



HAL
open science

Modélisation à l'échelle du réseau de conduits des propriétés acoustiques d'un matériau poreux : application aux enrobés drainants

Othman Belhoucine Drissi

► **To cite this version:**

Othman Belhoucine Drissi. Modélisation à l'échelle du réseau de conduits des propriétés acoustiques d'un matériau poreux : application aux enrobés drainants. Acoustique [physics.class-ph]. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1997. Français. NNT: . tel-00529387

HAL Id: tel-00529387

<https://pastel.hal.science/tel-00529387>

Submitted on 25 Oct 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE
présentée pour l'obtention du diplôme de
DOCTEUR
DE
L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES

Spécialité : Structures et Matériaux

présentée par :

Othman BELHOUCINE DRISSI

Sujet de la thèse :

**MODELISATION A L'ECHELLE DU RESEAU DE CONDUITS
DES PROPRIÉTÉS ACOUSTIQUES D' UN MATERIAU POREUX :
APPLICATION AUX ENROBES DRAINANTS**

Soutenue le 23 Septembre 1997

devant le jury composé de :

Rapporteurs : **T. LEVY**
J.F. HAMET

Examineurs : **J.C. DEUTSCH**
M. CHAPPAT
D. DUHAMEL
A. EHRLACHER



NS 20 913 (3)

X

Spécialité: Structures et Matériaux

Thèse présentée par

Othman BELHOUCINE DRISSI

**MODELISATION A L'ECHELLE DU RESEAU DE CONDUITS DES
PROPRIETES ACOUSTIQUES D'UN MATERIAU POREUX :
APPLICATION AUX ENROBES DRAINANTS**

5
13

Remerciements

Ce travail a été mené au Centre d'Enseignement et de Recherche en Analyse des Matériaux de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées sous la direction d'Alain EHRLACHER. Je le remercie pour m'avoir accueilli au sein de son équipe et pour la confiance qu'il m'a témoignée dans mon travail.

Cette thèse doit beaucoup à Denis DUHAMEL qui a suivi régulièrement mon travail. J'aimerais lui adresser mes sincères et amicaux remerciements pour l'intérêt qu'il y a porté et pour la rigueur scientifique qu'il m'a fait partager.

Madame T. LEVY a bien voulu se charger du lourd travail de rapporteur et m'a permis entre autres de combler certaines lacunes sur les méthodes de l'homogénéisation. Je suis très honoré de l'avoir eu comme rapporteur de thèse.

Je remercie également Monsieur J.F. HAMET pour avoir accepté de porter un jugement sur ce travail en tant que rapporteur et pour son avis d'expert sur les applications présentées. La précision avec laquelle il a lu le rapport et les remarques qu'il m'a suggérées m'ont permis d'améliorer le manuscrit.

Je suis également redevable à Monsieur J.C. DEUTSCH qui a accepté de faire partie de mon jury malgré ses préoccupations assez éloignées du sujet. Il m'a apporté un point de vue différent que j'estime précieux.

Ce travail est le résultat d'une collaboration entre le CERAM et la S.A. COLAS qui y a apporté son soutien financier. A cette occasion, je tiens à remercier nos interlocuteurs : Messieurs M. CHAPPAT et J.P. MICHAUD.

Je tiens à remercier également tous les membres du CERAM pour l'ambiance professionnelle et amicale qui règne dans ce centre. Ils ont su au cours de ces années m'apporter leur soutien et leurs encouragements dans les moments difficiles que traverse un doctorant. Ils ont su aussi me faire profiter de leur expérience et me communiquer leur bonne humeur.

Enfin, ma reconnaissance va à toutes les personnes qui m'ont supporté durant cette période ...

Résumé

L'objectif de ce travail de recherche est d'établir une modélisation des propriétés acoustiques d'un milieu poreux en vue d'une application aux enrobés drainants.

Nous présentons les approches macroscopiques (modèle de Biot, modèle phénoménologique) et les approches microscopiques de la littérature. Nous nous inspirons de la méthode d'homogénéisation qui suppose un squelette rigide et prend en compte les dissipations d'origines visqueuse et thermique pour proposer un modèle susceptible d'améliorer les prédictions acoustiques par une description plus fine du réseau poreux.

Nous considérons des pores de natures différentes, discrétisés en séries de conduits élémentaires de section constante. Le problème est formulé en terme de matrices de transfert reliant la pression et le débit acoustique aux deux extrémités de l'éprouvette poreuse. Connaissant les conditions acoustiques à une extrémité, nous en déduisons l'impédance et le coefficient d'absorption à l'autre extrémité (modèle discret).

Nous établissons alors des correspondances entre les caractéristiques géométriques des pores et les paramètres physiques utilisés couramment dans la littérature (modèles classiques).

Nous parvenons par ce biais à proposer une nouvelle formulation plus riche de ces quantités et des paramètres supplémentaires (modèle généralisé).

Les résultats issus des modélisations classique, généralisé et discrète sont illustrés et comparés à l'aide de simulations numériques pour divers cas de produits poreux.



Abstract

We propose, on a microscopic scale, a model that predicts the acoustical characteristics of porous road. The Biot theory shows that the skeleton can be considered as rigid, so we limit our study to propagation of waves in the pores.

For materials containing pores of uniform cross section, we need only three parameters to characterise physically the porous medium (classical model). These parameters are porosity, tortuosity and flow resistivity.

For more complex materials, and specially for porous road, the discontinuity of the granular composition induces a disorder in size and shape of the pore distribution. The shape influence being poor, we approximate the pore as a series of straight uniform tubes with constant area over the length of each section. We generalise the deterministic approach established by Stinson and Champoux for arbitrary materials with two different shape factors to describe the viscous and thermal effects.

We introduce the random distribution in a different way. For each elementary section we associate a transfer matrix which links the pressures and velocities on both edges of the tube. A global transfer matrix is calculated for the pore by the product of elementary matrices. At low frequencies, this matrix depends on macroscopic parameters as in the classical model. When the frequency increases, we need other parameters characterising the pore size distribution. This formulation allows us to relate the pore geometry to the physical parameters. By this way, we propose new theoretical formulations for these quantities and for the additional parameters.

The surface impedance is obtained by a homogenisation method, with an integral formulation. Thus, we can take into account different kind of pores in a discrete model, where the problem is formulated also in terms of transfer matrices.

The results are illustrated for the classical, the generalised and the discrete models with numerical simulations for different kind of porous media.

Table des matières

Introduction générale	1
I Propagation d'ondes dans un milieu poreux	5
Introduction de la première partie	7
1 Approche macroscopique	10
1.1 Modèle de Biot	10
1.1.1 Description d'un milieu poreux	10
1.1.2 Paramètres macroscopiques caractérisant le milieu poreux	11
1.1.3 Ondes de Biot	14
1.1.4 Impédance de surface	20
1.2 Modèle phénoménologique	27
1.3 Conclusion	28
2 Approche microscopique	31
2.1 Equations locales linéarisées	35
2.1.1 Variables microscopiques	35
2.1.2 Equation du mouvement	36
2.1.3 Conservation de la masse	36
2.1.4 Equation d'état pour la densité	36
2.1.5 Equation d'état pour l'entropie	38
2.1.6 Equation de diffusion de la température	38
2.1.7 Récapitulation	38
2.2 Propagation dans un conduit- Solution exacte	40
2.2.1 Conditions aux limites	40
2.2.2 Solution exacte	42
2.2.3 Analyse des résultats	45
2.3 Propagation dans un conduit - Solution approchée	48
2.3.1 Approximation de la Solution de Kirchhoff	48
2.3.2 Fonctions complexes de densité et de compressibilité	51
2.4 Généralisation à des conduits de forme arbitraire	53

2.4.1	Equations simplifiées	54
2.4.2	Méthode de résolution	55
2.5	Application de la procédure générale	58
2.5.1	Section circulaire	59
2.5.2	Section rectangulaire	59
2.5.3	Section triangulaire	62
2.5.4	Remarque-Récapitulation	63
2.5.5	Comportement pour les hautes fréquences	64
2.5.6	Comportement pour les basses fréquences	68
2.6	Impédance de surface	70
2.6.1	Matériau poreux à section de pore uniforme	70
2.6.2	Matériau poreux à section de pore variable	76
2.7	Conclusion	80
3	Application aux enrobés drainants	83
3.1	Description d'un enrobé drainant	84
3.2	Influence des paramètres physiques	85
3.2.1	Influence de l'épaisseur	85
3.2.2	Influence de la résistance au passage de l'air	86
3.2.3	Influence de la porosité	88
3.2.4	Influence de la tortuosité	90
3.3	Résistance au passage de l'air et perméabilité	90
3.4	Validation expérimentale	94
3.5	Conclusion	97
	Conclusion de la première partie	99
	II Milieu poreux avec discontinuités	101
	Introduction de la deuxième partie	103
1	Propagation dans un demi-espace infini	105
1.1	Formulation intégrale	106
1.1.1	Définition de la fonction de Green	107
1.1.2	Théorème de Green	107
1.1.3	Pression acoustique pour un problème intérieur	107
1.1.4	Formulation intégrale pour un problème extérieur-Condition de Sommerfeld	109
1.2	Application de la formulation intégrale	111
1.2.1	Formulation intégrale	111
1.2.2	Discrétisation	113
1.2.3	Calcul de l'impédance moyenne	116

1.3	Conclusion	118
2	Approche discrète	119
2.1	Matrice de transfert d'un pore tortueux	121
2.1.1	Matrice de transfert d'un conduit élémentaire droit	121
2.1.2	Matrice de transfert d'une discontinuité	124
2.1.3	Assemblage de la matrice de transfert	126
2.2	Milieu poreux constitué de pores identiques	128
2.2.1	Ecriture de la matrice de transfert	129
2.2.2	Identification des paramètres macroscopiques	131
2.2.3	Impédance de surface	134
2.3	Pores de natures différentes	135
2.3.1	Passage micro-macro	136
2.3.2	Identification des paramètres macroscopiques	140
2.3.3	Impédance de surface	145
2.4	Conclusion	146
3	Simulations	149
3.1	Calcul de la solution discrète	150
3.2	Pores identiques et de section constante	151
3.3	Pores identiques et de section variable	155
3.4	Pores différents et de section constante	168
3.5	Pores différents et de section variable	174
3.6	Fortes discontinuités	178
3.7	Influence des paramètres supplémentaires s_t et s_v	186
3.8	Optimisation	188
3.9	Conclusion	189
	Conclusion de la deuxième partie	191
	Conclusion générale	193
A	Modèle phénoménologique	195
B	Modèle microscopique	198
B.1	Calcul des solutions λ_1 et λ_2	198
B.2	Calcul du nombre d'onde	200
B.3	Calcul de la densité et de la vitesse	202
B.4	Calcul de l'impédance d'un conduit	203
C	Calcul du rapport $\frac{s_t}{s_v}$	205
	Bibliographie	207

Table des figures

Première partie	7
1.1 Milieu poreux considéré comme la superposition de deux milieux .	11
1.2 Mesure de la porosité	12
1.3 Notion de tortuosité	13
1.4 Résistance à l'écoulement de l'air	15
1.5 Matériau poreux soumis à une onde plane en incidence normale .	20
2.1 Conduit de section circulaire	42
2.2 Evaluation des grandeurs acoustiques en fonction de la position radiale pour un conduit de rayon 0.01cm à la fréquence de 100Hz -processus isotherme	46
2.3 Evaluation des grandeurs acoustiques en fonction de la position radiale pour un conduit de rayon 0.1cm à la fréquence de 10kHz -processus adiabatique	47
2.4 Calcul de l'argument de la fonction Q_1	50
2.5 Comparaison de la constante de propagation et de trois paramètres $ \lambda_1 $, $ \lambda_2 $ et $ i\omega/\nu $ introduits dans la théorie de Kirchhoff	51
2.6 Conduit de section rectangulaire	59
2.7 Conduit de section triangulaire	62
2.8 Evolution de la fonction F pour trois types de géométries	64
2.9 Description de la discrétisation	65
2.10 Matériau poreux à pores tortueux de section uniforme	70
3.1 Influence de l'épaisseur	87
3.2 Influence de la résistance au passage de l'air	88
3.3 Influence de la porosité	89
3.4 Influence de la tortuosité	91
3.5 Optimisation de la tortuosité	92
3.6 Tube de Kundt	95
3.7 Comparaison entre les résultats théoriques du modèle microscopique et les mesures expérimentales	96
3.8 Comparaison entre les résultats théoriques du modèle microscopique et le modèle macroscopique de Hamet	97

1.1	Géométrie du problème intérieur	107
1.2	Géométrie du problème extérieur	110
1.3	Problème extérieur pour une surface poreuse	111
1.4	Couronne d'intégration $D(R)$ - $D(a)$	113
1.5	Cellule élémentaire	115
2.1	Pore tortueux	121
2.2	Discontinuité de type changement de section	125
2.3	Chaîne de jonctions biportes	127
3.1	Pores identiques de section constante	154
3.2	Pores identiques de section variable, $\sigma = 20\%$	156
3.3	Pores identiques de section variable, $\sigma = 25\%$	158
3.4	Pores identiques de section variable - Comparaison de trois tirages	161
3.5	Pores identiques de section variable - Influence d'un pore étroit	163
3.6	Pores identiques de section variable - Influence des permutations	164
3.7	Pores identiques de section variable - Influence de la porosité de surface	167
3.8	Pores différents de section constante - $\sigma^s = 20\%$	171
3.9	Pores différents de section constante - $\sigma^s = 62\%$	172
3.10	Pores différents de section constante - $\sigma^s = 100\%$	173
3.11	Pourcentage de micro-conduits 'bouchés' en fonction de la profondeur - $\sigma^s = 62\%$	175
3.12	Pores différents de section variable - $\sigma^s = 20\%$	176
3.13	Pores différents de section variable - $\sigma^s = 62\%$	177
3.14	Pores composés de trois conduits élémentaires	181
3.15	Pores composés de trois conduits élémentaires - Pores identiques	182
3.16	Pores composés de trois conduits élémentaires - Écart-type de 20 %	183
3.17	Pores composés de trois conduits élémentaires - Écart-type de 50 % pour les conduits de type 2	184
3.18	Pores composés de trois conduits élémentaires - Écart-type de 50 % - Les pores "bouchés" sont supprimés	185
3.19	Influence du paramètre s_i	187
3.20	Influence du paramètre s_v	187

Liste des tableaux

Première partie	7
3.1 Coefficient A reliant la perméabilité relative de Darcy et la mesure effectuée à l'aide d'un perméamètre automatique	93
3.2 Coefficient β reliant la perméabilité relative de Darcy et la mesure effectuée à l'aide d'un perméamètre de chantier à charge variable .	93

Introduction générale

Le bruit, manifestation de l'activité humaine dans une société moderne, est devenu un sujet d'insatisfactions et de récriminations. Il est une source majeure d'inconfort qui peut nuire gravement à la santé des personnes lorsqu'elles subissent des expositions intenses. La population urbaine est la plus touchée et supporte des sources omniprésentes en ville. Le bruit routier en est la principale cause et le problème s'aggrave avec le développement des périmètres urbains, du réseau routier et du parc automobile.

De ce fait, l'attention des pouvoirs publics en la matière est devenue grandissante. Celle-ci s'est traduite par de nouvelles réglementations sur la protection des populations et par un effort financier pour encourager les recherches sur le sujet, afin de proposer des solutions susceptibles de réduire les nuisances sonores.

Sur le plan pratique, ces solutions consistent à traiter les façades des bâtiments exposés ou à construire des écrans anti-bruits. On envisage même d'améliorer ces procédés par des techniques de contrôle actif [Duhamel, 1994]. Une autre méthode a connu un succès très important. En effet, l'apparition des chaussées poreuses, initialement utilisées pour drainer les eaux de pluies, se sont avérées d'un grand intérêt sur le plan acoustique. Ces revêtements permettent de réduire le bruit à la source et d'en absorber une partie.

Notre travail consiste à apporter une contribution susceptible d'améliorer les protections existantes, en permettant d'apprécier avec plus de finesse les propriétés acoustiques de milieux poreux, et d'offrir ainsi de nouvelles pistes pour l'optimisation de leurs performances. Les résultats obtenus s'appliquent aux chaussées poreuses, que l'on appelle également enrobés drainants, mais aussi dans divers domaines où les industriels sont amenés à concevoir des systèmes composés de couches poreuses dont il faut prédire les qualités acoustiques.

Le document est structuré en deux parties.

La première est de nature bibliographique pour une grande part. Son volume reflète la richesse de la littérature qui traite de la propagation des ondes dans un

milieu poreux. Nous avons jugé bon de développer souvent certains modèles de manière à familiariser le lecteur avec différents concepts que nous utiliserons par la suite, mais aussi pour introduire certaines hypothèses qui n'ont pas toujours un sens physique et qui s'expliquent formellement. Nous précisons par ce biais la nature de notre contribution.

Le premier chapitre sera consacré aux approches macroscopiques. Nous présenterons dans un premier temps le modèle le plus général dit de Biot, valable lorsque la phase solide est élastique et pour des dissipations d'origines visqueuses. Le modèle sera simplifié pour un squelette rigide et nous motiverons l'utilisation d'un modèle à une onde.

D'autre part, nous introduirons les dissipations thermiques par le modèle phénoménologique, qui à l'échelle macroscopique, assimile le matériau à un fluide dissipatif.

Dans le second chapitre, nous aborderons l'approche microscopique et nous présenterons les deux méthodes d'homogénéisation généralement utilisées. Celles-ci définissent les propriétés acoustiques à l'échelle de la microstructure pour les remonter à l'échelle du matériau et prennent en compte les dissipations d'origine visqueuses et thermiques. La première méthode repose sur une hypothèse de périodicité de la micro-géométrie et des solutions tout en considérant une phase solide élastique.

Nous insisterons sur la seconde méthode d'homogénéisation où la phase solide est considérée rigide et qui consiste à établir les propriétés acoustiques à l'échelle du pore pour les généraliser à l'échelle macroscopique. Cette formulation proche du modèle de Rayleigh [Rayleigh, 1945], suppose que le milieu est composé de pores identiques, non connectés et de sections constantes. Notre contribution à ce niveau se résume à la faible influence de la forme du pore. L'ensemble des modèles présentés à ce stade utilisent généralement trois paramètres macroscopiques pour caractériser physiquement les milieux poreux. Nous présenterons les modèles généralisés susceptibles de mieux rendre compte la variation de la section du pore par l'introduction de paramètres macroscopiques supplémentaires.

Le troisième chapitre présente une application de l'approche microscopique à travers la seconde méthode d'homogénéisation pour des milieux de type enrobés drainants. L'influence des paramètres macroscopiques sera examinée et nous proposerons une validation expérimentale pour le régime des fréquences inférieures à $1500H_z$.

Les enseignements tirés de cette première partie indiqueront qu'une amélioration de la prédiction des qualités acoustiques d'un matériau poreux nécessite d'exploiter davantage l'approche microscopique en affinant la description du réseau poreux. Ceci sera l'objet de la seconde partie où nous bâtirons un modèle

discret en proposant par ailleurs de nouvelles formulations théoriques pour les paramètres macroscopiques qui pourront être reportées dans une modélisation généralisée.

Le premier chapitre de cette partie donne l'expression de l'impédance équivalente d'une surface poreuse définie par une distribution d'impédances microscopiques. Le résultat obtenu est intéressant dans la mesure où les impédances microscopiques considérées sont différentes.

Le second chapitre considère un milieu poreux composé de pores de géométries différentes et sujets à de fortes discontinuités. Nous proposerons à ce niveau les nouvelles écritures des paramètres macroscopiques adaptées au milieu étudié.

Dans le troisième chapitre, nous avons construit un modèle discret sur la base des résultats établis antérieurement. Nous présenterons ensuite les résultats des simulations numériques qui nous permettront de préciser les limites de validité des modèles généralisés et d'apprécier l'intérêt du modèle discret.

Enfin, dans la conclusion générale nous dresserons un récapitulatif des enseignements acquis à l'issue de ce travail et nous indiquerons des pistes de recherches complémentaires à effectuer pour caractériser expérimentalement le réseau poreux et valider les résultats de ce travail.

Première partie

Propagation d'ondes dans un
milieu poreux

Introduction

Les corps poreux sont des agrégats d'éléments solides entre lesquels les vides forment l'espace poreux proprement dit. Ce sont ces vides qui induisent les grandes différences de comportement physique entre les solides compacts et les corps poreux, assemblages compliqués où la présence de fluide même en très petites quantités ne fait qu'ajouter à la complexité de l'ensemble. La nature connexe du réseau poreux accentue d'ailleurs ces différences [Lévy, 1979]. Le rapport du volume des vides au volume total du corps considéré est appelé porosité. Cette grandeur est le plus souvent facile à définir et à mesurer. Le problème se complique lorsque l'on aborde la description géométrique du pore. Si quelques cas (comme l'espace poreux existant dans un empilement de sphères de même diamètre) se prêtent à une description quantitative, la plupart des espaces poreux réels, et en l'occurrence les enrobés drainants, sont trop compliqués pour être traités de façon strictement géométrique. A cette complexité intrinsèque s'ajoute le problème de la tridimensionnalité des espaces poreux. Même dans les rares cas où l'on obtient des informations tridimensionnelles, on se trouve dépourvu de méthodes globales pour décrire et à fortiori quantifier complètement les géométries poreuses.

Pour tenter de résoudre cette difficulté majeure de la description microscopique, il faut se limiter à des descriptions relatives, en essayant surtout de mettre en évidence l'originalité du milieu particulier étudié. Nous distinguerons par exemple les milieux poreux granulaires des milieux fibreux.

Le comportement acoustique des milieux poreux a fait l'objet de nombreuses recherches. K. Attenborough [Attenborough, 1982] cite ainsi plus de cent cinquante références. Deux approches sont généralement utilisées pour modéliser les caractéristiques acoustiques des milieux poreux :

– Approche microstructurelle

Celle-ci utilise des procédés d'homogénéisation permettant de passer des lois microscopiques à des lois macroscopiques. Cette approche largement développée par Attenborough [Attenborough, 1982] part des phénomènes de propagation dans un pore individuel, prenant en compte séparément les phénomènes de viscosité et de thermoconductivité pour les remonter à l'échelle macroscopique.

Notons également l'apport important des méthodes de l'homogénéisation qui reposent sur une périodicité de la structure microscopique hétérogène et des solutions [Lévy *et al.*, 1977] [Lévy, 1977] [Lévy, 1979].

- Approche macroscopique.

On ignore le niveau microscopique et on suppose que les concepts de Mécanique des Milieux Continus peuvent s'appliquer aux grandeurs macroscopiques mesurables. Cette approche plus ancienne a été introduite par Biot [Biot, 1956]. Elle n'a été justifiée qu'à posteriori par la concordance des résultats qu'elle fournit avec ceux de la méthode d'homogénéisation [Burridge *et al.*, 1981, Lévy, 1977] et par la confirmation expérimentale de Plona [Plona, 1980, Plona, 1982].

Toujours dans le cadre de l'approche macroscopique, le modèle phénoménologique [Hamet, 1988] [Hamet, 1992] consiste à assimiler le milieu poreux à un fluide compressible dissipatif. Il fournit des relations qui permettent de distinguer différents régimes fréquentiels associés aux dissipations visqueuses et thermiques. Ce modèle a l'avantage de fournir des écritures relativement simples permettant d'interpréter aisément les phénomènes mis en jeu.

Ces deux approches diffèrent par l'échelle à laquelle les phénomènes sont abordés. Elles utilisent, pour évaluer les caractéristiques acoustiques (nombre d'onde et impédance), quasiment les mêmes paramètres.

Nous rechercherons dans toute la suite du document, des solutions sous une forme harmonique pour le régime des "basses fréquences" caractérisé par de grandes longueurs d'ondes devant les dimensions des pores. Toutefois, nous distinguerons au sein de ce régime, de nouvelles gammes fréquentielles qu'il est d'usage d'appeler improprement basses et hautes fréquences. Celles-ci sont définies par rapport à l'épaisseur de la couche limite visqueuse. Pour une profondeur de pénétration des mouvements rotationnels visqueux petite devant le rayon caractéristique des pores, on se situera dans le régime des hautes fréquences et la situation inverse correspondra aux basses fréquences. Lorsque cela ne sera pas précisé, nous ferons toujours référence à ces gammes fréquentielles.

D'une manière générale, le résultat recherché sera toujours l'impédance de surface pour un matériau poreux d'épaisseur donnée reposant sur un fond rigide. Cette quantité est en effet suffisante pour obtenir le coefficient d'absorption en incidence normale qui est une bonne mesure des performances acoustiques des milieux poreux.

Le premier chapitre sera consacré à l'approche macroscopique et notre propos concernera dans un premier temps, la théorie de Biot qui fournit une description

générale et rigoureuse de la propagation des ondes dans les milieux poreux où la phase solide est supposée élastique. Nous présenterons par la suite les résultats issus du modèle phénoménologique qui est généralement utilisé pour optimiser les performances acoustiques des enrobés drainants.

L'approche microstructurale sera introduite dans le second chapitre. Nous insisterons sur la méthode d'homogénéisation qui établit les propriétés acoustiques à l'échelle du pore pour un régime de fréquences et de tailles précis. Notre travail est inspiré de cette technique, qui sera largement développée de manière à familiariser le lecteur à différents concepts utiles par la suite. Nous évoquerons toutefois brièvement les méthodes d'homogénéisation qui permettent de retrouver les résultats de la théorie de Biot.

Nous finirons par une application aux enrobés drainants au troisième chapitre, en utilisant un modèle à une onde dans le cadre de l'approche microstructurale. Nous ferons référence à ce type de matériau dans les deux premiers chapitres lorsque cela sera nécessaire. Par ailleurs le détail des calculs sera souvent reporté en annexe lorsque ceux-ci ne sont pas indispensables à la compréhension de l'exposé.

Chapitre 1

Approche macroscopique

1.1 Modèle de Biot

Nous proposons de développer les grandes lignes de la théorie de Biot qui a l'avantage de fournir une description générale et rigoureuse de la propagation des ondes dans les milieux poreux pour un squelette élastique. Nous présenterons une description du milieu poreux et nous donnerons une définition des paramètres utilisés couramment pour caractériser physiquement les matériaux poreux. Nous exposerons par la suite les hypothèses que suppose la théorie de Biot ainsi que les équations de propagation. Nous mettrons en évidence l'existence de deux ondes de compression (une lente, l'autre rapide) ainsi qu'une onde de cisaillement. Nous verrons par la suite dans quelle mesure les modèles à une onde (qui se propage dans le fluide) sont valables. Nous motiverons ainsi une modélisation acoustique des enrobés drainants par une approche microstructurale où le squelette est supposé rigide et cela sera le principal résultat recherché.

Nous n'insisterons pas sur l'établissement des lois de comportement de manière à introduire assez rapidement les équations de propagation. Le lecteur pourra se reporter aux références qui seront indiquées par la suite pour plus de détails.

1.1.1 Description d'un milieu poreux

Un milieu poreux saturé est constitué de deux phases. La première est l'espace poreux connecté saturé par un fluide et qui peut être le lieu de filtrations. Cet espace poreux connecté est supposé connexe. La seconde est la matrice qui se trouve définie comme l'espace complémentaire de l'espace poreux connecté. La matrice est composée de solides et éventuellement de pores. Toutefois, ceux-ci ne sont pas reliés à la porosité connectée et ne sont donc pas le lieu de filtrations. Cette porosité dite occluse est supposée négligeable et nous considérerons qu'elle fait partie de la matrice.

Nous représenterons le milieu poreux comme la superposition de deux milieux en interaction. Ainsi, dans un volume élémentaire $d\Omega$, entourant un point géométrique repéré par son vecteur position \mathbf{x} , coexistent deux particules (figure 1.1) :

- La particule squelette, constituée de la matrice et de l'espace poreux connecté, vidé de son fluide. Le squelette est le matériau que l'on obtiendrait en extrayant tout le fluide saturant de l'espace poreux connecté.

- La particule fluide, constituée du fluide saturant l'espace poreux connecté. Nous verrons par la suite, qu'à l'échelle macroscopique choisie pour décrire les phénomènes, ces deux milieux peuvent être considérés comme continus, c'est à dire que toutes les variables définies sur ces deux milieux varient peu entre deux points voisins.

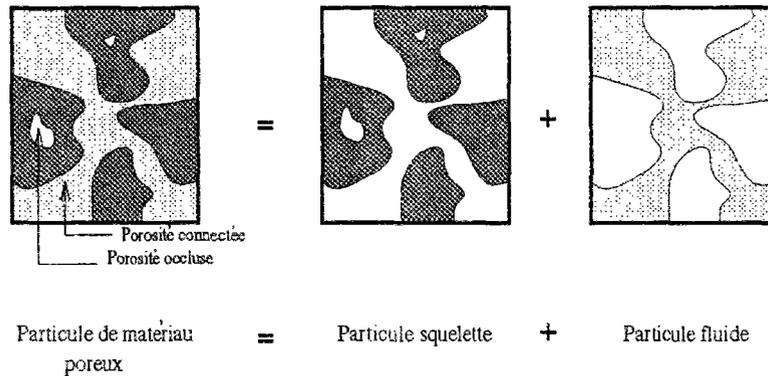


FIG. 1.1 - *Milieu poreux considéré comme la superposition de deux milieux*

1.1.2 Paramètres macroscopiques caractérisant le milieu poreux

La littérature met en évidence l'existence de trois paramètres (porosité, tortuosité et résistance au passage de l'air) susceptibles de caractériser le milieu poreux. Ceux-ci nous seront utiles également lorsque nous aborderons l'approche microscopique. Aussi, nous proposons de les développer en précisant leurs significations physiques et en présentant quelques techniques de mesures. Nous considérons que les pores sont saturés par de l'air et nous préférons présenter la perméabilité relative à travers la résistance au passage de l'air qui est souvent utilisée pour modéliser les propriétés acoustiques de milieux poreux.

◇ Porosité

La porosité notée Ω , est par définition le rapport du volume des vides au volume total de l'éprouvette. Cette grandeur peut être mesurée [Beranek, 1942] à l'aide d'une procédure qui repose sur les propriétés d'un gaz parfait à température constante. Ce système consiste à insérer l'éprouvette de volume total V_t (ayant pour composante V_a pour la partie fluide et V_s pour la matrice) dans un container de volume $V_t + V_o$ (figure 1.2). Le volume résiduel V_o est connu et on modifie mécaniquement le volume de l'ensemble à l'aide d'un piston tout en mesurant la pression résultante. Du rapport de la variation de volume ΔV par la variation de pression ΔP , la loi de Boyle nous permet de calculer le volume d'air dans le container, et donc le volume de l'air saturant le matériau poreux. Connaissant le volume total de l'éprouvette, la porosité peut être calculée.

Champoux [Champoux *et al.*, 1991] enrichit cette technique en mesurant les variations de pression à l'aide de transducteurs sensibles aux faibles perturbations, et en contrôlant minutieusement la variation de volume ΔV . Il obtient ainsi rapidement une estimation de la porosité avec une erreur inférieure à 1% pour une large gamme de matériaux et de porosités.

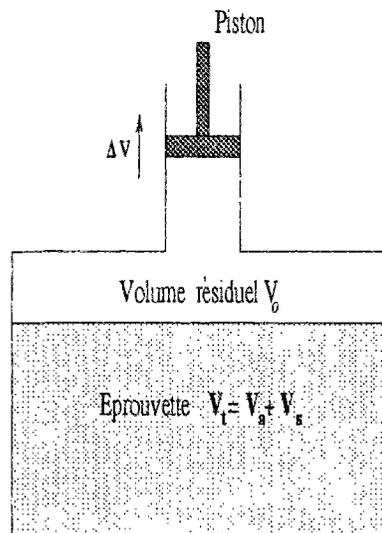


FIG. 1.2 - Mesure de la porosité

◇ Tortuosité

La tortuosité notée q , k_s ou α ($q^2 = \alpha$) selon les auteurs (appelée aussi facteur de forme de la structure et noté K dans la modélisation phénoménologique) est introduite pour des raisons de nature très différente. La première de nature géométrique est liée au caractère sinueux du réseaux poreux qui fait que les

vitesse microscopiques des différents points dans cet espace ont des directions très distinctes (figure 1.3-a). La seconde raison se manifeste même quand le réseau ne présente pas de courbure et est due à la nature visqueuse de l'écoulement de l'air.

Ainsi dans une même section le module de la vitesse est relativement important au centre et nul au bord (figure 1.3-b). De façon à prendre en compte explicitement le changement d'orientation de pore à section uniforme, Attenborough [Attenborough, 1982] définit la tortuosité comme étant le rapport de la longueur totale du pore par l'épaisseur de l'éprouvette (lorsqu'il s'agit d'un milieu poreux constitué de pores identiques). Ainsi pour un milieu constitué de pores identiques et parallèles inclinés d'un angle θ par rapport à la normale de la surface, la tortuosité est égale à $1/\cos \theta$. Pour des géométries plus complexes le concept de tortuosité doit être généralisé. Johnson [Johnson *et al.*, 1982] [Johnson *et al.*, 1986] [Johnson *et al.*, 1987] dans le cadre de la théorie de Biot propose une évaluation de cette quantité, et montre qu'il s'agit d'une grandeur purement géométrique indépendante de la densité de fluide et de solide. Utilisant les travaux de Brown [Brown, 1980], il en déduit une procédure expérimentale permettant de mesurer la tortuosité par une technique de conductivité électrique. A ce propos, nous pouvons également nous reporter aux travaux de Walsh [Walsh *et al.*, 1984], Carman [Carman, 1961], Champoux [Champoux *et al.*, 1991].

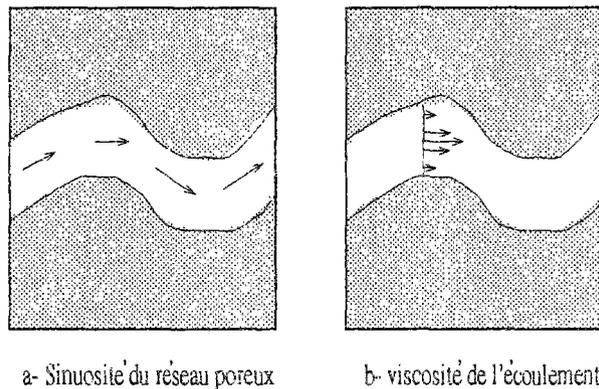


FIG. 1.3 - Notion de tortuosité

◇ Résistance au passage de l'air

Considérons une éprouvette de surface S et d'épaisseur E_p (figure 1.4). Soit Q le flux d'air traversant l'éprouvette soumise à une différence de pression ΔP . L'ISO (DIS 46-38) propose comme définition de la résistance à l'écoulement la quantité $\Delta P/(Q/S)$. En introduisant la vitesse moyenne $u = Q/S$, nous définissons alors la résistance au passage de l'air par unité de longueur que nous noterons R_s :

$$R_s = \frac{1}{E_p} \frac{\Delta P}{u} \quad (1.1)$$

L'écoulement de l'air dans un milieu poreux homogène et isotrope peut être également décrit par la loi de Darcy. En notant κ la perméabilité intrinsèque et η le coefficient de viscosité, celle-ci s'écrit :

$$u = \frac{\kappa \Delta P}{\eta E_p} \quad (1.2)$$

R_s est donc lié au coefficient de viscosité de l'air et à la perméabilité κ intrinsèque par la relation :

$$R_s = \frac{\eta}{\kappa} \quad (1.3)$$

Notons d'ailleurs que la résistance au passage de l'air n'est rien d'autre que l'inverse de la perméabilité hydraulique \mathcal{K} utilisée en mécanique des milieux poreux.

On distingue deux types de techniques pour mesurer la résistance au passage de l'air : Les méthodes directes et les méthodes comparatives. Les méthodes directes consistent à mesurer séparément le saut de pression et le flux d'air et à en calculer le rapport afin d'en déduire R_s . Les systèmes décrits par Morse [Morse *et al.*, 1941] et Brown [Brown *et al.*, 1942] sont de ce type.

Les techniques comparatives utilisent une résistance au passage de l'air calibrée placée en série avec l'échantillon à tester. Si le flux d'air est constant à travers la ligne, le rapport des sauts de pression des éléments de la ligne est égal au rapport des résistances. La valeur de la résistance calibrée peut être obtenue par des modèles théoriques précis ou encore par des mesures directes. Les variations de pression sont mesurées à l'aide de manomètres [Gemant, 1941] ou encore de transducteurs tandis que le flux est maintenu stable en utilisant un contrôleur électronique de flux [Stinson *et al.*, 1988]. L'utilisation de composants électroniques a l'avantage de fournir rapidement des résultats précis.

1.1.3 Ondes de Biot

◇ Hypothèses

Décrire le milieu de manière continue signifie que les propriétés physiques varient de manière continue d'un point à un autre. Appliquer les concepts de

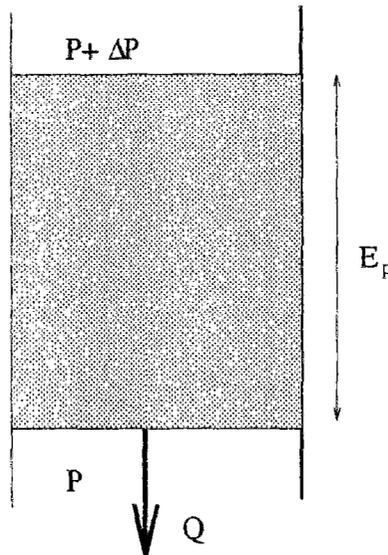


FIG. 1.4 - Résistance à l'écoulement de l'air

la Mécanique des Milieux Continus aux milieux poreux macroscopiques consiste donc à n'étudier que les basses fréquences pour lesquelles les dimensions des pores où s'effectue l'écoulement sont très petites devant la longueur d'onde. Nous obtenons alors un comportement macroscopiquement homogène insensible aux discontinuités microscopiques. Nous supposons de petites perturbations aussi bien pour le squelette que pour le fluide en considérant une matrice élastique, isotrope et des dissipations d'origines visqueuses uniquement.

◇ Equations de propagation

Les équations de propagation sont données par Biot [Biot, 1956]. Elles s'obtiennent en reportant les relations constitutives reliant les contraintes aux déformations dans les équations du mouvement [Bourbié, Coussy, Zinszner, 1986]:

$$\overrightarrow{\text{grad}} (P \operatorname{div} \mathbf{u} + Q \operatorname{div} \mathbf{U}) - \mu \overrightarrow{\operatorname{rot}} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \mathbf{u} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11} \mathbf{u} + \rho_{12} \mathbf{U}) + b \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u} - \mathbf{U}) \quad (1.4)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} (Q \operatorname{div} \mathbf{u} + R \operatorname{div} \mathbf{U}) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{12} \mathbf{u} + \rho_{22} \mathbf{U}) - b \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u} - \mathbf{U}) \quad (1.5)$$

Les quantités \mathbf{u} et \mathbf{U} sont respectivement les vecteurs déplacement moyen du squelette, de l'air et μ le module de cisaillement classique. P , Q et R désignent les coefficients d'élasticité de Biot. Ils s'expriment en fonction des modules d'incompressibilité du squelette K_o , de la matrice K_s et du fluide K_{fl} :

$$P = \frac{(1 - \Omega)[1 - \Omega - \frac{K_o}{K_s}]K_s + \Omega \frac{K_s}{K_{fl}} K_o}{1 - \Omega - \frac{K_o}{K_s} + \Omega \frac{K_s}{K_{fl}}} + \frac{4}{3}\mu \quad (1.6)$$

$$Q = \frac{[1 - \Omega - \frac{K_o}{K_s}]\Omega K_s}{1 - \Omega - \frac{K_o}{K_s} + \Omega \frac{K_s}{K_{fl}}} \quad (1.7)$$

$$R = \frac{\Omega^2 K_s}{1 - \Omega - \frac{K_o}{K_s} + \Omega \frac{K_s}{K_{fl}}} \quad (1.8)$$

Les coefficients ρ_{11} , ρ_{12} et ρ_{22} s'expriment en fonction des masses volumiques du fluide ρ_f , et de la matrice ρ_s :

$$\rho_{11} = (1 - \Omega)\rho_s + \Omega\rho_f(k_s - 1) \quad (1.9)$$

$$\rho_{22} = \Omega\rho_f k_s \quad (1.10)$$

$$\rho_{12} = \Omega\rho_f(1 - k_s) \quad (1.11)$$

Le coefficient b s'exprime en fonction de la perméabilité relative à l'air :

$$b = \frac{\Omega^2}{\mathcal{K}(\omega)} \quad (1.12)$$

Cette quantité dépend ici de la fréquence. Il s'agit d'une grandeur statique uniquement pour un écoulement de type de type Poiseuille qui n'est possible que pour les basses fréquences ou encore pour un nombre de Reynolds inférieur à 5772 [Huerre, 1992]. Biot met en évidence de manière qualitative le caractère dynamique de la perméabilité relative en corrigeant le coefficient de viscosité par l'introduction d'un facteur multiplicatif \mathcal{F} , fonction de la fréquence. Cette fonction est obtenue par des considérations à l'échelle du pore, en comparant une quantité physique représentant le rapport de la contrainte de cisaillement appliquée sur les parois du pore par la vitesse de filtration moyenne pour un écoulement

oscillatoire et pour un écoulement de Poiseuille. Biot calcule cette fonction pour une section circulaire uniforme de rayon r_p et propose la formulation suivante lorsqu'il s'agit d'une dépendance temporelle de type $e^{i\omega t}$:

$$\mathcal{F}(\omega) = -\frac{1}{4} \frac{r_p \left[\frac{-i\omega\rho_f}{\eta} \right]^{1/2} \frac{J_1 \left(r_p \left[\frac{-i\omega\rho_f}{\eta} \right]^{1/2} \right)}{J_0 \left(r_p \left[\frac{-i\omega\rho_f}{\eta} \right]^{1/2} \right)}}{1 - \frac{2}{r_p \left[\frac{-i\omega\rho_f}{\eta} \right]^{1/2} \frac{J_1 \left(r_p \left[\frac{-i\omega\rho_f}{\eta} \right]^{1/2} \right)}{J_0 \left(r_p \left[\frac{-i\omega\rho_f}{\eta} \right]^{1/2} \right)}}} \quad (1.13)$$

J_0 et J_1 sont les fonctions de Bessel d'ordre 0 et 1. En corrigeant la viscosité, la perméabilité devient une grandeur dynamique pour les hautes fréquences :

$$\mathcal{K}(\omega) = \frac{\kappa}{\eta \mathcal{F}(\omega)} \quad (1.14)$$

Bien entendu, pour les basses fréquences, la fonction \mathcal{F} tend vers 1 et on retrouve la définition de la perméabilité statique.

Notons tout de même que la dimension caractéristique du pore (r_p) est une grandeur microscopique qui peut être déduite de grandeurs macroscopiques (perméabilité intrinsèque et porosité). Pour conclure sur cet aspect dynamique de la perméabilité, il convient de souligner qu'il peut être mis en évidence de manière rigoureuse par les méthodes d'homogénéisation reposant sur la périodicité de la structure microscopique [Lévy, 1978] [Lévy, 1979].

◇ Ondes de compression

Examinons dans un premier temps des ondes irrotationnelles telles que les déplacements dérivent d'un potentiel scalaire :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{\text{grad}} \Phi_1 \\ \overrightarrow{\text{grad}} \Phi_2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi \quad (1.15)$$

En injectant le vecteur potentiel dans les équations du mouvement (1.4) et (1.5), nous obtenons une équation de propagation :

$$\underline{\underline{R}} \nabla^2 \Phi = \underline{\underline{A}} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \underline{\underline{M}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (1.16)$$

Les matrices $\underline{\underline{R}}$, $\underline{\underline{M}}$ et $\underline{\underline{A}}$ sont respectivement les matrices de rigidité, de masse et d'atténuation. Elles sont données par :

$$\underline{\underline{R}} = \begin{pmatrix} P & Q \\ Q & R \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{12} & \rho_{22} \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} b & -b \\ -b & b \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

Nous nous intéressons à des ondes harmoniques planes de pulsation ω et de constante de propagation k se propageant dans la direction Ox . Elles s'écrivent :

$$\Phi_1 = \Phi_{1o} e^{-i(kx - \omega t)} \quad (1.20)$$

$$\Phi_2 = \Phi_{2o} e^{-i(kx - \omega t)} \quad (1.21)$$

Φ_{1o} et Φ_{2o} sont des constantes. On reporte les expressions (1.20) et (1.21) des potentiels dans le système d'équations de propagation (1.16). Nous obtenons un système à deux équations pour Φ_{1o} et Φ_{2o} :

$$(-k^2 \underline{\underline{R}} - i\omega \underline{\underline{A}} + \omega^2 \underline{\underline{M}}) \Phi = \mathbf{0} \quad (1.22)$$

Ce système a un déterminant nul afin d'éviter une solution triviale et donne l'équation de dispersion liant k^2 à ω :

$$k^4(RP - Q^2) - k^2[\omega^2(P\rho_{22} + R\rho_{11} - 2Q\rho_{12}) - i\omega b(P + R + 2Q)] + \omega^4(\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2) - i\omega^3 b(\rho_{11} + \rho_{22} + 2\rho_{12}) = 0 \quad (1.23)$$

Nous obtenons ainsi pour k deux solutions possibles. Celles-ci sont complexes en raison des phénomènes d'atténuation. Deux ondes peuvent donc se propager dans le matériau aussi bien dans la phase fluide que dans la phase solide. Nous noterons respectivement k_R , k_L les constantes de propagation associées à l'onde dont la vitesse de phase est la plus grande, dite de première espèce et à l'onde lente de seconde espèce dont la vitesse est la plus faible. On montre [Biot, 1956] que lorsque le couplage entre la matrice et le fluide est important, les mouvements correspondent à des déplacements du squelette et du fluide en phase et

de même amplitude pour l'onde rapide et en opposition de phase pour l'onde lente. L'onde de seconde espèce est donc fortement amortie par la viscosité. Cependant si le couplage est suffisamment faible, on pourra estimer que l'une des deux ondes se propage dans le squelette et l'autre dans le fluide. Zwikker et Kosten [Zwikker *et al.*, 1949] évoquent une situation intermédiaire caractérisée par un découplage partiel. Cet état intermédiaire est caractérisé par une situation où la densité du squelette est plus importante que celle du fluide saturant. Lorsque que la matrice se met en vibration, celle-ci entraîne l'air saturant dans son mouvement et l'onde se propage dans les deux phases. Cependant, la faible densité de l'air l'empêche de transmettre son mouvement à la phase solide et dans ce cas l'onde se propage uniquement dans la phase fluide.

Une onde va donc se propager dans les phases solide et fluide tandis que l'autre se propage principalement dans le fluide.

Ils proposent ainsi une fréquence caractéristique f_c au dessus de laquelle le découplage partiel se manifeste :

$$f_c = \frac{\Omega^2 R_s}{2\pi(1 - \Omega)\rho_s} \quad (1.24)$$

Notons que ce découplage entre la phase solide et la phase fluide est évoqué également dans les méthodes l'homogénéisation [Dupin et Lévy, 1980] qui indiquent pour densité massique du fluide petite devant celle des parties solides que la filtration acoustique de l'air saturant se fait comme si la matrice était rigide.

◇ Ondes de cisaillement

On considère une onde isovolumique telle que :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{\text{rot}} \Psi_1 \\ \overrightarrow{\text{rot}} \Psi_2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{\text{rot}} \Psi \quad (1.25)$$

Ψ est un vecteur potentiel. Les équations de propagation (1.4) (1.5) deviennent pour des ondes harmoniques :

$$\nabla^2 \Psi_1 + \frac{\omega^2}{\mu} \frac{\tilde{\rho}_{11}\tilde{\rho}_{22} - \tilde{\rho}_{12}^2}{\tilde{\rho}_{22}} \Psi_1 = 0 \quad (1.26)$$

$$\Psi_1 \tilde{\rho}_{12} + \Psi_2 \tilde{\rho}_{22} = 0 \quad (1.27)$$

où nous avons posé :

$$\tilde{\rho}_{11} = \rho_{11} - \frac{ib}{\omega} \quad (1.28)$$

$$\tilde{\rho}_{22} = \rho_{22} - \frac{ib}{\omega} \quad (1.29)$$

$$\tilde{\rho}_{12} = \rho_{12} + \frac{ib}{\omega} \quad (1.30)$$

Les déplacements du fluide et du solide sont proportionnels l'un à l'autre. Le fluide ne reprenant pas les cisaillements, il n'influence donc l'onde que par des effets d'inertie.

1.1.4 Impédance de surface

Nous recherchons l'impédance de surface d'un matériaux poreux saturé par de l'air, d'épaisseur E_p et reposant sur une surface rigide. L'impédance est par définition le rapport de la pression par la composante normale de vitesse au niveau de la surface du matériau. On soumet ce matériau à une onde plane en incidence normale suivant la direction $0x$ (figure 1.5).

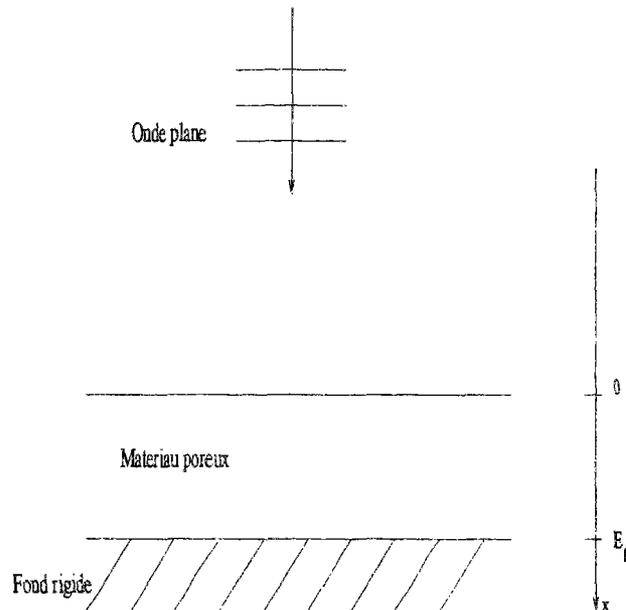


FIG. 1.5 - *Matériau poreux soumis à une onde plane en incidence normale*

Les symétries du problème nous permettent de nous affranchir de l'onde de cisaillement qui ne se propage pas. Nous n'envisagerons ainsi que la propagation

des ondes de compression dans la direction de l'axe $0x$. De façon à situer dans quel milieu les ondes se propagent Allard [Allard *et al.*, 1990] introduit le rapport des déplacements de l'air et de la phase solide créés par le passage des ondes:

$$r = \frac{U_x}{u_x} \quad (1.31)$$

U_x et u_x sont respectivement les composantes suivant l'axe $0x$ des vecteurs déplacements du fluide \mathbf{U} et du squelette \mathbf{u} . Pour des mouvements harmoniques avec une dépendance temporelle $e^{i\omega t}$, ces composantes sont données par :

$$u_x = u_o e^{-i(kx-\omega t)} \quad (1.32)$$

$$U_x = U_o e^{-i(kx-\omega t)} \quad (1.33)$$

u_o et U_o sont des constantes.

En reportant les écritures des déplacements du fluide (1.33) et du solide (1.32) dans les équations de propagation (1.4) et (1.5), nous obtenons une nouvelle formulation pour le rapport r :

$$r = \frac{\omega^2 \rho_{12} + i b \omega - k^2 Q}{k^2 R - \omega^2 \rho_{22} + i b \omega} \quad (1.34)$$

Allard introduit également les impédances caractéristiques définies par le rapport force/vitesse par unité de surface de matériau pour le squelette Z_1 et pour l'air Z_2 . Elles s'obtiennent en utilisant les relations constitutives qui se formulent de la manière suivante [Allard *et al.*, 1990]:

$$\underline{\underline{\tau}}^s = (P - 2\mu) \operatorname{div} \mathbf{u} \underline{\underline{1}} + Q \operatorname{div} \mathbf{U} \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (1.35)$$

$$\underline{\underline{\tau}}^f = -\Omega p \underline{\underline{1}} = Q \operatorname{div} \mathbf{u} \underline{\underline{1}} + R \operatorname{div} \mathbf{U} \underline{\underline{1}} \quad (1.36)$$

$\underline{\underline{\tau}}^s$ et $\underline{\underline{\tau}}^f$ désignent respectivement la contrainte associée au squelette et à l'air saturant. p est la pression acoustique dans le matériau poreux. En notant $\mathbf{n} = (-1, 0, 0)$ la normale extérieure à la surface supérieure du milieu poreux, les forces par unité de surface qui s'exercent sur le squelette F^s et sur le fluide F^f sont données par :

$$\mathbf{F}^s = \underline{\underline{\tau}}^s \cdot \mathbf{n} \quad \text{et} \quad \mathbf{F}^f = \underline{\underline{\tau}}^f \cdot \mathbf{n} \quad (1.37)$$

c'est à dire :

$$F^s = -\tau_{11}^s(x) \quad \text{et} \quad F^f = -\tau_{11}^f(x) \quad (1.38)$$

A partir de l'écriture des contraintes (1.35), (1.36) et de la définition des forces (1.38), nous obtenons pour des ondes harmoniques :

$$F^s = ik [Pu_x + QU_x] \quad \text{et} \quad F^f = ik [Qu_x + RU_x] \quad (1.39)$$

Les vitesses s'écrivent :

$$\dot{u}_x = i\omega u_x \quad \text{et} \quad \dot{U}_x = i\omega U_x \quad (1.40)$$

Moyennant l'introduction du rapport des déplacements de l'air et du solide r , les impédances Z_1 et Z_2 se formulent de la manière suivante :

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{F^s}{\dot{u}_x} \\ &= \frac{k}{\omega} (P + Qr) \end{aligned} \quad (1.41)$$

$$\begin{aligned} Z_2 &= \frac{F^f}{\dot{U}_x} \\ &= \frac{k}{\omega} \left(R + \frac{Q}{r} \right) \end{aligned} \quad (1.42)$$

En substituant k à k_R et k_L dans les équations (1.34), (1.41) et (1.42), nous obtenons r_R , Z_1^R et Z_2^R associés à l'onde rapide et r_L , Z_1^L , Z_2^L associés à l'onde lente.

Lorsque l'on s'intéresse à un milieu poreux reposant sur un fond rigide, les déplacements du squelette et de l'air sont données par :

$$u(x) = u_i^L e^{-ik_L x} + u_r^L e^{ik_L x} + u_i^R e^{-ik_R x} + u_r^R e^{ik_R x} \quad (1.43)$$

$$U(x) = r_L [u_i^L e^{-ik_L x} + u_r^L e^{ik_L x}] + r_R [u_i^R e^{-ik_R x} + u_r^R e^{ik_R x}] \quad (1.44)$$

où la dépendance en temps $e^{i\omega t}$ est sous entendue. Les déplacements u_i^L , u_r^L , u_i^R et u_r^R introduits sont associés aux ondes lentes (exposant L) et rapides (exposant R) pour des ondes incidentes (indice i) ou réfléchies (indice r). Nous en déduisons les vitesses du squelette et du fluide :

$$\dot{u}(x) = V_i^L e^{-ik_L x} + V_r^L e^{ik_L x} + V_i^R e^{-ik_R x} + V_r^R e^{ik_R x} \quad (1.45)$$

$$\dot{U}(x) = r_L [V_i^L e^{-ik_L x} + V_r^L e^{ik_L x}] + r_R [V_i^R e^{-ik_R x} + V_r^R e^{ik_R x}] \quad (1.46)$$

où les quantités V_i^L , V_r^L , V_i^R et V_r^R représentent les vitesses du squelette associées aux ondes incidentes (indice i), réfléchies (indice r) pour les ondes rapides

(exposant R) et lentes (exposant L). Ces vitesses sont associées aux déplacements par :

$$V_a^b = i \omega u_a^b \quad \text{avec } a = i, r \text{ et } b = L, R \quad (1.47)$$

Les déplacements des parties solides (1.43) et du fluide (1.44) sont reportés dans les écritures des contraintes τ_{11}^s et τ_{11}^f obtenues à partir des équations (1.35) et (1.36). Nous introduisons les impédances caractéristiques $Z_1^R, Z_1^L, Z_2^R, Z_2^L$ obtenues à partir des définitions (1.41) et (1.42) pour des ondes rapides et lentes, puis en exprimant les déplacements en fonction des vitesses associées (1.47), les contraintes deviennent :

$$\begin{aligned} \tau_{11}^s(x) &= -Z_1^L [V_i^L e^{-ik_L x} - V_r^L e^{ik_L x}] \\ &\quad - Z_1^R [V_i^R e^{-ik_R x} - V_r^R e^{ik_R x}] \end{aligned} \quad (1.48)$$

$$\begin{aligned} \tau_{11}^f(x) &= -Z_2^L r_L [V_i^L e^{-ik_L x} - V_r^L e^{ik_L x}] \\ &\quad - Z_2^R r_R [V_i^R e^{-ik_R x} - V_r^R e^{ik_R x}] \end{aligned} \quad (1.49)$$

En notant p^s et v^s la pression et la vitesse de l'air au voisinage de la surface supérieure du matériau poreux (figure 1.5), les conditions aux limites en $x = 0$ se formulent [Deresiewicz, 1963] :

- Continuité des contraintes :

$$\tau_{11}^f(0) = -\Omega p(0) = -\Omega p^s \quad (1.50)$$

$$\tau_{11}^s(0) = -(1 - \Omega)p^s \quad (1.51)$$

- Continuité des vitesses :

$$v^s = \Omega \dot{U}_x(0) + (1 - \Omega) \dot{u}_x(0) \quad (1.52)$$

- Rigidité du fond ($x = E_p$):

$$\dot{U}(E_p) = \dot{u}(E_p) = 0 \quad (1.53)$$

L'impédance de surface Z est donnée par :

$$Z^s = \frac{p^s}{v^s} \quad (1.54)$$

Ces conditions aux limites sont appliquées aux contraintes (1.48), (1.49) et aux vitesses (1.45) (1.46) en substituant la pression p^s par $Z^s v^s$:

$$-(1 - \Omega)Z^s v^s = -Z_1^L V_i^L (1 + e^{-2ik_L E_p}) - Z_1^R V_i^R (1 + e^{-2ik_R E_p}) \quad (1.55)$$

$$\begin{aligned} v^s &= V_i^L (1 - e^{-2ik_L E_p}) (\Omega r_L + 1 - \Omega) \\ &+ V_i^R (1 - e^{-2ik_R E_p}) (\Omega r_R + 1 - \Omega) \end{aligned} \quad (1.56)$$

$$\begin{aligned} -\Omega Z^s v^s &= -Z_2^L r_L V_i^L (1 + e^{-2ik_L E_p}) \\ &- Z_2^R r_R V_i^R (1 + e^{-2ik_R E_p}) \end{aligned} \quad (1.57)$$

Nous obtenons un système à trois équations (1.55)-(1.57) pour les inconnues v^s , V_i^L et V_i^R . Pour éviter une solution triviale, le déterminant de ce système doit être nul et son calcul nous donne l'écriture de l'impédance de surface :

$$\begin{aligned} Z^s &= \frac{p^s}{v^s} \\ &= -i \frac{(Z_1^L Z_2^R r_R - Z_2^L Z_1^R r_L)}{D} \end{aligned} \quad (1.58)$$

avec un dénominateur D donné par :

$$\begin{aligned} D &= [-(1 - \Omega) Z_2^L r_L + \Omega Z_1^L] [r_R \Omega + (1 - \Omega)] \tan k_R E_p \\ &+ [(1 - \Omega) Z_2^R r_R - \Omega Z_1^R] [r_L \Omega + (1 - \Omega)] \tan k_L E_p \end{aligned} \quad (1.59)$$

Allard traite l'exemple d'une mousse plastique à forte porosité reposant sur un sol dur et calcule l'impédance de surface en prenant en considération les deux ondes de compression, puis uniquement l'onde lente qui se propage essentiellement dans l'air au dessus de la fréquence critique de découplage partiel. Les résultats ne sont pas modifiés pour toutes les fréquences au dessus f_c ce qui signifie que seule l'onde lente se propageant dans l'air contribue à la propagation du son dans le matériau. Les modèles à une onde peuvent donc s'appliquer à des matériaux à structure souple mais à faible résistance au passage de l'air ou encore à structure rigide ($\mathbf{u} = 0$) pour lesquels les informations sur les paramètres de rigidité ne sont plus indispensables.

Dans ces conditions le nombre d'onde est donnée par l'équation de propagation (1.5) en prenant $\mathbf{u} = 0$:

$$k_L^2 R U_x = \omega^2 \rho_{22} U_x - i b \omega U_x \quad (1.60)$$

soit :

$$k_L^2 = \frac{1}{R} [\omega^2 \rho_{22} - i b \omega] \quad (1.61)$$

où rappelons le $\rho_{22} = \Omega \rho_f k_s$, et $b = \Omega^2 / \mathcal{K}$ ou encore $b = \Omega^2 R_s \mathcal{F}$. Le coefficient de Biot R est déduit de la définition (1.8). Pour un squelette rigide, c'est à dire K_s très grand, il devient :

$$R = \Omega K_{fl} \quad (1.62)$$

L'impédance mécanique Z_2^L est déduite de (1.42) en prenant $1/r = 0$:

$$Z_2^L = \frac{k_L}{\omega} R \quad (1.63)$$

Les écritures des vitesses (1.46) et des contraintes (1.49) associées au fluide se simplifient :

$$\dot{U}(x) = U_i^L e^{-ik_L x} + U_r^L e^{ik_L x} \quad (1.64)$$

$$\tau_{11}^f(x) = -Z_2^L [U_i^L e^{-ik_L x} - U_r^L e^{ik_L x}] \quad (1.65)$$

Les quantités U_i^L , U_r^L , représentent les vitesses associées respectivement à l'onde incidente et à l'onde réfléchie pour des mouvements lents.

Les conditions aux limites (1.50)-(1.53) deviennent :

- Continuité des contraintes :

$$\tau_{11}^f(0) = -\Omega p(0) = -\Omega p^s \quad (1.66)$$

- Continuité des vitesses :

$$v^s = \Omega \dot{U}_x(0) \quad (1.67)$$

- Rigidité du fond :

$$\dot{U}(E_p) = 0 \quad (1.68)$$

Cette condition de rigidité nous permet d'exprimer l'amplitude de l'onde réfléchie en fonction de l'amplitude de l'onde incidente :

$$U_r^L = -U_i^L e^{-i2k_L E_p} \quad (1.69)$$

Nous en déduisons les écritures de la pression p^s et de la vitesse v^s :

$$p^s = \frac{Z_2^L}{\Omega} U_i^L [1 + e^{-ik_L E_p}] \quad (1.70)$$

$$v^s = \Omega U_i^L [1 - e^{-ik_L E_p}] \quad (1.71)$$

L'impédance de surface définie par (1.54) se simplifie pour un squelette rigide :

$$Z^s = -i \frac{Z_2^L}{\Omega^2} \frac{1}{\tan k_L E_p} \quad (1.72)$$

Pour résumer et utilisant des paramètres qui caractérisent physiquement le milieu poreux, l'impédance de surface est donnée par :

$$Z^s = -i \frac{k_L K_{fl}}{\Omega \omega} \cot g k_L E_p \quad (1.73)$$

avec :

- k_L : nombre d'onde ($k_L^2 = \frac{\omega}{K_{fl}} [\omega \rho_f k_s - i \Omega R_s \mathcal{F}]$)
- Ω : porosité
- R_s : Résistance au passage de l'air
- k_s : tortuosité
- K_{fl} : module d'incompressibilité de l'air
- ρ_f : masse volumique de l'air
- ω : pulsation ($\omega = 2\pi f$ où f est la fréquence)
- E_p : épaisseur de milieu poreux
- \mathcal{F} : fonction corrigeant la viscosité pour les hautes fréquences. Pour des pores de section circulaire, \mathcal{F} est donné par :

$$\mathcal{F}(\lambda) = -\frac{\lambda \sqrt{-i} G(\lambda \sqrt{-i})}{4 [1 - 2 G(\lambda \sqrt{-i}) / \lambda \sqrt{-i}]} \quad (1.74)$$

où nous avons noté $G = J_1/J_0$ et $\lambda = r_p (\omega \rho_f / \eta)^{1/2}$. r_p , rayon de la section peut être relié aux grandeurs macroscopiques caractérisant physiquement le matériau par la relation suivante [Zwikker *et al.*, 1949]:

$$r_p^2 = \frac{8k_s \eta}{\Omega R_s} \quad (1.75)$$

Il suffit donc de connaître la nature du fluide saturant (module d'incompressibilité, masse volumique) ainsi que les caractéristiques physiques (épaisseur, porosité, tortuosité et résistance au passage de l'air) du milieu poreux pour en déduire les propriétés acoustiques. Le modèle de Biot-Allard représente donc une simplification considérable de la théorie générale lorsque le matériau est supposé à squelette rigide.

1.2 Modèle phénoménologique

Ce modèle s'inscrit dans le cadre de l'approche macroscopique et consiste à assimiler le milieu poreux à un fluide homogène, isotrope, compressible et dissipatif [Hamet, 1988] [Hamet, 1992]. Nous proposons de développer les grandes lignes de cette démarche.

Les dissipations considérées sont d'origine visqueuses et thermiques et traduisent les échanges énergétiques entre l'air saturant et le squelette. Le modèle utilise les paramètres macroscopiques introduits précédemment pour décrire physiquement le matériau poreux. Nous rappelons qu'il s'agit de la porosité Ω , de la résistance au passage de l'air R_s et de la tortuosité qui est notée K dans le modèle considéré.

Les équations fondamentales sont données par la conservation de la masse, la conservation de la quantité du mouvement et la relation de compressibilité, qui elle-même résulte de l'équation de conduction de la chaleur et de l'équation d'état. L'équation de propagation en est déduite [Annexe A]:

$$\Delta p + k^2 p = 0 \quad (1.76)$$

où p représente la pression acoustique. Le nombre d'onde k est défini par :

$$k = k_o \sqrt{K} \gamma \sqrt{1 - i \frac{f_\eta}{f}} \sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{1}{1 - i \frac{f_\tau}{f}}} \quad (1.77)$$

$k_o = \omega/c_o$, où c_o est la célérité du son à l'air libre. f_η et f_τ ont la dimension d'une fréquence et sont définis par :

$$f_\eta = \frac{R_s \Omega}{2 \pi \rho_o N_{pr}} \quad f_\tau = \frac{R_s}{2 \pi \rho_o K} \quad (1.78)$$

Pour une onde plane se propageant dans la direction des x croissants ($p = p_+ e^{ikx}$, $u = u_+ e^{ikx}$), l'impédance caractéristique est donnée par :

$$Z^c = \rho_o c_c \frac{1}{\Omega} \frac{K}{\gamma} \frac{\sqrt{1 - i \frac{f_\eta}{f}}}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{1}{1 - i \frac{f_\tau}{f}}}} \quad (1.79)$$

Le modèle met donc en évidence l'existence de deux fréquences caractéristiques f_η et f_τ ($f_\eta \ll f_\tau$) associées respectivement aux phénomènes visqueux et

thermiques. Ces quantités définissent trois domaines de fréquences :

- Le domaine des basses fréquences ($f < f_\eta$) où le processus est isotherme.
- Le domaine des hautes fréquences $f_\tau < f$ pour lequel le processus est adiabatique.
- Le domaine des fréquences intermédiaires ($f_\eta < f < f_\tau$) où le processus évolue entre les deux états.

Le nombre d'onde et l'impédance caractéristique sont suffisants pour obtenir l'impédance de surface d'un matériau poreux d'épaisseur donnée. La simplicité des résultats est tout à fait adapté aux optimisations dans la pratique et permet de traiter ce problème de manière analytique [Hamet, 1988].

1.3 Conclusion

Nous avons présenté deux théories modélisant la propagation des ondes dans un milieu poreux.

La première dite de Biot, considère que le squelette est élastique et fait l'hypothèse d'adiabaticité des transformations, ce qui permet de négliger les dissipations thermiques. Elle repose sur les principes de la mécanique des milieux continus et n'est valable que pour des longueurs d'ondes grandes devant les dimensions caractéristiques des conduits où s'effectue l'écoulement. Les paramètres utilisés sont la porosité, la résistance au passage de l'air et la tortuosité. Elle possède un domaine d'application plus large que les modèles proposés par les approches phénoménologiques ou microstructurales (échelle du pore) car elle met en évidence la propagation de trois ondes (deux ondes de compression, une lente l'autre rapide et une onde de cisaillement).

L'originalité de cette modélisation réside principalement dans la prédiction de l'onde lente qui n'existe pas dans un milieu continu, isotrope, classique.

Une modélisation simplifiée ne retenant que l'onde lente a été suggérée pour des fréquences supérieures à la fréquence de découplage partiel entre le squelette et l'air saturant les pores. Au delà de cette fréquence, nous pouvons estimer que le squelette est rigide, si nous nous intéressons uniquement à la propagation du son dans le matériau. Dans ce cas, le squelette est immobile et les paramètres caractérisant la rigidité sont inutiles. Notons que les méthodes de l'homogénéisation qui reposent sur l'hypothèse d'une périodicité des solutions en utilisant une formulation asymptotique permettent de trouver des lois de comportements et des conclusions proches de celles que fournit la théorie de Biot [Dupin et Lévy, 1980] [Lévy, 1978].

Pour des matériaux poreux de type enrobés drainants de masse volumique 2.10^3 Kg/m^3 , de porosité 0.2 et de résistance au passage de l'air 200 KN s m^{-4} (choisie volontairement grande), la fréquence critique est égale à $0.79H_z$. Les pro-

priétés acoustiques des couches de roulement poreuses peuvent donc être établies à partir d'un modèle à une onde et en particulier par une approche microscopique où le squelette est supposé rigide pour le problème considéré. Nous développerons cette théorie dans le chapitre suivant.

La seconde théorie dite phénoménologique, suppose justement que la phase solide est rigide. Elle assimile le milieu poreux à un fluide compressible dissipatif et utilise pour décrire le matériau, quasiment les mêmes paramètres que le modèle de Biot. Cette modélisation a l'avantage de prendre en compte les dissipations thermiques qui jouent un rôle important pour le régime des hautes fréquences ($f > f_\tau$). Elle permet en outre, d'interpréter aisément les phénomènes mis en jeu et la simplicité des équations en fait un outil pratique pour un problème d'optimisation de l'absorption.

Cependant ces deux théories ne permettent pas de décrire finement les paramètres physiques, et de proposer des méthodes pour les mesurer. Pour cela, il est nécessaire d'aborder le problème à l'échelle du pore, en utilisant une approche microscopique. Nous verrons par la suite, que cette démarche introduit des paramètres supplémentaires qui enrichissent la description du réseau poreux et qui ne sont pas accessibles par une approche macroscopique.

Chapitre 2

Approche microscopique

S'inspirant des travaux de Rayleigh [Rayleigh, 1945], Zwikker et Kosten [Zwikker *et al.*, 1949] se sont intéressés à la propagation d'ondes acoustiques dans un milieu poreux constitué de pores identiques non connectés, parallèles, de section circulaire uniforme et perpendiculaires à la surface. Le squelette est supposé rigide et les propriétés acoustiques sont établies au niveau du pore. Zwikker et Kosten ont largement popularisé cette théorie. Il est vrai qu'un milieu poreux constitué de pores uniformes non connectés de section circulaire présente peu d'intérêt, mais ils estiment que le comportement devrait être similaire à celui de milieux plus complexes et par là même pourrait être amélioré après quelques modifications et réinterprétation de paramètres. Cette démarche repose sur la connaissance des caractéristiques acoustiques d'un guide d'onde de section circulaire. La solution exacte donnée par Kirchhoff [Kirchhoff, 1868] prend en compte les dissipations visqueuses et thermiques et reste valable quelque soit la fréquence ou le rayon de la section. Elle reste tout de même très compliquée pour de nombreuses applications. Zwikker et Kosten proposent une formulation approchée plus simple où les effets visqueux et thermiques sont traités séparément et résumés en terme de fonctions complexes de densité et de compressibilité. De nombreux auteurs ont depuis adopté cette théorie. Cependant cette approche n'a été justifiée qu'aux basses et hautes fréquences et le régime intermédiaire n'a pas pu être traité. Stinson [Stinson, 1991] montre que la solution exacte de Kirchhoff peut être réduite à la forme analytique donnée par Zwikker et Kosten en introduisant des simplifications appropriées à certains choix de rayons, de sections et de fréquences acoustiques. Il détermine ainsi de façon précise le régime dans lequel l'approche Zwikker et Kosten est valable.

D'autres traitements approximatifs ont été introduits. Ainsi Crandall [Crandall, 1926] considère la distribution des vitesses à travers une section lorsque la conductivité thermique est négligeable. Il obtient avec cette hypothèse un écoulement laminaire et les caractéristiques acoustiques peuvent être calculées. Daniels [Daniels, 1947] considère la conduction thermique dans un conduit

cylindrique et en déduit une relation entre écart de température et pression acoustique. Cette analyse suppose toutefois que les gradients thermiques sont négligeables le long de l'axe du cylindre.

Ces aspects approximatifs de la propagation peuvent être décrit en terme d'impédance et d'admittance [Mawardi, 1949] [Daniels, 1950] [Benade, 1968] [Russell *et al.*, 1993]. En effet lorsque la longueur d'onde est bien plus grande que les dimensions transverses du conduit, le mouvement de l'onde est analogue au flux de courant électrique dans une ligne de transmission. Le courant électrique s'identifie au débit acoustique, tandis que le potentiel électrique est l'analogue de la pression acoustique.

La section circulaire a été une géométrie prototype, et l'extension de la théorie à des sections non circulaires a été nécessaire. En effet, les milieux poreux réels ont rarement des pores de sections circulaires et certains auteurs [Attenborough, 1983] ont traduit le changement de géométrie par l'introduction d'un facteur de forme. Stinson [Stinson, 1991] estime par contre que certaines spécificités de la solution obtenue pour une section circulaire peuvent être appliquées à des conduits de forme arbitraire, et développe ainsi une procédure générale permettant le calcul des caractéristiques acoustiques. De façon à démontrer l'utilité de cette procédure, il développe la solution pour des sections rectangulaire, triangulaire, et de type fissure [Stinson *et al.*, 1992]. Cummings [Cummings, 1993] propose une méthode variationnelle applicable à des géométries plus complexes où les solutions analytiques sont limitées. Il en déduit des solutions approchées aux basses et hautes fréquences. Wilson [Wilson, 1993] développe un modèle reposant sur un formalisme de relaxation. Il estime que les dissipations visqueuses et thermiques sont des caractéristiques d'un processus de relaxation. Ce modèle a l'avantage de faire intervenir un paramètre en moins, et à la différence des modèles précédents n'utilise pas de fonction de Bessel et de Kelvin.

Les milieux poreux réels sont rarement constitués de pores de sections uniformes. Les milieux granulaires par exemple, qu'ils soient consolidés ou non n'ont pas de taille de pores constante, mais des dimensions qui varient de sections nulles à des sections de l'ordre du diamètre des grains. La détermination de la distribution de taille de pores a été l'objet de recherches de nombreux physiciens [Marshall *et al.*, 1979] [Pittman, 1984]. Yamamoto et Turgut [Yamamoto *et al.*, 1988] montrent qu'un milieu poreux avec une porosité donnée et une perméabilité donnée peut être décrit par une infinité de distributions de taille de pores et que la vitesse et l'atténuation de l'onde acoustique, insensibles à la distribution dans le domaine des basses et hautes fréquences, le sont fortement dans le domaine des fréquences intermédiaires. Leur modèle se base sur le traitement des effets visqueux de pores distribués selon une loi normale. Attenborough [Attenborough, 1993] généralise cette approche pour y inclure les effets

thermiques. Une autre formulation a été introduite par Stinson et Champoux [Champoux *et al.*, 1992] consistant à modéliser chaque pore comme une série de conduits uniformes de section et forme aléatoires, en négligeant les phénomènes associés aux jonctions de segment. L'application de ce modèle nécessite toutefois la connaissance du détail de la géométrie du pore. Pour des milieux complexes cette information n'est pas toujours accessible. Le modèle est alors généralisé par l'introduction de deux paramètres supplémentaires associés aux effets visqueux et thermiques qu'il convient d'ajuster. On peut également citer le modèle de Biot-Allard [Allard *et al.*, 1990] qui ne nécessite qu'un facteur de forme supplémentaire, mais qui semble être inefficace lorsque les variations de section sont très prononcées.

Une des particularités des milieux poreux réels provient également de la nature des parois de pores. Les auteurs considèrent généralement que celles-ci sont rigides. Arnott [Arnott *et al.*, 1991] apporte une contribution en étudiant les parois percées par des micropores non connectés aux pores voisins, ce qui se traduit par une impédance de paroi. Wilson [Wilson, 1993] dans le cadre du modèle de relaxation propose une extension à des surfaces de pores de type fractales. Toutefois ces modélisations n'ont été développées que pour des pores de section uniforme.

Les méthodes d'homogénéisation que nous venons d'évoquer reposent sur le principe de la moyenne et consistent à établir les propriétés acoustiques à l'échelle du pore. D'autres approches utilisent une hypothèse de périodicité de la structure hétérogène microscopique. Les champs de contraintes et de déformation sont alors périodiques et la résolution du problème se ramène à l'étude d'une cellule parallélépipédique composée d'une phase solide élastique et d'une phase fluide. Les lois macroscopiques sont obtenues pour une dimension de la période spatiale petite devant la longueur caractéristique des phénomènes macroscopiques qui est la longueur d'onde [Lévy *et al.*, 1977] [Lévy, 1977, 78] (méthode asymptotique).

Cette démarche qui prend en compte les dissipations visqueuses et thermiques, permet de retrouver les conclusions de la théorie de Biot. Elle indique l'influence de la connection des pores [Lévy, 1979] et met en évidence l'existence de trois type d'ondes lorsque la phase solide est supposée élastique [Dupin et Lévy, 1980] [Lévy, 1977]. Elle généralise en outre la loi de Darcy classique pour un régime instationnaire qui fait intervenir une perméabilité dynamique. La filtration acoustique de l'air se fait comme si la matrice était rigide lorsque le fluide saturant est de densité bien plus petite que celle des parties solides. L'hypothèse de périodicité peut paraître à première vue contraignante, mais il semblerait que cette démarche supporte correctement les comparaisons avec les mesures expérimentales effectuées sur des milieux aléatoires [Suquet, 1982].

Nous utiliserons par la suite, la première méthode d'homogénéisation (principe de la moyenne) qui malgré ses limites d'applicabilité, permet de fournir des

estimations analytiques des qualités acoustiques pour des géométries de pore complexes.

Après un rappel des équations de Navier-Stokes (§2.1), nous écrivons les formulations exactes des vitesses et des grandeurs thermodynamiques (température, pression et densité) introduites dans la théorie de Kirchhoff (§2.2). Celles-ci seront analysées pour deux types d'écoulements (isotherme et adiabatique) de manière à dégager quelques caractéristiques susceptibles de simplifier la solution générale (§2.3).

Nous introduirons alors les fonctions complexes de densité et de compressibilité qui généralisent dans le cas d'un fluide limité dans l'espace, la densité et la compressibilité d'un fluide libre non dissipatif. Ces deux fonctions nous donneront très simplement une estimation de l'impédance et du nombre d'onde. Toutes ces grandeurs seront calculées pour une section circulaire.

En appliquant les mêmes simplifications aux équations de Navier-Stokes, nous généraliserons ces résultats à des formes arbitraires (§2.4), et à titre d'exemple les calculs seront entièrement traités pour des sections rectangulaires et triangulaires (§2.5).

Ces propos seront étendus à un milieu poreux constitué de pores identiques traversant tout le matériau (§2.6). Nous évoquerons alors une première situation où les pores sont considérés uniformes, pour traiter par la suite une autre où la taille varie en fonction de la profondeur du matériau.

2.1 Equations locales linéarisées - Modèle de Navier-Stokes

2.1.1 Variables microscopiques

Pour décrire l'état d'un fluide, on doit donner les vitesses microscopiques, ainsi que les distributions de grandeurs thermodynamiques que nous choisissons parmi la pression, la température, la densité et l'entropie. La nature d'un fluide étant précisée et connaissant deux grandeurs thermodynamiques en un point, les autres grandeurs s'obtiennent en ce point à l'aide d'équations d'état caractéristiques du fluide. Nous ne considérerons que de petites perturbations par rapport à un état ambiant caractérisé par :

- P_o : pression atmosphérique
- ρ_o : densité ambiante du fluide
- T_o : température ambiante
- S_o : entropie au repos
- \vec{V}_o : vitesse nulle au repos

En présence de petites perturbations ces quantités deviennent en coordonnées cartésiennes:

$$P(x, y, z, t) = P_o + p(x, y, z, t) \quad (2.1)$$

$$\rho'(x, y, z, t) = \rho_o + \rho(x, y, z, t) \quad (2.2)$$

$$T(x, y, z, t) = T_o + \tau(x, y, z, t) \quad (2.3)$$

$$\vec{V}(x, y, z, t) = \vec{0} + \vec{v}(x, y, z, t) \quad (2.4)$$

$$S(x, y, z, t) = S_o + s(x, y, z, t) \quad (2.5)$$

Si nous supposons que la vitesse est définie par trois composantes vectorielles, le problème possède sept inconnues (p , \vec{v} , ρ , s et τ). Il ne peut être résolu qu'en introduisant sept relations données par les équations du mouvement, de conservation de la masse, de propagation de la chaleur et de deux relations qui expriment que l'entropie et la masse volumique sont des variables d'état (ds et $d\rho$ sont des différentielles totales exactes). Nous rappelons ci-dessous ces équations sous leurs formes locales. Elles seront utiles pour l'obtention de la solution exacte de Kirchhoff, mais également pour la recherche d'une formulation approchée.

2.1.2 Equation du mouvement

Elle s'exprime de la façon suivante :

$$\rho_o \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}(p) + \eta \Delta \vec{v} + \frac{\eta}{3} \overrightarrow{grad}(div(\vec{v})) \quad (2.6)$$

Nous supposons dans cette écriture que les dissipations visqueuses associées au mouvements de rotation et de vibration des molécules sont négligeables. Le coefficient de viscosité η que nous avons introduit, mesure l'intensité du phénomène d'amortissement par cisaillement dû à l'échange énergétique au niveau du mouvement de translation des molécules entre couches de fluides voisines animées de vitesses différentes.

2.1.3 Conservation de la masse

Elle exprime le fait que la variation de masse du fluide dans un volume élémentaire est due au flux de fluide sortant de la surface fermée limitant ce volume. Une fois linéarisée, elle s'écrit sous la forme locale de la façon suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_o div(\vec{v}) = 0 \quad (2.7)$$

2.1.4 Equation d'état pour la densité

Nous considérons que la densité est une fonction d'état (approximation linéaire) de la pression p et de la température τ :

$$\rho(p, \tau) = \left[\frac{\partial \rho}{\partial p} \right]_{\tau} p + \left[\frac{\partial \rho}{\partial \tau} \right]_p \tau \quad (2.8)$$

ou encore :

$$\rho(p, \tau) = -\rho_o \beta_o \tau + \frac{\rho_o}{K_o} p \quad (2.9)$$

β_o désigne le coefficient d'expansion thermique du fluide. Il mesure la variation relative de la masse volumique résultant d'une variation de la température d'une unité. Ce coefficient est défini par la relation suivante :

$$\beta = -\frac{1}{\rho'} \left[\frac{\partial \rho'}{\partial T} \right]_p \quad (2.10)$$

Au premier ordre près, il devient :

$$\beta_o = -\frac{1}{\rho_o} \left[\frac{\partial \rho}{\partial \tau} \right]_p \quad (2.11)$$

De même, le module d'incompressibilité isotherme K_o mesure la variation relative de la pression par unité de masse volumique dans un processus isotherme. Il est défini par :

$$K = \rho' \left[\frac{\partial P}{\partial \rho'} \right]_T \quad (2.12)$$

Au premier ordre, nous avons :

$$K_o = \rho_o \left[\frac{\partial p}{\partial \rho} \right]_\tau \quad (2.13)$$

Lorsque le gaz est dit thermiquement parfait, son équation d'état thermique $P = f(\rho', T)$ prend la forme suivante :

$$P = \rho' r T \quad (2.14)$$

où r est la constante des gaz parfaits définie par :

$$r = \frac{R}{\mathcal{M}} \quad (2.15)$$

On désigne ici par R , la constante universelle des gaz parfaits ($R = 8.314 \text{ J/}^\circ\text{K}$), et \mathcal{M} la masse molaire du gaz. En reportant la loi (2.14) dans les définitions du coefficient d'expansion thermique (2.10) et d'incompressibilité isothermique (2.12), nous obtenons :

$$\beta = \frac{1}{T} \quad (2.16)$$

$$K = P \quad (2.17)$$

soit au premier ordre :

$$\beta_o = \frac{1}{T_o} \quad (2.18)$$

$$K_o = P_o \quad (2.19)$$

L'équation d'état pour la densité se résume donc à la relation suivante :

$$\rho = -\frac{\rho_o}{T_o} \tau + \frac{\rho_o}{P_o} p \quad (2.20)$$

2.1.5 Equation d'état pour l'entropie

L'entropie est une fonction d'état (approximation linéaire) de la pression p et de la température τ :

$$s(p, \tau) = \left[\frac{\partial s}{\partial p} \right]_{\tau} p + \left[\frac{\partial s}{\partial \tau} \right]_p \tau \quad (2.21)$$

Par définition, nous avons :

$$c_p = T_o \left[\frac{\partial s}{\partial \tau} \right]_p \quad (2.22)$$

et d'après une relation de Maxwell [Landau *et al.*, 1989] :

$$\left[\frac{\partial s}{\partial p} \right]_{\tau} = - \left[\frac{\partial(1/\rho)}{\partial \tau} \right]_p = - \frac{\beta_o}{\rho_o} \quad (2.23)$$

Nous obtenons ainsi l'écriture suivante pour l'entropie :

$$s = \frac{c_p}{T_o} \tau - \frac{1}{T_o \rho_o} p \quad (2.24)$$

2.1.6 Equation de diffusion de la température

Elle est obtenue à l'aide de l'équation de Kirchhoff-Fourier linéarisée :

$$\rho_o T_o \frac{\partial s}{\partial t} = \tilde{\kappa} \Delta \tau \quad (2.25)$$

où $\tilde{\kappa}$ est le coefficient de conduction thermique. L'écriture de l'entropie (2.24) reportée dans l'équation de Kirchhoff-Fourier (2.25), nous fournit l'expression de l'équation de diffusion de la température :

$$\rho_o c_p \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} + \tilde{\kappa} \Delta \tau \quad (2.26)$$

2.1.7 Récapitulation

Le fluide étant caractérisé par cinq grandeurs (trois composantes de vitesse et deux grandeurs thermodynamiques), nous disposons à présent d'un nombre suffisant d'équations pour résoudre le problème de propagation dans un guide d'onde. Pour la commodité, nous rappelons les équations établies :

- Equation du mouvement

$$\rho_o \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}(p) + \eta \Delta \vec{v} + \frac{\eta}{3} \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{v})) \quad (2.27)$$

– Equation de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_o \text{div}(\vec{v}) = 0 \quad (2.28)$$

– Equation d'état pour la densité

$$\rho = -\frac{\rho_o}{T_o} \tau + \frac{\rho_o}{P_o} p \quad (2.29)$$

– Equation d'état pour l'entropie

$$s = \frac{c_p}{T_o} \tau - \frac{1}{T_o \rho_o} p \quad (2.30)$$

– Equation de diffusion de la chaleur

$$\rho_o c_p \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} + \tilde{\kappa} \Delta \tau \quad (2.31)$$

Pour l'air, dans les conditions standard, les quantités $\eta, \tilde{\kappa}, \gamma, K_o, \beta, \rho_o$ et T_o valent [Lafarge, 1993]:

$$\begin{aligned} \eta &= 1.84 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1} \\ \tilde{\kappa} &= 2.6 \cdot 10^{-2} \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1} \\ \gamma &= 1.4 \\ K_o &= P_o = 10^5 \text{ Pa} \\ \beta_o &= 1/T_o \text{ K}^{-1} \\ \rho_o &= 1.29 \text{ kg/m}^3 \\ T_o &= 294 \text{ K} \end{aligned} \quad (2.32)$$

2.2 Propagation dans un conduit de section circulaire - Solution exacte

La propagation d'onde dans un conduit uniforme de section circulaire est un problème fondamental qui se pose dans de nombreux domaines de l'acoustique. La solution exacte donnée par Kirchhoff au XIX siècle [Kirchhoff, 1868] peut se présenter sous une forme analytique suggérée par Zwicker et Kosten dans la mesure où le rayon de la section r_p est supérieur à 10^{-3} cm et que les fréquences acoustiques f soient telles que $r_p f^{3/2}$ soit inférieur à 10^6 $cm s^{-3/2}$ selon Stinson [Stinson, 1991]. Ces concepts seront exposés dans la section suivante (§2.3), où nous préciserons dans quelle mesure ils peuvent être étendus à des conduits de forme arbitraire.

Cette partie sera plutôt consacrée au développement de la solution de Kirchhoff sous sa forme initiale. Nous préciserons dans un premier temps les conditions aux limites utilisées sur les parois du guide, pour donner par la suite l'écriture de la solution (pression, vitesse, température et densité) telle que l'avait proposée Kirchhoff. Nous nous contenterons d'en donner l'expression sans détailler les calculs, le lecteur pourra se reporter à la publication de Kirchhoff pour plus d'explications.

Les résultats seront analysés pour deux types d'écoulement (adiabatique et isotherme) de manière à dégager quelques caractéristiques de la propagation susceptibles de simplifier la solution générale.

Notre ambition est d'appliquer par la suite les outils obtenus à un milieu poreux. Les résultats obtenus pour un conduit que nous assimilerons à un pore, seront alors généralisés à l'échelle macroscopique du milieu poreux. Le détail des variations à travers la section du pore des grandeurs recherchées n'est donc pas nécessaire et nous introduirons donc des grandeurs équivalentes moyennes.

2.2.1 Conditions aux limites

Le système d'équations couplées (2.27)-(2.32) pour les variables p , \vec{v} et τ est complété par les conditions aux limites aux parois :

$$\vec{v} = 0 \quad \text{et} \quad \tau = 0 \quad (2.33)$$

La condition $\vec{v} = 0$ est la condition d'adhérence du fluide visqueux. La condition $\tau = 0$ signifie que les parois restent à température ambiante et qu'il n'y a pas de saut de température interfacial entre le solide et le fluide. Elle repose essentiellement sur les deux circonstances suivantes. D'une part les solides sont généralement de bien meilleurs conducteurs de chaleur que les fluides. D'autre part, l'onde apporte de la chaleur au solide mais elle en extrait également périodiquement une partie dans son mouvement harmonique. En nous reportant à

Pierce [Pierce, 1981], les conditions suivantes assurent la validité des conditions aux limites (2.33):

$$(\rho_o c_p^f \tilde{\kappa})_{fluide} \ll (\rho_s c_p^s \tilde{\kappa}_s)_{solide} \quad (2.34)$$

$$(\tilde{\kappa} \rho_o c_p^f)^{1/2}_{fluide} \ll \omega^{1/2} (\rho_s c_p^s)_{solide} \left(\frac{V_s}{S} \right) \quad (2.35)$$

où S et V_s désignent respectivement la surface de contact fluide-solide, le volume occupé par le solide. La première condition provient de l'analyse de la réflexion d'une onde plane en incidence normale sur un demi espace de conductivité thermique finie. La seconde repose sur le calcul du flux de chaleur dans la phase solide où l'énergie est supposée uniformément répartie. Dans le cas de la laine de verre ces conditions sont respectées lorsque les fréquences sont supérieure à $1H_z$, ce qui est largement réalisé pour des applications acoustiques [Lafarge, 1993]. On peut calculer cette fréquence critique pour des enrobés drainants si nous assimilons ce type de milieux à un béton fibreux, de manière à calculer simplement la surface de contact fluide-solide. La chaleur spécifique c_p^s , la masse volumique ρ_s et la conductivité thermique du squelette sont données par :

$$c_p^s = 916.5 \text{ Jm}^{-3}\text{C}^{-1} \quad \rho_s = 2.5 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3} \quad \tilde{\kappa}_s = 1.75 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1} \quad (2.36)$$

Pour l'air, nous avons :

$$c_p^f = 10^3 \text{ Jm}^{-3}\text{C}^{-1} \quad \rho_o = 1.29 \text{ kg m}^{-3} \quad \tilde{\kappa}_f = 1.6 \cdot 10^{-2} \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1} \quad (2.37)$$

Le milieu poreux considéré d'épaisseur E_p , est constitué de pores identiques allant de la surface supérieure du matériau à la surface inférieure. De manière à simplifier le calcul, nous supposons que la tortuosité est égale à 1 (section uniforme et axe de chaque pore perpendiculaire à la surface du matériau). Pour calculer le rapport surface de contact par le volume solide, nous introduisons la porosité Ω et le rayon moyen des pores R . Lorsqu'il s'agit de pores à sections circulaires, en introduisant V_f le volume occupé par le fluide, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \left(\frac{V_s}{S} \right) &= \left(\frac{V_f}{S} \right) \left(\frac{V_s}{V_f} \right) \\ &= \frac{R}{2} \frac{1 - \Omega}{\Omega} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Avec les valeurs numériques (2.36) pour le squelette et (2.37) pour l'air les deux membres de l'inégalité (2.34) prennent les valeurs suivantes :

$$(\rho_o c_p^f \tilde{\kappa})_{fluide} = 20.64 \quad (2.39)$$

$$(\rho_s c_p^s \tilde{\kappa}_s)_{solide} = 40 \cdot 10^5 \quad (2.40)$$

La première condition (2.34) est donc vérifiée. La seconde (2.35) associée au rapport volume par surface défini par l'équation (2.38) nous permet d'écrire la fréquence critique f_c au delà de laquelle l'inégalité (2.35) est vérifiée :

$$f_c = \frac{2 \Omega^2 \tilde{\kappa}_f \rho_o c_p^f}{\pi [\rho_s c_p^s R (1 - \Omega)]^2} \quad (2.41)$$

Pour une porosité de 20% ($\Omega = 0.2$) et un rayon moyen R égal à $0.1cm$, nous obtenons :

$$f_c \approx 2.54 \cdot 10^{-7} H_z \quad (2.42)$$

Cette fréquence est d'autant plus petite que le rayon est grand, on peut donc estimer que les conditions aux limites (2.33) sont valables quelque soit la fréquence.

2.2.2 Solution exacte

La théorie de Kirchhoff a été établie pour un conduit infiniment long à paroi rigide, de section circulaire et uniforme. Une hypothèse de symétrie cylindrique de la solution a été adoptée et une dépendance en fonction de la position longitudinale z et temporelle t de type $e^{i\omega t + mz}$ est choisie (m grandeur complexe appelée improprement nombre d'onde). Les équations de Navier-Stokes ainsi que les conditions aux limites sont valables quelque soit la géométrie du guide. Elles le sont en particulier lorsqu'il s'agit d'un conduit uniforme de section circulaire uniforme de rayon r_p .

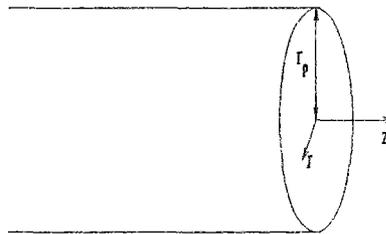


FIG. 2.1 - Conduit de section circulaire

En utilisant un système de coordonnées cylindriques, Kirchhoff décompose la vitesse sous la forme d'une composante radiale v_r et d'une composante longitudinale v_z (la direction axiale z et radiale r sont indiquées sur la figure (2.1)) et

montre, en utilisant une hypothèse de symétrie cylindrique de la solution, que les grandeurs acoustiques s'écrivent sous la forme suivante :

$$v_z = \left[A Q - A_1 m \left(\frac{i\omega}{\lambda_1} - \nu' \right) Q_1 - A_2 m \left(\frac{i\omega}{\lambda_2} - \nu' \right) Q_2 \right] e^{mz} \quad (2.43)$$

$$v_r = \left[-\frac{Am}{(i\omega/\nu) - m^2} \frac{dQ}{dr} - A_1 \left(\frac{i\omega}{\lambda_1} - \nu' \right) \frac{dQ_1}{dr} - A_2 \left(\frac{i\omega}{\lambda_2} - \nu' \right) \frac{dQ_2}{dr} \right] e^{mz} \quad (2.44)$$

$$\tau = (\gamma - 1) T_o (A_1 Q_1 + A_2 Q_2) e^{mz} \quad (2.45)$$

où $\nu = \eta/\rho_o$, $\nu' = \tilde{\kappa}/(\rho_o c_o)$ et les fonctions Q , Q_1 et Q_2 sont définies à l'aide de la fonction de Bessel d'ordre 0, par les relations suivantes :

$$Q = J_o [r(m^2 - i\omega/\nu)^{1/2}] \quad (2.46)$$

$$Q_1 = J_o [r(m^2 - \lambda_1)^{1/2}] \quad (2.47)$$

$$Q_2 = J_o [r(m^2 - \lambda_2)^{1/2}] \quad (2.48)$$

λ_1 et λ_2 sont respectivement les solutions de petit et grand module de l'équation du second degré en λ :

$$\lambda^2 \left[\frac{c_o^2 \nu'}{i\omega \gamma} + \frac{4}{3} \nu \nu' \right] - \lambda \left[c_o^2 + i\omega \left(\frac{4}{3} \nu + \nu' \right) \right] - \omega^2 = 0 \quad (2.49)$$

Le paramètre m est la constante de propagation. Il est évalué en posant v_z, v_r et τ nuls sur les parois du conduit. Cela nous donne un système de trois équations pour les inconnues A_1 , A_2 et A_3 . Pour obtenir une solution non triviale son déterminant doit être nul :

$$\begin{vmatrix} Q_p & -m \left(\frac{i\omega}{\lambda_1} - \nu' \right) Q_{1p} & -m \left(\frac{i\omega}{\lambda_2} - \nu' \right) Q_{2p} \\ -\frac{m}{(i\omega/\nu) - m^2} \frac{dQ}{dr_p} & -\left(\frac{i\omega}{\lambda_1} - \nu' \right) \frac{dQ_1}{dr_p} & -\left(\frac{i\omega}{\lambda_2} - \nu' \right) \frac{dQ_2}{dr_p} \\ 0 & Q_{1p} & Q_{2p} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.50)$$

Dans cette expression, l'indice p indique une évaluation des quantités Q , Q_1 et Q_2 et de leurs dérivées par rapport au rayon, à la paroi du conduit, c'est à dire en $r = r_p$. Lorsque nous effectuons le calcul du déterminant, nous obtenons :

$$Q_p \left[-\left(\frac{i\omega}{\lambda_1} - \nu'\right) \frac{dQ_1}{dr_p} Q_{2p} + \left(\frac{i\omega}{\lambda_2} - \nu'\right) \frac{dQ_2}{dr_p} Q_{1p} \right] \quad (2.51)$$

$$+ \frac{m}{(i\omega/\nu) - m^2} \frac{dQ}{dr_p} \left[-m\left(\frac{i\omega}{\lambda_1} - \nu'\right) Q_{1p} Q_{2p} + m\left(\frac{i\omega}{\lambda_2} - \nu'\right) Q_{1p} Q_{2p} \right] = 0$$

Il se simplifie en divisant cette équation par $Q Q_1 Q_2$ et en utilisant la relation $\frac{1}{J_o} \frac{dJ_o}{dr} = \frac{d \ln(J_o)}{dr}$, pour parvenir à une expression réduite qui peut être résolue numériquement à l'aide de la méthode de Newton :

$$\frac{i\omega m^2}{(i\omega/\nu) - m^2} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \frac{d \ln Q}{dr_p} + \left(\frac{i\omega}{\lambda_1} - \nu' \right) \frac{d \ln Q_1}{dr_p} - \left(\frac{i\omega}{\lambda_2} - \nu' \right) \frac{d \ln Q_2}{dr_p} = 0 \quad (2.52)$$

Par ailleurs, les constantes A , A_1 et A_2 sont déterminées par les conditions aux limites, pour donner d'après Kirchoff :

$$v_z = mB \left[-i\omega \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) Q_{1p} Q_{2p} Q + \left(\frac{i\omega}{\lambda_1} - \nu' \right) Q_p Q_{2p} Q_1 - \left(\frac{i\omega}{\lambda_2} - \nu' \right) Q_p Q_{1p} Q_2 \right] e^{mz} \quad (2.53)$$

$$v_r = B \left[\frac{i\omega m^2}{(i\omega/\nu) - m^2} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) Q_{1p} Q_{2p} \frac{dQ}{dr} + \left(\frac{i\omega}{\lambda_1} - \nu' \right) Q_p Q_{2p} \frac{dQ_1}{dr} - \left(\frac{i\omega}{\lambda_2} - \nu' \right) Q_p Q_{1p} \frac{dQ_2}{dr} \right] e^{mz} \quad (2.54)$$

$$\tau = B(\gamma - 1) T_o Q_p (Q_{1p} Q_2 - Q_{2p} Q_1) \quad (2.55)$$

La constante B est donnée par :

$$B = -\frac{A_1}{Q_p Q_{2p}} \quad (2.56)$$

La densité et la pression acoustique s'obtiennent en utilisant l'équation de continuité (2.28) et l'équation d'état pour la densité (2.29) moyennant quelques manipulations :

$$\rho = \rho_o B Q_p \left[\left(\frac{\nu' \lambda_1}{i\omega} - 1 \right) Q_{2p} Q_1 - \left(\frac{\nu' \lambda_2}{i\omega} - 1 \right) Q_{1p} Q_2 \right] e^{mz} \quad (2.57)$$

$$p = P_o B Q_p \left[\left(\frac{\nu' \lambda_1}{i\omega} - \gamma \right) Q_{2p} Q_1 - \left(\frac{\nu' \lambda_2}{i\omega} - \gamma \right) Q_{1p} Q_2 \right] e^{mz} \quad (2.58)$$

2.2.3 Analyse des résultats

Les quantités v_z , v_r , τ et p ont été calculées pour un conduit de rayon 0.01 cm à la fréquence de $100 H_z$. La figure (2.2) représente les amplitudes des vitesses longitudinale et transversale ainsi que la densité, la pression et la température (normalisées par rapport à leur valeurs au repos) en fonction de la position radiale r .

Les mêmes quantités ont été calculées pour un conduit de rayon 0.1 cm à la fréquence de $10 k H_z$ (figure 2.3).

L'épaisseur de la couche limite visqueuse (notée δ_v) est calculée à l'aide de la relation $\delta_v = (2 \eta / \rho_f \omega)^{\frac{1}{2}}$. Elle est égale à $2.2 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$ à $100 H_z$ et à $2.2 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$ à $10 k H_z$. Le premier conduit est alors dit 'étroit' tandis que le second est 'large'.

Un certain nombre de traits ressortent de l'analyse des figures (2.2) (2.3). Nous constatons que la pression ne connaît pas de variation significative sur une section donnée que ce soit pour des conduits 'étroits' ou 'larges'. La variation se fait le long de l'axe de cylindre à travers le terme e^{mz} . On remarque également que la vitesse radiale v_r est négligeable devant la vitesse longitudinale v_z .

Densité et pression acoustique normalisées sont par contre comparables. Lorsqu'il s'agit d'un conduit 'étroit', sur une section donnée, $|\rho/\rho_o|$ et $|p/P_o|$ sont égaux et le processus est isothermique, c'est à dire que $|\tau/T_o|$ est négligeable devant les autres grandeurs mesurées. Lorsqu'il s'agit d'un conduit large, $|\rho/\rho_o|$ est plus petit que $|p/P_o|$ d'un facteur 1.4, mais les deux quantités sont égales à la paroi du tube. Dans ce cas le processus est adiabatique.

Calcul de grandeurs moyennes

Dans de nombreuses applications et en particulier l'étude des milieux poreux, le détail de la variation de la vitesse, de la densité et de la température à travers une section n'est pas nécessaire. Le résultat recherché est plutôt la moyenne de ces quantités à travers une section. Ainsi, pour une quantité $E(\vec{X})$, nous calculerons la moyenne $\langle E \rangle$:

$$\langle E \rangle = \frac{1}{S} \int_S E(\vec{X}) \, dS \quad (2.59)$$

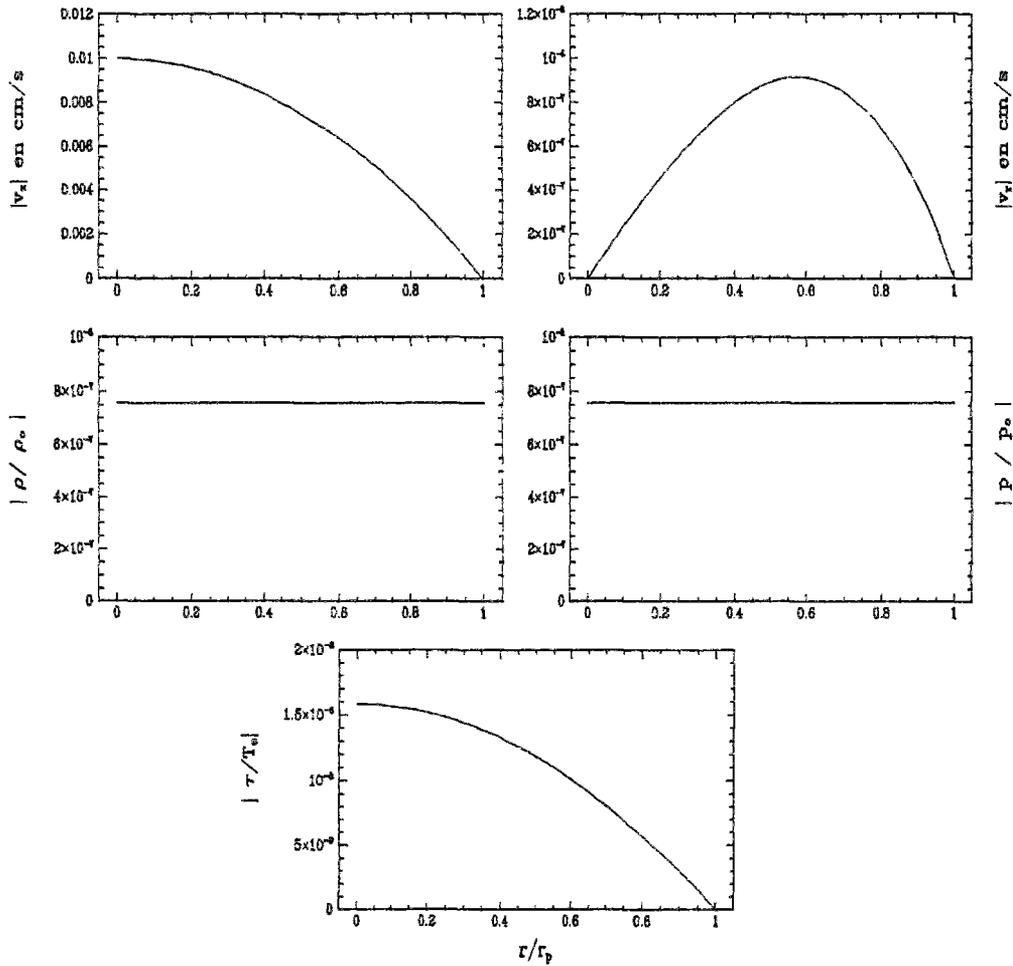


FIG. 2.2 - *Evaluation des grandeurs acoustiques en fonction de la position radiale pour un conduit de rayon 0.01cm à la fréquence de 100Hz - processus isotherme*

où nous avons noté S la surface de la section et \vec{X} le vecteur position. Nous utiliserons par la suite les moyennes de la vitesse longitudinale et de la densité. D'après (2.59), pour des sections circulaires, elles s'écrivent :

$$\langle v_z \rangle = \frac{1}{\pi r_p^2} \int_0^{r_p} 2 \pi r v_z(r) dr \quad (2.60)$$

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{\pi r_p^2} \int_0^{r_p} 2 \pi r \rho(r) dr \quad (2.61)$$

Les écritures de la vitesse (2.53) et de la densité (2.57) données par la théorie de Kirchhoff, sont reportées dans les équations (2.60) et (2.61), et sachant que

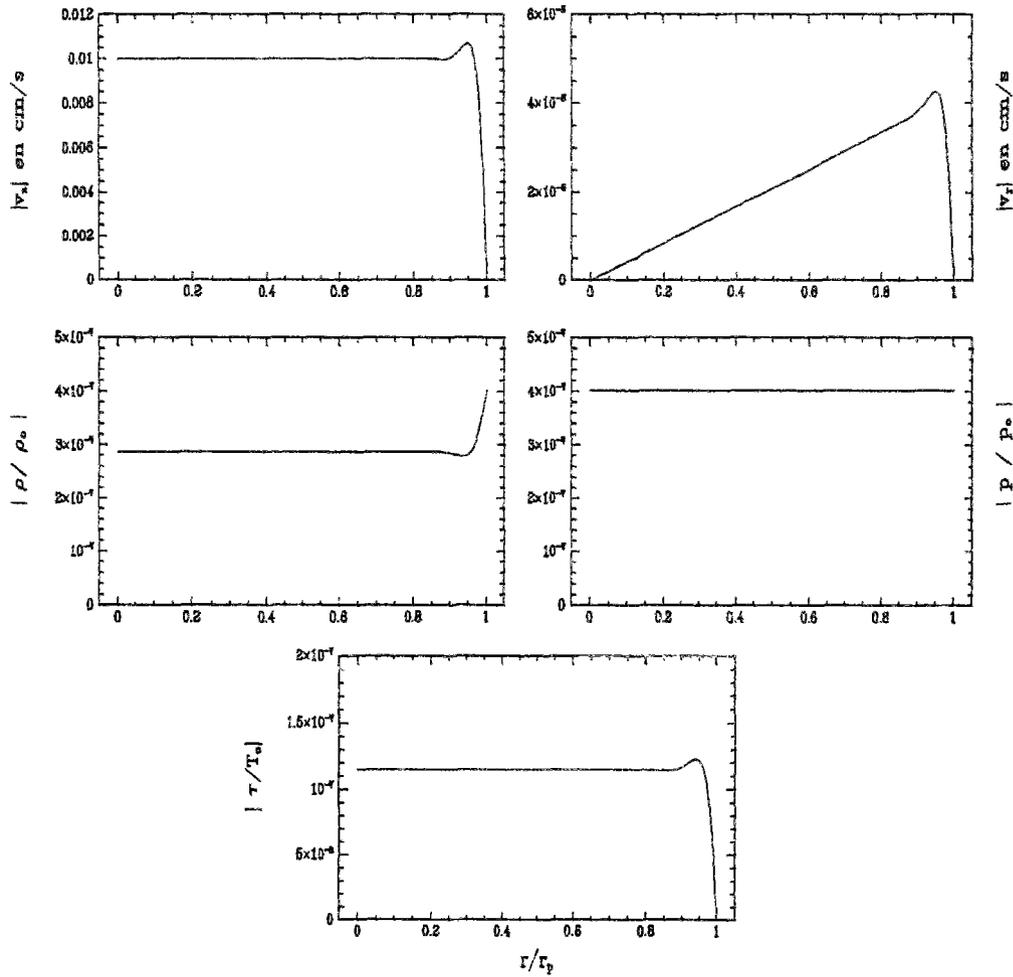


FIG. 2.3 - Evaluation des grandeurs acoustiques en fonction de la position radiale pour un conduit de rayon 0.1cm à la fréquence de 10kHz - processus adiabatique

$\int_0^a x J_0(x) dx = aJ_1(a)$, nous obtenons :

$$\langle v_z \rangle = -\frac{2mB}{r_p} \left[i\omega \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \frac{Q_{1p} Q_{2p} R_p}{(m^2 - i\omega/\nu)^{1/2}} - \left(\frac{i\omega}{\lambda_1} - \nu' \right) \frac{Q_p Q_{2p} R_{1p}}{(m^2 - \lambda_1)^{1/2}} + \left(\frac{i\omega}{\lambda_2} - \nu' \right) \frac{Q_p Q_{1p} R_{2p}}{(m^2 - \lambda_2)^{1/2}} \right] e^{mz} \quad (2.62)$$

$$\langle \rho \rangle = \rho_0 \frac{2BQ_p}{i\omega r_p} \left[\frac{\lambda_1 \nu' - i\omega}{(m^2 - \lambda_1)^{1/2}} Q_{2p} R_{1p} - \frac{\lambda_2 \nu' - i\omega}{(m^2 - \lambda_2)^{1/2}} Q_{1p} R_{2p} \right] e^{mz} \quad (2.63)$$

R , R_1 et R_2 sont des fonctions de Bessel d'ordre 1 définies par :

$$R = J_1 [r(m^2 - i\omega/\nu)^{1/2}] \quad (2.64)$$

$$R_1 = J_1 [r(m^2 - \lambda_1)^{1/2}] \quad (2.65)$$

$$R_2 = J_1 [r(m^2 - \lambda_2)^{1/2}] \quad (2.66)$$

Ces quantités ont pour indice p lorsqu'elles sont évaluées à la paroi, en $r = r_p$.

2.3 Propagation dans un conduit de section circulaire - Solution approchée

Nous avons obtenu une solution complète telle que l'avait décrite Kirchhoff. Toutefois, les équations obtenues restent compliquées et sont difficiles à appliquer. Une solution approchée a été développée par Zwikker et Kosten [Zwikker *et al.*, 1949], mais ceux-ci n'ont pu justifier leurs expressions qu'aux basses et hautes fréquences. Nous proposons de reprendre l'analyse de Stinson qui définit précisément le domaine de validité de cette approche.

Nous définirons ainsi le régime de rayons et fréquences envisagé, pour développer par la suite les simplifications que cette restriction apporte aux équations constituant la solution de Kirchhoff. Nous introduirons alors deux grandeurs complexes appelées fonction de densité et de compressibilité qui rendent compte des phénomènes visqueux et thermiques et en fonction desquels s'écrit simplement le nombre d'onde.

2.3.1 Approximation de la Solution de Kirchhoff

S'inspirant des travaux de Weston [Weston, 1953], Stinson [Stinson, 1991] estime que la solution complète peut être réduite à l'approximation Zwikker et Kosten dans le régime vérifiant les inégalités suivantes :

$$r_p f^{3/2} < 10^6 \text{ cm s}^{-3/2} \quad \text{et} \quad r_p > 10^{-3} \text{ cm} \quad (2.67)$$

Pour un rayon de l'ordre de 0.5 cm , les fréquences sont inférieures à $16000 H_z$. Bien entendu, plus le rayon est petit plus la gamme de fréquences autorisées est large. Avec $\nu = 0.151 \text{ cm}^2/\text{s}$ et $c_o = 34300 \text{ cm/s}$, nous avons pour les fréquences acoustiques inférieures à $10^8 H_z$:

$$\omega \nu / c_o^2 \ll 1 \quad (2.68)$$

Dans ce cas, les solutions λ_1 et λ_2 de l'équation du second degré (2.49), se simplifient pour donner :

$$\lambda_1 \approx -\frac{\omega^2}{c_o^2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 \approx \frac{i\omega\gamma}{\nu'} \quad (2.69)$$

Le détail des calculs est donné en annexe [B.1]. Pour l'air avec $\gamma = 1.4$ et $\nu' = 0.3 \text{ cm}^2/\text{s}$, nous avons :

$$|\lambda_1| \ll |\lambda_2| \quad (2.70)$$

Par ailleurs, Weston constate que l'argument de la fonction Q_1 est toujours très faible, inférieur à 0.1 pour les conduits 'larges' et 'étroits'. La figure (2.4) représente l'évolution de cet argument pour différentes fréquences et rayons vérifiant les critères du régime étudié (2.67). Il est clair que pour des fréquences de bruit routier (100 – 10000 H_z) et pour des rayons allant de 10^{-3} à 1 cm cette approximation est valable. Les termes qui impliquent cet argument sont donc approchés dans le régime étudié:

$$Q_1 \approx 1 \quad \text{et} \quad \frac{dQ_1}{dr} \approx -\frac{1}{2}(m^2 - \lambda_1) r \quad (2.71)$$

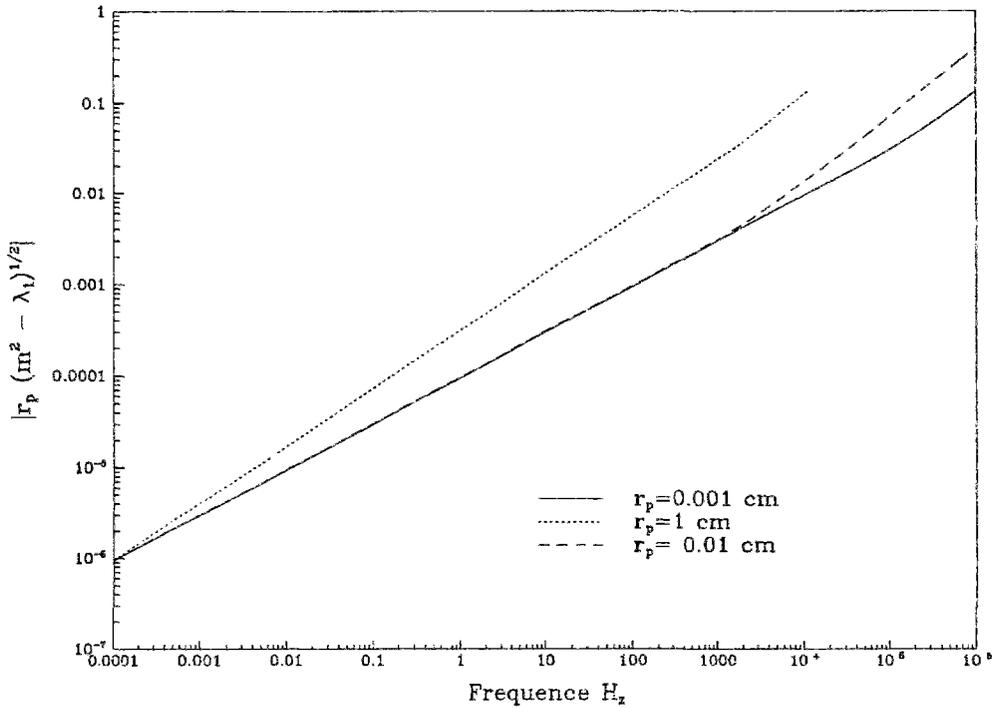
Avec ces approximations ((2.69) et (2.70)), l'écriture de la pression (2.58) prend une forme plus simple :

$$p \approx -P_o B \gamma Q_p Q_{2p} e^{mz} \quad (2.72)$$

La pression ne dépend plus de la variable r , elle reste donc constante à travers une section, ce qui n'est pas étonnant puisque les fréquences qui nous intéressent sont en dessous de la première fréquence de coupure au delà de laquelle les modes supérieurs se manifestent.

D'autres approximations peuvent être introduites. La figure (2.5) illustre l'évolution du nombre d'onde m . Le module de m^2 a été calculé en fonction de la fréquence pour différents rayons de section et comparé à $|\lambda_2|$ et $|i\omega/\nu|$. Il en ressort que pour un rayon supérieur à 10^{-3} cm nous avons :

$$|m^2| \ll |\lambda_2| \quad \text{et} \quad |m^2| \ll |i\omega/\nu| \quad (2.73)$$

FIG. 2.4 - Calcul de l'argument de la fonction Q_1

Ainsi pour le régime qui nous préoccupe m^2 est négligeable devant λ_2 et $i\omega/\nu$ dans les expressions de la solution complète. En appliquant l'ensemble de ces approximations à l'équation (2.52), la résolution par la méthode de Newton Raphson n'est plus nécessaire et nous obtenons une solution analytique pour la constante de propagation (Annexe [B.2]):

$$m^2 = -(\omega/c_o^2) \times \left\{ 1 + 2(\gamma - 1)(-i\omega\gamma/\nu')^{-1/2} G \left[r_p(-i\omega\gamma/\nu')^{1/2} \right] / r_p \right\} \\ \times \left\{ 1 - 2(-i\omega/\nu)^{-1/2} G \left[r_p(-i\omega\gamma/\nu)^{1/2} \right] / r_p \right\}^{-1} \quad (2.74)$$

La fonction G est définie par :

$$G[\zeta] = \frac{J_1(\zeta)}{J_0(\zeta)} \quad (2.75)$$

On constate dans l'écriture de la constante de propagation que les effets associés à la viscosité et à la thermoconductivité sont traités séparément à travers les termes ν et ν' . Les mêmes approximations peuvent être appliquées à la vitesse

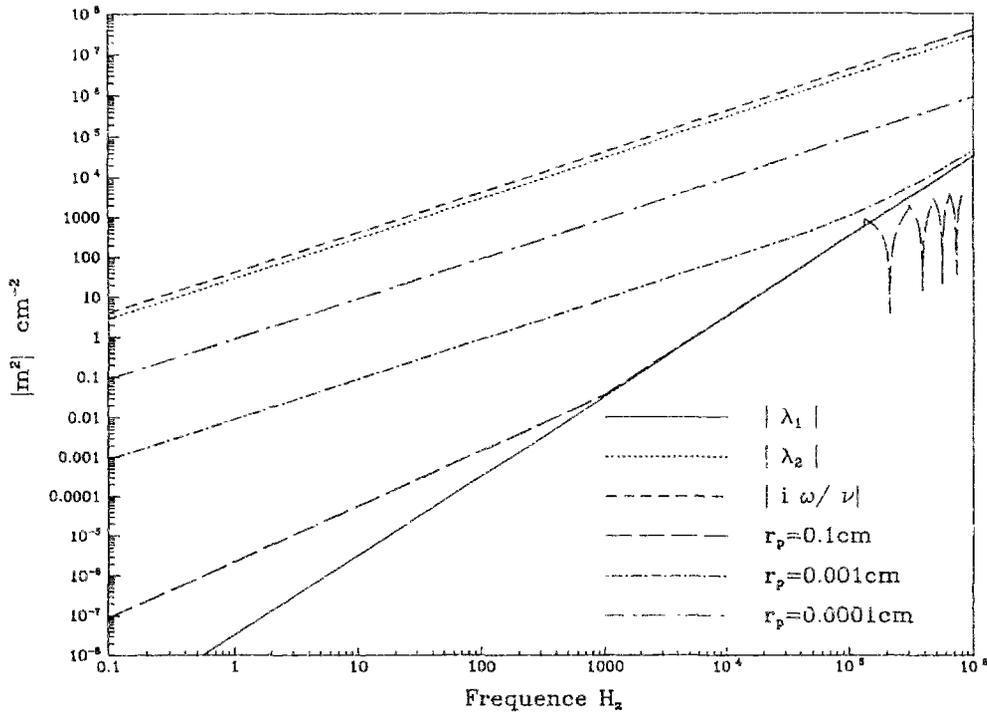


FIG. 2.5 - Comparaison de la constante de propagation et de trois paramètres $|\lambda_1|$, $|\lambda_2|$ et $|i\omega/\nu|$ introduits dans la théorie de Kirchhoff

longitudinale (2.62) et à la densité (2.63) moyennées à travers la section. Elles deviennent (Annexe [B.3]):

$$\langle v_z \rangle = \frac{m B c_o^2}{i\omega} Q_{2p} \left[Q_p - 2 \left(\frac{-i\omega}{\nu} \right)^{-1/2} \frac{R_p}{r_p} \right] e^{mz} \quad (2.76)$$

$$\langle \rho \rangle = -\rho_o B Q_p \left[Q_{2p} + 2(\gamma - 1) \left(\frac{-i\omega\gamma}{\nu'} \right)^{-1/2} \frac{R_{2p}}{r_p} \right] e^{mz} \quad (2.77)$$

2.3.2 Fonctions complexes de densité et de compressibilité

Dans un fluide libre, avec l'approximation où les pertes sont négligeables, le mouvement obéit aux relations suivantes:

$$\rho_o^l \frac{\partial v^l}{\partial t} = - \overrightarrow{\text{grad}} p^l \quad (2.78)$$

$$\frac{1}{K_o^l} \frac{\partial p^l}{\partial t} = - \operatorname{div} \vec{v}^l \quad (2.79)$$

où \vec{v}^l , p^l , ρ_o^l et $\frac{1}{K_o^l}$ désignent respectivement la vitesse, la pression, la densité et le module de compressibilité du fluide libre. Ces équations sont obtenues simplement à partir des relations de Navier-Stokes en supprimant les dissipations.

Pour un fluide limité dans l'espace, les équations (2.78) et (2.79) peuvent être maintenues en introduisant les densité et compressibilité effectives du fluide. Du fait de l'existence de phénomènes irréversibles de pertes, nous considérons que les fonctions qui généralisent les constantes physiques du fluide libre ρ_o^l et $\frac{1}{K_o^l}$ sont complexes. Nous les notons $\rho(\omega)$ et $C(\omega)$, et les réponses linéaires (2.78) et (2.79) sont alors définies par les relations suivantes, avec les notations de notre problème :

$$i \omega \rho(\omega) \langle v_z \rangle = - \overrightarrow{\operatorname{grad}} p \quad (2.80)$$

$$i \omega C(\omega) p = - \operatorname{div} \langle v_z \rangle \quad (2.81)$$

La pression connaît une dépendance suivant l'axe z de type e^{mz} . La fonction densité complexe s'écrit donc :

$$\rho(\omega) = - \frac{mp}{i\omega \langle v_z \rangle} \quad (2.82)$$

Les expressions de la vitesse (2.76) de la pression (2.72) sont alors reportées pour obtenir :

$$\rho(\omega) = \rho_o \left\{ 1 - \frac{2}{r_p} \left(\frac{-i\omega}{\nu} \right)^{-1/2} G \left[r_p (-i\omega/\nu)^{1/2} \right] \right\}^{-1} \quad (2.83)$$

La densité complexe ne prend en compte que les contributions visqueuses à travers le terme ν ($\nu = \eta/\rho_o$, η coefficient de viscosité de l'air).

L'équation (2.81) est transformée en utilisant l'équation de continuité (2.28) :

$$\rho_o C(\omega) p = \langle \rho \rangle \quad (2.84)$$

Nous en déduisons une définition de la compressibilité complexe :

$$C(\omega) = \frac{\langle \rho \rangle}{\rho_o p} \quad (2.85)$$

En reprenant de nouveau l'écriture de la pression (2.72) et celle de la densité moyenne (2.77), nous obtenons une nouvelle formulation pour la fonction compressibilité complexe :

$$C(\omega) = \frac{1}{\gamma P_o} \left\{ 1 + \frac{2}{r_p} (\gamma - 1) \left(\frac{-i\omega\gamma}{\nu'} \right)^{-1/2} G \left[r_p (-i\omega\gamma/\nu')^{1/2} \right] \right\} \quad (2.86)$$

La fonction de compressibilité dépend de la conduction thermique, mais pas de la viscosité. Cette dépendance se manifeste par le paramètre ν' ($\nu' = \tilde{\kappa}(\rho_o/c_v)$, $\tilde{\kappa}$ coefficient de conduction thermique). On remarque également que le nombre d'onde défini par la relation (2.74) implique des termes que l'on retrouve dans les écritures des fonctions complexes de densité et de compressibilité. Son expression peut donc se simplifier en y injectant les fonctions complexes :

$$m^2 = -\omega^2 \rho(\omega) C(\omega) \quad (2.87)$$

Les principaux résultats de ce paragraphe sont les expressions approchées de la constante de propagation (2.87) et des fonctions complexes de densité et de compressibilité données par les équations (2.83) et (2.86). Ces deux dernières fonctions généralisent pour un fluide limité, les constantes physiques du fluide libre que sont la densité ρ_o et la compressibilité $1/K_o$.

Ces résultats représentent une simplification considérable de la solution complète de Kirchhoff dans un régime de fréquence acoustique et de rayon de conduit suffisamment large. Ils sont bien entendu valables pour une section circulaire, et nous tâcherons de les généraliser à des formes arbitraires dans le chapitre suivant.

2.4 Généralisation à des conduits de forme arbitraire

Nous allons développer une procédure générale, permettant de calculer les caractéristiques acoustiques de conduits uniformes, de section arbitraire. Cette procédure est appropriée au régime introduit précédemment (2.67) qui correspond à des conduits 'étroits' et 'larges' selon la classification de Weston qui évoque également les conduits dits 'très larges' et 'très étroits'. Nous avons vu que la solution de Kirchhoff peut être considérablement simplifiée dans le régime étudié. Stinson suppose que ces simplifications peuvent être appliquées aux équations générales de Navier-Stokes, pour différentes formes de sections.

Nous rappellerons donc les caractéristiques de la propagation obtenues à partir de l'analyse des résultats de la solution de Kirchhoff (§2.2.3) pour en dégager quelques approximations que nous supposerons applicables aux équations de Navier-Stokes. Nous donnerons par la suite une méthode générale permettant de

calculer les fonctions complexes de densité et de compressibilité pour un conduit de forme arbitraire et à titre d'exemple, nous développerons les solutions pour des sections circulaires, rectangulaires et triangulaires.

2.4.1 Equations simplifiées

Trois principaux traits ressortent de l'étude d'un conduit de section circulaire :

- La pression acoustique ne varie pas de façon significative sur une section (figures 2.2 et 2.3). Nous supposons donc qu'elle ne dépend que de la composante longitudinale z .

- La densité et la pression normalisées sont comparables en amplitude. Ces deux grandeurs sont égales lors d'un processus isotherme et diffèrent d'un facteur $\gamma = 1.4$ dans le cas adiabatique (figures 2.2 et 2.3). Nous supposons par la suite qu'elles sont toujours égales :

$$\frac{\rho}{\rho_o} \approx \frac{p}{P_o} \quad (2.88)$$

- La constante de propagation peut être négligée par rapport à d'autres termes. Nous supposons alors que $|m^2|$ est négligeable par rapport à $|i\omega/\nu|$ et $|i\omega\gamma/\nu|$ pour le régime de conduits étroits et larges (figure 2.5).

Ces trois hypothèses seront appliquées à des conduits de formes quelconques. La composante z de l'équation du mouvement (2.27) s'écrit pour une dépendance temporelle de type $e^{i\omega t}$:

$$\Delta v_z - \frac{i\omega}{\nu} v_z = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ p - \frac{\eta}{3} \operatorname{div} \vec{v} \right\} \quad (2.89)$$

Cette équation peut se simplifier en négligeant le terme en divergence. En effet d'après l'équation de conservation de la masse (2.28), ce terme peut s'écrire :

$$-\frac{1}{3} \eta \operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{3} \frac{i\omega\eta}{\rho_o} \rho \quad (2.90)$$

En utilisant la définition de la célérité du son adiabatique $c_o^2 = \gamma P_o/\rho_o$, et l'approximation (2.88), nous obtenons :

$$-\frac{1}{3} \eta \operatorname{div} \vec{v} \approx \frac{i\omega\nu\gamma}{3c_o^2} p \quad (2.91)$$

Pour le régime de fréquences et de rayons (2.67), l'approximation $\omega\nu/c_o^2 \ll 1$, montre que le terme en divergence peut être négligé devant la pression acoustique dans l'écriture de la composante z de l'équation du mouvement (2.89). Rappelons que la vitesse, la pression acoustique et la température ont une dépendance en z de type e^{mz} . Dans ces conditions l'équation de la dynamique devient :

$$\Delta_t v_z + m^2 v_z - \frac{i\omega}{\nu} v_z = \frac{m}{\eta} p \quad (2.92)$$

Δ_t est le laplacien transversal. Avec l'approximation $|m^2| \ll |i\omega/\nu|$, elle se simplifie :

$$\Delta_t v_z - \frac{i\omega}{\nu} v_z = \frac{m}{\eta} p \quad (2.93)$$

Nous effectuons une démarche similaire pour l'équation de diffusion de la chaleur (2.31). Nous rappelons que la dépendance suivant la direction de propagation est de type e^{mz} . En calculant les dérivées temporelles, l'équation de la chaleur devient :

$$\Delta_t \tau + m^2 \tau - \frac{i\omega\rho_o c_p}{\tilde{\kappa}} \tau = -\frac{i\omega}{\tilde{\kappa}} p \quad (2.94)$$

En introduisant $\nu' = \tilde{\kappa}/(\rho_o c_v)$ et le rapport des chaleurs spécifiques $\gamma = c_p/c_v$, l'approximation $|m^2| \ll |i\omega\gamma/\nu'|$ simplifie l'expression de l'équation de diffusion :

$$\Delta_t \tau - \frac{i\omega\gamma}{\nu'} \tau = -\frac{i\omega}{\tilde{\kappa}} p \quad (2.95)$$

2.4.2 Méthode de résolution

La vitesse et la température ont les mêmes conditions aux limites et vérifient des équations de formes identiques. Le problème à deux équations (2.93) et (2.95) et deux inconnues (v_z, τ) peut alors être réduit à une seule équation générale vérifiée par une inconnue Ψ commune à la vitesse et la température. Si nous définissons la variable Ψ par :

$$v_z = -\frac{m}{i\omega\rho_o} p \Psi \quad (2.96)$$

L'équation du mouvement (2.93) devient :

$$\Delta_t \Psi - \frac{i\omega}{\xi} \Psi = -\frac{i\omega}{\xi} \quad (2.97)$$

où $\xi = \nu$. L'équation de la chaleur (2.95) peut être traité de manière similaire, si nous posons:

$$\tau = \frac{\nu'}{\gamma \bar{k}} p \Psi \quad (2.98)$$

L'équation de diffusion de la chaleur se met alors sous la forme (2.97), avec $\xi = \nu'/\gamma$. L'équation (2.97) (dont l'inconnue est Ψ) permet ainsi de déterminer les caractéristiques acoustiques d'un conduit de forme quelconque, du moment que l'on trouve une solution s'annulant sur le périmètre de la section. Les quantités qui nous intéressent sont plutôt les moyennes sur une section. Nous introduisons donc la fonction F qui représente la moyenne sur une section de la fonction Ψ :

$$F(\xi) = \langle \Psi \rangle \quad (2.99)$$

Les quantités recherchées, c'est à dire vitesse, température se mettent donc sous la forme suivante:

$$\langle v_z \rangle = - \frac{m}{i\omega \rho_o} p F(\nu) \quad (2.100)$$

$$\langle \tau \rangle = \frac{\nu'}{\gamma \bar{k}} p F\left(\frac{\nu'}{\gamma}\right) \quad (2.101)$$

La densité s'obtient à l'aide de l'équation d'état (2.29). Sa moyenne s'écrit :

$$\langle \rho \rangle = -\frac{\rho_o}{T_o} \langle \tau \rangle + \frac{\rho_o}{P_o} p \quad (2.102)$$

Lorsque la moyenne de la température (2.101) y est injectée, nous obtenons :

$$\langle \rho \rangle = \frac{\rho_o}{P_o} p - \frac{\rho_o \nu'}{T_o \gamma \bar{k}} p F\left(\frac{\nu'}{\gamma}\right) \quad (2.103)$$

Nous rappelons que les fonctions complexes de densité et de compressibilité définies par (2.82) et (2.85) s'écrivent :

$$\rho(\omega) = -\frac{m p}{i\omega \langle v_z \rangle} \quad (2.104)$$

$$C(\omega) = \frac{\langle \rho \rangle}{\rho_o p} \quad (2.105)$$

L'expression de la densité est obtenue en substituant dans (2.104) l'écriture de la vitesse moyenne donnée par l'équation (2.100) :

$$\rho(\omega) = \frac{\rho_o}{F(\nu)} \quad (2.106)$$

Pour la compressibilité, nous reportons l'expression de la densité moyenne (2.103) dans l'équation (2.105), en substituant ν' par sa valeur $\tilde{\kappa}/(\rho_o c_v)$:

$$C(\omega) = \frac{1}{P_o} - \frac{1}{\rho_o T_o c_v} \frac{1}{\gamma} F\left(\frac{\nu'}{\gamma}\right) \quad (2.107)$$

Nous utilisons la relation thermodynamique $c_p - c_v = P_o/\rho_o T_o$ [Landau *et al.*, 1989] qui, divisée par la chaleur spécifique à volume constant devient :

$$\frac{1}{\rho_o T_o c_v} = \frac{\gamma - 1}{P_o} \quad (2.108)$$

La fonction compressibilité complexe est alors donnée par la relation suivante :

$$C(\omega) = \frac{1}{\gamma P_o} \left[\gamma - (\gamma - 1) F\left(\frac{\nu'}{\gamma}\right) \right] \quad (2.109)$$

La constante de propagation s'obtient à l'aide de l'équation de conservation de la masse (2.28), moyennée à travers la section, en supposant qu'il n'y a qu'une composante longitudinale de la vitesse :

$$i \omega \langle \rho \rangle = - \rho_o m \langle v_z \rangle \quad (2.110)$$

Celle-ci peut se transformer pour se mettre sous la forme suivante :

$$m^2 = \omega^2 \frac{m p}{i \omega \langle v_z \rangle} \frac{\langle \rho \rangle}{\rho_o p} \quad (2.111)$$

En utilisant les définitions des fonctions complexes de densité (2.104) et de compressibilité (2.105), le nombre d'onde se formule de la manière suivante :

$$m^2 = - \omega^2 \rho(\omega) C(\omega) \quad (2.112)$$

ce qui semble être en accord avec la solution obtenue pour une section circulaire. L'impédance caractéristique peut aussi s'écrire en terme de fonction F . Si

l'on s'intéresse à une onde se propageant dans la direction $-\vec{z}$, l'impédance est définie par :

$$Z^c = - \frac{P}{\langle v_z \rangle} \quad (2.113)$$

La vitesse est substituée par son expression (2.100) :

$$Z^c = \frac{i\omega\rho_o}{mF(\nu)} \quad (2.114)$$

En utilisant la définition de la densité complexe (2.106) et de la constante de propagation (2.112), l'impédance devient :

$$Z^c = \left[\frac{\rho(\omega)}{C(\omega)} \right]^{1/2} \quad (2.115)$$

Nous reportons les écritures des fonctions complexes de densité (2.106) et de compressibilité (2.109) en utilisant la définition de la célérité du son adiabatique $c_o^2 = \gamma P_o / \rho_o$, pour obtenir finalement :

$$Z^c = \frac{\rho_o c_o}{F(\nu)^{1/2} \left[\gamma - (\gamma - 1) F\left(\frac{\nu}{\gamma}\right) \right]^{1/2}} \quad (2.116)$$

2.5 Application de la procédure générale

La section précédente fut consacrée à la recherche d'une formulation approchée de la solution de Kirchoff pour une section arbitraire. Nous avons pu constater que cela consiste à simplifier les équations de Navier-Stokes pour un régime de fréquences précis. Nous avons obtenu une équation différentielle pour la vitesse et la température dont les conditions aux limites dépendent de la géométrie. Ces deux quantités s'expriment en fonction de F qui caractérise la géométrie considérée. Sa connaissance suffit pour en déduire les grandeurs acoustiques recherchées à savoir la densité et la compressibilité et à travers elles, l'impédance et le nombre d'onde.

Nous proposons de calculer la fonction génératrice F pour des géométries précises et d'en étudier l'influence. Nous envisagerons ainsi trois types de sections : circulaire, rectangulaire et triangulaire.

2.5.1 Section circulaire

La solution a déjà été obtenue à la section (2.3.2). Nous allons tenter de la retrouver à l'aide de la procédure générale. Lorsqu'il n'y a pas de dépendance angulaire l'équation différentielle (2.97), s'écrit dans un repère cylindrique:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Psi}{dr} \right) - \frac{i\omega}{\xi} \Psi = -\frac{i\omega}{\xi} \quad (2.117)$$

La solution vérifiant la condition aux limites $\Psi(r_p) = 0$ est donnée par [Stinson, 1991]:

$$\Psi(r) = 1 - \frac{J_0(r(-i\omega/\xi)^{1/2})}{J_0(r_p(-i\omega/\xi)^{1/2})} \quad (2.118)$$

La moyenne à travers la section est calculée à l'aide de la définition (2.59):

$$F(\xi) = 1 - \frac{2}{(-i\omega/\xi)^{1/2} r_p} G [(-i\omega/\xi)^{1/2} r_p] \quad (2.119)$$

Nous rappelons que G est le rapport de la fonction de Bessel d'ordre 1 par la fonction de Bessel d'ordre 0. En injectant l'écriture de F dans les équations (2.106) et (2.109), nous retrouvons les expressions de la densité (2.83) et de la compressibilité (2.86) obtenues par le passé.

2.5.2 Section rectangulaire

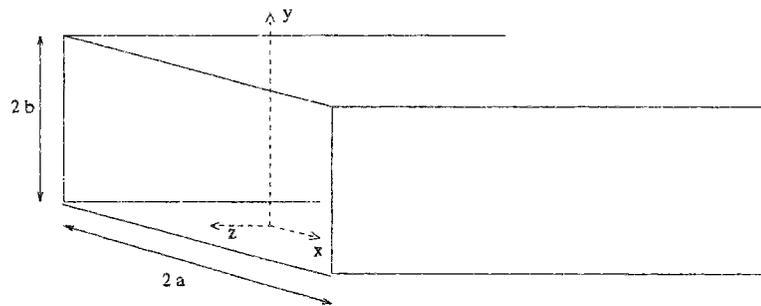


FIG. 2.6 - Conduit de section rectangulaire

Nous choisissons un système de coordonnées cartésiennes, où l'axe z est confondu avec l'axe du cylindre et les axes x et y définissent les dimensions transverses du conduit. Nous notons $2a$ (dans la direction x) et $2b$ (dans la direction

y) les dimensions transverses du cylindre. Dans ce repère, l'équation différentielle (2.97) et les conditions aux limites pour la vitesse et la température se formulent de la façon suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{i\omega}{\xi} \Psi = -\frac{i\omega}{\xi} \\ \Psi(x, y) = 0 \quad \text{pour } x = \pm a \text{ et } y = \pm b \end{cases} \quad (2.120)$$

La fonction Ψ est recherchée sous la forme d'une sommation infinie de solutions élémentaires qui constituent une base orthogonale :

$$\Psi(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{kn} \cos(\alpha_k x) \cos(\beta_n y) \quad (2.121)$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \alpha_k = (k + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{a} \\ \beta_n = (n + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{b} \end{cases} \quad (2.122)$$

L'expression (2.121) de Ψ injectée dans l'équation différentielle (2.120) donne :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{kn} (\alpha_k^2 + \beta_n^2 + \frac{i\omega}{\xi}) \cos(\alpha_k x) \cos(\beta_n y) = \frac{i\omega}{\xi} \quad (2.123)$$

Les coefficients A_{kn} sont alors déterminés en utilisant l'orthogonalité des fonctions cosinus. L'équation (2.123) est donc multipliée par $\cos(\alpha_k' x) \cos(\beta_n' y)$ de part et d'autre de l'égalité, et intégrée à travers la section rectangulaire avec x allant de $-a$ à a et y de $-b$ à b . Nous obtenons en définitive :

$$A_{kn} = \frac{i\omega}{\xi ab} \frac{4(-1)^k (-1)^n}{\alpha_k \beta_n (\alpha_k^2 + \beta_n^2 + \frac{i\omega}{\xi})} \quad (2.124)$$

Nous obtenons ainsi, l'expression de la fonction Ψ solution du système d'équations (2.120) :

$$\Psi(x, y) = \frac{4i\omega}{\xi ab} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (-1)^n \cos(\alpha_k x) \cos(\beta_n y)}{\alpha_k \beta_n (\alpha_k^2 + \beta_n^2 + \frac{i\omega}{\xi})} \quad (2.125)$$

La moyenne à travers la section s'écrit :

$$F(\xi) = \frac{1}{4ab} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \Psi(x, y) dx dy \quad (2.126)$$

$$F(\xi) = \frac{4i\omega}{\xi a^2 b^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_k^2 \beta_n^2 (\alpha_k^2 + \beta_n^2 + \frac{i\omega}{\xi}))^{-1} \quad (2.127)$$

Les fonctions de densité et de compressibilité s'obtiennent à l'aide des relations générales (2.106) et (2.109) :

$$\rho(\omega) = \rho_0 \frac{\nu a^2 b^2}{4i\omega} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\alpha_k^2 \beta_n^2 (\alpha_k^2 + \beta_n^2 + \frac{i\omega}{\nu}) \right]^{-1} \right\}^{-1} \quad (2.128)$$

$$C(\omega) = \frac{1}{P_0} \left\{ 1 - \frac{4i\omega(\gamma - 1)}{\nu' a^2 b^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\alpha_k^2 \beta_n^2 (\alpha_k^2 + \beta_n^2 + \frac{i\omega\gamma}{\nu'}) \right]^{-1} \right\} \quad (2.129)$$

L'impédance caractéristique et la constante de propagation s'obtiennent à l'aide des relations (2.115) et (2.112).

Dans le cas d'une fente, c'est à dire pour $a \gg b$, l'écriture (2.127) de la fonction F peut se simplifier. En développant les calculs, elle devient :

$$F(\xi) = \frac{4i\omega}{\xi a^2 b^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(k + \frac{1}{2})^2 (n + \frac{1}{2})^2 \frac{\pi^6}{a^2 b^4} \right. \\ \left. \times \left\{ (k + \frac{1}{2})^2 \frac{b^2}{a^2} + (n + \frac{1}{2})^2 + \frac{ib^2\omega}{\pi^2 \xi} \right\} \right]^{-1} \quad (2.130)$$

Nous négligeons le terme $\frac{b^2}{a^2}$ devant les autres quantités :

$$F(\xi) \approx \frac{4i\omega b^2}{\xi \pi^6} \sum_{k=0}^{\infty} (k + \frac{1}{2})^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} (n + \frac{1}{2})^{-2} \left[(n + \frac{1}{2})^2 + \frac{i\omega b^2}{\xi \pi^2} \right]^{-1} \quad (2.131)$$

ou encore, en évaluant les deux sommations :

$$F(\xi) \approx 1 - \left(\frac{i\omega b^2}{\xi} \right)^{-1/2} \tanh \left(\frac{i\omega b^2}{\xi} \right)^{1/2} \quad (2.132)$$

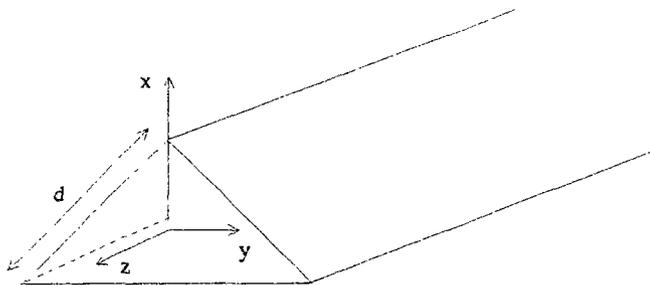


FIG. 2.7 - Conduit de section triangulaire

2.5.3 Section triangulaire

La section triangulaire sera supposée équilatérale de longueur de coté d . Nous travaillons ici aussi en coordonnées cartésiennes, x et y définissant les dimensions transverses et z l'axe du cylindre. Le problème se traite comme dans le cas d'une section rectangulaire par la recherche d'une solution s'exprimant sous la forme d'une sommation infinie de solutions élémentaires s'annulant sur la paroi du conduit:

$$\Psi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n f_n(x, y) \quad (2.133)$$

avec

$$\begin{aligned} f_n(x, y) &= \sin \left[\frac{2\beta_n y}{\sqrt{3}} \right] \sin \left[\beta_n \left(x + \frac{y}{\sqrt{3}} \right) \right] \sin \left[\beta_n \left(x - \frac{y}{\sqrt{3}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \sin \left[\frac{4\beta_n y}{\sqrt{3}} \right] - \sin \left[2\beta_n \left(x + \frac{y}{\sqrt{3}} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \sin \left[2\beta_n \left(x - \frac{y}{\sqrt{3}} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.134)$$

et $\beta_n = \frac{n\pi}{d}$. Les paramètres B_n sont identifiés en injectant l'écriture de la solution (2.133) dans l'équation différentielle (2.120) vérifiée par la fonction Ψ , et en utilisant l'orthogonalité des fonctions $f_n(x, y)$. Nous obtenons en définitive la fonction moyenne de Ψ à travers une section:

$$F(\xi) = 1 - \frac{3}{\varepsilon} \coth(\varepsilon) + \frac{3}{\varepsilon^2} \quad (2.135)$$

où $\varepsilon^2 = \frac{3}{16} \frac{i\omega d^2}{\xi}$. Les fonctions densité et compressibilité s'obtiennent à partir des équations (2.106) et (2.109).

2.5.4 Remarque-Récapitulation

Les auteurs expriment en général leurs modèles en introduisant les nombres sans dimensions λ et λ_T caractéristiques des perturbations visqueuses et thermiques. Ceux ci sont définis par :

$$\begin{aligned}\lambda &= R \left(\frac{\rho_o \omega}{\eta} \right)^{1/2} \\ &= \frac{\sqrt{2}R}{\delta_v}\end{aligned}\quad (2.136)$$

$$\begin{aligned}\lambda_T &= R \left(\frac{\rho_o \omega c_p}{\tilde{\kappa}} \right)^{1/2} \\ &= \frac{\sqrt{2}R}{\delta_T} \\ &= \lambda N_{pr}^{1/2}\end{aligned}\quad (2.137)$$

avec $N_{pr} = \eta c_p / \tilde{\kappa}$ le nombre de Prandtl. δ_v et δ_T sont respectivement les épaisseurs des couches limites visqueuses et thermiques, R grandeur caractéristique de la dimension transverse du conduit. Par définition R est deux fois le rayon hydraulique, ce dernier étant le rapport de la surface par le périmètre du cylindre. R est égal au rayon r_p pour une section circulaire, à $ab/(a+b)$ pour une section rectangulaire (b pour une fissure) et $d/2\sqrt{3}$ pour une section triangulaire. Avec ces notations les fonctions densité et compressibilité s'écrivent :

$$\rho(\omega) = \frac{\rho_o}{F(\lambda)} \quad (2.138)$$

$$C(\omega) = \frac{1}{\gamma P_o} \{ \gamma - (\gamma - 1) F(\lambda_T) \} \quad (2.139)$$

La fonction F est définie pour chaque géométrie par :

- Section circulaire :

$$F(\lambda) = 1 - \frac{2}{\lambda\sqrt{-i}} G\left(\lambda\sqrt{-i}\right) \quad (2.140)$$

- Section de type fissure :

$$F(\lambda) = 1 - \frac{2}{\lambda\sqrt{i}} \tanh\left(\frac{\lambda}{2}\sqrt{i}\right) \quad (2.141)$$

- Section triangulaire :

$$F(\lambda) = 1 - \frac{2}{\lambda\sqrt{i}} \coth\left(\frac{3\lambda}{2}\sqrt{i}\right) - i \frac{4}{3\lambda^2} \quad (2.142)$$

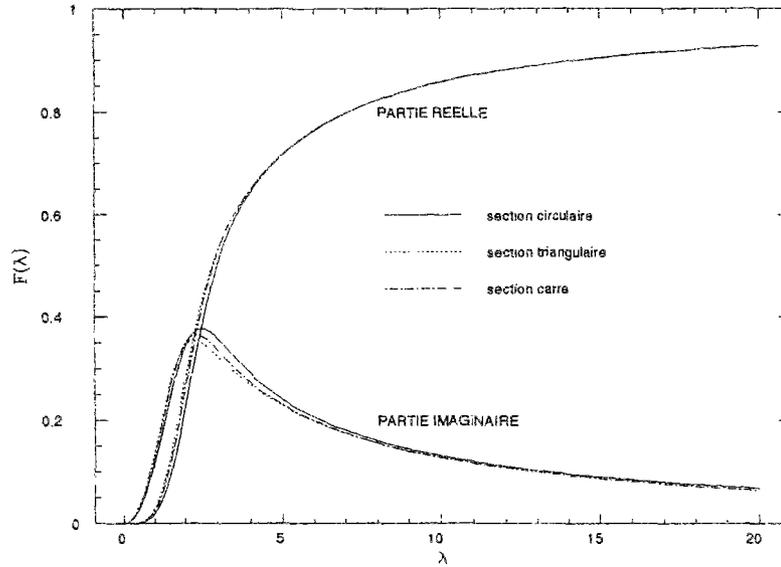


FIG. 2.8 - Evolution de la fonction F pour trois types de géométries

La figure (2.8) représente l'évolution des parties réelles et imaginaires de la fonction F pour trois sections différentes (circulaire, carrée, triangulaire). Les résultats sont semblables pour les trois géométries. On peut donc estimer que la propagation des ondes est insensible à la forme du pore pour un même rayon hydraulique, dans le régime de rayons et fréquences (2.67) où nous travaillons.

2.5.5 Comportement pour les hautes fréquences

Nous proposons d'établir pour les hautes fréquences une solution valable quelque soit la forme de la section. Comme nous l'avons évoqué par le passé, il s'agit de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \Delta_t \Psi - \frac{i\omega}{\xi} \Psi = -\frac{i\omega}{\xi} & \text{sur } S \\ \Psi = 0 & \text{sur } \partial S \end{cases} \quad (2.143)$$

De manière à simplifier l'intégration, nous découpons la surface S en N surfaces élémentaires S_i de manière à ce que la frontière ∂S commune à la frontière ∂S_i soit une portion droite. Si la discrétisation est suffisamment fine, la résolution du système (2.143) dans le domaine S peut se ramener à une résolution dans un domaine élémentaire S_i . En utilisant le système de coordonnées (x_i, y_i) introduit

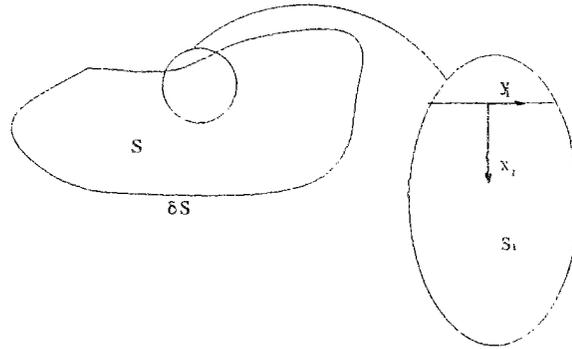


FIG. 2.9 - Description de la discrétisation

dans la figure (2.9), il suffit de résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} \right) \Psi(x_i, y_i) - \frac{i\omega}{\xi} \Psi(x_i, y_i) = -\frac{i\omega}{\xi} \text{ sur } S_i \\ \Psi(0, y_i) = 0 \text{ sur } \partial S \cap \partial S_i \end{cases} \quad (2.144)$$

Nous introduisons la fonction Φ définie par :

$$\Phi = \Psi - 1 \text{ sur } S_i \quad (2.145)$$

Le système (2.144) se simplifie :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} \right) \Phi(x_i, y_i) - \frac{i\omega}{\xi} \Phi(x_i, y_i) = 0 \text{ sur } S_i \\ \Psi(0, y_i) = -1 \text{ sur } \partial S \cap \partial S_i \end{cases} \quad (2.146)$$

Nous recherchons des solutions à variables séparables sous la forme suivante :

$$\Phi(x_i, y_i) = f(x_i) g(y_i) \quad (2.147)$$

Nous reportons cette relation dans le système (2.146) qui devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x_i^2} g(y_i) + \frac{\partial^2 g(y_i)}{\partial y_i^2} f(x_i) - \frac{i\omega}{\xi} f(x_i) g(y_i) = 0 \text{ sur } S_i \\ f(0) g(y_i) = -1 \text{ sur } \partial S \cap \partial S_i \end{cases} \quad (2.148)$$

De la condition aux limites, nous déduisons que la fonction g est constante et non nulle. L'équation aux dérivées partielles se réduit donc à l'expression suivante :

$$\frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x_i^2} - \frac{i\omega}{\xi} f(x_i) = 0 \text{ sur } S_i \quad (2.149)$$

La solution est donnée par la relation suivante :

$$f(x_i) = A \exp\left(i\sqrt{-\frac{i\omega}{\xi}} x_i\right) \quad (2.150)$$

En utilisant la condition aux limites (2.148), nous obtenons :

$$\Phi(x_i) = -\exp\left(i\sqrt{-\frac{i\omega}{\xi}} x_i\right) \quad (2.151)$$

Nous en déduisons la solution recherchée :

$$\Psi(x_i) = 1 - \exp\left(i\sqrt{-\frac{i\omega}{\xi}} x_i\right) \quad (2.152)$$

Celle-ci est intégrée sur la surface S de manière à en dégager une moyenne :

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{S} \int_S \Psi \, dS \\ &= \frac{1}{S} \sum_{i=1}^N \int_{S_i} \Psi(x_i) \, dy_i dx_i \\ &= \frac{1}{S} \sum_{i=1}^N y_i \left\{ rm_i - \int_0^{rm_i} \exp\left(i\sqrt{-\frac{i\omega}{\xi}} x_i\right) dx_i \right\} \end{aligned} \quad (2.153)$$

où nous avons noté rm_i une dimension caractéristique de la surface S_i suivant la direction x_i . Cette dimension peut s'interpréter comme un rayon moyen de la section. L'écriture (2.150) de la solution est reportée :

$$F = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^N y_i \left\{ rm_i - \left[\left(i\sqrt{-\frac{i\omega}{\xi}} \right)^{-1} \exp\left(i\sqrt{-\frac{i\omega}{\xi}} x_i \right) \right]_0^{rm_i} \right\} \quad (2.154)$$

Pour les hautes fréquences, c'est à dire pour le domaine fréquentiel où l'inégalité $\sqrt{\frac{\omega \, rm_i^2}{\xi}} \gg 1$ est vérifiée, cette expression se simplifie :

$$F = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^N \left\{ rm_i y_i + \left(i \sqrt{-\frac{i\omega}{\xi}} \right)^{-1} y_i \right\} \quad (2.155)$$

Or $S = \sum_{i=1}^N rm_i y_i$ et le périmètre de la section est donné par $P = \sum_{i=1}^N y_i$. En reportant ces relations dans l'équation (2.155), nous obtenons en définitive :

$$F = 1 + \frac{P}{S} \left(i \sqrt{-\frac{i\omega}{\xi}} \right)^{-1} \quad (2.156)$$

Cette expression montre que pour les hautes fréquences, l'influence de la géométrie ne se manifeste qu'à travers le rapport périmètre par la surface. De manière à valider cette écriture, nous nous proposons de la comparer aux expressions (2.140), (2.141) et (2.142) calculées pour des sections circulaire, rectangulaire et triangulaire. Pour $\xi = \eta/\rho_o$, (2.156) devient :

$$F = 1 + \frac{P}{S} \left(i \sqrt{-i} \sqrt{\frac{\omega\rho_o}{\eta}} \right)^{-1} \quad (2.157)$$

Le domaine fréquentiel est alors défini par l'inégalité $rm_i \gg \sqrt{\frac{\eta}{\rho_o \omega}}$, c'est à dire pour les dimensions transversales de conduit plus grandes que l'épaisseur de la couche limite visqueuse.

- Section circulaire

Pour les hautes fréquences ($\lambda \gg 1$), et en choisissant une convention de signe où la partie imaginaire de $\sqrt{-i}$ est positive, le rapport des fonctions de Bessel $G(\lambda\sqrt{-i})$ est approché par i . Dans ces conditions, l'écriture (2.140) de la fonction F associée à une section circulaire devient :

$$F(\lambda) = 1 - \frac{2i}{\lambda\sqrt{-i}} \quad (2.158)$$

Nous reportons l'expression de λ en fonction du rayon hydraulique (2.136) :

$$F = 1 - \frac{2i}{R\sqrt{-i} \sqrt{\frac{\omega\rho_o}{\eta}}} \quad (2.159)$$

Le rayon hydraulique est défini comme étant deux fois le rapport de la surface par le périmètre, l'équation (2.159) devient :

$$F = 1 + \frac{P}{S} \frac{1}{i\sqrt{-i} \sqrt{\frac{\omega\rho_o}{\eta}}} \quad (2.160)$$

On retrouve ainsi la formulation générale (2.157) établie pour une section quelconque.

- Section de type fente

Pour les hautes fréquences, le terme $\tanh\left(\frac{\lambda}{2}\sqrt{i}\right)$ introduit dans l'expression (2.141) de F associée à une section rectangulaire est approché par 1. Cette écriture se simplifie donc lorsque les fréquences sont grandes :

$$F(\lambda) = 1 - \frac{2}{\lambda\sqrt{i}} \quad (2.161)$$

En utilisant la convention de signe où la partie imaginaire de $\sqrt{-i}$ est positive, on montre que $i\sqrt{-i} = -\sqrt{i}$. λ est substitué par son écriture en fonction du rapport périmètre par surface :

$$F = 1 + \frac{P}{S} \frac{1}{i\sqrt{-i} \sqrt{\frac{\omega\rho_o}{\eta}}} \quad (2.162)$$

- Section de type triangulaire

Ici aussi le terme $\coth\left(\frac{3\lambda}{2}\sqrt{i}\right) - i\frac{4}{3\lambda^2}$ de l'expression associée à la section triangulaire tend vers 1 pour les hautes fréquences, ce qui réduit l'équation (2.142) à la relation suivante :

$$F(\lambda) = 1 - \frac{2}{\lambda\sqrt{i}} \quad (2.163)$$

On obtient alors une expression identique à celle correspondant à la section rectangulaire (2.161). En utilisant les mêmes remarques, on montre alors que l'on retrouve l'expression générale (2.157).

2.5.6 Comportement pour les basses fréquences

Il s'agit d'établir une forme générale pour la fonction F , dans le domaine des basses fréquences et pour une forme de section quelconque. Le système (2.143) à résoudre se simplifie :

$$\begin{cases} \Delta_t \Psi = 0 & \text{sur } S \\ \Psi = 0 & \text{sur } \partial S \end{cases} \quad (2.164)$$

On obtient donc un problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace, dont l'unique solution est $\Psi = 0$. La fonction F , moyenne de Ψ sur la section est donc nulle. Ce résultat est en accord avec les formulations (2.140), (2.141) et (2.142) obtenues pour des sections circulaire, rectangulaire et triangulaire, comme le montre l'analyse suivante :

- Section circulaire

Pour les basses fréquences, c'est à dire pour $\lambda \ll 1$, les fonctions de Bessel d'ordre 0 et 1 peuvent être approchées :

$$J_0(\lambda\sqrt{-i}) = 1 + \frac{1}{4} i \lambda^2 - \frac{1}{64} \lambda^4 \quad (2.165)$$

$$J_1(\lambda\sqrt{-i}) = \frac{1}{2} \lambda\sqrt{-i} \left(1 + \frac{1}{8} i \lambda^2 - \frac{1}{192} \lambda^4 \right) \quad (2.166)$$

En effectuant un développement à l'ordre 5, l'écriture (2.140) de la fonction F associée à une section circulaire est transformée :

$$F(\lambda) = i \frac{\lambda^2}{8} + \frac{1}{48} \lambda^4 + O(5) \quad (2.167)$$

A l'ordre 1, on peut estimer qu'elle est nulle.

- Section rectangulaire

Nous effectuons un développement limité ($\lambda \ll 1$) de l'expression (2.141) associée à une forme rectangulaire. Nous obtenons à l'ordre 5 :

$$F(\lambda) = \frac{1}{12} i \lambda^2 + \frac{1}{120} \lambda^4 + O(5) \quad (2.168)$$

Soit une fonction nulle si nous retenons que les termes d'ordre 1.

- Section triangulaire

Le développement limité à l'ordre 5 de l'écriture F (2.142) définie pour une section triangulaire est donné par la relation suivante :

$$F(\lambda) = \frac{3}{20} i \lambda^2 + \frac{9}{280} \lambda^4 + O(5) \quad (2.169)$$

La fonction F est donc nulle pour les basses fréquences, si nous ne retenons que les termes du premier ordre.

2.6 Impédance de surface

Les résultats obtenus pour un conduit cylindrique seront généralisés à un milieu poreux par l'introduction de grandeurs macroscopiques caractérisant physiquement le matériau. Les pores, tous identiques et non connectés, sont supposés partir de la surface supérieure vers la surface inférieure du matériau. Nous traiterons dans un premier temps un matériau où les pores sont de section uniforme pour présenter par la suite un modèle à section de pore variable.

2.6.1 Matériau poreux à section de pore uniforme

Les pores tortueux considérés ont une section circulaire uniforme. La tortuosité est schématisée par une inclinaison de la direction de propagation microscopique x par rapport à la direction macroscopique X qui oriente le chargement (onde plane en incidence normale)

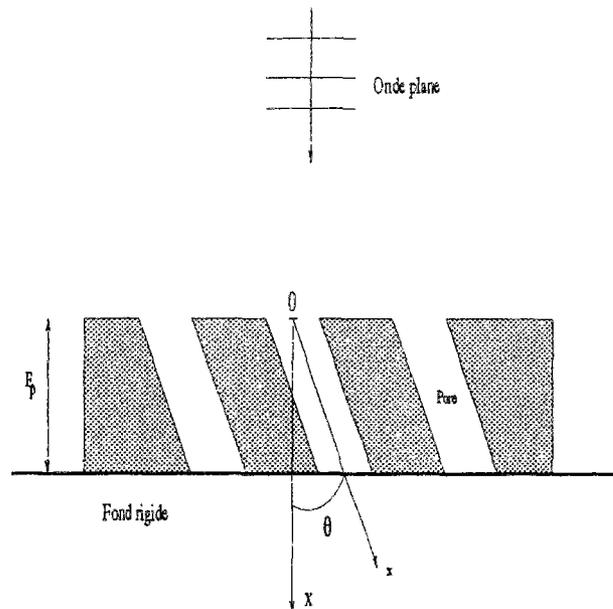


FIG. 2.10 - *Matériau poreux à pores tortueux de section uniforme*

Seules les contributions des vitesses microscopiques suivant la direction X sont retenues à l'échelle macroscopique. Rappelons la définition de la densité complexe (2.80) :

$$i\omega\rho(\omega)v_m = -\frac{dp}{dx} \quad (2.170)$$

où la vitesse longitudinale moyennée sur la section $\langle v_z \rangle$ et l'axe du cylindre z ont été notés v_m et x .

La composante suivant la direction de propagation macroscopique X de la vitesse microscopique est donnée par :

$$v_X = v_m \cos \theta \quad (2.171)$$

De plus, les dérivées suivant les directions x et X sont reliées par :

$$\frac{d}{dX} = \frac{1}{\cos\theta} \frac{d}{dx} \quad (2.172)$$

$1/\cos^2\theta$ n'est rien d'autre que le coefficient de tortuosité, que nous noterons par la suite k_s . A l'aide de (2.171) et (2.172) l'équation (2.170) s'écrit dans la direction de propagation macroscopique :

$$-\frac{dp}{dX} = i\omega\rho(\omega)k_s v_X \quad (2.173)$$

Nous définissons ainsi une nouvelle fonction densité complexe qui prend en compte les effets associés à la tortuosité :

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= \rho k_s \\ &= \frac{\rho_o k_s}{F(\lambda)} \end{aligned} \quad (2.174)$$

La compressibilité complexe n'est pas modifiée par la tortuosité du pore. Elle est donc donnée par l'équation (2.139) :

$$C(\omega) = \frac{1}{\gamma P_o} \{ \gamma - (\gamma - 1) F(\lambda_T) \} \quad (2.175)$$

Nous rappelons que la fonction complexe F , les nombres sans dimensions λ et λ_T caractéristiques des perturbations visqueuses et thermiques s'écrivent pour une section circulaire uniforme :

$$F(\lambda) = 1 - \frac{2}{\lambda\sqrt{-i}} G(\lambda\sqrt{-i}) \quad (2.176)$$

$$\lambda = R \left(\frac{\rho_o \omega}{\eta} \right)^{1/2} \quad (2.177)$$

$$\lambda_T = \lambda N_{pr}^{1/2} \quad (2.178)$$

Pour une section circulaire, le rayon hydraulique R est égal au rayon r_p de la section du pore. Cette information n'est pas accessible à l'échelle macroscopique, mais elle peut être déduite de la résistance au passage de l'air.

Nous notons E_p l'épaisseur du milieu poreux, l la longueur du pore et N le nombre de pores par unité de surface. Avec ces notations la porosité est donnée par :

$$\Omega = \frac{N\pi r_p^2}{\cos \theta} \quad (2.179)$$

La résistance au passage de l'air est définie par :

$$R_s = \frac{\Delta p}{E_p D} \quad (2.180)$$

Δp et D sont respectivement la différence de pression à laquelle est soumise l'éprouvette et le flux d'air par unité de surface. Ce flux s'exprime en fonction de la porosité et de la composante suivant la direction macroscopique de la vitesse de la manière suivante :

$$D = v_X \Omega \quad (2.181)$$

La résistance au passage de l'air est une grandeur intrinsèque. Elle peut donc être estimée dans le régime des basses fréquences. Dans ces conditions, les fonctions de Bessel d'ordre 0 et 1 sont approchées, et la fonction F (2.176) introduite dans la définition de la densité complexe (2.174) se simplifie. D'après l'approximation (2.167), nous obtenons à l'ordre 2 :

$$F(\lambda) = i \frac{\lambda^2}{8} \quad (2.182)$$

En substituant λ par son expression en fonction du rayon du pore (2.177), l'équation (2.173) devient pour les basses fréquences :

$$-\frac{dp}{dX} = \frac{i \rho_o}{i r_p^2 \frac{\rho_o}{8\eta}} k_s v_X \quad (2.183)$$

Soit :

$$-\frac{dp}{dX} = \frac{8 \eta}{r_p^2} k_s v_X \quad (2.184)$$

Nous en déduisons le saut de pression Δp :

$$\Delta p = \frac{8\eta k_s}{r_p^2} E_p v_X \quad (2.185)$$

Les équations exprimant le saut de pression (2.185) et le flux d'air (2.181) sont reportées dans la définition de la résistance au passage de l'air (2.180) :

$$R_s = \frac{8\eta k_s}{r_p^2 \Omega} \quad (2.186)$$

Le rayon du pore r_p s'exprime donc en fonction de grandeurs macroscopiques :

$$r_p^2 = \frac{8\eta k_s}{R_s \Omega} \quad (2.187)$$

Le nombre sans dimension λ s'écrit alors :

$$\lambda = \left(\frac{8 k_s \rho_o \omega}{R_s \Omega} \right)^{1/2} \quad (2.188)$$

Nous obtenons ainsi les écritures des fonctions complexes de densité (2.174) et de compressibilité (2.175) en terme de grandeurs macroscopiques (résistance à l'écoulement de l'air, tortuosité et porosité) pour un pore tortueux. L'impédance caractéristique et le nombre d'onde s'obtiennent à l'aide des relations (2.115) et (2.112) :

$$Z^c = \left[\frac{\tilde{\rho}(\omega)}{C(\omega)} \right]^{1/2} \quad (2.189)$$

$$m^2 = -\omega^2 \tilde{\rho}(\omega) C(\omega) \quad (2.190)$$

Si le pore se termine en $X = E_p$ par une surface rigide, l'impédance en $X = 0$ est donnée par [Annexe B.4] :

$$\begin{aligned} Z(0) &= \frac{p(0)}{v_X(0)} \\ &= -i Z^c \cot g(imE_p) \end{aligned} \quad (2.191)$$

où $p(0)$ et $v_X(0)$ désignent respectivement la pression et la composante normale de la vitesse à la surface du matériau dans le milieu poreux.

Nous disposons à présent de tous les outils nécessaires pour calculer l'impédance de surface. Celle-ci est définie par le rapport de la pression par la vitesse normale. Ces grandeurs que nous noterons p^s et v^s sont calculées à l'air libre, au

niveau de la surface du matériau. Pour un matériau poreux reposant sur un fond rigide, elles s'obtiennent en utilisant les conditions aux limites en $X = 0$:

- Continuité de la pression :

$$p^s = p(0) \quad (2.192)$$

- Continuité des débits :

Dans le milieu poreux, en $X = 0$, le débit D par unité de surface est donné par :

$$D = \Omega v_X(0) \quad (2.193)$$

A l'air libre, toujours au niveau de la surface du matériau, le débit par unité de surface n'est rien d'autre que la vitesse v^s de l'onde. Nous avons donc :

$$v^s = \Omega v_X(0) \quad (2.194)$$

Les conditions aux limites (2.192) et (2.194), nous donnent ainsi l'écriture de l'impédance de surface que nous noterons Z^s :

$$\begin{aligned} Z^s &= \frac{p^s}{v^s} \\ &= \frac{p(0)}{\Omega v_X(0)} \end{aligned} \quad (2.195)$$

En reportant la définition de l'impédance d'un pore (2.191), nous obtenons:

$$Z^s = -i \frac{Z^c}{\Omega} \cotg(imE_p) \quad (2.196)$$

Pour résumer, lorsque le milieu poreux considéré repose sur un fond rigide, pour des pores identiques de section uniforme traversant tout le matériau dans direction de propagation macroscopique, l'impédance de surface est donnée par :

$$Z^s = -i \left[\frac{\tilde{\rho}(\omega)}{\Omega^2 C(\omega)} \right]^{1/2} \cotg [-\omega(\tilde{\rho}(\omega)C(\omega))^{1/2} E_p] \quad (2.197)$$

Avec :

- Ω :porosité

- E_p : épaisseur du milieu poreux
- ω : pulsation ($\omega = 2\pi f$ avec f fréquence)
- $\tilde{\rho}$: fonction complexe de densité associée aux dissipations visqueuses

$$\tilde{\rho}(\omega) = \frac{\rho_o k_s}{F(\lambda)} \quad (2.198)$$

- C : fonction complexe de compressibilité associée aux dissipations thermiques

$$C(\omega) = \frac{1}{\gamma P_o} \{ \gamma - (\gamma - 1) F(\lambda_T) \} \quad (2.199)$$

- F : fonction caractérisant la géométrie de la section du pore. Pour une section circulaire :

$$F(\lambda) = 1 - \frac{2}{\lambda\sqrt{-i}} G\left(\lambda\sqrt{-i}\right) \quad (2.200)$$

- N_{pr} : nombre de Prandtl
- λ : nombre sans dimension caractérisant les perturbations visqueuses

$$\lambda = \left(\frac{8 k_s \rho_o \omega}{R_s \Omega} \right)^{1/2} \quad (2.201)$$

- λ_T : nombre sans dimension caractérisant les perturbations thermiques

$$\lambda_T = \left(\frac{8 k_s \rho_o \omega N_{pr}}{R_s \Omega} \right)^{1/2} \quad (2.202)$$

- ρ_o : masse volumique de l'air
- k_s : tortuosité
- R_s : résistance à l'écoulement de l'air

Bien entendu, nous avons modélisé la tortuosité par une inclinaison constante des pores par rapport à la direction de propagation macroscopique X . Toutefois, les auteurs estiment généralement que tout pore tortueux (dont l'inclinaison varie en fonction de la position géométrique) peut être ramené à un pore droit d'inclinaison constante si l'on retient comme définition de la tortuosité le rapport de la longueur du pore par l'épaisseur de l'éprouvette. De plus, les calculs ont été traités pour une section circulaire, mais ils peuvent être généralisés à d'autres sections par l'utilisation de fonctions F adéquates (§2.5). Cependant, nous avons

pu constater que la forme de la section a une faible influence pour le régime de fréquences et de rayons considéré (§2.5.4). Ce point de vue est confirmé par les résultats numériques des travaux d'Attenborough [Attenborough, 1993] de Wilson [Wilson, 1993] et de Cummings [Cummings, 1993]. Signalons également que les fonctions complexes de densité et de compressibilité sont des grandeurs microscopiques. De nombreux auteurs définissent des grandeurs équivalentes, à l'échelle macroscopique pour calculer l'impédance de surface.

2.6.2 Matériau poreux à section de pore variable

La tortuosité ne se limite plus à une simple mesure de la sinuosité, mais tient compte des étranglements. Aussi certains auteurs ont tenté d'enrichir les écritures des fonctions de densités et de compressibilité par l'introduction de paramètres additionnels tout en supposant des pores identiques.

Stinson et Champoux [Champoux *et al.*, 1992] prennent en compte le changement de section le long du pore, en modélisant celui-ci comme une série de conduits uniformes, chaque conduit élémentaire ayant une forme et une taille particulière. Cette démarche est intéressante, car elle montre que les fonctions complexes de densité et de compressibilité dépendent de la géométrie du pore de différentes manières. La densité complexe (qui caractérise les perturbations visqueuses) est fortement influencée par la présence de conduits étroits tandis que la compressibilité complexe (caractérisant les perturbations thermiques) est plutôt sensible à la présence de conduits larges. Devant l'impossibilité de définir de façon précise la géométrie des pores dans les milieux couramment utilisés, ils suggèrent de généraliser ce modèle par l'introduction de deux paramètres supplémentaires associés séparément aux effets visqueux et thermiques et qu'il convient d'ajuster en fonction de la distribution de taille de pore.

Le modèle de Biot-Allard [Allard, 1993] n'utilise qu'un paramètre supplémentaire, mais semble moins efficace que le modèle précédent lorsque les discontinuités sont prononcées.

Toujours dans le cadre de la théorie de Biot, et en ne retenant que les dissipations visqueuses, Yamamoto [Yamamoto *et al.*, 1988] donne l'expression de la perméabilité pour une distribution de taille de pores selon une loi normale. Il montre ainsi que pour une perméabilité donnée, nous pouvons avoir une infinité de distribution et que la propagation des ondes (lentes, rapides et de cisaillement) n'est pas influencée par le désordre pour les basses et très hautes fréquences, mais l'est fortement dans le régime des fréquences intermédiaires.

Attenborough [Attenborough, 1993] généralise cette approche pour y inclure les dissipations thermiques, dans le cadre d'une modélisation microscopique où le squelette est supposé rigide.

Il propose par ailleurs une autre approche qui consiste à généraliser les fonctions de densité et de compressibilité établies précédemment par l'introduction d'un paramètre supplémentaire.

Nous distinguons ainsi quatre modèles généralisés qui ont pour objectif d'établir une écriture enrichie pour les fonctions de densité et de compressibilité. En utilisant la relation (2.197), ces quantités sont suffisantes pour obtenir une estimation de l'impédance de surface. Nous proposons de les décrire brièvement en donnant l'expression des quantités recherchées :

◇ Modèle de Biot-Allard

Il consiste à déduire de la théorie de Biot, une écriture pour la fonction complexe de densité :

$$\tilde{\rho}(\lambda) = \rho_o k_s \left\{ 1 + \frac{R_s \Omega}{i k_s \rho_o \omega} \mathcal{F}(\lambda) \right\} \quad (2.203)$$

avec

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{4} \frac{\lambda \sqrt{-i} G(\lambda \sqrt{-i})}{1 - \frac{2}{\lambda \sqrt{-i}} G(\lambda \sqrt{-i})} \quad (2.204)$$

Pour la compressibilité, le modèle utilise l'écriture (2.199). Il est généralisé en corrigeant les termes sans dimension λ et λ_T :

$$\lambda = s_B \left(\frac{8 k_s \rho_o \omega}{R_s \Omega} \right)^{1/2} \quad \lambda_T = s_B \left(\frac{8 k_s \rho_o \omega N_{pr}}{R_s \Omega} \right)^{1/2} \quad (2.205)$$

où s_B est utilisé comme une quantité à ajuster et qui est sensée prendre en compte la complexité du réseau poreux.

◇ Modèles d'Attenborough

◇ Le premier consiste à utiliser les fonctions densité et compressibilité données par les équations (2.198) et (2.199). Celles-ci ne sont pas applicables lorsque le pore n'a pas une section circulaire uniforme. Aussi, il se propose de les généraliser en modifiant les nombre λ et λ_T par l'introduction d'un paramètre supplémentaire s_A :

$$\lambda = s_A \left(\frac{8 k_s \rho_o \omega}{R_s \Omega} \right)^{1/2} \quad \lambda_T = s_A \left(\frac{8 k_s \rho_o \omega N_{pr}}{R_s \Omega} \right)^{1/2} \quad (2.206)$$

Les approches d'Attenborough et de Biot-Allard sont donc semblables, mais utilisent des fonctions de densité différentes. Celles-ci sont identiques uniquement lorsqu'il s'agit d'un pore section circulaire uniforme.

◊ Le second modèle s'inspire de la théorie de Biot et des travaux de Yamamoto pour considérer une distribution de tailles de pores selon une loi normale tout en prenant en compte les perturbations visqueuses et thermiques. Il introduit la longueur Φ qui caractérise la taille de la section et qui est défini par :

$$\Phi = -\log_2 r \quad (2.207)$$

où r rayon du pore est exprimé en *mm*. En notant σ l'écart-type, $e(r)$ la densité de distribution, la loi de distribution s'écrit :

$$f(\Phi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp[-(\Phi - \bar{\Phi})^2/2\sigma^2] \quad (2.208)$$

$$\int_0^\infty e(r) dr = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\Phi) d\Phi = 1 \quad (2.209)$$

Il parvient en définitive à proposer de nouvelles écritures pour les fonctions complexes de densité et de compressibilité :

$$\tilde{\rho}(\lambda) = \rho_o k_s \left\{ 1 + \frac{R_s \Omega}{i k_s \rho_o \omega} \tilde{\mathcal{F}}(\lambda) \right\} \quad (2.210)$$

$$C(\omega) = \frac{1}{\gamma P_o} \left\{ \gamma - \frac{\gamma - 1}{k_s \left\{ 1 + \frac{R_s \Omega}{i k_s \rho_o \omega} \tilde{\mathcal{F}}(\lambda N_{pr}^{1/2}) \right\}} \right\} \quad (2.211)$$

où pour une section circulaire, la fonction $\tilde{\mathcal{F}}$ dite de correction de viscosité est donnée par :

$$\tilde{\mathcal{F}}(\omega) = \frac{-2\eta}{\Omega R_s} \frac{\int_0^\infty \frac{e(r)}{r^2} \lambda \sqrt{-i} G(\lambda \sqrt{-i}) dr}{\int_0^\infty e(r) \left[1 - \frac{2}{\lambda \sqrt{-i}} G(\lambda \sqrt{-i}) \right] dr} \quad (2.212)$$

Ce modèle repose sur une description du milieu poreux utilisant quatre paramètres : porosité Ω , tortuosité k_s , résistance au passage de l'air R_s et écart type

σ . Ce paramètre quantifie le désordre autour d'une taille moyenne de section. Il est obtenu par une technique de porosimétrie au mercure ou encore lorsque les moyens expérimentaux ne le permettent pas, par un ajustement par rapport aux mesures expérimentales de l'impédance. Malgré sa richesse cette modélisation à l'inconvénient de ne pas donner de solution analytique simple, comme ce fut le cas pour une section de pore constante. En effet le calcul des intégrales (2.212) ne peut se faire que par des méthodes numériques et l'utilisation d'autres géométries de sections ne présente pas pour autant un avantage. Attenborough propose toutefois (pour des pores de type fissure) des solutions dans le régime des basses et hautes fréquences où l'intégration se traite analytiquement.

◇ Modèle de Champoux et Stinson

Il consiste à discrétiser le pore en une série de conduits droits de section circulaire et à négliger les effets associés aux discontinuités. Le modèle suppose des pores tous identiques, et considère que la pression et le débit ne varient pas lorsque les équations de continuité et du mouvement sont respectivement intégrées sur le volume du pore. Ils obtiennent ainsi de nouvelles écritures discrètes pour les fonctions de densité et de compressibilité. Celles-ci sont comparées aux fonctions équivalentes issues du modèle de Biot-Allard classique de manière à identifier des expressions pour deux paramètres additionnels notés s_ρ et s_K .

Le modèle de Biot-Allard est alors modifié en utilisant ces deux quantités qui corrigeront séparément les fonctions de densité et de compressibilité à travers les nombres sans dimensions λ et λ_T :

$$\lambda = s_\rho \left(\frac{8 k_s \rho_o \omega}{R_s \Omega} \right)^{1/2} \quad (2.213)$$

$$\lambda_T = s_K \left(\frac{8 k_s \rho_o \omega N_{pr}}{R_s \Omega} \right) \quad (2.214)$$

Ce modèle a été validé pour un milieu poreux composé de pores identiques et à section variable. Cependant, Attenborough remarque que les formulations théoriques des paramètres s_ρ et s_K ne sont pas toujours pertinentes.

2.7 Conclusion

Nous avons considéré une théorie modélisant la propagation dans un milieu poreux à squelette rigide en utilisant une méthode d'homogénéisation reposant sur le principe de la moyenne. Cette démarche utilise une simplification des équations de Navier-Stokes pour un régime de fréquences et de rayons suffisamment large. Ces simplifications sont issues d'une analyse des résultats de la solution de Kirchhoff.

Une nouvelle formulation de l'équation du mouvement et de transfert de la chaleur nous a permis d'introduire les fonctions complexes de densité et de compressibilité dont la connaissance suffit pour prédire le comportement acoustique, à travers le nombre d'onde et l'impédance caractéristique. Ces fonctions ont également l'avantage de traiter séparément les effets associés aux phénomènes visqueux et thermiques. Les calculs ont été développés pour différentes formes de section, mais il semblerait que l'influence de ce paramètre soit négligeable. La première partie de ce chapitre fut donc consacrée à rechercher l'écriture du nombre d'onde et de l'impédance d'un conduit.

Dans une seconde partie, ces résultats ont été généralisés à un milieu poreux par un passage "micro-macro" associant la taille du pore à la résistance au passage de l'air et à la porosité, puis la longueur à la tortuosité. Nous en avons déduit une nouvelle formulation des fonctions complexes de densité et de compressibilité en retenant dans un premier temps, des pores de section uniforme (modèle à trois paramètres).

En utilisant les conditions aux limites à la surface du matériau et pour une onde plane en incidence normale, nous obtenons l'expression de l'impédance de surface.

Nous avons ensuite présenté différents modèles (à quatre ou cinq paramètres) susceptibles de prendre en compte les variations de la section du pore. Certains sont issus de la théorie de Biot. Nous avons toutefois fait le choix de les inclure dans ce chapitre dans la mesure où ils s'expriment en termes de fonctions de densité et de compressibilité.

On pourrait être tenté de compliquer davantage ce modèle, en considérant par exemple que la matrice est viscoélastique, ou encore en introduisant des connections entre les pores, mais nous pensons que cette complication risque de se prolonger indéfiniment et sans espoir d'aboutissement. Construire un modèle général, applicable à l'ensemble des matériaux poreux est en effet une tâche ardue et peut être même irréaliste. Il est par contre capital de tenir compte des conditions in situ et des paramètres importants dans la gamme de fréquences à considérer de manière à adapter l'outil de simulation au problème posé (en considérant par exemple la rigidité de la matrice, dans le cas des enrobés drainants). Ainsi, à chaque problème peut correspondre une théorie différente en fonction des paramètres physiques qui donnent lieu à des phénomènes observables.

Par ailleurs, pour des applications industrielles, il est essentiel pour un outil

de simulation de donner une information qualitative des phénomènes mis en jeu en utilisant un modèle aussi simple que possible. Cela sera l'objet du chapitre suivant, où nous tâcherons d'étudier l'influence des différents paramètres sur les qualités acoustiques des enrobés drainants.

On peut aussi s'interroger quant à l'utilité de la théorie de Biot. Pour un squelette élastique, celle-ci est d'un grand intérêt en retenant trois types d'onde (lentes, rapides et de cisaillements). Elle est donc profitable lorsqu'il s'agit par exemple d'étudier les propriétés pétrophysiques de roches poreuses souterraines et de leur contenu en fluide.

Pour un problème d'acoustique, où le squelette est supposé rigide, l'approche microstructurelle reste tout de même plus intéressante, par une étude fine des phénomènes, mais également par la prise en compte des dissipations thermiques.

Cette démarche à l'échelle du pore sera développée davantage en seconde partie du document où nous tâcherons d'affiner la description du réseau poreux en proposant ainsi une caractérisation acoustique plus riche.

Chapitre 3

Application aux enrobés drainants

Les enrobés drainants sont des couches de roulement placées en partie supérieure de la chaussées, en contact direct avec les véhicules. Cette technique qui apparaît pour la première fois au début des années cinquante en Angleterre fut par la suite l'objet de quelques campagnes d'expérimentations aux USA et en France. Après une période de balbutiement et encouragée par le développement des revêtement poreux dans les pays voisins (Belgique, Autriche, Pays Bas) cette méthode fut introduite en France au niveau de développement industriel depuis 1987. En 1992, on estimait que plus de 30 millions de mètres carrés ont été mis en oeuvre sur l'ensemble du réseau routier français.

Cette technique avait comme objectif initial d'offrir un maximum de sécurité aux usagers du réseau routier en supprimant l'aquaplanage et les projections d'eau par temps de pluie par une bonne évacuation des eaux. Il s'est avéré par la suite que ce type de revêtement a également des propriétés acoustiques intéressantes en réduisant le bruit de roulement à la source et en absorbant une partie avec un gain de l'ordre de 3 à 6dB. Il est maintenant admis qu'au delà de 50 km/h, le bruit de roulement est prédominant et que les contributions des bruits moteur, d'échappement et aérodynamiques deviennent négligeables, du moins pour les véhicules légers.

On estime généralement que les principaux processus générateurs de bruit de roulement se décomposent en trois mécanismes [Bar *et al.*, 1993] :

- bruit d'impact des sculptures du pneumatique sur la chaussée. Ce phénomène génère du bruit dans le domaine des basses et moyennes fréquences (125 – 1000 Hz). Il est d'autant plus important que la surface du revêtement est irrégulière.
- bruit lié au phénomène de compression/décompression (air pumping) de

l'air emprisonné dans les rainures du pneumatique. Les vibrations de l'air engendrent une émission acoustique dans le domaine des moyennes et hautes fréquences (1000 – 3000 H_z).

- bruit de collage/décollage (slip and stick) du pneumatique sur la chaussée. Lors du déplacement du pneumatique, ses pavés élémentaires en contact avec la chaussée se déforment et subissent une succession d'adhérence et de rupture d'adhérence engendrant un bruit dans les basses et moyennes fréquences.

La porosité de la chaussée permet de supprimer l'air pumping par échappement de l'air dans les pores, ce qui entraîne une réduction du bruit émis.

Après une multitude d'expérimentations et devant le succès des enrobés drainants, une étude théorique fut menée par l'INRETS [Hamet, 1988] en collaboration avec le LCPC. Ce modèle qui repose sur une approche macroscopique où le squelette est considéré rigide, montre que les phénomènes thermiques ne peuvent être négligés, en particulier pour les hautes fréquences [Hamet, 1992]. Cette modélisation met également en évidence que les performances acoustiques des enrobés drainants augmentent avec l'épaisseur jusqu'à une super-épaisseur (40 à 60 cm) au delà de laquelle on ne peut plus espérer une absorption supplémentaire.

Après une description du milieu poreux considéré, nous proposons d'appliquer le modèle microscopique établi au second chapitre afin d'optimiser les propriétés acoustiques de revêtements routiers poreux. Nous utiliserons plus précisément le modèle classique qui assimile le milieu poreux à un matériau à squelette rigide perforé par des conduits cylindriques identiques, non connectés et de section circulaire uniforme (§2.6.1). Nous étudierons ainsi l'influence des paramètres caractérisant physiquement l'enrobé drainant (épaisseur, tortuosité, résistance au passage de l'air et porosité). Nous introduirons pour cela le coefficient d'absorption en incidence normale qui est une bonne mesure des performances acoustiques d'un milieu poreux. Nos résultats seront comparés à ceux de l'INRETS puis validés expérimentalement.

3.1 Description d'un enrobé drainant

Les enrobés drainants sont des couches de matériau placées en partie supérieure de la chaussée, directement en contact avec les véhicules circulant. Cette couche est constituée d'un empilement de grains rigides "collés" les uns aux autres à l'aide d'un bitume enrichi de produits élastomères (COLFLEX) de manière à obtenir une bonne tenue mécanique de l'ensemble. La composition granulaire est généralement de l'ordre de 0/10 mm ou 0/14 mm avec une coupure 2/6

ou encore 2/10 selon les cas, dans la courbe granulométrique. Le matériau est donc composé de petites particules 0/2 (maximum 15%) et de gros grains 6/10 (ou encore 6/14, 10/14 lorsque l'intervalle de formulation est 10/14). Les gros grains occupent généralement 80% du volume, le liant 4 à 5%. Cette composition granulaire constitue donc un squelette rigide qui laisse apparaître un réseau poreux. Les vides communicants présentent des avantages sur le plan hydraulique et acoustique en permettant l'évacuation des eaux vers la couche d'étanchéité et la réduction du bruit de roulement par dissipations visqueuses et thermiques.

La porosité est généralement supérieure à 20% et l'épaisseur de l'ordre de 4 cm. Nous verrons par la suite qu'il est avantageux d'augmenter l'épaisseur et la porosité pour une meilleure absorption des ondes acoustiques.

3.2 Influence des paramètres physiques sur le coefficient d'absorption en incidence normale

Lorsque l'impédance de surface est supposée indépendante du point d'observation, la surface est dite à réaction localisée. Dans ces conditions, et en incidence normale, le coefficient d'absorption (noté α) est donnée par :

$$\alpha = 1 - \left| \frac{Z^s - 1}{Z^s + 1} \right|^2 \quad (3.1)$$

où Z^s est l'impédance de surface du revêtement poreux. Cette définition repose sur des considérations énergétiques et traduit la différence entre le flux d'énergie incident et le flux réfléchi par le matériau. Le coefficient α évolue entre 0 et 1, en étant minimal lorsqu'il n'y a pas d'absorption et maximal lorsque celle-ci est totale.

Les performances acoustiques des enrobés drainants seront mesurées à l'aide de ce coefficient et nous tâcherons d'en donner l'évolution en fonction de la fréquence pour différentes distributions de paramètres physiques. Nous supposerons par ailleurs que la couche de roulement repose sur une surface imperméable.

3.2.1 Influence de l'épaisseur

Nous proposons d'étudier l'influence de l'épaisseur sur les qualités acoustiques d'un enrobé drainant dont la résistance au passage de l'air, la porosité et la tortuosité sont maintenus constants. Nous avons choisi pour ces grandeurs des valeurs standards que nous pouvons retrouver dans des couches de roulements réelles ($R_s = 20kNs/m^4$, $\Omega = 0.2$, $k_s = 3$). Les résultats sont illustrés par la figure (3.1) où nous présentons l'évolution du coefficient d'absorption pour quatre épaisseurs (2, 4, 10 et 20 cm) et pour des fréquences allant jusqu'à $10kH_z$.

On constate que le coefficient d'absorption nul aux très basses fréquences, est soumis à des oscillations pour les fréquences plus grandes et ceci pour toutes les épaisseurs considérées. Cependant, la nature des oscillations dépend de l'épaisseur du matériau. Elles ont une amplitude importante pour les faibles épaisseurs avec des maxima d'absorption proches de 1, et plus modérée avec des largeurs de pics plus grandes pour les fortes épaisseurs. Les positions de ces pics sont également influencées, en les décalant vers les basses fréquences lorsque l'épaisseur augmente.

Quoi qu'il en soit, dans les deux cas, le maximum des pics d'absorption diminue lorsque la fréquence augmente.

En résumé, l'épaisseur permet de choisir le type d'absorption adéquat au problème posé, en proposant une absorption importante mais sélective pour les faibles épaisseurs, et une absorption plus faible mais relativement constante sur une gamme de fréquences plus étendue lorsqu'il s'agit d'une forte épaisseur.

Pour ce qui nous concerne, il est avantageux d'avoir une bonne absorption dans le domaine fréquentiel $500 - 1200 H_z$, où le bruit de roulement est concentré. Une épaisseur de 4 à 6 cm est donc optimale.

3.2.2 Influence de la résistance au passage de l'air

L'étude de l'influence de la résistance au passage de l'air est abordée en affectant au matériau des valeurs standards pour la porosité, la tortuosité et l'épaisseur ($\Omega = 0.2$, $k_s = 3$ et $E_p = 4$ cm) et en faisant varier le paramètre considéré ($R_s = 4, 20, 60$ et 100 kNs/m⁴). Nous rappelons que la résistance au passage de l'air est d'autant plus grande que les dimensions transverses des pores sont petites. Il s'agit en fait de l'inverse de la perméabilité statique relative à l'air. Nous verrons en fin de chapitre comment relier cette grandeur à la perméabilité mesurée *in situ* par le perméamètre de chantier. En effet cette mesure ne donne pas une perméabilité au sens Darcy, mais plutôt une vitesse de percolation moyenne.

Les résultats sont illustrés sur la figure (3.2).

Comme dans le cas précédent (§3.2.1), l'absorption fait l'objet d'oscillations aux moyennes et hautes fréquences. L'analyse des courbes montre que l'augmentation de la résistance au passage de l'air entraîne :

- Une diminution des maxima associée à un élargissement des pics.
- Un léger décalage des pics vers les basses fréquences.
- Une absorption relativement constante.

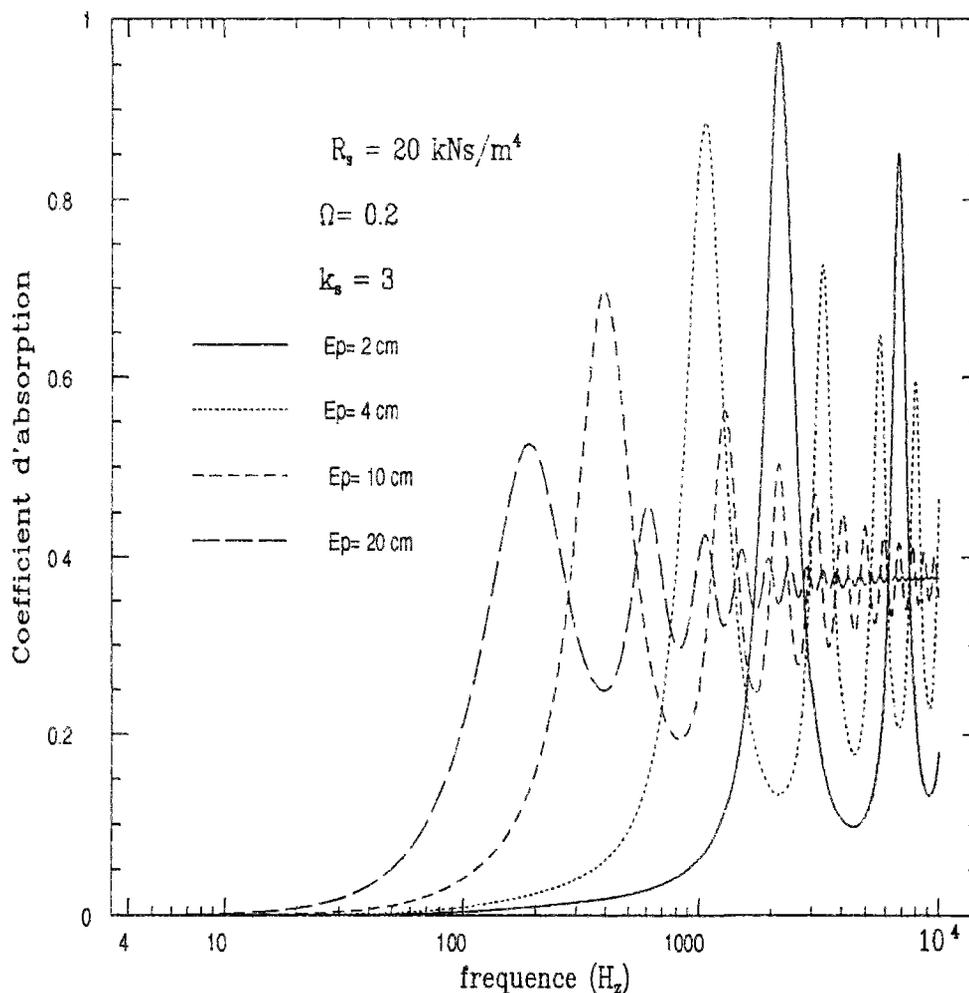


FIG. 3.1 - Influence de l'épaisseur

Quelque soit la résistance, les valeurs des maximas diminuent lorsque la fréquence augmente. Une faible résistance au passage de l'air peut ainsi offrir de fortes absorptions, mais dans un domaine fréquentiel réduit. Une forte résistance au passage de l'air (faible perméabilité) permet d'obtenir une absorption peut être plus faible, mais plus régulière sur une gamme de fréquence plus large. Mais il ne faut pas perdre de vue que ce matériau plus sensible au colmatage, perd les propriétés de drainabilité des eaux de pluie. Il est donc préférable de se donner une épaisseur associée à une résistance minimale offrant un maximum d'absorption au voisinage des 1000 Hz où le bruit routier est relativement important. Ainsi, pour une épaisseur de 4 cm , une résistance au passage de l'air de 20 kNs/m^4 est un bon compromis.

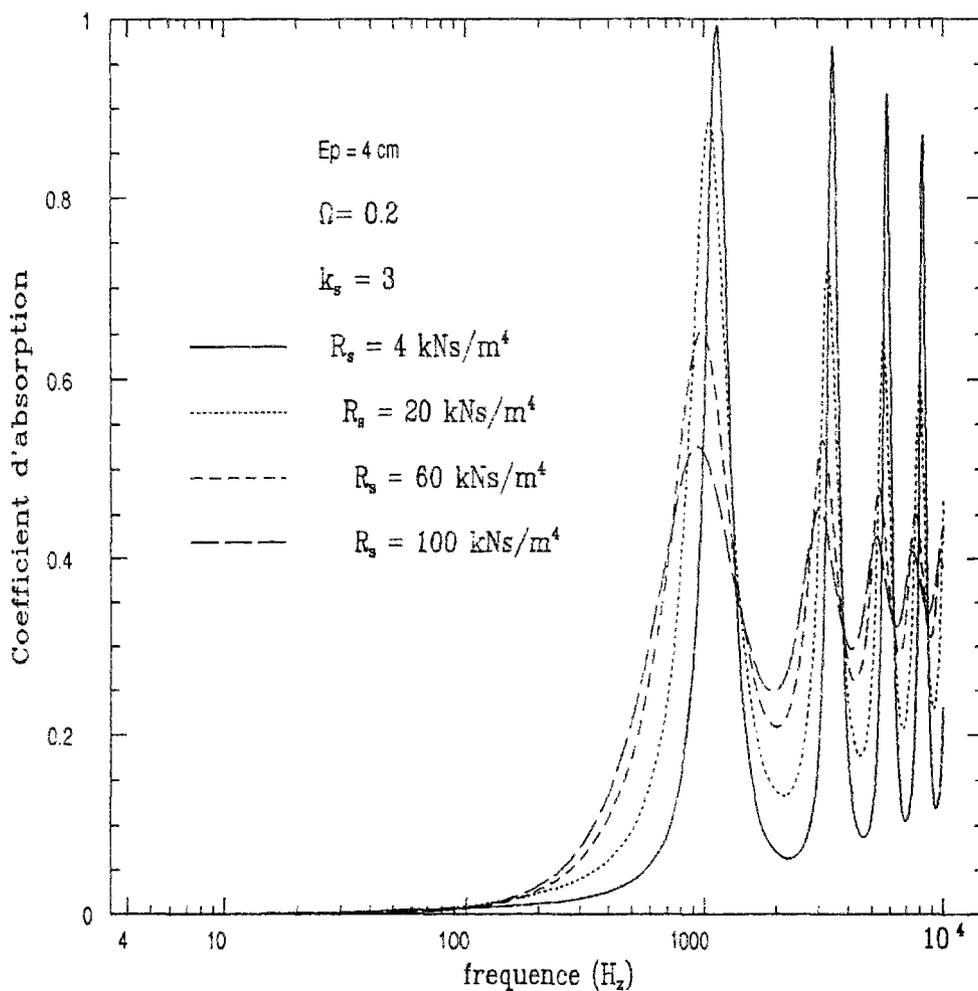


FIG. 3.2 - Influence de la résistance au passage de l'air

3.2.3 Influence de la porosité

Le matériau considéré d'épaisseur 4 cm, a une tortuosité égale à 3 et une résistance au passage de l'air à 20 kNs/m^4 . Le calcul du coefficient d'absorption est effectué pour quatre porosités différentes ($\Omega = 0.1, 0.2, 0.3$ et 0.5). Les résultats sont donnés par la figure (3.3).

Il s'avère que les maximas diminuent toujours avec la fréquence quelque soit la distribution des paramètres et le coefficient d'absorption oscille pour les moyennes et hautes fréquences. Une augmentation de la porosité se traduit par :

- Un élargissement des pics accompagné d'une augmentation d'absorption.
- Un léger décalage des maximas vers les basses fréquences. Toutefois, on peut estimer que la position de ces maximas est inchangée avec une erreur de 10% maximum (calculée entre une porosité de 0.1 et de 0.5). Si l'on désire déplacer

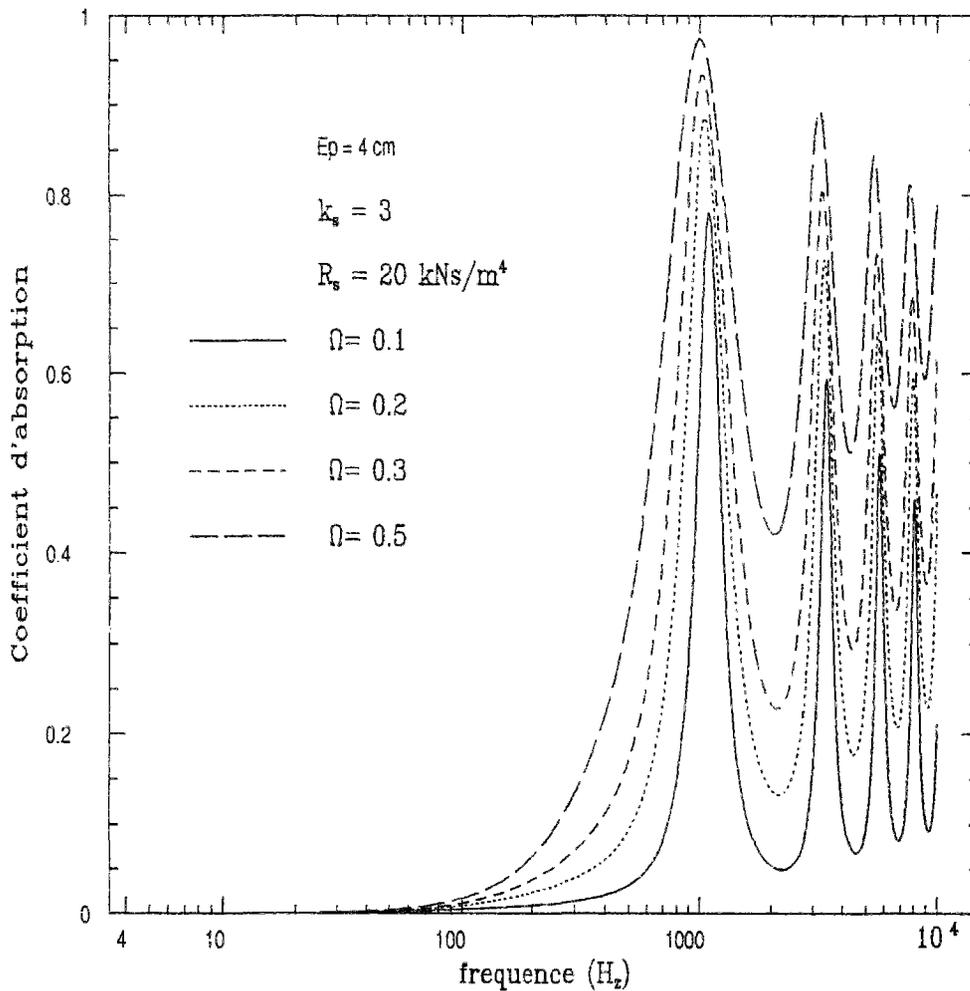


FIG. 3.3 - Influence de la porosité

les pics, il est préférable de modifier l'épaisseur.

Il est donc avantageux d'augmenter au maximum la porosité de façon à obtenir une absorption optimale. Actuellement l'utilisation de liants enrichis permet d'atteindre des teneurs en vides très élevées, pouvant atteindre 30% de vides. Des bitumes encore plus performants pourrait tout en améliorant la tenue mécanique, offrir une meilleure absorption par une porosité plus importante. On peut aussi penser à utiliser un revêtement à forte porosité sur une voie à faible trafic comme sur les bandes d'arrêt d'urgence. Quoiqu'il en soit, il serait intéressant de mener des recherches sur des couches de roulement à très fortes porosités. Outre les qualités acoustiques, celles-ci ont également l'avantage d'offrir une bonne capacité à drainer les eaux de pluies et une bonne résistance au colmatage.

3.2.4 Influence de la tortuosité

Nous calculons le coefficient d'absorption pour quatre tortuosité différentes simulant ainsi des configurations allant de pores droits ($k_s = 1$) à des pores fortement sinueux ($k_s = 6$). On maintient pour les autres paramètres les valeurs standards ($\Omega = 0.2$, $R_s = 20kNs/m^4$ et $E_p = 4\text{ cm}$).

Les résultats illustrés par la figure (3.4) indiquent qu'il y a une diminution des maxima avec la fréquence mais également avec la tortuosité.

Il est profitable d'utiliser une tortuosité permettant de positionner le premier pic au voisinage des fréquences de bruit que l'on désire atténuer. Ainsi pour une tortuosité égale à 3, le domaine fréquentiel ($500 - 1200H_z$) est alors bien couvert et on obtient une bonne réduction du bruit routier. Notons que l'on peut modifier la position du premier pic, par une augmentation de l'épaisseur. La figure (3.5) montre qu'en augmentant l'épaisseur (6 cm) l'absorption est bien meilleure pour des pores droits ($k_s = 1$) que pour des pores tortueux ($k_s = 3$). Les maxima au voisinage de $1000H_z$ sont quasiment identiques, mais la largeur du pic est plus importante. Cependant, ceci représente un coût de production supplémentaire. Il convient plutôt d'ajuster la tortuosité pour une épaisseur aussi petite que possible.

Cependant pour un milieu granulaire, la tortuosité est encore une grandeur mal maîtrisée. Sa mise en oeuvre est délicate et nécessite un savoir faire technique qu'il faut développer davantage. Il semblerait toutefois que la porosité et la tortuosité ne sont pas indépendantes. Attenborough [Attenborough, 1983] introduit la relation $k_s = \Omega^n$, où n est une constante à déterminer pour un milieu donné. Cette constante dépend de la distribution granulaire choisie et une étude statistique sur un grand nombre d'éprouvettes est nécessaire pour son identification et pour en vérifier la pertinence. Hamet par une analyse d'échantillons de laboratoire constate qu'il existe une tendance à ce que la tortuosité augmente avec le pourcentage de vides. Ici aussi, il s'agit d'un penchant à confirmer. Cette analyse met tout de même en évidence l'opportunité d'une étude granulométrique qui conditionne la tortuosité des vides.

A défaut de mesures, ce paramètre peut être ajusté de manière à caler l'outil numérique aux mesures expérimentales.

3.3 Corrélation entre résistance au passage de l'air et perméabilité mesurée *in situ*

Comme nous l'avons déjà évoqué, la résistance au passage de l'air peut être déduite de la perméabilité intrinsèque à travers une mesure *in situ* de la perméabilité relative à l'eau. On utilise en général deux types d'appareils pour définir les qualités de drainage des enrobés drainants : le perméamètre de chantier à charge variable (norme NF P 98-257-3) qui fonctionne en régime transitoire et le perméamètre automatique (NF P 98-254-4) à charge constante qui travaille en régime

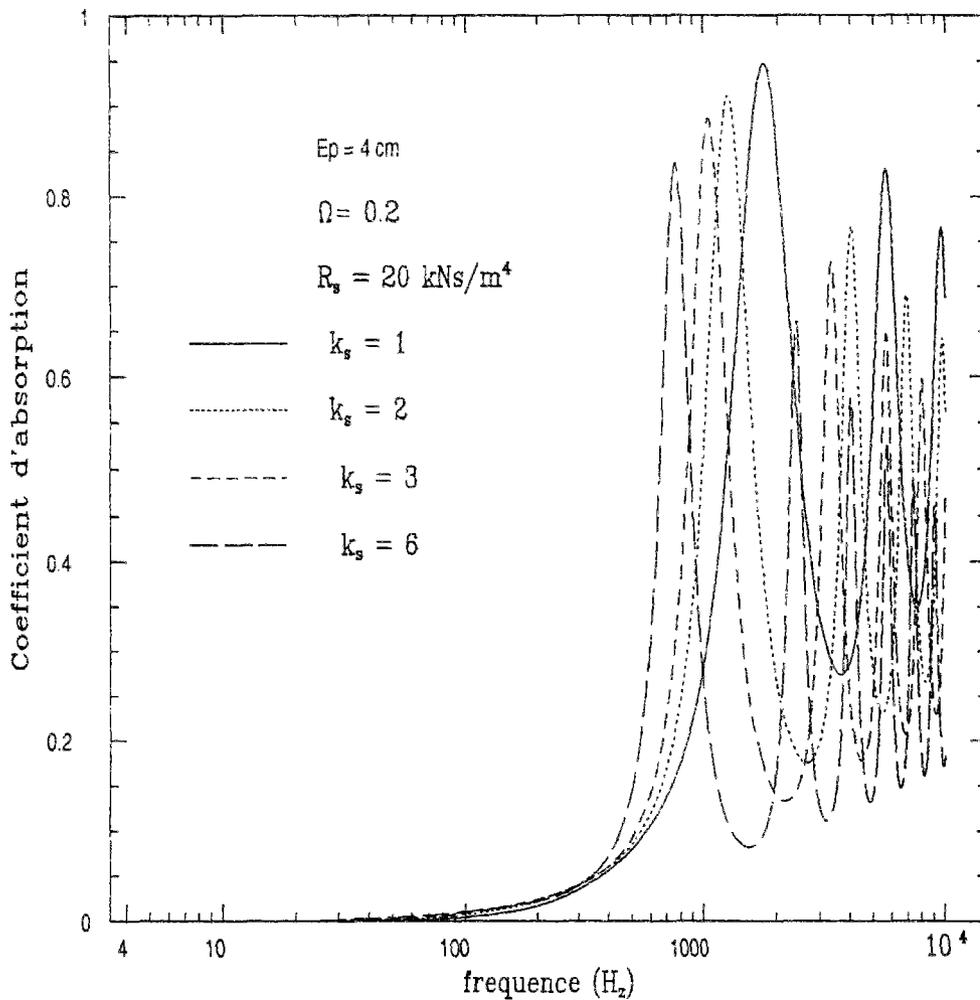


FIG. 3.4 - Influence de la tortuosité

stationnaire. Ces deux outils permettent d'effectuer des mesures directement sur la chaussée. Le perméamètre à charge constante a l'avantage de fournir des mesures courantes avec un appareillage réduit. Le perméamètre automatique donne des mesures plus fines en utilisant un matériel plus volumineux et lourd. Quoiqu'il y en soit ces deux appareils ne donnent pas une mesure de la perméabilité au sens de Darcy, mais plutôt une vitesse moyenne de percolation (en cm/s pour le perméamètre de chantier) ou encore un débit (en l/s pour le perméamètre de chantier ou encore en $\text{l/m}^2.\text{s}$ lorsque l'on divise le débit par la section du patin d'injection) et il est alors difficile de relier ces quantités à la résistance au passage de l'air.

Une étude récente menée à l'ENTPE [Di Benedetto *et al.*, 1996] nous a permis de surmonter cette difficulté. Celle-ci fut consacrée à la mise au point d'un perméamètre de laboratoire régulé en température et susceptible de fournir une estimation de la perméabilité de Darcy relative à un fluide. Les auteurs se sont

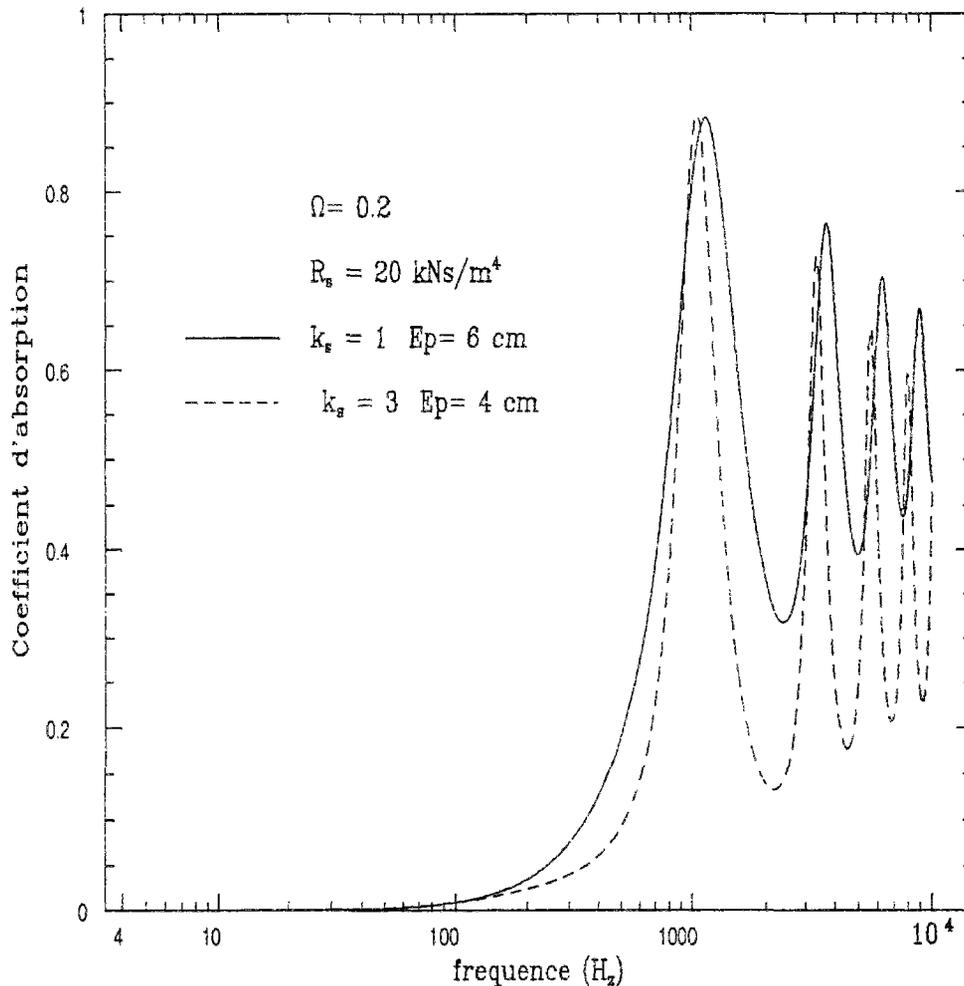


FIG. 3.5 - Optimisation de la tortuosité

également efforcés de dégager une relation entre cette mesure et celle donnée par les perméamètres à charge variable et constante. Ils mettent ainsi en évidence une relation de proportionnalité entre la perméabilité de Darcy \mathcal{K} et les perméabilités V_q et V_p données respectivement par les perméamètres automatique et de chantier. Nous nous contenterons d'en donner les résultats, le lecteur pourra se reporter à leur publication pour d'avantage de détails. Nous dirons simplement que les auteurs modélisent le fonctionnement du perméamètre en utilisant un calcul numérique en régime stationnaire lorsqu'il s'agit du perméamètre automatique et en raison du caractère transitoire de l'écoulement pour un perméamètre de chantier, une méthode associant un calcul analytique couplé à un développement numérique dans un cas stationnaire.

Pour un revêtement donné, les coefficients de proportionnalité (notés A et β) dépendent de l'épaisseur et de la porosité pour le perméamètre de chantier et uniquement de l'épaisseur lorsqu'il s'agit du perméamètre automatique. Les

relations recherchées s'expriment donc de la manière suivante :

$$\mathcal{K} = A(E_p) V_q \quad (3.2)$$

$$\mathcal{K} = \beta(E_p, \Omega) V_p \quad (3.3)$$

Le calcul de ces coefficients est résumé par les tableaux (3.1) et (3.2) pour différentes épaisseurs et porosités que l'on retrouve généralement dans les revêtement poreux classiques :

$E_p(cm)$	$A(E_p)$
4	1.74
6	1.24
8	0.99

TAB. 3.1 - Coefficient A reliant la perméabilité relative de Darcy et la mesure effectuée à l'aide d'un perméamètre automatique

$E_p(cm)$	$\Omega(\%)$	10	12	15	17	20	22	25	27	30
4		0.891	0.871	0.812	0.775	0.723	0.692	0.659	0.641	0.613
6		0.518	0.515	0.491	0.466	0.428	0.409	0.386	0.370	0.355
8		0.358	0.370	0.349	0.328	0.300	0.284	0.266	0.257	0.245

TAB. 3.2 - Coefficient β reliant la perméabilité relative de Darcy et la mesure effectuée à l'aide d'un perméamètre de chantier à charge variable

En utilisant les valeurs numériques des coefficients A et β , nous pouvons à présent relier directement la résistance au passage de l'air à la perméabilité mesurée sur site pour des épaisseurs et porosités courantes. Le coefficient de perméabilité mesuré par le perméamètre de laboratoire est décrit par la relation suivante issue de la loi de Darcy :

$$\mathcal{K} = \frac{Q E_p}{S \Delta H} \quad (3.4)$$

où nous avons noté ΔH la différence de charge pour une éprouvette de section S et d'épaisseur E_p soumise à un flux de débit Q . Nous pouvons y associer la perméabilité intrinsèque :

$$\kappa = \frac{\mathcal{K} \eta_{sat}}{\rho_{sat} g} \quad (3.5)$$

η_{sat} , ρ_{sat} désignent respectivement la viscosité et la densité du fluide saturant, g l'accélération de la pesanteur. En notant η la viscosité de l'air saturant les pores, la résistance au passage de l'air est définie par :

$$R_s = \frac{\eta}{\kappa} \quad (3.6)$$

En reportant les équations (3.5), (3.2) et (3.3), nous exprimons directement la résistance au passage de l'air en fonction des mesures de perméabilités effectuées sur site à l'aide des perméamètres de chantier et automatique :

- Perméamètre de chantier à charge variable

$$R_s = \frac{\eta \rho_{sat} g}{\eta_{sat} \beta(E_p, \Omega) V_p} \quad (3.7)$$

- Perméamètre automatique à charge constante

$$R_s = \frac{\eta \rho_{sat} g}{\eta_{sat} A(E_p) V_q} \quad (3.8)$$

Ces deux perméamètres utilisent de l'eau comme fluide saturant, nous avons donc dans les conditions standards :

$$\eta_{sat} = 101 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1} \quad (3.9)$$

$$\rho_{sat} = 10^3 \text{ kg m}^{-3} \quad (3.10)$$

Pour le coefficient de viscosité de l'air et l'accélération de la pesanteur, nous prenons :

$$\eta = 1.84 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1} \quad (3.11)$$

$$g = 9.81 \text{ m s}^{-2} \quad (3.12)$$

3.4 Validation expérimentale

La validation a été effectuée sur une éprouvette (non usagée, c'est à dire non colmatée) fourni par la société COLAS et issue d'un carottage sur la rocade de Rion. Nous avons pu réaliser une mesure du coefficient d'absorption en incidence normale en utilisant un tube de Kundt Brüel&Kjaer de type 4002 (fig 3.6). Le

principe de mesure est relativement simple : On fixe l'éprouvette à une extrémité d'un conduit cylindrique fermée par un embout réfléchissant. A l'autre extrémité se trouve un haut parleur qui émet une onde harmonique. Celle-ci est atténuée en se réfléchissant sur l'échantillon et se superpose avec l'onde incidente. Nous obtenons ainsi un système d'ondes stationnaires dans le conduit.

Le coefficient d'absorption se calcule par une mesure de la pression à différentes positions par l'intermédiaire d'un microphone mobile. En notant p_{max} et p_{min} la pression maximale et minimale pour une fréquence donnée, le coefficient d'absorption est donné par la relation suivante :

$$\alpha = \frac{4n}{n^2 + 2n + 1} \quad \text{avec } n = \frac{p_{max}}{p_{min}} \quad (3.13)$$

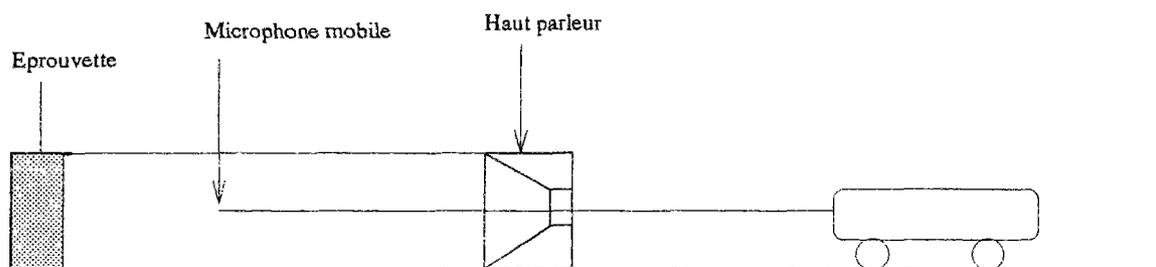


FIG. 3.6 - Tube de Kundt

Cette technique nécessite un carottage précis permettant à l'échantillon de s'insérer parfaitement dans le tube. Elle est bien entendu limitée à des fréquences inférieures à la fréquence de coupure du tube au delà de laquelle se propagent les modes supérieurs. Le tube utilisé de section circulaire et de diamètre de $0.1m$ autorise donc les fréquences inférieures à $1800H_z$.

La figure (3.7) illustre les résultats du calcul et des mesures effectuées au tube de Kundt. Tous les paramètres physiques ont été fournis par la COLAS à l'exception de la tortuosité que nous avons ajusté de manière à caler la courbe théorique aux mesures expérimentales. Nous obtenons toutefois un ordre de grandeur tout à fait plausible ($k_s = 2.5$), que l'on retrouve souvent dans la littérature. Pour ce qui est de la résistance au passage de l'air, celle-ci fut déduite d'une mesure de vitesse de percolation effectuée au perméamètre de chantier à charge variable en utilisant les considérations de la section précédente et en particulier la définition (3.7).

Les résultats sont satisfaisants notamment dans le domaine des fréquences moyennes. Pour les basses fréquences, les différences peuvent s'expliquer par une erreur de mesure des pressions. En effet, pour ces fréquences, la longueur d'onde

grande devant la dimension du tube ne nous a pas permis d'obtenir les véritables pressions maximales.

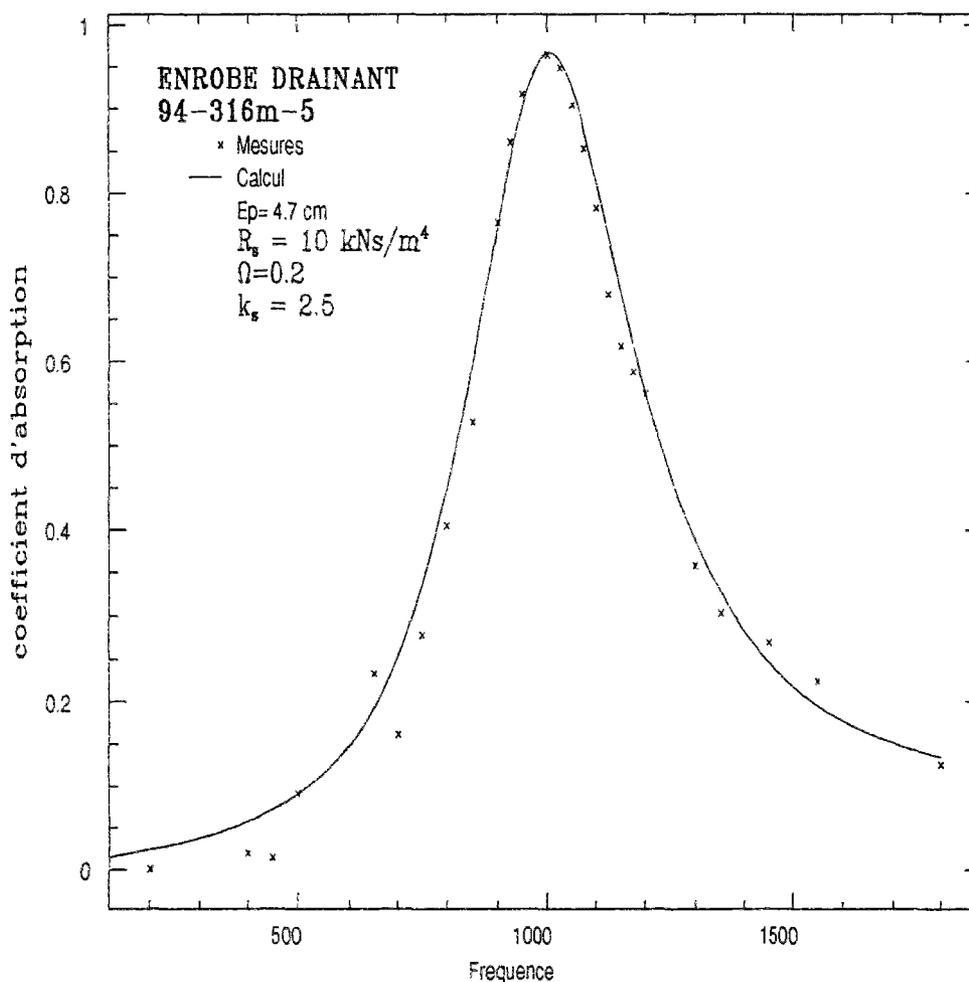


FIG. 3.7 - Comparaison entre les résultats théoriques du modèle microscopique et les mesures expérimentales

Nous avons également comparé les résultats du modèle microscopique au modèle de l'INRETS (Figure 3.8), toujours pour le même matériau, mais pour des fréquences plus grandes allant jusqu'à $5000H_z$. Les courbes d'absorption sont sensiblement identiques au voisinage du premier pic, mais différent légèrement lorsque les fréquences sont plus élevées. Nous constatons un décalage vers les basses fréquences associé à un maxima d'amplitude plus importante pour le modèle microscopique, au voisinage du second pic. Il faudrait effectuer des mesures au delà de $1800H_z$ pour identifier la modélisation la plus performante. Ceci pourrait se faire par l'utilisation d'un tube de Kundt de diamètre réduit, mais nous risquerions de perdre l'homogénéité du matériau. Quoi qu'il en soit, pour un pro-

blème d'absorption de bruit routier (voisinage des 1000Hz où se situe le premier pic pour des épaisseurs et tortuosités courantes), les deux modélisations sont tout a fait efficaces.

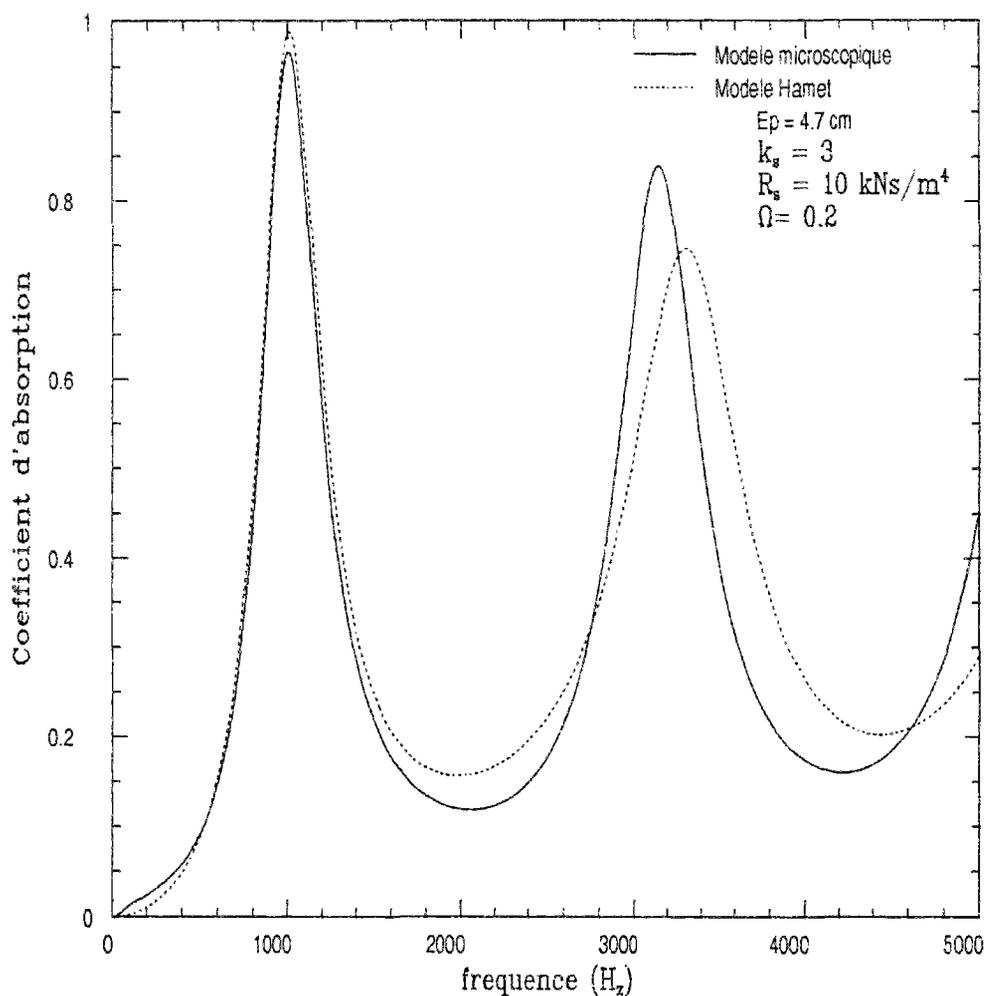


FIG. 3.8 - Comparaison entre les résultats théoriques du modèle microscopique et le modèle macroscopique de Hamet

3.5 Conclusion

Nous avons illustré la modélisation microscopique par une application aux enrobés drainants en retenant un modèle relativement simple à quatre paramètres (épaisseur, porosité, tortuosité, résistance au passage de l'air) où tous les pores sont supposés non connectés.

Les résultats validés expérimentalement, indiquent qu'une approche microscopique peut être utilisée pour optimiser le comportement acoustique de ces chaussées.

Il en ressort principalement que l'épaisseur et la tortuosité conditionnent fortement l'amplitude et la position des pics d'absorption tandis que la résistance au passage de l'air et la porosité influencent plutôt l'amortissement des oscillations.

Une situation idéale serait de construire un enrobé où les pores sont de préférence le moins tortueux, d'épaisseur suffisante pour positionner le pic au voisinage des fréquences que l'on désire atténuer, de faible résistance au passage de l'air (de manière à limiter les risques de colmatage) et de forte porosité. Bien entendu, si l'on désire atténuer les fréquences au voisinage des $1000H_z$, une diminution de la tortuosité va se traduire par une augmentation de l'épaisseur, donc du coût de production. Il faut toutefois préciser que ces propos n'indiquent que des tendances et ne sont pas en soit les résultats d'un problème d'optimisation. Celui-ci sera posé formellement en seconde partie en fonction du site considéré. Nous verrons qu'il est nécessaire d'utiliser des méthodes numériques pour le résoudre.

Nous avons pu également nous affranchir de l'utilisation d'un réamètre de laboratoire et dégager une estimation de la résistance au passage de l'air directement à partir de la vitesse de percolation mesurée *in situ*.

Il reste alors à définir une méthodologie susceptible de contrôler et reproduire la tortuosité des chaussées poreuses.

Conclusion

Cette première partie de nature bibliographique pour une bonne part, nous a permis de présenter les différents modèles utilisés pour caractériser les propriétés acoustiques de milieux poreux. Ceux-ci utilisent au moins trois paramètres (porosité, tortuosité et résistance au passage de l'air) pour décrire le matériau poreux.

Nous les avons classés en deux familles.

Le premier chapitre, consacré à la première famille, regroupe les approches macroscopiques et introduit la théorie de Biot. Celle-ci est valable lorsque le squelette est élastique et pour des dissipations thermiques négligeables. La rigidité de la phase solide simplifie les équations et donne le modèle de Biot-Allard.

Le modèle phénoménologique considère que le squelette est rigide et suppose que le matériau poreux peut être assimilé à un fluide compressible dissipatif. Le nombre de paramètres réduit et la simplicité des équations en fait un outil pratique.

Le second chapitre fut consacré à la famille des modèles issus de l'approche microscopique. Les différentes modélisations supposent que le matériau est composé de pores identiques. Ils consistent à caractériser les qualités acoustiques d'un pore pour les remonter à l'échelle macroscopique du matériau. Nous avons montré (ce qui résume l'essentiel de notre contribution à ce niveau) que l'influence de la forme du pore est négligeable dans le cadre de cette étude.

Le troisième chapitre présente une application de l'approche microscopique pour des matériaux de type enrobés drainants et indique l'influence des paramètres macroscopiques classiques (porosité, tortuosité et résistance au passage de l'air) sur les performances acoustiques.

L'approche microscopique semble révéler que l'utilisation de trois paramètres (Ω , R_s et k_s) est insuffisante lorsque l'on considère des pores à géométries complexes. Cependant, le régime de validité des différents modèles généralisés par l'introduction de paramètres additionnels n'est toujours très clair. Il apparaît même un désaccord entre les modèles qui utilisent un nombre de variables complémentaires différent. D'un autre côté, la littérature souligne souvent les incom-

patibilités entre les résultats issus des méthodes théoriques et ceux fournis par l'expérience.

Nous pensons qu'il est nécessaire d'affiner la description du réseau poreux pour expliquer ces différences et enrichir les modèles existants. Cela ne peut se faire que dans le cadre d'une approche à l'échelle du pore, et sera l'objet de la seconde partie de ce document.

Deuxième partie

Milieu poreux avec discontinuités

Introduction

Cette seconde partie a pour objectif d'analyser les propriétés acoustiques de milieux poreux complexes composés de pores tortueux de natures distinctes.

La littérature propose différents modèles susceptibles de traiter ce type de matériau. Ceux-ci consistent à généraliser les approches classiques (valables pour des pores de section constante) par l'introduction de paramètres supplémentaires tout en supposant que le réseau poreux est constitué de pores identiques.

Bien entendu, toutes ces modélisations ont fait l'objet de validations expérimentales. Il existe toutefois des incohérences entre elles. Certains modèles utilisent un paramètre supplémentaire, tandis que d'autres estiment qu'il est nécessaire d'en introduire un second. Les formulations théoriques de certains paramètres ont même été contredites de manière expérimentale.

Nous proposerons donc d'établir de nouvelles écritures pour ces quantités de manière à unifier les modèles existants et à préciser le domaine de validité de chacun. Ceux-ci supposent tous des pores identiques, et de manière à enrichir les paramètres recherchés, nous les considérerons différents.

Nous obtiendrons au premier chapitre l'expression analytique de l'impédance d'une surface poreuse. La démonstration rigoureuse que nous proposerons utilise une formulation intégrale pour la pression acoustique et nous permet de considérer des pores caractérisés par des impédances différentes.

Le second chapitre examinera de manière théorique la propagation d'ondes acoustiques dans des milieux poreux complexes. Nous parviendrons à identifier les écritures des paramètres classiques et supplémentaires qui seront reportées dans un modèle généralisé.

Le dernier chapitre présentera le modèle discret et le résultat de quelques simulations. Nous préciserons le régime de validité du modèle classique (qui suppose des pores identiques de section constante), du modèle généralisé (par l'introduction de deux paramètres complémentaires) et du modèle discret.

Chapitre 1

Propagation dans un demi-espace infini limité par une surface poreuse

Nous proposons dans ce chapitre d'étudier la propagation du son en milieu extérieur, au dessus d'un revêtement poreux. Celui-ci est caractérisé par une distribution d'impédances de pores connue et notre ambition est d'établir une écriture analytique pour l'impédance moyenne équivalente. On considère bien entendu, que les pores sont de natures différentes.

Comme on peut l'imaginer, un certain nombre d'aspects caractéristiques du comportement acoustique des revêtements poreux ne peuvent s'interpréter qu'au niveau de la microstructure. Mais dans le même temps, l'ensemble des informations sur l'état local est tout à fait inutile à l'ingénieur. Il est d'autre part hors de question de calculer effectivement cet état local, ce qui nécessiterait par un calcul par éléments finis un maillage de toute la surface poreuse, au niveau qui nous intéresse (en particulier autour de chaque pore). Nous nous attacherons donc à obtenir une formulation analytique de l'impédance moyenne aussi simple que possible dans le domaine des basses fréquences (grandes longueurs d'ondes devant les dimensions du pore).

Dans un premier temps, nous rappellerons les formulations intégrales de la pression acoustique (§1.1). Nous définirons ainsi la fonction de Green et donnerons l'écriture de la pression pour un problème intérieur et extérieur.

Nous appliquerons les résultats obtenus au problème qui nous intéresse, c'est à dire un demi-espace infini limité par la surface poreuse (§1.2). Cette formulation sera simplifiée par l'utilisation de conditions aux limites au niveau du revêtement de type Neumann homogène pour la fonction de Green, et une condition de Sommerfeld traduisant une énergie acoustique nulle au voisinage de l'infini.

Moyennant quelques approximations, notre domaine d'intégration infini sera ramené à une surface bornée. Celle-ci sera discrétisée et notre formulation intégrale pourra alors s'écrire sous la forme d'une somme de Riemann. On introduit alors aux basses fréquences une impédance moyenne par cellule et par la suite une impédance moyenne pour la surface poreuse lorsqu'il s'agit d'un milieu homogène.

1.1 Formulation intégrale

Nous assimilons l'air libre à un fluide parfait non dissipatif. Dans ces conditions, l'équation des ondes avec termes de source s'écrit de la manière suivante :

$$\Delta p(\vec{r}, t) - \frac{1}{c_o^2} \frac{\partial^2 p(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = -f(\vec{r}, t) \quad (1.1)$$

Cette relation est déduite des équations du mouvement (§1.2.27) et de conservation de la masse (2.28) en tenant compte des forces et du débit de masse par unité de volume, lorsque le fluide est supposé parfait et non dissipatif. Pour un régime harmonique, avec une dépendance temporelle de type $e^{i\omega t}$, l'équation du mouvement (1.1) se transforme en équation de Helmholtz inhomogène :

$$\Delta p(\vec{r}) + k^2 p(\vec{r}) = -f(\vec{r}) \quad (1.2)$$

avec $k = \omega/c_o$. Sous réserve d'existence de la transformée de Fourier, nous obtenons la même expression pour une dépendance temporelle quelconque. La dépendance temporelle ne sera pas mentionnée par la suite et nous proposons de résoudre le problème suivant : trouver la pression $p(\vec{r})$ en un point \vec{r} due à l'action d'une source placée en \vec{r}_o dans un volume V limité par une surface S .

Ce problème est dit intérieur, car la pression recherchée se trouve à l'intérieur de la surface. Il s'écrit :

$$\begin{cases} \Delta p(\vec{r}) + k^2 p(\vec{r}) = -f(\vec{r}) & \text{dans } V \\ \text{Conditions aux limites sur } S \end{cases} \quad (1.3)$$

Les conditions aux limites sont de type Neumann, Dirichlet ou encore mixte. Nous tacherons de résoudre le système (1.3) à l'aide d'une formulation intégrale utilisant les fonctions de Green. Afin de clarifier l'exposé, nous rappellerons la définition de la fonction Green ainsi que le théorème de Green dont l'utilité apparaîtra par la suite. Le problème sera exprimé en fonction de deux variables \vec{r} et \vec{r}_o qui peuvent être généralement interprétées comme les positions du point d'observation et du point source respectivement.

1.1.1 Définition de la fonction de Green

La fonction de Green est solution de l'équation inhomogène de Helmholtz suivante:

$$\Delta G(\vec{r}, \vec{r}_o) + k^2 G(\vec{r}, \vec{r}_o) = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_o) \quad (1.4)$$

et satisfait des conditions aux limites homogènes (Dirichlet, Neumann ou mixte) sur S . \vec{r}_o est le point source et l'opérateur laplacien opère sur la variable \vec{r} .

La fonction de Green est symétrique en \vec{r} et \vec{r}_o , c'est à dire par rapport au point d'observation et par rapport au point source :

$$G(\vec{r}, \vec{r}_o) = G(\vec{r}_o, \vec{r}) \quad (1.5)$$

1.1.2 Théorème de Green

Considérons un volume V constitué par un contour S formé par un nombre fini de surfaces rectifiables. Soient Φ et G deux fonctions deux fois continument différentiables dans V et S , nous avons :

$$\int_V (G \Delta \Phi - \Phi \Delta G) dV = \int_S (G \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial G}{\partial n}) dS \quad (1.6)$$

$\frac{\partial}{\partial n}$ désigne la dérivée par rapport à la normale \vec{n} extérieure à S .

1.1.3 Pression acoustique pour un problème intérieur

Il s'agit de calculer la pression acoustique en un point de coordonnées \vec{r} due à l'action d'une source placée en \vec{r}_o à l'intérieur d'un volume intérieur V_i (Figure 1.1).

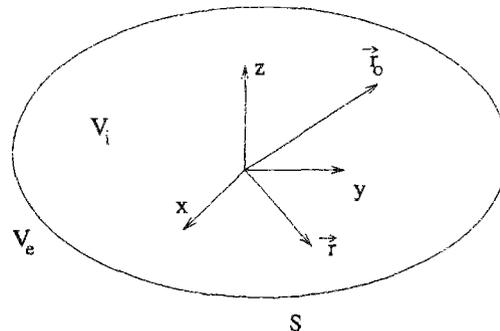


FIG. 1.1 - Géométrie du problème intérieur

La résolution du problème consiste à associer au système différentiel constitué par l'équation de Helmholtz et les conditions aux limites sur S pour la pression,

un système où intervient la fonction de Green :

- Equation de Helmholtz et conditions aux limites pour la pression :

$$\begin{cases} \Delta p(\vec{r}) + k^2 p(\vec{r}) = -f(\vec{r}) & \text{dans } V \\ \text{Conditions aux limites sur } S \text{ pour } p \end{cases} \quad (1.7)$$

- Système associé :

$$\begin{cases} \Delta G(\vec{r}, \vec{r}_o) + k^2 G(\vec{r}, \vec{r}_o) = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_o) \\ \text{Conditions aux limites sur } S \text{ pour } G \end{cases} \quad (1.8)$$

Par la suite, les quantités (volume, surface, normale) repérées par la variable \vec{r}_o seront identifiées par l'indice o . En multipliant l'équation différentielle vérifiée par la pression (1.7) par G , et l'équation associée à la fonction de Green (1.8) par p , puis en soustrayant, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \Delta p(\vec{r}) G(\vec{r}, \vec{r}_o) - \Delta G(\vec{r}, \vec{r}_o) p(\vec{r}) \\ &= -f(\vec{r}) G(\vec{r}, \vec{r}_o) + p(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_o) \end{aligned} \quad (1.9)$$

La propriété essentielle des fonctions de Green est la symétrie. Nous pouvons donc interchanger \vec{r} et \vec{r}_o sans modifier la fonction G . Il en est de même pour la fonction de Dirac. Une fois ce changement effectué, et après intégration sur le volume intérieur V_i , nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \int_{V_i} \left[\Delta p(\vec{r}_o) G(\vec{r}, \vec{r}_o) - \Delta G(\vec{r}, \vec{r}_o) p(\vec{r}_o) \right] dV_o \\ &= - \int_{V_i} \left[f(\vec{r}_o) G(\vec{r}, \vec{r}_o) - p(\vec{r}_o) \delta(\vec{r} - \vec{r}_o) \right] dV_o \end{aligned} \quad (1.10)$$

L'opérateur laplacien porte à présent sur la variable \vec{r}_o . En utilisant le théorème de Green (1.6), nous obtenons l'écriture de la pression, plus connue sous le nom d'équation de Helmholtz-Huygens :

$$\begin{aligned} p(\vec{r}) &= \int_{V_i} f(\vec{r}_o) G(\vec{r}, \vec{r}_o) dV_o \\ &+ \int_S \left[G(\vec{r}, \vec{r}_o) \frac{\partial p(\vec{r}_o)}{\partial n_o} - p(\vec{r}_o) \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}_o)}{\partial n_o} \right] dS_o \end{aligned} \quad (1.11)$$

L'écriture de la pression acoustique en un point intérieur se compose donc de la pression due à la distribution de sources $f(\vec{r}'_o)$ et de celle générée par les limites du domaine. L'onde acoustique réfléchiée par ces limites est la superposition de contributions de type monopolaire (terme en G) et de type dipolaire (terme en $\frac{\partial G}{\partial n}$). Elle dépend des propriétés acoustiques de la frontière (impédance) et des caractéristiques de l'onde incidente.

1.1.4 Formulation intégrale pour un problème extérieur-Condition de Sommerfeld

◇ Condition de Sommerfeld

Cette condition correspond à la géométrie d'un problème intérieur où la surface S est rejetée à l'infini. Elle signifie qu'en l'absence de source à l'infini, la pression due à la réaction des limites du domaine est nulle et donc l'intégrale de surface qui apparaît dans l'écriture de l'équation de Helmholtz-Huygens s'annule. Pour un domaine infini, la fonction de Green s'écrit :

$$G(\vec{r}', \vec{r}'_o) = \frac{e^{-i k |\vec{r}' - \vec{r}'_o|}}{4 \pi |\vec{r}' - \vec{r}'_o|} \quad (1.12)$$

La contribution des limites du domaine s'écrit donc sous la forme d'une intégrale sur l'angle solide Θ qui varie de 0 à 4π :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \oint \left[\frac{e^{-i k R}}{4 \pi R} \frac{\partial p}{\partial R} - p \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{e^{-i k R}}{4 \pi R} \right) \right] R^2 d\Theta \quad (1.13)$$

avec $R = |\vec{r}' - \vec{r}'_o|$. La surface considérée est une sphère de rayon infini. L'intégrale (1.13) est nulle si :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} R \left(\frac{\partial p}{\partial R} + i k p \right) = 0 \quad (1.14)$$

Nous obtenons ainsi la condition de Sommerfeld.

◇ Problème extérieur

Nous allons à présent rechercher l'écriture de la pression pour un problème extérieur vérifiant la condition de Sommerfeld. Nous recherchons donc la pression en un point \vec{r}' due à l'action du point \vec{r}'_o à l'intérieur du volume V_e extérieur à S et limité par la surface fermée Σ d'une sphère centrée en 0 et de rayon

R (Figure 1.2). Pour un rayon suffisamment grand et en l'absence de sources au voisinage de Σ , les conditions de Sommerfeld peuvent être utilisées avec une bonne approximation.

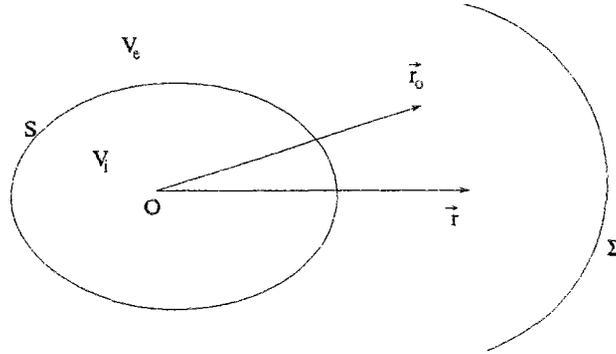


FIG. 1.2 - Géométrie du problème extérieur

Nous utilisons la même technique que pour le problème intérieur, en effectuant une intégration dans le volume extérieur V_e et tenant compte de l'orientation de la normale vers l'intérieur du volume V_e pour la surface S et vers l'extérieur pour Σ .

La contribution de S est donc négative et celle de Σ , positive s'annule à l'aide de la condition de Sommerfeld. Nous obtenons en définitive :

$$\begin{aligned} \forall \vec{r} \in V_e \quad p(\vec{r}) &= \int_{V_e} f(\vec{r}_o) G(\vec{r}, \vec{r}_o) dV_o \\ + \int_S \left[p(\vec{r}_o) \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}_o)}{\partial n} - \frac{\partial p(\vec{r}_o)}{\partial n} G(\vec{r}, \vec{r}_o) \right] dS_o \end{aligned} \quad (1.15)$$

Lorsque le point \vec{r} tend vers un point de la surface, l'écriture (1.15) de la pression devient :

$$\begin{aligned} \forall \vec{r} \in S \quad \frac{1}{2} p(\vec{r}) &= \int_{V_e} f(\vec{r}_o) G(\vec{r}, \vec{r}_o) dV_o \\ + \int_S \left[p(\vec{r}_o) \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}_o)}{\partial n} - \frac{\partial p(\vec{r}_o)}{\partial n} G(\vec{r}, \vec{r}_o) \right] dS_o \end{aligned} \quad (1.16)$$

1.2 Application de la formulation intégrale au problème d'une surface poreuse

1.2.1 Formulation intégrale

Nous cherchons à calculer la pression acoustique en un point d'une surface plane poreuse soumise à un chargement acoustique p_{inc} (Figure 1.3). Nous utiliserons pour cela la formulation intégrale de la pression acoustique dans un volume extérieur avec condition de Sommerfeld (1.16) pour une surface S plane, rigide de dimensions infinies où émergent des pores. Nous supposons dans un premier temps que les pores sont répartis de manière aléatoire et que chaque pore d'indice i a une surface S_p^i et une impédance Z_p^i au niveau du plan $z = 0$.

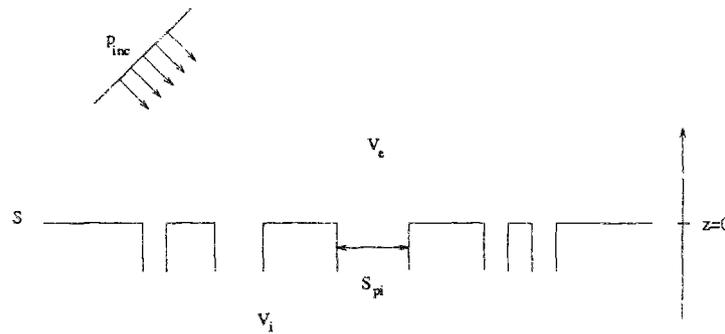


FIG. 1.3 - Problème extérieur pour une surface poreuse

Les conditions aux limites pour la pression s'écrivent :

$$\frac{\partial p(\vec{r})}{\partial n} = -i k \rho_0 c \frac{p(\vec{r})}{Z(\vec{r})} \quad \text{en } z = 0 \quad (1.17)$$

où Z est l'impédance, fonction de la position, infinie lorsqu'il s'agit d'une surface rigide et égale à Z_p^i pour le pore d'indice i . De manière à simplifier la formulation intégrale de la pression, il est judicieux de choisir une fonction de Green vérifiant des conditions aux limites sur S de type Neumann homogène :

$$\frac{\partial G}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } S \quad (1.18)$$

Pour un espace infini, elle est donnée par :

$$G(\vec{r}, \vec{r}_o) = \frac{e^{-i k |\vec{r} - \vec{r}_o|}}{4 \pi |\vec{r} - \vec{r}_o|} + \frac{e^{-i k |\vec{r} - \vec{r}'_o|}}{4 \pi |\vec{r} - \vec{r}'_o|} \quad (1.19)$$

où \vec{r}'_o est symétrique de \vec{r}_o par rapport au plan de la surface S . On a donc d'après l'équation (1.16) :

$$\forall \vec{r} \in S \quad \frac{1}{2} p(\vec{r}) = p_{inc}(\vec{r}) - \int_S \frac{\partial p(\vec{r}'_o)}{\partial n} G(\vec{r}, \vec{r}'_o) dS_o \quad (1.20)$$

Le champ incident s'exprime bien entendu en fonction des termes de source :

$$p_{inc}(\vec{r}) = \int_{V_e} f(\vec{r}'_o) G(\vec{r}, \vec{r}'_o) dV_o \quad (1.21)$$

Par souci de commodité, nous écrivons l'écriture intégrale de la pression (1.20) sous la forme suivante en reportant la condition aux limites (1.17) :

$$\forall \vec{r} \in S \quad \frac{1}{2} p(\vec{r}) = p_{inc}(\vec{r}) + i \omega \rho_o \int_S \frac{p(\vec{r}'_o)}{Z(\vec{r}'_o)} G(\vec{r}, \vec{r}'_o) dS_o \quad (1.22)$$

où Z est une fonction discontinue, infinie lorsqu'il s'agit d'une surface rigide et égale à Z_p^i lorsqu'il s'agit de l'impédance du pore d'indice i .

De manière à intégrer dans un domaine borné et à éviter la singularité en $\vec{r} = \vec{r}'_o$ pour la fonction de Green, nous introduisons deux disques notés $D(a)$ et $D(R)$ de rayons a et R ($a \ll R$), centrés en \vec{r} tels que pour un ε donné :

- R est suffisamment grand pour que :

$$\left| \int_{S-D(R)} \frac{G(\vec{r}, \vec{r}'_o) p(\vec{r}'_o)}{Z(\vec{r}'_o)} dS_o \right| < \varepsilon \quad (1.23)$$

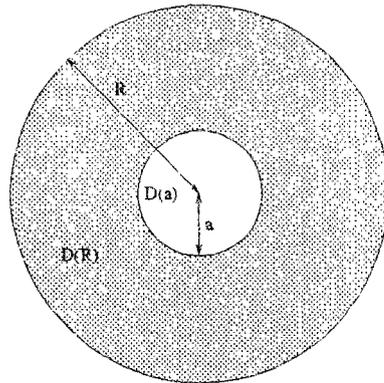
- a est suffisamment petit pour que :

$$\left| \int_{D(a)} \frac{G(\vec{r}, \vec{r}'_o) p(\vec{r}'_o)}{Z(\vec{r}'_o)} dS_o \right| < \varepsilon \quad (1.24)$$

On peut alors approcher la formulation intégrale pour la pression (1.22) par une écriture où l'intégrale ne porte que sur la couronne bornée $D(R) - D(a)$ (Figure 1.4) :

$$\forall \vec{r} \in S \quad \frac{1}{2} p(\vec{r}) = p_{inc}(\vec{r}) + i \omega \rho_o \int_{D(R)-D(a)} \frac{p(\vec{r}'_o)}{Z(\vec{r}'_o)} G(\vec{r}, \vec{r}'_o) dS_o \quad (1.25)$$

pour R suffisamment grand et a suffisamment petit pour que les inégalités (1.23) et (1.24) soient vérifiées. L'erreur étant inférieure à 2ε .

FIG. 1.4 - Couronne d'intégration $D(R)-D(a)$

1.2.2 Discrétisation

Nous décomposons le domaine $D(R) - D(a)$ en N cellules élémentaires de taille η (Figure 1.5) telles que la pression et la fonction de Green varient peu devant l'impédance au sein d'une même cellule.

Nous montrons que cette condition est valable lorsque la taille de la cellule est très petite devant la longueur d'onde. En effet, l'équation du mouvement intégrée sur une cellule dans la direction \vec{t} s'écrit :

$$\int_0^\eta (i \omega \rho_o \vec{v}(x) \cdot \vec{t} + \vec{\nabla} p(x) \cdot \vec{t}) dx = 0 \quad (1.26)$$

$$i \omega \rho_o \int_0^\eta \vec{v}(x) \cdot \vec{t} dx + p(\eta) - p(0) = 0 \quad (1.27)$$

$p(\eta)$ et $p(0)$ représentent la pression acoustique en deux points distants d'une longueur η . Nous définissons également V_{max} par :

$$V_{max} = \text{Sup} |\vec{v}(x) \cdot \vec{t}| \quad \text{pour } x \in D(R) - D(a) \quad (1.28)$$

Nous majorons ainsi l'intégrale qui se manifeste dans l'équation du mouvement (1.27) et par conséquent le gradient de pression également:

$$|p(\eta) - p(0)| \leq 2\pi \rho_o c \frac{\eta}{\lambda} V_{max} \quad (1.29)$$

où λ est la longueur d'onde. On peut donc estimer que pour de grandes longueurs d'onde devant η , la pression varie peu sur une cellule.

On montre que les variations de la fonction de Green sont également majorées sur une cellule. Posons $R_0 = |\vec{r} - \vec{r}_0|$, $R_1 = |\vec{r} - \vec{r}_1|$ où \vec{r}_0 et \vec{r}_1 sont deux points appartenant à la même cellule tels que $R_1 > R_0$. La fonction de Green est continue et admet une dérivée sur l'intervalle $[R_0, R_1]$, il existe donc d'après la formule des accroissements finis un point R de l'intervalle ouvert $]R_0, R_1[$ tel que :

$$G(R_1) - G(R_0) = (R_1 - R_0) G'(R) \quad (1.30)$$

où nous avons noté $G(R_i) = G(\vec{r} - \vec{r}_i)$ ($i = 0, 1$) de manière à simplifier l'écriture.

Les points considérés appartiennent à la même cellule, nous avons donc :

$$|R_1 - R_0| \leq \eta \sqrt{2} \quad (1.31)$$

La dérivée de la fonction de Green s'écrit :

$$G'(R) = -\left(i\frac{k}{R} + \frac{1}{R^2}\right) \frac{e^{-i k R}}{4 \pi} \quad (1.32)$$

Puisque $R > R_0 > a$, où, rappelons le, a est le rayon du disque $D(a)$ centré en \vec{r} , la dérivée de la fonction de Green est majorée :

$$|G'(R)| < \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{k^2}{a^2} + \frac{1}{a^4}} \quad (1.33)$$

A l'aide de la formule des accroissements finis (1.30), les variations de la fonction de Green sont donc majorées :

$$|G(R_1) - G(R_0)| < \sqrt{\frac{8\pi^2}{a^2\lambda^2} + \frac{2}{a^4}} \frac{\eta}{4\pi} \quad (1.34)$$

La variation relative de la fonction de Green sur une cellule est donc faible si sa taille est petite devant la longueur d'onde ($\eta \ll \lambda$) et le rayon du disque $D(a)$ ($\eta \ll a$):

$$\frac{|G(R_1) - G(R_0)|}{|G(R_0)|} \ll 1 \quad (1.35)$$

Ces dernières conditions prendront tout leur sens lorsque nous ferons tendre la taille de la cellule vers 0.

On note \vec{C}_i ($i = 1, N$) le centre de la cellule.

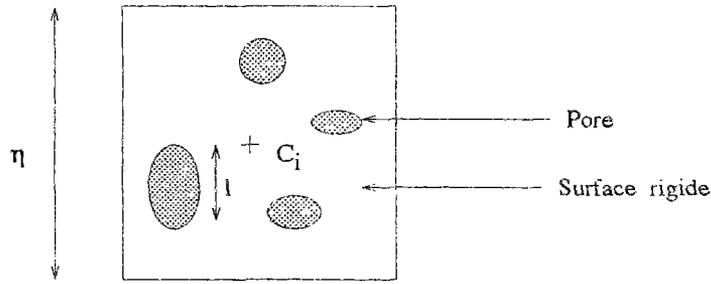


FIG. 1.5 - Cellule élémentaire

La formulation intégrale pour la pression (1.25) devient :

$$\forall \vec{r}' \in S \quad \frac{1}{2} p(\vec{r}') = p_{inc}(\vec{r}') + i \omega \rho_o \sum_{i=1}^N \int_{S_{ci}} \frac{p(\vec{r}'_o)}{Z(\vec{r}'_o)} G(\vec{r}', \vec{r}'_o) dS_o \quad (1.36)$$

où S_{ci} est la surface de la cellule d'indice i . On effectue le changement de variable suivant :

$$\vec{r}'_o = \vec{C}_i + \eta \vec{z}' \quad (1.37)$$

avec $|z'| \leq \sqrt{2}$. On obtient donc :

$$\begin{aligned} \forall \vec{r}' \in S \quad & \frac{1}{2} p(\vec{r}') = p_{inc}(\vec{r}') \\ & + i \omega \rho_o \sum_{i=1}^N \int_{\tilde{S}_{ci}} \frac{p(\vec{C}_i + \eta \vec{z}')}{Z(\vec{C}_i + \eta \vec{z}')} G(\vec{r}' - \vec{C}_i - \eta \vec{z}') \eta^2 d\vec{z}' \quad (1.38) \end{aligned}$$

où la pression et la fonction de Green sont données par les développements asymptotiques suivants :

$$p(\vec{C}_i + \eta \vec{z}') = p(\vec{C}_i) + \eta \nabla p(\vec{C}_i) \cdot \vec{z}' + \dots \quad (1.39)$$

$$G(\vec{C}_i + \eta \vec{z}') = G(\vec{C}_i) + \eta \nabla G(\vec{C}_i) \cdot \vec{z}' + \dots \quad (1.40)$$

Comme nous l'avons souligné par le passé, la pression et la fonction de Green connaissent des variations négligeables devant celles de l'impédance sur une cellule donnée. On peut donc estimer que ces grandeurs sont évaluées au centre de chaque cellule en ne retenant que les termes d'ordre 0 pour les développements

asymptotiques de la pression et de la fonction de Green. L'intégrale ne porte alors que sur l'impédance :

$$\forall \vec{r}' \in S \quad \frac{1}{2} p(\vec{r}') = p_{inc}(\vec{r}') + i\omega\rho_0 \sum_{i=1}^N p(\vec{C}_i) G(\vec{r}' - \vec{C}_i) \left[\int_{\tilde{S}_{ci}} \frac{\eta^2}{Z(\vec{C}_i + \eta \vec{z})} d\vec{z} + O(\eta^3) \right] \quad (1.41)$$

1.2.3 Calcul de l'impédance moyenne

On introduit une impédance moyenne par cellule $\overline{Z}(\vec{C}_i)$ définie par :

$$\frac{1}{\overline{Z}(\vec{C}_i)} = \frac{1}{S_{ci}} \int_{S_{ci}} \frac{1}{Z(\vec{C}_i + \eta \vec{z})} dS_{ci} \quad (1.42)$$

L'écriture de la pression est alors donnée par :

$$\forall \vec{r}' \in S \quad \frac{1}{2} p(\vec{r}') = p_{inc}(\vec{r}') + i\omega\rho_0 \sum_{i=1}^N p(\vec{C}_i) G(\vec{r}' - \vec{C}_i) \frac{S_{ci}}{\overline{Z}(\vec{C}_i)} + O(\eta^3) \quad (1.43)$$

Nous obtenons en définitive une somme de Riemann. Lorsque le nombre de subdivisions N du domaine $D(R) - D(a)$ tend vers l'infini, c'est à dire lorsque la taille η de la cellule tend vers 0, la somme de Riemann tend vers une écriture intégrale :

$$\forall \vec{r}' \in S \quad \frac{1}{2} p(\vec{r}') = p_{inc}(\vec{r}') + i\omega\rho_0 \int_{D(R)-D(a)} \frac{p(\vec{r}'_o)}{\overline{Z}(\vec{r}'_o)} G(\vec{r}', \vec{r}'_o) dS_o \quad (1.44)$$

Pour résumer, nous avons transformé, dans le régime des basses fréquences, une formulation intégrale (1.22) sur un domaine S infini où l'impédance était fortement discontinue, vers une formulation plus simple (1.44) où le domaine d'intégration est borné et où l'on définit une impédance moyenne par cellule évoluant doucement d'une cellule à une autre.

A ce niveau, nous pouvons traiter quelques exemples simples. En effet, si l'on s'intéresse à un milieu statistiquement homogène, nous pouvons considérer que toutes les cellules sont identiques. L'impédance moyenne d'une cellule élémentaire ne dépend donc plus de la position ($\overline{Z}(\vec{C}_i) = \overline{Z}$) et s'identifie donc à une impédance moyenne (notée Z^s) du revêtement poreux qui s'écrit d'après (1.42) :

$$\frac{1}{Z^s} = \frac{1}{S_{ci}} \int_{S_{ci}} \frac{1}{Z(\vec{r}'_o)} dS_{ci} \quad (1.45)$$

$$= \frac{1}{S} \int_S \frac{1}{Z(\vec{r}'_o)} dS_o \quad (1.46)$$

où S est la surface du revêtement poreux. L'impédance s'écrit donc sous la forme d'une moyenne dans l'espace de la distribution des impédances microscopiques. Il s'agit là d'un résultat important qui nous sera très utile par la suite lorsque nous construirons un modèle discret pour le calcul de l'impédance de surface d'un milieu poreux composé de pores de natures différentes.

Si nous supposons que tous les pores sont identiques et qu'il existe N_p pores de surface S_p et d'impédance Z_p , l'impédance du revêtement s'écrit :

$$\frac{1}{Z^s} = \frac{N_p S_p}{S} \frac{1}{Z_p} \quad (1.47)$$

En introduisant la porosité de surface Ω_s , rapport de la surface des vides sur la surface du revêtement, nous retrouvons l'écriture classique de l'impédance d'un milieu poreux :

$$Z^s = \frac{Z_p}{\Omega_s} \quad (1.48)$$

Notons que la définition (1.45) de l'impédance, nous permet également de traiter des surfaces où émergent des pores de natures différentes. Si nous recensons M types de pores différents et que pour chaque type nous associons une impédance Z_p^i , une surface S_p^i et un nombre de pores N_i , ($i = 1, M$), l'écriture de l'impédance est donnée par :

$$\frac{1}{Z^s} = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^M \frac{N_i S_p^i}{Z_p^i} \quad (1.49)$$

Nous introduisons la notion de porosité partielle Ω_s^i qui quantifie le pourcentage de pores de chaque catégorie :

$$\Omega_s^i = \frac{N_i S_p^i}{S} \quad \text{avec } i = 1, M \quad (1.50)$$

L'impédance de surface (1.49) devient :

$$\frac{1}{Z^s} = \sum_{i=1}^M \frac{\Omega_s^i}{Z_p^i} \quad (1.51)$$

Bien entendu, la somme des porosités partielles n'est rien d'autre que la porosité totale de surface.

1.3 Conclusion

Ce chapitre fut consacré à une recherche de l'impédance équivalente d'une surface rigide perforée de petits orifices. Nous avons pu assimiler un milieu caractérisé par une impédance fortement discontinue à un milieu où l'impédance évolue doucement en fonction de la position. Nous avons utilisé pour cela une formulation intégrale couplée à une technique d'homogénéisation. Cela a été possible en supposant que la pression et la fonction de Green varient peu devant l'impédance au sein d'une même cellule, ce qui réduit le domaine d'application aux basses fréquences où la taille de la cellule, donc des pores, est petite devant la longueur d'onde.

Lorsque le milieu est supposé homogène, il apparaît alors que l'impédance s'écrit sous la forme d'une moyenne dans l'espace. Nous retrouvons alors l'écriture de l'impédance de surface établie au chapitre précédent pour un milieu poreux homogène constitué de pores identiques. Nous rappelons que cette dernière formulation a été obtenue autrement, en utilisant la continuité des pressions et débits au niveau de la surface du matériau.

Cette méthode a donc l'avantage d'offrir une écriture analytique de l'impédance relativement simple et permet également de traiter, toujours pour un milieu homogène, une surface où les pores sont de natures différentes. Elle nous sera utile lorsque nous calculerons l'impédance du surface dans le cadre du modèle discret qui sera développé au dernier chapitre.

Nous utiliserons également l'hypothèse de faibles variations de la pression à la surface du milieu poreux pour le modèle généralisé et dit en parallèle qui sera présenté au prochain chapitre.

Chapitre 2

Approche discrète

Nous proposons de consacrer ce chapitre à une étude de l'influence de la distribution de taille de pores sur les propriétés acoustiques des milieux poreux.

Ceux-ci sont en effet rarement constitués de pores de section constante, et sont plutôt l'objet de discontinuités de type étranglement ou encore "coude". Nous définissons ainsi une première catégorie de distribution, dite en série. Nous envisagerons une seconde où les pores ont des caractéristiques (physiques et acoustiques) différentes. Nous parlerons alors de distribution en parallèle.

Pour traiter cette analyse, nous utiliserons une modélisation relativement simple où le pore est assimilé à une série de conduits élémentaires de natures différentes.

Une approche similaire a été adoptée par Champoux et Stinson [Champoux *et al.*, 1992] qui définissent des fonctions complexes de densité et de compressibilité à l'échelle microscopique d'un conduit élémentaire et d'un pore, puis les généralisent à l'échelle macroscopique du milieu poreux en supposant que tous les pores sont identiques et que les effets associés aux discontinuités sont négligeables. Ces quantités sont sensées qualifier et quantifier complètement les propriétés acoustiques de milieux poreux. Ces auteurs proposent ainsi une formulation des paramètres caractérisant physiquement le milieu poreux qui prend en compte les changements de section le long du pore. Ils supposent alors que la pression est constante lorsque l'équation de continuité est intégrée (Hypothèse H1) et que le débit acoustique n'est pas modifié lorsque l'on considère l'équation du mouvement (Hypothèse H2). Ces hypothèses appliquées à l'échelle du pore, nous conduisent à introduire deux paramètres supplémentaires sensibles aux changements de section.

Notre approche s'inspire de cette modélisation. Nous ne travaillerons toutefois que dans le régime des hautes fréquences où l'épaisseur de la couche limite

visqueuse est inférieure aux dimensions transversales du pore. Nous considérons toutefois de grandes longueurs d'onde devant les dimensions caractéristiques du pore. Le problème est exprimé en terme de matrices de transfert reliant les pressions et vitesses moyennes de part et d'autre du matériau poreux. En utilisant un développement en puissance de $(k_o E_p)^{1/2}$ ($k_o = \omega/c_o$ est le nombre d'onde et E_p l'épaisseur du milieu poreux que l'on désire étudier), nous parvenons à enrichir l'approche de Champoux en tenant compte de l'influence des discontinuités et en introduisant deux paramètres supplémentaires qui caractérisent non seulement les changements de section, mais également l'ordre selon lequel les conduits élémentaires sont distribués. Nous montrons également que les hypothèses H1 et H2 ne sont plus valables au second ordre lorsque qu'elles s'appliquent à l'échelle d'un pore. Ces propos seront développés pour le modèle en série.

Celui-ci sera généralisé, par l'analyse du modèle en parallèle où le milieu poreux est constitué de pores de natures différentes. Nous tacherons d'en définir les propriétés acoustiques et de proposer de nouvelles formulations pour les paramètres physiques, qu'ils soient classiques ou supplémentaires.

Dans un premier temps, nous tacherons de définir la matrice de transfert d'un pore tortueux (§2.1). Celle-ci est obtenue en calculant pour chaque conduit élémentaire une matrice de transfert microscopique, par une intégration des équations de continuité et du mouvement sur le volume correspondant. Les discontinuités sont représentées de la même manière. La matrice recherchée est alors donnée par le produit des matrices élémentaires.

Les résultats établis dans cette première partie seront généralisés à l'échelle du matériau où tous les pores sont supposés identiques (§2.2). Nous tacherons d'identifier les paramètres classiques, ainsi que ceux liés à la distribution de taille de pores. L'expression de l'impédance de surface d'un matériau reposant sur un fond rigide sera alors proposée pour le régime des hautes fréquences, dans le cadre d'une distribution en série.

Une démarche similaire sera adoptée pour la distribution en parallèle où nous considérerons des pores de natures différentes (§2.3). Nous utiliserons une formulation en terme de matrices d'admittances qui se prêtent mieux à ce type de problème. Nous travaillerons dans l'esprit de l'approche Champoux&Stinson en appliquant les propriétés H1 et H2 à l'échelle du pore et parvenons ainsi à généraliser les écritures des paramètres caractérisant le milieu poreux. Dans ces conditions, nous obtenons une expression de l'impédance de surface pour un régime fréquentiel large.

Par la suite, nous ferons référence à certains modèles présentés en première partie. Ceux-ci seront dit classiques lorsqu'ils se contentent d'utiliser des para-

mètres traditionnels (porosité, tortuosité et résistance à l'écoulement de l'air) et généralisés lorsqu'ils font appel à des quantités supplémentaires.

Il est utile de préciser que la définition de l'impédance (1.51) obtenue au chapitre précédent peut s'appliquer dans le cadre d'une modélisation en série ou en parallèle. Elle fournit d'ailleurs les mêmes résultats, mais ne permet pas d'identifier simplement les paramètres physiques macroscopiques. C'est la raison pour laquelle nous avons privilégié une formulation matricielle.

2.1 Matrice de transfert d'un pore tortueux

Le pore tortueux est assimilé à une série de M conduits droits dont la section peut varier de manière aléatoire. En raison de la faible influence de la forme du pore, nous supposons que toutes les sections sont circulaires pour nous limiter uniquement à l'influence des changements de dimensions transversales. Par la suite, pour toutes les quantités associées à un conduit élémentaire droit, nous affecterons un indice j et noterons S_j et Δz_j respectivement la section et la longueur correspondante.

Nous donnerons dans un premier temps l'écriture de la matrice de transfert associée à un conduit élémentaire et à une discontinuité pour les généraliser à l'échelle d'un pore. Ces expressions seront proposées pour le régime des basses et hautes fréquences. Les résultats obtenus seront étendus à l'échelle macroscopique du matériau dans la section suivante où nous tâcherons de retrouver des paramètres classiques et d'en introduire de nouveaux associés aux discontinuités.

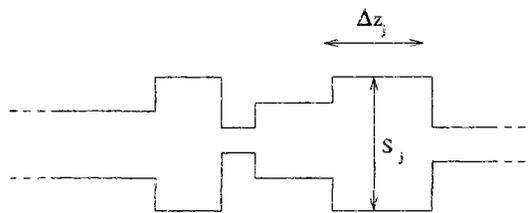


FIG. 2.1 - Pore tortueux

2.1.1 Matrice de transfert d'un conduit élémentaire droit

Lorsqu'il s'agit d'un fluide viscothermique, les densités et compressibilités classiques sont substituées par des grandeurs complexes équivalentes (§1.2.3.2).

Dans ces conditions l'expression des équations du mouvement et de continuité sont données par les relations (I.2.80) et (I.2.81) que nous rappelons ci-dessous :

$$i \omega \rho(\omega) \langle v_z \rangle = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad (2.1)$$

$$i \omega C(\omega) p = -\frac{\partial \langle v_z \rangle}{\partial z} \quad (2.2)$$

Ces équations sont intégrées sur un volume V_j entre deux sections $S_j(z)$ et $S_j(z + \Delta z_j)$. Pour l'équation de continuité, nous obtenons :

$$i\omega \int_{V_j} C(\omega) p(z) dV_j + \int_{S_j(z+\Delta z_j)} \langle v_z \rangle (z + \Delta z_j) dS_j - \int_{S_j(z)} \langle v_z \rangle (z) dS_j = 0 \quad (2.3)$$

La section étant constante, nous pouvons sortir la compressibilité de l'intégrale. Nous supposons que la pression varie peu sur une petite longueur Δz_j (Hypothèse H1) et en introduisant le débit acoustique q , il vient :

$$i \omega C(\omega) p(z) S_j \Delta z_j + q(z + \Delta z_j) - q(z) = 0 \quad (2.4)$$

L'équation du mouvement (2.1) est traitée de manière identique :

$$i \omega \int_{V_j} \rho(\omega) \langle v_z \rangle (z) dV_j + \int_{S_j(z+\Delta z_j)} p(z + \Delta z_j) dS_j - \int_{S_j(z)} p(z) dS_j = 0 \quad (2.5)$$

La densité complexe est constante pour une fréquence donnée et en supposant que le débit acoustique varie peu sur une longueur Δz_j (Hypothèse H2), nous obtenons en définitive :

$$i \omega \rho(\omega) q(z) \Delta z_j + \{p(z + \Delta z_j) - p(z)\} S_j = 0 \quad (2.6)$$

Il est important de souligner que les hypothèses H1 et H2 sont appliquées à l'échelle d'un conduit élémentaire et qu'elles signifient que le gradient des grandeurs acoustiques est linéaire. La matrice de transfert élémentaire (notée \underline{T}_j) relie les pressions et débits acoustiques de part et d'autre du conduit. En utilisant les équations (2.4) et (2.6), la relation matricielle recherchée s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} p(z + \Delta z_j) \\ q(z + \Delta z_j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -i \omega \rho(\omega) \frac{\Delta z_j}{S_j} \\ -i \omega C(\omega) S_j \Delta z_j & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Les expressions des fonctions complexes densité et compressibilité ont été établies précédemment (§I.2.5.4) :

$$\rho(\omega) = \frac{\rho_o}{F(\lambda)} \quad (2.8)$$

$$C(\omega) = \frac{1}{\gamma P_o} \{ \gamma - (\gamma - 1) F(\lambda_T) \} \quad (2.9)$$

La matrice de transfert élémentaire peut être approchée dans le régime des basses et hautes fréquences en utilisant les approximations de la fonction F (caractéristique des perturbations visqueuses et thermiques) que nous avons développées dans les sections (§I. 2.5.5) et (§I. 2.5.6). Ces gammes fréquentielles sont bien sûr définies par rapport à l'épaisseur de la couche limite visqueuse, mais nous travaillons toujours dans le régime des grandes longueurs d'ondes devant les dimensions du pore. Les approximations seront donc données sous la forme d'un développement en puissance de $(k_o E_p)^{1/2}$ ($k_o = \omega/c_o$ est le nombre d'onde et E_p l'épaisseur du milieu poreux que l'on désire étudier) qui est une quantité petite devant 1 pour une épaisseur de matériau petite devant la longueur d'onde :

- Basses fréquences :

Dans ce régime ($\lambda \ll 1$) la fonction $F(\lambda)$ est approchée par $\frac{i \lambda^2}{8}$ lorsqu'il s'agit d'une section circulaire. Avec $\lambda = R \left(\frac{\rho_o \omega}{\eta} \right)^{1/2}$ et $\lambda_T = \lambda N_{pr}^{1/2}$ les fonctions complexes densité et compressibilité deviennent :

$$\rho(\omega) = -\frac{i 8 \eta}{\omega R_j^2} \quad (2.10)$$

$$C(\omega) = \frac{1}{\gamma P_o} \left\{ \gamma - i (\gamma - 1) R_j^2 \frac{\rho_o \omega N_{pr}}{8 \eta} \right\} \quad (2.11)$$

où R_j désigne le rayon de la section circulaire élémentaire S_j . La matrice de transfert élémentaire est obtenue en reportant les expressions ci-dessus dans la relation matricielle (2.7) :

$$\begin{aligned} \underline{T}_j = & \begin{bmatrix} 1 & -\frac{8 \eta}{R_j^2} \frac{\Delta z_j}{S_j} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + k_o E_p \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{i c_o}{P_o E_p} S_j \Delta z_j & 0 \end{bmatrix} \\ & + (k_o E_p)^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{\gamma - 1}{\gamma P_o} R_j^2 \frac{\rho_o c_o^2 N_{pr}}{8 \eta E_p^2} S_j \Delta z_j & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Nous obtenons ainsi un développement en puissance de $(k_o E_p)^{1/2}$, où les effets thermiques ne se manifestent qu'à l'ordre 4.

- Hautes fréquences :

Nous rappelons l'expression approchée de la fonction caractéristique F pour les hautes fréquences ($\lambda \gg 1$) donnée par l'équation (§I.2.158) :

$$F(\lambda) = 1 - \frac{2i}{\lambda\sqrt{-i}} \quad (2.13)$$

Cette écriture est obtenue en utilisant une approximation des fonctions de Bessel pour λ grand devant 1. Nous la reportons dans les écritures des fonctions complexes de densité (2.8) et de compressibilité (2.9) :

$$\rho(\omega) = \rho_o \left\{ 1 - (1-i) \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \right\} \quad (2.14)$$

$$C(\omega) = \frac{1}{\gamma P_o} \left\{ \gamma - (\gamma-1) \left(1 + (1-i) \frac{\sqrt{2}}{\lambda \sqrt{N_{pr}}} \right) \right\} \quad (2.15)$$

où une convention de signe considérant une partie imaginaire positive pour $\sqrt{-i}$ a été choisie. En injectant ces expressions approchées dans la relation matricielle (2.7), nous obtenons un développement en puissance de $(k_o E_p)^{1/2}$ pour la matrice de transfert élémentaire, dans le régime des hautes fréquences :

$$\begin{aligned}
 & \underline{\underline{T_j}} = \underline{\underline{1}} \\
 & -(i+1)(k_o E_p)^{1/2} \left[\begin{array}{cc} 0 & \left(\frac{2\eta \rho_o c_o}{E_p} \right)^{1/2} \frac{\Delta z_j}{R_j S_j} \\ \frac{\gamma-1}{\gamma P_o} \left(\frac{2\eta c_o}{\rho_o N_{pr} E_p} \right)^{1/2} \frac{S_j \Delta z_j}{R_j} & 0 \end{array} \right] \\
 & -i(k_o E_p) \left[\begin{array}{cc} 0 & \frac{\rho_o c_o}{E_p} \frac{\Delta z_j}{S_j} \\ \frac{c_o}{E_p \gamma P_o} S_j \Delta z_j & 0 \end{array} \right] \quad (2.16)
 \end{aligned}$$

$\underline{\underline{1}}$ désigne la matrice identité.

2.1.2 Matrice de transfert d'une discontinuité

Les discontinuités que nous considérons sont de type changement de section. Il s'agit d'un problème qui a été abondamment étudié par de nombreux auteurs et le lecteur pourra se reporter à une publication de Garcia [Garcia *et al.*, 1986]

pour une revue suffisamment large des méthodes existantes. Pour notre part, nous nous limiterons à en donner les principaux résultats.

Nous supposons que les dissipations thermiques et visqueuses correspondantes sont négligeables en raison de la petite longueur de la discontinuité. Dans ces conditions, et pour les basses fréquences où le seul mode propagatif est le mode plan, ces discontinuités peuvent être caractérisées par une simple inductance. Ceci se traduit par une continuité des débits et un saut de pression.

La figure (2.2) illustre la discontinuité considérée. On note p_o^I et p_o^{II} la pression de part et d'autre de la discontinuité, a et b les rayons des conduits correspondants ($a \geq b$).

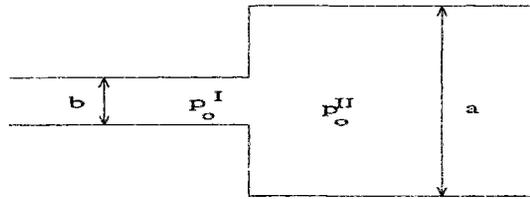


FIG. 2.2 - Discontinuité de type changement de section

La matrice de transfert s'écrit :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} p_o^I \\ q_o^I \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -i \omega \rho_c L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_o^{II} \\ q_o^{II} \end{bmatrix} \\ &= \underline{\underline{1}} + k_o E_p \begin{bmatrix} 0 & -i \frac{\rho_o L c_o}{E_p} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_o^{II} \\ q_o^{II} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.17)$$

L est une quantité qui traduit le couplage entre les modes plans et les modes supérieurs (évanescents) générés par la discontinuité. Selon Kergomard [Kergomard *et al.*, 1987], cette grandeur est quasiment indépendante de la fréquence, dans la mesure où celle-ci est inférieure à $0.9 f_c$ (f_c fréquence de coupure du mode plan). Il s'agit donc d'une grandeur purement inductive qui peut être estimée dans le régime des très basses fréquences par des méthodes analytiques ou encore numériques. La formulation la plus populaire revient à Karal qui utilise l'approximation du piston plan pour une section circulaire:

$$L(\tilde{\alpha}) = \frac{8}{3\pi^2 b} H(\tilde{\alpha}) \quad \text{avec } \tilde{\alpha} \in [0, 1] \quad (2.18)$$

avec

$$H(\tilde{\alpha}) = \frac{3\pi}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_1^2(x_m \tilde{\alpha})}{(x_m \tilde{\alpha}) [x_m J_0(x_m)]^2} \quad (2.19)$$

$\tilde{\alpha} = b/a$ désigne le rapport des rayons des guides de part et d'autre de la discontinuité et x_m les zéros de la fonction de Bessel d'ordre 1. H est une fonction décroissante entre 1 et 0.

La discontinuité que nous avons considérée suppose un élargissement de section. Lorsqu'il s'agit d'une réduction du rayon, l'écriture de l'inductance (2.18) reste valable dans la mesure où a désigne le plus grand rayon et b le plus petit.

Notons que pour des discontinuités de type 'coude', la singularité peut être représentée également par une inductance si nous supposons que le volume de la discontinuité est négligeable. Il est cependant difficile d'obtenir une forme analytique pour cette inductance lorsqu'il s'agit d'un angle quelconque.

2.1.3 Assemblage de la matrice de transfert

Le pore est constitué d'une série de jonctions biportées (Figure 2.3). Celles-ci définies pour un conduit élémentaire ou encore une discontinuité sont associées chacune à une matrice de transfert élémentaire.

L'assemblage se fait par une multiplication de ces matrices, en utilisant la continuité des pressions et débits entre deux jonctions successives. Nous supposons que le pore est discrétisé en M conduits auxquels nous affecterons un indice j ($1 \leq j \leq M$). Nous noterons \underline{T}_j la matrice de transfert associée au guide j et $\underline{T}_{j,j-1}$, celle qui caractérise la discontinuité entre les deux conduits successifs d'indice j et $j-1$. Nous obtenons ainsi une matrice de transfert microscopique, notée \underline{T}_p , reliant les pressions et débits acoustiques en entrée et sortie du pore :

$$\begin{bmatrix} p_M \\ q_M \end{bmatrix} = \underline{T}_p \begin{bmatrix} p_0 \\ q_0 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$$= \prod_{j=M}^1 \underline{T}_j \underline{T}_{j,j-1} \begin{bmatrix} p_0 \\ q_0 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

où p_0, p_M, q_0 et q_M sont les pressions et débits acoustiques en entrée et sortie de pore. Le produit matriciel est défini de la manière suivante :

$$\prod_{j=M}^1 \underline{A}_j = \underline{A}_M \underline{A}_{M-1} \underline{A}_{M-2} \dots \underline{A}_2 \underline{A}_1 \quad (2.22)$$

et assimile $\underline{T}_{1,0}$ à la matrice identité.

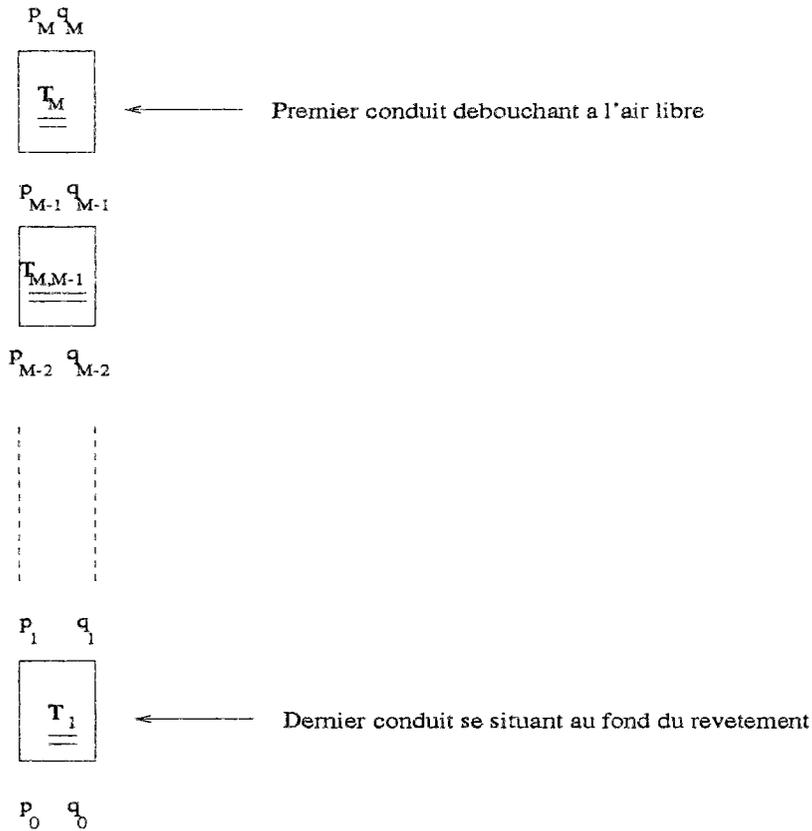


FIG. 2.3 - Chaîne de jonctions biportes

En utilisant les développements (2.16) et (2.17), nous en déduisons l'expression de la matrice de transfert pour les hautes fréquences, au second ordre:

$$\underline{\underline{T_p}} = \underline{\underline{1}} + (k_o E_p)^{1/2} \underline{\underline{A_p}} + k_o E_p \underline{\underline{B_p}} \tag{2.23}$$

Les matrices de premier ($\underline{\underline{A_p}}$) et second ordre ($\underline{\underline{B_p}}$) sont données par les écritures suivantes :

$$\underline{\underline{A_p}} = -(i + 1) \left[\begin{array}{cc} 0 & \left(\frac{2\eta\rho_o c_o}{E_p} \right)^{1/2} \sum_{j=1}^M \frac{\Delta z_j}{R_j S_j} \\ \frac{\gamma - 1}{\gamma P_o} \left(\frac{2\eta c_o}{\rho_o N_{pr} E_p} \right)^{1/2} \sum_{j=1}^M \frac{S_j \Delta z_j}{R_j} & 0 \end{array} \right] \tag{2.24}$$

$$\underline{\underline{B_p}} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha} & -i \frac{\rho_o c_o}{E_p} \sum_{j=1}^M \left[\frac{\Delta z_j}{S_j} + L_{j,j-1} \right] \\ -i \frac{c_o}{\gamma P_o E_p} \sum_{j=1}^M S_j \Delta z_j & \bar{\beta} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

$L_{j,j-1}$ désigne l'inductance associée à la matrice de transfert $\underline{\underline{T_{j,j-1}}}$. Bien entendu, nous avons $L_{1,0} = 0$. Les paramètres $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ traduisent des changements de pressions et de débits acoustiques qui n'apparaissent pas lorsque l'on considère que les hypothèses H1 et H2 s'appliquent à l'échelle d'un pore. Ils ne dépendent que de la géométrie du pore, du désordre qui lui est associé et sont donnés par les écritures suivantes :

$$\bar{\alpha} = i \frac{4\eta c_o (\gamma - 1)}{\gamma P_o E_p} \frac{1}{\sqrt{N_{pr}}} \sum_{j=1}^M \frac{\Delta z_j}{R_j S_j} \sum_{k=1}^{j-1} \frac{S_k \Delta z_k}{R_k} \quad (2.26)$$

$$\bar{\beta} = i \frac{4\eta c_o (\gamma - 1)}{\gamma P_o E_p} \frac{1}{\sqrt{N_{pr}}} \sum_{j=1}^M \frac{S_j \Delta z_j}{R_j} \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\Delta z_k}{R_k S_k} \quad (2.27)$$

Il semble donc que les hypothèses H1 et H2 valables pour un conduit élémentaire de petite longueur, peuvent être généralisées à l'échelle d'un pore (et nous le verrons par la suite à l'échelle du milieu poreux) si nous nous limitons à l'ordre 1. Dans ce cas les termes de la diagonale de la matrice de transfert sont égaux à 1.

Le développement de la matrice de transfert $\underline{\underline{T_p}}$ peut être obtenu également pour les basses fréquences en utilisant la définition (2.21) et l'expression (2.12) pour un conduit élémentaire. Nous nous limiterons à l'ordre 0 qui sera suffisant pour obtenir par la suite une estimation de la résistance au passage de l'air.

$$\underline{\underline{T_p}} = \begin{bmatrix} 1 & -\sum_{j=1}^M \frac{8\eta}{R_j^2} \frac{\Delta z_j}{S_j} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

2.2 Milieu poreux constitué de pores identiques

Les résultats obtenus à l'échelle microscopique du pore seront étendus à l'échelle du matériau poreux, moyennant l'introduction de paramètres macroscopiques caractérisant le milieu considéré. Nous évoquerons une première situation

où tous les pores sont supposés identiques (modèle en série), pour traiter dans la section suivante, le cas qui considère une dispersion dans leur distribution (modèle en parallèle).

2.2.1 Ecriture de la matrice de transfert

Cette modélisation est dite en série, puisque tous les pores sont identiques et que les discontinuités se succèdent les unes après les autres. Le passage micro-macro s'effectue en substituant le débit acoustique à une extrémité du pore par la vitesse moyenne macroscopique \bar{v}_m associée au milieu poreux, à la même extrémité. Cette vitesse est définie comme le rapport du débit total par la surface de l'éprouvette. En notant N le nombre de pores par surface S_t de milieu poreux, nous obtenons :

$$\bar{v}_m^i = \frac{N q_i}{S_t} \quad \text{pour } i = 0 \text{ et } i = M \quad (2.29)$$

En effectuant le changement de variable (2.29), nous obtenons une formulation macroscopique des matrices de transfert (notée $\underline{\underline{T}}_m$) reliant les pressions et vitesses moyennes de part et d'autre de l'éprouvette de matériau poreux :

- Basses fréquences :

$$\underline{\underline{T}}_m = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{S_t}{N} \sum_{j=1}^M \frac{8\eta}{R_j^2} \frac{\Delta z_j}{S_j} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

- Hautes fréquences :

$$\underline{\underline{T}}_m = \underline{\underline{1}} + (k_o E_p)^{1/2} \underline{\underline{A}}_m + (k_o E_p) \underline{\underline{B}}_m \quad (2.31)$$

avec :

$$\underline{\underline{A}}_m = - (i + 1) \begin{bmatrix} 0 & \frac{S_t}{N} \left(\frac{2\eta\rho_o c_o}{E_p} \right)^{1/2} \sum_{j=1}^M \frac{\Delta z_j}{R_j S_j} \\ \frac{N}{S_t} \frac{\gamma - 1}{\gamma P_o} \left(\frac{2\eta c_o}{\rho_o N_{pr} E_p} \right)^{1/2} \sum_{j=1}^M \frac{S_j \Delta z_j}{R_j} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

$$\underline{\underline{B}}_m = \begin{bmatrix} \bar{\alpha} & -i \frac{S_t}{N} \frac{\rho_o c_o}{E_p} \sum_{j=1}^M \left[\frac{\Delta z_j}{S_j} + L_{j,j-1} \right] \\ -i \frac{N}{S_t} \frac{c_o}{\gamma P_o E_p} \sum_{j=1}^M S_j \Delta z_j & \bar{\beta} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

De manière à identifier les paramètres macroscopiques, nous proposons d'écrire l'expression de la matrice de transfert d'un milieu poreux en utilisant les formulations des fonctions macroscopiques de densité ρ^m et de compressibilité C^m que propose Attenborough [Attenborough, 1993] (l'exposant signifie qu'il s'agit de quantités macroscopiques).

Comme le suggère Champoux [Champoux *et al.*, 1992] (§I.2.6.2), nous supposons que les propriétés H1 et H2 s'appliquent à l'échelle du pore et donc du milieu poreux. Nous pouvons en déduire le développement pour les hautes fréquences de la matrice de transfert macroscopique $\underline{\underline{\tilde{T}}}_m$ (la notation $\tilde{}$ est réservée aux quantités issues du modèle classique) reliant les pressions et vitesses aux extrémités de l'éprouvette poreuse :

$$\underline{\underline{\tilde{T}}}_m = \underline{\underline{1}} + (k_o E_p)^{1/2} \underline{\underline{\tilde{A}}}_m + (k_o E_p) \underline{\underline{\tilde{B}}}_m \quad (2.34)$$

avec :

$$\underline{\underline{\tilde{A}}}_m = -\frac{i+1}{2} \begin{bmatrix} 0 & (\rho_o k_s R_s c_o E_p \Omega)^{1/2} \frac{1}{\Omega} \\ \frac{(\gamma-1)\Omega}{\gamma P_o} \left(\frac{R_s \Omega c_o E_p}{k_s \rho_o N_{pr}} \right)^{1/2} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

$$\underline{\underline{\tilde{B}}}_m = -i \begin{bmatrix} 0 & \frac{\rho_o k_s c_o}{\Omega} \\ \frac{c_o \Omega}{\gamma P_o} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Pour les basses fréquences, une écriture approchée pour les fonctions complexes de densité et de compressibilité macroscopiques et l'utilisation des propriétés H1 et H2, nous donne l'expression de la matrice de transfert macroscopique $\underline{\underline{\tilde{T}}}_m$, à l'ordre 0 :

$$\underline{\underline{\tilde{T}}}_m = \begin{bmatrix} 1 & -R_s E_p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

2.2.2 Identification des paramètres macroscopiques

Il s'agit de donner une définition des paramètres classiques (porosité, tortuosité et résistance à l'écoulement de l'air) et d'identifier des paramètres additionnels caractérisant les discontinuités ainsi que l'ordre qui leur est associé.

◇ Paramètres classiques

- Porosité :

Elle est définie par le rapport du volume des vides par le volume total de l'éprouvette :

$$\Omega = \frac{N \sum_{j=1}^M S_j \Delta z_j}{S_t E_p} \quad (2.38)$$

où E_p désigne l'épaisseur de l'éprouvette. Cette définition peut être établie autrement en identifiant les matrices d'ordre 2 pour le modèle discret en série $\underline{\underline{B_m}}$ (2.33) et le modèle classique $\underline{\underline{\tilde{B}_m}}$ (2.36).

- Résistance à l'écoulement de l'air :

Il s'agit d'une quantité intrinsèque qui peut être estimée à fréquence nulle. Nous définirons dans un premier temps une résistance à l'écoulement élémentaire R_{s_j} , qui sera généralisée à l'échelle macroscopique. En utilisant la définition (I.1.1), la résistance d'un conduit élémentaire s'écrit :

$$R_{s_j} = \frac{S_j (p_{j-1} - p_j)}{q_{j-1} \Delta z_j} \quad (2.39)$$

Pour $\omega = 0$ et d'après le développement de la matrice de transfert élémentaire (2.12), nous obtenons :

$$R_{s_j} = \frac{8 \eta}{R_j^2} \quad (2.40)$$

A l'échelle macroscopique, la résistance à l'écoulement de l'air est donnée par la relation suivante :

$$R_s = \frac{p_o - p_N}{E_p \bar{v}_m^o} \quad (2.41)$$

En reportant l'expression de la résistance à l'écoulement de l'air élémentaire (2.40) dans le développement de la matrice de transfert macroscopique (2.30), nous obtenons pour $\omega = 0$:

$$R_s = \frac{S_t}{N E_p} \sum_{j=1}^M R_{s_j} \frac{\Delta z_j}{S_j} \quad (2.42)$$

Cette expression aurait pu être obtenue autrement, en identifiant les termes d'ordre 0 dans les développements pour les basses fréquences donnés par les modèles discret en série (2.30) et classique (2.37).

• Tortuosité :

Lorsque nous identifions les matrices d'ordre 2 $\underline{\underline{B}}_m$ et \underline{B}_m calculées pour le modèle classique (2.36) et le modèle discret en série (2.33), nous retrouvons l'écriture de la porosité établie précédemment (2.38). Cette identification nous permet également d'obtenir une nouvelle définition pour la tortuosité :

$$k_s = \frac{\Omega S_t}{N E_p} \sum_{j=1}^M \left[\frac{\Delta z_j}{S_j} + L_{j,j-1} \right] \quad (2.43)$$

Celle-ci prend en compte la nature sinueuse des pores et la présence d'étranglements.

◇ Paramètres associés aux discontinuités

Ce sont des quantités qui interviennent à l'ordre 1 dans le développement pour les hautes fréquences de la matrice de transfert macroscopique. Comme nous le constatons dans l'expression de $\underline{\underline{B}}_m$, les deux premiers (composantes [1,2] et [2,1] de la matrice $\underline{\underline{B}}_m$) sont essentiellement associés aux changements de sections, tandis que les seconds $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ complètent l'information précédente par l'ordre selon lequel la distribution des conduits élémentaires est effectuée.

Notons par ailleurs que la matrice $\underline{\underline{B}}_m$ vérifie les propriétés H1 et H2 pour des quantités $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ nulles. Cela se traduit par le fait que le débit acoustique est constant lorsque nous intégrons l'équation du mouvement sur le volume d'un pore (et non plus sur le volume d'un conduit élémentaire) et que la pression ne varie pas lorsque l'équation de continuité est intégrée sur le même volume. Ce sont les hypothèses utilisées par le modèle Champoux&Stinson (§1.2.6.2), et il n'est donc pas étonnant de retrouver les paramètres obtenus par ces auteurs si nous négligeons l'influence des discontinuités.

A l'ordre 2, et uniquement lorsque $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ sont nuls, le problème peut donc se traiter comme le suggère Champoux. Cette approche consiste à utiliser les

fonctions macroscopiques classiques de densité et de compressibilité pour les généraliser par l'introduction de deux paramètres s_t et s_v associés séparément aux effets visqueux et thermiques. Les nombres sans dimensions λ et λ_T deviennent :

$$\lambda = s_v \left(\frac{8k_s \rho_o \omega}{R_s \Omega} \right)^{1/2} \quad (2.44)$$

$$\lambda_T = s_t \left(\frac{8k_s \rho_o \omega N_{pr}}{R_s \Omega} \right)^{1/2} \quad (2.45)$$

Nous en déduisons une nouvelle matrice d'ordre 1 (notée $\underline{\underline{\tilde{A}_{Gm}}}$) issue du modèle classique généralisé et qui se substitue à $\underline{\underline{\tilde{A}_m}}$:

$$\underline{\underline{\tilde{A}_{Gm}}} = -\frac{i+1}{2} \begin{bmatrix} 0 & s_v (\rho_o k_s R_s c_o E_p \Omega)^{1/2} \frac{1}{\Omega} \\ \frac{(\gamma-1) \Omega}{\gamma P_o s_t} \left(\frac{R_s \Omega c_o E_p}{k_s \rho_o N_{pr}} \right)^{1/2} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

En identifiant les matrices $\underline{\underline{\tilde{A}_{Gm}}}$ et $\underline{\underline{\tilde{A}_m}}$, nous obtenons l'expression des paramètres s_t et s_v :

$$s_t = \left(\frac{\Omega R_s}{k_s} \right)^{1/2} \frac{\sum_{j=1}^M S_j \Delta z_j}{\sum_{j=1}^M R_{s_j}^{1/2} S_j \Delta z_j} \quad (2.47)$$

$$s_v = \left(\frac{k_s}{\Omega R_s} \right)^{1/2} \frac{\sum_{j=1}^M R_{s_j}^{1/2} \frac{\Delta z_j}{S_j}}{\sum_{j=1}^M \left[\frac{\Delta z_j}{S_j} + L_{j,j-1} \right]} \quad (2.48)$$

Ces expressions sont semblables à celles que propose Champoux, si nous considérons des discontinuités de faible influence ($L_{j,j-1} = 0$). On montre par ailleurs, que le rapport $\frac{s_t}{s_v}$ est toujours supérieur à 1 [Annexe C], ce qui est en contradiction avec les valeurs qu'obtient Attenborough [Attenborough, 1993] en ajustant les résultats du modèle en série à des mesures expérimentales. Nous reviendrons plus en détail sur cette remarque, dans le prochain chapitre, où nous tacherons d'expliquer ces différences.

En appliquant les hypothèses H1 et H2 uniquement à l'échelle du conduit élémentaire, une formulation du problème en termes de matrices de transfert permet de dégager deux paramètres supplémentaires $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ associés à la distribution de taille de conduits élémentaires et au désordre. C'est donc principalement l'influence du désordre qui remet en cause l'application des propriétés H1 et H2 à l'échelle du pore et par conséquent du milieu poreux. La matrice de transfert $\underline{\underline{\tilde{T}}}_m$ est donc enrichie lorsque l'on tient compte des contributions du désordre à travers les paramètres $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$.

2.2.3 Impédance de surface

Lorsque le milieu poreux repose sur un fond rigide, l'impédance de surface est obtenue en calculant au niveau de la surface en contact avec l'air libre, le rapport de la pression par la vitesse macroscopique moyenne :

$$Z^s = \frac{p_M}{\bar{v}_m^M} \quad (2.49)$$

La condition de rigidité impose une vitesse acoustique nulle à l'autre extrémité de l'éprouvette ($\bar{v}_m^0 = 0$). Nous utilisons résultats établis précédemment (2.34)(2.31)(2.46) et les grandeurs acoustiques recherchées s'écrivent de la manière suivante :

$$p_M = \left(1 + \omega \frac{c_o \bar{\alpha}}{E_p}\right) p_0 \quad (2.50)$$

$$\bar{v}_m^M = -i\omega \frac{E_p \Omega}{\gamma P_o} p_0 - (i+1) \omega^{1/2} \frac{\gamma-1}{2\gamma P_o s_t} \left(\frac{R_s \Omega}{k_s \rho_o N_{pr}}\right)^{1/2} E_p \Omega p_0 \quad (2.51)$$

Nous en déduisons l'expression de l'impédance de surface :

$$Z^s = - \frac{\gamma P_o \left(1 + \omega \frac{c_o \bar{\alpha}}{E_p}\right)}{\left[i \omega + (i+1) \omega^{1/2} \frac{\gamma-1}{2s_t} \left(\frac{R_s \Omega}{k_s \rho_o N_{pr}}\right)^{1/2} \right] E_p \Omega} \quad (2.52)$$

Dans le régime des hautes fréquences l'écriture de l'impédance de surface ne retient donc que les deux paramètres supplémentaires $\bar{\alpha}$ et s_t .

Bien entendu l'écriture de l'impédance peut être obtenue à l'aide de la définition établie au chapitre précédent. Par cette méthode nous aurions obtenu le même résultat, mais nous avons privilégié un formalisme matriciel car il nous permet d'identifier simplement les paramètres physiques.

2.3 Milieu poreux constitué de pores de natures différentes

Nous avons développé dans la section précédente une modélisation acoustique de milieu poreux qui considère des pores sujets à de fortes discontinuités. Elle suppose toutefois que tous les pores sont identiques. Nous proposons d'étendre les résultats obtenus, à une situation où les pores sont de natures différentes et d'obtenir la matrice de transfert macroscopique correspondante. Pour la différencier des autres modélisations, nous parlerons d'approche en parallèle. En identifiant celle-ci au modèle classique généralisé, nous en déduisons une nouvelle formulation des paramètres classiques et supplémentaires.

Introduisons dans un premier temps quelques notations qui nous seront utiles par la suite. Nous noterons F , le nombre de types de pores. Chaque type est caractérisé physiquement par une porosité, tortuosité et résistance à l'écoulement qui lui est propre. Pour chaque famille de pores, nous affecterons un nombre de pores N_k ($k = 1, N$). Par la suite, l'exposant k sera consacré aux quantités associées à la famille de pore de type k . Nous simplifierons l'exposé en écrivant la matrice de transfert microscopique d'un pore de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} p_M^k \\ q_M^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^k & b^k \\ c^k & d^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_o^k \\ q_o^k \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

Le développement (2.23) pour les hautes fréquences, nous donne l'expression des coefficients de la matrice de transfert :

$$a^k = 1 + (k_o E_p) \bar{\alpha}^k \quad (2.54)$$

$$d^k = 1 + (k_o E_p) \bar{\beta}^k \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} b^k &= -(i+1) (k_o E_p)^{1/2} \left(\frac{2\eta\rho_o c_o}{E_p} \right)^{1/2} \sum_{j=1}^M \frac{\Delta z_j^k}{R_j^k S_j^k} \\ &\quad - i (k_o E_p) \frac{\rho_o c_o}{E_p} \sum_{j=1}^M \left[\frac{\Delta z_j^k}{S_j^k} + L_{j,j-1}^k \right] \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} c^k &= -(i+1) (k_o E_p)^{1/2} \left(\frac{2\eta c_o}{\rho_o N_{pr} E_p} \right)^{1/2} \frac{\gamma-1}{\gamma P_o} \sum_{j=1}^M \frac{S_j^k \Delta z_j^k}{R_j^k} \\ &\quad - i (k_o E_p) \frac{c_o}{\gamma P_o E_p} \sum_{j=1}^M S_j^k \Delta z_j^k \end{aligned} \quad (2.57)$$

2.3.1 Passage micro-macro

Le réseau poreux est constitué de biportes en parallèle. Puisqu'il s'agit de pores de natures différentes, il est préférable de formuler le problème en terme de matrices admittances pour les représenter. Il existe une correspondance entre les matrices de transfert T et d'admittance Y . En effet un biporte peut être caractérisé par :

- Sa matrice de transfert reliant les pressions et débits aux extrémités du biporte:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

- Sa matrice admittance reliant les pressions aux débits:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

où p_1 , p_2 , q_1 et q_2 sont les pressions et débits aux extrémités du biporte. La matrice admittance peut s'exprimer en fonction des éléments de la matrice transfert :

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_{22}}{A_{12}} & \frac{A_{12}A_{21} - A_{11}A_{22}}{A_{12}} \\ \frac{1}{A_{12}} & -\frac{A_{11}}{A_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

et réciproquement, la matrice de transfert s'écrit en fonction des éléments de la matrice admittance :

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{Y_{22}}{Y_{21}} & \frac{1}{Y_{21}} \\ \frac{Y_{21}Y_{12} - Y_{11}Y_{22}}{Y_{21}} & \frac{Y_{11}}{Y_{21}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

Nous utilisons la relation de correspondance (2.60) pour obtenir la matrice admittance correspondant à la matrice de transfert d'un pore (2.53) :

$$\begin{bmatrix} q_M^k \\ q_o^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d^k}{b^k} & \frac{c^k b^k - a^k d^k}{b^k} \\ \frac{1}{b^k} & -\frac{a^k}{b^k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_M^k \\ p_o^k \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

La matrice admittance macroscopique est obtenue en introduisant le débit total aux extrémités de l'éprouvette poreuse :

$$q_i^T = \sum_{k=1}^F N_k q_i^k \quad \text{pour } i = o \text{ ou } i = N \quad (2.63)$$

Pour les grandes longueurs d'ondes, nous avons montré au chapitre précédent (§II.1.2.2) une faible variation de la pression sur la surface du matériau en contact avec l'air libre. Nous estimons donc qu'elle est uniforme. Ainsi pour $k = 1, F$:

$$p_M^T = p_M^k \quad (2.64)$$

$$p_o^T = p_o^k \quad (2.65)$$

Dans ces conditions, la matrice admittance macroscopique s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} q_M^T \\ q_o^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^F N_k \frac{d^k}{b^k} & \sum_{k=1}^F N_k \frac{c^k b^k - a^k d^k}{b^k} \\ \sum_{k=1}^F N_k \frac{1}{b^k} & -\sum_{k=1}^F N_k \frac{a^k}{b^k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_M^T \\ p_o^T \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

En utilisant la relation de correspondance (2.61), nous obtenons la matrice de transfert macroscopique équivalente :

$$\begin{bmatrix} p_M^T \\ q_M^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_o^T \\ q_o^T \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

En utilisant la notation $\mathbf{E}(\theta) = \sum_{k=1}^F N_k \theta^k$, les composantes A , B , C et D sont définis par :

$$A = \frac{\mathbf{E}\left(\frac{a}{b}\right)}{\mathbf{E}\left(\frac{1}{b}\right)} \quad (2.68)$$

$$B = \frac{1}{\mathbf{E}\left(\frac{1}{b}\right)} \quad (2.69)$$

$$C = \mathbf{E}\left(\frac{c b - a d}{b}\right) + \frac{\mathbf{E}\left(\frac{d}{b}\right) \mathbf{E}\left(\frac{a}{b}\right)}{\mathbf{E}\left(\frac{1}{b}\right)} \quad (2.70)$$

$$D = \frac{\mathbf{E}\left(\frac{d}{b}\right)}{\mathbf{E}\left(\frac{1}{b}\right)} \quad (2.71)$$

Nous proposons à présent de bâtir un modèle à l'ordre 1, le plus général possible en considérant des pores différentes et susceptible de fournir une nouvelle interprétation des paramètres s_t et s_v .

Nous supposons donc que les propriétés H1 et H2 s'appliquent à l'échelle d'un pore. Dans ces conditions, les éléments a^k et d^k de la matrice de transfert microscopique se simplifient :

$$a^k = 1 \quad (2.72)$$

$$d^k = 1 \quad (2.73)$$

Ces simplifications sont reportées dans l'expression de la matrice de transfert macroscopique (2.67), et transforment les éléments A , D et C :

$$A = 1 \quad (2.74)$$

$$D = 1 \quad (2.75)$$

$$C = \mathbf{E}(c) \quad (2.76)$$

Nous en proposons à présent un développement en puissance de $(k_o E_p)^{1/2}$ (pour les hautes fréquences) qui nous sera utile pour identifier les paramètres physiques. Il est obtenu simplement pour la composante C :

$$C = (k_o E_p)^{1/2} \mathbf{E}(c_1) + (k_o E_p) \mathbf{E}(c_2) \quad (2.77)$$

avec :

$$c_1^k = -(i+1) \left(\frac{2\eta c_o}{\rho_o N_{pr} E_p} \right)^{1/2} \frac{\gamma-1}{\gamma P_o} \sum_{j=1}^M \frac{S_j^k \Delta z_j^k}{R_j^k} \quad (2.78)$$

$$c_2^k = -i \frac{c_o}{\gamma P_o E_p} \sum_{j=1}^M S_j^k \Delta z_j^k \quad (2.79)$$

L'expression de B est développée en puissance de $(k_o E_p)^{1/2}$ en substituant b^k par :

$$b^k = (k_o E_p)^{1/2} b_1^k + (k_o E_p) b_2^k \quad (2.80)$$

avec

$$b_1^k = -(i+1) \left(\frac{2\eta \rho_o c_o}{E_p} \right)^{1/2} \sum_{j=1}^M \frac{\Delta z_j^k}{R_j^k S_j^k} \quad (2.81)$$

$$b_2^k = -i \frac{\rho_o c_o}{E_p} \sum_{j=1}^M \left[\frac{\Delta z_j^k}{S_j^k} + L_{j,j-1}^k \right] \quad (2.82)$$

En effectuant le changement de variable (2.80), la composante B devient :

$$B = \frac{1}{\mathbf{E} \left(\frac{1}{(k_o E_p)^{1/2} b_1^k + (k_o E_p) b_2^k} \right)} \quad (2.83)$$

Nous effectuons un développement en $(k_o E_p)^{1/2}$ au voisinage de 0, et nous obtenons à l'ordre 2 :

$$B = \frac{1}{\mathbf{E} \left(\frac{1}{b_2} \right)} \left\{ (k_o E_p)^{1/2} \frac{\mathbf{E} \left(\frac{b_1}{b_2^2} \right)}{\mathbf{E} \left(\frac{1}{b_2} \right)} + (k_o E_p) \right\} \quad (2.84)$$

2.3.2 Identification des paramètres macroscopiques

Notre ambition est de généraliser l'écriture des paramètres classiques (Ω , k_s , R_s) et supplémentaires (s_t et s_v) obtenus pour des milieux où les pores sont supposés identiques à des milieux homogènes qui considèrent toutefois des pores de différents types. Ces quantités seront obtenues par une identification entre le modèle en parallèle et le modèle classique généralisé.

◇ Paramètres classiques

- Résistance au passage de l'air :

Elle est obtenue aux très basses fréquences, par une identification des développements à l'ordre 0 des matrices de transfert macroscopiques correspondant aux modèles discret en parallèle et classique généralisé.

Le développement à l'ordre 0 de la matrice de transfert microscopique d'un pore (2.28) nous donne l'expression des éléments b^k et c^k :

$$b^k = -\sum_{j=1}^M R_{s_j}^k \frac{\Delta z_j^k}{S_j^k} \quad (2.85)$$

$$c^k = 0 \quad (2.86)$$

$R_{s_j}^k$ est la résistance correspondant au conduit élémentaire d'indice j associé à la famille de pores de type k . En notant b_o^k le terme d'ordre 0 correspondant à la composante b^k , nous obtenons l'expression de la matrice de transfert macroscopique moyennant l'utilisation des équations (2.69) et (2.74)-(2.76) :

$$\begin{bmatrix} p_M^T \\ q_M^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\mathbf{E}\left(\frac{1}{b_o}\right)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_o^T \\ q_o^T \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

Nous introduisons la vitesse moyenne macroscopique aux extrémités de l'éprouvette :

$$\bar{v}_m^i = \frac{q_i^T}{S_t} \quad \text{pour } i = o \text{ et } i = M \quad (2.88)$$

En effectuant le changement de variable ci-dessus, la matrice de transfert reliant les pressions et vitesses macroscopiques s'écrit :

$$\begin{bmatrix} p_M^T \\ \bar{v}_m^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{S_t}{\mathbf{E}\left(\frac{1}{b_0}\right)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_c^T \\ \bar{v}_m^c \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

Nous identifions cette matrice à la matrice d'ordre 0 du modèle classique (2.37) pour en déduire une expression de la résistance au passage de l'air :

$$R_s = -\frac{S_t}{E_p \mathbf{E}\left(\frac{1}{b_0}\right)} \quad (2.90)$$

Nous nous inspirons de l'expression de la résistance à l'écoulement définie pour un milieu constitué de pores identiques (2.42) de manière à définir une résistance partielle R_s^k associée à la famille de pore de type k :

$$R_s^k = \frac{S_t}{N_k E_p} \sum_{j=1}^M R_{s_j}^k \frac{\Delta z_j^k}{S_j^k} \quad (2.91)$$

La quantité que nous recherchons s'écrit donc en fonction des résistances partielles :

$$R_s = \frac{1}{F \sum_{k=1}^M \frac{1}{R_s^k}} \quad (2.92)$$

• Porosité et tortuosité

Leurs expressions sont obtenues en identifiant les matrices d'ordre 2 pour les modèles en parallèle et classique généralisé. A l'ordre 2, les éléments de la matrice de transfert du milieu poreux sont déduits des équations (2.84) et (2.76) :

Nous substituons le débit total par la vitesse macroscopique moyenne (2.88), et nous identifions la matrice d'ordre 2 obtenue à la matrice correspondante pour le modèle classique généralisé (2.36). Nous obtenons ainsi une définition pour la porosité et la tortuosité :

$$\Omega = i \frac{\gamma P_o}{E_p S_t} \mathbf{E}(c_2) \quad (2.93)$$

Nous reportons l'écriture de c_2^k (2.79) et la porosité s'écrit comme le rapport du volume des vides sur le volume total de l'éprouvette :

$$\Omega = \frac{\sum_{k=1}^F N_k \sum_{j=1}^M S_j^k \Delta z_j^k}{E_p S_t} \quad (2.94)$$

La tortuosité est donné par :

$$k_s = i \frac{\Omega}{\rho_o E_p} \frac{S_t}{\mathbf{E} \left(\frac{1}{b_2} \right)} \quad (2.95)$$

b_2^k est substitué par son expression (2.82) :

$$k_s = \frac{\Omega}{E_p} \frac{S_t}{\sum_{k=1}^F \frac{N_k}{\sum_{j=1}^M \left[\frac{\Delta z_j^k}{S_j^k} + L_{j,j-1}^k \right]}} \quad (2.96)$$

◇ Paramètres associés au désordre

Ils sont obtenus en identifiant les matrices d'ordre 1 issues du modèle classique généralisé et du modèle en parallèle. Les composantes d'ordre 1 de ce dernier modèle sont déduites des relations (2.77) et (2.84). En les comparant aux composantes de la matrice (2.46), nous obtenons une nouvelle formulation pour les paramètres s_t et s_v :

$$s_v = -\frac{2}{i+1} \frac{\Omega S_t}{(\rho_o k_s R_s c_o E_p \Omega)^{1/2}} \frac{\mathbf{E} \left(\frac{b_1}{b_2^2} \right)}{\left[\mathbf{E} \left(\frac{1}{b_2} \right) \right]^2} \quad (2.97)$$

$$s_t = -\frac{i+1}{2} \left(\frac{\Omega R_s c_o E_p}{k_s N_{pr} \rho_o} \right)^{1/2} \frac{\Omega S_t (\gamma - 1)}{\gamma P_o \mathbf{E}(c_1)} \quad (2.98)$$

Nous reportons l'écriture des composantes b_1^k (2.81) et b_2^k (2.82) et en utilisant la définition de la tortuosité (2.96), l'expression du paramètre s_v devient :

$$s_v = \left(\frac{k_s}{R_s \Omega} \right)^{1/2} \times \frac{\sum_{k=1}^F \frac{N_k \sum_{j=1}^M (R_{s_j}^k)^{1/2} \frac{\Delta z_j^k}{S_j^k}}{\left(\sum_{j=1}^M \left[\frac{\Delta z_j^k}{S_j^k} + L_{j,j-1}^k \right] \right)^2}}{\sum_{k=1}^F \frac{N_k}{\sum_{j=1}^M \left[\frac{\Delta z_j^k}{S_j^k} + L_{j,j-1}^k \right]}} \quad (2.99)$$

La définition de la porosité (2.94) associée à l'écriture de la composante d'ordre 1 c_1^k (2.78) nous donne une nouvelle expression pour s_t :

$$s_t = \left(\frac{R_s \Omega}{k_s} \right)^{1/2} \frac{\sum_{k=1}^F N_k \sum_{j=1}^M S_j^k \Delta z_j^k}{\sum_{k=1}^F N_k \sum_{j=1}^M (R_{s_j}^k)^{1/2} S_j^k \Delta z_j^k} \quad (2.100)$$

Les paramètres s_t et s_v ont été introduits initialement par Champoux. Nous avons pu les enrichir par l'influence des discontinuités, mais aussi par la prise en compte de pores de natures différentes. De plus, les quantités que nous proposons autorisent un régime large où le rapport $\frac{s_t}{s_v}$ peut être inférieur ou supérieur à 1, ce que ne permet pas les définitions précédentes (2.47) et (2.48) des paramètres supplémentaires. Nous reviendrons sur cette constatation au chapitre suivant où nous tacherons d'illustrer ces propos par quelques simulations en interprétant les différents régimes.

Que ce soit pour les paramètres classiques (Ω , R_s , k_s) ou encore pour ceux qui sont associés aux discontinuités (s_v , s_t), les définitions que nous avons présentées sont compatibles avec le modèle en série. Il suffit en effet de considérer une seule famille de pores pour retrouver les résultats précédemment établis.

◇ **Récapitulation**

Pour le régime des très basses fréquences (par rapport à la fréquence de coupure du mode plan), les effets associés aux discontinuités peuvent, en première approximation, être négligés. Dans ces conditions, et en notant L_k la longueur du pore de type k , l'écriture des paramètres macroscopiques se présente sous une forme intégrale :

- Porosité :

$$\Omega = \frac{1}{E_p S_t} \sum_{k=1}^F N_k \int_0^{L_k} S^k dz \quad (2.101)$$

- Tortuosité :

$$\frac{1}{k_s} = \frac{E_p}{\Omega S_t} \sum_{k=1}^F \frac{N_k}{\int_0^{L_k} S^{k-1} dz} \quad (2.102)$$

- Résistance au passage de l'air :

$$\frac{1}{R_s} = \frac{E_p}{8\pi \eta S_t} \sum_{k=1}^F \frac{N_k}{\int_0^{L_k} S^{k-2} dz} \quad (2.103)$$

- Paramètre s_t :

$$s_t = \left(\frac{R_s \Omega}{k_s} \right)^{1/2} \frac{\sum_{k=1}^F N_k \int_0^{L_k} S^k dz}{\sum_{k=1}^F N_k \sqrt{8 \eta \pi} \int_0^{L_k} S^{k1/2} dz} \quad (2.104)$$

- Paramètre s_v :

$$s_v = \left(\frac{k_s}{R_s \Omega} \right)^{1/2} \times \frac{\sum_{k=1}^F \frac{N_k \sqrt{8 \eta \pi} \int_0^{L_k} S^{k-3/2} dz}{\left(\int_0^{L_k} S^{k-1} dz \right)^2}}{\sum_{k=1}^F \frac{N_k}{\int_0^{L_k} S^{k-1} dz}} \quad (2.105)$$

2.3.3 Impédance de surface

Celle-ci peut s'écrire pour une large gamme de fréquence. Il suffit de corriger les fonctions macroscopiques de densité et de compressibilité classiques (l'exposant m signifie qu'il s'agit de grandeurs macroscopiques) en utilisant les paramètres s_t et s_v . Nous rappelons l'expression de ces quantités que nous utiliserons au chapitre suivant pour valider les nouvelles formulations des paramètres macroscopiques classiques et supplémentaires :

$$\rho^m(\omega) = \frac{k_s \rho_c}{\Omega} \left[1 + \frac{R_s \Omega}{i \omega \rho_o k_s} G(\lambda) \right] \quad (2.106)$$

$$C^m(\omega) = \frac{\Omega}{\gamma P_o} \left[\gamma - (\gamma - 1) \left(1 + \frac{R_s \Omega}{i \omega \rho_c k_s \sqrt{N_{pr}}} G(\lambda_T) \right)^{-1} \right] \quad (2.107)$$

où les nombres sans dimension λ et λ_T sont corrigés par les paramètres s_t et s_v définis pour le modèle en parallèle :

$$\lambda = s_v \left(\frac{8 k_s \rho_o \omega}{R_s \Omega} \right)^{1/2} \quad (2.108)$$

$$\lambda_T = s_t \left(\frac{8 k_s \rho_o \omega N_{pr}}{R_s \Omega} \right)^{1/2} \quad (2.109)$$

Nous en déduisons l'écriture du nombre d'onde et de l'impédance caractéristique (§I.2) :

- Nombre d'onde :

$$m = i \omega [\rho^m(\omega) C^m(\omega)]^{1/2} \quad (2.110)$$

- Impédance caractéristique :

$$Z^c = \left[\frac{\rho^m(\omega)}{C^m(\omega)} \right]^{1/2} \quad (2.111)$$

Nous en déduisons l'impédance de surface :

$$Z^s = -i Z^c \cotg(im E_p) \quad (2.112)$$

2.4 Conclusion

Nous avons développé deux modélisations relativement simples permettant de traiter l'influence de discontinuités microscopiques sur les qualités acoustiques de milieux poreux.

La première dite en série consiste à discrétiser le pore en une série de conduits droits distribués aléatoirement. En formulant le problème en terme de matrices de transfert, il apparaît pour les hautes fréquences quatre paramètres supplémentaires qui corrigent les effets dus aux changements de sections et au désordre.

Une discrétisation fine du pore nous permet de préciser également le domaine de validité des propriétés H1 et H2. Celles-ci s'appliquent à l'échelle du pore si nous nous limitons à l'ordre 1. Les paramètres caractérisant les discontinuités n'apparaissent pas à ce niveau. Ceux-ci se manifestent à l'ordre 2 où il est nécessaire de limiter les propriétés H1 et H2 à l'échelle du conduit élémentaire.

Cette approche est intéressante car elle permet de retrouver les paramètres s_t et s_v introduits précédemment par le modèle Champoux&Stinson et d'en dégager deux autres $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ associés particulièrement au désordre. Il s'agit là d'une information importante puisqu'elle signifie que les qualités acoustiques d'un milieu poreux peuvent être différentes pour une même famille de conduits élémentaires, en modifiant leurs positions respectives le long du pore.

Parallèlement à cela, l'influence des discontinuités a été prise en compte à l'aide d'inductances. Nous parvenons ainsi à enrichir l'écriture des paramètres s_v et s_t en indiquant que les valeurs de ces quantités ne permettent qu'un rapport $\frac{s_t}{s_v}$ supérieur à 1.

De manière à obtenir un bon compromis entre généralité et rigueur, nous avons supposé que les propriétés H1 et H2 sont valables à l'échelle du pore dans le cadre du modèle en parallèle. Celui-ci consiste à généraliser le modèle en série à une situation où les pores sont de natures différentes. En formulant le problème en terme de matrices admittance puis de transfert, nous introduisons de nouvelles définitions pour les paramètres physiques macroscopiques. Ceux-ci prennent donc en compte la nature sinueuse et les étranglements du réseau poreux ainsi que la présence de pores différents.

L'écriture des fonctions macroscopiques de densité et de compressibilité ainsi que l'impédance est donnée pour un régime fréquentiel suffisamment large.

Le chapitre suivant illustrera ces résultats, et nous constaterons que la nouvelle formulation des paramètres supplémentaires donne un rapport $\frac{s_t}{s_v}$ qui évolue dans

un régime large, en étant supérieur à 1 lorsque les pores ont une géométrie voisine et inférieur à 1 lorsque ce n'est plus le cas.

Chapitre 3

Simulations

Ce chapitre sera consacré à quelques simulations permettant d'illustrer les résultats établis aux deux chapitres précédents. Nous nous intéresserons particulièrement aux milieux constitués de pores de natures différentes décrits par la modélisation dite en parallèle. Il s'agira de comparer le modèle discret supposé donner une solution exacte et le modèle classique généralisé par les paramètres supplémentaires s_t et s_v . Nous indiquerons ainsi les limites d'une approche généralisée et les avantages du modèle discret.

Nous donnerons dans un premier temps les principes du calcul de la solution discrète en rappelant les hypothèses qu'elle considère (§3.1). Celle-ci tient compte des caractéristiques du modèle en série et considère que le milieu poreux peut être constitué de pores différents, non connectés et de sections variables. Les effets associés aux discontinuités sont importants lorsque les fréquences considérées sont proches de la fréquence de coupure du mode plan [Sergent, 1996]. Pour un conduit de section circulaire et de rayon $0.001m$, celle-ci est de l'ordre de $6 \cdot 10^7 H_z$. Les fréquences que nous traiterons sont inférieures à $5000 H_z$. Aussi, nous supposons que les réflexions dues aux changements de sections sont négligeables et nous considérerons que les inductances qui leurs sont associées sont nulles.

Les premières simulations consisteront à appliquer le calcul discret à un milieu poreux constitué de pores de section constante, tous identiques (§3.2). Le calcul sera traité pour différentes longueurs de conduits élémentaires et nous constaterons que les propriétés H1 et H2 sont valables à l'échelle du pore uniquement, pour les basses fréquences et que le calcul discret nécessite un maillage suffisamment fin.

Nous aborderons alors l'analyse des différents modèles pour des milieux poreux composés de pores identiques et de section variable (§3.3). Ces variations seront calculées par l'intermédiaire d'une loi normale caractérisée par un écart-type faible. Les pores sont donc assimilés à des quasicylindres.

Nous nous intéresserons par la suite aux matériaux composés de pores de natures différentes. Nous envisagerons des pores de section constante (§3.4) puis de section variable (§3.5) dans le cadre des quacylindres.

Nous finirons par une étude des modèles (classique, généralisé, discret) pour un milieu constitué de pores différents sujets à de fortes discontinuités à travers une description typologique du réseau poreux (§3.6).

3.1 Calcul de la solution discrète

La solution discrète consiste à calculer l'impédance de chaque pore par le produit des matrices de transfert élémentaires et à établir l'impédance de surface du milieu poreux reposant sur un fond rigide par le passage micro-macro (1.51).

Lorsque nous négligeons les effets associés aux discontinuités, la relation (2.21), qui exprime la matrice de transfert microscopique \underline{T}_j reliant les pressions (p_M, p_0) et débits (q_M, q_0) aux extrémités du pore se simplifie :

$$\begin{bmatrix} p_M \\ q_M \end{bmatrix} = \prod_{j=M}^1 \underline{T}_j \begin{bmatrix} p_0 \\ q_0 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

M est le nombre de conduits élémentaires. Si le pore se termine par une surface rigide, le débit q_0 est nul et en notant \underline{T}_p la matrice de transfert à l'échelle du pore, nous obtenons le rapport suivant :

$$\frac{p_M}{q_M} = \frac{T_p[1, 1]}{T_p[2, 1]} \quad (3.2)$$

Nous introduisons la vitesse acoustique en sortie de pore :

$$\bar{v}_m^M = \frac{q_M}{S_p} \quad (3.3)$$

où S est la surface du premier conduit élémentaire droit en contact avec l'air libre. Nous reportons cette relation dans l'équation (3.2) et l'impédance du pore s'écrit de la manière suivante :

$$Z_p = \frac{S_p T_p[1, 1]}{T_p[2, 1]} \quad (3.4)$$

Nous proposons à présent de généraliser l'écriture de cette impédance à l'échelle du milieu poreux. Nous considérons une éprouvette cylindrique de surface S_t et composée de N pores différents. De manière à les distinguer, nous affecterons l'exposant k ($k = 1, N$) aux quantités présentées ci-dessus. Cette notation nous permet de définir les porosités surfaciques partielles qui traduisent le rapport de la surface du conduit ouvert à l'air libre sur la surface de l'éprouvette :

$$\Omega_s^k = \frac{S_p^k}{S_t} \quad \text{pour } k = 1, N \quad (3.5)$$

L'impédance de chaque pore est calculée individuellement et l'impédance de surface du milieu poreux est déduite par le passage micro-macro (1.51) que nous avons démontré précédemment :

$$Z^s = \frac{1}{\sum_{i=1}^M \frac{\Omega_s^k}{Z_p^k}} \quad (3.6)$$

Cette modélisation discrète est sensée donner une solution exacte. Elle suppose que la pression varie peu à la surface du matériau et que les effets associés aux discontinuités sont négligeables, ce qui est tout a fait justifié dans le régime des basses fréquences.

Elle repose sur la connaissance parfaite de la géométrie de chaque pore et n'utilise pas les paramètres macroscopiques classiques. Ce modèle est donc adapté à une approche déterministe.

3.2 Pores identiques et de section constante

Nous considérons un milieu poreux où tous les pores sont identiques et de section constante. Nous proposons d'appliquer le modèle discret à ce type de matériau pour différentes discrétisations.

Les dimensions de l'éprouvette (cylindrique) poreuse sont représentées par l'épaisseur et la section :

$$\begin{aligned} E_p &= 0.1 \text{ m} \\ S_t &= 1.56 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Ces dimensions seront maintenues pour toutes les simulations suivantes.

Le matériau est constitué de 200 pores de section circulaire et de rayon constant égal à $8 \cdot 10^{-4} \text{ m}$. Le premier calcul consiste à évaluer l'impédance de surface en discrétisant chaque pore en 20 conduits élémentaires de longueur $5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.

Le second calcul assimile le pore à une série de 100 conduits élémentaires de longueur $10^{-3}m$. Ainsi, pour chaque discrétisation, les conduits élémentaires sont identiques.

Les paramètres macroscopiques (résistance à l'écoulement, porosité, tortuosité, s_t et s_v) sont calculés à l'aide des équations (2.103), (2.101), (2.102), (2.104) et (2.105). Ceux-ci sont présentés de manière à caractériser physiquement le milieu étudié, mais aussi pour les reporter dans le modèle classique afin de comparer les deux approches. Ils sont donnés par les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}\Omega &= 0.26 \\ k_s &= 1 \\ R_s &= 892 \text{ N s/m}^4 \\ s_t &= 1 \\ s_v &= 1\end{aligned}$$

Les pores tous identiques et de section constante ont une longueur de $0.1 m$ égale à l'épaisseur de l'éprouvette. Cela justifie les valeurs obtenues pour les paramètres s_t , s_v et k_s qui caractérisent les changements de section et la nature sinueuse du réseau poreux. Nous verrons que ces quantités sont perturbées en introduisant une section variable. De manière à étudier précisément l'influence de ces variations, nous considérerons par la suite que le pore à une longueur égale à l'épaisseur de l'éprouvette. Le réseau poreux n'est donc pas sinueux et le calcul de la tortuosité se limite à mesurer l'importance des étranglements (une augmentation de la sinuosité pour une épaisseur donnée se manifeste par une tortuosité et une porosité plus grandes).

Les résultats sont illustrés par la figure (3.1) où nous avons reporté les parties imaginaires et réelles de l'impédance de surface et le coefficient d'absorption pour les modèles discret (20 puis 100 conduits élémentaires) et classique. Ce dernier, qui est tout à fait pertinent lorsque les pores sont identiques et de section constante, nous permettra de valider l'approche discrète.

Les courbes pour le modèle discret à 100 conduits élémentaires et le modèle classique se superposent parfaitement. Nous constatons toutefois quelques différences pour les hautes fréquences lorsqu'il s'agit du modèle discret à 20 conduits élémentaires. Ces différences s'expliquent par les propriétés H1 et H2 qui s'appliquent à l'échelle du conduit élémentaire avec une bonne approximation si celui-ci a une longueur relativement petite. Lorsque la longueur élémentaire augmente, l'approximation n'est valable que pour les basses fréquences.

L'analyse des résultats indique donc qu'une discrétisation fine du pore est nécessaire pour retrouver les résultats du modèle classique, notamment pour le régime des hautes fréquences.

De manière à mesurer la pertinence du modèle classique généralisé pour des

milieux poreux complexes, nous nous attacherons par la suite à discrétiser finement chaque pore.

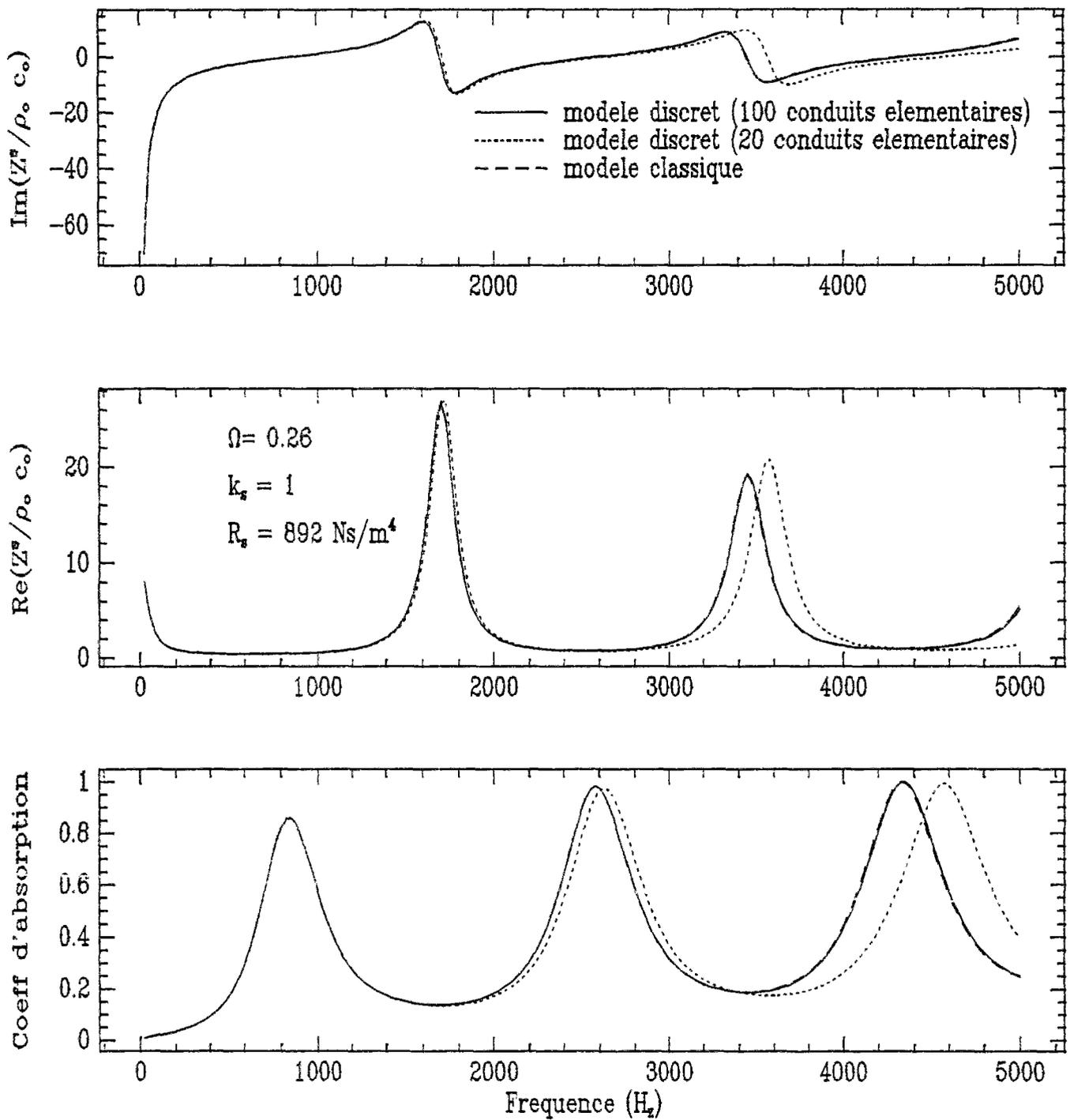


FIG. 3.1 - Pores identiques de section constante

3.3 Pores identiques et de section variable

Le milieu poreux est composé de pores identiques discrétisés en une série de conduits élémentaires droits et de sections variables. Les simulations que nous avons effectuées nous ont indiqué que pour une section variable, le nombre de micro-conduits doit être augmenté de manière à affiner les résultats. Chaque pore est donc discrétisé en 1000 conduits élémentaires de mêmes longueurs ($10^{-4} m$). Il est caractérisé par un rayon moyen \bar{R} , un écart-type σ et le tirage est effectué selon une loi normale.

Les dimensions de l'éprouvette ne sont pas modifiées et le réseau poreux est défini par le nombre de pores, le rayon moyen et un écart-type de 20%:

$$\begin{aligned} N &= 200 \\ \bar{R} &= 0.0008 m \\ \sigma &= 0.00016 m \end{aligned}$$

En multipliant le nombre de conduits par la longueur élémentaire, nous obtenons une longueur de $0.1 m$ pour chaque pore, soit l'épaisseur de l'éprouvette. Le pore n'a donc pas de nature sinueuse.

Le calcul des paramètres macroscopiques nous donne les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \Omega &= 0.26 \\ k_s &= 1.19 \\ R_s &= 1512 Ns/m^4 \\ s_t &= 1.26 \\ s_v &= 0.96 \end{aligned}$$

L'introduction d'un changement de section se traduit donc par une modification des paramètres s_t , s_v , k_s et R_s tandis que la porosité est inchangée. On constate ainsi une légère augmentation de la tortuosité (qui représente uniquement la présence d'étranglement le long du pore) et un fort accroissement pour la résistance au passage de l'air qui passe de 892 à 1512 Ns/m^4 .

Les paramètres s_t et s_v sont légèrement perturbés et respectent le régime $\frac{s_t}{s_v} > 1$ qui caractérise les formulations théoriques des paramètres supplémentaires que donne Champoux & Stinson [Champoux *et al.*, 1992].

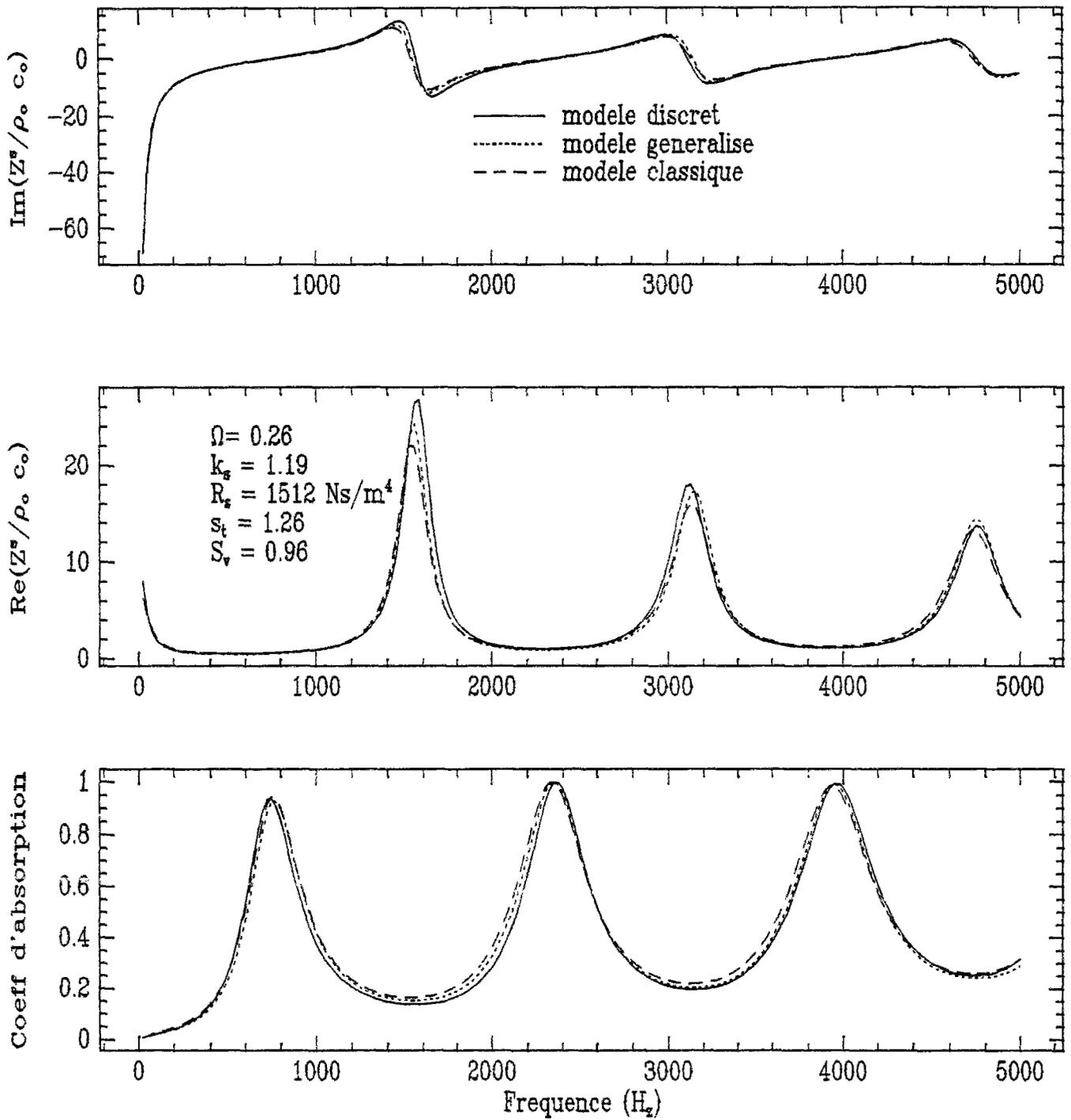


FIG. 3.2 - Pores identiques de section variable, $\sigma = 20\%$

Les résultats illustrés par la figure (3.2) représentent l'évolution en fonction de la fréquence des parties réelles et imaginaires de l'impédance de surface et du coefficient d'absorption. Les calculs ont été effectués pour les modèles discret, classique et généralisé par l'introduction des paramètres supplémentaires s_t et s_v .

Les trois modèles semblent prédire les mêmes caractéristiques acoustiques. Ceci n'est pas étonnant, puisque les discontinuités que nous avons introduites ne sont pas trop importantes. Elles engendrent des paramètres s_t et s_v proches de 1 ce qui signifie que les modèles classique et généralisé sont voisins. Le pore est donc assimilé à un quasicylindre qui peut être traité par le modèle classique qui a l'avantage d'être relativement simple.

◇ Influence de l'écart-type

Le nombre de pores et le rayon moyen ne sont pas modifiés et nous introduisons un écart-type de 25%. Le réseau poreux est donc défini par les quantités suivantes:

$$\begin{aligned} N &= 200 \\ \bar{R} &= 0.0008 \text{ m} \\ \sigma &= 0.0002 \text{ m} \end{aligned}$$

Les pores sont toujours discrétisés en 1000 conduits élémentaires de longueur 10^{-4} m et le calcul des paramètres macroscopiques nous donne les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \Omega &= 0.27 \\ k_s &= 1.39 \\ R_s &= 2952 \text{ N s/m}^4 \\ s_t &= 1.68 \\ s_v &= 0.89 \end{aligned}$$

On constate une faible augmentation de la porosité. L'augmentation de la tortuosité et de la résistance au passage de l'air en fonction de l'écart-type se confirme. Parallèlement à cela, les paramètres supplémentaires s_t et s_v s'éloignent de la valeur neutre 1 en étant toujours associés au régime $\frac{s_t}{s_v} > 1$.

Les résultats pour les modèles classique, généralisé et discret sont reportés sur la figure (3.3).

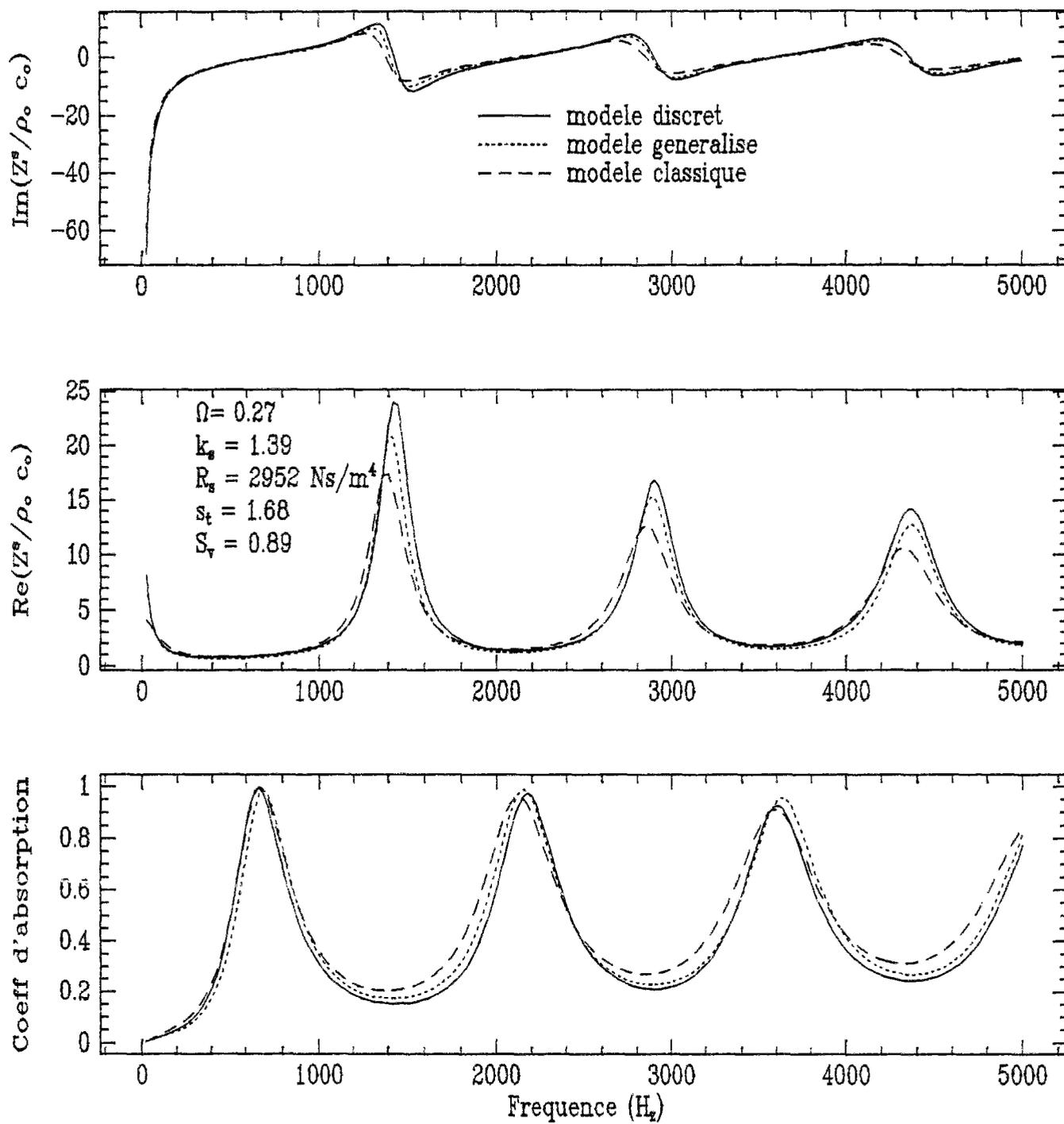


FIG. 3.3 - Pores identiques de section variable, $\sigma = 25\%$

Les différents modèles semblent donner les mêmes allures aux courbes représentant l'impédance de surface et le coefficient d'absorption. Nous avons toutefois une préférence pour le modèle généralisé qui approche davantage le modèle discret, notamment lorsqu'il s'agit des pics de l'impédance de surface.

En résumé, une augmentation de l'écart-type va se traduire par un couple paramètres supplémentaires (s_t, s_v) qui s'éloignera de la valeur neutre 1, ce qui va accroître les différences entre le modèle généralisé et le modèle classique. Elle aura également comme conséquence une tortuosité et une résistance à l'écoulement de l'air plus importantes qui engendreront à leur tour des qualités acoustiques différentes (les pics d'absorption sont décalés vers les basses fréquences).

◇ Influence du tirage

Nous restons dans le cadre d'un écart-type de 25% en maintenant toujours le même nombre de pores et le même rayon moyen. Nous proposons de comparer, à travers le modèle discret, les résultats issus de trois tirages différents pour la même loi normale et le même rayon moyen.

Le premier tirage correspond à la simulation précédente. Nous en rappelons l'estimation des paramètres macroscopiques :

$$\begin{aligned}\Omega &= 0.27 \\ k_s &= 1.39 \\ R_s &= 2952 \text{ Ns/m}^4 \\ s_t &= 1.68 \\ s_v &= 0.89\end{aligned}$$

Le second tirage donne les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}\Omega &= 0.27 \\ k_s &= 1.35 \\ R_s &= 2452 \text{ Ns/m}^4 \\ s_t &= 1.58 \\ s_v &= 0.92\end{aligned}$$

Le troisième tirage définit un matériau caractérisé par :

$$\Omega = 0.27$$

$$\begin{aligned}
 k_s &= 1.57 \\
 R_s &= 52092 \text{ N s/m}^4 \\
 s_t &= 6.68 \\
 s_v &= 0.56
 \end{aligned}$$

Le calcul de l'impédance de surface et du coefficient d'absorption a été effectué en utilisant le modèle discret. Les résultats illustrés par la figure (3.4) indiquent pour le même rayon moyen et écart-type, une forte dispersion des qualités acoustiques.

Le premier et le second tirage donnent toutefois les mêmes tendances notamment pour les basses et moyennes fréquences du spectre. Le calcul des paramètres macroscopiques donne d'ailleurs des valeurs du même ordre de grandeur.

Le troisième tirage se distingue par des qualités acoustiques différentes qui s'accroissent lorsque la fréquence augmente (les pics d'absorption sont décalés vers les hautes fréquences). Il se distingue également par des paramètres macroscopiques qui sont modifiés profondément. La résistance à l'écoulement de l'air subit une forte augmentation, tandis que les paramètres supplémentaires s_t et s_v s'éloignent franchement de 1.

Le tirage joue donc un rôle important lorsque l'écart-type augmente. Nous nous sommes toutefois interrogés sur les caractéristiques du troisième tirage qui semble singulier. Une analyse du pore nous a permis de repérer un conduit élémentaire étroit, de rayon $5 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ et occupant la position 741 lorsque nous numérotions les conduits élémentaires à partir de la surface en contact avec l'air libre. En d'autres termes, le conduit étroit se situe à 7.5 cm de l'entrée du pore. Nous pensons que cet étranglement est à l'origine des fortes différences que nous avons commentées. Aussi, nous nous sommes proposé d'étudier l'influence de pores étroits et de leurs positions le long du pore.

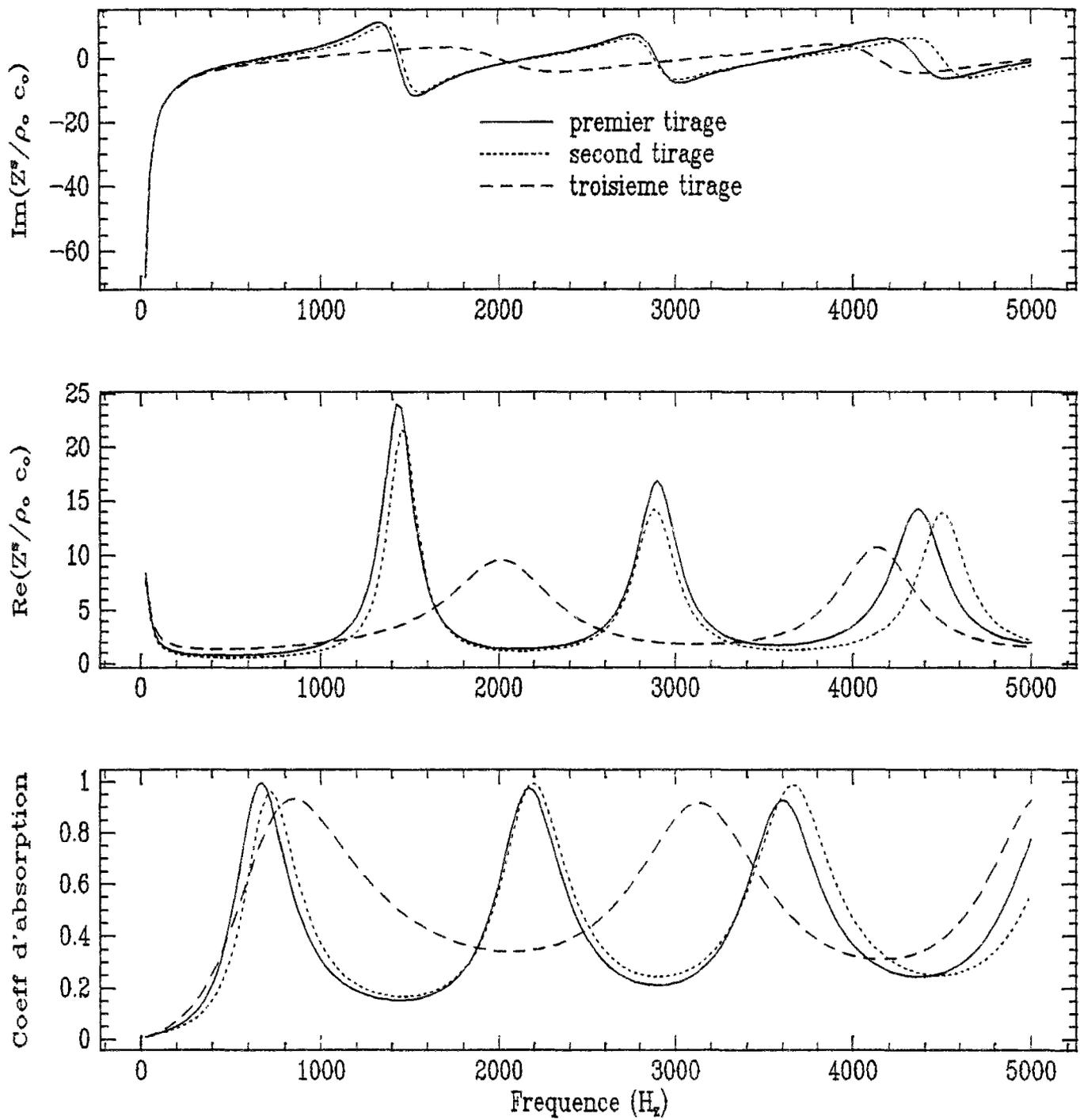


FIG. 3.4 - Pores identiques de section variable - Comparaison de trois tirages

◇ Influence de pores "bouchés"

Nous modifions le troisième tirage en substituant le conduit étroit par un autre plus large, de rayon 0.0008 m . On définit ainsi un quatrième tirage qui, pour les paramètres macroscopiques, donne les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}\Omega &= 0.27 \\ k_s &= 1.38 \\ R_s &= 2628\text{ N s/m}^4 \\ s_t &= 1.6 \\ s_v &= 1.1\end{aligned}$$

On retrouve ainsi des ordres de grandeur comparables aux premier et second tirages. Les différences entre le troisième et le quatrième tirage sont illustrées par la figure (3.5). Il apparaît qu'une modification à l'échelle d'un conduit élémentaire peut modifier les caractéristiques acoustiques d'un milieu composé de pores identiques.

De manière à étudier également l'influence de la position des conduits élémentaires, nous avons introduit 2 autres tirages qui consistent à permuter de manière aléatoire la position pour tous les micro-conduits donnés par le troisième tirage. Nous définissons ainsi un cinquième tirage caractérisé par le conduit étroit qui occupe la position 708 (\approx à 7.5 cm de l'entrée du pore) et un sixième tirage qui positionne le même conduit en 122 (\approx à 1.2 cm de l'entrée du pore). Les paramètres macroscopiques (Ω , R_s , k_s , s_t , s_v) sont identiques pour ces trois distributions, ce qui est tout à fait naturel puisque les définitions de ces quantités ne prennent pas en compte les positions respectives des différents micro-conduits.

Les résultats issus des différentes permutations sont donnés par la figure (3.6).

Nous observons pour les mêmes paramètres macroscopiques des comportements différents. Cela signifie que le modèle généralisé et a fortiori le modèle classique ne sont pas capables de modéliser ce type de milieu.

D'autre part, nous remarquons que le troisième et le cinquième tirage donnent une absorption comparable, tandis que le sixième en offre une plus faible. Cela peut s'expliquer par la position du conduit "bouché" le long du pore. Pour les deux premiers tirages, celui-ci se situe à 7.5 cm de l'entrée du pore (la position des autres conduits élémentaires est différente), ce qui permet à l'onde acoustique de se propager et donc de s'atténuer sur une longueur importante.

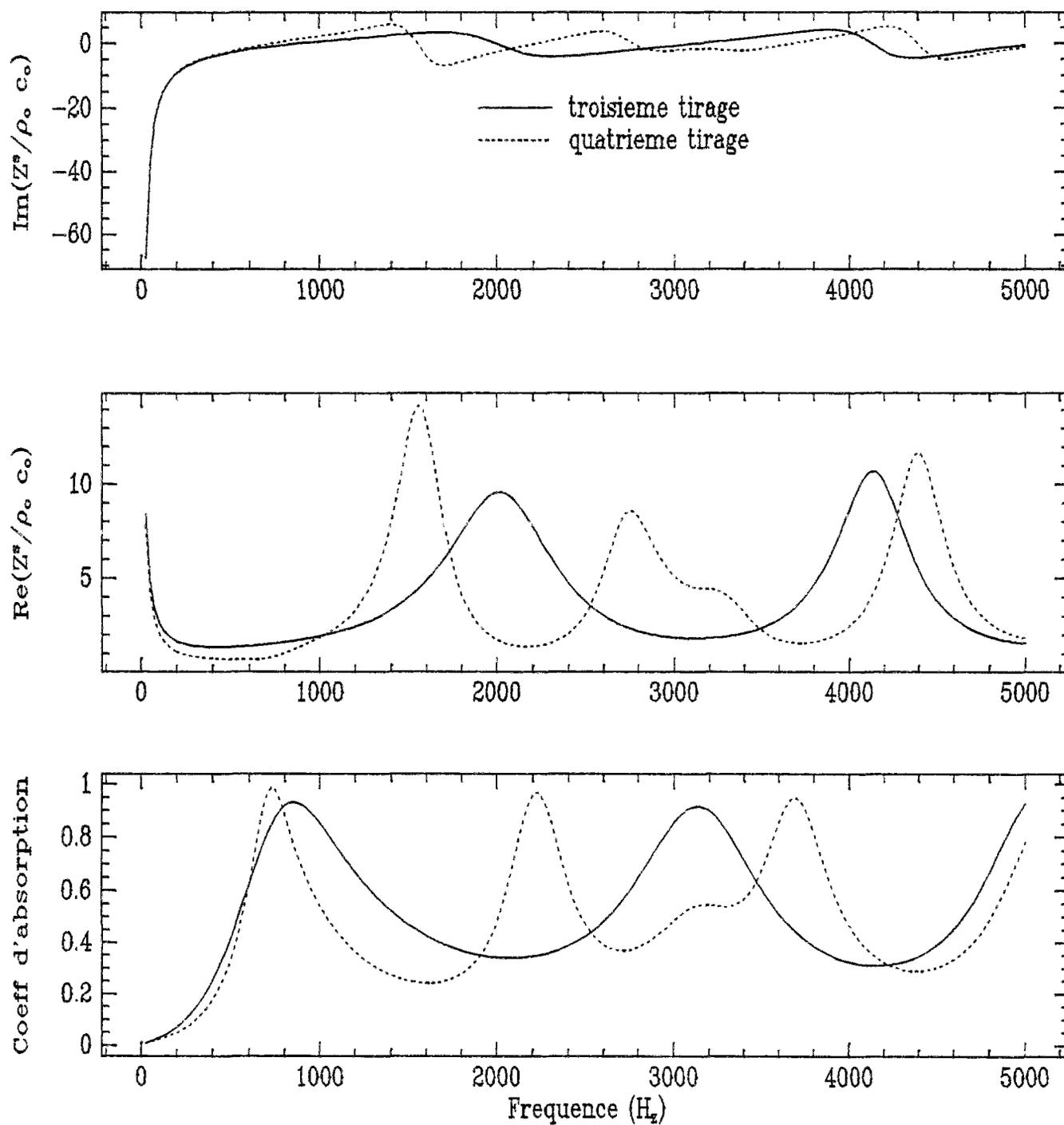


FIG. 3.5 - Pores identiques de section variable - Influence d'un pore étroit

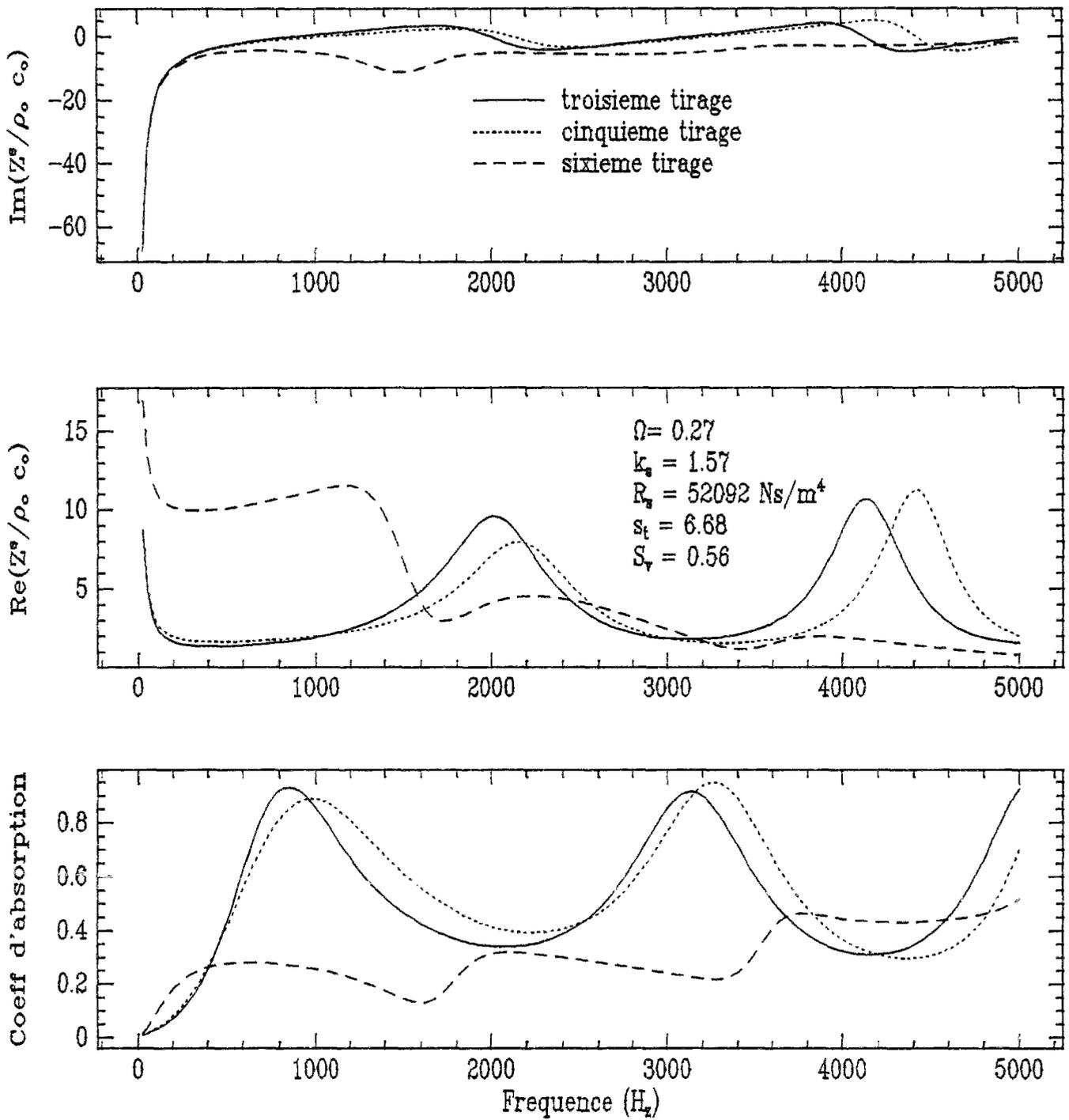


FIG. 3.6 - Pores identiques de section variable - Influence des permutations

Pour le sixième tirage, le conduit "bouché" se trouve à 1.2 cm de l'entrée du pore. L'onde est freinée à ce niveau, réfléchi partiellement et dispose donc d'une petite longueur pour être atténuée.

◇ Influence de la porosité de surface

Nous considérons à présent un écart-type de 20%. Pour un tirage donné, la porosité de surface est contrôlée en modifiant le rayon du premier conduit élémentaire débouchant à l'air libre. Nous distinguerons ainsi quatre milieux de même porosité volumique, mais de porosités surfaciques (notées Ω^s) différentes :

- Milieu 1

$$\begin{aligned}\Omega^s &= 0.14 \\ \Omega &= 0.27 \\ k_s &= 1.19 \\ R_s &= 1512 \text{ N}_s/\text{m}^4 \\ s_t &= 1.26 \\ s_v &= 0.96\end{aligned}$$

- Milieu 2

$$\begin{aligned}\Omega^s &= 0.004 \\ \Omega &= 0.27 \\ k_s &= 1.25 \\ R_s &= 5163 \text{ N}_s/\text{m}^4 \\ s_t &= 2.26 \\ s_v &= 0.7\end{aligned}$$

- Milieu 3

$$\begin{aligned}\Omega^s &= 0.002 \\ \Omega &= 0.27 \\ k_s &= 1.29 \\ R_s &= 10431 \text{ N}_s/\text{m}^4 \\ s_t &= 3.17 \\ s_v &= 0.61\end{aligned}$$

- Milieu 4

$$\begin{aligned}\Omega^s &= 0.001 \\ \Omega &= 0.27\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k_s &= 1.45 \\R_s &= 59984 \text{ N s/m}^4 \\s_t &= 7.17 \\s_v &= 0.56\end{aligned}$$

Les paramètres s_t et s_v sont donnés à titre indicatif et ne seront pas utilisés puisque le modèle généralisé ne permet pas de contrôler la porosité de surface. Il n'est d'ailleurs pas adapté aux milieux composés de pores sujets à de fortes discontinuités, ce qui est le cas lorsque nous modifions le rayon du premier conduit élémentaire.

La résistance au passage de l'air augmente lorsque la porosité de surface diminue. La tortuosité subit la même tendance mais d'une manière plus modérée tandis que la porosité volumique reste inchangée.

La figure (3.7) qui représente l'impédance de surface et le coefficient d'absorption, indique qu'une diminution de la porosité de surface s'accompagne par une diminution des maxima d'absorption. Il faut toutefois souligner que ces extremums sont peu sensibles à la porosité de surface lorsque celle-ci est supérieure à 0.1 et que le nombre de pores est maintenu constant. En modifiant la porosité surfacique à travers le nombre de pores, c'est à dire à travers la porosité volumique, les résultats seraient différents. En augmentant la porosité volumique, la porosité surfacique est plus grande et l'absorption plus importante.

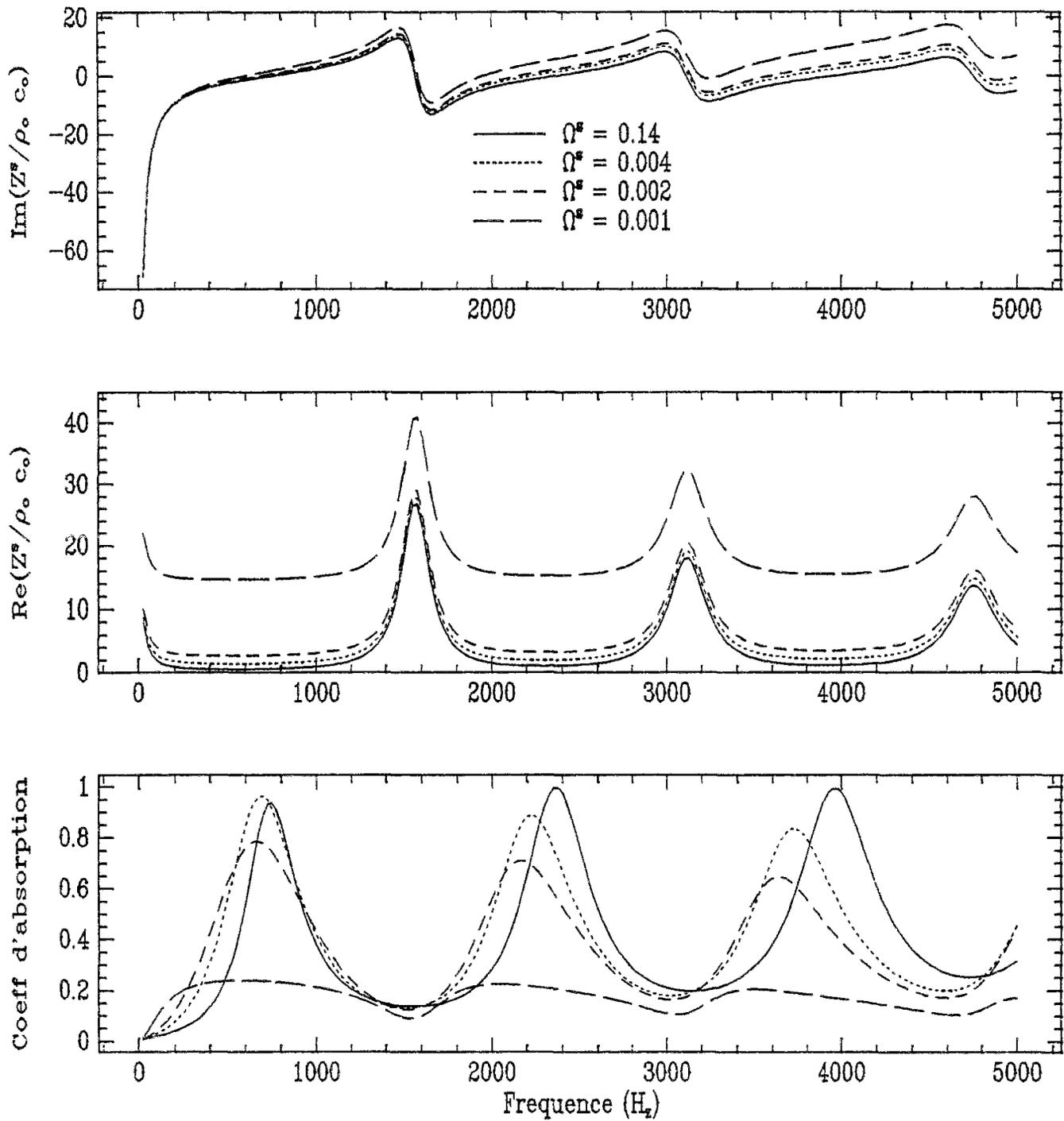


FIG. 3.7 - Pores identiques de section variable - Influence de la porosité de surface

3.4 Pores différents et de section constante

Nous considérons à présent des pores de natures différentes que nous supposons de section constante. En d'autres termes chaque pore est caractérisé par un rayon constant différent de celui correspondant au pore voisin.

Les dimensions de l'éprouvette et le nombre de pores restent inchangés et la distribution des rayons se fait selon une loi normale définie par un écart-type σ^s et un rayon moyen R^m . Le calcul de l'impédance de surface et du coefficient d'absorption a été effectué pour trois milieux poreux définis par le même rayon ($R^m = 0.0008 \text{ m}$), mais par différents écarts-types.

Le premier caractérisé par un écart-type de 20% donne les valeurs suivantes pour les paramètres macroscopiques :

$$\begin{aligned}\Omega &= 0.25 \\ k_s &= 1. \\ R_s &= 788 \text{ N}_s/\text{m}^4 \\ s_t &= 0.94 \\ s_v &= 1.05\end{aligned}$$

Pour un écart-type de 62%, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\Omega &= 0.36 \\ k_s &= 1. \\ R_s &= 241 \text{ N}_s/\text{m}^4 \\ s_t &= 0.82 \\ s_v &= 1.21\end{aligned}$$

Un écart-type de 100% donne :

$$\begin{aligned}\Omega &= 0.59 \\ k_s &= 1. \\ R_s &= 73 \text{ N}_s/\text{m}^4 \\ s_t &= 0.78 \\ s_v &= 1.27\end{aligned}$$

Les pores de section constante ont une longueur égale à l'épaisseur de l'éprouvette, ce qui engendre une tortuosité constante égale à 1. Nous observons égale-

ment qu'une augmentation de l'écart-type se traduit par une porosité plus importante et une résistance au passage de l'air qui diminue. Cela signifie que le nombre de "gros" pores augmente aussi.

Les paramètres s_t et s_v s'éloignent de 1 et abordent un nouveau régime $\frac{s_t}{s_v} < 1$ qui ne peut être obtenu par les écritures classiques des paramètres additionnels [Champoux *et al.*, 1992]. Ces auteurs supposent que tous les pores sont identiques, c'est à dire de même géométrie, alors que nous envisageons dans notre modélisation l'existence de pores de natures différentes. Nous pensons que ce sont ces différences qui engendrent un rapport $\frac{s_t}{s_v}$ inférieur à 1.

Notre point de vue est conforté par les mesures expérimentales d'Attenborough [Attenborough, 1993] qui, en ajustant les paramètres s_t et s_v trouve un rapport inférieur à 1 pour le milieu poreux qu'il considère. Notons que ce milieu, de type granulaire, est constitué de grains de tailles variables qui génèrent forcément des pores de natures différentes.

Nous remarquons par ailleurs, que s_t n'est rien d'autre que l'inverse de s_v . Un seul paramètre supplémentaire est donc suffisant pour caractériser les milieux poreux constitués de pores différents, mais de section constante. En effet, dans ces conditions et pour des conduits élémentaires de même longueur les écritures (2.100) et (2.99) pour s_t et s_v se simplifient :

$$s_t = \left(\frac{R_s \Omega}{k_s} \right)^{1/2} \frac{\sum_{k=1}^F N_k S^k}{\sum_{k=1}^F N_k (R_s^k)^{1/2} S^k} \quad (3.7)$$

$$s_v = \left(\frac{k_s}{R_s \Omega} \right)^{1/2} \frac{\sum_{k=1}^F N_k (R_s^k)^{1/2} S^k}{\sum_{k=1}^F N_k S^k} \quad (3.8)$$

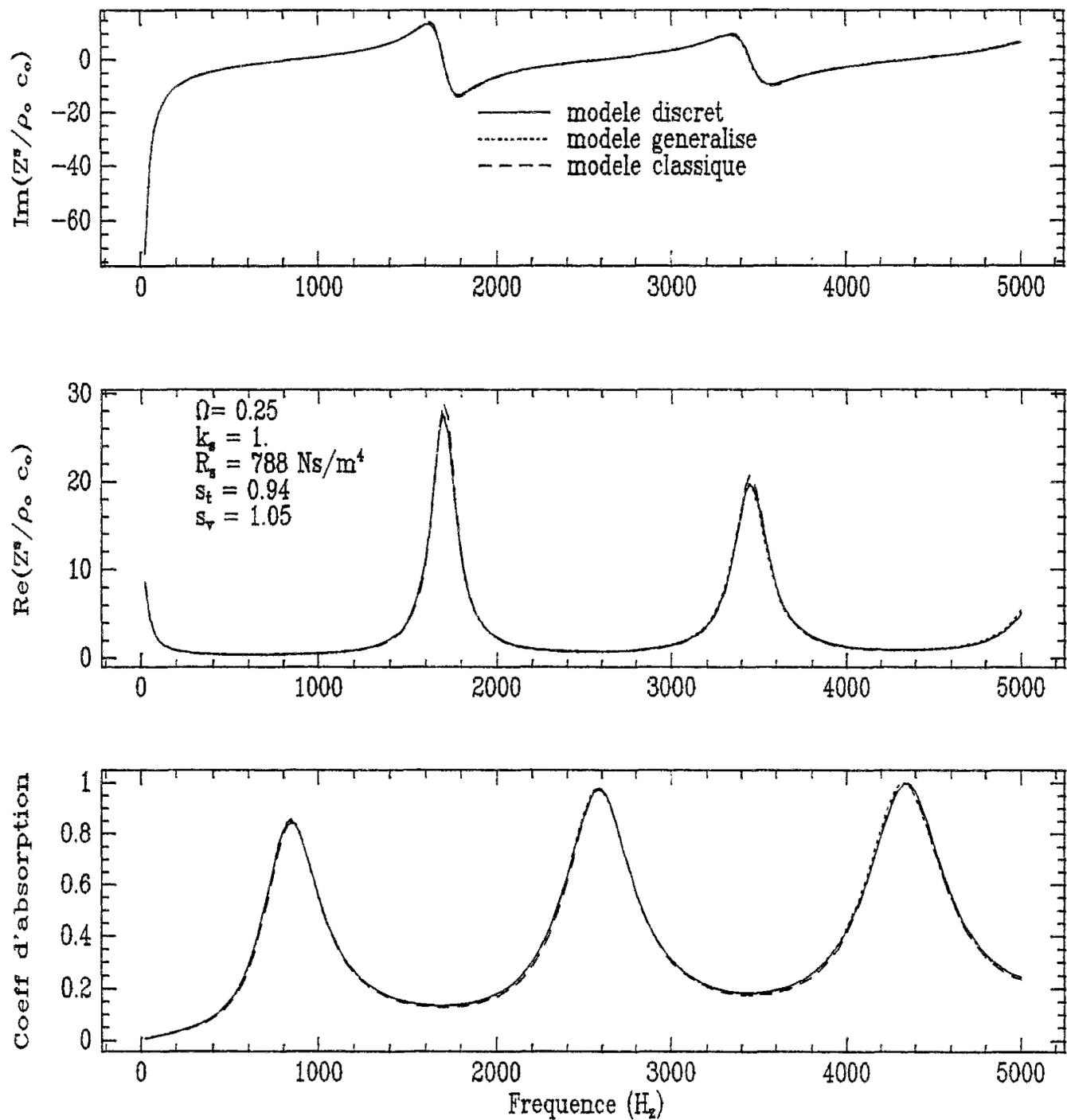
Soit

$$s_t = \frac{1}{s_v} \quad (3.9)$$

Le calcul de l'impédance de surface et du coefficient d'absorption pour les trois configurations présentées ci-dessus, est illustré par les figures (3.8)-(3.10). Nous remarquons que le modèle généralisé est une excellente approximation de

l'approche discrète, notamment lorsque le désordre augmente et au voisinage des pics de l'impédance de surface. En effet, les courbes associées à ces deux modèles se superposent parfaitement. Le modèle classique reste tout de même acceptable, mais sous-estime l'absorption lorsque l'écart-type augmente.

Les nouvelles formulations théoriques des paramètres additionnels que nous avons proposées semblent donc efficaces lorsqu'il s'agit d'un matériau composé de pores de natures différentes et sections constantes.

FIG. 3.8 - Pores différents de section constante - $\sigma^s = 20\%$

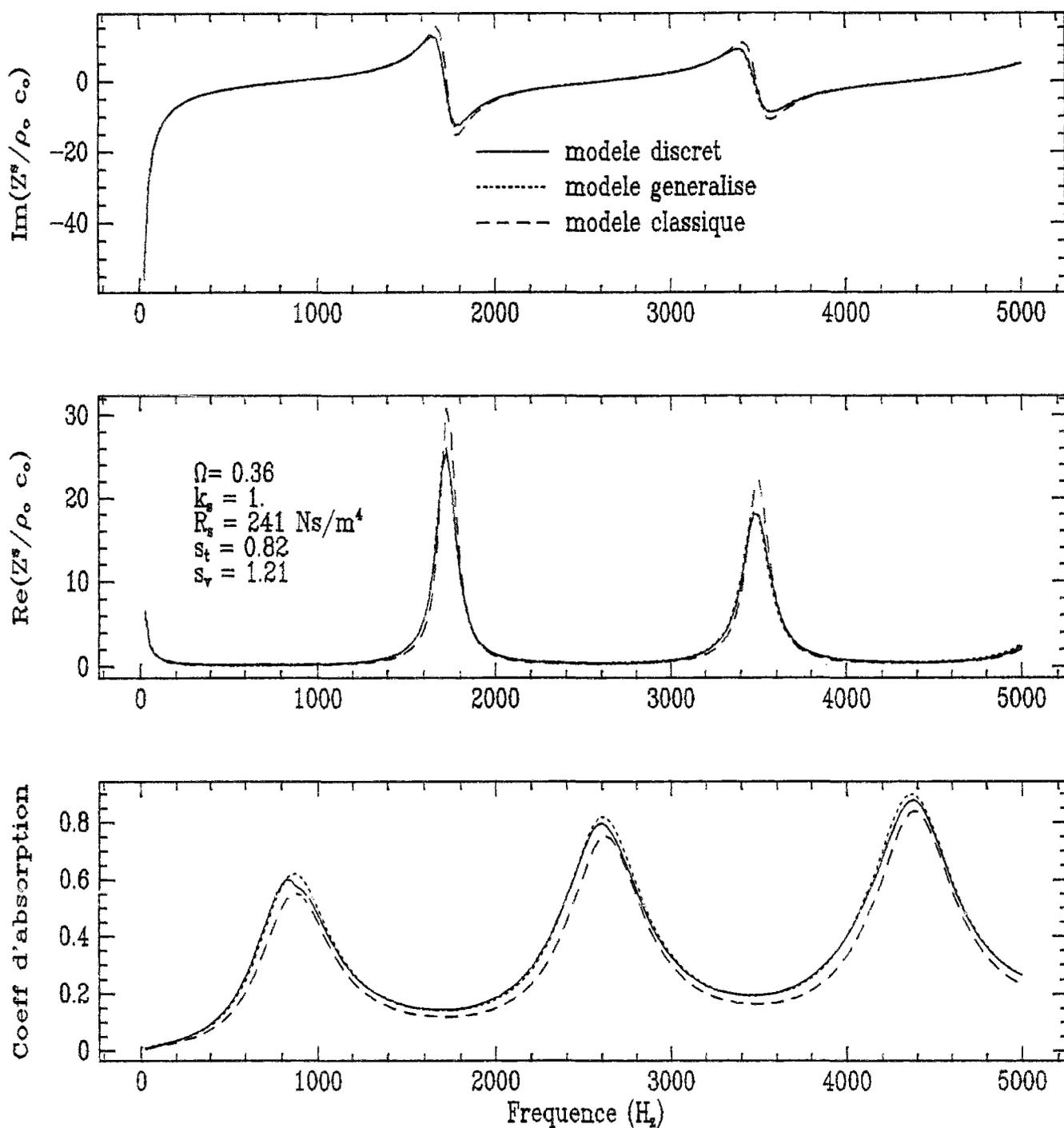


FIG. 3.9 - Pores différents de section constante - $\sigma^s = 62\%$

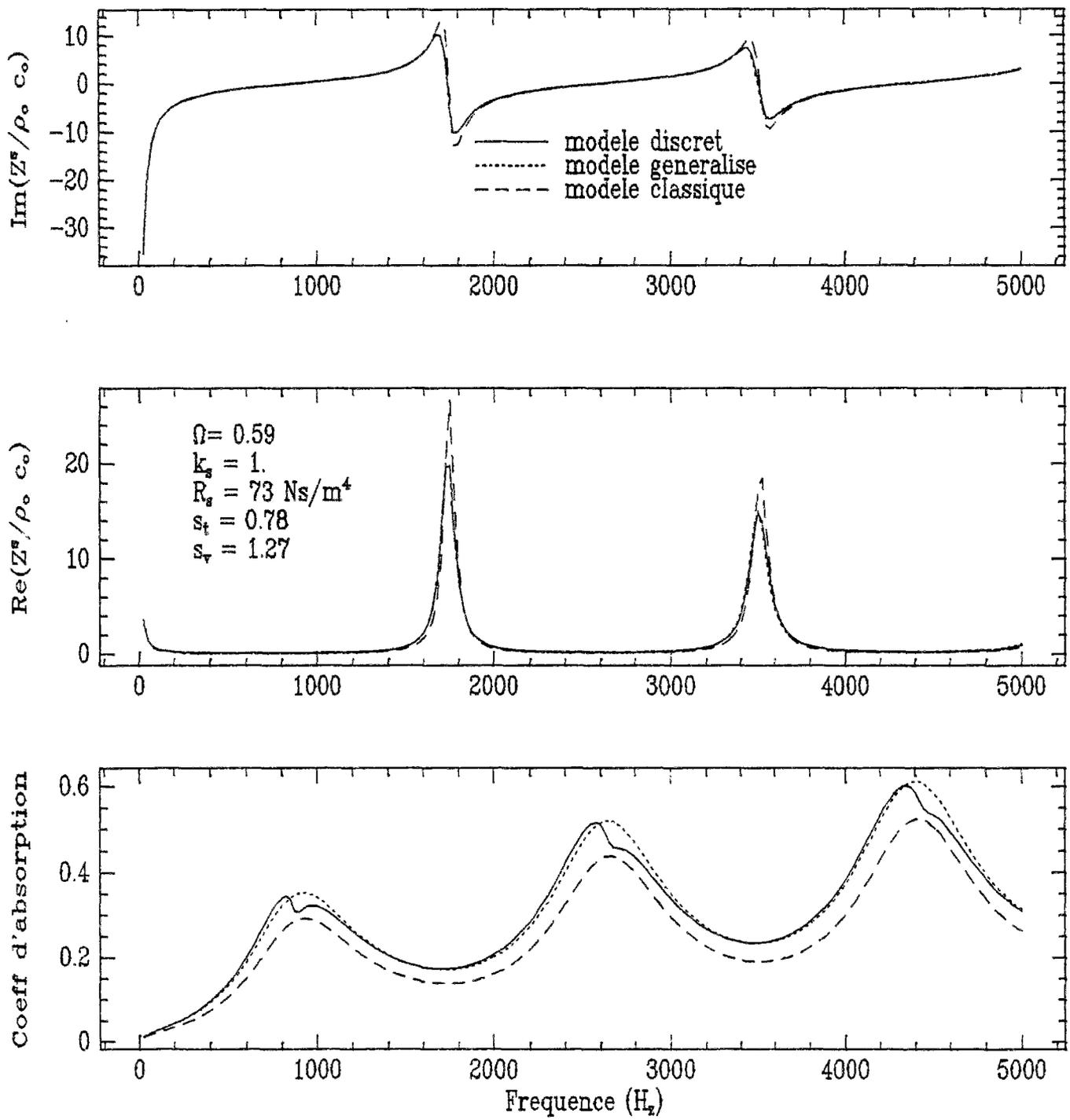


FIG. 3.10 - Pores différents de section constante - $\sigma^s = 100\%$

3.5 Pores différents et de section variable

La première opération consiste à affecter à chaque pore i , un rayon moyen R_i^m . Celui-ci est obtenu par l'intermédiaire d'une loi normale caractérisée par un écart-type σ^s autour du rayon R^m . Chaque rayon moyen R_i^m , nous permet de discrétiser chaque pore i en une série de conduits élémentaires en utilisant toujours une loi normale d'écart-type σ^s .

Les paramètres physiques (dimensions de l'éprouvette, nombre de pores, R^m) que nous avons choisis précédemment ne sont pas modifiés.

Un écart-type de 20% donne les paramètres macroscopiques suivants :

$$\begin{aligned}\Omega &= 0.26 \\ k_s &= 1.22 \\ R_s &= 1256 \text{ Ns/m}^4 \\ s_t &= 1.14 \\ s_v &= 1.27\end{aligned}$$

Lorsque σ^s augmente, nous obtenons pour un écart-type de 62% :

$$\begin{aligned}\Omega &= 0.41 \\ k_s &= 5.1 \\ R_s &= 3710 \text{ Ns/m}^4 \\ s_t &= 1.73 \\ s_v &= 6.6\end{aligned}$$

Le matériau est profondément modifié. Une augmentation de l'écart-type se manifeste par une porosité, une tortuosité et une résistance à l'écoulement de l'air qui prennent des valeurs plus importantes. Les paramètres supplémentaires s'éloignent de 1, ce qui différencie franchement les modèles discret et généralisé.

Le résultat du calcul de l'impédance de surface et du coefficient d'absorption est reporté sur les figures (3.12)-(3.13). Elles indiquent que les modèles classique et généralisé ne sont pas aussi efficaces que l'approche discrète, notamment lorsque l'écart-type devient important. Pour un écart-type de 62%, le pore ne fait plus partie de la famille des quasicylindres et la présence de conduits "bouchés" génère de grandes différences entre les trois modèles.

La répartition des conduits étroits est illustrée par la figure (3.11). Elle indique le pourcentage de conduits élémentaires de rayon inférieur à 10^{-5} m pour une

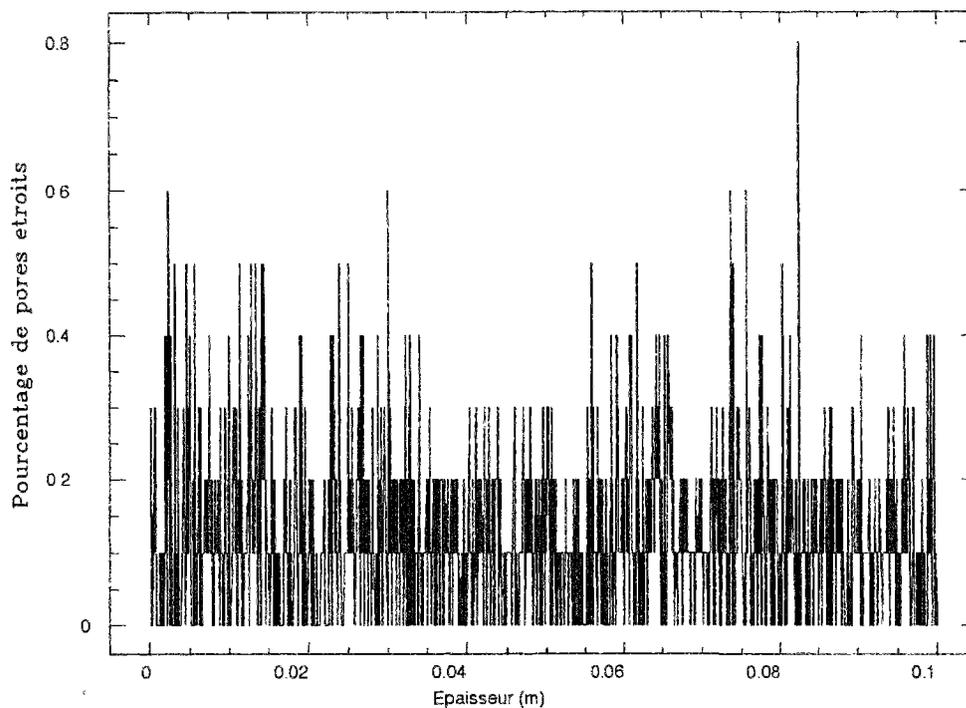


FIG. 3.11 - *Pourcentage de micro-conduits 'bouchés' en fonction de la profondeur*
 - $\sigma^s = 62\%$

position donnée dans le sens longitudinal de l'éprouvette. L'abscisse est nulle lorsqu'il s'agit des micro-conduits en contact direct avec l'air libre, égale à 0.1 m pour ceux qui se trouvent au niveau du fond rigide. Ces singularités touchent l'ensemble des pores et sont réparties sur toute l'épaisseur de l'éprouvette. Ils n'excèdent pas 1% lorsqu'on effectue une coupe transversale de l'éprouvette à une abscisse donnée et que l'on recherche les micro-conduits étroits (de rayon inférieur à 10^{-5} m) situés à la même abscisse.

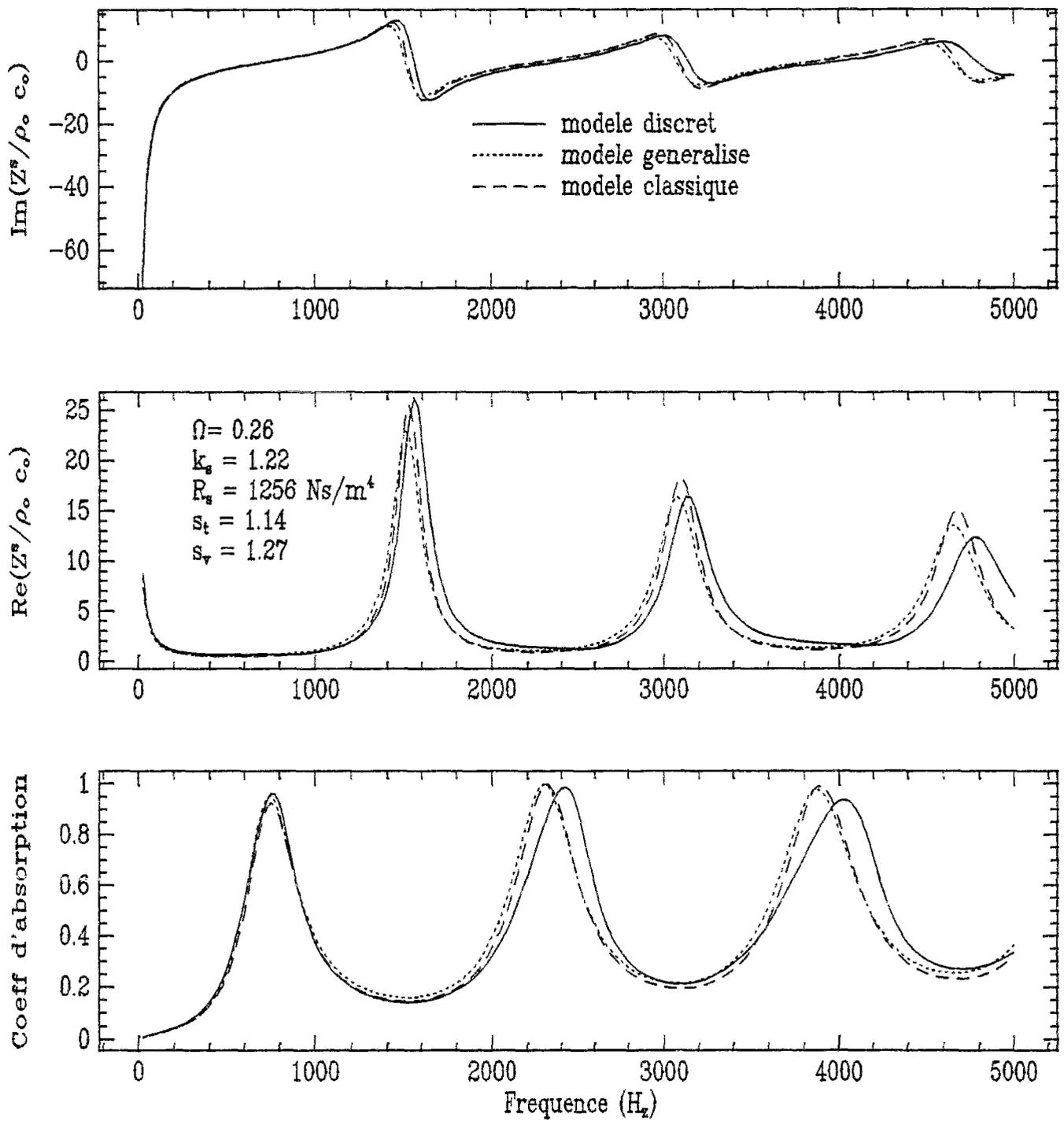


FIG. 3.12 - Pores différents de section variable - $\sigma^s = 20\%$

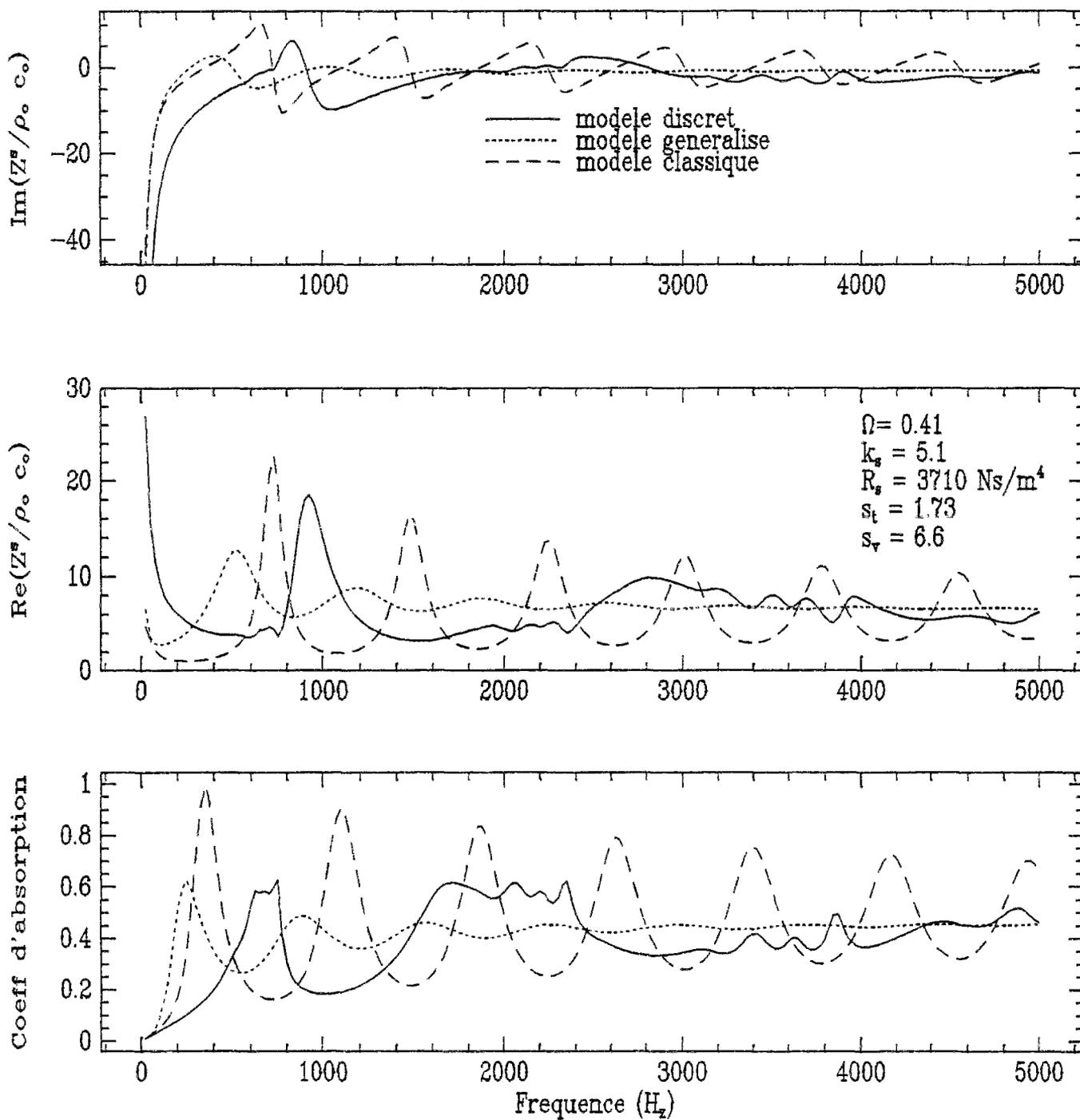


FIG. 3.13 - Pores différents de section variable - $\sigma^s = 62\%$

3.6 Fortes discontinuités

Pour décrire de manière quantitative les espaces poreux, on utilise souvent le spectre porosimétrique qui représente la courbe de distribution des rayons d'accès, c'est à dire des rayons associés aux différents conduits élémentaires. Ce type de représentation peut être obtenu en utilisant un porosimètre à mercure. Il apparaît alors pour les milieux poreux communs, une distribution de type log-normal [Bourbié, Coussy, Zinszner, 1986]. On observe dans certains cas qu'un seul type de rayon d'accès existe. Toutefois, de nombreux matériaux laissent apparaître des spectres bimodaux. Dans certains cas, on observe même l'existence de trois ou quatre types de conduits élémentaires. L'interprétation des propriétés acoustiques de tels milieux nécessite de tenir compte de la distribution de ces familles de conduits élémentaires qui engendrent de fortes discontinuités.

Nous retiendrons par la suite trois types de conduits élémentaires caractérisés par trois lois normales. Pour chaque type de pore, nous associons également la probabilité de retrouver la famille de micros-conduits considérée le long d'un pore. Nous obtenons ainsi un aléa relativement important.

Nous maintenons le nombre de pores et les dimensions de l'éprouvette que nous avons utilisés précédemment. En notant R_k^m , σ_k et P_k ($k = 1, 3$) respectivement le rayon moyen, l'écart-type et la probabilité, le premier milieu poreux étudié est défini par les trois types de conduits élémentaires suivants :

- type 1 :

$$\begin{aligned} R_1^m &= 0.001 \text{ m} \\ \sigma_1 &= 0 \text{ m} \\ P_1 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

- type 2 :

$$\begin{aligned} R_2^m &= 0.0005 \text{ m} \\ \sigma_2 &= 0 \text{ m} \\ P_2 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

- type 3 :

$$\begin{aligned} R_3^m &= 0.0002 \text{ m} \\ \sigma_3 &= 0 \text{ m} \\ P_3 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Nous avons retenu un écart-type nul ce qui engendre trois conduits élémentaires différents et la même probabilité. Cela signifie que le pore est composé de

trois conduits élémentaires avec la même proportion pour chaque type. Les pores sont toujours discrétisés en 1000 conduits de longueur $0.0001m$. Ils sont statistiquement identiques, mais n'ont pas forcément la même géométrie. Le calcul des paramètres macroscopiques donne les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}\Omega &= 0.17 \\ k_s &= 4.29 \\ R_s &= 78136 \text{ } Ns/m^4 \\ s_t &= 3.5 \\ s_v &= 0.96\end{aligned}$$

Nous constatons que les fortes discontinuités donnent un paramètre s_t nettement plus grand que 1, ce qui différencie le modèle généralisé du modèle discret. Le résultat du calcul de l'impédance et du coefficient d'absorption est reporté sur la figure (3.14). On observe une bonne concordance des résultats entre le modèle généralisé et le modèle discret sur une large gamme de fréquences. Le modèle corrigé utilise les formulations théoriques des paramètres supplémentaires que nous avons proposés au chapitre précédent. Celles-ci supposent que les pores sont de natures différentes. L'utilisation des écritures classiques [Champoux *et al.*, 1992] pour ces paramètres suppose que les pores ont la même géométrie et ne donnerait une bonne approximation qu'aux basses fréquences comme l'indique la figure (3.15). Au delà, des différences apparaissent entre le modèle discret et le modèle généralisé qui surestime l'absorption.

De manière à étudier l'influence du désordre, nous affectons à chaque loi normale caractérisant le type de pore un écart-type de 20% ($\sigma_1 = 0.0002 \text{ } m$, $\sigma_2 = 0.0001 \text{ } m$ et $\sigma_3 = 0.00004 \text{ } m$) en maintenant les autres quantités inchangées.

Les paramètres macroscopiques deviennent :

$$\begin{aligned}\Omega &= 0.18 \\ k_s &= 5.18 \\ R_s &= 138401 \text{ } Ns/m^4 \\ s_t &= 4.52 \\ s_v &= 0.93\end{aligned}$$

Une augmentation du désordre s'accompagne donc par des quantités R_s , k_s et s_t plus grandes. Ici aussi, les résultats issus des modèles discret et généralisé sont très proches (Figure 3.16).

Ils diffèrent toutefois lorsqu'on augmente davantage le désordre. Ainsi, en affectant aux conduits de type 2 un écart-type de 50% ($\sigma_2 = 0.00025 \text{ m}$) tout en maintenant des variations de l'ordre de 20% pour les deux autres familles ($\sigma_1 = 0.0002 \text{ m}$, $\sigma_3 = 0.00004 \text{ m}$), les résultats sont profondément modifiés. Ils se manifestent comme nous pouvons le constater sur la figure (3.17) par un modèle généralisé qui sous-estime l'absorption par rapport au modèle discret, mais aussi par des paramètres R_s , k_s et s_t qui prennent des valeurs très grandes :

$$\begin{aligned}\Omega &= 0.18 \\ k_s &= 14.5 \\ R_s &= 3808430 \text{ Ns/m}^4 \\ s_t &= 14.8 \\ s_v &= 2.3\end{aligned}$$

Une analyse fine de la distribution des conduits élémentaires nous a permis d'identifier certains conduits élémentaires "bouchés" ayant des rayons de l'ordre de 10^{-6} ou 10^{-7} m . Ces micro-conduits sont à l'origine de phénomènes localisés qui perturbent les propriétés acoustiques de milieu poreux. Lorsque nous supprimons ces singularités en imposant un rayon minimum (0.0001 m) et maximum (0.0009 m) (pour les conduits issus de la loi de type 2 caractérisée par $\sigma_2 = 0.00025 \text{ m}$), nous obtenons une bonne similitude entre les résultats des modèles généralisé et discret (Figure 3.18) et des valeurs des paramètres macroscopiques plus faibles pour ce qui concerne la résistance au passage de l'air, la tortuosité et les paramètres additionnels s_t et s_v :

$$\begin{aligned}\Omega &= 0.18 \\ k_s &= 5.8 \\ R_s &= 158439 \text{ Ns/m}^4 \\ s_t &= 4.7 \\ s_v &= 0.94\end{aligned}$$

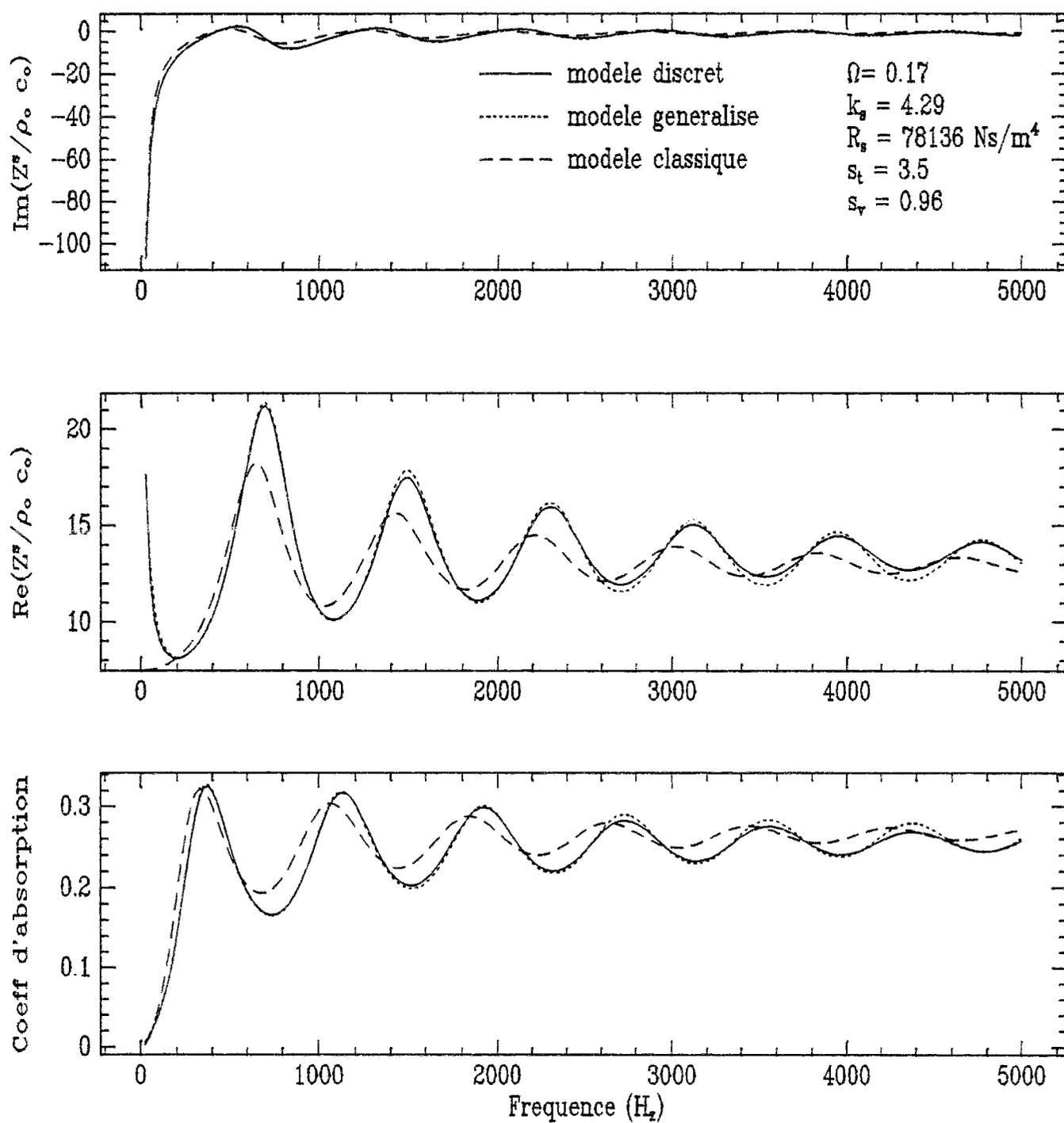


FIG. 3.14 - Pores composés de trois conduits élémentaires

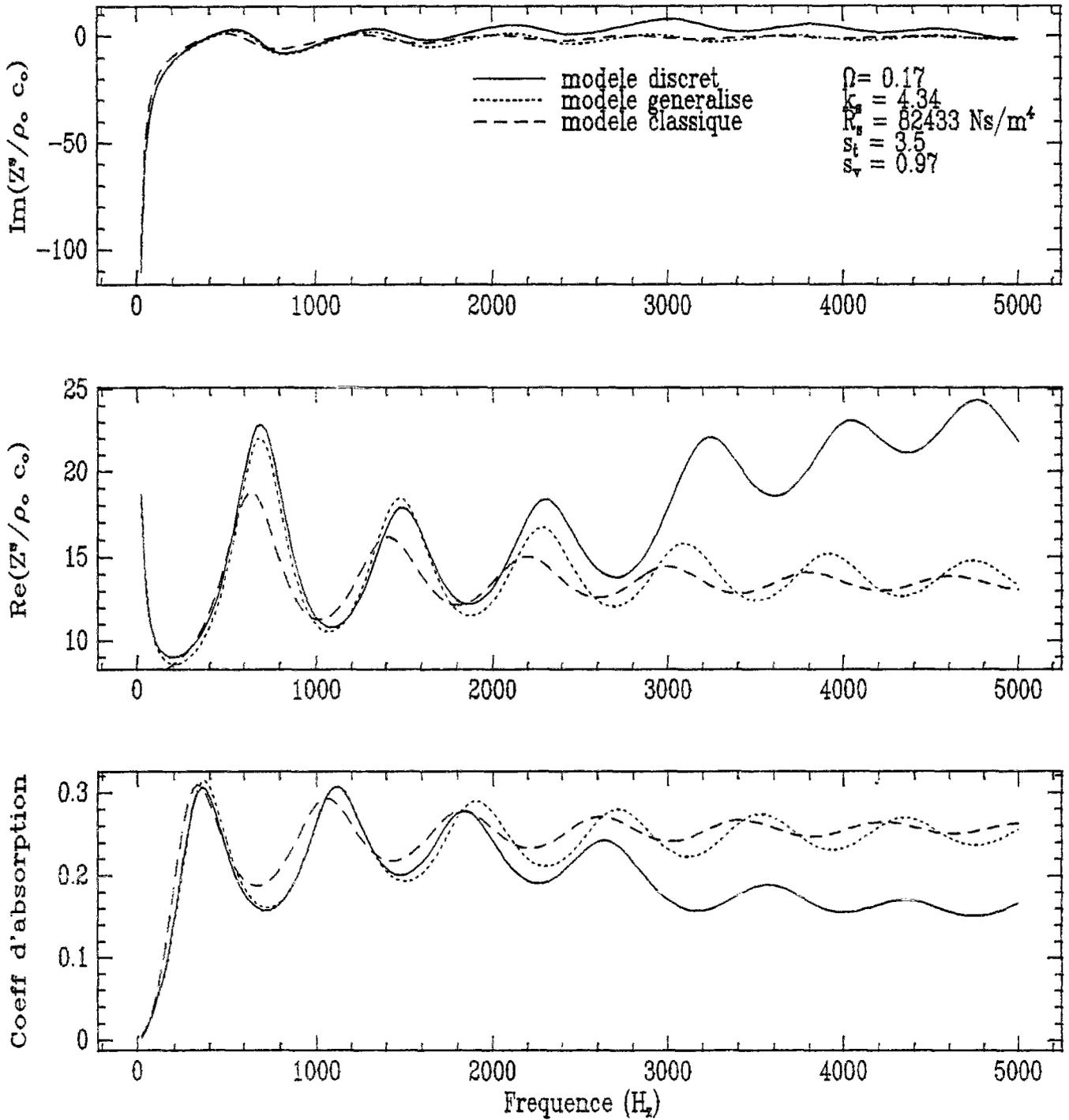


FIG. 3.15 - Pores composés de trois conduits élémentaires - Pores identiques

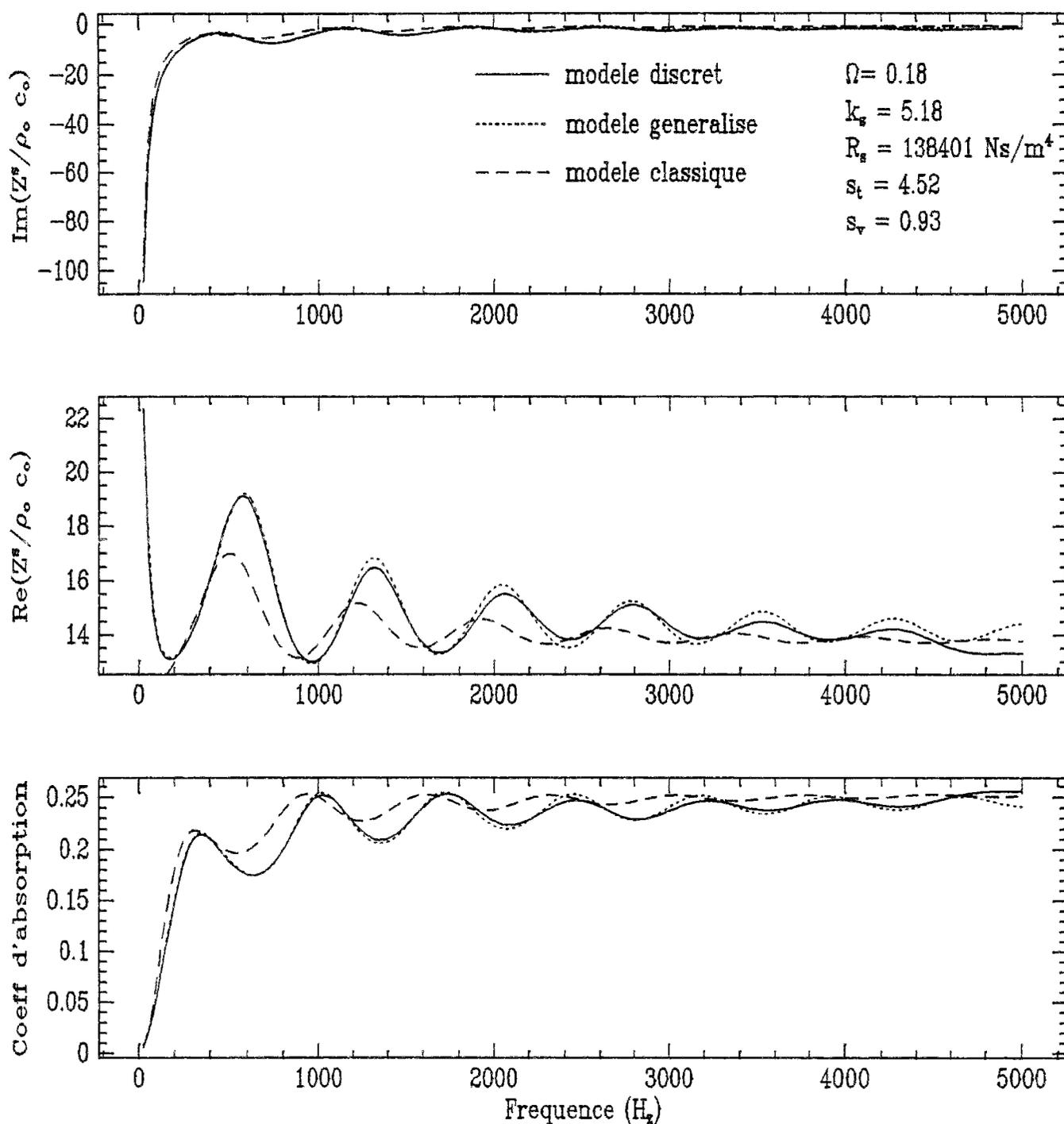


FIG. 3.16 - Pores composés de trois conduits élémentaires - Ecart-type de 20 %

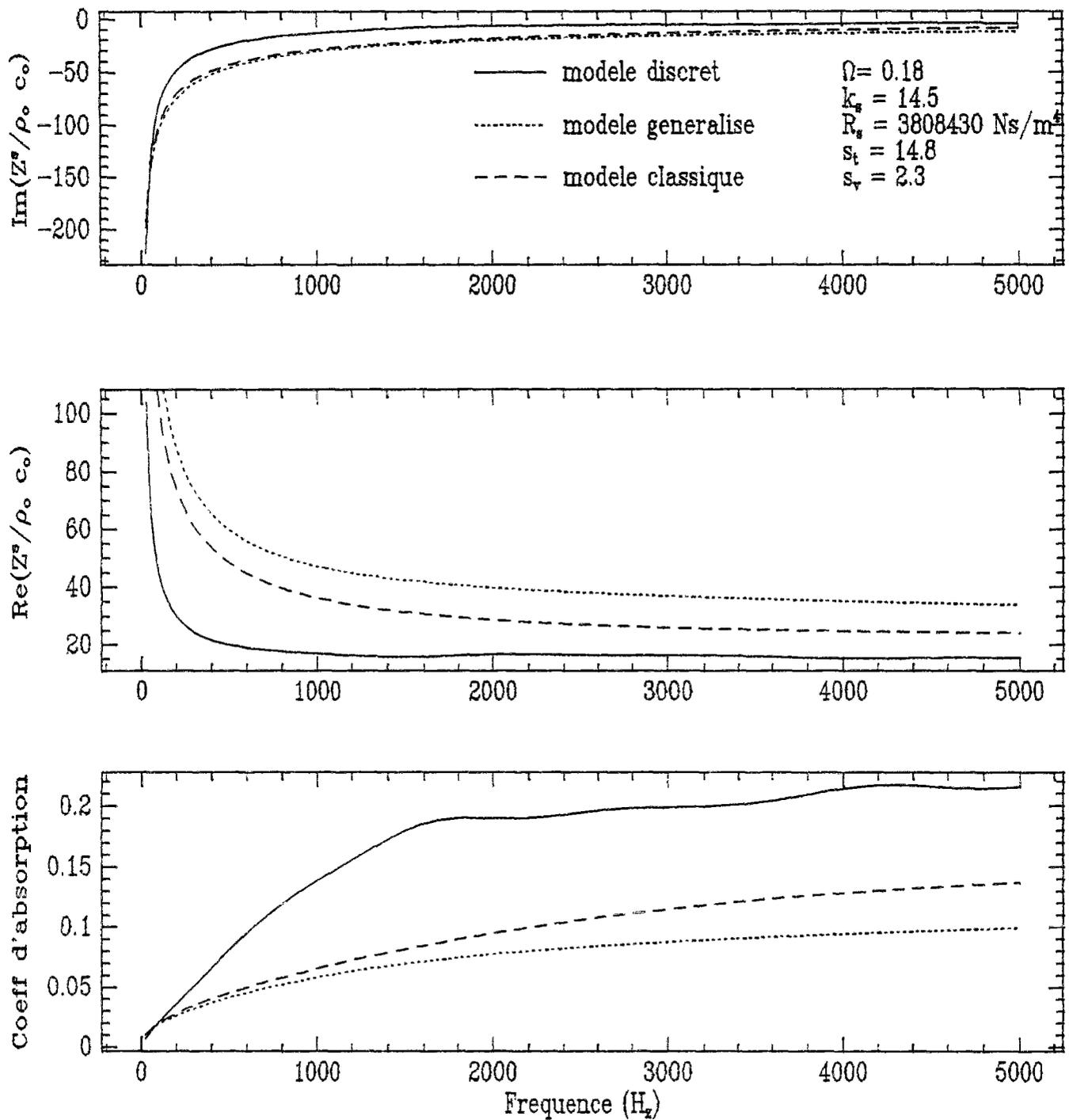


FIG. 3.17 - Pores composés de trois conduits élémentaires - Ecart-type de 50 % pour les conduits de type 2

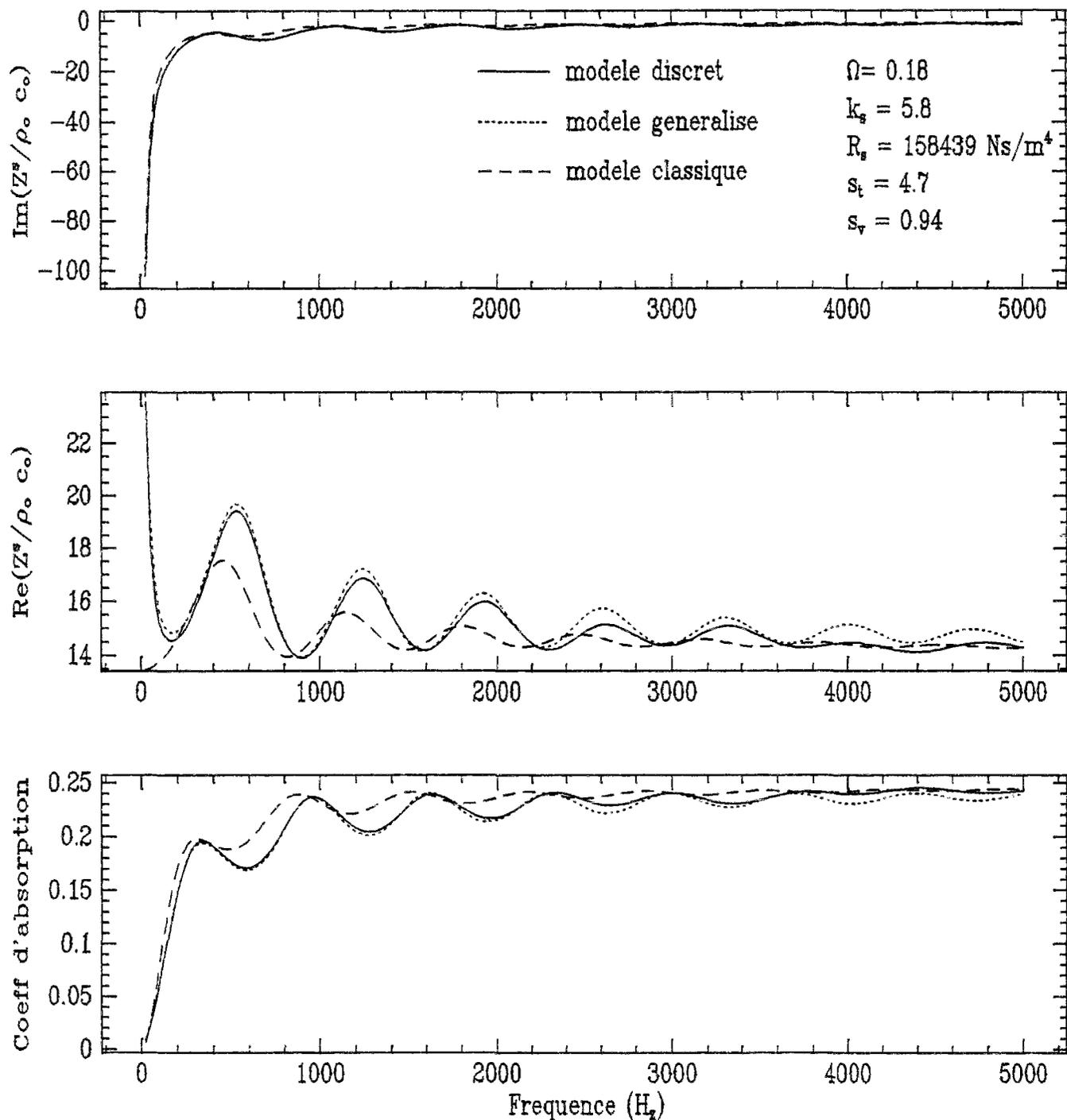


FIG. 3.18 - Pores composés de trois conduits élémentaires - Ecart-type de 50 %
- Les pores "bouchés" sont supprimés

3.7 Influence des paramètres supplémentaires s_t et s_v

Nous considérons un milieu poreux décrit par les paramètres macroscopiques suivants :

$$\begin{aligned}\Omega &= 0.3 \\ k_s &= 3 \\ R_s &= 10000 \text{ Ns/m}^4 \\ E_p &= 0.05\end{aligned}$$

Il s'agit de caractéristiques que l'on peut retrouver pour des milieux poreux de type enrobés drainants. Nous proposons de calculer le coefficient d'absorption en utilisant le modèle généralisé par l'introduction des paramètres s_t et s_v et d'analyser l'influence de ces deux quantités.

Le modèle généralisé suppose que les paramètres additionnels sont découplés. Nous fixerons donc le premier pour faire varier le second. Bien entendu, le matériau considéré n'a peut être pas de sens physique pour toutes les combinaisons de paramètres, mais son étude nous permet toutefois de dégager des tendances. L'analyse de ces tendances est déduite des figures (3.19) et (3.20) qui traduisent l'évolution du coefficient d'absorption lorsque l'on fait varier respectivement s_t puis s_v .

Des valeurs croissantes pour s_t entraînent un décalage vers les hautes fréquences associé à une augmentation de l'amplitude des maximums. Ces variations s'accroissent lorsque les fréquences sont grandes. L'influence du paramètre s_v est beaucoup plus importante. Son augmentation se traduit par :

- Une diminution des maxima associés à un élargissement des pics.
- Un décalage des pics vers les basses fréquences.
- Une absorption relativement constante.

Une optimisation du milieu poreux pour des paramètres classiques fixés, consiste à contrôler plutôt s_v , qui joue un rôle relativement important en permettant d'obtenir en fonction du problème qui se pose le type d'absorption adéquat :

- Une absorption importante, mais sélective.
- Une absorption plus faible, mais constante pour un régime fréquentiel plus étendu.

3.7. INFLUENCE DES PARAMÈTRES SUPPLÉMENTAIRES S_T ET S_V 187

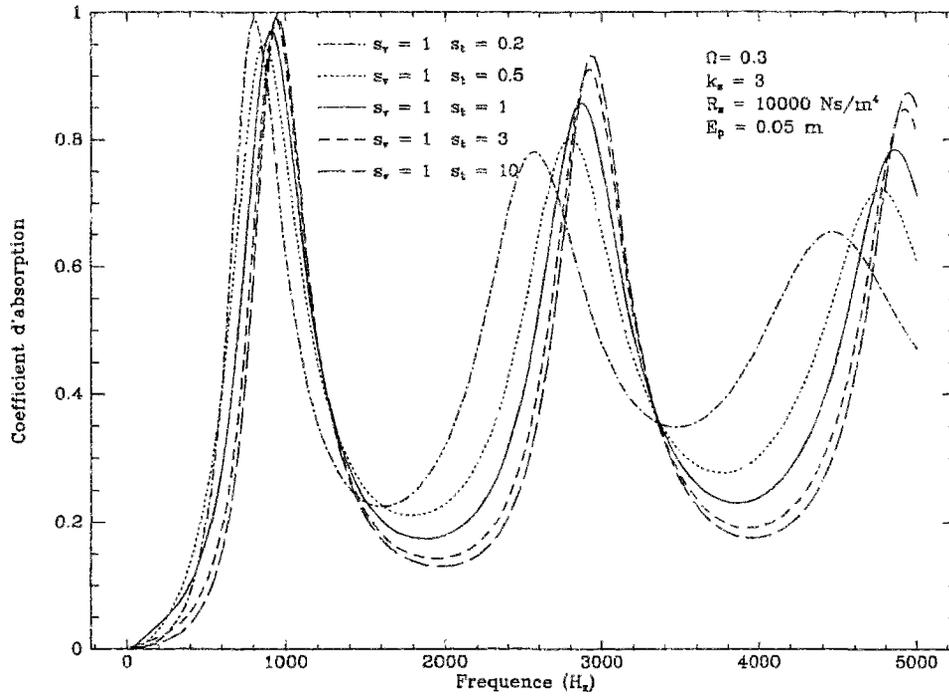


FIG. 3.19 - Influence du paramètre s_t

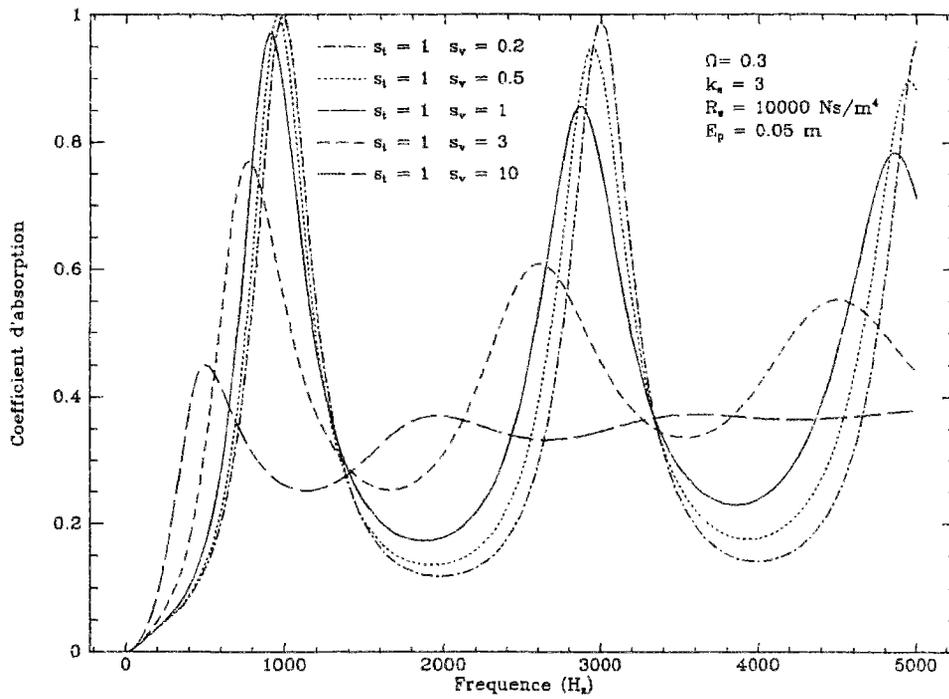


FIG. 3.20 - Influence du paramètre s_v

Pour un enrobé drainant décrit par les paramètres classiques macroscopiques présentés ci-dessus, il est préférable d'utiliser un s_v aussi petit que possible, de manière à augmenter le maximum du premier pic d'absorption qui se situe au voisinage des $1000 H_z$ où se concentre le bruit routier.

3.8 Optimisation

Comme nous avons pu le constater auparavant, les milieux poreux ont des qualités acoustiques intéressantes dans la mesure où ils permettent d'absorber une partie du bruit émis par une source sonore. Nous avons dénombré 6 paramètres ($E_p, \Omega, R_s, k_s, s_t, s_v$) susceptibles de caractériser le matériau et un problème d'optimisation consiste à définir une combinaison de ces quantités offrant une absorption maximale en tenant compte des contraintes liées au coût de production (épaisseur minimale) et aux fréquences que l'on désire atténuer.

Pour un spectre compris entre les fréquences f_1 et f_2 , et pour une épaisseur E_p donnée le problème peut se formuler de manière théorique. Il consiste à déterminer une composition des paramètres macroscopiques qui maximise la fonction J définie ci-dessous :

$$J = \frac{\int_{f_1}^{f_2} \alpha(\Omega, R_s, k_s, s_t, s_v) W(f) df}{f_2 - f_1} \quad (3.10)$$

α désigne le coefficient d'absorption en incidence normale. W est une fonction de pondération qui tient compte :

- de la sensibilité de l'oreille qui masque en partie les basses fréquences.
- des fréquences particulières associées au bruit émis. Pour ce qui concerne le bruit routier la répartition fréquentielle dépend en partie du site. Pour un site autoroutier, le bruit de roulement qui est prépondérant génère une émission acoustique dans le voisinage des $1000 H_z$, tandis qu'en site urbain, l'importance des bruits moteurs, notamment celles des poids lourds conduit à un bruit important pour des fréquences plus basses.

Le problème d'optimisation doit donc être traité en fonction des préoccupations liées au site. Sa résolution suppose toutefois l'utilisation de méthodes numériques.

3.9 Conclusion

L'ensemble des simulations présentées ci-dessus nous permettent de définir le régime de validité des différents modèles :

- Le modèle classique

Il est efficace lorsque les pores sont identiques et de section constante. Il permet toutefois de retrouver les résultats issus des modèles généralisé et discret lorsque l'écart-type caractérisant les changements de section le long du pore est relativement petit, de manière à ce que le pore ne soit pas sujet à de fortes discontinuités.

- Le modèle généralisé

Ce modèle utilise les nouvelles formulations théoriques pour les paramètres macroscopiques que nous avons proposées au chapitre précédent. Lorsque les pores sont très différents, ce couple de paramètres est caractérisé par le régime $\frac{s_t}{s_v} < 1$ qui n'est pas accessible par les écritures classiques. Les nouvelles formulations permettent ainsi d'expliquer les incohérences que l'on peut rencontrer dans la littérature [Attenborough, 1993]. Le modèle est efficace lorsque le pore subit de fortes discontinuités qui n'engendrent pas toutefois de micro-conduits "bouchés". Dans ces conditions, on retrouve les résultats issus du modèle discret.

La présence de discontinuités se manifeste par une augmentation de la tortuosité, de la résistance au passage de l'air et par des quantités s_t et s_v qui s'éloignent de 1. Ces variations sont amplifiées lorsque la distribution des conduits élémentaires engendre des micro-conduits "bouchés" qui conditionnent fortement les propriétés acoustiques du milieu. Le modèle généralisé est alors insuffisant.

- Le modèle discret

Lorsque le pore est discrétisé finement, ce modèle permet de couvrir un domaine large qui inclut le régime de validité des modèles classique et généralisé. Il est bien entendu plus riche puisqu'il permet de traiter des écarts-types importants en tenant compte de la position de chaque conduit élémentaire et en supposant que les pores sont de natures différentes. Les phénomènes de localisation sont donc pris en compte. Nous pensons qu'il peut être adapté à une modélisation acoustique d'un milieu granulaire (qui fait l'objet de fortes discontinuités et d'un désordre important) dans la mesure où la distribution des rayons élémentaires est connue.

Sur le plan pratique cette information peut être obtenue en utilisant un porosimètre à mercure qui est un outil important pour la quantification des réseaux poreux. L'utilité majeure de cette méthode réside principalement dans sa capacité à distinguer différents types de conduits élémentaires et à donner une mesure

de leurs rayons. Le spectre porosimétrique nous indique en effet la distribution qui caractérise le matériau et qui peut être resserrée au voisinage d'un pic (un type de conduit) ou encore plus étalée et laissant apparaître plusieurs types de micro-conduits. On comprend que l'interprétation des propriétés acoustiques des milieux poreux sera nettement influencée par la prise en compte de cette diversité de type de conduits élémentaires. Ainsi pour ce qui concerne les enrobés drainants, on peut penser qu'il existe une corrélation entre les coupures de courbe granulométrique et le nombre de familles de micro-conduits.

Ces rayons élémentaires peuvent être également identifiés par une approche basée sur les principes de la morphologie mathématique qui consiste en une étude probabiliste des formes [Serra, 1982]. L'application de cette théorie nécessite l'utilisation d'images digitalisées de l'espace poreux. Celles-ci sont obtenues par une caméra travaillant derrière un microscope qui fournit des images qui sont par la suite traitées par un ordinateur. Un important travail de réflexion est toutefois nécessaire pour déterminer parmi tous les paramètres quantitatifs que fournit l'analyse d'image, ceux qui nous seront utiles.

Aussi, il est préférable d'utiliser dans un premier temps une méthode expérimentale qui nous permettra d'identifier la distribution des conduits élémentaires et d'étudier l'influence des coupures de la courbe granulométrique sur cette distribution. En fonction du milieu considéré, nous utiliserons le modèle généralisé ou le modèle discret lorsque certains phénomènes influençant les propriétés acoustiques sont localisés à une position précise du pore.

Conclusion

Cette seconde partie fut consacrée à l'analyse des propriétés acoustiques de milieux complexes composés de pores non connectés et de section variable.

Nous avons bâti un nouveau modèle discret et enrichi le modèle généralisé par de nouvelles formulations des paramètres macroscopiques.

Les deux approches reposent sur une faible variation de la pression à la surface du matériau en contact direct avec l'air libre et ont toutes les deux l'avantage de considérer des pores de natures différentes.

Le modèle discret consiste à calculer l'impédance microscopique pour chaque pore et à en déduire à l'échelle du matériau, l'impédance de surface équivalente par le passage micro-macro que nous avons proposé au premier chapitre.

Les nouveaux paramètres du modèle généralisé sont obtenus en formulant le problème en termes de matrices de transfert et d'admittance. Les écritures permettent de retrouver, pour ce qui concerne les paramètres additionnels s_t et s_v , le régime $\frac{s_t}{s_v} < 1$ qui a déjà été identifié expérimentalement sans être formulé de manière théorique. Il semblerait que ce régime est atteint lorsque les pores sont franchement différents et qu'il suffit d'utiliser une seule quantité supplémentaire lorsque ceux-ci sont de section constante.

Les simulations que nous avons présentées ont permis de préciser le régime de validité du modèle généralisé. Il permet de prendre en compte, à travers l'utilisation des paramètres s_t et s_v , les discontinuités lorsque celles-ci ne se traduisent pas par des pores qui se "bouchent". Ces singularités conditionnent en effet les propriétés acoustiques du milieu et ne sont traitées que par le modèle discret.

Conclusion générale

Des améliorations dans la caractérisation acoustique des milieux poreux ont été apportées dans ce travail.

Celles-ci reposent sur une description plus fine du réseaux poreux en considérant que le matériau est composé de pores non connectés, de géométries différentes et sujets à de fortes discontinuités.

Les faibles variations de la pression à la surface du matériau nous ont permis, en utilisant un formalisme matriciel, de bâtir un modèle discret et d'enrichir les formulations théoriques des paramètres macroscopiques, que nous avons reportés dans un modèle généralisé.

Le modèle discret offre une solution "exacte" dans la mesure où il ne fait quasiment pas d'hypothèses. Il permet ainsi de préciser le régime de validité d'une approche généralisé.

Il semblerait que les propriétés acoustiques d'un milieu poreux sont très sensibles à la présence de conduits "bouchés" et à leurs positions le long du pore, notamment lorsque les fréquences sont de plus en plus grandes. Un tel comportement est bien décrit par une approche discrète, par contre le modèle généralisé utilisant deux paramètres additionnels reste insuffisant. Il est nécessaire d'introduire des quantités supplémentaires susceptibles d'apporter une information sur l'ordre de la distribution. Il reste toutefois à définir des méthodes de mesures de ces quantités complémentaires.

Lorsqu'il s'agit de couches de roulement poreuses, nous pensons qu'une analyse expérimentale des rayons d'accès par l'intermédiaire d'un porosimètre à mercure devrait confirmer nos propos, notamment pour des enrobés drainants usagés et colmatés. Le colmatage (bouchage progressif des pores par des matériaux apportés de manière accidentelle) concerne généralement la partie superficielle de la structure, d'où l'importance de la position des micro-conduits étroits. Dans ce cas, une mesure fine des propriétés acoustiques devrait confirmer l'intérêt d'une approche discrète.

D'une manière générale, nous estimons qu'il serait utile de mener une campagne expérimentale sur un grand nombre d'éprouvette de façon à identifier l'influence de la courbe granulométrique et de mettre en évidence (si elle existe) une relation empirique entre le nombre de coupure de cette courbe et le nombre de familles de micros-conduits. On pourrait ainsi contrôler la géométrie du réseau poreux et affecter au matériau considéré les caractéristiques acoustiques recherchées qui seront préalablement mises en évidence par le modèle discret.

Le problème d'optimisation a été posé. Il doit être adapté au site considéré et sa résolution nécessite l'utilisation de méthodes numériques. Le modèle phénoménologique s'affranchit de ce type de difficultés. Aussi, nous pensons que les approches discrète et phénoménologique sont complémentaires. Une autre piste à envisager serait de dégager les tendances d'une analyse typologique obtenue par le modèle discret pour les reporter dans un modèle phénoménologique qui en fera un outil enrichi et pratique.

Annexe A

Modèle phénoménologique

Les équations fondamentales sont données par :

- La conservation de la masse :

Elle indique que toute variation de masse fluide dans un volume donné est due à un flux de fluide à travers la surface enveloppant ce volume :

$$\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_o \operatorname{div}(\vec{u}) = 0 \quad (\text{A.1})$$

ρ et ρ_o représentent respectivement la variation de masse volumique de l'air et la masse volumique du même fluide au repos. \vec{u} désigne la vitesse moyenne des particules d'air dans le matériau poreux.

- L'équation du mouvement :

Elle révèle que le mouvement de l'air dû à un gradient de pression est freiné par un phénomène de viscosité exprimé à travers la résistance au passage de l'air :

$$\rho_o \frac{K}{\Omega} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + R_s \vec{u} = -\overrightarrow{\operatorname{grad} p} \quad (\text{A.2})$$

où p représente la pression acoustique (perturbation de la pression par rapport à la pression atmosphérique).

- L'équation de conduction de la chaleur :

Elle nous permet d'introduire les dissipations énergétiques associées aux phénomènes de thermoconductivité et s'écrit de la manière suivante à l'échelle macroscopique :

$$\rho_o \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{R_s}{N_{pr}} \tau = \frac{1}{c_p} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (\text{A.3})$$

τ est la variation de température de l'air par rapport à un état ambiant, c_p la chaleur spécifique de l'air à pression constante et N_{pr} le nombre Prandtl.

• L'équation d'état pour le fluide :

En utilisant les approximations de l'acoustique classique, nous avons :

$$p - \frac{P_o}{\rho_o} \rho = \left\{ 1 - \frac{1}{\gamma} \right\} \rho_o c_p \tau \quad (\text{A.4})$$

P_o est la pression atmosphérique et $\gamma = c_p/c_v$ le rapport de la chaleur spécifique à pression constante par la quantité correspondante à volume constant.

Pour une onde harmonique avec une dépendance temporelle de type $e^{i\omega t}$, l'équation du mouvement (A.2) devient :

$$\overrightarrow{\text{grad}} p + i \omega \rho_o \frac{K}{\Omega} \left\{ 1 - i \frac{f_\eta}{f} \right\} \overrightarrow{u} = 0 \quad (\text{A.5})$$

f est la fréquence et la quantité f_η qui a également la dimension d'une fréquence, est définie par $f_\eta = \frac{R_s \Omega}{2 \pi \rho_o N_{pr}}$.

La relation de compressibilité est obtenue en éliminant la température τ entre l'équation d'état (A.4) et l'équation de conduction de la chaleur (A.3). Cette relation associe la variation de la masse volumique ρ à la pression acoustique p :

$$\frac{1}{\rho_o} \frac{\rho}{p} = \frac{1}{P_o} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{1}{1 - i \frac{f_\tau}{f}} \right\} \quad (\text{A.6})$$

avec $f_\tau = \frac{R_s}{2 \pi \rho_o K}$. L'équation de propagation s'obtient en éliminant la vitesse des équations (A.1), (A.5) et en utilisant la relation (A.6) :

$$\Delta p + k^2 p = 0 \quad (\text{A.7})$$

où le nombre d'onde k est défini par :

$$k = k_c \sqrt{K \gamma} \sqrt{1 - i \frac{f_\eta}{f}} \sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{1}{1 - i \frac{f_\tau}{f}}} \quad (\text{A.8})$$

$k_o = \omega/c_o$, où c_o est la célérité du son à l'air libre. Pour une onde plane se propageant dans la direction des x croissants ($p = p_+ e^{ikx}$, $u = u_+ e^{ikx}$), l'impédance caractéristique est donnée par :

$$Z^c = \frac{p_+}{u_+} \quad (\text{A.9})$$

Le calcul de ce rapport est déduit de l'équation (A.5) qui donne :

$$Z^c = \rho_o c_o \frac{1}{\Omega} \frac{K}{\gamma} \frac{\sqrt{1 - i \frac{f_\eta}{f}}}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{1}{1 - i \frac{f_\tau}{f}}}} \quad (\text{A.10})$$

Annexe B

Modèle microscopique

B.1 Calcul des solutions λ_1 et λ_2

Ce sont les solutions de l'équation du second degré (2.49) :

$$\lambda^2 \left[\frac{c_o^2 \nu'}{i \omega \gamma} + \frac{4}{3} \nu \nu' \right] - \lambda \left[c_o^2 + i \omega \left(\frac{4}{3} \nu + \nu' \right) \right] - \omega^2 = 0 \quad (\text{B.1})$$

Le calcul du déterminant est donné par :

$$\Delta = \left[c_o^2 + i \omega \left(\frac{4}{3} \nu + \nu' \right) \right]^2 + \left[\frac{16}{3} \nu \nu' - i 4 \frac{c_o^2 \nu'}{\omega \gamma} \right] \omega^2 \quad (\text{B.2})$$

Nous en déduisons l'écriture des solutions :

$$\lambda_1 = \frac{B - \sqrt{\Delta}}{A} \quad (\text{B.3})$$

$$\lambda_2 = \frac{B + \sqrt{\Delta}}{A} \quad (\text{B.4})$$

avec :

$$B = c_o^2 + i \omega \left(\frac{4}{3} \nu + \nu' \right) \quad (\text{B.5})$$

$$A = -2 i \frac{c_o^2 \nu'}{\omega \gamma} + \frac{8}{3} \nu \nu' \quad (\text{B.6})$$

Afin d'obtenir des solutions approchées, nous utilisons l'approximation $\omega \nu / c_o^2 \ll 1$. ν et ν' sont du même ordre de grandeur, nous avons donc $\omega \nu' / c_o^2 \ll 1$. Les quantités A , B et $\sqrt{\Delta}$ sont alors approchées à l'ordre 1 en $\omega \nu / c_o^2$ et $\omega \nu' / c_o^2$:

- Calcul de A :

$$A = \frac{\omega\gamma}{2\nu'c_o^2} \frac{1}{\frac{4\gamma}{3} \frac{\omega\nu}{c_o^2} - i} \quad (\text{B.7})$$

$$= \frac{\omega\gamma}{2\nu'c_o^2} \frac{1}{1 + \frac{16\gamma^2}{9} \frac{\omega^2\nu^2}{c_o^4}} \left(i + \frac{4\gamma}{3} \frac{\omega\nu}{c_o^2} \right) \quad (\text{B.8})$$

A l'ordre 1, nous obtenons :

$$A \approx \frac{\omega\gamma}{2\nu'c_o^2} \left(i + \frac{4\gamma}{3} \frac{\omega\nu}{c_o^2} \right) \quad (\text{B.9})$$

- Calcul de B :

$$B = c_o^2 + i\omega \left(\frac{4}{3}\nu + \nu' \right) \quad (\text{B.10})$$

$$= c_o^2 \left[1 + \frac{i\omega}{c_o^2} \left(\frac{4}{3}\nu + \nu' \right) \right] \quad (\text{B.11})$$

- Calcul de $\sqrt{\Delta}$:

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\left[c_o^2 + i\omega \left(\frac{4}{3}\nu + \nu' \right) \right]^2 + \left[\frac{16}{3} \nu \nu' - i 4 \frac{c_o^2 \nu'}{\omega\gamma} \right] \omega^2} \quad (\text{B.12})$$

$$= c_o^2 \sqrt{1 + \frac{2i\omega}{c_o^2} \left(\frac{4}{3}\nu + \nu' \right) - \frac{\omega^2}{c_o^4} \left(\frac{4}{3}\nu + \nu' \right)^2 - \frac{4i\omega\nu'}{\gamma c_o^2} + \frac{16\omega^2\nu\nu'}{3 c_o^4}} \quad (\text{B.13})$$

Nous rappelons que pour $\varepsilon \ll 1$, nous avons au premier ordre $\sqrt{1 + \varepsilon} \approx 1 + \frac{\varepsilon}{2}$.
En appliquant ce développement, la racine carrée du déterminant devient :

$$\sqrt{\Delta} \approx c_o^2 \left[1 + \frac{i\omega}{c_o^2} \left(\frac{4}{3}\nu + \nu' \right) - \frac{\omega^2}{2c_o^4} \left(\frac{4}{3}\nu + \nu' \right)^2 - \frac{2i\omega\nu'}{\gamma c_o^2} + \frac{8\omega^2\nu\nu'}{3 c_o^4} \right] \quad (\text{B.14})$$

Nous ne retenons que les termes du premier ordre :

$$\sqrt{\Delta} \approx c_o^2 \left[1 + \frac{i\omega}{c_o^2} \left(\frac{4}{3}\nu + \nu' \right) - \frac{2i\omega\nu'}{\gamma c_o^2} \right] \quad (\text{B.15})$$

Lorsque nous reportons les relations (B.15), (B.11) et (B.9) (qui expriment respectivement les quantités $\sqrt{\Delta}$, B et A) dans les écritures (B.3) et (B.4) des solutions λ_1 et λ_2 , nous obtenons :

$$\lambda_1 \approx \frac{\omega\gamma}{\nu'c_o^2} \left(\frac{4i}{3} \frac{\omega^2\nu\nu'}{c_o^4} - \frac{\omega\nu'}{\gamma} \right) \quad (\text{B.16})$$

$$\lambda_2 \approx \frac{\omega\gamma}{\nu'} \left(i + \frac{4\gamma}{3} \frac{\omega\nu}{c_o^2} \right) \left(1 + \frac{i\omega}{c_o^2} \left(\frac{4}{3}\nu + \nu' \right) - \frac{i}{\gamma} \frac{\omega\nu'}{c_o^2} \right) \quad (\text{B.17})$$

En ne retenant que les termes d'ordre 0 :

$$\lambda_1 \approx -\frac{\omega^2}{c_o^2} \quad (\text{B.18})$$

$$\lambda_2 \approx \frac{i\omega\gamma}{\nu'} \quad (\text{B.19})$$

Les solutions sont donc réelles ou imaginaires pures.

B.2 Calcul du nombre d'onde

Il est obtenu par la résolution de l'équation (2.52) :

$$\frac{i\omega m^2}{(i\omega/\nu) - m^2} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \frac{d \ln Q}{dr_p} + \left(\frac{i\omega}{\lambda_1} - \nu' \right) \frac{d \ln Q_1}{dr_p} - \left(\frac{i\omega}{\lambda_2} - \nu' \right) \frac{d \ln Q_2}{dr_p} = 0 \quad (\text{B.20})$$

On a :

$$\frac{d \ln Q}{dr_p} = -\left(m^2 - \frac{i\omega}{\nu}\right)^{1/2} G \left[r_p \left(m^2 - \frac{i\omega}{\nu}\right)^{1/2} \right] \quad (\text{B.21})$$

où la fonction G désigne le rapport de la fonction de Bessel d'ordre 1 par la fonction de Bessel d'ordre 0 ($G = J_1/J_0$). Avec l'approximation $|m^2| \ll |i\omega/\nu|$, il vient :

$$\frac{d \ln Q}{dr_p} = -\left(-\frac{i\omega}{\nu}\right)^{1/2} G \left[r_p \left(-\frac{i\omega}{\nu}\right)^{1/2} \right] \quad (\text{B.22})$$

de même :

$$\frac{d \ln Q_2}{dr_p} = -(m^2 - \lambda_2)^{1/2} G \left[r_p (m^2 - \lambda_2)^{1/2} \right] \quad (\text{B.23})$$

Sachant que $|m^2| \ll |\lambda_2|$ et en reportant la valeur (B.19) de λ_2 , nous obtenons :

$$\frac{d \ln Q_2}{dr_p} = -\left(-\frac{i\omega\gamma}{\nu'}\right)^{1/2} G \left[r_p \left(-\frac{i\omega\gamma}{\nu'}\right)^{1/2} \right] \quad (\text{B.24})$$

L'argument de la fonction Q_1 est très petit, nous avons donc :

$$\frac{d \ln Q_1}{dr_p} = -\frac{1}{2}(m^2 - \lambda_1)r_p \quad (\text{B.25})$$

Les écritures approchées (B.25), (B.23) et (B.22) sont alors reportées dans le déterminant (B.20) en substituant λ_1 et λ_2 par leurs expressions (B.18) et (B.19). En utilisant à nouveau l'approximation $|m^2| \ll |i\omega/\nu|$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} m^2 \left\{ \nu \left(\frac{\nu'}{i\omega\gamma} + \frac{c_o^2}{\omega^2} \right) \left(\frac{-i\omega}{\nu} \right)^{1/2} G \left[r_p \left(\frac{-i\omega}{\nu} \right)^{1/2} \right] + \frac{1}{2} r_p \left(\nu' + i \frac{c_o^2}{\omega^2} \right) \right\} \\ + \left(\frac{\nu'}{\gamma} - \nu' \right) \left(\frac{i\omega\gamma}{\nu'} \right)^{1/2} G \left[r_p \left(\frac{i\omega\gamma}{\nu'} \right)^{1/2} \right] + \frac{1}{2} r_p \left(i\omega + \frac{\nu'\omega^2}{c_o^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

ou encore, moyennant quelques manipulations :

$$\begin{aligned} m^2 \frac{c_o^2}{\omega} \left\{ 1 - i \frac{\omega\nu'}{c_o^2} - \frac{2}{r_p} \left(1 - i \frac{\nu'\omega}{\gamma c_o^2} \right) \left(\frac{-i\omega}{\nu} \right)^{-1/2} G \left[r_p \left(\frac{-i\omega}{\nu} \right)^{1/2} \right] \right\} \\ + \omega \left\{ 1 - i \frac{\omega\nu'}{c_o^2} + \frac{2}{r_p} (\gamma - 1) \left(\frac{i\omega\gamma}{\nu'} \right)^{-1/2} G \left[r_p \left(\frac{i\omega\gamma}{\nu'} \right)^{1/2} \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

Nous en déduisons l'expression du nombre d'onde :

$$m^2 = -\frac{\omega^2}{c_o^2} \frac{1 - i \frac{\omega\nu'}{c_o^2} + \frac{2}{r_p} (\gamma - 1) \left(\frac{i\omega\gamma}{\nu'} \right)^{-1/2} G \left[r_p \left(\frac{i\omega\gamma}{\nu'} \right)^{1/2} \right]}{1 - i \frac{\omega\nu'}{c_o^2} - \frac{2}{r_p} \left(1 - i \frac{\nu'\omega}{\gamma c_o^2} \right) \left(\frac{-i\omega}{\nu} \right)^{-1/2} G \left[r_p \left(\frac{-i\omega}{\nu} \right)^{1/2} \right]} \quad (\text{B.28})$$

Pour simplifier cette écriture, nous utilisons l'approximation $\omega\nu'/c_o^2 \ll 1$:

$$m^2 = -\frac{\omega^2}{c_o^2} \frac{1 + \frac{2}{r_p} (\gamma - 1) \left(\frac{i\omega\gamma}{\nu'} \right)^{-1/2} G \left[r_p \left(\frac{i\omega\gamma}{\nu'} \right)^{1/2} \right]}{1 - \frac{2}{r_p} \left(\frac{-i\omega}{\nu} \right)^{-1/2} G \left[r_p \left(\frac{-i\omega}{\nu} \right)^{1/2} \right]} \quad (\text{B.29})$$

B.3 Calcul de la densité et de la vitesse

La densité moyenne est donnée par la relation (2.63)

$$\langle \rho \rangle = \rho_o \frac{2BQ_p}{i\omega r_p} \left[\frac{\lambda_1 \nu' - i\omega}{(m^2 - \lambda_1)^{1/2}} Q_{2p} R_{1p} - \frac{\lambda_2 \nu' - i\omega}{(m^2 - \lambda_2)^{1/2}} Q_{1p} R_{2p} \right] e^{mz} \quad (\text{B.30})$$

Nous nous proposons d'en donner une formulation simplifiée en utilisant les approximations introduites par le passé. Celles-ci se résument aux relations suivantes:

$$\lambda_1 \approx -\frac{\omega^2}{c_o^2} \quad \lambda_2 \approx \frac{i\omega\gamma}{\nu'} \quad (\text{B.31})$$

$$|m^2| \ll |i\omega/\nu| \quad |m^2| \ll |\lambda_2| \quad (\text{B.32})$$

$$Q_{1p} \approx 1 \quad R_{1p} \approx \frac{1}{2}(m^2 - \lambda_1)^{1/2} r_p \quad (\text{B.33})$$

Lorsque nous les reportons dans l'équation (B.30), l'écriture de la densité moyenne devient :

$$\langle \rho \rangle = \rho_o B Q_p \left[\left(i \frac{\omega \nu'}{c_o^2} - 1 \right) Q_{2p} - 2 (\gamma - 1) \left(\frac{-i\omega\gamma}{\nu'} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{R_{2p}}{r_p} \right] e^{mz} \quad (\text{B.34})$$

En négligeant $\frac{\omega \nu'}{c_o^2}$ devant 1, nous obtenons en définitive:

$$\langle \rho \rangle = -\rho_o B Q_p \left[Q_{2p} + 2 (\gamma - 1) \left(\frac{-i\omega\gamma}{\nu'} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{R_{2p}}{r_p} \right] e^{mz} \quad (\text{B.35})$$

La vitesse moyenne longitudinale est donnée par la relation (2.62):

$$\begin{aligned} \langle v_z \rangle = & -\frac{2mB}{r_p} \left[i\omega \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \frac{Q_{1p} Q_{2p} R_p}{(m^2 - i\omega/\nu)^{1/2}} \right. \\ & \left. - \left(\frac{i\omega}{\lambda_1} - \nu' \right) \frac{Q_p Q_{2p} R_{1p}}{(m^2 - \lambda_1)^{1/2}} + \left(\frac{i\omega}{\lambda_2} - \nu' \right) \frac{Q_p Q_{1p} R_{2p}}{(m^2 - \lambda_2)^{1/2}} \right] e^{mz} \quad (\text{B.36}) \end{aligned}$$

Nous utilisons ici aussi les approximations (B.31)-(B.33) pour simplifier cette écriture qui devient :

$$\begin{aligned} \langle v_z \rangle = & -\frac{2mBc_o^2}{i\omega r_p} \left[\left(1 - i \frac{\omega \nu'}{\gamma c_o^2} \right) \left(\frac{-i\omega}{\nu} \right)^{-\frac{1}{2}} Q_{2p} R_p \right. \\ & \left. - Q_p \left\{ \frac{1}{2} r_p Q_{2p} - i \frac{\omega \nu'}{c_o^2} \left(\frac{1}{2} r_p Q_{2p} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left(\frac{-i\omega\gamma}{\nu'} \right)^{-1/2} R_{2p} \right) \right\} \right] \quad (\text{B.37}) \end{aligned}$$

Or les fonctions de Bessels sont bornées, en utilisant donc l'approximation $\omega r / c_o^2 \ll 1$, l'expression de la vitesse moyenne se réduit à :

$$\langle v_z \rangle = \frac{m B c_o^2}{i \omega} Q_{2p} \left[Q_p - 2 \left(\frac{-i \omega}{\nu} \right)^{-1/2} \frac{R_p}{r_p} \right] e^{mz} \quad (\text{B.38})$$

B.4 Calcul de l'impédance d'un conduit

Deux ondes se propagent dans le conduit. Une vers l'amont et l'autre vers l'aval du conduit. Les pressions et vitesses totales sont alors donnée par les relations suivantes :

$$p_t(x) = A e^{mx} + B e^{-mx} \quad (\text{B.39})$$

$$v_t(x) = \frac{1}{Z_c} \{ A e^{mx} - B e^{-mx} \} \quad (\text{B.40})$$

A et B sont des constantes, x et Z_c désignent respectivement la position axiale et l'impédance caractéristique. Nous avons omis de mentionner la dépendance temporelle $e^{i\omega t}$ de manière à simplifier l'écriture.

L'impédance en $x = x_1$ est alors donnée par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{p_t(x_1)}{v_t(x_1)} \\ &= Z_c \frac{A e^{mx_1} + B e^{-mx_1}}{A e^{mx_1} - B e^{-mx_1}} \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

Nous en déduisons :

$$\frac{B}{A} = \frac{Z_1 - Z_c}{Z_1 + Z_c} e^{2mx_1} \quad (\text{B.42})$$

en $x = x_2$ l'impédance est donnée par :

$$Z_2 = Z_c \frac{A e^{mx_2} + B e^{-mx_2}}{A e^{mx_2} - B e^{-mx_2}} \quad (\text{B.43})$$

ou encore :

$$Z_2 = Z_c \frac{1 + \frac{B}{A} e^{-2mx_2}}{1 - \frac{B}{A} e^{-mx_2}} \quad (\text{B.44})$$

Lorsque l'équation (B.42) est reportée dans l'expression de l'impédance Z_2 et en notant $e = x_1 - x_2$, nous obtenons :

$$Z_2 = Z_c \frac{Z_c + Z_1 \frac{1 + e^{2me}}{1 - e^{2me}}}{Z_1 + Z_c \frac{1 + e^{2me}}{1 - e^{2me}}} \quad (\text{B.45})$$

Soit, en prenant $m = -i k$:

$$Z_2 = Z_c \frac{Z_c - i Z_1 \cotg(ke)}{Z_1 - i Z_c \cotg(ke)} \quad (\text{B.46})$$

Pour $x_2 = 0$ et $x_1 = e$ et en supposant que l'impédance en x_1 est infinie (fond rigide), l'impédance Z_2 est donnée par :

$$Z_2 = -i Z_c \cotg(ke) \quad (\text{B.47})$$

ou encore :

$$Z_2 = -i Z_c \cotg(ime) \quad (\text{B.48})$$

Annexe C

Calcul du rapport $\frac{s_t}{s_v}$

Les écritures des paramètres s_t et s_v sont données par les relations suivantes :

$$s_t = \left(\frac{\Omega R_s}{k_s} \right)^{1/2} \frac{\sum_{j=1}^M S_j \Delta z_j}{\sum_{j=1}^M R_{s_j}^{1/2} S_j \Delta z_j} \quad (\text{C.1})$$

$$s_v = \left(\frac{k_s}{\Omega R_s} \right)^{1/2} \frac{\sum_{j=1}^M R_{s_j}^{1/2} \frac{\Delta z_j}{S_j}}{\sum_{j=1}^M \left[\frac{\Delta z_j}{S_j} + L_{j,j-1} \right]} \quad (\text{C.2})$$

Celles-ci sont modifiées en reportant les définitions de la porosité (2.38), de la résistance à l'écoulement (2.42) et de la tortuosité (2.43):

$$s_t = \left[\frac{\sum_{j=1}^M R_{s_j} \frac{\Delta z_j}{S_j}}{\sum_{j=1}^M \left[\frac{\Delta z_j}{S_j} + L_{j,j-1} \right]} \right]^{1/2} \frac{\sum_{j=1}^M S_j \Delta z_j}{\sum_{j=1}^M R_{s_j}^{1/2} S_j \Delta z_j} \quad (\text{C.3})$$

$$s_v = \frac{\sum_{j=1}^M R_{s_j}^{1/2} \frac{\Delta z_j}{S_j}}{\left[\sum_{j=1}^M R_{s_j} \frac{\Delta z_j}{S_j} \sum_{j=1}^M \left[\frac{\Delta z_j}{S_j} + L_{j,j-1} \right] \right]^{1/2}} \quad (\text{C.4})$$

Nous supposons que les inductances associées aux discontinuités sont négligeables et en substituant la résistance à l'écoulement élémentaire par $\frac{8 \eta}{R_j^2}$ et la section S_j par πR_j^2 le rapport de ces deux quantités est donné par :

$$\frac{s_t}{s_v} = \frac{\sum_{j=1}^M \frac{\Delta z_j}{R_j^4} \sum_{j=1}^M R_j^2 \Delta z_j}{\sum_{j=1}^M \frac{\Delta z_j}{R_j^3} \sum_{j=1}^M R_j \Delta z_j} \quad (\text{C.5})$$

ou encore :

$$\frac{s_t}{s_v} = \frac{\sum_{j=1}^M \sum_{i \geq j}^M \left\{ \left(\frac{R_j^2}{R_i^4} + \frac{R_i^2}{R_j^4} \right) - \frac{1}{R_j^2} \right\} \Delta z_i \Delta z_j}{\sum_{j=1}^M \sum_{i \geq j}^M \left\{ \left(\frac{R_j}{R_i^3} + \frac{R_i}{R_j^3} \right) - \frac{1}{R_j^2} \right\} \Delta z_i \Delta z_j} \quad (\text{C.6})$$

Pour évaluer ce rapport, il suffit de comparer la quantité $\frac{R_j^2}{R_i^4} + \frac{R_i^2}{R_j^4}$ du numérateur à son homologue $\frac{R_j}{R_i^3} + \frac{R_i}{R_j^3}$ du dénominateur :

$$\left(\frac{R_j^2}{R_i^4} + \frac{R_i^2}{R_j^4} \right) - \left(\frac{R_j}{R_i^3} + \frac{R_i}{R_j^3} \right) = (R_j - R_i) \left(\frac{R_j}{R_i^4} - \frac{R_i}{R_j^4} \right) \quad (\text{C.7})$$

Cette différence est toujours positive, et nous en déduisons l'inégalité suivante :

$$\frac{s_t}{s_v} \geq 1 \quad (\text{C.8})$$

Bibliographie

- [Achenbach, 1973] ACHENBACH J. D., 1973, Wave propagation in elastic solids, *North Holland, Amsterdam*
- [Allard, 1993] ALLARD J.F., 1993, Propagation of sound in porous media: modelling sound absorbing materials *Elsevier Applied Science*
- [Allard *et al.*, 1990] ALLARD J.F., DEPOLLIER C., NICOLAS J., LAURIKS W. COPS A., 1990, Propriétés acoustiques des matériaux poreux saturés d'air et théorie de Biot *J. acoustique* ,**3**, pp 29-38
- [Allard *et al.*, 1989] ALLARD J.F. ET CHAMPOUX Y., 1989, La théorie de Biot appliquée à la caractérisation des matériaux absorbants sonores poreux *Rapport interne, Faculté des Sciences du Mans, Université de Sherbrooke*
- [Arnott *et al.*, 1991] ARNOTT W.P., SABATIER J.M. AND RASPET R., 1991, Sound propagation in capillary-tube-type porous media with small pores in the capillary walls *J. Acoust. Soc. Am* ,**90**, pp 3299-3306
- [Attenborough, 1982] ATTENBOROUGH K., 1982, Acoustical characteristics of porous materials, *Phys. Rep.* , **82**, pp 179-227
- [Attenborough, 1983] ATTENBOROUGH K., 1983, Acoustical characteristics of rigid fibrous absorbents and granular materials *Phys. Rep.* , **73**, pp 785-799
- [Attenborough, 1993] ATTENBOROUGH K., 1993, Models for the acoustical properties of air-saturated granular media *Acta acustica* , pp 213-226
- [Auriault *et al.*, 1985] AURIAULT J.L., BORNE L. AND CHAMBON R., 1985, Dynamics of porous saturated media, checking of the generalized law of Darcy, *J. Acoust. Soc. Am* , **77**, pp 1641-1650
- [Bar *et al.*, 1993] BAR P. ET DELANNE Y. 1993, Réduire le bruit de contact pneumatiques-chaussées *Presse de l'ENPC*
- [Belhoucine, Duhamel 1997] BELHOUCINE O. AND DUHAMEL D., 1997, Acoustic modeling of porous media - Influence of disorder *Proceedings INTER-NOISE 97*, Budapest, pp 1675-1678

- [Benade, 1968] BENADE A.H., 1968, On the propagation of sound in a cylindrical conduit *J. Acoust. Soc. Am* , **44**, pp 616-623
- [Beranek, 1942] BERANEK L. L., 1942, Acoustic impedance of porous materials *J. Acoust. Soc. Am* , **13**, pp 248-260
- [Biot, 1956] BIOT M. A., 1956, The theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid. I. Low frequency range. II. Higher frequency range, *J. Acoust. Soc. Am* , **28**, pp 168-191
- [Biot, 1977] BIOT M. A., 1977, Variational lagrangian-thermodynamics of non-isothermal finite strain mechanics of porous solids and thermonuclear diffusion, *Int. J. Solids Structures* , **13**, pp 579-597
- [Biot *et al.*, 1957] BIOT M. A. AND WILLIS D. G., 1957, The elastic coefficients of theory of consolidation, *J. Appl. Mech.*, pp 594-601
- [Bourbié, Coussy, Zinszner, 1986] BOURBIÉ T., COUSSY O., ZINSZNER B. 1986, Acoustique des milieux poreux *Editions technip*
- [Brown, 1980] BROWN R.J.S., 1980, Connection between formation factor for electrical resistivity and fluid-solid coupling factor in Biot's equations for acoustic waves in fluid-filled media *Geophys.*, **45**, pp 1269-1275
- [Brown *et al.*, 1942] BROWN R.L. AND BOLT R.H., 1942, The measurement of flow resistance of porous acoustic materials *J. Acoust. Soc. Am* , **13**, pp 337-344
- [Burrige *et al.*, 1981] BURRIDGE R. AND KELLER J.B., 1981, Poroelasticity equations derived from microstructure, *J. Acoust. Soc. Am* , **70**, pp 1140-1146
- [Carman, 1961] CARMAN P.C., 1961, L'écoulement des gaz à travers les milieux poreux, *Bibliothèque des Sciences et Techniques nucléaires, Presses Universitaires de France, Paris*
- [Champoux, Allard, 1991] CHAMPOUX Y. AND ALLARD J.F., 1991, Dynamic tortuosity and bulk modulus in air saturated porous media *J. Appl. Phys.*, **70**, pp 1975-1979
- [Champoux *et al.*, 1991] CHAMPOUX Y., STINSON M.R., DAIGLE G.A., 1991, Air based system for the measurement of porosity *J. Acoust. Soc. Am* , **89**, pp 910-916
- [Champoux *et al.*, 1992] CHAMPOUX Y. AND STINSON M.R., 1992, On acoustical models for sound propagation in rigid frame porous materials and the influence of shape factors *J. Acoust. Soc. Am* , **92** (2), pp 1120-1131

- [Chandler *et al.*, 1981] CHANDLER N. AND JOHNSON D.L., 1981, The equivalence of quasi-static flow in fluid-saturated porous media and Biot's slow wave in the limit of zero frequency *J. Appl. Phys.*, **52**, pp 3391-3395
- [Cummings, 1993] CUMMINGS A., 1993, Sound propagation in narrow tubes of arbitrary cross section *J. Sound Vib.* , **162**, pp 27-42
- [Crandall, 1926] CRANDALL I. B., 1926, Theory of Vibrating systems and Sound *Van Nostrand, New york*, Appendix A
- [Daniels, 1947] DANIELS F.B., 1947, Acoustical impedance of enclosures *J. Acoust. Soc. Am* , **19**, pp 569-571
- [Daniels, 1950] DANIELS F.B., 1950, On the propagation of sound in a cylindrical conduit *J. Acoust. Soc. Am* , **22**, pp 563-564
- [Deresiewicz, 1963] DERESIEWICZ H. AND SKALAK R., 1963, On uniqueness in dynamic poroelasticity *Bull. Seism. Soc.Am.*, **53**, pp 783-788
- [Di Benedetto *et al.*, 1996] DI BENEDETTO H., JOUNI M., BOILLON P., SALHI J., 1963, Mesures in situ et en laboratoire des écoulements dans les bétons bitumineux drainants - Modélisation et validation *Bulletin des laboratoires des Ponts et Chaussées*, **204**, pp 3-13
- [Duhamel, 1994] DUHAMEL D. 1994, L'acoustique des problèmes couplés fluide-structure, application au contrôle actif du son, *Thèse de Doctorat de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées*
- [Dupin et Lévy, 1980] DUPIN G. ET LÉVY T., 1980, Atténuation du son dans un milieu poreux élastique *Acustica*, **44**, pp 10-13
- [Garcia-Bengochea *et al.*, 1979] GARCIA-BENGOCHEA I., LOVELL C.W., AND ALTSHAEFFL A.G., 1979, Relation between pore size distribution and permeability of silty clay, *J. Geotech. Eng. Am. Soc. Civil Eng.*, **105**, pp 839-859
- [Garcia *et al.*, 1986] GARCIA A. I., KERGOMARD J., 1986, Discontinuités dans les guides acoustiques aux basses fréquences: une revue des méthodes analytiques, *Revue d'acoustique*, **79**, pp 38-50
- [Gassmann, 1951] GASSMANN F., 1951, Uber die elastizität poröser medien, *Vierteljahrsschrift des Naturforschenden Gesellschaft in Zurich*, **96**, pp 1-23
- [Gradshteyn *et al.*, 1980] GRADSHTEYN I.S., RYZHIK I.M. 1980, Table of Integrals, Series, and Products, *Academic, New York*, pp 307
- [Gemant, 1941] GEMANT A., 1941, Frictional phenomena IV, *J. Appl. Phys.*, **12**, pp 725-734

- [Hamet, 1988] HAMET J.F., 1988, Modélisation acoustique d'un enrobés drainant - étude théorique en incidence normale *Rapport INRETS*, **59**
- [Hamet, 1992] HAMET J.F., 1992, Modélisation acoustique d'un enrobés drainant - prise en compte des phénomènes de thermoconductivité dans une nouvelle formulation phénoménologique, *Rapport INRETS*, **159**
- [Huerre, 1992] HUERRE P., 1992, Mécanique des milieux continus, Tome III, Mécanique des fluides *Editions de l'école polytechnique*
- [Johnson *et al.*, 1987] JOHNSON D.L., KOPLIK J. AND DASHEN R., 1987, Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media, *J. Fluid. Mech.*, **176**, pp 379-402
- [Johnson *et al.*, 1986] JOHNSON D.L., KOPLIK J. AND SCHWARTZ L.M., 1986, new pore-size parameter characterizing transport in porous media, *Phys. Rev. Lett.*, **57**, pp 2564-2567
- [Johnson *et al.*, 1982] JOHNSON D.L., PLONA T.J. AND SCALA C., 1982, Tortuosity and acoustic slow waves, *Phy. Rev. Lett*, **49** (25), pp 1840-1844
- [Kergomard *et al.*, 1987] [KERGOMARD J., GARCIA A. 1987, Simple discontinuities in acoustic waveguide at low frequencies : critical analysis and formulae, *J. Sound Vib.* , **114**, pp 465-479
- [Kirchhoff, 1868] KIRCHHOFF G., 1868, Ueber den Einfluss der Wärmeleitung in einem Gase auf die Schallbewegung, *Ann. phys. Chem.*, **134**, pp 177-193
- [Lafarge, 1993] LAFARGE D., 1993, Propagation du son dans les matériaux poreux à structure rigide saturés par un fluide viscothermique, *Thèse de Doctorat de l'Université du Maine*
- [Landau *et al.*, 1989] LANDAU. ET LIFSHITZ , 1989, Physique Statistique, chapitre 16, *Edition Mir*
- [Lévy *et al.*, 1977] LÉVY T. AND SANCHEZ-PALENCIA E., 1977, Equations and interface conditions for acoustic phenomena in porous media *J. Math. Anal. Appl.*, **61**, pp 813-834
- [Lévy, 1977] LÉVY T., 1977, Acoustic phenomena in elastic porous media *Mech. Res. Comm.*, **4**, pp 253-257
- [Lévy, 1978] LÉVY T., 1978, Propagation des ondes dans un milieu poreux saturé de fluide *C. R. Acad. Sc. Paris*, **286**, pp 289-292
- [Lévy, 1979] LÉVY T., 1979, Propagation of waves in fluid-saturated porous elastic solid, *Int. J. Engng. Sci.*, **17**, pp 1005-1014

- [Mandel, 1950] MANDEL J., 1950, Essai sur la mécanique des pseudosolides, *Annales des Ponts et Chaussées*
- [Mandel, 1974] MANDEL J., 1974, Introduction à la mécanique des milieux continus, *Académie Polonaise des Sciences, Série B de Mécanique appliquée, Editions Scientifiques de Pologne*
- [Marshall et al., 1979] MARSHALL T.J. AND HOLMES W.J., 1979, Soil Physics, *Cambridge U.P., London*
- [Mawardi, 1949] MAWARDI O.K., 1949, On the propagation of sound waves in narrow conduits, *J. Acoust. Soc. Am* , **21**, pp 482-486
- [Morse et al., 1941] MORSE P.M. BOLT R.H. AND BROWN R.L., 1941, Relation between acoustic impedance and flow resistance of porous acoustic materials *J. Acoust. Soc. Am* , **12**, pp 475-476
- [Pierce, 1981] PITTMAN E. D., 1981, Acoustics: An introduction to its Physical Principles and Applications , *Mc Graw-Hill, New York*
- [Pittman, 1984] PITTMAN E. D., 1982, The pore geometries of reservoir rocks in "Physics and Chemistry of porous media", *Johnson D.L. and Sen P.N., American Inst. of Physics, New York*, pp 1-19
- [Plona, 1982] PLONA T., 1982, Acoustics of fluid-saturated porous media, *Ultrasonics Symp. IEEE*, **2**, pp 1044-1048
- [Plona, 1980] PLONA T., 1980, Observation of a second bulk compressional wave in a porous medium at ultrasonic frequencies, *Appl. Phys. Lett*, **36**, pp 259-261
- [Rayleigh, 1945] J.W.S. LORD RAYLEIGH, 1945, Theory of sound, *Dover, New York 2nd ed. Vol II*
- [Rice et al., 1976] RICE J. R. AND CLEARY M.P., 1976, Some basic stress diffusion solutions for fluid-saturated elastic porous media with compressible constituents, *Rev. Geoph. and space Phys.* , **14**, pp 227-241
- [Ritter et al., 1945] RITTER H.L. AND DRAKE L.C., 1945, Pore-size distribution in porous materials *Indus. and Engi. Chem.* , **17**, pp 782-787
- [Russell et al., 1993] RUSSEL G.A. AND HJERPE E.D., 1993, On the analogy between the one-dimensional acoustic waveguide and the electrical transmission line, *J. Acoust. Soc. Am* , **94**, pp 583-584
- [Sergent, 1996] SERGENT P. 1996, Optimisation géométrique du contrôle actif dans les gaines de ventilation, *Thèse de doctorat de l'École Nationale des Ponts et Chaussées*

- [Serra, 1982] SERRA J. 1982, Image analysis and mathematical morphology, *Academic Press, New York*
- [Stinson *et al.*, 1988] STINSON M.R., DAIGLE G.A., 1988, Electronic system for the measurement of flow resistance, *J. Acoust. Soc. Am* , **83**, pp 2422-2428
- [Stinson, 1991] STINSON M.R., 1991, The propagation of plane sound waves in narrow and wide circular tubes, and generalisation to uniform tubes of arbitrary cross-sectional shape, *J. Acoust. Soc. Am* , **89**, pp 550-558
- [Stinson *et al.*, 1992] STINSON M.R. AND CHAMPOUX Y., 1992, Propagation of sound and the assignment of shape factors in model porous media having simple pore geometries, *J. Acoust. Soc. Am* , **91**, pp 550-558
- [Suquet, 1982] SUQUET P. 1982, Plasticité et homogénéisation *Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie*
- [Walsh *et al.*, 1984] WALSH J.B. AND BRUCE W.F., 1984, The effect of pressure on porosity and the transport properties of rock, *J. Geophys. Res.*, **89**, pp 9425-9431
- [Weston, 1953] WESTON D.E., 1953, The theory of the propagation of plane sound waves in tubes, *Proc. Phys. Soc. London Sec. B* , **66**, pp 695-709
- [Wilson, 1993] WILSON D.K., 1993, Relaxation-matched modeling of propagation through porous media, including fractal pore structure, *J. Acoust. Soc. Am* , **94**, pp 1136-1145
- [Yamamoto *et al.*, 1988] YAMAMOTO T. AND TURGUT A., 1988, Acoustic wave propagation through porous media with arbitrary pore size distributions, *J. Acoust. Soc. Am* , **83** , pp 1744-1751
- [Zwikker *et al.*, 1949] ZWIKKER C. AND KOSTEN C.W., 1949, Sound absorbing materials, *Elsevier, New York*