

THÈSE
présentée pour l'obtention du diplôme de
DOCTEUR
DE
L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES

Spécialité : Structures et Matériaux

présentée par :

Pierre-Henri CAMPANAC

Sujet de la thèse :

**MODELISATION DES VIBRATIONS D'UN
PNEUMATIQUE ROULANT SUR UNE CHAUSSÉE**

Soutenue à Champs sur Marne, le 22 Octobre 1997
devant le jury composé de :

Président : **J.L. GUYADER**
Rapporteurs : **J.C. GOLINVAL**
P. NAVI
Examineurs : **R. LE SALVER**
D. DUHAMEL
Directeur de thèse : **A. EHRLACHER**

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier ma famille, mes amis, et mes collègues pour leur soutien dans les moments difficiles, même s'ils ne paraissent plus aussi terribles après coup.

Je remercie Monsieur Alain EHLACHER, professeur à l'Ecole nationale des ponts et chaussées, qui a accepté la responsabilité de la direction de ma thèse, ainsi que Monsieur Denis DUHAMEL, chargé de recherche au Centre d'enseignement et de recherche en analyse des matériaux, qui a accepté la charge de l'encadrement de mes travaux. Sa rigueur et sa clarté m'ont beaucoup aidé pour la rédaction du mémoire.

Je remercie Madame Sabine DOUIHECH, documentaliste à la Direction de la recherche, pour l'aide qu'elle m'a apporté lors des recherches bibliographiques. J'ai beaucoup apprécié sa disponibilité et ses compétences.

Je remercie Monsieur Jean-Louis GUYADER, professeur à l'Institut national des sciences appliquées de Lyon, de m'avoir fait l'honneur et le plaisir de présider le jury de thèse.

Je remercie Monsieur Jean-Claude GOLINVAL, professeur à l'université de Liège, et Monsieur Parviz NAVI, professeur à l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, qui ont accepté d'être rapporteurs.

Je remercie Monsieur Robert LE SALVER, responsable du service Projets acoustiques et vibrations de PSA Peugeot Citroën, d'avoir fait partie du jury en tant qu'examineur, et qui a apporté un regard de spécialiste sur mon travail.

Je n'oublie pas l'ensemble de l'équipe du CERAM qui m'a accueilli et m'a fait profiter de sa bonne humeur pendant ces trois années, ainsi que les personnes de la Direction de la recherche qui m'ont assisté "dans l'ombre".

Merci à vous tous.

Table des matières

Introduction	1
1 Etude bibliographique	5
1.1 <u>Linéarité et découplage</u>	6
1.2 <u>Etude des sources d'excitation des vibrations</u>	8
1.3 <u>Etude de la dynamique du pneumatique</u>	20
1.4 <u>Etude de la propagation du son</u>	33
2 Equations du mouvement	41
2.1 <u>Géométrie, cinétique, déformations</u>	42
2.2 <u>Equations d'équilibre</u>	47
3 Résolution théorique	53
3.1 <u>Cas du roulement sur surface lisse</u>	54
3.2 <u>Cas du roulement sur surface rugueuse</u>	57
3.3 <u>Justification de la décomposition modale</u>	62
3.3.1 Conservation de la forme symplectique canonique	62
3.3.2 Formulation discrète	63
3.3.3 Propriétés des valeurs propres	64

4	Analyse dynamique	71
4.1	<u>Analyse des sources d'excitation</u>	72
4.2	<u>Analyse des amplifications</u>	77
4.3	<u>Interprétation d'une expérience complexe</u>	83
5	Un modèle simplifié de pneumatique	87
5.1	<u>Mécanique simplifiée du pneumatique</u>	89
5.1.1	Etude d'un pneumatique au repos	89
5.1.2	Comportement des flancs	90
5.1.3	Etude d'un pneumatique en roulement	93
5.1.4	La rigidité géométrique	95
5.2	<u>Une version 2D de la géométrie</u>	101
5.3	<u>Equilibre simplifié</u>	104
5.3.1	Etude de la cinématique	104
5.3.2	Equations d'équilibre	105
5.3.3	Formulation adimensionnelle	107
5.3.4	Simplification dans le cas d'une bande de roulement inextensible	108
6	Analyse numérique du calcul des coefficients d'amplification	113
6.1	<u>Procédure de diagonalisation</u>	115
6.1.1	Méthode par itération et déflation	115
6.1.2	Recherche de la partie imaginaire des valeurs propres	117
6.1.3	Variation de la méthode de Lanczos	117
6.2	<u>Intégration numérique des équations d'équilibre</u>	125
	Conclusion	131

Annexes	135
A Propriété symplectique du modèle simplifié	135
A.1 <u>Expression de la forme symplectique</u>	135
A.2 <u>Discrétisation de la forme symplectique</u>	138
B Discrétisation du modèle simplifié	139
B.1 <u>Discrétisation en temps</u>	139
B.2 <u>Discrétisation en espace</u>	142
Bibliographie	147

Table des figures

0.1	Comparaison des différentes sources de bruit pour un véhicule de tourisme	1
1.1	Nomenclature	15
1.2	Accélération normale d'une particule	16
1.3	Accélération tangentielle d'une particule	16
1.4	Evolution du spectre du bruit émis en fonction de la rugosité du revêtement	17
1.5	Bruit d'une rainure, superposition du bruit de deux rainures	17
1.6	Détermination du spectre du bruit émis, différents signaux élémentaires	18
1.7	Séparation des composantes périodiques et apériodiques	18
1.8	Evolution du bruit en fonction de la vitesse du véhicule : roulement d'un pneumatique lisse sur une surface micro rugueuse	19
1.9	Evolution du bruit en fonction de la vitesse du véhicule : roulement d'un pneumatique à rainures sur une surface lisse	19
1.10	Bruit du pneumatique en fonction de sa taille	27
1.11	Bruit du pneumatique en fonction du poids appliqué	27
1.12	Bruit du pneumatique en fonction de la pression de gonflement	28
1.13	Relation de dispersion	28
1.14	Spectre d'un pneumatique en fonction de la vitesse : pneu à motif périodique	29
1.15	Spectre d'un pneumatique en fonction de la vitesse : pneu à motif aléatoire	30
1.16	Le modèle de patin de gomme	31

1.17	Le modèle zone de contact	31
1.18	Le “circular ring model”	32
1.19	Fréquences de résonance en fonction de la vitesse : calcul avec le “circular ring model”	32
1.20	Localisation des sources sonores	37
1.21	Directivité du son	38
1.22	Coefficient de radiation pour une onde évanescente, propagative	38
1.23	Le phénomène air pumping pour une rainure, comparaison théorie expérience	39
4.1	Notations pour l’étude simplifiée des sources d’excitation	76
4.2	Effet du poids sur le bruit émis par un pneumatique à sculpture périodique	83
5.1	Répartition de la pression dans l’empreinte d’un pneumatique	97
5.2	Equilibre d’un secteur de flanc	97
5.3	Isovaleur du rayon apparent et courbe $\beta(L) = g(F)$	98
5.4	Comportement simplifié des flancs	98
5.5	Condition de contact	99
5.6	La géométrie estimée	99
5.7	Tension dans la bande de roulement	100
5.8	La géométrie 2D	103
5.9	Equilibre simplifié de la bande de roulement	110
6.1	Coefficients d’amplification d’un pneumatique lisse	128
6.2	Coefficients d’amplification d’un pneumatique avec rainures	128

Introduction

Du problème du bruit routier à l'étude de la dynamique des pneumatiques

- *Importance du bruit de roulement vis à vis des autres sources du bruit routier*

Les véhicules en roulement sont à l'origine du bruit routier. Pour un véhicule, on distingue plusieurs sources de bruit en fonction de leur origine physique, groupe propulseur, échappement, ... et bruit de roulement des pneumatiques.

Pour caractériser le bruit de roulement des pneumatiques, on mesure avec un microphone la pression acoustique générée par un véhicule roulant à vitesse constante, moteur coupé. Ces mesures sont ensuite comparées à celles obtenues avec un véhicule roulant moteur en marche.

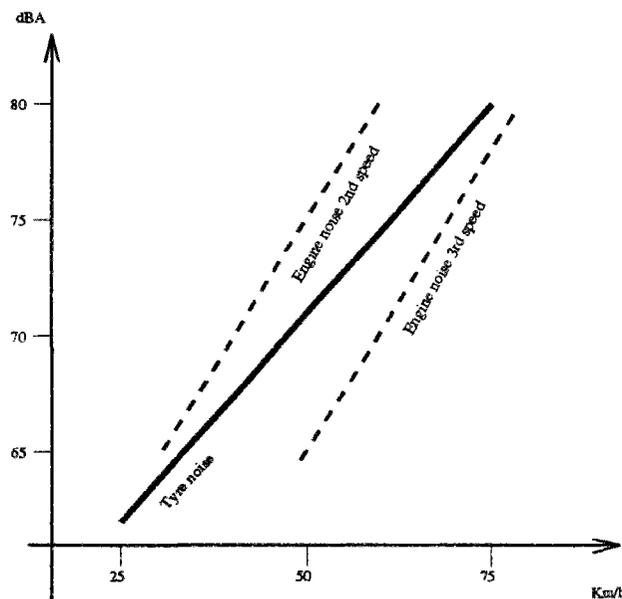


FIG. 0.1 - *Comparaison des différentes sources de bruit pour un véhicule de tourisme*

On constate que :

- pour les véhicules de tourisme, le bruit de roulement des pneumatiques est la source principale de bruit à partir de 50 km/h ;

- le bruit généré par les pneumatiques augmente très vite avec la vitesse du véhicule (40 dB par décades).
- c'est un bruit large bande (de 0 à 3000 Hz), riche en basses et moyennes fréquences (de 300 à 1500 Hz). Ces fréquences se propagent sans atténuation notable par la viscosité de l'air, et sont mal réfléchies par les barrières antibruit. Elles gênent même les riverains relativement éloignés des axes routiers.

Le bruit de roulement est un problème qui a retenu l'attention des ingénieurs depuis les années 60.

• *Les moyens de lutte contre le bruit de roulement*

Le bruit est un phénomène de propagation depuis une source d'excitation jusqu'à nos oreilles. On peut intervenir au cours de la propagation pour diminuer le bruit perçu :

- à la source du bruit de roulement, on trouve la rugosité de la chaussée et la présence de rainures dans la gomme de la bande de roulement. Malheureusement pour nos oreilles, ces deux éléments sont essentiels pour l'adhérence par temps de pluie : ils permettent l'évacuation de l'eau de la surface de contact.
- ces vibrations se propagent ensuite dans la structure du pneumatique. Les réflexions de ces vibrations sur la jante conduisent à la superposition d'ondes émises à des instants différents. On peut agir sur la structure pour éviter les superpositions constructives ou pour dissiper efficacement les vibrations.
- les vibrations du pneumatique sont partiellement transmises à l'air sous forme de son. On peut chercher à absorber ce bruit par exemple avec une chaussée poreuse, ou alors on peut chercher à diriger ce son dans une direction non gênante avec des écrans.

Le travail présenté développe l'étude de la génération des vibrations dans le pneumatique et de leur propagation dans la structure du pneumatique. Il peut servir à la réduction du bruit de roulement à la source.

Plan de l'étude

- Lors de l'étude bibliographique (chapitre 1), on a choisi de s'intéresser plus particulièrement à deux questions :
 1. Pourquoi le bruit de roulement augmente comme la vitesse du véhicule au carré, quelque soit le type de pneumatique ou de chaussée?
 2. Pourquoi la seule fréquence caractéristique des pneumatiques est liée au motif des patins de gomme? Pourquoi n'entendons nous pas de fréquence de résonance?
- Pour répondre à cette question, nous avons tenté de développer des équations qui décrivent les vibrations du pneumatique (chapitre 2).
- En cherchant à résoudre ces équations, nous avons mis en évidence d'une part des termes d'excitation dont l'amplitude varie comme le carré de la vitesse du véhicule et d'autre part une condition d'amplification originale.
- On a confronté sommairement l'expression des sources d'excitation avec des expériences connues. On trouve une expression cohérente avec les mesures. On a cherché à interpréter physiquement la condition d'amplification. Elle semble porter uniquement sur le bruit dû au défilement du motif de la bande de roulement (chapitre 4).
- On s'est intéressé plus particulièrement à la prévision de ces amplifications par des moyens numériques. On a développé un modèle simplifié de pneumatique (chapitre 5),
- sur lequel on a testé des algorithmes de recherche des conditions d'amplification par la structure du pneumatique (chapitre 6).

Chapitre 1

Etude bibliographique

Introduction

Pour modéliser le bruit des pneumatiques, le mécanicien cherche à déterminer les équations qui décrivent l'évolution de $\phi(t, \underline{X})$, la position des particules \underline{X} du pneumatique, et $p(t, \underline{x})$, la pression acoustique au point \underline{x} .

Le problème général étant posé, le mécanicien est amené à faire des hypothèses simplificatrices sur la nature des phénomènes mécaniques :

- le mouvement est décrit comme une perturbation par rapport à un état d'équilibre stable : c'est l'hypothèse habituelle qui décrit les vibrations linéaires et l'acoustique, par différence à un mouvement quelconque. Le principe de superposition découle de cette hypothèse.*
- on découple le problème de la détermination de la position des particules du problème de la détermination du champ de pression : c'est l'hypothèse de couplage faible entre l'acoustique dans un fluide léger et les vibrations dans une structure rigide.*

Avec ces deux hypothèses, l'étude vibro-acoustique des pneumatiques se découpe en trois temps :

- 1. l'étude des mécanismes d'excitation des vibrations. Chaque mécanisme s'étudie séparément grâce au principe de superposition.*
- 2. la compréhension des propriétés vibratoires de la structure du pneumatique. Ces propriétés sont proches de celles de la structure dans le vide (hypothèse de découplage).*
- 3. la prévision de la propagation du son.*

On se propose dans ce chapitre de reprendre dans cet ordre les travaux publiés. On distinguera à la vue des résultats expérimentaux les simplifications qui seront remises en cause dans ce travail de celles qui seront conservées.

1.1 Linéarité et découplage

• La théorie des vibrations linéaires

Dans son traité *Theory of Sound* de 1877, Lord Rayleigh formule l'hypothèse des vibrations linéaires. C'est un mouvement particulier qui se décrit comme une petite oscillation autour d'un état en équilibre statique stable. Cette théorie permet de se placer dans le cadre mathématique simple des systèmes linéaires, tout en conservant un domaine de pertinence étendu.

Examinons la validité de cette hypothèse pour l'étude du bruit de roulement.

En ce qui concerne la pression acoustique, les variations de pression mesurées sont de l'ordre de quelques centaines de Pa, et les déformations volumiques de l'ordre du millième. L'hypothèse de linéarité autour d'un état de référence, qui pourrait être l'écoulement laminaire de l'air autour du véhicule ou la pression atmosphérique, paraît raisonnable.

En ce qui concerne les vibrations du pneumatique, il n'y a pas eu, à ma connaissance, de vérification expérimentale de la linéarité. On conservera quand même l'hypothèse de linéarité autour d'un état de référence, car on pense que cette hypothèse est valable au moins dans un certain domaine. Même si la réponse prédite dans le domaine où les vibrations sont de grande amplitude n'est pas celle observée, on aura un outil de prédiction des conditions qui produisent ces grandes amplitudes.

Pour notre étude sur le bruit des pneumatiques, on se placera donc dans le cadre de la théorie de Lord Rayleigh, unanimement adoptée à ma connaissance.

Le principe de superposition qui découle de cette linéarisation explique le bruit perçu par la somme des bruits émis par différentes sources d'excitation.

• Le couplage entre vibration et son

On cherche à traduire l'idée suivante : les variations de pression à l'intérieur ou à l'extérieur du pneumatique (mesurées à moins de 200 Pa) influent peu sur le mouvement des particules du pneumatique.

Les vibrations du pneumatique seraient donc le résultat des efforts internes à la structure, des efforts d'accélération et des liaisons avec la chaussée. Avec cette hypothèse, on peut étudier à part les vibrations du pneumatique comme si la pression à l'intérieur était strictement égale à la pression de gonflement et la pression à l'extérieur strictement égale à la pression atmosphérique.

Le mouvement des particules d'air à la frontière entre le pneumatique et le domaine fluide serait donc celui de la frontière du pneumatique calculé dans l'hypothèse de découplage. Avec cette donnée, on

peut calculer le champ de pression acoustique dans le reste du domaine fluide.

Les solutions ainsi construites vérifient la continuité du champ de vitesse (ou de vitesse normale) au niveau de la frontière entre l'air et le pneumatique. Par contre, le vecteur contrainte n'est pas continu. Ces deux solutions ne vérifient pas le principe d'action et de réaction au niveau de l'interface entre le pneumatique et l'air. On fait donc une approximation à ce niveau.

Le domaine de validité de cette approximation a été étudié théoriquement à partir de solutions de problèmes d'un solide vibrant couplé à un fluide. Dans [Le Tallec96], l'auteur présente le cas d'un tube contenant un piston massique accroché à un ressort d'un côté, couplé à un fluide de l'autre côté. Le piston est excité par une force de pulsation donnée. On a le comportement suivant :

- dans le cas où le domaine fluide est fermé, l'influence du fluide sur le mouvement du piston est négligeable si la masse de fluide est petite devant celle du piston, et devant le rapport de la raideur du ressort par le carré de la pulsation des ondes.
- dans le cas où le domaine fluide est infini, l'influence du fluide sur le mouvement du piston est un effet de masse ajoutée à basse fréquence, un effet de raideur ajoutée à haute fréquence et un effet de dissipation d'énergie. Ces trois termes sont proportionnels à la densité du fluide.

Ces résultats semblent représenter un comportement général.

Pour l'étude du bruit des pneumatiques, on considère donc que le pneumatique est une structure rigide et lourde vis à vis de la masse d'air contenue dans la chambre à air (150 g environ). L'air extérieur est considéré comme un fluide peu dense. A ma connaissance, le problème du couplage pour l'étude du bruit de roulement n'a pas fait l'objet d'une étude spécifique, et j'attribue cette absence au non intérêt que présente une réponse précise à cette question.

Le découplage introduit explique le bruit émis par les vibrations de la surface du pneumatique, pouvant elles mêmes être décrites par la superposition des vibrations dues à plusieurs mécanismes d'excitation.

L'étude du bruit de roulement des pneumatiques se découpe en trois temps :

1. l'étude des mécanismes d'excitation des vibrations du pneumatique (§1.2);
2. pour chaque mécanisme, la compréhension des propriétés vibratoires de la structure du pneumatique (§1.3);
3. pour chaque mouvement de la surface du pneumatique, la prévision de la propagation du son (§1.4).

C'est le plan qui est choisi pour présenter les expériences qui ont été menées, et les modèles qui cherchent à en prédire les résultats.

1.2 Etude des sources d'excitation des vibrations

• Introduction

La nomenclature qui sera utilisée pour désigner les différentes parties du pneumatique est présentée dans la figure 1.1.

A partir des résultats d'observations expérimentales, on va présenter dans un premier temps les deux causes responsables du bruit de roulement. Dans un second temps, on présentera une bibliographie sur la modélisation de ces sources.

• L'approche expérimentale

Pour se forger une intuition sur les sources d'excitation, les chercheurs ont procédé à une série d'expériences :

- dans l'expérience 1, on détermine la principale zone d'excitation au niveau de l'entrée (ligne d'attaque) et de la sortie (ligne de fuite) de la zone de contact entre le pneumatique et la chaussée (figures 1.2 et 1.3);
- dans l'expérience 2, on prouve une excitation par le mouvement des particules de la frontière du pneumatique situées dans la zone de contact avec la route (indentation par la rugosité, glissement) : voir figure 1.4 ;
- dans l'expérience 3, on prouve une excitation par le défilement du motif de la bande de roulement (voir figure 1.6);
- dans l'expérience 4, on présente une méthode expérimentale de séparation des contributions de ces deux sources d'excitation (voir figure 1.7);
- dans l'expérience 5, on mentionne un résultat important sur la dépendance de l'amplitude de l'excitation vis à vis de la vitesse du véhicule (voir figure 1.8).

expérience 1) une étude de l'accélération d'une particule.

- *description de l'expérience* : l'accélération d'une particule de pneumatique de camion située dans une rainure a été mesurée dans [Jennwein & Bergmann85]. Cette accélération est décomposée en une composante normale à la trajectoire de la particule et une composante tangentielle à la trajectoire de la particule. Les figures 1.2 et 1.3 montrent la mesure de l'accélération en fonction du temps. On constate sur les deux figures deux instants où la valeur

de ces accélération est très grande. Ces instants correspondent au moment où la particule entre et sort de la zone de contact.

- *l'interprétation* : en sortie de zone de contact, la valeur importante de l'accélération tangentielle est interprétée comme un glissement des patins de gomme, et celle de l'accélération normale comme une rupture brusque de l'adhérence par effet ventouse.

En entrée de zone de contact, la valeur importante de l'accélération tangentielle est interprétée comme un glissement des patins de gomme, et celle de l'accélération normale comme un choc des patins de gomme.

- *conclusion* : dans la suite, on ne conservera pas cette interprétation. On ne fait pour l'instant pas d'hypothèse particulière sur la nature de la liaison entre le pneumatique et la chaussée (effort concentré traduisant un choc, glissement, adhérence par effet ventouse ...).

La grande accélération traduit simplement une discontinuité de la vitesse des particules. Il existerait une surface d'onde de choc dont la position en entrée et en sortie de zone de contact est pratiquement stationnaire. On peut supposer que cette onde de choc est due à la géométrie presque anguleuse entre la partie de la bande de roulement en contact avec la chaussée et le reste de la bande de roulement.

expérience 2) une étude de l'influence de paramètres de la rugosité de la chaussée sur le bruit émis.

- *description de l'expérience* : dans [Delanne89], l'auteur rapporte les spectres mesurés pour un pneumatique roulant sur différentes qualités de surface de revêtement, une surface lisse, une avec une rugosité de longueur d'onde et d'amplitude de l'ordre du mm (micro-rugueuse), et une avec une rugosité de longueur d'onde et d'amplitude de l'ordre du cm (macro-rugueuse). Les résultats sont rapportés au bruit émis sur le revêtement micro-rugueux, le plus silencieux (voir figure 1.4).

- *l'interprétation* : le spectre émis sur revêtement lisse est plus riche en hautes fréquences. Ce phénomène est expliqué par un régime de glissement instable sur un revêtement lisse, avec une succession de perte et reprise d'adhérence, alors que le glissement serait stationnaire sur un revêtement micro-rugueux.

Le spectre émis sur revêtement rugueux est plus riche dans le domaine des basses fréquences. Le choc sur les éléments de rugosité est plus important sur revêtement rugueux. Une partie de l'excitation basse fréquence serait due à ce phénomène.

- *conclusion* : on gardera donc l'idée que la position (indentation) et le mouvement (glissement) des particules du bord du pneumatique situées dans la zone de contact avec la chaussée constitue une source d'excitation des vibrations.

expérience 3) une étude de l'influence du motif des rainures de la bande de roulement sur le bruit émis.

- *description de l'expérience* : dans [Ejsmont88], l'auteur mesure le bruit émis par un pneumatique comportant une rainure, roulant sur une chaussée lisse. Il constate un bruit peu après que la rainure entre dans la zone de contact : la figure 1.5-A représente le signal de pression acoustique mesuré en fonction du temps lorsqu'on fait rouler un pneumatique ne comportant qu'une rainure. Puis, l'auteur étudie plusieurs pneumatiques ayant deux rainures transversales plus ou moins espacées. Il compare le bruit mesuré à la somme décalée du bruit émis par une rainure. Le principe de superposition s'applique quand les rainures sont très éloignées (figure 1.5-C, 6 cm entre les rainures).
- *l'interprétation* : dans [Haydn71], l'auteur interprète ce bruit par la violente déformation élastique des patins de gomme qui se traduit par une compression de la rainure transversale en entrée de zone de contact et une expulsion d'air, ou par la violente dilatation de la rainure en sortie de zone de contact et une aspiration d'air. Cette interprétation néglige les effets d'inertie et de propagation de vibration. On reviendra au §1.4 sur le modèle "air pumping" qui modélise l'émission acoustique par ce phénomène.

Pour des bandes de roulement de pneumatiques commerciaux où les rainures sont rapprochées, le bruit d'une rainure dépend de la géométrie de la bande de roulement autour de cette rainure : la façon dont elle se comprime dépend de la taille des patins de gomme voisins.

Par ailleurs, la corrélation entre la périodicité (ou non périodicité) du motif de la bande de roulement et du bruit sur revêtement micro-rugueux a été largement observée pour des pneumatiques roulant à vitesse constante. Dans [Mambretti88], [Ejsmont88], [Ghesquière & all88], on reporte une procédure empirique utilisée par les ingénieurs pour déduire le spectre du bruit émis à partir de l'analyse du défilement du motif de bande de roulement au niveau d'une section de la bande de roulement. On associe à l'événement "une rainure sort de la zone de contact" un signal sonore ajusté et on applique le principe de superposition pour déterminer le bruit total. Par exemple, la figure 1.6, tirée de [Ejsmont88], montre pour un profil de pneumatique quatre signaux élémentaires de pression acoustique et l'histoire de la pression qui leur est associée. Ces signaux sont sensés reproduire le bruit d'une rainure, c'est à dire la mesure obtenue sur la figure 1.5-A.

- *conclusion* : par anticipation du §1.4, on rapporte ici que le phénomène "air pumping" explique seulement une partie du bruit émis, ce qui laisse le champ libre à une hypothèse de bruit émis par des vibrations. On gardera donc deux idées :
 1. le passage de patins de gomme au travers de l'onde de choc pourrait constituer une source d'excitation de vibration, et expliquer la partie manquante du bruit émis lorsqu'une rainure entre et sort de la zone de contact ;

2. cette source d'excitation est reprise par la structure du pneumatique, dont la réponse est influencée par le détail du motif de la bande de roulement.

expérience 4) une étude sur la séparation des contributions des deux sources de bruit.

- *description de l'expérience*: dans [Pope & Reynolds78] puis dans [Walker81], les auteurs ont cherché à séparer les contributions des deux sources d'excitation qui viennent d'être énumérées: l'excitation par l'indentation et le glissement du pneumatique dans la zone de contact et l'excitation par le défilement du motif de la bande de roulement. L'auteur utilise qu'en roulement stationnaire, le bruit généré par le motif de bande de roulement a la même période que la rotation de la roue. Il suppose que le bruit généré par l'indentation et le glissement du bord du pneumatique dans le contact se comporte comme une fluctuation autour de la pression acoustique due au motif de la bande de roulement. La technique de séparation consiste à mesurer la pression sur une période et à moyennner sur plusieurs tours de roue. Puis on calcule la variance de la pression acoustique pour quantifier l'amplitude de la fluctuation. Cette technique est appliquée à quatre pneumatiques (du pneumatique neige à rainures profondes (1) au pneumatique lisse (4)) et sept revêtements (de lisse à macro-rugueux).

La figure 1.7 donne l'amplitude de la composante périodique du bruit, l'amplitude de la fluctuation autour de la composante périodique et l'amplitude totale du bruit.

- *l'interprétation*: cette interprétation conduit à un bruit dû au motif de bande de roulement qui dépend de la rugosité de la chaussée. Ce résultat, qui contredit le principe de superposition, est dû au fait qu'on a supposé que l'excitation par la position de la frontière du pneumatique dans la zone de contact a une composante moyenne nulle. Or en fait, cette excitation dépend entre autre de la géométrie de la surface de pneumatique dans la zone de contact, et cette dépendance a la même période que la rotation de la roue. L'excitation par la position du bord du pneumatique dans la zone de contact se traduirait d'une part par une excitation périodique, et d'autre part par une fluctuation aperiodique.
- *conclusion*: comme dans [Pope & Reynolds78], on considérera l'excitation par défilement du motif de la bande de roulement comme un régime de vibrations forcées, ayant la même période que la rotation de la roue, ou une période inférieure si le motif de la bande de roulement est lui-même plus régulier.

La réponse moyenne est la somme (algébrique) de deux contributions, celle de l'excitation par le défilement du motif de la bande de roulement et celle de l'excitation par la position du bord.

expérience 5) une étude de l'influence de la vitesse du véhicule.

- *description de l'expérience*: dans [Esjmont & all84], on constate d'une part que la pression acoustique générée par le roulement d'un pneumatique lisse sur une chaussée rugueuse

(excitation par l'indentation et le glissement) varie comme le carré de la vitesse du véhicule (voir figure 1.8). On constate d'autre part que la pression acoustique générée par le roulement d'un pneumatique commercial sur une chaussée micro-rugueuse (excitation par le motif de bande de roulement) augmente comme le carré de la vitesse du véhicule (voir figure 1.9).

- *interprétation* : la première expérience laisse supposer que l'amplitude de l'excitation par l'excitation par la rugosité dans la zone de contact varie comme le carré de la vitesse du véhicule. La seconde expérience laisse supposer que l'amplitude de l'excitation par le défilement du motif de bande de roulement varie aussi comme le carré de la vitesse.

On a la même dépendance pour un pneumatique commercial sur une chaussée rugueuse, ce qui semble cohérent avec l'hypothèse de superposition.

- *conclusion* : dans l'ensemble des sources de vibration qu'on va mettre en évidence par une étude théorique, les plus significatives sont celles dont l'amplitude varie comme le carré de la vitesse du véhicule. Cette observation semble confortée par des mesures en extérieur ([Bar & Delanne93]), et par de nombreux auteurs ([Heckl86], [Nelson92]).

On a donc rappelé les deux mécanismes responsables du bruit de roulement des pneumatiques :

1. **une excitation par la position du bord du pneumatique dans la zone de contact avec la chaussée** (indentation et glissement), "aléatoire" ;
2. **une excitation par le défilement du motif de la bande de roulement**, périodique de même période que le défilement des patins de gomme.

Ces deux sources ont une amplitude qui varierait comme le carré de la vitesse de roulement.

• La modélisation mécanique des sources d'excitation

On va maintenant s'intéresser aux modélisations de ces deux sources de bruit.

En ce qui concerne le bruit dû au motif de bande de roulement, les contraintes exercées sur la gomme dans la zone de contact se traduisent par une déformation élastique de la gomme et une compression des rainures, puis une dilatation. Le modèle acoustique associé à ce mouvement de la frontière du pneumatique en contact avec l'air contenu dans les rainures est le modèle "air pumping" (§1.4). Notons que ce modèle conclut à un bruit ayant la même périodicité que le motif de bande de roulement, et une amplitude de la pression acoustique qui varie comme le carré de la vitesse du véhicule.

Les travaux précédents ont aussi conduit à considérer la position des particules du bord du pneumatique dans la zone de contact avec la chaussée comme une source d'excitation des vibrations. Cette position

de la frontière du pneumatique est le résultat d'interactions non linéaires avec la chaussée tels que l'indentation, le frottement.

La modélisation mécanique de ces phénomènes pour des structures en roulement a été abordée par [Oden & Lin86]. La structure étudiée est un cylindre homogène d'élastomère. Des modélisations des lois de contact, (glissement, non pénétration) et des solutions numériques pour des solutions stationnaires sont proposées.

Dans [Ronneberger88], l'auteur calcule la solution qui correspond à une indentation (condition de non pénétration) dans un milieu semi infini.

Mais ce problème est le plus souvent simplifié.

Dans [Huang92], on considère que la taille de la zone de contact est ponctuelle, et que la position des particules du bord du pneumatique dans la zone de contact avec la chaussée est égale au profil de la chaussée à cet endroit. C'est le modèle le plus simple qui correspond à l'intuition du contact avec la chaussée.

Dans [Hamet88], l'auteur considère aussi que la position des particules du bord du pneumatique dans la zone de contact avec la chaussée est égale au profil de la chaussée à cet endroit. Par contre, il étudie sur un modèle simple l'influence de la taille de la zone de contact, qui est supposée être une donnée (indépendante de l'amplitude des vibrations). Sur ce modèle, la taille n'a pas d'influence à partir d'une valeur critique, qui est inférieure à la taille de la zone de contact d'un pneumatique commercial.

Il peut sembler abusif de dire que le déplacement des particules de la frontière du pneumatique en contact avec la chaussée est égal au profil de la chaussée. Par contre, on peut essayer de traduire l'idée suivante: le déplacement d'un certain nombre de particules de la frontière du pneumatique, qui se trouvent près de la chaussée, est une donnée qui ne dépend que de la géométrie et des caractéristiques des matériaux localement. Cette idée se traduirait par le fait qu'une partie de la frontière du pneumatique, qui n'est pas exactement en contact avec la route, a un déplacement imposé comme si cette partie était liée à la route. Ce déplacement imposé n'est pas exactement égal au profil de la chaussée à cet endroit.

Cette question n'aurait pas d'intérêt si les prévisions faites avec un modèle ou un autre étaient similaires. Cela ne semble pas le cas: en effet, il existe une étude sur l'effet de la modélisation du contact sur la solution d'un modèle de pneumatique simplifié.

Dans [Kropp88], l'auteur compare deux descriptions de l'excitation sur le même modèle mécanique du pneumatique: dans le premier cas, la force aux points de contact est une donnée, dans second le cas, il impose une condition de non pénétration des patins de gomme dans la chaussée. Pour chaque fréquence f , le champ de vitesse est calculé dans les deux cas. L'auteur constate que la moyenne volumique du module au carré de la composante f du champ de vitesse est la même dans les deux

cas. Par contre, les modes de vibration de la surface du pneumatique excités sont très différents. L'amplitude de l'excitation ne serait pas altérée par le choix du modèle (à condition de comparer des situations où la réaction totale sur l'essieu est la même), par contre les propriétés de propagation dans la bande de roulement changent à la proximité de la zone de contact. Ce changement est sensible sur le bruit émis.

En conclusion, on retiendra deux éléments :

1. **il n'existe pas de modèle mécanique qui traduit l'excitation par la discontinuité de vitesse au niveau des bords d'attaque et de fuite.** Il est admis que c'est là que se fait l'excitation du pneumatique, mais les modèles existants ne prennent pas en compte cet élément. Dans ce travail, on proposera une étude plus poussée de ce point.
2. **les modèles utilisés en dynamique font appel à une modélisation simplifiée du contact avec la chaussée.** Cette simplification est faite de deux manières, une simplification de la géométrie de la zone de contact et une simplification des lois de contact. Dans ce travail, on choisira aussi une modélisation simplifiée des lois de contact. Par contre, on tiendra mieux compte de la géométrie de la zone de contact.

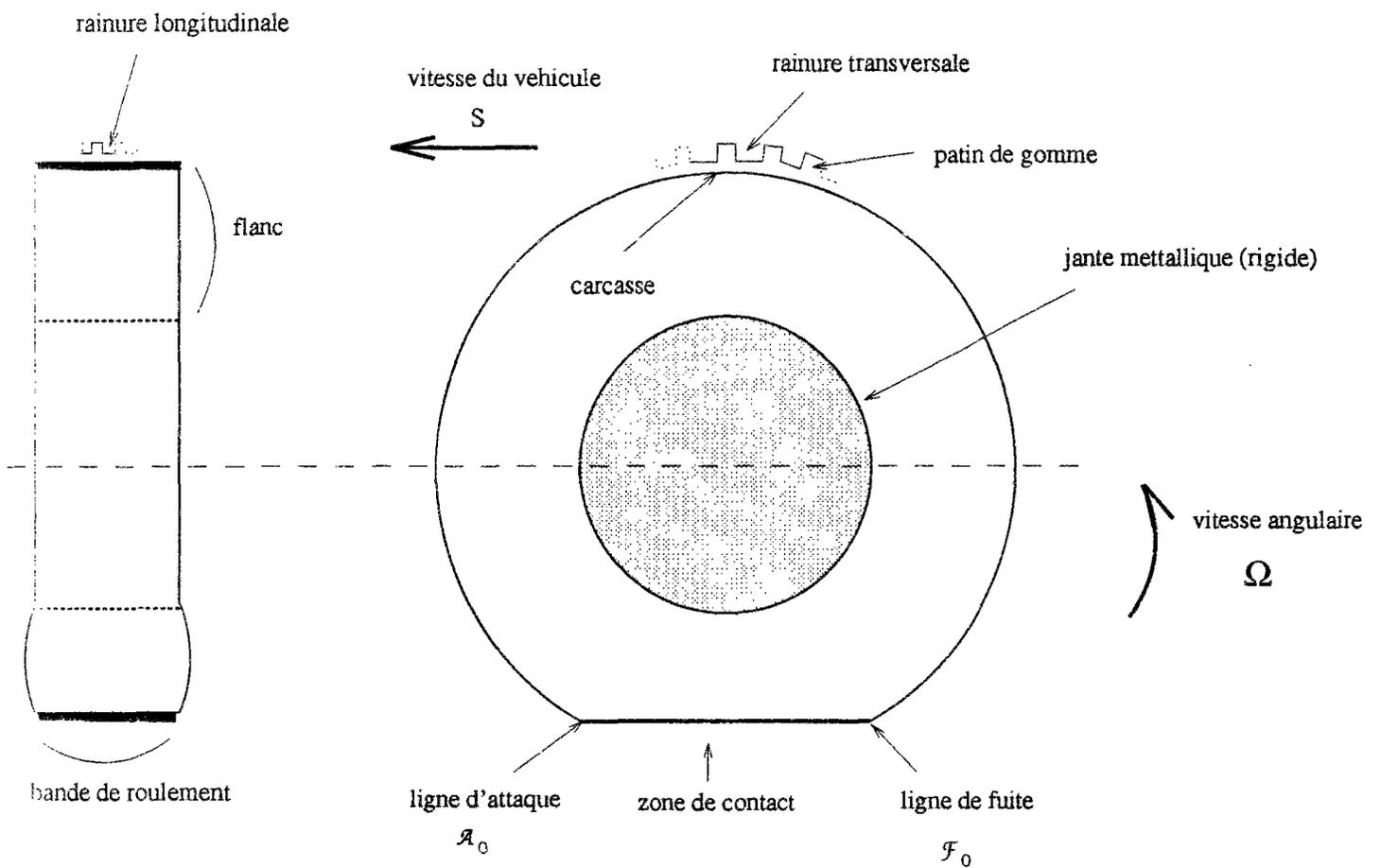


FIG. 1.1 - Nomenclature

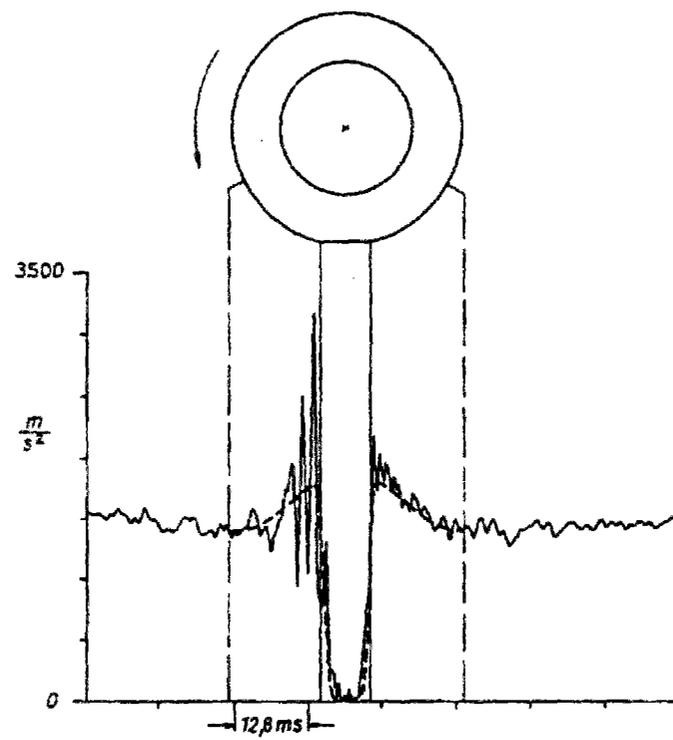


FIG. 1.2 - Accélération normale d'une particule

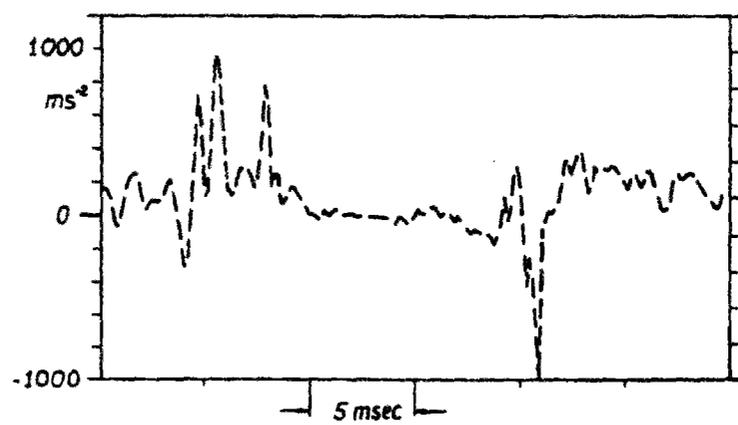


FIG. 1.3 - Accélération tangentielle d'une particule

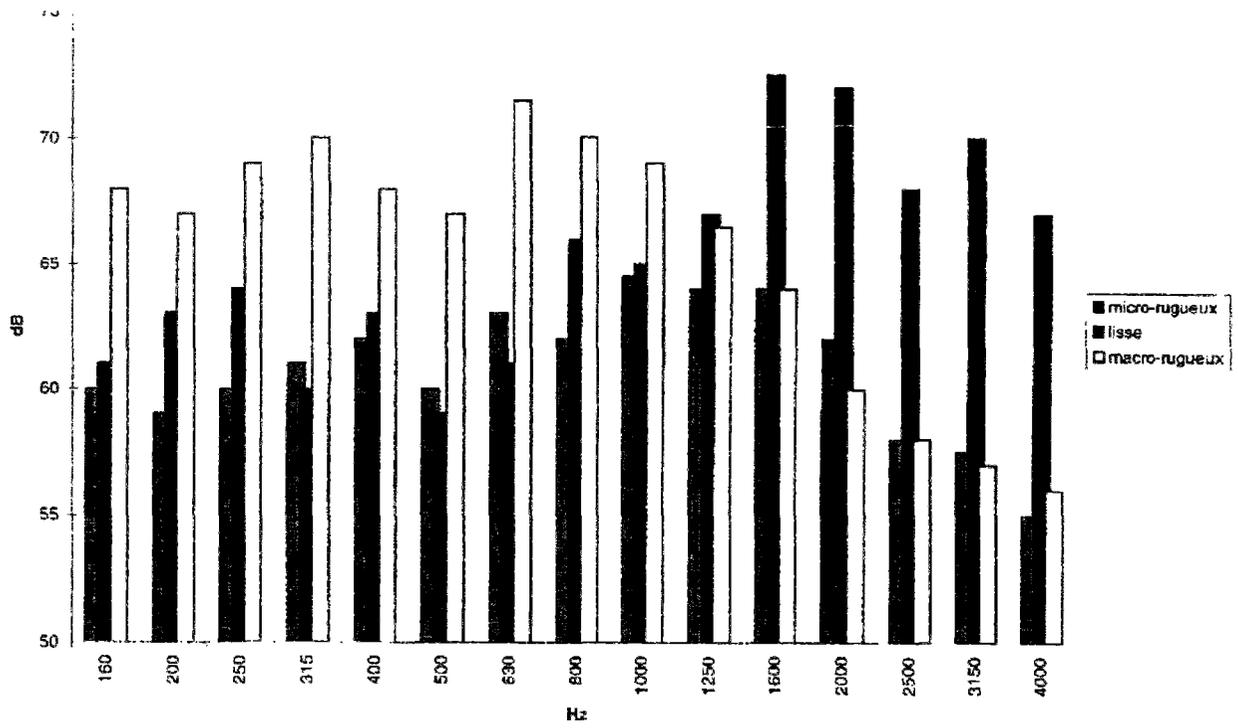
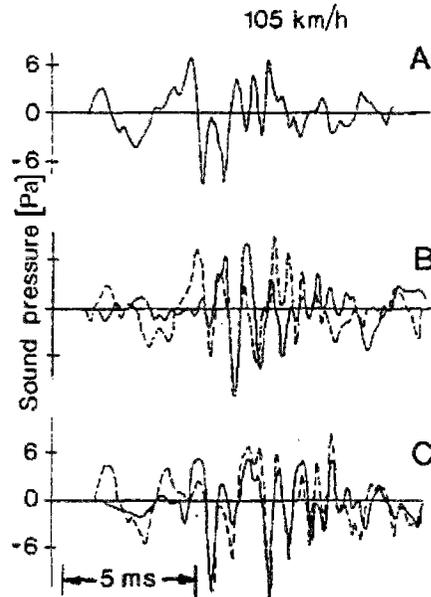


FIG. 1.4 - Evolution du spectre du bruit émis en fonction de la rugosité du revêtement



Time histories of signals generated by one single groove (A), two grooves separated by 30 mm (B) and 60 mm (C)
 — results of measurements
 - - - results of summation of two measured signals

FIG. 1.5 - Bruit d'une rainure, superposition du bruit de deux rainures

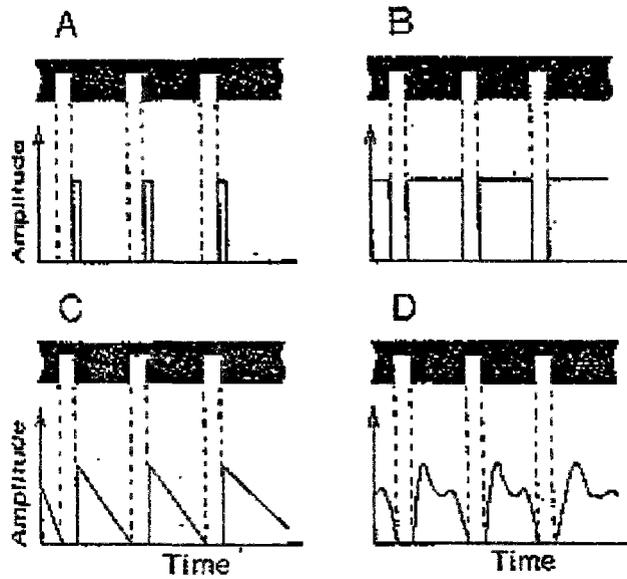


FIG. 1.6 - Détermination du spectre du bruit émis, différents signaux élémentaires

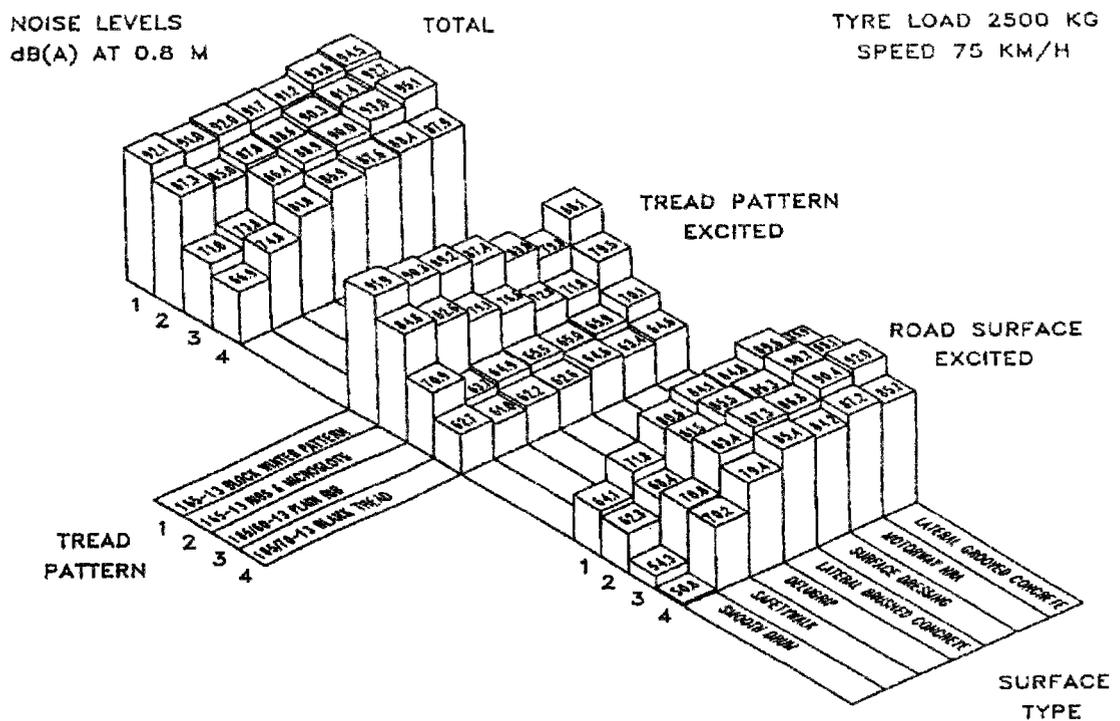


FIG. 1.7 - Séparation des composantes périodiques et apériodiques

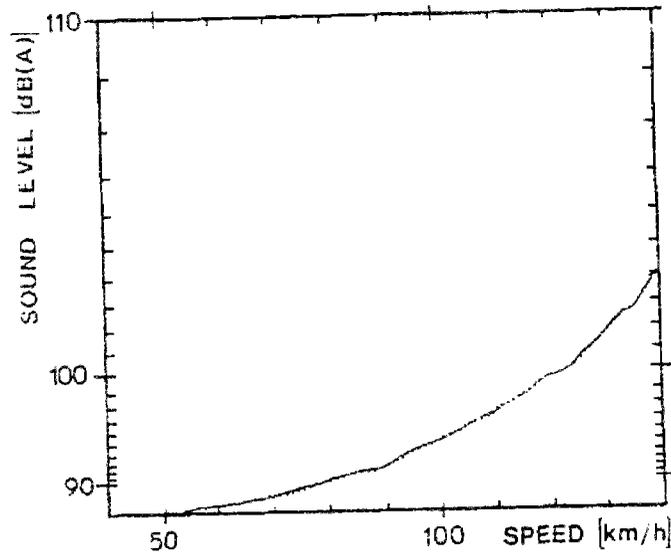


FIG. 1.8 - Evolution du bruit en fonction de la vitesse du véhicule : roulement d'un pneumatique lisse sur une surface micro rugueuse

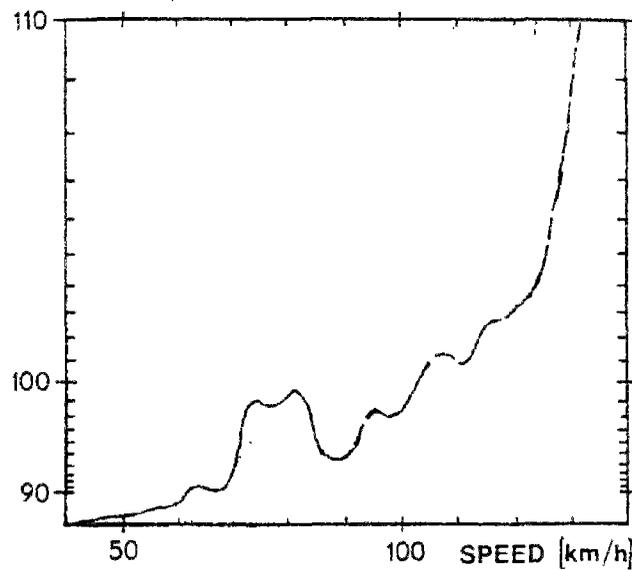


FIG. 1.9 - Evolution du bruit en fonction de la vitesse du véhicule : roulement d'un pneumatique à rainures sur une surface lisse

1.3 Etude de la dynamique du pneumatique

• Introduction

Comme pour tout système linéaire, après avoir étudié les sources du mouvement, on étudie maintenant la propagation libre des vibrations. Elle s'étudie par la réponse impulsionnelle, l'analyse modale ou encore la relation de dispersion si cette relation a un sens.

Dans une première partie, on présente l'approche expérimentale. Des mesures de deux types ont été faites pour caractériser les propriétés dynamiques du pneumatique. Une première série consiste en une étude paramétrique de l'influence des dimensions, de la pression de gonflement, du chargement de la roue ... sur le bruit émis. On présentera les éléments dont il faudrait tenir compte dans un modèle. La seconde série de mesures est relative à la théorie des vibrations des plaques et des coques homogènes.

Dans une seconde partie, on présente la modélisation du pneumatique comme une coque homogène. On constatera une différence qualitative entre les prédictions et les mesures. On recherchera quelles simplifications abusives expliqueraient cette différence. On pourra ainsi orienter notre étude et proposer un modèle qualitativement en accord avec l'expérience.

• L'approche expérimentale

Les vibrations libres peuvent être affectées par la géométrie ou les caractéristiques du pneumatique. Dans la série d'expériences qui suit, on fait varier ces paramètres. Mais on fait sans doute aussi varier l'excitation. Il est difficile de savoir si le niveau de bruit émis change à cause du changement d'excitation ou à cause du changement des propriétés dynamiques.

L'étude paramétrique

a) Dans [Ullrich84] et [Bar & Delanne93], on constate que le bruit émis diminue avec le rayon de la bande de roulement et augmente avec la largeur de celle-ci : la figure 1.10 rassemble les mesures du bruit émis en dB pour différentes valeurs du rayon de la bande de roulement et de la largeur du pneumatique. Le bruit émis est une fonction décroissante du rapport entre le carré de la circonférence et de la largeur.

La largeur du pneumatique a une influence sur la taille de la zone de contact et donc sur l'excitation, mais le diamètre du pneumatique doit avoir une influence sur le comportement dynamique du pneumatique.

b) Dans [Ejsmont88], on a déjà signalé que la réponse à une excitation par le passage d'une rainure à travers la surface de discontinuité de vitesse dépendait du détail géométrique du motif de la bande de roulement (voir figure 1.5).

On choisira donc de tenir compte de la géométrie des rainures dans la bande de roulement.

c) Dans [Ejsmont88], on constate une dépendance du bruit émis vis à vis de la pression de gonflement, mais cette dépendance change si on change de pneumatique. Elle peut s'expliquer de plusieurs façons : les deux expériences suivantes précisent cette constatation.

d) Dans [Walker & Cortès88], l'auteur étudie la dépendance du bruit émis par un pneumatique de camion à rainures transversales espacées régulièrement en fonction du poids appliqué sur la roue ou de façon équivalente en fonction de la taille de la zone de contact (voir figure 1.11). On constate une variation notable du bruit mesuré en un point.

Les résultats sont interprétés dans l'article par la théorie "air pumping". Mais ils auraient pu être interprétés en d'autres termes :

1. une modification de la directivité du rayonnement en fonction du poids appliqué : la mesure de la pression acoustique en un point n'est pas une bonne mesure de l'énergie totale rayonnée ;
2. la modification de la longueur de la bande de roulement qui n'est pas en contact avec la chaussée doit modifier les conditions d'amplification par la structure ;
3. la modification de la taille de la zone de contact doit modifier le déphasage entre l'excitation des vibrations au niveau de la ligne d'attaque et de la ligne de fuite de la zone de contact.

Dans la suite de ce travail, on prendra soin de décrire le changement de forme du pneumatique en fonction de la pression de gonflement, du poids appliqué sur la roue ...

e) Dans [Walker & Cortès88], l'auteur étudie aussi le bruit émis par un pneumatique dont la déflexion (la forme) est constante mais dont la pression de gonflement varie. Il constate une diminution du bruit pour une augmentation de pression (dans la figure 1.12, trois pressions de gonflement sont testées pour chaque poids appliqué sur la roue, on reporte le bruit émis en dBa).

Ce phénomène peut s'expliquer soit par une modification de la rigidité apparente de la structure (phénomène similaire à ceux observables dans une corde en tension), soit par une augmentation de la déformation des patins de gomme dans la zone de contact (excitation différente).

Dans la suite de ce travail, on prendra soin de décrire la rigidité géométrique due à la tension dans la carcasse du pneumatique.

La comparaison avec la dynamique des plaques

a) Quand la fréquence étudiée est suffisamment élevée, la longueur d'onde est courte et la présence de bords sur une plaque est peu sensible. Les ondes se propagent comme dans une plaque de dimension infinie. Ces ondes sont une superposition d'ondes planes qui sont

caractérisées par la relation de dispersion. Cette relation relie la fréquence d'excitation à la longueur d'onde des ondes planes. Dans [Kropp89], l'auteur mesure pour une série de fréquences la longueur d'onde dans un pneumatique lisse et immobile (voir figure 1.13).

Il suppose pour cela que les ondes se propagent depuis une source (pot vibrant) en s'amortissant rapidement par dissipation visqueuse dans les matériaux. Elles ne se réfléchiraient pas. Le calcul de la vitesse de phase se fait à partir de la mesure du déphasage entre deux points quelconques.

L'hypothèse d'absence de réflexion dans ce domaine de fréquence est contradictoire avec des mesures des fréquences de résonance qui traduisent l'influence des bords (jusqu'à 1000 Hz dans [Bar & Delanne93]). La méthode de calcul de la vitesse de phase conduit à une vitesse infinie pour une fréquence de 200 Hz, elle est donc douteuse.

On constate une vitesse de phase faible, très inférieure à la vitesse du son.

b) Quand la fréquence est plus faible, l'influence de bords se traduit par des fréquences de résonance. Ces fréquences de résonance ont été mesurées sur un pneumatique immobile entre autre dans [Vinesse & Nicollet88]. A ces fréquences, la réponse vibratoire est de grande amplitude, et cela se traduit par un bruit important.

Ces mesures peuvent être comparées au spectre du bruit émis. Un tel spectre a été mesuré dans [Schultze & all91]. Deux résultats sont présentés dans les figures 1.14 et 1.15. Ces graphes sont la représentation en 3 dimensions du bruit émis en dBa (axe z) en fonction de la fréquence (axe x) et de la vitesse du véhicule (axe y).

Pour un pneumatique à motif régulier, on note la présence de fréquences dominantes qui varient proportionnellement à la vitesse du véhicule, et qui sont proportionnelles entre elles. Déjà, on constate que les fréquences de résonance du pneumatique immobile ne sont pas une bonne mesure des amplifications.

Pour un pneumatique à motif irrégulier, on ne distingue pas de fréquences dominantes dans le spectre.

On retiendra deux idées :

1. **la propagation des ondes dépend de la géométrie, de la tension, de l'hétérogénéité de la bande de roulement qui n'est pas en contact avec la route ;**
2. **les fréquences dominantes sont proportionnelles à la fréquence fondamentale de défilement du motif de bande de roulement dans le cas d'un motif périodique, il n'y a pas de fréquence dominante dans le cas d'un motif aléatoire.**

• La modélisation du pneumatique

Il y a sûrement des modèles par éléments finis qui prennent en compte un maximum de paramètres. On va plutôt présenter ici des caractères spécifiques aux pneumatiques.

La structure du pneumatique est découpée par la pensée en plusieurs sous-parties, un patin de gomme, la zone de contact, et le reste de la bande de roulement. Le problème exact consisterait à résoudre les équations du mouvement sur la réunion de ces ensembles. On le remplace par un problème approché découplé.

La réponse impulsionnelle d'un patin de gomme

Dans [Clapp & Eberhardt] les auteurs proposent un modèle mécanique qui permet de relier la position des particules de la surface d'un patin de gomme en contact avec la chaussée à la contrainte exercée sur la carcasse du pneumatique située dans la zone de contact (voir figure 1.16 où est représentée la géométrie étudiée).

Le découplage est introduit en modélisant la partie extérieure au patin de gomme par un milieu homogène infini. La justification est que la réponse impulsionnelle ainsi calculée est une bonne approximation pour les temps courts, tant que le front d'onde n'a pas eu de réflexion. C'est une approximation de la réponse impulsionnelle.

La relation calculée prend la forme mathématique d'un filtre linéaire qui dépend de la rigidité de la gomme et de la géométrie du patin de gomme. La réponse trouvée n'est pas exactement quasi statique, et la force exercée sur la carcasse ne s'annule pas en dehors de la base du patin de gomme. Mais dans [Schramm84], [Hamet88] et [Kropp88], le comportement est choisi élastique et local.

La réponse de la zone de contact à l'indentation

On a vu que l'excitation se faisait aux extrémités de la zone de contact, d'où l'idée de traiter à part cette partie du pneumatique.

En utilisant la relation entre l'effort exercé par un patin de gomme sur la carcasse et son indentation par la chaussée on propose dans [Schramm84], [Hamet88] des modèles mécaniques qui permettent de relier la position des particules de la surface du pneumatique en contact avec la chaussée au déplacement des points en entrée et sortie de la zone de contact.

La partie extérieure à la zone de contact est modélisée par un milieu infini, ce qui assure le découplage. Il est justifié par la dissipation rapide des ondes par la ligne d'attaque ou la ligne de fuite de la zone de contact. Le déplacement calculé est ensuite imposé à la partie restante de la bande de roulement (voir figure 1.17 pour une représentation du système étudié).

L'amplitude A des ondes à la fréquence f est reliée à l'amplitude a de la longueur d'onde de la rugosité λ via un nombre qui dépend de la géométrie de la zone de contact l , des propriétés des matériaux (rigidité E , masse volumique m ...) et s la vitesse du véhicule :

$$A(f = \frac{s}{\lambda}) = s f(l, E, m, \lambda) a(\lambda)$$

On constate dans cette formule la linéarité de l'excitation par rapport à la vitesse du véhicule, ce qui est contradictoire avec l'expérience qui montre une dépendance en carré de la vitesse. Dans ce modèle, on n'a pas modélisé de choc au niveau des lignes de fuite et d'attaque de la zone de contact.

Propriétés de la bande de roulement

Pour représenter les propriétés vibratoires, on a utilisé des modèles par éléments finis ([Hunckler79], [Clapp & Eberhardt],[Kung & all86], [Saigal & all86],[Södel & Prasad80]). Une autre approche analytique, utilisant le "circular ring model" (proposé dans [Böhm66]) est aussi employée dans [Heckl86], [Tielking65], [Dodge65], [Huang92], et [Cuschieri & all96]. Elle décrit la bande de roulement.

On présente les hypothèses du "circular ring model" (figure 1.18 pour les notations) :

- *Géométrie* La bande de roulement est modélisée par un anneau de rayon a . On repère un point par un angle polaire θ . Le contact avec la chaussée est ponctuel. Cette géométrie permet d'utiliser des décompositions en série de Fourier discrète en espace.
- *Cinématique* La bande de roulement est modélisée par une cinématique d'arc de poutre.

L'approximation de modélisation en arc de poutre est plausible dans l'épaisseur : dans la gomme, la célérité des ondes de cisaillement varie suivant la fréquence entre 60 m/s et 80 m/s. La longueur d'onde varie théoriquement entre 5 et 10 cm, elle est supérieure à l'épaisseur du pneumatique.

- *Comportement*

- On néglige les hétérogénéités dues à la présence de rainures dans la bande de roulement et l'anneau a des caractéristiques homogènes équivalentes. La section de l'anneau est S , le module de Young est E , la rigidité de flexion est B , et la masse linéique est μ .

On a déjà remarqué que l'approximation en milieu homogénéisé est grossière (expérience du pneumatique à deux rainures).

- Dans la bande de roulement, ce modèle considère l'effet d'une raideur géométrique due à la tension initiale de la bande de roulement.

Comme on sait que le bruit émis varie avec la pression du pneumatique, cette prise en compte de la raideur géométrique se justifie.

Par contre, la tension est estimée en négligeant l'action des flancs, ce qui n'est pas justifié.

- La réaction des flancs en tout point de la bande de roulement est supposée linéaire avec une composante qui s'oppose au déplacement radial avec une rigidité k_a et une composante qui s'oppose au déplacement tangentiel avec une rigidité k_t . Ces deux valeurs sont supposées indépendantes de la fréquence. Cette modélisation ne permet pas de connaître le mouvement des flancs.

Ces simplifications permettent de traiter un modèle de façon analytique. Il faudrait que les fréquences étudiées soient inférieures à la première fréquence propre d'un flanc encastré au niveau de la bande de roulement (approximation quasi statique expliquée dans [Geradin & Rixen92]). Il faut aussi supposer que la réponse quasi statique est localisée, c'est à dire que les secteurs de flancs travaillent indépendamment.

- *Conditions aux limites* Le contact avec la chaussée est modélisé par le déplacement radial calculé dans le modèle précédent et une résistance au glissement nulle.

Ces hypothèses sont aussi très simplifiées, mais découlent du choix de la géométrie circulaire et du contact ponctuel.

- *Mouvement de référence* Les vibrations sont des petites oscillations autour d'un mouvement de rotation uniforme de l'anneau à vitesse angulaire $\Omega = \frac{s}{a}$ (s est la vitesse du véhicule en m/s). Cela permet de prendre en compte un effet Doppler.

Ce modèle est appliqué pour prédire les fréquences propres qui seront amplifiées par la structure et la relation de dispersion.

- Dans le graphe 1.19, les résultats de [Huang92] sont présentés. L'auteur étudie la dépendance des fréquences propres d'un pneumatique lisse en fonction de la vitesse du véhicule. Les vibrations se décomposent en une somme de modes propres dans le repère tournant avec la roue. Ces modes propres sont associés à deux fréquences propres qui dépendent de la vitesse (ces deux fréquences sont dégénérées dans le cas d'une vitesse nulle).

L'accord avec le spectre du bruit mesuré pour un pneumatique avec des rainures dans la bande de roulement est médiocre (1.14 et 1.15).

On peut attribuer cette différence à la raison suivante : dans le "circular ring model", on a affaire à un système d'équations linéaires, à coefficients constants car l'hétérogénéité a été négligée et parce que le changement de forme ainsi que l'étendue de la surface de contact ont été eux aussi négligés. On peut utiliser une méthode de séparation des variables dans le repère lié à la roue.

Si on n'avait pas fait ces simplifications, on aurait eu un système linéaire à coefficients qui dépendent périodiquement du temps. De tels systèmes n'ont pas de fréquence de résonance.

Par la suite, on réintroduit l'hétérogénéité due aux rainures dans la bande de roulement, l'étendue de la surface de contact et donc une forme qui n'est pas circulaire.

b) A haute fréquence, la décomposition modale est remplacée par une décomposition en ondes planes, qui vérifient la relation de dispersion. Dans [Kropp89], l'auteur exhibe 3 types d'ondes à chaque fréquence :

1. des ondes longitudinales propagatives, qui se propagent à des célérités différentes suivant leur sens angulaire.
2. des ondes transverses propagatives qui se propagent aussi avec deux célérités. Avec le montage choisi dans l'expérience, c'est ce type d'onde qui aurait été excité. Avec les mesures faites sur un pneumatique immobile, on peut déduire des caractéristiques mécaniques qui reproduisent la courbe sur une grande gamme de fréquence.
3. des ondes transverses évanescentes dont l'amplitude serait nulle dès qu'on s'éloigne de la zone de contact.

On ne peut pas retrouver des solutions de cette forme si on tient compte d'une hétérogénéité marquée. Dans le cas d'une hétérogénéité faible, on peut rechercher une onde plane à vecteur d'onde variable et amplitude variable (méthode Wentzel-Kramers-Brillouin expliquée dans [Dowling92]).

On retiendra de cette partie que les modèles utilisés font des simplifications non justifiées en ce qui concerne :

1. **la géométrie du pneumatique** qui est assimilée à un cercle ;
2. **l'hétérogénéité** de la bande de roulement.

Ces deux hypothèses prédisent des fréquences de résonance qui ne sont pas observées dans les figures 1.14 et 1.15.

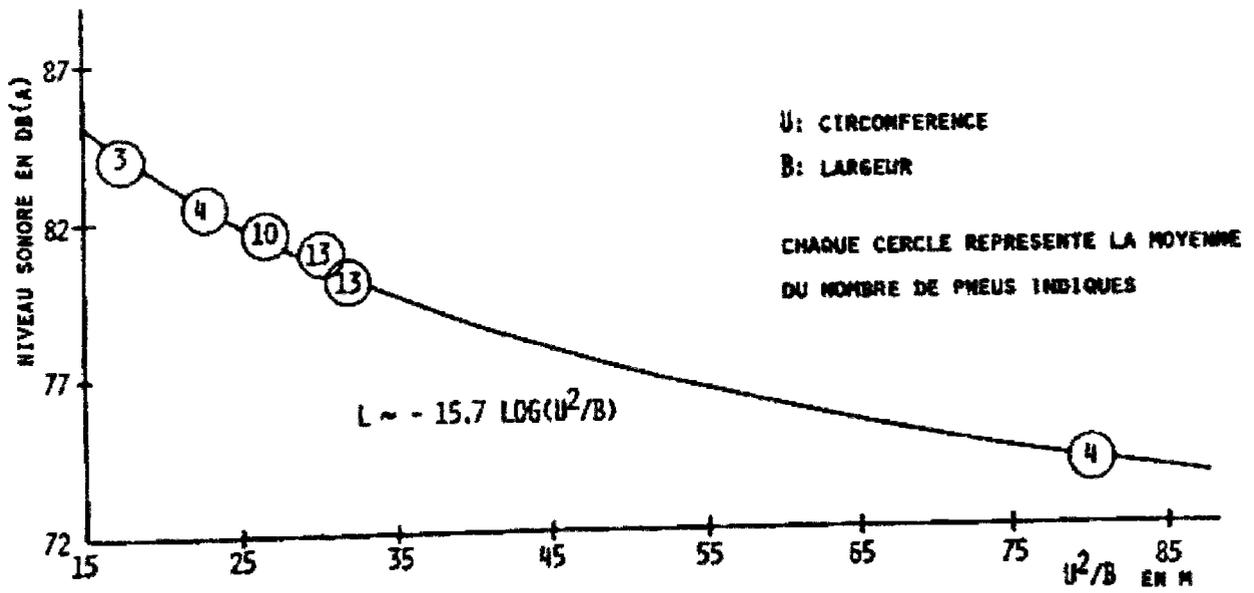


FIG. 1.10 - Bruit du pneumatique en fonction de sa taille

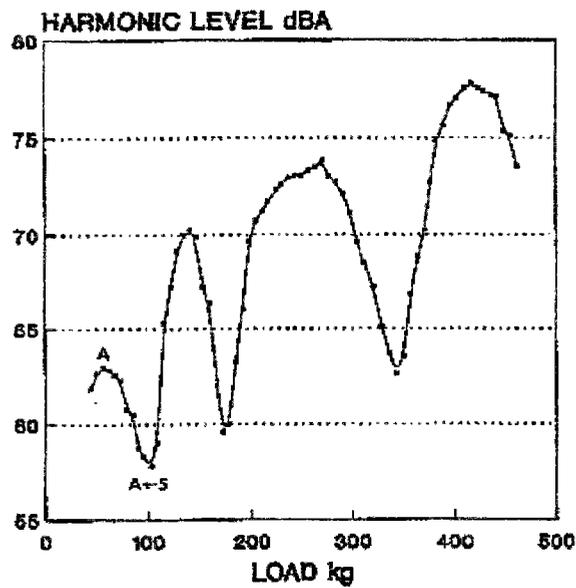


FIG. 1.11 - Bruit du pneumatique en fonction du poids appliqué

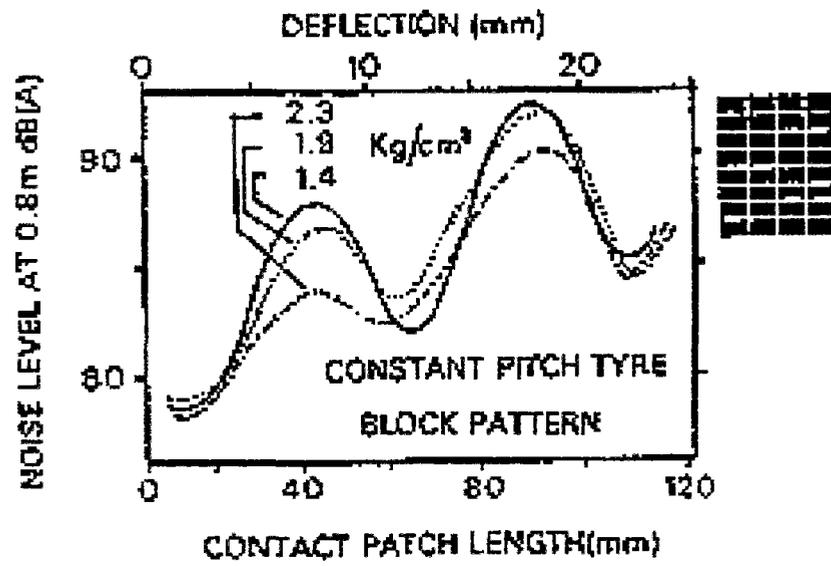


FIG. 1.12 - *Bruit du pneumatique en fonction de la pression de gonflement*

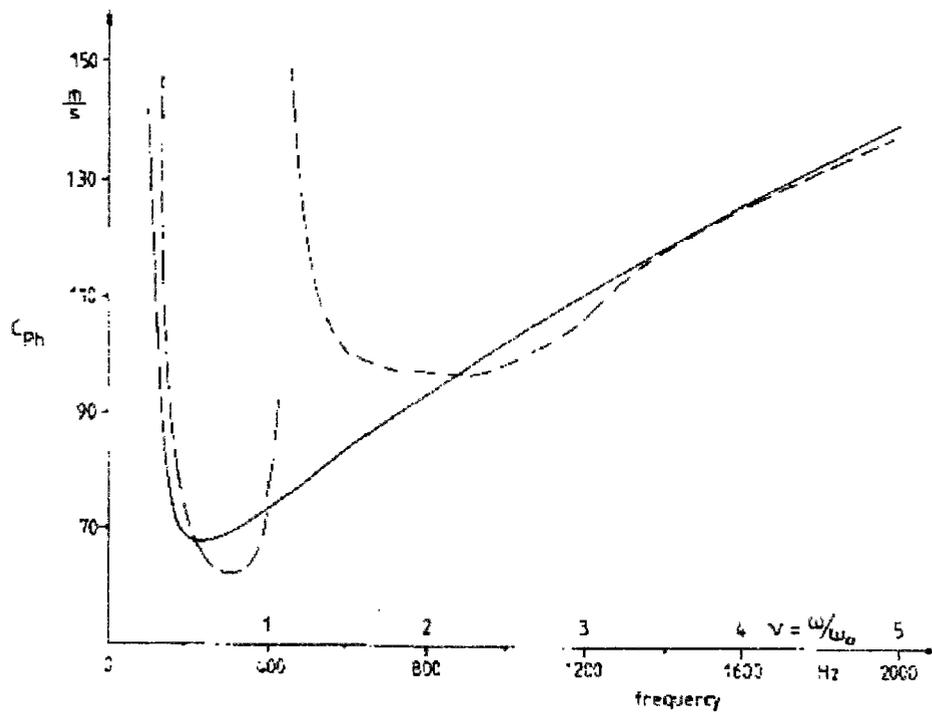


FIG. 1.13 - *Relation de dispersion*

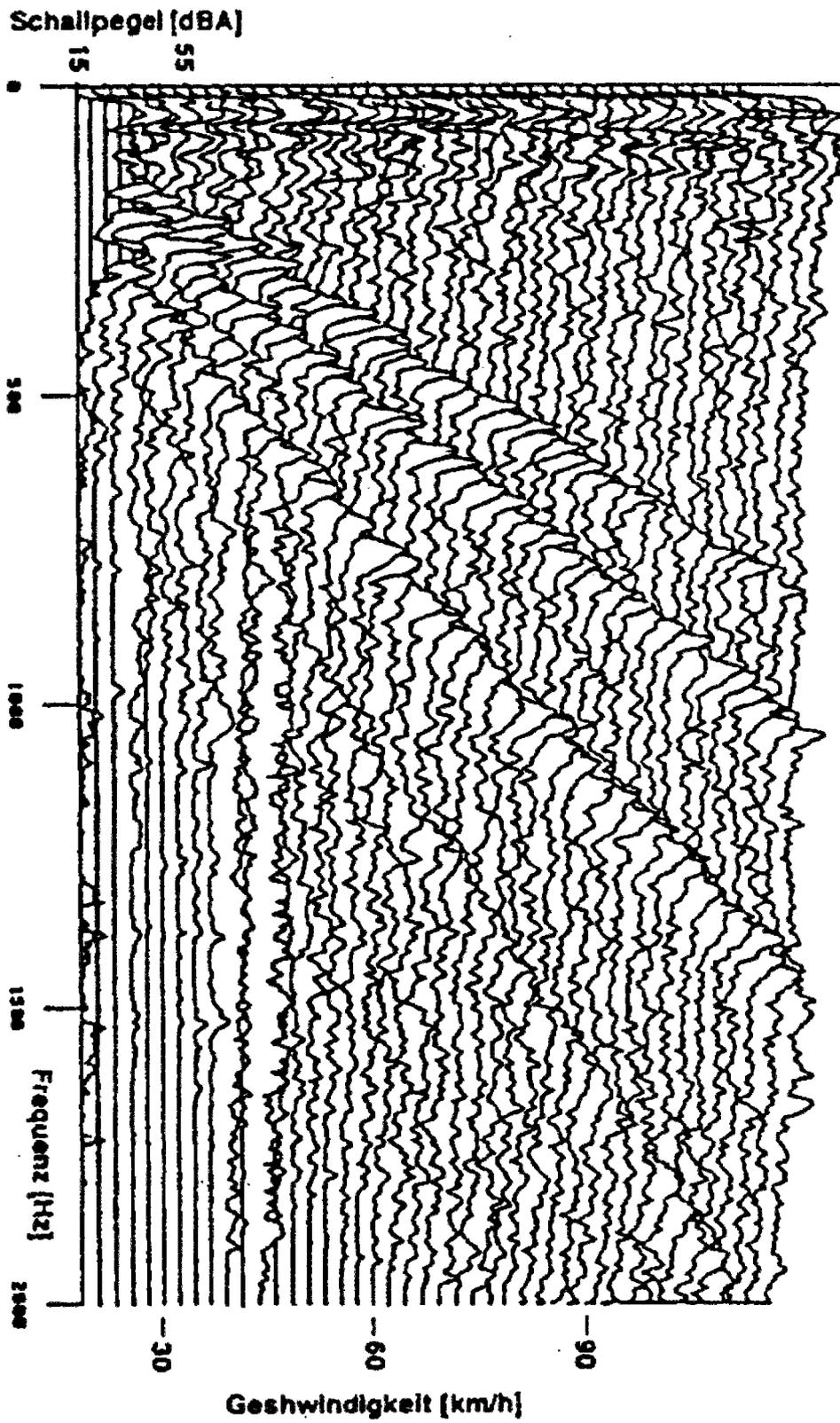


FIG. 1.14 - Spectre d'un pneumatique en fonction de la vitesse : pneu à motif périodique

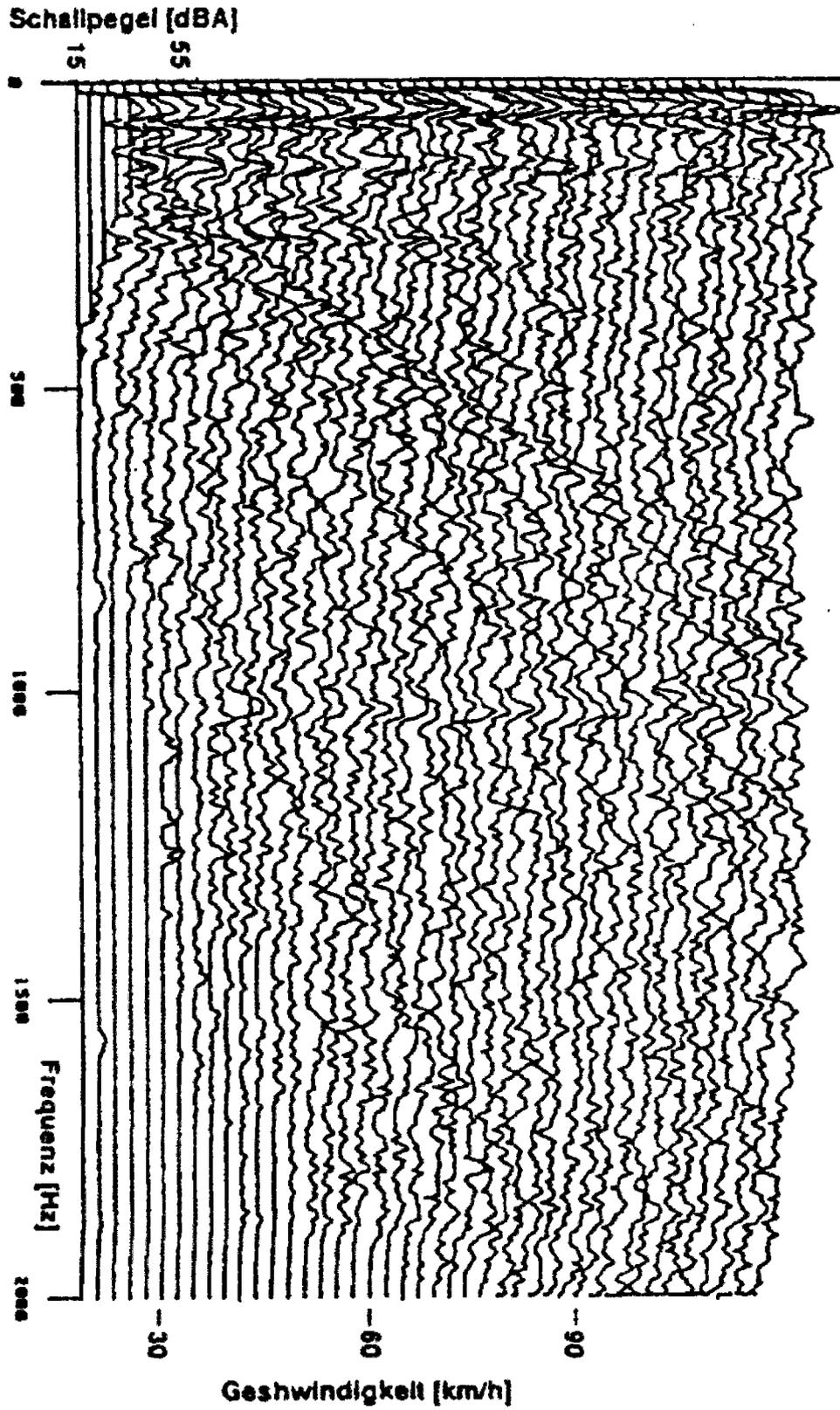


FIG. 1.15 - Spectre d'un pneumatique en fonction de la vitesse : pneu à motif aléatoire

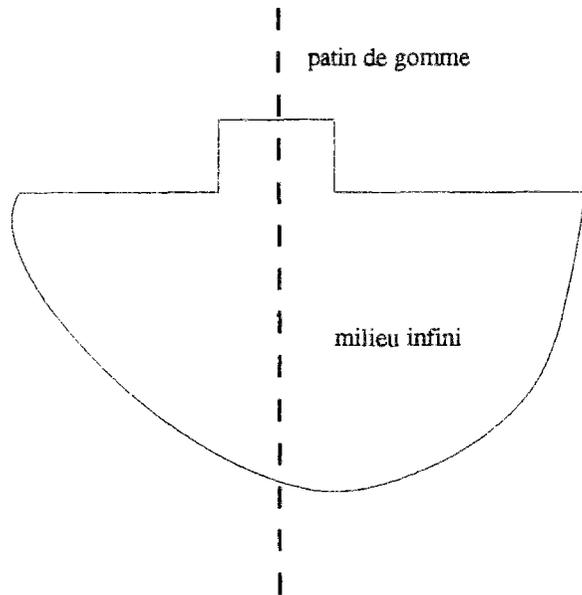


FIG. 1.16 - *Le modèle de patin de gomme*

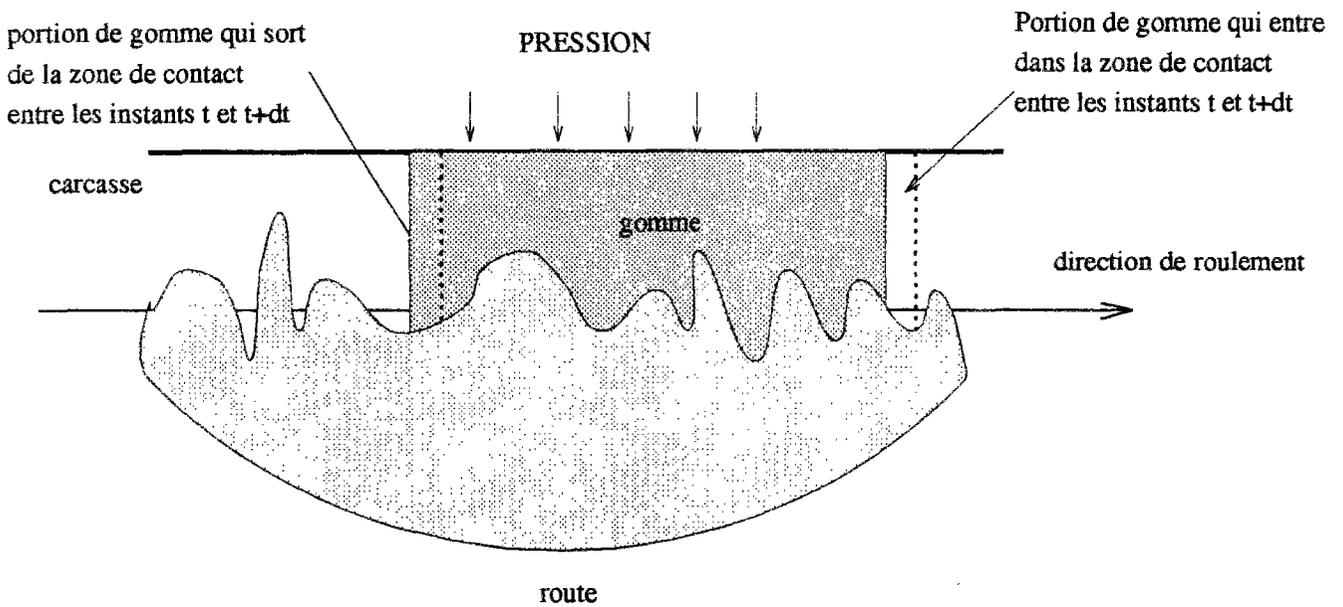


FIG. 1.17 - *Le modèle zone de contact*

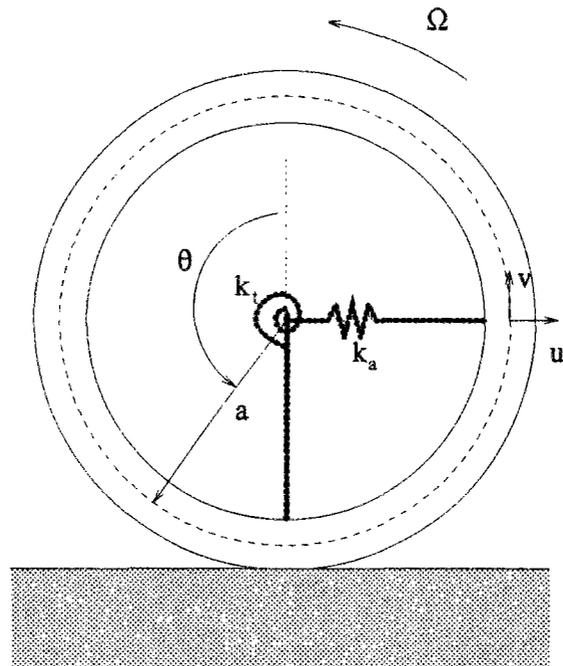


FIG. 1.18 - Le "circular ring model"

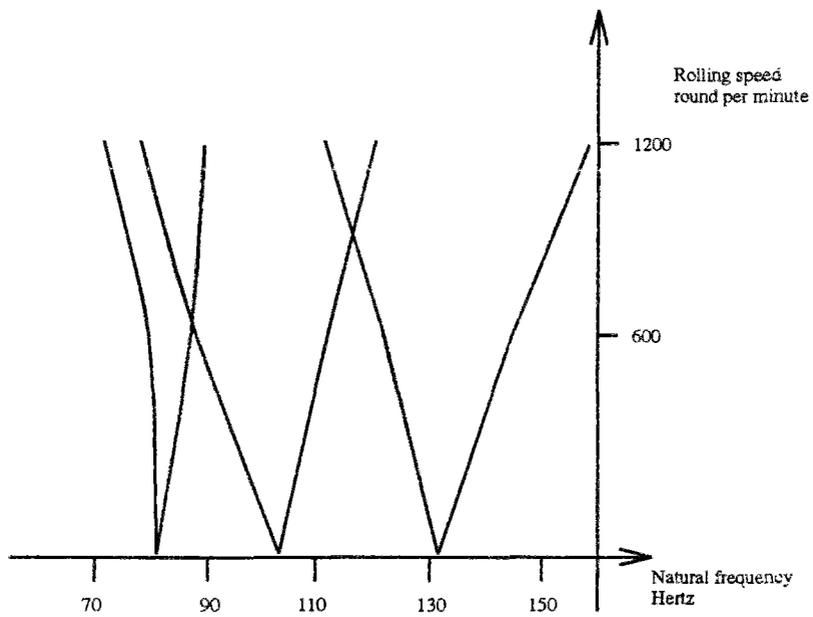


FIG. 1.19 - Fréquences de résonance en fonction de la vitesse: calcul avec le "circular ring model"

1.4 Etude de la propagation du son

• L'aspect expérimental

Les expériences suivantes se rapportent à l'analyse de la propagation du son émis par la surface des pneumatiques.

- a) Dans [Liedl & all82], les auteurs vérifient l'hypothèse de linéarité entre la vibration de surface mesurée par vibrométrie laser par effet Doppler et le champ de pression.
- b) Dans [Jennewein & Bergmann85], les auteurs utilisent une méthode d'intensimétrie acoustique pour mesurer une distribution de sources ponctuelles équivalente à l'émission sonore du pneumatique. Ces sources se situeraient au niveau de la bande de roulement, en avant et en arrière de la zone de contact, et au dessus de la zone de contact au niveau des flancs (voir figure 1.20).

Cette mesure ne signifie pas que les autres zones ont une amplitude de vibration beaucoup plus petite, mais que les vibrations dans ces zones se traduisent par un champ de pression évanescant. Comme dans les plaques, ce sont les bords de la bande de roulement qui émettent le plus de bruit.

- c) Des mesures de pression acoustique ont été faites sur un véhicule roulant sur un cylindre rugueux. La pression acoustique est mesurée en plusieurs points et interprétée comme l'amplitude d'une onde propagative localement sphérique. Cette mesure donne les directions privilégiées de propagation. Elles se situent dans l'axe du pneumatique, vers l'avant et l'arrière du pneumatique (voir figure 1.21 qui est une représentation polaire du bruit mesuré en dBa).

Ce résultat s'interprète de la façon suivante : les réflexions successives sur la chaussée et sur la bande de roulement du pneumatique conduisent à une émission dans un secteur angulaire de l'espace. C'est l'effet dièdre ([Hamet & all86], [Ghesquière & all88], [Ronneberger88]).

• L'aspect modélisation

Les modèles pour prévoir l'émission sonore s'inspirent de deux théories, la théorie de l'émission acoustique des plaques infinies qui utilise la relation de dispersion et la formulation d'un problème avec intégrale de frontière.

Comportement acoustique à haute fréquence

Dans [Kropp89], [Bar & Delanne93], on mentionne que les vibrations à haute fréquence du pneumatique ne produisent pas de bruit. Ce résultat est obtenu en raisonnant à partir de la relation

de dispersion obtenue dans les pneumatiques et de la théorie de l'émission sonore des plaques.

On rappelle donc les résultats sur le rayonnement d'une plaque dans un fluide. La figure 1.22, tirée de [Lesueur & all88], montre l'évolution du facteur de rayonnement $\sigma = \frac{\Re(Z)}{\rho_a c}$ en fonction du rapport entre $\frac{\omega}{c}$, le module du vecteur d'onde des ondes acoustiques à la fréquence considérée et k_f , le module du vecteur d'onde des ondes de flexion dans une plaque infinie. Z est l'impédance acoustique complexe au niveau de la surface de la plaque, et $\rho_a c$ est l'impédance spécifique de l'air (414 kg/m³/s). On sépare deux cas ; dans le premier, les ondes de flexion dans la plaque sont évanescentes (k_f est imaginaire pur), et dans le second, les ondes de flexion dans la plaque sont propagatives (k_f est réel).

Les conclusions sont :

- les ondes de vibration longitudinales ne produisent pas de son,
- les ondes de vibration transverses propagatives produisent une onde sonore évanescence si leur célérité est inférieure à celle du son dans le fluide (ondes subsoniques).

Les résultats des mesures donnaient une célérité inférieure à 340 m/s et pour cette raison, on affirme que les vibrations de flexion progressives n'émettent pas de son à hautes fréquences (domaine de validité de cette représentation des ondes).

- les ondes de vibration évanescentes émettent une onde sonore propagative quelque soit la vitesse de décroissance de leur enveloppe.

Ce résultat est cohérent avec la mesure de la position de sources sonores. Ces ondes évanescences se trouvent significatives uniquement près des sources d'excitation, c'est à dire près de la zone de contact. Elles disparaissent dès qu'on s'éloigne du bord d'attaque et du bord de fuite de la zone de contact.

Formulation par relation intégrale

Commençons par un rappel théorique pour fixer les notations.

On regarde l'expression théorique d'un problème d'acoustique classique, posé sur un demi espace avec une frontière parfaitement réfléchissante. La source est constituée par le pneumatique de frontière \mathcal{S} , qui impose sa vitesse \underline{u} au fluide.

On utilise l'opérateur de Green temporel qui vérifie la condition de radiation de Sommerfeld, et la condition de réflexion :

$$g(\underline{x}, \underline{x}_0, t, t_0) = \frac{1}{4\pi \|\underline{x} - \underline{x}_0\|} \delta \left(t - t_0 - \frac{\|\underline{x} - \underline{x}_0\|}{c} \right) + \frac{1}{4\pi \|\underline{x} - \underline{x}'_0\|} \delta \left(t - t_0 - \frac{\|\underline{x}' - \underline{x}_0\|}{c} \right)$$

\underline{x}_0 est la position de la source, et \underline{x}'_0 la position de la source image par la réflexion.

La pression au niveau de la frontière vérifie l'équation intégrale :

$$\frac{1}{2}p(\underline{x}, t) + \int_{-\infty}^t \int_S \frac{\partial g(\underline{x}, \underline{x}_0, t, t_0)}{\partial \underline{x}_0} \cdot \underline{n}p(\underline{x}_0, t_0) dx_0 dt_0 = \int_{-\infty}^t \int_S \rho \frac{\partial \underline{u}(\underline{x}_0, t_0)}{\partial t_0} \cdot \underline{n}g(\underline{x}, \underline{x}_0, t, t_0) dx_0 dt_0$$

Cette équation montre que la pression acoustique est linéaire en fonction de l'accélération normale des particules de la frontière.

La solution s'écrit en dehors de la frontière du pneumatique:

$$p(\underline{x}, t) = \int_{-\infty}^t \int_S \rho_a \frac{\partial \underline{u}(\underline{x}_0, t_0)}{\partial t_0} \cdot \underline{n}g(\underline{x}, \underline{x}_0, t, t_0) dx_0 dt_0 - \int_{-\infty}^t \int_S \frac{\partial g(\underline{x}, \underline{x}_0, t, t_0)}{\partial \underline{x}_0} \cdot \underline{n}p(\underline{x}_0, t_0) dx_0 dt_0$$

C'est la somme d'une contribution de monopôle (fonction g) dont l'amplitude est la composante normale de l'accélération du fluide, et d'une contribution de dipôle (dérivée de g) dont l'amplitude est une fonction linéaire de la composante normale de l'accélération du fluide. Avec l'hypothèse de découplage, l'accélération normale du fluide se calcule à partir du mouvement des particules du pneumatique en absence de fluide.

Le modèle "air pumping" proposé dans [Haydn71] propose de mesurer l'accélération équivalente pour une partie de la surface du pneumatique et de la remplacer par une source monopole équivalente sur la frontière du pneumatique. On néglige dans ce modèle la propagation dans l'air sur des petites distances pour homogénéiser la surface du pneumatique.

Le déplacement en régime quasi statique de toutes les particules se trouvant dans une rainure transversale entrant dans la zone de contact est remplacé par le volume d'air chassé ou aspiré. Ce volume d'air déplacé est assimilé à un déplacement donné de la tranche d'air en sortie de rainure. Une fois faite cette simplification, l'auteur calcule la dérivée seconde de ce terme qui joue le rôle d'une source d'excitation. Son amplitude varie comme le carré de la vitesse de roulement.

On peut alors calculer un champ de pression rayonné par ce mouvement en négligeant le détail géométrique des rainures du pneumatique, (travaux dans [Ghesquière & all88]). Ceci est justifié par le fait que la longueur d'onde dans l'air du champ rayonné ($\lambda = \frac{340}{f}$) est plus grande que les dimensions des rainures.

La comparaison expérimentale montre que ce phénomène d'émission sonore par une vibration quasi statique explique mal le bruit émis, même pour les pneumatiques n'ayant pas de rainures longitudinales dans la bande de roulement. Dans la figure 1.23, on montre la pression acoustique mesurée en trois points différents lorsqu'une rainure entre dans la zone de contact. La quatrième courbe montre l'allure du signal de pression prédit par le modèle air pumping. L'échelle en pression n'est pas significative car l'amplitude de la pression dépend du point où on calcule le champ de pression. Cette allure du champ de pression se superpose mal aux signaux mesurés.

• Une amplification du bruit dans l'air ?

Il existe des théories qui prédisent des amplifications du bruit émis par des phénomènes de résonance dans l'air :

- “les résonances de tuyau” : les rainures dans la bande de contact forment une colonne d'air fermée qui se termine de part et d'autre par une grande discontinuité de section ;
- “les résonances de Helmholtz” : juste au moment où une rainure transversale sort de la zone de contact, elle forme une cavité prolongée par une fine lamelle d'air d'épaisseur variable; cette configuration ressemble à un résonateur de Helmholtz.

De tels systèmes ont effectivement des fréquences propres, dont la valeur est proche de 1200 Hz dans le premier cas et dont la valeur dépend effectivement de l'épaisseur du film d'air dans le second cas. Cependant, ces fréquences propres ne se traduisent par des amplifications notables qu'en régime permanent. Or ces configurations n'existent que quelques millisecondes. Il n'y a pas assez de temps pour qu'il se forme un système d'onde stationnaire et une amplification du son.

On considérera que l'air autour du pneumatique est un système ouvert où les ondes sont peu réfléchies.

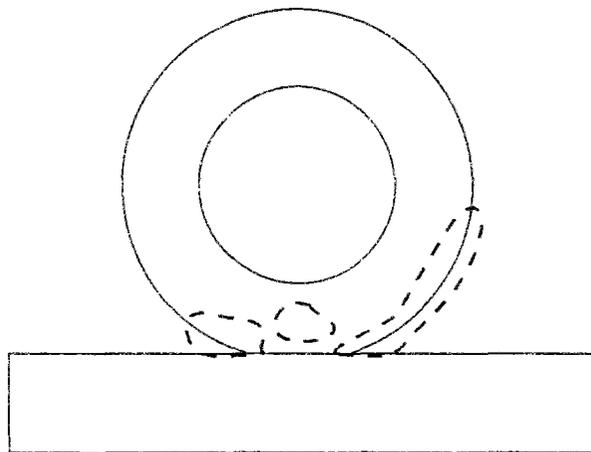


FIG. 1.20 - *Localisation des sources sonores*

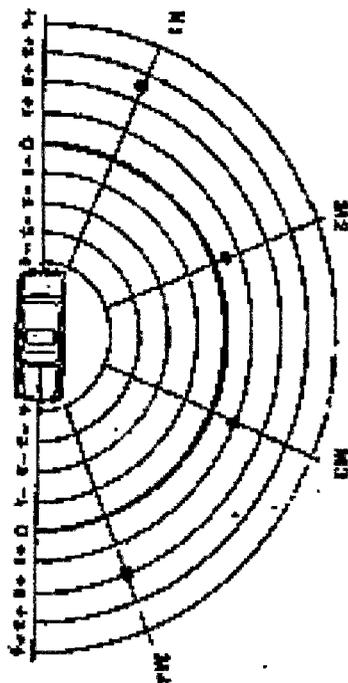


FIG. 1.21 - Directivité du son

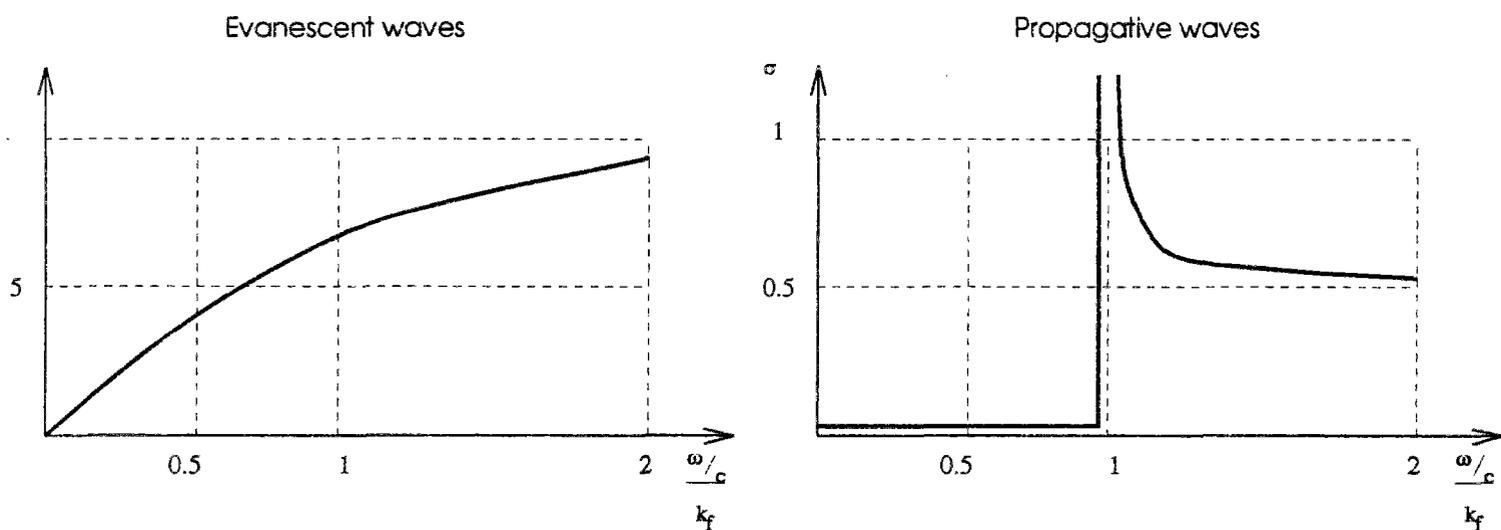


FIG. 1.22 - Coefficient de radiation pour une onde évanescente, propogative

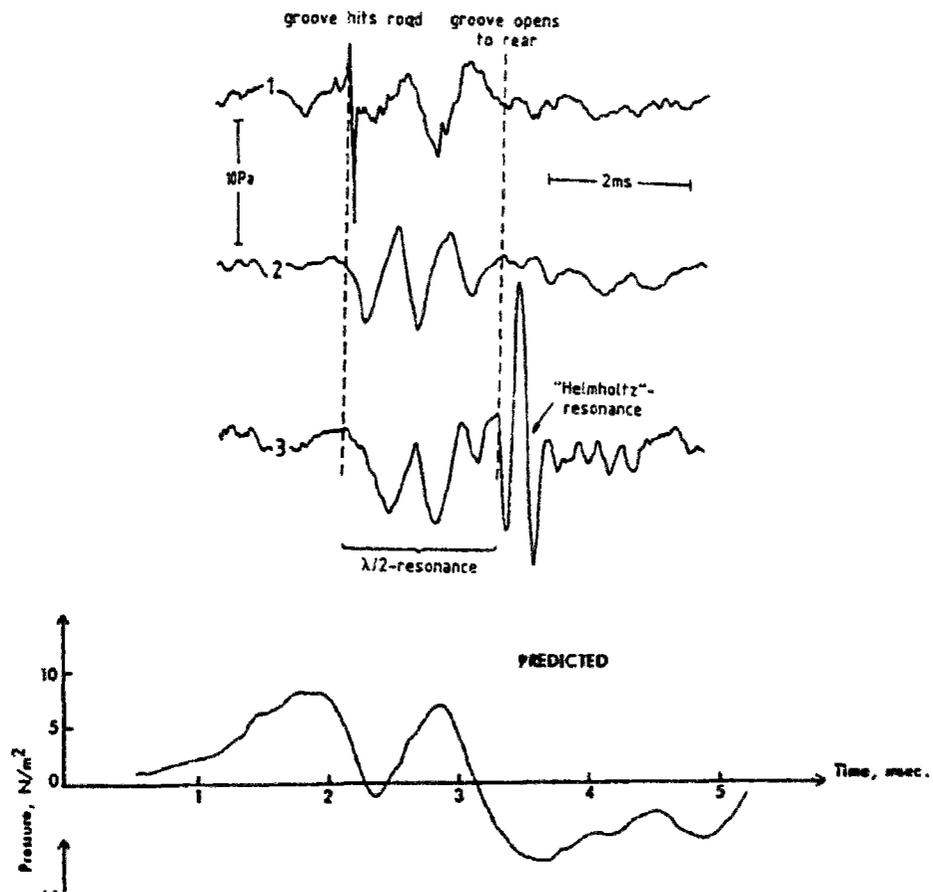


FIG. 1.23 - Le phénomène air pumping pour une rainure, comparaison théorie expérience

Conclusion

On a vu que le problème du bruit des pneumatiques peut se décomposer en une étude de vibration de structure et une étude de rayonnement acoustique.

Pour décrire le rayonnement, il faut définir une configuration de référence dont la pression acoustique est une perturbation. On peut choisir comme en étude bibliographique de ne pas prendre en compte l'écoulement et l'état particulier est un fluide au repos. Dans le cas contraire, on peut choisir un modèle de fluide newtonien compressible, ou incompressible si on veut tenir compte d'une couche limite visqueuse autour des obstacles. Si l'effet de cette couche limite est négligeable, on prendra un modèle de fluide parfait compressible ou incompressible, rotationnel ou irrotationnel.

Une fois ce choix fait, il faut déterminer les équations d'une petite perturbation de cet écoulement, et choisir si on tient compte ou pas de la dissipation visqueuse de l'air.

On peut tenir compte du fait que la longueur d'onde dans la gamme de fréquence étudiée est plus grande que la taille caractéristique des rainures. Sur ces distances, on peut négliger l'effet de propagation par condensation statique et homogénéiser la surface du pneumatique comme dans [Ghesquière & all88].

On ne traitera pas le problème du rayonnement. On se donne comme objectif de donner les outils mécaniques permettant de réduire le bruit. On va donc s'attacher à décrire les sources d'excitations du pneumatique et les propriétés dynamiques (amplification) de la structure du pneumatique. On est conscient qu'en réduisant le niveau de vibration, on ne réduit pas forcément le niveau des vibrations bruyantes, car certaines vibrations rayonnent peu.

Chapitre 2

Equations du mouvement

Introduction

Pour traiter le problème des vibrations d'un pneumatique, on va se placer dans l'hypothèse de petite oscillation autour d'une configuration particulière d'équilibre statique. La modélisation comporte donc trois temps :

- définir une géométrie qui tienne compte de l'étendue de la surface de contact ;*
- définir une configuration de référence en équilibre statique: cet état doit faire apparaître le mouvement de la frontière du pneumatique dans la zone de contact avec la chaussée (indentation et glissement) comme une source d'excitation qui se superpose à l'excitation par le défilement du motif de la bande de roulement ;*
- décrire les équations d'équilibre pour une petite perturbation autour de cet état.*

On a choisi de garder une modélisation tridimensionnelle de la géométrie et du mouvement pour traiter simplement l'influence des rainures dans la bande de roulement sur la réponse.

On va s'attacher à décrire un saut de vitesse au niveau de la ligne d'attaque et de la ligne de fuite de la zone de contact.

On va chercher à simplifier la description du contact pour la perturbation.

2.1 Géométrie, cinétique, déformations

• Description de la géométrie

Pour décrire une géométrie, on a un grand éventail de choix. Par exemple, si on traite le problème d'une poutre rectangulaire en vibration de flexion forcée, on choisit de prendre comme géométrie sa configuration non chargée, immobile. Mais on aurait pu choisir à tout instant la forme qu'elle aurait en équilibre statique si on lui appliquait la charge d'excitation. On aurait une géométrie dépendant du temps. Sur cet exemple simple, on voit que la description de la géométrie est un choix, et que certains choix sont plus judicieux que d'autres.

La géométrie du pneumatique est arbitraire, mais c'est normal.

On ne veut pas introduire l'indentation et le glissement dans la géométrie. On ne veut pas non plus décrire l'écrasement quasi statique de la gomme responsable de "l'air pumping".

On veut une géométrie $\mathcal{D}_0(t)$ qui caricature la courbure de la bande de roulement au niveau des lignes d'attaque et de fuite de la zone de contact. On a mesuré à ce niveau une forte accélération sur une distance courte, et on veut modéliser ce mouvement par une discontinuité de vitesse. Une telle discontinuité de vitesse ne peut être équilibrée que par une discontinuité de contrainte. Si la contrainte est une tension membranaire alignée avec le plan tangent de la géométrie, cela implique que *la géométrie est anguleuse*. De plus, une géométrie anguleuse implique bien un saut de vitesse en régime permanent.

On identifie \mathcal{D} , la configuration naturelle du pneumatique avec l'ensemble des positions \underline{X} des particules du pneumatique monté sur la jante, mais ni gonflé ni chargé par le poids du véhicule. On note Grad la dérivation par rapport à \underline{X} et $\frac{d}{dt}$ la dérivée par rapport au temps à \underline{X} fixé.

On choisit comme dans [Rahier91] de décrire cette géométrie $\mathcal{D}_0(t)$ à partir de la configuration relâchée du pneumatique. A partir de cette configuration, on passe à la géométrie par une rotation de corps rigide, puis une transformation d'écrasement continue $\underline{\phi}_0$. On se propose de montrer au cours du chapitre les hypothèses sur $\underline{\phi}_0$ qui simplifient les calculs, mais de garder pour développer les équations une transformation quelconque. On proposera une solution pour $\underline{\phi}_0$ au chapitre 5.

Etape 1

On applique à la configuration naturelle une rotation de corps rigide autour de l'axe de la roue. La vitesse de rotation Ω est une donnée. On note $\underline{U}(\Omega t)$ la matrice de rotation.

Etape 2

Cette rotation est composée par $\underline{\phi}_0$, la transformation d'écrasement. Le résultat de ces deux transformations donne la géométrie $\mathcal{D}_0(t)$, ensemble des positions d'entraînement. La géométrie

dépend du temps à cause de la présence de rainures :

$$\underline{x}_0(t, \underline{X}) = \underline{\phi}_0(\underline{U}(\Omega t), \underline{X})$$

On note $\underline{F}_0(t, \underline{X}) = \underline{\text{Grad}} \underline{x}_0$, la transformation tangente de la position d'entraînement, et $\underline{u}_0 = \frac{d\underline{x}_0}{dt}$, la vitesse d'entraînement.

On note $\underline{\text{grad}}$ la dérivée par rapport à \underline{x}_0 et $\frac{\partial}{\partial t}$ la dérivée par rapport au temps à \underline{x}_0 fixé.

On introduit ici des hypothèses. Cette transformation \underline{x}_0 indique la position des ondes de choc. La surface de discontinuité du vecteur vitesse (onde de choc) au niveau de la ligne d'attaque est notée $\mathcal{A}_0(t)$ et la surface au niveau de la ligne de fuite est notée $\mathcal{F}_0(t)$. On suppose de plus que la position des ondes de choc est stationnaire dans cette géométrie, seule leur surface change suivant si elles coupent une rainure ou un patin de gomme. Cela signifie que cette position ne dépend pas du profil de la chaussée, mais uniquement de la structure du pneumatique et de son chargement par le véhicule. On pourra étudier la propagation des vibrations dans le pneumatique indépendamment de la chaussée.

Au travers des lignes de fuite \mathcal{F}_0 et d'attaque \mathcal{A}_0 la vitesse d'entraînement et transformation tangente de $\underline{\phi}_0$ sont discontinues.

Les surfaces \mathcal{A}_0 et \mathcal{F}_0 sont lisses et admettent une normale. On note \underline{n} la normale qui pointe vers l'extérieur de la zone de contact. Cette direction est associée au sens qui définit les discontinuités : on note $[\dots]$ le saut d'une quantité entre le sous domaine vers lequel pointe \underline{n} (domaine (+)) et le sous domaine intérieur (domaine (-)).

• Description de la configuration de référence

On choisit comme configuration de référence le roulement quasi statique du pneumatique sur la chaussée. La jante est chargée par le poids du véhicule et par un couple correspondant au couple du moteur. C'est un état d'équilibre stable, qui dépend de α la rotation de la roue. On va donc décrire l'indentation et le glissement comme un petit déplacement sur la géométrie :

$$\underline{x}_s(\alpha, \underline{X}) = \underline{\phi}_0(\underline{U}(\alpha), \underline{X}) + \underline{\xi}_s(t, \underline{X})$$

On remplace α par Ωt dans les équations pour avoir le mouvement de référence à vitesse constante. On adoptera par la suite une paramétrisation par \underline{x}_0 plutôt que par \underline{X} .

On va ensuite chercher la solution du roulement comme une perturbation de ce mouvement. Cette représentation de la réponse en une réponse quasi statique et une perturbation (la réponse dynamique) est classique. Elle assure que l'excitation par l'indentation et le glissement sur la chaussée est

naturellement un paramètre d'excitation de la vibration qui se superpose aux autres, comme la déformation quasi statique de la gomme utilisée dans la théorie "air pumping".

Etape 3

On superpose à la position d'entraînement un déplacement quasi statique $\underline{\xi}_s(t, \underline{x}_0)$. Ce déplacement compté à partir de la position d'entraînement permet de retrouver la position des particules lors d'un roulement quasi statique. On suppose que ce déplacement est petit pour pouvoir confondre dans les équations d'équilibre la position d'entraînement et la position exacte. La modélisation de ce déplacement peut faire intervenir le comportement non linéaire de la gomme comme dans [Ronneberger88]. Elle doit aussi faire intervenir des lois de contact non linéaires de frottement.

Ce champ de déplacement est continu, et son gradient est continu sauf à l'interface entre deux matériaux. Le gradient est notamment continu de part et d'autre des positions des ondes de choc.

On note $\underline{u}_s(t, \underline{x}_0) = \frac{d\underline{\xi}_s(t, \underline{x}_0)}{dt}$, la vitesse relative due à la réponse statique. C'est une dérivée à \underline{X} fixé. Elle n'est pas continue au travers des surfaces d'onde de choc. On remarque que :

$$[\underline{u}_s] = \underbrace{\left[\frac{\partial \underline{\xi}_s}{\partial t} \right]}_0 + \left[\underline{\text{grad}} \underline{\xi}_s \cdot \underline{u}_0 \right] = \underline{\text{grad}} \underline{\xi}_s \cdot [\underline{u}_0]$$

• Description de la vibration

Etape 4

On superpose à l'état de référence un déplacement dynamique $\underline{\xi}(t, \underline{x}_0)$ et on obtient la position des particules :

$$\underline{x} = \underline{x}_0 + \underline{\xi}_s(t, \underline{x}_0) + \underline{\xi}(t, \underline{x}_0)$$

On note $\underline{u}(t, \underline{x}_0)$ la vitesse relative de la vibration : $\underline{u} = \frac{d\underline{\xi}}{dt}$

On suppose que le gradient de la vibration $\underline{\xi}$ et la vitesse relative \underline{u} sont discontinus de part et d'autre des lignes de fuite \mathcal{F}_0 et \mathcal{A}_0 .

Pour ce qui est de la modélisation de la vibration au niveau de la partie du bord du pneumatique en interaction avec la chaussée, on suppose que la position des particules du pneumatique en surface (et l'étendue de cette surface) est une donnée qui ne dépend que des géométries en contact, des caractéristiques de la structure et de la vitesse du véhicule, mais pas de la vibration proprement dite. Physiquement, si on étudie deux pneumatiques identiques, roulant sur des surfaces identiques, et qu'on perturbe un des deux pneumatiques, alors il existe deux sortes de particules au niveau de la surface;

- celles de la partie du bord du pneumatique qui ont la même position pour les deux pneumatiques

quelque soit la perturbation. Elles se trouvent dans la zone de contact avec la chaussée. Ces particules ne sont pas forcément en contact avec la chaussée, mais elles peuvent être considérées en quelque sorte liées à la route. L'ensemble de ces particules et leurs positions sont des *données* de notre problème.

- celles de la partie du bord du pneumatique qui ont une position différente. On suppose qu'elles se trouvent en contact avec l'air extérieur. On pourrait revenir sur cette hypothèse si certaines particules qui se déplacent en fonction de la perturbation glissent sur la chaussée. Il faudrait introduire une condition sur ce sous domaine qui modélise un frottement.

Si on a choisi une définition un peu compliquée des particules liés à la route, c'est pour justifier l'hypothèse que l'ensemble des particules liées à la route dépend peu de la route, mais surtout de la géométrie des patins de gomme. Ce sera un ensemble qui dépend du temps, de façon périodique si le pneumatique roule à vitesse angulaire constante. Cette hypothèse permettra de découpler le problème des vibrations de la structure du pneumatique du profil de la chaussée.

Ces hypothèses sont difficiles à justifier a priori. Elles conduisent à une modélisation des conditions aux limites simple, c'est la raison pour laquelle on les a choisies.

On a d'une part une partie du bord du pneumatique connue, variable dans le temps, qui subit un déplacement imposé "connu" (indépendant de la solution du problème de vibration). Cette zone se trouve au niveau de la route. Dans la géométrie, l'ensemble des points de la frontière du pneumatique liée à la route au temps t est noté $\partial\mathcal{D}_{\sigma U_c}(t)$, et le sous ensemble des particules en contact avec la jante $\partial\mathcal{D}_{\sigma U_j}$. La réunion de ces deux sous ensembles est la partie de la frontière du pneumatique en contact avec un solide, notée $\partial\mathcal{D}_{\sigma U}(t)$:

$$\partial\mathcal{D}_{\sigma U}(t) = \partial\mathcal{D}_{\sigma U_c}(t) \cup \partial\mathcal{D}_{\sigma U_j}$$

On a d'autre part la partie complémentaire en contact avec de l'air, soit à la pression atmosphérique (partie du pneumatique qui n'est pas en contact avec la route, intérieur des rainures), soit à la pression de gonflement. Le complémentaire dans la frontière du pneumatique de $\partial\mathcal{D}_{\sigma U}(t)$ est noté $\mathcal{D}_{\sigma\Sigma}(t)$, c'est l'ensemble des particules en contact avec de l'air. Cet ensemble se décompose en $\mathcal{D}_{\sigma\Sigma_c}$ pour les particules en contact avec la chambre et $\mathcal{D}_{\sigma\Sigma_e}(t)$ pour les particules en contact avec l'air extérieur.

• Description des déformations

On part d'une description Lagrangienne du mouvement par la transformation $\underline{\phi}(t, \underline{X})$:

$$\underline{\phi}(t, \underline{X}) = \underline{x}_0(t, \underline{X}) + \underline{\xi}_s(t, \underline{x}_0(t, \underline{X})) + \underline{\xi}(t, \underline{x}_0(t, \underline{X}))$$

On utilisera le tenseur de Green-Lagrange pour étudier les déformations entre la configuration naturelle et la configuration actuelle :

$$\underline{\underline{e}}(t, \underline{X}) = \frac{1}{2} \left((\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{\phi})^T \cdot \underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{\phi} - \underline{\underline{1}} \right)$$

En introduisant la décomposition de la transformation, on trouve :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{e}}(t, \underline{X}) = & \frac{1}{2} \left((\underline{\underline{F}}_0)^T \cdot \underline{\underline{F}}_0 - \underline{\underline{1}} \right) + \frac{1}{2} \left((\underline{\underline{F}}_0)^T \cdot \underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{\xi}_s + (\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{\xi}_s)^T \cdot \underline{\underline{F}}_0 \right) + \frac{1}{2} (\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{\xi}_s)^T \cdot \underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{\xi}_s \\ & + \frac{1}{2} \left((\underline{\underline{F}}_0)^T \cdot \underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{\xi} + (\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{\xi})^T \cdot \underline{\underline{F}}_0 \right) + \frac{1}{2} (\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{\xi})^T \cdot \underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{\xi} \\ & + \frac{1}{2} \left((\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{\xi}_s)^T \cdot \underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{\xi} + (\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{\xi})^T \cdot \underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{\xi}_s \right) \end{aligned}$$

On reconnaît ici la déformation de Green-Lagrange $\underline{\underline{e}}_0$ causée par le mouvement d'entraînement et la déformation de Green-Lagrange entre la configuration naturelle et la configuration de référence $\underline{\underline{e}}_r$:

$$\begin{cases} \underline{\underline{e}}_0 = \frac{1}{2} \left((\underline{\underline{F}}_0)^T \cdot \underline{\underline{F}}_0 - \underline{\underline{1}} \right) \\ \underline{\underline{e}}_r = \underline{\underline{e}}_0 + \frac{1}{2} \left((\underline{\underline{F}}_0)^T \cdot \underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{\xi}_s + (\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{\xi}_s)^T \cdot \underline{\underline{F}}_0 \right) + \frac{1}{2} (\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{\xi}_s)^T \cdot \underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{\xi}_s \end{cases}$$

2.2 Equations d'équilibre

On fait une hypothèse de petite perturbation par rapport à la position d'entraînement. Le principe de conservation de la masse, ainsi que le principe des puissances virtuelles sont écrits sur $\mathcal{D}_0(t)$, avec les masses volumiques $\rho_0(t, \underline{x}_0)$ des particules dans leur position d'entraînement. Cette hypothèse est cohérente avec la notion de vibration.

• Conservation de la masse

La masse d'un sous système \mathcal{V} de $\mathcal{D}_0(t)$ vaut :

$$m = \int_{\mathcal{V}} \rho_0 dV_0$$

La dérivée particulaire de ce terme vaut :

$$\dot{m} = \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{d\rho_0}{dt} + \rho_0 \underline{\text{div}} u_0 \right) dV_0 + \int_{\mathcal{V} \cap (\mathcal{A}_0 \cup \mathcal{F}_0)} [\rho_0 \underline{u}_0] \cdot \underline{n} dS_0$$

Cette égalité étant valable pour tout sous système \mathcal{V} , on trouve les deux équations :

$$\begin{cases} \forall \underline{x}_0 \notin \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{F}_0 & \frac{d\rho_0}{dt} + \rho_0 \underline{\text{div}} u_0 = 0 \\ \forall \underline{x}_0 \in \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{F}_0 & [\rho_0 \underline{u}_0] \cdot \underline{n} = 0 \end{cases}$$

Hyp sur ϕ_0 : Cette équation permet de trouver la masse volumique pour le choix de géométrie. On va faire des hypothèses simplificatrices sur la masse volumique et en déduire des conditions sur la définition de la position d'entraînement.

On suppose que le mouvement d'entraînement n'introduit pas de variation de masse volumique (on peut prendre \underline{F}_0 de det 1, pour respecter l'incompressibilité de la gomme). Dans ce cas, il n'y a pas de discontinuité de densité de part et d'autre des lignes de choc :

$$\begin{cases} \forall \underline{x}_0 \notin \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{F}_0 & \underline{\text{div}} u_0 = 0 \\ \forall \underline{x}_0 \in \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{F}_0 & [\underline{u}_0] \cdot \underline{n} = 0 \end{cases}$$

• Principe des Puissances Virtuelles

Le champ $\underline{\xi}(t, \underline{x}_0)$ est continu en espace à tout instant. Ses dérivées sont discontinues de part et d'autre des surfaces \mathcal{A}_0 et \mathcal{F}_0 .

Sur la partie de la frontière en interaction avec un autre solide, les conditions aux limites portant sur le champ de vibration $\underline{\xi}$ sont des conditions d'encastrement. Pour en tenir compte on résout le

problème mécanique dans le sous espace des champs $\underline{\xi}(t, \underline{x}_0)$ vérifiant :

$$\forall \underline{x}_0 \in \partial \mathcal{D}_{0U}(t) \quad \underline{\xi}(t, \underline{x}_0) = 0$$

On utilise des champs de vitesse virtuelle $\underline{\delta \xi}(\underline{x}_0)$ qui vérifient la condition d'encastrement sur $\partial \mathcal{D}_{0U}(t)$ et qui sont continus de part et d'autre de \mathcal{A}_0 et \mathcal{F}_0 .

Puissance virtuelle des efforts extérieurs :

On note $\underline{n}(\underline{x}_0)$ la normale extérieure au domaine $\mathcal{D}_0(t)$. Sur $\mathcal{D}_{0\Sigma_i}$, les particules du pneumatique sont en contact avec l'air qui se trouve à l'intérieur du pneumatique. L'hypothèse de découplage du problème des vibrations et du problème de l'émission sonore nous conduit à modéliser la condition aux limites par un chargement imposé qui fait intervenir la pression de gonflement p_i :

$$\underline{t}(\underline{x}_0) = -p_i \underline{n}$$

De même, sur $\mathcal{D}_{0\Sigma_e}$, les particules du pneumatique sont en contact avec l'air qui se trouve à l'extérieur du pneumatique. La condition aux limites est modélisée par un chargement imposé qui fait intervenir la pression atmosphérique p_a :

$$\underline{t}(\underline{x}_0) = -p_a \underline{n}$$

En conclusion,

$$\mathcal{P}_e(\underline{\delta \xi}) = \int_{\partial \mathcal{D}_{0\Sigma}} \underline{t} \cdot \underline{\delta \xi} dS_0$$

Puissance virtuelle des efforts intérieurs :

On écrit l'expression classique du Principe des Puissances Virtuelles séparément pour les deux sous domaines (+) et (-). Sur ces domaines, le champ de vitesse virtuelle $\underline{\delta \xi}$ est continu. Cette expression fait intervenir un tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\sigma}(t, \underline{x}_0)$, l'accélération totale $\underline{a}_t(t, \underline{x}_0)$.

$$\begin{aligned} - \int_{(+)} \underline{\sigma} : \underline{\text{grad}} \underline{\delta \xi} dV_0 + \int_{\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{A}_0} (\underline{\sigma}^{(+)} \cdot (-\underline{n})) \cdot \underline{\delta \xi} dS_0 + \int_{\partial \mathcal{D}_{0\Sigma} \cap (+)} \underline{t} \cdot \underline{\delta \xi} dS_0 &= \int_{(+)} \rho_0 \underline{a}_t dV_0 \\ - \int_{(-)} \underline{\sigma} : \underline{\text{grad}} \underline{\delta \xi} dV_0 + \int_{\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{A}_0} (\underline{\sigma}^{(-)} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{\delta \xi} dS_0 + \int_{\partial \mathcal{D}_{0\Sigma} \cap (-)} \underline{t} \cdot \underline{\delta \xi} dS_0 &= \int_{(-)} \rho_0 \underline{a}_t dV_0 \end{aligned}$$

A cause du principe d'extensivité, on somme ces deux relations. Le seul terme qui s'annule dans les mouvement rigidifiant est la puissance des efforts intérieurs :

$$\mathcal{P}_i(\underline{\delta \xi}) = - \int_{\mathcal{D}_0} \underline{\sigma} : \underline{\text{grad}} \underline{\delta \xi} dV_0$$

On reconnaît la puissance des efforts extérieurs :

$$\mathcal{P}_e(\underline{\delta \xi}) = \int_{\partial \mathcal{D}_{0\Sigma} \cap (+)} \underline{t} \cdot \underline{\delta \xi} dS_0 + \int_{\partial \mathcal{D}_{0\Sigma} \cap (-)} \underline{t} \cdot \underline{\delta \xi} dS_0$$

Il nous reste donc un terme surfacique à identifier dans la puissance des efforts d'accélération :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_a(\underline{\xi}) &= \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0 \underline{a}_i dV_0 - \int_{\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{A}_0} (\underline{\sigma}^{(+)} \cdot (-\underline{n})) \cdot \underline{\xi} dS_0 - \int_{\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{A}_0} (\underline{\sigma}^{(-)} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{\xi} dS_0 \\ &= \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0 \underline{a}_i dV_0 + \int_{\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{A}_0} ([\underline{\sigma}] \cdot \underline{n}) \cdot \underline{\xi} dS_0 \end{aligned}$$

Puissance virtuelle des efforts d'accélération :

On choisit une fonction $\underline{\Delta\xi}(t = t_0 + h, \underline{x}_0)$ constante par particule ($\frac{d\underline{\Delta\xi}}{dt}(t, \underline{x}_0) = 0$) et telle que $\underline{\Delta\xi}(t_0, \underline{x}_0) = \underline{\xi}(\underline{x}_0)$.

Cette puissance est obtenue par la dérivée totale (c'est à dire à \underline{X} fixé) de la puissance virtuelle de la quantité de mouvement en $t = t_0$ (voir [Salençon92, tome 1, p. 167-168]).

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_a(\underline{\xi}) &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0 (\underline{u} + \underline{u}_s + \underline{u}_0) \cdot \underline{\Delta\xi} dV_0 = \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0 \left(\frac{d\underline{u}}{dt} + \frac{d\underline{u}_s}{dt} + \frac{d\underline{u}_0}{dt} \right) \cdot \underline{\xi} dV_0 \\ &+ \int_{\mathcal{D}_0} \underbrace{\left(\frac{d\rho_0}{dt} + \rho_0 \operatorname{div} \frac{d\underline{x}_0}{dt} \right)}_0 (\underline{u} + \underline{u}_s + \underline{u}_0) \cdot \underline{\xi} dV_0 + \int_{\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{A}_0} \underbrace{\left[\rho_0 (\underline{u} + \underline{u}_s + \underline{u}_0) \cdot \underline{\xi} \frac{d\underline{x}_0}{dt} \right]}_{\rho_0 (\underline{u}_0 \cdot \underline{n}) [(\underline{u} + \underline{u}_s + \underline{u}_0)] \cdot \underline{\xi}} \cdot \underline{n} dS_0 \\ &+ \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0 (\underline{u} + \underline{u}_s + \underline{u}_0) \cdot \underbrace{\frac{d\underline{\Delta\xi}}{dt}}_0 dV_0 \end{aligned}$$

Les simplifications sont dues à la conservation de la masse d'une part et aux conditions portant sur $\underline{\Delta\xi}$ d'autre part.

Par la suite, on note $\underline{a}_0 = \frac{d\underline{u}_0}{dt}$, $\underline{a}_s = \frac{d\underline{u}_s}{dt}$ et $\underline{a} = \frac{d\underline{u}}{dt}$

$$\mathcal{P}_a(\underline{\xi}) = \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0 (\underline{a}_0 + \underline{a}_s + \underline{a}) \cdot \underline{\xi} dV_0 + \int_{\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{A}_0} \rho_0 (\underline{u}_0 \cdot \underline{n}) [(\underline{u} + \underline{u}_s + \underline{u}_0)] \cdot \underline{\xi} dS_0$$

En comparant les deux expressions obtenues pour la puissance des efforts d'accélération, on trouve une condition de saut qui traduit l'équilibre au niveau des ondes de choc $\mathcal{A}_0(t)$ et $\mathcal{F}_0(t)$:

$$[\underline{\sigma}'] \cdot \underline{n} - \rho_0 (\underline{u}_0 \cdot \underline{n}) [\underline{u}] = +\rho_0 (\underline{u}_0 \cdot \underline{n}) [\underline{u}_s] + \rho_0 (\underline{u}_0 \cdot \underline{n}) [\underline{u}_0]$$

• Relation de comportement

On veut traduire les deux idées suivantes :

- on veut tenir compte de l'état contraint de la configuration de référence, principalement dans la carcasse qui est beaucoup plus rigide que la gomme. La contrainte fait intervenir la réponse

différée des matériaux. L'état de contrainte de la configuration de référence est statiquement équilibré.

Lorsqu'on réintroduit le temps, la réponse du matériau est différente à cause de la viscosité. La différence de niveau de contrainte sera négligée. On supposera donc que la viscosité dans la carcasse n'a pas d'influence notable sur la rigidité géométrique, et que l'état de contrainte de référence en roulement reste statiquement équilibré.

- la réponse du matériau à la vibration est supposée linéaire. C'est au moins justifié dans le domaine où les vibrations sont de petite amplitude. On néglige dans un premier temps la dissipation, quitte à corriger le mouvement prédit en seconde approximation comme on peut le faire dans l'analyse modale par exemple. On pense que cette hypothèse est justifiée parce qu'on peut mesurer des fréquences de résonance pour un pneumatique immobile. C'est donc que l'énergie dissipée par une vibration est faible.

Par conséquent, le champ de température est supposé connu ne dépendant que du mouvement de référence.

On fait une hypothèse d'élasticité instantanée.

On note $\rho(t, \underline{X})$ la densité de la particule repérée par \underline{X} au temps t .

On suppose que la gomme et que le matériau composite de la carcasse (un empilement de plis renforcés par des unidirectionnels à fibres longues) ont un comportement qui peut être décrit par une énergie libre massique $\psi(T, \underline{e}, \underline{\alpha})$ qui dépend de la température, du tenseur de déformation de Green-Lagrange et de variables internes $\underline{\alpha}$. La réponse différée est donnée par une valeur $\underline{\alpha}_d(\underline{e})$ de la variable interne.

On rappelle la décomposition des déformations en une déformation de référence et des termes faisant intervenir la vibration :

$$\underline{e}(t, \underline{X}) = \underline{e}_r(t, \underline{X}) + \frac{1}{2} \left((\underline{F}_0 + \underline{\text{Grad}} \underline{\xi}_s)^T \cdot \underline{\text{Grad}} \underline{\xi} + (\underline{\text{Grad}} \underline{\xi})^T \cdot (\underline{F}_0 + \underline{\text{Grad}} \underline{\xi}_s) \right) + \frac{1}{2} (\underline{\text{Grad}} \underline{\xi})^T \cdot \underline{\text{Grad}} \underline{\xi}$$

On note $\underline{\Pi}_r$, la contrainte de Piola due aux déformations entre l'état naturel et l'état de référence :

$$\underline{\Pi}_r = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{e}} \left(T(t, \underline{X}), \underline{e}_r(t, \underline{X}), \underline{\alpha}_d(\underline{e}_r) \right)$$

On définit le tenseur d'ordre 4 $\underline{\underline{A}}$ par la formule :

$$\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial \underline{e}^2} \left(T(t, \underline{X}), \underline{e}_r(t, \underline{X}), \underline{\alpha}_d(\underline{e}_r) \right) = A_{ijkl}(\underline{e}_r) \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l$$

C'est le comportement tangent du matériau autour de la déformation \underline{e}_r , de la température T et de la variable interne $\underline{\alpha}_d$. On suppose que ψ est choisie de telle sorte que $A_{ijkl} = A_{jikl}$. La propriété de Schwartz sur les dérivées secondes implique que $A_{ijkl} = A_{klij}$.

On va développer l'énergie libre ψ autour de la déformation \underline{e}_r , en supposant constantes la température et la variable interne qui donne la réponse différée $\underline{\alpha}_d(\underline{e}_r)$. On s'arrête au deuxième ordre en ξ .

$$\begin{aligned} \psi(T, \underline{e}, \underline{\alpha}_d(\underline{e}_r)) - \psi(T, \underline{e}_r, \underline{\alpha}_d(\underline{e}_r)) &= \frac{\partial \psi}{\partial \underline{e}} : (\underline{e} - \underline{e}_r) + \frac{1}{2} (\underline{e} - \underline{e}_r) : \frac{1}{\rho} \underline{A} : (\underline{e} - \underline{e}_r) + o(\|\xi\|^2) \\ &= \frac{1}{\rho} (\underline{\Pi}_r \cdot (\underline{F}_0 + \underline{\text{Grad}} \xi_s)^T) : \underline{\text{Grad}} \xi + \frac{1}{\rho} \underline{\Pi}_r : \frac{(\underline{\text{Grad}} \xi)^T \cdot \underline{\text{Grad}} \xi}{2} \\ &\quad + \frac{1}{2} ((\underline{F}_0 + \underline{\text{Grad}} \xi_s)^T \cdot \underline{\text{Grad}} \xi) : \frac{1}{\rho} \underline{A}(\underline{e}_r) : ((\underline{F}_0 + \underline{\text{Grad}} \xi_s)^T \cdot \underline{\text{Grad}} \xi) \\ &\quad + o(\|\xi\|^2) \end{aligned}$$

On calcule ensuite le tenseur des contraintes de Cauchy par la formule :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho_0 \underline{F}_0 \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\text{Grad}} \xi}$$

On introduit les notations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\text{Grad}} \xi_s = \underline{\text{grad}} \xi_s \cdot \underline{F}_0 \\ \underline{\text{Grad}} \xi = \underline{\text{grad}} \xi \cdot \underline{F}_0 \\ \underline{\underline{\sigma}}_0 = \frac{\rho_0}{\rho} \underline{F}_0 \cdot \underline{\Pi}_r \cdot (\underline{F}_0)^T \\ \underline{\underline{\sigma}}_r = \underline{\underline{\sigma}}_0 + \frac{\delta_{il} \sigma_{0jk} + \delta_{jl} \sigma_{0ik}}{2} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l : \underline{\text{grad}} \xi_s \end{array} \right.$$

On obtient la relation finale :

$$\underbrace{\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_r}_{\underline{\underline{\sigma}}'} = \underbrace{\left(\frac{\delta_{il} \sigma_{0jk} + \delta_{jl} \sigma_{0ik}}{2} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l + \frac{\rho_0}{\rho} A_{ijkl} \underline{F}_0 \cdot \underline{e}_i \otimes \underline{F}_0 \cdot \underline{e}_j \otimes \underline{F}_0 \cdot \underline{e}_k \otimes \underline{F}_0 \cdot \underline{e}_l \right)}_{\underline{\underline{R}}_0} : \underline{\text{grad}} \xi$$

La contrainte de Cauchy est la somme de la contrainte due à la réponse quasi statique, et d'un terme proportionnel à $\underline{\text{grad}} \xi$.

La rigidité apparente $\underline{\underline{R}}_0$ est la somme de deux termes,

- une rigidité géométrique linéaire en $\underline{\underline{\sigma}}_r$. On simplifiera ce terme en supposant qu'il ne dépend pas du détail de l'indentation, et on gardera une grandeur moyenne qui ne dépend que de \underline{x}_0 . C'est une hypothèse d'homogénéisation qui est valable si les variations dues à l'indentation sont courtes devant les longueurs d'onde étudiées.
- une rigidité tangente. De la même manière, on choisit de négliger pour simplifier la dépendance en fonction du détail de l'indentation, et on garde une dépendance en \underline{x}_0 .

On fait les intégrations par parties qui vont bien dans le Principe des Puissances Virtuelles et on trouve les équations qui portent sur la vibration $\underline{\xi}$. On utilise que le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ est en équilibre statique avec la pression, et qu'il n'a pas de saut.

Conclusion

Sur l'ensemble des positions d'entraînement donné par la composition d'une rotation et d'une fonction d'écrasement :

$$\underline{x}_0(t, \underline{X}) = \underline{\phi}_0(\underline{U}(\Omega t) \cdot \underline{X})$$

On a les équations suivantes :

1. Une condition de saut qui traduit l'équilibre au niveau des ondes de choc $\mathcal{A}_0(t)$ et $\mathcal{F}_0(t)$

$$[\underline{\sigma}'] \cdot \underline{n} - \rho_0(\underline{u}_0 \cdot \underline{n}) [\underline{u}] = +\rho_0(\underline{u}_0 \cdot \underline{n}) [\underline{u}_s] + \rho_0(\underline{u}_0 \cdot \underline{n}) [\underline{u}_0]$$

2. Une équation d'équilibre sur $\mathcal{D}_0(t)$

$$\underline{\text{div}} \underline{\sigma}' - \rho_0 \underline{a} = \rho_0 \underline{a}_s + \rho_0 \underline{a}_0$$

3. Des conditions aux limites en contrainte et en déplacement

$$\begin{cases} \text{sur } \partial \mathcal{D}_{0\Sigma}(t) & \underline{\sigma}' \cdot \underline{n} = 0 \\ \text{sur } \partial \mathcal{D}_{0U}(t) & \underline{\xi} = \underline{u} = 0 \end{cases}$$

4. Une relation de comportement sur $\mathcal{D}_0(t)$ qui fait intervenir l'état de référence :

$$\underline{\sigma}' = \underline{\underline{R}}_{\underline{\underline{0}}}(\underline{x}_0) : \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{\xi}$$

Remarque : le mouvement d'entraînement vérifie l'équation de conservation de la masse

$$\begin{cases} \forall \underline{x}_0 \notin \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{F}_0 & \underline{\text{div}} \underline{u}_0 = 0 \\ \forall \underline{x}_0 \in \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{F}_0 & [\underline{u}_0] \cdot \underline{n} = 0 \end{cases}$$

L'apport de ce chapitre porte sur deux aspects :

1. la description du mouvement qui permet :

- de tenir compte de l'étendue de la zone de contact ;
- de séparer les contributions du défilement du motif de la bande de roulement (décrit par le mouvement d'entraînement $\underline{x}_0(t, \underline{X})$) et de l'indentation ou du glissement sur la chaussée (décrits par le déplacement quasi statique $\underline{\xi}_s(t, \underline{x}_0)$) ;
- de linéariser la vibration $\underline{\xi}$.

2. l'étude de l'équilibre d'une onde de choc au niveau des lignes d'attaque et de fuite de la zone de contact.

Chapitre 3

Résolution théorique

Introduction

Ce qui fait l'intérêt des méthodes d'analyse modale, c'est qu'on arrive à prévoir les fréquences de résonance à partir de l'étude de la propagation sans excitation. Il n'est donc pas nécessaire de connaître la force excitatrice pour prévoir les amplifications en régime stationnaire.

On a vu en partie bibliographique que le pneumatique n'a pas de fréquence de résonance. On va expliquer ce phénomène par les équations du chapitre 2. On s'appliquera à trouver une méthode qui permettra d'analyser qualitativement la réponse dynamique d'un pneumatique à partir de l'étude de la propagation libre, afin de vérifier si la structure du pneumatique amplifie les vibrations sous certaines conditions.

On va traiter successivement deux cas.

Dans le premier, on suppose que la solution des équations est périodique : la période N est la même que celle de la rotation de la roue $N = 2\pi/\Omega$. Physiquement, c'est par exemple le problème du roulement sur une surface lisse en régime permanent : c'est un régime de vibrations forcées.

On va pouvoir rappeler l'analyse classique de la propagation à partir de la matrice de transfert de Floquet. Chaque mode est une fonction de \underline{x}_0 et du temps (sur un intervalle de longueur N), associé à un coefficient d'amplification (ou multiplicateur de Floquet) qui est un complexe de module 1.

Dans le second cas, on étend cette analyse au cas général du roulement d'un pneumatique sur une surface rugueuse. Comme dans [Walker81], on va séparer la solution en une composante de période N et une fluctuation autour de cette composante.

On retrouve le résultat du roulement sur surface lisse. La décomposition modale introduite dans le premier cas permet aussi de calculer la composante périodique et la fluctuation.

3.1 Cas du roulement sur surface lisse

Pour résoudre les problèmes de vibration plus classiques, il existe deux familles de méthodes :

- *les méthodes de superposition modale*; ces méthodes sont développées dans le cas où on peut rechercher la solution par une méthode de séparation des variables $f(t, x) = k(t)h(x)$. Ce n'est pas possible dans notre cas à cause du domaine variable.
- *les méthodes directes d'intégration temporelle*; ces méthodes nécessitent de connaître les conditions initiales en déplacement et en vitesse. Dans notre problème, les conditions initiales ne sont pas connues, on les remplace par une condition de périodicité.

La méthode présentée ici s'inspire de celle utilisée par [Bradley94]. Dans son article, l'auteur étudie l'évolution en fonction de la côte z de la pression acoustique dans une section de guide d'onde. Le guide, d'axe \vec{z} , a une section qui dépend périodiquement de z . L'auteur recherche une solution stationnaire de pulsation ω . La résolution fait intervenir le calcul de la matrice de transfert qui relie la décomposition modale de la pression et de la vitesse à la côte z à cette même décomposition à la côte $z +$ la période. Puis cette matrice est diagonalisée et la solution est décomposée sur les vecteurs propres. Il y a une analogie entre les deux problèmes si on remplace dans le problème du guide d'onde la propagation suivant z par la propagation suivant t dans notre problème.

premier temps : Intégration temporelle des équations du mouvement

On se fixe un instant t_i quelconque (on verra que l'analyse qu'on fait ne dépend pas du choix de t_i). On prend le couple $\underline{\xi}(t_i, \underline{x}_0)$, du champ de déplacement de vibration et $\rho_0(t_i, \underline{x}_0) \underline{u}(t_i, \underline{x}_0)$ du champ d'impulsion relative et on le note sous la forme d'un vecteur d'état à 6 composantes : $\underline{\Upsilon}(t_i, \underline{x}_0)$. Chaque champ de vecteur d'état qui vérifie les conditions aux limites cinématiques ($\underline{\Upsilon}(t_i, \underline{x}_0) = 0$ sur $\partial\mathcal{D}_{oV}(t)$) constitue une donnée initiale de Cauchy pour les équations du mouvement. Par intégration des équations, on peut calculer de façon unique le vecteur d'état à l'instant $t_i + \Delta t$. Comme on a affaire à des équations linéaires, cette solution peut être décomposée en la somme de deux champs, une solution particulière des équations du mouvement et une solution des équations de propagation libre :

$$\underline{\Upsilon}(t_i + \Delta t, \underline{x}_0) = \underline{\Upsilon}_e(t_i + \Delta t, \underline{x}_0) + \underline{\Upsilon}_p(t_i + \Delta t, \underline{x}_0)$$

l'effet de l'excitation :

$$\underline{\Upsilon}_e(t_i + \Delta t, \underline{x}_0) = \left(\underline{\xi}_e(t_i + \Delta t, \underline{x}_0), \rho_0(t_i + \Delta t, \underline{x}_0) \underline{u}_e(t_i + \Delta t, \underline{x}_0) \right)$$

1. cette solution particulière est choisie avec des conditions initiales de Cauchy au temps t_i nulles :

$$\underline{\Upsilon}_e(t_i, \underline{x}_0) = 0$$

2. cette solution vérifie les conditions aux limites en déplacement sur $\partial\mathcal{D}_{oU}(t)$. Ce champ est cinématiquement admissible :

$$\forall \underline{x}_0 \in \partial\mathcal{D}_{oU}(t) \begin{cases} \underline{\xi}_e(t_i + \Delta t, \underline{x}_0) = 0 \\ \rho_0 \underline{u}_e(t_i + \Delta t, \underline{x}_0) = 0 \end{cases}$$

3. cette solution vérifie les équations d'équilibre et les conditions aux limites en contrainte. Ce champ est dynamiquement admissible :

$$\begin{aligned} \underline{\text{div}} \underline{\sigma}'_e - \rho_0 \underline{a}_e &= \rho_0 \underline{a}_s + \rho_0 \underline{a}_0 \\ \left[\underline{\sigma}'_e \right] \cdot \underline{n} - \rho_0 (\underline{u}_0 \cdot \underline{n}) [\underline{u}_e] &= +\rho_0 (\underline{u}_0 \cdot \underline{n}) [\underline{u}_s] + \rho_0 (\underline{u}_0 \cdot \underline{n}) [\underline{u}_0] \\ \forall \underline{x}_0 \in \partial\mathcal{D}_{o\Sigma} \quad \underline{\sigma}'_e \cdot \underline{n} &= 0 \end{aligned}$$

4. cette solution vérifie la loi de comportement :

$$\underline{\sigma}'_e = \underline{\underline{R}}_0 : \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{\xi}_e$$

l'effet de la propagation libre :

$$\underline{\Upsilon}_p(t_i + \Delta t, \underline{x}_0) = \left(\underline{\xi}_p(t_i + \Delta t, \underline{x}_0), \rho_0(t_i + \Delta t, \underline{x}_0) \underline{u}_p(t_i + \Delta t, \underline{x}_0) \right)$$

1. cette solution est une fonction des conditions initiales de Cauchy au temps t_i :

$$\underline{\Upsilon}_p(t_i, \underline{x}_0) = \underline{\Upsilon}(t_i, \underline{x}_0)$$

2. cette solution vérifie les conditions aux limites en déplacement sur $\partial\mathcal{D}_{oU}(t)$. Ce champ est cinématiquement admissible :

$$\forall \underline{x}_0 \in \partial\mathcal{D}_{oU}(t) \begin{cases} \underline{\xi}_p(t_i + \Delta t, \underline{x}_0) = 0 \\ \rho_0 \underline{u}_p(t_i + \Delta t, \underline{x}_0) = 0 \end{cases}$$

3. cette solution vérifie les équations d'équilibre homogènes et les conditions aux limites en contrainte. Ce champ est dynamiquement admissible à zéro :

$$\begin{aligned} \underline{\text{div}} \underline{\sigma}'_p - \rho_0 \underline{a}_p &= 0 \\ \left[\underline{\sigma}'_p \right] \cdot \underline{n} - \rho_0 (\underline{u}_0 \cdot \underline{n}) [\underline{u}_p] &= 0 \\ \forall \underline{x}_0 \in \partial\mathcal{D}_{o\Sigma} \quad \underline{\sigma}'_p \cdot \underline{n} &= 0 \end{aligned}$$

4. cette solution vérifie la loi de comportement :

$$\underline{\sigma}'_p = \underline{\underline{R}}_0 : \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{\xi}_p$$

Ce problème de propagation libre est un problème linéaire, et donc, il existe un opérateur linéaire de propagation, $\mathcal{L}(t_i, t_i + \Delta t)$ qui relie la donnée initiale de Cauchy en t_i au champ solution de la propagation libre au temps $t_i + \Delta t$:

$$\underline{\Upsilon}_p(t_i + \Delta t, \underline{x}_0) = \mathcal{L}(t_i, t_i + \Delta t) \cdot \underline{\Upsilon}(t_i, \underline{x}_0)$$

On souligne ici que ce sont les hypothèses simplificatrices sur la modélisation du contact qui ont permis de découpler la propagation libre des vibrations de la description de l'excitation par la chaussée. Uniquement dans ce cas, il y a un opérateur de propagation libre \mathcal{L} .

second temps : La condition de périodicité

Pour l'instant, nous pouvons exprimer la solution $\underline{\Upsilon}(t_i + N, \underline{x}_0)$, en fonction de $\underline{\Upsilon}(t_i, \underline{x}_0)$, qui est l'inconnue du problème. Cette inconnue est déterminée par la condition de périodicité : $\underline{\Upsilon}(t_i + N, \underline{x}_0) = \underline{\Upsilon}(t_i, \underline{x}_0)$. Pour résoudre cette équation, on utilise la décomposition en solution particulière et solution de la propagation libre obtenue au premier temps :

$$\underline{\Upsilon}(t_i, \underline{x}_0) = \underbrace{\mathcal{L}(t_i, t_i + N) \cdot \underline{\Upsilon}(t_i, \underline{x}_0)}_{\underline{\Upsilon}_p(t_i + N, \underline{x}_0)} + \underline{\Upsilon}_e(t_i + N, \underline{x}_0)$$

Développons maintenant l'analyse modale de la solution évoquée à propos de la propagation dans les guides d'onde. On suppose qu'on a diagonalisé l'opérateur de propagation $\mathcal{L}(t_i, t_i + N)$, c'est à dire qu'on a déterminé d'une part des configurations de position et vitesse initiale $\underline{\Upsilon}_{t_i}^n(\underline{x}_0)$, et d'autre part des nombres (complexes) λ_n associés, tels que :

$$\lambda_n \underline{\Upsilon}_{t_i}^n(\underline{x}_0) = \mathcal{L}(t_i, t_i + N) \cdot \underline{\Upsilon}_{t_i}^n(\underline{x}_0)$$

Un mode propre est une condition initiale particulière complexe. Les valeurs propres de l'opérateur de propagation $\mathcal{L}(t_i, t_i + N)$ s'interprètent de la façon suivante : leur module est l'amplification du mode propre au cours d'une période lors de la propagation libre. En absence de phénomènes dissipatifs, les valeurs propres sont de module 1. Leur argument représente le déphasage d'un mode propre au cours d'une période, il est nul pour la propagation en phase avec la rotation, vaut π pour la propagation en opposition de phase ...

On suppose qu'on a décomposé le vecteur correspondant à l'effet de l'excitation sur la base des modes propres de l'opérateur de propagation libre :

$$\underline{\Upsilon}_e(t_i + N, \underline{x}_0) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n \underline{\Upsilon}_{t_i}^n(\underline{x}_0)$$

On recherche la solution au temps t_i sous la forme :

$$\underline{\Upsilon}(t_i, \underline{x}_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \underline{\Upsilon}_{t_i}^n(\underline{x}_0)$$

Avec cette décomposition, l'équation de périodicité se résout simplement en $a_n = \frac{e_n}{1 - \lambda_n}$, soit :

$$\underline{\Upsilon}(t_i, \underline{x}_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e_n}{1 - \lambda_n} \underline{\Upsilon}_{t_i}^n(\underline{x}_0)$$

3.2 Cas du roulement sur surface rugueuse

Dans le paragraphe précédent, on a supposé que le régime de vibrations lors du roulement stationnaire était périodique. On va étendre la méthode au problème de roulement du pneumatique sur une surface rugueuse.

A cause de l'indentation par la chaussée dont le profil est aléatoire, l'effet de l'excitation $\xi_e(t, \underline{x}_0)$ n'est plus périodique. On a deux solutions pour prendre en compte cet élément :

1. déterminer pour une chaussée donnée l'histoire de la réponse quasi statique puis intégrer les équations de la dynamique.
2. considérer que la route a un profil aléatoire et utiliser une modélisation stochastique. Cette idée a déjà été utilisée dans [Walker81]. Le bruit d'un pneumatique mesuré est analysé par traitement du signal en une composante moyenne et une fluctuation aléatoire. La composante moyenne est une fonction du temps qui a la périodicité de la rotation du pneumatique. La fluctuation est centrée autour de la moyenne.

On va essayer d'explicitier l'idée sous-jacente à cette modélisation stochastique.

On se place dans le cas du roulement à vitesse constante v , et on suppose que le pneumatique roule depuis un temps infini (très long). Au temps t , le pneumatique se trouve à la position $x = vt$ sur la chaussée.

Premièrement, on suppose que le champ de vibration dans le pneumatique à l'instant t est déterminé par :

- d'une part le profil d'une chaussée entre une position très éloignée et la position actuelle x . Cette partie du profil de la chaussée est une *cause aléatoire* ω ;
- d'autre part par l'angle α de la roue.

Deuxièmement, sur les profils de chaussée, on définit des *événements*, comme par exemple il y avait un grain qui dépassait de 1 mm de la surface moyenne de la chaussée à 1 m de la position actuelle de la roue. Sur ces événements, on définit une probabilité.

Troisièmement, si on se donne un angle α pour la rotation actuelle de la roue, et un profil de chaussée fixé ω , la résolution du problème déterministe permet de construire une variable aléatoire $\hat{\underline{\gamma}}(\omega, \alpha, \underline{x}_0)$ qui est le vecteur déplacement et le vecteur quantité de mouvement du point \underline{x}_0 . Si le pneumatique est lisse, cette quantité est indépendante de α . Par contre, le motif de la bande de roulement fait que

cette fonction est périodique, au pire de période 2π , et si le motif est périodique, la période est plus courte. On omet de mentionner la dépendance en ω de la variable aléatoire.

Quatrièmement, on définit des événements sur les valeurs prises par la variable aléatoire $\dot{\underline{\Upsilon}}(\alpha, \underline{x}_0)$ et on recherche les probabilités associées. Par exemple, pour \underline{x}_0 donné, on recherche, en fonction de a et b , la probabilité qu'une composante de $\dot{\underline{\Upsilon}}(\alpha, \underline{x}_0)$ soit comprise entre a et b . Ou alors, on recherche la probabilité qu'une composante de $\dot{\underline{\Upsilon}}(\alpha, \underline{x}_0) \otimes \dot{\underline{\Upsilon}}(\alpha, \underline{x}_0)$ soit comprise entre a et b etc...

Posé comme cela, le problème est encore compliqué. On va se contenter de déterminer certains moments de la loi de probabilité de $\dot{\underline{\Upsilon}}(t_i, \underline{x}_0)$.

Pour reprendre les notations utilisées par [Walker81], on remplace la dépendance en α en une dépendance en t_i , un instant initial, choisi entre 0 et N .

Avec ces notations, on se propose de calculer :

- la moyenne de $\dot{\underline{\Upsilon}}(t_i, \underline{x}_0)$, notée $\langle \dot{\underline{\Upsilon}}(t_i, \underline{x}_0) \rangle$; cette fonction périodique en t_i va nous donner la composante périodique des vibrations. Sa signification physique est donnée par la formule :

$$\langle \dot{\underline{\Upsilon}}(t_i, \underline{x}_0) \rangle = \lim_{Q \rightarrow \infty} \frac{1}{2Q+1} \sum_{q=-Q}^Q \underline{\Upsilon}(t_i + qN, \underline{x}_0)$$

Cette moyenne est un champ défini sur la géométrie du pneumatique à l'instant t_i . On introduira la décomposition de ce champ sur la base des vecteurs propres de l'opérateur de propagation :

$$\langle \dot{\underline{\Upsilon}}(t_i, \underline{x}_0) \rangle = \lim_{Q \rightarrow \infty} \frac{1}{2Q+1} \sum_{q=-Q}^Q \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t_i + qN) \underline{\Upsilon}_{t_i}^n(\underline{x}_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle a_n \rangle \underline{\Upsilon}_{t_i}^n(\underline{x}_0)$$

- la covariance de $\dot{\underline{\Upsilon}}(t_i, \underline{x}_0)$ et $\dot{\underline{\Upsilon}}(t_i, \underline{y}_0)$, notée $C(t_i, \underline{x}_0, \underline{y}_0)$; cette quantité va mesurer l'amplitude des fluctuations autour de la composante périodique des vibrations. Sa signification physique est donnée par la formule :

$$C(t_i, \underline{x}_0, \underline{y}_0) = \lim_{Q \rightarrow \infty} \frac{1}{2Q+1} \sum_{q=-Q}^Q \underline{\Upsilon}(t_i + qN, \underline{x}_0) \otimes \underline{\Upsilon}(t_i + qN, \underline{y}_0) - \langle \dot{\underline{\Upsilon}}(t_i, \underline{x}_0) \rangle \otimes \langle \dot{\underline{\Upsilon}}(t_i, \underline{y}_0) \rangle$$

On va aussi utiliser la décomposition sur la base des vecteurs propres de l'opérateur de propagation :

$$\begin{aligned} C(t_i, \underline{x}_0, \underline{y}_0) &= \lim_{Q \rightarrow \infty} \frac{1}{2Q+1} \sum_{q=-Q}^Q \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t_i + qN) \underline{\Upsilon}_{t_i}^n(\underline{x}_0) \right) \otimes \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m(t_i + qN) \underline{\Upsilon}_{t_i}^m(\underline{y}_0) \right) \\ &\quad - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \langle a_n \rangle \underline{\Upsilon}_{t_i}^n(\underline{x}_0) \right) \otimes \left(\sum_{m=0}^{\infty} \langle a_m \rangle \underline{\Upsilon}_{t_i}^m(\underline{y}_0) \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (\langle a_n a_m \rangle - \langle a_n \rangle \langle a_m \rangle) \underline{\Upsilon}_{t_i}^n(\underline{x}_0) \otimes \underline{\Upsilon}_{t_i}^m(\underline{y}_0) \end{aligned}$$

• **Comportement de la composante moyenne des vibrations**

On a introduit la décomposition suivante du mouvement, valable pour tout entier relatif q :

$$\underline{\Upsilon}(t_i + (q + 1)N, \underline{x}_0) = \mathcal{L}(\underline{\Upsilon}(t_i + qN, \underline{x}_0)) + \underline{\Upsilon}_e(t_i + (q + 1)N, \underline{x}_0) \quad (3.1)$$

On suppose qu'on a décomposé l'effet de l'excitation sur la base des vecteurs propres de l'opérateur de propagation :

$$\underline{\Upsilon}_e(t_i + (q + 1)N, \underline{x}_0) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n(t_i + (q + 1)N) \underline{\Upsilon}_{t_i}^n(\underline{x}_0)$$

On recherche la composante moyenne de la vibration sous la forme :

$$\langle \underline{\Upsilon}^\circ(t_i, \underline{x}_0) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle a_n \rangle \underline{\Upsilon}_{t_i}^n(\underline{x}_0)$$

En faisant la moyenne arithmétique de toutes ces relations, on trouve une relation sur les moyennes des variables aléatoires qui découle de la linéarité de \mathcal{L} :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle a_n \rangle \underline{\Upsilon}_{t_i}^n(\underline{x}_0) = \mathcal{L} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \langle a_n \rangle \underline{\Upsilon}_{t_i}^n(\underline{x}_0) \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \langle e_n \rangle \underline{\Upsilon}_{t_i}^n(\underline{x}_0)$$

Ici, $\langle e_n \rangle$ représente l'effet moyen de l'excitation. C'est la somme de l'effet de l'excitation par les sources de vibration périodiques (comme l'excitation par le défilement du motif de la bande de roulement) et de la moyenne de l'effet de l'excitation par des sources de vibrations non périodiques (comme l'indentation par la chaussée).

Avec les propriétés des vecteurs propres, l'équation se résout simplement en :

$$\boxed{\langle a_n \rangle = \frac{\langle e_n \rangle}{1 - \lambda_n}}$$

On retrouve ici le cas particulier du roulement sur surface lisse. Dans ce cas particulier, la vibration est simplement égale à la composante moyenne.

• **Comportement de la fluctuation des vibrations autour de la composante moyenne**

Dans ce problème, l'inconnue principale est $C(t_i, \underline{x}_0, \underline{y}_0)$ le champ des matrices de covariance de l'état vibratoire.

Les données sont $C_e(t_i, \underline{x}_0, \underline{y}_0)$, la covariance de l'excitation. Ce terme quantifie l'amplitude des fluctuations autour de l'excitation moyenne. Il n'est dû qu'à des sources non périodiques.

Dans le cadre de l'analyse déterministe, on a montré la relation 3.1. On la multiplie tensoriellement à droite par $\underline{\Upsilon}(t_i + (q+1)N, \underline{y}_0)$ et on utilise les décompositions sur la base des vecteurs propres de l'opérateur de propagation libre :

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n(t_i + (q+1)N) a_m(t_i + (q+1)N) \underline{\Upsilon}_{t_i}^n(\underline{x}_0) \otimes \underline{\Upsilon}_{t_i}^m(\underline{y}_0) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_n a_n(t_i + qN) a_m(t_i + (q+1)N) \underline{\Upsilon}_{t_i}^n(\underline{x}_0) \otimes \underline{\Upsilon}_{t_i}^m(\underline{y}_0) \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e_n(t_i + (q+1)N) a_m(t_i + (q+1)N) \underline{\Upsilon}_{t_i}^n(\underline{x}_0) \otimes \underline{\Upsilon}_{t_i}^m(\underline{y}_0)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Cette équation fait intervenir des termes en $\lambda_n a_n(t_i + qN) a_m(t_i + (q+1)N)$ qu'on veut éliminer. Pour cela, on reprend l'équation 3.1 en \underline{y}_0 et on la multiplie tensoriellement à gauche par $\underline{\mathcal{L}}(\underline{\Upsilon}_{\mathbf{p}}(t_i + qN, \underline{x}_0))$:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_n a_n(t_i + qN) a_m(t_i + (q+1)N) \underline{\Upsilon}_{t_i}^n(\underline{x}_0) \otimes \underline{\Upsilon}_{t_i}^m(\underline{y}_0) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_n a_n(t_i + qN) \lambda_m a_m(t_i + qN) \underline{\Upsilon}_{t_i}^n(\underline{x}_0) \otimes \underline{\Upsilon}_{t_i}^m(\underline{y}_0) \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_n a_n(t_i + qN) e_m(t_i + (q+1)N) \underline{\Upsilon}_{t_i}^n(\underline{x}_0) \otimes \underline{\Upsilon}_{t_i}^m(\underline{y}_0)
\end{aligned}$$

L'équation 3.2 fait aussi intervenir un terme en $e_n(t_i + (q+1)N) a_m(t_i + (q+1)N)$ qu'on veut éliminer. On prend l'équation 3.1 en \underline{y}_0 et on la multiplie tensoriellement à gauche par $\underline{\Upsilon}_{\mathbf{e}}(t_i + qN, \underline{x}_0)$:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e_n(t_i + (q+1)N) a_m(t_i + (q+1)N) \underline{\Upsilon}_{t_i}^n(\underline{x}_0) \otimes \underline{\Upsilon}_{t_i}^m(\underline{y}_0) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e_n(t_i + (q+1)N) \lambda_m a_m(t_i + qN) \underline{\Upsilon}_{t_i}^n(\underline{x}_0) \otimes \underline{\Upsilon}_{t_i}^m(\underline{y}_0) \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e_n(t_i + (q+1)N) e_m(t_i + (q+1)N) \underline{\Upsilon}_{t_i}^n(\underline{x}_0) \otimes \underline{\Upsilon}_{t_i}^m(\underline{y}_0)
\end{aligned}$$

En reprenant toutes ces équations, et en faisant la moyenne, on trouve des termes de la forme :

$$\begin{aligned} \lim_{Q \rightarrow \infty} \frac{1}{2Q+1} \sum_{q=-Q}^Q a_n(t_i + (q+1)N) a_m(t_i + (q+1)N) &= \langle a_n a_m \rangle \\ \lim_{Q \rightarrow \infty} \frac{1}{2Q+1} \sum_{q=-Q}^Q a_n(t_i + qN) a_m(t_i + qN) &= \langle a_n a_m \rangle \\ \lim_{Q \rightarrow \infty} \frac{1}{2Q+1} \sum_{q=-Q}^Q e_n(t_i + (q+1)N) e_m(t_i + (q+1)N) &= \langle e_n e_m \rangle \\ \lim_{Q \rightarrow \infty} \frac{1}{2Q+1} \sum_{q=-Q}^Q e_n(t_i + (q+1)N) a_m(t_i + qN) &= \langle e_n \rangle \langle a_m \rangle \\ \lim_{Q \rightarrow \infty} \frac{1}{2Q+1} \sum_{q=-Q}^Q e_m(t_i + (q+1)N) a_n(t_i + qN) &= \langle e_m \rangle \langle a_n \rangle \end{aligned}$$

Les deux dernières relations méritent une explication.

La moyenne du terme $(e_n(t_i + (q+1)N) - \langle e_n \rangle) (a_m(t_i + qN) - \langle a_m \rangle)$ s'interprète comme la corrélation statistique entre l'état vibratoire à un instant donné et l'effet de l'excitation qui va se produire sur la période postérieure. On suppose que ces deux phénomènes sont physiquement indépendants, et on traduit cette hypothèse par une indépendance statistique.

Le terme $(e_n(t_i + (q+1)N) - \langle e_n \rangle) (a_m(t_i + qN) - \langle a_m \rangle)$ est de moyenne nulle.

En projetant ces expressions, on trouve que :

$$\langle a_m a_n \rangle = \lambda_n \lambda_m \langle a_m a_n \rangle + \lambda_n \langle e_m \rangle \langle a_n \rangle + \lambda_m \langle e_n \rangle \langle a_m \rangle + \langle e_m e_n \rangle$$

Pour l'analyse de la composante moyenne des vibrations, on a montré :

$$\begin{aligned} \langle a_m \rangle &= \frac{\langle e_m \rangle}{1 - \lambda_m} \\ \langle a_n \rangle &= \frac{\langle e_n \rangle}{1 - \lambda_n} \end{aligned}$$

Finalement, on trouve que :

$$\boxed{\langle a_m a_n \rangle - \langle a_m \rangle \langle a_n \rangle = \frac{\langle e_m e_n \rangle - \langle e_m \rangle \langle e_n \rangle}{1 - \lambda_m \lambda_n}}$$

3.3 Justification de la décomposition modale

Dans ce paragraphe, on va présenter quelques résultats mathématiques qui découlent de la conservation par l'opérateur de propagation libre \mathcal{L} de la forme symplectique canonique : c'est une relation analogue à celle de Maxwell-Betti

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0(t_i) \underline{u}^{(2)}(t_i) \cdot \underline{\xi}^{(1)}(t_i) dV_0 - \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0(t_i) \underline{u}^{(1)}(t_i) \cdot \underline{\xi}^{(2)}(t_i) dV_0 \\ &= \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0(t_i + N) \underline{u}^{(2)}(t_i + N) \cdot \underline{\xi}^{(1)}(t_i + N) dV_0 - \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0(t_i + N) \underline{u}^{(1)}(t_i + N) \cdot \underline{\xi}^{(2)}(t_i + N) dV_0 \end{aligned}$$

Ces résultats justifient la décomposition spectrale de l'opérateur de propagation libre. On mettra en évidence deux problèmes de diagonalisation qui correspondent à la recherche de la partie réelle ou de la partie imaginaire des coefficients d'amplification. La méthode de décomposition modale qu'on a choisie découle de ces résultats.

3.3.1 Conservation de la forme symplectique canonique

Dans le paragraphe 2, on a dérivé la puissance des efforts d'accélération pour une fonction continue et dérivable par morceaux en espace $\underline{\delta\xi}(\underline{x}_0)$. On restreint cette formule au calcul de la puissance des efforts d'accélération relative. On choisit une fonction $\underline{\Delta\xi}(t = t_0 + h, \underline{x}_0)$ constante par particule ($\frac{d\underline{\Delta\xi}}{dt}(t, \underline{x}_0) = 0$), et telle que $\underline{\Delta\xi}(t = t_0, \underline{x}_0) = \underline{\delta\xi}(\underline{x}_0)$. La puissance des efforts d'accélération relative est obtenue par la dérivée totale (à \underline{X} fixé) de la puissance virtuelle de la quantité de mouvement relative prise en $t = t_0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_a(\underline{\delta\xi}) &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0 \underline{u} \cdot \underline{\Delta\xi} dV_0 = \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0 \frac{d\underline{u}}{dt} \cdot \underline{\delta\xi} dV_0 \\ &+ \int_{\mathcal{D}_0} \underbrace{\left(\frac{d\rho_0}{dt} + \rho_0 \operatorname{div} \underline{u}_0 \right)}_0 \underline{u} \cdot \underline{\delta\xi} dV_0 + \int_{\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{A}_0} \rho_0 (\underline{u}_0 \cdot \underline{n}) [\underline{u}] \cdot \underline{\delta\xi} dS_0 \\ &+ \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0 \underline{u} \cdot \underbrace{\frac{d\underline{\Delta\xi}}{dt}}_0 dV_0 \end{aligned}$$

D'autre part, on étend cette formule au cas d'une fonction $\underline{\delta\xi}(t, \underline{x}_0)$, continue et dérivable par morceaux en temps et en espace :

$$\mathcal{P}_a(\underline{\delta\xi}) = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0 \underline{u} \cdot \underline{\delta\xi} dV_0 - \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0 \underline{u} \cdot \frac{d\underline{\delta\xi}}{dt} dV_0$$

On suppose qu'on se donne deux données initiales de Cauchy au temps t_i , $\underline{\Upsilon}^{(1)}(t_i, \underline{x}_0)$ et $\underline{\Upsilon}^{(2)}(t_i, \underline{x}_0)$. On considère l'effet de la propagation libre sur ces deux données initiales $\underline{\Upsilon}^{(1)}(t_i + \Delta t, \underline{x}_0)$ et $\underline{\Upsilon}^{(2)}(t_i + \Delta t, \underline{x}_0)$.

On prend l'expression du Principe des Puissances Virtuelles par le champ $\underline{\xi}^{(1)}(t_i + \Delta t, \underline{x}_0)$. A tout instant ce champ vérifie :

$$-\int_{\mathcal{D}_0} \underline{\underline{\sigma}}'^{(1)} : \underline{\underline{\text{grad}}} \delta \underline{\xi} dV_0 = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0 \underline{u}^{(1)} \cdot \delta \underline{\xi} dV_0 - \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0 \underline{u}^{(1)} \cdot \frac{d\delta \underline{\xi}}{dt} dV_0$$

On choisit comme champ test le champ $\underline{\xi}^{(2)}(t_i + \Delta t, \underline{x}_0)$. On intègre entre $\Delta t = 0$ et $\Delta t = N$:

$$\begin{aligned} -\int_0^N \int_{\mathcal{D}_0} \underline{\underline{\sigma}}'^{(1)} : \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{\xi}^{(2)} dV_0 d\Delta t &= \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0(t_i + N) \underline{u}^{(1)}(t_i + N) \cdot \underline{\xi}^{(2)}(t_i + N) dV_0 \\ &\quad - \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0(t_i) \underline{u}^{(1)}(t_i) \cdot \underline{\xi}^{(2)}(t_i) dV_0 \\ &\quad - \int_0^N \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0 \underline{u}^{(1)} \cdot \underline{u}^{(2)} dV_0 d\Delta t \end{aligned} \quad (3.3)$$

De même, on permute les rôles des exposants ⁽¹⁾ et ⁽²⁾ :

$$\begin{aligned} -\int_0^N \int_{\mathcal{D}_0} \underline{\underline{\sigma}}'^{(2)} : \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{\xi}^{(1)} dV_0 d\Delta t &= \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0(t_i + N) \underline{u}^{(2)}(t_i + N) \cdot \underline{\xi}^{(1)}(t_i + N) dV_0 \\ &\quad - \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0(t_i) \underline{u}^{(2)}(t_i) \cdot \underline{\xi}^{(1)}(t_i) dV_0 \\ &\quad - \int_0^N \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0 \underline{u}^{(1)} \cdot \underline{u}^{(2)} dV_0 d\Delta t \end{aligned} \quad (3.4)$$

On remarque que les symétries du tenseur de rigidité $\underline{\underline{R}}_{\underline{\underline{0}}}$ sont telles que :

$$\underline{\underline{\sigma}}'^{(2)} : \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{\xi}^{(1)} = \left(\underline{\underline{R}}_{\underline{\underline{0}}} : \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{\xi}^{(2)} \right) : \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{\xi}^{(1)} = \left(\underline{\underline{R}}_{\underline{\underline{0}}} : \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{\xi}^{(1)} \right) : \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{\xi}^{(2)} = \underline{\underline{\sigma}}'^{(1)} : \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{\xi}^{(2)}$$

Avec les équations 3.3 et 3.4, on trouve la relation cherchée :

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{D}_0} \rho_0(t_i) \underline{u}^{(2)}(t_i) \cdot \underline{\xi}^{(1)}(t_i) dV_0 - \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0(t_i) \underline{u}^{(1)}(t_i) \cdot \underline{\xi}^{(2)}(t_i) dV_0 \\ &= \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0(t_i) \underline{u}^{(2)}(t_i + N) \cdot \underline{\xi}^{(1)}(t_i + N) dV_0 - \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0(t_i) \underline{u}^{(1)}(t_i + N) \cdot \underline{\xi}^{(2)}(t_i + N) dV_0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

3.3.2 Formulation discrète

On fait une formulation discrète de cette relation. On suppose que les quantités de mouvement relatives se décomposent sur $\{\underline{U}_i\}_{i \in [1, N]}$ et que les déplacements se décomposent sur $\{\underline{X}_i\}_{i \in [1, N]}$. \underline{U}_i et \underline{X}_i sont par exemples des fonctions d'interpolation, ou bien des valeurs nodales. On appelle $\underline{\mathbb{I}}$ la matrice de dimension $N \times N$:

$$\underline{\mathbb{I}}_{i,j} = \int_{\mathcal{D}_0} \underline{U}_i \cdot \underline{X}_j dV_0$$

On note la matrice antisymétrique \mathbb{J} de dimension $2N \times 2N$ qui est la représentation discrète de la forme symplectique canonique pour notre choix :

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I}^T & 0 \end{pmatrix}$$

On note \mathbb{L} la représentation discrète de l'opérateur de propagation libre \mathcal{L} .

L'équation 3.5 s'écrit de la façon suivante :

$$\boxed{\mathbb{L}^T \cdot \mathbb{J} \cdot \mathbb{L} = \mathbb{J}}$$

Dans le cas discret, la parité de la dimension de l'espace peut être rompue si on prend un espace pour discrétiser la vitesse plus grand que celui où on discrétise le déplacement. On évitera de le faire.

On dit que la matrice \mathbb{L} conserve la forme symplectique \mathbb{J} .

3.3.3 Propriétés des valeurs propres

Ce paragraphe est divisé en trois parties :

- un rappel des propriétés des vecteurs propres V^n et des valeurs propres λ_n de la matrice \mathbb{L} .
- les conséquences de ces propriétés sur les vecteurs U^n et les nombres μ_n tels que :

$$\mathbb{G}_r \cdot U^n = (\mathbb{J} \cdot \mathbb{L} + \mathbb{L}^T \cdot \mathbb{J}) \cdot U^n = \mu_n \mathbb{J} \cdot U^n$$

on montrera en particulier que les nombres μ_n sont réels et que si λ_n est de module 1, alors $\mu_n = 2\Re(\lambda_n)$, et que les vecteurs propres U^n sont soit la partie réelle, soit la partie imaginaire des vecteurs V^n .

- les conséquences des propriétés de \mathbb{L} sur les vecteurs W^n et les nombres ν_n tels que :

$$\mathbb{G}_i \cdot W^n = (\mathbb{J} \cdot \mathbb{L} - \mathbb{L}^T \cdot \mathbb{J}) \cdot W^n = +i\nu_n \mathbb{J} \cdot W^n$$

on montrera aussi que ν_n et W^n sont réels et que si λ_n est de module 1, alors $\nu_n = 2\Im(\lambda_n)$

• Propriétés élémentaires des vecteurs propres et des valeurs propres de l'opérateur de propagation \mathbb{L}

La première propriété traduit la relation de conservation de la forme symplectique sur le système propre de \mathbb{L} .

Propriété 1 si λ_n est une valeur propre de \mathbb{L} et son vecteur propre associé est V^n , alors $\mathbb{J}V^n$ est un vecteur propre de \mathbb{L} associé à la valeur propre $\frac{1}{\lambda_n}$

On part de l'égalité $\mathbb{L}^T \cdot \mathbb{J} = \mathbb{J} \cdot \mathbb{L}^{-1}$ et de la propriété de $\frac{1}{\lambda_n}$ qui est valeur propre de \mathbb{L}^{-1} , on obtient :

$$\mathbb{L}^T \{ \mathbb{J} \cdot V^n \} = \mathbb{J} \{ \mathbb{L}^{-1} V^n \} = \frac{1}{\lambda_n} \{ \mathbb{J} \cdot V^n \}$$

Comme \mathbb{J} est inversible, $\mathbb{J} \cdot V^n \neq 0$ et donc $\frac{1}{\lambda_n}$ est valeur propre de \mathbb{L}^T .

Comme le déterminant d'une matrice est égal à celui de sa transposée, on a :

$$\det \left| \mathbb{L}^T - \frac{1}{\lambda_n} \right| = \det \left| \mathbb{L} - \frac{1}{\lambda_n} \right| = 0$$

Cela prouve que $\frac{1}{\lambda_n}$ est aussi valeur propre de \mathbb{L} .

Propriété 2 deux vecteurs propres de \mathbb{L} , V^i et V^j , associés à deux valeurs propres λ_i et λ_j telles que $\overline{\lambda_i} \lambda_j \neq 1$, ont un produit symplectique nul :

$$\overline{V^i}^T \cdot \mathbb{J} \cdot V^j = 0$$

En utilisant la propriété 1, on a :

$$\mathbb{L}^T \cdot \mathbb{J} \cdot V^j = \frac{1}{\lambda_j} \mathbb{J} \cdot V^j$$

En faisant le produit de l'égalité ci dessus par le transposé de $\overline{V^i}$, on obtient :

$$\overline{V^i}^T \cdot \mathbb{L}^T \cdot \mathbb{J} \cdot V^j = \frac{1}{\lambda_j} \overline{V^i}^T \cdot \mathbb{J} \cdot V^j$$

D'autre part, en utilisant la propriété de vecteur propre de V^i , on a :

$$\mathbb{L} V^i = \lambda_i V^i$$

Comme la matrice \mathbb{L} a des coefficients réels, l'équation conjuguée s'écrit :

$$\mathbb{L} \overline{V^i} = \overline{\lambda_i} \overline{V^i}$$

En transposant l'égalité ci dessus et en faisant le produit par $\mathbb{J} \cdot V_j$, on a aussi :

$$\overline{V^i}^T \cdot \mathbb{L}^T \cdot \mathbb{J} \cdot V_j = \overline{\lambda_i} \overline{V^i}^T \cdot \mathbb{J} \cdot V^j$$

Et donc en regroupant ces deux termes on trouve le résultat annoncé :

$$\left(\overline{\lambda_i} - \frac{1}{\lambda_j} \right) \overline{V^i}^T \cdot \mathbb{J} \cdot V^j = 0$$

Dans la suite, on suppose que toutes les valeurs propres de \mathbb{L} sont différentes et par conséquent \mathbb{L} est diagonalisable.

On admet pour simplifier la présentation que la suite λ_n des valeurs propres de \mathbb{L} se scinde théoriquement en deux, la suite des valeurs propres réelles et la suite des valeurs propres de module 1. On montrera cette propriété par la suite.

Propriété 3 si λ_j est un nombre complexe de module 1, alors son vecteur propre associé V^j est tel que $\overline{V^j}^T \cdot \mathbb{J} \cdot V^j \neq 0$. De même si λ_j est un nombre réel et que V^j et V^{jj} sont les vecteurs propres réels associés à λ_j et $\frac{1}{\lambda_j}$ alors $V^{jjT} \cdot \mathbb{J} \cdot V^j \neq 0$.

◊ Si λ_j est un nombre complexe de module 1, alors $\frac{1}{\lambda_j} = \overline{\lambda_j}$.

On prend un vecteur $x = \sum_{i \neq j} a_i V^i$. On sait que $\overline{x}^T \cdot \mathbb{J} \cdot V^j = 0$ car pour tout i , $\lambda_i \neq \lambda_j$ ($\overline{\lambda_i} \lambda_j \neq 1$).

Si $\overline{V^j}^T \cdot \mathbb{J} \cdot V^j = 0$, on aurait $\overline{x}^T \cdot \mathbb{J} \cdot V^j = 0$ pour tout x de l'espace et par conséquent $\mathbb{J} \cdot V^j = 0$.

Comme on travaille avec un opérateur \mathbb{J} inversible et que $V^j \neq 0$, il est impossible d'avoir $\overline{V^j}^T \cdot \mathbb{J} \cdot V^j = 0$.

◊ Si λ_j est un nombre réel, alors $\lambda_j = \overline{\lambda_j}$. On note $\lambda_k = \frac{1}{\lambda_j}$, c'est aussi une valeur propre de \mathbb{L} .

On prend un vecteur $x = \sum_{i \neq k} a_i V^i$. On sait que $\overline{x}^T \cdot \mathbb{J} \cdot V^j = 0$ car pour tout i , $\lambda_i \neq \lambda_k$ ($\overline{\lambda_i} \lambda_j \neq 1$).

Si $\overline{V^{jj}}^T \cdot \mathbb{J} \cdot V^j = 0$, on aurait $\overline{x}^T \cdot \mathbb{J} \cdot V^j = 0$ pour tout x de l'espace, ce qui est impossible.

On termine la démonstration en remarquant que si λ_j est réel, on peut choisir V^{jj} réel car \mathbb{L} est une matrice à coefficients réels.

Propriété 4 on a la décomposition suivante d'un vecteur x :

$$x = \sum_{j=1}^Q \alpha_j V^j + \sum_{j=1}^Q \beta_j \overline{V^j} + \sum_{j=Q+1}^N \gamma_j V^j + \sum_{j=Q+1}^N \delta_j V^{jj}$$

– si $j \leq Q$, V^j est un vecteur propre de \mathbb{L} à valeur propre λ_j , de module 1 et partie imaginaire positive ;

– si $j > Q$, V^j est un vecteur propre de \mathbb{L} à valeur propre λ_j , réelle de module strictement supérieur à un et V^{jj} est un vecteur propre de \mathbb{L} à valeur propre $\frac{1}{\lambda_j}$.

On multiplie cette égalité par $\overline{V^p}^T \cdot \mathbb{J}$ et on fait les simplifications nécessaires :

$$\overline{V^p}^T \cdot \mathbb{J} \cdot x = \alpha_p \overline{V^p}^T \cdot \mathbb{J} \cdot V^p$$

De même, on trouve la formule de projection suivante :

$$\begin{cases} \alpha_p = \frac{\overline{V^p}^T \cdot \mathbb{J} \cdot \mathbf{x}}{\overline{V^p}^T \cdot \mathbb{J} \cdot V^p} \\ \beta_p = -\frac{V^{pT} \cdot \mathbb{J} \cdot \mathbf{x}}{\overline{V^p}^T \cdot \mathbb{J} \cdot V^p} \\ \gamma_p = \frac{V^{pT} \cdot \mathbb{J} \cdot \mathbf{x}}{V^{pT} \cdot \mathbb{J} \cdot V^p} \\ \delta_p = -\frac{V^{pT} \cdot \mathbb{J} \cdot \mathbf{x}}{V^{pT} \cdot \mathbb{J} \cdot V^p} \end{cases}$$

On choisira de renormer les vecteurs propres complexes par :

$$\begin{cases} \overline{V^p}^T \cdot i\mathbb{J} \cdot V^p = 1 & p \leq Q \\ V^{pT} \cdot \mathbb{J} \cdot V^p = 1 & p > Q \end{cases}$$

C'est toujours possible d'après la propriété 3.

• Etude du problème qui détermine la partie réelle des coefficients d'amplification

Les deux propriétés suivantes concernent la partie réelle des coefficients d'amplification.

Propriété 5 les vecteurs propres V^n de l'opérateur de propagation \mathbb{L} associés à la valeur propre λ_n vérifient aussi :

$$(i\mathbb{J} \cdot \mathbb{L} + i\mathbb{L}^T \cdot \mathbb{J}) V^n = \left(\lambda_n + \frac{1}{\lambda_n} \right) (i\mathbb{J}) V^n$$

V^n étant un vecteur propre de \mathbb{L} , nous avons d'une part $\mathbb{L} \cdot V^n = \lambda_n V^n$.

$\mathbb{J} \cdot V^n$ étant un vecteur propre de \mathbb{L}^T , nous avons d'autre part $\mathbb{L}^T \cdot (\mathbb{J} \cdot V^n) = \frac{1}{\lambda_n} \mathbb{J} \cdot V^n$

En multipliant la première équation par $i\mathbb{J}$ et en ajoutant i fois la seconde équation au résultat, on obtient la relation souhaitée.

Propriété 6 le problème de la recherche de $\left(\lambda_n + \frac{1}{\lambda_n} \right)$ fait partie de la classe des problèmes de codiagonalisation de deux opérateurs hermitiens. Par conséquent, les nombres $\mu_n = \lambda_n + \frac{1}{\lambda_n}$ sont réels.

En effet, on a les relations :

$$\overline{i\mathbb{J}^T} = i\mathbb{J}$$

$$\overline{(i\mathbb{J} \cdot \mathbb{L} + i\mathbb{L}^T \cdot \mathbb{J})^T} = -(i\mathbb{J} \cdot \mathbb{L} + i\mathbb{L}^T \cdot \mathbb{J})^T = (i\mathbb{J} \cdot \mathbb{L} + i\mathbb{L}^T \cdot \mathbb{J})$$

Si μ_n est une valeur propre associée au vecteur propre U^n , alors :

$$\overline{U^n}^T \cdot (i\mathbb{J} \cdot \mathbb{L} + i\mathbb{L}^T \cdot \mathbb{J}) \cdot U^n = \mu_n \overline{U^n}^T \cdot i\mathbb{J} \cdot U^n$$

μ_n est le quotient de deux nombres réels.

Propriété 7 les valeurs propres λ_n sont réelles ou de module 1.

On a $\lambda_n + \frac{1}{\lambda_n} = \mu_n$ qui est un nombre réel, donc :

$$\lambda_n + \frac{1}{\lambda_n} - \lambda_n - \frac{1}{\lambda_n} = (\lambda_n - \overline{\lambda_n}) \left(1 - \frac{1}{|\lambda_n|^2}\right) = 0$$

Cette égalité est vraie si les valeurs propres sont réelles ou de module 1.

Propriété 8 les sous espace propres du problème $(\mathbb{J} \cdot \mathbb{L} + \mathbb{L}^T \cdot \mathbb{J}) U^n = (\lambda_n + \frac{1}{\lambda_n}) \mathbb{J} U^n$ sont stables par \mathbb{L} .

On pose $\mathbb{G}_r = \mathbb{J} \cdot \mathbb{L} + \mathbb{L}^T \cdot \mathbb{J}$

On suppose qu'on a $\mathbb{G}_r \cdot V^n = (\lambda_n + \frac{1}{\lambda_n}) \mathbb{J} \cdot V^n$. Alors il suffit de montrer que $\mathbb{J} \cdot \mathbb{L} \cdot \mathbb{J}^{-1} \cdot \mathbb{G}_r = \mathbb{G}_r \cdot \mathbb{L}$. En effet on a dans ce cas :

$$\mathbb{G}_r \cdot (\mathbb{L} \cdot V^n) = \mathbb{J} \cdot \mathbb{L} \cdot \mathbb{J}^{-1} \cdot \mathbb{G}_r \cdot V^n = (\lambda_n + \frac{1}{\lambda_n}) \mathbb{J} \cdot (\mathbb{L} \cdot V^n)$$

On calcule donc :

$$\mathbb{G}_r \cdot \mathbb{L} = (\mathbb{J} \cdot \mathbb{L} + \mathbb{L}^T \cdot \mathbb{J}) \cdot \mathbb{L} = \mathbb{J} \cdot \mathbb{L} \cdot \mathbb{L} + \mathbb{L}^T \cdot \mathbb{J} \cdot \mathbb{L} = \mathbb{J} \cdot \mathbb{L} \cdot \mathbb{L} + \mathbb{J}$$

Et d'autre part :

$$\mathbb{J} \cdot \mathbb{L} \cdot \mathbb{J}^{-1} \cdot \mathbb{G}_r = \mathbb{J} \cdot \mathbb{L} \cdot (\mathbb{L} + \mathbb{J}^{-1} \cdot \mathbb{L}^T \cdot \mathbb{J}) = \mathbb{J} \cdot \mathbb{L} \cdot \mathbb{L} + \mathbb{J} \cdot (\mathbb{L} \cdot \mathbb{J}^{-1}) \cdot \mathbb{L}^T \cdot \mathbb{J} = \mathbb{J} \cdot \mathbb{L} \cdot \mathbb{L} + \mathbb{J} \cdot (\mathbb{J}^{-1} \cdot \mathbb{L}^{-T}) \cdot \mathbb{L}^T \cdot \mathbb{J}$$

\mathbb{G}_r est diagonalisable. Ses espaces propres sont orthogonaux pour $i\mathbb{J}$. Et l'image par \mathbb{L} d'un élément d'un espace propre de \mathbb{G}_r est dans cet espace.

Propriété 9 les espaces propres associés à une valeur propre de \mathbb{G}_r sont de dimension au moins égale à deux. On peut trouver deux vecteurs propres de \mathbb{G}_r , associés à la même valeur propre, qui vérifient $U^T \mathbb{J} U = 1$.

Soit V un tel vecteur propre commun à \mathbb{L} et \mathbb{G}_r .

Si la valeur propre de \mathbb{L} est complexe, le vecteur propre est complexe. Son conjugué est un autre vecteur propre de \mathbb{G}_r qui a la même valeur propre. On a donc un espace de dimension 2. Dans la base $(V^n, \overline{V^n})$, on a :

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} \lambda_n & 0 \\ 0 & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Si on choisit $U^n = V^n + \overline{V^n}$, $U'^n = iV^n - i\overline{V^n}$, on a dans la base (U^n, U'^n) l'expression suivante pour \mathbb{G}_r :

$$\mathbb{G}_r = \begin{pmatrix} \lambda_n + \overline{\lambda_n} & 0 \\ 0 & \lambda_n + \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

• Etude du problème qui détermine la partie imaginaire des coefficients d'amplification

Les deux propriétés suivantes concernent la partie imaginaire des valeurs propres.

Propriété 10 les vecteurs propres V^n de l'opérateur de propagation \mathbb{L} associés à la valeur propre λ_n vérifient aussi :

$$(\mathbb{J}.\mathbb{L} - \mathbb{L}^T.\mathbb{J}) V^n = -i\left(\lambda_n - \frac{1}{\lambda_n}\right) (i\mathbb{J}) V^n$$

V^n étant un vecteur propre de \mathbb{L} , nous avons d'une part $\mathbb{L}.V^n = \lambda_n V^n$

$\mathbb{J}.V^n$ étant un vecteur propre de \mathbb{L}^T , nous avons d'autre part $\mathbb{L}^T.(\mathbb{J}.V^n) = \frac{1}{\lambda_n} \mathbb{J}.V^n$

En multipliant la première équation par \mathbb{J} et en retranchant la seconde équation au résultat, on obtient la relation souhaitée.

Propriété 11 le problème de la recherche de $-i\left(\lambda_n - \frac{1}{\lambda_n}\right)$ fait partie de la classe des problèmes de codiagonalisation de deux opérateurs hermitiens. Par conséquent, les vecteurs propres forment une base et les nombres $\nu_n = -i\left(\lambda_n - \frac{1}{\lambda_n}\right)$ sont réels.

En effet, on a les relations :

$$\overline{i\mathbb{J}^T} = i\mathbb{J}$$

$$(\mathbb{J}.\mathbb{L} - \mathbb{L}^T.\mathbb{J})^T = (\mathbb{J}.\mathbb{L} - \mathbb{L}^T.\mathbb{J})^T = (\mathbb{J}.\mathbb{L} - \mathbb{L}^T.\mathbb{J})$$

Conclusion

Dans la partie bibliographique, on a constaté que la mesure des fréquences propres ne permet pas de prédire les fréquences dominantes dans le spectre du bruit du pneumatique. On a vu que cela s'explique sur les équations obtenues quand on tient compte d'une hétérogénéité de la bande de roulement et d'une surface de contact étendue. Dans ce cas, les équations sont des équations linéaires à coefficients périodiques en temps, même si on se place dans un référentiel tournant avec la roue.

La résolution qu'on propose repose sur l'analyse de la propagation libre des ondes dans un pneumatique, en absence de phénomènes dissipatifs. C'est une extension de l'analyse modale au cas d'une structure dont la géométrie varie dans le temps.

La résolution complète se fait en deux temps :

- 1. le calcul des solutions particulières des équations du mouvement avec terme source. On ne va pas les calculer, mais on va analyser le terme source.*
- 2. le calcul de la propagation libre, qui permet d'étudier les phénomènes d'amplification par la structure du pneumatique.*

On fait ici l'hypothèse qu'il n'y aurait qu'une façon de définir la propagation libre des vibrations dans un pneumatique pour toutes les configurations de route.

On a vérifié que l'opérateur de propagation linéaire est bien diagonalisable, et on a étudié quelques propriétés qui seront utiles pour le calcul numérique de ces coefficients. On retiendra qu'on peut étudier les coefficients d'amplification à partir du problème de la recherche de la partie réelle de ces coefficients : en codiagonalisant $G_r = J.L + L^T.J$ et J .

Dans ce cas, les vecteurs propres peuvent être choisis réels et les valeurs propres sont bien sûr réelles. On sait que chaque partie réelle a au moins deux vecteurs propres, U_n et U'_n . Ces vecteurs vérifient des relations d'orthogonalité :

$$\begin{aligned}
 U_n^T . J . U_m &= \delta(n, m) \\
 U_n^T . J . U'_m &= -\delta(n, m) \\
 U_n^T . J . U_m &= 0 \\
 U_n^T . J . U'_m &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

Chapitre 4

Analyse dynamique

Introduction

Dans ce chapitre, on va analyser les termes sources obtenus dans les équations d'équilibre en s'appuyant sur des résultats de la partie bibliographique. On va classer les sources d'excitation en fonction de la dépendance de leur amplitude en fonction de la vitesse de roulement. Par des exemples simples, on va aussi illustrer leur interprétation physique (rugosité, défilement des patins)...

On va aussi proposer une nouvelle description des phénomènes de résonance dans les pneumatiques en roulement à partir de la propagation libre. Cette méthode aurait l'avantage pour l'ingénieur de déterminer les pneumatiques intrinsèquement vibrants (et bruyants) quelque soit le type de route sur lequel ils roulent.

Cette démarche justifie a posteriori qu'on ne se soit pas intéressé au calcul explicite de la solution du roulement quasi statique du pneumatique.

On testera enfin notre compréhension sur une expérience complexe.

4.1 Analyse des sources d'excitation

On rappelle que les sources d'excitation sont les termes donnés qui apparaissent dans les équations d'équilibre qui portent sur la réponse dynamique.

On a une condition de saut :

$$[\underline{\sigma}'] \cdot \underline{n} - \rho_0 (\underline{u}_0 \cdot \underline{n}) [\underline{u}] = +\rho_0 (\underline{u}_0 \cdot \underline{n}) [\underline{u}_s] + \rho_0 (\underline{u}_0 \cdot \underline{n}) [\underline{u}_0] \quad (4.1)$$

et une équation d'équilibre :

$$\underline{\text{div}} \underline{\sigma}' - \rho_0 \underline{a} = \rho_0 \underline{a}_s + \rho_0 \underline{a}_0$$

L'excitation par le mouvement d'entraînement au niveau des lignes d'attaque et de fuite :

Dans la condition de saut 4.1 qui traduit l'équilibre au niveau des ondes de choc $\mathcal{A}_0(t)$ et $\mathcal{F}_0(t)$, le second terme $+\rho_0 (\underline{u}_0 \cdot \underline{n}) [\underline{u}_0]$ est un terme dont l'amplitude varie comme le carré de la vitesse de roulement, comme le bruit émis par les pneumatiques.

C'est un terme constant dans le cas du roulement à vitesse constante, mais il s'applique sur une surface qui varie en fonction du temps suivant si elle coupe une rainure ou un patin de gomme. Cette surface correspond à une section de la bande de roulement. C'est une excitation par la variation du flux de masse au travers des lignes d'attaque et de fuite de la zone de contact.

Cela signifie que pour un pneumatique lisse, ce terme est stationnaire : il ne provoque pas de vibration.

Les ingénieurs prédisent qualitativement le spectre du bruit du pneumatique dû à l'excitation par le défilement des patins de gomme à partir de l'analyse d'une section courante de la bande de roulement : cette source pourrait modéliser l'excitation par le motif de bande de roulement.

On présente ici une analyse simplifiée de ce terme au niveau de la ligne de fuite (le problème est symétrique). Les notations sont illustrées dans la figure 4.1.

On suppose que dans la zone de contact, la vitesse d'entraînement \underline{u}_0 est horizontale, et qu'après la ligne de fuite (située à un angle θ'_0 par rapport à la verticale descendante), elle est tangente au cercle de centre l'axe de la roue :

$$\underline{u}_0(\theta'_0)^- = \begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{u}_0(\theta'_0)^+ = \begin{pmatrix} u_0 \cos \theta'_0 \\ -u_0 \sin \theta'_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La conservation du flux de matière permet de calculer la normale à la surface d'onde de choc : $\underline{u}_0 \cdot \underline{n}$ est continue.

$$n_x = n_x \cos \theta'_0 - n_y \sin \theta'_0 \Rightarrow n_x \sin \frac{\theta'_0}{2} = n_y \cos \frac{\theta'_0}{2}$$

$$\underline{n} = \begin{pmatrix} -\cos \frac{\theta'_0}{2} \\ \sin \frac{\theta'_0}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a choisi la normale qui pointe de θ'_0^- vers θ'_0^+ .

On trouve alors le terme source :

$$\rho_0 (\underline{u}_0 \cdot \underline{n}) [\underline{u}_0] = \rho_0 u_0 \cos \frac{\theta'_0}{2} \begin{pmatrix} 2 \sin^2 \frac{\theta'_0}{2} \\ 2 \sin \frac{\theta'_0}{2} \cos \frac{\theta'_0}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \rho_0 u_0 \sin \theta'_0 \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta'_0}{2} \\ \cos \frac{\theta'_0}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lorsqu'on diminue l'angle θ'_0 en augmentant le rayon de la bande de roulement (on suppose que la taille de la zone de contact reste inchangée), l'amplitude de ce terme diminue comme $\sin \theta'_0$. On retrouve un résultat connu sur la dépendance du bruit de roulement en fonction du diamètre de la bande de roulement.

L'excitation par le déplacement quasi statique au niveau des lignes d'attaque et de fuite :

Dans la condition de saut 4.1 qui traduit l'équilibre au niveau des ondes de choc $\mathcal{A}_0(t)$ et $\mathcal{F}_0(t)$, le premier terme $+\rho_0 (\underline{u}_0 \cdot \underline{n}) [\underline{u}_s] = \rho_0 (\underline{u}_0 \cdot \underline{n}) \underline{\text{grad}} \xi_s \cdot [\underline{u}_0]$ varie en amplitude comme le carré de la vitesse du véhicule.

– *Effet d'un gradient de déplacement stationnaire :*

Ce terme vient corriger l'amplitude de l'excitation par le terme précédent. Comme lui, il ne provoque une excitation que si il y a une variation du flux de masse au travers des lignes d'attaque et de fuite : ce terme ne provoque pas de vibration dans le cas d'un pneumatique lisse.

◊ Lorsque dans la réponse statique la gomme est comprimée (par exemple dans une expérience où la déflexion de la roue est constante et la pression de gonflement augmente), cette source de bruit diminue le bruit dû au défilement des patins de gomme. Ce qui est conforme à l'expérience.

En effet, on a un gradient de déplacement statique de la forme :

$$\underline{\text{grad}} \xi_s = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \epsilon_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \epsilon_{yy} \end{pmatrix}$$

ϵ_{yy} est négatif, on a tenu compte d'une incompressibilité de la gomme. Le terme d'excitation s'écrit finalement :

$$\rho_0 (\underline{u}_0 \cdot \underline{n}) \underline{\text{grad}} \xi_s \cdot [\underline{u}_0] = \rho_0 u_0 \sin \theta'_0 \epsilon_{yy} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \sin \frac{\theta'_0}{2} \\ \cos \frac{\theta'_0}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dans l'approximation où l'angle définissant la position de la ligne de fuite est petit, le terme suivant la première direction est négligeable. Le terme suivant la deuxième direction s'oppose bien à l'excitation par le motif de bande de roulement. Ce terme est d'autant plus important que la gomme est souple, ce qui signifierait qu'un pneumatique à gomme souple est moins bruyant qu'un pneumatique à gomme rigide.

◊ Lorsque le couple exercé sur la jante est important, la gomme de la bande de roulement est cisailée. Si le couple est moteur, cette source de bruit augmente le bruit dû au défilement des patins de gomme. C'est un résultat qui a été observé dans [Schultze & all91].

En effet, on a un déplacement $\underline{\xi}_s = \alpha y e_x$ et un gradient de déplacement statique de la forme :

$$\underline{\underline{\text{grad } \xi_s}} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

α est positif dans le cas d'un couple moteur (négatif dans le cas d'un couple frein).

$$\rho_0 (\underline{u}_0 \cdot \underline{n}) \underline{\underline{\text{grad } \xi_s}} \cdot [\underline{u}_0] = \rho_0 u_0 \sin \theta'_0 \alpha \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta'_0}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On retrouve bien un terme qui augmente l'excitation par le motif de bande de roulement.

– *Effet d'un gradient de déplacement instationnaire :*

Lorsqu'un élément de rugosité se trouve au niveau de la ligne d'attaque ou de la ligne de fuite, en régime quasi statique il comprime la gomme, donnant lieu à un gradient de déplacement statique. Ce terme pourrait donc être interprété en régime dynamique comme l'excitation par le choc des éléments de rugosité sur le pneumatique, ou l'effet inverse, leur brutale disparition de la zone de contact. Pour passer du profil de la route à l'excitation du pneumatique, il suffit de connaître l'indentation statique.

L'excitation par les forces de volume :

Dans l'équation d'équilibre sur $\mathcal{D}_0(t)$ le terme d'excitation $\rho_0 (\underline{a}_s + \underline{a}_0)$ modélise l'excitation due à l'évolution du déplacement statique pour une particule.

Si on suppose que l'indentation pour une particule donnée ne change pas tout au long de la zone de contact, ce terme source représente l'excitation par le glissement de la frontière du pneumatique. Et si ce glissement ne dépend que de la position de la particule dans la zone de contact, la vitesse de glissement est stationnaire.

En conclusion, on a fait apparaître trois types de sources :

1. une source d'excitation par le défilement du motif de bande de roulement : elle est localisée au niveau de la ligne de fuite et de la ligne d'attaque de la zone de contact, elle varie comme le carré de la vitesse de roulement.

2. une source d'excitation par la déformation de la gomme : elle est localisée au niveau de la ligne de fuite et de la ligne d'attaque de la zone de contact, elle varie comme le carré de la vitesse de roulement. Elle a deux effets différents : une déformation stationnaire amplifie ou diminue l'excitation par le défilement des patins de gomme, et une déformation instationnaire modélise l'excitation par le mouvement de la frontière du pneumatique au niveau des lignes d'attaque et de fuite.
3. une source d'excitation par le mouvement des particules dans la zone de contact : elle varie comme le carré de la vitesse. Comme on n'a pas observé de source importante des vibrations à ce niveau là, il est probable que cette source soit négligeable.

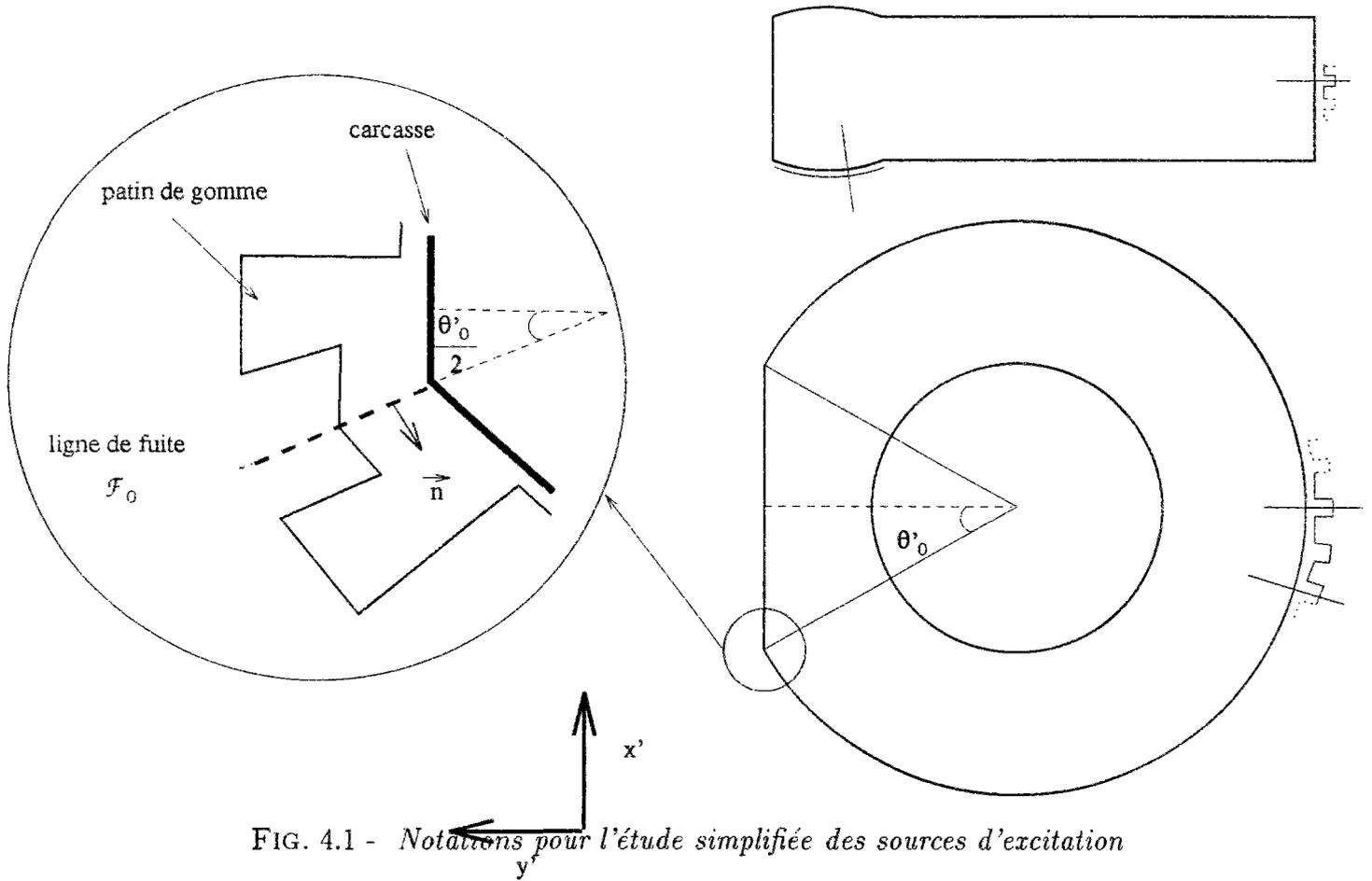


FIG. 4.1 - Notations pour l'étude simplifiée des sources d'excitation

4.2 Analyse des amplifications

Dans ce paragraphe, le comportement dynamique va être étudié à partir des coefficients d'amplification, calculés pour un choix particulier de temps initial t_i , et un choix particulier de période.

On veut aussi s'assurer du caractère intrinsèque des coefficients d'amplification.

Enfin, on va ébaucher une interprétation expérimentale des coefficients d'amplification.

• Utilisation des coefficients d'amplification

Dans le cas du roulement sur chaussée lisse, on avait trouvé la solution de la forme :

$$\underline{Y}(t_i, \underline{x}_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e_n}{1 - \lambda_n} \underline{Y}_{t_i}^n(\underline{x}_0)$$

Les vibrations de ce système s'analysent à partir des vibrations libres. La partie des vibrations libres qui se fait en phase avec l'excitation périodique est la plus amplifiée. Les autres contributions se superposent de manière plus ou moins destructive.

Les modes propres de résonance sont associés à la valeur propre 1. Notre étude qualitative du comportement vibratoire de ce système mécanique pourrait être réduite à rechercher les espaces propres de l'opérateur de propagation $\mathcal{L}(t_i, t_i + N)$ proches de 1.

Cette expression de la solution s'interprète de la façon suivante. On étudie la solution des vibrations avec source d'excitation suivant et on regarde la composante suivant un mode propre :

- ◊ Au bout d'un tour de roue, elle vaut e_n .
- ◊ Au second tour de roue, elle est la somme de la propagation libre de l'excitation due au tour précédent, $\lambda_n e_n$, et d'une nouvelle excitation e_n . Cette somme vaut $(1 + \lambda_n)e_n$.
- ◊ Au bout de trois tours, elle est la somme de la propagation libre de l'excitation due aux deux tours précédents, $\lambda_n (1 + \lambda_n)e_n$, et d'une nouvelle excitation e_n . Cette somme vaut $(1 + \lambda_n + \lambda_n^2)e_n$.
- ◊ Et ainsi de suite jusqu'au $p^{\text{ième}}$ tour, où la solution vaut $(1 + \lambda_n + \lambda_n^2 + \dots + \lambda_n^{p-1})e_n$.

En régime permanent, on a la limite :

$$(1 + \lambda_n + \lambda_n^2 + \dots + \lambda_n^{p-1} + \dots) = \frac{1}{1 - \lambda_n}$$

Dans le cas du roulement sur chaussée rugueuse, on retrouve une conclusion similaire au cas du roulement sur chaussée lisse en ce qui concerne la *composante moyenne* des vibrations, à savoir, une amplification des modes proches de 1 :

$$\langle \dot{\underline{\Upsilon}}(t_i, \underline{x}_0) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle e_n \rangle}{1 - \lambda_n} \underline{\Upsilon}_{t_i}^n(\underline{x}_0)$$

Pour la fluctuation autour de la composante moyenne, on avait établi la formule suivante :

$$C(t_i, \underline{x}_0, \underline{y}_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\langle e_n e_m \rangle - \langle e_n \rangle \langle e_m \rangle}{1 - \lambda_n \lambda_m} \underline{\Upsilon}_{t_i}^n(\underline{x}_0) \otimes \underline{\Upsilon}_{t_i}^m(\underline{y}_0)$$

On trouve que le pneumatique amplifie toutes les composantes de l'effet de l'indentation et du glissement instationnaire. La limitation de cette excitation ne serait due qu'à la dissipation visqueuse, dont on a pas tenu compte dans les équations.

Entre deux tours de roue, une composante n de la fluctuation est tournée dans le plan complexe par multiplication par λ_n de module 1, et elle est incrémentée par une variable aléatoire centrée. Ce processus ressemble à une marche aléatoire. Pour une marche aléatoire, on s'éloigne de l'origine comme \sqrt{n} . Cela pourrait expliquer que la fluctuation des vibrations soit très importante en régime stationnaire.

• Relation avec l'analyse modale classique

On va utiliser l'analyse de l'opérateur de propagation libre dans des cas où la solution est connue. Bien sûr, cette façon de procéder est un peu trop compliquée pour traiter des cas aussi simples, mais ces exemples permettront de se représenter la signification des coefficients d'amplification.

Supposons qu'on ait un système oscillant décrit par l'équation :

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = -ku + F$$

soumis à une force d'excitation F de période N . Regardons comment s'applique l'analyse développée au chapitre 3 et vérifions qu'on retrouve les conclusions auxquelles on s'attend.

Les vibrations libres sont décrites par l'équation :

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = -ku$$

On pose $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. La solution de la propagation libre est de la forme :

$$u(t) = A \cos(\omega t) - \frac{B}{\omega} \sin(\omega t)$$

L'opérateur de propagation libre \mathcal{L} est une matrice 2 x 2 qui relie le déplacement et la vitesse au temps 0 au déplacement et à la vitesse au temps N .

◊ Si au temps 0, le déplacement vaut 1 et la vitesse 0, la solution est $u_1(t) = \cos(\omega t)$ et au temps N , on a $u_1(N) = \cos(\omega N)$ et $\dot{u}_1(N) = -\omega \sin(\omega N)$.

◊ Si au temps 0, le déplacement vaut 0 et la vitesse 1, la solution est $u_2(t) = -\frac{1}{\omega} \sin(\omega t)$ et au temps N , on a $u_2(N) = -\frac{1}{\omega} \sin(\omega N)$ et $\dot{u}_2(N) = \cos(\omega N)$.

On a donc :

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \cos(\omega N) & -\frac{1}{\omega} \sin(\omega N) \\ -\omega \sin(\omega N) & \cos(\omega N) \end{pmatrix}$$

Cette matrice a deux valeurs propres :

$$\det |\mathcal{L} - \lambda| = \lambda^2 - 2 \cos(\omega N) \lambda + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \cos(\omega N) + i \sin(\omega N) = e^{i\omega N} \\ \lambda_2 = \cos(\omega N) - i \sin(\omega N) = e^{-i\omega N} \end{cases}$$

On retrouve deux coefficients d'amplification de module 1, conjugués un par rapport à l'autre. On prédit une amplification si $\omega = \frac{2k\pi}{N}$, c'est à dire si la pulsation propre est un multiple de la pulsation fondamentale de l'excitation.

Pour un système à plusieurs degrés de liberté, on aurait trouvé deux séries de nombres, $e^{i\omega_n N}$ et $e^{-i\omega_n N}$. Si le système est stable, ω_n est une pulsation propre et les nombres $e^{i\omega_n N}$ sont de module 1. Par contre, si le système est instable, il existe des nombres ω_n imaginaires purs et $e^{i\omega_n N}$ est réel.

On propose enfin une explication du rôle de l'amortissement. Si on introduisait après calcul des modes propres et des fréquences propres sans dissipation une dissipation faible, la théorie de l'amortissement modal permettrait de recalculer les fréquences propres. Par conséquent on trouverait les valeurs différentes pour les valeurs propres de l'opérateur de propagation libre sur une période N :

$$e^{i\omega_n(1+i\epsilon_n)N} = e^{-\epsilon_n\omega_n N} e^{i\omega_n N} \text{ et}$$

$$e^{-i\omega_n(1+i\epsilon_n)N} = e^{-\epsilon_n\omega_n N} e^{-i\omega_n N}.$$

Les valeurs propres seraient de module $e^{-\epsilon_n\omega_n N}$, d'autant plus petit que le produit de la fréquence propre par l'amortissement modal ϵ_n est petit.

• **Indépendance des coefficients d'amplification par rapport au temps initial**

On a introduit un temps t_i dont tous les calculs dépendent. On peut montrer que les coefficients d'amplification n'en dépendent pas.

On prend la suite chronologique d'instant $t_i, t'_i, t_i + N, t'_i + N$. Dans le dernier chapitre, on a utilisé la diagonalisation de $\mathcal{L}(t_i, t_i + N)$. Supposons qu'on choisisse maintenant d'utiliser la diagonalisation de $\mathcal{L}(t'_i, t'_i + N)$ l'opérateur de propagation entre les temps t'_i et $t'_i + N$. On va montrer que les vecteurs propres obtenus dans ce cas sont les états du système au temps t'_i correspondant à un vecteur propre de $\mathcal{L}(t_i, t_i + N)$ l'opérateur de propagation entre les temps t_i et $t_i + N$.

On étudie la solution des équations de propagation sans force de volume à partir de l'instant t_i jusqu'à l'instant $t'_i + N$. Pour cela, nous pouvons soit intégrer les équations de t_i à t'_i puis de t'_i à $t'_i + N$, soit les intégrer de t_i à $t_i + N$ puis de $t_i + N$ à $t'_i + N$:

$$\mathcal{L}(t'_i, t'_i + N) \circ \mathcal{L}(t_i, t'_i) = \mathcal{L}(t_i + N, t'_i + N) \circ \mathcal{L}(t_i, t_i + N)$$

En utilisant la condition de périodicité, nous pouvons déduire qu'intégrer la solution de $t_i + N$ à $t'_i + N$ revient à l'intégrer de t_i à t'_i :

$$\mathcal{L}(t_i, t'_i) = \mathcal{L}(t_i + N, t'_i + N)$$

En appliquant cette relation à un vecteur propre de $\mathcal{L}(t_i, t_i + N)$, nous obtenons:

$$\mathcal{L}(t'_i, t'_i + N) \left\{ \mathcal{L}(t_i, t'_i) \cdot \underline{\Upsilon}_{t_i}^n(\underline{x}_0) \right\} = \lambda_n \left\{ \mathcal{L}(t_i, t'_i) \cdot \underline{\Upsilon}_{t_i}^n(\underline{x}_0) \right\}$$

Aussi, avec un raisonnement similaire on peut montrer qu'un vecteur propre de $\mathcal{L}(t'_i, t'_i + N)$ se propage en $t_i + N$ (qui est équivalent à t_i) en un vecteur propre de $\mathcal{L}(t_i, t_i + N)$ associé à la même valeur propre.

• **Dépendance des coefficients d'amplification par rapport à la longueur de la période**

Dans cette analyse, nous avons écrit la condition de périodicité sur la plus petite période. Nous en avons déduit des modes résonants. Que se passe-t-il quand on choisit une période plus grande, double par exemple?

l'effet de l'excitation :

La solution particulière des équations du mouvement avec une donnée initiale de Cauchy nulle à t_i se déduit de la façon suivante.

A $t_i + N$, la solution est celle déjà calculée: $\underline{\Upsilon}(t_i + N, \underline{x}_0)$.

Pour connaître la solution au temps $t_i + 2N$, on applique la même analyse que pour un couple déplacement-vitesse normal entre les instants t_i et $t_i + N$: on doit sommer l'effet de la propagation libre sur le terme $\underline{\Upsilon}(t_i + N, \underline{x}_0)$ et ajouter l'effet de l'excitation entre $t_i + N$ et $t_i + 2N$ qui est le même que l'effet de l'excitation entre t_i et $t_i + N$:

$$\begin{aligned}\underline{\Upsilon}_e(t_i + 2N, \underline{x}_0) &= \underline{\Upsilon}_e(t_i + N, \underline{x}_0) + \mathcal{L}(t_i, t_i + N) \cdot \underline{\Upsilon}_e(t_i + N, \underline{x}_0) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \lambda_n) e_n \underline{\Upsilon}_{t_i}^n(\underline{x}_0)\end{aligned}$$

l'effet de la propagation :

A cause de la périodicité, le nouvel opérateur de propagation est le carré de l'ancien :

$$\mathcal{L}(t_i, t_i + 2N) = \mathcal{L}(t_i + N, t_i + 2N) \circ \mathcal{L}(t_i, t_i + N) = \mathcal{L}(t_i, t_i + N) \circ \mathcal{L}(t_i, t_i + N)$$

Les vecteurs propres sont donc les $\underline{\Upsilon}_{t_i}^n(\underline{x}_0)$ et les valeurs propres sont λ_n^2 .

La nouvelle décomposition modale de la solution $\underline{\Upsilon}(t_i, \underline{x}_0)$ développée en raisonnant sur une période double s'écrit alors :

$$a_n = (1 + \lambda_n) e_n + \lambda_n^2 a_n$$

On pourrait penser qu'on a introduit des nouveaux modes résonants dont la valeur propre est -1. Cependant, pour ces modes, le terme correspondant à l'effet de l'excitation est aussi annulé : $(1 + \lambda_n) e_n = 0$

On a juste introduit une indétermination.

Le raisonnement aurait pu être mené avec une autre multiplicité. On aurait trouvé :

$$a_n = \frac{(1 + \lambda_n + \lambda_n^2 + \dots + \lambda_n^p) e_n}{(1 - \lambda_n)(1 + \lambda_n + \lambda_n^2 + \dots + \lambda_n^p)}$$

qui aurait introduit une indétermination pour tous les modes propres dont la valeur propre est une racine $p + 1$ ème de l'unité.

En conclusion, il apparaît préférable de faire l'analyse sur la période fondamentale, pour ne pas introduire des indéterminations dans la résolution.

• **Éléments d'une procédure d'identification expérimentale**

On considère l'expérience suivante : on fait rouler un pneumatique sur un cylindre lisse (métallique) à vitesse constante. On relève N , la période de rotation de la roue en régime stationnaire.

1. Au temps t_i , on mesure la position ou la vitesse d'un point $P(\underline{x}_0)$ du pneumatique :

$$\underline{\Upsilon}_0 = \underline{\Upsilon}(t_i, \underline{x}_0)$$

C'est la vibration stationnaire.

- Entre les instants t_i et $t_i + N$, on crée une perturbation (par exemple un choc sur le pneumatique). A partir de ce moment, le déplacement des particules du pneumatique est la superposition de la vibration stationnaire et de la vibration due à la perturbation : à l'instant $t_i + N$, on mesure à nouveau la position et la vitesse du point P et on la compare à la vibration stationnaire :

$$\underline{\Upsilon}(t_i + N, \underline{x}_0) - \underline{\Upsilon}_0 = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \underline{\Upsilon}_{t_i}^n(\underline{X}_0)$$

Le second membre de l'égalité représente l'effet de la perturbation au temps $t_i + N$ et au point P . Cette perturbation est écrite ici avec la décomposition modale, mais cette décomposition n'est pas connue.

On peut vérifier à cette étape la validité de la linéarité de la perturbation.

- Entre les instants $t_i + N$ et $t_i + 2N$, la perturbation se propage en suivant les équations du mouvement sans excitation. Au temps $t_i + 2N$, on mesure de nouveau la vitesse ou la position du point P , et on a la relation théorique :

$$\underline{\Upsilon}(t_i + 2N, \underline{x}_0) - \underline{\Upsilon}_0 = \mathcal{L}(t_i, t_i + N) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} d_n \underline{\Upsilon}_{t_i}^n(\underline{X}_0) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \lambda_n \underline{\Upsilon}_{t_i}^n(\underline{X}_0)$$

- Et ainsi de suite, on mesure au temps $t_i + qN$ la vitesse ou la position du point P :

$$\underline{\Upsilon}(t_i + qN, \underline{x}_0) - \underline{\Upsilon}_0 = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (\lambda_n)^{q-1} \underline{\Upsilon}_{t_i}^n(\underline{X}_0)$$

- Avec un analyseur de signal, on calcule à chaque acquisition, et pour des valeurs de φ dans l'intervalle $[0, 2\pi]$, le nombre complexe suivant :

$$\begin{aligned} & (\underline{\Upsilon}(t_i + qN, \underline{x}_0) - \underline{\Upsilon}_0) \exp(i\varphi)^{q-1} = \\ & \sum_{n=0}^{\infty} [\lambda_n \exp(i\varphi)]^{q-1} d_n \underline{\Upsilon}_{t_i}^n(\underline{x}_0) \end{aligned}$$

Si on somme ces nombres pour $q = 0$ jusqu'à $q = Q$ très grand, on tend vers la limite :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{1 - \lambda_n \exp(i\varphi)} \underline{\Upsilon}_{t_i}^n(\underline{x}_0)$$

- Pour N donné, λ_n a un module proche de 1 ($1 - \epsilon_n$) et un argument φ_n . La somme précédente tend vers un nombre très grand (de l'ordre de $\frac{1}{\epsilon_n}$) pour la valeur $\varphi = -\varphi_n$. On mesurerait donc φ_n par ce moyen.
- Avec une mesure de largeur de bande, on peut mesurer $|\lambda_n| = 1 - \epsilon_n$, le module du coefficient d'amplification.

4.3 Interprétation d'une expérience complexe

Dans ce paragraphe, on va modéliser une expérience citée dans [Walker & Cortès88]. Dans cet article, les auteurs étudient le bruit émis par un pneumatique en roulement en fonction du poids appliqué sur la roue (ou de façon équivalente la longueur de la zone de contact).

Dans l'expérience suivante (figure 4.2), un pneumatique ayant deux rainures longitudinales et 64 rainures transversales de 10 mm (64 blocs de gomme de 18,5 mm de long) roule sur un cylindre lisse, à une vitesse de 30 km/h. Le bruit est mesuré par un microphone situé sur le côté de la roue à 0,8 m, filtré à l'harmonique principale et reporté en dBA. La mesure du bruit ne mesure pas l'énergie émise, et il se pourrait que suivant la directivité de l'émission on mesure le bruit en un points ou les contributions des différentes réflexions s'annulent ou se superposent. On suppose néanmoins que ce n'est pas le cas, et que les auteurs nous fournissent un élément significatif du bruit émis dans tout l'espace.

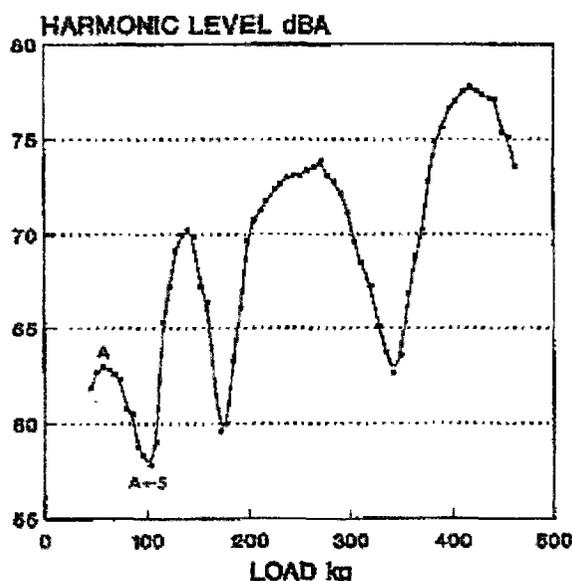


FIG. 4.2 - Effet du poids sur le bruit émis par un pneumatique à sculpture périodique

Le résultat montre une augmentation générale du bruit émis sauf pour certaines longueurs. Les auteurs expliquent ce phénomène avec la théorie "air pumping". Pour certaines longueurs, quand une rainure entre dans la zone de contact et expulse de l'air, une autre en sort et aspire de l'air. Les deux sources ponctuelles équivalentes ont une amplitude proportionnelle à la dérivée seconde du volume d'air échangé. Suivant si ces amplitudes sont en phase ou en opposition de phase, le bruit émis diminue ou augmente.

On propose une autre explication. Regardons parmi les phénomènes qu'on a mis en évidence ceux qui

peuvent intervenir dans cette expérience :

- comme on étudie un pneumatique à rainures, il y a une excitation par le mouvement d'entraînement. L'amplitude de cette excitation varie avec la taille de la zone de contact ;
- comme le roulement se fait sans indentation, il ne peut y avoir qu'une excitation par le déplacement quasi statique stationnaire ;
- le bruit mesuré est périodique, il est donc sensible aux coefficients d'amplification. La modification de la taille de la zone de contact, et donc de celle de la partie libre de la bande de roulement, peut avoir une influence sur les coefficients d'amplification ;
- l'excitation est la somme algébrique des excitations au niveau de la ligne d'attaque et de la ligne de fuite. Elles peuvent se renforcer ou s'annuler.

Avec ces éléments, l'explication de cette expérience peut se faire en deux phénomènes.

Premièrement, l'augmentation générale de l'amplitude de bruit émis s'expliquerait par une augmentation avec le chargement de l'angle entre la partie du pneumatique en contact avec la chaussée et celle qui ne l'est pas. On a expliqué cette dépendance de l'amplitude de l'excitation par le motif de la bande de roulement dans le premier paragraphe de ce chapitre (dépendance en $\sin \theta'_0$ de l'amplitude de l'excitation par le mouvement d'entraînement).

Deuxièmement, les phénomènes d'interférences destructives qui s'observent pour certaines valeurs de la charge pourraient s'expliquer à partir des coefficients d'amplification. Quand le poids appliqué sur la roue augmente, ceux-ci varient et, dans certains cas, les coefficients d'amplification des modes qui rayonnent le plus d'énergie sont loin de 1. Ces modes rayonnants seraient donc peu amplifiés.

On pourrait aussi expliquer les phénomènes d'interférences à partir de la superposition des deux sources d'excitation au niveau de la ligne d'attaque et de la ligne de fuite. Quand la taille de la zone de contact varie, les contributions des lignes d'attaque et de fuite sont constructives ou destructives, suivant le déphasage entre ces deux sources.

Par la suite, on se propose d'étudier les coefficients d'amplification en fonction de la géométrie pour confirmer une de ces deux analyses des diminutions du bruit émis par le pneumatique.

Conclusion

En s'aidant des équations développées au chapitre 2, et de la méthode de résolution développée au chapitre 3, on a pu proposer d'une part une expression pour les sources d'excitation des vibrations, et d'autre part une analyse des amplifications des vibrations par la structure du pneumatique. Ces amplifications sont prévisibles à partir des propriétés de propagation libre, comme dans le cas de l'analyse modale classique. Cette constatation nous a permis de proposer une identification expérimentale des coefficients d'amplification.

En ce qui concerne l'analyse des sources d'excitation, on a proposé une expression pour l'excitation au niveau de la ligne d'attaque et de la ligne de fuite de la zone de contact qui semble cohérente avec les expériences. Elle est due au caractère presque anguleux de la bande de roulement à cet endroit. Pour diminuer le bruit émis par les vibrations des pneumatiques, l'ingénieur peut diminuer l'amplitude des sources d'excitation. Cependant, les effets sur l'excitation que nous avons sommairement étudiés sont déjà connus : une gomme de la bande de roulement plus tendre, un aplatissement de l'angle au niveau des bords de la zone de contact en augmentant le rayon de la bande de roulement par exemple.

En ce qui concerne l'analyse des amplifications, c'est un outil nouveau pour l'ingénieur. D'après nos calculs, il semblerait que le bruit par indentation ou par glissement instationnaire sur la chaussée soit toujours amplifié. Il n'y a pas d'effet de structure notable, si ce n'est par amortissement. Par contre, pour la partie périodique du mouvement (principalement le bruit dû au défilement du motif de la bande de roulement), il semblerait qu'il y ait un effet de structure. C'est ce qu'on se propose de vérifier numériquement : nous allons développer sur un modèle de pneumatique simplifié et calculer des coefficients d'amplification.

Chapitre 5

Un modèle simplifié de pneumatique

Introduction

Les équations qui ont été développées dans le chapitre 2 sont difficiles à mettre en œuvre. La difficulté tient au fait qu'on décrit le problème sur une géométrie variable dans le temps (la position des rainures tourne avec la bande de roulement).

Le problème resterait le même si on travaillait dans un repère tournant avec la roue : on aurait une géométrie variable dans le temps à cause de l'écrasement au niveau de la zone de contact et à cause du déplacement des zones où le déplacement est imposé.

Une façon de s'en sortir pourrait consister à prolonger le domaine du pneumatique à l'intérieur des rainures par un milieu "fantôme", dont les caractéristiques mécaniques (rigidité et masse volumique) seraient petites par rapport à celles de la gomme de la bande de roulement.

Cette technique a été utilisée dans [Beslin & Guyader96] pour déterminer les modes de vibration d'une plaque trouée.

On pense que cette méthode serait utilisable dans notre cas. Si on a choisi de ne pas l'utiliser, c'est pour une question de temps de calcul. On préfère redévelopper un modèle simplifié, avec peu de degrés de liberté. Il peut fournir une première indication sur la faisabilité de l'analyse numérique de la propagation libre : on s'en servira pour la prévision qualitative des coefficients d'amplification.

Dans ce chapitre, on particularise la théorie générale des chapitres 2 et 3 sur un modèle simplifié.

On fait des hypothèses semblables à celles du "circular ring model". On suppose que le problème est bidimensionnel et que la bande de roulement est curviligne. On supprimera juste les simplifications qui font que le "circular ring model" prédit des fréquences de résonance.

On retiendra des paragraphes précédents qu'on doit :

- 1. se choisir une géométrie: elle doit faire apparaître un point anguleux, et elle doit vérifier la loi de conservation de la masse. Elle ne doit pas être invariante par rotation pour ne pas exhiber de fréquences propres.*
- 2. approcher la configuration de référence du roulement quasi statique afin de déduire la rigidité géométrique de la structure et la rigidité tangente des matériaux.*
- 3. se choisir une cinématique simplifiée de vibration et dériver les équations d'équilibre simplifiées. On doit tenir compte du mouvement d'entraînement et de l'hétérogénéité de la bande de roulement pour ne pas exhiber de fréquences propres.*

Ce chapitre commence par un paragraphe sur la mécanique du pneumatique. Cette partie nous permettra de justifier le choix de la géométrie dans le paragraphe suivant.

On propose ensuite un modèle de vibration de bande de roulement de type poutre (bidimensionnel curviligne). Il sera encore simplifié en supposant que la bande de roulement est inextensible.

On trouvera une version discrète des équations en annexe B.

5.1 Mécanique simplifiée du pneumatique

On veut répondre à la question suivante, comment faire un bon choix de géométrie de pneumatique? On va justifier ce choix par un modèle mécanique assez sommaire.

- On commence par l'étude de la bande de roulement quand le pneumatique est au repos sur la chaussée. La question abordée est de savoir si la tension dans la bande de roulement reprend les efforts de pression, ou si ces efforts sont repris par les flancs.
- L'action des flancs sur la bande de roulement fait ensuite l'objet d'un paragraphe particulier. L'étude est menée en négligeant les efforts d'inertie et on supposera que les conclusions restent valables lorsque le pneumatique est en roulement stationnaire.
- Ces deux études vont nous permettre d'aborder l'étude d'un pneumatique en roulement stationnaire. On choisira une description de la géométrie de la bande de roulement, qui dépendra de quelques paramètres. Puis, avec une hypothèse de mouvement uniforme, on va en déduire des conditions d'équilibre. Ces conditions nous permettent d'une part de vérifier la cohérence de la proposition faite pour ce choix de la géométrie, et d'autre part de déterminer les paramètres manquants en fonction du poids appliqué sur la roue.

5.1.1 Etude d'un pneumatique au repos

Lorsqu'un pneumatique est au repos, en appui sur la chaussée, on a l'impression qu'il y a un angle entre la partie de la bande de roulement en contact avec la chaussée, et la partie de la bande de roulement qui ne l'est pas. On a aussi l'impression que la partie de la bande de roulement qui n'est pas en contact avec la chaussée a une forme circulaire. Partant de ces deux constatations, on va montrer que la tension dans la bande de roulement est négligeable.

• Equilibre du point anguleux

Le point anguleux peut être équilibré par trois forces: une réaction concentrée de la chaussée en ce point si elle existe, la tension dans la bande de roulement du côté en contact avec la chaussée et la tension dans la bande de roulement du côté opposé.

La figure 5.1 montre la répartition de la pression dans la zone de contact pour un pneumatique de camion. La pression a l'air d'être répartie uniformément dans l'empreinte. Il n'y aurait donc pas de réaction concentrée de la chaussée.

Le point anguleux n'est donc équilibré que par la tension de la bande de roulement de part et d'autre

du point anguleux. Ces deux tensions devraient donc être opposées, tout en n'étant pas alignées. La tension dans la bande de roulement est donc négligeable à cet endroit.

Dans le domaine où la bande de roulement n'est pas en contact avec la chaussée, les flancs sont tendus, et tirent dans la direction du centre de la roue avec une densité linéique de force $\frac{F(\theta)}{R_b}$ indéterminée. En se rapportant à la figure 5.7, on détermine les équations d'équilibre dans le repère (\vec{T}, \vec{N}) :

$$\begin{aligned} \tau_0(\theta + d\theta) \vec{T}(\theta + d\theta) - \tau_0(\theta) \vec{T}(\theta) - R_b e p_i d\theta \vec{N}(\theta) + 2F(\theta) d\theta \vec{N}(\theta) &= 0. \\ \Rightarrow \frac{d\tau_0}{d\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - (R_b e p_i) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2F \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

La seconde équation d'équilibre indique que ce sont les flancs qui reprennent les efforts de pression. C'est en fait la seule hypothèse de ce modèle. La première équation d'équilibre est une conséquence et indique que la tension est constante (et donc partout nulle).

Dans la suite, on se place dans cette hypothèse caricaturale de flancs qui reprennent les efforts de pression.

5.1.2 Comportement des flancs

On étudie un secteur angulaire de flanc de petite ouverture $\delta\theta$, situé autour d'un angle θ par rapport à la verticale. On modélise ce secteur de flanc comme une corde inextensible. Il faut garder à l'esprit que la section de cette corde est proportionnelle à la distance curviligne au centre de la roue. Une représentation est proposée dans la figure 5.2.

L'objet de ce paragraphe est d'étudier la relation entre la flexion d'un secteur de flanc et la force $-F\delta\theta$ exercée sur la bande de roulement au point θ .

rayon de la jante	R_j
pression de gonflement	p_i
longueur totale du flanc	L
longueur de flanc entre la jante et le point courant	l
distance du point courant à l'axe de la roue	$r(l)$
déplacement orthoradial du point courant	$z(l)$
tension interne	$\tau(l)\delta\theta$
force exercée sur la bande de roulement dans la direction radiale	$F\delta\theta$
vecteur tangent	\vec{T}
angle entre le vecteur tangent et l'axe radial	$\beta(l)$

En effet, la force exercée par la bande de roulement peut être déterminée par l'équilibre du secteur de flanc. Si on néglige l'effet des efforts d'inertie face aux autres efforts, et le cisaillement entre les secteurs de flanc, l'équilibre relie les efforts extérieurs (pression de gonflement, action de la jante,

action de la bande de roulement) aux efforts internes. En négligeant les efforts de flexion, les efforts internes sont une tension $\tau \delta\theta$ alignée avec le vecteur tangent \vec{T} . On a donc par l'équilibre une relation entre la forme (le vecteur \vec{T}) et la force F .

• Les équations d'équilibre

La tension est alignée avec le vecteur tangent $\vec{T} = \left(\frac{dr}{dl}, \frac{dz}{dl}\right)$. L'effort extérieur est la pression, portée par le vecteur normal. Les équations d'équilibre sont :

$$\begin{aligned} \tau(l+dl)\delta\theta\vec{T}(l+dl) - \tau(l)\delta\theta\vec{T}(l) + p_i(l+R_r)\delta\theta dl\vec{N}(l) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d\tau}{dl}\vec{T} + \tau\frac{d\beta}{dl}\vec{N} + p_i(l+R_r)\vec{N} &= 0 \end{aligned}$$

L'équilibre suivant \vec{T} indique que la tension τ est constante. On a aussi une condition en force au point de rattachement avec la bande de roulement qui permet de déterminer cette tension :

$$\tau \cos \beta(L) = F$$

La seconde équation permet de déterminer la forme du flanc :

$$\frac{d\beta}{dl} = -\frac{p_i(l+R_r)}{\tau}$$

Finalement on connaît l'angle entre la tangente et l'axe radial partout si on le connaît au niveau du point d'attache avec la bande de roulement :

$$\beta(l) = -\frac{p_i \cos \beta(L)}{2F} ((R_j + l)^2 - (R_j + L)^2) + \beta(L)$$

• La condition d'inextensibilité

Comme l est une longueur curviligne, la condition d'inextensibilité implique que le vecteur \vec{T} est de norme 1. Comme $\beta(l)$ est l'angle entre le vecteur tangent et l'axe radial, la condition d'inextensibilité s'écrit aussi :

$$\begin{cases} \frac{dr}{dl} = \cos \beta \\ \frac{dz}{dl} = \sin \beta \end{cases}$$

• Les conditions aux limites

La jante et la bande de roulement sont indéformables et donc $z(0) = z(L)$. L'équation $\frac{dz}{dl} = \sin \beta$ s'intègre en :

$$z(L) - z(0) = \int_0^L \sin \left(-\frac{p_i \cos \beta(L)}{2F} ((R_j + l)^2 - (R_j + L)^2) + \beta(L) \right) dl = 0$$

Cette équation permet de définir $\beta(L)$ en fonction de F : $\beta(L) = g(F)$.

• Résolution des équations

En intégrant ensuite l'équation $\frac{dr}{dl} = \cos \beta$, on obtient un réseau de courbe qui pour une valeur de F et une valeur de $\beta(L)$ donnent une valeur de la longueur apparente du flanc (surface $r(L) = h(F, \beta(L))$). On obtient ensuite le comportement en faisant l'intersection de ce réseau de courbe avec la courbe $\beta(L) = g(F)$ obtenue par les conditions aux limites.

La figure 5.3, est une application avec les paramètres suivants :

$$\begin{array}{l} p_i \quad 1,8 \text{ kg/cm}^2 \approx 180 \text{ kPa} \\ L \quad 8 \text{ cm} \end{array}$$

On a tracé dans un graphe où F est en abscisse (en N), et $\beta(L)$ est en ordonnée (en rad), les isovalues de la fonction $h(F, \beta(L))$ pour quatre valeurs : 6 cm, 6,5 cm, 7 cm et 7,5 cm. On a aussi tracé la courbe $\beta(L) = g(F)$.

Pour lire le comportement, il suffit de se donner une valeur pour la force exercée sur la bande de roulement, on en déduit la valeur de l'angle entre le secteur de flanc et l'axe radial $\beta(L)$, puis la valeur de $r(L)$ correspondant à ces deux données.

• Conclusion sur le comportement de flanc

Le comportement de flanc relie la composante radiale de la force exercée par un secteur angulaire de flanc sur la bande de roulement à la distance entre les deux points d'attache du secteur de flanc (sur la jante et sur la bande de roulement).

Le comportement est modélisé par une fonction simple :

- On constate que pour un secteur de flanc en tension, les variations de rayon apparent sont faibles. On modélise ce comportement par un rayon fixé R_b de la bande de roulement et une force indéterminée.
- Un secteur de flanc plus courbé est détendu : la force varie peu et reste faible. On modélise ce comportement par une force nulle et un rayon indéterminé, inférieur à R_b .

On trouvera une représentation graphique du comportement dans la figure 5.4.

5.1.3 Etude d'un pneumatique en roulement

Les notations suivantes sont utilisées pour décrire la géométrie du pneumatique :

rayon du pneumatique	R_b
pression de gonflement	p_i
vitesse de roulement du véhicule	s
poids appliqué sur la roue	P
largeur de la bande de roulement	e
masse par unité de longueur de la bande de roulement	$\overline{\mu}_s e$
angle entre la verticale descendante et un point	θ

La bande de roulement est en équilibre grâce à la pression de gonflement p_i , la tension interne $T(\theta)$, l'action des flancs $F(\theta)$, la réaction de la route $R(\theta)$, les forces centrifuges.

• La géométrie estimée

Avec l'approximation faite sur le comportement de flanc, il paraît raisonnable de choisir une géométrie circulaire pour la partie du pneumatique qui n'est pas en contact avec la roue (voir figure 5.6).

On choisit de décrire la zone de contact comme un segment de droite, orienté par \vec{y} . Avec ce choix, on a une géométrie angulaire comme on le souhaitait. Au niveau de la ligne d'attaque, le vecteur tangent est discontinu : pour $\theta > \theta_0$, la bande de roulement est en contact avec le sol et on la suppose horizontale; pour $\theta < \theta_0$, le vecteur tangent est $\vec{T} = (-\sin \theta, \cos \theta)$.

On a les relations $\frac{d\vec{T}}{d\theta} = \vec{N}$ et $\frac{d\vec{N}}{d\theta} = -\vec{T}$

Par symétrie, on n'étudie qu'une demi-géométrie. Il reste un paramètre à déterminer, θ_0 l'angle entre la verticale et la ligne d'attaque de la zone de contact.

• Equilibre de la ligne d'attaque

On écrit la conservation de la quantité de mouvement avec les notations de la figure 5.5 : le flux de quantité de mouvement à travers un volume de contrôle situé autour de la ligne d'attaque vaut :

$$-s(\overline{\mu}_s e s \vec{y}) - s(\overline{\mu}_s e s \vec{T}(\theta_0^-))$$

Il est égal aux forces appliquées sur la frontière du volume de contrôle.

On considère que les flancs n'exercent pas de force ponctuelle. La pression ne peut pas exercer de force ponctuelle. Dans ce cas, le saut de vitesse est équilibré par un saut de tension dans la bande

de roulement, hypothèse compatible avec une tension alignée avec le vecteur tangent de la bande de roulement qui est lui aussi discontinu à cause de la géométrie anguleuse. Les forces appliquées sur le volume de contrôle sont la valeur à droite et la valeur à gauche de la tension de la bande de roulement :

$$-\overline{\mu}_s e s^2 \vec{y} - \overline{\mu}_s e s^2 \vec{T}(\theta_0^-) = -\tau_0(\theta_0^+) \vec{y} - \tau_0(\theta_0^-) \vec{T}(\theta_0^-)$$

Les équations d'équilibre donnent :

$$\begin{cases} \tau_0(\theta_0^-) = \overline{\mu}_s e s^2 \\ \tau_0(\theta_0^+) = \overline{\mu}_s e s^2 \end{cases}$$

• Equilibre dans la partie de la bande de roulement qui n'est pas en contact avec le sol

Dans ce sous domaine, les flancs sont tendus, et l'action dans la direction du centre de la roue est une densité linéique de force $\frac{F(\theta)}{R_b}$ indéterminée. En se rapportant à la figure 5.7, on détermine les équations d'équilibre dans le repère (\vec{T}, \vec{N}) :

$$\begin{aligned} \tau_0(\theta + d\theta) \vec{T}(\theta + d\theta) - \tau_0(\theta) \vec{T}(\theta) - R_b e p_i d\theta \vec{N}(\theta) + 2F(\theta) d\theta \vec{N}(\theta) &= \overline{\mu}_s e R_b d\theta \frac{s^2}{R_b} \vec{N}(\theta) \\ \Rightarrow \frac{d\tau_0}{d\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (\tau_0 - \overline{\mu}_s s^2 e) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - (R_b e p_i) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2F \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

Pour $\theta < \theta_0$, la tension τ_0 est constante et vaut $\overline{\mu}_s e s^2$. L'action des flancs sur la bande de roulement est déterminée par la pression $2F = R_b e p_i$.

En négligeant la résultante de la quantité d'accélération dans les flancs, la résultante des efforts appliqués par les flancs sur la jante est opposée à la résultante des efforts appliqués par les flancs sur la bande de roulement. En négligeant l'accélération de la jante, c'est aussi P , le poids du véhicule :

$$P = R_b e p_i 2 \int_0^{\theta_0} \cos \theta d\theta = 2 R_b e p_i \sin \theta_0$$

• Equations d'équilibre dans la zone de contact

Dans ce sous domaine, les flancs sont relâchés et leur action dans la direction du centre de la roue est nulle. La réaction de la route est dans la direction \vec{y} , on note $R(y)$ son module. Dans le repère (\vec{x}, \vec{y}) , les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\frac{d\tau_0}{dy} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (R - e p_i) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Pour $\theta > \theta_0$, la tension τ_0 est constante et sa valeur vaut $\overline{\mu} s^2 e$. La réaction de la route est déterminée par la pression interne $R = e p_i$. En négligeant la résultante de la quantité d'accélération dans tout le

pneumatique et toute la roue, l'effort exercé par la route vaut aussi P le poids du véhicule :

$$2 R_b e p_i \sin \theta_0 = P$$

P détermine la position du point de détachement θ_0 .

• La transformation d'écrasement

On veut maintenant définir la transformation d'écrasement. Dans la configuration relâchée (circulaire de rayon R_b), une particule \vec{X} est définie par un angle α . On doit lui faire subir une rotation d'angle Ωt , puis un écrasement $\vec{\phi}_0$ et retrouver la géométrie. On pose $\theta = \alpha + \Omega t$ puis on définit l'écrasement par :

– pour $\theta \leq \theta_0$

$$\vec{\phi}_0(\theta) = a \cos(\theta) \vec{x} + a \sin(\theta) \vec{y}$$

La vitesse linéique d'une particule vaut $a\Omega = s$.

– pour $\theta \geq \theta_0$

$$\vec{\phi}_0(\theta) = a \cos(\theta_0) \vec{x} + a \cos(\theta_0) \tan(\theta) \vec{y}$$

La vitesse linéique vaut $a\Omega \frac{\cos(\theta_0)}{\cos^2(\theta)} \approx a\Omega = s$. L'approximation est valable si θ_0 est proche de π .

5.1.4 La rigidité géométrique

En conclusion de cette étude, on montre qu'il n'est pas si évident que la tension τ dans la bande de roulement soit déterminée par la pression de gonflement comme c'est utilisé dans le "circular ring model".

Il est possible que ce soit les flancs qui reprennent la pression de gonflement, et que la bande de roulement ne reprenne que les efforts dus à la force centrifuge.

La réalité se trouve sans doute entre ces deux extrêmes.

Une réponse plus précise serait souhaitable car ces deux approches donnent des valeurs très différentes pour la rigidité géométrique. Même à grande vitesse, (30 m/s = 108 Km/h), la tension prédite par le modèle de bande de roulement souple reste faible : pour une masse linéique de 20 kg/m², cette tension vaut 2700 N. Dans le cas d'une bande de roulement qui reprendrait la pression de gonflement, la tension vaudrait 9000 N pour un pneumatique de rayon 0,3 m, de largeur 0,15 m, gonflé à la pression de 2 kg/cm².

Dans les deux cas, la contrainte associée est importante car elle est concentrée dans la carcasse qui est de faible épaisseur (1,2 MPa pour une épaisseur de carcasse de 2 mm).

La rigidité géométrique telle qu'on l'a définie au chapitre 2 ne tient pas compte de cette tension due à la force centrifuge. On choisit d'en tenir compte dans le modèle simplifié.

Par contre, la contrainte radiale dans les flancs est importante, estimée à 15 MPa au niveau de la bande de roulement et à encore plus lorsqu'on se rapproche de la jante. Cette contrainte se traduit par une importante rigidité géométrique dans les flancs.

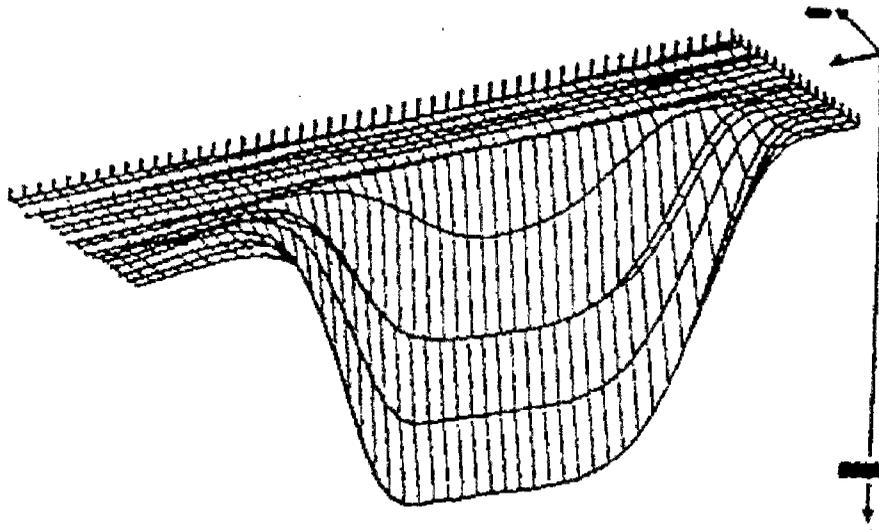


FIG. 5.1 - Répartition de la pression dans l'empreinte d'un pneumatique

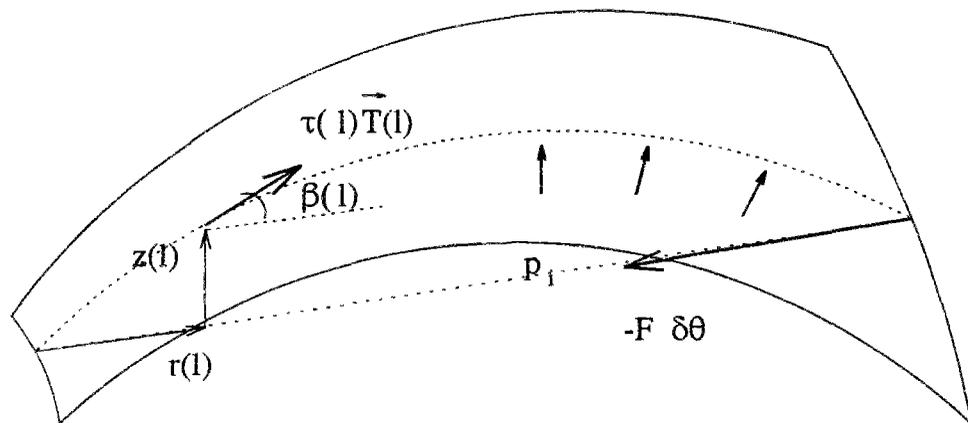


FIG. 5.2 - Equilibre d'un secteur de flanc

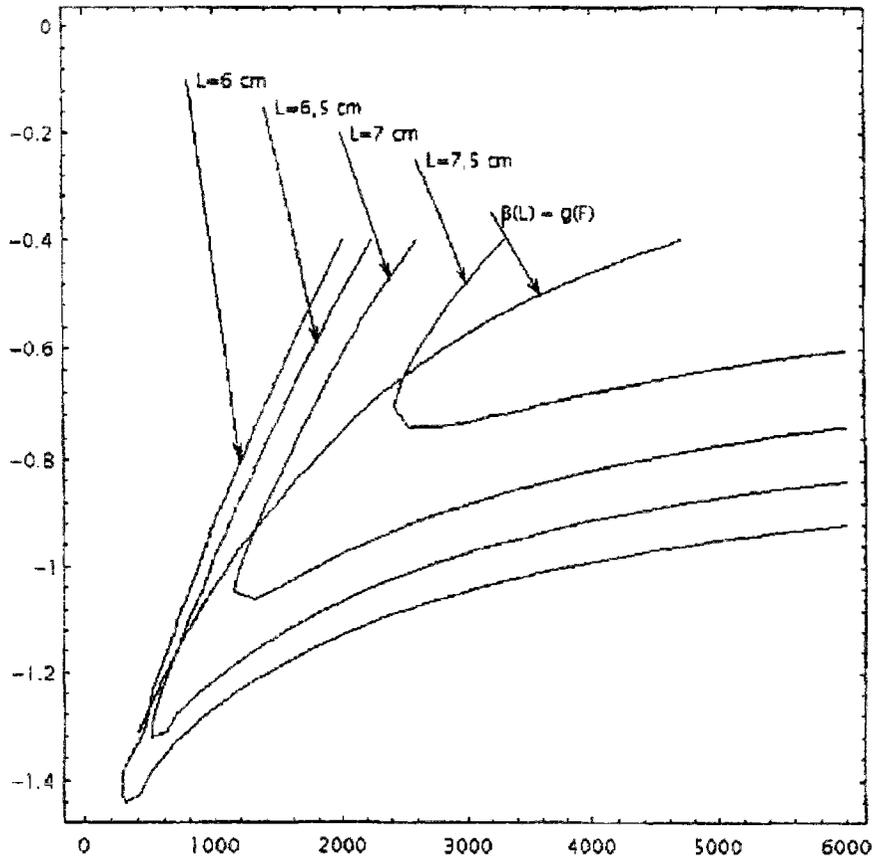


FIG. 5.3 - Isovaleur du rayon apparent et courbe $\beta(L) = g(F)$

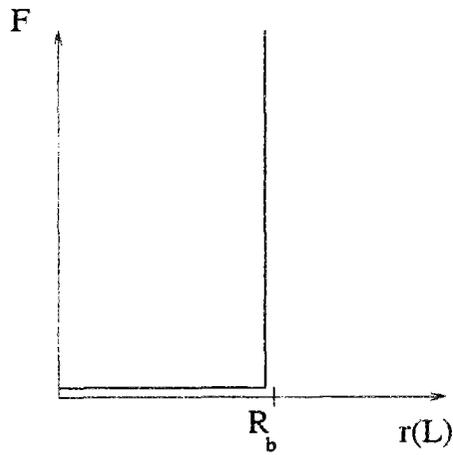


FIG. 5.4 - Comportement simplifié des flancs

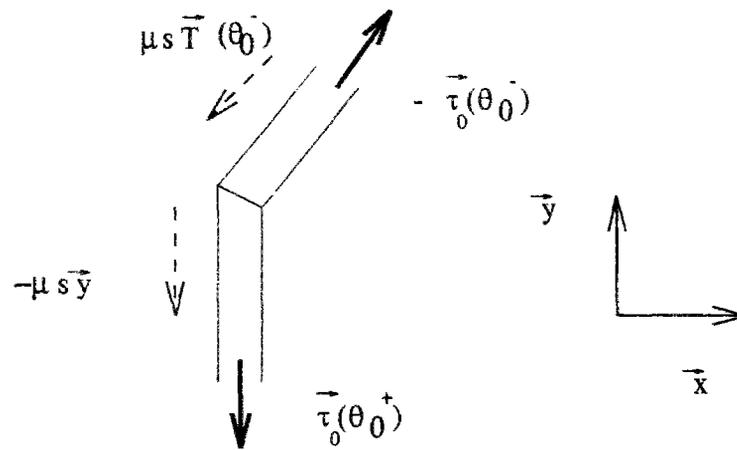


FIG. 5.5 - Condition de contact

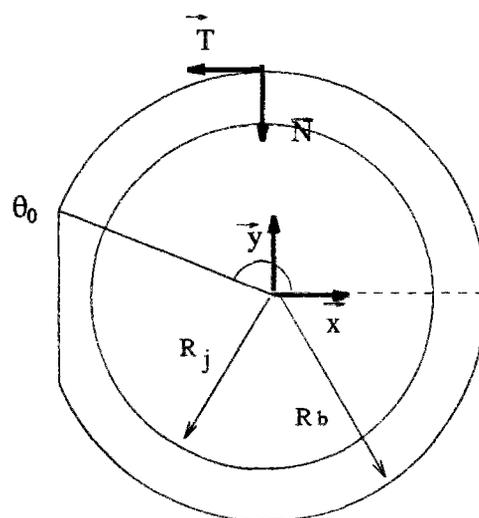


FIG. 5.6 - La géométrie estimée

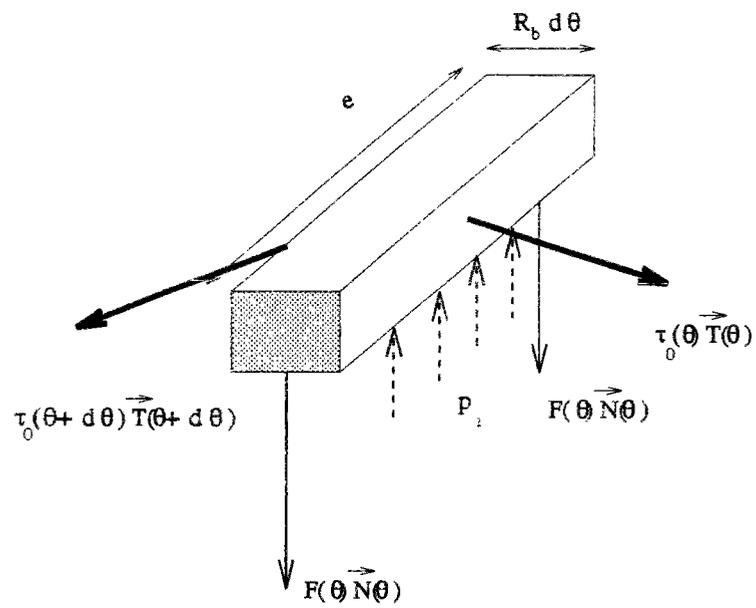


FIG. 5.7 - Tension dans la bande de roulement

5.2 Une version 2D de la géométrie

Avec cette analyse simplifiée, on va pouvoir reconstruire un mouvement bidimensionnel à partir de la solution curviligne.

On va d'abord construire une géométrie pour une pneumatique lisse. On supposera que la géométrie d'un pneumatique commercial se déduit de la précédente en prenant une restriction au domaine occupé par les patins de gomme. Pour décrire la géométrie dans un plan, *on suppose qu'on étudie un pneumatique à rainures transversales*.

On suppose que le champ calculé dans la section précédente est un champ de déplacement d'une fibre moyenne de poutre. On suppose que la fibre moyenne de l'empilement gomme plus carcasse est la même que la fibre moyenne de la carcasse, car la gomme est beaucoup plus souple que la carcasse.

On désire prolonger ce champ à la géométrie complète avec une cinématique de Love-Kirchhoff. Une telle construction n'est pas possible au niveau des lignes d'attaque et de fuite. En ces points, la normale n'est pas continue. On va donc introduire un cisaillement γ localisé à ces endroits pour assurer la continuité du domaine géométrique. Ce cisaillement génère un glissement au niveau de la surface en contact avec la chaussée. Ce glissement est effectivement observé à ce niveau dans [Jennewein & Bergmann85]. On pose donc pour une particule repérée par (α, r) :

$$\begin{cases} \vec{x}_0(\alpha, r) = \vec{\phi}_0(\alpha + \Omega t) - r \vec{N}(\alpha + \Omega t) + r \gamma(\alpha + \Omega t) \vec{T}(\alpha + \Omega t) \\ \vec{x}_0(\alpha, r) = \vec{\phi}_0(\alpha + \Omega t) - r \vec{x} + r \gamma \underbrace{\left(\cos \theta_0 \tan(\alpha + \Omega t) \right)}_y \vec{y} \end{cases}$$

Avec ce choix, la vitesse d'entraînement est donnée par la formule suivante (on pose $s = R_b \Omega$) :

$$\begin{cases} \vec{u}_0 = \left(s + r \Omega + r \Omega \frac{d\gamma}{d\theta} \right) \vec{T} + r \Omega \gamma \vec{N} \\ \vec{u}_0 \approx - \left(s r \frac{d\gamma}{dy} + s \right) \vec{y} \end{cases}$$

La seconde approximation est valable si θ_0 est proche de π .

On doit assurer deux choses :

1. la continuité du champ \vec{x}_0 :

Avec l'orientation choisie pour \vec{T} et \vec{y} , cela signifie que la fonction $\gamma(\theta)$ est continue, et $\gamma(\theta_0) = \cotg \left(\frac{\theta_0}{2} \right)$.

La ligne d'attaque est alors rectiligne et se trouve sur la bissectrice de l'angle $\pi - \theta_0$. On note $\vec{n} = \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \vec{x} + \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \vec{y}$, la normale à \mathcal{A}_0 , la surface de discontinuité.

2. la loi de la conservation de la matière :

Pour simplifier, on pose que $\rho_0 = \rho$ (cela correspond à un matériau incompressible). On trouve donc les relations simplifiées suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{u}_0 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \gamma}{d\theta^2} - 2\gamma = 0 \\ \frac{d^2 \gamma}{dy^2} = 0 \end{array} \right. \\ [\vec{u}_0] \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \Omega \left(1 + \frac{d\gamma}{d\theta}(\theta_0) \right) + \Omega \gamma(\theta_0) \cotg \left(\frac{\theta_0}{2} \right) = s \frac{d\gamma}{dy}(R_b \sin \theta_0) \end{array} \right.$$

Pour θ_0 proche de π , on simplifie la seconde équation en $1 + \frac{d\gamma}{d\theta}(\theta_0) = R_b \frac{d\gamma}{dy}(R_b \sin \theta_0)$.

Avec ces équations, on ne détermine pas complètement le champ de cisaillement γ . On le détermine complètement si on se donne la taille de la zone de glissement dans la zone de contact (mesurable) et une autre donnée.

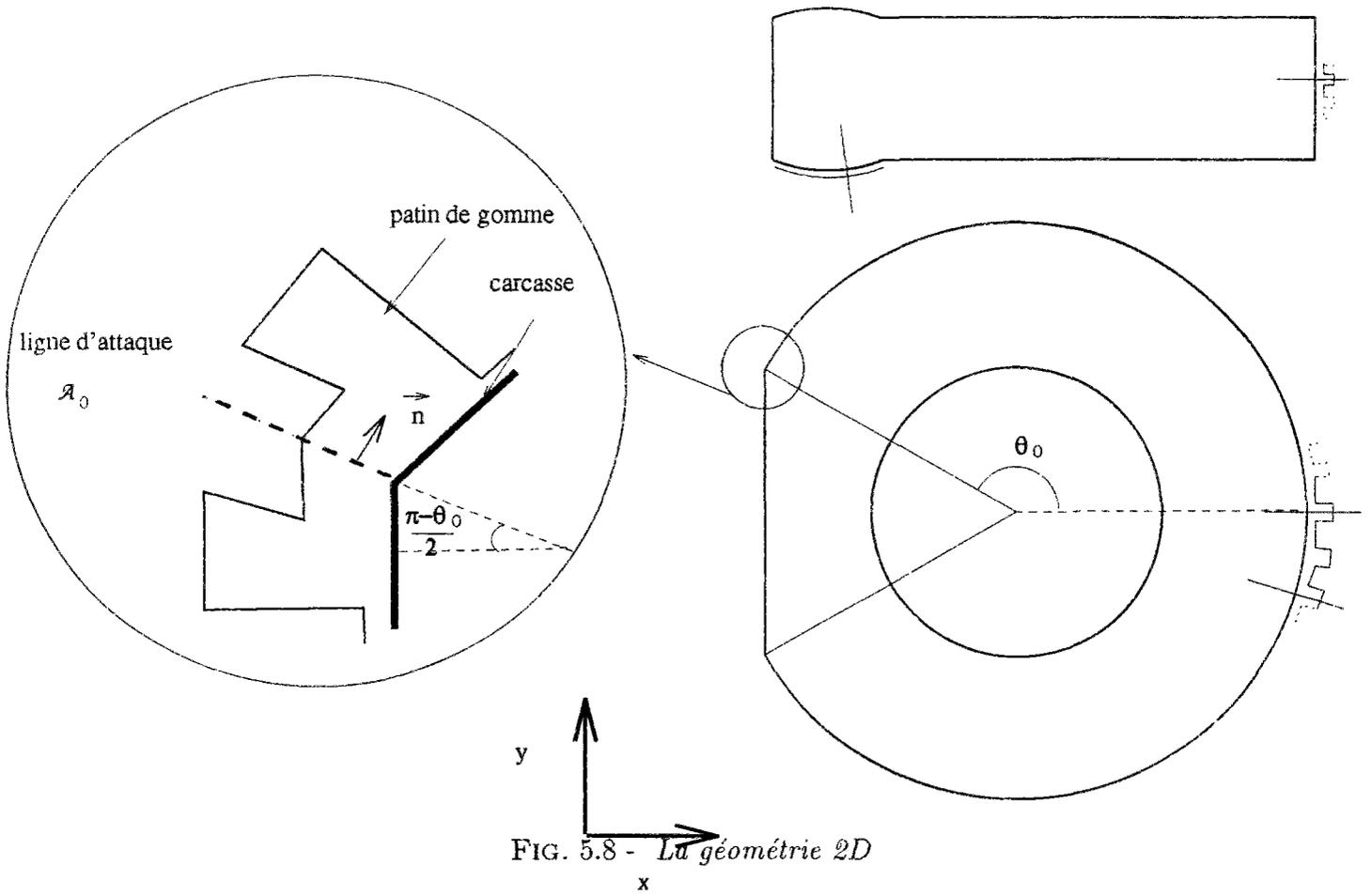


FIG. 5.8 - La géométrie 2D

5.3 Equilibre simplifié

On fait un modèle très simple où on suppose que pour l'étude de la propagation libre des vibrations, on peut négliger le déplacement dynamique dans la partie en contact avec la route. A la vue de la mesure présentée au chapitre 1 (figures 1.2 et 1.3) de l'accélération radiale et tangentielle dans la zone de contact, cette hypothèse ne semble pas trop aberrante. Cette simplification permet de ne pas faire intervenir la zone de contact dans la description du système mécanique à étudier.

Dans la géométrie de la partie libre, on néglige le cisaillement γ nécessaire au raccordement au niveau des lignes d'attaque et de fuite: on utilise une description de type arc de poutre de section droite (perpendiculaire à la fibre moyenne).

La condition de continuité du déplacement au niveau des lignes d'attaque et de fuite de la zone de contact, se traduit par une condition de type encastrement.

Le plan comporte :

- une étude de la cinématique ;
- la détermination des équations d'équilibre ;
- une formulation adimensionnelle de ces équation ;
- une simplification dans le cas d'une bande de roulement inextensible ;

5.3.1 Etude de la cinématique

• Cinématique de la fibre moyenne

Une particule est repérée par $(\theta = \alpha + \Omega t, r)$. Pour $r = 0$, elle se trouve en $\vec{x}_0(\theta, r)$ et a un déplacement de la forme :

$$\vec{\xi}(t, \theta, r = 0) = \xi_T(t, \theta) \vec{T}(\theta) + \xi_N(t, \theta) \vec{N}(\theta)$$

On introduit le temps en supposant que le déplacement tangentiel ξ_T et le déplacement radial ξ_N dépendent du temps. Les dérivées particulières sont obtenues pour $\theta = \alpha + \Omega t$.

Pour étudier la cinématique, on calcule la transformation tangente à t fixé :

$$\vec{\xi}(\theta + d\theta) - \vec{\xi}(\theta) = \left(\frac{1}{R_b} \frac{\partial \xi_T}{\partial \theta} - \frac{\xi_N}{R_b} \right) R_b \otimes \vec{T} + \left(\frac{\xi_T}{R_b} + \frac{1}{R_b} \frac{\partial \xi_N}{\partial \theta} \right) \vec{z} \wedge R_b \otimes \vec{T}$$

L'application tangente se compose en une élongation relative linéarisée $\hat{\epsilon} = \frac{1}{R_b} \frac{\partial \xi_T}{\partial \theta} - \frac{\xi_N}{R_b}$ et une petite rotation d'axe \vec{z} et d'angle $\hat{\omega} = \frac{1}{R_b} \frac{\partial \xi_N}{\partial \theta} + \frac{\xi_T}{R_b}$.

• **Vecteur tangent à la fibre moyenne**

Le vecteur unitaire tangent à la courbe est proportionnel à :

$$\vec{t} \propto (1 + \hat{\epsilon}) \vec{T} + \hat{\omega} \vec{N}$$

Au premier ordre en ξ_T et ξ_N , la norme de ce vecteur vaut :

$$\sqrt{(1 + \hat{\epsilon})^2 + (\hat{\omega})^2} = \sqrt{1 + 2\hat{\epsilon} + \dots} = 1 + \hat{\epsilon}$$

Au premier ordre toujours, le vecteur tangent unitaire vaut :

$$\vec{t} = \frac{1}{1 + \hat{\epsilon}} \left((1 + \hat{\epsilon}) \vec{T} + \hat{\omega} \vec{N} \right) = \vec{T} + \hat{\omega} \vec{N}$$

• **Cinématique dans toute l'épaisseur du pneumatique**

Pour avoir une cinématique bidimensionnelle, on prolonge la rotation à toute la section droite définie par la valeur de θ du point courant.

$$\begin{aligned} \vec{\xi}(\theta, r) &= \vec{\xi}(\theta, r = 0) + \hat{\omega}(\theta) \vec{z} \wedge r \vec{N} \\ \vec{\xi}(\theta, r) &= \vec{\xi}(\theta, r = 0) - \hat{\omega}(\theta) r \vec{T} \end{aligned}$$

5.3.2 Equations d'équilibre

Pour les notations, on se reportera à la figure 5.9.

• **Equilibre en force**

Un élément de pneumatique est équilibré en force par la tension initiale $\tau_0 \vec{t}$, l'effort tranchant $\vec{\tau}$, la pression p_i et les efforts de flanc F . Dans le "circular ring model", cette force est linéarisée autour de sa valeur donnée par la pression en deux forces de rappel élastiques qui s'opposent à ξ_T et ξ_N . On a deux équations d'équilibre en force :

$$\begin{aligned} \tau_0 \vec{t}(\theta + d\theta) - \tau_0 \vec{t}(\theta) + \vec{\tau}(\theta + d\theta) - \vec{\tau}(\theta) + (2F - R_b e p_i) d\theta \vec{N} - (F_T \vec{T} + F_N \vec{N}) R_b d\theta \\ = \bar{\mu}_s e s^2 d\theta \vec{N} + \mu_s(\theta) e R_b d\theta \vec{a} \end{aligned}$$

On simplifie cette équation avec l'équilibre grossier ($\tau_0 = \bar{\mu}_s e s^2$ et $2F = R_b e p_i$):

$$\tau_0 \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial \theta} \vec{N} - \tau_0 \hat{\omega} \vec{T} + \frac{\partial \tau_T}{\partial \theta} \vec{T} + \tau_T \vec{N} + \frac{\partial \tau_N}{\partial \theta} \vec{N} - \tau_N \vec{T} - (F_T \vec{T} + F_N \vec{N}) R_b = \mu_s e R_b \vec{a}$$

• Equilibre en moment

Un élément de pneumatique est équilibré en moment par le moment interne $M \vec{z}$, les moments de la tension initiale et de l'effort tranchant. On néglige le moment d'inertie. On obtient une équation d'équilibre.

$$M(\theta + d\theta) \vec{z} - M(\theta) \vec{z} - \left(R_b \vec{N}(\theta + d\theta) - R_b \vec{N}(\theta) \right) \wedge \left(\tau_0 \vec{t}(\theta + d\theta) + \vec{\tau}(\theta + d\theta) \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial \theta} + \hat{\omega} \tau_0 R_b + \tau_N R_b = 0$$

• Expression de l'accélération

Le calcul de l'accélération se fait en dérivant l'expression de $\vec{\xi}(\alpha + \Omega t, t)$:

$$\vec{u} = \left(\Omega \frac{\partial \xi_T}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi_T}{\partial t} - \Omega \xi_N \right) \vec{T} + \left(\Omega \frac{\partial \xi_N}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi_N}{\partial t} + \Omega \xi_T \right) \vec{N}$$

$$\vec{a} = \left(\Omega^2 \frac{\partial^2 \xi_T}{\partial \theta^2} + 2\Omega \frac{\partial^2 \xi_T}{\partial t \partial \theta} + \frac{\partial^2 \xi_T}{\partial t^2} - 2\Omega^2 \frac{\partial \xi_N}{\partial \theta} - 2\Omega \frac{\partial \xi_N}{\partial t} - \Omega^2 \xi_T \right) \vec{T} + \left(\Omega^2 \frac{\partial^2 \xi_N}{\partial \theta^2} + 2\Omega \frac{\partial^2 \xi_N}{\partial t \partial \theta} + \frac{\partial^2 \xi_N}{\partial t^2} + 2\Omega^2 \frac{\partial \xi_T}{\partial \theta} + 2\Omega \frac{\partial \xi_T}{\partial t} - \Omega^2 \xi_N \right) \vec{N}$$

• Loi de comportement

La loi de comportement s'écrit pour une particule fixée α . Comme on a supposé qu'on se plaçait au niveau de la fibre moyenne, les comportements en flexion et en extension sont découplés. On pose :

$$\tau_N(\alpha, t) = K(\alpha) \hat{\epsilon}(\alpha, t) e$$

$$M(\alpha, t) = D(\alpha) \frac{\partial \hat{\omega}}{R_b \partial \alpha}(\alpha, t) e$$

$$R_b F_T = k_T \frac{\xi_T}{R_b}$$

$$R_b F_N = k_N \frac{\xi_N}{R_b}$$

K est une rigidité de membrane en N/m. On a trouvé deux valeurs dans la bibliographie pour des pneumatiques lisses, $3,92 \cdot 10^6$ N/m et $4,34 \cdot 10^6$ N/m. Cette rigidité est le produit d'une épaisseur par

une rigidité. Si on regarde la contribution de la gomme, d'une rigidité de l'ordre de 2 Mpa, et d'une épaisseur de l'ordre de 2 cm, on la trouve négligeable par rapport à la contribution de la carcasse. K est pris indépendant de la particule α .

D est une rigidité de flexion de plaque en Nm. On a trouvé deux valeurs pour des pneumatiques lisses, 21 Nm et 35 Nm. Supposons que la gomme se trouve entre les altitudes +0 cm et + 2 cm par rapport à la fibre moyenne. Sa contribution à la rigidité de flexion, serait dans ce cas de 5 Nm. D est pris comme une fonction de α .

En repassant en coordonnée $\theta = \alpha + \Omega t$, on trouve les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \tau_N(t, \theta) &= K \widehat{e}(t, \theta) e \\ M(t, \theta) &= D(\theta - \Omega t) \frac{\partial \widehat{\omega}}{R_b \partial \theta}(t, \theta) e \end{aligned}$$

On trouve un comportement en flexion qui varie en fonction du temps.

k_T et k_N sont des rigidités de ressort en kN. Pour k_N , on a trouvé deux valeurs assez proches, 96 kN et 106 kN. Par contre, les valeurs de k_T sont différentes 14 kN et 74 kN.

5.3.3 Formulation adimensionnelle

La version adimensionnelle est obtenue avec les grandeurs caractéristiques suivantes

- . unité de temps N : la période de rotation de la roue
- . unité de vitesse s la vitesse du véhicule ($R_b = sN$)
- . unité de masse surfacique $\overline{\mu}_s$ qui est la valeur utilisée dans l'équilibre grossier

On pose :

$$\begin{array}{l} \text{tensions} \\ \text{comportement} \\ \text{déplacements} \\ \text{moment} \\ \text{masse surfacique} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \tau_0 = \overline{\mu}_s e s^2 \widehat{\tau}_0 \\ K = \overline{\mu}_s s^2 \widehat{K} \\ \xi_T = R_b \widehat{\xi}_T \\ M = \overline{\mu}_s e s^2 R_b \widehat{M} \\ \mu_s = \overline{\mu}_s \widehat{\mu} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} F = \overline{\mu}_s e s^2 \widehat{F} \\ D = \overline{\mu}_s s^2 R_b^2 \widehat{D} \\ \xi_N = R_b \widehat{\xi}_N \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} (\tau_N, \tau_T) = \overline{\mu}_s e s^2 (\widehat{\tau}_N, \widehat{\tau}_T) \\ (k_T, k_N) = \overline{\mu}_s e s^2 (k_T, k_N) \end{array} \right.$$

On trouve les nouvelles formules suivantes :

- équilibre

$$-\widehat{\omega} + \frac{\partial \widehat{\tau}_T}{\partial \theta} - \widehat{\tau}_N - \widehat{k}_T \widehat{\xi}_T = \widehat{\mu} \left(4\pi^2 \frac{\partial^2 \widehat{\xi}_T}{\partial \theta^2} + 4\pi \frac{\partial^2 \widehat{\xi}_T}{\partial \theta \partial t} + \frac{\partial^2 \widehat{\xi}_T}{\partial t^2} - 8\pi^2 \frac{\partial \widehat{\xi}_N}{\partial \theta} - 4\pi \frac{\partial \widehat{\xi}_N}{\partial t} - 4\pi^2 \widehat{\xi}_T \right) \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \widehat{\omega}}{\partial \theta} + \widehat{\tau}_T + \frac{\partial \widehat{\tau}_N}{\partial \theta} - \widehat{k}_N \widehat{\xi}_N = \widehat{\mu} \left(4\pi^2 \frac{\partial^2 \widehat{\xi}_N}{\partial \theta^2} + 4\pi \frac{\partial^2 \widehat{\xi}_N}{\partial \theta \partial t} + \frac{\partial^2 \widehat{\xi}_N}{\partial t^2} + 8\pi^2 \frac{\partial \widehat{\xi}_T}{\partial \theta} + 4\pi \frac{\partial \widehat{\xi}_T}{\partial t} - 4\pi^2 \widehat{\xi}_N \right) \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial \widehat{M}}{\partial \theta} + \widehat{\omega} + \widehat{\tau}_N = 0 \quad (5.3)$$

– comportement

$$\widehat{\tau}_N(t, \theta) = \widehat{K} \widehat{\varepsilon}(t, \theta) \quad (5.4)$$

$$\widehat{M}(t, \theta) = \widehat{D}(\theta - 2\pi t) \frac{\partial \widehat{\omega}}{\partial \theta}(t, \theta) \quad (5.5)$$

– cinématique

$$\widehat{\omega} = \widehat{\xi}_T + \frac{\partial \widehat{\xi}_N}{\partial \theta} \quad (5.6)$$

– conditions aux limites

$$\begin{cases} \widehat{\xi}_T(t, -\theta_0) = \widehat{\xi}_T(t, \theta_0) = 0 \\ \widehat{\xi}_N(t, -\theta_0) = \widehat{\xi}_N(t, \theta_0) = 0 \\ \widehat{\omega}_N(t, -\theta_0) = \widehat{\omega}_N(t, \theta_0) = 0 \end{cases} \quad (5.7)$$

L'étude de l'évolution des propriétés de la propagation libre en fonction de la vitesse consiste à diviser les rigidités et la tension des flancs par le carré de la vitesse et utiliser cette valeur dans les équations précédentes.

5.3.4 Simplification dans le cas d'une bande de roulement inextensible

L'hypothèse d'une bande de roulement inextensible est plausible, mais elle va surtout diminuer le coût des calculs. On va se ramener à un seul champ d'inconnue et une seule équation d'équilibre.

De l'équation 5.3, on tire la valeur de l'effort tranchant :

$$\widehat{\tau}_N = -\widehat{\omega} - \frac{\partial \widehat{M}}{\partial \theta}$$

On remplace cette expression dans l'équation 5.2 et on tire l'expression de l'effort normal :

$$\widehat{\tau}_T = \widehat{\mu} \widehat{a}_N + \frac{\partial^2 \widehat{M}}{\partial \theta^2} + \widehat{k}_N \widehat{\xi}_N$$

On remplace ces deux équations dans l'équation 5.1 :

$$+\frac{\partial^3 \widehat{M}}{\partial \theta^3} + \frac{\partial \widehat{M}}{\partial \theta} - \widehat{k}_T \widehat{\xi}_T + \widehat{k}_N \widehat{\xi}_N = \widehat{\mu} \widehat{a}_T - \frac{\partial(\widehat{\mu} \widehat{a}_N)}{\partial \theta} \quad (5.8)$$

A cette équation d'équilibre, on ajoute :

– le comportement en flexion

$$\widehat{M}(t, \theta) = \widehat{D}(\theta - 2\pi t) \frac{\partial \widehat{\omega}}{\partial \theta}(t, \theta)$$

– la condition d'inextensibilité

$$\widehat{\varepsilon} = 0 \Rightarrow \widehat{\xi}_N = \frac{\partial \widehat{\xi}_T}{\partial \theta}$$

d'où on dérive

– la nouvelle expression de la rotation

$$\widehat{\omega} = \widehat{\xi}_T + \frac{\partial^2 \widehat{\xi}_T}{\partial \theta^2}$$

– la nouvelle expression de l'accélération

$$\begin{aligned} \widehat{a}_T &= \frac{\partial^2 \widehat{\xi}_T}{\partial t^2} - 4\pi^2 \left(\frac{\partial^2 \widehat{\xi}_T}{\partial \theta^2} + \widehat{\xi}_T \right) \\ \widehat{a}_N &= \frac{\partial^3 \widehat{\xi}_T}{\partial t^2 \partial \theta} + 4\pi \left(\frac{\partial^3 \widehat{\xi}_T}{\partial t \partial \theta^2} + \frac{\partial \widehat{\xi}_T}{\partial t} \right) + 4\pi^2 \left(\frac{\partial^3 \widehat{\xi}_T}{\partial \theta^3} - \frac{\partial \widehat{\xi}_T}{\partial \theta} \right) \end{aligned}$$

– conditions aux limites

$$\begin{cases} \widehat{\xi}_T(t, -\theta_0) = \widehat{\xi}_T(t, \theta_0) = 0 \\ \widehat{\xi}_N(t, -\theta_0) = \widehat{\xi}_N(t, \theta_0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \widehat{\xi}_T}{\partial \theta}(t, -\theta_0) = \frac{\partial \widehat{\xi}_T}{\partial \theta}(t, \theta_0) = 0 \\ \widehat{\omega}(t, -\theta_0) = \widehat{\omega}(t, \theta_0) = 0 \end{cases}$$

On part de l'équation d'équilibre adimensionnelle en force suivant la tangente 5.8. Dans cette équation, on utilise l'expression de \widehat{a}_T , \widehat{a}_N , et \widehat{M} . On classe les termes par leur degré de dérivation en temps.

$$\begin{aligned} & \left[\widehat{\mu} \frac{\partial^2 \widehat{\xi}_T}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\widehat{\mu} \frac{\partial^3 \widehat{\xi}_T}{\partial t^2 \partial \theta} \right) \right] - 4\pi \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\widehat{\mu} \frac{\partial}{\partial t} \left(\widehat{\xi}_T + \frac{\partial^2 \widehat{\xi}_T}{\partial \theta^2} \right) \right) \right] \\ & + \left[-4\pi^2 \widehat{\mu} \left(\widehat{\xi}_T + \frac{\partial^2 \widehat{\xi}_T}{\partial \theta^2} \right) + \widehat{k}_T \widehat{\xi}_T - \widehat{k}_N \frac{\partial^2 \widehat{\xi}_T}{\partial \theta^2} - 4\pi^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\widehat{\mu} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\widehat{\xi}_T + \frac{\partial^2 \widehat{\xi}_T}{\partial \theta^2} \right) \right) \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\widehat{D} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\widehat{\xi}_T + \frac{\partial^2 \widehat{\xi}_T}{\partial \theta^2} \right) \right) - \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \left(\widehat{D} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\widehat{\xi}_T + \frac{\partial^2 \widehat{\xi}_T}{\partial \theta^2} \right) \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

On se retrouve avec un seul champ inconnu $\widehat{\xi}_T$, et une équation d'équilibre. Les conditions aux limites qui portent sur $\widehat{\xi}_T$, $\frac{\partial \widehat{\xi}_T}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial^2 \widehat{\xi}_T}{\partial \theta^2}$ (ou de façon similaire $\widehat{\omega}$).

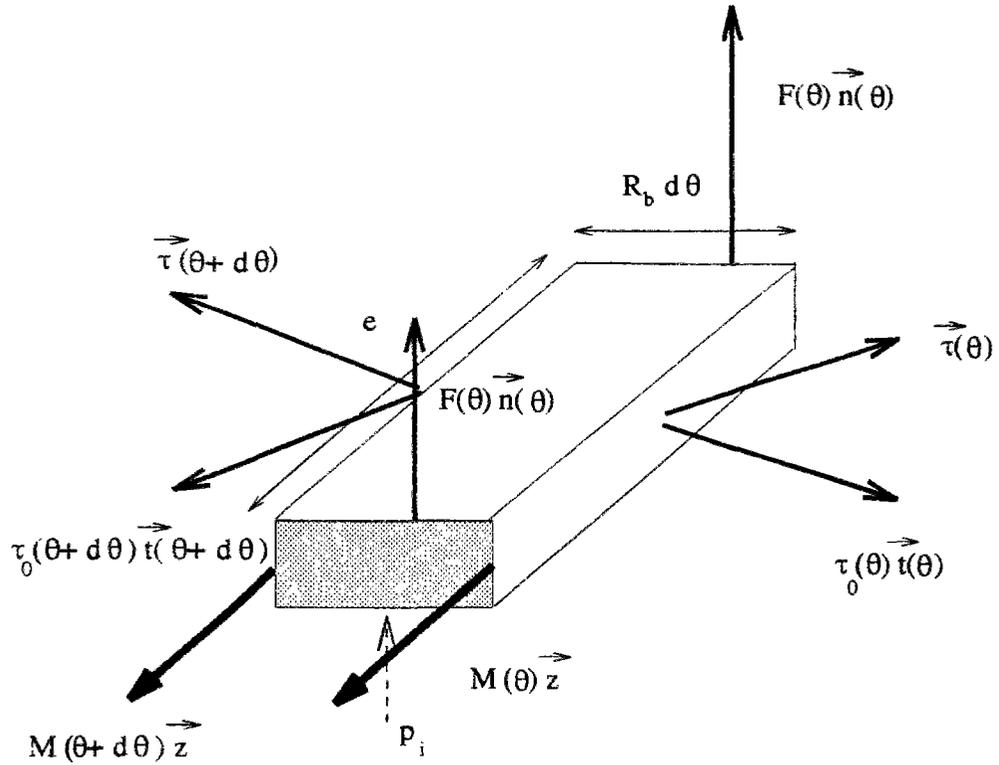


FIG. 5.9 - *Equilibre simplifié de la bande de roulement*

Conclusion

On a développé un modèle mécanique simplifié pour décrire les vibrations libres dans la bande de roulement. Ce modèle ressemble au "circular ring model". Les équations qu'on utilise sont celles du chapitre 5.3.4.

Les différences avec le "circular ring model" sont :

- 1. on réintroduit une hétérogénéité dans la bande de roulement ;*
- 2. on décrit une zone de contact avec la chaussée qui est étendue ;*
- 3. la bande de roulement est inextensible.*

Les deux premières hypothèses sont au moins nécessaires pour prédire des amplifications qui ne sont pas mesurées. La dernière hypothèse permet de simplifier le problème en n'ayant qu'un degré de liberté par point géométrique.

Les conditions aux limites d'encastrement sont simples à modéliser par une méthode de différence finie, c'est pour cela qu'on va étudier la propagation libre avec ce modèle.

Par contre, ce modèle ne peut pas servir à étudier l'effet de l'excitation car les conditions aux limites bloquent tout mouvement. Le saut de vitesse serait équilibré par un saut d'effort tranchant, mais cet effort n'est pas répercuté dans la cinématique. Une amélioration possible consisterait à utiliser un modèle de poutre avec cisaillement transverse.

Chapitre 6

Analyse numérique du calcul des coefficients d'amplification

Introduction

Pour calculer les coefficients d'amplification, on a deux problèmes numériques distincts :

- 1. calculer l'opérateur de propagation libre à partir des équations d'équilibre ;*
- 2. diagonaliser cet opérateur.*

Pour calculer diagonaliser l'opérateur de propagation libre, on a cherché à se ramener à un problème réel. On a utilisé pour cela la propriété de conservation de la forme symplectique par l'opérateur de propagation.

Puis on a envisagé trois méthodes :

- 1. une méthode par itération successive et déflation de l'opérateur à diagonaliser.*
- 2. une méthode tirée de [Geradin & Rixen92] qui permet de se ramener à la codiagonalisation de deux opérateurs symétriques à partir du problème de la recherche de la partie imaginaire des coefficients d'amplification. Par contre, on n'a pas pu montrer qu'ils étaient positifs, et on n'a pas programmé cette méthode.*
- 3. une méthode qui étend la méthode de Lanczos. A partir du problème de la recherche de la partie réelle des coefficients d'amplification, on développe un algorithme de Lanczos symplectique en s'inspirant des résultats de [Zhong & Williams95] sur un problème identique.*

Cet algorithme est utilisé avec l'opérateur de propagation libre déduit de notre modèle simplifié de pneumatique.

Notations

A, K, J, D	Matrice bloc de dimension $2n \times 2n$ constituée de blocs 2×2
$a_{i,j}$ $j_{i,j}$	Matrice de dimension 2×2 , bloc i, j de la matrice A Matrice de dimension 2×2 , bloc i, j de la matrice J
x, y, q_j, q'_j	Vecteur de dimension $2n$
$\tilde{q}_j = (q_j, q'_j)$	Matrice de dimension $2n \times 2$
R, P, Q	Matrice de dimension $p \times p$
z	Vecteur de dimension p
$u, s, b_j, 1$	Matrices 2×2
a_j, c_j, x	Nombres réels

6.1 Procédure de diagonalisation

6.1.1 Méthode par itération et déflation

La méthode d'itération permet de trouver la plus grande valeur propre (en module) et le plus grand vecteur propre d'une matrice réelle diagonalisable à valeurs propres réelles. Pour notre problème, les valeurs propres de l'opérateur de propagation sont des nombres complexes de module 1. Mais on peut rechercher soit la partie réelle des valeurs propres, soit la partie imaginaire, en utilisant les formules développées dans le chapitre 3.

$$\mathbb{L}.V^n = e^{i\varphi_n} V^n \Rightarrow \begin{cases} (\mathbb{J}.\mathbb{L} + \mathbb{L}^T.\mathbb{J}).V^n = 2 \cos(\varphi_n)\mathbb{J}.V^n \\ (\mathbb{J}.\mathbb{L} - \mathbb{L}^T.\mathbb{J}).V^n = 2i \sin(\varphi_n)\mathbb{J}.V^n \end{cases}$$

Comme on a vu que les coefficients d'amplification qui conduisent à une amplification des vibrations sont proches de 1, on choisit d'utiliser la formule donnant la partie réelle des valeurs propres, avec translation spectrale pour calculer la partie réelle de la valeur propre la plus proche de 1.

• Recherche des espaces propres par itération

On a vu que les espaces propres sont de dimension 2. L'algorithme consiste à calculer les itérés successifs par l'opérateur $(2\mathbb{J} - \mathbb{J}.\mathbb{L} - \mathbb{L}^T.\mathbb{J})^{-1}.\mathbb{J}$ d'un couple de vecteurs z_0, z'_0 orthogonaux. A chaque étape, on réorthogonalise les deux vecteurs, et on les renorme par un procédé de Gram-Schmidt:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= (2\mathbb{J} - \mathbb{J}.\mathbb{L} - \mathbb{L}^T.\mathbb{J})^{-1}.\mathbb{J}.z_n \\ \mathbf{q}' &= (2\mathbb{J} - \mathbb{J}.\mathbb{L} - \mathbb{L}^T.\mathbb{J})^{-1}.\mathbb{J}.z'_n \\ \mathbf{b} &= \begin{pmatrix} \mathbf{q}^T \\ \mathbf{q}'^T \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{q}, \mathbf{q}') \\ \mathbf{b} &= \mathbf{s}^{-T}.\mathbf{s}^{-1} \\ z_{n+1} &= s_{1,1}\mathbf{q} + s_{1,2}\mathbf{q}' \\ z'_{n+1} &= s_{2,1}\mathbf{q} + s_{2,2}\mathbf{q}' \end{aligned}$$

Lorsque les composantes de z_{n+1} et z'_{n+1} ne varient presque plus, on a :

$$(2\mathbb{J} - \mathbb{J}.\mathbb{L} - \mathbb{L}^T.\mathbb{J})^{-1}.\mathbb{J}.z_n = \frac{1}{2 - 2 \cos \varphi_0} z_n$$

où φ_0 est l'argument de la valeur propre de \mathbb{L} la plus proche de 1.

On trouve aussi que :

$$(2\mathbb{J} - \mathbb{J}.\mathbb{L} - \mathbb{L}^T.\mathbb{J})^{-1}.\mathbb{J}.z'_{n+1} = \frac{1}{2 - 2 \cos \varphi'_0} z'_{n+1}$$

avec φ'_0 très proche de φ_0 .

On pose $U_0 = z_{n+1}$ et $U'_0 = z'_{n+1}$

• Déflation de l'opérateur

Pour continuer la procédure de diagonalisation, on utilise la propriété 3.6 qu'on a montrée au chapitre 3 ; si U_q est un vecteur propre associé à une autre valeur propre, alors :

$$\begin{aligned} U_q^T \cdot \mathbb{J} \cdot U_0 &= 0 \\ U_q^T \cdot \mathbb{J} \cdot U'_0 &= 0 \end{aligned}$$

Par contre, on a montré que $U'_0{}^T \cdot \mathbb{J} \cdot U_0 \neq 0$. On peut poser cette quantité égale à 1.

On décompose $x = y + \alpha U_0 + \beta U'_0$.

Regardons l'opérateur $(\mathbb{J} \cdot \mathbb{L} + \mathbb{L}^T \cdot \mathbb{J} - 2 \cos \varphi_0 \mathbb{J} \cdot U'_0 \cdot U_0^T \cdot \mathbb{J} + 2 \cos \varphi_0 \mathbb{J} \cdot U_0 \cdot U'_0{}^T \cdot \mathbb{J})$:

$$\begin{aligned} &(\mathbb{J} \cdot \mathbb{L} + \mathbb{L}^T \cdot \mathbb{J} - 2 \cos \varphi_0 \mathbb{J} \cdot U'_0 \cdot U_0^T \cdot \mathbb{J} + 2 \cos \varphi_0 \mathbb{J} \cdot U_0 \cdot U'_0{}^T \cdot \mathbb{J}) \cdot y \\ &= \mathbb{J} \cdot \mathbb{L} \cdot y + \mathbb{L}^T \cdot \mathbb{J} \cdot y - 2 \cos \varphi_0 \mathbb{J} \cdot U'_0 \cdot U_0^T \cdot \mathbb{J} \cdot y + 2 \cos \varphi_0 \mathbb{J} \cdot U_0 \cdot U'_0{}^T \cdot \mathbb{J} \cdot y \\ &= \mathbb{J} \cdot \mathbb{L} \cdot y + \mathbb{L}^T \cdot \mathbb{J} \cdot y \end{aligned}$$

La dernière égalité s'explique car y est une combinaison linéaire de vecteurs propres autres que U_0 et U'_0 . Pour le vecteur y cet opérateur est égal à l'opérateur initial.

$$\begin{aligned} &(\mathbb{J} \cdot \mathbb{L} + \mathbb{L}^T \cdot \mathbb{J} - 2 \cos \varphi_0 \mathbb{J} \cdot U'_0 \cdot U_0^T \cdot \mathbb{J} + 2 \cos \varphi_0 \mathbb{J} \cdot U_0 \cdot U'_0{}^T \cdot \mathbb{J}) \cdot (\alpha U_0 + \beta U'_0) \\ &= 2 \cos \varphi_0 \mathbb{J} \cdot (\alpha U_0 + \beta U'_0) - 2 \cos \varphi_0 \mathbb{J} \cdot (\alpha U_0 + \beta U'_0) = 0 \end{aligned}$$

Sur l'espace propre associé à φ_0 , cet opérateur est nul.

On peut donc continuer la même procédure d'itération avec cet opérateur. Les deux vecteurs propres qu'on va trouver sont associés à la seconde valeur de $\cos \varphi_n$ la plus proche de 1.

• Premiers résultats

L'algorithme de diagonalisation par itération a été programmé. Il a été testé avec des matrices antisymétriques quelconques. Il ne converge pas vite si les valeurs propres sont trop rapprochées. Les approximations successives sur les vecteurs propres font qu'on ne peut pas calculer un grand nombre de coefficients d'amplification.

Pour l'instant, les vecteurs propres calculés sont des combinaisons linéaires de la partie réelle et de la partie imaginaire des vecteurs propres de l'opérateur de propagation, associés à des valeurs propres conjuguées. D'après la propriété 9, on calcule les vecteurs propres de l'opérateur de propagation à partir de ce sous espace en diagonalisant une matrice 2×2 .

Cependant, s'il faut calculer un grand nombre de vecteurs propres de l'opérateur de propagation, cet algorithme n'est pas efficace. C'est pour cela qu'on va rechercher une méthode de diagonalisation différente.

6.1.2 Recherche de la partie imaginaire des valeurs propres

On peut aussi utiliser le problème intermédiaire de la recherche de la partie imaginaire des coefficients d'amplification :

$$\underbrace{(\mathbb{J}.\mathbb{L} - \mathbb{L}^T.\mathbb{J})}_{\mathbb{G}_i}.W^n = 2i \sin(\varphi_n)\mathbb{J}.W^n$$

Comme la matrice $\mathbb{J}.\mathbb{L} - \mathbb{L}^T.\mathbb{J}$ est symétrique, et que la matrice \mathbb{J} est antisymétrique, on peut se ramener à la codiagonalisation de deux opérateurs symétriques. En reprenant les calculs développés dans [Geradin & Rixen92], on a en posant $W^n = x^n + iy^n$:

$$\mathbb{G}_i.(x^n + iy^n) = 2i \sin \varphi_n \mathbb{J}.(x^n + iy^n) \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2 \sin(\varphi_n)} \mathbb{G}_i .x^n = \mathbb{J}.y^n & \text{égalité des parties réelles} \\ y^n = 2 \sin(\varphi_n) \mathbb{G}_i^{-1} .\mathbb{J}.x^n & \text{égalité des parties imaginaires} \end{cases}$$

En remplaçant la seconde équation dans la première, on trouve :

$$\mathbb{J}.\mathbb{G}_i^{-1} .\mathbb{J}.x^n = -\frac{1}{4 \sin^2(\varphi_n)} \mathbb{G}_i .x^n$$

Les deux matrices $\mathbb{J}.\mathbb{G}_i^{-1}.\mathbb{J}$ et \mathbb{G}_i sont symétriques. Par contre, on ne sait pas si elles sont positives. Pour cette raison, on n'a pas utilisé cette méthode.

6.1.3 Variation de la méthode de Lanczos

On utilise la relation vérifiée par la partie réelle des vecteurs propres :

$$\underbrace{(\mathbb{J}.\mathbb{L} + \mathbb{L}^T.\mathbb{J})}_{\mathbb{G}_r}.x^n = \left(\lambda_n + \frac{1}{\lambda_n}\right)\mathbb{J}.x^n$$

La matrice $i\mathbb{G}_r$ est hermitienne, et la matrice $i\mathbb{J}$ l'est aussi, on donc affaire à la codiagonalisation de deux opérateurs hermitiens. En revanche, on ne sait pas si elles sont positives. Pour cette raison, on n'a pas utilisé la méthode classique de Lanczos.

On propose une méthode qui s'en approche beaucoup.

• Factorisation de Choleski symplectique

On rappelle ici un résultat utilisé dans [Zhong & Williams95].

On pose $u = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On remarque que \mathbf{u} est unitaire : $\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{u} = \mathbf{1}$.

\mathbb{J} est une matrice de dimension paire $2n \times 2n$, antisymétrique. Toute matrice vérifiant ces propriétés et qui est inversible peut être décomposée sous la forme :

$$\mathbb{J} = \mathbb{A} \mathbb{D} \mathbb{A}^T$$

où \mathbb{D} est une matrice bloc-diagonale (D_i est un réel) :

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} D_{i-1} \mathbf{u} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_i \mathbf{u} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_{i+1} \mathbf{u} \end{pmatrix}$$

et où \mathbb{A} est une matrice réelle, bloc-sous-diagonale, dont les blocs sur la diagonale sont l'identité :

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{a}_{i,i-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{a}_{i+1,i-1} & \mathbf{a}_{i+1,i} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

La décomposition est donnée par la formule de récurrence sur i :

$$\begin{aligned} \forall j < i \quad \mathbf{a}_{i,j} &= \frac{1}{D_j} \left(\sum_{k=1}^{j-1} \mathbf{a}_{i,k} \cdot D_k \mathbf{u} \cdot [\mathbf{a}_{j,k}]^T - \mathbf{j}_{i,j} \right) \cdot \mathbf{u} \\ D_i \mathbf{u} &= \mathbf{j}_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} D_k \mathbf{a}_{i,k} \cdot \mathbf{u} \cdot [\mathbf{a}_{i,k}]^T = \mathbf{j}_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} \det(\mathbf{a}_{i,k}) D_k \mathbf{u} \\ \mathbf{a}_{i,i} &= \mathbf{1} \end{aligned}$$

• Réduction à la forme normale avec translation spectrale

On fait d'abord une translation spectrale. On va s'intéresser aux valeurs propres de \mathbb{L} proches de 1 et aux vecteurs propres associés. On écrit donc le problème de la recherche de la partie réelle des valeurs propres sous la forme :

$$((2 + \epsilon)\mathbb{J} - \mathbb{J} \cdot \mathbb{L} - \mathbb{L}^T \cdot \mathbb{J}) \cdot \mathbf{x}^n = \left((2 + \epsilon) - \lambda_n - \frac{1}{\lambda_n} \right) \mathbb{A} \mathbb{D} \mathbb{A}^T \cdot \mathbf{x}^n$$

On utilise la factorisation précédente. On pose $\mathbf{y}^n = \mathbb{A}^T \mathbf{x}^n$. On peut donc redéfinir le problème aux valeurs propres avec translation spectrale sous la forme suivante :

$$[\mathbb{A}^{-1} \cdot ((2 + \epsilon)\mathbb{J} - \mathbb{J} \cdot \mathbb{L} - \mathbb{L}^T \cdot \mathbb{J}) \cdot \mathbb{A}^{-T}] \cdot \mathbf{y}^n = \left((2 + \epsilon) - \lambda_n - \frac{1}{\lambda_n} \right) \mathbb{D} \cdot \mathbf{y}^n$$

Pour deux vecteurs propres \mathbf{x}^n et \mathbf{x}^m associés à deux valeurs propres distinctes, on a montré dans le chapitre 3 la propriété 3.6 :

$$\mathbf{x}^{mT} \cdot \mathbb{J} \cdot \mathbf{x}^n = 0$$

Avec la décomposition introduite, on trouve maintenant que cette propriété se traduit par la relation :

$$\mathbf{y}^{mT} \cdot \mathbb{D} \cdot \mathbf{y}^n = \mathbf{x}^{mT} \cdot \mathbb{A} \mathbb{D} \mathbb{A}^T \cdot \mathbf{x}^n = 0$$

De même, pour deux vecteurs propres \mathbf{x}^n et \mathbf{x}'^n associés à la même valeur propre, on a montré la propriété 3.6 :

$$\mathbf{x}^{nT} \cdot \mathbb{J} \cdot \mathbf{x}'^n = 1$$

Cette propriété se traduit par la relation suivante:

$$\mathbf{y}^{nT} \cdot \mathbb{D} \cdot \mathbf{y}'^n = 1$$

Dans la suite, on préfère se ramener par une inversion de $[\mathbf{A}^{-1} \cdot ((2 + \epsilon)\mathbb{J} - \mathbb{J} \cdot \mathbb{L} - \mathbb{L}^T \cdot \mathbb{J}) \cdot \mathbf{A}^{-T}]$ au problème classique suivant :

$$\underbrace{\mathbf{A}^T \cdot ((2 + \epsilon)\mathbb{J} - \mathbb{J} \cdot \mathbb{L} - \mathbb{L}^T \cdot \mathbb{J})^{-1} \cdot \mathbf{A}}_{\mathbb{K}} \cdot \mathbb{D} \cdot \mathbf{y}^n = \frac{1}{(2 + \epsilon) - \lambda_n - \frac{1}{\lambda_n}} \mathbf{y}^n$$

La matrice \mathbb{K} est antisymétrique réelle. Pour la calculer, il faut inverser la matrice antisymétrique $2\mathbb{J} - \mathbb{J} \cdot \mathbb{L} - \mathbb{L}^T \cdot \mathbb{J}$. Pour ce faire, on peut utiliser la décomposition de Choleski symplectique.

• **Algorithme de Lanczos symplectique**

L'idée consiste à construire un sous-espace contenant les premiers vecteurs propres de $\mathbb{K} \cdot \mathbb{D}$, associés aux plus grandes valeurs propres. Par conséquent, on fait d'une part ressortir les vecteurs propres associés aux plus grandes valeurs propres par itérations successives. D'autre part, il faut faire en sorte que le sous espace qu'on construit soit "presque" stable par $\mathbb{K} \cdot \mathbb{D}$: le dernier vecteur est calculé de façon à ce qu'il soit orthogonal au sens de \mathbb{D} aux autres vecteurs construits. Si la procédure converge, les vecteurs propres de $\mathbb{K} \cdot \mathbb{D}$ associés aux grandes valeurs propres sont dans le sous-espace construit, et par conséquent le dernier vecteur ne contiendra plus de composantes dans ces directions.

◇ *itération numéro 1 :*

On part d'un couple de vecteurs libres, $\tilde{\mathbf{q}}_0 = (\mathbf{q}_0, \mathbf{q}'_0)$. Ce couple de vecteurs de départ devant être libre, on peut les choisir tels que :

$$\tilde{\mathbf{q}}_0^T \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{u}$$

On construit la séquence de Lanczos symplectique par itération de $\mathbb{K} \cdot \mathbb{D}$ sur chacun des deux vecteurs initiaux. On obtient dans chaque cas une composante qui appartient à l'espace des vecteurs de Lanczos déjà construits, et la direction du nouveau vecteur de Lanczos.

Les directions des deux nouveaux vecteurs de Lanczos sont choisies pour obtenir la propriété $\tilde{\mathbf{q}}_1^T \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_0 = 0$.

La norme des nouveaux vecteurs de Lanczos est choisie pour avoir $\tilde{\mathbf{q}}_1^T \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_1 = \mathbf{u}$. A cause de l'antisymétrie de \mathbb{D} , cela représente une seule équation.

On peut poser la formule suivante, où a_0 est un réel, c_1 est un réel positif, et s_1 est une matrice 2×2 à déterminer entre :

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$c_1 \hat{q}_1 \cdot s_1 = \underbrace{\mathbb{K}\mathbb{D} \cdot \tilde{q}_0}_{(\mathbb{K}\mathbb{D} \cdot q_0, \mathbb{K}\mathbb{D} \cdot q'_0)} - a_0 \tilde{q}_0 \quad (6.1)$$

Le réel a_0 est choisi tel que $\hat{q}_1^T \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{q}_0 = 0$. En multipliant cette formule à gauche par s_1^T et par c_1 , on trouve que cette condition est équivalente à $(c_1 \hat{q}_1 \cdot s_1)^T \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{q}_0 = 0$. En remplaçant le premier terme du membre de gauche par sa valeur donnée par la formule 6.1, on trouve une équation qui ne porte que sur a_0 :

$$\hat{q}_0^T \cdot \mathbb{D}^T \cdot \mathbb{K}^T \cdot \mathbb{D} \tilde{q}_0 - a_0 \hat{q}_0^T \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{q}_0 = 0$$

On rappelle que \mathbb{D} , \mathbb{K} sont antisymétriques, donc $\mathbb{D}^T \cdot \mathbb{K}^T \cdot \mathbb{D} = -\mathbb{D}^T \cdot \mathbb{K}\mathbb{D}$ est aussi antisymétrique. Un tel nombre a_0 existe car il traduit l'égalité de deux matrices 2×2 antisymétriques, qui ne dépendent que d'un réel.

Avec ce choix de a_0 , on définit le nombre x_1 par la formule suivante, qui traduit la proportionnalité de deux matrices antisymétriques de dimension 2×2 :

$$(c_1 \hat{q}_1 \cdot s_1)^T \cdot \mathbb{D} \cdot (c_1 \hat{q}_1 \cdot s_1) = (\mathbb{K}\mathbb{D} \cdot \tilde{q}_0 - a_0 \tilde{q}_0)^T \cdot \mathbb{D} \cdot (\mathbb{K}\mathbb{D} \cdot \tilde{q}_0 - a_0 \tilde{q}_0) = x_1 \mathbf{u}$$

On choisit la matrice s_1 pour que le réel x_1 soit positif. Cette opération est toujours possible car l'équation ci-dessus peut s'écrire aussi $c_1^2 \hat{q}_1^T \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{q}_1 = x_1 s_1 \cdot \mathbf{u} \cdot s_1$ et que les deux possibilités sur s_1 correspondent à $s_1 \cdot \mathbf{u} \cdot s_1 = \pm \mathbf{u}$.

Enfin, le nombre c_1 est pris égal à $\sqrt{x_1}$. On obtient alors la propriété voulue :

$$\hat{q}_1^T \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{q}_1 = \mathbf{u}$$

◊ *itération numéro 2 :*

On construit les deux nouveaux vecteurs de Lanczos par itération de $\mathbb{K}\mathbb{D}$ sur chacun des vecteurs du couple \tilde{q}_1 . On obtient dans chaque cas une composante qui appartient à l'espace des vecteurs de Lanczos déjà construits, et la direction du nouveau vecteur de Lanczos.

Les directions des deux nouveaux vecteurs de Lanczos sont choisies pour obtenir les propriétés $\hat{q}_2^T \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{q}_0 = 0$ et $\tilde{q}_2^T \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{q}_1 = 0$.

La norme des nouveaux vecteurs de Lanczos est choisie pour avoir $\tilde{q}_2^T \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{q}_2 = \mathbf{u}$. A cause de l'antisymétrie de \mathbb{D} , cela représente une seule équation.

Avec a_1 réel, c_2 réel positif, \mathbf{b}_0 une matrice 2×2 , et \mathbf{s}_2 une matrice 2×2 à déterminer entre :

$$\mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

on pose :

$$c_2 \tilde{\mathbf{q}}_2 \cdot \mathbf{s}_2 = \underbrace{\mathbb{K}\mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_1}_{(\mathbb{K}\mathbb{D} \cdot \mathbf{q}_1, \mathbb{K}\mathbb{D} \cdot \mathbf{q}'_1)} - a_1 \tilde{\mathbf{q}}_1 - \tilde{\mathbf{q}}_0 \cdot \mathbf{b}_0$$

La matrice \mathbf{b}_0 est choisie telle que $\tilde{\mathbf{q}}_2^T \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{0}$. En multipliant à gauche par \mathbf{s}_2^T et par c_2 , on obtient : $(c_2 \tilde{\mathbf{q}}_2 \cdot \mathbf{s}_2)^T \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{0}$. En remplaçant $c_2 \tilde{\mathbf{q}}_2 \cdot \mathbf{s}_2$ par son expression dans l'équation ci-dessus, on trouve l'équation :

$$\tilde{\mathbf{q}}_1^T \cdot \mathbb{D} \cdot \mathbb{K} \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_0 - a_1 \tilde{\mathbf{q}}_1^T \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_0 - \mathbf{b}_0^T \cdot \tilde{\mathbf{q}}_0^T \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{0}$$

En utilisant que $\tilde{\mathbf{q}}_0^T \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{u}$ et $\tilde{\mathbf{q}}_1^T \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{0}$, on trouve que $\mathbf{b}_0^T \cdot \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{q}}_1^T \cdot \mathbb{D} \cdot (\mathbb{K}\mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_0)$. En utilisant l'expression de $\mathbb{K}\mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_0$ donnée par la formule 6.1, puis les relations d'orthogonalité sur $\tilde{\mathbf{q}}_1$ et $\tilde{\mathbf{q}}_0$, on trouve que $\mathbf{b}_0 = c_1 \mathbf{u}^{-1} \cdot \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{u}$:

$$\mathbf{b}_0^T \cdot \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{q}}_1^T \cdot \mathbb{D} \cdot (\mathbb{K}\mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_0) = \tilde{\mathbf{q}}_1^T \cdot \mathbb{D} \cdot (c_1 \tilde{\mathbf{q}}_1 \cdot \mathbf{s}_1 + a_0 \tilde{\mathbf{q}}_0) = c_1 \mathbf{u} \cdot \mathbf{s}_1$$

On remarque que $\mathbf{u}^{-1} \cdot \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{u}$ est une matrice diagonale :

$$\mathbf{u}^{-1} \cdot \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{u} = \begin{cases} 1 & \text{si } s_1 = 1 \\ -s_1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le réel a_1 est choisi tel que $\tilde{\mathbf{q}}_2^T \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_1 = \mathbf{0}$. En multipliant à gauche cette condition par \mathbf{s}_2^T et par c_2 , on trouve une condition équivalente : $(c_2 \tilde{\mathbf{q}}_2 \cdot \mathbf{s}_2)^T \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_1 = \mathbf{0}$. En remplaçant $c_2 \tilde{\mathbf{q}}_2 \cdot \mathbf{s}_2$ par son expression, on trouve une équation qui ne fait intervenir que a_1 :

$$\tilde{\mathbf{q}}_1^T \cdot \mathbb{D} \cdot \mathbb{K} \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_1 - a_1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

Il est toujours possible de trouver un tel nombre a_1 car il traduit l'égalité de deux matrices antisymétriques réelles.

Enfin, le nombre c_2 et la matrice \mathbf{s}_2 sont choisis pour avoir :

$$\tilde{\mathbf{q}}_2^T \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{u}$$

◇ *itération numéro $p + 1$:*

Plus généralement, connaissant $\tilde{\mathbf{q}}_p$ et $\tilde{\mathbf{q}}_{p-1}$ tels que :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{q}}_p^T \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{p-1} = \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{q}}_p^T \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_p = \mathbf{u} \\ \tilde{\mathbf{q}}_{p-1}^T \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{p-1} = \mathbf{u} \end{cases}$$

on pose :

$$c_{p+1} \tilde{\mathbf{q}}_{p+1} \cdot \mathbf{s}_{p+1} = \mathbb{K} \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_p - a_p \tilde{\mathbf{q}}_p - \tilde{\mathbf{q}}_{p-1} \cdot \mathbf{b}_{p-1}$$

Dans cette formule, a_p est un réel, c_{p+1} est un réel positif, et \mathbf{s}_{p+1} est une matrice 2×2 à déterminer entre :

$$\mathbf{s}_{p+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{s}_{p+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

De plus \mathbf{b}_{p-1} est une matrice 2×2 , diagonale.

Pour vérifier les hypothèses de récurrence, on impose les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{q}}_{p+1} \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{p-1} &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow (c_{p+1} \tilde{\mathbf{q}}_{p+1} \cdot \mathbf{s}_{p+1})^T \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{p-1} &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow (\mathbb{K} \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_p - a_p \tilde{\mathbf{q}}_p - \tilde{\mathbf{q}}_{p-1} \cdot \mathbf{b}_{p-1})^T \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{p-1} &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow \mathbf{b}_{p-1}^T \cdot \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{q}}_p^T \cdot \mathbb{D} \cdot \mathbb{K} \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{p-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{q}}_{p+1} \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_p &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow (c_{p+1} \tilde{\mathbf{q}}_{p+1} \cdot \mathbf{s}_{p+1})^T \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_p &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow (\mathbb{K} \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_p - a_p \tilde{\mathbf{q}}_p - \tilde{\mathbf{q}}_{p-1} \cdot \mathbf{b}_{p-1})^T \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_p &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow a_p \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{q}}_p^T \cdot \mathbb{D} \cdot \mathbb{K} \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_p \end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{q}}_{p+1}^T \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{p+1} = \mathbf{u} \Rightarrow c_{p+1} = \sqrt{x_{p+1}}$$

On a la relation de récurrence au rang p qui sert à calculer $\mathbf{b}_{p-1} = c_p \mathbf{u}^{-1} \cdot \mathbf{s}_p \cdot \mathbf{u}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{p-1}^T \cdot \mathbf{u} &= \tilde{\mathbf{q}}_p^T \cdot \mathbb{D} \cdot (\mathbb{K} \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{p-1}) \\ &= \tilde{\mathbf{q}}_p^T \cdot \mathbb{D} \cdot (c_p \tilde{\mathbf{q}}_p \cdot \mathbf{s}_p + a_{p-1} \tilde{\mathbf{q}}_{p-1} + \tilde{\mathbf{q}}_{p-2} \cdot \mathbf{b}_{p-2}) = c_p \mathbf{u} \cdot \mathbf{s}_p \end{aligned}$$

On a aussi la relation de récurrence au rang $p-j$, $1 \leq j \leq p-1$, qui prouve que $\tilde{\mathbf{q}}_{p+1}$ ainsi construit est orthogonal pour \mathbb{D} à $\tilde{\mathbf{q}}_{p-1-j}$:

$$\begin{aligned} (c_{p+1} \tilde{\mathbf{q}}_{p+1} \cdot \mathbf{s}_{p+1})^T \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{p-1-j} &= \tilde{\mathbf{q}}_p^T \cdot \mathbb{D} \cdot (\mathbb{K} \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{p-1-j}) \\ &= \tilde{\mathbf{q}}_p^T \cdot \mathbb{D} \cdot (c_{p-j} \tilde{\mathbf{q}}_{p-j} \cdot \mathbf{s}_{p-j} + a_{p-1-j} \tilde{\mathbf{q}}_{p-1-j} + \tilde{\mathbf{q}}_{p-2-j} \cdot \mathbf{b}_{p-2-j}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

On a bien comme résultat l'orthogonalité du dernier vecteur avec tous les vecteurs précédents. Cependant, les erreurs numériques font perdre cette orthogonalité. On pourra éliminer une composante sur un vecteur de Lanczos de couple de rang $p-1-j$ en utilisant la formule suivante. Si $\tilde{\mathbf{q}}_{p+1}$ les composantes suivantes inconnues sur les vecteurs de Lanczos déjà calculés :

$$\tilde{\mathbf{q}}_{p+1} = \alpha (\mathbf{q}'_{p-1-j}, 0) - \beta (\mathbf{q}_{p-1-j}, 0) + \gamma (0, \mathbf{q}'_{p-1-j}) - \delta (0, \mathbf{q}_{p-1-j}) + \dots$$

alors connaissant le couple de vecteur $\tilde{\mathbf{q}}_{p-1-j}$, et en supposant que tous les vecteurs de Lanczos précédemment calculés sont orthogonaux pour \mathbb{D} , alors les valeurs de α , β , γ et δ sont calculables par la formule :

$$\tilde{\mathbf{q}}_{p+1}^T \cdot \mathbb{D} \tilde{\mathbf{q}}_{p-1-j} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

Cette formule permet de restaurer l'orthogonalité.

On a convergence vers un vecteur propre initial si le reste est proche de 0 :

$$|c_{p+1}z_p| \|\mathbf{q}_{p+1}\| < \epsilon \quad (6.2)$$

L'autre intérêt d'avoir séparé la recherche des vecteurs de Lanczos en deux suites qui vérifient l'orthogonalité pour \mathbb{D} tient au fait qu'aucune des deux suites ne contient deux vecteurs propres du problème initial qui sont associés à la même valeur propre. En effet, soient deux combinaisons linéaires quelconques de vecteurs d'une des suites :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(1)} &= \sum_{i=1}^p z_i^{(1)} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{y}^{(2)} &= \sum_{i=1}^p z_i^{(2)} \mathbf{q}_i \end{aligned}$$

Alors comme $\mathbf{q}_i^T \cdot \mathbb{D} \cdot \mathbf{q}_j = 0$, on en déduit que :

$$\mathbf{y}^{(1)T} \cdot \mathbb{D} \cdot \mathbf{y}^{(2)} = 0$$

Or on a vu que deux vecteurs propres associés à la même valeur propre sont tels que :

$$\mathbf{y}^m{}^T \cdot \mathbb{D} \cdot \mathbf{y}'^n = 1$$

On se ramène donc au problème de la diagonalisation de deux matrices réelles, tridiagonales, de dimension réduite p et n'ayant pas a priori de valeurs propres multiples. C'est un problème bien conditionné pour un algorithme QR.

Cette méthode a été programmée. Dans le cas de matrice de petite taille (jusqu'à 8×8), elle permet de calculer la totalité des valeurs propres. On trouve deux séries de valeurs propres réelles, dont les valeurs sont dans le bon intervalle pour être interprétables en terme de $\cos \varphi_n$. Toujours dans le cas de matrice de petite taille, on a comparé les résultats de cet algorithme avec ceux fournis par le logiciel de calcul formel *Mathematica*. On trouve des résultats identiques à 6 chiffres significatifs.

On a aussi vérifié que les vecteurs obtenus par recombinaison $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^p z_i \mathbf{q}_i$ vérifiaient $\mathbb{K} \cdot \mathbb{D} \cdot \mathbf{y} = \nu \mathbf{y}$.

On remarque que dans le cas de matrices de grande taille, cette méthode converge beaucoup plus vite que la méthode de la puissance. L'algorithme de Lanczos calcule les mêmes valeurs propres que l'algorithme puissance.

6.2 Intégration numérique des équations d'équilibre

• Le problème étudié et la méthode de résolution

Pour déterminer un opérateur de propagation libre \mathbb{L} , on a programmé le modèle d'intégration numérique des équations du modèle simplifié par l'algorithme Hilber-Hughes-Taylor (HHT). Les équations algébriques à résoudre sont présentées dans l'annexe B.

La méthode d'intégration des équations d'équilibre par l'algorithme HHT est coûteuse en temps de calcul. Elle pourrait être avantageusement remplacée par la méthode proposée dans [Sinha & Butcher97]. Cette méthode semi-analytique utilise la décomposition de l'opérateur différentiel qui dépend du temps et qui définit l'évolution du système en une série de polynômes de Chebyshev en temps en facteurs d'opérateur différentiel indépendant du temps. La solution se calcule de manière itérative.

On choisit d'étudier un pneumatique à rainures transversales.

◊ Les caractéristiques géométriques sont :

- . un rayon de bande de roulement R_b de 0,3 m
- . une largeur de bande de roulement e de 0,2 m
- . 50 rainures dans la bande de roulement d'une largeur de 9,4 mm

◊ Les caractéristiques mécaniques des flancs sont :

- . une rigidité normale k_N de 100 kN
- . une rigidité tangentielle k_T de 33 kN

◊ Les caractéristiques mécaniques des patins de gomme sont :

- . une masse surfacique μ de 15 kg/m³
- . une rigidité de flexion D de 35 Nm

◊ Les caractéristiques mécaniques des rainures sont :

- . une masse surfacique μ de 5 kg/m³
- . une rigidité de flexion D de 30 Nm

◊ La vitesse du véhicule est constante et vaut 8,33 m/s, et on étudie l'influence de la taille de la partie du pneumatique qui n'est pas en contact avec la chaussée, on choisit 3 valeurs, 320 degré (correspondant à une zone de contact de 20 cm environ), 330 degrés (correspondant à 16 cm) et 340 degrés (correspondant à 10 cm).

◊ Les caractéristiques de maillage sont :

- . une période d'analyse d' 1/50^{ième} de période de rotation de la roue, on profite de la périodicité du motif de bande de roulement

- . un pas de temps de 1/3000 s
- . une géométrie découpée en 900 intervalles soit un intervalle inférieur à de 3 mm.

On a vu en partie bibliographique qu'il n'est pas nécessaire de prendre en compte les vibrations de petite longueur d'onde, car on a vu au chapitre 1 que les ondes de petite longueur d'onde ($k_f \geq \frac{\omega}{c}$) n'émettent pas de son. Pour calculer l'opérateur de propagation, on le restreint à une base finie de fonctions oscillantes, dont la longueur d'oscillation est limitée.

On a choisi de décomposer le déplacement initial et sa dérivée partielle par rapport au temps sur la base des fonctions orthonormées $\frac{1}{\sqrt{2\theta_0}} \sin\left(p\pi \frac{\theta + \theta_0}{2\theta_0}\right)$. Cette base ne vérifie pas toutes les conditions aux limites et on a donc négligé certaines conditions de bord.

Concrètement, l'algorithme procède comme suit :

1. on choisit un déplacement initial aux points du maillage égal à un des vecteurs de base et on prend une dérivée partielle par rapport au temps nulle, ou inversement.
2. on calcule la solution au temps $t_i + N$ par l'algorithme HHT avec un certain choix des paramètres α, β, γ .
3. on projette le déplacement et dérivée partielle par rapport au temps obtenus aux points du maillage sur la base de départ (elle est orthonormée). On construit ainsi une colonne de l'opérateur de propagation.

Cette procédure converge lorsque le pas du maillage en espace diminue.

Comme dans le cas classique, lorsque le pas de temps varie, on règle la partie des vibrations qui seront amorties par l'algorithme.

• Résultats

L'objectif maintenant est de régler les paramètres de l'algorithme HHT pour avoir un système à peu près conservatif.

On va rechercher les paramètres α, β et γ qui redonnent des valeurs propres de module 1. Comme on travaille avec un système qui a peu de degré de liberté, on va calculer avec un algorithme général toutes les valeurs propres de l'opérateur de propagation. Cet algorithme consiste à équilibrer la matrice puis utiliser un algorithme QR (voir numerical recipies par exemple). On a choisi 40 fonctions de base, on trouve donc 80 valeurs propres.

On présente un exemple pour un pneumatique sans rainure avec $\alpha = 0, \beta = 0,28$ et $\gamma = 0,55$.

Les coefficients proches de 0 s'expliquent par la projection orthogonale qui coupe une partie de la réponse. Les coefficients dont le module est plus grand que 1 peuvent s'expliquer par le fait que la famille des fonctions de base ne vérifie pas les conditions de bord et engendrent des erreurs numériques.

Les résultats pour un pneumatique avec rainures sont actuellement moins bons. On présente le cas $\alpha = 0,4$, $\beta = 0,5$ et $\gamma = 1,0$.

La recherche des paramètres dans ce cas est en cours.

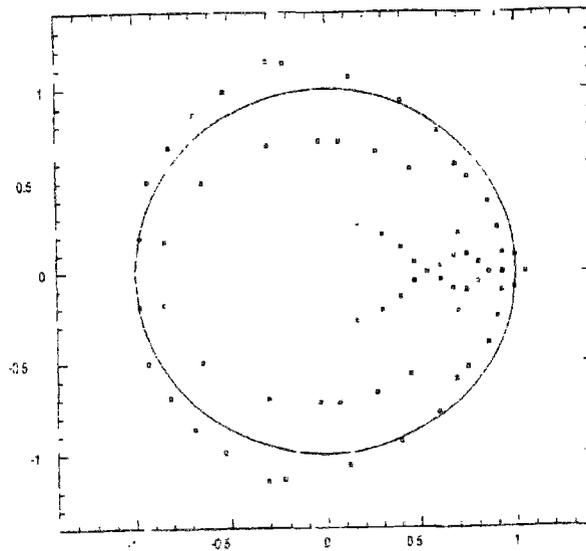


FIG. 6.1 - *Coefficients d'amplification d'un pneumatique lisse*

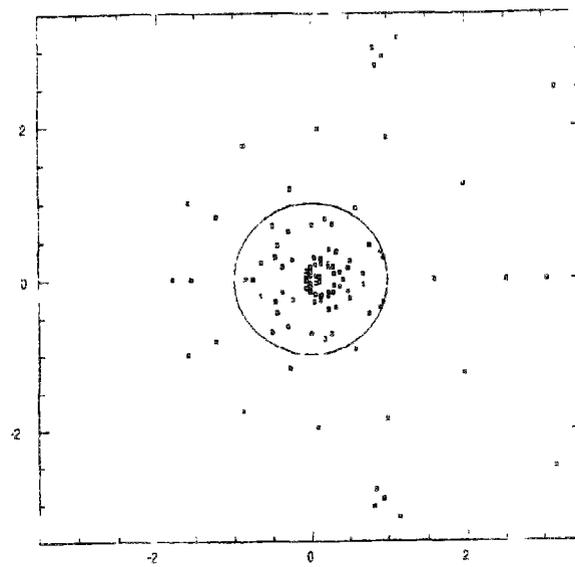


FIG. 6.2 - *Coefficients d'amplification d'un pneumatique avec rainures*

Conclusion

On a mis au point une procédure de recherche de la partie réelle des coefficients d'amplification rapide, qui permet d'extraire les valeurs propres proches de 1 d'un système à grand nombre de degré de liberté.

En entrée de ce programme, il faut fournir l'opérateur de propagation libre sans dissipation. On a programmé l'algorithme Hilber-Hughes-Taylor qui est suffisamment souple pour permettre un calcul sans instabilité numérique et sans trop de dissipation.

Les paramètres α , β , γ ont pu être ajustés dans certains cas particuliers et donnent une approximation de l'opérateur de propagation libre sans dissipation. La généralisation est en cours.

Conclusion

Les apports de ce travail de thèse

• *L'excitation des vibrations du pneumatique*

On a mis en évidence une source d'excitation au niveau des lignes d'attaque et de fuite de la zone de contact dont l'amplitude varie comme le carré de la vitesse de roulement.

Le bruit émis par les pneumatiques augmente effectivement comme le carré de la vitesse de roulement, et la théorie qu'on propose est une des deux théories qui explique ce phénomène dans le cas de l'excitation par le défilement du motif de la bande de roulement. L'autre explication porte le nom de "air pumping". Ce n'est pas une théorie de vibration de pneumatique, car on suppose qu'il n'y a pas d'effet d'inertie.

C'est à ma connaissance la seule théorie qui explique une dépendance en carré de la vitesse dans le cas d'une excitation par la chaussée.

Cette théorie suggère de rechercher une forme la plus circulaire possible pour la bande de roulement afin de diminuer l'amplitude de l'excitation, et à la limite obtenir un bruit émis par le roulement des pneumatiques qui ne serait que proportionnel à la vitesse de roulement.

• *Les phénomènes d'amplification par le pneumatique*

Si on accepte les hypothèses de découplage mécanique qu'on a introduites, ces amplifications se prédisent à partir de l'étude de la propagation libre des ondes dans le pneumatique. Les amplifications prédites ne sont pas des fréquences pures, ce qui est en accord avec l'expérience.

Du point de vue théorique, les sources de vibrations "aléatoire" comme l'indentation et le glissement de la chaussée sont d'autant plus amplifiées que le pneumatique dissipe peu les vibrations. De ce point de vue là, tous les pneumatiques ont une structure susceptible d'amplifier ce type de source. La réduction de la rugosité de la chaussée ainsi et du glissement instationnaire est une bonne méthode de réduction du bruit de roulement. C'est d'ailleurs celle qui est utilisée actuellement, avec l'utilisation de revêtements de chaussée micro-rugueux. On peut aussi chercher à dissiper efficacement les vibrations. Les matériaux composants les pneumatiques sont soumis à d'autres contraintes, mais il existe par

exemple des méthodes de contrôle passif des vibrations en ajoutant une structure frottante.

Toujours du point de vue théorique, les sources de vibration périodiques comme l'excitation par défilement du motif de bande de roulement peuvent être amplifiées par le pneumatique. L'étude entamée (et qui mérite d'être poursuivie) ne permet pas encore de conclure s'il existe toujours des systèmes d'ondes libres dans la structure qui se propagent en phase avec la rotation de la roue, et si les vibrations émises à différents instants peuvent se superposer constructivement. Mais il semble donc possible de limiter cette composante périodique du bruit des pneumatiques en optimisant la structure du pneumatique, contrairement à la fluctuation.

- *La prévision par des outils numériques des amplifications*

On est parvenu à un algorithme pour calculer les coefficients d'amplification. Il permet d'extraire les coefficients d'amplification proche de 1 d'un système comportant un grand nombre de degrés de liberté. Cette méthode nécessite le calcul de l'opérateur de propagation libre sans dissipation.

Les perspectives envisagées

- Ce travail nécessite une vérification expérimentale.

Les sources d'excitation qui ne sont pas situées sur les lignes d'attaque ou de fuite de la zone de contact n'ont pas été bien identifiées. Même si une mesure montre qu'elles ne sont pas de grande amplitude, cela ne suffit pas.

- La détermination de l'état de contrainte dans la carcasse du pneumatique reste un problème ouvert. Cette caractéristique sert à déterminer les propriétés de propagation des ondes dans le pneumatique.
- Le modèle simplifié de pneumatique qui a été utilisé est dans l'état actuel de nos connaissances peu crédible. Il est certes simple, mais son aspect de problème plan est difficile à justifier. La modélisation d'une réaction des flancs linéaire est aussi difficile à justifier. On a aussi vu que l'hypothèse de poutre de Bernoulli est incohérente avec la modélisation de l'excitation. La simplification qui consiste à tenir compte des rainures uniquement par une rigidité de flexion de poutre variable ou une masse variable est sans doute grossière. C'est pourtant un aspect important qui conditionne les amplifications.

On pourrait développer un modèle par éléments finis, posé sur une géométrie étendue aux rainures, indépendante du temps dans le repère lié au véhicule. Le défilement des rainures conduirait à une dépendance en temps des caractéristiques mécaniques.

- On a supposé que la dissipation était faible, pour pouvoir la négliger dans un premier temps. Il faudrait développer la prise en compte de la dissipation pour s'en assurer.
- Il est nécessaire de prolonger l'étude numérique de l'intégration temporelle des équations d'équilibre.

L'algorithme HHT a donné des résultats convenables dans certains cas particulier. Ce n'est pas le seul algorithme et on a cité par exemple une méthode semi analytique.

- Il serait intéressant de prévoir le rayonnement, afin de comprendre dans quels cas un mode résonant émet beaucoup de bruit, et dans quel cas il n'en émet pas.

Annexe A

Propriété symplectique du modèle simplifié

A.1 Expression de la forme symplectique

On va voir que le modèle simplifié vérifie une relation du type conservation d'une forme symplectique. Cette relation va nous servir à tester la résolution numérique et à calculer la phase des coefficients d'amplification.

L'objectif est de déterminer l'expression de cette forme.

On part de l'équation d'équilibre de propagation libre vérifiée par une solution ⁽¹⁾ :

$$+\frac{\partial^3 \widehat{M}^{(1)}}{\partial \theta^3} + \frac{\partial \widehat{M}^{(1)}}{\partial \theta} - \widehat{k}_T \widehat{\xi}_T^{(1)} + \widehat{k}_N \frac{\widehat{\xi}_N^{(1)}}{\partial \theta} = \widehat{\mu} \widehat{a}_T^{(1)} - \frac{\partial(\widehat{\mu} \widehat{a}_N^{(1)})}{\partial \theta}$$

On multiplie par une fonction ⁽²⁾ qui dépend de t et de θ . On intègre en temps entre 0 et 1, et en angle entre $-\theta_0$ et θ_0 .

On regarde le terme en moments :

$$\int_0^1 \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \left(\frac{\partial^3 \widehat{M}^{(1)}}{\partial \theta^3} + \frac{\partial \widehat{M}^{(1)}}{\partial \theta} \right) \cdot \widehat{\xi}_T^{(2)} \, d\theta \, dt$$

Avec des intégrations par parties, et les conditions aux limites nulles pour $\widehat{\xi}_T^{(2)}$, $\frac{\partial \widehat{\xi}_T^{(2)}}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial^2 \widehat{\xi}_T^{(2)}}{\partial \theta^2}$, on se ramène à l'expression symétrique :

$$-\int_0^1 \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \widehat{M}^{(1)} \left(\frac{\partial^3 \widehat{\xi}_T^{(2)}}{\partial \theta^3} + \frac{\partial \widehat{\xi}_T^{(2)}}{\partial \theta} \right) \, d\theta \, dt = -\int_0^1 \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \widehat{D} \frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial \omega^{(2)}}{\partial \theta} \, d\theta \, dt$$

Si $\widehat{\xi}_T^{(1)}$ vérifie les mêmes conditions aux limites, on se ramènera à l'expression :

$$\int_0^1 \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \left(\frac{\partial^3 \widehat{M}^{(2)}}{\partial \theta^3} + \frac{\partial \widehat{M}^{(2)}}{\partial \theta} \right) \cdot \widehat{\xi}_T^{(1)} \, d\theta \, d\mathfrak{t}$$

De même, on a l'égalité :

$$\int_0^1 \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \left(-\widehat{k}_T \widehat{\xi}_T^{(1)} + \widehat{k}_N \frac{\widehat{\xi}_N^{(1)}}{\partial \theta} \right) \widehat{\xi}_T^{(2)} \, d\theta \, d\mathfrak{t} = \int_0^1 \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \left(-\widehat{k}_T \widehat{\xi}_T^{(2)} + \widehat{k}_N \frac{\widehat{\xi}_N^{(2)}}{\partial \theta} \right) \widehat{\xi}_T^{(1)} \, d\theta \, d\mathfrak{t}$$

Le terme en accélération s'écrit :

$$\int_0^1 \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \left(\widehat{\mu} \widehat{a}_T^{(1)} - \frac{\partial(\widehat{\mu} \widehat{a}_N^{(1)})}{\partial \theta} \right) \widehat{\xi}_T^{(2)} \, d\theta \, d\mathfrak{t}$$

Avec une intégration par partie et la condition d'inextensibilité $\frac{\partial \widehat{\xi}_T^{(2)}}{\partial \theta} = \widehat{\xi}_N^{(2)}$, on obtient :

$$\int_0^1 \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \left(\widehat{\mu} \widehat{a}_T^{(1)} \widehat{\xi}_T^{(2)} + \widehat{\mu} \widehat{a}_N^{(1)} \widehat{\xi}_N^{(2)} \right) \, d\theta \, d\mathfrak{t}$$

On utilise l'expression de $\widehat{a}_T^{(1)}$ et $\widehat{a}_N^{(1)}$:

$$\begin{cases} \widehat{a}_T^{(1)} = \frac{\partial}{\partial t} \widehat{u}_T^{(1)} + 2\pi \frac{\partial}{\partial \theta} \widehat{u}_T^{(1)} - 2\pi \widehat{u}_N^{(1)} \\ \widehat{a}_N^{(1)} = \frac{\partial}{\partial t} \widehat{u}_N^{(1)} + 2\pi \frac{\partial}{\partial \theta} \widehat{u}_N^{(1)} + 2\pi \widehat{u}_T^{(1)} \end{cases}$$

On utilise aussi la conservation de la masse $\frac{\partial}{\partial t} \widehat{\mu} + 2\pi \frac{\partial}{\partial \theta} \widehat{\mu} = 0$. On obtient alors :

$$\int_0^1 \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \left(\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} (\widehat{\mu} \widehat{u}_T^{(1)}) + 2\pi \frac{\partial}{\partial \theta} (\widehat{\mu} \widehat{u}_T^{(1)}) - 2\pi \widehat{\mu} \widehat{u}_N^{(1)} \right) \widehat{\xi}_T^{(2)} \\ & + \left(\frac{\partial}{\partial t} (\widehat{\mu} \widehat{u}_N^{(1)}) + 2\pi \frac{\partial}{\partial \theta} (\widehat{\mu} \widehat{u}_N^{(1)}) + 2\pi \widehat{\mu} \widehat{u}_T^{(1)} \right) \widehat{\xi}_N^{(2)} \end{aligned} \right) \, d\theta \, d\mathfrak{t}$$

Dans cette expression, on peut faire une intégration par parties en θ . Les termes de bord s'annulent à cause des conditions aux limites. On fait aussi une intégration par parties en temps, et les termes de bord vont nous indiquer quelle forme symplectique est conservée.

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} (\widehat{\mu} \widehat{u}_T^{(1)}) + 2\pi \frac{\partial}{\partial \theta} (\widehat{\mu} \widehat{u}_T^{(1)}) \right) \widehat{\xi}_T^{(2)} + 2\pi \widehat{\mu} \widehat{u}_T^{(1)} \widehat{\xi}_N^{(2)} \right) \, d\theta \, d\mathfrak{t} = \\ & - \int_0^1 \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \widehat{\mu} \widehat{u}_T^{(1)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \widehat{\xi}_T^{(2)} + 2\pi \frac{\partial}{\partial \theta} \widehat{\xi}_T^{(1)} - 2\pi \widehat{\xi}_N^{(2)} \right) \, d\theta \, d\mathfrak{t} \\ & \left[\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \widehat{\mu} \widehat{u}_T^{(1)} \widehat{\xi}_T^{(2)} \, d\theta \right] (t=1) - \left[\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \widehat{\mu} \widehat{u}_T^{(1)} \widehat{\xi}_T^{(2)} \, d\theta \right] (t=0) \end{aligned}$$

On reconnaît l'expression de $\widehat{u}_T^{(2)} = \frac{\partial}{\partial t} \widehat{\xi}_T^{(2)} + 2\pi \frac{\partial}{\partial \theta} \widehat{\xi}_T^{(1)} - 2\pi \widehat{\xi}_N^{(2)}$. On peut faire une deuxième intégration par partie.

On fait la même opération sur le terme

$$\int_0^1 \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} (\widehat{\mu} \widehat{u}_N^{(1)}) + 2\pi \frac{\partial}{\partial \theta} (\widehat{\mu} \widehat{u}_N^{(1)}) \right) \widehat{\xi}_N^{(2)} - 2\pi \widehat{\mu} \widehat{u}_N^{(1)} \widehat{\xi}_T^{(2)} \right) d\theta dt$$

Finalement, après simplification par l'équation d'équilibre vérifiée par $\widehat{\xi}_T^{(2)}$, on trouve :

$$\left[\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \left(\widehat{\mu} \vec{u}^{(1)} \vec{\xi}^{(2)} - \widehat{\mu} \vec{u}^{(2)} \vec{\xi}^{(1)} \right) d\theta \right] (t=1) = \left[\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \left(\widehat{\mu} \vec{u}^{(1)} \vec{\xi}^{(2)} - \widehat{\mu} \vec{u}^{(2)} \vec{\xi}^{(1)} \right) d\theta \right] (t=0)$$

Bien qu'on ait travaillé sur une géométrie simplifiée et avec la seule variable de déplacement tangentiel, la forme symplectique conservée est celle trouvée dans le cas général. Ce calcul permet aussi de justifier d'une autre manière le choix de modélisation des lignes d'attaque et de fuite par un encastrement.

Dans le cas inextensible, on rappelle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\xi} = \begin{pmatrix} \widehat{\xi}_T \\ \frac{\partial \widehat{\xi}_T}{\partial \theta} \end{pmatrix} \\ \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \widehat{\xi}_T}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 \widehat{\xi}_T}{\partial t \partial \theta} + 2\pi \left(\widehat{\xi}_T + \frac{\partial^2 \widehat{\xi}_T}{\partial \theta^2} \right) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Avec ces deux dernières formules, on détermine l'expression de la forme symplectique qui est conservée en fonction de $\widehat{\xi}_T$:

$$\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \widehat{\mu} \left[\widehat{\xi}_T^{(1)} \frac{\partial \widehat{\xi}_T^{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial \widehat{\xi}_T^{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \widehat{\xi}_T^{(2)}}{\partial t \partial \theta} + 2\pi \frac{\partial \widehat{\xi}_T^{(1)}}{\partial \theta} \widehat{\xi}_T^{(2)} + 2\pi \frac{\partial \widehat{\xi}_T^{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \widehat{\xi}_T^{(2)}}{\partial \theta^2} \right] d\theta \quad (\text{A.1})$$

A.2 Discrétisation de la forme symplectique

Pour deux solutions $\xi_T^{(1)}$ et $\xi_T^{(2)}$, on veut calculer la quantité :

$$\left[\mu \vec{u}^{(1)} \vec{\xi}^{(2)} - \mu \vec{u}^{(2)} \vec{\xi}^{(1)} \right] (t = 0)$$

On rappelle que les composantes normales sont obtenues par les formules suivantes :

$$\begin{cases} \vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_T \\ \frac{\partial \xi_T}{\partial \theta} \end{pmatrix} \\ \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_T}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 \xi_T}{\partial t \partial \theta} + 2\pi \left(\xi_T + \frac{\partial^2 \xi_T}{\partial \theta^2} \right) \end{pmatrix} \end{cases}$$

Avec les mêmes formules que précédemment, on obtient l'expression antisymétrique qui traduit la formule A.1 :

$$\mu^{(0,k)} \begin{pmatrix} \xi_T^{(2)}(0,k-1) \\ \xi_T'^{(2)}(0,k-1) \\ \xi_T^{(2)}(0,k) \\ \xi_T'^{(2)}(0,k) \\ \xi_T^{(2)}(0,k+1) \\ \xi_T'^{(2)}(0,k+1) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4\delta^2} & -\frac{\pi}{\delta} \left(1 - \frac{2}{\delta^2}\right) & 0 & \frac{-2\pi}{\delta^3} & -\frac{1}{4\delta^2} \\ -\frac{1}{4\delta^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4\delta^2} & 0 \\ \frac{\pi}{\delta} \left(1 - \frac{2}{\delta^2}\right) & 0 & 0 & 1 & -\frac{\pi}{\delta} \left(1 - \frac{2}{\delta^2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\pi}{\delta^3} & -\frac{1}{4\delta^2} & \frac{\pi}{\delta} \left(1 - \frac{2}{\delta^2}\right) & 0 & 0 & \frac{1}{4\delta^2} \\ \frac{1}{4\delta^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4\delta^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_T^{(1)}(0,k-1) \\ \xi_T'^{(1)}(0,k-1) \\ \xi_T^{(1)}(0,k) \\ \xi_T'^{(1)}(0,k) \\ \xi_T^{(1)}(0,k+1) \\ \xi_T'^{(1)}(0,k+1) \end{pmatrix}$$

La quantité $\left[\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \left(\hat{\mu} \vec{u}^{(1)} \vec{\xi}^{(2)} - \hat{\mu} \vec{u}^{(2)} \vec{\xi}^{(1)} \right) d\theta \right] (t = 0)$ est approchée par somme discrète. La taille de l'intervalle utilisé est δ .

L'ordre choisi pour stocker les valeurs des vecteurs vitesse et déplacement est choisi pour diminuer la largeur de bande de la matrice \mathbb{J} .

On a vérifié que l'opérateur de propagation discrétisé conservait la forme symplectique :

$$\left[\mu \vec{u}^{(1)} \vec{\xi}^{(2)} - \mu \vec{u}^{(2)} \vec{\xi}^{(1)} \right] (t = 0) = \left[\mu \vec{u}^{(1)} \vec{\xi}^{(2)} - \mu \vec{u}^{(2)} \vec{\xi}^{(1)} \right] (t = 1)$$

Annexe B

Discrétisation du modèle simplifié

On va utiliser l'algorithme d'intégration temporelle HHT : la discrétisation des formules de dérivation par rapport au temps suit le schéma de Newmark de paramètres β et γ , et la discrétisation des équations d'équilibre suit un schéma d'Euler de paramètre α .

Comme on a un domaine géométrique simple $[-\theta_0, \theta_0]$ et des conditions aux limites de type Dirichlet on choisit une méthode de différence finie.

B.1 Discrétisation en temps

On se choisit une séquence de temps t_n , régulièrement espacés de h , tels que $t_0 = 0$ et $t_f = 1$. On note de façon plus compacte n pour t_n .

• L'équation d'équilibre

On part de l'équation d'équilibre adimensionnelle en force suivant la tangente :

$$\left[\mu \frac{\partial^2 \xi_T}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu \frac{\partial^3 \xi_T}{\partial \theta \partial t^2} \right) \right] - 4\pi \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial t} \right) \right] + \left[-4\pi^2 \mu \hat{\omega} + k_T \xi_T - k_N \frac{\partial \xi_T}{\partial \theta_2} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left((4\pi^2 \mu + D) \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \left(D \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial \theta} \right) \right] = 0$$

On rappelle que la rotation $\hat{\omega}$ est définie par la formule suivante dans le cas d'une bande de roulement inextensible :

$$\hat{\omega} = \xi_T + \frac{\partial^2 \xi_T}{\partial \theta^2} \quad (\text{B.1})$$

On classe les opérateurs différentiels en θ suivant l'ordre de dérivation en temps du terme sur lequel ils s'appliquent : K , l'opérateur de rigidité s'applique sur ξ_T , C , l'opérateur de couplage s'applique sur

$\frac{\partial \widehat{\omega}}{\partial t}$ et M , l'opérateur de masse s'applique sur $\frac{\partial^2 \widehat{\omega}}{\partial t^2}$.

$$K_{t,\theta}(\xi_T(t)) = -4\pi^2 \mu(\theta - 2\pi t) \left(\xi_T + \frac{\partial^2 \xi_T}{\partial \theta^2} \right) + k_T \xi_T - k_N \frac{\partial^2 \xi_T}{\partial \theta^2} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left((4\pi^2 \mu(\theta - 2\pi t) + D(\theta - 2\pi t)) \frac{\partial \widehat{\omega}}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \left(D(\theta - 2\pi t) \frac{\partial \widehat{\omega}}{\partial \theta} \right) \quad (\text{B.2})$$

$$C_{t,\theta} \left(\frac{\partial \widehat{\omega}}{\partial t}(t) \right) = -4\pi \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu(\theta - 2\pi t) \frac{\partial \widehat{\omega}}{\partial t} \right) \quad (\text{B.3})$$

$$M_{t,\theta} \left(\frac{\partial^2 \widehat{\omega}}{\partial t^2}(t) \right) = \mu(\theta - 2\pi t) \frac{\partial^2 \xi_T}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu(\theta - 2\pi t) \frac{\partial^3 \xi_T}{\partial \theta \partial t^2} \right) \quad (\text{B.4})$$

L'introduction du paramètre α se fait dans l'équation d'équilibre en pondérant le terme de couplage et le terme de rigidité entre les temps $n - 1$ et n . L'équation d'équilibre est discrétisée en :

$$\left[\mu \frac{\partial^2 \xi_T}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu \frac{\partial^3 \xi_T}{\partial t^2 \partial \theta} \right) \right] (n, \theta) + (1 - \alpha) C_{n,\theta} \left(\frac{\partial \widehat{\omega}}{\partial t}(n, \theta) \right) + (1 - \alpha) K_{n,\theta}(\xi_T(n, \theta)) + \alpha C_{n-1,\theta} \left(\frac{\partial \widehat{\omega}}{\partial t}(n-1, \theta) \right) + \alpha K_{n-1,\theta}(\xi_T(n-1, \theta)) = 0$$

• Les formules de dérivation partielle par rapport au temps

Dans cette expression de $C_{n,\theta} \left(\frac{\partial \widehat{\omega}}{\partial t}(n, \theta) \right)$ et de $K_{n,\theta}(\xi_T(n, \theta))$, on veut éliminer les termes en $\widehat{\xi}_T(n, \theta)$ et ses dérivées en θ , et les termes en $\frac{\partial \widehat{\xi}_T}{\partial t}(n, \theta)$ et ses dérivées en θ . Il ne restera plus que des termes en $\frac{\partial^2 \widehat{\xi}_T}{\partial t^2}(n, \theta)$ qui est l'inconnue et des termes en $\widehat{\xi}_T(n-1, \theta)$, $\frac{\partial \widehat{\xi}_T}{\partial t}(n-1, \theta)$ et $\frac{\partial^2 \widehat{\xi}_T}{\partial t^2}(n-1, \theta)$ qui sont les données.

- Avec l'équation suivante, on élimine $\xi_T(n, \theta)$ dans $K_{n,\theta}(\widehat{\omega}(n))$:

$$\frac{\xi_T(n, \theta) - \xi_T(n-1, \theta) - h \frac{\partial \xi_T}{\partial t}(n-1, \theta)}{\frac{h^2}{2}} = (1 - 2\beta) \frac{\partial^2 \xi_T}{\partial t^2}(n-1, \theta) + 2\beta \frac{\partial^2 \xi_T}{\partial t^2}(n, \theta) \quad (\text{B.5})$$

- Avec l'équation suivante, on élimine $\frac{\partial \widehat{\xi}_T}{\partial t}(n)$ dans $C_{n,\theta}(\widehat{\omega}(n))$:

$$\frac{\frac{\partial \widehat{\omega}}{\partial t}(n, \theta) - \frac{\partial \widehat{\omega}}{\partial t}(n-1, \theta)}{h} = (1 - \gamma) \frac{\partial^2 \widehat{\omega}}{\partial t^2}(n-1, \theta) + \gamma \frac{\partial^2 \widehat{\omega}}{\partial t^2}(n, \theta) \quad (\text{B.6})$$

On trouve les expressions suivantes pour $C_{n,\theta} \left(\frac{\partial \widehat{\omega}}{\partial t}(n, \theta) \right)$ et $K_{n,\theta}(\xi_T(n, \theta))$:

$$\begin{aligned} C_{n,\theta} \left(\frac{\partial \widehat{\omega}}{\partial t}(n, \theta) \right) &= C_{n,\theta} \left(\frac{\partial \widehat{\omega}}{\partial t}(n-1, \theta) \right) + h(1-\gamma) C_{n,\theta} \left(\frac{\partial^2 \widehat{\omega}}{\partial t^2}(n-1, \theta) \right) + h\gamma C_{n,\theta} \left(\frac{\partial^2 \widehat{\omega}}{\partial t^2}(n, \theta) \right) \\ K_{n,\theta}(\xi_T(n, \theta)) &= K_{n,\theta}(\xi_T(n-1, \theta)) + h K_{n,\theta} \left(\frac{\partial \xi_T}{\partial t}(n-1, \theta) \right) \\ &\quad + \frac{h^2}{2} (1-2\beta) K_{n,\theta} \left(\frac{\partial^2 \xi_T}{\partial t^2}(n-1, \theta) \right) + h^2 \beta K_{n,\theta} \left(\frac{\partial^2 \xi_T}{\partial t^2}(n, \theta) \right) \end{aligned}$$

En remplaçant ces expressions dans l'équation d'équilibre, on trouve la forme :

$$\begin{aligned} &\left[\mu \frac{\partial^2 \xi_T}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu \frac{\partial^3 \xi_T}{\partial t^2 \partial \theta} \right) \right] (n, \theta) + (1-\alpha) h \gamma C_{n,\theta} \left(\frac{\partial^2 \widehat{\omega}}{\partial t^2}(n, \theta) \right) + (1-\alpha) h^2 \beta K_{n,\theta} \left(\frac{\partial^2 \xi_T}{\partial t^2}(n, \theta) \right) \\ &= -\alpha \left(C_{n-1,\theta} \left(\frac{\partial \widehat{\omega}}{\partial t}(n-1, \theta) \right) + K_{n-1,\theta}(\xi_T(n-1, \theta)) \right) \\ &\quad - (1-\alpha) \left(C_{n,\theta} \left(\frac{\partial \widehat{\omega}^*}{\partial t}(n, \theta) \right) + K_{n,\theta}(\xi_T^*(n, \theta)) \right) \end{aligned} \tag{B.7}$$

On a posé :

$$\begin{cases} \frac{\partial \widehat{\omega}^*}{\partial t}(n, \theta) = \frac{\partial \widehat{\omega}}{\partial t}(n-1, \theta) + h(1-\gamma) \frac{\partial^2 \widehat{\omega}}{\partial t^2}(n-1, \theta) \\ \xi_T^*(n, \theta) = \xi_T(n-1, \theta) + h \frac{\partial \xi_T}{\partial t}(n-1, \theta) + \frac{h^2}{2} (1-2\beta) \frac{\partial^2 \xi_T}{\partial t^2}(n-1, \theta) \end{cases}$$

Cette équation permet de calculer $\frac{\partial^2 \xi_T}{\partial t^2}(n, \theta)$, connaissant $\xi_T(n-1, \theta)$, $\frac{\partial \xi_T}{\partial t}(n-1, \theta)$ et $\frac{\partial^2 \xi_T}{\partial t^2}(n-1, \theta)$.

Les formules B.5 et B.6 permettent ensuite de calculer $\xi_T(n, \theta)$ et $\frac{\partial \xi_T}{\partial t}(n, \theta)$.

B.2 Discrétisation en espace

On se donne un nombre discret de points $\theta_k = -\theta_0 + (k-1)\delta$, k variant de 1 à $K+1$, et $\delta = \frac{2\theta_0}{K}$.
On note de façon plus compacte k pour θ_k .

• Discrétisation du champ de déplacement tangentiel

On note $\xi_T(n, k)$, $\xi'_T(n, k)$ et $\xi''_T(n, k)$ les valeurs des champs $\xi_T(t_n, \theta_k)$, $\frac{\partial \xi_T}{\partial t}(t_n, \theta_k)$ et $\frac{\partial^2 \xi_T}{\partial t^2}(t_n, \theta_k)$.

On note $d\xi_T(n, k)$ celle de son gradient $\frac{\partial \xi_T}{\partial \theta}(t_n, \theta_k)$, et $dd\xi_T(n, k)$ celle de sa dérivée seconde $\frac{\partial^2 \xi_T}{\partial \theta^2}(t_n, \theta_k)$.

On rappelle les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \xi_T(t, -\theta_0) = \xi_T(t, \theta_0) = 0 \\ \frac{\partial \xi_T}{\partial \theta}(t, -\theta_0) = \frac{\partial \xi_T}{\partial \theta}(t, \theta_0) = 0 \\ \frac{\partial^2 \xi_T}{\partial \theta^2}(t, -\theta_0) = \frac{\partial^2 \xi_T}{\partial \theta^2}(t, \theta_0) = 0 \end{cases}$$

La première condition est traduite en posant pour tout n :

$$\begin{cases} \xi_T(n, 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \xi'_T(n, 1) = 0 \\ \xi''_T(n, 1) = 0 \end{cases} \\ \xi_T(n, K+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \xi'_T(n, K+1) = 0 \\ \xi''_T(n, K+1) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

La seconde condition est traduite en posant pour tout n :

$$\begin{cases} \xi_T(n, 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \xi'_T(n, 2) = 0 \\ \xi''_T(n, 2) = 0 \end{cases} \\ \xi_T(n, K) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \xi'_T(n, K) = 0 \\ \xi''_T(n, K) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Avec un schéma de calcul de la dérivée $d\xi_T(n, 1) = \frac{1}{\delta}(\xi_T(n, 2) - \xi_T(n, 1))$, on retrouve bien une dérivée nulle en θ_0 . Le raisonnement est transposable pour la dérivée en $K+1$, $d\xi_T(n, K+1) = \frac{1}{\delta}(\xi_T(n, K+1) - \xi_T(n, K))$

La dernière condition est traduite en définissant pour tout n :

$$\begin{cases} \xi_T(n, 0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \xi'_T(n, 0) = 0 \\ \xi''_T(n, 0) = 0 \end{cases} \\ \xi_T(n, K+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \xi'_T(n, K+2) = 0 \\ \xi''_T(n, K+2) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Avec un schéma de calcul de la dérivée seconde $d\xi_T(n, 1) = \frac{1}{\delta^2} (\xi_T(n, 2) + \xi_T(n, 0) - 2\xi_T(n, 1))$, on retrouve bien une dérivée seconde nulle en θ_0 . Le raisonnement est transposable pour la dérivée seconde en $K + 1$, $d\xi_T(n, K + 1) = \frac{1}{\delta^2} (\xi_T(n, K + 2) + \xi_T(n, K) - 2\xi_T(n, K + 1))$

• Expression du champ de rotation et de ses dérivés temporelles

On doit définir un opérateur matriciel qui permette de calculer $\widehat{\omega}(t_n, \theta_k)$, qui approche la formule B.1. Ce même opérateur servira à calculer $\frac{\partial \widehat{\omega}}{\partial t}(t_n, \theta_k)$ et $\frac{\partial^2 \widehat{\omega}}{\partial t^2}(t_n, \theta_k)$.

Pour tout n et pour tout $k \in [1, K + 1]$, on définit :

$$\begin{aligned}\widehat{\omega}(n, k) &= \xi_T(n, k) + \frac{1}{\delta^2} (\xi_T(n, k + 1) + \xi_T(n, k - 1) - 2\xi_T(n, k)) \\ \widehat{\omega}'(n, k) &= \xi_T'(n, k) + \frac{1}{\delta^2} (\xi_T'(n, k + 1) + \xi_T'(n, k - 1) - 2\xi_T'(n, k)) \\ \widehat{\omega}''(n, k) &= \xi_T''(n, k) + \frac{1}{\delta^2} (\xi_T''(n, k + 1) + \xi_T''(n, k - 1) - 2\xi_T''(n, k))\end{aligned}$$

• Discrétisation de l'opérateur de rigidité

On doit ensuite définir l'opérateur $K_{n,k}$ qui agit sur $\widehat{\omega}(n, k)$ et $d\widehat{\omega}(n, k)$, ou $\widehat{\omega}'(n, k)$ et $d\widehat{\omega}'(n, k)$ ou encore $\widehat{\omega}''(n, k)$ et $d\widehat{\omega}''(n, k)$. Cet opérateur traduit la formule B.2.

On suppose qu'on est capable de calculer le moment $M(n, \theta_k)$ pour tout $k \in [1, K + 1]$.

Pour une dérivée première du moment, on utilise des différences centrées valable pour $k \in [2, K]$:

$$\frac{\partial M}{\partial \theta}(n, \theta_k) \delta = \frac{1}{2} M(n, \theta_k + \delta) - \frac{1}{2} M(n, \theta_k - \delta) + O(\delta^3)$$

Pour calculer le moment $M = D \frac{\widehat{\omega}}{\partial \theta}$ on utilise les formules suivantes pour la dérivation de $\widehat{\omega}$, et les formules déjà présentées pour $\widehat{\omega}$:

$$d\widehat{\omega} \left(n, \begin{matrix} k+1 \\ k-1 \end{matrix} \right) = \frac{1}{2\delta} \left(\widehat{\omega} \left(n, \begin{matrix} k+2 \\ k \end{matrix} \right) - \widehat{\omega} \left(n, \begin{matrix} k \\ k-2 \end{matrix} \right) \right)$$

Pour une dérivée troisième du moment, on utilise le schéma valable pour $k \in [3, K - 1]$:

$$\frac{\partial^3 M}{\partial \theta^3}(n, \theta_k) = \frac{1}{\delta^3} M(n, \theta_k + \delta) - \frac{3}{\delta^3} M(n, \theta_k) + \frac{3}{\delta^3} M(n, \theta_k - \delta) - \frac{1}{\delta^3} M(n, \theta_k - 2\delta) + O(\delta^4)$$

En utilisant les formules suivantes pour la dérivation de $\widehat{\omega}$, et les formules déjà présentées pour $\widehat{\omega}$:

$$\begin{aligned} d\widehat{\omega}(n, k+1) &= \frac{1}{\delta} (\widehat{\omega}(n, k+2) - \widehat{\omega}(n, k+1)) \\ d\widehat{\omega}(n, k) &= \frac{1}{\delta} (\widehat{\omega}(n, k+1) - \widehat{\omega}(n, k)) \\ d\widehat{\omega}(n, k-1) &= \frac{1}{\delta} (\widehat{\omega}(n, k) - \widehat{\omega}(n, k-1)) \\ d\widehat{\omega}(n, k-2) &= \frac{1}{\delta} (\widehat{\omega}(n, k-1) - \widehat{\omega}(n, k-2)) \end{aligned}$$

On trouve l'expression suivante pour l'opérateur de rigidité, valable pour $k \in [3, K-1]$:

$$\begin{aligned} K_{p,q}(\xi_T(n, k)) &= \frac{1}{\delta^2} e \xi_T(n, k-3) + \left(\frac{1}{\delta^2} d + \left(1 - \frac{2}{\delta^2}\right) e \right) \xi_T(n, k-2) \\ &+ \left(\frac{1}{\delta^2} c + \left(1 - \frac{2}{\delta^2}\right) d + \frac{1}{\delta^2} e - \frac{k_N}{\delta^2} \right) \xi_T(n, k-1) \\ &+ \left(\frac{1}{\delta^2} b + \left(1 - \frac{2}{\delta^2}\right) c + \frac{1}{\delta^2} d + k_T + \frac{2k_N}{\delta^2} \right) \xi_T(n, k) \\ &+ \left(\frac{1}{\delta^2} a + \left(1 - \frac{2}{\delta^2}\right) b + \frac{1}{\delta^2} c - \frac{k_N}{\delta^2} \right) \xi_T(n, k+1) \\ &+ \left(\left(1 - \frac{2}{\delta^2}\right) a + \frac{1}{\delta^2} b \right) \xi_T(n, k+2) + \frac{1}{\delta^2} a \xi_T(n, k+3) \end{aligned}$$

On a posé les fonctions suivantes de p et q (de l'opérateur $K_{p,q}$):

$$\begin{aligned} e &= -\frac{1}{\delta^4} D(p, q-2) - \frac{1}{4\delta^2} (4\pi^2 \mu(p, q-1) + D(p, q-1)) \\ d &= \frac{1}{\delta^4} (3D(p, q-1) + D(p, q-2)) \\ c &= \frac{1}{4\delta^2} (4\pi^2 (\mu(p, q+1) + \mu(p, q-1)) + D(p, q+1) + D(p, q-1)) \\ &\quad - \frac{1}{\delta^4} (3D(p, q) + 3D(p, q-1)) - 4\pi^2 \mu(p, q) \\ b &= \frac{1}{\delta^4} (D(p, q+1) + 3D(p, q)) \\ a &= -\frac{1}{\delta^4} D(p, q+1) - \frac{1}{4\delta^2} (4\pi^2 \mu(p, q+1) + D(p, q+1)) \end{aligned}$$

On a vérifié que cette formule pour l'opérateur différentiel donnait de bons résultats numériques dans le cas d'une masse constante et d'un déplacement tangentiel pris sous la forme d'un cosinus ou d'un sinus, et dans le cas d'un déplacement et d'une masse qui sont des fonctions polynomiales de θ .

• Discrétisation de l'opérateur de couplage

On doit ensuite définir l'opérateur $C_{n,k}$ qui agit sur $\widehat{\omega}'(n, k)$ ou $\widehat{\omega}''(n, k)$. Cet opérateur traduit la formule B.3. On utilise des différences centrées, pour $k \neq 1$ et $k \neq K+1$:

$$C_{n,k}(\widehat{\omega}'(n, k)) = -\frac{4\pi}{2\delta} (\mu(n, k+1) \widehat{\omega}'(n, k+1) - \mu(n, k-1) \widehat{\omega}'(n, k-1))$$

De même, on définit $C_{t,\theta} \left(\frac{\partial^2 \widehat{\omega}}{\partial t^2}(t) \right) = -4\pi \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu(\theta - 2\pi t) \frac{\partial^2 \widehat{\omega}}{\partial t^2} \right)$

En utilisant la formule $\widehat{\omega}'(n, k) = \xi_T'(n, k) + \frac{1}{\delta^2} (\xi_T'(n, k+1) + \xi_T'(n, k-1) - 2\xi_T'(n, k))$, on a aussi la formule valable pour $k \in [2, K]$:

$$\begin{aligned} C_{n,k}(\widehat{\omega}'(n, k)) &= \frac{1}{\delta^2} \frac{2\pi}{\delta} \mu(n, k-1) \xi_T'(n, k-2) + \frac{2\pi}{\delta} \left(1 - \frac{2}{\delta^2} \right) \mu(n, k-1) \xi_T'(n, k-1) \\ &+ \frac{1}{\delta^2} \frac{2\pi}{\delta} (\mu(n, k-1) - \mu(n, k+1)) \xi_T'(n, k) + \mu(n, k+1) \frac{2\pi}{\delta} \left(\frac{2}{\delta^2} - 1 \right) \xi_T'(n, k+1) \\ &- \frac{1}{\delta^2} \frac{2\pi}{\delta} \mu(n, k+1) \xi_T'(n, k+2) \end{aligned}$$

On a vérifié que cette formule pour l'opérateur différentiel donnait de bons résultats numériques dans le cas d'une masse constante et d'un déplacement tangentiel pris sous la forme d'un cosinus ou d'un sinus, et dans le cas d'un déplacement et d'une masse qui sont des fonctions polynomiales de θ .

• Discrétisation de l'opérateur de masse

On doit ensuite définir l'opérateur $M_{n,k}$ qui agit sur $\xi_T''(n, k)$. Cet opérateur traduit la formule B.4. On utilise deux fois un schéma de différence centrée, valable pour $k \neq 1, 2$ et $k \neq K, K+1$:

$$\begin{aligned} M_{n,k}(\xi_T''(n, k)) &= \mu(n, k) \xi_T''(n, k) \\ &- \frac{1}{4\delta^2} \mu(n, k+1) (\xi_T''(n, k+2) - \xi_T''(n, k)) + \frac{1}{4\delta^2} \mu(n, k-1) (\xi_T''(n, k) - \xi_T''(n, k-2)) \end{aligned}$$

On a vérifié que cette formule pour l'opérateur différentiel donnait de bons résultats numériques dans le cas d'une masse constante et d'un déplacement tangentiel pris sous la forme d'un cosinus ou d'un sinus, et dans le cas d'un déplacement et d'une masse qui sont des fonctions polynomiales de θ .

• Discrétisation de l'équation d'équilibre

L'équation B.7 permet de calculer $\xi_T''(n, k)$. Avec les conditions aux limites, on connaît déjà $\xi_T''(n, 1) = 0$, $\xi_T''(n, 2) = 0$, $\xi_T''(n, K) = 0$, $\xi_T''(n, K+1) = 0$. Il faut donc remplacer cette équation par une matrice de dimension $K-3 \times K-3$.

On écrit l'équation d'équilibre en $K-3$ points, $-\theta_0 + 2\delta$, $-\theta_0 + 3\delta$, ..., $\theta_0 - 3\delta$, $\theta_0 - 2\delta$. En ces points, l'expression donnée pour les opérateurs $K_{n,k}$, $K_{n-1,k}$, $C_{n,k}$, $C_{n-1,k}$ et $M_{n,k}$ est applicable.

$$\begin{aligned} (M_{n,k} + (1-\alpha)h\gamma C_{n,k} + (1-\alpha)h^2\beta K_{n,k})(\xi''(n, k)) &= \\ -\alpha(C_{n-1,k}(\widehat{\omega}'(n-1, k)) + K_{n-1,k}(\xi_T(n-1, k))) & \\ -(1-\alpha)(C_{n,k}(\widehat{\omega}'^*(n, k)) + K_{n,k}(\xi_T^*(n, k))) & \end{aligned}$$

On ajoute 6 équations pour imposer les conditions aux limites nulles.

Avec ces formules, on a affaire à un système linéaire de dimension $K + 3$, qui dépend du temps (de n). La matrice à inverser est une matrice bande, contenant au plus 3 termes non nuls de part et d'autre de la diagonale. Elle n'est pas symétrique.

Bibliographie

- [Bar & Delanne93] **Bar & Delanne.** Réduire le bruit pneumatiques-chaussées. presses de l'Ecole nationale des ponts et chaussées, Paris, 1993.
- [Beslin & Guyader96] **Beslin & Guyader.** *The use of an "ectoplasm" to predict free vibrations of plates with cut-outs.* *J. Sound. Vib.*, 191(5):p 935–954, 1996.
- [Böhm66] **Böhm.** *Mechanik des Gürtelreifens.* *Ing. Arch.* , 35(82), 1966.
- [Bradley94] **Bradley.** *Time harmonic acoustic Bloch wave propagation in periodic waveguides. Part I. Theory.* *J. Acoust. Soc. Am.*, 96(3):p 1844–1853, 1994.
- [Clapp & Eberhardt] **Clapp & Eberhardt.** *Incorporating the effect of tread pattern in a dynamic tyre excitation mechanism.* *Transportation Research Record*, 1117:p 114–120.
- [Cuschieri & all96] **Cuschieri & all.** *Open grig bridge noise from grid and tire vibrations.* *J. Sound. Vib.*, 190(3):p 317–343, 1996.
- [Delanne89] **Delanne.** *Les enrobés drainants: analyse de leurs propriétés vis-à-vis du bruit de roulement et de l'adhérence des pneumatiques des véhicules de tourisme.* *Bulletin de liaison des LPC*, 162:p 33–43, 1989.
- [Dodge65] **Dodge.** *The dynamic stiffness of a pneumatic tire model.* *SAE Technical papers series*, 650491, 1965.
- [Dowling92] **Dowling.** *Multiple scales*, chapter 7. In *Modern methods in analytical acoustics.* Springer Verlag, London, 1992.
- [Ejsmont88] **Ejsmont.** *Tread pattern randomization and its effect on tyre/road noise.* In *A workshop on rolling noise generation*, Berlin, October, 10-11 1988. Technische Universität Berlin.

- [Esjmont & all84] **Esjmont & all.** *Influence of tread pattern on tire/road noise.* SAE Technical papers series, 841238, 1984.
- [Geradin & Rixen92] **Geradin & Rixen.** Théorie des vibrations, application à la dynamique des structures. MASSON, Paris, 1992.
- [Ghesquière & all88] **Ghesquière & all.** Élaboration d'un modèle simple pour l'émission acoustique d'un pneumatique d'automobile, thèse. Rapport INRETS no 28, 1988.
- [Hamet88] **Hamet.** Filtre de contact pneumatique chaussée. Rapport INRETS no 84, 1988.
- [Hamet & all86] **Hamet & all.** *Puissance et directivité acoustiques du bruit de contact pneu/chaussée.* Rapport INRETS no 15, 1986.
- [Haydn71] **Haydn.** *Roadside noise from the interaction of a rolling tyre with road surface.* In M.J. Crocker, editor, Noise & vibration control engineering. Noise Control Foundation, Purdue, Poughkeepsie, NY, 1971.
- [Heckl86] **Heckl.** *Tyre noise generation.* *Wear*, 113:p 157–170, 1986.
- [Huang92] **Huang.** *The vibrations of rolling tyres in ground contact.* *Int. J. of Vehicle Design*, 13(1):p 78–95, 1992.
- [Hunckler79] **Hunckler.** The dynamic behavior of an automobile tire, Ph.D. dissertation. Purdue University, 1979.
- [Jennewein & Bergmann85] **Jennewein & Bergmann.** *Investigations concerning tyre/road noise sources and possibilities of noise control.* In *Vehicle, Noise and Vibration*, London, 1984-1985. Institution of mechanical engineers.
- [Kropp88] **Kropp.** *A simple model of wave excitation and propagation on a rolling tire.* In *A workshop on rolling noise generation*, Berlin, October, 10-11 1988. Technische Universität Berlin.
- [Kropp89] **Kropp.** *Structure born sound on a smooth tire.* *Applied Acoustics*, 26:p 181–192, 1989.
- [Kung & all86] **Kung & all.** *Free vibration of a pneumatic tire-wheel unit using a ring on a elastic foundation and a finite element model.* *J. Sound. Vib.*, 107(2):p 181–194, 1986.
- [Lesueur & all88] **Lesueur & all.** Rayonnement acoustique des structures. Eyrolles, Paris, 1988.

- [Le Tallec96] **Le Tallec.** Introduction à la dynamique des structures. presses de l'Ecole polytechnique, Paris, 1996.
- [Liedl & all82] **Liedl & all.** *Untersuchung der Entstehungsmechanismen von Reifenabrollgeräuschen bei Trockenheit und Nässe.* *Automobiltechnik Zeitung*, 84(1), 1982.
- [Mambretti88] **Mambretti.** *Tyre noise simulation at computer.* *IMechE*, C35/88:p 175–182, 1988.
- [Nelson92] **Nelson.** *The mitigation of traffic noise in urban areas.* In Y. Delanne, editor, *Maîtrise du bruit routier en milieu urbain*, Nantes, May, 12-15 1992. Eurosymposium.
- [Oden & Lin86] **Oden & Lin.** *On the general rolling contact problem for finite deformations of a viscoelastic cylinder.* *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, 57:p 297–367, 1986.
- [Pope & Reynolds78] **Pope & Reynolds.** *Basic studies of automobile tyre noise.* *Stanford university, Mechanical engineering Dpt.*, Report TNS 1, 1978.
- [Rahier91] **Rahier.** Analyse numérique du roulage stationnaire de structures élastiques non linéaires en grandes déformations, thèse. *Université de Paris 6*, 1991.
- [Ronneberger88] **Ronneberger.** *Towards quantitative prediction of tire/road noise.* In *A workshop on rolling noise generation*, Berlin, October, 10-11 1988. Technische Universität Berlin.
- [Saigal & all86] **Saigal & all.** *Free vibration of a tire as a toroidal membrane.* *J. Sound. Vib.*, 107(1):p 71–82, 1986.
- [Salençon92] **Salençon.** Mécanique des milieux continus. presses de l'Ecole polytechnique, Paris, 1992.
- [Schramm84] **Schramm.** *Köperschallanalyse an Stahlgürtelreifen zur Synthese des emittierten Luftschalls.* *Fortschritt Bereich*, 58, 1984.
- [Schultze & all91] **Schultze & all.** *Reifen/Fahrban-Geräusche: Entstehungsmechanismen und Einflußgrößen.* *Kautschuk und Gummi Kunststoffe*, 10/91:p 951–957, 1991.
- [Sinha & Butcher97] **Sinha & Butcher.** *Symbolic computation of fundamental solution matrices for linear time-periodic dynamical systems.* *J. Sound. Vib.*, 206(1):p 61–85, 1997.

- [Södel & Prasad80] **Södel & Prasad.** *Calculation of natural frequencies and modes of tires in road contact by utilizing eigenvalues of the axisymmetric non contacting tire.* *J. Sound. Vib.*, 70(4):p 573–584, 1980.
- [Tielking65] **Tielking.** *Plane vibration characteristics of a pneumatic tire model.* *SAE Technical papers series*, 841238, 1965.
- [Ullrich84] **Ullrich.** *Rollgeräusche Messungen der Bundesanstalt für Strassenwesen an Strassen mit unterschiedlichen Decken und an einem Innentrommelprüfstand.* *Institut für Strassen- und Eisenbahn- Felsbau an der E.T.H. Zürich*, 57:p 207, 1984.
- [Vinesse & Nicollet88] **Vinesse & Nicollet.** *Surface waves on the rotating tyre: an application of functional analysis.* *J. Sound. Vib.*, 126(1):p 85–96, 1988.
- [Walker81] **Walker.** *Noise generated at the tyre/road interface, Ph.D. dissertation.* University of Aston in Birmingham, 1981.
- [Walker & Cortès88] **Walker & Cortès.** *Tyre tread pattern excited noise, interference between noise from contact patch end.* In *A workshop on rolling noise generation*, Berlin, October, 10-11 1988. Technische Universität Berlin.
- [Zhong & Williams95] **Zhong & Williams.** *On the direct solution of wave propagation for repetitive structures.* *J. Sound. Vib.*, 181(3):p 485–501, 1995.