



**HAL**  
open science

# Modélisation de discontinuités de déplacement dans les solides élastiques et application à la microfissuration

Yin Hai-Ping

► **To cite this version:**

Yin Hai-Ping. Modélisation de discontinuités de déplacement dans les solides élastiques et application à la microfissuration. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1992. Français. NNT: . tel-00529382

**HAL Id: tel-00529382**

**<https://pastel.hal.science/tel-00529382>**

Submitted on 25 Oct 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

79533

N° 16258  
(5)

THESE

présentée à

L'ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES

en vue de l'obtention du diplôme de

DOCTEUR DE L'E.N.P.C

par

Hai-Ping YIN



MODELISATION DE DISCONTINUITES DE DEPLACEMENT  
DANS LES SOLIDES ELASTIQUES  
ET APPLICATION A LA MICROFISSURATION

soutenue le 7 Fevrier 1992

jury :	H.D.BUI	Président
	J.P.HENRY	Rapporteur
	A.COMBESCURE	Rapporteur
	F.LENE	Examinateur
	J.MAZARS	Examinateur
	A.EHRLACHER	Examinateur



18



## REMERCIEMENTS

Cette thèse que j'ai préparée à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées au Centre d'Enseignement et de Recherche en Analyse des Matériaux (C.E.R.A.M.) n'aurait peut-être jamais vu le jour sans l'effort que font les femmes et les hommes pour le développement de la recherche dans cette école. Je veux ici leur faire part de ma gratitude. Je dois en particulier remercier toutes les personnes du C.E.R.A.M. qui m'ont aidé dans mon travail.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Monsieur Huy Duong BUI qui a accepté de présider mon jury de thèse en dépit de ses nombreuses occupations qui lui valent sa notoriété. Je voudrais remercier Monsieur Jean-Pierre HENRY et Monsieur Alain COMBESCURE qui ont bien voulu rapporter sur cette thèse. Je voudrais aussi remercier Mademoiselle Françoise LENE et Monsieur Jacky MAZARS d'avoir bien voulu faire partie de mon jury.

En tant que directeur de thèse, Alain EHRLACHER fut tout au long de ce travail mon principal conseiller et interlocuteur. Malgré sa charge considérable de travail, il a toujours suivi de près mon travail et m'a donné des conseils constructifs. J'ai pu, au cours de ces années passées au C.E.R.A.M., apprécier ses qualités humaines exceptionnelles, sa grande modestie et son enthousiasme pour la recherche.

Je souhaite remercier Djazira AIT-HADI qui a pris en charge une partie de la présentation matérielle de ce texte. Je remercie également les autres personnes qui m'ont aidé d'une manière ou d'une autre. J'aimerais adresser mes sincères remerciements à Patrick DANGLA pour son aide et sa gentillesse.



INTRODUCTION

Première partie

EVOLUTION DE DISCONTINUITES DE DEPLACEMENT  
DANS LES SOLIDES ELASTIQUES

Chapitre 1

ENERGIE POTENTIELLE D'UN MILIEU ELASTIQUE  
EN PRESENCE DE DISCONTINUITES DE DEPLACEMENT

Chapitre 2

ENERGIE DISSIPÉE LORS D'UNE EVOLUTION DES DISCONTINUITES

Chapitre 3

ECRITURE DU PROBLEME DE L'EVOLUTION

Deuxième partie

METHODE NUMERIQUE DE RESOLUTION DU PROBLEME D'EVOLUTION  
DE DISCONTINUITES DE DEPLACEMENT DANS UN DOMAINE  
BIDIMENSIONNEL ELASTIQUE FINI OU INFINI

Chapitre 1

METHODE DES DISCONTINUITES DE DEPLACEMENT

Chapitre 2

PROBLEME DE DISCONTINUITES DE DEPLACEMENT  
DANS UN MILIEU ELASTIQUE INFINI BIDIMENSIONNEL

Chapitre 3

MISE EN OEUVRE NUMERIQUE

Chapitre 4

FONCTIONS DE FORME AFFINES

Chapitre 5

TESTS ET VALIDATION

Troisième partie

APPLICATIONS AUX PROBLEMES DE MICROFISSURATION

Chapitre 1

MODULE EFFECTIF D'UN SOLIDE ELASTIQUE BIDIMENSIONNEL MICROFISSURE

Chapitre 2

SIMULATION NUMERIQUE DE L'ENDOMMAGEMENT ET DE LA RUPTURE  
DES MATERIAUX PAR MICROFISSURATION EN FATIGUE

CONCLUSION

ANNEXE

BIBLIOGRAPHIE

NOTATION

$t$ :	temps
$\Omega$ :	ouvert borné de $\mathbb{R}^2$
$\partial\Omega_T$ :	partie de la frontière de $\Omega$ où une contrainte est imposée
$\partial\Omega_U$ :	partie de la frontière de $\Omega$ où un déplacement est imposé
$\underline{T}_d$ :	contrainte imposée sur $\partial\Omega_T$
$\underline{U}_d$ :	déplacement imposé sur $\partial\Omega_U$
$\underline{u}$ ; $\underline{U}$ :	champ vecteur de déplacement
$\underline{l}$ :	ligne de discontinuités de déplacement
$\underline{n}$ :	vecteur normal unitaire
$\underline{t}$ :	vecteur tangentiel unitaire
$\underline{g}$ :	vecteur discontinuité de déplacement
$[\underline{g}(\underline{s})]_t$ :	Histoire de la Discontinuité de Déplacement au point $\underline{s}$ jusqu'à l'instant $t$
$\underline{g}_t$ :	Distribution de Discontinuités de Déplacement à l'instant $t$
$[\underline{g}]_{\underline{l}, t}$ :	Histoire de Distributions de Discontinuités de Déplacement jusqu'à l'instant $t$
$\underline{\sigma}$ :	champ tenseur de contrainte
$\underline{\epsilon}$ :	champ tenseur de déformation
$\underline{L}$ :	tenseur de rigidité élastique
$E$ :	module d'Young
$\nu$ :	coefficient de Poisson
$\mathcal{P}$ ; $P$ :	énergie potentielle
$\underline{a}$ :	point de relaxation d'énergie
$G$ :	taux de relaxation d'énergie
$K$ :	facteur d'intensité de contrainte
$D$ :	énergie dissipée
$d$ :	densité surfacique d'énergie dissipée
$\underline{R}$ :	"champ résultante des efforts"
$z=x+iy$ :	variable complexe du plan $(x,y)$
$\varphi(z), \psi(z)$ :	fonctions analytiques de la variable $z$
$\underline{a}$ :	noeud d'interpolation
$N$ :	fonction de forme
$K$ :	matrice de rigidité
$F$ :	second membre
$a$ ; $c$ :	longueur d'une fissure
$\alpha$ :	densité de fissures
$E^e$ :	module d'Young effectif
$\nu^e$ :	coefficient de Poisson effectif
$m$ :	espérance
$\sigma$ :	écart type
$N$ :	nombre de cycles de chargement



## Introduction

Les problèmes de fissures dans les solides élastiques, les problèmes d'interfaces entre les différentes couches d'un matériau composite ou celles d'un roche, les problèmes de contacts présentent des caractéristiques similaires: grandes déformations et dissipation d'énergie sont localisées dans des zones de faible épaisseur. Il est alors possible de les décrire par un modèle de surfaces de discontinuités de déplacement.

Les travaux les plus anciens sur le sujet sont ceux bien connus de GRIFFITH [GRIFFITH, 1920] corrigés par lui même en 1924 [GRIFFITH, 1924]. Il a abordé le problème de la fissuration des solides d'un point de vue énergétique et a introduit la notion de taux de restitution (ou relaxation) d'énergie. IRWIN [IRWIN, 1948; 1958] a par suite introduit la notion de facteur d'intensité de contrainte. Ce concept présente l'avantage d'être linéairement relié aux paramètres de chargement, ce qui en fait un outil très utilisé. Ces deux notions, l'une globale en énergie l'autre locale en contrainte, sont reliées par ce qu'il est convenu d'appeler la formule d'Irwin. La notion de facteur d'intensité de contrainte a été critiquée car elle suppose des contraintes et des déformations non bornées au fond de la fissure. Pour lever cette difficulté, BARENBLATT [BARENBLATT, 1962] introduit l'hypothèse des forces de cohésion dans le voisinage de l'extrémité de la fissure. Ces forces de cohésion jouent le rôle d'une certaine "loi de comportement" de la discontinuité. Dans un premier temps les travaux des chercheurs se sont concentrés sur la détermination des facteurs d'intensité de contrainte ou du taux de relaxation d'énergie dans le cas de solides bidimensionnels élastiques macrofissurés. Nous ne citons que les travaux dûs à J.D. ESHELBY en 1968 [ESHELBY, 1968] et surtout "l'intégrale de J.R. RICE" [RICE, 1968]. Depuis de nombreux progrès dans les techniques de calculs ont été faits notamment avec la  $\theta$ -méthodes et les intégrales de couronne de DESDUYNDER [DESTUYNDER, 1982]. Ces méthodes semblent s'être révélées plus efficaces que celles utilisant des éléments spéciaux comme ceux développés par TRACEY [TRACEY, 1971] ou BARSOUM [BARSOUM, 1976]. B. FEDELICH [FEDELICH, 1990] a proposé une maille singulière conçue à l'aide d'une transformation conforme d'un disque circulaire fissuré entourant l'extrémité de fissure. L'avantage de cette maille est de permettre une progression continue de la fissure sans modification géométrique du maillage. Ces réflexions sur les méthodes de calcul

des facteurs d'intensité de contrainte se sont développées en liaison avec l'étude des critères de progression et de la stabilité de cette progression pour une fissure ou un système multifissuré. On peut citer par exemple les travaux de S. NEMAT-NASSER [NEMAT-NASSER, 1978] sur la stabilité d'un ensemble de fissures en interaction, ceux de J.W. HUTCHINSON et P.C. PARIS [HUTCHINSON, 1979] ou ceux de P.C. PARIS et al. [PARIS, 1979]. L'Ecole Française de Mécanique de la Rupture a apporté une importante contribution à ces réflexions, notamment avec les travaux de H.D. BUI [BUI, 1977, 1980] et de Q.S. NGUYEN [NGUYEN, 1980, 1986, 1990] qui s'appuient sur une étude énergétique d'une fissure en progression. Leurs travaux influencent fortement la première partie de cette thèse.

L'objectif principal de notre travail a été la construction d'un modèle micromécanique de solides multifissurés afin d'étudier par simulation l'influence de la distribution aléatoire des microfissures sur l'évolution de l'endommagement à une échelle macroscopique ainsi que l'éventualité d'une localisation de cet endommagement en chargement monotone ou en fatigue. L'étude des solides multifissurés est actuellement l'objet de nombreux travaux de recherches. Certains s'intéressent particulièrement à l'effet de l'interaction entre les microfissures au niveau du facteur d'intensité de contrainte [PIJAUDIER-CABOT, 1990] ou à l'influence sur une macrofissure de la présence des microfissures [CHUDNOVSKY, 1991] [LAURES, 1991] [SHUM, 1990]. D'autres centrent leur recherches sur la détermination des propriétés effectives des matériaux microfissurés soit en utilisant la méthode auto-cohérente [BUDIANSKY, 1976] [HORII, 1983][ABOUDI, 1987] soit en supposant que la distribution des fissures est périodique [ANDRIEUX, 1983]. Certains auteurs s'intéressent à la nature aléatoire des microfissures et à leur progression [ROSSI, 1988] [WU, 1991]. D'autres enfin modélisent la zone microfissurée à l'aide de variable d'endommagement continue [LEMAITRE, 1985] [MAZARS, 1984].

Dans la première partie, nous proposons une réflexion aussi générale que possible sur les évolutions des discontinuités de déplacement dans les solides élastiques en nous inspirant de la présentation de la Thermodynamique par I. MULLER [MULLER, 1985]. Cette étude adopte comme variables d'état globales pour le système les surfaces de discontinuités et les valeurs des discontinuités sur ces surfaces. Le premier chapitre de cette partie est consacré à l'écriture de l'énergie potentielle d'un milieu élastique en présence de discontinuités de déplacement. En particulier on s'intéresse à la variation au premier ordre de cette énergie

potentielle lors d'une variation du chargement et d'une évolution de la discontinuité. Cela permet d'introduire les "Forces Thermodynamiques" associées à ces discontinuités. Au chapitre deux nous étudierons la fonctionnelle d'énergie dissipée associée à l'évolution des discontinuités. Il est alors possible d'écrire (chapitre 3) sous forme très générale le problème d'évolution des discontinuités dans un solide élastique.

La deuxième partie est consacrée à la construction d'un outil numérique permettant de résoudre de manière approchée le problème d'évolution après discrétisation de la discontinuité dans le cas de solides bidimensionnels. Cet outil numérique s'appuie sur la solution exacte en élasticité plane du problème élastique avec des discontinuités quelconques données dans un plan infini. Cette solution est construite dans le chapitre 2. Le chapitre 1 montre que l'on peut toujours transformer un problème défini sur une géométrie bornée en un problème défini sur le plan infini entier, cela se fait en construisant un "problème extérieur" en considérant le complémentaire de la géométrie initiale dans le plan avec des conditions aux limites imposant la continuité du vecteur contrainte. Cette approche est donc reliée à la position d'un problème d'élasticité sous forme d'équations intégrales à l'aide de potentiels de double couches. Le chapitre 3 présente la démarche classique de la discrétisation du problème précédent permettant l'obtention de solutions approchées. Le problème approché admet alors un nombre fini de degrés de liberté. La solution d'un problème d'élasticité s'obtient par l'inversion d'un système linéaire donnant la valeur des discontinuités approchées aux noeuds des lignes de discontinuité. La matrice est pleine et elle est symétrique s'il n'y a pas de condition cinématique imposée sur le contour. La méthode est particulièrement intéressante et efficace quand les lignes de discontinuités sont approchées par des segments et les discontinuités prennent des valeurs affines sur ces segments (chapitre 4). En effet dans ce cas les coefficients de la matrice ont des expressions analytiques en fonction des positions des noeuds de discontinuité. Les champs mécaniques en chaque point sont alors obtenus par des expressions analytiques en fonction des positions des noeuds et des discontinuités en ces noeuds. Le chapitre 5 présente les tests de l'outil numérique. Il permet de se rendre compte que l'outil construit, outre son élégance, est très efficace pour le traitement des problèmes classiques de fissuration. Il permet en outre d'aborder de manière simple et naturelle beaucoup de problèmes considérés habituellement comme difficiles tels que:

- La détermination du trajet de progression de fissures

non nécessairement planes, la direction de progression étant le résultat du calcul;

- La prise en compte des contacts et du frottement lors des refermetures
- La modélisation de discontinuités cohésives telles des lignes de glissement plastique;
- La modélisation d'un grand nombre de fissures en interaction.

La troisième partie du mémoire revient sur l'objectif principal du travail, c'est-à-dire la construction d'un modèle micromécanique de solides multifissurés. Deux applications sont présentées. Dans le chapitre 1, nous traitons simplement un problème d'homogénéisation classique consistant en la détermination du tenseur de raideur d'un matériau microfissuré. Nous nous intéressons en particulier à l'influence de la taille du domaine et de la distribution de fissures sur le tenseur de raideur. Le chapitre 2 propose une simulation de l'évolution en fatigue de l'endommagement pour un matériau initialement microfissuré, chaque microfissure obéissant à une loi de PARIS. Nous associons ainsi une courbe de WOHLER qui modélise le comportement macroscopique à une loi de PARIS et à une distribution de microfissures au niveau microscopique.





## Première Partie

### EVOLUTION DE DISCONTINUITES DE DEPLACEMENT DANS LES SOLIDES ELASTIQUES

Chapitre 1 : Energie potentielle d'un milieu élastique en présence de discontinuités de déplacement.

Chapitre 2 : Energie dissipée lors d'une évolution des discontinuités.

Chapitre 3 : Ecriture du problème de l'évolution.

L'objectif de cette première partie est la formulation des problèmes d'évolution de discontinuités de déplacement dans les solides élastiques dans un cadre très général.

Nous commençons par étudier au chapitre 1 l'énergie potentielle d'un milieu élastique en présence de lignes de discontinuités. Nous étudions la variation au premier ordre de cette énergie potentielle pour une évolution quelconque. Le "comportement" du matériau vis-à-vis de la discontinuité de déplacement et l'énergie dissipée lors d'une évolution des discontinuités sont introduits au chapitre 2. Il est alors possible d'écrire dans le chapitre 3 sous une forme très générale les problèmes d'évolution des discontinuités dans les solides élastiques.

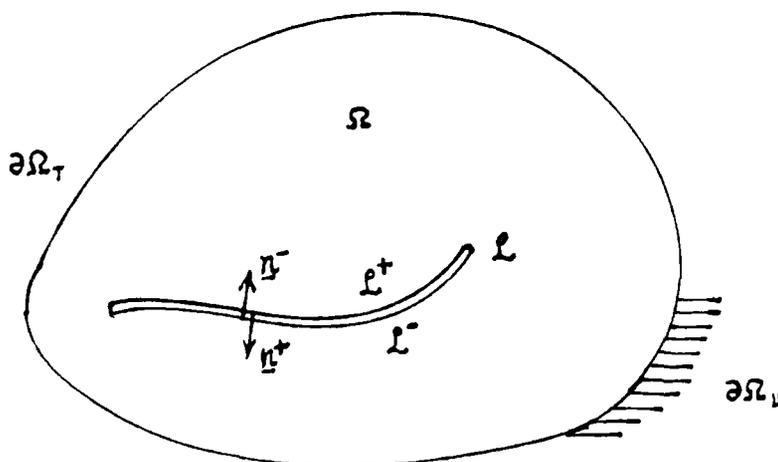
Toute cette première partie aurait pu être présentée dans un cadre tridimensionnel, mais par souci de simplicité de présentation et de cohérence avec les parties suivantes, nous avons préféré en faire une présentation pour les solides "bidimensionnels". Ainsi les surfaces de discontinuités sont des lignes et les lignes de singularités (voir plus loin) sont des points.



## CHAPITRE 1

ENERGIE POTENTIELLE D'UN MILIEU ELASTIQUE  
EN PRESENCE D'UNE DISCONTINUTE DE DEPLACEMENTa) les discontinuités

A l'instant  $t$ , considérons un domaine  $\Omega$  élastique bi-dimensionnel connexe avec  $\Gamma_t$  une surface de discontinuités de déplacement orientée par sa normale  $\underline{n}$  (fig1). La surface  $\Gamma_t$  est un ensemble de points matériels croissant avec le temps (la discontinuité de déplacement pouvant par contre s'annuler), elle est constituée de la réunion d'un nombre fini de surfaces régulières. Lorsqu'aucune ambiguïté n'est possible sur l'instant considéré,  $\Gamma_t$  sera notée  $\Gamma$ .

fig1: Surface de discontinuités  $\Gamma$  dans un domaine élastique  $\Omega$ 

$\Gamma^+$  et  $\Gamma^-$  sont les deux faces de la surface  $\Gamma$ . La normale extérieure de  $\Gamma^-$  est  $\underline{n}^- = \underline{n}$  et celle de  $\Gamma^+$  est  $\underline{n}^+ = -\underline{n}$ .



Lorsque le domaine  $\Omega$  contient un nombre fini de surfaces de discontinuités de déplacement,  $\mathcal{L}$  est la famille de ces surfaces de discontinuités de déplacement.

Soit  $\underline{s}$  un point de  $\mathcal{L}_t$ , le vecteur discontinuité de déplacement en  $\underline{s}$  à l'instant  $t$  sera noté  $\underline{g}(\underline{s}, t)$ . Si aucune ambiguïté n'est possible sur l'instant, on notera simplement  $\underline{g}(\underline{s})$ .

Dans la suite nous aurons à considérer "l'Histoire de la Discontinuité jusqu'à l'instant  $t$ " en un point  $\underline{s}$  comme une variable dans un espace fonctionnel. Nous la noterons  $[\underline{g}(\underline{s})]_t$ . C'est une fonction à valeur vectorielle définie pour  $\tau \in ]-\infty, t]$  :

$$(1) \quad [\underline{g}(\underline{s})]_t(\tau) = \underline{g}(\underline{s}, \tau) \quad \forall \tau \in ]-\infty, t]$$

Nous aurons à considérer aussi à l'instant  $t$  la "Distribution des Discontinuités en  $\mathcal{L}_t$ " comme une variable fonctionnelle. Nous la noterons  $\underline{g}_t$ . C'est une fonction à valeur vectorielle définie sur  $\mathcal{L}_t$ .

$$(2) \quad \underline{g}_t(\underline{s}) = \underline{g}(\underline{s}, t) \quad \forall \underline{s} \in \mathcal{L}_t$$

Par abus de notation, nous noterons aussi  $\underline{g}_t$  le couple formé de la fonction et son support  $\mathcal{L}_t$ .

Lorsqu'aucune ambiguïté n'est possible sur l'instant,  $\underline{g}_t$  sera noté  $\underline{g}$ .

Nous aurons enfin à considérer "l'Histoire des Distributions des Discontinuités jusqu'à l'instant  $t$ " comme une variable fonctionnelle que nous noterons  $[\underline{g}]_{\mathcal{L}, t}$ .

C'est une fonction à valeur vectorielle définie sur  $(\underline{s}, \tau) \in \mathcal{L}_t \times ]-\infty, t]$  par :

$$(3) \quad [\underline{g}]_{\mathcal{L}, t}(\underline{s}, \tau) = \begin{cases} \underline{g}(\underline{s}, \tau) & \text{si } \underline{s} \in \mathcal{L}_\tau \\ 0 & \text{si } \underline{s} \notin \mathcal{L}_\tau \end{cases}$$

Rappelons que  $\Gamma_\tau$  est un ensemble croissant dans le temps.

Nous avons besoin dans la suite du gradient de la distribution  $\underline{g}(\underline{s})$  sur  $\Gamma_t$ . C'est, dans le cas tridimensionnel un champ d'applications linéaires de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$  définies en chaque point de  $\Gamma_t$  sur le plan tangent à  $\Gamma_t$ . Dans le cas bidimensionnel, le gradient est défini comme une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^2$  appliquant en chaque point  $\underline{s}$  de  $\Gamma_t$  l'espace à une dimension parallèle à  $\underline{t}(\underline{s})$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Nous confondrons alors le gradient et la dérivée curviligne et nous les noterons  $\underline{g}'(\underline{s}, t)$ .

Il est un peu lourd et surtout inutile pour la suite de préciser en détail les trois ensembles de fonctionnelles correspondants aux "Histoires", "Distributions" et "Histoires des Distributions des Discontinuités" dans  $\Omega$ . Cependant, il nous faut faire quelques considérations de "régularité" sur  $\underline{g}(\underline{s}, t)$  qui permettront de préciser ces ensembles.

Nous imposerons pour tout  $t$  que  $[\underline{g}]_{\Gamma_t}$  soit continue sur  $\Gamma_t \times ]\infty, t]$  et continûment différentiable par morceaux.

En particulier le gradient de  $\underline{g}(\underline{s}, \tau)$  par rapport à  $\underline{s}$  peut être discontinu ou singulier sur certaines lignes de la surfaces  $\Gamma_\tau$  (en certains points de  $\Gamma_\tau$  en bidimensionnel). Ces lignes singulières peuvent évoluer dans le temps. Nous verrons qu'il peut y avoir alors relaxation d'énergie.

En vue des applications ultérieures, il est parfois utile d'écrire  $\underline{g}(\underline{s}, t)$  sous la forme suivante.

$$(4) \quad \underline{g}(\underline{s}, t) = g^n(\underline{s}, t)\underline{n} + g^{t^g}(\underline{s}, t)\underline{t}$$

où  $\underline{n}$  est le vecteur normal à  $\Gamma$  et  $\underline{t}$  le vecteur tangent à  $\Gamma$  (sans ambiguïté en bidimensionnel,  $(\underline{t}, \underline{n})$  base orthogonale directe),  $g^n(\underline{s}, t)$  est la discontinuité "d'ouverture" ou normale,  $g^{t^g}(\underline{s}, t)$  est la discontinuité "de glissement" ou tangente.

Nous définirons de la même manière que précédemment les variables fonctionnelles:

- "Histoire des Discontinuités Normales en  $\underline{s}$  jusqu'à l'instant  $t$ ":  $[g^n(\underline{s})]_t$ .
- "Distribution des Discontinuités Normales à l'instant  $t$ ":  $g_t^n$ .
- "Histoire des Distributions des Discontinuités Normales jusqu'à l'instant  $t$ ":  $[g^n]_{\underline{L}, t}$ .

de même en ce qui concerne les discontinuités tangentielles .

Notons enfin que certaines liaisons internes du modèle peuvent "interdire" certaines Histoires de Distribution de Discontinuités (par exemple, on peut imposer  $g^n(\underline{s}, t) \geq 0 \forall \underline{s} \forall t$ ). On parlera alors "d'Histoires de Distributions de Discontinuités Autorisées".

## b) le chargement

La frontière  $\partial\Omega$  est partagée en deux parties, la première  $\partial\Omega_U$  sur laquelle le déplacement  $\underline{U}_d$  est imposé, la seconde  $\partial\Omega_T$  sur laquelle la contrainte  $\underline{T}_d$  est imposée. Nous supposons les forces volumiques nulles. Le chargement est donc imposé par le moyen des conditions aux limites précédentes. Dans la suite nous schématiserons ce chargement par la variable fonctionnelle  $\lambda$ . Si l'on fait varier le chargement sous la condition que  $\partial\Omega_U$  et  $\partial\Omega_T$  ne changent pas,  $\lambda$  évolue dans un espace vectoriel (théorie de superposition). En particulier,

$$(5) \quad \lambda=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{U}_d=0 \text{ sur } \partial\Omega_U \\ \underline{T}_d=0 \text{ sur } \partial\Omega_T \end{cases}$$

L'Histoire du Chargement jusqu'à l'instant  $t$  sera notée  $[\lambda]_t$ .

c) les problèmes élastiques de base

Si à l'instant  $t$  nous considérons connue la "distribution de discontinuité"  $\underline{g}_t$  (notée  $\underline{g}$ ), nous pouvons définir trois problèmes élastiques:

1°) problème initial  $Pb(\underline{g}, \lambda)$

Trouver  $\underline{U}$  le champ de déplacement dans  $\Omega$ , solution du problème élastique linéaire sans forces de volume avec les conditions aux limites suivantes:

$$(6, a) \quad \text{sur } \partial\Omega_T : \underline{\sigma}(\underline{U}) \cdot \underline{n} = \underline{T}_d$$

$$(6, b) \quad \text{sur } \partial\Omega_U : \underline{U} = \underline{U}_d$$

$$(6, c) \quad \text{sur } \ell : [\underline{U}]_{\ell^+} - [\underline{U}]_{\ell^-} = \underline{g}$$

$$(6, d) \quad \text{sur } \ell : [[\underline{\sigma}(\underline{U}) \cdot \underline{n}^*]]_{\ell^+} + [[\underline{\sigma}(\underline{U}) \cdot \underline{n}^-]]_{\ell^-} = 0$$

où  $[\underline{U}]_{\ell^+}$  et  $[\underline{U}]_{\ell^-}$  désignent respectivement les valeurs des champs de déplacement sur les faces supérieure et inférieure de  $\ell$ ;  $\underline{\sigma}(\underline{U})$  est le champ de contraintes dans le milieu. La relation (6,d) traduit la continuité de la contrainte normale à travers  $\ell$ .

La solution  $\underline{U}$  appartient à l'ensemble des champs de déplacement cinématiquement admissibles:

$$(7) \quad K(\lambda, \underline{g}) = \left\{ \underline{U}^* / \underline{U}^* = \underline{U}_d \text{ sur } \partial\Omega_U ; [\underline{U}^*]_{\ell^+} - [\underline{U}^*]_{\ell^-} = \underline{g} \text{ sur } \ell \right\}$$

Remarque: nous adoptons une démarche différente de celle utilisée habituellement en mécanique de la rupture. En effet, nous prenons comme donnée du problème élastique la discontinuité de déplacement sur  $\ell$  et non la contrainte.

Nous décomposons classiquement le problème précédent en superposant les champs de déplacements solutions des deux problèmes suivants:

1°) problème homogène  $Pb(0,\lambda)$

C'est le problème élastique sans discontinuité de déplacement. Les conditions aux limites sur le contour extérieur restent les mêmes que celles du problème initial. Les conditions aux limites sont donc les suivantes:

$$(8,a) \quad \text{sur } \partial\Omega_\tau : \underline{\sigma}(\underline{U}) \cdot \underline{n} = \underline{T}_d$$

$$(8,b) \quad \text{sur } \partial\Omega_\nu : \underline{U} = \underline{U}_d$$

$$(8,c) \quad \text{sur } \ell : [\underline{U}]_{\ell^+} - [\underline{U}]_{\ell^-} = 0$$

$$(8,d) \quad \text{sur } \ell : [\underline{\sigma}(\underline{U}) \cdot \underline{n}^+]_{\ell^+} + [\underline{\sigma}(\underline{U}) \cdot \underline{n}^-]_{\ell^-} = 0$$

Notons  $\underline{U}_0$  le champ de déplacement solution de  $Pb(0,\lambda)$ . D'après (7)  $\underline{U}_0$  appartient à l'ensemble des champs de déplacement cinématiquement admissibles sans discontinuité de déplacement  $K(\lambda,0)$ .

2°) problème auxiliaire  $Pb(\underline{g}, 0)$ 

Dans ce problème, la discontinuité de déplacement  $\underline{g}(\underline{s})$  est présente sur  $\ell$ , les conditions aux limites sont homogènes sur la frontière  $\partial\Omega$ , c'est-à-dire que les conditions aux limites sont:

$$(9, a) \quad \text{sur } \partial\Omega_T : \underline{q}(\underline{u}) \cdot \underline{n} = 0$$

$$(9, b) \quad \text{sur } \partial\Omega_U : \underline{u} = 0$$

$$(9, c) \quad \text{sur } \ell : [\underline{u}]_{\ell^+} - [\underline{u}]_{\ell^-} = \underline{g}$$

$$(9, d) \quad \text{sur } \ell : [\underline{q}(\underline{u}) \cdot \underline{n}^+]_{\ell^+} + [\underline{q}(\underline{u}) \cdot \underline{n}^-]_{\ell^-} = 0$$

Notons  $\underline{u}$  le champ de déplacement solution du problème auxiliaire. D'après (7) ce champ  $\underline{u}$  appartient à l'ensemble des champs de déplacement cinématiquement admissibles avec discontinuité de déplacement et chargement homogène  $K(0, \underline{g})$ .

La superposition de ces deux problèmes nous donne le problème initial, et nous avons d'après le principe de superposition en élasticité linéaire les relations suivantes:

$$(10) \quad \underline{U} = \underline{U}_0 + \underline{u} ; \underline{q}(\underline{U}) = \underline{q}(\underline{U}_0) + \underline{q}(\underline{u})$$

**d) L'énergie potentielle**

Notons  $\mathcal{P}(\underline{U}^*, \underline{g}, \lambda)$  l'énergie potentielle totale du domaine  $\Omega$  pour un champ quelconque  $\underline{U}^* \in K(\lambda, \underline{g})$ .  $\mathcal{P}$  est la somme de l'énergie de déformation élastique et du potentiel des efforts extérieurs,

$$(11) \quad \mathcal{P}(\underline{U}^*, \underline{g}, \lambda) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\epsilon}(\underline{U}^*) : \mathbb{L} : \underline{\epsilon}(\underline{U}^*) d\omega - \int_{\partial\Omega_T} \underline{T}_d(s) \cdot \underline{U}^*(s) ds$$

où  $\epsilon_{ij}(\underline{U}^*) = \frac{1}{2} (U_{i,j}^* + U_{j,i}^*)$  désignent les composantes du champ de déformation.  $\mathbb{L}$  est le tenseur de rigidité élastique.

Notons que nous n'avons pas de terme "sur  $\mathcal{L}$ " car la discontinuité  $\underline{g}$  est imposée.

La solution du problème  $Pb(\underline{g}, \lambda)$  est le champ de déplacement qui minimise, à  $\underline{g}$  et  $\lambda$  donnés, la fonctionnelle  $\mathcal{P}(\underline{U}^*, \underline{g}, \lambda)$  sur l'ensemble des champs cinématiquement admissibles  $K(\lambda, \underline{g})$ . De même  $\underline{U}_0$  minimise  $\mathcal{P}(\underline{U}^*, 0, \lambda)$  sur l'ensemble des champs sans discontinuité de déplacement  $K(\lambda, 0)$  et  $\underline{u}$  minimise  $\mathcal{P}(\underline{U}^*, \underline{g}, 0)$  sur l'ensemble des champs avec discontinuité de déplacement et chargement homogène  $K(0, \underline{g})$ .

En utilisant la décomposition (10) de la solution  $\underline{U}$  de  $Pb(\underline{g}, \lambda)$  nous obtenons:

$$(12) \quad \mathcal{P}(\underline{U}^*, \underline{g}, \lambda) = \mathcal{P}_0(\lambda) + \int_{\Omega} \underline{\epsilon}(\underline{U}_0) : \mathbb{L} : \underline{\epsilon}(\underline{u}) d\omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\epsilon}(\underline{u}) : \mathbb{L} : \underline{\epsilon}(\underline{u}) d\omega - \int_{\partial\Omega_T} \underline{T}_d \cdot \underline{u} ds$$

où nous notons  $\mathcal{P}_0(\lambda) = \mathcal{P}(\underline{U}_0, 0, \lambda)$  l'énergie potentielle du problème sans discontinuité de déplacement.

La première intégrale dans la dernière relation peut aussi s'écrire:

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{U}_0) : \underline{\underline{\mathbb{L}}} : \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}) \, d\omega = \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}_0) : \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}) \, d\omega$$

où nous notons  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}_0)$  la contrainte du problème sans discontinuité de déplacement. Comme elle est symétrique, nous avons:

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}_0) : \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}) \, d\omega = \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}_0) : \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{u}) \, d\omega$$

En intégrant par parties et en prenant en compte le fait qu'il n'y a pas de force de volume et que  $\underline{u}=0$  sur la partie du contour où est imposé le déplacement, on obtient:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{U}_0) : \underline{\underline{\mathbb{L}}} : \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}) \, d\omega \\ &= \int_{\partial\Omega_T} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}_0) \cdot \underline{n} \cdot \underline{u} \, ds + \int_{\mathcal{L}^+} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}_0) \cdot \underline{n}^+ \cdot \underline{u} \, ds + \int_{\mathcal{L}^-} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}_0) \cdot \underline{n}^- \cdot \underline{u} \, ds \end{aligned}$$

où  $\underline{n}$  est le vecteur normal à la frontière orienté vers l'extérieur de la matière.

Cette relation traduit le théorème des puissances virtuelles pour le champ statiquement admissible  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}_0)$  et le champ cinématiquement admissible  $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u})$ .

Rappelons que nous avons choisi de noter  $\underline{n}$  le vecteur normal de  $\mathcal{L}^-$  orienté vers l'extérieur de la matière ( $\underline{n}^- = \underline{n}$ ). Donc le vecteur normal de  $\mathcal{L}^+$  est  $-\underline{n}$ . Nous regroupons les intégrales sur  $\mathcal{L}^+$  et  $\mathcal{L}^-$ . Le champ  $\underline{U}_0$  étant la solution du problème non fissuré, le vecteur contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}_0) \underline{n}$  sur  $\mathcal{L}^-$  ne dépendra que du chargement  $\lambda$ . Nous le noterons

$$(13) \quad \underline{\underline{\Sigma}}(\lambda) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}_0) \cdot \underline{n} \quad \text{sur } \mathcal{L}$$

En regroupant les deux dernières intégrales et compte tenu de la condition de force imposée (8,a), on obtient:

$$\int_{\Omega} \underline{\epsilon}(\underline{u}_0) : \underline{L} : \underline{\epsilon}(\underline{u}) d\omega = \int_{\partial\Omega_T} \underline{T} \cdot \underline{u} ds - \int_L \underline{\Sigma}(\lambda) \cdot \underline{g} ds$$

En reportant cette dernière relation dans (12), nous obtenons:

$$(14) \quad \mathcal{P}(\underline{U}, \underline{g}, \lambda) = \mathcal{P}_0(\lambda) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\epsilon}(\underline{u}) : \underline{L} : \underline{\epsilon}(\underline{u}) d\omega - \int_L \underline{\Sigma}(\lambda) \cdot \underline{g} ds$$

Remarquons que  $\underline{u}$  minimise  $\mathcal{P}(\underline{U}^*, \underline{g}, 0)$ ; il est donc indépendant de  $\lambda$ . De plus il dépend linéairement de  $\underline{g}$ . Nous noterons  $\underline{u}(\underline{g})$  cette dépendance linéaire. Par exemple, dans le cas où  $\Omega$  est une plaque infinie (voir chapitre 2 de la deuxième partie),  $\underline{u}(\underline{g})$  peut être exprimé par une intégrale sur la ligne de discontinuité de déplacement.

Dans la suite nous noterons  $P(\underline{g}, \lambda)$  la variation de l'énergie potentielle totale du domaine en présence d'une ligne de discontinuités de déplacement par rapport à celle du même milieu sans discontinuité de déplacement

La fonctionnelle  $P(\underline{g}, \lambda)$  est constitué d'un terme quadratique et d'un terme linéaire en  $\underline{g}$ . Et nous avons donc

$$(15) \quad \mathcal{P}(\underline{U}, \underline{g}, \lambda) = \mathcal{P}_0(\lambda) + P(\underline{g}, \lambda)$$

**e) Variation de l'énergie potentielle lors d'une variation du chargement et lors d'une évolution de la discontinuité**

A l'instant  $t$ , nous noterons  $\lambda$  la vitesse de variation du chargement. Toute histoire de chargement se fera sans variation de  $\partial\Omega_0$  et  $\partial\Omega_\tau$ ,  $\lambda$  sera donc caractérisée par  $\underline{U}_d$  sur  $\partial\Omega_0$  et  $\underline{T}_d$  sur  $\partial\Omega_\tau$ . Nous devons nous intéresser à toutes les vitesses de variations possibles de la "distribution de discontinuités". Nous les noterons  $\underline{g}_t^*$ . La vitesse  $\underline{g}_t^*$  doit être telle que  $\underline{g}_\tau$  reste continu sur  $\Gamma_\tau$  pour  $\tau \geq t$ . Si  $\underline{g}'(\underline{s})$  admet des points singuliers sur  $\Gamma_t$ ,  $\underline{g}_t^*$  peut entraîner le déplacement de ces points singuliers. Les singularités des champs deviennent alors sévères et il est nécessaire d'en faire un traitement particulier. L'instant  $t$  étant fixé, nous noterons  $\underline{g}$ ,  $\underline{g}'$  et  $\underline{g}^*$  au lieu de  $\underline{g}_t$ ,  $\underline{g}'_t$  et  $\underline{g}_t^*$ .

La variation de  $\mathcal{P}_0(\lambda)$  ne présente que peu d'intérêt. Nous nous intéresserons surtout aux variations de  $P(\underline{g}, \lambda)$ . Nous noterons  $P_1$  la variation de  $P$  au premier ordre.

Si  $\underline{g}'(\underline{s})$  est régulier ou si les points de singularité ne se déplacent pas, nous avons:

$$(16) \quad P_1 = - \int_{\Gamma} \underline{\Sigma}(\lambda) \cdot \underline{g} ds - \int_{\Gamma} \underline{\Sigma}(\lambda) \cdot \underline{g}^* ds + \int_{\Omega} \underline{\epsilon}(\underline{u}(\underline{g})) : \underline{\mathbb{L}} : \underline{\epsilon}(\underline{u}(\underline{g}^*)) d\omega$$

On peut transformer la dernière intégrale dans (16) en une intégrale sur  $\Gamma$ :

$$P_1 = - \int_{\Gamma} \left[ \underline{\Sigma}(\lambda) \cdot \underline{g} + (\underline{\Sigma}(\lambda) + \underline{\sigma}(\underline{u}(\underline{g})) \cdot \underline{n}) \cdot \underline{g}^* \right] ds$$

Ceci n'est plus vrai si  $\underline{g}'(\underline{s})$  comprend des singularités qui se déplacent.

ETUDE D'UNE SINGULARITE DE  $\underline{g}'(\underline{s})$  : soit  $\underline{a}$  un point singulier de  $\underline{g}'(\underline{s})$ .  $\underline{g}^*$  est tel que ce point se déplace à la vitesse  $\underline{a}^*$ . De manière semblable à ce qui a été fait en mécanique de la rupture, nous isolons le voisinage du point  $\underline{a}$  par une boule  $B(\underline{a}, r)$  de centre  $\underline{a}$ , de rayon  $r$  (fig 3) en translation à la vitesse  $\underline{a}^*$ .

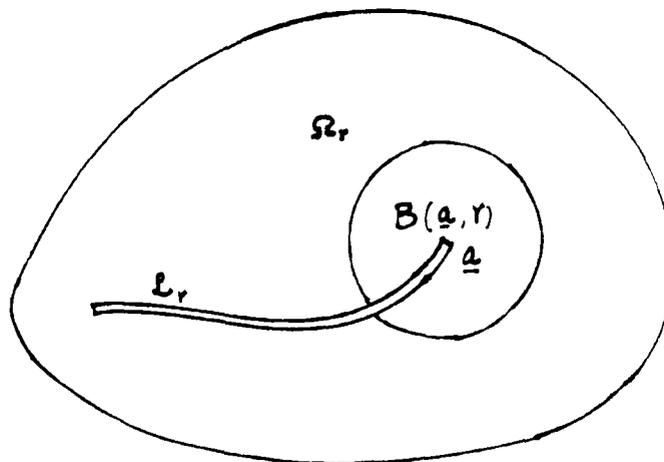


fig 2

Soit  $\Omega_r$  la partie de  $\Omega$  extérieure à la boule. Pour calculer la variation de l'intégrale de surface dans (14) que nous noterons :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\epsilon}(\underline{u}(\underline{g})) : \underline{L} : \underline{\epsilon}(\underline{u}(\underline{g})) d\omega$$

nous intégrons séparément dans  $B(\underline{a}, r)$  et dans  $\Omega_r$  :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\epsilon}(\underline{u}(\underline{g})) : \underline{L} : \underline{\epsilon}(\underline{u}(\underline{g})) d\omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega_r} \underline{\epsilon}(\underline{u}(\underline{g})) : \underline{L} : \underline{\epsilon}(\underline{u}(\underline{g})) d\omega + \frac{1}{2} \int_{B(\underline{a}, r)} \underline{\epsilon}(\underline{u}(\underline{g})) : \underline{L} : \underline{\epsilon}(\underline{u}(\underline{g})) d\omega$$

La variation de l'intégrale sur  $\Omega_r$  comprend deux termes:

- un terme de variation à l'intérieur de  $\Omega_r$

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_r} \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}(\underline{g})) : \underline{L} : \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}(\underline{g}^*)) d\omega$$

- un terme de flux dû au mouvement de la frontière:

$$- \int_{\partial B(\underline{a}, r)} \frac{1}{2} \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}(\underline{g})) : \underline{L} : \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}(\underline{g})) \underline{n} \cdot \underline{\underline{a}}^* ds$$

où  $\underline{n}$  est le vecteur normal extérieur de la frontière  $\partial B(\underline{a}, r)$ .

Dans  $\Omega_r$ ,  $\underline{u}$  est régulier, l'intégrale de surface peut se transformer en intégrale de contour en trois parties, la partie sur le contour extérieur étant nulle compte tenu des conditions aux limites. Ainsi nous obtenons:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}(\underline{g})) : \underline{L} : \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}(\underline{g})) d\omega = \\ & \int_{\mathcal{L}_r} \underline{g}(\underline{u}(\underline{g})) \cdot \underline{n} \cdot \underline{\underline{g}}^* d\omega + \int_{\partial B(\underline{a}, r)} \underline{g}(\underline{u}(\underline{g})) \cdot \underline{n} \cdot \underline{u}(\underline{g}^*) d\omega \\ & - \int_{\partial B(\underline{a}, r)} \frac{1}{2} \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}(\underline{g})) : \underline{L} : \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}(\underline{g})) \underline{n} \cdot \underline{\underline{a}}^* ds \\ & + \frac{1}{2} \int_{B(\underline{a}, r)} \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}(\underline{g})) : \underline{L} : \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}(\underline{g})) d\omega \end{aligned}$$

où  $\mathcal{L}_r$  est la portion de  $\mathcal{L}$  comprise dans  $\Omega_r$  (Rappelons que sur  $\mathcal{L}_r$ ,  $\underline{n}$  est la normale à  $\mathcal{L}$ ).

Nous faisons l'hypothèse de "transport parallèle" de singularité qui s'écrit de la manière suivante:

$$(17) \quad \underline{u}(\underline{g}^*) = -\underline{a}^* \cdot \underline{\text{grad}}(\underline{u}(\underline{g})) \\ + \text{termes réguliers dans un voisinage de } \underline{a}$$

Si nous faisons tendre  $r$  vers 0, cette hypothèse nous permet de conclure que la limite de la variation de l'intégrale sur  $B(\underline{a}, r)$  est nulle. On peut par exemple, pour s'en assurer, faire un changement de variable dans  $B(\underline{a}, r)$  et se ramener en coordonnées mobiles avec l'extrémité de la fissure. Dans ces coordonnées le domaine d'intégration est fixe et l'hypothèse de transport parallèle de singularité nous assure la régularité des champs permettant d'annuler la limite de l'intégrale lorsque  $r$  tend vers zéro.

L'intégrale sur  $\ell_r$  va tendre vers l'intégrale sur  $\ell$ . Dans la première intégrale sur  $\partial B(\underline{a}, r)$  nous remplaçons  $\underline{u}(\underline{g}^*)$  par  $-\underline{a}^* \cdot \underline{\text{grad}}(\underline{u}(\underline{g}))$  plus des termes réguliers. Ainsi après passage à la limite nous obtenons:

$$(18) \quad \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\epsilon}(\underline{u}(\underline{g})) : \underline{\mathbb{L}} : \underline{\epsilon}(\underline{u}(\underline{g})) \, d\omega \\ = - \int_{\ell} (\underline{q}(\underline{u}(\underline{g})) \cdot \underline{n}) \cdot \underline{g}^* \, ds - \underline{a}^* \cdot \underline{G}_a$$

où

$$(19) \quad \underline{G}_a = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial B(\underline{a}, r)} \left( \frac{1}{2} \underline{\epsilon}(\underline{u}(\underline{g})) \underline{\mathbb{L}} \underline{\epsilon}(\underline{u}(\underline{g})) \underline{n} - (\underline{q}(\underline{u}(\underline{g})) \cdot \underline{n}) \cdot \underline{\text{grad}}(\underline{u}(\underline{g})) \right) ds$$

Nous avons noté  $\underline{t}$  le vecteur tangent à  $\ell$ . Lorsque  $\underline{a}$  est un point singulier de  $\ell$ ,  $\underline{a}^* = \underline{a}^* \cdot \underline{t}$ . Notons  $G_a = |\underline{G}_a \cdot \underline{t}|$ ,  $G_a$  est un taux de relaxation d'énergie analogue à celui de la mécanique de la rupture.

CALCUL DE G: si  $\underline{g}(\underline{a}-\underline{\epsilon})-\underline{g}(\underline{a})$  est équivalent à  $|\underline{\epsilon}|^\beta$  pour les petites valeurs de  $\underline{\epsilon}$ , alors d'après (19),  $G_a$  est équivalent à  $|\underline{\epsilon}|^{2\beta-1}$ . Physiquement,  $G_a$  ne peut pas être infiniment grand, donc  $\beta \leq 1/2$ . Les valeurs  $\beta < 1/2$  donnent un  $G_a = 0$ . Les seuls points qui méritent d'être distingués sont ceux sur lesquels la singularité est  $1/2$  et nous les appellerons les points de relaxation d'énergie conformément à la terminologie de G.

Par similitude avec la mécanique de la rupture, à un point de relaxation d'énergie nous pouvons écrire dans le repère local:

$$(20, a) \quad g^n'(\underline{a}-\underline{r}) - g^n'(\underline{a}) = \frac{\chi+1}{2\mu} \frac{K_1^a}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{|\underline{r}|}} (1+o(\underline{r}))$$

$$(20, b) \quad g^{tg}'(\underline{a}-\underline{r}) - g^{tg}'(\underline{a}) = \frac{\chi+1}{2\mu} \frac{K_2^a}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{|\underline{r}|}} (1+o(\underline{r}))$$

où  $\chi = \frac{3-\nu}{1+\nu}$  dans le cas de contrainte plane;  $\chi = 3-4\nu$  dans le cas de déformation plane, et  $o(|\underline{r}|) \rightarrow 0$  lorsque  $|\underline{r}| \rightarrow 0$ .

$K_1^a$  est un facteur semblable au facteur d'intensité de contrainte de la mécanique de la rupture relié à  $G_a$  par:

$$(21) \quad G_a = \frac{k+1}{8\mu} \left( (K_1^a)^2 + (K_2^a)^2 \right)$$

Lorsqu'il existe plusieurs points singuliers, nous les distinguons suivant que  $\underline{G}_a \cdot \underline{t} = +G_a$  (points notés  $\underline{a}_m$ ) ou  $\underline{G}_a \cdot \underline{t} = -G_a$  (points notés  $\underline{a}_n$ ). Dans le cas de discontinuité normale positive, les premiers correspondent à une singularité à gauche et les seconds à une singularité à droite (figure 3).

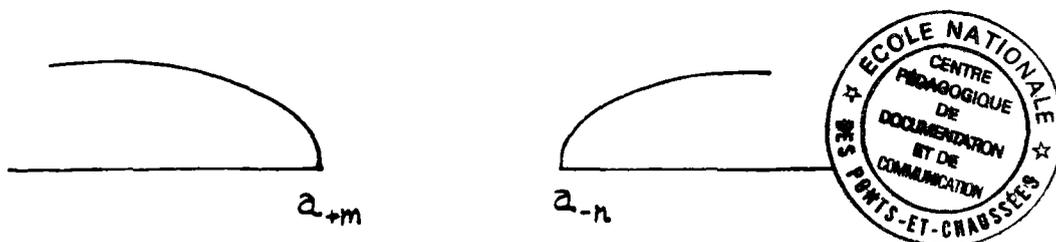


fig3 singularité à gauche;

singularité à droite

Ainsi dans le cas le plus général, la variation au premier ordre de  $P$  peut s'écrire d'après (18) et (19):

$$(22) \quad P_1(\underline{g}^*, \lambda) = -\int_L \underline{\Sigma}(\lambda) \cdot \underline{g} \, ds - \int_L (\underline{g}(\underline{u}(\underline{g})) \cdot \underline{n} + \underline{\Sigma}(\lambda)) \cdot \underline{g}^* \, ds \\ - \sum_m \dot{a}_{+m}^* G_{a_{+m}} + \sum_n \dot{a}_{-n}^* G_{a_{-n}}$$

On voit apparaître dans  $P_1$  la contrainte  $\underline{F}$  du problème  $P(\underline{g}, \lambda)$  sur  $\underline{l}$ :

$$(23) \quad F_i \equiv \sigma_{ij}(\underline{u}(\underline{g})) n_j + \Sigma_i(\lambda)$$



## CHAPITRE 2

### ENERGIE DISSIPEE LORS D'UNE EVOLUTION DES DISCONTINUITES

#### a) Variables d'état globales et énergie dissipée

Le solide étant élastique, l'état du système à l'instant  $t$  est entièrement connu si l'on connaît l'Histoire du Chargement entre  $-\infty$  et  $t$  (notée  $[\lambda]_t$ ) et "l'Histoire des Distributions de Discontinuités jusqu'à l'instant  $t$ "  $[\underline{g}]_{\underline{L}, t}$ .

L'énergie dissipée  $D(t)$  pendant toute l'évolution dans le système jusqu'à l'instant  $t$  pourra s'écrire sous la forme très générale d'une fonctionnelle sur l'ensemble des "Histoires des Distributions de Discontinuités" ( Une variation de l'Histoire de Chargement sans variations de l'Histoire des Distributions de Discontinuités ne change pas  $D(t)$  ).

$$(24) \quad D(t) = \mathfrak{D}([\underline{g}]_{\underline{L}, t})$$

Si nous notons  $[\underline{g}]_{\underline{L}, t/\tau}$  la restriction de l'Histoire des Distributions de Discontinuités à l'intervalle de temps  $[-\infty, \tau]$  ( $\tau < t$ ) "l'Histoire de l'Energie Dissipée" associée à  $[\underline{g}]_{\underline{L}, t}$  est donnée par la fonction scalaire du temps:

$$(25) \quad D(\tau) = \mathfrak{D}([\underline{g}]_{\underline{L}, t/\tau})$$

Cette histoire est une fonction à valeur scalaire définie



pour  $\tau \in ]-\infty, t]$ . Nous la noterons  $\mathcal{D}([\underline{g}]_{\mathcal{L}_t}) (\tau)$ . Avec ce point de vue la fonctionnelle  $\mathcal{D}$  applique l'ensemble fonctionnel des Histoires de Discontinuités de Déplacement sur les Histoires de l'Energie Dissipée.

Le 2° principe de la thermodynamique appliqué à notre modélisation isotherme impose à l'Histoire de l'Energie Dissipée d'être une fonction croissante du temps pour toute "Histoire de Distribution de Discontinuités Autorisée".

Sans autres précisions, ce formalisme très général est peu opératoire, aussi nous faut-il ajouter quelques hypothèses "raisonnables".

#### Hypothèse de Dissipation Locale

Nous faisons l'hypothèse que la dissipation dans un petit volume au voisinage d'un point de  $\mathcal{L}_t$  ne dépend que de l'histoire des discontinuités dans ce petit volume. Nous pouvons alors postuler l'existence d'une fonctionnelle locale de densité surfacique d'énergie dissipée  $d$ , exprimant cette densité en chaque point d'une surface de discontinuités comme une fonctionnelle de l'Histoire de la Discontinuité en ce point et de l'Histoire des Gradients (notés  $[\underline{g}'(\underline{s})]_t, \dots, [\underline{g}^{(n)}(\underline{s})]_t$ ).

Ainsi :

$$(26) \quad \mathcal{D}([\underline{g}]_{\mathcal{L}_t}) = \int_{\mathcal{L}_t} d([\underline{g}(\underline{s})]_t, [\underline{g}'(\underline{s})]_t, \dots, [\underline{g}^{(n)}(\underline{s})]_t) ds$$

L'Histoire de la Densité Surfaccique d'Energie Dissipée en un point  $\underline{s}$  doit bien sûr être une fonction croissante du temps pour toute "Histoire de Discontinuités Autorisée" en  $\underline{s}$ .

Remarque:  $\forall \underline{s} \in \mathcal{L}_t$  et  $\tau < t$  tel que  $\underline{s} \in \mathcal{L}_\tau$   $\underline{g}(\underline{s}, \tau) = 0$

Hypothèse de simplicité de la discontinuité

Nous nous plaçons dans l'Hypothèse de Dissipation Locale et nous supposons que l'Histoire de la Densité Surfaique d'Energie Dissipée ne dépend pas des Histoires des Gradients de  $\underline{g}$ :

$$(27) \quad \mathfrak{D}([\underline{g}]_{\underline{L}, t}) = \int_{\underline{L}_t} d([\underline{g}(\underline{s})]_t) ds$$

Cette forme pour la fonctionnelle de dissipation reste très générale et relativement difficile à utiliser. Heureusement dans de nombreux cas pour les problèmes bidimensionnels, il est possible de faire l'hypothèse suivante qui permet de transformer la fonctionnelle  $d([\underline{g}(\underline{s})]_t)$  en une fonction:

Hypothèse de cumul des variations monotones de la discontinuité

Notons:

$$(28, a) \quad g^{+n}(\underline{s}, t) = \int_{-\infty}^t \langle \dot{g}^n(\underline{s}, \tau) \rangle d\tau$$

$$(28, b) \quad g^{-n}(\underline{s}, t) = \int_{-\infty}^t \langle -\dot{g}^n(\underline{s}, \tau) \rangle d\tau$$

$$(28, c) \quad g^{+tg}(\underline{s}, t) = \int_{-\infty}^t \langle \dot{g}^{tg}(\underline{s}, \tau) \rangle d\tau$$

$$(28, d) \quad g^{-tg}(\underline{s}, t) = \int_{-\infty}^t \langle -\dot{g}^{tg}(\underline{s}, \tau) \rangle d\tau$$

où  $\langle f \rangle$  désigne la partie positive d'une fonction,  $\langle f \rangle = 0$  si  $f < 0$  ;  
 $\langle f \rangle = f$  si  $f > 0$ .

L'hypothèse de cumul des variations monotones de la discontinuité consiste à supposer que la fonctionnelle  $d([\underline{g}(\underline{s})]_t)$  n'est en fait qu'une fonction des quatres variables scalaires définies ci-dessus:

$$(29) \quad d([\underline{g}(\underline{s})]_t) = d(g^{+n}(\underline{s}, t), g^{-n}(\underline{s}, t), g^{+tg}(\underline{s}, t), g^{-tg}(\underline{s}, t))$$

Nous noterons  $I$  l'ensemble d'indices suivant:

$$I = \{+n, -n, +tg, -tg\}$$

et  $\alpha$  un élément de cet ensemble.

Nous noterons  $\hat{g}_t$  le quadruple champ scalaire  $g^\alpha(\underline{s}, t)$ ,  $\alpha \in I$  défini sur  $I_t$ .

En remarquant que la distribution de discontinuité  $\underline{g}_t$  à l'instant  $t$  s'exprime à l'aide de  $\hat{g}_t$ :

$$(30, a) \quad g_t^n = g_t^{+n} - g_t^{-n}$$

$$(30, b) \quad g_t^{tg} = g_t^{+tg} - g_t^{-tg}$$

nous pouvons conclure que le champs  $\hat{g}_t$  joue le rôle à l'instant  $t$  de variables d'état globales pour le système. En effet l'énergie potentielle du système et l'énergie totale dissipée au cours de l'évolution des discontinuités peuvent s'exprimer à l'aide des seuls champs  $\hat{g}_t$  et du chargement  $\lambda$ .

Remarquons que les  $g^\alpha(\underline{s}, t)$  sont des fonctions croissantes de  $t$ .

Notons  $\mathcal{K}(\hat{g}_t)$  l'ensemble des avenir possibles de l'état  $\hat{g}_t$

$$(31) \quad \mathcal{K}(\hat{g}_t) = \left( \hat{g}^* / g^{*\alpha} \geq g^\alpha, \alpha \in I \right)$$

Avec cette dernière hypothèse de cumul des variations monotones de la discontinuité nous obtenons un modèle tout à fait opératoire ainsi que nous le verrons plus loin. Mais commençons par l'illustrer sur deux exemples.

1° exemple: La fissure de Griffith

Notons  $H(\hat{g})$  la "fonction d'Heaviside" définie sur  $(\mathbb{R}^+)^4$  par:

$$(32,a) \quad H(\hat{g})=0 \quad \text{si} \quad \hat{g}=(0,0,0,0)$$

$$(32,b) \quad H(\hat{g})=1 \quad \text{si} \quad \hat{g} \neq (0,0,0,0)$$

La fissure de Griffith va être donnée dans notre formalisme par la fonction  $d(\hat{g})$

$$(33) \quad d(\hat{g}) = G_c \cdot H(\hat{g})$$

où  $G_c$  est par définition le taux de relaxation d'énergie critique du matériau.

L'énergie totale dissipée jusqu'à l'instant  $t$  est alors:

$$(34) \quad D(t) = \mathfrak{D}\left([\underline{g}]_{\underline{l}, t}\right) = G_c \cdot \text{Long}(\underline{l}_t)$$

où  $\text{Long}(\underline{l}_t)$  est la longueur de la ligne de discontinuité dans le solide à l'instant  $t$ .

Nous pouvons aussi écrire:

$$D(\tau) = \mathfrak{D}\left([\underline{g}]_{\underline{l}, \tau}\right) (\tau) = G_c \cdot \text{Long}(\underline{l}_\tau)$$

Dans ce qui précède nous avons supposé qu'un point  $\underline{s}$  n'appartient à  $\underline{l}_t$  que si pour au moins un instant  $\tau < t$   $\underline{g}(\underline{s}, \tau) \neq 0$ .

2° exemple: La fissure Barenblatt

Choisissons la fonction  $d(\hat{g})$  suivante:

$$(35) \quad d(\hat{g}) = \text{Inf} \left[ \sigma_c^n \cdot (g^{+n} + g^{-n}) + \sigma_c^{tg} \cdot (g^{+tg} + g^{-tg}), G^c \right]$$

où  $\sigma_c^n$ ,  $\sigma_c^{tg}$  et  $G^c$  sont 3 constantes caractéristiques du matériau.

Nous démontrerons plus loin que cette fonction  $d(\hat{g})$  est équivalente physiquement à la donnée d'une force de cohésion "normale" comprise entre  $-\sigma^n$  et  $+\sigma^n$  et une force de cohésion "tangentielle" comprise entre  $-\sigma^{tg}$  et  $+\sigma^{tg}$ . Lorsque le vecteur contrainte sur la ligne de discontinuité atteint cette force de cohésion limite, il y a évolution de la discontinuité normalement au critère. Enfin lorsque la dissipation locale atteint la valeur  $G^c$ , il y a décohésion totale de la matière et le vecteur contrainte chute à zéro.

Nous avons donc bien construit un modèle à peine généralisé de fissure de Barenblatt. En effet cette forme de la fonction de dissipation interdit la présence de point de relaxation d'énergie ainsi que nous le verrons plus loin.

### b) Variation de l'Energie Dissipée

Dans le cadre isotherme et quasi statique qui nous intéresse, nous allons voir que le comportement peut être déterminé par une comparaison des variations au premier ordre de l'énergie potentielle et de l'énergie dissipée pour toute évolution virtuelle autorisée.

Etudions donc la variation au premier ordre de l'énergie dissipée que nous pouvons appeler Puissance Virtuelle Dissipée dans une évolution virtuelle du système.

Notons  $\mathcal{A}(t+dt, [\underline{g}]_{\ell, t})$  l'ensemble des "avenirs possibles à  $t+dt$ " de l'Histoire de Discontinuité de Déplacement  $[\underline{g}]_{\ell, t}$ . Cet ensemble est par définition constitué de l'ensemble des Histoires des Distribution de Discontinuité  $[\underline{g}^*]_{\ell, t+dt}$  telles que leur restriction à l'intervalle de temps  $]-\infty, t]$  est égale à  $[\underline{g}]_{\ell, t}$ .

$$(36) \quad [\underline{g}^*]_{\ell, t+dt/t} = [\underline{g}]_{\ell, t}$$

L'ensemble des Distributions de Vitesses d'Evolution Autorisées  $\dot{\underline{g}}_t^*$  à l'instant  $t$  est constitué des vitesses à l'instant  $t$  des distributions  $[\underline{g}^*]_{\ell, t+dt} \in \mathcal{A}(t+dt, [\underline{g}]_{\ell, t})$ .

Cette définition de l'ensemble des Distributions de Vitesses d'Evolution Autorisées est indépendante du choix de  $dt$ .

Nous noterons  $[\underline{g}^*]_{\ell, t+dt} \left( \dot{\underline{g}}_t^* \right)$  l'un quelconque des éléments de  $\mathcal{A}$  tel que la Distribution des Vitesses d'Evolution associées à l'instant  $t$  soit  $\dot{\underline{g}}_t^*$ .

Nous noterons :

$$(37) \quad \dot{\mathcal{D}}\left(\underline{[g]}_{\ell, t}, \underline{\dot{g}}_t^*\right) = \lim_{\tau \rightarrow t^+} \frac{\mathcal{D}\left(\underline{[g^*]}_{\ell, t+dt/\tau}, \underline{\dot{g}}_t^*\right) - \mathcal{D}\left(\underline{[g]}_{\ell, t}\right)}{\tau - t}$$

Nous faisons l'hypothèse que cette limite est indépendante du choix de l'élément  $\underline{[g^*]}_{\ell, t+dt}$  ( $\underline{\dot{g}}_t^*$ ).

$\dot{\mathcal{D}}\left[\underline{[g]}_{\ell, t}, \underline{\dot{g}}_t^*\right]$  apparaît donc comme la "Puissance Virtuelle Dissipée" dans une "Distribution de Vitesses Virtuelles d'Evolution"  $\underline{\dot{g}}_t^*$ . C'est la variation au premier ordre de l'énergie dissipée pour la Distribution de Vitesse de Discontinuité  $\underline{\dot{g}}_t^*$ .

#### Variation au premier ordre dans le cas des hypothèses de dissipation locale et de simplicité de la discontinuité

L'Histoire des Distribution de Discontinuité jusqu'à l'instant  $t$  est continue dans notre modélisation, cependant la fonctionnelle Densité d'Énergie Dissipée peut être discontinue. Ainsi la distribution des énergies dissipées à l'instant  $t$  sur  $\ell_t$  peut être discontinue en certains points de  $\ell_t$ . Nous verrons plus loin que ces points sont des points de relaxation d'énergie tels que définis au premier chapitre 1. Nous les noterons donc de manière similaire:

—  $\underline{a}_m$  si la discontinuité de densité d'énergie dissipée est positive de la gauche vers la droite;

—  $\underline{a}_n$  si la discontinuité de densité d'énergie dissipée est négative de la gauche vers la droite.

Dans une évolution virtuelle  $\underline{\dot{g}}_t^*$  à l'instant  $t$ , ces points de discontinuité de densité d'énergie dissipée peuvent se déplacer. Nous noterons leur vitesse  $\underline{a}_{+m}^*$  et  $\underline{a}_{-n}^*$  ( $\underline{t}$  est le

vecteur tangent orientant  $\mathcal{L}_t$ ). Compte tenu du fait que l'histoire de la densité d'énergie dissipée en un point doit être une fonction croissante du temps, cela impose  $\dot{a}_{+m}^* \geq 0$  et  $\dot{a}_{-n}^* \leq 0$ .

Nous notons  $G_c([\underline{g}(\underline{a}_i)]_t)$  la valeur absolue de discontinuité de la densité d'énergie dissipée à l'instant  $t$  au point  $\underline{a}_i$ ,  $i = +m$  ou  $-n$ . Cette discontinuité est une caractéristique de la fonctionnelle  $d([\underline{g}^*]_{\mathcal{L},t})$ , autrement dit c'est une caractéristique du matériau.

Nous notons d'autre part en tout point régulier:

$$(38) \quad \dot{d}([\underline{g}(\underline{s})]_t, \dot{\underline{g}}_t^*(\underline{s})) = \lim_{\tau \rightarrow t^+} \frac{d([\underline{g}^*]_{\mathcal{L},t+\Delta t/\tau}(\dot{\underline{g}}_t^*)(\underline{s},\tau)) - d([\underline{g}(\underline{s})]_t)}{\tau - t}$$

Nous supposons que cette limite est indépendante du choix de l'histoire  $[\underline{g}^*]_{\mathcal{L},t+\tau}(\dot{\underline{g}}_t^*)$  lorsque  $\dot{\underline{g}}_t^*$  est fixé.

Avec ces notations, la variation au premier ordre de l'énergie dissipée pour la distribution de vitesse de discontinuité  $\dot{\underline{g}}_t^*$  s'écrit:

$$(39) \quad \dot{D}([\underline{g}]_{\mathcal{L},t}, \dot{\underline{g}}_t^*) = \int_{\mathcal{L}_t} \dot{d}([\underline{g}(\underline{s})]_t, \dot{\underline{g}}_t^*(\underline{s})) ds \\ + \sum_m (\dot{a}_{+m}^*) \cdot G_c([\underline{g}(\underline{a}_{+m})]_t) - \sum_n (\dot{a}_{-n}^*) \cdot G_c([\underline{g}(\underline{a}_{-n})]_t)$$

Pour illustrer ce qui précède, reprenons les exemples de fissures de Griffith et de Barenblatt donnés précédemment.

- Fissure de griffith

Rappelons tout d'abord la forme de la fonctionnelle donnant l'Histoire de l'Energie Dissipée au cours d'une Histoire des Distributions de Discontinuités de Déplacement jusqu'à l'instant  $t$ .

$$(40) \quad \mathfrak{D} \left( [\underline{g}]_{\mathcal{L}, t} \right) (\tau) = G_c \cdot \text{Long}(\mathcal{L}_\tau) \quad \tau < t$$

où  $\text{Long}(\mathcal{L}_\tau)$  est la mesure de la surface  $\mathcal{L}_\tau$ ,  $\mathcal{L}_\tau$  étant une surface croissante,  $\mathfrak{D}$  est donc bien croissante dans le temps.

La Distribution des Densités d'Energie Dissipée admet à chaque instant  $\tau$  des discontinuités sur  $\mathcal{L}_\tau$  en des points qui sont à la frontière du sous ensemble de  $\mathcal{L}_\tau$  n'ayant jamais subit de discontinuité. En tous ces points la valeur absolue de la Discontinuité de la Densité d'Energie Dissipée est la constante  $G_c$  caractéristique du matériau. Si nous notons comme précédemment  $\underline{a}_i(t)$  ces points de discontinuité et  $\dot{\underline{a}}_i \cdot \underline{t}$  les vitesses virtuelles de déplacement de ces points sur  $\mathcal{L}_\tau$  ( $\underline{t}$  est le vecteur tangent orientant  $\mathcal{L}_\tau$ ), la variation au premier ordre de l'énergie dissipée par toute variation de discontinuité  $\underline{g}^*$  autorisée s'écrit:

$$(41) \quad \delta \left[ [\underline{g}]_{\mathcal{L}, t}, \underline{g}_t^* \right] = \sum_i |\dot{\underline{a}}_i| \cdot G_c \left( [\underline{g}(\underline{a}_i)]_t \right)$$

en effet  $\delta \left( [\underline{g}^*(\underline{s})]_t, \underline{g}_t^*(\underline{s}) \right) = 0$  en tout point régulier.

- Fissure de Barenblatt

La fonctionnelle Densité d'Energie Dissipée de la fissure de Barenblatt est donnée par:

$$(42) \quad d(\hat{g}) = \text{Inf} \left[ \sigma_c^n \cdot (g^{+n} + g^{-n}) + \sigma_c^{tg} \cdot (g^{+tg} + g^{-tg}), G^c \right] .$$

Cette fonctionnelle est définie à l'aide de 4 "variables d'états"  $g^\alpha(\underline{s}, t)$ . Compte tenu de nos hypothèses sur la continuité de  $g$  en  $\underline{s}$  et  $t$  les quatre variables d'états sont donc continues en  $\underline{s}$  et  $t$ . La fonction  $d(\hat{g})$  est continue en fonction des  $g^\alpha(\underline{s}, t)$ . Ainsi l'Histoire des Distributions de Densité d'Energie Dissipée est continue en  $\underline{s}$  et en  $t$ . Il n'y a donc pas de "point singulier".

En notant:

$$(43, a) \quad \dot{g}^{* +n} = \begin{cases} 0 & \text{si } \dot{g}^{* n} < 0 \\ \dot{g}^{* n} & \text{si } \dot{g}^{* n} \geq 0 \end{cases}$$

$$(43, b) \quad \dot{g}^{* -n} = \begin{cases} 0 & \text{si } \dot{g}^{* n} > 0 \\ -\dot{g}^{* n} & \text{si } \dot{g}^{* n} \leq 0 \end{cases}$$

$$(43, c) \quad \dot{g}^{* +tg} = \begin{cases} 0 & \text{si } \dot{g}^{* tg} < 0 \\ \dot{g}^{* tg} & \text{si } \dot{g}^{* tg} \geq 0 \end{cases}$$

$$(43, d) \quad \dot{g}^{* -tg} = \begin{cases} 0 & \text{si } \dot{g}^{* tg} > 0 \\ -\dot{g}^{* tg} & \text{si } \dot{g}^{* tg} \leq 0 \end{cases}$$

Alors la variation au premier ordre de l'énergie dissipée s'écrit:

$$(44) \quad \dot{D}[\underline{g}]_{\underline{L}, t}, \dot{\underline{g}}_t^* = \int_{\underline{L}_t} \left( \sigma_c^n \left[ \dot{g}_t^{*+n}(\underline{s}) + \dot{g}_t^{*-n}(\underline{s}) \right] + \sigma_c^{tg} \left[ \dot{g}_t^{*+tg}(\underline{s}) + \dot{g}_t^{*-tg}(\underline{s}) \right] \right) H(G_c - d([\underline{g}(\underline{s})]_t)) ds$$

où H est la fonction d'Heaviside.

Ainsi la dissipation d'énergie ne se produit en un point de  $\underline{L}_t$  que si ce point est tel que sa densité d'énergie dissipée n'a pas dépassé le seuil  $G_c$ . Au-delà de cette énergie dissipée la décohésion est totale, comme nous allons le voir plus loin.



### Chapitre 3

#### ECRITURE DU PROBLEME D'EVOLUTION

Nous allons dans un premier temps montrer que l'étude des variations au premier ordre de l'énergie potentielle et de l'énergie dissipée permet d'établir un critère d'évolution des discontinuités à partir d'un état d'équilibre. Puis nous proposons un principe de minimum pour l'évolution permettant de construire "une règle d'écoulement" pour le système. Nous reprenons dans notre cas particulier des résultats plus généraux établis dans [EHLACHER, 1985], [FEDELICH, 1989] et [FEDELICH, 1990].

##### a) Critère d'évolution

Nous supposons que nous sommes dans un état d'équilibre stable, c'est à dire qu'aucune évolution spontanée du système n'est possible sans variation du chargement.

Pour toute évolution réelle du système, le premier principe de la thermodynamique écrit la conservation de l'énergie sous la forme:

$$(45) \quad \dot{E} + \dot{K} = \mathcal{P}_e + \dot{Q}$$

où E est l'énergie interne du système

K son énergie cinétique

$\dot{E} + \dot{K}$  désigne la dérivée par rapport à temps de l'énergie totale en suivant la matière

$\mathcal{P}_e$  est la puissance des efforts extérieurs dans la champ de vitesse réel

$\dot{Q}$  est l'apport extérieur de chaleur au système.



Le bilan d'entropie dans le cas isotherme s'écrit:

$$(46) \quad \dot{S} = \frac{\dot{Q}}{T} + P_s$$

où S est l'entropie totale du système

$\dot{S}$  est donc la dérivée de l'entropie par rapport au temps en suivant la matière

$\frac{\dot{Q}}{T}$  est l'apport extérieur d'entropie dans le cas isotherme  
 $P_s$  est la production interne d'entropie.

Le deuxième principe s'écrit:

$$(47) \quad P_s \geq 0$$

C'est à dire que la production interne d'entropie ne peut être que positive.

Il est possible de remplacer dans l'expression du premier principe le taux de chaleur  $\dot{Q}$  reçu par le système par  $T(\dot{S} - P_s)$ . Nous pouvons écrire:

$$(48) \quad \dot{E} - T\dot{S} - \dot{\varphi}_e + TP_s = -\dot{K}$$

En notant  $\Psi$  l'énergie libre du système, dans le cas isotherme  $\Psi = E - TS$ . L'équation (46) s'écrit:

$$(49) \quad \dot{\Psi} - \dot{\varphi}_e + TP_s = -\dot{K}$$

Dans le cas isotherme,  $TP_s$  est la puissance dissipée dans l'évolution réelle du système, autrement dit la variation au premier ordre de l'énergie dissipée dans l'évolution réelle. De plus  $\dot{\Psi} - \dot{\varphi}_e$  est la variation au premier ordre de l'énergie potentielle dans l'évolution réelle s'il n'y a pas de variation de chargement. Si nous étudions les évolutions spontanées réelles

possibles d'un état d'équilibre, nous devons avoir  $K > 0$  car l'énergie cinétique à l'équilibre  $K$  est nulle.

Nous avons donc d'après (49), pour toute évolution spontanée réelle (sans variation de chargement) à partir d'un état d'équilibre, décroissance de la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie dissipée. Une condition suffisante de stabilité de l'équilibre sera donc que dans toute évolution virtuelle autorisée non nulle (sans variation de chargement) la somme de la variation au premier ordre de l'énergie potentielle et de l'énergie dissipée soit strictement positive.

Ecrivons cette condition à l'aide des équations (22) et (39):

$\forall (\dot{\underline{g}}_t^*; \dot{\underline{a}}_{+m}^*, \dot{\underline{a}}_{-n}^*; \dot{\underline{a}}_{+m'}^*, \dot{\underline{a}}_{-n'}^* / \dot{\underline{g}}_t^* \text{ autorisé et } \dot{\underline{a}}_{+m}^* \geq 0 \dot{\underline{a}}_{-n}^* \leq 0)$  non nul

$$(50) \quad - \int_{\mathcal{L}_t} \left[ \underline{g}(\underline{u}(\underline{g}_t)) \cdot \underline{n} + \underline{\Sigma}(\lambda) \right] (\underline{s}) \cdot \dot{\underline{g}}_t^* (\underline{s}) ds - \sum_m \dot{\underline{a}}_{+m}^* G_{a_{+m}} + \sum_n \dot{\underline{a}}_{-n}^* G_{a_{-n}} \\ + \int_{\mathcal{L}_t} d \left[ [\underline{g}(\underline{s})]_t, \dot{\underline{g}}_t^* (\underline{s}) \right] ds \\ + \sum_{m'} (\dot{\underline{a}}_{+m'}^*) G_c([\underline{g}(\underline{a}_{+m'})]_t) - \sum_{n'} (\dot{\underline{a}}_{-n'}^*) G_c([\underline{g}(\underline{a}_{-n'})]_t)$$

> 0

où  $\dot{\underline{g}}_t^*$  est une vitesse virtuelle d'évolution de discontinuités autorisée;  $\dot{\underline{a}}_{+m}^* \underline{t}$  et  $\dot{\underline{a}}_{-n}^* \underline{t}$  sont les vitesses de déplacement des points de relaxation d'énergie (c'est à dire les points singuliers de  $\underline{g}_t'(\underline{s})$ );  $\dot{\underline{a}}_{+m'}^* \underline{t}$  et  $\dot{\underline{a}}_{-n'}^* \underline{t}$  sont les vitesses des points de discontinuités de densité d'énergie dissipée. Les conditions  $\dot{\underline{a}}_{+m}^* \geq 0$  et  $\dot{\underline{a}}_{-n}^* \leq 0$  sont imposées car l'histoire de la densité d'énergie dissipée doit être une fonction croissante du temps.

Par souci de simplicité de présentation, supposons pour continuer qu'il n'existe pas de condition restrictive sur les  $\dot{\underline{g}}_t^*$  autorisés (par exemple pas de condition imposant le signe de  $\dot{\underline{g}}_t^*$ ). Nous déduisons alors de l'inégalité qui doit être vérifiée pour toute évolution virtuelle:

(i)

$$(51) \quad \forall \underline{s} \text{ et } \forall \dot{\underline{g}}_t^*(\underline{s}) - \left[ \underline{g}(\underline{u}(\underline{g}_t)) \cdot \underline{n} + \underline{\Sigma}(\lambda) \right] \cdot \dot{\underline{g}}_t^*(\underline{s}) + \dot{d} \left[ [\underline{g}(\underline{s})]_t, \dot{\underline{g}}_t^*(\underline{s}) \right] > 0$$

Si le comportement du système est indépendant du temps physique,  $\dot{d} \left[ [\underline{g}(\underline{s})]_t, \dot{\underline{g}}_t^* \right]$  est positivement homogène de degré un et représente la fonction d'appui d'un critère portant sur les forces de cohésion de la ligne de discontinuité. Nous avons là l'écriture duale d'un critère strict sur  $\underline{g}(\underline{u}(\underline{g}_t)) \cdot \underline{n} + \underline{\Sigma}(\lambda)$ .

(ii) Si un point de relaxation d'énergie  $a_{+m}$  n'est pas un point de discontinuité d'énergie dissipée  $a_{+m}^*$ , le choix successif de  $\dot{a}_{+m}^*$  et  $-\dot{a}_{+m}^*$  montre qu'alors  $G_{a_{+m}^*} = 0$  (de même pour  $a_{-n}$  et  $a_{-n}^*$ ). Pour avoir la stricte stabilité de l'équilibre, il faut donc que l'ensemble des points de relaxation d'énergie soit inclus dans celui des discontinuités de densité d'énergie dissipée.

L'évolution virtuelle est donc caractérisée par  $\left( \dot{\underline{g}}_t^*, \dot{a}_{+m}^*, \dot{a}_{-n}^* / \dot{a}_{+m}^* \geq 0, \dot{a}_{-n}^* \leq 0 \right)$  avec l'ensemble des points  $a_{+m}$  (respectivement  $a_{-n}$ ) pouvant être confondu avec  $a_{+m}^*$  (respectivement  $a_{-n}^*$ ) (avec si nécessaire certains points dont le taux de relaxation d'énergie est nul). L'écriture de la stricte positivité  $\forall \dot{a}_{+m}^* \geq 0$  (respectivement  $\forall \dot{a}_{-n}^* \leq 0$ ) implique:

$$G_{a_{+m}^*} < G_{c_{a_{+m}^*}} \quad (\text{respectivement } G_{a_{-n}^*} < G_{c_{a_{-n}^*}})$$

Nous obtenons bien là l'écriture d'un critère strict sur l'évolution des points de "discontinuité de densité d'énergie dissipée - relaxation d'énergie" (les deux ensembles de points étant confondus).

Résumons et rappelons donc la condition suffisante de stabilité d'un équilibre que nous avons obtenue :

Pour qu'un état d'équilibre du système soit strictement stable, il suffit :

1°) que l'ensemble des points de relaxation d'énergie soit inclus dans l'ensemble des points de discontinuité de densité d'énergie dissipée;

2°) pour ces points :

$$G_a < G_c \quad a$$

3°)  $\forall \underline{s} \in \mathcal{L}_t$  ;  $\forall \underline{g}^*(\underline{s})$

$$-\left[ \underline{g}(\underline{u}(\underline{g})) \cdot \underline{n} + \underline{\Sigma}(\lambda) \right] (\underline{s}) \cdot \underline{g}^*(\underline{s}) + d \left[ [\underline{g}(\underline{s})]_t, \underline{g}^*(\underline{s}) \right] > 0$$

Pour continuer nous admettons que s'il existe une évolution virtuelle autorisée permettant la création d'énergie cinétique, le système ne peut être en équilibre.

Nous déduisons alors une condition nécessaire pour tout état en équilibre :

Un état donné par la distribution de discontinuités  $\underline{g}_t$  sous un chargement  $\lambda$  ne sera en équilibre que si les inégalités précédentes sont vérifiées au sens large.

Nous avons ainsi la définition du critère d'évolution des discontinuités.

b) Règle d'écoulement

Nous nous plaçons dans l'hypothèse où le comportement du système est indépendant du temps physique [2].

Nous postulons que l'évolution réelle de la discontinuité se fait de manière à minimiser dans l'ensemble des évolutions autorisées la somme de la variation au premier ordre de l'énergie potentielle et de l'énergie dissipée.

On en conclut aisément que:

1°) en ce qui concerne les points de relaxation d'énergie:

$$(52, a) \quad \dot{a}_{+m} = 0 \text{ si } G_{a_{+m}} < G_{c_{a_{+m}}}$$

$$(52, b) \quad \dot{a}_{+m} \geq 0 \text{ si } G_{a_{+m}} = G_{c_{a_{+m}}}$$

$$(52, c) \quad \dot{a}_{-n} = 0 \text{ si } G_{a_{-n}} < G_{c_{a_{-n}}}$$

$$(52, d) \quad \dot{a}_{-n} \leq 0 \text{ si } G_{a_{-n}} = G_{c_{a_{-n}}}$$

2°) La vitesse de discontinuité réelle  $\dot{g}(s)$  est orthogonale au critère portant sur la force de cohésion  $[\underline{g}(\underline{u}(\underline{g})) \cdot \underline{n} + \underline{\Sigma}(\lambda)]$  défini par la fonction d'appui  $d\left[\left[\underline{g}\right]_{f,t}, \dot{\underline{g}}_{t}^*\right] \geq 0$ . En particulier l'évolution de la discontinuité n'est possible que si la force de cohésion atteint la frontière du critère.

c) Exemples- Fissure de Griffith

L'application des résultats précédents à l'exemple de la fissure de Griffith conduit au comportement suivant de la discontinuité:

- Les points de relaxation d'énergie aux extrémités de la fissure ne se déplaceront que si le taux de relaxation d'énergie  $G$  atteint la valeur critique  $G_c$ .

- Le vecteur contrainte normale est nul sur les lèvres de la fissure.

- Fissure de Barenblatt

L'application des résultats précédents à l'exemple de la fissure de Barenblatt conduit au comportement suivant de la discontinuité:

- Il n'y a pas de point de relaxation d'énergie;

- La force de cohésion sur les lèvres de la fissure est incluse dans le domaine suivant:

$$[-\sigma_c^n, \sigma_c^n] \underline{n} + [-\sigma_c^{tg}, \sigma_c^{tg}] \underline{t}$$

- Dans un premier temps l'évolution de la discontinuité ne se produit que sur la frontière de ce critère et orthogonalement à cette frontière:

$$\dot{g}^n \geq 0 \quad \text{si } \sigma^n = \sigma_c^n$$

$$\dot{g}^n \leq 0 \quad \text{si } \sigma^n = -\sigma_c^n$$

$$\dot{g}^{tg} \geq 0 \quad \text{si } \sigma^{tg} = \sigma_c^{tg}$$

$$\dot{g}^{tg} \leq 0 \quad \text{si } \sigma^{tg} = -\sigma_c^{tg}$$

- Lorsque la densité d'énergie dissipée a atteint la valeur critique  $G_c$  en un point, alors la force de cohésion devient et reste nulle  $\sigma^n = \sigma^{tg} = 0$ .





## Deuxième Partie

### METHODE NUMERIQUE DE RESOLUTION DU PROBLEME D'EVOLUTION

#### DE DISCONTINUITES DE DEPLACEMENT DANS UN DOMAINE

#### BIDIMENSIONNEL ELASTIQUE FINI OU INFINI

Chapitre 1 : Méthode de discontinuités de déplacement

Chapitre 2 : Problème de discontinuités de déplacement  
dans un milieu élastique infini bidimensionnel

Chapitre 3 : Mise en oeuvre numérique

Chapitre 4 : Fonctions de forme affines

Chapitre 5 : Tests et validation

Cette deuxième partie qui constitue notre principal travail est consacrée à la construction d'un outil numérique bien adapté aux problèmes de fissures, plus généralement aux problèmes de discontinuités de déplacement.

La méthode de discontinuités de déplacement que nous choisissons et développons est une méthode d'équations intégrales. Elle utilise la représentation par des potentiels de double couche. Nous commençons par faire une présentation variationnelle de cette méthode (chapitre 1). Cette méthode s'appuie sur la solution analytique du problème élastique de discontinuités de déplacement dans le milieu infini. Cette solution analytique dans le cas du milieu bidimensionnel sera donnée au chapitre 2. La construction d'un problème approché dans un espace de dimension fini (discrétisation) sera décrite au chapitre 3 d'une manière formelle, puis nous donnerons au chapitre 4 toutes les solutions analytiques des champs mécaniques et des coefficients de matrice de rigidité pour des fonctions de forme affines de discontinuités de déplacement. A titre de validation, cette méthode sera appliquée aux problèmes de multifissures dans des domaines finis et infinis. Un exemple de fissure de Barenblatt sera également traité (chapitre 5).



## Introduction

Nous venons de proposer une approche cinématique des problèmes d'évolution des lignes de discontinuités de déplacement dans un domaine élastique. Ces problèmes d'évolution sont plus généraux que les problèmes de propagation de fissure de Griffith puisque des forces de cohésion ou de frottement dépendant de la fonction de discontinuités de déplacement peuvent être présentes sur ces lignes.

Nous avons explicité l'énergie potentielle totale  $P$  en fonction de  $g(\underline{s})$ , la discontinuité de déplacement. Nous avons montré que notre modèle prend en compte deux types de forces dissipatives, celles réparties sur la ligne de discontinuités de déplacement et celles concentrées aux points de relaxation d'énergie. Les forces dissipatives réparties correspondent aux forces de cohésion dans le modèle de fissure de Barenblatt ou aux forces de frottement sur les fissures en compression; les points de relaxation d'énergie sont par exemple les pointes de fissure de Griffith. En ces points, la fonction de discontinuités de déplacement a une pente infinie: plus précisément, sa dérivée se comporte comme  $1/\sqrt{r}$ ,  $r$  étant la distance entre le point considéré et le point de relaxation d'énergie.

Les critères d'évolution ont été retrouvés par la minimisation au premier ordre de la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie dissipée. Ces critères se traduisent par des inégalités entre les forces (réparties ou concentrées) exercées sur la ligne de discontinuités de déplacement et leurs valeurs critiques, i.e. les valeurs des forces dissipatives, fonction éventuellement de l'état au point considéré.

Dans cette partie, nous allons proposer une méthode numérique pour résoudre les problèmes de discontinuités de déplacement.

Il existe deux grandes catégories de méthodes de résolution numérique: La Méthode des Eléments Finis et la Méthode des Eléments de Contour (ou Méthode des Equations Intégrales).



La Méthode des Eléments Finis qui est une méthode puissante et générale fait une approximation des champs physiques dans le domaine entier. Elle conduit donc à résoudre un problème discrétisé avec un grand nombre de degrés de liberté si l'on veut faire une description fine des champs.

La Méthode des Eléments de Contour consiste à établir d'abord une relation entre les valeurs des champs en un point quelconque et les valeurs des champs sur les contours. On réduit ainsi un problème tridimensionnel à un problème bidimensionnel (ou un problème bidimensionnel à un problème unidimensionnel). Les valeurs des champs en un point quelconque du domaine seront calculées à partir de la solution sur les contours. Bien que cette méthode s'applique aussi aux problèmes d'élasticité des domaines homogènes par morceaux, elle perd son avantage lorsque le domaine est fortement hétérogène.

La Méthode des Eléments Finis a connu beaucoup de difficultés en mécanique de la rupture à cause de la singularité des champs aux voisinages des extrémités des fissures. Différentes techniques ont été proposées pour surmonter ces difficultés. Ces techniques consistent à introduire des éléments spéciaux en pointe de fissure, ayant des fonctions d'interpolation capables de représenter les bonnes singularités pour les déplacements [TRACER, 1971], [TSAMASPHYROS, 1986]. Mais ces procédés semblent mal adaptés au calcul direct de dérivées de l'énergie, puisque en règle général la simulation de la progression de fissure nécessite encore à chaque étape une modification du maillage. Plusieurs auteurs proposent de contourner cette difficulté, soit en proposant de résoudre le problème dans un référentiel mobile avec la pointe de la fissure [NGUYEN, 1985], soit en préconisant l'utilisation d'une référence fixe -l'état initial du solide- et une méthode de type Lagrangienne, permettant de calculer les dérivées de l'énergie à partir de grandeurs définies sur le domaine fixe [DESTUYNDER, 1982]. B.FEDELICH [FEDELICH, 1990] a récemment proposé d'utiliser une transformation conforme, de sorte qu'un domaine contenant la pointe de la fissure et son parcours futur soit l'image d'un domaine fixe. L'une des originalités de son approche est que le changement de géométrie permet d'effectuer des variations infinitésimales de longueur de fissure au voisinage d'une longueur initiale mais aussi des extensions finies de fissure tout en conservant le maillage de départ.

Parmi les Méthodes des Eléments de Contour (Méthodes des Equations Intégrales), on distingue deux types de formulation : l'une directe, l'autre indirecte.

L'approche directe est basée sur le théorème de réciprocité et la solution fondamentale correspondant au champ de déplacement créé dans un massif infini par une force ponctuelle. La principale difficulté de cette méthode est dans la régularisation des équations intégrales, la présence de fissures rendant la régularisation plus difficile [SLADEK, 1983, 1986] [BONNET, 1986].

Dans l'approche indirecte, on résoud d'abord un problème auxiliaire que l'on obtient soit par la représentation des potentiels de simple couche en prolongeant le champ de déplacement de manière continue au milieu infini entier, soit par la représentation des potentiels de double couche en prolongeant les champs au milieu infini tout entier de façon que le champ de contrainte soit continu [KUPRADZE, 1963] [BUI, 1977] [NEDELEC, 1977, 1982]. Ce problème auxiliaire respecte les mêmes conditions de contour que le problème réel. Une fois la solution de ce problème sur les contours connue, on peut calculer les valeurs des champs en un point quelconque dans le milieu infini. De ce fait, deux problèmes sont résolus simultanément : le problème intérieur (domaine fini) et le problème extérieur (domaine non borné avec cavités). Du fait que les valeurs des champs physiques n'apparaissent pas dans le problème auxiliaire, on peut appeler cette formulation Méthode Indirecte des Eléments de Contour.

La méthode de résolution appelée Méthode des Discontinuités de Déplacement [CROUCH, 1976, 1983] que nous choisissons et développons pour résoudre notre problème, utilise la représentation par des potentiels de double couche. La méthode de CROUCH consiste à approcher le contour et les fissures par des lignes droites par morceaux et la fonction de discontinuités de déplacement par une fonction constante sur chaque segment de droite. Cela introduit des singularités de type pôles aux extrémités des segments. Cette méthode a été développée plus tard par CRAWFORD, CURRAN [CRAWFORD, 1982] et l'équipe de J.P.HENRY à l'E.U.D.I.L. [BOUHADDANE, 1987] [MOREL, 1987] [BELKACEMI, 1988, 1989]. Dans notre approche variationnelle, la fonction de discontinuités de déplacement sera interpolée par des fonctions affines, nous assurons ainsi la continuité de cette fonction et évitons donc les fortes singularités de type pôles.

Nous allons faire (chapitre 1) une présentation variationnelle de la méthode des discontinuités de déplacement. Cette méthode s'appuie sur la solution analytique du problème élastique d'une fonction quelconque de discontinuités de déplacement sur une courbe quelconque dans un milieu élastique bidimensionnel infini. Cette solution analytique sera donnée dans le deuxième chapitre. Le troisième chapitre expose la démarche pour construire un problème approché dans un espace de dimension finie qui conduit à la résolution d'un système d'équations linéaires. Dans le chapitre 4, nous approcherons les lignes de discontinuités de déplacement et le contour par des lignes droites par morceaux et la fonction de discontinuités de déplacement par des fonctions affines par morceaux et nous donnerons dans l'annexe la solution analytique des champs pour ce type de fonction d'interpolation. Nous avons ainsi une approximation plus fine et plus régulière qu'avec les fonctions de forme constantes par morceaux dans l'approche de Crouch. Des problèmes de fissures seront traités à titre de validation de la méthode (chapitre 5).

Nous verrons également comment calculer les taux de restitution d'énergie aux points de relaxation d'énergie sans avoir à résoudre le problème après incrément. Cette méthode consiste à dériver l'énergie en fonction de la position du noeud qui coïncide avec la pointe de fissure en laissant les autres noeuds inchangés, ainsi seules les deux lignes et les deux colonnes dont les coefficients sont liés à la position de ce noeud changent dans la matrice. Le calcul de variation d'énergie nécessite seulement les nouvelles valeurs des coefficients de ces deux lignes et de ces deux colonnes. Cette technique est aussi utilisée dans la méthode des éléments finis, elle consiste à changer le maillage seulement dans la région voisine de la pointe de la fissure. Cette méthode de calcul est donc très économique. Ceci est d'autant plus vrai lorsque l'on veut suivre la progression de fissure.

Par souci de simplification de présentation, nous nous limitons aux problèmes de fissure de Griffith. C'est-à-dire que nous nous contentons de minimiser l'énergie potentielle totale et de chercher le taux de restitution d'énergie comme en mécanique de la rupture classique. Lorsque des phénomènes dissipatifs se produisent sur les lignes de discontinuités de déplacement, la solution minimise la somme de l'énergie potentielle totale et de l'énergie dissipée (voir la première partie), nous illustrons cette minimisation en traitant le problème de la fissure de Barenblatt à la fin de cette partie.



## CHAPITRE 1

## METHODE DES DISCONTINUITES DE DEPLACEMENT

La méthode des discontinuités de déplacement utilise la représentation par des potentiels de double couche. Elle prolonge les champs mécaniques dans  $\mathbb{R}^2$  entier de façon que la contrainte normale soit continue dans  $\mathbb{R}^2$ , mais le déplacement est discontinu sur la frontière du domaine.

Nous allons faire une présentation variationnelle de la méthode des discontinuités de déplacement. Pour raison de simplicité et de clarté, nous faisons cette présentation dans le cas de problèmes élastiques (lignes de discontinuité données, pas de dissipation d'énergie sur ces lignes). La solution minimise donc l'énergie potentielle totale, différence d'énergie de déformation élastique et de travail des efforts extérieurs. La méthode des discontinuités de déplacement est aussi valable lorsque la dissipation d'énergie est présente sur des lignes de discontinuités de déplacement, dans ce cas, la solution minimise la somme de l'énergie potentielle totale et de l'énergie dissipée (cf. partie 1). On perd en général la linéarité, une méthode itérative doit être alors adoptée. Nous illustrons ceci au chapitre 5 sur l'exemple de la fissure de Barenblatt.

Nous nous limitons aux problèmes avec contrainte imposée sur la frontière du domaine, nous verrons lors de la discrétisation comment respecter des conditions cinématiques pour les problèmes avec des conditions aux limites mixtes ou en déplacement.



a) Problème intérieur

Soit  $\Omega$  un ouvert borné dans  $\mathbb{R}^2$ , de frontière  $\Gamma$ ,  $\underline{T}_d$  est la contrainte imposée sur  $\Gamma$ . Le champ de déplacement  $\underline{U}^*$  peut être discontinu sur une ligne (ou des lignes)  $\mathcal{L}_{int}$ .

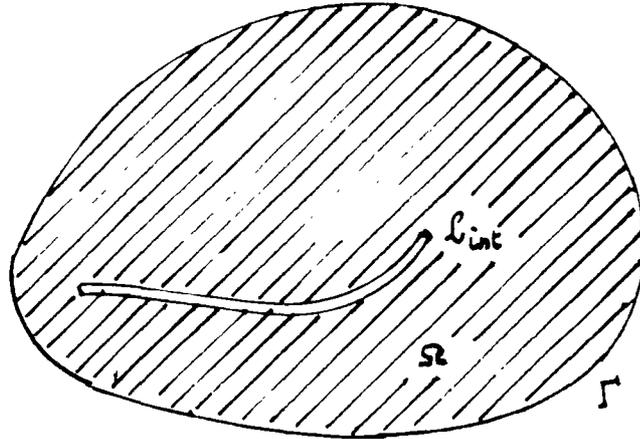


fig1: problème intérieur, domaine borné

Notons  $K_{\Omega}(\mathcal{L}_{int})$  l'ensemble des champs de déplacement  $\underline{U}^*$  et des discontinuités de déplacement  $\underline{g}^*$  sur  $\mathcal{L}_{int}$  cinématiquement admissibles:

$$(1) \quad K_{\Omega}(\mathcal{L}_{int}) \equiv \left\{ \underline{U}^*, \underline{g}^* / \llbracket \underline{U}^* \rrbracket = [\underline{U}^*]_{\mathcal{L}_{int}^+} - [\underline{U}^*]_{\mathcal{L}_{int}^-} = \underline{g}^* \text{ sur } \mathcal{L}_{int} \right\}$$

Notons  $(\underline{U}_{int}, \underline{g}_{int})$  la solution du problème élastique:

$$\begin{cases} \underline{\text{div}}(\underline{g}) = \underline{0} & \text{dans } \Omega \\ \underline{g} \cdot \underline{n} = \underline{0} & \text{sur } \mathcal{L}_{int} \\ \underline{g} \cdot \underline{n} = \underline{T}_d & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

où  $\underline{g} = \mathbb{L} : \underline{\epsilon}$  désigne le champ de contrainte, avec  $\mathbb{L}$  le tenseur de rigidité élastique et  $\underline{\epsilon}$  le champ de déformation ( $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i})$ )

La solution  $(\underline{U}_{int}, \underline{g}_{int})$  minimise dans l'ensemble  $K_{\Omega}(\mathcal{L}_{int})$  l'énergie potentielle totale  $P_{\Omega}$  :

$$(2) \quad P_{\Omega}(\underline{U}^*, \underline{g}^*) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\epsilon}(\underline{U}^*) : \underline{\mathbb{L}} : \underline{\epsilon}(\underline{U}^*) d\omega - \int_{\Gamma} \underline{\mathbb{T}}_d \cdot \underline{U}^* ds$$

b) Problèmes extérieurs complémentaires

Notons  $\Omega'$  l'intérieur du complémentaire de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^2$  dont la frontière est encore  $\Gamma$ . Nous voulons avoir la continuité de la contrainte sur  $\Gamma$ , donc la condition aux limites pour  $\Omega'$  est la contrainte  $-\underline{\mathbb{T}}_d$  sur  $\Gamma$ . On peut en outre choisir arbitrairement une ligne (ou des lignes) de discontinuité  $\mathcal{L}_{ext}$  incluse dans  $\Omega'$ .

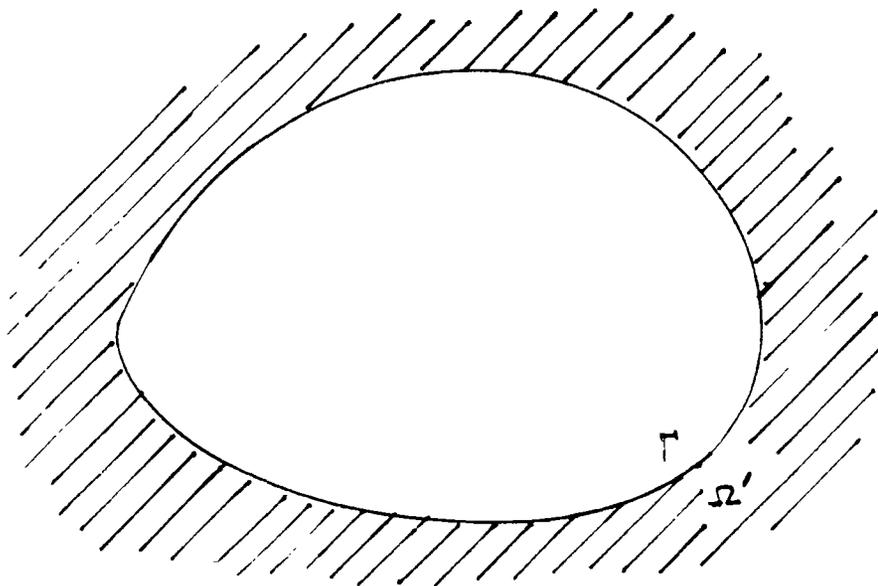


fig2: problèmes complémentaires au problème intérieur, domaine non borné

Notons  $K_{\Omega'}(\mathcal{L}_{ext})$  l'ensemble des champs de déplacement  $\underline{U}^*$  et des discontinuités de déplacement  $\underline{g}^*$  sur  $\mathcal{L}_{ext}$  cinématiquement admissibles:

$$(3) \quad K_{\Omega'}(\mathcal{L}_{ext}) \equiv \left\{ \underline{U}^*, \underline{g}^* / \llbracket \underline{U}^* \rrbracket = [\underline{U}^*]_{\mathcal{L}_{ext}^+} - [\underline{U}^*]_{\mathcal{L}_{ext}^-} = \underline{g}^* \text{ sur } \mathcal{L}_{ext} \right\}$$

Notons  $(\underline{U}_{ext}, \underline{g}_{ext})$  la solution du problème élastique:

$$\begin{cases} \underline{\operatorname{div}}(\underline{g}) = \underline{0} & \text{dans } \Omega' \\ \underline{g} \cdot \underline{n} = \underline{0} & \text{sur } \Gamma_{ext} \\ \underline{g} \cdot \underline{n} = -\underline{T}_d \text{ sur } \Gamma; \quad \underline{g} = \underline{0} \text{ à l'infini} \end{cases}$$

La solution  $(\underline{U}_{ext}, \underline{g}_{ext})$  minimise dans  $K_{\Omega'}(\Gamma_{ext})$  l'énergie potentielle totale  $P_{\Omega'}$  :

$$(4) \quad P_{\Omega'}(\underline{U}^*, \underline{g}^*) = \frac{1}{2} \int_{\Omega'} \underline{\epsilon}(\underline{U}^*) : \underline{\mathbb{L}} : \underline{\epsilon}(\underline{U}^*) \, d\omega - \int_{\Gamma} (-\underline{T}_d) \cdot \underline{U}^* \, ds$$

Nous venons d'associer des problèmes extérieurs à un problème intérieur. De manière symétrique, on peut associer des problèmes intérieurs à un problème extérieur.

c) Problème complémenté

(union de problème intérieur et de problème extérieur associés)

Plaçons - nous maintenant dans le milieu infini ( $\mathbb{R}^2$  entier) où  $\Gamma$  correspond aussi à une ligne de discontinuités de déplacement. Nous distinguons les deux facettes de  $\Gamma$  qui sont  $\Gamma^+$  et  $\Gamma^-$  comme nous avons fait pour  $\Gamma_{int}$  et  $\Gamma_{ext}$ .

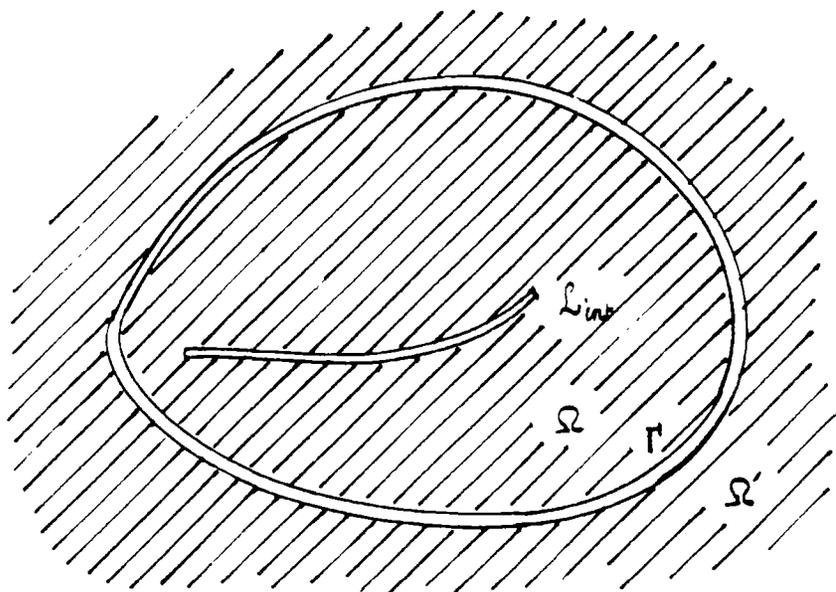


fig3: Problème complémenté, milieu infini

Considérons le champ de déplacement  $\underline{U}$  et la discontinuité de déplacement  $\underline{g}$  dans le milieu infini tel que:

$$(5) \quad \begin{cases} \underline{U} = \underline{U}_{int} & \text{dans } \Omega; & \underline{g} = \underline{g}_{int} & \text{sur } \mathcal{L}_{int} \\ \underline{U} = \underline{U}_{ext} & \text{dans } \Omega'; & \underline{g} = \underline{g}_{ext} & \text{sur } \mathcal{L}_{ext} \\ \underline{g} = [\underline{U}] = [\underline{U}]_{\Gamma^+} - [\underline{U}]_{\Gamma^-} = \underline{U}_{int} - \underline{U}_{ext} & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Notons maintenant  $\mathcal{L}$  l'ensemble des lignes de discontinuités de déplacement,  $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}_{int} \cup \mathcal{L}_{ext} \cup \Gamma$  et  $\underline{g}(\underline{s})$  la fonction de discontinuités de déplacement sur  $\mathcal{L}$ :

$$(6) \quad \underline{g}^*(\underline{s}) = [\underline{U}^*] = [\underline{U}^*]_{\mathcal{L}^+} - [\underline{U}^*]_{\mathcal{L}^-}$$

Notons  $K_{\infty}(\mathcal{L})$  l'ensemble des champs de déplacement  $\underline{U}^*$  et des discontinuités de déplacement  $\underline{g}^*$  cinématiquement admissibles:

$$(7) \quad K_{\infty}(\mathcal{L}) \equiv \left\{ \underline{U}^*, \underline{g}^* / [\underline{U}^*] = [\underline{U}^*]_{\mathcal{L}^+} - [\underline{U}^*]_{\mathcal{L}^-} = \underline{g}^* \text{ sur } \mathcal{L} \right\}$$

Par définition du couple  $(\underline{U}, \underline{g})$ , sa restriction à  $\Omega$  est la solution du problème intérieur dans  $\Omega$  et minimise donc  $P_{\Omega}$ ; le même sa restriction à  $\Omega'$  est la solution du problème extérieur complémentaire dans  $\Omega'$  et minimise donc  $P_{\Omega'}$ . Le couple  $(\underline{U}, \underline{g})$  minimise donc ce que nous appelons l'énergie potentielle totale du milieu infini  $P = P_{\Omega} + P_{\Omega'}$ , dans l'ensemble  $K_{\infty}(\mathcal{L})$ :

$$(8) \quad P(\underline{U}^*, \underline{g}^*) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{U}^*) : \underline{\underline{L}} : \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{U}^*) d\omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega'} \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{U}^*) : \underline{\underline{L}} : \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{U}^*) d\omega - \int_{\Gamma} \underline{\underline{T}}_d \cdot [\underline{U}^*] ds$$

En appliquant le principe des puissances virtuelles, nous obtenons

$$(9) \quad P(\underline{U}^*, \underline{g}^*) = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}} \underline{\sigma}(\underline{U}^*) \cdot \underline{n} \cdot [\underline{U}^*] ds - \int_{\Gamma} \underline{T}_d \cdot [\underline{U}^*] ds$$

où  $\underline{n}$  désigne le vecteur normal de  $\mathcal{L}^-$ ,  $\underline{\sigma}(\underline{U}^*) \equiv \underline{\mathbb{L}} : \underline{\epsilon}(\underline{U}^*)$  désigne le champ de contrainte associé à  $\underline{U}^*$ .

d) construction d'une méthode des éléments de contour



Nous proposons de procéder à la minimisation de  $P(\underline{U}^*, \underline{g}^*)$  suivant la démarche suivante: on minimise d'abord  $P(\underline{U}^*, \underline{g}^*)$  par rapport à la variable  $\underline{U}^*$  dans tous les sous-ensembles de  $K_{\infty}(\mathcal{L})$  où la variable  $\underline{g}^*$  est fixée, puis on cherche la plus petite valeur de  $P$  parmi ces minimums en faisant varier  $\underline{g}^*$ . La solution de minimisation de  $P$  à  $\underline{g}^*$  fixe est la solution élastique  $\underline{U}(\underline{g}^*)$  du problème à discontinuité de déplacement  $\underline{g}^*$  imposée dans  $\mathbb{R}^2$  sur  $\mathcal{L}$ . Nous allons donner cette solution dans le prochain chapitre. Les variables se réduisent alors à la seule discontinuité de déplacement  $\underline{g}^*$ . La solution  $\underline{g}$  minimise donc  $P(\underline{g}^*)$ :

$$(10) \quad P(\underline{g}^*) = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}} \underline{\sigma}(\underline{U}(\underline{g}^*)) \cdot \underline{n} \cdot \underline{g}^* ds - \int_{\Gamma} \underline{T}_d \cdot \underline{g}^* ds$$

REMARQUE: Dans cette dernière équation,  $\underline{\sigma}(\underline{U}(\underline{g}^*))$  est linéaire en  $\underline{g}^*$ , le premier terme est donc quadratique en  $\underline{g}^*$ ; le dernier terme est linéaire en  $\underline{g}^*$ .

REMARQUE: La première étape de la minimisation de  $P(\underline{U}^*, \underline{g}^*)$  à  $\underline{g}^*$  fixe est importante car elle permet d'éliminer le champ inconnu  $\underline{U}^*$ . L'énergie potentielle totale devient ainsi une fonctionnelle de la seule variable  $\underline{g}^*$  qui est une variable définie sur les contours et sur les lignes de discontinuité.

De cette manière, nous construisons une méthode des éléments de contour (ou méthode des équations intégrales), le mot "contour" est au sens large puisqu'il comprend aussi les lignes de discontinuités de déplacement ou plutôt il fait partie des lignes de discontinuités de déplacement, d'où le nom "méthode de discontinuités de déplacement". Cette première étape de minimisation est d'autant plus importante lorsque des phénomènes dissipatifs se produisent sur des lignes de discontinuités de déplacement, puisque  $\underline{g}^*$  est la seule variable intéressante pour les études des phénomènes dissipatifs sur les lignes de discontinuités (cf. première partie).

Une fois la solution  $\underline{g}$  trouvée, on peut construire le champ de déplacement et le champ de contrainte dans tout le plan, en se servant de la solution analytique du problème élastique de lignes de discontinuités de déplacement.

La méthode des discontinuités de déplacement consiste à résoudre un problème intérieur ou un problème extérieur en passant par le problème complété.

La méthode des discontinuités de déplacement repose sur la solution analytique du problème élastique de discontinuités de déplacement dans le milieu infini. Nous allons donner cette solution dans le cas général en élasticité plane au prochain chapitre.

e) Régularisation de l'intégrale singulière

Reprenons l'équation (10) qui exprime l'énergie potentielle totale:

$$P(\underline{g}^*) = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}} \underline{g}(\underline{U}(\underline{g}^*)) \cdot \underline{n} \cdot \underline{g}^* \, ds - \int_{\Gamma} \underline{T}_d \cdot \underline{g}^* \, ds$$

La solution du problème élastique de discontinuités de déplacement permet d'écrire la contrainte normale sur  $\mathcal{L}$  sous forme analytique. La première intégrale dans le second membre de l'équation (10) est alors une intégrale double dont le noyau est singulier.

Dans la suite, nous proposons une régularisation de l'intégrale singulière.

Notons  $\underline{R}(\underline{z})$  la résultante des efforts exercés sur un segment allant du point infini au point  $\underline{z}$ ,  $\underline{R}(\underline{z})$  est indépendante du trajet suivi. Ceci résulte de l'équilibre du champ de contrainte. Nous noterons l'intégrale curviligne sous la forme:

$$\underline{R}(\underline{z}) = \int_{\infty}^{\underline{z}} \underline{g} \cdot \underline{n}(s) \, ds$$

La résultante  $\underline{R}(\underline{z})$  est donc un champ de vecteur dans  $\mathbb{R}^2$ . On peut en déduire le champ de contrainte à l'aide de la dérivée curviligne sur n'importe quel segment curviligne orienté. Soit donc  $(\underline{t}, \underline{n})$  un repère orthogonal direct en un point quelconque, nous avons:

$$(11) \quad \underline{g} \cdot \underline{n} = \underline{\nabla}(\underline{R}) \cdot \underline{t}$$

où  $\underline{\nabla}(\underline{R})$  est le gradient de  $\underline{R}$ .

donc :

$$\int_{\mathcal{L}} \underline{g}(\underline{U}(\underline{g}^*)) \cdot \underline{n} \cdot \underline{g}^* \, ds = \int_{\mathcal{L}} \underline{\nabla}(\underline{R}(\underline{g}^*)) \cdot \underline{t} \cdot \underline{g}^* \, ds$$

où  $\underline{R}(\underline{g}^*)$  est le champ "résultante" de la solution au problème élastique avec discontinuité  $\underline{g}^*$  imposée.

Faisons une intégration par partie en nous rappelant que  $\underline{g}^*(\underline{s})$  est supposé nul aux extrémités de  $\mathcal{L}$ . Nous avons :

$$(12) \quad \int_{\mathcal{L}} \underline{g}(\underline{U}(\underline{g}^*)) \cdot \underline{n} \cdot \underline{g}^* \, ds = - \int_{\mathcal{L}} \underline{R}(\underline{g}^*) \cdot \underline{g}^{*'} \, ds$$

où  $\underline{g}^{*'}$  désigne la fonction dérivée curviligne de  $\underline{g}^*$ .

Injectons cette relation dans l'expression de P, nous obtenons :

$$(13) \quad P(\underline{g}^*) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}} \underline{R}(\underline{g}^*)(s) \cdot \underline{g}^{*'}(s) \, ds - \int_{\Gamma} \underline{T}_d(s) \cdot \underline{g}^*(s) \, ds$$

Les noyaux des intégrales dans l'expression de  $\underline{R}$  sont plus réguliers que ceux dans l'expression de la contrainte (cf. chapitre suivant). L'équation (13) est donc une régularisation de l'équation (10). Nous illustrons ceci sur l'exemple d'une fissure droite dans le milieu infini.

illustration: une fissure rectiligne dans le milieu infini

Soit L une fissure droite dans le milieu infini,  $\Gamma$  est la partie de L où la contrainte  $\underline{T}_d$  est imposée. Dans ce cas, la contrainte est exprimée par une intégrale définie au sens de sa valeur principale de Cauchy portant sur  $\underline{g}^{*'}(x)$  (voir chapitre suivant):

$$(14) \quad \underline{g}(\underline{U}(\underline{g}^*))(y) \cdot \underline{n} = \frac{2\mu}{\chi+1} \frac{1}{\pi} \int_{\mathcal{L}}^* \frac{\underline{g}^{*'}(x)}{x-y} \, dx$$

La fonction  $\underline{g}^*(x)$  doit vérifier la condition de Hölder:

$\forall (x,y) \in L^2$  ,  $\exists A > 0$ ,  $0 \leq \mu < 1$  tel que

$$|\underline{g}^*(x) - \underline{g}^*(y)| \leq A|x-y|^\mu$$

L'équation (10) devient alors:

$$(15) \quad P(\underline{g}^*) = -\frac{1}{2} \frac{2\mu}{\chi+1} \frac{1}{\pi} \int_L \left( \int_L^* \frac{\underline{g}^*(x)}{x-y} dx \right) \cdot \underline{g}^*(y) dy - \int_{\Gamma \mathbb{T}_d} \underline{g}^* dy$$

Examinons maintenant l'équation (13). La résultante  $\underline{R}$  est aussi exprimée par une intégrale définie sur  $L$  au sens de sa valeur principale de Cauchy, mais cette intégrale porte sur  $\underline{g}^*(x)$  :

$$(16) \quad \underline{R}(\underline{g}^*)(y) = \frac{2\mu}{\chi+1} \frac{1}{\pi} \int_L^* \frac{\underline{g}^*(x)}{x-y} dx$$

L'équation (13) devient alors:

$$(17) \quad P(\underline{g}^*) = \frac{1}{2} \frac{2\mu}{\chi+1} \frac{1}{\pi} \int_L \left( \int_L^* \frac{\underline{g}^*(x)}{x-y} dx \right) \cdot \underline{g}^*(y) dy - \int_{\Gamma \mathbb{T}_d} \underline{g}^* dy$$

Dans l'équation (15) l'intégrale au sens de sa valeur principale de Cauchy porte sur  $\underline{g}^*(x)$ , elle porte sur  $\underline{g}^*(x)$  dans cette dernière relation. De ce fait, l'exigence sur la régularité de  $\underline{g}^*(x)$  est beaucoup moins forte dans cette dernière relation.

C'est l'équation (13) que nous allons discrétiser lors de la résolution numérique du problème. En particulier, la première intégrale nous servira pour construire la matrice.



## CHAPITRE 2

PROBLEME D'UNE LIGNE DE DISCONTINUITES DE DEPLACEMENT  
DANS UN MILIEU ELASTIQUE INFINI BIDIMENSIONNEL

Ce chapitre est consacré à la résolution analytique du problème de lignes de discontinuités de déplacement dans un milieu infini bidimensionnel élastique. La donnée du problème est donc le vecteur de discontinuités de déplacement. La solution du "problème dual" dans lequel on impose la contrainte sur des lignes qui correspondent aux positions des fissures dans le milieu infini bidimensionnel est bien connue dans la littérature. Nous allons résoudre le problème de discontinuités de déplacement en utilisant la méthode de Muskhelishvili (théorie d'élasticité plane). La solution analytique de ce problème est intéressante pour nous car, d'une part elle illustre et complète l'approche cinématique des problèmes de discontinuités de déplacement, d'autre part elle est nécessaire pour la mise en oeuvre de la méthode de résolution numérique des problèmes de discontinuités de déplacement dans un domaine borné ou non borné avec éventuellement des cavités. En particulier elle permet de calculer analytiquement les champs de déplacement et de contrainte à l'aide des discontinuités.



a) position du problème

Considérons le milieu infini bidimensionnel élastique sans contrainte imposée. Le déplacement est discontinu sur la ligne  $\ell$ . Nous notons  $\underline{s}=(s_1, s_2)$  un point de cette ligne et  $s$  son affixe complexe  $s=s_1+is_2$ .

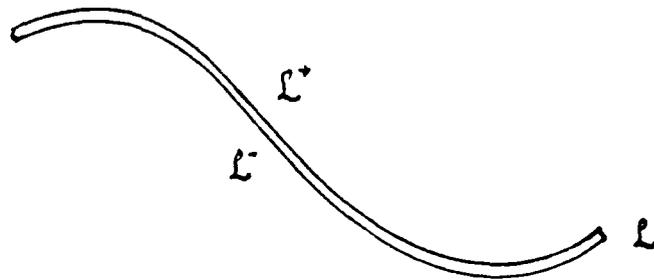


fig4:  $\ell$ : ligne de discontinuités de déplacement dans le milieu infini

Soient  $g_1(s)$  et  $g_2(s)$  les deux composantes du vecteur de discontinuités de déplacement dans le repère absolu. Notons  $g(s)=g_1(s)+ig_2(s)$ . Les conditions aux limites sur le champ de contrainte  $\underline{q}$  et le champ de déplacement  $\underline{u}$  sont donc:

$$(18,a) \quad \sigma_{ij} = 0 \quad \text{à l'infini} \quad \forall i,j$$

$$(18,b) \quad (u_1+iu_2)_{\ell^+} - (u_1+iu_2)_{\ell^-} = g(s)$$

$$(18,c) \quad [\underline{q} \cdot \underline{n}]_{\ell^+} + [\underline{q} \cdot \underline{n}]_{\ell^-} = 0$$

où  $u_1$  et  $u_2$  désignent les deux composantes du vecteur de déplacement dans le repère absolu; les  $\sigma_{ij}$  désignent les composantes du tenseur de contrainte.

b) résolution du problème

Nous avons à résoudre un problème élasticité plane. La théorie d'élasticité plane (méthode de MUSKELISHVILI [16]) nous amène à exprimer le champ de contrainte et le champ de déplacement à l'aide de deux fonctions analytiques  $\varphi(z)$  et  $\psi(z)$  de la variable  $z$  dans le domaine:

$$(19,a) \quad u_1 + iu_2 = \frac{1}{2\mu} ( \chi\varphi(z) - \overline{z\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} )$$

$$(19,b) \quad \sigma_{11} + \sigma_{22} = 2 ( \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} )$$

$$(19,c) \quad \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{21} = 2 ( \overline{z\varphi''(z)} + \psi'(z) )$$

où  $\chi = 3 - 4\nu$  en déformation plane ,

$$\chi = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \text{ en contrainte plane.}$$

ces formules sont dues à Kolosov .

Notons  $R(z)$  la fonction suivante:

$$(20) \quad R(z) = -i ( \varphi(z) + \overline{z\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} )$$

La résultante  $\mathfrak{R} = X + iY$  exercée sur le segment orienté  $(a \rightarrow b)$  est donnée par:

$$(21) \quad \mathfrak{R} = R(b) - R(a)$$

$\mathfrak{R}$  ne dépend, bien sûr, que des extrémités du segment curviligne  $(a \rightarrow b)$ . Ceci résulte de l'équilibre du champ de contrainte.

Nous allons maintenant chercher la solution  $\varphi$  et  $\psi$ .

La continuité de contrainte normale à travers  $\mathcal{L}$  entraîne celle de la fonction  $R(z)$ :

$$(22) \quad [R(s)]_{\mathcal{L}^+} - [R(s)]_{\mathcal{L}^-} = 0 \quad s \in \mathcal{L}$$

En faisant la somme de l'équation (18,b) et (22), et en utilisant les représentations (19,a) et (20), nous obtenons:

$$\frac{\chi+1}{2\mu} \left( [\varphi(s)]_{\mathcal{L}^+} - [\varphi(s)]_{\mathcal{L}^-} \right) = g(s) \quad s \in \mathcal{L}$$

or  $\varphi(z)$  est une fonction analytique dans le reste du plan. Elle est donc donnée par la somme d'une intégrale de Cauchy, d'un polynôme caractérisant le comportement de  $\varphi$  à l'infini et d'éventuelles fractions rationnelles dont les pôles seraient sur la ligne de discontinuité. On peut vérifier que le polynôme est nul à cause de la contrainte nulle à l'infini et qu'il n'y a pas de pôle grâce à l'hypothèse de continuité de la fonction  $g(s)$  et à ses valeurs nulles aux extrémités de  $\mathcal{L}$ . La fonction  $\varphi(z)$  est donc donnée par une intégrale de Cauchy:

$$(23) \quad \varphi(z) = \frac{2\mu}{\chi+1} \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{g(s)}{(s-z)} ds$$

La dérivée de cette fonction s'écrit:

$$\varphi'(z) = \frac{2\mu}{\chi+1} \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{g(s)}{(s-z)^2} ds$$

par intégration par parties, la fonction  $g(s)$  étant continue et ayant des valeurs nulles aux extrémités de  $\mathcal{L}$ , nous avons:

$$(24) \quad \varphi'(z) = \frac{2\mu}{\chi+1} \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{g'(s)}{(s-z)} ds$$

Nous allons maintenant calculer  $\psi(z)$ . Partant des équations (20) et (22), nous avons:

$$(\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)})_{\mathcal{L}^+} - (\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)})_{\mathcal{L}^-} = 0$$

soit

$$\overline{\psi(z)}_{\mathcal{L}^+} - \overline{\psi(z)}_{\mathcal{L}^-} = -(\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)})_{\mathcal{L}^+} + (\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)})_{\mathcal{L}^-}$$

la conjuguée de cette équation est:

$$(\psi(z))_{\mathcal{L}^+} - (\psi(z))_{\mathcal{L}^-} = -(\overline{\varphi(z)} + \overline{z\varphi'(z)})_{\mathcal{L}^+} + (\overline{\varphi(z)} + \overline{z\varphi'(z)})_{\mathcal{L}^-}$$

or nous connaissons la solution  $\varphi(z)$  ainsi que sa dérivé, nous avons:

$$(\overline{\varphi(z)} + \overline{z\varphi'(z)})_{\mathcal{L}^+} - (\overline{\varphi(z)} + \overline{z\varphi'(z)})_{\mathcal{L}^-} = \frac{2\mu}{\chi+1} (\overline{g(z)} + \overline{zg'(z)})$$

donc

$$(\psi(z))_{\mathcal{L}^+} - (\psi(z))_{\mathcal{L}^-} = -\frac{2\mu}{\chi+1} (\overline{g(z)} + \overline{zg'(z)})$$

or  $\psi(z)$  est aussi une fonction analytique en dehors de  $\mathcal{L}$ . Pour les mêmes raisons que  $\varphi(z)$ , elle s'exprime par une intégrale de Cauchy

$$(25) \quad \psi(z) = -\frac{2\mu}{\chi+1} \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{\overline{g(s)} + \overline{sg'(s)}}{(s-z)} ds$$

Le problème est donc résolu. Les champs mécaniques sont représentés par  $\varphi$  et  $\psi$ .

c) validation de la solution analytique

A titre de validation de la solution analytique de  $\varphi$  et  $\psi$ , nous allons examiner un cas simple où  $l$  est un segment de droite noté  $L$  situé sur l'axe réel et calculer le déplacement et la fonction de la résultante des forces en des points sur les facettes supérieure et inférieure de  $L$ .

1°) intégrale de Cauchy

Rappelons que si  $F(z)$  est une intégrale de Cauchy

$$(26) \quad F(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{f(s)}{(s-z)} ds$$

et si  $f(s)$  vérifie la condition de Hölder:

$$\forall (s,t) \in L^2, \exists A > 0, 0 \leq \mu < 1 \text{ tel que:}$$

$$|f(s) - f(t)| \leq A |s - t|^\mu$$

Alors, lorsque  $z$  tend vers un point de la facette supérieure  $t^+$  ou un point de la facette inférieure  $t^-$ , les valeurs limites de  $F(z)$  sont

$$(27, a) \quad F(t^+) = \frac{1}{2} f(t) + \frac{1}{2i\pi} \int_L^* \frac{f(s)}{(s-t)} ds$$

$$(27, b) \quad F(t^-) = -\frac{1}{2} f(t) + \frac{1}{2i\pi} \int_L^* \frac{f(s)}{(s-t)} ds$$

où l'intégrale étoilée est définie au sens de sa valeur principale de Cauchy.

2°) calcul du déplacement sur L

Calculons d'abord le déplacement sur les facettes de L. Le champ de déplacement est représenté par les fonctions  $\varphi(z)$  et  $\psi(z)$  (cf. 19,a), les solutions  $\varphi(z)$  et  $\psi(z)$  sont données par (23) et (25) et la fonction dérivée de  $\varphi(z)$  est donnée par (24). nous pouvons donc écrire:

$$(28) \quad u_1 + iu_2 = \frac{1}{\chi+1} \left( \frac{\chi}{2i\pi} \int_L \frac{g(s)}{(s-z)} ds - z \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{g'(s)}{(s-z)} ds + \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{\overline{g(s) + s\overline{g'(s)}}}{(s-z)} ds \right)$$

comme  $s=x$  est un réel

$$u_1 + iu_2 = \frac{1}{\chi+1} \left( \frac{\chi}{2i\pi} \int_L \frac{g(x)}{(x-z)} ds + \frac{z}{2i\pi} \int_L \frac{\overline{g'(x)}}{(x-\bar{z})} dx - \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{g(x) + x \overline{g'(x)}}{(x-\bar{z})} dx \right)$$

En regroupant les intégrales nous avons

$$u_1 + iu_2 = \frac{1}{\chi+1} \left( \frac{\chi}{2i\pi} \int_L \frac{g(x)}{(x-z)} ds - \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{g(x)}{(x-\bar{z})} dx - \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{(x-z) \overline{g'(x)}}{(x-\bar{z})} dx \right)$$

Si  $z$  tend vers un point  $y$  de L, la dernière intégrale devient nulle. Il suffit pour s'en convaincre d'écrire  $x-z = (x-\bar{z}) + (\bar{z}-z)$  et d'utiliser le fait que la fonction  $g(x)$  est continue et nulle aux extrémités de L et  $\bar{z}-z \rightarrow 0$  si  $z \rightarrow y \in L$ . En plus, si  $g(x)$  vérifie la condition de Hölder, les deux premières intégrales qui sont des intégrales de Cauchy admettent des limites à gauche et à droite sur L. Les valeurs limites à gauche et à droite du déplacement sont donc:

$$(29,a) \quad \limite_{z \rightarrow y^+} u_1 + iu_2 = \frac{1}{2} g(y) + \frac{\chi-1}{\chi+1} \frac{1}{2i\pi} \int_L^* \frac{g(x)}{(x-y)} ds$$

$$(29,b) \quad \limite_{z \rightarrow y^-} u_1 + iu_2 = -\frac{1}{2} g(y) + \frac{\chi-1}{\chi+1} \frac{1}{2i\pi} \int_L^* \frac{g(x)}{(x-y)} ds$$

En faisant la différence de ces deux valeurs limites, nous vérifions que la discontinuité de déplacement est  $g(y)$ .

3°) calcul de la fonction de la résultante des forces sur L

Calculons maintenant la fonction de la résultante des forces sur les facettes de L. La fonction de la résultante est représentée par les fonctions  $\varphi(z)$  et  $\psi(z)$  (équation 20) dont la solution permet d'écrire:

$$(30) \quad R = (-i) \frac{2\mu}{\chi+1} \left( \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{g(s)}{(s-z)} ds + z \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{g'(s)}{(s-z)} ds - \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{\overline{g(s) + s g'(s)}}{(s-z)} ds \right)$$

comme  $s=x$  est un réel

$$R = (-i) \frac{2\mu}{\chi+1} \left( \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{g(x)}{(x-z)} dx - \frac{z}{2i\pi} \int_L \frac{\overline{g'(x)}}{(x-\bar{z})} dx + \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{g(x) + x \overline{g'(x)}}{(x-\bar{z})} dx \right)$$

En regroupant les intégrales nous avons:

$$(31) \quad R = (-i) \frac{2\mu}{\chi+1} \left( \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{g(x)}{(x-z)} dx + \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{g(x)}{(x-\bar{z})} dx + \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{(x-z) \overline{g'(x)}}{(x-\bar{z})} dx \right)$$

Si  $z$  tend vers un point  $y$  de L, on peut faire un raisonnement analogue à ce qui est fait pour le déplacement. On obtient les valeurs limites à gauche et à droite de la fonction de résultante:

$$(32) \quad \lim_{z \rightarrow y^+} R = \lim_{z \rightarrow y^-} R = - \frac{2\mu}{\chi+1} \frac{1}{\pi} \int_L^* \frac{g(x)}{(x-y)} dx$$

La continuité de la fonction de résultante des forces est donc vérifiée.

4°) calcul de la contrainte normale sur L

Calculons maintenant la contrainte normale sur L: En faisant la somme des relations (19,a) et (19,c), nous obtenons:

$$(33) \quad \sigma_{22} + i\sigma_{21} = ( \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} + \bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z) )$$

En reportant les expressions de  $\varphi$  et de  $\psi$  dans cette dernière relation, nous avons

$$\begin{aligned} \sigma_{22} + i\sigma_{21} = & \frac{2\mu}{\chi+1} \left( \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{g'(s)}{s-z} dx + \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{\overline{g'(s)}}{s-z} dx \right. \\ & \left. + \frac{\bar{z}}{2i\pi} \int_L \frac{g'(s)}{(s-z)^2} dx - \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{\overline{g(s) + sg'(s)}}{(s-z)^2} ds \right) \end{aligned}$$

comme  $s=x$  est un réel, nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned} \sigma_{22} + i\sigma_{21} = & \frac{2\mu}{\chi+1} \left( \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{g'(x)}{x-z} dx - \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{\overline{g'(x)}}{x-\bar{z}} dx \right. \\ & \left. + \frac{\bar{z}}{2i\pi} \int_L \frac{g'(x)}{(x-z)^2} dx - \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{\overline{g(x) + xg'(x)}}{(x-z)^2} dx \right) \end{aligned}$$

nous regroupons les termes:

$$\sigma_{22} + i\sigma_{21} = - \frac{2\mu}{\chi+1} \left( \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{\overline{g'(x)}}{x-\bar{z}} dx + \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{\overline{g(x)}}{(x-z)^2} dx + \frac{z-\bar{z}}{2i\pi} \int_L \frac{g'(x)}{(x-z)^2} dx \right)$$

En prenant en compte la continuité de  $g(x)$  et ses valeurs nulles aux extrémités de L, nous avons

$$\int_L \frac{\overline{g(x)}}{(s-z)^2} dx = \int_L \frac{\overline{g'(x)}}{s-z} dx$$

donc

$$(34) \quad \sigma_{22} + i\sigma_{21} = -\frac{2\mu}{\chi+1} \left( \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{\overline{g'(x)}}{x-\bar{z}} dx + \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{\overline{g'(x)}}{x-z} dx + \frac{z-\bar{z}}{2i\pi} \int_L \frac{g'(x)}{(x-z)^2} dx \right)$$

Nous pouvons remarquer qu'en dérivant (31), nous pouvons vérifier la relation qui existe entre la résultante des efforts sur un segment de droite horizontal et la contrainte normale:

$$R_{,z_x} = (-i) \overline{\sigma_{22} + i\sigma_{21}}$$

où  $R_{,z_x}$  est la dérivée de R par rapport à z suivant l'axe réel.

Si  $g_1'(x)$  et  $g_2'(x)$  vérifient la condition de Hölder sur L, les valeurs limites de la contrainte normale sur les deux facettes de L sont:

$$(35) \quad \lim_{z \rightarrow y^+} \sigma_{22} + i\sigma_{21} = \lim_{z \rightarrow y^-} \sigma_{22} + i\sigma_{21} = -\frac{2\mu}{\chi+1} \frac{1}{i\pi} \int_L^* \frac{\overline{g'(x)}}{x-y} dx$$

La continuité de contrainte normale à travers L est donc vérifiée.

En regroupant la partie réelle et la partie imaginaire de l'équation (35), nous trouvons  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{21}$ :

$$(36, a) \quad \sigma_{22} = \frac{2\mu}{\chi+1} \frac{1}{\pi} \int_L^* \frac{g_2'(x)}{x-y} dx \quad \text{sur L}$$

$$(36, b) \quad \sigma_{21} = \frac{2\mu}{\chi+1} \frac{1}{\pi} \int_L^* \frac{g_1'(x)}{x-y} dx \quad \text{sur L}$$

Le problème de traction (mode I) et le problème de cisaillement (mode II) sont donc découplés, ceci est dû au fait que L est une ligne droite réelle.

Pour valider cette équation intégral-différentielle, cherchons la discontinuité de déplacement sur une fissure de Griffith dans un milieu infini. Le problème auxiliaire est défini par la donnée du vecteur contrainte complexe  $-\Sigma = -(\sigma_{21}^{\infty} + i\sigma_{22}^{\infty})$  uniforme sur les lèvres de la fissure où  $\sigma_{21}^{\infty}$  et  $\sigma_{22}^{\infty}$  sont les valeurs des composantes du champ de contrainte imposé à l'infini dans le problème initial. En utilisant le théorème des résidus, on peut vérifier la relation suivante:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \frac{dx}{x-y} = 1$$

La discontinuité de déplacement sur L est alors donnée à l'aide de l'équation intégral-différentielle (36):

$$(37) \quad g(y) = \frac{k+1}{2\mu} \Sigma \sqrt{a^2 - y^2}$$

ce résultat est bien connu en mécanique de la rupture.

## CHAPITRE 3

## MISE EN OEUVRE NUMERIQUE

Nous nous limitons par souci de simplicité de description aux problèmes élastiques. La fonctionnelle à minimiser se restreint donc à l'énergie potentielle totale  $P$ . Nous avons vu précédemment que cette fonctionnelle est fonction de  $\underline{g}^*(\underline{s})$ , vecteur de discontinuités de déplacement, et elle s'exprime par des intégrales de contour (cf. eq.(13)).

$$(38) \quad P(\underline{g}^*) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}} \underline{R}(\underline{g}^*) \cdot \underline{g}^{*'}(s) \, ds - \int_{\Gamma} \underline{T}_d \cdot \underline{g}^* \, ds$$

où  $\underline{T}_d$  est la contrainte imposée sur la frontière  $\Gamma$  (nous verrons après avoir construit le système d'équations comment entrer les conditions cinématiques imposées si les conditions aux limites sont mixtes ou en déplacement).

La discontinuité  $\underline{g}^*(\underline{s})$  peut avoir à respecter certaines liaisons internes telles que par exemple une condition de non interpénétration de la matière qui se traduirait par l'appartenance de  $\underline{g}^*$  à un ensemble fonctionnel  $K$ :

$$(39) \quad \underline{g}^*(\underline{s}) \in K \equiv \left\{ \underline{g}^* \in C^1 \text{ par morceaux sur } \mathcal{L} \mid \underline{g}^*(\underline{s}) \cdot \underline{n}(\underline{s}) \geq 0 \right\}$$

Lorsqu'il n'y a pas de liaison interne,  $K$  est simplement l'ensemble des fonctions à valeurs vectorielles continues et continûment différentiables par morceaux définies sur  $\mathcal{L}$ . Nous noterons de manière générale  $K$  l'ensemble fonctionnel des discontinuités autorisées sur  $\mathcal{L}$ . Nous avons vu plus haut que la solution du problème élastique est la fonction  $\underline{g}(\underline{s}) \in K$  qui minimise l'énergie potentielle totale  $P(\underline{g}^*)$ .

Nous proposons de faire la minimisation de  $P(\underline{g}^*)$  dans des ensembles de dimensions finies qui approchent l'ensemble  $K$ .

a) Interpolation de la géométrie

On construit une ligne approchée de discontinuités de déplacement  $\tilde{\Gamma} = \bigcup_{k=1}^M E_k$  :  $\tilde{\Gamma}$  est l'union de  $M$  mailles  $E_k$ ,  $k \in [1, M]$  constituées de segments de droite ou arcs. Chaque maille  $E_k$  est définie par la donnée de  $N$  noeuds d'interpolation  $(\underline{a}_k^1, \dots, \underline{a}_k^N)$  et de  $N$  fonctions de forme  $N_1(\xi), \dots, N_N(\xi)$   $\xi \in [-1, 1]$ . Un point  $\underline{s}$  appartient à  $E_k$  si et seulement si il existe un  $\xi \in [-1, 1]$  tel que :

$$(40) \quad \underline{s} = \sum_{m=1}^N N_m(\xi) \underline{a}_k^m \quad \xi \in [-1, 1]$$

Une fois les fonctions de forme  $N_m(\xi)$  choisies,  $\tilde{\Gamma}$  est entièrement déterminée par la donnée des noeuds d'interpolation  $\underline{a}_m^k$ ,  $m \in [1, N]$   $k \in [1, M]$ .

b) Interpolation de  $\underline{g}^*(\underline{s})$

La fonction  $\underline{g}^*$  est définie sur  $\Gamma$ , nous allons l'approcher par une fonction  $\tilde{\underline{g}}^*$  définie sur  $\tilde{\Gamma}$ . Le plus naturel pour construire  $\tilde{\underline{g}}^*$  est d'utiliser les fonctions de forme et les noeuds d'interpolation qui ont servi à construire  $\tilde{\Gamma}$  : on parle de discrétisation isoparamétrique du déplacement et de la géométrie. La discontinuité de déplacement en un point  $\underline{s} \in E_k$  est donc donnée par :

$$(41) \quad \tilde{\underline{g}}^*(\underline{s}) = \sum_{m=1}^N N_m(\xi) \underline{g}^*(\underline{a}_k^m)$$

où  $\xi$  est relié à  $\underline{s}$  par (40).

Les inconnus du problème sont donc les valeurs nodales:

$$\underline{g}_k^* = \underline{\tilde{g}}^* (\underline{a}_k^m) = [g_{k1}^{*m}, g_{k2}^{*m}]$$

La dérivée curviligne de  $\underline{g}^*$  en un point  $\underline{s} \in \underline{E}_k$  est donnée par:

$$(42) \quad \underline{\tilde{g}}^* '(\underline{s}) = \sum_{m=1}^N N'_m(\xi) \underline{g}_k^* \cdot \left[ \left| \sum_{h=1}^N N_h '(\xi) \cdot \underline{a}_k^h \right| \right]^{-1}$$

où  $\xi$  est relié à  $\underline{s}$  par (40).

La résultante  $\underline{R}$  du problème élastique à discontinuité  $\underline{g}^*$  imposée est une fonctionnelle linéaire de  $\underline{g}^*$ . La résultante  $\tilde{\underline{R}}$  du problème élastique à discontinuité approchée par  $\underline{\tilde{g}}^*$  sur  $\tilde{\Gamma}$  sera aussi linéaire en  $\underline{\tilde{g}}^*$  et pourra donc s'écrire:

$$(43) \quad \tilde{\underline{R}}(\underline{\tilde{g}}^*) (\underline{s}) = \sum_{k=1}^M \sum_{m=1}^N (R_m^{k1}(\underline{s}) g_{k1}^{*m} + R_m^{k2}(\underline{s}) g_{k2}^{*m}) \quad \forall \underline{s} \in \mathbb{R}^2$$

En particulier, cette solution sur  $\tilde{\Gamma}$  sert à construire la matrice de rigidité.

REMARQUE: Le champ résultante  $\underline{R}_m^{k1}(\underline{s}) = (R_m^{k1}(\underline{s}), R_m^{k1}(\underline{s}))$  (respectivement  $\underline{R}_m^{k2}(\underline{s}) = (R_m^{k2}(\underline{s}), R_m^{k2}(\underline{s}))$ ) est donc celui de la solution du problème élastique à discontinuité imposée sur  $\tilde{\Gamma}$  par (41) avec  $\underline{g}_h^* = 0 \quad \forall h \quad \forall p$  sauf la composante  $g_{k1}^{*m}$  (respectivement  $g_{k2}^{*m}$ ). Il est important de trouver la solution analytique des fonctions  $\underline{R}_m^{k1}(\underline{s})$  et  $\underline{R}_m^{k2}(\underline{s})$  car si on les construit par intégration numérique, on doit faire une deuxième intégration pour construire la matrice de rigidité. Cette double intégration numérique alourdit le calcul et détériore la précision des résultats. Dans des cas de fonctions de forme  $N_m(\xi)$  simples, on peut trouver cette solution analytique comme nous verrons plus loin pour les fonctions de forme affines.

c) Constitution et résolution du système linéaire

Dans les cas de  $N_m(\xi)$  simples, nous pouvons expliciter  $R_m^{k1}(\underline{s})$  et  $R_m^{k2}(\underline{s})$  à l'aide de la solution du problème élastique de discontinuités de déplacement, comme nous verrons plus loin pour les fonctions de forme affines. Nous pouvons alors minimiser l'énergie potentielle totale  $P(\underline{\tilde{g}}^*)$  pour  $\underline{\tilde{g}}^*$  appartenant à l'ensemble approché défini par (41) à l'aide des noeuds  $[\underline{a}_1^k, \dots, \underline{a}_N^k]$   $k \in [1, M]$  et les  $(N_1(\xi), \dots, N_N(\xi))$ .

Notons  $\tilde{P}$  la valeur de l'énergie potentielle totale approchée:

$$(44) \quad \tilde{P} = \frac{1}{2} \int_{\tilde{\Gamma}} \tilde{R}(\underline{\tilde{g}}^*)(\underline{s}) \cdot \underline{\tilde{g}}^*(\underline{s}) ds - \int_{\tilde{\Gamma}} \mathbb{T}_d(\underline{s}) \cdot \underline{\tilde{g}}^*(\underline{s}) ds$$

On note  $G^*$  le  $2 \times N \times M$ -vecteur  $\prod_{m \in [1, N], k \in [1, M]} [g_{k1}^{*m}, g_{k2}^{*m}]$

constitué par les composantes des vecteurs nodaux  $\underline{\tilde{g}}^*(\underline{a}_k^m)$ .

Ces composantes seront notées  $g_i^*$   $i \in (1, 2 \times N \times M)$  avec  $g_{2 \times (k \times N + m) - 1}^* = g_{k1}^{*m}$ ,  $g_{2 \times (k \times N + m)}^* = g_{k2}^{*m}$ ,

$$(45) \quad G^* = (g_i^*)$$

En reportant les équations (41), (42) et (43) dans l'équation précédente, nous obtenons une forme quadratique de  $\tilde{P}$ :

$$(46) \quad \tilde{P} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2 \times N \times M} \sum_{i=1}^{2 \times N \times M} g_i^* K_{ij} g_j^* - \sum_{j=1}^{2 \times N \times M} F_j g_j^*$$

où les coefficients  $K_{ij}$  et  $F_j$  sont définis par:

$$(47, a) \quad K_{2 \times (k \times N + m) - 1, 2 \times (h \times N + p) - 1} = \int_{E_h} R_m^{k1}(\underline{s}) N_p'(\xi(\underline{s})) ds$$

$$(47, b) \quad K_{2 \times (k \times N + m) - 1, 2 \times (h \times N + p)} = \int_{E_h} R_m^{k1}(\underline{s}) N_p'(\xi(\underline{s})) ds$$

$$(47, c) \quad K_{2 \times (k \times N + m), 2 \times (h \times N + p) - 1} = \int_{E_h} R_{m1}^{k2}(\underline{s}) N_p'(\xi(\underline{s})) ds$$

$$(47, d) \quad K_{2 \times (k \times N + m), 2 \times (h \times N + p)} = \int_{E_h} R_{m2}^{k2}(\underline{s}) N_p'(\xi(\underline{s})) ds$$

$$(47, e) \quad F_{2 \times (h \times N + p) - 1} = \int_{E_h} T_{d1}(\underline{s}) N_p(\xi(\underline{s})) ds$$

$$(47, f) \quad F_{2 \times (h \times N + p)} = \int_{E_h} T_{d2}(\underline{s}) N_p(\xi(\underline{s})) ds$$

REMARQUE: En règle générale, les coefficients de la matrice de rigidité sont calculés par des intégrations numériques en utilisant des points de Gauss sur la géométrie de référence. Dans le cas de fonctions de formes simples, la matrice de rigidité peut être construite par des calculs analytiques. Nous donnerons plus loin cette primitive dans le cas de fonctions de formes affines.

Si nous n'avons pas de liaisons internes, la minimisation de  $\tilde{P}$  est celle d'une forme quadratique sur un espace vectoriel. Cela nous conduit alors à résoudre le système des équations linéaires:

$$(48) \quad \mathbf{K G} = \mathbf{F}$$

REMARQUE: Le problème discrétisé peut être considéré comme une superposition de  $M$  problèmes élémentaires dans le même milieu qui est le milieu infini. Le problème élémentaire  $k$  est le problème de discontinuité  $\sum_m^N N_m \underline{g}(\underline{a}_k^m)$  sur la maille  $k$  dont les inconnus sont les vecteurs nodaux  $\underline{g}(\underline{a}_k^m), m=1, N$ . Tous les problèmes élémentaires sont indépendants les uns des autres, ceci donne une souplesse à la méthode de discontinuités de déplacement. Par exemple, si nous voulons suivre la progression d'une fissure, il suffit d'ajouter de nouvelles mailles sur la partie nouvelle de la fissure sans toucher les autres mailles. En conséquence, seules les lignes et les colonnes de la matrice de rigidité correspondant aux nouveaux degrés de liberté sont à calculer pour le problème après progression de fissures.

d) Problème avec conditions aux limites mixtes

Si les conditions aux limites sont mixtes: la contrainte  $\underline{T}_d$  est imposée sur  $\Gamma_T$  et le déplacement  $\underline{U}_d$  est imposé sur  $\Gamma_U$ ,  $\Gamma_T$  et  $\Gamma_U$  étant deux parties complémentaires de  $\Gamma$ , la démarche (présentation de la méthode de discontinuités de déplacement et la discrétisation) est toujours valable, mais les termes du second membre du système d'équations (48) qui correspondent aux degrés de liberté imposés ne sont pas connus. Par contre, en discrétisant la solution élastique du champ de déplacement  $\underline{U}(g)$  (cf. chapitre précédent), nous obtenons des relations qui traduisent les conditions cinématiques:

$$(49) \quad \sum_{j=1}^{2 \times N \times M} L_i^j g_j = U_{d i}$$

où  $U_{d i}$  est le  $i$ -ème degré de liberté imposé.

Ces équations remplaceront dans le système d'équation (48) celles dont le second membre est inconnu. Notons que la matrice du système d'équations ainsi obtenue n'est plus symétrique.

e) Calcul des valeurs du champ de déplacement et du champ de contrainte en un point quelconque

Les valeurs du champ de déplacement et du champ de contrainte en un point quelconque peuvent être calculées par la solution analytique du problème de discontinuité de déplacement dans un milieu infini. Nous avons donné cette solution dans le précédent chapitre.

Dans le cas de fonctions de forme simples, comme nous allons le voir plus loin pour les fonctions de forme affines, nous pouvons trouver  $\underline{U}^i$  et  $\underline{\Sigma}^i$  analytiques tels que :

$$(50) \quad \underline{U} = \sum_{i=1}^{2 \times N \times M} \underline{U}^i g_i$$

$$(51) \quad \underline{g} = \sum_{i=1}^{2 \times N \times M} \underline{\Sigma}^i g_i$$

Dans ce cas, le calcul de  $\underline{U}$  et  $\underline{g}$  en un point, est effectué par des opérations arithmétiques.

f) Calcul du taux de restitution d'énergie

En mécanique de la rupture, on s'intéresse aux paramètres caractéristiques de la fissure, beaucoup plus qu'aux champs mécaniques dans tout le solide. Le paramètre particulièrement intéressant est le taux de restitution d'énergie. Numériquement le calcul de sa valeur nécessite la résolution des deux problèmes avant et après progression. Nous proposons ici une méthode de calcul du taux de restitution d'énergie en utilisant uniquement la solution du problème dans la configuration actuelle (avant progression de fissure) sans avoir à résoudre le problème après la progression de fissure.

Le taux de restitution d'énergie  $G$  est défini par:

$$(52) \quad G = \frac{dP}{dL} = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta L}$$

où  $L$  est la longueur de fissure;  $P$  est l'énergie potentielle totale dont la forme discrétisée est:

$$P = \frac{1}{2} K_{ij} g_i g_j - F_i g_j$$

Notons  $\Delta K$  la variation de matrice de rigidité et  $\Delta F$  la variation du second membre, si on ne garde que les termes du premier ordre, on a:

$$\Delta P = \frac{1}{2} \Delta K_{ij} g_i g_j - \Delta F_i g_j$$

Nous faisons varier la longueur de la fissure en déplaçant uniquement le noeud  $m$  qui coïncide avec la pointe de la fissure sans changer la position des autres noeuds. Comme  $K_{ij}$  ne dépend que de la position des noeuds définissant les degrés de liberté  $i$  et  $j$  et comme seul le noeud correspondant à la pointe de fissure change, nous avons à recalculer uniquement les coefficients des deux lignes et des deux colonnes qui sont liées aux coordonnées de la pointe de fissure dont les degrés de liberté sont notés  $2m-1$  et  $2m$ .

La variation de l'énergie potentielle totale au premier ordre est donc:

$$\begin{aligned}
 (53) \quad \Delta P = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2N} ( \Delta K_{i, 2m-1} g_i g_{2m-1} + \Delta K_{i, 2m} g_i g_{2m} ) \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2N} ( \Delta K_{2m-1, j} g_{2m-1} g_j + \Delta K_{2m, j} g_{2m} g_j ) \\
 & - \frac{1}{2} ( \Delta K_{2m-1, 2m-1} g_{2m-1} g_{2m-1} + \Delta K_{2m, 2m-1} g_{2m-1} g_{2m} ) \\
 & - \frac{1}{2} ( \Delta K_{2m-1, 2m} g_{2m-1} g_{2m} + \Delta K_{2m, 2m} g_{2m} g_{2m} ) \\
 & - \frac{1}{2} ( \Delta F_{2m-1} g_{2m-1} + \Delta F_{2m} g_{2m} )
 \end{aligned}$$

En conséquence, pour la variation d'énergie, nous avons à connaître uniquement les nouvelles lignes et colonnes  $2m-1$  et  $2m$  sans avoir à calculer  $\Delta g$  puisqu'il ne figure pas dans la variation de l'énergie au premier ordre.

REMARQUE: Dans la plus part des cas la contrainte imposée sur la fissure, tout au moins dans la partie proche de la pointe de fissure, est nulle. Dans ce cas, si on considère que le chargement extérieur ne change pas, les derniers termes liés à la variation

de contrainte imposée disparaissent et  $G = \frac{1}{2} \frac{\Delta K_{ij} g_i g_j}{\Delta L}$ .



## CHAPITRE 4

## FONCTIONS DE FORME AFFINES

Dans ce chapitre, nous allons donner la solution analytique en déplacement (éq. 30), en contrainte (éq. 31) et en résultante des efforts (éq. 23) pour une fonction  $\tilde{g}^*(\underline{s})$  affine par élément de segment de droite. Nous donnerons également l'expression analytique des coefficients de la matrice K (éq. 26).

Nous choisissons d'abord les 3 noeuds de la maille  $i$  ( $\underline{a}_i^1, \underline{a}_i^2, \underline{a}_i^3$ ) constituée de 2 segments de droite  $[\underline{a}_i^1, \underline{a}_i^2]$  et  $[\underline{a}_i^2, \underline{a}_i^3]$ . Un point  $\underline{s}$  appartient à la maille  $E_i$  si et seulement si nous pouvons écrire:

$$\underline{s} = \sum_{m=1}^3 N_m(\xi) \underline{a}_i^m$$

où  $N_m(\xi)$  est une fonction définie sur  $[-1,1]$  affine par morceaux (affine sur  $[-1,0]$  et sur  $[0,1]$ ) telle que:

$$\begin{cases} N_1(-1)=1 & N_1(0)=0 & N_1(1)=0 \\ N_2(-1)=0 & N_2(0)=1 & N_2(1)=0 \\ N_3(-1)=0 & N_3(0)=0 & N_3(1)=1 \end{cases}$$

Dans la suite nous noterons:

$$\underline{d}_i = \underline{a}_i^1, \quad \underline{m}_i = \underline{a}_i^2, \quad \underline{f}_i = \underline{a}_i^3 \quad (\text{début, milieu, fin})$$



Nous approchons la fonction de discontinuité de déplacement  $\underline{g}(\underline{s})$  par une fonction  $\tilde{\underline{g}}(\underline{s})$  affine par segment de droite en choisissant les fonctions de forme  $N_m(s)$  et en imposant  $\tilde{\underline{g}}^*(\underline{d}_i)=0$  et  $\tilde{\underline{g}}^*(\underline{f}_i)=0$ . Nous n'avons donc qu'une inconnue vectorielle par maille  $\underline{g}_i^*$  notée aussi  $(g_{2i-1}^*, g_{2i}^*)$ . En reprenant la notation du vecteur  $G^*=(g_i^*)$  constitué des composantes des vecteurs  $\underline{g}_i^*$ ,  $G^*$  a alors  $2M$  composantes (cf. éq. 45). Nous pouvons aussi le noter à l'aide du nombre complexe  $g_i^*=g_{2i-1}^*+ig_{2i}^*$ .

Représentons  $\mathbb{R}^2$  par le plan complexe;  $z=x+iy$  est l'affixe du point  $(x,y)$ . Notons  $\tilde{g}^*$  le vecteur complexe de discontinuité approchée sur  $\tilde{\Gamma}$ . Chaque noeud sera représenté par son affixe complexe, chaque maille sera représentée par le triplet des affixes complexes de ces noeuds. La discontinuité de déplacement approchée sera donc une fonction d'une variable complexe  $s$  définie sur une ligne approchée  $\tilde{\Gamma}$  et à valeur complexe affine par morceaux.

Notons  $[d_i, m_i, f_i]$  (début, milieu, fin) le triplet des affixes des noeuds de la  $i$ -ème maille composée des deux segments adjacents  $d_i m_i$  et  $m_i f_i$ . La discontinuité de déplacement est:

$$(54) \quad \tilde{g}^*(s) = \sum_{i=1}^M g_{(i)}^*(s)$$

avec

$$g_{(i)}^*(s) = \begin{cases} g_i^* \frac{s - d_i}{m_i - d_i} & \text{si } s \in [d_i, m_i] \\ g_i^* \frac{s - f_i}{m_i - f_i} & \text{si } s \in [m_i, f_i] \\ 0 & \text{si } s \in \tilde{\Gamma} - [d_i, m_i] \cup [m_i, f_i] \end{cases}$$

Rappelons que  $s, d_i, m_i, f_i, g_i^* \in \mathbb{C}$ .

a) Solution analytique des champs mécaniques

Sur une demi-maille  $[d,m]$ , imposons la discontinuité complexe de déplacement:

$$g(s) = \mathcal{G} \cdot \left( \frac{s-d}{m-d} \right)$$

En utilisant les formules (23), (24) et (25) du précédent chapitre, nous obtenons les fonctions analytiques  $\varphi(z)$  et  $\psi(z)$  solutions du problème élastique avec cette discontinuité imposée:

$$(55) \quad \varphi(z) = \frac{2\mu}{\chi+1} \frac{1}{2i\pi} \left[ 1 + \frac{z-d}{m-d} \operatorname{Log} \left( \frac{z-m}{z-d} \right) \right] \cdot \mathcal{G}$$

$$(56) \quad \varphi'(z) = \frac{2\mu}{\chi+1} \frac{1}{2i\pi} \left[ \frac{1}{m-d} \operatorname{Log} \left( \frac{z-m}{z-d} \right) + \frac{1}{z-m} \right] \cdot \mathcal{G}$$

$$(57) \quad \psi(z) = - \frac{2\mu}{\chi+1} \frac{1}{2i\pi} \left\{ \left[ \left( \frac{\bar{m}-\bar{d}}{m-d} \right) \cdot \left[ 1 + \frac{z-d}{m-d} \operatorname{Log} \left( \frac{z-m}{z-d} \right) \right] + \frac{\bar{d}}{m-d} \operatorname{Log} \left( \frac{z-m}{z-d} \right) + \frac{\bar{m}}{z-m} \right] \cdot \mathcal{G} \right. \\ \left. + \left[ 1 + \frac{z-d}{m-d} \operatorname{Log} \left( \frac{z-m}{z-d} \right) \right] \cdot \bar{\mathcal{G}} \right\}$$

On peut constater l'existence de pôles au point  $m$  dans les fonctions  $\varphi'(z)$  et  $\psi(z)$ . Cela vient du fait que  $g(s)$  n'est pas nulle en  $m$ . Par contre, on peut vérifier que le champ de déplacement représenté par  $\varphi$  et  $\psi$  ci-dessus a des valeurs finies partout; en particulier, la discontinuité de déplacement en  $m$  est égale à  $\mathcal{G}$ .

Maintenant introduisons les notations suivantes:

$$(58) \quad \varphi_{d, m}(z) = \frac{2\mu}{\chi+1} \frac{1}{2i\pi} \left[ 1 + \frac{z-d}{m-d} \operatorname{Log} \left( \frac{z-m}{z-d} \right) \right]$$

$$(59) \quad \varphi_{d, m}'(z) = \frac{2\mu}{\chi+1} \frac{1}{2i\pi} \left[ \frac{1}{m-d} \operatorname{Log} \left( \frac{z-m}{z-d} \right) + \frac{1}{z-m} \right]$$

$$(60) \quad \psi_{d, m}^{\bar{g}}(z) = -\frac{\bar{m}-\bar{d}}{m-d} \varphi_{d, m}(z) - \frac{2\mu}{\chi+1} \frac{1}{2i\pi} \frac{\bar{d}}{m-d} \operatorname{Log} \left( \frac{z-m}{z-d} \right) - \frac{2\mu}{\chi+1} \frac{1}{2i\pi} \frac{\bar{m}}{z-m}$$

$$(61) \quad \bar{\psi}_{d, m}^{\bar{g}}(z) = -\varphi(z)$$

Alors la solution du problème discrétisé en  $M$  mailles  $[d_i, m_i, f_i]$  avec la discontinuité  $\mathcal{G}_i^*$  imposée en chaque maille et la discontinuité sur  $\tilde{\Gamma}$  donnée par 54 est:

$$(62) \quad \varphi(z) = \sum_{i=1}^M [\varphi_{d_i, m_i}(z) - \varphi_{f_i, m_i}(z)] \cdot \mathcal{G}_i^*$$

$$(63) \quad \varphi'(z) = \sum_{i=1}^M [\varphi_{d_i, m_i}'(z) - \varphi_{f_i, m_i}'(z)] \cdot \mathcal{G}_i^*$$

$$(64) \quad \psi(z) = \sum_{i=1}^M [\psi_{d_i, m_i}^{\bar{g}}(z) - \psi_{f_i, m_i}^{\bar{g}}(z)] \cdot \mathcal{G}_i^* + [-\varphi_{d_i, m_i}(z) + \varphi_{f_i, m_i}(z)] \cdot \bar{\mathcal{G}}_i^*$$

Nous pouvons déduire des dernières relations l'expression analytique des champs en chaque point. Par exemple, la résultante en un point  $(x, y)$  s'écrit sous la forme :

$$(65) \quad \underline{R}(x, y) = \sum_{i=1}^{2M} \underline{R}_i(x, y) g_i$$

où

$$(66, a) \quad \underline{R}_{2i-1}(x, y) = [A_{11}(x, y)_{d_i, m_i, f_i}, A_{12}(x, y)_{d_i, m_i, f_i}]$$

$$(66, b) \quad \underline{R}_{2i}(x, y) = [A_{12}(x, y)_{d_i, m_i, f_i}, A_{22}(x, y)_{d_i, m_i, f_i}]$$

où les champs  $\underline{A}(x, y)_{d_i, m_i, f_i}$  sont explicités dans l'annexe.

De même nous pouvons écrire des équations analogues pour le champ de déplacement  $\underline{U}$  et le champ de contrainte  $\underline{g}$  créés par la discontinuité de déplacement:

$$(67) \quad \underline{U}(x, y) = \sum_{i=1}^{2M} \underline{u}_i(x, y) g_i$$

où

$$(68, a) \quad \underline{u}_{2i-1}(x, y) = \left(\frac{1}{x+1}\right) \left(\frac{1}{2\pi}\right) [B_{11}(x, y)_{d_i, m_i, f_i}, B_{12}(x, y)_{d_i, m_i, f_i}]$$

$$(68, b) \quad \underline{u}_{2i}(x, y) = \left(\frac{1}{x+1}\right) \left(\frac{1}{2\pi}\right) [B_{12}(x, y)_{d_i, m_i, f_i}, B_{22}(x, y)_{d_i, m_i, f_i}]$$

$$(69, a) \quad \underline{g}(x, y) = \sum_{i=1}^{2M} \underline{S}_i(x, y) g_i$$

où

$$(69, b) \quad \underline{S}_{2i-1}(x, y) = \begin{vmatrix} C_{111} & C_{121} \\ C_{121} & C_{221} \end{vmatrix} (x, y)_{d_i, m_i, f_i}$$

$$(69, c) \quad \underline{S}_{2i}(x, y) = \begin{vmatrix} C_{112} & C_{122} \\ C_{122} & C_{222} \end{vmatrix} (x, y)_{d_i, m_i, f_i}$$

où les champs  $\underline{B}(x, y)_{d_i, m_i, f_i}$  et  $\underline{C}(x, y)_{d_i, m_i, f_i}$  sont également explicités dans l'annexe.

REMARQUE: Le terme  $\frac{1}{z-m}$  dans la fonction  $\varphi_{d, m}'(z)$  et le terme  $\frac{\bar{m}}{z-m}$

dans la fonction  $\psi_{d, m}(z)$  (éq. 58 et 59) ne dépendent que de  $m$ . Ils disparaissent donc lorsqu'on superpose les demi-mailles pour obtenir la maille entière. Nous pouvons donc les omettre dès le départ.

Les expressions analytiques des champs sont donc établies. Nous allons maintenant établir la relation qui permet de calculer analytiquement les coefficients de la matrice de rigidité  $K[2M, 2M]$ .

b) Calcul de la matrice de rigidité K

L'étude de l'équation (24) donnant l'énergie potentielle met en évidence le fait que la matrice de rigidité K peut être déduite du calcul du travail du vecteur contrainte généré par la discontinuité d'un élément sur la discontinuité de déplacement d'un autre élément. On voit ainsi qu'il est utile de calculer le travail du vecteur contrainte généré par la discontinuité sur une demi-maille sur la discontinuité de déplacement d'une autre demi-maille. C'est ce que nous appelons l'interaction entre deux demi-maillages.

1°) interaction entre 2 demi-maillages

Notons  $\underline{d}_1, \underline{m}_1$  la première demi-maille de discontinuité  $\underline{g}_1$  ;  
 $\underline{d}_2, \underline{m}_2$  la seconde demi-maille de discontinuité  $\underline{g}_2$  .

$\underline{\sigma}_1$  le champ de contrainte généré par la première demi maille. Nous voulons calculer:

$$(70) \quad T = \int_{\underline{d}_2, \underline{m}_2} \underline{\sigma}_1(\underline{s}) \cdot \underline{n}(\underline{s}) \cdot \underline{g}_2(\underline{s}) \, ds$$

En faisant une intégration par partie nous obtenons:

$$(71) \quad T = \int_{\underline{d}_2, \underline{m}_2} \underline{R}_1(\underline{s}) \cdot \underline{g}_2'(\underline{s}) \, ds - \underline{R}_1(\underline{m}_2) \cdot \underline{g}_2(\underline{m}_2)$$

car  $\underline{g}_2(\underline{d}_2) = 0$ .

Pour effectuer ce calcul analytiquement, il est préférable de revenir aux notations complexes. Si nous notons  $A$  et  $B$  les complexes associés naturellement aux vecteurs  $\underline{A}$  et  $\underline{B}$ , alors  $\underline{A} \cdot \underline{B} = \text{Re}(A \cdot \bar{B})$ . En notation complexe nous écrivons donc:

$d_1, m_1$  la première demi-maille dont la discontinuité complexe est:

$$g_1(s) = \frac{s-d_1}{m_1-d_1} \mathcal{G}_1 \quad ; \quad s \in (d_1, m_1)$$

$d_2, m_2$  la seconde demi-maille dont la discontinuité complexe est:

$$g_2(s) = \frac{s-d_2}{m_2-d_2} \mathcal{G}_2 \quad ; \quad s \in (d_2, m_2)$$

Notons  $R_1(z)$  la fonction de la résultante complexe des efforts créés par la discontinuité de la demi-maille  $(d_1, m_1)$ . Elle s'écrit, d'après (20):

$$(72) \quad R_1(z) = (-i) \cdot \left[ \mathcal{G}_1 \cdot \varphi_{d_1, m_1}(z) + z \cdot \bar{\mathcal{G}}_1 \cdot \varphi_{d_1, m_1}'(z) + \bar{\mathcal{G}}_1 \cdot \psi_{d_1, m_1}^G(z) + \mathcal{G}_1 \cdot \psi_{d_1, m_1}^{\bar{G}}(z) \right]$$

L'interaction entre les deux demi-mailles est donnée par l'intégrale curviligne (éq. 26)

$$(73) \quad T_{(d_1, m_1; d_2, m_2)}(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) = \text{Re} \left[ \int_{d_2}^{m_2} R_1(u_2) \cdot \frac{\bar{\mathcal{G}}_2}{|m_2-d_2|} ds_2 - R_1(m_2) \cdot \bar{\mathcal{G}}_2 \right]$$

$$= \text{Re} \left[ \int_{d_2}^{m_2} R_1(u_2) \cdot \frac{\mathcal{G}_2}{|m_2-d_2|} ds_2 - R_1(m_2) \cdot \mathcal{G}_2 \right]$$

Remarque: Le terme  $-R_1(m_2)\bar{\mathcal{G}}_2$  dans  $T$  n'est pas présent dans les équations (13) et (38) car nous avons supposé que  $g(s)$  est nulle aux extrémités des lignes de discontinuité, mais ceci n'est pas valable pour une demi-maille. Par contre ce terme disparaîtra quand on superposera les demi-mailles pour calculer l'interaction entre deux mailles entières.

Sur le segment d'intégration,  $ds_2$  et  $\bar{u}_2$  peuvent aussi s'écrire:

$$ds_2 = \frac{du_2}{m_2 - d_2} |m_2 - d_2| \quad ;$$

$$\bar{u}_2 = \frac{\bar{m}_2 - \bar{d}_2}{m_2 - d_2} (u_2 - d_2) + \bar{d}_2 \quad .$$

En faisant ces changements de variables, T devient:

$$\begin{aligned} & T_{(d_1, m_1; d_2, m_2)}(g_1, g_2) \\ &= \text{Re} \left[ \frac{-i}{m_2 - d_2} \left\{ g_1 \bar{g}_2 \int_{d_2}^{m_2} \varphi_{d_1, m_1}(u_2) du_2 \right. \right. \\ & \quad - g_1 g_2 \int_{d_2}^{m_2} \left[ \frac{\bar{m}_2 - \bar{d}_2}{m_2 - d_2} (u_2 - d_2) + \bar{d}_2 \right] \varphi_{d_1, m_1}'(u_2) du_2 \\ & \quad \left. \left. - g_1 g_2 \int_{d_2}^{m_2} \psi_{d_1, m_1}^g(u_2) du_2 - \bar{g}_1 g_2 \int_{d_2}^{m_2} \psi_{d_1, m_1}^{\bar{g}}(u_2) du_2 \right\} \right] \\ & - \text{Re} \left[ R_1(m_2) \cdot \bar{g}_2 \right] \end{aligned}$$

Notons  $\Phi_{d,m}(z)$  et  $L_{d,m}(z)$  respectivement une primitive de  $\varphi_{d,m}(z)$  et une primitive de  $\text{Log} \frac{z-d}{m-d}$  :

$$(74) \quad \Phi_{d,m}(z) = \frac{1}{2} \frac{2\mu}{\chi+1} \frac{m-d}{2i\pi} \left[ \frac{z-d}{m-d} + \left( \frac{z-d}{m-d} \right)^2 \cdot \text{Log} \left( \frac{z-d}{m-d} \right) - \text{Log} \left( \frac{z-d}{m-d} \right) \right]$$

$$(75) \quad L_{d,m}(z) = (m-d) \cdot \left( \frac{z-d}{m-d} \cdot \text{Log} \left( \frac{z-m}{z-d} \right) - \text{Log} \frac{z-d}{m-d} \right)$$

T peut se mettre sous la forme :

$$(76) \quad T = \text{Re} \left[ \frac{-i}{m_2 - d_2} \left\{ \left[ \mathfrak{g}_1 \bar{\mathfrak{g}}_2 + \bar{\mathfrak{g}}_1 \mathfrak{g}_2 + \mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_2 \left( \frac{\bar{m}_1 - \bar{d}_1}{m_1 - d_1} + \frac{\bar{m}_2 - \bar{d}_2}{m_2 - d_2} \right) \right] \right. \right. \\ \cdot \left[ \Phi_{d_1, m_1}(m_2) - \Phi_{d_1, m_1}(d_2) \right] \\ + \frac{2\mu}{\chi+1} \frac{1}{2i\pi} \mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_2 \frac{\bar{d}_1}{m_1 - d_1} \left( L_{d_1, m_1}(m_2) - L_{d_1, m_1}(d_2) \right) \\ + \frac{2\mu}{\chi+1} \frac{1}{2i\pi} \mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_2 \bar{m}_1 \text{Log} \frac{m_2 - m_1}{d_2 - m_1} \\ \left. - \mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_2 \left( \bar{m}_2 \varphi_{d_1, m_1}(u_2) - \bar{d}_2 \varphi_{d_1, m_1}(d_2) \right) \right\} \right] \\ - \text{Re} \left[ \bar{\mathfrak{g}}_2 \cdot (-i) \cdot \right. \\ \left. \left( \mathfrak{g}_1 \cdot \Phi_{d_1, m_1}(m_2) + m_2 \cdot \bar{\mathfrak{g}}_1 \cdot \Phi_{d_1, m_1}'(m_2) + \bar{\mathfrak{g}}_1 \cdot \psi_{d_1, m_1}^G(m_2) + \mathfrak{g}_1 \cdot \psi_{d_1, m_1}^G(m_2) \right) \right]$$

En reportant les primitives  $\phi$  et  $L$ , nous obtenons:

$$\begin{aligned}
 (77) \quad T_{(d_1, m_1; d_2, m_2)}(g_1, g_2) &= -\frac{1}{m_2 - d_2} \frac{2\mu}{\chi+1} \frac{1}{2\pi} \\
 \cdot \text{Re} &\left\{ \frac{1}{2} (m_1 - d_2) \cdot \left[ g_1 \bar{g}_2 + \bar{g}_1 g_2 + g_1 g_2 \left( \frac{\bar{m}_1 - \bar{d}_1}{m_1 - d_1} + \frac{\bar{m}_2 - \bar{d}_2}{m_2 - d_2} \right) \right] \right. \\
 &\quad \cdot \left[ \frac{m_2 - d_2}{m_1 - d_1} + \left( \frac{m_2 - d_1}{m_1 - d_1} \right)^2 \text{Log} \left( \frac{m_2 - m_1}{m_2 - d_1} \right) \right. \\
 &\quad \quad \left. \left. - \left( \frac{d_2 - d_1}{m_1 - d_1} \right)^2 \text{Log} \left( \frac{d_2 - m_1}{d_2 - d_1} \right) - \text{Log} \left( \frac{m_2 - m_1}{d_2 - m_1} \right) \right] \right. \\
 &\quad + g_1 g_2 \cdot \bar{d}_1 \cdot \left[ \left( \frac{m_2 - d_1}{m_1 - d_1} \right) \text{Log} \left( \frac{m_2 - m_1}{m_2 - d_1} \right) \right. \\
 &\quad \quad \left. \left. - \left( \frac{d_2 - d_1}{m_1 - d_1} \right) \text{Log} \left( \frac{d_2 - m_1}{d_2 - d_1} \right) - \text{Log} \left( \frac{m_2 - m_1}{d_2 - m_1} \right) \right] \right. \\
 &\quad + g_1 g_2 \cdot \bar{m}_1 \cdot \text{Log} \left( \frac{m_2 - m_1}{d_2 - m_1} \right) \\
 &\quad \left. - g_1 g_2 \cdot \left[ \bar{m}_2 - \bar{d}_2 + \bar{m}_2 \left( \frac{m_2 - d_1}{m_1 - d_1} \right) \text{Log} \left( \frac{m_2 - m_1}{m_2 - d_1} \right) \right. \right. \\
 &\quad \quad \left. \left. - \bar{d}_2 \left( \frac{d_2 - d_1}{m_1 - d_1} \right) \text{Log} \left( \frac{d_2 - m_1}{d_2 - d_1} \right) \right] \right\} \\
 + \frac{2\mu}{\chi+1} \frac{1}{2\pi} \text{Re} &\left\{ [g_1 \bar{g}_2 + \bar{g}_1 g_2] \cdot \left[ 1 + \frac{m_2 - d_1}{m_1 - d_1} \text{Log} \frac{m_2 - m_1}{m_2 - d_1} \right] \right. \\
 &\quad + g_1 g_2 \bar{m}_2 \left[ \frac{1}{m_1 - d_1} \text{Log} \frac{m_2 - m_1}{m_2 - d_1} + \frac{1}{m_2 - m_1} \right] \\
 &\quad + g_1 g_2 \frac{\bar{m}_1 - \bar{d}_1}{m_1 - d_1} \left[ 1 + \frac{m_2 - d_1}{m_1 - d_1} \text{Log} \frac{m_2 - m_1}{m_2 - d_1} \right] \\
 &\quad \left. + g_1 g_2 \left[ \frac{\bar{d}_1}{m_1 - d_1} \text{Log} \frac{m_2 - m_1}{m_2 - d_1} - \frac{\bar{m}_1}{m_2 - m_1} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Notons:

$$\alpha_1 = \frac{\bar{m}_1 - \bar{d}_1}{m_1 - d_1} \quad ; \quad \alpha_2 = \frac{\bar{m}_2 - \bar{d}_2}{m_2 - d_2}$$

En regroupant suivant les fonctions logarithmiques, nous obtenons:

$$\begin{aligned} T_{(d_1, m_1; d_2, m_2)}(g_1, g_2) = & -\frac{1}{2} \frac{2\mu}{\chi+1} \frac{1}{2\pi} \\ & \cdot \operatorname{Re} \left[ \operatorname{Log} \left( \frac{m_2 - m_1}{m_2 - d_1} \right) \cdot \left[ \frac{(m_2 - d_1)^2}{(m_1 - d_1)(m_2 - d_2)} \right] \right. \\ & \cdot \left[ \left( 1 - 2 \frac{m_2 - d_2}{m_2 - d_1} \right) \cdot (g_1 \bar{g}_2 + \bar{g}_1 g_2) + \left( \alpha_1 + \alpha_2 - 2 \frac{\bar{m}_2 - \bar{d}_1}{m_2 - d_1} - 2 \frac{m_2 - d_2}{m_2 - d_1} \left( \alpha_1 - \frac{\bar{m}_2 - \bar{d}_1}{m_2 - d_1} \right) \right) g_1 g_2 \right] \\ & - \operatorname{Log} \left( \frac{d_2 - m_1}{d_2 - d_1} \right) \cdot \left[ \frac{(d_2 - d_1)^2}{(m_1 - d_1)(m_2 - d_2)} \right] \cdot \left[ g_1 \bar{g}_2 + \bar{g}_1 g_2 + g_1 g_2 \left( \alpha_1 + \alpha_2 - 2 \frac{\bar{d}_2 - \bar{d}_1}{d_2 - d_1} \right) \right] \\ & - \operatorname{Log} \left( \frac{m_2 - m_1}{d_2 - m_1} \right) \cdot \left[ \frac{(m_1 - d_1)^2}{(m_1 - d_1)(m_2 - d_2)} \right] \cdot \left[ g_1 \bar{g}_2 + \bar{g}_1 g_2 + g_1 g_2 (\alpha_2 - \alpha_1) \right] \\ & \left. - \left[ g_1 \bar{g}_2 + \bar{g}_1 g_2 + g_1 g_2 \left( \alpha_1 + \alpha_2 - 2 \frac{\bar{m}_2 - \bar{m}_1}{m_2 - m_1} \right) \right] \right] \end{aligned}$$

Introduisons les notations suivantes:

$$(78) \quad p_1 = m_1 - d_1 \quad ; \quad p_2 = m_2 - d_2 \quad \text{et} \quad r = d_2 - d_1$$

$$(79) \quad \alpha_1 = \frac{\bar{m}_1 - \bar{d}_1}{m_1 - d_1} \quad ; \quad \alpha_2 = \frac{\bar{m}_2 - \bar{d}_2}{m_2 - d_2}$$

En regroupant les fonctions logarithmiques de la manière suivante, la symétrie entre les indices 1 et 2 est mise en évidence:

$$(80) \quad T_{(d_1, m_1; d_2, m_2)}(g_1, g_2) = - \frac{1}{2} \frac{2\mu}{x+1} \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left[ \right.$$

$$\frac{1}{p_1 p_2} \left\{ \left[ (g_1 \bar{g}_2 + \bar{g}_1 g_2) r^2 + g_1 g_2 (\alpha_1 r^2 + \alpha_2 r^2 - 2|r|^2) \right] \operatorname{Log} \left( \frac{d_2 - d_1}{m_2 - m_1} \right) \right.$$

$$+ \left[ (g_1 \bar{g}_2 + \bar{g}_1 g_2) (r^2 - p_1^2) + g_1 g_2 (\alpha_1 (r^2 + p_1^2) + \alpha_2 (r^2 - p_1^2) - 2|r|^2) \right] \operatorname{Log} \left( \frac{m_2 - m_1}{d_2 - m_1} \right)$$

$$+ \left. \left[ (g_1 \bar{g}_2 + \bar{g}_1 g_2) (r^2 - p_2^2) + g_1 g_2 (\alpha_1 (r^2 + p_2^2) + \alpha_2 (r^2 - p_2^2) - 2|r|^2) \right] \operatorname{Log} \left( \frac{m_2 - m_1}{m_2 - d_1} \right) \right\}$$

$$- \left\{ g_1 \bar{g}_2 + \bar{g}_1 g_2 + g_1 g_2 \left( \alpha_1 + \alpha_2 - 2 \frac{\bar{m}_2 - \bar{m}_1}{m_2 - m_1} \right) \right\} \left. \right]$$

**Nota:** Ces expressions sont justes tant que les 4 valeurs complexes  $d_1, m_1 ; d_2, m_2$  sont différentes. Comme l'on peut supposer  $m_1 \neq d_1$  et  $m_2 \neq d_2$ , il faut étudier les six cas suivants:

$$1) \quad d_1 = d_2 \quad , \quad m_1 = m_2$$

$$2) \quad d_1 = d_2 \quad , \quad m_1 \neq m_2$$

$$3) \quad d_1 = m_2 \quad , \quad d_2 = m_1$$

$$4) \quad d_1 = m_2 \quad , \quad d_2 \neq m_1$$

$$5) \quad d_1 \neq m_2 \quad , \quad d_2 = m_1$$

$$6) \quad d_1 \neq d_2 \quad , \quad m_1 = m_2$$

Dans ces cas, il faut examiner la valeur limite de T. Prenons l'exemple du cas 2, lorsque  $\varepsilon = d_2 - d_1$  tend vers zero, le

facteur de la fonction logarithmique  $\text{Log} \frac{d_2 - d_1}{m_2 - m_1}$  tend vers zero au

moins comme  $\varepsilon$ . Comme la valeur limite de la fonction  $\varepsilon \cdot \text{Log} \varepsilon$  est nulle lorsque  $\varepsilon$  tend vers zero, il suffit d'enlever le premier terme de T. On peut faire des raisonnements analogues pour les cas 3, 4, et 5. Par contre, le cas où  $m_2 = m_1$  est plus délicat à cause de la forte singularité. Si on regroupe les fonctions logarithmiques  $\text{Log}(m_2 - m_1)$ , on peut vérifier que son facteur est une constante. Ce terme va donc disparaître lors de la

superposition des demi-maillages. Le terme  $\frac{\bar{m}_2 - \bar{m}_1}{m_2 - m_1}$  disparaîtra

également. On peut donc les omettre dans les cas 1 et 6.

2°) interaction entre 2 mailles complètes

Introduisons 4 fonctions de 4 variables complexes  $d_1, m_1 ; d_2, m_2$  à valeurs réelles:

$$(81, a) \quad K_{RR}(d_1, m_1 ; d_2, m_2) = T_{d_1, m_1 ; d_2, m_2}(1, 1)$$

$$(81, b) \quad K_{IR}(d_1, m_1 ; d_2, m_2) = T_{d_1, m_1 ; d_2, m_2}(i, 1)$$

$$(81, c) \quad K_{RI}(d_1, m_1 ; d_2, m_2) = T_{d_1, m_1 ; d_2, m_2}(1, i)$$

$$(81, d) \quad K_{II}(d_1, m_1 ; d_2, m_2) = T_{d_1, m_1 ; d_2, m_2}(i, i)$$

Le problème discrétisé à M mailles a 2M degrés de liberté correspondant chacun à la partie réelle ou à la partie imaginaire de  $\mathcal{S}_i$ .

Rappelons que nous avons noté ces degrés de liberté ainsi:

$$g_{2i-1} = \text{Re}[\mathcal{S}_i]$$

$$g_{2i} = \text{Im}[\mathcal{S}_i]$$

Nous pouvons alors donner l'expression analytique des coefficients  $K_{2i-1, 2j-1}$ ,  $K_{2i-1, 2j}$ ,  $K_{2i, 2j-1}$ ,  $K_{2i, 2j}$  de la matrice de rigidité (2MX2M):

$$(82, a) \quad K_{2i-1, 2j-1} = K_{RR}(d_i, m_i; d_j; m_j) - K_{RR}(d_i, m_i; f_j; m_j) \\ - K_{RR}(f_i, m_i; d_j; m_j) + K_{RR}(f_i, m_i; f_j; m_j)$$

$$(82, b) \quad K_{2i, 2j-1} = K_{IR}(d_i, m_i; d_j; m_j) - K_{IR}(d_i, m_i; f_j; m_j) \\ - K_{IR}(f_i, m_i; d_j; m_j) + K_{IR}(f_i, m_i; f_j; m_j)$$

$$(82, c) \quad K_{2i-1, 2j} = K_{RI}(d_i, m_i; d_j; m_j) - K_{RI}(d_i, m_i; f_j; m_j) \\ - K_{RI}(f_i, m_i; d_j; m_j) + K_{RI}(f_i, m_i; f_j; m_j)$$

$$(82, d) \quad K_{2i, 2j} = K_{II}(d_i, m_i; d_j; m_j) - K_{II}(d_i, m_i; f_j; m_j) \\ - K_{II}(f_i, m_i; d_j; m_j) + K_{II}(f_i, m_i; f_j; m_j)$$

Notons que  $K_{2i, 2j-1} = K_{2i-1, 2j}$  et les quatre coefficients sont donnés par la position des noeuds  $i$  et  $j$ .

Ce sont donc ces expressions analytiques qui permettent de construire facilement la matrice de rigidité.

c) Calcul du second membre

Dans le cas général le second membre est calculé d'après l'équation (47).

Nous avons choisi les fonctions de forme  $N_k$  affines, si la contrainte imposée  $\underline{T}_d = (T_{d1}, T_{d2})$  est aussi une fonction affine par élément, nous avons alors:

$$(83, a) \quad F_{2k-1} = \frac{1}{6} \left[ \left( T_{d+1}^{k-1} + 2T_{d-1}^k \right) \cdot l_k^- + \left( T_{d+1}^k + 2T_{d-1}^{k+1} \right) \cdot l_i^+ \right]$$

$$(83, b) \quad F_{2k} = \frac{1}{6} \left[ \left( T_{d+2}^{k-1} + 2T_{d-2}^k \right) \cdot l_k^- + \left( T_{d+2}^k + 2T_{d-2}^{k+1} \right) \cdot l_i^+ \right]$$

où  $l_k^-$  et  $l_k^+$  sont respectivement la longueur de l'élément à gauche et la longueur de l'élément à droite du noeud  $k$  ;  $\underline{T}_d^i$  et  $\underline{T}_d^i$  sont respectivement la valeur de la contrainte normale au noeud  $i$  sur l'élément à gauche de ce noeud et celle sur l'élément à droite de ce noeud. Ces deux valeurs peuvent être différentes aux noeuds anguleux car les éléments à gauche et à droite de ces noeuds n'ont pas le même vecteur normal.

## CHAPITRE 5

## TESTS ET VALIDATION

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats des calculs effectués dans le but de tester et de valider la méthode numérique que nous avons développée. Nous calculerons le facteur d'intensité de contrainte pour les problèmes de multifissures dans le milieu infini puis dans le cas de fissure intérieure et de fissure débouchante dans un domaine borné. Nous aborderons également le problème de fissure de Barenblatt par une méthode itérative qui consiste à passer le terme correspondant à des forces dissipatives au second membre du système d'équations linéaires. Ces forces dissipatives peuvent être une fonction non linéaire de la discontinuité de déplacement.

Rappelons que le taux de restitution d'énergie est défini par:

$$(84) \quad G = \frac{dP}{dl}$$

où  $dl$  désigne une variation de longueur de fissure et  $dP$  désigne la variation de l'énergie potentielle qui en résulte. Cette dérivée est réalisée numériquement en faisant un incrément fini de longueur de fissure, nous avons pris  $\frac{dl}{l} = 0.1\%$  pour tous les calculs. Le facteur d'intensité de contrainte est relié à  $G$  par la relation suivante:

$$(85) \quad G = \frac{\chi+1}{8\mu} (K_I^2 + K_{II}^2)$$

où  $\frac{\chi+1}{8\mu} = \frac{1-\nu^2}{E}$  dans le cas de déformation plane;  $\frac{\chi+1}{8\mu} = \frac{1}{E}$  dans le cas de contrainte plane.

Tous les calculs que nous allons faire sont en déformation plane, le milieu sans fissure est élastique homogène isotrope, la valeur du coefficient de Poisson  $\nu=0.3$ . Nous utiliserons des fonctions de forme affines par segment de droite, rappelons que dans ce cas, nous avons la solution analytique des champs et des coefficients de la matrice de rigidité (cf. chapitre 4).

a) domaine infini

Nous allons étudier le problème de multifissures dans le milieu infini dans différents cas de figure: fissures linéaires; fissures parallèles; fissures croisées. Une pression uniforme est appliquée sur les lèvres des fissures. La contrainte est nulle à l'infini ainsi que la force de volume. (problèmes auxiliaires)

1') une fissure rectiligne

Nous allons dans ce cas très simple calculer l'énergie potentielle totale du milieu infini afin de voir l'influence des maillages sur la précision des résultats.

Le résultat analytique est bien connu, l'énergie potentielle totale  $P$  est égale à l'aire de l'ellipse, forme exacte de l'ouverture de la fissure de Griffith.

Deux types de maillage sont utilisés, le premier est composé d'éléments égaux (fig 1), le second raffinant les zones proches des pointes de fissure (fig 2). Le nombre d'élément est  $n=16$ .



fig1: maillage à éléments égaux; fig2: maillage raffinant les zones proches des extrémités

Le second type de maillage fourni une meilleure représentation de la singularité des champs au voisinage des pointes de la fissure comme on le constate sur l'ouverture de la fissure (fig 2), l'approximation globale en énergie est aussi meilleure avec ce maillage (fig 3). Dans la suite, nous utiliserons des maillages en raffinant systématiquement les éléments proches des pointes de fissures. Le tableau 1 donne l'erreur relative en énergie potentielle  $(P-P_{t,h})/P_{t,h}$  pour différentes finesses de maillage.

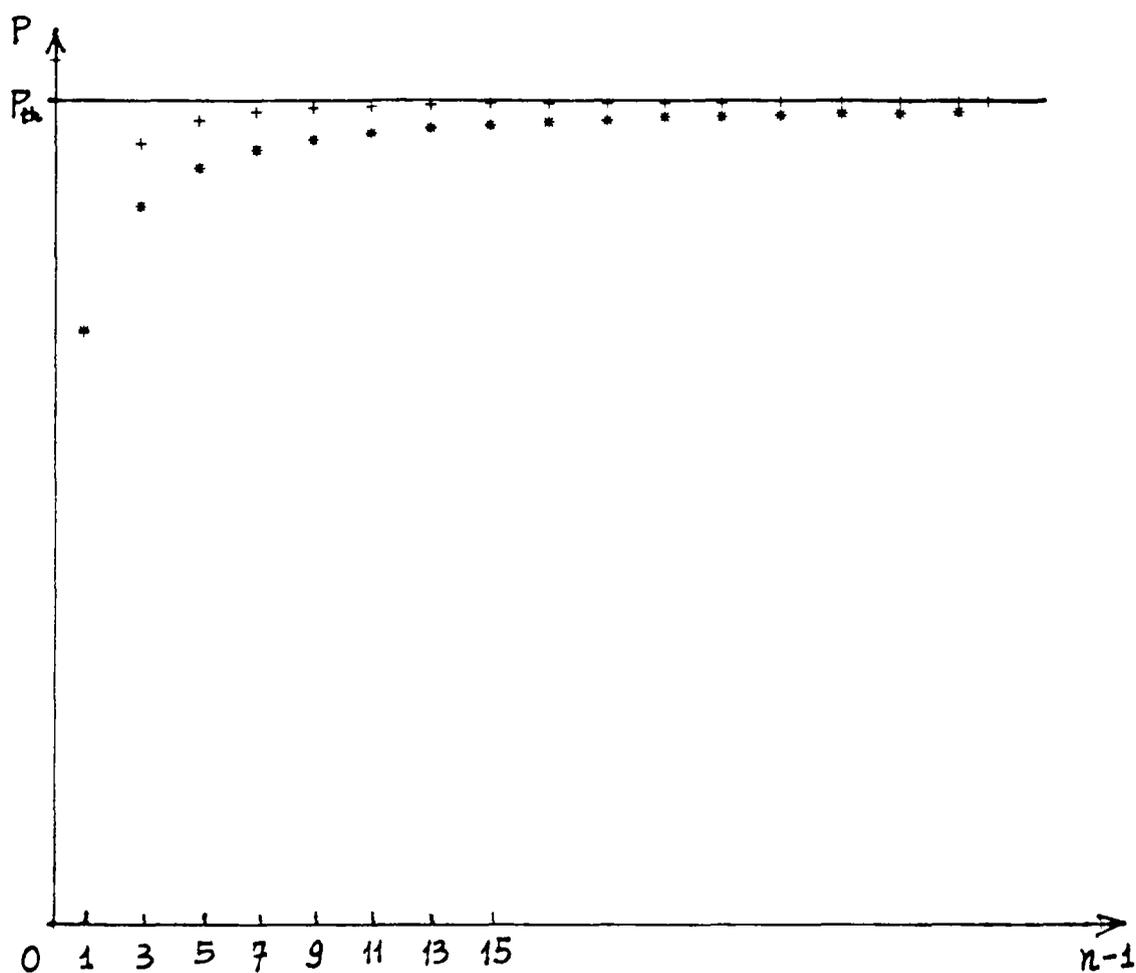


fig 3 énergie potentielle totale P  
en fonction du nombre d'éléments n

légende  $P_{th}$  : la valeur exacte; \* : maillage à éléments égaux  
+ : maillage raffinant les zones proches des extrémités

n-1	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27
$\frac{P-P_{th}}{P_{th}}$ (%)	28.	5.	2.2	1.2	.77	.53	.39	.30	.23	.19	.16	.13	.11	.096

tab 1: erreur relative de l'énergie potentielle (maillage raffinant les zones proches des pointes de fissure)

$n$  : nombre d'éléments ;

$\frac{P-P_{th}}{P_{th}}$  (%) : erreur relative d'énergie en pourcentage

## 2°) Deux fissures colinéaires

Considérons deux fissures rectilignes colinéaires de même longueur  $2a$  dont les centres sont séparés d'une distance  $d$  (fig4).

Deux maillages sont utilisés pour le calcul du facteur d'intensité de contrainte: 8 éléments par fissure pour le maillage a, 16 éléments par fissure pour le maillage b. La figure 5 montre un maillage utilisé et l'ouverture des fissures pour ce maillage, les points alignés correspondent aux positions initiales des noeuds.

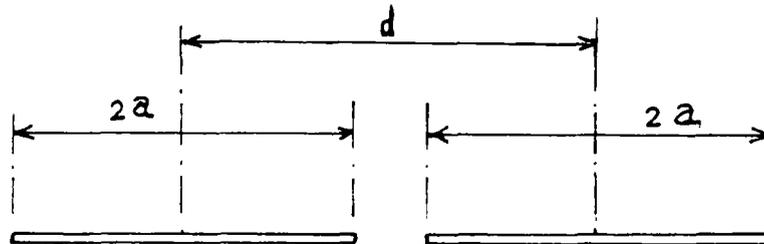


fig 4 : deux fissures colinéaires

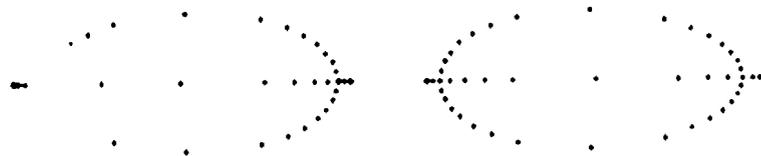


fig 5 : ouverture des fissures

Le tableau 2 présente les valeurs relatives du facteur d'intensité de contrainte intérieur  $f_i = \frac{K_{I B}}{\sigma\sqrt{\pi a}}$  (aux points B et C) et extérieur  $f_e = \frac{K_{I A}}{\sigma\sqrt{\pi a}}$  (aux points A et D). Les valeurs de référence sont calculées par une méthode semi-analytique ([18] H.HORII et NEMAT-NASSER). L'erreur relative par rapport à ces valeurs de référence est de l'ordre de 1% pour le maillage a (8 éléments sur chaque fissure) et de l'ordre de 0.1% pour le maillage b (16 éléments sur chaque fissure).

$\frac{a}{d}$	$f_i$		H&N	$f_e$		H&N
	8el	16el		8el	16el	
0.1	0.995	1.0000	1.0013	0.995	0.9997	1.0012
0.2	0.999	1.0042	1.0057	0.998	1.0031	1.0046
0.3	1.008	1.0132	1.0138	1.004	1.0089	1.0102
0.4	1.021	1.0256	1.0272	1.011	1.0163	1.0179
0.5	1.041	1.0463	1.0480	1.021	1.0264	1.0280
0.6	1.073	1.0790	1.0804	1.034	1.0395	1.0409
0.7	1.124	1.1338	1.1333	1.051	1.0564	1.0579
0.8	1.218	1.2274	1.2289	1.073	1.0795	1.0811
0.9	1.433	1.4492		1.108	1.1152	
0.95	1.723	1.7585		1.138	1.1462	

tab2: facteur d'intensité de contrainte pour deux fissures colinéaires

### 3°) deux fissures parallèles

Considérons deux fissures parallèles de même ligne médiane et de longueur  $2a$  séparées d'une distance  $h$  (fig 6). La figure 7 montre l'ouverture des fissures.

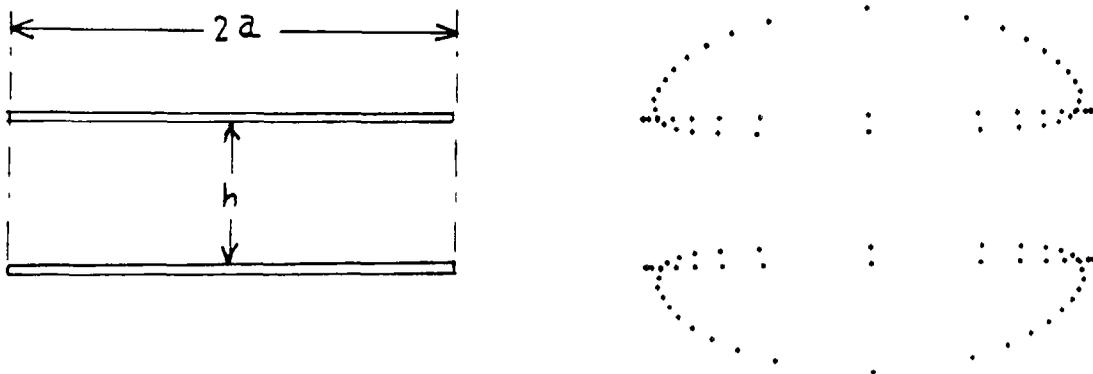


fig 6: 2 fissures parallèles ; fig 7: ouverture des fissures

Nous avons mis 8 éléments sur chaque fissure pour le calcul du facteur d'intensité de contrainte. Les valeurs relatives du facteur d'intensité de contrainte  $f = \frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}}$  sont données dans le tableau 3. Les valeurs de référence sont calculées par la formule suivante [TADA, 1973]:

$$(86) \quad fr = \left( \frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}} \right)_r = 1 - 0.293 \frac{a}{a+h} \left( 1 - \left( \frac{a}{a+h} \right)^4 \right)$$

$\frac{a}{a+h}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$f = \frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}}$	.989	.973	.940	.892	.841	.800	.769	.744	.722
fr	.999	.965	.933	.898	.863	.829	.797	.766	.732

tab 3 facteur d'intensité de contrainte des fissures parallèles

#### 4\*) Deux fissures croisées sous chargement biaxial

Considérons deux fissures de même longueur croisées perpendiculairement à leur centre soumises à un chargement biaxial.  $\lambda$  désigne le rapport de la traction horizontale et de la traction verticale (fig 8). La figure 9 montre l'ouverture des fissures.

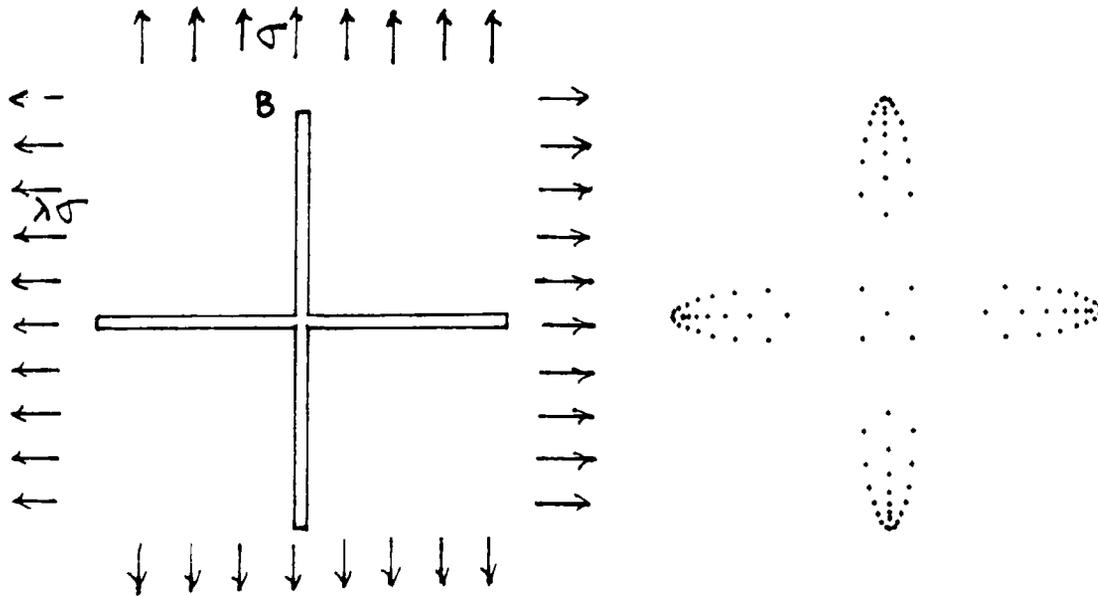


fig8: 2 fissures croisées ; fig9 ouverture des fissures sous chargement biaxial

Nous avons calculé le facteur d'intensité de contrainte au point B en faisant varier le rapport des forces horizontales et verticales. Nous avons utilisé 8 éléments sur chaque fissure. Les résultats numériques sont présentés dans le tableau 4. Les valeurs de référence sont calculées par la formule suivante [TADA, 1973]:

$$(87) \quad fr = \left( \frac{K_{I B}}{\sigma \sqrt{\pi a}} \right)_r = -0.2227 + 1.0863\lambda$$

$\lambda$	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	2.0	3.0	4.0
$f = \frac{K_{I B}}{\sigma \sqrt{\pi a}}$	.096	.209	.318	.427	.535	.643	.751	.859	1.94	3.01	4.09
fr	.103	.212	.321	.429	.538	.646	.755	.864	1.95	3.03	4.12

Tab 4 facteur d'intensité de contrainte, deux fissures croisées

b) domaine fini

Nous avons vu que notre méthode numérique est très efficace pour les problèmes de fissures dans le milieu infini. Or cette méthode est construite pour résoudre aussi bien les problèmes d'un domaine borné ou d'un domaine non borné avec des cavités que ceux du milieu infini (voir chapitre 1), illustrons ceci sur des exemples d'un domaine borné sans fissure puis avec fissure.

1°) Domaine borné et domaine non borné avec cavité sans fissure

Examinons les deux problèmes suivants:

- i°) une plaque carrée sous traction  $\sigma$  (fig 10)
- ii°) une cavité carrée dans une plaque infinie sous compression  $-\sigma$  (fig 11, le trou a la même géométrie que la plaque carrée du premier problème).

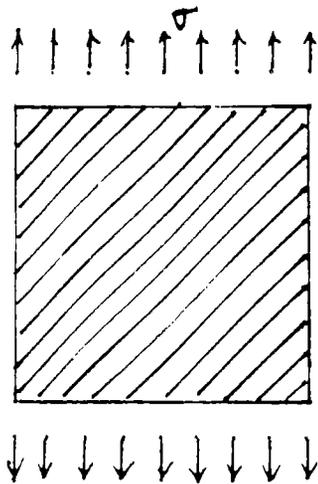


fig 10 plaque carrée;

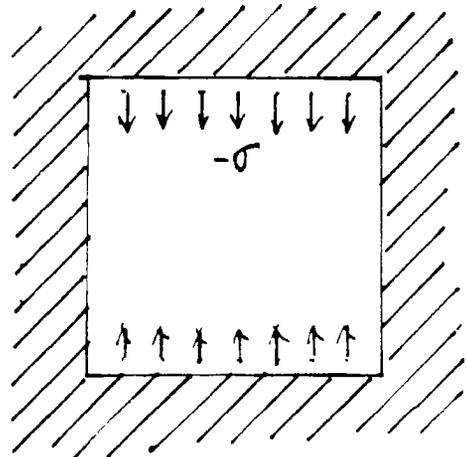


fig11 cavité carrée dans  
une plaque infinie

La méthode de discontinuité de déplacement résout simultanément les deux problèmes ci-dessus. En effet ces deux problèmes sont associés l'un à l'autre dans le milieu infini où le contour de la plaque carrée (ou de la cavité) est considéré comme une ligne de discontinuité de déplacement (voir chapitre 1).

La solution du premier problème est triviale, la déformation est uniforme dans toute la plaque, nous avons calculé le module d'Young et le coefficient de Poisson en calculant l'allongement moyen dans la direction de la traction et le rétrécissement dans la direction perpendiculaire. Nous avons donné dans le tableau 5 l'erreur relative de ces grandeurs par rapport à leur valeurs initiales.

La solution du deuxième problème est moins triviale. La figure 12 montre les géométries déformées de la plaque carrée (rectangle) et de la cavité carrée (contour avec des faces supérieure et inférieure courbées et les faces latérales droites), les points correspondent aux positions initiales des noeuds sur le contour carré.

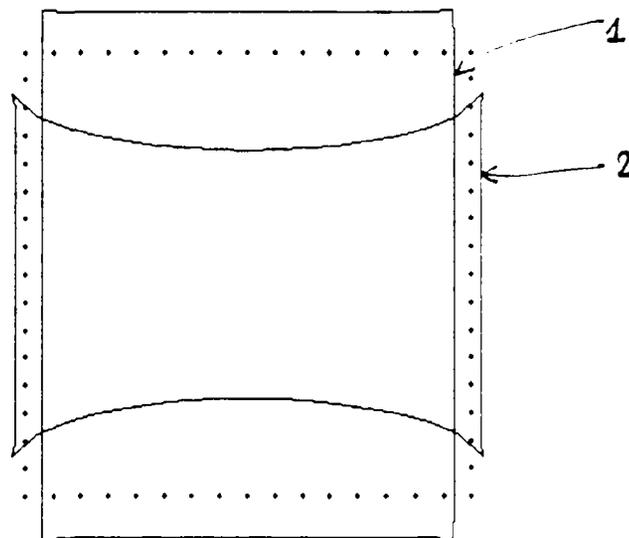


fig 12: courbe pointillée: maillage sur la géométrie initiale  
 courbe 1: géométrie déformée d'une plaque carrée en traction  
 courbe 2: géométrie déformée d'une cavité carrée en compression

	16el	32el	64el
erreur relative du module d'Young	2.10%	0.66%	0.22%
erreur relative du coefficient de Poisson	1.16%	0.45%	0.17%

tab 5: erreur relative des coefficients d'élasticité calculés

## 2') Fissure intérieure

Considérons une fissure rectiligne horizontale dans un rectangle soumis à une traction verticale (fig 13,  $h=3b$ ).

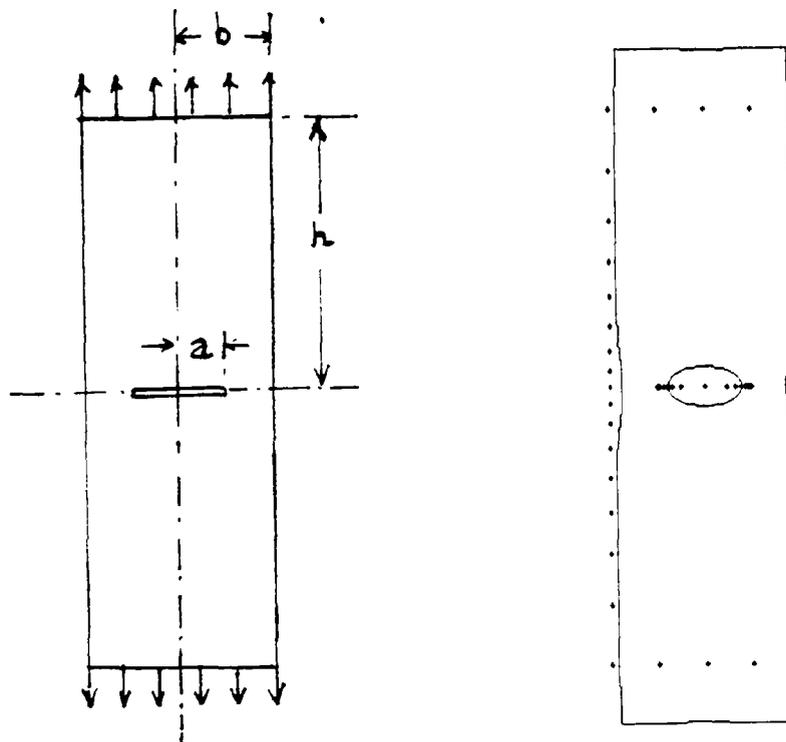


fig13: fissure intérieure ; fig14: maillage utilisé  
et géométrie déformée

Nous avons calculé le facteur d'intensité de contrainte pour différentes valeurs du rapport  $a/b$ ,  $a$  étant la demi-longueur de la fissure,  $b$  la demi-largeur du rectangle. Pour les valeurs  $a/b < 0.5$ , nous utilisons le maillage montré sur la figure 14 (16 éléments sur la fissure, 4 éléments sur chaque face horizontale et 16 éléments sur chaque face latérale), quand la fissure est plus longue, nous raffinons d'avantage les zones du contour proches des pointes de la fissure tout en gardant le nombre total d'élément constant. Les valeurs calculées de  $f = \frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}}$  sont présentées dans le tableau 6, les valeurs de référence sont prises dans [TADA, 1973].

a/b	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
f	1.005	1.023	1.057	1.107	1.184	1.230	1.482	1.804	2.562
fr	1.006	1.0246	1.0577	1.1094	1.1867	1.3033	1.4882	1.1816	2.5776

tab6: facteur d'intensité de contrainte, fissure intérieure centrée

3°) fissure débouchante

Considérons une fissure horizontale débouchante sur un coté vertical d'un rectangle (fig 15).

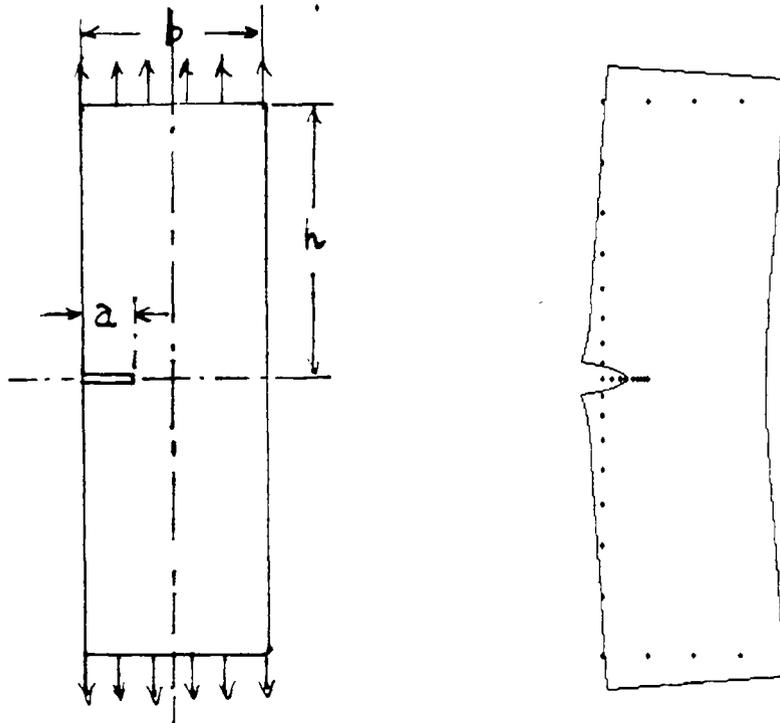


fig15: fissure débouchante; fig16: maillage utilisé et géométrie déformée

Le facteur d'intensité de contrainte est calculé pour différentes valeurs du rapport  $a/b$ ,  $a$  est la longueur de la fissure,  $b$  est la largeur du rectangle. La figure 16 montre le maillage utilisé et la géométrie déformée. Le tableau 7 présente les valeurs relatives du facteur d'intensité de contrainte  $f = \frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}}$  calculées pour différentes valeurs du rapport  $a/b$ , les valeurs de référence sont calculées par la formule suivante ([17] TADA):

$$(88) \quad fr = \frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}} = \sqrt{\frac{2b}{\pi a} \tan\left(\frac{\pi a}{2b}\right)} \frac{0.752 + 2.02\frac{a}{b} + 0.37\left(1 - \sin\frac{\pi a}{2b}\right)^3}{\cos\left(\frac{\pi a}{2b}\right)}$$

La précision de cette formule est estimée à 0.5% quelque soit le rapport  $\frac{a}{b}$ .

$\frac{a}{b}$	.001	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
$f = \frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}}$	1.114	1.142	1.188	1.657	2.107	2.815	4.014	6.347	11.93	34.49
fr	1.122	1.147	1.196	1.656	2.110	2.827	4.044	6.379	12.00	34.77

tab7: facteur d'intensité de contrainte, fissure débouchante

c) Fissure de Dugdale-Barenblatt

Nous choisissons cet exemple pour montrer comment résoudre les problèmes de lignes de discontinuités de déplacement plus généraux que les problèmes de fissure de Griffith lorsque des forces dissipatives sont réparties sur les lignes de discontinuités.

La fissure de Barenblatt est choisie de longueur finie dans un massif infini soumis à la tension uniforme  $\sigma_{22} = \sigma$ . Le modèle est en outre caractérisé par l'existence de forces de cohésion d'intensité constante égale à la limite d'élasticité en traction  $\sigma_c^n$ , sur une certaine largeur  $R$  où l'ouverture  $g$  (la discontinuité de déplacement normale) est inférieure à une valeur critique  $g^c = \frac{G_c}{\sigma_c^n}$  (cf chapitre 3 de la partie 1).

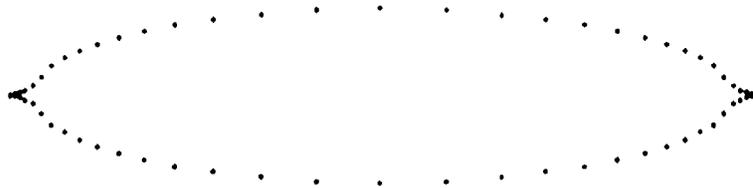


fig 13 Modèle de Dugdale-Barenblatt

La fonction de dissipation d'énergie  $D(g)$  est alors, si le chargement est monotone croissant:

$$(89) \quad D(g) = \int_{-C}^{+C} \sigma_c^n g(x) H(g^c - g(x)) dx$$

où  $H(t)$  est une fonction d'Heaviside  $H(t) = 0$  si  $t < 0$   $H(t) = 1$  si  $t \geq 0$ .

La solution  $g(x)$  minimise dans l'ensemble des  $g^*$  admissibles la somme de l'énergie potentielle totale  $P(g^*)$  et de l'énergie dissipée  $D(g^*)$  (cf. partie 1).

Nous avons résolu le problème élastique de discontinuité de déplacement dans le milieu infini bidimensionnel dans le chapitre 2. Cette solution nous a permis d'explicitier  $P(g)$ . Dans le chapitre 3, nous avons vu qu'après la discrétisation,  $P(g)$  est approchée par:

$$(90) \quad \tilde{P} = \frac{1}{2} g_i K_{ij} g_j + F_j g_j$$

En discrétisant l'intégrale (89), nous obtenons  $D(g)$  approché:

$$(91) \quad \tilde{D} = F_j^c g_j$$

où les  $F_j^c$  sont définis par:

$$(92) \quad F_j^c = \int_{L\sigma_c^n} H(g(\underline{s}) - g^c) N_j(\underline{s}) ds$$

Notons que les  $g_i$  sont uniquement les discontinuités normales puisque toutes les composantes tangentiellles sont nulles.

La minimisation de  $P+D$  nous amène à résoudre le système d'équations suivant:

$$(93) \quad \mathbf{K} \mathbf{g} + \mathbf{F}^c = \mathbf{F}$$

$\mathbf{K}$  et  $\mathbf{F}$  sont respectivement la matrice et le second membre d'un problème élastique: ce sont donc des constantes. Mais  $\mathbf{F}^c$  dépend de la discontinuité de déplacement et cette dépendance est non linéaire. Nous proposons une méthode itérative basée sur l'algorithme suivant:

- i) Initialiser  $\mathbf{F}^{c^0}$  à 0
- ii) Résoudre le système  $\mathbf{K} \mathbf{g}^{l+1} = \mathbf{F} - \mathbf{F}^{c^l}$ ,  $\mathbf{F}^{c^l}$  est calculé à l'aide de la solution  $\mathbf{g}^l$ , et répéter cette opération tant que la solution n'a pas convergé.

En guise de validation, nous avons calculé la contrainte de rupture  $\sigma$  pour  $\sigma_c^n$ ,  $g^c$  et la longueur totale  $2c$  donnée.  $\sigma$  est la plus petite contrainte à partir de laquelle la pente de l'ouverture aux pointes de fissure devient non nulle. Une fois  $\sigma$  trouvée nous pouvons recalculer  $g^c$  par la solution analytique suivante ([19] BUI H.D.):

$$(94) \quad g^c = \frac{\chi+1}{\pi\mu} \sigma c \cos(\pi\sigma/2\sigma_c^n) \operatorname{Log} \left| \frac{1}{\cos(\pi\sigma/2\sigma_c^n)} \right|$$

où  $\frac{\chi+1}{\mu} = \frac{8(1-\nu^2)}{E}$  en déformation plane

Les calculs sont faits avec les données suivantes:

Module D'Young  $E = 10^9$  MPa

Coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$

Limite d'élasticité  $\sigma_c^n = 5 \times 10^7$  MPa

Longueur totale de fissure  $2c = 2$  m

$g^c$ (donné)	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
$\sigma$	4.17	5.93	7.30	8.50	9.47	10.4	11.3	12.1	12.9	13.6
$g^c$ (calculé)	0.99	1.99	2.99	4.03	4.98	6.02	6.97	7.98	8.98	9.96

tab7: contrainte de rupture en fonction de l'écart d'ouverture  $g^c$

#### d) Commentaire et Conclusion

Nous avons testé notre programme de résolution des problèmes bidimensionnels en calculant le facteur d'intensité de contrainte dans différents cas de figure: fissures colinéaires, parallèles ou croisées dans le milieu infini; fissure intérieure; fissure débouchante. Nous avons obtenu des résultats de très bonne précision même lorsque sont présentes de fortes interactions fissure-fissure ou fissure-contour, i.e. lorsque les pointes des fissures sont proches les uns des autres ou les pointes de fissures sont proches du contour.

Pour mieux représenter la singularité des champs aux voisinages des pointes de fissures et avoir une meilleure approximation en énergie, il faut raffiner le maillage près du bord. Nous avons constaté que la meilleure disposition des éléments est telle qu'une ellipse ait des variations de discontinuité égales sur chaque élément. Il faut aussi raffiner les éléments dans des zones du contour en forte interaction avec des fissures.

En général, une dizaine d'éléments par fissure suffit pour obtenir une erreur relative du facteur d'intensité de contrainte de l'ordre de 1%.





### Troisième partie

#### APPLICATION A LA MICROFISSURATION

Chapitre 1 : Module effectif d'un solide élastique bidimensionnel microfissuré

Chapitre 2 : Simulation numérique de l'endommagement et de la rupture des matériaux par microfissuration en fatigue

#### Introduction

Le problème d'endommagement et de rupture par microfissuration sous chargement monotone ou en fatigue a une grande importance pratique, mais la modélisation et la simulation numérique de ces phénomènes sont difficiles: les mécanismes microscopiques d'amorçages et de propagations de microfissures sont complexes et la distribution des microfissures est aléatoire.

Dans un premier temps (chapitre 1), nous nous intéressons à un problème élastique d'homogénéisation qui consiste à calculer les coefficients d'élasticité effectifs d'un solide microfissuré. De nombreux travaux ont été consacrés à ce problème. Il a d'abord été étudié par BUDIANSKY et O'CONNELL ([20] 1976). Ils ont appliqué la méthode auto-cohérente en supposant que les fissures sont elliptiques. Cette méthode a été développée plus tard par HORII et NEMAT-NASSER ([21] 1983) en prenant en compte des frottements sur les fissures. S. ANDRIEUX ([22] 1983) a appliqué la méthode d'homogénéisation au problème de fissures planes dans le cas de milieu bidimensionnel en supposant que la distribution des fissures est périodique. ABOUDI et BENEVISTE ([23] 1987) généralise la méthode auto-cohérente pour des fissures aléatoirement orientées dans le milieu bidimensionnel. Dans leur méthode, un disque fissuré est imaginé noyé dans le milieu équivalent. Contrairement aux méthodes citées ci-dessus qui sont des méthodes semi-analytiques avec des hypothèses de simplification dans des cas particuliers, nous utilisons l'outil numérique que nous avons construit en deuxième partie pour

calculer les coefficients d'élasticité effectifs d'un solide bidimensionnel microfissuré. Comme nous ne faisons aucune hypothèse sur la distribution des fissures, notre méthode est applicable dans tous les cas de figure: que la distribution des fissures soit aléatoire ou périodique; que l'orientation des fissures soit aléatoire ou unidirectionnelle; que la longueur des fissures soit aléatoire ou uniforme, nous pouvons donc répondre à des questions intéressantes: Quelle est la taille représentative d'un domaine élastique contenant un grand nombre de fissures? Dans quel intervalle la notion de densité de fissures utilisée dans les travaux cités ci-dessus est-elle suffisante comme paramètre pour le calcul des coefficients d'élasticités effectifs? ... .

Dans le deuxième chapitre, nous étudierons par simulation numérique le phénomène de rupture par microfissuration en fatigue. La complexité de ce phénomène est liée à la multiplicité des facteurs en jeu. La notion de limite d'endurance sous chargement cyclique d'amplitude constante a été introduite par H.WOHLER. La courbe S-N est la représentation largement utilisée par les expérimentateurs. La loi de progression de fissure par fatigue la plus utilisée est la loi de PARIS qui fait intervenir la notion de facteur d'intensité de contrainte. Le livre intitulé "La fatigue des matériaux et des structures" publié par C. BATHIAS et J-P.BAILON ([24] 1980) présente une synthèse des travaux concernant la description des phénomènes de fatigue des matériaux et les lois couramment utilisées. Nous proposons une forme simplifiée de la loi de PARIS, notre loi faisant intervenir l'ouverture maximale et la longueur de la fissure. En l'appliquant aux progressions de microfissures, nous déterminons numériquement le nombre de cycles à rupture. Ainsi nous réalisons le passage d'une loi de progression de microfissures à l'échelle microscopique (lois de Paris) à une loi de rupture par fatigue macroscopique (courbe de WOHLER).

## Chapitre 1

### MODULE EFFECTIF D'UN SOLIDE BIDIMENSIONNEL ELASTIQUE MICROFISSURE

Le calcul des coefficients d'élasticité effectifs d'un solide élastique microfissuré a une grande importance pour l'estimation de l'état d'endommagement du solide. De nombreux travaux ont été consacrés à cette étude ([20],[21],[22],[23] ...). Dans ce chapitre, nous faisons d'abord une étude d'estimation de la taille représentative du domaine pour le calcul numérique des coefficients d'élasticité effectifs d'un solide bidimensionnel microfissuré pour une densité de fissures fixe, puis nous effectuons le calcul en faisant varier la densité de fissures. Pour ce faire, nous considérons un domaine élastique contenant un grand nombre de fissures dont la distribution est aléatoire (suivant la loi uniforme) en position et en orientation, le comportement global d'un tel matériau est homogène et isotrope. Les coefficients d'élasticité effectifs calculés pour une suite de tailles croissantes du domaine permet d'estimer la taille représentative d'un solide microfissuré pour le calcul des coefficients d'élasticité effectifs d'un solide contenant un grand nombre de fissures aléatoirement réparties. Tous ces calculs seront faits pour des fissures de taille uniforme puis aléatoire pour savoir si la notion de densité de fissures est suffisante comme paramètre de calcul ou s'il faut connaître toute la distribution des fissures.

La méthode numérique utilisée est la méthode des discontinuités de déplacement présentée dans la partie 2. Avant de faire ces calculs, regardons d'abord comment générer une distribution aléatoire de fissures et définissons la notion de densité de fissures.

a) Distribution aléatoire de fissures

Considérons un domaine carré. Nous nous proposons d'y distribuer aléatoirement des microfissures à partir de la loi uniforme sur l'intervalle  $[0,1]$ , i.e. la position du centre des fissures et leur orientation sont aléatoires, leur distribution suivant la loi uniforme. En ce qui concerne la taille des fissures, deux cas seront étudiés: taille uniforme (même taille pour toutes les fissures) et taille aléatoire. C'est un cas de distribution diffuse et isotrope, le comportement mécanique global est à priori isotrope, cette isotropie sera justifiée par les résultats numériques.

La simulation de la loi uniforme sur l'intervalle  $[0,1]$  a une grande importance dans la pratique, elle nous sert d'outil de base pour générer des distributions aléatoires de fissures. Nous utilisons un générateur proposé par KNUTH [PRESS, 1986] dont on trouve le programme Fortran dans la thèse de K. SAB [SAB, 1989]. La figure 1 et la figure 2 montrent respectivement un exemple de distribution de fissures de taille uniforme et un exemple de distribution de fissures de taille aléatoire.

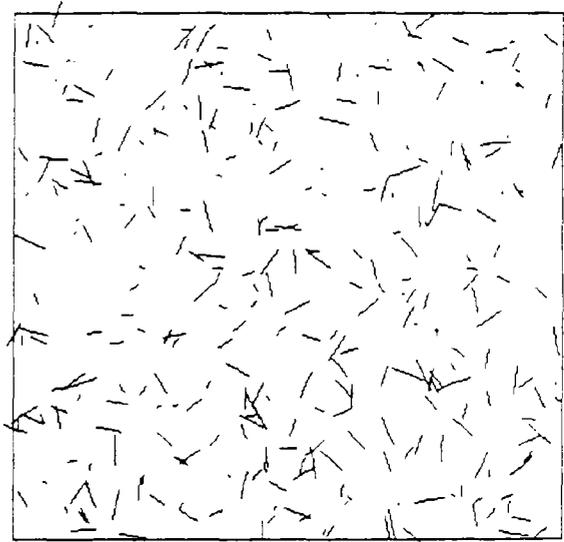
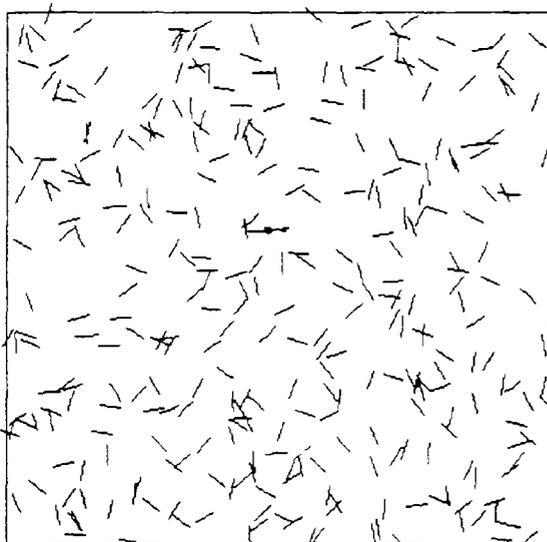


fig1: distribution de fissures ; fig2: distribution de fissures de longueur uniforme; de longueur aléatoire.

b) Densité de fissures

Nous définissons la densité de fissures d'un domaine microfissuré par le paramètre  $\alpha$ :

$$(1) \quad \alpha = \frac{\pi \sum_{i=1}^N c_i^2}{A}$$

où  $N$  est le nombre total de fissures,  $A$  est la surface du domaine;  $c_i$  est la demi-longueur de la  $i$ -ème fissure.

Remarquons que cette notion de densité de fissures suffit en première approximation pour calculer les coefficients d'élasticité effectifs quand l'interaction entre différentes fissures est faible, c'est-à-dire quand la valeur de  $\alpha$  est petite (ceci sera justifié en comparant les résultats que nous obtiendrons dans le cas de fissures de longueur uniforme et dans le cas de fissures de longueurs aléatoires). Par contre ceci n'est sans doute pas vrai si on veut étudier le problème de l'évolution d'endommagement et de la rupture puisque c'est surtout la longueur des plus grandes fissures et leur interaction qui sont prépondérantes vis à vis de la vitesse de l'endommagement et de la rupture des matériaux.

Si les fissures ont toutes la même longueur,

$$c_i = c \quad \forall i \in (1, \dots, N)$$

alors

$$\alpha = \frac{\pi N c^2}{A}$$

ou encore, si on note  $\lambda = \frac{N}{A}$  la densité de fissures en nombre:

$$\alpha = \pi \lambda c^2$$

On peut faire varier la densité de fissures en changeant, soit  $\lambda$ , soit la longueur des fissures  $c$ .

### c) calculs et résultats

Les calculs seront faits sur un domaine élastique carré de surface  $L \times L = A$ , la distribution des fissures est aléatoire en position et en orientation. Nous prenons 16 éléments sur chaque côté du carré et 2 éléments sur chaque fissure (une seule maille par fissure). La fonction de forme approchant la fonction de discontinuité est affine par élément. L'ouverture des fissures est donc approchée par un losange.

Le milieu élastique sans fissure est caractérisé par le module d'Young  $E^0$  et le coefficient de Poisson  $\nu^0$  (nous prenons  $\nu^0 = 0.3$ ).

Pour chaque distribution de fissures générée à partir de la loi uniforme (figure 3), nous appliquons successivement une traction verticale puis une traction horizontale. Pour chaque chargement nous calculons l'allongement moyen et relatif dans la direction de la traction (verticale ou horizontale) et le rétrécissement moyen et relatif dans la direction perpendiculaire à la direction de la traction et nous en déduisons le module d'Young et le coefficient de Poisson apparent ( $E^e$  et  $\nu^e$ ) dans cette direction. Comme le comportement mécanique globale est à priori isotrope (cette isotropie sera justifiée par les résultats numériques que nous obtiendrons), le fait d'appliquer deux chargements successifs permet de doubler le nombre de calculs sans construire et sans inverser plus de matrices de rigidité, seul le second membre étant à recalculer.

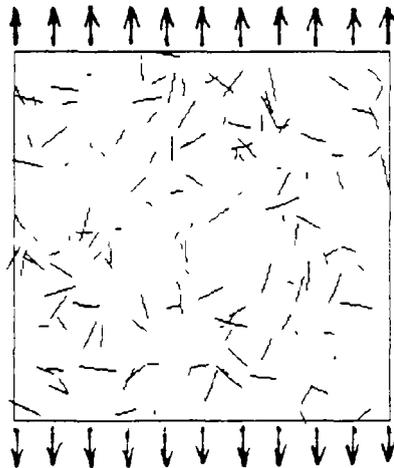


fig3: domaine microfissuré sous chargement uniaxiale

1°) Influence de la taille du domaine sur les coefficients d'élasticité effectifs

Nous faisons une série de calculs pour des tailles du domaine égales à 2,3,4,5,6,7,8,9 en fixant la densité de fissure en nombre  $\lambda = \frac{N}{A} = 4$ . Nous prenons d'abord  $c_i = c = 0.4$  comme longueur pour toutes les fissures puis nous prenons  $c_i$  aléatoirement suivant la loi uniforme (ce que nous notons avec le symbole  $\epsilon_a$ ) sur l'intervalle  $[0, 0.4\sqrt{3}]$  ( $c \in \epsilon_a [0, 0.4\sqrt{3}]$ ). Notons que la densité de fissures est la même dans ces deux cas ( $\alpha = \pi \lambda c^2 \approx 2$ ).

cas 1: longueur de fissures uniforme

Le figure 4 présente le module d'Young effectif relatif  $\frac{E^e}{E^0}$  calculé pour différentes tailles L du domaine. Nous avons effectué 10 calculs (sur 5 distributions de fissures) pour chaque taille du domaine. La ligne médiane relie les valeurs des espérances  $m_E = \frac{E_m^e}{E^0} = \frac{1}{E^0} \frac{1}{10} \sum_{n=1}^{10} E_n^e$  calculées pour chaque taille du domaine et elle est encadrée par deux lignes des écarts type

$m_E - \sigma_E$  et  $m_E + \sigma_E$  avec l'écart type  $\sigma_E = \frac{1}{E^0} \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{10} (E_n^e - E_m^e)^2}{9}}$ . Ces résultats sont également donnés dans le tableau 1. La figure 5 et le tableau 2 montrent des résultats analogues concernant le coefficient de Poisson avec l'espérance  $m_\nu = \frac{\nu_m^e}{\nu^0} = \frac{1}{\nu^0} \frac{1}{10} \sum_{n=1}^{10} \nu_n^e$  et l'écart type

$$\sigma_\nu = \frac{1}{\nu^0} \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{10} (\nu_n^e - \nu_m^e)^2}{9}}$$

taille du domaine ( $\lambda=4, c=0.4$ )	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
$m_E$	.710	.732	.761	.772	.782	.785	.790	.793
$\sigma_E$ (%)	9.11	2.86	1.91	1.78	1.94	1.35	1.46	0.78

tab 1: module d'Young effectif  $E^e$  en fonction de la taille du domaine ( $\lambda=4, c=0.4$ )

taille du domaine ( $\lambda=4, c=0.4$ )	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
$m_\nu$	.717	.746	.767	.787	.799	.809	.812	.819
$\sigma_\nu$ (%)	9.63	2.68	2.36	2.26	1.77	1.37	1.23	0.69

tab 2: coefficient de Poisson  $\nu^e$  effectif en fonction de la taille du domaine ( $\lambda=4, c=0.4$ )

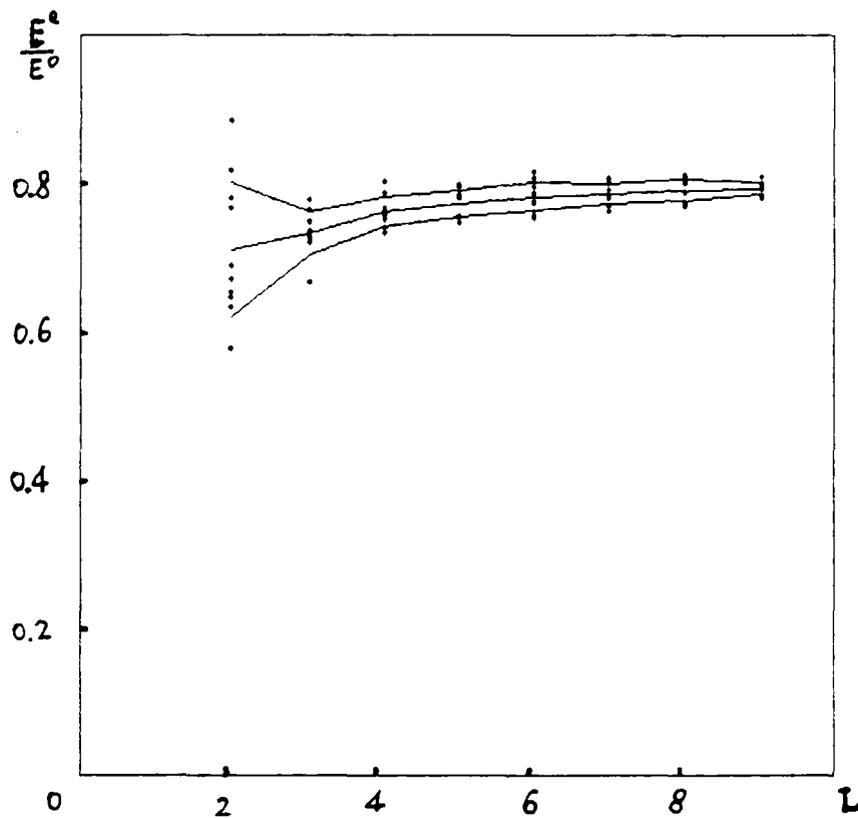


fig4: Influence de la taille du domaine sur le module d'Young effectif  $\frac{E^e}{E^0}$  ( $\lambda=4, c_i=c=0.4$ )

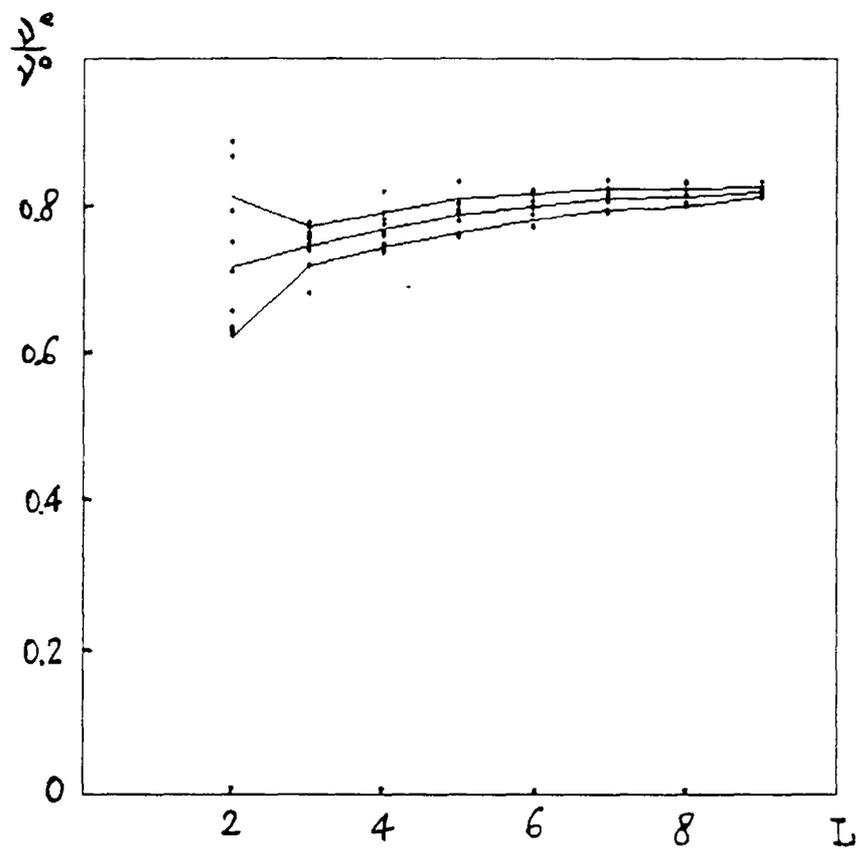


fig5: Influence de la taille du domaine  $L$   
 sur le coefficient de Poisson effectif  $\frac{\nu^e}{\nu^0}$  ( $\lambda=4$ ,  $c_i=c=0.4$ )

cas 2: longueur de fissures aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle  $[0, 0.4\sqrt{3}]$  (ce que nous avons noté  $c\epsilon_a [0, 0.4\sqrt{3}]$ )

Des résultats analogues sont présentés par les figures 6 et 7 et les tableaux 3 et 4.

taille du domaine ( $\lambda=4, c\epsilon_a [0, 0.4\sqrt{3}]$ )	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
$m_E$	.652	.769	.764	.801	.813	.813	.819	.820
$\sigma_E$ (%)	10.1	4.64	4.20	3.10	1.79	1.19	1.09	1.07

tab3: module d'Young effectif  $E^e$  en fonction de la taille du domaine ( $\lambda=4, c\epsilon_a [0, 0.4\sqrt{3}]$ )

taille du domaine ( $\lambda=4, c\epsilon_a [0, 0.4\sqrt{3}]$ )	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
$m_\nu$	.663	.781	.768	.816	.831	.828	.837	.839
$\sigma_\nu$ (%)	10.4	7.11	3.74	2.51	1.86	1.43	1.23	1.11

tab4: coefficient de Poisson effectif  $\nu^e$  en fonction de la taille du domaine ( $\lambda=4, c\epsilon_a [0, 0.4\sqrt{3}]$ )

On constate que l'espérance du module d'Young et l'espérance du coefficient de Poisson effectifs croissent quand on augmente la taille du domaine. Ceci est dû au fait que nous avons un problème à contrainte imposée: en augmentant la taille du domaine, nous agrandissons l'espace dans lequel on minimise l'énergie complémentaire, donc la valeur minimale de cette énergie diminue. Par conséquent, le module d'Young effectif croit (on peut trouver une démonstration rigoureuse dans [27] (K.SAB 1992)). Cet effet d'augmentation du module d'Young en fonction de la taille du domaine (contraire à l'effet d'échelle de la contrainte de rupture) a été aussi constaté par des études d'essais de compression sur des éprouvettes de béton dans la thèse de X.F. WU ([28] 1991). Mais à partir d'une certaine taille du domaine (à peu près 15 fois la taille des fissures), l'espérance ne bouge plus beaucoup et l'écart type devient très petit.

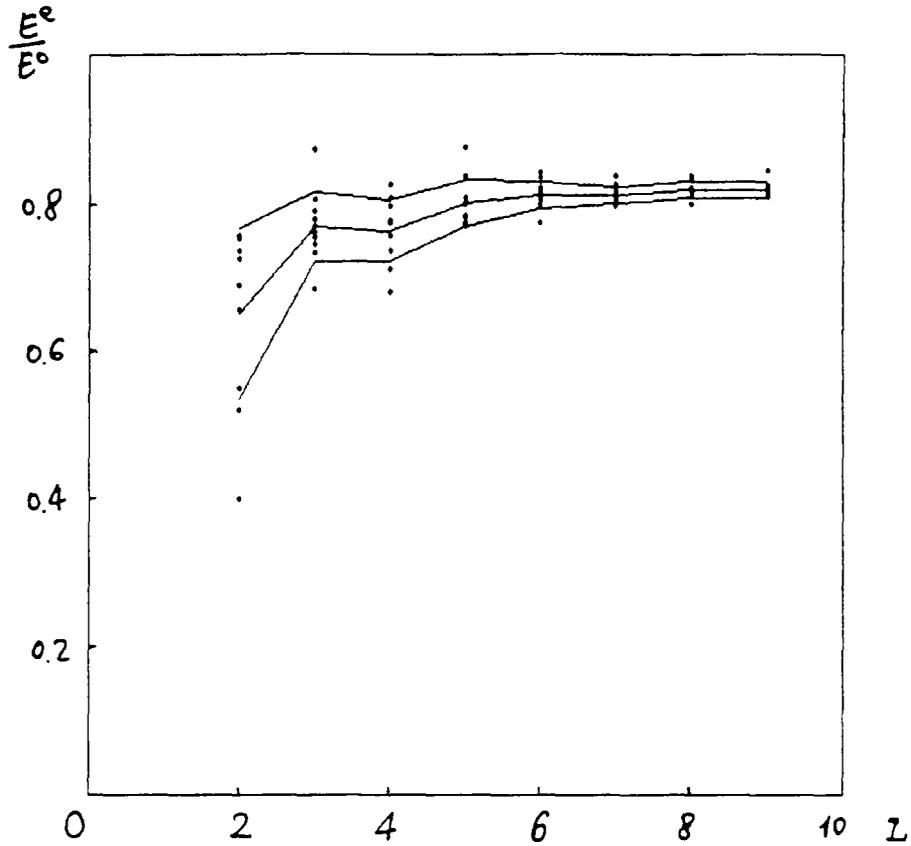


fig6: Influence de la taille du domaine sur le module d'Young effectif  $E^e/E^0$  ( $\lambda=4$ ,  $c \in_a [0, 0.4\sqrt{3}]$ )

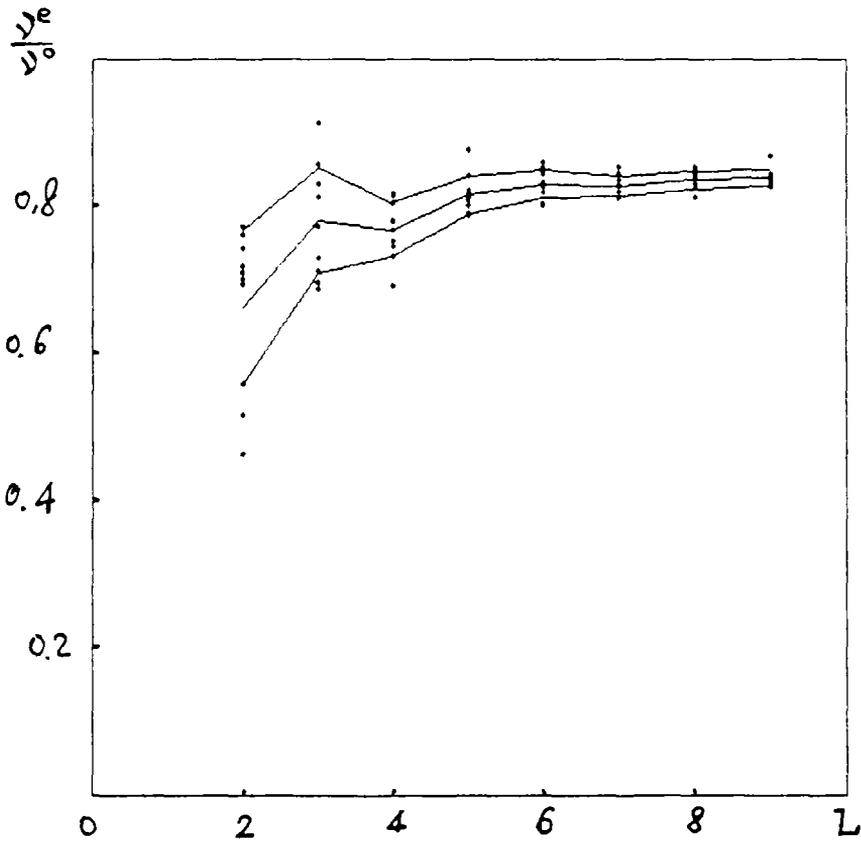


fig7: Influence de la taille du domaine sur le coefficient de Poisson effectif  $\nu^e/\nu^0$  ( $\lambda=4$ ,  $c \in_a [0, 0.4\sqrt{3}]$ )

## 2') Coefficients d'élasticité effectifs en fonction de la densité

Nous admettons à partir des résultats trouvés précédemment que la taille représentative d'un domaine microfissuré est environ 15 fois la longueur moyenne des fissures pour des densité de fissures  $\alpha = \left( \pi \sum_i^N c_i \right) / A$  inférieure à 2 puisque nous avons vu que pour cette taille du domaine et pour  $\alpha=2$ , l'espérance converge et l'écart type devient très petit. Nous allons étudier les coefficients d'élasticité effectifs en fonction de la densité de fissures dans le cas de longueur de fissures uniforme et dans le cas de longueur de fissures aléatoire. Pour faire varier la densité de fissures  $\alpha$ , nous fixons le nombre totale de fissures  $N$ , à chaque distribution de fissures donnée, nous multiplions la longueur de toutes les fissures par une constante. Pour chaque valeur de densité de fissures, nous générons 4 distributions de fissures et comme précédemment, nous appliquons deux chargements (traction horizontale et verticale) pour doubler le nombre de calculs (8 calculs pour chaque valeur de  $\alpha$ ).

La figure 8 présente les résultats des espérances  $m_e$  des modules d'Young effectifs dans le cas de fissures de longueur uniforme et dans le cas de fissures de longueur aléatoire, en fonction de la densité. La figure 9 présente des résultats analogues concernant le coefficient de Poisson. Les courbes supérieures correspondent au cas de fissures de longueur aléatoire et les courbes inférieures correspondent au cas de fissures de longueur uniforme.

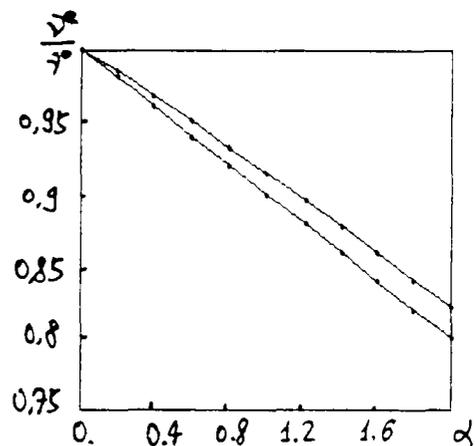
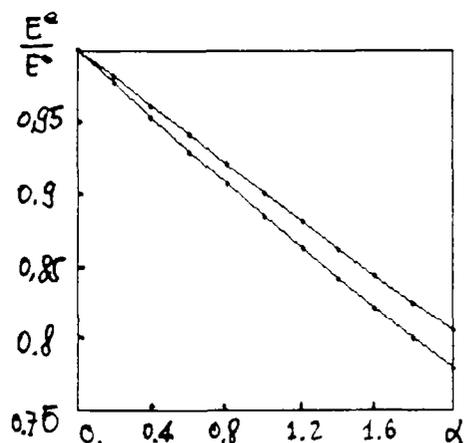


fig8 module d'Young  $\frac{E^e}{E^0}$  en fonction de la densité  $\alpha$

fig9 coefficient de Poisson  $\frac{\nu^e}{\nu^0}$  effectif en fonction de la densité  $\alpha$

On peut constater que le module d'Young et le coefficient de Poisson décroissent quasi-linéairement (au moins pour les petites valeurs de  $\alpha$ ) en fonction de  $\alpha$ . En effet, En utilisant la méthode du module effectif (method of dilute distribution) [ABOUDI, 1987], on peut montrer la relation asymptotique suivante:

$$\frac{E^e}{E^0} = 1 - P\alpha + o(\alpha^2)$$

La valeur théorique de P est égale à 0.25. Du fait que l'ouverture des fissures est approchée par des losanges (2 éléments par fissure), le comportement global est plus rigide que le comportement calculé avec précision à partir du modèle de fissure de Griffith (dans ce modèle, l'ouverture de fissures est proche d'une ellipse). Pour s'en convaincre, il suffit d'examiner le cas d'une seule fissure dans un rectangle.

Pour tester la finesse de maillage pour obtenir des résultats suffisamment précis, nous avons maillé plus fin les fissures pour des valeurs de  $\alpha$  très petites devant 1. En mettant 4 éléments sur chaque fissure, nous obtenons une valeur moyenne de P égale à 0.238, elle est égale à 0.247 avec 8 éléments par fissure. On peut donc espérer obtenir des résultats de bonne précision en mettant 8 éléments sur chaque fissure même lorsque  $\alpha$  est grand. Mais comme le nombre de fissures sera plus important (Rappelons que la taille du domaine doit être au moins 15 fois plus grande que celle des fissures pour que "l'effet de taille" disparaissent), le temps de calcul le sera aussi. Et ce travail reste à faire.





## CHAPITRE 2

**ENDOMMAGEMENT ET RUPTURE D'UN DOMAINE ELASTIQUE**  
**PAR MICROFISSURATION EN FATIGUE**

Ce dernier chapitre est consacré à une simulation numérique d'endommagement par microfissuration d'un solide élastique sous chargement cyclique. Nous allons établir la courbe S-N (courbe reliant l'amplitude de la contrainte cyclique au nombre de cycles à rupture) à partir d'une distribution de microfissures suivant la loi de progression en fatigue que nous proposons ci-dessous.

a) **Loi de progression de fissure en fatigue**

Le solide considéré est un domaine élastique contenant un grand nombre de fissures de taille initiale très petite devant la taille du domaine. Lorsque ce solide est soumis à un chargement cyclique, les fissures vont progresser, la loi de progression de fissure que nous proposons (en déformation plane) est la suivante:

$$(2) \quad \frac{da}{dN} = C \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{E}{1-\nu^2} \Delta \left( \frac{|g|_{max}}{\sqrt{a}} \right) - \Delta K_{th} \right]^m$$

où  $E$  et  $\nu$  sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson du milieu sans fissure,  $a$  est la longueur de fissure,  $N$  est le nombre de cycles de chargement,  $|g|_{max}$  est la valeur maximale du module du vecteur de discontinuité de déplacement sur la fissure.  $C$ ,  $m$  et  $\Delta K_{th}$  (seuil de propagation) sont des constantes caractéristiques du matériau.

En contrainte plane, il faut remplacer  $1-\nu^2$  par 1.



Cette loi de progression de fissure est en effet une simplification de la loi de PARIS et ERDOGAN qui s'écrit sous la forme:

$$\frac{da}{dN} = C [\Delta K - \Delta K_{th}]^m$$

Il suffit d'approcher le facteur d'intensité de contrainte par  $\frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{E}{1-\nu^2} \frac{|\sigma|_{max}}{\sqrt{a}}$  dans la loi de PARIS pour obtenir la loi que nous avons proposée, ces deux grandeurs étant égales dans le cas d'une fissure rectiligne dans le milieu infini.

b) Calcul du nombre de cycles à rupture

Le domaine de calcul est un domaine élastique carré de taille  $L_c$  contenant 100 fissures horizontales sous traction suivant l'axe vertical (problèmes de fissuration transverse). Les longueurs initiales des fissures sont comprises entre 0 et  $L_f = \frac{L_c}{100}$ . Pour éviter des perturbations introduites par les conditions aux limites, nous avons réparti les fissures dans la zone centrale du domaine (voir figure).

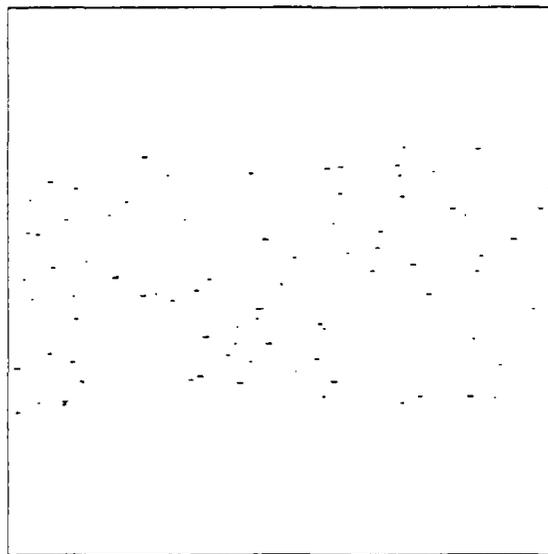


fig10: fissures transversales

Le mode de chargement est une traction répétée d'intensité oscillant entre  $\sigma_{\min}=0$  et  $\sigma_{\max}=\Sigma$ . Pour chaque niveau de contrainte maximale  $\Sigma$ , nous calculons le nombre de cycles à rupture de la manière suivante:

Tous les dix mille cycles de chargement, nous résolvons le problème élastique sur l'état actuel du solide sous la traction  $\Sigma$ , la solution de ce problème nous permet de calculer la progression de chaque fissure, ce nouvel état du solide sera l'état "actuel" pour la prochaine itération ... et ceci jusqu'à la rupture (quand une fissure traverse tout le domaine).

Nous prenons 16 éléments sur chaque côté du carré et 2 éléments sur chaque fissure. Les données utilisées sont les suivantes:

$$E=210 \text{ GPa}, \nu=0.3, m=4, C=10^{-11} \frac{\text{mm}}{\text{cycle}} (\text{MPa}\sqrt{\text{m}})^{-4}$$

Nous avons effectué 20 calculs pour différents niveaux de contrainte maximale  $\Sigma$  compris entre 300 MPa et 400 MPa.

La figure 11 et la figure 12 montrent la courbe S-N respectivement pour le seuil de propagation  $\Delta K_{t,h}=0 \text{ Mpa}\sqrt{\text{m}}$  et  $\Delta K_{t,h}=100 \text{ Mpa}\sqrt{\text{m}}$ . Dans le cas de  $\Delta K_{t,h}=100 \text{ Mpa}$ , la rupture n'est pas intervenue à un million de cycles pour les niveaux de contrainte maximale  $\Sigma$  inférieure à 320MPa; la durée de vie du matériau est plus longue surtout pour les faibles amplitudes de contrainte. La figure 13 montre un exemple de l'état d'endommagement juste avant la rupture, on peut constater qu'un nombre peu important de fissures ont progressé de façon appréciable.

Nous pouvons distinguer grossièrement deux stades de propagation de fissures:

1°) Une stade de progression lente des fissures sans endommagement appréciable à plus de 90% de la durée de vie du solide.

2°) Lorsqu'un petit nombre de fissures atteignent une certaine taille critique, ces fissures progressent très rapidement. Ce deuxième stade précède de peu la rupture.

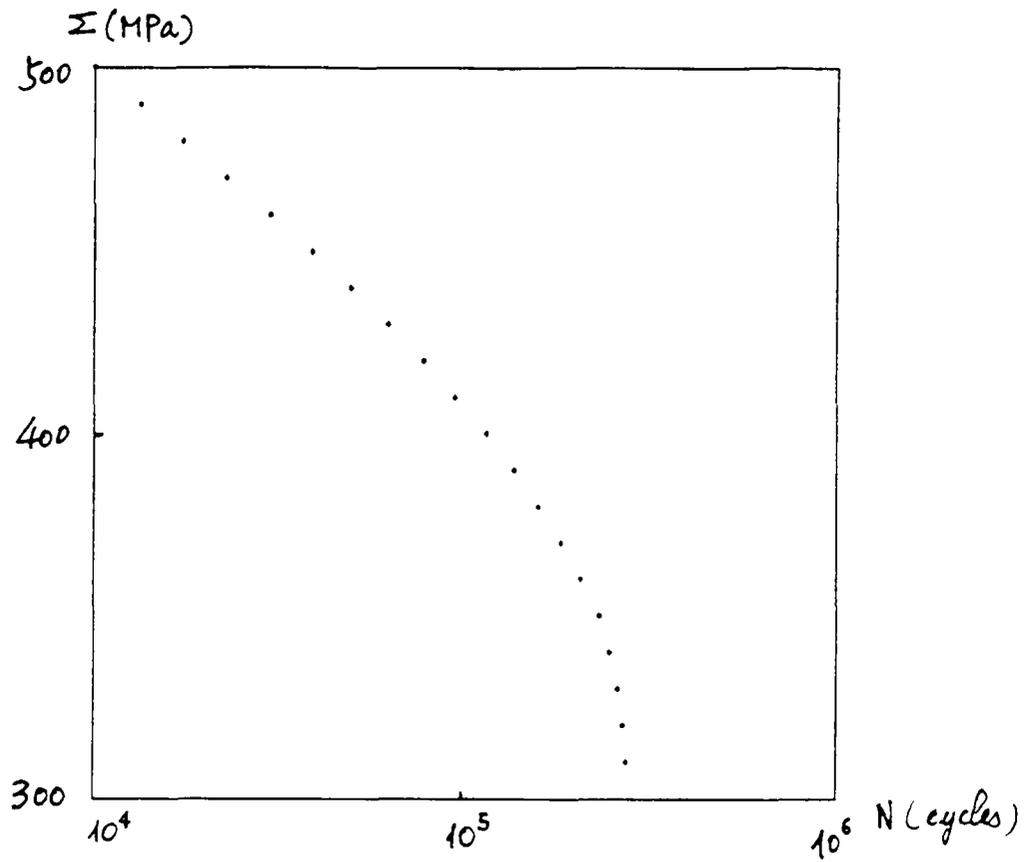


fig11: courbe S-N, seuil de propagation  $\Delta K_{t_h} = 0$

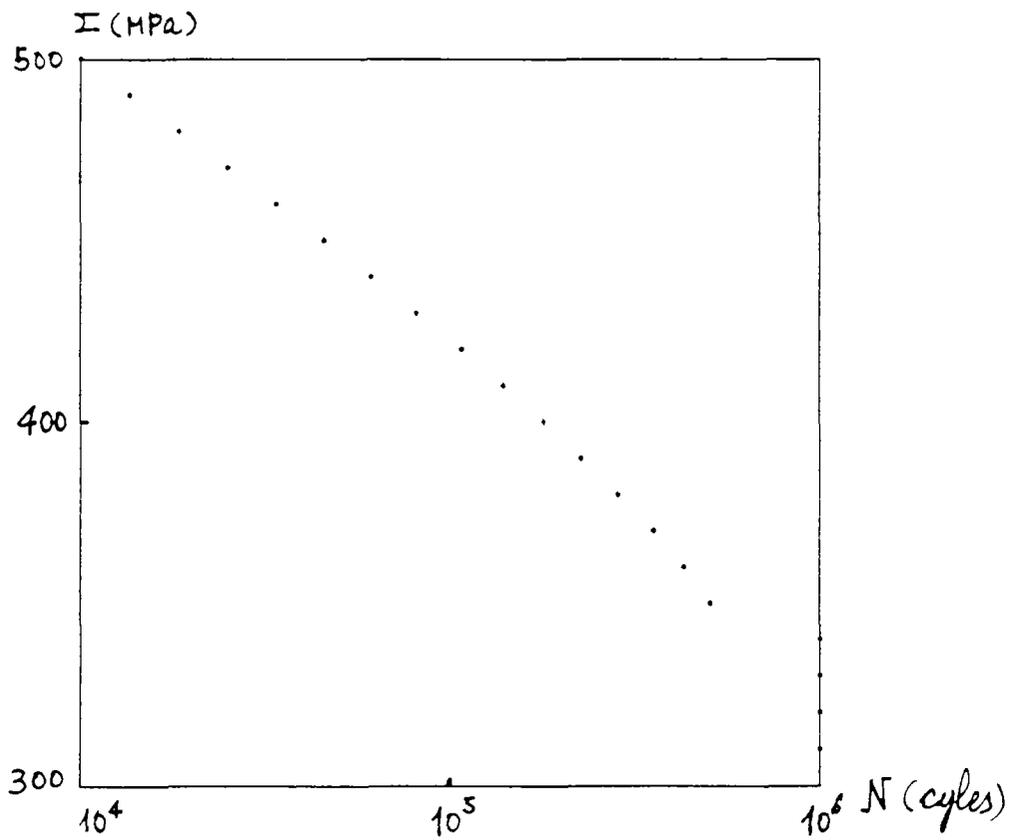


fig12: courbe S-N, seuil de propagation  $\Delta K_{t_h} = 100$  MPa

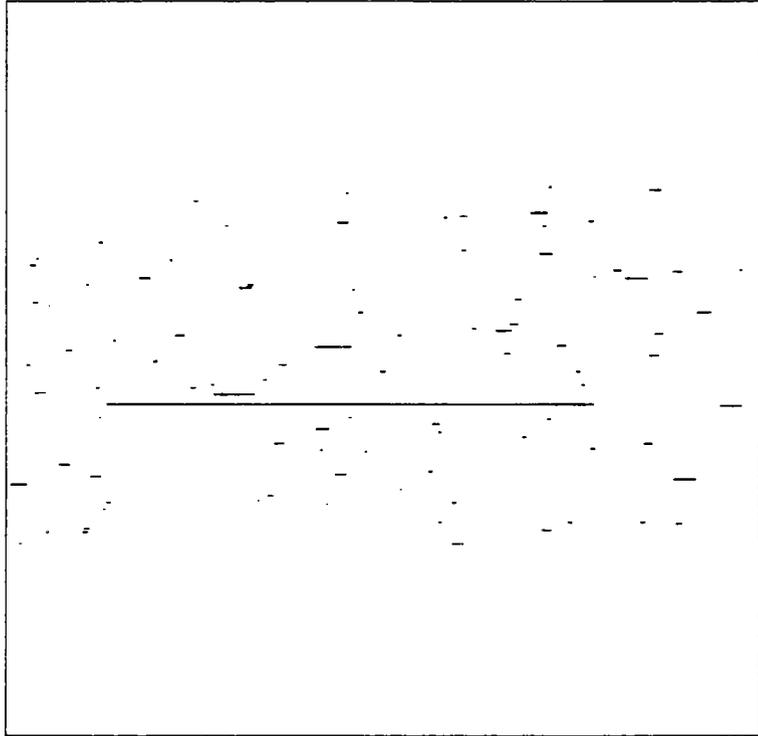


fig13: un exemple d'état d'endommagement juste avant la rupture

## Conclusion

Dans la première partie de ce mémoire nous avons proposé une réflexion générale sur les problèmes de discontinuités de déplacement dans les solides élastiques dans le cadre de transformation isotherme. La variable cinématique est la fonction de discontinuités de déplacement  $g$ . Cette fonction est supposée dérivable par morceaux. L'étude de la variation au premier ordre de l'énergie potentielle met en évidence deux types de "force thermodynamique": une force répartie sur la ligne de discontinuités de déplacement correspondant à la contrainte sur cette ligne dont la valeur est nulle dans le modèle de fissure de Griffith en traction; une force concentrée aux points de singularité de la fonction  $g$  correspondant au taux de restitution d'énergie dans le modèle de fissure de Griffith. L'étude de l'énergie dissipée et le bilan d'énergie nous a permis d'établir le critère d'évolution ainsi que la loi d'écoulement de  $g$  dans le cadre le plus générale que permet les hypothèses de comportement élastique et de continuité de  $g$ .

La deuxième partie de ce mémoire est consacrée à la construction d'un logiciel de calcul des problèmes de fissures dans un milieu élastique bidimensionnel. La méthode de discontinuité des déplacements que nous avons choisie et développée utilise les représentations des champs à l'aide de potentiels de double couche. Nous avons établi, dans le cas de fonctions de formes affines, les formules analytiques permettant de calculer les champs mécaniques dans tout le domaine infini à l'aide des valeurs nodales de la discontinuité de déplacement. Nous avons aussi établi les formules analytiques permettant de calculer les coefficients de la matrice de rigidité. A l'aide de ces solutions analytiques, ce logiciel résoud facilement et avec précision les problèmes bidimensionnels dans un domaine borné ou non borné, avec ou sans fissures. Nous n'avons presque exclusivement traité que des exemples sans force de cohésion sur la fissure, mais la généralisation à des "comportements de discontinuité" quelconques est relativement facile en s'appuyant sur l'analyse de la première partie et en utilisant des algorithmes itératifs. La fabrication d'un tel logiciel de calcul dans le cas de milieu tridimensionnel reste à faire. Cela semble théoriquement possible en s'appuyant sur les travaux de KOSSECA, KUPRADZE [KUPRADZE, 1963], NEDELEC [NEDELEC, 1977; 1982] et BUI [BUI, 1977].

Dans la troisième partie, nous avons appliqué notre outil de calcul à quelques problèmes de solides microfissurés. Nous n'avons présenté que deux applications. La première concerne le calcul des coefficients d'élasticité effectifs d'un solide contenant un grand nombre de fissures. La répartition des fissures est aléatoire. L'influence de la taille du domaine pour une même densité de fissures et l'influence de la densité de fissures sur les coefficients d'élasticité effectifs sont étudiées. Nous retrouvons ainsi des résultats établis antérieurement par d'autres auteurs [BUDIANSKY, 1976] [HORII, 1982] [ABOUDI, 1987] [WU, 1991], mais notre outil a permis une mise en oeuvre très simple et efficace. Notre projet principal étant l'étude de l'évolution en fatigue des solides microfissurés, cette étude sur l'élasticité effective nous a surtout permis de préciser la "taille" de la simulation nécessaire compte tenu de la présence de l'aléas dans la distribution des fissures.

Dans le dernier chapitre du mémoire nous proposons une simulation de l'endommagement en fatigue d'un solide microfissuré, chaque fissure obéissant à une loi de PARIS et nous avons la satisfaction de retrouver une courbe de WOHLER quasiliéaire (en logarithme de nombre de cycles) lorsque l'on impose un seuil dans la loi de PARIS.

Le nombre de problèmes de solides microfissurés que notre outil permet d'aborder simplement est élevé. Citons d'abord ceux qui semblent actuellement le plus étudiés dans la littérature:

- Avec des fissures sans cohésion:

\* En chargement monotone:

\*\* Interaction entre une macrofissure et des microfissures.

\*\* Progression en chargement monotone d'un ensemble de microfissures: localisation, rupture et effets d'échelle.

\* En chargement cyclique:

\*\* Loi de fatigue anisotrope pour un chargement non proportionnel (rotation des directions de contrainte).

- Avec des fissures Cohésives:

- \*\* Modélisation de bandes de cisaillement dans des matériaux "plastiques".
- \*\* Rupture de matériaux fragiles en compression avec contact frottant sur les lèvres.

C'est sur ces thèmes que nous pensons développer les premières applications du travail présenté dans ce mémoire.



## ANNEXE

CHAMPS MECANIQUES CREES  
PAR UNE DISCONTINUITÉ DE DEPLACEMENT AFFINE

Nous appelons une maille affine de discontinuité de déplacement  $\langle \underline{d}, \underline{m}, \underline{f} \rangle$  l'union de deux segments de droite définis par trois points  $\underline{d}$ ,  $\underline{m}$  et  $\underline{f}$ . Sur les segments de droites  $[\underline{d}, \underline{m}]$  et  $[\underline{m}, \underline{f}]$ , la fonction de discontinuité de déplacement  $\underline{g}(s)$  est affine et nulle en  $\underline{d}$  et  $\underline{f}$ :

$$\underline{g}(s) = \begin{cases} \underline{g} \frac{|s-\underline{d}|}{|\underline{m}-\underline{d}|} & \text{si } s \in [\underline{d}, \underline{m}] \\ \underline{g} \frac{|s-\underline{f}|}{|\underline{m}-\underline{f}|} & \text{si } s \in [\underline{m}, \underline{f}] \end{cases}$$

Nous trouvons dans cette annexe la solution analytique du champ de déplacement, du champ de contrainte et de la résultante des forces en un point quelconque du milieu élastique infini bidimensionnel en présence de la discontinuité de déplacement  $\underline{g}(s)$  sur la maille  $\langle \underline{d}, \underline{m}, \underline{f} \rangle$ . Lorsqu'il existe plusieurs mailles de discontinuités de déplacement affines par morceaux, il suffit de faire une superposition des problèmes élémentaires correspondant aux discontinuités sur les mailles. De cette manière, nous pouvons approcher une fonction quelconque de discontinuités de déplacement sur des lignes quelconques dans le milieu infini bidimensionnel.



Introduisons d'abord quelques notations pour simplifier l'écriture des résultats:

Notons  $r$  le module du vecteur  $dm$ ,  $\alpha$  sa pente:

$$r = \sqrt{(m_x - d_x)^2 + (m_y - d_y)^2} ; \alpha = \frac{m_y - d_y}{m_x - d_x}$$

où  $d_x, d_y$  et  $m_x, m_y$  sont les coordonnées de  $\underline{d}$  et  $\underline{m}$ .

Soit  $z$  un point dans le plan,  $(x, y)$  ses coordonnées dans le repère de référence, nous notons  $(X, Y)$  ses coordonnées dans le repère local lié au vecteur  $dm$ :

$$X = ((m_x - d_x)(x - d_x) + (m_y - d_y)(y - d_y)) / r^2$$

$$Y = (-(m_y - d_y)(x - d_x) + (m_x - d_x)(y - d_y)) / r^2$$

Notons enfin respectivement  $L$  et  $\theta$  la partie réelle et la partie imaginaire de la fonction logarithmique complexe  $\text{Log}(z-m)/(z-d)$ :

$$|zm| = \sqrt{(x - m_x)^2 + (y - m_y)^2} ; |zd| = \sqrt{(x - d_x)^2 + (y - d_y)^2}$$

$$L = \text{Log} \frac{|zm|}{|zd|}$$

$$\theta = \begin{cases} \pi & \text{si } X \in [0, 1] \text{ et } Y = 0^+ \\ -\pi & \text{si } X \in [0, 1] \text{ et } Y = 0^- \\ \text{Sign}(Y) \cdot \text{Arcos} \frac{(x - d_x)(x - m_x) + (y - d_y)(y - m_y)}{|zm| \cdot |zd|} & \text{si } X \notin [0, 1] \end{cases}$$

où  $\text{sign}(Y) = 1$  si  $Y \geq 0$ ;  $\text{Sign}(Y) = -1$  si  $Y < 0$ .

RESULTANTE R DES EFFORTS CREEES PAR LA DISCONTINUITÉ g  
SUR LA MAILLE (d,m,f)

Notons  $\underline{A}(x,y)_{d,m,f}$  tenseur d'ordre 2 défini par:

$$A_{ij}(x,y)_{d,m,f} = \mathcal{A}_{ij}(x,y)_{d,m} - \mathcal{A}_{ij}(x,y)_{f,m}$$

où les coefficients  $\mathcal{A}_{ij}(x,y)_{d,m}$  sont paramétrés par d et m:

$$\mathcal{A}_{11}(x,y)_{d,m} = -\left(X + \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}Y\right)L + \frac{2}{1+\alpha^2}Y\theta - \frac{1}{1+\alpha^2} + \frac{(y-m_y)^2}{(x-m_x)^2 + (y-m_y)^2}$$

$$\mathcal{A}_{22}(x,y)_{d,m} = -\left(X - \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}Y\right)L + \frac{2\alpha^2}{1+\alpha^2}Y\theta - \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2} + \frac{(x-m_x)^2}{(x-m_x)^2 + (y-m_y)^2}$$

$$\mathcal{A}_{12}(x,y)_{d,m} = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}YL + \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}Y\theta - \frac{\alpha}{1+\alpha^2} + \frac{(y-m_y)(x-m_x)}{(x-m_x)^2 + (y-m_y)^2}$$

$$\mathcal{A}_{21}(x,y)_{d,m} = \mathcal{A}_{12}(x,y)_{d,m}$$

Alors la fonction de la résultante au point (x,y) s'écrit:

$$\underline{R}(x,y) = \frac{4\mu}{x+1} \frac{1}{2\pi} \underline{A} \cdot g$$

La résultante  $\underline{R}(\overrightarrow{ab})$  des efforts créés par la discontinuité g sur la maille (d,m,f) sur une ligne orienté de  $a=(x_1,y_1)$  à  $b=(x_2,y_2)$  s'obtient en faisant la différence des valeurs de la fonction  $\underline{R}(x,y)$  en b et en a:

$$\underline{R}(\overrightarrow{ab}) = \underline{R}(x_2,y_2) - \underline{R}(x_1,y_1)$$

CHAMP DE DEPLACEMENT U CREE PAR LA DISCONTINUITE g  
SUR LA MAILLE (d, m, f)

Notons  $\underline{B}(x, y)_{d, m, f}$  tenseur d'ordre 2 défini par:

$$B_{ij}(x, y)_{d, m, f} = B_{ij}(x, y)_{d, m} - B_{ij}(x, y)_{f, m}$$

où les coefficients  $B_{ij}(x, y)_{d, m}$  sont paramétrés par d et m:

$$B_{11}(x, y)_{d, m} = \left( (x+1) + \frac{2(1-\alpha^2)}{1+\alpha^2} \right) YL + \left( (x+1)X + \frac{4\alpha}{1+\alpha^2} Y \right) \theta \\ - \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} + \frac{2(x-m_x)(y-m_y)}{(x-m_x)^2 + (y-m_y)^2}$$

$$B_{22}(x, y)_{d, m} = \left( (x+1) - \frac{2(1-\alpha^2)}{1+\alpha^2} \right) YL + \left( (x+1)X - \frac{4\alpha}{1+\alpha^2} Y \right) \theta \\ + \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} - \frac{2(x-m_x)(y-m_y)}{(x-m_x)^2 + (y-m_y)^2}$$

$$B_{12}(x, y)_{d, m} = \left( \frac{4\alpha}{1+\alpha^2} Y + (x-1)X \right) L - \left( (x-1) + \frac{2(1-\alpha^2)}{1+\alpha^2} \right) Y\theta \\ + (x-1) + \frac{2}{1+\alpha^2} - \frac{2(x-m_x)^2}{(x-m_x)^2 + (y-m_y)^2}$$

$$B_{21}(x, y)_{d, m} = \left( \frac{4\alpha}{1+\alpha^2} Y - (x-1)X \right) L + \left( (x-1) - \frac{2(1-\alpha^2)}{1+\alpha^2} \right) Y\theta \\ - (x-1) + \frac{2}{1+\alpha^2} - \frac{2(x-m_x)^2}{(x-m_x)^2 + (y-m_y)^2}$$

Alors le champ de déplacement  $\underline{U}$  s'écrit:

$$\underline{U}(x, y) = \frac{1}{x+1} \frac{1}{2\pi} \underline{B} \cdot g$$

CHAMP DE CONTRAINTE  $\sigma$  CREE PAR LA DISCONTINUITÉ  $g$   
SUR LA MAILLE  $(d, m, f)$

Pour simplifier l'écriture de la solution analytique en contrainte, nous notons (en plus des notation  $r, \alpha, X, Y, L, \theta$ ) respectivement  $X_{,x}, X_{,y}; Y_{,x}, Y_{,y}; L_{,x}, L_{,y}$  et  $\theta_{,x}, \theta_{,y}$  les dérivées partielles de  $X; Y; L$  et  $\theta$ :

$$X_{,x} = \frac{\partial X(x, y)}{\partial x} = \frac{m_x - d_x}{r^2} = \frac{1}{(m_x - d_x) \cdot (1 + \alpha^2)}$$

$$X_{,y} = \frac{\partial X(x, y)}{\partial y} = \frac{m_y - d_y}{r^2} = \frac{\alpha}{(m_x - d_x) \cdot (1 + \alpha^2)}$$

$$Y_{,x} = \frac{\partial Y(x, y)}{\partial x} = - X_{,y}$$

$$Y_{,y} = \frac{\partial Y(x, y)}{\partial y} = X_{,x}$$

$$L_{,x} = \frac{\partial L(x, y)}{\partial x} = \frac{x - m_x}{(x - m_x)^2 + (y - m_y)^2} + \frac{x - d_x}{(x - d_x)^2 + (y - d_y)^2}$$

$$L_{,y} = \frac{\partial L(x, y)}{\partial y} = \frac{y - m_y}{(x - m_x)^2 + (y - m_y)^2} + \frac{y - d_y}{(x - d_x)^2 + (y - d_y)^2}$$

$$\theta_{,x} = \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial x} =$$

$$\frac{1}{r^2 Y} \cdot \{ L_{,x} \cdot ((x - d_x)(x - m_x) + (y - d_y)(y - m_y)) - (x - d_x) - (x - m_x) \}$$

$$\theta_{,y} = \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial y} =$$

$$\frac{1}{r^2 Y} \cdot \{ L_{,y} \cdot ((x - d_x)(x - m_x) + (y - d_y)(y - m_y)) - (y - d_y) - (y - m_y) \}$$

Notons  $C(x, Y)_{d, m, f}$  tenseur d'ordre 3 défini par:

$$C_{ijk}(x, Y)_{d, m, f} = C_{ijk}(x, Y)_{d, m} - C_{ijk}(x, Y)_{f, m}$$

où les coefficients  $C_{ijk}(x, Y)_{d, m}$  sont paramétrés par  $d$  et  $m$ :

$$C_{111}(x, Y)_{d, m} = \frac{1}{m_x - d_x} \cdot \frac{3\alpha + \alpha^3}{(1 + \alpha^2)^2} \cdot L + \left( X + \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2} \cdot Y \right) \cdot L, y$$

$$- \frac{1}{m_x - d_x} \cdot \frac{2}{(1 + \alpha^2)^2} \cdot \theta - \frac{2}{1 + \alpha^2} \cdot Y \cdot \theta, y - \frac{2(x - m_x)^2 \cdot (y - m_y)}{\left[ (x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 \right]^2}$$

$$C_{112}(x, Y)_{d, m} = - \frac{1}{m_x - d_x} \cdot \frac{1 - \alpha^2}{(1 + \alpha^2)^2} \cdot L - \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2} \cdot Y \cdot L, y$$

$$- \frac{1}{m_x - d_x} \cdot \frac{2\alpha}{(1 + \alpha^2)^2} \cdot \theta - \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2} \cdot Y \cdot \theta, y - \frac{(x - m_x) \cdot \left[ (x - m_x)^2 - (y - m_y)^2 \right]}{\left[ (x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 \right]^2}$$

$$C_{221}(x, Y)_{d, m} = - \frac{1}{m_x - d_x} \cdot \frac{\alpha(1 - \alpha^2)}{(1 + \alpha^2)^2} \cdot L + \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2} \cdot Y \cdot L, x$$

$$- \frac{1}{m_x - d_x} \cdot \frac{2\alpha^2}{(1 + \alpha^2)^2} \cdot \theta + \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2} \cdot Y \cdot \theta, x - \frac{(y - m_y) \cdot \left[ (x - m_x)^2 - (y - m_y)^2 \right]}{\left[ (x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 \right]^2}$$

$$C_{222}(x, Y)_{d, m} = - \frac{1}{m_x - d_x} \cdot \frac{1 + 3\alpha^3}{(1 + \alpha^2)^2} \cdot L + \left( X - \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2} \cdot Y \right) \cdot L, x$$

$$- \frac{1}{m_x - d_x} \cdot \frac{2\alpha^3}{(1 + \alpha^2)^2} \cdot \theta + \frac{2}{1 + \alpha^2} \cdot Y \cdot \theta, y + \frac{2(x - m_x) \cdot (y - m_y)^2}{\left[ (x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 \right]^2}$$

$$C_{121} = C_{112}, \quad C_{122} = C_{221}; \quad C_{211} = C_{121}, \quad C_{212} = C_{122}$$

Alors le champ de contrainte  $\underline{g}$  s'écrit:

$$\underline{g}(x, Y) = \frac{4\mu}{\chi + 1} \frac{1}{2\pi} \underline{C} \cdot \underline{g}$$



**REFERENCES**

- [1] EHRLACHER A. "Les matériaux à dissipation simple". 7e Congrès Français de Mécanique, Bordeaux, France. 1985.
- [2] FEDELICH B. et EHRLACHER A. "Sur un principe de minimum concernant des matériaux à comportement indépendant du temps physique". C.R.A.S. t308 sérieII, p1391-1394. 1989.
- [3] FEDELICH B. "Trajets d'équilibre des systèmes mécaniques dissipatifs à comportement indépendant du temps physique". Thèse de Doctorat de l'E.N.P.C. 1990.
- [4] NGUYEN Q.S. et STOLZ C. "Sur le problème en vitesse de propagation de fissure et de déplacement en rupture fragile ou ductile". C.R.A.S. t301, sérieII, n°10. 1986.
- [5] DESTUYNDER Ph. , DJAOUA M. ET LESCURE S. "Some remarks on elastic fracture mechanics". E.D.F. Bulletin de la Direction des études et Recherches, Série C, n°2, p5-26. 1982.
- [6] BUI. H.D. "An integral equations method for solving the problem of a plane crack of arbitrary shape". J. Mech. phys. Solids, vol. 25, pp. 29-39. 1977.
- [7] SLADEK J. ET SLADEK V. "Three dimensional curved crack in an elastic body". Int. J. Solids Structure, vol. 19, pp. 425-436. 1983.
- [8] SLADEK J. et SLADEK V. "Dynamic stress intensity factors studied by boundary integro-differential equations". Int. J. Num. Meth. Eng., vol 23, pp. 919-926, 1986.
- [9] BONNET M. "Méthode des équations intégrales régularisées en élastodynamique". Thèse de Doctorat de l'E.N.P.C. 1986.
- [10] KUPRADZE V.D. "Potential methods in the theory of elasticity". 1963.
- [11] KUPRADZE V.D. "Dynamical problems in elasticity". Progress in Solid Mechanics, vol. III, North Holland.
- [12] NEDELEC J.C. "Integral equations with non integrable kernels". Integral equations and operator theory, Birkhauser Verlag Basel, 1982.

- [13] NEDELEC J.C. "Approximation des équations intégrales en mécanique et en physique". Cours Ecole Polytechnique, Palaiseau. 1977.
- [14] CROUCH S.L. "Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method". Int. J. for Num. Meth. in Eng. , Vol.10, 301-343. 1976.
- [15] CROUCH S.L. et STARFIELD A.M. "Boundary element methods in solid mechanics". George, Allen & Unwin, London. 1983.
- [16] MUSKELISHVILI N.J. "Some basic problems of the mathematical theory of elasticity". Gröningen. 1933.
- [17] TADA H. , PARIS P. et IRWIN G. "The stress analysis of cracks handbook". Del Research Corporation, Helletown, Pennsylvania. 1973.
- [18] HORII H. et NEMAT-NASSER S. "Elastic fields of interacting inhomogeneities". Int. J. Solids Structures. Vol. 21, No. 7, pp. 731-745. 1985.
- [19] BUI H.D. "Mécanique de la rupture fragile". Masson, Paris. ,1977.
- [20] BUDIANSKY B. et O'CONNELL R.J. "Elastic moduli of cracked solid". Int. J. Solids Structures, Vol. 12, pp. 81-97. 1976.
- [21] HORII H. et NEMAT-NASSER S. "Overall moduli of solids with microcracks: load-induced anisotropy". J. Mech. Phys. Solids. Vol., 31, No. 2, pp. 155-171, 1983.
- [22] ANDRIEUX S. "Un modèle de matériau microfissuré, application aux roches et aux bétons". Thèse de doctorat d'ingénieur de l'E.N.P.C. 1983.
- [23] ABOUDI J. et BENEVISTE Y. "The effective moduli of cracked bodies in plane deformations". Eng. Frac. Mech. Vol. 26, No. 2, PP. 171-184, 1987.
- [24] BATHIAS C. et BAILON J.P. "La fatigue des matériaux et des structures". Collection Universitaire de Compiègne, PUM Les Presses de l'Université de Montréal, 1980.

- [25] PRESS & al. "Numerical Recipes". Cabridge University press. 1986.
- [26] SAB K. "Sur quelques méthodes en mécanique aléatoire". Thèse de Doctorat de l'E.N.P.C.
- [27] SAB K. "On the homogenisation and the simulation of random materials" à apparaître sur European J. of Mechanics.
- [28] WU X.F. "Modélisation numérique de la fissuration du béton à partir d'une approche probabiliste" Thèse de doctorat de l'E.N.P.C., 1991.
- [29] BOUHADDANE A. "Application de l'intégrale de Cauchy à la méthode des discontinuités de déplacement et autres méthodes de collocation". Thèse de Doctorat, Uninersité des Sciences et Techniques de Lille Flandres-Artois. 1987.
- [30] MOREL E. "Contribution à l'étude de la propagation des discontinuités dans les roches anisotropes: Mise au point d'une technique de calcul utilisant l'intégrale de Cauchy et étude expérimentale d'un Schiste ardoisier". Thèse de Doctorat, Université des Science et Techniques de Lille. 1987.
- [31] BELKACEMI Y., BOUHADDANE A. et HENRY J.P. "Development of high order elements for circular discretization in the displacement discontinuity method" proceeding of the 1rst European Boundary Element Meeting Brussels, pp. 175-184, 1988.
- [32] BELKACEMI Y., MIGUEZ R., MOREL E. et HENRY J.P. "Crack path propagation with or without friction by displacement discontinuity method" European Mechanics Colloquium 248, Grenoble, France, pp. 90-93, 1989.
- [33] CRAWFORD A.M. et CURRAN J.H. "High order functional variation displacement discontinuity elements" Int. J. Rock. Mech. Min. Sci. Abst., Vol. 19, pp. 143-148., 1982.
- [34] TRACEY D.M. "Finite elements for determination of crack tip elastic stress intensity factors". Eng. Frac. Mech. 3, p255-266. 1971.
- [35] TSAMASPHYROS G. "Automatic optimum mesh around singularities using conformal mapping". Eng. Frac. Mech. Vol23, n°3, p507-520. 1986.

- [36] GRIFFITH A. "The phenomena of rupture and flow in solids", Phil. Trans. Roy. Soc. London A 221, pp.163-197. 1921.
- [37] GRIFFITH A. "The theory of rupture" -Proc. 1st Int. Cong. on applied mechanics, 1924.
- [38] IRWIN G.R. "Fracture", Handbuch der physik VI, pp 551-590, flügge, Ed. Springer, 1958.
- [39] IRWIN G.R. "Fracture dynamics", Fracturing of metals, pp 146-147. ASM publ. 1948.
- [40] BARENBLATT D.I. "The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture", in Advance in Applied Mechanics, pp. 55-79, Academic Press, 1962.
- [41] RICE J.R. "A path independent integral and the approximate analysis of strain concentrations by notches and cracks", J. Appl. Mech., pp.379-386. 1968.
- [42] ESHELBY J.D. "Stress analysis of cracks", ISI publication, 121, pp. 13-48, 1968.
- [43] NEMAT-NASSER S. "Stability of a system of interacting cracks", Lett. Appl. Engng. Sci., Vol.16, pp.277-285, 1978.
- [44] HUTCHINSON J.W. and PARIS P.C. "Stability analysis of controlled crack growth", ASTL STP 668, pp. 37-64, 1979.
- [45] PARIS P.C., TADA H., ZAHOR A. and ERNST H. "The theory of instability of the tearing mode of elastic-plastic crack growth", ASTM STP 668, pp. 5-36, 1979.
- [46] NGUYEN Q.S. "Méthodes énergétiques en mécanique de la rupture". J.M.T.A., 19, pp. 363, 1980.
- [47] NGUYEN Q.S., STOLZ C. et DEBRUYNE G. "Energy methods in fracture mechanics: stability, bifurcation and second variation" Eur. J. Mech., A/Solids, 9, n°2, 157-173, 1990.
- [48] BUI H.D., EHRLACHER A. et NGUYEN Q.S. "Propagation de fissure en thermoélasticité dynamique" Journal de Mécanique, Vol. 19, N°4, 1980.
- [49] MAZARS J. "Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure" -Thèse d'Etat, Paris 6, 1984.

- [50] ROSSI P. "Fissuration du béton: du matériau à la structure. Application de la mécanique linéaire de la rupture"-Thèse de l'ENPC (1986), publiée en rapport de recherche des LPC n°150, 1988.
- [51] BAZANT Z.P. et OHTSUBO H. "Stability condition for propagation of a system of cracks in brittle solids", *adv. Civil Eng.*, 1977.
- [52] SUO X. Z., COMBESCURE A. "Sur une formulation mathématique de la dérivée seconde de l'énergie potentielle en théorie de la rupture fragile", *C.R. Acad. Sci., Paris, Série II*, 308, pp. 1119-1122, 1989.
- [53] NGUYEN Q.S. et PETRYK H. "A constitutive inequality for time-independent dissipative solids" *C.R. Acad. Sci., Paris*, t. 312, Série II, pp. 7-12, 1991.
- [54] PIJAUDIER-CABOT G. et BERTHAUD Y. "Effets des interactions dans l'endommagement d'un milieu fragile. Formulation non locale" *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 310, Série II, pp. 1577-1582, 1990.
- [55] CHUDNOVSKY A. et WU S.F. "Elastic interaction of a crack with a random array of a microcracks", *Int. J. Frac.*, 49, pp. 123-140, 1991.
- [56] LAURES J.-P. et KACHANOV M. "Three-dimensional interactions of a crack front with arrays of penny-shaped microcracks", *Int. J. Frac.* 48: pp. 255-279, 1991.
- [57] David K.M. SHUM et John W. HUTCHINSON "On toughening by microcracks", *Mechanics of Materials* 9, pp. 83-91, 1990.
- [58] MULLER I. "Thermodynamics", Pitman Advanced Publishing Program, Boston, London, Melbourne, 1985.