



Contribution à l'étude du comportement des milieux pulvérulents. "Micro-rhéologie et état statistique des milieux granulaires"

Didier Lorin de La Grandmaison

► To cite this version:

Didier Lorin de La Grandmaison. Contribution à l'étude du comportement des milieux pulvérulents. "Micro-rhéologie et état statistique des milieux granulaires". Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1980. Français. NNT : . tel-00529380

HAL Id: tel-00529380

<https://pastel.hal.science/tel-00529380>

Submitted on 25 Oct 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

70449
NS 10313(2)

NS 10313/41

X

THESE

présentée à

l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées

par

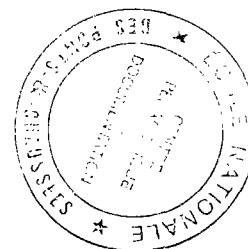
Didier LORIN de la GRANDMAISON

pour l'obtention

du titre de DOCTEUR-INGENIEUR

en Mécanique Appliquée au Génie Civil

(Université Paris VI - E.N.P.C.)



CONTRIBUTION A L'ETUDE DU COMPORTEMENT DES MILIEUX PULVERULENTS
" MICRO-RHEOLOGIE ET ETAT STATISTIQUE DES MILIEUX GRANULAIRES "

soutenue le 17 décembre 1980 devant le jury composé de:

M. B. HALPHEN	Président
M. A.G. DAVIS	Rapporteur
M. M. CASSAN	Examineur
M. M. PREDELEANU	Examineur
M. M. BOUCHE	Examineur



15

15

S O M M A I R E

0. Avant-propos - Introduction - Conventions et Notations
1. Mécanique du grain et du contact
 - 1.1 Pétrographie - Tribologie du contact
 - 1.11 Aspects géométriques
 - 1.12 Loi de comportement statistique du contact intergranulaire
 - 1.2 Rappels des principes généraux de la mécanique Q.S. du solide
 - 1.11 Cinématique du grain et du contact
 - 1.12 Dynamique du grain et du contact
2. Etat statistique d'un milieu granulaire
 - 2.1 Présentation du problème type
 - 2.11 Paramètres d'état d'un système granulaire
 - 2.12 Choix des données du problème type
 - 2.2 Caractéristiques statistiques d'état dans un milieu granulaire
 - 2.21 Généralités
 - 2.22 Caractéristiques d'état cinématique
 - 2.23 Caractéristiques d'état dynamique
 - 2.24 Conclusion
3. Compte-rendu et interprétation des essais
 - 3.1 Cinématique d'un milieu granulaire plan sous différents cas de chargement
 - 3.11 Matériel d'essai
 - 3.12 Présentation des essais
 - 3.13 Conclusion
 - 3.2 Comportement oedométrique d'un sable soumis à des chargements cycliques
 - 3.21 Matériel d'essai
 - 3.22 Description et compte-rendu des essais
 - 3.23 Interprétation des essais
 - 3.24 Conclusion
4. Conclusion générale - Bibliographie

AVANT - PROPOS

Cette thèse a été réalisée à partir de travaux de recherche effectués au Centre Expérimental du Bâtiment et des Travaux Publics, dont je remercie le Directeur Général, Monsieur Le Bourre.

Je tiens à exprimer ma gratitude à Monsieur Halphen du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, qui m'a enseigné la Mécanique des Matériaux à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées et, m'a fait l'honneur de présider la commission d'examen.

Monsieur Davis, chef de la Division Mécanique des Sols et des Chaussées, a assumé avec dévouement la direction scientifique de mes travaux. Ses conseils précieux m'ont permis de profiter de sa profonde connaissance en matière de Mécanique des Sols. Je lui adresse mes plus vifs remerciements.

Je suis reconnaissant à Monsieur Cassan, Directeur général de la Société Fondasol, de l'intérêt qu'il a porté à mon travail.

Je remercie Monsieur Predeleanu, professeur à l'Ecole Normale Supérieure de l'Enseignement Technique, de me faire l'honneur de participer à la commission d'examen.

Monsieur Bouche, adjoint du délégué général scientifique du C.E.B.T.P., a bien voulu s'intéresser à mes travaux. Je tiens à le remercier sincèrement.

Je n'oublie pas Monsieur Salençon, professeur à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, dont le cours de Plasticité et de Calcul à la Rupture a guidé à plus d'un titre le développement de cette thèse. Je tiens à lui exprimer ici, ma profonde reconnaissance.

Mes remerciements vont également à Monsieur Bonnet, directeur adjoint de l'E.N.P.C., qui m'a permis d'entreprendre cette recherche, grâce à une bourse de l'Ecole.

C'est avec plaisir, que je remercie Monsieur Auger, ingénieur civil des Mines, pour sa collaboration au sein de la Division Mécanique des Sols.

J'adresse enfin mes remerciements à Messieurs Gasnier et Mauny qui m'ont apporté un concours précieux dans la réalisation pratique des essais.

Madame Gueguen a assuré avec talent la dactylographie de ce document et Monsieur Pasquignon s'est chargé de la tâche difficile de réaliser les nombreuses figures qui complètent le texte.

1 - INTRODUCTION

L'objet de cette étude est une contribution à la compréhension du comportement mécanique des sols en tant que milieux granulaires.

1.1 - RAPPEL HISTORIQUE DE LA MECANIQUE DES SOLS

Le sol est en effet un matériau complexe comprenant plusieurs constituants : des particules solides (ou grains), de l'eau et de l'air. Ces deux derniers occupent les espaces entre les particules solides. Les propriétés mécaniques des sols sont fortement liées à cette composition. C'est ainsi que l'on distingue le squelette ou ensemble des particules solides, et le fluide ou milieu interstitiel.

La difficulté d'étude d'un tel milieu réside dans la méconnaissance quantitative ou même qualitative des phénomènes physico-chimiques qui interviennent lorsque le sol est mécaniquement sollicité. On peut citer des phénomènes de plusieurs types :

- Déformation des grains liée à leur comportement propre.
- Ecrasement local ou éclatement des grains.
- Réarrangement des grains entre eux.
- Transformation chimique des composants sous l'effet de la pression ambiante.
- Liquéfaction, absorption de l'eau interstitielle, gélification...

En mécanique des sols classique, on a mis en évidence deux caractéristiques importantes des sols à la rupture (Coulomb, 1773) :

- l'angle de frottement limite (ϕ)
- la cohésion (c)

D'une manière assez sommaire on a classé les sols selon ces deux critères, en appelant : "sols pulvérulents" les matériaux à frottement interne et sans cohésion, et à l'inverse "sols purement cohérents" les matériaux avec cohésion et ayant un angle de frottement interne nul. (Les sables entrent en général dans la première catégorie, les argiles dans la seconde). Bien sûr, les sols réels possèdent à la fois un frottement interne et une cohésion ; quoiqu'il en soit, les problèmes résolus compte tenu de ce "principe" ne furent que des problèmes traitant de la stabilité d'un massif ou d'une structure en contact avec le sol.

C'est ainsi que sont apparus les concepts de :

"charge limite" ou charge au-delà de laquelle la rupture survient (la stabilité n'est plus assurée),

"équilibre limite" ou état du matériau pour lequel un certain accroissement des contraintes mécaniques entraîne un déplacement continu (écoulement infini) ou une instabilité.

Il va de soi que, si l'on peut se contenter du calcul des charges limites pour l'étude de la stabilité d'un talus ou d'une fondation, l'étude du comportement du sol qui conditionne entre autres le dimensionnement des structures et la répartition des contraintes dans ce matériau, est impraticable compte tenu de l'hypothèse de rigidité avant rupture et de l'état des connaissances en plasticité.

C'est pour cette raison que distinctement de l'étude de stabilité, les ingénieurs confrontés au problème du calcul des structures en contact avec le sol ont développé des méthodes dans lesquelles le sol était considéré comme un matériau parfaitement élastique (Boussinesq, 1885). Sont donc apparus des concepts dérivés de la théorie de l'élasticité tels que :

Module d'élasticité de Young du sol pour les massifs infinis ou semi-infinis.

Module de réaction vertical ou horizontal pour le calcul de l'enfoncement de fondations superficielles ou profondes, et de la déformation latérale des pieux.

Cette façon de concevoir le sol comme un matériau rigide parfaitement plastique pour l'étude de la stabilité et comme un matériau élastique pour l'étude du comportement (répartition des contraintes et calcul des déformations) présentait l'avantage en génie civil de pouvoir traiter les problèmes géotechniques de la même manière que les problèmes de structures en acier ou en béton et les problèmes d'interaction sol-structure. Malheureusement concevoir le sol de cette façon a conduit à des aberrations ou à des résultats en désaccord avec l'expérience, aggravés par le fait que pour vérifier la stabilité de zones fortement sollicitées, on s'est servi de la répartition des contraintes calculées selon la méthode élastique et inversement on a adopté comme module d'élasticité le rapport d'une contrainte par une déformation irréversible.

C'est donc pour répondre à un besoin de cohérence dans le comportement avant la rupture des sols que les recherches dans ce domaine se sont portées sur l'élaboration de modèles rhéologiques (ou lois efforts déformations) qui permettent d'interpréter d'une façon plus rationnelle les résultats expérimentaux. Les travaux récents en mécanique des sols se sont inspirés des résultats acquis dans l'étude théorique des matériaux élasto-visco-plastiques, en particulier des métaux et alliages. Cette avance théorique, à l'origine, motivait et justifiait une utilisation plus rationnelle des propriétés mécaniques de tels matériaux (Hill, 1950).

Les lois de comportement récemment proposées sont du type élasto-plastique avec écrouissage. C'est-à-dire un comportement pour lequel la déformation totale sous l'effet des efforts appliqués est la somme de déformations purement élastiques, linéaires ou non, et de déformations irréversibles dont la valeur dépend de paramètres cachés (ou d'écrouissage) tels que, par exemple, l'indice des vides, la déformation volumique, la déformation déviatorique, etc.

On peut citer à cet égard le travail remarquable effectué par l'Ecole de Cambridge pour mettre au point des modèles relativement simples (CAM CLAY) et qui, à partir de l'analyse de la dissipation plastique (par frottement interne), permettent d'interpréter relativement correctement les essais triaxiaux.

1.2 - L'APPROCHE MICROSCOPIQUE ET L'APPROCHE MACROSCOPIQUE D'UNE LOI DE COMPORTEMENT

Après ce bref rappel historique, il doit être signalé que dès l'origine, pour tenter d'expliquer le comportement d'un milieu ou plus généralement des choses de notre monde visible, deux points de vue ont été, alternativement et concurremment, adoptés par les chercheurs :

- le point de vue macroscopique et
- le point de vue microscopique.

L'assimilation d'un milieu à un milieu continu postule que la limite de la densité (par exemple) soit indépendante de la forme à tout moment, du volume évanescant élémentaire. Toutefois, les milieux courants et le sol en particulier nous laissent voir une juxtaposition de petits éléments minéraux distincts. Ainsi nos sens peuvent nous tromper quant à l'apparente homogénéité d'un sol et conséquemment quant à son apparente continuité. Nous dirons donc qu'un sol est un milieu microscopiquement discret et macroscopiquement continu en considérant des éléments de volume "assez petits" mais "non trop petits". Il est alors capital d'observer qu'en s'abstenant de toute hypothèse sur les interactions physico-chimiques entre particules solides et milieu interstitiel, et donc sans chercher à comprendre ni à expliquer les phénomènes élémentaires qui peuvent se produire à l'intérieur d'un sol, l'approche macroscopique obtient un double avantage :

a) les principes qu'elle est amenée à dégager de l'expérimentation resteront vérifiés quelles que soient, par ailleurs, les conceptions de l'école microscopique, conceptions qui devront nécessairement respecter ces mêmes principes, à la même échelle.

b) les notions utilisées sont plus simples, et les relations entre elles qu'énoncent les principes, sont aussi condensées que possible.

La rançon de cette "simplicité" est que certaines propriétés des corps ne peuvent être expliquées et doivent être déduites d'expériences appropriées.

Par contre, l'approche microscopique, en partant d'un schéma ou modèle granulaire (rouleaux - 2 dimensions, sphères - 3 dimensions) - cf. Dantu, Davin, etc. - peut édifier une théorie rendant compte de telle ou telle propriété des divers milieux justiciables de ce modèle. La valeur expérimentale de cette propriété, confirmant la théorie, vient alors justifier le modèle adopté. En réalité, il n'existe qu'une "différence de degré" dans la finesse de représentation d'un sol selon les deux approches. L'une comme l'autre admettent des "modèles". Mais à l'heure actuelle, seule l'approche macroscopique (par l'extérieur) a pu fournir des lois de comportement dont la valeur expérimentale est incontestable. L'approche microscopique (par l'intérieur) au contraire n'a pu encore franchir le stade de l'observation qualitative. Ce qui montre que nous sommes encore loin de l'étape de la formulation de lois statistiques. Nous devons toutefois rendre cette justice à quelques chercheurs tels que Rowe, Mogami, d'avoir tenté de formuler des lois de type statistique. Mais ces recherches restent isolées et ne peuvent se comparer à celles très nombreuses faites pour la formulation directe de lois rhéologiques par expérimentation macroscopique.

1.3 - DEMARCHE DE L'ETUDE

Il semble donc qu'il y ait une lacune dans la connaissance de ce milieu complexe qu'est un sol, lacune d'autant plus évidente que les modèles macroscopiques proposés tendent à se multiplier et à se complexifier au fil des années. Il s'agit là évidemment d'un danger car le but d'une étude macroscopique est de dégager des lois relativement simples et non pas d'établir une formulation compliquée et ambivalente où le nombre de paramètres est tel qu'il est possible de "coller", aux erreurs de mesure près, à n'importe quelle courbe expérimentale, moyennant un choix approprié des dits paramètres.

Pour nous résumer nous pourrions dire que, sans vouloir pécher par excès de simplicité, nous devons admettre que, présentement, les lois de comportement

qui nous sont proposées sont nombreuses, délicates à manipuler, même si dans bien des cas, leur valeur expérimentale n'est pas démentie. Le problème qui se pose à l'heure actuelle n'est pas tant de formuler d'autres lois, mais plutôt de définir leurs limites, leur champ d'application, d'explorer les solutions de problèmes pratiques, afin de tenter de dégager des caractéristiques communes, la signification physique des paramètres, etc.. A valeur expérimentale équivalente, l'enjeu est la commodité et la simplicité ; il s'agit, en effet, en employant une comparaison historique, de choisir entre le système de Ptolémée et celui de Galilée pour expliquer le mouvement des planètes.

Mais ce travail est déjà entamé car l'utilisation de l'outil informatique permet, par des méthodes numériques de "tester" la valeur mathématique et physique d'une loi de comportement. L'adaptation de la méthode des éléments finis aux problèmes de mécanique des sols est d'ailleurs un des axes de recherche qui soutient l'élaboration d'une telle loi.

En ce qui nous concerne, nous nous sommes orientés vers une approche "par l'intérieur" pour la compréhension du comportement mécanique d'un sol. Notre démarche a été guidée par celle effectuée par les pionniers de la théorie cinétique des gaz et de la mécanique statistique qui sont arrivés à justifier une loi d'état pour un gaz. La formulation macroscopique de celle-ci ($PV=RT$) datait en effet du siècle précédent. C'est d'ailleurs l'aboutissement de leurs travaux qui a permis "d'expliquer" bien des écarts relatifs à cette loi d'état très simple qui n'était applicable, en fait, qu'aux gaz parfaits.

Nous avons donc adapté notre plan d'étude à ces observations, c'est ainsi que :

La première partie est une étude du problème de contact intergranulaire. Celui-ci est abordé du point de vue de la mécanique rationnelle d'une part, du point de vue de la loi de comportement d'autre part.

La deuxième partie propose la formulation de caractéristiques statistiques de l'état mécanique d'un milieu granulaire. Il s'agit du prolongement à un

milieu, des paramètres d'état d'un système. Le but à atteindre étant de faire intervenir ces paramètres dans des lois statistiques qui régissent le comportement d'un milieu granulaire.

La troisième partie est constituée par un compte rendu d'essais effectués au CEBTP sur un nouveau matériau granulaire artificiel. L'objet de cette dernière partie est de confirmer l'importance de certains phénomènes cinématiques pour lesquels le problème théorique a été posé.

CONVENTIONS ET NOTATIONS

1 - Convention

La convention de sommation muette est adoptée, sauf indication contraire, sur les indices répétés en position supérieure et inférieure. Les bases utilisées sont orthonormées ce qui implique l'identité des composantes covariantes et contravariantes.

2 - Répertoire des indices

Les indices grecs $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ sont réservés habituellement à la définition des axes des repères ($\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$) .

Les indices latins $i, j, k, \dots$ sont réservés à des scalaires, des vecteurs, ... liés aux grains. La position basse (resp. haute) est affectée à l'espace des paramètres cinématiques (resp. dynamique) ($i, j, k, \dots = 1, 2, \dots, n$)

Les autres indices latins ou grecs, sont fixes et caractérisent une grandeur particulière.

3 - Répertoire des symboles

Les minuscules (grecques ou latines) sont affectées aux grandeurs vectorielles.

Les minuscules italiques (grecques ou latines) sont affectées à des grandeurs scalaires.

Les majuscules (grecques ou latines) sont affectées à des points, des ensembles, des bases, des matrices symétriques, selon les cas.

Les majuscules italiques sont affectées à des fonctions scalaires.

4 - Notations - (exemples)

$\tau_i^{\rightarrow}$: vecteur associé au grain (i)

$I^{\rightarrow}$: base orthonormée associée à (i)

$(t^{\rightarrow}, \tau^{\rightarrow})$: angle vectoriel des vecteurs $t^{\rightarrow}$ et $\tau^{\rightarrow}$

$|t^{\rightarrow}, \tau^{\rightarrow}|$: mesure de l'angle vectoriel (norme, amplitude)

τ^t : rapport de la norme du vecteur projeté de $\tau^{\rightarrow}$ sur $t^{\rightarrow}$, sur la norme de $t^{\rightarrow}$

τ^I : ligne des composantes de $\tau^{\rightarrow}$ dans la base $I^{\rightarrow}$

I^J : opérateur orthogonal de changement de base

$\tau = |\tau^{\rightarrow}|$: norme du vecteur $\tau^{\rightarrow}$

τ : matrice antisymétrique associée à $\tau^{\rightarrow}$ dans une base précisée à l'avance (en général la base de référence) $\tau \sim \tau^{\rightarrow} \wedge$

L_i : fonctionnelle associée au grain (i)

$i_p^{\rightarrow}$: pème vecteur unitaire de la base $I^{\rightarrow}$

$(G_i, I^{\rightarrow})$: repère associé au grain (i)

CHAPITRE 1

MECANIQUE DU GRAIN ET DU CONTACT

1.1 - PETROGRAPHIE - TRIBOLOGIE DU CONTACT

1.11 - ASPECTS GEOMETRIQUES

1.110 - GENERALITES

Le grain est un élément solide d'un ensemble non dénombrable . Cet élément fermé est isolément un corps solide doté de caractéristiques géométriques et mécaniques qui lui sont propres. On peut citer entre autres :

- . Géométrie (surface, volume, etc)

La surface du contour d'un grain, sera par exemple, définie par une équation scalaire liant les composantes d'un vecteur (dont l'extrémité décrira la surface de contour) repéré par un système d'axes lié au grain.

- . Masse volumique

A l'intérieur du domaine limité par la surface mentionnée précédemment, on définit une masse volumique pour tenir compte des effets gravifiques ou inertiels lorsque ceux-ci ne sont pas négligeables devant les autres sollicitations. (solide homogène)

- . Loi de comportement volumique

Il s'agit d'un ensemble de relations liant le tenseur des taux de contraintes à l'état actuel des contraintes et des déformations (et éventuellement à d'autres variables internes) et au tenseur des taux de déformations. On peut également définir un critère de rupture.

- . Loi de comportement surfacique - ou loi d'interface

Il s'agit d'un ensemble de relations liant le vecteur des taux de contraintes à l'état actuel des contraintes et des déformations (et éventuellement à d'autres

variables internes) et au vecteur des taux de déformations. Ces relations définissent en particulier la nature du contact intergranulaire (élastique, visqueux, plastique). Elles sont évidemment prépondérantes dans l'étude d'un matériau constitué de corps rigides. Elles le sont dans une moindre mesure dans le cas de matériaux constitués de grains très déformables.

La loi de comportement surfacique est une notion plus délicate à définir que la loi de comportement volumique, ne serait-ce que parce qu'elle dépend d'un nombre plus grand de paramètres et de ce qu'elle est implicite puisqu'elle résulte de la nature et de la texture des deux corps en contact.

1.111 CARACTERES PETROGRAPHIQUES

a - Echelle de schématisation

Les contours des grains réels, sont en général loin d'être réguliers et il semble d'ailleurs qu'aussi poussée que soit la vision microscopique, les surfaces continuent d'apparaître irrégulières. La difficulté d'étude d'un milieu constitué de grains, provient pour une large part, de cette propriété de conservation de l'aspect anguleux que possèdent les surfaces de contour réelles.

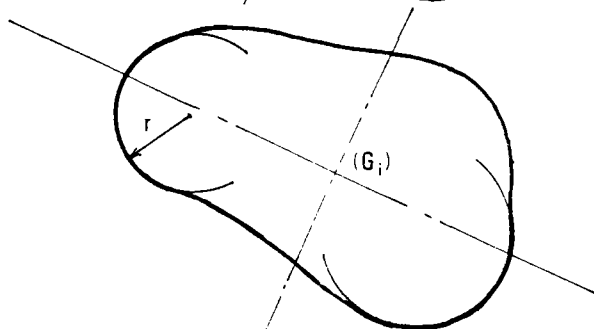
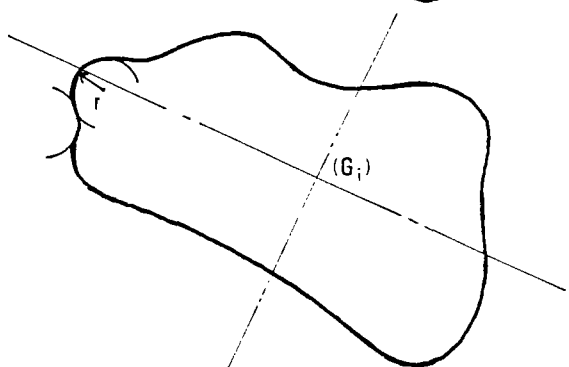
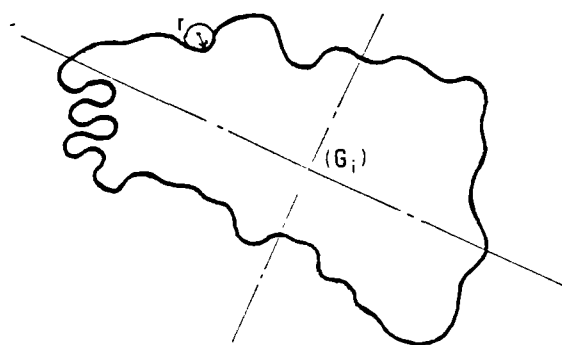
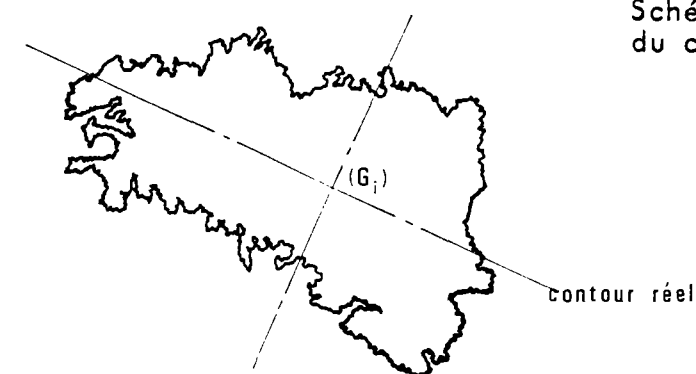
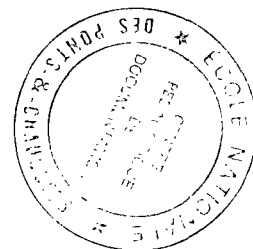
La question qui se pose est celle du choix de l'enveloppe du grain ou encore de l'échelle de schématisation du contour. La réponse à cette question est essentielle car elle détermine dans une large mesure le choix de la loi de comportement surfacique - ou loi d'interface.

Nous avons mentionné en effet qu'il y a une adéquation entre la loi de comportement surfacique et l'état anguleux du contour. A la limite serait-il possible de schématiser les grains sous forme d'ellipsoïdes? L'angularité étant, elle, prise en compte par une loi adaptée de résistance aux déplacements au niveau

des contacts intergranulaires.

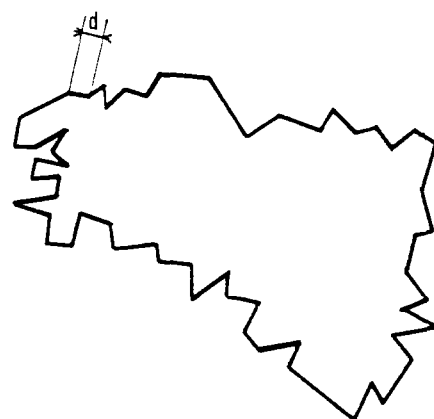
Nous indiquons ci-après 2 exemples de schématisation du contour d'un grain à faciès anguleux.

Schématisation géométrique
du contour d'un grain

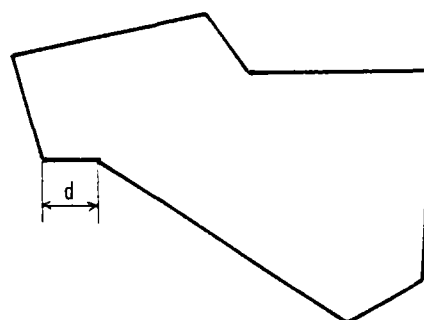


un exemple d'approche régulière

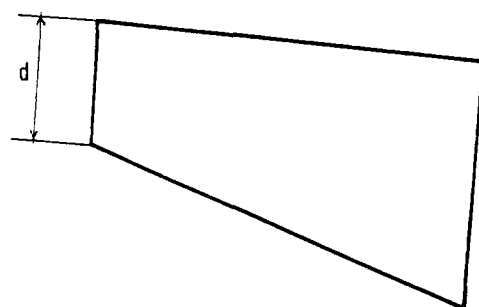
(λ)



(μ)



(ν)



un exemple d'approche polyédrale

b - Méthode analytique

L'étude de la morphologie d'objets tridimensionnels par des mesures sur des projections planes constitue l'essentiel du problème de la stéréologie. Toutefois, outre les difficultés mathématiques que ce problème pose, on se heurte à l'effet d'échelle mentionné plus haut. Il est alors nécessaire de scinder l'étude morphoscopique selon deux aspects :

- la forme générale, d'une part (aspect volumétrique)
- le détail des aspérités d'autre part (aspect surfacique)

La frontière est purement arbitraire, aussi a-t-on intérêt à simplifier au maximum l'aspect volumétrique, et à intégrer dans l'aspect surfacique les irrégularités de première grandeur. Cette démarche s'appuie sur l'hypothèse, confirmée par la nature des grains réels, qu'il n'existe pas de grains à contour lisse et de forme élaborée, en d'autres termes, que les irrégularités de surface sont persistantes à tous niveaux (homothétie interne). Des objets artificiels, dits "façonnés", ne possèdent pas cette propriété.

b.1 - Analyse de la forme globale

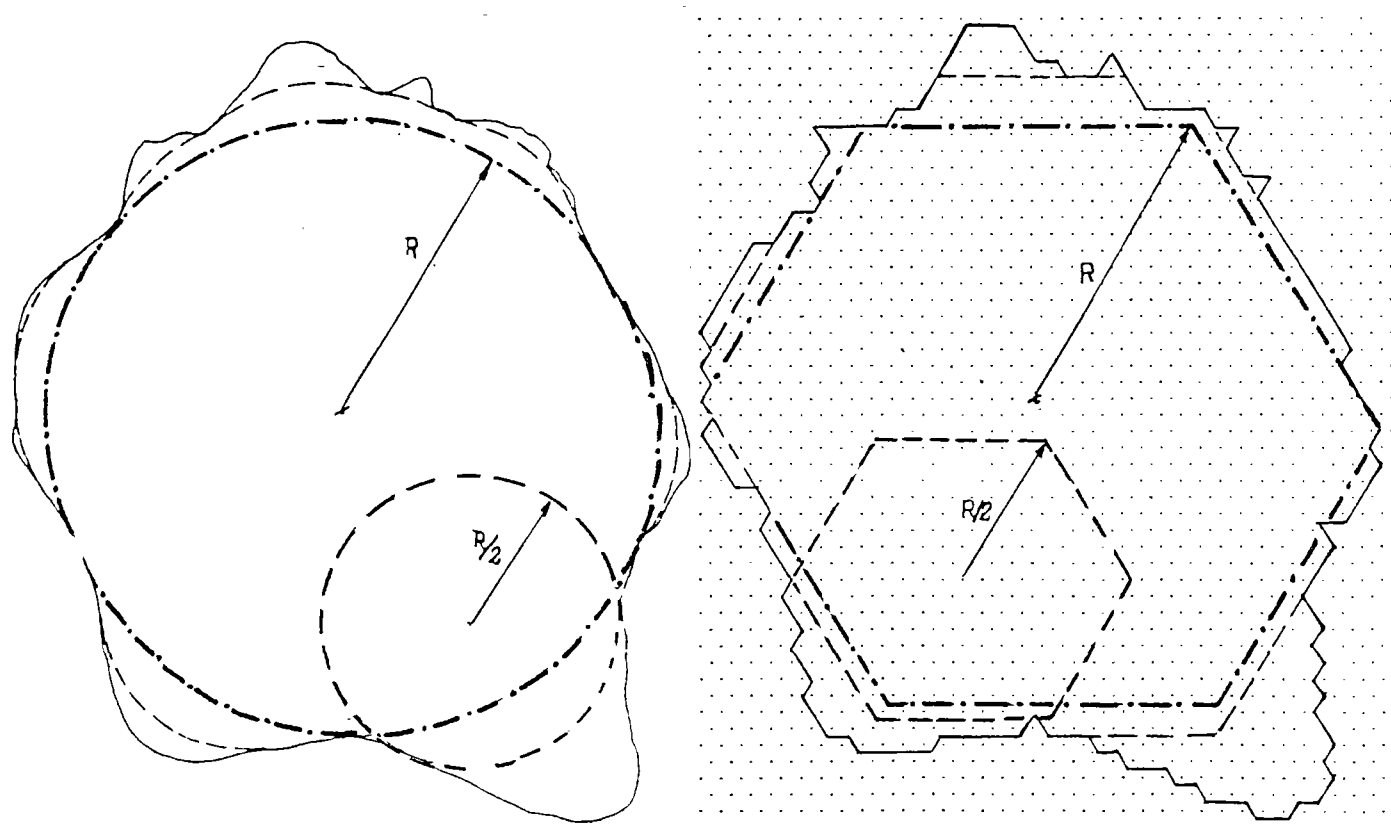
De nombreux auteurs ont proposé des indices permettant de définir au mieux la forme générale d'un grain (Klumheim, Rittenhouse, etc..); le plus connu est l'indice de sphéricité. Malheureusement, cet indice ne se calcule qu'à partir d'une projection (bidimensionnelle) d'un grain, et que de plus il est obtenu comme le rapport du carré du périmètre du contour sur l'aire de la surface projetée. Connaissant la difficulté insurmontable que pose l'estimation du périmètre et on conçoit l'incohérence pratique d'une telle évaluation. A moins de prendre en compte un nombre important de paramètres de fonctions on en est réduit à ne considérer, au mieux, un grain que sous la forme d'un ellipsoïde et à ne retenir que les rapports de ses dimensions maximale et minimale vis à vis de sa dimension intermédiaire, ou encore les deux premiers invariants du tenseur dont l'ellipsoïde

(de volume constant) est la représentation graphique.

Le premier invariant caractérise l'allongement ou l'aplatissement, le second la distorsion morphologique.

Il est alors loisible de donner une définition théorique de l'ellipsoïde équivalent d'un grain (cf §1 112 a). Il pourra s'agir de l'ellipsoïde dont les inerties principales sont identiques aux inerties principales du grain. Une fois la matrice diagonale d'inertie connue, il est immédiat d'en déduire les valeurs des dimensions principales de l'ellipsoïde par une simple opération d'inversion.

Par contre la détermination expérimentale de la matrice d'inertie, qui nécessite au minimum 6 mesures, achoppe sur la petitesse d'un grain. (On sait, par contre, pour des objets de taille moyenne, de forme quelconque, mais homogènes en densité, calculer les termes principaux de leur tenseur d'inertie, par mesure indirecte de plusieurs moments cinétiques).



— Discretisation d'une image plane suivant une p-trame à symétrie ternaire, approximation des ouvertures circulaires par des ouvertures hexagonales.

— Contour de l'image d'un grain.

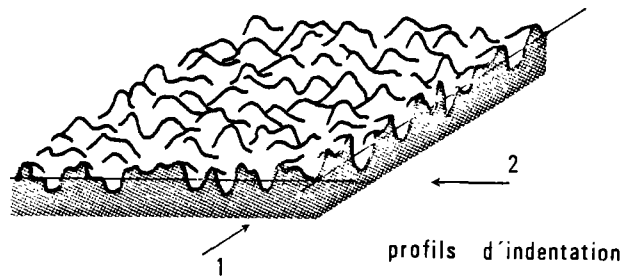
— . — Ouverture par le plus grand élément structurant (cercle ou hexagone) de rayon R , inscrit dans le contour du grain.

— — — Ouverture par l'élément structurant de rayon $R/2$.

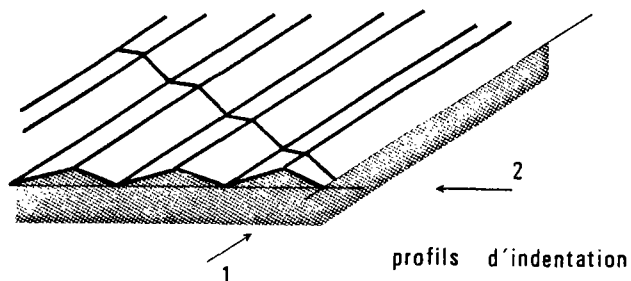
Méthode numérique de traitement d'image (selon FROSSARD 1978)

b.2 - Descriptions des irrégularités de surface

Une fois défini forfaitairement le contour global d'un grain, il reste à donner une description des détails microscopiques de surface. En premier lieu, on caractérise l'état de rugosité de la surface par un profil d'indentation. Ceci suppose une isotropie plane de la rugosité. (Il existe toutefois des cas d'anisotropie - ce sont par exemple des assemblages cristallins - vus à l'échelle moléculaire)



Etat de surface isotrope

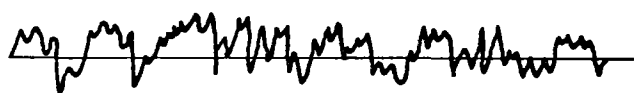


Etat de surface anisotrope
(surface cylindrique)

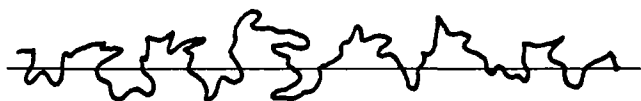
Dans le cas général l'hypothèse d'isotropie plane de rugosité est confirmée à une échelle microscopique raisonnable ($> \mu m$). Dans toutes les directions parallèles les sections par un plan normal à la surface donneront un profil équivalent. Avant de donner une modélisation mathématique du profil, plusieurs procédés sont actuellement utilisés pour donner une approximation quantitative de l'état de rugosité du profil. Certains auteurs proposent des coefficients caractéristiques. On peut en citer quelques uns :

b.3 - Analyse statistique du profil d'indentation

Les profils d'indentation sont générés par des distributions gaussiennes de fonctions aléatoires qui permettent de coller au mieux aux angularités des profils réels. Dans les cas des métaux, par exemple, des séries de fonctions périodiques permettent de donner une approximation réaliste du degré de rugosité des surfaces.



Profil d'indentation et ligne de référence (type métallique)



Profil d'indentation et ligne de référence (cas courant)

Modèles gaussiens de distribution de population d'aspérités



Profil généré par des fonctions périodiques aléatoires (selon RADHAKRISHNAN)



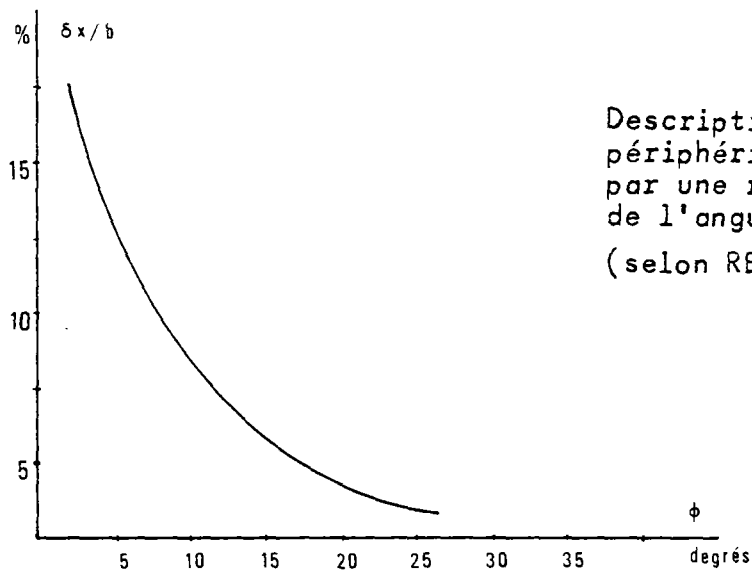
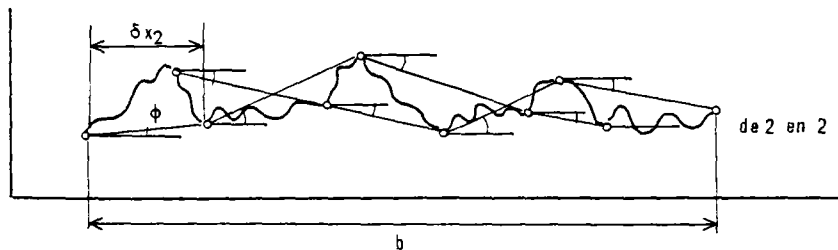
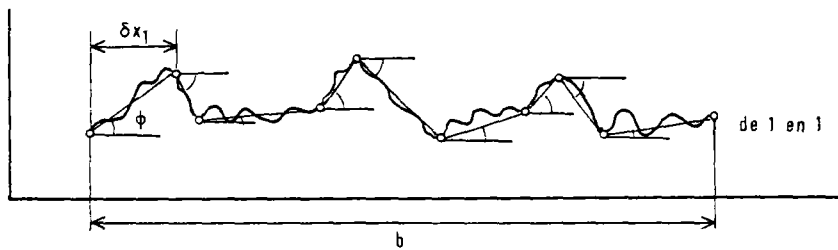
Profil généré par une distribution de cercles de diamètres variables (selon HISAKADO)

. Inclinaison statistique des aspérités (Rentgers)

Une seconde méthode procède de l'analyse de la répartition stastitique de l'inclinaison des faces des différentes irrégularités en fonction de leur largeur. Le profil d'observation est discrétisé au moyen d'un ensemble de

points définissant une courbe polygonale aussi voisine que possible du profil relevé. On détermine ensuite l'inclinaison ϕ , par rapport à la ligne de référence, des dents obtenues en joignant successivement les points de la ligne polygonale, puis de 2 en 2, de 3 en 3, etc.

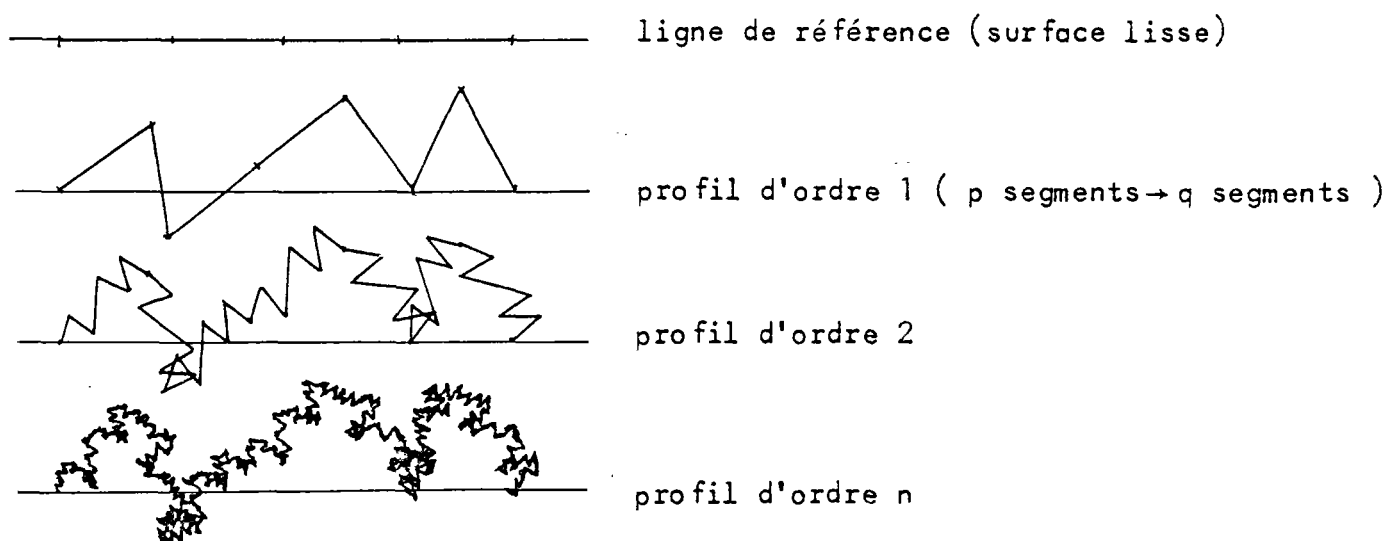
Les résultats statistiques sont représentés graphiquement.



Description des irrégularités
périphériques d'une surface
par une répartition statistique
de l'angularité
(selon RENTGERS)

. Profil fractal

Le profil d'indentation est généré par une homothétie interne d'angularité, analogue à la courbe de Von Koch (Mandelbrot 1975)



La courbe générée est de longueur infinie, il s'agit en réalité d'un espace dont la dimension d est supérieure à 1

$$d = \frac{\log q}{\log p} \quad \text{pour une homothétie interne constante}$$

(dans le cas de la figure $p = 4$, $q = 7 \rightarrow d = \frac{\log 7}{\log 4} = 1,404$)

La généralisation de cette notion conduit à caractériser l'irrégularité du contour du grain réel (irrégularité supposée persistante par homothétie interne) par un facteur de dimension attaché à la surface dont la valeur sera comprise entre 2 et 3 (La dimension 2 correspondant à une surface parfaitement lisse ou bien à une fonction de surface de contour régulièrement dérivable)

1.112 - SCHEMATISATION MATHEMATIQUE DU CONTOUR

a - Fonction de surface

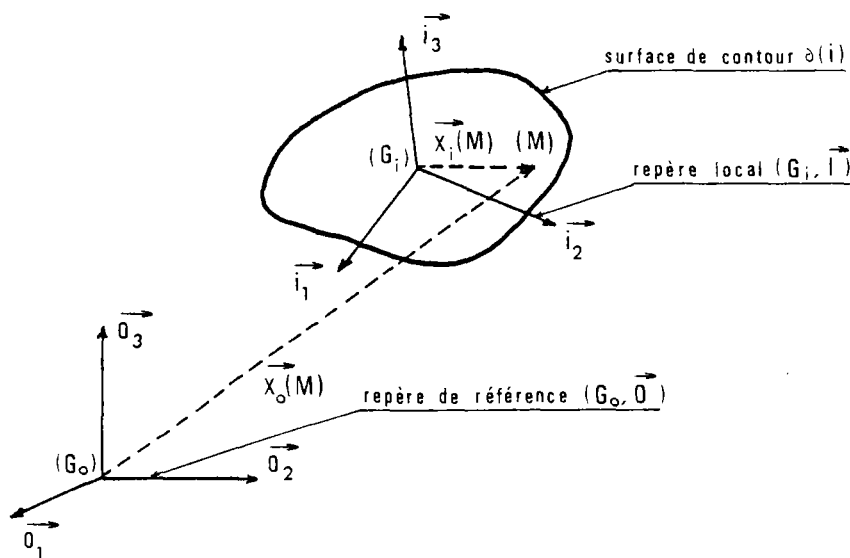
Dans l'espace à 3 dimensions, on note par $(G_o, \vec{O})$ le repère de référence - où (G_o) est le point origine et $\vec{O}$ symbolise la colonne des vecteurs d'une base orthonormée directe - Un point (M) quelconque est repéré par le vecteur :

$$(G_o, M) = \vec{x}_o(M) = \vec{x}_o^0 \cdot \vec{O}$$

(où $\vec{x}_o^0$ représente la ligne des composantes de $\vec{x}_o$ dans la base $\vec{O}$). Le fait que (M) appartienne à la surface de contour $\partial(i)$ d'un grain (i) conduit à une relation scalaire liant les coordonnées du point dans un repère local $(G_i, \vec{I})$

soit
$$G_i(\vec{x}_i^I) = 0$$

où G_i est une fonction scalaire de classe (C_2)



b- Repère canonique

Pour répondre au besoin de la dualité de la cinématique et de la dynamique associées aux grains (i) d'une part et aux contacts intergranulaires (ij) d'autre part, on sera amené à définir 2 types de repères.

- Les repères canoniques (i) $\sim (G_i, I^{\rightarrow})$ ou repères locaux liés intrinséquement aux grains (i).

- Les repères associés (ij) $\sim (M_{ij}, IJ^{\rightarrow})$ ou repères locaux liés au contact entre 2 grains adjacents (i) et (j) (cf §1 113)

Un repère canonique (i) répondra aux 2 critères suivants :

- (G_i) est centre d'inertie du grain (i).
- $I^{\rightarrow}$ est la base principale du tenseur d'inertie du solide que définit la surface de contour $\partial(i)$ caractérisée par la fonction G_i .

Par convention on notera par $vol(i)$, le volume du grain (i) et par Ξ_i la matrice diagonale représentative de son inertie dans la base principale $I^{\rightarrow}$. (Les termes de Ξ_i seront disposés par ordre croissant)

c- Approche mathématique du contour d'un grain

Dans l'optique de schématisation du contour d'un grain, abordée au §1 111 b, deux voies semblent possibles pour générer une surface.

- L'approche polaire.

On considère pour cela, le vecteur $x_i^{\rightarrow}$ comme un rayon vecteur dont la norme x_i est fonction de l'orientation définie par le vecteur unitaire $\kappa^{\rightarrow}$.

$$\text{Soit } x_i^{\rightarrow} = x_i(\kappa^{\rightarrow}) \cdot \kappa^{\rightarrow}$$

Les composantes de $\kappa^{\rightarrow}$ dans la base $I^{\rightarrow}$ peuvent tout naturellement s'exprimer en fonction de la mesure d'angles d'Euler (λ et μ)

$$\kappa^I = \begin{vmatrix} \cos \lambda \cos \mu & \sin \lambda \cos \mu & \sin \mu \end{vmatrix}$$

ou en fonction de 2 mesures d'angles déviatoriques (λ, μ)

$$\kappa^i_\beta = \frac{1}{\sqrt{3}} (\cos \lambda + \sqrt{2} \sin (\mu + \frac{2\beta\pi}{3})) \quad \text{pour } \beta = 1, 2, 3$$

(où κ^i_β représente la $\beta^{\text{ème}}$ composante de κ^I)

Si l'on développe en série, la fonction $x_i(\vec{\kappa})$ selon les puissances croissantes des composantes de $\vec{\kappa}$, c'est-à-dire selon les fonctions périodiques de λ et μ , on obtiendra une 1^{ère} approximation de la surface du contour.

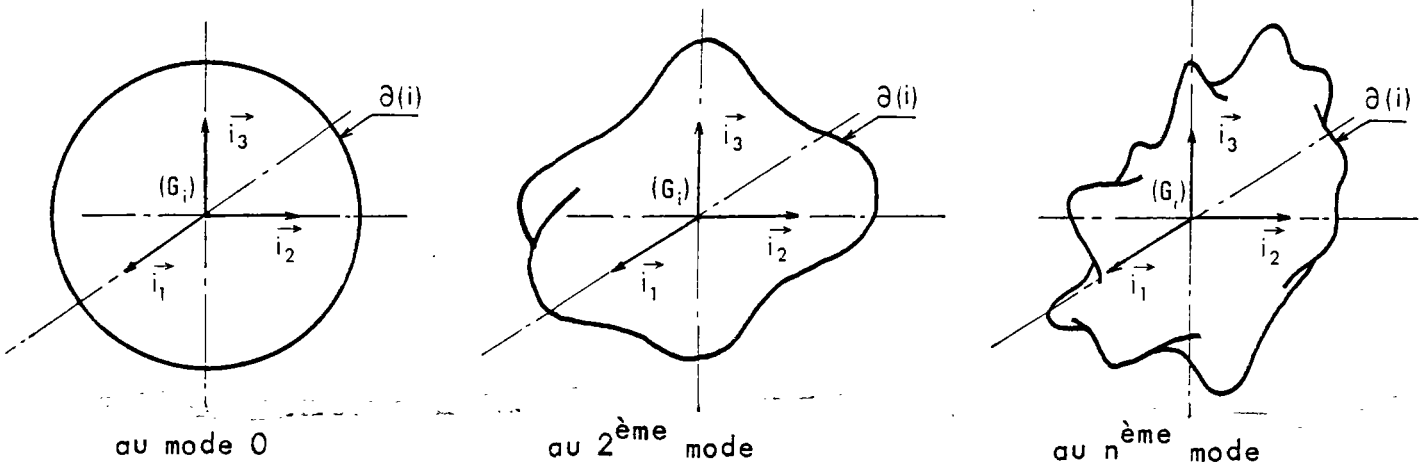
$$x_i = v_{\alpha\beta\gamma} \cos^\alpha \lambda \cdot \sin^\beta \lambda \cdot \cos^{\alpha+\beta} \mu \cdot \sin^\gamma \mu \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots)$$

La fonction x_i est par conséquent, le produit de fonctions périodiques dont la période est multiple de 2π selon λ et μ . Les coefficients $v_{\alpha\beta\gamma}$ définissent les différents modes d'angularité. (Le mode d'ordre 0 est une boule centrée sur (G_i)).

La surface approchée par le développement en série de x_i , est de type étoilée centrée.

Pour le cas bidimensionnel, le module du rayon vecteur ne dépend que d'un seul paramètre θ ; et $x_i(\theta)$ est une fonction périodique (2π). Elle est développable en série de Fourier.

$$x_i = v_0 + \sum_{\beta \geq 1} v_\beta \cos 2\beta(\theta - \lambda_\beta)$$



Génération d'une surface irrégulière par une série de fonctions périodiques

. L'approche cartésienne

L'approximation de la fonction de surface G_i par un développement en série selon les puissances croissantes des composantes de $\vec{x}_i$, est analogue dans son principe, mais plus délicate à mettre en oeuvre.

Sans entrer dans les détails, on peut cependant noter que l'expression de G_i sera de la forme :

$$G_i(\vec{x}_i) = v_0 + v_{\alpha\beta} x_i^{\alpha} x_i^{\beta} + v_{\alpha\beta\gamma\delta} x_i^{\alpha} x_i^{\beta} x_i^{\gamma} x_i^{\delta} + \dots$$

Les différents coefficients sont obtenus par les moments d'ordre pair selon la technique classique des probabilités. Ainsi :

. Le moment d'ordre 0 correspond au volume

$$\int_{(i)} \delta w = vol(i)$$

(où δw est un volume élémentaire $\delta w = \delta x_i^1 \delta x_i^2 \delta x_i^3$)

. Le moment d'ordre 1 (moment statique) est nul d'après la définition de (G_i) :

$$\int_{(i)} x_i^I \delta w = 0$$

. Le moment d'ordre 2 (moment d'inertie) correspond au tenseur d'inertie

$$\left(\int_{(i)} x_i^I \cdot x_i^{I'} \delta w \right) \mathbb{1} - \int_{(i)} x_i^I \cdot x_i^{I'} \delta w = \Xi_i$$

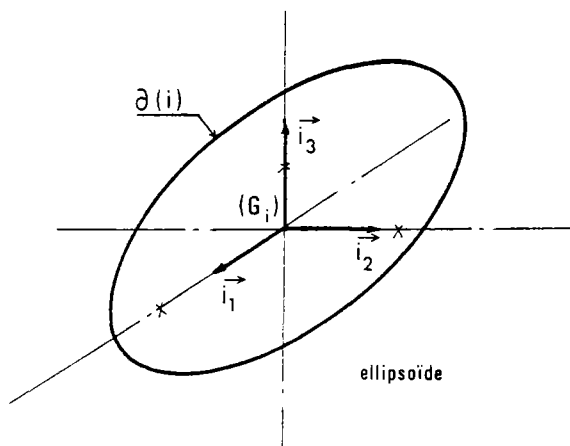
$$\text{Sachant que } \begin{cases} x_i^I \cdot x_i^{I'} = |\vec{x}_i|^2 = x_i^2 \\ x_i^{I'} \cdot x_i^I \text{ matrice d'un tenseur monome symétrique} \\ \mathbb{1} \text{ représente la matrice unité} \end{cases}$$

. Les moments d'ordre supérieurs correspondent à des tenseurs d'ordre croissant $\int_{(i)} \otimes^n \vec{x}_i \delta w$.

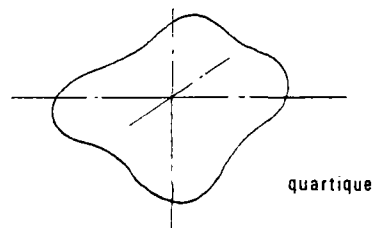
A bien des égards, cette technique s'apparente, en plus compliqué toutefois, à la méthode de détermination des coefficients des séries de Fourier.

Le 1er mode d'approximation de G_i correspond à une fonction quadratique; sa représentation est un ellipsoïde dont le volume et les moments d'inertie sont

analogues à ceux du grain, délimité par le contour $\partial(i)$ pour G_i (cf § 1.111 b)



Première approximation cartésienne
d'une surface de contour



1.113 - REPERE ASSOCIE A UN CONTACT

La définition du repère associé fera appel aux propriétés géométriques des surfaces dont on rappellera brièvement celles relatives à la courbure.

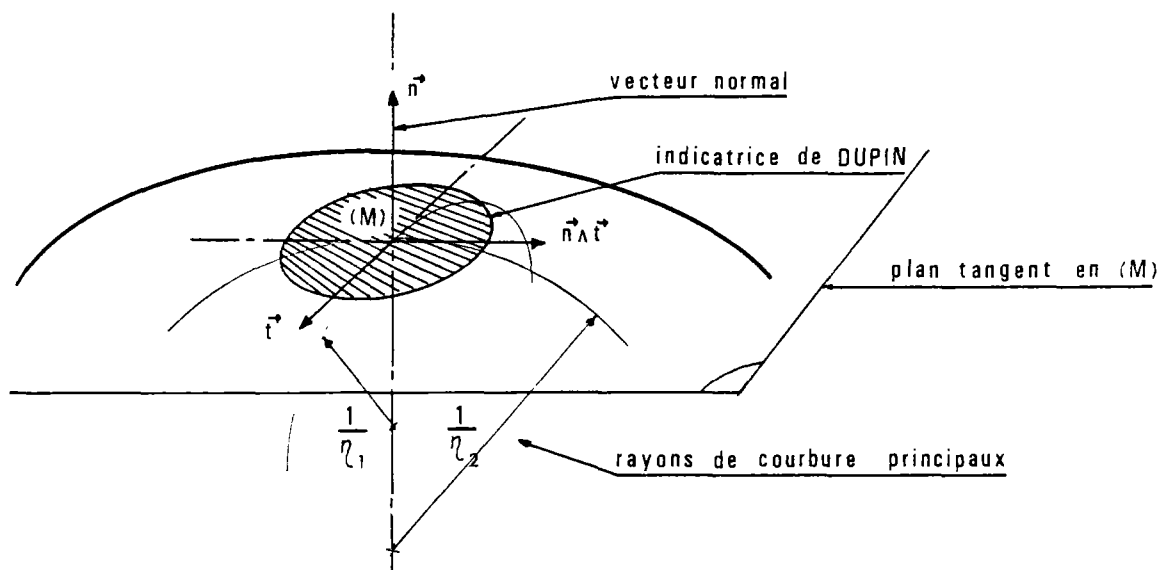
a - Remarque préliminaire : éléments de courbure associés à un point (M) d'une surface

Considérant une fonction scalaire G des composantes x^β (pour $\beta = 1, 2, 3$) du vecteur $\vec{x}$, 2 fois dérivable et délimitant un domaine convexe (à ce stade, cette dernière hypothèse n'est pas indispensable, mais elle sera retenue par la suite dans la cinématique du contact).

Le vecteur normal $\vec{n}$ dirigé vers l'extérieur de la surface

$$\vec{n} = \frac{\vec{\text{grad}}(G)}{|\vec{\text{grad}}(G)|}$$

On démontre que, localement, la surface peut être assimilée à un ellipsoïde pour lequel la normale au point considéré constitue une des directions principales.



. Notations:

Si H est la matrice associée au tenseur

$$\frac{1}{|\vec{grad}(G)|} \vec{grad}(\vec{grad}(G))$$

et n la matrice antisymétrique associée au vecteur $\vec{n}$ dans la base de référence 0^* ,

$$\delta n^0 = -\delta x^0 \cdot H \cdot n^2 \text{ (pour un accroissement } \delta x^* \text{ tangent à } \partial(i))$$

Les deux premiers invariants de la matrice de courbure $(H \cdot n^2)$ définissent respectivement la courbure sphérique η_s et la courbure totale η_t de la surface en (M), ($inv_3(H \cdot n^2) = 0$)

$$\begin{cases} \eta_s = \frac{1}{2} (\eta_1 + \eta_2) = \frac{1}{2} inv_1(H \cdot n^2) \\ \eta_t = \eta_1 - \eta_2 = inv_2(H \cdot n^2) \end{cases}$$

On rappelle que la courbure déviatorique $\eta_d = \frac{1}{2} (\eta_1 - \eta_2) = \sqrt{\eta_s^2 - \eta_t}$. Les courbures principales η_1 et η_2 se déduisent très rapidement de ces formules (Par convention, on prendra $\eta_1 > \eta_2$)

Les directions principales de l'indicatrice de Dupin sont portées par les vecteurs propres unitaires $\vec{t}$ et $\vec{n} \wedge \vec{t}$ de la matrice de courbure. Le trièdre $\vec{n}, \vec{t}, \vec{n} \wedge \vec{t}$ est direct)

Les notions de courbure étudiées ci-dessus permettent alors de s'affranchir de la définition de G . L'accroissement du vecteur $\vec{n}$ exprimé en fonction des vecteurs de la base principale tangente :

$$\begin{aligned}\delta \vec{n} &= (\eta_s - \eta_d) \delta \vec{x} + 2 \eta_d (\delta \vec{x} \cdot \vec{t}) \vec{t} \\ &= \eta_s \delta \vec{x} + \eta_d (\cos 2\psi \delta \vec{x} + \sin 2\psi \delta \vec{x} \wedge \vec{n})\end{aligned}$$

où ψ est la mesure de l'angle que fait $\delta \vec{x}$ avec la première direction principale : $\psi = |\vec{t}, \delta \vec{x}|$

La notation matricielle équivalente

$$\begin{aligned}\delta \vec{n}^0 &= \eta_s \delta \vec{x}^0 \left(\mathbb{1} + \frac{\eta_d}{\eta_s} e^{-2\psi \vec{n}} \right) \\ &\sim \eta_s \delta \vec{x}^0 \left(\mathbb{1} + \frac{\eta_d}{\eta_s} e^{\pi \vec{t}} \right)\end{aligned}$$

où $\mathbb{1}$ est la matrice unité

$e^{-2\psi \vec{n}}$ la matrice orthogonale représentative d'une rotation d'angle -2ψ (-2ψ : mesure, $\vec{n}$: vecteur axial unitaire)

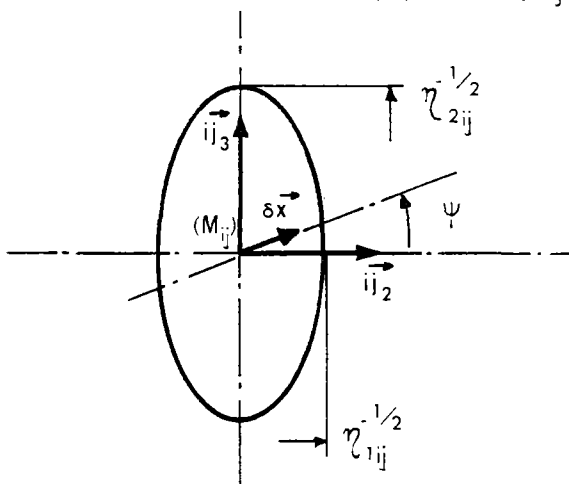
$e^{\pi \vec{t}}$ la matrice orthogonale représentative d'une symétrie autour de l'axe défini par $\vec{t}$ (cf §1 211 a)

b. Définition des repères de contact

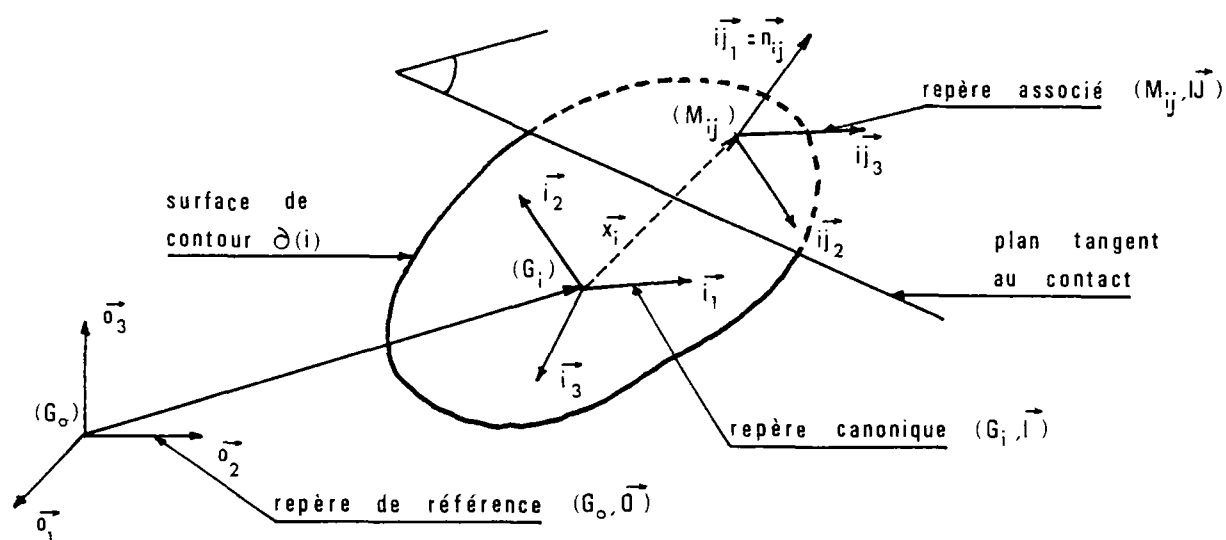
Les repères associés au contact du grain (i) avec le grain (j) seront tout naturellement construits à partir des éléments de courbure aux 2 surfaces.

(ij) $\left\{ \begin{array}{l} (M_{ij}) \text{ origine du repère, est le point de contact : } \partial(i) \cap \partial(j) \\ \vec{ij}_1, \vec{ij}_2 \text{ base associée à } \partial(i) \text{ en } (M_{ij}), \text{ est la base principale} \\ \text{tangente } (\vec{ij}_1 = \vec{n}_{ij}, \vec{ij}_2 = \vec{t}_{ij}, \vec{ij}_3 = \vec{n}_{ij} \wedge \vec{t}_{ij}) \end{array} \right.$

La normale $\vec{n}_{ij}$ est associée à $\partial(i)$ en (M_{ij}) , de même $\kappa_{1ij}, \kappa_{2ij}, \vec{t}_{ij}, \vec{n}_{ij} \wedge \vec{t}_{ij}$, sont respectivement les courbures principales et directions principales associées à $\partial(i)$ en (M_{ij})



Représentation de l'indicatrice de DUPIN associée à $\partial(i)$ dans le plan tangent au contact



1.114 - RESUME

- L'étude morphologique d'un grain est envisagée sous deux aspects
- . volumétrique, où l'on considère que le grain possède une forme convexe relativement simple
 - . surfacique, où les diverses irrégularités de surface sont prises en compte implicitement dans la loi de comportement du contact intergranulaire.

1.12 - LOI DE COMPORTEMENT STATIQUE DU CONTACT INTERGRANULAIRE

1.120 - INTRODUCTION

Au niveau du contact intergranulaire et en première analyse, la loi de comportement surfacique dérive de 3 principes.

- . L'état géométrique de la surface de contact des grains c'est-à-dire la régularité ou l'irrégularité de la fonction définissant le contour des grains. L'indentation locale de la surface de contour est l'un des aspects de l'état géométrique (anguleux, lisse, etc...); un autre aspect étant la forme générale de la surface (courbure locale).
- . Le comportement thermo-mécanique (volumique) du matériau constitutif des grains.
- . La présence éventuelle d'un matériau fluide qui, par son adhérence à la surface des grains est susceptible de modifier l'état géométrique des surfaces (surface apparente) ou même d'empêcher tout contact direct.

Cette loi de comportement est implicite c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas seulement de la nature et de l'état du grain considéré, mais également de la nature et de l'état du grain avec qui celui-ci est en contact.

a - Nature réelle d'un contact

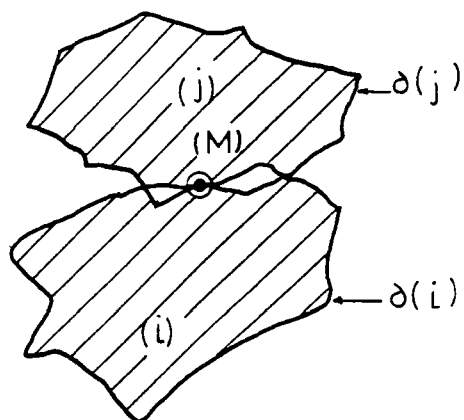
Avant d'aborder l'étude de la loi de comportement intergranulaire, il convient de rappeler quelques notions de base du contact réel de 2 grains.

L'analyse du contact réel de 2 grains convexes, peu déformables, montre en effet que le contact qui peut sembler ponctuel à l'échelle globale des grains apparaît en fait comme une surface lorsqu'on affine la vision à l'échelle locale. Si l'on pousse davantage la vision microscopique, l'aire de contact s'avère être une multitude de points répartis sur la zone considérée.

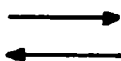
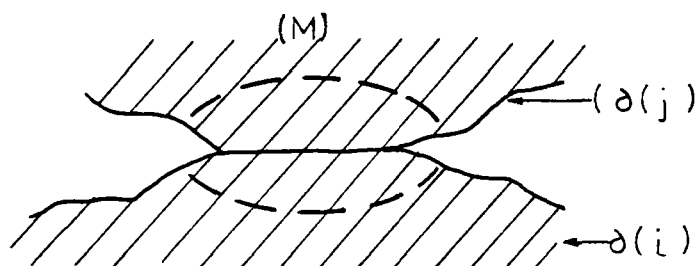
Plus loin encore, les points de contact continuent d'apparaître comme des surfaces de contact d'aspérités qui ont leurs dimensions propres.

Un tel processus de fractalisation persiste à l'échelle moléculaire.

contact de 2 grains
peu déformables



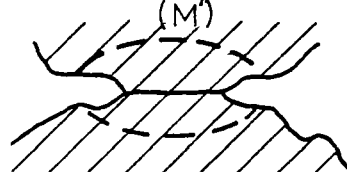
aire de contact
(apparente en (M))



contact des aspérités en (M)



aire de contact
(effective en (M'))

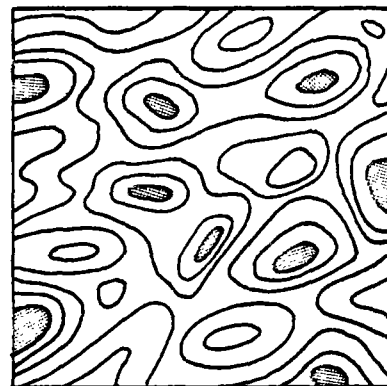
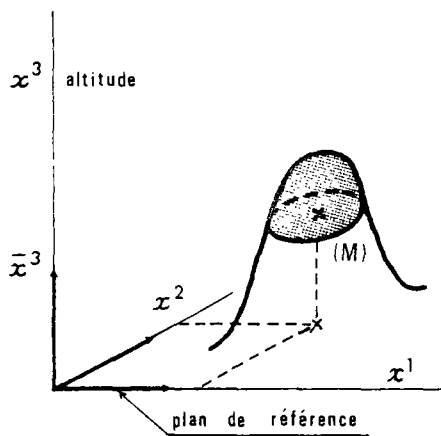


Toutes les théories récentes du contact tiennent compte de ce concept à savoir que les phénomènes de contact macroscopique (au niveau des grains) et microscopique (au niveau des aspérités) sont essentiellement de même nature. C'est pour cette raison que l'étude du contact se situe sur 2 plans.

1. L'analyse statistique du degré de contact de 2 surfaces rugueuses, c'est-à-dire du rapport de l'aire effective (somme des aires élémentaires des surfaces d'aspérités en contact) et de l'aire apparente.
2. L'étude de la déformation élastoplastique ou de la rupture d'un corps à contour simple (sphère, coin, etc...) sous l'effet de sollicitations diverses - cette étude restant valable aussi bien au niveau granulaire (macroscopique) qu'au niveau des aspérités (microscopique) -

b - Détermination statistique du degré de contact

On rappelle que la surface de contour d'un corps réel est caractérisée localement par des profils d'indentation (cf. pétrographie). Sans entrer dans les détails, la modélisation mathématique de la surface rugueuse peut être obtenue par une fonction aléatoire du type : $G(x^1, x^2, x^3) = 0$ ou encore à partir d'une surface plane $x^3 = G'(x^1, x^2)$. La fonction G' définit pour une altitude donnée $x^3 = \bar{x}^3$, relativement au plan de référence ($x^3 = 0$), des courbes de niveau. Par définition, le degré de contact α sera égal à la somme des aires élémentaires des courbes de niveau correspondant à une altitude donnée, sur un domaine de surface unitaire



aire effective de
contact des aspérités
pour $x^3 = \bar{x}^3$

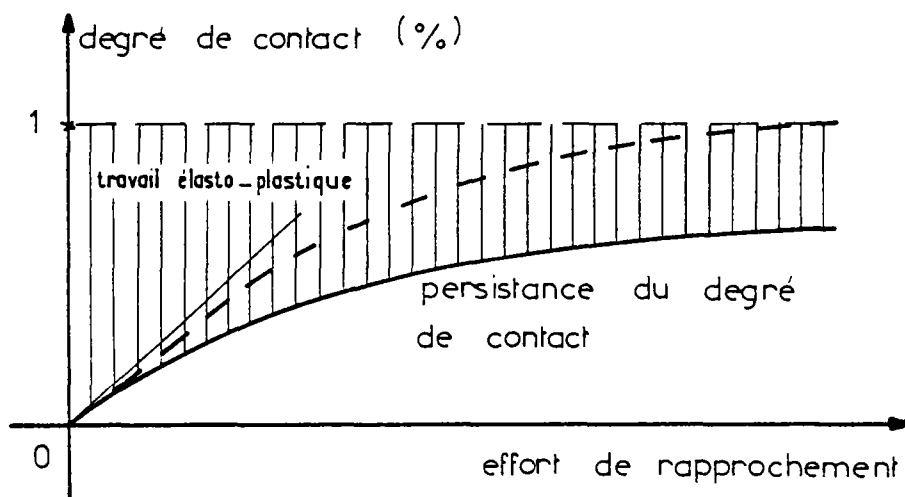
domaine d'aire unité

La 2ème étape consiste à évaluer le travail élastoplastique nécessaire pour obtenir un degré de contact donné. Ce travail est naturellement fonction du volume actuel des aspérités rencontrées entre les altitudes $\bar{x}^3$ et $+\infty$ ($\bar{x}^3$ est la valeur de la séparation des 2 plans de référence des surfaces rugueuses).

En conclusion, pour une aire de contact apparente donnée, le degré de contact (resp. l'aire de contact effective) augmente avec l'enfoncement. Certains chercheurs proposent des lois associant le degré de contact à la distance séparant les plans de référence des 2 surfaces rugueuses ou à l'effort de rapprochement. Il est toutefois utile de remarquer que dans le cas du rapprochement de 2 corps à surfaces rugueuses mais globalement convexes, on constate 2 phénomènes distincts :

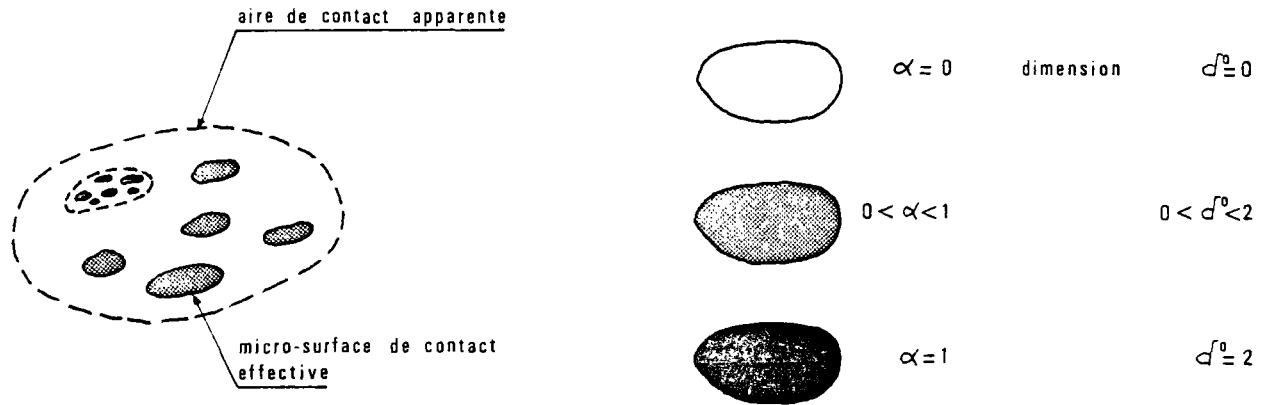
1. Une déformation locale de la zone de contact, ce qui augmente l'aire apparente de contact.
2. Pour une aire de contact apparente donnée, un accroissement du degré de contact.

Le 1er phénomène implique une diminution du rapport de l'aire effective à l'aire apparente ce qui tendrait à justifier le concept de persistance globale du degré de contact (Williamson).



Notion de dimension fractale d'un contact.

Le degré de contact α de 2 surfaces rugueuses caractérise une dimension fractale de contact. Ceci provient de l'observation suivante : l'aire réelle de la zone de contact tend vers 0 lorsqu'on descend d'un degré dans l'échelle d'observation, car une zone de contact est en réalité constituée d'une multitude de micro-surfaces ; on en déduit que la zone de contact n'est pas une surface (dimension 2) mais un espace dont la dimension est inférieure à 2. En d'autres termes une dimension 2 n'est pas adéquate pour mesurer l'hypersurface de contact.



Par exemple, si A_a est l'aire de contact de la zone de contact apparente (elle est formée de p surfaces d'aire moyenne $\frac{1}{q} A_a$).

L'aire réelle de contact au 1er degré $A_r^{(1)} = \frac{p}{q} A_a$.

Soit $\alpha = \frac{p}{q}$, $0 < \alpha < 1$. On en déduit à l'ordre n , si l'homothétie interne est conservée $A_r^{(n)} = \left(\frac{p}{q}\right)^n A_a \rightarrow 0$. La dimension du contact est telle que :

$$A_r^{(n)} = \left(\frac{1}{q^n}\right)^{1-d^0/2} \cdot A_a \text{ on en déduit : } d^0 = 2 \log p / \log q, \text{ ou encore en faisant}$$

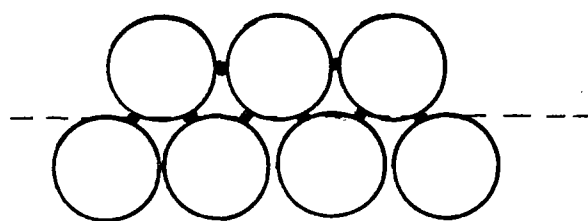
apparaître $\alpha = \frac{A_r^{(1)}}{A_a}$:

$$d^0 = 2 + k \log \alpha \text{ (avec , } k = \frac{1}{\log q} \text{)}$$

1.121 - PHENOMENES DE CONTACT

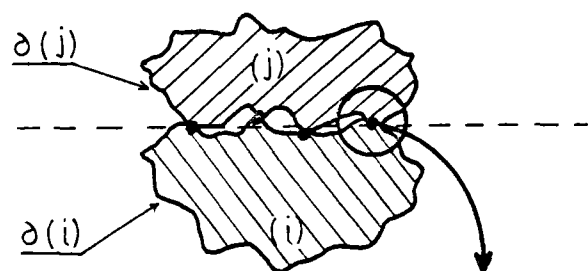
Lors d'un contact entre 2 grains apparaissent des phénomènes complexes qu'il est important de préciser. Ces phénomènes liés d'une part, à la nature et à l'état des grains et de leurs surfaces, d'autre part à la nature et à l'état des sollicitations auxquels ils sont soumis, peuvent être classés en plusieurs catégories. Dans ce paragraphe seront donc répertoriés succinctement les principaux phénomènes de contact constatés, tant sur le plan macroscopique que sur le plan microscopique en l'absence ou sous l'action de sollicitations diverses. Il est entendu que chaque phénomène constaté à l'échelle du contact

culaire (soudure). Pour les matériaux à constituant minéraux, la "jonction" - on parle alors de cimentation - est mise en évidence, macroscopiquement pour des pressions élevées alors que des déformations et des ruptures microscopiques ont augmenté le degré de contact des surfaces. C'est le cas entre autres des argiles, mais également des sables (grésification). Ainsi, la valeur de l'adhérence, fonction du degré d'interaction (ou d'enchevêtrement) est donc liée à l'état actuel de déformation et d'usure des surfaces de contact. L'adhérence par "jonction" qui dépend de la géométrie actuelle des surfaces en contact (elle peut être considérée comme une conséquence directe du principe de fractalisation des surfaces réelles des corps solides), impose une règle d'écoulement (dilatance).

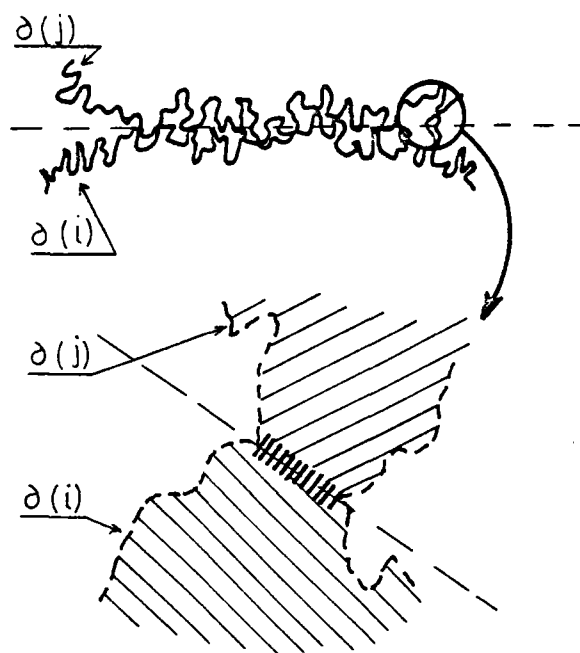


Phénomènes d'enchevêtrement

au niveau d'un assemblage granulaire (ici, un empilement de sphères)



au niveau du contact global de 2 grains de formes quelconques



au niveau d'un contact ponctuel entre les aspérités de surfaces de contact

au niveau d'un contact entre 2 aspérités -entre les assemblages moléculaires- (adhésion par soudure fractale)

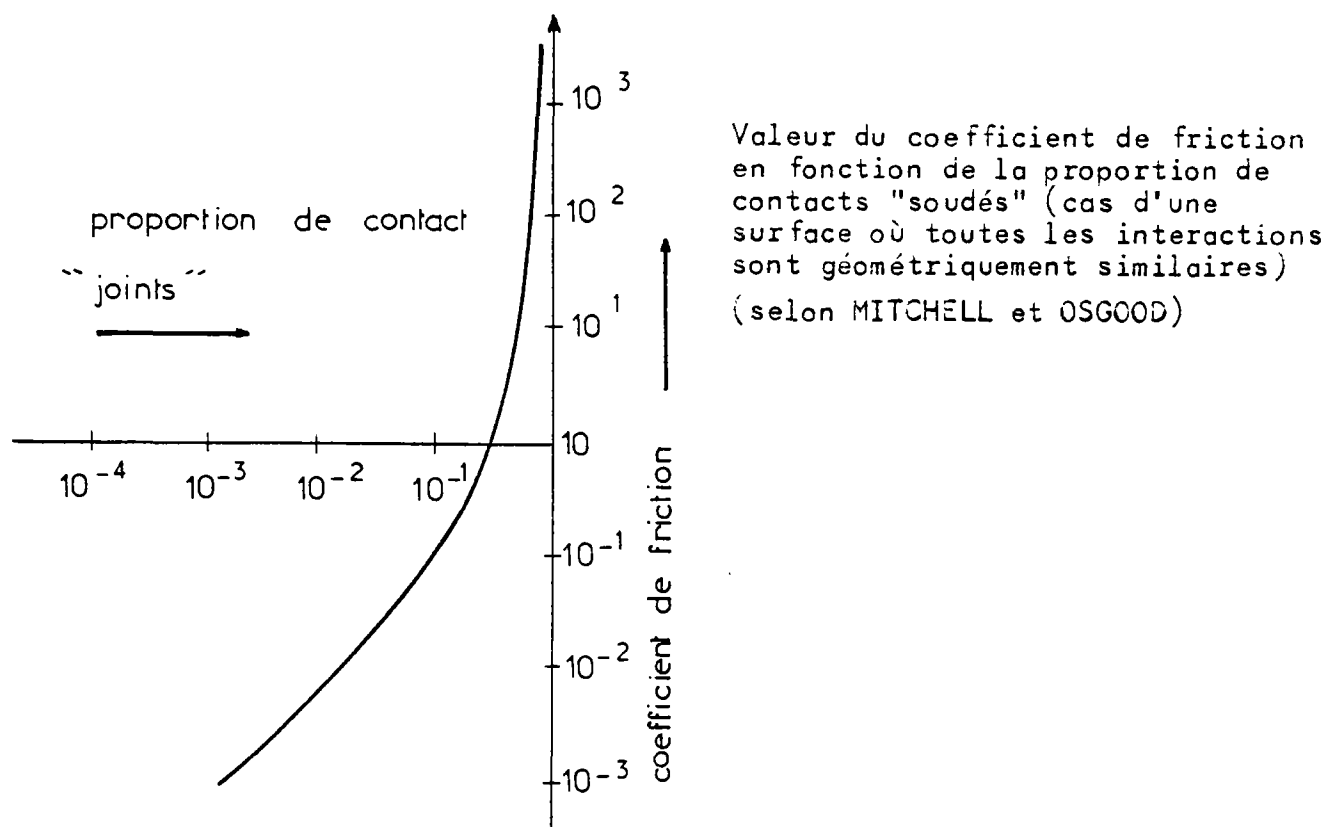
intergranulaire est lui-même une synthèse de tous les phénomènes élémentaires susceptibles de se produire à l'échelle du contact entre les aspérités des surfaces. Ainsi, par exemple, une déformation locale du grain au point de contact est le résultat, non seulement des déformations élastoplastiques des aspérités, mais également des ruptures des aspérités ; de même l'adhérence du contact intergranulaire est fonction de l'adhérence entre aspérités mais aussi de leur déformation, de leur rupture (et de l'usure qui en résulte), ainsi que de la présence éventuelle d'un fluide interstitiel.

a - Phénomène d'adhérence

L'adhérence est un phénomène créant une sorte de cohésion de 2 corps à leur contact. Elle est la base de la résistance aux déplacements (glissements, pivotement, roulement et dans une moindre mesure, traction) et équivaut par conséquent à un "seuil de ténacité" aux efforts de contact. Au delà des efforts limites définissant le critère d'adhérence, les déplacements prennent des valeurs infinies. L'adhérence est la conséquence de forces de liaisons de contact d'origines diverses selon l'échelle microscopique. On peut citer par ordre d'importance :

a.1 - Adhérence par "jonction"

L'adhérence par jonction ou soudure fractale existe à tous les niveaux d'échelle de contact (intermoléculaire, entre aspérités, intergranulaire, entre surfaces de discontinuité du milieu granulaire). Elle résulte de l'enchevêtrement des surfaces de contact ou encore de la disposition géométrique des contacts. Ce phénomène se produit donc dans des assemblages complexes ou pour des corps à contour compliqué. A l'échelle moléculaire, il conduit quasiment à une "soudure" des surfaces en contact. Ce fait essentiel du contact des métaux par exemple, est d'origine thermomécanique : des températures élevées consécutives à des pressions importantes facilitent le phénomène d'imbrication molé-

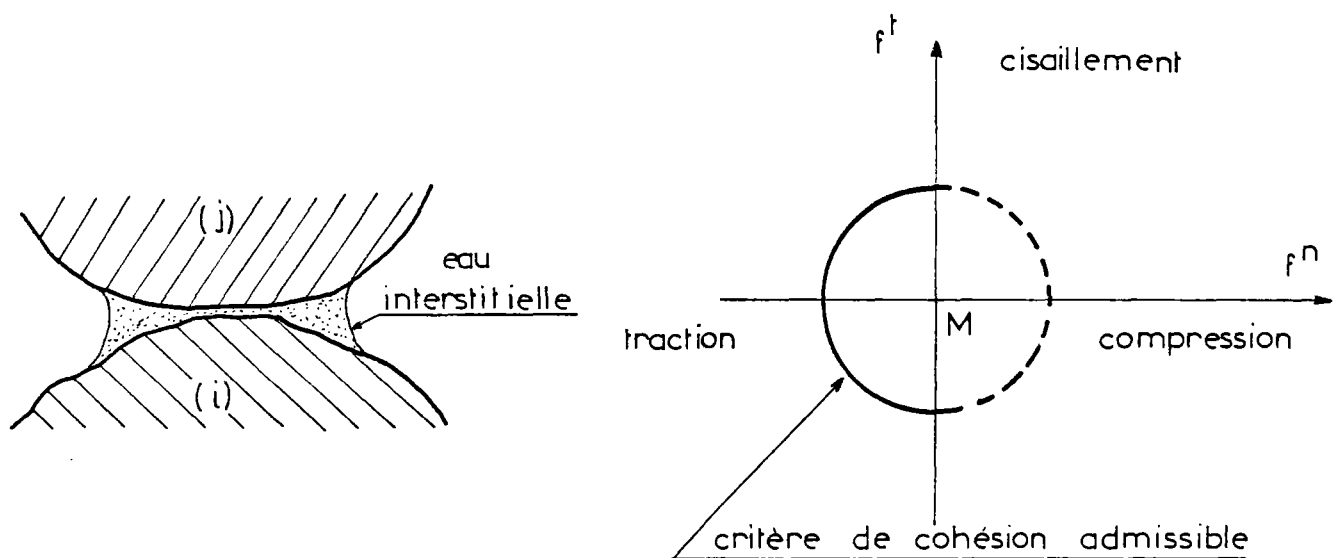


Les théories récentes considèrent qu'à chaque niveau d'échelle microscopiques, il est nécessaire pour assurer un mouvement de franchir une barrière d'énergie qui correspond à un seuil de plasticité ou de rupture des jonctions des contacts d'ordre inférieur.

En conclusion, l'adhérence par enchevêtrement mécanique des contacts est une part importante des efforts de liaisons dans les milieux granulaires. Ceux-ci se manifestent principalement à l'échelle du milieu, dans une moindre mesure au niveau du contact de 2 grains. La conséquence principale d'un tel phénomène est la dilatance.

a.2 - Adhérence par capillarité

L'adhérence capillaire est en principe indépendante des sollicitations de contact, mais elle dépend surtout de la dimension des grains. Elle sera d'autant plus grande que les grains sont de petites dimensions. Elle n'est effective que dans le cas de sols partiellement saturés.



La tension capillaire est couramment considérée comme la cause d'une cohésion apparente et temporaire des sols. Plus généralement, la présence d'un fluide interstitiel joue un grand rôle aussi bien par les phénomènes de pression capillaire et d'adsorption que par les transformations physico-chimiques des grains.

a - 3 . Adhérence (ou répulsion) due à des forces d'origine électromagnétiques ou chimiques

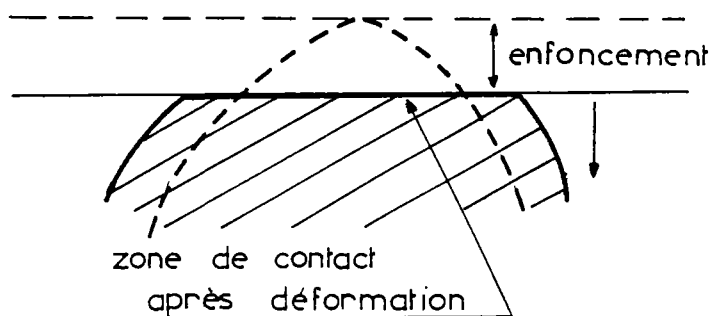
Ces forces de cohésion (ou de répulsion) ne peuvent intervenir que pour des matériaux réactifs à de telles sollicitations - c'est le cas de molécules ou de particules microscopiques d'argile ; mais elles sont négligeables à l'échelle d'une particule minérale de dimensions supérieures au millimètre. Il sera donc inutile de prendre en compte des forces de contact de ce type (Van der Waals, etc.).

b - Déformations

Les phénomènes de déformation sont de différentes nature selon le type de sollicitations ; aussi, seront envisagés successivement 2 cas de chargements.

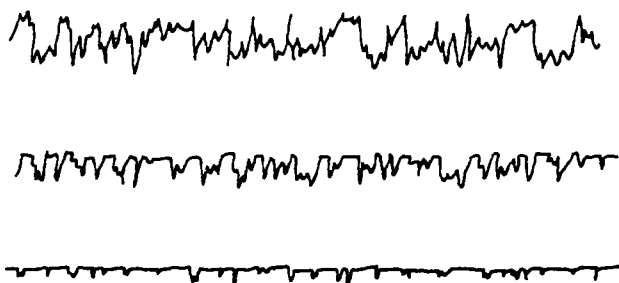
b.1 - Effort normal

L'étude du comportement élastoplastique de surfaces de contact soumises à l'action d'un rapprochement direct est de loin la plus avancée. Autant sur niveau macroscopique qu'au niveau microscopique on constate un aplanissement des surfaces de contact.



Déformation après contact d'une surface déformable et d'un plan parfaitement rigide

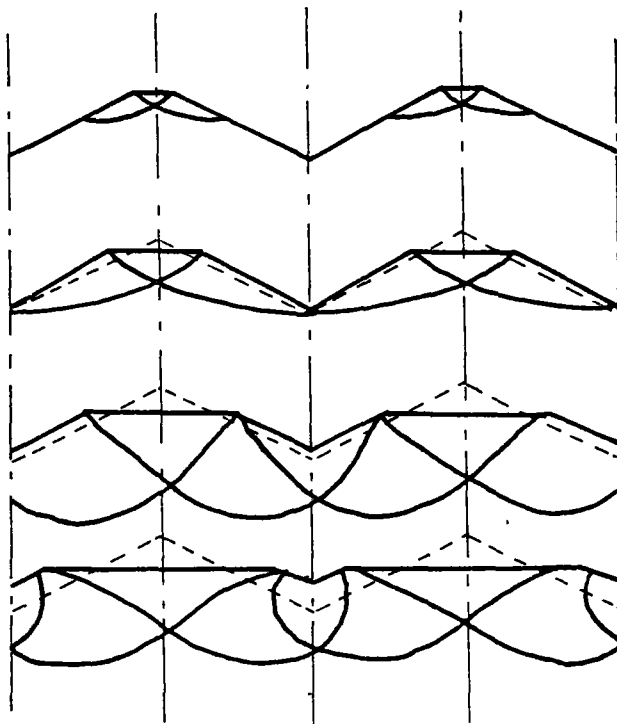
Profils d'indentation avant et après contact (usure par fatigue)



ces profils subissent un aplanissement consécutif à un aplatissement des aspérités. Ce dernier est d'autant plus accentué que l'effort de rapprochement est élevé.

L'étude de la déformation élastoplastique de surfaces à contours simples a été abordée par Hertz dans le cas de sphères élastiques. Ses travaux ont été prolongés par Meyer dans le cas de contact d'une sphère rigide-plastique et d'un plan rigide.

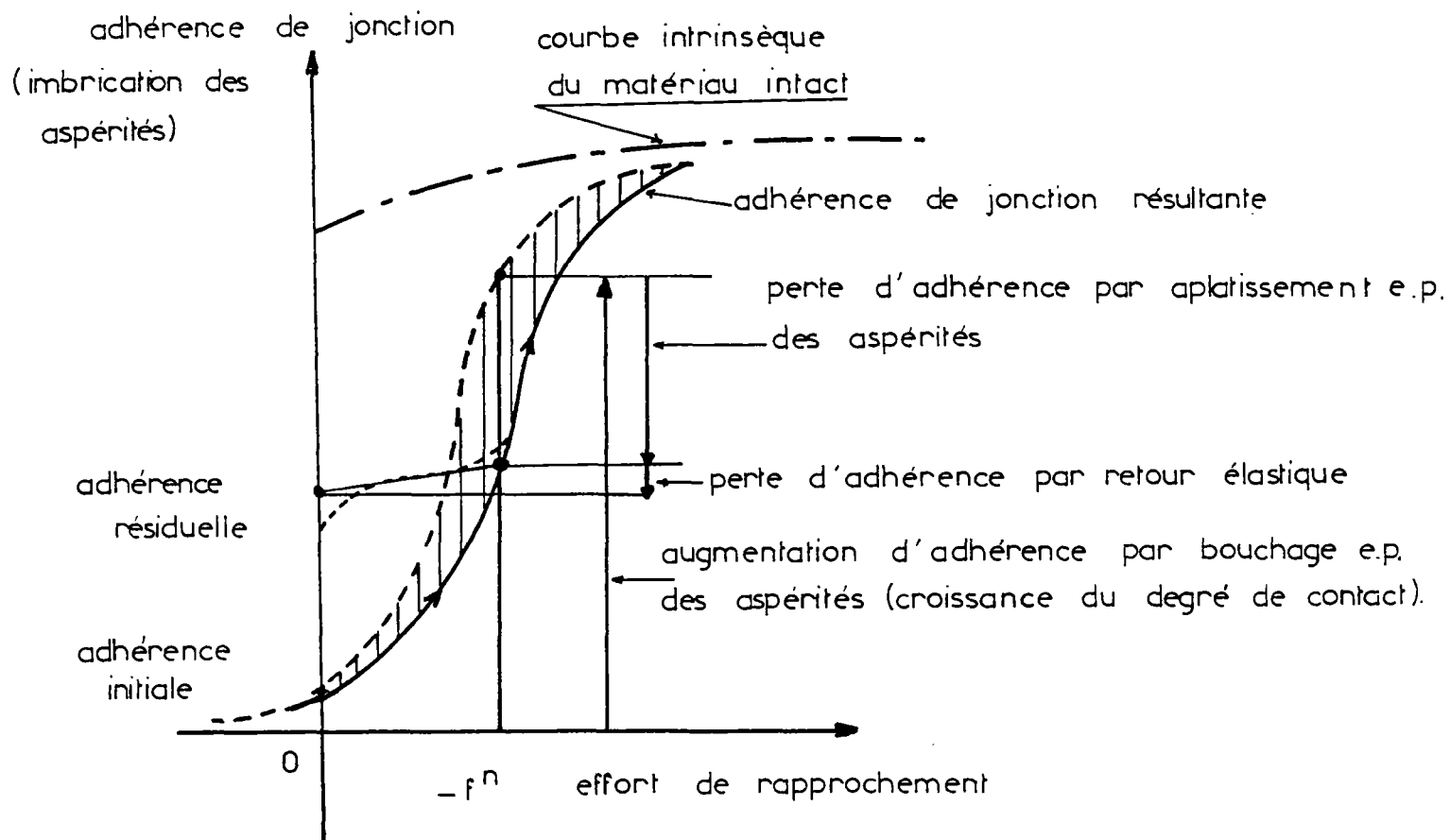
Plus récemment les études ont porté sur des assemblages à distribution régulières de coins cylindriques - l'étude d'un coin plastique isolé ayant été faite par Hill - où des assemblages à distribution aléatoire de sphères de diamètres variables (Hisakado). D'autres modèles sont constitués de coins à sections rectangulaires de dimensions variées. Quoiqu'il en soit, le processus de déformation reste toujours basé sur une loi de comportement volumique de type élastoplastique.



Modèle à profil en dents de scie
utilisé par MITCHELL et CHIVERS
montrant le processus d'aplatissement
plastique des aspérités au cours d'un
chargement vertical par un plan
rigide

Au niveau macroscopique, on peut de même observer une plastification de la zone apparente de contact pour une valeur suffisamment élevée de l'effort de rapprochement.

En conclusion, l'effort normal résultant d'un rapprochement direct tend à augmenter rapidement le degré de contact (imbrication des aspérités par "bouchage" élastoplastique), mais sa croissance est limitée par l'élargissement e.p. de la zone de contact apparente et-ou l'aplanissement e.p. des aspérités. Globalement pour 2 corps en contact, on constate expérimentalement une évolution croissante de l'adhérence de jonction (fonction du produit du degré de contact par l'aire de contour apparente) en fonction de l'effort de rapprochement.



Processus de "collage"

b.2 - Effort normal et effort tangentiel

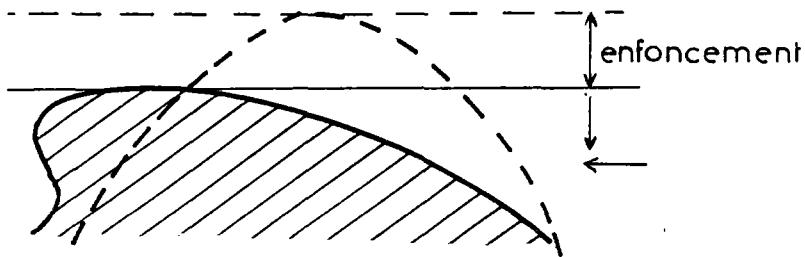
L'effort tangentiel résulte d'une résistance au glissement ou au pivotement. A une échelle microscopique inférieure, ces 2 déplacements induisent des cisaillements du même type.

L'enchevêtrement croissant des aspérités conduirait en l'absence de toutes déformations, à un blocage vis-à-vis du glissement ou du pivotement, mais celui-ci, limité par l'aplatissement e.p. sous effort normal, comme il vient d'être dit, sera limité de surcroît par l'action de l'effort tangentiel qui lui-aussi concourt à la déformation e.p. microscopique des aspérités, dans le sens de l'aplanissement.

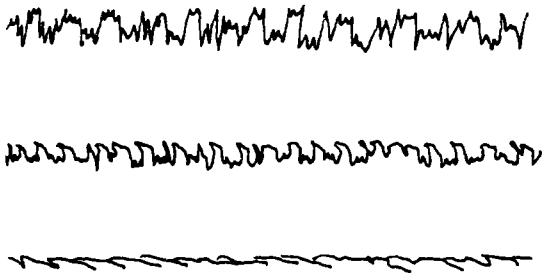
En réalité, sous l'effet combiné d'un effort normal et d'un effort tangentiel, il se produit une plastification de l'ensemble de la zone de contact.

Dans le cas de déformations irréversibles, il en résulte une usure de la

surface de contact. C'est l'usure plastique ou usure par fatigue. Il s'agit là d'un paramètre d'écrouissage susceptible de modifier pour des chargements ultérieurs, le critère d'adhérence.



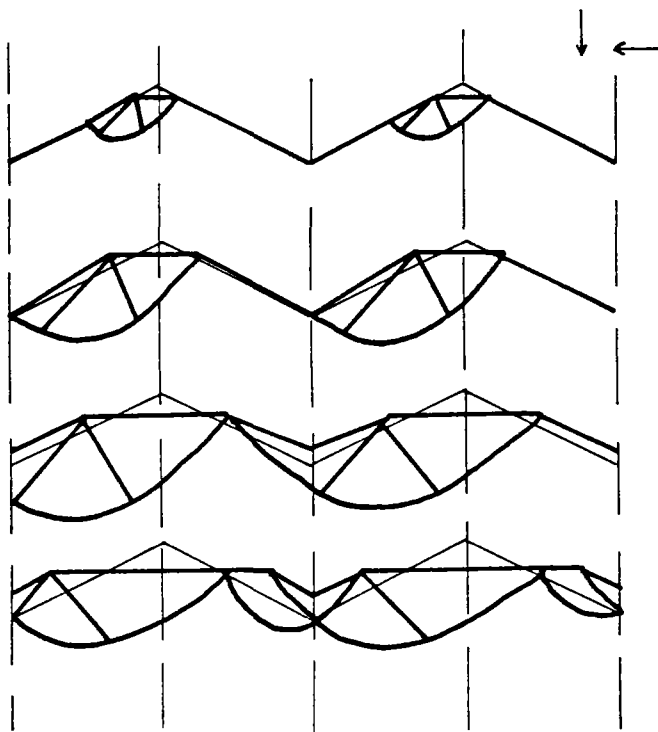
Déformation après contact d'une surface déformable et d'un plan parfaitement rigide (effet conjoint d'un étalement et d'un aplatissement de la surface de contact)



Profils d'indentation avant et après contact (usure par fatigue)

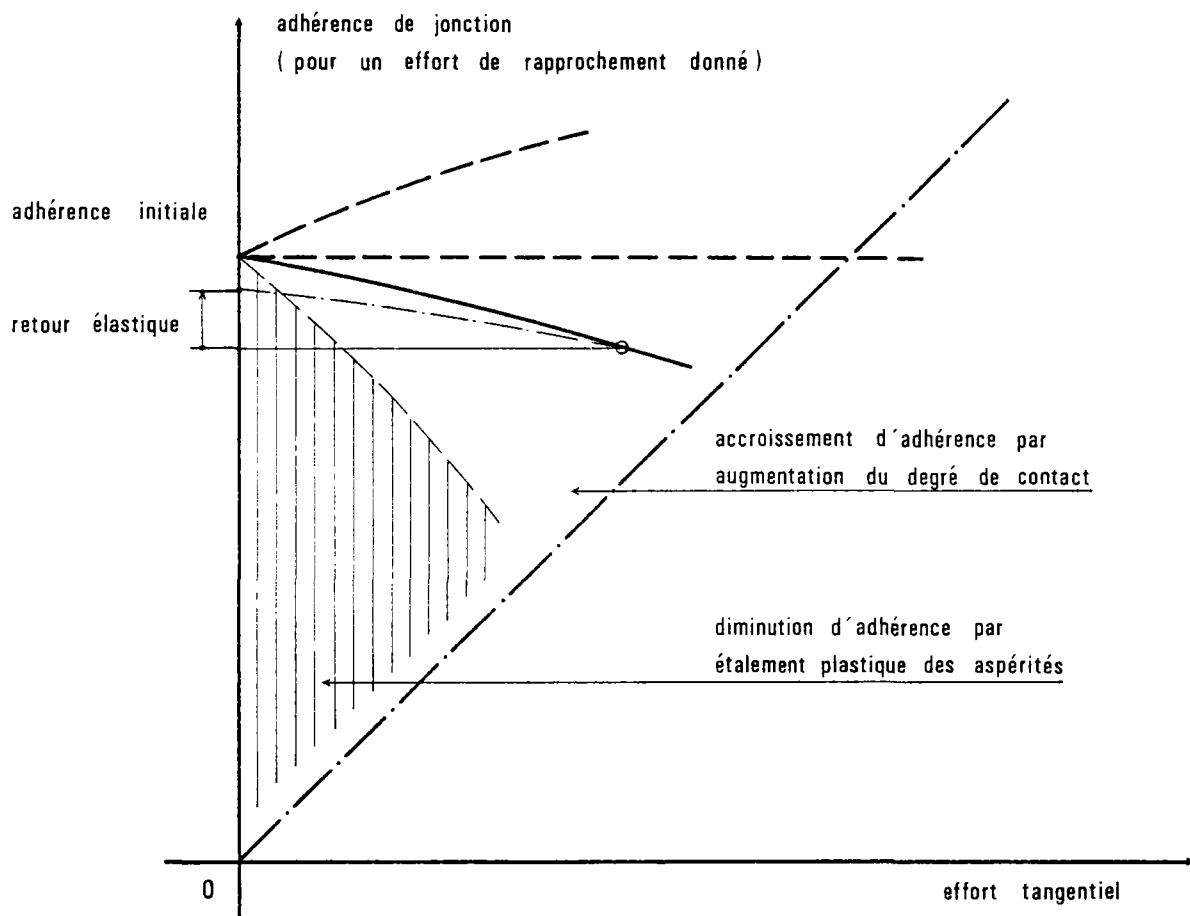
Ces profils montrent un aplatissement dû à un étalement des aspérités, d'autant plus accentué que l'effort tangentiel est important

L'étude de la déformation élastoplastique de surfaces de contour simple sous l'effet combiné d'un effort tangentiel et d'un effort normal, reste à l'heure actuelle au stade de la simple observation. Toutefois certains travaux relatifs à la résistance au glissement (friction) reprennent les modèles proposés dans l'étude du rapprochement de surfaces rugueuses. Ainsi, le modèle en "dent de scies" a été étudié par quelques chercheurs dans certaines conditions de liaison.



Modèle à profil en "dents de scie" utilisé par WANHEIM, BAY et PETERSEN, montrant le processus d'étalement plastique des aspérités au cours d'un chargement par un plan rigide parfaitement adhérent aux surfaces de contact

En conclusion, la déformation élastoplastique des aspérités par étalement, sous l'effet de l'effort tangentiel, fait chuter l'adhérence par jonction, mais celle-ci peut être compensée intégralement ou en partie par l'augmentation du degré de contact qui en résulte.



Remarque:

Dans le cas de grains minéraux, le phénomène de déformation n'est pas prépondérant et ce sont surtout des phénomènes de microrupture des aspérités ou de rupture globale qui apparaissent.

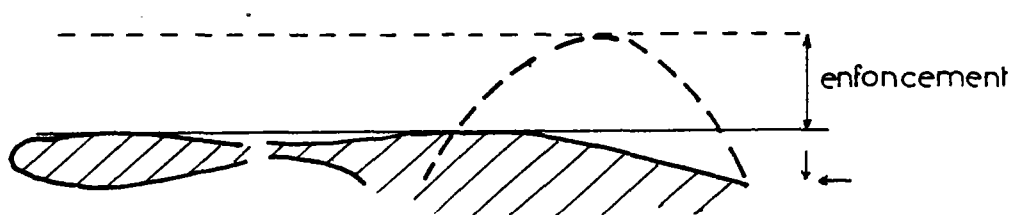
Il en va tout autrement pour les "colles" qui sont des fluides viscoplastiques à fort pouvoir adhérent.

c - Ruptures

La rupture s'entend comme la dissociation d'un élément solide en deux ou plusieurs parties. On distingue la rupture ductile, de la rupture fragile. Les matériaux réels sont, selon leur nature et leurs états physiques, sensibles plus ou moins à l'un ou l'autre type de rupture.

c.1 - Caractères de rupture

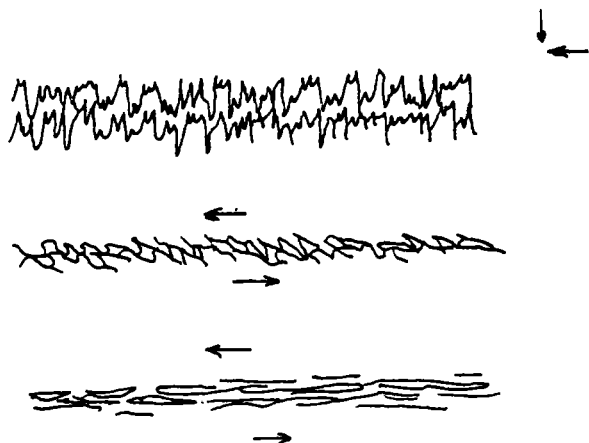
La rupture peut se produire après de grandes déformations, on parle alors de rupture ductile. C'est le cas de la plupart des matériaux à caractère viscoplastique. Dans cette catégorie, on peut classer la plupart des métaux et des matériaux organiques naturels ou de synthèse (résines, polymères par exemple).



Rupture ductile après contact d'une surface déformable et d'un pla parfaitement rigide sous l'effet combiné d'un effort normal et d'un effort tangentiel

Au niveau du contact, la rupture se manifeste par une usure adhésive. Celle-ci résulte le plus souvent du transfert d'un film plastique de matériau sur chaque interface des corps du contact.

L'adhérence accentuée par la croissance du degré de contact causée par la déformation importante des aspérités conduit à une "rupture par couche". Ce phénomène résultant d'un "collage" préalable des surfaces en contact est équivalent à une cisssion au sein d'un matériau viscoélastique. Dans le cas des métaux, ce phénomène est obtenu pour des contraintes élevées (passage à la plastification) ou à hautes températures.

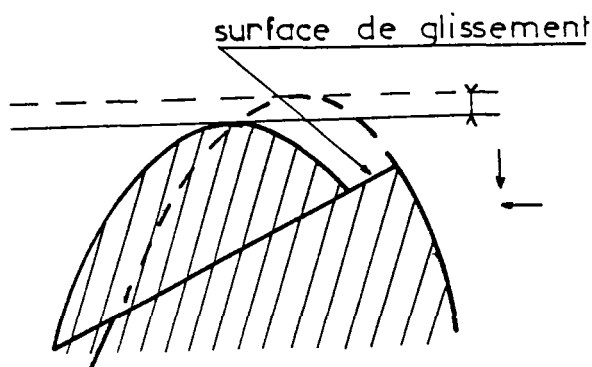


Phénomènes d'usure adhésive

(matériaux à caractère visco-plastique)

Modification des profils d'indentation au cours d'un chargement (effet combiné d'un effort normal et d'un effort tangentiel)

La rupture peut également se produire en l'absence de toutes déformations (ou pour de très petites déformations) on parle alors de rupture fragile. C'est le cas de la plupart des matériaux minéraux et de quasiment tous les matériaux placés dans des conditions de basse température.



Rupture fragile après contact d'une surface rigide et d'un plan rigide sous l'effet combiné d'un effort normal et d'un effort tangentiel

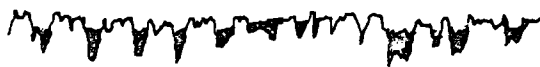
Au niveau du contact, la rupture se manifeste par une usure abrasive des surfaces en contact. Elle provient des microruptures des aspérités. A l'échelle du grain la rupture fragile se manifeste pour des charges de rapprochement plus élevées.

Elle est locale ou globale - éclatement du grain - selon la vitesse et le type de chargement, elle peut s'effectuer de manière progressive ou brutale. Ce phénomène se caractérise par une disparition brusque des forces de cohésion interne du matériau rigide. Avec l'adhérence causée par les singularités de surface, la rupture fragile est un phénomène essentiel du contact dans les sols granulaires constitués de particules minérales (sables).

Il sera abordé successivement à chaque niveau de contact (aspérités-grains).

c.2 - Microruptures fragiles des aspérités

Comme dans le cas des déformations élastoplastiques, les chargements normaux et tangentiels ont pour effet, un aplanissement des profils d'indentation des surfaces de contact ; mais cet aplanissement correspond à un écrasement et à une abrasion des aspérités.



Phénomènes d'usure par écrasement (cas de matériaux rigides)

Modification des profils d'indentation au cours d'un chargement normal; les excroissances sont écrasées et les cavités sont comblées par les produits de rupture.

. Effort normal

L'effort normal conduit, comme précédemment, à un accroissement du degré de contact et de l'enchevêtrement des aspérités, mais celui-ci est fortement compensé par l'aplanissement des surfaces de contact.

L'aplanissement des surfaces se caractérise simultanément par un écrasement des excroissances des aspérités et par un bouchage des concavités par les produits de rupture. Ces derniers peuvent former un "coussin" assurant une bonne répartition de l'effort global de rapprochement. Ces produits de rupture qui viennent combler les vides laissés entre les surfaces de contact

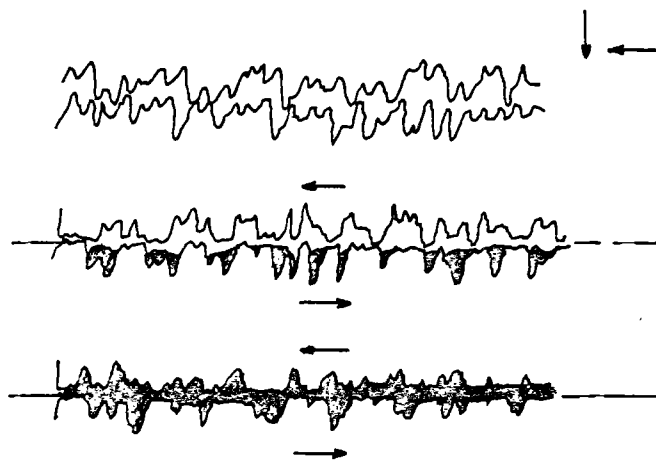
des grains et assurent en partie une augmentation artificielle du degré de contact sont des éléments du 2^{ème} ordre vis à vis de la dimension originale des grains. Ils sont indépendants des grains d'origine et à ce titre peuvent être considérés en eux-mêmes comme des grains. Ils contribuent à modifier la granulométrie du milieu granulaire et jouent un rôle essentiel dans le processus de grésification et de lubrification. Ainsi, l'usure des surfaces de contact par rupture fragile entraîne également une usure granulométrique. Ce phénomène évidemment irréversible peut être considéré comme le paramètre de fatigue principal d'un milieu granulaire constitué de particules rigides.

L'équilibre sous charge est atteint asymptotiquement lorsque la taille des éclats avoisine zéro. Il est à noter qu'un éclat ou produit la rupture peut lui-même être brisé en plusieurs autres éclats. C'est un phénomène de rupture globale dont l'approche sera faite dans le paragraphe suivant.

De plus, lorsque l'effort normal croît, la dimension des éclats diminue. Pour un matériau parfaitement rigide, la limite des microruptures est atteinte lorsque tous les vides sont comblés.

. Effort tangentiel

Sous l'effet combiné d'un effort normal et d'un effort tangentiel, à l'écrasement, s'ajoute une abrasion des aspérités nécessaire pour garantir un glissement. Pour des efforts normaux peu élevés, l'abrasion peut être faible si les aspérités sont peu imbriquées ; le glissement alors a lieu avec dilatance. Pour des efforts normaux plus importants, l'abrasion est plus ou moins grande selon le degré d'enchevêtrement des aspérités (A la limite pour des surfaces parfaitement polies, l'abrasion à l'échelle des aspérités, est inexistante).

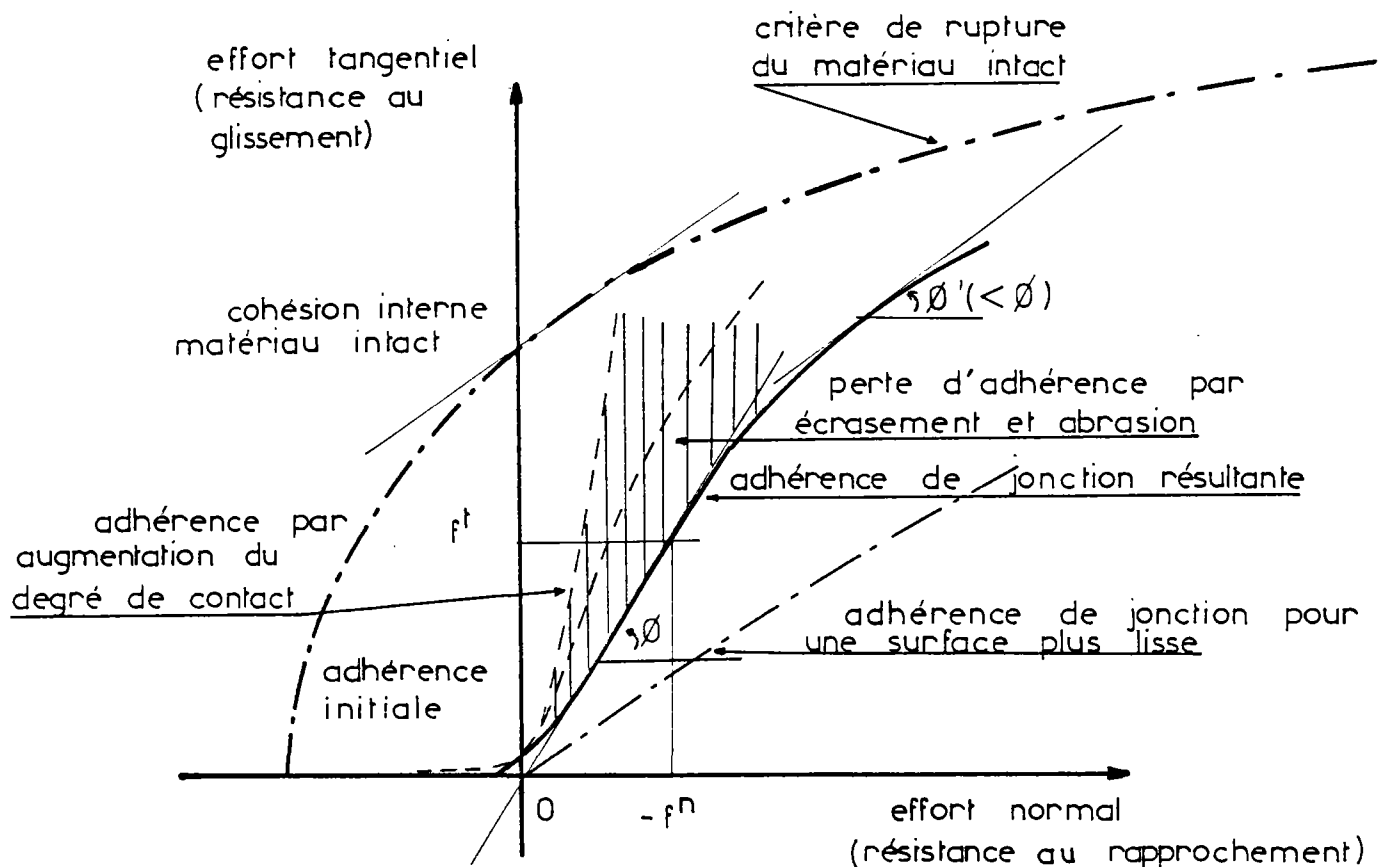


Phénomènes d'usure abrasive

(cas de matériaux rigides-fragiles)

Modification des profils d'indentation sous l'effet combiné d'un effort normal et d'un effort tangentiel; les produits de rupture comblent les cavités et s'interposent entre les surfaces en contact.

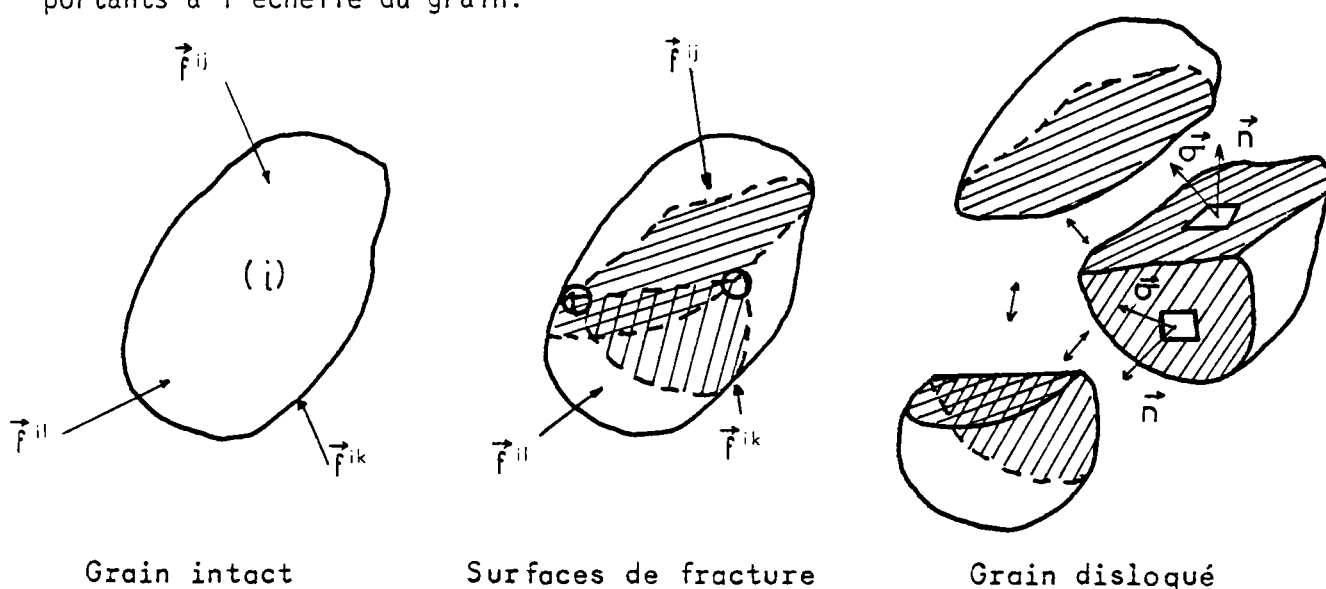
On rappelle que pour des surfaces de contact parfaitement polies (sans aspérités), il subsiste un enchevêtrement microscopique à l'échelle moléculaire qui est la source d'une résistance au glissement. Ce dernier peut être plus important que celui dû à l'enchevêtrement mécanique des aspérités. C'est le cas des matériaux adhésifs (colles). Dans le cas de matériaux minéraux, la résistance de friction est plus faible pour des surfaces polies que pour des surfaces rugueuses.



Adhérence et efforts de contact

c.3 - Ruptures fragiles des grains

Les grains à l'intérieur d'un milieu, sont soumis par leurs contacts avec leurs grains adjacents à des forces localisées qui peuvent provoquer une rupture locale (aspérités) ou globale (éclatement du grain. Cet éclatement ne peut survenir que pour des efforts localisés qui n'entraînent pas un glissement, ce sont donc des efforts pour lesquels l'adhérence peut équilibrer les efforts de contact avec ou sans dilatance. Il s'agit donc d'efforts normaux relativement importants à l'échelle du grain.

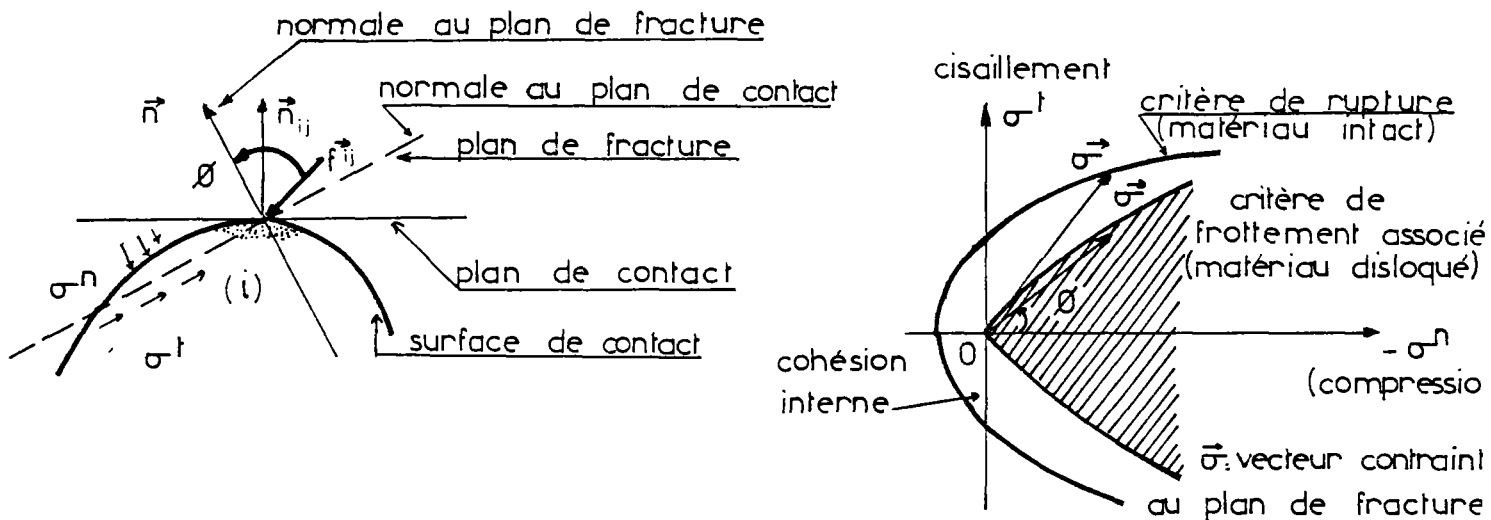


La rupture du grain est obtenue pour des forces de contact telles que le champ de contraintes internes qui en résulte ne vérifie plus le critère de cohésion du matériau (rigide - fragile). Les théorèmes classiques de la mécanique à la rupture peuvent être appliqués pour des matériaux dotés d'une telle loi de comportement. L'approche cinématique du problème de rupture globale d'un grain conduit à la détermination d'un domaine des chargements potentiellement supportables. Ce domaine dépend

- du critère de rupture du matériau
- du nombre et de la position des forces de contact
- de la géométrie de la surface de contour

Le mécanisme de rupture par blocs rigides bien que simple dans sa formula-

tion est relativement complexe à mettre en oeuvre dans le cas général. De plus l'action de forces concentrées sur un volume impose une hypothèse supplémentaire relative au frottement ; ce peut être la définition forfaitaire d'une aire de contact, ou mieux, la définition d'un critère de frottement plan sur plan.



Comme il est évidemment hors de question de déterminer précisément le domaine des chargements limites, compte tenu des inconnues qui existent sur le nombre et la valeur des facteurs (forces, géométrie de la surface, etc.), il convient toutefois de donner une approximation réaliste du critère de rupture globale d'un grain soumis à l'action de forces localisées. Le choix d'un critère qui ne dépend que de la force de contact (intensité et inclinaison) appelle quelques remarques liminaires.

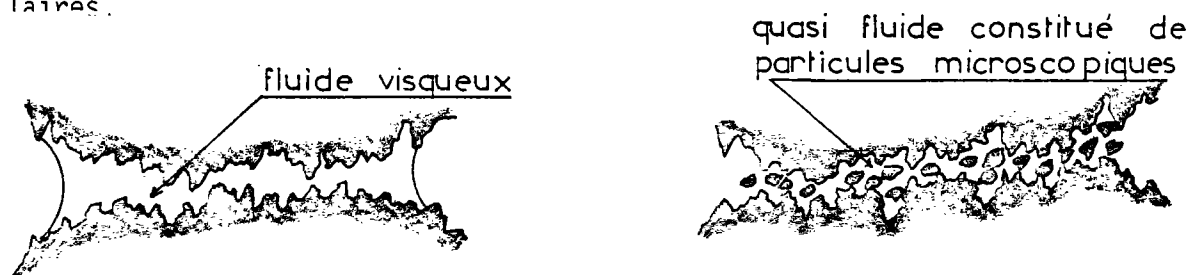
. La fracture du matériau peut être locale si l'inclinaison d'une force localisée par rapport à la normale à son plan de contact est suffisamment grande. La fracture est généralisée dans le cas contraire.

. Plus le n.b. de forces de contact est important et plus on tend à se rapprocher du chargement hydrostatique. La contrainte de rupture en compression constitue alors un majorant pour des forces de contact uniformément réparties sur la surface.

. Plus le volume du grain est grand et plus les forces de contact limites seront grandes. Toutes choses étant égales par ailleurs, il y a en effet proportionnalité entre la force de contact limite et l'aire de la surface de fracture (équation aux dimensions).

d - Lubrification

La lubrification est un phénomène induit par la présence d'un fluide ou quasi-fluide entre les surfaces de contact et modifie de ce fait les conditions d'adhérence des surfaces et les conditions de déplacements (critère d'adhérence et loi d'écoulement). L'eau, des particules microscopiques (produits de micro-ruptures par exemple) sont autant de lubrifiants naturels pour les sols granulaires.



Le lubrifiant joue un rôle de répartition des pressions de contact. Par la place qu'il prend, il bouche les aspérités, il éloigne les surfaces de contact, et "gomme" la rugosité réelle des surfaces. Par ses propriétés mécaniques propres et par les conditions de contact avec les surfaces des grains, il diminue ou il accroît la résistance au glissement (téflon / adhésif), il accélère ou réduit la vitesse d'écoulement (viscosité).

Par son action directe sur le contact des grains, il modifie l'état mécanique et même la géométrie des surfaces (porosité, gonflement, oxydation, abrasion, etc..).

Comme on peut le constater par le nombre de facteurs sous-jacents à la présence d'un matériau intermédiaire, il est facile de se rendre compte des difficultés que comporte la synthèse d'une loi de comportement d'interface avec lubrifiant, d'autant plus que ces phénomènes de lubrification dépendent également des autres phénomènes d'usure par déformations viscoplastiques ou par micro-ruptures des surfaces de contact.

1.122 - CRITERE DE LIAISON INTERGRANULAIRE

Le critère de liaison intergranulaire constitue un ensemble de conditions limites d'existence de contact intergranulaire. A l'intérieur et sur la frontière du domaine que définit le critère, le torseur résultant des efforts de contact est nul ; à l'extérieur, l'équilibre n'est plus assuré.

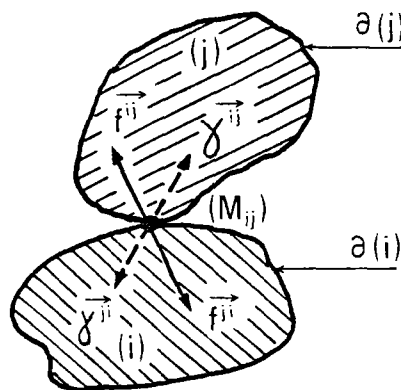
a - Position du Problème

a.1 - Torseur des efforts de contact

Les efforts de liaison intergranulaire, ne sont, par hypothèse que des efforts de contact (pas d'actions à distance). On note par $(\vec{f}^{ij}, \vec{\gamma}^{ij})$ le torseur résultant des efforts de contact du grain (i) sur le grain (j). Pour des grains globalement convexes, on peut leur associer un point moyen de contact (M_{ij}) . Le torseur $(\vec{f}^{ij}, \vec{\gamma}^{ij})$ sera le torseur en ce point.

$\vec{f}^{ij}$ est vecteur "force de liaison" du grain (i) avec le grain (j), appliqué au point (M_{ij}) .

$\vec{\gamma}^{ij}$ est le vecteur "couple de liaison".

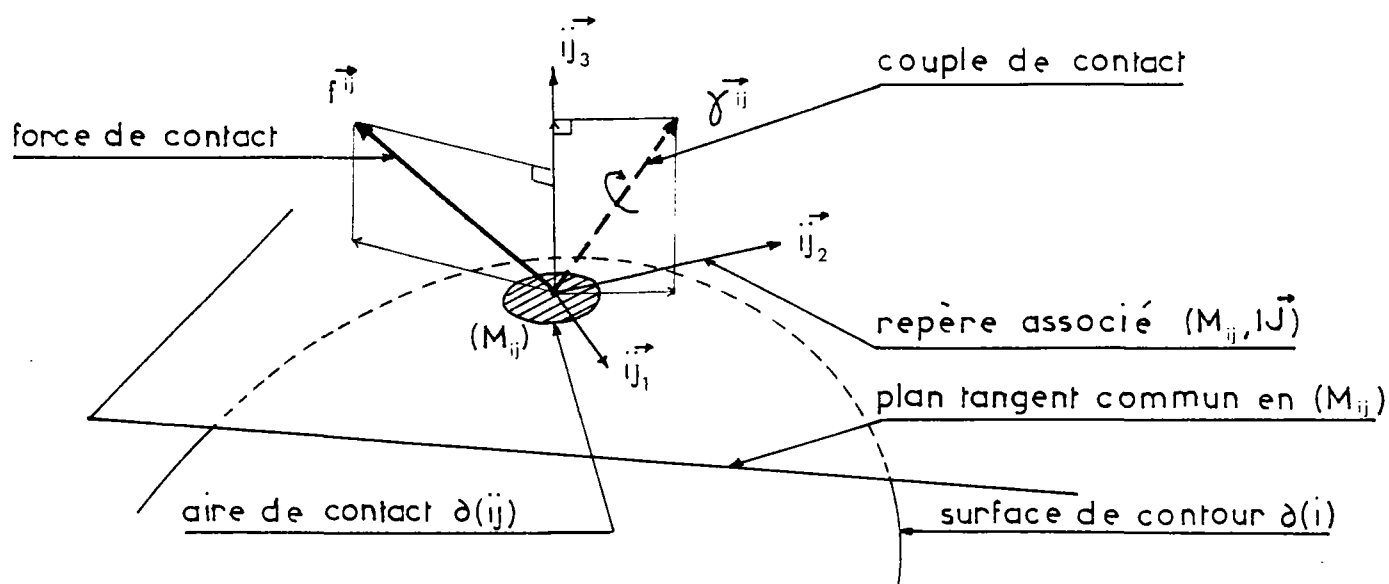


Chacun des 2 vecteurs $\vec{f}^{ij}$ ou $\vec{\gamma}^{ij}$ se décompose en une somme de 2 vecteurs dont l'un est porté par la normale $\vec{n}_{ij}$ en (M_{ij}) à $\partial(i)$, l'autre est dans le plan tangent commun ; on retrouve les définitions usuelles :

Efforts	Selon la normale	Selon le plan Runger
$\vec{f}_{ij}$	Force de résistance au si $f_{ij}^{n_{ij}} < 0$ à la pénétrat. $f_{ij}^{n_{ij}} > 0$	force de résistance au gliss ^t
γ_{ij}	couple de résistance au pivot ^t	couple de résistance au roul ^t

Dans le repère $(M_{ij}, IJ^{\rightarrow})$ associé au contact (ij) , les composantes dans $IJ^{\rightarrow}$ de $\vec{f}_{ij}$ et γ_{ij} sont par définition

$$\begin{cases} \vec{f}_{ij} = f_{ij}^{IJ} \cdot IJ^{\rightarrow} \\ \gamma_{ij} = \gamma_{ij}^{IJ} \cdot IJ^{\rightarrow} \end{cases}$$



L'équilibre du contact (ij) impose :

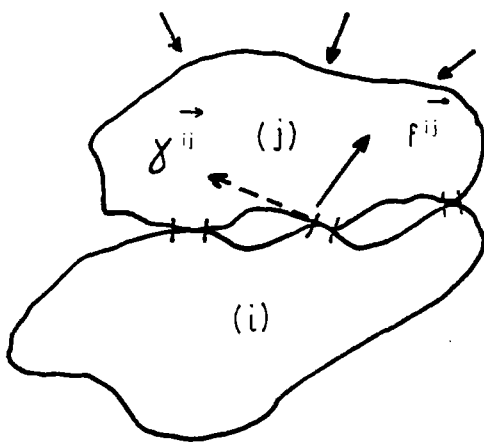
$$\vec{f}_{ij} + \vec{f}^{ji} = . \quad \text{et} \quad \gamma_{ij} + \gamma^{ji} = .$$

a.2 - Zone de contact effective

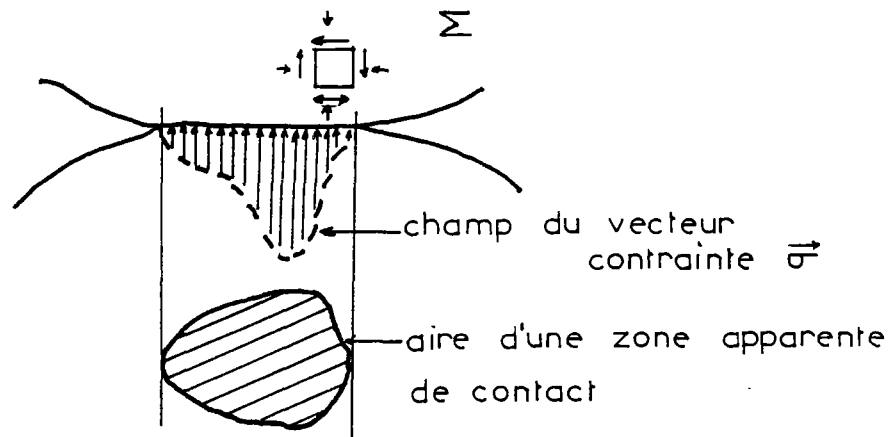
Les efforts de liaison $\vec{f}_{ij}$ et $\vec{\gamma}_{ij}$ résultent d'actions de contact entre les aspérités des contacts des grains. Le critère de liaison est donc lié à la définition géométrique de la zone de contact (grains globalement convexes) ou des zones de contact (grains de forme quelconque). L'aire d'une zone de contact apparente est naturellement fonction de la forme et de la dimension des grains et dans le cas de grains déformables, des efforts de contact eux-mêmes.

En conséquence la définition d'un critère de liaison pour des efforts de contacts ponctuels n'a de sens, que dans la mesure, où l'on introduit implicitement un paramètre qui tient compte des dimensions des aires de contact apparentes -celles-ci étant liées à la convexité des surfaces de contact et éventuellement à la déformation locale.

A supposer que soient connues, les lois de comportement des matériaux et de l'interface, la difficulté principale provient de l'indétermination des conditions aux limites.

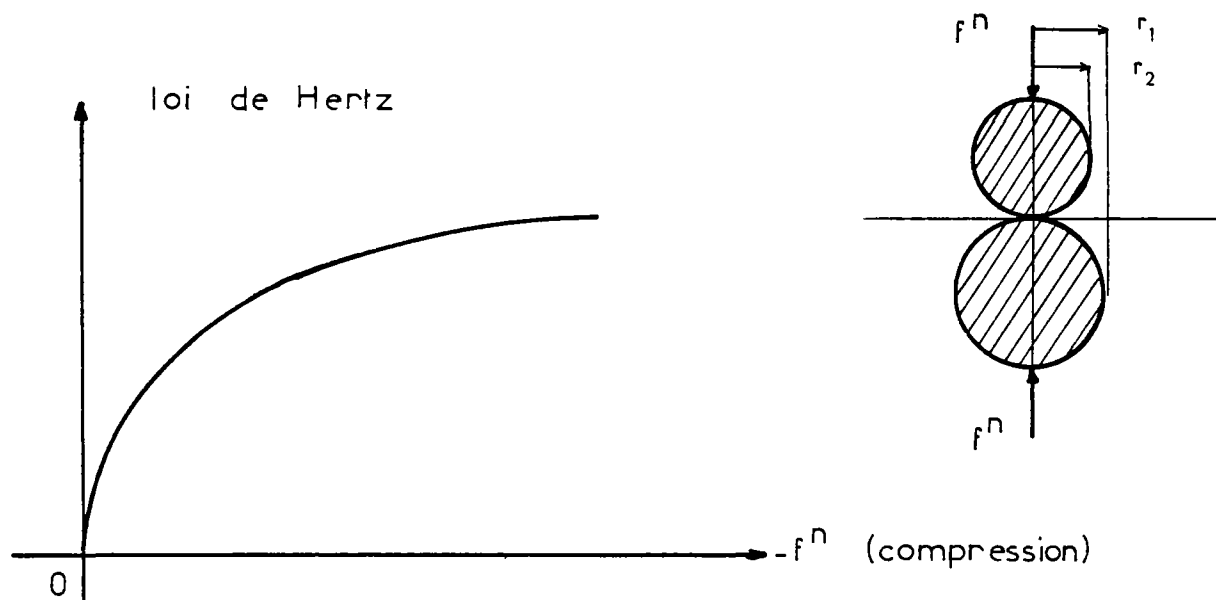


problème discrétisé



La déformation de 2 sphères élastiques, parfaitement lisses (Hertz) ne constitue qu'une première approche du contact ponctuel de 2 solides.

Gaetner (1977) propose une méthode de résolution par éléments finis des problèmes de contact élastique avec frottement en utilisant des variables nodales appropriées.



L'étude du rapprochement de 2 surfaces rugueuses a été faite en considérant plusieurs modèles et plusieurs types de comportement (Bowden, Tabor, etc.). Les résultats expérimentaux et théoriques confirment que les aires des surfaces de contact apparente ou réelle suivent une loi parabolique en fonction de la charge normale appliquée.

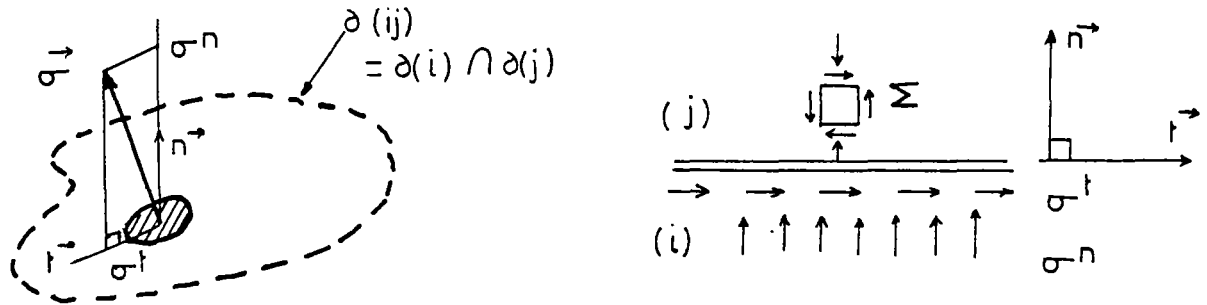
$$A = k (f^n)^v$$

où k et v sont des coefficients tenant compte des caractéristiques géométriques (rayons de courbures principaux des surfaces, hauteur des aspérités, diminution de rugosité, etc.) et mécanique des corps en contact (loi de comportement). f^n est l'effort de rapprochement.

Mais, la formulation d'une loi d'interface "quasi-ponctuelle" en fonction d'une loi d'interface "plane" reste à faire.

a.3 - Champ du vecteur contrainte au contact

Soit $\vec{\sigma}$ le vecteur contrainte agissant sur un élément de l'aire de contact unique de 2 grains (i) et (j) et Σ la matrice symétrique représentative du tenseur des contraintes au voisinage de l'aire de contact.



Le vecteur $\sigma^{\rightarrow}$ est défini par la condition limite

$$\sigma^0 = n^0 \cdot \Sigma'$$

où σ^0 et n^0 représentent les lignes des composantes du vecteur contrainte $\sigma^{\rightarrow}$ et du vecteur normal à l'élément de surface $n^{\rightarrow}$ dans une base orthonormée $0^{\rightarrow}$

$$(\sigma^{\rightarrow} = \sigma^0 \cdot 0^{\rightarrow}, \quad n^{\rightarrow} = n^0 \cdot 0^{\rightarrow})$$

Σ' est défini dans la même base. Dans la base construite à partir de $n^{\rightarrow}$ et d'un vecteur tangent unitaire $t^{\rightarrow}$, le vecteur $n^{\rightarrow}$ a pour composantes :

$|1 \ 0 \ 0|$ et le tenseur contrainte Σ :

$$\Sigma = \begin{vmatrix} \sigma^n & \sigma^t & 0 \\ \sigma^t & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 \end{vmatrix}, \quad \text{le vecteur contrainte } \sigma^{\rightarrow} : |\sigma^n \ \sigma^t \ 0|$$

(Les invariants du tenseur Σ : $inv_1(\Sigma) = tr(\Sigma) = \sigma^n + p_1 + p_2$

$$inv_2(\Sigma) = \frac{1}{2} tr(\Sigma - \frac{1}{3} tr(\Sigma) \mathbb{1})^2 = \sigma^{t^2} + \frac{1}{3} (\sigma^{t^2} + p_1^2 + p_2^2 - \sigma^n p_1 - \sigma^n p_2 - p_1 p_2))$$

Les efforts de contact f^{ij} et γ^{ij} sont obtenus par intégration du champ du vecteur contrainte $\sigma^{\rightarrow}$ sur la zone de contact $\partial(ij)$

$$\text{l'aire de contact } A = \int_{\partial(ij)} \delta s$$

$$\begin{cases} f^{ij} = \int_{\partial(ij)} \sigma^{\rightarrow} \cdot \delta s \\ \gamma^{ij} = \int_{\partial(ij)} \sigma^{\rightarrow} \wedge (M_{ij}, M) \cdot \delta s \end{cases}$$

Efforts sur $\partial(ij)$	Selon la normale	Selon le plan tangent
$\vec{f}_{ij}$	Effort normal compression si $\vec{f}_{ij} \cdot \vec{n}_{ij} < 0$ traction si $\vec{f}_{ij} \cdot \vec{n}_{ij} > 0$	Effort tranchant
$\vec{\gamma}_{ij}$	Torsion	Flexion

Faute de connaître la distribution du champ de contraintes $\vec{\sigma}$ sur $\partial(ij)$, nous faisons l'hypothèse que le critère "plan" est équivalent au critère "ponctuel" résultat de l'intégration des contraintes admissibles sur l'ensemble de la zone de contact.

Ceci, n'est malheureusement vrai que pour le critère de Coulomb, où la constance du rapport de la composante tangentielle et de la composante normale du vecteur $\vec{\sigma}$, implique la même proportionnalité entre les composantes tangentielles et normales de l'effort $\vec{f}_{ij}$, quelle que soit la distribution du champ $\vec{\sigma}$.

b - Définition du domaine d'existence des efforts de contact

L'équation implicite du critère de liaison sera caractérisée par

$$L_{ij}(\vec{f}_{ij}, \vec{\gamma}_{ij}, E) = 0$$

où L_{ij} est une fonctionnelle et E est un ensemble de paramètres définissant l'état d'écrouissage.

$$E = \{e_1, e_2, \dots, e\}$$

L'usure des surfaces de contact, l'état des efforts auxquels sont soumis les grains (i) et (j), la géométrie des grains, la présence éventuelle d'un lubrifiant, ainsi que, éventuellement les vitesses de déplacements du contact sont autant de paramètres d'écrouissage (variables internes).

L'équation du critère, délimite, dans l'espace des efforts de liaison,

un domaine d'existence de ces efforts. En d'autres termes, l'existence de $\vec{f}_{ij}$ ou $\vec{\gamma}_{ij}$ est assujettie à la condition que l'extrémité de leurs vecteurs représentatifs soit située à l'intérieur ou sur la-frontière du domaine défini par le critère ; ceci suppose que :

$$L_{ij}(\vec{f}_{ij}, \vec{\gamma}_{ij}, \dots) \leq 0$$

(La fonctionnelle délimite dans l'espace des chargements un domaine en général convexe, ce qui implique la convexité des fonctions élémentaires de L_{ij}).

Le domaine d'existence des efforts de contact est l'intersection

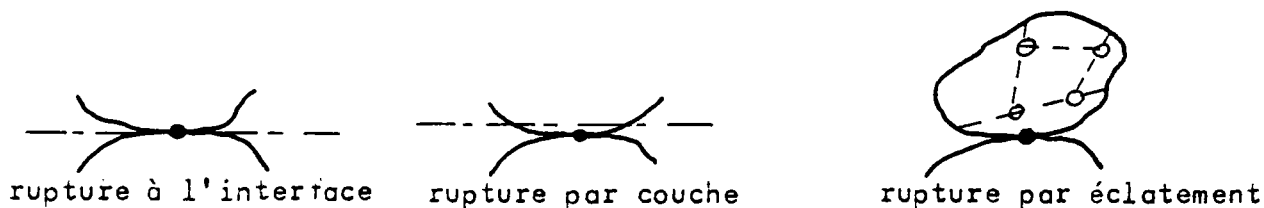
- du domaine des efforts conduisant à des contraintes admissibles à l'interface proprement dit et
- des domaines des efforts conduisant à des contraintes admissibles dans les matériaux constitutifs des grains, (sécurité vis à vis de la rupture par couche au voisinage immédiat de la zone de contact ou de la rupture généralisée d'un grain). Il en résulte pour le critère de liaison.

$$L_{ij} = \inf \{ R_{ij}, R_i, R_j \}$$

où $R_{ij}(\vec{f}_{ij}, \vec{\gamma}_{ij}, \dots)$ représente le critère de rupture relatif à l'interface, $R_i(\vec{f}_{ij}, \vec{\gamma}_{ij}, \dots)$ et $R_j(\vec{f}_{ij}, \vec{\gamma}_{ij}, \dots)$ représentent les critères de rupture relatifs aux grains (i) et (j) soumis aux efforts $\vec{f}_{ij}$ et $\vec{\gamma}_{ij}$.

La rupture par couche est un phénomène de surface (alors que la rupture partielle ou globale est un phénomène de volume). La rupture à l'interface proprement dit dépend également du comportement volumique des matériaux des grains. Il semble donc qu'il y ait continuité pour des matériaux secs (sans lubrifiant) entre le critère de rupture à l'interface et le critère de rupture par couche du plus fragile des matériaux constitutifs des grains en contact.

On désignera donc par critère de séparation, ce qui revient aux phénomènes de surface (adhérence et rupture de surface) et par critère de concassage, ce qui revient aux phénomènes de volume (éclatement partiel ou global d'un des 2 grains).



$$\begin{array}{c}
 \underbrace{R_{ij}(\vec{f}^{ij}, \vec{\gamma}^{ij}, \dots)} \\
 \text{critères: } \underbrace{D_{ij}(\vec{f}^{ij}, \vec{\gamma}^{ij}, \dots)} \quad \underbrace{R_i(\vec{f}^{ij}, \vec{\gamma}^{ij}, \dots) \text{ et } R_j(\vec{f}^{ij}, \vec{\gamma}^{ij}, \dots)} \\
 \underbrace{C_{ij}(\vec{f}^{ij}, \vec{\gamma}^{ij}, \dots)} \\
 \underbrace{L_{ij}(\vec{f}^{ij}, \vec{\gamma}^{ij}, \dots)}
 \end{array}$$

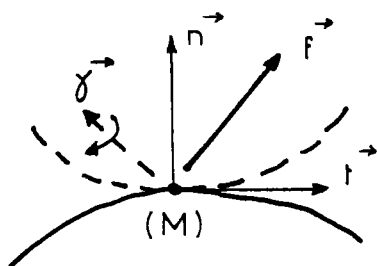
La forme déduite du critère de liaison sera

$$L_{ij} = \inf \{ D_{ij}, C_{ij} \}$$

où $D_{ij}(\vec{f}^{ij}, \vec{\gamma}^{ij}, \dots)$ représente le critère de décollement

$C_{ij}(\vec{f}^{ij}, \vec{\gamma}^{ij}, \dots)$ représente le critère de concassage.

Dans ce qui suit, on note sans ambiguïté, par $\vec{f}$ et $\vec{\gamma}$, la force et le couple qu'exerce un grain sur un autre par l'intermédiaire de leur contact.



Dans le repère associé au contact, la force $\vec{f}$ et le couple $\vec{\gamma}$ ont 3 composantes. Cependant il est possible de ne retenir que 2 termes, à savoir :

$$\begin{cases} \text{pour } \vec{f} : f^n \text{ et } f^t \\ \vec{\gamma} : \gamma^n \text{ et } \gamma^t \end{cases}$$

ces termes sont les composantes des efforts sur la normale et sur le plan tangent. En effet, on peut conclure, dans le cas courant, à l'isotropie plane du critère de liaison, relativement aux composantes tangentielles des efforts de contact.

La fonctionnelle L peut également s'exprimer en coordonnées polaires, c'est-à-dire en fonction de $|\vec{f}|$, $|\vec{f}, \vec{n}|$ et $|\vec{\gamma}|$, $|\vec{\gamma}, \vec{n}|$; où $|\vec{f}|$ et $|\vec{\gamma}|$ représentent les modules de la force $\vec{f}$ et du couple $\vec{\gamma}$, et où $|\vec{f}, \vec{n}|$ et $|\vec{\gamma}, \vec{n}|$ représentent l'amplitude de l'angle d'incidence de $\vec{f}$

et $\gamma^{\rightarrow}$ avec la normale.

On a :

$$\text{et, } \begin{cases} f^{\rightarrow} = f^n \cdot n^{\rightarrow} + f^t \cdot t^{\rightarrow} & \text{d'où } f^t = (|f^{\rightarrow}|^2 - f^{n^2})^{1/2} \\ \gamma^{\rightarrow} = \gamma^n \cdot n^{\rightarrow} + \gamma^t \cdot t^{\rightarrow} & \text{d'où } \gamma^t = (|\gamma^{\rightarrow}|^2 - \gamma^{n^2})^{1/2} \end{cases}$$

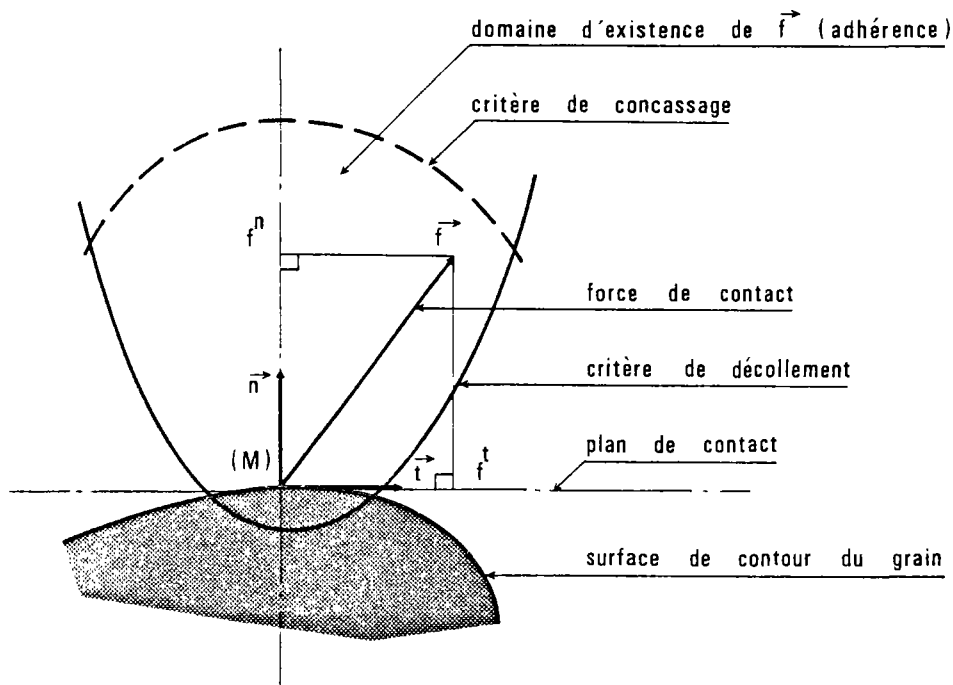
avec,

$$\begin{cases} f^n = |f^{\rightarrow}| \cdot \cos |f^{\rightarrow}, n^{\rightarrow}| \\ \gamma^n = |\gamma^{\rightarrow}| \cdot \cos |\gamma^{\rightarrow}, n^{\rightarrow}| \end{cases}$$

Le fait que la dimension de l'espace des chargements pour un contact ponctuel isotrope plan, soit de 4 (à savoir f^n , f^t , γ^n , γ^t), amène à envisager au minimum 6 trajets plans de chargement ; on se contentera de répertorier les approches expérimentales du domaine et de formuler, quand cela est possible, un début d'interprétation. Certains trajets de chargement, par exemple dans le plan $\{f^n, f^t\}$, s'avèrent toutefois plus intéressants et peuvent donner lieu à une étude plus approfondie. Par contre, l'intervention de $\gamma^{\rightarrow}$ indique que le contact n'est pas ponctuel et que les observations recueillies sont moins sûres ; elles ne pourront conduire qu'à quelques remarques générales.

c - Critère de liaison dans le plan $\{f^n, f^t\}$

L'étude des phénomènes de contact a montré que le domaine d'existence de f^n est délimité par, au moins, 2 surfaces de charges indépendantes. La première est définie par le critère de décollement ou de résistance au glissement, la seconde par le critère de concassage.



Critère de liaison

L'hypothèse d'isotropie plane de la composante tangentielle f^t est généralement vérifiée pour le critère de décollement mais elle ne l'est pas théoriquement pour le critère de concassage ; néanmoins des considérations en grandeurs tendent à souligner qu'à la rupture le rapport f^t/f^n reste petit.

On rappelle que la condition d'existence de f^r est :

$$L(f^r, \dots) = \inf \{ D(f^r, \dots) , C(f^r, \dots) \} \leq 0$$

c.1 - Critère de décollement $D(f^n, f^t)$ - critère de glissement

Le fait que le domaine connexe délimité par la fonction D possède une zone de traction traduit le fait que le contact est adhérent (collage partiel). Nous avons vu quelques unes des causes de cette adhérence (cf. § 1 121 a). Pour des grains minéraux polis, globalement convexes, le domaine de résistance par frottement est habituellement tronqué en traction, indiquant ainsi l'absence de cohésion initiale.

Les critères de glissement usuels correspondent à des surfaces développables (cylindres, cônes, ...), on peut citer par exemple :

. Le critère associé au frottement de Coulomb

Le critère plan s'écrit pour un matériau avec cohésion initiale

$$D'(\vec{\sigma}) = |\sigma^t| + \mu \sigma^n - c'$$

où $\mu = \tan \phi$ est un coefficient, et ϕ représente un angle de frottement limite

c' est la cohésion initiale

$\vec{\sigma}$ est le vecteur contrainte agissant sur un élément plan de l'interface ($\sigma^n < 0$: compression).

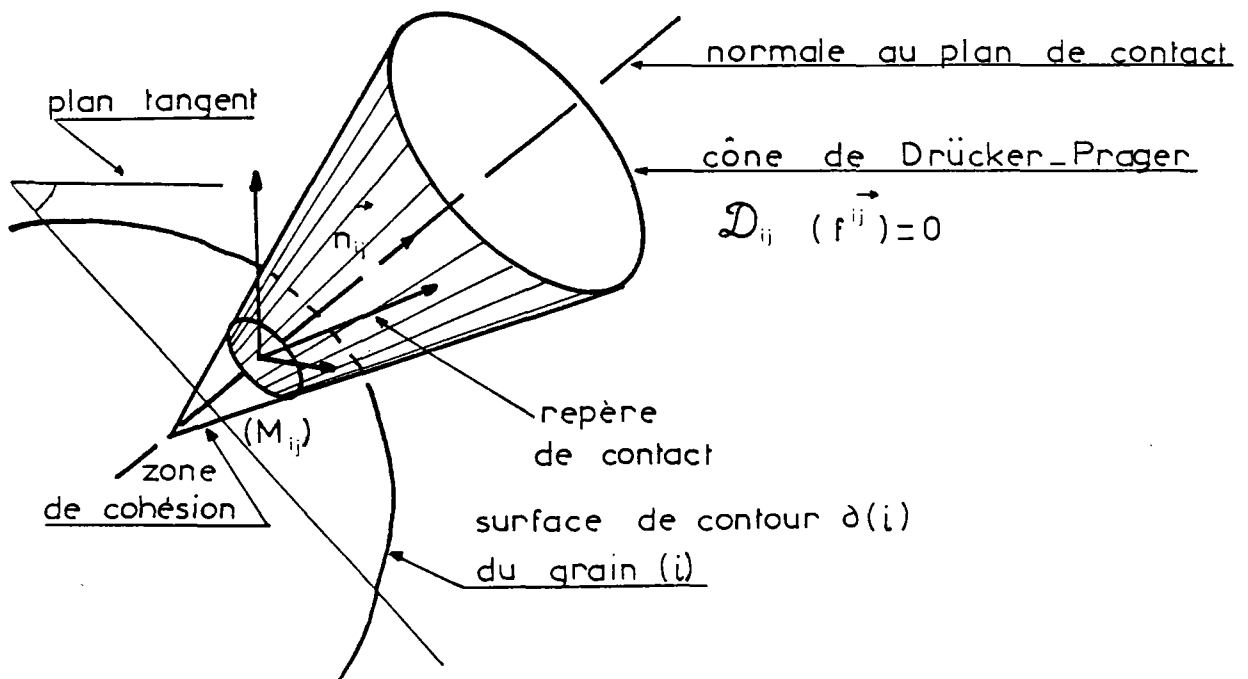
Dans le cas où, $c' = 0$ on retrouve la loi d'Amonton

$$D'(\vec{\sigma}) = |\sigma^t| + \mu \sigma^n .$$

Pour le critère ponctuel

$$D(\vec{f}) = |f^t| + \mu f^n - c .$$

Dans l'espace à 3 dimensions, ce critère représente un cône de révolution, axé sur la normale au plan de contact. C'est le cône de Drücker-Prager (vulgairement appelé cône de frottement solide).



L'équation du critère dans le repère associé (M_{ij}, IJ^r) correspond à une forme quadratique dégénérée. Elle est symétrique selon les composantes de f^{ij} , dans une base qui admettrait $\vec{n}_{ij}$ comme vecteur trissecteur.

- . Le critère associé au frottement par cohésion

L'équation du critère plan est la suivante

$$D'(\vec{\sigma}) = |\sigma^t| - c'$$

Il impose une limite constante à la composante tangentielle de $\vec{\sigma}$. Toutefois, l'adhérence au glissement, n'est pas toujours assurée pour des efforts de contact tels que la composante normale σ^n soit faiblement négative ou positive (traction). On envisage donc plusieurs types de troncature.

- . Troncature en traction simple

$$\sigma^n \leq 0$$

- . Troncature avec "collage" initial

$$|\vec{\sigma}| - c' \leq 0 \quad \text{pour } \sigma^n \geq 0$$

- . Troncature pour les compressions faibles

$$|\vec{\sigma} + c' \vec{n}| - c' \leq 0 \quad \text{pour } \sigma^n + c' \geq 0$$

Le critère ponctuel s'écrit de la même manière

$$D(\vec{f}) = \inf \{ |\vec{f}^t| - c, T(\vec{f}) \}$$

où $T(\vec{f})$ est la condition de troncature retenue.

Dans l'espace physique, ce critère est représenté pour un cylindre de révolution centré sur la normale au plan de contact (cylindre de Von Mises) et limité soit par un plan, soit par une demi-sphère.

- . Critère associé au frottement mixte

Le domaine limité par ce critère est l'intersection des domaines que définissent les critères associés au frottement de Coulomb et par cohésion

$$D'(\vec{\sigma}) = \inf \{ (|\sigma^t| + \mu \sigma^n), (|\sigma^t| - c') \}$$

Il constitue une meilleure approximation du critère réel de glissement plan sur plan de 2 solides. A faible contrainte normale σ^n , l'adhérence limite répond au critère type Coulomb ; pour des charges élevées, on constate que l'adhérence au glissement ne varie plus d'où le critère type Von Mises

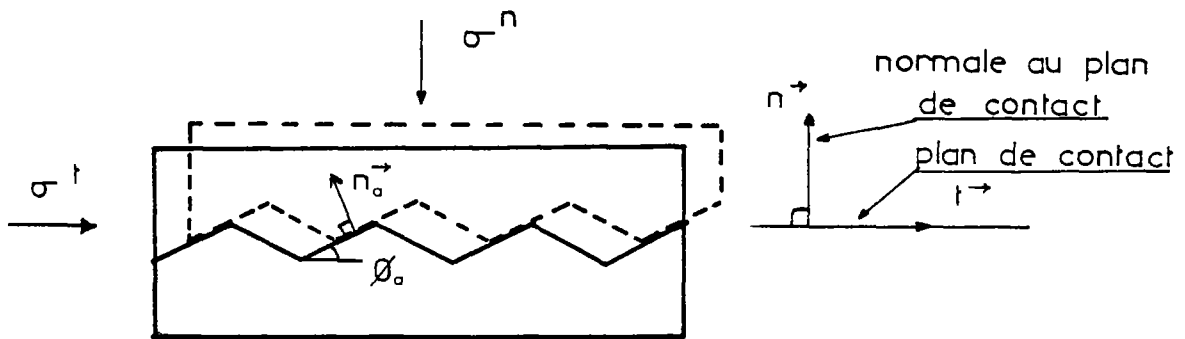
(Lorsqu'il n'y a pas de cohésion initiale, le critère de décollement est appelé loi d'Orowan).

En ce qui concerne le critère ponctuel :

$$D(\vec{f}) = \inf \{ (|\vec{f}^t| + \mu f^n) , (|\vec{f}^t| - \sigma) \}$$

L'objet des recherches sur le frottement est de donner une interprétation mécanique des phénomènes, le but étant de rattacher le critère de décollement au comportement mécanique volumique des matériaux et à l'état géométrique des surfaces. La plupart des théories font intervenir la notion de "collage" des surfaces réelles en contact, à l'échelle microscopique, et les déformations élastoplastiques des profils modélisés (dents de scie, etc,...). Mais pour les matériaux minéraux, ce sont surtout les phénomènes de rupture fragile et d'adhérence par enchevêtrement qui sont prépondérants c'est pourquoi, les interprétations les plus couramment admises dérivent du modèle de Rowe.

Le modèle de Rowe destiné à l'origine à expliquer le principe de la dilatance, est constitué de 2 profils à indentations régulières symétriques en forme de coins. Les facettes représentent les aspérités.



Plusieurs approches successives peuvent être envisagées à partir de ce modèle.

. Matériau parfaitement rigide, facettes parfaitement lisses. Sur la surface lisse des facettes, le mouvement s'amorce lorsque le vecteur contrainte $\sigma^{\rightarrow}$ prend une inclinaison supérieure à la normale $n_o^{\rightarrow}$ au plan de contact des aspérités. La normale $n_o^{\rightarrow}$ est elle-même inclinée d'un angle d'amplitude ϕ_o par

rapport à la normale $\vec{n}$ au plan tangent du contact global.

$$\phi_a = |\vec{n}, \vec{n}_a|$$

La condition de mouvement est par conséquent $|\sigma^t| > \operatorname{tg} \phi_a \sigma^n$, et on pose $\mu = \operatorname{tg} \phi_a$ (μ est le coefficient de frottement). Inversement le critère de stabilité au glissement est définie par la condition

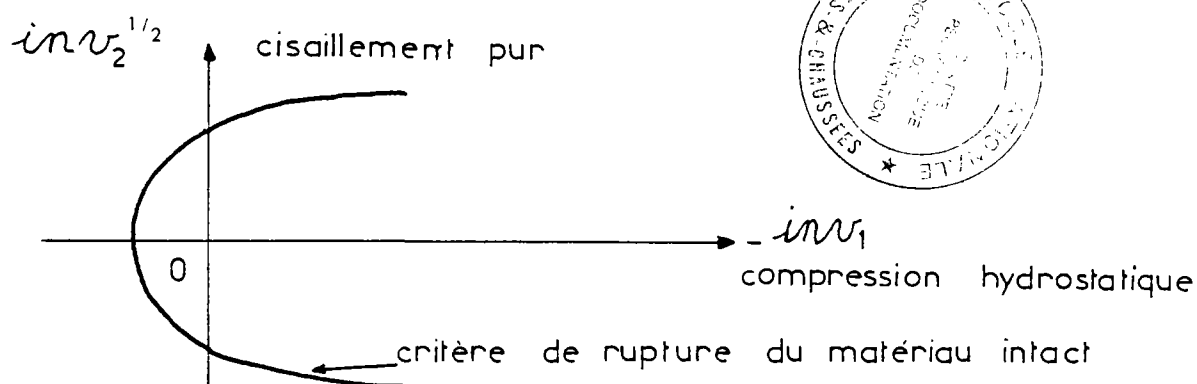
$$D'(\vec{\sigma}) = |\sigma^t| + \mu \sigma^n \leq 0.$$

On retrouve la loi d'Amonton

. Matériau rigide-fragile, facettes parfaitement lisses

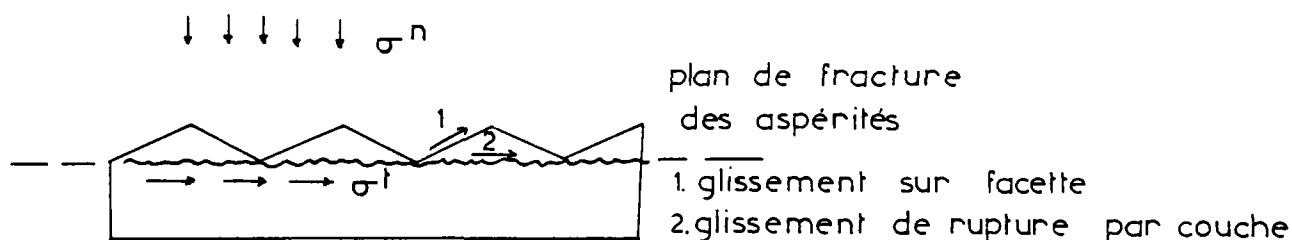
Ce modèle nécessite la connaissance du critère de rupture du matériau :

$R(inv_1, inv_2, inv_3) = 0$ (pour un matériau isotrope). (Dans les cas courants, indépendance vis à vis de $inv_3(\Sigma)$).

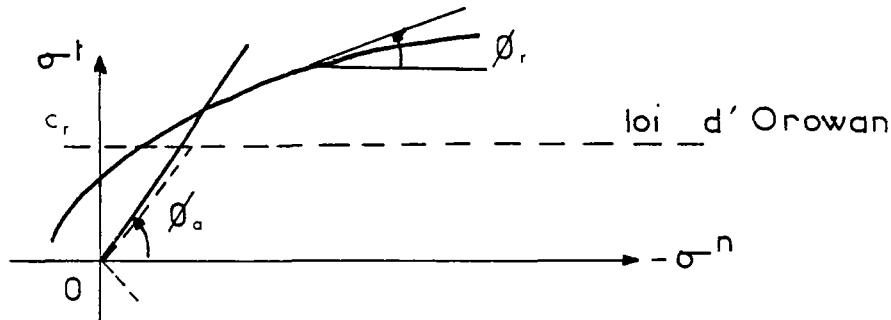


Pour un module de $\vec{\sigma}$ peu élevé, on obtient un glissement sur les facettes dès que $|\sigma^t|$ dépasse $-\mu \sigma^n$, mais lorsque le module de $\vec{\sigma}$ est suffisamment grand, la contrainte de cisaillement à la base des aspérités atteint la contrainte de rupture du matériau intact. Dans ce cas, le glissement est déterminé par le critère de rupture dans le plan $\{\sigma^n, \sigma^t\}$

$$R'(\sigma^n, \sigma^t) = 0$$



Le critère de décollement est donc représenté par 2 surfaces de révolution autour de la normale $\vec{n}$. Si pour une plage suffisamment grande de contraintes, le critère de rupture peut être représenté dans le plan $\{\sigma^n, \sigma^t\}$ par un cylindre, on retrouve la loi d'Orowan.



. Matériau parfaitement rigide, facettes rugueuses

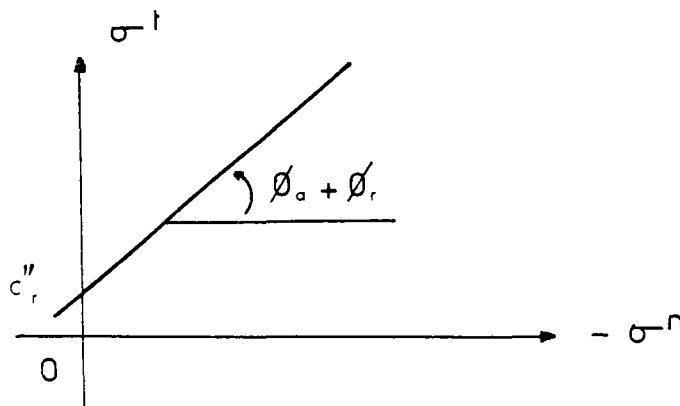
Ce modèle demande la connaissance du critère de frottement sur les facettes.

Si l'un adopte une loi de frottement de type Coulomb

$$|\sigma^t| + \operatorname{tg} \phi_r \sigma^n - c_r' \leq 0$$

Le glissement est obtenu pour $|\sigma^t| = -\operatorname{tg} (\phi_o + \phi_r) \sigma^n + c_r''$ où c_r'' est une contrainte de cohésion apparente proportionnelle à c_r' et au degré de contact

$$c_r'' = \alpha c_r' \quad \left(\alpha = \frac{A_r}{A_o} \right)$$



. Matériau rigide fragile, facettes rugueuses

Ce modèle est une synthèse des 2 précédents. Pour tenir compte de l'aspect fractal du frottement, il est possible d'adopter la même loi de rupture

sur la facette et sur le plan de glissement. (Loi de frottement associée au critère de rupture)

$$|\sigma^t| + \operatorname{tg} \phi_r \sigma^n - \sigma_r' \leq 0 .$$

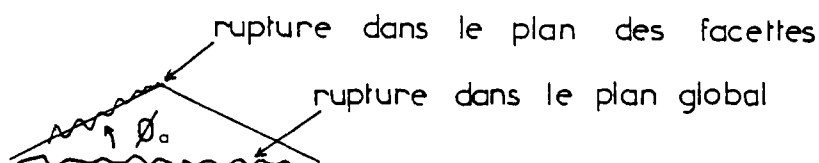
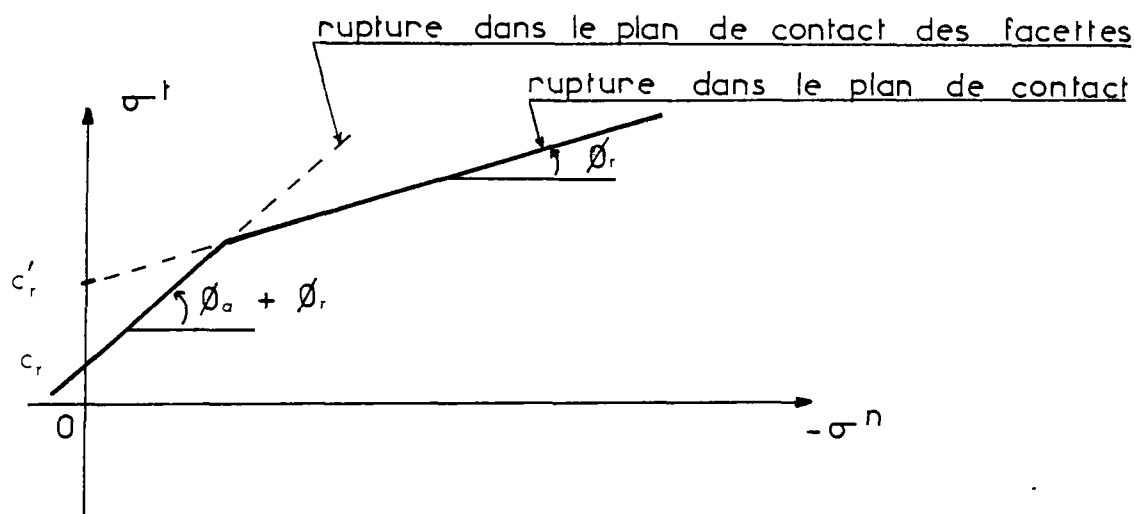


Schéma de rupture d'une aspérité (cisaillement surfacique et cisaillement total)

Le schéma de Rowe qui permet de se faire première idée du frottement, doit dans la mesure du possible être généralisé pour des profils d'indentation irréguliers et pour des matériaux rigides-fragiles à courbe intrinsèque quelconque. La difficulté provient du fait que les glissements plans sur plans et les microruptures d'aspérités sont simultanées ; de plus la microstructure des surfaces de contact est telle qu'elle fait apparaître non seulement des irrégularités variables mais également des excroissances de ces aspérités. Ainsi on conçoit que lors d'un rapprochement et d'un glissement de 2 surfaces de ce type, se produisent des enchevêtrements d'autant plus accentués que les efforts consécutifs à de tels déplacements sont élevés. Mais en même temps se produisent des microruptures qui permettent alors un déplacement. On sait que plus le degré d'interaction des aspérités est important et plus la barrière de résistance

au glissement devient infranchissable. Ainsi, pour un effort normal donné, les aspérités, les plus aigües sont cisailées. Le déplacement est imposé par les aspérités les plus résistantes présentant une base plus large et une inclinaison plus faible. Une analyse du cisaillement conduit à l'établissement de plusieurs modèles lorsque initialement les aspérités sont parfaitement imbriquées.

Modèle de Barton

$$D'(\sigma^t) = |\sigma^t| + \operatorname{tg}(\phi_r + \phi(\sigma^n/\sigma_c^n)) \cdot \sigma^n$$

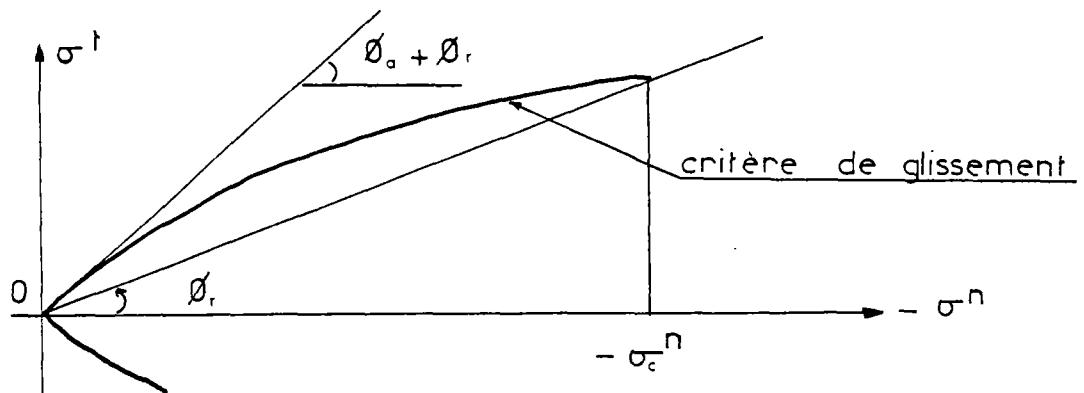
où ϕ_r est l'amplitude de l'angle de frottement résiduel dont la signification est donnée ultérieurement.

σ_c^n est une contrainte critique pour laquelle toutes les aspérités de lère grandeur sont cisailées.

ϕ correspond à un angle d'indentation fonction du rapport σ^n/σ_c^n .

Barton propose pour ϕ une loi de type

$\phi = -k \log(\sigma^n/\sigma_c^n)$ ou k est un coefficient ($k = 20$ pour les surfaces très rugueuses).



Modèle de Ladanyi et Archambaud

Ce modèle est basé sur des considérations énergétiques. Il procède d'une analyse de la puissance des efforts intérieurs.

On distingue trois termes

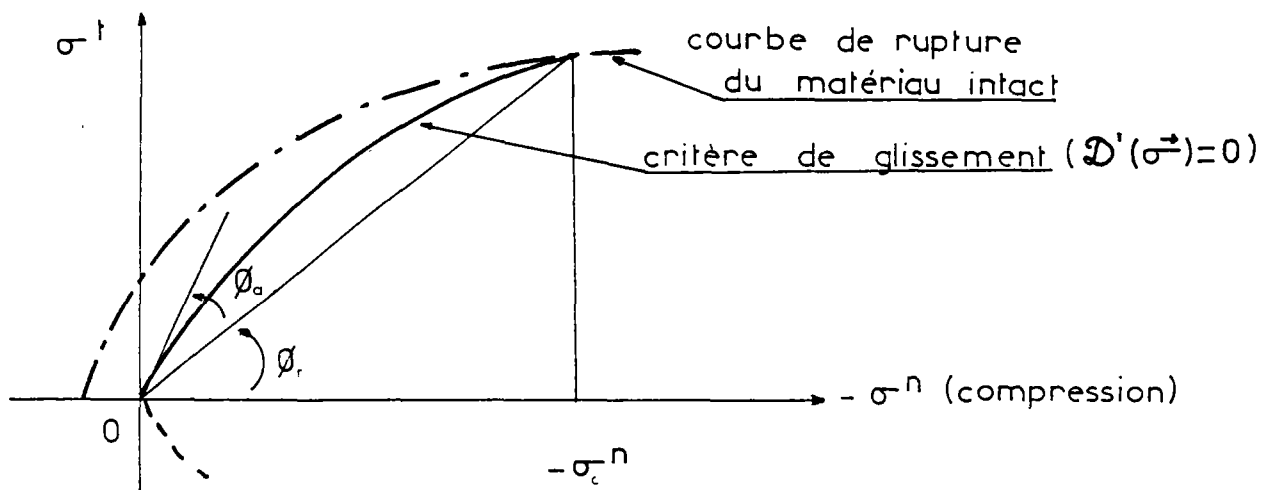
- P_1 puissance dissipée par dilatance
- P_2 puissance dissipée sur le frottement entre aspérités
- P_3 puissance dissipée par le frottement entre surfaces de contact

lorsque les aspérités sont cisailées.

$P_1 + P_2 + P'_2 = -P$ (puissance des efforts extérieurs). On détermine empiriquement le rapport entre les puissances P_2 et P'_2 . On admet la forme suivante $\lambda = P_2/P'_2 = (1 - \sigma^n/\sigma_c^n)^k$ où k est un coefficient et σ_c^n définit une contrainte critique (correspondant à la pression de transition de Mogi). L'importance des ruptures augmente et donc l'angle de dilatance à la rupture diminue lorsque l'effort normal augmente. On obtient une fonctionnelle de la forme :

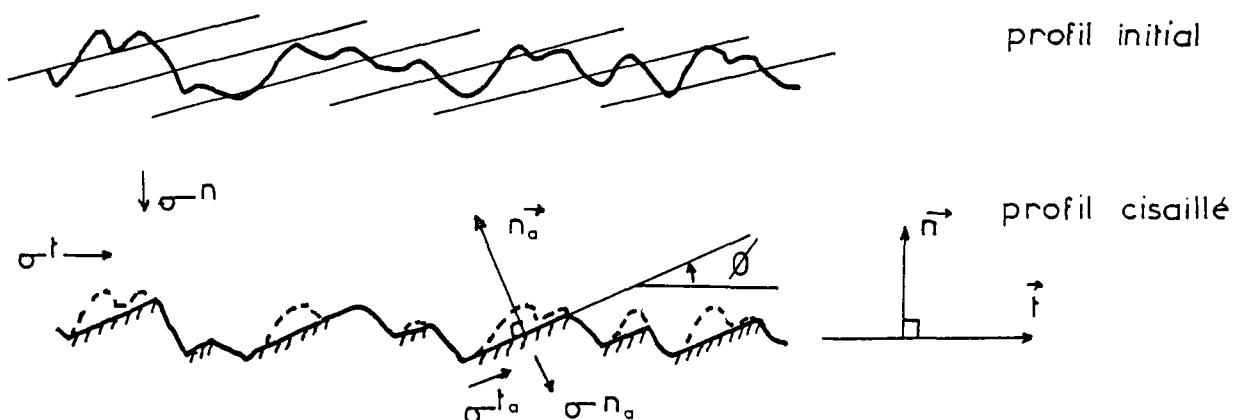
$$D(\vec{f}) = (1 - \lambda \operatorname{tg} \phi_o) \cdot |f^t| + (\lambda \operatorname{tg}(\phi_o + \phi_r) + (1-\lambda) \operatorname{tg} \phi_r) \cdot f^n$$

où λ est fonction de σ^n .

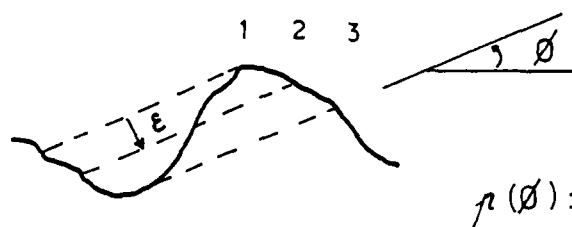


Modèle de Rowe avec indentation irrégulière

Ce modèle, comme les précédents ne concerne que les contacts de surfaces avec imbrication totale. (degré d'interaction égal à 1).



L'amplitude ϕ de l'angle des facettes de cisaillement correspond à un minimum de résistance au glissement. Pour un profil d'indentation donné, on détermine au préalable, la fonction de répartition $p(\phi)$ donnant le rapport minimum de surface des facettes de cisaillement pour l'angle ϕ , et de la surface totale du plan de glissement. Cette distribution détermine d'une certaine manière la rugosité.



cisaillement d'une aspérité

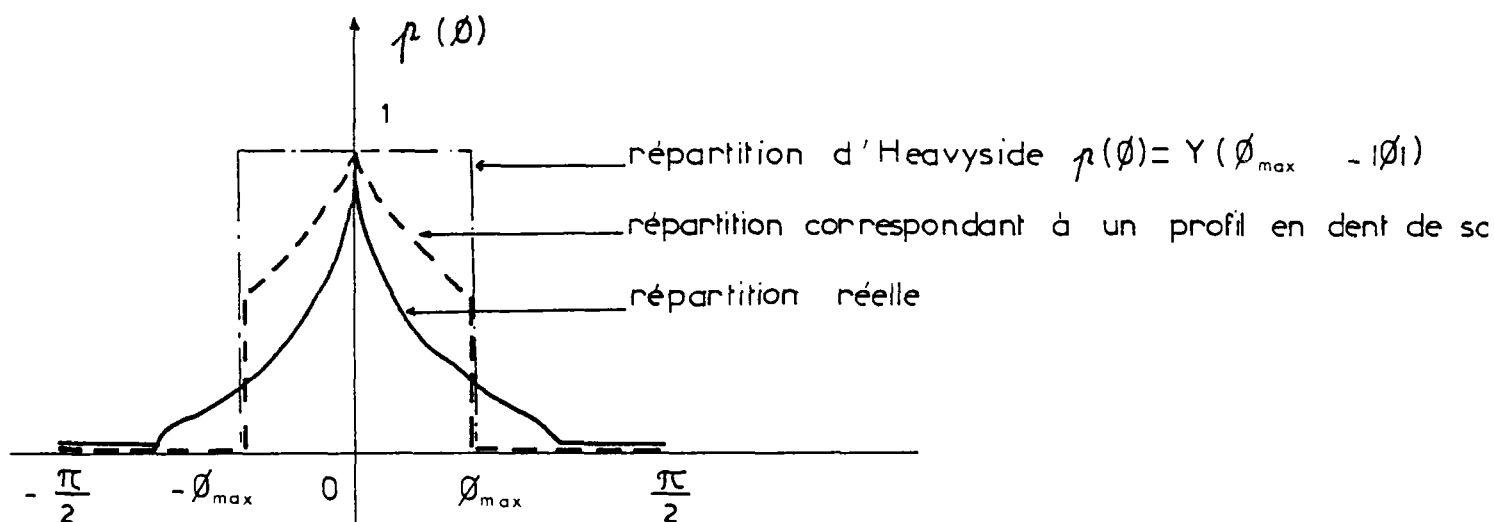
1. matériau supérieur
2. matériaux supérieur et inférieur
3. matériau inférieur

$$p(\phi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} p(\phi, \epsilon) d\epsilon$$

Principe de détermination de $p(\phi)$

La valeur de $p(\phi)$ pour chaque valeur ϕ (positive ou négative) définit une distribution pour laquelle $p(0) = 1$.

La parité de $p(\phi)$ signifie l'isotropie de l'angularité dans les deux directions de glissement.



Sur le plan d'une facette, le vecteur contrainte a pour composantes normales et tangentielles (problème en déformations planes)

$$\begin{pmatrix} \sigma_n \\ \sigma_t \end{pmatrix} = \frac{1}{p(\phi)} \begin{pmatrix} \sigma_n \\ \sigma_t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

Ces composantes vérifient le critère de rupture plan du matériau intact,

pour le mécanisme de rupture adopté

$$R'(\sigma_{\sigma}^n, \sigma_{\sigma}^t) = 0 \quad , \quad \text{c'est-à-dire}$$

$$R'(\frac{1}{p}(\sigma^n \cos \phi + \sigma^t \sin \phi) , \frac{1}{p}(-\sigma^n \sin \phi + \sigma^t \cos \phi)) = 0$$

La valeur de ϕ solution, minimise la valeur de σ^t pour σ^n donné.

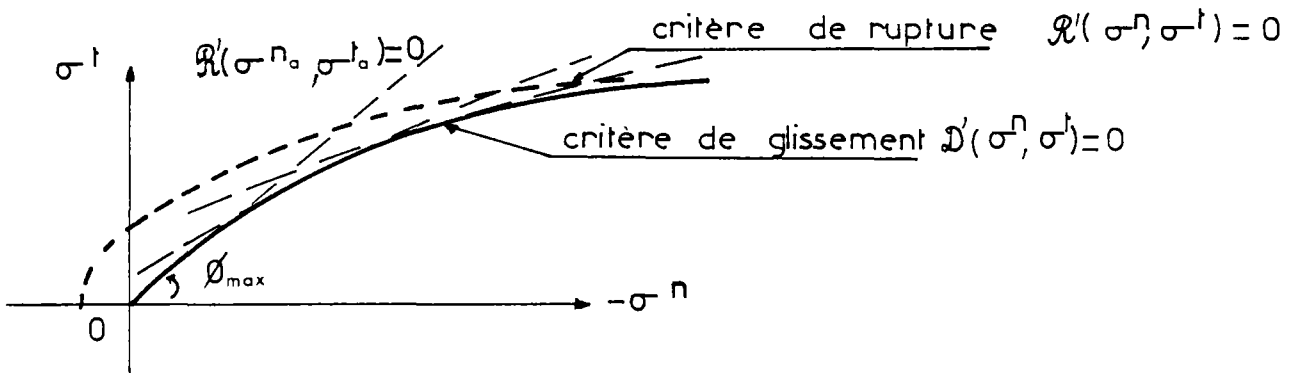
Soit

$$\sigma^t = \inf_{\phi} \{\sigma^t(\sigma^n, \phi)\}.$$

Dans les cas courants (dérivabilité) ϕ est obtenu par l'équation $\frac{\delta}{\delta \phi}(\sigma^t) = 0$.

Le critère de décollement cherché $D'(\sigma^n, \sigma^t) = 0$ est minimisé par les fonctions $R'(\sigma^n, \sigma^t) = 0$ et $|\sigma^t| + \tan \phi_{\max} \sigma^n = 0$ correspondants aux valeurs minimale et maximale de ϕ , c'est-à-dire $\phi = 0$ et $\phi = \phi_{\max}$

Le critère est défini comme l'enveloppe intérieure des courbes de rupture sur les facettes $R'(\sigma_{\sigma}^n, \sigma_{\sigma}^t) = 0$ lorsque ϕ varie de 0 à $\phi_{\max}$.



Remarque:

Lorsque le critère de rupture $R'(\sigma^n, \sigma^t) = 0$ définit une courbe fermée, indiquant une limite en compression, la condition de validité du mécanisme de glissement sur une facette implique que : $0 \leq \phi \leq \phi_{\max}$. Au plus, le cisaillement horizontal ($\phi = 0$) correspond à un état de contraintes tel que

$$\frac{\sigma^n}{\sigma_c^n} \leq \frac{\sigma^t}{\sigma_c^t} \quad \text{où } \sigma_c^n \text{ est défini par}$$

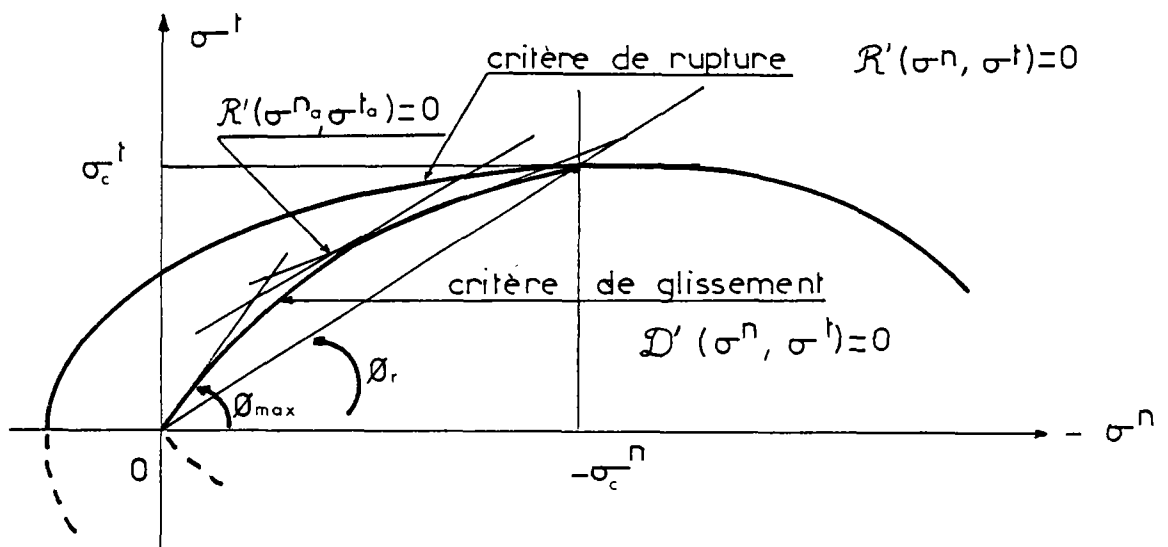
$$\begin{cases} R'(\sigma^n, \sigma^t) = 0 \text{ et} \\ \frac{\partial R'}{\partial \sigma^n}(\sigma^n, \sigma^t) = 0 \end{cases}$$

Soit ϕ_r tel que $\tan \phi_r = -\sigma_c^t / \sigma_c^n$.

Le glissement impose : $|\sigma^t| \leq -\tan \phi_r \sigma^n$

Dans le cas contraire, la rupture se produit avec écrasement. Ce résultat montre que le cisaillement par facettes ne peut se produire que pour un angle dont l'amplitude ϕ est supérieure à ϕ_r . (ϕ_r correspond donc à une limite inférieure de l'angle des facettes cisailées, au delà la rupture ne correspond pas au glissement mais à un enfoncement). ϕ_r peut être considéré comme l'amplitude minimale de l'angularité de la surface d'un matériau dont le critère de rupture définit une courbe fermée.

Ce fait est confirmé par l'expérience et il est possible d'en donner une interprétation physique.



. Application du modèle à un matériau de Von mises

La courbe définissant le critère de rupture dans l'espace $\{\sigma^n, \sigma^t\}$ est ouverte. Il s'agit de 2 droites parallèles.

Sur une facette : $R'(\sigma_a^n, \sigma_a^t) = |\sigma_a^t| - c_r'$

On en déduit : $|\sigma^t| = \frac{c_r'}{\cos \phi} \cdot p(\phi) - \tan \phi \sigma^n$

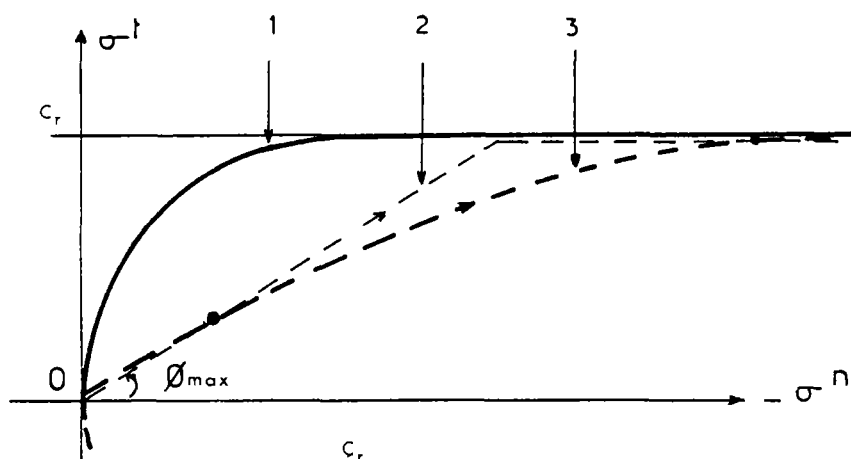
Le critère de glissement correspond à :

$$|\sigma^t| = \inf_{\phi} \left\{ \frac{c_r'}{\cos \phi} p(\phi) - \tan \phi \sigma^n \right\}$$

Si $p(\phi)$ est dérivable par morceaux, l'équation $\frac{\delta \sigma^t}{\delta \phi} = 0$ donne une valeur de ϕ en fonction de σ^n et c_r' . On obtient l'équation du critère $D'(\sigma^n, \sigma^t) = 0$ en remplaçant ϕ par la valeur trouvée dans l'expression de σ^t .

On donne ici, les représentations de $D'(\sigma^n, \sigma^t) = 0$ pour quelques fonctions de répartition $p(\phi)$.

fonction de rugosité $p(\phi)$



$$1. p(\phi) = 1 - \sin |\phi|$$

$$2. p(\phi) = Y(\phi_{\max} - |\phi|)$$

(Heavyside)

$$3. p(\phi) = \frac{\sin \phi_{\max} \cdot Y(\phi_{\max} - |\phi|)}{\sin(\phi_{\max} + \phi)}$$

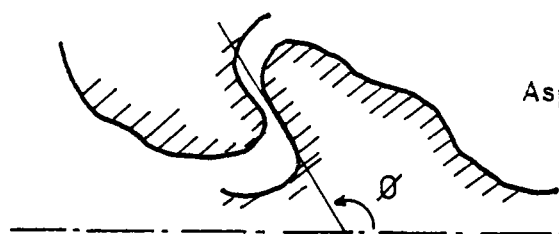
(dents de scie)

Critères de glissement pour un matériau rigide-fragile
à seuil de rupture du type von Mises

Remarques sur la signification physique des paramètres caractéristiques du critère de glissement:

1 - Cohésion initiale

La cohésion initiale de 2 surfaces en contact est due à un enchevêtrement très accentué des aspérités. (Elle correspond à une soudure fractale). C'est le cas lorsque l'amplitude ϕ de l'angle des aspérités avec le plan de contact prend des valeurs supérieures à $\frac{\pi}{2}$.



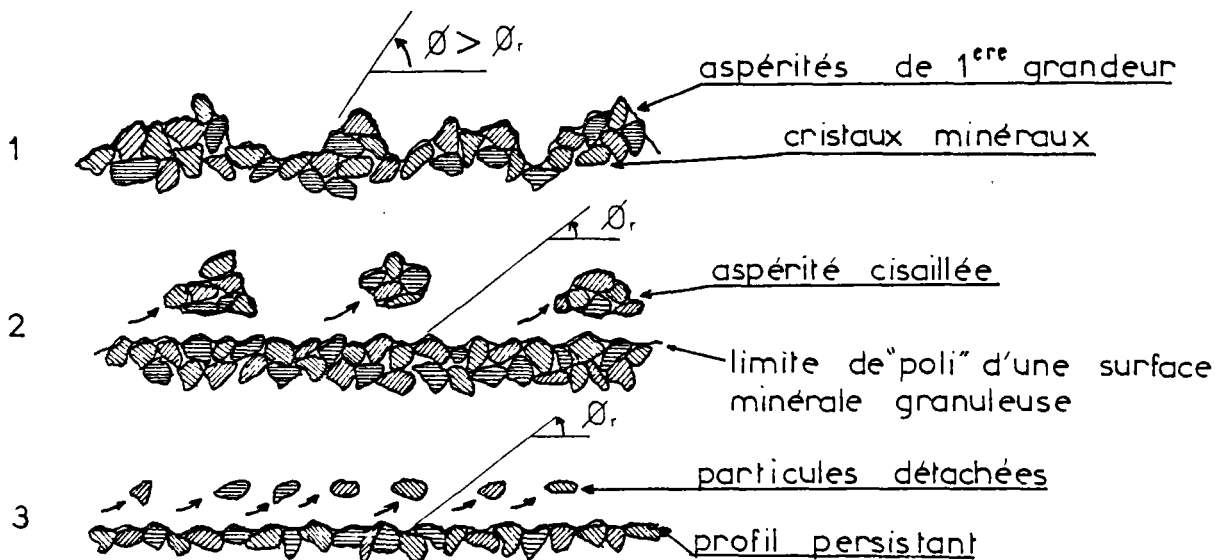
Aspérités créant une cohésion initiale

2 - Angle de frottement résiduel (persistance de la rugosité)

Les matériaux minéraux courants sont constitués de particules cristallines "collées" entre elles. Il existe donc une limite au "poli" d'une surface de ce type. L'abrasion des aspérités qui se traduit par une dissociation de blocs de particules cristallines de leur support est en réalité un "arasage" d'une surface microgranulaire. On conçoit qu'une nouvelle abrasion (ou rupture par couche) laissera inchangée la rugosité apparente de la surface. Il y aura donc persis-

sistance d'un angle de frottement. Cet angle de frottement limite minimal correspond au "poli maximal" que peuvent avoir les surfaces de contact. Cet angle résiduel est, en conséquence, une caractéristique morphologique du matériau constitutif des grains. Nous avons vu dans le modèle précédent, que l'état de contraintes tel que : $|\sigma^t| = - \tan \phi_r \sigma^n$ avec $R'(\sigma^n, \sigma^t) = 0$ correspondait à un état critique car dans ce cas, il y a équivalence entre 2 schémas de glissement possibles

- la rupture par couche c'est-à-dire un détachement superficiel des particules cristallines
- le glissement plan sur plan des facettes inclinées d'un angle d'amplitude ϕ_r .

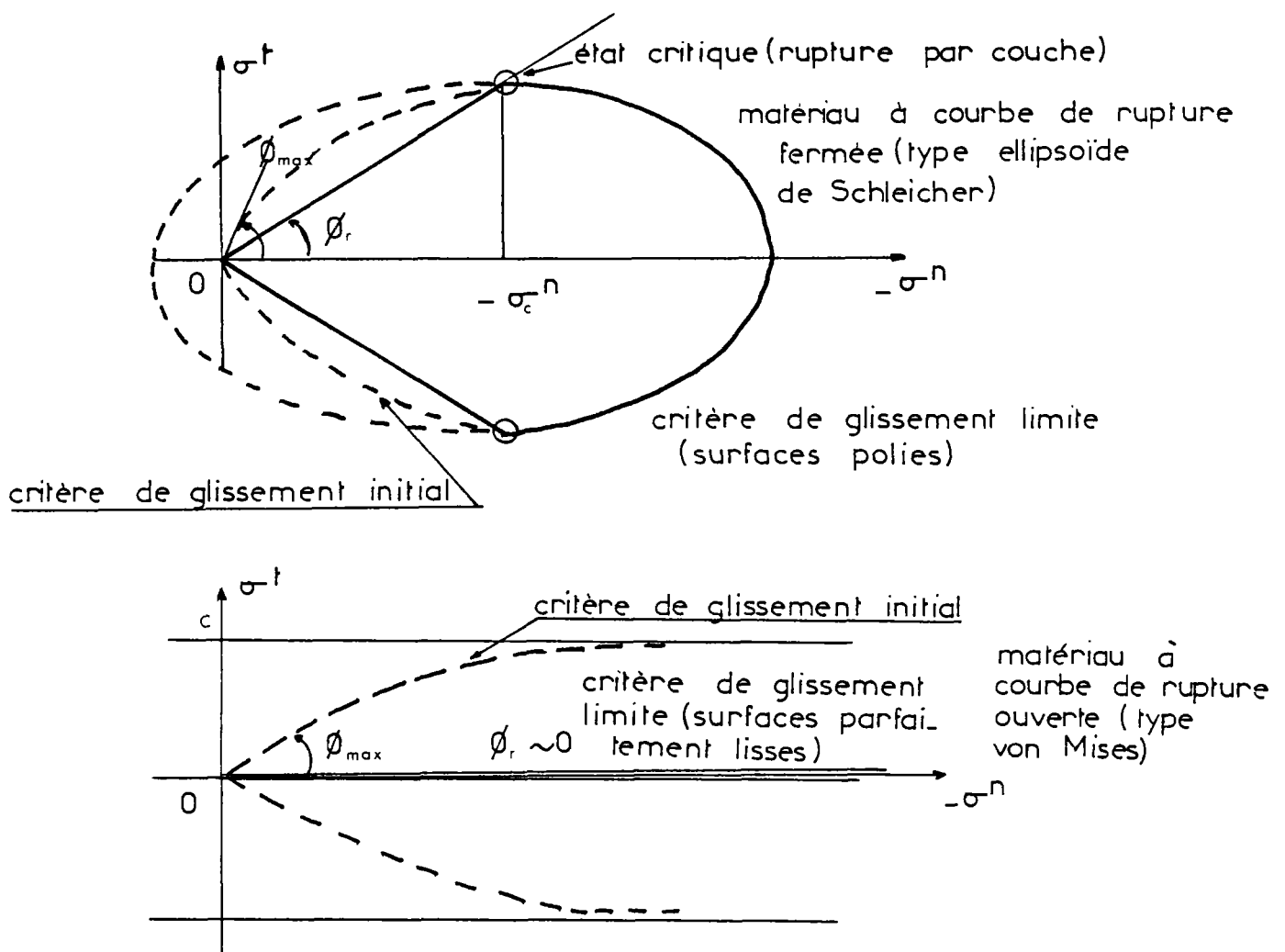


Principe de conservation des irrégularités de surface par abrasion

On rappelle qu'il y a une corrélation entre la rupture sous contrainte hydrostatique (effondrement) et l'état microgranuleux d'un matériau. Les matériaux rocheux ordinaires constitués de particules "collées" ont une limite plus ou moins rapprochée à la rupture sous compression hydrostatique selon l'état des vides entre particules. (La courbe représentative du critère de rupture est fermée). La rupture est caractérisée par la décohésion des contacts entre particules cristallines.

Inversement, pour les matériaux qui ont une courbe de rupture ouverte (pas de limite en compression hydrostatique), il n'y a pas théoriquement d'angle de

frottement limite minimal, c'est-à-dire $\phi_r = 0$. La limite de "poli" d'une surface correspond alors à une surface parfaitement lisse. Le domaine limite est donc constitué par un cylindre de résolution de volume nul. On constate en effet expérimentalement que les matériaux qui répondent le mieux au critère de Von mises sont des matériaux homogènes (monocristaux, par exemple), qui peuvent ainsi présenter un "poli" presque parfait $\phi_r \approx 0$.

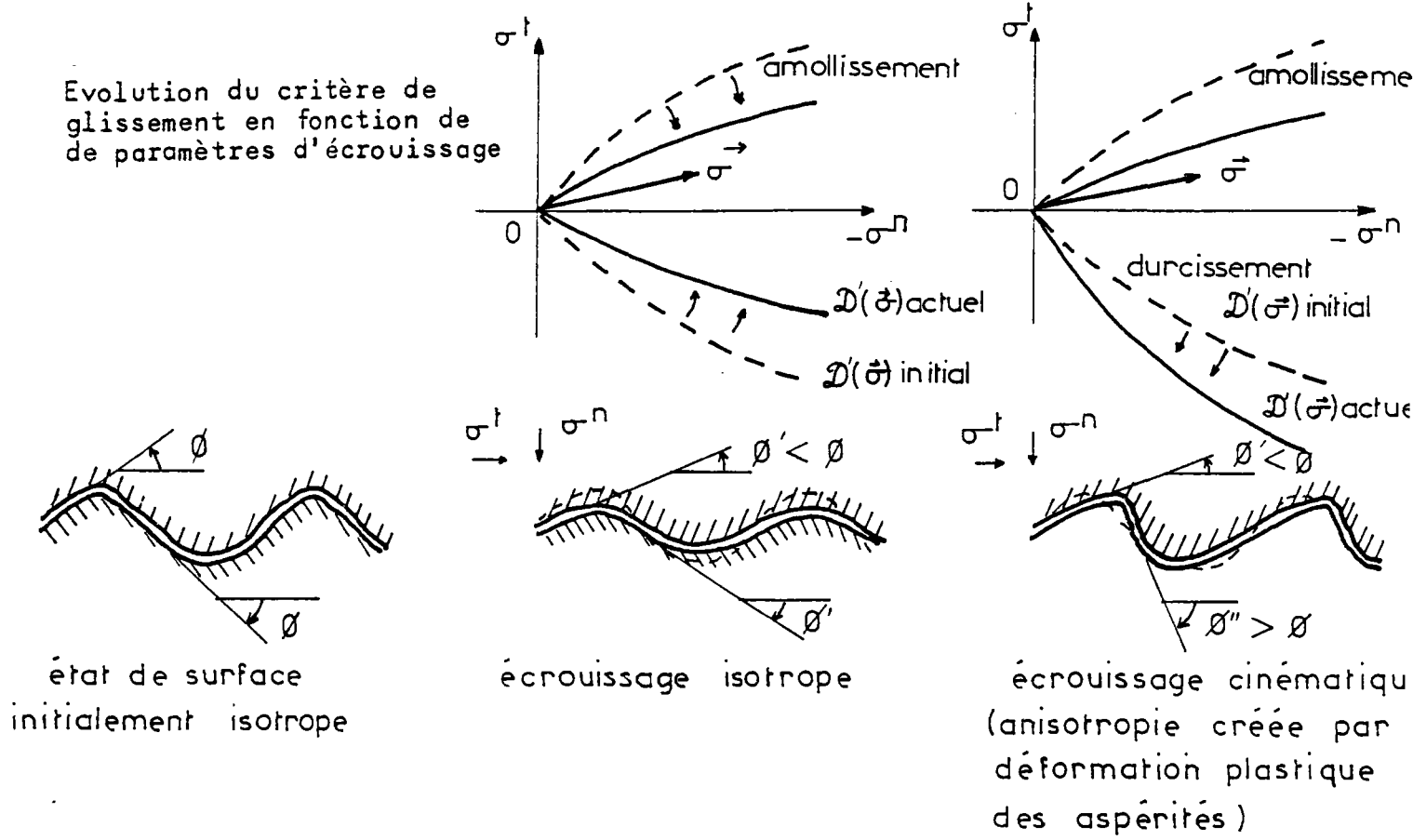


Limite de "poli" pour deux types de matériaux, et courbes de glissement limite correspondantes

. Modèle avec écrouissage

Une variable interne susceptible de modifier le critère de glissement est l'usure des surfaces ou altération. Elle résulte, comme il a été dit, des phénomènes irréversibles créés par les efforts de contact (déformations plastiques,

microruptures). L'usure n'est pas ordinairement un phénomène isotrope, car elle est liée généralement à l'orientation de l'effort de glissement. Par exemple, un "étalement" plastique des aspérités dans une direction va entraîner une moindre résistance au glissement dans cette direction mais va provoquer, au contraire, une augmentation de cette résistance dans le sens opposé (voir figure). D'une manière générale, pour les matériaux rigides - fragiles, les déplacements de surface sous charge diminuent la rugosité des surfaces en contact et de ce fait réduisent le domaine d'adhérence des efforts de contact. L'usure crée un amincissement de la résistance au glissement (amollissement ou écrouissage négatif).



On rappelle que la définition d'un modèle pour le comportement d'interface de matériaux dont la loi de comportement volumique est du type "rigide-fragile" devra prendre pour hypothèses :

- l'adhérence ou résistance au glissement, dans le cas présent, est due à l'enchevêtrement des aspérités. (Une angularité initiale très accentuée pouvant créer une cohésion apparente $\phi_{max} > \frac{\pi}{2}$)

- L'état de contraintes $\vec{\sigma}$ à l'interface est susceptible de modifier l'imbrication des aspérités du fait des microruptures.

- . La composante normale $-\sigma^n$ (compression) peut ou non :
 - . augmenter l'imbrication par rapprochement des surfaces de contact (augmentation du degré de contact).
 - . Diminuer l'imbrication par écrasement des aspérités.

Le bilan est selon les cas, une augmentation ou une diminution de l'adhérence (adhésif/téflon) ou même une invariabilité.

- . La composante tangentielle σ^t (cission) peut ou non :
 - . diminuer l'imbrication par dilatance
 - . diminuer l'imbrication par cisaillement des aspérités (abrasion).

Le bilan est toujours une diminution de l'adhérence.

Ces hypothèses supposent l'existence d'un domaine à l'intérieur duquel le vecteur contrainte $\vec{\sigma}$ ne provoque aucune microrupture. Ce domaine d'adhérence est délimité par une courbe définie par $D'(\vec{\sigma}) = 0$ qui constitue le critère actuel (au delà duquel se produisent des transformations irréversibles des surfaces rugueuses).

Sur ces points, le comportement quasi-statique de l'interface de surfaces rugueuses s'apparente au comportement volumique des milieux dilatants.

Pour un vecteur contrainte $\vec{\sigma} : (\sigma^n, \sigma^t)$, il y a :

- . Absence de microruptures, lorsque :

$$D'(\vec{\sigma}) = D'(\sigma^n, \sigma^t) < 0$$

ou $D'(\vec{\sigma}) = 0$ et quand l'incrément de contrainte $\delta\vec{\sigma}$

vérifie $(\partial D' / \partial \vec{\sigma}) \cdot \delta\vec{\sigma}' = \frac{\partial D'}{\partial \sigma^n} \cdot \delta\sigma^n + \frac{\partial D'}{\partial \sigma^t} \cdot \delta\sigma^t \leq 0$ (décharge).

Cet état correspond à une stabilité du contact donc à une adhérence.

- . Présence de microruptures, lorsque :

$D'(\vec{\sigma}) = 0$ et quand l'incrément de contrainte $\delta\vec{\sigma}$

vérifie $(\partial D' / \partial \vec{\sigma}) \cdot \delta\vec{\sigma}' > 0$ (charge)

Cet état correspond à une stabilité ou à une instabilité du contact selon que les microruptures sont homologues à des écrasements ou à des cisaillements d'aspérités. Cette double possibilité montre qu'il existe un état critique correspondant à la limite de stabilité ou d'instabilité. Cet état critique peut être caractérisé par le rapport $|\sigma^t|/\sigma^n = - \operatorname{tg} \phi_r$,

Ainsi, les 2 conditions précédentes étant remplies, lorsque :

$|\sigma^t| + \operatorname{tg} \phi_r \sigma^n > 0$ il y aura cisaillement des aspérités avec dilatance
donc instabilité

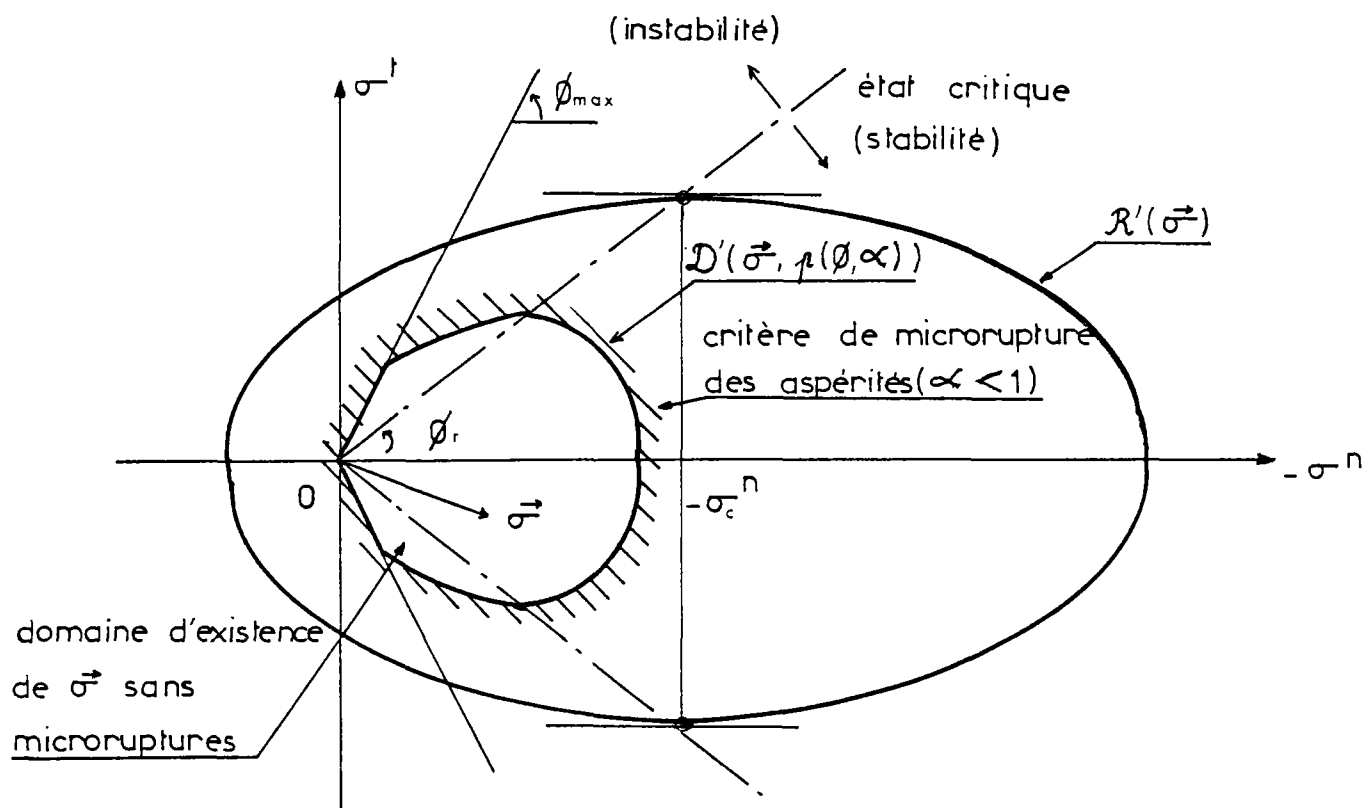
$|\sigma^t| + \operatorname{tg} \phi_r \sigma^n < 0$ il y aura écrasement des aspérités avec enfoncement
donc stabilité.

Il est à noter toutefois que lorsque le degré de contact α est égal à 1 (imbrication totale), le vecteur contrainte est limité par le critère de rupture du matériau intact $R'(\sigma^{\rightarrow}) = 0$. Autrement dit, la stabilité à l'enfoncement ne concerne que les cas où α reste inférieur à 1. Un problème non résolu demeure ; c'est celui de connaître la valeur limite que peut prendre réellement α , lorsque $\sigma^{\rightarrow}$ croît et finit par atteindre le seuil de rupture du matériau intact. On sait en effet que les produits de microrupture créent un "coussin", qui modifie le degré de contact réel et altère très sensiblement, par lubrification, le caractère adhérent des surfaces (cf. § 1.121 c2 et d).

Faisant suite aux considérations générales énoncées précédemment, il est possible de définir en lère approximation, pour un interface rugueux, 2 sortes de paramètres d'écrouissage dont on peut dégager la signification physique :

$$\begin{cases} \text{degré de contact} \\ \text{répartition d'angularité des aspérités} \end{cases}$$

Soit, $p(\phi, \alpha)$ la fonction de répartition d'angularité pour un degré de contact donné (on a, $p(0, \alpha) = \alpha$)



La forme générale du critère $D'(\sigma^t, p(\phi, \alpha))$ est liée à la répartition d'angularité $p(\phi, \alpha)$ et au critère de rupture $R'(\sigma^t)$.

En ce qui concerne l'étude de l'écrasement qui suppose

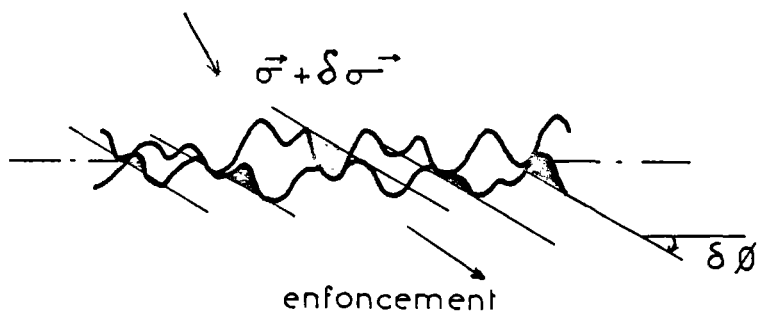
$$D'(\sigma^t, p(\phi, \alpha)) = 0 \quad \text{et} \quad (\partial D' / \partial \sigma^t) \cdot \delta \sigma^t > 0$$

On envisage 3 cas

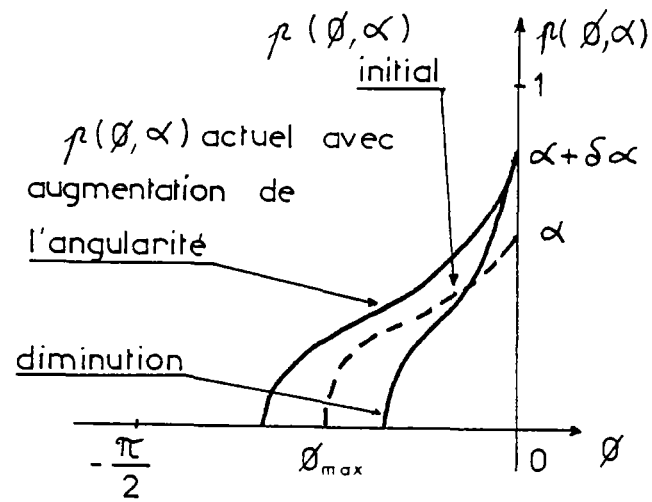
1er cas : σ^t est tel que $|\sigma^t| + \tan \phi, \sigma^n < 0$

alors $\delta \sigma^t$ provoque un écrasement des aspérités et le degré de contact augmente $\alpha \nearrow 1$.

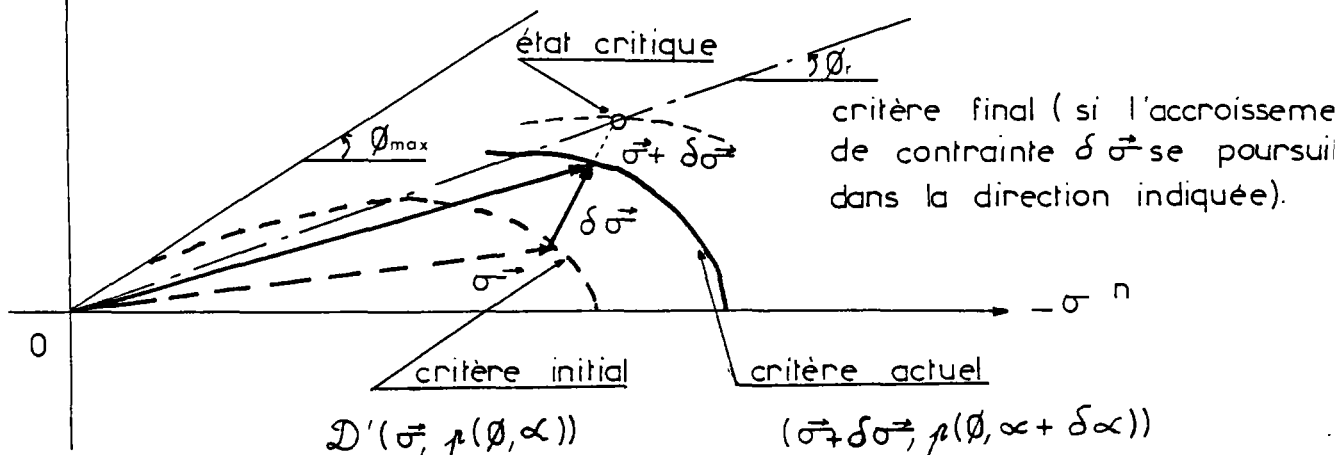
Il y a gonflement du domaine délimité par $D' = 0$, et, $p(\phi, \alpha)$ évoluant dans le sens d'une imbrication plus accentuée peut traduire selon le type d'interface un aplanissement ou au contraire une augmentation de l'angularité :



Principe d'écrasement des aspérités conduisant à une augmentation du degré de contact



Modification de la répartition d'angularités en fonction de α



Le gonflement du domaine est limité par le critère de rupture $R'(\vec{\sigma})$ correspondant au critère limite lorsque $\alpha = 1$, tant que $(\vec{\sigma} + \delta \vec{\sigma})$ reste en dessous de l'état critique. Si $(\vec{\sigma} + \delta \vec{\sigma})$ atteint l'état critique, le domaine actuel correspond au critère final (cette hypothèse est abordée dans le 3ème cas).

2ème cas : $\vec{\sigma}$ est tel que $|\sigma^t| + \tan \phi_r \sigma^n > 0$

alors, $\vec{\sigma}$ provoque un glissement sans cisaillement des aspérités

si : $|\sigma^t| + \tan \phi_{max} \sigma^n = 0$

la dilatance se fait selon l'angle d'amplitude ϕ_{max} (la dilatance apparente correspond à l'angle d'amplitude $\phi_{max} - \phi_r$)

mais, $\delta \vec{\sigma}$ provoque un glissement avec cisaillement des aspérités

si : $|\sigma^t| + \operatorname{tg} \phi_{\max} \sigma^n < 0$

la dilatance se fait selon l'angle d'amplitude ϕ

$$\phi < \phi_{\max} \text{ (initial)}$$

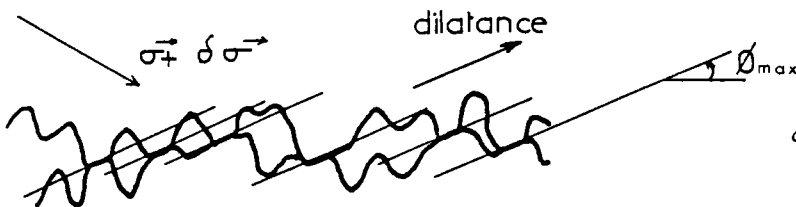
(la dilatance apparente correspond à l'angle d'amplitude $\phi - \phi_r$)

et l'angle de cisaillement ϕ correspond alors à l'angle maximal actuel soit $\phi_{\max} \text{ (actuel)} = \phi$.

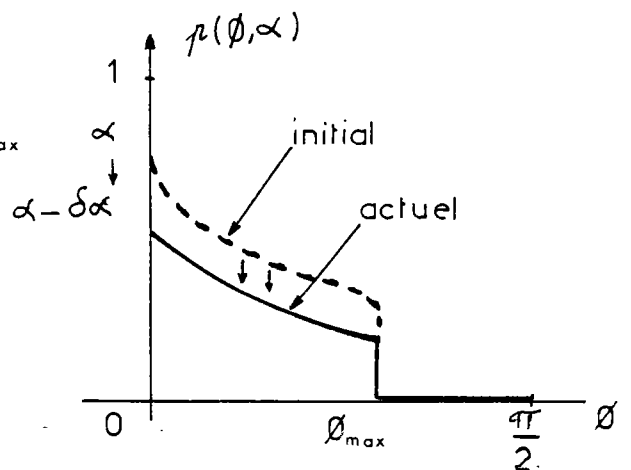
La dilatance contribuant à écarter les surfaces rugueuses diminue le degré de contact : $\alpha \searrow 0$. Ce cas implique par conséquent une réduction du domaine délimité par D' et donc l'instabilité du contact. Quand $\delta\sigma^+$ est quasiment tangent à la courbe définissant le domaine soit $(\partial D'/\partial\sigma^+). \delta\sigma^+ \sim 0$ avec $\delta\sigma^n < 0$, le cisaillement des aspérités est progressif selon une inclinaison décroissante ($\phi_{\max} \searrow \phi_r$)

. Cas où $|\sigma^t| + \operatorname{tg} \phi_{\max} \sigma^n = 0$.

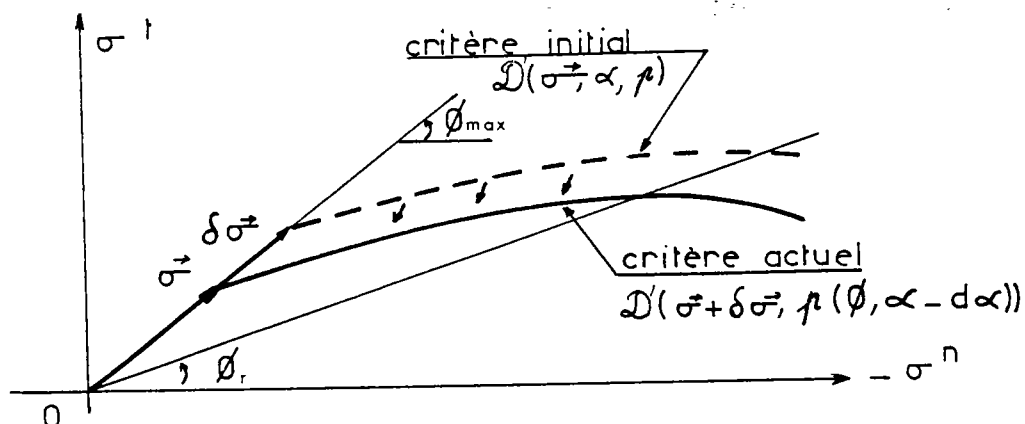
Ecartement des surfaces par glissement sur les facettes inclinées d'un angle d'amplitude $\phi_{\max}$.



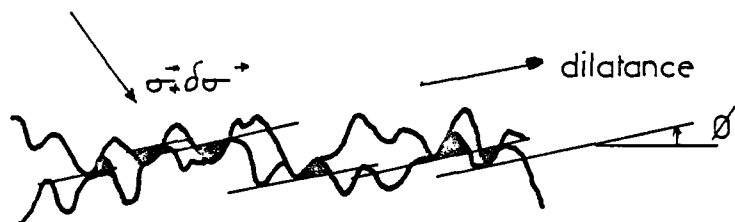
Principe de glissement plan sur plan conduisant à une réduction du degré de contact



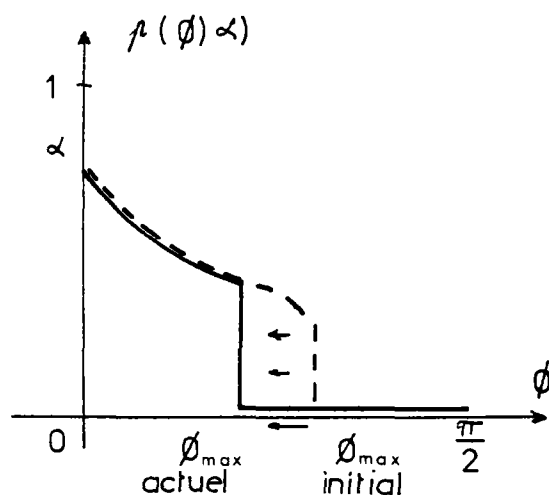
Modification de la répartition d'angularités en fonction de α ($\phi_{\max} \text{ (actuel)}$ correspond à l'angle de glissement $\phi_{\max} \text{ (initial)}$)



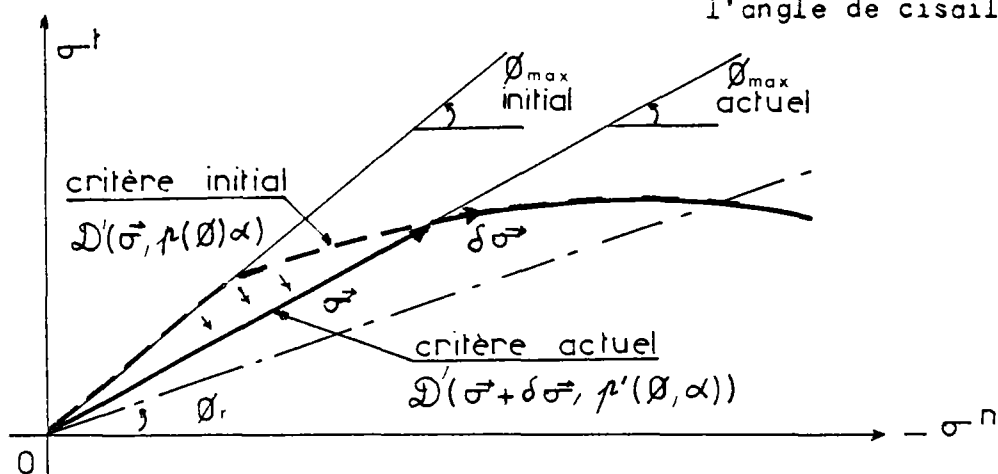
Cas où $|\sigma^t| + \operatorname{tg} \phi_{\max} \sigma^n < 0$



Principe de cisaillement des aspérités conduisant à une réduction du degré de contact



Modification de la répartition d'angularités en fonction de α ($\phi_{\max}(\text{actuel})$ correspond à l'angle de cisaillement)

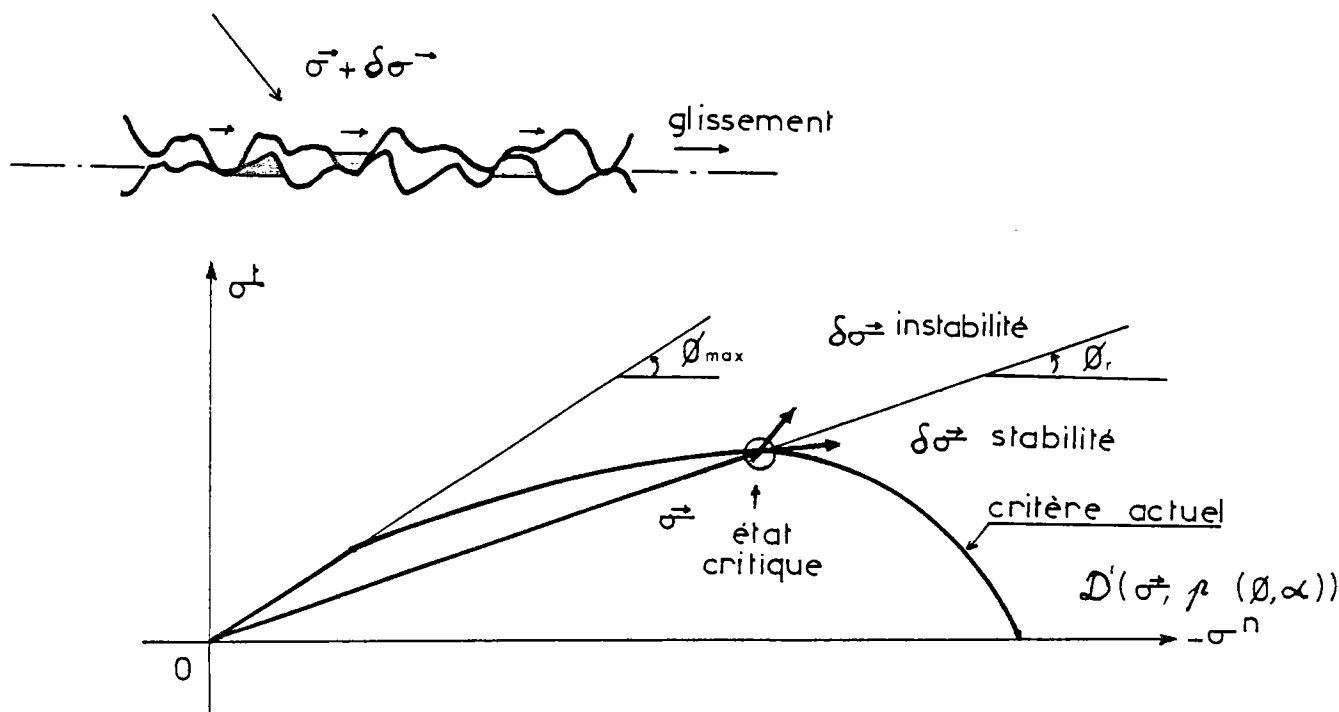


3ème cas : σ^+ est tel que $|\sigma^t| + \operatorname{tg} \phi_r \sigma^n = 0$.

Cet état correspond à un état critique. Pour $\delta\sigma^+$ tel que : $|\delta\sigma^t| + \operatorname{tg} \phi_r \delta\sigma^n < 0$ on est ramené au cas 1 (stabilité du contact).

$|\delta\sigma^t| + \operatorname{tg} \phi_r \delta\sigma^n > 0$ on est ramené au cas 2 (instabilité du contact).

Le cisaillement se fait sans dilatance



Lorsque $\alpha = 1$ (imbrication totale) - c'est le cas des matériaux fissurés.

A l'état critique, il y a "rupture par couche".

L'équation du critère de décollement $D'(\sigma^\rightarrow)$ peut s'écrire sous la forme

$$D'(\sigma^\rightarrow) = |\sigma^t| + \operatorname{tg} \phi(\sigma^\rightarrow) \sigma^n$$

où $\phi(\sigma^\rightarrow)$ est une fonction synthétique de l'état d'érouissage.

A érouissage constant, l'équation :

$$\delta\sigma^t = - \left(\frac{\partial D'}{\partial \sigma^n} / \frac{\partial D'}{\partial \sigma^t} \right) \cdot \delta\sigma^n = - \operatorname{tg} \phi(\sigma^\rightarrow) \delta\sigma^n$$

représente l'équation incrémentale du critère actuel de décollement. La variation de l'amplitude $\partial\phi$ résulte des phénomènes cités antérieurement.

$$\delta\phi = \delta\phi_e + \delta\phi_p$$

où $\delta\phi_e$ représente la variation d'amplitude d'origine élastique ($\delta\phi_e = 0$ pour un matériau rigide-fragile). $\delta\phi_p$ représente la variation d'amplitude d'origine plastique résultant des microruptures.

(On a vu que : $\delta\phi = \delta\phi_p \neq 0$ si le critère de rupture $R'(\sigma^\rightarrow)$ est atteint au niveau des aspérités, avec $\delta\sigma^n < 0$)

d'où :

$$\delta\phi = H(\sigma^\rightarrow) \cdot \langle -\delta\sigma^n \rangle .$$

Remarques:

1. On retrouve la loi de Barton ($\alpha = 1$) lorsque la différentielle $\delta\phi$ est donnée par

$$\delta\phi = -\frac{k}{\sigma^n} \delta\sigma^n, \text{ par intégration}$$

$$\phi(\sigma^n) = \phi - k \operatorname{Log} \frac{\sigma^n}{\sigma_c^n}$$

2. Un cas intéressant est celui pour lequel la fonction $\operatorname{tg} \phi(\sigma^n)$ est associé au critère de rupture du matériau intact $R'(\sigma^n)$ par un facteur de proportionnalité. Un exemple est donné par la loi de Shaw applicable à un matériau de Von mises.

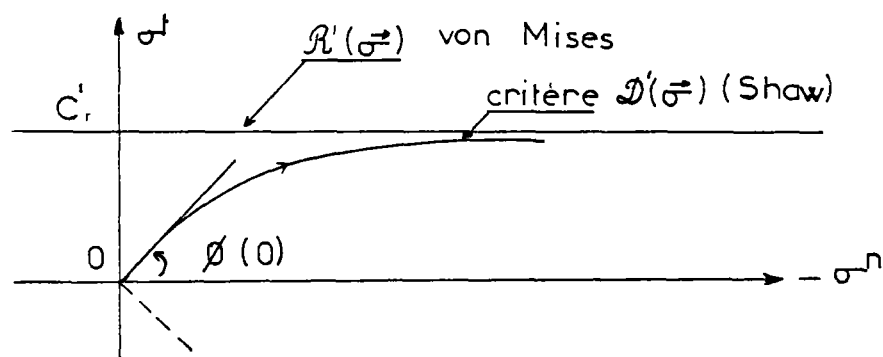
$$\operatorname{tg} \phi(\sigma^n) = k(|\sigma^t| - c_r'), \text{ par intégration de l'équation}$$

$$|\delta\sigma^t| = -k(|\sigma^t| - c_r').\delta\sigma^n, \text{ on obtient}$$

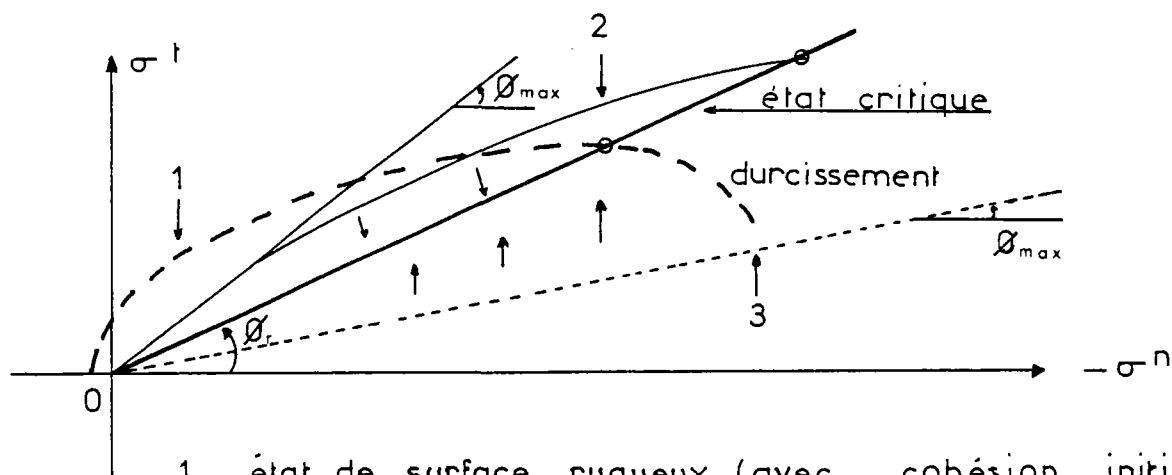
$$D'(\sigma^n) = |\sigma^t| - c_r'(1 - \exp(-k.\sigma^n)) = 0$$

avec

$$\operatorname{tg}(\phi(0)) = k c_r' (k \text{ est un facteur de rugosité}).$$



3. Pour les matériaux minéraux, il est possible d'envisager un état de surface initial "sur-poli". C'est-à-dire pour lequel l'angle de frottement initial est inférieur à l'angle résiduel ($\phi_{\max} < \phi_r$). (D'une manière artificielle, les particules cristallines ont été "collées" de façon adéquate, par exemple par moulage avant collage - c'est l'équivalent d'une paroi coffrée en béton avant la prise). Dans ce cas, une augmentation suffisante du chargement de contact va dissocier la couche de surface et on retrouvera une valeur de l'angle de frottement d'amplitude supérieure ou égale à ϕ_r - (Durcissement).



- 1 - état de surface rugueux (avec cohésion initiale)
 2 - (cas courant)
 3 - état de surface initialement "sur-poli"

c.2 - Critère de concassage $\sigma(f^n, f^t)$

Dans le paragraphe 1 131, quelques difficultés relatives à l'établissement du critère de concassage ont été évoquées. Pour un grain (i), le critère $\sigma_i(f_{ij}^{\vec{t}}, \gamma_{ij}^{\vec{t}}, f_{ik}^{\vec{t}}, \gamma_{ik}^{\vec{t}}, f_{il}^{\vec{t}}, \dots)$ dépend d'autant de paramètres qu'il y a de composantes de torseurs de contact (sans compter les paramètres géométriques). Par exemple, si le grain (i) est en contact avec 3 autres grains (j), (k), (l), il y aura 18 paramètres de chargement. Mais ces paramètres sont liés par 6 relations d'équilibre, réduisant à 12 le nombre de paramètres indépendants.

Lorsque le matériau constitutif du grain a un comportement rigide-fragile (ou encore que les déformations élasto-plastiques provoquées par les torseurs de contact sont petites lorsque la rupture survient), l'analyse limite permet d'obtenir théoriquement le domaine convexe de compatibilité, c'est-à-dire, le domaine à l'intérieur duquel doivent se situer les composantes des torseurs pour ne pas entraîner une rupture partielle ou globale du grain.

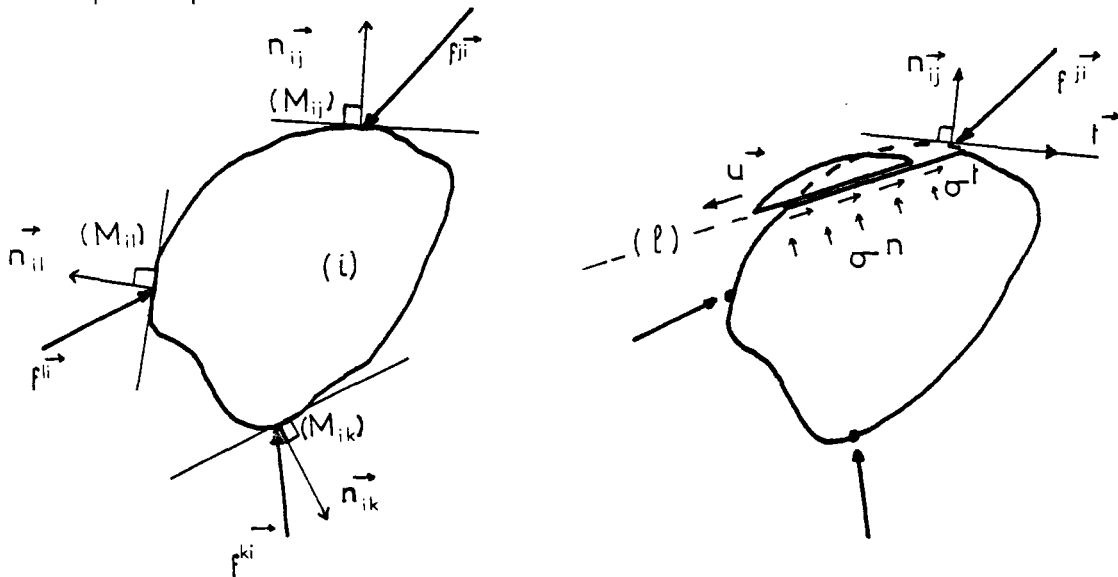
On rappelle que si l'on ne considère que la force $f_{ij}^{\vec{t}}$ comme variable, les autres efforts $\gamma_{ij}^{\vec{t}}, f_{ik}^{\vec{t}}, \gamma_{ik}^{\vec{t}}, f_{il}^{\vec{t}}, \dots$ tiennent lieu de paramètres d'écrouissage.

A écouissage constant ($\gamma_{ij}^{\rightarrow}$ et efforts associés aux contacts (ik), (il), etc. fixés), on obtient un domaine convexe d'existence de $f_{ij}^{\rightarrow}$. Ce dernier peut se réduire à 0, ce qui signifie que la rupture se produit indépendamment de $f_{ij}^{\rightarrow}$ et donc que les paramètres d'écrouissage provoquent par eux-mêmes un état de contraintes inadmissible du point de vue de la cohésion du matériau.

Afin d'illustrer ces premières observations, on peut examiner le problème plan d'un grain (i) soumis à l'action de 3 forces de contact $f_{ij}^{\rightarrow}$, $f_{ik}^{\rightarrow}$, $f_{il}^{\rightarrow}$ appliquées aux points donnés (M_{ij}) , (M_{ik}) , (M_{il}) de $\partial(i)$.

L'approche cinématique de la rupture fournit un majorant du domaine de compatibilité. Plusieurs mécanismes de rupture par blocs rigides peuvent être envisagés pour un matériau de Von mises ($\sigma^t \leq c$).

. rupture partielle



On vérifie aisément que la puissance interne de cisaillement est minimisée lorsque la ligne de fracture passe par le point d'application de la force sur la ligne de fracture, l'état de contraintes vérifie le critère de rupture des matériaux.

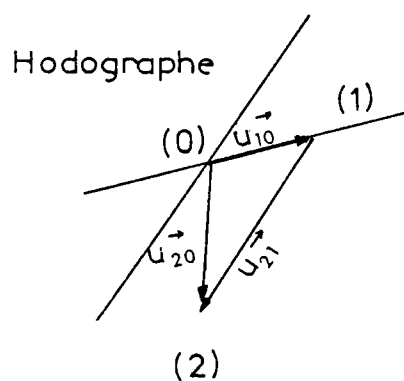
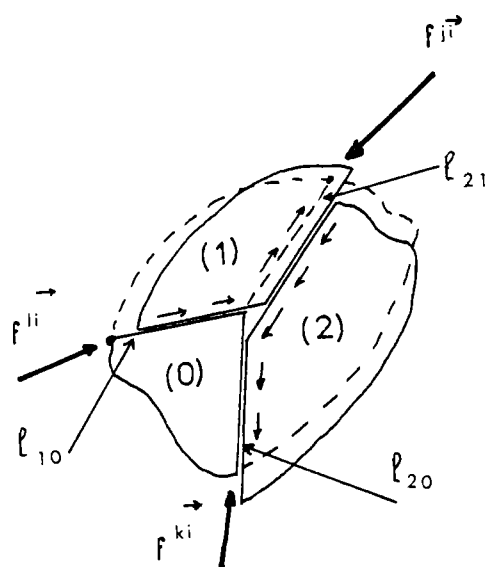
$$f_{ij}^{\rightarrow} \cdot u^{\rightarrow} = c \cdot l \cdot |u^{\rightarrow}| \text{ avec la condition supplémentaire de frottement}$$

$$D'(\sigma^{\rightarrow}) \leq 0 \quad \text{sachant que} \quad f_{ij}^{\rightarrow} = \sigma^{\rightarrow} \cdot l$$

. Rupture globale

Sur une ligne de discontinuité, la composante normale d'une vitesse de translation virtuelle d'un bloc est égale à celle du bloc adjacent. Cette condition impose un cadre cinématique aux mouvements virtuels (Hodographe).

L'objectivité des puissances de cisaillement internes permet de ne considérer que des vitesses par rapport à un bloc supposé immobile (0).



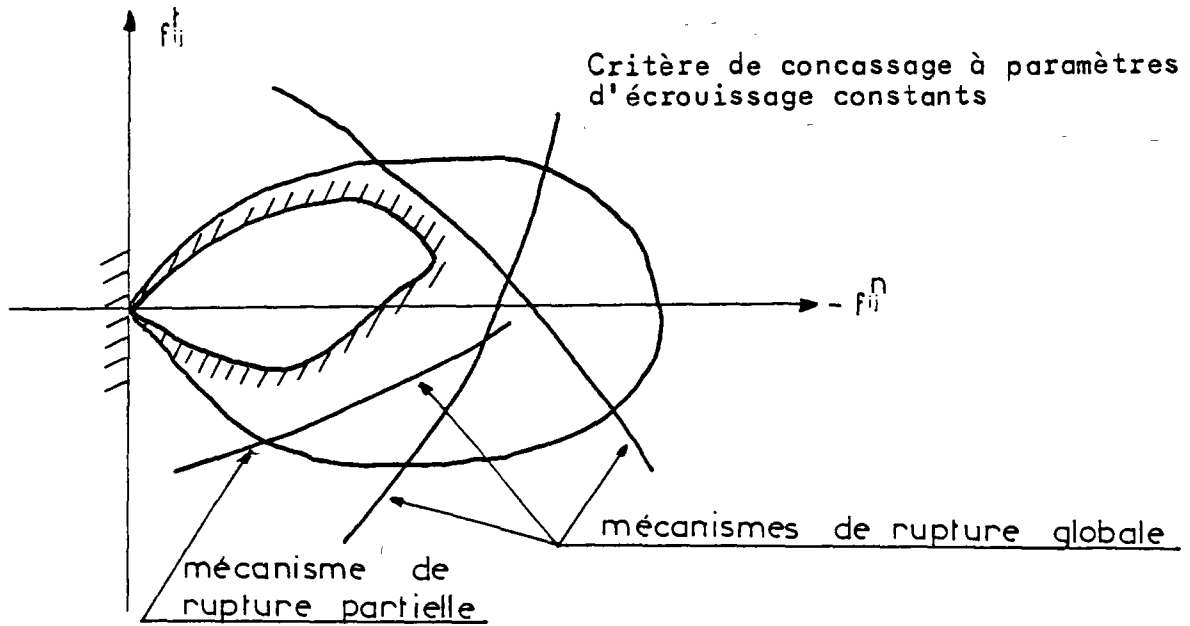
En conséquence, l'égalité des puissances extérieures et intérieures fournit la solution

$$f_{ji}^{\rightarrow} \cdot u_{20}^{\rightarrow} + f_{li}^{\rightarrow} \cdot u_{10}^{\rightarrow} = c(\ell_{10} |u_{10}^{\rightarrow}| + \ell_{20} |u_{20}^{\rightarrow}| + \ell_{21} |u_{21}^{\rightarrow}|) .$$

Par élimination des vitesses, on obtient une condition sur $f_{ji}^{\rightarrow}$ en fonction de $f_{li}^{\rightarrow}$.

Le choix de plusieurs mécanismes de rupture définit par excès le domaine enveloppe des chargements limites.

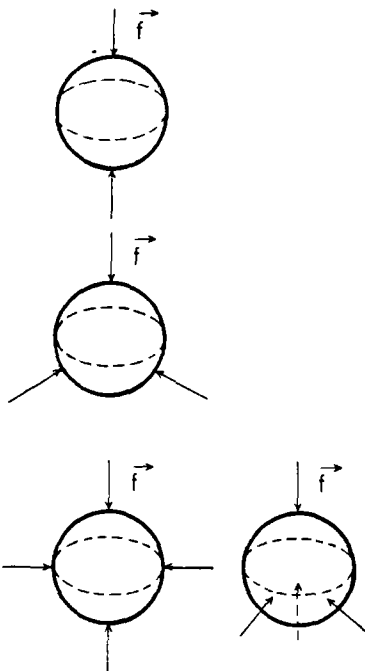
(Une approche par l'intérieur, avec des champs de contraintes statiquement admissibles, n'est pas réalisable simplement lorsque les efforts extérieurs se présentent sous formes de forces ou de couples ponctuels).



L'augmentation en intensité des efforts de contact autres que $\vec{f}^{ji}$ réduit le domaine d'existence de $\vec{f}^{ji}$.

• Effet du nombre des efforts de contact et de la répartition géométrique de leurs points d'application sur la surface de contact.

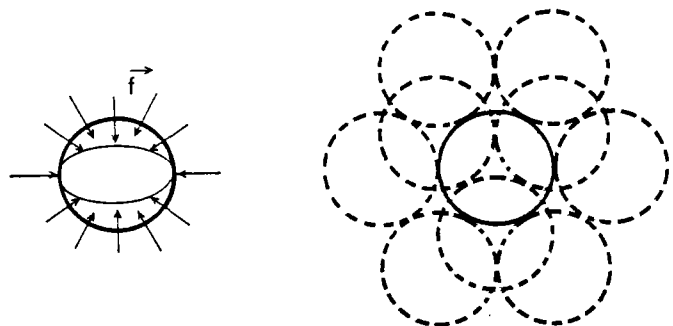
Une première approche consiste à étudier la valeur maximale que peut prendre une force normale appliquée sur un grain sphérique dans plusieurs cas de chargements symétriques.



Concassage d'un grain sphérique soumis à l'action symétrique de forces normales identiques:

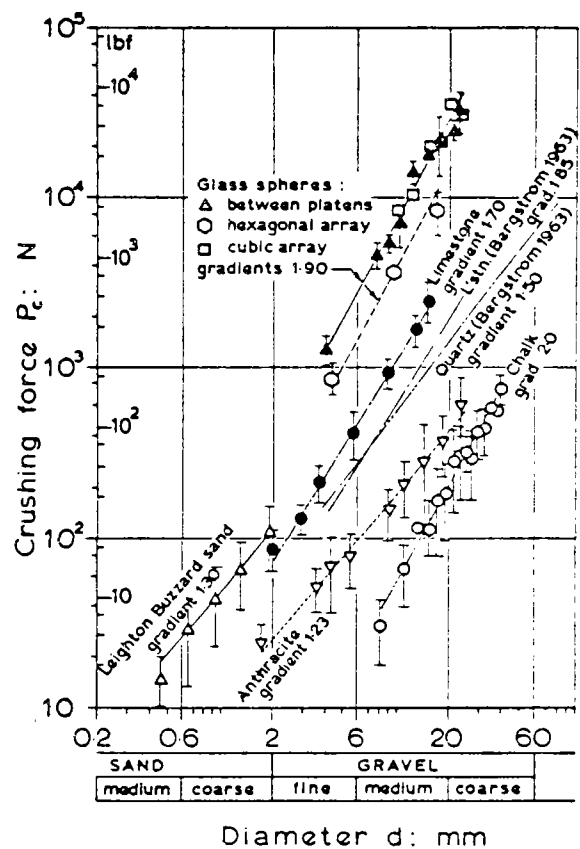
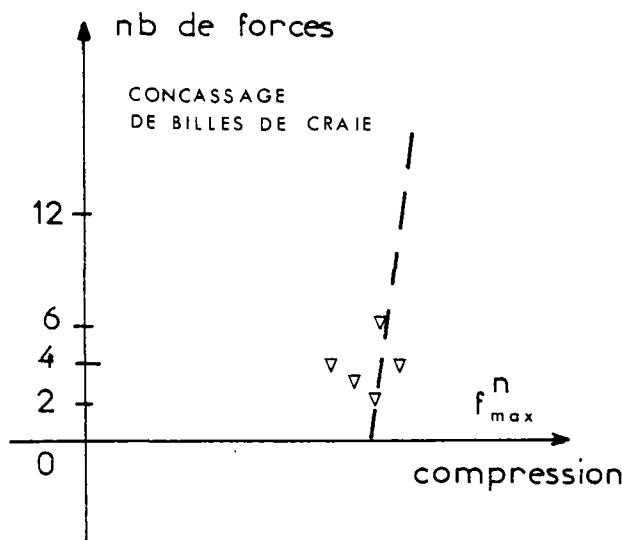
- 2 forces opposées
- 3 forces coplanaires
- 4 forces coplanaires et 4 forces situées au sommet d'un tétraèdre

Par exemple un grain sphérique soumis à l'action de concassage de 12 forces régulièrement réparties correspond au chargement hydrostatique d'un empilement de boules identiques à compacité maximale.



Concassage d'un empilement régulier de sphères sous un chargement hydrostatique

Enfin, si le nombre de forces est infini, $f \rightarrow$ correspond à une pression hydrostatique exercée sur le contour du grain. Les résultats sont consignés dans un diagramme donnant la force maximale de concassage en fonction du nombre de forces appliquées.

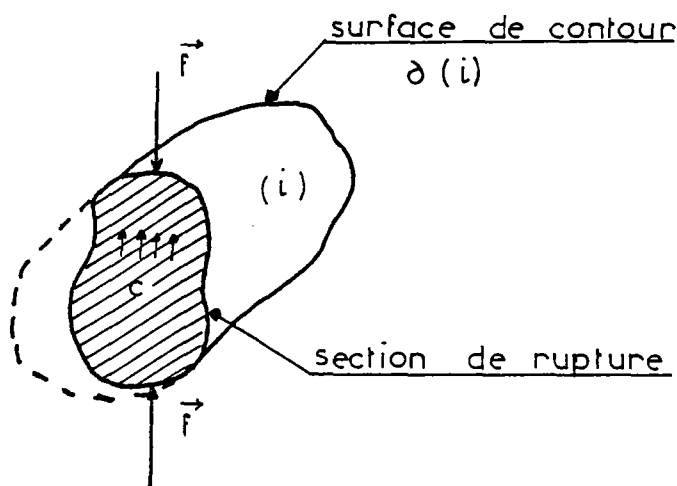


Crushing of single particles.
(selon J. BILLAM)

Il résulte de ce diagramme que le cas de 2 forces opposées s'avère être un cas défavorable mais du même ordre de grandeur que lorsque le nombre de forces est élevé.

De ce qui précède, la détermination d'un critère de concassage pour une force localisée $\vec{f}$ pourrait se réduire à un calcul à la rupture d'un grain soumis à l'action de 2 forces de contact opposées égales à $\vec{f}$ appliquées sur 2 points quelconques du grain. Ce critère aurait l'avantage incontestable de n'être pas lié aux autres efforts de contact et donc d'être intrinsèque au grain. Cette approche d'un critère de résistance à la rupture est faite par l'essai Franklin.

L'essai Franklin fournit un indice de résistance d'une roche par cisaillement simple.



$$f = c \cdot A$$

où f est le module de la force appliquée $\vec{f}$.

A est l'aire minimale d'une surface de fracture passant par les points d'application des forces. c est la contrainte de cohésion sous cisaillement simple.

A défaut de connaître l'aire réelle de la surface de fracture, mais compte tenu du fait que le grain est de forme globalement sphérique, on peut prendre forfaitairement :

$$A \sim w^{2/3} \cdot \lambda(\vec{f})$$

où w est le volume du grain
 $\lambda(\vec{f})$ un paramètre qui dépend de l'inclinaison de $\vec{f}$ par rapport à la normale $\vec{n}$

Le paramètre $\lambda(\vec{f})$ s'annule lorsque f^n est nul et il est maximum lorsque f^t est nul ou f^n égal à $|\vec{f}|$.

Nous adopterons pour $\lambda(\vec{f})$ une fonction répondant à ces conditions.

Soit par exemple : $\lambda(\vec{f}) = \lambda \cdot (f^n / |\vec{f}|)^2$.

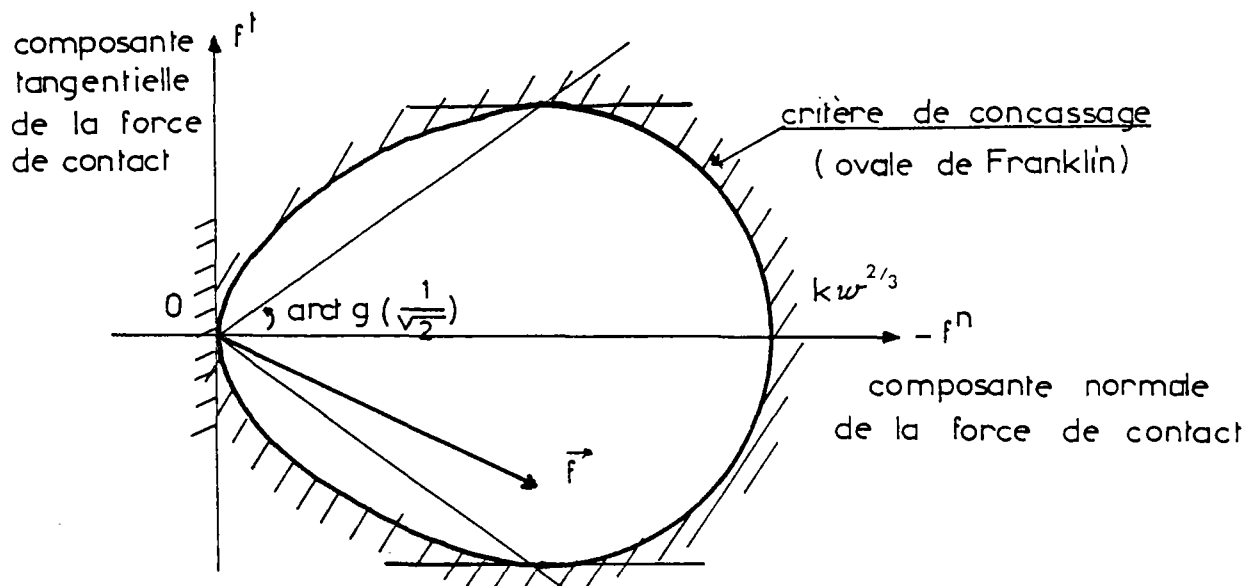
On en déduit l'équation de résistance à la rupture (coord. polaires)

$$|\vec{f}| = c \lambda w^{2/3} (f^n / |\vec{f}|)^2 .$$

L'équation du critère s'écrit en fonction de $\vec{f}$ et f^n

$$C(\vec{f}) = |\vec{f}|^3 - k w^{2/3} f^{n2} \leq 0$$

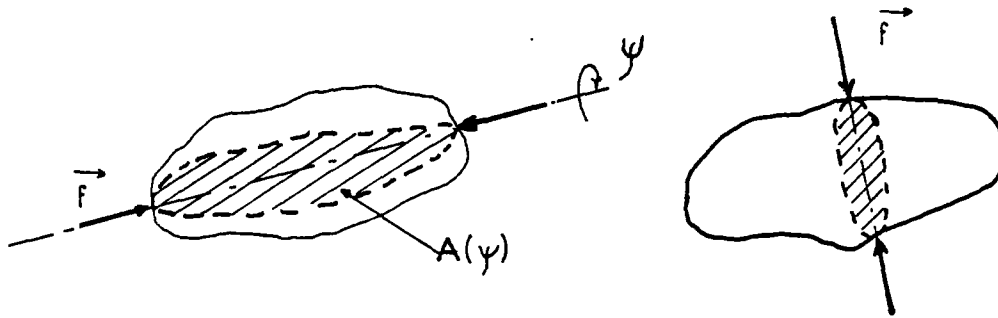
(où k est une constante)



Le critère de Franklin est une approximation grossière du critère réel de concassage d'un grain soumis à l'action de forces localisées, mais à défaut de mieux, il impose en soi, une limite à l'intensité des forces localisées lorsque celles-ci vérifient la condition d'adhérence.

Remarques:

Dans le cas de grains de formes quelconques (grains plats, allongés, etc.) la rupture à l'essai Franklin dépend non seulement de l'inclinaison de la force, mais également de son point d'application, selon que la fracture se produit dans le sens de la plus grande ou de la plus petite dimension. Il s'agit là d'une anisotropie de résistance au concassage induisant une série de paramètres supplémentaires.

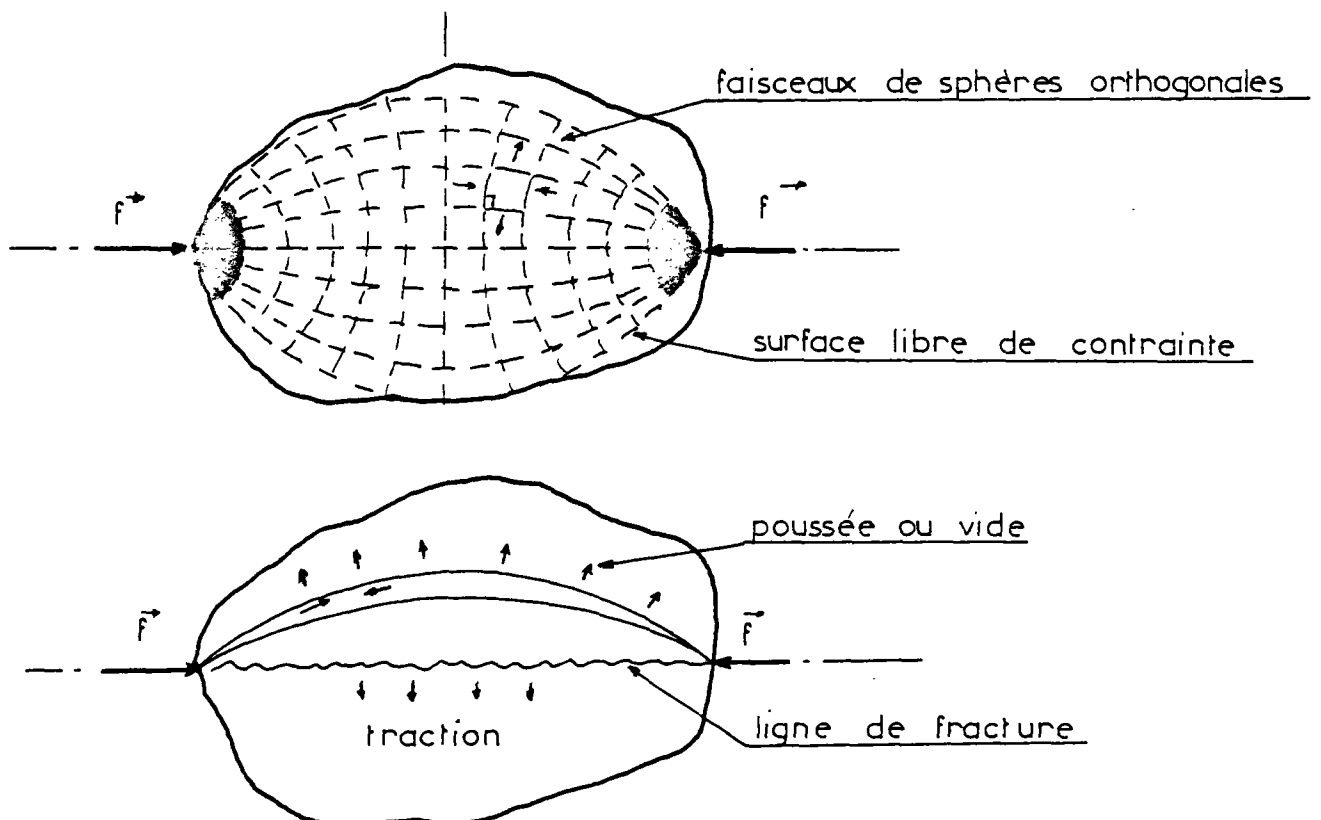


La détermination théorique de l'aire de la surface de fracture peut être possible si l'on connaît exactement la fonction de contour G et les points d'application des forces $f^{\rightarrow}$

$$A = \inf_{\psi} \{A(\psi)\} \quad \text{où} \quad A(\psi) = |G \cap \Pi(\psi)|$$

$\Pi(\psi)$ est un plan passant par les points d'application de $f^{\rightarrow}$

2. La méthode de détermination de $f^{\rightarrow}$ limite, par le choix d'un champ de contraintes statiquement admissible à l'intérieur du matériau, est d'un abord plus délicat, du fait de la nature localisée des efforts de contact. Il est toutefois, possible d'imaginer un champ répondant aux conditions limites tel qu'indiqué sur la figure.

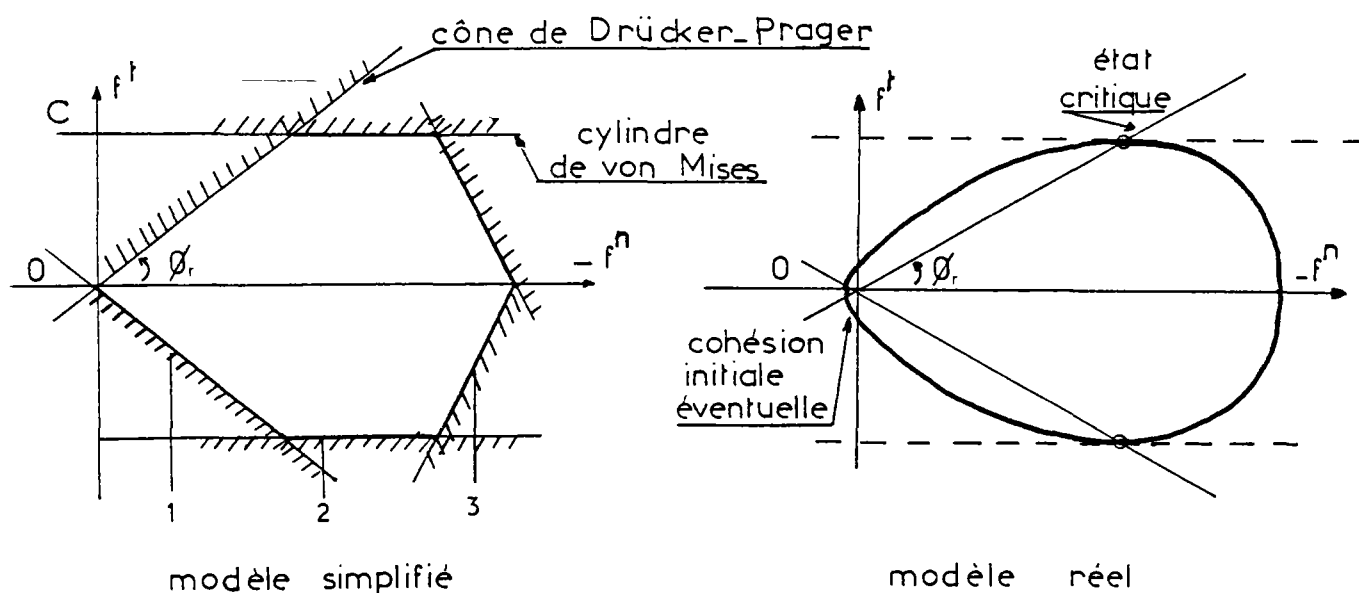


La traction dans la zone de fracture équilibre la somme des poussées au vide des arches fictives allant d'un point de contact à l'autre. Cette méthode est telle que la surface extérieure du faisceau limite est libre d'effort, et sur le faisceau médian, la traction radiale est maximale.

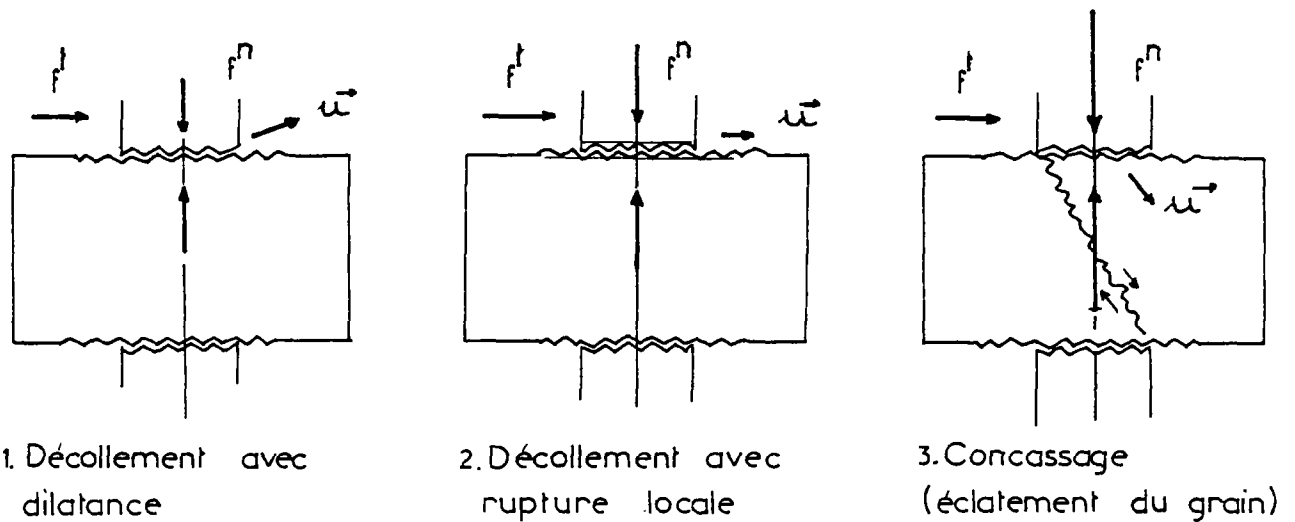
$$f = k \cdot \sigma \cdot A$$

c.3 - Conclusion sur le critère de liaison $L(\vec{f})$

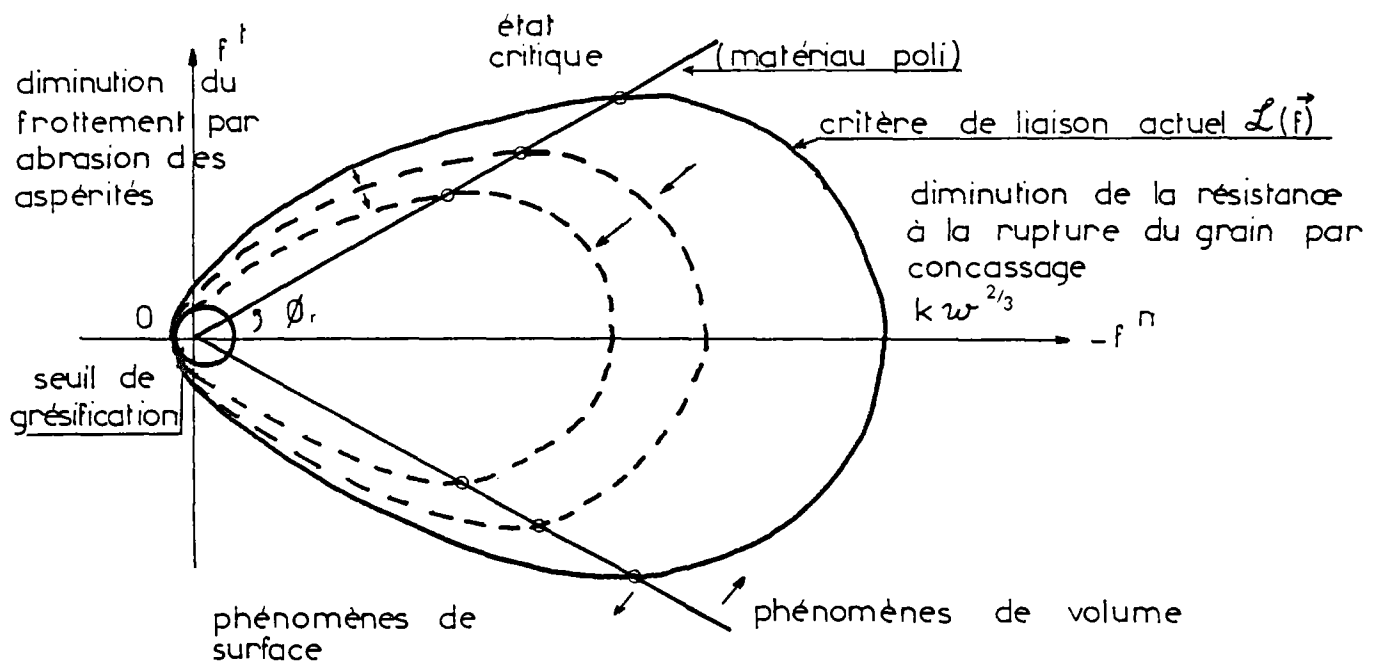
Le critère $L(\vec{f})$ résulte d'une synthèse des phénomènes de surface et de volume. Dans les cas courants, de même qu'il semble qu'il y ait continuité entre la rupture partielle avec dilatance des aspérités et la rupture par couche, au niveau du contact, il semble raisonnable d'envisager une continuité entre la rupture partielle et la rupture globale au niveau du grain. Et entre les deux une continuité entre la rupture par couche et la rupture partielle du grain. Ces remarques sont rapportées dans le schéma suivant.



les niveaux 1,2,3, correspondent à 3 changements d'état distincts



L'écrouissage dû à l'usure des aspérités (perte de rugosité des surfaces de contact) et à l'usure granulométrique (concassage des grains) diminue l'aire du domaine d'existence de $\vec{f}$. Ces phénomènes peuvent se produire conjointement au sein d'un milieu granulaire.



Évolution du critère de liaison en fonction de la taille du grain et de l'usure de ses aspérités de surface

La limite du critère de liaison correspond au seuil de grésification. Si la cohésion initiale entre grains est suffisamment grande, la taille des grains à la "grésification" aura une valeur finie.

(La grésification correspond à un collage des grains entre eux). Le collage répond au critère de liaison particulier

$$L(\vec{f}) = |\vec{f}| - c \leq 0 .$$

Le critère de concassage pour des forces très inclinées (au dessus de l'état critique) constitue un majorant au critère de décollement puisqu'il suppose que les surfaces de contact sont parfaitement rugueuses.

d - Critère de liaison dans les plans de chargements autres que $\{f^n, f^t\}$

On suppose acquis les résultats relatifs au critère de concassage car la présence de couples de contact isolée est assujettie à l'existence de forces de contact de compression non nulles, comme nous le verrons dans l'étude des critères de décollement.

d.1 - Critère de décollement $D(f^n, \gamma^n)$ (critère de pivotement)

Le couple de pivotement $\gamma^n . \vec{n}$ induit des efforts de cisaillement au niveau des aspérités, de même nature que ceux provoqués par une force tangentielle $f^t . \vec{t}$. Inversement, les contraintes tangentielles σ^t résultent simultanément du couple de pivotement et de l'effort tangentiel de glissement. Il est donc nécessaire d'établir un couplage entre ces 2 types d'efforts pour le critère de décollement

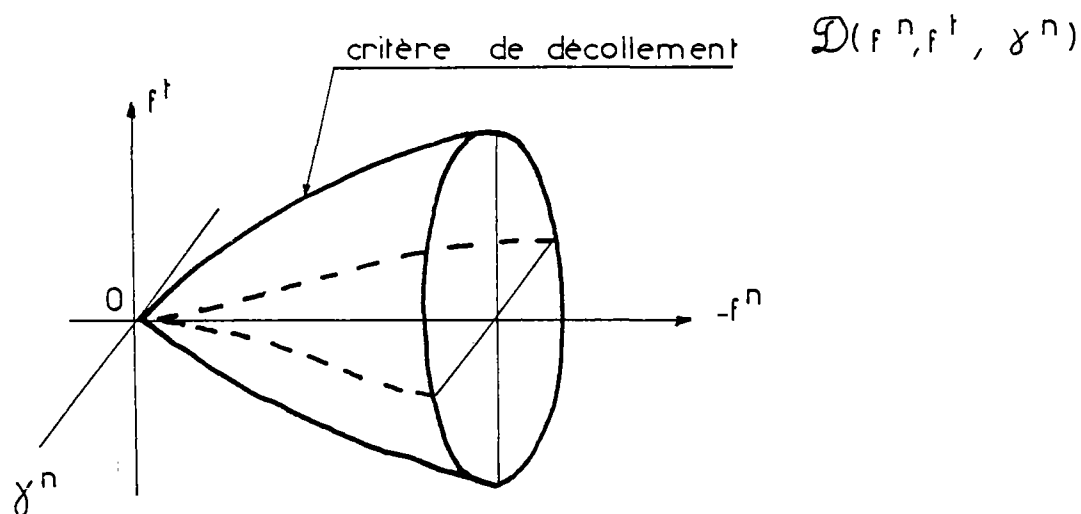
Sachant d'une part que $f^n = \left(\int_{\partial(ij)} \sigma^s . \delta s \right) . \vec{n} = \int_{\partial(ij)} \sigma^n . \delta s$
et que d'autre part :

$$f^t = \int_{\partial(ij)} \sigma^t . \delta s$$

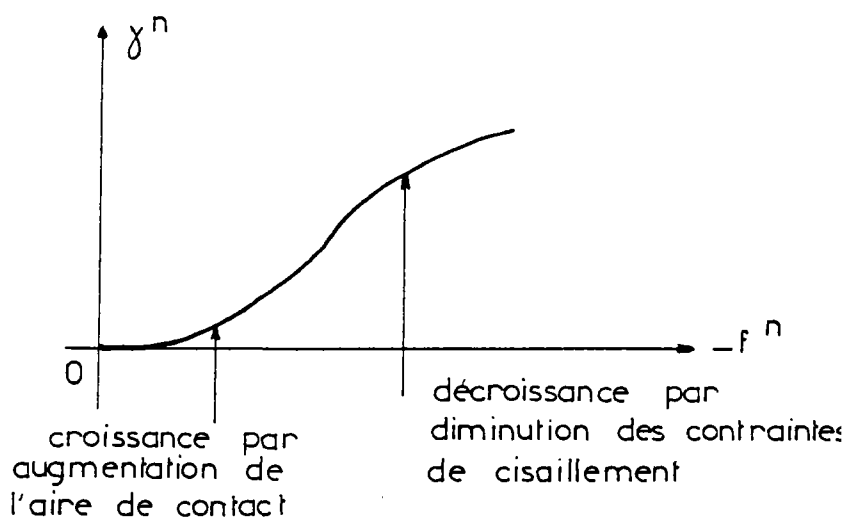
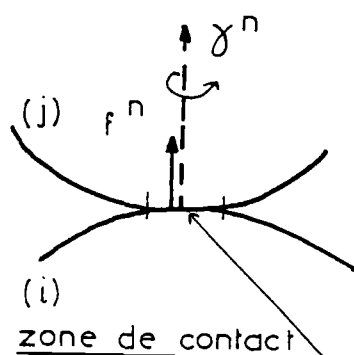
$$\text{et} \quad \gamma^n = \left(\int_{\partial(ij)} \sigma^s \wedge (M_{ij}, M) . \delta s \right) . \vec{n}$$

Le critère de décollement $D(f^n, f^t, \gamma^n)$ s'obtient comme suit :

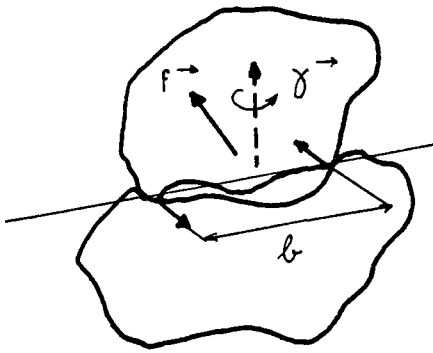
$$D(f^n, f^t, \gamma^n) = \gamma^n - \max_{\sigma^t . \vec{t}} \left\{ \left| \int_{\partial(ij)} \sigma^t . \vec{t} \wedge (M_{ij}, M) . \delta s \right| \text{ avec } f^t = \int_{\partial(ij)} \sigma^t . \delta s \right. \\ \left. \text{et, } D'(\sigma^n, \sigma^t) = 0 \right\}$$



La résistance au pivotement est fonction d'un terme relatif à la dimension de la zone de contact. Lorsque cette dernière tend vers 0 (contact ponctuel), le couple de frottement tend à s'annuler ; mais il croît rapidement lorsque l'aire de contact augmente. Sa croissance peut être toutefois limitée par une limitation des contraintes de cisaillement.



Dans les phénomènes de contact intergranulaire, la présence d'un couple de frottement (pivotement ou roulement) découle d'une façon générale des irrégularités de forme des grains qui peuvent même conduire à un blocage vis-à-vis de l'un de ces efforts.

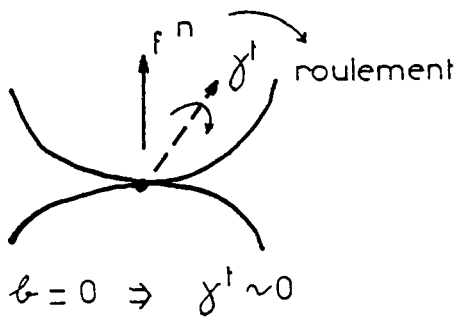


Le couple de rappel γ^* est fonction de f^* et d'une caractéristique morphologique de non-convexité des grains constitutifs d'un milieu. Elle traduit le fait que le contact n'est pas ponctuel.

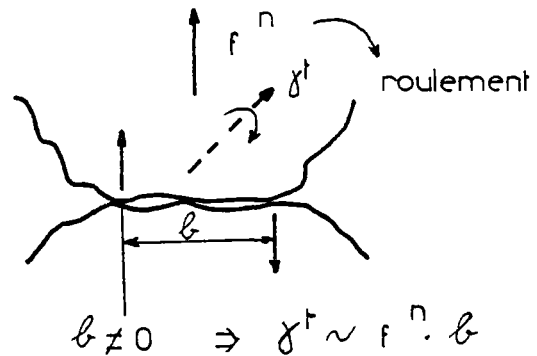
En d'autres termes, pour des grains rigides strictement convexes, le contact est ponctuel et $\gamma^* = 0$; inversement pour des grains anguleux, la caractéristique morphologique "b" prend une valeur d'autant plus grande que la concavité des grains est accentuée.

d.2 - Critère de décollement $\bar{D}(f^n, \gamma^t)$ (critère de roulement)

En ce qui concerne, le critère de roulement, la remarque précédente reste valable ; sur quelques exemples, il est possible d'apprécier l'influence de b dans la résistance au roulement.

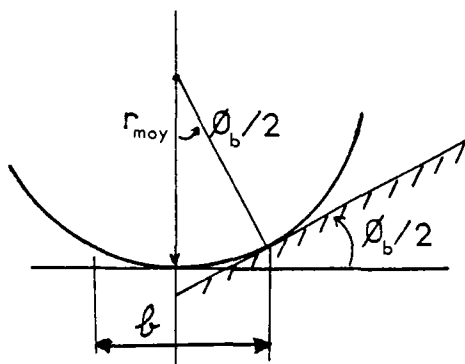


résistance au roulement
négligeable



résistance effective au
roulement, liée à l'angularité
des grains

On a l'habitude de caractériser la résistance au roulement par la mesure d'un angle ϕ_b définissant le rapport de la largeur d'appui et du rayon de courbure moyen au contact. Il est donc nécessaire de faire intervenir un facteur propre à la dimension des grains, (rayon de courbure, dimension moyenne, etc.)



Angle de résistance au roulement

$$\operatorname{tg} \phi_b \sim b / r_{\text{moy}}$$

grains anguleux ($\operatorname{tg} \phi_b \gg 0$)
grains arrondis ($\operatorname{tg} \phi_b \sim 0$)

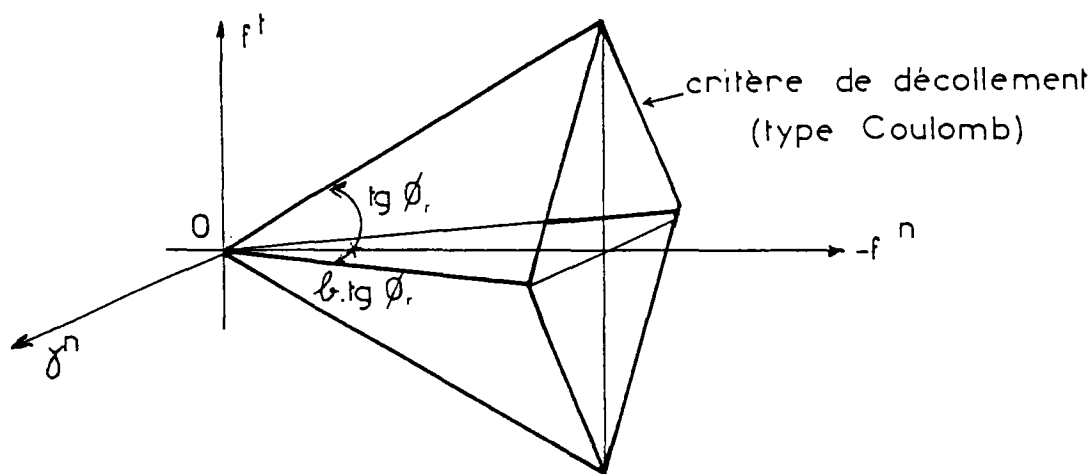
En définitive, pour des grains rigides, légèrement anguleux, il est possible d'adopter en première approximation, comme critère de roulement, une loi de la forme :

$$D(f^n, \gamma^t) = |\gamma^t| + r_{\text{moy}} \operatorname{tg} \phi_b f^n$$

et pour le critère de glissement pivotement associé à un frottement de Coulomb

$$D(f^n, f^t, \gamma^n) = |\gamma^n| + r_{\text{moy}} \operatorname{tg} \phi_b (|f^t| + \operatorname{tg} \phi_r f^n)$$

Ce critère définit dans l'espace des chargements, un domaine délimité 4 plans passant par 0 .



A ce stade, il n'y a pas lieu de tenir compte d'un couplage entre les efforts de γ^n et ceux de γ^t , sachant que γ^n provoque des contraintes tangentielles sur la zone de contact et γ^t des contraintes normales.

e - Conclusion

Le cas de grains anguleux ne permet pas en général de définir de façon correcte et synthétique un critère de liaison $L(\vec{f}, \vec{\gamma})$ pour les efforts intergranulaires. Cependant, dans certaines conditions particulières (grains rigides, globalement sphériques c'est-à-dire pour lesquels le couple de frottement de contact est petit), un critère du type "frottement de Coulomb" peut être suggéré par les résultats d'essais sur des matériaux minéraux. Ce critère sera tronqué en compression ($-f^n$), pour tenir compte d'un éventuel concassage des grains soumis à des forces ponctuelles élevées. La troncature est plus sévère pour des grains de petite taille, mais une faible valeur de l'indice granulométrique assure par ailleurs une meilleure diffusion des efforts intergranulaires et donc réduit d'autant l'intensité des efforts de contacts localisés, (usure granulométrique).

Dans l'étude d'assemblages de grains rigides, nous proposons de nous en tenir à un critère statistique unique, celui de Coulomb.

$$L_{ij}(\vec{f}, \vec{\gamma}) = |\vec{f}| + \frac{1}{\cos \phi} f^n \quad (\forall i \text{ et } j)$$

$$\vec{\gamma} = .$$

ce qui signifie que les grains seront considérés comme constitués d'un matériau homogène à comportement rigide, non-fragile, et de forme strictement convexe régulière (surfaces polies).

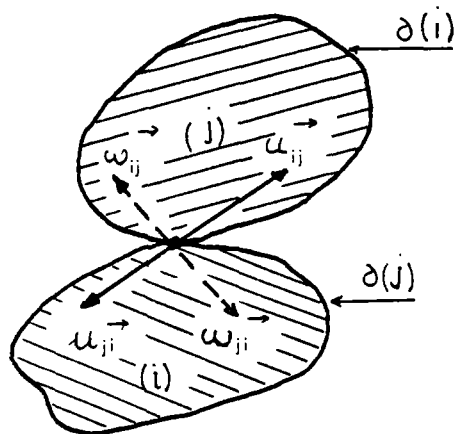
1.123 - LOI D'ÉCOULEMENT

Lorsque les efforts de contact $\vec{f}_{ij}$ et $\vec{\gamma}_{ij}$ dépassent un certain seuil défini par le critère de liaison $L_{ij}(\vec{f}_{ij}, \vec{\gamma}_{ij})$, la stabilité du contact est rompue et un déplacement s'amorce. La loi d'écoulement impose un cadre cinématique aux déplacements possibles.

a - Position du problème

a.1 - Distributeur des vitesses intergranulaires

On note par $(\vec{u}_{ij}, \vec{\omega}_{ij})$ le distributeur des vitesses de contact du grain (j) relativement au grain (i) supposé fixe. Lorsque le contact est unique (grains globalement convexes), le distributeur est défini au point de contact (M_{ij})



$\vec{u}_{ij}$ est le vecteur "vitesse de translation" du grain (j) relativement au grain (i) appliqué au point (M_{ij}) .

$\vec{\omega}_{ij}$ est le vecteur "vitesse de rotation"

Chacun des 2 vecteurs $\vec{u}_{ij}$ et $\vec{\omega}_{ij}$ se décompose en une somme de 2 vecteurs dont l'un est porté par la normale $\vec{n}_{ij}$ en (M_{ij}) à $\partial(i)$ l'autre est dans le plan tangent commun. On retrouve les définitions

Vitesses	Selon la normale	Selon le plan tangent
$\vec{u}_{ij}$	Soulèv ^t si $\vec{u}_{ij} \cdot \vec{n}_{ij} > 0$ pénétration si $\vec{u}_{ij} \cdot \vec{n}_{ij} < 0$	gliss ^t
$\vec{\omega}_{ij}$	pivot ^t	roulem ^t

Remarque_:

Dans le cas de non-contact, ces vitesses conservent un sens

$\vec{u}_{ij}$ représente la vitesse d'éloignement si $\vec{u}_{ij} \cdot \vec{n}_{ij}^t > 0$

le rapprochement si $\vec{u}_{ij} \cdot \vec{n}_{ij}^t < 0$

$\vec{\omega}_{ij}$ représente une vitesse d'orientation mutuelle.

Dans le repère $(M_{ij}, IJ^{\rightarrow})$ associé en contact (ij) , les composantes dans $IJ^{\rightarrow}$ de $u_{ij}^{\rightarrow}$ et $\omega_{ij}^{\rightarrow}$ sont par définition

$$\begin{cases} u_{ij}^{\rightarrow} = u_{ij}^{IJ} \cdot IJ^{\rightarrow} \\ \omega_{ij}^{\rightarrow} = \omega_{ij}^{IJ} \cdot IJ^{\rightarrow} \end{cases}$$

La cinématique du contact impose :

$$u_{ij}^{\rightarrow} + u_{ji}^{\rightarrow} = 0 \quad \text{et} \quad \omega_{ij}^{\rightarrow} + \omega_{ji}^{\rightarrow} = 0$$

b - Définition du champ des vitesses de contact plastiquement admissibles

Un champ de vitesses $(u_{ij}^{\rightarrow}, \omega_{ij}^{\rightarrow})$ C.A. respecte les contraintes géométriques imposées par les conditions aux limites qui sont celles du contact. Les contraintes géométriques peuvent être rassemblées sous forme d'une fonctionnelle pour laquelle le champ $(u_{ij}^{\rightarrow}, \omega_{ij}^{\rightarrow})$ C.A. vérifie :

$$V_{ij}(u_{ij}^{\rightarrow}, \omega_{ij}^{\rightarrow}, E) \leq 0$$

où E représente un ensemble de paramètres d'écrouissage relatif à l'état actuel des surfaces de contact.

Ainsi pour un contact ponctuel, la seule condition requise tant que l'intégrité des surfaces est conservée, est celle de la non-interpénétration des surfaces qui se traduit par :

$$V_{ij}(u_{ij}^{\rightarrow}, \omega_{ij}^{\rightarrow}, \dots) = -u_{ij}^{\rightarrow} \cdot n_{ij}^{\rightarrow} \leq 0$$

La règle d'écoulement propose un choix de vitesses pour un état de chargements donné, lorsque ce dernier franchit le seuil de stabilité défini par le critère de liaison L_{ij} . Les champs de vitesses répondant à la règle d'écoulement sont appelées champs de vitesses licites (ou plastiquement admissibles). Les déplacements de contact ne sont pas envisagés dans le cadre général de l'élasto-visco-plasticité mais uniquement de la plasticité.

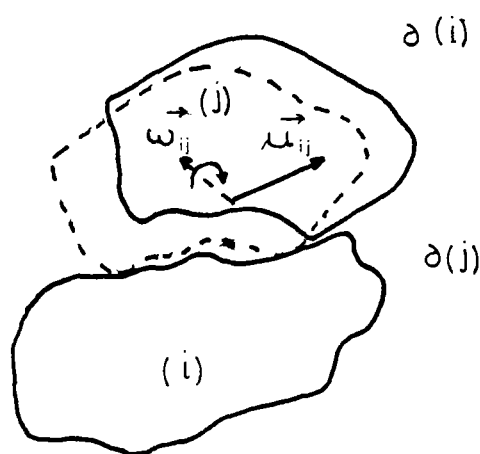
Dans ce qui suit, on note sans ambiguïté, par $u^{\rightarrow}$ et $\omega^{\rightarrow}$, les vitesses de

translation et de rotation d'un grain par rapport à l'autre, au niveau de leur contact.

Leurs composantes sur $\vec{n}$ et $\vec{t}$ (vecteur unitaire du plan tangent au contact) sont respectivement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } \vec{u} : u^n \text{ et } u^t \\ \vec{\omega} : \omega^n \text{ et } \omega^t . \end{array} \right.$$

Comme dans le paragraphe précédent (1 132.b), nous admettons que le contact est quasi-ponctuel, ce qui annule les effets cinématiques secondaires parasites (dilatance, déviance, basculement, etc..). Cette hypothèse, qui implique par conséquent un couplage des effets dynamiques et cinématiques, restreint pourtant l'étude des milieux granulaires à ceux dont les grains sont de forme globalement convexe.



Dilatance et basculement
sous l'effet des efforts
de liaison

c - Règle d'écoulement pour la vitesse de translation $\{u^n, u^t\}$

La vitesse de translation $\vec{u}$ (écartement, enfoncement, glissement) résulte selon l'hypothèse de couplage des effets dynamiques et cinématiques de la seule force de liaison $\vec{f}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Stabilité } \vec{u} = 0 \text{ si , } \left\{ \begin{array}{l} L(\vec{f}) < 0 \\ \text{ou } L(\vec{f}) = 0 \text{ avec } (\partial L / \partial \vec{f}) \cdot \delta \vec{f}^t < 0 \end{array} \right. \\ \text{Instabilité } \vec{u} \neq 0 \text{ si , } L(\vec{f}) = 0 \text{ avec } (\partial L / \partial \vec{f}) \cdot \delta \vec{f}^t \geq 0 . \end{array} \right.$$

La dissipation plastique a pour origine le frottement entre les 2 solides.
Il s'agit de la puissance (positive) des forces de liaison.

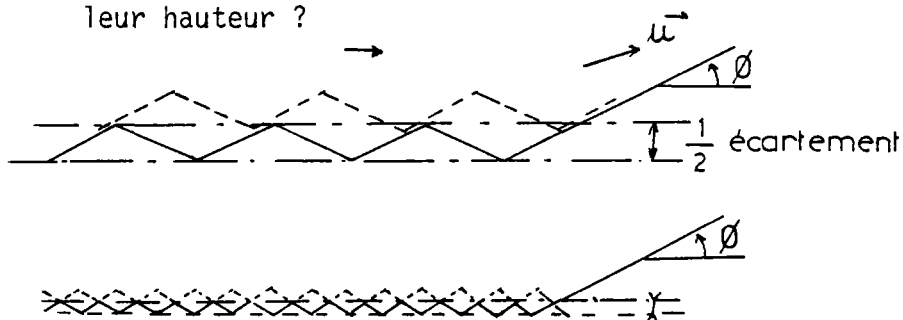
$$- P_{\text{int}} = \vec{f} \cdot \vec{u}^t$$

c.1 - Dilatance et déviance

Le choix de $\vec{u}^t$ en cas d'instabilité peut découler de 2 principes relatifs à la dilatance et à la déviance.

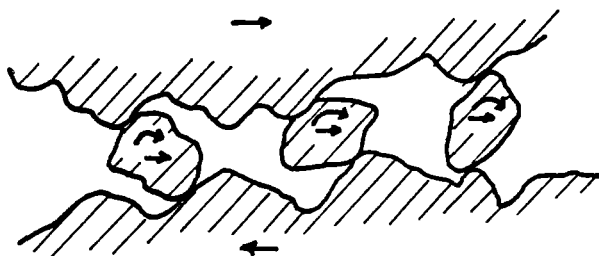
. Dilatance

Le glissement dans le plan tangent au contact, suppose un écartement préalable des surfaces. Ce principe a été évoqué antérieurement à propos des glissements sur les facettes des aspérités (Rowe). Mais la dilatance doit-elle se caractériser par un angle définissant la direction initiale du vecteur vitesse $\vec{u}^t$ par rapport au plan tangent ou par la mesure de l'écartement réel des surfaces en glissement vis-à-vis de l'écartement initial ? En d'autres termes, la dilatance est-elle la conséquence de l'inclinaison des aspérités ou de leur hauteur ?



Dilatance

Angle d'inclinaison des
facettes et écartement
des surfaces



Dilatance par roulement
des éléments microscopiques

La dilatance est un phénomène fugitif qui n'apparaît qu'à l'origine du glissement des surfaces, il est donc nécessaire de prévoir une variation de l'orientation du vecteur $\vec{u}^t$ au cours d'un chargement, donc l'intervention

d'un paramètre d'écrouissage. Cet aspect sera abordé sommairement dans l'étude des modèles dilatants.

Lorsque la dilatance sera considérée un phénomène négligeable, ou inexistant, on aura la condition sur $\vec{u}$

$$f^n \quad u^n \geq 0$$

$$f^n < 0 \quad (\text{compression}) \quad u^n \leq 0 .$$

Si, de plus il n'y a pas interpénétration des surfaces (concassage),

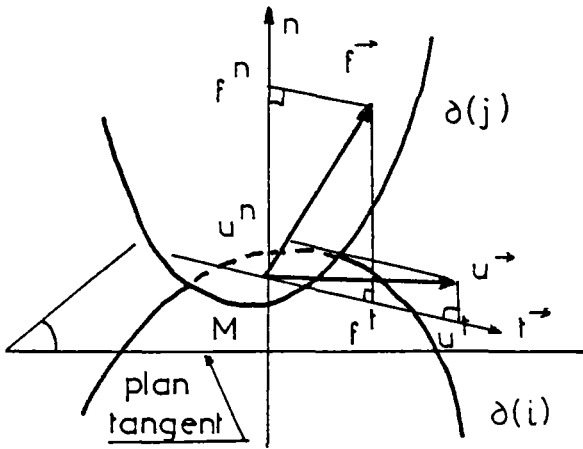
$$u^n \text{ est tel que : } u^n \geq 0$$

$$\text{donc , } u^n = 0$$

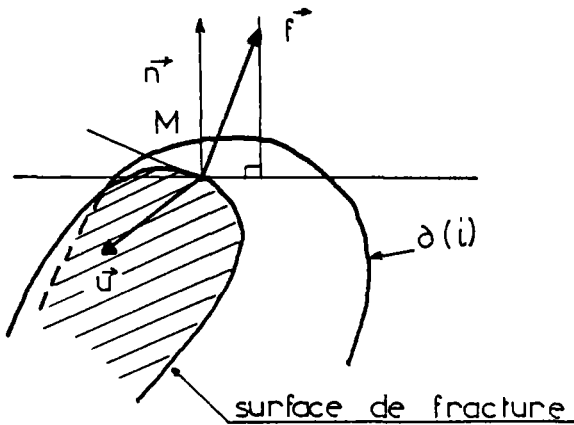
$$f^n > 0 \quad (\text{traction}) \quad u^n \geq 0 \quad (\text{possibilité d'écartement}).$$

. Déviance

La vitesse $\vec{u}$ n'est pas située dans le plan formé par $\vec{f}$ et $\vec{n}$. En ce qui concerne le glissement ($\vec{f}$ franchit le seuil de décollement), l'isotropie plane de rugosité interdit une déviance de la vitesse $\vec{u}$ selon une direction autre que celle de l'effort tangentiel de $\vec{f}$. Mais ce principe vrai en général pour le critère de décollement, ne l'est plus pour le critère de concassage car c'est la pente de la surface de fracture qui impose la direction du déplacement. L'hypothèse de non-déviance minimise la puissance dissipée plastiquement par les contraintes d'interface.



Hypothèse de non-déviance pour le critère de décollement



Déviance imposée par la pente de la surface de fracture

La condition de non-déviance implique que :

$$(f^{\rightarrow} \wedge u^{\rightarrow}) \cdot n^{\rightarrow t} = 0$$

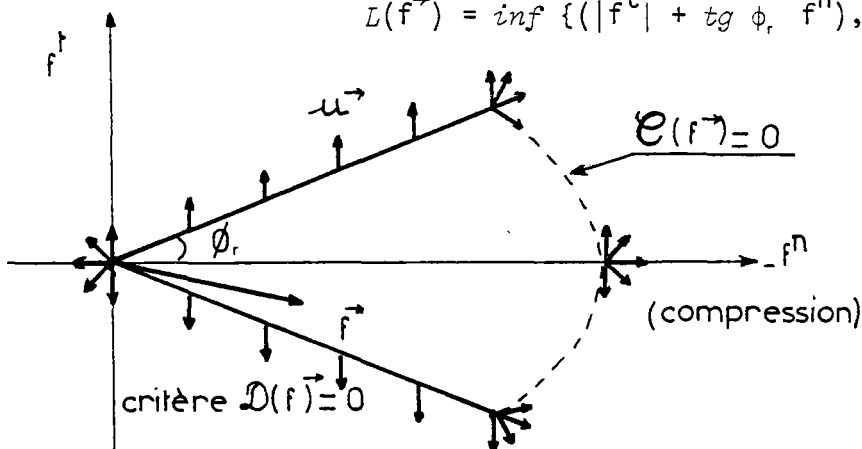
produit mixte

c.2 - Modèles non-dilatants (déviance exclue pour D)

Ces modèles sont caractérisés par $u^n = 0$ pour $f^n < 0$ (compression), tant que $c(f^{\rightarrow}) < 0$ (où c est le critère de concassage).

. Modèle associé au frottement de Coulomb

$$L(f^{\rightarrow}) = \inf \{ (|f^t| + \tan \phi_r f^n), c(f^{\rightarrow}) \}$$



Pour $c(f^{\rightarrow}) < 0$ et $f^n < 0$, $u^{\rightarrow}$ est colinéaire au vecteur unitaire de l'effort tangentiel et

$$t^{\rightarrow} = \frac{f^{\rightarrow} - f^n \cdot n^{\rightarrow}}{|f^{\rightarrow} - f^n \cdot n^{\rightarrow}|}$$

Soit $\vec{u} = \dot{\lambda} |\vec{f}| \cdot \vec{t} = \dot{\lambda} \frac{\vec{f} - f^n \cdot \vec{n}}{(1 - (\frac{f^n}{|\vec{f}|})^2)^{1/2}}$ ($\dot{\lambda}$ scalaire positif) .

Conséquence pour la puissance dissipée plastiquement

$$-P_{int} = \vec{f} \cdot \vec{u} = \dot{\lambda} \sin \phi_r |\vec{f}|^2 \quad (\text{pour le critère de décollement})$$

. Modèle associé au frottement par cohésion

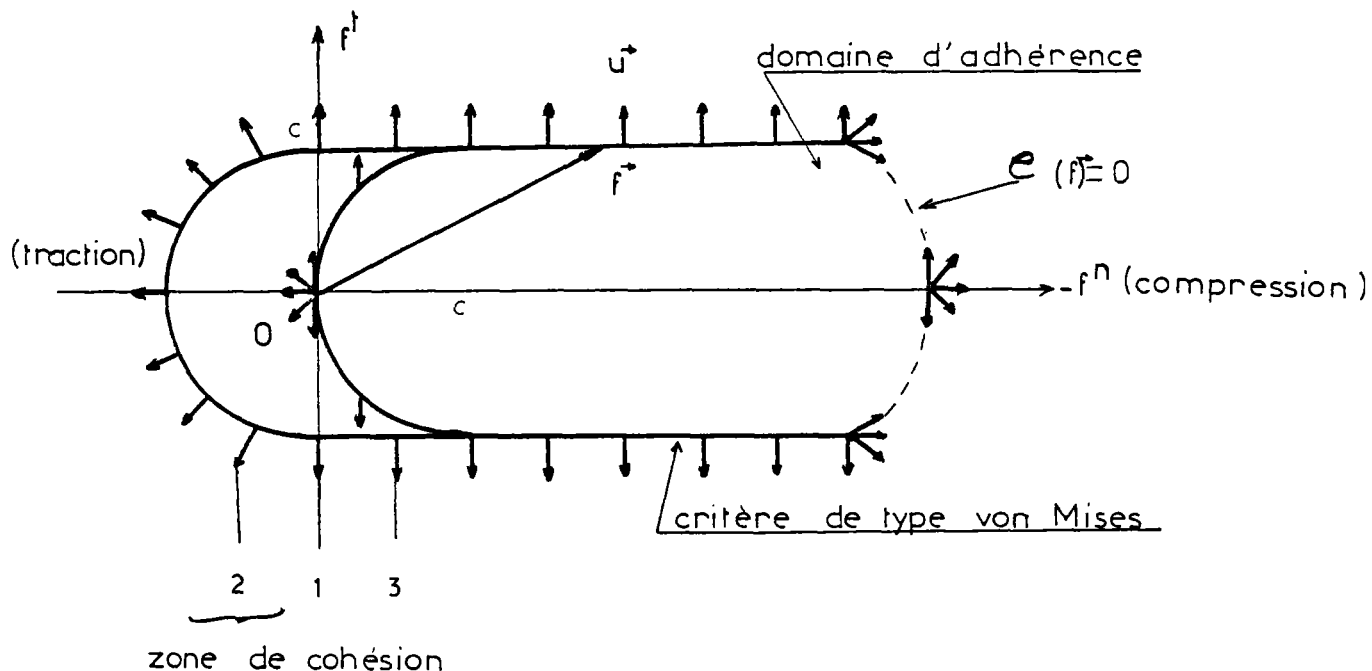
$$L(\vec{f}) = \inf \{ \underbrace{(|f^t| - c), T(\vec{f}), c(\vec{f})}_{D(\vec{f})} \} .$$

Pour la partie du critère pour laquelle $L(\vec{f}) = |f^t| - c$, il y a normalité du vecteur vitesse $\vec{u}$ avec la surface définie par L

$$\vec{u} = \dot{\lambda} (\partial L / \partial \vec{f}) c = \dot{\lambda} c \vec{t} \quad (\dot{\lambda} > 0) .$$

Conséquence pour la dissipation plastique dans ce cas :

$$-P_{int} = \dot{\lambda} c^2$$



$$1 - T(\vec{f}) = f^n$$

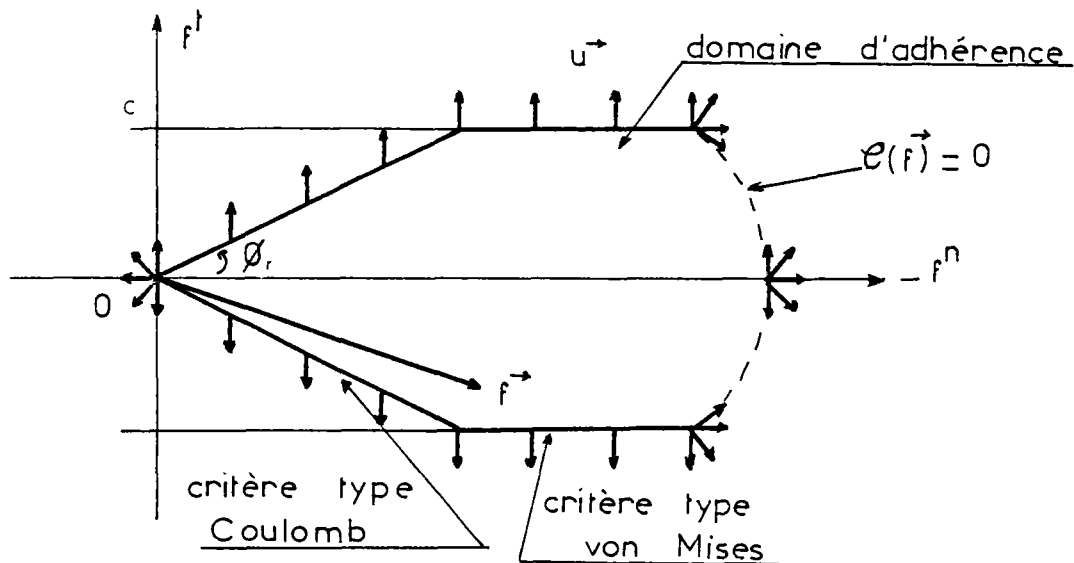
$$2 - T(\vec{f}) = |\vec{f}| - c \quad \text{pour } f^n \geq 0$$

(possibilité de normalité de $\vec{u}$, d'où $-P = \dot{\lambda} c^2$)

$$3 - T(\vec{f}) = |\vec{f} + c \vec{n}| - c \quad \text{pour } f^n + c \geq 0 .$$

. Modèle associé au frottement mixte

$$L(\vec{f}) = \inf \{ (|\vec{f}^t| + \mu f^n), (|\vec{f}^t| - c), c(\vec{f}) \}$$



Remarque :

L'hypothèse de normalité associée au critère de Coulomb pour l'interface, ne peut être retenue ; elle conduit à une majoration excessive de la stabilité au glissement (Drücker).

La normalité impose :

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \dot{\lambda} (\partial L / \partial \vec{f}) \cdot |\vec{f}^n|, \text{ avec } L(\vec{f}) = |\vec{f}^t| + \mu f^n \\ &= \dot{\lambda} |\vec{f}^n| (\vec{t} + \mu \vec{n}) \end{aligned}$$

La dissipation plastique n'a alors aucune signification

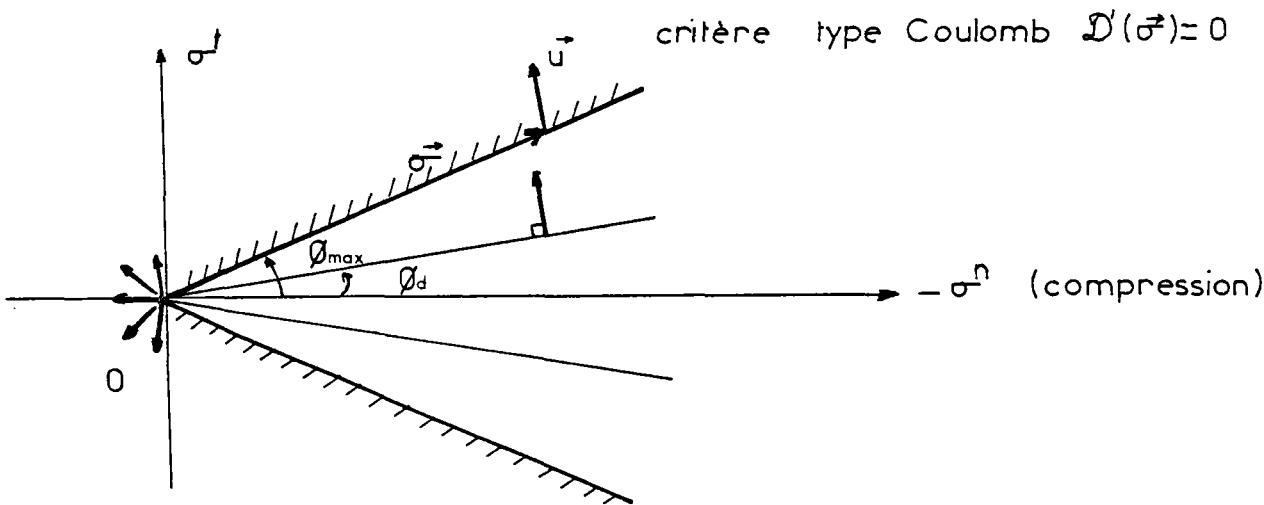
$$(\vec{f} \cdot \vec{u}^t = 0)$$

c.3 - Modèles d'interfaces dilatants

Ces modèles ne sont concevables que sous la condition d'écrouissage. Hors l'hypothèse de normalité de $\vec{u}$, les propositions de modèles reposent sur la notion de dilatance apparente ou son équivalent : angle de frottement poli et angle de frottement rugueux. (L'angle de dilatance apparente est la dif-

férence entre les deux angles). Cette notion résulte d'une interprétation physique du rôle des aspérités dans la dilatance. Les aspérités de lère grandeur sont supposées être la cause de la dilatance apparente, tandis que pour une surface polie (pas d'aspérités de lère grandeur, mais des micro-aspérités dûes à la nature granuleuse du matériau) , la dilatance apparente est supposée nulle (cf. § 1 132 - c.1).

Dans un premier temps, on considère les interfaces "plans".



On constate expérimentalement pour les interfaces plans, que l'angle de dilatance est inférieur à l'angle de frottement. Les considérations énoncées ci-dessus conduisent aux relations suivantes :

L'amplitude de l'angle de dilatance apparente

$$\phi_d = \phi_{max} - \phi_r$$

où ϕ_{max} est l'amplitude de l'angle de frottement des surfaces rugueuses

$$D'(\vec{\sigma}) = |\sigma^t| + tg \phi_{max} \sigma^n$$

ϕ_r est l'amplitude de l'angle de frottement des surfaces polies (dilatance apparente nulle).

Dans le cas original du critère de Coulomb sans cohésion initiale

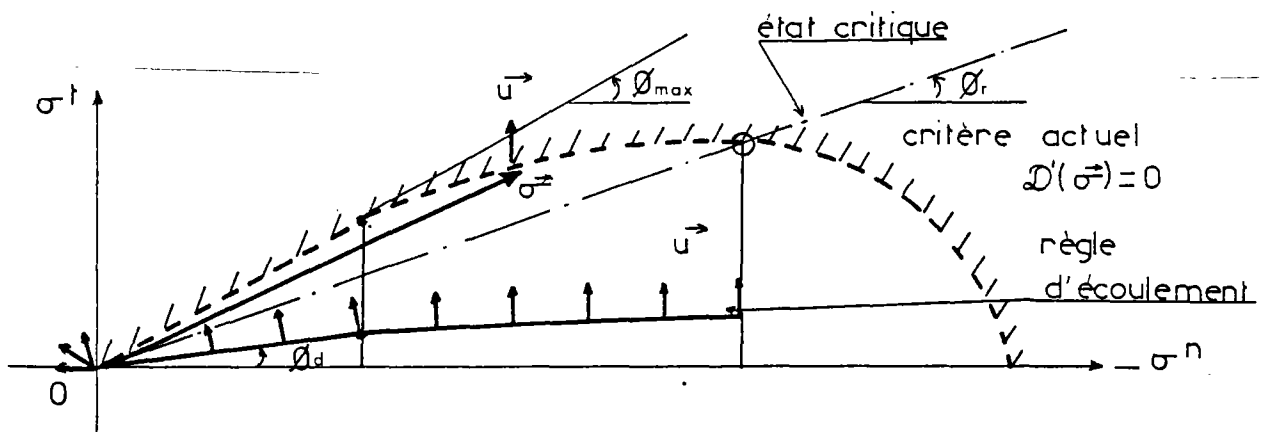
$$\vec{u} = \lambda |\vec{\sigma}| (\cos \phi_d \vec{t} + \sin \phi_d \vec{n}), \text{ avec } D'(\vec{\sigma}) = 0$$

d'où la dissipation plastique :

$$-P_{int} = \vec{\sigma} \cdot \vec{u}^t = \dot{\lambda} \cdot \sin(\phi_{max} - \phi_d) |\vec{\sigma}|^2$$

(La dilatance réelle se fait selon l'angle d'amplitude ϕ_{max} , tandis que la dilatance apparente selon ϕ_d)

Revenant au critère de glissement avec état critique du § 1 122 c. 1 précédent :



L'angle de dilatance apparente correspondant à $\vec{\sigma}$ tel que $D'(\vec{\sigma}) = 0$, avec $|\vec{\sigma} \cdot \vec{n}| > \phi_r$, est donné par

$$\phi_d(\vec{\sigma}) = \phi(\vec{\sigma}) - \phi_r$$

où ϕ_r est l'amplitude de l'angle correspondant à l'état critique (surfaces polies) qui peut également être considéré comme l'angle de frottement dynamique, puisque dans le cas de glissement persistant, $\vec{\sigma}$ est le vecteur contrainte à l'état critique.

$\phi(\vec{\sigma})$ est l'amplitude de l'angle actuel des facettes cisailées ;

$$\phi(\vec{\sigma}) \text{ est tel que : } \operatorname{tg} \phi(\vec{\sigma}) = - \frac{|\sigma^t|}{\sigma^n}$$

d'où
$$\phi_d(\vec{\sigma}) = - \operatorname{Arctg} \left(\frac{|\sigma^t|}{\sigma^n} \right) - \phi_r$$

On en déduit pour la vitesse de glissement

$$\vec{u}^t = \dot{\lambda} |\vec{\sigma}| (\cos \phi_d \vec{t} + \sin \phi_d \vec{n})$$

et, en portant l'expression de ϕ_d ,

$$= \dot{\lambda} (\sin \phi_r \sigma^{\rightarrow} + \cos \phi_r (t^{\rightarrow} \wedge n^{\rightarrow}) \wedge \sigma^{\rightarrow})$$

(sachant que $\sigma^{\rightarrow} = \sigma^n \cdot n^{\rightarrow} + \sigma^t \cdot t^{\rightarrow}$)

et la puissance dissipée plastiquement :

$$- P_{int} = \sigma^{\rightarrow} \cdot u^{\rightarrow'} = \dot{\lambda} \sin \phi_r |\sigma^{\rightarrow}|^2$$

En ce qui concerne la règle d'écoulement pour $\sigma^{\rightarrow}$ tel que $D'(\sigma^{\rightarrow}) = 0$

avec $|\sigma^{\rightarrow}, n^{\rightarrow}| < \phi_r$, ou encore

$$|\sigma^t| + \tan \phi_r \sigma^n < 0$$

il y a écrasement des aspérités (stabilité).

On peut adopter une loi d'écoulement telle que $u^{\rightarrow}$ soit normal à la courbe définie par le critère actuel (interface standard $\equiv$ hypothèse de normalité)

$$u^{\rightarrow} = \dot{\lambda} (\partial D' / \partial \sigma^{\rightarrow}) \cdot \sigma^n$$

Mais étant donné qu'il y a stabilité du mouvement $\dot{\lambda} \sim 0$, et la puissance dissipée plastiquement

$$- P_{int} \sim 0$$

La règle d'écoulement applicable au contact ponctuel pourra être de même, dans le cas de glissement ($|\dot{f}^t| + \tan \phi_r \dot{f}^n \neq 0$)

$$u^{\rightarrow} = \dot{\lambda} \cos \phi_r (\tan \phi_r \dot{f}^{\rightarrow} - \dot{f}^n \cdot t^{\rightarrow} + \dot{f}^t \cdot n^{\rightarrow})$$

et la dissipation $- P_{int} = \dot{\lambda} \sin \phi_r |\dot{f}^{\rightarrow}|^2$

d - Règle d'écoulement pour la vitesse de rotation $\{\omega^n, \omega^t\}$

La vitesse de rotation $\omega^{\rightarrow}$ (pivotement, roulement) résulte selon l'hypothèse de couplage du couple de liaison $\gamma^{\rightarrow}$

$$\begin{cases} \text{Stabilité} & \omega^{\rightarrow} = 0 \text{ si } \begin{cases} L(\gamma^{\rightarrow}) < 0 \\ \text{ou } L(\gamma^{\rightarrow}) = 0 \text{ avec } (\partial L / \partial \gamma^{\rightarrow}) \cdot \delta \gamma^{\rightarrow'} < 0 \end{cases} \\ \text{Instabilité} & \omega^{\rightarrow} \neq 0 \text{ si } L(\gamma^{\rightarrow}) = 0 \text{ avec } (\partial L / \partial \gamma^{\rightarrow}) \cdot \delta \gamma^{\rightarrow'} \geq 0 \end{cases}$$

La dissipation plastique a pour origine le frottement entre les 2 solides

$$- P_{int} = \gamma^{\rightarrow} \cdot \omega^{\rightarrow}$$

La règle d'écoulement est associée aux conditions de non-dilatance et non-déviance, soit $\omega^{\rightarrow}$ proportionnel à $\gamma^{\rightarrow}$.

On en déduit la puissance dissipée plastiquement au cours du mouvement (effets de roulement négligés)

$$\begin{aligned} - P_{int} &\sim \gamma^n \omega^n \\ &\sim \dot{\lambda}' \sin \phi_r \gamma^{n^2} \end{aligned}$$

e - Conclusion

Si l'on retient une règle d'écoulement, avec l'hypothèse de couplage, la dissipation

$$- P_{int} = \dot{\lambda} \sin \phi_r |\vec{f}|^2 + \dot{\lambda}' \sin \phi_r \gamma^{n^2}$$

où $\dot{\lambda}$ et $\dot{\lambda}'$ sont des scalaires positifs.

1.124 - CONCLUSION

L'objet de cette étude a été, partant des phénomènes physiques microscopiques du contact, de préciser le comportement macroscopique des surfaces de matériaux rigides-fragiles. Un tel comportement est rencontré essentiellement dans les assemblages de particules solides tels que les milieux pulvérulents ou à plus grande échelle, dans les milieux fissurés.

À partir d'un travail de synthèse, nous avons pu proposer une loi de comportement d'interface basée sur un mécanisme microscopique de rupture des aspérités. Elle s'appuie, sur un comportement microscopique du type rigide-fragile (d'où la limitation à des applications géotechniques) et sur des essais pratiques sur des sables sans cohésion. On peut noter que ce modèle est susceptible

d'applications pour le comportement volumique de tels matériaux, puisque, à bien des égards, il est semblable aux modèles à état critique proposés par l'Ecole de Cambridge.

En plus de cette étude, nous avons tenté de clarifier le concept de critère de liaison intergranulaire, qui intègre non-seulement le critère d'interface mais également le critère de concassage.

1.2 - PRINCIPES GENERAUX DE LA MECANIQUE QUASI-STATIQUE DU SOLIDE

1.21 - RAPPELS DES PRINCIPES GENERAUX DE LA CINEMATIQUE QUASI-STATIQUE DU SOLIDE

1.210 - INTRODUCTION (Hypothèses - Bases mathématiques)

On place cette étude dans le cadre de la géométrie à métrique euclidienne. Nous supposerons acquis les résultats relatifs à la cinématique classique d'un système de corps rigides. Nous nous contenterons donc, dans ce chapitre, du rappel des développements et résultats principaux nécessaires pour la mise en oeuvre des paramètres cinématiques (cf. § 2.11).

1.211 - POSITION ET VITESSE CANONIQUES

a - Position d'un grain (repérage)

La position d'un grain rigide (i) - ou encore la position du repère local $(G_i, \vec{I})$ - par rapport au repère de référence $(G_o, \vec{O})$ est déterminée par les 6 composantes de Lagrange ou encore par 2 grandeurs vectorielles.

(Compte tenu de la dualité existante entre le grain (i) et le repère local $(G_i, \vec{I})$ qui lui est associé, il sera une fois pour toutes admis que la notation (i) désignera indistinctement le grain ou le repère canonique).

Les deux vecteurs définissant la position de (i) sont les vecteurs translation et rotation.

a.1 - Vecteur translation $\vec{c}_i$ (position du centre d'inertie de (i)). Du fait de la nature de l'espace vectoriel, en bipoints :

$$(G_o, M) = (G_o, G_i) + (G_i, M)$$

c'est-à-dire vectoriellement

$$\vec{x}_o(M) = \vec{c}_i + \vec{x}_i(M)$$

(où, par convention, dans la base $0^{\rightarrow}$ seulement $\vec{c}_i \sim \vec{c}_{oi}$ avec,

$$\vec{c}_{oi} = \vec{x}_o(G_i) = - \vec{x}_i(G_o) \quad)$$

a.2 - Vecteur rotation $\vec{\theta}_i$ (orientation du grain (i))

L'angle $\vec{\theta}_i$ est un vecteur axial de rotation ou pseudo-vecteur définissant la rotation du repère local (i) par rapport à (0) (par convention dans la base $0^{\rightarrow}$ seulement $\vec{\theta}_i \sim \vec{\theta}_{oi}$

$$\vec{\theta}_{oi} = \text{arg}(I^{\rightarrow})|_0 \quad \text{argument de la base } I^{\rightarrow} \text{ relativement à } 0^{\rightarrow})$$

On rappelle que la norme de $\vec{\theta}_i$: θ_i , est la mesure de l'amplitude de la rotation $\theta_i = |\vec{\theta}_i|$

. le vecteur axial unitaire $\frac{\vec{\theta}_i}{\theta_i}$ est le vecteur normal au plan de la rotation

La base locale $I^{\rightarrow}$ se déduit de la base de référence $0^{\rightarrow}$ par la relation

$$I^{\rightarrow} = I^0 \cdot 0^{\rightarrow} = e^{\vec{\theta}_i} \cdot 0^{\rightarrow}$$

où I^0 est l'opérateur orthogonal de changement de base

θ_i est la matrice antisymétrique associée à $\vec{\theta}_i$ dans la base $0^{\rightarrow}$ (ou dans la base $I^{\rightarrow}$, puisque $\vec{\theta}_i$ est vecteur propre de l'orthogonal).

a.3 - Changement de référentiel

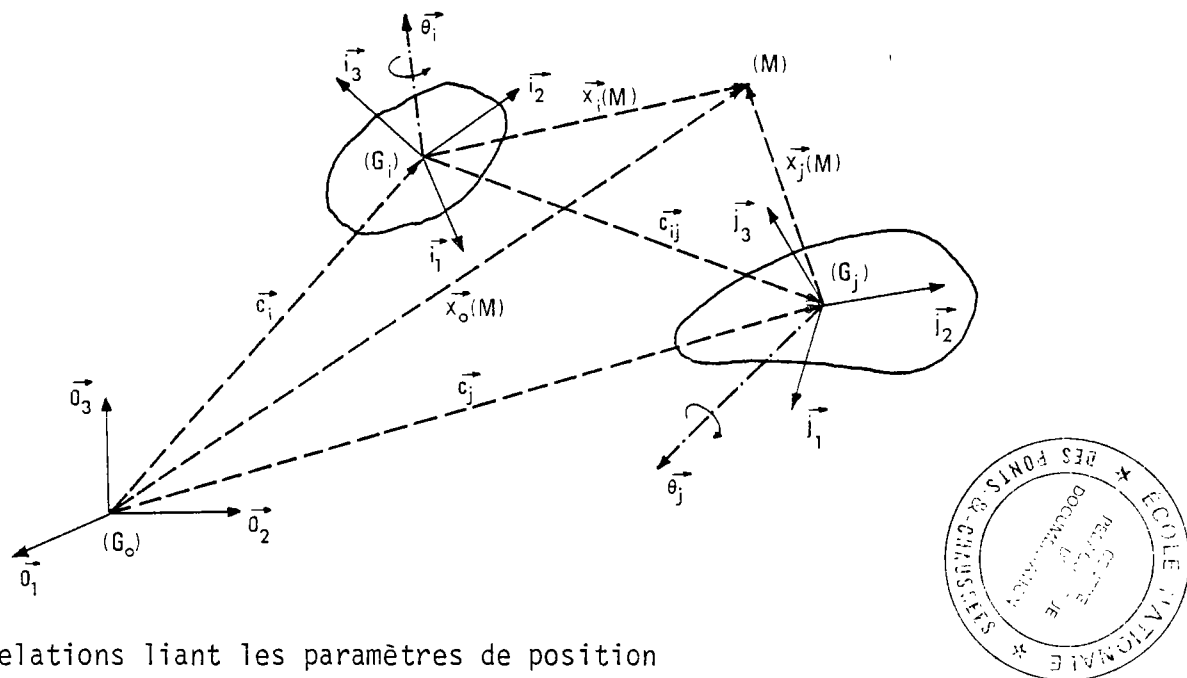
Les 2 notions principales de repérage se généralisent, pour définir la position et l'orientation d'un grain quelconque (i) par rapport à un autre grain (j).

$$\vec{x}_i(M) = \vec{c}_{ij} + \vec{x}_j(M)$$

avec,

$$\vec{x}_j(M) = x_j^J \cdot J^{\rightarrow} = x_j^J \cdot \underbrace{e^{\theta_{kj}^K} \cdot \epsilon}_{J^K} \cdot K^{\rightarrow}$$

(où θ_{kj}^K est la ligne des composantes du vecteur axial $\vec{\theta}_{kj}$ dans la base $K^{\rightarrow}$, et ϵ la représentation du tenseur d'antisymétrisation du 3ème ordre, 2 fois covariant et 1 fois contravariant).



a.4 - Relations liant les paramètres de position

Pour la translation:

$$\begin{cases} \vec{c}_{ij} = \vec{c}_{ik} + \vec{c}_{kj} \\ \vec{c}_{ij} = -\vec{c}_i + \vec{c}_j \end{cases} \quad \text{et en particulier, pour le repère de référence,} \\ (\vec{c}_{ij} + \vec{c}_{ji} = .)$$

Par la rotation:

$$\begin{cases} \vec{\theta}_{ij} = \vec{\theta}_{ik} \oplus \vec{\theta}_{kj} \\ \vec{\theta}_{ij} = -\vec{\theta}_i \oplus \vec{\theta}_j \end{cases} \quad \text{et en particulier, pour le repère de référence,} \\ (\vec{\theta}_{ij} + \vec{\theta}_{ji} = .)$$

(où la notation " $\oplus$ " désigne l'addition polaire de 2 vecteurs axiaux tandis que "+" désigne l'addition cartésienne ou directe de 2 vecteurs).

Cette dernière notation correspond au produit transitif mais non commutatif de 2 rotations vectorielles dans un espace à 3 dimensions.

b - Vitesse d'un grain

Tout d'abord, on définit la vitesse ponctuelle d'un point (M) de l'espace relativement à un repère $(G_0, \vec{0}^{\rightarrow})$ supposé fixe, par le vecteur vitesse : $\vec{x}_{0|0}^{\rightarrow}(M)$

$$\dot{\vec{x}}_{o|o} = \frac{\delta}{\delta t} (x_o^0) \cdot \vec{0} = \dot{x}_o^0 \cdot \vec{0}$$

b.1 - Vitesse d'un grain (i) dans $(G_o, \vec{0})$

Aux deux grandeurs $\vec{c}_i$ et θ_i définissant la position de (i), on associe les vecteurs vitesses $\vec{v}_i$ et $\vec{\omega}_i$, obtenus par dérivation temporelle de $\vec{c}_i$ et θ_i relativement à $(G_o, \vec{0})$ supposé fixe.

(par convention, dans le repère de référence seulement:

$$\begin{aligned} \vec{v}_i &\sim \vec{v}_{oi} \text{ et } \vec{\omega}_i \sim \vec{\omega}_{oi} \\ \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_{oi} = \dot{\vec{c}}_{oi} = \frac{\delta}{\delta t} (c_{oi}^0) \cdot \vec{0} \\ \vec{\omega}_{oi} = \dot{\theta}_{oi} = \frac{\delta}{\delta t} (\theta_{oi}^0) \cdot \vec{0} \end{array} \right. \end{aligned}$$

On rappelle que :

$$\dot{\vec{I}} = \underbrace{\dot{\theta}_{oi}}_{\omega_{oi}} \cdot \underbrace{e^{\theta_{oi}}}_{I^0} \cdot \vec{0}$$

(où ω_{oi} est la matrice antisymétrique associée au vecteur instantané de rotation $\vec{\omega}_{oi}$ dans la base de référence $\vec{0}$)

b.2 - Changement de référentiel

Comme précédemment, ces 2 notions motionnelles se généralisent dans des repères locaux quelconques, pour exprimer la vitesse absolue d'un grain (i), en fonction des vitesses relatives et d'entraînement

$$\dot{\vec{x}}_{o|o} (M) = \vec{v}_i + \vec{\omega}_i \wedge \vec{x}_i(M) + \dot{\vec{x}}_{i|i} (M)$$

La notation matricielle équivalente dans la base $\vec{0}$ est alors :

$$\dot{x}_o^0 = v_i^0 + x_i^I \cdot \omega_i \cdot e^{\theta_i} + \dot{x}_i^I \cdot e^{\theta_i}$$

On introduit les vecteurs vitesses $\vec{v}_{ij}$ et $\vec{\omega}_{ij}$ qui sont respectivement la translation et la rotation instantanées du grain (i) par rapport à (j)

supposé fixe, on en déduit :

$$\dot{\vec{x}}_{i|I} = \vec{v}_{ij} + \vec{\omega}_{ij} \wedge \vec{x}_j + \dot{\vec{x}}_{i|J}$$

b.3 - Relations liant les paramètres de vitesses

Pour la vitesse de translation:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_{ij} = \vec{v}_{kj} - \vec{v}_{ki} + \vec{\omega}_{ki} \wedge \vec{c}_{ij} \\ \vec{v}_{ij} = -\vec{v}_i + \vec{v}_j - \vec{\omega}_i \wedge \vec{c}_{ij} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{et en particulier, pour le repère de} \\ \text{référence,} \\ (\vec{v}_{ij} + \vec{v}_{ji} = \vec{\omega}_{ij} \wedge \vec{c}_{ij}) \end{array}$$

Pour la rotation instantanée:

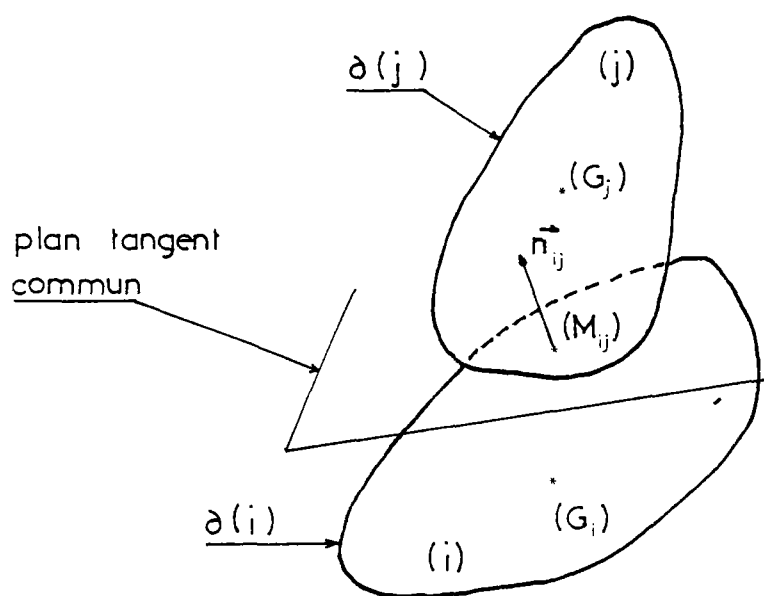
$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\omega}_{ij} = \vec{\omega}_{ik} + \vec{\omega}_{kj} \\ \vec{\omega}_{ij} = -\vec{\omega}_i + \vec{\omega}_j \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{et en particulier, pour le repère de} \\ \text{référence,} \\ (\vec{\omega}_{ij} + \vec{\omega}_{ji} = .) \end{array}$$

(Pour des petits angles, l'addition polaire est équivalente à une addition directe de 2 vecteurs. Transformation linéaire tangente)

1 212 - POSITION ET VITESSE ASSOCIEES A UN CONTACT

Un contact entre 2 grains (i) et (j) s'opère par l'intermédiaire d'une zone commune à leur contour $\partial(i)$ et $\partial(j)$. Cette zone, en général une surface - en réalité une multitude de points répartis sur une surface - dans le cas de grains déformables ou à facettes ou non strictement convexes, peut en revanche, être considérée comme ponctuelle dans le cas de grains rigides strictement convexes.

Les conditions de contact statique ou quasi-statique entre 2 grains rigides, strictement convexes seront définies comme suit :



Deux grains (i) et (j) sont en contact si la distance qui les sépare est nulle : 2 conditions sont requises pour cela.

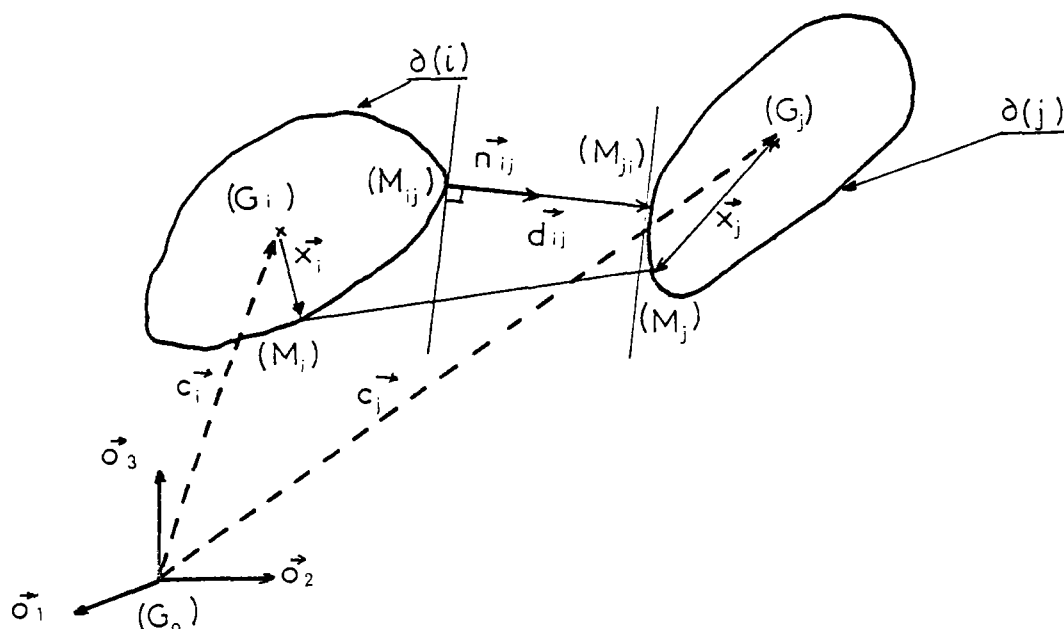
. Il existe au moins un point (M_{ij}) appartenant au contour du grain (i) et en contact du grain (j) .

. Ce point est unique ou les surfaces de contour sont tangentes en $(M_{ij}) = \partial(i) \cap \partial(j)$.

a - Position d'un contact - Distance

Le problème du repérage d'un contact de 2 grains, est théoriquement résolvable par le calcul analytique, et il possède une solution unique dans le cas de surfaces de contour régulièrement convexes, toutefois, la solution n'est pas exprimable explicitement, dès que les fonctions de contour G_i et G_j sont des fonctions analytiques d'un degré supérieur à 4.

a.1 - Distance d'un grain à un autre



La distance $|d_{ij}^{\rightarrow}|$ peut s'exprimer comme le minimum de la norme d'un vecteur joignant deux points (M_i) et (M_j) dont l'un appartient au contour de (i) , l'autre à celui de (j) .

$$|d_{ij}^{\rightarrow}| = \min_{\substack{(M_i) \in \partial(i) \\ (M_j) \in \partial(j)}} |x^{\rightarrow}(M_j) - x^{\rightarrow}(M_i)|$$

Les points (M_i) et (M_j) des contours respectifs, pour lesquels la quantité $|x^{\rightarrow}(M_j) - x^{\rightarrow}(M_i)|$ est minimale, sont dits "points associés" et sont notés respectivement (M_{ij}) et (M_{ji}) .

On note

$$b_{ij}^{\rightarrow} = x^{\rightarrow}(M_{ij}) \quad \text{et} \quad b_{ji}^{\rightarrow} = x^{\rightarrow}(M_{ji})$$

$$\text{Le vecteur "distance" :} \quad d_{ij}^{\rightarrow} = b_{ji}^{\rightarrow} - b_{ij}^{\rightarrow}$$

est alors tel que :

$$d_{ij}^{\rightarrow} = |d_{ij}^{\rightarrow}| \cdot n_{ij}^{\rightarrow} = - |d_{ji}^{\rightarrow}| \cdot n_{ji}^{\rightarrow}$$

(c'est donc un vecteur pour lequel il y a colinéarité des vecteurs normaux aux surfaces).

a.2 - Conditions de contact statique

Le contact entre les 2 grains (i) et (j) est réalisé lorsque la distance qui les sépare est nulle. Il en résulte deux conditions implicites liant les vecteurs positions et normaux aux points associés.

$$\begin{cases} b_{ij}^{\rightarrow} - b_{ji}^{\rightarrow} = 0 \\ n_{ij}^{\rightarrow} + n_{ji}^{\rightarrow} = 0 \end{cases}$$

La première condition traduit l'existence d'un contact, la seconde son unicité, c'est-à-dire la tangence des surfaces de contour des grains en $(M_{ij}) \equiv (M_{ji}) = \partial(i) \cap \partial(j)$.

Il est possible de noter matriciellement ces relations, dans la base de référence, par exemple :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_j^0 - c_i^0 + x_j^J \cdot e^{\theta_j} - x_i^I \cdot e^{\theta_i} = . \\ (\partial G_i / \partial x_i^I) \cdot e^{\theta_i} + (\partial G_j / \partial x_j^J) \cdot e^{\theta_j} = . \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} G_i(x_i^I) = 0 \\ G_j(x_j^J) = 0 \end{array} \right.$$

et,

(La quantité $\partial G_i / \partial x_i^I$ représente la ligne des composantes du gradient de G_i exprimé dans les coordonnées locales).

Remarque:

Lorsque les grains sont sphériques, le problème peut être résolu analytiquement assez simplement :

Sachant que pour G_i , on a :

$$G_i(x_i^I) = \eta_i \cdot |x_i^{\vec{I}}| - 1 = 0$$

(où η_i représente la courbure constante du grain (i))

il vient :

$$n_{ij}^{\vec{I}} = \eta_i \cdot x_i^{\vec{I}}(M_{ij})$$

La distance de 2 grains sphériques (i) et (j) est alors donnée par

$$d_{ij}^{\vec{I}} = \left(1 - \frac{1}{|c_{ij}^{\vec{I}}|} \left(\frac{1}{\eta_i} + \frac{1}{\eta_j}\right)\right) \cdot c_{ij}^{\vec{I}}$$

avec,

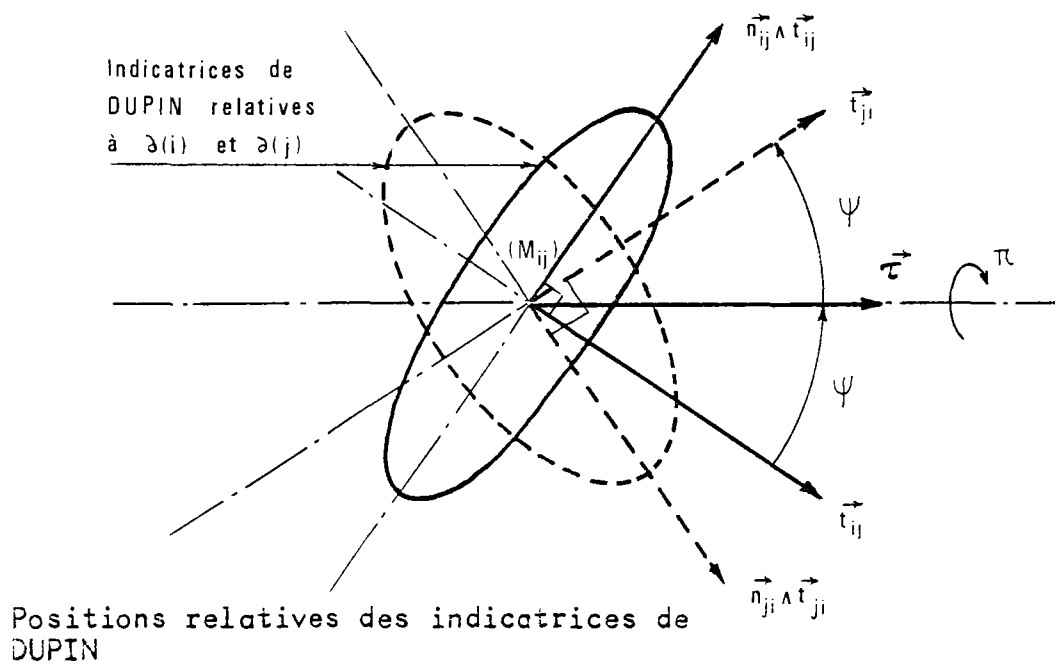
$$b_{ij}^{\vec{I}} = c_i^{\vec{I}} + \frac{1}{\eta_i \cdot |c_{ij}^{\vec{I}}|} \cdot c_{ij}^{\vec{I}}$$

La condition de contact statique obtenue en faisant $|d_{ij}^{\vec{I}}| = 0$ implique :

$$|c_{ij}^{\vec{I}}| = \frac{1}{\eta_i} + \frac{1}{\eta_j}$$

a.3 - Position relative des repères associés à un contact

Il convient au préalable de définir les positions relatives des bases principales tangentes en (M_{ij}) et (M_{ji}) ; la position relative des bases associées s'en déduira instantanément.



On passe de la base principale tangente associée à $\partial(i)$ à la base principale tangente associée à $\partial(j)$ par une rotation d'angle vectoriel $\pi \tau^{\rightarrow}$ ou $\tau^{\rightarrow}$ est un vecteur unitaire du plan tangent. La relation de changement de base est par conséquent :

$$\begin{vmatrix} \vec{n} \\ \vec{t} \\ \vec{n} \wedge \vec{t} \end{vmatrix}_{ij} = e^{\pi \tau} \cdot \begin{vmatrix} \vec{n} \\ \vec{t} \\ \vec{n} \wedge \vec{t} \end{vmatrix}_{ji}$$

(La matrice $e^{\pi \tau} = \mathbb{1} + 2\tau^2$ représente un opérateur orthogonal idempotent ; τ est la matrice antisymétrique associée à $\tau^{\rightarrow}$, dans une des bases principales tangentes).

Le vecteur $\tau^{\rightarrow}$ solution est de la forme :

$$\tau^{\rightarrow} = \frac{\vec{t}_{ij} + \vec{t}_{ji}}{|\vec{t}_{ij} + \vec{t}_{ji}|}$$

Si l'on désigne par 2ψ la mesure de l'angle que font les 2 premiers vecteurs des bases tangentes.

$$(\vec{t}_{ij}, \vec{t}_{ji}) = 2\psi \quad \vec{n}_{ij}$$

$$\tau^{\rightarrow} = \frac{1}{2 \cos \psi} (\vec{t}_{ij} + \vec{t}_{ji}) = \cos \psi \vec{t}_{ij} + \sin \psi \vec{n}_{ij} \wedge \vec{t}_{ij}$$

on sait d'autre part décomposer la rotation vectorielle en produit de 2 rotations, d'où :

$$\pi \vec{\tau} = \pi \vec{t}_{ij} \oplus (\vec{t}_{ij}, \vec{t}_{ji}) = (\vec{t}_{ij}, \vec{t}_{ji}) \oplus \pi \vec{t}_{ji}$$

Ainsi, on passe de la base directe $I\vec{J}$ à la base directe $J\vec{I}$ par une rotation dont la mesure angulaire est π et le vecteur axial unitaire $\vec{\tau}$

$$I\vec{J} = \underbrace{e^{\pi \vec{\tau}}}_{IJJI} \cdot J\vec{I}$$

$$IJJI = I\vec{J} \cdot J\vec{I}$$

b. - Vitesse d'un contact

Au cours du mouvement simultané de 2 grains (i) et (j) astreints à rester en contact, la cinématique du contact (ij) est fonction des variables de Lagrange associées à chacun des grains.

De plus, la condition de conservation du contact au cours du mouvement, impose une relation sur les vitesses qui n'est autre que la relation dérivée de la fonction implicite liant c_{ij} et θ_{ij} par l'intermédiaire des fonctions de surfaces G_i et G_j et de leurs dérivées.

b.1 - Vitesse d'un point mobile sur le contour d'un grain

Dans le § 1 211, la vitesse d'un point (M) s'exprime par la relation de distribution des vitesses

$$\dot{\vec{x}}_{O|O}(M) = \vec{v}_i + \vec{\omega}_i \wedge \vec{x}_i + \dot{\vec{x}}_{i|i}(M)$$

Si le point (M) est assujetti à rester constamment sur le contour $\partial(i)$ du grain (i),

. d'une part $G_i(x_i^I) = 0$

. d'autre part $\dot{\vec{x}}_{i|i} \cdot \vec{n}^+$ (infinitement petit du 2ème ordre).

b.2 - Conservation du contact

Les conditions de conservation découlent des conditions premières par déri-

vation temporelle.

. 1ère condition

La condition d'existence d'un point de contact était

$$d_{ij}^{\rightarrow} = x_o^{\rightarrow}(M_{ji}) - x_o^{\rightarrow}(M_{ji}) = .$$

On en déduit par dérivation, relativement à $(G_o, 0^{\rightarrow})$, la relation élémentaire :

$$\begin{aligned} (\dot{x}_{j|i}^{\rightarrow} - \dot{x}_{i|i}^{\rightarrow}) &= v_i^{\rightarrow} + \omega_i^{\rightarrow} \wedge x_i^{\rightarrow} - v_j^{\rightarrow} - \omega_j^{\rightarrow} \wedge x_j^{\rightarrow} \\ &= \frac{1}{2} (v_{ji}^{\rightarrow} - v_{ij}^{\rightarrow} + \omega_{ji}^{\rightarrow} \wedge (x_i^{\rightarrow} + x_j^{\rightarrow})) \end{aligned}$$

. 2ème condition

La condition exprimant l'unicité du contact entre les grains (i) et (j) ou la tangence de leurs surfaces de contour était la suivante :

$$n_{ij}^{\rightarrow} + n_{ji}^{\rightarrow} = .$$

Par dérivation relativement à $(G_o, 0^{\rightarrow})$

$$\dot{n}_{ij|i}^{\rightarrow} + \omega_i^{\rightarrow} \wedge n_{ij}^{\rightarrow} + \dot{n}_{ji|j}^{\rightarrow} + \omega_j^{\rightarrow} \wedge n_{ji}^{\rightarrow} = .$$

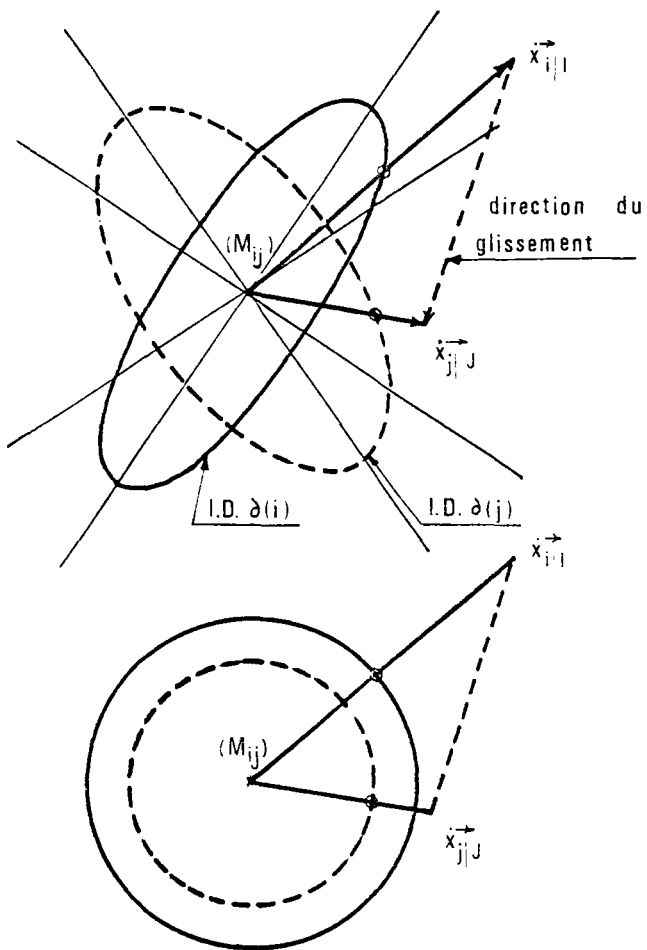
En utilisant les résultats du § 1 113 a ,

$$(\dot{n}_{ij|i}^{\rightarrow} = (n_{sij} - n_{dij}) \dot{x}_{i|i}^{\rightarrow} + 2n_{dij} (\dot{x}_{i|i}^{\rightarrow} \cdot t_{ij}^{\rightarrow t}) \cdot t_{ij}^{\rightarrow})$$

la relation vectorielle devient, en fonction de $\dot{x}_{i|i}^{\rightarrow}$ et $\dot{x}_{j|j}^{\rightarrow}$:

$$\begin{aligned} (n_{sij} - n_{dij}) \dot{x}_{i|i}^{\rightarrow} + (n_{sji} - n_{dji}) \dot{x}_{j|j}^{\rightarrow} - \omega_{ij}^{\rightarrow} \wedge n_{ij}^{\rightarrow} \\ + 2n_{dij} (\dot{x}_{i|i}^{\rightarrow} \cdot t_{ij}^{\rightarrow t}) \cdot t_{ij}^{\rightarrow} + 2n_{dji} (\dot{x}_{j|j}^{\rightarrow} \cdot t_{ji}^{\rightarrow t}) \cdot t_{ji}^{\rightarrow} = . \end{aligned}$$

Cette condition est fonction des vitesses de glissement et roulement ; elle est indépendante de la vitesse de pivotement $(\omega_{ij}^{\rightarrow} \cdot n_{ij}^{\rightarrow t}) \cdot n_{ij}^{\rightarrow}$



Vecteurs-vitesse au
point de contact (M_{ij})

cas de sphères en contact

$$(\eta_{dij} = \eta_{dji} = 0)$$

$$\eta_{sij} \dot{\vec{x}}_{i|I} + \eta_{sji} \dot{\vec{x}}_{j|J} = \vec{\omega}_{ij} \wedge \vec{n}_{ij}$$

Evolution du 1er vecteur principal tangent :

$$\dot{\vec{t}}_{ij} \sim -(\eta_{sij} + \eta_{dij}) (\dot{\vec{x}}_{i|I} \cdot \vec{t}_{ij}') \vec{n}_{ij}$$

Remarque:

Cas particulier du problème plan ($\eta_s = \eta_d$)

On retrouve la loi classique d'Euler-Dupin :

$$\eta_{1ij} \dot{\vec{x}}_{i|I} + \eta_{1ji} \dot{\vec{x}}_{j|J} = \vec{\omega}_{ij} \wedge \vec{n}_{ij}$$

b.3 - Vitesses associées à un contact

De même que pour un grain (i), 2 vecteurs vitesses ont été définis ($\vec{v}_i$ et $\vec{\omega}_i$), pour le contact (ij) :

$\vec{u}_{ij}$ est la vitesse différentielle de translation des 2 grains. $\vec{\tilde{\omega}}_{ij}$ est

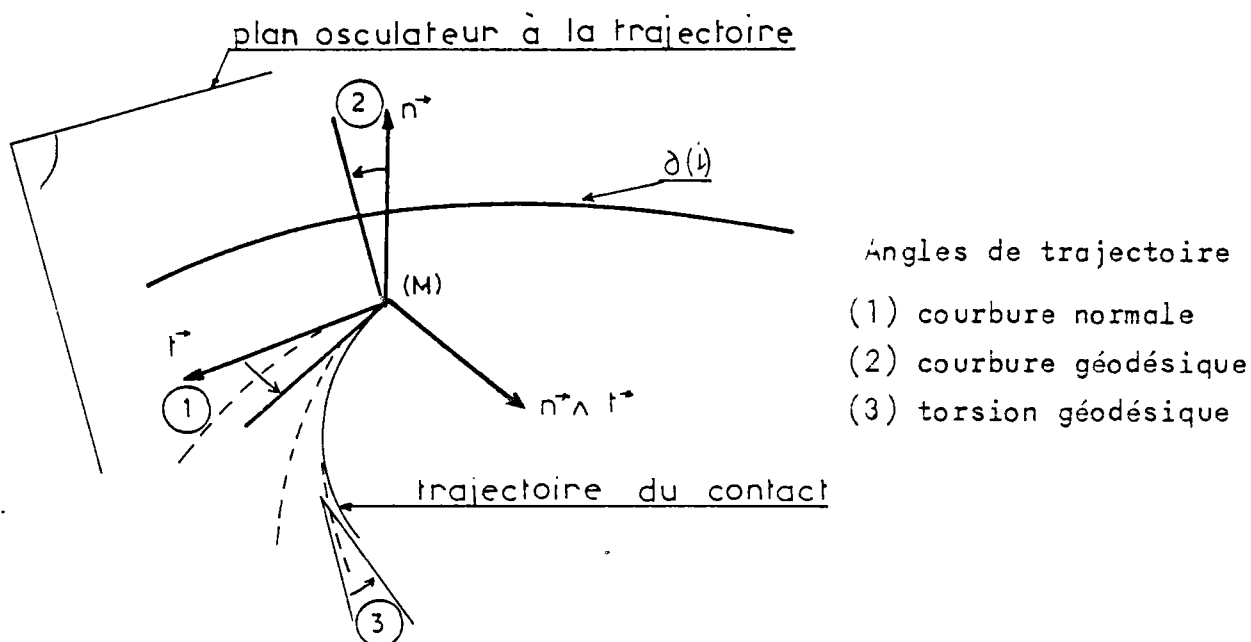
la différence des rotations instantanées

$$\begin{cases} \vec{u}_{ij} = \dot{\vec{x}}_{j|j} - \dot{\vec{x}}_{i|i} \\ \vec{\tilde{\omega}}_{ij} = \vec{\omega}_{ij} \end{cases}$$

b.4 - Paramètres relatifs à la trajectoire du point de contact

Les éléments permettant de définir l'allure de la trajectoire au point de contact (M_{ij}) peuvent être brièvement mentionnés ; On prend alors en compte les infiniments petits du 2ème ordre et du 3ème ordre, soit :

- l'angle de courbure normale (angle de mesure ψ)
- l'angle de courbure géodésique
- l'angle de torsion géodésique.



1.22 - RAPPELS DES PRINCIPES GENERAUX DE LA DYNAMIQUE QUASI-STATIQUE DU SOLIDE

1.220 - INTRODUCTION

Ce paragraphe constitue un rappel des équations d'équilibre bien connues du solide. La démarche est analogue à celle du paragraphe précédent de manière à faire ressortir la dualité des espaces des torseurs et des distributions.

1.221 - EQUILIBRE STATIQUE DES EFFORTS

a - Torseur des efforts

On classe comme efforts extérieurs ceux dûs à l'action d'un champ quelconque extérieur au grain (i). Par exemple le champ de gravité. Ceux-ci sont réductibles à un torseur noté $(\vec{g}_i, \vec{\mu}_i)$ appliqué au centre d'inertie (G_i) .

$$\begin{cases} \vec{g}_i & \text{est la résultante des forces} \\ \vec{\mu}_i & \text{est le moment résultant appliqué en } (G_i). \end{cases}$$

On rappelle que la valeur du torseur ne dépend pas de la base (notation vectorielle) mais dépend de la position du point d'application. Ainsi, le torseur des efforts extérieurs de (i) en un point quelconque (M) est obtenu à partir de $(\vec{g}_i, \vec{\mu}_i)$ par la relation :

$$(\vec{g}_i, \vec{\mu}_i)_{|(M)} = (\vec{g}_i, \vec{\mu}_i + \vec{g}_i \wedge \vec{x}_i) \quad \text{où} \quad \vec{x}_i = (G_i, M)$$

Il existe une algèbre appropriée aux torseurs (et aux distributeurs) qui permet de leur donner une représentation intrinsèque, c'est-à-dire indépendante du repère choisi (Farouk Hably). De même, il est possible de représenter un torseur de la manière suivante

$$(\vec{g}_i, \vec{\mu}_i) = \vec{g}_i + \epsilon . \vec{\mu}_i$$

où ϵ représente l'équivalent de l'imaginaire des nb. complexes. Dans une base, $\vec{0}$ par exemple, les composantes du torseur seront données par :

$$(\vec{g}_i, \vec{\mu}_i) . \vec{0} = \vec{g}_i^0 + \epsilon . \vec{\mu}_i^0$$

où $\vec{g}_i^0$ et $\vec{\mu}_i^0$ représentent respectivement les lignes des composantes de $\vec{g}_i$ et $\vec{\mu}_i$ dans la base orthonormée $\vec{0}$.

Les efforts intérieurs résultant d'actions de contact du grain (i) avec ses voisins (j), (k), (l),... sont également représentés par les torseurs de liaison : $(\vec{f}_{ij}, \vec{\gamma}_{ij})$, $(\vec{f}_{ik}, \vec{\gamma}_{ik})$, $(\vec{f}_{il}, \vec{\gamma}_{il})$,... dont il a été fait mention au § 1 132.

b - Puissance des efforts

On définit la puissance (à un instant t) des efforts dans un déplacement, comme le produit scalaire - ou contracté - du torseur de ces efforts par le distributeur associé, défini dans le même repère. On distingue

$$\begin{cases} P_{\text{ext}} & : \text{puissance des efforts extérieurs} \\ P_{\text{int}} & : \text{puissance des efforts intérieurs ou de liaison} \end{cases}$$

La puissance totale : $P_{\text{tot}} = P_{\text{ext}} + P_{\text{int}}$

Dans l'hypothèse quasi-statique, les effets dûs aux accélérations sont nuls ; d'où l'expression liant les puissances extérieures et intérieures.

$$P_{\text{ext}} + P_{\text{int}} = 0$$

b.1 - Expression de la puissance des efforts extérieurs.

Pour le torseur $(\vec{g}_i, \vec{\mu}_i)$ et le distributeur $(\vec{v}_i, \vec{\omega}_i)$ définissant les vitesses de translation et de rotation en (G_i) .

$$P_{\text{ext}} = (\vec{g}_i, \vec{\mu}_i) \cdot (\vec{v}_i, \vec{\omega}_i)^t \quad (\text{sans sommation sur } i)$$

En reprenant la notation du torseur, et en adoptant pour le distributeur, une notation équivalente, P_{ext} se définit comme la partie réelle du produit.

$$\begin{aligned} P_{\text{ext}} &= (\vec{g}_i + \epsilon \cdot \vec{\mu}_i) \cdot (\vec{v}_i + \epsilon \cdot \vec{\omega}_i)^t \\ &= \vec{g}_i \cdot \vec{v}_i^t + \underbrace{-\epsilon^2}_{1} \cdot \vec{\mu}_i \cdot \vec{\omega}_i^t + \epsilon \cdot (\vec{\mu}_i \cdot \vec{v}_i^t - \vec{g}_i \cdot \vec{\omega}_i^t) \\ &= \vec{g}_i \cdot \vec{v}_i^t + \vec{\mu}_i \cdot \vec{\omega}_i^t \end{aligned}$$

b.2 - Expression de la puissance des efforts intérieurs

Pour le torseur $(\vec{f}_{ij}, \vec{\gamma}_{ij})$ et le distributeur $(\vec{u}_{ij}, \vec{\omega}_{ij})$ définissant les vitesses de translation et de rotation en (M_{ij})

$$\begin{aligned} P_{\text{int}} &= - (\vec{f}_{ij}, \vec{\gamma}_{ij}) \cdot (\vec{u}_{ij}, \vec{\omega}_{ij})^t \quad (\text{sans sommation sur } i \text{ et } j) \\ &= - (\vec{f}_{ij} \cdot \vec{u}_{ij}^t + \vec{\gamma}_{ij} \cdot \vec{\omega}_{ij}^t) \end{aligned}$$

(P_{int} , objective).

c - Application du principe des puissances virtuelles

Les relations d'équilibre intrinsèque de chaque grain (i) s'obtiennent immédiatement par application du principe des puissances virtuelles :

$$\begin{cases} \vec{g}_i + \vec{f}_i = 0 \\ \vec{\mu}_i + \gamma_i \vec{f}_i + \vec{f}_i \wedge \vec{x}_i (M_{ij}) = 0 \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, 3 \dots n)$$

(par convention $\vec{f}_i = \sum_j \vec{f}_{ij}$ et $\gamma_i = \sum_j \gamma_{ij}$)

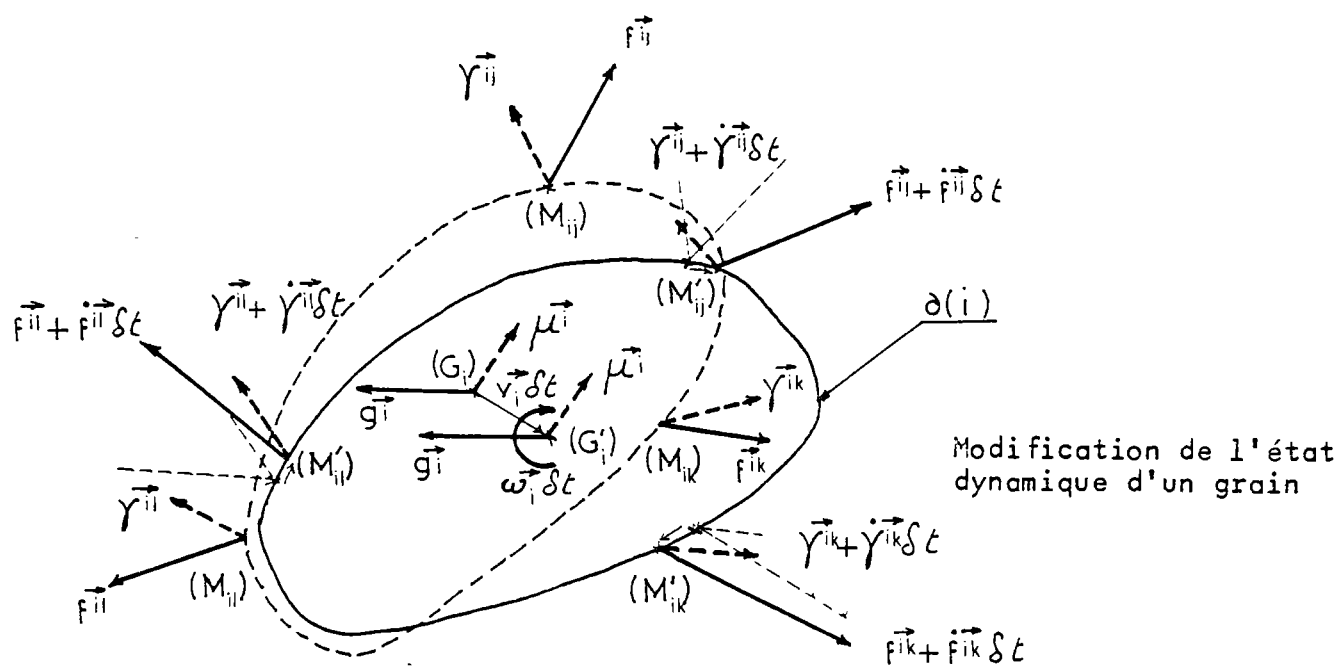
1.222 - EQUILIBRE DES INCREMENTS D'EFFORTS

A un instant $t + \delta t$, les torseurs et distributeurs canoniques ont subi un accroissement. Dans l'hypothèse où l'écart de configuration géométrique et dynamique est petit pendant la période δt , c'est-à-dire que :

- . Du point de vue géométrique, les points d'application des efforts de liaison se sont déplacés dans le voisinage des points d'application initiaux.
- . Du point de vue dynamique, les efforts de liaisons actuels diffèrent de peu, en intensité et en direction des efforts de liaison initiaux.

Alors, il est possible d'avoir des relations d'équilibre pour les incréments d'efforts, par simple dérivation temporelle des relations dynamiques obtenues précédemment.

On admettra que si un contact est rompu au cours de la période δt , ceci signifiera que les efforts de liaison initiaux étaient voisins de 0 ; a contrario, si un contact est ajouté, les efforts de liaison apportés par ce contact supplémentaire seront également voisins de 0.



$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\vec{g}}_i + \dot{\vec{f}}_i = . \\ \dot{\vec{\mu}}_i + \dot{\vec{\gamma}}_i - \dot{\vec{f}}_i \wedge \vec{x}_i(M_{ij}) - \vec{f}_i \wedge \dot{\vec{x}}_{i|j}(M_{ij}) - \vec{f}_i \wedge (\vec{\omega}_i \wedge \vec{x}_i(M_{ij})) = . \end{array} \right.$$

(En général, les efforts canoniques sont constants : $\dot{\vec{g}}_i = \dot{\vec{\mu}}_i = .$)

CHAPITRE 2

ETAT STATISTIQUE D'UN MILIEU GRANULAIRE

2.1 - PRESENTATION DU PROBLEME TYPE

2.11 - PARAMETRES d'ETAT D'UN SYSTEME GRANULAIRE

2.110 - INTRODUCTION

L'état ou configuration mécanique d'un système constitué de n grains est défini par des paramètres dits de configuration mécanique. Ceux-ci sont de 2 types :

- Les paramètres de configuration géométrique ou paramètres cinématiques
- Les paramètres de configuration de chargements ou paramètres dynamiques

Du bon choix de ces paramètres dépend l'homogénéité et la cohérence d'une solution analytique.

On rappelle qu'un système granulaire (S) est un ensemble constitué d'éléments fermés (grains), dénombrables dont les caractéristiques géométriques et mécaniques sont en principe connues (celles des milieux continus simples). Ces caractéristiques ont été définies dans le chapitre précédent. L'étude des systèmes granulaires abordée ici se limite à des systèmes dont les conditions aux limites (contacts extérieurs) sont classiques, à savoir :

- efforts donnés sur tout ou partie de la surface de contour extérieure $\partial(S)$ du système (S)
- déplacements imposés sur tout ou partie de $\partial(S)$

2.111 - PARAMETRES CINEMATQUES

Ils déterminent l'état géométrique du système granulaire et son évolution. Ils sont de 2 types :

- les paramètres canoniques qui définissent la position et l'orientation des grains d'une part, et leurs vitesses d'autre part.
- les paramètres de contact ou associés qui définissent la position et l'orientation des contacts d'une part et leur vitesse d'autre part.

Il est évident que, puisqu'il s'agit de la cinématique de corps rigides, la position d'un contact est définie de façon unique par la position des 2 grain adjacents (dans le cas général de corps déformables cela n'est plus vrai). C'est pourquoi, pour un système granulaire immobile ou en mouvement Q.S., il existe évidemment un ensemble de relations liant les paramètres cinématiques canoniques et associés entre eux - ceci, afin de tenir compte des conditions de contact de corps rigides (non-interpénétration). Le paramétrage tel qu'il est conçu ici est surabondant.

a - Les paramètres canoniques ou de solide

Comme nous l'avons vu, la position ou la vitesse d'un grain par rapport à un repère de référence est déterminée par les 6 composantes de Lagrange ou encore par 2 grandeurs vectorielles. Il semble naturel de prendre des vecteurs qui sont susceptibles de représenter la translation et la rotation d'un grain. Ces paramètres ont été choisis de la manière suivante :

a.1 - En ce qui concerne les paramètres de position (positionnels)

$$(q) = \{ \vec{c}_i, \vec{\theta}_i \} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

où $\vec{c}_i$ et $\vec{\theta}_i$ sont des vecteurs qui définissent respectivement la position du centre de gravité (G_i) du grain (i) et la rotation de la base liée au grain, $I^\rightarrow$ (axes principaux d'inertie) - relativement au repère de référence ($G_0, 0^\rightarrow$). Pour chaque grain (i) du système ($i = 1, 2, \dots, n$), le couple

$(\vec{c}_i, \vec{\theta}_i)$ est par conséquent, le paramétrage canonique de position. Pour un ensemble constitué de n grains, le nombre total de paramètres de (S) est de $6n$.

$$\text{On pose : } \vec{C} = \begin{bmatrix} \vec{c}_1 \\ \vdots \\ \vec{c}_i \\ \vdots \\ \vec{c}_n \end{bmatrix} \quad \vec{\Theta} = \begin{bmatrix} \vec{\theta}_1 \\ \vdots \\ \vec{\theta}_i \\ \vdots \\ \vec{\theta}_n \end{bmatrix}$$

d'où, $(q) = (C, \Theta)$

a.2 - En ce qui concerne les paramètres de vitesse (motionnels)

$$(\dot{q}) = \{\vec{v}_i, \vec{\omega}_i\} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

où $\vec{v}_i$ et $\vec{\omega}_i$ sont des vecteurs représentant respectivement les vitesses de translation et de rotation du grain (i) ou de (G_i, I) relativement au repère de référence $(G_0, 0)$

Pour chaque grain (i) du système $(i = 1, 2, \dots, n)$, le couple $(\vec{v}_i, \vec{\omega}_i)$ est le paramétrage canonique de mouvement, il s'agit d'un distributeur. Pour un ensemble constitué de n grains, le nombre total de paramètres de $(\dot{q})$ est toujours de $6n$.

$$\text{On pose, } \vec{V} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_i \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{bmatrix} \quad \vec{\Omega} = \begin{bmatrix} \vec{\omega}_1 \\ \vdots \\ \vec{\omega}_i \\ \vdots \\ \vec{\omega}_n \end{bmatrix}$$

d'où $(\dot{q}) = (\vec{V}, \vec{\Omega})$

b - Les paramètres associés ou de contact

D'une façon analogue, la position et la vitesse d'un contact seront définies par des vecteurs représentant la cinématique du point de contact et du plan tangent commun aux grains adjacents. Par ailleurs, les orientations polaires des indicatrices de Dupin et leurs évolutions fournissent un complément d'information sur l'état des éléments de courbure au contact.

b.1 En ce qui concerne les paramètres de position

$$(\tilde{q}) = \{ \vec{b}_{ij}, \vec{n}_{ij}, \vec{t}_{ij} \} \quad (i, j = 1, 2 \dots n)$$

où $\vec{b}_{ij}$ est le vecteur définissant la position du point de contact (M_{ij}) des grains (i) et (j) , relativement au repère de référence. Lorsque 2 grains ne sont pas en contact, les vecteurs $\vec{b}_{ij}$ et $\vec{b}_{ji}$ ont une autre signification ; ils définissent par convention, la position des points associés (M_{ij}) et (M_{ji}) .

$\vec{n}_{ij}$ le vecteur normal à $\partial(i)$ en M_{ij}

$\vec{t}_{ij}$ le premier vecteur de la base principale tangente associée à $\partial(i)$ en (M_{ij}) (le deuxième vecteur s'en déduit immédiatement). C'est le paramètre plus particulièrement attaché à l'orientation des éléments de courbures.

On pose :

$$B^{\rightarrow} = \begin{vmatrix} & \vec{b}_{ji} \\ \vec{b}_{ij} & 0 \end{vmatrix}, \quad N^{\rightarrow} = \begin{vmatrix} & \vec{n}_{ji} \\ \vec{n}_{ij} & 0 \end{vmatrix}, \quad T^{\rightarrow} = \begin{vmatrix} & \vec{t}_{ji} \\ \vec{t}_{ij} & 0 \end{vmatrix}$$

La matrice $D^{\rightarrow} = B^{\rightarrow} - B^{\rightarrow'}$ définit les vecteurs "distance" des grains entre eux, ses termes nuls correspondent aux contacts ; $D^{\rightarrow}$ peut être considérée comme une matrice caractérisant la densité des contacts.

$D^{\rightarrow}$ et $N^{\rightarrow}$ sont antisymétriques $\begin{cases} D^{\rightarrow+} = - D^{\rightarrow} \\ N^{\rightarrow+} = - N^{\rightarrow} \end{cases}$

La matrice $T^{\rightarrow}$ est telle que :

$$t_{ij}^{\rightarrow} \wedge t_{ji}^{\rightarrow} = | t_{ij}^{\rightarrow} \wedge t_{ji}^{\rightarrow} | . n_{ij}^{\rightarrow}$$

(Par convention $b_{ii}^{\rightarrow} = .$, $n_{ii}^{\rightarrow} = .$, $t_{ii}^{\rightarrow} = .$)

d'où, $(\tilde{q}) = (B^{\rightarrow} , N^{\rightarrow} , T^{\rightarrow})$

b.2 - En ce qui concerne les paramètres de vitesse

$$(\tilde{q}) = \{ u_{ij}^{\rightarrow} , \tilde{\omega}_{ij}^{\rightarrow} \}$$

$u_{ij}^{\rightarrow}$ et $\tilde{\omega}_{ij}^{\rightarrow}$ définissent respectivement la différence des vitesses de translation et de rotation des grains (i) et (j) .

On pose :

$$U^{\rightarrow} = \begin{vmatrix} & & & \\ & & & \\ & & u_{ji}^{\rightarrow} & \\ & u_{ij}^{\rightarrow} & & \\ & & & 0 \end{vmatrix} \quad \tilde{\Omega}^{\rightarrow} = \begin{vmatrix} & & & \\ & & & \\ & & \tilde{\omega}_{ji}^{\rightarrow} & \\ & \tilde{\omega}_{ij}^{\rightarrow} & & \\ & & & 0 \end{vmatrix}$$

d'où, $(\tilde{q}) = (U^{\rightarrow}, \tilde{\Omega}^{\rightarrow})$

Les matrices $U^{\rightarrow}$ et $\tilde{\Omega}^{\rightarrow}$ sont antisymétriques.

$$(U^{\rightarrow+} = - U^{\rightarrow} \quad \text{et} \quad \tilde{\Omega}^{\rightarrow+} = - \tilde{\Omega}^{\rightarrow})$$

Le nombre total des paramètres de $(\tilde{q})$ ou de $(\tilde{\dot{q}})$ est de $6n^2$.

2.112 PARAMETRES DYNAMIQUES

Ils déterminent l'état de chargement du système granulaire. Ceux-ci sont de

2 types :

- les paramètres extérieurs qui définissent les chargements intrinsèques auxquels sont soumis les grains, on peut citer, par exemple, comme chargements entrant dans cette catégorie : les forces et couples appliqués directement sur le contour des grains (action d'une paroi ,...), les forces volumiques et en particulier le poids propre des grains.
- les paramètres intérieurs qui définissent l'état des efforts intergranulaires. Il s'agit d'efforts de liaisons internes. On rappelle que dans ce répertoire de ce type d'efforts, ne sont envisagés que des efforts de contact et non pas des efforts dûs à des interactions à distance (répulsions ou attractions).

Puisqu'il s'agit ici de systèmes en mouvement quasi-statique, il existe naturellement un ensemble de relations liant ces différents paramètres.

a - Les paramètres extérieurs ou de solide

Les efforts extérieurs de toutes natures sont réductibles pour le corps rigide qu'est le grain, à un torseur. Celui-ci est défini, par convention, au centre d'inertie de chaque grain.

a.1 En ce qui concerne les paramètres actuels

$$(Q) = \{ \vec{g}_i, \vec{\mu}_i \} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

où $\vec{g}_i$ est la résultante générale des forces extérieures auxquelles est soumis le grain (i) .

et $\vec{\mu}_i$ est le vecteur axial, moment résultant des forces extérieures et des couples auxquels est soumis le grain (i). Pour chaque grain (i) du système, le couple $(\vec{g}_i, \vec{\mu}_i)$ est par conséquent, le paramétrage extérieur actuel. Il s'agit d'un torseur. Pour un ensemble constitué de n grains,

Le nombre total de paramètres de (Q) est donc de $6n$. (n torseurs)

$$\text{On pose, } \vec{G} = \begin{bmatrix} \vec{g}_1 \\ \vdots \\ \vec{g}_i \\ \vdots \\ \vec{g}_n \end{bmatrix} \quad \vec{M} = \begin{bmatrix} \vec{\mu}_1 \\ \vdots \\ \vec{\mu}_i \\ \vdots \\ \vec{\mu}_n \end{bmatrix}$$

d'où $(Q) = (\vec{G}, \vec{M})$

a.2 En ce qui concerne les paramètres incrémentaux

$$(\dot{Q}) = \{\dot{\vec{g}}_i, \dot{\vec{\mu}}_i\} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

où $\dot{\vec{g}}_i \delta t$ et $\dot{\vec{\mu}}_i \delta t$ sont les vecteurs représentant respectivement les accroissements de la résultante générale et du moment résultant au cours de la période δt .

Il s'agit d'accroissements linéaires

$$\delta \vec{g}_i = \dot{\vec{g}}_i \delta t \quad \text{et} \quad \delta \vec{\mu}_i = \dot{\vec{\mu}}_i \delta t$$

ainsi, $(\dot{Q}) = (\dot{\vec{G}}, \dot{\vec{M}})$

b. Les paramètres intérieurs ou intergranulaires

Dans le cas présent, compte tenu de la définition des surfaces de contour, les contacts sont ponctuels, par conséquent le torseur de liaison sera naturellement défini au point de contact.

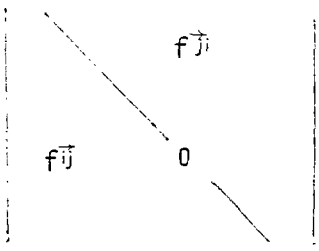
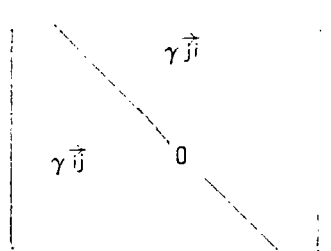
b.1 En ce qui concerne les paramètres actuels

$$(\tilde{Q}) = \{\vec{f}_{ij}, \vec{\gamma}_{ij}\} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

où $\vec{f}_{ij}$ et $\vec{\gamma}_{ij}$ sont les vecteurs force et couple de liaison du grain (i) avec le grain (j) , appliqués au point de contact (M_{ij}) . Pour chaque contact

(ij), le couple $(\vec{f}_{ij}, \vec{\gamma}_{ij})$ est le paramétrage intérieur actuel. Pour un ensemble constitué de n grains, le nombre total de termes non nuls varie avec le nombre de contacts effectifs. On pose, par convention : $\vec{f}_{ii} = \vec{\gamma}_{ii} = .$, et puisqu'il n'existe pas d'actions à distance,

$$\text{si } d_{ij}^{\rightarrow} \neq . \quad \text{alors} \quad \begin{cases} \vec{f}_{ij} = - \vec{f}_{ji} = . \\ \vec{\gamma}_{ij} = - \vec{\gamma}_{ji} = . \end{cases}$$

On pose, $F^{\rightarrow} =$  $\Gamma^{\rightarrow} =$ 

ainsi, $(\tilde{Q}) = (F^{\rightarrow}, \Gamma^{\rightarrow})$

L'équilibre de chaque contact impose l'antisymétrie des matrices $F^{\rightarrow}$ et $\Gamma^{\rightarrow}$, soit $F^{\rightarrow t} = - F^{\rightarrow}$ et $\Gamma^{\rightarrow t} = - \Gamma^{\rightarrow}$

b.2 En ce qui concerne les paramètres incrementaux :

$$(\tilde{Q}) = \{\dot{\vec{f}}_{ij}, \dot{\vec{\gamma}}_{ij}\} \quad (i, j = 1, 2 \dots n)$$

On définira de même $\dot{\vec{f}}_{ij} \delta t$ et $\dot{\vec{\gamma}}_{ij} \delta t$ comme les accroissements des forces et des couples de liaison, pendant la période δt .

d'où $(\dot{\tilde{Q}}) = (\dot{F}^{\rightarrow}, \dot{\Gamma}^{\rightarrow})$

Comme précédemment, $\dot{F}^{\rightarrow}$ et $\dot{\Gamma}^{\rightarrow}$ sont des matrices antisymétriques. Les accroissements sont linéaires.

Pour un ensemble constitué de n grains, le nombre total de paramètres de liaison, actuels ou incrémentaux, est de $6 n^2$ (n^2 torseurs).

2.113 RECAPITULATIF DES PARAMETRES DE CONFIGURATION MECANIQUE

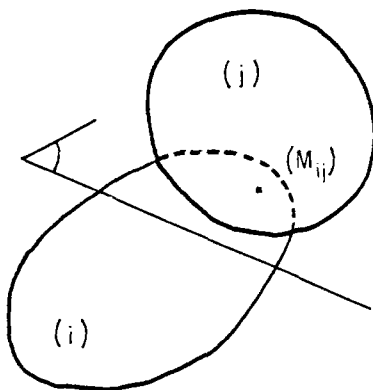
		positionnels	motionnels
paramètres mécaniques	paramètres cinématiques	canoniques	$\{c_i^{\rightarrow}, \theta_i^{\rightarrow}\}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ $(q) = (C^{\rightarrow}, \Theta^{\rightarrow})$
		associés	$\{b_{ij}^{\rightarrow}, n_{ij}^{\rightarrow}, t_{ij}^{\rightarrow}\}$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ $(\tilde{q}) = (B^{\rightarrow}, N^{\rightarrow}, T^{\rightarrow})$
	paramètres dynamiques	actuels	incrémentaux
		extérieurs	$\{g_i^{\rightarrow}, \mu_i^{\rightarrow}\}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ $(Q) = (G^{\rightarrow}, M^{\rightarrow})$
		intérieurs	$\{f_{ij}^{\rightarrow}, \gamma_{ij}^{\rightarrow}\}$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ $(\tilde{Q}) = (F^{\rightarrow}, \Gamma^{\rightarrow})$

2.12 - CHOIX DES DONNEES DU PROBLEME-TYPE

2.121 - ESPACES DE CONFIGURATION

L'espace de configuration cinématique d'un système (S) constitué de n grains astreints à des liaisons est défini par l'ensemble de toutes les positions et déplacements possibles respectant les conditions de liaison (non-interpénétration des grains, limites du domaine du système).

De même, l'espace de configuration dynamique du système astreint à des liaisons est l'ensemble des valeurs des paramètres de chargements respectant les conditions de liaison (critère de frottement) et les lois de la mécanique (équilibre statique)



Un contact ponctuel entre 2 grains constitue 1 degré de liaison

a - Paramétrage

L'espace des paramètres ayant été défini au § 2.113, une solution mécanique requiert la détermination préalable d'un paramétrage strict, c'est-à-dire pour lequel, tous les paramètres sont indépendants. Il est clair que le paramétrage actuel constitué de (q) , $(\dot{q})$, $(\tilde{q})$, $(\ddot{q})$ et de (Q) , $(\dot{Q})$, $(\tilde{Q})$, $(\ddot{Q})$ est surabondant. Ce sont donc les relations déduites des conditions de liaison et des lois de la mécanique qui permettront de

rendre ce paramétrage strict.

L'extension en phase est le "volume" de l'espace des configurations cinématiques et dynamiques possibles compte tenu du paramétrage strict.

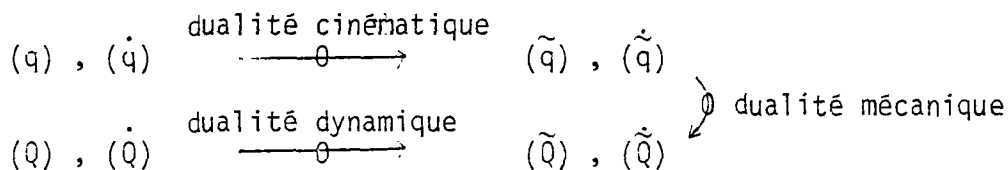
b - Dimensions des espaces de configuration

La dimension de l'espace de configuration des déplacements, diminuée du nombre de liaisons non-holonomes, est égale au nombre de degrés de liberté du système granulaire (n grains). Si $3m$ représente le nombre de degrés de liaison, c'est-à-dire le nombre de relations scalaires liant les paramètres cinématiques, $6n - 3m$ est la dimension de l'espace (cf § 2 122 a).

La dimension de l'espace de configuration dynamique est égal au nombre de degrés d'hyperstaticité du système granulaire pour une configuration géométrique donnée. Si $3m' - 6n$ est la dimension de cet espace, ceci veut dire que l'on peut trouver $3m' - 6n$ paramètres indépendants tels que les équations la mécanique (statique ici) soient vérifiées. Il s'agit bien de l'hyperstaticité intérieure. (cf § 2 122 b).

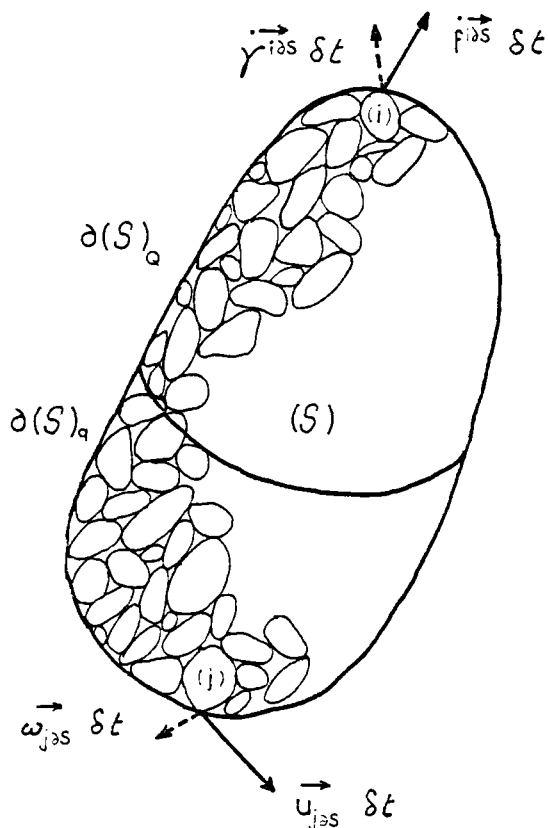
Remarque :

Le choix proposé des espaces de paramètres fait apparaître de manière satisfaisante, les dualités cinématiques, dynamiques et mécaniques qui permettent la recherche d'une solution.



c - Conditions aux limites

Pour une configuration mécanique donnée, le problème qui se pose est celui de la détermination des accroissements inconnus des paramètres



canoniques (de grains) et de tous les paramètres associés (de contacts), induits par des accroissements donnés de certains paramètres cinématiques ou dynamiques canoniques.

Pour ce faire, il est nécessaire de connaître l'état actuel de tous les paramètres positionnels et de chargement. Considérant donc (état configuratif connu) un système (S) constitué de n grains, limité par sa frontière actuelle $\partial(S)$, le répertoire des données, s'établit comme suit :

Schématisation des conditions aux limites du problème-type

- dans (S)
 - tous les paramètres cinématiques positionnels (q) et ($\tilde{q}$)
(configuration géométrique connue)
 - tous les paramètres dynamiques actuels (Q) et ($\tilde{Q}$)
(configuration dynamique actuelle connue)
- sur $\partial(S)$
 - tous les paramètres mécaniques actuels
 $(q)_{\partial S}$, $(\tilde{q})_{\partial S}$, $(Q)_{\partial S}$, $(\tilde{Q})_{\partial S}$
- sur $\partial(S)_Q$

On connaît les incréments des paramètres dynamiques (efforts de contact entre le système (S) et l'extérieur

$$(\tilde{Q})_{\partial S} = \{ \vec{f}_{i\partial S} , \vec{\gamma}_{i\partial S} \} \quad (i = 1, \dots, m)$$

- sur $\partial(S)_q$

On connaît l'accroissement des paramètres cinématiques (contacts imposés entre les grains du système et l'extérieur selon

$$\partial(S)_q : (\dot{\tilde{q}})_{\partial S} = \{ \vec{u}_{i\partial S}, \vec{\omega}_{i\partial S} \} \quad (i = m, \dots, n)$$

Entre 2 instants séparés par la période δt , le système (S) évolue entre les configurations définies par les paramètres

$$\begin{bmatrix} (q) \\ (\tilde{q}) \\ (Q) \\ (\tilde{Q}) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} (q) + (\dot{q}) \delta t \\ (\tilde{q}) + (\dot{\tilde{q}}) \delta t \\ (Q) + (\dot{Q}) \delta t \\ (\tilde{Q}) + (\dot{\tilde{Q}}) \delta t \end{bmatrix}$$

Remarque :

Il va de soi que, seuls sont envisagés les mouvements stables, c'est-à-dire correspondant à un état de configuration évolutif selon les lois de la statique (chaque état intermédiaire vérifie les conditions d'équilibre et les conditions cinématiques). Dans le cas contraire, les mouvements sont instables, les effets d'inertie ne sont plus à négliger, il n'est plus possible d'établir une loi d'écoulement.

2.122 - RELATION LIANT LES PARAMETRES MECANIQUES

Les relations liant les paramètres mécaniques sont une généralisation à l'ensemble du système (S) des relations obtenues pour un grain unique. Elles consistent à rendre strict le paramétrage mécanique.

a. Relations liant les paramètres cinématiques

a.1 Compte tenu de l'existence de surface de contour des grains avec impossibilité de déformation et d'interpénétration de ces surfaces, la position d'un grain vis à vis de ses voisins est limitée voire imposée, et la position

en fonction de $\vec{c}_i$, $\vec{c}_j$, $\vec{\theta}_i$, $\vec{\theta}_j$ et des fonctions scalaires G_i et G_j

En utilisant les termes de tenseurs de 3ème et 4ème ordre sur un espace de dimension n , pour $\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{\Omega}$, $\vec{C}$, $\vec{B}$:

$$\vec{u}_{ij} = (\delta_i^k - \delta_j^k) \vec{v}_k + (\delta_i^k \delta_j^l - \delta_i^l \delta_j^k) \vec{\omega}_k \wedge \vec{b}_{kl} + (\delta_j^k \delta_i^l - \delta_i^k \delta_j^l) \vec{\omega}_k \wedge \vec{c}_l$$

avec $(i, j, k, l = 1, 2, \dots, n)$

et, δ_i^k représentant le symbole de Kronecker

de même, entre $\vec{\tilde{\Omega}}$ et $\vec{\Omega}$

$\vec{\tilde{\omega}}_{ij} = -\vec{\omega}_i + \vec{\omega}_j$ s'exprime de la façon suivante

$$\vec{\tilde{\omega}}_{ij} = (\delta_j^k - \delta_i^k) \vec{\omega}_k$$

Les relations d'évolution de la position du contact sont obtenues à partir de :

$$\begin{aligned} & (\eta_{s,ij} - \eta_{d,ij}) \dot{\vec{x}}_{i|j} + (\eta_{s,ji} - \eta_{d,ji}) \dot{\vec{x}}_{j|i} - \vec{\omega}_{ij} \wedge \vec{n}_{ij} \\ & + 2\eta_{d,ij} (\dot{\vec{x}}_{i|j} \cdot \vec{t}_{ij}') \cdot \vec{t}_{ij} + 2\eta_{d,ji} (\dot{\vec{x}}_{j|i} \cdot \vec{t}_{ji}') \cdot \vec{t}_{ji} = 0 \end{aligned}$$

Avec les relations précédentes, il est théoriquement possible, bien que fastidieux, de calculer $\dot{\vec{x}}_{i|j}$ et $\dot{\vec{x}}_{j|i}$ et ainsi de déterminer l'évolution des paramètres positionnels actuels $\vec{b}_{ij}$, $\dot{\vec{h}}_{ij|0}$, $\vec{t}_{ij|0}$, en fonction de $\vec{v}_i$, $\vec{v}_j$, $\vec{\omega}_i$ et $\vec{\omega}_j$. Ces résultats sont donnés par une configuration géométrique initiale donnée $(\vec{c}_i, \vec{c}_j, \vec{\theta}_i, \vec{\theta}_j$ et $\vec{b}_{ij}, \vec{n}_{ij}, \vec{t}_{ij})$.

Cas particulier: Grains sphériques ou problème plan

La solution explicite pour des grains sphériques ($\eta_d = 0$) est donnée par

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\vec{x}}_{i|j} - \dot{\vec{x}}_{j|i} &= \vec{u}_{ij} \\ \eta_{s,ij} \dot{\vec{x}}_{i|j} + \eta_{s,ji} \dot{\vec{x}}_{j|i} &= \vec{\omega}_{ij} \wedge \vec{n}_{ij} \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
 \text{Soit, } \vec{b}_{ij} &= \vec{v}_i + \omega_i \wedge (\underbrace{\vec{b}_{ij} - \vec{c}_i}_{\substack{\eta_{sij} \\ \vec{n}_{ij}}}) + \dot{\vec{x}}_{i|l} \\
 &= \frac{1}{\eta_{sij} + \eta_{sji}} (\eta_{sij} \vec{v}_i + \eta_{sji} \vec{v}_j) \\
 \dot{\vec{n}}_{ij|0} &= \dot{\vec{n}}_{ij|l} + \omega_i \wedge \vec{n}_{ij} = \frac{\eta_{sij} \eta_{sji}}{\eta_{sij} + \eta_{sji}} (\vec{v}_i - \vec{v}_j)
 \end{aligned}$$

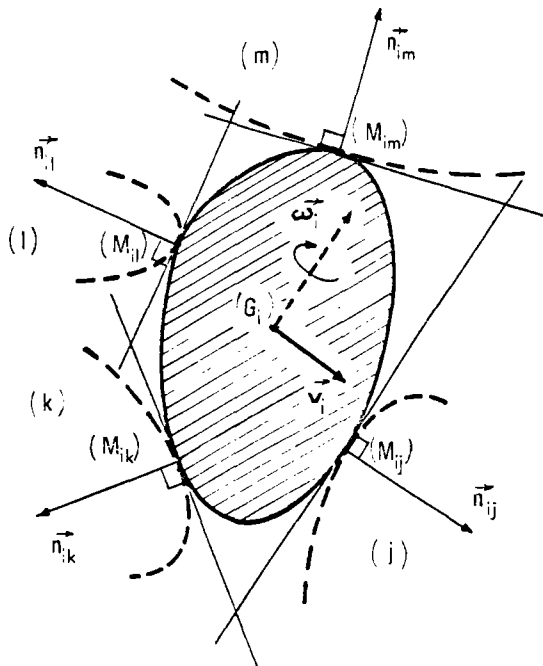
Pour une configuration géométrique donnée, les paramètres de vitesse cinématiquement admissibles sont donnés par

$$\vec{u}_{ij} \cdot \vec{n}_{ij}' \geq 0$$

lorsqu'il y a un contact actuel entre (i) et (j) .

C'est essentiellement la condition de "non-interpénétration" des surfaces qui impose la licéité des paramètres motionnels.

Pour ce qui est des paramètres canoniques :



$$\begin{aligned}
 & \vec{v}_i \cdot \vec{n}_{ij}' + \omega_i \cdot ((\vec{b}_{ij} - \vec{c}_i) \wedge \vec{n}_{ij})' \\
 & + \vec{v}_j \cdot \vec{n}_{ji}' + \omega_j \cdot ((\vec{b}_{ji} - \vec{c}_j) \wedge \vec{n}_{ji})' \geq 0
 \end{aligned}$$

$$(\text{avec, } \vec{n}_{ij}' = - \vec{n}_{ji})$$

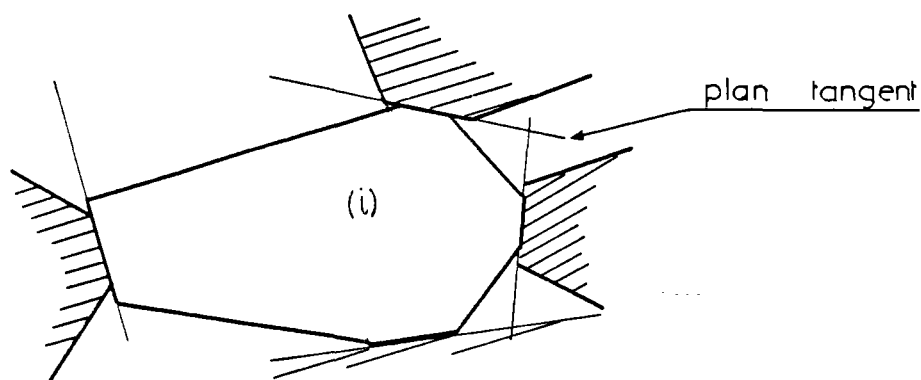
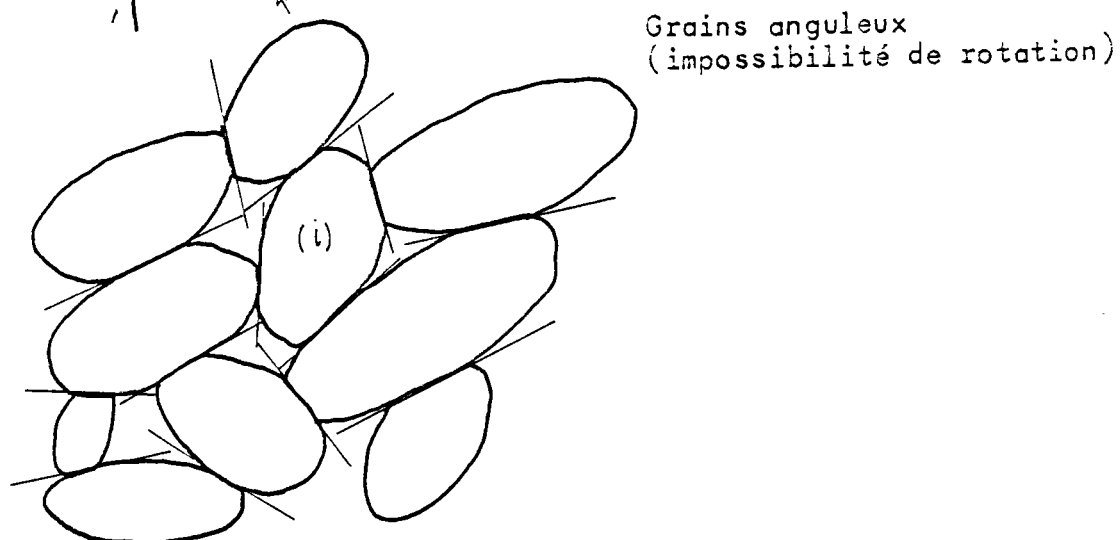
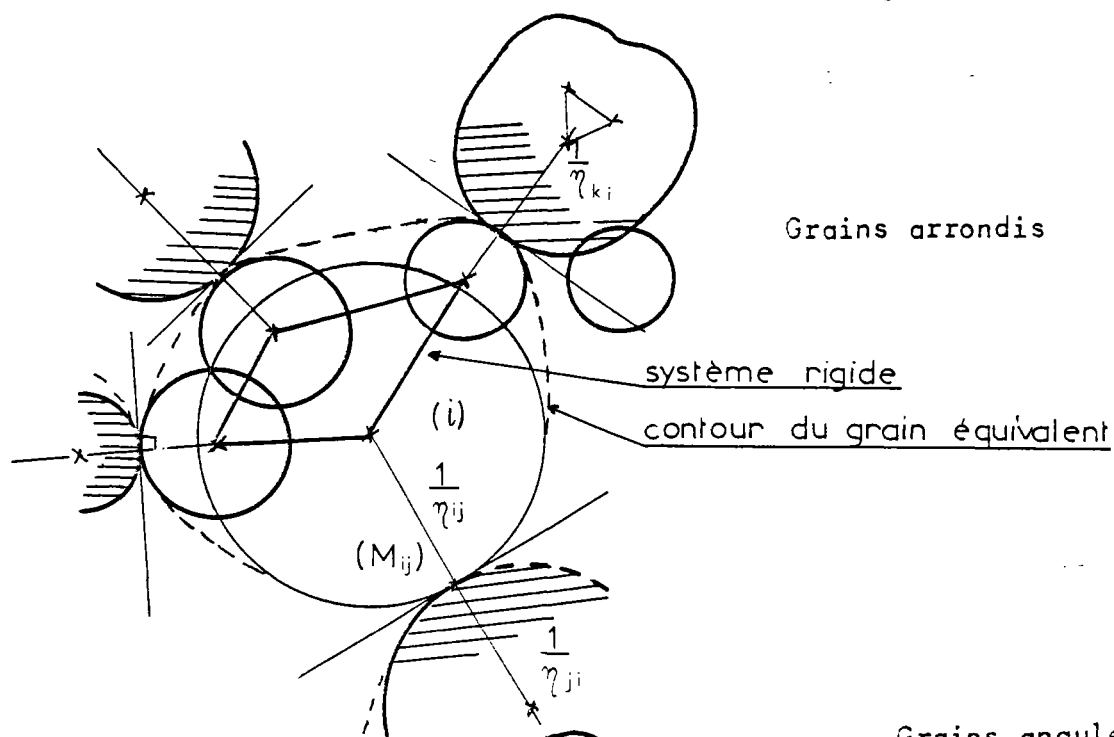
(Relation déduite de la précédente compte tenu de la rigidité des grains)

Remarque :

Les conditions de conservation du contact font que les grains sont équivalents, en 1ère approximation à des réunions de surfaces ellipsoïdales dont les

sommets sont les points de contacts (M_{ij}).

Pour le problème plan, la surface des grains est équivalente à la réunion des cercles osculateurs au niveau des contacts. Ces cercles peuvent être sécants ou disjoints mais restent assemblés rigidement.



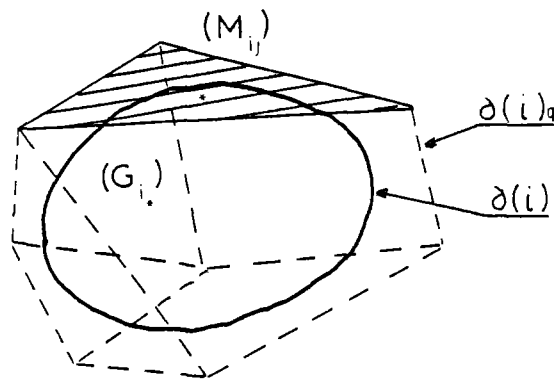
a.2 Degré de liberté du système (S)

Les conditions de déplacement d'un grain (i) sont données par des inéquations. Les déplacements propres d'un grain sont liés à ceux des grains adjacents puisque les conditions cinématiques sont implicites $(u_{ij}^{\rightarrow}, \omega_{ij}^{\rightarrow})$. En l'absence de mouvement de ces grains adjacents, on est ramené à une série d'inégalités ne portant seulement que sur $v_i^{\rightarrow}$ et $\omega_i^{\rightarrow}$.

$$v_i^{\rightarrow} \cdot n_{ij}^{\rightarrow'} + \omega_i^{\rightarrow} \cdot ((b_{ij}^{\rightarrow} - c_i^{\rightarrow}) \wedge n_{ij}^{\rightarrow'})^{\perp} \geq 0$$

le polyèdre convexe $\partial(i)_q$ circonscrit à $\partial(i)$, formé par les plans tangents aux contacts peut-être qualifié de polyèdre de stabilité cinématique.

(Les équations des faces du polyèdre sont données par les conditions de normalité : $(x^{\rightarrow} - b_{ij}^{\rightarrow}) \cdot n_{ij}^{\rightarrow'} = 0$



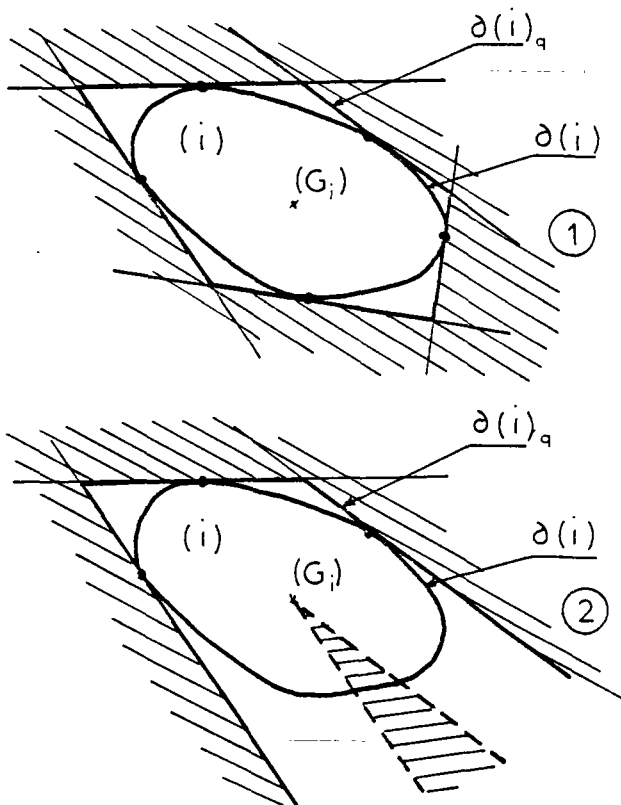
Discussion:

Si le polyèdre $\partial(i)_q$ est fermé alors nécessairement $v_i^{\rightarrow} = 0$.

Si il existe un solide de révolution circonscrit au grain par les contacts alors, dans certaines conditions, le grain peut tourner

sur lui-même, autour de l'axe de révolution. Dans le cas contraire $\omega_i^{\rightarrow} = 0$. La justification mathématique porte sur les 2 conditions de conservation du contact.

Dans le cas où $\partial(i)_q$ est ouvert, la vitesse $v_i^{\rightarrow}$ peut prendre une direction comprise dans le cône délimité par les plans d'équation $(x^{\rightarrow} - c_i^{\rightarrow}) \cdot n_{ij}^{\rightarrow'} = 0$ (issus de $v_i^{\rightarrow} \cdot n_{ij}^{\rightarrow'} = 0$).



Degré de liberté en translation
d'un grain en contact avec des
grains adjacents immobiles

(1) grain bloqué

(2) cône des vitesses possibles

Pour le système ($\mathcal{S}$), on a :

nb. de paramètres vectoriels motionnels canoniques : $2n$

nb. de conditions vectorielles de liaisons

nb. de conditions de blocage : $m(\mathcal{S})$

$$\mathcal{A}_q^\circ(\mathcal{S}) = 3(2n - m(\mathcal{S}))$$

b. Relations liant les paramètres dynamiques

Etant donnée une configuration géométrique pour le système ($\mathcal{S}$) on se propose de déterminer les relations qui existent entre les paramètres dynamiques (Q) et ($\tilde{Q}$) puis ($\dot{Q}$) et ($\dot{\tilde{Q}}$), afin de rendre le paramétrage strict.

La puissance des efforts du système ($\mathcal{S}$) à l'instant donné t est définie comme le produit scalaire des paramètres motionnels de l'espace cinématique par les paramètres actuels de l'espace des chargements

ainsi, $P_{\text{ext}} = (Q) \cdot (\dot{q})^t$ puissance des efforts extérieurs

$$= \underbrace{G^{\rightarrow} \cdot V^{\rightarrow t} + M^{\rightarrow} \cdot \Omega^{\rightarrow t}}_{\text{dans } (S)} + \underbrace{\{ F^{\vec{a}S} \cdot U_{aS}^{\rightarrow t} + R^{\vec{a}S} \cdot \Omega_{aS}^{\rightarrow t} \}}_{\text{sur } \partial(S)}$$

$$= g_i^{\rightarrow} \cdot v_i^{\rightarrow t} + \mu_i^{\rightarrow} \cdot \omega_i^{\rightarrow t} + \{ f_{i\partial S}^{\vec{a}S} \cdot u_{i\partial S}^{\rightarrow t} + \gamma_{i\partial S}^{\vec{a}S} \cdot \omega_{i\partial S}^{\rightarrow t} \}$$

$P_{\text{int}} = - (\tilde{Q}) \cdot (\dot{\tilde{q}})^t$ puissance des efforts intérieurs

$$= - \frac{1}{2} \text{tr} \left(\underbrace{F^{\rightarrow} \cdot U^{\rightarrow t} + R^{\rightarrow} \cdot \Omega^{\rightarrow t}}_{\text{dans } (S)} \right)$$

$$= - \frac{1}{2} (f_{ij}^{\rightarrow} \cdot u_{ij}^{\rightarrow t} + \gamma_{ij}^{\rightarrow} \cdot \tilde{\omega}_{ij}^{\rightarrow t})$$

La puissance totale du système

$$P_{\text{tot}} = P_{\text{ext}} + P_{\text{int}}$$

b.1 Relations liant les paramètres dynamiques actuels. En ce qui concerne l'équilibre global du système sous l'action des efforts extérieurs, le principe des puissances virtuelles sera appliqué localement, en considérant un champ de vitesses virtuelles $(\hat{q})$ qui rigidifie le système (S) dans son ensemble. Ainsi, le mouvement de (S) est un mouvement de solide.

$$(\hat{q}) = \{ \hat{v}_i^{\rightarrow}, \hat{\omega}_i^{\rightarrow} \} \text{ avec } \begin{cases} \hat{v}_i^{\rightarrow} = \hat{v}_o^{\rightarrow} + \hat{\omega}_o^{\rightarrow} \wedge c_i^{\rightarrow} \\ \hat{\omega}_i^{\rightarrow} = \hat{\omega}_o^{\rightarrow} \end{cases}$$

Dans ces conditions, la puissance virtuelle des efforts extérieurs

$$\hat{P}_{\text{ext}} = g_i^{\rightarrow} \cdot \hat{v}_i^{\rightarrow t} + \mu_i^{\rightarrow} \cdot \hat{\omega}_i^{\rightarrow t} + \{ f_{i\partial S}^{\vec{a}S} \cdot \hat{u}_{i\partial S}^{\rightarrow t} + \gamma_{i\partial S}^{\vec{a}S} \cdot \hat{\omega}_{i\partial S}^{\rightarrow t} \}$$

$$\text{où } \begin{cases} \hat{u}_{i\partial S}^{\rightarrow} = \hat{v}_i^{\rightarrow} + \hat{\omega}_i^{\rightarrow} \wedge x_i^{\rightarrow} (M_{i\partial S}) \\ \quad = \hat{v}_o^{\rightarrow} + \hat{\omega}_o^{\rightarrow} \wedge (c_i^{\rightarrow} + x_i^{\rightarrow}) \\ \hat{\omega}_{i\partial S}^{\rightarrow} = \hat{\omega}_o^{\rightarrow} \end{cases}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\hat{P}_{\text{ext}} = & \vec{g}^{\rightarrow} \cdot \vec{v}_o^{\rightarrow} + (\vec{\mu}^{\rightarrow} - \vec{g}^{\rightarrow} \wedge \vec{c}_i^{\rightarrow}) \cdot \vec{\omega}_o^{\rightarrow} \\ & + \{ \vec{f}^{\rightarrow s} \cdot \vec{v}_o^{\rightarrow} + (\vec{\gamma}^{\rightarrow s} - \vec{f}^{\rightarrow s} \wedge (\vec{c}_i^{\rightarrow} + \vec{x}_i^{\rightarrow})) \cdot \vec{\omega}_o^{\rightarrow} \}\end{aligned}$$

La puissance virtuelle des efforts intérieurs est évidemment nulle dans un mouvement de solide, par conséquent :

$$\hat{P}_{\text{int}} = 0$$

Ceci, reste vrai quels que soient $\vec{v}_o^{\rightarrow}$ et $\vec{\omega}_o^{\rightarrow}$, donc

$$\vec{g}^{\rightarrow} + \{ \vec{f}^{\rightarrow s} \} = .$$

$$\vec{\mu}^{\rightarrow} - \vec{g}^{\rightarrow} \wedge \vec{c}_i^{\rightarrow} + \{ \vec{\gamma}^{\rightarrow s} + \vec{f}^{\rightarrow s} \wedge (\vec{c}_i^{\rightarrow} + \vec{x}_i^{\rightarrow}) \} = .$$

$$(\text{on a posé } \vec{g}^{\rightarrow} = \sum \vec{g}_i^{\rightarrow} \text{ et } \vec{\mu}^{\rightarrow} = \sum \vec{\mu}_i^{\rightarrow})$$

Ces équations traduisent l'équilibre global du système sous l'action de (Q)

(Matriciellement : $\vec{t}_R (\vec{G} + \vec{F}^{\rightarrow s}) = .$

$$\text{et } \vec{t}_R (\vec{M}^{\rightarrow}) - \vec{G}^{\rightarrow} \wedge \vec{C}^{\rightarrow} + \{ \vec{t}_R (\vec{\Gamma}^{\rightarrow s}) - \vec{F}^{\rightarrow s} \wedge \vec{X}_{\text{gs}}^{\rightarrow} \} = .)$$

Les efforts de contact formant un système nul, en chaque point de contact

(M_{ij}), on a :

$$\vec{f}_{ij}^{\rightarrow} + \vec{f}_{ji}^{\rightarrow} = . \text{ et } \vec{\gamma}_{ij}^{\rightarrow} + \vec{\gamma}_{ji}^{\rightarrow} = . \quad (\text{résultat déjà noté})$$

(Matriciellement : $\vec{F}^{\rightarrow} + \vec{F}^{\rightarrow t} = .$ et $\vec{\Gamma}^{\rightarrow} + \vec{\Gamma}^{\rightarrow t} = .$)

b.2 Relations liant les paramètres dynamiques incrémentaux

Dans l'hypothèse où l'écart de configuration géométrique est petit (entre t et $t + \partial t$), c'est-à-dire que la configuration géométrique actuelle est voisine de la configuration initiale, ou encore qu'il y ait conservation

des contacts pendant la période ∂t , on obtient les relations d'équilibre des paramètres dynamiques incrémentaux, par dérivation des relations d'équilibre des paramètres dynamiques actuels.

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{g} + \{ \vec{f} \cdot \vec{s} \}) = 0.$$

$$\text{c'est-à-dire : } \text{tr} (\dot{\vec{G}} + \dot{\vec{F}} \cdot \vec{s}) = 0.$$

(Dans le cas général, $\dot{\vec{G}}$ est nul, puisqu'il s'agit essentiellement des efforts dûs au poids des grains. Cette relation traduit alors l'équilibre extérieurs des incréments d'efforts sur $\partial(S)$)

La seconde expression est la somme de 2 termes

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\mu} - \vec{g} \wedge \vec{c}_i) + \frac{\partial}{\partial t} \{ \gamma \cdot \vec{s} - \vec{f} \cdot \vec{s} \wedge (\vec{c}_i + \vec{x}_i) \} = 0.$$

Le premier terme donne sans difficulté : $\dot{\vec{\mu}} - \vec{g} \wedge \vec{v}_i - \dot{\vec{g}} \wedge \vec{c}_i$

le second terme est une dérivation des efforts sur $\partial(S)$.

$\vec{x}_i(M_{i\partial S})$ représentant la position du point de contact de (i) avec $\partial(S)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{x}_i(M_{i\partial S}) = \vec{\omega}_i \wedge \vec{x}_i + \dot{\vec{x}}_{i||}$$

Ce problème se rattache est celui de la cinématique du contact d'un corps rigide et d'une surface déformable $\partial(S)$

Sans définir le mouvement de $\partial(S)$, on écrira

$$\dot{\vec{x}}_{i||} = \vec{u}_{i\partial S} + \dot{\vec{x}}_{\partial S}$$

en faisant intervenir la vitesse de glissement du grain sur la paroi $u_{i\partial S}^{\rightarrow}$.

On en déduit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \{ \gamma^{\rightarrow} \cdot \vec{\partial s} - f^{\rightarrow} \cdot \vec{\partial s} \wedge (C_i^{\rightarrow} + X_i^{\rightarrow}) \} = \{ \dot{\gamma}^{\rightarrow} \cdot \vec{\partial s} - \dot{f}^{\rightarrow} \cdot \vec{\partial s} \wedge (V_i^{\rightarrow} + \omega_i^{\rightarrow} \wedge X_i^{\rightarrow} + u_{i\partial S}^{\rightarrow} + \dot{X}_{\partial S}^{\rightarrow}) - \dot{f}^{\rightarrow} \cdot \vec{\partial s} \wedge (C_i^{\rightarrow} + X_i^{\rightarrow}) \}$$

Enfin, en ce qui concerne les paramètres internes, la conservation des contacts implique :

$$\dot{f}_{ij}^{\rightarrow} + \dot{f}_{ji}^{\rightarrow} = . \quad \text{et} \quad \dot{\gamma}_{ij}^{\rightarrow} + \dot{\gamma}_{ji}^{\rightarrow} = .$$

(Matriciellement : $\dot{\vec{F}}^{\rightarrow} + \dot{\vec{F}}^{\rightarrow'} = .$ et $\dot{\vec{r}}^{\rightarrow} + \dot{\vec{r}}^{\rightarrow'} = .$)

b.3 Hyperstaticités du système (S)

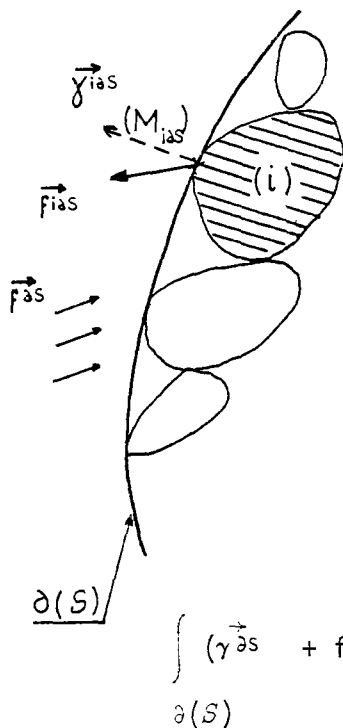
Sur la partie $\partial(S)_q$ où les déplacements sont imposés, se développent des efforts de contact des grains avec la paroi. La résultante de ces efforts, définie comme une densité surfacique de forces et de couples, constitue la réponse dynamique extérieure du système aux incréments d'efforts imposés sur $\partial(S)_Q$ et aux vitesses de déplacements imposées sur $\partial(S)_q$. Les relations de la statique conduisent aux équations :

$$\frac{\delta}{\delta t} \int_{\partial(S)_q} f^{\rightarrow} \cdot \vec{\partial s} + \underbrace{\frac{\delta}{\delta t} \int_{\partial(S)_Q} f^{\rightarrow} \cdot \vec{\partial s}}_{\text{efforts donnés}} + \text{tr}(\dot{\vec{G}}^{\rightarrow}) = .$$

$$\frac{\delta}{\delta t} \int_{\partial(S)_q} (\gamma^{\rightarrow} \cdot \vec{\partial s} - f^{\rightarrow} \cdot \vec{\partial s} \wedge X^{\rightarrow}) + \underbrace{\frac{\delta}{\delta t} \int_{\partial(S)_Q} (\gamma^{\rightarrow} \cdot \vec{\partial s} - f^{\rightarrow} \cdot \vec{\partial s} \wedge X^{\rightarrow})}_{\text{efforts donnés}} + \text{tr}(\dot{\vec{M}}) - \dot{\vec{G}} \wedge C^{\rightarrow'} - \dot{\vec{G}}^{\rightarrow} \wedge V^{\rightarrow'} = .$$

Si ces équations sont insuffisantes pour déterminer $f^{\rightarrow}$ et $\gamma^{\rightarrow}$ sur

$\partial(S)_q$, le système est dit hyperstatique extérieurement. L'étude de l'hyperstaticité extérieure constitue à l'heure actuelle, un problème difficile de mécanique, nécessitant la connaissance d'une loi de comportement interne. En géotechnique, c'est, par exemple, le problème du comportement d'une paroi verticale (mur de soutènement ou rideau), et d'une manière générale de l'interaction sol-fondation. Le problème posé par le contact de grains avec une paroi déformable reste très théorique et ne se pose pas dans les cas courants.



Du point de vue microscopique, les efforts appliqués par les grains sur la frontière équilibrent les efforts surfaciques f_{as} et γ_{as} . Que la paroi soit, rigide, déformable ou absente par morceaux, les équations de contact demeurent :

$$\int_{\partial(S)} f_{as} \, ds + \sum_i f_{as} = 0.$$

$$\int_{\partial(S)} (\gamma_{as} + f_{as} \wedge x_{as}) \, ds + \sum_i (\gamma_{as} + f_{as} \wedge (c + x)) = 0.$$

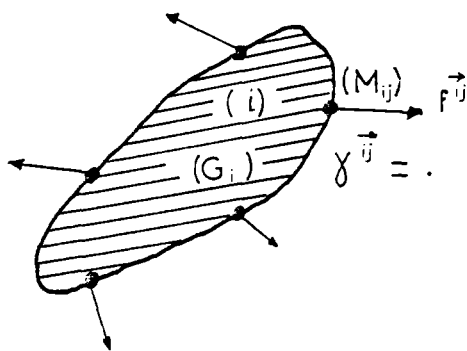
On a admis implicitement la convexité de chaque grain et l'unicité du contact grain-paroi.

L'examen du degré d'hyperstaticité intérieure du système se fonde sur les hypothèses suivantes :

- Le problème de l'hyperstaticité extérieure est supposé résolu; on connaît par conséquent f_{as} et γ_{as} sur le contour.
- La configuration géométrique est donnée ; sont donc connus (q) et $(\tilde{q})$.

- Les critères de liaison ne sont pas pris en compte, à ce stade. Toutefois, les couples de contacts γ_{ij} sont supposés négligeables dans cette évaluation.

Un ensemble d'efforts intégranulaires est dit "statiquement admissible intérieurement", si, les paramètres de chargement (Q) étant connus (et vérifiant les conditions d'équilibre global), les paramètres internes ($\tilde{Q}$) vérifient également les équations d'équilibre interne.



Si $m'(i)$ est le nombre de contacts du grain (i) avec ses voisins, le nombre d'inconnues vectorielles du contact est à priori de m' . Les équations d'équilibre intrinsèque du grain fournissent 2 relations vectorielles.

d'où le degré d'hyperstaticité de (i) $\bar{a}_Q^o(i) = 3 \times (m'(i) - 2)$

Au niveau du système (S) si l'on répertorie les contacts, on a :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{nb. de contacts intergranulaires} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m'(i) = m'(S) \\ \text{nb. de contacts grains paroi } \partial(S) & m''(\partial S) \end{array} \right.$$

Les inconnues affectées à chaque contact

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{nb. d'inconnues de contact intergranulaires} & 2 m'(S) \\ \quad (\text{nb. de termes non nuls de } \vec{F}) & \\ \text{nb. d'inconnues de contact, grain-paroi } \partial(S) & m''(\partial S) \end{array} \right.$$

Les équations d'équilibre

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{nb. de relations d'équilibre intrinsèque des grains :} & 2 n \\ \text{nb. de relations d'équilibre de contact :} & m'(S) \\ \text{nb. de relations d'équilibre du contact, grain-paroi } \partial(S) & 2 \end{array} \right.$$

On en déduit le degré d'hyperstaticité intérieur global du système (S)

$$d_Q^o(S) = 3 \times (m'(S) + m''(\partial S) - 2n - 2)$$

Pour n suffisamment grand, $m''(\partial S)$ peut être négligé, il reste

$$d_Q^o(S) \sim 3(m'(S) - 2n)$$

(La quantité $m'_{\text{moy}} = \frac{2}{n} m'(S)$ représente le nb. moyen de contacts par grain)

Discussion :

N'ayant pas pris en compte, à ce stade, les relations supplémentaires affectant la licéité des forces de contact (par exemple, limitation de la composante tangentielle, troncature en traction, etc ...) il est évident que la signification de m'_{moy} est purement théorique pour un système granulaire réel. En fait, le nombre d'inconnues réelles est inférieur à

$$d_Q^o(S) = \frac{3}{2} n (m'_{\text{moy}} - 4)$$

Le problème de l'équilibre d'un corps par le jeu de forces de compression, constitue la première étape de l'étude d'un assemblage. On notera l'importance du polyèdre de sustentation $\partial(i)_0$, qui est le polyèdre convexe inscrit dans $\partial(i)$, dont les sommets sont les points de contacts intergranulaires.

"Une condition nécessaire pour que le corps (i) soit en équilibre sous l'action de forces de contact positives (troncature en traction) est que la résultante des forces appliquées aux points de contact non situés une face quelconque, passe par l'intérieur de la face choisie".

La condition $m'(i) = 4$ (pour $i = 1, 2, \dots, n$). implique que le système est globalement isostatique.

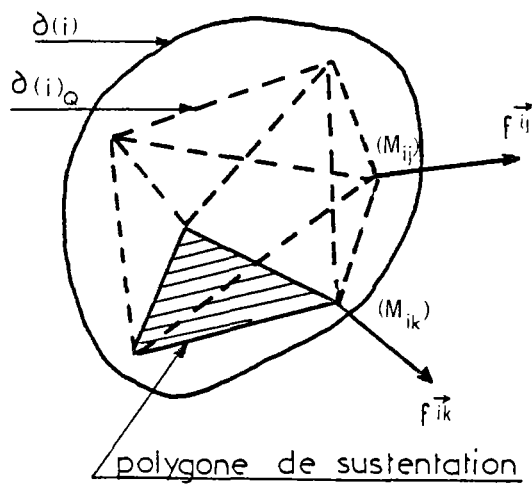
(La coplanarité des points de contacts est un cas limite qui permet 1 degré de

liberté à un grain convexe).

(L'équation cartésienne des faces du polyèdre $\partial(i)_Q$ est donnée par la condition de coplanarité :

$$[\vec{x} - \vec{b}_{ij} , \vec{x} - \vec{b}_{ik} , \vec{x} - \vec{b}_{il}] = 0 \quad (\text{produit mixte})$$

$$\text{soit : } (\vec{b}_{ij} \wedge \vec{b}_{ik} + \vec{b}_{ik} \wedge \vec{b}_{il} + \vec{b}_{il} \wedge \vec{b}_{ij}) . \vec{x}^t = [\vec{b}_{ij} , \vec{b}_{ik} , \vec{b}_{il}] \quad)$$



Polyèdre de sustentation
d'un grain convexe

2.2 - CARACTERISTIQUES STATISTIQUES D'ETAT DANS UN MILIEU GRANULAIRE

Un milieu granulaire est la limite d'un système granulaire quand il existe un élément de volume pour lequel le nombre de grains, contenus dans cet élément, est aussi grand que possible, quelque soit la position de l'élément dans le milieu.

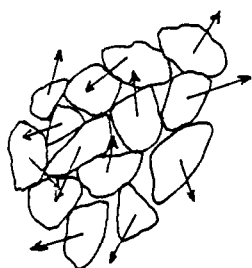
Dans cet ordre d'idée, un milieu granulaire, c'est-à-dire constitué de micro-solides, peut-il être considéré comme un milieu continu au sens classique ?

La réponse doit tenir dans l'acceptation, ou non, par la mécanique des milieux granulaires du lemme fondamental de la physique des milieux continus, qui conduit à la proposition suivante :

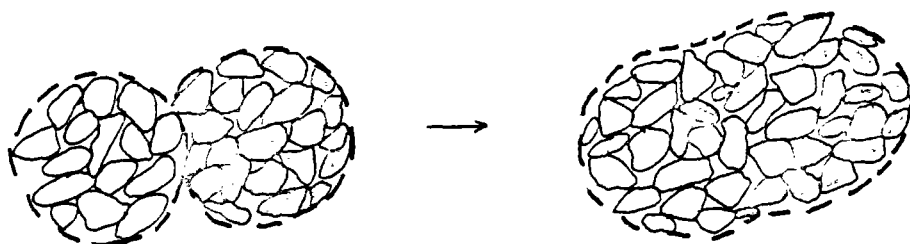
L'évolution cinématique et dynamique d'un point se déduit d'un point infiniment voisin par une transformation linéaire tangente ou encore que la seule considération des dérivées premières suffit pour décrire le comportement du milieu.

Il semble qu'au niveau même des lois de conservations et donc des lois de comportement, un milieu granulaire ne puisse pas être considéré comme un milieu dense, pas plus que comme un milieu matériellement simple, comme pourrait l'être, à priori, un fluide ou un solide ordinaire. L'approche microscopique fait apparaître une grande discontinuité de vitesses de translation et de rotation des grains ; il serait évidemment possible de prendre des éléments englobant un grand nombre de grains pour s'affranchir des difficultés dues à la non-continuité et non-dérivabilité des champs mécaniques - Tout résidant dans une question d'échelle - mais, malheureusement, dans ce cas, le principe est encore mis en défaut du fait de l'inter-pénétra-

tion possible des éléments.



Exemple de discontinuités des vitesses de translation des microsolides au sein d'un milieu granulaire



élément (1) élément (2)

interpénétration de (1) et (2)

Pour lever la difficulté mentionnée précédemment, une seule voie semble à l'heure actuelle possible : celle de la mécanique statistique des grains en tant que particules discrètes dont le comportement propre n'est pas celui d'un "point" indépendant des autres (comme dans la théorie cinétique des gaz parfaits) mais d'un solide lié à ses voisins par des actions de contact.

Cette approche microscopique est susceptible de permettre de retrouver un milieu continu dont le comportement macroscopique sera équivalent. C'est d'ailleurs dans cet esprit, qu'il faut comprendre la plupart des recherches sur le comportement des milieux granulaires qui tendent de relier entre-elles diverses grandeurs macroscopiques par le biais de l'expérimentation macroscopique, en d'autres termes de définir aussi bien que possible le comportement du milieu continu macroscopiquement équivalent et non le comportement du milieu réel.

Il va de soi qu'une approche microscopique devra tout d'abord reconstituer d'une manière formelle les grandes lois de conservation qui n'auront

pas forcément la même présentation - compte tenu de la définition des variables macroscopiques adoptés - que celle de la mécanique des milieux continus.

2.21 - GENERALITES SUR LES CARACTERISTIQUES

STATISTIQUES D'UN MILIEU GRANULAIRE

Les caractéristiques d'état d'un milieu granulaire font partie d'un ensemble de caractéristiques statistiques définissant le mieux possible le milieu.

Il est naturel de prendre comme caractéristiques principales, des paramètres observables ou dont la valeur est directement mesurable à partir d'un échantillon représentatif ; d'autre part, il est clair que le nombre et le choix des caractéristiques prises en compte et de celles qui sont négligées, peuvent modifier plus ou moins sensiblement l'aspect de la loi.

Un bon choix des grandeurs statistiques adoptées, permettra sans doute une bonne approximation de la réalité, mais pour des raisons de calcul évidentes, le nombre des paramètres choisis est actuellement limité. On peut regretter que l'influence des paramètres négligés n'ait pas suffisamment fait l'objet d'une étude systématique. Cette dernière considération reste néanmoins indispensable et il est heureux que pour certains modèles proposés à partir de la microrhéologie, on ait cherché à évaluer l'influence de certains autres paramètres. On peut citer à cet égard :

- Pour la loi de la dilatance avancée par Rowe, l'étude de l'influence du mode d'arrangement des sphères (Rowe - Horne)
- Pour la loi contraintes-déformation plastiques de Mogami, l'étude de l'influence de la variabilité de forme des grains (Mogami).

De manière synthétique, on peut regrouper les caractéristiques statistiques d'un milieu granulaire en 2 catégories :

- Les caractéristiques statistiques analytiques et les caractéristiques statistiques d'état, étudiées plus particulièrement dans le présent paragraphe.

a - Caractéristiques analytiques

Les caractéristiques analytiques usuelles tendent à établir le portrait d'un grain moyen à partir des caractéristiques individuelles attachées à chaque grain et, éventuellement la variance vis-à-vis des grandeurs moyennes estimées (lorsque l'hétérogénéité des caractéristiques individuelles est flagrante).

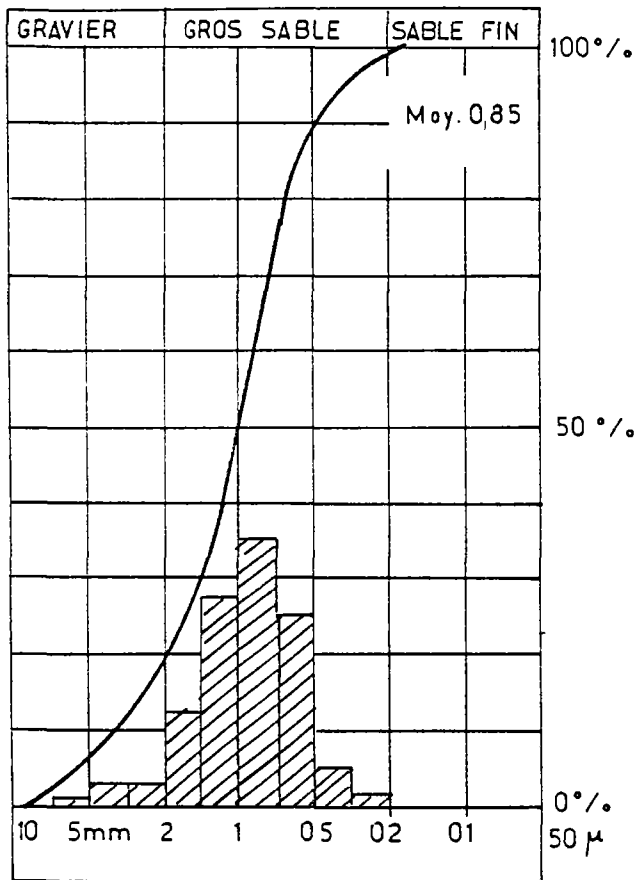
Aux 4 caractéristiques principales d'un grain supposé homogène qui sont :

- géométrie du contour (morphologie, rugosité, etc.)
- masse volumique
- loi de comportement mécanique volumique (élasticité, plasticité)
- loi de comportement du contact intergranulaire (frottement, cohésion, écrasement, etc.)

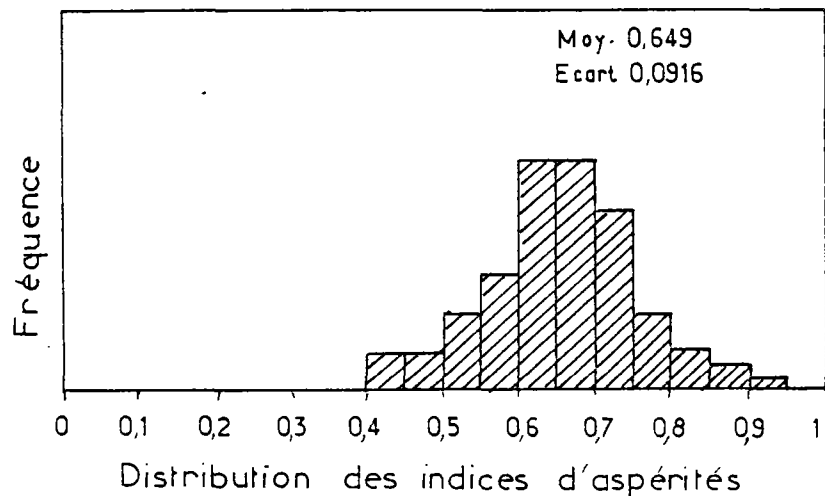
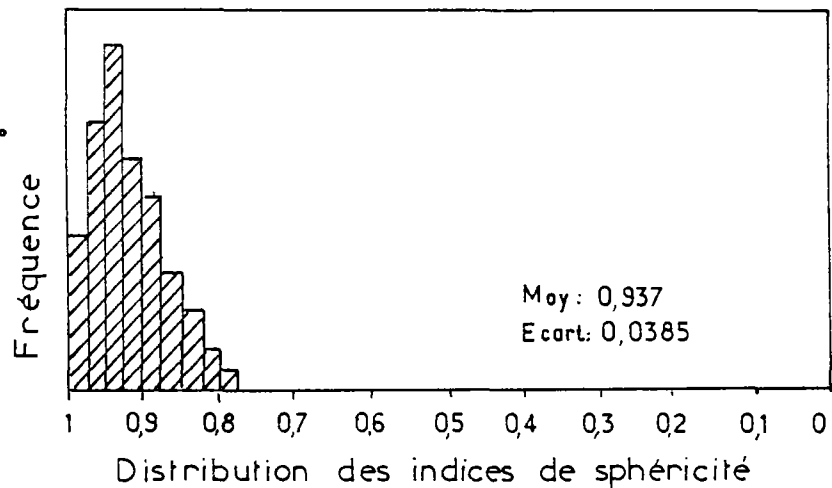
On associe habituellement les notions très imparfaites de :

- diamètre moyen et courbe granulométrique , indices moyens des sphéricité et de rugosité
- masse volumique moyenne
- rigidité parfaite et éventuellement indice de concassage
- angle moyen de frottement limite.

D'autres grandeurs moyennes sont quelquefois définies plus précisément en ce qui concerne l'aspect géométrique-stéréologie-et l'aspect de la mécanique du contact - tribologie - , mais l'analyse de la variance n'est pratiquement jamais abordé.



Distribution des diamètres des grains
et courbe de répartition granulométrique



(selon FROSSARD 1973)

Remarque :

Les caractéristiques statistiques mentionnées ne sont pas nécessairement indépendantes et donc des facteurs de corrélation doivent en principe, être pris en compte (par exemple, il peut exister une relation entre la taille d'un grain et son indice de rugosité ou encore sa masse volumique). De plus, ces caractéristiques sont susceptibles de se modifier en fonction de l'histoire des chargements. Il s'agit là du phénomène d'usure granulaire dont nous avons déjà parlé et qui affecte aussi bien l'aspect géométrique que tribologique.

b. Caractéristiques d'état

Les caractéristiques d'état sont constituées par des paramètres statistiques qui permettent de définir au mieux, de manière synthétique, la configuration mécanique d'un ensemble de grains contenus dans un élément de volume suffisamment petit du milieu granulaire. On distinguera toujours :

- les caractéristiques d'état cinématique relatives à la configuration géométrique et à son évolution.

(Par exemple, l'indice des vides, l'indice d'orientation granulaire, l'indice d'arrangement des contacts, etc, et les lois de distribution statistique qui les accompagnent).

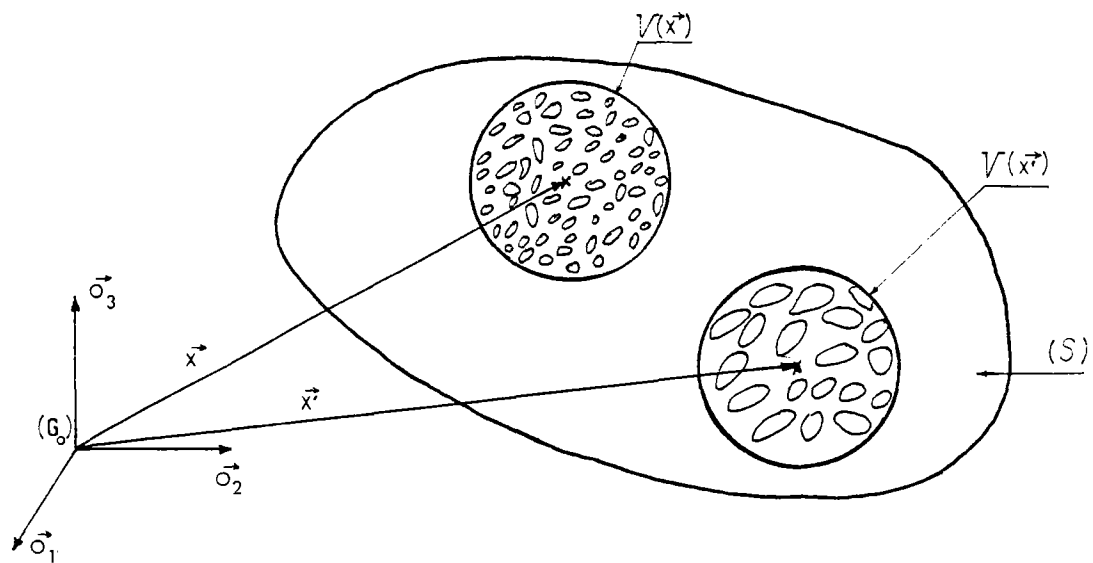
- les caractéristiques d'état dynamique relatives à la configuration dynamique dans un élément de volume.

(Par exemple, la force volumique moyenne, la force de contact intergranulaire moyenne, etc, et les lois de distribution statistique qui les accompagnent).

Le travail suivant consiste à relier les caractéristiques d'état aux tenseurs usuels des contraintes de des déformations et à leurs incréments (Par exemple, il existe une relation simple reliant la variation d'indice des vides et le taux de déformation volumique).

Remarque :

L'indépendance des caractéristiques analytiques et d'état suppose l'absence de ségrégation dans le milieu. Une des hypothèses couramment admises consiste à supposer que le milieu est analytiquement homogène ou encore que les caractéristiques analytiques sont constantes (ne varient pas) en fonction de la position de l'élément de volume dans le milieu. En particulier, la probabilité de trouver des grains d'une certaine dimension est indépendante de la position de l'élément de volume considéré.



Milieu analytiquement hétérogène
(ségrégation par la taille des
grains)

2.22 - LES CARACTERISTIQUES d'ETAT CINEMATIQUE

Les caractéristiques d'état cinématique définissant statistiquement la configuration cinématique du milieu, sont donc obtenues à partir des paramètres cinématiques positionnels et motionnels $(q), (\tilde{q}), (\dot{q})$ et $(\ddot{q})$.

2.221 - LES CARACTERISTIQUES CANONIQUES

D'une façon analogue à la présentation ces paramètres canoniques du § 2 111, on distingue :

a - Les caractéristiques positionnelles définies à partir de $(q) = \{c_i^{\rightarrow}, \theta_i^{\rightarrow}\}$ et qui associent à un élément de volume - dont la position est déterminée par le vecteur $x^{\rightarrow}$ dans le repère de référence $(G_0, 0^{\rightarrow})$ - deux distributions dont l'une est relative à la position statistique spatiale des grains et l'autre à leur orientation.

La probabilité pour que le grain (i) soit situé à l'intérieur d'un élément de volume ∂w , dont la position dans (S) est déterminée par le vecteur $x^{\rightarrow}$ relativement à G_0 , est donnée par

$$P(c_i^{\rightarrow} \in V(x^{\rightarrow})) = \frac{1}{\sum_{(i) \in (S)} vol(i)} \rho_s(x^{\rightarrow}) \underbrace{|V(x^{\rightarrow})|}_{\frac{\partial w}{\partial w} = vol(V(x^{\rightarrow}))}$$

où $\sum_{(i) \in (S)} vol(i)$ est le volume total de la partie solide de (S)

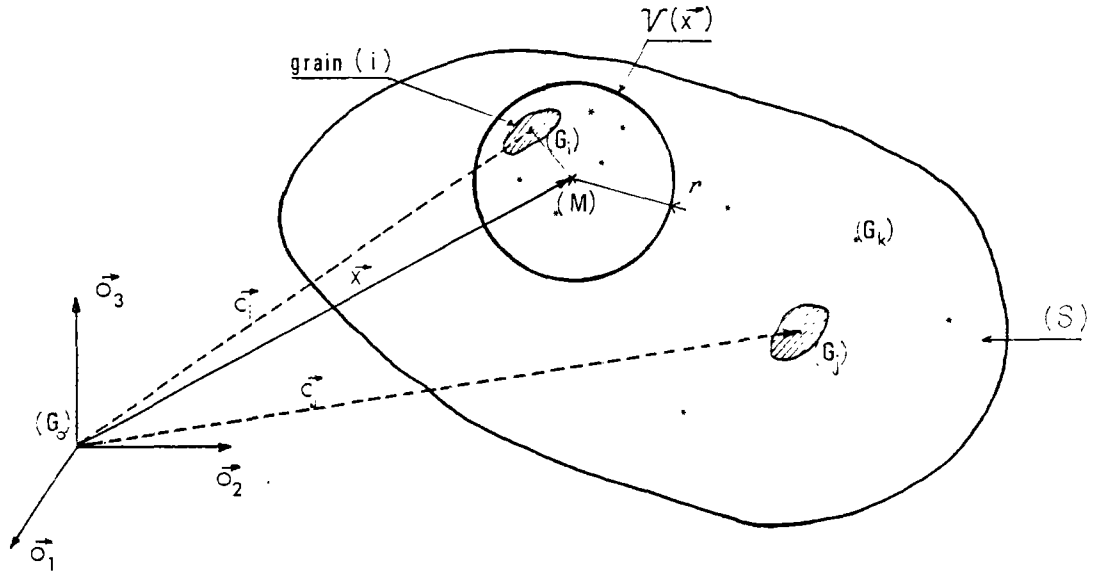
$V(x^{\rightarrow})$ est le voisinage de $x^{\rightarrow}$ dont le volume est ∂w

$\rho_s(x^{\rightarrow})$ représente une densité moyenne pour une position donnée par $x^{\rightarrow}$.

Le fait que $c_i^{\rightarrow} \in V(x^{\rightarrow})$ signifie que la quantité $|x^{\rightarrow} - c_i^{\rightarrow}|$ est bornée par un scalaire dont le cube est proportionnel au volume de $V(x^{\rightarrow})$, ou enco-

re que $|\vec{x} - \vec{c}_i|$ est inférieur ou égal au rayon r d'une boule de volume égal à δw

$$(i) \in \partial w \Rightarrow \vec{c}_i \in V(\vec{x}) \sim |\vec{x} - \vec{c}_i| < r$$



Les centres (G_i) des grains forment un nuage dont la densité est proportionnelle au nombre de grains situés à l'intérieur de chaque élément de volume δw .

Il est également possible de prendre, en coordonnées cartésiennes, comme élément de volume, un cube de cotés $\delta x^1, \delta x^2, \delta x^3$ (par convention, on a noté sans ambiguïté pour la base de référence $x^\beta = x^{0\beta}$ et $\delta x^\beta = \delta x^{0\beta}$)

Dans ce cas, $\delta w = \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3$

D'après les conventions habituelles, l'indice des vides $e(\vec{x})$ d'un élément de volume δw est définie comme suit

$$1 + e(\vec{x}) = \frac{\delta w}{\sum_{(i) \in \delta w} vol(i)} = \frac{\text{volume apparent de } V(\vec{x})}{\text{volume des grains situés dans } V(\vec{x})}$$

Compte tenu de l'hypothèse d'homogénéité analytique, il est possible d'exprimer $\sum_{(i) \in \delta w} vol(i)$ en fonction du volume moyen d'un grain (à partir de la courbe de distribution granulométrique)

$$\text{Soit, } \sum_{(i) \in \delta w} vol(i) = n(\vec{x}) vol_{moy} \delta w$$

où , $n(\vec{x})$ est le nombre de grain par unité de volume

et , vol_{moy} le volume moyen d'un grain

On en déduit en densité volumique :

$$\rho_s(\vec{x}) = \frac{1}{1 + e(\vec{x})} = n(\vec{x}) vol_{\text{moy}}$$

Avec par définition,

$$\int_{(S)} \rho_s(\vec{x}) \, d\omega = \sum_{(i) \in (S)} vol(i)$$

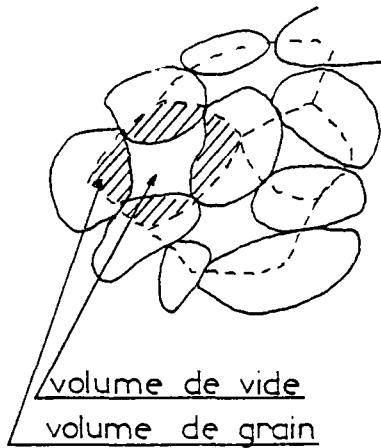
On rappelle que la densité volumique, définie en tant que rapport du volume des solides et du volume apparent, est égale aux densités linéiques et aux densités surfaciques dans n'importe quelle direction.

Par la suite, un point (M) du système (S) repéré par le vecteur $\vec{x}$ relativement à (G_0) pourra être considéré comme le centre de gravité d'un élément volumique $V(\vec{x})$ suffisamment petit

$$\vec{x} = \frac{1}{\sum_{(i)} vol(i)} \sum_{(i)} vol(i) \cdot \vec{c}$$

Certains auteurs proposent une loi de distribution d'indices de vides élémentaires à l'intérieur d'un élément de volume (Mogami 1965). Une telle prise en compte permet de tenir compte implicitement de la distribution des contacts définissant le mode d'arrangement des grains. En ce qui nous concerne, nous préférons nous en tenir au cadre de caractéristiques propres aux paramètres géométriques associés.

A titre indicatif, la démarche de T. Mogami est basée sur les considérations suivantes :



Dans un assemblage de n grains, on peut répertorier un nombre m d'indices de vides élémentaires de grandeurs croissantes

$e_1, e_2, \dots, e_m$ pour lesquels les nombres des grains associés à chaque indice des vides sont :

$n_1, n_2, \dots, n_m$ et les volumes apparents élémentaires

$(1 + e_1) n_1 vol_{moy}, (1 + e_2) n_2 vol_{moy}, \dots$

$(1 + e_m) n_m vol_{moy}$

(vol_{moy} représente le volume moyen d'un grain)

On a nécessairement

$$\sum_{i=1, m} n_i = n \quad (\text{nombre total de grains})$$

$$\sum_{i=1, m} (1 + e_i) n_i vol_{moy} = (1 + \bar{e}) n vol_{moy}$$

(volume apparent total de l'assemblage)

Le nombre de façons d'obtenir une telle distribution est donnée par une probabilité de type thermodynamique :

$$P = \frac{((1 + \bar{e})n + m - 1)!}{m! ((1 + \bar{e})n - 1)!} \prod_{i=1, m} \frac{((1 + e_i)n_i)!}{n_i! (e_i n_i)!}$$

Par la suite, T. Mogami donne au logarithme de la probabilité thermodynamique le sens d'une entropie (loi de Boltzman).

L'étape finale consiste à associer la variation d'entropie à la différence des énergies internes due au travail élémentaire des efforts extérieurs - contraintes par déformations - (2ème principe de thermodynamique) pour obtenir une loi "contraintes - déformations irréversibles".

La deuxième caractéristique canonique positionnelle concernant l'orientation des grains dans le volume ∂w , se définit également comme la probabilité pour que $\theta_i^{\rightarrow}$ (angle définissant l'orientation spatiale du

grain (i) dans $V(\vec{x})$ soit situé dans l'élément de volume du voisinage d'un angle donné $\vec{\theta}$.

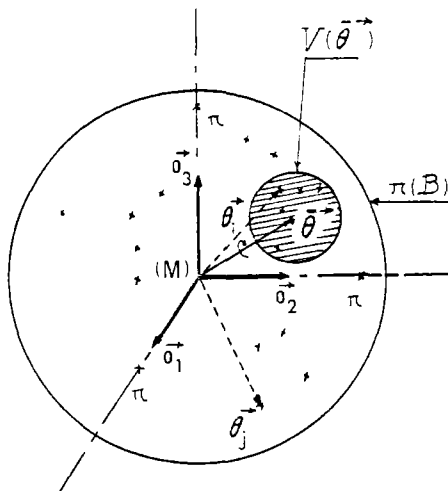
$$P(\theta_i^{\rightarrow} \in V(\vec{\theta}) / c_i^{\rightarrow} \in V(\vec{x})) = p_o(\vec{\theta}^{\rightarrow} / \vec{x}^{\rightarrow}) \frac{|V(\vec{\theta}^{\rightarrow})|}{\text{vol}(V(\vec{\theta}^{\rightarrow}))}$$

où $V(\vec{\theta}^{\rightarrow})$ est un voisinage de $\vec{\theta}^{\rightarrow}$ dont le volume est $|V(\vec{\theta}^{\rightarrow})|$

$p_o(\vec{\theta}^{\rightarrow} / \vec{x}^{\rightarrow})$ représente une densité moyenne pour une position $\vec{x}^{\rightarrow}$ et une orientation $\vec{\theta}^{\rightarrow}$. C'est une fonction scalaire définie sur les 3 composantes $\bar{\theta}^\beta$ ($= \bar{\theta}^{0\beta}$ pour $\beta = 1, 2, 3$) du vecteur axial $\vec{\theta}^{\rightarrow}$, avec naturellement le sens d'une densité de probabilité :

$$\int_{\pi(B)} p_o(\vec{\theta}^{\rightarrow} / \vec{x}^{\rightarrow}) |V(\vec{\theta}^{\rightarrow})| = 1$$

avec $\bar{\theta}^1 \bar{\theta}^2 \bar{\theta}^3 = |V(\vec{\theta}^{\rightarrow})|$, volume de l'élément : $V(\vec{\theta}^{\rightarrow})$



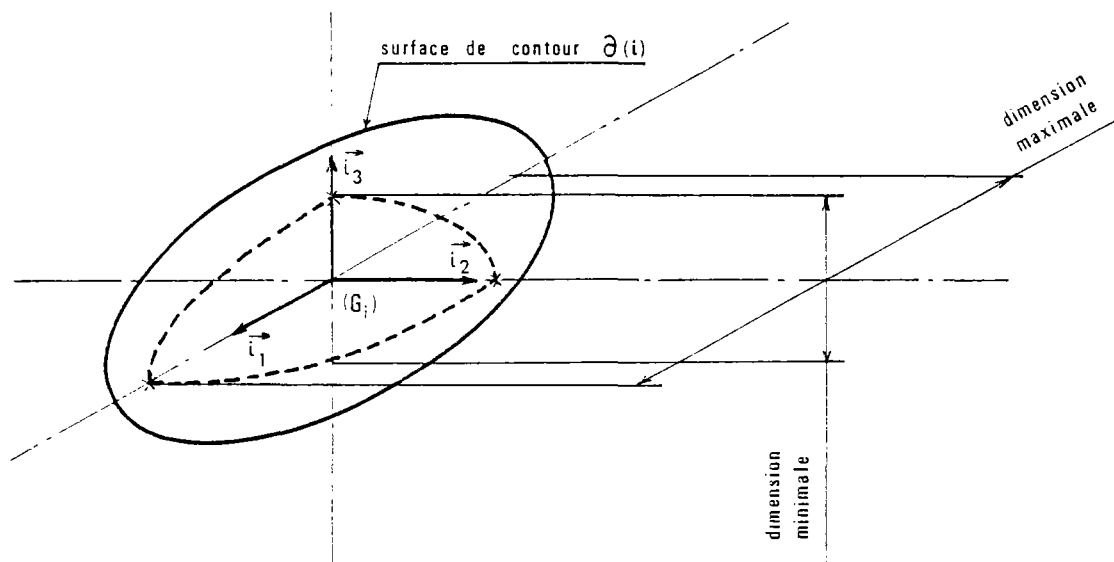
D'après la définition, tout angle vectoriel $\theta_i^{\rightarrow}$ a une amplitude définie à 2π près. $\theta_i^{\rightarrow}$ est donc un vecteur dont l'extrémité est située dans une sphère, centrée en (G_o) , et de diamètre 2π , si le point (G_o) est pris comme origine du bipoint équivalent à $\theta_i^{\rightarrow}$. La sphère $\pi(B)$ ainsi définie, constitue le domaine d'existence à

l'intérieur duquel sont situés les extrémités des vecteurs axiaux $\theta_i^{\rightarrow}$ tels que $c_i^{\rightarrow} \in V(\vec{x})$. Soit

$$(\theta_i^{\rightarrow} \in \pi(B) \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{\pi} |\theta_i^{\rightarrow}| \leq 1)$$

La définition de $p_o(\vec{\theta}^{\rightarrow} / \vec{x}^{\rightarrow})$ appelle quelques remarques :

Les vecteurs unitaires de la base canonique $\vec{I}$ du grain (i) ont été choisis de manière à orienter les axes principaux du grain (i). On peut donc admettre que pour un grain de forme générale ellipsoïdale, il y a une corrélation entre $\vec{I}$ et les 2 vecteurs définissant les axes des dimensions maximale et minimale du grain. En effet, la direction de l'axe de la plus petite dimension d'un ellipsoïde correspond au moment d'inertie maximal par rapport à cet axe ; inversement, pour la plus grande dimension, le moment d'inertie est minimal ; le troisième axe étant perpendiculaire aux deux précédents. La base $\vec{I}$ coïncide donc avec les dimensions maximale, intermédiaire et minimale du grain (i) supposé ellipsoïdal . Il va de soi que pour des grains de forme sphérique, la distribution d'orientation $p_o(\vec{\theta} / \vec{x})$ n'a pas de signification.

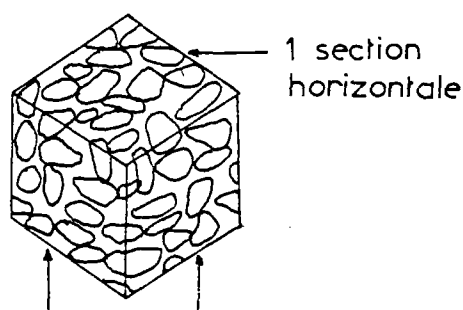


Grain de forme générale ellipsoïdale - les vecteurs de la base canonique coïncident avec les axes des dimensions extrémales

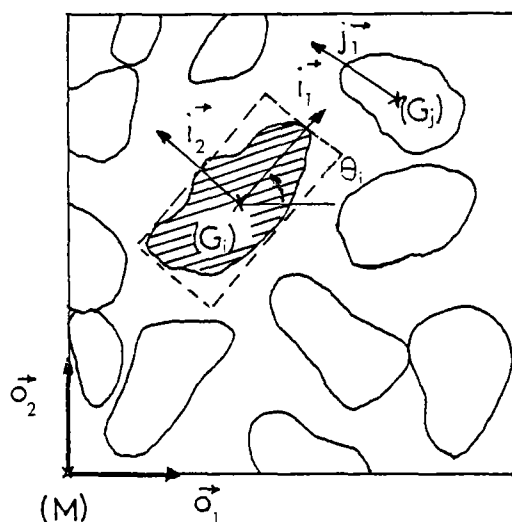
Une autre remarque porte sur l'évaluation expérimentale qui peut être faite de la fonction $p_o(\vec{\theta} / \vec{x})$. Oda (1972) propose de déterminer l'anisotropie d'orientation des grains par mesure directe sur des sections perpendiculaires à l'échantillon. On ramène l'étude tridimensionnelle à 3 observa-

tions bidimensionnelles. Un marquage de chaque section de grain, permet d'obtenir simplement une distribution d'orientation pour chacun des 3 problèmes plans.

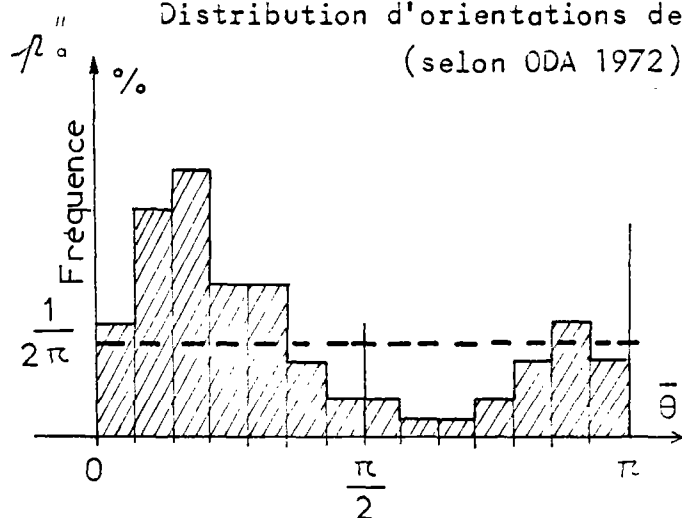
Dans le cas du problème plan tous les vecteurs axiaux $\theta_i^{\rightarrow}$ sont normaux au plan, et donc une seule composante suffit à caractériser l'orientation des grains. Cette composante coïncide avec l'amplitude θ_i ($= |\theta_i^{\rightarrow}|$) des angles $\theta_i^{\rightarrow}$. Par analogie avec des grains de forme elliptique, l'orientation de la plus grande dimension des grains répond directement à la loi de distribution simplifiée, fonction de $\bar{\theta}$ ($= |\bar{\theta}^{\rightarrow}|$) seulement.



Echantillon tridimensionnel conduisant à l'étude de 3 problèmes plans



Distribution d'orientations des grains dans le cas d'un problème plan (selon ODA 1972)



Histogramme des fréquences des orientations des grains selon l'axe de leur plus grande dimension

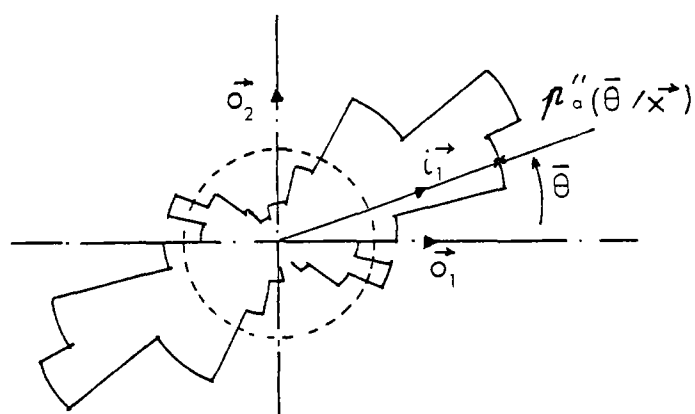


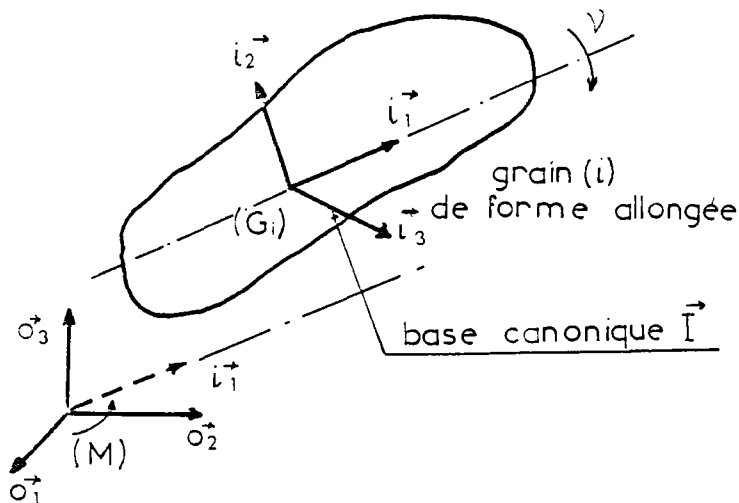
Diagramme polaire de la distribution des orientations

Tenseur de configuration canonique

La synthèse des caractéristiques canoniques sous forme d'une caractéristique commune représentant simultanément la densité et la distribution d'orientation spatiale des grains, est possible par l'introduction du tenseur de configuration canonique.

1ère approche : Distribution réduite de $p_o(\vec{\theta} \times)$

La fonction $p_o(\vec{\theta} \times)$ qui définit une hypersurface dans l'espace à 4 dimensions de variables scalaires $p_o, \bar{\theta}^1, \bar{\theta}^2, \bar{\theta}^3$ peut se réduire à une fonction dans un espace à 3 dimensions, si l'on néglige une des composantes de rotation. Par exemple p_o sera définie à une rotation près autour de l'axe de la plus grande dimension des grains. Cette simplification théoriquement justifiée pour des grains allongés possédant une symétrie de révolution peut-être généralisée pour des grains quelconques de forme allongée. Il est clair qu'un tel procédé fait perdre une information mais permet une représentation spatiale commode de la distribution d'orientation.



Si i_1 définit comme précédemment l'orientation du grain selon sa plus grande dimension. On sait que θ_i est tel que : $\theta_i = (o_1, i_1) \oplus v \vec{i}_1$ où v est un scalaire égal à l'amplitude d'une rotation autour de i_1 (on rappelle que $I = \exp(\theta_i) \cdot o_1$)

Dans l'hypothèse où l'influence de v est négligée, on peut choisir i_1 (vecteur unitaire) plutôt que θ_i pour définir l'orientation spatiale du grain (i) par rapport à o_1 , puisque θ_i ne devient fonction que de i_1

seulement. La probabilité réduite $P(i_1^{\rightarrow} \in V(\kappa^{\rightarrow}) / c_i^{\rightarrow} \in V(x^{\rightarrow}))$ sera de la même manière obtenue à l'aide d'une densité de probabilité.

$$P(i_1^{\rightarrow} \in V(\kappa^{\rightarrow}) / c_i^{\rightarrow} \in V(x^{\rightarrow})) = p_o'(\kappa^{\rightarrow} / x^{\rightarrow}) \frac{|V(\kappa^{\rightarrow})|}{\text{aire de } V(\kappa^{\rightarrow})}$$

où $\kappa^{\rightarrow}$ est un vecteur unitaire dont les composantes dans la base de référence $0^{\rightarrow}$, s'expriment en fonction de 2 paramètres qui peuvent être les amplitudes de 2 angles ayant leurs vecteurs unitaires axiaux distincts.

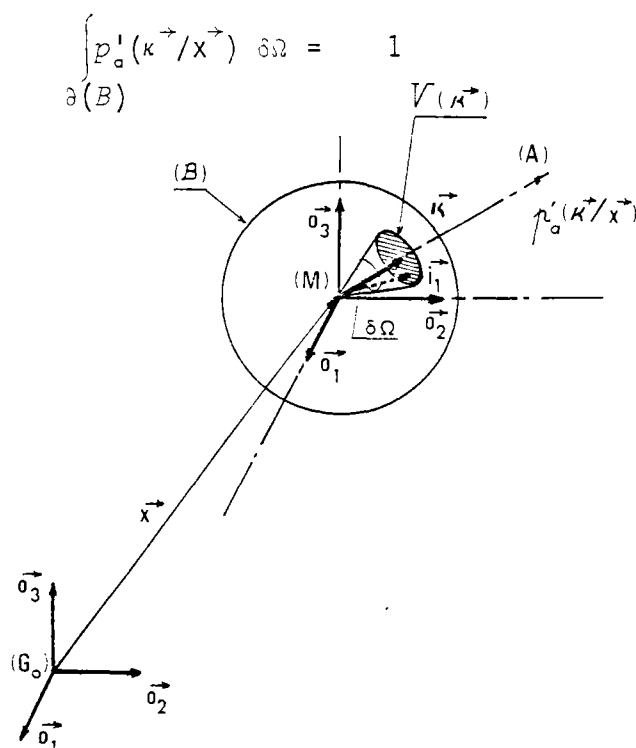
$$\kappa^{\rightarrow} = \begin{vmatrix} \kappa^1 & \kappa^2 & \kappa^3 \end{vmatrix} \quad \text{avec} \quad |\kappa^{\rightarrow}| = 1$$

Par exemple, il peut s'agir des 2 mesures des angles des coordonnées polaires sphériques

Le voisinage $V(\kappa^{\rightarrow})$ correspond à un élément de surface sur la boule (B) de rayon unité, puisque $\kappa^{\rightarrow}$ est unitaire. Son aire $V(\kappa^{\rightarrow})$ est donnée

$$|V(\kappa^{\rightarrow})| = |\kappa^{\rightarrow}|^2 \delta\Omega$$

où $\delta\Omega$ représente une mesure élémentaire d'angle solide. Ainsi, à tout vecteur $\kappa^{\rightarrow}$ unitaire correspond une densité scalaire de probabilité $p_o'(\kappa^{\rightarrow} / x^{\rightarrow})$



À ce stade, deux voies principales sont concevables selon que l'on considère $p_o'(\kappa^{\rightarrow} / x^{\rightarrow})$ comme une distribution affine de $\kappa^{\rightarrow}$ ou une distribution volumique de $\kappa^{\rightarrow}$

Distribution affine ou polaire

Pour obtenir une représentation affine de la distribution des orientations des grains selon leur plus grande dimension, pour un élément de volume défini en position par le vecteur $\vec{x}$, il suffit d'associer au vecteur $\vec{\kappa}$, le point (A) tel que :

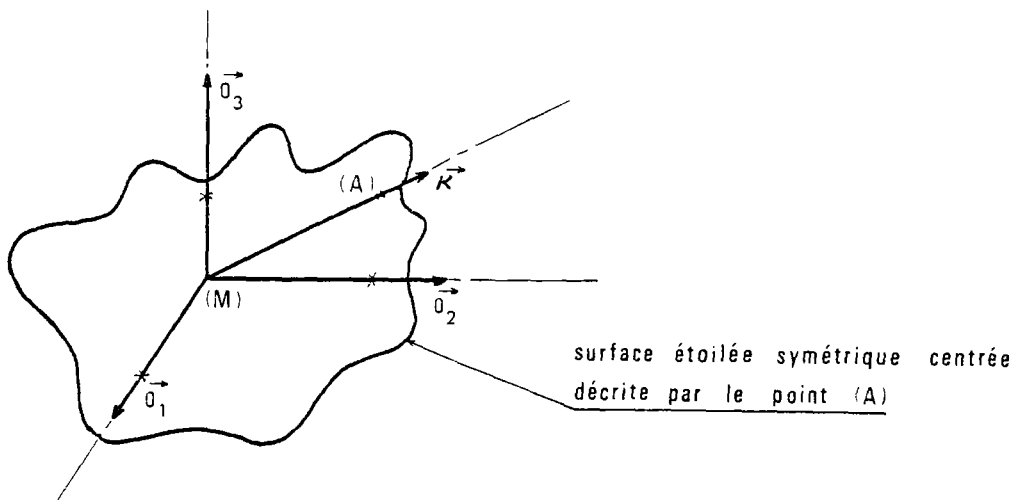
$$(M, A) = p'_a(\vec{\kappa} / \vec{x}) \vec{\kappa}$$

il s'agit par conséquent d'une représentation polaire. Pour une position donnée, p'_a est une fonction des composantes de $\vec{\kappa}$, qui peut s'exprimer par un développement en série selon les puissances croissantes de κ^β (pour $\beta = 1, 2, 3$) . Cette fonction est paire puisque $p'_a(-\vec{\kappa} / \vec{x}) = p'_a(\vec{\kappa} / \vec{x})$. Les directions d'orientation des grains sont définies à π près. Ainsi, p'_a s'exprime en fonction des termes des puissances paires de κ^β , à savoir 0, 2, 4, 6, ...

$$p'_a(\vec{\kappa} / \vec{x}) = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} v_{\alpha\beta\gamma} (\kappa^1)^\alpha (\kappa^2)^\beta (\kappa^3)^\gamma$$

($v_{\alpha\beta\gamma}$ est un coefficient réel, avec $\alpha + \beta + \gamma = 0, 2, 4, 6 \dots$)

Au niveau d'une distribution spatiale des orientations ; une telle fonction scalaire $p'_a(\vec{\kappa} / \vec{x})$ définit une surface étoilée, symétrique, centrée. La prise en compte d'extrema locaux est possible si l'on ne néglige pas les termes du développement en série selon les puissances croissantes de κ^β ($\beta = 1, 2, 3$) dont l'ordre est supérieur à 2 .



Parce que $\kappa^{\rightarrow}$ est unitaire, le terme de puissance 0 peut être inclus dans les termes de degré 2 ($\kappa^{\alpha} \kappa^{\beta}$)

$$\text{En effet : } |\kappa^{\rightarrow}| = 1 \Rightarrow 1 = \sum_{\beta=1}^3 (\kappa^{\beta})^2 = \kappa^0 \cdot \mathbb{1} \cdot \kappa^{0+}$$

Ne retenant finalement, en première approximation, que les termes de degré 2, on posera :

$$p'_0(\kappa^{\rightarrow}/X^{\rightarrow}) = \kappa^0 \cdot P \cdot \kappa^{0+}$$

où $P(X^{\rightarrow})$ est une matrice carrée qui peut être choisie symétrique. La condition de normalisation de la densité p'_0 conduit à :

$$\int_{\partial(B)} p'_0 \, \partial \Omega = 1 \quad \text{soit} \quad \int_{\partial(B)} (\kappa^0 \cdot P \cdot \kappa^{0+}) \, \delta \Omega = 1$$

Dans cette expression, $\partial \Omega$ est égal à l'élément d'aire puisque le rayon vecteur de (B) est égal à 1. Le vecteur $\kappa^{\rightarrow}$ est aussi vecteur normal à $\partial(B)$.

On intègre en utilisant le théorème de la divergence, il vient :

$$\int_{(B)} \text{div} (\kappa^0 \cdot P \cdot \vec{0}) \, \partial w = \frac{4\pi}{3} \text{tr} (P) = 1$$

car les composantes de $\kappa^{\rightarrow}$ sont équivalentes aux coordonnées d'un point de $\partial(B)$.

$$\text{Donc, } \text{tr} (P) = \text{inv}_1 (P) = \frac{3}{4\pi}$$

La matrice symétrique P est susceptible de représenter l'anisotropie d'orientation des grains par ses 2ème et 3ème invariants. Les vecteurs propres de P définissent les directions pour lesquelles les fréquences d'orientation selon ces directions sont maximale, intermédiaire et minimale. Le 2ème inva-

riant étant représentatif des écarts de fréquence.

La matrice P pouvant se décomposer en une partie sphérique et une partie déviatorique, on a :

$$P = \underbrace{\frac{1}{3} \text{tr}(P) \mathbb{1}}_{\frac{1}{4\pi}} + \underbrace{P^d}_{\text{anisotropie d'orientation}} \quad (\text{déviateur de } P)$$

- Le terme $\frac{1}{4\pi}$ de la partie sphérique représente une distribution uniforme d'orientation
- La partie déviatorique représente l'état d'anisotropie d'orientation des grains.

Ainsi, si les termes du déviateur sont nuls, p'_a est constant et, nécessairement : $p'_{oa} = \frac{1}{4\pi}$

ce qui signifie qu'il n'y a pas d'orientation privilégiée (distribution uniforme).

Toutefois, la définition de p'_a à l'aide d'une fonction quadratique est assez restrictive, car elle impose une loi de distribution très particulière. Si elle permet le choix d'angles d'orientations privilégiées et d'amplitudes de déviation, elle ne permet pas de rendre compte d'une éventuelle concentration des orientations selon les orientations privilégiées (absence de termes d'écart-type) ou selon plusieurs autres orientations privilégiées (distribution à plusieurs maxima) ; elle ne peut donc être valable que pour de faibles déviations anisotropiques. La représentation affine d'une telle distribution dans l'espace à 3 dimensions est un ellipsoïde, si l'on prend $(p'_a)^{-1/2}$ comme module du rayon vecteur.

En effet :

$$\left. \begin{aligned} (M, S) &= x^0 \cdot 0^{\rightarrow} \\ &= (p'_a)^{-1/2} \quad x^0 \cdot 0^{\rightarrow} \end{aligned} \right\} \text{ dans la base de référence } 0^{\rightarrow}$$

Il vient : $(p'_a)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{\kappa^0 \cdot P \cdot \kappa^0}}$ soit , $x^0 \cdot P \cdot x^0 - 1 = 0$

Cas particulier : Problème plan

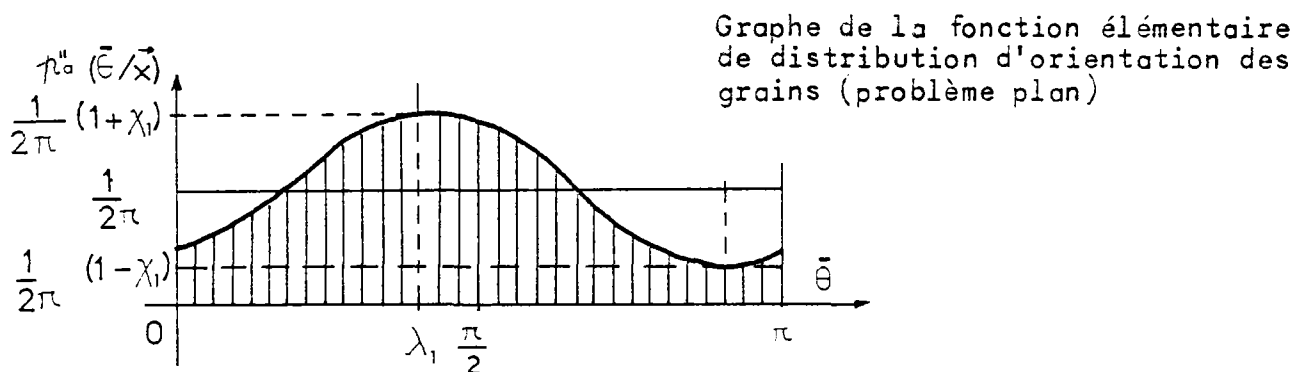
Pour le problème plan, le vecteur unitaire $\kappa^{\rightarrow}$, ne dépend que d'un seul paramètre $\bar{\theta}$

$$|\kappa^1 \ \kappa^2| = |\cos \bar{\theta} \ \sin \bar{\theta}| \text{ pour } \bar{\theta} \in [0, 2\pi]$$

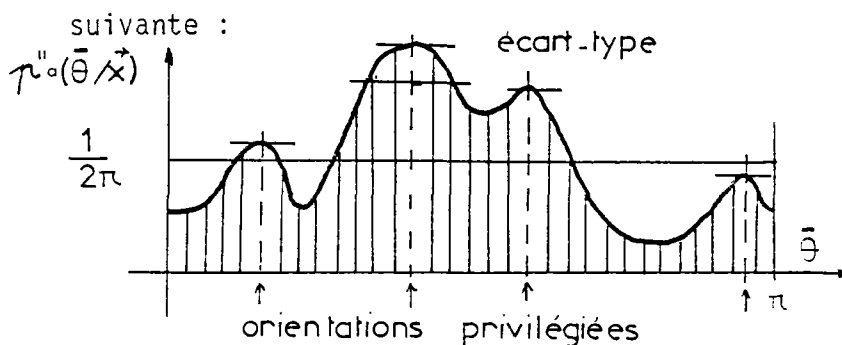
La distribution $p'_a(\kappa^{\rightarrow}/x^{\rightarrow}) = p''_a(\bar{\theta}/x^{\rightarrow})$ est de la forme

$$p''_a(\bar{\theta}/x^{\rightarrow}) = \frac{1}{2\pi} (1 + \chi_1 \cos 2(\bar{\theta} - \lambda_1))$$

où le terme $\begin{cases} \chi_1 \text{ est le taux de distorsion, avec } \chi_1 \ll 1 \\ \lambda_1 \text{ l'amplitude de l'angle d'orientation privilégiée} \end{cases}$



Tandis qu'une distribution réelle d'orientation des grains a la forme



L'approximation du rayon vecteur $p''_a(\bar{\theta}/x^{\rightarrow})$ d'une distribution réelle , conduit naturellement à une série de type série de Fourier, puisque le développement selon les puissances paires, croissantes de κ^1 et κ^2 donne :

$$\begin{aligned}
 p'_a(\vec{\kappa}/\vec{x}) &= v_{\alpha\beta} (\kappa^1)^\alpha (\kappa^2)^\beta \quad (\text{pour } \alpha+\beta = 0,2,4,\dots) \\
 &= v_{\alpha\beta} \cos^\alpha \bar{\theta} \sin^\beta \bar{\theta} = p''_a(\bar{\theta}/\vec{x})
 \end{aligned}$$

et par transformation des termes de la série, on obtient une expression équivalente de p'_a , qui a la forme suivante :

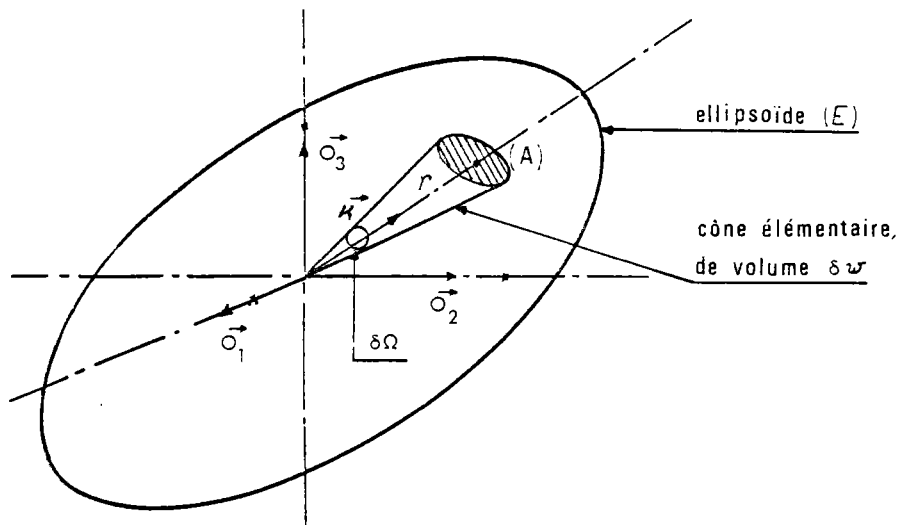
$$p''_a(\bar{\theta}/\vec{x}) = \frac{1}{2\pi} (1 + \sum_{\beta} \chi_{\beta} \cos 2\beta(\bar{\theta} - \lambda_{\beta})) \quad (\text{pour } \beta = 1,2,3,\dots).$$

Les coefficients χ_{β} et λ_{β} , déduits des coefficients $v_{\alpha\beta}$ définissent respectivement :

- Les amplitudes des différents modes β ($\beta = 1,2,3,\dots$)
- les amplitudes des angles d'orientations privilégiés qui sont associées à chaque mode.

Distribution volumique ou ellipsoïdale

La deuxième conception de la distribution $p'_a(\vec{\kappa}/\vec{x})$ est celle d'une distribution volumique :



A la répartition élémentaire des fréquences, d'orientation $p'_a(\vec{\kappa}/\vec{x}) \delta\Omega$, on associe le volume δw d'un cône élémentaire construit sur $\vec{\kappa}$ et d'ouverture $\delta\Omega$. Ce volume est par ailleurs égal à :

$$\delta w = \delta\Omega \int_0^{r(\vec{\kappa})} r^2 dr, \text{ où } r(\vec{\kappa}) = |M, A|$$

représente le module du rayon vecteur $r(\vec{\kappa})$ $\vec{\kappa}$

Ainsi,
$$p_{\alpha}^{\prime}(\vec{\kappa}/\vec{x}) \delta\Omega = \frac{1}{3} \nu r^3 \delta\Omega$$

où ν est une constante de normalisation.

Si maintenant l'on suppose que le point (A) est assujéti à rester sur la surface d'un ellipsoïde (E) défini dans la base de référence $0^{\rightarrow}$, par l'équation cartésienne :

$$\vec{x}^0 \cdot P \cdot \vec{x}^{0^{\dagger}} - 1 = 0$$

où P est une matrice symétrique représentative d'une forme définie positive.

Le rayon vecteur (M,A) = $r(\vec{\kappa}) \vec{\kappa}^{\rightarrow}$ est tel que son module :

$$r(\vec{\kappa}) = (\vec{\kappa}^0 \cdot P \cdot \vec{\kappa}^{0^{\dagger}})^{-1/2}$$

On en déduit : $p_{\alpha}^{\prime}(\vec{\kappa}/\vec{x}) = \frac{\nu}{3} (\vec{\kappa}^0 \cdot P \cdot \vec{\kappa}^{0^{\dagger}})^{-3/2}$

La condition de normalisation de $p_{\alpha}^{\prime}(\vec{\kappa}/\vec{x})$ implique très simplement que :

$$\int_{\partial(B)} p_{\alpha}^{\prime}(\vec{\kappa}/\vec{x}) \delta\Omega = \nu \int_{(E)} \delta\omega = 1$$

L'intégration est immédiate, sachant que le jacobien de la transformation conforme de l'ellipsoïde (E) sur la boule (B) vaut $\det(P^{-1/2})$.

$$\begin{aligned} \text{Finalement : } \int_{\partial(B)} p_{\alpha}^{\prime}(\vec{\kappa}/\vec{x}) \delta\Omega &= \nu \int_{(B)} \det(P^{-1/2}) \delta\omega \\ &= \frac{4\pi}{3} \frac{\nu}{\sqrt{\det P}} \end{aligned}$$

La valeur adéquate de ν correspond à la distribution volumique normalisée suivante :

$$p^{\prime}(\vec{\kappa}/\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} (\vec{\kappa}^0 \cdot P \cdot \vec{\kappa}^{0^{\dagger}})^{-1/2} \text{ avec, } \det(P) = 1.$$

La distribution uniforme (isotropie d'orientation) conduit naturellement à la sphéricité du tenseur représenté par P.

$P = \mathbb{1}$ implique $\vec{\kappa}^0 \cdot P \cdot \vec{\kappa}^{0^{\dagger}} = |\vec{\kappa}^{\rightarrow}|^2 = 1$, soit $p_{\alpha}^{\prime}(\vec{\kappa}/\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}$. L'ellipsoïde (E) est confondu avec (B).

La distribution de Dirac (anisotropie maximale d'orientation) est obtenue lorsque la probabilité relative à la direction d'orientation maximale est

infinie, les autres étant nulles

$$p'_{\alpha}(\vec{\kappa}/\vec{x}) = \delta(\vec{\kappa} - \vec{\kappa}_{\lambda}) \begin{cases} = \infty & \text{si } \vec{\kappa} = \vec{\kappa}_{\lambda} \\ = 0 & \text{si } \vec{\kappa} \neq \vec{\kappa}_{\lambda} \end{cases}$$

Pour conclure, on peut dire que ce type de distribution permet non seulement le choix de 2 angles d'orientations privilégiées (maximum et minimum de fréquence) mais aussi de rendre compte d'une éventuelle concentration de celles-ci.

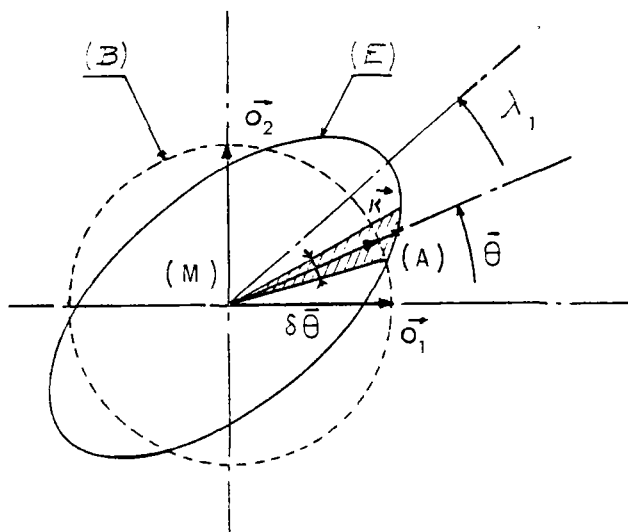
Cas particulier : Problème plan.

La distribution $p'_{\alpha}(\vec{\kappa}/\vec{x}) = p''_{\alpha}(\bar{\theta}/\vec{x})$ est proportionnelle à l'aire du triangle élémentaire construit à partir de $\vec{\kappa}$ (d'angle polaire $\delta\bar{\theta}$)

$$p''_{\alpha}(\bar{\theta}/\vec{x}) \delta\bar{\theta} = \frac{\nu}{2} r^2 \delta\bar{\theta}$$

où $r(\bar{\theta}) \vec{\kappa}$ est le rayon vecteur. Si $r(\bar{\theta})$ est l'équation polaire d'une ellipse (E) d'aire égale à π , la distribution normalisée $p''_{\alpha}(\bar{\theta}/\vec{x})$, qualifiée de distribution surfacique ou elliptique, prendra la forme :

$$p''_{\alpha}(\bar{\theta}/\vec{x}) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{1-\chi_1^2}}{1 - \chi_1 \cos 2(\bar{\theta} - \lambda_1)}$$



où $\begin{cases} \chi_1 & \text{est un taux de distorsion } \leq 1 \\ \lambda_1 & \text{un angle d'orientation} \\ & \text{privilégiée.} \end{cases}$

On vérifie aisément que :

$$\int_0^{2\pi} p''_{\alpha}(\bar{\theta}/\vec{x}) \delta\bar{\theta} = 1 .$$

Remarques:

1. On peut noter que par certains cotés, ce problème se rattache à la théorie de la polarisation d'un corps, par l'orientation de dipôles magnétiques. Cette théorie fait intervenir une distribution, appelée facteur de Boltzmann dont la forme est la suivante

$$p_o'(\kappa^{\rightarrow}/\chi^{\rightarrow}) = \nu e^{\chi \cos|\kappa^{\rightarrow}, t^{\rightarrow}|} \quad [\text{cf. Rocard}]$$

où $|\kappa^{\rightarrow}, t^{\rightarrow}|$ est la mesure de l'angle que l'axe du dipôle défini par le vecteur axial $\kappa^{\rightarrow}$ avec l'axe du champ magnétique défini par le vecteur $t^{\rightarrow}$.

χ une constante d'intensité de champ

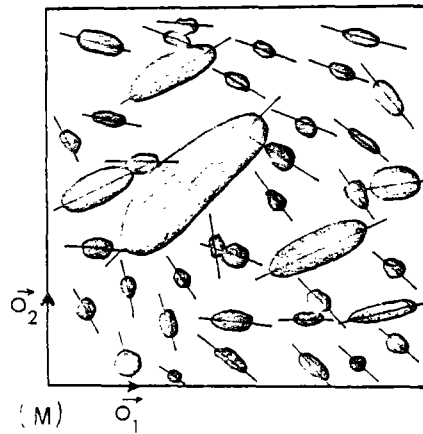
ν une constante d'intégration $\nu = \frac{1}{\int_{\partial(B)} e^{\chi \cos|\kappa^{\rightarrow}, t^{\rightarrow}|} \cdot \partial\Omega}$

2. Les distributions usuelles proposées par les auteurs sont avant tout des distributions planes telles que :

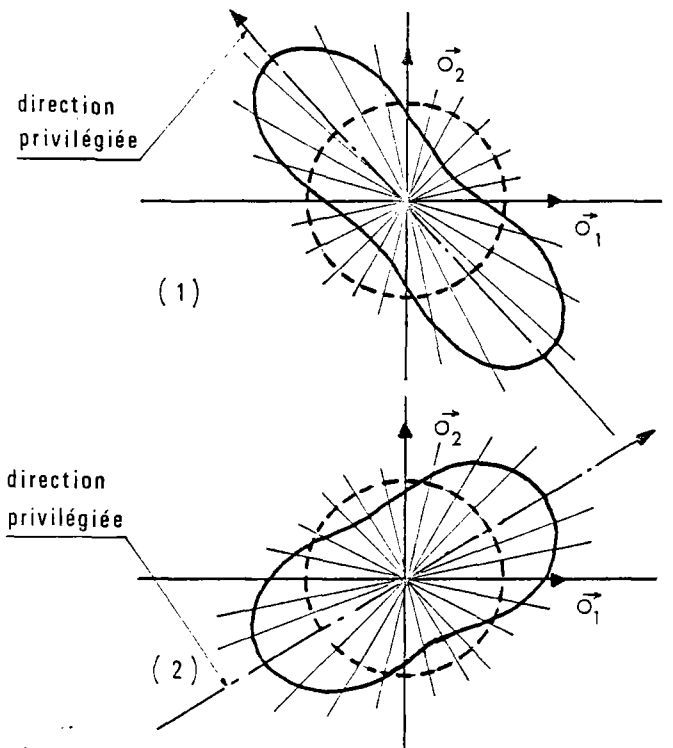
- distribution sinusoïdale (cf. § précédent)
- distribution de Boltzman-Pearson (mentionnée ci-dessus)
- distribution trapézoïdale (Oda 1972).

2ème approche

La donnée brute d'une distribution d'orientation des grains, telle qu'elle a été établie antérieurement, ne permet pas de rendre compte réellement de l'anisotropie quantitative du milieu, ceci parce que les grains sont de différentes tailles et de différentes formes. En d'autres termes, la distribution d'orientation des grains, n'intègre pas les caractéristiques statistiques analytiques du milieu, car elle pondère de manière égale les grains de petite ou de grande dimension et les grains grossièrement sphériques ou très allongés. Cette approche n'est donc pas réaliste, sauf dans le cas de grains identiques.



Echantillon bidimensionnel
d'un milieu granulaire



Diagrammes polaires des distributions
d'orientation des grains de l'échantillon

(1) distribution non pondérée

(2) distribution pondérée

Nous avons vu que, dans le cas de grains homogènes en densité volumique et à contours approximativement ellipsoïdaux, il existait une correspondance entre les directions d'inertie principales et les dimensions extrémales des grains. Précisément, le tenseur d'inertie réalise cette synthèse de la taille d'un grain et de sa forme, et permet ainsi une pondération sur la distribution d'orientations. Le tenseur d'inertie microscopique associé à chaque grain (i) a été introduit au § 1 113. Sa représentation dans la base canonique du grain est une matrice diagonale Ξ_i .

Pour un ensemble de grains (i) contenus dans l'élément de volume $\delta\omega$, la matrice $\sum_{(i)} \Xi_i$ est la matrice d'inertie obtenue en supposant que tous les grains sont orientés de la même façon. Si l'on suppose que la densité volumique ρ_i correspond à n grains par unité de volume.

$$\sum_{(i)} \Xi_i = n \Xi_{\text{moy}} \delta\omega, (i) \in \delta\omega$$

La matrice diagonale d'inertie moyenne Ξ_{moy} d'un grain constitue une caractéristique statistique analytique au même titre que le volume moyen, vol_{moy} .

En fait, ce qui importe pour caractériser un sol, est, pour un grain moyen, le rapport des inerties selon ses 3 axes principaux. Pour s'affranchir de l'effet d'échelle, l'anisotropie analytique naturelle du milieu sera définie par un tenseur d'inertie volumique, c'est-à-dire portant sur un "grain" dont le volume est égal à l'unité. Ne retenant que le "1er mode d'irrégularité de contour" (cf. § 1 11), un grain convexe est assimilé à un ellipsoïde. (C'est l'équivalent volumique de l'approximation d'une courbe à sa valeur moyenne).

En définitive, il est possible de caractériser analytiquement la "sphéricité" des grains d'un sol, par la matrice d'inertie volumique :

$$\Xi_v = \frac{5}{2} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{2/3} \cdot \frac{1}{(\text{vol}_{\text{moy}})^{5/3}} \Xi_{\text{moy}}$$

(Pour des grains sphériques , $\Xi_v = \mathbb{I}$) .

Dans ce qui suit, plutôt que de faire intervenir Ξ_v (qui ne dépend pas du volume des grains mais de leurs allongements), nous nous en tiendrons à l'inertie du grain moyen

$$\sum_{(i)} \Xi_i = \rho_s \frac{\Xi_{\text{moy}}}{\text{vol}_{\text{moy}}} \delta w$$

On rappelle que le moment d'inertie du grain (i) relativement à un axe défini par le vecteur unitaire $\vec{\tau}$ ($|\vec{\tau}| = 1$), passant par son centre de gravité, est donné par :

$$\text{iner}_{\vec{\tau}}(i) = \vec{\tau}^T \cdot \Xi_i \cdot \vec{\tau}$$

Pour l'ensemble des grains (i) contenus dans l'élément de volume δw

$$\begin{aligned} \sum_{(i) \in \delta w} \text{iner}_{\vec{\tau}}(i) &= \sum_{(i)} \vec{\tau}^T \cdot \Xi_i \cdot \vec{\tau} = \sum_{(i)} \vec{\tau}^0 \cdot \mathbf{0}^T \cdot \Xi_i \cdot \mathbf{1}^0 \cdot \vec{\tau}^{0^T} \\ &= \vec{\tau}^0 \left(\sum_{(i)} e^{-\theta_i} \cdot \Xi_i \cdot e^{\theta_i} \right) \cdot \vec{\tau}^{0^T}, \text{ où } e^{\theta_i} = \mathbf{1}^0 \end{aligned}$$

La matrice $\sum_{(i)} e^{-\theta_i} \cdot \Xi_i \cdot e^{\theta_i}$ est la matrice, somme des inerties élémentaires de tous les grains (i), relativement à la base de référence. Celle-ci peut éga-

lement être considérée comme une matrice d'inertie :

$$\sum_{(i) \in \delta w} e^{-\theta_i} \cdot \Xi_i \cdot e^{\theta_i} = n \cdot e^{-\lambda} \cdot \Xi_{app} \cdot e^{\lambda} \cdot \delta w$$

où $n \cdot \delta w$ est le nombre de grains contenus dans δw

$\lambda^{\rightarrow}$ représente un angle d'orientation privilégiée

Ξ_{app} la matrice diagonale de l'inertie apparente d'un grain. Elle est significative de l'anisotropie statistique canonique d'orientation.

$$n \cdot \Xi_{app} \cdot \delta w = \begin{vmatrix} iner_1(\delta w) & 0 & 0 \\ 0 & iner_2(\delta w) & 0 \\ 0 & 0 & iner_3(\delta w) \end{vmatrix}$$

La matrice d'inertie $n \cdot e^{-\lambda} \cdot \Xi_{app} \cdot e^{\lambda} \cdot \delta w$ peut être considérée comme résultant d'une distribution scalaire de probabilité $p_a(\bar{\theta}^{\rightarrow}/x^{\rightarrow})$ s'appliquant à la matrice fonction de $\bar{\theta}$:

$$e^{-\bar{\theta}} \cdot \sum_{(i)} \Xi_i \cdot e^{\bar{\theta}}$$

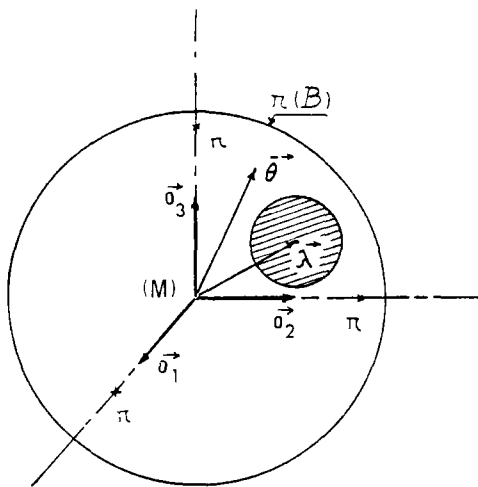
Ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{(i)} e^{-\theta_i} \cdot \Xi_i \cdot e^{\theta_i} &= \int_{\pi(B)} \sum_{(i)} \delta(\bar{\theta}^{\rightarrow} - \theta_i^{\rightarrow}) \cdot e^{-\bar{\theta}} \cdot \Xi_{moy} \cdot e^{\bar{\theta}} \cdot |V(\bar{\theta}^{\rightarrow})| \cdot \delta w \\ &= n \cdot \delta w \int_{\pi(B)} p_a(\bar{\theta}^{\rightarrow}/x^{\rightarrow}) \cdot e^{-\bar{\theta}} \cdot \Xi_{moy} \cdot e^{\bar{\theta}} \cdot |V(\bar{\theta}^{\rightarrow})| \end{aligned}$$

où $\pi(B)$ représente comme précédemment une boule de diamètre égal à 2π - domaine d'existence du vecteur axial $\bar{\theta}^{\rightarrow} (|\bar{\theta}^{\rightarrow}| \leq \pi)$ - et $\delta(\bar{\theta}^{\rightarrow} - \theta_i^{\rightarrow})$ la distribution de Dirac dans un espace vectoriel à trois dimensions.

En identifiant :

$$e^{-\lambda} \cdot \Xi_{app} \cdot e^{\lambda} = \int_{\pi(B)} p_a(\bar{\theta}^{\rightarrow}/x^{\rightarrow}) \cdot e^{-\bar{\theta}} \cdot \Xi_{moy} \cdot e^{\bar{\theta}} \cdot |V(\bar{\theta}^{\rightarrow})|$$



On rappelle que $p_a(\vec{\theta}/x)$ est une fonction scalaire de $\vec{\theta}$, donc des composantes $\bar{\theta}^\beta$ dans la base de référence, et que de plus $\vec{\theta}$ est un vecteur axial dont la norme est définie à 2π près. $p_a(\vec{\theta}/x)$ est donc une solution normalisée de l'équation intégrale établie ci-dessus.

Remarques:

1. On a évidemment
$$\text{tr} \left(\sum_{(i)} e^{-\theta_i} \cdot \Xi_i \cdot e^{\theta_i} \right) = \text{tr} (e^{-\lambda} \cdot \Xi_{app} \cdot e^{\lambda}) \quad n \, \delta \omega$$

$$\text{d'où} \quad \text{tr}(\Xi_{moy}) = \text{tr}(\Xi_{app})$$

L'équation intégrale n'est donc fonction que des déviateurs Ξ_{moy}^d , Ξ_{app}^d des matrices d'inertie.

2. La distribution $p_a(\vec{\theta}/x)$ est équivalente à une matrice d'homothétie commutant avec $e^{\vec{\theta}}$.

3. L'équation intégrale peut s'exprimer de façon plus concise :

$$\text{sachant que : } \Xi_{moy} = \text{dét}^{1/3}(\Xi_{moy}) \quad e^Z = e^{1/3 \text{Log}(\text{dét} \Xi_{moy})} \mathbb{1} + Z$$

où Z est une matrice diagonale représentative d'un déviateur

$$(\text{tr } Z = 0 \quad \text{et} \quad \text{dét}(e^Z) = 1)$$

il vient :

$$\int_{\pi(B)} p_a(\vec{\theta}/x) \quad e^{\lambda \oplus -\vec{\theta} \oplus Z \oplus \vec{\theta} \oplus -\lambda} \quad |V(\vec{\theta})| = \frac{1}{\text{dét}^{1/3}(\Xi_{moy})} \quad \Xi_{app}$$

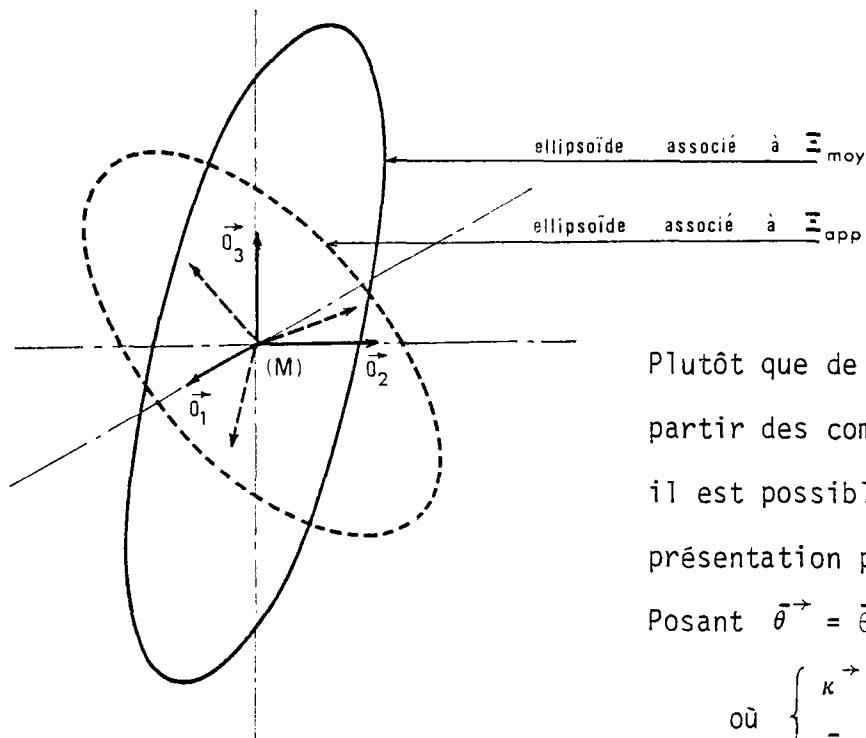
Du point de vue géométrique, la distribution $p_a(\vec{\theta}/x)$ transforme l'ellipsoïde d'inertie (défini par Ξ_{moy}) en un autre ellipsoïde d'inertie (défini par Ξ_{app}) à une rotation près. La trace de ces matrices est identique, mais le déviateur de Ξ_{app} sera "inférieur" (ou égal) à celui de Ξ_{moy} .

Soit :

$$\text{inv}_1(\Xi_{\text{app}}) = \text{inv}_1(\Xi_{\text{moy}})$$

$$0 \leq \text{inv}_2(\Xi_{\text{app}}) \leq \text{inv}_2(\Xi_{\text{moy}})$$

Ainsi, $p_a(\vec{\theta}/\vec{x})$ est une fonction des rapports des 2ème et 3ème invariants des matrices Ξ_{app} et Ξ_{moy} et d'un vecteur axial $\vec{\lambda}$



Plutôt que de définir $p_a(\vec{\theta}/\vec{x})$ à partir des composantes $\bar{\theta}^\beta$ de $\vec{\theta}$, il est possible de se servir de la représentation polaire de $\vec{\theta}$.

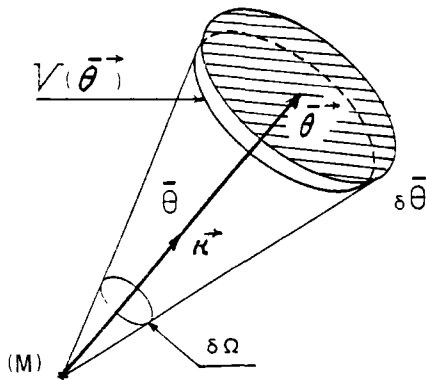
Posant $\vec{\theta} = \bar{\theta} \vec{\kappa}$

où $\begin{cases} \vec{\kappa} \text{ est un vecteur unitaire et,} \\ \bar{\theta} = |\vec{\theta}| \text{ (norme de } \vec{\theta}) \end{cases}$

L'élément de volume du voisinage de $\vec{\theta}$ servant à l'intégration sera égal au cylindre sphérique élémentaire d'épaisseur $\delta\bar{\theta}$

$$|V(\vec{\theta})| = \bar{\theta}^2 \delta\bar{\theta} \delta\Omega$$

Le domaine de définition de $V(\vec{\theta})$ est $\pi(B)$ ce qui implique que celui de Ω est le contour $\partial(B)$ de la boule (B) de diamètre unité ; et celui de $\frac{1}{\pi} \bar{\theta}$, l'intervalle $[0,1]$.



Si l'on admet, le principe de séparation de probabilité pour $\bar{\theta}$ et $\kappa^{\rightarrow}$:

$$p_a(\bar{\theta}^{\rightarrow}/x^{\rightarrow}) = p_a''(\bar{\theta}/x^{\rightarrow}) \cdot p_a'(\kappa^{\rightarrow}/x^{\rightarrow})$$

où $p_a''(\bar{\theta}/x^{\rightarrow})$ est une distribution périodique selon la variable $\bar{\theta}$ donc développable en série de Fourier, et $p_a'(\kappa^{\rightarrow}/x^{\rightarrow})$ est une distribution spatiale polaire de $\kappa^{\rightarrow}$

donc développable selon les puissances croissantes des composantes de $\kappa^{\rightarrow}$.

La normalité de $p_a(\bar{\theta}^{\rightarrow}/x^{\rightarrow})$ conduit à :

$$\int_0^\pi p_a''(\bar{\theta}/x^{\rightarrow}) \bar{\theta}^2 \delta\bar{\theta} \cdot \int_{\partial(B)} p_a'(\kappa^{\rightarrow}/x^{\rightarrow}) \delta\Omega = 1$$

en effectuant les intégrations partielles.

Remarque:

Deux distributions particulières correspondent aux cas extrêmes de transformation de l'ellipsoïde d'inertie, défini par Ξ_0 et qui peut être qualifié d'ellipsoïde de micro-inertie de saturation, en l'ellipsoïde de micro-inertie actuel défini par la matrice $e^{-\lambda} \cdot \Xi_0' \cdot e^{\lambda}$. La distribution $p_a(\bar{\theta}^{\rightarrow}/x^{\rightarrow})$ réalisant une transformation biunivoque et continue d'un domaine sur l'autre, dont l'équivalent intégral est constitué par la transformation linéaire des coordonnées dans la base de référence, définie par la matrice :

$$e^{-\lambda} \cdot \sqrt{\Xi_{app} \cdot \Xi_{moy}^{-1}}$$

(Il s'agit d'une représentation polaire car $e^{-\lambda}$ est un orthogonal de changement de base et $\Xi_{app}^{1/2} \cdot \Xi_{moy}^{-1/2}$ un opérateur diagonal).

Les deux cas extrêmes envisagés ici, sont ceux pour lesquels la distribution $p_a(\bar{\theta}^{\rightarrow}/x^{\rightarrow})$ prend une valeur limite.

Le 1er cas correspond à une distribution isotrope d'orientations des grains.

Lorsque $inv_2(\Xi_{app}) = 0$

(c'est-à-dire Ξ_{app} représente un tenseur sphérique), l'équation intégrale prend alors la forme suivante :

$$\frac{1}{3} tr(\Xi_{app}) \mathbb{1} = \int_{\pi(B)} p_{oa}(\bar{\theta}^{\rightarrow}/x^{\rightarrow}) e^{-\bar{\theta}} \cdot \Xi_{moy} \cdot e^{\bar{\theta}} |V(\bar{\theta}^{\rightarrow})|$$

où la distribution $p_{oa}(\bar{\theta}^{\rightarrow}/x^{\rightarrow})$ correspond à une distribution uniforme d'opérateurs de changement de base. En d'autres termes, l'équipartition de $e^{\bar{\theta}}$ (pour $(i) \in \delta w$) conduit à une distribution $p_{oa}(\bar{\theta}^{\rightarrow}/x^{\rightarrow})$ de la variable $\bar{\theta}^{\rightarrow}$, telle que $\bar{\theta} = \text{Log}(e^{\bar{\theta}})$. On peut constater qu'une distribution du type

$$p_{oa}(\bar{\theta}^{\rightarrow}/x^{\rightarrow}) = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{1 - \cos \bar{\theta}}{\bar{\theta}^2} \quad (\text{où } \bar{\theta} = |\bar{\theta}^{\rightarrow}|)$$

réalise cette correspondance car les critères suivants sont vérifiés :

1. Critère de normalisation

$$p_{oa}(\bar{\theta}^{\rightarrow}/x^{\rightarrow}) = \underbrace{\frac{1}{\pi} \frac{1 - \cos \bar{\theta}}{\bar{\theta}^2}}_{p''_{oa}(\bar{\theta}/x^{\rightarrow})} \cdot \underbrace{\frac{1}{4\pi}}_{p'_{oa}(\kappa^{\rightarrow}/x^{\rightarrow})}$$

$$\int_0^\pi \frac{1}{\pi} \frac{1 - \cos \bar{\theta}}{\bar{\theta}^2} \bar{\theta}^2 \delta \bar{\theta} \cdot \int_{\partial(B)} \frac{1}{4\pi} \delta \Omega = 1.$$

2. Critère d'équipartition

$$\int_{\pi(B)} e^{\bar{\theta}} p_{oa}(\bar{\theta}^{\rightarrow}/x^{\rightarrow}) |V(\bar{\theta}^{\rightarrow})| = . \text{ en effet,}$$

en décomposant $e^{\bar{\theta}}$ selon la base d'opérateurs : $\mathbb{1}, \kappa, \kappa^2$, il vient :

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \int_{\partial(B)} (\mathbb{1} + \sin \bar{\theta} \kappa + (1 - \cos \bar{\theta}) \kappa^2) \frac{1}{4\pi^2} \frac{1 - \cos \bar{\theta}}{\bar{\theta}^2} \bar{\theta}^2 \delta \bar{\theta} \delta \Omega = \\ & \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi (1 - \cos \bar{\theta}) \delta \bar{\theta} \cdot \int_{\partial(B)} \mathbb{1} \delta \Omega + \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \sin \bar{\theta} (1 - \cos \bar{\theta}) \delta \bar{\theta} \cdot \int_{\partial(B)} \kappa \delta \Omega + \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi (1 - \cos \bar{\theta})^2 \delta \bar{\theta} \cdot \int_{\partial(B)} \kappa^2 \delta \Omega \end{aligned}$$

car, par utilisation du théorème de la divergence :

$$\int_{\partial(B)} \kappa \delta \Omega = . \text{ et } \int_{\partial(B)} \kappa^2 \delta \Omega = \int_{(B)} \mathbb{1} \delta w - \int_{\partial(B)} \mathbb{1} \delta \Omega = -\frac{8}{3} \pi \mathbb{1}$$

La distribution $p_{oa}(\vec{\theta}/\vec{x})$ est isotrope du fait de son indépendance vis à vis de $\vec{\kappa}$, $p_{oa}(\vec{\kappa}/\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}$.

En décomposant la matrice Ξ_{moy} en sa partie sphérique et sa partie déviatorique, l'équation intégrale devient :

$$\frac{1}{3} \text{tr}(\Xi_{app}) \mathbb{1} = \frac{1}{3} \text{tr}(\Xi_{moy}) \mathbb{1} \cdot \underbrace{\int_{\pi(B)} p_{oa}(\vec{\theta}/\vec{x}) |V(\vec{\theta})|}_{1}$$

Le terme concernant la transformation de la partie déviatorique est nul.

Finalement :

$$\Xi_{app} = \frac{1}{3} \text{tr}(\Xi_{moy}) \mathbb{1}$$

Le 2ème cas correspond à une anisotropie maximale possible d'orientation des grains.

Ce cas résulte de l'hypothèse d'identité des invariants de Ξ_{app} et de Ξ_{moy} ou plus simplement du fait que :

$$\Xi_{app} = \Xi_{moy}$$

Alors, les ellipsoïdes associés aux matrices Ξ_{moy} et $e^{-\lambda} \cdot \Xi_{app} \cdot e^{\lambda}$, se déduisent l'un de l'autre par une simple rotation d'angle $\vec{\lambda}$. La distribution $p_{ia}(\vec{\theta}/\vec{x})$ qui réalise cette transformation est la distribution de Dirac :

$$p_{ia}(\vec{\theta}/\vec{x}) = \delta(\vec{\theta} - \vec{\lambda})$$

Cas particulier : Problème plan

En ce qui concerne le problème plan, le vecteur axial $\vec{\theta}$ est défini entièrement par sa norme $\bar{\theta} = |\vec{\theta}|$ soit

$$p_a(\vec{\theta}/\vec{x}) = p_a''(\bar{\theta}/\vec{x})$$

d'où l'expression de l'équation intégrale :

$$\begin{vmatrix} \cos \lambda & -\sin \lambda \\ \sin \lambda & \cos \lambda \end{vmatrix} \cdot \Xi_{app} \cdot \begin{vmatrix} \cos \lambda & \sin \lambda \\ -\sin \lambda & \cos \lambda \end{vmatrix} = \int_0^{2\pi} p_a''(\bar{\theta}/\vec{x}) \begin{vmatrix} \cos \bar{\theta} & -\sin \bar{\theta} \\ \sin \bar{\theta} & \cos \bar{\theta} \end{vmatrix} \cdot \Xi_{moy} \cdot \begin{vmatrix} \cos \bar{\theta} & \sin \bar{\theta} \\ -\sin \bar{\theta} & \cos \bar{\theta} \end{vmatrix} d\bar{\theta}$$

pour laquelle :

$$n \delta w \Xi_{\text{moy}} = \begin{vmatrix} \sum_{(i)} \text{iner}_1(i) & 0 \\ 0 & \sum_{(i)} \text{iner}_2(i) \end{vmatrix}, \quad n \delta w \Xi_{\text{app}} = \begin{vmatrix} \text{iner}_1(\delta w) & 0 \\ 0 & \text{iner}_2(\delta w) \end{vmatrix}$$

on en déduit après calcul :

$$\text{tr}(\Xi_{\text{app}}) = \text{tr}(\Xi_{\text{moy}}) \quad (\text{résultat déjà acquis})$$

et,

$$\int_0^{2\pi} p_a''(\bar{\theta}/\vec{x}) \cos 2\bar{\theta} \delta\bar{\theta} = \chi \cos 2\lambda$$

$$\int_0^{2\pi} p_a''(\bar{\theta}/\vec{x}) \sin 2\bar{\theta} \delta\bar{\theta} = \chi \sin 2\lambda$$

$$\text{avec,} \quad \chi = \frac{\text{iner}(\delta w) - \text{iner}(\delta w)}{\sum_{(i)} \text{iner}(i) - \sum_{(i)} \text{iner}(i)}$$

et la condition de normalisation :

$$\int_0^{2\pi} p_a''(\bar{\theta}/\vec{x}) \delta\bar{\theta} = 1$$

La distribution polaire, solution de ce système est la suivante :

$$p_a''(\bar{\theta}/\vec{x}) = \frac{1}{2\pi} (1 - \chi \cos 2(\bar{\theta} - \lambda)) \quad (\text{si } \chi \ll 1)$$

La distribution elliptique, solution de ce système est la suivante :

$$p_a''(\bar{\theta}/\vec{x}) = \frac{1 - \chi^2}{2\pi(1 + \chi^2 - 2\chi \cos 2(\bar{\theta} - \lambda))} \quad (0 \leq \chi < 1)$$

$$\sim \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{\det P}}{|\cos \bar{\theta} \sin \bar{\theta}| \cdot P \cdot \begin{vmatrix} \cos \bar{\theta} \\ \sin \bar{\theta} \end{vmatrix}}$$

b.3 - En conclusion, il semble justifié, eu égard aux observations précédentes de prendre comme représentation de l'état cinématique actuel canonique d'un élément de volume unité, la matrice symétrique : $\rho, P(\vec{x})$, qualifiée de matrice du tenseur de configuration géométrique canonique, telle que :

- La base princ. associée à P se déduit de la base de référence par une rotation d'angle $\lambda^{\rightarrow}$ caractérisant l'orientation privilégiée des grains. (La matrice $e^{\lambda} \cdot P \cdot e^{-\lambda}$ est diagonale).

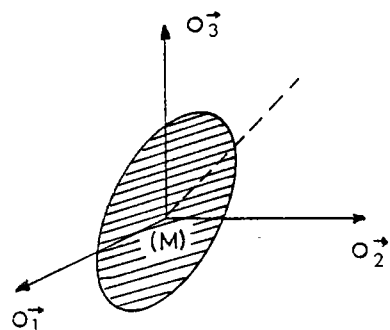
- Les invariants de P soient tels que :

. Les 1er et 2ème invariants de P caractérisent l'anisotropie relative du milieu, compte tenu des rapports des 2ème et 3ème invariants des tenseurs de micro-inertie actuel Ξ'_0 et de saturation Ξ_0 .

. Le 3ème invariant de P : (densité volumique)

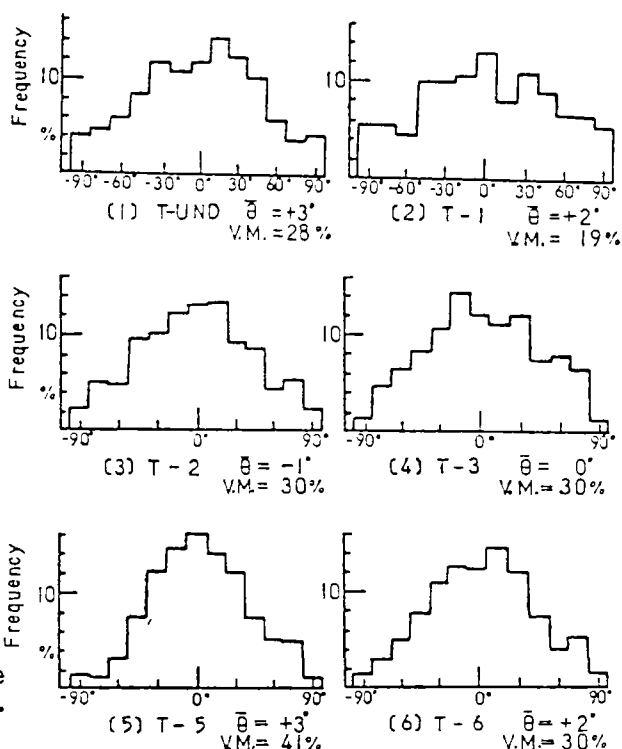
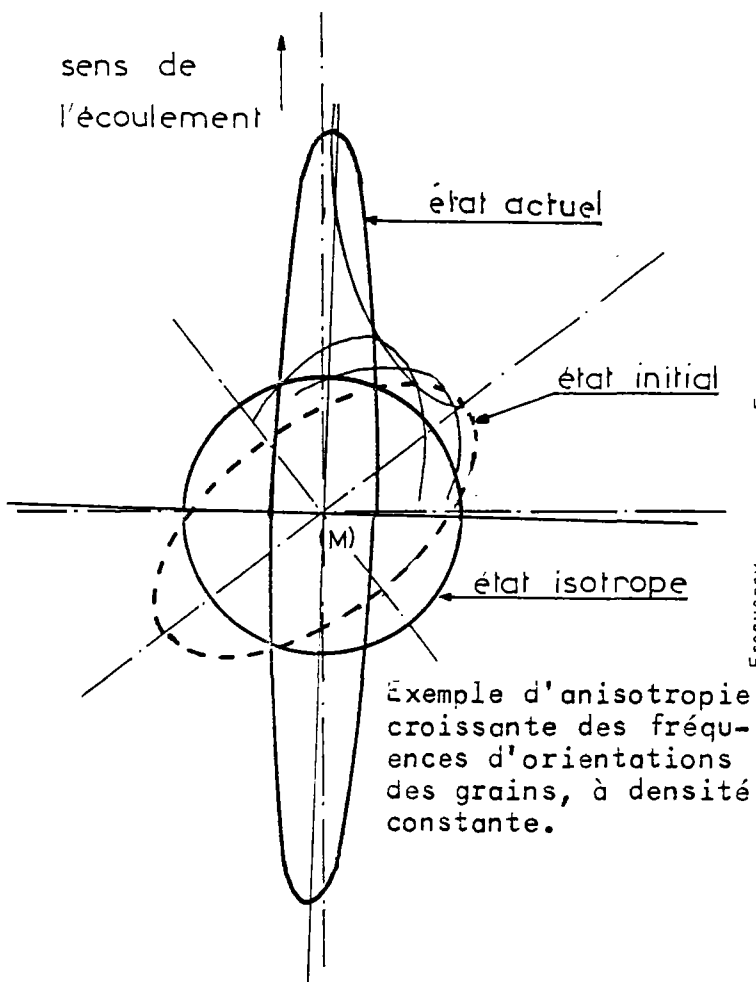
$$\det(P) = 1$$

La probabilité d'orientation des grains relative à la direction $\vec{\theta}$ est définie par une distribution de Cauchy normalisée, construite à partir de $P(\vec{x})$.



Représentation du tenseur de configuration géométrique canonique par un ellipsoïde dans la base de référence - son volume est proportionnel à la densité volumique

(Nota : $\rho_s P(\vec{x})$ peut se mettre sous forme polaire : $\rho_s e^Z$ avec $\text{tr}(Z) = 0$).



Frequency histograms of θ , in V-sections of deformed sands (Specimens compacted by the tapping method)

(selon ODA 1972)

b - Les caractéristiques motionnelles

Définies à partir de $(\dot{q}) = \{\vec{v}_i, \vec{\omega}_i\}$, elles associent à un élément de volume $\delta\omega$ - dont la position est déterminée par le vecteur $\vec{x}$, dans le repère de référence - deux distributions relatives aux vitesses statistiques de translation et de rotation des grains.

En mécanique des milieux continus, les grains assimilés à des points matériels sont animés d'un mouvement défini par un champ de vitesses continu par morceaux ; en mécanique des milieux granulaires au contraire, les vitesses $\vec{v}_i$ des grains (i) peuvent prendre a priori toutes directions et intensités, et le déplacement d'ensemble correspond à une moyenne pondérée par la masse (le volume) de chaque grain. D'une manière analogue à la pondération des rotations propres des grains par leur inertie propre pour la recherche d'une fonction de distribution des orientations, les vitesses devront en effet être pondérées par les masses auxquelles elles se rapportent. On fait ainsi intervenir non plus la vitesse, mais la quantité de mouvement (rapportée à l'unité de masse).

$$\text{La vitesse moyenne : } \vec{v}_{\text{moy}} = \frac{1}{\sum_{(i) \in \delta\omega} \text{vol}(i)} \cdot \sum_{(i) \in \delta\omega} \text{vol}(i) \vec{v}_i$$

Pour traduire le chaos apparent des vitesses (des quantités de mouvement) individuelles, d'autres paramètres doivent être introduits. On est donc amené à définir une fonction de distribution des vitesses relative à chaque position $\vec{x}$.

La probabilité pour que la vitesse $\vec{v}_i$ du grain (i) de l'élément de volume $\delta\omega$, soit située au voisinage d'un vecteur $\vec{v}$ contenu dans l'espace des vitesses possibles, est donnée par :

$$P(\vec{v}_i \in V(\vec{v})/c_i \in \mathcal{V}(\vec{x})) = p_v(\vec{v}/\vec{x}) \frac{|V(\vec{v})|}{\text{vol}(V(\vec{v}))}$$

où $V(\vec{v})$ est un voisinage de $\vec{v}$ dont le volume est $|V(\vec{v})|$

$p_v(\vec{v}/\vec{x})$ représente une densité moyenne pour une position définie par $\vec{x}$ et pour une vitesse $\vec{v}$. Cette densité étant évaluée à partir des quantités de mouvement.

$p_v(\vec{v}/\vec{x})$ se présente comme une fonction scalaire des 3 composantes $\vec{v}^\beta (= \vec{v}^{0\beta}$ pour $\beta = 1, 2, 3$) du vecteur $\vec{v}$, avec naturellement le sens d'une probabilité, soit :

$$\int_{(R)^3} p_v(\vec{v}/\vec{x}) |\vec{v}(\vec{v})| = 1$$

$$\begin{cases} (R)^3 \text{ est l'espace à 3 dimensions } (|\vec{v}| < \infty) \\ |\vec{v}(\vec{v})| = \delta \vec{v}^1 \delta \vec{v}^2 \delta \vec{v}^3 \text{ en coordonnées cartésiennes.} \end{cases}$$

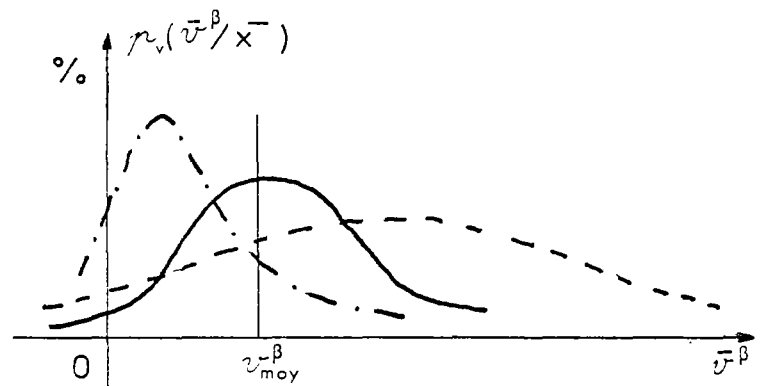
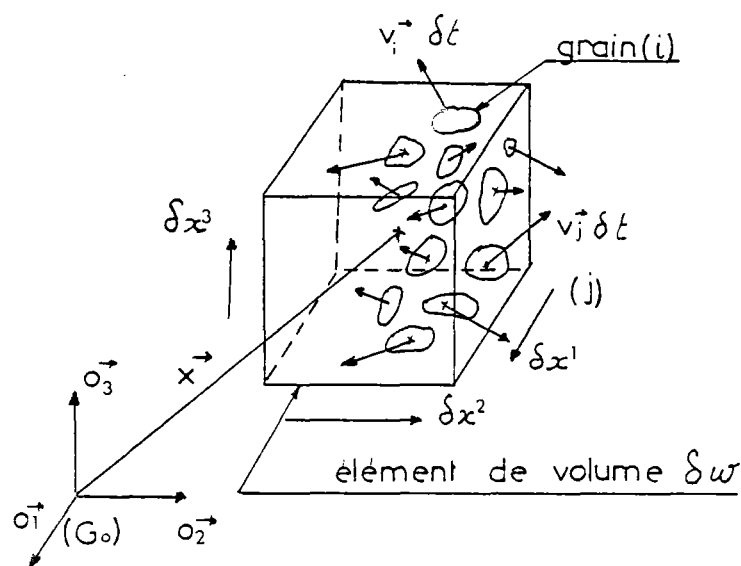


Diagramme de distribution d'une des composantes des vitesses

Les mouvements internes constituent la caractéristique visible de la dissipation énergétique par frottement. Pour un milieu granulaire dans lequel les contacts sont bloqués, les paramètres cinématiques motionnels associés $(\dot{\vec{q}})$ sont nuls, et donc la puissance dissipée également :

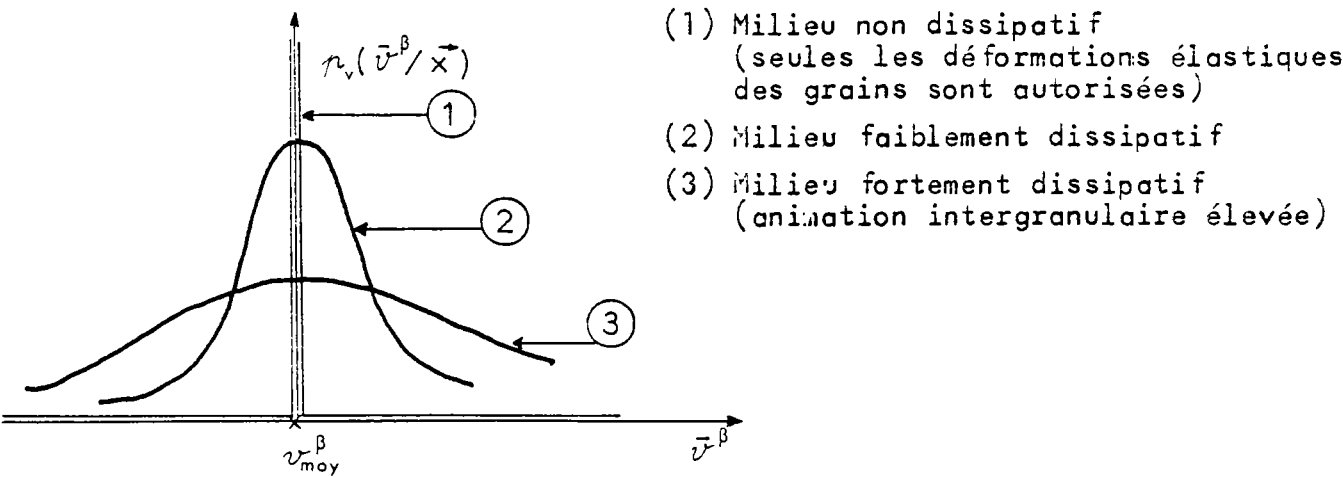
$$-P_{\text{int}} = (\vec{Q}) \cdot \underbrace{(\dot{\vec{q}})' }_0 = 0$$

(Les seuls déplacements permis seront, comme nous l'avons vu dans ce cas, des déplacements conservant la rigidité du système).

Dans un milieu fortement dissipatif au contraire, les mouvements chaotiques seront plus accentués à chargements équivalents. L'écart quadratique moyen des vitesses des grains peut, par conséquent être assimilé à une caractéristique de la dissipation pour frottement. Ce point sera développé ultérieurement.

Dans le schéma ci-dessous, est indiqué ce que pourrait être la fonction

de distribution des vitesses dans un processus de chargement isotrope d'un échantillon.



Vitesse moyenne et équation de continuité

Considérant un élément volumique $V(\vec{x})$ défini par son centre de gravité(M), repéré par $\vec{x}$ relativement à (G_0) .

Par définition :

$$\sum_{(i)} vol(i) (c_i^{\vec{x}} - \vec{x}) = . \quad \text{pour } c_i^{\vec{x}} \in V(\vec{x})$$

Par dérivation :

$$\sum_{(i)} vol(i) v_i^{\vec{x}} - v_{moy}^{\vec{x}} \sum_{(i)} vol(i) = .$$

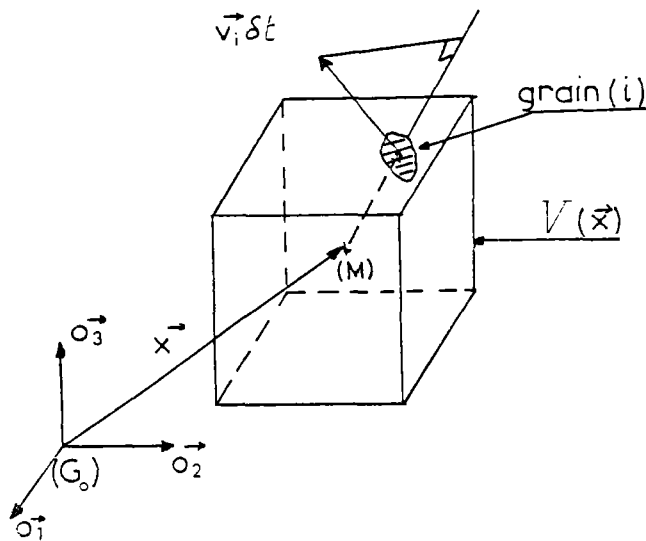
Pendant la durée δt , la variation de la densité volumique $\rho(\vec{x})$ dans $V(\vec{x})$ est due à la différence des entrées et des sorties de grains de l'élément volumique.

La variation de densité : $\frac{\partial \rho_s}{\partial t} |V(\vec{x})|$

(où $|V(\vec{x})| = \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3$ dans une représentation cartésienne).

La contribution de 2 faces perpendiculaires à cette variation, du fait de l'existence d'un gradient de densité :

$$- \frac{\partial}{\partial x^\beta} (\rho_s(\vec{x}) v_{moy}^\beta) \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3$$



On retrouve l'équation classique de continuité applicable aux valeurs moyennes $\rho_s(\vec{x})$, $\vec{v}_{\text{moy}}(\vec{x})$

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} = - \text{div}(\rho_s \vec{v}_{\text{moy}})$$

ou encore :

$$\sim - \rho_s \text{div}(\vec{v}_{\text{moy}}) - \vec{\text{grad}}(\rho_s) \cdot \vec{v}_{\text{moy}}$$

(Expression que peut être obtenue directement par dérivation particulaire de $\int_{V(\vec{x})} \rho_s(\vec{x}) \delta w$)

Afin de rendre compte des mouvements internes causés par les variations relatives des vitesses des grains, on notera tout d'abord que la contribution des grains (i) contenus initialement dans $V(\vec{x})$, à la variation relative de $\rho_s(\vec{x})$ est donnée par la fraction :

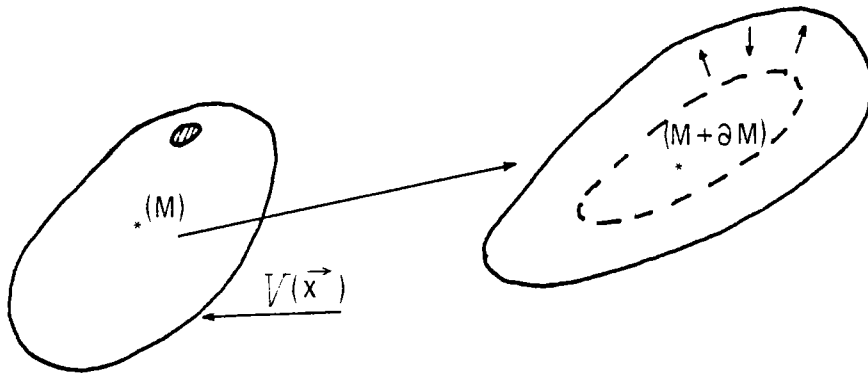
$$\frac{\delta \rho_s}{\rho_s} = - v \frac{1}{\sum_{(i) \in \partial w} \text{vol}(i) |\vec{c}_i - \vec{x}|^2} \delta \left(\sum_{(i) \in \partial w} \text{vol}(i) |\vec{c}_i - \vec{x}|^2 \right)$$

où le terme $\sum_{(i)} \text{vol}(i) |\vec{c}_i - \vec{x}|^2$ représente l'équivalent d'une inertie. Par dérivation on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\delta \rho_s}{\rho_s} &= - 2v \frac{1}{\sum_{(i)} \text{vol}(i) |\vec{c}_i - \vec{x}|^2} \sum_{(i)} \text{vol}(i) (\vec{c}_i - \vec{x}) \cdot \vec{v}_i \cdot \delta t \\ &= - 2v \frac{1}{\sum_{(i)} \text{vol}(i) |\vec{c}_i - \vec{x}|^2} \left(\sum_{(i)} \text{vol}(i) \vec{c}_i \cdot \vec{v}_i - \vec{x} \cdot \vec{v}_{\text{moy}} \sum_{(i)} \text{vol}(i) \right) \delta t \end{aligned}$$

On remarque que la projection de $\vec{v}_i$ sur $(\vec{c}_i - \vec{x})$ constitue la part de la vitesse qui tend à éloigner ou à rapprocher le grain (i) du centre de gravité de l'élément. Il s'agit donc bien d'un terme d'expansion volumique.

A cette contribution, il faut ajouter celle qui provient des grains extérieurs à $V(\vec{x})$.



Dans un échantillon bidimensionnel, les variances et covariances relatives aux différences des vitesses individuelles des grains et de la vitesse moyenne, pondérées par la masse de chaque grain, sont exprimées par la matrice dont le terme α, β est égal à :

$$\frac{1}{\sum_{(i)} vol(i)} \cdot \sum_{(i)} vol(i) (v_i^\alpha - v_{moy}^\alpha) (v_i^\beta - v_{moy}^\beta) \text{ pour } \alpha, \beta = 1, 2, 3 \text{ et } (i) \in \delta\omega$$

En développant cette expression et, compte tenu du fait que

$$v_{moy}^\beta = \frac{1}{\sum_{(i)} vol(i)} \cdot \sum_{(i)} vol(i) v_i^\beta$$

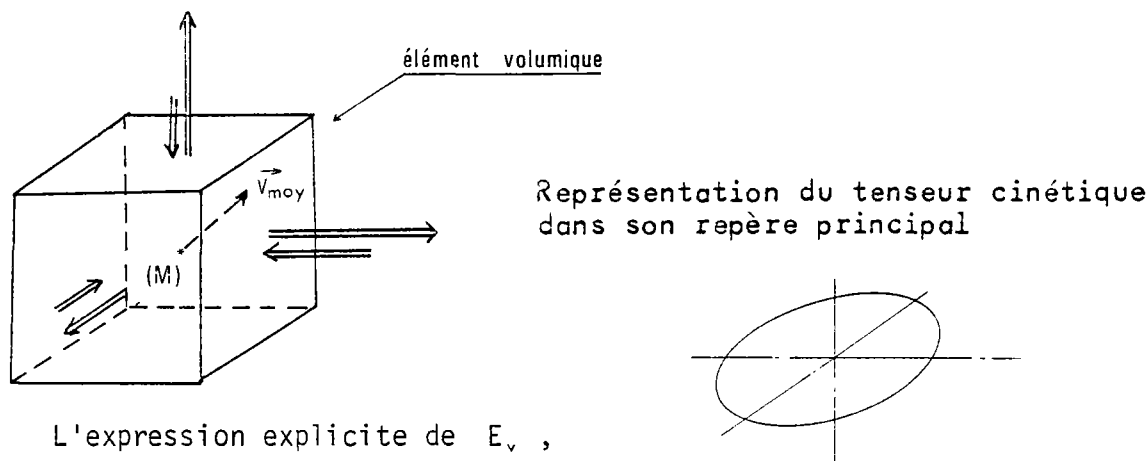
on obtient la différence de 2 matrices symétriques $\frac{1}{\rho_s} E_v$, $\frac{1}{\rho_s} \bar{E}_v$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho_s} E_v = \frac{1}{\sum_{(i)} vol(i)} \sum_{(i)} vol(i) v_i^{0+} \cdot v_i^0 \\ \text{et,} \\ \frac{1}{\rho_s} \bar{E}_v = v_{moy}^{0+} \cdot v_{moy}^0 \end{array} \right.$$

où $v_i^{0+} \cdot v_i^0$ est la représentation matricielle du tenseur monome construit à partir de $\vec{v}_i$, dans la base 0^+ . Sa trace est égale au carré de l'intensité de la vitesse du grain (i). La trace de $\frac{1}{\rho_s} E_v$ permet donc de déterminer la vitesse moyenne quadratique $|\vec{v}_{moy}|$. Il en est de même de $\frac{1}{\rho_s} \bar{E}_v$, dont la trace est égale au carré de la vitesse moyenne de l'écoulement.

La matrice $\frac{1}{\rho_s} E_v$ relative à un élément tridimensionnel, de volume unité, peut être considérée comme la représentation d'un tenseur cinétique des vitesses de translation.

Cette matrice traduit effectivement l'animation interne d'un milieu granulaire dans chacune des directions orthogonales.



L'expression explicite de E_v ,

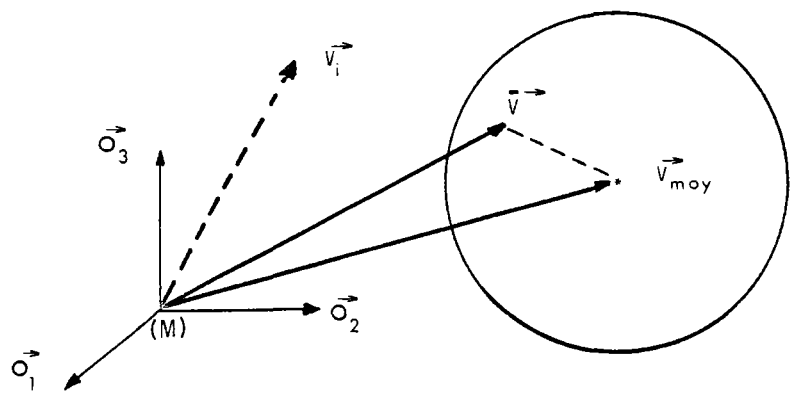
$$E_v(\vec{x}) \delta w = \begin{vmatrix} \sum_i \text{vol}(i) (v_i^1)^2 & \sum_i \text{vol}(i) v_i^2 v_i^1 & \sum_i \text{vol}(i) v_i^3 v_i^1 \\ \sum_i \text{vol}(i) v_i^1 v_i^2 & \sum_i \text{vol}(i) (v_i^2)^2 & \sum_i \text{vol}(i) v_i^3 v_i^2 \\ \sum_i \text{vol}(i) v_i^1 v_i^3 & \sum_i \text{vol}(i) v_i^2 v_i^3 & \sum_i \text{vol}(i) (v_i^3)^2 \end{vmatrix}$$

Si maintenant on veut établir une fonction de distribution des vitesses de translation dans un élément volumique, il est naturel de considérer $\frac{1}{\rho_s} (E_v - \bar{E}_v)$ comme la matrice de corrélation de la loi de distribution tridimensionnelle. Le choix d'une loi normale conduit pour $p_v(\vec{v}/\vec{x})$ à :

$$p_v(\vec{v}/\vec{x}) = \left(\frac{\rho_s}{2\pi}\right)^{3/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\det(E_v - \bar{E}_v)}} e^{-\frac{1}{2} \rho_s (\vec{v}^0 - v_{\text{moy}}^0) \cdot (E_v - \bar{E}_v)^{-1} \cdot (\vec{v}^0 - v_{\text{moy}}^0)^T}$$

La matrice $\rho_s (E_v - \bar{E}_v)^{-1}$ est une matrice symétrique et la forme quadratique figurant en exposant est définie positive ; ses termes sont proportionnels aux mineurs du déterminant de la matrice de corrélation.

Cette distribution est simplifiée si l'on admet que p_v n'est fonction que de la norme du vecteur $\vec{v} - v_{\text{moy}}$. La fonction p_v est alors équivalente à la fonction de distribution des vitesses de Maxwell.



La matrice $\rho_s (E_v - \bar{E}_v)^{-1}$ est alors une matrice d'homothétie, ce qui impose que $E_v - \bar{E}_v$ le soit également

$$E_v - \bar{E}_v = \frac{1}{3} \rho_s |\delta v|^2 \mathbb{1}$$

La quantité $\frac{1}{\sqrt{3}} |\delta v|(x^{\rightarrow})$ représente l'écart quadratique moyen des vitesses. Par sommation selon la lère diagonale :

$$\begin{aligned} |\delta v|^2 &= \frac{1}{\rho_s} \text{tr}(E_v - \bar{E}_v) \\ &= |\vec{v}_{moy}|^2 - |\vec{v}_{moy}|^2 \end{aligned}$$

où $|\vec{v}_{moy}|$ est la norme de la vitesse quadratique moyenne (on rappelle en effet que la trace de la matrice $\frac{1}{\rho_s} E_v$ est égale au carré de la vitesse $\vec{v}_{moy}$.)

De plus, lorsque $|\delta v|(x^{\rightarrow})$ tend vers 0, la distribution $\rho_s(\vec{v}/x^{\rightarrow})$ correspond à la distribution de Dirac $\delta(\vec{v} - \vec{v}_{moy})$. La quantité $\rho_s(x^{\rightarrow}) |\vec{v}_{moy}|^2 \delta\omega$ est proportionnelle à l'énergie cinétique totale de translation de l'élément $\delta\omega$.

Comme cela a été signalé antérieurement $\rho_s |\delta v|^2 \delta\omega$ constitue une caractéristique microscopique de la dissipation intrinsèque, en l'absence de rotation des grains (glissement sans roulement).

Remarques:

1. A partir du champ de vitesse moyenne $\vec{v}_{moy}(x^{\rightarrow})$, on en déduit le champ du tenseur symétrique des taux de déformations par la théorie classique du 1er gradient en mécanique des milieux continus

$$\dot{\epsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (v_{moy,\alpha}^{\beta} + v_{moy,\beta}^{\alpha}) \quad (\text{pour } \alpha, \beta = 1, 2, 3).$$

2. De la relation bien connue de la conservation de la masse, on en déduit immédiatement, une relation équivalente concernant la variation du nombre de grains par unité de volume

$$n(\vec{x}) = \frac{1}{vol_{moy}} \rho_s(\vec{x})$$

implique :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + div(n \vec{v}_{moy}) = 0 .$$

$$(\text{Le taux de déformation volumique } \dot{\epsilon}_v = - \frac{\dot{\rho}_s}{\rho_s} = - \frac{\dot{n}}{n})$$

En définitive, on peut retenir de ces considérations que l'état cinématique motionnel d'un milieu granulaire est caractérisé non seulement, par un champ de vitesse $\vec{v}_{moy}(\vec{x})$ pris en compte en mécanique des milieux continus, mais par les tenseurs cinétiques de translation et de rotation qui définissent les micro-déplacements des grains.

(Une extension aux vitesses de rotation $\omega_i(\vec{x})$ des grains (i) peut en effet être envisagée selon la même démarche, dans le but de caractériser le tenseur $E_\omega(\vec{x})$).

2.222 - LES CARACTERISTIQUES ASSOCIEES

Les caractéristiques positionnelles

Définies à partir de $(\tilde{q}) = \{b_{ij}^{\rightarrow}, n_{ij}^{\rightarrow}, t_{ij}^{\rightarrow}\}$ et qui associent à un élément de volume dont la position est déterminée par le vecteur $\vec{x}$, trois distributions, dont l'une est relative à la position statistique spatiale des contacts, une autre à leur orientation et la dernière enfin à une direction principale tangente.

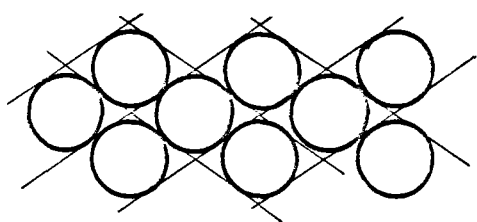
Remarque préliminaire:

La justification de l'existence de tels paramètres est dictée par l'obser-

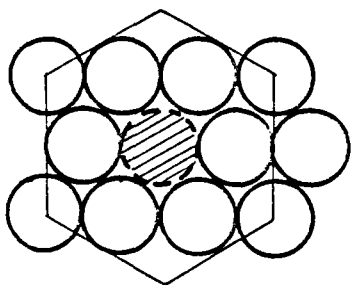
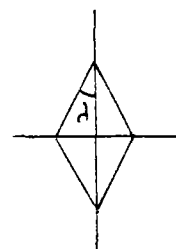
vation suivante :

On pourrait penser que la connaissance de l'état positionnel canonique suffit à décrire la configuration statistique géométrique du milieu. Deux contre-exemples simples infirment ce fait.

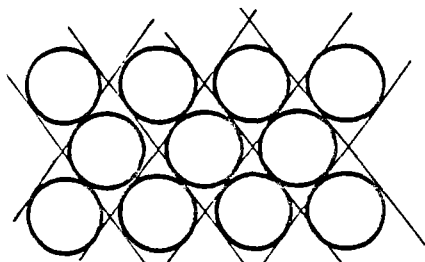
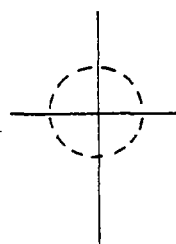
Le premier exemple est celui d'un assemblage de sphères identiques. Dans ce cas, du fait de l'inertie sphérique d'une boule, il n'est pas possible de lui associer un vecteur axial d'orientation, tel qu'il a été défini dans le § 1 211, et bien sûr le tenseur représenté par $\rho_s P$ sera sphérique ($P = \mathbb{1}$). Or, il est bien connu que pour une même compacité, plusieurs configurations sont possibles. On peut indiquer en l'occurrence 3 configurations concevables à partir d'une même densité ρ_s , pour un empilement de rouleaux cylindriques.



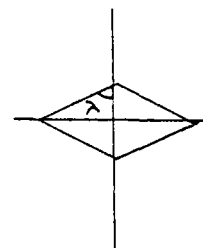
État (1) : orientation des contacts



État (2) : orientation des contacts (1 cylindre sur 9 est oté)

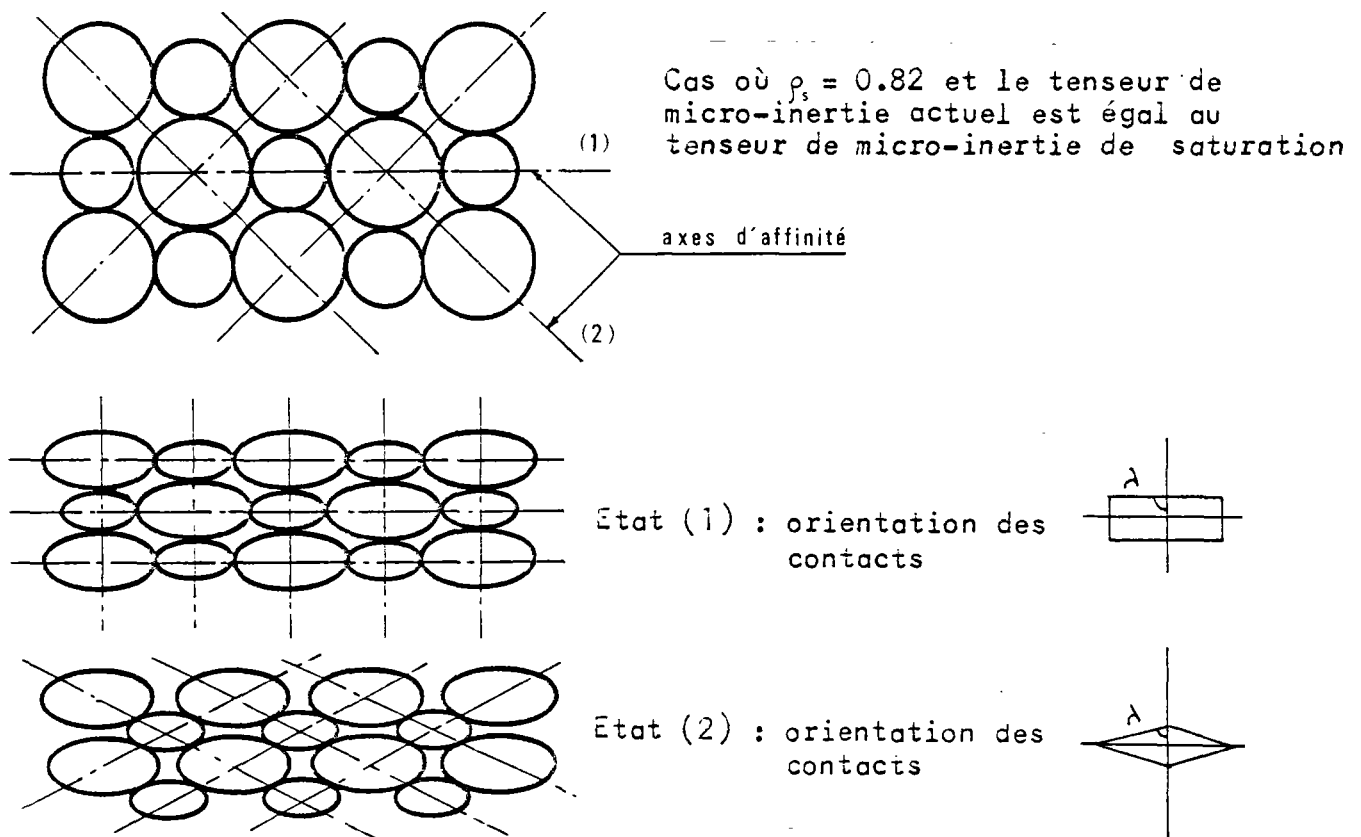


État (3) : orientation des contacts



Le deuxième exemple constitué d'un assemblage de grains orientables montre que pour une même valeur, non seulement de la densité volumique, mais encore du tenseur d'orientation, il peut exister une grande différence dans la structure de l'assemblage. L'exemple élémentaire présenté ici est celui d'un assemblage de rouleaux elliptiques de différents diamètres.

La structure bidimensionnelle se déduit d'un assemblage de rouleaux à section circulaire par une affinité par rapport à un axe dont la direction est choisie arbitrairement.



Ainsi, à moins de connaître précisément le contour de chaque grain et ses paramètres positionnels canoniques et donc d'en déduire analytiquement les paramètres positionnels associés, il n'est pas possible avec la matrice $\rho_s P$ de définir complètement la configuration géométrique du milieu. D'autres paramètres statistiques sont donc indispensables pour caractériser la structure de l'assemblage.

Notons tout d'abord que l'évaluation du nombre de contacts existant par unité de volume ne constitue pas une caractéristique d'état associée, si elle n'est assortie de celle de la dimension d'un grain (effet d'échelle) ; il en est de même du nombre de contacts par grain, puisque ce dernier est une conséquence implicite des caractéristiques analytiques et de la valeur actuelle de la compacité. Des milieux à granulométrie dispersée selon la théorie des mélanges de Feret peuvent avoir une compacité très élevée - voisine de 1. (Le bouchage des interstices est assuré par les grains de petite dimension).

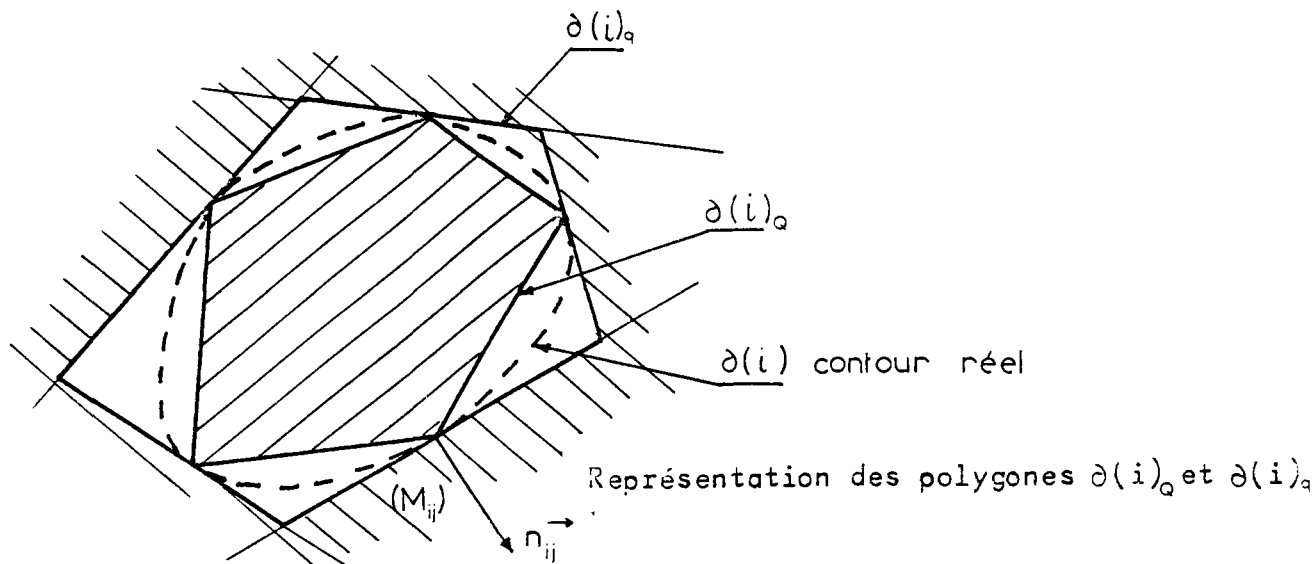
Ce qui importe donc de connaître, est ce qui différencie 2 états géométriques possédant les mêmes caractéristiques analytiques et les mêmes caractéristiques canoniques. Evidemment, les pièges liés à des morphologies spéciales de grains sont nombreux (enclavement, ségrégation, etc.) , néanmoins pour des grains à contour globalement convexes et pour des granulométries régulières, il est possible de mettre en évidence certains aspects significatifs de la structure d'un assemblage.

Dans les milieux naturels, la détermination de la forme générale d'un grain et de sa position, est hors d'atteinte des techniques actuelles d'observation, c'est dire combien est vaine l'idée de l'exploitation des données analytiques pour le calcul théorique des paramètres de contact. Inversement, la connaissance des paramètres positionnels associés permet de cerner plus ou moins précisément le contour du grain moyen et son orientation spatiale. En effet, pour un grain (i) convexe, $\{\vec{b}_{ij}, \vec{n}_{ij}\}$ (j variant) définit d'une part le polyèdre de sustentation $\partial(i)_Q$ inscrit dans le contour du grain, d'autre part le polyèdre de stabilité cinématique $\partial(i)_q$ circonscrit à $\partial(i)$. C'est donc par l'analyse de ce problème que seront fournies les 2 premières caractéristiques statistiques associées.

En dehors de toutes considérations dynamiques, la stabilité intrinsèque d'un grain est d'autant plus grande que ses polyèdres $\partial(i)_q$ et $\partial(i)_Q$ seront rapprochés l'un de l'autre. On conçoit intuitivement et ce fait est confirmé

par l'expérience, qu'au cours d'une consolidation isotrope, un grain aura tendance à se placer dans une situation qui améliore sa stabilité propre.

- d'une part, en augmentant le nombre de ses contacts
- d'autre part, à s'orienter de manière à favoriser par ses contacts la concordance des polyèdres intérieurs et extérieurs.



$$\left(\frac{vol(i)_Q}{vol(i)} \leq 1 \leq \frac{vol(i)_Q}{vol(i)} \right)$$

2.23 - LES CARACTERISTIQUES D'ETAT DYNAMIQUE

Les caractéristiques d'état dynamique définissant statistiquement la configuration dynamique du milieu, sont obtenues à partir des paramètres de chargements actuels et incrémentaux (Q) , $(\tilde{Q})$, $(\dot{Q})$, $(\ddot{Q})$.

2.231 - LES CARACTERISTIQUES CANONIQUES

a - Les caractéristiques actuelles

Etablies à partir de $(Q) = \{g^{\vec{i}}, \mu^{\vec{i}}\}$ elles associent à un élément volumique $V(x^{\vec{i}})$, deux distributions dont l'une est relative à la force volumique et l'autre au couple volumique.

Dans nos hypothèses, les efforts (Q) sont donnés et sont essentiellement le résultat de l'action d'un champ extérieur sur le volume ou la masse des grains. Cette simplification a pour conséquence :

. Les forces $\vec{g}^i$ sont toutes dirigées dans le même sens et sont proportionnelles au volume des grains (i).

$$\vec{g}^i = vol(i) \quad \vec{k}$$

où $\vec{k}(\vec{x})$ est un champ de vecteur en général constant

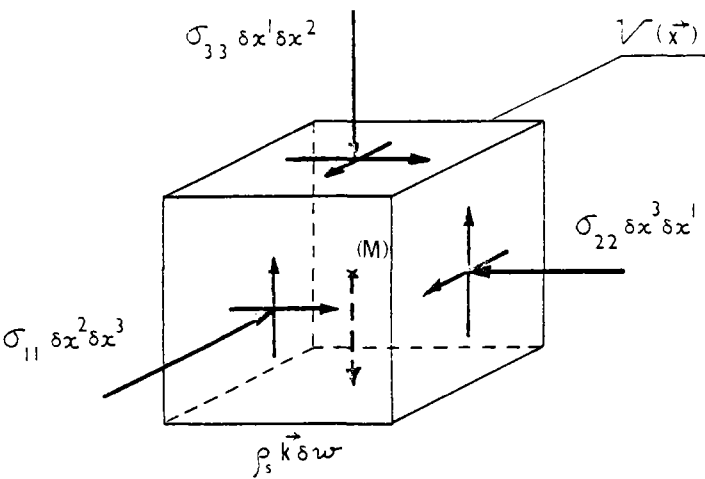
$$grad(\vec{k}) = \quad .$$

Ainsi les forces $\vec{g}^i$ suivent une loi de distribution fonction de la densité volumique ρ_s

$$\sum_{(i) \in \delta w} \vec{g}^i = \sum_{(i)} vol(i) \quad \vec{k} = \rho_s \quad \vec{k} \quad \delta w$$

. Les couples donnés $\vec{\mu}^i$ sont nuls.

La quantité $\rho_s(\vec{x}) \quad \vec{k}$ représente la moyenne des forces canoniques par unité de volume.



L'équilibre "macroscopique" de l'élément volumique δw est assujetti à la condition de conservation de la quantité de mouvement :

$$div(\Sigma . \vec{0}) + \rho_s \vec{k} = \quad .$$

où Σ est la matrice symétrique représentative du tenseur des contraintes dans le milieu, exprimée dans la base de référence $\vec{0}$.

Le vecteur contrainte $\vec{\sigma}$ agissant sur une face plane ne constitue qu'une valeur moyenne des efforts exercés par les grains sur cette paroi. C'est en quelque sorte la partie observable de l'état dynamique du milieu. Pour tenir compte des efforts d'auto-serrage, formant un système nul, il est nécessaire

d'introduire les autres caractéristiques statistiques que sont les caractéristiques associées, dérivées de $(\tilde{Q})$.

2.232 - LES CARACTERISTIQUES ASSOCIEES

Le paragraphe 2 122 avait pour objet, de préciser les composantes essentielles de la mécanique d'un système de corps rigides en contact, c'est-à-dire les conditions requises sur $(\tilde{Q})$ pour que l'équilibre statique soit obtenu. En fait, ces conditions s'avèrent incomplètes car la compatibilité des efforts vis à vis du critère de liaison n'a pas été vérifiée. On définira donc un sous-ensemble de l'espace des chargements statiquement admissibles pour lequel la stabilité de chaque contact est assurée. Ce sous-espace qualifié "d'espace de configuration des paramètres d'efforts internes statiquement admissibles, licites" répond par conséquent aux critères suivants :

$$(\tilde{Q}) \text{ S.A.L. : } \begin{cases} (\tilde{Q}) \text{ S.A} \\ \text{et } L(\tilde{Q}) \leq 0 \end{cases}$$

(où L est la fonction du critère de liaison intergranulaire). La convexité du domaine définissant les capacités de résistance de chaque contact intergranulaire (L convexe) implique dans l'espace des chargements associés $(\tilde{Q})$, l'existence d'un domaine convexe limitant les potentialités de résistance d'un système en géométrie actuelle (Salençon 1972).

Le but recherché est par conséquent la détermination du domaine des chargements potentiellement, supportables intérieurement. En effet, le degré d'hyperstaticité intérieure du système granulaire (S) , n'étant pas nul en général, il y a donc une indétermination sur la valeur des paramètres $(\tilde{Q})$. On dit que le noyau du convexe est constitué par l'ensemble des efforts intergranulaires auto-équilibrés, pour le processus étudié. Il s'agit là d'efforts internes d'auto-serrage dont l'existence conditionnera nécessairement le comportement

mécanique du système (pas d'unicité de la solution, en équilibre limite du fait de la nature de la loi d'écoulement du contact intergranulaire). Cet auto-serrage (formant un système nul intérieurement) constitue par conséquent une caractéristique d'état au même titre que la configuration géométrique du système.

a - Equilibres limites dans une partie $V(\vec{x})$ d'un système

En l'absence de forces volumiques moyennes $\rho_s \vec{k}$, de sollicitations extérieures (tenseur des contraintes macroscopiques), il ne peut exister d'auto-serrage dans un milieu constitué de grains convexes, car la relaxation des contraintes sur le contour $\partial V(\vec{x})$ entraîne la relaxation des efforts intergranulaires pour une zone voisine du contour, et, de proche en proche, jusqu'aux zones intérieures de $V(\vec{x})$. Inversement, pour des sollicitations extérieures mêmes faibles, il existe des efforts intergranulaires non nuls qui, de proche en proche, peuvent équilibrer un auto-serrage important à l'intérieur du milieu (cf. essais oedométriques § 3 2). Par contre, pour des grains anguleux, un auto-serrage consécutif à l'enclavement forcé des particules, est possible en l'absence de sollicitations extérieures. Dans cet ordre d'idée, on peut distinguer pour une même valeur du tenseur des contraintes macroscopiques Σ , un état à configuration dynamique relâchée qui correspond à un minimum des efforts intergranulaires, d'un état à configuration dynamique serrée qui correspond à une valeur importante des efforts intergranulaires. Il s'agit en quelque sorte de l'équivalent dynamique d'une densité (cf. § b).

La dissipation plastique par frottement intergranulaire compte tenu du modèle adopté pour le comportement des contacts (rigide - plastique) correspond strictement à la puissance des efforts intérieurs.

$$- P_{int} = \frac{1}{2} \text{tr}(\vec{F} \cdot \dot{\vec{U}} + \vec{\Gamma} \cdot \dot{\vec{\Omega}})$$

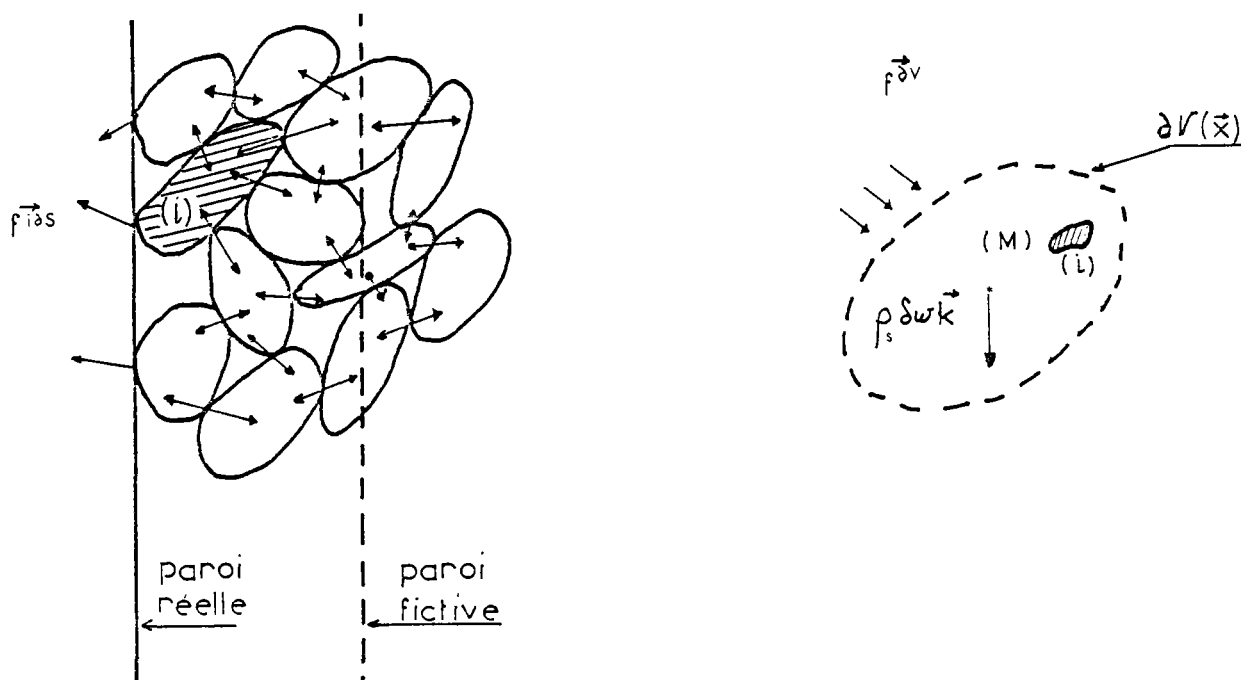
Pour un modèle de Coulomb identique pour chaque contact (cf. § 1 123).

$$- P_{int} = \frac{1}{2} \sin \phi_r \dot{\lambda}_{ij} |\vec{f}_{ij}|^2 + \frac{1}{2} \sin \phi_r \dot{\lambda}'_{ij} (\gamma_{ij}^n)^2$$

où les coefficients $\dot{\lambda}_{ij}$ et $\dot{\lambda}'_{ij}$ (pour $(i), (j) \in \delta w$) sont des scalaires

positifs ou nuls selon que le glissement ou le pivotement avec frottement est effectif ou non. En réalité le nombre de coefficients inconnus est inférieur à $2n^2$, à cause des conditions d'équilibre.

Il est normal de négliger $\gamma_{ij}^{\rightarrow}$ dans le cas de grains arrondis. Dans le cas de grains anguleux au contraire, il est normal d'en tenir compte : l'existence de couples de contact non nuls augmente les liaisons internes du milieu et accroît de ce fait sa résistance aux sollicitations (angle de frottement macroscopique de Coulomb plus important).



La puissance des efforts extérieurs dans un élément volumique du système, s'exprime, en fonction de la vitesse moyenne

$$P_{\text{ext}} = \vec{g}^{\rightarrow} \cdot \vec{v}_i^{\rightarrow} = \rho_s \delta \omega \vec{k}^{\rightarrow} \cdot \vec{v}_{\text{moy}}^{\rightarrow}$$

En ce qui concerne la puissance des efforts intérieurs

$$- P_{\text{int}} = \vec{f}^{\rightarrow} \cdot \vec{v}_{\text{moy}}^{\rightarrow} + \vec{f}^{\rightarrow} \cdot (\vec{v}_i^{\rightarrow} - \vec{v}_{\text{moy}}^{\rightarrow}) - (\vec{f}_{ij}^{\rightarrow} \wedge \vec{x}_i^{\rightarrow}(M_{ij})). \omega_i^{\rightarrow}$$

Sachant que les forces de contact s'équilibrent deux à deux sauf sur la frontière $\partial V(\vec{x})$ de l'élément volumique

$$\vec{f}^{\rightarrow} = \sum_{i,j} \vec{f}_{ij}^{\rightarrow} = \int_{\partial V(\vec{x})} \vec{f}_{\delta v}^{\rightarrow} \cdot \delta s$$

où $\vec{f}^{\Delta v}$ représente une distribution surfacique d'efforts fictifs sur le contour $\partial V(\vec{x})$ de l'élément volumique.

La formulation duale de la dissipation, obtenue en considérant que le glissement avec frottement se fait sans dilatance ni déviance (vitesses cinématiquement admissibles, licites)

$$-P_{int} = \frac{\dot{\lambda}_{ij}}{2} |\vec{u}_{ij}|^2$$

Remarque:

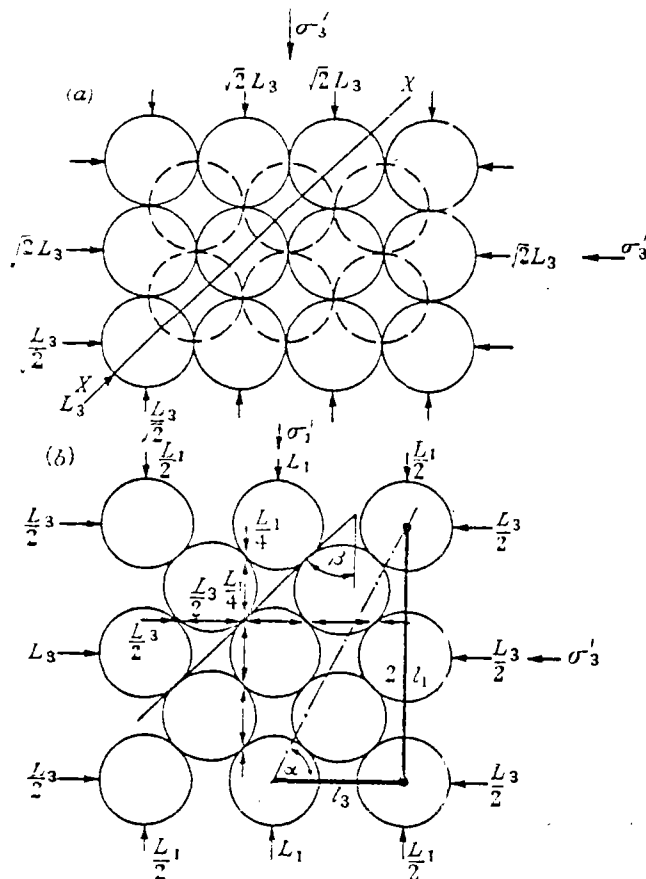
Si l'on impose une condition supplémentaire de non-roulement (contacts plans $\vec{\omega}_{ij} \wedge \vec{n}_{ij} = 0$ (cf. § 2.122)

$$-P_{int} = \frac{\dot{\lambda}_{ij}}{2} |\vec{v}_i - \vec{v}_j|^2$$

Nécessairement $\vec{v}_i - \vec{v}_j$ doit être orthogonal à $\vec{n}_{ij}$ pour que $\dot{\lambda}_{ij}$ soit différent de 0. Ce cas original induit une rigidité complète du système si aucun des polyèdres $\partial(i)_q$ n'est ouvert. Sur le plan expérimental, on constate en effet, pour des milieux dans lesquels la rotation est empêchée (par exemple : empilements de briques), des mécanismes de rupture par "blocs" rigides.

Du point de vue théorique, la recherche d'un critère de stabilité pour un système granulaire pourrait être envisagée selon 2 approches (cinématique et statique). En pratique, il n'est nul besoin de passer par l'expression des puissances, car les conditions statiques licites fournissent implicitement les frontières au domaine convexe des chargements potentiellement supportables et les conditions cinématiques licites fournissent implicitement les frontières du domaine des chargements virtuellement insupportables.

La recherche du critère de stabilité (par l'intérieur) pourra être abordé du point de vue incrémental afin de tenir compte de l'état actuel des chargements intérieurs auto-équilibrés.



(selon Rowe)

(a) Plan. (b) Elevation on XX ; $\sigma'_1/\sigma'_3 = \tan \alpha \tan(\phi_\mu + \beta)$.

Stress-dilatancy relation for static equilibrium

Problème classique : (configuration géométrique actuelle donnée).

(q) , ($\tilde{q}$) donnés , $\rightarrow$ (Q) et ($\tilde{Q}$) limites

(pas d'unicité de la solution pour un matériau non standard).

Problème incrémental : (configurations géométriques et dynamiques actuelles)

(q) , ($\tilde{q}$) , (Q) , ($\tilde{Q}$) donnés $\rightarrow$ ($\dot{Q}$) et ($\dot{\tilde{Q}}$) limites

b - caractéristiques actuelles

Pour rendre compte de l'état dynamique interne qui joue un rôle sensible dans le comportement macroscopique du milieu, nous introduisons les caractéristiques associées dont la définition statistique est obtenue à partir des

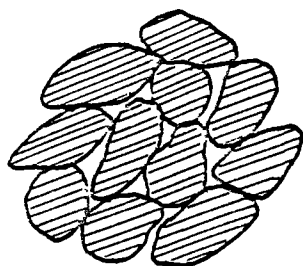
paramètres associés (Q) et $(\tilde{Q})$. Il s'agit donc de 2 distributions, dont l'une est relative aux forces intergranulaires $\vec{f}_{ij}$, l'autre aux couples de contact $\vec{\gamma}_{ij}$. Les démarches conduisant à la caractérisation de ces 2 distributions sont analogues ; c'est pourquoi la seconde ne sera qu'une extension de la première, plus particulièrement développée dans ce paragraphe.

b-1 - Remarques préliminaires:

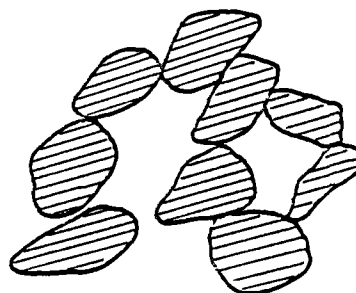
1. Dualité des configurations géométriques et dynamiques actuelles (rappel).

1ère notion: configuration géométrique

On rappelle que l'état géométrique actuel est caractérisé par des tenseurs canoniques et associés (densité volumique, orientation des grains, disposition et orientation des contacts...)



état "dense "

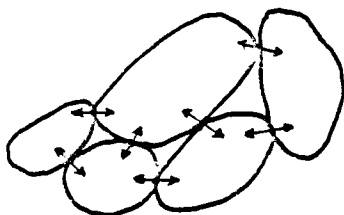


Densités volumiques

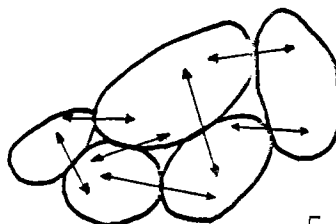
état "lache "

2ème notion: configuration dynamique associée

Pour une même configuration géométrique et pour la même configuration dynamique extérieure, la distribution des forces intergranulaires n'est pas unique.



état "relaché "



état "serré "

Forces de contact possibles
pour une même configuration
géométrique

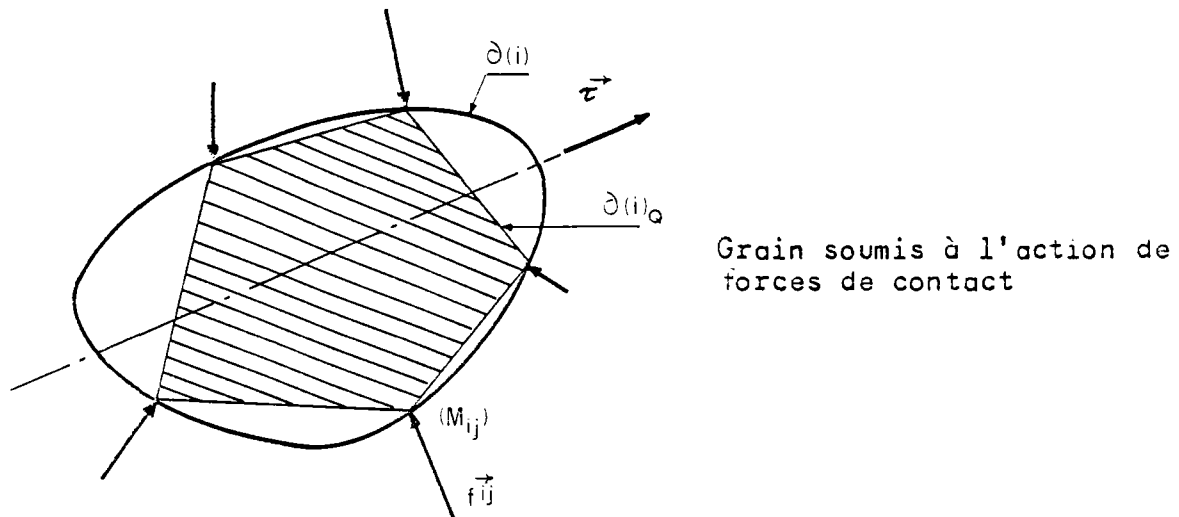
2. Energie élastique d'un grain sollicité par des forces de contact

On rappelle tout d'abord que la déformation volumique d'un corps élastique soumis à des forces localisées est donnée par l'application du théorème de réciprocité de Maxwell et Betti

$$\frac{\delta w}{w} = \nu \vec{f}_{ij} \cdot \vec{x}_i (M_{ij})'$$

(où ν est une constante élastique).

L'énergie interne d'origine élastique d'un grain soumis à l'action de forces de contact s'exprime comme une forme quadratique des composantes des forces



Cette énergie dépend :

- des constantes élastiques du matériau constitutif du grain (comportement volumique de type élastique).
- de la géométrie du grain
- du nombre, de l'intensité et de la direction des forces de contact
- de la position du point d'application des forces.

Il y a donc une inter-dépendance entre les caractéristiques géométriques associées (issues de $(\tilde{q})$) et les caractéristiques dynamiques associées (issues de $(\tilde{Q})$).

On admettra, en 1ère approximation, pour un grain globalement convexe et dont les forces de contact ont une direction peu éloignée de la normale, que la

part énergétique relative à une direction arbitraire $\vec{\tau}$ est donnée par :

$$ener_{\vec{\tau}}(i) = \frac{1}{2} \nu \cdot vol(i)_Q \sum_{(j)} (f_{ij}^{\vec{\tau}})^2$$

(ν est une constante élastique identique pour chaque grain)

$f_{ij}^{\vec{\tau}}$ représente la projection scalaire de la force $\vec{f}_{ij}$ sur le vecteur unitaire $\vec{\tau}$

Les équations d'équilibre impliquent

$$\begin{cases} \sum_{(j)} f_{ij}^{\vec{\tau}} + g_{ij}^{\vec{\tau}} = 0 \\ [\vec{f}_{ij}, \vec{x}_i(M_{ij}), \vec{\tau}] = 0 \end{cases}$$

b.2 - Tenseurs dynamiques

Pour un ensemble de grains (i) contenus dans un élément volumique $V(\vec{x})$ (avec, $|V(\vec{x})| = \delta w$), la part relative à la direction $\vec{\tau}$ est donnée de la même façon par :

$$ener_{\vec{\tau}}(\delta w) = \frac{1}{2} \nu \sum_{(i) \in \delta w} vol(i)_Q \sum_{(j)} (f_{ij}^{\vec{\tau}})^2$$

On est par conséquent amené à définir un tenseur symétrique, qualifié de tenseur dynamique des efforts internes, tel que :

$$ener_{\vec{\tau}}(\delta w) = \vec{\tau}^0 \cdot E_f \cdot \vec{\tau}^{0^t} \cdot \delta w$$

avec,
$$E_f \cdot \delta w = \frac{\nu}{2} \sum_{(i)} vol(i)_Q \sum_{(j)} f_{ij}^{0^t} \cdot f_{ij}^0$$

où $f_{ij}^{0^t} \cdot f_{ij}^0$ est la représentation matricielle du tenseur monome construit à partir de $\vec{f}_{ij}$ dans la base de référence $0^{\vec{}}$. La trace de $E_f \cdot \delta w$ définit l'énergie élastique totale contenue dans le volume δw .

$$tr(E_f) \cdot \delta w = \frac{\nu}{2} \sum_{(i)} vol(i)_Q \sum_{(j)} |\vec{f}_{ij}|^2$$

La force intergranulaire quadratique moyenne, ou force intergranulaire efficace pourra être déduite de cette relation en supposant que $vol(i)_Q = vol(i)$

$$tr(E_f) \delta w = \frac{v}{2} \sum_{(i)} vol(i) |\vec{f}_{moy}|^2$$

soit

$$tr(E_f) = \frac{1}{2} v \rho_s |\vec{f}_{moy}|^2.$$

On peut distinguer dans l'énergie totale $tr(E_f)$, la part qui revient aux efforts intergranulaires de la configuration dynamique relachée (c'est-à-dire équilibrant strictement les efforts extérieurs) de la part qui revient aux efforts intergranulaires auto-équilibrés.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{E}_f \text{ représente le tenseur dynamique des efforts intergranulaires corres-} \\ \text{pondant à l'équilibre strict des efforts extérieurs} \\ E_f - \bar{E}_f \text{ représente le tenseur dynamique dûs aux efforts internes auto-} \\ \text{équilibrés.} \end{array} \right.$$

La part $\bar{E}_f$ correspond par conséquent à l'énergie élastique due au tenseur des contraintes macroscopiques, actuel, Σ .

$$\bar{E}_f \delta w = \frac{1}{2} \rho_s \Sigma^t \Lambda \Sigma \delta w$$

où Λ est une matrice symétrique.

La quantité d'énergie d'origine extérieure est égale à la trace de $\bar{E}_f$.

La force moyenne intergranulaire $\vec{f}_{moy}$ (à ne pas confondre avec la force quadratique moyenne), qui correspond à un état dynamique relaché, a fait l'objet, par certains chercheurs, d'une évaluation théorique basée sur la considération des contraintes extérieures et de la probabilité d'orientation d'un contact. On peut citer à cet égard, les travaux de Oda (1972) basés sur les études géométriques de Horne.

La force moyenne proposée est donnée par

$$f_{\text{moy}}^{\beta} = p_n^{\beta}(n^{\rightarrow}) \sigma^{\beta} n^{\beta} \text{ (sans sommation sur } \beta \text{)}$$

où $\left\{ \begin{array}{l} n^{\beta} \text{ est la } \beta^{\text{ème}} \text{ composante du vecteur normal au contact} \\ \sigma^{\beta} \text{ est la contrainte principale selon la direction } \beta \\ p_n^{\beta}(n^{\rightarrow}) \text{ représente une fonction de répartition statistique d'orientation} \\ \text{de contact.} \end{array} \right.$

Malheureusement cette évaluation ne fournit qu'une valeur fictive de la force intergranulaire de contact réelle, car elle ne prend pas en compte les efforts auto-équilibrés qui peuvent être relativement importants pour des grains à fort coefficient de friction. Dans cet ordre d'idée, rappelons que la théorie de la dilatance établie par Rowe, part de l'hypothèse que les forces intergranulaires sont des fonctions biunivoques des contraintes et de l'orientation des contacts. Il se trouve que les essais pratiqués sur des sphères métalliques lisses pouvaient permettre effectivement de s'affranchir de la prise en compte d'une force intergranulaire d'auto-serrage, puisque que, d'une part le coefficient de friction entre sphères était de 0,2 et que d'autre part les essais étaient effectués à partir d'un état initial libre de contraintes.

Or, même pour des sphères métalliques lisses (donc donnant une faible perméabilité pour la force intergranulaire d'auto-serrage), Dantu a montré, par des essais cycliques que le comportement d'un assemblage n'était pas biunivoque ; c'est donc qu'il existe des contraintes rémanentes, non seulement entre le milieu et les parois mais également à l'intérieur même du milieu.

Ce fait expérimental est confirmé par l'analyse théorique du critère de stabilité d'un assemblage, que nous avons abordé au début de ce paragraphe.

La part restante $E_f - \bar{E}_f$ pour laquelle l'équilibre de chaque contact est assuré, constitue une "réserve" énergétique susceptible d'être restitué sous certaines conditions. (Il s'agit d'une élasticité conditionnelle).

Dans un processus de consolidation isotrope, il est possible de ne retenir

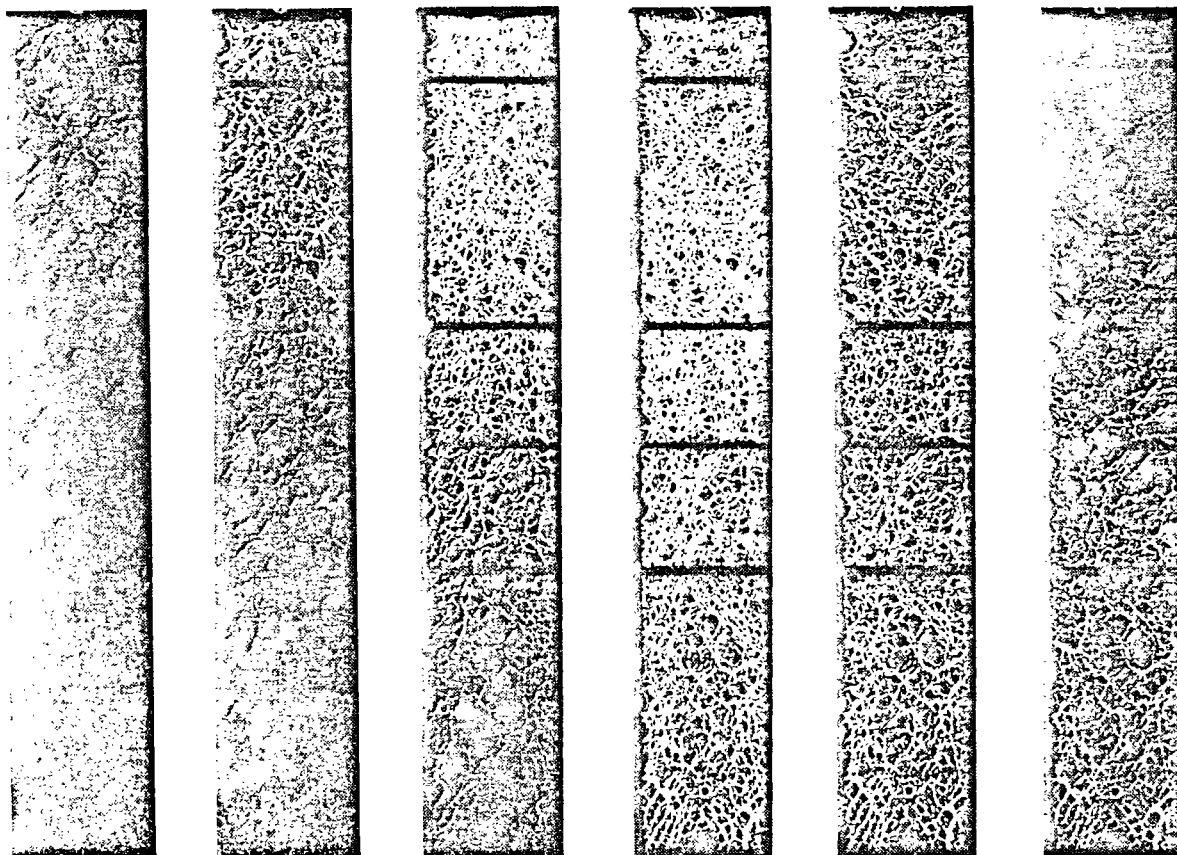
que la trace de $E_f - \bar{E}_f$, qui est la quantité d'énergie d'auto-serrage, stockée intérieurement.

$$\text{tr}(E_f - \bar{E}_f) = \frac{1}{2} \vee \rho_s (|\vec{f}_{\text{moy}}|^2 - |\vec{f}_{\text{moy}}|^2) \geq 0$$

En définitive, les caractéristiques statistiques dynamiques associées, peuvent en première analyse, être représentées par un tenseur dont les termes sont constitués par les parts énergétiques, selon les directions principales, du serrage dû aux forces intergranulaires. Les contraintes actuelles forment une partie de l'état dynamique ; l'auto-serrage (dû à l'histoire du trajet de chargement) en forme l'autre partie.

Couple de contact

Par extension des notions établies ci-dessus, il est possible d'introduire, de la même manière, un tenseur dynamique E_γ , traduisant l'état statistique actuel des couples de contact.



Chainons de transmission des contraintes dans le modèle à 2 dimensions.
Les 3 premières photographies correspondent à σ croissant et les 3 dernières à σ décroissant.
(selon DANTU)

2.24 - CONCLUSION SUR L'ETAT ACTUEL D'UN MILIEU GRANULAIRE

Configuration géométrique actuelle

- canonique : densité volumique ρ_s
anisotropie d'orientation P
- associée (interdépendante de la répartition des forces et couples de contact ;
liée aux tenseurs dynamiques).

Configuration dynamique actuelle

- canonique : tenseur des contraintes Σ et force volumique $\rho_s \vec{k}$
- associée : tenseurs dynamiques E_f, E_γ

(Configuration motionnelle

- canonique : $\left\{ \begin{array}{l} \text{vitesse moyenne } \vec{v}_{\text{moy}} \\ \text{tenseur des taux de déformation } \dot{\epsilon} \\ \text{tenseurs cinétiques } E_v, E_\omega \end{array} \right.$

La loi d'état d'un milieu granulaire est par conséquent une fonction des paramètres tensoriels rappelés ci-dessus, soit : $\rho_s, P, \Sigma, E_f, E_\gamma$

CHAPITRE 3

COMPTE-RENDU ET INTERPRETATION DES ESSAIS

Deux catégories d'essais ont été effectués dans le but de mettre en évidence quelques aspects microscopiques et macroscopiques du comportement d'un sol pulvérulent.

Une première série d'essai porte sur un milieu granulaire artificiel, bidimensionnel. Les "grains" ont été choisis de différentes formes, de manière à caractériser non seulement leurs translations mais également leurs rotations propres. Dans les dernières années, de nombreux essais ont été pratiqués sur des grains sphériques (sphères métalliques - Dantu, Rowe, Biarez,...) ou des rouleaux cylindriques de révolution pour l'étude bidimensionnelle. (rouleaux de Schneebelli - Dantu, Oda, Konishi, Cundall,...). Ceux-ci ont la possibilité de montrer la translation des grains et même une forme d'anisotropie due à la répartition des contacts sur le pourtour sphérique ou cylindrique de chaque grain. Il nous a semblé utile d'ajouter à la qualité de ces milieux granulaires artificiels une propriété supplémentaire du fait de l'allongement des grains.

Une deuxième série d'essai porte sur l'étude macroscopique d'un sable sec. Ces essais se limitent à des essais oedométriques cycliques. Ils ont plus spécialement pour but de montrer l'effet de l'anisotropie initiale (remplissage) et d'autre part l'évolution de l'écrouissage pour un trajet de charge cyclique, fixé. La teneur et l'interprétation de ces essais sont déjà bien connues, mais elles constituent tout naturellement, le prolongement macroscopique de l'étude microscopique des phénomènes intergranulaires.

3.1 - CINEMATIQUE D'UN MILIEU GRANULAIRE PLAN SOUS DIFFERENTS CAS DE CHARGEMENT

Les essais présentés ici ne concernent que les phénomènes cinématiques, sous des déplacements d'ensemble imposés, constatés dans un milieu granulaire plan. Tous les phénomènes d'instabilité macroscopiques nécessitent une technique d'observation bien spécifique faisant intervenir une mesure de temps. Dans ces essais au contraire, ne sont envisagés que les écoulements "figés" c'est-à-dire cinématiquement stabilisés du point de vue macroscopique et cinématiquement "stabilisables" sur le plan microscopique. Ces essais sont, par conséquent une étude de la déformation globale et de ses implications au niveau du mouvement des grains.

Compte tenu des faibles valeurs des chargements utilisés dans ces tests, la déformation globale des grains est négligeable, bien que la déformation locale au contact puisse prendre une certaine valeur ; ainsi les grains peuvent-ils être considérés sans inconvénient comme rigides. Les liaisons intergranulaires, compte tenu de l'échelle d'observation visuelle et temporelle, ont un comportement du type rigide-parfaitement plastique.

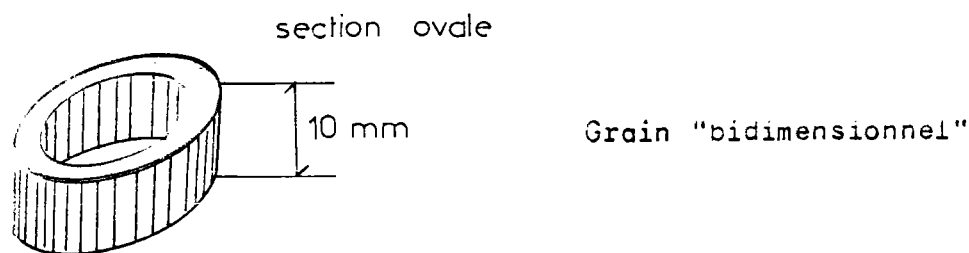
3.11 - MATERIEL D'ESSAI

Les 3 éléments essentiels du matériel d'essai sont constitués par

3.111 - LES GRAINS

Au nombre de plusieurs centaines, ils sont obtenus par tronçonnage de tubes de différents diamètres, à section ovalisée. La nature du matériau

(P.V.C. dur), assure une bonne rigidité, tout en facilitant la fabrication.

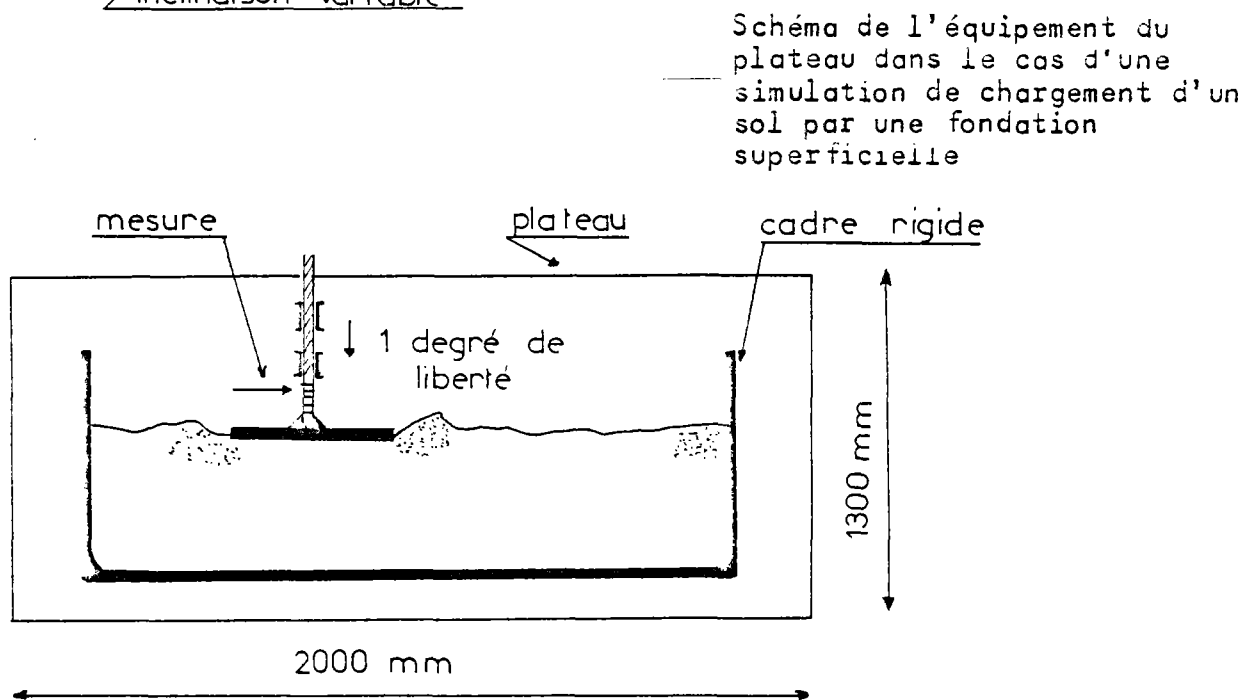
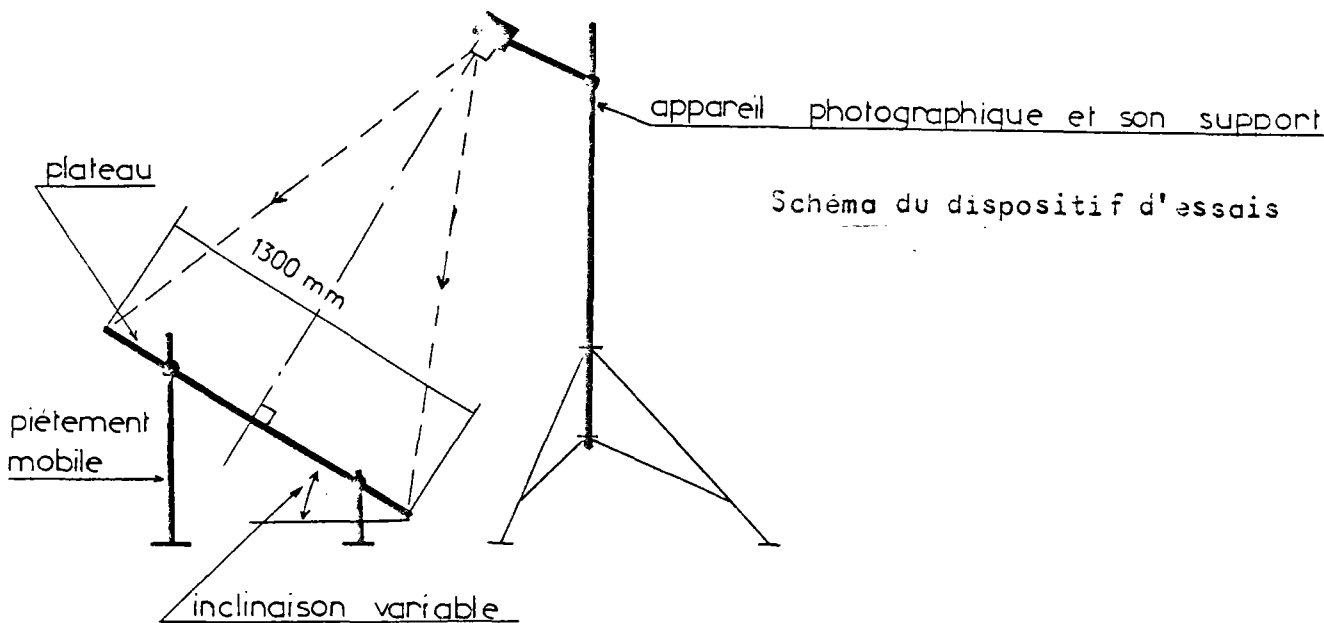


3.112 - LE SUPPORT

Le support sur lequel sont posés les grains est un plateau de 2,00 m sur 1,30 m dont le revêtement poli n'offre qu'une faible résistance de frottement aux grains. Il est équipé de piètements mobiles permettant une inclinaison variable, afin de modifier selon les cas l'effet de la pesanteur sur les grains, et d'un cadre constitué d'éléments amovibles assemblés par visserie permettant, par le grand nombre de degrés de liberté possibles, un large choix de types de chargement. Les dimensions du plateau ont été choisies de manière à éviter les effets de bord. Les résultats d'essais montrent d'ailleurs que compte tenu de la taille des grains, ce dernier est surdimensionné.

3.113 - UN APPAREIL PHOTOGRAPHIQUE

L'appareil photographique joue le rôle d'appareil enregistreur des mesures faites par comparaison entre 2 incréments de déplacements.



3.12 - PRESENTATION DES ESSAIS

3.121 - PRINCIPE DE VISUALISATION

A chaque degré de déplacement d'un élément du cadre (par exemple , enfoncement d'un plateau), un enregistrement photographique de la configuration statique du milieu granulaire est effectué . Les essais étant purement cinématiques, l'échelle d'incrément de déplacement d'un élément du cadre a été

arbitrairement choisie comparable à la plus petite dimension d'un grain soit 5 mm .

La comparaison par surimpression de 2 vues successives tirées sur film transparent, fait apparaître non seulement, les champs de déplacements relatifs du milieu à tous les stades du trajet cinématique, mais encore ce procédé classique permet de déterminer avec précision le déplacement et la rotation propre de chaque grain par rapport à un repère fixe ou à un repère mobile attachée à une partie du milieu.

En principe, pour chaque essai, un minimum de 8 photographies à différents stades de déplacement est requis pour montrer l'évolution des parties mobilisées du milieu. On peut remarquer à ce sujet, l'importance des déplacements constatés avant rupture par poinçonnement d'une semelle superficielle par exemple.

Ce procédé est susceptible d'être amélioré utilement par la visualisation simultanée des contraintes exercées sur chaque grain. Il suffirait dans ce cas de remplacer le matériau des grains pour un matériau piézo-photopolarisant.

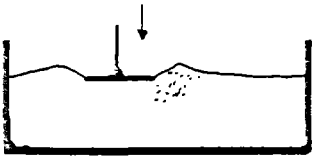
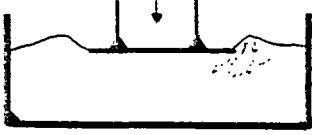
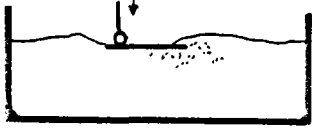
3.122 - CATALOGUE DES ESSAIS

Les essais concevables grâce à l'équipement peuvent être de 2 natures.

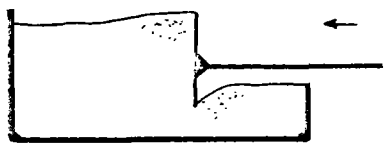
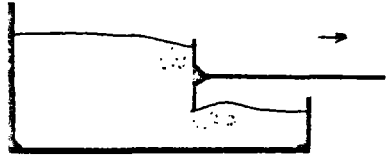
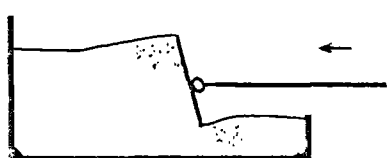
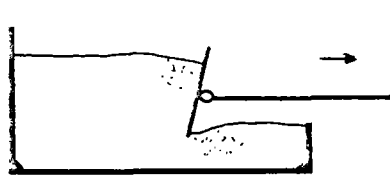
- une simulation d'un comportement cinématique d'un ouvrage réel contact avec un sol (fondation superficielle, mur de soutènement, ancrage)

- une simulation d'essais de laboratoire, tels que essai oedométrique, boîte de cisaillement, etc.). Le catalogue des réalisations d'essais est représenté par le tableau ci-après :

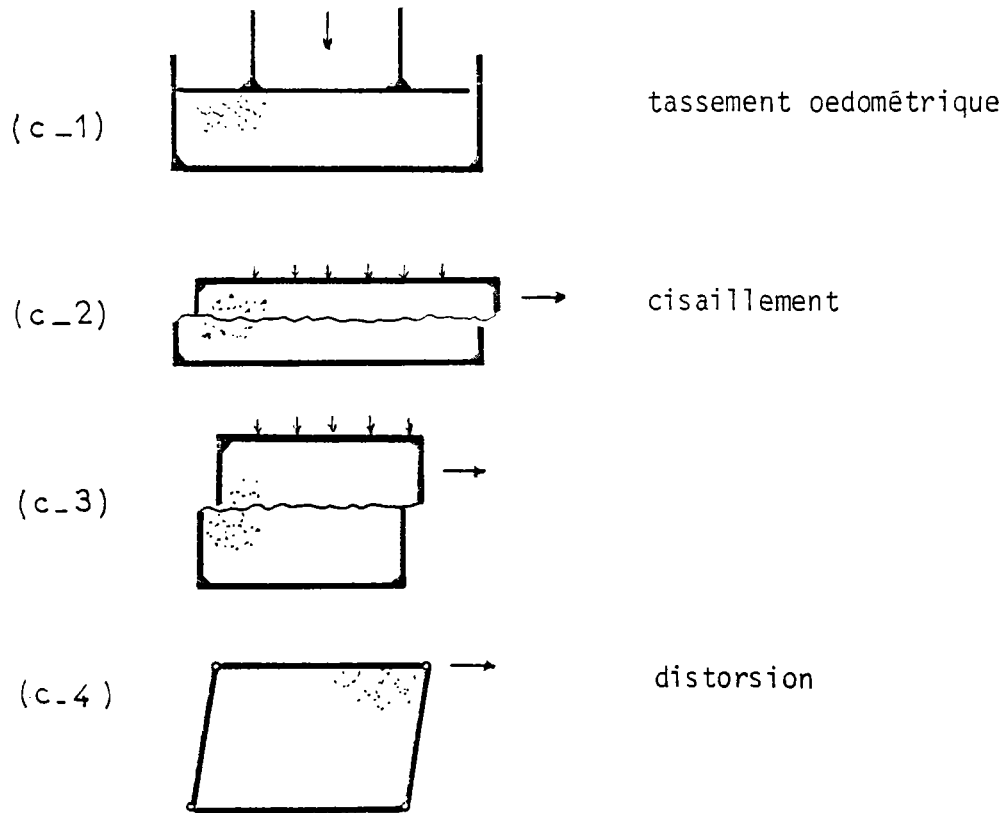
a - Essais à chargement vertical (avec pesanteur)

- (a-1)  semelle superficielle étroite
(avec ou sans pesanteur)
- (a-2)  semelle superficielle large.
- (a-3)  semelle décentrée
- (a-4)  ancrage vertical
- (a-5)  semelle de soulèvement

b - Essais à chargement horizontal (avec pesanteur)

- (b-1)  butée verticale sans rotation
- (b-2)  poussée verticale sans rotation
- (b-3)  butée verticale avec rotation
- (b-4)  poussée verticale avec rotation

c - Essais divers (sans pesanteur)



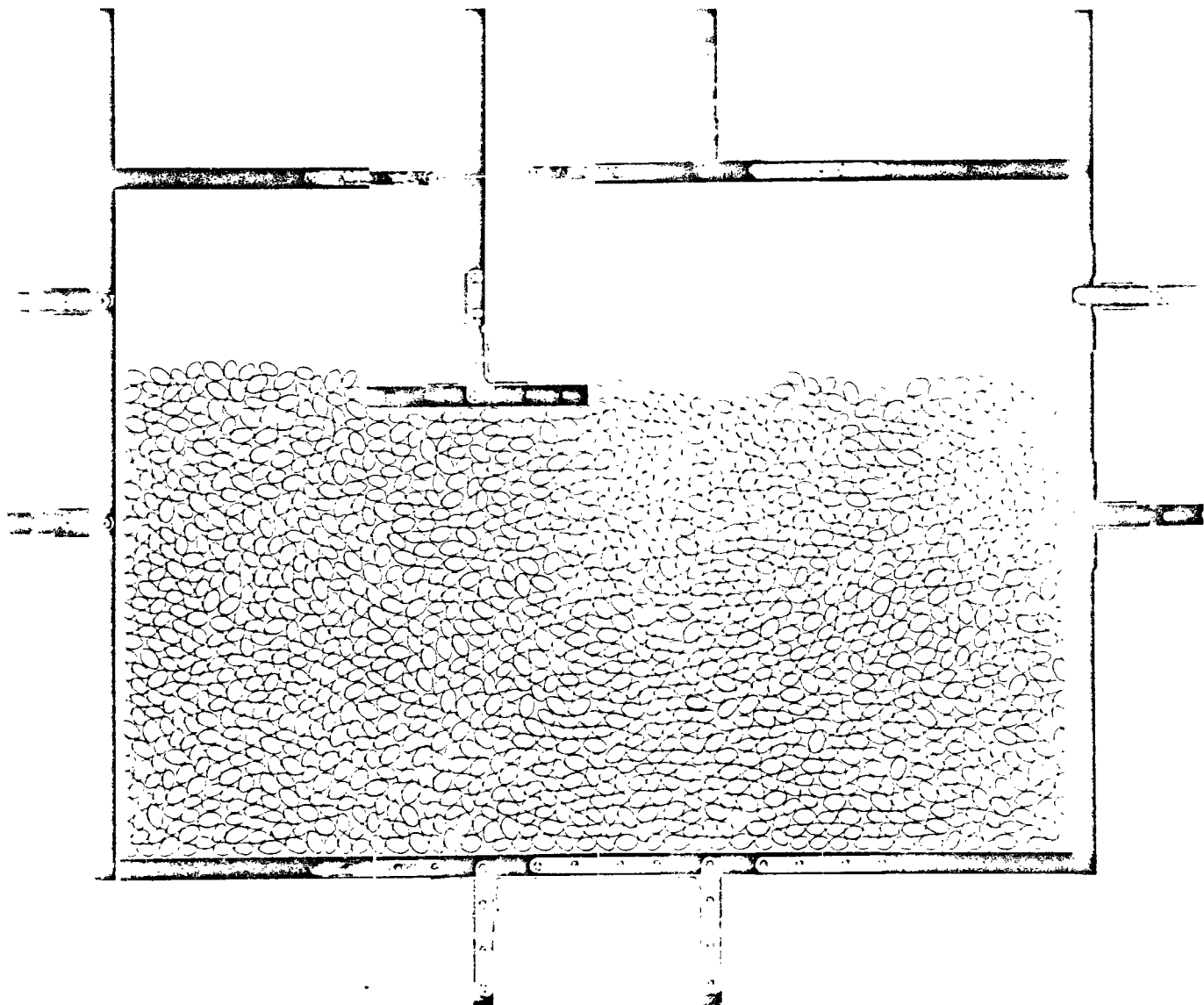
Dans ce qui suit plusieurs illustrations seront complétées par un diagramme des champs de vitesses de translation et de rotation, et du champ des orientations des grains après chargement. On rappelle que pour un grain bidimensionnel, le distributeur des vitesses canoniques se réduit à 3 composantes

$$\text{grain (i):} \quad \left\{ \vec{v}_i, \vec{\omega}_i \right\} / \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_i \quad \left\{ \begin{array}{l} v_i^1 \\ v_i^2 \\ v_i^3 = 0 \end{array} \right. \\ \vec{\omega}_i \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_i^1 = 0 \\ \omega_i^2 = 0 \\ \omega_i^3 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Compte rendu et interprétation des essais

Diagramme n°	Nature de l'essai	Objet
a	Principe d'enfoncement d'une semelle	Présentation du dispositif
b	Simulation d'enfoncement d'une semelle étroite	Visualisation du mouvement des grains
c.1	Simulation d'enfoncement d'une semelle large	Mouvement de grains dans un repère fixe
c.2	Simulation d'enfoncement d'une semelle large	Mouvement de grains dans un repère lié à la semelle
c.3	Simulation d'enfoncement d'une semelle large	Visualisation d'une ligne d'iso-déplacement
c.4	Simulation d'enfoncement d'une semelle large	Diagramme du champ des vitesses de translation
c.5	Simulation d'enfoncement d'une semelle large	Diagramme du champ des vitesses de rotation
c.6	Simulation d'enfoncement d'une semelle large	Visualisation des orientations des grains après de grandes déformations
c.7	Simulation d'enfoncement d'une semelle large	Diagramme du choix des orientations après de grandes déformations
d	Simulation d'enfoncement d'une semelle	Visualisation du mouvement des grains
e	Simulation d'arrachement d'un ancrage	Mouvement des grains dans un repère fixe.
f.1	Simulation du recul d'un mur de soutènement - Mobilisation de la butée	Mouvement des grains dans un repère fixe
f.2	Simulation du recul d'un mur de soutènement - Mobilisation de la butée	Visualisation d'une ligne d'iso-déplacement
f.3	Simulation du recul d'un mur de soutènement - Mobilisation de la butée	Visualisation d'une ligne d'iso-déplacement

f.4	Simulation du recul d'un mur de soutènement - Mobilisation de la butée	Diagramme du champ des vitesses de translation
f.5	Simulation du recul d'un mur de soutènement - Mobilisation de la butée	Diagramme du choix des concentrations
f.6	Simulation du recul d'un mur de soutènement - Mobilisation de la butée	Visualisation des déplacements après de grandes déformations
g	Simulation de l'avancée d'un mur - Action de la poussée du massif	Visualisation du mouvement des grains
h	Simulation du recul d'un mur avec possibilité de rotation	Visualisation du mouvement des grains
i	Simulation de l'avancée d'un mur avec possibilité de rotation	Visualisation du mouvement des grains
j.1	Simulation d'un essai de striction à la suite de cisaillement	Visualisation du mouvement des grains
j.2	Simulation d'un essai de striction à la suite de cisaillement	Visualisation du mouvement des grains
k	Simulation d'une déformation par cisaillement	Visualisation du mouvement des grains

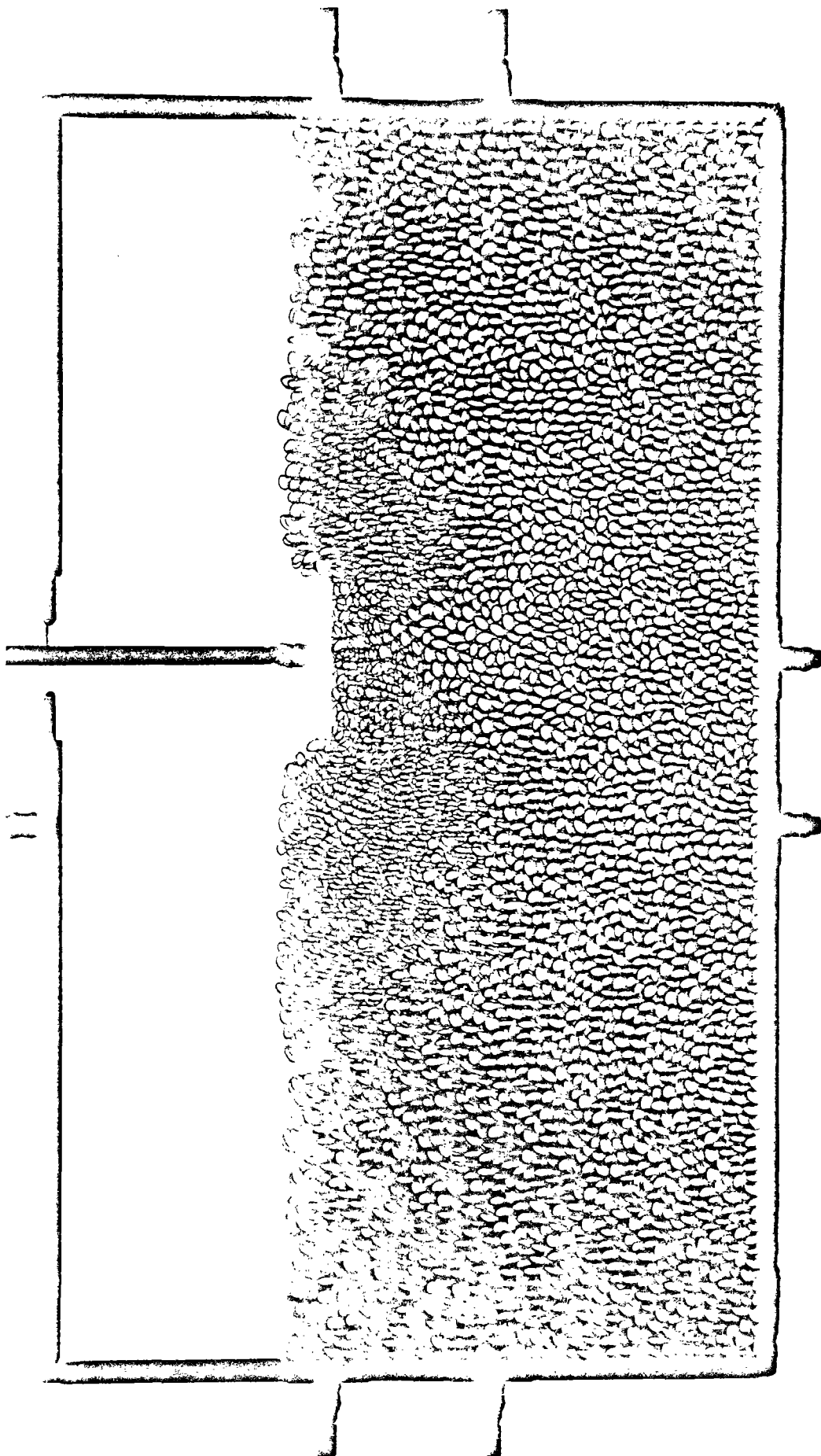


a

Principe d'enfoncement
d'une semelle

Présentation du dispositif

b

Simulation d'enfoncement
d'une semelle étroiteVisualisation du mouvement
des grains

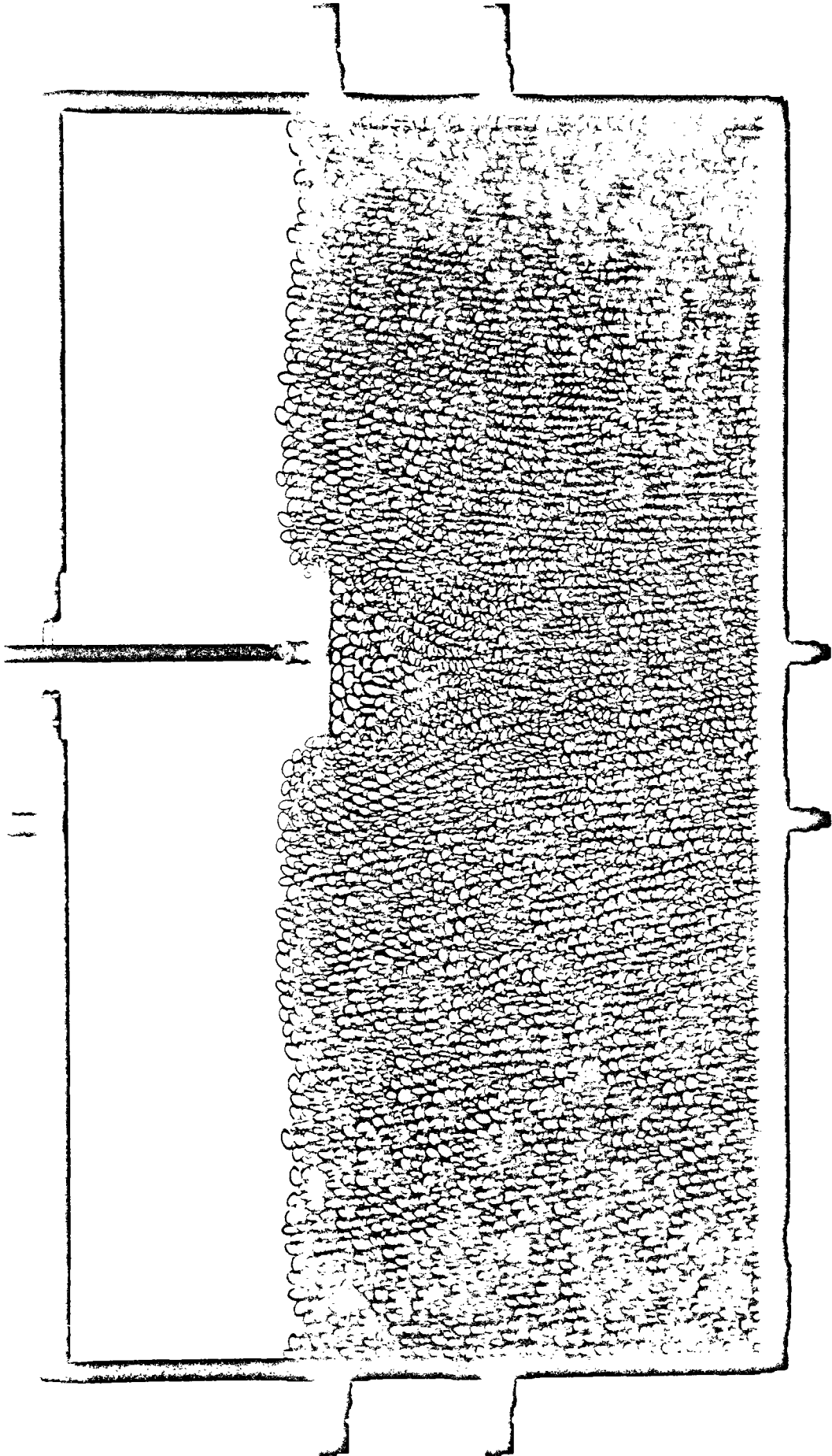
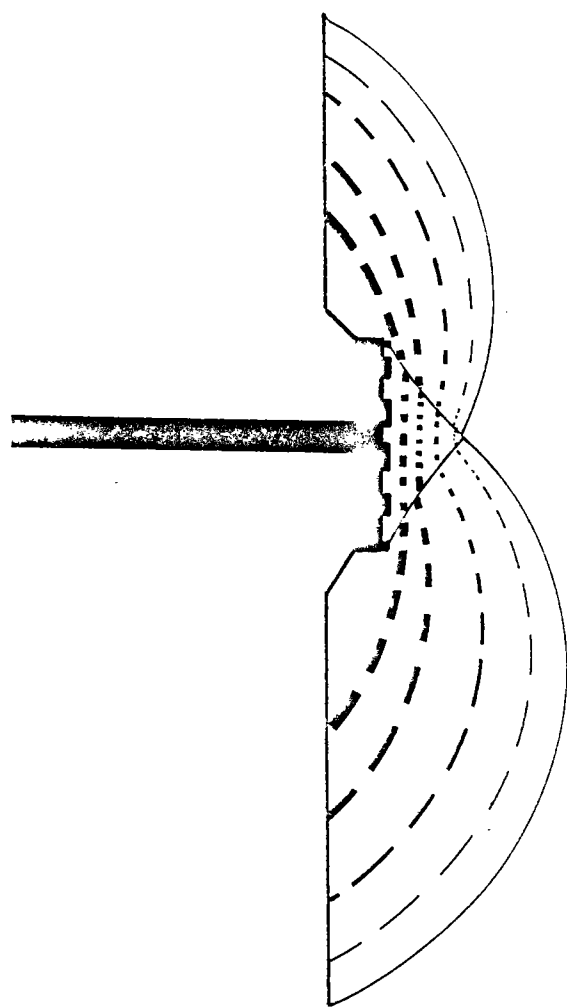


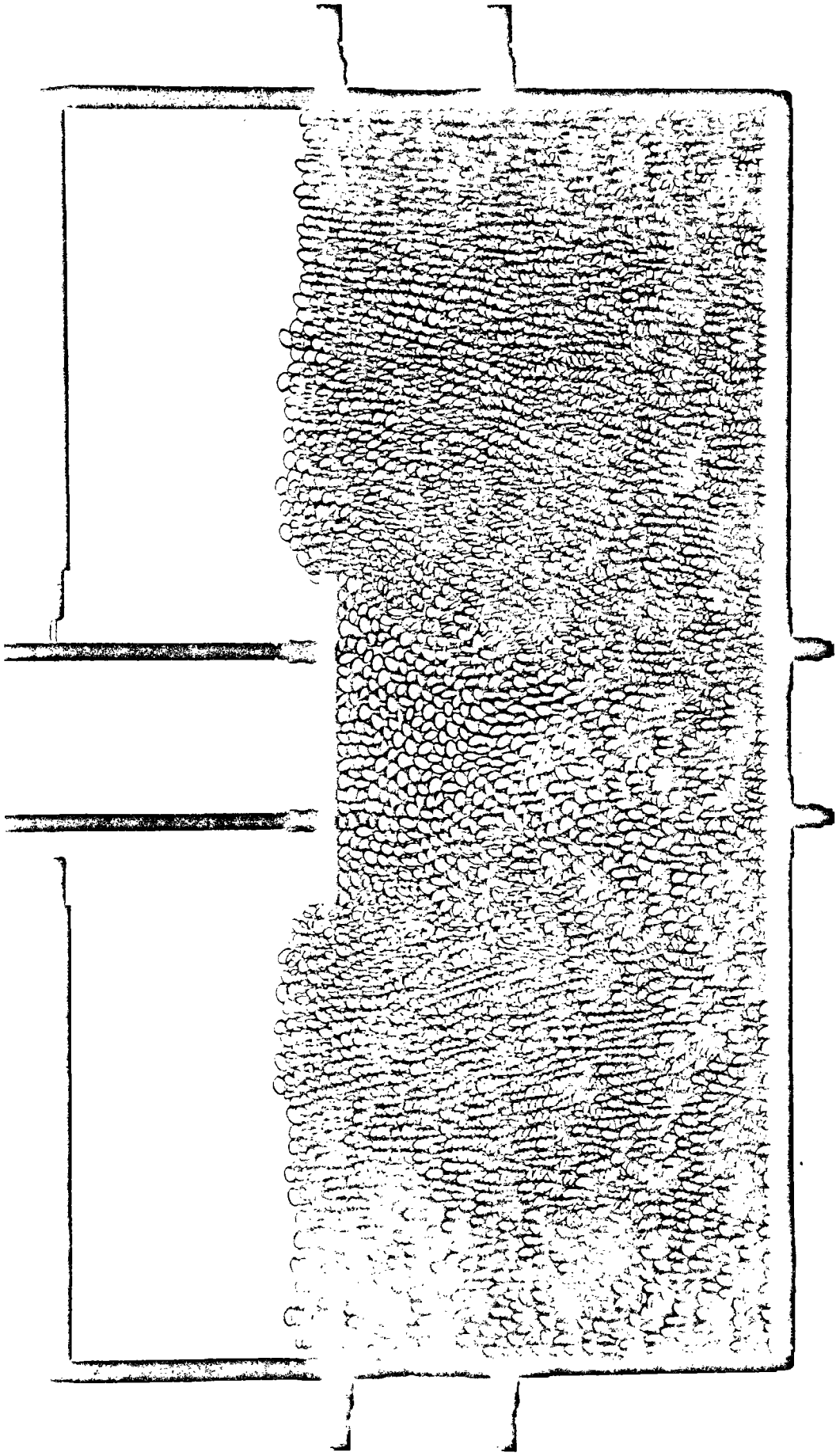
Diagramme du choix des orientations après de grandes déformations

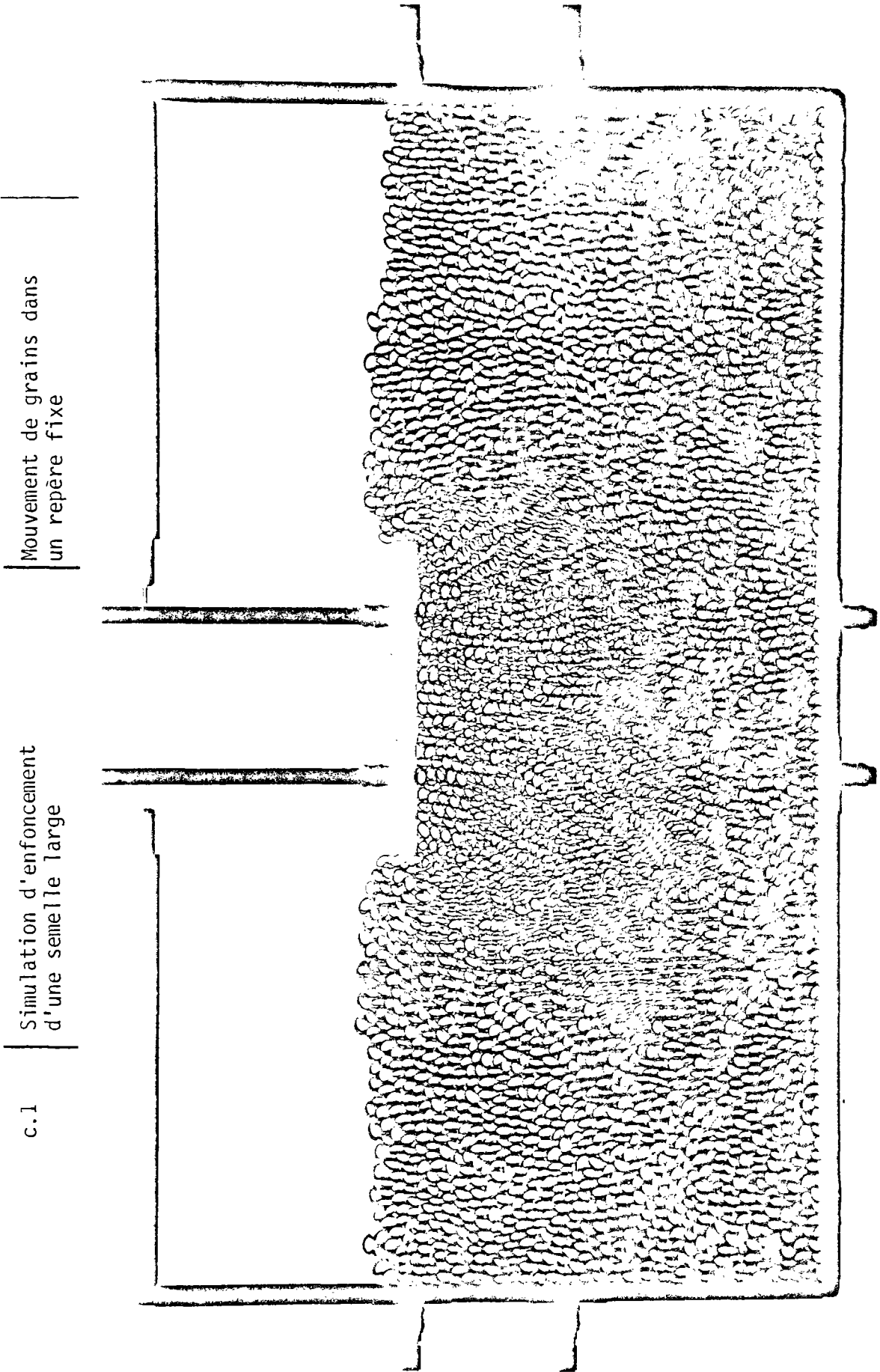


c.2

Simulation d'enfoncement
d'une semelle large

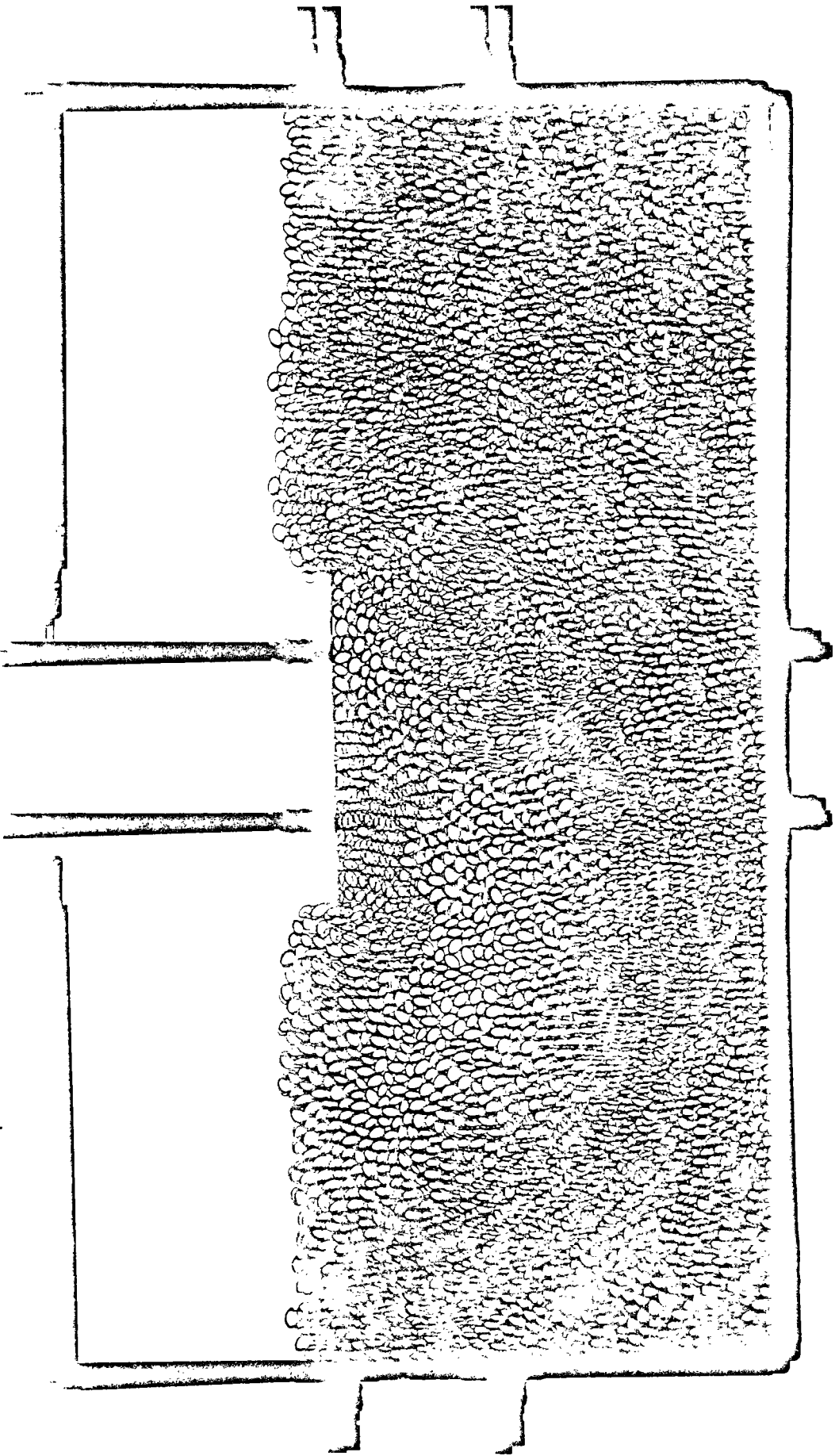
Mouvement de grains dans un
repère lié à la semelle





c.3 | Simulation d'enfoncement
d'une semelle large

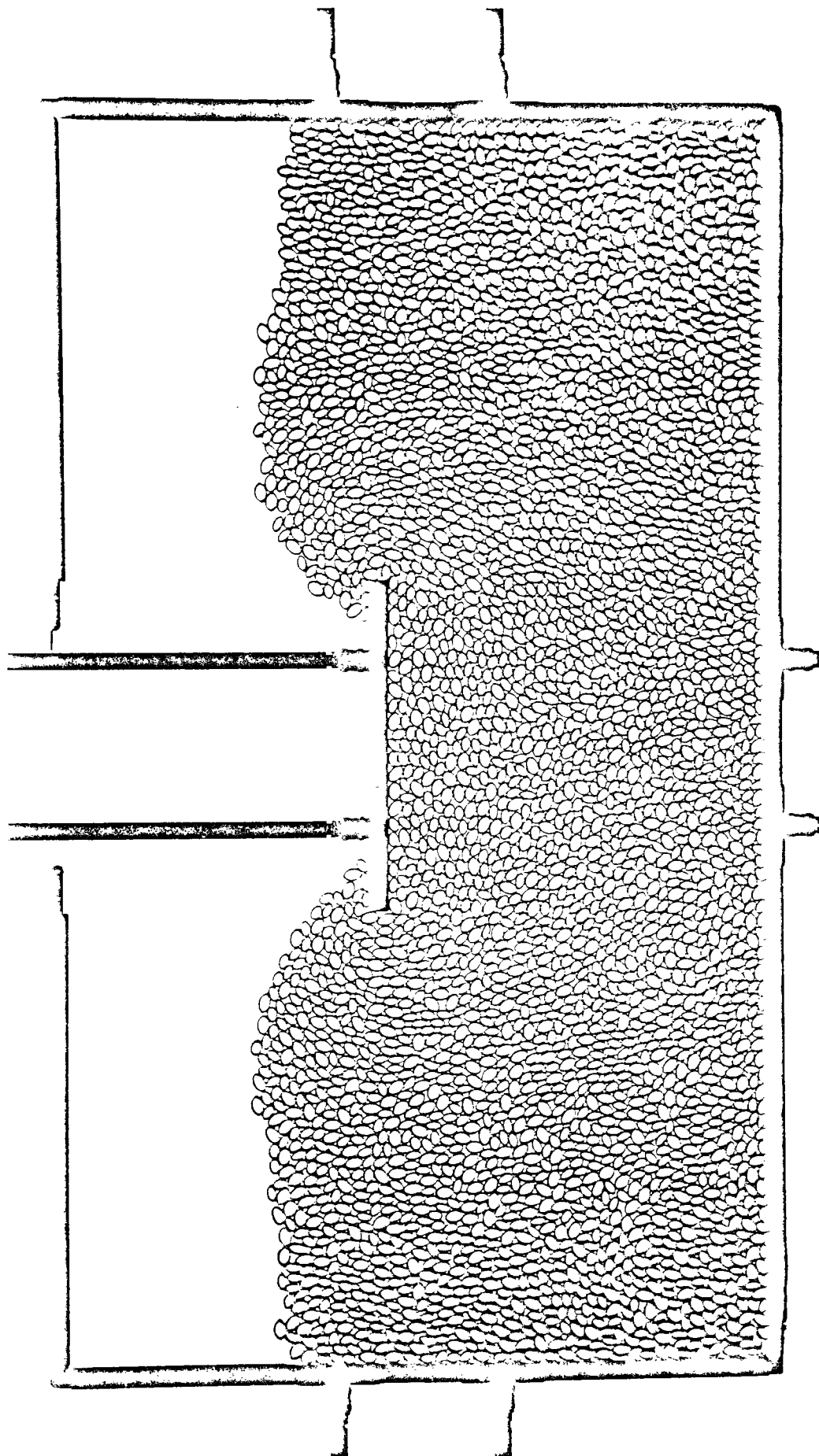
| Visualisation d'une ligne
d'iso-déplacement



c.6

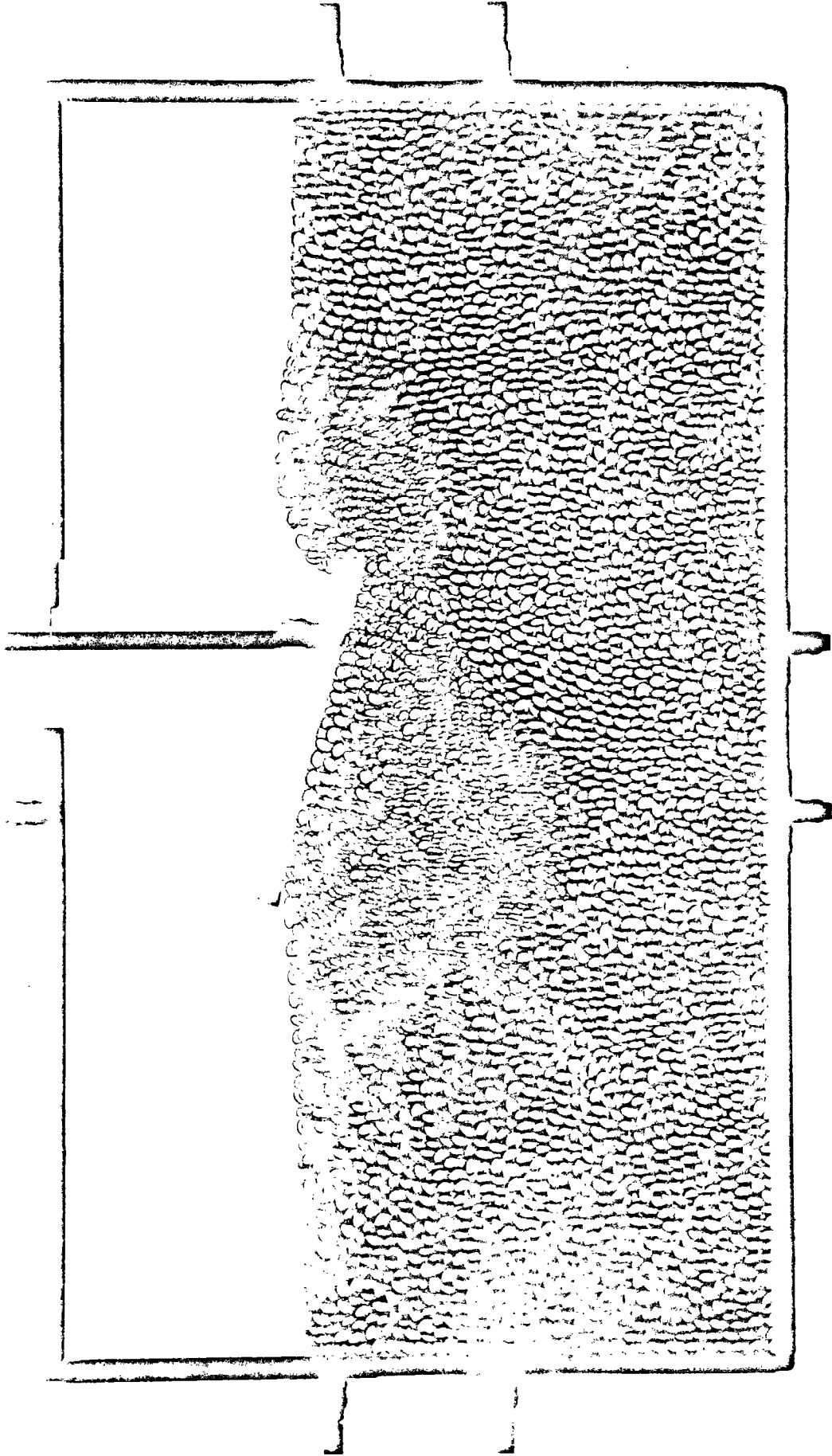
Simulation d'enfoncement
d'une semelle large

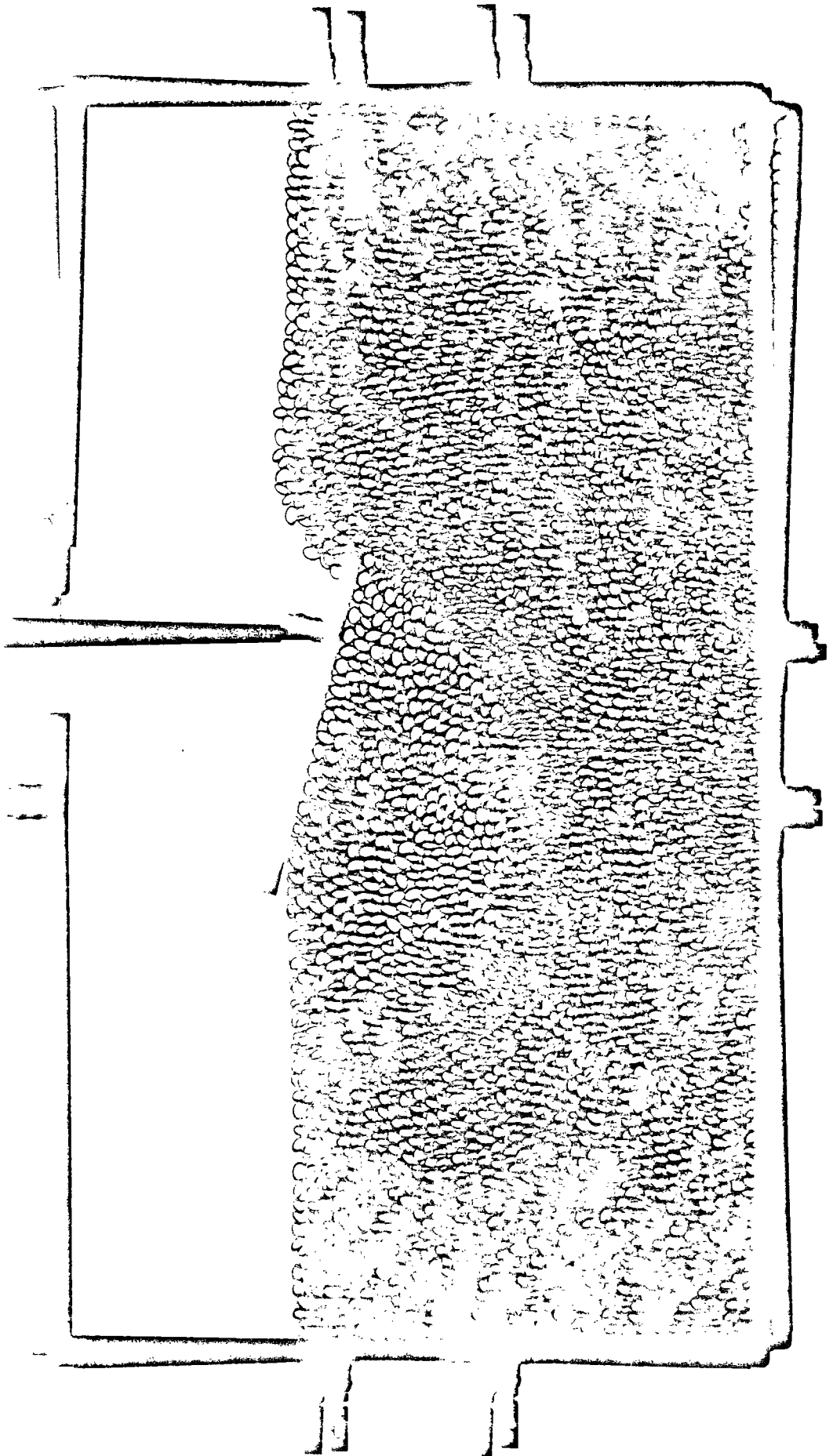
Visualisation des orientations
des grains après de grandes
déformations



d Simulation d'enfoncement
d'une semelle

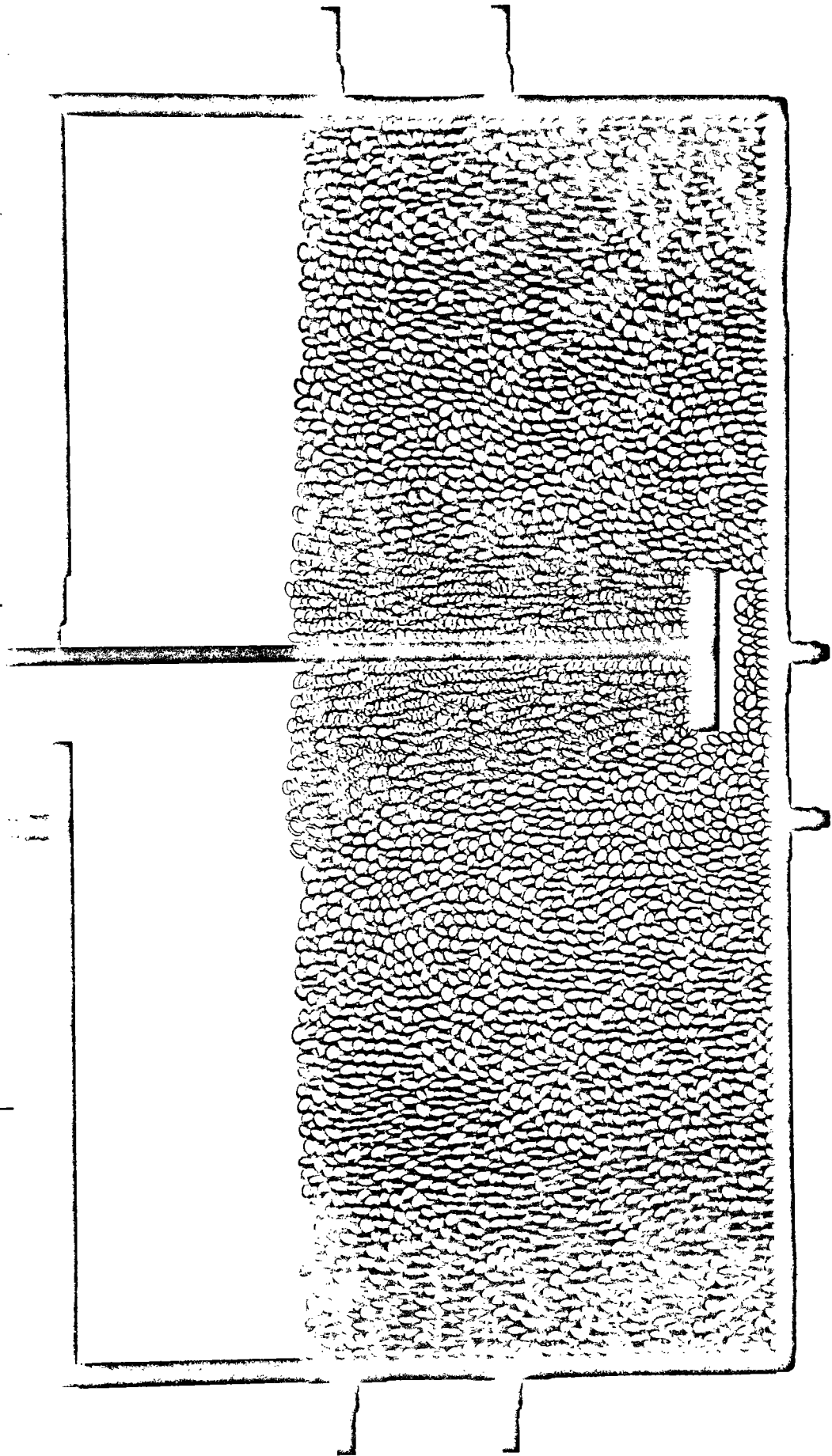
Visualisation du mouvement
des grains

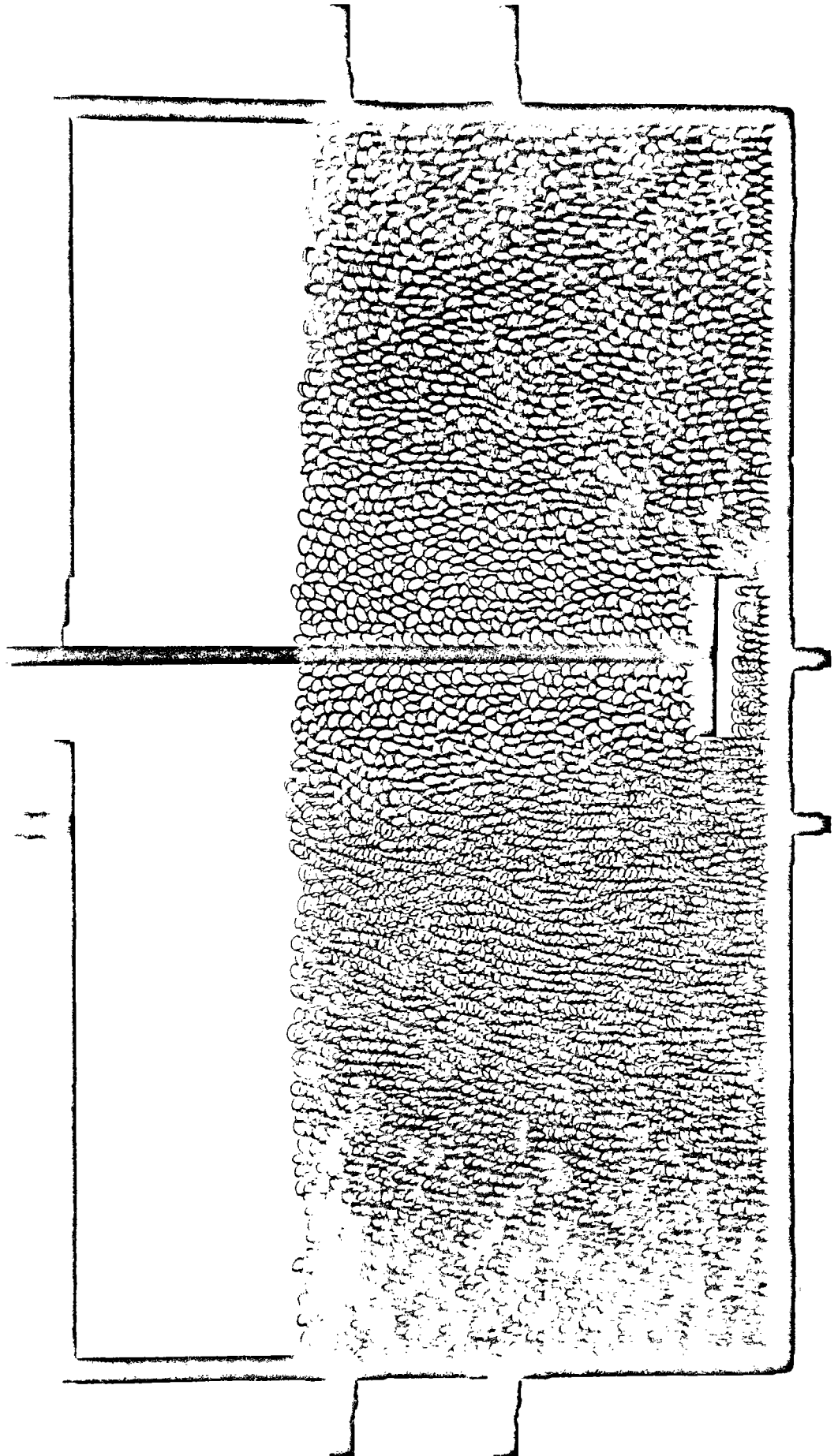




Mouvement des grains dans
un repère fixe.

Simulation d'arrachement
d'un ancrage

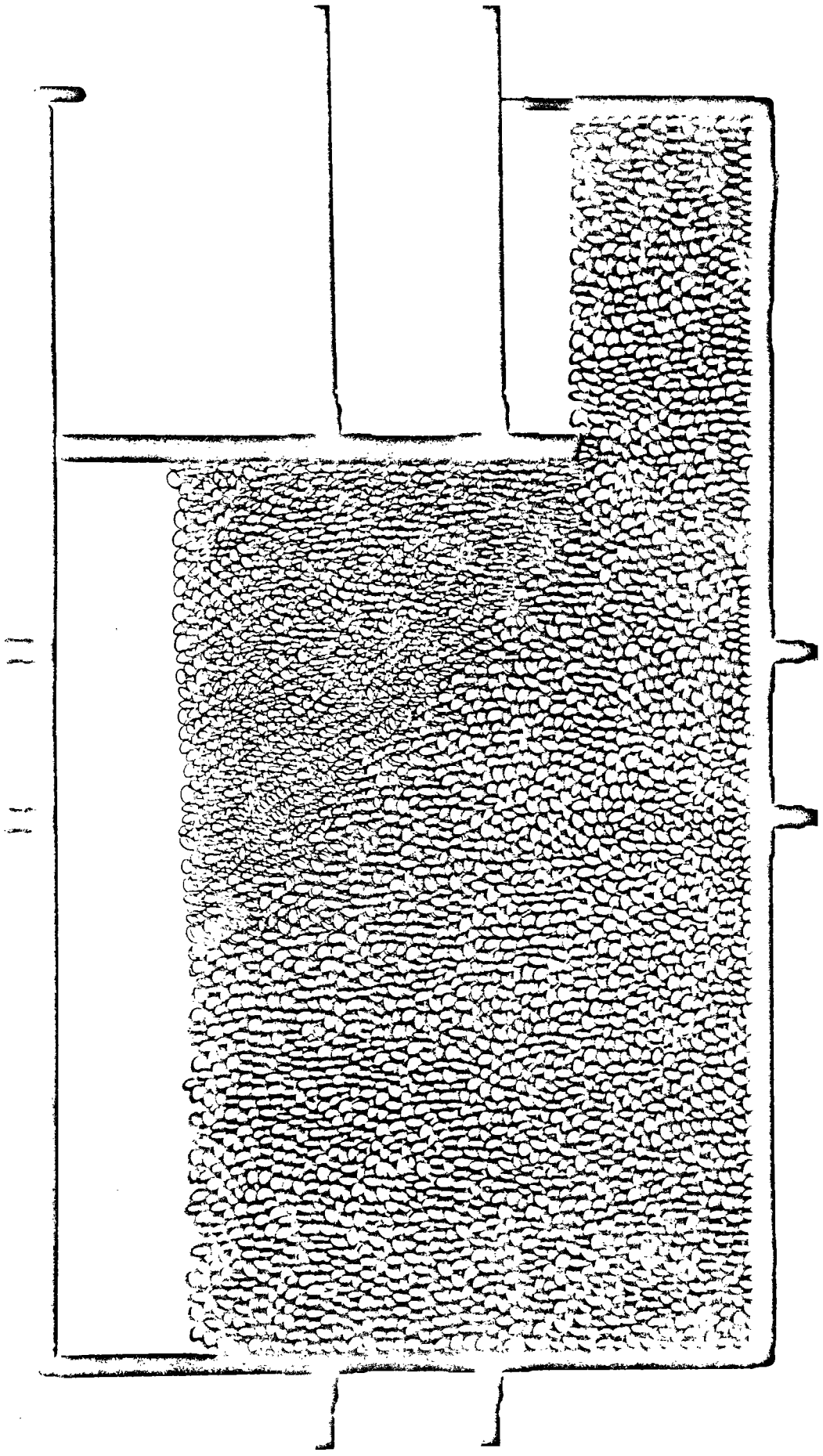




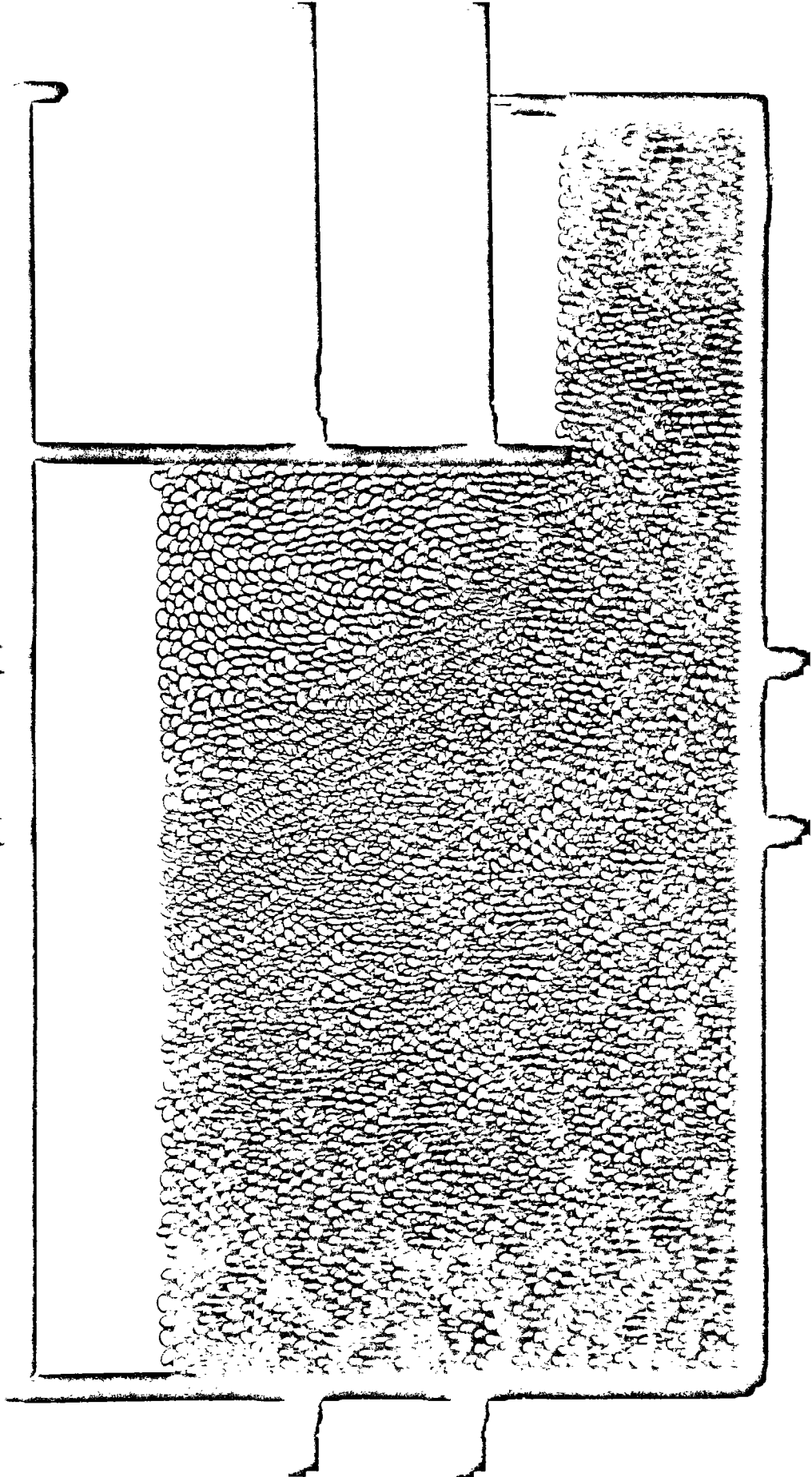
f.1

Simulation du recul d'un mur de
soutènement - Mobilisation de la butée

Mouvement des grains dans
un repère fixe



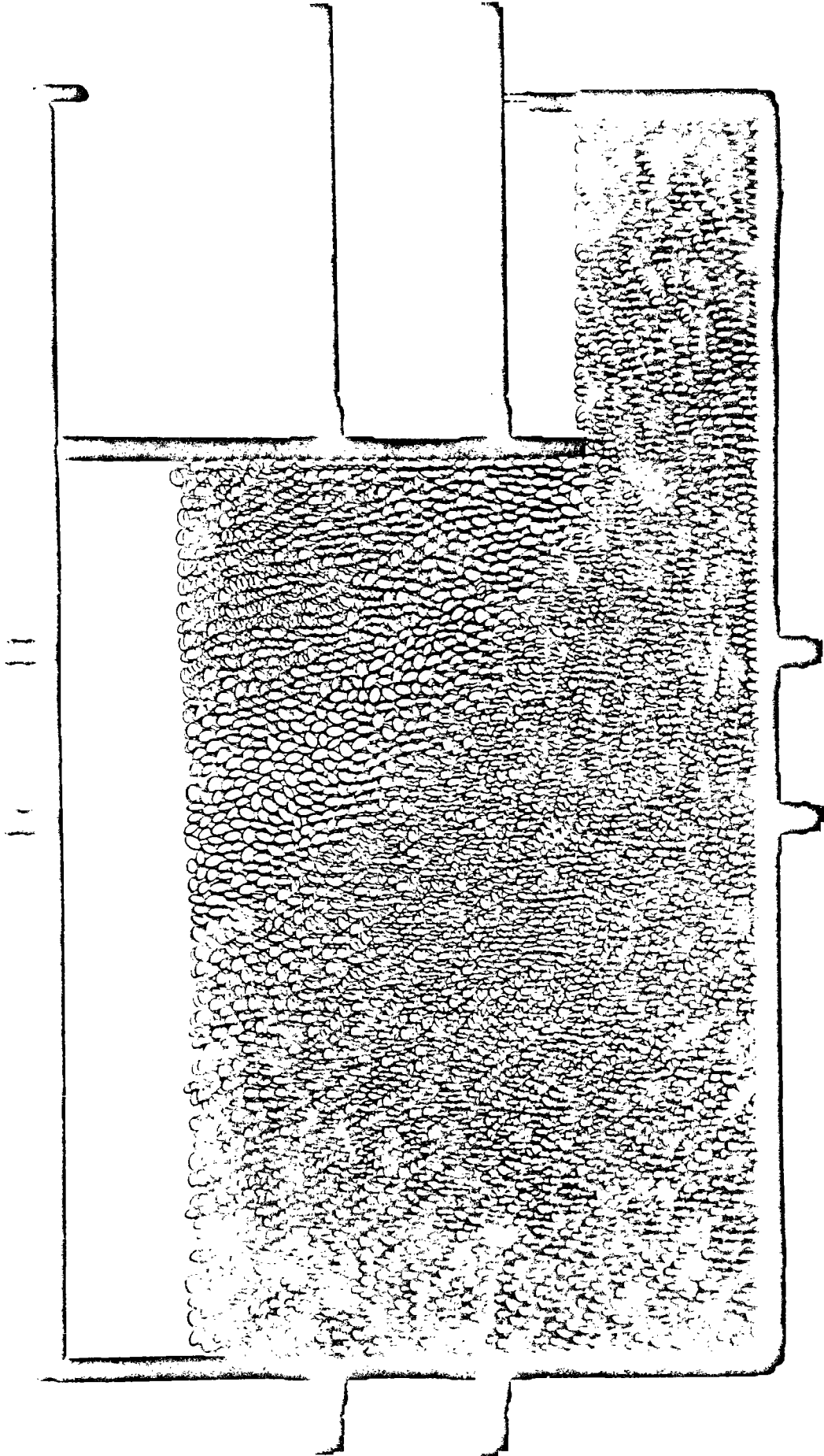
f.2 | Simulation du recul d'un mur de soutènement - Mobilisation de la butée d'iso-déplacement | Visualisation d'une ligne

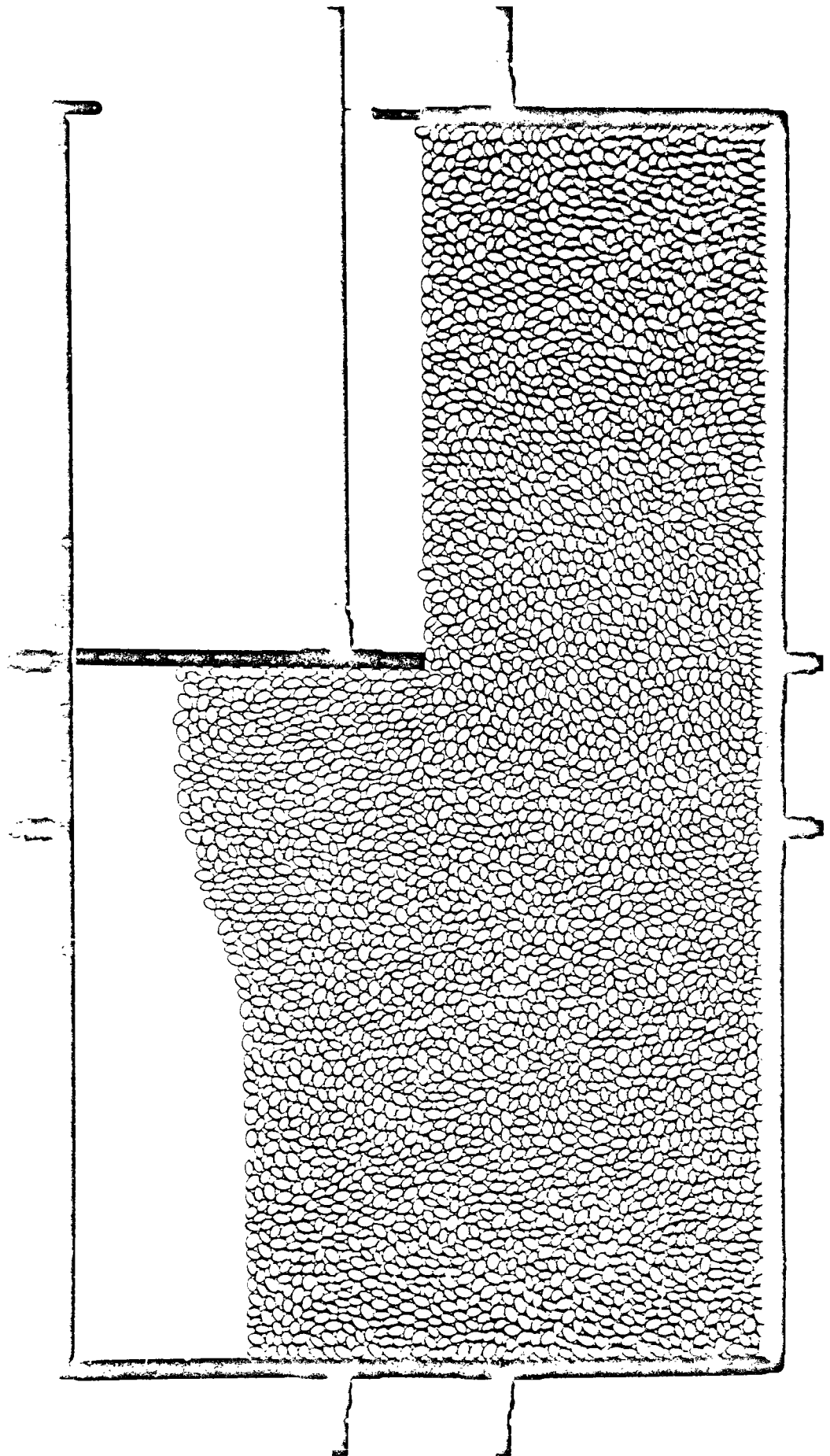


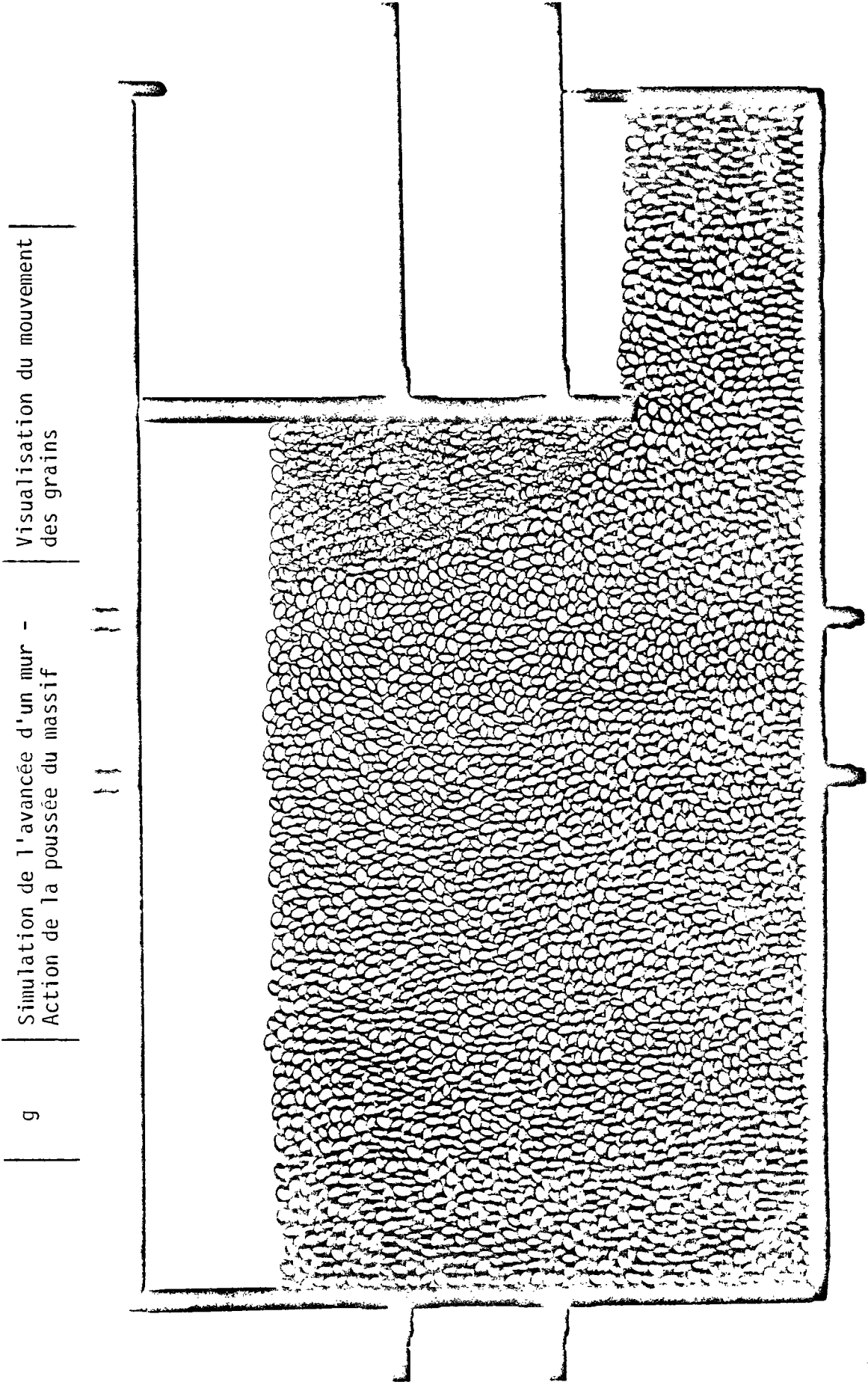
f.3

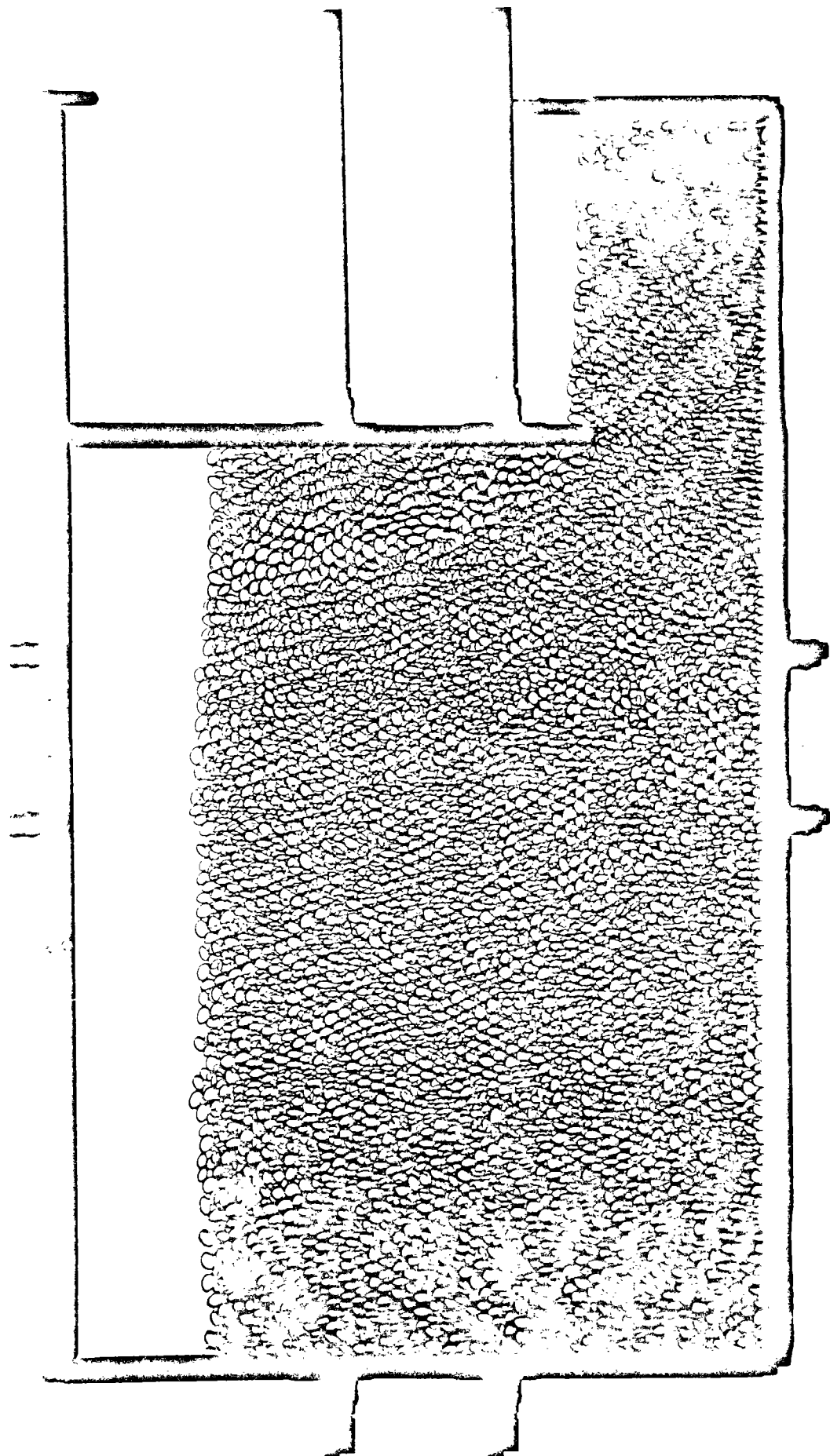
Simulation du recul d'un mur de
soutènement - Mobilisation de la butée

Visualisation d'une ligne
d'iso-déplacement





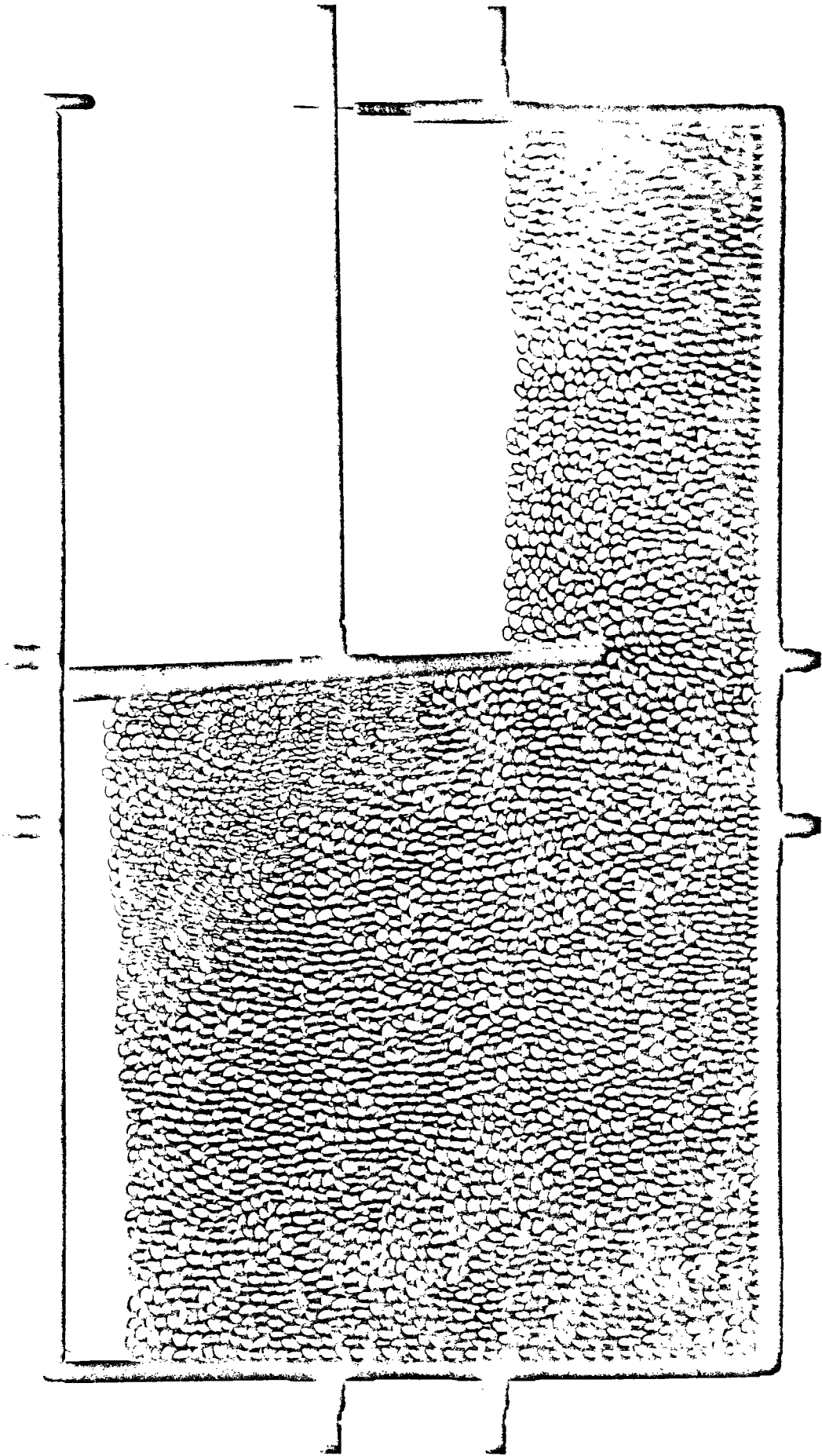


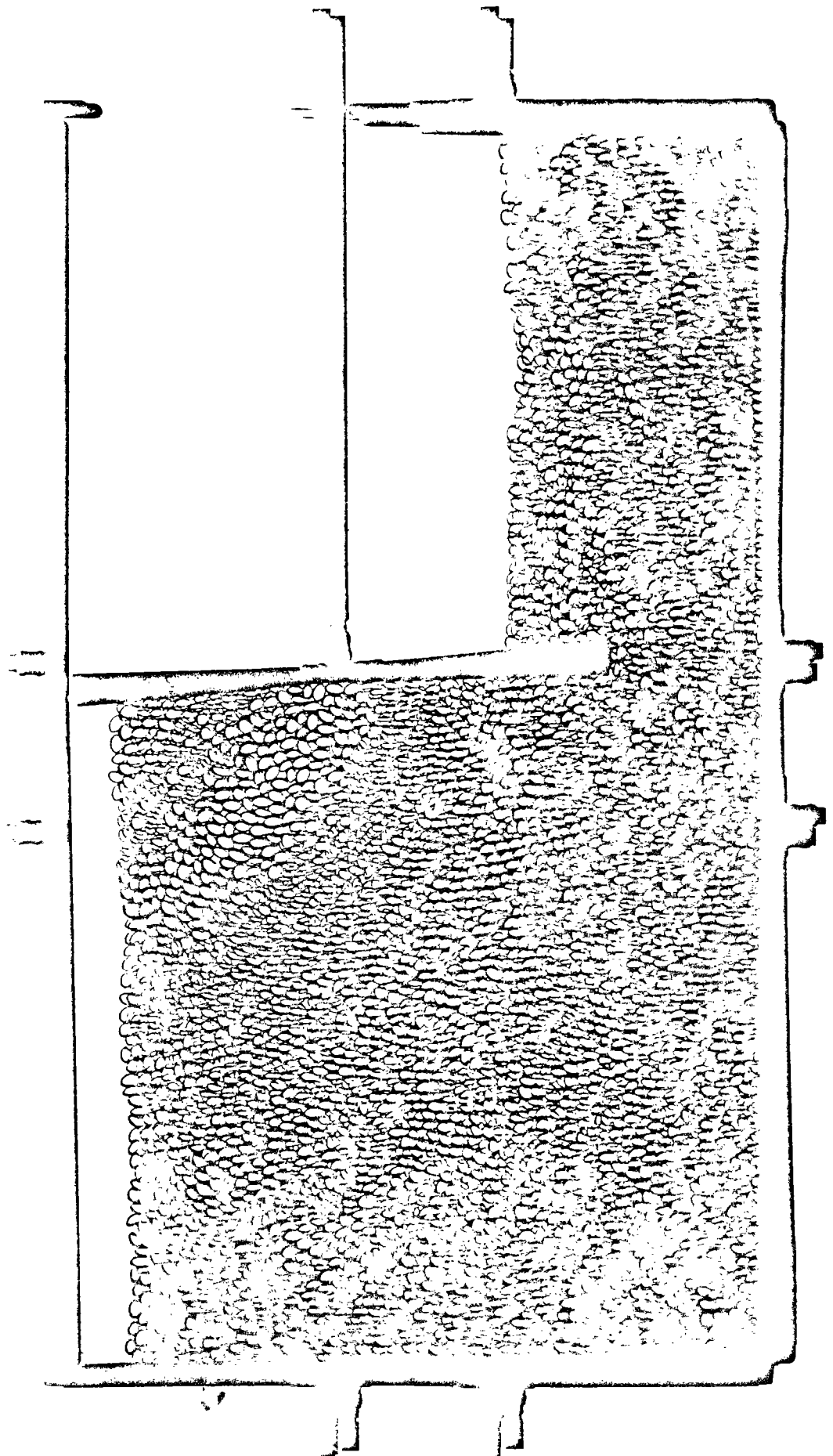


Visualisation du mouvement
des grains

Simulation du recul d'un mur
avec possibilité de rotation

h

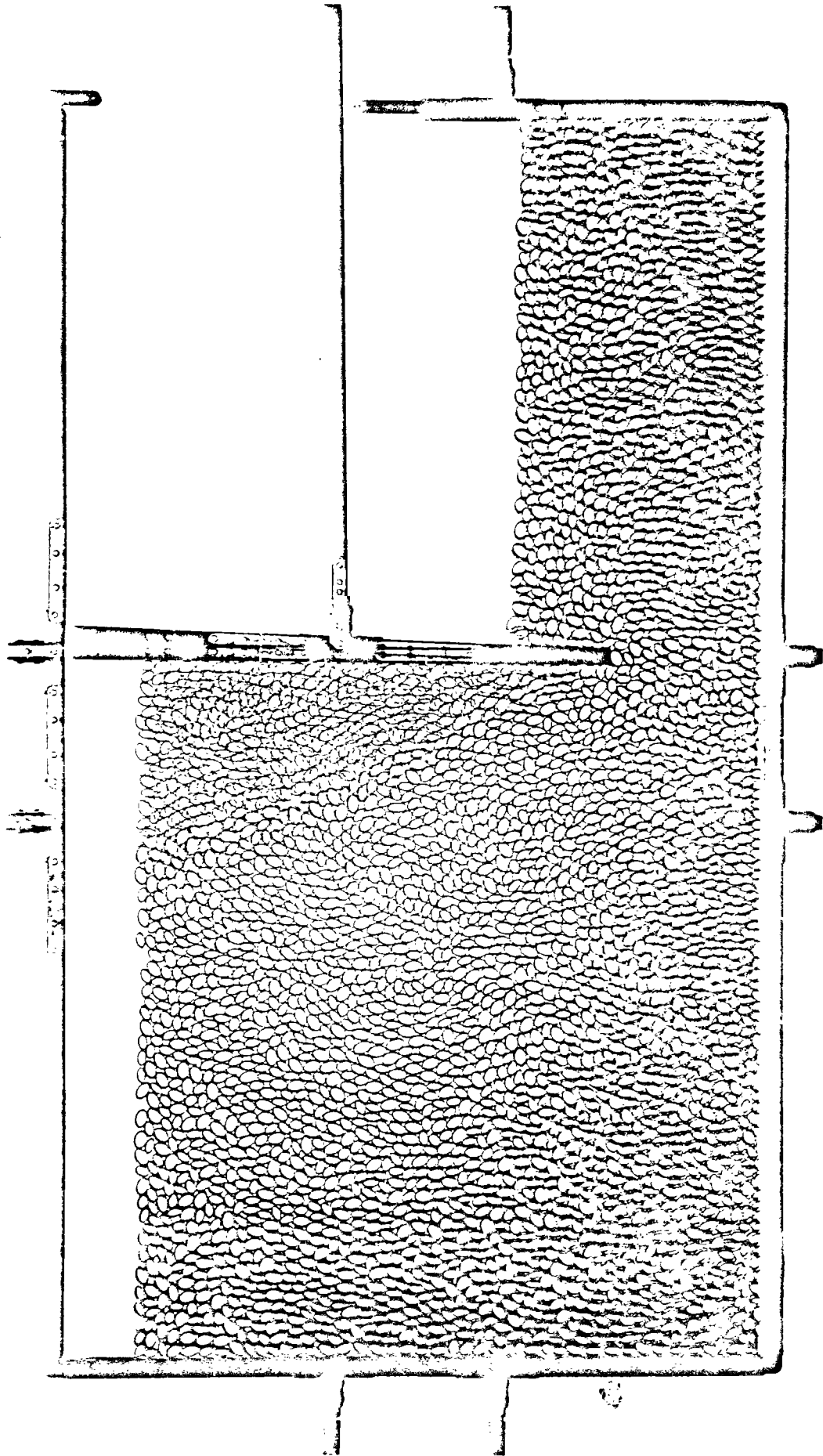


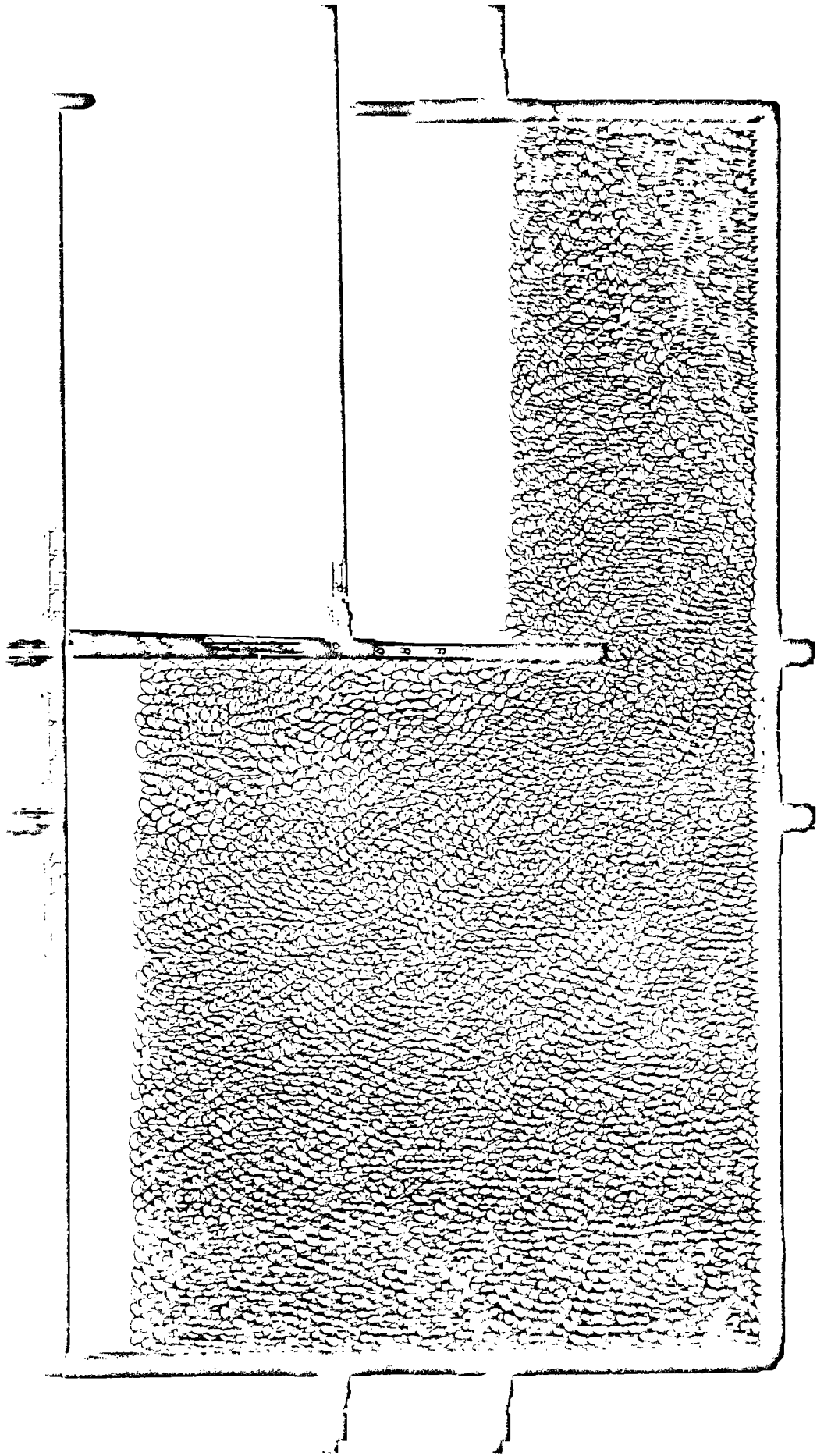


Visualisation du mouvement
des grains

Simulation de l'avancée d'un mur
avec possibilité de rotation

i

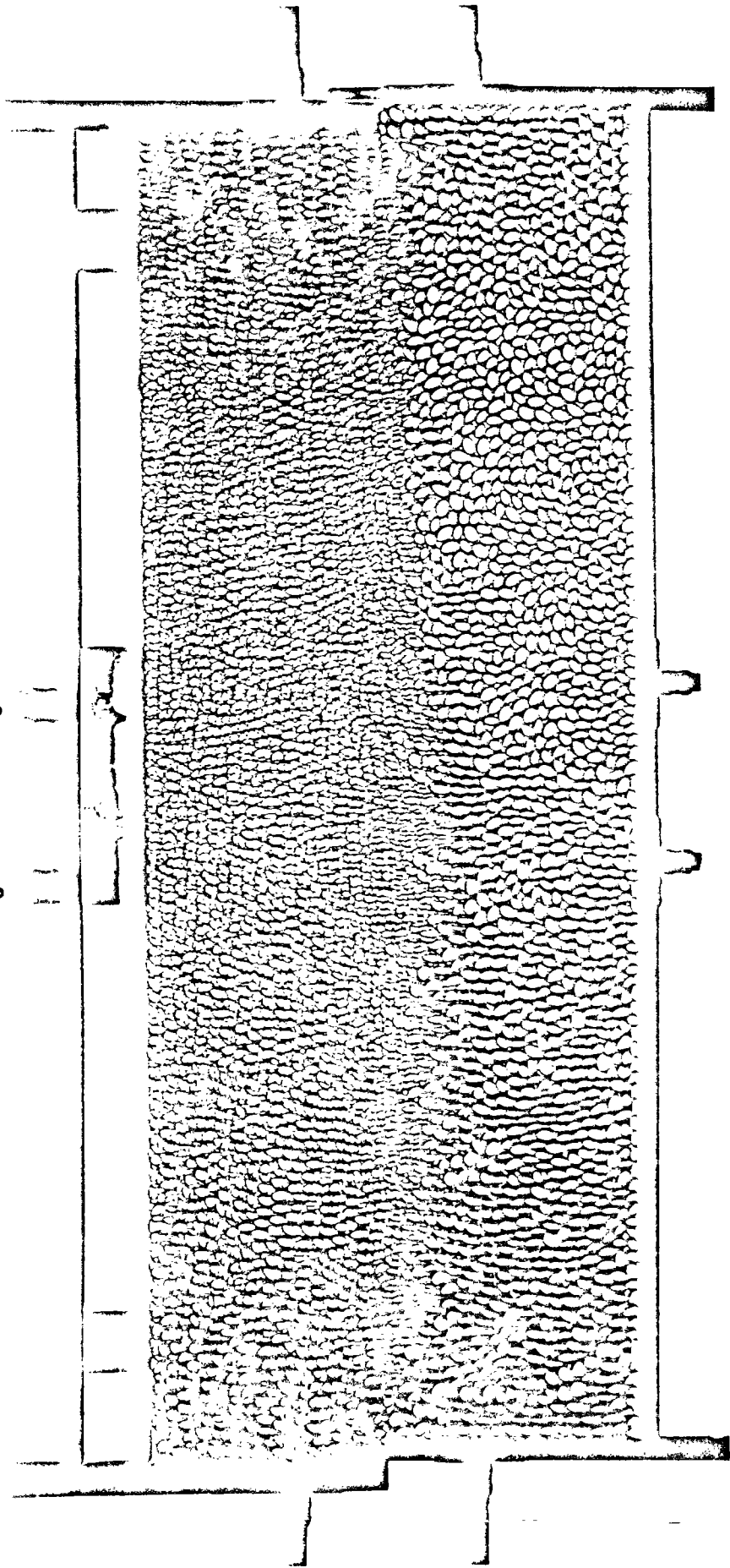


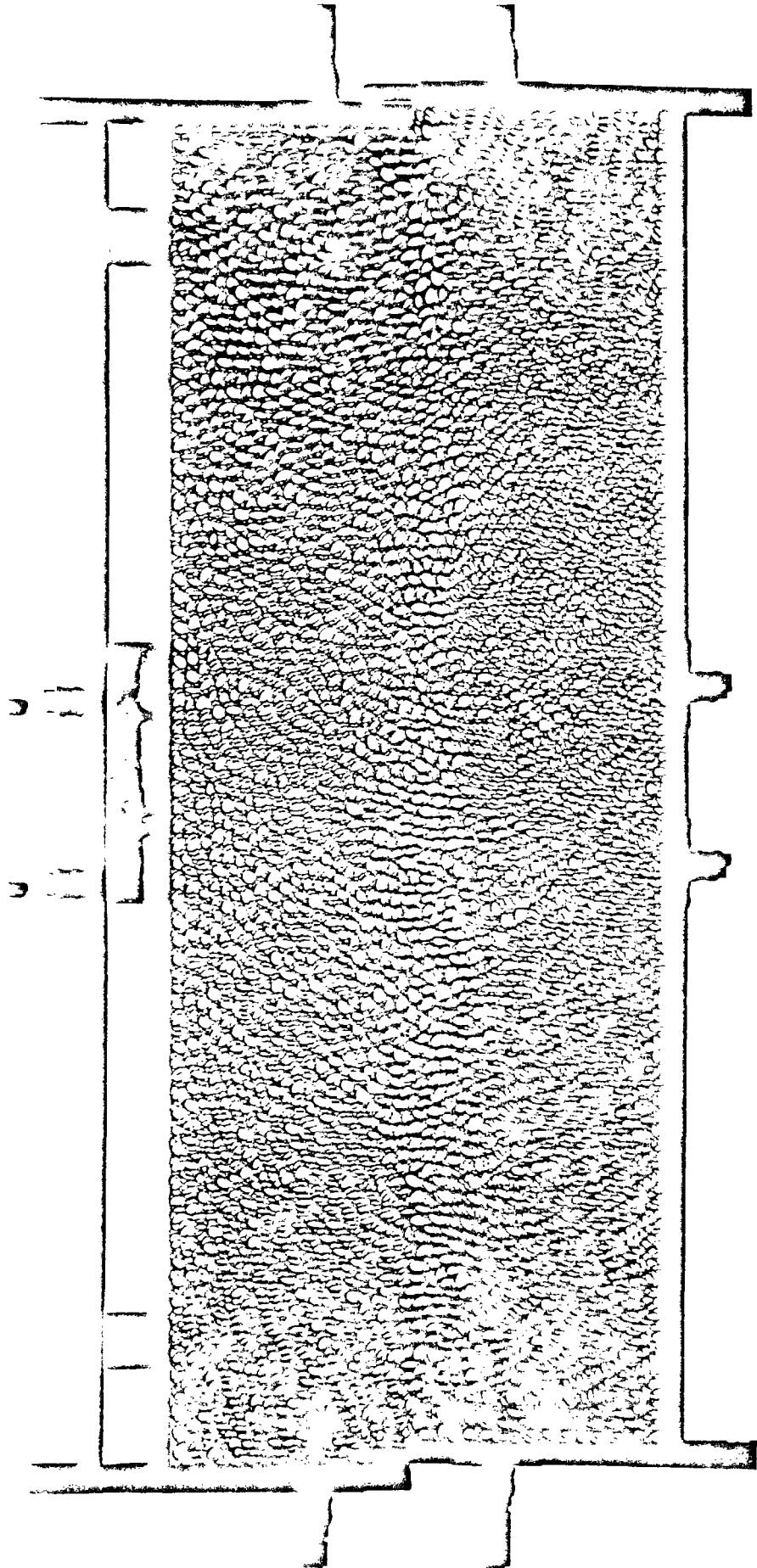


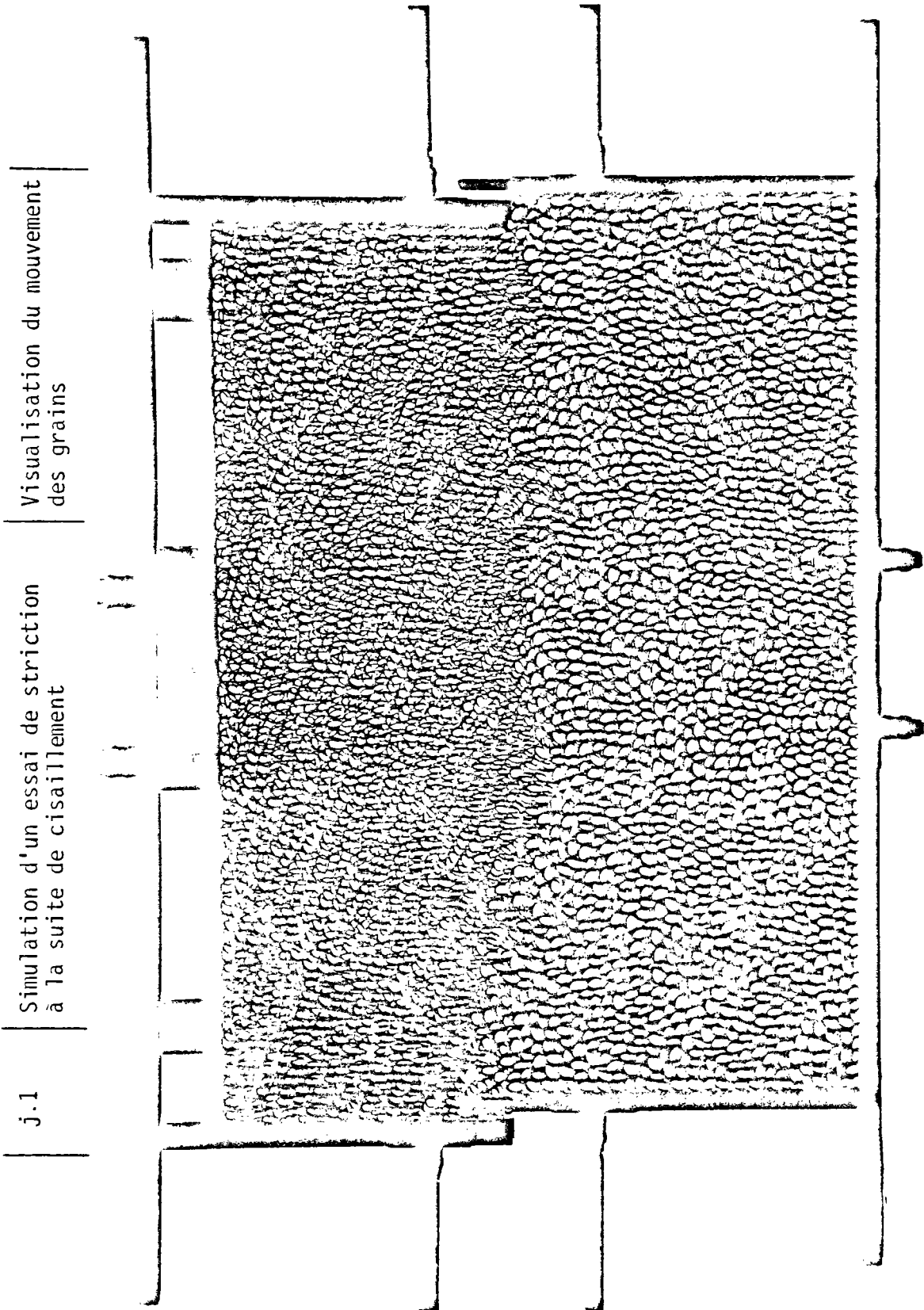
Visualisation du mouvement
des grains

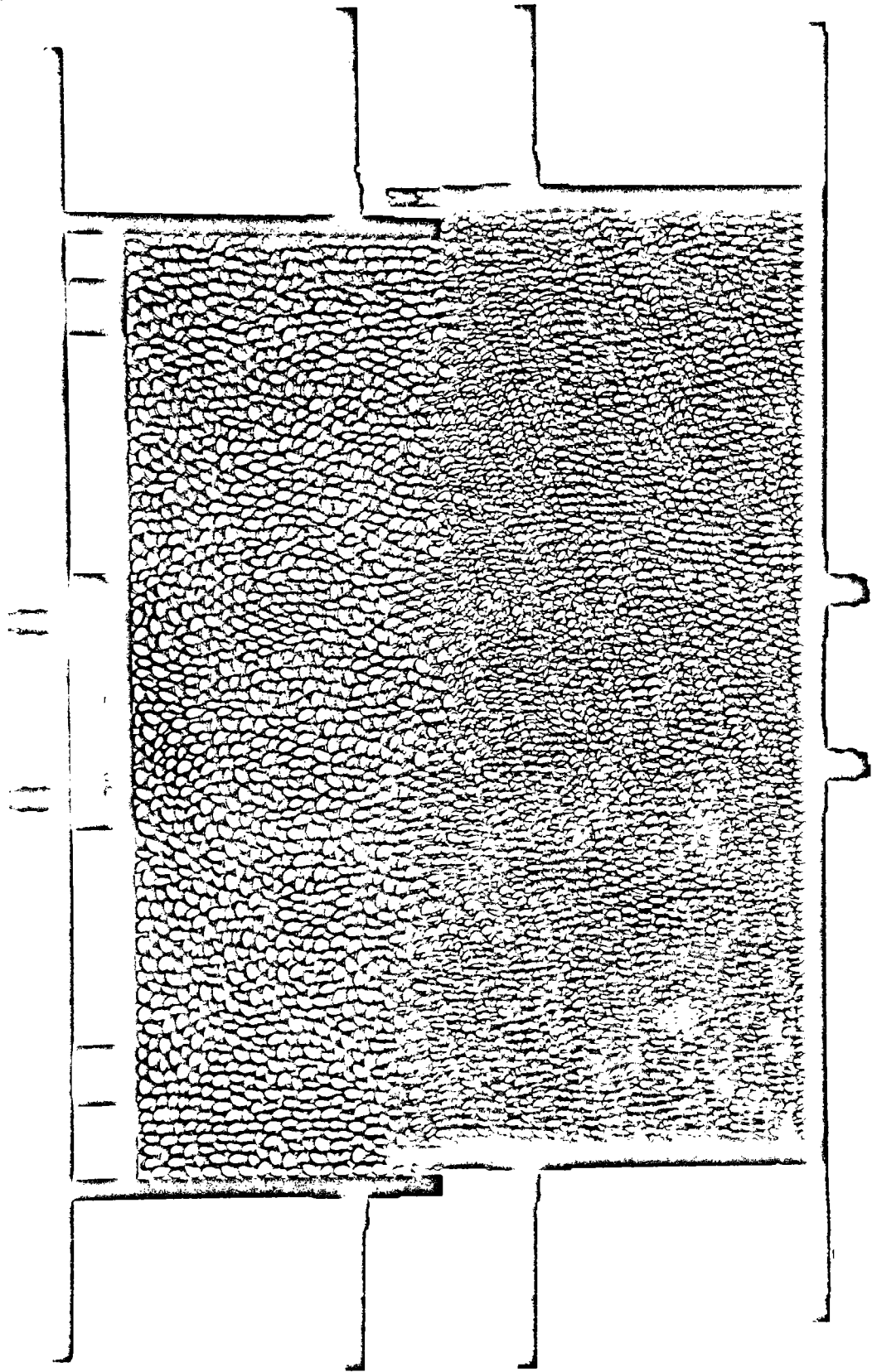
Simulation d'un essai de striction
à la suite de cisaillement

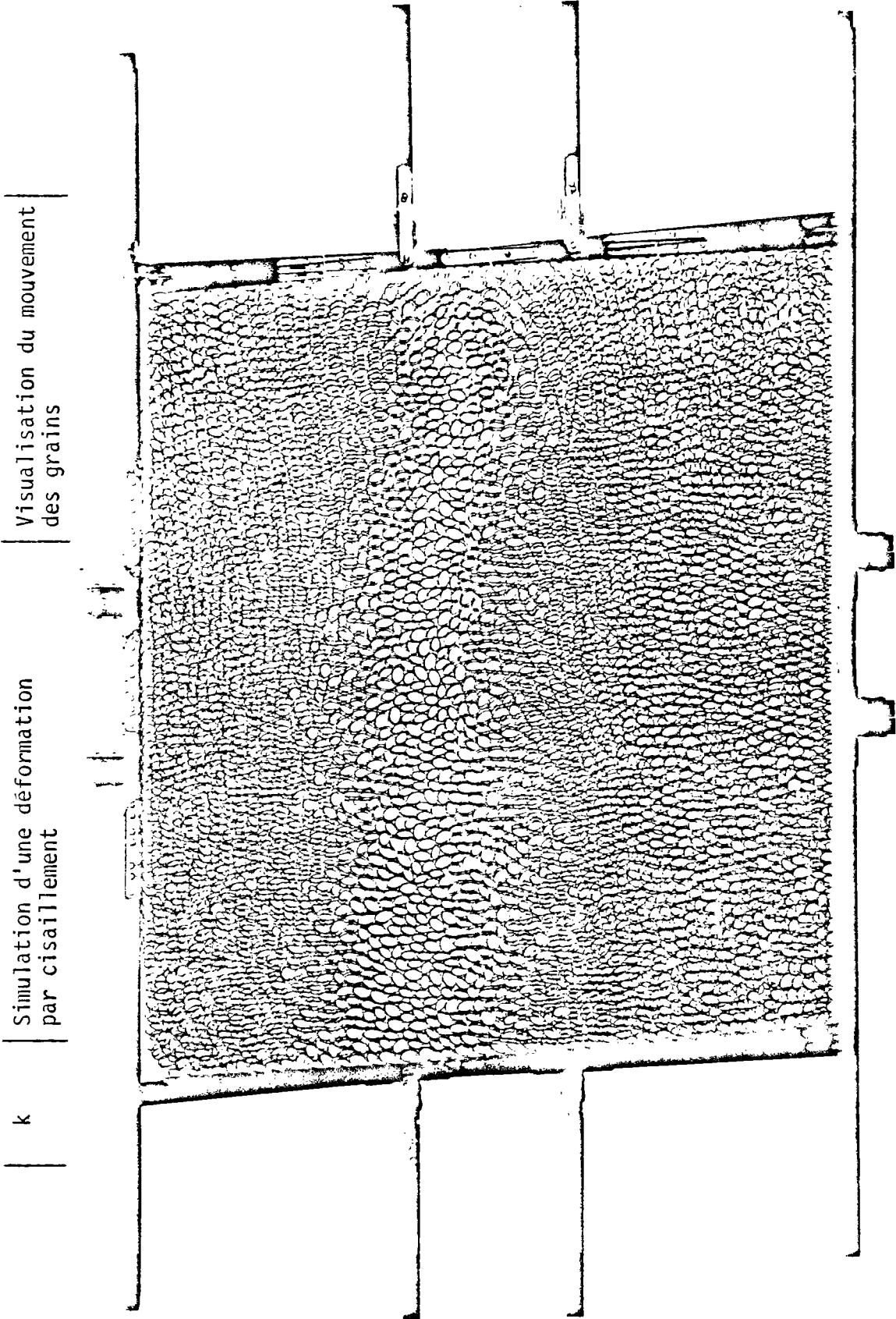
J.2

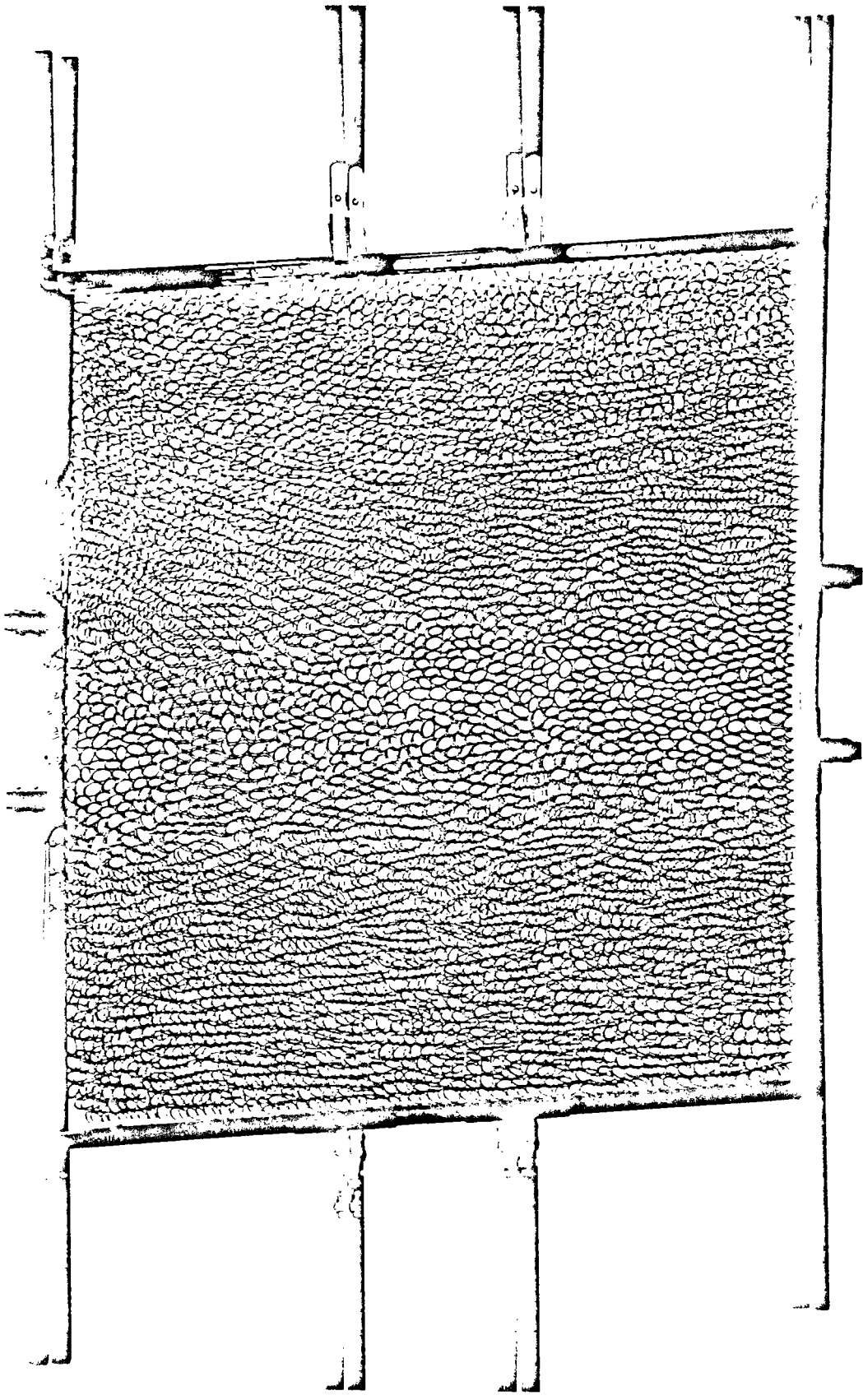






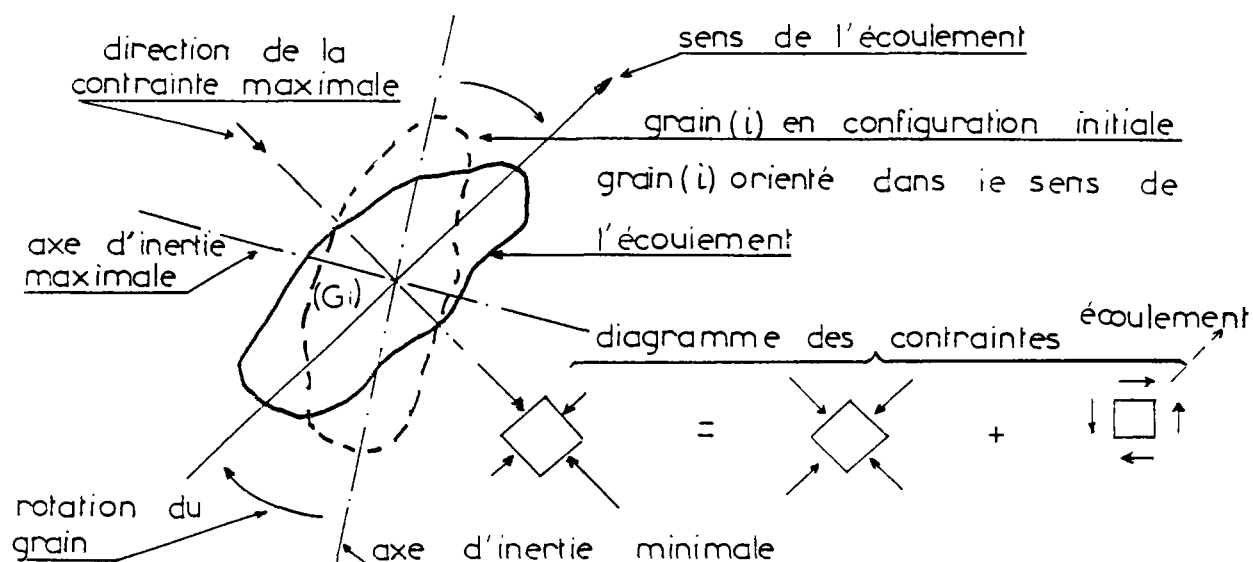






3.13 - CONCLUSION

Les différents essais présentés ici ont démontré la simplicité de visualisation des déplacements des grains dans un massif. Ils ont montré également l'importance de la rotation propre des grains dans un chargement anisotrope. Le grain s'oriente de manière à offrir un maximum d'inertie par rapport à l'axe de la contrainte maximale et inversement, un minimum d'inertie par rapport à l'axe de la déformation maximale (direction de l'écoulement).



Ce phénomène traduit en quelques sorte une polarisation du milieu. Ainsi, la simple observation de l'orientation préférentielle des grains (c'est-à-dire la connaissance du tenseur de configuration canonique) suffit en général pour estimer la direction approximative de la contrainte maximale ; tant il est vrai par exemple, que pour les sols les particules sédimentaires sont disposées de préférence horizontalement.

On notera enfin que si ce procédé est susceptible de fournir, à priori, la forme d'un champ de vitesses cinématiquement admissible (par exemple pour le calcul à la rupture), il y a lieu de tenir compte d'un "effet d'échelle" dans la définition d'un tel champ, et en aucun cas, les mesures quantitatives obtenues sur le modèle ne peuvent être interpolées directement sur un massif réel (Weber).

3.2 - COMPOTEMENT OEDOMETRIQUE D'UN SABLE SOUMIS A DES CHARGEMENTS CYCLIQUES

Les essais de compressibilité des sables secs ont été effectués sur un oedomètre classique. L'évolution des tassements a été mise en évidence sur 3 types de sables présentant des caractéristiques mécaniques analytiques différentes (granulométrie, hétérogénéité des matériaux constitutifs des grains,...)

- sable du Havre, sable de Loire, sable de Fontainebleau. Notre propos étant avant tout, l'interprétation qualitative des tassements sous charges (avec décharges et recharges éventuellement), nous nous sommes intéressés plus à l'évolution de la courbe de tassements qu'aux valeurs quantitatives des tassements eux mêmes.

3.21 - MATERIEL D'ESSAI

L'appareil oedométrique possède les dimensions standard suivantes :

- Diamètre du piston 7 cm.

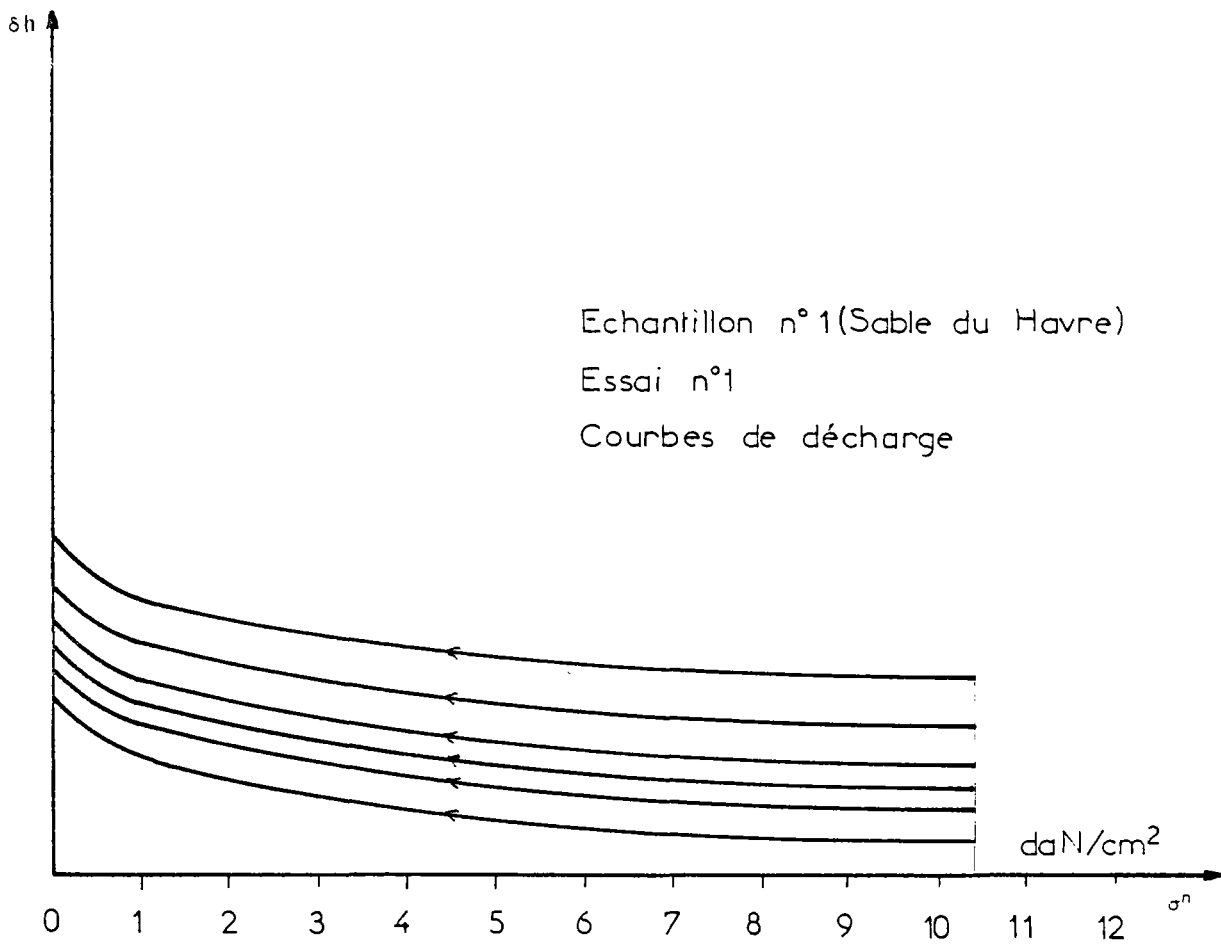
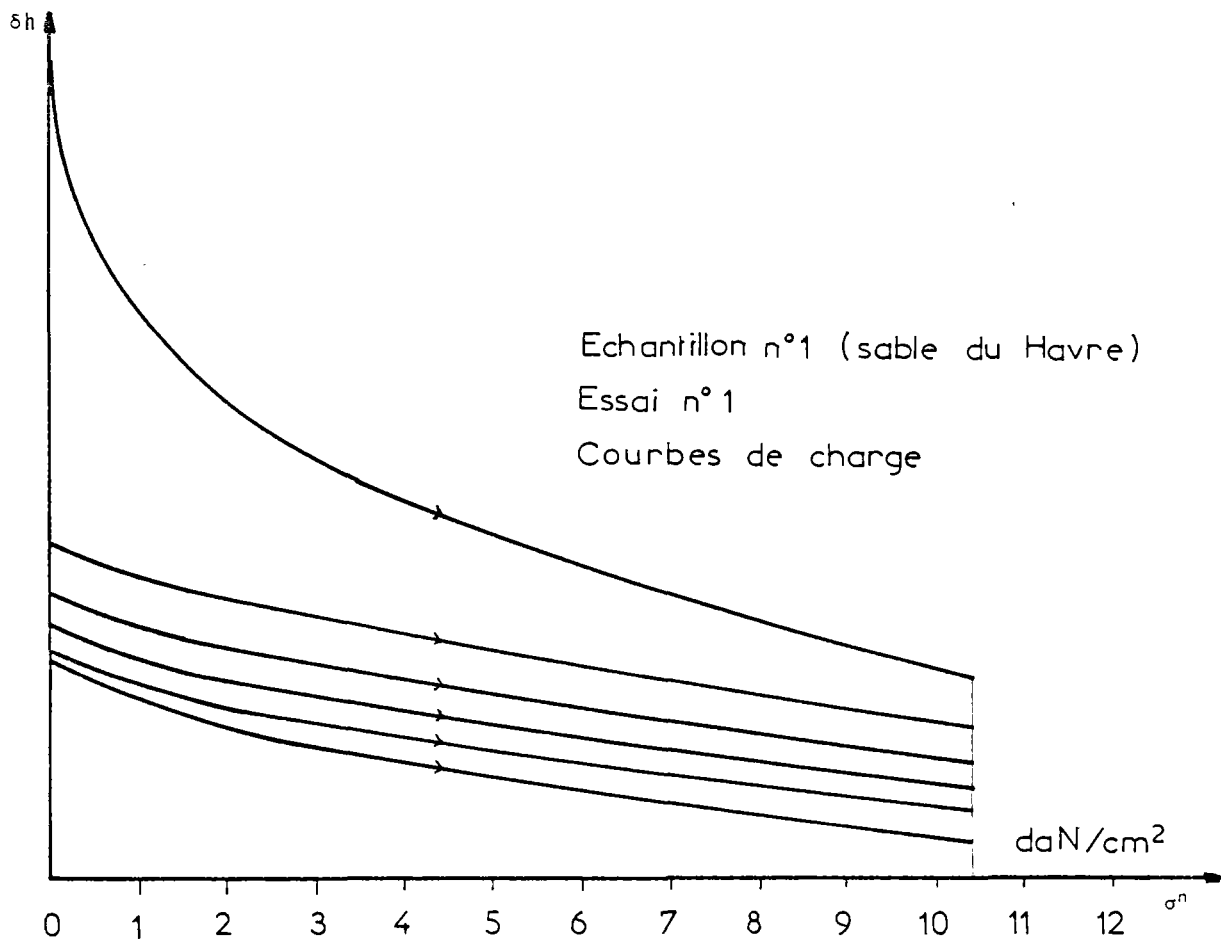
Hauteur maximum de l'échantillon 2.38 cm.

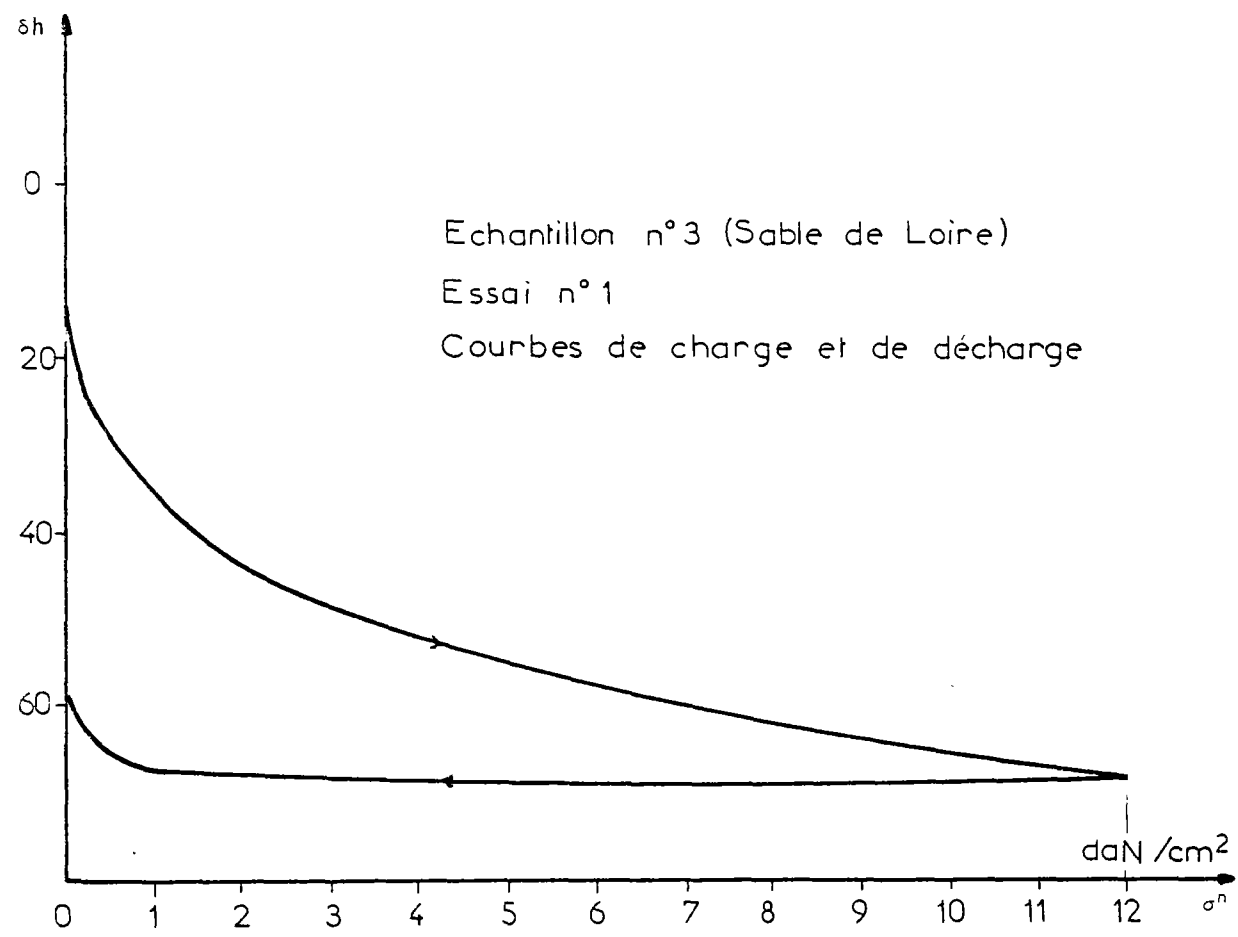
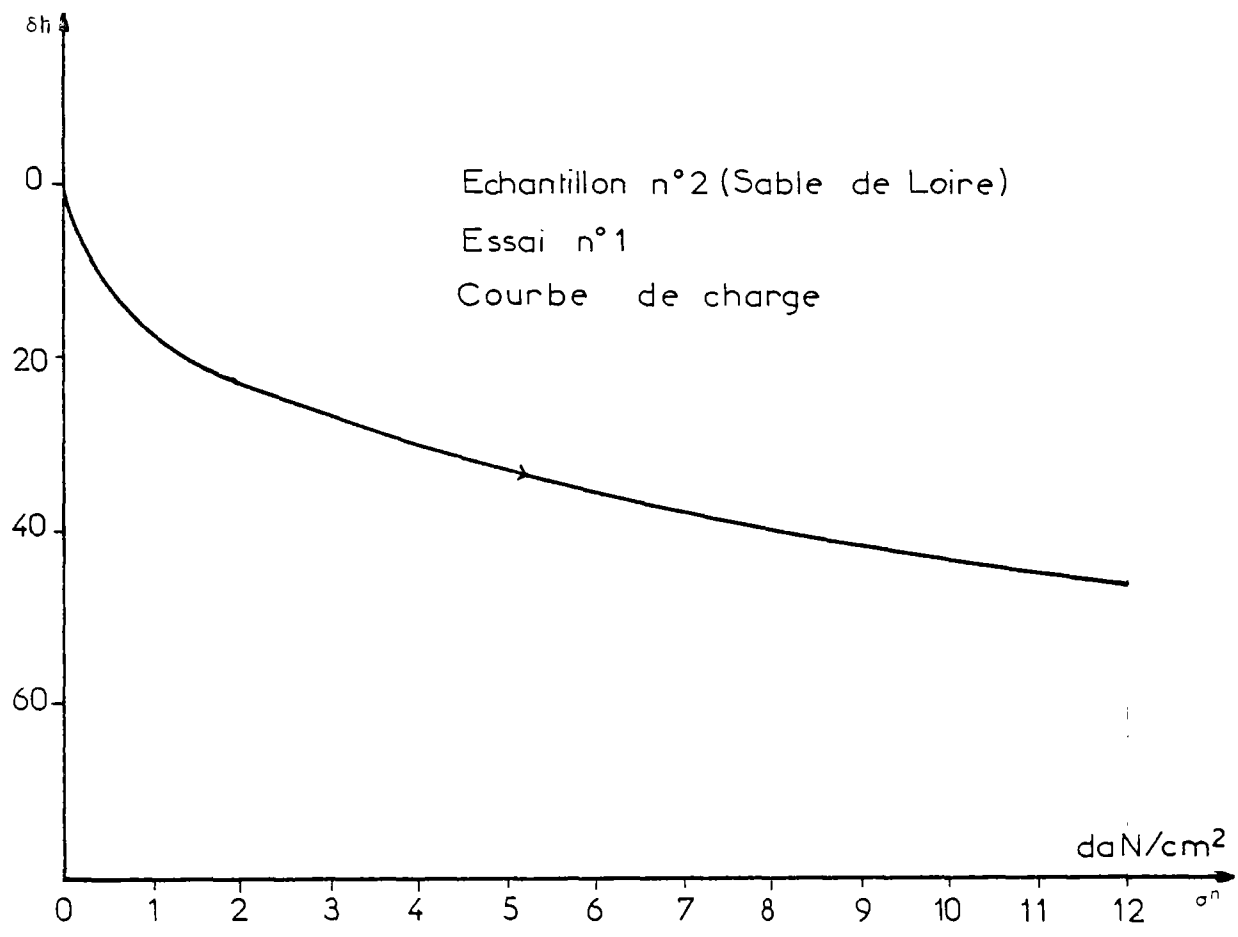
L'unité de chargement correspond à une contrainte verticale de 0.1 da N/cm^2 . La charge maximale provoque une contrainte sur l'échantillon de 12 da N/cm^2 . La faible valeur de l'incrément de contrainte (0.1 da N/cm^2) a permis de suivre au mieux l'évolution des courbes de tassements.

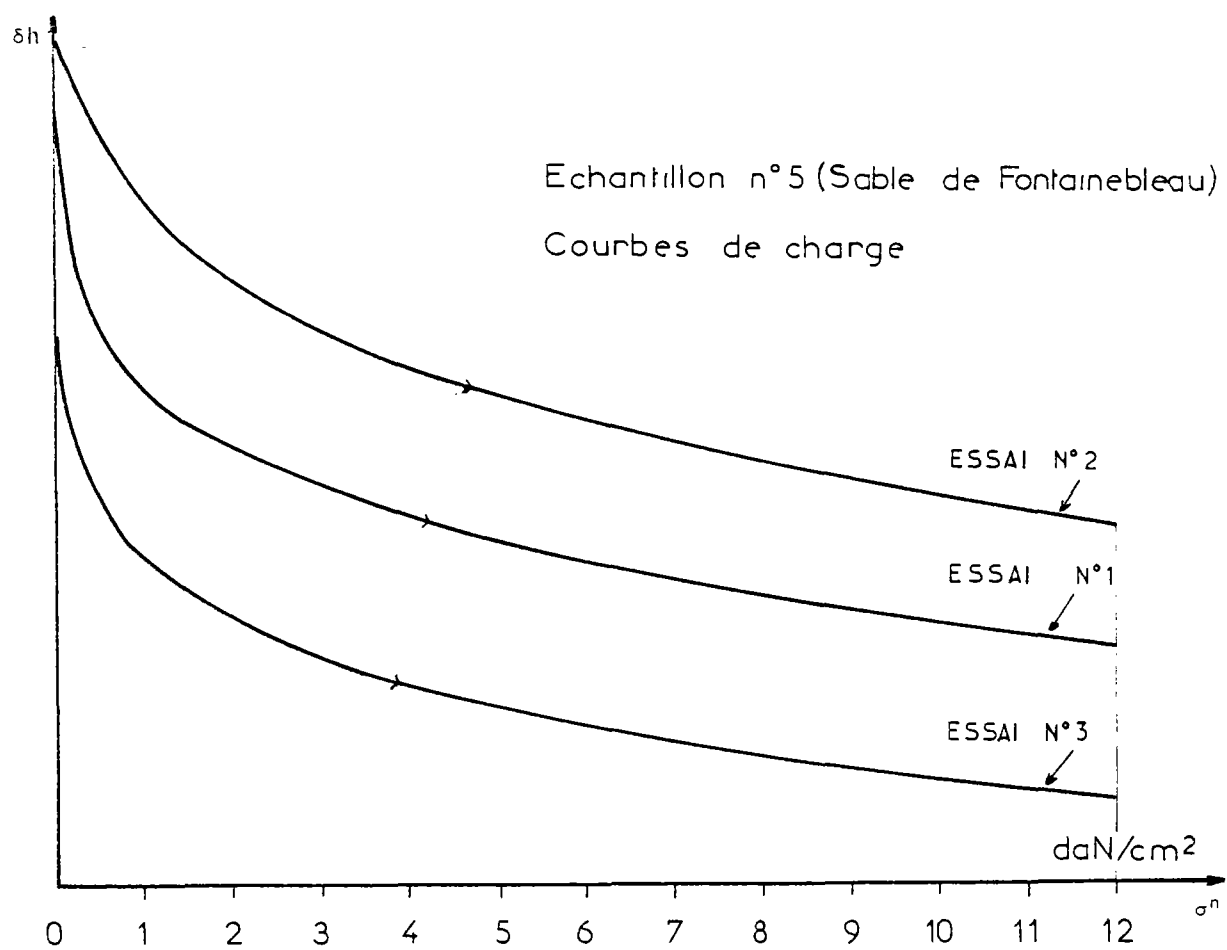
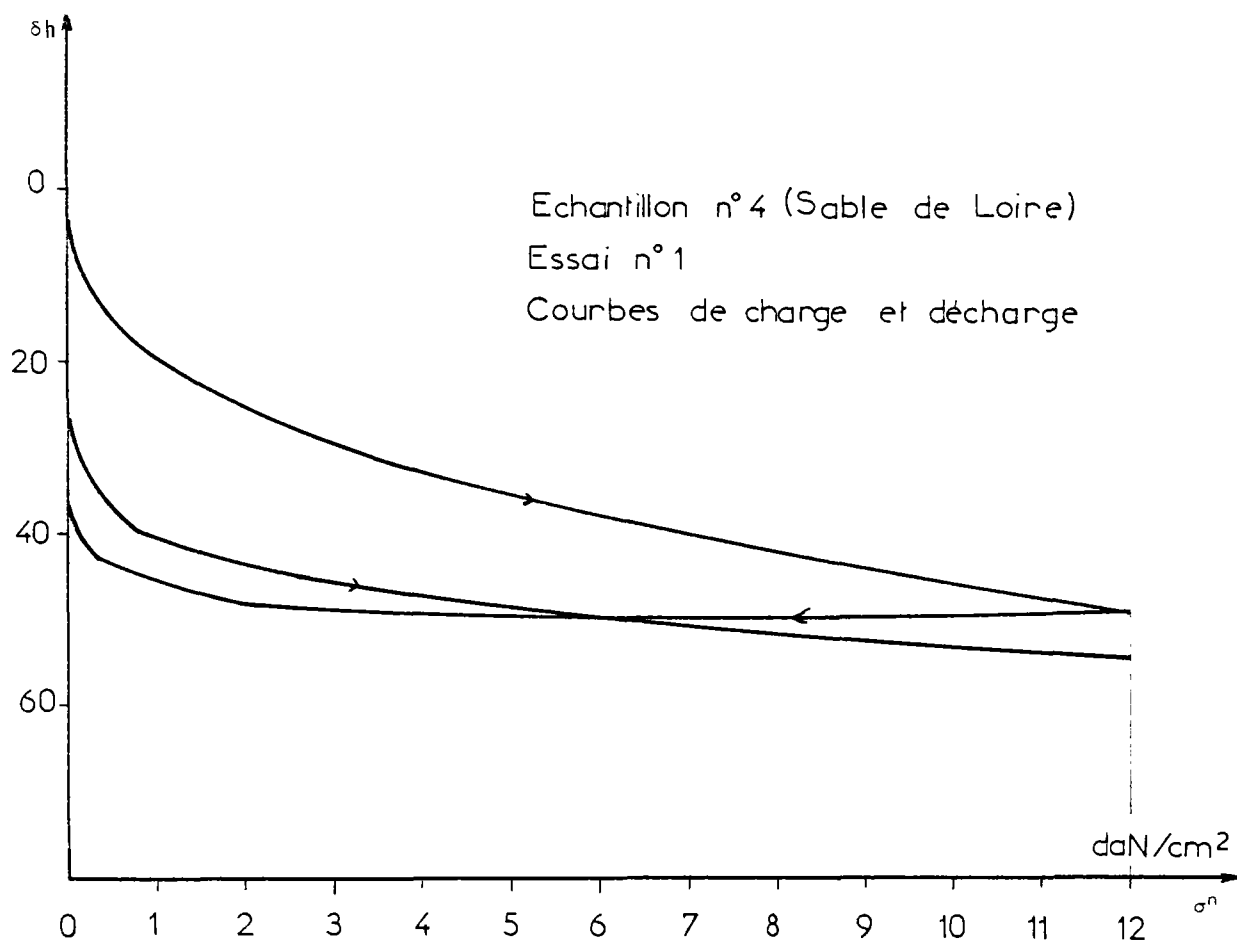
3.22 - DESCRIPTION ET COMPTE RENDU DES ESSAIS

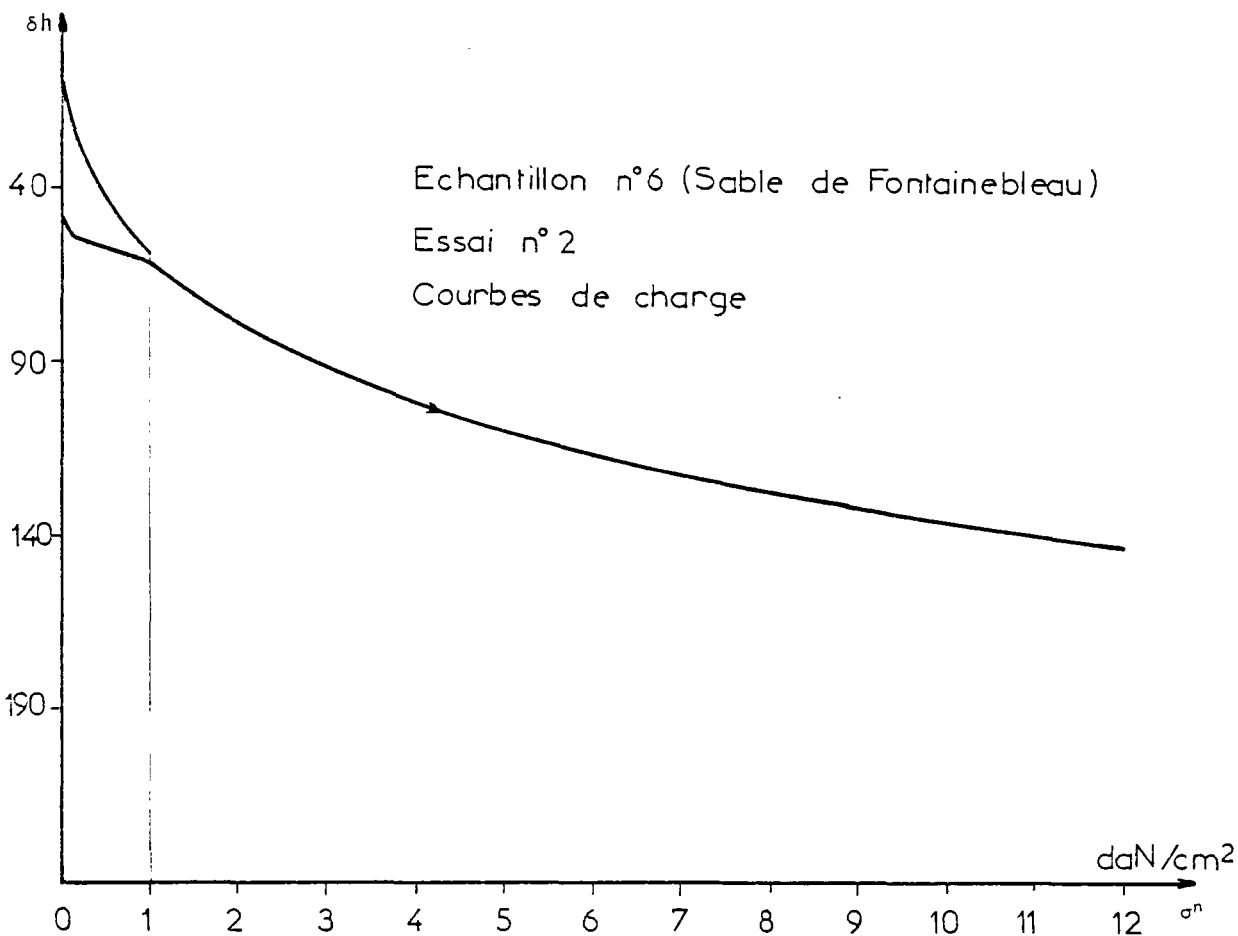
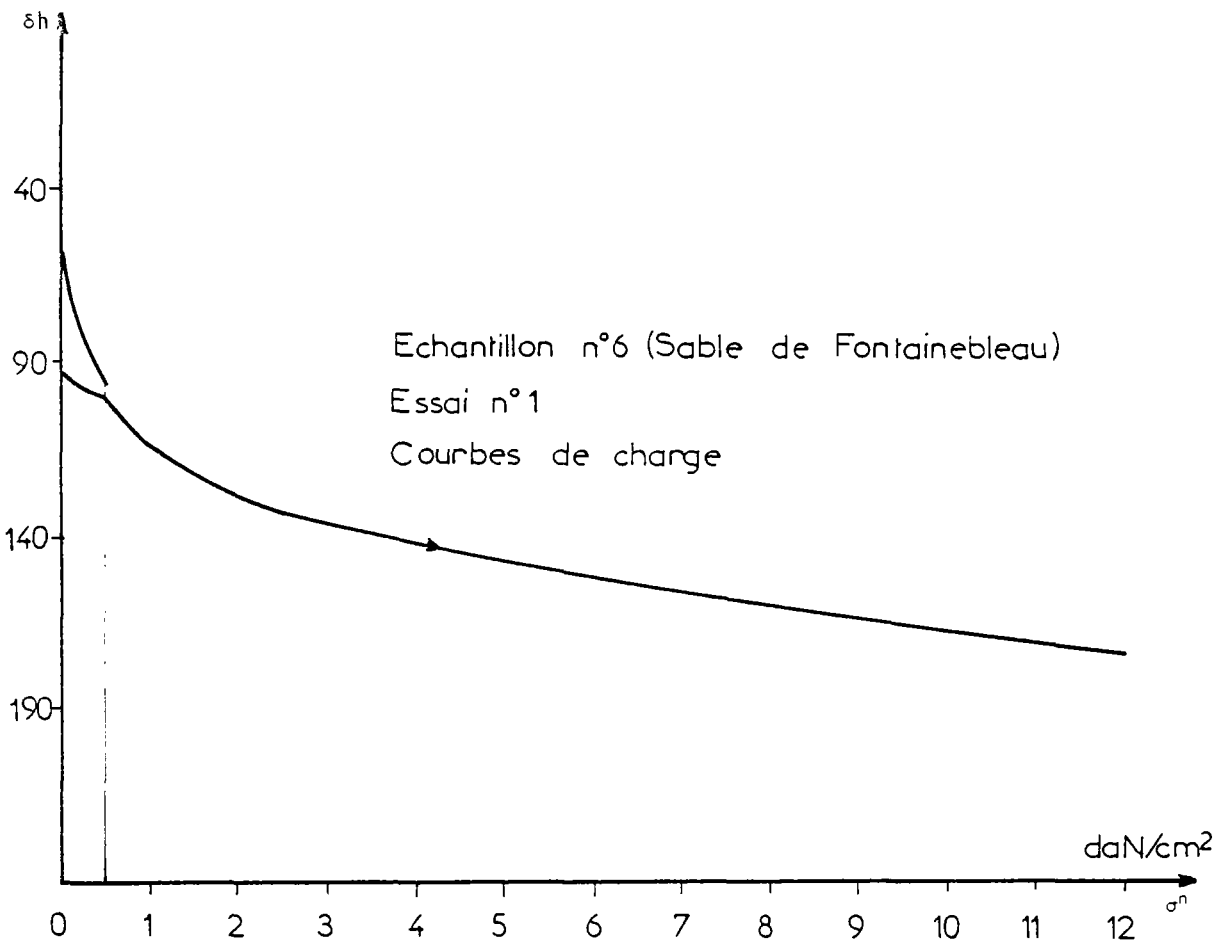
Origine du sable	Echantillons n°	Essai n°	Trajet de chargements
Havre	1	1	(↗ 10.4 , ↘ 0.05) × 6
Loire	2	1	↗ 12.0
	3	1	↗ 12.0 , ↘ 0.05
	4	1	↗ 12.0 , ↘ 0.05 ↗ 12.0
Fontainebleau	5	1	↗ 12.0
		2	↗ 12.0
		3	↗ 12.0
	6	1	↗ 0.5 , ↘ 0.05 , ↗ 12.0
		2	↗ 1.0 , ↘ 0.05 , ↗ 12.0
		3	↗ 2.0 , ↘ 0.05 , ↗ 12.0
		4	↗ 4.0 , ↘ 0.05 , ↗ 12.0
		5	↗ 8.0 , ↘ 0.05 , ↗ 12.0
		3 ⁽²⁾	↗ 2.0 , ↘ 0.2 , ↗ 12.0
		3 ⁽³⁾	↗ 2.0 , ↘ 0.5 , ↗ 12.0
		3 ⁽⁴⁾	↗ 2.0 , ↘ 1.0 , ↗ 12.0
	7	1	(↗ 2.0 , ↘ 0.05) × 10
			(↗ 12.0 , ↘ 0.05) × 3
	8	1	(↗ 2.0 , ↘ 0.05) × 4
			(↗ 12.0 , ↘ 0.05) × 10

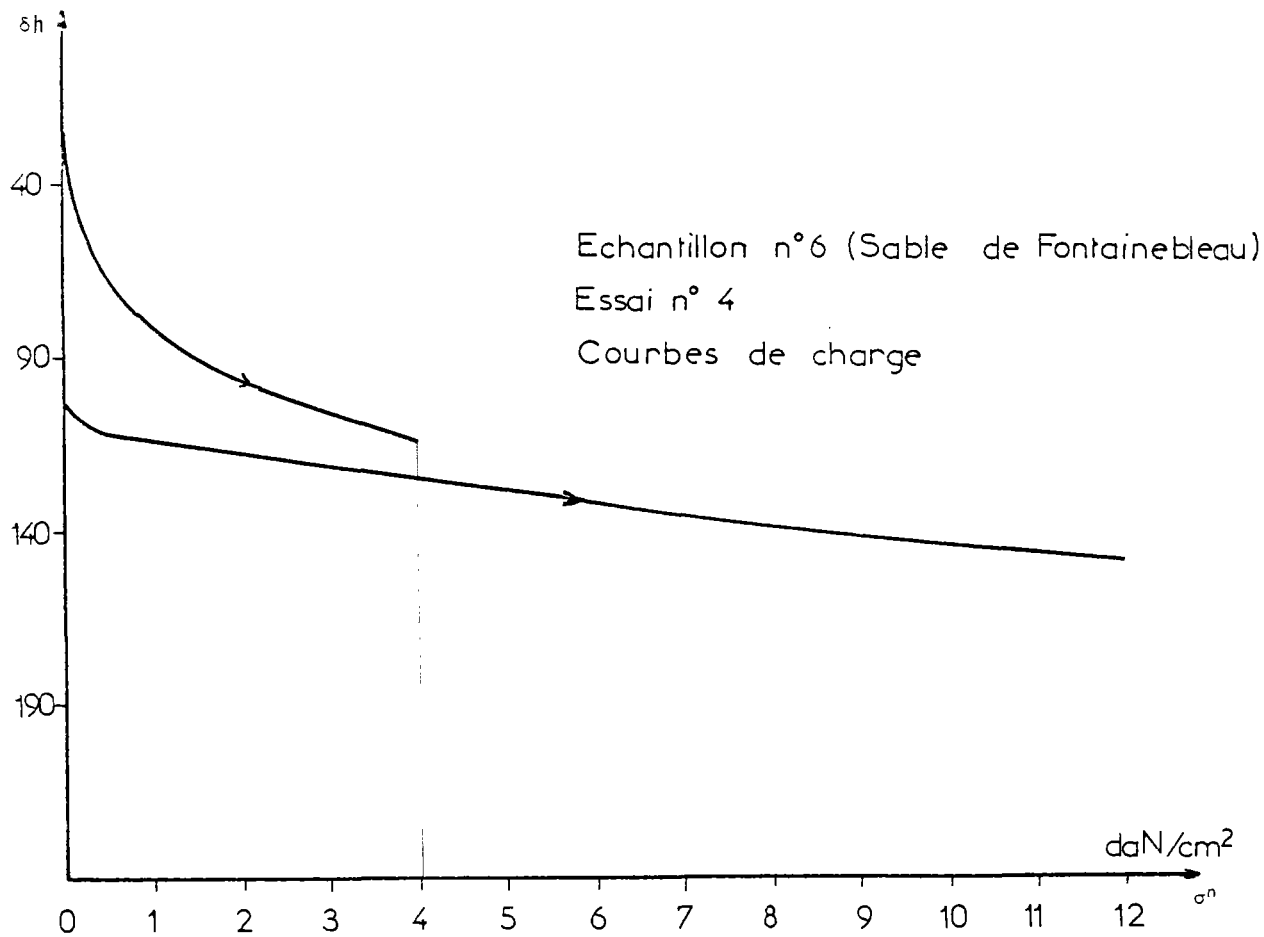
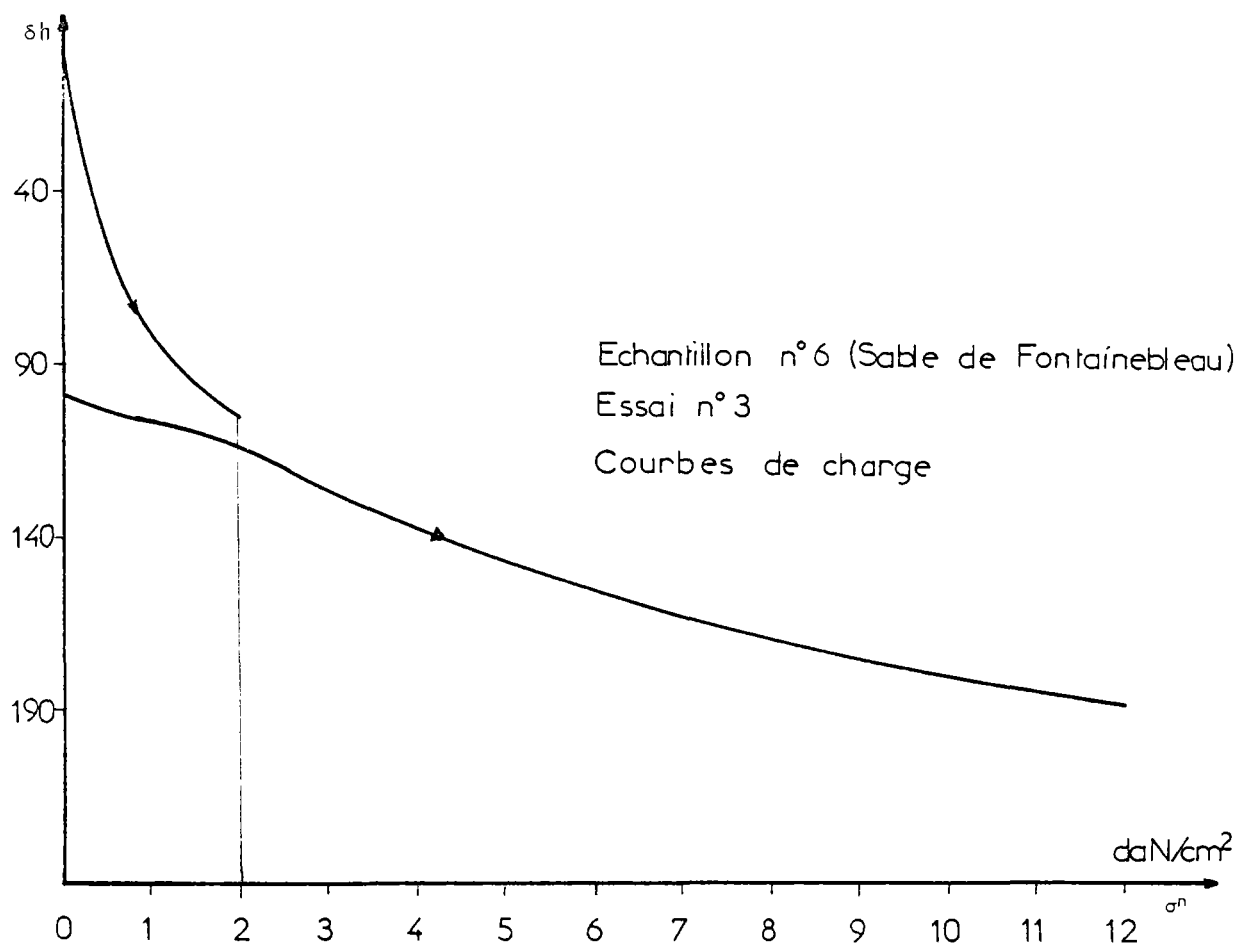
Note : Les unités de chargement sont exprimés en da N/cm²
0.05 da N/cm² correspond au poids du piston, décharge maximale.
Pour chaque essai, l'échantillon est remanié
Symboles ↗ : charge jusqu'à ...
↘ : décharge jusqu'à ...
() × : cycles consécutifs.

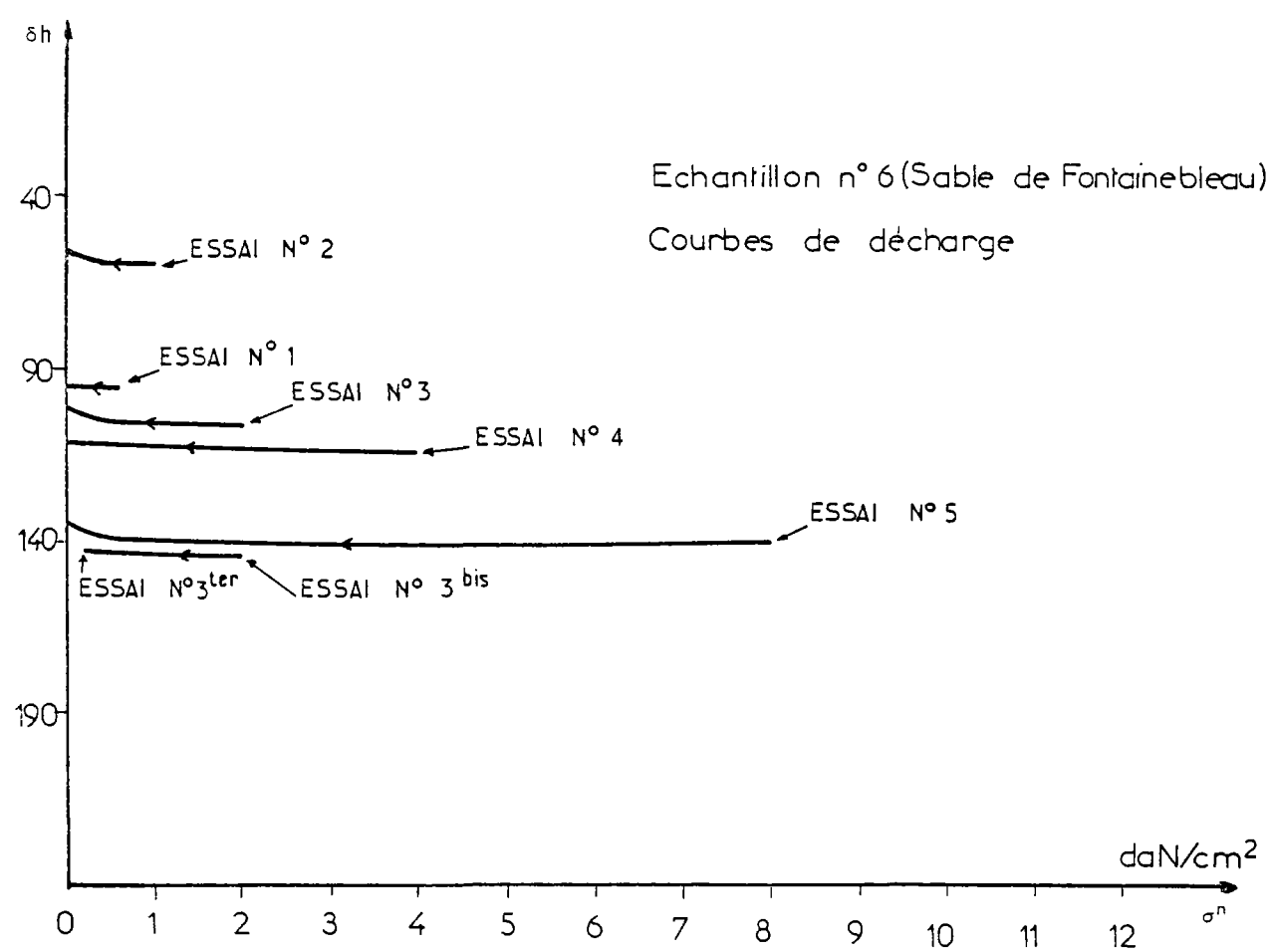
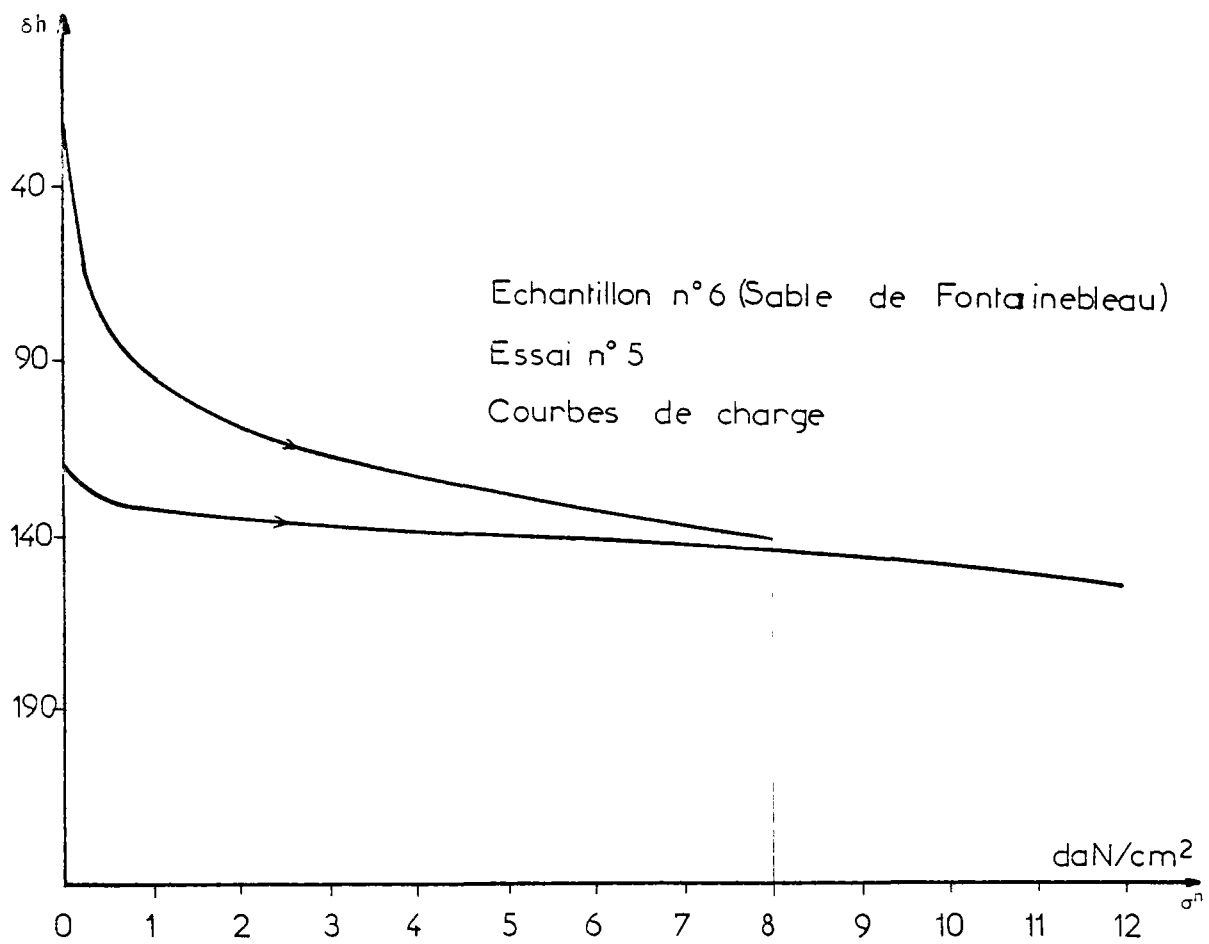


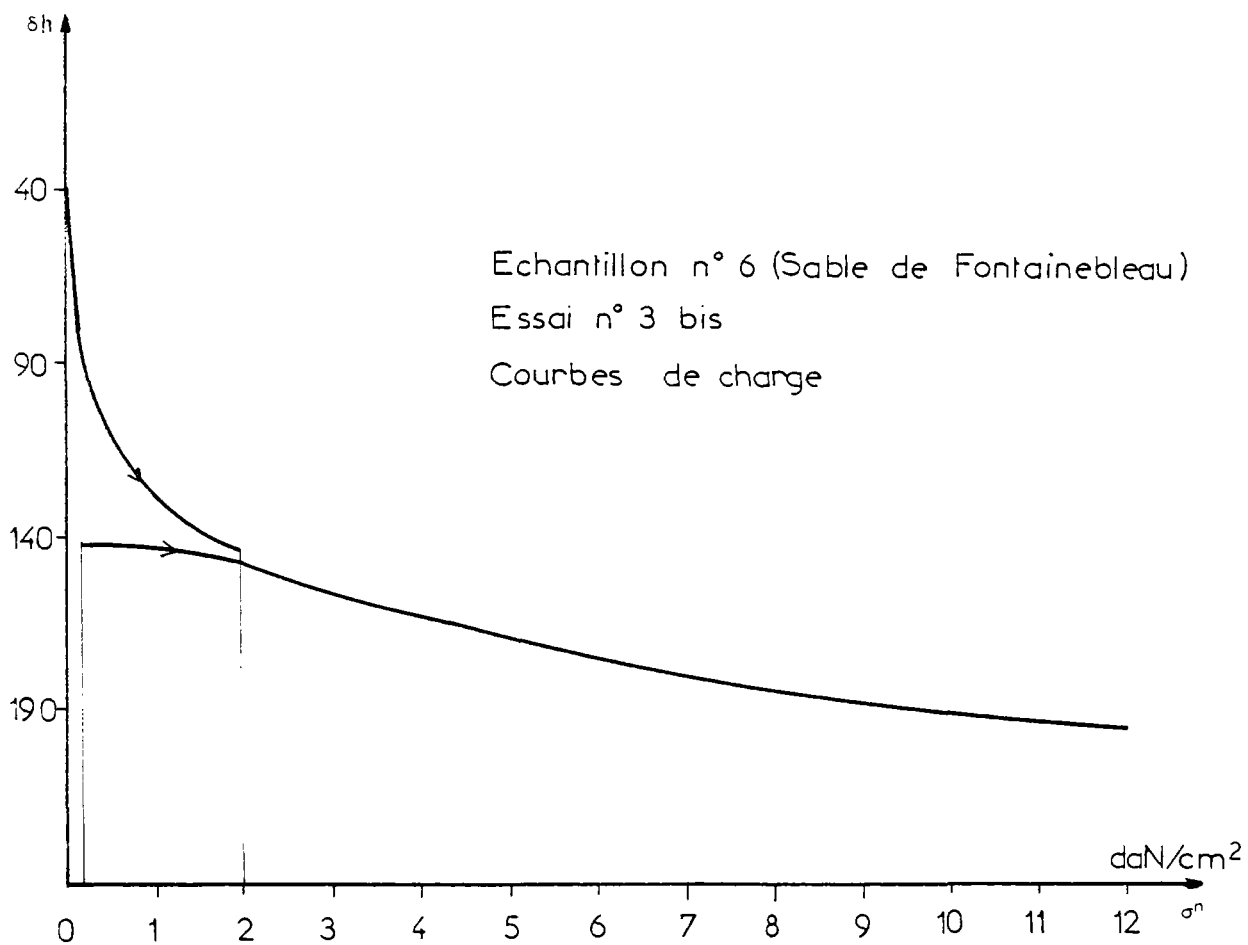
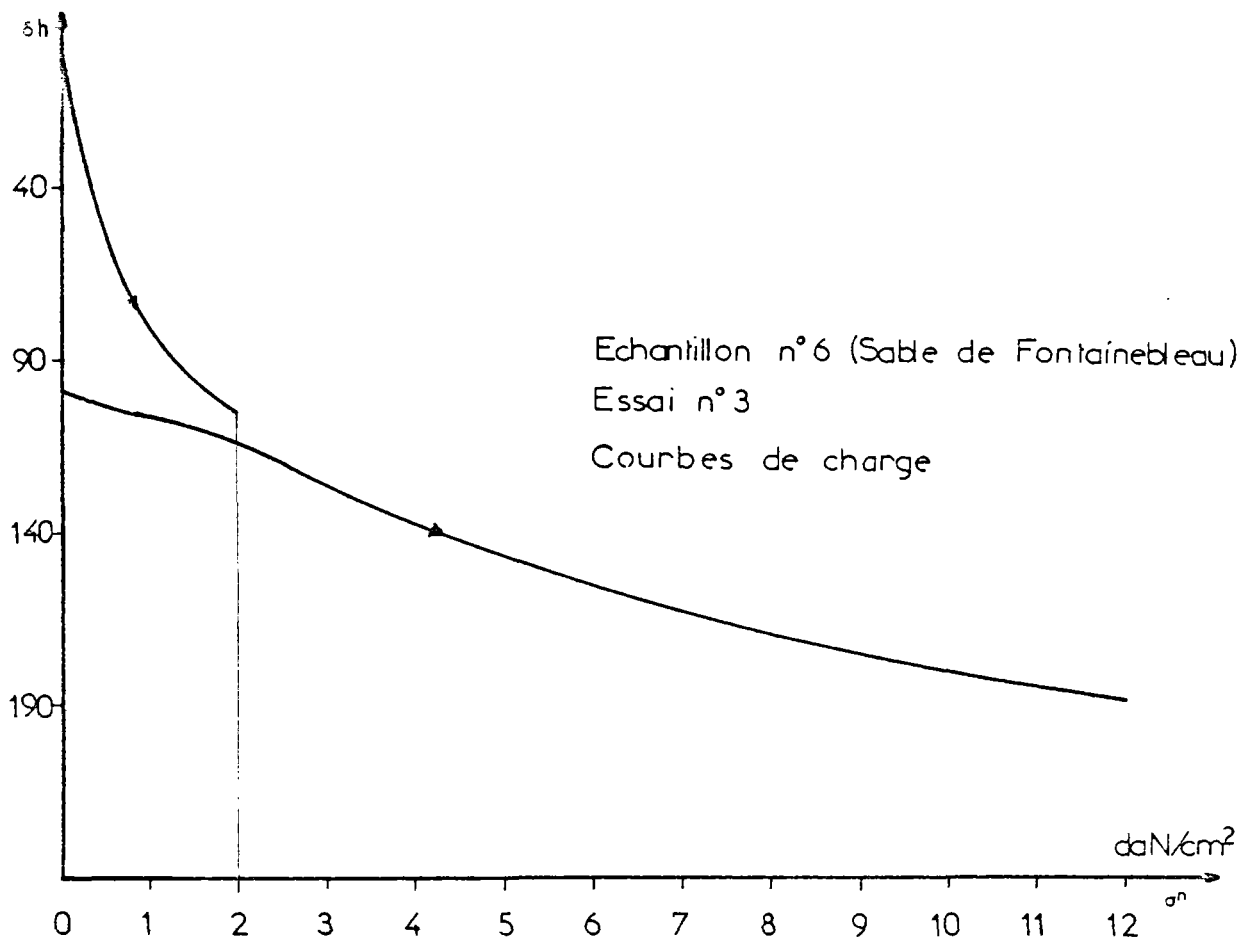


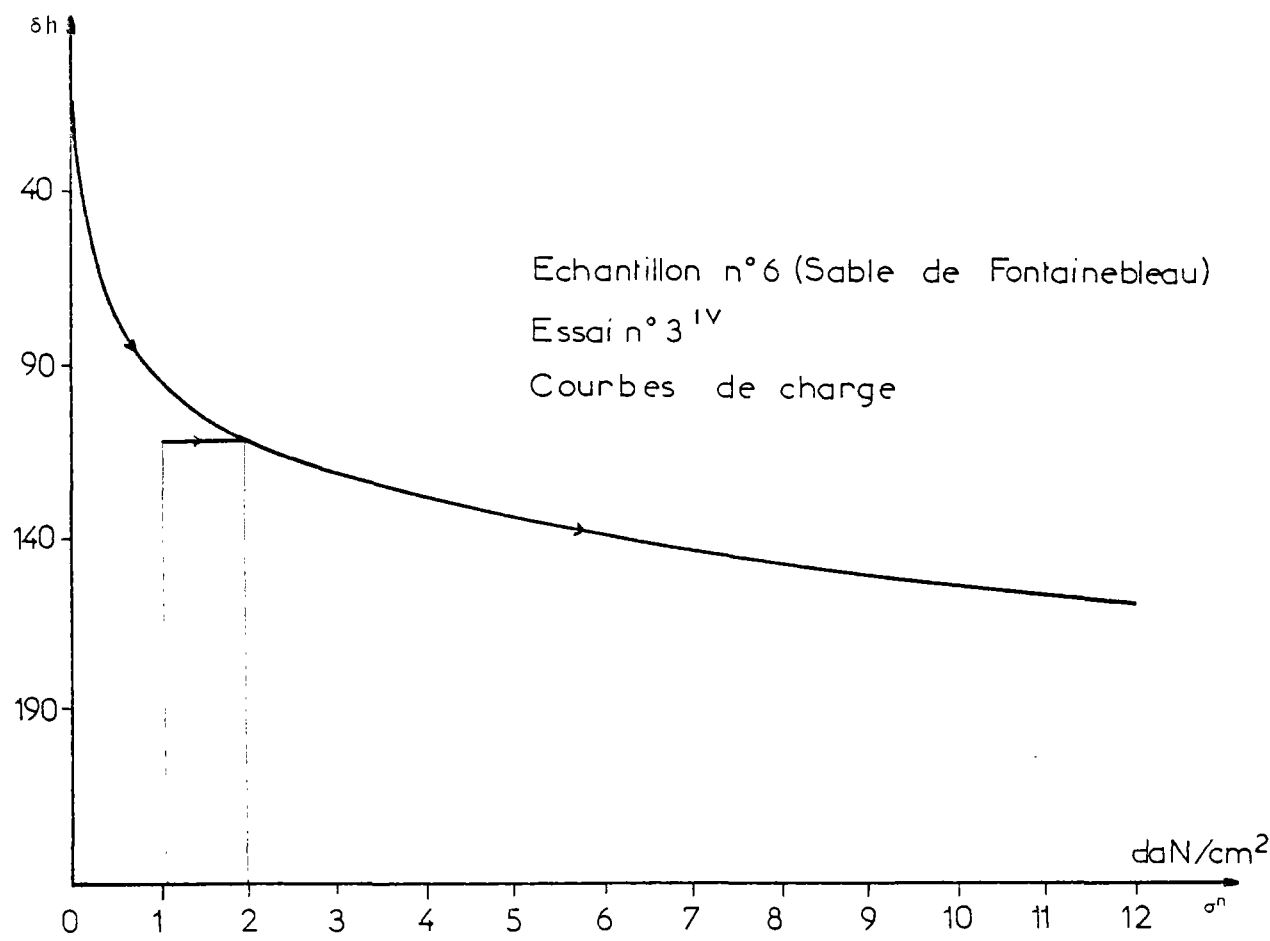
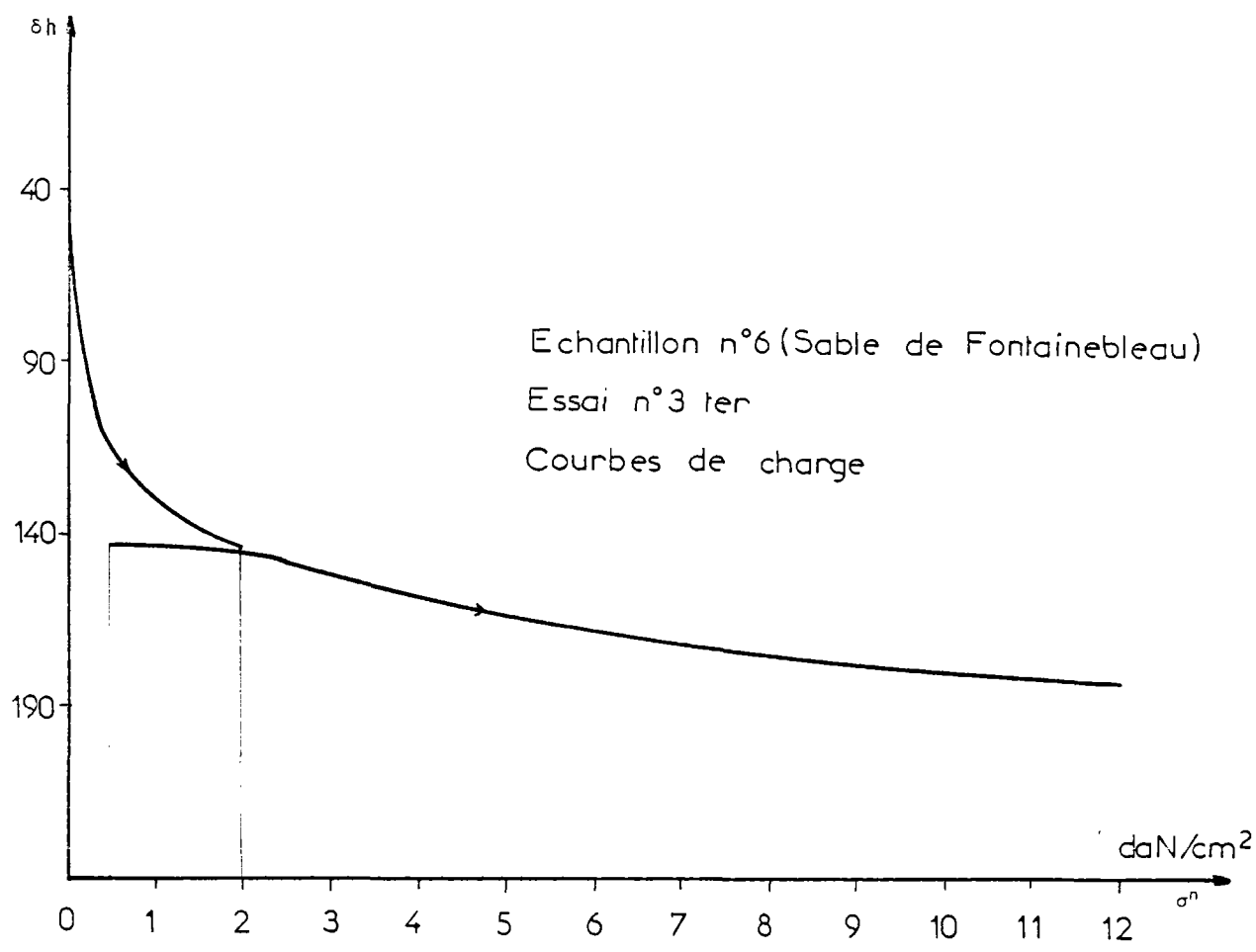


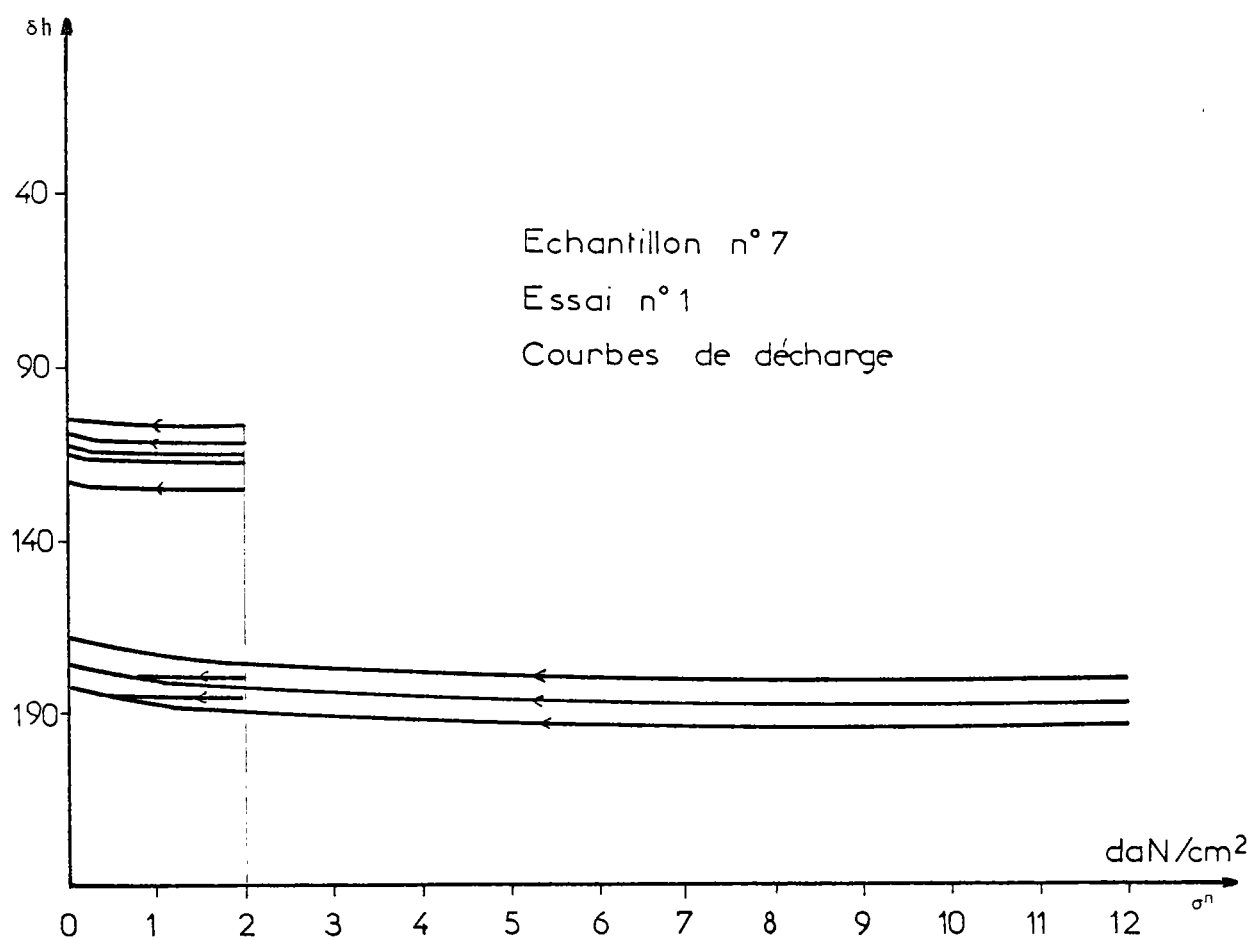
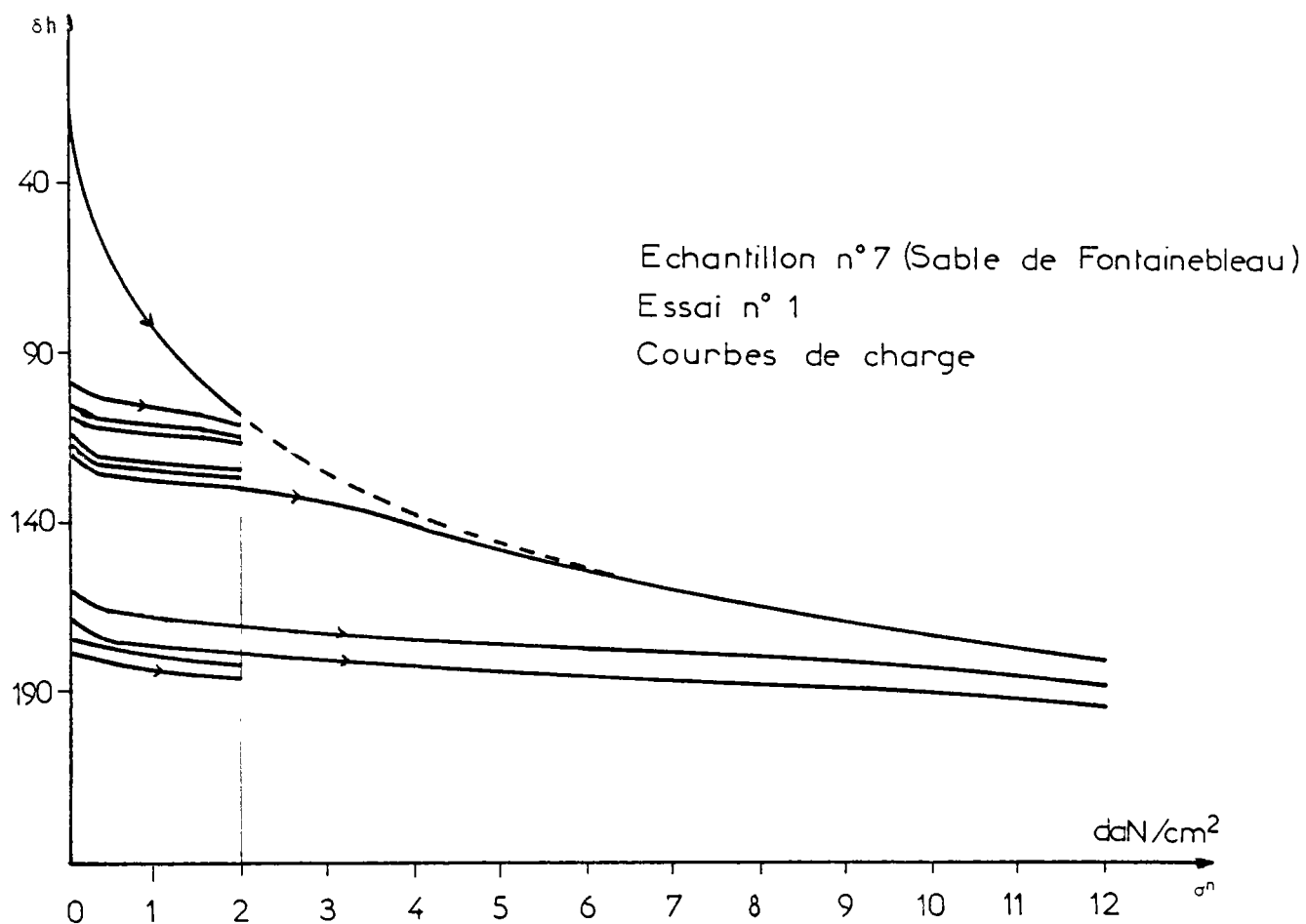


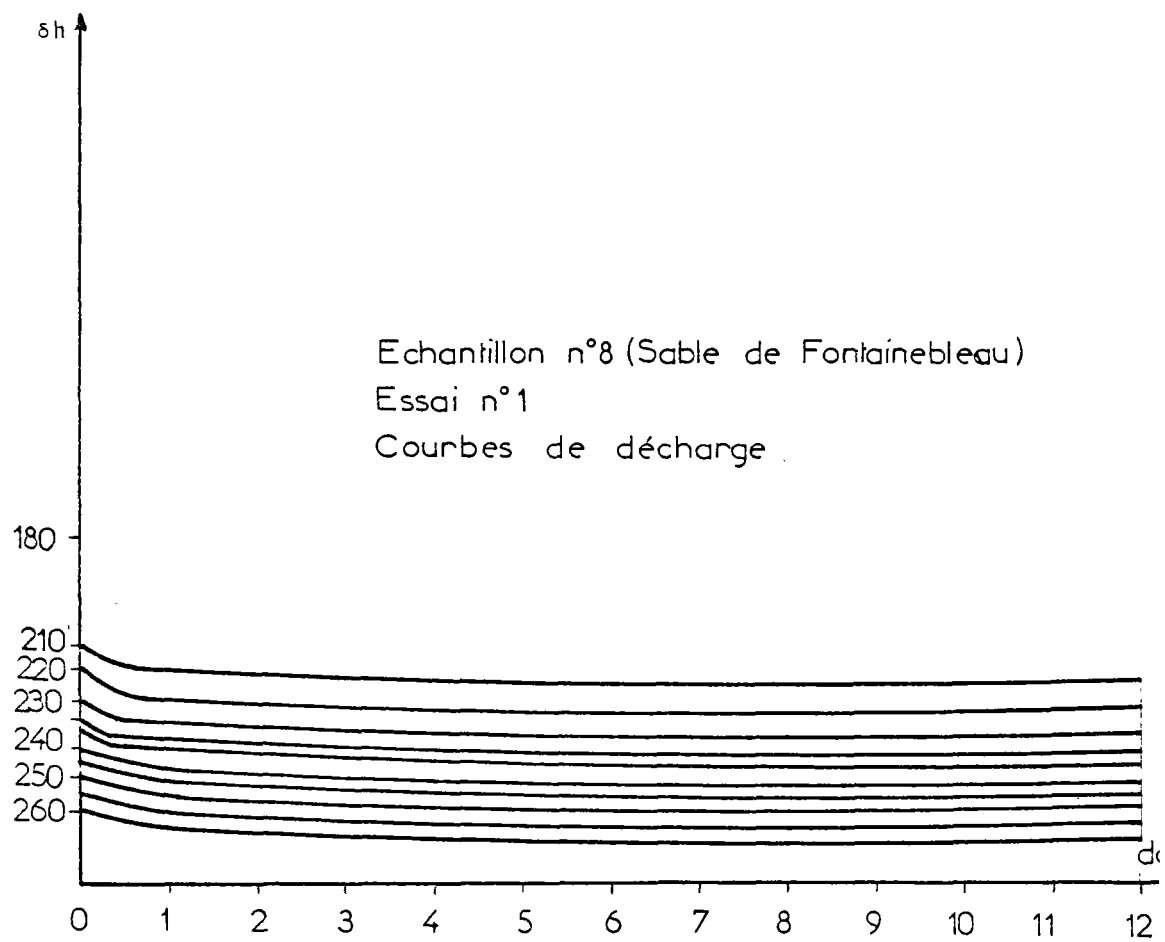
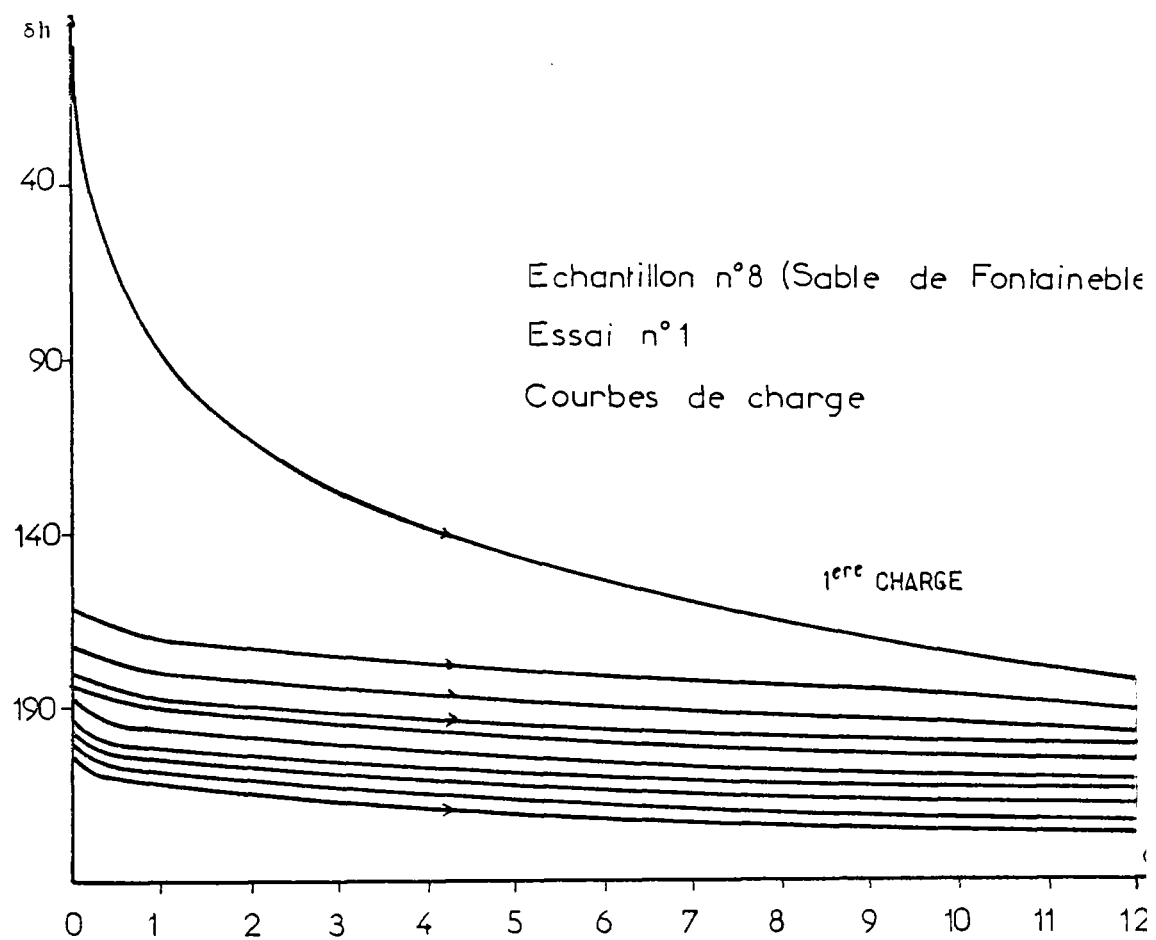










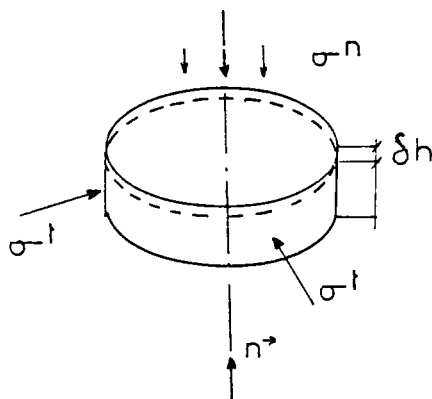


3.23 - INTERPRETATION DES ESSAIS

Des différentes mesures, nous essayerons de dégager les caractéristiques communes du comportement mécanique des sables. En effet quelle que soit la nature du sable utilisé (Havre, Loire, Fontainebleau), il est clair que les évolutions des tassements sous charges présentent des analogies, il n'en est pas de même des valeurs quantitatives des tassements.

3.231 - CHAMPS DE CONTRAINTES ET DE DEFORMATIONS DANS LA CELLULE OEDOMETRIQUE

L'échantillon de sol étant considéré comme un milieu continu classique, dans la base canonique de l'échantillon, le tenseur Σ , du fait de la symétrie de révolution, est de la forme :



$$\Sigma = \begin{vmatrix} \sigma^n & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^t & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^t \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} \sigma^n & \text{contrainte verticale connue} \\ \sigma^t & \text{contrainte radiale inconnue.} \end{cases}$$

De même pour le tenseur des déformations ϵ

$$\epsilon = \begin{vmatrix} \epsilon^n & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon^t & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon^t \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} \epsilon^n & \text{est la déformation verticale, déduite de la lecture d'un comparateur,} \\ & \text{donc connue} \\ \epsilon^t & \text{la déformation radiale nulle (impossibilité de déplacement latérale).} \end{cases}$$

ou encore, en faisant intervenir la partie sphérique et déviatorique des tenseurs :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{La pression moyenne effective} & : p_s = \frac{1}{3} (\sigma^n + 2 \sigma^t) \\ \text{La contrainte déviatorique} & : q = \sigma^n - \sigma^t \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{La dilatation volumique} & : \frac{\delta w}{w} = \epsilon^n + \underbrace{\frac{2\epsilon^t}{0}} = \epsilon^n \\ \text{La paramètre de distorsion} & : \epsilon' = \frac{2}{3} (\epsilon^n - \epsilon^t) = \frac{2}{3} \epsilon^n . \end{array} \right.$$

Le travail élémentaire des efforts extérieurs par unité de volume :

$$P_{\text{ext}} \delta t = - p_s \frac{\delta w}{w} + q \epsilon' = \sigma^n \epsilon^n$$

3.232 - COURBES DE 1er CHARGEMENT

Les essais de 1er chargement sur un même échantillon remanié (cf. échantillons 5 et 6) n'ont pas permis de mettre en évidence une courbe effets-déformations unique. En effet, les tassements à 12 da N/cm² varient avec une amplitude de 50 % ; de plus il n'a pas été possible de trouver un rapport correct entre les différents accroissements de tassement $\delta \epsilon^n / \delta \sigma^n$ pour une contrainte donnée. Ces faits confirment, s'il en était besoin, l'influence essentielle des paramètres cachés (configuration géométrique et dynamique initiale dans le milieu).

a - Décroissance des courbes

Ce qui toutefois semble sûr est que la décroissance des fonctions $(\epsilon^n \rightarrow \sigma^n)$ est régulière. Sur aucune courbe, nous n'avons remarqué de points d'inflexion. La proximité des points de mesure permet d'affirmer ce point avec d'autant plus de certitude.

b - Déformations volumiques sous contraintes élevées

Sous l'effet combiné des déformations élastiques des grains, des déplacements intergranulaires et de l'écrasement des grains, l'indice des vides tend

asymptotiquement vers 0 . C'est évidemment ce que l'on constate expérimentalement sur les courbes au voisinage de 12 da N/cm² . Cependant, ce phénomène est probablement accéléré par une configuration initiale appropriée.

c - Déformations volumiques sous contraintes faibles

Lorsque σ^n est au voisinage de 0 , c'est-à-dire lorsque l'un passe de 0 à 0.05 da N/cm² , on enregistre un tassement relatif important, ce qui laisse supposer que $\partial \epsilon^n / \partial \sigma^n \rightarrow -\infty$ (lorsque $\sigma^n \rightarrow 0$) . On constate ce point également sur les courbes de décharge et de recharge.

3.233 - COURBES DE DECHARGE

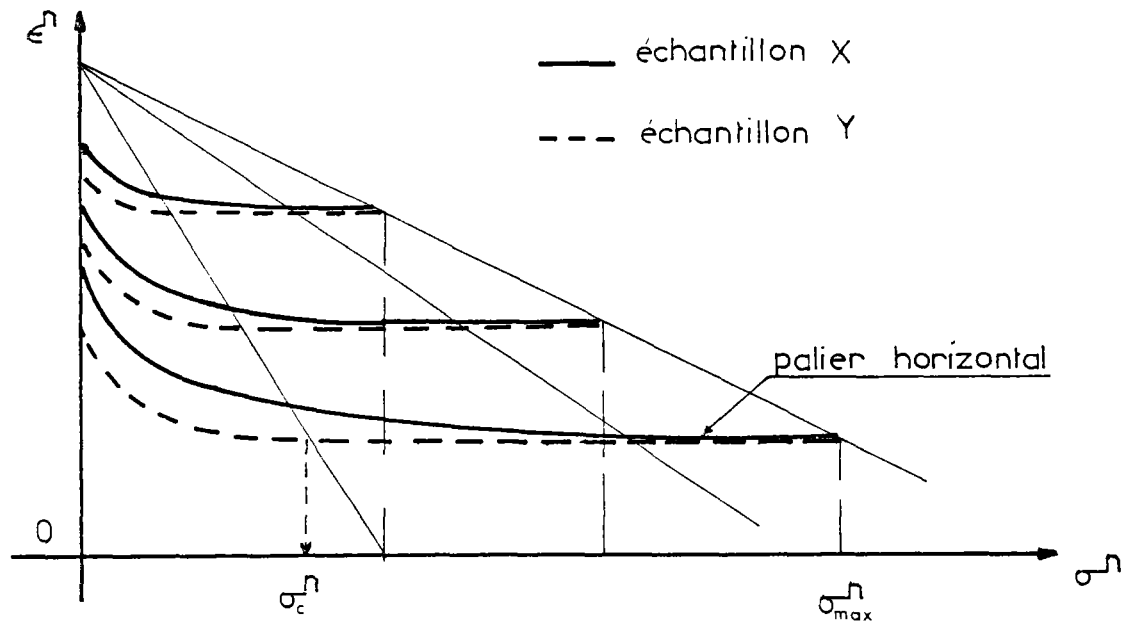
Les courbes de décharge ont toutes un aspect semblable, à savoir :

- un palier quasi-horizontale. (Plus ou moins important selon la nature du sable) $\sigma_c^n / \sigma_{max}^n \sim cste$

{	10 % de la contrainte maximale σ_{max}^n , pour un sable du Havre	
	50 %	de Fontainebleau
	80 %	de Loire.

- Une courbe de raccordement, pour laquelle l'accroissement de déformation - $\delta \epsilon^n / \delta \sigma^n$ passe de la valeur 0 à une valeur infinie, lorsque $\sigma^n \rightarrow 0$.

On peut penser que le palier horizontal ne l'est pas tout à fait (imprécision des résultats de mesure) et que l'accroissement - $\partial \epsilon^n / \partial \sigma^n$ est progressif. Ce qui semble plus remarquable, c'est l'homothétie des courbes de décharge pour un même échantillon ; en effet, quelle que soit la valeur de la contrainte verticale σ_{max}^n , à partir de laquelle se produit la décharge, les importances relatives des paliers horizontaux et des restitutions en déformations sont les mêmes. Ces résultats sont consignés sur le schéma ci-après.

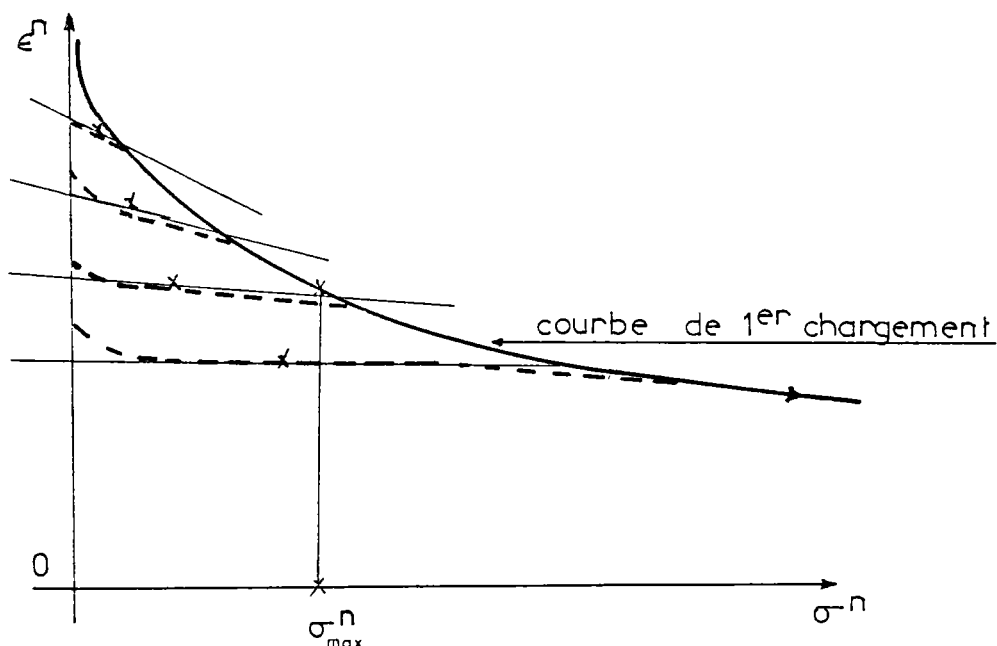


3.234 - COURBES DE RECHARGE

Nous avons vu que, pour σ^n voisin de 0, le taux de dilatation volumique (négatif) était très grand et que, par conséquent, pour une décharge totale, la hauteur de l'échantillon était indéterminée. C'est d'ailleurs ce que l'on constate dans le cas de cycles consécutifs, où un chevauchement des courbes de recharge peut se produire lorsque la décharge est complète).

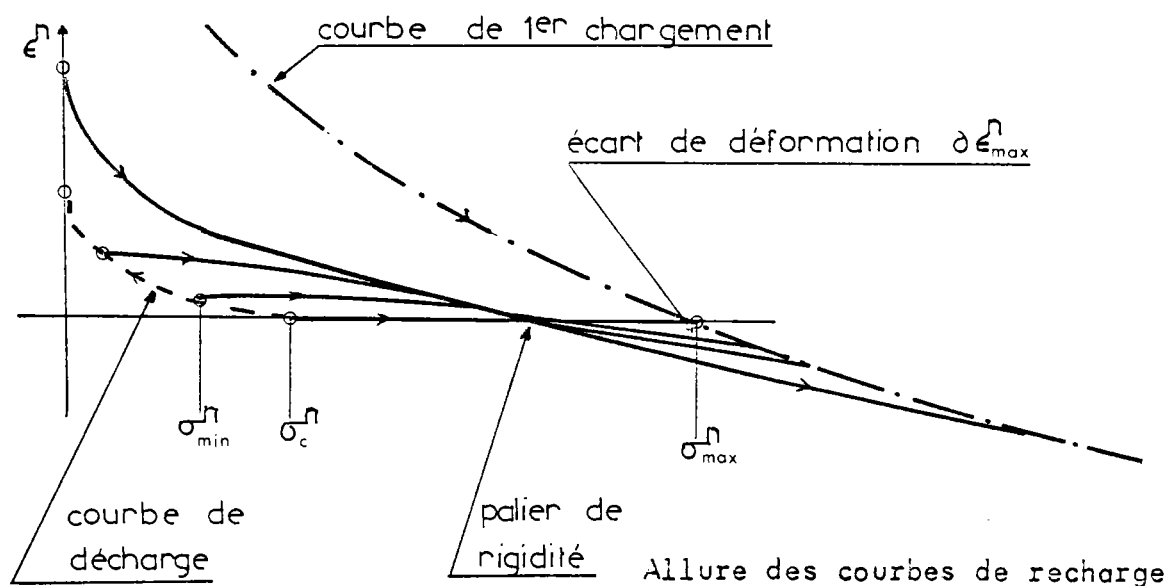
a - Raccordement à la courbe de 1er chargement

Dans les essais sur les échantillons 1,4,6,7,8, les courbes de 1er chargement constituent des courbes asymptotes des courbes de recharge. La tangente au 1er point d'inflexion est d'autant plus inclinée que la contrainte σ_{max}^n est faible.



b - Rechargement après décharge partielle

Lorsque la décharge est totale, la courbe de recharge rejoint asymptotiquement la courbe de 1^{er} chargement, si bien qu'il n'est plus possible de se trouver dans l'état de déformation correspondant à la continuité à partir de laquelle s'est effectuée la décharge. Cependant l'écart des déformations semble diminuer lorsque la décharge est partielle, au point que si la recharge s'effectue à une contrainte σ_{min}^n située sur le palier horizontal, l'écart reste négligeable. Ceci a été mis en évidence sur les essais 6.3 . Le palier horizontal semble donc constituer un seuil de rigidité relative.



3.235 - CYCLES DE CHARGE ET DECHARGE

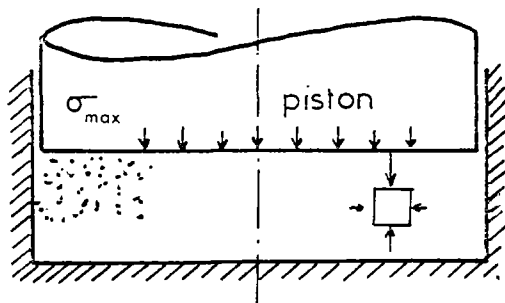
Les cycles consécutifs conservent les propriétés définies pour les courbes de décharge et les courbes de recharge. On observe, ce qui a été signalé auparavant, un chevauchement possible des courbes de recharge lorsque la décharge est partielle (mais dépasse toutefois le palier horizontal), il y a une augmentation de l'écart de déformation $\partial \epsilon_{\max}^n$ au cours des cycles. Cette augmentation ne semble pas régulière. Trois cas sont donc possibles :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma_c^n \leq \sigma_{\min}^n \leq \sigma_{\max}^n & : \partial \epsilon_{\max}^n \sim 0 \\ 0 \ll \sigma_{\min}^n \leq \sigma_c^n & : \partial \epsilon_{\max}^n > 0 . \\ \sigma_{\min}^n \sim 0 & : \partial \epsilon_{\max}^n \gg 0 . \end{array} \right. \text{ avec possibilité de chevauchement des} \\ \text{courbes de recharge.}$$

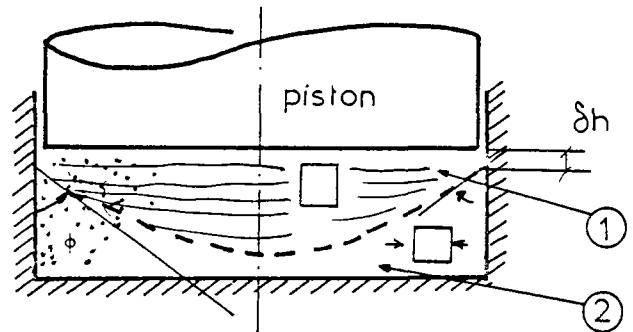
3.24 - CONCLUSION

Les essais de chargement cycliques pratiqués, ont permis de préciser l'allure des courbes "contraintes-déformations" dans le cas simple du chargement oedométrique, sur des sables secs. Une fois de plus, même dans ce cas, il a été possible de mettre en évidence l'influence de variables cachées dans l'apparition des phénomènes irréversibles, les contraintes et les déformations ne constituent que la partie observable des actions microscopiques entre grains.

Notons que malgré tout l'utilisation de l'oedomètre dans l'expérimentation sur des sables est mal adaptée au matériau, du fait du frottement latéral sur les parois et de la création d'une voûte antistable au décharge. On devrait tenir compte de ce phénomène, ce qui n'a pas été fait ici.



sous contrainte maximale
avant décharge



sous contrainte minimale
après décharge totale

- (1) lentille décomprimée
- (2) voute autostable
indécompressible

Enfin, les hautes pressions exercées à l'intérieur de la cellule ont provoqué, dans le cas du sable de Fontainebleau, le début de création d'agglomérats gréseux friables (cf. § Adhérence 1 121 a).

CHAPITRE 4

CONCLUSION GENERALE - BIBLIOGRAPHIE

CONCLUSION GENERALE

Pour expliquer le comportement macroscopique des sols, les recherches récentes nécessitent l'introduction de paramètres issus de l'histoire des trajets de contraintes ou de déformations, mais dont la signification microscopique observable ne peut être donnée.

L'objet de cette thèse a été de proposer de nouvelles variables tensorielles basées sur les paramètres mécaniques fondamentaux d'un système de corps rigides.

C'est ainsi que nous avons été amenés à définir entre autres, la configuration géométrique canonique d'un milieu granulaire par un tenseur dont les invariants caractérisent la densité volumique et l'état d'anisotropie d'orientation des grains.

Mais ce travail constitue surtout une approche de la mécanique des sols pour le biais de la mécanique statistique. Cette approche que nous pourrions qualifier de "cinétique" est à la fois plus ancienne dans son inspiration puisqu'elle est fondée sur les développements de la mécanique statistique des gaz, et plus porteuse d'espoir dans ses prolongements ultérieurs, car elle permet nous semble-t-il d'éclairer les recherches sur le comportement macroscopique des milieux granulaires ; tant il est vrai que les progrès de l'une et de l'autre sont liés.

Pour arriver à ce travail de synthèse, nous avons été amenés à préciser le comportement mécanique d'un grain vis à vis de ses voisins ; ceci nous a conduit en particulier à introduire les notions de polyèdres de contact (inscrit et circonscrit d'un grain), et à proposer un critère de liaison inter-granulaire qui intègre les phénomènes d'adhérence et de concassage.

A l'appui de nos spéculations théoriques, nous avons exploité un procédé de visualisation quasi-statique de la cinématique d'un milieu granulaire artificiel. Un tel procédé a permis en effet, de se rendre compte des phénomènes d'orientation des grains, dans un milieu soumis à des chargements divers. Dans l'avenir, d'utiles améliorations seront possibles par un couplage de visualisation en photoélasticité.

Ce qui reste à faire pour comprendre le comportement d'un sol est, si on veut bien l'admettre, à la hauteur d'une mécanique qui puisse rendre compte des phénomènes microscopiques tels que ceux que nous avons étudiés ici (orientation des grains, disposition et orientation des contacts, auto-serrage). Nous osons espérer que, dans l'avenir, le théorème de Boltzmann sera susceptible de lever les nombreuses incertitudes qui pèsent sur les possibilités d'état d'un milieu granulaire.

BIBLIOGRAPHIE

PETROGRAPHIE ET TRIBOLOGIE

- ALEXANDROW A.P.
Konvexe Polyeder. Akademic Verlag - Berlin 1958).
- BILLAM J.
Some aspects of the Behaviour of granular materials at high pressures.
Stress - Strain - Roscoe memorial Symposium.
- BUSEMANN H.
Convex Surfaces. Interscience Publishers Inc. New York.
- CHIVERS.T.C., MITCHELL L.A. , ROWE M.D.
The variation of real contact area between surfaces with contact pressure and material hardness. Wear 28 1971.
- DAVIES R.
Friction and Wear. Proceedings of the Symposium on Friction and wear - Detroit 1967.
- DUPEYRAT J.M.
Methode de calcul des massifs discontinus à comportement non linéaire.
Thèse Paris VI - 1975.
- GAERTNER R.
Résolution de problèmes de contact élastique avec frottement.
Journal de mécanique appliquée vol. 1, n°3 1977.
- HISAKADO T.
Effect of surface roughness on contact between solid surfaces.
Wear 28, 1974.
- KRAGELSKII I.V.
Friction and Wear. Butterworths London 1965.
- MANDELBROT B.
Les Objets Fractals, forme, hasard et dimension. Flammarion 1975.
- MITCHELL L.A. OSGOOD C.
A. Theory of friction and Wear based on a new characterisation of asperity interactions. Wear Vol 40 n°2 nov. 1976.
- PULLEN J., WILLIAMSON J.B.P.
On the plastic contact of rough surfaces.
Proc. R. Soc. Lond. A 327 1972.
- RABINOWICZ E.
Friction and Wear of Materials. John Wiley and Sons Inc. 1965.

ROCHET L.

Propriétés mécanique des discontinuités des massifs rocheux.
La mécanique des roches appliquée aux ouvrages de Génie Civil -
Séminaire de formation continue ENPC 1976.

SHUNMUGAM M.S., RADHAKRISHNAN V.

An analysis of the reference lines of the surface profile and its true replica. Wear Vol. 40 n°2 1976.

WANHEIM T. , BAY N., PETERSEN A.S.

A theoretically determined model for friction in metal working process.
Wear 28 1974.

WILLIAMSON J.B.P. , HUNT R.T.

Asperity persistance and the real area of contact between rough surfaces. Proc. R. Soc. Lond. A 327 - 1972.

MECANIQUE STATISTIQUE ET PHENOMENES MICROSCOPIQUES

BACH G.

Size distribution of particles from the size distribution of their sections.
Proceedings of 2 th international congress of stereology - Chicago 1967.

CUNDALL P.A. , STRACK O.D.L.

A discrete numerical model for granular assemblies.
Geotechnique 29, n°1 p. 47 1979.

DANTU P.

Contribution à l'étude mécanique et géotechnique des milieux pulvérulent.
IVème Congrès international de mécanique des sols - Londres 1957.

DANTU P.

Etude mécanique d'un milieu pulvérulent formé de sphères égales, de compacité maxima.
Vème Congrès international de mécanique des sols - juill. 1961.

DANTU P.

Etude expérimentale d'un milieu pulvérulent compris entre deux plans verticaux et parallèles.
Annales des Ponts et Chaussées n°4 - 1967.

ENDLEY S.N., PEYROT A.H.

Load Distribution in granular media.
J. Soil Mechanics and foundation Div. ASCE, EM1 12719 Febr. 1977.

ERINGEN C.

Theory of mixtures for micromorphic materials.
Int. J. Engng Sci. Vol 9 p. 1019 - 1971 et Vol 10 p. 437 - 1972.

GIBBS J.W.

Principes élémentaires de la mécanique statistique.
Herman Paris 1926.

- GUDEHUS G.
Gedanken zur statistischen Bodermechanik.
Der Bauingenieur - 43 Heft 9 - 1968.
- HILLIARD J.E.
Détermination of structural anisotropy and analysis of the number of particles per unit volume.
Proceedings of 2 th. international Congress of Stereology Chicago 1967.
- HORNE M.R.
The behaviour of an assembly of rotund, rigid, cohesionless particles.
Proc. R. Soc. Lond. A 286 - part.I et II - 1965.
- HORNE M.R.
The behaviour of an assembly of rotund, rigid, cohesionless particles.
Proc. R. Soc. Lond. A 310 - part. III - 1969.
- KAUFMANN A.
Méthodes et modèles de la recherche opérationnelle.
Dunod 1972.
- LITWINISZYN J.
On the process of the mosaic structure in some loose media.
Bulletin de d'Academie Polonaise des Sciences Vol VIII n°5 - 1960.
- MATSUOKA H.
A microscopic study on shear mechanism of granular materials.
Soil and Foundations - Jap. Soc. Vol 14, n° 1 - 1974.
- MATSUOKA H.
Dilatancy characteristics of soil.
Soils end Foundations. Jap. Soc. Vol 14 n° 3 - 1974.
- MOGAMI T.
Selected Papers - Depart. of Civil Eng. University of Tokyo 1974.
- NEWLAND P.L. ALLELY B.H.
Volume changes in drained triaxial tests on granular materials.
Geotechnique Vol VII p. 17 - 1957.
- ODA M.
Initial fabrics and their relations to mechanical properties of granular material.
Soils and Foundations.Jap. Soc. Vol 12 n° 1 - 1972
- ODA M.
The mechanism of fabric changes during compressional deformation of sand.
Soils and Foundations. Jap. Soc. Vol. 12 n° 2 - 1972
- ODA M.
A mechanical and statistical model of granular material.
Soils and Foundations. Jap. Soc. Vol.14 n° 1 - 1974.
- ODA M., KONISHI J.
Microscopic deformation mechanism of granular material in simple shear.
Soils and Foundations. Jap. Soc. Vol. 14 n° 4 1974.

- ODA M., KONISHI J.
Rotation of principal stresses in granular material during simple shear.
 Soils and Foundations. Jap. Soc. Vol 14 n° 4 - 1974.
- PRUSKA L.
Basic equations of pressure at rest of granular materials.
 5ème Congres europeen de mecanique des sols Madrid 1972.
- ROCARD Y.
Théorie Cinétique et mécanique statistique.
 Thermodynamique - Masson et C¹^e 1967.
- ROWE P.W.
The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact.
 Proc. R. Soc. Lond. A 1339 - Vol 296 - 1962.
- VOLKOV S.D..
Microscopically inhomogeneous medium.
 Statistical Strength Theory - Gordon and Breach N. 9. - 1962.
- WEBER
Etude théorique et expérimentale de la similitude dans les essais sur modèles du comportement mécanique des milieux granulaires.
 Annales des Ponts et Chaussées, n° 1 - 1968.

COMPORTEMENT MACROSCOPIQUE DES MILIEUX GRANULAIRES

- AUBRY D.
Quelques lois de comportement élastoplastiques pour les sols.
 Cycle de Formation continue - Ecole Centrale - mars 1977.
- BARDEN L., ISMAIL H., TONG P.
Plane strain deformation of granular material at low and high pressure.
 Geotechnique 19 n° 4 - 1969.
- CASSAN M.
Les Essais in Situ en Mécanique des Sols Tome 1. Réalisation et Interprétation.
 Eyrolles - Paris 1978.
- BIAREZ J.
Contribution à l'étude des propriétés mécaniques des sols et des matériaux pulvérulents.
 Thèse de Doctorat ès Sciences - Grenoble 1961.
- DI MAGGIO F.L., SANDLER I.S.
Material model for granular soils.
 Proceedings of ASCE - EM3 - 8212 - juin 1971.
- DRUCKER D.C., GIBSON R.E., HENKEL D.J.
Soil mechanics and work-hardening theories of Plasticity.
 Transactions ASCE. Vol 122 p. 338 1957.

GERMAIN P.

Mécanique des milieux continus.
Masson - Paris 1973.

LUONG MINH PHONG.

Etude geotechnique des Sols.
Cours de D.E.A. de Mécanique du Sol Université Paris VI.

MITCHELL J.K.

Fundamentals of Soil behaviour.
John Wiley and Sons Inc. 1976.

OROTO N.

A new parameter to measure degree of shear deformation of granular material in triaxial compression tests.
Soils and Foundations - Jap. Soc. Vol 16 n° 4 - 1976.

REVOST J.

Soil Stress- Strain - Strength models based on plasticity Theory.
Thèse Ph. D. Stanford University 1974.

ISCOE K.H., SCHOFIELD A.N., WROTH C.P..

On the Yielding of Soils.
Geotechnique Vol VIII n° 1 - 1958.

ISCOE K.H., POOROOSHASB H.B.

A theoretical and experimental Study of strains in triaxial compression tests on normally consolidated clay.
Geotechnique - Vol XIII - n° 1 - 1963

ISCOE K.H., BURLAND J.B.

On the generalized stress - Strain behaviour of wet clay.
Engineering Plasticity - Cambridge Press - 1968.

LENCON J.

Calcul à la rupture et plasticité.
Cours de l'Ecole nationale des Ponts et Chaussées - Paris.

LENCON J.

Théorie de la plasticité pour les applications à la mécanique des sols.
Eyrolles - Paris 1974.

SCHOFIELD A., WROTH P.

Critical State Soil mechanics.
Mac Graw - Hill Lrd 1960.

SAITZ P.

Comportement élastoplastique des milieux pulvérulents.
Séminaire du Laboratoire de mécanique des Solides de l'Ecole Polytechnique - Ediscience Mc Graw Hill 1977.

VALLAPIAN S.

"Application of Finite Element method to Soils deformation"
Proceedings - Symposium at th University of New South Wales Australia 1975.