

Effets d'échelle dans la rupture des composites unidirectionnels

Gilles Forêt

▶ **To cite this version:**

Gilles Forêt. Effets d'échelle dans la rupture des composites unidirectionnels. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1995. Français. NNT : . tel-00529383

HAL Id: tel-00529383
https://pastel.hal.science/tel-00529383

Submitted on 25 Oct 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NS 19990 (4)

X

DOCTORAT DE L'ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES

Spécialité : Structures et Matériaux

Thèse présentée par

Gilles FORET

EFFETS D'ECHELLE DANS LA RUPTURE DES COMPOSITES UNIDIRECTIONNELS

Soutenue le 19 Octobre 1995

JURY	**LAMON J.**	Rapporteur
	RENARD J.	Rapporteur
	CHABERT A.	Examinateur
	CHABOCHE J.L.	Examinateur
	LEGUILLON D.	Examinateur
	LENE F.	Examinateur
	EHRLACHER A.	Directeur de thèse

15

E.N.P.C.
INV03677

REMERCIEMENTS

Je désire en tout premier lieu adresser toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse Monsieur Alain EHRLACHER directeur du C.E.R.A.M. pour avoir bien voulu m'accueillir dans son laboratoire et pour avoir dirigé ma thèse.

Il fut tout au long de ce travail mon principal conseiller et interlocuteur et j'ai été maintes fois fasciné par sa créativité et son enthousiasme. Son soutien de tous les instants m'a permis de réaliser ce travail alors que les périodes difficiles que j'ai traversées durant ces dernières années auraient pu m'y faire renoncer. Il m'a ainsi apporté une aide inestimable et je ne saurais jamais assez l'en remercier.

Je tiens à remercier Mademoiselle LENE pour avoir accepté de présider mon jury ainsi que Messieurs LAMON et RENARD qui ont accepté de porter un jugement sur ce travail en tant que rapporteur.

Mes remerciements vont aussi à Messieurs CHABERT et CHABOCHE pour l'intérêt qu'ils ont manifesté pour ce travail en acceptant d'être membre du jury.

Enfin, mes plus vifs remerciements vont à mes collègues et amis du C.E.R.A.M. pour l'ambiance de travail chaleureuse et motivante qu'ils ont su créer et maintenir dans ce centre.

SOMMAIRE

INTRODUCTION 4

1. LA RUPTURE DES COMPOSITES UNIDIRECTIONNELS : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE 12

1.1. ETUDE STATISTIQUE DE LA RESISTANCE DES FIBRES OU DES TORONS DE FIBRES 12

1.2. ANALYSE DES CONCENTRATIONS DE CONTRAINTES AU VOISINAGE D'UN DEFAUT 18

1.3. ETUDE STATISTIQUE DE LA RESISTANCE D'UN COMPOSITE UNIDIRECTIONNEL ET EFFETS D'ECHELLE 28

2. PROGRAMME EXPERIMENTAL 44

2.1. CHOIX DE LA PROCEDURE D'ESSAI 45

2.1.1. Matériaux 45

2.1.2. Eprouvettes 45

2.1.3. Essais et mesures 46

2.1.4. Procédure d'analyse des résultats 47

2.1.5. Détermination de la zone d'incertitude sur la détermination de m et x_{L_0} 49

2.2. RESULTATS D'ESSAIS 54

2.2.1. Présentation des résultats 54

2.2.2. Analyse des effets d'échelle 57

2.2.2.1. Effets d'échelle fonction de la longueur 57

2.2.2.2. Effet d'échelle fonction de la section 58

3. MODELE MECANIQUE 60

3.1. LE CHOIX DU MODELE 60

3.1.1. Cinématique tridimensionnelle 61

3.1.2. Cinématique uniaxiale 62

3.2. LE CHOIX DE LA GEOMETRIE ETUDIEE 62
3.2.1. Longueur de "l'éprouvette" simulée 62
3.2.2. Largeur de "l'éprouvette" simulée 63
3.3. LES EQUATIONS DU MODELE 64
3.4. DISCRETISATION DU MODELE UNIAXIAL ET DESCRIPTION DE L'ENDOMMAGEMENT 67
3.5. VALIDATION DU MODELE DISCRETISE PAR L'ANALYSE ELASTIQUE DES CHAMPS 74
3.6. SIMULATION DE LA RUPTURE 80
3.6.1. Les critères 81
3.6.2. Introduction de l'aléa 82
3.6.2.1. Choix de la loi de distribution 82
3.6.2.2. Tirage au sort 83
3.6.3. Algorithme de progression de la micro fissuration 84

4. RUPTURE DU BI-FIL 86
4.1. AUTOMATES ENCADRANT $C_2^N(x)$ 88
4.1.1. Automate minorant 88
4.1.2. Automate majorant 88
4.1.3. Automate de Daniels 91
4.2. SIMULATIONS DE RUPTURE DE BI-FILS SANS DECOHESION 93
4.3. INTERPRETATION DES RESULTATS A L'AIDE DE LA REPRESENTATION CLCPF 103
4.3.1. La représentation CLCPF 103
4.3.2. Effet d'échelle de longueur 107
4.4. RUPTURE DU BI-FILS AVEC DECOHESION 109
4.4.1. Influence de la décohésion dans la rupture du bi-fil 109
4.4.2. Influence de la valeur du cisaillement critique 113
4.4.3. Effet d'échelle de longueur 115

5. RUPTURE DU QUADRI-FIL 119
5.1. AUTOMATES ENCADRANT $C_4^N(x)$ 121
5.1.1. Automate minorant 121
5.1.2. Automate majorant 121
5.1.3. Automate de Daniels 123
5.2. RESULTATS DE SIMULATIONS 124
5.2.1. Résultats des simulations sans décohésion 126
5.2.2. Résultats des simulations prenant en compte la décohésion 129
5.3. INFLUENCE DE LA FINESSE DE DISCRETISATION 132
5.3.1. Le bi-bi-fil 133

5.3.1. Comparaison bi-bi-fil - quadri-fil 136

6. GENERALISATION AU P-FIL **140**

6.1. RESULTATS DE SIMULATIONS 141

6.2. DEFINITION DE LA SECTION OPTIMALE 144

6.3. RESISTANCE UTILE DES JONCS 145

CONCLUSION **149**

ANNEXE 1 **151**

ANNEXE 2 **153**

ANNEXE 3 **156**

ANNEXE 4 **157**

BIBLIOGRAPHIE **158**

INTRODUCTION

Depuis quelques années, le milieu du Génie Civil s'intéresse aux nouveaux matériaux et plus particulièrement aux matériaux composites. En effet, les ingénieurs et architectes voient dans leur utilisation de nouvelles formes, de nouvelles performances mécaniques ou esthétiques et de moindres coûts dans les postes de manutention et d'entretien. Si les matériaux de base entrant dans la composition des matériaux composites sont plus chers que les bétons et aciers traditionnels, les raideurs spécifiques et résistances, les possibilités de réparation, les très bonnes performances à la fatigue et à la corrosion donnent un ensemble d'atouts certain à ces ''nouveaux'' matériaux.

Les câbles en matériaux composites n'ont actuellement qu'une application limitée dans le domaine du Génie Civil. Ils sont utilisés en haubanage, pour le renforcement des sols, et principalement pour les applications à la précontrainte intérieure et extérieure. C'est à ce titre que nous avons choisi le thème de notre étude, à savoir, l'étude du comportement à la rupture de câbles composites pour les applications à la précontrainte intérieure et extérieure.

Le béton précontraint a été inventé par E. Freyssinet en octobre 1928 [*Grattesat,1984*]. L'idée consiste à maintenir le béton comprimé pour éviter sa fissuration en mettant en tension des câbles entre les extrémités de la structure. Les premiers ponts en béton précontraint ont été construits à l'aide de câbles métalliques extérieurs au béton. Il s'agit des ponts sur la Saale à

Alsleben en 1928, et d'Aue en 1936 [*SETRA,1990*]. Cette technique n'a pas eu par la suite un grand développement car des problèmes de corrosion de câbles de précontrainte se sont manifestés sur plusieurs de ces ouvrages. Ces expériences ont donné une mauvaise réputation à la précontrainte extérieure et celle-ci s'est trouvée abandonnée au profit de la précontrainte intérieure. Pour cette technique les câbles sont disposés dans des gaines mises en place au coeur du béton. Après mise en traction des câbles les gaines sont injectées pour limiter la corrosion.

La précontrainte extérieure s'est trouvée relancée à partir des années 1970 avec le renforcement d'ouvrages insuffisamment précontraints au moment de leur construction. La majorité des réalisations. qu'elles soient précontraintes extérieurement ou intérieurement, a été assurée par des câbles en acier, mais le projet d'utiliser des câbles en matériaux composites notamment en précontrainte extérieure pour s'affranchir des problèmes de corrosion est séduisant.

L'idée d'assurer la précontrainte par des joncs composites remonte à 1946 [*Chabert,1993*] mais la première réalisation ne date que de 1980. Citons les principales réalisations européennes depuis 1980 [*Neal-Labossière,1992*] :

- En 1980 un petit pont utilisant des fibres de verre est réalisé à Düsseldorf.
- En 1986 le premier pont autoroutier avec précontrainte en fibres de verre est réalisé à Düsseldorf.
- En 1988 utilisation de précontrainte externe avec des joncs sur une passerelle piétonnière à Berlin.
- En 1990, la société GTM installe deux armatures de précontrainte en verre vinylester développées en association avec la société Cousin dans le Viaduc de Bardonnex près de Genève.

Ces applications sont donc peu nombreuses et apparaissent ne pas se développer. Existe-t-il des raisons à cela ? Comparons les propriétés des câbles composites à celles des câbles en acier. Les câbles composites présentent les avantages suivants :

1. les câbles composites présentent une bonne résistance à la corrosion. (Il faut cependant être prudent dans la mise en oeuvre des câbles en fibres de verre car celles-ci sont corrodées dans un milieu basique comme le béton).

2. La masse volumique des matériaux composites est nettement plus faible que celle de l'acier. (Gain de poids et mise en place plus aisée, en particulier pour les câbles en fibres de verre)

3. Les câbles en fibres de verre sont plus souples que les câbles en acier ce qui permet de limiter les pertes de précontrainte en cas de variations dimensionnelles des ouvrages.

4. Les câbles peuvent être facilement instrumentés (fibres optiques, fil de cuivre,...).

Cependant, les câbles composites présentent aussi certains inconvénients :

1. Les câbles en matériaux composites présentent des difficultés d'ancrage car les matériaux composites supportent mal les "étreintes". Un système d'ancrage performant et compact reste à inventer. Les systèmes d'ancrage actuellement utilisés sont volumineux et manquent de commodité sur les chantiers, mais leur volume pourrait cependant être réduit avec l'utilisation d'ancrages "coulés" [*Chabert,1993*] qui sont déjà efficaces.

2. Le coût d'utilisation des câbles composites comme câbles de précontrainte reste plus important que le coût des câbles de précontrainte en acier. Cependant les analyses de coût réel sont difficiles à effectuer et la prévision de l'évolution de ces coûts dans l'hypothèse d'une augmentation de l'utilisation des matériaux composites dans le génie civil reste à faire.

3. Les fibres ont un comportement élastique-fragile et ne présentent pas de "réserve de ductilité". Rien n'indique qu'elles sont dans un état proche de la rupture et cela a conduit à prendre, dans le doute, des coefficients de sécurité par rapport à la rupture importants (0,5 pour les composites au lieu de 0,8 pour l'acier). Ce coefficient de sécurité sévère a pour conséquence d'augmenter :

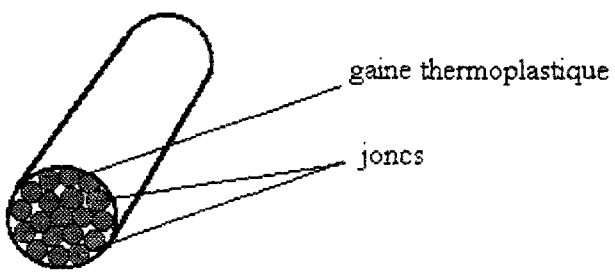
a. La quantité de matériau (section des joncs).

b. Le volume des câbles et des systèmes d'ancrage.

c. Globalement et de façon importante le coût des câbles composites.

Les inconvénients associés aux points (1) et (2) sont fortement amplifiés par le probable surdimensionnement lié au coefficient de sécurité à la rupture.
Ce dernier point (3) concernant le coefficient de sécurité de 0,5 en vigueur sur les câbles en matériaux composites est donc le plus critique. Pour ces raisons nous avons décidé d'étudier la rupture des câbles et des joncs en matériaux composites pour tenter de réduire la sévérité de ce coefficient de sécurité.

Les câbles en matériaux composites sont formés de joncs disposés de façon concentrique en deux ou trois anneaux, le tout étant généralement gainé par un thermoplastique.



diamètre d'un jonc ~ 3 mm

Les joncs sont composés de fibres unidirectionnelles (verre, carbone). Ce sont donc des composites unidirectionnels, obtenus en général par pultrusion.

La rupture d'un jonc s'apparente à la rupture d'un matériau élastique-fragile c'est à dire qu'il présente les caractéristiques de la rupture fragile, avec un comportement élastique jusqu'au moment de la ruine de la structure. La rupture d'un jonc est en général provoquée par la présence aléatoire de défauts de fabrication qui se traduit par une dispersion importante des contraintes de rupture. Cette dispersion des propriétés du matériau est alors responsable de ce que l'on appelle l'effet d'échelle de volume, c'est à dire la diminution de la contrainte moyenne de rupture avec l'augmentation du volume sollicité. En effet, les effets d'échelle sont liés à l'hétérogénéité du matériau et donc à la résistance locale des éléments de matière dans le matériau qui n'est pas uniforme mais suit une distribution aléatoire. La résistance à la traction d'un jonc en composite unidirectionnel est alors à l'évidence aléatoire et, la distribution statistique des résistances sera donc fonction de la longueur et de la section du jonc donnant lieu respectivement à des effets d'échelle de longueur et des effets d'échelle de section.

La distribution des résistances en fonction de la longueur sera assez facile à étudier puisque les joncs vont se rompre sur leur section la plus faible. Ainsi, les joncs plus longs seront statistiquement plus fragiles car susceptibles de contenir une section plus fragile. La comparaison des distributions statistiques des résistances de joncs de longueurs différentes peut être faite analytiquement d'un point de vue théorique (Annexe 2).

Lorsque l'on s'intéresse à la distribution statistique des résistances en fonction de la section, la réponse est moins facile. Une réponse sommaire consistant à affirmer que à longueur donnée, la section la plus grande est statistiquement plus fragile (en contrainte) car susceptible de contenir plus de défauts peut être facilement mis en défaut dans certains cas. Par exemple, nous considérons le cas d'école suivant :

Une structure constituée de deux fils de même longueur "collés" est-elle plus ou moins résistante (en contrainte) qu'un fil seul ?

La réponse à cette question simple dépend de la distribution statistique des résistances le long des fils.

Intuitivement nous pouvons dire que lors de la première rupture d'une section d'un des fils, la section de l'autre fil au même niveau (nous l'appelons co-section) va instantanément subir un niveau de contrainte double pour maintenir l'équilibre.

Si la distribution des résistances est très concentrée (faible écart type), il est très vraisemblable que cette co-section cassera car elle n'aura que très peu de chances d'être deux fois plus résistante que sa voisine. La rupture de la structure est simultanée à la rupture de la première section. L'effet d'échelle obtenu est alors équivalent à celui du doublement de la longueur.

Au contraire, si la distribution des résistances est très étalée (beaucoup de sections faibles), la première section sera vraisemblablement une section de faible résistance et il est très probable que sa co-section pourra supporter le doublement de la contrainte. Cela devrait avoir pour effet d'augmenter la résistance moyenne de la structure par rapport à celle d'un fil seul.

Ce raisonnement sommaire sera repris et approfondi de manière plus rigoureuse dans le corps du mémoire, mais d'ors et déjà nous pouvons penser au vu de cet exemple que le "collage" de deux fils "renforce" la résistance moyenne si la distribution des résistances est étalée et au contraire diminue la résistance moyenne dans le cas des faibles écarts types.

On peut tenter d'extrapoler ce résultat simple à un jonc constitué de n fils collés.

Si la distribution statistique des résistances des sections des fils est très étalée (ce qui est très vraisemblable), pour les faibles valeurs de n la résistance moyenne devrait être croissante avec n. Au contraire pour les très grandes valeurs de n le nombre de" sites faibles" augmente et l'on va vraisemblablement retrouver un effet d'échelle qui donnera une résistance moyenne décroissante avec le volume, c'est à dire avec la section.

Ce raisonnement est bien sûr à reprendre de manière plus précise et plus rigoureuse, ce qui sera fait plus loin. Mais s'il s'avère exact il conduit logiquement à une question d'une grande importance pratique.

Existe-t-il une section optimale des joncs du point de vue de la rupture ?

C'est en tout cas ce que semble suggérer le raisonnement précédent, la résistance moyenne semble être croissante pour les faibles sections et décroissante pour les très grandes sections.

La question que nous nous posons est maintenant plus précise : il s'agit de proposer une modélisation de la rupture aléatoire des composites unidirectionnels de façon à pouvoir déterminer pour un problème donné la section optimale d'un jonc de câble composite (si elle existe). C'est l'objet du travail que nous présentons maintenant et nous le décomposons en six chapitres.

Le premier chapitre présente une étude bibliographique sur la rupture des composites unidirectionnels. Ce chapitre comporte trois paragraphes. Le premier concerne l'étude statistique de la résistance des fibres individuelles ou des torons de fibres et les effets d'échelle de longueur. Le second analyse des concentrations de contraintes au voisinage d'un défaut ou

d'une fissure dans les composites unidirectionnels. Le troisième est l'étude statistique de la résistance d'un composite unidirectionnel (U.D.) et des effets d'échelle.

Le deuxième chapitre propose une approche expérimentale sommaire dans laquelle nous testons en traction monotone des éprouvettes plates carbone-epoxy dont les fibres sont orientées à 0 degrés par rapport à l'axe de l'éprouvette (unidirectionnelles) de largeurs et de longueurs différentes. Tout d'abord nous montrons que les effets d'échelle fonction de la longueur peuvent être analysés simplement ainsi que nous l'avons dit plus haut. Puis, nous observons que la résistance moyenne augmente puis diminue lorsque l'on augmente la largeur de l'éprouvette. Ainsi, les effets d'échelle en fonction de la largeur, ainsi que le raisonnement sommaire tenu auparavant tendait à le laisser penser, semblent être tout d'abord croissants puis ensuite décroissants . Nous présentons nos résultats à l'aide de lois de Weibull. Nous en profitons pour discuter de manière approfondie la validité de détermination des paramètres d'une loi de distribution de Weibull. Il en ressort que le nombre d'essais nécessaires à une analyse statistique fiable est très important. Il apparaît alors nécessaire pour étudier correctement ce phénomène de procéder tout d'abord à une modélisation permettant de mieux comprendre les scénarios de rupture.

Dans le troisième chapitre nous choisissons le modèle numérique de simulation de la rupture des éprouvettes plates unidirectionnelles. Nous voulons privilégier l'analyse statistique des résultats, ce qui implique un nombre important de simulations. Nous sommes ainsi amenés à choisir le modèle mécanique le plus simple possible pour l'analyse des champs (modèle de type Shear-Lag). Nous rejoignons en cela nombre de travaux de la littérature. Les phénomènes d'endommagement tels que la rupture de fibres et le délaminage sont pris en compte simplement. Nous discrétisons notre problème par la méthode des différences finies puis nous présentons la méthode générale de calcul et notre algorithme de rupture. Nous présentons ensuite notre méthode générale de simulation et nous abordons en particulier le point délicat du choix des lois de distribution statistique des résistances et de leur technique de simulation ainsi que l'analyse statistique des résultats obtenus sur des batteries de simulations.

Dans le quatrième chapitre nous reprenons d'une manière plus rigoureuse avec l'outil de simulation construit précédemment l'étude de l'évolution des distributions statistiques des résistances entre un fil seul et deux fils collés que nous appellerons un bi-fil.

Nous proposerons en outre deux "automates numériques" basés sur des hypothèses sommaires de redistribution de contrainte après rupture d'une section d'un fil. Ces deux automates ont respectivement le statut de "minorant" et de "majorant" au sens des courbes de probabilités cumulées de rupture. Ils permettent d'interpréter et de commenter beaucoup plus facilement les résultats de simulation.

Dans le chapitre cinq nous étudions un quadri-fil. Cette structure peut se simuler comme quatre fils collés ou deux bi-fils collés. On peut ainsi aborder les questions touchant à la finesse de discrétisation des joncs pour l'étude de leurs résistances statistiques et l'indépendance des prévisions par rapport à cette finesse. Quelques automates peuvent en outre être proposés pour faciliter la lecture et le commentaire des résultats simulés.

Le dernier chapitre aborde la modélisation générale vis à vis de la rupture des joncs. Il porte sur les propriétés statistiques de résistance de ce que l'on pourrait appeler le n-fil. Il peut être à la base d'une étude plus approfondie des sections optimales de joncs et des coefficients de sécurité vis à vis de la rupture à prendre en compte dans les ouvrages.

CHAPITRE 1.

LA RUPTURE DES COMPOSITES UNIDIRECTIONNELS ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

1.1. ETUDE STATISTIQUE DE LA RESISTANCE DES FIBRES OU DES TORONS DE FIBRES

1.2. ANALYSE DES CONCENTRATIONS DE CONTRAINTES AU VOISINAGE D'UN DEFAUT

1.3. ETUDE STATISTIQUE DE LA RESISTANCE D'UN COMPOSITE UNIDIRECTIONNEL ET EFFETS D'ECHELLE

CHAPITRE 1.

LA RUPTURE DES COMPOSITES UNIDIRECTIONNELS : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

La littérature sur la rupture des composites unidirectionnels est abondante. On peut dégager trois grands thèmes complémentaires abordés dans ces différentes recherches.

- L'étude statistique de la résistance des fibres individuelles ou des torons de fibres et les effets d'échelle de longueur.
- L'analyse des concentrations de contraintes au voisinage d'un défaut ou d'une fissure dans les composites unidirectionnels.
- L'étude statistique de la résistance d'un composite unidirectionnel et les effets d'échelle.

1.1. Etude statistique de la résistance des fibres ou des torons de fibres

Les premières études sur la résistance des fibres remontent aux années 1920 mais ne concernent pas les fibres généralement utilisées dans les matériaux composites actuels (Verre, carbone, kevlar). Il semble que ce soit F.T.Peirce qui en 1926 [*Peirce,1926*] ait le premier

formulé le célèbre modèle de résistance de chaine avec l'hypothèse du lien le plus faible à l'occasion d'une étude sur la résistance de fibres de coton. A la même époque, L.H.C.Tippet [*Tippet,1925*], R.A.Fisher et L.H.C.Tippet [*Fisher-Tippet,1927*] et M.Fréchet [*Fréchet,1927*] se sont intéressés au même problème. L'étude de la résistance de fibres ou de torons de fibres utilisés pour l'élaboration de matériaux composites modernes est bien sûr plus récente ([*Moreton,1969*], [*McMahon,1974*], [*Goggin,1975*]).

Les premiers auteurs ont généralement montré que pour chaque longueur d'éprouvettes testées la distribution statistique des résistances des fibres peut vraisemblablement être décrite par une loi de Weibull unimodale [*Weibull,1951*]. Il découle de ces travaux que la probabilité de survie d'une éprouvette de longueur L_0 soumise à la contrainte σ peut s'écrire :

$$P_{L_0}[\sigma_R \geq \sigma] = \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{\sigma_{L_0}}\right)^m\right] \tag{1.1}$$

où : - σ_{L_0} est une contrainte de normalisation pour les éprouvettes de longueur L_0.

- m est appelé module de Weibull.

Sous les hypothèses de distribution aléatoire d'une seule famille de défauts et de rupture des fibres dès la propagation du premier défaut (hypothèse du lien le plus faible), la probabilité de survie des éprouvettes devrait s'écrire en fonction de la longueur L [*Freudenthal,1968*] :

$$P_L[\sigma_R \geq \sigma] = \exp\left[-\frac{L}{L_0}\left(\frac{\sigma}{\sigma_{L_0}}\right)^m\right] \tag{1.2}$$

où L_0 est une longueur de référence.

Les auteurs nommés ci-dessus ont étudié des éprouvettes de longueur variant entre 2.5 mm et 100 mm. Les mécanismes physiques et les modèles de résistance des composites unidirectionnels font intervenir des longueurs de fibres élémentaires bien plus faibles (de l'ordre de 0.5 mm pour les fibres qui nous intéressent) en prenant en compte la zone de décohésion fibre-matrice et la zone d'ancrage (transfert des efforts par cisaillement entre la matrice et la fibre) à l'extrémité d'une fibre rompue. Il est donc important de connaître la

validité de l'équation (1.2) jusqu'aux très faibles longueurs de fibres.

Pour cela, J.W.Hitchon et D.C.Phillips [*Hitchon-Phillips,1979*] ont entrepris des essais pour deux types de fibres de carbone sur des fibres de longueur 50 mm, 5 mm et 0.5 mm.
Leurs résultats expérimentaux semblent montrer que, bien qu'il y ait un effet d'échelle dans la résistance moyenne des éprouvettes, celui-ci n'est pas donné par l'équation (1.2). Les auteurs suggèrent l'existence de plusieurs familles de défauts dans les fibres pour expliquer les résultats observés. A l'appui de leur hypothèse, ils avancent les observations de S.G.Burnay et J.V.Sharp [*Burnay-Sharp,1972*] et de B.Hudson et E.A.Harper [*Hudson-Harper,1975*] qui ont étudié la géométrie des fibres à l'aide de microscopes à haut voltage. Les observations montrent la présence de divers types de défauts sur les fibres (avec des intensités et des fréquences variables) :

- désalignement de fibrilles
- terminaison de fibrilles
- variation de diamètre des fibres

Les résultats expérimentaux de J.W.Hitchon et D.C.Phillips ont été analysés soigneusement quelques années plus tard par K.K.Phani [*Phani,1987*] qui a proposé de les interpréter à l'aide d'une loi de Weibull "modifiée"; la probabilité de survie d'une éprouvette de longueur L s'exprime sous la forme :

$$P_L[\sigma_R \geq \sigma] = \exp\left[-\frac{L}{L_0}\left\langle\frac{\sigma-\sigma_{min}}{\sigma_1}\right\rangle^{m_1}\left\langle\frac{\sigma_{max}-\sigma}{\sigma_2}\right\rangle^{m_2}\right] \tag{1.3}$$

où :

- $\langle a\rangle = \begin{cases} a & \text{si } a > 0 \\ 0 & \text{si } a < 0 \end{cases}$

- σ_{min} est la contrainte en dessous de laquelle on est certain que les éprouvettes vont survivre.

- σ_{max} est la contrainte au dessus de laquelle toutes les éprouvettes seront détruites.

- m_1 , m_2 , σ_1 , σ_2 sont des paramètres permettant de décrire la distribution statistique des résistances mesurées sur des éprouvettes de longueur L_0.

Ces paramètres, une fois mesurés sur des éprouvettes de longueur L_0, permettent de prédire la distribution statistique des résistances des éprouvettes de longueur L quelconque via le facteur $\frac{L}{L_0}$.

La figure 1.1 extraite de [*Phani,1987*] présente la comparaison entre les résultats des essais de Hitchon et Phillips et du modèle de Weibull "modifié" proposé par K.K.Phani.

Notons que ces résultats semblaient déja connus par les chercheurs qui ont étudié la résistance des fibres optiques ([*Olshansky-Maurer,1976*], [*Kalish,1977*], [*Snowden,1978*]). La méthode utilisée dans ces travaux a consisté à étudier "le lien le plus faible" d'éprouvettes de longueurs différentes par rupture de ces éprouvettes.

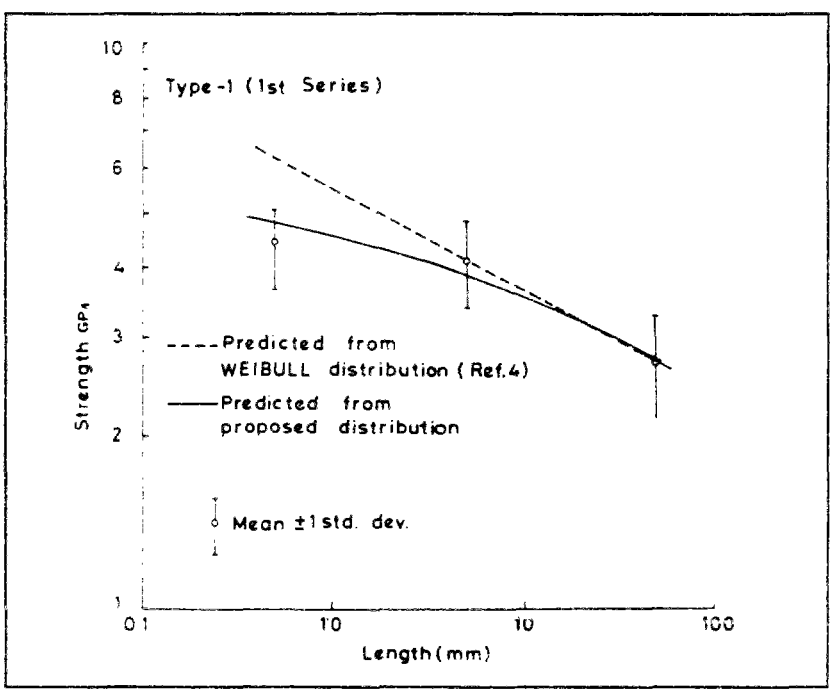


Fig. 1.1 : Résistance d'une fibre en fonction de sa longueur (d'après [Phani-1987], fig.5 p.67*)*

Plus récemment, une autre technique très prometteuse permettant d'obtenir la totalité de la courbe de distribution des résistances d'une fibre s'est developpée. Il s'agit de l'essai de fragmentation de fibres ([*Bascom-Jensen,1985*], [*Netravali et al,1989*], [*Favre-Jacques,1990*], [*Baxevanakis-Jeulin-Valentin,1993*]). Dans cet essai une fibre unitaire est incluse dans une matrice de résine plus déformable et l'éprouvette ainsi constituée est soumise

à une élongation croissante. On observe alors une fragmentation progressive et aléatoire de la fibre comme le montre la figure 1.2 extraite de [*Baxevanakis-Jeulin-Valentin,1993*].
L'analyse de la distribution statistique des longueurs de fragment en fonction de l'élongation de l'éprouvette permet de remonter à la distribution statistique de résistance le long de la fibre.

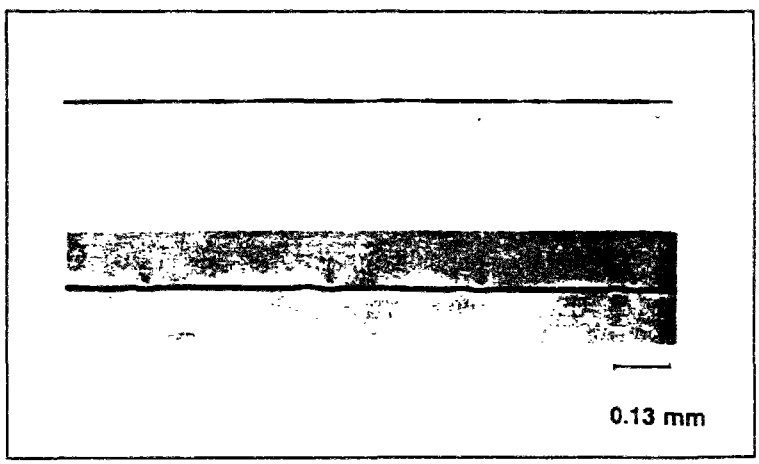


Fig. 1.2 : Densité de ruptures de fibre T300 (dessus) et M40 (dessous) à saturation. (d'après [Baxevanakis-Jeulin-Valentin,1993], fig.5 p.50)

Il faut cependant réaliser plusieurs essais pour établir une analyse statistique complète car l'homogénéité de la distribution statistique dans toutes les fibres n'est pas assurée, une éprouvette ne permettant d'atteindre que la distribution statistique des résistances locales.
Dans [*Baxevanakis-Jeulin-Valentin,1993*] de nombreuses hypothèses sur la forme de la distribution statistique ont été testées. Il en ressort que la loi de Weibull classique n'est pas la mieux adaptée pour décrire le phénomène de fragmentation. Les auteurs proposent ainsi d'utiliser plutôt une fonction sigmoidale qui permet une prédiction nettement plus proche des résultats expérimentaux, ceci étant illustré par la figure 1.3 :

La probabilité de survie d'une section de fibre de longueur L s'écrit alors :

$$P[\sigma_R \geq \sigma] = \exp\left[A\,L\left[1-\exp\left(\frac{\sigma-\sigma_s}{\sigma_0} \right)^m \right] \right] \tag{1.4}$$

où :

A, σ_s, σ_0 et m sont des paramètres de la distribution.

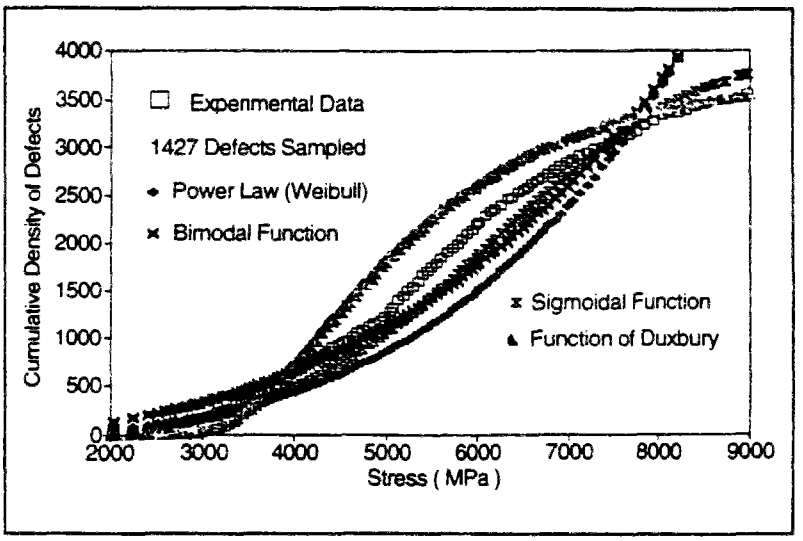


Fig. 1.3 : Distribution des longueurs de fragments de fibre à saturation.
(d'après [Baxevanakis-Jeulin-Valentin,1993], fig.7 p.51)

En complément aux travaux sur les fibres individuelles, les recherches ont porté sur la détermination de la résistance aléatoire de torons (quelques centaines de fibres parallèles noyées ou non dans une matrice). Le résultat le plus significatif est que, asymptotiquement, la distribution des résistances tend vers une loi normale, dans les cas les plus courant, lorsque le nombre de fibres tend vers l'infini [*Daniels,1944*]; la résistance moyenne d'un toron non imprégné de résine est inférieure à celle de la fibre [*Freudenthal,1968*].

Ces dernières années, les recherches ont repris beaucoup de vigueur, notamment pour ce qui concerne les fibres céramiques ([*Simon-Bunsell,1984*], [*Goda-Fukunaga,1986*], [*Lamon,1990*], [*Lissart-Lamon,1992*]).

Généralement, ces recherches mettent en évidence l'existence de plusieurs populations de défauts concurrentes conduisant à des lois de distribution de résistance de type "Weibull bimodale". Les essais de résistance sur torons bruts peuvent permettre, moyennant quelques précautions, de remonter à la loi de distribution des résistances des fibres individuelles ([*Chi et al.,1984*], [*Lissart-Lamon,1994*]).
Les essais sur torons imprégnés sont plus directement liés à nos recherches que ceux effectués sur torons bruts. Un des résultats de ces travaux est que l'imprégnation du toron conduit à en augmenter sensiblement la résistance (figure 1.4). L'un de nos objectifs est de mieux

comprendre et illustrer ce phénomène afin d'optimiser ultérieurement le nombre de fibres "collées".

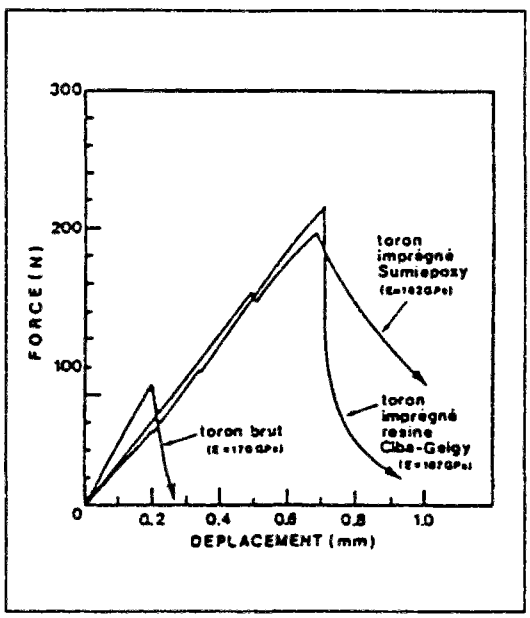


Fig. 1.4 : Courbes force/déplacement obtenues pour des torons bruts et imprégnés. (d'après [*Lamon,1990*], fig.1, p.339)

1.2. Analyse des concentrations de contraintes au voisinage d'un défaut

Les travaux cités plus haut sur la résistance des torons, notamment [*Daniels,1944*] et [*Freudenthal,1968*], font l'hypothèse que lors de la rupture d'une fibre la contrainte est redistribuée uniformément sur les fibres restantes. Cette hypothèse est probablement réaliste pour ce qui concerne les torons bruts, mais devient inacceptable aussitôt que les fibres sont imprégnées de résine. Dans ce cas, la rupture d'une fibre entraine d'une part une concentration de contrainte sur les fibres dans le voisinage immédiat de la fissure et, d'autre part, la fibre rompue est remise en contrainte à une courte distance de la fissure par cisaillement de la matrice. Il semble que ce soit J.M.Hedgepeth qui se soit le premier penché sur cette question en 1961, [*Hedgepeth,1961*]. Dans cet article, il s'intéresse à un problème élastique bidimensionnel. Le problème mécanique ne considère que la tension dans les fibres et le cisaillement dans la matrice (cette famille de modèle SHEAR-LAG pour les milieux armés de fibres semble avoir été introduit par H.L.Cox [*Cox,1951*] dans une étude sur l'élasticité et la

résistance du papier). Le nombre de fibres est infini, ce qui permet d'obtenir une solution analytique des champs dans chaque fibre à l'aide d'une transformation de type Fourier. La concentration de contraintes sur la première fibre non rompue croit avec le nombre de fibres rompues. Nous donnons ci-dessous le tableau extrait de [*Hedgepeth,1961*] donnant ces concentrations de contraintes pour des défauts allant de une à six fibres rompues (tableau 1.1). K_r est le facteur de concentration de contraintes pour r fibres rompues.

r	K_r
1	1,33
2	1,6
3	1,828
4	2,032
5	2,216
6	2,387

Tab 1.1 : Concentrations de contraintes en fonction du nombre de fibres rompues r.(d'après [Hedgepeth,1961])

La suite du document s'intéresse à la "surchage" due aux effets dynamiques de la rupture, cette surchage, variant en fonction du nombre de fibres rompues, est de l'ordre de 15 à 20%.

En 1967 J.M.Hedgepeth et P.V.Van Dyke [*Hedgepeth-Van Dyke,1967*] étendent cette solution dans deux directions. Dans la première partie de l'article ils traitent le problème précédent pour un assemblage tridimensionnel de fibres (assemblage en carré ou hexagonal). Le modèle est toujours de la famille du "Shear-Lag". Les auteurs comparent le facteur de concentration de contraintes (3D) sur la fibre la plus chargée en fonction du nombre de fibres rompues dans la plus grande dimension du défaut avec celui de l'approche bidimensionnelle (figure 1.5).

Dans la deuxième partie de l'article, les auteurs traitent un problème bidimensionnel de type Shear-Lag dans lequel le comportement de l'interface est élastique parfaitement plastique, avec une fibre rompue. La solution indique que la zone d'interface plastique entre la fibre

rompue et les fibres saines augmente rapidement en taille alors que le facteur de concentration de contrainte dans les fibres saines les plus chargées décroit très rapidement.

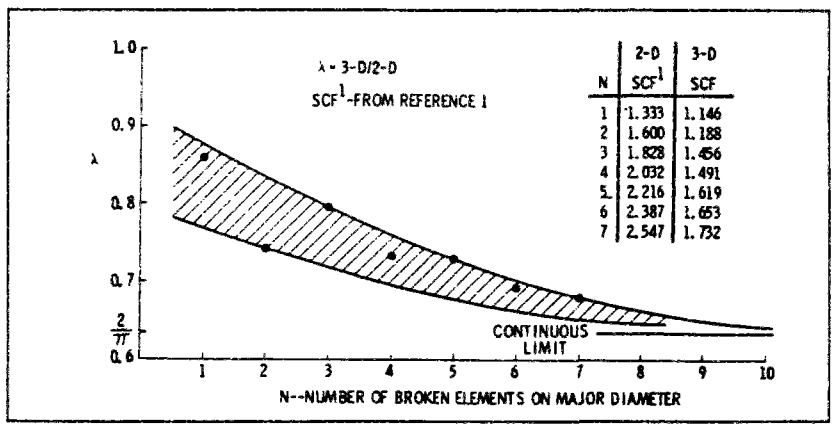


Fig. 1.5 : Rapport des concentrations de contraintes obtenues par l'approche 2D et 3D (assemblage carré). (d'après [Hedgepeth-Van Dyke,1967], fig.3, p.301)

En 1968, les mêmes auteurs [*Van Dyke-Hedgepeth,1968*] proposent un nouveau modèle dans lequel l'interface est élastique fragile. Les problèmes bidimensionnels et tridimensionnels sont traités. Le problème bidimensionnel est traité avec cinq, sept et un nombre infini de fibres. On constate qu'il n'est pas possible d'augmenter beaucoup le chargement aussitôt que la ruine en cisaillement de l'interface commence (figure 1.6).

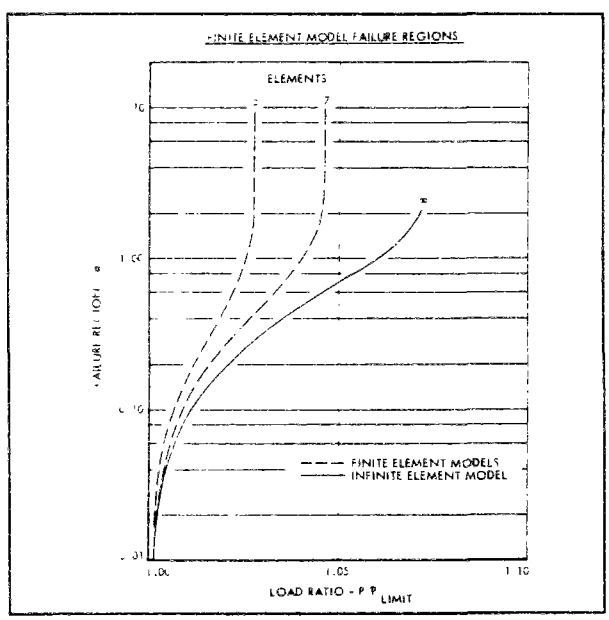


Fig. 1.6 : Longueur de la zone de décohésion en fonction du chargement. (d'après [Van Dyke-Hedgepeth,1968], fig.2, p.621)

D'autre part, la concentration de contrainte dans les fibres non rompues les plus chargées diminue avec la croissance de la zone de décohésion (figure 1.7). Ces conclusions sont encore plus nettes pour ce qui concerne le problème 3D.

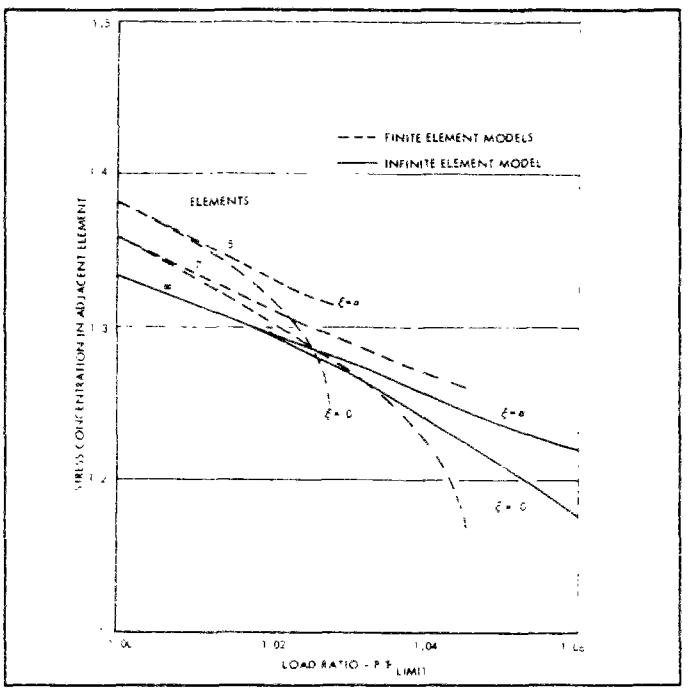


Fig. 1.7 : Variation du facteur de concentrations de contraintes avec décohésion (courbes $\xi=\alpha$) et sans décohésion (courbes $\xi=0$) en fonction du chargement (d'après [Van Dyke-Hedgepeth,1968], fig.3, p.621).

On constate ainsi que le comportement de l'interface entre les fibres (comportement en cisaillement de la matrice) peut jouer un rôle dans les scénarios de rupture des composites unidirectionnels.

Environ dix ans plus tard, J.G.Goree et R.S.Gross [*Goree-Gross,1979*] ont étudié un problème très similaire. Il s'agit d'un modèle de type Shear-Lag d'un composite unidirectionnel contenant un certain nombre de fibres rompues, mais cette fois le comportement de l'interface est de type élastique plastique fragile (figure 1.8).

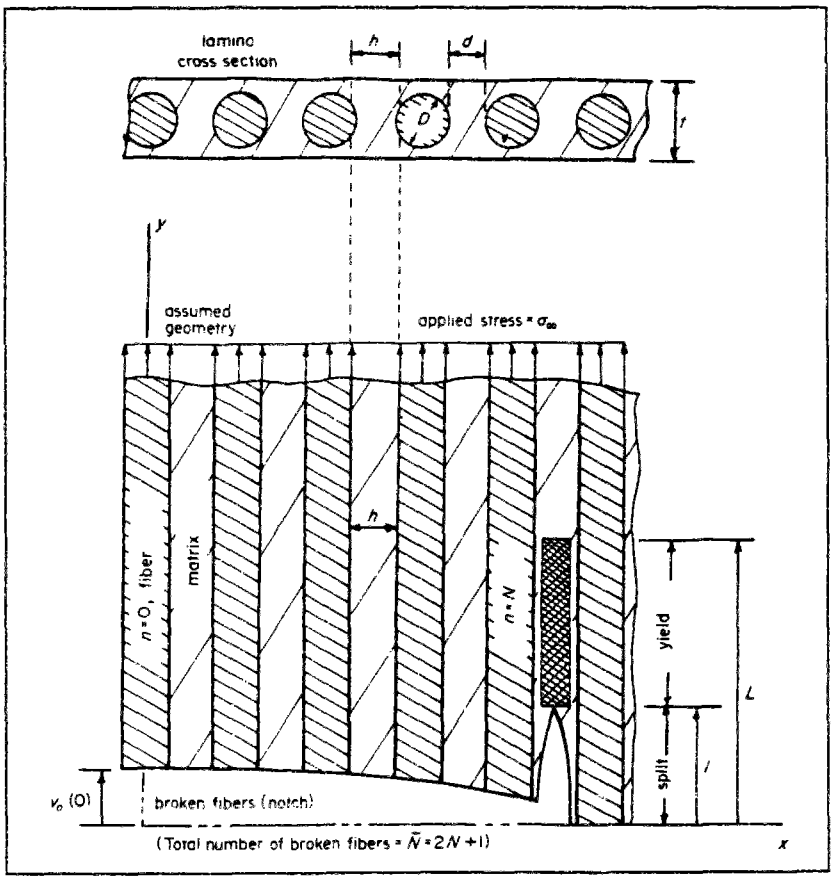


Fig. 1.8 : Représentation 2D de fibres parallèles avec une zone de décohésion fibre-matrice(d'après [Goree-Gross,1979], fig.1, p.564)

Le modèle généralise donc les modèles de [*Hedgepeth-Van Dyke,1967*] et [*Van Dyke-Hedgepeth,1968*]. Les résultats sont donnés en termes de concentrations de contraintes à l'extrémité de la zone de décohésion (l) dans la première fibre non rompue (figure 1.9).
La concentration maximum de contrainte est le rapport de l'ordonnée sur l'abcisse dans le cas de la figure 1.9. Notons que ce modèle prédit bien le comportement expérimental de composites unidirectionnels dans les deux cas extrèmes de grand glissement plastique des fibres sans décohésion et de grande décohesion de fibres.

Quelques années plus tard, J.G.Goree publie avec d'autres collaborateurs [*Dharani-Jones-Goree,1983*] une extension du travail précédent. Pour mieux prédire les résultats expérimentaux, ces auteurs ajoutent aux mécanismes d'endommagement précédents un endommagement transverse dans le prolongement de la fissure comme le montre la figure 1.10.

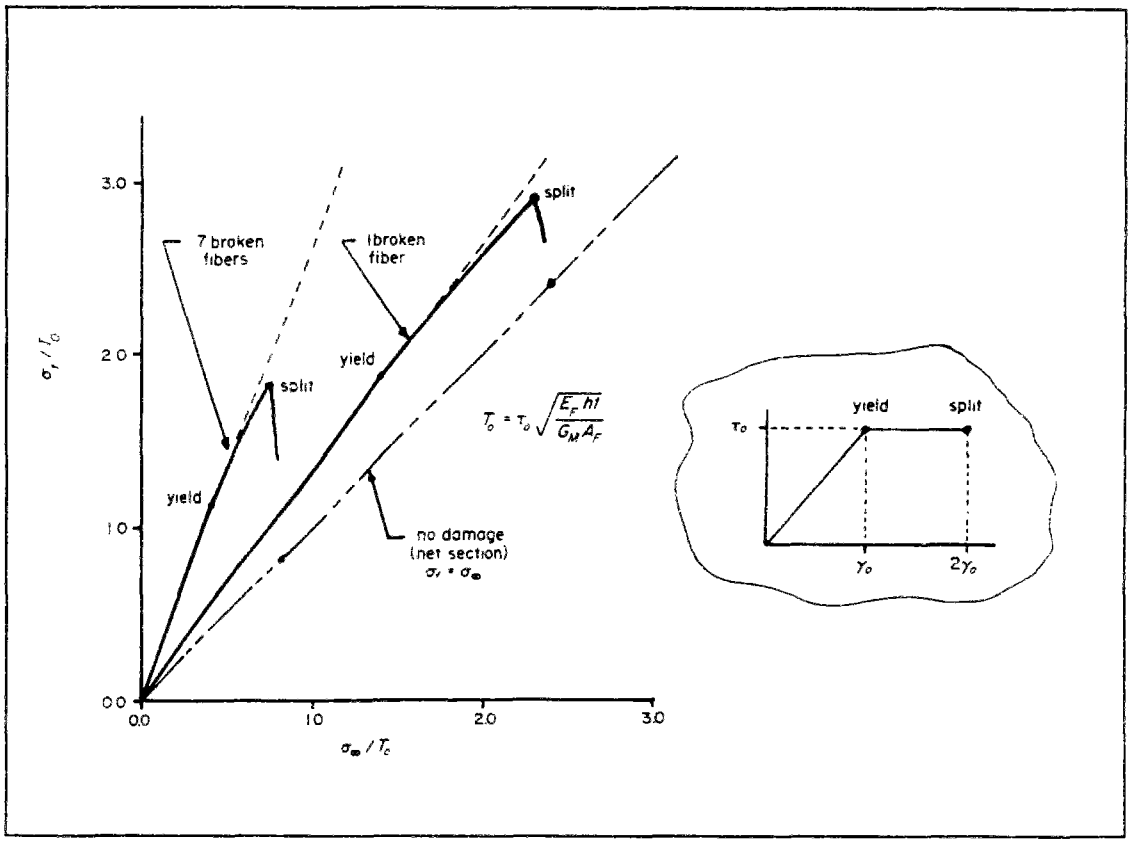


Fig. 1.9 : Valeurs de contraintes de décohésion (split) et limites d'élasticité (yield) en fonction du nombre de fibres rompues.(d'après [Goree-Gross,1979], fig.3, p.573)

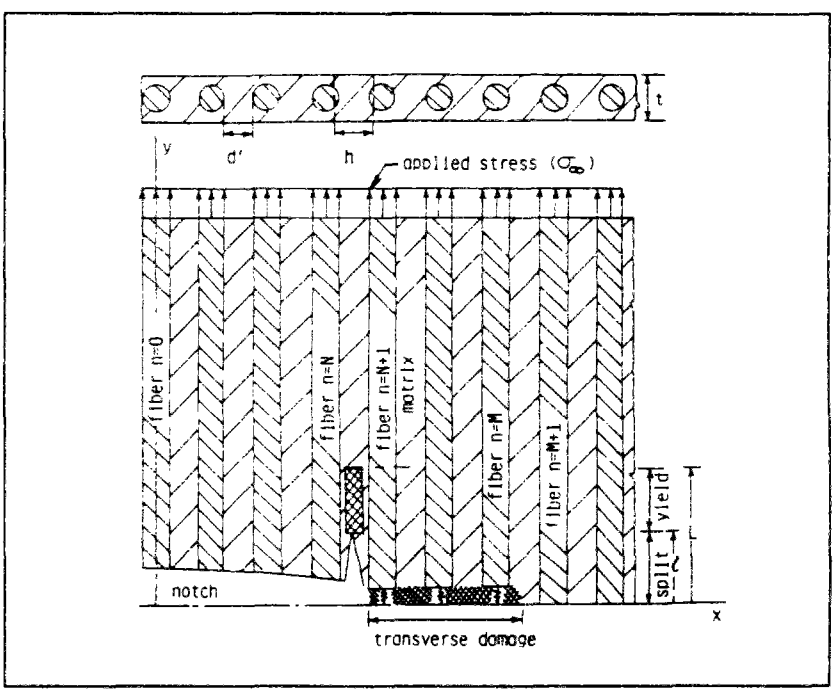


Fig. 1.10 : Représentation d'un endommagement transverse en pointe de fissure. (d'après [Dharani-Jones-Goree,1983], fig.1, p.556)

Dans cet article, ils étudient en outre le problème d'une entaille rectangulaire et celui d'un trou circulaire. Ce nouveau modèle prédit beaucoup mieux les résultats expérimentaux de J.Awerbuch et H.T.Hahn [*Awerbuch-Hahn,1977*] que le premier modèle de J.G.Goree et P.S.Gross [*Goree-Gross,1979*] (figure 1.11). Notons toutefois que les essais concernaient un composite à matrice métallique.

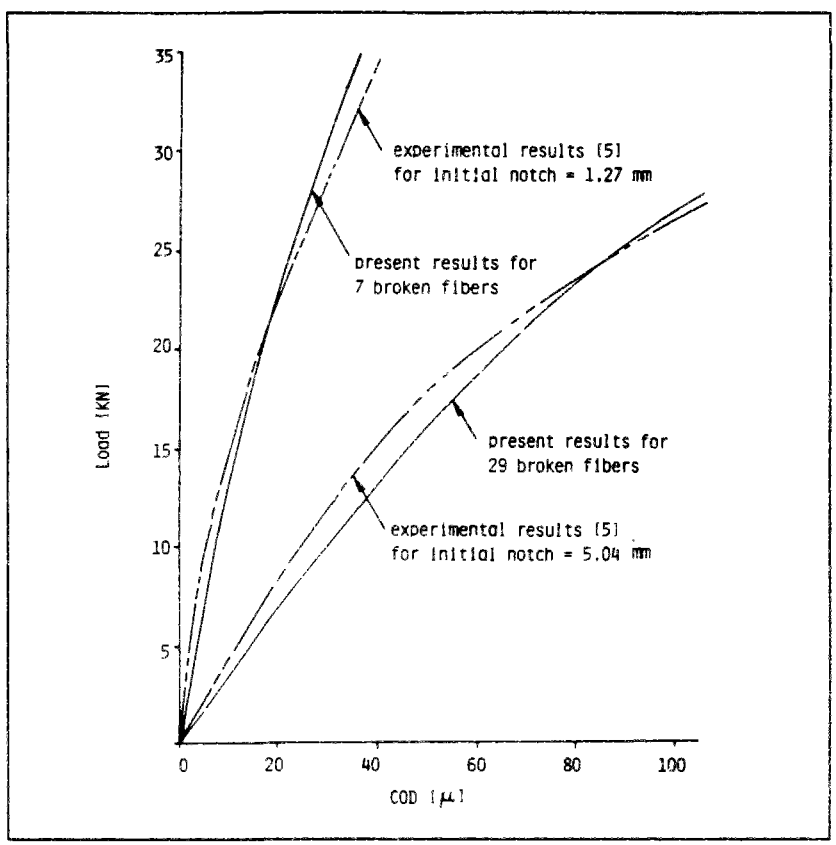


Fig. 1.11 : Comparaison des résultats expérimentaux et analytiques.
(d'après [Dharani-Jones-Goree,1983], fig.9, p.570)

En 1988 J.A.Nairn publie deux articles [*Nairn,1988a-1988b*] repris en 1990 [*Nairn,1990*]. Dans ces articles, J.A.Nairn reprend le modèle Shear-Lag utilisé par ses prédécesseurs pour l'analyse de composites unidirectionnels fissurés (fissure transverse ou longitudinale), mais, il interprète les résultats sous un angle très proche de celui de la mécanique linéaire de la rupture.

Il introduit ainsi notamment le concept de taux de relaxation d'énergie pour la progression des fissures dans le composite U.D. modélisé par le Shear-Lag et donne une expression de ce taux de relaxation qui tient compte de la géométrie fissurée des éprouvettes. En utilisant un résultat mathématique obtenu par C.A.Coulson [*Coulson,1938*] (dans l'étude d'un problème différent), J.A.Nairn donne la solution analytique des équations du modèle Shear-Lag dans le cas d'un nombre fini de fibres.

Cette solution lui permet de tracer les isovaleurs de concentrations de contraintes dans les fibres. On constate ainsi que ces isovaleurs sont superposables quelque soit le nombre de fibres et sont alors quasiment indépendantes du nombre de fibres dans un volume donné (figure 1.12).

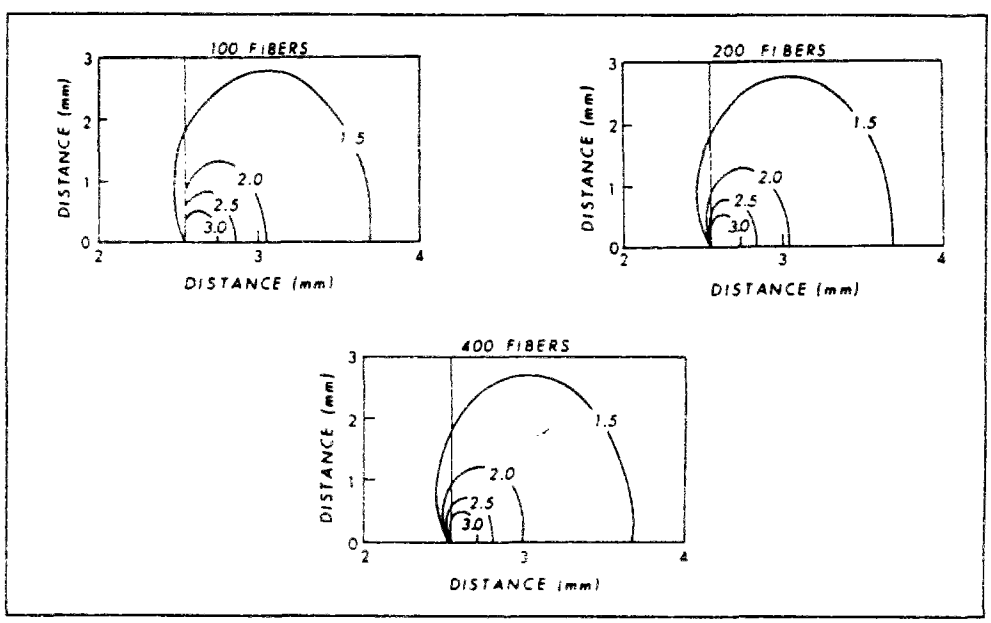


Fig. 1.12 : Isovaleurs de concentrations de contraintes dans les fibres pour N=100, 200 et 400 fibres. (d'après [Nairn,1988a], fig.5, p.571)

Il définit aussi le taux de relaxation d'énergie dans un processus de décohésion fibre-matrice et donne aussi, dans ce cas, les isovaleurs de concentrations de contraintes (figure 1.13).

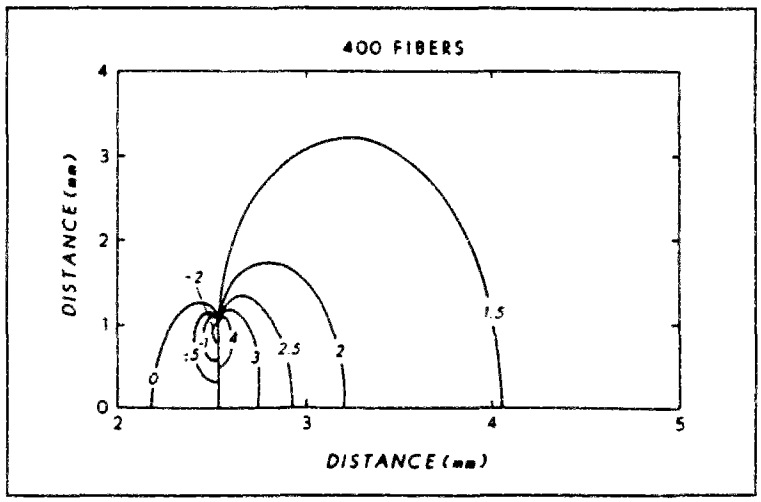


Fig. 1.13 : Isovaleurs de concentrations de contraintes dans le cas d'une décohesion fibre-matrice pour N=400 fibres. (d'après [Nairn,1988a], fig.9, p.581)

Ses prévisions de contrainte induisant la décohésion sont en accord avec les résultats expérimentaux de M.A.Wright et F.A.Ianuzzi [*Wright-Ianuzzi,1973*] (figure 1.14).

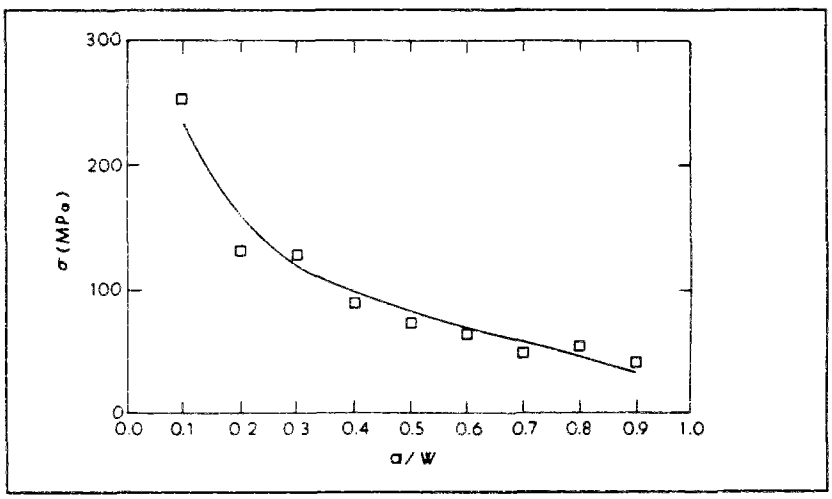


Fig. 1.14 : Contraintes de décohésions; comparaison entre les prévisions analytiques et les résultats expérimentaux (□). (d'après [Nairn,1988b], fig.5, p.597)

D'autres auteurs utilisent une modélisation des composites unidirectionnels faisant appel au modèle Shear-Lag pour étudier les concentrations de contraintes dans les fibres non rompues. Nous ne pouvons tous les citer.

Parmi les plus récents nous n'en citerons que deux. D'une part, J.H.Zhao et F.S.Ji [*Zhao-Ji,1990*] proposent une formulation variationnelle du modèle Shear-Lag et une résolution en déplacement utilisant des développements en série, d'autre part, Z.Gao, K.L.Reisfnider et G.Carman [*Gao-Reisfnider-Carman,1992*] utilisent un modèle Shear-Lag modifié par une fonction d'influence dans le champ de cisaillement de la matrice pour prendre en compte les effets de concentrations de contraintes dans le voisinage des fibres rompues.

D'autres modélisations de composites unidirectionnels s'éloignant du Shear-Lag pour l'analyse des concentrations de contraintes au voisinage des défauts apparaissent depuis quelques années. Elles sont généralement basées sur des analyses micro-mécaniques à base d'éléments finis. Ces articles s'éloignant du sujet que nous allons traiter plus loin, nous n'entrerons pas dans le détail et nous ne chercherons pas à être exhaustif. Signalons simplement à titre d'exemple [*Renard,1990*] dans lequel l'auteur étudie par éléments finis les mécanismes de décohésion fibres-matrices lors d'un chargement en torsion d'un barreau en composite unidirectionnel, et [*Wang et al.,1991*] dans lequel la concentration des contraintes au voisinage d'une fibre rompue est analysée en utilisant un modèle d'éléments finis tridimensionnels axisymétriques, les fibres voisines de la fibre rompue (au centre) étant converties en cylindres coaxiaux. Les conclusions de cette analyse ne sont pas très différentes des conclusions précédentes, mais l'article contient en plus des considérations très intéressantes concernant l'influence du désalignement aléatoire des fibres sur la contrainte à rupture de l'unidirectionnel.
Signalons dans un autre esprit l'article de P.T.Kattan et G.Z.Voyiadjis [*Kattan-Voyiadjis,1993*] dans lequel l'endommagement de l'unidirectionnel est introduit à l'aide de variables d'endommagement continues décrivant la nucléation, la croissance et la coalescence des vides et micro-fissures dans la matrice ainsi que la rupture de fibres et la décohésion.

Pour conclure le paragraphe bibliographique sur l'analyse des concentrations de contraintes dues à la rupture de fibres, rappelons que le comportement de l'interface fibre-matrice et/ou le comportement de la matrice en cisaillement jouent des rôles importants dans l'établissement des champs de contraintes. Il est donc important de développer des techniques expérimentales pour l'analyse de ces comportements. C'est dans cet esprit que R.Gulino, P.Schwartz et S.L.Phoenix ([*Gulino-Schwartz-Phoenix,1991*], [*Gulino-Phoenix,1991*]) ont proposé une expérience à trois fibres (une fibre de carbone peu déformable entre deux fibres de verre) (figure 1.15).

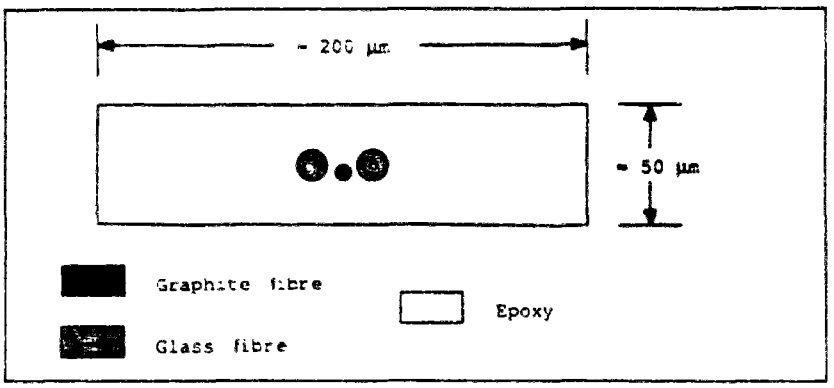


Fig. 1.15 : Coupe transverse d'une éprouvette.
(d'après [Gulino-Schwartz-Phoenix,1991], fig.1, p.6656)

Cet essai s'apparente à l'essai de fragmentation sur fibre unique, à ceci près que la fibre de carbone n'est en contact qu'avec une fine pellicule de résine à l'interface carbone-verre. Or, M.D.Glad [*Glad.1986*] a montré que les fines péllicules de résine se comportent très différemment des éprouvettes massives et sont en particulier susceptibles de supporter d'importantes déformations plastiques.

1.3. Etude statistique de la résistance d'un composite unidirectionnel et effets d'échelle

Après les paragraphes d'une part sur l'étude statistique de la résistance des fibres ou des torons sans résine, et, d'autre part sur l'analyse des concentrations de contraintes au voisinage des fibres rompues dans les composites, nous abordons le coeur de notre sujet avec pour l'essentiel des articles qui couplent les deux approches précédentes.

Dès 1960 N.J.Parrat [*Parrat,1960*] propose un modèle de résistance des composites unidirectionnels prenant en compte la distribution statistique de résistance des fibres. Dans son modèle la rupture du composite apparaît lorsque l'accumulation des ruptures de fibres induit des longueurs de fragments de fibres critiques à partir desquelles les transferts d'efforts par cisaillement de la matrice deviennent impossibles. Le composite est détruit par cisaillement de la matrice. Son modèle est schématisé en figure 1.16.

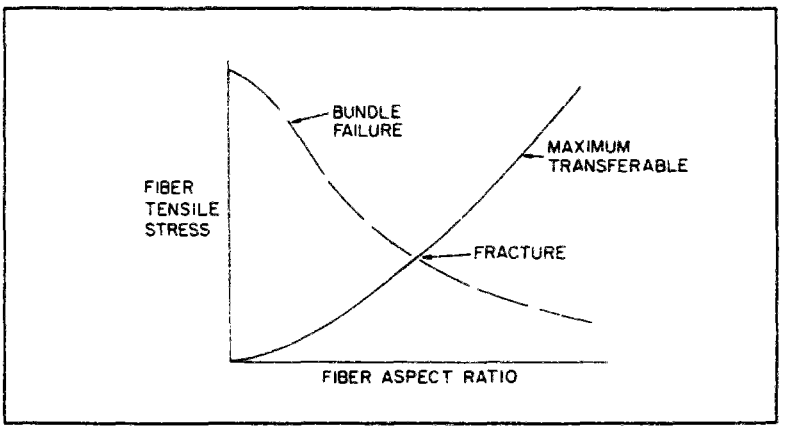


Fig. 1.16 : Influence de la longueur de fibre sur la contrainte moyenne dans les fibres dans un composite U.D. (d'après [Parrat,1960], fig.6, p.628 de [Rosen,1967])

En 1964, B.W.Rosen [*Rosen,1964*] propose une autre approche qui sera ensuite maintes fois reprise ou au moins citée par les auteurs travaillant sur le même sujet. Il introduit le concept de longueur de fibre ineffective δ dans le voisinage d'une fibre rompue. C'est en quelque sorte la longueur d'ancrage de l'extrémité de la fibre rompue permettant à celle ci d'être "rechargée" en cisaillement. (La longueur δ est estimée à l'aide d'un modèle de type Shear-Lag).
B.W.Rosen propose ensuite de modéliser le composite U.D. comme un assemblage en parallèle et en série de "liens" constitués de portions de fibres de longueurs δ. Le composite est ainsi modélisé comme une chaîne de cellules en série, chaque cellule étant constituée par des liens de fibres en parallèle. Les résistances des liens sont aléatoires et indépendantes. Lors de la rupture d'un lien, la contrainte est redistribuée uniformément dans la cellule endommagée et reste invariante dans les autres cellules.

En faisant l'hypothèse que le nombre de liens dans chaque cellule est très grand, il peut en utilisant le résultat de H.E.Daniels [*Daniels,1944*] déterminer la loi de distribution des résistances des cellules en fonction de la loi de distribution des résistances des liens. La loi de distribution des résistances du composite est alors celle de la distribution de la résistance la plus faible des cellules en série. D'un point de vue pratique, partant de la loi de distribution cumulée de résistance des liens $F(\sigma)$;

1) On calcule σ_m tel que :

$$\frac{d}{d\sigma}\{\sigma(1-F(\sigma))\}_{\sigma=\sigma_m} = 0 \qquad (1.5)$$

2) On calcule $\overline{\sigma}_c$ *et* ψ_c, l'espérance et l'écart type de la loi de distribution des résistances des cellules. (C'est une loi normale si le nombre de liens parallèles est grand).

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}_c &= \sigma_m[1-F(\sigma_m)] \\ \psi_c &= \sigma_m\left[F(\sigma_m)(1-F(\sigma_m))\right]^{\frac{1}{2}}\sqrt{N} \end{aligned} \qquad (1.6)$$

où N est le nombre de liens en parallèle.

3) La densité de distribution des probabilités de rupture est donc :

$$w(\sigma_c) = \frac{1}{\psi_c\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_c-\overline{\sigma}_c}{\psi_c}\right)^2\right] \qquad (1.7)$$

4) La loi de distribution cumulée des résistances du composite (chaîne de m cellules) est alors :

$$P(\sigma_c) = [1-\Omega(\sigma_c)]^m \qquad (1.8)$$

où : $\Omega(\sigma_c) = \int_0^{\sigma_c} w(u)\,du$

Ce modèle très intéressant à cause de sa simplicité ne permet cependant pas selon B.W.Rosen des prédictions très précises des résultats expérimentaux. Il suggère d'améliorer le modèle en prenant en compte la concentration de contraintes dans les cellules au voisinage des fibres rompues.

B.W.Rosen reprend ce travail et le précise dans un article de 1967 [*Rosen,1967*]. Nous en retiendrons surtout les résultats qui sont présentés en figure 1.17. Celle-ci permet de visualiser

le renforcement du composite U.D. grâce à la matrice, surtout lorsque la distribution des résistances des fibres est étalée. Dans cette figure,

- σ_c^* est le mode statistique de résistance du composite de longueur L (la contrainte pour laquelle la densité de distribution de contrainte atteint son maximum),
- $\overline{\sigma}_L$ est la résistance moyenne des fibres de longueur L,
- $\mu = \frac{s}{\overline{\sigma}}$ est le coefficient de variation de la résistance des fibres, c'est à dire l'écart type divisé par la moyenne des résistances,
- δ est la longueur "ineffective" au voisinage des ruptures de fibres.

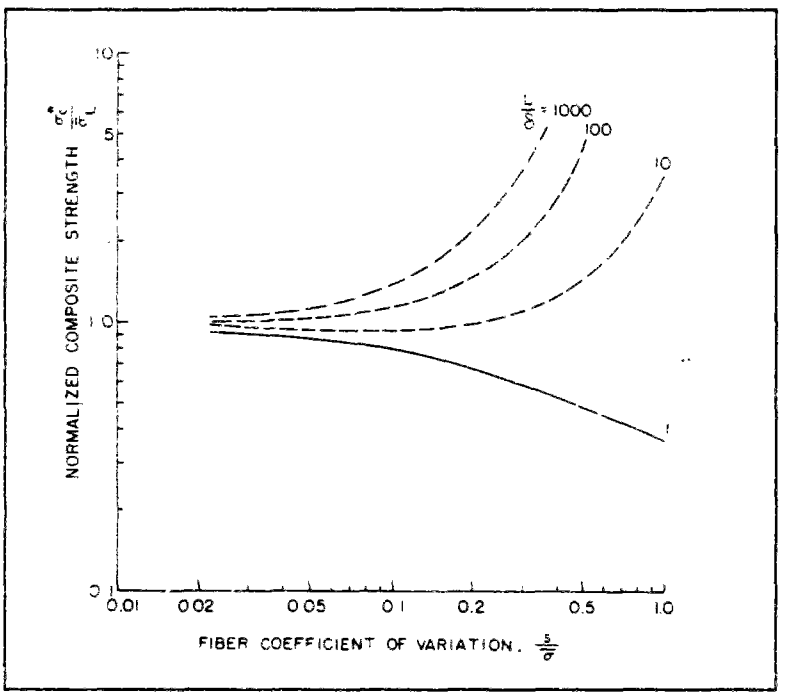


Fig. 1.17 : Influence du coefficient de variation de la résistance des fibres et de la longueur ineffective sur la résistance du composite. (d'après [Rosen,1967], fig.11, p.637)

Dans cette figure la courbe $\frac{L}{\delta} = 1$ donne l'évolution de $\sigma_c^*/\overline{\sigma}_L$ en fonction de μ pour un toron sans résine. On observe que la résistance du toron (son mode statistique) est plus faible (en contrainte) que la résistance (moyenne) des fibres qui le constituent.
Ce phénomène est accentué lorsque l'écart type de la résistance des fibres augmente.

Le phénomène change complètement aussitôt que l'on colle les fibres, et, la résistance du composite U.D. augmente par rapport à celle des fibres de même longueur et ceci d'autant plus que la longueur augmente et que l'écart type des résistances des fibres est important.

En 1968 C.Zweben [*Zweben,1968*] a introduit dans le modèle de B.W.Rosen l'effet de la concentration de contraintes due aux fibres rompues dans les cellules. Il apparaît que cette concentration joue un rôle important dans la résistance des composites.
En 1972 J.M.Lifshitz et A.Rotem [*Lifshitz-Rotem,1972*] constatent que dans certains composites unidirectionnels la rupture de fibres se produit par "paquets", les "paquets" de fibres rompues étant, après rupture, isolés du reste du composite par une décohésion brutale. Ils proposent pour tenir compte de ce phénomène de modifier le modèle de B.W.Rosen en associant en parallèles des "paquets" de fibres. Chaque paquet est constitué de cellules, ces cellules étant composées de liens comme dans le modèle de B.W.Rosen. Lorsque l'un de ces paquets est rompu, la contrainte est redistribuée uniformément sur les autres paquets. Ce modèle semble constituer alors une ébauche de modèle hiérarchique (figure 1.18).

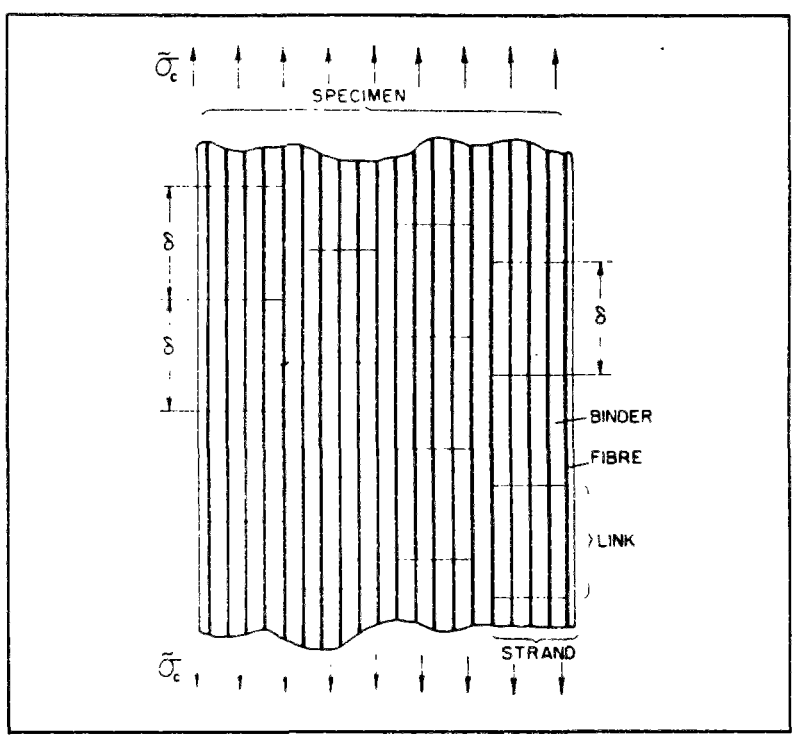


Fig. 1.18 : Représentation du modèle de J.M.Lifshitz et A.Rotem.
(d'après [Lifshitz-Rotem,1972], fig.3, p.863)

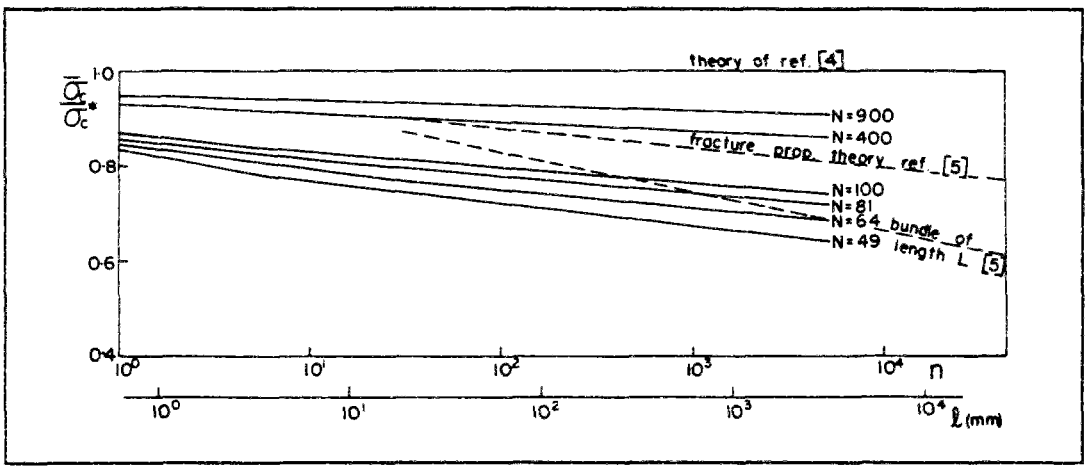


Fig. 1.19 : Variation de la résistance en fonction de la longueur de torons verre-epoxy de tailles différentes. (d'après [Lifshitz-Rotem,1972], fig.4, p.865)

Les résultats sont donnés sous forme de comparaison des effets d'échelle de longueur avec le modèle de B.W.Rosen [*Rosen,1964*] (réf. [4] de la figure 1.19) et celui de C.Zweben [*Zweben,1968*] (réf. [5] de la figure 1.19).

Dans cette figure, N est le nombre de fibres dans un paquet. Il peut être ajusté pour permettre de décrire un résultat expérimental. Les auteurs obtiennent en particulier une bonne prévision des résultats de R.B.McKee et G.Sines [*McKee-Sines,1968*] qui ont testé la résistance de câbles de ballons météo en composites U.D. de différentes longueurs.

En 1976, R.A.Larder et C.W.Beadle [*Larder-Beadle,1976*] proposent une approche par éléments finis uniaxiaux aléatoires, dans laquelle la longueur des éléments est de l'ordre de 30 fois le diamètre des fibres, ce qui correspond selon les auteurs à la longueur ineffective de Rosen. Ils étudient plusieurs finesses de maillage en introduisant la même loi de distribution aléatoire indépendante de la géométrie des mailles. Bien sûr, ils constatent que les résultats de leurs simulations dépendent alors de la taille des mailles (figure 1.20)

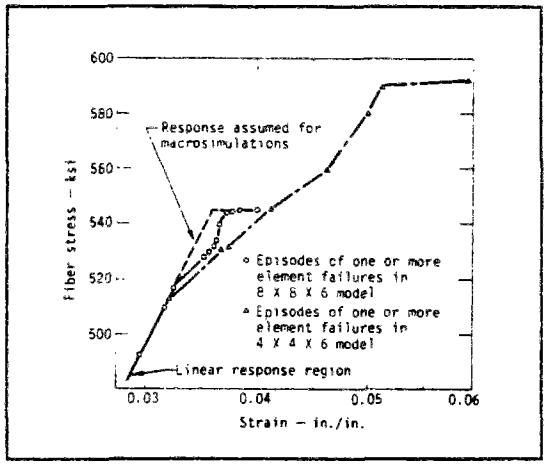


Fig. 1.20 : Courbes contraintes-déformations pour différentes tailles de mailles.
(d'après [Larder-Beadle,1976], fig.6, p.28)

Dans une série d'articles ([*Batdorf,1982*], [*Batdorf-Ghaffarian,1982*] et [*Batdorf-Ghaffarian,1984*]) S.B.Batdorf présente une nouvelle approche statistique de la rupture des composites. Il propose cette approche comme une simplification de celle proposée par S.L.Phoenix, D.G.Harlow et R.L.Smith ([*Harlow-Phoenix,1978*], [*Smith-Phoenix,1981*], [*Phoenix,1982*]).

Dans son modèle, S.B.Batdorf utilise une loi de Weibull à deux paramètres pour la distribution des probabilités de ruptures des fibres. La probabilité cumulée de rupture des fibres de longueur L s'écrira :

(1.9) $$P_f[\sigma] = \exp\left[-\frac{L}{L_0}\left(\frac{\sigma}{\sigma_{L_0}}\right)^m\right]$$

où : - σ_{L_0} est une contrainte de normalisation pour les éprouvettes de longueur L_0.
- m est le module de Weibull.

Il compte alors pour un composite de longueur L contenant N fibres, le nombre de ruptures isolées de fibres (singlets).

$$Q_1 = NP_f \approx \frac{NL}{L_0}\left(\frac{\sigma}{\sigma_{L_0}}\right)^m \tag{1.10}$$

Prenant ensuite en compte le facteur de concentration de contraintes C_1 dans le voisinage des fibres rompues, le nombre n_1 de fibres directement adjacentes à un singlet et la longueur efficace λ_1 de la zone surchargée, il calcule en fonction du niveau de contrainte le nombre de "doublets", c'est à dire le nombre de sites où deux fibres adjacentes sont rompues.

$$Q_2 = Q_1 n_1 \frac{\lambda_1}{L_0}\left(\frac{C_1\sigma}{\sigma_{L_0}}\right)^m \tag{1.11}$$

En itérant, il obtient le nombre de sites où i fibres adjacentes sont rompues (i-upplets).

$$Q_i = \frac{NL}{L_0}\left(\frac{\sigma}{\sigma_{L_0}}\right)^{mi} \prod_{j=1}^{i-1} C_j^m n_j \frac{\lambda_j}{L_0} \tag{1.12}$$

où C_j, n_j et λ_j jouent les mêmes rôles que C_1, n_1 et λ_1 lorsque j fibres voisines sont rompues.

A géométrie donnée (N et L donnés), le premier i-upplet est créé par la contrainte telle que Q_i=1. Deux situations peuvent alors se produire.

1) Sous cette même contrainte $Q_{i+1} \geq 1$ (ce qui implique $Q_j \geq 1 \quad \forall j > i$).

Dans ce cas la rupture du i-upplet entraîne la rupture instable du composite.

2) Sous cette même contrainte $Q_{i+1} < 1$.

La rupture du i-upplet est stable et le chargement peut être augmenté.

La courbe de résistance σ_f du composite en fonction de la géométrie peut alors être donnée. On peut la représenter en échelle logarithmique $\left(\mathrm{Log}(\sigma_f) / \mathrm{Log}(\mathrm{NL})\right)$ et dans cette représentation les courbes d'équation Q_i=1 sont des droites de pente $-\frac{1}{im}$. La résistance du matériau composite est l'enveloppe de ces droites comme le représente la figure 1.21.

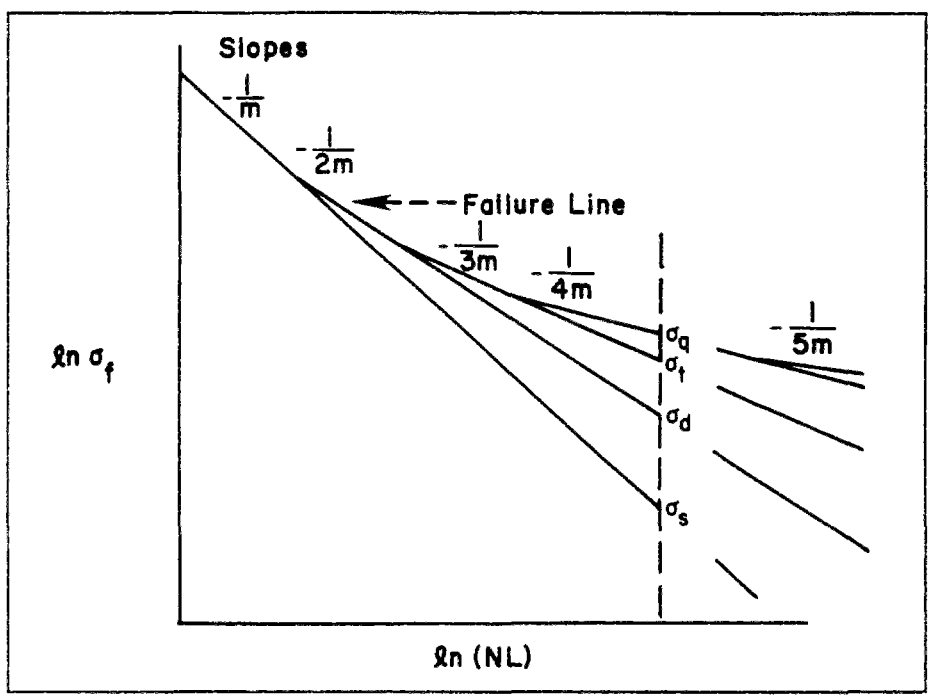


Fig. 1.21 : Courbes de résistance d'un composite unidirectionnel en fonction de sa géométrie. (d'après [Batdorf-Ghaffarian,1984], fig.1, p.115)

S.B.Batdorf a proposé des variantes de son modèle. Dans la première, [*Batdorf-Ghaffarian,1982*] le composite est modélisé comme un assemblage de torons qui obéissent au modèle précédent. Dans la seconde, les facteurs de concentrations de contraintes C_j sont considérés comme aléatoires.

Notons que ce modèle prédit un effet d'échelle de "volume" (N et L jouent des rôles équivalents). Ceci est dû à l'approximation introduite sur la redistribution des contraintes après rupture (pas de décharge des fibres rompues, surcharge uniforme sur les fibres voisines

sur une longueur ''efficace''). Il présente cependant l'intérêt de proposer des scénarios de rupture du composite permettant un endommagement progressif (plusieurs ruptures de fibres adjacentes) avant la rupture brutale.

Notons cependant que la vision du nombre de rupture dans un volume de matériau est déterministe. Par exemple $Q_1=NP_f$ implique la nature déterministe de la courbe de résistance de la figure ci-dessus. Il est probablement possible de considérer Q_j comme une variable aléatoire.

L'approche de A.F.Ermolenko [*Ermolenko,1985*] est assez différente de l'approche précédente car il porte un plus grand intérêt aux différents scénarios de ruine possibles. Le modèle qu'il propose considère un assemblage tridimensionnel de fibres parallèles. Plusieurs mécanismes d'endommagement sont possibles; rupture de fibres, fissuration induite par la rupture de fibres, nucléation de vides, fissures générées par un vide et rupture de fibres dans une section contenant un vide. L'article cité ne permet pas de savoir quel modèle est utilisé pour l'analyse des contraintes (il est fait référence à un article de [A.S.Ovchinskii et al.,1977] rédigé en russe).
Nous savons cependant que le modèle prend en compte les cisaillements dans les blocs de fibres, et, d'après les équations, il semble que ce soit un modèle de type "Shear-Lag".

Ce modèle exhibe trois principaux scénarios de rupture.

- rupture très localisée (figure 1.22),
- rupture diffuse (figure 1.23),
- rupture localisée après endommagement diffus (figure 1.24).

Sur ces figures les zones noires montrent les différents endommagements autres que la rupture des fibres.

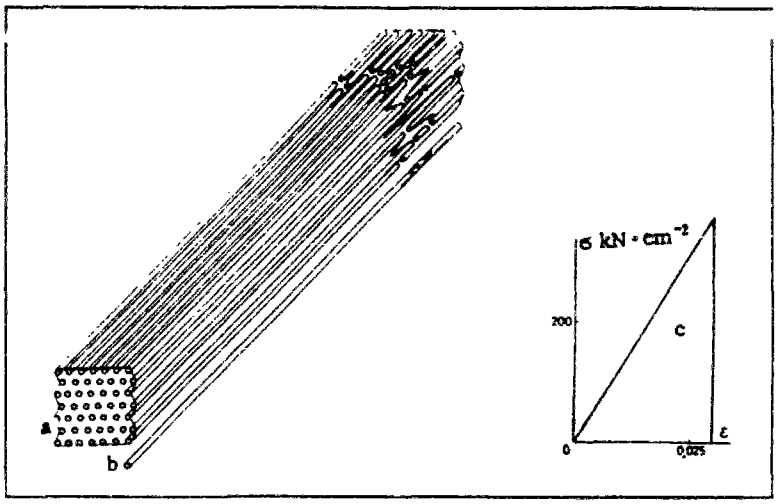


Fig. 1.22 : Exemple de schéma de rupture d'un composite unidirectionnel. Rupture très localisée. (d'après [Ermolenko,1985], fig.4, p.168)

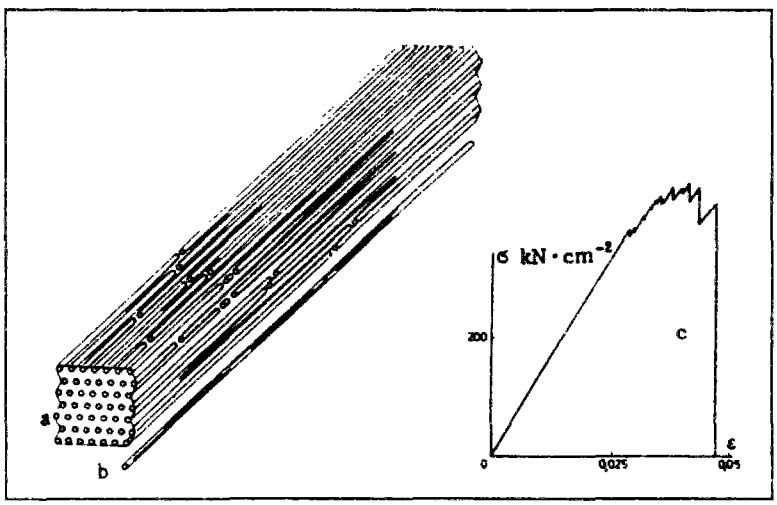


Fig. 1.23 : Exemple de schéma de rupture d'un composite unidirectionnel. Rupture diffuse. (d'après [Ermolenko,1985], fig.5, p.168)

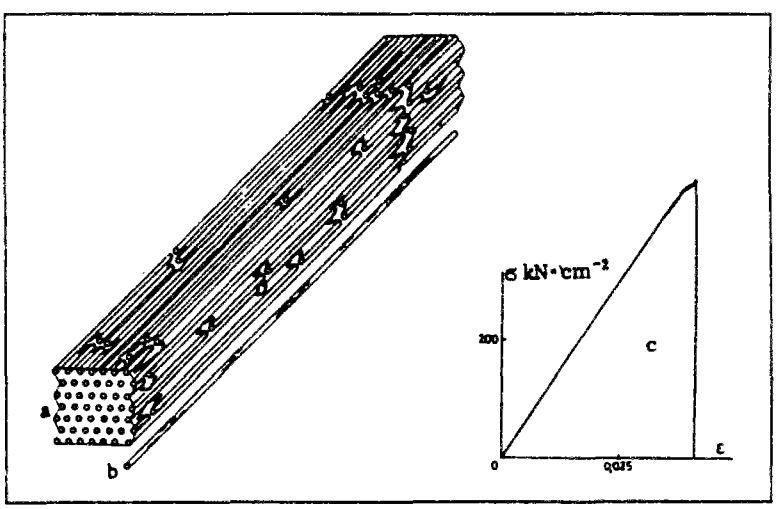


Fig. 1.24 : Exemple de schéma de rupture d'un composite unidirectionnel. Rupture localisée après endommagement diffus. (d'après [Ermolenko,1985], fig.6, p.169)

Certaines fragmentations des fibres peuvent conduire à des portions de fibres dont la longueur est bien inférieure à ce que les modèles des articles précédents appelaient la longueur ineffective. L'auteur cite à l'appui de cette constatation les travaux de [*Pikshe et al.,1981*]. (Dans la modélisation que nous proposerons dans un chapitre ultérieur, nous essaierons de tenir compte de ces observations).

F.J.Guild et al. proposent en 1989 [*Guild et al.,1989*] une approche très différente pour étudier la rupture des composites unidirectionnels. Les auteurs s'intéressent à la distribution aléatoire des fibres dans l'espace. Pour simuler la position des fibres dans un plan perpendiculaire aux fibres, ils utilisent un modèle de positions aléatoires de disques de même rayon, dans le plan, dans lequel toutes les configurations ne donnant pas de recouvrement ont la même probabilité. Ils étudient alors la concentration des contraintes par éléments finis axisymétriques concentriques à une fibre. La concentration maximale concerne la contrainte radiale et circonférencielle à l'interface fibre matrice. Cette concentration est d'autant plus importante que la densité locale des fibres est faible. Cependant, la contrainte interfaciale est du type traction lorsque le chargement uniaxial est en compression pour les composites étudiés. Ce modèle est donc surtout intéressant pour un type de chargement que nous ne considérons pas dans notre travail.

On peut rapprocher pour certains de ses aspects le travail de F.J.Guild et al. de l'article de J.M.Duva et al. [*Duva,1990*] qui proposent une approche probabiliste de la rupture des composites unidirectionnels soumis à un chargement transverse ou de celui de [*Renard,1990*] qui étudie la décohésion fibre matrice en torsion.

Plus récemment, M.R.Wisnom ([*Wisnom,1991*], [*Wisnom,1992*]) a repris le modèle du composite unidirectionnel considéré comme un assemblage de fibres à résistances aléatoires sans résine [*Daniels,1944*] pour comparer les résistances des composites en traction et en flexion. Le modèle indique bien sûr que le composite est plus résistant en flexion qu'en traction, mais il donne un rapport plus faible que ne le donne le modèle de Weibull avec la loi du maillon le plus faible (figure 1.25).

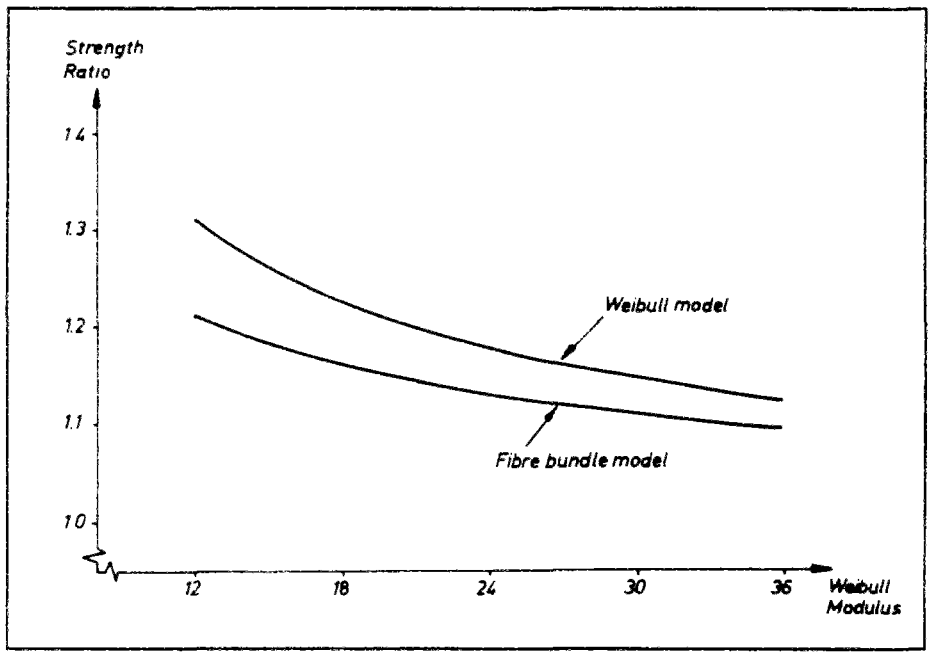


Fig. 1.25 : Comparaison des résistances en flexion et traction pour les modèles de Wisnom et Weibull (d'après [Wisnom,1992], fig.2, p.1178).

Ainsi que l'indique l'auteur, la réalité des composites se situe entre ces deux modèles extrêmes.

En 1993, Baxevanakis, Boussuge, Jeulin, Munier et Renard [*Baxevanakis-Boussuge-Jeulin-Munier-Renard,1993*] proposent d'aborder le problème à l'aide de simulations par éléments finis aléatoires et d'un passage micro-macro. Pour cela, ils définissent un Volume Elémentaire Représentatif d'une longueur de 6 mm contenant 6 fibres. Une loi de résistance aléatoire de type sigmoïdale est choisie et la résistance de chaque portion de fibres est tirée au sort suivant cette loi. Trente simulations sont effectuées pour appréhender la nature aléatoire des résultats de ces simulations. Les auteurs proposent alors une approche multi-échelle, les résultats statistiques obtenus au niveau du V.E.R. pouvant être utilisés dans une modélisation éléments-finis à plus large échelle dans laquelle chaque maille est un V.E.R.

En 1994, L.Guillaumat et J.Lamon [*Guillaumat-Lamon,1994*] proposent une simulation statistique-probabiliste du comportement mécanique non linéaire d'un composite 2D SIC/SIC. Il s'agit là encore d'une étude par éléments finis (figure 1.26).

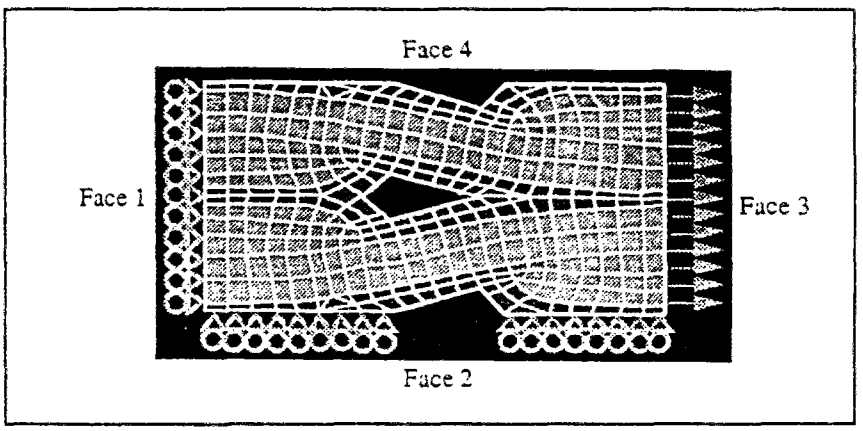


Fig. 1.26 : Maillage d'une cellule élémentaire avec les fils en opposition. (d'après [Guillaumat-Lamon,1994], fig.2, p.1066).

Deux types de cellules ont été choisies et cinq modèles d'endommagement représentant les étapes importantes dans le déroulement de l'endommagement en fonction des déformations ont été introduits (tableau 1.2).

Référence	**Déformation (%)**	**Endommagement**
A	0,025	aucun
B	0,05	fissures aux macropores
C	0,07	propagation des fissures à travers les fils longitudinaux
D	0,09	fin du premier mode de fissuration
E	0,12	D + un fil transverse sur deux endommagé
F	0,2	saturation de l'endommagement

Tab. 1.2 : Séquence d'endommagement reproduite dans la cellule élémentaire en fonction des déformations imposées. (d'après [Guillaumat-Lamon,1994])

Les résultats s'obtiennent sous forme de cartes de probabilité de rupture locale dans la cellule en fonction du mode d'endommagement. (figure 1.27)

Cette modélisation qui semble bien adaptée aux composites céramique-céramique tissés permet de simuler le comportement non linéaire de ces matériaux.

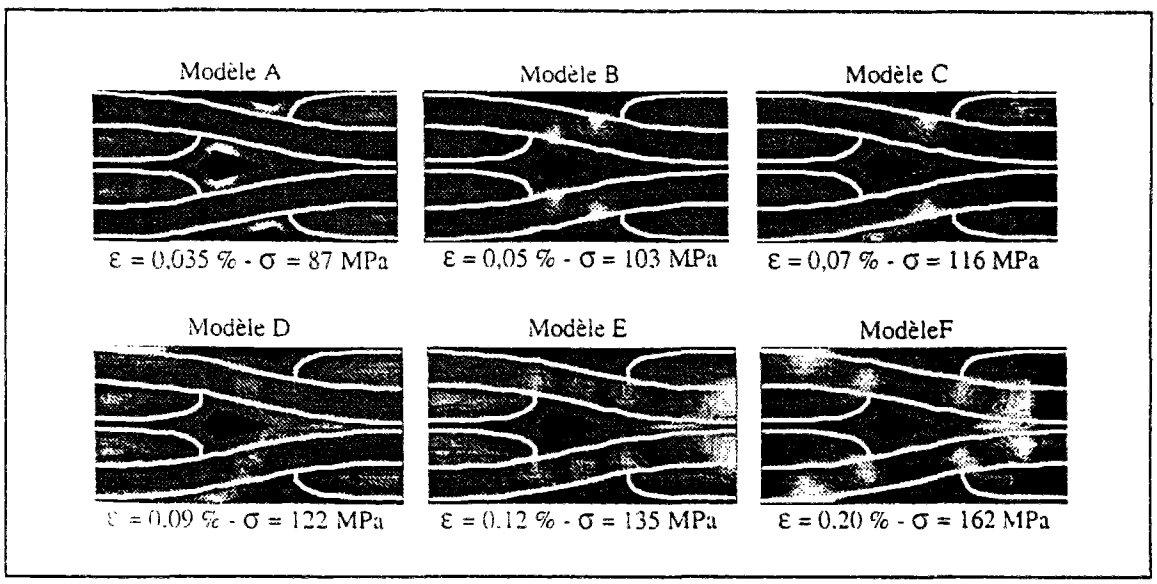


Fig. 1.27 :Distribution des probabilités locales de rupture.
(d'après [Guillaumat-Lamon,1994], fig.3, p.1069).

En résumé, nous retiendrons de cette abondante littérature :

1°) La nécessité de prendre en compte l'aléa sur la résistance des constituants du matériau et ceci principalement par le biais de simulations aléatoires.

2°) L'alternative majeure qui s'est présentée aux auteurs entre :

- d'une part une modélisation fine permettant une bonne description locale des champs mécaniques dans chaque simulation, mais limitant le nombre de simulations réalisables dans un délai raisonnable et donc la valeur statistique des conclusions tirées.

- une modélisation plus grossière des champs mécaniques, d'autre part, (Type Shear-Lag avec zone ineffective par exemple) autorisant un grand nombre de simulations et éventuellement des solutions analytiques donnant ainsi plus de "valeur statistique" aux résultats présentés.

Il nous faudra choisir dans la modélisation que nous présenterons.

Notre objectif général étant d'étudier la résistance de câbles de plusieurs centaines de mètres de longueur, seule l'extrême queue de la distibution statistique des résistances (du côté des faibles résistances) devrait nous intéresser, ce qui impose un nombre très élevé de simulations (de 1000 à 10000) pour chaque géométrie de problème étudié.
Nous essaierons de trouver une voie médiane avec un modèle mécaniquement simple (de type uniaxial comme le Shear-Lag), mais avec un maillage très fin au niveau de la zone de concentrations de contraintes près des sections de fibres rompues afin d'analyser au mieux les conséquences locales des surcontraintes.

Mais avant de décrire les choix de modélisations qui font l'objet du chapitre 3, nous présentons les résultats d'une première étude expérimentale nous permettant de tenter de confirmer la pertinence de la question : ***"Existe-t-il une section optimale pour les joncs de composites unidirectionnels."***.

CHAPITRE 2.

PROGRAMME EXPERIMENTAL

2.1. CHOIX DE LA PROCEDURE D'ESSAI

2.1.1. Matériaux

2.1.2. Eprouvettes

2.1.3. Essais et mesures

2.1.4. Procédure d'analyse des résultats

2.1.5. Détermination de la zone d'incertitude sur la détermination de m et x_{L_0}

2.2. RESULTATS D'ESSAIS

2.2.1. Présentation des résultats

2.2.2. Analyse des effets d'échelle

2.2.2.1. Effets d'échelle fonction de la longueur

2.2.2.2. Effets d'échelle fonction de la section

CHAPITRE 2.

PROGRAMME EXPERIMENTAL

Le programme expérimental va tenter de mettre sommairement en évidence l'existence d'une section optimale de jonc. Pour cela nous devons tester en tension des joncs de longueurs et de sections différentes et regarder comment évolue leur résistance. Ce chapitre comprend deux parties. La première décrit le choix de la procédure d'essai, y compris la procédure d'analyse statistique des résultats. La seconde présente les résultats d'essais et analyse les effets d'échelle observés en fonction de la longueur et de la section. Dans la suite de ce travail nous nous intéresserons à des joncs plats plus faciles à élaborer en laboratoire que les joncs cylindriques[1], et plus facile à ''ancrer'' pour une mise en traction.

[1] Nous avons cependant réalisé une éprouvette tubulaire dont la géométrie se rapproche de celle des joncs composites mais nous n'en détaillerons pas la fabrication. Cette éprouvette fait l'objet d'une description détaillée dans *[Caron-Foret,1991]*. Elle a déjà été utilisée dans le cadre de la thèse de J.F.Caron *[Caron,1993]*. Notons simplement que le principe de sa réalisation est simple et résulte d'une part de la mise au point d'une technique de drapage sur mandrin gonflable et d'autre part de la mise au point d'un dispositif d'accrochage permettant l'application du chargement sur le spécimen. Il nous était alors possible de réaliser des éprouvettes tubulaires unidirectionnelles 0° de tailles différentes, mais, l'utilisation de cette éprouvette s'est révélée être trop coûteuse dans le cadre du programme expérimental que nous voulions réaliser.

2.1. Choix de la procédure d'essai

2.1.1. Matériaux

Dans le cadre de ce programme expérimental, le matériau utilisé est un composite à fibres longues et à matrice organique thermodurcissable commercialisé par la société BROCHIER sous la référence T300/174. Il se présente sous forme d'une nappe pré-imprégnée unidirectionnelle constituée de fibres de carbone T300 de la société TORAY et d'une résine époxy CIBA-GEIGY de classe 120 degrés Celsius.

Une plaque de composite est constituée en empilant des couches unidirectionnelles dont l'orientation peut varier. La plaque est polymérisée en autoclave suivant le cycle de température et de pression présenté en figure 2.1.

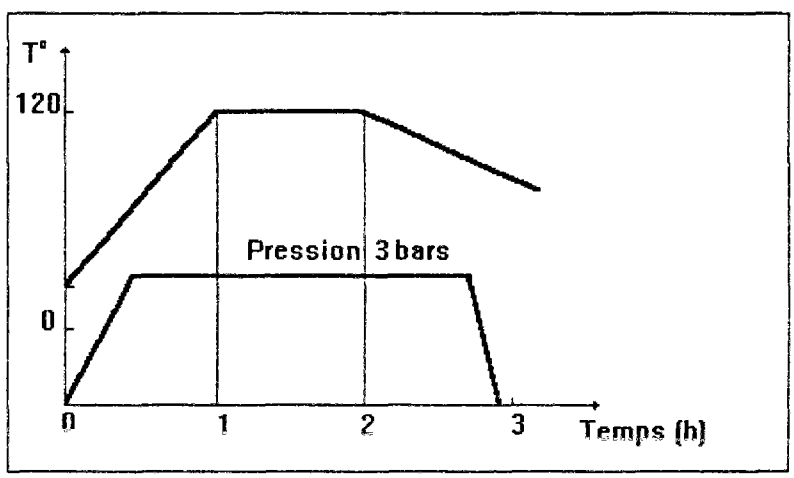


Fig. 2.1 : Cycle de polymérisation (Température et Pression) du T300/174.

2.1.2. Eprouvettes

Les éprouvettes plates ont été découpées dans des plaques et pour mettre en évidence des effets d'échelle fonction de la longueur et de la largeur, nous avons réalisé quatre jeux d'éprouvettes différents. Nous identifions les géométries de ces jeux par rapport au jeu n°1 que l'on prend comme géométrie de référence et dont les dimensions sont les suivantes :

jeu n° 1 : (e,l,L) $\begin{cases} \text{largeur : l = 7 mm} \\ \text{longueur : L = 100 mm} \\ \text{epaisseur : e = 0,42 mm} \end{cases}$

Les trois autres géométries d'éprouvette sont les suivantes :

jeu n° 2 : (e,2l,L)
jeu n° 3 : (e,3l,L)
jeu n° 4 : (e,l,3L/2)

Nous avons retenu ces différentes géométries en raison des moyens d'essais dont nous disposons au CERAM, et de façon à respecter une condition de contrainte uniforme dans l'éprouvette [*Choi-Horgan,1977*].

Afin de procéder à une étude statistique, nous avons découpé 25 éprouvettes par géométrie. Elles ont été découpées de façon aléatoire dans une même plaque pour répartir l'aléa sur l'ensemble des géométries et de façon à pouvoir comparer des essais de rupture sur des éprouvettes ayant la même "histoire" de fabrication. Nous avons collé à l'extrémité de chaque éprouvette des talons en fibres de verre et résine époxy. Ces talons atténuent les surcontraintes occasionnées par les mords auto-serrants lors de l'essai de traction.

2.1.3. Essais et mesures

Les essais de rupture ont été réalisés sur une presse mécanique ADAMEL de capacité 20 kN. Seules les valeurs de la force à rupture nous intéressent, mais nous avons enregistré les mesures de déformation nous permettant de vérifier les raideurs des éprouvettes par l'intermédiaire de jauges de déformation pour cinq éprouvettes par jeux.
Pour éviter d'éventuels parasitages des résultats par des effets dus à des vitesses de mise en charge différentes, nous avons effectués tous les essais à même vitesse de déformation.

La figure 2.2 nous montre la zone de rupture d'une éprouvette 0°. Nous voyons que la zone rompue se trouve dans la section courante de l'éprouvette et non au bord des talons; les talons

en fibres de verre atténuent correctement les surcontraintes occasionnées par les mords auto-serrants pour des chargements élevés.

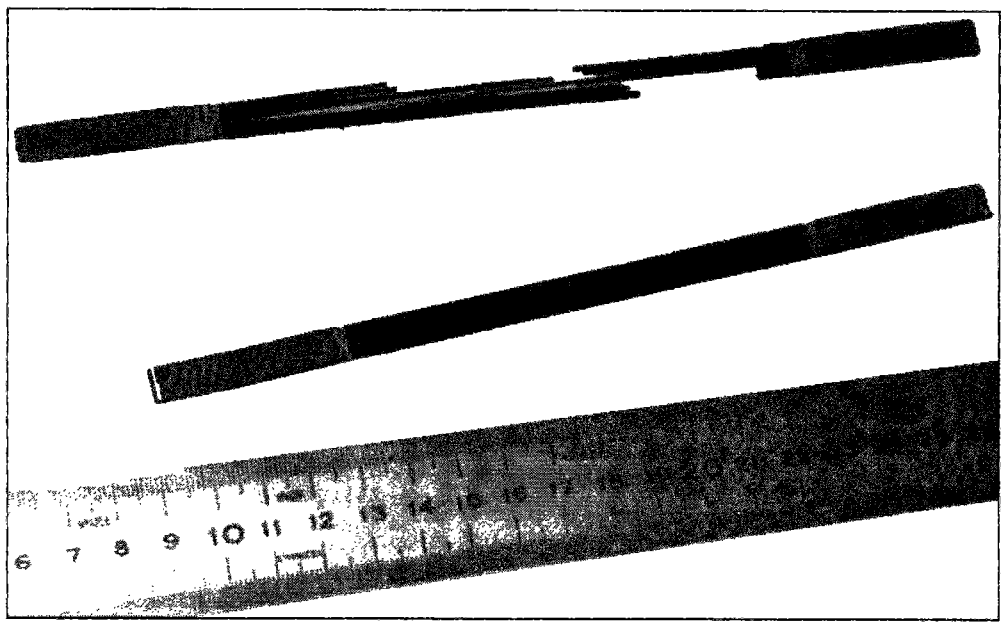


Fig. 2.2 : Rupture typique d'une éprouvette carbone époxy unidirectionnelle 0°.

2.1.4. Procédure d'analyse des résultats

Nous testons 25 éprouvettes par géométrie de façon à établir les statistiques de rupture de nos échantillons. Nous choisissons de représenter cette distribution par une distribution de probabilité de type Weibull. Nous avons vu que la loi de Weibull est la loi statistique la plus couramment employée, étant tout particulièrement bien adaptée pour les matériaux composites verre ou carbone (voir en plus des références citées au chapitre 1, [*Yang,1978*], [*Wang,1981*] par exemple).

Notons P(x) la distribution de probabilité de résistance des éprouvettes à géométrie fixée, c'est à dire la probabilité pour que la résistance R_e d'une éprouvette soit inférieure à x.

(2.1) $$P(x) = \text{Prob}\,(R_e < x)$$

Rappelons que la loi de Weibull s'écrit :

$$P(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x - x_0}{x_{L_0}}\right)^m\right] \tag{2.2}$$

avec :
- m : module de Weibull : *Il caractérise la dispersion de la distribution*
- x_{L_0} : paramètre de normalisation (*pour une éprouvette de longueur* L_0)
- x_0 : valeur seuil en dessous de laquelle on n'observe pas de rupture

Dans la suite de notre travail, x_0 est imposé à 0 car deux paramètres suffisent à décrire les distributions de rupture [*Manderscheid-Gyekenyesi,1987*].

L'espérance $E(R_e)$ de la résistance est donnée par :

$$E(R_e) = x_{L_0}.\Gamma\left[\frac{m+1}{m}\right] \tag{2.3}$$

où : Γ est la fonction factorielle dans l'espace des réels ([*Abramovitz-Stegun,1965*]...).

Il existe plusieurs procédures classiques de détermination des paramètres $\left(m, x_{L_0}\right)$ d'une distribution de Weibull permettant de ''lisser'' un nombre fini de résultats expérimentaux [*Vinh,1988*]. Nous avons choisi la procédure suivante :

Notons x_i , $i \in [1,n]$ les résistances de n éprouvettes de même géométrie déterminées expérimentalement et $\overline{x}$ la valeur moyenne de ces essais.

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{2.4}$$

La probabilité de rupture $P(x_i)$ de la $i^{ème}$ éprouvette est évaluée à l'aide de l'estimateur suivant (rang moyen) :

$$P(x_i) = \frac{i}{n+1} \qquad i \in [1,n] \tag{2.5}$$

Comme $\overline{x}$ est un estimateur de l'espérance de la résistance $E(R_e)$, en utilisant l'équation (2.2) on peut choisir de déterminer m de manière à minimiser la somme des n écarts quadratiques représentant soit le carré de l'erreur ''horizontale'' ou soit le carré de l'erreur ''verticale'.

erreur verticale :

$$e_v^{(m)} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ P(x_i) - \left\langle 1 - \exp\left[-\left(\frac{x_i}{\overline{x}}\right)^m \Gamma\left(\frac{m+1}{m}\right)^m \right] \right\rangle \right\}^2 \tag{2.6}$$

erreur horizontale :

$$e_h^{(m)} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ x_i - \left(\frac{\overline{x}}{\Gamma\left(\frac{m+1}{m}\right)} \right) \left(\mathrm{Log}\left(1 - P(x_i)\right) \right)^{\frac{1}{m}} \right\}^2 \tag{2.7}$$

Le choix du type de minimisation se fait suivant la forme de la distribution. Le paramètre x_{L_0} se déduit alors de l'expression suivante :

$$x_{L_0} = \frac{\overline{x}}{\Gamma\left(\frac{m+1}{m}\right)} \tag{2.8}$$

Les paramètres m et x_{L_0} dépendent bien de la géométrie de l'éprouvette.

Avant de passer à la présentation des résultats d'essais il est utile de se demander dans quelle mesure la détermination de m et x_{L_0} est précise même dans l'hypothèse où la distribution de résistances des éprouvettes suit parfaitement une loi de Weibull. Cette étude peut sans doute se faire analytiquement mais nous avons préféré une méthode plus simple et plus visuelle utilisant la simulation.

2.1.5. Détermination de la zone d'incertitude sur la détermination de m et x_{L_0}

Pour étudier l'incertitude sur la détermination de m et x_{L_0} à partir d'un nombre fini n d'essais nous procédons ainsi :

1°) Nous nous donnons un couple de valeur $\left(m^e, x^e_{L_0}\right)$ censé représenter exactement la probabilité de résistance d'éprouvettes de géométrie donnée.

2°) Nous simulons N fois un programme expérimental de rupture de n éprouvettes (N=50 ou 500, n=25,100 ou 1000).

Simuler un essai de rupture revient à tirer au sort une valeur de x suivant la loi de probabilité F(x). Pour cela on tire au sort une valeur Rand entre 0 et 1 suivant une probabilité uniforme puis on résout l'équation:

(2.9) $$P(x) = \text{Rand}$$

Ainsi pour une loi de probabilité de Weibull de paramètres $\left(m^e, x^e_{L_0}\right)$ nous obtenons en résolvant l'équation P(x)=Rand :

(2.10) $$x = x^e_{L_0}\left(-\text{Ln}(1-\text{Rand})\right)^{\frac{1}{m^e}}$$

Simuler une batterie de n essais de rupture revient à tirer au hasard n valeurs de Rand puis à résoudre n fois l'équation précédente. On obtient n valeurs x_i, $i \in [1,n]$.

3°) Nous utilisons la procédure précédemment décrite pour la détermination du couple $\left(m^j_n, \left(x_{L_0}\right)^j_n\right)$ correspondant à la simulation du $j^{ième}$ programme expérimental de rupture de n éprouvettes.

4°) Pour étudier visuellement l'incertitude sur la détermination de (m, x_{L_0}) à l'aide de la procédure choisie à partir de n essais de rupture, nous représentons dans le plan (m, x_{L_0})

l'ensemble des points $\left(m_n^j, \left(x_{L_0}\right)_n^j\right)$ d'une famille de programme expérimental. Si la détermination est précise, les points $\left(m_n^j, \left(x_{L_0}\right)_n^j\right)$ doivent tous être proches du point $\left(m^e, x_{L_0}^e\right)$. Sinon, le nuage est étalé.

Nous choisissons d'illustrer (figure 2.3) cette procédure en faisant 500 simulations de 25 essais, 500 simulations de 100 essais et 50 simulations d'une batterie de 1000 essais en prenant le couple de paramètres de Weibull $\left(m^e = 20, x_{L_0}^e = 2000\,\text{MPa}\right)$.

Nous ne faisons que 50 simulations pour la batterie de 1000 essais car les couples de paramètres $\left(m_{1000}^j, \left(x_{L_0}\right)_{1000}^j\right)$ $j \in [1,50]$ vont être très concentrés autour du couple $\left(m^e, x_{L_0}^e\right)$ et nous ne voulons pas surcharger au point de la rendre illisible la figure où sont reportés les couples simulés dans le plan (m, x_{L_0}).

Nous observons une grande dispersion des couples $\left(m_n^j, \left(x_{L_0}\right)_n^j\right)$. La dispersion diminue lorsque le nombre n d'essais du programme augmente et elle se traduit par une augmentation de la densité du nuage de points obtenu pour un couple (n,N) donné. Nous notons dans le tableau 2.1 les valeurs des paramètres de Weibull des premiers et derniers déciles. Ils montrent la variation de la dispersion sur les couples (m, x_{L_0}), en fonction du nombre d'essais n :

Nb de simulations de programmes d'essais (N)	Nb d'essais simulés dans chaque programme (n)	m_{10}	m_{90}	$(x_{L_0})_{10}$ (MPa)	$(x_{L_0})_{90}$ (MPa)
N=500	n=25	14.9	25.2	1974	2028
	n=100	17.4	22.6	1987	2016
N=50	n=1000	19.4	20.95	1995	2004

Tab. 2.1 : Variation du couple (m, x_{L_0}) en fonction du nombre d'essais n.

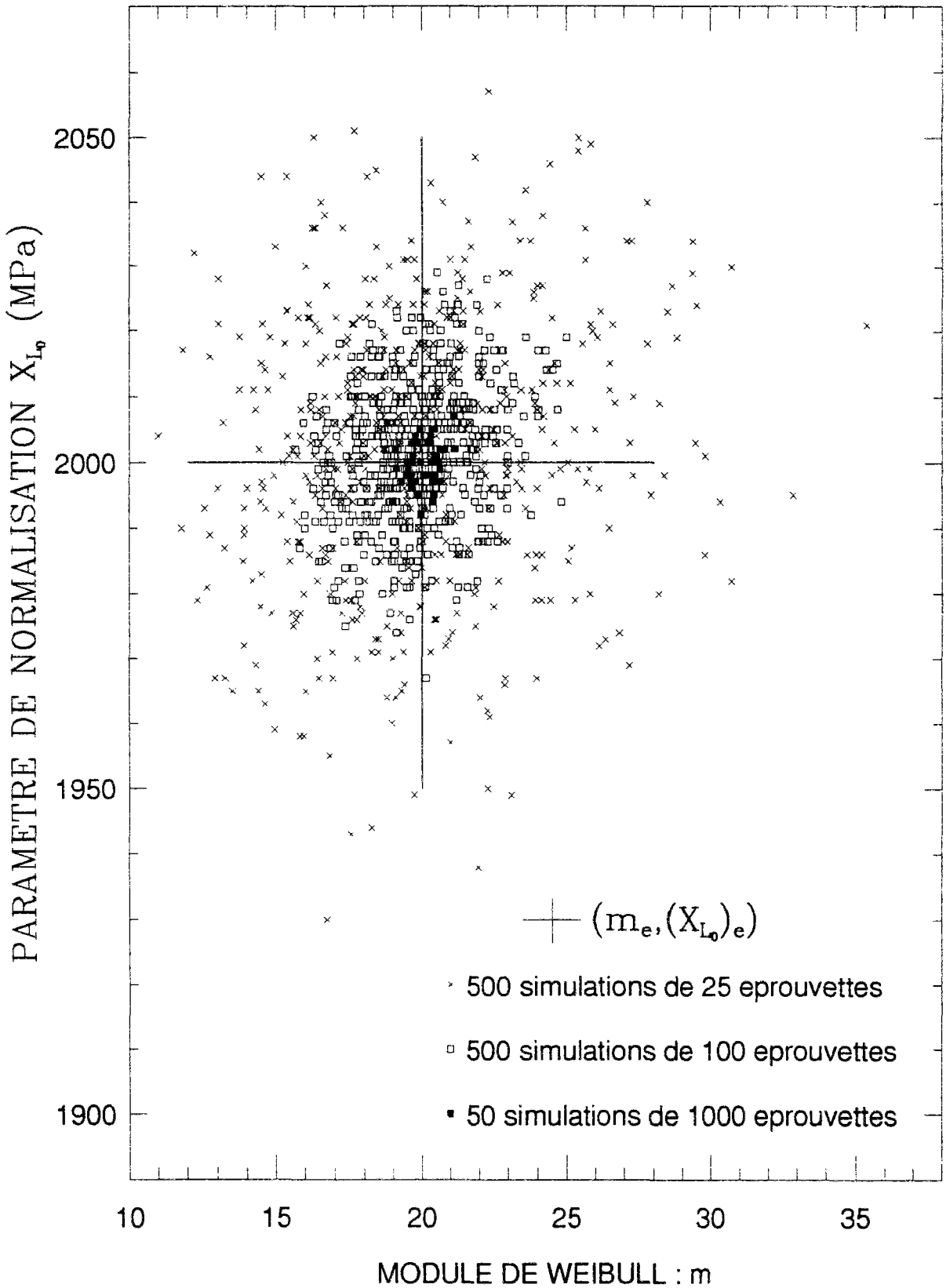


Fig. 2.3 : Incertitude sur la détermination de (m, x_{L_0}) suivant le nombre d'éprouvettes testées.

Nous présentons aussi les nuages équivalents obtenus pour la résistance moyenne et l'écart type dans le plan $(\overline{x}, \frac{\sigma}{\overline{x}})$ (figure 2.4).

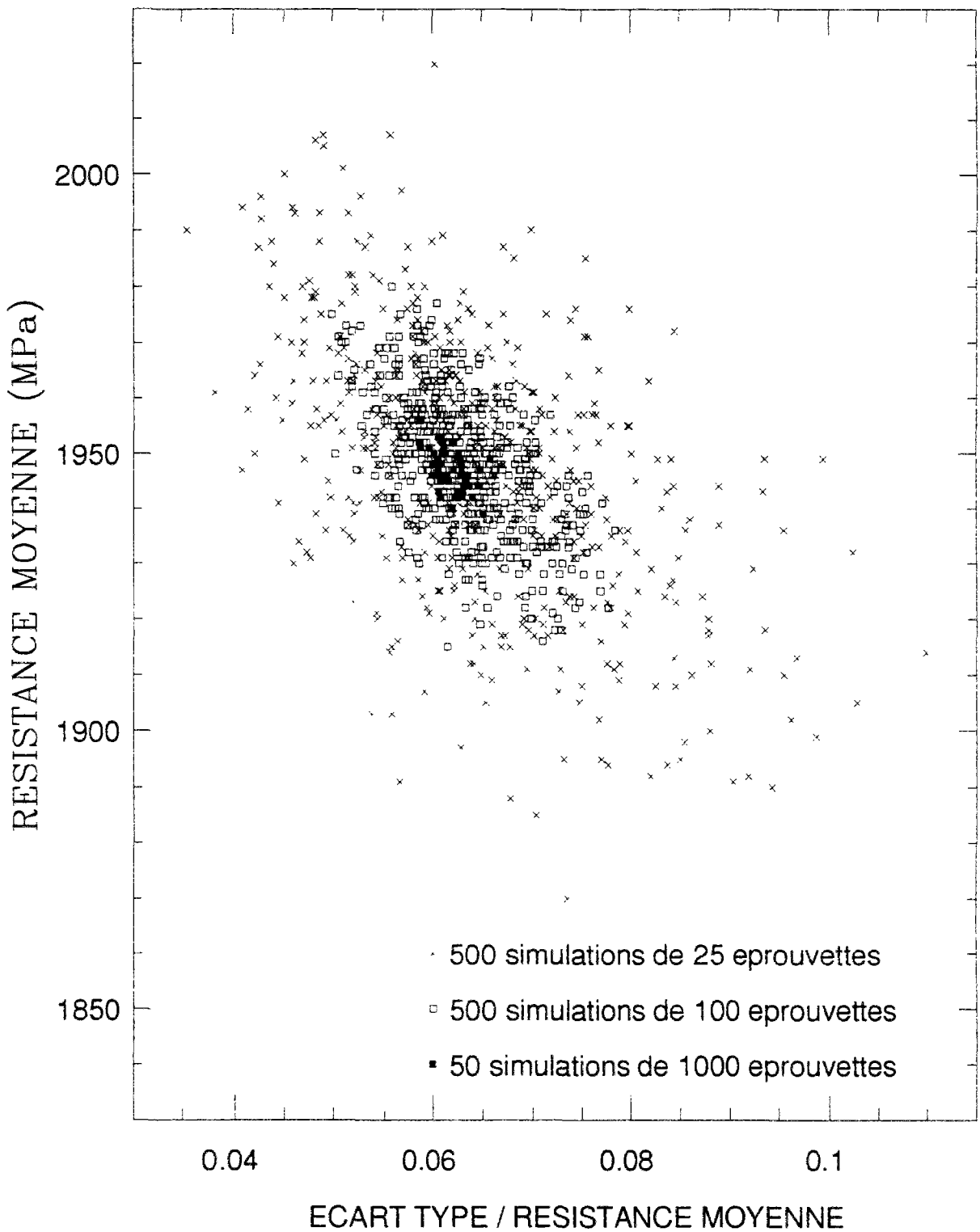


Fig. 2.4 : Incertitude sur la détermination de $(\overline{x}, \frac{\sigma}{\overline{x}})$ *suivant le nombre d'éprouvettes testées.*

De même nous reportons dans le tableau 2.2 les premiers et derniers déciles des valeurs de la résistance moyenne et de l'écart type.

Nb de simulations de programmes d'essais (N)	Nb d'essais simulés dans chaque programme (n)	$\frac{\sigma_{10}}{\overline{x}}$	$\frac{\sigma_{90}}{\overline{x}}$	$\overline{x}_{10}$ (MPa)	$\overline{x}_{90}$ (MPa)
N=500	n=25	0.049	0.081	1915	1977
	n=100	0.055	0.071	1931	1965
N=50	n=1000	0.059	0.064	1942	1952

Tab. 2.2 : Variation du couple $(\overline{x}, \frac{\sigma}{\overline{x}})$ *en fonction du nombre d'essais n.*

Nous avons déterminé nos paramètres de Weibull expérimentaux sur une batterie de 25 essais et ce nombre d'essais paraît insuffisant au vu de la dispersion que l'on obtient sur ces paramètres. Nous devrions donc réaliser un nombre d'essais de rupture plus important et il apparaît alors qu'il faut réaliser au minimum 1000 essais de rupture pour déterminer correctement les paramètres de Weibull de la courbe identifiant la probabilité cumulée de rupture d'une éprouvette plate. Réaliser un tel nombre d'essais dans le cadre d'un programme expérimental censé mettre en évidence des effets d'échelle est difficilement réalisable et il nous a semblé préférable, pour étudier la rupture d'éprouvettes plates de longueurs et de sections différentes, de procéder à une modélisation en simulant numériquement ces ruptures. C'est ce qui sera fait dans les chapitres suivants de ce travail, mais auparavant, intéressons nous malgré tout aux résultats d'essais et essayons d'en tirer des informations utiles.

2.2. Résultats d'essais

2.2.1. Présentation des résultats

Présentons tout d'abord un exemple de résultats d'essais de rupture sur 25 éprouvettes de même géométrie et la courbe de Weibull associée aux paramètres m et x_{L_0} déterminés suivant une procédure de lissage par la méthode des moindres carrés (erreur verticale) avec un estimateur de probabilité de rupture de rang moyen.

La figure 2.5 représente la probabilité de rupture $P_c(\sigma_r)$ de l'éprouvette de largeur l=21 mm. Nous constatons que la distribution cumulée de rupture est représentée de manière satisfaisante par une loi de Weibull.

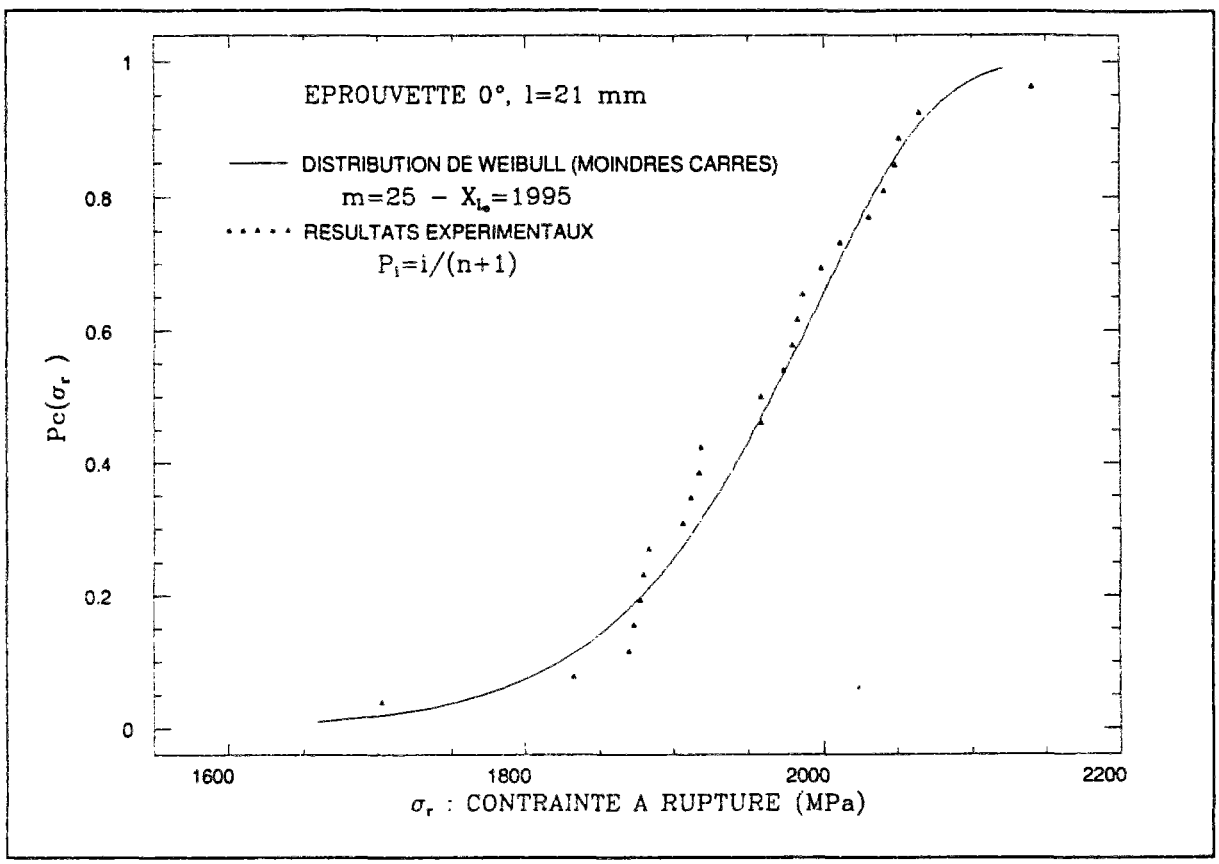


Fig. 2.5 : Probabilité cumulée de rupture d'une éprouvette 0 degré. Résultats expérimentaux et distribution de Weibull à deux paramètres.

Nous donnons en Annexe 1 l'ensemble des figures similaires à la figure 2.5 pour les différentes autres géométries d'éprouvettes.

Nous ne présentons ici les résultats que sous forme d'un tableau donnant le couple de valeurs (m, X_{L_0}) de la loi statistique de Weibull déterminée pour chaque jeux d'éprouvettes testées.

	e,l,L	e,2l,L	e,3l,L	e,l,3L/2
m	15	20	25	13
x_{L_0} (MPa)	1953	2105	1995	1932
Résistance moyenne (MPa)	1885	2050	1952	1855

Tab. 2.3 : $\left(m, x_{L_0}\right)$ et résistance moyenne pour les jeux 1,2,3 et 4 des éprouvettes plates unidirectionnelles à 0 degré.

La figure 2.6 présente les lois de Weibull associées à ces paramètres.

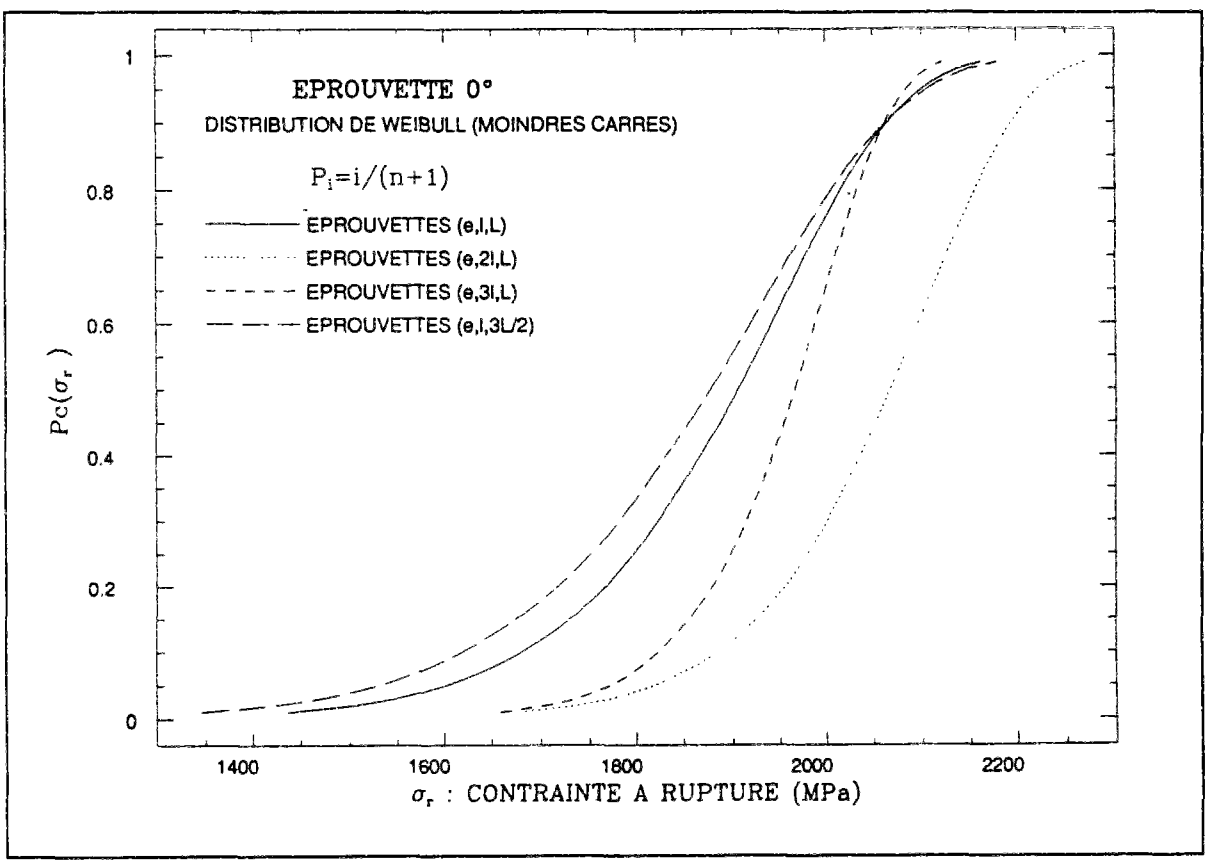


Fig. 2.6 : Probabilités cumulées de rupture des quatre jeux d'éprouvettes plates unidirectionnelles à 0 degré (T300/174).

2.2.2. Analyse des effets d'échelle

2.2.2.1. Effets d'échelle fonction de la longueur

L'analyse des effets d'échelle fonction de la longueur peut être faite à l'aide des deux jeux d'éprouvettes (e,l,L) et (e,l,L_1).

Si la résistance des éprouvettes de géométrie (e,l,L) suit une loi de Weibull d'espérance R et de paramètres (m, x_{L_0}), on peut montrer (Annexe 2) que les éprouvettes de géométrie (e,l,L_1) vont suivre une loi de Weibull de paramètres $(m_1,(x_{L_0})_1)$ et d'espérance R_1 avec :

$$(2.11) \qquad \begin{cases} m_1 = m \\ (x_{L_0})_1 = x_{L_0} / \left(\frac{L_1}{L}\right)^{\frac{1}{m}} \quad , \quad R_1 = R / \left(\frac{L_1}{L}\right)^{\frac{1}{m}} \end{cases}$$

sous l'hypothèse d'indépendance des résistances de chaque section des éprouvettes.

Pour nos essais expérimentaux ((e,l,L), (e.l,3L/2)), les estimations de (m, x_{L_0}, R) et de $\left(m_1, \left(x_{L_0}\right)_1, R_1\right)$ sont les suivantes :

$$\begin{cases} (m, x_{L_0}, R)^{est} = (16{,}1949{,}1885) \\ \left(m_1, \left(x_{L_0}\right)_1, R_1\right)^{est} = (14{,}1926{,}1855) \end{cases}$$

En reportant dans les formules (2.2) les valeurs $(m, x_{L_0}, R)^{est}$ nous obtenons pour $\left(m_1, \left(x_{L_0}\right)_1, R_1\right)$ les valeurs calculées suivantes :

$$\left(m_1, \left(x_{L_0}\right)_1, R_1\right)^{cal} = (16{,}1900{,}1838)$$

L'incertitude soulignée plus haut sur la détermination expérimentale des paramètres (m, x_{L_0}) pour une géométrie d'éprouvettes avec seulement 25 essais ne permet pas de conclure de manière formelle à l'existence de l'effet d'échelle prévu ci-dessus. Nous observons cependant

une diminution attendue de la résistance moyenne des éprouvettes les plus longues par rapport aux éprouvettes courtes. La figure 2.7 présente les trois courbes de Weibull de paramètres $(m, x_{L_0})^{est}; \left(m_1, \left(x_{L_0}\right)_1\right)^{est}; \left(m_1, \left(x_{L_0}\right)_1\right)^{cal}$. On constate alors que l'hypothèse sur l'effet d'échelle de longueur est vraisemblable.

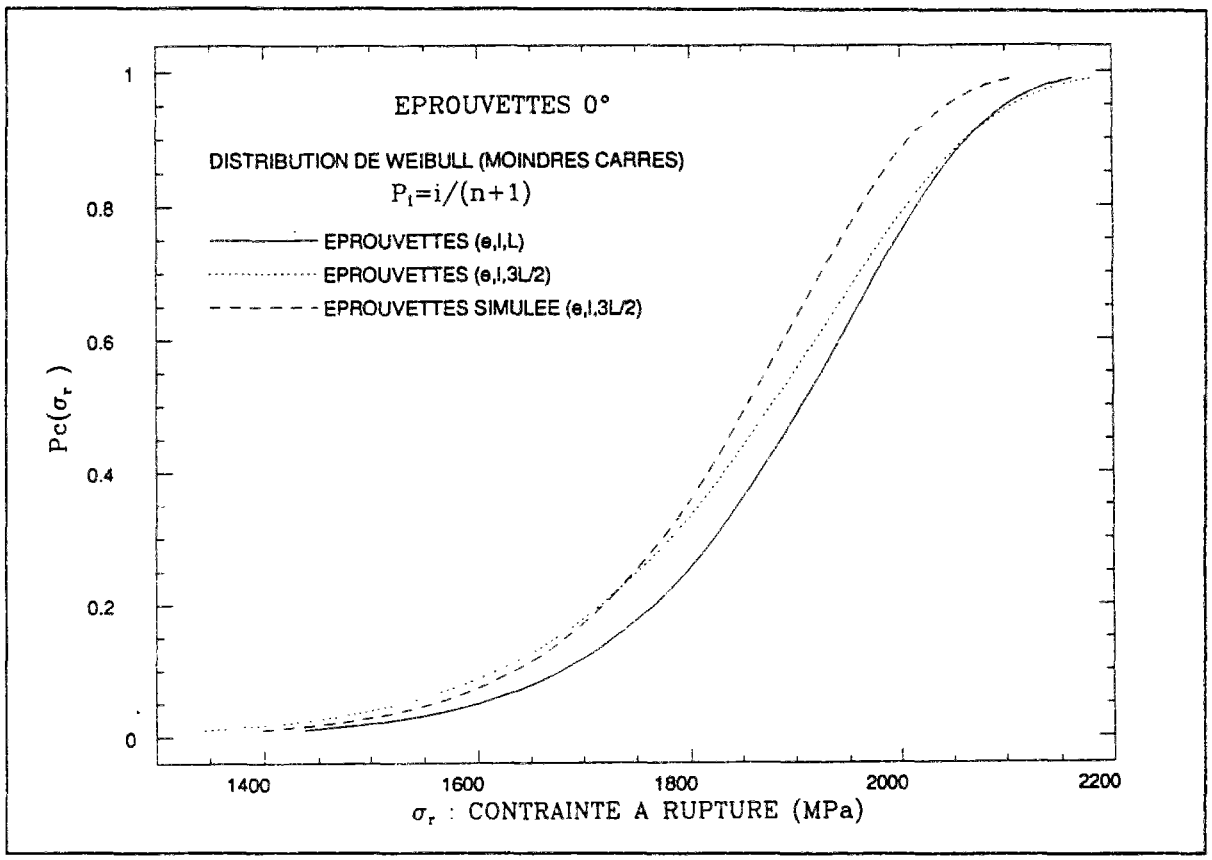


Fig. 2.7 : Probabilité cumulée de rupture des éprouvettes de géométries (e,l,L) et (e,l,3L/2) Résultats expérimentaux et résultats analytiques

2.2.2.2. Effet d'échelle fonction de la section

Nous remarquons que la résistance moyenne augmente entre les jeux (e,l,L) et (e,2l,L), puis diminue entre les jeux (e,2l,L) et (e,3l,L). Nous observons donc un phénomène qui paraît être un effet d'échelle croissant puis un effet d'échelle décroissant.

- Indiquons que ce phénomène a été constaté en dehors du travail décrit ici sur de nombreux autres essais moins systématiques.

- Notons que l'écart observé entre les résistances moyennes est suffisamment important par rapport à l'incertitude liée au faible nombre d'éprouvettes.

L'observation semble donc confirmer le raisonnement sommaire présenté dans notre introduction et il semble y avoir un renforcement de la résistance moyenne d'une éprouvette plate carbone-epoxy unidirectionnelle en augmentant la largeur de celle-ci. Ce phénomène confirmerait alors l'existence d'**une section optimale.**

Ce phénomène est-il accessible à la modélisation ? C'est ce que nous allons essayer de voir dans les chapitres suivants.

CHAPITRE 3.

MODELE MECANIQUE

3.1. LE CHOIX DU MODELE

3.1.1. Cinématique tridimensionnelle

3.1.2. Cinématique uniaxiale

3.2. LE CHOIX DE LA GEOMETRIE ETUDIEE

3.2.1. Longueur de "l'éprouvette" simulée

3.2.2. Largeur de "l'éprouvette" simulée

3.3. LES EQUATIONS DU MODELE

3.4. DISCRETISATION DU MODELE UNIXIAL ET DESCRIPTION DE L'ENDOMMAGEMENT

3.5. VALIDATION DU MODELE DISCRETISE PAR L'ANALYSE ELASTIQUE DES CHAMPS

3.6. SIMULATION DE LA RUPTURE

3.6.1. Les critères

3.6.2. Introduction de l'aléa

3.6.2.1. Choix de la loi de distribution

3.6.2.2. Tirage au sort

3.6.3. Algorithme de progression de la micro fissuration

CHAPITRE 3.

MODELE MECANIQUE

3.1. Le choix du modèle

La première alternative importante dans le choix d'un modèle mécanique pour la prévision des propriétés statistiques de résistance des composites unidirectionnels est celle entre la finesse de représentation des champs mécaniques et le nombre de simulations réalisables compte tenu de cette finesse de discrétisation.

Le choix d'un modèle mécanique fin (du type éléments-finis 2D ou 3D par exemple) implique des calculs numériques relativement lourds pour chaque simulation et limite ainsi le nombre de simulations que l'on peut raisonnablement effectuer à quelques dizaines (par exemple [*Baxevanakis,1994*]). Si l'on s'intéresse à des propriétés ''moyennes'', ce choix se trouve alors parfaitement justifié. En revanche, si l'on souhaite étudier avec une certaine précision la queue d'une distribution aléatoire, le nombre de simulations nécessaires est alors beaucoup plus élevé (entre 1000 et 10000 afin de concentrer son attention sur, par exemple, les cents simulations les plus "faibles").

Bien évidemment, on est alors obligé d'avoir recours à des modèles mécaniques plus simples, limitant le nombre de degrés de liberté et dont la cinématique aura été simplifiée à l'extrême afin de ne conserver dans le modèle mécanique que les phénomènes essentiels.

Les modèles mécaniques simples des composites U.D. font généralement appel, ainsi que nous avons pu le voir dans l'étude bibliographique, à une discrétisation géométrique du matériau dans la section perpendiculaire aux fibres et aux efforts. Géométriquement, le modèle est ainsi constitué de l'assemblage en parallèles de bandes que nous appellerons dans la suite de ce travail des fils (un fil peut être constitué d'une ou plusieurs fibres, sa section est caractéristique de la finesse de discrétisation du modèle). L'assemblage en parallèle peut être bidimensionnel ou tridimensionnel. Dans la suite nous ne nous intéresserons qu'à des assemblages bidimensionnels, car ainsi que nous l'avons dit plus haut, nous nous intéresserons principalement aux ''joncs plats'' plus faciles à ''ancrer'' pour la mise en tension. La discrétisation géométrique du modèle étant choisie, il reste à choisir la cinématique.

Pour cette cinématique, deux possibilités principales s'offrent à nous :

1°) une cinématique 3D (ou 2D) pour chaque fil,
2°) une cinématique uniaxiale.

3.1.1. Cinématique tridimensionnelle

Dans le premier cas le déplacement de chaque fil est un champ de vecteurs 3D sur un milieu curviligne (le fil). Cette cinématique est intéressante car elle permet notamment de prendre en compte les phénomènes de flexions du composite lorsque la microfissuration n'est pas symétrique. Elle autorise une analyse assez fine des efforts à "l'interface" entre les fils.
Le modèle mécanique construit sur cette cinématique à l'aide de la Méthode des Puissances Virtuelles (appelé modèle M^4 pour Modélisation Multiparticulaire des Matériaux Multicouche [*Ehrlacher-Naciri,1993*]) a été appliqué à l'étude du délaminage [*Caron-Ehrlacher-Pottier,1995*], [*Chabot,199?*]. Il se présente en fait comme une généralisation aux problèmes de flexion du modèle uniaxial habituellement appelé ''SHEAR-LAG''.

3.1.2. Cinématique uniaxiale

Le modèle à cinématique uniaxiale (SHEAR-LAG) se révèle être le plus utilisé pour l'étude de la résistances des composites U.D. ([*Cox,1951*], [*Hedgepeth,1961*], [*Goree-Gross,1979*], [*Nairn,1988a*] ...). Il a principalement été mis à l'honneur par K.W.Garett et J.E.Bailey [*Garett-Bailey,1977*] pour l'étude de la microfissuration transverse des composites multicouches mais il semble que l'on en trouve les premières traces dans l'article de H.L.Cox [*Cox,1951*]. Dans ce modèle, on ne s'intéresse d'un point de vue cinématique qu'aux déplacements des particules de fils parallèlement à l'axe des fils.

Il était légitime d'hésiter entre ces deux modèles, le M^4 permettant des descriptions de la cinématique et des efforts plus réalistes pour un ''surcoût'' relativement faible, les géométries étant similaires. Cependant, les résultats de la littérature semblent indiquer clairement que dans une première approche de la rupture en traction parallèlement aux fibres, un modèle uniaxial est suffisant.
Nous avons donc choisi le modèle SHEAR-LAG, limitant ainsi de manière sensible le nombre de degrés de liberté (augmentant donc en contrepartie le nombre de simulations possibles). Les équations du Shear-Lag et la discrétisation numérique du modèle seront présentées plus loin dans ce chapitre.

3.2. Le choix de la géométrie étudiée

3.2.1. Longueur de "l'éprouvette" simulée

Les premiers modèles basés sur des discrétisations géométriques par fils utilisaient des lois de redistributions de contraintes assez sommaires après rupture d'un fil (par exemple redistribution uniforme sur l'ensemble des fils [*Daniels,1944*], [*Freudenthal,1968*]...).
Ensuite, les auteurs ont tenté de prendre en compte les phénomènes de concentrations de contraintes au voisinage du fil rompu et le rechargement de ce fil par cisaillement de la matrice. La très grande majorité des auteurs a alors choisi une "discrétisation en long" des fils avec des éléments dont la longueur était de l'ordre de la ''longueur d'ancrage'' ou ''longueur inefficace'' ou ''ineffective'' nécessaire à la remise en tension du fil rompu. Très peu d'entre

eux se sont intéressés à une meilleure description des efforts intérieurs et aux risques de rupture d'autres fils dans le voisinage d'une section de fil rompu.

Il nous a semblé nécessaire d'examiner plus en détail les risques de progression de la rupture dans le voisinage d'une section rompue, ce qui nous a conduit à inverser le rapport ''classique'' d'élancement des ''cellules de fil''. Plus précisément, en notant h la ''distance'' entre deux sections potentiellement cassables d'un fil et l la ''largeur'' d'un fil, nous avons souhaité travailler avec un élancement de cellule h/l=0,1 alors que généralement on trouve dans la littérature des rapports $h/l \geq 10$.

L'avantage de notre choix réside dans le fait que l'on obtient une représentation assez fine des champs d'efforts intérieurs dans le modèle et l'on prend ainsi mieux en compte les risques de ''contagion'' d'une section rompue.
L'inconvénient correspondant est bien sûr évident. Notre choix conduisant à une fine ''discrétisation longitudinale'', il ne nous sera pas possible d'espérer raisonnablement simuler des éprouvettes très longues.

Comme nous le verrons au chapitre suivant, cet inconvénient n'est pas très sévère car les effets d'échelle de longueur du modèle sont faciles à analyser. Ceci nous permet d'extrapoler de manière fiable les résultats obtenus sur nos géométries à des géométries bien plus longues (C'était d'ailleurs là un des objectifs majeurs de notre programme de recherche).

Nous verrons plus loin que l'on tire statistiquement une information équivalente lorsque l'on ''maille'' une géométrie dont la longueur correspond à 3000 sections ou à 300 sections (ce qui implique que le phénomène de rupture concentrée (voir figure 1.22 page 38) joue le rôle principal dans la rupture de nos éprouvettes simulées).

3.2.2. Largeur de ''l'éprouvette'' simulée

Rappelons que le concept de fil utilisé dans ce travail ne recouvre pas celui de fibre, mais qu'il est plutôt associé à une discrétisation géométrique (dans la largeur) de l'éprouvette. Ainsi, une discrétisation grossière conduira pour une même éprouvette à une modélisation avec un nombre de fils plus faible. Une des questions que nous nous posons plus loin est celle

de "l'équivalence" des résultats statistiques tirés de discrétisations géométriques plus ou moins fines de l'éprouvette.

Pour des raisons évidentes liées au raisonnement sommaire présenté en introduction, nous étudierons soigneusement les géométries à faible nombre de fils (bi-fils, quadri-fils,...). Cette étude permettra de mettre en évidence les principaux mécanismes de ruine et de concentrer ensuite l'attention sur les mécanismes importants pour les grandes longueurs (une fois pris en compte les effets d'échelle).

On tentera de mettre numériquement en évidence au dernier chapitre un optimum, en un certain sens, des lois de distribution de résistance lorsque le nombre de fils augmente. Ceci nous permettra en conclusion de proposer une loi pour le dimensionnement des câbles de quelques centaines de mètres de long. L'optimum est observé entre 16 et 32 fils. Ce sera là la plus grande largeur étudiée.

3.3. Les équations du modèle

Nous avons choisi un modèle mécanique à cinématique uniaxiale géométriquement discrétisé en n bandes identiques parallèles à l'axe des fibres et à celui des efforts. Chaque bande a une largeur l et une longueur L comme le montre la figure 3.1.

Ainsi nos inconnues principales sont :

- Les champs de déplacement scalaires $U^j(x)$, $j \in [1,n]$, représentant la composante parallèle aux fibres du déplacement des particules de fils, avec $x \in [0,L]$.

- Les efforts intérieurs associés à cette cinématique sont :

  - Les efforts de traction du fil j $N^j(x)$, $j \in [1,n]$, où $N^j(x)$ est un champ scalaire avec $x \in [0,L]$. N^j a la dimension d'une force et se mesure en Newton.

  - Les efforts de cisaillement d'interface entre les fils j et j+1, $\tau^{j,j+1}(x)$, $j \in [1,n-1]$, où $\tau^{j,j+1}(x)$ est un champ scalaire avec $x \in [0,L]$. $\tau^{j,j+1}$ a la dimension d'une force par unité de longueur et se mesure en N/m ou Pa.m .

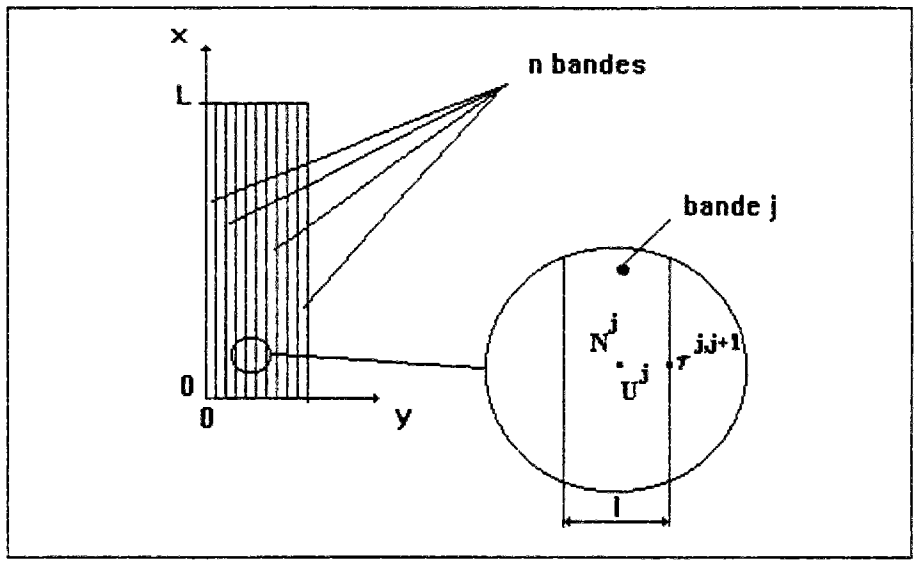


Fig. 3.1 : Représentation schématique des champs inconnus

Il n'est pas utile ici de reconstruire les équations du modèle largement présentées dans la littérature, nous nous conterons de les rappeler.

Equations d'équilibre en l'absence des forces extérieures de volume :

$$\text{(3.1)} \qquad \operatorname{div} N^j + \tau^{j,j+1} - \tau^{j-1,j} = 0 \qquad j \in [1,n]$$

(avec la notation $\tau^{0,1} = \tau^{n,n+1} = 0$, cisaillement nul sur les bords de l'éprouvette)

Conditions aux limites :

L'éprouvette encastrée à une extrémité est soumise à un déplacement monotone croissant Δ à son autre extrémité. Les conditions aux limites s'expriment de la façon suivante :

$$\text{(3.2)} \qquad \begin{cases} U^j(L) = \Delta \\ U^j(0) = 0 \end{cases} \qquad j \in [1,n]$$

Lois de comportement du matériau sain :

$$N^j = K_f^j \frac{dU^j}{dx} \qquad j \in [1,n] \tag{3.3}$$

$$\tau^{j,j+1} = K_\tau^{j,j+1}\left(U^{j+1} - U^j\right) \qquad j \in [1,n] \tag{3.4}$$

avec :
$\begin{cases} K_f^j \text{: raideur de traction du fil j; } K_f^j \text{ se mesure en N} \\ K_\tau^{j,j+1} \text{: raideur de l'interface j, j+1; } K_\tau^{j,j+1} \text{ se mesure en Pa} \end{cases}$

Si E_l est le module d'Young longitudinal du matériau du fil j,

$$K_f^j = e.l.E_l \tag{3.5}$$

où e est l'épaisseur de l'U.D., et, l la largeur de la bande.

Dans la suite tous les fils sont constitués du même matériau et nous noterons :

$$K_l = e.l.E_l \tag{3.6}$$

L'identification $K_\tau^{j,j+1}$, à partir des caractéristiques d'élasticité 3D du matériau, nécessite un peu plus de commentaires.

Généralement les auteurs introduisent des hypothèses cinématiques simplificatrices pour l'identification de $K_\tau^{j,j+1}$. Par exemple, K.W.Garett et J.E.Bailey [*Garett-Bailey,1977*] supposent que le champ de déformations en cisaillement peut être approché par une valeur uniforme dans la couche, ce qui conduirait ici à :

$$K_\tau^{j,j+1} = \frac{e\,G_{lt}}{l} \tag{3.7}$$

où G_{lt} est le module de cisaillement longitudinal transverse du matériau.

D'autres auteurs proposent des cinématiques plus complexes, citons Kamimura [*Kamimura,1985*], B.Macquere, E.Petitpas et D.Valentin [*Macquere, Petitpas et Valentin,1992*] P.W.M.Peters [*Peters,1984*], S.G.Lim et C.S.Hong [*Lim-Hong,1989*].

Kamimura ainsi que Macquere, Petitpas et Valentin considèrent que la moitié de l'épaisseur des plis à 90 degrés se déforme par cisaillement. Ils obtiennent pour K_τ une forme plus complexe. Peters et Lim Hong introduisent une couche de résine avec des caractéristiques en cisaillement G_m et une épaisseur e_{int}. La couche de résine reprend seule les déformations de cisaillement, et l'interface transfère les contraintes de cisaillement.

J.F.Caron [*Caron,1993*] adopte une démarche différente pour déterminer la raideur d'interface $K_\tau^{j,j+1}$ dans le cadre du modèle M^4 appliqué à la fissuration transverse. Il ne fait aucune hypothèse particulière mais propose une approche de type changement d'échelle. Il considère une demi-cellule 3D. Il calcule par éléments-finis les champs dans la cellule et détermine la valeur, en fonction de l'abscisse d'une section de la cellule, du rapport entre le cisaillement à l'interface des couches et la différence des valeurs moyennes dans l'épaisseur des couches des déplacements axiaux des deux couches adjacentes. Il montre que ce rapport est sensiblement indépendant de la largeur de la cellule considérée et, pour chaque cellule, de l'abscisse de la section. Ce rapport a une valeur très voisine de celle de la formule proposée par K.W.Garett et J.E.Bailey (équation 3.7).
Pour un multicouche carbone-epoxy T300/174 de séquence $[0_2,90_2]_s$ la valeur obtenue par l'auteur est de 1,4 10^{13} Pa/m, alors qu'en utilisant la formule proposée par K.W.Garett et J.E.Bailey on obtient K=1,36 10^{13} Pa/m. Pour notre application, ces valeurs seraient à multiplier par l'épaisseur e du composite U.D.

Une expression plus générale a été obtenue dans le cadre du modèle M^4 en approchant l'énergie élastique en contrainte [*Ehrlacher et al.,1994*]. Notons cependant que les applications à notre problème de la plupart des formules proposées dans la littérature conduisent au même résultat (3.7). C'est donc lui que nous retiendrons comme caractéristique de l'interface saine dans la suite de travail. Nous noterons :

(3.8) $$K_\tau = \frac{e\,G_{lt}}{l}$$

3.4. Discrétisation du modèle uniaxial et description de l'endommagement

L'endommagement par microfissuration sera introduit dans notre modèle selon deux mécanismes. Le premier est la rupture de fil, le second est la décohésion entre les fils. Ces

mécanismes seront activés lorsque l'effort intérieur correspondant atteindra une valeur critique.

Pour prendre en compte l'aléa dans la résistance du matériau, nous discrétisons les fils en sections potentiellement cassables distantes de la longueur h, et nous tirons au sort en fonction de la distribution aléatoire de résistance des fils, la résistance de chaque section, c'est à dire la valeur critique locale dans la section de la résistance en traction du fil.

La résistance à la décohésion entre les fils est donnée par une valeur critique de l'effort de cisaillement entre les fils. Cette résistance peut être choisie déterministe ou aléatoire.

Nous avons vu plus haut que nous souhaitons étudier assez finement les risques de "contagion" d'une rupture de fils. Pour cela, les ''cellules de fil'' entre deux sections potentiellement cassables seront choisies avec un élancement de $\lambda=0,1$ (la distance entre deux sections potentiellement cassables sera égale à $h=\lambda\, l$).

Cette discrétisation pour l'introduction des résistances aléatoires est assez fine pour que l'on choisisse une discrétisation identique pour le calcul numérique des champs de déplacement et d'efforts intérieurs.

Nous pouvons donc maintenant donner les équations discrétisées par différences finies de notre modèle.

Notre éprouvette est représentée par un pavage de IxJ cellules de largeur l et de hauteur h comme nous le représentons en figure 3.2 :

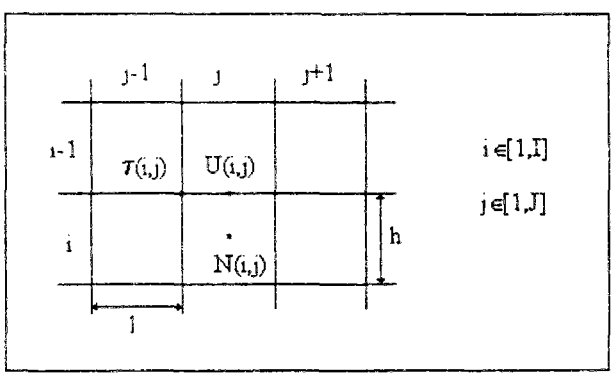


Fig. 3.2 : Discrétisation de la structure

Les champs inconnus sont :

U(i,j) : déplacement de la cellule (i,j) ; $i \in [1,I+1]$, $j \in [1,J]$

N(i,j) : effort de traction dans la cellule (i,j) ; $i \in [1,I]$, $j \in [1,J]$

τ(i,j) : cisaillement de l'interface (i,j) ; $i \in [1,I+1]$, $j \in [1,J+1]$

Pour mieux visualiser les différentes valeurs des champs discrétisés U(i,j), N(i,j) et τ(i,j), il faut considérer que N(i,j) est localisé au centre de la cellule (i,j), U(i,j) au centre de la section du fil bornant en amont la cellule (i,j) et, que τ(i,j) est au noeud des quatre cellules (i-1,j-1), (i-1,j), (i,j-1) et (i,j).

L'interface (i,j) est formée par l'intersection du demi bord droit inférieur de la fenêtre (i-1,j-1) et du demi bord gauche inférieur de la fenêtre (i-1,j), ainsi que du demi bord droit supérieur de la fenêtre (i,j-1) et du demi bord gauche supérieur de la fenêtre (i,j) comme nous le représentons sur la figure 3.4 :

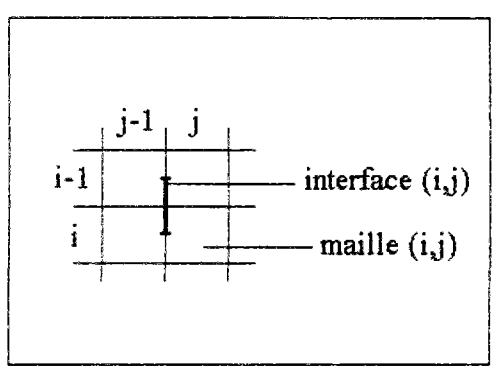


Fig. 3.4 : Représentation schématique de l'interface (i,j)

Les équations d'équilibre discrétisées s'écrivent :

$$\frac{1}{h}\{N(i,j)-N(i-1,j)\}+\tau(i,j+1)-\tau(i,j)=0 \qquad \begin{cases} i \in [2,I] \\ j \in [1,J] \end{cases} \tag{3.9}$$

Les lois de comportement discrétisées :

$$N(i,j) = K_1 \delta_1(i,j)\left[\frac{U(i+1,j)-U(i,j)}{h}\right] \qquad \begin{cases} i \in [1,I] \\ j \in [1,J] \end{cases} \tag{3.10}$$

$$\tau(i,j) = K_\tau \delta_\tau(i,j)\{U(i,j)-U(i,j-1)\} \qquad \begin{cases} i \in [2,I] \\ j \in [2,J] \end{cases} \tag{3.11}$$

$\delta_1(i,j)$ et $\delta_\tau(i,j)$ sont respectivement les paramètres d'endommagement des cellules et des interfaces.

$$\delta_1(i,j) = \begin{cases} 0 \text{ lorsque la cellule } (i,j) \text{ est rompue} \\ 1 \text{ lorsque la cellule } (i,j) \text{ est saine} \end{cases}$$

$$\delta_\tau(i,j) = \begin{cases} 0 \text{ lorsque l'interface } (i,j) \text{ est rompue} \\ 1 \text{ lorsque l'interface } (i,j) \text{ est saine} \end{cases}$$

La cellule se rompt lorsque l'effort de traction N(i,j) dépasse la résistance locale $N_c(i,j)$. N_c est relié à la résistance locale en contrainte de traction du matériau σ_c par $N_c = e\, l\, \sigma_c$.
Rappelons que $N_c(i,j)$ est aléatoire et pour chaque simulation sa valeur sera tirée au sort suivant une loi de distribution statistique qui sera décrite plus loin.

L'interface se rompt lorsque l'effort de cisaillement d'interface $\tau(i,j)$ dépasse la résistance locale $\tau_c(i,j)$. τ_c est relié à la résistance locale en contrainte de cisaillement du matériau t_c par la relation $\tau_c = e\, t_c$. Bien qu'il soit facile d'introduire une distribution aléatoire d'effort de cisaillement d'interface, nous avons préféré pour simplifier les discussions ultérieures travailler avec une valeur de τ_c déterministe et uniforme. Nous reviendrons sur ces points importants en fin de chapitre.

Les conditions aux limites du modèle discrétisé deviennent :

$$\begin{cases} U(1,j)=0 \\ U(I+1,j)=\Delta \end{cases} \quad j\in[1,J] \tag{3.12}$$

$$\begin{cases} \tau(i,1)=0 \\ \tau(i,J+1)=0 \end{cases} \quad i\in[1,I+1] \tag{3.13}$$

En injectant les lois de comportement dans l'équation d'équilibre nous obtenons les équations (3.14), (3.15) et (3.16) :

$$\begin{aligned} &U(i+1,j)\left\{\frac{K_1}{h^2}\delta_1(i,j)\right\}+U(i-1,j)\left\{\frac{K_1}{h^2}\delta_1(i-1,j)\right\}+U(i,j-1)K_\tau\,\delta_\tau(i,j) \\ &-U(i,j)\left\{\frac{K_1}{h^2}\delta_1(i,j)+\frac{K_1}{h^2}\delta_1(i-1,j)+K_\tau\,\delta_\tau(i,j+1)+K_\tau\,\delta_\tau(i,j)\right\} \\ &+U(i,j+1)K_\tau\,\delta_\tau(i,j+1)=0 \qquad \begin{cases} i\in[2,I] \\ j\in[2,J-1] \end{cases} \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned} &U(i+1,1)\left\{\frac{K_1}{h^2}\delta_1(i,1)\right\}+U(i-1,1)\frac{K_1}{h^2}\delta_1(i-1,1)+U(i,2)K_\tau\,\delta_\tau(i,2) \\ &-U(i,1)\left\{\frac{K_1}{h^2}\delta_1(i,1)+\frac{K_1}{h^2}\delta_1(i-1,1)+K_\tau\,\delta_\tau(i,2)\right\}=0 \qquad \begin{cases} i\in[2,I] \\ j=1 \end{cases} \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned} &U(i+1,J)\left\{\frac{K_1}{h^2}\delta_1(i,J)\right\}+U(i-1,J)\frac{K_1}{h^2}\delta_1(i-1,J)+U(i,J-1)K_\tau\,\delta_\tau(i,J) \\ &-U(i,J)\left\{\frac{K_1}{h^2}\delta_1(i,J)+\frac{K_1}{h^2}\delta_1(i-1,J)+K_\tau\,\delta_\tau(i,J)\right\}=0 \qquad \begin{cases} i\in[2,I] \\ j=J \end{cases} \end{aligned} \tag{3.16}$$

Ecriture adimensionnelle

L'étude paramétrique de notre problème se révèle être complexe compte-tenu du nombre de paramètres à étudier, paramètres géométriques de la structure, paramètres de raideur et de résistance de notre matériau.

Nous allons donc rendre notre problème adimensionnel de façon à rendre l'étude paramétrique plus systématique. Nous posons dans un premier temps :

$$\hat{U}(i,j)=\frac{U(i,j)}{h} \qquad \begin{cases} i \in [1,I] \\ j \in [1,J+1] \end{cases} \tag{3.17}$$

$\hat{U}(i,j)$ est le champ de déplacement adimmensionnel

En prenant comme notations ;

$$\begin{cases} \dfrac{h}{l}=1 : \textit{Elancement de la cellule} \\ \dfrac{l^2 K_t}{K_l}=\dfrac{G_{lt}}{E_l}=R : \textit{Caractéristique de raideur du matériau} \end{cases}$$

les équation (3.12), (3.13) et (3.14) deviennent alors en les divisant par $\frac{K_l}{l^2}$:

$$\begin{aligned} &\lambda^{-2}\hat{U}(i+1,j)\delta_l(i,j)+\lambda^{-2}\hat{U}(i-1,j)\delta_l(i-1,j) \\ &-\hat{U}(i,j)\left\{\lambda^{-2}\delta_l(i,j)+\lambda^{-2}\delta_l(i-1,j)+R\,\delta_\tau(i,j+1)+R\,\delta_\tau(i,j)\right\} \\ &+R\,\hat{U}(i,j-1)\delta_\tau(i,j)+R\,\hat{U}(i,j+1)\,\delta_\tau(i,j+1)=0 \end{aligned} \qquad \begin{cases} i \in [2,I] \\ j \in [2,J-1] \end{cases} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} &\lambda^{-2}\hat{U}(i+1,1)\,\delta_l(i,1)+\lambda^{-2}\hat{U}(i-1,1)\,\delta_l(i-1,1)+R\,\hat{U}(i,2)\,\delta_\tau(i,2) \\ &-\hat{U}(i,1)\left\{\lambda^{-2}\delta_l(i,1)+\lambda^{-2}\delta_l(i-1,1)+R\,\delta_\tau(i,2)\right\}=0 \end{aligned} \qquad \begin{cases} i \in [2,I] \\ j=1 \end{cases} \tag{3.19}$$

$$\lambda^{-2}\,\hat{U}(i+1,J)\delta_l(i,J)+\lambda^{-2}\,\hat{U}(i-1,J)\,\delta_l(i-1,J)+R\,\hat{U}(i,J-1)\delta_\tau(i,J)$$

$$-\hat{U}(i,J)\left\{\lambda^{-2}\,\delta_l(i,J)+\lambda^{-2}\,\delta_l(i-1,J)+R\,\delta_\tau(i,J)\right\}=0 \qquad \begin{cases} i\in[2,I] \\ j=J \end{cases} \tag{3.20}$$

Les conditions aux limites en déplacement s'écrivent de façon adimensionnelle :

$$\begin{cases} \hat{U}(1,j)=0 \\ \hat{U}(I+1,j)=\dfrac{\Delta}{h}=\hat{\Delta} \end{cases} \qquad j\in[1,J] \tag{3.21}$$

De même en posant ;

$$\hat{N}(i,j)=\frac{N(i,j)}{K_l} \qquad \begin{cases} i\in[1,I] \\ j\in[1,J] \end{cases} \tag{3.22}$$

$$\hat{\tau}(i,j)=\frac{\tau(i,j)}{h\,K_\tau} \qquad \begin{cases} i\in[1,I] \\ j\in[1,J+1] \end{cases} \tag{3.23}$$

Les lois de comportement s'écrivent :

$$\hat{N}(i,j)=\delta_l(i,j)\left\{\hat{U}(i+1,j)-\hat{U}(i,j)\right\} \qquad \begin{cases} i\in[1,I] \\ j\in[1,J] \end{cases} \tag{3.24}$$

$$\hat{\tau}(i,j)=\delta_\tau(i,j)\ \left\{\hat{U}(i,j)-\hat{U}(i,j-1)\right\} \qquad \begin{cases} i\in[2,I+1] \\ j\in[2,J] \end{cases} \tag{3.25}$$

Nous avons déterminé les équations d'équilibre et lois de comportement adimensionnelles avec les paramètres suivants :

$\dfrac{h}{l}=\lambda$: élancement des cellules, paramètre adimensionnel géométrique.

$$\frac{l^2 K_\tau}{K_l} = \frac{G_{lt}}{E_l} = R$$: paramètre adimensionnel de raideur du matériau (fixé).

Il convient d'ajouter à ces paramètres adimensionnels ceux caractérisant la résistance du matériau.

Les équations (3.18), (3.19) et (3.20) ainsi que les conditions aux limites (équation (3.21)) nous permettent de construire la matrice de rigidité $\hat{\mathbf{R}}$ et le second membre $\hat{\mathbf{F}}$.

Nous pouvons alors résoudre le système :

(3.24) $$\hat{\mathbf{R}}.\hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{F}}$$

classiquement à l'aide de la méthode de Choleski.

3.5. Validation du modèle discrétisé par l'analyse élastique des champs

Nous cherchons maintenant à valider notre modèle discrétisé. Pour cela, nous procédons de la façon suivante:

Nous considérons un problème dont nous pouvons d'une part donner une solution analytique et, d'autre part, en utilisant notre modèle simplifié, simuler numériquement la solution. Nous pourrons alors comparer les deux solutions et ainsi valider notre modèle discrétisé.

Choisissons une structure composée de deux fils de même longueur dont un des fils est rompu. Cette structure est soumise à un déplacement nul à l'une de ses extrémités et à un déplacement imposé Δ à son autre extrémité (figure 3.5).

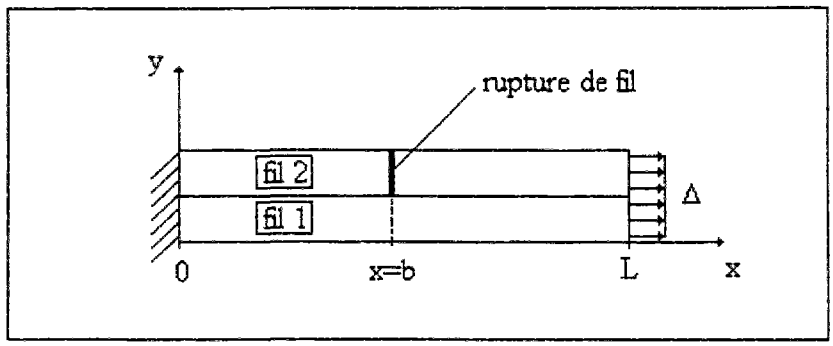


Fig. 3.5 : Bi-fils fissuré

La résolution de ce problème consiste alors à déterminer les champs inconnus suivants :

$U^j(x)$: déplacement du fil j ; $j \in [1,2]$

$N^j(x)$: effort de traction du fil j ; $j \in [1,2]$

$\tau^{1,2}(x)$: cisaillement d'interface entre les fils

Conditions aux limites en déplacement :

$$\begin{cases} U^1(0) = U^2(0) = 0 \\ U^1(L) = U^2(L) = \Delta \end{cases} \tag{3.27}$$

Conditions en x=b

$$\begin{cases} N^2(b) = 0 \\ U^2(x) \text{ est discontinu en } x = b \\ U^1(x) \text{ et } N^1(x) \text{ sont continus en } x = b \end{cases} \tag{3.28}$$

Les équations d'équilibre et lois de comportement de notre problème sont les suivantes :

Equations d'équilibres :

$$\begin{cases} \operatorname{div} N^1(x) + \tau^{1,2}(x) = 0 \\ \operatorname{div} N^2(x) - \tau^{1,2}(x) = 0 \end{cases} \tag{3.29}$$

Lois de comportement :

$$\begin{cases} N^1(x) = K_1 \dfrac{dU^1(x)}{dx} \\ N^2(x) = K_1 \dfrac{dU^2(x)}{dx} \end{cases} \tag{3.30}$$

$$\tau^{1,2}(x) = K_\tau \left(U^2(x) - U^1(x) \right) \tag{3.31}$$

Les champs de déplacement $U^1(x)$ et $U^2(x)$ solutions de ce problème sont les suivants :

$$\begin{cases} U^1(x) = a\left[(\rho \operatorname{ch}(\rho b)) x + \operatorname{sh}(\rho x) \right] & \text{si } x \in [0, b] \\ \qquad a'\left[(\rho \operatorname{ch}(\rho(L-b)))(L-x) + \operatorname{sh}(\rho(L-x)) \right] + \Delta & \text{si } x \in [b, L] \\ U^2(x) = a\left[(\rho \operatorname{ch}(\rho b)) x - \operatorname{sh}(\rho x) \right] & \text{si } x \in [0, b] \\ \qquad a'\left[(\rho \operatorname{ch}(\rho(L-b)))(L-x) - \operatorname{sh}(\rho(L-x)) \right] + \Delta & \text{si } x \in [b, L] \end{cases} \tag{3.32}$$

en posant ;

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{\dfrac{2K_\tau}{K_1}} = \dfrac{\sqrt{2R}}{l} \\ a = \Delta \left[\rho L \operatorname{ch}(\rho b) + \dfrac{\operatorname{sh}(\rho L)}{\operatorname{ch}(\rho(L-b))} \right]^{-1} \\ a' = -\Delta \left[\rho L \operatorname{ch}(\rho(L-b)) + \dfrac{\operatorname{sh}(\rho L)}{\operatorname{ch}(\rho b)} \right]^{-1} \end{cases} \tag{3.33}$$

Nous obtenons alors les efforts de traction dans le fil 1, $N^1(x)$ et dans le fil 2, $N^2(x)$:

$$N^1(x)=\begin{cases} N_0\left[1+\dfrac{ch(\rho x)}{ch(\rho b)}\right] & si\ x\in[0,b] \\ N_0\left[1+\dfrac{ch(\rho(L-x))}{ch(\rho(L-b))}\right] & si\ x\in[b,L] \end{cases} \tag{3.34}$$

$$N^2(x)=\begin{cases} N_0\left[1-\dfrac{ch(\rho x)}{ch(\rho b)}\right] & si\ x\in[0,b] \\ N_0\left[1-\dfrac{ch(\rho(L-x))}{ch(\rho(L-b))}\right] & si\ x\in[b,L] \end{cases} \tag{3.35}$$

où :

$$N_0=\rho\Delta\ K_1\left[\rho L+\frac{sh(\rho L)}{ch(\rho b)ch(\rho(L-b))}\right]^{-1} \tag{3.36}$$

Nous obtenons de même la contrainte de cisaillement entre le fil 1 et le fil 2 :

$$\tau^{1,2}(x)=\begin{cases} -\rho\ N_0\dfrac{sh(\rho x)}{ch(\rho b)} & si\ x\in[0,b] \\ \rho\ N_0\dfrac{sh(\rho(L-x))}{ch(\rho(L-b))} & si\ x\in[b,L] \end{cases} \tag{3.35}$$

Nous comparons sur la figure 3.6 les champs $N^j(x)$; $j\in[1.2]$ et $\tau^{1,2}(x)$ obtenus analytiquement et par simulation numérique pour un bi-fils comportant N=100 sections (J=100 cellules dans la longueur) et dont l'élancement des cellules est λ= 0,1 .

Nous remarquons que les résultats obtenus numériquement sont identiques aux résultats analytiques. Cependant, la zone d'influence de la rupture (zone de rechargement en traction du fil) ne peut pas être entièrement prise en compte sur J=100. Nous considérons alors un bi-fils de N=300 sections en conservant le même élancement λ= 0,1 (figure 3.7).

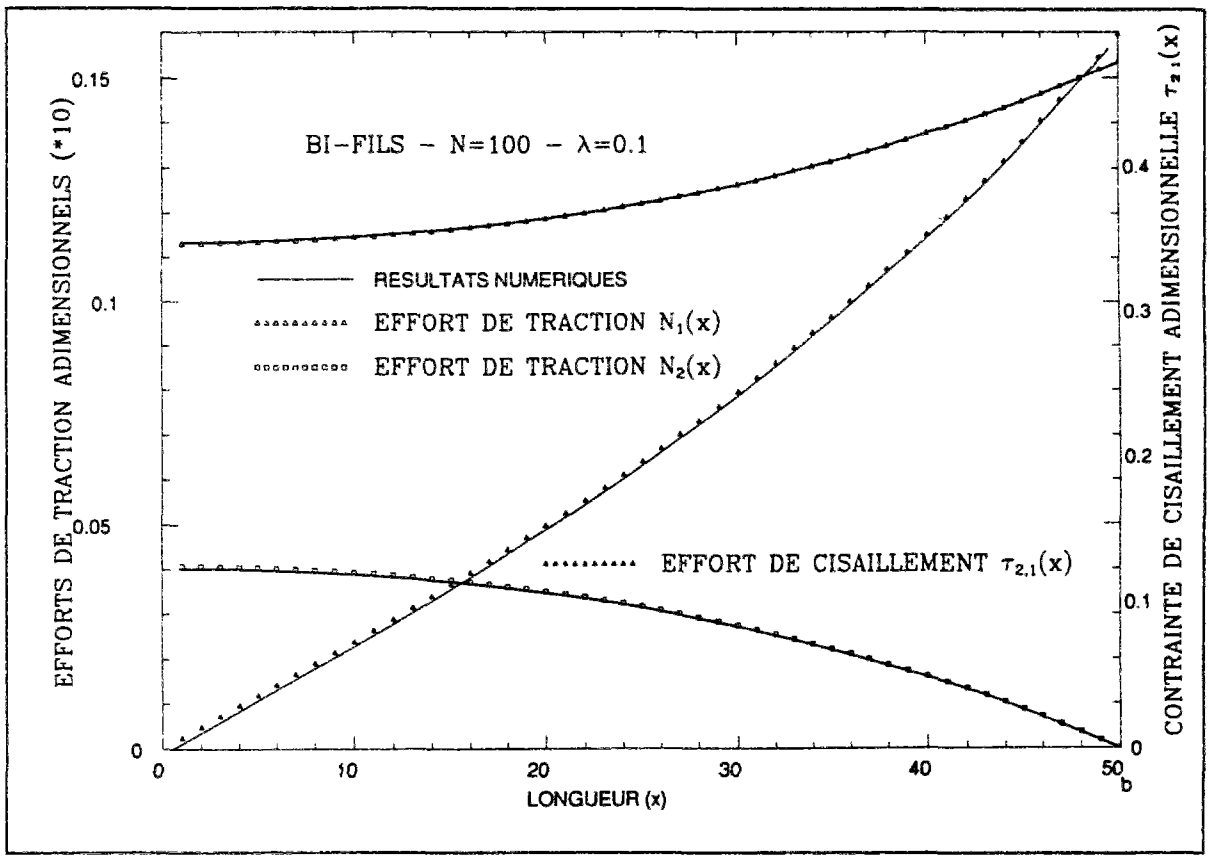


Fig. 3.6 : Comparaison des champs $N^j(x)$ et $\tau^{1,2}(x)$ analytiques et numériques pour un bi-fils fissuré (N=100 et λ= 0,1)

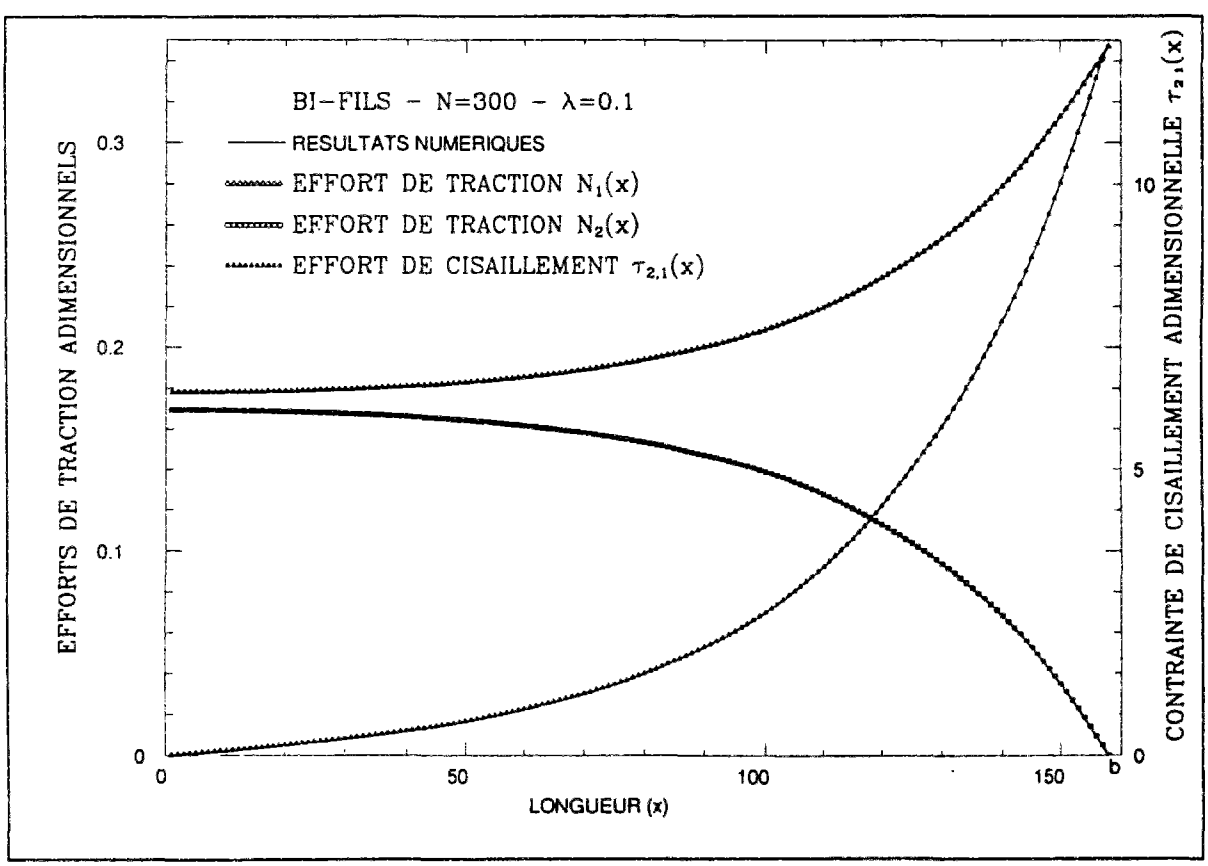


Fig. 3.7 : Comparaison des champs $N^j(x)$ et $\tau^{1,2}(x)$ analytiques et numériques pour un bi-fils fissuré (N=300 et λ= 0,1)

Nous constatons que la zone d'influence de la rupture d'un fil sur un autre fil est de l'ordre de 200 cellules. Si nous comparons alors les champs de contraintes sur un bi-fils de N=3000 sections (figure 3.8) nous remarquons que la zone d'influence reste inchangée.

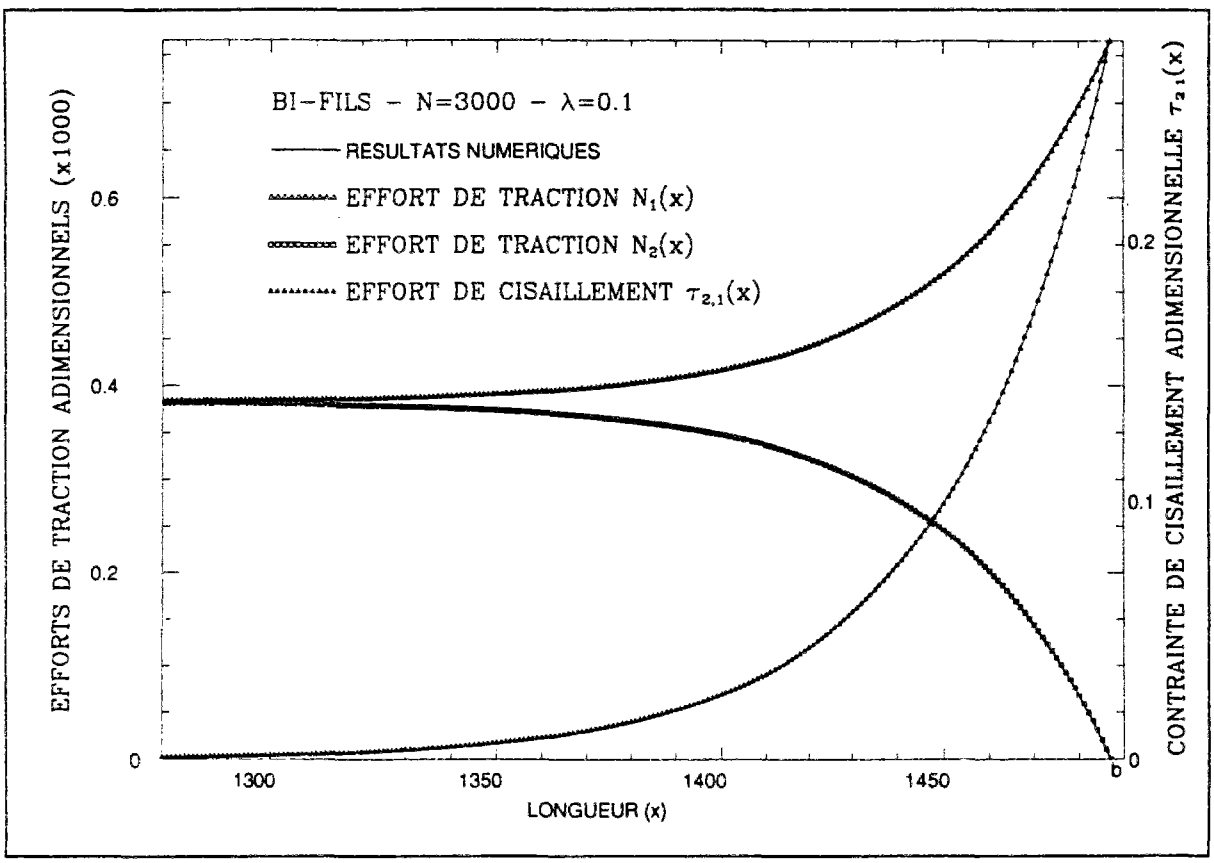


Fig. 3.8 : Comparaison des champs $N^{j}(x)$ et $\tau^{i,2}(x)$ analytiques et numériques pour un bi-fils fissuré (N=3000 et λ= 0,1)

Il est alors intéressant de comparer nos résultats analytiques et numériques pour une autre valeur d'élancement de cellule. Nous reportons sur la figure 3.9 les champs de contrainte obtenus pour un bi-fils de 100 sections dont l'élancement des cellules est égal à 1.

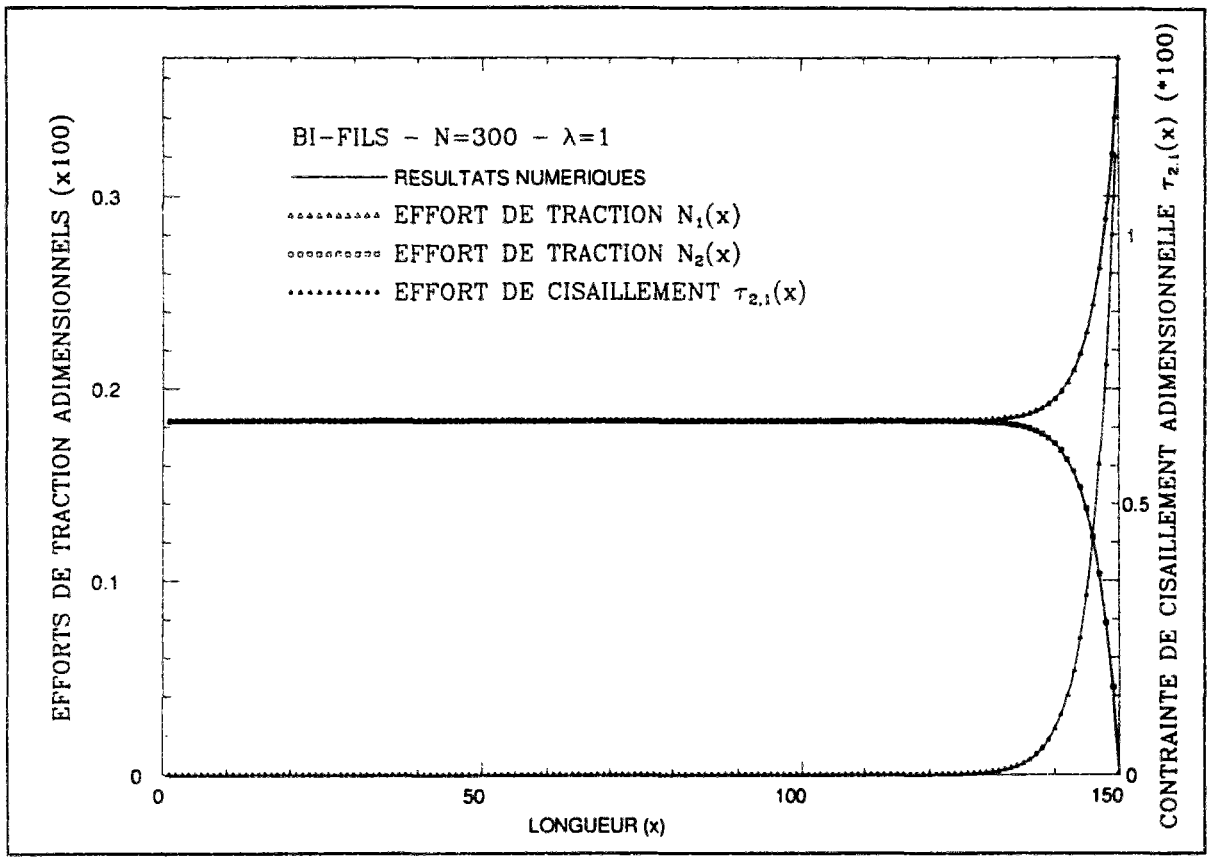


Fig. 3.9 : Comparaison des champs $N^j(x)$ et $\tau^{1,2}(x)$ analytiques et numériques pour un bi-fils fissuré (N=300 et λ= 1)

Dans ce cas, l'influence de la rupture d'un fil est correctement décrite pour 50 sections mais en contre-partie, il ne subsiste alors que très peu de cellules potentiellement cassables et nous ne décrivons pas assez finement le bi-fils dans la zone voisine de la fissure.

Notre modèle discrétisé permet d'approcher correctement les champs élastiques et nous pouvons conclure qu'il nous faut, pour étudier la rupture du bi-fils avec décohésion, considérer pour notre modèle discrétisé des structures comprenant au minimum 200 sections pour un élancement de cellules de 0,1 .

3.6. Simulation de la rupture

Après avoir décrit au chapitre précédent le modèle élastique qui permet le calcul des champs dans une éprouvette micro-fissurée, décrivons maintenant la méthode qui permettra

de simuler la progression de cette micro fissuration.

Pour cela nous devons préciser :

- Le type de critère dont le non-respect impliquera la création de nouvelles micro fissures.
- Les choix sur l'introduction de l'aléa dans les résistances locales.
- L'algorithme de progression de la micro-fissuration et le nombre de simulations à effectuer.

3.6.1. Les critères

Nous avons vu que deux types de micro fissurations peuvent apparaître et progresser dans notre modèle ; la rupture de section de fils et la rupture d'interfaces entre les fils.
La rupture de section de fils se produit au coeur des cellules de discrétisation, la rupture d'interface se produit au carrefour de quatre cellules (figure 3.4). Il s'agit donc de choisir un critère de rupture pour chacun de ces endommagements.

Il existe des théories récentes basées sur des critères non locaux ([*Sab-Laalai,1993*]) qui sont d'un très grand intérêt pour une prévision correcte des effets d'échelle dans les matériaux fragiles.

Dans ces théories, les critères prennent en compte les champs mécaniques dans un voisinage de dimension finie de l'élément à rompre. Cependant, les résultats de la littérature semblent indiquer qu'en ce qui concerne la rupture des composites U.D., compte tenu de la simplicité de la géométrie et du chargement, un critère local peut généralement convenir.

Ainsi, nous avons choisi que la rupture de la cellule (i,j) se produit lorsque l'effort de traction $N(i,j)$ atteint une valeur critique $N_c(i,j)$. La rupture de l'interface (i,j) se produit lorsque le cisaillement d'interface $\tau(i,j)$ atteint une valeur critique $\tau_c(i,j)$. Pour chaque simulation, les valeurs $N_c(i,j)$ et $\tau_c(i,j)$ des résistances initiales des éléments sont à fixer dès le départ de la simulation dans l'ensemble de l'éprouvette, l'introduction de l'aléa se faisant par le biais du choix des résistances initiales dans chaque simulation.

3.6.2. Introduction de l'aléa

Il est évident qu'il est nécessaire d'introduire l'aléa de résistance au niveau de la résistance en traction dans les cellules de fils. Un très grand nombre des auteurs cités plus haut l'ont fait. Il est moins évident que ce soit nécessaire au niveau des résistances des interfaces. Pour avoir une interprétation plus aisée de nos résultats de simulation en fonction de l'aléa de résistance des cellules de fils en traction, nous avons préféré considérer que l'aléa de résistance en cisaillement des interfaces pouvait être négligé en première approche.

Nous avons donc procédé dans la suite à deux types de simulation. Dans le premier type la résistance des interfaces est considérée comme étant très grande par rapport aux efforts eux mêmes. On néglige ainsi le phénomène de décohésion. Dans le deuxième type, la résistance en cisaillement est choisie comme ayant une valeur fixe dans l'ensemble de l'éprouvette. On verra que l'on observe alors des phénomènes de décohésion continue à certains niveaux de chargement. On constatera que lorsque l'on s'intéresse à des éprouvettes de plus en plus longues l'importance de ce phénomène diminuera.

Il nous reste à indiquer comment nous avons procédé pour introduire l'aléa dans la résistance en traction des fils. Deux questions principales se posent alors ;

1) quelle loi de distribution aléatoire choisir?
2) comment procéder au tirage au sort?

3.6.2.1. Choix de la loi de distribution

De nombreux travaux indiquent que pour l'étude de la micro fissuration et la rupture des matériaux fragiles, le plus important est de simuler correctement la queue de distribution au voisinage des faibles résistances. Plusieurs lois de distribution peuvent alors donner des résultats similaires.

C'est ce que nous avons constaté en comparant des résultats obtenus en choisissant des lois de distribution de Weibull à deux paramètres et des lois puissances. Cette vérification faite, nous avons continué le travail en choisissant dans la plupart de nos simulations des lois de Weibull pour décrire la distribution statistique des résistances en traction dans les cellules.

3.6.2.2. Tirage au sort

Le principe du tirage au sort suivant une loi de distribution statistique est simple ainsi que nous l'avons déjà dit auparavant. Si nous appelons P(x) la loi de distribution cumulée, le tirage au sort d'une valeur x suivant cette loi s'effectue en tirant au sort une variable Rand suivant une loi de distribution uniforme sur [0,1] puis en calculant :

$$x=P^{-1}(Rand)$$

La variable aléatoire x suit la loi désirée.

Il existe de nombreux générateurs de variable aléatoire Rand dont la distribution est uniforme sur [0,1]. Nous devons cependant être prudent car nous devons nous intéresser avec beaucoup plus d'attention aux petites valeurs de notre tirage au sort. Tous les générateurs n'ont pas les mêmes qualités en ce qui concerne cette queue de distribution.
Pour illustrer notre propos nous présentons ci dessous un diagramme présentant 10000 tirages aléatoires à l'aide de deux générateurs de nombres aléatoires (figure 3.10).

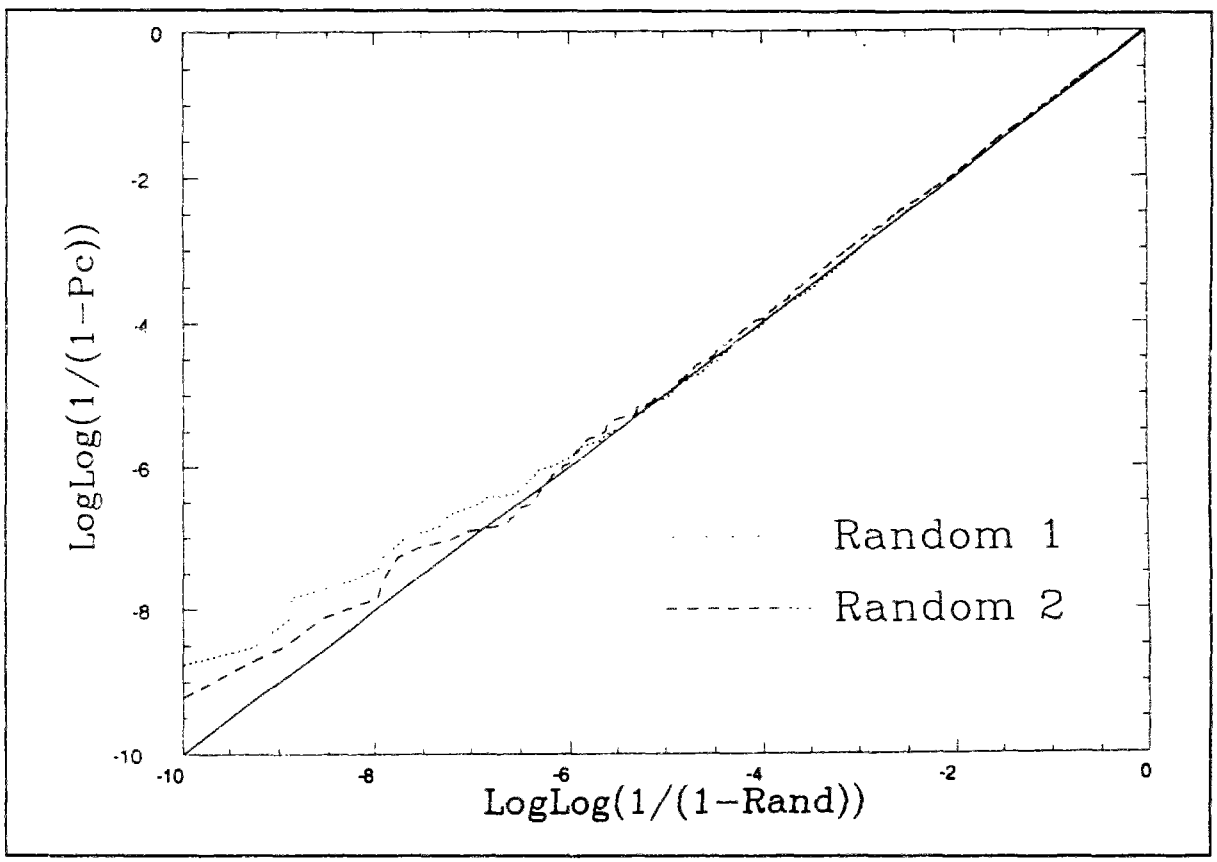


Fig. 3.10 : Comparaison de deux générateurs de nombres aléatoires sur [0,1]

Notons x_i , $i \in [1,10000]$ les valeurs tirées au sort classées dans un ordre croissant. Si le générateur est bon, les points dont les coordonnées sont $\left[\frac{i}{n}, x_i\right]$ doivent se situer sensiblement sur la première bissectrice. Pour "dilater" le tirage au sort du coté des petites valeurs nous préférons tracer les points de coordonnées $\left[\mathrm{Log}\left(\mathrm{Log}\left(\frac{1}{1-i/n}\right)\right), \mathrm{Log}\left(\mathrm{Log}\left(\frac{1}{1-x_i}\right)\right)\right]$ (les raisons de ce choix apparaîtront plus clairement dans la suite du texte).

On constate que l'un des deux générateurs donne des points qui s'écartent sensiblement plus de la première bissectrice que l'autre.
De fait, en simulant des résultats de micro fissuration et de rupture réalisés en utilisant les deux générateurs, nous avons pu constater une certaine différence persistante même si l'on augmente sensiblement le nombre de simulations. Le générateur choisi est donné en annexe 3.

3.6.3. Algorithme de progression de la micro fissuration

On trouve dans la littérature deux principales familles d'algorithme pour la simulation de propagation de micro fissures dans les matériaux élastiques fragiles.

La première que l'on peut appeler micro fissuration douce revient à décharger la structure entre chaque création de micro fissures. A chaque étape après calcul de la solution sous un chargement unitaire on détermine le niveau de chargement entraînant la première rupture d'un élément. On actualise alors la matrice de raideur de la structure et l'on itère. Il va de soit que le niveau de chargement entraînant par exemple la seconde rupture peut être alors inférieur à celui ayant entraîné la première.

La deuxième famille d'algorithme peut être appelée micro fissuration brutale. Dans ce cas, après une première étape identique pour déterminer la première rupture et actualiser la matrice de raideur, on recharge au niveau de chargement déjà atteint. Il est alors fréquent que les critères de résistance soient dépassés dans plusieurs éléments qui sont alors tous détruits avant

une nouvelle actualisation de la matrice de raideur et l'on itère. On comprend bien que cet algorithme est généralement beaucoup plus rapide.

C'est encore une discussion ouverte de savoir si les résultats statistiques de ces simulations sont équivalents dans le cas général. Dans notre cas particulier de la rupture des U.D., même si au détail certains scénarios de micro fissuration peuvent être un peu modifiés, cela n'a aucune influence sensible sur la statistique des résultats de simulation. Nous avons donc, bien sûr, choisi un algorithme brutal.

Notons que l'actualisation de la raideur de la structure peut soit être effectivement réalisée (calcul de la nouvelle matrice de raideur, inversion, ...), soit de manière équivalente mais généralement plus économique, on peut introduire la variation de raideur par le biais de termes fictifs au second membre (voir par exemple [*Zenzri,1992*]).

La ruine de la structure est atteinte lorsqu'un ensemble connexe de micro fissures et décohésions permet de relier les deux bords latéraux de l'éprouvette modélisée. La matrice de rigidité est alors singulière.

Rappelons enfin que pour obtenir des résultats statistiquement significatifs, nous avons généralement procédé à 10000 simulations sur chaque géométrie d'éprouvette.

Nous avons réalisé un programme numérique permettant l'introduction d'un aléa dans les résistances. Ce programme simule la progression de la micro fissuration brutale en tenant compte des critères de rupture que nous avons choisis . Nous présentons en annexe 4 un organigramme montrant les principales étapes de ce programme.

CHAPITRE 4.

RUPTURE DU BI-FIL

4.1. AUTOMATES ENCADRANT $C_2^N(x)$

4.1.1 Automate minorant

4.1.2. Automate majorant

4.1.3. Automate de Daniels

4.2. SIMULATIONS DE RUPTURE DU BI-FIL SANS DECOHESION

4.3 INTERPRETATION DES RESULTATS A L'AIDE DE LA REPRESENTATION CLCPF

4.3.1. La représentation CLCPF

4.3.2. Effet d'échelle de longueur

4.4. RUPTURE DU BI-FIL AVEC DECOHESION

4.4.1. Influence de la decohesion dans la rupture du bi-fil

4.4.2. Influence de la valeur de cisaillement critique

4.4.3. Effet d'échelle de longueur

CHAPITRE 4.

RUPTURE DU BI-FIL

Dans ce chapitre nous utilisons l'outil de simulation construit au chapitre III pour reprendre de façon rigoureuse l'étude de l'évolution des distributions statistiques des résistances sur un fil et un bi-fil afin de répondre à la question posée dans l'introduction à savoir :

Deux fils de même longueur ''collés'' sont-ils plus ou moins résistants (en contrainte) qu'un fil seul ?

La réponse à cette question dépend comme nous l'avons dit de la distribution statistique des résistances le long des fils, mais en outre elle ne peut être que de nature statistique. Plutôt que de nous intéresser à la résistance moyenne qui n'aurait pas beaucoup de sens, et, pour donner la réponse la plus complète possible, nous comparerons la totalité des courbes de distributions cumulées de rupture du monofil et du bi-fil.

Chaque fil est divisé en N cellules. La loi de distribution cumulée de résistance des cellules est notée $R_1(x)$. C'est la probabilité pour qu'une cellule ait une résistance supérieure à x. La loi de

distribution cumulée de résistance d'un fil de N cellules est notée $C_1^N(x)$, celle du bi-fil est notée $C_2^N(x)$.

Dire qu'un fil a une résistance supérieure à x est équivalent à dire que chacune de ses cellules a une résistance supérieure à x (c'est à dire la contrainte $\frac{x}{el}$). Les résistances de chaque cellule étant supposées indépendantes, on obtient ainsi :

$$C_1^N(x) = [R_1(x)]^N \tag{4.1}$$

Il est plus difficile d'obtenir analytiquement $C_2^N(x)$; la probabilité qu'un bi-fil ait une résistance supérieure à x (ou qu'il résiste à un effort 2x).
L'outil de simulation nous permettra de construire $C_2^N(x)$ (généralement à l'aide de 10000 simulations). Cependant, pour faciliter l'interprétation de nos résultats, il est utile de construire deux "automates" simples permettant d'encadrer $C_2^N(x)$ à l'aide de deux expressions analytiques.

Nous appellerons dans la suite bi-cellule un ensemble de deux cellules adjacentes du bi-fil (figure 4.1).

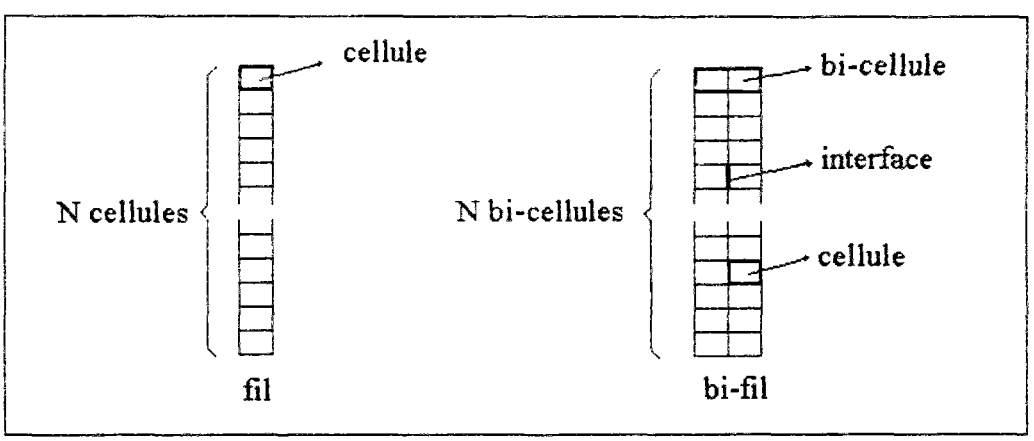


Fig. 4.1 : Représentation d'un fil unitaire et d'un bi-fil découpés respectivement en N cellules et N bi-cellules

4.1. Automates encadrant $C_2^N(x)$

4.1.1. Automate minorant

Rappelons que $C_2^N(x)$ mesure le sous-ensemble $E_2^N(x)$ des réalisations (tirage au sort) telles que le bi-fil de N bi-cellules résiste sous l'effort 2x (c'est à dire la contrainte $\frac{x}{el}$).

Nous pouvons construire un minorant de $C_2^N(x)$ en identifiant un sous-ensemble simple de $E_2^N(x)$. Ainsi, si nous considérons le sous ensemble $Min_2^N(x)$ constitué des réalisations telles que la résistance de chaque cellule est supérieure à x, alors $Min_2^N(x)$ est bien évidemment inclus dans $E_2^N(x)$.
Chacune des 2N cellules du bi-fil ayant une résistance indépendante, on en déduit facilement la mesure de $Min_2^N(x)$.

$$\text{Prob}\left[Min_2^N(x)\right] = \left[R_1(x)\right]^{2N} \tag{4.2}$$

ainsi :

$$\left[R_1(x)\right]^{2N} \leq C_2^N(x) \tag{4.3}$$

Notons que la loi du minorant est celle d'un automate tel que le bi-fil se rompt aussitôt que la première cellule est rompue (loi de la cellule la plus faible).

4.1.2. Automate majorant

Notons $\overline{E_2^N(x)}$ l'ensemble des réalisations complémentaires de $E_2^N(x)$, c'est à dire l'ensemble tel que le bi-fil se rompt sous l'effort 2x. La mesure de $\overline{E_2^N(x)}$ est égale à $1 - C_2^N(x)$.

Pour majorer $C_2^N(x)$, on peut identifier un sous ensemble simple de $\overline{E_2^N(x)}$ dont la mesure minorera $1-C_2^N(x)$. Il s'agit donc d'identifier des réalisations qui entraîneront à coup sûr la rupture du bi-fil sous l'effort 2x.

Considérons l'ensemble noté $Max_2^N(x)$ des réalisations de N pour lesquelles les N bi-cellules sont telles que :

- Soit les deux résistances des cellules de la bi-cellule sont supérieures à x (bi-cellule du 1° type).

- Soit l'une des résistances est inférieure à x et l'autre inférieure à 2x (bi-cellule du ^{2ième} type).

- Il existe au moins une cellule du deuxième type

Dans ce cas, si l'on soumet le bi-fil à un effort 2x, l'une au moins des bi-cellules du deuxième type a subi une première rupture (résistance inférieure à x) suivi d'une deuxième rupture de cellule, car la bi-cellule endommagée a une résistance inférieure à 2x.

Ainsi le bi-fil est certainement rompu sous l'effort 2x et $Max_2^N(x)$ est inclus dans $\overline{E_2^N(x)}$.

Pour la mesure de $Max_2^N(x)$, commençons par donner la probabilité pour qu'une bi-cellule soit du deuxième type. Celle-ci est :

$$T_2(x) = [1 - R_1(x)]^2 + 2[R_1(x) - R_1(2x)].[1 - R_1(x)] \tag{4.4}$$

La démonstration la plus simple est fournie par la figure 4.2 représentant les réalisations possibles des bi-cellules. La partie que nous mesurons est hachurée.

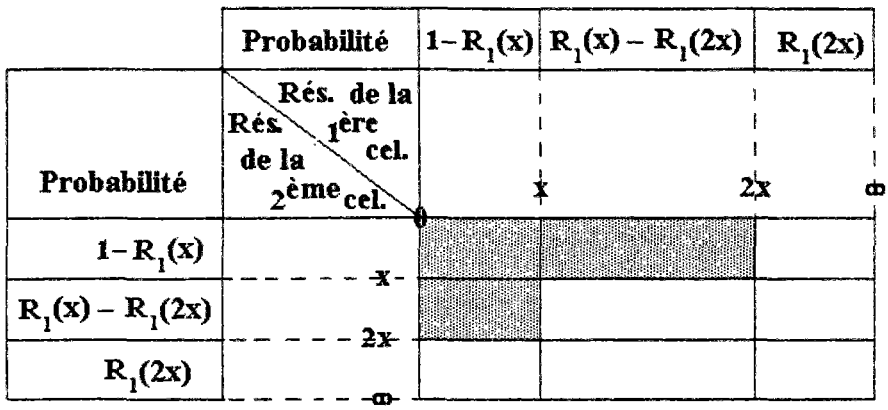


Fig. 4.2 : Ensemble des réalisations possibles des bi-cellules d'un bi-fil

Considérons maintenant un bi-fil et choisissons q bi-cellules. La mesure de l'ensemble des réalisations telles que ces q bi-cellules soient du deuxième type et les N-q autres du premier type est:

$$[T_2(x)]^q [R_1(x)]^{2(N-q)} \tag{4.5}$$

Il y a $C_N^q = \dfrac{N!}{q!(N-q)!}$ façons de choisir les q bi-cellules, chaque choix donnant des ensembles de réalisations disjoints.

L'ensemble $Max_2^N(x)$ est formé de la réunion des ensembles précédents pour q variant de 1 à N. Tous ces ensembles sont disjoints, ainsi la mesure de $Max_2^N(x)$ est :

$$\text{Prob}\left(Max_2^N(x)\right) = \sum_{q=1}^{N} C_N^q \,[T_2(x)]^q [R_1(x)]^{2(N-q)} \tag{4.6}$$

Soit encore :

$$\begin{aligned} \text{Prob}\left(Max_2^N(x)\right) &= \left[(R_1(x))^2 + T_2(x)\right]^N - [R_1(x)]^{2N} \\ &= \left[1 - 2R_1(x) + 2R_1(2x)R_1(x)\right]^N - [R_1(x)]^{2N} \end{aligned} \tag{4.7}$$

Ainsi :

$$C_2^N(x) \le 1-\left[1-2R_1(x)+2R_1(2x)R_1(x)\right]^N+\left[R_1(x)\right]^{2N} \tag{4.8}$$

4.1.3. Automate de Daniels

En 1944 H.E.Daniels [*Daniels-1944*] a étudié la probabilité de résistance d'un toron de p fils non collés en fonction de la résistance d'un fil. Dans ce cas, à chaque rupture de fil, la contrainte est redistribuée uniformément sur les fils restant. En notant $R_1(x)$ la probabilité cumulée de résistance d'un fil (constitué ici d'une seule cellule) et :

$$b_r = 1-R_1\left(\frac{px}{r}\right) \qquad r \in [1,N], \tag{4.9}$$

on montre facilement que la probabilité qu'un toron de p fils ait une résistance inférieure à x s'écrit :

$$B_p = p!\begin{vmatrix} b_p & \frac{b_p^2}{2!} & \frac{b_p^3}{3!} & \cdots & \frac{b_p^{p-1}}{(p-1)!} & \frac{b_p^p}{p!} \\ 1 & b_{p-1} & \frac{b_{p-1}^2}{2!} & \cdots & \frac{b_{p-1}^{p-2}}{(p-2)!} & \frac{b_{p-1}^{p-1}}{(p-1)!} \\ 0 & 1 & b_{p-2} & & \frac{b_{p-2}^{p-3}}{(p-3)!} & \frac{b_{p-2}^{p-2}}{(p-2)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & b_1 \end{vmatrix} \tag{4.10}$$

Dans le cas p = 2 on trouve :

$$B_2(x) = 1-\left[R_1(x)\right]^2-2.\left[1-R_1(x)\right].R_1(2x) \tag{4.11}$$

Nous reconnaissons alors la mesure de l'aire hachurée de la figure 4.2 :

$$B_2(x) = T_2(x) \tag{4.12}$$

Considérons maintenant l'automate suivant pour modéliser un bi-fil de N bi-cellules.

- Lorsqu'une cellule d'une bi-cellule se rompt, la contrainte est doublée dans la co-cellule mais invariante dans les autres cellules du bi-fil (On reconnaît l'automate de H.E.Daniels).

La probabilité cumulée de résistance d'une bi-cellule de ce type est :

$$R_2(x) = 1 - B_2(x) = [R_1(x)]^2 + 2.[1 - R_1(x)]\ R_1(2x) \tag{4.13}$$

La probabilité cumulée de résistance de l'automate de N bi-cellules indépendantes est :

$$D_2^N(x) = \left[[R_1(x)]^2 + 2.[1 - R_1(x)]\ R_1(2x)\right]^N \tag{4.14}$$

Notons que l'automate se rompt si et seulement si le bi-fil de N bi-cellules contient au moins une bi-cellule du deuxième type selon la définition du paragraphe précédent.

Ce n'est pas en toute rigueur un automate majorant pour $C_2^N(x)$, car l'on peut imaginer des réalisations telles qu'une bi-cellule soit du deuxième type (une cellule de résistance inférieure à x, l'autre de résistance inférieure à 2x) sans que le bi-fil casse sous l'effort 2x. Il faut pour cela que dans le voisinage de la cellule de résistance inférieure à x se trouve une cellule encore plus faible qui se rompe en premier, déchargeant ainsi la cellule de résistance inférieure à x.
On voit bien cependant que la probabilité d'occurrence de situations semblables à celle décrite ici est très faible et généralement bien inférieure à la mesure des réalisations conduisant à la rupture non considérée dans l'expression de $D_2^N(x)$.

On peut ainsi dire que $D_2^N(x)$ est un quasi-majorant de $C_2^N(x)$ bien que cela ne soit pas prouvé en toute rigueur.

Dans la suite, les courbes donnant $C_2^N(x)$ obtenues par simulations seront comparées à $D_2^N(x)$ que nous appellerons par abus de langage ''automate majorant''.

Nous vérifierons bien d'ailleurs que :

$$C_{2min}^{N}(x) \le C_{2}^{N}(x) \le C_{2max}^{N}(x) \tag{4.15}$$

$$\text{où} \quad C_{2min}^{N}(x) = \left[R_1(x)\right]^{2N} \quad \text{et} \quad C_{2max}^{N}(x) = D_{2}^{N}(x)$$

Nous vérifierons en outre que le minorant est une bonne approximation de $C_2^N(x)$ aussitôt que la dispersion est faible (module de Weibull élevé).

4.2. Simulations de rupture de bi-fils sans décohésion

D'un point de vue pratique pour ces simulations, nous utilisons l'algorithme de rupture décrit plus haut (algorithme avec décohésion) en choisissant une résistance critique de l'interface τ_c très grande.

Nos simulations numériques sont effectuées en prenant comme loi de distribution des résistances des cellules une loi de Weibull de paramètres (α,β). Pour une valeur du module de Weibull α donné (β étant à chaque fois déterminé par $\bar{x} = 1$ compte tenu de la nature adimensionnelle du problème que nous traitons numériquement), nous procédons à une batterie de 10000 simulations de la rupture d'un fil unitaire ou d'un bi-fil.

Ce nombre élevé de simulations nous permet d'avoir une statistique de rupture suffisamment précise et les courbes de probabilité cumulée de rupture qui en découlent sont alors confrontées aux courbes obtenues en utilisant l'automate minorant et l'automate majorant. Nous vérifions dans un premier temps que pour une même loi de distribution statistique des résistances, les courbes de probabilité cumulée de rupture obtenues par simulation numérique d'un fil de N cellules et les courbes résultant de l'expression analytique $C_1^N(x)$ sont confondues (figure 4.3).

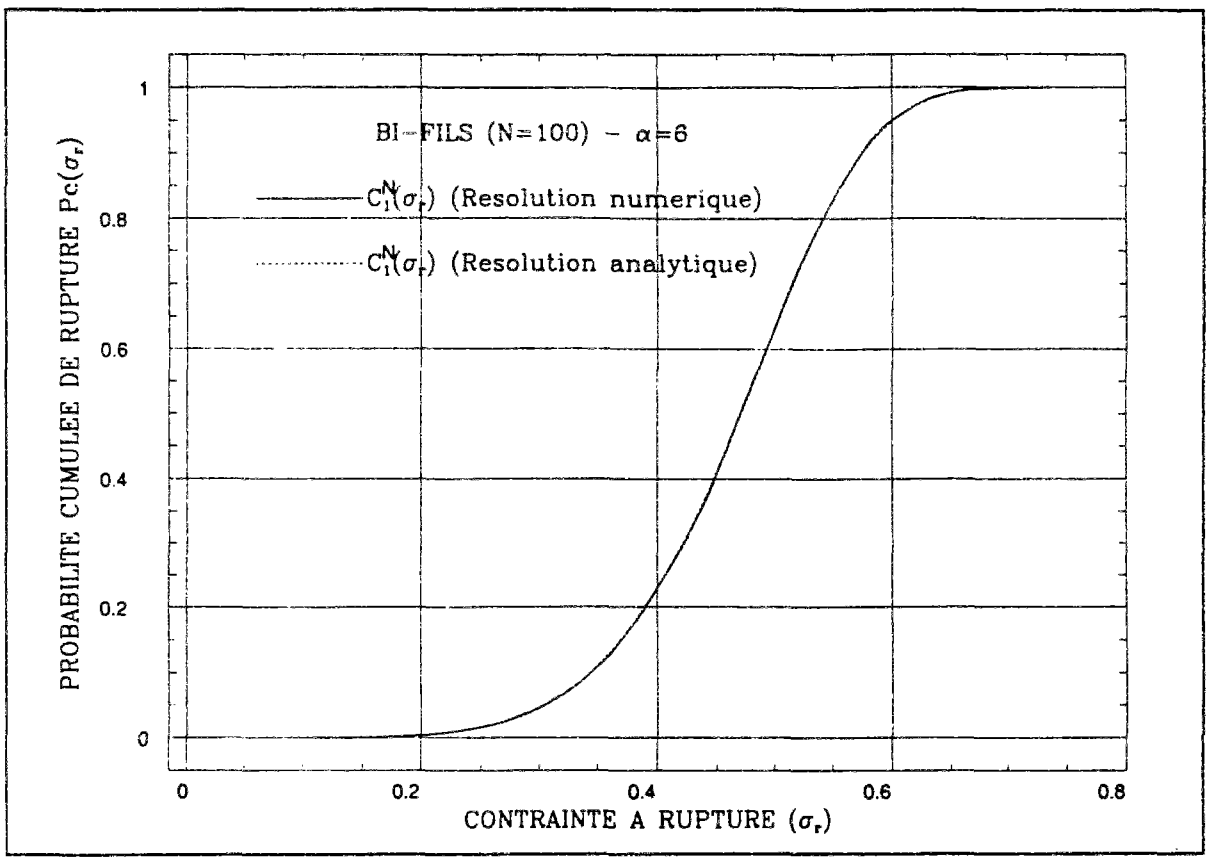


Fig. 4.3 : Probabilité cumulée de rupture d'un fil unitaire obtenue analytiquement et par simulation pour α=6

Ceci valide notre modèle et notre algorithme de rupture pour un fil unitaire.

Dans les figures ci-dessous nous présentons les courbes de probabilité de rupture obtenues numériquement pour un fil unitaire, pour un bi-fil et les courbes de probabilité de rupture d'automates minorant et majorant. Ces quatre courbes sont données pour différentes valeurs du module de Weibull α.

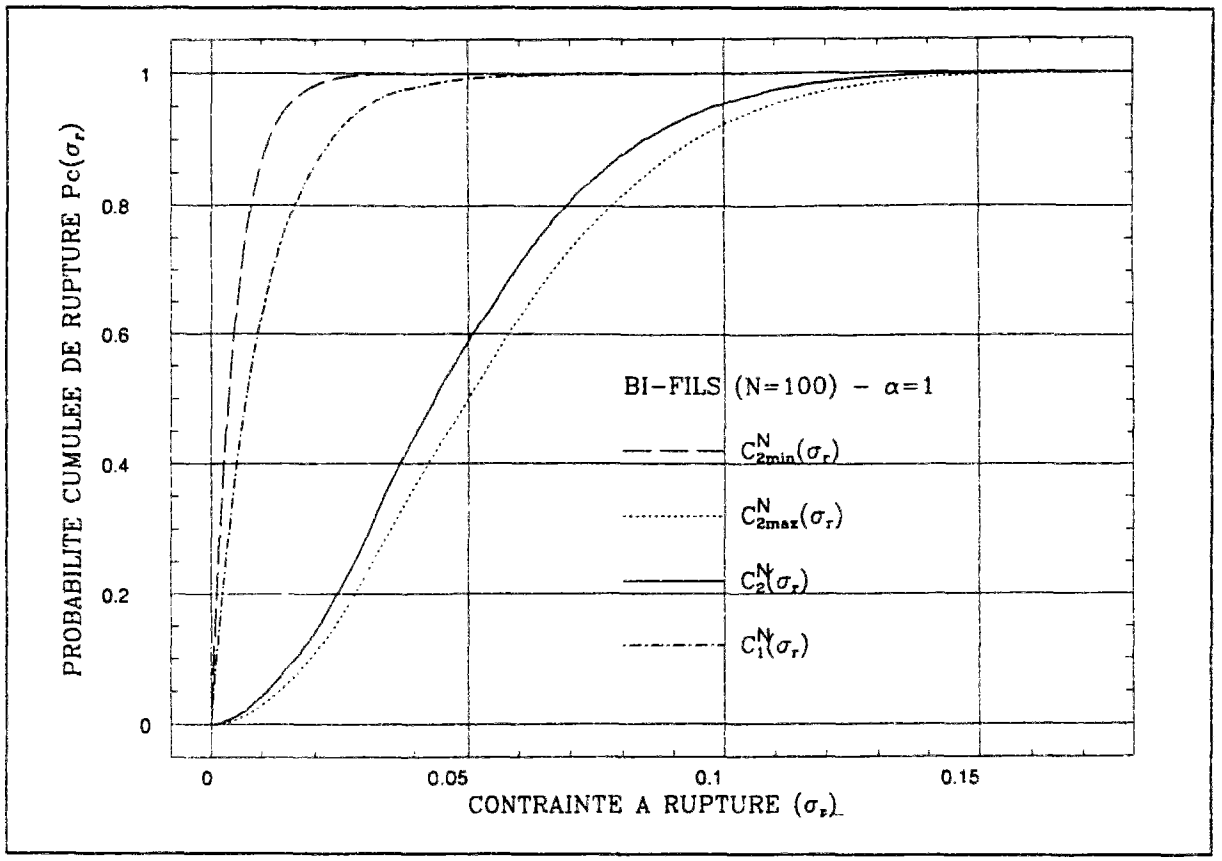


Fig. 4.4 : probabilités cumulées de rupture du fil unitaire et du bi-fil (α=1)

La figure 4.4 nous montre les probabilités cumulées de rupture obtenues pour α=1. Tout d'abord, nous remarquons que les valeurs prises par la courbe de probabilité cumulée de rupture simulée du bi-fil $C_2^N(x)$ sont supérieures aux valeurs prises par la courbe de probabilité cumulée simulée $C_1^N(x)$ du fil unitaire. La résistance moyenne du bi-fil est supérieure pour α=1 à la résistance moyenne du fil unitaire et nous démontrons ainsi que le "collage" de deux fils renforce la résistance moyenne dans le cas particulier d'une distribution statistique de résistances des cellules de type Weibull de module α=1 c'est à dire à forte dispersion. De plus, outre la vérification que la courbe de probabilité cumulée de rupture simulée du bi-fil est bien située entre les courbes de probabilités minimale $C_{2min}^N(x)$ et maximale $C_{2max}^N(x)$, on remarque aussi que $C_2^N(x)$ et $C_{2max}^N(x)$ sont très proches l'une de l'autre ce qui signifie pour α=1 que la rupture du bi-fil intervient après la rupture de plus d'une de ses cellules. Celà est dû à la grande dispersion des résistances limites dans le bi-fil.

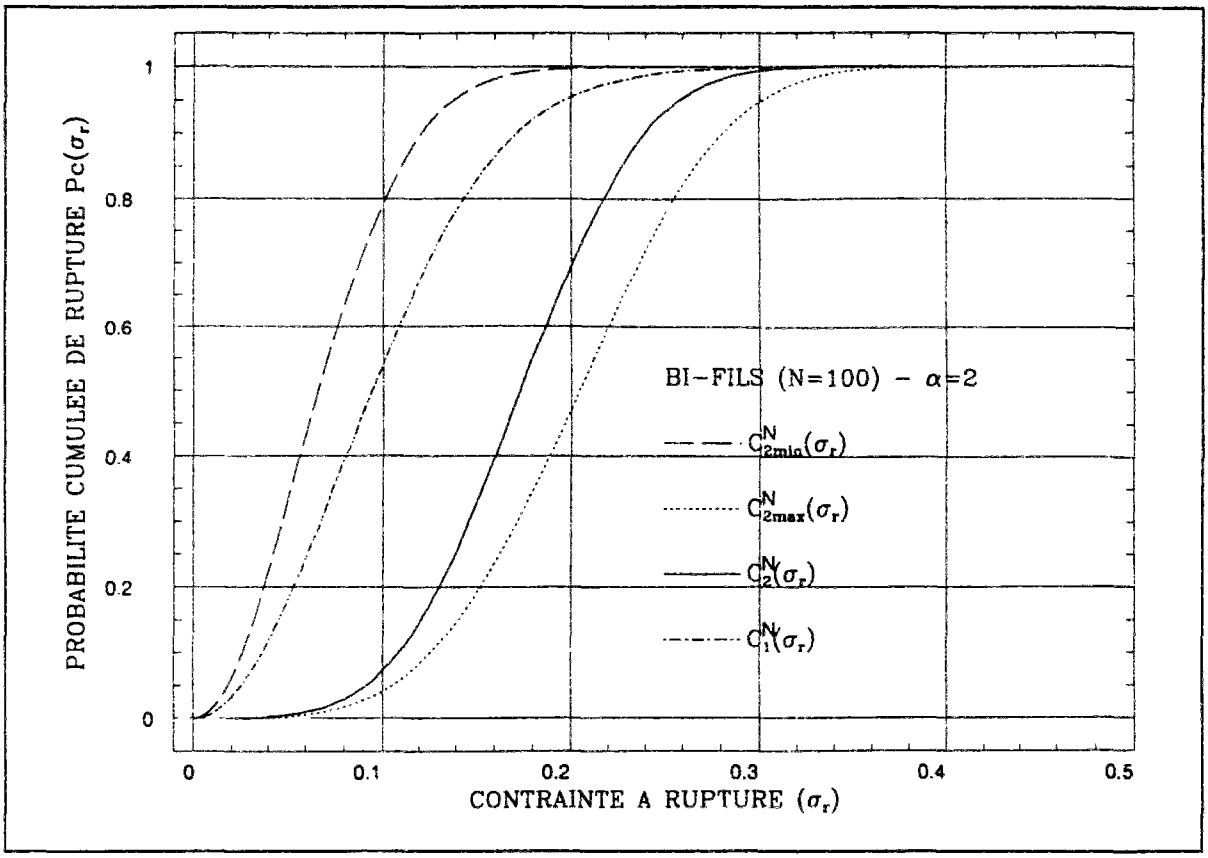


Fig. 4.5 : probabilités cumulées de rupture du fil unitaire et du bi-fil (α=2)

Si nous considérons maintenant ces courbes pour α=2 (figure 4.5), nous nous apercevons que la résistance moyenne du bi-fil est toujours supérieure à la résistance moyenne du fil unitaire. D'autre part, la courbe de probabilité cumulée de rupture simulée du bi-fil s'éloigne de la courbe de probabilité majorante $C^N_{2max}(x)$ car la probabilité qu'une bi-cellule du bi-fil ait une cellule qui supporte un niveau de contrainte double après rupture de sa co-cellule diminue lorsque la distribution des résistances des cellules devient plus concentrée.

Les figures 4.6 et 4.7 confirment notre propos. Pour α=3, la résistance moyenne du bi-fil est toujours supérieure à la résistance moyenne du fil unitaire, mais, la courbe de probabilité cumulée de rupture simulée du bi-fil croise la courbe de probabilité cumulée de rupture simulée du fil unitaire.

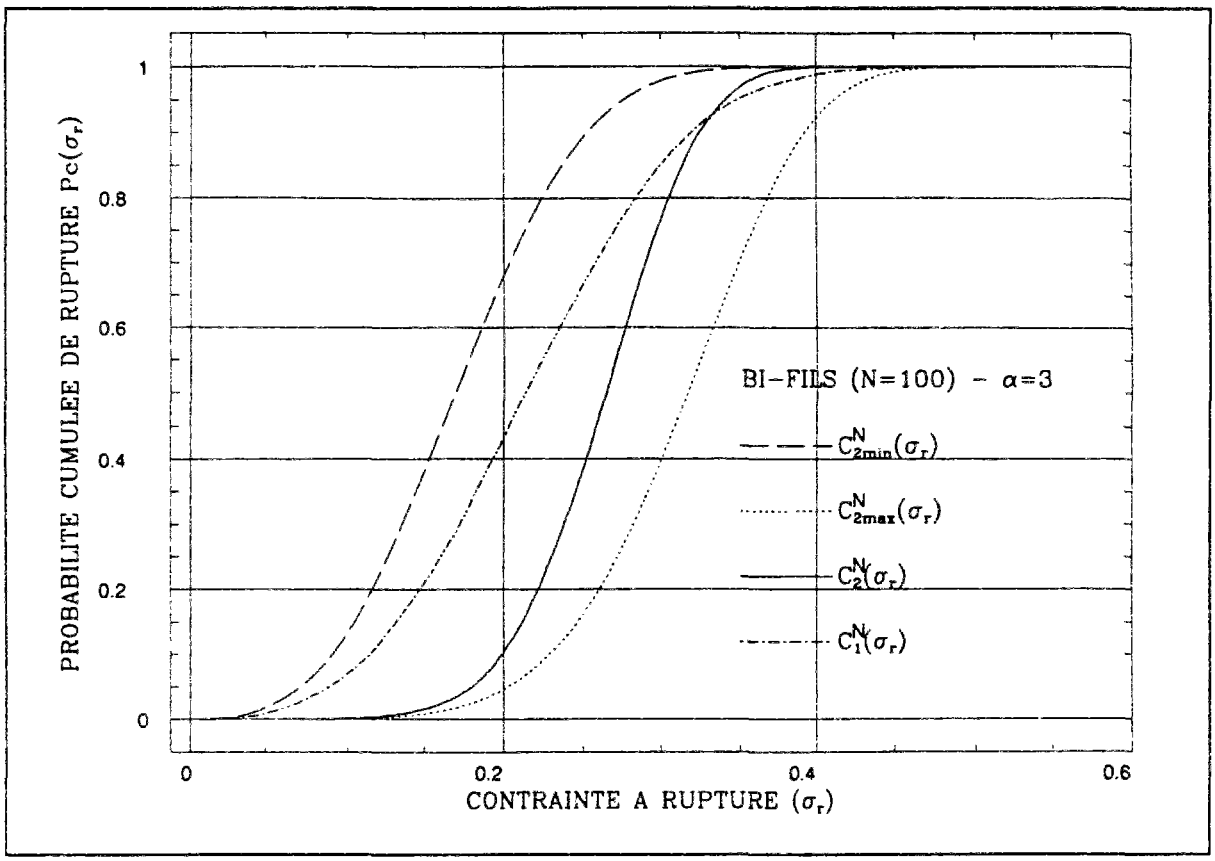


Fig. 4.6 : probabilités cumulées de rupture du fil unitaire et du bi-fil (α=3)

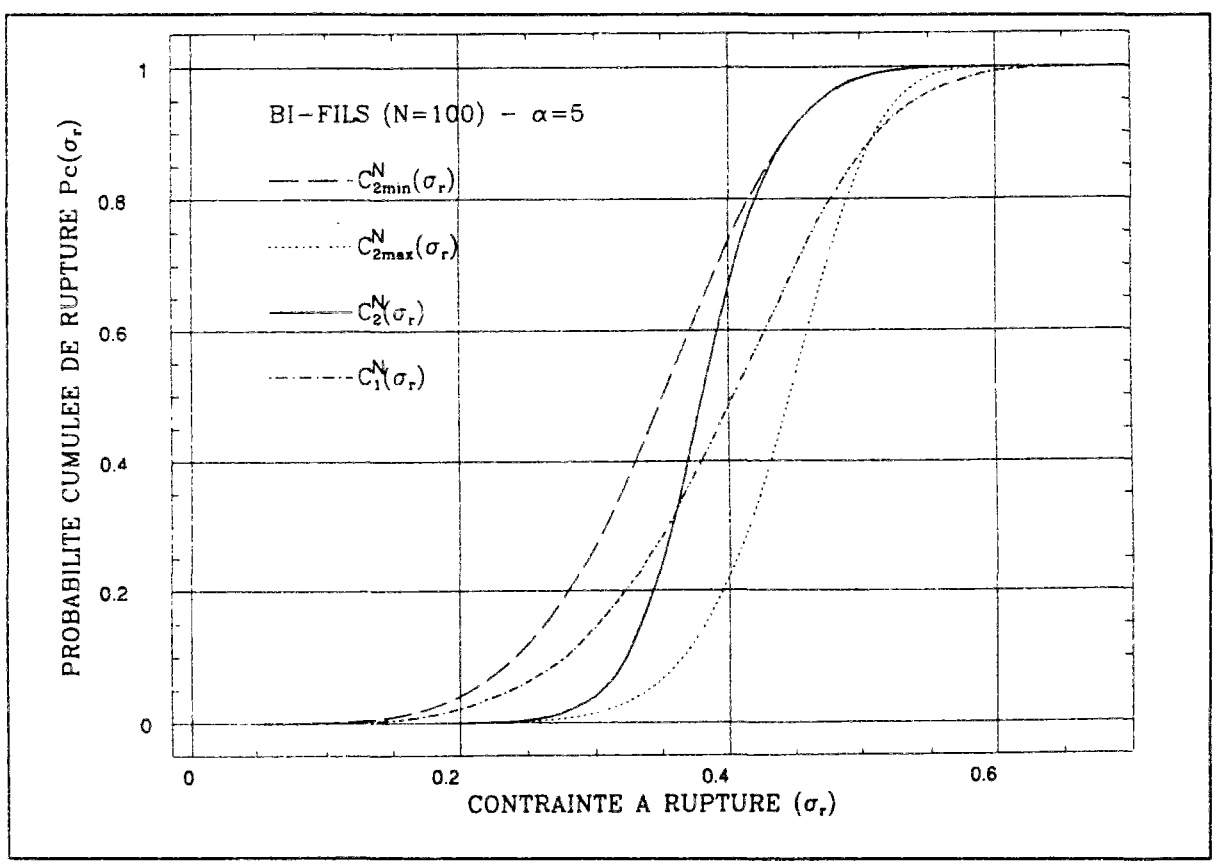


Fig. 4.7 : probabilités cumulées de rupture du fil unitaire et du bi-fil (α=5)

Sur la figure 4.7 la résistance moyenne du bi-fil est maintenant inférieure à la résistance moyenne du fil unitaire.

Ainsi, la courbe de probabilité cumulée de rupture simulée du bi-fil se rapproche progressivement de la courbe de probabilité minorante car plus α augmente et plus la probabilité qu'une bi-cellule du bi-fil ait une cellule qui supporte un niveau de contrainte double après rupture de sa co-cellule diminue. Ainsi pour α=5 la partie supérieure de la courbe probabilité cumulée de rupture "épouse" la courbe de probabilité minorante et sur la figure 4.8 (α=8), la courbe probabilité cumulée de rupture est pratiquement collée à la courbe de probabilité minorante. Il reste cependant un écart sensible entre les deux courbes pour les très faibles résistances.

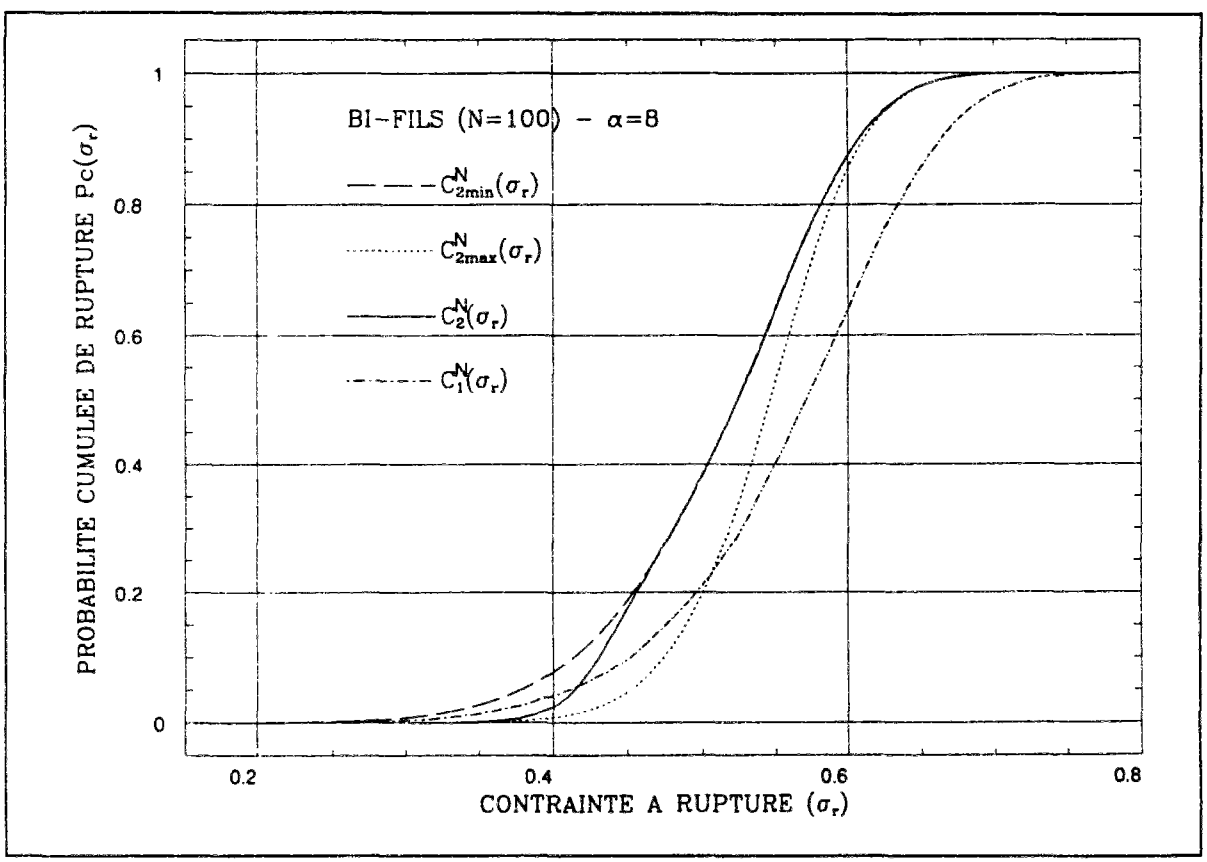


Fig. 4.8 : probabilités cumulées de rupture du fil unitaire et du bi-fil (α=8)

Les contraintes à rupture du bi-fil pour lesquels la courbe de probabilité $C_2^N(x)$ est

confondue avec la courbe de probabilité $C^N_{2min}(x)$ sont des contraintes à rupture du bi-fil "au premier lien cassé", la rupture du bi-fil intervenant dès la rupture d'une de sés cellules. De même on remarque que la courbe de probabilité majorante vient se confondre progressivement avec la courbe de probabilité minorante car la probabilité majorante tend vers la probabilité minorante lorsque α augmente. En effet, le second membre de l'expression de la probabilité est petit devant le premier membre à partir de certaines valeurs de x et de α.

La figure 4.9 (α=10) et la figure 4.10 (α=20) confirme que les courbes de probabilité cumulée de rupture simulée du bi-fil, de probabilité minorante et de probabilité majorante se confondent progressivement.

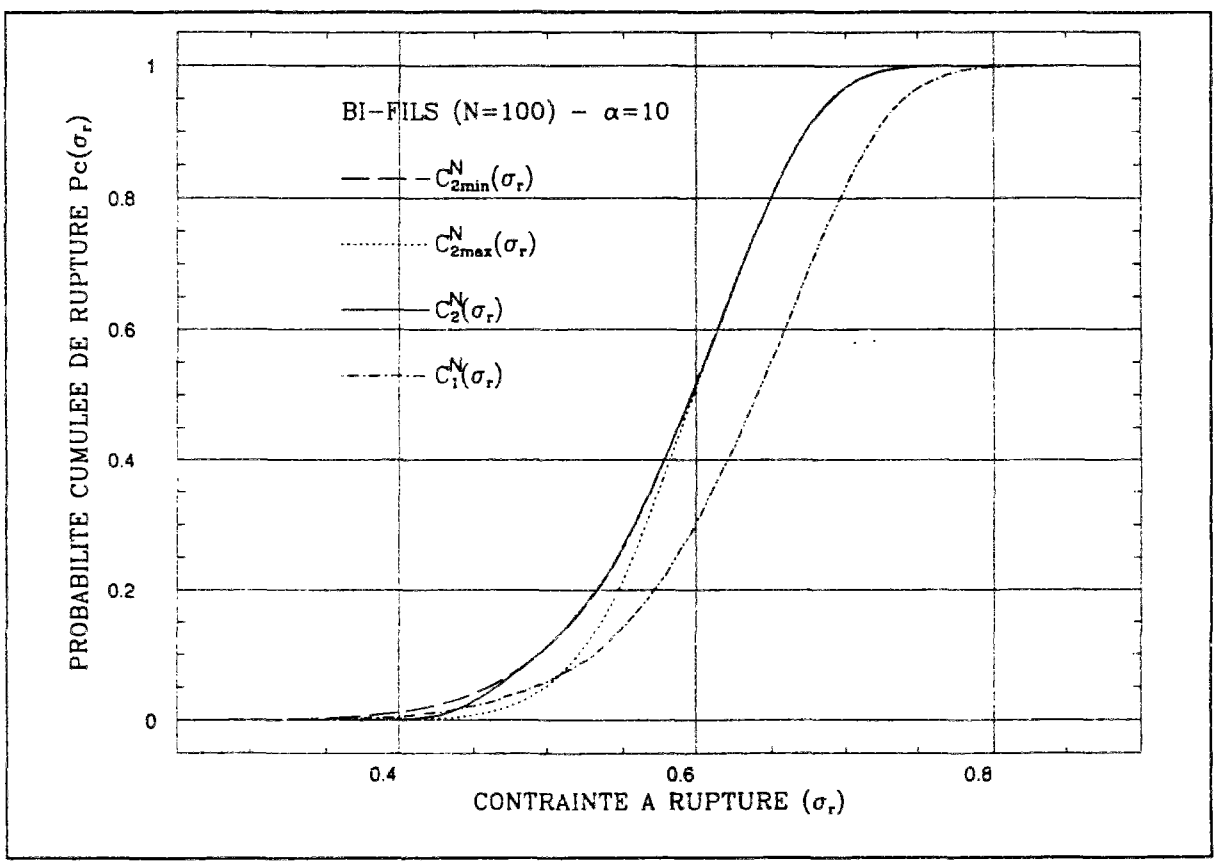


Fig. 4.9 : probabilités cumulées de rupture du fil unitaire et du bi-fil (α=10)

Pour une présentation plus synthétique des résultats, la figure 4.11 donne l'évolution des résistances moyennes du bi-fil par rapport à celles du fil unitaire en fonction du paramètre de dispersion de la loi de distribution de Weibull α.

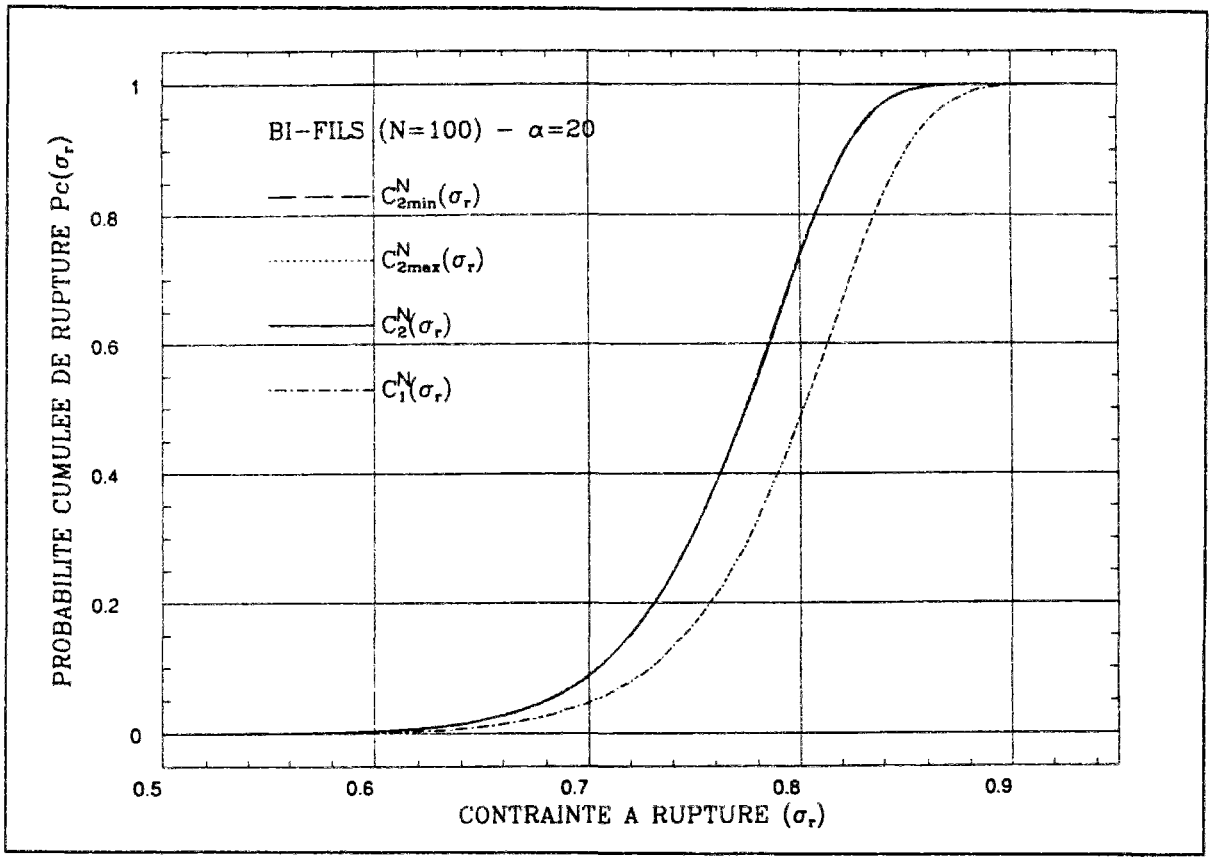


Fig. 4.10 : probabilités cumulées de rupture du fil unitaire et du bi-fil (α=20)

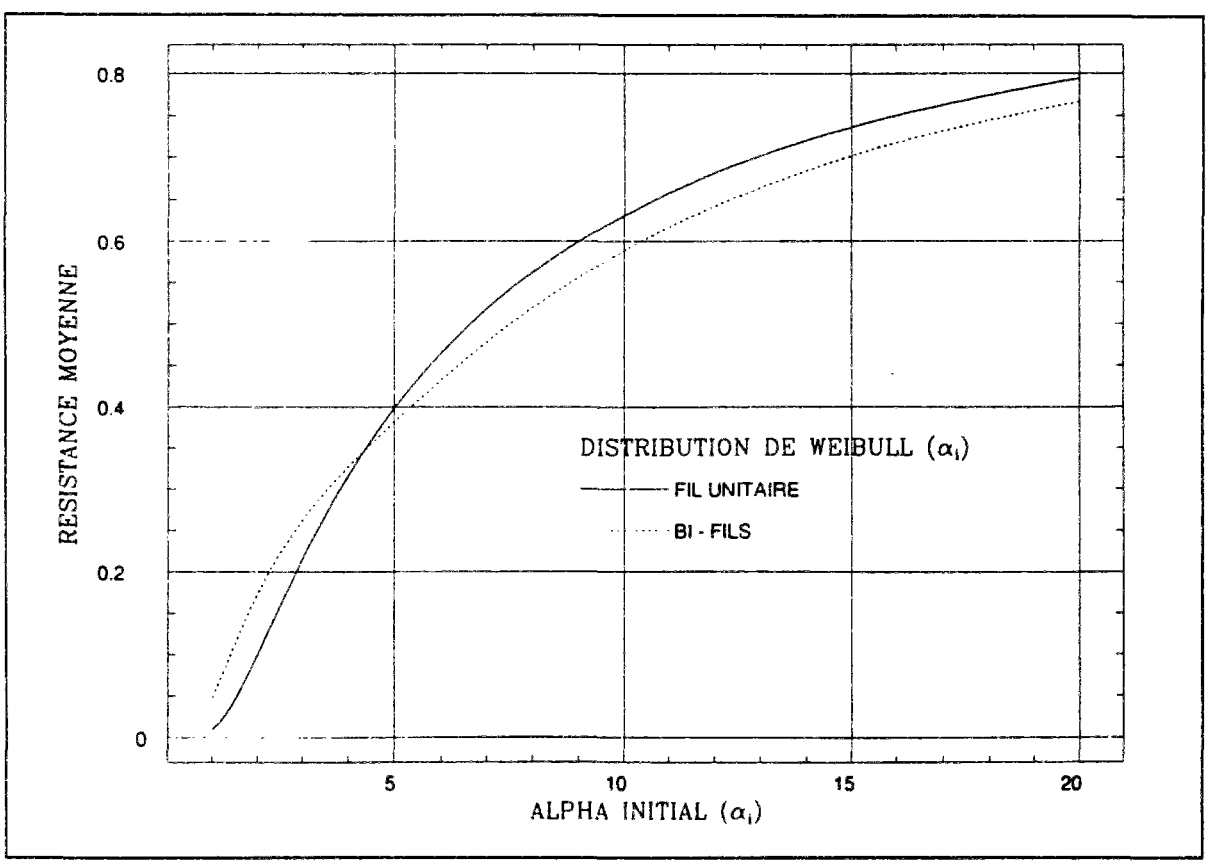


Fig. 4.11 : Evolution de la résistance moyenne du fil unitaire et du bi-fil

Nous vérifions que la résistance moyenne du bi-fil est supérieure à la résistance moyenne du fil unitaire pour les petites valeurs de α, et, au delà de α=4,25, la résistance moyenne du fil unitaire est supérieure à la résistance moyenne du bi-fil. On retrouve pour α>4,25 ce que l'on peut appeler un effet d'échelle de volume.

Nous sommes tentés d'approximer les courbes de probabilité cumulée de rupture simulée du bi-fil par des courbes de Weibull. Pour la détermination des paramètres d'une telle courbe nous minimisons l'erreur horizontale $e_h^{(\alpha)}$ (équation 2.5 chapitre 2). Nous déterminons alors la valeur de α_{bf} qui est le paramètre de la courbe de Weibull qui approxime les courbes de probabilités cumulées de rupture simulées du bi-fil. La figure 4.12 nous montre la variation de la valeur de α_{bf} en fonction de la valeur du paramètre α de la loi de distribution statistique des résistances des cellules du fil unitaire. Cette variation est représentée par la courbe $\alpha_{bf} = f(\alpha)$. Nous reportons sur la figure 4.12 l'erreur $e_h^{(\alpha)}$.

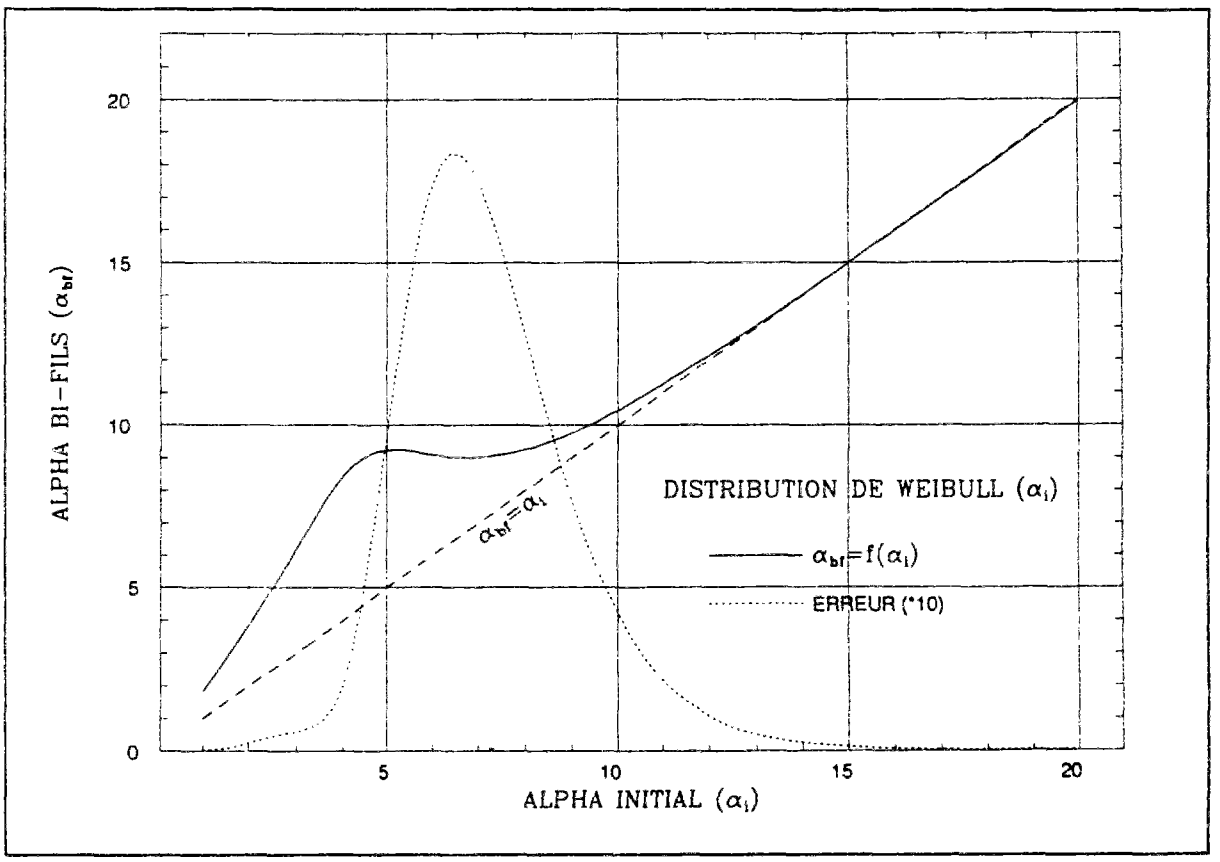


Fig. 4.12 : Paramètre de Weibull α des courbes de Weibull identifiant les courbes de probabilités cumulées de rupture simulées du bi-fil

La courbe f(α) présente trois parties distinctes que l'on peut approcher par des droites :

$$(4.16) \qquad \begin{cases} f(\alpha) = 2\alpha & \text{pour } \alpha < 4{,}25 \\ f(\alpha) \approx 9 & \text{pour } 4{,}25 < \alpha < 9 \\ f(\alpha) = \alpha & \text{pour } \alpha > 9 \end{cases}$$

La première partie de la courbe f(α) s'approxime par une droite de pente 2, pente qui est mesurée à l'endroit où l'erreur de détermination du paramètre α_{bf} est la plus faible, c'est à dire à l'origine. Cette droite correspond aux valeurs de α pour lesquelles la résistance moyenne du bi-fil est supérieure à la résistance moyenne du fil unitaire et pour lesquelles la distribution statistique des résistances est suffisamment étalée pour que la première rupture d'une des cellules du bi-fil n'entraîne pas la rupture du bi-fil (figure 4.11).

La seconde partie de la courbe f(α) pratiquement horizontale correspond à une zone de transition dans la rupture du bi-fil. Dans cette zone, la résistance moyenne du bi-fil est inférieure à la résistance moyenne du fil unitaire et, la courbe de probabilité cumulée de rupture simulée du bi-fil est ''au dessus'' de la courbe de probabilité cumulée de rupture du fil unitaire pour les faibles valeurs de résistance du bi-fil (valeur de la probabilité de rupture) (figure 4.11).

La dernière partie de la courbe f(α) est approximée par la droite f(α)=α. Dans cette partie et pour α<14, la courbe de probabilité cumulée de rupture simulée du bi-fil n'est pas confondue avec la courbe de probabilité minorante pour les plus faibles valeurs de résistances du bi-fil alors que pour α>14, ces deux courbes de probabilité sont presque confondues et α_{bf} est identique à α. Nous sommes alors très proche d'un automate de rupture du bi-fil à la première cellule rompue (loi du maillon le plus faible). Cet automate suit en effet rigoureusement une loi de Weibull de module α.

La considération de la courbe donnant l'erreur $e_h^{(\alpha)}$ nous fait penser que dans la partie intermédiaire, l'approximation de $C_2^N(x)$ par une courbe de Weibull à deux paramètres est assez médiocre. Il est nécessaire de proposer une analyse plus fine des résultats.

4.3. Interprétation des résultats à l'aide de la représentation CLCPF

4.3.1. La représentation CLCPF

Pour faciliter une représentation plus fine, nous adoptons une nouvelle forme de présentation des résultats de simulations effectuées sur le bi-fil. Nous représentons les courbes de probabilité cumulée de rupture dans un graphe (X,Y) qui est inspiré d'un schéma de représentation classique [*Freudenthal,1968*] où l'ordonnée Y s'écrit :

$$Y = \mathrm{Log}\left[\mathrm{Log}\left(\frac{1}{1-P_c(\sigma_r)}\right)\right] \tag{4.17}$$

L'abscisse X est, en général, pour une approche classique du type $X = \mathrm{Log}(\sigma_r)$. Nous choisissons quant à nous une expression différente, affine en $\mathrm{Log}(\sigma_r)$, obtenue en intégrant la loi de la cellule la plus faible. Pour cela nous posons :

$$X = \mathrm{Log}\left[\mathrm{Log}\left(\frac{1}{1-P_{cmin}(\sigma_r)}\right)\right] \tag{4.18}$$

avec :

$$1-P_{cmin}(\sigma_r) = C_{2min}^{N}(\sigma_r) = \left[R_1(\sigma_r)\right]^{2N} = \left\{\exp\left[-2\left(\frac{\sigma_r}{\beta}\right)^{\alpha}\right]\right\}^{N} \tag{4.19}$$

d'où :

$$X = \mathrm{Log}\left[2N\left(\frac{\sigma_r}{\beta}\right)^{\alpha}\right] \tag{4.20}$$

Ce schéma de représentation a pour intérêt de mettre en évidence le type de courbe de probabilité cumulée de rupture obtenue. En effet, si celle-ci s'avère être une courbe de Weibull, elle sera alors représentée dans un tel graphe par une droite. De plus, nous avons adopté cette forme pour l'abscisse X car cette présentation nous permet de comparer les

courbes de probabilité cumulée de rupture du bi-fil simulées aux courbes de probabilité cumulée minorantes. Le graphe (X,Y) se révèle être un diagramme de "Comparaison par rapport à la Loi de la Cellule la Plus Faible" que nous nommerons par la suite représentation CLCPF. Nous pouvons alors aisément observer comment se situe la rupture du bi-fil par rapport à la loi de la cellule la plus faible et, dans la représentation CLCPF les courbes de probabilité minorantes (loi de la cellule la plus faible) seront situées sur la droite d'équation Y=X (diagonale du graphe). Ainsi, d'une part, si la rupture du bi-fil intervient dès la rupture de la cellule la plus faible, sa courbe statistique de résistances se trouvera sur la diagonale du graphe CLCPF, et, d'autre part, si la courbe statistique de résistances se situe ailleurs sur ce graphe nous devrons analyser autrement la rupture du bi-fil. Nous reportons sur la figure 4.13 les courbes de probabilités minorantes et majorantes dans la représentation CLCPF.

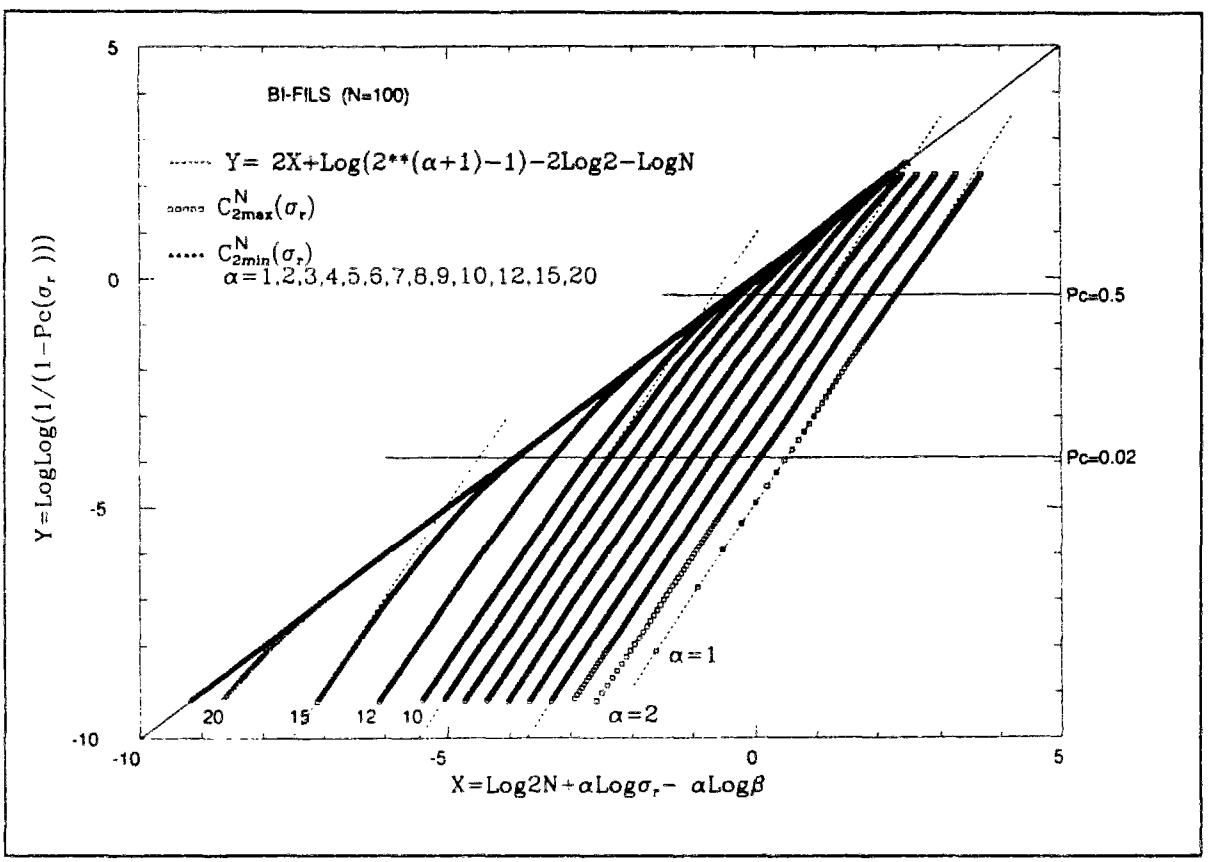


Fig. 4.13 : Représentation des courbes de probabilités minorantes et majorantes dans la représentation CLCPF.

Les courbes de probabilité minorantes sont confondues pour toutes les valeurs de α et elles se situent sur la droite Y=X. De plus, nous remarquons que les courbes de probabilité majorantes

sont bornées par la droite minorante pour les hautes valeurs de résistances. Elles peuvent alors être schématisées par la droite d'équation Y=X et par une courbe de Weibull asymptote de la courbe de probabilité majorante pour les faibles valeurs de résistances. Cette courbe de Weibull asymptote est obtenue en effectuant un développement asymptotique au voisinage des petites résistances ($\sigma_r \approx 0$) de l'expression de la probabilité majorante.

L'équation de cette asymptote dans la représentation CLCPF est obtenue en réalisant un développement asymptotique au deuxième ordre de l'expression suivante :

$$Y = \mathrm{Log}\left[\mathrm{Log}\left(\frac{1}{1 - P_{cmax}(\sigma_r)}\right)\right] \tag{4.21}$$

Nous rappelons l'expression de la probabilité de résistance majorante (équations 4.13, 4.15):

$$1 - P_{cmax}(\sigma_r) = C_{2max}^{N}(\sigma_r) = \left[R_2(\sigma_r)\right]^N \tag{4.22}$$

d'où :

$$1 - P_{cmax}(\sigma_r) = \left\{\exp\left[-2\left(\frac{\sigma_r}{\beta}\right)^{\alpha}\right] + 2.\left[1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma_r}{\beta}\right)^{\alpha}\right]\right].\exp\left[-\left(\frac{2\sigma_r}{\beta}\right)^{\alpha}\right]\right\}^N \tag{4.23}$$

Nous procédons à un développement asymptotique au deuxième ordre au voisinage des petites résistances de cette expression et nous obtenons alors :

$$1 - P_{cmax}(\sigma_r) \approx \exp\left[-N\left(2^{\alpha+1} - 1\right)\left(\frac{\sigma_r}{\beta}\right)^{2\alpha}\right] \tag{4.24}$$

d'où :

$$\mathrm{Log}\left[\mathrm{Log}\left(\frac{1}{1 - P_{cmax}(\sigma_r)}\right)\right] \approx 2\alpha\,\mathrm{Log}\sigma_r - 2\alpha\,\mathrm{Log}\beta + \mathrm{Log}N + \mathrm{Log}\left(2^{\alpha+1} - 1\right) \tag{4.25}$$

L'équation des droites asymptotes des courbes de probabilité de rupture majorantes se déduit alors de l'expression de l'abscisse X et nous obtenons :

$$\mathrm{Log}\left[\mathrm{Log}\left(\frac{1}{1 - P_{cmax}(\sigma_r)}\right)\right] \approx 2X + \mathrm{Log}\left(2^{\alpha+1} - 1\right) - \mathrm{Log}N - 2\mathrm{Log}2 \tag{4.26}$$

Les asymptotes des courbes de probabilité majorantes sont donc des droites de pente p=2 et chaque courbe de probabilité de rupture majorante est bornée pour les faibles valeurs de résistances par une droite représentant une courbe de Weibull de module α double. Nous pouvons donc approximer chaque courbe de probabilité de rupture majorante par deux droites qui sont respectivement de pente unité et de pente double. Cependant, si nous nous intéressons à une zone pour laquelle la probabilité de rupture est comprise entre 0.02 et 0.5 (98% et 50% de chance de ne pas rompre le bi-fil), nous constatons que les courbes de probabilité de rupture majorantes sont la plupart du temps approximées dans cette zone d'intérêt par une seule de ces deux courbes de Weibull. Nous présentons maintenant sur la figure 4.14 les courbes de probabilité cumulée simulées de rupture du bi-fil dans la représentation CLCPF.). La courbe de probabilité cumulée de rupture obtenue pour α=1 est la courbe la plus à droite dans cette représentation, et, au fur et à mesure que la valeur de α augmente, les courbes de probabilité cumulée de rupture correspondantes se décalent vers la gauche.

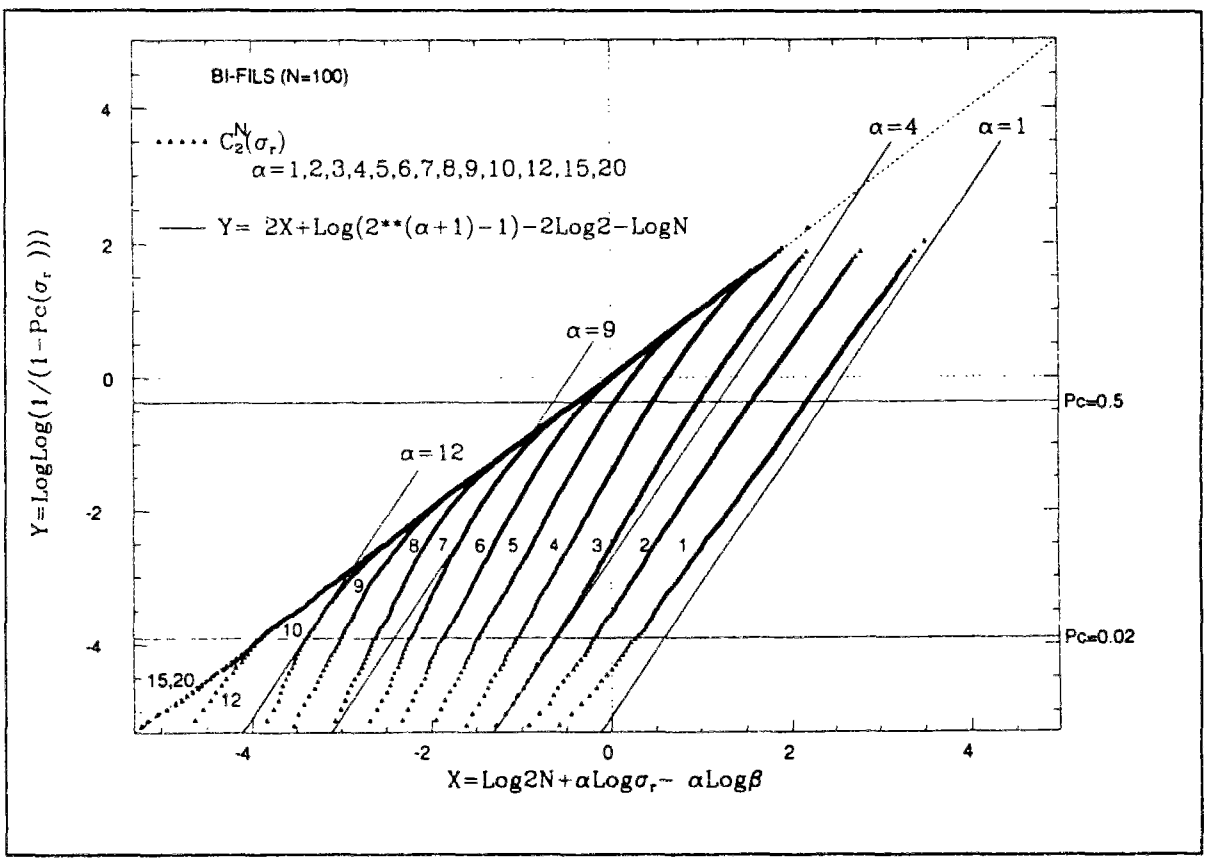


Fig. 4.14 : Courbes de probabilités cumulées de rupture du bi-fil dans la représentation CLCPF

Les courbes de probabilité cumulée de rupture du bi-fil sont obtenues en réalisant 10000 simulations et nous ne reportons sur la représentation CLCPF qu'un point pour dix simulations.

Nous remarquons que pour la plupart des valeurs de α (sauf pour les petites valeurs de α, $\alpha<3$), les bi-fils dont toutes les cellules ont des niveaux de résistance élevés présentent des scénarios de rupture brutale. En effet, dans ce cas, la rupture du bi-fil se produit après la rupture d'une seule cellule et le bi-fil obéit à un schéma de rupture à la première cellule.

Pour les valeurs de résistance plus faibles (le niveau de résistance "plus faible" étant variable suivant la valeur de α) la rupture de la première cellule ne provoque pas la ruine du bi-fil. Le bi-fil ne casse dans ce scénario qu'après la rupture de plusieurs cellules, ceci étant surtout vérifié pour les bi-fils les moins résistants et les plus faibles valeurs de α.

Les familles de bi-fils se classent en deux niveaux :

- Une famille de bi-fils pour lesquels la rupture est provoquée par la rupture d'une cellule. Cette famille de bi-fils comprend les bi-fils de très grande résistance ou les bi-fils pour lesquels le module α de la loi de distribution des résistances est très grand.

-Une famille de bi-fils qui comportent des cellules relativement faibles et pour lesquels la ruine n'intervient qu'après la rupture de plusieurs cellules. La rupture des bi-fils de cette famille suit un scénario de type "automate majorant". Ainsi, les deux automates minorant et majorant schématisent deux scénarios différents qui se produisent l'un et l'autre dans les simulations.

4.3.2. Effet d'échelle de longueur

Nous nous intéressons maintenant à l'étude de l'effet d'échelle de longueur sur la rupture du bi-fil. Nous nous attendons à trouver un effet d'échelle de type "chaîne" (voir chapitre 2). La manière la plus adaptée pour mettre en évidence cet effet d'échelle de longueur consiste à reporter les courbes de probabilité de rupture obtenues pour les bi-fils comportant un nombre de cellules N dans le graphe (X',Y')=(X-logN,Y-LogN), c'est à dire la représentation "CLCPF corrigée des effets d'échelle de longueur". Nous translatons alors chaque courbe de statistique de rupture d'une valeur de LogN sur la diagonale de la représentation CLCPF de sorte que si la rupture du bi-fil obéit à une loi de type chaîne, toutes les courbes seront superposées quelque soit le nombre de bi-cellules N. Nous présentons sur la

figure 4.15 les courbes de probabilité cumulée de rupture pour des bi-fils de N=100,200 et 300 bi-cellules dans la représentation ''CLCPF corrigée des effets d'échelle de longueur''.

L'effet d'échelle de longueur sur la rupture du bi-fil est correctement identifié comme effet d'échelle de type chaîne. En effet, les courbes statistiques de résistances obtenues pour des bi-fils de longueurs différentes sont très proches pour toutes les valeurs de α. Pour les très faibles valeurs de résistances et pour α=1, les courbes de statistique de résistances du bi-fil de 100 cellules sont plus éloignées des deux autres courbes. Ceci est dû d'une part à la nature du scénario de rupture du bi-fil pour α=1, et d'autre part au fait que nous simulons moins bien la rupture du bi-fil pour les très faibles valeurs de résistances, la densité de distribution dans le bi-fil des petites résistances (et très hautes résistances) étant moins importante que pour les résistances moyennes. Cette densité de distribution devient alors plus uniforme sur toutes les résistances du bi-fil dés lors que le nombre de cellules du bi-fil augmente, ce qui explique que les courbes de statistique de résistances soient pratiquement confondues pour N=200 et N=300 bi-cellules.

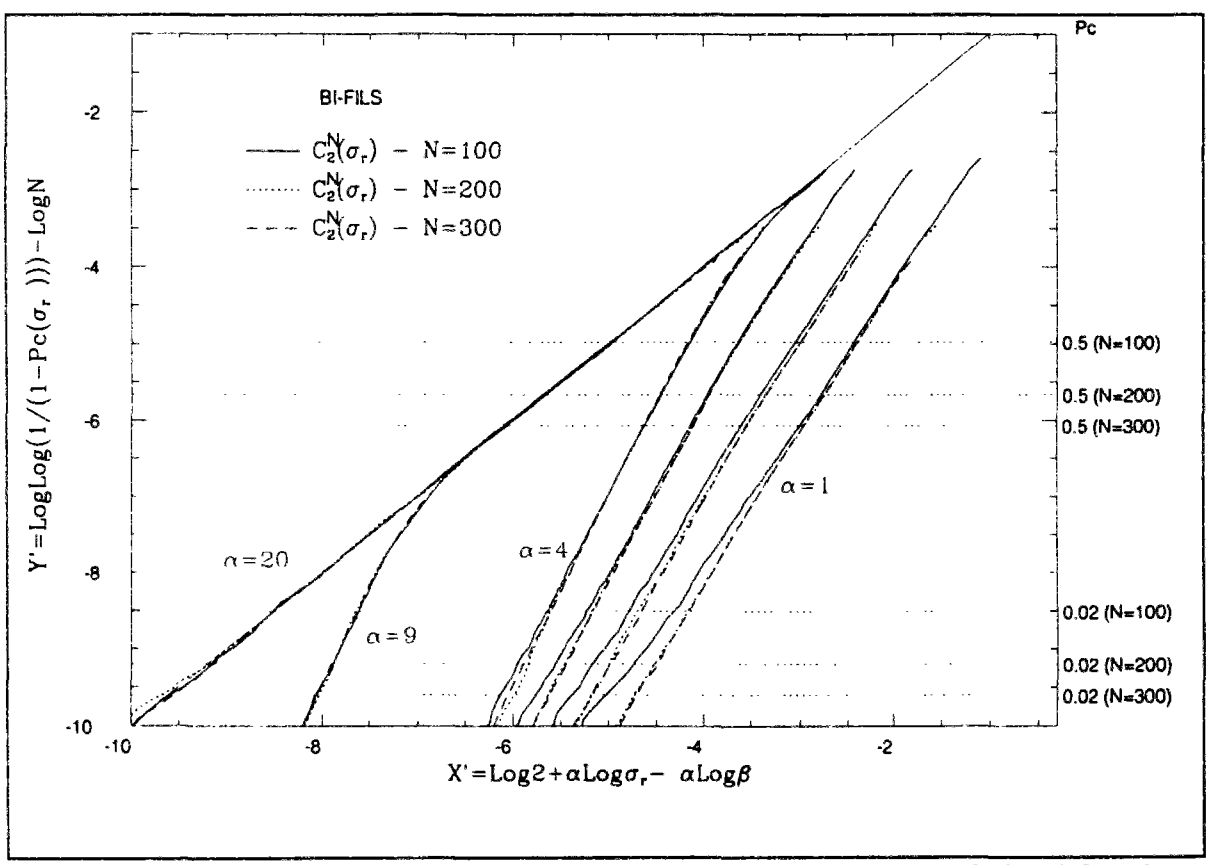


Fig. 4.15 : Représentation des effets d'échelle de longueur sur la rupture du bi-fil dans la représentation ''CLCPF corrigée des effets d'échelle de longueur''

Nous présentons maintenant les résultats de simulations de rupture du bi-fil en prenant en compte la décohésion entre les fils. La décohésion va alors introduire d'autres scénarios de ruine et nous permettra d'observer des mécanismes de rupture différents.

4.4. Rupture du bi-fil avec décohésion

4.4.1. Influence de la décohésion dans la rupture du bi-fil

Nous n'avons pas introduit d'aléa sur la résistance en cisaillement de l'interface et nous prenons comme valeur de cisaillement critique d'interface $t_c = 63$ MPa (Nous retrouvons des valeurs de cisaillement critique ayant cet ordre de grandeur pour un U.D. carbone-epoxy dans la littérature. La valeur de $t_c = 63$ MPa est tirée du livre de D.Gay [*Gay,1987*]). Nous reportons les courbes de statistique de résistances dans la représentation ''CLCPF corrigée des effets d'échelle de longueur'' et, l'évolution dans la rupture du bi-fil étant continue par rapport à α nous ne présentons que les courbes de probabilité cumulée de rupture obtenues pour **certaines valeurs de α (α=1,2,3,4,9 et 20).** Nous commençons par simuler la rupture avec décohésion d'un bi-fil de N=100 bi-cellules (figure 4.16) et d'un bi-fil de N=300 bi-cellules (figure 4.17).

On observe des concentrations de résistance au voisinage de certaines contraintes critiques. Ces concentrations se manifestent sous forme de marches plus ou moins nettes sur les courbes de probabilité cumulée de rupture du bi-fil (α=2,3,4), les marches s'accentuant lorsque l'on augmente le nombre de bi-cellules (N=300). Ces marches proviennent de l'existence de Diracs dans la densité de résistances des bi-fils. Ces Diracs sont à relier à la résistance en cisaillement et pour tenter de comprendre nous cherchons à analyser les différents scénarios de ruine du bi-fil dans les trois parties nettement identifiées pour la courbe de probabilité cumulée de résistances du bi-fil (300 bi-cellules) (figure 4.17) obtenue pour α=3. Ces trois parties se décomposent schématiquement de la façon suivante :

- une droite de pente p=2
- une droite verticale
- une droite de pente unité

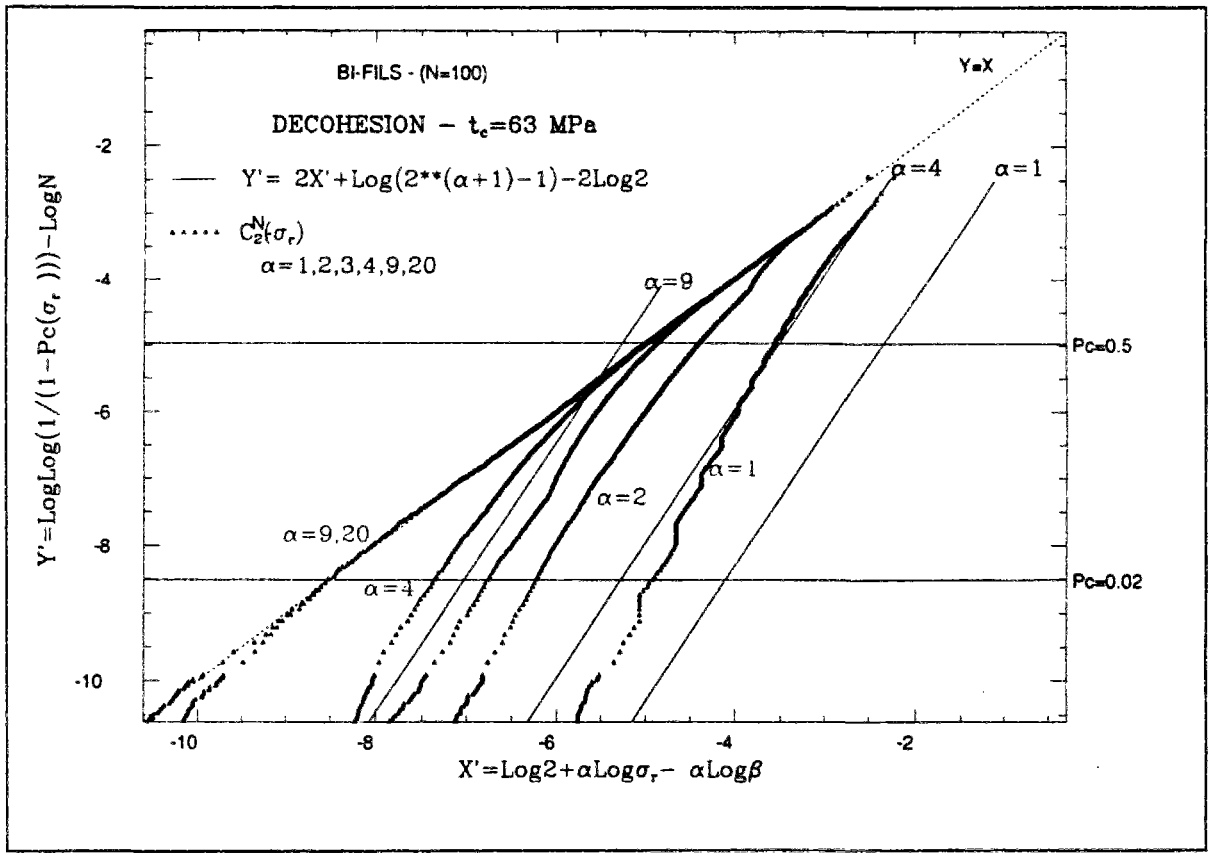


Fig. 4.16 : Courbes de probabilités cumulées de rupture avec décohésion du bi-fil dans la représentation "CLCPF corrigée des effets d'échelle de longueur" (N=100 bi-cellules).

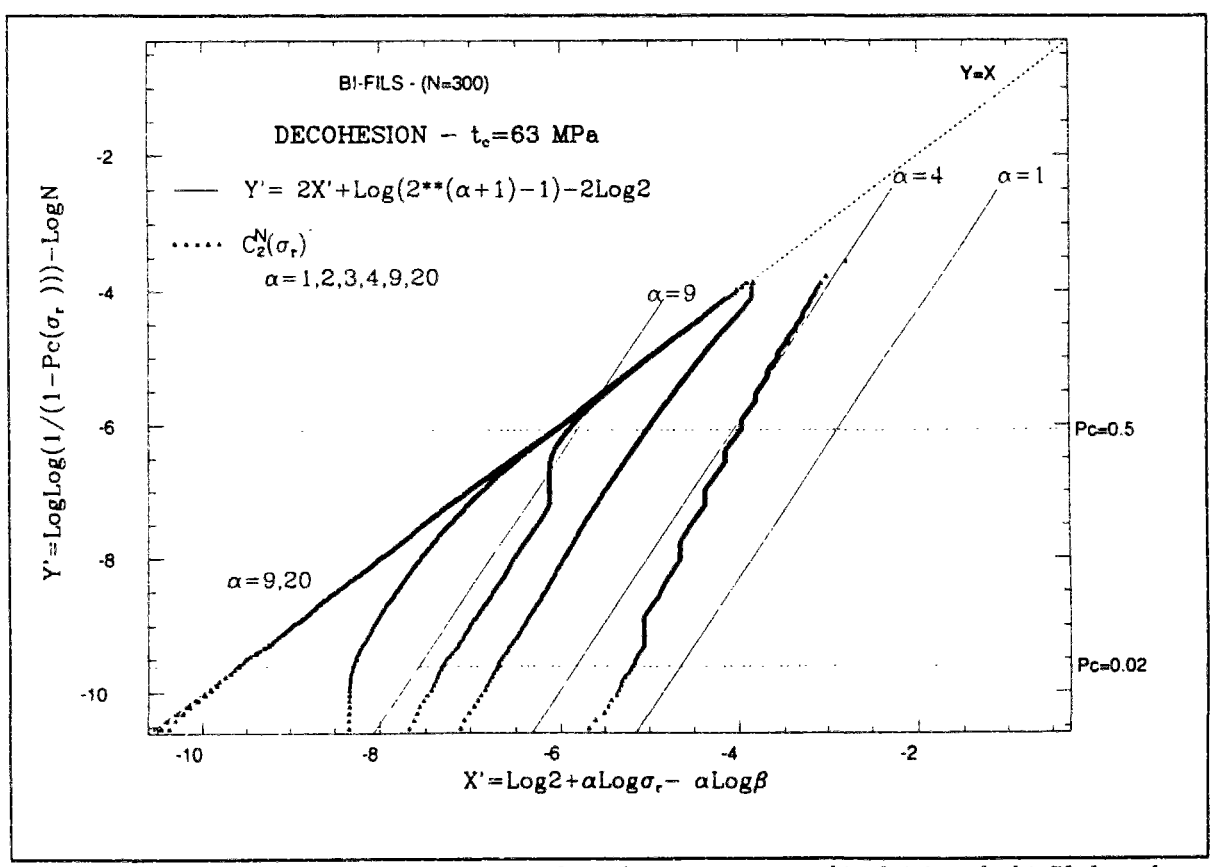


Fig. 4.17 : Courbes de probabilités cumulées de rupture avec décohésion du bi-fil dans la représentation "CLCPF corrigée des effets d'échelle de longueur" (N=300 bi-cellules).

Pour cela nous analysons le "film" de rupture du bi-fil et nous constatons qu'aux scénarios de rupture du bi-fil sans décohésion vient s'ajouter un scénario de rupture par décohésion. La rupture du bi-fil avec décohésion présente donc trois scénarios de rupture possibles :

- Rupture de plusieurs cellules puis ruine du bi-fil
- Rupture d'une cellule puis ruine du bi-fil par décohésion
- Rupture du bi-fil à la première cellule cassée

Comme on pouvait le prévoir, les bi-fils dont la résistance à rupture se situe dans la représentation ''CLCPF corrigée des effets d'échelle de longueur'' sur la droite de pente unité cassent après la rupture du premier maillon. Il y a en général après la rupture de cette cellule pour le même chargement rupture d'une cellule du fil non cassé dans une section voisine puis un délaminage qui se propage d'une fissure à l'autre.

Dans la zone correspondant à la droite de pente 2 il y a rupture de plusieurs cellules avant que le délaminage ne fasse périr l'éprouvette.

Enfin, la dernière zone (zone de pente infinie) est une zone avec une forte concentration de résistances du bi-fil. Après rupture d'une cellule, il y a rupture d'interfaces que l'on peut comparer à un ''déboutonnage'' jusqu'à la rupture d'une cellule du fil sain, cette rupture provoquant la ruine du bi-fil. Tous les bi-fils présentant ce scénario de rupture se rompent pour une valeur de chargement critique que l'on peut approcher par un calcul analytique.

Nous connaissons la valeur du cisaillement d'interface critique τ_c et nous cherchons à déterminer la relation liant l'effort de traction critique au cisaillement critique τ_c. Nous reprenons alors le problème traité au chapitre 3. Nous connaissons l'expression de la contrainte de cisaillement en fonction de l'effort membranaire N_0 (éq. 3.35 du chapitre 3) lors de la rupture du premier fil :

(4.28) $$\tau^{1,2}(x) = -\rho\, N_0 \frac{sh(\rho x)}{ch(\rho b)}$$

avec : $$\rho = \sqrt{\frac{2K_\tau}{K_1}}$$

Si nous avons une décohésion entre les deux fils, l'expression de $\tau^{1,2}(x)$ reste identique à condition d'actualiser la valeur de b qui correspond à la longueur de la zone qui reste ''collée''.

Dans la solution analytique la contrainte de cisaillement s'obtient en $x = b$. Cependant, dans notre modèle discrétisé, la contrainte de cisaillement n'est pas calculée sur l'interface en milieu de cellule (section rompue). Elle est calculée aux extrémités des cellules. Ainsi, si au point $x = b$ nous sommes au milieu de la cellule b, la contrainte de cisaillement maximale du modèle discrétisé est calculée en $x = b - \frac{h}{2}$ (figure 4.18).

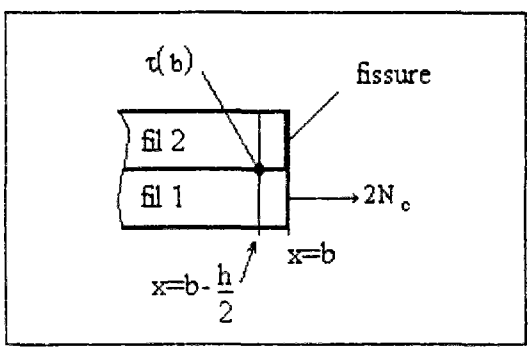


Fig. 4.18 : Localisation de la contrainte de cisaillement critique

La rupture d'interface dans notre modélisation est obtenue lorsque cette contrainte est égale à τ_c. La relation entre τ_c et l'effort membranaire N_c produisant cette décohésion est donc :

$$\tau_c = -\rho\, N_c \frac{sh\rho\left(b - \frac{h}{2}\right)}{ch(\rho b)} \tag{4.29}$$

Lorsque ρb est grand N_c peut être approché par la valeur suivante indépendante de b :

$$N_c^{an} \approx \left(1 + \frac{\rho h}{2}\right)\frac{\tau_c}{\rho} \tag{4.30}$$

Nous vérifions alors que la valeur du chargement critique obtenue par simulation correspond à la valeur déterminée analytiquement. Plus précisément, nous donnons ci dessous les valeurs adimensionnelles :

$$\begin{cases} \hat{N}_c^{sim} = 0.1152 \\ \hat{N}_c^{an.} = 0.1151 \end{cases}$$

La valeur de résistance critique pour laquelle on observe une partie verticale sur les courbes de probabilité cumulée de rupture est identique quelle que soit la valeur de α, ce qui peut se vérifier sur les courbes obtenues par simulation.

Nous retrouvons cette valeur de résistance critique pour toutes les droites verticales observées dans les courbes de probabilité cumulée de rupture dans la représentation ''CLCPF corrigée des effets d'échelle'' à l'exception de la courbe obtenue pour α=1. Cette courbe parait différente des autres courbes de probabilité de rupture. Analysons les ''films'' de rupture pour α=1. On observe que généralement le bi-fil est très fissuré (plusieurs ruptures de cellules) puis qu'à un certain niveau de contrainte un ligament d'une certaine longueur (plusieurs interfaces) se casse, cette rupture conduisant à la ruine du bi-fil. Les bi-fils pour lesquels se produit ce scénario de rupture ont des résistances se situant sur les portions de droites verticales de la courbe de probabilité cumulée de rupture, et, cette résistance dépend de la longueur du segment rompu. Il existe alors pour α=1 un classement par familles de bi-fils, ce classement résultant du cisaillement de ligaments qui sont quantifiés. Ces scénarios de rupture sont artificiels car nous n'avons pas considéré l'aléa sur la résistance en cisaillement. Par contre, la droite moyenne de la courbe de probabilité cumulée de rupture pour α=1 présente un sens et témoigne d'une fissuration diffuse [*Laalai,1993*].

Nous regardons maintenant la sensibilité des résultats de simulation de rupture par rapport à la valeur du cisaillement critique.

4.4.2. Influence de la valeur du cisaillement critique

Pour cela nous avons multiplié par deux et trois la résistance critique de cisaillement et procédé à des simulations de rupture avec délaminage d'un bi-fil de 300 bi-cellules. Nous

reportons les courbes de probabilité cumulée de rupture dans la représentation "CLCPF corrigée des effets d'échelle de longueur". Nous présentons en figure 4.21 les courbes pour une contrainte de cisaillement critique $t_c = 126$ MPa.

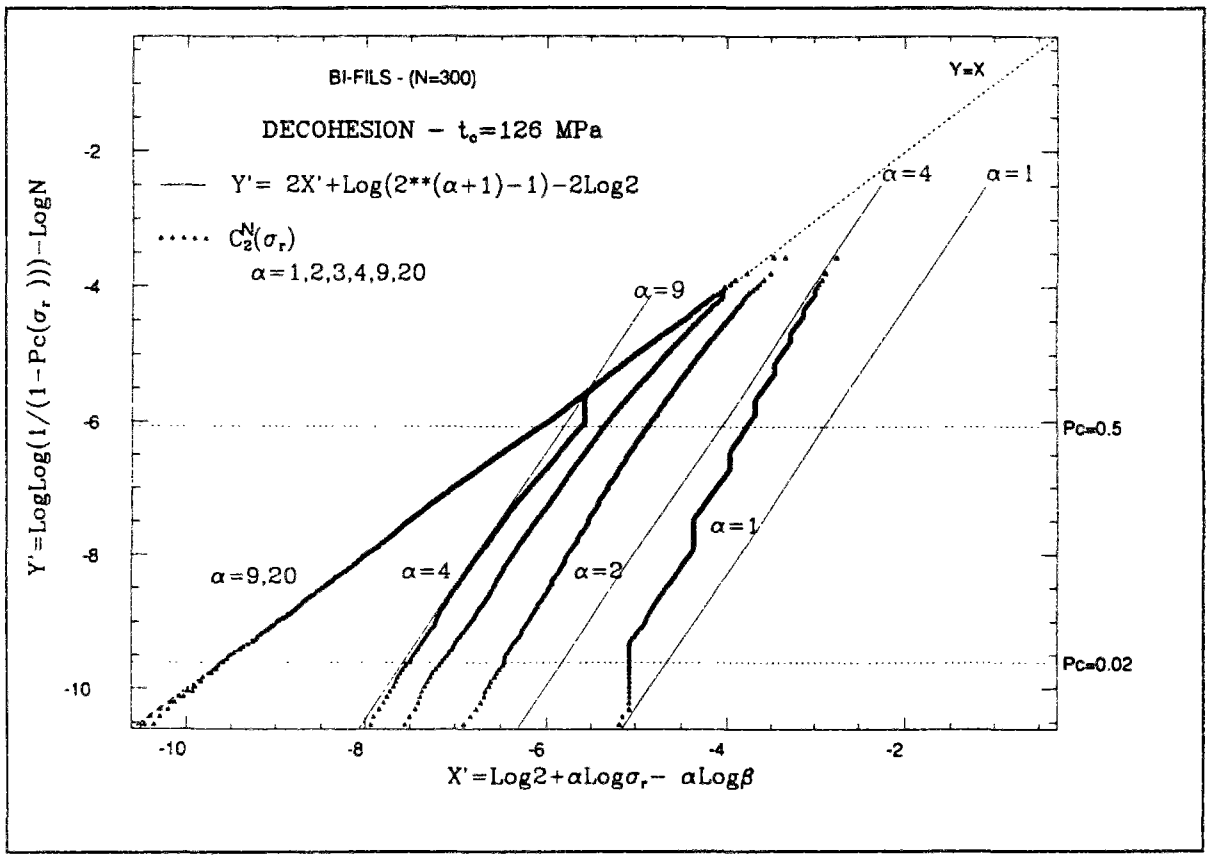


Fig. 4.19 : Courbes de probabilités cumulées de rupture avec décohésion du bi-fil dans la représentation "CLCPF corrigée des effets d'échelle de longueur" ($t_c = 126$ MPa).

Pour α=2, la contrainte de cisaillement critique étant trop élevée, la résistance qui entraîne le déboutonnage est trop importante et ce phénomène disparaît de notre zone d'observation.
On vérifie cependant que la résistance critique provoquant le déboutonnage (α=3,4) est identique à la contrainte déterminée analytiquement.
Les effets de quantification sont toujours présents pour α=1 et la taille des ligaments cisaillés augmente.

Nous présentons en figure 4.20 les courbes pour une contrainte de cisaillement critique $t_c = 252$ MPa.

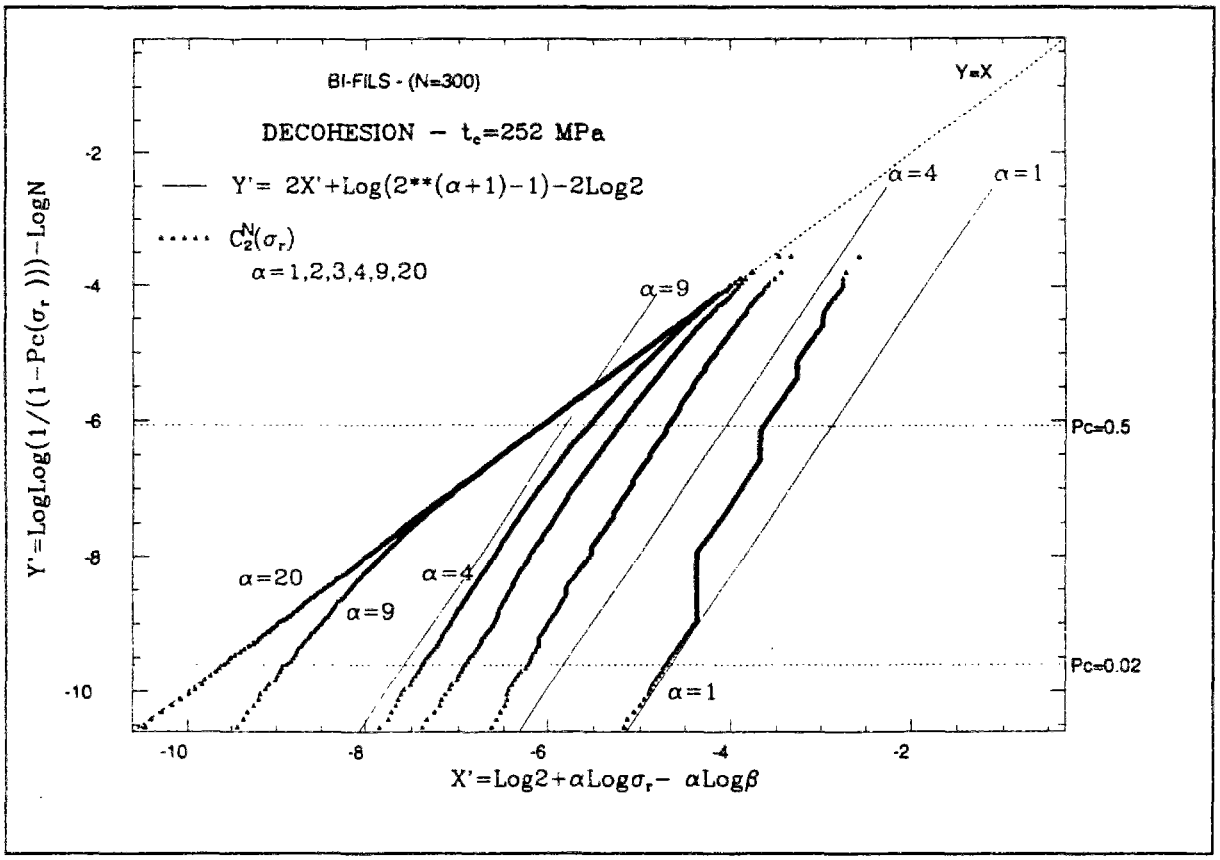


Fig. 4.20 : Courbes de probabilités cumulées de rupture avec décohésion du bi-fil dans la représentation "CLCPF corrigée des effets d'échelle de longueur" (t_c = 252 MPa).

On observe alors que la contrainte de cisaillement critique est suffisamment importante pour qu'il n'existe pas de mécanisme de déboutonnage dans le domaine qui nous intéresse. Il existe alors seulement des effets de quantification plus importants, effets de quantification qui cisaillent des ligaments de plus en plus long.

4.4.3. Effet d'échelle de longueur

Nous nous intéressons maintenant aux effets d'échelle de longueur sur la rupture du bi-fil avec délaminage. Nous présentons sur la figure 4.21 les courbes de probabilité cumulée de rupture pour des bi-fils de N=100,200 et 300 bi-cellules dans la représentation "CLCPF corrigée des effets d'échelle de longueur".

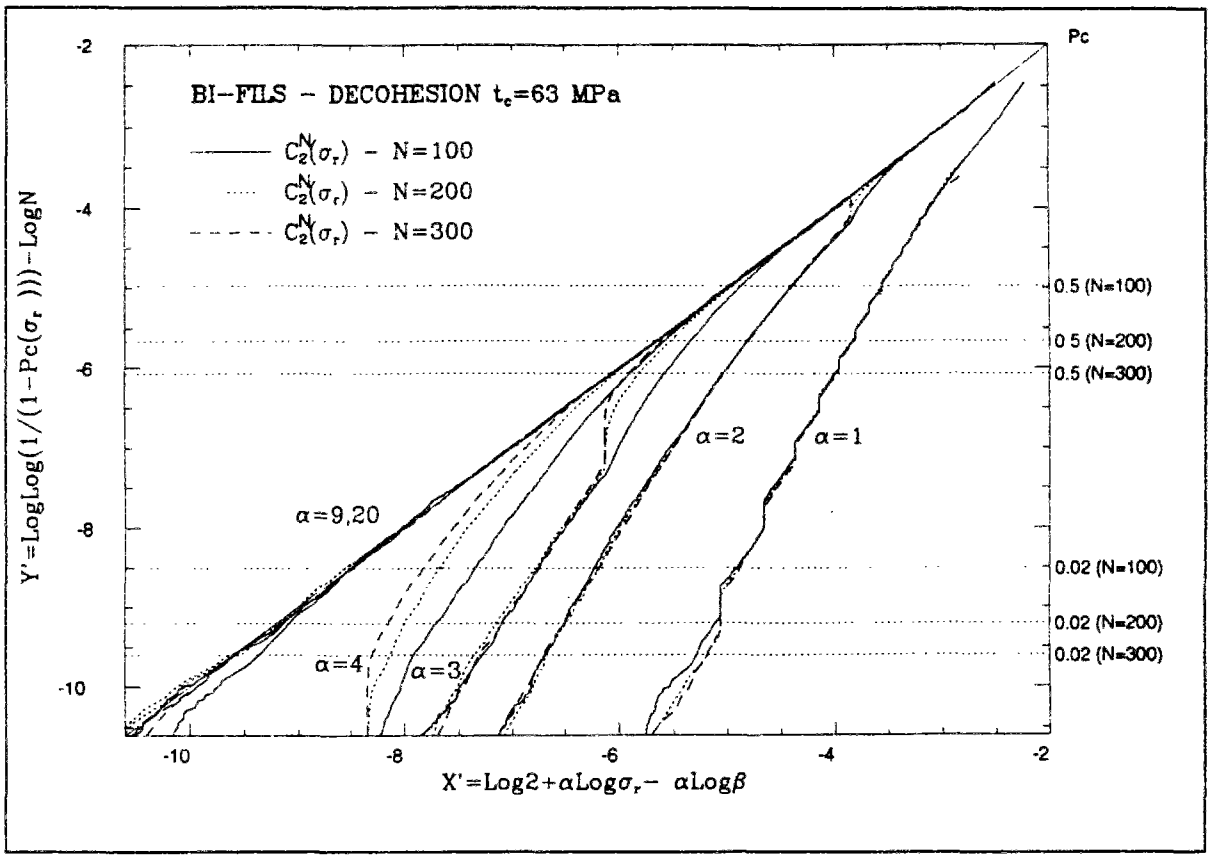


Fig. 4.21 : Représentation des effets d'échelle de longueur sur la rupture avec décohésion du bi-fil dans la représentation CLCPF corrigé des effets d'échelle de longueur

En superposant les courbes de probabilité de rupture avec délaminage de bi-fils de longueurs différentes on retrouve une valeur de résistance critique responsable du déboutonnage qui est identique quelque soit la longueur du bi-fil (α=2,3,4). Pour les bi-fils de N=100 et 200 bi-cellules les zones de déboutonnage sont moins marquées et plus arrondies. Ceci est lié à un "effet d'extrémité" du bi-fil ayant une influence sur le phénomène de décohésion lorsque le nombre de bi-cellules est faible. Cependant, nous appréhendons correctement les effets d'échelle de longueur sur la rupture avec délaminage du bi-fil qui sont de type "chaîne".
Pour les longueurs considérées, la résistance des bi-fils lorsque l'on prend en compte la décohésion est sensiblement plus faible que lorsque l'on ne prend pas en compte ce phénomène.

Cependant, l'observation de la courbe en "escalier" pour α=1 nous incite à penser que pour de très grandes longueurs (ou ce qui revient au même pour des probabilités très faibles), ces

courbes ont tendance à se rejoindre par "marches successives" pour toutes les valeurs de α.

Pour confirmer cette impression, nous avons simulé la rupture avec et sans décohésion de bi-fils de 3000 bi-cellules pour α=1 et la rupture sans décohésion de bi-fils de 30000 bi-cellules et avec décohésion de bi-fils de 90000 bi-cellules pour α=2 (figure 4.22).

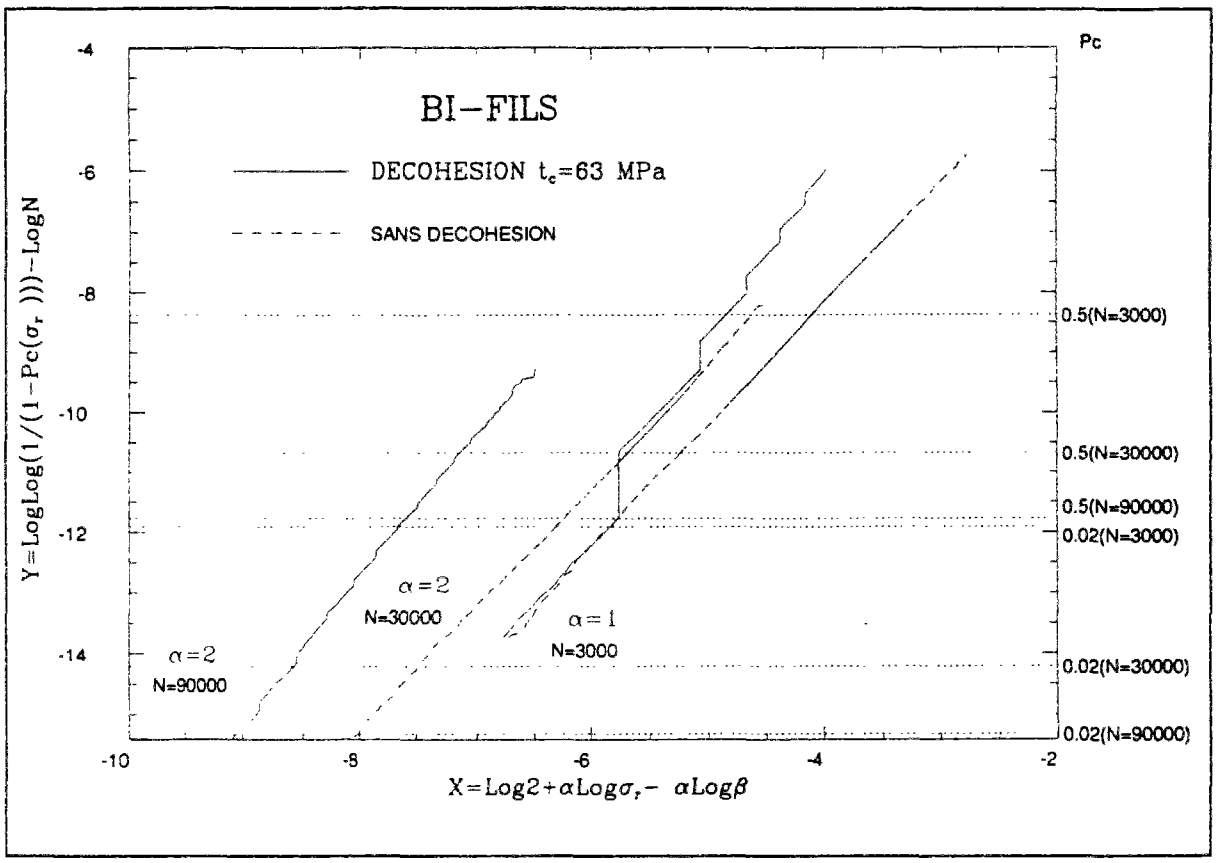


Fig. 4.22 : Comparaison des courbes de probabilités cumulées de rupture du bi-fil avec et sans décohésion pour α=1,2

Nous constatons alors assez nettement l'existence de ces marches multiples et la "tendance au rapprochement" des courbes lorsque l'on prend en compte la décohésion et lorsqu'on la néglige. On peut conjecturer, bien que cela ne soit pas prouvé, que les courbes vont finir par se rapprocher. Nous pensons alors que le scénario de ruine très localisée ([*Ermolenko,1985*], figure 1.22 page 38) est responsable de la rupture de câbles longs de faibles résistances. Cela nous conduit à faire la proposition suivante :

''Pour les très grandes longueurs les queues de distribution pour les faibles résistances sont identiques que l'on prenne ou non en compte le phénomène de décohésion dans le modèle.''

Bien que l'on ne puisse pas considérer que l'on a prouvé cette proposition, ni même apporté des éléments de conviction suffisamment forts nous l'admettons dans la suite de ce travail.

Si cette proposition était prouvée, cela aurait une certaine importance pratique puisque la durée de calcul (compte tenu de notre algorithme) serait beaucoup plus faible en ne faisant pas intervenir la décohésion. Nous pourrions ainsi plus facilement simuler la rupture avec de plus nombreux fils.

CHAPITRE 5.

RUPTURE DU QUADRI-FIL

5.1. AUTOMATES ENCADRANT $C_4^N(x)$

5.1.1 Automate minorant

5.1.2. Automate majorant

5.1.3. Automate de Daniels

5.2. RESULTATS DE SIMULATIONS

5.2.1. Résultats de simulations sans décohésion

5.2.2. Résultats de simulations prenant en compte la décohésion

5.3 INFLUENCE DE LA FINESSE DE DISCRETISATION

5.3.1. Le bi-bi-fil

5.3.2. Comparaison bi-bi-fil - quadri-fil

CHAPITRE 5.

RUPTURE DU QUADRI-FIL

Nous considérons maintenant quatre fils de même longueur "collés" ensemble. Nous appelons cette structure un quadri-fil.

Le bi-fil étant une structure très particulière, nous avons jugé utile de présenter dans un chapitre séparé l'étude menée sur les quadri-fils avant d'aborder les multi-fils sous une forme plus générale. Concernant le quadri-fil, nous pouvons en particulier plus facilement poser les questions portant sur l'indépendance des résultats en fonction de la finesse de modélisation.

Avant de présenter les résultats de nos simulations comme dans le chapitre précédent, nous choisissons quelques automates qui vont faciliter la lecture des résultats simulés. Ces automates ont le statut de minorant et de quasi-majorant au sens des courbes de probabilité cumulée de rupture. Nous comparons enfin un quadri-fil et une structure résultant du collage de deux bi-fils que l'on appelle bi-bi-fil. Cette structure est intéressante car elle ne diffère du quadri-fil que par sa finesse de discrétisation et elle nous permet d'aborder les problèmes de l'indépendance des prévisions de rupture par rapport au maillage.

Nous suivons la démarche adoptée au chapitre précédent ; Chaque fil unitaire est découpé dans sa longueur en N cellules. Nous continuons à appeler $R_1(x)$ la probabilité qu'une cellule de ce fil ait une résistance supérieure à x et, $C_1^N(x)$ la probabilité que ce fil ait une résistance supérieure à x. Rappelons que :

(5.1) $$C_1^N(x) = [R_1(x)]^N$$

Le quadri-fil est découpé dans le sens de la longueur en N quadri-cellules, une quadri-cellule étant constituée par l'assemblage en parallèle de quatre cellules comme nous le représentons sur la figure 5.1.

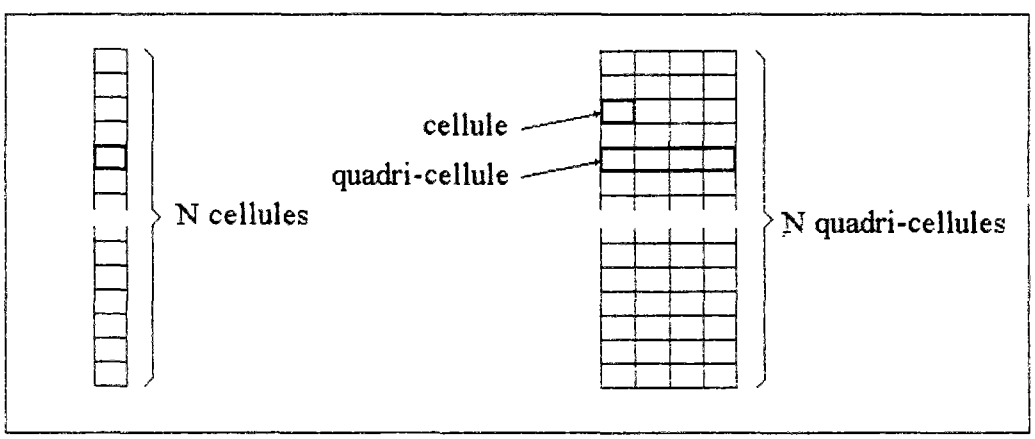


Fig. 5.1. : Représentation d'un quadri-fil découpé en N quadri-cellules

Nous notons $C_4^N(x)$ la probabilité pour que le quadri-fil ait une résistance supérieure à x. L'outil de simulation nous permettra de construire $C_4^N(x)$ (approchée à l'aide de 10000 simulations). Cependant, ici encore pour faciliter l'interprétation des résultats, nous allons construire des automates simples nous permettant d'encadrer $C_4^N(x)$ à l'aide de deux expressions analytiques.

Dans la suite, nous appelons co-cellules, les cellules appartenant à une même quadri-cellule.

5.1. Automates encadrant $C_4^N(x)$

5.1.1. Automate minorant

$C_4^N(x)$ mesure le sous ensemble $E_4^N(x)$ des réalisations de quadri-fils à N quadri-cellules telles que le quadri-fil résiste sous l'effort 4x (c'est à dire la contrainte $\frac{x}{el}$).

L'ensemble $Min_4^N(x)$, constitué des réalisations telles que la résistance de chaque cellule est supérieure à x, est dans $E_4^N(x)$. La mesure de $Min_4^N(x)$ minore donc $C_4^N(x)$. La mesure de $Min_4^N(x)$ est évidemment $[R_1(x)]^{4N}$ car les 4N cellules sont indépendantes. Nous obtenons ainsi un automate minorant simple :

$$[R_1(x)]^{4N} \leq C_4^N(x) \tag{5.2}$$

5.1.2. Automate majorant

Notons $\overline{E_4^N(x)}$ l'ensemble des réalisations complémentaires de $E_4^N(x)$. $\overline{E_4^N(x)}$ est donc l'ensemble des réalisations des quadri-fils se rompant sous l'effort 4x. La mesure de $\overline{E_4^N(x)}$ est égale à $1 - C_4^N(x)$.

Considérons l'ensemble noté $Max_4^N(x)$ des réalisations de N quadri-cellules telles que:

- Soit les quatre cellules de la quadri-cellules ont toutes une résistance supérieure à x (quadri-cellules du premier type).
- Soit les quadri-cellules vérifient les propriétés suivantes (quadri-cellules du deuxième type):
  - . l'une des cellules a une résistance inférieure à x.
  - . les trois autres cellules ont une résistance inférieure à $\frac{4x}{3}$.
- Il existe au moins une quadri-cellule du $2^{ième}$ type.

Lorsque l'on charge progressivement un quadri-fil appartenant à l'ensemble $Max_4^N(x)$, le premier endommagement se produit dans une quadri-cellule du deuxième type avant que l'on ait atteint le chargement 4x.
La résistance maximale de la quadri-cellule endommagée est alors inférieure à la somme des résistances des trois cellules restantes. Cette somme est inférieure à 4x. Cette quadri-cellule endommagée sera donc totalement rompue, entraînant la rupture du quadri-fil avant que l'on ait atteint l'effort 4x. Ainsi, l'ensemble $Max_4^N(x)$ est inclus dans $\overline{E_4^N(x)}$.

Calculons maintenant la mesure de $Max_4^N(x)$ afin d'obtenir un minorant de $1-C_4^N(x)$.

Commençons par donner la probabilité $T_4(x)$ pour qu'une quadri-cellule soit du deuxième type. Pour cela, on somme les probabilités des situations où l'on a:

- Quatre résistances inférieures à x.
- Trois résistances inférieures à x et une résistance supérieure ou égale à x et inférieure à $\frac{4x}{3}$.
- Deux résistances inférieures à x et deux résistances supérieures ou égales à x et inférieures à $\frac{4x}{3}$.
- Une résistance inférieure à x et trois résistances supérieures ou égales à x et inférieures à $\frac{4x}{3}$.

Ainsi :

$$T_4(x) = [1 - R_1(x)]^4 + 4\left[R_1(x) - R_1\left(\frac{4x}{3}\right)\right][1 - R_1(x)]^3 + \tag{5.3}$$

$$6\left[R_1(x) - R_1\left(\frac{4x}{3}\right)\right]^2 [1 - R_1(x)]^2 + 4\left[R_1(x) - R_1\left(\frac{4x}{3}\right)\right]^3 [1 - R_1(x)]$$

Considérons maintenant un quadri-fil et choisissons p quadri-cellules. La mesure de l'ensemble des réalisations telles que ces p quadri-cellules soient du deuxième type et les N-p

autres du premier type est:

$$[T_4(x)]^p[R_1(x)]^{4(N-p)} \tag{5.4}$$

Il y a $C_N^p = \frac{N!}{p!(N-p)!}$ façons de choisir les p quadri-cellules, chaque choix donnant des ensembles disjoints de réalisations.

L'ensemble $Max_4^N(x)$ est formé de la réunion des ensembles précédents pour p variant de 1 à N. Tous ces ensembles sont disjoints, ainsi la mesure de $Max_4^N(x)$ est :

$$Prob\left(Max_4^N(x)\right) = \sum_{p=1}^{N} C_N^p [T_4(x)]^p [R_1(x)]^{4(N-p)} \tag{5.5}$$

Soit encore :

$$Prob\left(Max_4^N(x)\right) = \left[\left(R_1(x)\right)^4 + T_4(x)\right]^N - [R_1(x)]^{4N} \tag{5.6}$$

Ainsi :

$$C_4^N(x) \le 1 - \left[\left(R_1(x)\right)^4 + T_4(x)\right]^N + [R_1(x)]^{4N} \tag{5.7}$$

5.1.3. Automate de Daniels

Nous avons présenté au chapitre précédent cet automate qui revient à considérer une série de N torons de quatre cellules "non collées" (la redistribution de contrainte est uniforme sur les cellules restantes d'une quadri-cellule). La probabilité cumulée de résistance de l'automate de N quadri-cellules indépendantes est :

$$D_4^N(x) = [1 - B_4(x)]^N \tag{5.8}$$

Où $B_4(x)$ est donnée par l'équation 5.9 :

$$(5.9)\qquad B_4(x)=4!\begin{vmatrix} 1-R_1(x) & \frac{(1-R_1(x))^2}{2!} & \frac{(1-R_1(x))^3}{3!} & \frac{(1-R_1(x))^4}{4!} \\ 1 & 1-R_1\left(\frac{4x}{3}\right) & \frac{\left(1-R_1\left(\frac{4x}{3}\right)\right)^2}{2!} & \frac{\left(1-R_1\left(\frac{4x}{3}\right)\right)^3}{3!} \\ 0 & 1 & 1-R_1(2x) & \frac{(1-R_1(2x))^2}{2!} \\ 0 & 0 & 1 & 1-R_1(4x) \end{vmatrix}$$

Dans la suite, nous comparerons $C_4^N(x)$ résultat de nos simulations avec $D_4^N(x)$ qui jouera le rôle d'un quasi-majorant.

Et nous vérifierons bien d'ailleurs que :

$$(5.10)\qquad C_{4\min}^N(x)\le C_4^N(x)\le C_{4\max}^N(x)$$

$$\text{où}\quad C_{4\min}^N(x)=\left[R_1(x)\right]^{4N}\quad\text{et}\quad C_{4\max}^N(x)=D_4^N(x)$$

Nous vérifierons en outre que le minorant est une bonne approximation de $C_4^N(x)$ aussitôt que la dispersion est faible (module de Weibull élevé).

5.2. Résultats de simulations

Nous simulons d'abord des ruptures sans décohésion de fil, puis des ruptures avec décohésions. Les simulations ont été effectuées avec un élancement de cellule de 0,1. La portion du quadri-fil simulée a généralement une longueur de 300 quadri-cellules (sections), ce nombre de quadri-cellules se révélant être un bon compromis entre la rapidité des calculs et la minimisation des ''effets d'extrémité''. Cependant, nous constatons une certaine influence

de ces extrémités dans le cas de simulations avec décohésions, et, pour mieux appréhender cette influence, nous ferons alors des simulations avec 3000 quadri-cellules.

Pour avoir des résultats statistiquement fiables, nous effectuerons 10000 simulations pour chaque problème.

Pour étudier l'influence de la dispersion des résistances, nous ferons varier le module de Weibull entre 1 et 20 en choisissant les valeurs **α=1,2,3,4,9,12,20**.

Nous présenterons le plus souvent les résultats sous forme de courbes de probabilité de résistances cumulées tracées dans la représentation ''CLCPF corrigée des effets d'échelle de longueur''.

Nous rappelons ici les coordonnée correspondantes:

$$X' = \mathrm{Log}4 + \alpha \mathrm{Log}\sigma_r - \alpha \mathrm{Log}\beta$$

(5.11)

$$Y' = \mathrm{Log}\left[\left[\mathrm{Log}\left(\frac{1}{1 - P_c(\sigma_r)}\right)\right]\right] - \mathrm{Log}N$$

Rappelons brièvement les avantages de cette représentation :

1°) Dans cette représentation les distributions de Weibull sont des droites (et réciproquement).

2°) Si la courbe de distribution cumulée de résistance suit une loi de Weibull de paramètres (α,β') avec $\beta' = \frac{\beta}{(4N)^{\frac{1}{\alpha}}}$, elle se trouve dans cette représentation sur la diagonale principale (X'=Y'). Cette loi est la loi de la cellule la plus faible pour un ensemble de 4N cellules dont la résistance suit une loi de Weibull de paramètres (α,β). Ainsi, si la courbe de distribution des résistances du quadri-fil est sur la diagonale principale (X'=Y') la rupture du quadri-fil se produit dès le premier endommagement (cela sera notamment le cas si la dispersion des résistances est faible (α élevé)).

3°) Si l'effet d'échelle de longueur est de type ''chaîne'', les simulations de deux éprouvettes de longueurs différentes donneront la même courbe. En terme de probabilité ou de densité de points de simulation, nous avons un ''glissement'' de la courbe sur elle même vers le ''bas''. C'est là l'intérêt principal de cette représentation qui permet de définir une ''courbe maîtresse'' pour le matériau.

5.2.1. Résultats des simulations sans décohésion

Commençons par présenter les résultats de simulation ne faisant pas intervenir la décohésion (τ_c grand).

Tout d'abord, présentons en échelle naturelle les deux simulations extrêmes α=1 et α=20 afin de faire une comparaison avec les deux automates minorant et majorant proposés (figure 5.2 et figure 5.3)

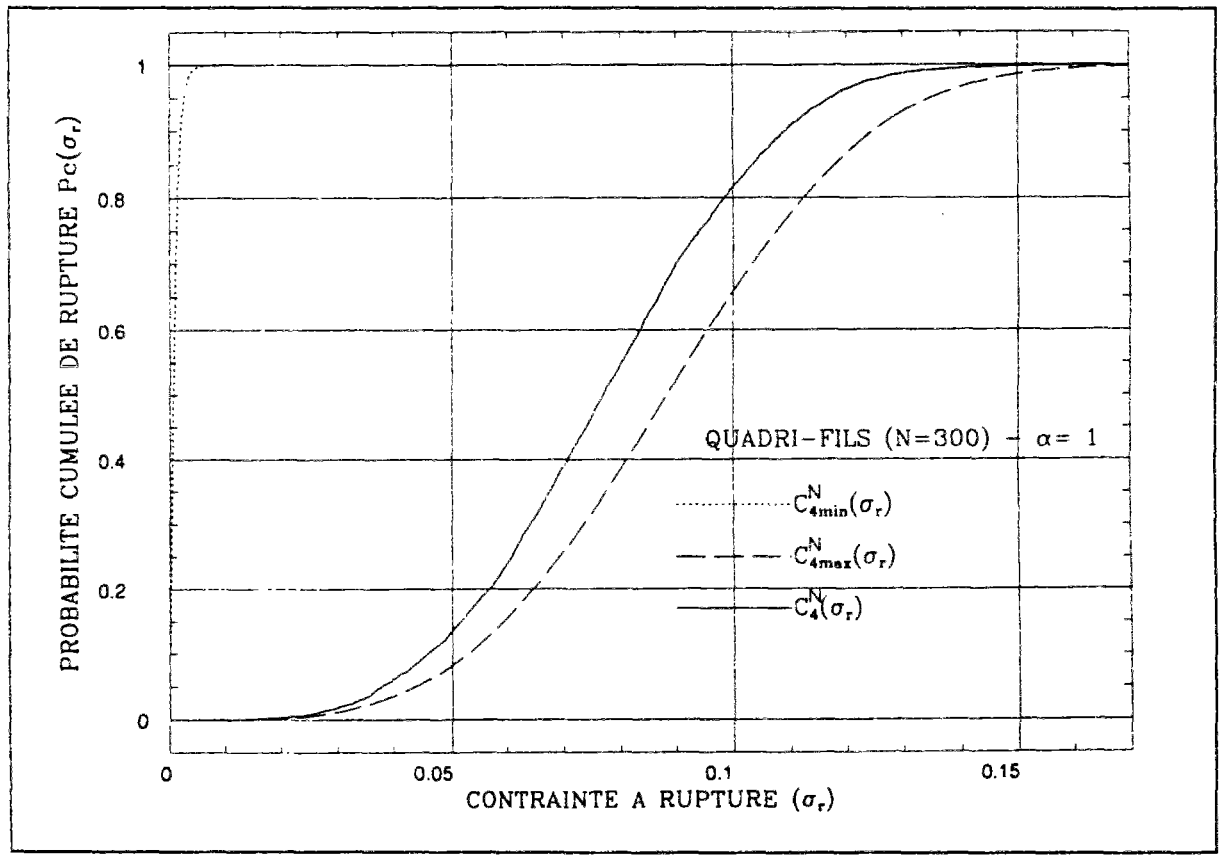


Fig. 5.2 : Probabilités cumulées de rupture du quadri-fil (α=1)

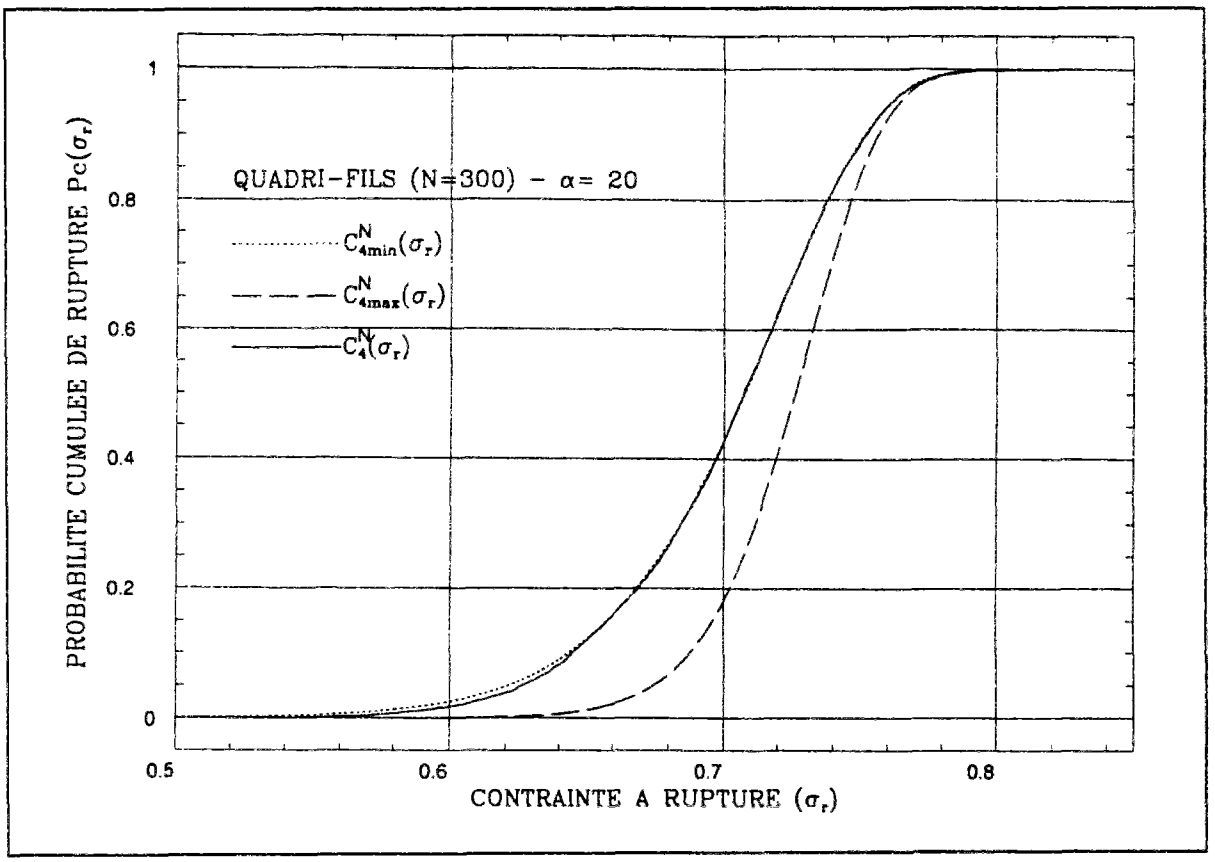


Fig. 5.3 : Probabilités cumulées de rupture du quadri-fil (α=20)

On constate que lorsque la distribution des résistances des cellules est très étalée (α=1), les simulations donnent des résultats très proches du quasi-majorant $C^N_{4max}(x)$ (figure 5.2).
Au contraire, lorsque la distribution des résistances des cellules est très concentrée (α=20) on obtient des résultats quasi confondus avec le minorant $C^N_{4min}(x)$ (figure 5.3). Les quadri-fils se rompent alors dès le premier endommagement.

Présentons maintenant l'ensemble de nos résultats dans la représentation "CLCPF corrigée des effets d'échelle" (figure 5.4). Nous avons reporté sur cette figure les quasi-majorants $C^N_{4\,max}$ et les minorants $C^N_{4\,min}$.

Dans cette représentation tous les minorants sont confondus sur la diagonale principale. Les quasi-majorants se rapprochent de cette diagonale lorsque la dispersion des résistances des cellules diminue (α augmente). La courbe de probabilité cumulée de rupture obtenue pour α=1 est celle située la plus à droite dans cette représentation et, au fur et à mesure que la

valeur de α augmente, les courbes de probabilité cumulée de rupture correspondantes se décalent vers la gauche.

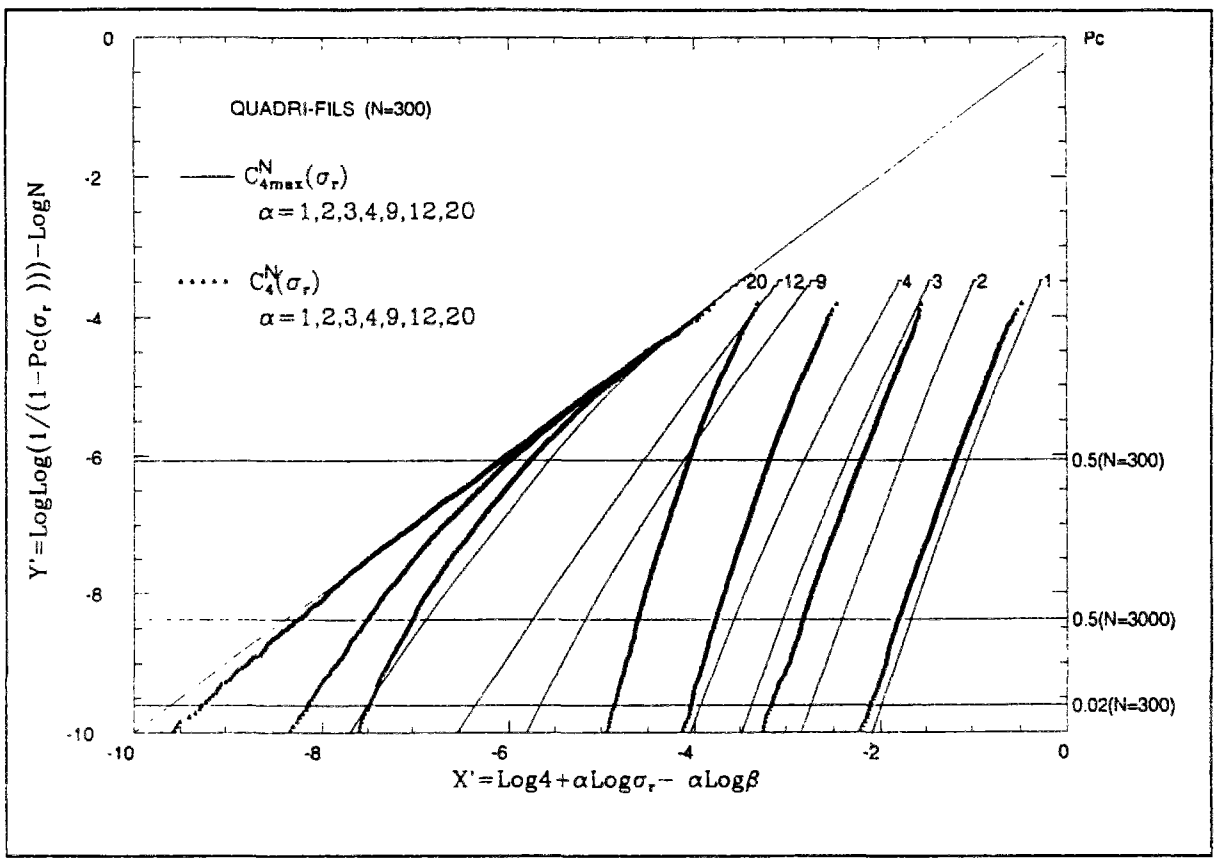


Fig. 5.4 : Courbes de probabilités cumulées de rupture du quadri-fil dans la représentation "CLCPF corrigée des effets d'échelle de longueur"

On constate que pour les faibles valeurs de α ($\alpha \leq 4$) les simulations effectuées peuvent être assez bien représentées par des lois de Weibull car les simulations donnent des courbes assez proches de droites.

Lorsque α augmente les courbes obtenues par simulations comportent deux directions asymptotiques, la diagonale principale pour les fortes valeurs de résistance et une droite de pente supérieure à 1 pour les faibles résistances.

Rappelons que nous sommes intéressés par la distribution statistique des résistances de joncs de grande longueur, alors que nous avons simulé une éprouvette de petite dimension. Les

effets d'échelle de longueur étant de type chaîne, notre courbe de distribution cumulée de résistance sera la même dans cette représentation si l'on effectue des simulations avec N beaucoup plus grand. (Cela a été vérifié avec N=3000 pour quelques valeurs de α).

Lorsque N augmente, la ''zone d'intérêt'' (par exemple $P_c \in [0,02;0,5]$) se décale vers le bas du diagramme. On voit ainsi qu'à partir d'une certaine longueur (N assez grand devant N_0 fonction de α) la distribution de résistance du quadri-fil pourra être approximée par la droite asymptotique inférieure des courbes simulées. Cela revient à dire que les résistances du quadri-fil suivront approximativement une loi de Weibull dont le module est relié à la pente de cette asymptote.

Notons que cela implique que, quelle que soit la valeur de α, l'approximation de la courbe de distribution cumulée par la loi de la cellule la plus faible $C^N_{4\,min}$ est, pour les grandes longueurs, très pessimiste.

On voit d'ailleurs que même pour α=20 la courbe simulée commence à s'écarter de $C^N_{4\,min}$ pour les faibles valeurs de résistance.

5.2.2. Résultats des simulations prenant en compte la décohésion

Dans la figure 5.5 nous présentons les résultats obtenus avec 10000 simulations pour des valeurs de module de Weibull α=1,2,3,4,9,20 dans la distribution de résistance des cellules. Lorsque l'on prend en compte la décohésion, les ''effets d'extrémité'' sont sensibles si l'éprouvette n'est pas assez longue. Cependant, cet effet peut s'analyser assez bien ainsi que nous le verrons.

La figure 5.6 présente d'une part les résultats pour des simulations effectuées généralement avec une longueur de N=300 quadri-cellules et d'autre part les résultats obtenus pour des longueurs de N=3000 quadri-cellules pour α=3 et α=4 (les valeurs les plus intéressantes).

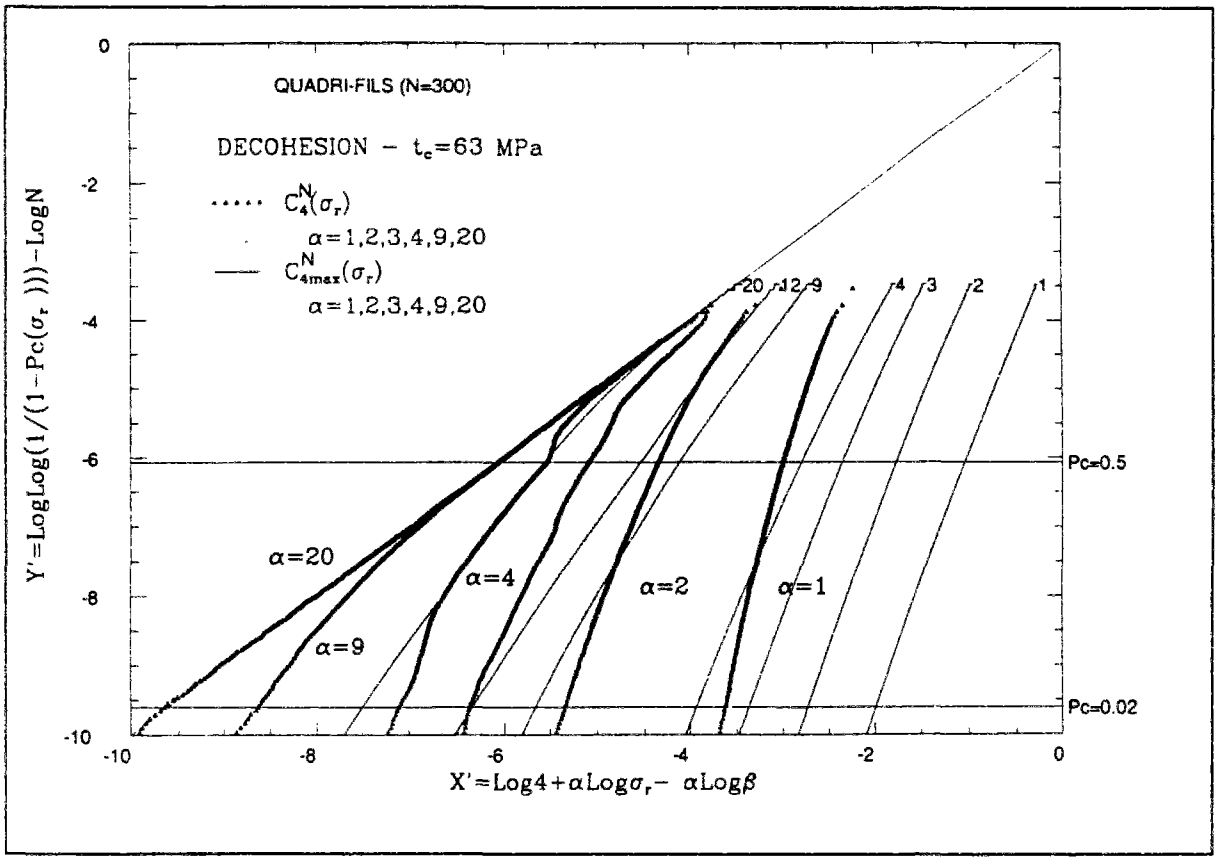


Fig. 5.5 : Courbes de probabilités cumulées de rupture avec décohésion du quadri-fil (N=300) (α=1,2,3,4,9,12,20)

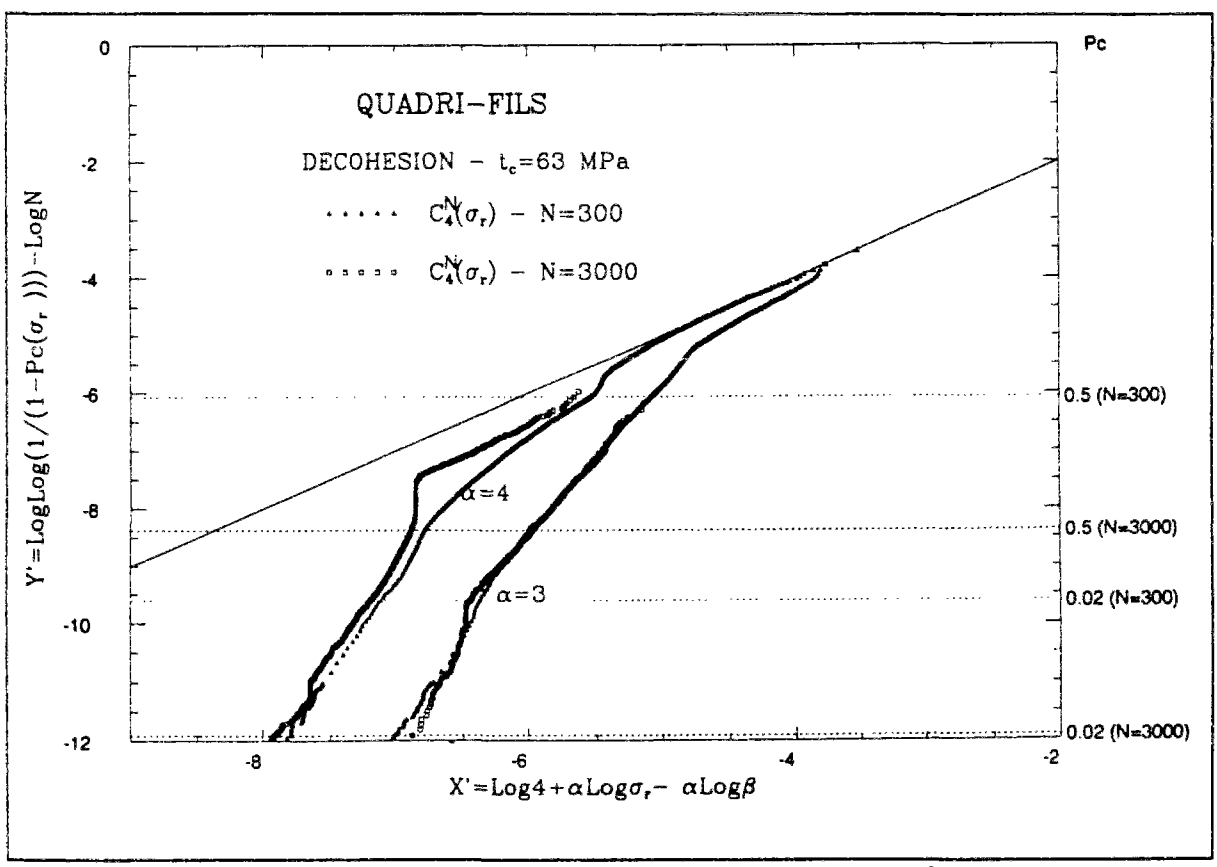


Fig. 5.6 : Courbes de probabilités cumulées de rupture avec décohésion du quadri-fil (N=300 et 3000) (α=3,4)

Commençons par comparer les courbes obtenues par simulations pour α=3 et α=4 avec N=300 et 3000 quadri-cellules.

Tout d'abord, nous constatons que l'effet d'échelle de longueur de type chaîne est assez bien respecté, en particulier pour les faibles résistances, car les deux courbes correspondant à la même valeur de α sont peu éloignées.
Nous constatons en outre que ces courbes présentent des ''marches'' qui ressemblent à celles observées au chapitre précédent lorsque l'on prenait en compte la décohésion dans la rupture du bi-fil. Ici encore, l'analyse des scénarios de rupture des éprouvettes dont les résistances se situent sur cette partie de la courbe permet de confirmer l'existence d'un mécanisme de décohésion des fils à certaines valeurs de l'effort exercé. Les abscisses de ces marches correspondent à des valeurs particulières de la contrainte reliées à la contrainte de rupture en cisaillement.

Enfin, les différences principales entre les courbes pour N=300 et 3000 quadri-cellules sont :

- La densité des points pour N=3000 est décalée vers le bas. C'est bien sûr un phénomène attendu.

- Les ''marches'' sont beaucoup plus nettes dans le cas de 3000 quadri-cellules que dans le cas de 300 quadri-cellules. Cela indique que les conditions aux limites en déplacement imposées aux éprouvettes limitent la possibilité des scénarios de ruine avec décohésion dans le cas des petites longueurs. C'est un "effet d'extrémité" du modèle qui n'est cependant pas très gênant si l'on ne s'intéresse qu'à la partie "basse" des courbes simulées (au moins pour α=3 ou α=4).

Comparons maintenant avec les résultats précédents (sans décohésion) les résultats des simulations obtenues en prenant en compte la décohésion (figure 5.7).
Dans le diagramme ''CLCPF corrigée des effets d'échelle'', une longueur de 300 quadri-cellules est suffisante dans le cas ou l'on néglige la décohésion, alors qu'il nous faut prendre en compte une longueur de 3000 quadri-cellules pour ''éliminer les effets d'extrémité'' si l'on prend en compte la décohésion.

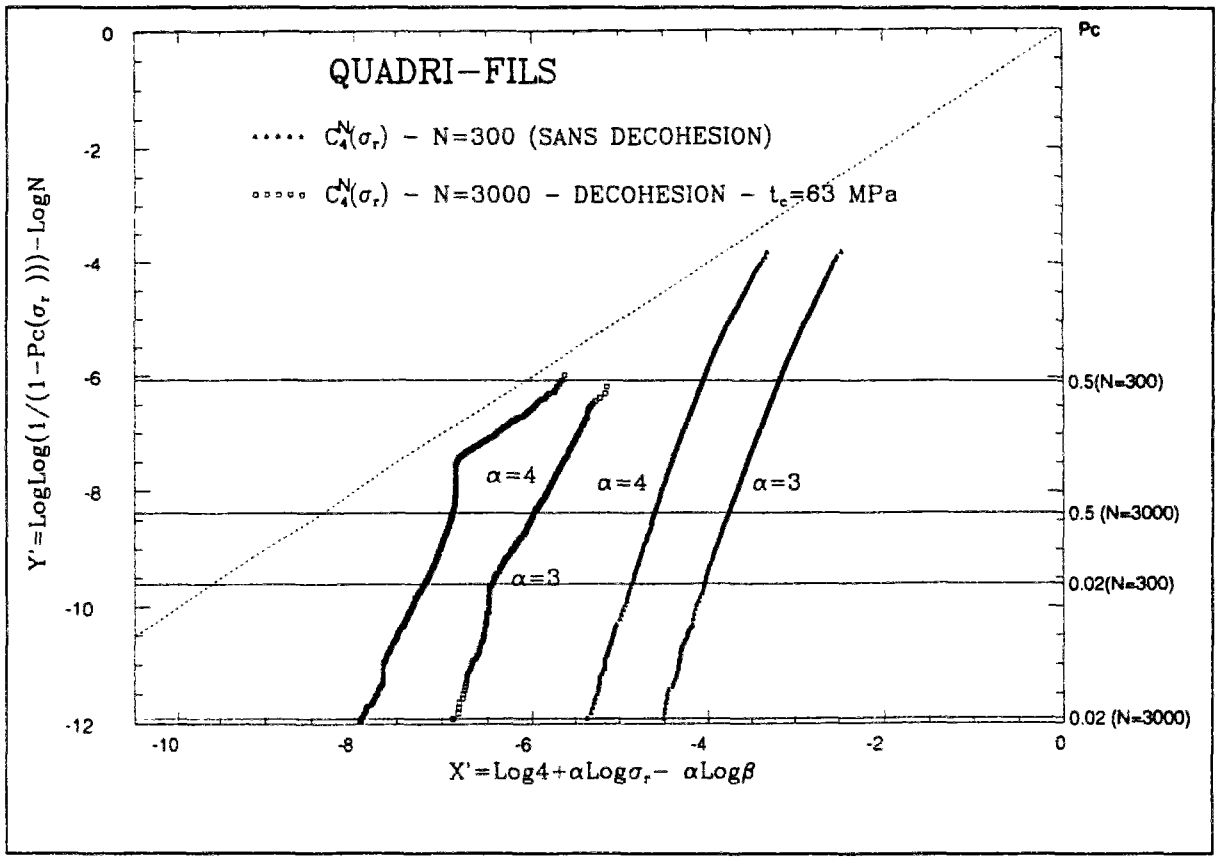


Fig. 5.7 : Courbes de probabilités cumulées de rupture du quadri-fil avec et sans décohésion dans la représentation "CLCPF corrigée des effets d'échelle de longueur" (α=3,4).

On constate que les courbes avec prise en compte de la décohésion se situent à des niveaux de résistance plus faible. C'est bien sûr normal puisque l'on autorise des scénarios de ruine plus nombreux. Cependant on remarque l'existence de plusieurs marches sur chaque courbe. En suivant le raisonnement que nous avons tenu sur le bi-fil, on peut conjecturer que si l'on avait pris des quadri-fils beaucoup plus longs ou effectué un nombre beaucoup plus important de simulations, les deux courbes se seraient rejointes pour les très faibles valeurs de résistance. Ceci reste bien sûr toujours à démontrer mais dans la suite nous n'étudierons que des modèles de n-fils sans prise en compte de la décohésion.

5.3. Influence de la finesse de discrétisation

L'étude de la dépendance de la prévision de la distribution statistique des résistances d'une structure en fonction de la finesse de discrétisation est un sujet généralement difficile.

Dans ce paragraphe nous tenterons seulement de donner un éclairage de cette question en nous appuyant sur le fait qu'un quadri-fil peut être vu comme un assemblage de deux bi-fils que l'on appellera bi-bi-fil.

Nous allons proposer un modèle de bi-bi-fil qui sera en quelque sorte une discrétisation plus grossière du quadri-fil que celle des paragraphes précédents.

La comparaison des statistiques de résistances des deux modèles donnera quelques indications sur l'indépendance des résultats en fonction de la finesse de discrétisation.

5.3.1. Le bi-bi-fil

Le quadri-fil est constitué de l'assemblage de N quadri-cellules chacune constituée de l'assemblage en parallèle de quatre cellules unitaires. Le bi-bi-fil correspondant sera constitué de l'assemblage en série de N/2 "tranches" chacune constituée de l'assemblage en parallèle de deux éléments unitaire de bi-bi-fil (figure 5.8).

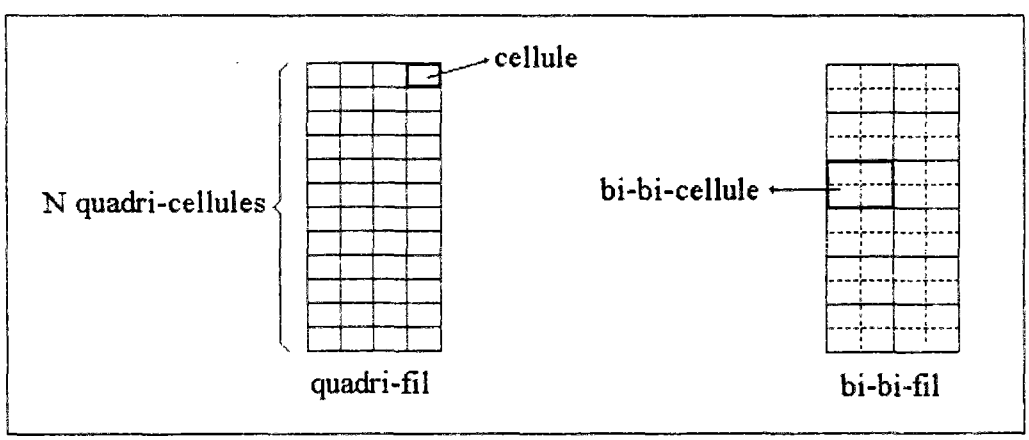


Fig.5.8 : Représentation du bi-bi-fil

Un élément unitaire de bi-bi-fil représente ainsi le volume de quatre cellules unitaires du quadri-fil (deux en série x deux en parallèle). Nous avons fait ce choix pour fixer l'élancement de l'élément unitaire.

La simulation de la résistance du bi-bi-fil pourra se faire de manière identique à celle du bi-fil dès lors que l'on connaîtra la loi de distribution des résistances d'un élément unitaire du bi-bi-fil.

Pour déterminer cette loi, nous étudions un bi-fil qui peut être considéré soit comme un assemblage de deux fils en parallèles constitués de N bi-cellules (chapitre 4), soit comme un assemblage en série de N/2 bi-bi-cellules (que nous appelons dans la suite un monobi-fil) (figure 5.9).

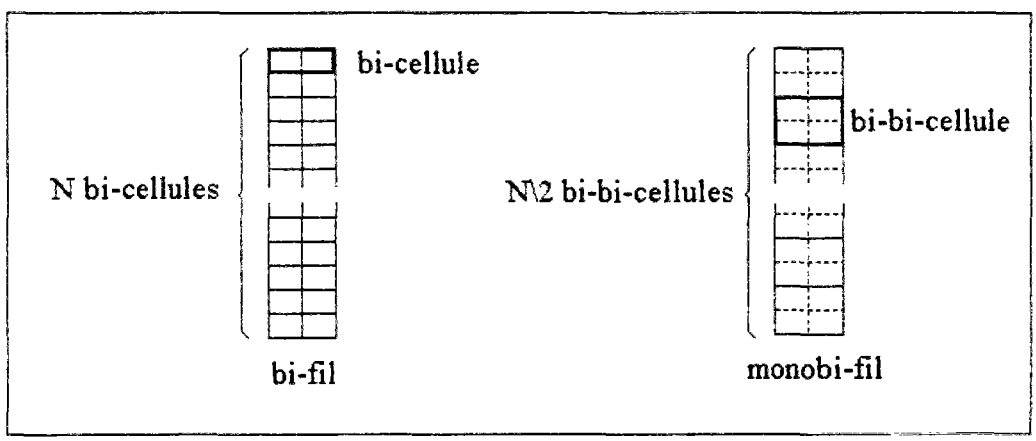


Fig.5.9 : Représentation du monobi-fil

Si nous notons $R_2(x)$ la probabilité pour qu'une bi-bi-cellule ait une résistance supérieure à x, la probabilité pour qu'une chaîne de N/2 de ces éléments ait une résistance supérieure à x est $[R_2(x)]^{\frac{N}{2}}$.

Notre hypothèse pour l'identification de $R_2(x)$ est que cette chaîne de N/2 bi-bi-cellules a la même distribution de résistance que le bi-fil de N bi-cellules

Ainsi :

(5.12) $$C_2^N(x) = [R_2(x)]^{\frac{N}{2}}$$

Pour la détermination de $R_2(x)$ nous utilisons une expression analytique approximant la courbe $C_2^N(x)$. Pour obtenir cette expression analytique remarquons que dans un diagramme

CLCPF la courbe $C_2^N(x)$ a deux asymptotes d'équations respectives Y'-X'=0 et Y'-mX'+a=0 où m est la pente de l'asymptote inférieure. Une famille de courbe à trois paramètre (m,a,b) d'équation ;

$$E^{m,a,b}(X',Y') = (Y'-X')(Y'-mX'+a) - b = 0 \qquad (5.13)$$

permet d'approcher avec une grande précision les courbes $C_2^N(x)$ après détermination du triplet (m,a,b). L'expression analytique de $C_2^N(x)$ à partir de $E^{m,a,b}(X',Y')$ est alors un peu longue mais facile à établir.

Par mesure de précaution nous simulons tout d'abord un monobi-fil de 150 sections et nous comparons la prévision de résistance à celle du bi-fil de 300 sections en utilisant la représentation "CLCPF corrigée des effets d'échelle de longueur" (figure 5.10).

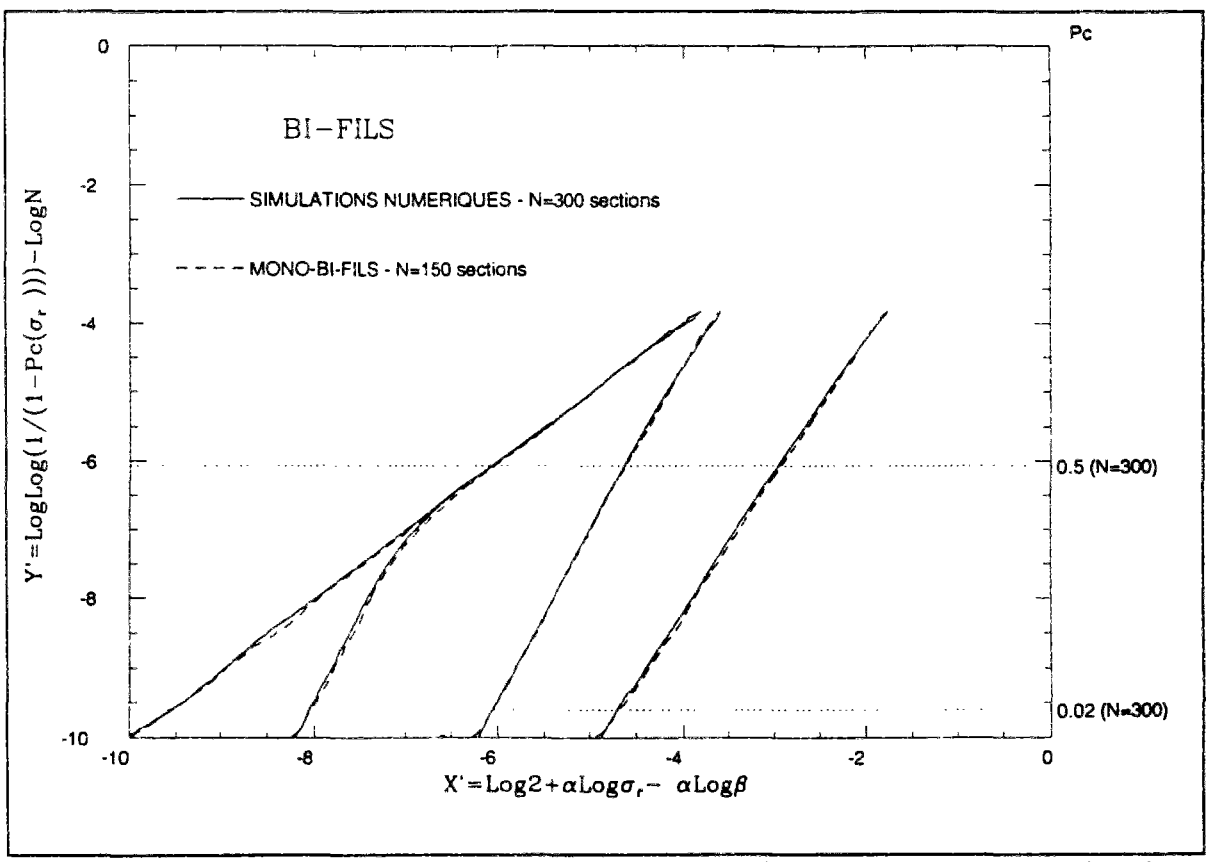


Fig. 5.10 : Courbes de probabilités cumulées de rupture du bi-fil et du monobi-fil dans la représentation "CLCPF corrigée des effets d'échelle de longueur" (α=1,4,9,20)

Les résultats sont en bon accord, ce qui prouve surtout la qualité de notre approximation analytique de $C_2^N(x)$.

5.3.1. Comparaison bi-bi-fil - quadri-fil

La loi de résistance $R_2(x)$ de la bi-bi-cellule étant déterminée nous pouvons procéder à des simulations de la résistance de l'assemblage en parallèle de deux bi-fils.
Nous présentons ci-dessous dans le diagramme "CLCPF corrigée des effets d'échelle de longueur" les courbes présentant les distributions de résistances simulées pour le bi-bi-fil et le quadrifil (figure 5.11).

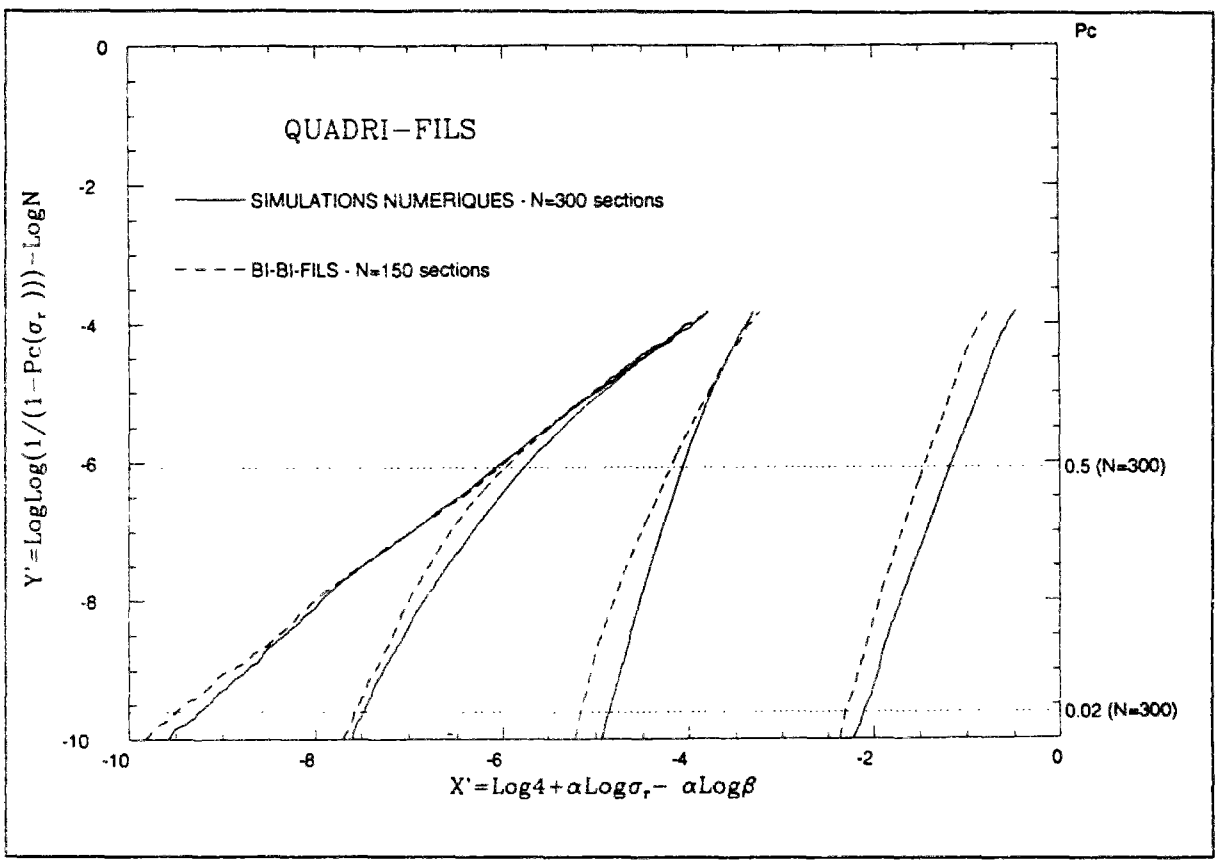


Fig. 5.11 : Courbes de probabilités cumulées de rupture du bi-bi-fil et du quadri-fil dans la représentation "CLCPF corrigée des effets d'échelle de longueur" (α=1,4,9,20)

Nous constatons que les résultats sont qualitativement similaires. Toutefois, les courbes représentant les résultats des bi-bi-fils sont légèrement décalées du côté des plus faibles

résistances. Ceci tend à prouver qu'une modélisation plus grossière (avec notre procédure d'identification de $R_2(x)$) se place du côté de la sécurité en sous-estimant les résistances.

Notons qu'il est possible d'avoir une modélisation encore plus grossière du quadri-fil en le considérant comme un assemblage en série de N/4 éléments unitaires de monoquadri-fil (pour conserver l'élancement) (figure 5.12).

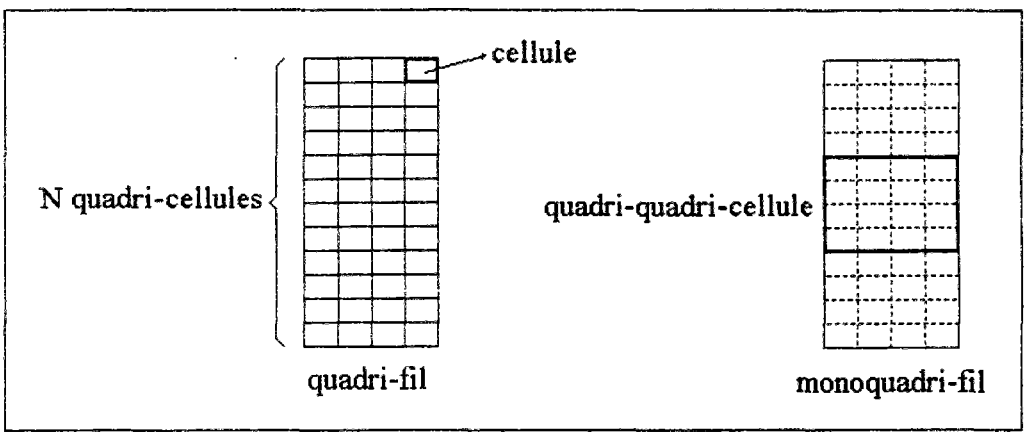


Fig.5.12 : Représentation du monoquadri-fil

Chaque élément unitaire du monoquadri-fil ou quadri-quadri-cellule représente un volume équivalent à 16 cellules unitaires de base (quatre en série x quatre en parallèle).

Notons $R_4(x)$ la probabilité pour qu'une quadri-quadri-cellule ait une résistance supérieure à x, $R_4(x)$ peut être déterminée à partir de $C_4^N(x)$ par :

$$C_4^N(x) = [R_4(x)]^{\frac{N}{4}} \tag{5.14}$$

On peut approximer $C_4^N(x)$ par une expression analytique de la même famille que celle vue pour approximer $C_2^N(x)$ (équation 5.13), la simulation de la loi de résistance du monoquadri-fil de N/4 sections peut alors être comparée à la loi de résistance du quadri-fil (figure 5.13).

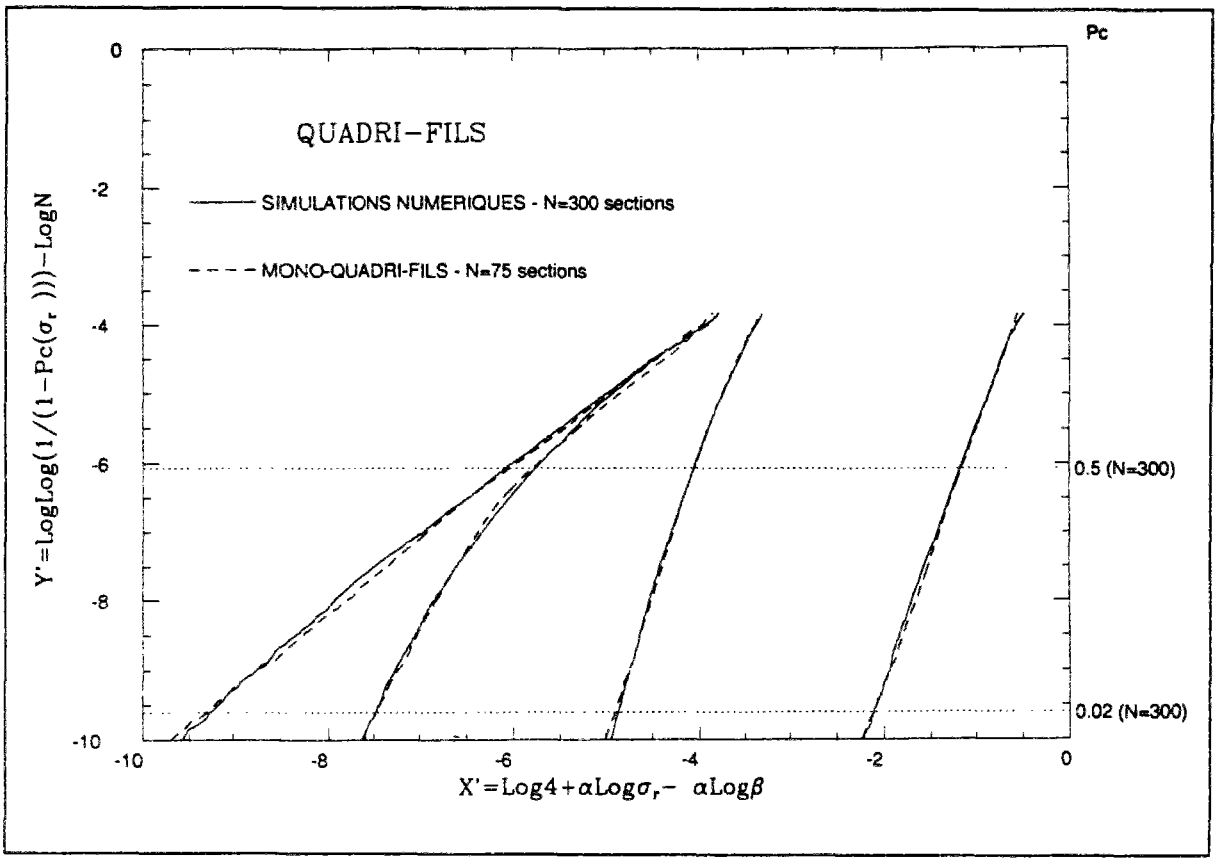


Fig. 5.13 : Courbes de probabilités cumulées de rupture du quadri-fil et du monoquadri-fil dans la représentation "CLCPF corrigée des effets d'échelle de longueur" (α=1,4,9,20)

On peut itérer ce processus et ainsi espérer simuler un très grand nombre de fils avec relativement peu d'éléments unitaires.

Ce n'est toutefois pas ce que nous allons faire dans le chapitre suivant où nous allons nous intéresser à l'évolution des queues de distribution des lois de résistance des n-fils du côté des faibles résistances en conservant la même finesse de discrétisation.

A titre d'illustration, donnons tout de même ci-dessous les courbes de simulations de rupture d'un huit-fil avec trois finesses de modélisation différentes :

- Huit fils en parallèle.
- Quatre bi-fils en parallèle.
- Deux quadri-fils en parallèle.

Ces différentes simulations donnent des résultats à peu près semblables (figure 5.14).

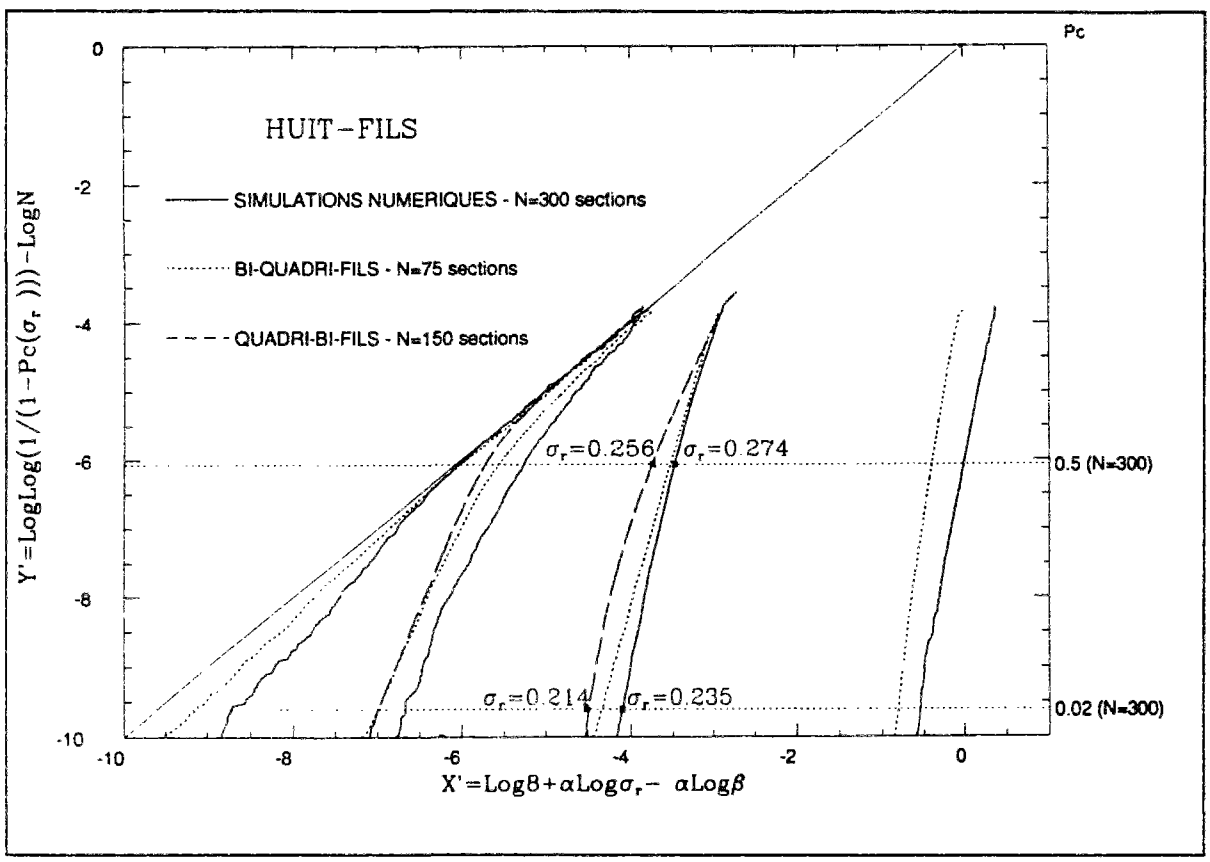


Fig. 5.14 : Courbes de probabilités cumulées de rupture du huit-fil et du bi-quadri-fil et du quadri-bi-fil dans la représentation "CLCPF corrigée des effets d'échelle de longueur" (α=1,4,9,20)

CHAPITRE 6.

GENERALISATION AU P-FIL

6.1. RESULTATS DE SIMULATIONS

6.2. DEFINITION DE LA SECTION OPTIMALE

6.3. RESISTANCE UTILE DES JONCS

CHAPITRE 6.

GENERALISATION AU P-FIL

Dans ce dernier chapitre, nous nous intéressons à la rupture de p-fils sans prendre en compte la décohésion. Nous tenterons d'une part de préciser le sens de la question ''Quelle est la section optimale de joncs'', et d'autre part, nous proposerons le concept de ''résistance utile'' d'un jonc en fonction de la longueur, de la section et d'un risque de rupture admissible.

L'étude pourrait être menée pour toutes les valeurs de α de la distribution de Weibull des résistances des cellules, cependant, pour mieux dégager les idées nous choisissons de ne présenter les résultats que pour la valeur de $\alpha = 4$ qui nous semble être la plus intéressante aux vues des chapitres précédents dans la zone d'intérêt que nous avons étudiée jusqu'ici ($P_c \in [0,02;0,5]$; N=300).

Dans le premier paragraphe de ce chapitre, nous présentons les résultats des simulations avec des valeurs de p-fils croissant jusqu'à ce que l'on observe ce que l'on peut appeler un optimum de la section.
Le deuxième paragraphe discute cette notion d'optimum de la section.
Enfin, le dernier paragraphe qui pourrait être le plus proche d'une application éventuelle de notre travail propose le concept de ''résistance utile'' d'un câble et donne une expression de

cette résistance en fonction de la longueur. Nous illustrerons sur un exemple "l'économie" que pourrait représenter cette approche par rapport à celle qui consiste à appliquer un coefficient de sécurité de 0,5 sur une résistance moyenne.

6.1. Résultats de simulations

Nous présentons sur la figure 6.1 les résultats des simulations de résistance d'éprouvettes de 300 sections réalisées avec un nombre croissant de fils collés.
Nous utiliserons, pour présenter ces résultats, une représentation à l'aide d'un diagramme de "Freudenthal" corrigé des effets d'échelle de longueur dont les coordonnées sont :

$$X = \mathrm{Log}\sigma_r$$

(6.1)

$$Y = \mathrm{Log}\left[\mathrm{Log}\left(\frac{1}{1 - P_c(\sigma_r)}\right)\right] - \mathrm{Log}N$$

Pour éviter de surcharger la figure nous ne présentons que les résultats obtenus pour les valeurs de $p = 2^q$ fils.
Nous constatons que pour q variant de 4 à 5, la partie basse (dans notre zone d'intérêt) de la courbe de distribution cumulée des résistances n'évolue guère. Nous ferons donc varier q de 1 à 5, c'est à dire que nous présentons les résultats des simulations pour p=2,4,8,16,32.

Schématiquement nous pouvons dire que l'on constate :

1°) Un redressement des courbes, traduisant une diminution de la dispersion des résultats lorsque l'on augmente le nombre de fils.

2°) Un décalage vers les basses résistances de la valeur médiane (P_c=0,5) traduisant sur cette valeur un "effet d'échelle de volume".

3°) La combinaison des deux évolutions précédentes implique que pour d'autres valeurs de la probabilité de rupture (par exemple P_c=0.02) l'effet d'échelle peut être inversé.

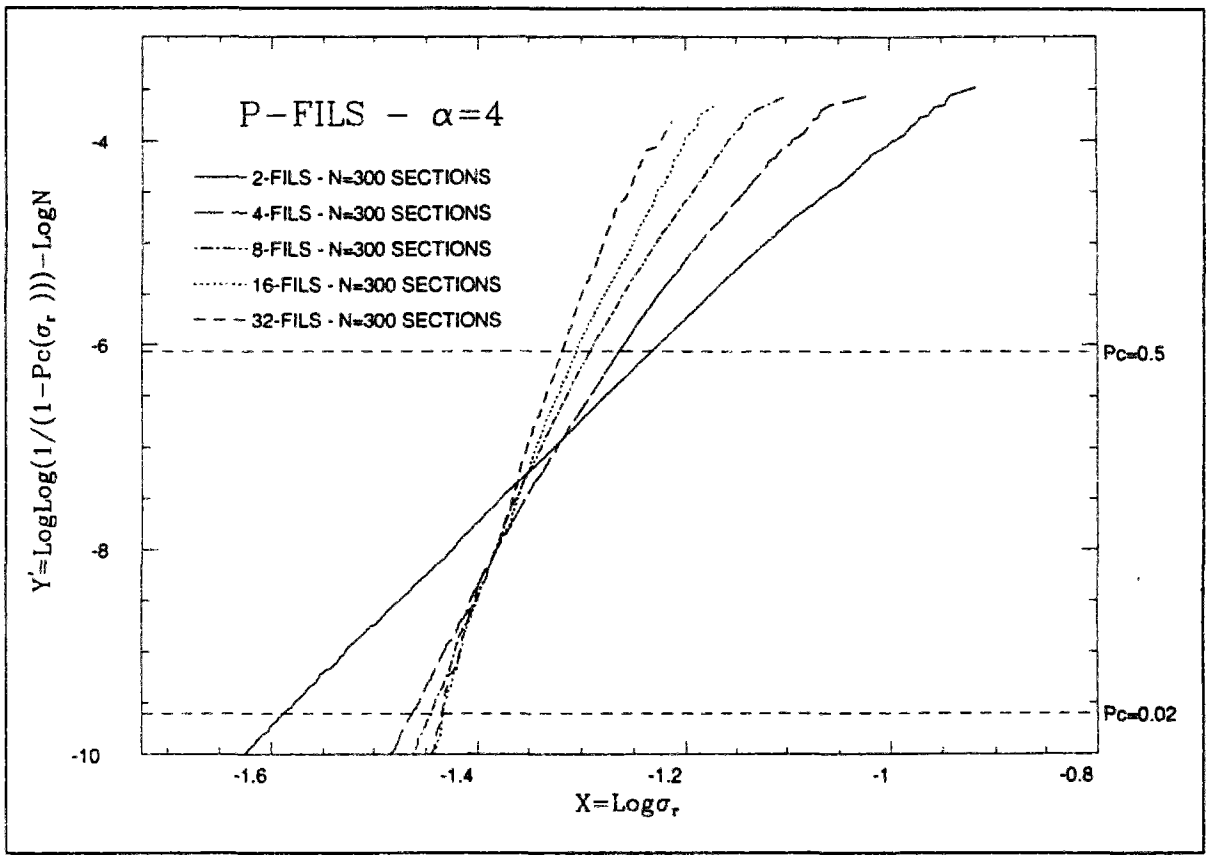


Fig. 6.1 : Courbes de probabilités cumulées de rupture de p-fils (p=2,4,8,16, et 32) dans le diagramme de Freudenthal corrigé des effets d'échelle pour α=4 et N=300

La figure 6.2 donnant les valeurs de σ_r pour des probabilités de rupture P_c=0.02 et P_c=0.5 (N=300) met bien en évidence ce phénomène.

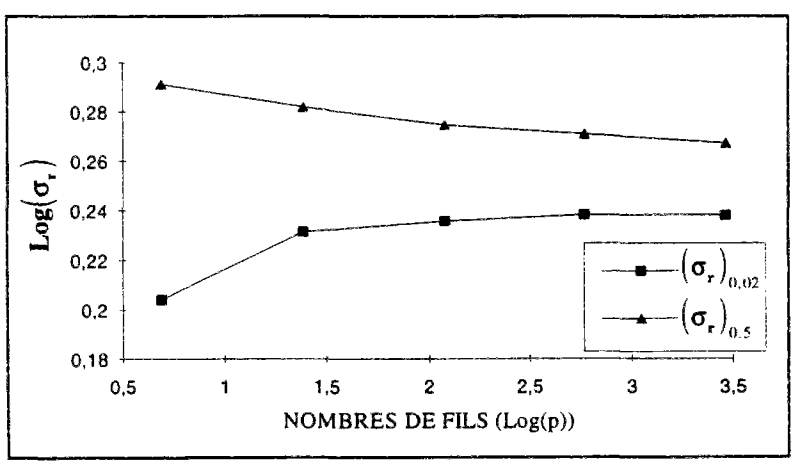


Fig. 6.2 : Résistance du p-fils (p=2,4,8,16,32) pour des probabilités de rupture P_c=0,02 et P_c=0,5

Du point de vue des applications à la détermination de la résistance de longs câbles, seule la partie basse des courbes ($P_c \approx 0{,}02$) nous intéresse.

Si l'on effectue un agrandissement de la figure 6.1 pour les faibles résistances et les faibles probabilités de rupture (figure 6.3) on voit que les courbes peuvent être avec une bonne approximation approchées par des droites.

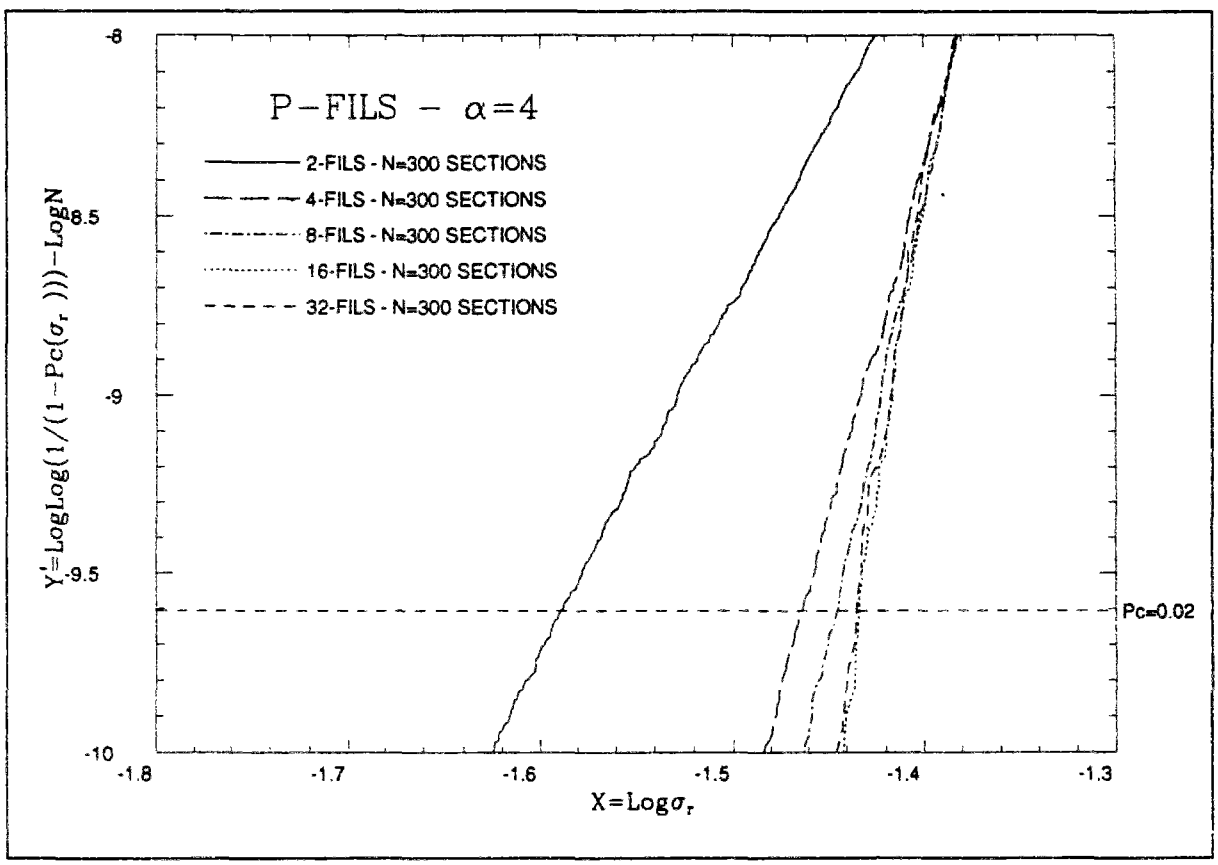


Fig. 6.3 : Courbes de probabilités cumulées de rupture de p -fils pour les faibles probabilités de rupture et approximation de ces courbes par des droites

Si nous posons l'équation de ces droites sous la forme :

$$Y'=A(p)X+B(p)$$

nous pourrons identifier sur la figure 6.3 les valeurs de A(p) et B(p).

Ces valeurs reportées sur la figure 6.4 indiquent une "stabilisation" de la droite approximant cette partie des courbes de distribution cumulée en représentation de Freudenthal entre les valeurs de p=16 et p=32.

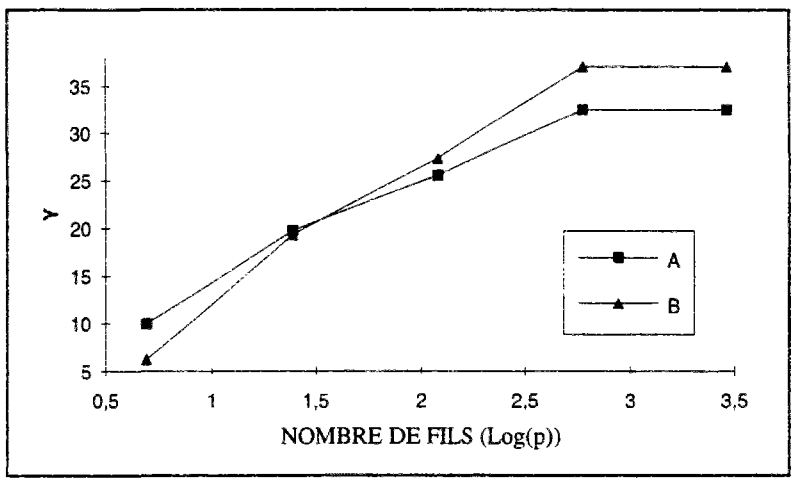


Fig. 6.4 : Evolution des valeurs de A(p) et B(p) en fonction du nombre de fils p

Pour les valeurs supérieures de p, la résistance d'une éprouvette de 300 sections avec "une probabilité" de rupture de 0,02 devraient décroître.

L'optimum de la section pour α=4 dans cette zone d'intérêt (P_c=0.02, N=300) se situerait donc entre 16 et 32 fils. Ce point serait à confirmer par des simulations plus nombreuses et plus variées.

Précisons maintenant le concept évoqué ci-dessus de "zone d'intérêt" et de "section optimale".

6.2. Définition de la section optimale

Notre travail nous a conduit à considérer que l'information contenue dans l'ensemble de la courbe de distribution cumulée était trop riche du point de vue des applications. Seule une petite partie de cette courbe est vraiment intéressante pour les câbles de grande longueur, cette partie se situant bien sûr dans la zone des faibles résistances.

Plus précisément, si l'usage envisagé pour les câbles permet de tolérer un risque de rupture du jonc de P_c et si la longueur du jonc est donnée par un nombre de sections N, la ''zone d'intérêt (P_c,N)'' de la courbe précédente se situe dans le voisinage de l'ordonnée Y_{INT} :

$$Y_{INT} = \mathrm{Log}\left[\mathrm{Log}\left(\frac{1}{1-P_c}\right)\right] - \mathrm{Log}N \tag{6.2}$$

L'intersection des courbes de distribution cumulée de résistances avec cette ''horizontale'' donnera des points d'abscisse tout d'abord croissante avec le nombre de fils p puis décroissante.
La section optimale dans cette ''zone d'intérêt'' sera donc donnée par la valeur de p donnant le maximum de cette abscisse.

La résistance utile (P_c,N) d'un jonc de longueur correspondant à N sections en acceptant un risque de rupture P_c peut être défini comme la contrainte $\sigma_r(P_c,N)$ correspondant à l'abscisse du point de la courbe des probabilités cumulées de résistances dans les représentations précédentes dont l'ordonnée est donnée par l'équation 6.2.

6.3. Résistance utile des joncs

Pour des applications à des câbles de quelques dizaines de mètres de long la valeur de N, compte tenu des paramètres de notre modèle mécanique, sera de l'ordre de quelques millions.
Pour illustrer notre propos, supposons que l'on accepte un risque de rupture de 2% (P_c=0.02).
Cela nous conduit à nous intéresser à des ordonnées de l'ordre $Y \in [-20,-15]$.

Pour obtenir par simulation des points dont les ordonnées sont comprises dans cet intervalle dans la représentation précédente, il faut soit effectuer un très grand nombre de simulations (≈100 millions), soit simuler la rupture d'éprouvettes avec un très grand nombre de sections.

Dans les deux cas la durée des calculs est prohibitive.

Nous proposons pour surmonter cette difficulté d'extrapoler les courbes simulées en acceptant l'hypothèse de l'existence d'une asymptote et en supposant que celle-ci puisse être déterminée par les parties basses des courbes précédentes.

Ainsi, nous supposons que la droite d'équation Y=AX+B déterminée au paragraphe 6.1 est une bonne approximation, en représentation de Freudenthal, de la courbe de probabilité cumulée de résistance dans la partie extrapolée.

Si cette hypothèse est justifiée, ce qui mérite d'être confirmé par une étude plus approfondie et beaucoup d'autres simulations, la ''résistance utile'' d'un jonc de p fils de longueur donnée N en admettant un risque de rupture P_c est donnée par :

$$\sigma_r = \exp\left[\left[\frac{1}{A}\right]\left\{\mathrm{Log}\left[\mathrm{Log}\left(\frac{1}{1-P_c}\right)\right] - \mathrm{LogN} - B\right\}\right] \tag{6.3}$$

D'un point de vue pratique et expérimental la procédure pourrait être la suivante :

1°) Etudier expérimentalement la rupture d'un grand nombre d'éprouvettes de longueur L_0.

2°) Déterminer dans un diagramme de type Freudenthal la pente de la ''partie basse'' de la courbe de probabilité cumulée de résistance. Nous obtenons alors une estimation de A à utiliser dans l'équation précédente.

3°) Choisir un point P_c^0, σ_r^0 de la courbe expérimentale dans cette partie basse.

4°) Déterminer en utilisant l'équation 6.3 la résistance utile σ_r d'un jonc de longueur L pour une probabilité de rupture P_c par :

$$\sigma_r = \sigma_r^0 \left[\frac{L_0}{L}\frac{\mathrm{Log}\left(1/\left(1-P_c\right)\right)}{\mathrm{Log}\left(1/\left(1-P_c^0\right)\right)}\right]^{\frac{1}{A}} \tag{6.4}$$

A titre d'exemple, considérons la courbe expérimentale suivante obtenue par la rupture de 528 éprouvettes de longueur 100 mm (figure 6.5).

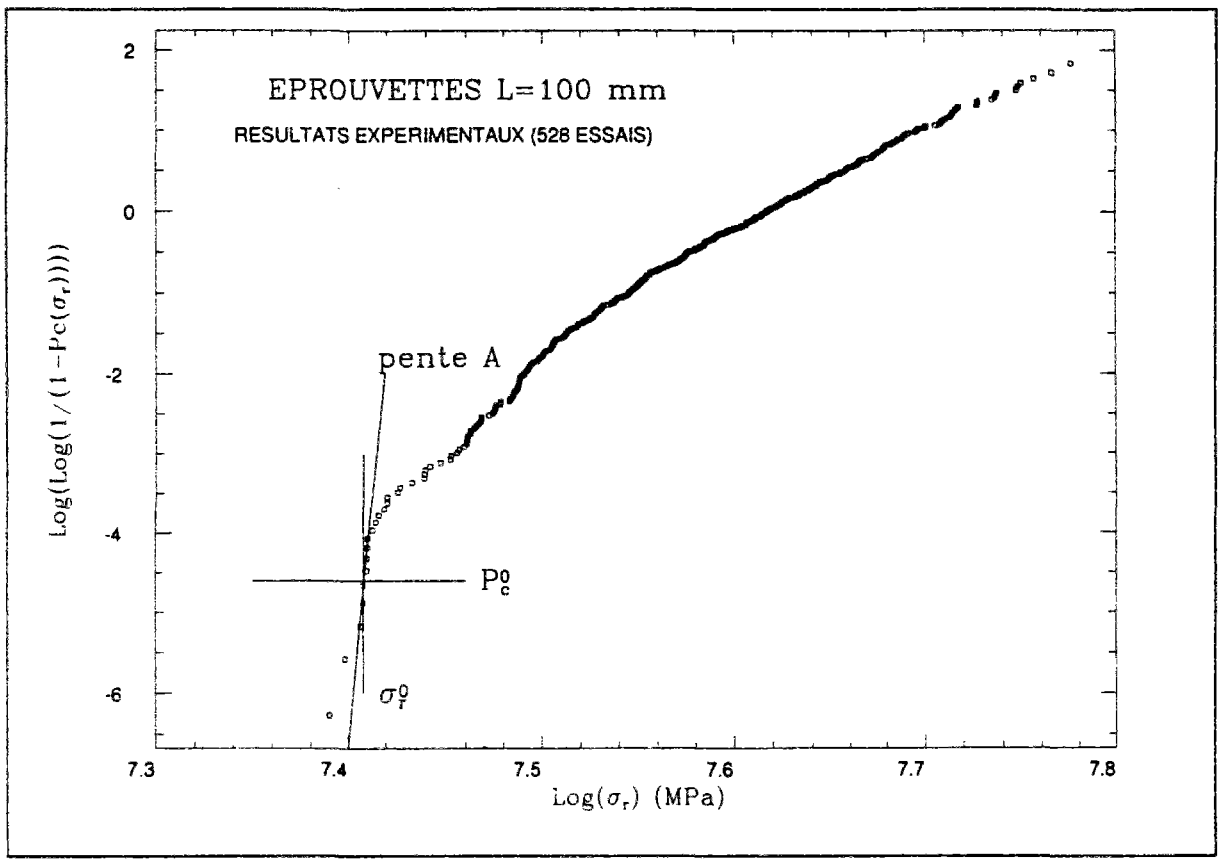


Fig. 6.5 : Courbe de probabilités cumulées de rupture d'éprouvettes de longueur L=100 mm

La résistance utile d'un câble de 100 mètres de long serait de **1603 MPa** en acceptant un risque de rupture de 2%.

Une approche utilisant la résistance moyenne (1973 Mpa) multipliée par le coefficient de sécurité (0.5) donnerait **986.5 MPa** soit une diminution de l'ordre de 38 % par rapport à la résistance utile pour un même câble.
L'utilisation du concept de résistance utile conduirait donc à une économie de matière (38 % pour notre exemple) et donc à des coûts moins importants.

Il est bien sûr nécessaire de vérifier expérimentalement cette prévision, ce que nous espérons faire dans un prochain programme de recherche où nous nous proposons de valider expérimentalement la détermination théorique de la distribution statistique des résistances de câbles de 100 mètres de long.

Pour cela, notre programme expérimental consistera à réaliser dans un premier temps des essais de rupture sur des portions de câbles (joncs de L_0=1 mètre de long). Nous devrons réaliser 1000 essais pour estimer correctement d'un point de vue statistique la distribution des plus faibles résistances. Ce programme expérimental associé à la procédure de détermination de la résistance utile d'un câble (page 146) devrait nous permettre une détermination théorique de la distribution statistique des résistances de câbles de L=100 mètres de long.
Nous validerons cette approche à l'aide d'une deuxième phase expérimentale dans laquelle nous nous proposons de rompre des câbles de L=100 mètres de long sur un banc d'essais de traction adapté à de tels câbles (installations du LCPC à Nantes).

CONCLUSION

Après de nombreux auteurs, nous nous sommes intéressés à la rupture en traction des matériaux composites unidirectionnels dans la perspective de leur utilisation comme câbles de précontrainte. Le comportement de type élastique-fragile de ces matériaux impose de prendre en compte l'aléa de résistance, afin de prédire les effets d'échelle.

Pour étudier ce problème, nous nous sommes appuyés sur une technique de simulations numériques de la rupture à l'aide d'un modèle mécanique à cinématique uniaxiale permettant pour chaque géométrie un très grand nombre de simulations (10000 en général) de façon à pouvoir étudier avec une certaine précision les queues de distribution des résistances puisque ce sont elles qui interviennent dans la rupture des câbles de grandes longueurs.

Nous avons initialement étudié deux mécanismes d'endommagement, rupture des fils et décohésions entre fils. Nos premières simulations nous ont donné à penser que pour les objets très longs la décohésion n'était pas le phénomène prépondérant. Nous avons conjecturé que les queues de distribution des résistances seraient voisines que l'on prenne ou non en compte la décohésion. Pour être tout à fait affirmatif un travail complémentaire est nécessaire.

Nous avons constaté dans nos simulations qu'un effet d'échelle de longueur de type chaîne décrivait correctement nos simulations pour différentes longueurs dès que l'on pouvait négliger les effets d'extrémité.

La constatation la plus importante d'un point de vue pratique est que la queue de distribution des faibles résistances n'obéit plus à une loi du type rupture de la structure au premier endommagement. Nous l'avons d'ailleurs constaté lors d'une campagne expérimentale sur la rupture d'un très grand nombre d'éprouvettes.

L'extrapolation de ces courbes de distribution des résistances a permis de proposer le concept de *résistance utile* d'un jonc en acceptant une certaine probabilité de rupture. Cette résistance utile peut être très largement supérieure à celle utilisée actuellement en appliquant un coefficient de sécurité de 0,5 à la résistance moyenne. L'utilisation de ce concept de *résistance utile* pourrait alors réduire la quantité de matière et évidemment les coûts.

Un autre apport du travail est issu de l'étude des effets d'échelle de section. Nous sommes en effet arrivés à démontrer que pour un usage donné (longueur, probabilité de rupture admissible) il existe une *section optimale* de jonc donnant la meilleure *résistance utile*.

Nos travaux se situent dans le prolongement de nombreux autres travaux dont certains ont été présentés succinctement au chapitre 1. Il n'en reste pas moins que le travail qui reste à accomplir. pour donner des réponses totalement convaincantes aux questions posées sur la résistance de câbles en composite UD de grande longueur, est encore très important. En particulier. il parait nécessaire de lancer un programme expérimental de grande envergure pour confirmer ou infirmer certaines conjectures proposées dans ce travail.

En terme de modèles et de simulations numériques, et si l'on ne devait souligner pour conclure qu'une seule hypothèse sous-jacente à l'ensemble de notre travail qui mériterait une réflexion plus approfondie, il faudrait valider l'hypothèse d'indépendance des résistances des sections de fils voisines (d'autant plus que dans nos simulations, la distance entre les sections est très faible).

Il parait aussi nécessaire d'étudier les statistiques de rupture en introduisant une corrélation spatiale entre des résistances. Nous espérons pouvoir entreprendre dans les prochains mois ces deux nouvelles étapes expérimentales et numériques du programme de recherche.

ANNEXES

ANNEXE 1

Nous présentons l'ensemble des figures similaires à la figure 2.5 pour les différentes géométries d'éprouvettes.

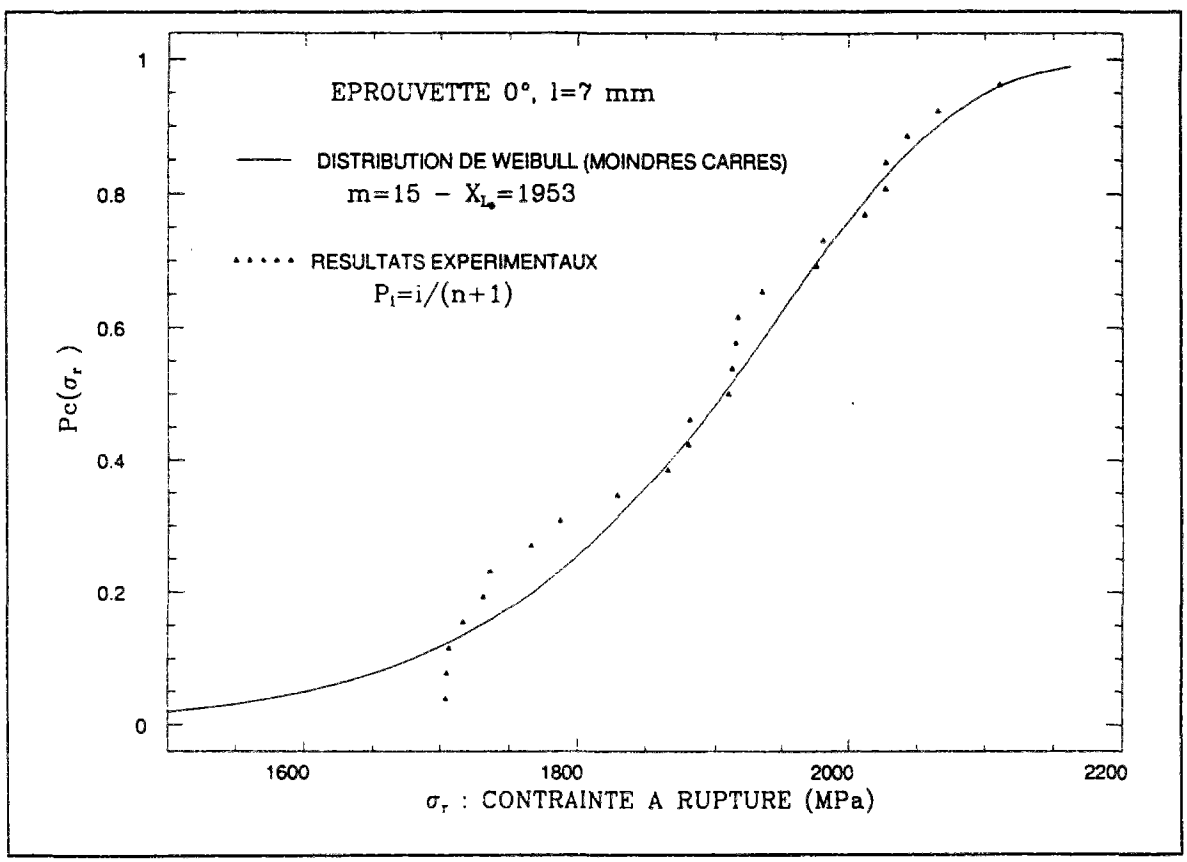


Fig. 2.8 : Probabilité cumulée de rupture d'une éprouvette appartenant au jeu n°1. Résultats expérimentaux et distribution de Weibull à deux paramètres.

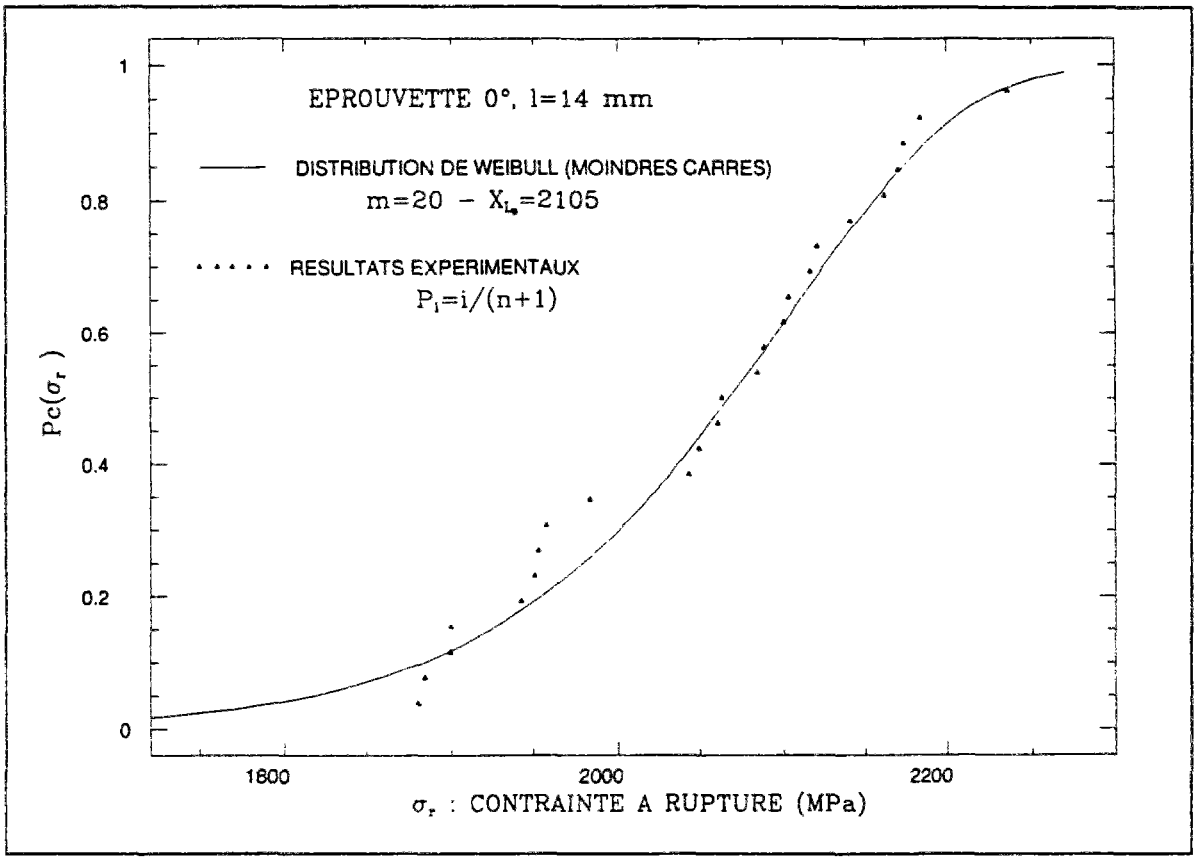


fig. 2.9 : Probabilité cumulée de rupture d'une éprouvette appartenant au jeu n°2.

Résultats expérimentaux et distribution de Weibull à deux paramètres.

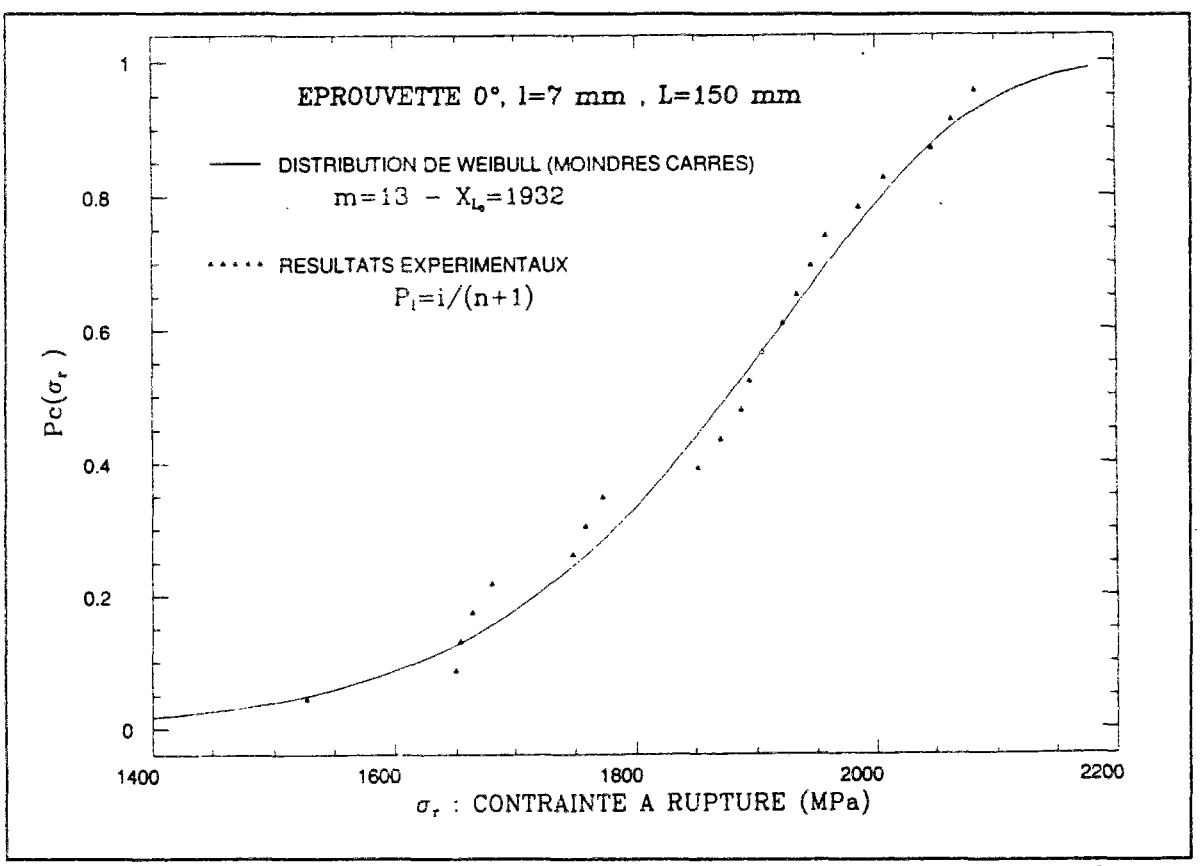


Fig. 2.10 : Probabilité cumulée de rupture d'une éprouvette appartenant au jeu n°4.

Résultats expérimentaux et distribution de Weibull à deux paramètres.

ANNEXE 2

Soit P(x) la loi de probabilité pour qu'une éprouvette de référence ait une résistance inférieure à x.

$$P(x) = \text{Prob}(R_e < x)$$

La loi de probabilité P(x) est connue et a été identifiée par une loi de distribution de Weibull.

En supposant alors que la résistance de l'éprouvette de référence est liée à son défaut le plus critique, et que la résistance de l'éprouvette dépend de la distribution statistique de ces défauts nous pouvons découper mentalement notre éprouvette en petits éléments appelés sections, la résistance de l'éprouvette étant celle de la section la plus faible. Nous pouvons alors considérer du point de vue statistique l'éprouvette de référence comme une chaîne constituée de sections.

Nous découpons notre éprouvette en N sections et nous notons S(x) la probabilité qu'une section ait une résistance Rs inférieure à x.

$$S(x) = \text{Prob}\ (Rs < x)$$

Nous pouvons relier S(x), la loi de distribution de résistance d'une section à la loi de distribution de résistance de la chaîne F(x).
Pour qu'une chaîne ait une résistance supérieure à x, il faut que toutes ses sections aient une résistance supérieure à x. La probabilité pour qu'une chaîne constituée de N sections ait une

résistance supérieure à x est égale au produit des N probabilités que les N sections aient chacune une résistance supérieure à x sous l'hypothèse d'indépendance des résistances. Ceci se traduit par l'expression :

$$1-F(x)=(1-S(x))^N$$

On peut alors déduire S(x) de P(x)

$$S(x)=1-(1-P(x))^{1/N}$$

Considérons maintenant une chaîne constituée de N_1 sections ; la loi de distribution de résistance S(x) d'une section est inchangée et on peut écrire S(x) en fonction de la loi de distribution de résistance de la chaîne constituée de N_1 sections. Notons $P_1(x)$ la loi de probabilité pour que cette chaîne ait une résistance inférieure à x, on a alors la relation :

$$S(x) = 1 - \left(1 - P_1(x)\right)^{N_1}$$

$P_1(x)$ est identifiée par une de distribution de Weibull de paramètres $((m)_1,(x_{L_0})_1)$ et P(x) est identifiée par une loi de Weibull dont les paramètres (m, x_{L_0}) sont connus.

On a donc :

$$1 - P_1(x) = 1 - \left(1 - P(x)\right)^{\frac{N_1}{N}}$$

Nous obtenons alors les relations suivantes :

$$\begin{cases} m_1 = m \\ \left(x_{L_0}\right)_1 = x_{L_0} / \left(\dfrac{N_1}{N}\right)^{\frac{1}{m}} \end{cases}$$

Le couple $(m_1,(x_{L_0})_1)$ est alors déterminé et nous pouvons calculer la résistance moyenne $\overline{x}_1$ d'une chaîne constituée de N_1 sections avec l'expression qui relie $\overline{x}$ au paramètre (x_{L_0}) :

$$\overline{x}_1 = (x_{L_0})_1 \, \Gamma\left[\frac{m+1}{m}\right]$$

Celle-ci s'écrit alors :

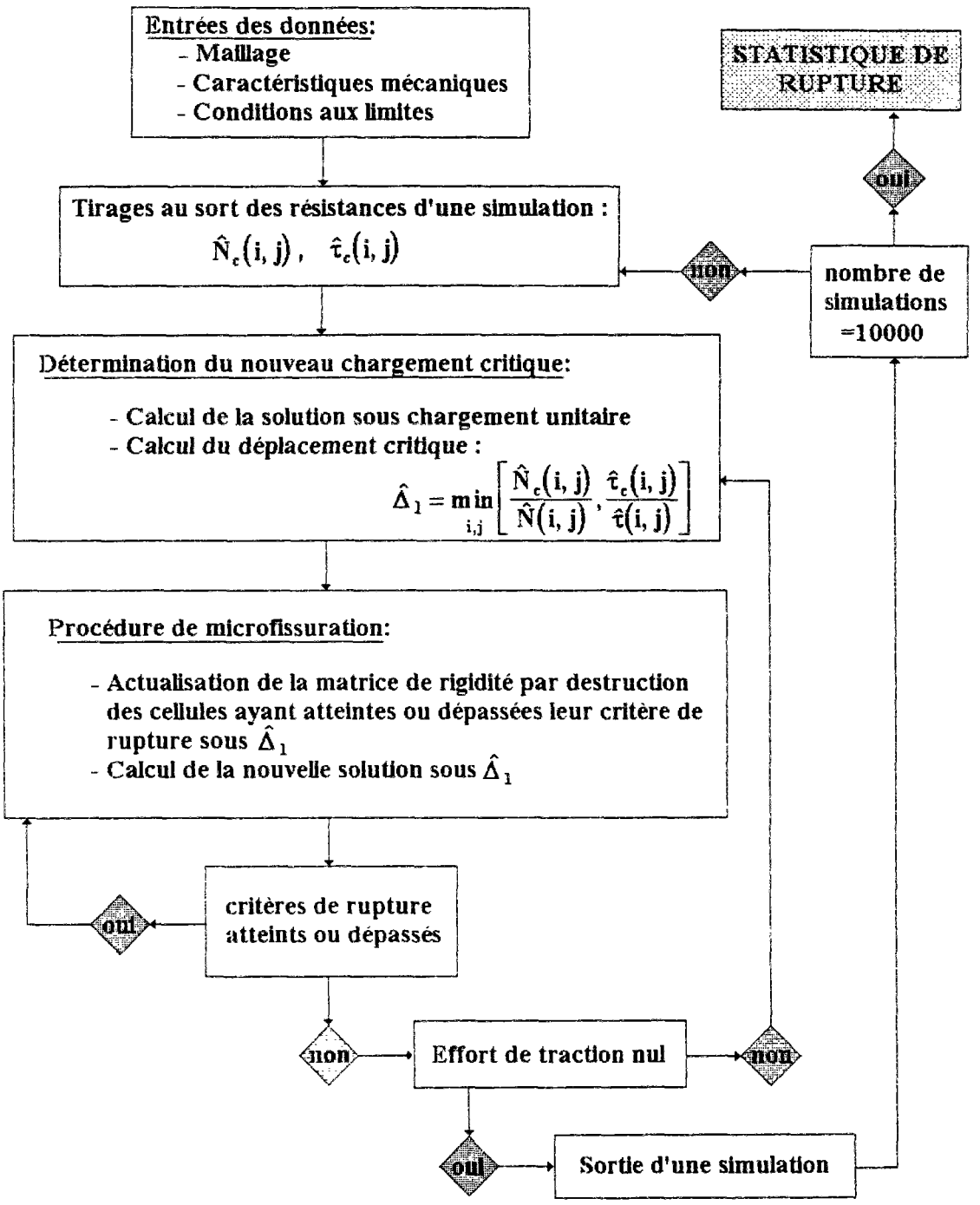
$$\overline{x}_1 = \frac{\overline{x}}{\left(\frac{N_1}{N}\right)^{\frac{1}{m}}}$$

ANNEXE 3

Nous donnons ici le détail de la programmation du générateur de variable aléatoire que nous avons utilisé pour tirer au sort la valeur critique de la résistance en traction des cellules. Ce générateur est suggéré par D.E. Knuth [*Knuth,1981*] et est basé sur une ''méthode de soustraction''.

```
FUNCTION RAN(IDUM)
PARAMETER (MBIG=1000000000., MSEED=1618033., MZ=0., FAC=1./MBIG)
DIMENSION MA(55)
DATA IF /0/
IF (IDUM.LT.0.OR.IFF.EQ.0) THEN
        IFF=1
        MJ=MSEED-IABS(IDUM)
        MJ=MOD(MJ,MBIG)
        MA(55)=MJ
        MK=1
        DO 11 I=1,54
                II=MOD(21*I,55)
                MA(II)=MK
                MK=MJ-MK
                IF (MK.LT.MZ) MK=MK+MBIG
                MJ=MA(II)
           11 CONTINUE
        DO 13 K=1,4
                DO 12 I=1,55
                        MA(I)=MA(I)-MA(1+MOD(I+30,55))
                        IF (MA(I).LT.MZ) MA(I)=MA(I)+MBIG
                  12 CONTINUE
             13 CONTINUE
        INEXT=0
        INEXTP=31
        IDUM=1
ENDIF
INEXT=INEXT+1
IF (INEXT.EQ.56) INEXT=1
INEXTP=INEXTP+1
IF (INEXTP.EQ.56) INEXTP=1
MJ=MA(INEXT)-MA(INEXTP)
IF (MJ.LT.MZ) MJ=MJ+MBIG
MA(INEXT)=MJ
RAN=MJ*FAC
RETURN
END
```

ANNEXE 4


Entrées des données:
- Maillage
- Caractéristiques mécaniques
- Conditions aux limites
STATISTIQUE DE RUPTURE
oui
Tirages au sort des résistances d'une simulation :
$\hat{N}_c(i,j)$, $\hat{\tau}_c(i,j)$
non
nombre de simulations =10000
Détermination du nouveau chargement critique:
- Calcul de la solution sous chargement unitaire
- Calcul du déplacement critique :
$\hat{\Delta}_1 = \min_{i,j}\left[\frac{\hat{N}_c(i,j)}{\hat{N}(i,j)}, \frac{\hat{\tau}_c(i,j)}{\hat{\tau}(i,j)}\right]$
Procédure de microfissuration:
- Actualisation de la matrice de rigidité par destruction des cellules ayant atteintes ou dépassées leur critère de rupture sous $\hat{\Delta}_1$
- Calcul de la nouvelle solution sous $\hat{\Delta}_1$
oui
critères de rupture atteints ou dépassés
non
Effort de traction nul
non
oui
Sortie d'une simulation

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

ABRAMOVITZ M., STEGUN I., *Handbook of mathematical functions with formulas graphs and mathematical tables*, Ed Dover, New-York, 1965.

AWERBUCH J., HAHN H.T., *Fracture behavior of metal matrix composites*, Proc. of the Soc. Engr. Sci., p. 343, 1977.

BASCOM W.D., JENSEN R.M., *Stress transfer in single-fiber resin tensile tests*, Journal. Adhesion, Vol. 17, p. 219, Oct. 1985.

BATDORF S.B., *Tensile Strength of Unidirectionally Reinforced Composites -I*, J. Reinf. Plastics and Composites, Vol. 1, p. 153, April 1982.

BATDORF S.B., GHAFFARIAN R., *Tensile Strength of Unidirectionally Reinforced Composites-II*, J. Reinf. Plastics and Composites, Vol. 1, p. 165, April 1982.

BATDORF S.B., GHAFFARIAN R., *Size effect and strength of unidirectional composites-II*, Int. J. of Fracture, Vol. 26, p. 113, May 1984.

BAXEVANAKIS C., *Comportement Statistique A Rupture de Composites Stratifiés*, Thèse de Doctorat de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, déc. 1994.

BAXEVANAKIS C., JEULIN D., VALENTIN D., *Fracture statistics of single-fibre composite specimen*, Composites Sci. and Technol., Vol. 48, p.47, 1993.

BAXEVANAKIS C., BOUSSUGE M., JEULIN D., MUNIER E., RENARD J., *Simulation of The development of Fracture in Composite Materials With Random Deffects*, MECAMAT 93, p.460, 1993.

BURNAY S.G., SHARP J.V., *Defect structure of PAN-based carbon fibres*, AERE-R 7258, October 1972.

CARON J.F., *Modélisation de la cinétique de fissuration transverse en fatigue dans les stratifiés*, Thèse de Doctorat de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, nov. 1993.

CARON J.F., EHRLACHER A., POTTIER T., *Cinétique de fissuration transverse et délaminage dans les stratifiés*, Deuxième colloque national en calculs des structures, Giens, 16-19 mai 1995.

CARON J.F., FORET G., *Proposition d'une méthodologie d'essai pour les matériaux composites stratifiés. Application à la fissuration transverse*, Congrès Mattec 91, I.I.T.T., Paris la Défense, 1991.

CARON J.F., FORET G., *Procédé et machine pour fabriquer des tubes à partir de pièces préimprégnées fibres-résine*, Brevet N° 91/16/170, 1991.

CARON J.F., FORET G., *Dispositif d'accrochage d'une pièce travaillant en traction, munie d'un élément d'accrochage notamment pour une éprouvette*, Brevet N° 91/16/169, 1991.

CHABERT A., *Les applications des matériaux composites au sein des ouvrages d'art*, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, mars 1993.

CHABOT A., *Délaminage des matériaux composites*, Thèse de Doctorat de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées (en cours).

CHI Z., CHOU T.-W., SHEN G., *Determination of single fibre strength distribution from fibre bundle testings*, J. of Mat. Sci., Vol. 19, p. 3319, 1984.

CHOI I., HORGAN C.O., *Saint-Venant's principle and end effects in anisotropic elasticity*, J. Applied Mech., Vol. 44 seri E n°3, p. 424, Sep. 1977.

COULSON C.A., *The Electronic Structure of some Polyenes and Aromatic Molecules-The Nature of the Link of Certain Free Radicals*, Proc. Roy. Soc., (London), A164, p.383, 1938.

COX H.L., *The elasticity and strength of paper and other fibrous materials*, British Journal of Applied Physics, Vol. 3, p. 72, Aug. 1951.

DANIELS H.E., *The statistical theory of the strength of bundles of threads*. Proc. Royal Soc. (London), Vol. 183A, p. 405, 1944.

DHARANI L.R., JONES W.F., GOREE J.G., *Mathematical modeling of damage in unidirectionnal composites*, Engng Fract. Mech., Vol. 17, p. 555, 1983.

DUVA J.M., LANG E.J., MIRZADEH F., HERAKOVICH C.T., *Probabilistic perspective on the failure of composite laminae*, Appl. Mech. Rev., Vol. 43, p. 288, May 1990.

EHRLACHER A., NACIRI T., *Modélisation des Matériaux Composites*, Cours du D.E.A. "MECANIQUE DES SOLIDES ET STRUCTURES", option 5, PARIS 6 / Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Chap. 7, 1993.

EHRLACHER A., NACIRI T., CHABOT A., *Prévision de l'initiation du délaminage,* Rapport de fin de contrat SNECMA n°486, 1994.

ERMOLENKO A.F., *A model of failure of a unidirectional fiber plastic with a brittle matrix,* Mekhanika Kompozitnykh Materialov, Vol. 2, p. 247, 1985.

FAVRE J.P., JACQUES D., *Stress transfer by shearn in carbon fiber model composites,* J. of Mat. Sci., Vol. 25, p. 1373, 1990.

FISHER R.A., TIPPET L.H.C., *Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample,* Proc. Cambridge Phil. Soc., Vol. 24, p. 180, Dec. 1927.

FRECHET M., *Sur la loi de probabilité de l'écart maximum,* Annales de la Soc. Polonaise de Mathématiques à Cracovie, Vol. 6, p. 93, sep. 1927.

FREUDENTHAL A.M., *Statistical approach to brittle fracture,* Fracture Vol. II, Ed. H. Leibowitz, Academic Press, New-York, Chap. 6, 1968.

GAO Z., REISFNIDER K.L., CARMAN G., *Strength Prediction and Optimization of Composites with Statistical Fiber Flaw Distributions,* J. of Comp. Mat., Vol. 26, p. 1678, 1992.

GAY D., *Matériaux Composites,* Traité de nouvelles Technologies Série Mécanique, Ed. Hermès, 1987.

GARETT K.W., BAILEY J.E., *Multiple transverse fracture in 90° cross-ply laminates of a glass fibre-reinforced polyester,* J. of Mat. Sci., Vol. 12, p. 157, 1977.

GODA K., FUKUNAGA H., *The evaluation of the strength distribution of silicon carbide and alumina fibres by a multi-modal Weibull distribution,* J. of Mat. Sci., Vol. 21, p. 4475, 1986.

GOGGIN P., *A method of measuring the quality of carbon fibres,* AERE-R 7790, March 1975.

GOREE J.G., GROSS R.S., *Anaysis of a unidirectional composite containing broken fibers and matrix damage,* Engng Fract. Mech., Vol. 13, p. 563, 1979.

GRATTESAT G., *Conception des ponts,* Cours de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, troisième édition, Ed. Eyrolles, 1984.

GUILLAUMAT L., LAMON J., *Simulation Statistique Probabiliste du Comportement Mécanique Non-Linéaire d'un Composite 2D Sic/Sic,* Compte rendus des 9ièmes Journées Nationales sur les Composites, St-Etienne, nov. 1994.

GUILD F.J., DAVY P.J., HOGG P.J., *A Model for Unidirectional Composites in Longitudinal Tension and Compression,* Composites Sci. and Techonol., Vol. 36, p. 7, Jan. 1989.

GULINO R., PHOENIX S.L. : "*Weibull strength statistics for graphite fibres measured from the break progression in a model graphite/glass/epoxy microcomposite*". J. of Mat. Sci., Vol. 26, p. 3107, 1991

GULINO R., SCHWARTZ P., PHOENIX S.L., *Experiments on shear deformation, debonging and local transfer in a model graphite/glass/epoxy microcomposite*, J. of Mat. Sci. Vol. 26, p. 6665, 1991.

HARLOW D.G., PHOENIX S.L., *Probability distributions for the strength of composite materials I: Two-levels bounds*, Int. J. Fracture, Vol. 17, p. 347, Aug. 1981.

HARLOW D.G., PHOENIX S.L., *Probability distributions for the strength of composite materials II: A convergent sequence of tight bounds*, Int. J. Fracture, Vol. 17, p. 601, Dec. 1981.

HEDGEPETH J.M., *Stress Concentrations in Filamentary Structures*, NASA TN D-882, Langley Research Center, 1961.

HEDGEPETH J.M., VAN DYKE P., *Local Stress Concentrations in Imperfect Filamentary Composite Materials*, J. of Comp. Mat., Vol. 1, p. 294, 1967.

HITCHON J.W., PHILLIPS D.C., *The dependence of the strength of carbon fibres on length*, Fibre Sci. and Technol., Vol. 12, p.217, 1979

HUDSON B., HARPER E.A., *Flaws in carbon fibres*, AERE-G 472, April 1975.

KALISH D., TARIYAL B.K., PICKWICK R.O., *Strength distribution and gage length extrapolations in optical fibres*, Amer. Ceram. Soc. Bull., Vol. 56, p. 491, 1977.

KAMIMURA K., *Modélisation théorique de la croissance d'endommagement appliquée à la théorie des plaques stratifiées*, J. de Mécanique Théorique et Appliquée, Vol. 4, 1985.

KATTAN P.I., VOYIADJIS G.Z., *Micromechanical modeling of damage in uniaxially loaded unidirectional fiber-reinforced composite laminae*, Int. J. Solids and Struct., Vol. 30, p. 19, 1993.

KNUTH G.E., *Seminumerical Algorithms*, 2nd ed., vol. 2 of The Art of Computer Programming (Reading, Mass.: Addison-Wesley), §§3.2-3.3, 1981.

LAALAI I., *Effets d'échelle dans les matériaux quasi fragiles à microstructure aléatoire: approche locale et non locale*, Thèse de Doctorat de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1993.

LAALAI I., SAB K., *Une approche unifiée des effets d'échelle dans les matériaux quasi fragiles*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 316, Série II, p. 1187-1192, 1993.

LAMON J., *Mécanique de la rupture des torons de fibres Nicalon: Approche probabiliste-statistique*, Compte rendus des 7ièmes Journées Nationales sur les Composites, Lyon, nov. 1990.

LARDER R.A., BEADLE C.W., *The Stochastic Finite Element Simulation of Parallel Fiber Composites*, J. of Comp. Mat., Vol. 10, p. 21, Jan. 1976.

LIFSHITZ J.M., ROTEM A., *Longitudinal tensile failure of unidirectional fibrous composites*, J. of Mat. Sci., Vol. 7, p. 861, 1972.

LISSART N., LAMON J., *Analyse statistique multimodale de la rupture des fibres de carbure de silicium*, Compte rendus des 8ièmes Journées Nationales sur les Composites, Palaiseau, nov. 1992.

LISSART N., LAMON J., *Evaluation des caractéristiques de rupture des monofilaments à partir d'un essai de traction sur mèches*, Compte rendus des 9ièmes Journées Nationales sur les Composites, St-Etienne, nov. 1994.

LIM S.G., HONG C.S., *Prediction of transverse cracking and stifness reduction in cross-ply laminated composites*, J. of Comp. Mat., Vol. 23, 1989.

McKEE R.B., SINES G., *A Statistical Model for the Tensile Fracture of Parallel Fiber Composites*, ASME Winter Annual Meeting, New-York, Dec. 1968.

McMAHON P.E., *The relationship between high modulus fibre and unidirectional composite tensile strength*, SAMPE quaterly, October 1974.

MACQUERE B., PETITPAS E., VALENTIN D., *Experimental and theoritical damage accumulation in glass-epoxy tubes under torsion loading*, Composite Polymers, Vol. 5,p. 174, 1992.

MANDERSCHEID J.M., GYEKENYESI J.P., *Fracture Mechanics Concepts in Reliability Analysis of Monolithic Ceramics*, NASA tech. Memor. 100174, 1987.

MORETON R., *The effect of gauge length on the tensile strength of R.A.E. Carbon Fibres*, Fibre Sci. and Technol., Vol. 1, p.273, 1969.

NAIRN J.A., *Fracture Mechanics of Unidirectional Composites Using the Shear-Lag Model I: Theory*, J. of Comp. Mat., Vol. 22, June 1988.

NAIRN J.A., *Fracture Mechanics of Unidirectional Composites Using the Shear-Lag Model II: Experiment*, J. of Comp. Mat., Vol. 22, June 1988.

NAIRN J.A., *Fracture Mechanics of Unidirectional Composites*, J. of Reinf. Plastics and Composites, Vol. 9, Jan. 1990.

NEALE K.W., LABOSSIERE P., *Advanced composite materials in bridges and structures*, 1st Int. Conf. Sherbooke, Quebec, 1992.

NETRAVALI A.N., TOPOLESKI L.T.T., SACHSE W.H., PHOENIX S.L., *An acoustic emission technique for measuring fibre fragment length distribution in the single fiber composites test*, Composite Sci. and Technol., Vol. 35, p. 13, 1989.

OLSHANSKY R., MAURER R.D., *Tensile strength and fatigue of optical fibres*, J. Applied Phys., Vol. 47, p. 4497, 1976.

OVCHINSKII A.S., KOP'EV I.M., SHAKAROVA E.N., MOSKVITIN V.V., *Redistribution of stresses in rupture of brittle fibers in metallic composite materials*, Mekhanika Polimeriov, Vol. 1, p. 19, 1977.

PARRAT N.J., *Defects in Glass Fibers and Their Effects on the Strength of Plastics Mouldigs*, Rubber and Plastic Age, p.263, March 1960.

PEIRCE F. T. : *Tensile Tests for Cotton Yarns-"The Weakest Link"*, J. Textile Inst., Trans. Vol. 17, p. 355, 1926.

PETERS P.W.M., *The stength distribution of 90 degrees in 0/90/0 graphite-epoxy laminates*, J. of Comp. Mat., Vol. 18, 1984.

PHANI K.K., *The strength-length relationship for carbon fibres*, Composites Sci. and Technol., Vol. 30, p. 59, 1987.

PHOENIX S.L., *Statistics for the strength of Bundles of Fibers in a Matrix*, Encyclopedia of Materials Sci. and Engng, Pergamon Press, 1982.

PIKSHE P.E., TAMUZH V.P., MIKEL'SON M.Y, *Desintegration of fibers in composite materials during loading*, Mekhanika Kompozitnykh Materialov, Vol. 4, p. 725, 1981.

RENARD J., *Modélisation de la Dégradation d'une Pièce Composite par une Simulation Numérique à Deux Echelles*, La Recherche Aérospatiale, n°1, p. 57, jan. 1990.

ROSEN B.W., *Tensile Failures of Fibrous Composites*, AIAA J., Vol. 11, Nov. 1964.

ROSEN B.W., *Strength of uniaxial fibrous composites*, Proceeding of the 5th Symposium in Naval Structural Mechanics, Philadelphia, Ed. H.Leibowitz, New-York, p. 621, Mat 1967.

SETRA, *Précontrainte extérieure*, Février 1990.

SIMON G., BUNSELL A.R., *Mechanical and structural characterization of the Nicalon silicon carbide fibre*, J. of Mat. Sci., Vol. 19, p. 3649, Jan. 1984.

SMITH R.L., PHOENIX S.L., *Asymptotic distributions for the failure of fibrous materials under series-parallel structure and equal load-sharing*, J. Appl. Mech., Vol. 48, 1981.

SNOWDEN W.E., *Surface flaws and the mechanical behaviour of glass optical fibers*, Int. Symp. on Fract. Mech. of Ceramics, Pro., Pa State Univ., University Park, Vol. 3, p. 143-159, New York, July1978.

TIPPETT L.H.C. : *On The extreme Individuals and the Range of Samples Taken from a Normal Population*, Biometrika, Vol. 17, p. 364, 1925.

VAN DYKE P., HEDGEPETH J.M., *Stress concentrations from Single-Filament Failures in Composite Materials*, Textile Res. J., Vol. 39, p; 618, 1968.

WANG A.S.D., CHOU P.C., *Effects of proof test on the strength and fatigue life of an unidirectionnel composite*, Fatigue of fibrous composite, ASTM STP 723, p.116, 1981.

WANG S.J., BAPTISTE D., BOMPARD P., FRANÇOIS D., *Microscopic failure of an unidirectional glass fiber composite*, Fat. Frac. Engng Mater. Struct., Vol. 14, p. 391, 1991.

WEIBULL W., *A statistical distribution function of wide applicability*, Journal Applied Mech., Vol. 18, p. 293, 1951.

WINH T., *Les essais de rupture des composites; aspects probabilistes*, Rupture et fatigue des matériaux composites, premier fasicule, I.S.M.C.M., mai 1988.

WISNOM M.R., *Relationship between strength variability and size effect in unidirectional carbon fibre/epoxy*, Composites, Vol. 22, p. 47, Jan. 1991.

WISNOM M.R., *The Relationship between Tensile and Flexural Strength of Unidirectional Composites*, J. of Comp. Mat., Vol. 26, p. 1173, May 1992.

WRIGHT M.A., IANUZZI F.A., *The Application of the Principles of Linear Elastic Fracture Mechanics to Unidirectional Fiber reinforced Composite Materials*, J. of Comp. Mat., Vol. 7, p. 430, 1973.

YANG J.N., *Fatigue and residual strength degradation for graphite composite under tension compression cycling loadings*, J. of comp. Mat., Vol. 12, 1978.

ZENZRI H., *Endommagement anisotrope par fatigue; Application au calcul d'une structure de chaussée bitumineuse*, Thèse de Doctorat de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1992.

ZHAO J.H.,JI F.S., *A variational formulation and analysis of a unidirectional composite with broken fibers over a finite region*, Theoritical and Applied Fract. Mec., Vol. 13, p. 217, 1990.

ZWEBEN C., *Tensile Failure of Fiber Composites*, AIAA J., Vol. 6, p. 2325, 1968.