Arkansas que :

1. La résistance en traction est insensible à l'orientation des fissures initiales
2. Les fissures sont *sensiblement circulaires*
3. Soumise à un chargement dynamique uniaxial, la direction de la propagation des fissures est radiale, ce qui implique que la fissure reste une *fissure circulaire*
4. En général, les fragments sont formés de 6 à 8 facettes
5. La vitesse de la propagation de la fissure atteint sa valeur maximale très rapidement, et la valeur maximale est à peu près le tiers de la vitesse longitudinale du milieu.

Sous ces hypothèses, la forme ellipsoïdale de la fissure dont les demi-axes sont respectivement (a, b, δ) pourra être représentée par une *fissure circulaire idéalisée*, c.à.d. une forme ellipsoïdale de révolution très aplatie dont les demi-axes seront $\{c, c, \delta \ll c\}$.

Plusieurs auteurs [LK63], [McH83], [M⁺94], [GK87]... ont constaté aussi que dans le processus de fragmentation des roches, le mode dominant de la rupture est le mode I.

8.1 Homogénéisation

L'homogénéisation consiste à trouver un milieu homogène équivalent à l'échelle du Volume Élémentaire Représentatif (VER) pour le matériau réel micro-hétérogène. Celle-ci peut être faite avec des grandeurs moyennes comme :

$$\langle \mathbf{F} \rangle \equiv \frac{1}{V} \int_V \mathbf{F}(\mathbf{x}) dv$$

par exemple, la valeur globale moyenne de la contrainte d'un VER s'écrit :

$$\bar{\sigma} = \langle \sigma \rangle \equiv \frac{1}{V} \int_V \sigma(\mathbf{x}) dv$$

Avec les formules de Green, cette intégration volumique peut être ensuite transformée en général en une intégrale de surface sur la frontière du VER. Mais dans de nombreux autres cas des grandeurs, qui ne sont pas des moyennes directes, doivent être introduites voir par exemple R. Hill, J. Mandel, H.D. Bui ... et la revue générale dans le livre[GZ]

Pour des raisons de simplification de la présentation, nous limiterons notre bref rappel au cadre de l'élasticité.

8.1.1 Méthodes d'homogénéisation

- a). Hypothèse de l'égalité de la force surfacique sur ∂V (Méthode de la macro-contrainte associée ; MC)

Dans ce cas, $\bar{t}^0 = \sigma^0 \cdot \vec{n}$ sur ∂V est associée avec la macro-contrainte $\Sigma = \sigma^0$. Si le VER est purement homogène, la déformation associée s'écrit alors :

$$\epsilon^0 \equiv \mathbf{A} : \sigma^0 \quad (8.1)$$

En raison de l'existence des défauts dans VER, la déformation moyenne n'est pas ϵ^0 , et on cherche $\bar{\mathbf{A}}$ tel que :

$$\langle \epsilon \rangle = \bar{\mathbf{A}} : \sigma^0 = \epsilon^0 + \bar{\epsilon}^c \quad (8.2)$$

Où $\bar{\epsilon}^c$ est la déformation supplémentaire due à la présence des défauts.

En élasticité linéaire, la déformation supplémentaire s'écrit :

$$\bar{\epsilon}_{ij}^c = H_{ijkl} \sigma_{kl}^0 \quad (8.3)$$

avec

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{H} \quad (8.4)$$

Pour des matériaux poreux, on a :

$$\bar{\epsilon}_{ij}^c = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} (n_{\Omega i} u_j + n_{\Omega j} u_i) dS \quad (8.5)$$

où $\partial\Omega$ est l'union de toutes les surfaces des cavités et $\vec{n}_{\Omega_k}$ est la normale extérieure de la surface Ω_k .

Pour des matériaux fissurés, $\bar{\epsilon}^c$ s'écrit ainsi :

$$\bar{\epsilon}_{ij}^c = \int_{\partial\Omega^+} \frac{1}{2} (n_{\Omega i} \|u_j\| + n_{\Omega j} \|u_i\|) dS \quad (8.6)$$

Où $\partial\Omega^+$ est l'union de toutes surfaces supérieures des fissures.

Avec l'hypothèse de la condition statiquement admissible, le résultat en général n'est pas cinématiquement admissible. L'analyse de l'énergie potentielle [Hil50, 1] de la macro-déformation montre que c'est une approche par borne supérieure ; donc $\bar{\mathbf{A}}$ est la limite inférieure pour les modules effectifs.

- b). Hypothèse de l'égalité de la déformation sur ∂V (Méthode de la macro-déformation associée ; **MD**)

Dans ce cas, $\vec{u}^0 = \epsilon^0 \cdot \vec{x}$ donc linéaire sur ∂V est associée avec la macro-déformation $\mathbf{E} = \epsilon^0$. Si le VER est homogène, la déformation associée s'écrit alors :

$$\sigma^0 \equiv \mathbf{C} : \epsilon^0 \quad (8.7)$$

A cause de l'existence des défauts dans VER, la contrainte moyenne n'est pas en général égale σ^0 et on cherche $\bar{\mathbf{C}}$ tel que :

$$\langle \sigma \rangle = \bar{\mathbf{C}} : \epsilon^0 = \sigma^0 + \bar{\sigma}^c \quad (8.8)$$

Où $\bar{\sigma}^c$ est la contrainte supplémentaire due à la présence des défauts.

A l'aide du principe de réciprocité, on peut montrer que:

$$\langle \sigma \rangle = \sigma^0 - \mathbf{C} : \left\{ \frac{1}{V} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} (\mathbf{n}_{\Omega} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{n}_{\Omega}) dS \right\} \quad (8.9)$$

ou encore:

$$\bar{\sigma}^c = - \mathbf{C} : \bar{\varepsilon}^c \quad (8.10)$$

En élastique linéaire, la déformation supplémentaire s'écrit :

$$\bar{\varepsilon}_{ij}^c = J_{ijkl} \varepsilon_{kl}^0 \quad (8.11)$$

D'où :

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} - \mathbf{C} : \mathbf{J} \quad (8.12)$$

Avec l'hypothèse de la condition cinématiquement admissible, le résultat en général n'est pas statiquement admissible. L'analyse de l'énergie potentielle de la macro-contrainte montre que c'est une approche par borne supérieure. $\bar{\mathbf{C}}$ est la limite supérieure pour les modules effectifs.

Supposant que le champ des déplacements reste le même à σ^0 imposée ou à $\varepsilon^0 = \mathbf{A} : \sigma^0$ imposée (ce n'est pas toujours vrai), on a donc la relation: $\mathbf{J} = \mathbf{H} : \mathbf{C}$ d'après (8.3) et (8.11), et on trouve donc :

$$\bar{\mathbf{C}} : \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{1}^{(4)} - \mathbf{C} : \mathbf{H} : \mathbf{C} : \mathbf{H} \quad (8.13)$$

c). Schéma auto-cohérent (self-consistent **SC**)

Les deux méthodes citées ci-dessus donnent deux bornes des modules effectifs. Pour obtenir un encadrement des modules effectifs, en prenant les modules effectifs comme inconnus, on résout les équations linéaires suivantes :

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \bar{\mathbf{H}} \quad (8.14)$$

ou :

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} - \mathbf{C} : \bar{\mathbf{J}} \quad (8.15)$$

Et dans ce cas, si la relation entre $\bar{\mathbf{H}}$ et $\bar{\mathbf{J}}$ est $\bar{\mathbf{J}} = \bar{\mathbf{H}} : \bar{\mathbf{C}}$, en multipliant (8.15) par $\mathbf{C}^{-1}$ à gauche et par $\bar{\mathbf{C}}^{-1}$ à droite, on a donc :

$$\mathbf{C}^{-1} = \bar{\mathbf{C}}^{-1} - \bar{\mathbf{H}} \quad (8.16)$$

Comparant avec (8.14), on a la relation : $\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{A}}^{-1}$. Le calcul donne les valeurs uniques des modules effectifs, soit avec (8.14) ou soit avec (8.15).

d). Schéma différentiel (**SF**)

Le schéma est le même que **SC** sauf que les équations sont écrites à partir des incréments infiniment petits de la densité des micro-structures. Le calcul des modules effectifs revient donc à résoudre les équations différentielles avec les conditions initiales connues

R.q : Il est clair que la clef des méthodes est de chercher le champ des déplacements sur les surfaces de discontinuités (ou les surfaces des cavités) associés à la contrainte Σ imposée ou à la déformation $\mathbf{E}$ imposée. Cela n'est généralement pas facile pour les matériaux qui contiennent des micro-fissures dont les distributions de tailles et d'orientations peuvent être très diverses.

Pour le schéma auto-cohérent et le schéma différentiel, on doit connaître le champ des déplacements dans un milieu où les modules sont inconnus (souvent anisotrope). L'avantage est que les effets de l'interaction des défauts sont implicitement pris en compte.

Puisqu'on ne connaît les résultats analytiques que pour les cas simples (ex : une fissure isolée ou fissures colinéaires), les méthodes citées plus haut sont limitées aux cas où le rapport entre la taille des défauts et la taille du VER, et la densité des défauts est suffisamment petit. Cette limitation est relativement faible pour SC et SF et plus particulièrement pour SF.

Il y a bien d'autres méthodes d'homogénéisation plus sophistiquées, mais les calcul deviennent aussi plus compliqués et souvent ne peuvent être que numériques alors que l'on a besoin plutôt de résultats analytiques.

8.1.2 Quelques résultats d'homogénéisation

Nous présentons certains résultats intéressants d'abord sur un exemple simple pour montrer la démarche du calcul, ensuite des résultats sur des problèmes en 2D et 3D des milieux fissurés circulaires avec différentes distributions.

1. Matériau qui contient des micro-cavités sphériques dont la distribution est aléatoire

- Macro-contrainte Σ (MC)

Considérons une cavité sphérique de rayon c placée dans un milieu élastique isotrope homogène. En coordonnées sphériques, le champ des déplacements associé à un chargement $\sigma^0 \mathbf{1}$ très lointain est le suivant :

$$u_r = \frac{\sigma^0}{3\lambda + 2\mu} r + \frac{\sigma^0 c^3}{4\mu r^2}, \quad u_\theta = 0, \quad u_\psi = 0$$

La déformation volumique supplémentaire s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{ii}^c &= \sum f_\alpha \bar{\varepsilon}_{ii}^\alpha \\ &= \sum \left(f_\alpha \frac{1}{\Omega_\alpha} \int_{\partial\Omega_\alpha} u_r(c) dS \right) = \frac{1}{K} f \left(1 + \frac{3K}{4\mu} \right) \sigma^0 \end{aligned}$$

où $f = \sum f_\alpha$ est la fraction volumique des cavités,

et $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ est le module de rigidité à la compression.

Le module effectif s'écrit donc :

$$\frac{\bar{K}}{K} = \left(1 + f \frac{3(1-\nu)}{2(1-2\nu)} \right)^{-1} = 1 - f \frac{3(1-\nu)}{2(1-2\nu)} + o(f^2)$$

- Macro-déformation **E** (ME)

Il correspond au cas précédent où $\Sigma = \sigma^0 \mathbf{1} = K \varepsilon^0 \mathbf{1}$

La déformation volumique supplémentaire s'écrit alors :

$$\bar{\varepsilon}_{ii}^c = \frac{1}{K} f \left(1 + \frac{3K}{4\mu}\right) K \varepsilon^0$$

Le module effectif s'écrit donc :

$$\frac{\bar{K}}{K} = 1 - f \frac{3(1-\nu)}{2(1-2\nu)}$$

D'après les résultats, on peut remarquer que :

- (a) La fraction volumique joue un rôle majeur dans les modules effectifs, par contre la taille de la cavité individuelle (c_i) n'intervient pas.
- (b) Les résultats des deux méthodes coïncident au premier ordre de f

2. Problème 2D

Considérons une fissure de Griffith de rayon c placée dans le plan $(x_1 - x_3)$ du milieu élastique isotrope homogène, on a le résultat analytique associé à un chargement σ^∞ très lointain suivant :

$$\|u_i\| = \sqrt{c^2 - x_1^2} \frac{4\eta}{E} \sigma_{i2}^\infty, \quad x_1 \leq c \quad (i = 1, 2)$$

avec $\eta = \begin{cases} 1 - \nu^2 & \text{pour l'hypothèse de déformation plane} \\ 1 & \text{pour l'hypothèse de contrainte plane} \end{cases}$

Si l'indice α ($\alpha = 1, n$) représente la α -ème fissure, $\bar{\varepsilon}^c$ s'écrit alors :

$$\bar{\varepsilon}^c = \sum_{\alpha=1}^n f_\alpha \bar{\varepsilon}^\alpha \quad (8.17)$$

où la fraction surfacique des α -ème fissures et la déformation supplémentaire s'écrivent :

$$f_\alpha \equiv N_\alpha c_\alpha^2 \quad (\text{pas de sommation}) \quad \bar{\varepsilon}^\alpha \equiv \frac{1}{c_\alpha^2} \int_{\partial\Omega_\alpha^+} \frac{1}{2} (\mathbf{n}_\Omega \otimes \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{u}\| \otimes \mathbf{n}_\Omega) dS \quad (8.18)$$

et on désigne aussi la fraction totale des fissures et le nombre totale des fissures par aire unitaire :

$$f = \sum_{\alpha=1}^n f_\alpha \quad N = \sum_{\alpha=1}^n N_\alpha$$

Les résultats donnés par les différentes méthodes pour le problème en *Contrainte Plane* sont dans le tableau (8.1) :

	MC	MD	SC	SF
distribution aléatoire	$\frac{E}{E} = \frac{1}{1+f\pi}$ $\frac{\nu}{\nu} = \frac{1}{1+f\pi}$	$\frac{E}{E} = 1 - f\pi + 0(f^2)$ $\frac{\nu}{\nu} = 1 - f\pi + 0(f^2)$	$\frac{E}{E} = 1 - f\pi$ $\frac{\nu}{\nu} = 1 - f\pi$	$\frac{E}{E} = e^{-f\pi}$ $\frac{\nu}{\nu} = e^{-f\pi}$
distribution parallèle	$\frac{E_2}{E} = \frac{1}{1+2f\pi}$ $\frac{\nu}{\nu} = \frac{1}{1+2f\pi}$	$\frac{E_2}{E} = 1 - 2f\pi + 0(f^2)$ $\frac{\nu}{\nu} = 1 - 2f\pi + 0(f^2)$		$\frac{E_2}{E} = e^{-2f\pi}$ $\frac{\nu}{\nu} = e^{-2f\pi}$

Tableau 8.1 Les modules effectifs calculés par différentes méthodes

3. Problème 3D

Pour une fissure circulaire immergée dans un milieu élastique isotrope homogène, on a le résultat analytique associé à un chargement σ^∞ très lointain suivant :

$$\begin{aligned} \|u_i\| &= \sqrt{c^2 - r^2} \frac{16(1 - \nu^2)}{\pi E(2 - \nu)} \sigma_{i3}^\infty, \quad r \leq c \quad (i = 1, 2) \\ \|u_3\| &= \sqrt{c^2 - r^2} \frac{8(1 - \nu^2)}{\pi E} \sigma_{33}^\infty, \quad r \leq c \end{aligned} \quad (8.19)$$

La fraction volumique de la α -ème fissure et le tenseur de déformation supplémentaire correspondant, s'écrivent :

$$f_\alpha \equiv N_\alpha c_\alpha^3 \quad (\text{pas de sommation}) \quad \bar{\varepsilon}^\alpha \equiv \frac{1}{c_\alpha^3} \int_{\partial\Omega_\alpha^+} \frac{1}{2} (\mathbf{n}_\Omega \otimes \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{u}\| \otimes \mathbf{n}_\Omega) dS \quad (8.20)$$

Une distribution aléatoire de fissures toutes parallèles au plan $x_1 - x_2$;

Avec les deux premières méthodes, on suppose qu'il n'y a pas d'effet d'interactions entre les fissures. La loi de comportement s'écrit en convention d'ingénieur, c.à.d. : les tenseurs de la contrainte et de la déformation s'écrivent sous forme vectorielle $(a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{23}, a_{31}, a_{12})$. On donne ici les résultats de Nemat-Nasser et Hori [NNH93] suivants :

Macro-contrainte Σ (MC)

$[\bar{A}]$ est donc isotrope transverse.

La matrice isotrope transverse s'écrit :

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu_3}{E_3} & & & \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu_3}{E_3} & & & \\ -\frac{\nu_3}{E_3} & -\frac{\nu_3}{E_3} & \frac{1}{E_3} & & & \\ & & & \frac{1}{\mu_3} & 0 & 0 \\ & & & 0 & \frac{1}{\mu_3} & 0 \\ & & & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A^{(1)}] & [0] \\ [0] & [A^{(2)}] \end{bmatrix}$$

avec $\frac{1}{\mu} = 2(A_{11} - A_{12})$

Et les modules effectifs s'écrivent alors :

$$\frac{\bar{E}_3}{E} = \frac{1}{1 + f \frac{16(1-\nu^2)}{3}} = 1 - f \frac{16(1-\nu^2)}{3} + 0(f^2);$$

$$\frac{\bar{\nu}_3}{\nu} = \frac{1}{1 + f \frac{16(1-\nu^2)}{3}} = 1 - f \frac{16(1-\nu^2)}{3} + 0(f^2);$$

$$\frac{\bar{\mu}_3}{\mu} = \frac{1}{1 + f \frac{16(1-\nu)}{3(2-\nu)}} = 1 - f \frac{16(1-\nu)}{3(2-\nu)} + 0(f^2);$$

Où $\bar{\nu}_3 = \bar{\nu}_{13} = \bar{\nu}_{23}$, $\bar{\mu}_3 = \bar{\mu}_{13} = \bar{\mu}_{23}$ et les autres modules effectifs ne changent pas.

Macro-déformation **E (ME)**

$[\bar{C}]$ est aussi isotrope transversale, la matrice isotrope transverse s'écrit :

$$[C^{(1)}] = \frac{1}{(1+\nu)[(1-\nu)E_3 - 2\nu_3^2 E]} \begin{bmatrix} EE_3 - E^2\nu_3^2 & EE_3\nu - E^2\nu_3^2 & EE_3(1+\nu)\nu_3^2 \\ EE_3\nu - E^2\nu_3^2 & EE_3 - E^2\nu_3^2 & EE_3(1+\nu)\nu_3^2 \\ EE_3(1+\nu)\nu_3^2 & EE_3(1+\nu)\nu_3^2 & E_3^2(1-\nu^2) \end{bmatrix}$$

$$[C^{(2)}] = \begin{bmatrix} \mu_3 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C_{11}^{(1)} - C_{12}^{(1)}}{2} \end{bmatrix}$$

Les modules effectifs $\bar{E}_3, \bar{\nu}_3$, et $\bar{\mu}_3$ peuvent être obtenus, par exemple :

$$\frac{\bar{\mu}_3}{\mu} = 1 - f \frac{16(1-\nu)}{3(2-\nu)};$$

Schéma auto-cohérent (**SC**)

$[\bar{A}]$ s'écrit sous la forme :

$$[\bar{A}^{(1)}] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & \nu & \frac{1}{h_1} \end{bmatrix}, \quad [\bar{A}^{(2)}] = \frac{2(1+\nu)}{E} \begin{bmatrix} \frac{1}{h_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où $h_1 = \bar{E}_3/E$ et $h_2 = \bar{\mu}_3/\mu = 2(1+\nu) \bar{\mu}_3/E$; Et l'équation (8.14) nous donne finalement deux équation en h_1 et h_2 .

Les résultats sont donnés par Hoening [Hoe79]

$$\frac{1}{h_1} = 1 + \frac{8}{3} \sqrt{2\left(\frac{1}{h_1} - \nu^2\right)} \sqrt{(1+\nu)\left(\frac{1}{h_2} - \nu\right) + \sqrt{(1-\nu^2)\left(\frac{1}{h_1} - \nu^2\right)}} f$$

$$\frac{1}{h_2} = 1 + \frac{\frac{8}{3} \sqrt{2\frac{1-\nu}{1+\nu}} \sqrt{(1+\nu)\left(\frac{1}{h_2} - \nu\right) + \sqrt{(1-\nu^2)\left(\frac{1}{h_1} - \nu^2\right)}} f}{1 + \sqrt{h_2} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{1-\nu}{1+\nu}} \sqrt{(1+\nu)\left(\frac{1}{h_2} - \nu\right) + \sqrt{(1-\nu^2)\left(\frac{1}{h_1} - \nu^2\right)}}} \quad (8.21)$$

La comparaison des résultats entre les méthodes différentes est donnée dans la figure (8.1) :

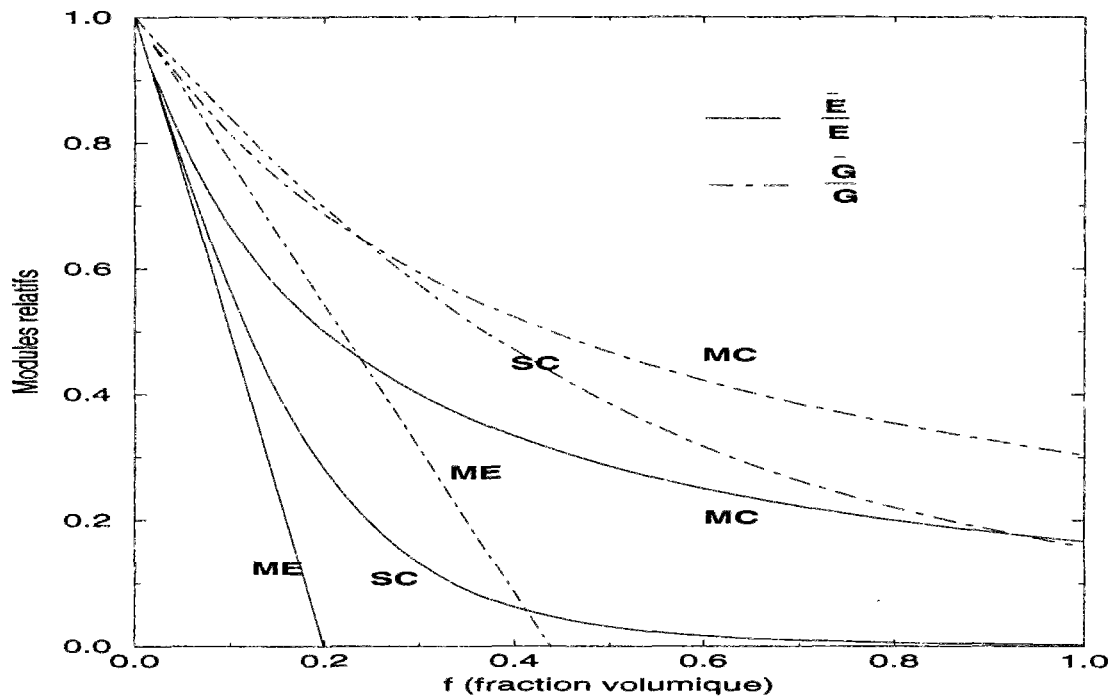


Figure 8.1 Modules effectifs par différentes méthodes

Piau [Pia79] a obtenu des résultats similaires en utilisant un chargement dynamique (une onde harmonique plane) comme chargement d'essai. Après avoir effectué la comparaison entre les configurations différentes, elle prouve que :

1. Une bonne définition de f permet aussi de décrire une distribution de fissures elliptiques parallèles, en réduisant à quelques pourcents l'influence du rapport b/a sur les termes donnant la variation des modules effectifs.

Par extension, on peut espérer avoir une bonne estimation des variations des modules effectifs pour toute distribution de fissures planes de forme convexe.

2. L'anisotropie induite par des fissures remplies d'un fluide incompressible modifie surtout les composantes du cisaillement et est beaucoup moins intense que dans le cas de fissures sèches. Mais l'influence est faible.

8.2 Lois de comportement élastique avec endommagement

Depuis que Kachanov [Kac58] a introduit la notion de contrainte effective en 1958, tous les modèles avec endommagement sont basés sur la même idée que la réponse du matériau endommagé est équivalente à la réponse du matériau intact avec le tenseur des contraintes remplacé par le tenseur des contraintes effectives ou bien les modules sont remplacés par les modules effectifs à partir d'une loi de transformation. Les choix des variables d'endommagement, la fonction d'équivalence, et la loi de transformation peuvent être divers selon les problèmes traités. Nous travaillerons également dans le cadre d'élasticité. (Le cas plus général avec la plasticité ou/et viscoplasticité est donné par Lemaitre [LC85], Ladevèze [LL91]...)

8.2.1 Endommagement isotrope

Pour le problème unidimensionnel, les choix sont faciles et évidents. En introduisant un scalaire D qui désigne le rapport entre l'aire des vides et l'aire totale de la section, la contrainte effective s'écrit simplement:

$$\tilde{\sigma} = (1 - D)\sigma \quad (8.22)$$

Avec l'équivalence en déformation, c'est à dire $\varepsilon = f(\sigma, D) = f(\tilde{\sigma}, 0)$, la loi de comportement s'écrit :

$$\sigma = (1 - D)E\varepsilon \quad (8.23)$$

L'endommagement affaiblit le matériau, on peut aussi écrire cette loi en remplaçant les modules du matériau par les modules effectifs

$$\sigma = \tilde{E}\varepsilon \text{ et } \tilde{E} = (1 - D)E$$

L'extension la plus simple en 3-D est faite dans le cas de l'endommagement isotrope ; Lemaitre[LC85] écrit la loi sous la forme tensorielle :

$$\sigma = (1 - D)(\lambda \operatorname{tr} \varepsilon + 2\mu \varepsilon) \quad (8.24)$$

L'énergie libre s'écrit :

$$\varphi(\varepsilon, D) = \frac{1}{2}\lambda(1 - D)(\operatorname{tr} \varepsilon)^2 + \mu(1 - D)\operatorname{tr} \varepsilon^2 \quad (8.25)$$

D est donc considéré comme une variable interne d'état irréversible, et le deuxième principe thermodynamique exige que :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial D} \dot{D} \leq 0. \text{ donc } \dot{D} \geq 0.$$

8.2.2 Endommagement anisotrope

Pour les milieux anisotropes, un scalaire n'est plus suffisant pour décrire l'endommagement. Afin d'assurer la transformation du tenseur d'élasticité $\mathbf{C}$ en $\tilde{\mathbf{C}}$ (d'ordre 4), $\mathbf{D}$ doit être formellement un opérateur linéaire d'ordre huit. Mais la manipulation et l'identification d'un opérateur d'ordre huit dans le cas d'un chargement complexe pose de difficiles problèmes et il est donc souhaitable de se ramener à des opérateurs d'ordre inférieur.

1. $\mathbf{D}$ tenseur du second ordre

Si le tenseur des contraintes effectives s'écrit :

$$\tilde{\sigma} = \mathbf{M}(\mathbf{D}) : \sigma$$

Alors la loi de transformation ne peut pas être celle de l'équivalence en déformation, puisqu'elle conduit à la non symétrie du tenseur d'élasticité effectif $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{D}) : \mathbf{C}$, même si $\mathbf{M}$ est bien symétrique. Sidoroff [Sid81] propose donc une loi d'équivalence en énergie élastique :

Si ϕ est l'énergie élastique complémentaire, alors $\phi(\sigma, \mathbf{D}) = \phi(\tilde{\sigma}, 0)$.

La loi de comportement peut être considérée comme la relation entre la contrainte effective et la déformation effective avec :

$$\tilde{\sigma} = \mathbf{M}(\mathbf{D}) : \sigma \quad \text{et} \quad \tilde{\varepsilon} = \mathbf{M}^{-t}(\mathbf{D}) : \varepsilon$$

Cordebois [CS79] donne trois formes de $\mathbf{M}$ utilisables :

- a) $\tilde{\sigma} = (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2} \cdot \sigma \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2}$
- b) $\tilde{\sigma} = \frac{1}{2} [(\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1} \cdot \sigma + \sigma \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1}]$
- c) $\tilde{\sigma} = \frac{1}{2} [(\mathbf{1} - \mathbf{D}) \cdot \tilde{\sigma} + \tilde{\sigma} \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{D})]$

Dans le repère principal du $\mathbf{D}$, en désignant leur trois valeurs propres D_i ($i = 1, 3$), les trois formes conduisent aux mêmes résultats pour les contraintes normales : $\tilde{\sigma}_{ii} = \frac{\sigma_{ii}}{1-D_i}$ (pas de sommation), et les contraintes de cisaillements s'écrivent :

- a) $\tilde{\sigma}_{12} = \sigma_{12} / (1 - D_1)(1 - D_2)$
- b) $\tilde{\sigma}_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2} [(1 - D_1)^{-1} + (1 - D_2)^{-1}]$
- c) $\tilde{\sigma}_{12} = \frac{2\sigma_{12}}{1 - D_1 + 1 - D_2}$

La première forme de $\mathbf{M}$ est utilisée par de nombreux auteurs [VMZ90], [CjW87]...

On peut constater qu'un tenseur d'ordre deux conduit à trois variables indépendantes pour caractériser le matériau endommagé. Cela simplifie les calculs et l'identification. L'inconvénient est qu'on est limité aux problèmes avec matériaux orthotropes et que l'on a incompatibilité avec les résultats de l'homogénéisation pour certains cas.

2. $\mathbf{D}$ tenseur d'ordre quatre

Chaboche [Cho79] a proposé un tenseur d'ordre quatre pour le matériau contenant des fissures parallèles qui sont perpendiculaires à l'axe 1:

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} [D^{(1)}] & [0] \\ [0] & [D^{(2)}] \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } [D^{(1)}] = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ D_{23} & 0 & 0 \\ D_{23} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [D^{(2)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_5 & 0 \\ 0 & 0 & D_5 \end{bmatrix}$$

où :

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{(1 - \nu)h_1}{1 - \nu - 2\nu^2 + (1 - \nu)h_1} \\ D_{23} &= \frac{\nu}{1 - \nu} D_1 & D_5 &= \frac{h_2}{1 + h_2} \end{aligned} \quad (8.26)$$

ici, h_1, h_2 ont les mêmes significations que dans (8.21).

Avec l'équivalence en déformation, la matrice $\mathbf{M}$ s'écrit :

$$\mathbf{M} = (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1}$$

et la matrice d'élasticité effective a la forme suivante :

$$[\tilde{C}^{(1)}] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu)(1-D_1) & \nu(1-D_1) & \nu(1-D_1) \\ \nu(1-D_1) & (1-\nu)(1-D_2) & \nu(1-D_{23}) \\ \nu(1-D_1) & \nu(1-D_{23}) & (1-\nu)(1-D_2) \end{bmatrix}$$

$$[\tilde{C}^{(2)}] = 2\mu \begin{bmatrix} 1 & & \\ & (1-D_5) & \\ & & (1-D_5) \end{bmatrix}$$

avec

$$D_2 = \left(\frac{\nu}{1-\nu}\right)^2 D_1$$

Malheureusement, l'extension pour les fissures parallèles à différentes directions avec cette définition ne peut pas être faite.

8.2.3 Critère d'endommagement

Le critère d'endommagement du problème est lié avec celui de la nucléation de fissure. Il y a les divers critères [Bui78] de rupture, ils sont d'ailleurs tous équivalents à la condition de Griffith [Gri20] exprimée en énergies qui a le sens physique le plus évident :

La fissure devient instable si la réduction de la macro-énergie potentielle associée à une variation virtuelle de la fissure dimensionnelle est égale au travail nécessaire pour créer la surface de la variation de la fissure.

Le critère s'écrit donc: $G \geq G_C$;

G s'appelle le taux de restitution d'énergie.

Le critère s'exprime aussi avec les facteurs d'intensité de la contrainte K (qui mesurent les forces de la singularité des contraintes) introduits par Irwin [Irw57] : $K_I \geq K_{IC}$; (en mode I)

où K_{IC} , la ténacité en mode I, est une caractéristique physique du matériau.

Etant donné le chargement, il existe aussi une taille critique de la fissure. Pour le cas d'une fissure circulaire dans un milieu infini, on a :

$$c_c = \frac{\pi K_{IC}^2}{4\sigma_\infty^2} \quad (8.27)$$

Pour tenir compte de l'interaction des fissures, Costin [Cos87] propose un critère pour des fissures colinéaires :

La surface de fracture est définie par :

$$\frac{2}{\pi} T \sqrt{\pi c \vec{n}} = K_{IC} \quad (8.28)$$

avec

$$T = \frac{1}{3} \sigma_{kk}^\infty + F \vec{n}^t \cdot \mathbf{S}^\infty \cdot \vec{n} \quad (8.29)$$

$$F = \alpha \left[\frac{d}{c \vec{n}} \frac{1}{(1 - \sqrt{\frac{c \vec{n}}{d_1}})} \right] \quad (8.30)$$

où $\mathbf{S}^\infty$ est le déviateur du $\boldsymbol{\sigma}^\infty$; d_1 est la distance des fissures colinéaires voisines ; et d est la dimension de la zone en traction.

D'où :

$$Y = \vec{n}^t \cdot \mathbf{S} \cdot \vec{n} + \frac{\sigma_{kk}}{3F} - \frac{\pi K_{Ic}}{2F\sqrt{\pi c\vec{n}}} = 0 \quad (8.31)$$

Mandel [Man78] a proposé un critère pour tenir compte de l'existence de la zone plastique au front de la fissure.

En introduisant un facteur d'intensité cinématique K^v , Bui [Bui78] a proposé un critère tel que : $f(K_I^v, K_I^s) = 0$ pour le problème dynamique pour surmonter le problème de la dépendance de la ténacité dynamique à la vitesse de propagation de fissure.

8.2.4 Evolution cinématique de l'endommagement

Description des variables d'endommagement

Puisque la fissuration joue un rôle essentiel dans le comportement mécanique des roches, il est indispensable d'établir le lien entre les descripteurs des fissures et les variables d'endommagement afin d'obtenir un modèle continu.

Si N_i désigne le nombre de fissures de taille c_i par unité du volume et $v(c_i)$ le volume de la contrainte relaxée autour de la fissure, le volume vide effectif s'écrit alors :

$$\tilde{V}(c) = \sum_i N_i v(c_i) \quad (8.32)$$

En désignant par $\rho(c)$ la densité de fissures, on le réécrit sous forme continue :

$$\tilde{V}(c) = \int_0^{c_{max}} \rho(c) v(c) dc \quad (8.33)$$

Grady et Kipp [GK80] proposent une relation tout simple :

$$D = Nv \quad (8.34)$$

où N est le nombre de fissures circulaires par unité de volume et $v(c) = \frac{4}{3}\pi c^3$. Ici, l'isotropie implique non seulement la forme du volume vide effectif (forme sphérique) mais aussi la distribution des fissures dans le milieu. D reste donc un scalaire et un modèle continu du type élastique avec endommagement isotrope peut être utilisé.

Compte tenue de l'origine de la roche et la complexité éventuelle des chargements, la présence et le développement des fissures dans la roche est réellement anisotrope ; D doit être naturellement remplacé par un tenseur d'ordre supérieure à 1. Par exemple, un vecteur dont la direction est normale à la surface de fissure et l'amplitude est proportionnelle à l'aire de la surface. Pour tenir compte les effets de cisaillement, un tenseur d'ordre supérieur à 2 est nécessaire.

Lois de l'évolution de l'endommagement

Quand le critère de nucléation est atteint, la fissure va se propager. La vitesse de la propagation prend une valeur maximale assez rapidement et reste après constante pour

des matériaux fragiles. La valeur maximale est celle de vitesse de Rayleigh en estimation théorique et souvent de l'ordre d'un tiers de la vitesse longitudinale en observation expérimentale. Si le modèle contient les descripteurs de fissures comme c_i , l'évolution de c_i peut être modélisée simplement par une fonction exposant ou constante ou bien comme : $\dot{c} = A_0 K_I^n$ proposée par Costin. Mais le calcul de tous les c_i coûtera trop cher et ce n'est pas le but du modèle continu.

Si l'endommagement est associé aux variables internes plastiques, la détermination de la loi d'évolution sera semblable à celle de la théorie plastique (par le biais d'un gradient d'un potentiel). Ce genre de loi est plutôt adapté à l'endommagement dû à la fatigue ou aux matériaux ductiles.

Grady et Kipp [GK80] ont proposé une loi de l'évolution d'endommagement très pratique basée sur la distribution des fissures actives de Weibull. La déduction est la suivante:

La distribution des fissures actives de Weibull :

Si la probabilité de rupture, pour une éprouvette du volume V qui est soumise une traction σ , est :

$$P(\sigma) = 1 - e^{-\int (\frac{\sigma - \sigma_u}{\sigma_0})^m dV}, \quad \sigma > \sigma_u \quad (8.35)$$

où σ_u est une constante dépendante de la cohésion du matériau, et que le nombre des fissures actives par unité de volume, dont les contraintes critiques sont inférieures à σ , suit une distribution de Poisson :

$$p(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

alors la probabilité de trouver au moins une fissure active avec $\sigma_c = \sigma$ pour un volume V est :

$$1 - p(0) = 1 - e^{-nV} \quad (8.36)$$

En comparant l'équation (8.36) avec (8.35), on a :

$$n = \left(\frac{\sigma - \sigma_u}{\sigma_0} \right)^m$$

En problème unidimensionnel, la distribution peut être réécrite en fonction de la déformation. Ainsi le nombre de fissures actives avec la déformation inférieure à ε , s'écrit :

$$n = k\varepsilon^m \quad (8.37)$$

où k, m sont des constantes caractéristiques du matériau.

L'évolution de l'endommagement :

On reprend la définition de D précédente:

$$D = Nv \quad (8.38)$$

Si δN désigne une augmentation du nombre de fissures activées dues à l'incrément $\delta\varepsilon$, on a :

$$\delta N = \delta n(1 - D) = n'(\varepsilon)\delta\varepsilon(1 - D) \quad (8.39)$$

$(1 - D)$ représente la réduction du nombre de fissures actives due à la relaxation de contrainte, d'où :

$$\dot{N} = n'(\varepsilon)\dot{\varepsilon}(1 - D) \quad (8.40)$$

A l'instant t , D peut être considéré comme la superposition de toutes les fissures activées au temps τ ($0 \leq \tau \leq t$), tel que :

$$D(t) = \int_0^t \dot{N}(\tau) v(t - \tau) d\tau \quad (8.41)$$

En supposant que la vitesse de la propagation de fissure atteint sa limite c_g instantanément, il vient $v(t) = \frac{4}{3}\pi(c_g t)^3$. D'où

$$D(t) = \frac{4}{3}\pi c_g^3 \int_0^t n'(\varepsilon) \dot{\varepsilon} (1 - D)(t - \tau)^3 d\tau \quad (8.42)$$

Une approximation de la solution est donnée par Grady et Kipp dans le cas où : $\varepsilon(t) = \dot{\varepsilon}_0 t$

$$D(t) \simeq \alpha \dot{\varepsilon}_0^m t^{m+3} \quad (8.43)$$

avec

$$\alpha = \frac{8\pi c_g^3 k}{(m+1)(m+2)(m+3)}$$

La contrainte s'écrit :

$$\sigma(t) = E \dot{\varepsilon}_0 t (1 - \alpha \dot{\varepsilon}_0^m t^{m+3}) \quad (8.44)$$

Et la valeur maximale de la contrainte s'écrit :

$$\sigma_c = E(m+3)(m+4)^{-\frac{m+4}{m+3}} \alpha^{-\frac{1}{m+3}} \dot{\varepsilon}_0^{\frac{3}{m+3}} \quad (8.45)$$

qui montre bien l'effet de la vitesse de chargement sur la résistance en traction confirmé par des essais dynamiques.

Dans les essais d'impact sur le granite, la Novaculite de l'Arkansas et plusieurs types de bétons, Birkimer, Lipkin[LKC77], Grady et Kipp [GK79]... observent une dépendance d'ordre racine cubique de la vitesse de la déformation ($\sigma_c \sim \dot{\varepsilon}_0^{1/3}$) cela signifie que $m \simeq 6$ pour ces matériaux.

La loi d'évolution d'endommagement s'écrit alors :

$$\dot{D} = \left[\frac{8\pi(m+3)^2}{(m+1)(m+2)} \right]^{1/3} c_g n(\varepsilon)^{1/3} D^{2/3} \quad (8.46)$$

L'identification des coefficients de Weibull k, m est effectuée par une série d'essais dynamiques en traction avec différentes vitesses de chargements uniaxiales [VF75] et multi-axiales [Eva78].

Rq : Notons que l'expression (8.46) bien adaptée au calcul numérique a été construite pour une vitesse de chargement constante ; pour un autre cas de chargement, elle n'est sans doute qu'approchée.

8.3 Modèle proposé

L'objectif de nos travaux est de proposer un modèle continu (intégrable dans les codes de calcul) pour le comportement des roches dans le processus de fragmentation. Certaines hypothèses essentielles doivent être faites :

1. La traction domine la rupture (mode I)

Cette hypothèse exclut le cas de la rupture par cisaillement, non seulement parce qu'elle est négligeable devant la traction dans le processus de fragmentation, aussi parce que l'intervention éventuelle de plasticité et des contacts compliquera le problème.

2. La non linéarité du matériau est totalement gouvernée par l'endommagement

Cette hypothèse exclut la plasticité dans le modèle ; mais un modèle phénoménologique du type élastoplastique peut aussi modéliser le processus de fragmentation de la roche [Joh78] dont le critère de la rupture et l'évolution de l'endommagement sont liés avec la surface élastique et les variables plastiques. Du point de vue des mécanismes de la rupture par fissuration, le modèle élastique avec l'endommagement apparaît plus naturel.

3. Le concept des contraintes principales

Il n'y a que trois directions possibles qui permettent de développer les fissures, ce sont les directions principales des contraintes actuelles.

De nombreux essais en laboratoire confirment cette hypothèse ; elle permet à la fois de simplifier le modèle et de faciliter la définition du tenseur d'endommagement et des lois d'évolution des endommagements ; elle est aussi compatible avec la première hypothèse.

8.3.1 Définition du tenseur d'endommagement

Pour des raisons pratiques, un tenseur d'ordre 2 $\mathbf{D}$ est retenu, le milieu est donc limité à l'orthotropie. Il n'y a que trois paramètres indépendants qui caractérisent l'endommagement, ce sont les trois valeurs propres de $\mathbf{D}$. Chaque valeur correspond à une distribution privilégiée où la normale des plans des fissures est la direction du vecteur propre.

On retient la définition de l'équation (8.34), parce qu'elle est du même ordre que la fraction des défauts définie dans homogénéisation. Dans le calcul numérique, $\mathbf{D}$ est calculé de façon incrémentale. Pour le milieu anisotrope quelconque, ce n'est bien entendu qu'une approximation.

8.3.2 Critère d'endommagement

Notons que pour un modèle continu, on ne peut traiter le problème qu'avec des valeurs moyennes. Le critère de nucléation est choisi simplement sous la forme :

$$\sigma_i^p \geq \sigma_u, (i = 1, 3)$$

Où σ_i^p sont les trois valeurs principales des contraintes et σ_u est une constante dépendant de la cohésion du matériau. En pratique σ_u peut prendre une valeur entre 0 et R_C (la résistance en traction statique du matériau).

8.3.3 Lois d'évolution des endommagements

Avec la définition du tenseur d'endommagement et la conception des contraintes principales, les lois d'évolution des endommagements se réduisent à trois fonctions scalaires découplées, chacune correspond à une évolution cinématique de la valeur propre du tenseur D . En modifiant l'équation (8.46) en fonction de σ_i^p , les lois d'évolution s'écrivent :

$$\dot{D}_i = \left[\frac{8\pi(m+3)^2}{(m+1)(m+2)} \right]^{1/3} c_g n \left(\frac{\sigma_i^p - \sigma_u}{E} \right)^{\frac{1}{3}} D_i^{\frac{2}{3}} \quad (i = 1, 3)$$

avec $n(x) = kx^m$

8.3.4 Tenseurs élastiques effectifs

Inspiré par les résultats d'homogénéisation, en notant que le résultat induit par Hoening ne donne pas une valeur critique de f , autrement dit que $(1 - D_i)$ n'atteint jamais la valeur 0, il est raisonnable de modifier la matrice des complaisances élastiques effectives comme suit

$$\begin{aligned} [\tilde{A}^{(1)}] &= \frac{1}{E} \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & -\nu & -\nu \\ -\nu & \frac{1}{d_2} & -\nu \\ -\nu & -\nu & \frac{1}{d_3} \end{bmatrix} \quad d_1 = 1 - D_1; \quad d_2 = 1 - D_2; \quad d_3 = 1 - D_3; \\ [\tilde{A}^{(2)}] &= \frac{1}{2\mu} \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\beta D_2} + \frac{1}{1-\beta D_3} & & \\ & \frac{1}{1-\beta D_1} + \frac{1}{1-\beta D_3} & \\ & & \frac{1}{1-\beta D_1} + \frac{1}{1-\beta D_2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

où $\beta = (1 - \nu)(2 - \nu)$;

L'inverse de cette matrice donne la matrice de rigidité effective. Elle s'écrit sous la forme suivante :

$$[\tilde{C}^{(1)}] = \frac{E}{\alpha} \begin{bmatrix} (1 - \nu^2 d_2 d_3) d_1 & \nu(1 + \nu d_3) d_1 d_2 & \nu(1 + \nu d_2) d_1 d_3 \\ & (1 - \nu^2 d_1 d_3) d_2 & \nu(1 + \nu d_1) d_3 d_2 \\ \text{SYM} & & (1 - \nu^2 d_2 d_1) d_3 \end{bmatrix}$$

où $\alpha = 1 - \nu^2(d_1 d_2 + d_2 d_3 + d_1 d_3 + 2\nu d_2 d_3 d_1)$

$$[\tilde{C}^{(2)}] = 2\mu \begin{bmatrix} \frac{(1-\beta D_2)(1-\beta D_3)}{2-\beta D_2-\beta D_3} & & \\ & \frac{(1-\beta D_1)(1-\beta D_3)}{2-\beta D_1-\beta D_3} & \\ & & \frac{(1-\beta D_2)(1-\beta D_1)}{2-\beta D_2-\beta D_1} \end{bmatrix}$$

Ces formules sont faciles à calculer, mais il faut remarquer qu'elles sont en $O(f^2)$ près celles des méthodes ME ou MC, i.e. l'interaction des fissures n'est pas prise en compte.

8.3.5 Écriture de la loi en incréments

Trois repères Cartésiens sont définis suivant :

1. Repère de $\mathbf{D}$ principal : $\mathcal{R}(\bar{e}_i^d; i = 1, 3)$.
2. Repère de $\boldsymbol{\sigma}$ principal : $\mathcal{R}(\bar{e}_i^s; i = 1, 3)$.

3. Repère arbitraire $(x, y, z) : \mathcal{R}(\vec{e}_i; i = 1, 3)$.

Les transformations entre les repères sont faites par les matrices de la transformation $\mathbf{Q}$. On a la propriété : $[\mathbf{Q}][\mathbf{Q}]^T = \mathbf{1}$. Les indices (d, s, c) en bas représentent les repères cités précédents. Par exemple, la transformation du vecteur des contraintes entre le repère de $\mathbf{D}$ principales et le repère des contraintes principales s'écrit :

$$\vec{\sigma}_s = [\mathbf{Q}]_{ds} \vec{\sigma}_d \text{ et } \vec{\sigma}_d = [\mathbf{Q}]_{ds}^T \vec{\sigma}_s$$

La loi élastique s'écrit dans $\mathcal{R}(d)$:

$$\vec{\sigma}_d = [\tilde{\mathbf{C}}] \vec{\varepsilon}_d$$

Dans $\mathcal{R}(c)$, la loi s'écrit :

$$\vec{\sigma}_c = [\mathbf{Q}]_{dc} [\tilde{\mathbf{C}}] [\mathbf{Q}]_{dc}^T \vec{\varepsilon}_s = [\tilde{\mathbf{C}}]_{dc} \vec{\varepsilon}_c$$

Alors, en forme incrémentale, elle s'écrit :

$$d\vec{\sigma}_c = [\tilde{\mathbf{C}}]_{dc} d\vec{\varepsilon}_c + d([\tilde{\mathbf{C}}]_{dc}) \vec{\varepsilon}_c = [\tilde{\mathbf{C}}]_{dc} d\vec{\varepsilon}_c + \{[\tilde{\mathbf{C}}]_{dc}(t+dt) - [\tilde{\mathbf{C}}]_{dc}(t)\} \vec{\varepsilon}_c$$

Si le repère $\mathcal{R}(s)$ coïncide avec $\mathcal{R}(d)$ pendant toute l'histoire de chargement, on a

$$d([\tilde{\mathbf{C}}]_{dc}) = [\tilde{\dot{\mathbf{C}}}]_{dc} dt$$

Sous forme hypo-élastique et explicite, la loi s'écrit dans $\mathcal{R}(c)$:

$$\begin{aligned} d\vec{\sigma}_c &= [\tilde{\mathbf{C}}]_{dc} d\vec{\varepsilon}_c + \{[\tilde{\mathbf{C}}]_{dc}(t+dt) - [\tilde{\mathbf{C}}]_{dc}(t)\} [\tilde{\mathbf{C}}]_{dc}^{-1}(t) \vec{\sigma}_c(t) \\ &= [\tilde{\mathbf{C}}]_{dc} d\vec{\varepsilon}_c + [\tilde{\mathbf{C}}]_{dc}(t+dt) [\tilde{\mathbf{C}}]_{dc}^{-1}(t) \vec{\sigma}_c(t) - \vec{\sigma}_c(t) \end{aligned} \quad (8.47)$$

Rq : La forme hypo-élastique est utile lors des grandes transformations. La forme tensorielle (l'ordre 2) de l'endommagement assure son indépendance au regard du choix du repère. Ce tenseur est calculé incrémentalement exactement comme le tenseur de contraintes. A chaque instant, le milieu est approché par un matériau orthotrope et l'état d'endommagement initial est considéré équivalent après la transformation entre des repères.

8.3.6 Prédiction de la taille de fragments

L'existence de fissures initiales explique que lors des expériences de tirs dans les roches, les tailles de fragments (la dimension des fragments) sont liées au taux de chargement. Lorsque le chargement est imposé lentement, seules les fissures de tailles grandes (σ_c petit) participent à la fragmentation, il apparaît globalement un petit seuil de ruine et les tailles de fragments sont en conséquence grandes. Lorsque le chargement est très rapide, en raison de la limite de la vitesse maximale de la propagation des fissures, les fissures qui participent à la fragmentation sont plus nombreuses, par conséquent, le seuil de ruine augmente et les tailles de fragments diminuent.

Une prédiction de la taille représentative, e.x. la valeur moyenne peut être faite suivant des chemins différents :

- En fonction des paramètres de la distribution de Weibull

Intuitivement, la taille prévue sera $d \sim [n(\sigma_c)]^{-1/3}$. Grady et Kipp [GK87] donnent, à l'aide de la distribution de Weibull, une forme :

$$d = \frac{f(m)}{k^{1/3}} \left(\frac{\dot{\epsilon}_0}{c_g k^{1/3}} \right)^{\frac{-m}{m+3}} \quad (8.48)$$

avec

$$f(m) = \frac{6}{m+2} \left[\frac{8\pi}{(m+1)(m+2)(m+3)} \right]^{\frac{-1}{m+3}}$$

- En fonction de la ténacité K_c

d'après l'équation (8.27), l'ordre de la taille sera $d \sim \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_c} \right)^2$.

- En fonction de l'énergie cinétique

Cette approche est basée sur l'hypothèse que l'énergie cinétique joue un rôle majeur devant l'énergie élastique dans le processus de fragmentation. Elle est donc adaptée au cas où la fragmentation prend un régime catastrophique.

Considérons une masse sphérique (de rayon c) comprimée qui est maintenant dans un état d'expansion uniforme avec un taux de densité $\dot{\rho}$, l'énergie cinétique est décomposée en un terme d'énergie cinétique du centre de gravité qui reste constante pendant le processus donc aucune contribution à la fragmentation, et en un autre terme de l'énergie cinétique relative au centre qui, d'après la conservation de la masse, s'écrit :

$$T' = \frac{2\pi}{45} \frac{\dot{\rho}^2}{\rho} a^5 \quad (8.49)$$

Cette énergie s'écrit aussi :

$$T = \frac{3}{10} \frac{\dot{\rho}^2}{\rho A^2} \quad (8.50)$$

où A est l'aire de la surface volumique tel que $A = 3/c$.

L'énergie volumique de la surface fragmentée s'écrit simplement :

$$\Gamma = \gamma A \quad (8.51)$$

Donc l'équation d'équilibre est équivalente à minimiser l'énergie totale : $U = T + \Gamma$.

$$\text{i.e : } \frac{\partial U}{\partial A} = 0 \Rightarrow A = \left(\frac{3\dot{\rho}^2}{5\rho\gamma} \right)^{1/3}.$$

Si $\dot{\epsilon} = \dot{\rho}/3\rho$ et $\gamma = K_{Ic}^2/2\rho c_1^2$, la taille sera la forme :

$$d = 2c = \left(\frac{\sqrt{20}K_{Ic}}{\rho c_1 \dot{\epsilon}} \right)^{2/3} \quad (8.52)$$

- Modèle numérique

Shockey [S⁺74] montre une démarche itérative pour calculer la distribution de taille de fragments.

La relation entre la densité de fragments (avec l'indice f) et la densité de la fissure de taille c (avec l'indice c) est définie sous la forme :

$$\rho_f(c) = V_r \beta(c) \rho_c(c) \quad (8.53)$$

où V_r est le volume intact relatif; β est un facteur dépendant la forme du fragment.

La taille de fragment s'écrit en fonction de la taille de fissure $c_f = \varsigma(c) \cdot c$.

Le volume vide relatif et le volume relatif de fragments s'écrivent respectivement :

$$V_c^v = \int_0^{c_{max}} \rho_c(c) v_c(c) dc \quad (8.54)$$

et

$$V_f = \int_0^{c_f^{max}} \rho_f(c) v_f(c_f) dc \quad (8.55)$$

Pour un fragment à huit facettes, on a des valeurs simplifiées :

$\beta = 0.25$; $\varsigma = 1.0$; $v_c(c) = T_c c^3$; $v_f(c) = T_f c^3$ avec les constantes T_c, T_f .

Le critère de fragmentation s'écrit simplement :

$$V_f = 1$$

L'algorithme des calculs numériques se déroule suivant les itérations :

$$\begin{cases} V_f^i = \beta V_r^{i-1} \int_{c_i}^{c_{i+1}} \rho_c(c) dc \\ V_r^i = 1 - \sum_{j=i+1}^I V_f^j \end{cases}$$

qui commencent par la taille maximale (c_I) des fissures et finit par la taille minimale ou $V_r = 0$. Dans le dernier cas, l'élément est complètement fragmenté.

- Avec le modèle continu

En substituant τ par $c = c_g(t - \tau)$ dans l'équation (8.41), l'intégration est effectuée sur la distribution de la fraction volumique :

$$D(t) = \int_0^{c_g t} \mathcal{D}(c, t) dc$$

où $\mathcal{D}(c, t) = \rho(c, t) \frac{4}{3} \pi c^3 = \frac{1}{c_g} \dot{N}(t - \frac{c}{c_g}) \frac{4}{3} \pi c^3$; et $\rho(c, t)$ la densité de la fissure (c) à l'instant t .

Le critère de coalescence de fracture s'écrit simplement par :

$$D(t_f) = 1$$

La distribution du volume fragmenté en fonction de la distribution de la fraction volumique est définie selon Shockey (8.53) :

$$\mathcal{F}(L) = 0.25 \mathcal{D}(\frac{L}{2}, t_f) \quad \text{avec} \quad L = 2c$$

La distribution du fragment (L) accumulée s'écrit donc :

$$F(L) = \int_0^L \mathcal{F}(L) dL$$

Dans le cas d'un chargement où $\varepsilon(t) = \dot{\varepsilon}_0 t$, à l'aide de l'équation (8.43), elle s'écrit :

$$\mathcal{F}(L) = \frac{\pi m k L^3}{24 c_g} \left(t_f - \frac{L}{2 c_g} \right)^{m-1} \dot{\varepsilon}_0^m \quad \text{avec} \quad t_f = \alpha^{\frac{-1}{m+3}} \dot{\varepsilon}_0^{\frac{-m}{m+3}}$$

La taille dominante s'écrit donc :

$$L_M = \frac{12 c_g}{m+2} t_f = \frac{12 c_g}{m+2} \alpha^{\frac{-1}{m+3}} \dot{\varepsilon}_0^{\frac{-m}{m+3}}$$

En fonction de la résistance en traction σ_c , elle s'écrit :

$$L_M = \frac{12 c_g}{m+2} (m+4)^{-\frac{m(m+4)}{3(m+3)}} \alpha^{\frac{-1}{3}} \left(\frac{\sigma_c}{E(m+3)} \right)^{\frac{-m}{3}} \quad (8.56)$$

Compte tenu des méthodes de discrétisation et de sa simplicité, cette formule (8.56) est retenue dans le calcul de la taille de fragments ; la taille dans le cas de l'endommagement anisotrope est calculée pour l'instant par sa valeur maximale qui dépend de la valeur maximale de la première contrainte principale dans toute son histoire.

8.3.7 Validité du modèle

Les calculs avec un élément brique à huit noeuds de dimensions $1mm \times 1mm \times 1mm$, bloqué à un côté, vitesse constante imposée à l'autre côté, donnent les résultats suivants :

Les propriétés du matériau correspondent à celles de la roche 'oil shale' données par Grady :

$\rho (g/mm^3)$	$E (Mpa)$	ν	m	$k (1/mm^3)$	$c_g (m/s)$
0.002	$1.065 \cdot 10^4$	0.4	8	1.7×10^{18}	1300

La figure (8.2) montre l'effet de la vitesse de chargement sur la résistance de traction.

La figure (8.3) en $(\sigma_1, \varepsilon_1)$ montre le comportement anisotrope dû à l'endommagement anisotrope.

On impose d'abord une vitesse constante de $0.1mm/ms$ ($\dot{\varepsilon}_1 = 100/s$) sur l'éprouvette presque intacte (les trois valeurs de l'endommagement initial sont égales toutes à 1.0×10^{-9}). Le chargement en direction de ε_1 s'arrête au moment où $D_1 = 0.4$. La courbe en trait continu correspond au comportement du premier chargement.

Ensuite, on impose respectivement les vitesses constantes de traction dans les directions $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ par rapport à la direction du premier chargement. Les courbes en trait pointillé correspondent à ces comportements et démontrent l'anisotropie évidente.

Ce modèle a bien pris en compte :

- la vitesse de chargement
- l'anisotropie due à l'endommagement.

Par ailleurs, à partir de (8.45), on constate que la résistance dynamique en traction σ_t est

- proportionnelle à $(c_g)^{-\frac{3}{m+3}}$, la vitesse de la propagation de fissure,
- proportionnelle à $(k)^{-\frac{1}{m+3}}$,
- fortement influencée par m .

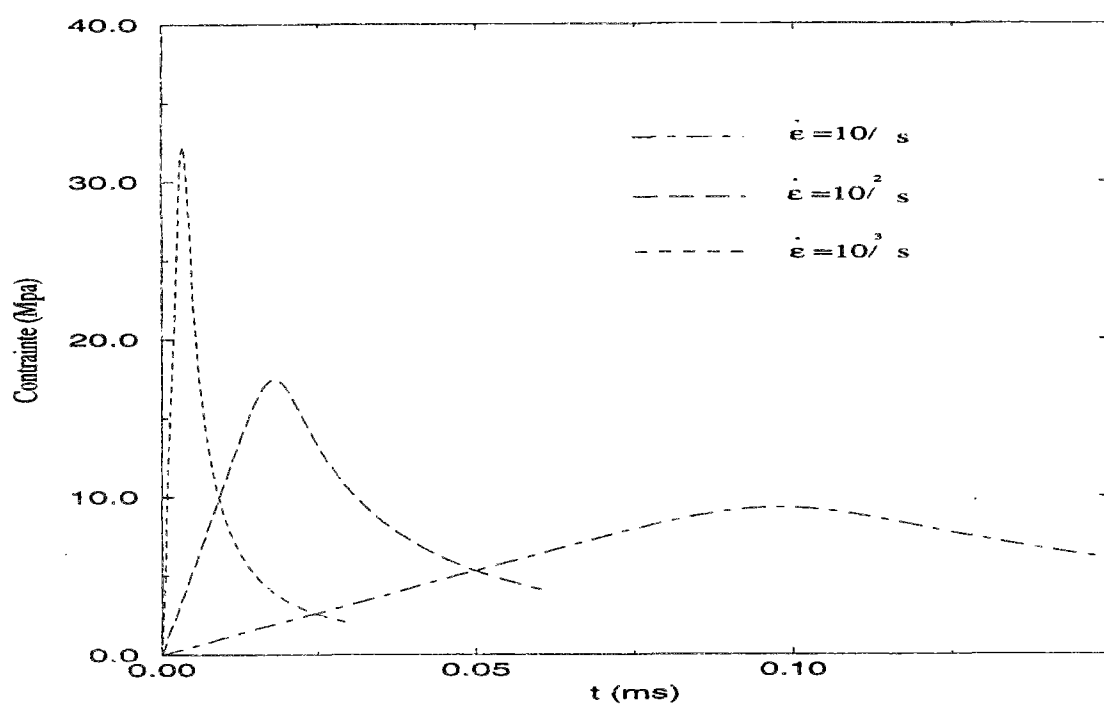
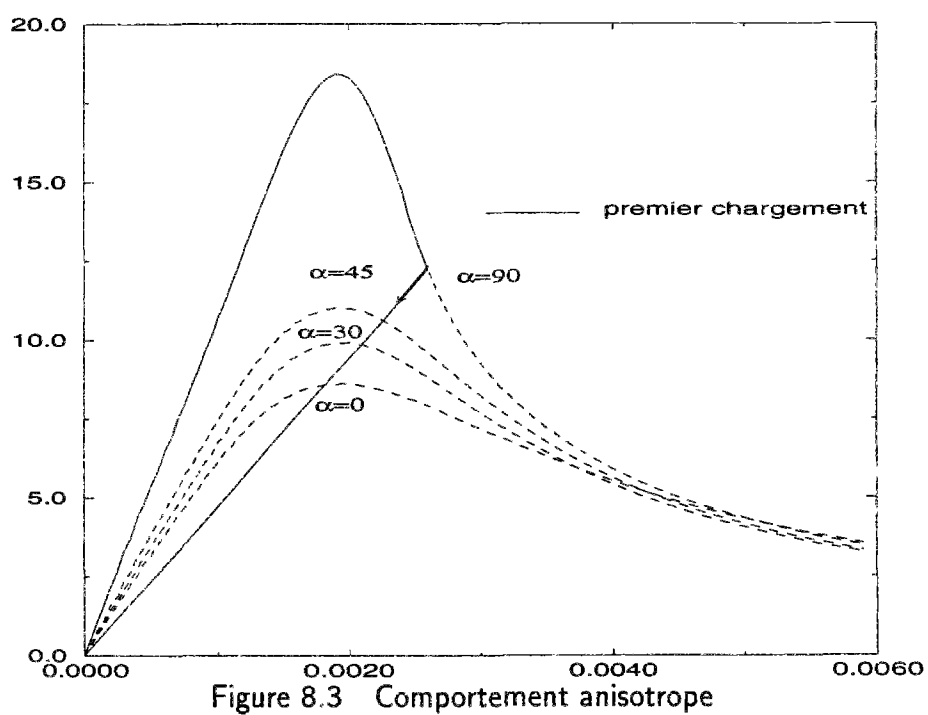
Figure 8.2 L'effet de la vitesse de déformation sur la R_t 

Figure 8.3 Comportement anisotrope

Chapitre 9

Prédiction des résultats de tirs dans la roche

9.1 Observations expérimentales et mécanismes de fracturation

Lors de la propagation de la détonation dans un trou, la réaction chimique libère rapidement un grand volume de gaz ; la poussée des gaz génère une onde de choc dans le massif rocheux. La propagation de cette onde dans ce milieu fragile aboutit à la fragmentation du rocher. Les gaz interviennent aussi en s'infiltrant sous haute pression dans les fissures et en aggravant la fracturation du rocher. Cette fracturation s'accompagne d'une augmentation apparente de volume (foisonnement) et une partie de la pression des gaz peut être convertie en énergie cinétique par la projection de fragments de rocher.

Les essais en laboratoires et sur sites de différents modèles [LK63][KF71][Atc71](de la charge cylindrique circulaire, sphérique, cylindrique ; dans un milieu infini ou avec au moins une surface libre ; du verre, du plexiglas et différents types de roches) montrent que : au cours du processus de fragmentation, il apparaît généralement quatre zones distinctes :

1. Juste autour de la charge, les niveaux de contraintes sont extrêmement élevés selon la brisance de l'explosif, la résistance en compression du matériau est largement dépassée, il se forme une zone de broyage autour du trou. Dans le cas où l'explosif est très brisant, avec une forte pression et température élevée, le comportement du rocher dans cette zone est considéré comme quasi fluide et la contrainte sphérique joue un rôle majeur en régime hydrodynamique. Par ailleurs, dans cette zone, l'atténuation des contraintes est aussi très forte ; dans une opération normale, le rayon de la zone est environ deux fois le rayon du trou d'après Atchison[Atc71].
2. Suivant la zone de broyage, une zone non linéaire avec des fissures radiales est formée. Dans cette zone, c'est la contrainte tangentielle qui joue le rôle majeur ; la roche est sollicitée en traction qui reste encore supérieure à sa résistance (la résistance en traction est beaucoup plus faible que celle en compression). L'atténuation de la contrainte est moins importante que celle dans la zone de broyage. De plus, en tenant compte de l'effet des gaz, cette zone a une dimension importante.

3. Ensuite, une zone élastique (sismique) apparaît. Dans cette zone, l'onde de choc ne provoque plus aucune fracturation macroscopique à cause de l'atténuation des contraintes. Le coefficient d'atténuation dans ce cas est même connu analytiquement comme cela est montré dans la section (9.2).
4. S'il existe au moins une surface libre qui n'est pas très loin de la charge, on observe aussi une zone d'écaillage. En rencontrant la surface libre, l'onde longitudinale P se réfléchit et se scinde en ondes PP et PS , où PP est de signe contraire à l'onde P incidente i.e. en traction. Si cette contrainte réfléchie dépasse la résistance en traction, on observe des fissurations près de la surface libre qui sont parallèles au plan de cette surface. L'atténuation dans cette zone est aussi importante que dans la zone non linéaire. Ce phénomène est si important pour la fragmentation que la création de surfaces libres devient une règle. Il est intéressant aussi pour les opérations de découpage en vue de la protection, puisqu'une macro-fissure dans un milieu tient le même rôle qu'une surface libre.

Les résultats expérimentaux montrent aussi que :

- L'atténuation de la charge sphérique est plus grande que celle de la charge cylindrique.
- L'atténuation de la contrainte tangentielle est plus grande que celle de la contrainte radiale. Restant dans le cadre de l'élasticité, Kutter [Kut70] précise que le coefficient d'atténuation du pic de la contrainte tangentielle en traction est supérieur à celui de la contrainte radiale en compression.

Pour les essais sur les éprouvettes qui contiennent des macro-fissures préfabriquées, Kutter donne un résumé des facteurs influençant la fracturation :

- La charge fait naturellement s'allonger ces macro-fissures. Par contre, à cause de la relaxation du champ des contraintes autour de ces fissures, il y a peu de macro-fissures créées sous la charge.
- Au fur et à mesure de la croissance du diamètre du trou (le rapport de découplage augmente), la zone de broyage décroît et la fissuration est moins dense, cela implique une diminution de l'énergie de choc que l'on va discuter ci-après.
- L'existence de la surface libre provoque le prolongement de ces macro-fissures vers cette surface.
- La contrainte statique (en compression) superposée, favorise le développement parallèle à la direction de cette contrainte et gêne le développement orthogonal à celle-ci.

Pour mieux comprendre le mécanisme de la fragmentation, on sépare souvent le processus en deux phases suivant la sollicitation : une phase dynamique qui correspond à cette propagation de l'onde de choc, et une phase quasi-statique de la pression du gaz qui dure suffisamment longtemps pour être considérée comme un problème quasi-statique. La partition des deux phases correspond en effet à la partition de l'énergie totale en une énergie de choc et une énergie de gaz. Comme cela est schématisé dans la figure (9.1), Si l'état des gaz (produits de détonation) subit un processus adiabatique $B \rightarrow E$, et si le point C

correspond à l'état équilibre, d'après la définition, la valeur de l'énergie de choc correspond à l'aire $ABCD$. Elle dépend donc de la vitesse montante de la pression des gaz. L'énergie de choc créée par une vitesse infiniment grande ($A \rightarrow B \rightarrow C$) est au moins deux fois supérieure à celle créée par une augmentation infiniment longue ($A \rightarrow C$). Cette différence crée une onde de choc dans le milieu adjacent, donc correspond à la première phase.

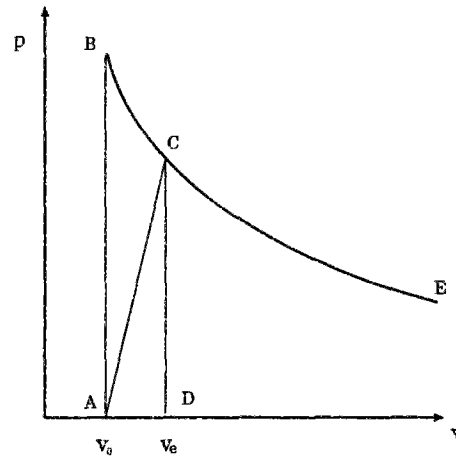


Figure 9.1 L'état des gaz dans le plan (p, v)

L'importance des deux phases dans le processus de fragmentation a été pendant longtemps le centre de discussions entre les deux écoles qui défendaient leurs théories. A présent, on connaît mieux leurs rôles dans la fracturation de roche.

En raison de l'amplitude importante des contraintes, de leur faible atténuation par rapport à la phase statique et de l'effet de réflexion, l'énergie de choc crée des macro-fissures ce qui affaiblit la résistance mécanique du milieu. Ensuite, intervient l'effet des gaz. La poussée permanente ainsi que l'infiltration des gaz dans les fissures développent la fracturation et effectuent enfin la tâche de fragmentation.

Compte tenu de l'effet de la vitesse de chargement sur les tailles de fragmentation (décrit dans le chapitre précédent), ceci conduit aux conséquences suivantes en fonction du rapport de cette partition.

Un rapport de l'énergie de choc sur l'énergie de gaz élevée conduira à :

- une zone de l'endommagement plus profonde
- une fragmentation plus fine

9.2 Solutions du problème des cavités

Les formulations essentielles des ondes élastiques ainsi que les notations sont dans AnnexeB.

9.2.1 Présentation mathématique du problème

Le problème se présente de la façon suivante:

Une cavité de rayon a est soumise une pression $\sigma_0 f_p(t)$ dans un milieu élastique infini. Le système des équations du problème s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
\varphi_{,rr} + \frac{n}{r}\varphi_{,r} &= \ddot{\varphi}/c_1^2 & r > a, t > 0 \\
\varphi(r, 0) &= \dot{\varphi}(r, 0) = 0 & r \geq a \\
\lim_{\tau \rightarrow \infty} \varphi(r, t) &= 0 & t > 0 \\
\sigma_{rr}(a, t) &= \sigma_0 f_p(t)
\end{aligned} \tag{9.1}$$

Avec:

$n = 2$ pour le problème de la cavité sphérique.

$n = 1$ pour le problème de la cavité cylindrique circulaire.

La loi de comportement élastique isotrope :

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \lambda \Delta \varphi + 2\mu \varphi_{,rr} \\
\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} &= \lambda \Delta \varphi + \frac{2\mu}{r} \varphi_{,r}
\end{aligned} \tag{9.2}$$

9.2.2 Cavité sphérique

Après transformation de Laplace ($\bar{f}(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$) sur l'équation (9.1), il vient :

$$\bar{\varphi}_{,rr}(r, p) + \frac{2}{r}\bar{\varphi}_{,r} = \left(\frac{p}{c_1}\right)^2 \bar{\varphi} \tag{9.3}$$

La solution générale est donc :

$$\bar{\varphi}(r, p) = \frac{A(p)}{r} \exp[k_d(p)r]$$

où $k_d = \pm p/c_1$

La transformation Laplace sur les autres équations (conditions aux limites et la loi de comportement) nous donne :

$$\bar{\varphi}(r, p) = \frac{ac_2^2 \sigma_0 \bar{f}_p(p) e^{-k_d(r-a)}}{\mu r(p^2 + bp + c)} \tag{9.4}$$

avec $b = 4c_2^2/ac_1$, $c = 4c_2^2/a^2$, $k_d = p/c_1$;

La transformation inverse de Laplace s'écrit :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{B\tau} \bar{f}(p) e^{pt} dp$$

avec

$$p = \gamma - i\chi \quad \text{et} \quad \int_{B\tau} = \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}$$

d'où :

$$\varphi(r, t) = \frac{ac_2^2 \sigma_0}{\mu r} \frac{1}{2\pi i} \int_{B\tau} \frac{\bar{f}_p(p) e^{-k_d(r-a)}}{(p^2 + bp + c)} \tag{9.5}$$

soit encore,

$$\varphi(r, t) = \begin{cases} 0 & \tau = t - \frac{r-a}{c_1} < 0 \\ = \frac{\sigma_0 c_2^2 a}{\mu r} \int_0^\tau f_p(\tau - \lambda) \frac{1}{\omega} e^{-\omega_1 \lambda} \sin(\omega \lambda) d\lambda & \tau > 0 \end{cases} \tag{9.6}$$

avec

$$\omega_1 = \frac{2c_2^2}{ac_1}, \quad \omega = \omega_1 \sqrt{c_1^2/c_2^2 - 1};$$

a) Cas de *pression uniforme* : $f_p = \sigma_0 H(t)$

La solution de φ s'écrit :

$$\varphi(r, t) = \begin{cases} 0 & \tau = t - \frac{r-a}{c_1} < 0 \\ \frac{A}{x} [1 - e^{-\omega_1 \tau} (\alpha \sin(\omega \tau) + \cos(\omega \tau))] & \tau > 0 \end{cases} \quad (9.7)$$

avec

$$A = \frac{\sigma_0 a^2}{4\mu}, \quad k = \frac{c_1}{c_2}, \quad x = \frac{r}{a}, \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{k^2 - 1}} = \frac{\omega_1}{\omega} = \sqrt{1 - 2\nu} ;$$

Pour $\tau > 0$, on obtient tout de suite les formules explicites des grandeurs mécaniques.

Si on écrit l'équation générale pour toutes les grandeurs qui nous intéressent, elle a la forme suivante :

$$\begin{aligned} F(x, \tau) &= a_1(x) + a_2(x) e^{-\omega_1 \tau} [\alpha b_1(x) \sin(\omega \tau) + b_2(x) \cos(\omega \tau)] \\ &= a_1 + a_2 \sqrt{(\alpha b_1)^2 + b_2^2} e^{-\omega_1 \tau} \sin(\omega \tau + \theta) \end{aligned} \quad (9.8)$$

où

$$\tan \theta = \frac{b_2}{\alpha b_1}$$

La condition $\frac{\partial F}{\partial \tau} = 0$ nous donne la valeur extrême :

$$\tan(\omega \tau + \theta) = \frac{1}{\alpha}; \quad \text{donc} \quad \omega_1 \tau = \alpha [\arctan(\frac{1}{\alpha}) - \theta];$$

La valeur du pic de la forme générale s'écrit donc:

$$F_{pic}(x) = a_1(x) + \frac{a_2(x)}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \sqrt{\alpha^2 b_1^2(x) + b_2^2(x)} e^{-\alpha [\arctan(\frac{1}{\alpha}) - \arctan(\frac{b_2}{\alpha b_1})]} \quad (9.9)$$

La solution analytique du déplacement u_r , de la vitesse v_r , de l'accélération a_r , de la contrainte radiale σ_{rr} , de la contrainte tangentielle $\sigma_{\theta\theta}$ ainsi leur valeur du pic est donnée dans le tableau (9.1) :

On s'intéresse maintenant à l'atténuation des grandeurs mécaniques dans l'espace pour mieux comprendre les participations du travail du milieu.

Atténuations du déplacement, de la vitesse et des contraintes :

- Solution stationnaire

Quand $\tau \rightarrow \infty$, c'est à dire $t \gg (r - a)/c_1$, on retrouve la solution pour le même problème statique : $\varphi = \sigma_0 a^3 / 4\mu r$. dont les atténuations pour le déplacement et la contrainte sont respectivement en r^{-2} et r^{-3} .

- Front de l'onde

Quand $\tau \rightarrow 0$, i.e. $t \rightarrow (r - a)/c_1$, on a les approximations dans le tableau (9.2):

l'atténuation est de r^{-1} pour toutes les grandeurs sauf pour l'accélération et le coefficient d'atténuation pour l'accélération varie de 1 à 0 suivant la valeur de x .

u_r	$-\frac{\sigma_0 a}{4\mu x^2} \{1 + e^{-\omega_1 \tau} [\alpha b_1^u(x) \sin(\omega \tau) - \cos(\omega \tau)]\}$	$\frac{b_1^u(x)}{b_2^u(x)} \frac{2x-1}{1}$
u_r^{pic}	$-\frac{\sigma_0 a}{4\mu x^2} (1 + \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} 4x(x-1)}) e^{-\omega_1 \tau}$	$\frac{\omega_1 \tau / \alpha}{\arctan(\frac{1}{\alpha}) + \arctan \frac{1}{\alpha(2x-1)}}$
v_r	$-\frac{\sigma_0 a}{4\mu x^2} e^{-\omega_1 \tau} [\alpha b_1^v(x) \sin(\omega \tau) + b_2^v(x) \cos(\omega \tau)]$	$\frac{b_1^v(x)}{b_2^v(x)} \frac{-\omega_1 [2x - k^2]}{2\omega_1 x}$
v_r^{pic}	$-\frac{\sigma_0 a}{4\mu x^2} \omega_1 \sqrt{2x(x-1) + k^2} e^{-\omega_1 \tau}$	$\frac{\omega_1 \tau / \alpha}{\arctan(\frac{1}{\alpha}) + \arctan \frac{2x}{\alpha(2x-k^2)}}$
a_r	$\frac{\sigma_0 a}{4\mu x^2} e^{-\omega_1 \tau} [\alpha b_1^a(x) \sin(\omega \tau) + b_2^a(x) \cos(\omega \tau)]$	$\frac{b_1^a(x)}{b_2^a(x)} \frac{\omega_1^2 [(2x+1)k^2 - 4x]}{\omega_1^2 (4x - k^2)}$
a_r^{pic}	$\frac{\sigma_0 a}{4\mu x^2} \omega_1^2 k \sqrt{4x(x-1) + k^2} e^{-\omega_1 \tau}$	$\frac{\omega_1 \tau / \alpha}{\arctan(\frac{1}{\alpha}) + \arctan \frac{4x-k^2}{\alpha[(2x+1)k^2-4x]}}$
σ_{rr}	$\frac{\sigma_0}{x^3} \{1 + e^{-\omega_1 \tau} [\alpha b_1^r(x) \sin(\omega \tau) + b_2^r(x) \cos(\omega \tau)]\}$	$\frac{b_1^r(x)}{b_2^r(x)} \frac{-(x-1)^2}{x^2 - 1}$
σ_{rr}^{pic}	$\frac{\sigma_0}{x^3} \left(1 + (x-1) e^{-\omega_1 \tau} \sqrt{1 + x^2 + \frac{2(2-k^2)}{k^2} x}\right)$	$\frac{\omega_1 \tau / \alpha}{\arctan(\frac{1}{\alpha}) + \arctan \frac{x+1}{\alpha(x-1)}}$
$\sigma_{\theta\theta}$	$\frac{\sigma_0}{2x^3} \{e^{-\omega_1 \tau} [\alpha b_1^\theta(x) \sin(\omega \tau) + b_2^\theta(x) \cos(\omega \tau)] - 1\}$	$\frac{b_1^\theta(x)}{b_2^\theta(x)} \frac{-2(\frac{k^2-2}{k^2})x^2 - 2x + 1}{1 + 2(\frac{k^2-2}{k^2})x^2}$
$\sigma_{\theta\theta}^{pic}$	$\frac{\sigma_0}{x^3} \left\{e^{-\omega_1 \tau} \sqrt{1 + \frac{8(k^2-2)}{k^4} x^3 + \frac{8(k^2-1)(k^2-2)}{k^4} x^2 - \frac{4}{k^2} x - 1}\right\}$	$\frac{\omega_1 \tau / \alpha}{\arctan(\frac{1}{\alpha}) + \arctan \frac{b_2^\theta}{\alpha b_1^\theta}}$

Tableau 9.1 Solution analytique au cas de la pression uniforme

$\varphi(r, t)$	$u(r, t)$	$v(r, t)$	$a_r(r, t)$	$\sigma_{rr}(r, t)$	$\sigma_{\theta\theta}(r, t)$
$\frac{\sigma_0}{k^2 \rho x} \tau^2$	$-\frac{\sigma_0}{c_1 \rho x} \tau$	$-\frac{\sigma_0}{c_1 \rho x} H(\tau)$	$\frac{\sigma_0}{ak^2 \rho} (4 - k^2/x) H(\tau)$	$\frac{\sigma_0}{x} H(\tau)$	$\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \sigma_{rr}$

Tableau 9.2 Atténuation du front de l'onde

- Valeur de pic

D'après le tableau (9.1), le coefficient d'atténuation des grandeurs est entre celui des deux cas précédents, sa valeur et les valeurs maximales aux points ($r = a$) sont données dans le tableau (9.3). Quand la valeur de x est très grande (éloignée de la source), le coefficient d'atténuation est proche de 1 pour toutes les grandeurs sauf pour la contrainte tangentielle qui est proche de 1.5. On a ainsi les résultats particuliers :

$$\begin{aligned} v_r^{pic} &\simeq -\frac{\sigma_0 a}{\sqrt{2\rho c_1 \tau}} e^{-2\alpha \arctan \frac{1}{\alpha}} \\ a_r^{pic} &\simeq \frac{2\sigma_0}{\rho k r} e^{-\alpha \left[\arctan \frac{1}{\alpha} + \arctan \frac{2}{\alpha(k^2-2)} \right]} \end{aligned} \quad (9.10)$$

Remarquons que le pic de l'accélération a une forme classique extrêmement simple qui ne dépend pas le rayon de la cavité ni la rigidité du milieu :

$$\rho \cdot a_r^{pic} = \frac{\sigma_0}{r} \cdot f(\nu) .$$

- Influence de certains paramètres :

Le rayon de la cavité a influence

proportionnellement les valeurs au front de l'onde sauf pour l'accélération (inversement proportionnelle lorsque r est très grand),

proportionnellement les fréquences $1/\omega, 1/\omega_1$,
 proportionnellement le tube aux valeurs stationnaires,
 en particulier, il influence proportionnellement le pic de la vitesse et ne
 modifie pas le pic de l'accélération lorsque τ est très grand.

L'amplitude de la pression σ_0

influence proportionnellement toutes les grandeurs mécaniques dans toutes
 les circonstances;

Le coefficient du Poisson ν ($k = f(\nu)$) :

influence surtout les fréquences.

	u_r	v_r	a_r	σ_{rr}	$\sigma_{\theta\theta}$
n	$1 \sim 2$	$1 \sim 0$	$1 \sim 0$	$1 \sim 3$	$1 \sim 3$
$\text{Val}_{\max}$	$-\frac{\sigma_0 a}{4\mu}(1 + e^{-\omega_1 \tau})$	$-\frac{\sigma_0}{2\mu} c_2 e^{-\omega_1 \tau}$	$\frac{\sigma_0}{a\mu} c_2^2 e^{-\omega_1 \tau}$	σ_0	$\sigma_0(e^{-\omega_1 \tau} \sqrt{\frac{9k^2-20}{k^2}} - 1)$
$\frac{\omega_1 \tau}{\alpha} - \arctan(\frac{1}{\alpha})$	$\arctan(\frac{1}{\alpha})$	$\arctan \frac{2}{\alpha(2-k^2)}$	—	—	$\arctan \frac{3k^2-4}{\alpha(k^2-4)}$

Tableau 9.3 Atténuation des valeurs de pic et les valeurs pour $r = a$

b) Cas de la pression exponentielle $f_p = \sigma_0 e^{-dt}$ ($d > 0$)

En posant $d = \eta\omega_1$, la solution de φ s'écrit maintenant:

$$\varphi(r, t) = \begin{cases} 0 & \tau = t - \frac{r-a}{c_1} < 0 \\ \frac{\hat{A}}{x} [e^{-d\tau} - e^{-\omega_1 \tau} (\hat{\alpha} \sin(\omega\tau) + \cos(\omega\tau))] & \tau > 0 \end{cases} \quad (9.11)$$

avec

$$\hat{\alpha} = \frac{\omega_1 - d}{\omega} = \alpha(1 - \eta) \quad \hat{A} = A\xi \quad \text{et} \quad \xi = \frac{\alpha^2 + 1}{\hat{\alpha}^2 + 1};$$

Si $\hat{\varphi}$ désigne la même fonction que celle du cas $f_p = \sigma_0 H(t)$ mais en changeant A en $\hat{A}$ et α en $\hat{\alpha}$, on a donc :

$$\varphi = \hat{\varphi} + \frac{\hat{A}}{x} (e^{-d\tau} - 1)$$

pour $\tau > 0$, on obtient également les grandeurs mécaniques :

$$\begin{aligned} u_r &= -\frac{\sigma_0 a}{4\mu x^2} \xi [(1 - n_d x) e^{-d\tau} + e^{-\omega_1 \tau} (\hat{\alpha} b_1^u(x) \sin(\omega\tau) - \cos(\omega\tau))] \\ v_r &= \frac{\sigma_0 a}{4\mu x^2} \xi [d(1 - n_d x) e^{-d\tau} - e^{-\omega_1 \tau} (\hat{\alpha} b_1^v(x) \sin(\omega\tau) + b_2^v(x) \cos(\omega\tau))] \\ a_r &= \frac{\sigma_0 a}{4\mu x^2} \xi [d^2(1 - n_d x) e^{-d\tau} + e^{-\omega_1 \tau} (\hat{\alpha} b_1^a(x) \sin(\omega\tau) + b_2^a(x) \cos(\omega\tau))] \\ \sigma_{rr} &= \frac{\sigma_0}{x^3} \xi \left[\left(\frac{k^2}{4} n_d^2 x^2 + 1 - n_d x \right) e^{-d\tau} + e^{-\omega_1 \tau} (\hat{\alpha} b_1^r(x) \sin(\omega\tau) + b_2^r(x) \cos(\omega\tau)) \right] \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\sigma_0}{2x^3} \xi \left[\left(\frac{k^2 - 2}{2} n_d^2 x^2 + n_d x - 1 \right) e^{-d\tau} + e^{-\omega_1 \tau} (\hat{\alpha} b_1^\theta(x) \sin(\omega\tau) + b_2^\theta(x) \cos(\omega\tau)) \right] \end{aligned}$$

avec

$$n_d = da/c_1 = 2\eta/k^2;$$

Grâce à la relation $\frac{1}{\xi} = \frac{k^2}{4}n_d^2 + 1 - n_d$, la condition $\sigma_{rr}|_{r=a} = \sigma_0 e^{-dt}$ est bien vérifiée.

Atténuations du déplacement, de la vitesse et des contraintes en fonction de r :

- Front de l'onde

Quand $\tau \rightarrow 0$, on a les approximations pour toutes les grandeurs :

$$\begin{aligned} u(r, t) &\simeq \xi \frac{\sigma_0 a \eta}{2\mu k^2 x} H(\tau) \\ v(r, t) &\simeq \xi \frac{\sigma_0 c_2}{2k\mu} \frac{\eta - 2x(\eta^2/k^2 + 1)}{x^2} H(\tau) \\ a(r, t) &\simeq \xi \frac{\sigma_0 c_2^2}{ak^2\mu} \frac{2x(2 - \eta^2/k^2) + \eta^2 - k^2}{x^2} H(\tau) \\ \sigma_{rr}(r, t) &\simeq \xi \sigma_0 \frac{-2\eta/k^2 + x(\eta^2/k^2 + 1)}{x^2} H(\tau) \\ \sigma_{\theta\theta}(r, t) &= \xi \sigma_0 \frac{\eta/k^2 + x(\eta^2/k^2 + 1)}{x^2} H(\tau) \end{aligned}$$

L'atténuation est donc en r^{-1} pour le déplacement comme dans le cas d'une pression uniforme. La valeur de d change le coefficient d'atténuation des v , a , σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ qui est maintenant entre $1 \sim 2$. Loin de la source, on retrouve la simple forme pour l'accélération :

$$\rho a_r = \begin{cases} \xi \frac{\sigma_0}{rk^2} 2(2 - \eta^2/k^2) H(\tau) & \text{pour } d \ll \frac{4c_1}{a} \\ \xi \frac{\sigma_0}{x} H(\tau) & \text{pour } d = \frac{4c_1}{a} \end{cases} \quad (9.12)$$

c) Cas de la *pression d'un gaz idéal* : $pv_g^\gamma = \text{const}$

p, v_g sont respectivement la pression et le volume du gaz.

La démarche de la résolution est donnée par Favreau[Fav69], on la présente ici en modifiant certains termes.

L'équation d'état du gaz idéal et la conservation de la masse s'écrivent :

$$pv_g^\gamma = PV_g^\gamma \quad (9.13)$$

$$\frac{v_g}{pV_g^\gamma} = \left(\frac{a+R}{a} \right)^3 \quad (9.14)$$

où P est la pression lorsque le volume de cavité prend sa valeur initial V_g^γ ; et $R(t) = u(a, t)$.

Ceci permet d'exprimer la pression en fonction de R :

$$p = P(1 + R/a)^{-3\gamma} \simeq P(1 - 3\gamma R/a)$$

L'équation de Navier du problème s'écrit :

$$u_{,rr} + \frac{2}{r}u_{,r} - 2\frac{u}{r^2} = \left(\frac{1}{c_1}\right)^2 u_{,tt} \quad (9.15)$$

En tenant compte de la condition $\lim_{r \rightarrow \infty} u(r, t) = 0$, une solution générale s'écrit :

$$u = \frac{1}{r^2} f(\tau) + \frac{1}{c_1 r} f'(\tau) = \frac{\partial}{\partial r} \left[-\frac{1}{r} f(\tau) \right]$$

ce qui implique que $\varphi = -\frac{1}{r} f(\tau)$

La condition $\sigma_{rr}(a, t) = p$ et la loi du comportement élastique conduisent à l'équation différentielle en f :

$$f'' + \frac{1}{\rho c_1 a} (3\gamma P + 4\mu) f' + \frac{1}{\rho a^2} (3\gamma P + 4\mu) f = \frac{a}{\rho} P$$

avec les conditions : $f(0) = f'(0) = 0$.

En posant

$$3\gamma P = \epsilon \cdot 4(\lambda + \mu), \quad \tilde{c}_2^2 = \epsilon c_1^2 + (1 - \epsilon) c_2^2, \quad \tilde{\omega}_1 = \frac{2\tilde{c}_2^2}{c_1 a}, \quad \tilde{\omega} = \tilde{\omega}_1 \sqrt{\tilde{k}^2 - 1}, \quad \tilde{k} = \frac{c_1}{\tilde{c}_2}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}}$$

on a les solutions analytiques suivant la valeur de ϵ :

i) $\epsilon < 1.0$

$$f = \frac{Pa^3}{4[\lambda + (1 + \epsilon)\mu]} \left\{ 1 - e^{-\tilde{\omega}_1 \tau} [\tilde{\alpha} \sin(\tilde{\omega} \tau) - \cos(\tilde{\omega} \tau)] \right\} \quad (9.16)$$

$$u_r = \frac{Pa}{4[\lambda + (1 + \epsilon)\mu] x^2} \left\{ 1 + e^{-\tilde{\omega}_1 \tau} [\tilde{\alpha} b_1^u(x) \sin(\tilde{\omega} \tau) - \cos(\tilde{\omega} \tau)] \right\} \quad (9.17)$$

Alors en comparant avec le cas d'une *pression uniforme* (tableau (9.1)), on aura les mêmes résultats si on remplace 4μ par $4[\lambda + (1 + \epsilon)\mu]$ dans l'amplitude des grandeurs et les coefficients par ceux en tilda (c'est comme si on impose la vitesse de l'onde transversale c_2 par une interpolation linéaire de ϵ entre c_1^2 et c_2^2).

On voit clairement l'influence de ϵ donc du rapport $\gamma P / (\lambda + \mu)$ sur les grandeurs mécaniques particulièrement les fréquences et non à l'atténuation.

On s'intéresse particulièrement au pic de l'accélération lorsque r est très grand. D'après l'équation (9.10) dans le cas d'une *pression uniforme*, le pic de l'accélération s'écrit :

$$a_r^{pic} \simeq \frac{2P\gamma\tilde{c}_2^2}{[\lambda + (1 + \epsilon)\mu]\tilde{k}r} f(\nu) \quad (9.18)$$

qui ne dépend pas le rayon a de la cavité comme dans l'équation (9.10), mais il dépend maintenant de la rigidité du milieu, puisqu'il intervient ϵ (la pression imposée sur la cavité est couplée avec la rigidité du milieu).

ii) $\epsilon = 1.0$

$$f = \frac{Pa^3}{4[\lambda + 2\mu]} \left\{ 1 - e^{-\tilde{\omega}_1 \tau} (1 + \tilde{\omega}_1 \tau) \right\} \quad (9.19)$$

$$u_r = \frac{Pa}{4[\lambda + 2\mu]x^2} \left\{ 1 + e^{-\tilde{\omega}_1 \tau} [b_1^u(x) \tilde{\omega}_1 \tau - 1] \right\} \quad (9.20)$$

Ce cas peut être considéré comme un cas particulier du précédent : $\tilde{c}_2^2 = c_1^2$ atteint sa valeur maximale et $\tilde{\omega}_1 = \frac{2c_1}{a}$, $\tilde{\omega} = 0$.

iii) $\epsilon > 1.0$

en corrigeant $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_1 \sqrt{1 - \tilde{k}^2}$, on obtient :

$$f = \frac{Pa^3}{4[\lambda + (1 + \epsilon)\mu]} \left\{ 1 - e^{-\tilde{\omega}_1 \tau} [\tilde{\alpha} \sinh(\tilde{\omega} \tau) + \cosh(\tilde{\omega} \tau)] \right\} \quad (9.21)$$

$$u_r = \frac{Pa}{4[\lambda + (1 + \epsilon)\mu]x^2} \left\{ 1 + e^{-\tilde{\omega}_1 \tau} [\tilde{\alpha} b_1^u(x) \sinh(\tilde{\omega} \tau) - \cosh(\tilde{\omega} \tau)] \right\} \quad (9.22)$$

R.q : Le premier cas correspond la situation réelle du processus de la fragmentation de roche. Les autres grandeurs peuvent être également obtenues.

9.2.3 Cavité cylindrique circulaire

Cas de la *pression uniforme* $f_p = \sigma_0 H(t)$

La solution générale de l'équation (9.1) après transformation s'écrit :

$$\bar{\varphi}(r, p) = A(p)I_0(k_d r) + B(p)K_0(k_d r) \quad (9.23)$$

Où, J_0 , K_0 sont respectivement la première et la seconde fonctions de Bessel modifiée d'ordre zéro. La condition que φ sera nulle quand r tend vers infini, entraîne $A(p) = 0$. Suivant la même procédure, la solution du problème s'écrit :

$$u(r, t) = \begin{cases} 0 & \tau < 0 \\ -\frac{\sigma_0}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} \frac{K_1(K_d r)}{pF(p)} e^{pt} dp & \tau > 0 \end{cases} \quad (9.24)$$

avec

$$F(p) = \frac{2}{k^2 + a} K_1(k_d a) + k_d K_0(k_d a)$$

Miklowitz[Mik84] a donné la solution de (9.24) pour $\tau > 0$

$$u(r, t) = -\frac{\sigma_0 a^2}{4\mu r} - \frac{\sigma_0}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \text{Im} \left[\frac{K_1\left(\frac{i\eta r}{c_1}\right) e^{i\eta t}}{\frac{2}{k^2 a} K_1\left(\frac{i\eta a}{c_1}\right) + \frac{i\eta}{c_1} K_0\left(\frac{i\eta a}{c_1}\right)} \right] \frac{d\eta}{\eta} \quad (9.25)$$

Et la contrainte radiale :

$$\sigma_{rr}(r, t) = \frac{\sigma_0 a^2}{2r^2} + \frac{\sigma_0}{\pi} \int_0^\infty \text{Im} \left[\frac{\frac{2}{k^2 r} K_1\left(\frac{i\eta r}{c_1}\right) + \frac{i\eta}{c_1} K_0\left(\frac{i\eta r}{c_1}\right)}{\frac{2}{k^2 a} K_1\left(\frac{i\eta a}{c_1}\right) + \frac{i\eta}{c_1} K_0\left(\frac{i\eta a}{c_1}\right)} e^{i\eta t} \right] \frac{d\eta}{\eta} \quad (9.26)$$

D'après (9.25) et (9.26), les grandeurs mécaniques peuvent être calculées numériquement, et pour certains cas particuliers, on peut obtenir les approximations suivantes :

- Front de l'onde

Lorsque $\tau \rightarrow 0$, on a les formules analytiques approximatives

$$\begin{aligned} u(r, t) &\simeq -\frac{c_1 \sigma_0}{\lambda + 2\mu} \sqrt{\frac{a}{r}} \tau \\ \sigma_{rr}(r, t) &\simeq \sigma_0 \sqrt{\frac{a}{r}} H(\tau) \\ \sigma_{\theta\theta}(r, t) &= \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \sigma_{rr} \end{aligned} \quad (9.27)$$

L'atténuation est donc en ordre de $r^{-\frac{1}{2}}$.

- Solution stationnaire

Lorsque $\tau \rightarrow \infty$, ou $t \gg (r - a)/c_1$, on retrouve aussi la solution pour le même problème statique : $u(r) = -\sigma_0 a^2 / 2\mu r$. Les atténuations pour le déplacement et la contrainte sont respectivement en r^{-1} et r^{-2} .

Cas de la *pression exponentielle* $f_p = \sigma_0 e^{-dt}$ ($d > 0$)

La solution analytique est impossible à trouver, il faut donc des calculs numériques.

On s'intéresse surtout aux effets de l'atténuation. Voici trois calculs effectués par RADIOSS qui correspondent aux cas $d = 0, 50, 500$, (caractisant les fréquences de la source) les valeurs de pic sont données dans les figures (9.2 et 9.3) :

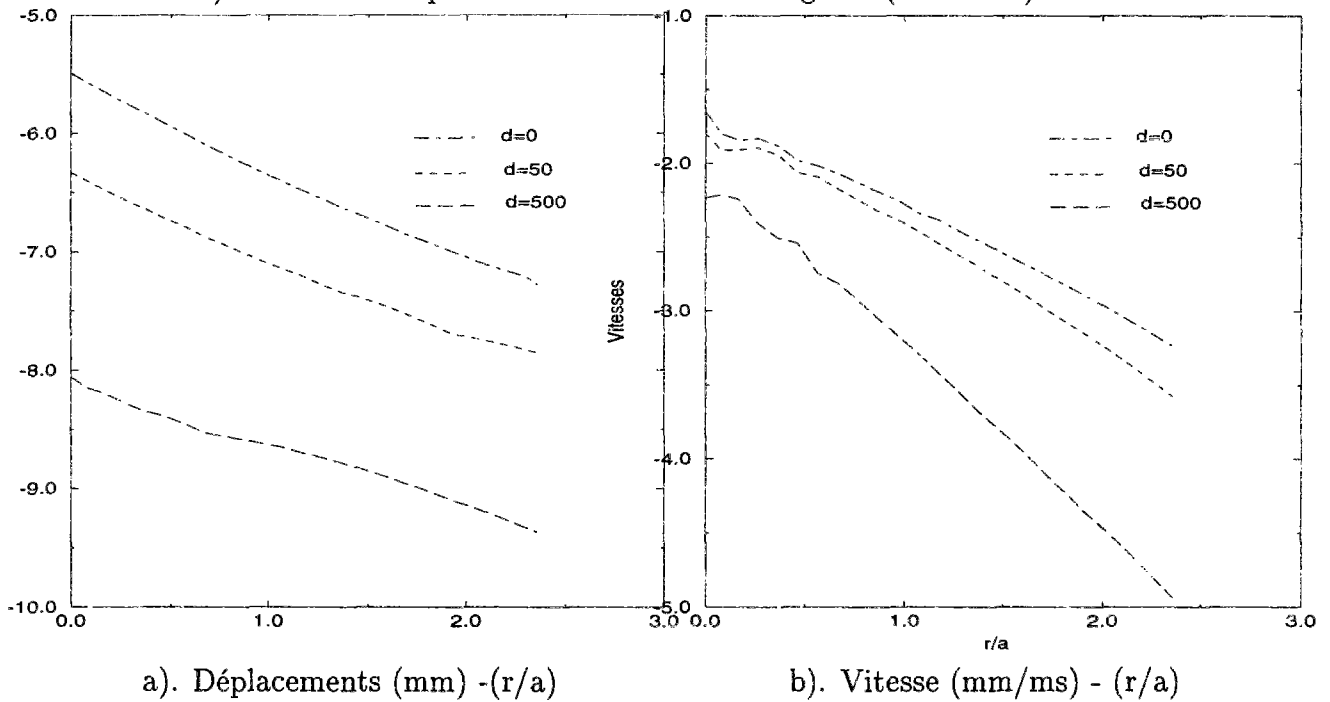
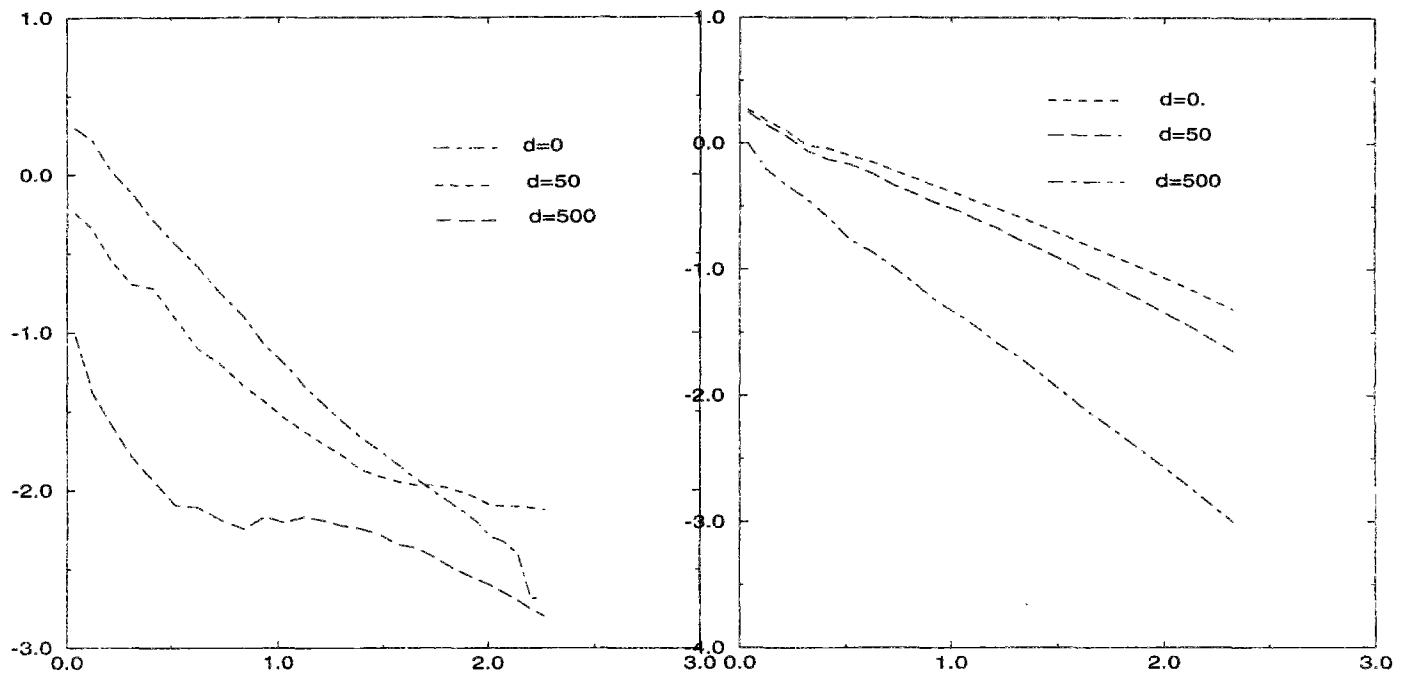


Figure 9.2 Atténuations (x,y sont en Log)

On peut constater que :

- autour du trou, l'atténuation est plus grande.



a). Contraintes tangentielles

b). Contraintes radiales

Figure 9.3 Atténuation des contraintes (en Log)

- pour les cas où $d = (0, 50, 500)$, la variation du coefficient d'atténuation du déplacement est $n \simeq (0.746, 0.65, 0.51)$ et celui de la contrainte radiale est $n \simeq (0.737, 0.849, 1.26)$. Cela signifie que au fur et à mesure de la croissance de d , le coefficient d'atténuation est décroissant pour les déplacements et croissant pour la contrainte radiale.
- l'atténuation pour la contrainte tangentielle est plus compliquée, l'augmentation de d fait disparaître la linéarité dans le repère logarithmique, l'agression linéaire donne $n \simeq (0.54, 0.83, 1.28)$.

c) Cas de la pression du gaz idéal : $pv^\gamma = \text{const}$

A partir du résultat de Favreau et des calculs numériques, Harries [Har83] a donné l'extension de la charge sphérique à la charge cylindrique longue basée sur l'idée suivante :

la charge cylindrique est considérée comme une série de charges sphériques, et la fréquence des vibrations est modifiée par des résultats numériques du modèle de Q constant de Kjarntansson.

9.3 Modèles numériques

Les résultats analytiques ne sont connus que pour les problèmes simples, i.e. modèles unidimensionnels dans le milieu élastique infini. Pour traiter des problèmes industriels, le calcul numérique est impératif. Selon la capacité des codes, différentes modélisations sont proposées. D'abord, si on ne possède pas un code capable d'effectuer les calculs de l'écoulement avec détonation accompagnant l'interface fluide-structure, on est obligé d'approcher une fonction de pression pour la sollicitation créée par détonation. D'après les

résultats expérimentaux et calculés, le profil de pression est schématisé dans la figure (9.4). La fonction approchée peut être diverse suivant les phases de chargement intéressées et/ou

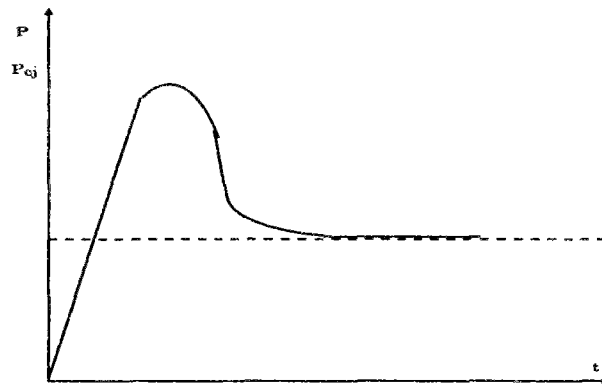


Figure 9.4 Profil de pression

du problème à traiter ; la fonction de Heavyside, les fonctions en exponentiels, fonctions en sinus ainsi que la combinaison entre eux sont le plus souvent utilisées.

En dehors de la partie de détonation, la clef de la simulation se trouve dans le choix du modèle mécanique du milieu rocheux, c'est à dire la loi de comportement du rocher. Vue la complexité du comportement sous un chargement lié à la détonation, il apparaît aussi difficile de proposer un modèle général pour toutes opérations d'excavation du rocher.

Si le matériau autour du trou est considéré comme un fluide (modèle hydrodynamique), Marsh[Mar80] donne les valeurs des paramètres de Hugoniot (9.4) : $U_s = C + KU_p$

Matériau	$\rho_0 (g/cm^3)$	$C (km/s)$	K
Limestone	2.6	3.5	1.43
Marble	2.7	4.0	1.32
Granite	2.63	2.1	1.63
Oil shale	2.19	3.78	1.15
Concrète	1.16	2.34	1.32

Tableau 9.4 Paramètres de Hugoniot pour certaines roches

Les valeurs du coefficient d'atténuation de la pression sont données par Qian[LK93] dans le tableau (9.5).

Matériau	Magnafrac 1000		ANFO	
	$P_m (Gpa)$	n	$P_m (Gpa)$	n
Limestone	5.418	1.518	2.642	1.345
Granite	4.907	1.773	2.405	1.559
Oil shale	5.226	1.502	2.580	1.335
Concrète	3.761	1.778	1.929	1.603
Pyrite	6.778	1.225	3.101	1.120
Sulphide	6.332	1.297	2.965	1.172

Tableau 9.5 Paramètres d'atténuation

La régression des résultats donne les approches suivantes :

$$P_m = 1.511(\rho_e D^2) \left(\frac{\rho_r}{\rho_e} \right)^{0.2815} \left(\frac{c_1}{D} \right)^{0.2573}$$

$$n = 1.462 \left(\frac{\rho_r}{\rho_e} \right)^{-0.07286} \left(\frac{c_1}{D} \right)^{-0.2753}$$

Rebeyrotte et Heraud [RH89] effectuent les calculs numériques (phase statique en déformation plane) en plaçant deux tirs dans deux trous voisins avec ou sans le retard pour voir les effets de gaz dans la fissuration. (le lieu et orientation des fissures sont supposés connus et les noeuds du maillage qui appartiennent à des discontinuités sont définis comme des éléments de contact et l'ouverture de ces discontinuités au cours de la mise en pression des trous est traitée comme un problème de contact entre solides élastiques).

Les conclusions sont les suivantes :

1. la pression de gaz augmente la longueur des macro-fissures
2. l'allongement de la macro-fissure dans la direction entre les deux trous est plus importante
3. la variation de pression de gaz est négligeable
4. les macro-fissures joignant le trou se développent plus nettement

Favreau[Fav83] présente le programme de simulation BLASPA qui permet d'approcher les principaux mécanismes physiques et chimiques intervenant au cours du tir. BLASPA a pu être utilisé pour mener de nombreuses études.

Pour tenir compte du couplage entre l'onde de choc et l'endommagement du milieu, les modèles basés sur la mécanique de l'endommagement (souvent isotropes) sont proposés :

Inspiré du modèle de Grady - Gipp, Digby [D⁺83] présente le programme WAVE, un code lagrangien dont la loi de comportement du rocher est du type élastique avec endommagement isotrope.

Adams et Margolin [A⁺83] proposent dans la simulation SHALE, le modèle B.C.M (Bedded Crack Model) pour des matériaux stratifiés fragiles. Le critère de la propagation de fissure est fondé sur la théorie de Griffith, la caractéristique du matériau endommagé est représentée par les modules effectifs, (seule la direction perpendiculaire aux plans stratifiés est admissible à l'endommagement) et l'évolution de la distribution des fissures est calculée de façon statistique.

A l'aide du descripteur direct des fissures (comme le rayon de la fissure circulaire c) pour le problème unidimensionnel, McHugh donne une loi d'évolution du descripteur qui intervient la pression de gaz p_g dans la fissuration :

$$\dot{c} = A(\sigma + p_g - \sigma_c) c \quad (9.28)$$

Pendant ces dernières années, il a été proposé aussi des modèles discrets [H⁺94][?] pour la simulation de la fragmentation du rocher. Dans ce genre de modèles, on essaie de décrire réellement la discontinuité du champ des déplacements due à la présence des défauts du milieu, soit par des éléments interface en plus des éléments finis classiques, soit par les éléments discrets. On s'intéresse alors à ce qui se passe à l'interface des éléments plutôt que ce qui est à l'intérieur des éléments. En raison de la description plus concrète de la formation du milieu, la simulation est souvent lourde, et l'amélioration du coût de calculs en négligeant l'énergie de déformation (élément rigide ou block) devant l'énergie cinétique conduira au modèle qui est adapté à la fragmentation catastrophique.

Le paragraphe suivant est consacré aux simulations utilisant les modèles continus avec endommagement, notamment le modèle élastique avec endommagement anisotrope que l'on a proposé et intégré dans RADIOSS.

9.4 Simulation avec RADIOSS

9.4.1 Calculs avec fonction de pression donnée

Problème en déformation plane avec une surface libre

C'est un problème de cavité cylindrique circulaire, le maillage prend un quart de la géométrie grâce à la symétrie. La configuration du problème ainsi que le chargement (une pression imposée dans la cavité dont le profil est une fonction en sinus) sont donnés dans la figure (9.5) :

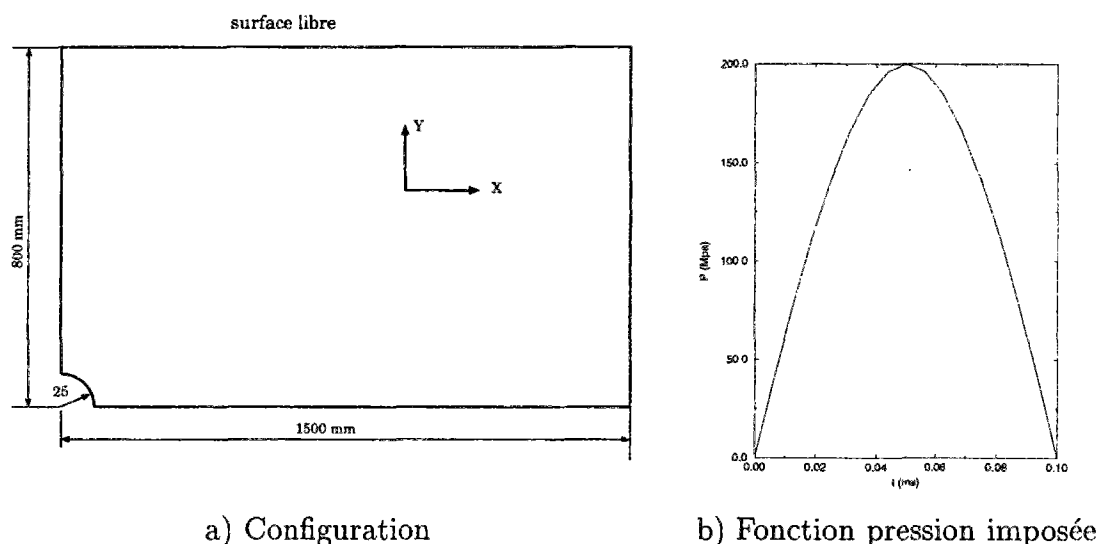


Figure 9.5 Problème en déformation plane

Le milieu rocher est la roche 'oil shale' dont les propriétés sont :

$\rho(g/mm^3)$	$E(Mpa)$	ν	m	$k(1/mm^3)$	$c_g(m/s)$
0.002	$1.065 \cdot 10^4$	0.4	8	1.7×10^{18}	1300

La figure (9.6) montre les distributions de la première valeur principale du tenseur d'endommagement respectivement au temps $t = 0.25ms$ et $t = 0.5ms$. (les taches sont dues la qualit d'impression) Les résultats montrent que :

- l'endommagement commence d'abord autour du trou et progresse avec une valeur décroissante.
- une deuxième zone endommagée apparaît lorsque l'onde arrive à la surface libre et est réfléchi.
- d'après la figure (9.7), la direction du premier vecteur propre dans la première zone est tangentielle et celle dans la seconde est perpendiculaire à la surface libre. Ceci signifie que les fissures dans la première sont radiales et celles dans la seconde sont parallèles à la surface libre.

La figure (9.8) montre la distribution de la taille moyenne des fragments qui sont inférieures à 5cm avec le critère de fragmentation : $D_1 = D_{max}/2$. Ce résultat relève

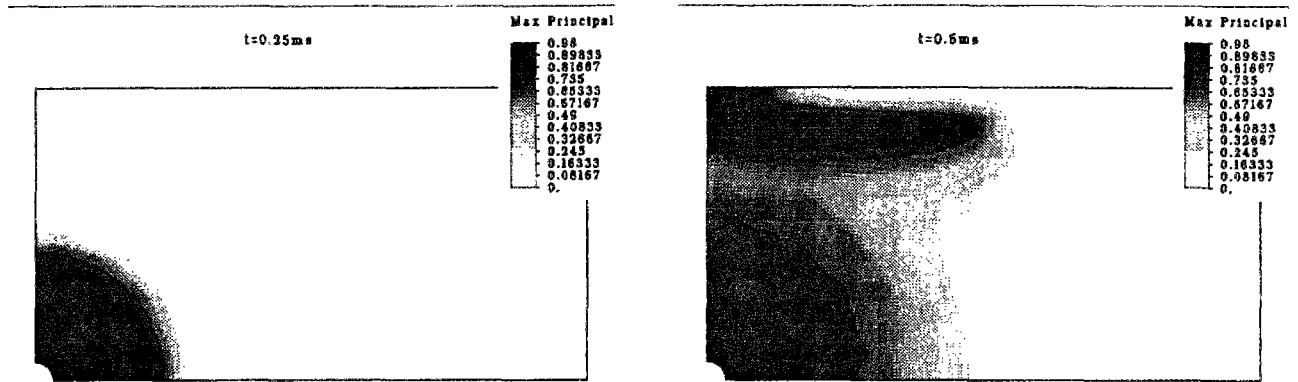
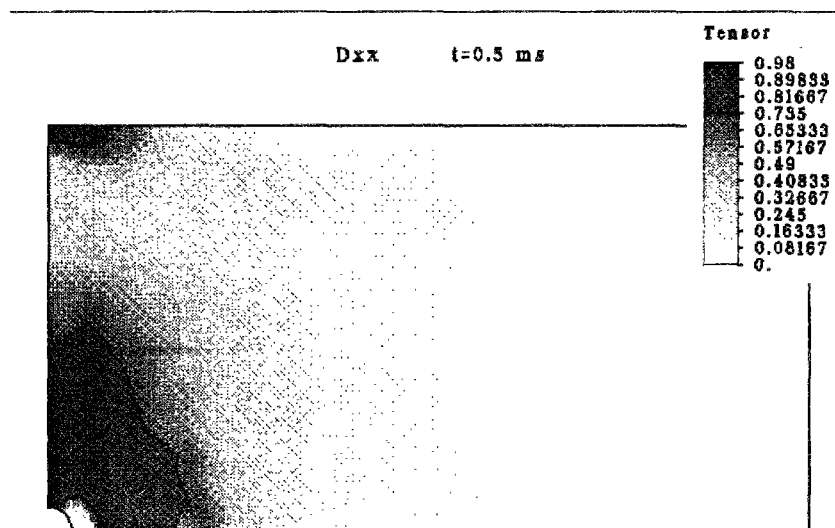


Figure 9.6 Première valeur principale de D

Figure 9.7 Valeur du composante D_{xx}

une propriété mécanique intéressante : il y a aussi une atténuation de la vitesse de chargement (contrainte tangentielle) dans les deux zones endommagées, puisque la taille moyenne des fragments est proportionnelle à $(\sigma_c)^{-\frac{m}{3}}$ dans le modèle et la résistance dynamique en traction σ_c est une fonction monotone croissante avec la vitesse de chargement.

Même problème avec une macro-fissure préfabriquée

C'est un problème identique au précédent mais une macro-fissure a été mise en place. La position de cette fissure est donnée dans la figure (9.9) suivante :

Le calcul est effectué d'abord avec le modèle du type élastique avec endommagement isotrope. Le paramètre d'endommagement est un scalaire, on impose donc une valeur initiale $D_0 = D_{\max}$ aux éléments concernés. La figure (9.10).a donne le résultat au temps $t = 0.5ms$

Il montre que l'effet de la macro-fissure sur les zones d'endommagement est exactement comme celui de la surface libre et qu'il n'y a aucune zone endommagée à l'arrière de cette

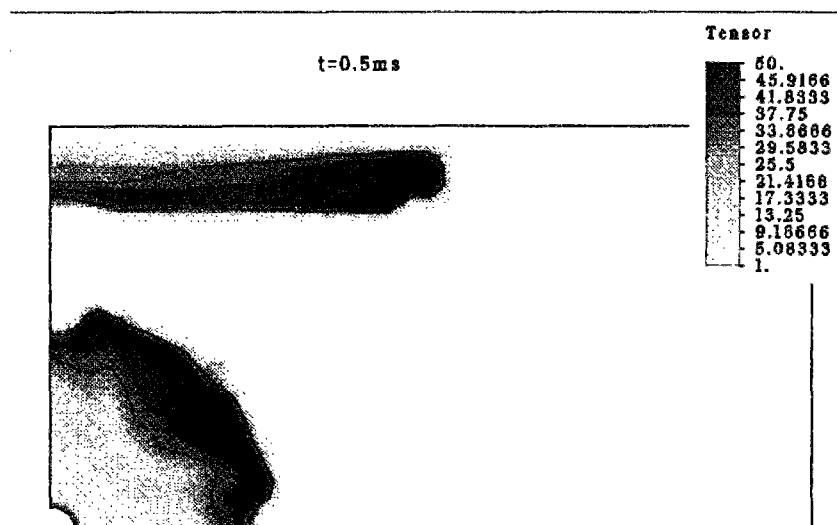


Figure 9.8 Distribution de la taille (mm) moyenne des fragments

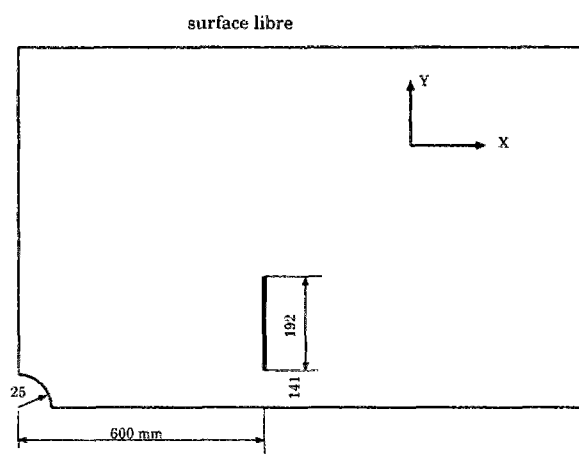


Figure 9.9 Configuration avec la présence d'une macro-fissure

fissure. (la non symétrie de la zone endommagée autour du trou est due aux erreurs numériques)

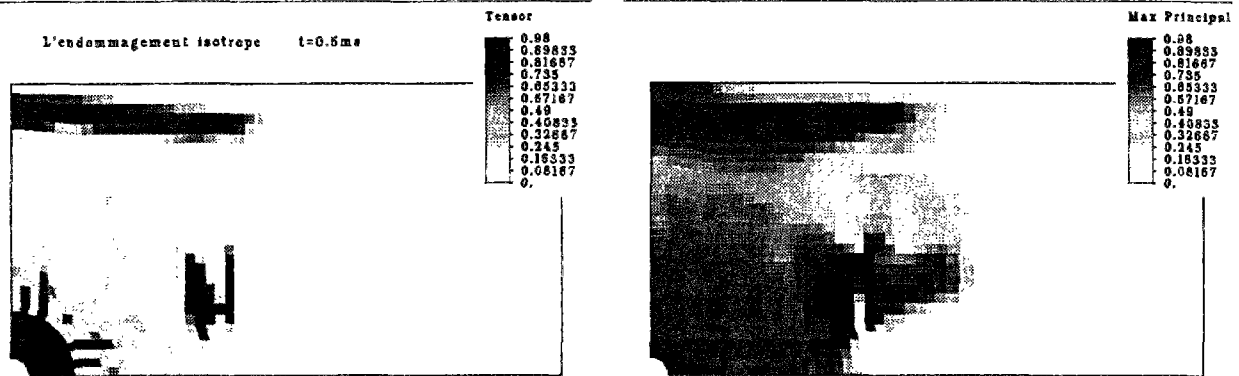
Le calcul est ensuite effectué avec le modèle de l'endommagement anisotrope en imposant les trois valeurs propres initiales de $\mathbf{D}$ telles que $D_1 = D_{\max}$, $D_2 = D_3 = D_0$

La figure (9.10).b donne la première valeur principale d'endommagement au temps $t = 0.5ms$:

La figure (9.11) donne la valeur de la composante D_{xx} au même temps $t = 0.5ms$:

En plus de la zone d'endommagement créée devant la macro-fissure, comme dans le calcul précédent, il y a aussi une zone d'endommagement créée à l'arrière. De plus, les fissures créées dans cette zone sont plutôt orthogonales à la fissure préexistante. Ce phénomène devra être vérifié par les essais expérimentaux.

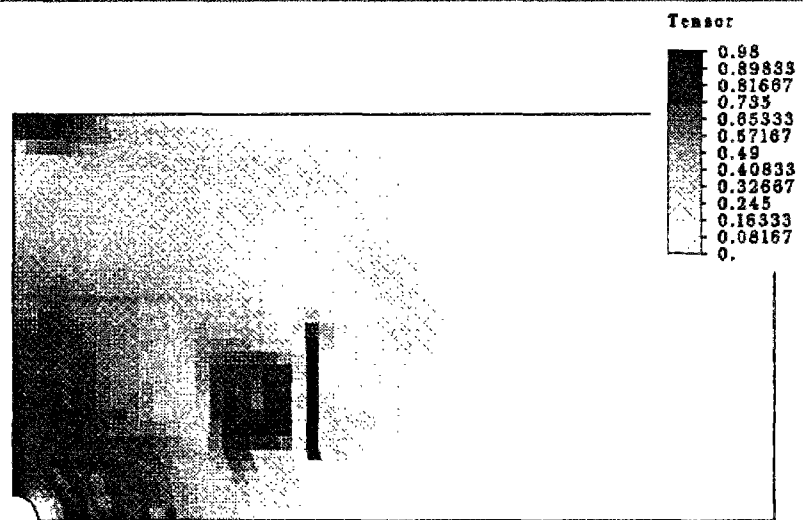
L'existence des macro-fissures rend le problème plus compliqué. Elle explique l'écart entre le résultat des calculs numériques et celui observé dans les essais, e.x., la non symétrie des fissures créées autour du trou.



a) Endommagement isotrope

b) Endommagement anisotrope

Figure 9.10 Problème avec une macro-fissure préfabriquée

Figure 9.11 D_{xx} du l'endommagement anisotrope

Problème Axisymétrique avec deux surfaces libres

Pour l'instant, la loi de comportement développée par l'utilisateur dans RADIOSS ne fonctionne que pour l'élément 3D (brique), les calculs en 2D sont effectués en imposant des conditions aux limites supplémentaires. Pour le problème axisymétrique, on est obligé de faire l'approche suivante : la configuration est une tranche de révolution dont l'angle et le rayon intérieur sont suffisamment petits par rapport à la dimension globale. On bloque également les déplacements tangentiels sur les côtés symétriques ainsi que les déplacements radiaux sur la surface intérieure comme indiqués dans la figure (9.12).

La configuration du problème d'un côté symétrique ainsi que le chargement sont dans la figure (9.13), le confinement est parfait :

Le milieu est la même roche que dans le cas de déformation plane.

La figure (9.14) donne les résultats de l'endommagement respectivement aux temps $t = 0.3ms$ et $t = 0.4ms$.

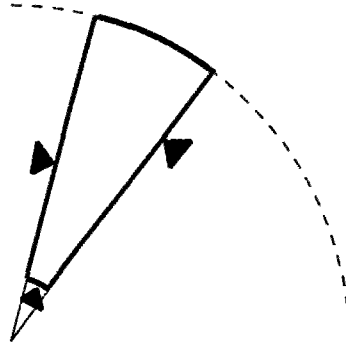
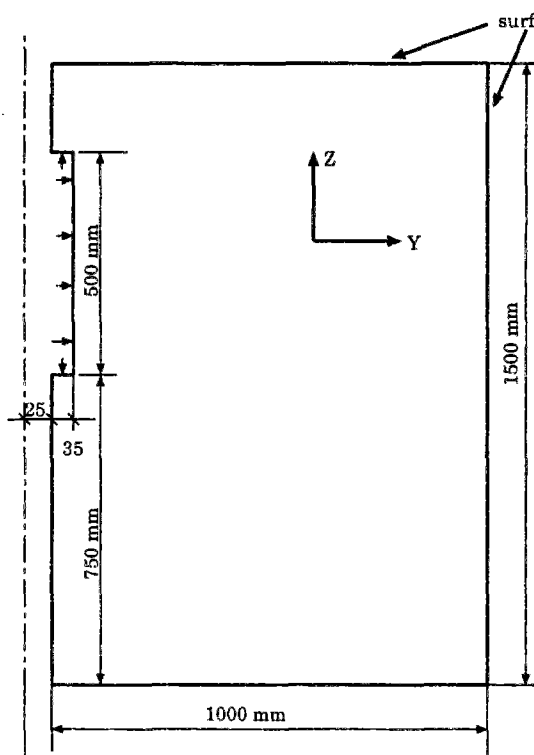
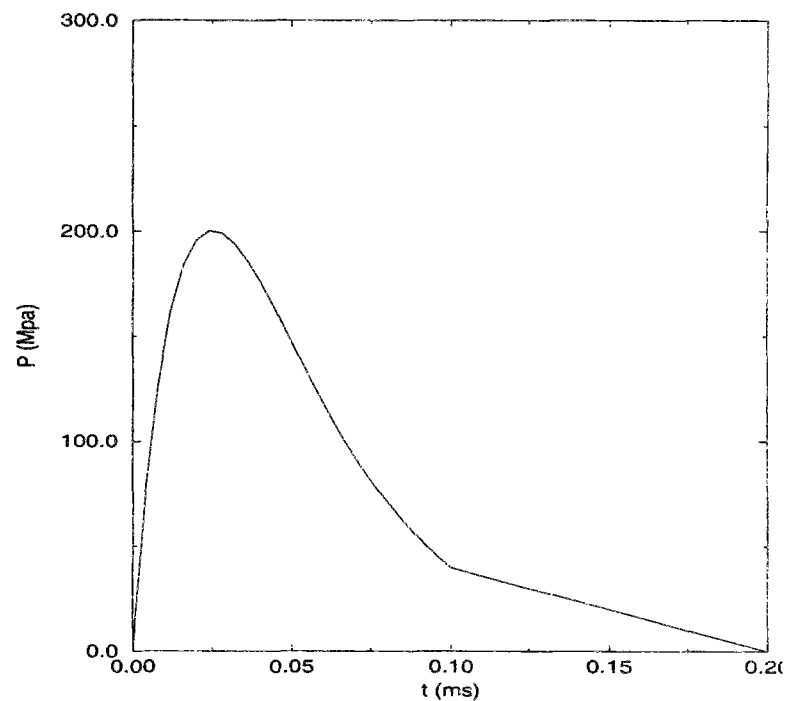


Figure 9.12 une tranche de révolution



a) Configuration



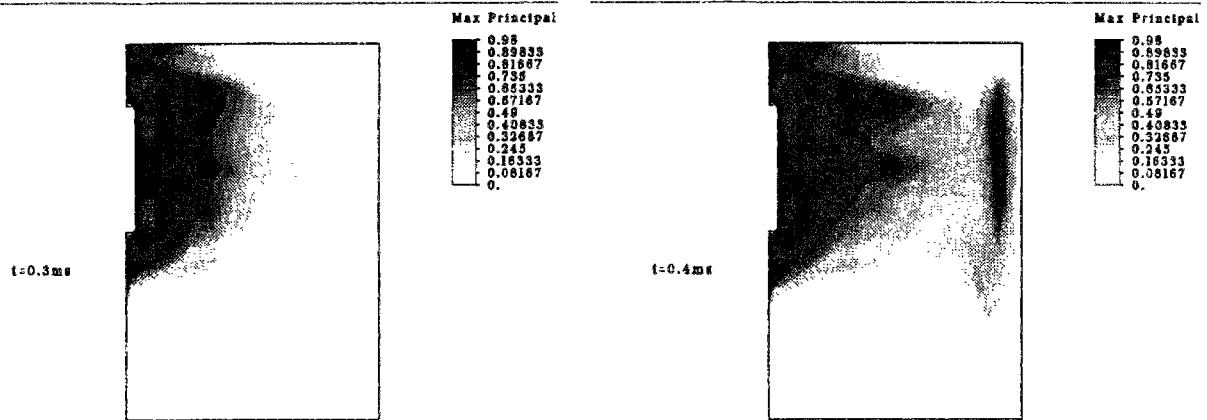
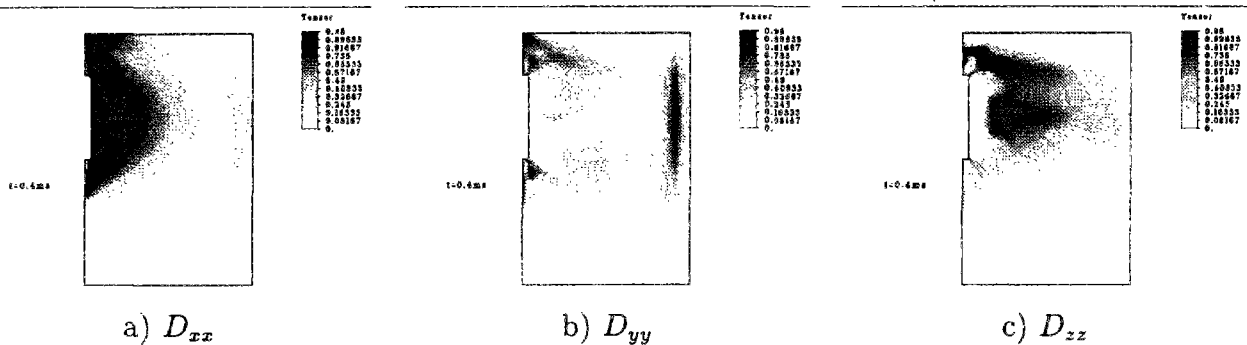
b) Fonction pression imposée

Figure 9.13 Problème Axisymétrique

Les résultats montrent surtout l'influence des surfaces libres sur les zones endommagées. Par exemple, la progression de la zone endommagée se fait vers les surfaces libres.

La figure (9.15) donne les résultats des trois composantes du tenseur de l'endommagement au temps $t = 0.4ms$.

Ils montrent que les fissures créées avec les différentes directions privilégiées se trouvent dans différentes zones.

Figure 9.14 Première valeur principale aux temps $t = 0.3ms, 0.4ms$ Figure 9.15 Trois composantes de D

9.4.2 Calculs avec détonation

Même problème axisymétrique

C'est le même problème que le précédent sauf que le calcul est couplé avec celui de la détonation. On laisse un espace entre l'explosif et la roche, occupé par l'air ou les autres matériaux, c'est ce qu'on appelle « *découplage* », le rapport de découplage est ici de 1.2.

L'explosif est un explosif fictif dont la brisance est proche de l'ANFO. L'équation d'état est celle du fluide polytropique et les paramètres pris sont les suivants :

$\tilde{\gamma}$	$\rho_0(g/cm^3)$	$E_0(Mpa \cdot cm^3/cm^3)$	$p_{cj}(Mpa)$	$D_{cj}(cm/\mu s)$
2.8	0.9	770	2.765×10^3	0.4

Un détonateur est placé en un point du fond du trou, i.e. le mode d'amorçage est ponctuel au fond.

La figure (9.16) donne la première valeur principale du tenseur d'endommagement respectivement aux temps $t = 0.3ms$ et $t = 0.4ms$.

Les résultats soulignent spécialement l'influence du mode d'amorçage. Elle montre que la propagation de détonation de bas vers haut, crée une zone endommagée en haut plus importante ; ceci implique que la limite de la modélisation de la sollicitation de l'explosion par une fonction pression en temps dans le cas de l'amorçage ponctuel.

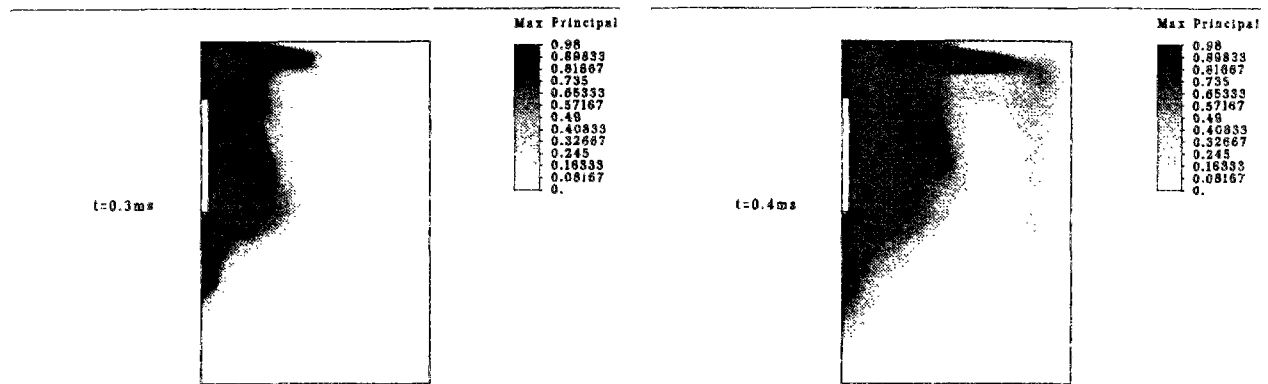


Figure 9.16 Problème axisymétrique couplé avec détonation

Problème 3-D avec la détonation

La configuration est donnée dans la figure (9.17) :

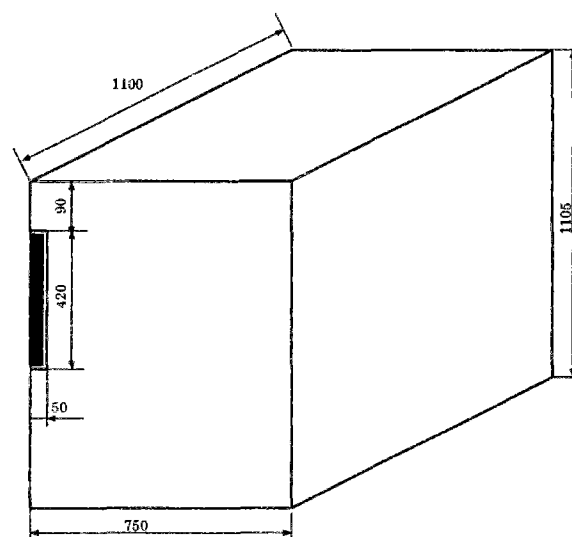


Figure 9.17 Configuration du problème 3-D

Le rapport de découplage est 1.2, le confinement est parfait, le mode d'amorçage est le mode ponctuel au fond. Les types de roche et d'explosif sont les mêmes que l'exemple précédent. La figure (9.18) montre l'état endommagé au temps $t = 0.375ms$, on voit que la forme de la zone endommagée du profil ressemble à celle du calcul en axisymétrie.

En coupant par un plan X-Y suivant le milieu de la cartouche explosive, on voit que la forme de la zone endommagée de ce plan X-Y dans la figure (9.19) ressemble à celle du calcul en déformation plane.

Malgré la modélisation plus détaillée en 3-D, le calcul est relativement lourd, 26984 éléments briques par rapport 1584 éléments quadratiques en déformation plane, les calculs en axisymétrie ou en déformation plane restent encore des calculs numériques les plus pratiques.

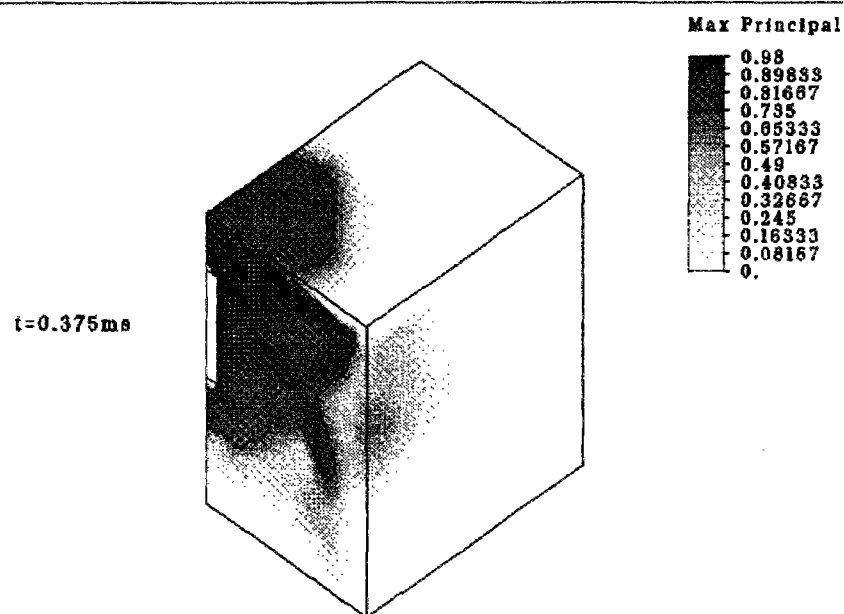


Figure 9.18 État endommagé en 3-D

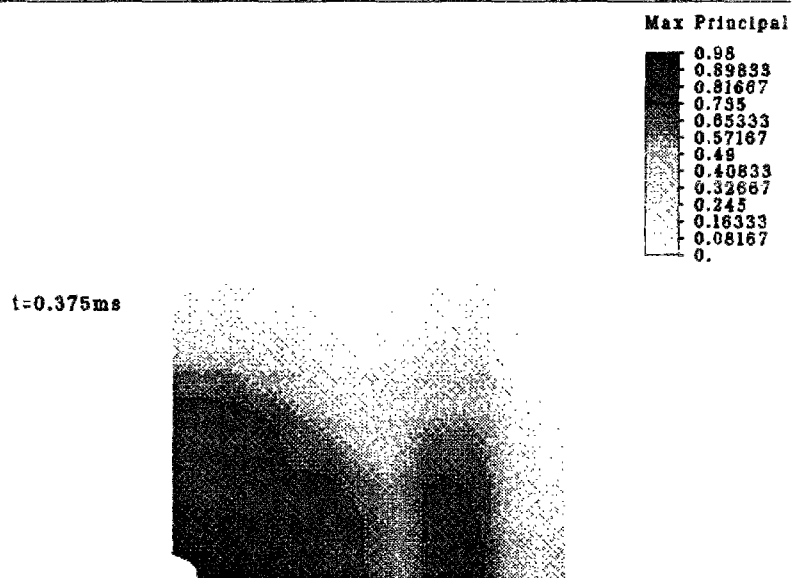


Figure 9.19 État endommagé dans un plan X-Y

Chapitre 10

Points essentiels de la partie

Comme lors de la modélisation de la détonation des explosifs, les modèles numériques sont généralement un compromis entre la théorie et la pratique avec chacun leurs avantages et leurs limites. Ainsi pour notre modèle, nous pouvons souligner :

- avantages

Le modèle est un modèle mixte mésomécanique et micromécanique. Les résultats de micromécanique (homogénéisation) nous permettent de déduire les matrices élastiques effectives (orthotrope) sans l'ajout d'aucune inconnue. Dans le modèle, il n'y a que deux caractéristiques dynamiques du matériau qui sont à identifier. Malgré la simplification du modèle, nous sommes bien capable d'exprimer l'effet de l'anisotropie, de la vitesse de chargement. Nous l'avons intégré dans RADIOSS, code de calculs du type E.F. explicite et les résultats des simulations montrent son efficacité.

- limites

Dans notre modèle,

il n'y a que la traction (mode I) qui puisse provoquer la fracture (cette traction est au sens d'élément fini et non au sens local au front de fissure).

à chaque instant, le matériau est orthotrope (lié au choix du tenseur d'endommagement)

l'effet de la fermeture des fissures en compression qui représente une non linéarité de serrage n'est pas pris en compte

la loi d'évolution de l'endommagement est une approximation (fondée sur une distribution statistique des fissures, extension à partir du cas de la vitesse du chargement constante)

le calcul de la taille moyenne des fragments est encore une vague approche notamment quand il s'agit de l'endommagement anisotrope.

D'après le mécanisme de l'endommagement dû à la fissuration, il paraît peu nécessaire d'introduire la plasticité dans le modèle ; les modèles phénoménologiques du type élastique avec endommagement[D⁺93] ou soit micromécaniques[Kac82] expriment bien certains phénomènes évoqués dans les essais de compression des roches comme la dilatance, l'effet 'unilatéral', l'anisotropie induite, ou encore la non linéarité de serrage...

- perspectives

L'exclusion des autres modes de ruptures dans le modèle est due à prépondérance du mode I dans la fracturation des roches par explosif d'une part, et la procédure différente de détermination du modèle (critère de rupture, loi cinématique de l'endommagement) d'autre part. L'introduction des autres modes de ruptures est tout de même envisageable afin de résoudre des problèmes plus généraux. Le couplage mésomécanique et micromécanique permet de réduire les paramètres du modèle.

Bibliographie de la Partie II

- [A⁺83] T.F Adams et al. Simulation of rock blasking with the shale code. In *First International Symposium on Rock Fragmentation By Blasting* [bla83].
- [Atc71] T.C. Atchison. Explosive fragmentation principes. *Revue de l'Industrie Minrale Mines*, pages 110–124, 1971.
- [Atk87] B.K. Atkinson. *Fracture Mechanics Of Rock*, volume 1 of *Acadmic Press Geology*. Academic Press Inc, second edition, 1987.
- [bla83] *First International Symposium on Rock Fragmentation By Blasting*, Luleå, Sweden, 1983.
- [Bui78] H.D. Bui. *Mécanique de la Rupture Fragile*, volume 1. MASSON, 1978.
- [Cho79] J.L. Choboche. Le concept de contrainte effective appliqué à l'élasticité et à la viscoplasticité en présence d'un endommagement anisotrope. In Wizard and Mihalis [WM79].
- [Civ94] A. Cividini. *Constiutive Behavior and Numerical Modeling*, chapter 16. In [Hud94], 1994.
- [CjW87] C.L. Chow and june Wang. An anisotropic theory of elasticity for continuum damage mechanics. *Int. J. of Fracture*, 33:3–16, 1987.
- [Cos87] Laurence S. Costin. *Time-Dependent Deformation And Failure*, section 5. Volume 1 of *Acadmic Press Geology* [Atk87], second edition, 1987.
- [CS79] J.P. Cordebois and F. Sidoroff. Damage induced elastic anisotropy. In Wizard and Mihalis [WM79].
- [D⁺83] P.J. Digby et al. Computer simulation of blasking-induced vibration, frature and fragmentation processes in brittle rock. In *First International Symposium on Rock Fragmentation By Blasting* [bla83].
- [D⁺93] A. Dragon et al. A model of anisotropic damage by (micro)crack growth. *Assessement and Prevention of Failure Phenomena in Rock Engineering*, pages 71–78, 1993.
- [Eva78] Evans. *J. Am. Ceram. Soc.*, 61:302–308, 1978.
- [Fav69] R.F. Favreau. Generation of strain waves in rock by an explosion in a spherical cavity. *Journal of Geophysical Research*, 74(17):4267–4280, 1969.

- [Fav83] R.F. Favreau. Rock displacement velocity during a bench blast. In *First International Symposium on Rock Fragmentation By Blasting* [bla83].
- [GK79] D. E. Grady and M. E. Kipp. The micromechanics of impact fracture of rock. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, pages 293–302, 1979.
- [GK80] D.E. Grady and M.E. Kipp. Continuum modelling of explosive fracture in oil shale. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, 17:147–159, 1980.
- [GK87] D. E. Grady and M. E. Kipp. *Dynamique Rock Fragmentation*, section 10. Volume 1 of *Academic Press Geology* [Atk87], second edition, 1987.
- [Gri20] A. A. Griffith. The phenomenon of rupture dans flow in solids. *Philosophical Transactions of the R. Soc. A*, 221:163–170, 1920.
- [GZ] J. Gittus and J. Zarka. *Modelling Small Deformations of Polycrystals*. Elsevier Applied Science Publishers.
- [H⁺94] R. Hamajima et al. Analysis for discontinuous medium considering elemental deformation. *Computer Methods and Advances in Geotechnics*, pages 877–880, 1994.
- [Har83] G. Harries. The modelling of long cylindrical charges of explosive. In *First International Symposium on Rock Fragmentation By Blasting* [bla83].
- [HC85] D.J. Han and W.F. Chen. A nonuniform hardening plasticity model for concrete materials. *Mechanics of Materials*, 4:283–302, 1985.
- [Hil50] R. Hill. *The mathematical theory of plasticity*, volume 1. Oxford Press, 1950.
- [Hil67] R. Hill. The essential structure of constitutive laws for metals, composites and polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids*, 15, 1967.
- [Hoe79] A Hoenig. Elastic moduli of non-randomly cracked body. *Int. J. Solids Structures*, 15:137–154, 1979.
- [Hud94] P. Hudson. *Comprehensive Rock Mechanics*. 1994.
- [Irw57] G.R. Irwin. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *J. of Applied Mechanics*, 24(3):361–364, 1957.
- [Joh78] J. N. Johnson. Explosive produced fracture of oil shale. Rapport LA. 7357-PR 38–45, Los Alamos Scientific Laboratory, 1978.
- [Kac58] Mark L. Kachanov. Time of the rupture process under creep condition. *Izvestiya Akademii Nauk; SSSR, Otd Tekhn Nauk*, 8:26–31, 1958.
- [Kac82] Mark L. Kachanov. A microcrack model of rock inelasticity. *Mechanics of Materials*, 1:19–41, 1982.
- [KF71] H.K. Kutter and C. Fairhurst. on the fracture process in blasting. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, 8:181–202, 1971.

- [Kut70] H.K. Kutter. Stress analysis of pressurized circular hole with radial cracks in a infinite elastic plate. *Int. J. of Fracture*, 6(3):233–247, 1970.
- [LC85] J. Lemaitre and J.L. Chaboche. *Mécanique des Matériaux Solides*, volume 1. Dunod, 1985.
- [LK63] U. Langefors and B. Kilhlström. *The Modern Technique of Rock Blasting*, volume 1. JOHN WILEY and SON, 1963.
- [LK93] Qian Liu and P.D. Katsabanis. A theoretical approach to the stress waves around a borehole and their effect on rock crushing. In *Rock Fragmentation by Blasting*, volume Balkema, Rotterdam, ISBN 90 54103167, pages 9–16. Rossmanith, 1993.
- [LKC77] J. Lipkin, D. M. Kipp, and J. D. Campbell. Dynamic flow fracture of rock in pure shear. pages 3B2–1, 1977.
- [LL91] P. Ladevèze and E. Ledantec. Damage modelling of the elementary ply for laminated composites. *Comp. Sc. and Tech.*, 43(3):257–268, 1991.
- [M⁺94] A. Munjiza et al. On a rational approche to rock blasting. *Computer Methods and Advances in Geotechnics*, pages 857–862, 1994.
- [Man71] J. Mandel. *Plasticity and Viscoplasticity*, volume 1 of *Cours CISM*. Springer Verlag, 1971.
- [Man78] J. Mandel. *Propriétés Mécaniques des Matériaux*, volume 1. Eyrolles, 1978.
- [Mar80] S.R. Marsh. Lasl shock hugoniot data. Technical report, University of california Press, Berkeley, California, USA, 1980.
- [McH83] S. McHugh. Computational simulation of dynamically induced fracture and fragmentation. In *First International Symposium on Rock Fragmentation By Blasting* [bla83].
- [Mik84] J. Miklowitz. *the theory of elastic waveguides*, volume 1 of *Applied Mathematics And Mechanics*. NORTH-HOLLAND, 1984.
- [NNH93] S. Nemat-Nasser and M. Hori. *Micromechanics overall properties of heterogeneous materials*, volume 37 of *Applied Mathematics And Mechanics*. North-Holland, 1993.
- [P⁺76] M. Panet et al. *la mécanique des roches appliquéeaux ouvrages du génie civil*, volume 1. Association Amicale des Ingénieurs Anciens Elèves de l'E.N.P.C, 1976.
- [Pia79] M. Piau. Anisotropie induite par les fissures dans les roches sous contrainte : Modules élastiques effectifs et atténuation. In Wizard and Mihalís [WM79].
- [RH89] Anne Rebeyrotte and Hubert Heraud. Méthode d'extraction pour les terrassements rocheux. Gt-38, LCPC, Novembre 1989.
- [S⁺74] D.A. Shockey et al. Fragmentation of rock under dynamic loads. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, 11:303–317, 1974.

- [Sid81] F. Sidoroff. Description of anisotropic damage application to elasticity. In *Physical Nonlinearities in Structural Analysis*, IUTAM Colloquium, 1981.
- [VF75] Ö. Vardar and I. Finnie. *Int. J. of Fracture*, 11:495–508, 1975.
- [VMZ90] S. Valliappan, V. Murti, and Wohua Zhang. Finite element analysis of anisotropic damage mechanics problems. *Engineering Fracture Mechanics*, pages 1061–1071, 1990.
- [WM79] V. Oz Wizard and Yannakakis Mihalis, editors. *Comportement Mécanique des Solides Anisotropes*, number 295 in Colloques internationaux du CNRS, 1979.
- [Zar68] J. Zarka. Sur la viscoplasticité des métaux. *thèse*, 1968.

Partie III

Optimisation des Tirs

Chapitre 11

Introduction

Cette partie est consacrée à la conception optimisée des tirs.

Il s'agit d'abord d'analyser des résultats expérimentaux ou/et de simulation afin de mieux comprendre les mécanismes des phénomènes complexes et d'améliorer des lois existantes.

Il s'agit ensuite de chercher des solutions optimisées pour un problème donné.

Malgré les progrès sur les théories ainsi que les nouvelles techniques numériques qui permettent une prédiction de plus en plus précise, cela est encore loin d'être suffisant pour assister la conception optimisée des tirs de façon directe :

Premièrement, l'étude de la réponse de structures soumises à des chargements complexes telles qu'une explosion dont le comportement, est fortement non linéaire et les échelles réelles très différentes aussi bien dans l'espace (les diamètres des trous sont de l'ordre de quelque centimètres, la dimension globale concernée est l'ordre de plusieurs mètres) que dans le temps (la détonation dure pendant quelques centaines de microsecondes tandis que la réponse transitoire de la structure dure quelques millisecondes, sans compter les séquences de tirs), cela entraîne des traitements numériques et des temps de calcul prohibitifs, même sur les ordinateurs les plus performants.

Deuxièmement, la connaissance des comportements très complexes des explosifs et des roches ainsi que leur couplage est encore au stade de la recherche.

D'où notre idée d'appliquer l'apprentissage automatique pour la recherche de règles à partir des bases de données qui peuvent fournir une prévision de l'efficacité à un coût réduit. Quant à l'optimisation, cette approche apparaît encore plus nécessaire.

Cette partie donne d'abord une introduction brève sur le contenu de la conception des tirs ; quelques conclusions basées sur les résultats des simulations numériques sont ensuite tirées ; un résumé des méthodes concernant l'apprentissage automatique ainsi que l'optimisation notamment un système de programmes SEA de LMS de l'Ecole Polytechnique et les algorithmes génétiques est présenté ; enfin certains exemples sur la recherche de règles ainsi que de l'optimisation sont montrés.

Chapitre 12

Conception des tirs

On se limite à deux types de tir :

1. excavation en surface (sautage) : les quantités (explosifs, roches) et les dimensions sont relativement grandes ; l'objectif est la qualité de fragmentation (tailles)
2. excavation en souterrain : le contrôle de la zone endommagée finale est le plus préoccupant.

12.1 Définition des paramètres de foration

Les principaux paramètres de foration sont définis sur la figure (12.1) :

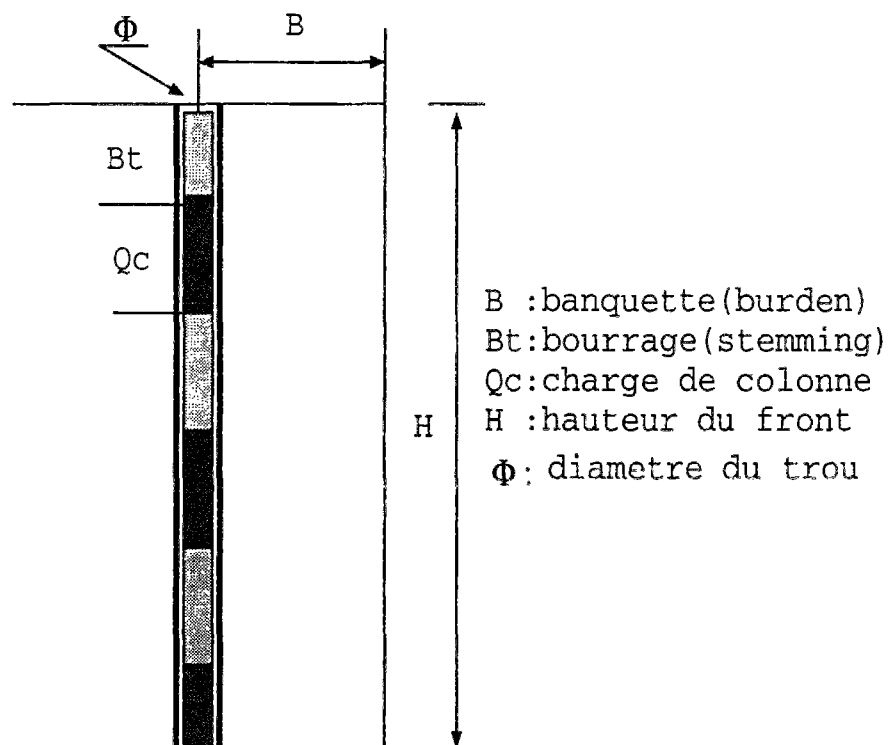


Figure 12.1 Les paramètres de foration

- 2. fragmenter plus efficacement en créant des surfaces libres consécutives entre les trous.
- La maille du plan de tir, l'ordre et les délais de séquence du tir sont des facteurs à la fois importants et très difficile à maîtriser dans la conception.

12.2 Définition des paramètres de fragmentation

Bien que le terme "fragmentation" soit couramment utilisé dans la terminologie liée à l'abattage à l'explosif, il n'est pas défini quantitativement.

Classiquement, on retient la taille moyenne k_n , associée à l'ouverture de tamis qui laisse passer $n\%$ du poids abattu, comme paramètre caractéristique de la granulométrie. Les valeurs courantes de n sont 50 ou 80 i.e. : k_{50} ou k_{80} .

Cette caractéristique est éventuellement représentative pour la taille de fragmentation et ne l'est pas pour la distribution.

12.3 Le choix des variables de conception

Le travail de conception du tir consiste à déterminer :

- La disposition des trous de mine
- La quantité de charge optimale ainsi que sa répartition dans le trou de mine
- La nature et le dispositif d'amorçage
- Les séquences de mise à feu

12.3.1 Choix des paramètres de foration

La détermination des variables sont actuellement faites à l'aide de formules empiriques suggérés par les experts.

e.x. : Grimaud propose la formule suivante pour calculer le diamètre de foration ϕ :

$$\phi = K\alpha(L_f)^{1/3}$$

où α est un coefficient du rocher qui varie de 1 à 1.26 selon la rigidité du rocher ; K est un coefficient dépendant de la profondeur du forage.

La profondeur effective L_f est calculée par :

$$L_f = H/\cos\beta + U$$

avec β l'inclinaison des trous sur la verticale et U la valeur de la surforation ($U \simeq 0,3B$ en pratique) afin de maintenir la pression du trou et d'obtenir un bon arrachement du pied.

Gary [Hem] a donné un processus de la conception schématisé dans la figure (12.3):

Après analyses des bases de données fournies par des essais expérimentaux, Kou [KR93] obtient une relation entre le diamètre du trou et la banquette :

$$(\phi/B)^2 = \frac{\varsigma\sigma_c^2 \tan \frac{\theta}{2}}{2K_0Q_e\rho_e E} + \frac{\alpha g\rho_r \tan \frac{\theta}{2}}{K_0Q_e\rho_e} B$$

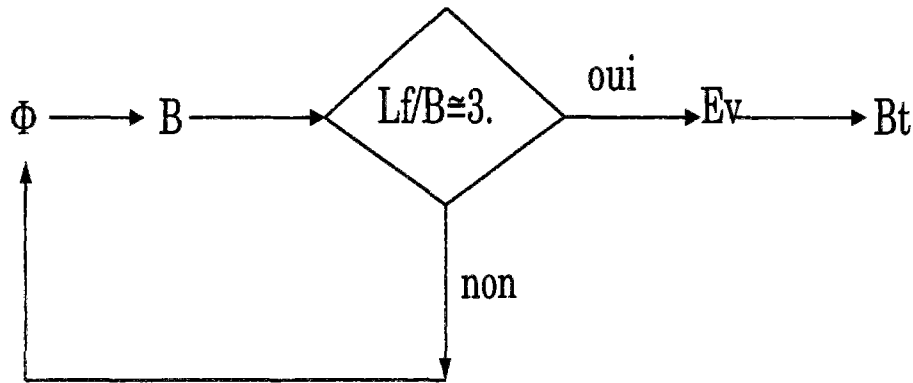


Figure 12.3 Un processus de conception

avec K_0 : coefficient de découplage volumique effectif ($K_0 = \eta \frac{\pi}{4} \left(\frac{r_t}{r_e}\right)^2$, η : efficacité de la transformation énergétique) ;

ρ_r, E, σ_c sont respectivement la densité, le module d'Young et la résistance en compression de la roche ;

g, θ sont l'accélération de gravité et l'inclinaison du forage.

Les coefficients ς, α représentent le rapport entre l'énergie de fracturation et l'énergie élastique et l'échelle du tir qui dépend de la direction par rapport à celle de la gravité.

R.q : En réalité, le diamètre de foration dépend du matériel disponible. Lorsque le mode d'amorçage est ponctuel au fond de trou, l'inclinaison n'est plus justifiée.

12.3.2 Choix du type d'explosif et de la quantité de charge

Le choix du type d'explosif et de sa quantité en principe est en fonction du rocher à abattre, qui en réalité dépend des explosifs disponibles ainsi que de leur performance/coût. Les règles actuelles sont généralement inspirées des principes de la méthode de Langefors[LK63].

:

Le rapport Z des impédances de l'explosif et du rocher, est évidemment un bon critère.

$$Z = I_e / I_r$$

où

$$I_e = D \rho_c \quad \rho_c : \text{la densité de charge}$$

$$I_r = C_1 \rho_r \quad \rho_r : \text{la densité de la roche}$$

Expérimentalement, on trouve les valeurs optimisées de Z ($0.4 < Z < 0.7$) pour que :

$$\text{le rapport } \frac{\text{énergie contribué à la fragmentation}}{\text{énergie explosive libérée}} \text{ soit maximal.}$$

La technique de découplage est utilisée pour réduire le risque en diminuant le rapport de l'énergie de choc par l'énergie de gaz, en même temps, une partie d'énergie est consommée inutilement.

12.3.3 Choix du retard d'initiation

Les lois empiriques existantes sont souvent bien simples. Par exemple, en tirs de surface, une loi concernant l'intervalle de temps entre deux trous d'une même rangée est la suivante

:

$$\Delta = k.B$$

où :

Δ : valeur du retard (en général de 3 à 10 ms/m)

$$0.5m < B < 8m$$

k : coefficient linéaire ($\frac{ms}{m}$) $3 \leq k \leq 5$

Dans le cas de tirs à plusieurs rangées, le retard entre rangées doit assurer le temps suffisant pour créer la nouvelle surface libre et favoriser un déplacement suffisant de la banquette, sa valeur est normalement de 2 à 3 fois le retard entre deux trous d'une même rangée.

En pratique, le temps des délais dépend fortement du système d'amorçage disponible ; au fur et à mesure des progrès de la précision des artifices, le temps du retard a été de plus en plus réduit (le délai recommandé entre deux trous d'une même rangée, est de 20 à 30 ms en surface et 25 à 250 ms en souterrain).

12.3.4 Choix du mode d'amorçage

Il existe deux modes d'amorçage :

1. l'amorçage ponctuel en tête et en fond du trou :

Au cours d'un tir en amorçage ponctuel en fond du trou, l'onde qui se propage dans le massif (individuellement, ce sont des ondes sphériques) remonte vers le bourrage et se réfléchit. Les gaz confinés en pied favorisent un bon déplacement de celui-ci.

2. l'amorçage latéral ;

Il favorise une concentration des gaz en tête d'où l'expulsion précoce du bourrage (risques de projection) et déperdition d'énergie entraînant une chute rapide de la pression et un déplacement faible du massif et du pied.

R.q : L'effet de différents modes doit être pris en compte autant que le rapport entre la vitesse longitudinale du rocher et la vitesse de détonation.

Chapitre 13

Analyse de l'influence des paramètres par simulations numériques

Les lois empiriques sont bien pratiques dans la conception de tir, elles sont néanmoins limitées d'une part par leurs spécificités et leurs précisions, d'autre part par l'influence de certaines variables considérées comme négligeables. Dans ce chapitre, nous essayons de compléter certaines informations manquantes à l'aide de simulations numériques.

13.1 Influence des propriétés mécaniques du rocher

On constate comme dans le chapitre précédent que, dans les lois empiriques, il manque souvent des paramètres qui ont parfois une influence dominante. Cela est sûrement dû à la complexité des couplages. Quand aux caractéristiques des roches, on s'intéresse à l'effet des discontinuités, des différentes couches de matériaux suivant la profondeur du trou, des caractéristiques dynamiques dans le modèle proposé et de l'endommagement au cours de la propagation de l'onde.

13.1.1 Macro-discontinuités

L'existence des macro-discontinuités (visibles) dans le milieu rocheux est bien fréquente. Ces discontinuités représentent des joints entre blocs, des macro-fissures ... etc, et sont plus ou moins significatives selon l'échelle considérée. Leurs caractéristiques géologiques sont la distance moyenne entre eux ID et leur orientation (Indice de Discontinuité).

Les deux calculs suivants, dont un possède des discontinuités et l'autre pas, montrent les différences.

Les conditions retenues pour les calculs sont indiquées dans la figure (13.1). Deux familles de discontinuité sont présentées, la première est placée horizontalement entre le trou et le milieu arrière et la deuxième est placée verticalement entre le trou et la surface libre.

Les calculs sont en déformation plane ; la valeur initiale de l'endommagement de la première famille est prise à la valeur maximale, $D_2^0 = D_{\max} = 0.98$; pour celle de la deuxième famille, la valeur initiale est $D_1^0 = 0.5$. Les figures (13.2).a et (13.2).b montrent les états endommagés aux temps respectifs $t = 0.3 \text{ ms}$, et $t = 0.4 \text{ ms}$.

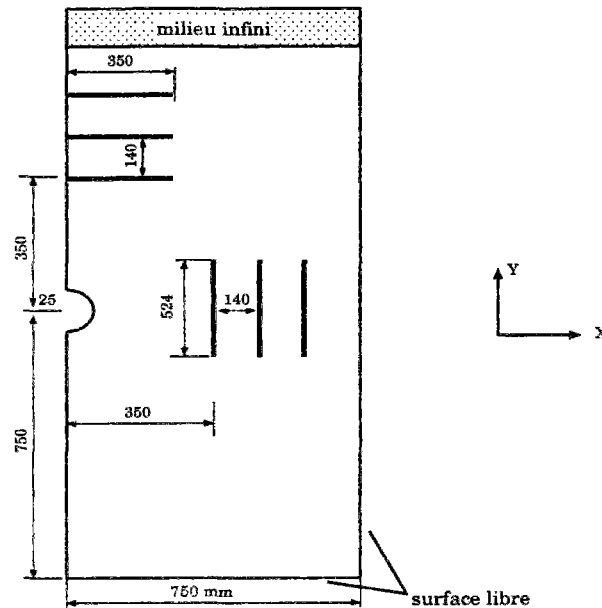


Figure 13.1 Configuration du problème macro-discontinuités

On peut constater d'après les résultats que les discontinuités jouent le rôle de surface libre; alors que la zone endommagée augmente notamment dans les endroits situés entre le trou et les lignes de discontinuités (le calcul de la zone endommagée avec un critère $D_c = 0.49$ donne une augmentation de 10%) l'extension de la zone endommagée vers le milieu arrière diminue ; la première famille de discontinuités est donc une sorte de protection, d'où l'intérêt de leur prise en compte dans la conception des tirs.

Il faut souligner que la modélisation des discontinuités par des endommagements initiaux comme dans le calcul est critiquable ; le comportement fortement non linéaire du contact aux interfaces de discontinuité est plus compliqué, cela consomme plus d'énergie et développe plus de discontinuités.

Un autre problème pratique est la connaissance de la distribution et l'état des discontinuités qui ne provient que d'informations de la surface du site (ou bien après l'opération), les moyens indirects (e.x. par onde sismique) sont relativement coûteux.

13.1.2 Différentes couches de matériaux en profondeur

On rencontre parfois différents types de roche suivant la profondeur du trou, surtout en surface (la profondeur du trou est de l'ordre de 3m à 40m), les vitesses longitudinales de l'onde du rocher peuvent varier d'un facteur deux. Les deux calculs suivants dont l'un a trois couches de roches différentes et l'autre est homogène sont effectués pour apprécier l'influence de cette hétérogénéité.

Les modèles du calcul sont en axisymétrie avec une configuration de calculs présentée dans la figure (13.3) ; les propriétés mécaniques des matériaux hétérogènes sont dans le tableau (13.1), et le modèle de référence ne contient que le matériau 1. Normalement les propriétés dynamiques sont aussi liées aux propriétés générales (ρ , E), elles ont été ici prises constantes justement pour voir les influences.

Les figures (13.4).a et (13.4).b donnent les états endommagés au temps respectifs $t = 0.375 \text{ ms}$, et $t = 0.5 \text{ ms}$.

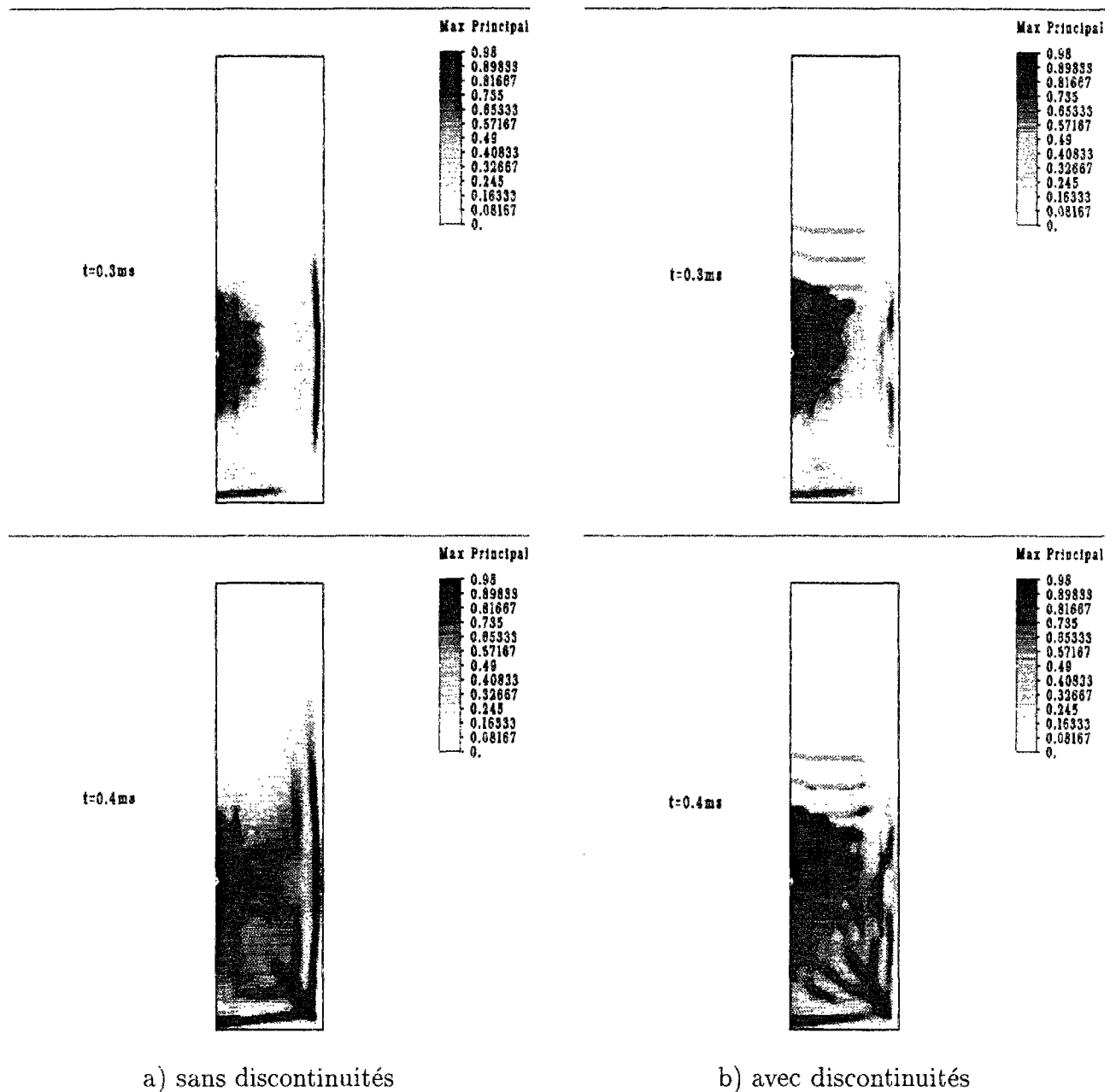


Figure 13.2 États endommagés

	$\rho \text{ (g/cm}^3\text{)}$	$c_1 \text{ (m/s)}$	$E \text{ (10}^5\text{ Mpa)}$	ν
Mat 1	2.4	3793	0.2565	0.3
Mat 2	2.1	3323	0.1565	0.33
Mat 3	2.0	3378	0.1065	0.4

Tableau 13.1 Trois couches de matériau

Les résultats montrent que la zone endommagée se transforme plus ou moins (selon le degré de différences bien entendu) vers le milieu moins raide. La propriété d'hétérogénéité des roches peut créer des surprises lors des tirs, c'est la raison pour laquelle, Chiappetta[Chi93] a proposé une distribution du type des explosifs différents en fonction des propriétés mécaniques des roches ; le critère choisi est le rapport entre la vitesse de détonation

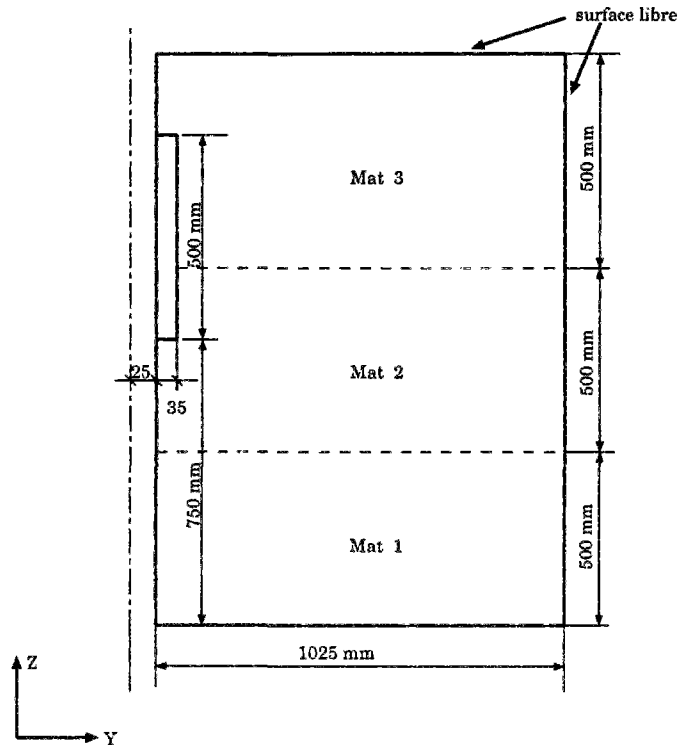


Figure 13.3 Configuration du problème

de l'explosif et la vitesse longitudinale du rocher (on peut aussi prendre le rapport des impédances comme critère).

13.1.3 Caractéristiques dynamiques

On rappelle dans le modèle proposé, les formules qui contiennent les coefficients dynamiques σ_u , k , m :

le nombre de fissures actives avec la contrainte de traction inférieure à σ : $n = k(\sigma - \sigma_u)^m$

la vitesse de l'endommagement $\dot{D} = \left[\frac{8\pi(m+3)^2}{(m+1)(m+2)} \right]^{1/3} c_g n^{1/3} D^{2/3}$

la résistance dynamique en traction $\sigma_c = E(m+3)(m+4)^{-\frac{m+4}{m+3}} \alpha^{-\frac{1}{m+3}} \dot{\epsilon}_0^{\frac{3}{m+3}}$, avec $\alpha = \frac{8\pi c_g^3 k}{(m+1)(m+2)(m+3)}$.

Les calculs montrent que

- l'augmentation de σ_u diminue la zone endommagée
- l'augmentation de k augmente la zone endommagée et diminue les tailles représentatives de la fragmentation
- la diminution de m de 8 à 6 change peu la zone endommagée mais augmente les tailles représentatives de la fragmentation

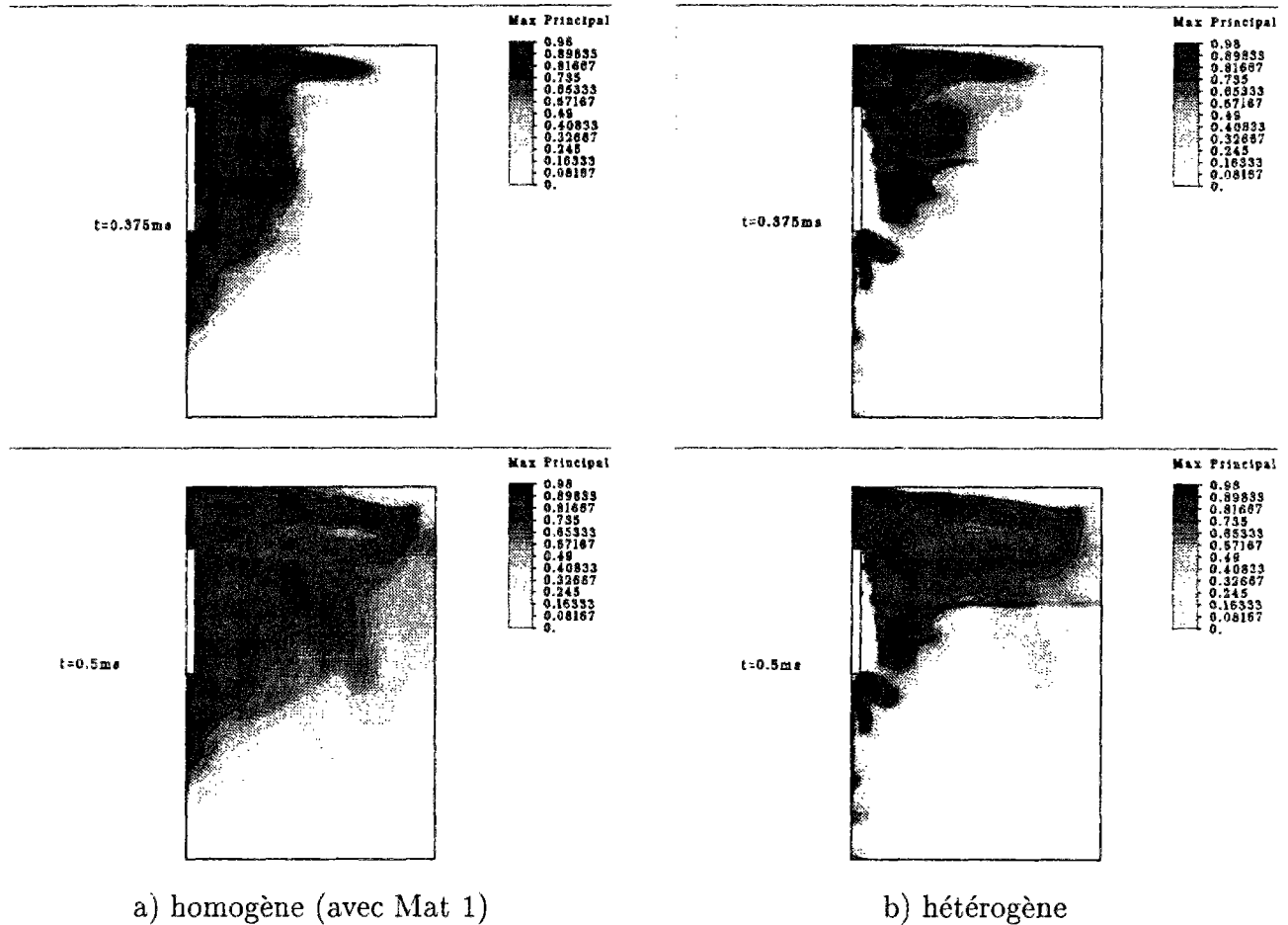


Figure 13.4 États endommagés

13.1.4 Influence de l'endommagement sur l'atténuation

Trois calculs sont effectués avec les modèles respectivement élastique, élastique avec endommagement isotrope, élastique avec endommagement anisotrope.

La géométrie du problème ainsi que le type du rocher sont les mêmes que le premier exemple du calcul dans le chapitre (9) (figure (9.5)).

Le profil de pression imposée est une fonction de Heaviside.

La zone endommagée est définie par les critères :
$$\begin{cases} D_1 \geq D_c & \text{anisotrope} \\ D \geq D_c & \text{isotrope} \end{cases}$$

Les calculs s'arrêtent au temps $t = 0.2\text{ms}$; on trouve d'abord le rapport des zones endommagées entre le modèle isotrope et le modèle anisotrope tend vers 1.4 ; les résultats donnent aussi des informations sur :

a) les déplacements

Les figures (13.5) et (13.6) donnent respectivement les déplacements radiaux maxima en fonction de la distance relative (r/a) et les déplacements en fonction du temps à l'endroit où $r \simeq 2a$. Les noms COUR, COURI, COURA correspondent aux modèles respectivement élastique, élastique avec endommagement isotrope, élastique avec endommagement anisotrope. Elles montrent logiquement l'augmentation des déplacements et de leur période montante surtout dans la zone endommagée (près du

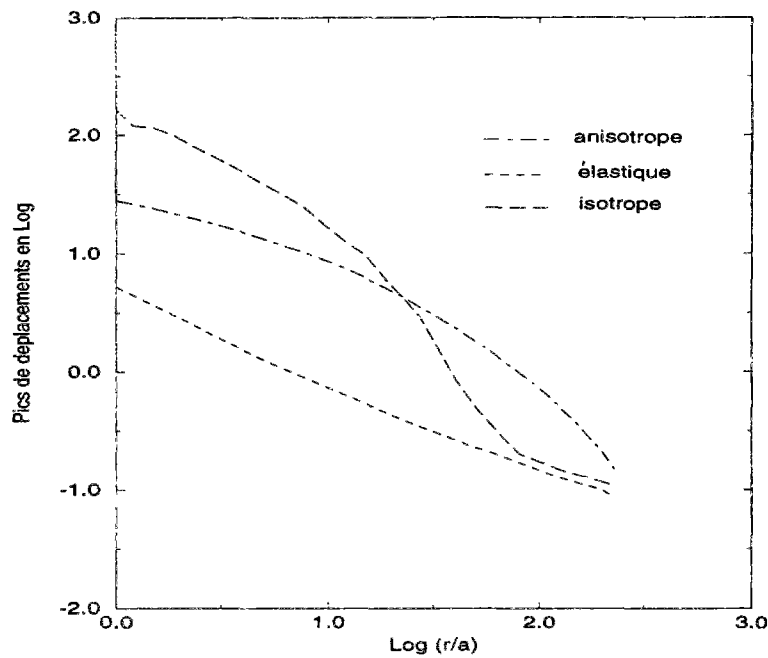


Figure 13.5 Atténuations des déplacements (mm)

RADIOSS RUN : COUR COURI COURA Mon 29 May 1995

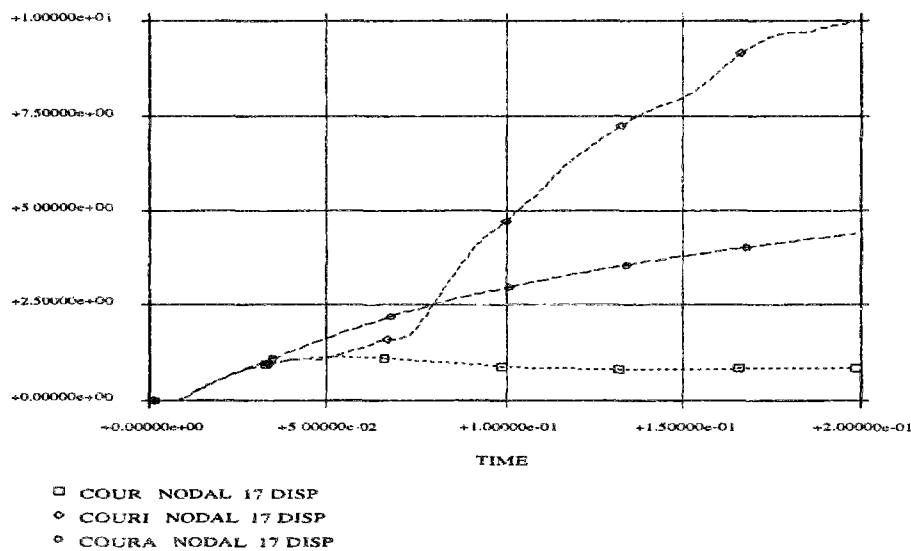


Figure 13.6 Comparaison des déplacements (mm-ms)

trou) des modèles avec l'endommagement, cette augmentation est plus importante pour le modèle isotrope.

b) les vitesses

Les figures (13.7) et (13.8) donnent les mêmes résultats en vitesses radiales. Elles montrent particulièrement l'invariance de la vitesse maximale du modèle d'endommagement anisotrope vis à vis du modèle élastique, mais sa valeur stationnaire augmente.

c) les accélérations

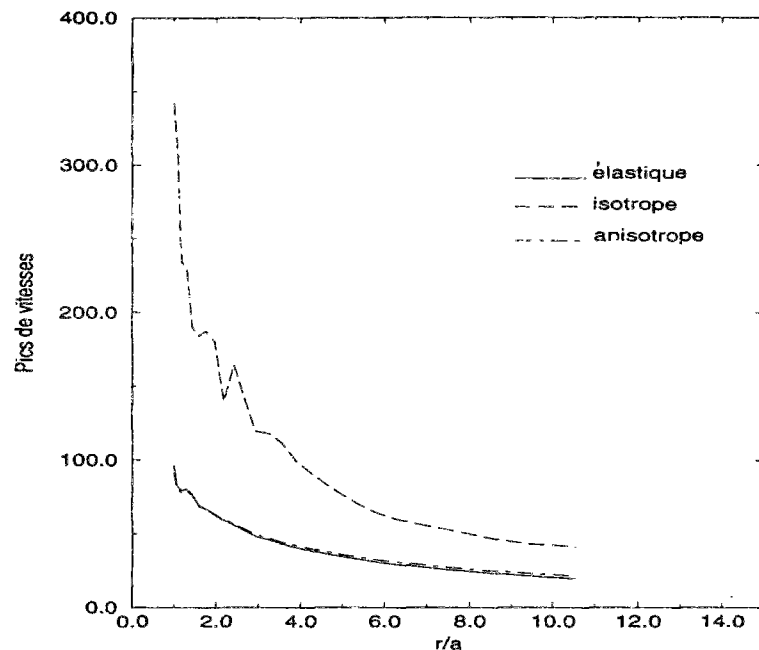


Figure 13.7 Atténuations des vitesses (m/s)

RADIOSS RUN : COUR COURI COURA Mon 29 May 1995

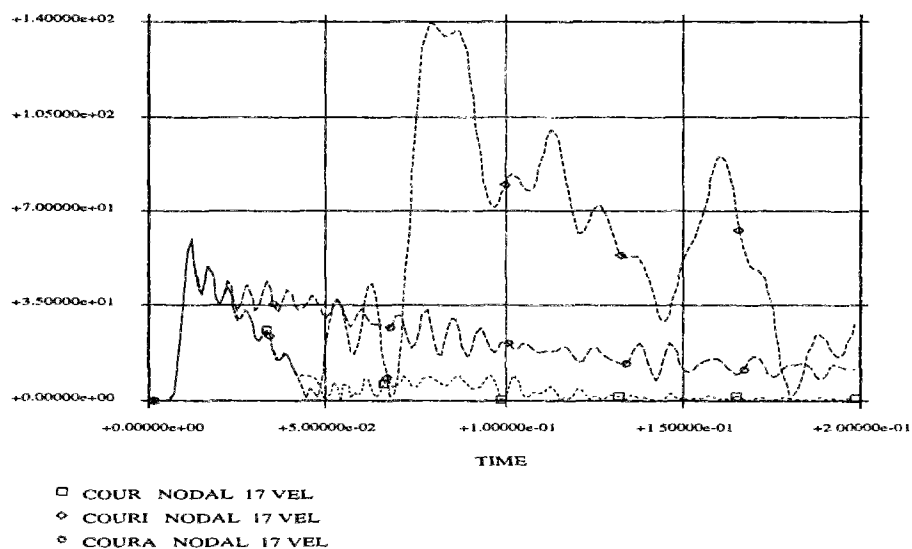


Figure 13.8 Comparaison des vitesses(m/s-ms)

Les résultats des accélérations montrent que : l'endommagement anisotrope ne change pas leur valeur maximale et valeur stationnaire ; l'endommagement isotrope ne change pas la valeur maximale, et modifie peu la valeur stationnaire.

Ces résultats ne sont pas étonnants, d'après les résultats analytiques (9.10), (9.12), l'accélération est indépendante de la rigidité du matériau (E). Ils sont aussi intéressants, l'indépendance de l'état endommagé facilite la prévision de l'accélération par des calculs simples (résultats analytiques, calculs en élasticité). Cela nous conduira aussi à choisir l'accélération comme descripteur dans l'étude de vibration.

d) les contraintes radiales

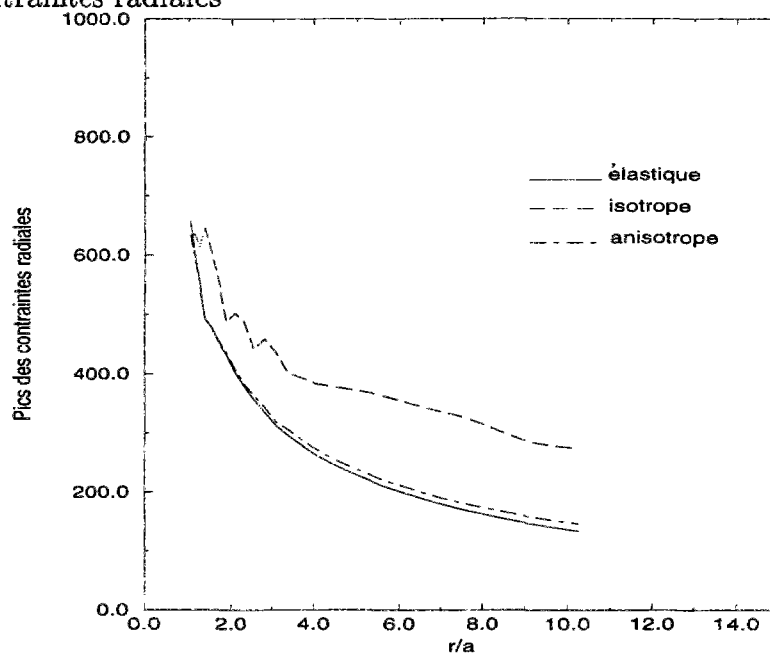


Figure 13.9 Atténuations des contraintes radiales (Mpa)

RADIOSS RUN : COUR COURI COURA Mon 29 May 1995

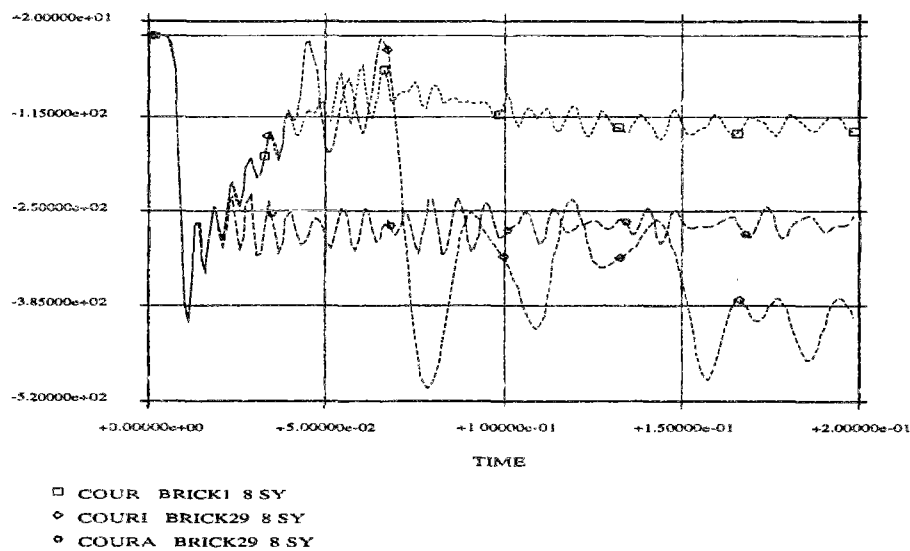


Figure 13.10 Comparaison des contraintes radiales (Mpa-ms)

Les figures (13.9) et (13.10) montrent que l'endommagement ne modifie pratiquement pas la valeur maximale mais induit une diminution de la valeur stationnaire.

La comparaison des trois modèles sur les coefficients d'atténuation (de u_r pic du déplacement radial; v_r pic de la vitesse radiale; σ_{rr} pic de la contrainte radiale) calculés avec l'agression linéaire est donnée dans le tableau (13.2).

Elle montre qu'il y a une légère diminution des coefficients d'atténuation pour le modèle anisotrope et, pour le modèle isotrope, que le changement est plus important. Cela

n	Elastique	Endommagement isotrope	Endommagement anisotrope
u_r	0.7442	1.075	0.5788
v_r	0.6479	0.9514	0.6016
σ_{rr}	0.6650	0.3690	0.6220

Tableau 13.2 Comparaison des coefficients d'atténuation

signifie que par rapport au modèle anisotrope, le modèle isotrope produit un gradient d'endommagement plus grand et une zone endommagée plus concentrée.

13.2 Influence des caractéristiques des explosifs

13.2.1 Modes d'amorçage

Trois calculs avec respectivement le mode ponctuel au fond (F), le mode ponctuel en haut (H), et le mode latéral (L) ont été effectués. La configuration choisie est en axisymétrie sans confinement (les bourrages ne sont pas présentés).

La figure (13.11) donne les résultats de l'état d'endommagement aux mêmes temps pour les trois modes.

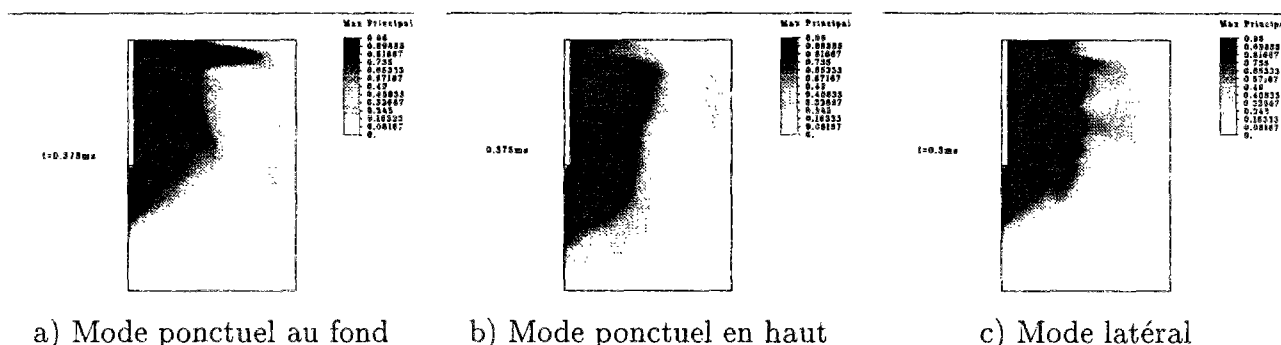


Figure 13.11 État d'endommagement

On voit clairement l'influence du mode d'amorçage sur la distribution des zones endommagées, le mode ponctuel en fond de trou (par la réflexion sur la surface libre) conduit à une zone plus grande dans la zone de bourrage vers la surface horizontale.

Les calculs donnent aussi les rapports sur le volume endommagé et sur k_{50} :

	F/L	H/L
volume endommagé	53/55	54/55
k_{50}	2/3	2/3

Nous constatons que le mode d'amorçage a donc ici peu d'influence sur les résultats du volume endommagé.

On trouve également les niveaux de vibration présentés par les pics de l'accélération au point de la surface en haut (à côté de la surface latérale), leurs rapports approximatifs sont $F/L \simeq 4/3$; $H/L \simeq 1/3$. Ce résultat infirme celui de la thèse de ([BR87]) où une réduction de l'ordre de 30% du niveau des vibrations pour le mode ponctuel au fond est conclue. Les raisons peuvent être suivantes :

- l'effet du retard des tirs a une influence plus grande sur le mode ponctuel au fond
- l'effet du bourrage
- l'atténuation à l'arrière (contre direction de la surface latérale) est plus grande pour le mode ponctuel
- les erreurs dans la simulation ne sont pas connues

13.2.2 Temps de retard

La simulation de la séquence des tirs en temps réel est difficile. Le plus petit temps de retard actuel entre deux trous voisins est de l'ordre de 1 ms ; alors que pour simuler deux séquences de tirs dans un milieu rocheux, il faut que la taille du maillage soit de l'ordre de plusieurs mètres selon les vitesses longitudinales des roches ! et le rayon du trou est de 20mm à 100mm !!. Cela augmente fortement le nombre des éléments et le coût du calcul. Certaines techniques numériques sont proposées pour surmonter ces problèmes en imposant soit les conditions aux limites absorbantes soit les matériaux absorbants. Malheureusement, nous n'avons pas pu les utiliser : Pour les frontières absorbantes, soit elles sont dépendantes de la fréquence ([LK69]), soit elles sont limitées aux matériaux isotropes ([LW72]) ; la proposition la plus intéressante ([Wo77]) serait une approche qui consiste à équilibrer les forces aux frontières, mais ceci exige une modification globale du système des programmes. La technique des matériaux absorbants est fondée sur la théorie acoustique qui consiste à placer progressivement les matériaux avec les vitesses longitudinales décroissantes tout en gardant les impédances constantes pour que l'onde se propage moins vite dans le milieu des matériaux absorbants sans créer l'onde de réflexion. Cette technique simple à mettre en oeuvre n'est strictement valable que pour le comportement linéaire et unidimensionnel.

On a effectué quand même des calculs pour simuler deux tirs avec les retards différents, mais l'ordre du retard est beaucoup moins important. La configuration du problème est dans la figure (13.12) i.e. en déformation plane.

La figure (13.13) donne la comparaison des états endommagés entre l'amorçage instantané et l'amorçage avec un temps de retard de 0.6ms (le trou droit était amorcé en premier); Ce calcul a pu avoir un résultat converge pour l'endommagement jusqu'à $t = 1.5ms$, les temps d'arrêt des autres calculs ont été choisis de façon tels que le temps total par trou est identique.

Elle montre que le temps de retard modifie la distribution de la zone endommagée et augmente le volume endommagé.

Les résultats sur les volumes endommagés relatifs (par rapport volume endommagé de l'amorçage instantané) sont donnés dans le tableau (13.3)

	$T = 0.05(ms)$				$T = 0.1(ms)$		
	$\tau = 0$	$\tau = 0.05$	$\tau = 0.1$	$\tau = 0.6$	$\tau = 0$	$\tau = 0.1$	$\tau = 0.2$
v_d/v_d^i	1.0	1.022	1.048	1.11	1.0	1.028	1.0

Tableau 13.3 Zones endommagées avec les retards en temps

$T/2$ est le temps de montée en pression imposée, les tailles représentatives de fragment sont à peu près constantes avec les temps de retard différents.

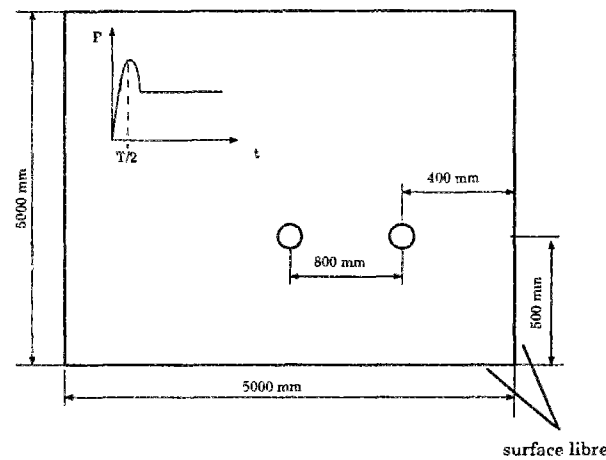
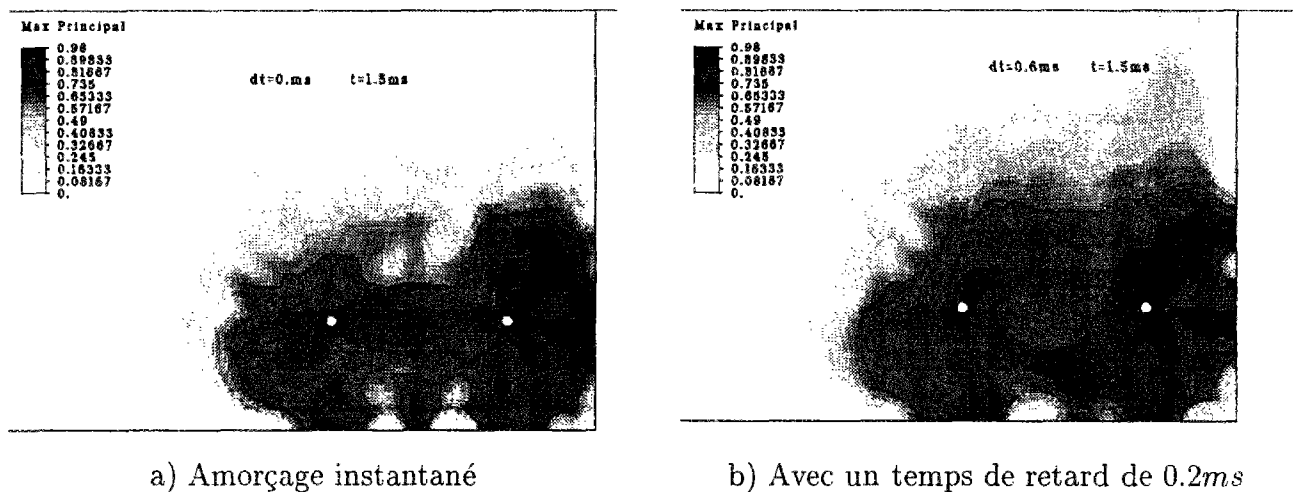


Figure 13.12 Configuration du problème



a) Amorçage instantané

b) Avec un temps de retard de 0.2ms

Figure 13.13 États endommagés

La séquence de tirs est donc favorable à la fragmentation et tient compte de plus de la réduction du niveau des vibrations. La différence n'est néanmoins pas significative par rapport aux résultats expérimentaux. Cela montre les limites des modèles continus pour modéliser ce genre de problèmes : d'abord, un modèle continu ne peut pas prévoir précisément l'état final de fragmentation ; ensuite, il est difficile de choisir correctement les temps d'arrêt des calculs pour les comparer, et le temps d'arrêt plus élevé conduira à une dimension géométrique de calcul plus grande.

13.2.3 La partition d'énergie explosive

Pour voir l'influence du rapport entre l'énergie de gaz et l'énergie de choc, on a effectué des calculs en changeant seulement la valeur de $\tilde{\gamma}$ dans la loi polytropique pour les explosifs introduits au chapitre 5, car $\tilde{\gamma}$ peut caractériser ce rapport (au moins pour des tirs dans

l'eau). La configuration des calculs est en déformation plane. Les résultats sur le volume endommagé (valeur relative) ainsi que sur la taille représentative k_{50} sont donnés dans le tableau (13.4).

	$t = 0.4(ms)$			$t = 0.5(ms)$		
$\tilde{\gamma}$	2.5	2.7	3.0	2.5	2.7	3.0
v_{rela}	1.0	1.062	1.14	1.0	1.0535	1.0927
$k_{50}(cm)$	8	8	4.5	10.5	10.5	9.5

Tableau 13.4 Résultats avec les partitions d'énergie explosive

D'après les résultats de calculs, un rapport énergie de gaz/énergie de choc plus petit de l'explosif conduira à une zone endommagée plus grande et une fragmentation plus fine.

Chapitre 14

Méthodes d'apprentissage automatique et d'optimisation

14.1 L'apprentissage automatique

L'apprentissage automatique correspond à l'acquisition par l'ordinateur d'une expérience adéquate à partir des données fournies par l'expert. Ces informations sont des exemples pour lesquels on dispose de la description du cas et de sa solution. En fait le problème posé est celui de la discrimination de classe à partir d'exemples et de contre-exemples ou de la prévision d'une valeur numérique.

L'apprentissage automatique est actuellement possible

lorsque les données sont mixtes (quantitative et qualitative),

lorsque des règles partielles sont disponibles,

lorsque les données sont insuffisamment représentatives et bruitées,

lorsque les conclusions à déterminer sont identifiées par l'expert.

En pratique, on sépare cette base d'exemples en une base d'apprentissage, sur laquelle sont construites les règles, et une base de test, sur laquelle les règles sont validées.

La description des caractéristiques des exemples ainsi que des conclusions est représentée par un système de descripteurs. La qualité des règles à construire dépend essentiellement de la qualité de cette description et de la base d'exemples donnée.

Les descripteurs peuvent être des trois types élémentaires suivants :

réels : la variation est donc du type continue.

entiers : les descripteurs ne prennent que des valeurs discrètes avec la notion de proximité (comme pour les réels, l'ordre des valeurs peut intervenir dans la comparaison quantitative).

multivalués : un descripteur peut prendre une valeur dans un ensemble limité sans la notion de proximité (deux valeurs successives d'un même descripteur peuvent n'avoir aucun rapport entre elles), ils sont représentés par les chaînes des caractères ou les codages correspondants. e.x.: les valeurs logiques, noms d'objet.

14.1.1 SEA: Générateur de Systèmes Experts par Apprentissage automatique

Le logiciel SEA (actuellement diffusé dans l'industrie) a été développé au LMS par M. Sebag, M. Schoenauer, M. Terrien et P. Navidi. Des applications se trouvent dans [SS90], [NZ93], [Ter91], [Hab90], [Bul94]...

SEA possède deux versions parallèles :

- version symbolique fondée sur la méthode Apprentissage Multi-Couches (AMC)[Seb90]
elle transforme les variables numériques en paramètres multivalués par segmentation, ce qui permet de traiter ensemble des variables hétérogènes et des observations comportant des variables manquantes. En fonction des exemples disponibles, AMC détermine des règles. Celles-ci permettent d'une part de retrouver les conclusions connues sur la base d'apprentissage ; elles permettent d'autre part de prolonger sur les fractions inconnues du domaine d'apprentissage, les conclusions de l'expert en cohérence avec les contre-exemples initiaux.
- version numérique fondée en partie sur la méthode Adaptive Learning Network (ALN)
semblable à une corrélation non-linéaire, elle détermine une fonction mathématique permettant d'approximer et de prédire des entrées.

Dans notre travail, nous n'avons utilisé que la version numérique de SEA qui est pour l'instant, la seule couplée à l'optimisation.

SEA opère en trois étapes : la première consiste en la génération de règles à partir de la base d'exemples tandis que la deuxième exploite les règles générées sur des nouveaux cas inconnus ; enfin une troisième étape exploite les règles générées dans l'optimisation c'est à dire la résolution du problème inverse.

SEA dispose de six fonctions principales :

- **PREPARE**

qui effectue la préparation des données initiales et la récupération d'un fichier de données de type dBase III ou EXCEL. Il effectue le pré-traitement des données numériques, compte tenu de l'attribut que l'on cherche à diagnostiquer. En effet, plusieurs bases de connaissances peuvent être apprises à partir des mêmes exemples. Des outils ont été développés pour traiter des descripteurs de types plus évolués : fichier base de matériaux, fichier courbes... et les reconditionner dans les types élémentaires.

- **APPREND**

qui cherche une fonction (conclusion) prédisant à partir d'une base d'apprentissage. Plusieurs options sont disponibles :

- a) Choix des normalisations des variables

ici, plusieurs types de normalisations sont à choisir

- b) Choix du degré maximal de chaque variables dans la fonction
pour l'instant, l'ordre prévu est jusqu'à l'ordre 6, un fichier avec l'extension 'pow' permet également de choisir individuellement l'ordre du degré de chaque variable
 - c) Utilisation des termes rectangles
les termes rectangles sont limités aux produits 2 à 2 des variables.
 - d) Corrélation minimale
qui permet de faire un apprentissage progressif en imposant une valeur plus élevée pour éliminer une partie de descripteurs.
la valeur par défaut est 0.01.
 - e) Utilisation des inverses des variables
 - f) Choix de la méthode de validation
soit la méthode de JACKKNIFE , elle est utilisée dans le cas où un nombre limité d'exemples (30 par défaut dans SEA) ;
soit la méthode de BOOTSTRAP, lorsque le nombre d'exemples est assez grand,
- ENCLAIR
qui permet de visualiser les règles obtenues et les descripteurs retenus. La conclusion apprise se présente sous la forme d'un polynôme de multi-variables où celles-ci correspondent à certains des descripteurs retenus pour la description de chaque exemple. En effet, certains descripteurs peuvent être sans influence sur la conclusion. Aussi, ils n'interviennent pas dans le polynôme.
 - TESTE
qui permet de visualiser les valeurs prévues , les valeurs réelles ainsi leurs écarts sur tous les individus mis en apprentissage dont la fiabilité est estimées soit par jackknife soit par bootstrap selon le choix dans APPREND (on a mis des données dont on connaît la conclusion, dans une base de test, pour, en supposant les individus inconnus, valider la fonction obtenue).
 - CONCLUT
qui permet de faire la prédiction pour un nouvel individu dont on ignore la conclusion en utilisant la fonction déterminée par APPEND.
 - OPTIMISE
qui permet de résoudre le problème inverse, c'est à dire, permet, quand des conditions sur les diverses conclusions et sur certains descripteurs sont imposées, de proposer une ou des solutions et éventuellement quand une fonction objective est donnée, une solution optimale. OPTIMISE est fondé sur les algorithmes génétiques.

14.1.2 Le choix des descripteurs

La qualité des informations initiales est essentielle. On ne peut apprendre de bonnes règles à partir de mauvais exemples ou d'exemples mal décrits. De même, il est clair qu'on ne peut pas donner un bon diagnostic avec de mauvaises règles.

Ainsi, la mise au point d'une bonne base de données qui est le travail essentiel, est très longue et délicate.

C'est dans le choix des descripteurs que réside la difficulté de mettre en place une bonne base de données. Les paramètres pertinents, EVOLUES, proviennent généralement d'un traitement préliminaire des données brutes, PRIMITIVES, auxquelles on a directement accès. C'est là qu'intervient le travail de l'expert. Les résultats du logiciel SEA dépendent de façon fondamentale de l'approche effectuée par l'utilisateur. Le choix d'une bonne description est primordial pour toute tentative d'apprentissage automatique, néanmoins il est généralement impossible de trouver une description exhaustive, a priori. Il appartient à l'expert de déterminer quels sont les aspects du problème qui peuvent intervenir sur la conclusion et d'en proposer la description. On cite quand même certains principes sur le choix des descripteurs et la base d'exemples [Hab90]:

- Un système de descripteurs doit d'abord être fixe
cela a deux sens : premièrement, les significations des descripteurs sont invariantes dans tous les exemples du système traité, d'où l'intérêt de prendre le système d'unités constant ou encore des termes adimensionnelles ; deuxièmement, les descripteurs doivent être indépendants de tout ce qui n'est pas significatif. Par exemple, si on cherche à décrire la forme d'un objet, la description doit être indépendante de la position de l'objet dans l'espace.
- Le nombre d'exemples doit être suffisant en fonction de la complexité du problème pour que l'algorithme d'apprentissage puisse trouver les règles relativement correctes. On ne peut pas apprendre une conclusion correcte, si les informations discriminantes ne sont pas suffisantes.
- Le nombre de descripteurs doit être à la fois suffisant au sens qu'il ne manque pas les descripteurs discriminants mais ce nombre doit être raisonnable pour réduire le coût de calcul des descripteurs évolués.
- Le descripteur doit avoir un sens réel pour le problème.
- La technique de «descripteurs primitifs» $\Rightarrow$ «descripteurs évolués»

La description d'un problème quelconque peut être vue à deux niveaux :

1. on retient d'abord les caractéristiques globales du problème dites : les descripteurs primitifs
2. on cherche ensuite à représenter ces caractéristiques par des descripteurs évolués où toute la connaissance des experts est exprimée.

Les raisons de l'usage de cette technique sont les suivantes :

En premier lieu, compte tenu de la capacité de SEA à détecter quels sont les descripteurs qui ont un rôle prédominant et ceux qui n'ont aucune influence sur la prédiction de la conclusion, il est normal d'inclure au premier niveau, autant de descripteurs primitifs que possible dans la description des exemples si ceux-là apparaissent importants aux yeux de l'utilisateur et au second niveau, de ne choisir que des descripteurs pertinents. En second lieu, si les conclusions sont plus complexes

que SEA ne peut apprendre, on peut apprendre d'abord certains descripteurs évolués comme les conclusions des descripteurs primitifs et ensuite apprendre la conclusion en fonction des descripteurs évolués.

14.2 L'optimisation

L'optimisation concerne la base même de la conception. Dû à une grande difficulté d'utilisation, les méthodes d'optimisation sont très variées, chacune conçue pour résoudre une catégorie particulière de problèmes. Elles sont développées souvent indépendamment les unes des autres. Par exemple, l'évolution des méthodes d'optimisation des structures a commencé par l'intuition (e.x. la tour Eiffel est vérifiée comme étant une structure optimisée), suivi par des règles simples (e.x. "Fully Stressed Design"). Depuis une vingtaine d'années, liée au succès de l'utilisation de l'ordinateur dans le domaine de l'analyse des structures discrétisées (éléments finis, éléments frontières...), la méthode dite Séquentiel Quadratique Programmation (SQP) est le plus souvent utilisée dans ce domaine.

On classe ces diverses techniques en deux grandes catégories; la première concerne des méthodes traditionnelles (dont SQP fait partie) et la deuxième concerne les méthodes d'évolution.

14.2.1 Méthodes traditionnelles

Guidées par un concept de continuité, les méthodes traditionnelles sont originaires des applications de la programmation mathématique (linéaire, non-linéaire) fondée sur la résolution des conditions d'optimalité de Kuhn-Tucker, pour lesquelles les méthodes de type gradient sont essentielles.

La formule mathématique générale pour une fonction objectif f s'écrit :

$$\text{trouver } \min_{\mathbf{x} \in B} f(\mathbf{x}) \text{ où } B = \{\mathbf{x} : g_i(\mathbf{x}) \leq 0; \quad i = 1, \dots, N_c\}$$

qui consiste à chercher un vecteur des variables (dites variables de conception) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, tel que la fonction de coût (fonction objectif) à minimiser (ou à maximiser) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sur un domaine admissible B défini par les fonctions de contrainte $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Pour une programmation non linéaire, les procédures de résolution sont fondées en général sur les itérations

$\bar{\mathbf{x}}^{k+1} = \bar{\mathbf{x}}^k + \alpha \bar{\mathbf{p}}^*$ où $\bar{\mathbf{p}}^*$ est une direction calculée à partir des gradients de la fonction objectif et des contraintes actuellement satisfaites (ensemble actif à l'itération k) ; α , pas de descente doit être évalué dans une autre étape.

De nombreuses techniques appelées méthodes de descente (plus grande pente, gradients conjugués, quasi-Newton, recuit simulé etc...) ont été développées afin d'augmenter l'efficacité de l'algorithme ; pour prendre en compte que l'espace de recherche est de très grande dimension, que la fonction de coût et les contraintes ne sont pas convexes et que les contraintes sont impossibles à exprimer quantitativement. Ces techniques n'apparaissent malheureusement que sur certains problèmes et pas sur d'autres, leurs faiblesses sont généralement sur :

- Minima locaux

la solution est piégée facilement dans des minima locaux

- Hypothèses restrictives
les fonctions f, g sont continues et dérivables
- Le traitement des différents types de données
elles ne traitent que des variables continues
- Spécificité
Les techniques d'optimisation ne sont jamais générales.

14.2.2 Méthodes évolutionnistes

En rupture avec les méthodes traditionnelles, pour balayer l'espace, les méthodes évolutionnistes font "évoluer" une population de solutions d'une façon suggérée par la génétique.

On donne les quatre concepts particuliers qui distinguent les méthodes évolutionnistes des autres méthodes d'optimisation :

1. Population

Une méthode évolutionniste entretient une population d'individus ("population de solutions"), chaque individu est comme un point du vecteur des variables de conception dans la méthode de descente. Il ne s'agit pas simplement d'effectuer plusieurs recherches en parallèle à partir de plusieurs solutions différentes, le concept de population est essentiel, car les différentes solutions de la population de la solution vont interagir.

2. Evolution

La nouvelle population est créée :

- soit par modification d'un individu ("mutation")
- soit par interaction entre plusieurs individus déjà existants

On dira que ces nouvelles solutions (individus) sont les "enfants" des solutions qui ont interagi, et que celles-ci étaient leurs "parents".

3. Valeur ("fitness")

Cette valeur pourra, dans les cas les plus simples, être simplement le coût associé à une solution (une valeur de la fonction objectif dans la méthode de descente), mais pourra également être une grandeur plus complexe (la valeur d'une fonction généralisée qui contient les termes de pénalité des fonctions de contraintes).

4. Sélection

Pour garder une population constante après ou avant l'évolution, la sélection consiste d'éliminer les individus considérés moins bons que les autres. Cette élimination est soit probabiliste, soit déterministe selon les particularités de la méthode considérée, mais elle est essentielle aux méthodes évolutionnistes.

Les algorithmes génétiques

Les algorithmes génétiques sont les méthodes évolutionnistes les plus populaires. En dehors de ces concepts évoqués ci-dessus, ils ont les traits distinctifs suivants :

- Codage

Le codage est le processus qui permet de représenter un individu sous la forme d'une chaîne de caractères choisis dans un alphabet approprié, le plus souvent binaire. Le résultat d'un tel codage s'appelle un chromosome, allusion aux chromosomes de la biologie, eux aussi constitués d'une chaîne d'éléments, les gènes. Le processus au sens inverse, i.e. le décodage doit être également effectué. Chaque chromosome est composé des sous-chromosomes qui pourraient d'avoir une influence importante sur le résultat d'évolution. La façon de coder n'est pas universelle. La manière la plus simple de coder un réel X consiste à partager l'intervalle de sa variation $[X_{min}, X_{max}]$ en 2^n (n étant le nombre de bits alloués aux chromosomes correspondants qui représente la précision de ce réel). Le codage d'un réel est en effet une discrétisation, le problème est ramené par un codage d'un entier. Un sous-ensemble S d'un ensemble E de N éléments peut également être codé par un mot binaire de N bits, le bit N^0i étant à 1 si l'élément N^0i appartient à S , et étant à 0 s'il n'appartient pas à S . Quant au codage des multivalués, il suffit de les numéroter arbitrairement et de leur affecter le codage de leur numéro.

Le choix des codages n'est pas unique, les différents codages peuvent mener à des comportements très différents de l'algorithme génétique. Il faut donc choisir le codage qui paraît le plus approprié à la résolution du problème.

- Croisement

Le processus standard de recombinaison des individus des algorithmes génétiques est le croisement ("crossover"), qui procède de la façon suivante : deux chromosomes sont scindés en des points correspondants (mais choisis au hasard), et leurs tronçons de fin sont échangés. On crée ainsi deux nouveaux chromosomes. En adoptant un vocabulaire emprunté à la génétique, il consiste à cloner deux enfants dont chacun emporte avec lui une partie du matériel génétique de chacun de ses deux parents (sans sexe). Il faut appliquer le croisement à la population entière, partagée en paires d'individus (couples) avec une certaine probabilité contrôlable par l'utilisateur.

- Mutation

La mutation est la simple modification aléatoire d'un élément du chromosome. La façon la plus simple est de procéder à l'inversion de tous les bits dans les chromosomes d'un individu. Elle n'est utilisée qu'en vue de prévenir la convergence prématurée de l'algorithme vers des solutions de qualité inférieure, avant que celui-ci n'ait eu le temps d'explorer convenablement l'espace des chromosomes.

- Sélection

La sélection de l'algorithme génétique est un peu spéciale. Elle se fait en utilisant les fonctions dépendantes de leurs performances. Les critères sont généralement probabilisés c.à.d. les "bons" individus de la population ont une forte probabilité de se

reproduire, et les "mauvais" possèdent une probabilité beaucoup plus faible. Par cette pression de sélection, on veut propager dans la population les caractéristiques des bons individus et les mélanger dans de nouveaux individus, dont on espère qu'un certain nombre, au moins, seront meilleurs que leurs parents.

- Valeur

La contrainte du type bornes ($x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$) peut être prise en compte dans le processus de codage, Par contre, la prise en compte des autres types de contraintes peut être faite par le biais de fonctions de pénalité comme dans les méthodes classiques (le problème de l'optimisation avec des contraintes est transformé à celui de sans contraintes en ajoutant g dans f).

On résume certains points forts ainsi les inconvénients de l'algorithme génétique par rapport aux méthodes traditionnelles :

Avantages

- Le caractère semi-aléatoire du croisement, ainsi que la mutation, font que les chromosomes ne restent pas piégés dans des minima locaux. Son évolution en population est bien adaptée aux machines munies de multi-processeurs
- On ne pose aucune restriction sur les fonctions g f , on ne leur demande que d'être calculables pour tout chromosome.
- L'algorithme est extrêmement général, et ne fait aucune hypothèse sur la nature du problème d'optimisation à résoudre.
- Il ne cherche pas la meilleure solution, mais ne cherche qu'à améliorer la meilleure solution existante.
- Facilité de gestion de plusieurs types de données

Inconvénients

- Les algorithmes génétiques sont souvent gros consommateurs de temps de calcul. Deux raisons à cela :
 1. A chaque itération, il faut calculer les valeurs de tous les individus de la population qui n'est pourtant pas liée directement au processus d'optimisation.
 2. L'aspect semi-aléatoire de la recherche fait que des solutions prometteuses peuvent être détruites en cours de route, et que leur réapparition dans la population peut prendre beaucoup de temps.
- Le traitement des contraintes est difficile à assurer avec efficacité.
- L'utilisateur est confronté à de nombreux choix dont le jugement pour certains exige beaucoup de savoir-faire : taille de la population, probabilité de croisement et de mutation, codage, opérateur de croisement etc...

on rappelle enfin le schéma de Holland inventeur de l'algorithme génétique Canonique, pour montrer le déroulement de l'algorithme génétique:

1. En supposant qu'un codage et qu'une fonction de valeur ont été définis, on crée aléatoirement une population initiale et on effectue la procédure suivante

2. Itération sur :

Sélection : Créer une population intermédiaire dans laquelle chaque chromosome de la population principale sera "cloné" en un nombre d'exemplaires proportionnel à sa valeur.

Application à la population intermédiaire du croisement et/ou de la mutation (souvent petit nombre)

Evaluation des performances (calcul les valeurs de chaque chromosome) de toute population

Remplacement de la population initiale par la population intermédiaire

3. Arrêt quand la valeur du meilleur chromosome n'évolue plus

R.q : Le couplage Algorithme Génétique/Apprentissage Automatique est nécessaire pour le cas où les fonction g ou/et f sont impossibles à exprimer quantitativement. De fait, les algorithmes génétiques n'ont pas été inventés dans le cadre de l'optimisation, mais plutôt dans celui de l'apprentissage automatique.

Chapitre 15

Optimisation couplée à l'apprentissage automatique

L'optimisation des tirs à l'aide des méthodes traditionnelles de l'optimisation apparaît impossible. D'abord, dans la conception des tirs, il y a beaucoup de variables de conception qui ne sont pas du type continu (e.x. modes d'amorçage des explosifs), ensuite, les simulations sont trop coûteuses pour suivre les itérations.

En revanche, les méthodes évolutionnistes comme les algorithmes génétiques sont bien adaptées pour résoudre des problèmes d'optimisation généraux, mais il faut compenser leurs faiblesses notamment le nombre d'itérations et le temps des calculs.

L'apprentissage automatique permet de satisfaire ces besoins, car il peut permettre de générer des règles (fonctions) nécessaires qui seront intégrées ensuite dans les algorithmes génétiques. Il faut quand même résoudre un problème très délicat, la construction de la base des données soit par simulation numérique, soit par essais, soit encore en couplant des résultats analytiques, numériques et expérimentaux.

Nous n'avons pas eu la possibilité d'effectuer des essais avec explosifs durant cette thèse. Ce chapitre montre cependant comment effectuer la génération des règles par apprentissage automatique et le couplage à l'optimisation à partir d'une base de données construite par simulation numérique. Les exemples traités sont certainement loin de la réalité, mais servent de démonstrations.

15.1 La recherche des règles par l'apprentissage automatique

L'option de normalisation du type $X = X / \max[\text{abs } X]$ est choisie pour tous les exemples effectués

15.1.1 Coefficient polytropique

Il s'agit de chercher une expression simple du coefficient polytropique $\tilde{\gamma}$ en fonction des caractéristiques des explosifs notamment α , le rapport énergie de gaz/énergie de choc obtenu lors de l'essai en immersion. D'après les conséquences du chapitre 5 (détonation dans l'eau), il y a trois caractéristiques indépendantes dans une loi polytropique, les autres peuvent être

$\rho_e(g/cm^3)$	$\tilde{\gamma}$	$E_t(10^5 Mpa)$	α
0.8500E+00	0.2160E+01	0.1550E-02	0.1288E+01
0.9000E+00	0.2000E+01	0.7700E-02	0.2313E+01
0.9000E+00	0.2200E+01	0.7700E-02	0.1892E+01
0.9000E+00	0.2500E+01	0.7700E-02	0.1342E+01
0.9000E+00	0.2700E+01	0.7700E-02	0.1126E+01
0.9000E+00	0.3000E+01	0.7700E-02	0.9823E+00
0.8500E+00	0.2000E+01	0.1155E-01	0.1835E+01
0.8500E+00	0.2200E+01	0.1155E-01	0.1428E+01
0.8500E+00	0.2500E+01	0.1155E-01	0.1032E+01
0.8500E+00	0.2700E+01	0.1155E-01	0.8514E+00
0.8500E+00	0.3000E+01	0.1155E-01	0.6868E+00
0.1000E+01	0.2000E+01	0.9240E-02	0.2195E+01
0.1000E+01	0.2200E+01	0.9240E-02	0.1694E+01
0.1000E+01	0.2500E+01	0.9240E-02	0.1245E+01
0.1000E+01	0.2700E+01	0.9240E-02	0.1037E+01
0.1000E+01	0.3000E+01	0.9240E-02	0.8310E+00

Tableau 15.1 La base de données du coefficient polytropique

estimées par les formules simplifiées. On a choisi les quatre descripteurs suivants :

densité initiale d'explosif ρ_e , énergie dégagée E_t , $\tilde{\gamma}$, et α .

La base de données est construite par des simulations numériques similaires à celles indiquées dans le chapitre 5.

16 calculs ont été effectués et ont conduit au tableau (15.1).

Les valeurs maximales des descripteurs sont :

$\max(\rho_e) = 1.0$; $\max(\tilde{\gamma}) = 3.0$; $\max(E_t) = 0.01155$; $\max(\alpha) = 2.313$.

En prenant $\tilde{\gamma}$ comme conclusion, SEA donne le résultat suivant :

- avec les options : polynôme d'ordre 1 et les termes rectangles,

$$\tilde{\gamma} = 1.58 + 4.0195E_t - 2.256E_t^2 - 2.045E_t \cdot \alpha \quad (15.1)$$

(la moyenne de la somme du carré des écarts sur le test est $e_m = 0.016$.)

- avec les options : polynôme d'ordre 1, les termes rectangles, et les termes inverses :

$$\tilde{\gamma} = 0.466 \frac{1}{\alpha \cdot E_t} - 0.1 \frac{1}{E_t^2} + 1.545 \quad (15.2)$$

(et $e_m = 0.00106$.)

On prend ensuite α comme la conclusion. SEA donne le résultat suivant :

- avec les options : polynôme d'ordre 1, les termes rectangles, et les termes inverses :

$$\alpha = 2.74 \frac{\rho_e}{\tilde{\gamma}} - 1.9176\rho_e \quad (15.3)$$

(et $e_m = 0.0368$.)

- avec les options : polynôme d'ordre 2, les termes rectangles, et les termes inverses :

$$\alpha = 1.96 \frac{1}{\tilde{\gamma}^2} - 1.8846 \frac{1}{\tilde{\gamma}} + 0.997 \frac{E_t}{\tilde{\gamma}} + 0.978 \tilde{\gamma} E_t^2 - 1.554 E_t^4 \quad (15.4)$$

(et $e_m = 0.001522$.)

Dans les apprentissages ci-dessus, on remarque que E_t, ρ_e ne sont jamais présents en même temps ; cela est dû au fait qu'il existe une relation de dépendance entre ces deux descripteurs dans la base de données. SEA a pu éliminer un de ces deux descripteurs dépendants. Les formules (15.2), (15.3) semblent plus simples et plus logiques (physiquement). La formule (15.3) est enfin la plus pratique, puisque E_t est obtenue souvent par estimation.

15.1.2 Loi de propagation

Une loi classique pour prédire l'intensité des ébranlements par les tirs à explosif, dite «loi de propagation» est la suivante :

$$v = K \frac{Q^a}{d^b}$$

où

v est la vitesse particulière résultante, Q est le poids d'explosif utilisé, d est la distance au tir et K, a, b sont des constantes caractérisant l'énergie explosive et la roche.

En effet, cette formule très simple peut être déduite par analyse dimensionnelle : tableau (9.1) de la section 9.2, le rayon de la cavité est proportionnel à $Q^{\frac{1}{3}}$ pour la cavité sphérique et $Q^{\frac{1}{2}}$ pour la cavité cylindrique.

Comme cela avait pu être noté dans le chapitre 12, l'accélération est une caractéristique du niveau de vibration commode grâce sa propriété d'indépendance de la rigidité et du rayon de cavité. On a choisit donc les descripteurs suivants :

conclusion	$\rho_r a \left(\frac{g}{mm^2 \cdot ms^2} \right)$	produit de l'accélération par la densité du rocher
descripteur	ν	coefficient de Poisson
descripteur	$E(Mpa)$	module d'Young du rocher
descripteur	$\rho_e (g/mm^3)$	densité initiale d'explosif
descripteur	$E_t(Mpa)$	énergie explosive dégagée
descripteur	$\tilde{\gamma}$	coefficient polytropique
descripteur	$d(mm)$	distance au tir

Pour construire la base de données, 9 calculs élastiques en axisymétrie ont été effectués sur la géométrie donnée dans l'exemple 3 du chapitre 5; pour chaque calcul les accélérations aux 6 points différents sont enregistrées.

Les valeurs maximales absolues des descripteurs sont :

$$\max(E) = 73400 ; \max(\tilde{\gamma}) = 3.0 ; \max(E_t) = 1550 ; \max(\nu) = 0.401 ; \max(d) = 814.9 .$$

Avec les options : polynôme d'ordre 1, et les termes rectangles, SEA donne la conclusion suivante :

$$\rho_r a = f_0 - f_a \cdot d + 4.57 d^2 \quad (15.5)$$

$$\text{où : } f_0 = -2.39 + 3.45E_t + 1.29\tilde{\gamma} \cdot E - 0.19\nu^2 + 5.22\nu \cdot \tilde{\gamma} + 1.59\tilde{\gamma} \cdot E_t + 0.78E_t^2$$

$$f_a = -3.88 + 1.21E + 4.53\nu + 6.34\tilde{\gamma} + 5.88E_t$$

(et $e_m = 0.00097$.)

Si toutes les valeurs des descripteurs sont prises en logarithme, les valeurs maximales absolues des descripteurs actuels sont :

$$\max(E) = 11.204; \max(\tilde{\gamma}) = 1.0986; \max(E_t) = 7.34; \max(\nu) = 1.772; \max(d) = 6.25.$$

En choisissant les options : polynôme d'ordre 1 sauf pour ν qui est d'ordre 2, la conclusion approchée est la suivante :

$$\text{Log}(\rho, a) = -9.976 + 56.8 \text{Log } \nu + 30.72(\text{Log } \nu)^2 + 30.43 \text{Log } E + 19.68 \text{Log } E_t + 4.38 \text{Log } \tilde{\gamma} - 16.82 \text{Log } d$$

(et $e_m = 0.01$.)

Le module d'Young E intervient dans l'apprentissage, c'est parce que la pression de l'explosion dépend de cette grandeur (voir équation (9.18) de la section 9.2) dans le calcul du couplage détonation-structure.

15.1.3 Volume endommagé

Il s'agit cette fois pour un explosif donné et une roche donnée (fixes), d'approcher une expression du volume endommagé v_d (roche abattue) en fonction des caractéristiques du plan de tirs afin d'effectuer le calcul d'optimisation du plan de tirs.

La base de données est construite par des calculs en déformation plane dont les configurations sont similaires à celle dans l'étude de l'influence des macro-discontinuités (figure 13.1). Il y a trois surfaces libres, si l'on compte aussi la symétrie de la configuration. Les descripteurs choisis sont :

diamètres du trou d ; distance entre le trou et la surface horizontale B ; (la distance entre le trou et la surface verticale est fixée à 0.75), rapport de découplage R_d ainsi que deux rapports d/R_d et d/B .

Onze calculs ont été effectués. Cela donne les résultats dans le tableau (15.2).

nom	$d(m)$	$B(m)$	R_d	v_d	d/R_d	d/B
ed1b1c1	0.050	0.600	1.0	1.952774	0.05	0.0833
ed1b4c3	0.050	0.5066	1.677	0.79336	0.0298	0.0987
ed1b1c2	0.050	0.600	1.172	1.467875	0.0427	0.0833
ed1b1c3	0.050	0.600	1.667	0.675639	0.0298	0.0833
ed2b1c1	0.040	0.500	1.3333	0.94768	0.03	0.08
ed2b1c2	0.040	0.600	1.333	0.871909	0.03	0.0667
ed3b2c2	0.100	0.750	1.257	1.520870	0.0796	0.133
ed3b2c3	0.100	0.750	1.474	1.265204	0.0678	0.133
ed4b3c2	0.200	1.000	1.2067	1.570654	0.1657	0.2
ed4b2c2	0.200	0.750	1.2067	2.957848	0.1657	0.267
ed4b3c3	0.200	1.000	1.843	1.182392	0.1085	0.2

Tableau 15.2 La base de données du volume endommagé

Les valeurs maximales des descripteurs sont :

$$\max(d) = 0.2; \max(B) = 1.0; \max(R_d) = 1.843; \max(d/R_d) = 0.1657; \max(d/B) = 0.267.$$

Avec les options : polynôme d'ordre 1 et les termes rectangles, SEA donne un résultat simple :

$$v_d = 8.1 \frac{d}{R_d} - 0.65B \frac{d}{R_d} \quad (15.6)$$

(et $e_m = 0.1$.)

Avec les options : polynôme d'ordre 2 et les termes rectangles, SEA donne le résultat suivant:

$$v_d = 0.85B \cdot d - 2.44B \left(\frac{d}{R_d} \right)^2 + (24.134 - 45.6R_d + 23.17R_d^2) \frac{d}{B} \quad (15.7)$$

(et $e_m = 0.00477$.)

Cette formule est retenue dans l'étude d'optimisation qu'on montrera dans la section suivante.

15.2 Exemple d'optimisation

Le problème posé est le suivant :

Pour un type d'explosif donné, un type de roche donné, on cherche les valeurs des paramètres du plan des tirs (d, R_d, B) qui maximisent l'efficacité spécifique

$$E_s = \frac{v_d}{v_e(\text{volume de l'explosif utilisé})}$$

Nous reprenons le résultat de SEA (l'équation (15.7)) divisée par $\left(\frac{d}{R_d}\right)^2$ qui est proportionnelle au volume explosif. Le problème s'écrit mathématiquement :

$$\max f = 4.256B \frac{R_d}{d} - 88.95B + (90.39 - 92.644R_d + 25.54R_d^2) \frac{R_d^2}{Bd}$$

avec les contraintes :

$$1.0 \leq R_d \leq 2.0$$

$$0.4 \leq B \leq 1.0$$

$$0.5 \leq d \leq 0.2$$

$$d/R_d \geq 0.03 \text{ (le diamètre de la cartouche explosive est supposée supérieur à } 0.03m)$$

Ce problème "simple" est résolu d'abord par une des méthodes traditionnelles :

- Gradient Conjugué

Le point de départ est $\{d = 0.04, B = 0.8, Rd = 1.0\}$, une solution a été trouvée telle que :

$$\{d = 0.04, B = 0.5, Rd = 1.09358\} \Rightarrow f = 1187.1658$$

En modifiant le point de départ en $\{d = 0.1, B = 0.8, Rd = 2.0\}$, une solution différente de la précédente a été trouvée telle que :

$$\{d = 0.06, B = 0.5, Rd = 1.09358\} \Rightarrow f = 995.79$$

Cela signifie qu'il existe au moins deux points de solution locale et que la solution trouvée dépend du point de départ.

Ensuite, on utilise l'algorithme génétique pour résoudre le même problème :

- Algorithme Génétique

A partir de plusieurs points différents, une même solution a été trouvée telle que :

$$\{d = 0.04, B = 0.5, Rd = 1.094118\} \Rightarrow f = 1187.1654$$

qui est pratiquement la même que la première solution trouvée par la méthode de Gradient Conjugué.

Maintenant, supposons que le diamètre du trou et le diamètre de la cartouche explosive ne peuvent prendre que certaines valeurs fixes telles que (cela est peut-être dû à la limite de l'équipement de foration ainsi que des explosifs disponibles) :

$$\begin{aligned} d &\in \{0.048, 0.05, 0.066, 0.084, 0.1, 0.15, 0.2\} \\ \frac{d}{R_d} &\in \{0.03, 0.036, 0.04, 0.05, 0.64\} \end{aligned}$$

Les méthodes traditionnelles ne peuvent pas traiter directement des variables discrètes ou multivalués ; les algorithmes génétiques sont mieux adaptés pour ce genre de problèmes.

Voici la solution trouvée par l'algorithme génétique en changeant la variable R_d par d/R_d :

$$\{d = 0.048, B = 0.5, d/R_d = 0.045 \rightarrow Rd = 1.0667\} \Rightarrow f = 980.96$$

R.q: Le calcul avec une méthode du type gradient est naturellement plus rapide qu'avec l'algorithme génétique, c'est la raison principale pour laquelle les méthodes traditionnelles sont encore dominantes dans le domaine de l'optimisation des structures où le nombre de variables de conception est souvent important. Mais, l'algorithme génétique couplé avec l'apprentissage automatique permet de compenser l'inconvénient tout en gardant ses avantages.

Chapitre 16

Points essentiels de la partie

Les modèles numériques pour la prévision du résultat des tirs sont de plus en plus sophistiqués ; tout a un prix. Ils sont souvent coûteux et chacun est limité à un problème particulier. La fréquente utilisation actuelle des modèles semi-empiriques ne semble pas menacée par celle des modèles numériques dans la conception des tirs. En revanche, il apparaît, dans un avenir très proche, la perspective d'utiliser des méthodes évolutionnistes couplées avec des méthodes d'apprentissage automatique pour l'optimisation des tirs.

D'abord, la construction de la base de données d'apprentissage automatique peut prendre en compte l'ensemble des résultats issus des modèles analytiques, numériques ou empiriques et des essais au lieu de choisir parmi l'un d'entre eux. Cela renforce la crédibilité de l'apprentissage automatique. Ensuite, la généralité des méthodes évolutionnistes ainsi que leur couplage avec l'apprentissage automatique (qui permet de réduire le coût de calculs) assurent la faisabilité de résoudre des problèmes réels.

Les perspectives de recherche sont actuellement les suivantes :

- Amélioration du modèle numérique du comportement des explosifs adapté au génie civil dans le calcul du couplage détonation/structures
- Amélioration et qualification du modèle proposé pour le comportement dynamique rapide des roches pour intégrer en particulier les autres modes de rupture dans le modèle.
- Amélioration des algorithmes génétiques pour accélérer le calcul de l'optimisation des tirs.

Mais cela est une nouvelle aventure !!!

Chapitre 17

Conclusion générale

L'objet de cette étude était de développer des outils informatiques pour la conception et l'optimisation des tirs de mine. Nous nous sommes concentrés sur la simulation numérique de la modélisation de la détonation des explosifs et du comportement dynamique des roches ainsi que de leur couplage en gardant conscience des simplifications prises qui sont actuellement nécessaires.

Dans la partie de la **détonation des explosifs**, nous avons montré grâce aux simulations numériques que :

- l'utilisation d'une équation d'état du type polytropique avec $\tilde{\gamma}$ constant apparaît pratique et raisonnable ;
- la constante $\tilde{\gamma}$ peut être une caractéristique de la partition d'énergie explosive, i.e. le rapport entre l'énergie de choc et l'énergie de gaz qui est utilisé de plus en plus comme un des critères de sélection des explosifs ;
- la direction de la propagation de détonation (déterminée par le mode d'amorçage) joue un rôle important vis à vis du comportement mécanique du milieu adjacent ;
- la modélisation simplifiée apparaît encore admissible pour le calcul du couplage détonation/structure dans lequel la réponse mécanique de la structure est le centre d'intérêt.

Dans la partie du **comportement dynamique des roches**, nous avons proposé un nouveau modèle continu du type élastique avec endommagement anisotrope. Les principales caractéristiques de ce modèle sont les suivantes :

- la relation explicite (au sens global) entre la description d'état endommagé et la description de la fissuration permet de calculer la dimension moyenne des fragments ;
- la description des variables d'endommagement par un tenseur d'ordre 2 permet de représenter l'influence de l'anisotropie ;
- la détermination de l'évolution de l'endommagement retenue permet de présenter l'influence de la vitesse de chargements ;
- les méthodes d'homogénéisation permettent de prévoir la rigidité du milieu fissuré sans l'ajout de coefficient complémentaire.

Les calculs numériques avec ce modèle dans les différentes configurations (en déformation plane, en axisymétrie, en 3-D avec ou sans le couplage détonation/structure) ont montré son adaptation à la simulation des tirs.

Néanmoins, la simulation des tirs ne peut pas actuellement être un outil parfait pour assister la conception des tirs en raison de la modélisation simplifiée et du coût de calculs.

C'est pour quoi, dans la partie de l'**optimisation des tirs**, nous avons préféré proposer d'utiliser une nouvelle approche par apprentissage automatique qui répond bien au critère de la prévision de l'efficacité à un coût réduit.

Un des avantages de cette approche est qu'elle est ouverte à tous les moyens de prévisions. Cela est très important pour traiter les problèmes complexes comme les tirs de mine.

L'étude approfondie sur les solutions analytiques du problème des cavités a montré notamment que *l'accélération est meilleure caractéristique du niveau de vibration que la vitesse*.

L'étude sur l'influence des variables de conception par simulation a conduit aux conséquences suivantes :

- la surface libre joue un rôle très important dans le processus de la fracturation des roches à explosif, d'où la prépondérance du mode I ; les macrofissures se comportent comme des surfaces libres, il faut donc en tenir compte lorsque leur échelle est assez importante.
- l'hétérogénéité du massif rocheux donne une hétérogénéité de la fracturation, elle suit toujours la règle de la mécanique des structures : la partie la plus faible sera la plus affaiblie.
- le mode d'amorçage change la distribution des endommagements, et c'est le mode ponctuel au fond du bourrage qui est le plus favorable.
- la séquence des tirs permet de rendre le travail des explosifs plus efficace et de réduire le niveau des vibrations induites.
- la partition d'énergie explosive joue aussi un rôle important : un rapport énergie de choc/énergie de gaz faible est à préconiser lorsque le contrôle du niveau de vibration est exigé comme le cas de tirs en souterrain.

Nous avons enfin recommandé une méthodologie pour l'optimisation des tirs grâce au couplage algorithmes génétiques / apprentissage automatique.

En l'absence de données expérimentales, nous n'avons montré que la faisabilité de cette méthode sur des exemples fictifs par simulation.

Ces exemples sur la recherche des règles par l'apprentissage automatique ont montré la souplesse et l'efficacité de l'approche

Ils permettent enfin de montrer la puissance, l'adaptation de cette démarche.

D'autres travaux sur des cas réels devraient être conduits très prochainement pour vérifier les perspectives pratiques de notre travail.

Bibliographie de la Partie III

- [bla93] *Fourth International Symposium on Rock Fragmentation By Blasting*, Vienna/Austria, july 1993.
- [BR87] N. Bouden-Romdhne. *Contribution à L'étude de la Fragmentation des Massifs Rocheux à L'explosif*. Thèse, Ecole des Mines de Paris, 1987.
- [Bul94] Michale Bulik. *Sur l'Optimisation de la Protection Parasismique*. Thèse, Université Paris-VI, 1994.
- [Chi93] R. Frank Chiappetta. Blasting techniques. In *Fourth International Symposium on Rock Fragmentation By Blasting* [bla93].
- [Hab90] J.M. Hablot. *Construction de solutions exactes en élasto-plasticité. Application à l'estimation d'erreur par apprentissage*. Thèse, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1990.
- [Hem] Gary.B. Hemphill. *Blasting Operations*.
- [KR93] S.Q. Kou and P.A. Rustan. Computerized design and result prediction of bench blasting. In *Fourth International Symposium on Rock Fragmentation By Blasting* [bla93].
- [LK63] U. Langefors and B. Kilhlström. *The Modern Technique of Rock Blasting*, volume 1. JOHN WILEY and SON, 1963.
- [LK69] J. Lysmer and R.L. Kuhlmeyer. Finite dynamic model for infinite media. *J. Eng. Mech. Div. ASCE*, 95:859–877, 1969.
- [LW72] J. Lysmer and G. Waas. Shear waves in plane infinite structures. *J. Eng. Mech. Div. ASCE*, 98:85–105, 1972.
- [NZ93] P. Navidi and J. Zarka. Clever optimal design of materials and structures. In *Second French-Korean Conference on Machine Learning*, 1993.
- [Seb90] Michèle Sebag. *Une approche symbolique-numérique pour la discrimination à partir d'exemples et de règles : l'apprentissage multi-couches*. Thèse, Université Paris-IX Dauphine, 1990.
- [SS90] M. Schoenauer and M. Sebag. Incremental learning of rules and meta-rules. In *7th Int. Conference on Machine Learning*, 1990.

- [Ter91] Michel Terrien. Systèmes experts par apprentissage en contrôle non-destructif. In *Les systèmes experts & leurs applications*, volume 3, pages 439–447. EC2, 1991. Onzièmes Journées Internationales “Les systèmes experts & leurs applications”, Avignon, 27–31 Mai 1991.
- [Wo77] W. White and others. Unified boundary for finite dynamic models. *J. Eng. Mech. Div. ASCE*, 103:949–964, 1977.

Annexe A

Formulations en grandes transformations

Ces formulations sont classiques de la Mécanique des Milieux Continus en Grandes Déformations

A.1 Description des grandes déformations

A.1.1 Géométrie

L'évolution d'un milieu soumis à divers chargements, est étudié dans le temps. Initialement les points matériels du milieu sont à $\mathbf{X}$; à l'instant t , ils sont à $\mathbf{x}$ dans un repère cartésien.

La fonction

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t) \quad (\text{A.1})$$

caractérise la transformation en représentation Lagrangienne (dans la configuration de référence Ω_0); mais la fonction inverse peut aussi être retenue $\vec{X} = \vec{X}(\vec{x}, t)$, lors d'une représentation Eulerienne (dans la configuration actuelle Ω_t).

En introduisant le tenseur gradient $\mathbb{F}$ par:

$$\mathbb{F} \equiv \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \text{ i.e. } F_{iJ} = \frac{\partial x_i}{\partial X_J} \text{ avec son inverse } \mathbb{G} \equiv \mathbb{F}^{-1} \equiv \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \quad (\text{A.2})$$

La conservation de la masse implique :

$\det \mathbb{F} = \rho_0 / \rho_t$ où ρ_0, ρ_t sont les masses spécifiques initiale et actuelle.

On peut décomposer le tenseur gradient en formes polaires suivantes :

$$\mathbb{F} = \mathbb{V} \mathbb{R} = \mathbb{R} \mathbb{U}$$

où le tenseur de rotation $\mathbb{R}$ est orthogonal et les "tenseurs de déformation pure" droit $\mathbb{U}$ et gauche $\mathbb{V}$ sont symétriques et définis positifs.

D'après les définitions, le tenseur gradient $\mathbb{F}$ subit une règle de la composition multiplicative, si un solide soumis successivement à des déformations par étape, tel que :

$$\mathbb{F} = \mathbb{F}_n \mathbb{F}_{n-1} \dots \mathbb{F}_1 \quad (\text{A.3})$$

Coordonnées matérielles

En plus de la représentation sur les deux configurations (Ω_0, Ω_t) , il existe une autre représentation, qui ne considère que des grandeurs définies dans Ω_t mais repérées par rapport à deux systèmes de coordonnées :

les coordonnées spatiales x_i (vecteurs de base $\vec{e}_i$) et les coordonnées matérielles X_I

Le système X_I est un système cartésien orthonormé pour Ω_0 (avec vecteurs de base $\vec{E}_I$), mais lorsque le milieu se déforme, il définit aussi sur Ω_t un système de coordonnées curvilignes. Avec les notions du tenseur covariant (indices en bas) et du tenseur contravariant (indices en haut) , on réécrit la formule (A.1) qui apparaît maintenant comme le passage des coordonnées matérielles X_I aux coordonnées spatiales x_i :

$$d\vec{x} = dx^i \vec{e}_i = dX^I \vec{\epsilon}_I, \quad \vec{\epsilon}_I = \mathbb{F} \vec{E}_I$$

avec la base covariante $\vec{\epsilon}_I$.

ou encore :

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial X^J} dX^J = F_J^i dX^J, \quad \vec{\epsilon}_J = F_J^i \vec{e}_i$$

On définit également la base matérielle contravariante $\vec{\epsilon}^I$ par :

$$\vec{\epsilon}_I \cdot \vec{\epsilon}^J = \delta_I^J, \quad \vec{\epsilon}^J = F_i^{-1I} \vec{e}^i$$

A.1.2 Cinématique

En introduisant le vecteur de vitesse $\vec{v}(\mathbf{x}, t)$, dérivée par rapport au temps pour $\mathbf{X}$ fixé (ou la dérivée matérielle), le gradient des vitesses est obtenu par $\mathbb{L} \equiv \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \dot{\mathbb{F}} \mathbb{F}^{-1}$.

On définit également les vitesses de déformations :

$$\mathbb{D} = \frac{1}{2}(\mathbb{L} + \mathbb{L}^t) \quad \mathbb{W} = \frac{1}{2}(\mathbb{L} - \mathbb{L}^t) \quad (\text{A.4})$$

$\mathbb{D}$ s'appelle le tenseur taux de déformation et $\mathbb{W}$ le tenseur taux de rotation.

A.1.3 Tenseurs déformations

La définition du tenseur des grandes déformations n'est pas unique à cause de la dépendance de la configuration choisie. On montre ici deux tenseurs des déformations classiques :

soit le tenseur de Green-Lagrange $\mathbb{E}$ dans Ω_0 (Lagrangienne), soit le tenseur d'Euler-Almansi $\mathbb{A}$ dans Ω_t (Eulérienne):

$$\begin{aligned} d\vec{x}\delta\vec{x} - d\vec{X}\delta\vec{X} &= 2d\vec{X}\mathbb{E}\delta\vec{X} &= 2d\vec{x}\mathbb{A}\delta\vec{x} \\ \mathbb{E} &= \frac{1}{2}(\mathbb{F}^T \mathbb{F} - \mathbf{1}) \\ \mathbb{A} &= \mathbb{F}^{-T} \mathbb{E} \mathbb{F}^{-1} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Les règles de composition (A.3) pour les deux tenseurs ne sont pas directes. On ne peut pas calculer les tenseurs de déformation en increments comme dans le cas de petites déformations.

La relation entre $\mathbb{E}$ et $\mathbb{D}$ est alors :

$$\dot{\mathbb{E}} = \mathbb{F}^T \mathbb{D} \mathbb{F} \quad (\text{A.6})$$

A.1.4 Configuration "Lagrangienne Réactualisée"

Si on prend la configuration actuelle à l'instant t comme configuration de référence, en introduisant le tenseur gradient relatif (de Ω_t à Ω_τ) $\mathbb{F}_t(\tau)$ subi entre les instants t et τ , on peut alors écrire ($\Omega_0 \xrightarrow{\mathbb{F}(t)} \Omega_t \xrightarrow{\mathbb{F}_t(\tau)} \Omega_\tau$) :

$$\mathbb{F}(\tau) = \mathbb{F}_t(\tau)\mathbb{F}(t) \quad \text{ou} \quad \mathbb{F}_t(\tau) = \mathbb{F}(\tau)\mathbb{F}(t)^{-1} \quad (\text{A.7})$$

En remarquant que $\mathbb{F}_t(t) = \mathbb{R}_t(t) = \mathbb{U}_t(t) = \mathbf{1}$, on peut alors montrer que :

$$\mathbb{L}(t) = \frac{\partial \mathbb{F}_t(\tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t} \quad \mathbb{W}(t) = \frac{\partial \mathbb{R}_t(\tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t} \quad \mathbb{D}(t) = \frac{\partial \mathbb{U}_t(\tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t} \quad (\text{A.8})$$

Mais, ceci n'est vrai que dans cette description Lagrangienne Réactualisée.

A.1.5 Configuration intermédiaire

L'idée de l'introduction de cette configuration est de généraliser la relation $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_a$ (décomposition additionnable de termes élastique et inélastique) au cas des grandes déformations.

Comme des déformations plastiques sont induites, pour les caractériser, il est classique d'introduire une configuration intermédiaire ou relachée.

Le gradient de la transformation est décomposé en $\mathbb{F} = \mathbb{F}^e \mathbb{F}^p$

où $\mathbb{F}^e$ et $\mathbb{F}^p$ sont les gradients élastique et plastique de la transformation (bien qu'ils ne dérivent pas en général d'un champ de déplacement).

La déformation élastique est alors définie par $\Delta^e \equiv \frac{1}{2}(\mathbb{F}^{eT} \mathbb{F}^e - \mathbf{1})$

et l'on a $\mathbb{D} = \dot{\mathbb{F}}^e \mathbb{F}^{e-1} + \mathbb{F}^e \dot{\mathbb{F}}^p \mathbb{F}^{p-1} \mathbb{F}^{e-1} = \mathbb{D}^e + \mathbb{D}^p$ des vitesses de déformation élastique et plastique qui sont liées au choix de la configuration intermédiaire.

A.2 Description dynamique

A.2.1 Tenseurs contraintes

Plusieurs représentations sont possibles.

- i) Dans l'état actuel, l'équilibre d'un élément de surface dS de normale unitaire, $\vec{n}$, implique que la force réelle est donnée par :

$$d\vec{f} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} dS \quad \text{où } \boldsymbol{\sigma} \text{ est le tenseur contrainte de Cauchy.}$$

- ii) En prenant cette force réelle sur l'élément de surface initial, on obtient :

$$d\vec{f} = \boldsymbol{\theta} \cdot \vec{n}_0 dS_0 \quad \text{où}$$

$$\boldsymbol{\theta} = (\det \mathbb{F}) \boldsymbol{\sigma} \mathbb{F}^{-T}$$

s'appelle 1er tenseur de Piola-Kirchhoff ou tenseur de Boussinesq.

Comme le tenseur de gradient $\mathbb{F}$, ce tenseur n'est ni Lagrangien ni Eulérien, de plus, il n'est pas symétrique.

iii) Pour obtenir un tenseur complètement Lagrangien et symétrique, on peut transporter cette force dans Ω_0 en écrivant :

$$d\vec{f} = \mathbb{F}^{-1} d\vec{f} = \mathbf{\Pi} \cdot \vec{n}_0 dS_0 \text{ où}$$

$$\mathbf{\Pi} = (\det \mathbb{F}) \mathbb{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbb{F}^{-T} \quad (\text{A.9})$$

est le second tenseur de Piola-Kirchhoff ou tenseur de Piola-Lagrange.

On peut aussi écrire les tenseurs avec la représentation matérielle (dans les systèmes de coordonnées matérielles). Par exemple, les tenseurs de contraintes (deux fois covariants) s'écrivent :

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} / \det(\mathbb{F}) = \tau^{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \theta^{IJ} \vec{e}_I \otimes \vec{e}_J = \Pi^{IJ} \vec{e}_I \otimes \vec{e}_J$$

Ainsi, les quantités Π^{IJ} sont les composantes de $\mathbf{\Pi}$ sur la base $\vec{E}_I$ de Ω_0 mais également les composantes matérielles contravariantes du tenseur $\boldsymbol{\tau}$. Il s'agit là deux points de vue (travail en repère orthonormé sur différents tenseurs; ou bien travail sur un seul et même tenseur dans différents repères) strictement équivalents.

A.2.2 Équations dynamiques

En désignant par $\vec{\gamma}$, $\mathbf{X}$, $\vec{F}^d$, le champ des accélérations, des forces volumique et de surfaces données, on écrit dans Ω_t

$\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \rho_t \mathbf{X} = \rho_t \vec{\gamma}$ dans le volume V_t avec $\text{div } \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{x}}$, $\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{F}^d$ sur la partie de la surface du milieu où les forces sont imposées.

Dans Ω_0 , Les équations s'écrivent :

$\text{div}^0 \boldsymbol{\theta} + \rho_0 \mathbf{X} = \rho_0 \vec{\gamma}$ dans le volume V_0 avec $\text{div}^0 \boldsymbol{\theta} = \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \mathbf{X}}$, $\boldsymbol{\theta} \cdot \vec{n}_0 = \vec{F}^d$. Cette représentation oblige le type de forces imposées est "charge morte".

A.3 Relations de Comportement

Comme en petites déformations, la loi de comportement doit relier les contraintes aux déformations. Il existe une grande variété de modèles de comportements. On rappelle seulement le principe d'objectivité pour construire une loi de comportement physiquement correcte (on exclut certains matériaux qui ne vérifient pas ce principe, notamment les matériaux qui vieillissent) :

La loi de comportement est invariante par rapport au repère d'observation.

Pour vérifier ce principe, la loi de comportement ne doit faire intervenir que les grandeurs objectives, i.e. elles sont invariante dans tout changement de référentiel.

- Grandeurs Objectives

E.x. : les tenseurs suivants en font partie :

$\mathbf{E}, \mathbf{A}, \mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{D}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{\Pi}, \boldsymbol{\tau} \dots$

et les tenseurs suivants n'en font pas partie :

$\mathbf{F}, \mathbf{R}, \mathbf{W}, \mathbf{L}, \boldsymbol{\theta} \dots$

- Dès que l'on a fait le choix d'un tenseur de déformations objectif, la contrainte associée définie par la puissance est objective, puisque la puissance des efforts intérieurs de cohésion est une quantité objective.

- Dérivation objective

Une loi de comportement écrite sous forme incrémentale (forme hypoélastique : relation entre taux de contraintes et taux de déformations) est bien adaptée aux calculs numériques, or, la dérivée par rapport au temps d'un tenseur objectif n'est généralement pas un tenseur objectif, il faut donc utiliser une dérivée objective.

L'idée consiste à éliminer les rotations parasites en dérivant le tenseur dans un repère plus ou moins lié à la matière.

Ceci peut se faire de différentes façons qui donnent les différentes dérivées :

a) Dérivée convective contravariante

On définit la dérivée du tenseur $\mathbb{T}$ dans le repère matériel $\vec{e}_I$:

$$\mathbb{T}^c = \dot{T}^{IJ} \vec{e}_I \otimes \vec{e}_J$$

Puisque les composantes matérielles T^{IJ} du tenseur eulérien $\mathbb{T}$ dans Ω_t peuvent aussi être interprétées comme étant les composantes cartésiennes dans Ω_0 d'un tenseur lagrangien $\mathbb{T}_0$:

$$\mathbb{T}_0 = \mathbb{F}^{-1} \mathbb{T} \mathbb{F}^{-T} = T^{IJ} \vec{E}_I \otimes \vec{E}_J$$

La dérivée convective contravariante de $\mathbb{T}$ s'écrit alors :

$$\mathbb{T}^c = \mathbb{F} \left(\overbrace{\dot{\mathbb{F}^{-1} \mathbb{T} \mathbb{F}^{-T}}}^{\bullet} \right) \mathbb{F}^T = \dot{\mathbb{T}} - \mathbb{L} \mathbb{T} - \mathbb{T} \mathbb{L}^T$$

b) Dérivée convective covariante

On définit la dérivée du tenseur $\mathbb{T}$ dans le repère matériel $\vec{e}^I$:

$$\mathbb{T}_c = \dot{T}_{IJ} \vec{e}^I \otimes \vec{e}^J$$

Un calcul analogue à ci-dessus donne alors :

$$\mathbb{T}_c = \dot{\mathbb{T}} + \mathbb{L}^T \mathbb{T} + \mathbb{T} \mathbb{L}$$

c) Dérivée de Truesdell

On peut également pour transporter un tenseur de Ω_t dans Ω_0 introduire le transport (A.9) de σ à Π . Cela conduit à la dérivée de Truesdell :

$$\mathbb{T}^{Tr} = \frac{1}{\det \mathbb{F}} \mathbb{F} \left(\overbrace{(\det \mathbb{F}) \mathbb{F}^{-1} \mathbb{T} \mathbb{F}^{-T}}^{\bullet} \right) \mathbb{F}^T = \dot{\mathbb{T}} - \mathbb{L} \mathbb{T} - \mathbb{T} \mathbb{L}^T + \mathbb{T} \text{tr} \mathbb{D}$$

d) Dérivée de Jaumann

L'écriture des dérivées dans un repère matériel présente toutefois un inconvénient essentiel : ce sont des dérivées dans un repère non orthonormé. On ne peut donc pas tout-à-fait les traiter comme des dérivées habituelles. Pour lever cette difficulté il faut dériver dans un repère orthonormé qui ne pourra donc suivre que la rotation du milieu continu. L'idée de Jaumann consiste à choisir le référentiel qui suit la rotation $\mathbb{R}$. La dérivée objective $\mathbb{T}^R$ s'écrit donc :

$$\mathbf{T}^R = \mathbf{R} \overbrace{(\mathbf{R}^T \mathbf{T} \mathbf{R})}^{\bullet} \mathbf{R}^T$$

Néanmoins, cette dérivée dépend essentiellement de la configuration de référence Ω_0 choisie, de plus on ne peut pas lui donner d'expression simple car $\dot{\mathbf{R}}$ ne se calcule pas simplement.

Dans une description Lagrangienne Réactualisée, grâce aux propriétés (A.8), nous définissons la dérivée de Jaumann par :

$$\mathbf{T}^J = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \mathbf{R}_t^T(\tau) \mathbf{T}(\tau) \mathbf{R}_t(\tau) \right\}_{\tau=t} = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{W}\mathbf{T} + \mathbf{T}\mathbf{W}$$

R.q : Toutes ces dérivées objectives sont reliées entre elles :

$$\mathbf{T}^c = \mathbf{T}^{Tr} - \mathbf{T} \operatorname{tr} \mathbf{D} = \mathbf{T}^J - \mathbf{D}\mathbf{T} - \mathbf{T}\mathbf{D} = \mathbf{T}_c - 2(\mathbf{D}\mathbf{T} + \mathbf{T}\mathbf{D})$$

et toutes ces dérivées coïncident si $\mathbf{D}$ est nul, c.à.d. lors d'un mouvement de corps rigide.

Annexe B

La propagation des ondes élastiques

Cette annexe consiste en un bref rappel sur les formulations essentielles à la propagation des ondes dans le cadre de l'élasticité.

Dans cette annexe, une variable soulignée représente un vecteur.

B.1 Les équations générales dans le milieu élastique

Les équations de Navier en l'absence de $\underline{f}$ (force volumique) s'écrivent :

$$(\lambda + \mu) \text{grad}(\text{div} \underline{u}) + \mu \Delta \underline{u} = \rho \ddot{\underline{u}} \quad (\text{B.1})$$

En posant $c_1^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}$ et $c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}$ on obtient :

$$(c_1^2 - c_2^2) \text{grad}(\text{div} \underline{u}) + c_2^2 \Delta \underline{u} = \ddot{\underline{u}} \quad (\text{B.2})$$

Si le rotationnel de $\underline{u}$ est nulle $\vec{rot}(\underline{u}) = 0$, à l'aide de la relation :

$$\Delta \underline{u} = \text{grad}(\text{div} \underline{u}) - \vec{rot} \vec{rot}(\underline{u})$$

il vient :

$$c_1^2 \Delta \underline{u} = \ddot{\underline{u}}$$

qui représente une onde longitudinale (P-onde) avec la célérité de propagation c_1 . Cette onde porte plusieurs noms : l'onde de compression, l'onde de dilatation, l'onde sismique ...

Si la divergence (dilatation) de $\underline{u}$ est nulle $\text{div}(\underline{u}) = 0$, il vient:

$$c_2^2 \Delta \underline{u} = \ddot{\underline{u}}$$

qui représente une onde transversale (S-onde) ou onde de distorsion avec la célérité de propagation c_2 .

Il est toujours possible de décomposer le vecteur $\underline{u}$ en un vecteur à divergence nulle et un vecteur irrotationnel tel que:

$$\underline{u} = \text{grad} \varphi + \vec{rot} \underline{\psi} \quad (\text{B.3})$$

D'où:

$$\begin{cases} c_1^2 \Delta \varphi &= \ddot{\varphi} \\ c_2^2 \Delta \underline{\psi} &= \ddot{\underline{\psi}} \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

B.1.1 Onde plane 3D

Si x_i ($i = 1, 3$) désignent les composantes d'un vecteur $\underline{x}$ dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, l'équation d'un plan dans l'espace s'écrit :

$$x_i l_i = d$$

où $\underline{l}$ est le vecteur normal au plan et d est la distance à l'origine de ce plan. Une fonction comme $f(x_i l_i - ct)$ sera la solution générale de (B.4) elle représente une onde plane se propageant dans la direction normale du plan avec la célérité c (f différentiable au second ordre). Si on choisit la direction de propagation comme l'axe $\vec{i}$ positive, tous les termes sont en fonction de $(x_1 - ct)$ tel que :

$$\varphi = \varphi(x_1 - c_1 t); \quad \psi_k = \psi_k(x_1 - c_2 t)$$

D'après l'équation (B.3), on a :

$$\begin{aligned} u_1 &= \varphi_{,1} + \psi_{3,2} - \psi_{2,3} = \varphi'(x_1 - c_1 t) \\ u_2 &= \varphi_{,2} + \psi_{1,3} - \psi_{3,1} = \psi'_3(x_1 - c_2 t) \\ u_3 &= \varphi_{,3} + \psi_{2,1} - \psi_{1,2} = \psi'_2(x_1 - c_2 t) \end{aligned} \quad (B.5)$$

C'est à dire que cette onde plane se compose en trois ondes indépendantes dont une P-onde u_1 vers $\vec{i}$, une SH-onde u_2 vers $\vec{j}$ dans le même plan et une SV-onde vers $\vec{k}$ dans le même plan.

B.1.2 Onde sphérique

Dans le repère sphérique, en raison de la symétrie, on a :

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'équation (B.4) devient :

$$\underline{\psi} = 0 \quad \text{et} \quad \Delta\varphi(r, t) = \varphi_{,rr} + \frac{2}{r}\varphi_{,r} = \ddot{\varphi}/c_1^2$$

En prenant une fonction tel que $\theta(r, t) = r\varphi$, on obtient : $c_1^2\theta_{,rr} = \ddot{\theta}$; D'où la solution générale :

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{r}[f_1(r - c_1 t) + f_2(r + c_1 t)] \quad (B.6)$$

où $f_1(r - c_1 t)$ représente une onde qui se propage dans la direction radiale vers $r = \infty$ et la direction inverse pour $f_2(r + c_1 t)$.

B.1.3 Onde cylindrique circulaire

Dans le repère cylindrique, on a également : $\underline{u} = \begin{bmatrix} u_r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ L'équation (B.4) devient :

$$\underline{\psi} = 0 \quad \text{et} \quad \Delta\varphi(r, t) = \varphi_{,rr} + \frac{1}{r}\varphi_{,r} = \ddot{\varphi}/c_1^2$$

En supposant que la solution prenne la forme :

$$\varphi = \hat{\varphi}(r) \exp(i\omega t) \quad (\text{B.7})$$

où

$$\hat{\varphi}(r) = [A(\omega)J_0(\frac{\omega r}{c_1}) + B(\omega)Y_0(\frac{\omega r}{c_1})] \quad (\text{B.8})$$

avec J_0, Y_0 respectivement la première et la seconde fonction de Bessel ordinaire d'ordre zéro.

$\hat{\varphi}(r)$ s'écrit en fonction de Hankel :

$$\hat{\varphi}(r) = [C(\omega)H_0^{(1)}(\frac{\omega r}{c_1}) + D(\omega)H_0^{(2)}(\frac{\omega r}{c_1})] \quad (\text{B.9})$$

Pour des grandes valeurs de r , une approximation de φ s'écrit :

$$\varphi(r, t) \approx \sqrt{\frac{2c_1}{\pi\omega r}} \{A_1(\omega) \exp[i\omega(t + \frac{r}{c_1})] + A_2(\omega) \exp[i\omega(t - \frac{r}{c_1})]\} \quad (\text{B.10})$$

B.1.4 Onde de surface de Rayleigh

On suppose d'abord que l'onde incidente à la surface est représentée par les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi &= A \exp[i\gamma(x_1 - x_3 \cos \alpha - ct)] \\ \psi &= B \exp[i\gamma(x_1 - x_3 \cos \beta - ct)] \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

où

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \pm \sqrt{(\frac{c}{c_1})^2 - 1} \\ \cos \beta &= \pm \sqrt{(\frac{c}{c_2})^2 - 1} \end{aligned}$$

Pour que l'onde de surface ait une atténuation suivant $\vec{k}$, on doit choisir la partie imaginaire négative. Cela implique que: $c < c_2 < c_1$ L'équation (B.11) s'écrit alors:

$$\begin{aligned} \varphi &= A \exp(-pz) \exp[i\gamma(x_1 - ct)] \\ \psi &= B \exp(-sz) \exp[i\gamma(x_1 - ct)] \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

où

$$p = \gamma \sqrt{1 - (\frac{c}{c_1})^2}, \quad s = \gamma \sqrt{1 - (\frac{c}{c_2})^2}$$

Avec la relation $\gamma = \omega/c = \omega \sin \alpha / c_1 = \omega \sin \beta / c_2$, la loi de comportement élastique et les conditions aux limites à la surface libre ($\sigma_{33} = \sigma_{31} = 0$ à $x_3 = 0$), on obtient :

$$k_R^2 [k_R^6 - 8k_R^4 + 8k_R^2(3 - 2b^2) - 16(1 - b^2)] = 0 \quad (\text{B.13})$$

avec $k_R^2 = (c/c_2)^2$ et $b^2 = (c_2/c_1)^2$

Knopoff[1952] a calculé les valeurs de k_R pour $0 < k_R < 1$ et $0 \leq \nu \leq 0.5$. Le résultat est donné sur la figure B.1 :

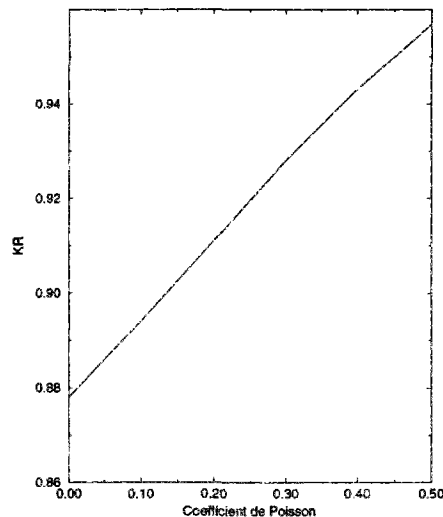


Figure B.1 Le rapport de la vitesse de Rayleigh

B.1.5 Atténuation des ondes

L'atténuation des ondes des grandeurs mécaniques dans un milieu solide vient des deux origines suivantes :

- la géométrie divergente

c'est le cas de l'onde sphérique et de l'onde cylindrique, la caractéristique de l'atténuation est représentée souvent par le coefficient d'atténuation $n = \frac{1}{\text{Log } r_2 - \text{Log } r_1} \text{Log } \frac{A_1}{A_2}$, où A_1, A_2 sont respectivement les amplitudes des grandeurs aux points $r = r_1, r_2$, puisque les grandeurs mécaniques sont de la forme r^{-n} .

- l'énergie dissipée par le milieu

A part le coefficient d'atténuation, les caractéristiques de l'atténuation dues à l'anélasticité du milieu sont représentées couramment par le facteur de qualité (ou facteur de dissipation) Q , qui est défini de la manière suivante :

$$\frac{1}{Q(\omega)} = \frac{\Delta E}{2\pi E}$$

où E est le maximum d'énergie de déformation emmagasinée dans le volume considéré et ΔE est l'énergie dissipée par cycle.

Liste des Figures

1.1	Exemple de tir séquentiel (amorçage au fond du trou)	5
4.1	Intersections de (H) et de (R_μ^0)	23
4.2	Courbes dans plan (p,v)	24
4.3	Vitesse de détonation	25
4.4	Modèle de Z.N.D.	26
5.1	Variation de Γ_i	38
5.2	Configuration de l'exemple 1	44
5.3	Pressions($10^5 Mpa$) en fonction du temps(μs) (TNT)	45
5.4	Pression($10^5 Mpa$)-volume massique d'élément 51 (TNT)	45
5.5	Déplacements(cm) en fonction du temps(μs) des explosifs brisants	46
5.6	Pressions($10^5 Mpa$) en fonction du temps(μs) (Explosion dans l'eau)	47
5.7	$\int p^2(t)dt$ en fonction du temps (μs)(Explosion dans l'eau)	47
5.8	Déplacements (cm) en fonction du temps(μs) (Explosifs fictifs)	48
5.9	Pressions($10^5 Mpa$) en fonction du temps (μs) (Explosifs fictifs)	49
5.10	$\int p^2(t)dt$ en fonction du temps (μs) (Explosifs fictifs)	49
5.11	La propagation des ondes (TNT)	50
5.12	Les ondes de compression (TNT)	51
5.13	Pressions(Mpa) en fonction du temps (ms)(TNT)	51
5.14	La propagation des ondes (explosifs fictifs)	52
5.15	Les ondes de compression (explosifs fictifs)	53
5.16	Pressions(Mpa) en fonction du temps(ms) (explosifs fictifs)	53
7.1	Principales phases du comportement d'une roche d'un essai de compression	63
8.1	Modules effectifs par différentes méthodes	75
8.2	L'effet de la vitesse de déformation sur la R_t	88
8.3	Comportement anisotrope	88
9.1	L'état des gaz dans le plan (p,v)	91
9.2	Atténuations (x,y) sont en Log)	99
9.3	Atténuation des contraintes (en Log)	100
9.4	Profil de pression	101
9.5	Problème en déformation plane	103
9.6	Première valeur principale de $\mathbf{D}$	104
9.7	Valeur du composante D_{xx}	104
9.8	Distribution de la taille (mm) moyenne des fragments	105

9.9	Configuration avec la présence d'une macro-fissure	105
9.10	Problème avec une macro-fissure préfabriquée	106
9.11	D_{xx} du l'endommagement anisotrope	106
9.12	une tranche de révolution	107
9.13	Problème Axisymétrique	107
9.14	Première valeur principale aux temps $t = 0.3ms, 0.4ms$	108
9.15	Trois composantes de $\mathbf{D}$	108
9.16	Problème axisymétrique couplé avec détonation	109
9.17	Configuration du problème 3-D	109
9.18	État endommagé en 3-D	110
9.19	État endommagé dans un plan X-Y	110
12.1	Les paramètres de foration	121
12.2	Exemple du plan de tirs	122
12.3	Un processus de conception	124
13.1	Configuratuon du problème macro-discontinuités	128
13.2	États endommagés	129
13.3	Configuration du problème	130
13.4	États endommagés	131
13.5	Atténuations des déplacements (mm)	132
13.6	Comparaison des déplacements (mm-ms)	132
13.7	Atténuations des vitesses (m/s)	133
13.8	Comparaison des vitesses(m/s-ms)	133
13.9	Atténuations des contraintes radiales (Mpa)	134
13.10	Comparaison des contraintes radiales(Mpa-ms)	134
13.11	État d'endommagement	135
13.12	Configuration du problème	137
13.13	États endommagés	137
B.1	Le rapport de la vitesse de Rayleigh	170

Liste des Tableaux

3.1	Différents types d'explosifs commerciaux	16
4.1	Détonation simple de la structure externe	29
5.1	Les paramètres d'état de J.W.L	44
5.2	Trois types d'explosifs brisants	46
5.3	Deux types d'explosifs fictifs	48
5.4	Coefficients d'explosif fictif	52
7.1	Table Classification des roches	62
7.2	Caractéristiques pour certains matériaux	65
8.1	Les modules effectifs calculés par différentes méthodes	73
9.1	Solution analytique au cas de la pression uniforme	94
9.2	Atténuation du front de l'onde	94
9.3	Atténuation des valeurs de pic et les valeurs pour $r = a$	95
9.4	Paramètres de Hugoniot pour certaines roches	101
9.5	Paramètres d'atténuation	101
13.1	Trois couches de matériau	129
13.2	Comparaison des coefficients d'atténuation	135
13.3	Zones endommagées avec les retards en temps	136
13.4	Résultats avec les partitions d'énergie explosive	138
15.1	La base de données du coefficient polytropique	150
15.2	La base de données du volume endommagé	152

Résumé

Ce travail contribue à mieux comprendre les phénomènes complexes lors des tirs de mine afin d'approcher une conception optimisée. La première partie concernant de la détonation est destinée à la compréhension des modèles numériques fondés sur la théorie de la propagation de détonation. La seconde partie concernant de la modélisation de la fracturation des roches s'adresse à la simulation des tirs. Une nouvelle loi de comportement dynamique des roches (type élastique avec endommagement anisotrope) est proposée et est intégrée dans RADIOSS, un code de calcul des problèmes dynamiques transitoires. Ce modèle permet également de calculer les dimensions représentatives des fragments; les calculs avec divers modélisations (en 2-D et en 3-D, détonation/structure) sont effectués. La dernière partie est consacrée à l'optimisation des tirs à l'aide des traitements numériques avancés. La connaissance des mécanismes de la fragmentation des roches est approfondie notamment sur l'influence de certains paramètres de conception. Les exemples sur la recherche des règles par l'apprentissage automatique montrent l'efficacité de cette approche. L'exemple sur la recherche d'une conception optimisée montre la puissance et la perspective pratique de l'approche que algorithmes génétiques couplés avec l'apprentissage automatique.

Abstract

This thesis is a contribution to the comprehension of the complex phenomena during the rock blasting, in order to get an optimal design. In the first part, we give a synthesis of the numerical models based on the detonation theory. In the second part, we focus on the modelling of the dynamic behaviours of rocks. An new elastic with anisotropic damage model is proposed and implemented in a dynamic explicit code RADIOSS, the simulations of the blasts with different problems (2-D, 3-D, detonation/structure) are presented. In the last part, we show a new approach for the optimization. The knowledge about the mechanism of the rock fragmentation is developed, especially on the influences of certain design parameters.

The examples of the generation of the specific rules by automatic learning show the efficiency of this approach. The example of the optimization by coupling the genetic algorithms with automatic leaning show the capacity and the perspective