

Modélisation des phénomènes d'endommagements dus aux contacts à faible amplitude de débattement

Nadir Maouche

▶ **To cite this version:**

Nadir Maouche. Modélisation des phénomènes d'endommagements dus aux contacts à faible amplitude de débattement. Sciences de la Terre. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1997. Français. NNT : . tel-00529372

HAL Id: tel-00529372

https://pastel.hal.science/tel-00529372

Submitted on 25 Oct 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NS 22736 (4)

THÈSE

présentée pour l'obtention du Diplôme de

DOCTEUR
DE
l'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

Spécialité : STRUCTURES ET MATÉRIAUX

par

Nadir MAOUCHE

Sujet de thèse

MODÉLISATION DES PHÉNOMÈNES D'ENDOMMAGEMENTS DUS AUX CONTACTS À FAIBLE AMPLITUDE DE DÉBATTEMENT

soutenue le 2 Mai 1997
devant le jury composé de :

Président :	**Bernard**	HALPHEN
Rapporteurs :	**Geneviève**	INGLEBERT
	Léo	VINCENT
Examinateurs :	**Ky**	DANG VAN
	Alain	EHRLACHER
	Habibou	MAITOURNAM

Cette thèse a été préparée au :

Laboratoire de Mécanique des Solides
Ecole Polytechnique - Palaiseau -

sous la direction de :

Ky DANG VAN

A mes parents

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Monsieur Bernard HALPHEN qui a bien voulu me faire l'honneur de présider le jury de ma thèse et je lui en suis gré.

Mes remerciements vont ensuite à Monsieur Léo VINCENT et Madame Geneviève INGLEBERT qui ont accepté, malgré leurs charges de travail et leurs responsabilités, d'être rapporteurs de cette thèse.

Monsieur Alain EHRLACHER a manifesté un vif intérêt pour mes travaux de thèse. Il m'a fait l'honneur de faire partie de jury. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

C'est tout particulièrement à Monsieur Ky DANG VAN que je voudrais exprimer mon humble gratitude. J'ai tout le long de ma thèse un grand plaisir à entreprendre mes recherches sous sa direction tant ses domaines de compétences sont vastes et riches. Je tiens à le remercier aussi pour sa disponibilité et sa bonne humeur.

Je tiens à remercier vivement Habibou MAITOURNAM pour son aide constante et son amicale sollicitude à mon égard. Il a été toujours présent pour discuter des difficultés rencontrées au quotidien avec une gentillesse et une modestie rares.

Je suis heureux de remercier Pierre BEREST pour m'avoir accueilli au sein de ces équipes de recherches, me permettant ainsi d'évoluer dans un cadre scientifique exceptionnel.

J'ai également plaisir à remercier les différents organismes qui ont participé financièrement et qui ont permis le bon déroulement de cette recherche à savoir l'École Nationale des Ponts et Chaussées ainsi que le LMS.

Mes remerciements s'adressent aussi à Caroline PETIOT pour la collaboration et la mise à ma disposition des résultats expérimentaux de ces travaux. Je remercie aussi tous les collègues du LMS avec lesquels j'ai eu des discussions enrichissantes tout le long de ma thèse.

Table des matières

I PRÉSENTATION DE L'ENDOMMAGEMENT INDUIT PAR PETITS DÉBATTEMENTS ET DES RÉSULTATS 7

1 Sur les endommagements de contact induits par petits débattements 9
- 1.1 Introduction . . . 9
- 1.2 Significations et enjeux . . . 9
- 1.3 Étude expérimentale du fretting . . . 10
  - 1.3.1 Définition des différents régimes de contact en présence du fretting . 10
  - 1.3.2 Cartes de fretting . . . 12
- 1.4 Étude expérimentale du fretting-fatigue . . . 14
  - 1.4.1 Définition des différents régimes de contact en présence du fretting-fatigue . . . 15
  - 1.4.2 Cartes de fretting fatigue . . . 15
  - 1.4.3 Courbe de Wöhler . . . 17
- 1.5 Traitements et revêtements de surfaces . . . 18
- 1.6 Conclusion . . . 19

II MODÉLISATION ET SIMULATION NUMÉRIQUE DU FRETTING 21

1 Difficultés de la modélisation 25
- 1.1 Introduction . . . 25
- 1.2 Prise en compte des sollicitations extérieures . . . 25
  - 1.2.1 Pressions de contact . . . 25
  - 1.2.2 Frottement et usure . . . 27
- 1.3 Rugosité . . . 28
- 1.4 Méthodes et algorithmes de calcul . . . 30
  - 1.4.1 Méthode analytique et semi-analytique . . . 30
  - 1.4.2 Méthode incrémentale . . . 31
  - 1.4.3 Méthode stationnaire . . . 32
  - 1.4.4 Approche simplifiée . . . 34
  - 1.4.5 Méthode à grand incrément de temps . . . 36
- 1.5 Conclusion . . . 37

2 Méthode cyclique directe 39
- 2.1 Introduction . . . 39
- 2.2 Présentation du problème et cadre d'étude . . . 39
  - 2.2.1 Équilibre . . . 39
  - 2.2.2 Loi de comportement . . . 40
- 2.3 Présentation de la méthode cyclique directe . . . 41
  - 2.3.1 Principe de la méthode . . . 41
  - 2.3.2 Algorithme . . . 44
- 2.4 Mise en œuvre de la méthode cyclique directe dans le cas de chargement mobile cyclique . . . 46

2.5 Conclusion 47

3 Application à l'étude du fretting **49**
3.1 Introduction 49
3.2 Problème posé et modèle 49
3.3 Description du chargement et régimes de glissement 50
3.3.1 Régime de glissement partiel : $T_{max} < \mu P$ 51
3.3.2 Régime de glissement total : $T_{max} = \mu P$ 53
3.4 Validation numérique de la méthode cyclique directe 55
3.4.1 Cas du glissement partiel 55
3.4.2 Cas du glissement total 58
3.5 Résultats numériques et cartes d'adaptation 60
3.5.1 Glissement partiel 60
3.5.2 Glissement total 62
3.6 Conclusion 64

III PRÉDICTION D'ENDOMMAGEMENTS EN FRETTING-FATIGUE **67**

1 Initiation des fissures de fatigue: choix d'un critère **71**
1.1 Introduction 71
1.2 Bibliographie sur la prédiction de la rupture en fretting-fatigue 71
1.2.1 Méthodes empiriques 72
1.2.2 Méthodes de prédiction basée sur une condition de propagation . . 72
1.2.3 Amorçage des fissures 73
1.3 Principe de notre approche de prédiction de l'amorçage des fissures 73
1.3.1 Critères empiriques 74
1.3.2 Critères multiaxiaux 74
1.3.3 Approche microscopique 74
1.3.4 Critère de Dang Van 76
1.3.5 Critère de Papadopoulos 77
1.3.6 Reformulation du critère de Dang Van 78
1.3.7 Application du critère de Dang Van 79
1.4 Conclusion 80

2 Prédiction de l'endommagement en fretting-fatigue **81**
2.1 Introduction 81
2.1.1 Montage et résultats expérimentaux 81
2.2 Modélisation et calcul de fretting-fatigue 82
2.2.1 Contraintes de contact en fretting-fatigue 83
2.2.2 Modèle et chargement adopté 85
2.2.3 Maillage et caractéristiques du matériau 91
2.2.4 Résultats de calcul en glissement partiel et prédiction de l'amorçage des fissures 92
2.2.5 Résultats de calcul en glissement total et caractérisation de l'usure . 96
2.3 Conclusion 98

ANNEXES 101

A Construction de la plus petite hypersphère circonscrite à un ensemble de points 103

B Pressions de Hertz 105

C Dimensions de l'éprouvette et du patin de l'essai expérimental interprété 107

Introduction générale

Le problème du contact est d'une grande importance pour l'industrie mécanique. En effet, les pièces mécaniques en contact subissent des chargements cycliques induisant des dégradations qui nuisent au fonctionnement des systèmes et qui peuvent conduire à leur rupture. Le dimensionnement de ces pièces reposait jusqu'à présent essentiellement sur les résultats d'essais. Ceux-ci permettent de tester la tenue en fatigue des matériaux ainsi que le choix des solutions adéquates pour améliorer leurs limites d'endurance.

La prédiction des endommagements dus au contact nécessite la connaissance de la réponse mécanique du matériau résultant du chargement cyclique ainsi que son évolution au cours de son fonctionnement. Cette réponse conditionne la tenue en fatigue des pièces et renseigne sur le type d'endommagement susceptible de se produire. D'un autre coté, il faudrait tenir compte des propriétés de fatigue du matériau d'une manière intrinsèque indépendamment du type de chargement et des géométries de contact. Ceci peut être réalisé par les moyens d'essais standards. La prévision de fatigue est faite par l'application de critères de fatigue dans lesquels sont intégrés la réponse mécanique du matériau et ses caractéristiques de fatigue.

Dans la présente étude, on se focalise sur la modélisation et la prédiction des endommagements dus au fretting. Ce vocable signifie le mouvement oscillatoire de faible amplitude qui peut se produire entre deux surfaces en contact. Il est engendré par les vibrations dans les assemblages de pièces et des systèmes mécaniques. Ce débattement est souvent couplé avec une sollicitation de fatigue dans l'un des éléments en contact qui impose généralement le déplacement de celui-ci. Ce type de fonctionnement est appelé fretting-fatigue. Les mécanismes décrits conduisent à des dégradations qui entraînent des disfonctionnements par usure ou par fissuration selon les sollicitations imposées.
Le type d'endommagement par fissuration est particulièrement dangereux. En effet, il entraîne la rupture prématurée des pièces en service et peut provoquer des défaillances. Ceci est très redouté dans le domaine de l'aéronautique où se sont produits dans le passé des accidents d'avions dus à des rupture brutales de pièces. Le fretting est également rencontré dans de nombreux autres domaines.

Pendant ces dix dernières années, des études expérimentales ont été effectuées par des essais simples pour comprendre l'influence des différents paramètres extérieurs sur le type d'endommagement susceptibles de se produire. Des cartes de fretting sont dressées pour résumer les différentes réponses du matériau en terme d'endommagement en fonction des sollicitations extérieures. Ces cartes servent de base aux bureaux d'études pour le dimensionnement des pièces soumises au fretting. Elles permettent la comparaison des différents matériaux et l'évaluation des protections de surface.
Cette méthodologie expérimentale de prévision est propre à l'essai et ne peut être étendue à d'autres conditions de chargements et de géométries c'est à dire à d'autres structures. Une approche prévisionnelle doit inclure tous les paramètres de chargement et du contact. Elle passe par la modélisation et le calcul de la réponse du matériau; ceci constitue le fondement du travail que nous présentons. Il comporte trois parties.

Dans la première partie, les résultats expérimentaux du fretting et fretting-fatigue sont présentés. Les schémas des dispositifs expérimentaux seront décrits ainsi que les principales observations. On soulignera l'ambivalence du phénomène du fretting. En effet, en fonction des sollicitations imposées et des régimes de glissement, il peut générer de l'usure ou de la fissuration. Nous donnerons des exemples de cartes expérimentales de fretting et de fretting-fatigue qui résument les différents types d'endommagements susceptibles de se produire.

La deuxième partie est consacrée à la modélisation numérique du fretting. Nous exposerons les diverses difficultés rencontrées pour modéliser le contact et le glissement entre deux solides en général et le fretting en particulier. Par la même occasion, nous formulons les hypothèses nécessaires à notre modélisation. Nous évoquons notamment la nécessité de développer des méthodes numériques rapides pour calculer la réponse asymptotique du matériau sous l'effet d'un chargement cyclique.
La démarche usuelle qui consiste à suivre l'évolution de la structure depuis son état initial jusqu'à l'établissement possible d'un état stabilisé se révèle d'un emploi fastidieux et coûteux en temps de calculs. Elle repose sur plusieurs étapes souvent superflues puisqu'on s'intéresse uniquement à l'état stabilisé.
En rupture avec cette démarche, nous avons mis au point une nouvelle méthode numérique. Elle permet de calculer directement l'état stabilisé d'une structure soumise à un chargement cyclique. Elle est appliquée dans le cas du chargement de fretting pour lequel les solides en contact glissent totalement ou restent sur place sous l'effet des débattements répétés. Les performances en temps de calculs et les résultats sont comparés avec la méthode incrémentale classique. On applique cette méthode pour discuter de l'influence de différents paramètres sur la nature de l'état stabilisé.

Dans la troisième partie, on se propose de faire la prévision des endommagements issus de résultats expérimentaux d'un essai de fretting-fatigue.
Les dégradations peuvent être de l'usure ou de la fissuration par suite des chargements répétés de fretting-fatigue. L'usure est observée dans le cas d'un régime de fonctionnement avec glissement total des surfaces en contact. Et la fissuration survient surtout dans un régime tel que les surfaces en contact subissent des glissement locaux mais sans entraîner de glissement total.
Notre démarche consiste à calculer l'état stabilisé résultant du chargement de fretting-fatigue. Selon la nature de l'état stabilisé, le matériau subit de la fatigue à faible ou à grand nombre de cycles.
Dans le cas de la fatigue polycyclique, on s'intéresse à la prédiction de l'initiation des fissures dues au fretting-fatigue. Les limites de fatigue du matériau sont déterminées par des essais de fatigue classiques. Les contraintes à l'état stabilisé sont comparées aux limites de fatigue du matériau à l'aide du critère de fatigue multiaxiale de Dang Van. On présente tout d'abord le fondement phénoménolgique d'un tel critère et l'origine de sa formulation.
On caractérise l'endommagement par usure en terme de réponse asymptotique du matériau. Et on discutera ensuite les résultats obtenus en les comparant aux tendances actuelles de la compréhension des mécanismes d'usure de fatigue.

Partie I

PRÉSENTATION DE L'ENDOMMAGEMENT INDUIT PAR PETITS DÉBATTEMENTS ET DES RÉSULTATS

Chapitre 1

Sur les endommagements de contact induits par petits débattements

1.1 Introduction

Les endommagements induits par petits débattements entre solides en contact sont fréquemment à l'origine d'avaries graves pouvant survenir à des structures industrielles. Ils sont désignés globalement par le terme générique anglophone "fretting" et recouvrent des phénomènes divers appelés couramment fretting-wear, fretting-fatigue, fretting corrosion.. Nous allons essayer de présenter dans ce qui suit, au travers d'exemples industriels, les différentes avaries ainsi désignées. Nous préciserons par la suite le domaine de notre étude.
Devant la complexité des assemblages mécaniques soumis à ce genre de dégradations, des montages expérimentaux simples ont été proposés pour essayer de comprendre les différents endommagements en fonction de divers paramètres et de tester la durée de vie en relation avec les matériaux antagonistes utilisés.
Nous allons décrire brièvement ces essais ainsi que les approches utilisées. Les principales caractérisations qualitatives utilisées par les tribologues pour interpréter leurs observations seront citées.

1.2 Significations et enjeux

On désigne par le mot anglais de "fretting" l'endommagement induit par le contact de deux solides soumis à une petite amplitude de débattement. C'est le cas rencontré dans les assemblages mécaniques démontables soumises à des vibrations. Citons quelques exemples dans différents domaines:

- Dans le domaine de l'aèrospatiale, le fretting est responsable de la diminution de la durée de vie des pièces d'hélicoptères et d'avions. Des accidents dramatiques sont causés par ce phénomène comme celui du crash de l'avion de la compagnie El Al sur un quartier résidentiel de la banlieue d'Amsterdam.

- Le fretting se manifeste aussi dans les essieux des trains à grande vitesse par suite des petits débattements induits par les flexions rotatives au voisinage des attaches des roues bloquées sur les essieux. Au Japon, il est arrivé que des navires perdent leur hélices par suite du même phénomène

- Le secteur du bâtiment et des travaux publics n'est pas à l'abri des avaries causées par le fretting notamment la rupture des câbles utilisés dans la construction des ponts

suspendus ou à haubans du fait des frottements et des flexions répétés de service au voisinage de leur point d'ancrage.

- Dans le domaine biomédical aussi et avec un matériau autre que les métaux, le fretting est responsable des dégradations dans les prothèses de genoux en polyéthélène.

Ainsi, les exemples des endommagements liés au fretting sont nombreux et c'est pratiquement toujours le cas dès qu'il s'agit de contact de pièces soumises par le fait même de leur fonctionnement à des vibrations et des petits déplacements répétitifs.
On parlera alors de "fretting-fatigue" lorsque la structure étudiée est soumise, en plus des contraintes de contact, à des sollicitations de fatigue classiques (fréquemment appelées par les ingénieurs "sollicitations volumiques" de fatigue). Ainsi, en plus de la signification d'endommagement, le terme de fretting-fatigue caractérise la nature de la sollicitation. En l'absence de la contrainte volumique de fatigue, on parlera simplement de fretting.
Selon les différents conditions de chargements. d'états de surface et des couples de matériaux, le contact à petit débattement, en fretting ou en fretting fatigue, provoque soit de la fissuration ou/et de l'usure. Le mode de fissuration est le plus dangereux sur la tenue des pièces en service; De ce fait, il constitue la préoccupation majeure des concepteurs.
L'importance du problème a motivé des travaux expérimentaux qui ont été menés pour donner des solutions aux bureaux d'études devant concevoir des pièces soumises au fretting. On combat ainsi l'apparition de ce phénomène par le choix des matériaux, des traitements de surface,..etc.

1.3 Étude expérimentale du fretting

Pendant cette dernière décennie, plusieurs travaux expérimentaux ont été réalisés pour comprendre l'influence des différents paramètres sur la tenue au fretting et définir les données et les conditions pour lesquelles l'échantillon subit des endommagements dus à l'usure ou à la fissuration. Cette démarche expérimentale permet aussi de dégager des critères de sélection en testant la résistance des matériaux suivant différents traitements de surface (cémentation, de vernissage ou autre). Sans entrer dans les détails techniques, nous donnons, ici, le schéma des essais de fretting.
Un échantillon fixe dont on veut tester la résistance au fretting est mis en contact avec un poinçon mobile (figure 1.1). Suivant les choix de l'expérimentateur, le poinçon peut être de forme varié. Mais très souvent, il est choisi cylindrique ou sphérique. On exerce un effort normal N sur le poinçon qu'on maintient constant; On impose sur le poinçon mobile un mouvement d'oscillation de faible amplitude. L'opérateur impose et contrôle le débattement D et mesure, à l'aide de jauges collées sur le support du poinçon, la valeur de l'effort tangentiel T qui en résulte au cours de chaque cycle.

1.3.1 Définition des différents régimes de contact en présence du fretting

L'évolution de la forme des courbes au cours de l'essai a donné lieu à une représentation tridimensionnelle donnant l'effort tangentiel en fonction du débattement et du nombre de cycles appelée "bûche de fretting" [68]. Après une phase transitoire de quelques dizaines de cycles due probablement à une accommodation du système, les courbes représentant l'effort tangentiel en fonction du débattement appelées aussi "boucles de fretting" finissent

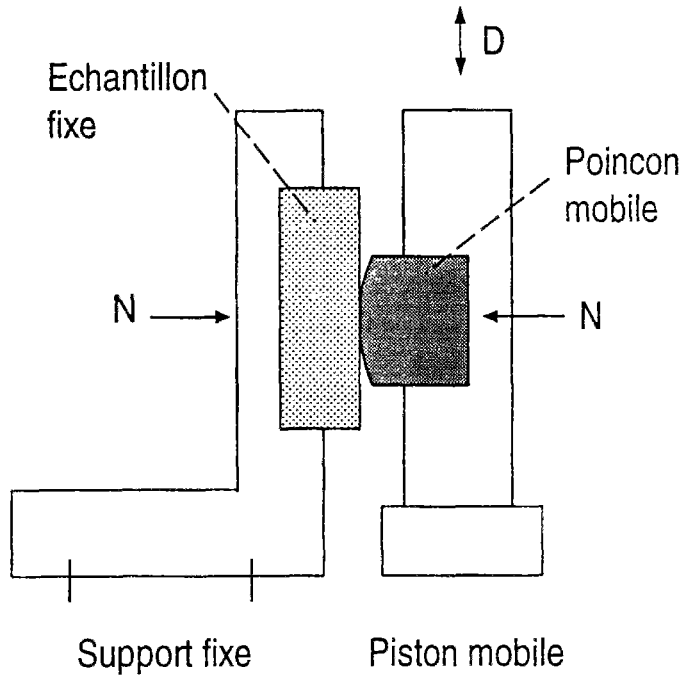


Figure 1.1: Schéma du montage expérimental du fretting.

par se stabiliser et un régime périodique s'établit au cours des cycles pendant toute la durée de vie de l'échantillon.
Suivant la forme des boucles obtenues, on distingue différents régimes de glissement (figure 1.2):

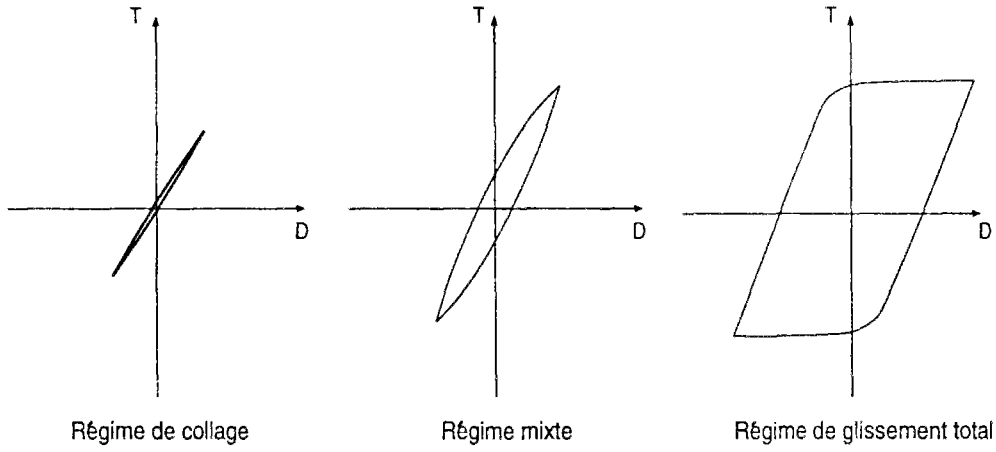


Figure 1.2: Régimes de fretting.

- Régime de collage

  Le cycle effort tangentiel-déplacement est quasiment linéaire pour de petites amplitude de débattement. Le débattement imposé est presque entièrement accommodé au niveau des échantillons de manière élastique. Dans ce régime, on n'observe pas de dégradations même après 10^7 cycles.

- Régime mixte

  Lorsque l'amplitude du débattement est plus grande, les boucles de fretting prennent une forme elliptique. Un glissement notable apparaît en périphérie de la zone de contact. Ce régime est associé à la présence de fissures aux bords de la zone de contact ainsi qu'à une usure douce limitée.

- Régime de glissement total

  Ce mode correspond à un glissement total des surfaces des deux échantillons. Les boucles de fretting prennent une forme de parallélogramme avec un palier de l'effort tangentiel correspondant à la phase de glissement total. La longueur de ce palier donne le déplacement réel à l'interface. Ce régime est caractérisé par un creusement notable au niveau de la zone de contact révélant ainsi une usure importante.

Remarque: Notons que le glissement existe à l'état local quelque soit le régime considéré. Ainsi, même quand on est dans le régime de collage ou en régime mixte, où on n'observe pas ou peu de glissement global, il n'en est pas de même au niveau local.

1.3.2 Cartes de fretting

Suivant les types de dégradations ou de non dégradation obtenues pour les différents types de régimes, on établit la carte de fretting qui donne la réponse du matériau. La figure (1.3) de la carte de fretting pour un alliage d'Aluminium [68] résume les types d'endommagements suivant les valeurs de l'effort normal appliqué et de l'amplitude de débattement.

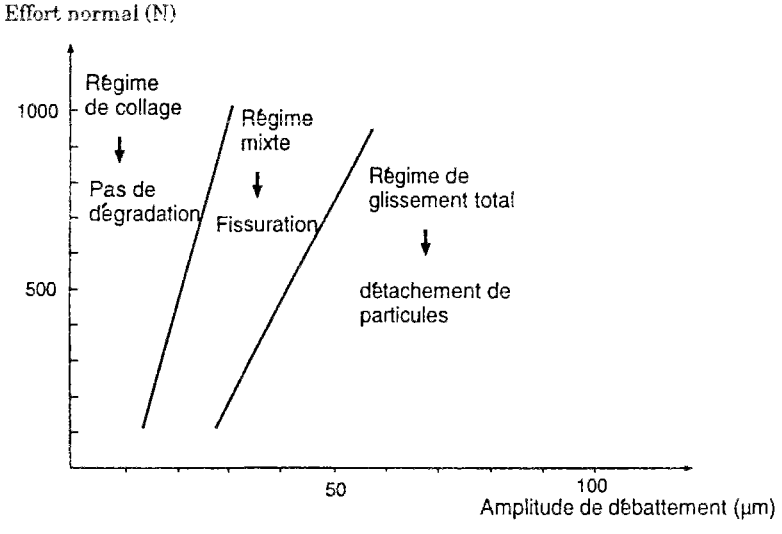


Figure 1.3: Régimes de fretting d'après Zhou (1992).

On distingue les différents types de réponses du matériau:

- Non dégradation

  En régime de collage, l'expertise métallographique et la microscopie optique ne révèle aucune dégradation des échantillons à quelques millions de cycles . Le profil du plan

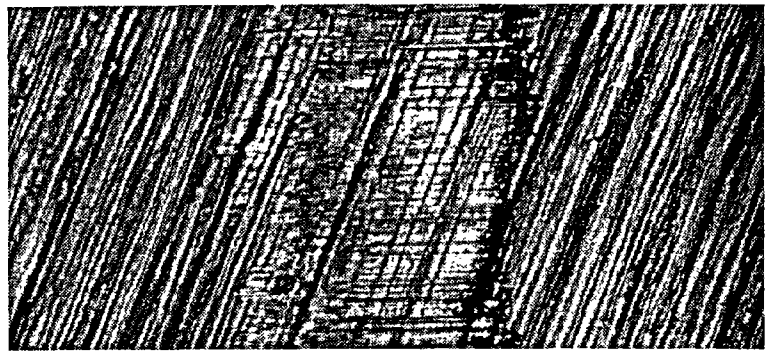


Figure 1.4: Apparition de la rugosité sur la surface.

après coupe est parfaitement rectiligne. Il ne présente pas de fissures et ne révèle aucune trace d'usure (figure 1.5). L'observation de la zone de contact en vue de dessus fait apparaître la trace de la rugosité initiale (figure 1.4).

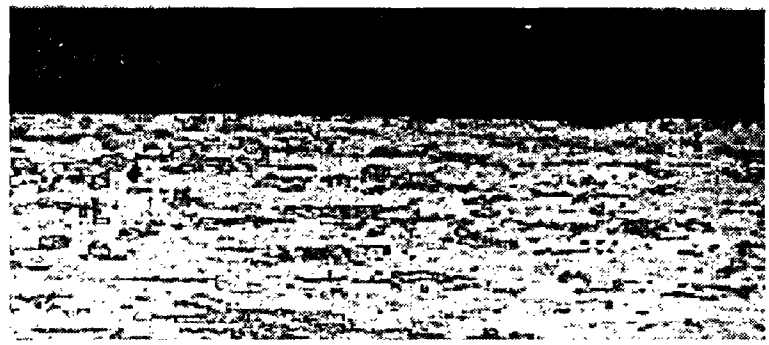


Figure 1.5: Absence de dégradation en régime de collage.

- Fissuration

  En régime mixte, des fissures se développent en périphérie de contact et sont réparties d'une façon symétrique. L'amorçage des fissures se fait en surface (figure 1.6). Les fissures se propagent, tout d'abord, de façon oblique vers l'intérieur de la zone de contact puis finissent par se développer perpendiculairement à la surface. D'autres fissures peuvent se développer dans la zone de contact près des bords; Elles sont cependant de moindre importance et peuvent s'arrêter assez rapidement .
  Ainsi, pour une longueur de zone de contact de $300\mu m$, la longueur de fissure au bord du contact est de $20\mu m$ à 10^4 cycles et peut atteindre jusqu'à $100\mu m$ à 10^6 cycles.
  L'examen de la surface laisse apparaître des faibles traces d'usure en périphérie. La

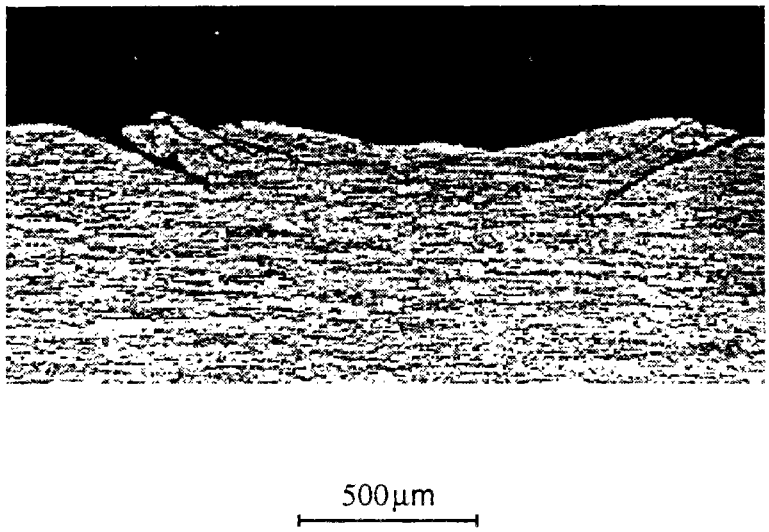


Figure 1.6: Fissures aux bords du contact d'après Zhou (1992).

réponse en régime mixte est donc essentiellement de la fissuration.

- Détachement de particules

  En régime de glissement total, le phénomène d'endommagement se manifeste par de l'usure sévère. Une coupe suivant la profondeur des échantillons montre le creusement du profil dû au détachement de particules sous la zone de contact.
  Les coupes micrographiques ne révèlent pas de fissures. Celles-ci peuvent s'initier mais sont éliminées par l'enlèvement de matière résultant du mécanisme d'usure.

1.4 Étude expérimentale du fretting-fatigue

Il arrive que les assemblages mécaniques subissent une contrainte de fatigue de volume qui vient s'ajouter aux sollicitations de fretting et on parlera alors de fretting-fatigue. Pour étudier la réponse des matériaux à ce type de sollicitation, des expérimentateurs [56] ont imaginé un dispositif expérimental décrit sur la figure 1.8.
On considère une éprouvette mince d'une certaine épaisseur, sur laquelle est fixé un patin de forme cylindrique ou sphérique appuyé contre la surface de l'éprouvette avec un effort normal P. L'éprouvette est soumise à une contrainte de fatigue $S(t)$. Le patin est assujetti à un mouvement de débattement répétitif induit par la sollicitation de fatigue $S(t)$.
On mesure à l'aide de jauges placées sur le bras de fixation du patin, qui maintient le patin, la valeur de la déformation et donc aussi la valeur de l'effort tangentiel $T(t)$ qui règne dans le bras. La valeur de $T(t)$ est évidemment liée à la valeur de la sollicitation de fatigue.
L'effort normal étant fixé, on obtient donc l'évolution de la valeur de la contrainte de fatigue appliquée à l'éprouvette en fonction de l'effort tangentiel $T(t)$ dans le bras.

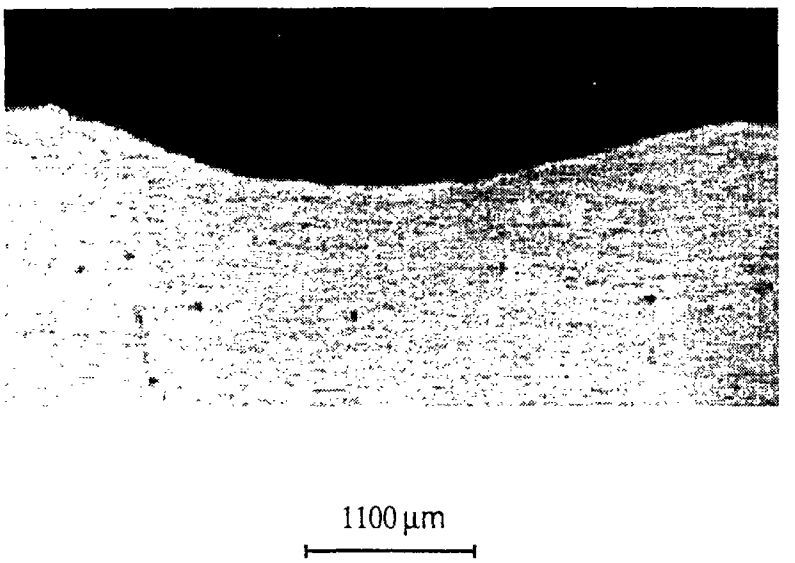


Figure 1.7: Creusement de la zone de contact due à l'usure.

1.4.1 Définition des différents régimes de contact en présence du fretting-fatigue

On distingue (figure 1.9), suivant la forme de boucles de fretting-fatigue $T(t) - S(t)$, différents régimes de glissement:

- Régime de collage

  Le courbe est presque linéaire et la zone de glissement local entre le patin et la surface de l'éprouvette est très réduite. L'éprouvette ne subit aucune dégradation dans ce régime.

- Régime mixte

  La courbe présente une non linéarité remarquable. La région de glissement local est plus importante. C'est le régime le plus critique car il conduit à la rupture de l'éprouvette par fissuration aux bords de la zone de contact.

- Régime de glissement total

  La courbe présente un forme rectangulaire avec un palier de glissement. Le patin glisse totalement sur la surface de l'éprouvette. La zone de contact subit une usure importante.

1.4.2 Cartes de fretting fatigue

La figure 1.11 dresse la carte qui résume les différents types d'endommagement dans la carte de fretting-fatigue. On y trace les frontières entre les différents domaines de dégradations à savoir:

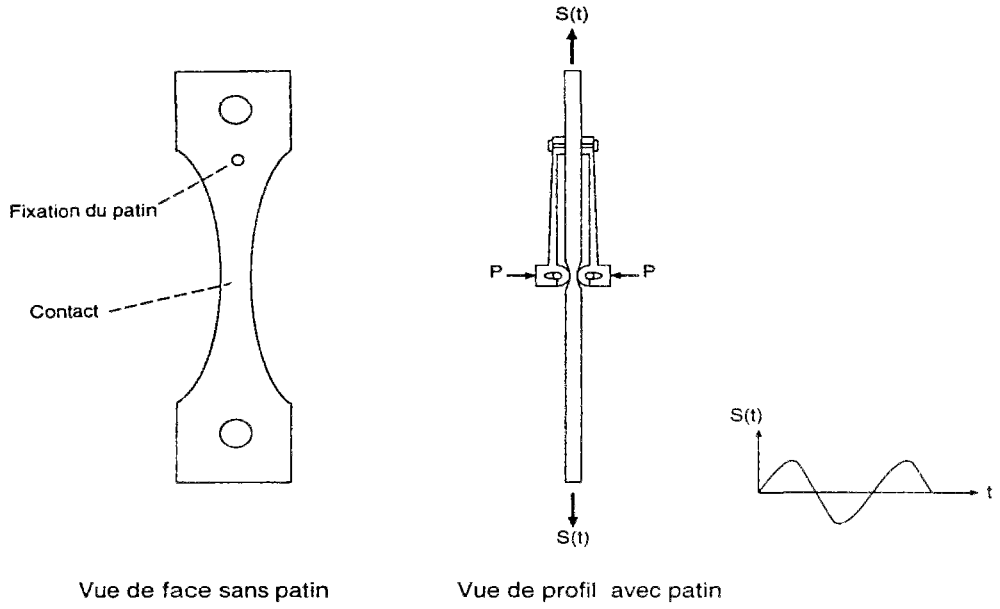


Figure 1.8: Schéma du montage expérimental du fretting-fatigue.

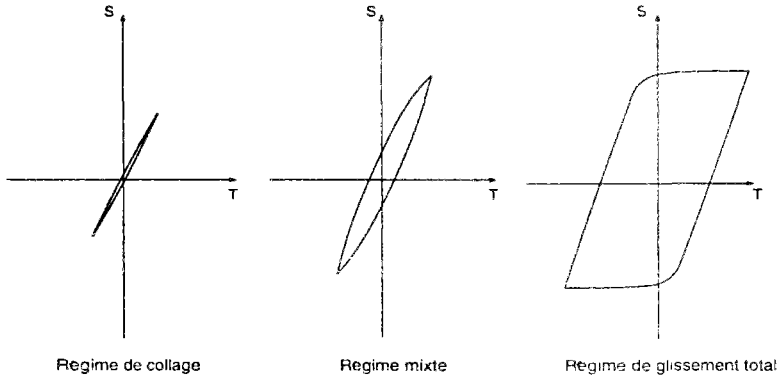


Figure 1.9: Régimes de fretting-fatigue.

- Non endommagement

  Ce régime est associé au régime de collage. Les observations expérimentales ne révèlent aucune fissuration et très peu d'usure.

- Fissuration

  Elle est rencontrée dans le régime mixte. Les fissures, amorcées aux bords du contact ou dans une région voisine du bord du contact, se propagent ensuite obliquement faisant au début un angle de 45 degrés dirigé vers la zone de contact puis bifurquent pour prendre une direction perpendiculaire à la surface sous l'effet de la sollicitation de fatigue appliquée (figure 1.10).

- Usure ou détachement de particules

  Des observation et des relevés profilométriques révèlent une usure importante en régime de glissement total. On ne note pas de fissuration.

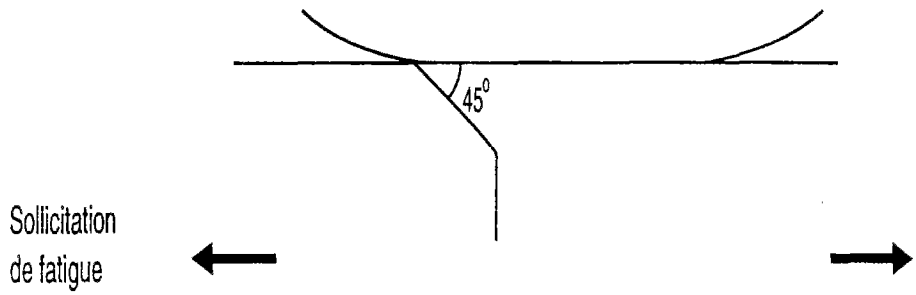


Figure 1.10: Propagation de fissure en fretting-fatigue.

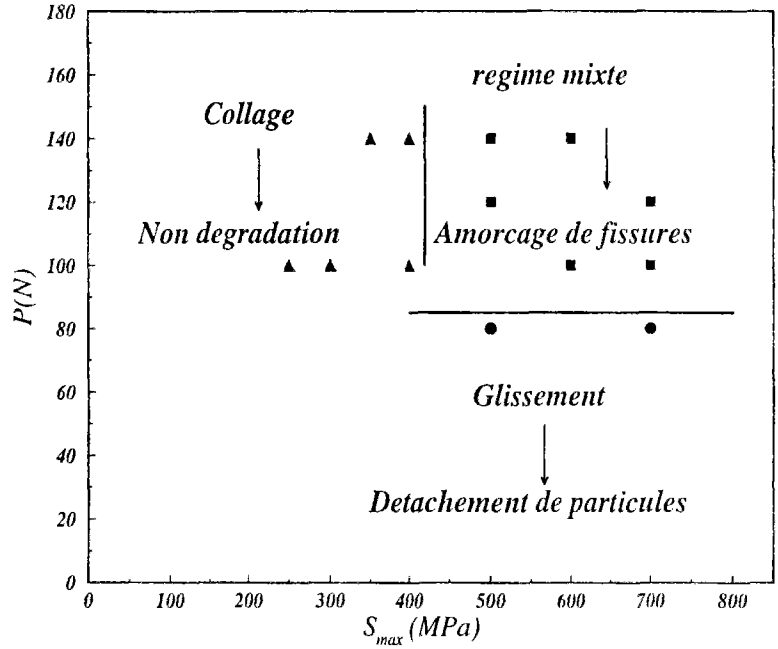


Figure 1.11: Carte de fretting-fatigue d'après C. Petiot (1994).

1.4.3 Courbe de Wöhler

La courbe de Wöhler donne le nombre de cycles à la rupture en fonction de la contrainte de fatigue appliquée au cours d'un essai.
Sur la figure 1.12, on représente les courbes de Wöhler d'un essai de fatigue classique et d'un essai en présence de fretting pour l'acier 30NCD16 [55] fréquemment utilisé dans les rotors d'hélicoptères.
On remarque que la limite d'endurance dans un essai en fretting-fatigue est, dans ce cas, divisée par 3 par rapport à celle sans présence de fretting. Ceci est dû aux fissures qui se développent aux bords du contact et qui conduisent à la rupture prématurée de l'éprouvette.

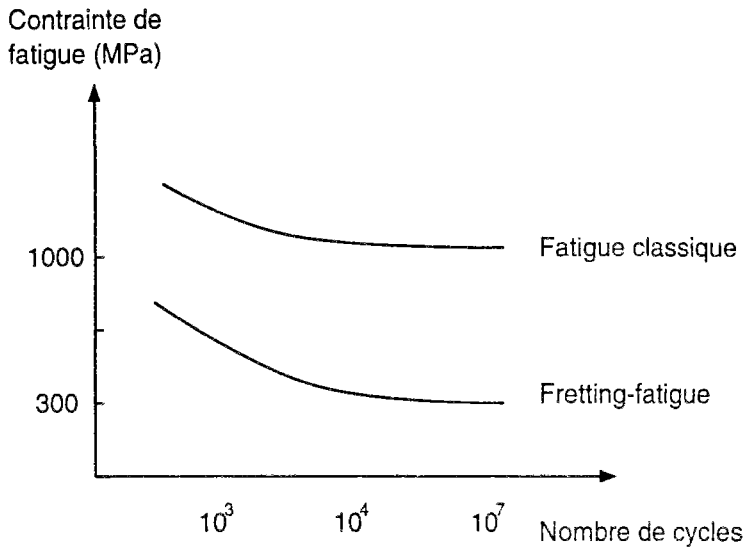


Figure 1.12: Courbes de Wöhler en frettig-fatigue .

1.5 Traitements et revêtements de surfaces

Des solutions ont été proposées pour augmenter la durée de vie et pour protéger contre les endommagements induits par le fretting et le fretting-fatigue.
Deux catégories de traitements sont principalement utilisées:

- Traitements mécaniques

  Ils consistent à augmenter la dureté et la résistance de la structure en traitant une couche superficielle d'une certaine épaisseur par différents procédés. Parmi ceux ci, on peut citer la le grenaillage, la nitruration et la cémentation.. Ces traitements permettent notamment de créer en surface des contraintes résiduelles de compression qui améliorent la tenue en fatigue, aussi bien en initiation qu'en propagation, puisque dans ce dernier cas, elles peuvent bloquer les fissures amorcées.

- Revêtements et dépôts en surface

  On a souvent recours à des revêtements de surface par un dépôt solide ou avec du vernis. Les dépôts durs sont à base de composé métallique comme des oxydes céramiques ou des dépôts de métal (le nickel ou le manganèse); Les vernis sont à base de résines. Ces revêtements jouent le rôle de lubrifiants qui permettent de diminuer le coefficient de frottement et ainsi d'atténuer les contraintes en surface et d'augmenter la durée de vie. certains dépôts métalliques induisent également des contraintes résiduelles de compression très importantes.

Ces traitements sont testés dans des essais et des cartes de fretting sont établies pour savoir l'efficacité de la protection du traitement utilisé. L'utilisation d'un traitement modifie les frontières des domaines de réponse du matériau et son efficacité peut être ainsi mise en évidence.

1.6 Conclusion

Les endommagements induits par les contacts frottants avec des petits débattements appelés communément fretting et fretting-fatigue sont rappelés. Les essais classiques utilisés pour étudier les dégradations causées par ces phénomènes sont présentés.
Les conclusions déduites, à partir des observations expérimentales, permettent de distinguer les différents régimes de glissements (collage, mixte et glissement total) ainsi que les mécanismes d'endommagements qui leur sont associés (respectivement non dégradation, fissuration et usure). Ces différentes réponses du matériau en terme de glissement et de dommage sont traduites dans une carte de fretting suivant les paramètres imposés.
Le régime mixte, qui conduit à l'amorçage de fissures et à leur propagation jusqu'à rupture, est le régime le plus critique dont on veut se protéger par différents revêtements et traitements de surfaces. Cela conduit à faire plusieurs essais expérimentaux pour définir une solution et un traitement adéquat.

Partie II

MODÉLISATION ET SIMULATION NUMÉRIQUE DU FRETTING

Introduction

Beaucoup de travaux expérimentaux ont été réalisé pour étudier la résistance au fretting et au fretting-fatigue de différents matériaux ainsi que pour comprendre l'influence de divers paramètres.

En revanche, très peu d'études traitent de la modélisation et du calcul des grandeurs mécaniques résultant du chargement dû au contact avec petits débattements, notamment si celui-ci engendre des déformations plastiques. Ceci est en partie dû à la complexité des phénomènes et des mécanismes qui rentrent en jeu au cours des cycles. Mais provient aussi et surtout de l'absence de méthode de calcul adaptée pour traiter aisément ce type de problème.

Dans cette partie, nous allons citer les différentes difficultés qu'on doit surmonter. Pour ce faire, nous nous appuyons sur un certain nombre d'hypothèses que nous discuterons à partir des travaux issus de la bibliographie. Parmi les problèmes soulignés, le problème central est le choix d'une méthode rapide et efficace pour calculer la réponse du matériau dans le cas de chargements cycliques.

Après avoir citer brièvement les méthodes existantes, nous proposerons une méthode numérique originale qui met à profit le caractère périodique du chargement. De cette façon, on peut calculer directement la réponse stabilisée de la structure si elle existe. Nous montrerons comment mettre en œuvre pratiquement cette méthode dans le cas d'un chargement qui se déplace dans l'espace mais reste périodique dans le temps.

Cet algorithme est appliqué au cas de chargement cyclique de fretting en régime de glissement partiel et total. Après l'avoir validé en comparant les résultats avec la méthode incrémentale classique, nous donnerons quelques résultats qui montrent l'influence des paramètres sur la réponse stabilisée du matériau qui conditionne sa tenue en fatigue.

Chapitre 1

Difficultés de la modélisation

1.1 Introduction

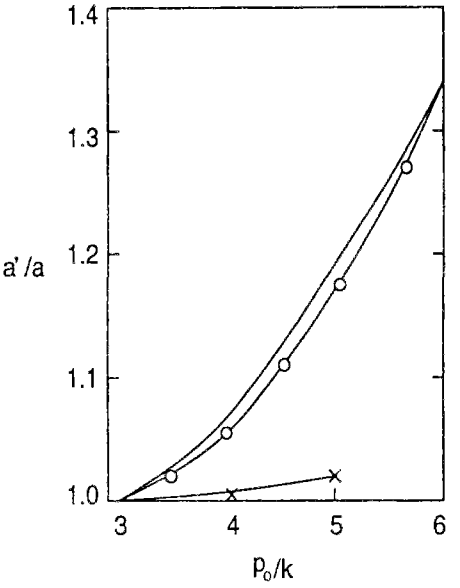
La connaissance de la réponse de la structure sous chargement cyclique de fretting requiert une méthode simple et rapide de calcul des grandeurs mécaniques susceptibles de provoquer les endommagemments. Pour cela, il faut surmonter un certain nombre de difficultés qu'il convient de bien identifier. Il est également nécessaire pour aboutir à des solutions pratiques d'énoncer un certain nombre d'hypothèses sur la nature du chargement et de leur évolution à cause de l'usure qui modifie les surfaces en contact ainsi que de la rugosité qui influe sur le frottement. C'est ainsi que nous discuterons des sollicitations normales et tangentielles de contact au cours des cycles; sollicitations que nous prendrons comme conditions aux limites des calculs que nous effectuerons par la suite.
Afin de bien situer notre apport par rapport aux méthodes déjà existantes, nous rappelons les différentes méthodes analytiques et numériques disponibles et discuterons de leurs avantages et inconvénients respectifs quant aux temps de calculs ainsi que de la précision des résultats qu'on peut en attendre.

1.2 Prise en compte des sollicitations extérieures

1.2.1 Pressions de contact

Quand on met en contact deux solides, les pressions normales et tangentielles qui se développent à l'interface sont des inconnues. Ce problème est non classique car les parties de la frontière sur lesquelles on impose les forces et les déplacements respectivement ne sont pas connues à priori. Néanmoins, depuis les travaux de Hertz [32], on sait déterminer analytiquement en élasticité linéaire les pressions normales dans le cas de géométries simples. On connaît aussi les contraintes de contact dans le cas de glissement partiel ou total d'après les travaux de Midlin [46] qui utilisent des méthodes de superposition en partant des solutions de Hertz. Par ailleurs, Bui et Dang Van [8] ont donné des solutions explicites exactes dans le cas d'un poinçon cylindrique en glissement sur un massif élastique en supposant un frottement de Coulomb.
Dans notre étude, nous utilisons le contact hertzien bien que le problème traité soit élastoplastique. Cette hypothèse est légitime si on s'intéresse à l'état adapté. Ceci est confirmé par les résultats de Petiot [55] qui remarque une différence faible de 5% entre les pressions de contact élastoplastique et les pressions hertziennes dans une simulation numérique du fretting-fatigue.
Si l'état limite est accommodé, le contact est élastoplastique; il faudrait alors justifier plus en détail une telle approximation.
Pour cela, Dumas et Baronet [21] donnent, dans le cas quasi-statique d'un contact sans

frottement d'un cylindre rigide sur un massif infini, les évolutions de la largeur et des pressions de contact en fonction de l'enfoncement du cylindre par un calcul élastoplastique par la méthode des éléments finis. Nagaraj [48] fait de même avec un contact en présence de frottement de Coulomb. Par une approche analogue, Barghava et al. [4, 5] sont arrivés à la conclusion, que dans le cas du roulement, le contact élastoplastique est proche d'un contact hertzien (figure 1.1).



a largeur de contact elastique
a' largeur de contact elastoplastique
k limite elastique en cisaillement

— *analyse de Dumas et Baronet - cas statique -*
o *analyse de Barghava et al. [4] - cas statique-*
× *analyse de Barghava et al. [4] - cas du roulement -*

Figure 1.1: Largeur de contact d'un cylindre rigide sur un massif semi-infini

Dans le cas du roulement avec un contact ponctuel, Hearle [23] a mis expérimentalement en évidence un changement de l'aire de contact qui passe d'une forme elliptique hertzienne à une forme rectangulaire dans le sens transversal relativement au sens du roulement. Nishioka et Hirakawa [49] ont fait des essais en fretting fatigue et montrent que, du fait de l'usure, l'aire de contact augmente sensiblement au cours des cycles (figure 1.2). Pour mettre en évidence ce phénomène, Johansson [31] a calculé l'évolution des pressions de contact en appliquant localement la loi d'Archard et en supposant que les deux solides en contact restent élastiques. Il trouve une augmentation de l'aire de contact et une distribution de pressions normales différentes des pressions de Hertz en glissements partiel et total. Les résultats de Johansson sont critiquables dans la mesure où ces calculs sont faits en élasticité alors que l'usure induit de fortes déformations plastiques en surface. Ce qui change l'état mécanique et les profils géométriques des solides.
On suppose malgré tout que les contraintes induites restent hertziennes durant les cycles de chargement. En adaptation, on a vu à partir des travaux cités que cette hypothèse reste valide. Par contre en accommodation, les contraintes à la surface sont sans doute différentes des pressions Hertziennes du fait de l'usure et du changement de géométrie provoqués par l'accumulation des déformations plastiques au cours des cycles.

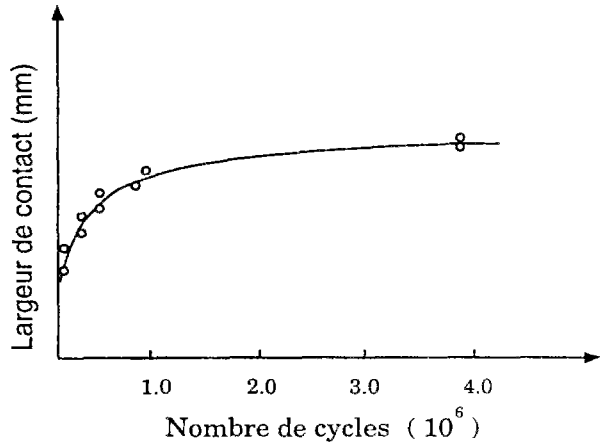


Figure 1.2: L'évolution de la largeur de contact en fonction du nombre de cycles d'après Nishioka et Hirakawa (1968)

1.2.2 Frottement et usure

Rayaprolu et al [59] ont réalisé des mesures de la force tangentielle au cours des cycles de fretting-fatigue. Ils observent une phase d'accommodation du déplacement dans le contact dans les 100 premiers cycles puis une stabilisation progressive de la force tangentielle. La phase de variation de la force tangentielle ne représente que 1% de la durée de vie. Cette phase est expliquée par l'élimination des plus larges aspérités.
En mesurant le rapport de la force tangentielle sur la force normale en glissement total, Carton [13] obtient l'évolution du coefficient de frottement au cours des cycles en fretting. Il observe également une stabilisation après une centaine de cycles (figure 1.3). Ce qui traduit une cinétique d'usure par détachement de particules des solides en contact. Cet ensemble de particules ou débris piégés appelé troisième corps [66] constitue un film lubrifiant en constante évolution. Dans le cas des aciers, il y a tout d'abord écrouissage des zones superficielles avec apparition d'une phase blanche très dure et fragile provenant d'une transformation tribologique superficielle (TTS) [6]. Celle-ci se fragmente pour former un lit de débris métalliques qui seront broyés et oxydés. Suivant les conditions expérimentales vibratoires et de géométrie, les débris peuvent plus ou moins s'accumuler et une cinétique d'éjection s'établit. Cette couche est habituellement appelée troisième corps et joue un rôle important en modifiant les conditions de contact (distributions de pressions et frottement) [66] .
Il est difficile de tenir compte du troisième corps pour modéliser le fretting. En effet, il est nécessaire de connaître les caractéristiques mécaniques et la loi de comportement d'un film de débris d'une centaine de Å. Ce qui est hors de portée des méthodes d'essais existants. D'autre part, le film de débris est un système ouvert en constante évolution sous l'effet de deux mécanismes compétitifs : l'usure progressive qui contribue à former le lit de troisième corps et la cinétique d'éjection. Dans l'objectif de rendre compte de ce processus, Zmitrowicz [69] puis Strömberg et al. [64] proposent une formulation thermodynamique pour le contact avec frottement et usure incluant le film de débris entre les solides en présence. Mais ces travaux présentent qu'un d'intérêt formel et ne peuvent pas servir pour modéliser et calculer pratiquement.
Pour notre part, nous pensons que le troisième corps influe sans aucun doute sur la tenue

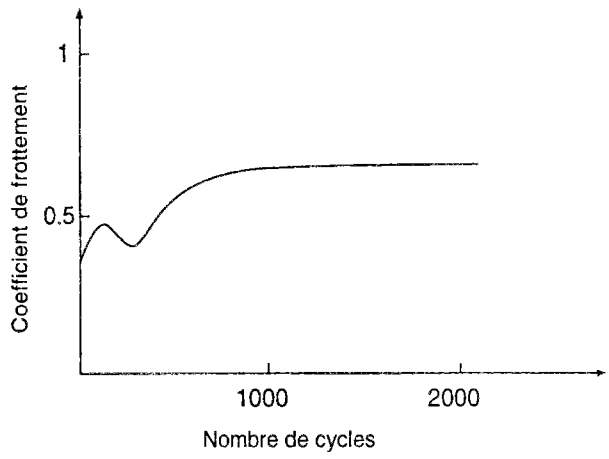


Figure 1.3: L'évolution du coefficient en fonction du nombre de cycles d'après J.F. Carton (1993)

des solides en contact. Mais nous nous limitons à introduire cet effet par le biais du coefficient de frottement. Nous ferons désormais l'hypothèse que le coefficient de frottement reste constant au cours des cycles du fait de la stabilisation constatée expérimentalement après quelques centaines de cycles. Évidemment, le coefficient de frottement optimal est celui atteint à l'état stabilisé. Nous ferons l'hypothèse que celui-ci subsiste pratiquement durant la totalité de la durée de vie. Ce coefficient de frottement est associé à la loi de Coulomb classique.

1.3 Rugosité

On ne trouve pas explicitement dans la littérature l'effet de la rugosité sur la durée de vie de la tenue des solides à l'endommagement dû au fretting. Cependant, on note les résultats expérimentaux de Hills et al. [25, 26] qui soulignent la variation de la durée de vie au fretting-fatigue avec la taille de l'aire de contact. Plus précisément, ils réalisent une série d'essais de fretting-fatigue, en ajustant les valeurs de l'effort normal et les rayons des cylindres en contact, en faisant ainsi varier la taille de l'aire de contact tout en maintenant la même pression hertzienne. Ils constatent que la durée de vie à la fatigue des échantillons pour lesquels la taille de l'aire de contact est de l'ordre de $0.4mm$ est d'environ 10^7 cycles alors que celle des échantillons pour lesquels la taille de l'aire de contact est plus grande (de l'ordre de $0.8mm$) est 10 plus faible (de l'ordre de 10^6 cycles). Ils interprètent ce phénomène par le fait que (figure 1.3), comme le glissement local est d'autant plus important que la taille de l'aire de contact est plus grande; Le nombre d'aspérités qui sont ainsi concernées par le glissement local augmente avec la taille de l'aire de contact. Par conséquent, en suivant toujours l'argumentation de Hills et al., un point matériel appartenant à une aspérité subit localement, pour un cycle de chargement donné, un nombre de cycles d'autant plus élevé que la taille de l'aire de contact est plus grande. Ainsi, le nombre de cycles effectif à l'échelle locale est égal au nombre de cycles de chargement multiplié par un ratio qui est le rapport de l'amplitude de glissement local sur la dimension de l'aspérité, ce qui explique, de leur point de vue, la variation du nombre de cycles à la rupture en fonction de la taille de l'aire de contact.
Nous pensons que cet effet d'échelle doit certainement exister au début de l'expérience

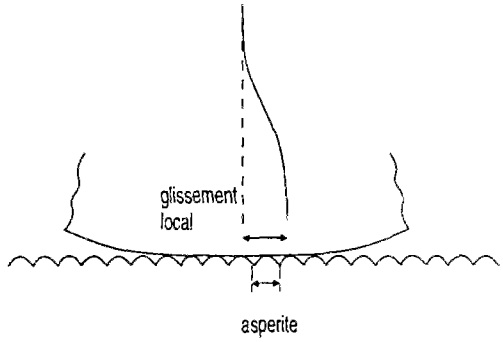


Figure 1.4: Effet d'échelle : influence de la rugosité

mais qu'il ne subsiste plus par la suite après les premiers cycles. En effet, selon leurs duretés relativement au solide indenteur, les aspérités sont soit expulsées par un phénomène d'abrasion douce, soit subissent des déformations plastiques au cours des cycles qui modifient progressivement le profil rugueux [34, 41] pour l'emmener vers un autre état stabilisé. Par ailleurs, quelques auteurs ont modélisé l'effet de la rugosité sur les pressions de contact. En faisant l'hypothèse d'un comportement élastique linéaire, Nowell et Hills [50] calculent analytiquement les pressions résultant du contact d'un solide rigide sur un solide élastique présentant un profil rugueux périodique. Ils trouvent que celles-ci présentent des pics de pressions sur les aspérités pouvant atteindre le double de la pression de Hertz théorique si on ne tenait pas compte de la rugosité (figure 1.5). Komvopoulos et al. [42] utilisent la méthode des éléments finis pour résoudre le même problème et confirment ce résultat. A partir de mesures de profils rugueux, Bailey et al. [3] calculent les contraintes résultant du glissement de solides élastiques et trouvent que les cisaillements présentent des maxima locaux au niveaux des aspérités.

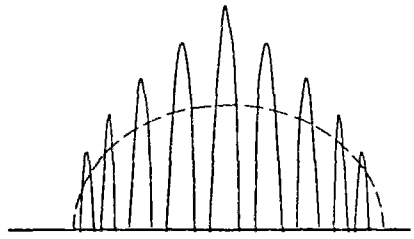


Figure 1.5: Pression normale de contact due à la rugosité d'après Nowell et Hills (1988)

En réalité, les aspérités subissent des déformations plastiques importantes, ce qui atténue considérablement les pics de pression évalués en supposant un comportement purement élastique. Johnson [34] a mis en évidence analytiquement un état stabilisé crée par deux aspérités en contact: les géométries initiales sont modifiées d'une façon notable et les pressions normales diminuent d'une manière significative. Plus généralement, Kapoor et al. [41] obtiennent un résultat analogue pour une surface rugueuse avec une distribution

gaussienne des hauteurs des aspérités.
Dans notre étude, nous ne tenons pas compte dans la modélisation du fretting de la rugosité. Durant les premiers cycles de fretting, quelques aspérités sont expulsées sous l'effet d'un phénomène d'usure douce. Puis au cours des cycles, les aspérités se déforment plastiquement, leurs géométries changent et un état stabilisé s'établit qui diminue au niveau des aspérités les pics de pressions normales obtenues dans l'hypothèse d'un comportement purement élastique. Ainsi, la rugosité ne doit pas jouer pas un rôle important pendant les millions de cycles qui constituent la durée de vie des échantillons soumis au fretting comme on le suppose dans un certain nombre de théories.
Quant à l'effet d'échelle évoqué par Hills [25, 26], nous nous intéressons dans notre étude uniquement à l'initiation des fissures et nous ne calculons pas le nombre de cycles à la rupture. La mise en évidence de cet effet d'échelle ne peut se faire que par un calcul incrémental coûteux incluant le calcul de contact de pressions avec un profil rugueux.

1.4 Méthodes et algorithmes de calcul

L'une des difficultés de la modélisation du fretting est le choix de la méthode de calcul. Qu'il s'agisse de méthodes analytiques ou numériques, l'objectif essentiel est de donner des résultats les plus exacts possibles et de diminuer le temps des opérations de calcul pour évaluer l'état mécanique après un certain nombre de cycles ou à l'état stabilisé si celui-ci existe. Dans ce qui suit, on va exposer brièvement les méthodes analytiques et numériques puis évoquer les utilisations qui en ont été faites pour étudier le fretting ou alors plus généralement les problèmes de contact tel que le roulement et le glissement.

1.4.1 Méthode analytique et semi-analytique

Les méthodes analytiques ont été amplement utilisées par Johnson et al. [35, 36, 58] pour l'étude des problèmes de contact. Elles sont basées sur l'application du théorème d'adaptation statique de Melan dans le cas d'un comportement plastique parfait, du théorème de Ponter [57] dans le cas d'un comportement élastoplastique avec écrouissage cinématique linéaire et du théorème d'adaptation cinématique de Koiter [40].
Johnson et al. déterminent les limites d'adaptation pour le roulement avec glissement total et partiel d'un cylindre sur un demi-espace infini en calculant une borne inférieure et supérieure déduites respectivement par le théorème statique et le théorème cinématique. La figure 1.6 montre les limites d'adaptation en glissement partiel ainsi établies par Johnson pour un comportement élastoplastique parfait et à écrouissage cinématique linéaire en fonction de l'effort tangentiel T/P et de la pression normale de Hertz p_0/k pour différents coefficients de frottement μ. En glissement total également, la carte des limites d'adaptation est montrée sur la figure 1.7 pour un matériau élastoplastique parfait et à écrouissage cinématique linéaire en fonction de la pression normale et le coefficient de frottement.
Les méthodes analytiques appliquées par Johnson et al. ne sont pas adéquates dans le cas d'un chargement complexe comme celui induit pas le fretting. En effet, l'hypothèse d'invariance du problème par rapport à la direction du mouvement n'est plus assurée en fretting comme dans le cas du roulement.
Dans le cadre de l'élasticité linéaire, Nowell et Hills [51, 29] ont calculé analytiquement

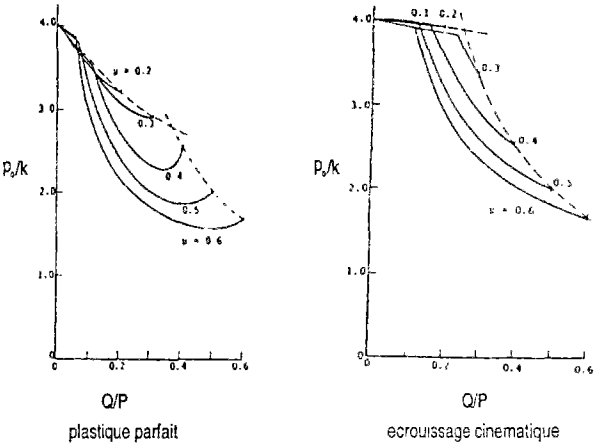


Figure 1.6: Limites d'adaptation déterminées par les méthodes analytique dans le cas du roulement avec glissement d'après K.L. Johnson(1986)

les pressions de contact et les contraintes résultantes dues au fretting-fatigue. Mais de telles approches analytiques ne sont pas utilisables dès lors qu'il s'agit d'un matériau élastoplastique.

1.4.2 Méthode incrémentale

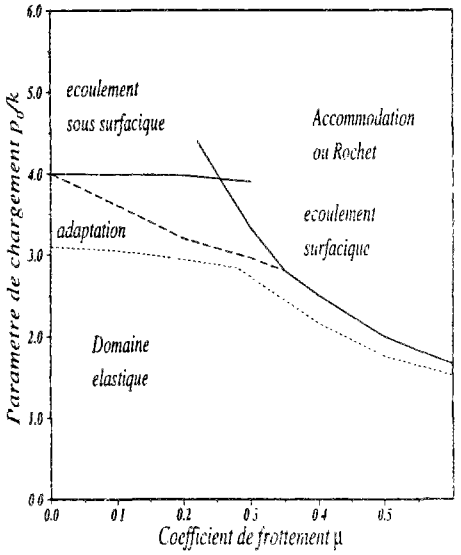
C'est la méthode classiquement utilisée dans les codes de calculs en éléments finis. Elle consiste à calculer les grandeurs mécaniques pas à pas durant les cycles en incrémentant le chargement un nombre suffisant de fois pour obtenir un état stabilisé éventuel. Nous allons donner brièvement le principe de la méthode dans le cas d'un comportement élastoplastique.
En pratique, considérons une structure soumise à un chargement cyclique $\boldsymbol{F}(t)$ sur le cycle [0,T]. On discrétise le chargement suivant les incréments $\Delta \boldsymbol{F}_i, i = 1, \ldots n$.
A chaque instant i correspondant à un accroissement du chargement de forces $\Delta \boldsymbol{F}_i$, on cherche le champ de contraintes $\Delta \boldsymbol{\sigma}_i$ plastiquement et statiquement avec $\Delta \boldsymbol{F}_i$ et un champ de déformation $\Delta \boldsymbol{\epsilon}_i$ cinématiquement admissible avec les déplacements imposés $\boldsymbol{U}^d$ et un champ de déformations plastiques $\Delta \boldsymbol{\epsilon}^p{}_i$ en prenant comme état initial le champ de déformations plastiques $\boldsymbol{\epsilon}^p{}_{i-1}$ supposé connu.
Le calcul de $(\Delta \boldsymbol{\sigma}_i, \Delta \boldsymbol{\epsilon}_i, \Delta \boldsymbol{\epsilon}^p{}_i)$ se fait d'une manière itérative comportant deux étapes. A chaque itération j , on détermine en:

- 1^{ere} étape

  $(\Delta \boldsymbol{\sigma}^S{}_i^j, \Delta \boldsymbol{\epsilon}_i{}^j)$ statiquement et cinématiquement admissibles à partir du déplacement $\Delta \boldsymbol{U}_i^j$ en résolvant les équations d'équilibre:

$$\boldsymbol{K} \Delta \boldsymbol{U}_i^j = \Delta \boldsymbol{Q}_i + \boldsymbol{Q}_{i-1}^P$$

  avec:
  K la matrice de rigidité élastique.
  $\Delta \boldsymbol{U}_i^j$ le vecteur des déplacements nodaux.
  $\Delta \boldsymbol{Q}_i$ le vecteur des forces nodales correspondant à $\Delta \boldsymbol{F}_i$.
  $\boldsymbol{Q}_{i-1}^P$ le vecteur des forces nodales plastiques correspondant à $\boldsymbol{\epsilon}^p{}_{i-1}$.



..... Limite elastique
--- Limite d'adapatation dans le cas elastique parfait
— Limite d'adaptation dans le cas elastoplastique a ecrouissage cinematique lineaire

Figure 1.7: Cartes d'adaptation déterminées par les méthodes analytique dans le cas du roulement avec glissement total d'après K.L. Johnson(1986)

- 2^{eme} ètape

  ${\Delta\boldsymbol{\sigma}^P}_i^j$ plastiquement admissible à partir de ${\Delta\boldsymbol{\epsilon}^p}_i^j$ obtenue par projection de ${\Delta\boldsymbol{\sigma}^S}_i^j$ sur le convexe d'élasticité.

Le processus itératif est répété jusqu'à obtenir $(\Delta\boldsymbol{\sigma}_i, \Delta\boldsymbol{\epsilon}_i, \Delta\boldsymbol{\epsilon}^p{}_i)$ statiquement et plastiquement admissibles à l'instant i.
La méthode incrémentale est lourde et coûteuse du fait qu'on doit suivre pas à pas l'histoire du chargement et faire le processus itératif à chaque pas.

1.4.3 Méthode stationnaire

Dang Van et Maitournam [16, 45] ont mis au point la méthode stationnaire pour l'étude de problèmes d'endommagements de contact. Plusieurs applications ont été faites de cette méthode pour l'étude des avaries dans les rails [17], le galetage et le dudgeonnage [52] pour ne citer que ces exemples . Elle s'applique dans tout cas de chargement mécanique et thermique en translation ou en rotation sur des solides qui peuvent être assimilées à des cylindres généralisés (figure 1.8).
Pour cela, ils font l'hypothèse d'un état permanent dans le repère lié au chargement mobile. Dans ce repère, les grandeurs physiques sont indépendantes du temps en tout point

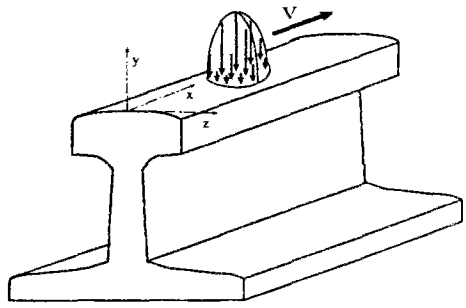


Figure 1.8: Cas d'application de la méthode stationnaire

géométrique. La dérivée particulaire d'une grandeur mécanique tensorielle $\boldsymbol{A}$ devient simplement une dérivée par rapport la coordonnée x de la direction du mouvement:

$$\dot{\boldsymbol{A}} = -\boldsymbol{V}.\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{A}$$

Ceci permet, pour obtenir la déformation plastique en un point, d'intégrer la loi de comportement suivant une ligne de courant passant par ce point:

$$\epsilon^p(x,y,z) = \int_{+\infty}^{x} \epsilon^p{}_{,u}(u,y,z)du$$

Un algorithme a été mis au point pour calculer les grandeurs mécaniques après un certain nombre de passages jusqu'à l' obtention de l'état stabilisé. Cet état peut être également recherché directement. Le processus converge très rapidement et donne des résultats satisfaisants.
Maitournam et Dang Van [15] appliquent la méthode stationnaire pour l'étude du fretting. Pour cela, ils font l'hypothèse d'un contact Hertzien avec glissement total; Le matériau considéré a un comportement élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire. Ils font, en premier, passer le chargement normal et tangentiel de $-\infty$ à $+\infty$ avec un effort tangentiel dans le sens du mouvement. Puis après, ils prennent l'état résiduel obtenu comme état initial pour faire un deuxième passage du chargement normal et tangentiel de $+\infty$ à $-\infty$ avec un effort tangentiel toujours dans le sens du mouvement comme indiqué dans la Figure 1.9. Un cycle de chargement, dans leur modèle de calcul, correspond à un passage dans un sens suivi d'un passage dans l'autre sens. Ils obtiennent ainsi rapidement par l'algorithme stationnaire l'état mécanique à l'état stabilisé.
Suivant les valeurs des paramètres de chargement (pression normale de Hertz et coefficient de frottement), Maitournam et Dang Van obtiennent l'adaptation ou l'accommodation et dressent ainsi une carte résumant leurs résultats (figure 1.10). Ils obtiennent que les limites d'adaptation pour le fretting sont inférieures à celles du roulement avec glissement mettant ainsi en évidence la nocivité de l'alternance du cisaillement dans un sens puis dans l'autre dans un tel cycle de chargement.
Le modèle adopté est approximatif dans la mesure où le déplacement du chargement se fait de $-\infty$ vers $+\infty$ puis de $+\infty$ vers $-\infty$ alors que, dans le régime de glissement total, l'amplitude de glissement total est souvent petite par rapport à la taille de la zone de contact; De plus, dans le cas de régime de glissement partiel, le chargement ne se déplace

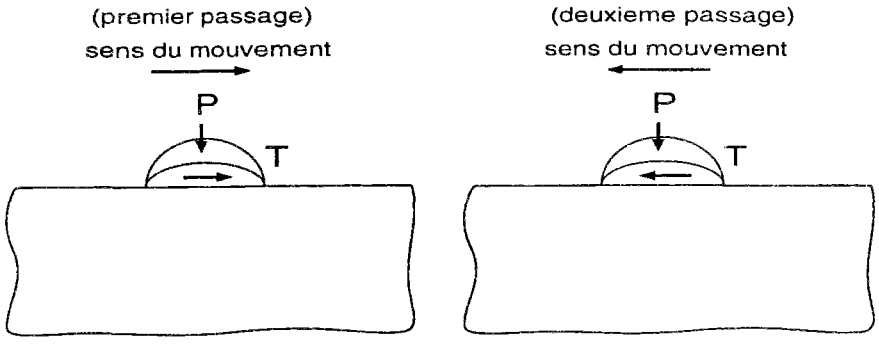


Figure 1.9: Calcul du fretting avec la méthode stationnaire.

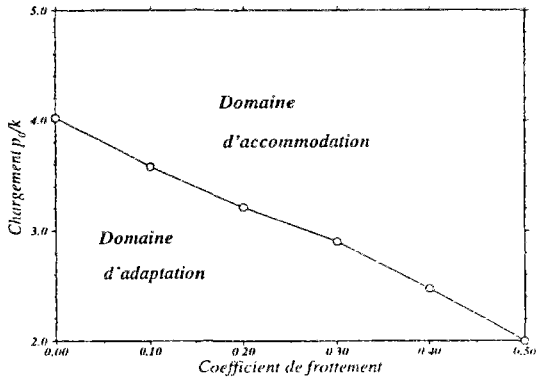


Figure 1.10: Carte d'adaptation et d'accommodation pour le fretting d'après K. Dang Van and M.H. Maitournam (1994)

pas. Par conséquent, le modèle nous donne une idée d'autant plus réaliste que l'amplitude de glissement total est grande devant la taille de l'aire de contact.

1.4.4 Approche simplifiée

L'approche simplifiée [70] permet de calculer l'état stabilisé sous chargement cyclique dans le cas où le matériau a un comportement élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire.
Pour cela, Zarka et al. font un changement de paramètres qui permet d'estimer plus facilement dans l'espace transformé les déformations plastiques à l'état stabilisé. Nous allons donner ici les idées générales de cette méthode en supposant que le matériau a un comportement élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire.
Lorsque l'état stabilisé est adapté, le champ de contraintes à l'état stabilisé, en tout point et à chaque instant du cycle, s'écrit:

$$\sigma(t) = \sigma^{el}(t) + \sigma^{r}$$

En désignant par σ^r le champ de contraintes résiduelles et $\sigma^{el}(t)$ le champ de contraintes dû au chargement cyclique si le comportement est supposé purement élastique.

La non violation du critère de plasticité impose:

$$\sqrt{\frac{3}{2}(s_{ij}(t) - C\epsilon_{ij}^p)(s_{ij}(t) - C\epsilon_{ij}^p)} \leq \sigma_y$$

où:
$s(t)$ désigne la partie déviatorique de $\sigma(t)$.
C est le coefficient d'écrouissage.
ϵ^p est la déformation plastique à l'état stabilisé.
Zarka fait le changement de variables:

$$Y = C\epsilon^p - s^r$$

Le critère de plasticité s'écrit alors:

$$\sqrt{\frac{3}{2}(s_{ij}^e(t) - Y_{ij})(s_i^e j(t) - Y_{ij})} \leq \sigma_y$$

le paramètre Y est donc le centre, dans l'espace des déviateurs, de la sphère qui est le même rayon que le domaine élasticité et qui contient le trajet des contraintes pendant le cycle de chargement.
D'un autre coté, si on considère les sphères (figure 1.11) de même rayon que le domaine d'élasticité centré sur chaque point du trajet des déviateurs de contraintes $s^{el}(t)$, alors Y doit appartenir à toutes ces sphères et donc à leurs intersection désignée par (C_l). La structure s'accommode si cette intersection est vide et s'adapte dans le cas contraire.
Cet ensemble intersection (C_l) est d'autant plus réduit que la taille du domaine du trajet des contraintes est grande par rapport à celle du domaine d'élasticité dans l'espace des déviateurs. Inglebert et Frelat ([30]) construisent une valeur approximative de Y en faisant une projection de la valeur initiale Y_0 sur cette intersection.

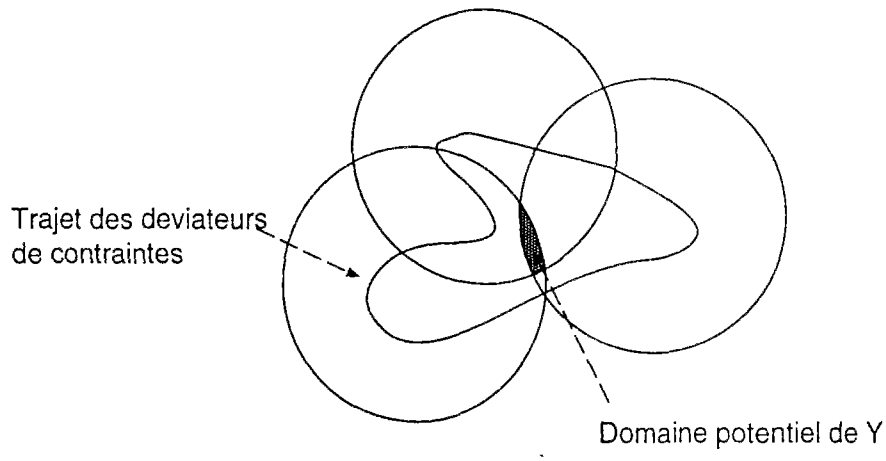


Figure 1.11: Principe de l'approche simplifiée

L'approche simplifiée permet d'obtenir l'état stabilisé en des temps CPU très raisonnables mais présente l'inconvénient de donner des valeurs approchées des contraintes et des déformations plastiques.

1.4.5 Méthode à grand incrément de temps

C'est une méthode développée par Ladevèze et al. [37, 7, 11, 12] pour traiter le problèmes d'évolution non linéaire. Les non linéarités peuvent être de nature physique ou géométrique. Le principe de la méthode repose sur une recherche itérative de solutions de contraintes et déformations satisfaisant les équations d'équilibre sur tout le cycle (traitement global) puis de solutions satisfaisant, également sur tout le cycle, les équations de comportement (traitement local). Le processus itératif sur le cycle est répété jusqu'à atteindre une solution vérifiant toutes les équations sur tout le cycle.
Plus précisément, considérons une structure occupant un domaine Ω soumise, pendant l'intervalle de temps $[0,T]$, à un champ de forces de volume $\boldsymbol{F}$ et à un déplacement imposé $\boldsymbol{U}^d$ sur une partie de la frontière $\partial_1\Omega$ et un champ de forces imposé $\boldsymbol{F}_d$ sur une partie de la frontière $\partial_2\Omega$.
On note $\mathcal{A}_d$ l'ensemble des éléments $\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma})$ définis sur $\Omega \times T$ qui satisfont l'équilibre à chaque instant t de l'intervalle $[0,T]$ et par Γ l'ensemble des éléments $\boldsymbol{s} = (\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma})$ qui vérifient l'équation de comportement.
La recherche de la solution $\boldsymbol{S}_{ex}$, qui appartient à l'intersection de A_d et de Γ, se fait itérativement par la construction de l'élément $\boldsymbol{S}_{n+1}$ appartenant à $\mathcal{A}_d$ à partir de l'élément $\boldsymbol{S}_n$ de $\mathcal{A}_d$ en deux étapes (figure 1.12):

- Étape locale: Trouver $\hat{\boldsymbol{S}} \in \Gamma$ tel que $\hat{\boldsymbol{S}} = (\Gamma) \cap (\boldsymbol{S}_n + \boldsymbol{E}^+)$
- Étape globale: Trouver $\boldsymbol{S}_{n+1} \in \mathcal{A}_d$ tel que $\boldsymbol{S}_{n+1} = (\mathcal{A}_d) \cap (\hat{\boldsymbol{S}} + \boldsymbol{E}^-)$

où l'on a noté $\boldsymbol{E}^+$ une variété linéaire à caractère local en espace et $\boldsymbol{E}^-$ une variété linéaire à caractère global en variable d'espace et paramétré par le temps.

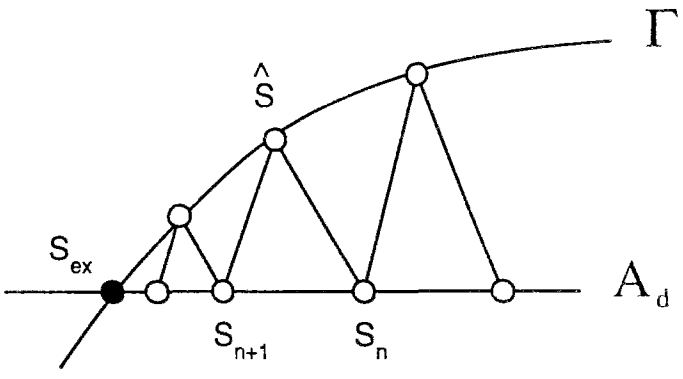


Figure 1.12: Schéma itératif de la méthode à grand incrément de temps

Le processus commence à partir d'un élément $\boldsymbol{S}_0$ appartenant à $\mathcal{A}_d$ qui peut être par exemple la solution élastique sur l'intervalle $[0,T]$.
Pour un matériau élastoplastique, Ladevèze adopte, dans les premières versions de son algorithme [7], comme directions de recherches $\boldsymbol{E}^+$ et $\boldsymbol{E}^-$ la rigidité tangente associée à l'élément $\hat{\boldsymbol{S}}$ de Γ. Les étapes de recherches deviennent alors:

- Étape locale

Trouver $\hat{\boldsymbol{S}} = (\hat{\sigma}, \hat{\epsilon}) \in \boldsymbol{\Gamma}$ tel que:

$$\dot{\hat{\epsilon}} - \dot{\epsilon}_n = -\boldsymbol{K}_t^{-1} \frac{d}{dt}(\hat{\sigma} - \sigma_n)$$

- Étape globale

  Trouver $\boldsymbol{S}_{n+1} = (\sigma_{n+1}, \epsilon_{n+1}) \in \mathcal{A}_d$ tel que:

$$\dot{\epsilon}_{n+1} - \dot{\hat{\epsilon}} = \boldsymbol{K}_t^{-1} \frac{d}{dt}(\sigma_{n+1} - \hat{\sigma})$$

Pour la résolution de l'étape globale, Ladevèze utilise une méthode approchée moins coûteuse en temps en choisissant, pour les chargements quasi statiques, de calculer les grandeurs mécaniques $\boldsymbol{v}_n(t, M)$ (contraintes et déformations) définies sur $\Omega \times T$ sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions en espace $\boldsymbol{a}_i(M)$ et en temps $\boldsymbol{\alpha}_i(t)$ entièrement déterminées par l'algorithme:

$$\boldsymbol{v}_{n+1}(t, M) - \boldsymbol{v}_n(t, M) = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{\alpha}_i(t) \boldsymbol{a}_i(M)$$

où m est le nombre de fonctions qui vaut généralement 1 ou 2.
Le calcul des grandeurs mécaniques d'une façon approchée dans l'étape globale s'effectue en découplant le temps et l' espace. Ce qui permet d'accélérer les calculs et d'avoir une précision moyenne sur l'intervalle de temps considérée.
la méthode a été améliorée dans ces différentes versions en adaptant les directions de recherches et en combinant les fonctions en temps et en espace dans les différents problèmes traités.
En outre, Ladvèze et Cognard [12] ont proposé un algorithme, basé sur le principe décrit précédemment, applicable pour évaluer la réponse cyclique d'un matériau à comportement viscoplastique décrit par le modèle de Chaboche[9].
Par la suite, nous utiliserons l'idée de traiter séparément l'équilibre sur tout le cycle (problème global) et la vérification de l'équation du comportement en tout point de la structure (problème local) dans le prochain chapitre pour mettre au point la méthode cyclique directe.

1.5 Conclusion

Nous avons rappelé les difficultés qui se posent pour modéliser le fretting. La complexité des phénomènes qui régissent la réponse de la structure sont discutés.
Pour surmonter ces difficultés, nous ferons par la suite quelques hypothèses que nous justifierons par des travaux issus de la littérature; Nous nous appuyons sur celles-ci pour élaborer notre modèle de calcul.
Ces hypothèses sont:

- Les pressions normales induites par les solides en contact soumis à des petits débattements répétitifs sont hertziennes. Cette hypothèse est valide si l'état stabilisé adapté est atteint rapidement au bout d'un certain nombre de cycles de telle façon que les géométries de contact ne sont pas sensiblement modifiées. Par contre, dans le cas de l'accommodation, les déformations plastiques et l'usure changent les profils géométriques. Ceci modifie sans doute les pressions normales.

- Les pressions tangentielles sont aussi calculées en considérant le comportement élastique et en supposant la loi de frottement de Coulomb. Les débris générés par l'usure sont pris en compte au travers du coefficient de frottement. Ce dernier est pris constant. Les enregistrements expérimentaux montrent, en effet, que dans un essai de fretting, le coefficient de frottement passe par une phase transitoire pendant une centaine de cycles puis finit par se stabiliser durant presque la totalité de la durée de vie des échantillons.

- Les profils des solides en contact sont considérés non rugueux. La prise en compte de la rugosité requiert des calculs numériques utilisant un maillage très fin décrivant les aspérités, ce qui entraîne des calculs longs et lourds.

L'une des difficultés de la modélisation du fretting est le choix d'une méthode rapide et fiable pour calculer les grandeurs mécaniques responsables de l'endommagement induit par chargements répétés au voisinage du contact.
Les méthodes analytiques et numériques existantes proposées pour calculer la réponse des structures soumises aux chargements cycliques ne sont pas bien adaptées pour étude de ces problèmes.
En utilisant l'idée de traitement séparé des équations d'équilibre et de comportement issue de la méthode à grand incrément de temps, nous allons développer dans le prochain chapitre un algorithme numérique qui permettra de calculer directement l'état stabilisé pour les chargements périodiques.

Chapitre 2

Méthode cyclique directe

2.1 Introduction

Nous allons présenter dans ce chapitre une méthode numérique qui permet de calculer directement l'état mécanique stabilisé (s'il existe) d'une structure soumise à un chargement cyclique quelconque [44]. Suivant le type du comportement inélastique de son matériau, une structure soumise à un chargement cyclique s'adapte, s'accommode ou présente un rochet. Dans le cas de l'adaptation, toutes les composantes du tenseur de déformations plastiques en chaque point de la structure tendent vers des valeurs asymptotiques constantes au cours d'un cycle de chargement ; le travail plastique reste borné. Lorsque la structure s'accommode, le tenseur de déformation plastique en chaque point de la structure devient périodique après un certain nombre de cycles de chargement. Alors que le rochet se manifeste par une augmentation progressive de la déformation plastique au cours de chaque cycle.
Pour déterminer directement un éventuel état stabilisé, nous avons mis au point une nouvelle méthode numérique. Elle est appliquée aux solides élastoplastiques à écrouissage cinématique linéaire ou/et isotrope soumis à des chargements cycliques quelconques imposés à des frontières fixes du solide. Cette méthode est ensuite mise en œuvre pour un chargement périodique se déplaçant sur la frontière du solide.

2.2 Présentation du problème et cadre d'étude

Nous nous intéressons à un solide Ω soumis à un chargement cyclique $\boldsymbol{F}^d(t)(t \in [0,T])$ de période T appliqué sur la frontière $\partial_F\Omega$ et à des déplacements imposés sur la frontière $\partial_U\Omega$ de Ω (figure 2.1). Son évolution est supposée quasi-statique en transformations infinitésimales. Le comportement du matériau considéré est élastoplastique à écrouissage combiné cinématique linéaire ou/et isotrope.
Nous cherchons la réponse $(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{\epsilon}^p(\boldsymbol{x},t))$ en tout point $\boldsymbol{x}$ du solide Ω à chaque instant. Celle-ci doit vérifier les équations d'équilibre et la loi de comportement ainsi que les équations de compatibilité des déformations.

2.2.1 Équilibre

En l'absence de forces volumiques et d'inertie, les équations gouvernant l'évolution globale du problème sont :

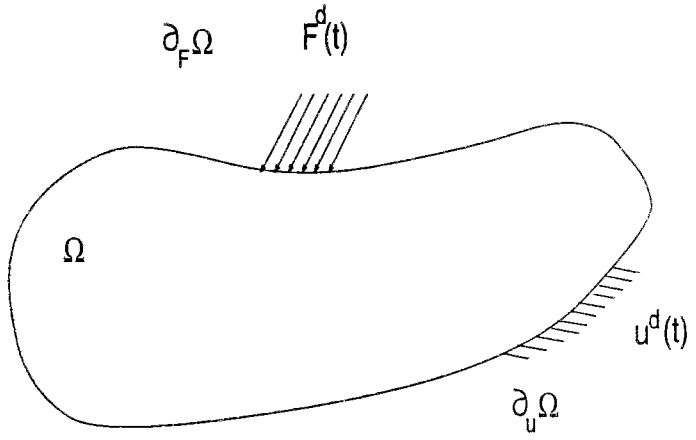


Figure 2.1: Présentation du problème.

$$\begin{array}{lll}
\text{équations d'équilibre} & : & div\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},t) = 0 \qquad \text{dans } \Omega \\
\text{équations de compatibilité} & : & \epsilon(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla u}(\boldsymbol{x},t) + \boldsymbol{\nabla}^T\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)) \qquad \text{dans } \Omega \\
\text{conditions aux limites} & : & \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},t).\boldsymbol{n} = \boldsymbol{F}^d(\boldsymbol{x},t) \qquad \text{sur } \partial_F\Omega \\
 & & \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{u}^d(\boldsymbol{x},t) \qquad \text{sur } \partial_U\Omega \\
\text{conditions initiales} & : & \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{u}^I(\boldsymbol{x}) \\
 & & \boldsymbol{\epsilon}^p(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{\epsilon}^{pI}(\boldsymbol{x}) \\
 & & \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{\sigma}^I(\boldsymbol{x})
\end{array} \tag{2.1}$$

avec $\partial_U\Omega \cup \partial_F\Omega = \Omega$ et $\partial_U\Omega \cap \partial_F\Omega = \emptyset$

Le principe des puissances virtuelles permet d'écrire l'équilibre sous la forme variationnelle suivante:

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\delta\epsilon} d\Omega = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F}^d.\boldsymbol{\delta u} ds \tag{2.2}$$

pour tout champ de déplacement $\boldsymbol{\delta u}$ cinématiquement admissible avec zéro, ie $\boldsymbol{\delta u} = 0$ sur $\partial_U\Omega$.

2.2.2 Loi de comportement

Le comportement du matériau est supposé élastoplastique à écrouissage combiné cinématique linéaire ou/et isotrope. Les équations dans le cadre des matériaux standards généralisés s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\epsilon}(t) = & \boldsymbol{\epsilon}^e(t) + \boldsymbol{\epsilon}^p(t) \\ \boldsymbol{\sigma}(t) = & \boldsymbol{\sigma}^I + \boldsymbol{D}.\boldsymbol{\epsilon}^e(t) = \boldsymbol{\sigma}^I + \boldsymbol{D}.(\boldsymbol{\epsilon}(t) - \boldsymbol{\epsilon}^p(t)) \\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p(t) = & \lambda \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}},\ f \leq 0,\ \lambda \geq 0,\ \lambda f = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

avec :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\epsilon}^p) = \| \boldsymbol{\sigma}' - C\boldsymbol{\epsilon}^p \| - \sqrt{\frac{2}{3}}\, k(\epsilon^{p^c}) \leq 0$$

où :

$$\boldsymbol{\sigma}' = dev\boldsymbol{\sigma};\quad \sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} \qquad (i,j,k = 1,2,3)$$

$$\epsilon^{p^c}(t) = \epsilon^{p^c}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p}$$

$$\| \boldsymbol{\sigma}' - C\boldsymbol{\epsilon}^p \| = \sqrt{(\boldsymbol{\sigma}' - C\boldsymbol{\epsilon}^p) : (\boldsymbol{\sigma}' - C\boldsymbol{\epsilon}^p)}$$

en notant :

k	fonction croissante de $\dot{\epsilon}^{p^c}$	$\boldsymbol{\sigma}$	tenseur des contraintes
$\boldsymbol{D}$	la matrice d'élasticité	$\boldsymbol{\epsilon}$	tenseur des déformations totales
C	module d'écrouissage	$\boldsymbol{\epsilon}^e$	tenseur des déformations élastiques
ϵ^{p^c}	déformation plastique cumulée	$\boldsymbol{\epsilon}^p$	tenseur des déformations plastiques

2.3 Présentation de la méthode cyclique directe

Dans le cas d'un comportement élastoplastique cinématique linéaire, Halphen montre [10] qu'il existe une unique réponse périodique en contraintes et en déformations résultant d'un chargement cyclique sous des conditions initiales données.
Nous nous proposons de calculer directement les grandeurs mécaniques à cet état stabilisé sans suivre le trajet de chargement pas à pas. Nous nous inspirons des idées de Akel & Nguyen ([2]) et de Ladevèze ([37, 7]) pour le traitement séparé des équations d'équilibre et des équations de comportement. En plus, on tire profit du caractère périodique de la solution recherchée en l'intégrant directement dans le processus itératif de recherche.

2.3.1 Principe de la méthode

La méthode proposée est itérative. Elle consiste, en première étape, à chercher des solutions statiquement et cinématiquement admissibles respectivement avec les forces et les déplacements imposées à chaque instant du cycle du chargement. En deuxième étape,

à partir des solutions précédentes, on détermine des solutions plastiquement admissibles sur tout le cycle du chargement. Le processus est répété en forçant la périodicité des déformations plastiques jusqu'à l'obtention de l'état stabilisé.
Plus précisément, discrétisons l'intervalle de temps du cycle de chargement $[0, T]$ en n instants $0 < t_1 < \ldots < t_n = T$. On recherche les grandeurs mécaniques à chaque instant t_i du cycle stabilisé. Le processus de recherche de ces solutions comporte les étapes suivantes:

- (i) Initialisation

$$\epsilon^p{}_i = \epsilon^p(t_i) = \epsilon^{pI}$$
$$\sigma_i = \sigma(t_i) = \sigma^I$$

σ^I est un champ de contraintes initial auto équilibré associé au champ de déformation initial ϵ^{pI}. Ainsi, on peut éventuellement tenir compte d'un état résiduel résultant d'un traitement de surface.

- (ii) Recherche des solutions statiquement admissibles

On détermine n-uplet de tenseurs de contraintes $(\sigma_i^S, i = 1.n)$ correspondant aux instants t_i, statiquement admissibles respectivement avec les champs de forces $\boldsymbol{F}_i^d, i = 1, n$ et n-uplet de tenseurs de déformations $(\epsilon_i, i = 1, n)$ cinématiquement admissibles avec les déplacements $\boldsymbol{U}_i^d, i = 1, n$ en supposant connues les déformations plastiques $(\epsilon_i^p, i = 1, n)$. Ceci est réalisé en résolvant les n équations d'équilibre (2.1) à travers la formulation variationnelle (2.2) qui, si on choisit une méthode à rigidité constante (initiale), s'écrit :

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{U}_i = \boldsymbol{Q}_i + \boldsymbol{Q}_i{}^p, \ i = 1 \ldots n \tag{2.4}$$

en notant :

$\boldsymbol{K}$ la matrice de rigidité élastique.

$\boldsymbol{U}_i$ le vecteur des déplacements nodaux.

$\boldsymbol{Q}_i$ le vecteur des efforts nodaux dus au champ de forces $\boldsymbol{F}_i^d$

$\boldsymbol{Q}_i{}^p$ le vecteur des efforts nodaux correspondant au champ de déformation plastique ϵ_i^p supposé connu.

- (iii) Recherche des solutions plastiquement admissibles

A partir des tenseurs de déformations $(\epsilon_i, i = 1, n)$ et des contraintes $(\sigma_i^S, i = 1, n)$ respectivement cinématiquement et statiquement admissibles, on détermine les tenseurs de déformations plastiques ϵ_i^p et les tenseurs de contraintes plastiquement admissibles σ_i^P à chaque instant t_i.
Pour cela, on procède graduellement instant après instant. On détermine le tenseur de déformations plastiques ϵ_{i+1}^p à l'instant t_{i+1}, de manière implicite, en projetant

l'incrément de déformation $\epsilon_{i+1} - \epsilon_i$ sur le convexe d'élasticité avec l'état initial $(\sigma_i^P, \epsilon_i, \epsilon_i^p)$ à l'instant t_i (figure 2.2).
Le calcul de l'incrément de déformation $\epsilon_{i+1}^p - \epsilon_i^p$ plastique donne alors :

$$\epsilon_{i+1}^p - \epsilon_i{}^p = \frac{1}{2\mu + C} < \|dev\Sigma\| - k(\epsilon^{p^c}) > \frac{dev\Sigma}{\|dev\Sigma\|}$$

avec: $dev\Sigma = 2\mu\, dev\,(\epsilon_{i+1} - \epsilon_i) + dev\,\sigma_i^P - C\,\epsilon_i^p$.
Le tenseur de contraintes σ_{i+1} est, alors, déduit de la loi de comportement écrite sous une forme incrémentale :

$$\sigma_{i+1}^P - \sigma_i^P = \boldsymbol{D}\,(\epsilon_{i+1} - \epsilon_i) - (\epsilon_{i+1}^p - \epsilon_i^p) \tag{2.5}$$

Ainsi, les n-uplet $(\sigma_i^P, i = 1, n)$ des champs de contraintes plastiquement admissibles et $(\epsilon_i^p, i = 1, n)$ des déformations plastiques sont complètement déterminés sur le cycle entier.

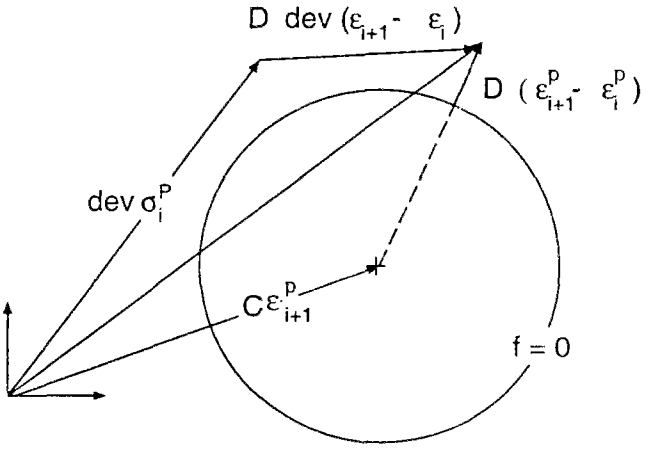


Figure 2.2: Calcul de l'incrément de déformation plastique.

- (iv) Condition de périodicité des déformations plastiques

  A la fin de l'étape précédente, on impose aux champs de déformations plastiques d'être périodiques en initialisant la valeur ϵ_1^p du début du cycle à celle ϵ_n^p de fin du cycle. Et on repart à l'étape (ii) avec comme champ de déformations plastiques initiales le nouveau n-uplet de champs de déformations plastiques $(\epsilon_i^p, i = 1, n)$ qui est périodique.

Ce processus itératif est arrêté à la fin de l'étape (ii) lorsque le n-uplet de tenseurs de contraintes $(\sigma_i^S, i = 1, n)$ vérifie le critère de plasticité à tous les instants t_i.
Ainsi on obtient sur tout le cycle des champs de contraintes statiquement et plastiquement admissibles et périodiques par construction. Les champs de déformations plastiques obtenus sont aussi périodiques.

En cas de rochet (qui peut arriver dans le cas, par exemple, de matériau plastique parfait ou de matériau élastoplastique à écrouissage cinématique non linéaire), la méthode divergerait.

Remarque : Néanmoins, on pourrait, dans le cas du rochet, calculer l'état mécanique après un nombre déterminé de cycles. Pour cela, on utilise le processus itératif décrit précédemment sur l'intervalle de temps correspondant à ce nombre de cycles sans imposer la condition de périodicité en fin de cycle.

2.3.2 Algorithme

L'algorithme de la méthode cyclique se présente comme suit :

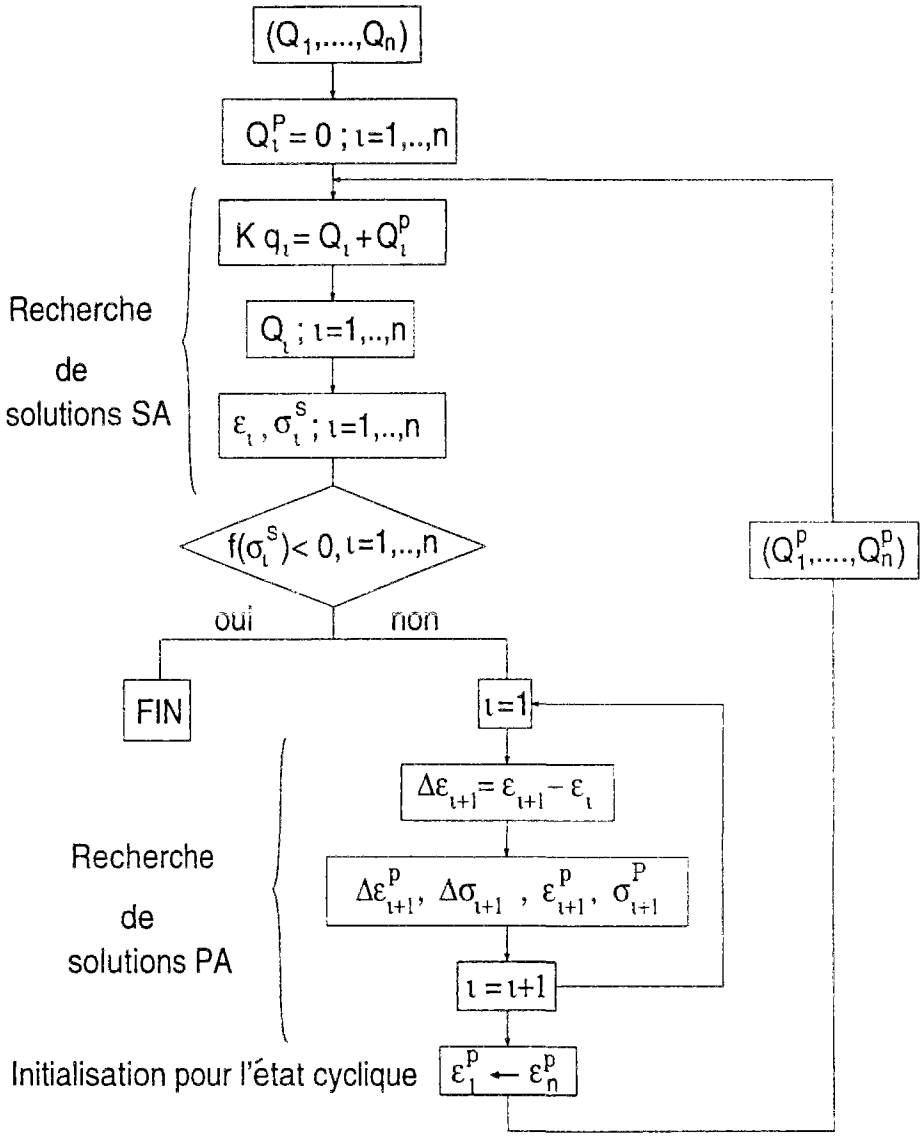


Figure 2.3: Algorithme numérique la méthode cyclique.

Remarque : Il est important de noter que l'algorithme ainsi présenté est différent de celui d'Akel et Nguyen ([2]). En effet, dans leur version, ces auteurs itèrent sur l'étape de recherche de solutions plastiquement admissibles de telle façon, qu'à la fin de celle-

ci, le champ de déformations plastiques soit périodique (figure 2.4). Alors qu'ici, on se contente de faire une seule fois l'étape de recherche de solutions plastiquement admissibles et d'imposer à la fin de celle-ci la condition de périodicité (figure 2.3). Ceci a l'avantage de supprimer un processus itératif et donc d'aller beaucoup plus vite que la version d'Akel et Nguyen.

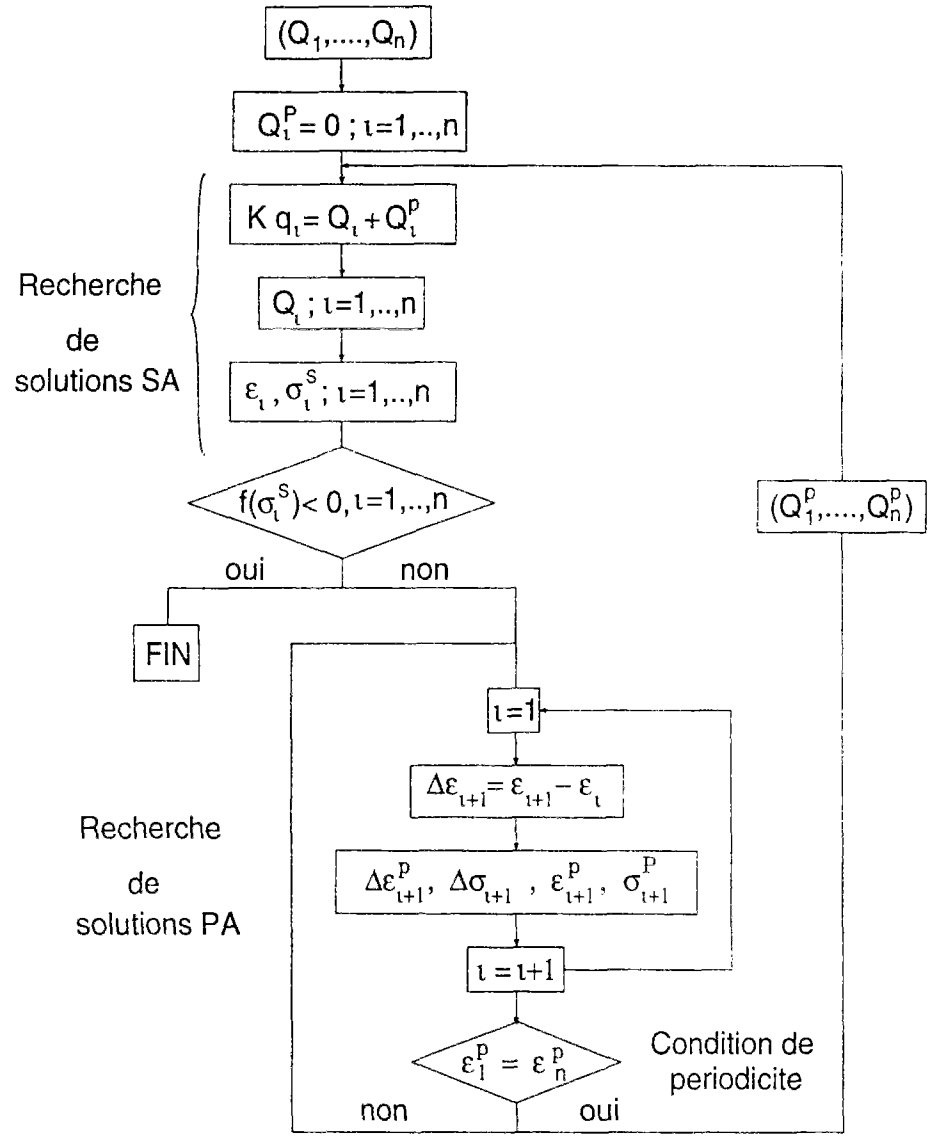


Figure 2.4: Algorithme numérique la méthode numérique de Akel et Nguyen (1989).

2.4 Mise en œuvre de la méthode cyclique directe dans le cas de chargement mobile cyclique

Dans le paragraphe précédent, nous avons exposé les principes de la méthode cyclique directe dans le cas d'un chargement périodique imposé sur une frontière fixe. Ici, nous nous intéressons à une structure soumise à un chargement mobile cyclique. Nous allons voir comment ramener ce cas à celui d'un chargement périodique imposé sur une frontière fixe.
Considérons un solide Ω représenté dans la figure 2.5 soumis à un chargement mobile et répété. Le chargement est périodique dans le temps, de période T. On note $\boldsymbol{F}^d(t,x)(t \in [0,T]),(x \in \Gamma_t)$ le champ des forces imposé sur la surface Γ_t à chaque instant t.

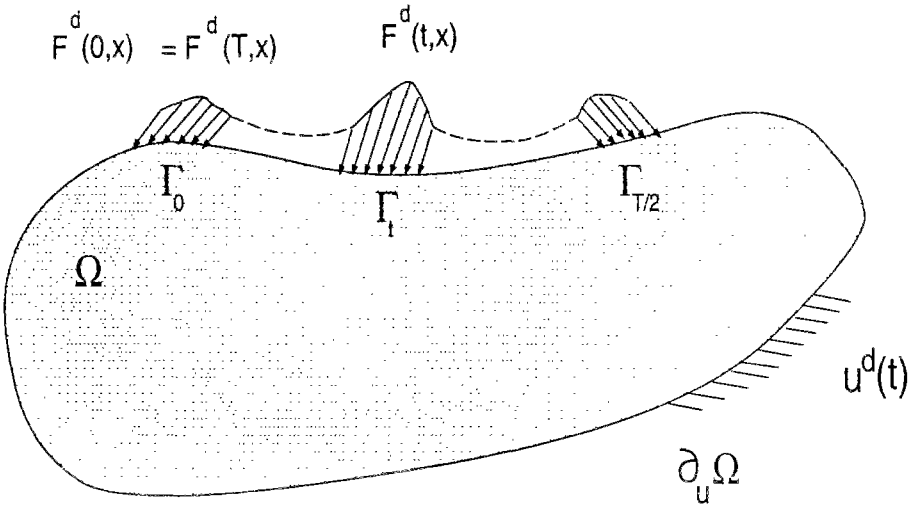


Figure 2.5: Cas de chargement mobile.

Pour pouvoir appliquer la méthode cyclique directe comme dans la section 2.3, nous allons ramener le champ de forces mobile et répétitif en un champ de forces périodique sur une frontière fixe . Notons Γ la surface balayée par le chargement pendant une période. Plus précisément :

$$\Gamma = \bigcup_t \Gamma_t \tag{2.6}$$

On définit alors le champ de forces $\mathcal{F}^d(t,x)$ imposé sur Γ par :

$$\mathcal{F}^d(t,x) = \begin{cases} \boldsymbol{F}^d(t,x) & si \quad x \in \Gamma_t \\ 0 & si \quad x \in \Gamma/\Gamma_t \end{cases} \tag{2.7}$$

où Γ/Γ_t est le complémentaire de Γ_t dans Γ.
Ainsi le champ de forces $\mathcal{F}^d(t,x)$ est évidemment périodique de période T et défini sur une frontière Γ fixe.

2.5 Conclusion

La méthode cyclique directe mise au point dans ce chapitre permet de calculer directement l'état mécanique stabilisé pour une structure soumise à un chargement périodique imposé sur une surface fixe. La divergence de la méthode constitue un indicateur d'une réponse de la structure de type rochet. Cependant, dans un tel cas, elle pourrait servir à calculer les grandeurs mécaniques après un nombre déterminé de cycles de chargement. Son principe, l'algorithme de calcul ainsi que les différences avec la méthode d'Akel et Nguyen ont été exposés.
Cette méthode s'applique aussi bien pour un chargement périodique imposé à des frontières fixes que pour un chargement mobile en déplacement répété.

Chapitre 3

Application à l'étude du fretting

3.1 Introduction

Le principe de la méthode cyclique directe dans le cas d'un chargement cyclique quelconque a été décrit au chapitre précédent. Nous allons utiliser cette méthode pour calculer les grandeurs mécaniques résultant du chargement dû au fretting. Nous allons définir au préalable le cycle des efforts extérieurs de contact avec frottement entre deux solides soumis à des petits débattements. Les hypothèses de détermination de ce trajet seront clairement explicitées.
On distinguera deux régimes différents de glissement:

- un régime de glissement partiel où les solides restent en contact à travers une zone d'adhérence délimitée de part et d'autre d'une zone de glissement périphérique.

- un régime de glissement total pour lequel les solides entrent en glissement total pendant le cycle du chargement.

On se propose de déterminer les réponses mécaniques pour ces deux types de cycles de chargement, et par la même occasion, de valider numériquement la méthode cyclique directe par la méthode incrémentale classique. Une étude paramétrique nous permettra d'établir des cartes d'adaptation et d'accommodation pour les deux régimes de glissements.

3.2 Problème posé et modèle

On considère deux solides cylindriques (1) et (2) en contact soumis à un mouvement oscillatoire de faible amplitude (figure 3.1). On impose un effort normal constant P et un effort tangentiel $T(t)$ dépendant du temps et décrivant un cycle de chargement entre $-T_{max}$ et T_{max}.

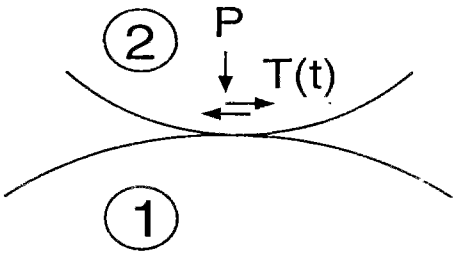


Figure 3.1: Cas étudié

Le solide (1) est soumis dans la zone de contact à des pressions normales et tangentielles dues aux efforts globaux imposés. Si on suppose que les solides (1) et (2) ont un comportement élastoplastique, les contraintes de contact devraient être déduites d'un calcul de contact élastoplastique. Néanmoins, comme ça a été discuté dans la section 1.2.1, on ne commet pas une grande erreur pour le calcul des contraintes de contact en supposant les matériaux élastiques.
Pour le réaliser, on adopte alors les hypothèses de la théorie de Hertz [32] à savoir :

- les solides en contact sont élastiques;
- le contact est non conforme;
- la taille de la zone de contact est petite devant les dimensions et les rayons de courbures des solides en contact.

On représente alors le solide (1) par un demi espace infini (figure 3.2) soumis à des pressions normales de Hertz $p(x)$:

$$p(x) = p_0\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

où p_0 est la pression maximale de Hertz et a la demi-largeur de contact calculées en fonction des caractéristiques géométriques et élastiques des solides en contact.
Les contraintes tangentielles $q(x)$ décrivent un cycle fonction de l'effort tangentiel $T(t)$ qui est décrit dans la suite.

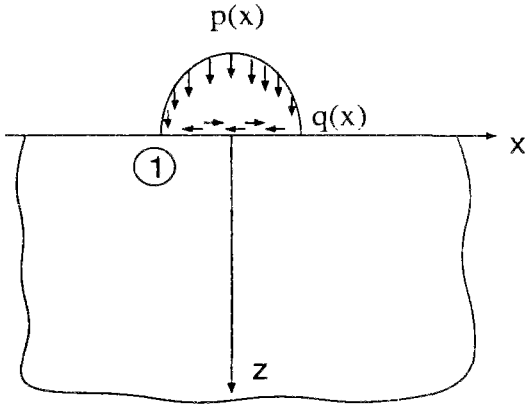


Figure 3.2: Modèle de calcul

3.3 Description du chargement et régimes de glissement

L'effort tangentiel $T(t)$ décrit un cycle entre $-T_{max}$ et T_{max}. En supposant la loi de frottement de Coulomb et en notant μ le coefficient de frottement, on distingue deux régimes de glissement :

3.3.1 Régime de glissement partiel : $T_{max} < \mu P$

Le maximum de l'effort tangentiel global pendant le cycle n'excède pas la valeur de glissement total. Le chargement reste sur place et ne se déplace pas. En plus des pressions normales de Hertz constantes, le demi espace infini est soumis sur la zone de contact $[-a, +a]$ à un cycle de contraintes tangentielles dépendant de l'effort tangentiel $T(t)$. On a représenté sur la figure 3.3 les contraintes tangentielles données par la théorie de Mindlin [46] correspondant aux différentes valeurs de l'effort tangentiel pendant un cycle entier. Dans la zone de contact, il y a une région d'adhérence, où la pressions tangentielle n'excède pas la la valeur de glissement total en ce point ($\mu p(x)$), délimitée de part et d'autre par une région de glissement local où la contrainte tangentielle est égale à $\mu p(x)$.
Lorsque l'effort tangentiel est à sa valeur maximale T_{max} (configuration A), les contraintes tangentielles sont dans le sens positif de l'axe x et la zone d'adhérence est minimale et a une demi-largeur c_{max}. Ces contraintes sont données par :

$$\begin{cases} q(x) = & \mu p_0 \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}} & c_{max} \leq |x| \leq a \\ q(x) = & \mu p_0 \left[\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}} - \dfrac{c_{max}}{a} \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{{c_{max}}^2}} \right] & 0 \leq |x| \leq c_{max} \end{cases} \tag{3.1}$$

c_{max} s'exprime en fonction de T_{max} par :

$$\frac{c_{max}}{a} = \sqrt{1 - \frac{T_{max}}{\mu P}} \tag{3.2}$$

L'effort tangentiel commence à diminuer dans la configuration B. Les contraintes tangentielles dues à l'effort T résultent de la superposition de celles dues à T_{max} (données par la formule (3.1)) et de celles dues à $\Delta T = T - T_{max}$. Comme ΔT est négatif, il y a inversion du sens glissement aux bords du contact et les cisaillements doivent valoir dans cette région au total $-\mu p(x)$ [29, 32]. Les contraintes tangentielles dues à ΔT sont de type Mindlin mais elles doivent valoir $-2\mu p(x)$ dans la zone de glissement de telle façon qu'en superposant avec les contraintes tangentielles dues à T_{max}, on obtient $-\mu p(x)$ dans les régions de glissement au bord du contact. Les contraintes tangentielles correspondant à ΔT sont données par :

$$\begin{cases} q(x) = & -2\mu p_0 \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}} & c \leq |x| \leq a \\ q(x) = & -2\mu p_0 \left[\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}} - \dfrac{c}{a} \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{c^2}} \right] & 0 \leq |x| \leq c \end{cases} \tag{3.3}$$

c est fonction de T :

$$\frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{T_{max} - T}{2\mu P}} \tag{3.4}$$

La zone d'adhérence de demi-largeur c est fonction de T et est donnée par la formule (3.4). Elle augmente quand T diminue. L'effort $T(t)$ continue à diminuer en s'annulant en C jusqu'à atteindre la valeur minimale $-T_{max}$ dans la configuration D où les contraintes tangentielles sont dans le sens négatif sur toute la zone de contact avec une zone d'adhérence minimale de demi-largeur c_{max} (figure 3.3). Elles valent :

$$\begin{cases} q(x) = -\mu p_0 \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}} & c_{max} \leq |x| \leq a \\ q(x) = -\mu p_0 \left[\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}} - \dfrac{c_{max}}{a} \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{{c_{max}}^2}} \right] & 0 \leq |x| \leq c_{max} \end{cases} \tag{3.5}$$

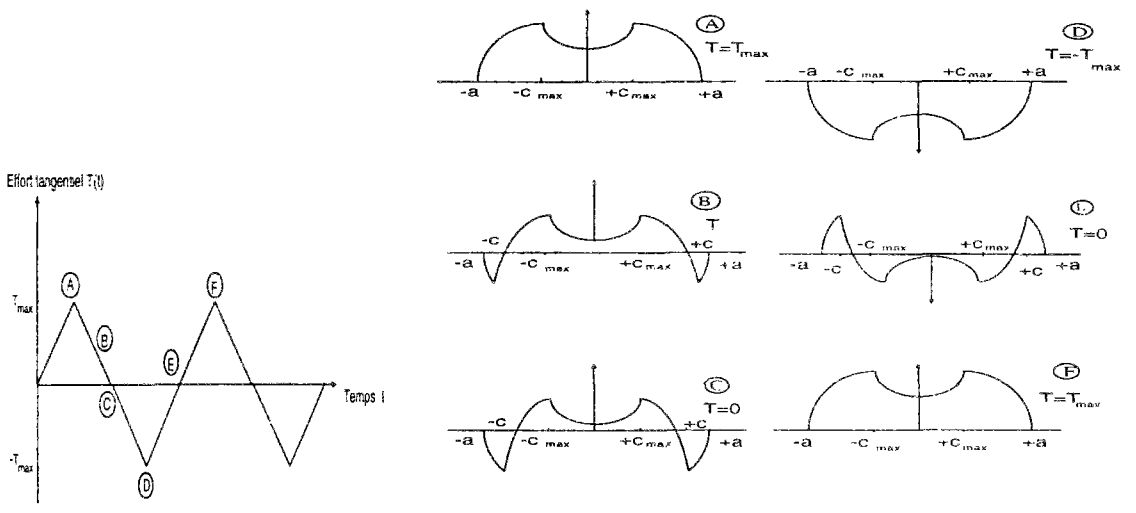


Figure 3.3: Cycle de contraintes tangentielles de contact dans le cas de glissement partiel

On peut écrire les équations des contraintes tangentielles valables de la phase A jusqu'à phase D de la façon suivante:

$$\begin{cases} q(x) = -\mu p_0 \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}} & c \leq |x| \leq a \\ q(x) = -\mu p_0 \left[\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}} - 2\dfrac{c}{a} \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{c^2}} \right] & c_{max} \leq |x| \leq c \\ q(x) = -\mu p_0 \left[\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}} - 2\dfrac{c}{a} \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{c^2}} + \dfrac{c_{max}}{a} \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{{c_{max}}^2}} \right] & |x| \leq c_{max} \end{cases} \tag{3.6}$$

où c_{max} et c sont exprimés par les formules (3.4) et (3.2).
A partir de la configuration D, l'effort $T(t)$ commence à augmenter de $-T_{max}$ jusqu'à valoir 0 en E. Les contraintes tangentielles dues à T se déduisent en superposant celles résultant de $-T_{max}$ et de $\Delta T = T + T_{max}$ qui est positif. Le sens du glissement et des contraintes tangentielles s'inverse dans la zone de glissement. Pour être égales à $+\mu p(x)$ au total, les contraintes tangentielles dues à ΔT doivent valoir $+2\mu p(x)$ dans les zones de glissement au bord du contact. Elles sont données par :

$$\begin{cases} q(x) = 2\mu p_0 \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}} & c \leq |x| \leq a \\ q(x) = 2\mu p_0 \left[\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}} - \dfrac{c}{a} \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{c^2}} \right] & 0 \leq |x| \leq c \end{cases} \tag{3.7}$$

où c est donné par l'équation suivante :

$$\frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{T_{max} + T}{2\mu P}} \tag{3.8}$$

En F, l'effort $T(t)$ et les contraintes tangentielles retrouvent respectivement la valeur T_{max} et la distribution initiale en A décrivant ainsi un cycle entier.
Les contraintes de cisaillement valables entre les configurations D et G du cycle sont résumées par les équations suivantes :

$$\begin{cases} q(x) = \mu p_0 \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}} & c \leq |x| \leq a \\ q(x) = \mu p_0 \left[\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}} - 2\dfrac{c}{a}\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{c^2}} \right] & c_{max} \leq |x| \leq c \\ q(x) = \mu p_0 \left[\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}} - 2\dfrac{c}{a}\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{c^2}} + \dfrac{c_{max}}{a}\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{{c_{max}}^2}} \right] & |x| \leq c_{max} \end{cases} \tag{3.9}$$

où c_{max} et c sont exprimés par les formules (3.2) et (3.8).

3.3.2 Régime de glissement total : $T_{max} = \mu P$

Dans le cas où l'effort tangentiel atteint la valeur μP, il y a glissement total des solides en contact. Le chargement se déplace d'une distance δ puis revient à sa position initiale au cours d'un cycle. Les pressions normales de Hertz appliquées au demi-espace infini sont constantes et les contraintes tangentielles de Mindlin varient et sont représentées sur la figure 3.4 au cours d'un cycle.
Dans la configuration A, l'effort tangentiel vaut $-\mu P$ et les contraintes tangentielles valent $-\mu p(x)$. A partir de cet instant, l'effort croît dans la configuration B en passant par 0 en C jusqu'à atteindre μP dans la configuration D. Les contraintes tangentielles pour la valeur T de l'effort s'obtiennent par la superposition de $-\mu p(x)$ correspondant à $-T_{max}$ et de celles résultant de $\Delta T = T + T_{max}$. Comme $\Delta T = T + T_{max}$ est négatif, les contraintes tangentielles doivent valoir au total $\mu p(x)$ dans les zones de glissement au bord du contact. Les contraintes tangentielles dues à ΔT doivent alors satisfaire $2\mu p(x)$ dans la zone de glissement et sont donc exprimées par les formules (3.7) et (3.8).
Les équations des contraintes tangentielles valables entre les configurations A et D sont données par superposition:

$$\begin{cases} q(x) = \mu p_0 \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}} & c \leq |x| \leq a \\ q(x) = \mu p_0 \left[\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}} - 2\dfrac{c}{a}\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{c^2}} \right] & |x| \leq c \end{cases} \tag{3.10}$$

c est donné par :

$$\frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{T_{max} + T}{2\mu P}}$$

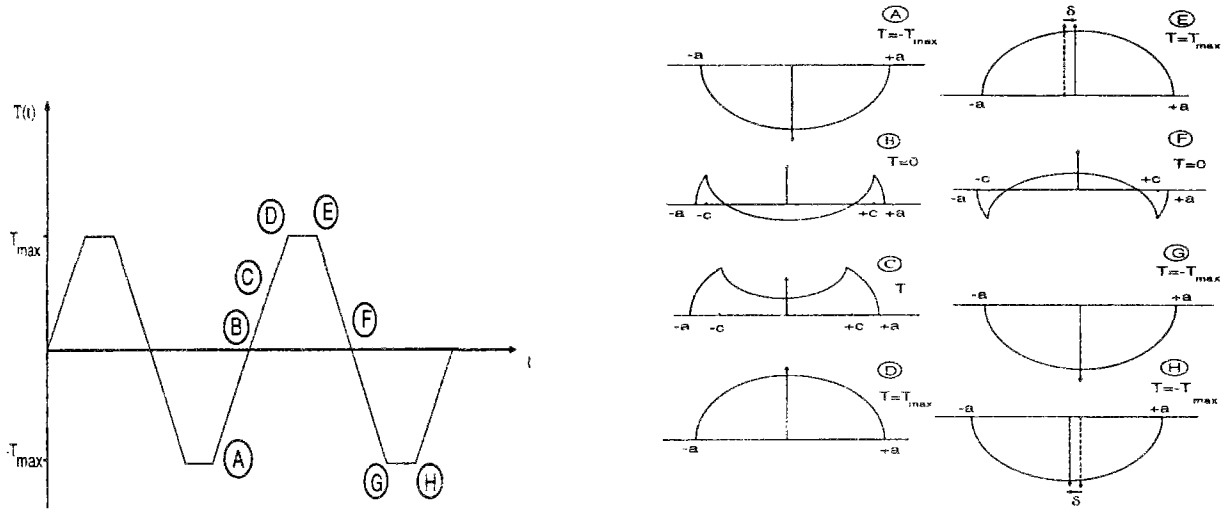


Figure 3.4: Cycle de contraintes tangentielles de contact dans le cas de glissement total

A l'état D, les contraintes de cisaillement en surface sont égales à $\mu p(x)$, les solides en contact sont en glissement total et le chargement se déplace alors d'une distance δ dans le sens positif de l'axe x. L'effort tangentiel décroît de μP à l'état E à la valeur 0 en F puis atteint $-\mu P$ en G. Les contraintes de cisaillement en surface correspondant à l'effort T sont obtenues, comme avant, par superposition de $\mu p(x)$ et de celles résultant de $\Delta T = T - T_{max}$ données par les formules (3.3) et (3.4).
Lorsque les contraintes tangentielles valent $-\mu p(x)$ sur toute la zone de contact dans la configuration G, le chargement se déplace dans le sens négatif de l'axe x d'une distance δ pour revenir à la position initiale occupée en A, décrivant ainsi un cycle entier.
Les contraintes tangentielles valables entre E et G du cycle sont résumées par les équations suivantes :

$$\begin{cases} q(x) = & -\mu p_0 \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}} & c \leq |x| \leq a \\ q(x) = & -\mu p_0 \left[\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}} - 2\dfrac{c}{a}\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{c^2}} \right] & |x| \leq c \end{cases} \tag{3.11}$$

c est donné par :

$$\frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{T_{max} - T}{2\mu P}}$$

Remarque : l'amplitude de déplacement δ dépend évidemment des rigidités et des caractéristiques géométriques des matériaux des deux solides en contact. D'ailleurs, elle s'exprime analytiquement dans le cas de sphères en contact [32], mais elle ne peut être calculée dans le cas de contact de cylindres infinis qui est étudié ici.

3.4 Validation numérique de la méthode cyclique directe

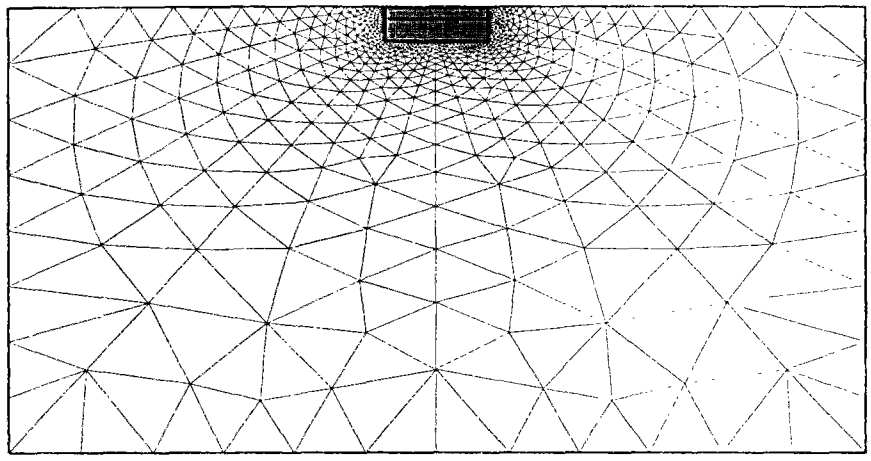


Figure 3.5: Maillage.

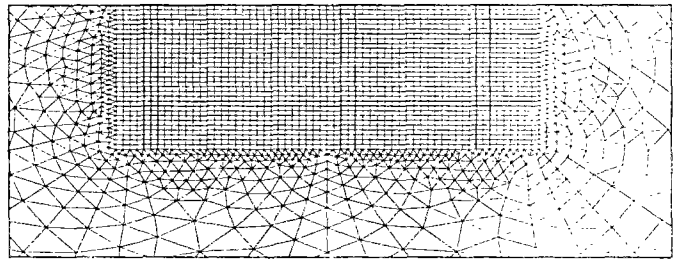


Figure 3.6: Partie raffinée du maillage sous la zone de contact.

On compare la méthode cyclique directe à la méthode incrémentale. Un même maillage est utilisé pour les deux méthodes. Le demi-espace infini est maillé comme indiqué sur la figure 3.5 avec un raffinement sous la zone de contact (figure 3.6). La plus petite maille a pour taille $a/20$. Le maillage comporte 2693 nœuds et 3456 éléments (triangles et quadrangles). Les calculs sont effectués sur une station HP750. Le comportement du matériau est élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire. Les caractéristiques du matériau sont reportées dans le tableau 3.1.

3.4.1 Cas du glissement partiel

Les calculs ont été réalisés par les deux méthodes numériques dans le cas du chargement cyclique en glissement partiel décrit dans la section 3.3.1 avec les données reportées dans le tableau 3.2. Un état stabilisé adapté est obtenu par la méthode incrémentale après 7 cycles correspondant à un temps de calcul CPU de 50 minutes et par la méthode cyclique en 23 minutes de temps CPU. Les contraintes résiduelles obtenues par les deux méthodes sont représentées sur la figure 3.7 en fonction de la profondeur. Remarquons que le

Module de Young E	207 GPA
Coefficient de Poisson ν	0.3
Limite d'élasticité en cisaillement k	159.118 MPA
Coefficient d'écrouissage cinématique C	30 GPA

Tableau 3.1: Caractéristiques du matériau.

maximum est atteint en profondeur, les contraintes résiduelles à la profondeur $0.5a$ sont représentées en fonction de l'abscisse x sur la figure 3.8.

Rapport de la pression normale sur la limite de cisaillement p_0/k	3.5
Coefficient de frottement μ	0.3
Rapport de l'effort tangentiel maximal sur l'effort normal T_{max}/P	0.25

Tableau 3.2: Paramètres de calcul pour le glissement partiel.

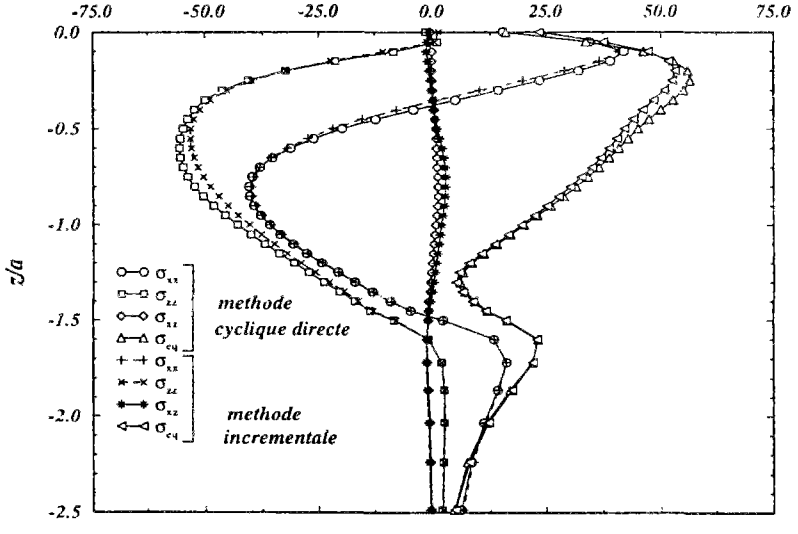


Figure 3.7: Comparaison des contraintes résiduelles en fonction de la profondeur par la méthode cyclique et la méthode incrémentale en glissement partiel.

Les trajets linéaires contraintes-déformations à l'état stabilisé pour la maille se trouvant en surface au bord du contact ($x = a$) sont comparés sur la figure 3.9. On remarque une parfaite concordance des résultats obtenus par la méthode cyclique directe et par la méthode incrémentale.

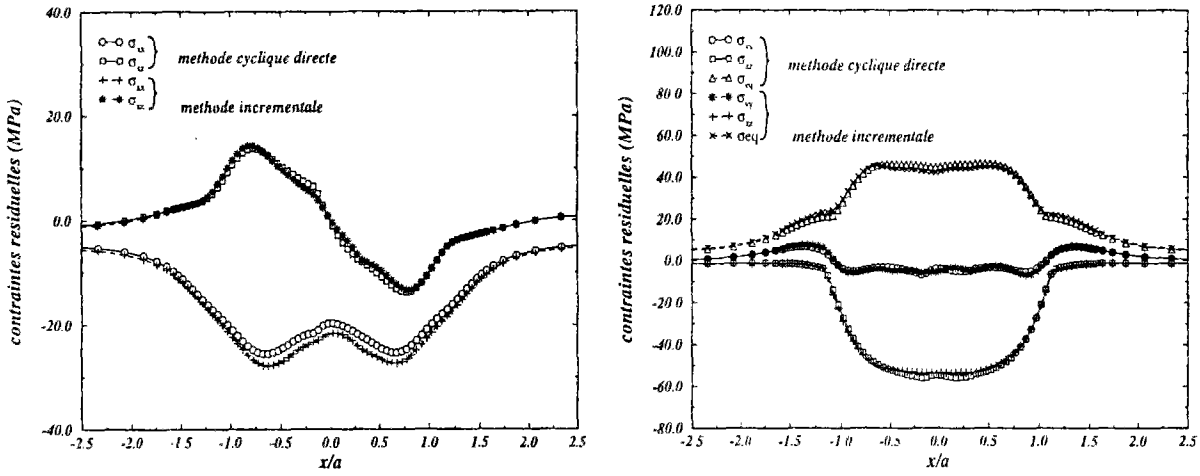


Figure 3.8: Comparaison des contraintes résiduelles à la profondeur 0.5a par la méthode cyclique et la méthode incrémentale en glissement partiel.

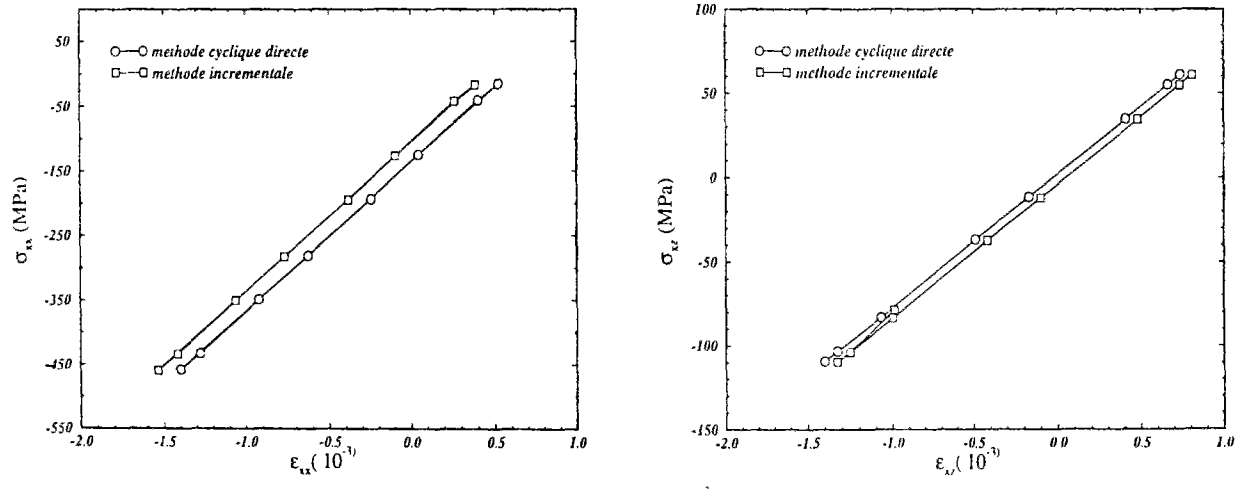


Figure 3.9: Comparaison des trajets contrainte-déformation plastique par la méthode cyclique et la méthode incrémentale en glissement partiel.

3.4.2 Cas du glissement total

La comparaison entre les deux méthodes a aussi été effectuée dans le cas du chargement cyclique avec glissement total décrit dans la section 3.3.2 avec les paramètres donnés dans le tableau 3.3.

Rapport de la pression normale sur la limite de cisaillement p_0/k	2
Coefficient de frottement μ	0.6
Amplitude de déplacement δ/a	0.2

Tableau 3.3: Paramètres de calcul pour le glissement total.

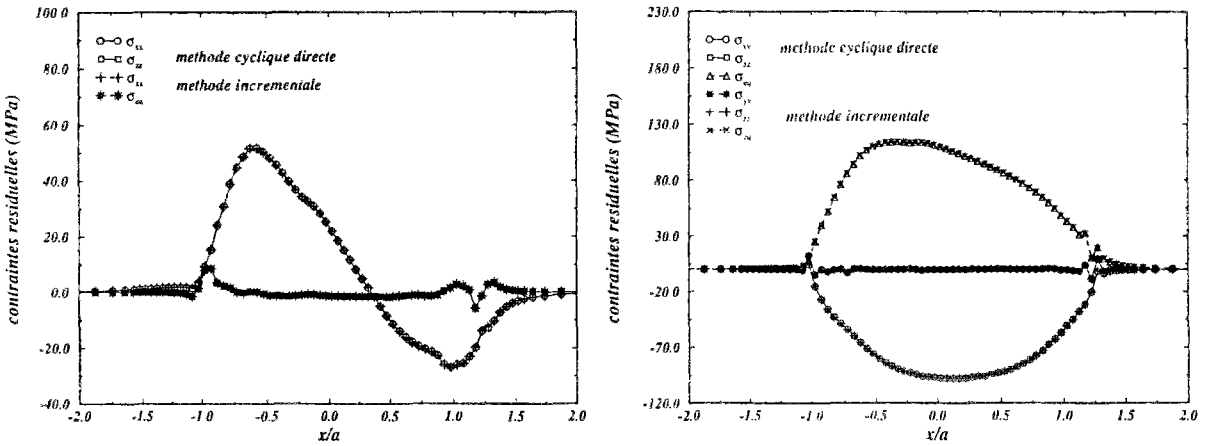


Figure 3.10: Comparaison des contraintes résiduelles en surface par la méthode cyclique et la méthode incrémentale en glissement total.

L'état stabilisé est accommodé. Cet état est atteint par la méthode incrémentale après 74 cycles (aller-retour) au bout de 30 heures de calcul en temps CPU alors qu'il n'est obtenu qu'au bout de 3 heures de temps CPU par la méthode cyclique directe. L'algorithme permet d'aller 10 fois plus vite que l'algorithme incrémental classique quand le chargement est fort, ce qui est le cas dans cet exemple avec un fort coefficient de frottement.
Les contraintes résiduelles en profondeur et en surface résultant des deux méthodes sont comparées dans les figures 3.10 et 3.11 montrant une parfaite concordance. Les trajets contrainte-déformation plastique pour la maille en surface au bord du contact ($x = a$) sont représentés sur la figure 3.12.

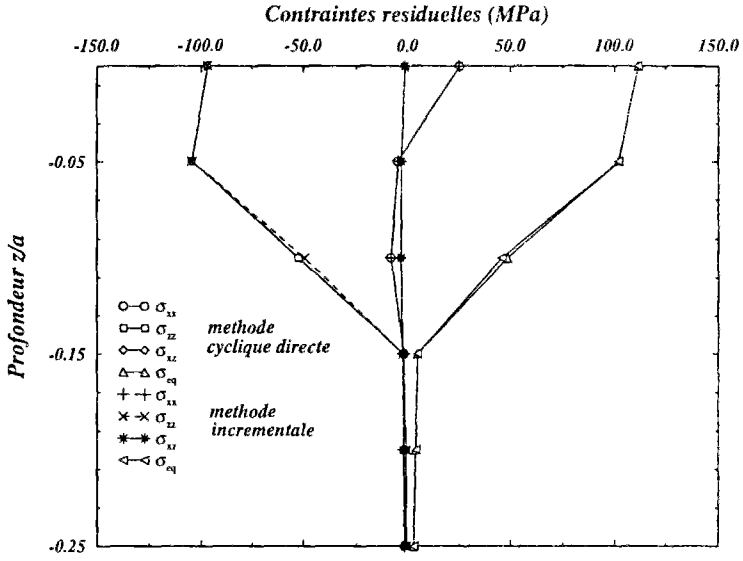


Figure 3.11: Comparaison des contraintes résiduelles en fonction de la profondeur par la méthode cyclique et la méthode incrémentale en glissement total .

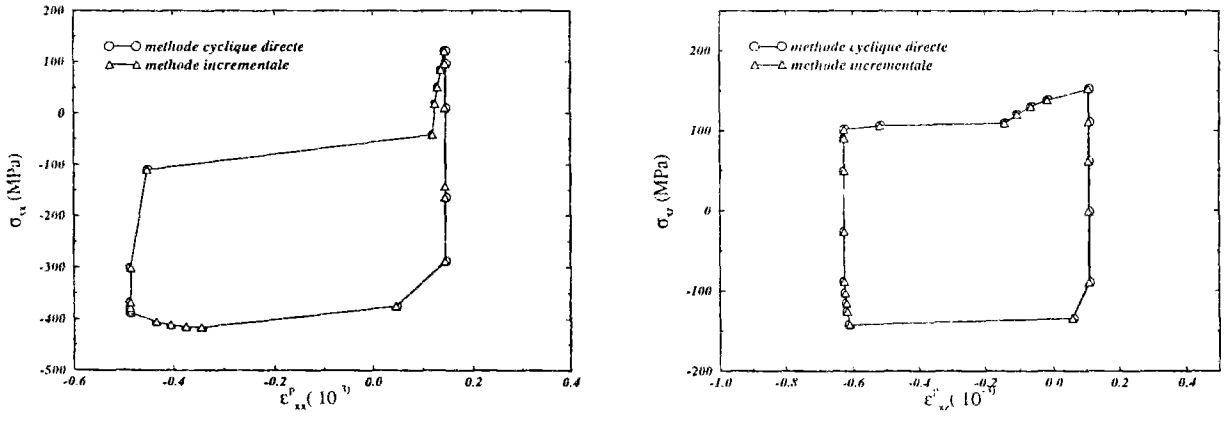


Figure 3.12: Comparaison des trajets contrainte-déformation plastique par la méthode cyclique et la méthode incrémentale en glissement total.

3.5 Résultats numériques et cartes d'adaptation

Nous avons étudié l'influence des différents paramètres du chargement et du matériau sur la nature de la réponse stabilisée. Ceci a été réalisé en des temps raisonnables grâce à la rapidité de l'algorithme adopté pour la méthode cyclique.
Plusieurs cartes d'adaptation et d'accommodation ont été ainsi établies dans le cas d'un matériau élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire. L'intérêt de dresser de telles cartes apparaîtra plus clairement dans la partie II. Mais on peut dire déjà que le type d'endommagement que subit une structure soumise au fretting est lié à la réponse stabilisée du matériau.
Nous allons présenter dans ce qui suit les résultats obtenus dans le cas de glissement partiel et total. Les caractéristiques du matériau considéré sont résumées dans le tableau 3.4.

Module de Young E	207 GPA
Coefficient de Poisson ν	0.3
Limite d'élasticité en cisaillement k	159.118 MPA
Coefficient d'écrouissage cinématique C	69 GPA

Tableau 3.4: Caractéristiques du matériau.

3.5.1 Glissement partiel

Ce cas correspond au chargement défini dans la section 3.3.1 pour lequel il n y a pas glissement total entre les deux solides en contact. Nous étudions l'influence de paramètres tels que l'effort de cisaillement et la pression normale.

Influence de l'effort de cisaillement

Sur la carte (figure 3.13), on fait varier les valeurs du rapport de l'effort de cisaillement sur l'effort normal T_{max}/N et de celui de la pression normale sur la limite de cisaillement p_0/k en fixant la valeur du coefficient de frottement μ à la valeur 0.3. On obtient ainsi dans l'espace des paramètres $(T_{max}/N,\ p_0/k)$ des domaines d'adaptation et d'accommodation. On note que la limite d'adaptation pour de faibles valeurs de l'effort de cisaillement est obtenue pour de très grandes valeurs de pressions normales (10 fois la limite de cisaillement pour une valeur de l'effort de cisaillement de $0.06N$). Ceci s'explique par le fait que la nature de l'état stabilisé est conditionnée par l'amplitude des contraintes. Celle-ci est justement faible car l'amplitude de l'effort de cisaillement est faible (la pression normale, bien que forte, reste constante durant le cycle).
Les fortes pressions normales ainsi obtenues dans la carte ne sont évidemment envisageables que parce que nous avons supposé un comportement élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire sans limiter les contraintes et les déformations. En réalité, le matériau et par conséquent la structure, présentent des charges limites. Par exemple dans le cas d'un demi espace infini parfaitement plastique soumis à une pression normale uniforme sur

la zone de contact, la pression limite vaut $k(2+\pi)$ (soit de l'ordre 5.3 k). Par conséquent, la courbe de la limite d'adaptation doit être tronquée à une telle valeur.

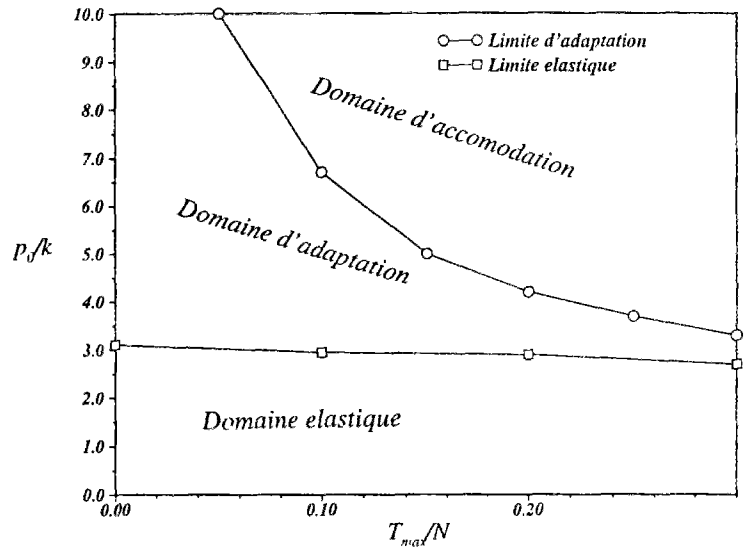


Figure 3.13: Carte d'adaptation en glissement partiel - influence de l'effort de cisaillement - (μ =0.3)

On a représenté sur la figure 3.14 les isovaleurs des déformations plastiques équivalentes obtenues pour les valeurs de de T_{max}/N, p_0/k et μ égales respectivement à 0.25, 0.3 et 0.3. Dans ce cas, l'état stabilisé est adapté (figure 3.13). Du fait du faible coefficient de frottement, les déformations plastiques maximales se trouvent en profondeur.

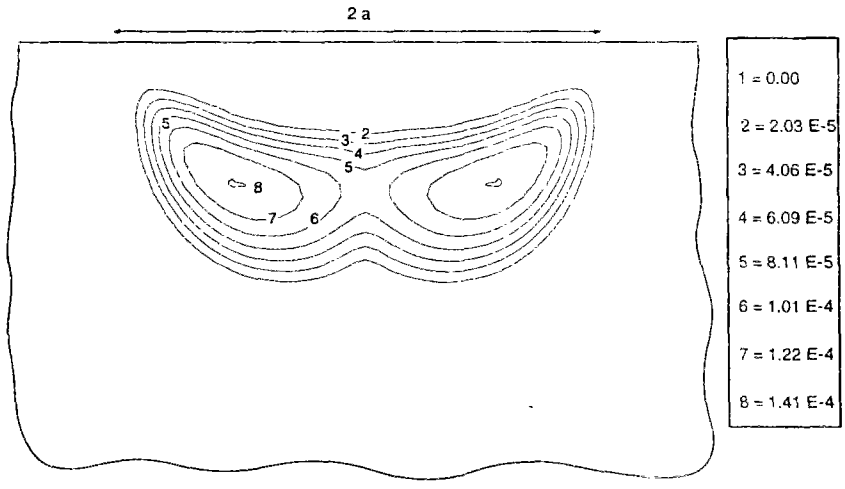


Figure 3.14: Isovaleurs des déformations plastiques équivalentes en glissement partiel

Influence de la pression normale

Sur la carte (figure 3.15), on a représenté les limites d'adaptation en fonction des valeurs du coefficient de frottement μ et du rapport T_{max}/N pour les pressions normales p_0/k égales à 0.2 et 0.25. C'est le cas pratique du fretting où l'effort normal est fixé constant et on fait varier le coefficient de frottement (par exemple par le biais du revêtement surfacique) ainsi que l'effort de cisaillement maximal (par exemple en contrôlant le déplacement imposé aux deux solides en contact).

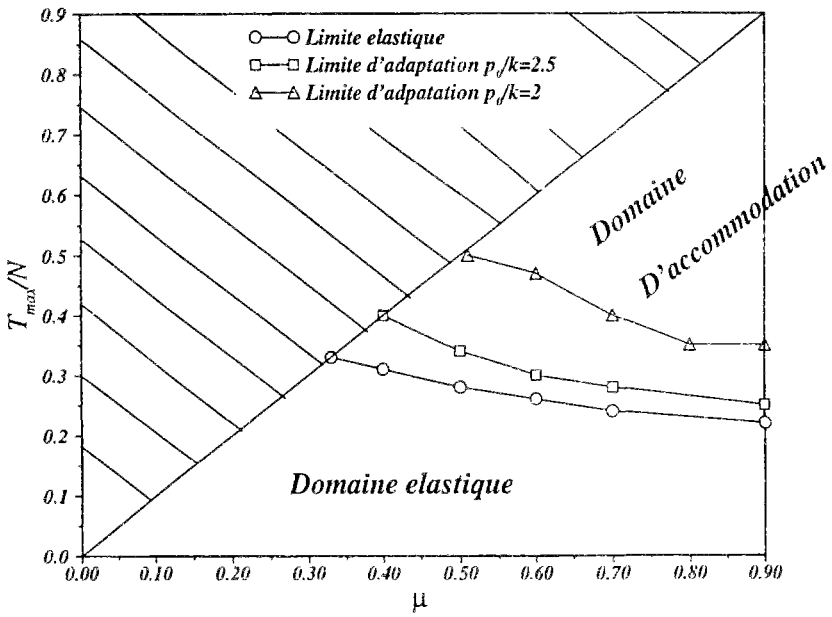


Figure 3.15: Carte d'adaptation en glissement partiel - influence de la pression normale -

En glissement partiel, la carte est définie pour les valeurs de T_{max}/N inférieures à μ. On remarquera que la limite d'adaptation diminue d'une façon monotone avec le coefficient de frottement. On constatera aussi que le fait d'abaisser la pression normale p_0 élève sensiblement la limite d'adaptation.

3.5.2 Glissement total

Ce cas correspond au chargement défini dans la section 3.3.2 pour lequel il y a glissement total entre les deux solides en contact. Nous étudions ici l'influence de l'amplitude de glissement.

Influence de l'amplitude de glissement

La figure 3.16 montre la carte d'états limites représentant les limites d'adaptation en fonction du rapport p_0/k et du coefficient de frottement μ pour les amplitudes de glissement de $0.2a$ et $0.5a$. Nous remarquons déjà que les limites d'adaptation en fretting sont inférieures à celles obtenues dans le cas de roulement avec glissement obtenues analytiquement par Johnson [35] et retrouvées par Maitournam et Dang Van [16]. Cela nous donne une idée sur la sévérité de l'inversion du sens des contraintes de cisaillement du contact

induit par le chargement de type fretting.
Pour les forts coefficients de frottement, les limites d'adaptation se confondent avec la limite élastique et sont presque indépendantes de l'amplitude de glissement. Dans ces circonstances, le domaine d'adaptation se trouve réduit et on passe, en augmentant la pression normale pour un coefficient de frottement constant, directement du domaine élastique au domaine d'accommodation. Par conséquent, pour les forts coefficients de frottement en régime de glissement total, la réponse du matériau est soit purement élastique soit accommodée.
Pour de faibles coefficients de frottement, la limite d'adaptation est obtenue pour de fortes valeurs de pressions normales (jusqu'à 10.3 fois la limite de cisaillement pour un coefficient de frottement nul et une amplitude de glissement de $0.2a$). Ceci se comprend dans la mesure où, sous une forte pression normale constante, l'amplitude des contraintes, résultant du cycle de chargement en glissement total avec un faible coefficient de frottement, est réduite. Comme précédemment, Les fortes pressions normales ainsi obtenues dans la carte doivent être limitées par la valeur limite découlement de la structure. Toujours pour de faibles coefficients de frottement, on remarquera que la limite d'adaptation est d'autant plus élevée que l'amplitude de glissement est faible.

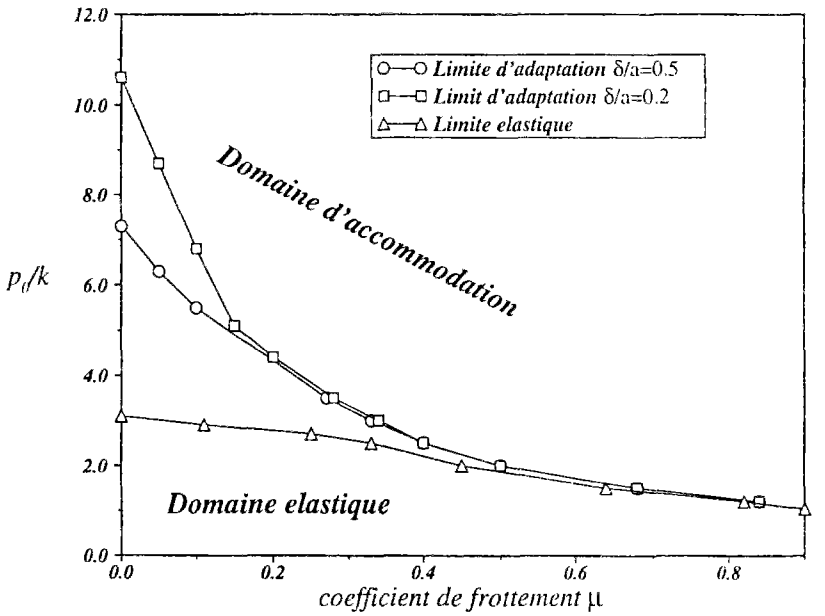


Figure 3.16: Carte d'adaptation en glissement total - influence de l'amplitude de glissement -

Les isovaleurs de déformations plastiques équivalentes sont représentées sur la figure 3.17 en glissement total à l'état stabilisé. Les calculs sont faits avec un pression normale p_0 égale à $2k$, un coefficient de frottement égal à 0.6 et pour une amplitude de déplacement δ égal à $0.2a$ conduisant à un état accommodé. Les déformations plastiques sont concentrées en surface du fait du fort coefficient de frottement.

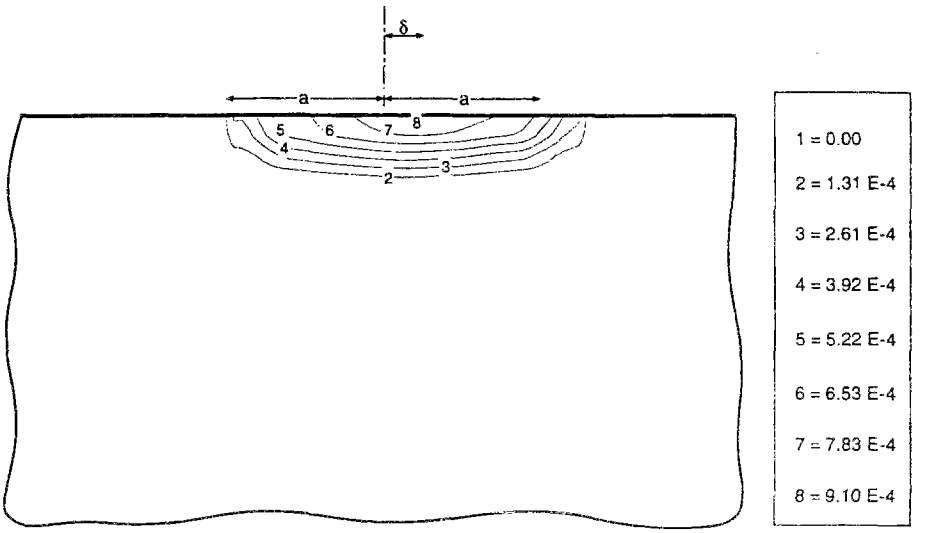


Figure 3.17: Isovaleurs des déformations plastiques équivalentes en glissement total

3.6 Conclusion

La méthode cyclique directe a été appliquée dans le cas du chargement périodique rencontré dans les problèmes du fretting. Nous avons commencé par décrire les deux types de chargements en glissement partiel et en glissement total. Les résultats obtenus à l'état stabilisé par la méthode cyclique ont été comparés à ceux obtenus par la méthode incrémentale. La concordance des résultats est très satisfaisante. Le temps de calcul est nettement diminué par le nouvel algorithme. On peut obtenir l'état stabilisé en 10 fois moins de temps qu'aurait nécessité la méthode incrémentale classique.
Quelques résultats ont été montrés dans le cas des deux types de chargements précédents. Des cartes d'adaptation représentant les limites d'adaptation en fonction des différents paramètres ont été dressées.
En glissement partiel, nous avons vu que la limite d'adaptation est élevée pour les faibles valeurs de l'amplitude de l'effort tangentiel et qu'elle décroît avec l'effort normal appliqué. En glissement total, la limite d'adaptation est une fonction décroissante de l'amplitude de glissement. Elle est importante pour les faibles valeurs du coefficient de frottement. Pour des forts coefficients de frottement, la limite d'adapatation est quasi-indépendante de l'amplitude de glissement. Dans tous les cas, on notera que les limites d'adaptation obtenues en fretting sont moins importants que celles obtenues en roulement répété. Ceci montre la nocivité d'un chargement alterné avec inversion du sens des contraintes tangentielles de contact.

Conclusion

Nous rappelons que nous avons mis au point un algorithme qui permet de calculer directement l'état stabilisé pour les chargements périodiques.

Cette méthode a été appliquée pour le fretting moyennant certaines hypothèses sur les sollicitations extérieures à prendre. La comparaison avec la méthode incrémentale a donné des résultats satisfaisants. Les temps de calculs pour obtenir l'état stabilisé peuvent peuvent être dix fois moins importants que par la méthode classique.

La méthode cyclique directe a été appliquée dans le cas d'un comportement élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire pour lequel l'état stabilisé est l'adaptation ou l'accommodation. Elle peut être aussi appliquée pour un comportement où la réponse peut être éventuellement le rochet par exemple dans le cas d'un matériau élastoplastique à écrouissage cinématique non linéaire. Mais dans ce cas, le rochet est révélé par la divergence de l'algorithme.

Nous avons établi des carte qui donnent, suivant les différents paramètres, les limites d'adaptation et d'accommodation données dans le cas de régime de glissement partiel et total. Ces cartes nous révèlent, à travers la nature de l'état stabilisé du matériau, le type de fatigue oligocyclique ou polycyclique que pourrait subir la structure soumise au fretting.

Partie III

PRÉDICTION D'ENDOMMAGEMENTS EN FRETTING-FATIGUE

Introduction

Nous rappelons que suivant le mode de glissement, on identifie expérimentalement trois types d'endommagements en fretting-fatigue :

- régime de collage pour lequel aucune fissure ni de débris d'usure notables n'apparaissent après un million de cycles;
- régime mixte qui conduit à la fissuration et la rupture;
- régime de glissement total qui se caractérise par un détachement de particules et une usure sévère.

Dans cette partie, nous allons présenter les hypothèses et les résultats. Nous interpréterons les cartes de fretting-fatigue et ferons la prévision théorique des divers types d'endommagements correspondants aux différents régimes de glissement.

Nous commençons dans le premier chapitre par exposer les démarches utilisées pour prédire la durée de vie et les limites d'endurance. Nous présenterons ensuite notre démarche pour prédire l'amorçage des fissures basée sur la caractérisation des limites d'endurance du matériau déterminées indépendamment du chargement de fretting-fatigue. Puis nous rappelons le critère de fatigue multiaxial de Dang Van que nous utiliserons par la suite.

Suivant cette démarche, nous prédirons théoriquement les endommagements constatés expérimentalement et résumés sur une carte d'endommagements de fretting-fatigue. Cette carte a été établie à partir d'un essai que nous décrirons. Le cycle des sollicitations et les chargements à prendre en compte sont décrits, puis la méthode cyclique directe est appliquée pour calculer l'état mécanique stabilisé.

Chapitre 1

Initiation des fissures de fatigue: choix d'un critère

1.1 Introduction

Pour certaines conditions du chargement en fretting-fatigue (régime mixte), il y a apparition des fissures de fatigue qui conduisent à la rupture. Le mécanisme de fissuration comporte une phase d'amorçage et une phase de propagation.
Dans ce qui suit, les approches utilisées pour prédire la durée de vie en fretting-fatigue sont passées en revue. Ces méthodes sont regroupées en trois catégories suivant l'aspect étudié :

- méthodes empiriques de détermination de la limite d'endurance;
- méthodes de prédiction par la condition de propagation des fissures;
- méthodes de prédiction de l'initiation des fissures.

Nous nous sommes intéressés à la prédiction de l'initiation des fissures en fretting-fatigue. Notre approche consiste à appliquer un critère de fatigue multiaxial basé sur une modélisation multi-échelle pour décrire les mécanismes d'amorçage de fissures de fatigue. Nous rappelons les hypothèses de base ainsi que la façon dont ces critères ont été établis. Nous présentons plus en détail le critère de Dang Van que nous utiliserons dans le chapitre suivant.

1.2 Bibliographie sur la prédiction de la rupture en fretting-fatigue

Les expériences faites en fretting-fatigue montrent que les fissures s'amorcent aux bords de la zone de contact. En première phase, la fissure fait un angle de 40 à 45 de degrés par rapport à la surface et orientée vers l'intérieur de la zone de contact; Puis elle se branche pour se propager perpendiculairement jusqu'à la rupture sous l'effet de la contrainte volumique de fatigue.
La durée de vie d'une structure soumise au fretting-fatigue est la totalité du nombre de cycles à l'amorçage des fissures et de celui de leur propagation jusqu'à la rupture.
La première étape de la nucléation des fissures est un phénomène microscopique à l'échelle du grain et la deuxième étape de propagation est elle à l'échelle du volume représentatif du milieu continu où la mécanique de la rupture serait applicable.
Nous allons citer les principales démarches utilisées dans la littérature pour prédire la durée de vie et la limite d'endurance en fretting-fatigue.

1.2.1 Méthodes empiriques

Les premières tentatives de prédiction de la limite d'endurance en fretting-fatigue sont empiriques. Elles sont déduites à partir des courbes de Wolher en fonction du chargement extérieur et des géométries de contact.
On peut citer les travaux de Nichioka et Hirakawa [49] qui proposent une expression donnant la limite d'endurance σ_{dfwl} en fretting-fatigue pour un contact cylindre plan en fonction de la limite d'endurance σ_{dwl} en fatigue et de l'amplitude s de glissement :

$$\sigma_{dfwl} = \sigma_{dwl} - 2\mu p_0(1 - e^{-s/k})$$

où: p_0 est la pression maximale de Hertz,
μ le coefficient de frottement,
k est une constante pour le contact patin-éprouvette de fatigue.
Plus récemment, Fuji et Sato [62, 63] déterminent la limite d'endurance de fretting-fatigue en flexion alternée en se basant sur le critère de Tresca. Ils déterminent une amplitude équivalente de fretting-fatigue σ_{eqa} et la comparent à la limite d'endurance de fatigue σ_d :

$$\sigma_{eqa} = ((Kp_0)^2 + 2Kp_0\sigma_a + 4(\mu Kp_0)^2)^{1/2}$$

où : σ_a l'amplitude de la contrainte imposée,
K est le facteur de concentration de contrainte,
μ le coefficient de frottement,
p_0 est la pression maximale de Hertz.
L'inconvénient de telles méthodes est que leur utilisation ne peut être générale du fait de leur caractère empirique. En plus, elle ne tiennent pas compte du chargement de contact à travers les contraintes générées mais indirectement par l'amplitude de glissement ou le coefficient de concentration de contraintes. De telles méthodes ne peuvent servir que pour corréler les résultats d'essais pour lesquels ils ont été proposés. En aucun cas, on ne peut les utiliser en dehors de leurs contexte, notamment pour pouvoir prédire le comportement d'une autre structure soumise au fretting-fatigue.

1.2.2 Méthodes de prédiction basée sur une condition de propagation

La limite d'endurance suivant cette démarche est exprimée par la condition de non propagation des fissures sous le chargement dû au fretting-fatigue.
Dan le cadre de la mécanique de la rupture, Lindley et Nix [43] calculent l'amplitude de la variation du facteur d'intensité de contrainte ΔK en mode I représentatif des sollicitations cycliques dues à l'effort normal, l'effort tangentiel et la contrainte de fatigue. Ils comparent les valeurs de ΔK en fretting-fatigue aux valeurs correspondant à la fatigue simple pour différentes longueurs de fissures. La condition de propagation est donnée pour la valeur critique de longueur de fissure pour laquelle ΔK est égal au seuil ΔK_{seuil}.
La figure 1.1 résume les conclusion de leurs calculs et montre que les défauts en fretting se propagent pour une longueur plus petite qu'en fatigue pure.
Nowell et Hills [26, 27] calculent de manière semi-analytique les facteurs d'intensité de contraintes en mode I et II sur des fissures inclinées en fonction de leur longueur et l'angle d'orientation. Ils trouvent que pour le maximum du coefficient est atteint pour un angle de 45 degrés, ce qui est en accord avec les observations expérimentales.

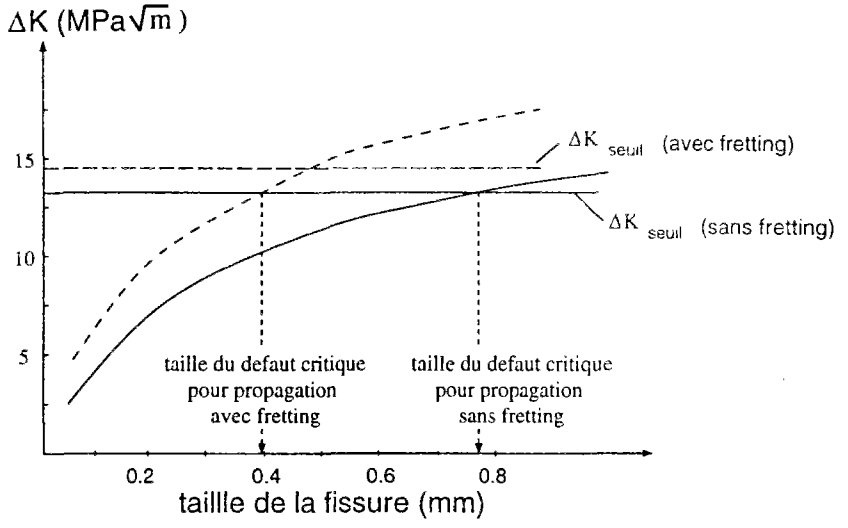


Figure 1.1: Amplitude de variation de facteurs d'intensité de contraintes comparé aux seuils de propagation en fonction de la longueur de fissures d'après Lindley et Nix (1992).

Par ailleurs, en confrontant les résultats de calculs du nombre de cycles de propagation de fissures obtenus avec la loi de Paris et les résultats d'essais du nombre de cycles à la rupture, Pook est arrivé à la conclusion que le nombre de cycles de propagation de fissures constitue qu'une petite partie ($2\,10^5$ cycles) de la durée de vie ($6\,10^5$ cycles) des échantillons et donc que l'étape d'amorçage de fissures conditionne la majeure partie de la tenue des échantillons au fretting-fatigue.

1.2.3 Amorçage des fissures

Dès lors que la phase d'initiation des fissures constitue une phase importante avant la naissance des fissures et leurs propagation, quelques auteurs ont tenté de proposer des critères d'initiation des fissures en fretting-fatigue.
En se basant sur le critère de Ruiz [61], Nowell et Hills postulent que l'amorçage de fissures apparaît lorsque les quantités $\sigma\tau\delta$ et $\tau\delta$ dépassent un certain seuil où τ est le cisaillement à l'interface, δ est le glissement local et σ est le maximum de contrainte de traction en surface. L'utilisation de ce critère a permis de prédire les sites d'amorçage en fretting fatigue aux bords du contact.
Bien que la quantité $\tau\delta$ trouve une signification physique dans l'énergie dissipée par frottement par unité de surface, une telle approche ne tient pas compte clairement des caractéristiques de fatigue du matériau mais les fait intervenir d'une façon globale dans le seuil. Celui-ci n'est d'ailleurs pas une quantité identifiable à partir d'essais de fatigue classiques.

1.3 Principe de notre approche de prédiction de l'amorçage des fissures

Nous essayons dans notre démarche de tenir compte de la résistance au fretting-fatigue d'une façon intrinsèque, en séparant les effets propres aux géométries des structures en

contact, aux chargements appliqués des propriétés propres au matériau. L'amorçage des fissures se fait par la comparaison des cycles de contraintes induits par le chargement cyclique à la limite d'endurance exprimée à l'aide d'un critère de fatigue totalement identifié à partir des essais classiques de fatigue.
Les trajets de contraintes dus en général au roulement avec ou sans glissement sont non proportionnels. Un critère de fatigue qui est sensé prédire l'amorçage des fissures dans les problèmes de contact doit donc être multiaxial.
Le critère de fatigue appliqué pour la prédiction d'initiation des fissures en fretting-fatigue est fondé sur une vue microscopique à l'échelle du grain des mécanismes de fatigue. Avant de présenter l'approche microscopique, on va présenter succinctement les critères traditionnellement utilisés et leurs limites de validité.

1.3.1 Critères empiriques

Ils sont formulés à partir de résultats d'essais. Ils consistent à déterminer la surface d'endurance dans le cas de chargements affines simples. Cette surface est décrite suivant des coordonnées en contraintes qui dépendent de l'essai effectué.
Des critères ont été établis pour différents types de chargements tel la droite de Goodman en traction-compression en présence d'une contrainte moyenne ou le critère de Gough Pollard en flexion-torsion [54] etc.
En dehors des chargements pour lesquels ils ont été établis, ces critères ne sont pas valables pour un autre type de chargement multiaxial plus complexe. De plus, l'écriture même du critère en fonction des paramètres liés à l'essai rend ces formules inapplicables pour d'autres types de trajets de chargements.

1.3.2 Critères multiaxiaux

Etant données les limites d'application des critères précédents, d'autres critères de fatigue ont été proposés pour des chargements multiaxiaux.
Les critères traditionnels sont écrits à partir de grandeurs macroscopiques à l'échelle du volume représentatif au sens de la mécanique des milieux continus. Ces critères, comme par exemple le critère de Findley ou de Marin, ne sont pas tout à fait en accord avec tous les résultats expérimentaux de fatigue faits pour différents types de chargements.
En rupture avec les critères traditionnels et dans l'objectif de mieux tenir compte de la physique des phénomènes, une nouvelle méthode basée sur une approche "micro-macro" pour l'établissement d'un critère de fatigue a été proposée tout d'abord par Dang Van [18, 19]. Des reformulations ont été faites ensuite par Papadopoulos [54] puis Deperrois [20].

1.3.3 Approche microscopique

Dans un essai de fatigue au voisinage de la limite d'endurance, l'éprouvette a un comportement apparemment élastique à l'échelle macroscopique. En revanche, certains des grains constitutifs du métal, subissent des phénomènes irréversibles. Dans cette vision globale à deux échelles, l'apparition d'une fissure de fatigue, au sens de la mécanique de la rupture, passe par plusieurs étapes pendant la durée de vie.
Pendant la première étape, quelques grains défavorablement, orientés par rapport aux

directions des sollicitations cycliques, se plastifient suivant des bandes de glissement. Des micro-fissures s'y développent et finissent par rompre le cristal. Ces micro-fissures ne sont pas détectables à l'échelle macroscopique. Puis vient une seconde étape de nucléation de micro-fissures. Celles-ci se joignent pour former une fissure détectable à l'échelle de l'ingénieur. Enfin, la fissure ou les fissures macroscopiques ainsi formées se propagent pour conduire à la rupture de l'éprouvette.
Dang Van propose un critère de fatigue basé sur le seuil de non nucléation des micro-fissures au niveau des grains et considère que celle-ci est conditionnée par la réponse élastoplastique du grain sous le chargement cyclique. Il y a nucléation des fissures, ou ce qui veut dire aussi rupture des cristaux, par cumul de la déformation plastique au niveau du grain dans le cas de l'accommodation ou le rochet du cristal dû au chargement cyclique. Dans le cas de l'adaptation, après s'être déformé plastiquement au début, le cycle des déformations au niveau du cristal devient élastique à l'état stabilisé et il n y a pas, dans ce cas, rupture du cristal et nucléation de fissures.
L'approche microscopique doit donc tenir compte du comportement élastoplastique du cristal et on doit donc pouvoir évaluer les contraintes microscopiques à partir des contraintes macroscopiques.

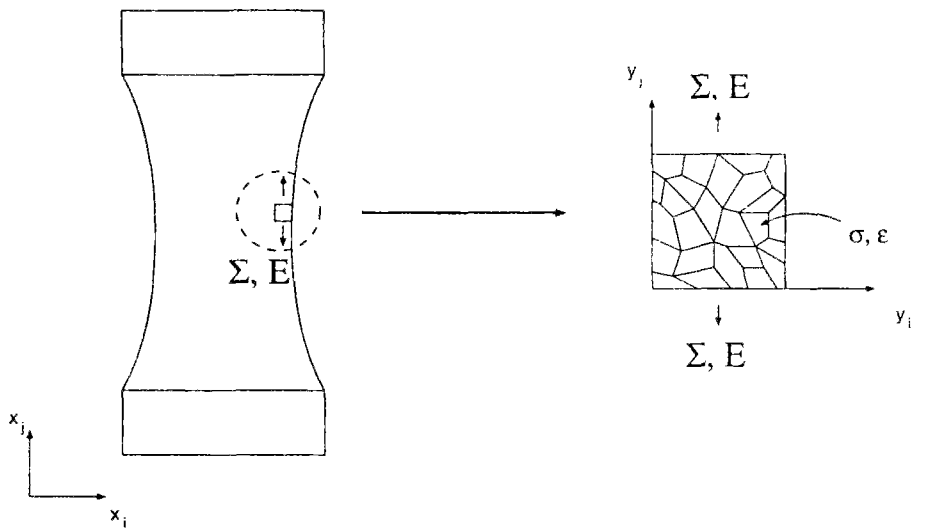


Figure 1.2: Échelles microscopique et macroscopique pour un métal polycristallin

Un grain qui commence à subir des déformations plastiques est considérée comme une inclusion plongée dans une matrice du reste du matériau (Fig.1.3). L'hypothèse de Lin Taylor est adoptée à savoir: la déformation du grain ϵ est égale à la déformation $\boldsymbol{E}$ de la matrice tout autour.
Sous l'hypothèse que la matrice d'élasticité du cristal et de la matrice autour sont égales et en supposant qu'on n'a pas de déformations plastiques macroscopiques, le tenseur de contraintes microscopiques $\boldsymbol{\sigma}$ s'écrit en fonction du tenseur de contraintes macroscopiques Σ et du tenseur des déformations plastiques $\boldsymbol{\epsilon^p}$ au niveau du grain et des coefficient élastiques comme suit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \Sigma + \boldsymbol{\rho}$$

où on désigne par $\boldsymbol{\rho}$, qui est égal à $-2\mu\boldsymbol{\epsilon^p}$, le champ de contraintes résiduelles microscopiques dans le grain.

Comme $\boldsymbol{\rho}$ est déviatorique, la pression hydrostatique macroscopique P est alors égale à la pression hydrostatique microscopique p.

$$P = \frac{1}{3}tr(\Sigma) = p = \frac{1}{3}tr(\boldsymbol{\sigma})$$

1.3.4 Critère de Dang Van

En adoptant cette vision à deux échelles et en s'inspirant du modèle uniaxial d'Orowan [53], Dang Van écrit le critère de fatigue comme une limitation locale, sur tout le cycle [0,T] de chargement et sur toute normale au grain $\underline{n}$, de la combinaison linéaire de la cission τ et la pression p microscopiques à l'état adapté sous la forme :

$$\forall t \in [0,T]\,,\ \forall \underline{n}\,,\ \| \underline{\tau}(t) \| + ap(t) \leq b$$

où a et b désignent les constantes du matériau et $\| \underline{\tau}(t) \|$ est la norme de la cission microscopique obtenue par :

$$\underline{\tau}(t) = \underline{\underline{\sigma}}(t).\underline{n} - (\underline{\underline{\sigma}}(t).\underline{n}).\underline{n}$$

Ainsi écrit, le critère de Dang Van tient compte de l'influence de l'effet d'une pression hydrostatique, confirmée par les observations expérimentales, qui va à l'encontre de l'amorçage des fissures.
Pour une normale donnée, le critère de plasticité du grain adopté est un cercle de rayon τ_y centré à l'origine :

$$\forall \underline{n}\,,\ \| \underline{\tau}(\underline{n}) \| \leq \tau_y$$

Comme à l'état adapté, il existe un tenseur de contraintes $\underline{\underline{\rho^*}}$ indépendant du temps tel que le champ de contraintes microscopiques à chaque instant du cycle $\underline{\underline{\sigma}}(t)$ s'écrit en fonction du champ de contraintes macroscopiques $\underline{\underline{\Sigma}}(t)$ sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = \underline{\underline{\Sigma}}(t) + \underline{\underline{\rho^*}}$$

Pour un plan de normale donné $\underline{n}$, le trajet de la cission macroscopique $\underline{C}(\underline{n},t)$ définie par :

$$\underline{C}(\underline{n},t) = \underline{\underline{\Sigma}}(t).\underline{n} - (\underline{\underline{\Sigma}}(t).\underline{n}).\underline{n}$$

est une courbe fermée $\phi(\underline{n})$ et s'exprime en fonction de la cission macroscopique de la façon suivante :

$$\underline{C}(\underline{n},t) = \underline{\tau}(\underline{n},t) + \underline{\tau^*}(\underline{n})$$

avec : $\underline{\tau^*}(\underline{n}) = \underline{\underline{\rho^*}}.\underline{n}$

Dang Van construit la cission microscopique $\underline{\tau^*}(\underline{n})$ indépendamment sur chaque plan de normal $\underline{n}$ en supposant, qu'à l'état adapté, le critère de plasticité est un cercle centré à l'origine de rayon $\tau_y{}^*(\underline{n})$ égal au rayon du plus petit cercle circonscrit à la courbe $\phi(\underline{n})$. Il prend alors $\tau_y{}^*(\underline{n})$ comme le vecteur $\underline{MO}$ (Fig. 1.3) qui permet de recentrer le trajet macroscopique.
La construction ainsi faite de la cission microscopique indépendamment suivant chaque normale est généralement incompatible avec l'existence du champs de contrainte $\underline{\underline{\rho^*}}$ mais

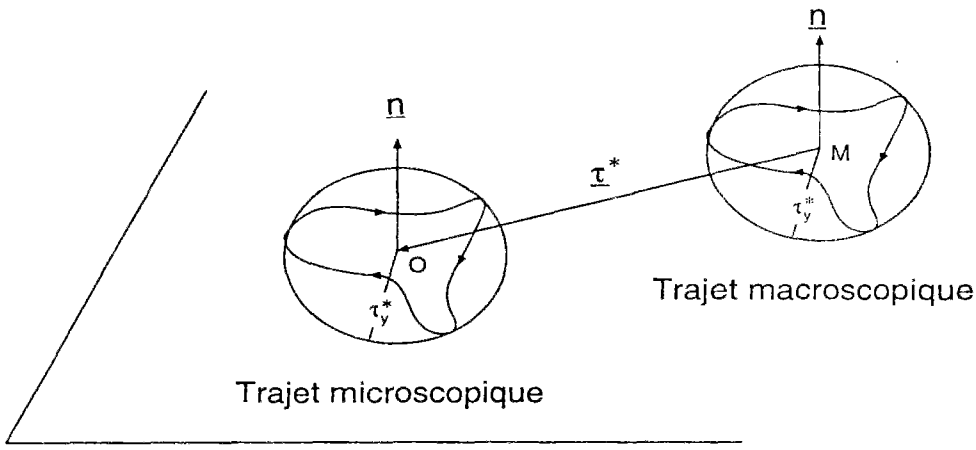


Figure 1.3: Échelles microscopique et macroscopique pour un métal polycristallin

cela reste justifié si on considère que ce sont différents cristaux qui sont concernés lorsque l'orientation du plan varie.
La cission microscopique étant construite, on appliquera le critère de fatigue sous la forme d'une double maximisation sur la normale $\underline{n}$ et le temps t du cycle :

$$\max_{\underline{n}} \left[\max_{t} \left[\| \underline{\tau}(\underline{n}, t) \| + ap(t) \right] \right] \leq b$$

Les coefficients a et b sont identifiés à partir des des limites d'essais de fatigue de flexion et de torsion.
Le calcul nécessite, pour chaque normale $\underline{n}$, la construction du plus petit cercle circonscrit au trajet $\underline{C}(\underline{n}, t)$ sur le plan correspondant. Cela induit une quantité de calculs très importante et rend cette écriture difficile pour son application dans les problèmes de fatigues des structures.
Dans le but de réduire les calculs, Papadopoulos a proposé un autre critère de fatigue plus facile à appliquer qu'on va citer par la suite. Afin de faciliter son application, le critère de Dang Van a été implémenté en reprenant certaines idées du critère de Papadopoulos.

1.3.5 Critère de Papadopoulos

Papadopoulos propose que le grain obéit au critère de plasticité de Von Mises au lieu du critère de Tresca utilisé par Dang Van. Il écrit donc que le tenseur du déviateur de contraintes microscopiques doit vérifier :

$$\forall t, \quad \frac{1}{2} \underline{\underline{s}}(t) : \underline{\underline{s}}(t) \leq k^2$$

où k désigne la limite élastique en cisaillement simple.
Ou alors en écrivant le critère de plasticité en fonction du tenseur de déviateur de contraintes macroscopiques :

$$\forall t, \quad \frac{1}{2} (\underline{\underline{S}}(t) + \underline{\underline{\rho}}^*) : (\underline{\underline{S}}(t) + \underline{\underline{\rho}}^*) \leq k^2$$

La valeur de $\underline{\underline{\rho}}^*$ qui minimise la quantité $\frac{1}{2}(\underline{\underline{S}}(t) + \underline{\underline{\rho}}^*) : (\underline{\underline{S}}(t) + \underline{\underline{\rho}}^*)$ est le tenseur $-\underline{\underline{z}}^*$ où $\underline{\underline{z}}^*$ centre de la plus petite hypersphère circonscrite au trajet des déviateurs $\underline{\underline{S}}(t)$.
$\underline{\underline{z}}^*$ est donc la solution unique du problème du min-max suivant :

$$\min_{\underline{\underline{z}}} \left[\max_t \sqrt{(\underline{\underline{S}}(t) - \underline{\underline{z}}) : (\underline{\underline{S}}(t) - \underline{\underline{z}})} \right]$$

Le rayon de la plus petite hypersphère ainsi déterminée vaut alors :

$$\max_t \sqrt{(\underline{\underline{S}}(t) - \underline{\underline{z}}^*) : (\underline{\underline{S}}(t) - \underline{\underline{z}}^*)}$$

Papadopoulos pose le critère de fatigue sous la forme :

$$k^* + aP_{max} \leq b$$

P_{max} désigne la pression maximum sur le cycle de chargement et k^* s'exprime en fonction de la rayon de la plus petite hypersphère de la manière suivante:

$$k^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \max_t \sqrt{(\underline{\underline{S}}(t) - \underline{\underline{z}}^*) : (\underline{\underline{S}}(t) - \underline{\underline{z}}^*)}$$

Ainsi écrit, le critère de Papadopoulos prend en compte, comme le critère de Dang Van, de l'effet favorable de la pression hydrostatique positive sur le non-amorçage des fissures de fatigue.
La différence avec le critère de Dang Van est de l'ordre de la différence entre le critère de plasticité de Tresca et de Von Mises.

1.3.6 Reformulation du critère de Dang Van

On a évoqué la lourdeur des calculs que requiert l'écriture du critère de Dang Van. En reprenant l'idée de Papadopoulos, on va évaluer la cission microscopique à partir du tenseur de contraintes résiduelles microscopiques $\underline{\underline{\rho}}^*$ déterminé par le processus de recherche du min-max.
Lorsque $\underline{\underline{\rho}}^*$ est déterminé, on va pouvoir calculer le tenseurs des contraintes microscopiques $\underline{\underline{\sigma}}(t)$ par :

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = \underline{\underline{\Sigma}}(t) + \underline{\underline{\rho}}^*$$

On évaluera la cission microscopiques maximale $\tau(t)$ à partir de la plus grande valeur propre $\sigma_I(t)$ et la plus petite valeur propre $\sigma_{III}(t)$ du tenseur $\underline{\underline{\sigma}}(t)$ de la manière suivante:

$$\tau(t) = \frac{\sigma_I(t) - \sigma_{III}(t)}{2}$$

Le critère de Dang Van s'écrira donc :

$$\max_t \left[\tau(t) + a\ p(t) \right] \leq b$$

La courbe fermée décrite par les couples $(\tau(t), p(t))$ pour un cycle de chargement est représentée dans le diagramme de Dang Van où τ et p sont portés respectivement en abscisse et en ordonnée. La tenue en fatigue est donnée par la comparaison de cette

courbe à la droite $\tau + ap = b$ déterminée par le coefficients a et b obtenus à partir des limites de fatigue du matériau en flexion f et en torsion t.

$$a = \frac{t - f/2}{f/3}$$

$$b = t$$

Lorsque la courbe se trouve en dessous de la droite matérielle en tout point de la structure alors il n y a pas amorçage de fissure de fatigue et dans le cas où cette courbe coupe la droite matérielle alors il y a amorçage de fissure au point considéré (Fig. 1.4).

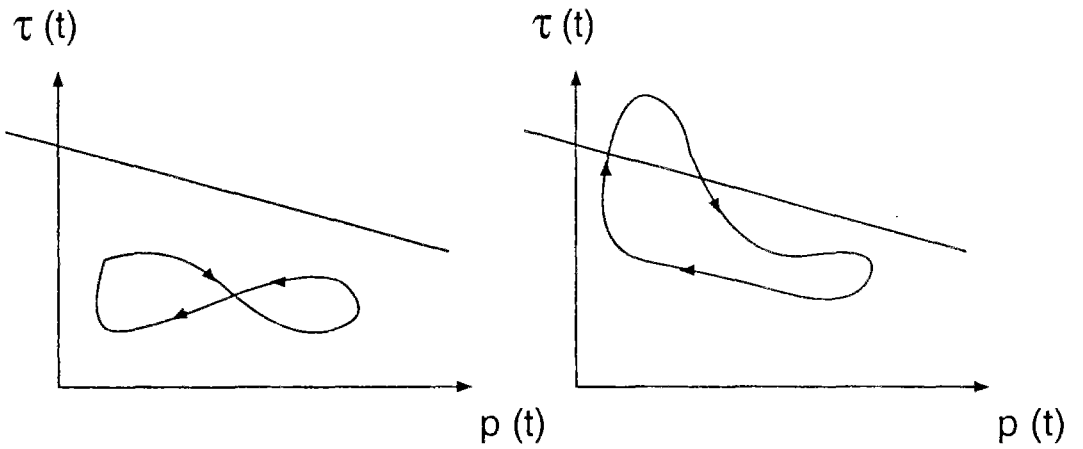


Figure 1.4: Diagrammes de Dang Van dans le cas de non-rupture et de rupture

1.3.7 Application du critère de Dang Van

En pratique, on détermine les contraintes $\underline{\underline{\Sigma}}_i, i = 1, ..N$ en plusieurs instants du trajet de chargement dues au chargement cyclique. On déterminera par la suite les déviateurs $\underline{\underline{S}}_i, i = 1, ..N$ correspondants. On construit moyennant l'algorithme, donné par Papadopoulos, la plus petite hypersphère circonscrite à l'ensemble des $\underline{\underline{S}}_i, i = 1, ..N$ dans l'espace des déviateurs.
En notant $\underline{\underline{C}}$ le centre de cette hypersphère, on calculera les déviateurs microscopiques $\underline{\underline{s}}_i, i = 1, ..N$ par la formule suivante :

$$\underline{\underline{s}}_i = \underline{\underline{S}}_i - \underline{\underline{C}}$$

On calcule la cission microscopique τ_i à chaque instant en fonction de la plus petite valeur propre s_i^{III} et la plus grande valeur propre s_i^I du tenseur $\underline{\underline{s}}_i$:

$$\tau_i = \frac{s_i^I - s_i^{III}}{2} \quad i = 1, 2, ..N$$

On représente la pression $p_i = 1/3\ tr(\underline{\underline{\Sigma}}_i)$ et la cission microscopique τ_i pour tout le cycle et on compare la courbe fermée ainsi décrite à la droite $\tau = b - ap$ en calculant la quantité suivante :

$$\alpha = \max_i \frac{b - ap_i - \tau_i}{b}$$

Dans le cas où α est positif, le trajet fermé décrit par $(\tau(t), p(t)$ est au dessous de la droite matérielle et il n y a donc pas rupture et dans le cas où α est négatif il y a amorçage de fissures.

1.4 Conclusion

A travers les travaux récents tirés de la littérature, il apparaît que le nombre de cycles à l'initiation des fissures constitue une partie importante de la durée de vie en fretting-fatigue.
Notre approche de prédiction de l'amorçage des fissures repose sur la détermination des limites de fatigue du matériau d'une manière intrinsèque indépendamment du type de chargement appliqué et des géométries en contact à partir des essais de fatigue. Les contraintes dues au chargement cyclique de fretting-fatigue sont comparées par la suite à la limite d'endurance du matériau à travers un critère de fatigue multiaxial basé sur une vue microscopique à l'échelle des cristaux des mécanismes de fatigue L'application du critère de Dang Van pour l'amorçage des fissures fera l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 2

Prédiction de l'endommagement en fretting-fatigue

2.1 Introduction

Nous avons vu que les essais effectués en fretting-fatigue aboutissent à des cartes de fretting fatigue qui résument, suivant les sollicitations extérieures, les endommagements éventuels subis par l'échantillon (non dégradation, fissuration ou usure). Nous allons faire la prédiction théorique de ces résultats donnés par des expériences faits par Petiot [55] sur l'acier 32CDV13 utilisé dans les rotors d'hélicoptères à l'Aéorospatiale.
Nous allons, tout d'abord, rappeler l'expérience et les résultats obtenus dans la carte de fretting. Notre approche pour la prédiction de ces résultats consiste à :

- calculer l'état de contraintes à l'état stabilisé sous le chargement cyclique de fretting fatigue qu'on décrira préalablement;
- dans le cas d'un état stabilisé adapté, on appliquera le critère de fatigue multiaxiale de Dang Van pour prédire l'amorçage des fissures. On regardera l'endommagement associé dans le cas de l'accommodation.

2.1.1 Montage et résultats expérimentaux

On considère une éprouvette plane sur laquelle on vient fixer sur chacun de ces faces un patin cylindrique de diamètre de 10 mm appuyé avec un effort normal P constant (figure 2.1). Toutes les dimensions du patin et de l'éprouvette sont présentées dans l'annexe C. L'éprouvette est soumise à une sollicitation de fatigue $S(t)$ variant entre $0.1S_{max}$ et S_{max} qui conduit à un déplacement du patin à petite amplitude de débattement lié à la sollicitation de fatigue. Un système d'acquisition donne, à l'aide de jauges fixées dans le bras, la déformation dans ce dernier et donc aussi l'effort tangentiel $T(t)$ pendant le cycle. Les essais sont réalisés à une fréquence de 20 Hz sur une machine de fatigue INSTRON 1342. L'éprouvette a une rugosité moyenne de $0.45\mu m$ et est fabriquée en acier 32CDV13 qui est un matériau utilisé dans les pièces tournantes d'hélicoptères. Le patin est en acier 100C6 beaucoup plus dur utilisé dans les bagues. Les compositions chimiques des aciers sont données dans les tableaux 2.1 et 2.2.

C	Si	Mn	S	P	Ni	Cr	Mo	V	Fe
0,333	0.28	0.55	< 0.002	0 008	0.05	2.93	0.83	0.3	94.717

Tableau 2.1: Composition chimique de l'acier 32CDV13.

C	Si	Mn	S	P	Cr	Cr	Mo	V
0,95	0.15	0.2	<	<	1.35	<	<	<
1.10	0.35	0.4	0.02	0.03	1.6	0.4	0.10	0.30

Tableau 2.2: Composition chimique de l'acier 100C6.

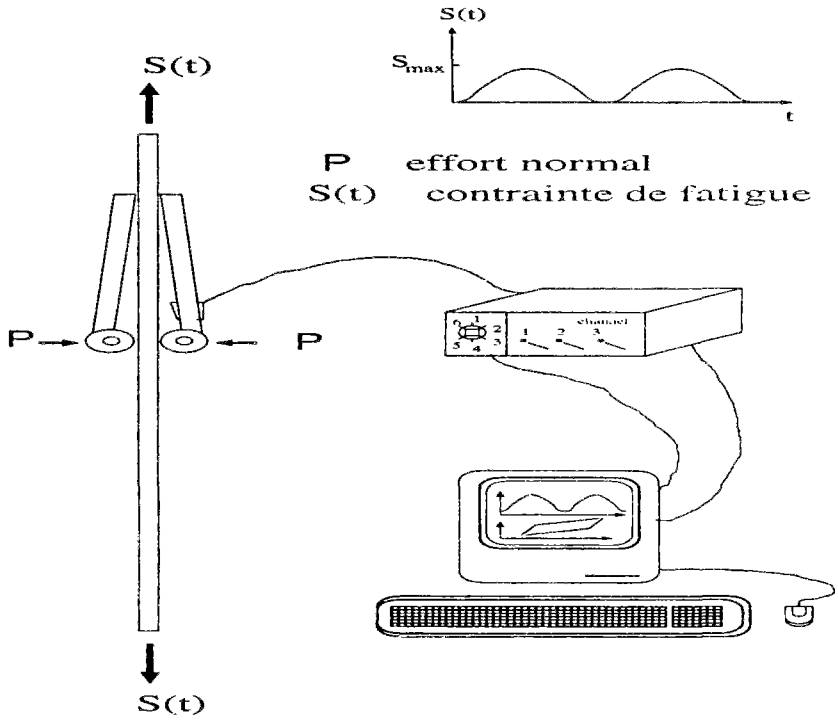


Figure 2.1: Montage expérimental du fretting fatigue

Suivant les valeurs de la sollicitation maximale de fatigue S_{max} et de l'effort normal P, on obtient différents types d'endommagement qui correspondent à des régimes de glissement différents détaillés dans la figure 2.7. Il y a de l'usure dans le régime de glissement total, fissuration aux bords du contact dans le régime de glissement partiel et non dégradation dans le régime de collage.

Le tableau 2.3 donne les propriétés mécaniques de l'acier 32CDV13 de l'échantillon et de l'acier 100 C6 du patin.

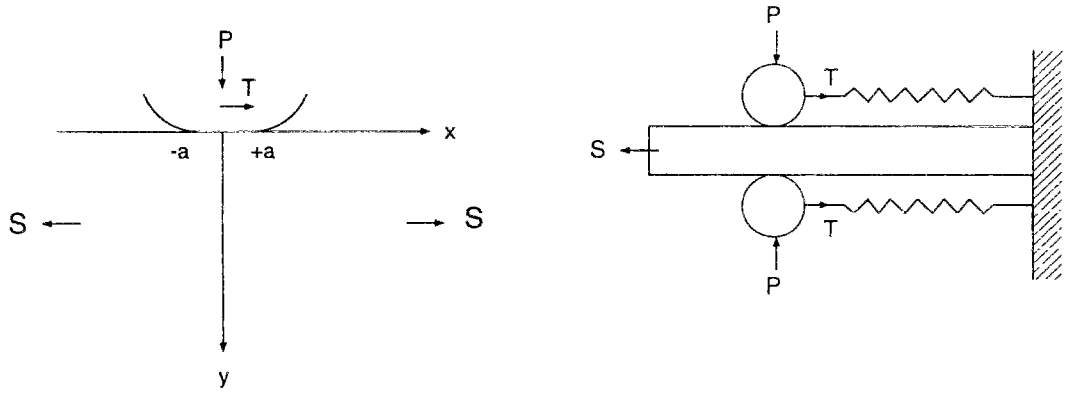
2.2 Modélisation et calcul de fretting-fatigue

Pour prédire le type d'endommagement, on doit calculer l'état de contraintes à l'état stabilisé sous le chargement cyclique du fretting-fatigue. Nous allons donné les contraintes normales et tangentielles calculés par Nowell et Hills [51] pour le fretting-fatigue. On donnera par la suite le trajet de chargement cyclique que nous adopterons.

	Limite élastique en traction (MPa)	Limite de rupture en traction (MPa)	Module d'Young (GPa)	Dureté (Hv)
32CDV13	980	1140	215	360
100C6	1700	2000	210	62

Tableau 2.3: Propriétés mécaniques des aciers 32CDV13 et 100C6.

2.2.1 Contraintes de contact en fretting-fatigue



(a) (b)

Figure 2.2: (a) Schéma du montage expérimental du fretting-fatigue. (b)Modèle de contact adopté par Nowell et Hills pour le calcul des contraintes de contact

Nowell et Hills calculent analytiquement les contraintes de contact dues au chargement de fretting fatigue décrit dans la figure 2.2 en considérant un cylindre en contact avec demi-espace infini soumis à un effort normal P, à un effort tangentiel T et une contrainte en volume S. Ils se mettent, comme dans les l'hypothèse de Hertz, dans le cadre de l'élasticité linéaire en prenant une loi de frottement de Coulomb.
Les pressions normales sont celles données par Hertz et les contraintes tangentielles sont perturbées par rapport à celles de Mindlin (sans contrainte de volume). La zone de contact comporte une zone de collage, de demi-largeur c, excentrée par rapport à l'origine d'une distance e dans le sens de l'effort tangentiel appliqué et délimitée de part et d'autre d'une zone de glissement.
En procédant comme dans l'approche de Mindlin, Nowell écrit que la contrainte tangentielle est une superposition de $-\mu p(x)$ sur toute la zone de contact et de $q'(x)$ sur la zone de collage :

$$q(x) = -\mu p(x) + q'(x)$$

avec : $q'(x) = 0$ pour $|x - e| > c$ et $p(x)$ désigne la pression de Hertz.
Nowell et Hills résolvent l'équation intégrale qui donne la dérivée du glissement $u_1 - u_2$ en fonction de contrainte tangentielle q et la contrainte de fatigue S :

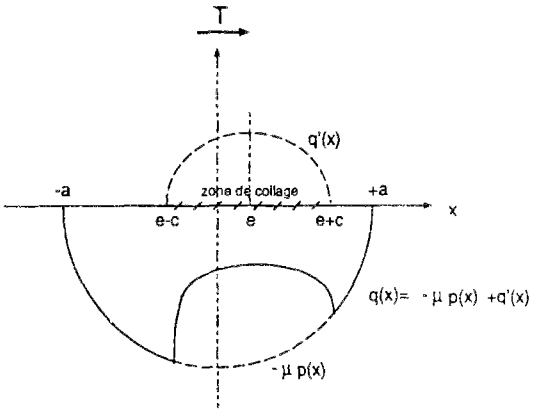


Figure 2.3: Contraintes tangentielles en fretting-fatigue

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial x} = -\frac{4(1-\nu^2)}{\pi E}\int_{-a}^{+a}\frac{q(\xi)}{(x-\xi)}d\xi - \frac{S}{E}(1-\nu^2)$$

en satisfaisant les conditions de glissement sur les intervalles $[-a, c-e]$ et $[c+e, a]$ et d'adhérence sur $[c-e, c+e]$ et obtiennent :

$$q'(x) = c/a\ \mu p_0\sqrt{1-\frac{(x-e)^2}{c^2}}$$

où :

$$\frac{c}{a} = \sqrt{1-\frac{T}{\mu P}}$$

et l'excentricité e de la zone d'adhérence s'exprime en fonction de la contrainte S et de la pression maximum de Hertz :

$$e/a = \frac{S}{4\mu p_0}$$

Ceci reste valable tant que :

$$-a \leq e-c \ \ et \ \ e+c \leq a$$

C'est-à-dire que :

$$\frac{S}{\mu p_0} \leq 4\,(1-\sqrt{1-T/\mu P})$$

Dans le cas où la contrainte S est telle que $\dfrac{S}{\mu p_0}$ est supérieure à $4\,(1-\sqrt{1-T/\mu P})$, le déplacement engendré par S en un point de la surface du demi-espace infini devient grand et une inversion du glissement à droite dans le sens de l'effort du cisaillement se produit. On obtient, de ce fait, une zone centrale d'adhérence excentrée de longueur c_1+c_2 et une zone de glissement périphérique de chaque coté avec des signes opposés pour la contrainte tangentielle (figure 2.4).

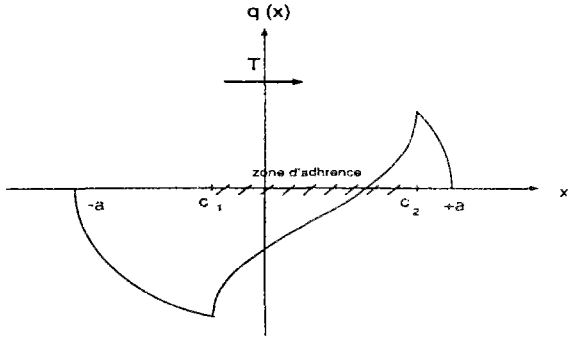


Figure 2.4: Contraintes tangentielles en fretting-fatigue

2.2.2 Modèle et chargement adopté

Dans les conditions de l'expérience de fretting-fatigue décrite auparavant, l'effort de cisaillement $T(t)$ est lié à la contrainte cyclique de fatigue $S(t)$. L'effort ne peut être connu qu'en faisant un calcul de structures en maillant le patin et l'éprouvette et en mettant des éléments de contact à l'interface. Le calcul quoique coûteux a été effectué par Petiot [55].
On rappelle que, dans l'expérience, sont imposés :

- l'effort normal P,
- la contrainte de fatigue S,

et on mesure :

- l'effort tangentiel T
- le coefficient de frottement μ

On va s'intéresser dans notre calcul uniquement à la réponse de l'éprouvette modélisée par un demi-espace infini soumis, comme le montre la figure 2.2 à :

- une pression normale hertzienne constante : $p(x) = p_0\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$
  où p_0 et a sont calculés à partir du contact non conforme patin cylindrique de rayon $R_2 = 5mm$ sur la facette plane $R_1 = \infty$ de l'éprouvette (Le calcul général Hertzien est présenté dans l'annexe B). Pour les valeurs de l'effort normal imposé dans l'intervalle $[80N, 140N]$, la pression maximum de Hertz p_0 est de ce fait dans l'intervalle [545 MPa,720 MPa] et la demi-largeur de Hertz est dans la gamme [50 μm,60 μm].
- Une contrainte de fatigue $S(t)$ variant entre $S_{min} = 0.1S_{max}$ et S_{max}.
- Des contraintes tangentielles résultant de l'effort tangentiel cyclique qu'on définira par la suite.

Selon le régime de glissement partiel ou total observé expérimentalement et en prenant la valeur de l'effort tangentiel maximum mesuré à l'état stabilisé, on adoptera pour l'effort tangentiel et les contraintes tangentielles les cycles définis ci dessous.

- Glissement partiel

C'est le type de glissement rencontré dans ce qui est appelé expérimentalement le régime de collage et le régime mixte. Les courbes $T(t) - S(t)$ (boucles de fretting) à l'état stabilisé, sont rappelons le, quasiment linéaires avec une forme elliptique plus prononcée pour le cas de régime mixte.
Nous allons prendre une relation linéaire entre $S(t)$ et $T(t)$:

$$T(t) = K\ S(t)$$

où : $K = T_{max}/S_{max}$

et : T_{max} est l'effort tangentiel maximum mesuré.
Lorsque la contrainte S(t) varie entre $S_{min} = 0.1S_{max}$ et S_{max}, l'effort tangentiel varie entre $T_{min} = KS_{min}$ et T_{max}.

On va simuler les points correspondant aux (S_{max},P) désignés dans la carte de fretting (figure 2.7). Le tableau 2.4 donne les valeurs des paramètres pour les points simulés:

$P(N)$	$S_{max}(MPa)$	$T_{max}(N)$ (mesuré)
140	600	97
140	350	53
140	500	65
100	400	58
100	600	80

Tableau 2.4: Données pour les points simulés en régime en glissement partiel.

En constatant que $\frac{S}{\mu p_0} \leq 4\,(1 - \sqrt{1 - T/\mu P})$ pour toutes les valeurs du tableau, on se trouve dans le cas de contraintes tangentielles données dans la figure 2.3 avec une zone d'adhérence excentrée mais de même signe sur toute la zone de contact. L'excentricité est peu importante (de l'ordre de $0.2a$) dans les cas envisagés. Hills [51] montre analytiquement que les contraintes résultant des contraintes tangentielles avec décalage de la zone d'adhérence sont peu différentes de celles résultant des pressions de Mindlin. Nous allons adopter donc pour notre modélisation des contraintes tangentielles de Mindlin.
L'effort tangentiel décrit un cycle entre T_{min} et T_{max} non symétrique et les contraintes tangentielles deviennent cycliques au bout d'un demi cycle de chargement. Elles sont obtenues par superposition comme dans la section 3.3.1 de la partie II.
En A (figure 2.5) ($T = T_{min}$), les contraintes tangentielles sont la superposition de celles résultantes du chargement pendant le premier demi-cycle jusqu'à T_{max} et de celles obtenues durant la décharge de la quantité $\Delta T = T_{min} - T_{max}$.

$$\begin{cases} q(x) = -\mu p_0 \sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}} & c_{min} \le |x| \le a \\ q(x) = -\mu p_0 \left[\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}} - 2\dfrac{c_{min}}{a}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{c_{min}^2}} \right] & c_{min} \le |x| \le c_{max} \\ q(x) = -\mu p_0 \left[\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}} - 2\dfrac{c_{min}}{a}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{c_{min}^2}} \right. & |x| \le c_{max} \\ \qquad \left. + \dfrac{c_{max}}{a}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{{c_{max}}^2}} \right] & \end{cases} \tag{2.1}$$

c_{max} est donné par :

$$\frac{c_{max}}{a} = \sqrt{1-\frac{T_{max}}{\mu P}}$$

et c_{min} par :

$$\frac{c_{min}}{a} = \sqrt{1-\frac{T_{max}-T_{min}}{2\mu P}}$$

Celles correspondantes à l'effort tangentiel en B sont obtenues par superposition de celles obtenues en A et de celles qui résultent de l'effort tangentiel $T(t) - T_{min}$ avec une zone de collage c qui dépend de $T(t)$. Soit au total :

$$\begin{cases} q(x) = \mu p_0 \sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}} & c \le |x| \le a \\ q(x) = \mu p_0 \left[\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}} - 2\dfrac{c}{a}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{c^2}} \right] & c_{min} \le |x| \le c \\ q(x) = \mu p_0 \left[\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}} - 2\dfrac{c}{a}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{c^2}} + 2\dfrac{c_{min}}{a}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{c_{min}^2}} \right] & c_{min} \le |x| \le c_{max} \\ q(x) = \mu p_0 \left[\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}} - 2\dfrac{c}{a}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{c^2}} \right. & |x| \le c_{max} \\ \qquad \left. + 2\dfrac{c_{min}}{a}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{c_{min}^2}} - 2\dfrac{c_{max}}{a}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{{c_{max}}^2}} \right] & \end{cases} \tag{2.2}$$

avec : c qui s'exprime en fonction de T par :

$$\frac{c}{a} = \sqrt{1-\frac{T-T_{min}}{2\mu P}}$$

Entre la phase C et D, les contraintes pour l'effort s'obtiennent par superposition de celles correspondant à T_{max} et celles de $T - T_{max}$ et sont données par :

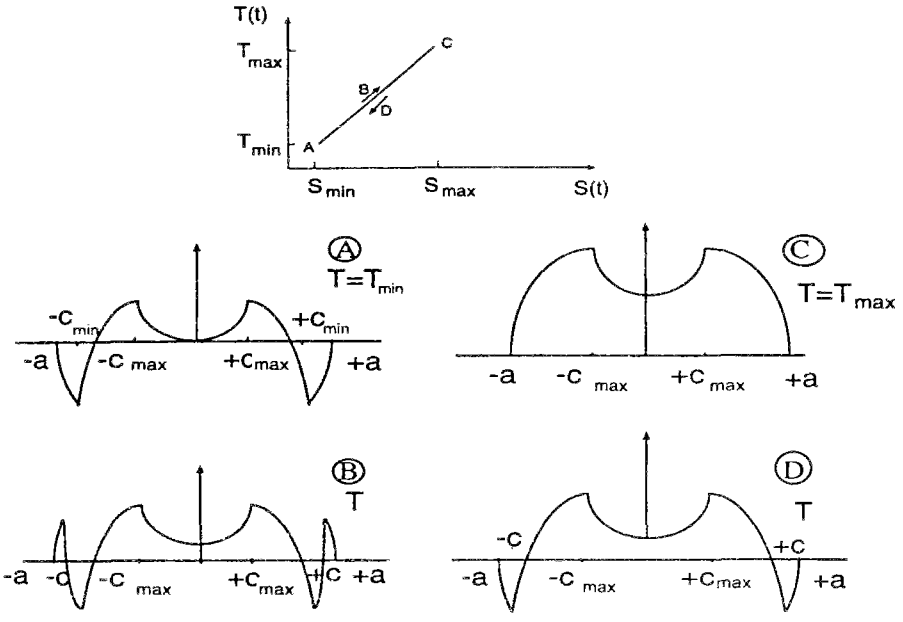


Figure 2.5: Chargement adopté en fretting-fatigue en cas de glissement partiel

$$\begin{cases} q(x) = -\mu p_0 \sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}} & c \le |x| \le a \\ q(x) = -\mu p_0 \left[\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}} - 2\dfrac{c}{a}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{c^2}} \right] & c_{max} \le |x| \le c \\ q(x) = -\mu p_0 \left[\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}} - 2\dfrac{c}{a}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{c^2}} + \dfrac{c_{max}}{a}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{{c_{max}}^2}} \right] & |x| \le c_{max} \end{cases} \tag{2.3}$$

où c est donné en fonction de T par :

$$\frac{c}{a} = \sqrt{1-\frac{T_{max}-T}{2\mu P}}$$

- Glissement total

  Pour certaines valeurs de (P, S_{max}), il est observé expérimentalement un glissement total qui induit une usure forte et un détachement de particules. Les courbes représentant l'effort tangentiel en fonction de la contrainte $S(t)$ ont une forme trapèzoidale avec un palier horizontal qui correspond au glissement total.
  Nous allons prendre l'évolution telle que celle observée expérimentalement. L'effort tangentiel varie donc linéairement en fonction de $S(t)$ avec une constante de proportionnalité K (la même qu'en glissement partiel). Lorsque la contrainte $S(t)$ atteint les valeurs critiques $S_{g1} = S_{min} + 2K\mu P$ ou $S_{g2} = S_{max} - 2K\mu P$, il y a glissement total et l'effort tangentiel est saturé à $\pm\mu P$ suivant le sens du glissement.

La figure 2.7 montre les points simulés correspondants aux valeurs de l'effort normal P et du maximum de la contrainte S_{max} représentés dans le tableau 2.5.

$P(N)$	$S_{max}(MPa)$
80	500
80	700

Tableau 2.5: Données pour les points simulés en régime en glissement total.

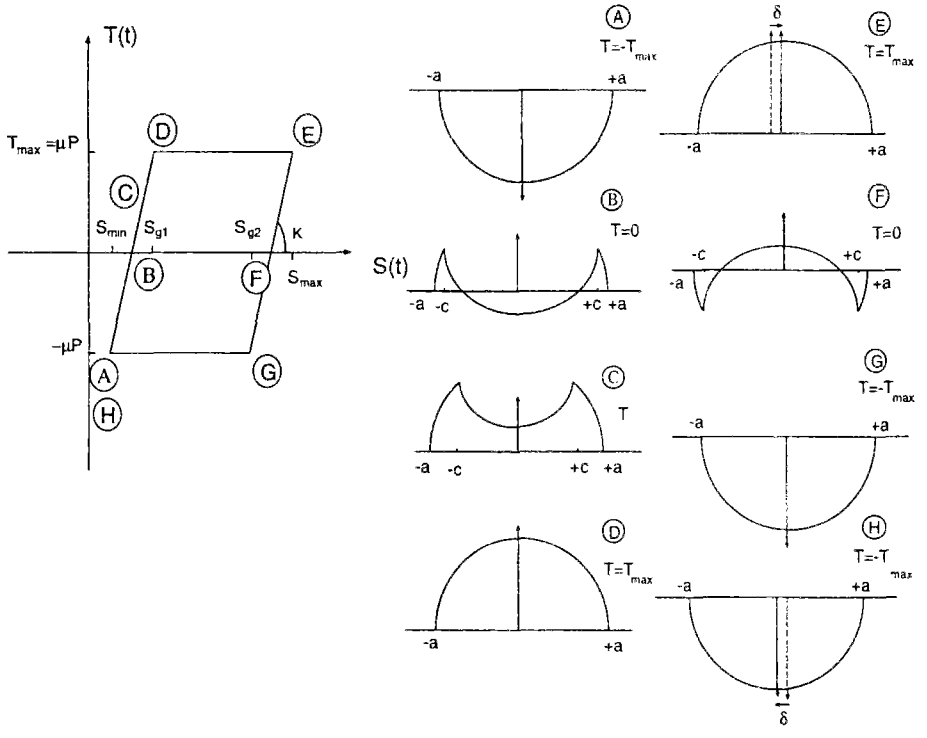


Figure 2.6: Chargement adopté en fretting-fatigue en cas de glissement total

On vérifie que pour ces données, les contraintes tangentielles sont de type montrées sur la figure 2.3. Le décalage e de la zone de collage due à la contrainte $S(t)$ n'est pas très important (e est de l'ordre de $0.2a$). On adoptera comme dans le cas précédent des contraintes tangentielles de Mindlin.
Le cycle des contraintes tangentielles dues à l'évolution de l'effort tangentiel en fonction de la contrainte volumique de fatigue $S(t)$ est représenté sur la figure 2.6.
Partant de la valeur $-\mu P$ (configuration A), l'effort tangentiel varie donc linéairement en fonction de $S(t)$. Les contraintes tangentielles valent :

$$\begin{cases} q(x) = \mu p_0 \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}} & c \leq |x| \leq a \\ q(x) = \mu p_0 \left[\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}} - 2\dfrac{c}{a}\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{c^2}} \right] & |x| \leq c \end{cases} \tag{2.4}$$

où c vaut : $\dfrac{c}{a} = \sqrt{1 - \dfrac{\mu P + T}{2\mu P}}$

Quand celle-ci atteint la valeur S_{g1}, il y a glissement total et l'effort tangentiel reste bloqué à la valeur μP, le chargement se déplace d'une valeur δ dans le sens de l'effort précédent jusqu'à la configuration E où la contrainte $S(t)$ atteint son maximum S_{max}. Puis à partir de la configuration E, $S(t)$ commence à diminuer et l'effort tangentiel diminue proportionnellement et les contraintes tangentielles résultantes valent dans cette phase :

$$\begin{cases} q(x) = -\mu p_0 \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}} & c \leq |x| \leq a \\ q(x) = -\mu p_0 \left[\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}} - 2\dfrac{c}{a}\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{c^2}} \right] & |x| \leq c \end{cases} \tag{2.5}$$

c est donné par : $\dfrac{c}{a} = \sqrt{1 - \dfrac{\mu P - T}{2\mu P}}$

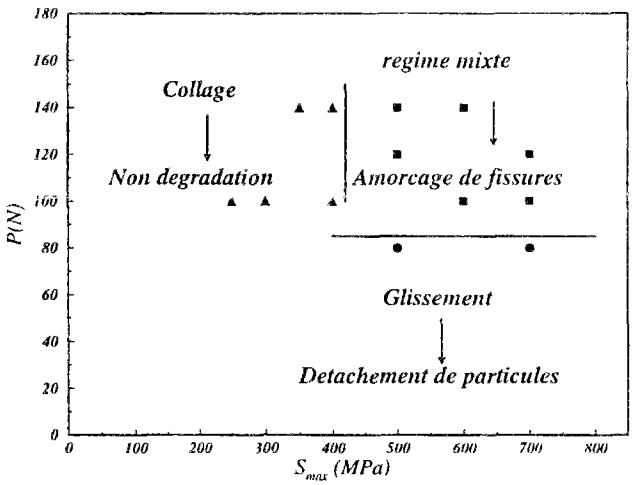


Figure 2.7: Carte expérimentale d'endommagements de fretting-fatigue

Quand $S(t)$ atteint en diminuant la valeur S_{g2} dans la configuration G, l'effort tangentiel atteint la valeur $-\mu P$. Il y a glissement total et déplacement du chargement d'une distance δ dans le sens de l'effort tangentiel jusqu'à retrouver la position initiale H (qui est la même que A) décrivant ainsi un cycle entier.
L'amplitude de déplacement est prise égale à $0.25a$. On reviendra par la suite sur la validité de cette valeur dans la discussion.

2.2.3 Maillage et caractéristiques du matériau

Le maillage représenté sur la figure 2.8 comporte 1112 noeuds et 1674 éléments en triangles et quadrangles. La zone du contact est maillée d'une façon plus fine avec une taille de maille de l'ordre de a/10 soit ici égale à 6 μm - 8 μm (de l'ordre de la taille du grain).

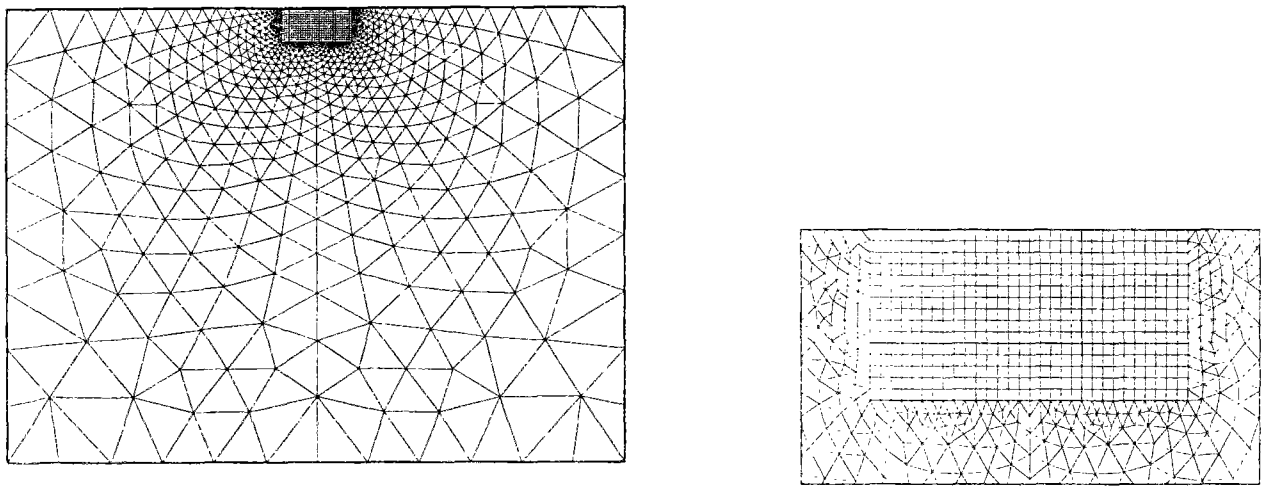


Figure 2.8: Maillage pour le calcul en fretting fatigue avec raffinement de la zone de contact.

Le comportement du matériau est supposé élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire avec les caractéristiques données dans le tableau 2.6.

Module d'Young E	215 GPA
Coefficient de Poisson ν	0.3
Limite d'élasticité en traction σ_y	980 MPA
Coefficient d'écrouissage cinématique C	60 GPA

Tableau 2.6: Caractéristiques élastoplastiques du matériau.

On donne aussi les limites de fatigue du matériau obtenues par des essais de fatigue classiques en flexion et en torsion alternée :

Limite de fatigue en flexion alternée	594 MPa
Limite de fatigue en torsion alternée	380 MPa

Tableau 2.7: Limites de fatigue du matériau.

2.2.4 Résultats de calcul en glissement partiel et prédiction de l'amorçage des fissures

En glissement partiel, les conditions du chargement avec les valeurs du tableau 2.4 donnent un état stabilisé adapté pour la structure. Les isovaleurs de la déformation plastique équivalente sont représentées sur la figure 2.9 pour un exemple de cas de chargement en glissement partiel $P = 100N$ et $S_{max} = 600MPa$.

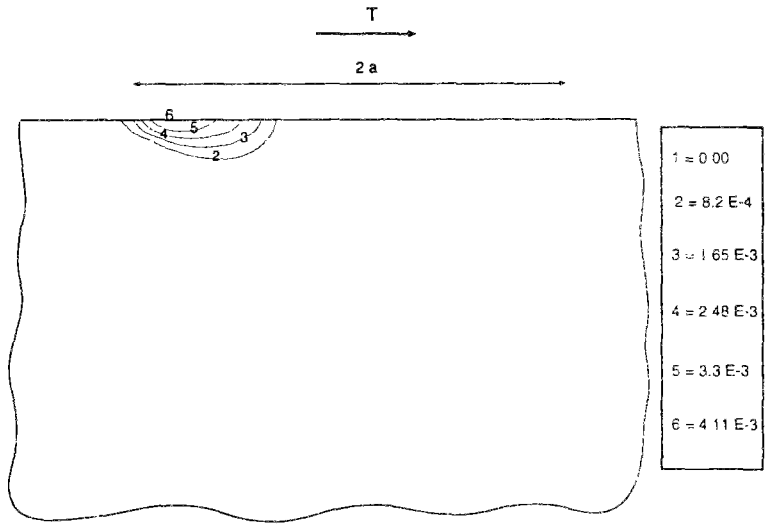


Figure 2.9: Déformation plastique concentrée au bord $x = -a$ du contact (coté en traction sous l'effet de l'effort tangentiel)

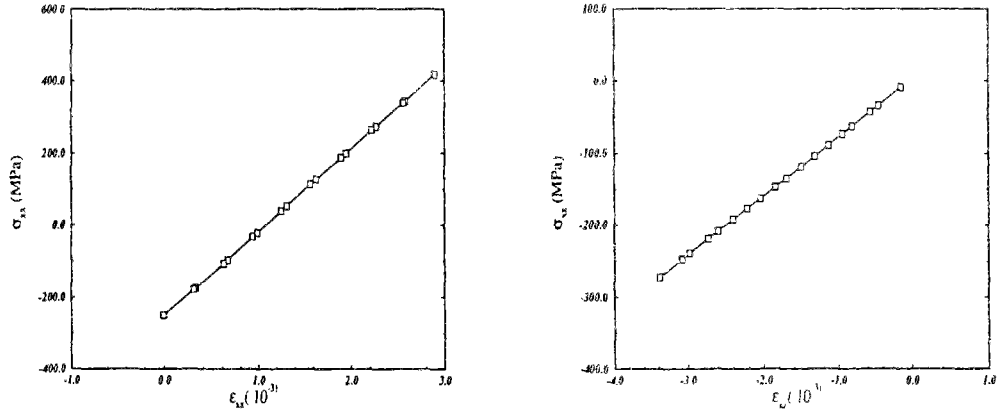


Figure 2.10: Les cycles de contrainte-déformation de fretting-fatigue en glissement partiel $P = 100N$ et $S_{max} = 600MPa$

Le maximum est localisé au bord du contact du coté gauche ($x = -a$) qui est le coté qui rentre en traction sous l'effet de l'effort tangentiel. La figure 2.10 montre le trajet linéaire contrainte-déformation pour un point en z=-4a/10 et x=-4a/10 qui se trouve dans la zone du maximum de déformation plastique. Les cas de chargements en glissement partiel

aboutissent à l'adaptation et on obtient à l'état stabilisé les cycles de contraintes en chaque point de la structure. On applique le critère de fatigue multiaxiale de Dang Van pour prédire l'amorçage des fissures pour ces différents cas de chargements. On trouve que le point le plus critique se trouve au bord du contact du coté qui est en traction sous l'effet de l'effort tangentiel. Ceci coïncide bien avec les observations expérimentales. Les trajets de cisaillement microscopique-pression hydrostatique pour le point le plus critique sont représentés sur les figures 2.11 et 2.12. On remarque que les trajets pour les régimes dits mixtes, pour lesquels on observe expérimentalement la fissuration, se trouvent au dessus de la droite de limite de fatigue du matériau révélant ainsi la nucléation des fissures. Les trajets (τ, p) pour les cas de chargements en régimes de collage, qui ne conduisent à aucun endommagement d'après les expertises faites après essais, sont en dessous de la droite matérielle.

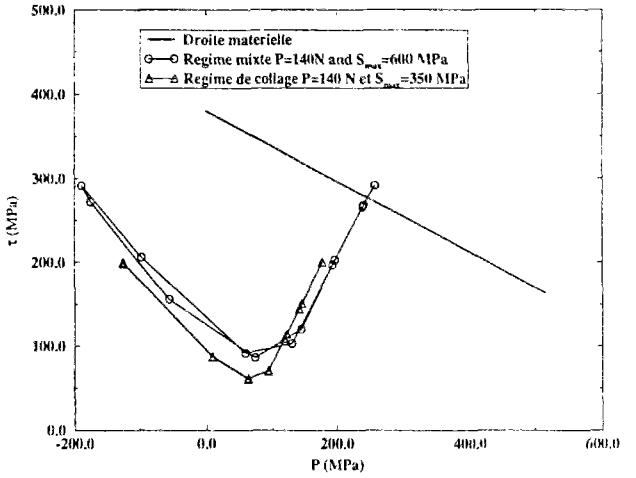


Figure 2.11: Diagrammes de Dang Van

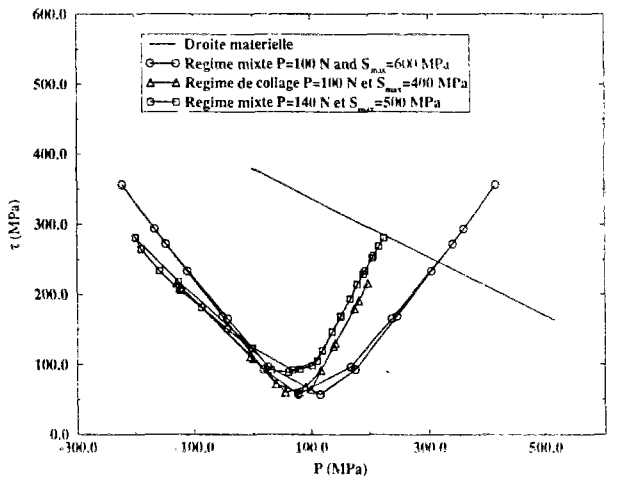


Figure 2.12: Diagrammes de Dang Van aux points critiques

On voit donc que nos prédictions de la fissuration en régime mixte et de la non dégradation en régime de collage sont en parfaite concordance avec les résultats expérimentaux.
On représente aussi le degré d'endommagement pour tous les points de la structure pour le cas de chargement $P = 100N$ *et* $S_{max} = 600MPa$ exprimé par la quantité α qui est la distance normalisée de la courbe (τ, p) à la droite matérielle. α vaut explicitement (voir la section 1.3.7) :

$$\alpha = \max_i \frac{b - ap_i - \tau_i}{b}$$

Lorsque α est négatif, tout le trajet (τ, p) en ce point est en dessous de la droite matérielle et il n'y a pas d'amorçage de fissure et quand α est positif, la courbe (τ, p) coupe la droite matérielle et il y a donc amorçage de fissure en ce point. La figure 2.13 montre les isovaleurs de la valeur α. On voit que le maximum de α est localisé dans une zone au bord gauche $(x = -a)$ du contact qui est en traction sous l'effet de l'effort tangentiel. La valeur de α à l'autre bord du contact $(x = +a)$ est négatif (-0.788) et l'amorçage des fissures n'a pas eu lieu. Cette dissymétrie est due au fait que l'effort tangentiel est positif pendant tout le cycle et il génère donc des contraintes de traction σ_{xx} au bord gauche $(x = -a)$ du contact et des contraintes de compression au bord droit $(x = +a)$ du contact. Comme le critère de fatigue tient compte de l'effet favorable d'une pression hydrostatique positive sur l'amorçage des fissures, on obtient donc que les fissures s'initient préférentiellement du coté gauche $(x = +a)$ qui est en traction sous l'effet de l'effort tangentiel.

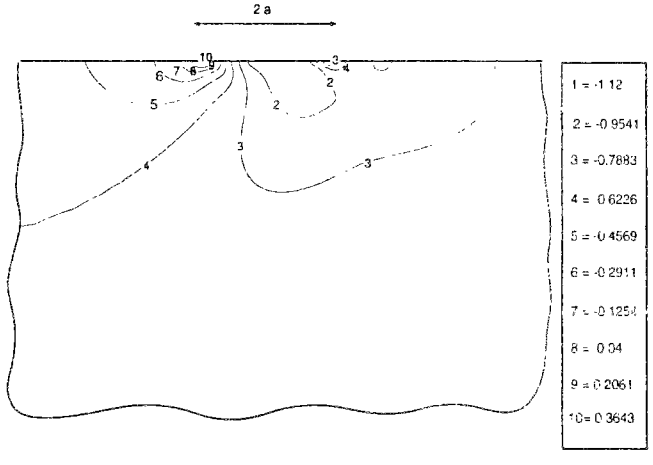


Figure 2.13: Isovaleurs de la valeur du critère

La figures 2.14 montrent les trajets (τ, p) pour les points aux bords et dans la zone de contact. La courbe (τ, p) est très en dessous de la droite de limite de fatigue du matériau (α=-0.951) pour un point dans la région en dessous du contact et l'amorçage des fissures ne se fait donc pas dans cette zone où la pression hydrostatique résultant de l'effort normal est importante.
Il apparaît d'après la figure 2.15 que le cycle des contraintes à l'état stabilisé au bord critique du contact $(x = -a)$ est proche d'un cycle de traction- compression puisqu'on voit que la composante σ_{xx} varie entre $-500\,MPa$ et $1000\,MPa$ alors que les composantes σ_{zz} et σ_{xz} prennent pendant le cycle des valeurs plus faibles dans l'intervalle $[-100\,MPa, 400\,MPa]$.

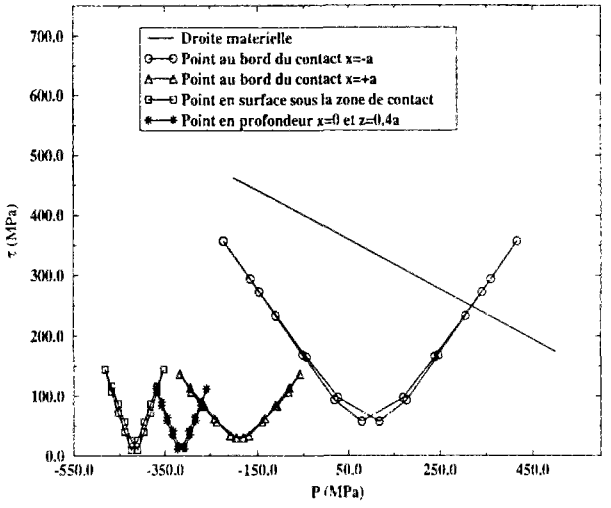


Figure 2.14: Diagrammes de Dang Van pour des points en profondeur et en surface

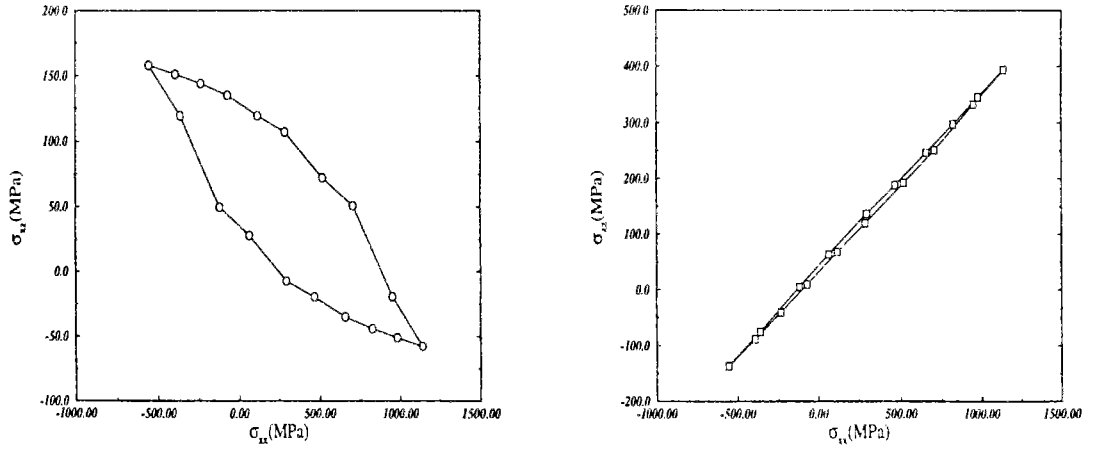


Figure 2.15: Cycle de contraintes au bord critique en glissement partiel $P = 100\,N$ *et* $S_{max} = 600\,MPa$ en fretting-fatigue

2.2.5 Résultats de calcul en glissement total et caractérisation de l'usure

Les calculs en glissement total d'après les valeurs du tableau 2.5 aboutissent à un état stabilisé accommodé. Le cycle non linéaire de contrainte-déformation á l'état stabilisé est représenté sur la figure 2.16.

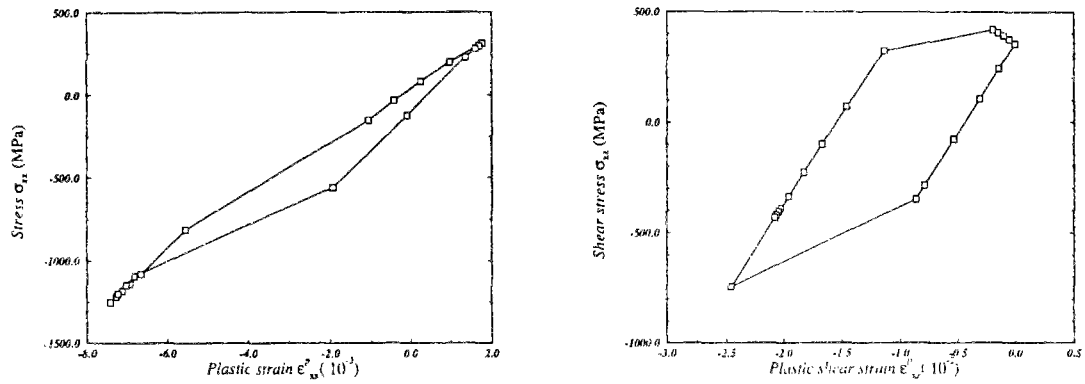


Figure 2.16: Cycle contrainte-déformation fretting-fatigue en glissement total $P = 80\,N$, $S_{max} = 500\,MPa$

La figure 2.17 montre les isovaleurs des déformations plastiques à l'instant du cycle pour lequel l'effort tangentiel est nul (position F pour le cycle de chargement en glissement total dans la section 2.6). Celles-ci sont étendues à la zone de contact. Elles atteignent des valeurs de l'ordre de 10^{-2} et sont donc plus importantes qu'en glissement partiel pour lequel elles sont de l'ordre de 10^{-3} (figure 2.9).

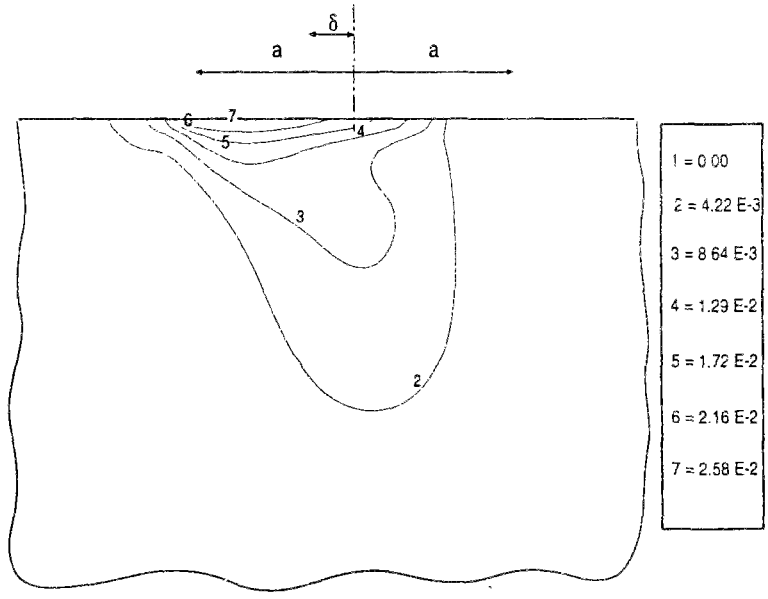


Figure 2.17: Isovaleurs des déformations plastiques équivalentes en régime de glissement total en fretting-fatigue $P = 80\,N$, $S_{max} = 500\,MPa$

Il apparaît donc que l'usure, qui est le type d'endommagement obtenu en glissement total, est associée à un processus de plastification cyclique du matériau dans la zone de contact.

L'usure est donc une phénomène lié aux caractéristiques de fatigue oligocycliques du matériau.
Cette conclusion rejoint les travaux de Johnson [33] et Ludema [39] qui soulignent que le mécanisme d'usure est dû à la plasticité cyclique au niveau de la surface.
L'usure par fatigue se fait par détachement de matière en forme de fines plaquettes connu sous le nom de délamination (Suh [65]). Ce mécanisme a été longtemps étudié en terme de fissures parallèles à la surface par l'application de la mécanique linéaire de la rupture [60, 28, 24]. Mais il est connu que l'usure se produit avec un frottement important, ce qui génère des déformations plastiques et un écrouissage du matériau à la surface. Ceci est confirmé par les coupes faites en dessous des zones usées mettant en évidence un fort couchage de fibres. Ce qui conforte la thèse que l'usure est plus un phénomène induit par la plasticité cyclique et non par un mécanisme de fissuration.
Ludema [39] a fait des travaux dont les conclusions vont dans ce sens. En effet, en faisant une série expériences de glissement d'un pion sur disque avec différents conditions de chargements et différents matériaux, il trouve une bonne corrélation entre le nombre de cycles à l'usure de fatigue par grippage (scuffing) et les propriétés mesurées de fatigue oligocyclique C et n (paramètres de la loi de Coffin-Manson $N_f = 1/2\,(\Delta\epsilon_p/2C)^{1/n}$). Les résultats sont montrés sur la figure 2.18 où le nombre de cycles de rupture est représenté en fonction des paramètres C et n et on voit que le matériau résiste à l'usure d'autant plus que sa capacité à résister à la fatigue oligocyclique est élevée.

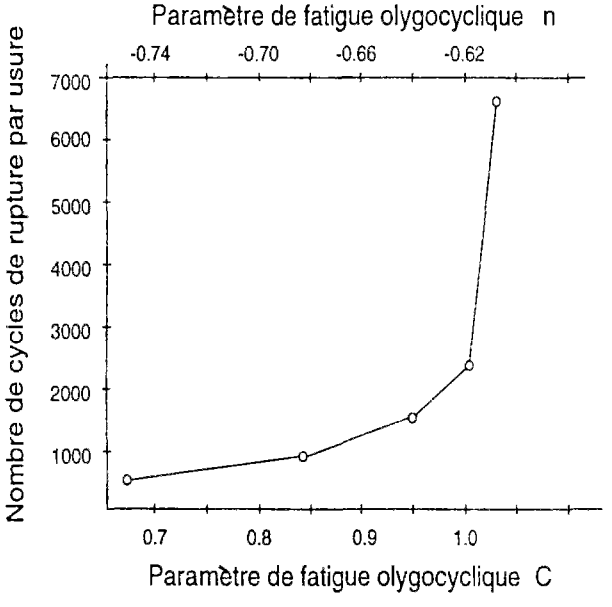


Figure 2.18: Comparaison de la résistance à l'usure (scufffing) et des propriétés de fatigue oligocycliques d'après Ludema (1995).

Toujours dans le même courant d'idées et au terme d'observations expérimentales et des calculs analytiques, Johnson et Kapoor [33] affirment que l'usure de fatigue est due à un mécanisme de plasticité cyclique et donc à la fatigue oligocyclique; Et c'est aussi le résultat d'une évolution de type rochet où la déformation plastique, sous l'effet du chargement cyclique de contact, augmente indéfiniment jusqu'à la rupture ductile qui correspondrait à un enlèvement de matière en forme de débris.
Une réponse asymptotique de type rochet aurait pu être obtenue dans notre modèle en

adoptant une loi d'écrouissage cinématique non linéaire comme a été fait dans les travaux de Muller [47]. L'objectif de son travail a été en effet de construire un modèle quantitatif pour prédire l'usure en tenant compte des grandeurs mécaniques locales (déformation plastiques, taux de rochet) calculées à partir du chargement et des caractéristiques du matériau. Habituellement, on ne prend en compte que les grandeurs macroscopiques pour proposer des lois d'usure classiques [1].

2.3 Conclusion

La prédiction des endommagements dans le cadre de notre modélisation est en accord avec les résultats expérimentaux des essais de fretting-fatigue. La carte de réponse résumant les dégradation est totalement interprétée par notre approche. Ainsi, il est montré que les sollicitations correspondant au régime de collage ne conduisent pas à l'amorçage des fissures et que le chargement en régime mixte conduit à la fissuration aux bords du contact en appliquant le critère multiaxial de fatigue de Dang Van. En outre, on a vu que l'usure est associée à une réponse de type accommodation du matériau supposé à écrouissage cinématique linéaire.
Notre démarche de prédiction de l'amorçage des fissures est basée sur la détermination des limites de fatigue du matériau indépendamment des types de chargement et des géométries de contact (propres à l'essai) et ce par le moyen d'essais classiques de fatigue. Par conséquent, l'approche mise en œuvre devrait être prédictive pour le cas de structures en service soumises à des dégradations de fretting-fatigue.
Par ailleurs, la méthode permettrait aussi de choisir parmi les solutions industrielles adéquates par une prédiction préalable pour tenir compte des contraintes résiduelles résultant d'un traitement thermomécanique du matériau où d'un faible coefficient de frottement dans le cas d'un vernissage de la surface.
Nous avons aussi souligné un résultat intéressant à savoir que le détachement de débris d'usure par fatigue est la conséquence de la plasticité cyclique infirmant ainsi les théories qui abordent le détachement de plaquettees d'usure dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture comme une propagation de fissures en sous couche parallèles à la surface. De la même façon, nous ouvrons un axe de recherches pour la construction de modèles d'usure à partir des grandeurs mécaniques locales et des limites de fatigue olygocycliques du matériau.

Conclusion Générale

Nous nous sommes intéressés à l'étude des endommagements dus au contact et frottement à faible amplitude de débattement. Notre démarche consiste à :

- calculer numériquement les grandeurs mécaniques à l'état asymptotique résultant du chargement cyclique;
- prédire l'initiation des fissures en appliquant un critère de fatigue multiaxial déterminé par des essais de fatigue classiques.

Pour cela, nous avons développé une méthode numérique rapide qui permet de calculer directement l'état cyclique dû à un chargement périodique éventuellement mobile. Cette méthode a été appliquée au cas d'un matériau élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire pour lequel la réponse limite mécanique est toujours périodique. Cela dit, cette méthode pourrait être adaptée pour d'autres comportements pour lesquels la réponse du matériau peut présenter du rochet.
Par ailleurs, le principe de la méthode pourrait servir à élaborer un algorithme qui permet d'obtenir la réponse mécanique périodique en espace d'une structure périodique soumise à un chargement mobile en faisant un calcul uniquement sur une longueur d'onde de la structure. Ceci permettrait de traiter par exemple un chargement de contact mobile sur un demi-espace infini contenant des inclusions réparties régulièrement d'une façon périodique. Une extension serait envisageable par la suite pour calculer la réponse d'un demi-espace infini présentant un profil rugueux périodique à la surface soumis à un chargement mobile.

La prévision de l'initiation des fissures de fatigue a donné des résultats en très bon accord avec ceux issus des essais de fretting-fatigue. On soulignera que notre démarche de prédiction est indépendante des géométries et des chargements propres à l'essai; Ceci est donc très encourageant pour des applications à des structures réelles.
Dans le cadre de notre modélisation, les contraintes de contact sont supposées Hertziennes. Cette hypothèse est sans doute remise en cause lorsque les profils des solides en contact sont changés à cause des déformations plastiques sévères obtenues dans le cas par exemple de l'accommodation ou du rochet. Il faudrait alors examiner plus en détail ce point en faisant un calcul élastoplastique couplé avec la détermination des contraintes de contact tenant compte de l'évolution des géométries. Malgré tout l'intérêt que revêt ce genre de calcul, ce dernier risque d'être très coûteux; Il est donc nécessaire de chercher des algorithmes qui permettent de traiter ces opérations en des temps raisonnables.

Au terme de notre travail, nous sommes arrivés aussi à la conclusion que l'usure est associée à une réponse de la structure de type accommodation. Ainsi, le détachement des plaquettes d'usure est le résultat d'un mécanisme mettant en jeu la ductilité du matériau

tels que l'endommagement par fatigue olygocyclique ou la déformation cumulée par l'effet du rochet.
L'élaboration des lois d'usure par des modèles qui tiennent compte des grandeurs mécaniques locales prend tout son importance. Afin de réaliser cela, il est nécessaire d'effectuer plusieurs essais avec différents matériaux dans diverses conditions expérimentales. Il est aussi important en parallèle de développer des méthodes de calculs rapides pour déterminer les quantités mécaniques et de connaître leurs évolutions pendant les cycles de chargement pour valider les modèles proposés.

ANNEXES

Annexe A

Construction de la plus petite hypersphère circonscrite à un ensemble de points

On considère l'ensemble de l points ($l \geq n+1$) qui engendre l'espace R^n:

$$S = \{x_i / i = 1, 2.., l\} \quad , l \geq n+1$$

On cherche le centre de la plus petite hypersphère circonscrite à l'ensemble S. C'est la solution $\underline{c}$ du problème du min-max suivant:

$$\min_{c} \max_{i} \| \underline{x}_i - \underline{c} \|$$

Toute hypersphère étant convexe, la plus peite hypersphère circonscrite à S contient l'enveloppe convexe $\tilde{S}$ de S. S et $\tilde{S}$ admettent donc la même plus petite hypersphère ciconscrite. D'après le théorème [22], la plus petite hypersphère circonscrite à un ensemble convexe bornè existe et est unique.
Nous allons maintenant caractèriser cette plus petite hypersphère circonscrite pour nous aidera à trouver son centre et son rayon.
On va donner avant une définition. On appelera polytope engendré par un ensemble de i points, l'ensemble de barycentres de ces points affectès des coefficients positifs. La dimension du polytope est la dimension de l'espace qu'il a engendré. On rappelera que la dimension de l'espace engendrè par un ensemble de i points est au plus égale à i. ainsi lles polytopes de dimension 2 sont les triangles et les polytopes de dimension 3 sont les tétraèdres. D'après le thèorème de Karathéodory [38], l'enveloppe convexe $\tilde{S}$ de S est l'union de tous les polytopes engendrès par au plus $n+1$ points de S. Le nombre m de ces polytopes est donc ègal à:

$$m = C_l^2 + C_l^3 + ... + C_l^n + C_l^{n+1}$$

Soit P_n une combinaison de $n+1$ points de S engendrant l'espace R^n. Les $n+1$ points de P_n sont les sommets d'un polytope de dimension n et il existe une seule hypersphère passant par tous les sommets. Son centre est l'intersection des $n(n+1)/2$ hyperplans qui coupent orthogonalement une arrête en son milieu. En pratique, pour déterminer le centre de l'hpersphère qui passe par tous les sommets de P_n, il suffit de considérer l'intersection de n hyperplans orthogonales aux n arrêtes concourantes en un sommet de P_n. Il faut souligner que l'hypersphère passant par tous les sommets du polytope est différente de la plus petite hypersphère circonscrite qui peut contenir P_n sans passer par tous les sommets. Examinons maintenant une combinaison P_{n-1} de n points de S engendrant un sous espace R^{n-1} (hyperplan de R^n). Il existe un infinité d'hypersphères de R^n qui passe par tous les sommets de P_{n-1} mais la plus petite est celle dont le centre appartient au sous espace R^{n-1}. Cette denière hypersphère existe et est unique car elle a le même centre et le même rayon

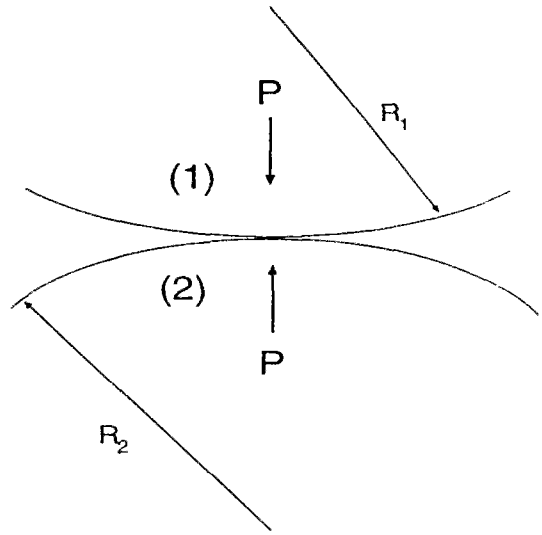
que l'hypersphère de R^n circonscrite à P_{n-1}. Encore une fois, il ne faut pas confondre cette hypersphère avec la plus petite hypersphère circonscrite à P_{n-1} qui ne passe pas forcément par tous les sommets de P_{n-1}. Par le même raisonnement, on construit le centre de l'hypersphère circonscrite à P_{n-1} en considérant les hyperplans médiateurs aux aux $n-1$ arrêtes concourantes en un sommet de P_{n-1}. Nous obtenons une droite et le centre est l'intersection de cette droite avec l'hyperplan R^{n-1}.
Nous construisons, de la même façon, l' hypersphère de R^n circonscrite au polytope P_i de dimension i engendré par $i+1$ points pour i variant de $n-2$ à 1.
Nous allons donné un théorème démontré par papadopoulos [54] qui permet de donner un algorithme de recherche de la plus petite hypersphère circonscrite.

Théorème 1 *La plus petite circonscrite à un ensemble S de l points de l'espace euclidien à n dimensions est l'une des hypersphères circonscrites aux polytoes P_i engendrès par des combinaisons de $i+1$ points de S pour i variant de 1 à n.*

Pour illustrer cela, regardons dans le plan comment construire la plus petite hypersphère circonscrite à un ensemble de l points ($l \leq 3$). On commence par considérer, pour chaque couple de points, le cercle dont le diamètre est le segement formé par ce couple et on vérifie si les autres points sont à l'intérieur de ce cercle. Si ce cercle est trouvé, c'est le plus petit cercle circonscrit à l'ensemble des points S. Dans le cas ou on en trouve pas, il faut considérer, pour chaque triplet de points de S, le cercle circonscrit dont le centre est l'intersection des médiatrices dse cotès du triangle formé par ce tiplet et de vérifier si ce cercle contient les autres points. Le théorème assure qu'on va trouver en trouver avant d'examiner tous les triplets de points.

Annexe B

Pressions de Hertz



Considèrons deux solides cylindriques de rayons R_1 et de rayon R_2 en contact sous un effort normal P qui ont respectivement comme modules d'Young E_1 et E_2 et comme coefficients de poisson ν_1 et ν_2. la pression normale dans le cadre de la théorie élastique de Hertz est egale:

$$p(x) = p_0\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

avec:

$$p_0 = \sqrt{\frac{PE^*}{\pi R}}$$

et la demi-largeur de contact:

$$a = \sqrt{\frac{4PR}{\pi E^*}}$$

où l'on note:

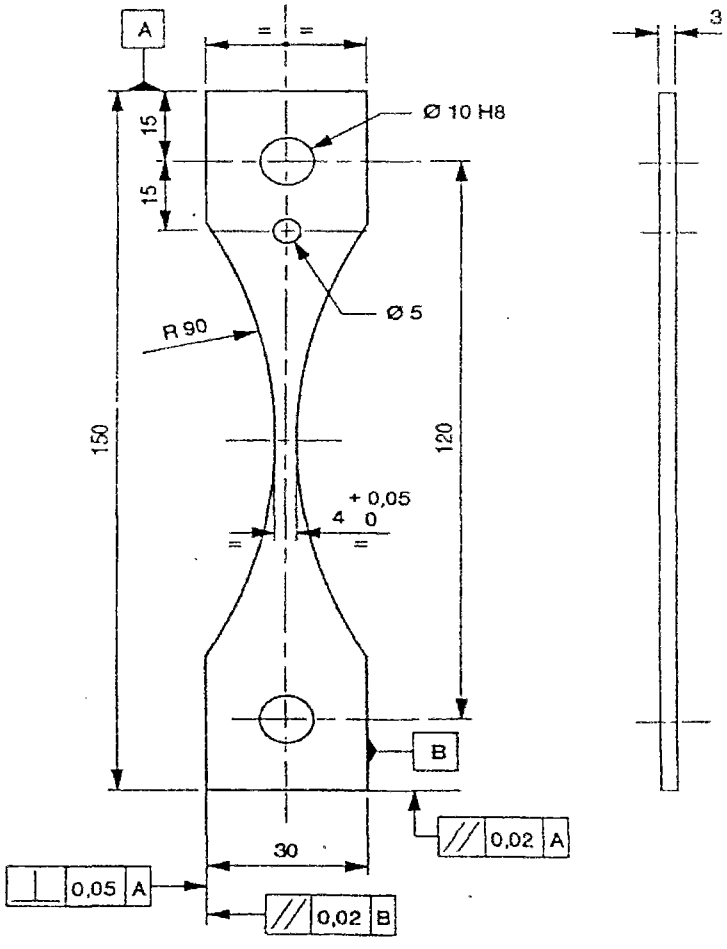
$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}$$

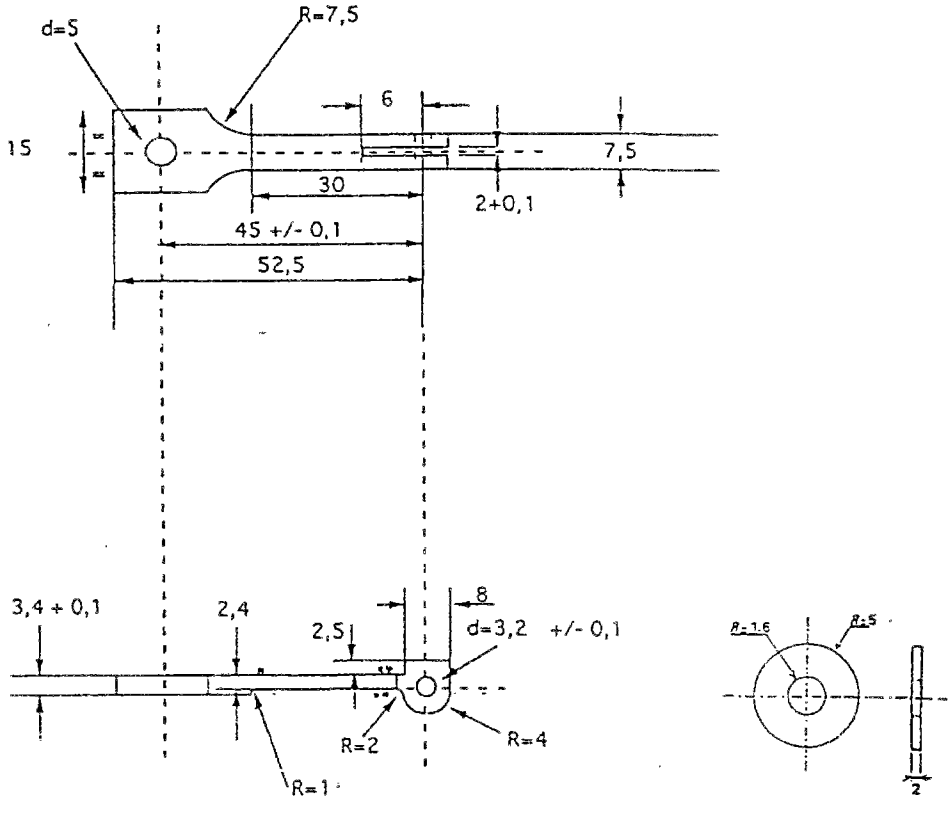
et:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Annexe C

Dimensions de l'éprouvette et du patin de l'essai expérimental interprété





ECHELLE: 1/1

ECHELLE: 2/1

Bibliographie

[1] J.F. Archard *Contact and rubbing of flat surfaces*, J.Appl.Phys, 24, pp. 981-988, 1953.

[2] S. Akel, Q.S. Nguyen, *Determination of the limit response in cyclic plasticity*, Proceedings of the 2nd International Conference on Computational plasticity: Models, Software and Applications (Edited D.R.J. Owen, E. Hinton, E. Onate), Pineridge Press, Swansea, 1989, pp. 639-650.

[3] D.M. Baiely and R.S. Sayles, *Effect of roughness and sliding friction on contact stresses*, J. Trib, Vol. 113, pp. 729-738, 1991.

[4] V. Bhargava, G.T. Hahn, C.A. Rubin, *An elastoplastic finite element model of rolling contact* J.Appl.Mech, Vol. 52, pp. 67-73, 1985.

[5] V. Bhargava, G.T. Hahn, C.A. Rubin, *An elastoplastic finite element model of rolling contact Part2* J.Appl.Mech, Vol. 52, pp. 75-82, 1985.

[6] P. Blanchard, *Usure induite en petits débattements: transformation tribologique d'alliages de titane*, thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 1991.

[7] Ph. Boisse, P. Ladevèze, P. Rougée, *A large time increment method for elastoplastic problems*, Eur.J.Mech, A/solids, N^o 4, pp. 257-275, 1989.

[8] H.D. Bui, K. Dang Van *Contribution à l'étude théorique du contact élastique d'un frotteur cylindrique glissant sur un massif élastique* Industrie minérale, N^o spécial Rhéologie, tome IV N^o 1, (30 Mars 1976).

[9] J.L. Chaboche, *Constitutive equations for cyclic plasticty and cyclic viscolplasticity*, Int.J of Plasticity, N^o 5, pp. 245-302, 1989.

[10] B. Halphen, *Problèmes quasistatiques en viscoplasticité*, Université Pierre et Marie Curie, 1978.

[11] J.-Y. Cognard, P. Ladvèze, *A large time increment approach for cyclic viscoplasticity*, Int.J.Plas, Vol. 9, pp. 141-157, 1993.

[12] J.-Y. Cognard, P. Ladvèze, *The large time increment method applied to cyclic loadings*, IUTAM Symposium Creep of structures, Cracow/Poland, pp. 555-562, 1990.

[13] J.F. Carton, *Traitements superficiels et tenue en service des assemblages démontables: base d'une méthodolgie de choix*, Thèse Centrale Lyon, 1993.

[14] K. Dang Van and M.H. Maitournam, *Thermomechanical state near rolling contact area*, Dissipative Processes in tribology, Edited by D. Dowson et al., Elsievier Science B.V. (1994) pp. 423-428.

[15] K. Dang Van and M.H. Maitournam, *Elastoplastic Calculations of the Mechanical State in Alternative Moving Contacts: Application to Fretting Fatigue*, FRETTING FATIGUE, ESIS 18 (Edited by R.B. Waterhouse and T.C. Lindley), Mechanical Engineering Publications, London, (1994) pp. 161-168.

[16] K. Dang Van & M.H. Maitournam, *Steady-state flow in classical elastoplasticity : application to repeated rolling and sliding contact*, J.Mech.Phys.Solids Vol.41, N° 11, pp. 1691-1710, 1993.

[17] K. Dang Van, M.H. Maitournam and B. Prasil, *Elatoplastic analysis of repeated moving contact to railways damage phenomena*, Wear 196, pp. 77-81, 1996.

[18] K. Dang Van, B. Griveau, O. Message, *On a new multiaxial fatigue limit criterion: theory and application, biaxial and multiaxial fatigue*, in M.W. Brown and K. Miller (eds), EGF Publication 3, pp.479-496, 1982.

[19] K. Dang Van, *Macro-micro approach in high-cycle multiaxial fatigue*, in D.L. McDowell and R. Ellis (eds), Advances in multiaxial fatigue, ASTM STP 1991, American Society for testing and Materials, Philadelphia, pp. 120-130, 1993.

[20] A. Deperrois, *Sur le calcul de limites d'endurance des aciers*. thèse École polytechnique, Juin 1991.

[21] G. Dumas, C.N. Baronet, *Elastoplastic indentation of a half space by an infinitely long rigid circular cylinder* Int.J.Eng.Sci, Vol. 13, pp. 519-530, 1971.

[22] H.G. Eggleston, *Convexity*, Cambridge university press, 1958.

[23] A.D. Hearle, Deformation, *Shakedown and fatigue in rolling contact*, Ph.D. Thesis, Cambridge University, 1984.

[24] A.D. Hearle and K.L. Johnson, *Mode II SIF for a crack parallel to the surface of an elastic half-space*, J. Mech. Phys. Solids, 33, pp. 61-81, 1985.

[25] D.A. Hills, *Mechanics of fretting fatigue*, Wear 175, pp. 107-113, 1994.

[26] D.A. Hills, D. Nowell and J.J. O'Connor, *On the mechanics of fretting fatigue*, Wear 125, pp. 129-146, 1988.

[27] D.A. Hills, D. Nowell, *Crack initiation criteria in fretting fatigue*, Wear, 136, pp. 329-343, 1990.

[28] D.A. Hills and D.W. Ashelby, *On the determination of SIF for a wearing halph space*, Eng. Fract. Mech, 13 pp. 69-78, 1980.

[29] D.A. Hills, D. Nowell and A. Sackfield, *Mechanics of elastic contacts*, Butterworth-Heinmann Ltd, 1988.

[30] G. Inglebert, J. Frelat, *Quick analysis of inelastic structures using a simplified method*, Nuclear Engineering and design, Vol. 16, pp. 281-291, 1989.

[31] L. Johansson, *Numerical Simulation of Contact Pressure Evolution in Fretting*, J.Tribol, Vol 116 pp. 247-254, 1994.

[32] K.L. Johnson, *Contact mechanics*, Cambridge University Press, 1985.

[33] K.L. Johnson, *Contact mechanics and wear of metals*, Wear 190 pp. 162-170, 1995.

[34] K.L. Johnson and H.R. Shercliff *Shakedown of 2-Dimensionnal asperities in sliding contact*, Int.J.Mech.Sci Vol. 34, No 5, pp. 375-394, 1992.

[35] K.L. Johnson, *The application of shakedown principles in rolling and sliding contact*, Eur. J. Mech., A/solids, Vol. 11, pp. 155-172, 1992.

[36] K.L. Johnson, *Plastic flow, residual stress and shakedown in roliing contact*, proceeding of Second International Symposium on contact Mechanics and wear of Rail/wheel systems 1986, university of Rhode Island, Kingston, Edited by University of Waterloo Press, 1986.

[37] P. Ladevèze, *La methode à grand increment pour l'analyse de structures à comportement non linéaire décrit par variables internes*, C.R.A.S 309, Série II, N^o 11, pp. 1095-1099, 1989.

[38] S.R. Lay, *Convex sets and their applications*, John Willey and sons Publishers, 1982.

[39] K. Kim, K.C. Ludema, *A correlation between Low cycle fatigue and scuffing properties of* 4340 *steel*, Wear 117 pp. 617-621, 1995.

[40] W.T. Koiter, *A new general theorem on shakedown of elasto-plastic structures*, Koninkl. Ned. Ak. Wetescap, B59, 24, 1956.

[41] A. Kappor, J.A. Williams and K.L.Johnson, *The steady state sliding of rough surfaces*, Wear, 175 pp.81-92, 1994.

[42] K. Komvopoulos and D.-H. Choi *Elastic finite element analysis of multi-asperity contacts*, J.Tribol, Vol. 114, pp. 823-831, 1992.

[43] T.C. Lindley, K.J. Nix *Fretting fatigue in the power industry: Experiments, analysis and Integrety Assesment*, Standardization of fretting fatigue test methods and equipment, ASTM STP 1159, American Society for testing and Materials, Philadelphia, pp. 153-169, 1992.

[44] N. Maouche, M.H. Maitournam, Ky Dang Van, *On a new method of evaluation of the inelastic state due to moving contacts*, Wear 203-204, pp. 139-147, 1997.

[45] H. Maitournam, *Formulation et résolution numérique des problèmes thermoviscoplastiques*, Thèse ENPC, 1989.

[46] R.D. Mindlin, *Compliance of elastic bodies in contact*, J.Appl.Mech Vol.16, pp.259-268, 1949.

[47] N. Muller, *Modélisation des phénomènes de l'usure -ébauche d'un modèle quantitatif*, Thèse Ecole Ploytechnique, 1996.

[48] H.S. Nagaraj, *Elastoplastic contact of bodies with friction under normal and tangentiel Loading*, ASME Vol. 106, pp. 519-526, 1984.

[49] K. Nishioka, K. Hirakawa, *Fundamental investigations of fretting fatigue*, Bulletin of JSME, Vol. 12, N^o 50, 1968.

[50] D. Nowell, D.Hills, *Hertzian contact of ground surfaces*, J.Tribol, pp. 175-179, 1988.

[51] D. Nowell, D.Hills, *Mechanics of fretting fatigue tests*, Int. J. Mech. Sci. Vol. 29, N^o 5, pp. 355-365, 1987.

[52] A. Ouakka & H. Maitournam, *Simulation de l'opération de dudgeonnage. Méthode de plasticité stationnaire. Etude Bi et Tridimensionnelle*, Rapport LMS, contrat E.D.F 526-00/DR/MM, Juil. 1991.

[53] E. Orowan, *Theory of the fatigue of metals*, Proceedings of the royal academy, A 171, London, 1939.

[54] I. Papadopoulos, *Fatigue polycyclique des métaux - une nouvelle approche*, Thèse E.N.P.C, 1987.

[55] C. Petiot, *Développement d'une méthodologie prévisionnelle du comportement en fretting fatigue couplant les approches expérimentales et théoriques*. Thèse Centrale Lyon, 1994.

[56] C. Petiot, L. Vincent, K. Dang Van, N. Maouche, J. Foulquier, B. Journet, *An analysis of fretting-fatigue failure combined with numerical calculations to predict crack nucleation*, Wear 181-183 pp. 101-111, 1995.

[57] A.R.S. Ponter, *A general shakedown for elasto-plastic bodies with work hardening*, 3rd Int. Conf. on Structural Mechanics in Reactor tech., London, 1976.

[58] A.R.S. Ponter, A.D. Hearle and K.L. Johnson *Application of the kinematical to rolling and sliding point contacts*, J.Mech.Phy.Solids, Vol. 33, No. 4,pp. 339-362, 1985.

[59] D.B. Rayaprolu, R. cook, *A critical review of fretting fatigue investigations at the royal aerospace establishment*, Standardisation of fretting fatigue test methods and equipement, ASTM STP 1159, M. Helmi Attia and R.B. Waterhouse, Eds., American society for testing and materials, Philadelphia, pp. 129-152, 1992.

[60] A.R. Rosefield, *A fracture mechanics approach to wear*, Wear. 61, pp. 125-132, 1980.

[61] C. Ruiz, P.H.B Boddington and K,C. Chen , *An investigation of fatigue and fretting in devetail joint*, Exp. Mech, Vol. 24 (3), pp. 208-217, 1984.

[62] K. Sato, H. Fuji and S. Kodama, *Crack propagation behaviour in fretting-fatigue*, Wear No. 107,pp. 245-262, 1986.

[63] K. Sato, *Damage formation during fretting fatigue*, Wear No. 125, pp. 163-174, 1988.

[64] N. Strömberg, L.Johansson and A. Klarbring, *A generalized standard model for contact, friction and wear*, Contact Mechanics, edited by M. Raouset al. Plenum Press, New York,1995.

[65] N.P. Suh, *An averview of the delamination theory of wear*, Wear No. 44, pp. 1-16, 1977.

[66] L. Vincent, Y. Bertier, M. Godet, *Testing methods in fretting fatigue: a critical appraisal*, standardisation of fretting fatigue test methods and equipement, in M. Helmi Attia and R.B. Waterhouse (eds), ASTM STP 1159, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1992, pp. 33-48.

[67] O. Vingsbo, S. Soderberg *On fretting maps*, Wear 126 pp. 131-147, 1988.

[68] Z.R. Zhou, *Fissuration induite en petits débattement: application au cas d'alliages d'Aluminium aéronautiques*, Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 1992.

[69] A. Zmitrowicz, *A thermodynamical model of contact, friction and wear: I Governing equations*, Wear, 114 pp.135-168, 1987.

[70] J. Zarka, J.J Engel, G. Ingelbert, *On a simplified inelastic analysis of structures* Nuclear Engineering and design, Vol. 57, pp. 333-368, 1980.

Liste des figures

1.1 Schéma du montage expérimental du fretting. 11
1.2 Régimes de fretting. 11
1.3 Régimes de fretting d'après Zhou (1992). 12
1.4 Apparition de la rugosité sur la surface. 13
1.5 Absence de dégradation en régime de collage. 13
1.6 Fissures aux bords du contact d'après Zhou (1992). 14
1.7 Creusement de la zone de contact due à l'usure. 15
1.8 Schéma du montage expérimental du fretting-fatigue. 16
1.9 Régimes de fretting-fatigue. 16
1.10 Propagation de fissure en fretting-fatigue. 17
1.11 Carte de fretting-fatigue d'après C. Petiot (1994). 17
1.12 Courbes de Wöhler en frettig-fatigue 18

1.1 Largeur de contact d'un cylindre rigide sur un massif semi-infini 26
1.2 L'évolution de la largeur de contact en fonction du nombre de cycles d'après Nishioka et Hirakawa (1968) 27
1.3 L'évolution du coefficient en fonction du nombre de cycles d'après J.F. Carton (1993) 28
1.4 Effet d'échelle : influence de la rugosité 29
1.5 Pression normale de contact due à la rugosité d'après Nowell et Hills (1988) 29
1.6 Limites d'adaptation déterminées par les méthodes analytique dans le cas du roulement avec glissement d'après K.L. Johnson(1986) 31
1.7 Cartes d'adaptation déterminées par les méthodes analytique dans le cas du roulement avec glissement total d'après K.L. Johnson(1986) 32
1.8 Cas d'application de la méthode stationnaire 33
1.9 Calcul du fretting avec la méthode stationnaire. 34
1.10 Carte d'adaptation et d'accommodation pour le fretting d'après K. Dang Van and M.H. Maitournam (1994) 34
1.11 Principe de l'approche simplifiée 35
1.12 Schéma itératif de la méthode à grand incrément de temps 36

2.1 Présentation du problème. 40
2.2 Calcul de l'incrément de déformation plastique. 43
2.3 Algorithme numérique la méthode cyclique. 44
2.4 Algorithme numérique la méthode numérique de Akel et Nguyen (1989). . . . 45
2.5 Cas de chargement mobile. 46

3.1 Cas étudié 49
3.2 Modèle de calcul 50
3.3 Cycle de contraintes tangentielles de contact dans le cas de glissement partiel . 52
3.4 Cycle de contraintes tangentielles de contact dans le cas de glissement total . 54
3.5 Maillage. 55
3.6 Partie raffinée du maillage sous la zone de contact. 55
3.7 Comparaison des contraintes résidueiles en fonction de la profondeur par la méthode cyclique et la méthode incrémentale en glissement partiel. 56

3.8 Comparaison des contraintes résiduelles à la profondeur 0.5a par la méthode cyclique et la méthode incrémentale en glissement partiel. 57
3.9 Comparaison des trajets contrainte-déformation plastique par la méthode cyclique et la méthode incrémentale en glissement partiel. 57
3.10 Comparaison des contraintes résiduelles en surface par la méthode cyclique et la méthode incrémentale en glissement total. 58
3.11 Comparaison des contraintes résiduelles en fonction de la profondeur par la méthode cyclique et la méthode incrémentale en glissement total 59
3.12 Comparaison des trajets contrainte-déformation plastique par la méthode cyclique et la méthode incrémentale en glissement total. 59
3.13 Carte d'adaptation en glissement partiel - influence de l'effort de cisaillement - (μ =0.3) 61
3.14 Isovaleurs des déformations plastiques équivalentes en glissement partiel 61
3.15 Carte d'adaptation en glissement partiel - influence de la pression normale - . . 62
3.16 Carte d'adaptation en glissement total - influence de l'amplitude de glissement - 63
3.17 Isovaleurs des déformations plastiques équivalentes en glissement total 64

1.1 Amplitude de variation de facteurs d'intensité de contraintes comparé aux seuils de propagation en fonction de la longueur de fissures d'après Lindley et Nix (1992). 73
1.2 Échelles microscopique et macroscopique pour un métal polycristallin 75
1.3 Échelles microscopique et macroscopique pour un métal polycristallin 77
1.4 Diagrammes de Dang Van dans le cas de non-rupture et de rupture 79

2.1 Montage expérimental du fretting fatigue 82
2.2 (a) Schéma du montage expérimental du fretting-fatigue. (b)Modèle de contact adopté par Nowell et Hills pour le calcul des contraintes de contact 83
2.3 Contraintes tangentielles en fretting-fatigue 84
2.4 Contraintes tangentielles en fretting-fatigue 85
2.5 Chargement adopté en fretting-fatigue en cas de glissement partiel 88
2.6 Chargement adopté en fretting-fatigue en cas de glissement total 89
2.7 Carte expérimentale d'endommagements de fretting-fatigue 90
2.8 Maillage pour le calcul en fretting fatigue avec raffinement de la zone de contact. 91
2.9 Déformation plastique concentrée au bord $x = -a$ du contact (coté en traction sous l'effet de l'effort tangentiel) 92
2.10 Les cycles de contrainte-déformation de fretting-fatigue en glissement partiel $P = 100N\ et\ S_{max} = 600MPa$ 92
2.11 Diagrammes de Dang Van 93
2.12 Diagrammes de Dang Van aux points critiques 93
2.13 Isovaleurs de la valeur du critère 94
2.14 Diagrammes de Dang Van pour des points en profondeur et en surface 95
2.15 Cycle de contraintes au bord critique en glissement partiel $P = 100\,N\ et\ S_{max} = 600\,MPa$ en fretting-fatigue 95
2.16 Cycle contrainte-déformation fretting-fatigue en glissement total $P = 80\,N$, $S_{max} = 500\,MPa$ 96
2.17 Isovaleurs des déformations plastiques équivalentes en régime de glissement total en fretting-fatigue $P = 80\,N$, $S_{max} = 500\,MPa$ 96

2.18 Comparaison de la résistance à l'usure (scufffing) et des propriétés de fatigue oligocycliques d'après Ludema (1995). 97

Liste des tableaux

3.1 Caractéristiques du matériau. 56
3.2 Paramètres de calcul pour le glissement partiel. 56
3.3 Paramètres de calcul pour le glissement total. 58
3.4 Caractéristiques du matériau. 60

2.1 Composition chimique de l'acier 32CDV13. 81
2.2 Composition chimique de l'acier 100C6. 82
2.3 Propriétés mécaniques des aciers 32CDV13 et 100C6. 83
2.4 Données pour les points simulés en régime en glissement partiel. 86
2.5 Données pour les points simulés en régime en glissement total. 89
2.6 Caractéristiques élastoplastiques du matériau. 91
2.7 Limites de fatigue du matériau. 91