

Structure visco-plastique en matériau de Norton-Hoff. "Applications en géophysique et en analyse limite"

Houshmand Abd-Sharifabadi

▶ **To cite this version:**

Houshmand Abd-Sharifabadi. Structure visco-plastique en matériau de Norton-Hoff. "Applications en géophysique et en analyse limite". Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1981. Français. NNT : . tel-00529403

HAL Id: tel-00529403

https://pastel.hal.science/tel-00529403

Submitted on 25 Oct 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

152
S 10682 (2)

THESE

présentée à

L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

pour obtenir le diplôme de

DOCTEUR-INGÉNIEUR DE GÉNIE CIVIL

OPTION : OUVRAGES D'ART

par

Houshmand ABD-SHARIFABADI

Sujet de la thèse :

STRUCTURE VISCO-PLASTIQUE EN MATÉRIAU DE NORTON-HOFF "APPLICATIONS EN GÉOPHYSIQUE ET EN ANALYSE LIMITE"

soutenue le 8 JUILLET 1981

devant le jury composé de :

MM.	M. FREMOND	Président
	B. HALPHEN	Rapporteur
	G. TOUZOT J. BROZZETTI	Examinateurs
	J.-C. PARRIAUD A. FRIAÂ	

E.N.P.C.
DOC10801

ÉCOLE NATIONALE
CENTRE
DE DOCUMENTATION

08

Remerciements

Que tous ceux qui m'ont apporté leur aide pour la réalisation de ce travail trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.

Mes plus vifs remerciements s'adressent tout particulièrement à Messieurs :

J.-C. PARRIAUD, Directeur du LABORATOIRE CENTRAL des PONTS et CHAUSSEES qui a mis à ma disposition tous les moyens nécessaires au bon déroulement de cette recherche.

J. TANZI, Directeur de l'ECOLE NATIONALE des PONTS et CHAUSSEES qui m'a accueilli comme élève-chercheur.

M. FREMOND, Professeur et Responsable de Formation à l'ECOLE NATIONALE des PONTS et CHAUSSEES, qui m'a accueilli dans son équipe de recherche au Service de Mathématiques qu'il dirige au LABORATOIRE CENTRAL des PONTS et CHAUSSEES et qui a bien voulu diriger cette thèse. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance pour le temps qu'il m'a consacré et ses encouragements. C'est à la suite de nombreuses discussions avec lui que beaucoup d'idées, ici exprimées, ont vu le jour.

B. HALPHEN, Professeur à l'ECOLE NATIONALE des PONTS et CHAUSSEES, qui a bien voulu examiner ce travail et être rapporteur de cette thèse.

G. TOUZOT, Professeur à l'UNIVERSITE de COMPIEGNE qui a bien voulu examiner ce travail et participer au jury.

J. BROZZETTI, Directeur du Département Etudes au C.T.I.C.M. qui a examiné ce mémoire et accepté de participer au jury.

A. FRIAÂ, Professeur à l'ECOLE NATIONALE d'INGENIEURS de TUNIS, qui était mon conseiller d'étude, qui a montré tant d'attention et une inlassable disponibilité pour m'aider dans ce travail tant du point de vue scientifique que du point de vue pratique.

M. DAIGNIERES, qui par ses connaissances en géophysiques m'a beaucoup aidé.

Mesdames

M. LEVY, qui a mis à ma disposition le mode d'emploi de son programme pour la résolution des problèmes d'écoulement en contraintes planes. Ses expériences et ses remarques m'ont été très utiles.

H. BUGLER, qui a assuré avec beaucoup de soin la frappe du manuscrit.

Cette liste serait incomplète si je ne mentionnais Messieurs LEGOUGUEC, B. LUCAS et d'autres agents du L.C.P.C. du Service d'Informatique, ainsi que mes amis pour leurs suggestions ou, tout simplement leur amitié, tout particulièrement P. LE TALLEC ; T. GUENNOUNI et tous les autres. Je remercie également tous ceux qui ont assuré la préparation matérielle de ce mémoire.

TABLE des MATIERES

Pages

INTRODUCTION i

Partie I. ETUDE THEORIQUE DU PROBLEME D'ECOULEMENT D'UNE STRUCTURE CONSTITUEE D'UN MATERIAU VISQUEUX DE NORTON-HOFF ET CALCUL DE LA CHARGE LIMITE D'UNE STRUCTURE CONSTITUEE D'UN MATERIAU RIGIDE-PLASTIQUE PARFAIT DE VON MISES 1

1. Loi de Norton-Hoff 2

1.1. Relation entre contrainte, déformation à haute température... 2
1.2. Loi de Norton 4
1.3. Loi de Norton-Hoff 5
1.4. Autres formulations de la loi de Norton-Hoff 7
1.5. Signification de k et de λ 10

2. Problème d'écoulement 10

2.1. Position du problème 10
2.2. Recherche des déplacements 11
2.3. Recherche des contraintes 13

3. Application de la loi de Norton-Hoff en analyse limite 14

3.1. Convexe de chargement potentiellement supportable 14
3.2. Approche par l'extérieur (méthode cinématique) 16
3.3. Calcul de la charge limite d'une structure constituée de matériau de Von Misès en utilisant le matériau de Norton-Hoff sous-jacent..... 17

4. Calcul analytique de la charge limite de quelques problèmes simples 21

4.1. Convexe des chargements potentiellement supportables pour un bloc de matériau de Von Misès de section rectangulaire en déformations planes serré entre quatre plateaux lisses..... 21
4.2. Convexe des chargements potentiellement supportables d'un tube cylindrique en déformations planes, soumis à une pression hydraulique d'intensité Q_1 à l'intérieur et Q_2 à l'extérieur. 25
4.3. Calcul de la charge limite d'une poutre en déformations planes soumise aux moments fléchissants M et -M aux deux extrémités 29
4.4. Convexe des chargements potentiellement supportables d'une plaque mince en contraintes planes, serrée entre quatre plateaux rigides et lisses 35

Partie II. APPROCHE NUMERIQUE : - PROBLEME D'ECOULEMENT - ANALYSE LIMITE 38

Introduction 39

1. Méthode des éléments finis en vitesses pour trouver la solution numérique du problème d'écoulement du matériau de Norton-Hoff..... 40

1.1. Discrétisation numérique du problème ($\mathcal{J}_h$) 41

1.2. Discrétisation numérique du problème ($\mathcal{J}_{lh,h'}$) 42

2. Approche numérique du problème d'écoulement des milieux continus bidimensionnels 43

2.1. Ecoulement en contraintes planes 43

2.1.1. Conditions aux limites du type poinçons 50

2.2. Ecoulement en déformations planes 54

2.2.1. Définition du problème ($\mathcal{J}_{ld}^{h,h'}$) approché du ($\mathcal{J}_l$) en déformations planes 55

2.2.1.1. La méthode d'Uzawa 56

2.2.1.2. La méthode d'Uzawa contrôlée 59

2.2.1.3. La méthode d'inversion de matrice (Arrow-Hurwicz) 62

2.2.1.4. La méthode d'inversion de matrice (point fixe) 64

2.2.2. Définition du problème ($\mathcal{J}_d^{h,h'}$) 66

2.2.2.1. La méthode de l'ensemble des vitesses incompressibles définie sur les éléments quadrilatéraux 67

2.2.2.2. La méthode de l'ensemble des vitesses incompressibles définie sur les éléments triangulaires en utilisant des super-réseaux..... 69

3. Calcul de la charge limite d'une structure bidimensionnelles en matériau rigide plastique parfait de Von Misès 76

Partie III. EXEMPLES NUMERIQUES: - PROBLEME D'ECOULEMENT - ANALYSE LIMITE 81

Introduction 82

1. Calcul du champ de vitesses du continent d'Asie, soumis au poinçon Indien 83

2. Evolution des Pyrénées 89

3. Calcul en déformation plane de la charge limite d'un bloc de matériau de Von Misès, de section rectangulaire, serré entre deux plateaux rigides et lisses 98

3.1. Méthode d'Uzawa 99

3.1.1. Relation entre ρ_{opt} et p 100

3.1.2. Relation entre ρ_{opt} et le nombre de degrés de liberté. 102

3.1.3. La charge limite 102

3.2. Méthode d'Arrow-Hurwicz 103

3.3. Méthode de point fixe 104

3.4. Méthode des super-réseaux 104

3.5. Comparaison des méthodes utilisées 104

4. Calcul en déformation plane de la charge limite d'un bloc de matériau de Von Misès de section rectangulaire, serré entre deux plateaux rigides et rugueux 106

4.1. Problème avec un degré de liberté 107
4.2. Problème avec plusieurs degrés de liberté 109
4.3. Conclusions 113

5. Calcul de la charge limite d'un tube cylindrique en déformations planes, soumis à une pression hydraulique intérieure 115

6. Calcul de la hauteur limite d'une fouille verticale en matériau de Von Misès 118

7. Calcul de la charge limite d'une plaque carrée, munie d'un trou circulaire centré, soumise à une traction simple 122

7.1. En contraintes planes 123
7.2. En déformations planes 124
7.3. Comparaison avec des résultats existants dans la littérature 127

8. Charge limite d'une plaque rectangulaire mince munie d'un trou circulaire centré entre deux machoires rigides et rugueuses sous traction simple 131

9. Charge limite d'une poutre en flexion simple 135

10. Charge limite d'une fondation superficielle sur un milieu semi-infini, constitué d'un matériau de Von Misès, en déformation plane 138

CONCLUSION 143

ANNEXE 144

BIBLIOGRAPHIE 153

INTRODUCTION

La loi de Norton proposée en 1929, pour représenter le fluage stationnaire et unidimensionnel de certains aciers à haute température est très utilisée pour décrire le comportement quasi-statique de nombreux matériaux et cela pour une double raison :

. d'une part, elle ne fait intervenir qu'un faible nombre de paramètres identifiables facilement par l'expérience ;
. d'autre part, sa formulation mathématique est très simple.

Elle a été généralisée par Odqvist [50, 1934], puis par Hoff [38, 1954], pour le cas des sollicitations multidimensionnelles. Elle est appelée depuis : loi de Norton-Hoff.

La loi de Norton-Hoff dépend d'un exposant p, souvent compris entre 1 et 2, fonction de la température et du matériau. Quand p passe de 2 à 1, cette loi passe de la loi de comportement du fluide Newtonien ($p = 2$) à la loi de la plasticité parfaite de Von Misès ($p = 1$).

Récemment cette loi a été généralisée pour différentes lois de la plasticité parfaite par Friaâ [25 à 27]. Ces généralisations ont permis de trouver une nouvelle méthode de calcul de la charge limite d'une structure rigide parfaitement plastique.

L'intérêt de cette méthode réside dans le fait que contrairement à la méthode cinématique classique l'on n'a pas besoin de définir des surfaces ou des lignes de glissement pour déterminer le convexe des chargements potentiellement supportables d'une structure constituée d'un matériau rigide-parfaitement plastique. En effet quand le matériau de Norton-Hoff (généralisé) tend vers le matériau de Von Misès (ou le matériau rigide-parfaitement plastique sous-jaçent au matériau de Norton-Hoff généralisé), ces discontinuités de vitesses tangentielles apparaissent comme une forte variation de vitesses (continues), dans une zone étroite de la structure (cf. Suquet [80, 1981]). Le deuxième intérêt de cette méthode est que la fonctionnelle à minimiser est différentiable, tandis que dans la méthode cinématique classique ce n'est pas le cas.

Dans ce mémoire nous présentons une application de la loi de Norton-Hoff à la détermination du convexe des chargements potentiellement supportables d'une structure constituée de matériau de Von Misès, ainsi que la solution du problème d'écoulement d'une structure constituée de matériau de Norton-Hoff.

Ce travail est composé de trois parties :

- Dans la première nous donnons un résumé des études bibliographiques pour résoudre le problème d'écoulement d'une structure constituée de matériau de Norton-Hoff. Nous exposons ensuite le calcul de la charge limite d'une structure constituée de matériau de Von Misès en utilisant la régularisation par le matériau de Norton-Hoff.

Nous terminons cette partie en calculant les charges limites de quelques problèmes simples.

- La deuxième partie est consacrée à l'étude numérique du problème d'écoulement. Nous donnons une méthode numérique pour approcher la solution de ce pro-

blème en contraintes planes et trois pour l'approcher en déformations planes. Enfin, nous indiquons comment approcher numériquement la charge limite d'une structure constituée d'un matériau rigide-plastique parfait de Von Misès.

- Dans la dernière partie nous traitons quelques exemples utilisant les méthodes exposées dans la deuxième partie. Nous avons ainsi obtenu :

1/ en nous appuyant sur des hypothèses simplificatrices, des résultats intéressants pour des problèmes intervenant en géophysique (collision himalayenne, évolution des Pyrénées) ;

2/ les charges limites exactes d'un bloc rectangulaire serré entre deux plateaux lisses et d'un tube cylindrique soumis à une pression intérieure. Les deux problèmes sont en déformations planes ;

3/ les charges limites d'un bloc rectangulaire en déformations planes serré entre deux plateaux rugueux qui dépendent du rapport de ses dimensions. On retrouve les résultats de Salençon [26, 1978] utilisant les méthodes classiques d'analyse limite ;

4/ les charges limites d'une plaque rectangulaire mince (en contraintes planes), munie d'un trou circulaire centré qui sont en très bon accord avec les résultats expérimentaux récemment trouvés par Ben Souissi et Friaâ [51, 1981]. Une partie de nos résultats sont indiqués dans [79, 1981] ;

5/ Les charges limites d'autres problèmes en déformations ou en contraintes planes.

En général on peut dire que pour les problèmes en déformations planes, nous avons obtenu des bornes supérieures des charges limites, tandis qu'en contraintes planes nos résultats sont en très bon accord avec les charges limites obtenues par des expériences et par les méthodes analytiques classiques. La qualité moindre des résultats en déformation plane est due aux difficultés d'ordre numérique provenant de la condition d'incompressibilité.

PREMIERE PARTIE

ÉTUDE THÉORIQUE

.DU PROBLÈME D'ÉCOULEMENT D'UNE STRUCTURE CONSTITUÉE D'UN MATÉRIAU VISQUEUX DE NORTON-HOFF

ET

.CALCUL DE LA CHARGE LIMITE D'UNE STRUCTURE CONSTITUÉE D'UN MATÉRIAU PLASTIQUE PARFAIT DE VON MISES

1. LA LOI DE NORTON-HOFF

1.1. RELATION ENTRE CONTRAINTE, DEFORMATION A HAUTE TEMPERATURE (Friaâ [27, 1979]).

Très souvent à la température ordinaire et pour une vitesse de chargement faible, la relation contrainte (σ), déformation (ε) pour les métaux, est indépendante du temps. Mais dès que leur température dépasse la moitié de leur point de fusion, des phénomènes dépendant du temps interviennent.

Considérons une barre métallique portée à une température assez élevée, soumise à une traction uniaxiale constante, on obtient une courbe $\varepsilon(t)$, représentée sur la figure 1.

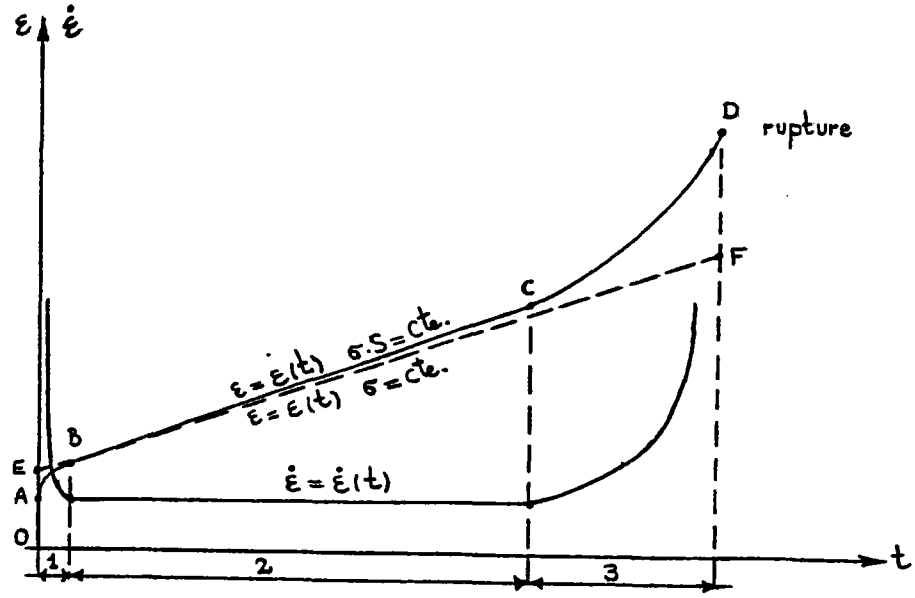


Fig. 1. Relation entre la déformation ε d'une barre de section S et le temps sous une charge $\sigma \cdot S$ = cte et sous une contrainte σ = cte

Habituellement on distingue trois phases :

- La première correspond au fluage primaire ou transitoire ; la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$, décroît jusqu'à une valeur minimale.
- La deuxième correspond à la phase d'écoulement stationnaire du matériau ;

la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$ est constante (fluage secondaire).

- La troisième correspond à la phase du fluage tertiaire : la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$, augmente assez rapidement, conduisant à une instabilité, souvent à la rupture (Lin [46, 1968]).

Andrade [2, 1914] a trouvé, pour la première fois, que le fluage tertiaire est dû à la diminution de la section (S) de la barre et en conséquence à une augmentation de contrainte. Si on trace alors $\varepsilon(t)$ pour une contrainte (σ) constante, on trouvera la courbe OABF de fig. 1 qui ne présente plus le fluage tertiaire.

Pour un matériau non vieillissant (l'échelle du temps n'intervient pas dans la loi de comportement), la déformation $\varepsilon(t)$ est composée de trois parties :

- ε_e : la déformation élastique qui est indépendante du temps

$$\varepsilon_e = \frac{1}{E}\sigma \qquad \text{(Loi de Hooke)}$$

- ε_p : la déformation plastique

$$\varepsilon_p = \varepsilon_p(\sigma,t) \qquad \text{(Loi de plasticité)}$$

- ε_v : la déformation visqueuse

$$\varepsilon_v = \varepsilon_v(\sigma,t) \qquad \text{(Loi de viscosité)}$$

La déformation visqueuse ε_v est composée de deux termes ; l'un dû au fluage primaire $\varepsilon_v^{(1)}$ et l'autre au fluage secondaire $\varepsilon_v^{(2)}$.

Pour le fluage primaire Hoff [39,1958] a proposé une relation du type :

$$\varepsilon_v^{(1)}(t) = a\sigma^b t^c$$

où a,b et c sont des constantes dépendant du matériau et de la température.

Pour la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}_v^{(2)}$ due au fluage secondaire, plusieurs relations ont été proposées :

$\dot{\varepsilon}_v^{(2)} = \alpha(e^{\beta\sigma}-1)$ par Soderberg

$\dot{\varepsilon}_v^{(2)} = \alpha\sigma^n$ par Norton ; Bailey

$\dot{\varepsilon}_v^{(2)} = \alpha e^{\beta+\gamma\sigma}$ par Dushman

$\dot{\varepsilon}_v^{(2)} = \alpha \sin h(\beta\sigma)$ par Nadai

⋮

etc (Lin[46, 1968]).

En général les deux relations $\dot{\varepsilon}_v^{(2)} = \alpha\sigma^n$ et $\dot{\varepsilon}_v^{(2)} = \alpha \sin h(\beta\sigma)$ sont les plus utilisées (Murry [53, 1969]) et les différentes expériences ont montré que ce sont celles qui sont le plus en accord avec les résultats obtenus (Lin[46, 1968]).

1.2. LOI DE NORTON

En remplaçant la courbe OAB de figure 1, par une droite EB, on néglige le fluage primaire ; ce qui est souvent justifié en pratique (Hult [40, 1966]), on obtient alors :

$$\dot{\varepsilon}_v = \alpha\sigma^n. \qquad \text{(Loi de Norton)}$$

Cette relation a été proposée par Norton [59, 1929], α et n sont deux paramètres positifs, dépendant de la température et du matériau. Le paramètre n est en général compris entre 1 et 7 (Murry [53, 1969]).

Ainsi pour un matériau visco-élastique unidimensionnel on obtient la loi de Maxwell-Norton.

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{E}\dot{\sigma} + \alpha\sigma^n \qquad \text{(Loi de Maxwell-Norton)}$$

Les matériaux dont la déformation visqueuse obéit à la loi de Norton sont à la fois nombreux et très variés. Parmi ceux-ci, on peut citer (cf. Friaâ [27, 1979]) :

. L'acier à haute température (Norton [59,1929])

. Les glaciers (Glen [31, 1955])

. Certains types de verre (Marin et al [48, 1951]).

. Les sols gelés (Tompson et Sayles [79, 1972] ; Ladanyi [44, 1972])

. Les matériaux lithosphériques (Kohlstedt et Goetze [43, 1974]).

. Certains solides cristallins à haute température (Poirier [64, 1976]).

. Les peintures solides (Wu [83, 1978]).

. Le bitume routier (Friaâ et Such [28, 1979]).

etc ... .

1.3. LOI DE NORTON-HOFF

La loi de Norton se limite aux cas des sollicitations unidimensionnelles, alors qu'en pratique, celles-ci sont souvent multidimensionnelles.

Odqvist [60, 1934] et [61, 1963] est arrivé à généraliser la loi de Norton pour le cas des sollicitations tridimensionnelles, sous les hypothèses :

. le matériau est incompressible ;

. la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$ est indépendante de la pression hydrostatique ;

. il existe un potentiel de fluage (ou les tenseurs de contraintes et des vitesses de déformations sont coaxiales) ;

. le matériau est isotrope ;

. la loi de Norton est vérifiée pour le cas unidimensionnel.

Plus tard Hoff [38,1954] a généralisé la loi de Norton et a obtenu la même relation. Friaâ [27, 1979] a généralisé la loi de Norton-Hoff en associant à toute loi de la plasticité parfaite une loi de Norton-Hoff généralisée admettant celle-ci comme cas limite.

La loi généralisée par Odqvist et Hoff est couramment appelée loi de Norton-Hoff. Elle relie le tenseur des vitesses de déformation $\dot{\varepsilon}_{ij}$; i,j = 1,2 et 3 au déviateur du tenseur des contraintes s_{ij} :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{ij} = \alpha |s|^{n-1} s_{ij} \\ \dot{\varepsilon}_{ii} = 0 , \end{cases}$$

où α et n sont deux paramètres positifs dépendants de la température et du matériau et $|s| = \sqrt{s_{h\ell}\, s_{h\ell}}$ [1].

En posant $n = q - 1$ et $p = \frac{q}{q-1}$ (conjugué de q), la loi de Norton-Hoff devient :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{ij} = \alpha |s|^{q-2} s_{ij} \\ \dot{\varepsilon}_{ii} = 0 \end{cases} \qquad (1\text{-}3.1)$$

Cette relation s'inverse facilement (si $q \neq 1$) :

$$\begin{cases} s_{ij} = \beta |\dot{\varepsilon}|^{p-2} \dot{\varepsilon}_{ij} \\ \dot{\varepsilon}_{ii} = 0 \end{cases} \qquad (1\text{-}3.2)$$

où $|\dot{\varepsilon}| = \sqrt{\dot{\varepsilon}_{h\ell}\, \dot{\varepsilon}_{h\ell}}$ et $\beta = \alpha^{1-p} > 0$.

Posons $\alpha = \lambda(\sqrt{2}k)^{-q}$ où k et λ sont des constantes positives dont on verra les significations physiques par la suite. On obtient :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{ij} = \lambda \left(\frac{|s|}{\sqrt{2}k} \right)^{q} \frac{s_{ij}}{|s|^2} \\ \dot{\varepsilon}_{ii} = 0 \ ; \ k > 0 \ ; \ q > 1 \end{cases} \qquad (1\text{-}3.3)$$

Les paramètres α et β ont des dimensions qui dépendent de p ou q.

. Pour $p = 2$, (1-3.2) nous donne :

$$s_{ij} = \beta\, \dot{\varepsilon}_{ij} \text{ et } \dot{\varepsilon}_{ii} = 0$$

qui est la loi de comportement d'un fluide Newtonien ; le coefficient β correspond alors à la viscosité du fluide. Il a la dimension d'une viscosité.

. Si p tend vers 1, trois possibilités se présentent :

1°) Soit $s_{h\ell}\, s_{h\ell} > 2k^2 \Rightarrow \dot{\varepsilon}_{ij} = +\infty$ qui n'a pas de sens physique.

2°) Soit $s_{h\ell}\, s_{h\ell} = 2k^2 \Rightarrow \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\lambda}{2k^2} s_{ij}$ et $\dot{\varepsilon}_{ii} = 0$ (loi de normalité en plasticité).

3°) Soit $s_{h\ell}\, s_{h\ell} < 2k^2 \Rightarrow \dot{\varepsilon}_{ij} = 0$ et $\dot{\varepsilon}_{ii} = 0$ (matériau rigide)

---

[1] Nous adoptons la convention de sommation d'Einstein des indices répétés.

On trouve ainsi la loi de comportement du matériau rigide plastique de Von Mises. Le matériau de Norton-Hoff est donc en un certain sens voisin du matériau de Von Mises de limite en cission simple k. On utilisera par la suite cette remarque.

1.4. AUTRE FORMULATION DE LA LOI DE NORTON-HOFF (cf. Friaâ [27, 1979])

Nous utilisons dans toute la suite une terminologie et des résultats, devenus classiques, de l'Analyse Convexe (cf. Moreau [52, 1966], Ekeland et Temam [19, 1974] ou Rockafellar [67, 1979]).

Considérons une structure occupant un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (n = 1,2 ou 3) soumise à des efforts extérieurs. En chaque point $x \in \Omega$ on peut définir le convexe $C(x)$ de Von Mises par :

$$C(x) = \{\sigma \mid s_{ij}(\sigma) s_{ij}(\sigma) \leqslant 2k(x)^2\} \qquad (1\text{-}4.1)$$

où k(x) est la limite en cission simple du matériau plastique parfait[1] de Von-Mises associé à la loi de Norton-Hoff et $s_{ij}(\sigma) = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$[2].

La fonction d'appui Π_C [3] et la fonction jauge g_C du convexe C sont définies par :

$$\Pi_C(\dot{\varepsilon}) = \mathrm{Sup}\{\sigma \cdot \dot{\varepsilon} \ ; \ \sigma \in C\} \qquad (1\text{-}4.2)$$

$$g_C(\sigma) = \mathrm{Inf}\{\mu > 0 \ ; \ \sigma \in \mu C\} \qquad (1\text{-}4.3)$$

où $\sigma \cdot \dot{\varepsilon}$ est le produit scalaire dans l'espace vectoriel des tenseurs symétriques d'ordre deux ($\sigma \cdot \dot{\varepsilon} = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}$).

---

[1] Nous désignerons par plasticité parfaite, l'invariante du convexe de plasticité par rapport au temps et au chargement (cf. Salençon [74, 1974]).

[2] δ_{ij} est le symbole de Kronecker : $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ sinon.

[3] Pour simplifier les écritures on suppose que les matériaux sont homogènes, c'est-à-dire que $\lambda(x)$ et $k(x)$ sont constantes. Les résultats qui seront énoncés par la suite seront valables si $\lambda(x)$ et $k(x)$ sont bornés par deux nombres strictement positifs et p est toujours >1.

Pour le convexe C de von Mises :

$$\Pi_C(\dot{\varepsilon}) = \begin{cases} +\infty \text{ si } \dot{\varepsilon}_{ii} \neq 0 \\ k\sqrt{2\dot{\varepsilon}_{ij}\,\dot{\varepsilon}_{ij}} = \sqrt{2}\,k\,|\dot{\varepsilon}_{ij}| \text{ si } \dot{\varepsilon}_{ii} = 0 \end{cases} \tag{1-4.4}$$

$$g_C(\sigma) = \frac{\sqrt{s_{h\ell}(\sigma)\, s_{h\ell}(\sigma)}}{\sqrt{2}\,k} = \frac{|s(\sigma)|}{\sqrt{2}\,k} \tag{1-4.5}$$

Selon une terminologie de Moreau [52, 1966], on introduit le surpotentiel $\varphi_p(\cdot)$ pour le matériau de Norton-Hoff, qui s'écrit :

$$\forall \dot{\varepsilon}_{ij} \in \mathbb{R}^{2n},\ \varphi_p(\dot{\varepsilon}) = \frac{1}{p}\lambda^{1-p}\,[\Pi_C(\dot{\varepsilon})]^p \text{ si } \dot{\varepsilon}_{ii} = 0$$
$$\varphi_p(\dot{\varepsilon}) = +\infty \text{ si } \dot{\varepsilon}_{ii} \neq 0 \tag{1-4.6}$$

où $p > 1$ et $\lambda > 0$ dont on verra plus loin la signification physique. $\varphi_p(\dot{\varepsilon})$ est une fonction convexe (par rapport à $\dot{\varepsilon}$) ; continue sur son domaine.

La fonction duale de $\varphi_p(\dot{\varepsilon})$ est notée $\varphi_p^{\star}(\sigma)$:

$$\varphi_p^{\star}(\sigma) = \mathrm{Sup}\{\sigma\cdot\dot{\varepsilon} - \varphi_p(\dot{\varepsilon}) \mid \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ji} \in \mathbb{R}^{2n}\} \tag{1-4.7}$$

son Sup est atteint pour $\dot{\varepsilon}_{ij} = \dfrac{s_{ij}(\sigma)}{\lambda^{1-p}\,k^p\,(\sqrt{2}|\dot{\varepsilon}|)^{p-2}}$ qui nous donne

$$\varphi_p^{\star}(\sigma) = \frac{1}{q}\lambda\,[g_C(\sigma)]^q \tag{1-4.8}$$

Grâce au sur-potentiel et son dual, on va pouvoir écrire différemment la loi de Norton-Hoff. Pour cela choisissons le paramètre λ tel que :

$$\beta = \lambda^{1-p}(\sqrt{2}\,k)^p \tag{1-4.9}$$

Pour un matériau de Norton-Hoff, vérifiant (1-3.2) on a :

$$|s| = \beta|\dot{\varepsilon}|^{p-1}$$

$$\sigma_{ij}\,\dot{\varepsilon}_{ij} = \beta|\dot{\varepsilon}|^p \text{ si } \dot{\varepsilon}_{ii} = 0$$

$$\varphi_p(\dot{\varepsilon}) = \frac{1}{p}\,\beta|\dot{\varepsilon}|^p$$

$$\text{et} \quad \varphi_p^{\star}(\sigma) = \frac{1}{q}\,\beta|\dot{\varepsilon}|^p.$$

On peut vérifier facilement que :

$$\varphi_p(\dot{\varepsilon}) + \varphi_p^*(\sigma) = \beta|\dot{\varepsilon}|^p = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}$$

soit :

$$\varphi_p(\dot{\varepsilon}) + \varphi_p^*(\sigma) = \sigma \cdot \dot{\varepsilon} \qquad (1\text{-}4.10)$$

et alors :

$$\dot{\varepsilon} \in \partial\varphi_p^*(\sigma) \qquad (1\text{-}4.11)$$

$$\sigma \in \partial\varphi_p(\dot{\varepsilon}) \qquad (1\text{-}4.12)$$

où ∂ désigne le sous-différentiel[1].

Calculons maintenant $p\varphi_p(\dot{\varepsilon})$ et $q\varphi_p^*(\sigma)$, on obtient :

$$p\varphi_p(\dot{\varepsilon}) = q\varphi_p^*(\sigma) = \sigma \cdot \dot{\varepsilon} \qquad (1\text{-}4.13)$$

Ainsi la loi de Norton-Hoff s'écrit sous l'une des formes équivalentes suivantes (Friaâ [27, 1979]).

$$\sigma \in \partial\varphi_p(\dot{\varepsilon}) \qquad (1\text{-}4.12)$$

$$\dot{\varepsilon} \in \partial\varphi_p^*(\sigma) \qquad (1\text{-}4.11)$$

$$\varphi_p(\dot{\varepsilon}) + \varphi_p^*(\sigma) = \sigma \cdot \dot{\varepsilon} \qquad (1\text{-}4.10)$$

$$p\varphi_p(\dot{\varepsilon}) = q\varphi_p^*(\sigma) = \sigma \cdot \dot{\varepsilon} \qquad (1\text{-}4.13)$$

A partir de ces résultats, on peut définir une loi de Norton-Hoff généralisée pour n'importe quel convexe de plasticité, de rupture fragile, de flambement, ... etc

---

[1] Soit V et V^* deux espaces en dualité, on dit $y_0 \in V^*$ est un sous-gradient de f au point x_0 si et seulement si : $\forall x \in V \quad f(x) \geq f(x_0) + \langle x - x_0, y_0 \rangle$ et l'ensemble des sous-gradients forme le sous-différentiel noté $\partial f(x_0)$. Si $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ et si elle est enveloppe supérieure d'une famille de fonctions affines on a :

$$y_0 \in \partial f(x_0) \iff x_0 \in \partial f^*(y_0) \iff f(x_0) + f^*(y_0) = \langle x_0, y_0 \rangle$$

(Ekeland et Teman [19, 1974]).

A l'aide des paramètres λ et k introduit dans cette partie, la loi de Norton-Hoff s'écrit :

$$\begin{cases} s_{ij} = \lambda^{1-p}(\sqrt{2}k)^{p} \ |\dot{\varepsilon}|^{p-2} \ \dot{\varepsilon}_{ij} & (1\text{-}4.14) \\ \dot{\varepsilon}_{ij} = \lambda(\sqrt{2}k)^{-q} \ |s|^{q-2} \ s_{ij} & (1\text{-}4.15) \\ \text{avec } \dot{\varepsilon}_{ii} = 0 \ ; \ \lambda > 0 \ ; \ p > 1 \ ; \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 & (1\text{-}4.16) \end{cases}$$

1.5. SIGNIFICATION DE k ET DE λ :

Nous avons déjà vu (§ 1-3) que k est la limite élastique en cission simple du matériau de Von Mises associé au convexe C, à partir duquel on a défini le matériau de Norton-Hoff. Voyons maintenant la signification physique du paramètre λ.

Considérons un essai de cisaillement simple sur un matériau de Norton-Hoff, parallèlement au plan (x,y) ; si la contrainte de cisaillement $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ est prise égale à k, l'état de vitesse de déformation est donné par :

$$\dot{\varepsilon}_{xy} = \dot{\varepsilon}_{yx} = \frac{\lambda}{(\sqrt{2}k)^{q}}\left[\sqrt{k^2+k^2}\right]^{q-2} k = \frac{\lambda}{2k}$$

D'où $\lambda = 2k \ \dot{\varepsilon}_{xy}$ qui correspond à la puissance élémentaire dissipée dans un essai de cisaillement simple effectué sur le matériau de Norton-Hoff lorsque la contrainte de cisaillement est égale à la limite en cission simple du matériau de Von Mises sous-jacent.

2. PROBLEME D'ECOULEMENT

2.1. POSITION DU PROBLEME

Considérons une structure constituée de matériau de Norton-Hoff, de loi de comportement (1-4.14) ou (1-4.15) avec les conditions de (1-4.16) ; occupant un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$ (n = 1,2 ou 3) à un instant t. On suppose que avant l'instant t, la structure Ω est dans un état naturel ; sans contraintes ni déformations. A l'instant t, on applique à la structure des efforts exté-

rieurs définis par une distribution volumique $\vec{f}(x)$; où $x \in \Omega$ est un point courant de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, et une distribution surfacique $\vec{T}(x)$ sur une partie Γ_T de la frontière Γ de Ω. Sur la partie Γ_u, complémentaire de Γ_T dans Γ, on impose des vitesses de déplacement $\vec{u}(x)$.

On suppose que les effets thermiques et d'inertie sont négligeables ; c'est-à-dire que l'évolution de structure est isotherme et quasi-statique. On fait l'hypothèse de petites déformations. Nous nous proposons de trouver à l'instant t, le champ de vitesse $\vec{v}$, et le champ de contrainte σ de structure.

Ces deux champs vérifient les équations :

.Equations d'équilibre :

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \text{ dans } \Omega \qquad (2\text{-}1.1)$$

$$\sigma_{ij} n_j = T_i \quad \text{sur } \Gamma_T \qquad (2\text{-}1.2)$$

où $$\sigma_{ij,j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} ,$$

et les n_j désignent les cosinus directeurs de la normale extérieure à Γ.

.Conditions aux limites cinématiques

$$\vec{v} = \vec{u} \text{ sur } \Gamma_u \qquad (2\text{-}1.3)$$

.Loi de comportement de matériau de Norton-Hoff

$$\varepsilon(\vec{v}) \in \partial\varphi_p^{\star}\left(s(\sigma)\right) \text{ ou } s(\sigma) \in \partial\varphi_p\left(\varepsilon(\vec{v})\right) \qquad (2\text{-}1.4)$$

avec

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}(\vec{v}) = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) \qquad (2\text{-}1.5)$$

2.2. RECHERCHE DES DEPLACEMENTS

THEOREME 1 (Friaâ [27, 1979] ; Frémond [20, 1979] ; Delbecq et al. [17, 1977] ; Rabotnov [65, 1961]). Le champ de vitesses de déplacement $\vec{v}$, la solution du problème d'écoulement, minimise parmi tous les champs de vitesses de déplacements cinématiquement admissibles (pour la donnée $\vec{v} = \vec{u}$ sur Γ_u et la relation d'incompressibilité div $\vec{v} = 0$ dans Ω) la fonctionnelle :

$$H(\vec{w}) = \int_{\Omega} \varphi_p(\varepsilon(\vec{w}))\,d\Omega - \int_{\Omega} f_i w_i \, d\Omega - \int_{\Gamma_T} T_i w_i \, d\Gamma \qquad (2\text{-}2.1)$$

c'est-à-dire

$$H(\vec{v}) = \text{Inf}\ \{H(\vec{w}) \mid \forall \vec{w} \in V_{C.A.}\}$$

où

$$V_{C.A.} = \{\vec{v} \mid \vec{v} = \vec{u} \text{ sur } \Gamma_u \text{ et div } \vec{v} = 0 \text{ dans } \Omega\}. \qquad (2\text{-}2.2)$$

La solution $\vec{v}$ du problème d'écoulement est unique car la fonctionnelle $H(\vec{w})$ est strictement convexe (du fait de la stricte convexité de $\varphi_p(\varepsilon(\vec{w}))$).

Le théorème de l'existence de la solution $\vec{v}$ du problème d'écoulement a été démontré par Friaâ [27 , 1979] ; Frémond [20, 1979] ou [21, 1980] :

La solution $\vec{v}$ existe si les quatre hypothèses suivantes sont vérifiées:

H1°) L'ouvert borné Ω est assez régulier.

H2°) Γ_u est de mesure non nulle.

H3°) $v_i \in L^p(\Omega)$; $\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^p(\Omega)$

H4°) $f_i \in L^q(\Omega)$; $T_i \in L^q(\Gamma_T)$ avec $\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1\right)$

et $L^p(\Omega) = \{u \mid u \in C^0(\Omega) \ ; \ \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < +\infty\}$ (voir Bass [4, 1971]).

Ces quatre hypothèses sont en pratique facilement vérifiées (Frémond [20, 1979] ou [21, 1980]).

THEOREME 2 (Frémond [20, 1979] ou [21, 1980]). Réciproquement si le champ de vitesses $\vec{v} \in V_{C.A.}$ minimisant la fonctionnelle $H(\vec{w})$ est assez régulier, on peut définir un champ de contraintes σ qui forme avec $\vec{v}$, un couple $(\sigma, \vec{v})$ solution du problème d'écoulement.

Ce champ de contraintes σ est défini par les théorèmes 3 et 4.

THEOREME 3 (Frémond [20, 1979] ou [21, 1980]). Le problème d'écoulement est équivalent à un problème de point selle $(\mathcal{P}_1)$:

$$(\mathcal{T}_1) \qquad \begin{cases} \text{Sup}\{\text{Inf}\{\mathcal{L}(\vec{w},\mu) \mid \vec{w} \in [W^{1,p}(\Omega)]^3 \text{ et } \vec{w} = \vec{u} \text{ sur } \Gamma_u\} \mid \mu \in \mathbb{R}\} \\ \text{avec } \mathcal{L}(\vec{w},\mu) = H(\vec{w}) + \int_\Omega \mu(x)\ \text{div}\,\vec{w}\, d\Omega \end{cases}$$

Les multiplicateurs de Lagrange $\hat{\mu}(x)$, la solution du problème $(\mathcal{T}_1)$ sont les pressions hydrostatiques à une constante près. Cette constante peut être déterminée à l'aide des équations d'équilibre. Si $\hat{\mu} \in L^q(\Omega)$, on peut démontrer que la solution en contrainte existe mais elle n'est pas toujours unique.

2.3. RECHERCHE DES CONTRAINTES

THEOREME 4 (Friaâ [27, 1979] ; Frémond [20, 1979] ou [21, 1980] ; Delbecq et al. [17, 1977] ; Rabotnov [65, 1961]). La solution du problème d'écoulement : le champ de contraintes σ, rend minimale la fonctionnelle :

$$H^*(\tau) = \int_\Omega \varphi_p^*(\tau) d\Omega - \int_{\Gamma_u} \tau_{ij}\, n_j\, u_i\, d\Gamma \qquad (2\text{-}3.1)$$

sur l'ensemble

$$\sum = \{\tau \mid \tau_{ij,j} + f_i = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } \tau_{ij}\, n_j = T_i \text{ sur } \Gamma_T\} \qquad (2\text{-}3.2)$$

des contraintes statiquement admissibles. Le déviateur de σ est unique.

L'existence de la solution en contrainte est vérifiée sous les hypothèses H1° à H4°, du § 2-2 (cf. Friaâ [27, 1979] et Frémond [20, 1979]).

De plus on a :

$$\text{Inf}\{H^*(\tau) \mid \tau \in \sum\} + \text{Inf}\{H(\vec{w}) \mid \vec{w} \in V_{C.A}\} = 0. \qquad (2\text{-}3.3)$$

En effet la relation (1-4.10) intégrée sur Ω, les équations d'équilibre et la relation

$$\int_\Omega \sigma_{ij}\, \varepsilon_{ij}(\vec{v})\, d\Omega = \int_\Gamma \sigma_{ij}\, n_j\, v_i\, d\Gamma - \int_\Omega \sigma_{ij,j}\, v_i\, d\Omega$$

nous donnent :

$$\int_\Omega \left[\varphi_p(\varepsilon(\vec{v})) + \varphi_p^*(\sigma)\right] d\Omega = \int_{\Gamma_T} T_i v_i \, d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \sigma_{ij} n_j u_i \, d\Gamma + \int_\Omega f_i v_i \, d\Omega \quad (2\text{-}3\text{-}4)$$

ce qui montre la relation (2-3.3) car le couple $(\vec{v},\sigma)$ est la solution du problème d'écoulement.

3. APPLICATION DE LA LOI DE NORTON-HOFF EN ANALYSE LIMITE

On a déjà vu que quand p tend vers 1, le matériau de Norton-Hoff tend vers le matériau rigide plastique de Von Mises.

Dans ce chapitre nous allons définir d'abord le convexe de chargement potentiellement supportable, puis on étendera cette définition au matériau de Norton-Hoff et enfin on donnera une nouvelle méthode de calcul de la charge limite (Friaâ [27,1979]).

3.1. CONVEXE DE CHARGEMENT POTENTIELLEMENT SUPPORTABLE (Salençon [75, 1978], Frémond et Friaâ [23, 1977]).

Considérons une structure occupant l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, constituée d'un matériau rigide plastique, soumise sur Γ_T (une partie de Γ, la frontière de Ω) à une charge $\vec{T}$ et dans Ω à une répartition volumique des forces de densité $\vec{f}$. Sur Γ_u, complément de Γ_T dans Γ, on a imposé les vitesses ($\vec{v} = \vec{0}$ sur Γ_u).

La capacité de résistance du matériau en tout point $x \in \Omega$ est définie par un convexe C, l'ensemble des contraintes plastiquement admissibles.

Soient :

$V_{C.A.}$ l'espace des vitesses de déplacement cinématiquement admissibles défini par :

$$V_{C.A.} = \left\{\vec{v} \mid v_i \in C^0(\Omega) \; ; \; \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega) \; ; \; \operatorname{div} \vec{v} = 0 \; ; \; \vec{v} = \vec{0} \text{ sur } \Gamma_u\right\},$$

F, l'espace des efforts extérieurs,

D, l'espace des vitesses de déformations,

S, l'espace des efforts intérieurs.

La dualité entre D et S est définie par

$$<\sigma,d> = \int_\Omega \sigma_{ij}\, d_{ij}\, d\Omega \text{ pour } \sigma \in S \text{ et } d \in D.$$

Elle désigne l'opposé de la puissance des efforts intérieurs σ dans le champ de vitesses de déformation d.

La dualité entre F et $V_{C.A.}$ est définie par $\ll f,v \gg$ pour $v \in V_{C.A.}$ et $f \in F$. Elle désigne la puissance des efforts extérieurs f dans le champ de vitesses de déplacement v.

On définit l'opérateur de vitesse de déformation ε, linéaire continu et injectif de V dans D par

$$\varepsilon_{ij}(\vec{v}) = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$$

et l'opérateur d'équilibre L, linéaire, continu de S dans F. On a l'expression du principe des puissances virtuelles :

$$\forall \vec{v} \in V_{C.A.} \; ; \; \forall \sigma \in S \; ; \; <\sigma,\varepsilon(\vec{v})> = \ll L(\sigma),\vec{v} \gg.$$

L'ensemble J défini par

$$J = \{\sigma \in S \mid <\sigma,\varepsilon(\vec{v})> = 0 \quad \forall v \in V_{C.A.}\}$$

est le sous-espace de S des autocontraintes, i.e. les contraintes qui équilibrent des forces extérieures nulles.

La structure (Ω) est soumise à un processus de chargement à m paramètres : $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$. Cela revient à se donner un sous-espace vectoriel F_Σ de F de dimension m. Lorsque m = 1, on a un chargement proportionnel :

$$F_\Sigma = \{\lambda_1 f_1 \mid \lambda_1 \in \mathbb{R} \; ; \; f_1 \in F\}$$

On définit ensuite l'espace $\sum$, des contraintes statiquement admissibles, c'est l'ensemble des contraintes qui équilibre les éléments de F_Σ

$$F_\Sigma = L(\sum)$$

L'ensemble H des champs de contraintes statiquement admissibles et vérifiant le critère de plasticité ($H \subset S$) est défini par :

$$H = G \cap \sum = \{\sigma \mid \sigma \in \sum \ ; \ \sigma(x) \in C \quad \forall x \in \Omega\}$$

où G est l'ensemble des champs de contraintes plastiquement admissibles :

$$G = \{\sigma \in S \mid \sigma(x) \in C \quad \forall x \in \Omega\}.$$

L'ensemble H est convexe, car C est convexe. K, l'ensemble des chargements potentiellement supportables est l'image de H par L, i.e. $K = L(H)$. K est convexe car H est convexe et L est linéaire. Donc : $K = L(G \cap \sum)$.

3.2. APPROCHE PAR L'EXTERIEUR (METHODE CINEMATIQUE) (Friaâ [27 , 1979]).

La fonction d'appui du convexe G de champs de contraintes plastiquement admissibles est

$$\Pi_G(\dot{\varepsilon}) = \text{Sup}\{<\sigma, \dot{\varepsilon}> \mid \quad \forall \sigma \in G\} = \int_\Omega \Pi_C\left(\varepsilon(\vec{v})\right) d\Omega \qquad (3.2\text{-}1)$$

$\Pi_G(\dot{\varepsilon})$ est la puissance dissipée pour la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$. Le convexe K_1 convexe d'approche par l'extérieur est défini par sa fonction indicatrice ψ_{K_1} :

$$\psi_{K_1}(Q) = \text{Sup}\{Q\ \dot{q}(\vec{v}) - \Pi_G\left(\varepsilon(\vec{v})\right) \mid \quad \vec{v} \in V_{C.A.}\}$$

où $\dot{q}(\vec{v})$ est un vecteur associé à Q dans l'expression de la puissance des forces extérieures.

K_1 est un convexe fermé (Friaâ [27, 1979]), contenant le convexe K, des chargements potentiellement supportables. En effet $Q \in K$, il existe un $\sigma \in G \cap \sum$ tel que $Q = L(\sigma)$. On a alors du fait que $\sigma \in G$:

$$\forall \vec{v} \in V_{C.A.} \quad Q\dot{q}(\vec{v}) = <\sigma, \varepsilon(\vec{v})> \leqslant \Pi_G\left(\varepsilon(\vec{v})\right)$$

donc $\psi_{K_1}(Q) = \psi_{K_1}\left(L(\sigma)\right) = 0$ et $Q \in K_1$, d'où $K \subset K_1$.

Soit un vecteur $\dot{q}(\vec{v}) \neq 0 \in \mathbb{R}^m$, on peut noter que le convexe K_1 est contenu dans le demi-espace défini par :

$$\{Q \mid Q\dot{q}(\vec{v}) \leq \Pi_G(\varepsilon(\vec{v})) \ ; \ \forall \vec{v} \in V_{C.A.}\}.$$

D'où le principe de la méthode cinématique :

Soient $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_r$, r éléments non nuls de $\mathbb{R}^m$, on a :

$$K_1 \subset \bigcap_{i=1}^{r} \{Q \mid Q\dot{q}_i(\vec{v}) \leq \mathrm{Inf}\{\Pi_G(\varepsilon(\vec{v}))\} \ ; \ \vec{v} \in V_{C.A.}\}$$

Il y a égalité entre K et K_1, si C est un convexe fermé, borné et contenant l'origine (cf. Friaâ [27, 1979] ; Frémond et Friaâ [22, 1978] ou [23, 1977]).

Pour tout chargement appartenant à la frontière de K, pour un matériau standard (vérifiant la loi de normalité $\dot{\varepsilon} \in \partial\psi_C(\sigma)$, où ψ_C est l'indicatrice du convexe C), il y a écoulement libre et tout chargement intérieur à K est supportable par la structure (Friaâ [27, 1979]) (on se place dans le cadre classique des petites déformations. Tous les résultats sont donc indiqués dans le cas de changement de géométrie négligeable).

3.3. CALCUL DE LA CHARGE LIMITE D'UNE STRUCTURE CONSTITUEE DE MATERIAU DE VON MISES EN UTILISANT LE MATERIAU DE NORTON-HOFF SOUS JACENT (Friaâ [27, 1979]).

La structure $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ définie en §3-1 est cette fois constituée du matériau de Von Mises homogène de critère :

$$C = \{\sigma \mid s_{ij}(\sigma)s_{ij}(\sigma) \leq 2k^2\}.$$

Elle est soumise à des charges $\vec{T}$ surfaciques et $\vec{f}$ volumiques. On considère un processus de chargement à m paramètres comme indiqué dans § 3-1, défini par la donnée d'un sous-espace F_Σ de F, de dimension finie m, et nous allons nous intéresser à la recherche du convexe K, des chargements potentiellement supportables par la structure dans le processus de chargement considéré, sous l'hypothèse des petites déformations. On a : $K = L(\sum \cap G)$ où

$$G = \{\sigma \in S \mid \sigma(x) \in C, \ \forall x \in \Omega\}$$

et L est l'opérateur d'équilibre défini auparavant.

Maintenant supposons que l'on ait remplacé le matériau de Von Mises par le matériau de Norton-Hoff avec un paramètre p ($\lambda = 1$, car on verra que λ ne joue qu'un rôle secondaire) associé au matériau de Von Mises.

Sous les charges $Q \in F_\Sigma$, on obtient un écoulement du matériau caractérisé par un champ de contraintes σ_p et une vitesse de déplacement v_p qui sont donnés par les théorèmes 1 à 4. Comme pour le matériau de Von Mises, nous allons définir pour le matériau de Norton-Hoff l'opérateur d'équilibre L_p. Pour cela on note :

$$V_p = \{\vec{v} \mid \vec{v} \in [W^{1,p}(\Omega)]^3 \ ; \ \operatorname{div} \vec{v} = 0 \ ; \ \vec{v} = \vec{0} \text{ sur } \Gamma_u\} = [W^{1,p}(\Omega)]^3 \cap V_{C.A.}$$

muni de la norme de $[W^{1,p}(\Omega)]^3$,

$$F_p = \text{dual de } V_p \qquad F_p \subset F$$
$$D_p = \{d = (d_{ij}) \ ; \ i,j = 1,n \ ; \ d_{ij} \in L^p(\Omega) \ ; \ d_{ii} = 0\}$$
$$S_p = \{s = (s_{ij}) \ ; \ i,j = 1,n \ ; \ s_{ij} \in L^q(\Omega) \ ; \ s_{ii} = 0\}$$

L'opérateur de vitesse de déformation ε de V_p dans D_p est linéaire, injectif et continu

$$\varepsilon_{ij}(\vec{v}) = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}).$$

Tout élément de l'ensemble des chargements F_Σ, est en équilibre avec un champ de contraintes appartenant à l'ensemble $\sum_p$ des champs de contraintes statiquement admissibles par la relation

$$\sum_p \xrightarrow{L_p} F_\Sigma$$

où L_p est l'opérateur d'équilibre qui est linéaire continu et surjectif.
On défini G_p par :

$$G_p = \{s \mid s \in S_p \ ; \ \sigma(s(x)) \in C \qquad \forall x \in \Omega\}$$

Le convexe de chargement K_p pour le matériau de Norton-Hoff associé au matériau de Von Mises est défini par :

$$K_p = L_p(\sum_p \cap G_p).$$

THEOREME 5 (Friaâ [27, 1979]). Le convexe K_p est fermé dans $\mathbb{R}^m$ et sa fonction jauge vaut :

$$\mathcal{G}_p(Q) = \left[\frac{q}{\mu(\Omega)}\mathrm{Inf}\{H_p^*(\tau) \mid \tau \in \sum_p\}\right]^{\frac{1}{q}} \quad \forall Q \in \mathbb{R}^m.$$

En plus on a

$$\mathcal{G}_p\{\theta Q_1 + (1-\theta)Q_2\} \leqslant \theta \mathcal{G}_p(Q_1) + (1-\theta)\mathcal{G}_p(Q_2)$$

pour $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ et $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^m$, ainsi que $\mathcal{G}_p(\theta Q) = \theta \mathcal{G}_p(Q)$ pour $\forall \theta \geqslant 0$ et $\forall Q \in \mathbb{R}^m$, i.e. $\mathcal{G}_p$ est une fonction convexe et positivement homogène en Q.

THEOREME 6 (Friaâ [27, 1979]) . La famille des convexes $(K_p)_{p>1}$ est décroissante avec p, c'est-à-dire

$$p' \geqslant p > 1 \Rightarrow K_{p'} \supset K_p$$

et de plus

$$K \subset \bigcap_{p>1} K_p$$

THEOREME 7 (Friaâ [27, 1979]). Sous les hypothèses suivantes qui sont souvent vérifiées, on a :

$$K = \bigcap_{p>1} K_p$$

H1° - Existence d'une boule de centre l'origine et de rayon $r>0$: $B(0,r)$ telle que

$$B(0,r) \subset C(x) \quad \forall x \in \Omega$$

et r soit indépendant de x.

H2° - En notant $\psi(x,\cdot)$, la fonction indicatrice du convexe $C(x)$, on suppose que pour tout $\sigma \in S$, l'application

$$x \longrightarrow \psi\big(x,\sigma(x)\big)$$

est mesurable.

H3° - Il existe un $R>0$ tel que

$$G'(x) \subset B(0,R) \quad \forall x \in \Omega$$

où $G'(x)$ est l'ensemble des déviateurs des contraintes $\sigma(x)$ appartenant à $C(x)$.

THEOREME 8 (Friaâ [27 , 1979]). La nouvelle méthode de calcul de K

Sous les hypothèses du théorème 7, on a :

1. Un chargement Q est potentiellement supportable si et seulement si :

$$\mathcal{G}_p(Q) \leqslant 1 \text{ quand } p \longrightarrow 1$$

ou bien

$$S_p(Q) = \mathrm{Inf}\{H_p^{\star}(\sigma) \mid \sigma \in \sum\} \longrightarrow 0 \text{ quand } p \longrightarrow 1 \qquad (3\text{-}3.5)$$

2. Un chargement Q est non potentiellement supportable ($Q \notin K$) si et seulement si :

$$\mathcal{G}_p(Q) > 1 \text{ quand } p \longrightarrow 1 \qquad (3\text{-}3.6)$$

ou

$$S_p(Q) \longrightarrow +\infty \text{ quand } p \longrightarrow 1 \qquad (3\text{-}3.7)$$

■

Ce sont des résultats que l'on utilisera par la suite pour calculer la charge limite d'une structure constituée d'un matériau de Von Mises.

4. CALCUL ANALYTIQUE DE LA CHARGE LIMITE DE QUELQUES PROBLEMES SIMPLES

INTRODUCTION. Dans ce chapitre notre but est d'utiliser le matériau de Norton-Hoff pour calculer la charge limite de quelques problèmes simples (Théorème 8) et comparer nos résultats avec ceux déjà existants (trouvés par les méthodes classiques).

4.1. CONVEXE DE CHARGEMENT POTENTIELLEMENT SUPPORTABLE POUR UN BLOC DE MATERIAU DE VON MISES DE SECTION RECTANGULAIRE EN DEFORMATIONS PLANES SERRE ENTRE QUATRE PLATEAUX LISSES (chargement à deux paramètres)

On considère un bloc de dimensions $2h \times 2a \times 2b$, avec b assez grand dans la direction des axes z, serré entre quatre plateaux rigides, lisses deux à deux parallèles, par des pressions moyennes Q_1 et Q_2 (Fig. 2).

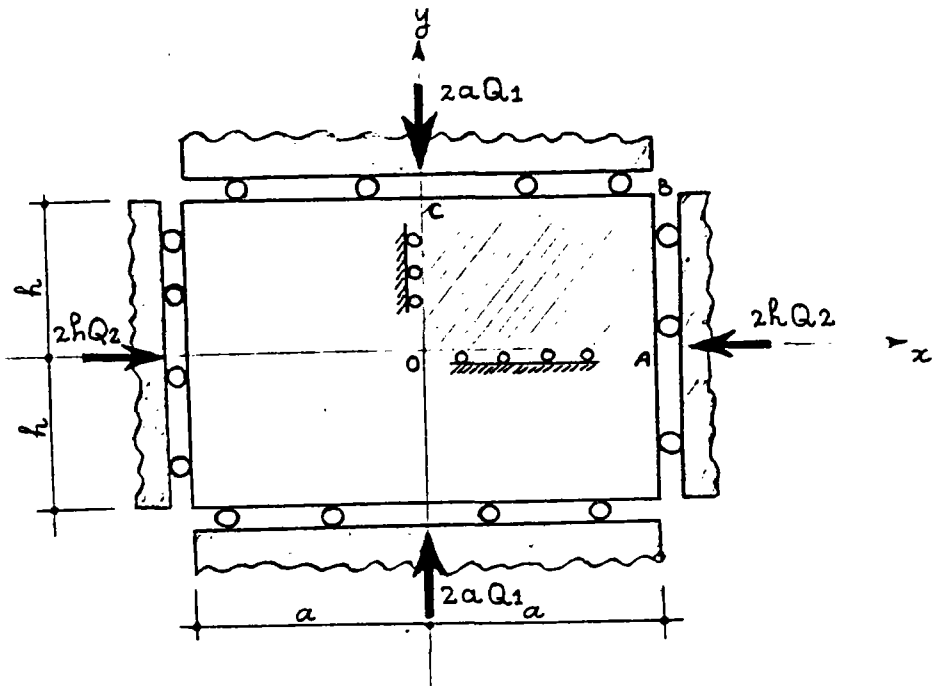


Fig. 2. Un bloc rectangulaire en déformations planes entre quatre plateaux lisses et rigides

On néglige les forces volumiques. Pour des raisons de symétrie, on considère le quart de bloc OABC avec $\Omega = \{(x,y) \mid 0<x<a \text{ et } a<y<h\}$.

Rappelons que ce problème a été déjà résolu par différents auteurs pour le cas où $Q_2 = 0$, notamment : Salençon [75, 1978], Turgeman [80, 1976], etc... en utilisant les méthodes classiques. Nous utilisons une nouvelle méthode pour résoudre ce problème.

On remplace le matériau de Von Mises de critère

$$C = \{\sigma \mid s_{ij}(\sigma)s_{ij}(\sigma) \leqslant 2k^2\}$$

par le matériau de Norton-Hoff sous-jacent. Il faut trouver alors un champ de contraintes σ et un champ de vitesses de déplacement $\vec{v}$, vérifiant :

1°) $$\sigma_{ij,j} = 0 \text{ dans } \Omega$$

2°) sur AB : $\forall y \in [0,h]$, $x = a$, on a :

$$v_x = \text{cte} \; ; \; \int_0^h \sigma_{xx}\, dy = -hQ_2 \; ; \; \sigma_{xy} = 0$$

3°) sur BC : $y = h$, $\forall x \in [0,a]$ on a :

$$v_y = \text{cte} \; ; \; \int_0^a \sigma_{yy}\, dx = -aQ_1 \; ; \; \sigma_{xy} = 0$$

4°) sur OC : $x = 0$, $\forall y \in [0,h]$ on a : $v_x = 0$ et $\sigma_{xy} = 0$

5°) sur OA : $y = 0$, $\forall x \in [0,a]$ on a : $v_y = 0$ et $\sigma_{xy} = 0$

6°) Loi de comportement du matériau de Norton-Hoff :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{ij} = \dfrac{\lambda}{(\sqrt{2}k)^q}\left(\sqrt{s_{h\ell}\, s_{h\ell}}\right)^{q-2} s_{ij} \\ \dot{\varepsilon}_{ii} = 0 \end{cases}$$

où $\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$ et $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{ii}\delta_{ij}$

7°) $$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{zz} = 0 \quad \text{(déformations planes)} \\ \dot{\varepsilon}_{xz} = 0 \\ \dot{\varepsilon}_{yz} = 0 \end{cases}$$

de la relation 7° et la loi de comportement 6° on trouve facilement que :

$$\dot{\varepsilon}_{xx} + \dot{\varepsilon}_{yy} = 0 \quad \forall x,y \in \Omega \text{ et } \sigma_{zz} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \text{ est indépendant de } z.$$

On prend alors une fonction d'Airy de deuxième degré :

$$F = A_2x^2 + B_2xy + C_2y^2 + A_1x + B_1y + A_0$$

qui nous donne pour les contraintes :

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2C_2$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2A_2$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = B_2.$$

Les constantes A_2, B_2 et C_2 sont déterminées par les conditions aux limites sur les contraintes qui donne

$$A_2 = -\frac{1}{2}Q_1$$

$$B_2 = 0$$

$$C_2 = -\frac{1}{2}Q_2$$

D'où :

$$\sigma_{xx} = -Q_2, \ \sigma_{yy} = -Q_1, \ \sigma_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j \text{ et } \sigma_{zz} = -\frac{Q_1+Q_2}{2} \qquad (4\text{-}1.1)$$

et pour les déviateurs des contraintes :

$$s_{xx} = \frac{1}{2}(Q_1-Q_2), \ s_{yy} = \frac{1}{2}(Q_2-Q_1), \ s_{zz} = 0 \text{ et } s_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j.$$

En considérant les relations (4-1.1) et la loi de comportement on trouve :

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = \frac{\lambda}{(2k)^q}(Q_1-Q_2)^{q-1} \ ; \ \dot{\varepsilon}_{yy} = -\dot{\varepsilon}_{xx} = -\frac{\lambda}{(2k)^q}(Q_1-Q_2)^{q-1}$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = 0 \text{ pour les autres.}$$

D'où :

$$v_x = \frac{\lambda}{(2k)^q}(Q_1-Q_2)^{q-1}x + \psi_1(y)$$

$$v_y = -\frac{\lambda}{(2k)^q}(Q_1-Q_2)^{q-1}y + \psi_2(x)$$

où $\psi_1(y)$ et $\psi_2(x)$ sont deux fonctions dépendantes respectivement de y et de x. En considérant les conditions aux limites sur les vitesses on trouve que $\psi_1(y) \equiv \psi_2(x) \equiv 0$.

Nous avons donc trouvé un couple $(\sigma,\vec{v})$ qui est la solution du problème d'écoulement. Calculons la charge limite :

$$\varphi_p^{\star}(\sigma) = \frac{1}{q}\lambda\left[\sqrt{\frac{s_{h\ell}\, s_{h\ell}}{2k^2}}\right]^q = \frac{\lambda}{q}\left(\frac{Q_1-Q_2}{2k}\right)^q$$

et

$$\inf_{\sigma_{s.A.}} \{H_p^{\star}(\sigma)\} = \int_{\Omega} \varphi_p^{\star}(\sigma)\, d\Omega - \int_{\Gamma_u} \sigma_{ij}\, n_j\, u_i\, d\Gamma = \frac{\lambda}{q}\, ah\left(\frac{Q_1-Q_2}{2k}\right)^q$$

et la fonction jauge du convexe K_p vaut :

$$\mathcal{G}_p(Q_1,Q_2) = \left[\frac{q}{ah}\, \mathrm{Inf}\{H^{\star}(\sigma)\}\right]^{\frac{1}{q}} = \lambda^{\frac{1}{q}}\, \frac{|Q_1-Q_2|}{2k}$$

si on tend $p \to 1$ ou $q \to +\infty$ on a $\mathcal{G}_p(Q_1,Q_2) \to \frac{|Q_1-Q_2|}{2k}$.

On voit que λ ne joue aucun rôle pour calculer la charge limite.

Pour que $(Q_1,Q_2) \in K$ l'ensemble des chargements potentiellement supportables il faut et il suffit que $\mathcal{G}_p \leqslant 1$ quand $p \to 1$ ce qui veut dire :

$$|Q_1-Q_2| \leqslant 2k$$

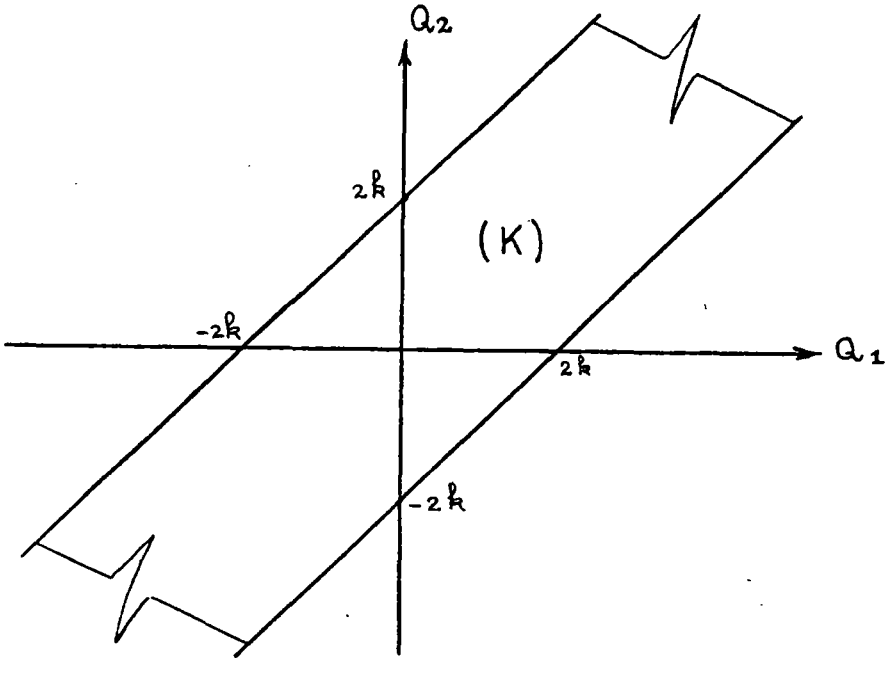


Fig. 3. Convexe K des chargements potentiellement supportables

Remarque 1. Si le bloc est serré entre deux plateaux lisses on aura : $Q_2 = 0$ et une charge potentiellement supportable sera alors $Q_1 \in [-2k,2k]$. Ce résultat a aussi été obtenu par les méthodes classiques comme nous l'avons déjà dit.

Remarque 2. Prenons $\lambda = 1$, car λ ne joue pas de rôle en analyse limite, on voit alors que

$$\mathcal{G}_p(Q_1,Q_2) = \frac{|Q_1-Q_2|}{2k}$$

est indépendant de p ce qui veut dire que dans ce problème le convexe de chargement K_p est aussi indépendant de p et on a :

$$K = K_p \quad \forall p > 1.$$

4.2. CONVEXE DES CHARGEMENTS POTENTIELLEMENT SUPPORTABLES D'UN TUBE CYLINDRIQUE ASSEZ LONG, SOUMIS A UNE PRESSION HYDRAULIQUE D'INTENSITE Q_1 A L'INTERIEUR ET Q_2 A L'EXTERIEUR.

On considère un tube de rayon interne a et externe b constitué de matériau de Von Mises ($s_{ij}\, s_{ij} \leqslant 2k^2$) en déformation plane sous les pressions hydrauliques Q_1 et Q_2, et on se demande sous quelle combinaison de (Q_1,Q_2) il y a écoulement libre (fig. 4).

Rappelons que ce problème a été déjà résolu par différents auteurs pour le cas où $Q_2 = 0$, en utilisant les méthodes classiques. Tandis que nous voulons utiliser la nouvelle méthode basée sur le matériau de Norton-Hoff.

Nous remplaçons le matériau de Von Mises par le matériau de Norton-Hoff associé. Nous déterminons d'abord la solution du problème d'écoulement.

Pour des raisons évidentes de symétrie, on se restreint au quart de cylindre ABCD, il faut trouver comme dans le cas précédent, un champ de contraintes σ de déviateurs s, et un champ de vitesses de déplacement $\vec{v} = (v_\theta, v_r)$ vérifiant :

1°) Equations d'équilibre (on néglige les forces volumiques)

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = r \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} \text{ dans } \Omega \qquad \Omega = \{(r,\theta) \mid r \in [a,b] \ ; \ \theta \in [0, \tfrac{\pi}{2}]\}$$

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{rz} = 0 \text{ dans } \Omega$$

2°) Conditions aux limites sur les contraintes

$$\text{sur AB et CD : } \sigma_{r\theta} = 0 \quad \text{pour} \quad \theta = 0 \text{ et } \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{sur AD : } \sigma_{rr} = -Q_1 \text{ pour } r = a$$

$$\text{sur BC : } \sigma_{rr} = -Q_2 \text{ pour } r = b$$

3°) Conditions aux limites sur les vitesses

$$\text{sur AB : } v_\theta = 0 \quad \text{pour } \theta = 0 \quad \forall r \in [a,b]$$

$$\text{sur CD : } v_\theta = 0 \quad \text{pour } \theta = \frac{\pi}{2} \quad \forall r \in [a,b]$$

4°) Loi de comportement

$$\begin{cases} s_{ij} = \lambda^{1-p} \ (\sqrt{2}k)^p \left(\sqrt{\dot{\varepsilon}_{h\ell} \, \dot{\varepsilon}_{h\ell}}\right)^{p-2} \dot{\varepsilon}_{ij} \\ \dot{\varepsilon}_{ii} = 0 \end{cases}$$

où

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \, \delta_{ij} \text{ et } \dot{\varepsilon}_{r\theta} = \dot{\varepsilon}_{\theta r} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right)$$

$$\dot{\varepsilon}_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = \frac{v_r}{r} \ ; \ \dot{\varepsilon}_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \text{ (voir Fung [29,1965])}$$

$$\dot{\varepsilon}_{rz} = \dot{\varepsilon}_{zr} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) = 0 \ , \ \dot{\varepsilon}_{z\theta} = \dot{\varepsilon}_{\theta z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right) = 0$$

On cherche la solution en contraintes :

Puisque notre structure a une symétrie de révolution, la vitesse $v_\theta = 0$ partout et v_r est indépendante de θ.

On a alors

$$\dot{\varepsilon}_{rr} = \frac{dv_r}{dr} \ ; \ \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = \frac{v_r}{r} \ ; \ \dot{\varepsilon}_{r\theta} = 0.$$

D'autre part

$$\dot{\varepsilon}_{rr} + \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = 0 \Rightarrow \frac{dv_r}{dr} + \frac{v_r}{r} = 0 \Rightarrow v_r = \frac{c_1}{r}$$

où C_1 est une constante, d'où

$$\dot{\varepsilon}_{rr} = -\frac{C_1}{r^2} \text{ et } \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = \frac{C_1}{r^2} .$$

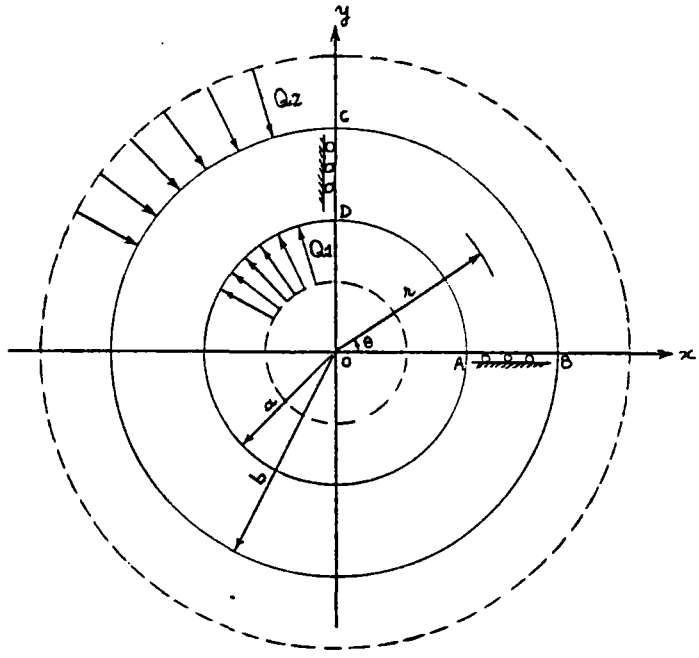


Fig. 4 - Un tube sous pression Q_1 et Q_2

Maintenant nous pouvons calculer les déviateurs des contraintes ; posons $\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{1-p} k^p C_1^{p-2} = A$; la loi de comportement s'écrit alors :

$$s_{ij} = Ar^{2(2-p)}\dot{\varepsilon}_{ij} \Rightarrow s_{rr} = -Ar^{2(1-p)} \text{ et } s_{\theta\theta} = Ar^{2(1-p)}$$

En notant $P = P(r)$ la pression hydrostatique, on aura :

$$\sigma_{rr} = -Ar^{2(1-p)} + P(r) \; ; \; \sigma_{\theta\theta} = Ar^{2(1-p)} + P(r) \; ; \; \sigma_{zz} = P(r).$$

L'équation d'équilibre nous permet de déterminer $P(r)$:

$$\frac{dP(r)}{dr} = 2A(2-p)r^{1-2p} \Rightarrow P(r) = \frac{2-p}{1-p} Ar^{2(1-p)} + C_2$$

où C_2 est une constante.

On a donc :

$$\sigma_{rr} = \frac{A}{1-p}\, r^{2(1-p)} + C_2 \text{ et } \sigma_{\theta\theta} = \frac{3-2p}{1-p}\, Ae^{2(1-p)} + C_2$$

et en considérant les conditions aux limites sur les contraintes on trouve facilement les deux constantes C_1 et C_2. Pour simplifier les écritures posons

$$b^{2(1-p)} - a^{2(1-p)} = \frac{1}{B},$$

on a alors :

$$A = (1-p)(Q_1-Q_2)B$$

$$C_2 = \left[a^{2(1-p)}Q_2 - b^{2(1-p)}Q_1\right]B$$

$$C_1 = \left[\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{p-1} k^{-p}(1-p)(Q_1-Q_2)B\right]^{\frac{1}{p-2}}$$

Ainsi on a trouvé un couple $(\sigma,\vec{v})$ solution du problème d'écoulement. Maintenant calculons le convexe K. On a pour $\varphi_p^*(\sigma)$:

$$\varphi_p^*(\sigma) = \frac{\lambda}{q}\left[\sqrt{\frac{s_{h\ell}\, s_{h\ell}}{2k^2}}\right]^q = \frac{\lambda}{q}\left[\left|\frac{A}{k}\right| r^{2(1-p)}\right]^q$$

et pour l'inf de $H_p^*(\sigma)$ on a :

$$S_p(Q_1,Q_2) = \int_\Omega \varphi_p^*(\sigma)\,d\Omega - \int_{\Gamma_u} \sigma_{ij}\, n_j\, u_i\, d\Gamma = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_a^b \frac{\lambda}{q}\left[\left|\frac{A}{k}\right| r^{2(1-p)}\right]^q r\, dr\, d\theta$$

d'où

$$S_p(Q_1,Q_2) = \frac{\pi\lambda}{4p}\left(\left|\frac{A}{k}\right|\right)^q\left[a^{2(1-p)} - b^{2(1-p)}\right].$$

Et la fonction jauge du convexe K_p vaut :

$$\mathcal{G}_p(Q_1,Q_2) = \left[\frac{q}{\mu(\Omega)} S_p(Q_1,Q_2)\right]^{\frac{1}{q}} = \left|\frac{A}{k}\right|\left[\frac{q\,\lambda}{p(b^2-a^2)}\right]^{\frac{1}{q}}\left[a^{2(1-p)} - b^{2(1-p)}\right]^{\frac{1}{q}}$$

ou bien

$$\mathcal{G}_p(Q_1,Q_2) = \frac{(1-p)|Q_1-Q_2|}{k}\left[\frac{\lambda}{(p-1)(b^2-a^2)}\right]^{\frac{p-1}{p}}\left[a^{2(1-p)} - b^{2(1-p)}\right]^{-\frac{1}{p}}$$

Quand on tend p vers 1,

$$\mathcal{G}_p(Q_1,Q_2) \to \frac{|Q_1-Q_2|}{2k}\cdot\frac{1}{\ell n\frac{b}{a}}.$$

Pour que $(Q_1,Q_2) \in K$, il faut et il suffit que $\lim_{p\to 1} \mathcal{G}_p(Q_1,Q_2) \leqslant 1$ ce qui nous donne :

$$|Q_1-Q_2| \leqslant 2k \ \ell n \frac{b}{a} .$$

Le convexe K des chargements potentiellement supportables est représenté sur la figure 5.

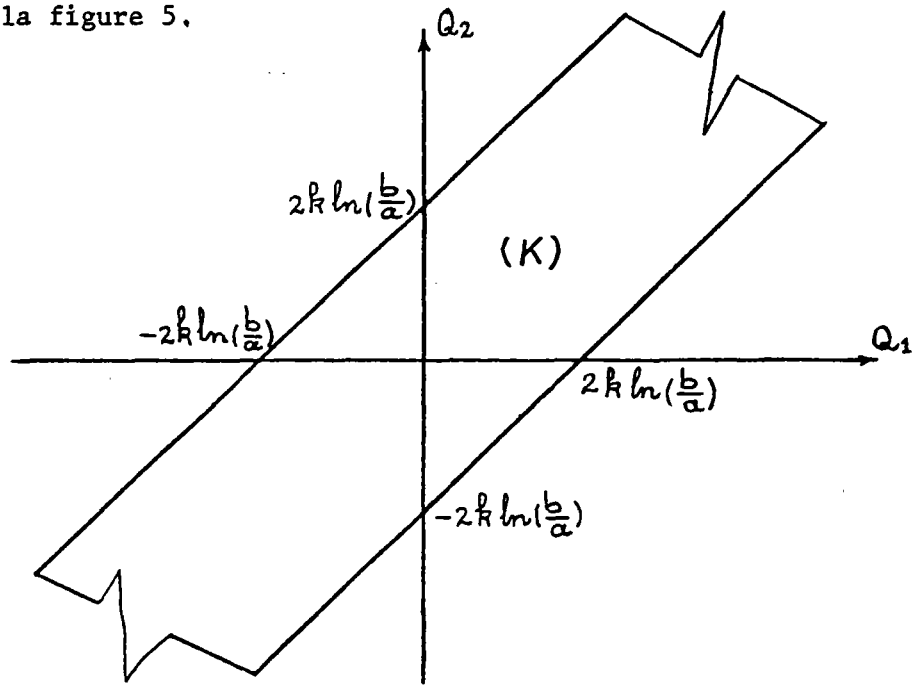


Fig. 5. Convexe des chargements potentiellement supportables.

Remarque : Si $Q_2 = 0$, c'est-à-dire que si le tube est soumis sous une pression hydraulique interne, différents auteurs notamment Timoshenko [78, 1949] ; Claudon [11, 1962], Massonnet et Save [49, 1963], Courbon [13, 1975] et Mandel [47, 1978], en utilisant la méthode élasto-plastique ont obtenu une charge limite qui vaut $|Q_1| = 2k \ \ell n \frac{b}{a}$. Ce que nous obtenons aussi, en prenant $Q_2 = 0$ dans la relation précédente.

4.3. CALCUL DE LA CHARGE LIMITE D'UNE POUTRE EN DEFORMATIONS PLANES SOUMISE AUX MOMENTS FLECHISSANTS M et -M AUX DEUX EXTREMITES

Soit une poutre constituée de matériau de Von Mises de longueur 2ℓ et de hauteur 2h, assez large afin de pouvoir se placer dans le cas des déformations planes, appuyée au milieu sur un appui fixe. On se propose de calculer le moment fléchissant limite (Fig. 6).

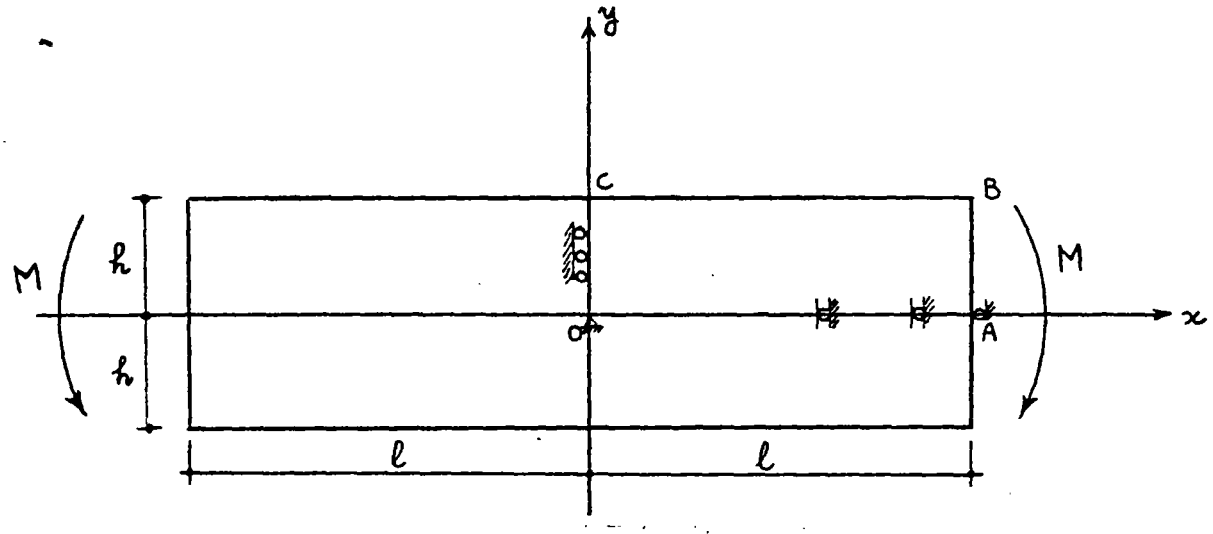


Fig. 6. Une poutre en flexion simple

Rappelons que ce problème a été déjà résolu par différents auteurs. Nous avons repris cet exemple pour présenter l'intérêt de la nouvelle méthode de calcul du convexe K.

Il est clair que la structure est symétrique par rapport aux deux axes Ox et Oy, et que le chargement est symétrique par rapport à Oy et anti-symétrique par rapport à Ox. Nous considérons alors un quart de poutre d'épaisseur unité, noté OABC. Pour calculer la charge limite on remplace le matériau de Von Mises par le matériau de Norton-Hoff associé et on résout d'abord le problème d'écoulement. Il nous faut donc trouver un couple de $(\sigma,\vec{v})$ unique en $\vec{v}$ satisfaisant les équations suivantes :

1°) Equations d'équilibre :

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad \text{(la force de pesanteur est négligée)}$$

2°) Conditions aux limites sur les contraintes :

sur OA : $\sigma_{xy} = 0$ (à cause de l'anti-symétrie du problème)

sur AB : $\sigma_{xy} = 0$ et $\int_0^h \sigma_{xx}\, y\, dy = \frac{M}{2}$

sur BC : $\sigma_{xy} = \sigma_{yy} = 0$

sur OC : $\sigma_{xy} = 0$

3°) Conditions aux limites sur les vitesses :

sur OA : $v_x = 0$

sur OC : $v_x = 0$

au point O : $v_x = v_y = 0$

4°) La loi de comportement

$$\begin{cases} s_{ij} = \lambda^{1-p} (\sqrt{2}\, k)^p (\sqrt{\dot{\varepsilon}_{h\ell}\, \dot{\varepsilon}_{h\ell}})^{p-2}\, \dot{\varepsilon}_{ij} \\ \dot{\varepsilon}_{ii} = 0 \end{cases}$$

$\dot{\varepsilon}_{xz} = \dot{\varepsilon}_{yz} = \dot{\varepsilon}_{zz} = 0$ qui nous donnent $s_{xz} = s_{yz} = s_{zz} = 0$

et alors $\sigma_{zz} = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$.

Commençons par trouver des contraintes σ. Pour cela prenons une fonction d'Airy de troisième degré en x et y

$$F = A_3x^3 + B_3x^2y + C_3xy^2 + D_3y^3 + A_2x^2 + B_2xy + C_2y^2 + A_1x + B_1y + A_0 \ .$$

Les contraintes dans le plan Oxy sont définies par :

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2C_3x + 6D_3y + C_2$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 6A_3x + 2B_3y + A_2$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 2B_3x + 2C_3y + B_2$$

En satisfaisant les conditions aux limites sur des contraintes on trouve :

$$A_3 = B_3 = C_3 = A_2 = B_2 = 0 \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{M}{h^2} - 4D_3h$$

d'où :

$$\sigma_{xx} = 6D_3y + \frac{M}{h^2} - 4D_3f \quad \text{et} \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yy} = 0$$

et :

$$s_{xx} = \frac{1}{2}\sigma_{xx}, \quad s_{yy} = -\frac{1}{2}\sigma_{xx}, \quad s_{zz} = 0, \quad s_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j.$$

Si on inverse la loi de comportement (1.3.3), on a :

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = \frac{\lambda}{(2k)^q}(\sigma_{xx})^{q-1} \quad \text{et} \quad \dot{\varepsilon}_{yy} = -\dot{\varepsilon}_{xx}$$

et les autres $\dot{\varepsilon}_{ij} = 0$.

On a alors pour les vitesses de déplacement :

$$v_x = \frac{\lambda}{(2k)^q}\left[6D_3y + \frac{M}{h^2} - 4D_3h\right]^{q-1} x + C_1$$

$$v_y = -\frac{\lambda}{(2k)^q} \cdot \frac{1}{6D_3q}\left[6D_3y + \frac{M}{h^2} - 4D_3h\right]^q + C_2$$

et en considérant les conditions aux limites sur les vitesses on trouve :

$$C_1 = 0,\ D_3 = \frac{M}{4h^3} \quad \text{et} \quad C_2 = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_{xx} = \frac{3}{2}\frac{M}{h^3}y$$

On a donc trouvé un champ de vitesse (v_x, v_y) et un champ de contraintes σ solution du problème d'écoulement. Calculons alors le convexe K :

$$S_p(M) = H_p^{\star}(M) = \int_0^h \left(\int_0^{\ell} \varphi_p^{\star}(\sigma)\,dx\right) dy = \int_0^h \int_0^{\ell} \frac{\lambda}{q}\left[\sqrt{\frac{s_{h\ell}\, s_{h\ell}}{2k^2}}\right]^q dxdy =$$

$$= \frac{\lambda\ell}{q(q+1)}\left(\frac{3M}{4h^3k}\right)^q h^{q+1} = \frac{\lambda\ell h}{q(q+1)}\left(\frac{3M}{4kh^2}\right)^q$$

d'où

$$\mathcal{G}_p(M) = \left[\frac{q}{\mu(\Omega)}S_p(M)\right]^{\frac{1}{q}} = \left[\frac{q}{\ell h} \cdot \frac{\lambda\ell h}{q(q+1)}\right]^{\frac{1}{q}} \left(\frac{3|M|}{4kh^2}\right) = \left(\frac{\lambda}{q+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{3|M|}{4kh^2}\right)$$

Quand $q \to +\infty$ on a $\mathcal{G}_p(M) \to \frac{3|M|}{4kh^2}$, donc $M \in K$ si :

$$|M| \leqslant \frac{4}{3}kh^2$$

ce qui veut dire que tout moment fléchissant inférieur ou égal à $\frac{4}{3}kh^2$ est supportable.

Il est clair qu'avec une fonction d'Airy de troisième degré on obtient une charge limite qui est plus faible que la charge limite réelle. Dans le cas général le convexe de chargement potentiellement supportable (§ I.3.3) est donné par :

$$K = L(G \cap \sum)$$

où $\sum$ est l'ensemble des contraintes statiquement admissibles. Quand on fait une hypothèse sur la forme de distribution des contraintes dans une section S_1 de la structure, on a en réalité défini un sous-ensemble $\sum'$ de l'ensemble des contraintes statiquement admissibles :

$\sum' = \{\sigma \mid \sigma \in \sum$; σ vérifiant la forme de distribution des contraintes sur $S_1\} \subseteq \sum$

ce qui nous donne un convexe

$$K' = L(G \cap \sum') \subseteq L(G \cap \sum) = K.$$

Le moment fléchissant $|M| \leqslant \frac{4}{3} kh^2$ désigne donc le convexe K' qui est inclu dans le convexe K.

Le convexe K' peut être aussi défini par : $K' = L(G' \cap \sum)$ ce qui revient à changer le convexe de plasticité par un certain convexe C' avec :

$$G' = \{\sigma(x) \mid \forall x \in \Omega \ ; \ \sigma(x) \in C'\}$$

Voyons quelle est la signification du convexe C'. En effet avec la fonction d'Airy déjà définie on a une distribution des contraintes (pour $p \longrightarrow 1$) :

$$\sigma_{xx} = \frac{3}{2} M \frac{y}{h^3} \ ; \ \sigma_{yy} = 0 \ ; \ \sigma_{xy} = 0$$

Supposons maintenant que la poutre soit soumise au moment fléchissant limite : $|M| = \frac{4}{3} kh^2$ et calculons $s_{ij}\, s_{ij} = \frac{1}{2}\sigma_{xx}^2 = 2k^2 \frac{y^2}{h^2}$ qui prend sa valeur maximale $2k^2$ quand $|y| = h$. On voit donc que sous la charge limite indiquée, il y a apparition des zones plastiques dans la structure. Cette charge limite correspond donc à la limite élastique, ou à la charge ruine de la structure dans le cas d'un critère de rupture fragile du type

$$C' = \{\sigma \mid s_{ij}(\sigma) s_{ij}(\sigma) < 2k^2\}$$

Pour trouver la charge limite dans le cas où le critère de plasticité est le convexe de la plasticité parfaite de Von Mises, il nous faut considérer

une autre distribution des contraintes qui soit statiquement admissibles :

$$\sigma_{xx} = \begin{cases} \frac{M}{h^2} \text{ si } 0 < |y| < h \\ 0 \text{ si } y = 0 \end{cases}$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$$
$$\sigma_{zz} = \frac{1}{2}\sigma_{xx}$$

On trouve ainsi pour les vitesses :

$$v_x = \begin{cases} \frac{\lambda}{(2k)^q} \left(\frac{M}{h^2}\right)^{q-1} x \text{ pour } 0 < |y| \leqslant h \\ 0 \qquad\qquad \text{pour } y = 0 \end{cases}$$

$$v_y = -\frac{\lambda}{(2k)^q} \left(\frac{M}{h^2}\right)^{q-1} y, \quad 0 \leqslant |y| \leqslant h$$

et

$$S_p(M) = \int_0^h + \int_0^\ell \frac{\lambda}{q}\left(\frac{|M|}{2kh^2}\right)^q dxdy = \frac{\lambda}{q}\left(\frac{|M|}{2kh^2}\right) \cdot h\ell$$

d'où :

$$\mathcal{G}_p(M) = (\lambda)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{|M|}{2kh^2}\right)$$

Tendons q vers $+\infty$, $\mathcal{G}_p(M) \to \frac{|M|}{2kh^2}$. La charge limite vaut donc $(|M|)_{lim} = 2kh^2$ qui est la charge limite produisant un mécanisme de rupture ductile, car sous cette charge on a :

$$\forall (x,y) \in \Omega \quad s_{ij}\, s_{ij} = 2k^2.$$

Ces résultats sont obtenus aussi par différents auteurs : Mandel [47,1978], Courbon [13, 1975], etc ... ., en utilisant les méthodes élastoplastiques.

4.4. CONVEXE DES CHARGEMENTS POTENTIELLEMENT SUPPORTABLES D'UNE PLAQUE MINCE EN CONTRAINTES PLANES CONSTITUEE D'UN MATERIAU DE VON MISES SERREE ENTRE QUATRE PLATEAUX RIGIDES LISSES DEUX à DEUX PARALLELES, PAR DES PRESSIONS MOYENNES Q_1 et Q_2 (Fig. 2).

L'épaisseur de la plaque est prise égale à l'unité et ses deux autres dimensions sont 2h et 2a. On considère le quart de plaque : OABC, avec $\Omega = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant a \ ; \ 0 \leqslant y \leqslant h\}$. Comme les problèmes précédents nous remplaçons le matériau de Von Mises par le matériau de Norton-Hoff sous-jacent. Il faut trouver alors un champ de contraintes σ et un champ de vitesses de déplacement $\vec{v}$ vérifiant :

1°) $\sigma_{ij,j} = 0$ dans Ω (on néglige les forces volumiques)

2°) Conditions aux limites :

sur OA : $v_y = 0$; $\sigma_{xy} = 0$

sur AB : $\sigma_{xy} = 0$; $\int_0^h \sigma_{xx}\, dy = -Q_2 h$.

sur BC : $\sigma_{xy} = 0$; $\int_0^a \sigma_{yy}\, dx = -Q_1 a$.

sur OC : $v_x = 0$; $\sigma_{xy} = 0$

3°) Loi de comportement du matériau de Norton-Hoff

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{ij} = \dfrac{\lambda}{(\sqrt{2}\,k)^q} \left(\sqrt{s_{h\ell}\, s_{h\ell}}\right)^{q-2} s_{ij} \\ \dot{\varepsilon}_{ii} = 0 \end{cases}$$

4°) Contraintes planes; $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ et les autres σ_{ij} sont indépendants de z. Nous prenons une fonction d'Airy de deuxième degré qui nous donne pour les contraintes (§ I.4.1)

$$\sigma_{xx} = 2C_2 \ ; \ \sigma_{yy} = 2A_2 \ ; \ \sigma_{xy} = B_2$$

et les conditions aux limites sur les contraintes nous donnent :

$$\sigma_{xx} = -Q_2 \ ; \ \sigma_{yy} = -Q_1 \ ; \ \sigma_{ij} = 0 \text{ pour les autres}$$

d'où

$$s_{xx} = \frac{Q_1 - 2Q_2}{3} \; ; \; s_{yy} = \frac{Q_2 - 2Q_1}{3} \; ; \; s_{zz} = \frac{Q_1 + Q_2}{3} \; ; \; s_{ij} = 0 \text{ pour } i \neq j$$

et donc on a :

$$s_{ij}\, s_{ij} = \frac{2}{3}(Q_1^2 + Q_2^2 - Q_1 Q_2).$$

En considérant la loi de comportement on trouve pour les vitesses :

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{\lambda}{(\sqrt{2}\,k)^q}\left[\dfrac{2}{3}(Q_1^2+Q_2^2-Q_1Q_2)\right]^{\frac{q-2}{2}} \left(\dfrac{Q_1-2Q_2}{3}\right) x \\ v_y = \dfrac{\lambda}{(\sqrt{2}\,k)^q}\left[\dfrac{2}{3}(Q_1^2+Q_2^2-Q_1Q_2)\right]^{\frac{q-2}{2}} \left(\dfrac{Q_2-2Q_1}{3}\right) y \\ v_z = \dfrac{\lambda}{(\sqrt{2}\,k)^q}\left[\dfrac{2}{3}(Q_1^2+Q_2^2-Q_1Q_2)\right]^{\frac{q-2}{2}} \left(\dfrac{Q_1+Q_2}{3}\right) z \end{cases}$$

et on a :

$$S_p(Q_1,Q_2) = \int_\Omega \frac{\lambda}{q}\left[\sqrt{\frac{s_{h\ell}\, s_{h\ell}}{2k^2}}\right]^q = \frac{\lambda}{q}\left(\frac{Q_1^2+Q_2^2-Q_1Q_2}{3k^2}\right)^{\frac{q}{2}} . ah$$

La fonction jauge du convexe K_p vaut donc :

$$\mathcal{G}_p(Q_1,Q_2) = \left[\frac{q}{ah} S_p(Q_1,Q_2)\right]^{\frac{1}{q}} = \lambda^{\frac{1}{q}} \left(\frac{Q_1^2+Q_2^2-Q_1Q_2}{3k}\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Tendons q vers $+\infty$; on obtient :

$$(Q_1,Q_2) \in K \quad \text{si} \quad Q_1^2 + Q_2^2 - Q_1Q_2 \leqslant 3k^2 .$$

Faisons le changement de variables :

$$Q_1 = (Q_1' - Q_2')\frac{\sqrt{2}}{2} \; ; \; Q_2 = (Q_1' + Q_2')\frac{\sqrt{2}}{2}$$

nous obtenons

$$\frac{Q_1'^2}{(\sqrt{6}\,k)^2} + \frac{Q_2'^2}{(\sqrt{2}\,k)^2} \leqslant 1$$

qui correspond à une ellipse (Fig. 7).

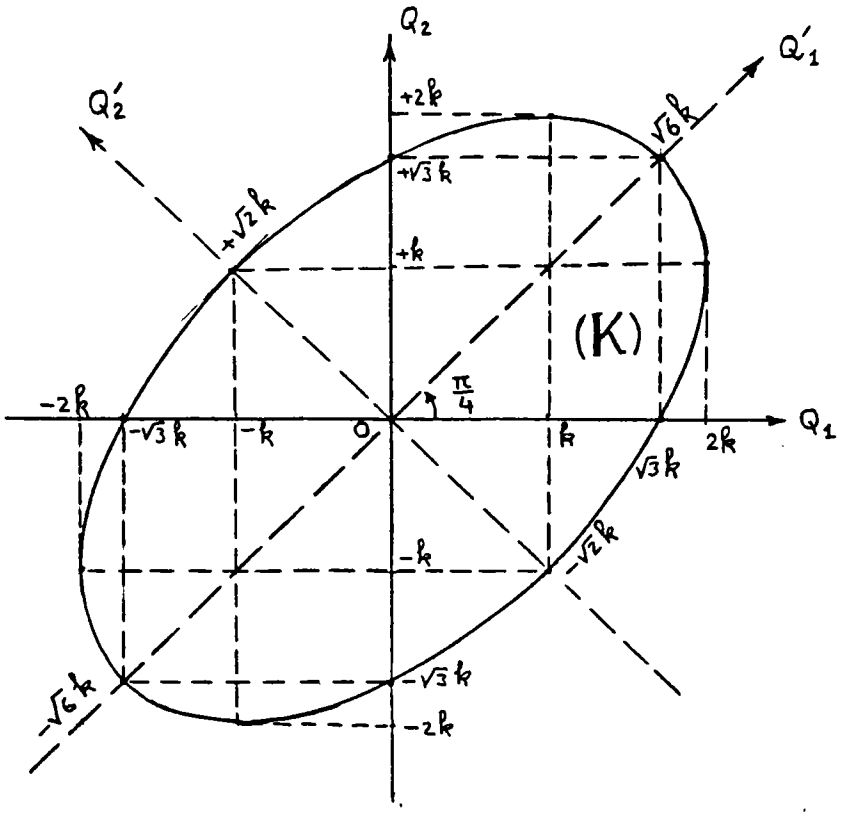


Fig. 7. Convexe K des chargements potentiellement supportables

Remarque. Si $Q_2 = 0$, on a $(|Q_1|)_{lim} = \sqrt{3}\,k$; qui est la limite en traction simple du matériau de Von-Mises. Ce trésultat est aussi obtenu par Friaâ [27, 1979].

DEUXIEME PARTIE

APPROCHE NUMÉRIQUE :

- PROBLÈME D'ÉCOULEMENT
- ANALYSE LIMITE

INTRODUCTION

Sauf dans des cas très particuliers, il est difficile de trouver une solution analytique du problème d'écoulement d'une structure constituée de matériau de Norton-Hoff (défini au § I-2-1). On doit alors recourir à des méthodes numériques pour déterminer une solution approchée. La méthode que nous utilisons est celle des éléments finis en vitesses.

Il faut indiquer que différents auteurs ont déjà utilisé la méthode des éléments finis pour approcher la solution des problèmes d'écoulements, notamment : Delbecq et al. [17, 1977] ; Needleman et Shih [57, 1978] ; Friaâ [27,1979] ; Frémond [20, 1979] ; etc ...

Comme on verra, le problème d'écoulement en contraintes planes consiste à minimiser une fonctionnelle différentiable. Par contre en déformations planes, les conditions d'incompressibilités entrent directement dans la fonctionnelle ou dans l'ensemble des champs de vitesses cinématiquement admissibles ; on obtient des méthodes qui convergent moins vite. Nous allons présenter plusieurs algorithmes pour résoudre ce problème.

On s'occupe ensuite des problèmes d'analyse limite. Il faut noter qu'à l'heure actuelle plusieurs auteurs ont travaillé dans ce domaine, notamment : Salençon [68 à 75] ; Frémond et Salençon [24, 1973] ; Pastor et Turgeman [63, 1976] ; Mercier [50, 1977] ; Delbecq et al. [17, 1977] ; Pastor [62, 1978] ; Friaâ [27,1979] etc... Nous rappelons ci-dessous les idées principales de ces auteurs.

Mercier utilise le matériau viscoplastique généralisé qui dépend d'un paramètre μ (viscosité). Selon cette méthode, la détermination du convexe K des chargements potentiellement supportables est basée sur le résultat simplifié suivant :

- Un chargement $Q \in K$ si et seulement s'il n'induit pas d'écoulement (vitesses de déplacement nulles) de la structure supposée en matériau de Bingham généralisé associé au matériau rigide plastique de base.

Du point de vue mathématique, cette méthode nécessite de définir la projection sur un convexe, ce qui n'est pas très aisé en général.

Une deuxième méthode a été proposée par Delbecq et al. qui utilise le matériau de Norton-Hoff. Elle consiste à utiliser dans le théorème cinématique classique le champ de vitesse solution du problème d'écoulement du matériau de Norton-Hoff pour des valeurs du paramètre p de plus en plus proches de 1.

Friaâ a proposé la nouvelle méthode de détermination de K, convexe des chargements potentiellement supportables que l'on a exposé dans la première partie de ce travail. Il a aussi indiqué l'approche numérique de la solution du problème d'analyse limite pour le problème des contraintes planes.

Les autres auteurs ont utilisé soit la méthode cinématique classique ou la méthode statique classique. Pour la méthode cinématique classique on est amené dans de nombreux cas, à définir des surfaces ou lignes de glissement pour obtenir des résultats satisfaisants. Or à l'heure actuelle il n'existe pas de méthode systématique permettant de choisir leur emplacement, et en plus cette méthode conduit à la minimisation d'une fonctionnelle non différentiable. Ce qui montre l'intérêt de la régularisation faite par Delbecq et al. et le matériau de Norton-Hoff généralisé introduit par Friaâ.

1. METHODE DES ELEMENTS FINIS EN VITESSES POUR TROUVER LA SOLUTION NUMERIQUE DU PROBLEME D'ECOULEMENT DU MATERIAU DE NORTON-HOFF

Le problème d'écoulement du matériau de Norton-Hoff a été défini au § I-2-1 ; ce problème est équivalent au problème $(\mathcal{J})$ (Théorème 1) :

$$(\mathcal{T}) \quad \begin{cases} \text{trouver } \vec{v} \in V_{C.A.} \text{ tel que :} \\ H(\vec{v}) = \text{Inf}\{H(\vec{w}) \mid \vec{w} \in V_{C.A.}\} \\ \text{où } H(\vec{w}) \text{ est donné par (I-2-2.1) et } V_{C.A.} \text{ est l'ensemble des vitesses} \\ \text{cinématiquement admissibles (I-2-2.2)} \end{cases}$$

ou au problème $(\mathcal{T}_1)$ (Théorème 3) défini par :

$$(\mathcal{T}_1) \quad \begin{cases} \text{trouver un couple } (\vec{v};\hat{\mu}) \in V \times Y \text{ tel que} \\ \mathcal{L}(\vec{v},\hat{\mu}) = \text{Sup}\{\text{Inf}\{\mathcal{L}(\vec{w},\mu) \mid \vec{w} \in V\} \mid \mu \in Y\} \\ \text{où } V = \{\vec{w} \mid \vec{w} \in [W^{1,p}(\Omega)]^n \ ; \ \vec{w} = \vec{u} \text{ sur } \Gamma_u\} \quad \text{et} \quad Y = \{\mu \mid \mu \in L^q(\Omega)\} \end{cases}$$

Pour les deux ensembles $V_{C.A.}$ et V, on remplace $\vec{w} = \vec{u}$ sur Γ_u par $\vec{w} = 0$ sur Γ_u pour les transformer en deux espaces vectoriels $v_{0_{C.A.}}$ et V_0.

Comme on l'a déjà indiqué, il est en général impossible de trouver $\vec{v}$ ou $(\vec{v},\hat{\mu})$ la solution des problèmes $(\mathcal{T})$ ou $(\mathcal{T}_1)$ par les méthodes classiques : par exemple sous formes des fonctions usuelles. On transforme donc ces deux problèmes en deux problèmes $(\mathcal{T}_h)$ ou $(\mathcal{T}_{1h,h'})$ numériquement solubles. La modification consiste à changer les espaces $V_{0_{C.A.}}$ ou V_0 et Y aux espaces de dimensions finies $\overline{V}_{0_{C.A.}}$ $(\overline{V}_{0_{C.A.}} \subset V_{0_{C.A.}}$ de dimension h) ou $\overline{V}_0$ et $\overline{Y}$ ($\overline{V}_0 \subset V_0$ de dimension h et $\overline{Y} \subset Y$ de dimension h' ; $h' < h$).

Pour ce faire, on maille l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (n = 2 ou 3) par les techniques habituelles.

Maintenant exprimons les deux problèmes $(\mathcal{T}_h)$ et $(\mathcal{T}_{1h,h'})$:

1-1. DISCRETISATION NUMERIQUE DU PROBLEME $(\mathcal{T}_h)$

Le problème $(\mathcal{T}_h)$ est défini au chapitre précédent. Il s'agit de trouver un vecteur des vitesses nodales vérifiant les conditions d'incompressibilité et rendant minimale la fonctionnelle H.

En suivant une démarche semblable à celle de Frémond [20 , 1979] on obtient pour H :

$$H(V) = \frac{1}{p} \lambda^{1-p} k^p \sum_{e=1}^{m} S_e [V^t B_e V]^{p/2} - V^t Q \qquad (1\text{-}1.1)$$

et pour les conditions d'incompressibilité :

$$D^T V = 0 \qquad (1\text{-}1.2)$$

où B_e est une matrice symétrique, semi défini-positive de dimension [h×h] ; S_e est la surface (n = 2) ou le volume (n = 3) de l'élément Ω_e et Q est le vecteur des forces nodales. D est une matrice de dimension [h×h'] avec h > h'.

Si nous supprimons h' composantes de V à l'aide des équations (1-1.2), on trouve alors

$$V = \begin{bmatrix} V_e \\ V_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[D_e^t]^{-1} \cdot D_f^t \; V_f \\ V_f \end{bmatrix} = E \cdot V_f \qquad (1\text{-}1.3)$$

où V_e sont les composantes qui seront éliminées et $D = \begin{bmatrix} D_e \\ D_f \end{bmatrix}$ est la décomposition de la matrice D, D_e étant une matrice carrée [h'×h'], inversible. Ainsi, nos inconnues seront seulement les composantes du vecteur V_f et on a :

$$H(V_f) = \frac{1}{p} \lambda^{1-p} k^p \sum_{e=1}^{m} S_e [V_f^t E^t B_e E V_f]^{p/2} - V_f^t E^t Q. \qquad (1\text{-}1\text{-}4)$$

qu'il nous faut la minimiser. Ce problème a une solution unique et elle existe sous certaines hypothèses. Cette méthode est intéressante pour les problèmes de déformations planes que nous exposerons dans la suite.

1.2. DISCRETISATION NUMERIQUE DU PROBLEME $(\mathcal{T}_{1h,h'})$

Le problème $(\mathcal{T}_{1h,h'})$ est défini au § II-1. On peut trouver facilement l'expression matricielle de la fonctionnelle $\mathcal{L}(\vec{v},\vec{\mu})$ définie au § I, Théorème 3. Le problème se ramenera à :

$$\begin{cases} \text{Trouver deux vecteurs } V^* \in \overline{V} \text{ et } M^* \in \overline{Y} \text{ tel que} \\ \mathcal{L}(V^*,M^*) = \text{Sup}\{\text{Inf}\{\mathcal{L}(V,M) \mid V \in \overline{V}\} \; M \in Y\} \text{ et} \\ \mathcal{L}(V,M) = \frac{1}{p} \lambda^{1-p} k^p \sum_{e=1}^{m} S_e [V^t B_e V]^{p/2} - V^t Q + V^t DM \end{cases} \qquad (1\text{-}2.1)$$

Ce problème approché, possède une solution unique en V (sous les hypothèses déjà indiquées) et une solution en M à une constante près (Frémond [20, 1979] ou [21,1980]).

Diverses méthodes peuvent être envisagées pour résoudre ce problème (Céa [7,1971], Ciarlet [10, 1976] ; Karmanov [41, 1977], etc...). Nous discuterons par la suite quelques-unes de ces méthodes, pour le problème d'écoulement en déformations planes.

2. APPROCHE NUMERIQUE DU PROBLEME D'ECOULEMENT DES MILIEUX CONTINUS BIDIMENSIONNELS

Dans cette partie nous exposons différentes méthodes numériques pour résoudre le problème d'écoulement d'un matériau de Norton-Hoff en contraintes planes ou en déformations planes.

2.1. ECOULEMENT EN CONTRAINTES PLANES

La structure $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ définie au § I-2-1 est soumise aux forces $\vec{T}$ sur Γ_T et $\vec{f}$ dans Ω. On se place dans les hypothèses de champs des contraintes planes, c'est-à-dire que :

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0 \qquad (2\text{-}1.1)$$

et les autres contraintes sont indépendantes de z.

En considérant la loi de Norton-Hoff on trouve pour les vitesses de déformations :

$$\dot{\varepsilon}_{xz} = \dot{\varepsilon}_{yz} = 0 \; ; \; \dot{\varepsilon}_{zz} = -(\dot{\varepsilon}_{xx} + \dot{\varepsilon}_{yy}) \qquad (2\text{-}1.2)$$

on a alors en utilisant cette relation :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}\,\dot{\varepsilon}_{ij} = 2(\dot{\varepsilon}^2_{xx} + \dot{\varepsilon}^2_{yy} + \dot{\varepsilon}^2_{xy} + \dot{\varepsilon}_{xx}\dot{\varepsilon}_{yy}) \qquad (2\text{-}1.3)$$

Notre problème est dans ce cas ;

$$(\mathcal{T}_c)\quad \begin{cases} \text{Trouver un champ de vitesses } \vec{v}(x,y) \text{ minimisant la fonctionnelle} \\ H(\vec{w}) = \frac{1}{p}\lambda^{1-p}\int_\Omega k^p(\sqrt{2\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}})^p d\Omega - \int_{\Gamma_T} T_i w_i \, d\Gamma - \int_\Omega f_i w_i \, d\Omega \quad (2\text{-}1\text{-}4) \\ \text{pour tout } \vec{w}\in\{w \mid w_i \in L^p(\Omega) : \frac{\partial w_i}{\partial x_j}\in L^p(\Omega) \ ; \ \vec{w}=\vec{u} \text{ sur } \Gamma_U\} \quad (2\text{-}1\text{-}5) \end{cases}$$

Pour simplifier nos calculs nous supposons que l'épaisseur de Ω est l'unité. Dans ce cas on peut prendre à la place de $\Omega\subset\mathbb{R}^3$, le plan moyen de la structure, $\Omega\cap Oxy\subset\mathbb{R}^2$.

Nous maillons l'ouvert $\overline{\Omega}$ approché de $\Omega\cap Oxy$, par m éléments triangulaires. Sur $\overline{\Omega}$ on définit une distribution de vitesses (v_x,v_y) continue et linéaire par éléments. On obtient finalement pour la fonctionnelle H(v) l'expression suivante :

$$H(V) = \frac{1}{p}\lambda^{1-p}\sum_{e=1}^{m} S_e (V^t B_e V)^{p/2} - V^t Q \qquad (2\text{-}1\text{-}6)$$

où V et Q sont deux vecteurs de dimension h, V est le vecteur des vitesses nodales et Q est le vecteur des forces nodales. B_e est la matrice de rigidité d'élément Ω_e, de surface S_e. Elle est symétrique semi-définie positive. Pour des vitesses rigidifiantes sur quelques éléments, la puissance dissipée sur les mêmes éléments sera nulle, c'est-à-dire que l'on aura $V^t B_e V = 0$, ce qui montre que la matrice B_e n'est pas définie positive. Pour la rendre définie positive, nous ajoutons une matrice diagonale [h×h] très petite, par exemple εI à la matrice B_e et on aura alors $V^t(B_e+\varepsilon I)V>0$ pour tout $V\neq 0$. Ce cas se produit quand p est de voisinage de 1. A l'aide de ce processus nous pouvons désormais supposer que la matrice B_e est définie positive.

Notre problème est ramené à :

$$(\mathcal{T}_c^h)\quad \begin{cases} \text{Trouver un vecteur } V^\star \in \overline{V}_{C.A.} \text{ tel que} \\ H(V^\star) = \text{Inf}\{H(V) \mid V\in \overline{V}_{C.A.}\} \\ H(V) \text{ est définie par (2-1.6)} \end{cases} \qquad (2\text{-}1.7)$$

Comme $p > 1$ et B_e est définie positive, la fonctionnelle $H(V)$ est strictement convexe et coercive, le problème $(\mathcal{J}_c^h)$ admet alors trivialement une solution unique que l'on note V^*.

Pour trouver V^* on peut utiliser plusieurs méthodes numériques (voir Friaâ [27 , 1979] , Delbecq et al. [17 , 1977] , etc ...).

Il est clair que dans ce cas la condition d'incompressibilité a déjà été prise en compte par la relation (2-1.2). En plus cette condition va nous donner la variation de l'épaisseur de la structure dans la direction de l'axe Oz.

On peut facilement introduire la condition $V_i = U_i$ sur $\overline{\Gamma}_U$ (où $\overline{\Gamma}_U$ est la discrétisée de Γ_u) dans notre problème de la manière suivante :

Décomposons le vecteur $V \in \overline{V}_{C.A.}$ en deux vecteurs V_0 et $\hat{V}$ tel que V_0 désigne un vecteur colonne de dimension h, ayant les mêmes composantes que V sauf aux noeuds où il y a une vitesse imposée, les composantes de V_0 correspondant à ces noeuds sont nulles (alors $V_0 \in \overline{V}_{0_{C.A.}}$).

$\hat{V}$ est un vecteur colonne de dimension h, ayant toutes ses composantes nulles sauf celles correspondant aux noeuds où il y a une vitesse imposée qui vaut cette vitesse imposée.

On a alors

$$V = V_0 + \hat{V} \tag{2-1.8}$$

On appelle A_e une matrice [h×h] semi-définie positive tel que

$$(V-\hat{V})^t A_e (V-\hat{V}) \tag{2-1.9}$$

soit très grand, si les composantes V_i de V sont fixées et soient nulles si elles sont égales à $\hat{V}_i$.

On définit alors une fonctionnelle $\tilde{H}(V)$ par :

$$\tilde{H}(V) = \frac{1}{p} \lambda^{1-p} \sum_{e=1}^{m} S_e [V^t B_e V + (V-\hat{V})^t A_e (V-\hat{V})]^{p/2} - V^t Q \tag{2-1.10}$$

on voit bien que $\tilde{H}(V)$ est très grand pour V ne vérifiant pas la condition à

la limite sur $\overline{\Gamma}_U$. Comme nous allons chercher à minimiser $\widetilde{H}(V)$, il est raisonnable de penser que ce minimum sera atteint pour un V qui vérifie à peu près la condition à la limite ($V_i = U_i$ pour certains indices i).

Le problème approché que l'on se propose de résoudre est donc :

$$(\mathcal{P}_c^h) \qquad \text{Inf}\{\widetilde{H}(V) \mid V \in \mathbb{R}^h\} \tag{2-1.11}$$

Ce problème possède une solution V^*, sous certaines hypothèses souvent vérifiées (Frémond [20, 1979]), qui annule le gradient de la fonctionnelle $\widetilde{H}(V)$:

$$\text{grad } \widetilde{H}(V) = \lambda^{1-p} \sum_{e=1}^{m} S_e [V^t B_e V + (V-\hat{V})^t A_e (V-\hat{V})]^{(p-2)/2} [B_e V + A_e (V-\hat{V})] - Q = 0 \tag{2-1.12}$$

En remplaçant $V - \hat{V}$ par V_0 et notant

$$B^*(V,V_0) = \lambda^{1-p} \sum_{e=1}^{m} S_e [V^t B_e V + V_0^t A_e V_0]^{(p-2)/2} (B_e + A_e)$$

et

$$B(V,V_0) = \lambda^{1-p} \sum_{e=1}^{m} S_e [V^t B_e V + V_0^t A_e V_0]^{(p-2)/2} B_e,$$

ou trouve :

$$B^*(V,V_0) \cdot V_0 = Q - B(V,V_0) \cdot \hat{V} \tag{2-1.13}$$

qui nous donne la formule d'itération :

$$\begin{cases} B^*(V^i,V_0^i) V_0^{i+1} = Q - B(V^i,V_0^i)\ \hat{V} \\ V^{i+1} = V_0^{i+1} + \hat{V} \end{cases} \tag{2-1.14}$$

pour le vecteur V^0 de départ on prend un vecteur des vitesses non rigidifiant.

D'une manière pratique on prend pour les éléments convenables de la diagonale principale de A_e un nobre très grand (10^{40} par exemple) pour l'ordinateur que l'on utilise. Il est possible de ne pas fixer V_i à $\hat{V}_i$ élément par élément, cela peut être fait en une seule fois, de la manière suivante :

Annulons le gradient de H(V) défini par (2-1.6) :

$$\text{grad } H(V) = B'(V) \cdot V - Q = 0 \tag{2-1.15}$$

où

$$B'(V) = \lambda^{1-p} \sum_{e=1}^{m} S_e (V^t B_e V)^{(p-2)/2} B_e \qquad (2\text{-}1.16)$$

et

$$V = V_0 + \hat{V},$$

alors :

$$B'(V) \cdot V_0 = Q - B'(V) \cdot \hat{V} \qquad (2\text{-}1.17)$$

Puisque le vecteur V_0 doit avoir des composantes nulles pour les vitesses imposées, on ajoute à la matrice $B'(V)$ une matrice diagonale A de même dimension, ayant les mêmes propriétés que $\sum_{e=1}^{m} A_e$. On obtient ainsi :

$$[B'(V) + A] \cdot V_0 = Q - B'(V) \cdot \hat{V} \qquad (2\text{-}1.18)$$

en notant $B'^{\star}(V) = B'(V) + A$, on obtient la relation de récurrence :

$$\begin{cases} B'^{\star}(V^i) \cdot V_0^{i+1} = Q - B'(V^i) \cdot \hat{V} \\ V^{i+1} = V_0^{i+1} + \hat{V} \\ V^0 = \text{un vecteur de vitesses non rigidifiant} \end{cases} \qquad (2\text{-}1.19)$$

Dans le cas où $\| Q - B'(V^i) \cdot \hat{V} \| \neq 0$ (ou $\| Q - B(V^i) \cdot \hat{V} \| \neq 0$) et $B'^{\star}(V^i)$ (ou $B^{\star}(V^i)$) est définie positive et $1 < p < p_{max}$ avec $2 < p_{max} < 3$, les méthodes itératives définies par (2-1.14) ou (2-1.19) sont convergentes et la suite (V^i) converge vers $V^{\star}$ la solution du problème $(\mathcal{J}_c)$ défini par les relations (2-1.4) et (2-1.5) et de plus la suite $\tilde{H}(V^i)$ décroît vers $H(V^{\star})$ (Friaâ [27 ,1979] ; Frémond [20, 1979] ou [21,1980]).

Le test d'arrêt pour l'itération sera porté sur la norme du gradient de H(V). La résolution du problème $(\mathcal{J}_c)$ dans ces conditions conduira à un champ de vitesses $V^{\star}$, qui ne sera admissible que de façon approchée par suite de :

.l'incertitude numérique inévitable sur les calculs (Erreurs d'arrondi) ;

.la nécessité d'adopter un test de convergence pour les processus itératifs (erreur de troncature).

Cela signifie que l'on devra toujours considérer les résultats du problème approché d'un oeil critique.

Nous donnons l'ordinogramme ci-dessous pour trouver la solution du problème approché $(\mathcal{P}_c^h)$:

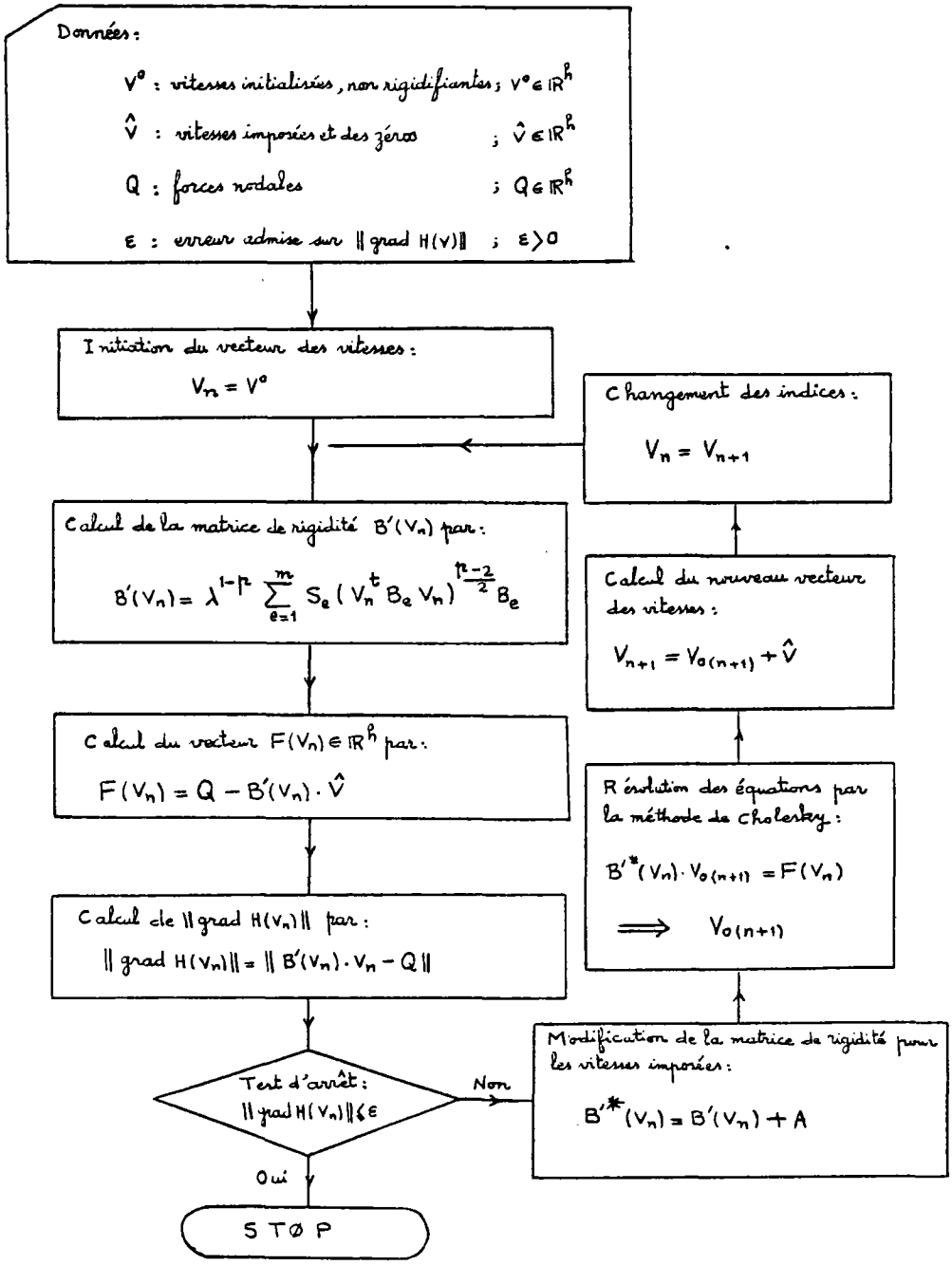


Figure 1

Ordinogramme de résolution numérique du problème $(\mathcal{P}_c^h)$

Si l'erreur admise sur le gradient ($\varepsilon > 0$) est très faible et si p est proche de 1 (par exemple 1,01), il arrive en pratique que la norme du gradient, après un certain nombre d'itérations ne décroisse plus. Il est préférable alors de mettre en plus d'"un test d'arrêt sur la norme du gradient de H(V)", un test sur la diminution de la norme du gradient, afin d'éviter des itérations inutiles.

La convergence de la méthode représentée sur la figure 1 est d'autant plus rapide que le paramètre p est proche de 2 ; pour le cas $p = 2$ (fluide Newtonien) la solution est obtenue à la première itaration. Par ailleurs, afin d'améliorer la convergence, il importe de bien choisir V^0, le vecteur des vitesses au départ d'itérations. On a procédé alors de la manière suivante :

La minimisation étant recherchée pour p fixé < 2. On résoud d'abord le cas $p = 2$, la solution obtenue est prise égale à V^0 pour p_1, $p < p_1 < 2$, on fait un certain nombre d'itérations pour p_1, soit n_1, le vecteur v_{n1} ainsi obtenu est pris pour vecteur initial V^0 pour p_2, $(p < p_2 < p_1)$; on fait à nouveau n_2 itérations pour p_2, etc ... .

Cette procédure augmente sensiblement la vitesse de convergence de la méthode (Friaâ [27,1979]).

Il faut indiquer que la convergence de la méthode est de plus en plus rapide si la matrice de rigidité B'(V) est mieux-conditionnée. Le conditionnement de la matrice B'(V) dépend du paramètre p et aussi de la forme des éléments. Si p est proche de 1, la convergence de la méthode est très lente à cause du mauvais-conditionnement de B'(V) et de plus on sait que la fonctionnelle H(V) n'est pas différentiable pour $p = 1$. D'ailleurs en pratique on s'est aperçu que si les éléments du maillage de (Ω) sont de plus en plus aplatis la matrice B'(V) sera de plus en plus mal-conditionnée et la convergence sera moins rapide.

2-1-1. Conditions aux limites du type poinçons

Parmi les conditions aux limites du problème d'écoulement, on peut avoir un ou plusieurs poinçons, lisses ou rugueux qui agissent sur une ou plusieurs parties de la frontière Γ de Ω. Ces n poinçons sont soumis aux forces imposées $\vec{T}_i$ $(i = 1,n)$. Les vitesses des noeuds du maillage en contact avec les poinçons subissent des conditions imposées par l'interface des poinçons ainsi que leur direction d'avancement.

Considérons alors une structure $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (contraintes planes ou déformations planes) soumise aux poinçons lisses ou rugueux Γ_i $(i = 1,n)$ par des forces $\vec{T}_i$ représentée sur la figure 2.

Nous avons d'abord remplacé les poinçons lisses par deux couches de matériau de Norton-Hoff tel que la première couche, en contact avec la structure Ω joue le rôle des rouleaux (résistance au cisaillement nulle) et la deuxième couche qui est en contact avec la première couche et les forces imposées $\vec{T}_i$ joue le rôle d'une plaque rigide (déformations nulles); pour les poinçons rugueux on les a remplacés par une couche de matériau de Norton-Hoff jouant le rôle d'une plaque rigide. On a alors pris en compte une autre structure composée de Ω et des couches de matériau de Norton-Hoff. Cette méthode a été employée mais après la première itération on avait des vitesses rigidifiantes pour les éléments des plaques rigides des poinçons et on a dû abandonner cette idée.

La deuxième méthode utilisée consiste à remplacer les poinçons par des ressorts visqueux, convenables, avec des rigidités k_x et k_y entre les noeuds en contact avec les poinçons (voir Fig. 3).

Supposons que l'on dispose de n poinçons et que chaque poinçon est en contact avec ℓ_i $(i = 1,n)$ noeuds du maillage. Numérotons ces noeuds par $I_1, I_2, \ldots, I_{\ell_i}$. La puissance dissipée par ces ressorts visqueux de loi de comportement :

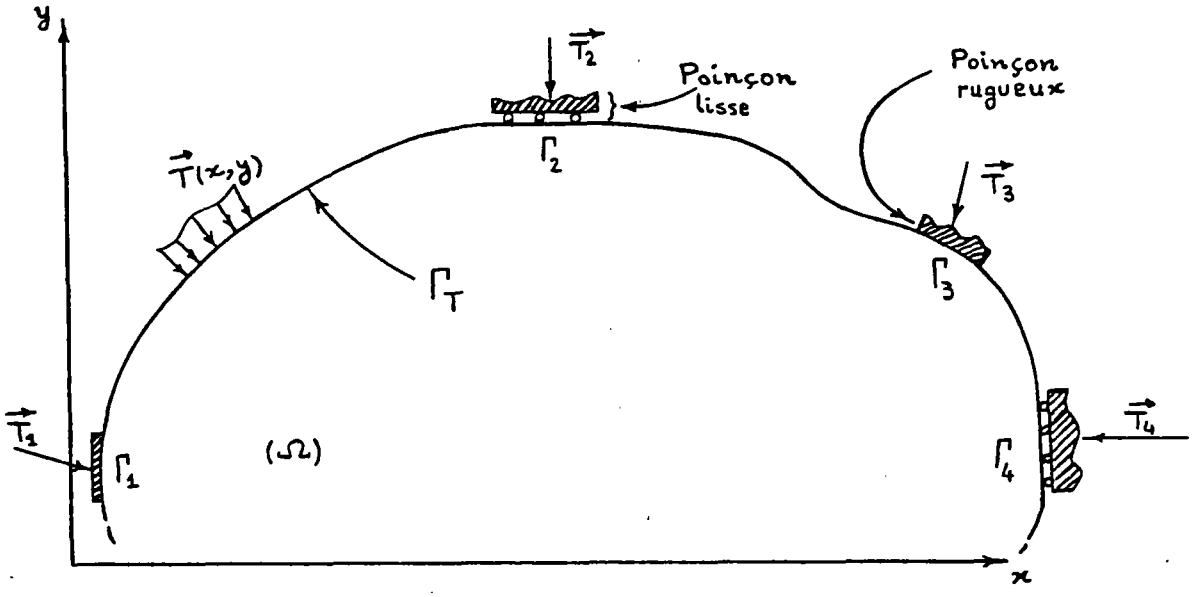


Fig. 2. Une structure $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ avec des conditions aux limites du type de poinçons lisses et rugueux

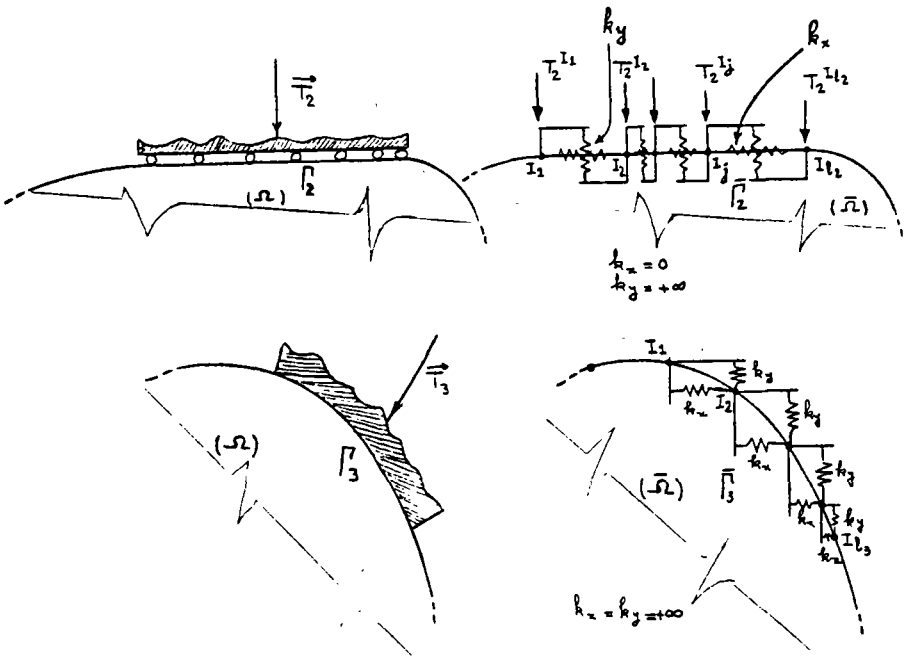


Fig. 3. Remplaçement des poinçons lisses ou rugueux par des ressorts convenables.

$$F_x = k_x \cdot V_x \qquad F_y = k_y\, V_y \tag{2-1-1.1}$$

sera alors

$$P = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{\ell_i - 1} k_x^i \left(V_{x(I_{j+1})} - V_{x(I_j)} \right)^2 + k_y^i \left(V_{y(I_{j+1})} - V_{y(I_j)} \right)^2 \right]$$

où k_x^i et k_y^i sont des rigidités des ressorts entre les noeuds en contact avec le ième poinçon et $V_{x(I_j)}, V_{y(Ij)}$ sont les composantes de la vitesse de noeud I_j.

La puissance P des ressorts peut s'écrire sous la forme :

$$P = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} V^t A_i' V = \frac{1}{2} V^t \left(\sum_{i=1}^{n} A_i' \right) V \tag{2-1-1.3}$$

où A_i' est la matrice de rigidité correspondante au ième poinçon, de dimension (h×h) avec des éléments zéro, k_x^i, k_y^i, $-k_x^i$ et $-k_y^i$.

Prenons un exemple où on a ajouté entre deux noeuds I et J un ressort avec des rigidités k_x et k_y (Fig. 4)

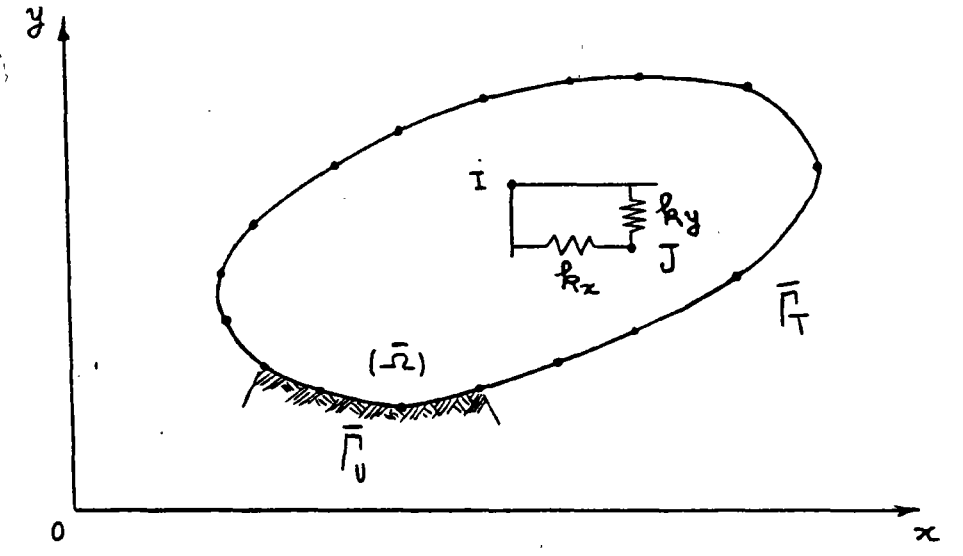


Fig. 4. Addition d'un ressort visqueux de rigidités k_x et k_y entre deux noeuds I et J.

La vitesse de déplacement du noeud I s'écrit :

$$\mathcal{V}_I = \begin{bmatrix} V_{xI} \\ V_{yI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_I \\ V_{I+\frac{h}{2}} \end{bmatrix}$$

où h est la dimension du vecteur de vitesses globales V, dans ce cas on a :

$$P = \frac{1}{2}k_x\left(V_I - V_J\right) + \frac{1}{2}k_y\left(V_{I+\frac{h}{2}} - V_{J+\frac{h}{2}}\right) = \frac{1}{2}V^t A_i' V \qquad (2\text{-}1\text{-}1.4)$$

qui nous donne :

$$A_i' = \begin{array}{c|cccccc} & I & J & & & I+\frac{h}{2} & J+\frac{h}{2} \\ I & \cdots k_x \cdots & -k_x & \cdots\cdots & & o \cdots & o \cdots \\ J & \cdots -k_x \cdots & k_x & \cdots\cdots & & o \cdots & o \cdots \\ I+\frac{h}{2} & \cdots o \cdots & o \cdots & \cdots\cdots & & k_y \cdots & -k_y \cdots \\ J+\frac{h}{2} & \cdots o \cdots & o \cdots & \cdots\cdots & & -k_y \cdots & k_y \cdots \end{array} \qquad (2\text{-}1\text{-}1.5)$$

Dans la relation (2-1-1.3), notons $\sum_{i=1}^{n} A_i' = A'$, le remplacement des poinçons par des ressorts est équivalent à la modification de la fonctionnelle H(V) :

$$\tilde{H}(V) = \frac{1}{p}\lambda^{1-p}\sum_{e=1}^{m} S_e (V^t B_e V)^{(p/2)} - V^t Q + \frac{1}{2}V^t A' V \qquad (2\text{-}1\text{-}1.6)$$

Prenons le gradient de $\tilde{H}(V)$, on obtient comme le cas précédent :

$$\nabla\tilde{H}(V) = B'(V)V + A'V - Q = 0 \qquad (2\text{-}1\text{-}1.7)$$

ce qui montre qu'il suffit d'ajouter la matrice A' à la matrice B'(V) et B'*(V) dans l'ordinogramme de la figure 1, pour obtenir un nouvel ordinogramme et les vitesses ainsi obtenues satisfont les conditions des poinçons.

La somme de la matrice définie-positive B'(V) (ou B'*(V)) et de la matrice semi définie positive A' est définie positive. Cette remarque est valable quand les éléments de la matrice A' ne sont pas très grands pour l'ordinateur, car en effet si les éléments de A' sont très grands, en sommant B'(V) (ou B'*(V)) et A', certains éléments de B'(V) (ou B'*(V)) sont négligés devant les éléments de A', la somme de deux matrices n'est alors plus définie positive, donc la méthode de triangulation de Cholesky n'est plus applicable. Pour surmonter cette difficulté, nous avons pris pour les éléments de A' ; $k = 10^{10}$ au lieu de 10^{40} et nous avons obtenus des résultats numériques qui sont satisfaisants.

Nous avons donc pris dans nos calculs pour les poinçons rugueux : $k_x = 10^{10}$ et $k_y = 10^{10}$, et pour les poinçons lisses ($k_x = 10^{10}$; $k_y = 0$) ou ($k_y = 10^{10}$; $k_x = 0$) suivant la direction d'avancement des poinçons (Fig. 5)

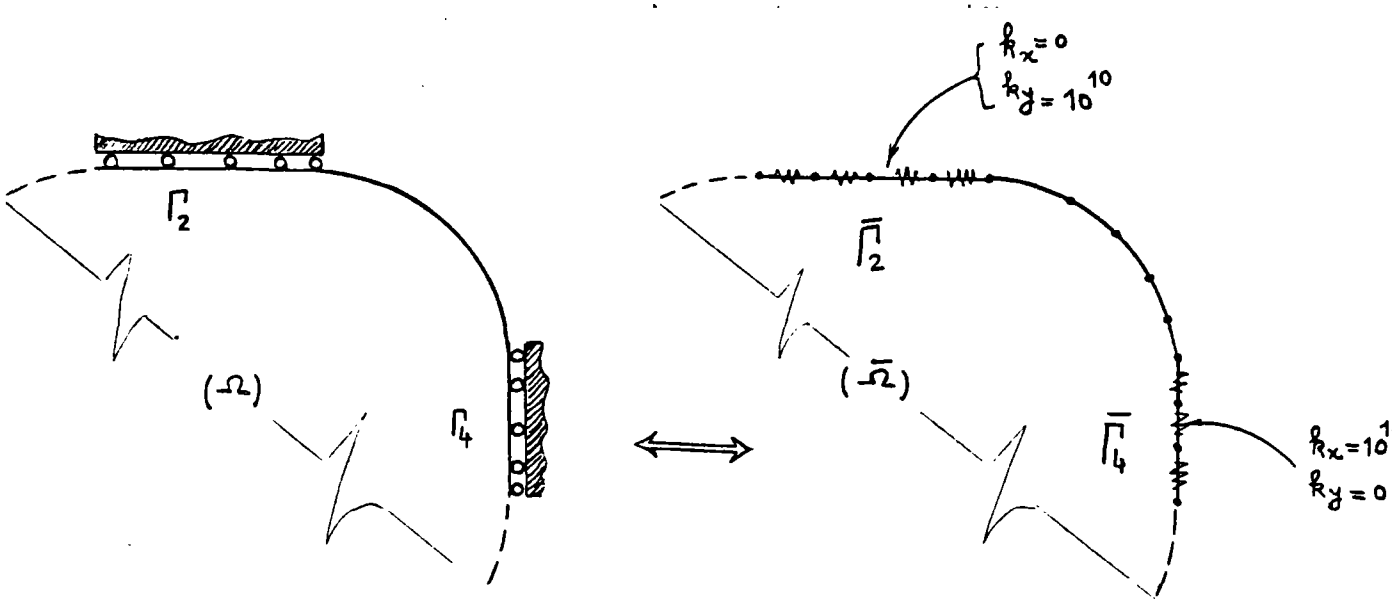


Fig. 5. Rigidité des ressorts visqueux équivalents de poinçons lisses horizontaux ou verticaux

2.2. ECOULEMENT EN DEFORMATIONS PLANES

Considérons une structure $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, constituée d'un matériau de Norton-Hoff en déformations planes (cf. Salençon [74 ,1974]), soumise aux forces $\vec{T}(x,y)$ sur Γ_T une partie de la frontière de Γ et $\vec{f}$ dans Ω n'ayant pas de composantes suivant l'axe Oz et sont indépendantes de z. Les vitesses de déplacement $\vec{v}$ sont aussi dans le plan Oxy et indépendantes de z. Le matériau est supposé homogène.

Dans ce cas :

$\dot{\varepsilon}_{xz} = \dot{\varepsilon}_{yz} = \dot{\varepsilon}_{zz} = 0$ et $\dot{\varepsilon}_{xx}$; $\dot{\varepsilon}_{yy}$, $\dot{\varepsilon}_{xy}$, σ_{ij} sont indépendants de z.

Pour nos calculs nous considérons une tranche parallèle à Oxy, d'épais-

seur l'unité. On a déjà vu que le problème d'écoulement est équivalent aux deux problèmes $(\mathcal{T})$ et $(\mathcal{T}_1)$ définis aux § II.1-1 et II-1-2. Dans cette partie nous définissons $(\mathcal{T}_d^{h,h'})$ et $(\mathcal{T}_{1d}^{h,h'})$ les problèmes approchés de $(\mathcal{T})$ et $(\mathcal{T}_1)$ en déformations planes et ensuite nous donnerons quatre algorithmes pour résoudre le problème $(\mathcal{T}_{1d}^{h,h'})$ et deux algorithmes pour résoudre le problème $(\mathcal{T}_d^{h,h'})$.

2-2-1. Définition du problème $(\mathcal{T}_{1d}^{h,h'})$ approché du $(\mathcal{T}_1)$ en déformations planes

Le problème $(\mathcal{T}_1)$ est défini au § II-1. Dans le cas des déformations planes on a :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}\,\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{xx}^2 + \dot{\varepsilon}_{yy}^2 + 2\dot{\varepsilon}_{xy}^2 \qquad (2\text{-}2\text{-}1.1)$$

Nous définissons à partir de l'ensemble V, un espace vectoriel $\tilde{V}_0$ par :

$$\tilde{V}_0 = \{\vec{w} \mid \vec{w} \in [W^{1,p}(\Omega)]^2 \ ; \ \vec{w} = 0 \text{ sur } \Gamma_u\}$$

ensuite nous remplaçons les deux espaces $\tilde{V}_0$ et $Y = \{\mu \mid \mu \in L^q(\Omega)\}$ par deux sous-espaces $\overline{V}_0 \subset \tilde{V}_0$ et $\overline{Y} \subset Y$ de dimensions finies h et h'.

Compte-tenu du caractère très contraignant de la condition d'incompressibilité comme Delbecq et al. [17,1977] ; celle-ci n'a été imposée qu'en moyenne sur deux triangles. On suppose en plus que la pression hydrostatique (M_i) sur deux éléments est constante. M_i constitue une composante du vecteur M de dimension h'. En discrétisant le terme $\int_{\Omega e_1 + \Omega e_2} \operatorname{div} \vec{v}\, d\Omega$ on obtient $D_\ell^t \cdot V$ où D_ℓ est un vecteur de dimension h. On définit la matrice D [h×h'] dont les h' colonnes sont les vecteurs D_ℓ $(\ell = 1,h')$. Avec ces relations notre problème se ramène au problème approché $(\mathcal{T}_{1d}^{h,h'})$ suivant :

$$(\mathcal{T}_{1d}^{h,h'}) \quad \begin{cases} \text{Trouver } (V^*, M^*) \text{ tel que} \\ \quad \mathcal{L}(V^*, M^*) = \operatorname{Sup}\{\operatorname{Inf}\{\mathcal{L}(V,M) \mid V \in \overline{V}\} \mid M \in \overline{Y}\} \\ \text{avec :} \\ \quad \mathcal{L}(V,M) = \dfrac{1}{p}\,\lambda^{1-p} \sum_{e=1}^{m} S_e (V^t B_e V)^{p/2} - V^t Q + V^t D M \qquad (2\text{-}2\text{-}1.2) \\ \quad \overline{V} = \{V \mid V \in \mathbb{R}^h \ ; \ V_i = U_i \text{ sur } \Gamma_U\} \\ \quad \overline{Y} = \{M \mid M \in \mathbb{R}^{h'}\} \quad h' < h \ ; \ p > 1 \end{cases}$$

Nous allons donner par la suite quatre méthodes numériques pour résoudre ce problème. La résolution du problème $(\mathcal{J}_{1d}^{h,h'})$ conduira à un champ $V^{\star}$, qui ne sera admissible que de façon approchée par suite de :

.l'erreur d'arrondi sur les calculs numériques qui est inévitable ;

.l'erreur de troncature (la nécessité d'adopter un ou plusieurs tests d'arrêt des itérations qui seront présentées) ;

.la traduction en moyenne de la condition d'incompressibilité.

Les méthodes envisagées sont :

1°) La méthode d'Uzawa ;

2°) La méthode d'Uzawa contrôlée ;

3°) La méthode d'inversion de matrice (algorithme d'Arrow-Hurwicz) ;

4°) La méthode d'inversion de matrice (point fixe).

2-2-1.1. La méthode d'Uzawa

Pour résoudre le problème $(\mathcal{J}_{1d}^{h,h'})$, Delbecq et al. [17 ,1977] ont utilisé une méthode d'Uzawa pour calculer $\mathrm{Sup}\{\mathcal{L}(V,M) \mid M\in\overline{Y}\}$ et une méthode du gradient "modifiée" pour l'$\mathrm{Inf}\{\mathcal{L}(V,M) \mid V\in\overline{V}\}$. Friaâ [27,1979] a indiqué une nouvelle méthode d'Uzawa où pour calculer l'Inf, on utilise une méthode d'itération proche de ce que nous avons utilisé pour les contraintes planes. Pour calculer le Sup, on emploie la formule d'itération suivante :

$$M_{n+1} = M_n + \rho \frac{\partial \mathcal{L}(V_n,M)}{\partial M} \qquad (2\text{-}2\text{-}1\text{-}1)$$

où $\rho>0$ est un paramètre de montée dont il faut déterminer la valeur par des tests au préalable.

Pour trouver l'Inf de $\mathcal{L}(V,M)$, nous annulons le gradient de $\mathcal{L}(V,M)$ pris par rapport à V :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(V,M)}{\partial V} = \lambda^{1-p} \sum_{e=1}^{m} S_e (V^t B_e V)^{(p-2)/2} B_e . V - Q + DM = 0. \qquad (2\text{-}2\text{-}1\text{-}1.2)$$

Décomposons V en V_0 et $\hat{V}$ (§ II-2-1) tel que $V = V_0 + \hat{V}$ et supposons B_e définie positive (sinon on lui ajoute εI) et posons $\lambda^{1-p} \sum_{e=1}^{m} S_e (V^t B_e V)^{(p-2)/2} B_e = B'(V)$. La relation précédente nous donne :

$$B'(V) \cdot V_0 = Q - DM - B'(V) \cdot \hat{V} \qquad (2\text{-}2\text{-}1\text{-}1.3)$$

En procédant de la même manière, pour les vitesses imposées et les poinçons, qu'aux § II-2-1 et § II-2-1-1, en posant $B'(V) + A' = B(V)$ et $B(V) + A = B^{\star}(V)$ où A (pour les vitesses imposées) et A' (pour les poinçons) sont deux matrices symétriques semi-définies positives. On aura

$$B^{\star}(V) \cdot V_0 = Q - DM - B(V) \cdot \hat{V} \qquad (2\text{-}2\text{-}1\text{-}1.4)$$

d'où la relation de récurrence :

$$\begin{cases} B^{\star}(V_n) \cdot V_{0(n+1)} = Q - DM - B(V_n)\ \hat{V} \\ V_{n+1} = V_{0(n+1)} + \hat{V} \end{cases} \qquad (2\text{-}2\text{-}1\text{-}1.5)$$

Pour un M donné, l'itération définie plus haut est convergente, dans le cas où :

1°) $\| Q - DM - B(V_n) \cdot \hat{V} \| \neq 0$

2°) $B^{\star}(V_n)$ est définie positive

3°) $1 < p < p_{max}$ avec $2 < p_{max} < 3$ (Friaâ [27,1979] ; Frémond [20,1979])

Ainsi on part d'un vecteur de vitesses non rigidifiant $V^0 \in \mathbb{R}^h$, et un vecteur $M^0 \in \mathbb{R}^{h'}$ et on fait un certain nombre d'itérations sur V employant (2-2-1-1.5) et on obtient donc un vecteur V^1. Ensuite on utilise la relation (2-2-1-1.1) pour calculer M^1 et on recommence le procédé en remplaçant V^0 et M^0 par V^1 et M^1 etc ...

La convergence de cette méthode est démontrée par Frémond [20,1979]. Il faut indiquer que comme toujours dans la méthode d'Uzawa le choix de ρ est délicat, s'il est trop grand la méthode diverge, s'il est trop petit la convergence est trop lente. Pour un choix convenable de ρ on a réussi à résoudre

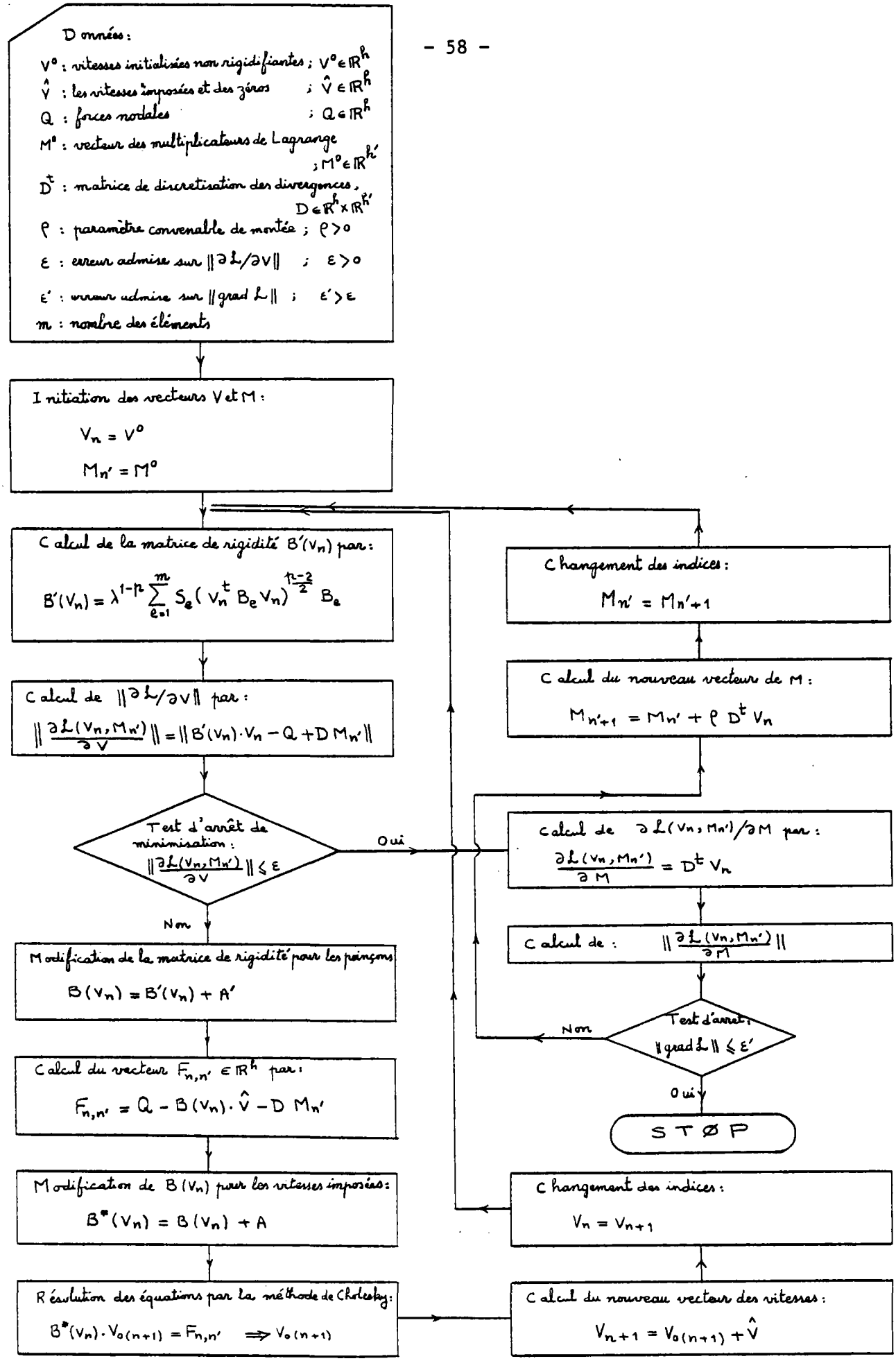


Fig. 6. Ordinogramme de la méthode d'Uzawa

quelques problèmes que l'on verra dans la troisième partie de ce mémoire. L'ordinogramme de cette méthode est présenté sur la figure 6.

Comme dans le cas de contraintes planes, il est préférable de vérifier que les normes $\left\|\frac{\partial f}{\partial V}\right\|$ et $\|\nabla \mathcal{L}\|$ descendent sinon on arrête l'itération correspondante et on passe à l'étape suivante, ainsi on évite des itérations inutiles.

De plus, la vitesse de convergence de cette méthode, comme les autres méthodes que nous allons expliquer, dépend du choix de V^0 et M^0. Pour augmenter la vitesse de convergence, on résout le problème avec $p = 2$ ce qui nous donne en une seule itération le minimum, ensuite on prend pour p des valeurs intermédiaires en prenant pour V^0 et M^0 les vecteurs V et M, solution du problème avec le p précédent.

Pour déterminer un ρ convenable, on fait pour un p fixé, un certain nombre d'itérations en imprimant après chaque itération la $\|\nabla \mathcal{L}\|$ et puis on choisit le ρ correspondant au nombre d'itérations minimum ou $\|\nabla \mathcal{L}\|$ minimum. On verra dans la troisième partie que ρ dépend de p. En général pour les p voisins de 1, le choix de ρ est plus couteux que si on prend un ρ constant (par exemple le ρ convenable pour $p = 2$).

2.2-1-2. La méthode d'Uzawa contrôlée

Comme nous avons déjà indiqué le choix de ρ est assez délicat. Nous avons donc essayé d'automatiser ce choix, par la méthode d'Uzawa contrôlée. On sait que la solution du problème d'écoulement $(\mathcal{J}_{1d}^{h,h'})$ est un couple de vecteurs (V^*, M^*) qui vérifient les inégalités suivantes :

$$\mathcal{L}(V^*, M) \leq \mathcal{L}(V^*, M^*) \leq \mathcal{L}(V, M^*) \qquad \forall M \in \overline{Y} \text{ et } \forall V \in \overline{V} \qquad (2\text{-}2\text{-}1\text{-}2.1)$$

Dans le cas où les vitesses imposées sur Γ_U sont nulles on sait que $V = 0$ est un vecteur qui appartient à l'ensemble $\overline{V}$, ce qui nous donne :

$$\mathcal{L}(V^*, M) \leq \mathcal{L}(V^*, M^*) \leq 0 \qquad \forall M \in \mathbb{R}^{h'}$$

A partir de ce résultat on obtient la nouvelle méthode pour calculer le ρ convenable, en même temps que l'on s'approche au point selle (V^*,M^*).

Nous définissons un processus itératif convergeant par :

$$\mathcal{L}(V^n,M^{n-1}) \leqslant \mathcal{L}(V^n,M^n) \leqslant \mathcal{L}(V^{n-1},M^n). \qquad (2\text{-}2\text{-}1\text{-}2.3)$$

Dans cette méthode l'Inf se calcule de la même façon que dans la méthode d'Uzawa. On part alors de deux vecteurs $V^0 \in \mathbb{R}^h$ et $M^0 \in \mathbb{R}^{h'}$. Supposons que V^{n-1} et M^{n-1} soient connues. On minimise la fonctionnelle $\mathcal{L}(V,M^{n-1})$ qui nous donne un certain vecteur V^n. Ensuite on calcul M^n par la relation :

$$M^n = M^{n-1} + \rho_n \frac{\partial \mathcal{L}(V^n,M)}{\partial M} \qquad (2\text{-}2\text{-}1\text{-}2.4)$$

avec un $\rho_n \geqslant 0$. La relation (2-2-1.2) nous donne : $\frac{\partial \mathcal{L}(V^n,M)}{\partial M} = D\ {}^tV^n$ et d'où :

$$\mathcal{L}(V^n,M^n) = H(V^n) + V^n\ {}^tDM^n = H(V^n) + V^n\ {}^tD(M^{n-1} + \rho_n D\ {}^tV^n) =$$
$$= \mathcal{L}(V^n,M^{n-1}) + \rho_n\ V^n\ {}^tDD\ {}^tV^n \geqslant \mathcal{L}(V^n,M^{n-1})$$

qui présente que l'inégalité à gauche de la relation (2-2-1-2.3) est toujours vérifiée. Il nous faut donc choisir un ρ_n tel que :

$$\mathcal{L}(V^n,M^n) \leqslant \mathcal{L}(V^{n-1},M^n)$$

qui est équivalente à

$$\underbrace{H(V^n) + V^n\ {}^tDM^{n-1}}_{\mathcal{L}(V^n,M^{n-1})} + \rho_n V^{nt}\ DD^t\ V^n \leqslant \underbrace{H(V^{n-1}) + V^{n-1t}\ DM^{n-1}}_{\mathcal{L}(V^{n-1},M^{n-1})} + \rho_n V^{n-1t}\ DD^t\ V^{n-1}$$

d'où

$$\rho_n (V^n-V^{n-1})^t\ DD^t\ (V^n-V^{n-1}) \leqslant \mathcal{L}(V^{n-1},M^{n-1}) - \mathcal{L}(V^n,M^{n-1}). \qquad (2\text{-}2\text{-}1\text{-}2.5)$$

Mais puisque V^n vérifie l'$\mathrm{Inf}\{\mathcal{L}(V,M^{n-1}) \mid V \in \overline{V}\}$, on a $\mathcal{L}(V^{n-1},M^{n-1}) - \mathcal{L}(V^n,M^{n-1}) \geqslant 0$ et d'autre part le facteur de ρ_n est positif d'où :

$$0 \leqslant \rho_n \leqslant \frac{\mathcal{L}(V^{n-1},M^{n-1}) - \mathcal{L}(V^n,M^{n-1})}{(V^n-V^{n-1})^t\ DD^t\ (V^n-V^{n-1})}. \qquad (2\text{-}2\text{-}1\text{-}2.6)$$

Il est clair que si ρ_n est trop grand, l'inégalité de (2-2-1-2.5)

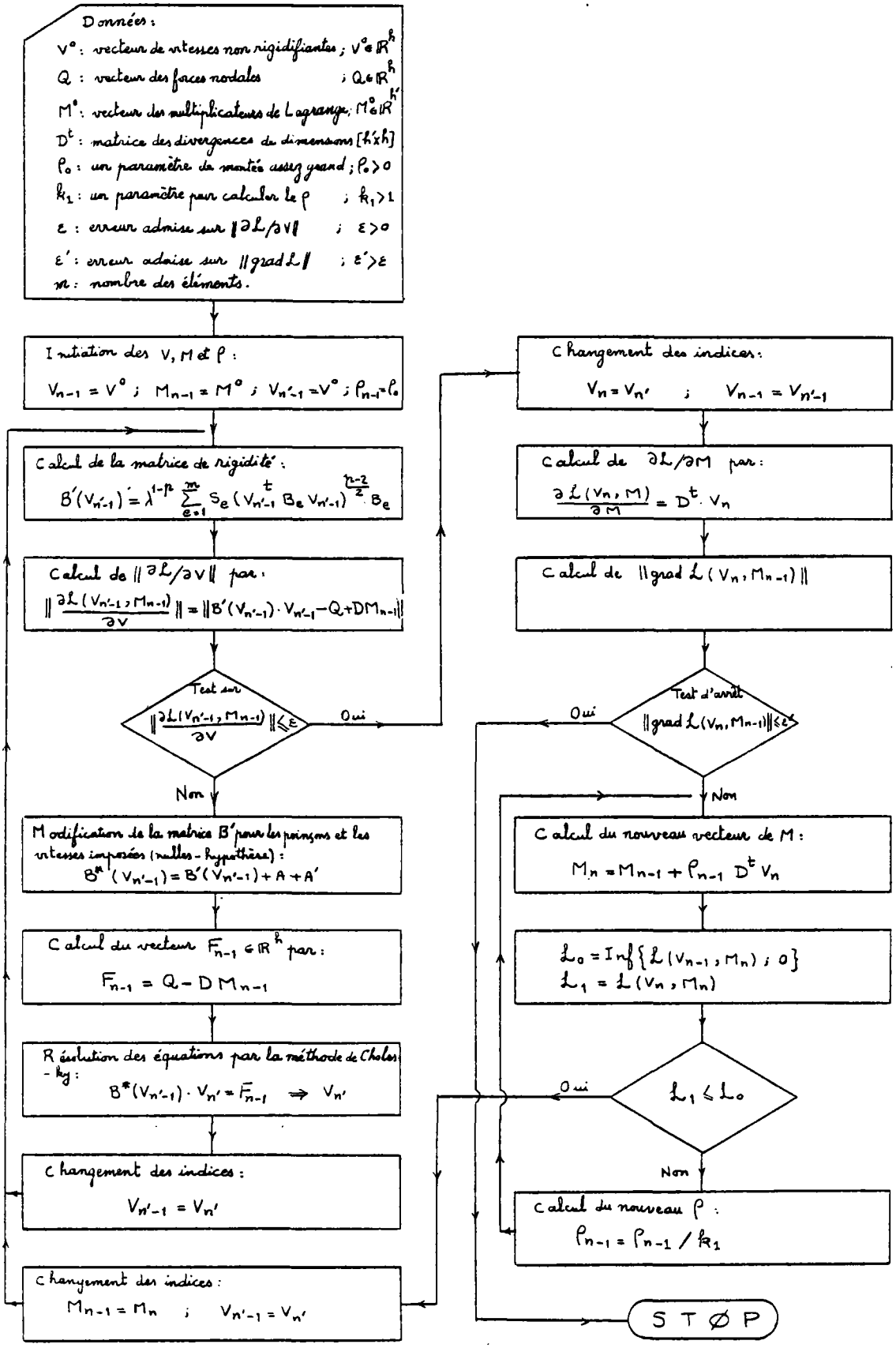


Fig. 7. Ordinogramme de la méthode d'Uzawa contrôlée

ne serait pas vérifiée et la méthode sera divergente. Donc nous avons besoin d'un paramètre $k_1 > 1$ (par exemple $k_1 = 1,1$), pour calculer $\rho_n = \rho_n / k_1$ et on répète ce processus jusqu'à ce que cette inégalité soit vérifiée.

Remarque : Pour le choix de ρ_n on peut utiliser aussi l'inégalité de (2-2-1-2.6).

L'ordinogramme de cette méthode est représenté sur la figure 7.

La convergence de cette méthode est assez lente, et elle est plus couteuse que la méthode d'Uzawa (§ II-2-2-1-1) car dans cette méthode souvent quand on s'approche du point selle le paramètre ρ_n tend vers zéro. Pour cette raison on a dû abandonner cette méthode.

2-2-1.3. La méthode d'inversion de matrice (algorithme d'Arrow-Hurwicz)

On a à résoudre le problème $(\mathcal{P}_{1d}^{h,h'})$ défini au § II-2-2-1. Le point-selle de la fonctionnelle $\mathcal{L}(V,M)$ annule les dérivées partielles de $\mathcal{L}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial V} = B'(V).V - Q + DM = 0 & (2\text{-}2\text{-}1\text{-}3.1) \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial M} = D^t V = 0 & (2\text{-}2\text{-}1\text{-}3.2) \end{cases}$$

Afin de satisfaire les conditions aux limites du type des vitesses imposées et des poinçons, la relation (2-2-1-3.1) se ramène à (voir les relations (2-2-1-1.3) à (2-2-1-1.5))

$$\begin{cases} B^{\star}(V) \cdot V_0 = Q - DM - B(V) \cdot \hat{V} \\ V = V_0 + \hat{V} \end{cases} \qquad (2\text{-}2\text{-}1\text{-}3.3)$$

qui nous donne

$$V = [B^{\star}(V)]^{-1} [Q - DM - B(V) \cdot \hat{V}] + \hat{V} \qquad (2\text{-}2\text{-}1\text{-}3.4)$$

car $B^{\star}(V)$ est inversible (suivant l'hypothèse que les B_e sont définies positives). Cette relation et (2-2-1-3.2) nous donnent :

$$D^t [B^{\star}(V)]^{-1} D \cdot M = D^t [B^{\star}(V)]^{-1} [Q - B(V) \cdot \hat{V}] + D^t \hat{V} \qquad (2\text{-}2\text{-}1\text{-}3.5)$$

A partir des relations (2-2-1-3,1) et (2-2-1-3.5) on définit les formules d'itérations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{On part de } V_n \in \mathbb{R}^h \text{ non rigidifiant et } M_n \in \mathbb{R}^{h'} \\ \text{On minimise la fonctionnelle } \mathcal{L}(V,M_n) \text{ par} \\ \qquad B^*(V_n)\cdot V_{0(n+1)} = Q - DM_n - B(V_n)\cdot\hat{V} \\ \qquad V_{n+1} = V_{0(n+1)} + \hat{V} \Rightarrow V_n = V_{n+1} \\ \text{Après avoir trouvé le minimum exact on calcul le vecteur } M_{n+1} \text{ par :} \\ \qquad D^t\,[B^*(V_n)]^{-1} D\cdot M_{n+1} = D^t[B^*(V_n)]^{-1}[Q - B(V_n)\cdot\hat{V}] + D^t\hat{V} \\ \text{Et on recommence le processus en prenant } M_n = M_{n+1} \end{array}\right. \qquad (2\text{-}2\text{-}1\text{-}3.6)$$

Puisque l'inversion de la matrice $B^*(V_n)$ est couteuse et qu'en plus on risque d'augmenter les erreurs de calcul (erreurs d'arrondi) nous avons calculé directement la matrice : $D^t[B^*(V_n)]^{-1} = C_n^t$ où la matrice c_n^t a h' lignes et h colonnes.

La matrice $B^*(V_n)$ est symétrique, définie positive, donc son inverse est aussi une matrice symétrique, définie positive. Nous avons donc :

$$B^*(V_n)\cdot C_n = D \qquad (2\text{-}2\text{-}1\text{-}3.7)$$

Les matrices C_n et D étant constituée par h' vecteurs colonnes C_n^i et D^i $(i = 1,h')$ de dimension h $(h>h')$. La relation précédente nous donne :

$$B^*(V_n)\cdot C_n^i = D^i \quad (i = 1,h') \qquad (2\text{-}2\text{-}1\text{-}3.8)$$

On peut donc calculer facilement la matrice C_n, colonne par colonne en employant la méthode de Cholesky.

Pour $p = 2$, cette méthode converge en une seule itération. Des essais numériques ont montré que dans le cas général, cette méthode converge pour les p voisins de 2. La convergence n'est pas assurée pour les p voisins de 1. Dans la troisième partie nous donnons un exemple pour lequel cette méthode a convergé pour tous les $1<p\leqslant 2$ et un autre exemple pour lequel elle n'a convergé que pour les p voisins de 2.

L'ordinogramme de cette méthode est représenté sur la figure 8.

En réalité l'algorithme d'Arrow-Hurwicz pour le problème $(\mathcal{P}_{1d}^{h,h'})$ nous donne (voir Glowinsky et al. [32,1976]) :

$$\begin{cases} V_n \text{ et } M_n \text{ sont connus,} \\ V_{n+1} = V_n - \rho_n \dfrac{\partial \mathcal{L}(V_n, M_n)}{\partial V} & (2\text{-}2\text{-}1\text{-}3.9) \\ M_{n+1} = M_n + \rho'_n \dfrac{\partial \mathcal{L}(V_{n+1}, M_n)}{\partial M} & (2\text{-}2\text{-}1\text{-}3.10) \end{cases}$$

où ρ_n et ρ'_n sont deux paramètres positifs, à déterminer au préalable de telle façon que le processus itératif soit convergent. En effet au lieu de (2-2-1-3.9) nous avons utilisé les relations (2-2-1-3.3) pour calculer l'Inf. Considérons les deux relations (2-2-1-3.4) et (2-2-1-3.10), on obtient :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(V_{n+1}, M_n)}{\partial M} = D^t V_{n+1} = D^t\{[B^*(V_n)]^{-1}[Q - DM_n - B(V_n)\cdot\hat{V}] + \hat{V}\}$$

d'où

$$M_{n+1} = M_n - \rho'_n D^t[B^*(V_n)]^{-1} D\, M_n + \rho'_n\{D^t[B^*(V_n)]^{-1}[Q - B(V_n)\cdot\hat{V}] + D^t\hat{V}\}. \quad (2\text{-}2\text{-}1\text{-}3.11)$$

Comparons cette relation avec celle de (2-2-1-3.6). Pour cela notons le vecteur M_{n+1} calculé par (2-2-1-3.6), M'_{n+1}, on a alors :

$$M_{n+1} = M_n - \rho'_n\, D^t[B^*(V_n)]^{-1} D\, M_n + \rho'_n D^t[B^*(V_n)]^{-1} D\, M'_{n+1}$$

ou bien :

$$M_{n+1} = M_n + \rho'_n D^t[B^*(V_n)]^{-1} D[M'_{n+1} - M_n]$$

ce qui montre que dans le cas général $M_{n+1} \neq M'_{n+1}$ et en plus il nous fallait introduire comme la méthode d'Uzawa un paramètre de montée ρ'_n dans nos calculs. On a abandonné cette méthode dans la suite.

2-2-1-4. <u>La méthode d'inversion de matrice</u> <u>(algorithme de point fixe)</u>

Dans cette méthode nous utilisons les mêmes formules d'itérations que la méthode précédente (§ II-2-2-1.3) mais cette fois, après chaque itération sur V, on calcul le nouveau vecteur M et le test d'arrêt est porté sur la $\|\nabla\mathcal{L}\|$ (fig. 9).

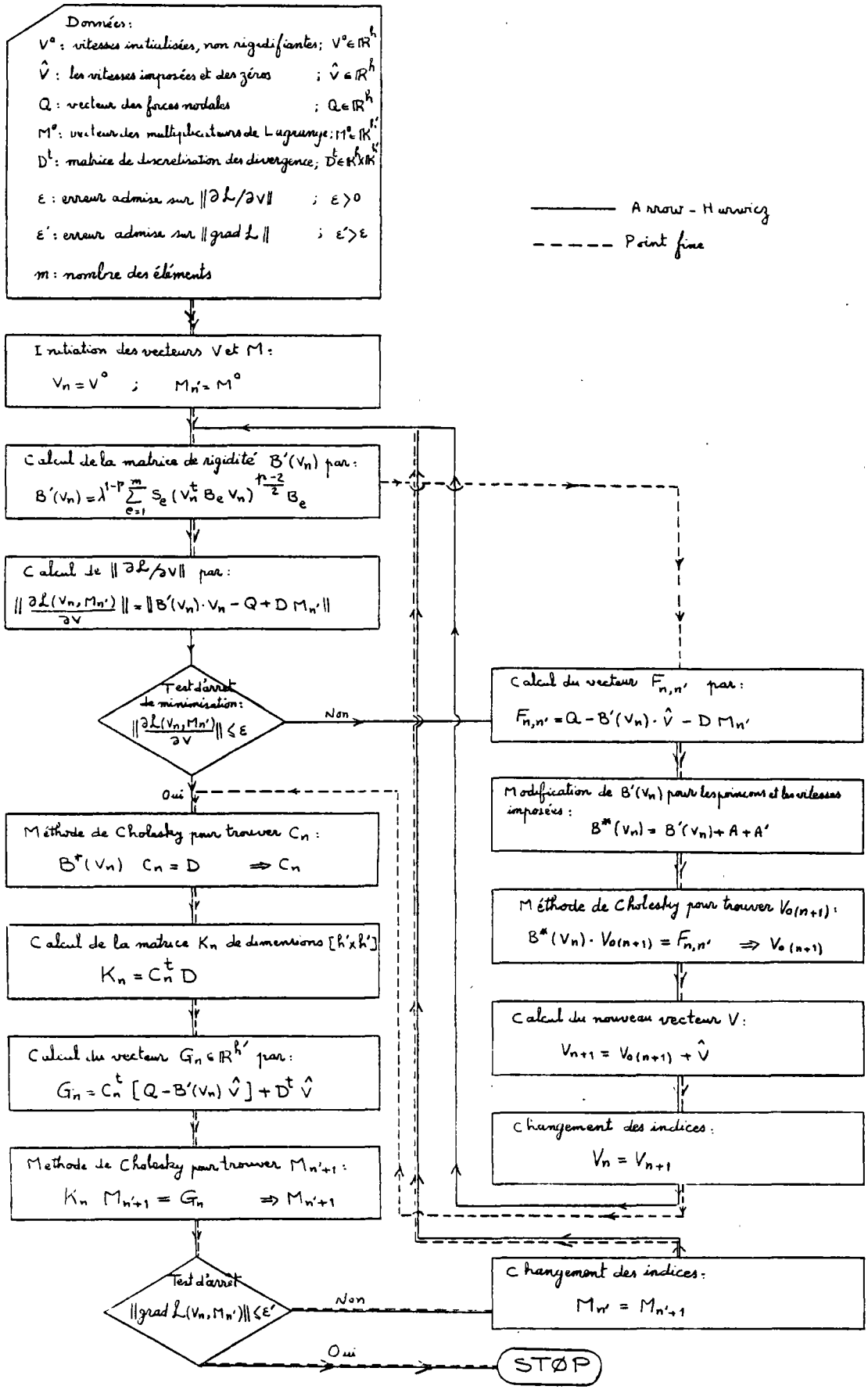


Fig. 8 et 9. Algorithmes d'Arrow-Hurwicz et point fixe

L'algorithme que nous avons utilisé est celui du point fixe. Cet algorithme est couteux mais, pour tous les problèmes étudiés à la troisième partie, il a convergé avec une bonne précision. Quand on tend p vers 1, la convergence de cette méthode devient de plus en plus lente.

Cette méthode est largement utilisée pour résoudre des problèmes d'écoulement ou d'analyse limite (Partie III). On a préféré l'utilisation de cette méthode à la méthode d'Uzawa dans nos applications car on n'a pas à choisir le bon paramètre de montée (ρ).

2-2-2. Définition du problème $(\mathcal{T}_d^{h,h'})$ approché du $(\mathcal{T})$ en déformations planes

Le problème $(\mathcal{T})$ est ramené au problème $(\mathcal{T}_{h,h'})$ en maillant l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Nous avons présenté au § II-1-1 comment on peut définir un espace des vitesses vérifiant les conditions d'incompressibilité $D^t V = 0$ où D est la matrice de discrétisation de divergence de V sur les éléments triangulaires. On décompose le vecteur des vitesses V en deux vecteurs V_e (de dimension h') et V_f (de dimension h - h') tandis que la matrice D est décomposée en $D = [D_e \; D_f]$ où D_e est une matrice carrée (h'×h'). Comme on a vu au § II-1-1, les composantes de V_e doivent être choisies tel que toutes les équations $D_e V_e$ soient indépendantes. Ensuite on calcule le V_e en fonction de V_f. On aura donc une relation du type $V = Ef$ (la relation 1-1.3)

Notre problème se ramène à :

$$(\mathcal{T}_d^{h,h'}) \begin{cases} \text{Trouver un vecteur } V_f^{\star} \in \mathbb{R}^{h-h'} \text{ tel que} \\ \quad H(V_f^{\star}) = \mathrm{Inf}\{H(V_f) \mid V = EV_f \in \overline{V}\} \\ \text{avec : } H(V_f) = \dfrac{1}{p}\lambda^{1-p} \sum_{e=1}^{m} S_e [V_f^t E\, {}^t B_e\, E\, V_f]^{(p-2)/2} - V_f^t E\, {}^t Q \\ \text{et } \overline{V} = \{V \mid V_i = U_i \text{ sur } \overline{\Gamma}_U \text{ et } V \in \mathbb{R}^h\} \end{cases} \qquad (2\text{-}2\text{-}2.1)$$

Il faut noter que nous utilisons des éléments triangulaires avec trois noeuds. Argyris et al [3 ,1977] ont utilisé des éléments triangulaires

avec 6 noeuds (TRIM6). Ils ont supprimé les conditions d'incompressibilité sur chaque élément en définissant une distribution de vitesses convenables. Le vecteur de vitesses $\vec{v}(x)$ au point $x \in \Omega_e$ dépend de 12 paramètres,

$$\vec{v}(x,y) = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \cdots & a_5 \\ b_0 & b_1 & b_2 \cdots & b_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ xy \\ x^2 \\ y^2 \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}2\text{-}2.2)$$

et $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ est équivalent à

$$a_1 + a_3 y + 2a_4 + b_1 + b_3 x + 2b_5 = 0. \qquad (2\text{-}2\text{-}2.3)$$

Ils ont alors défini une distribution de vitesse $\vec{v}(x)$ qui satisfait la relation (2-2-2.3). Le problème résolu par Argyris et al est du type linéaire (élasticité) tandis que notre problème est non linéaire et l'utilisation des éléments (TRIM6) le rend très compliqué.

Nous avons essayé les deux méthodes suivantes pour résoudre le problème $(\mathcal{J}_d^{h,h'})$:

2-2-2-1. <u>La méthode de l'ensemble des vitesses incompressibles définie sur les éléments quadrilatériaux constitué chacun de quatre éléments triangulaires</u>

On maille la structure $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ en déformations planes par des quadrilatéraux qu'on subdivise en quatre triangles. Si l'on satisfait les conditions d'incompressibilité sur deux éléments triangulaires, on aura deux équations par bloc, ce qui nous permet de supprimer les deux degrés de liberté du noeud interne de bloc (Desaï et al [18, 1972]).

Considérons le bloc quadrilatéral représenté sur la figure 10. Le vecteur de vitesse élémentaire de ce bloc est :

$$V_q^t = (V_{xI}, V_{yI}, V_{xJ}, V_{yJ} \cdots V_{xE}, V_{yE}) \qquad (2\text{-}2\text{-}2\text{-}1.1)$$

qui est de dimension 10. Ecrivons les conditions d'incompressibilité en

moyenne sur deux éléments

$$\int_{\Omega_1+\Omega_2} \operatorname{div} \vec{v}\, d\Omega = 0 \;;\; \int_{\Omega_3+\Omega_4} \operatorname{div} \vec{v}\, d\Omega = 0 \qquad (2\text{-}2\text{-}2\text{-}1.2)$$

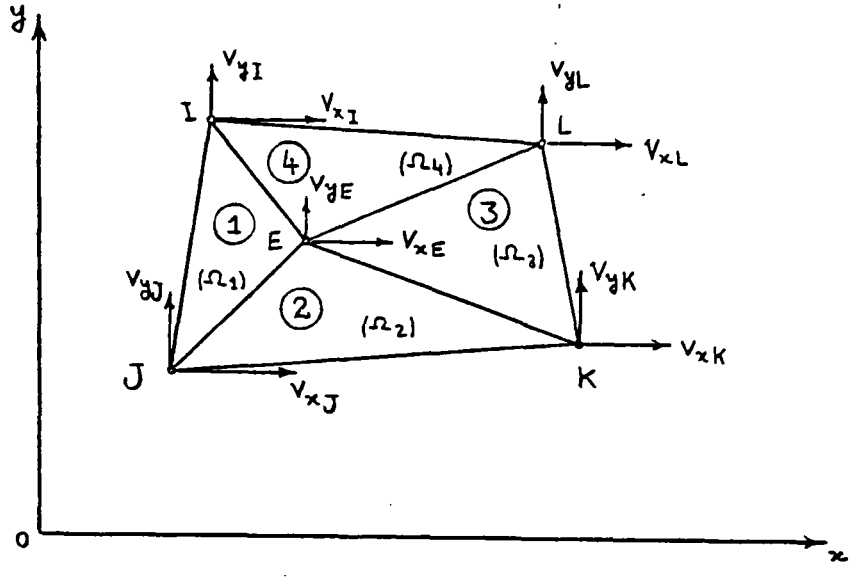


Fig. 10. Un bloc quadrilatéral constitué de quatre éléments triangulaires

ce qui nous donne

$$D_q V_q = 0 \qquad (2\text{-}2\text{-}2\text{-}1.3)$$

où D_q est une matrice de dimension $[2\times10]$.

Posons

$$V_{eq}^t = [V_{xE}, V_{yE}] \text{ et } V_q^t = [V_{fq}^t, V_{eq}^t] \text{ et } D_q^t = [D_{fq}^t, D_{eq}^t],$$

la relation (2-2-2-1.3) devient :

$$(D_{fq}\ D_{eq}) \begin{bmatrix} V_{fq} \\ V_{eq} \end{bmatrix} = 0 \qquad (2\text{-}2\text{-}2\text{-}1.4)$$

L'élimination de V_{eq} est donc possible si la matrice D_{eq} est inversible. Or par un calcul simple, il est facile de voir que le déterminant de D_{eq} est nul et donc cette matrice n'est pas inversible. Nous avons essayé de lever

cette difficulté en utilisant des blocs constitués de quatre quadrilatéraux (Fig. 11)

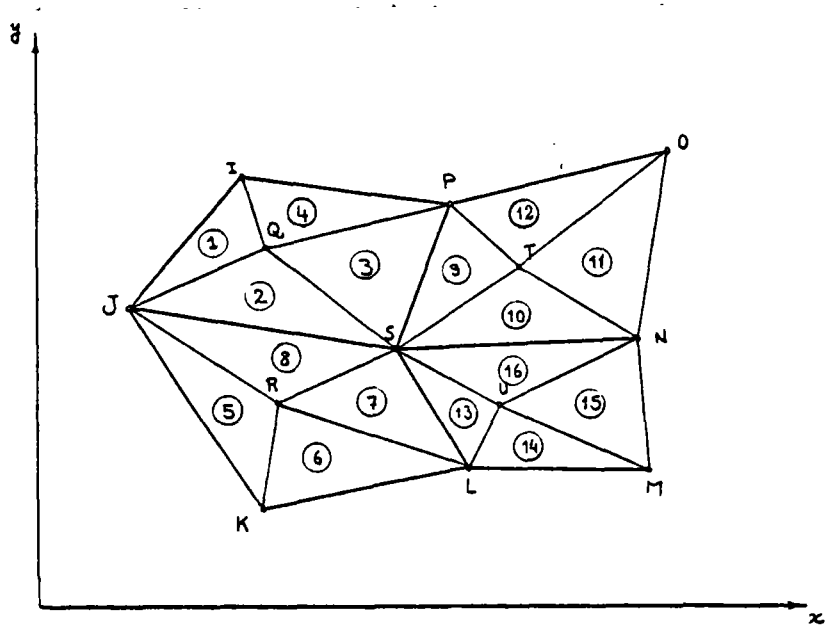


Fig. 11. Un bloc de 16 éléments triangulaires

Ainsi pour chaque bloc on a 16 éléments triangulaires et 26 degrés de liberté dont 10 se trouvent à l'intérieur du bloc. Comme nous voulons supprimer les composantes de vitesses des noeuds internes, il nous faut 10 équations pour exprimer les conditions d'incompressibilité. Nous avons donc groupé les 16 éléments triangulaires en 10 ensembles de telle façon que sur chaque ensemble on puisse écrire l'équation exprimant la condition d'incompressibilité. Malheureusement on trouve encore un $\det[D_{eq}] = 0$, on a du abandonner cette méthode.

2-2-2-2. La méthode de l'ensemble des vitesses incompressibles définie sur chaque éléments triangulaires en utilisant des super-réseaux (Needleman et Shih [57, 1978])

Maillons le domaine Ω par des super-réseaux constitués chacun de deux bandes de N éléments quadrilatéraux. Chaque quadrilatéral est découpé en quatre

triangles par ses diagonales (Fig. 12).

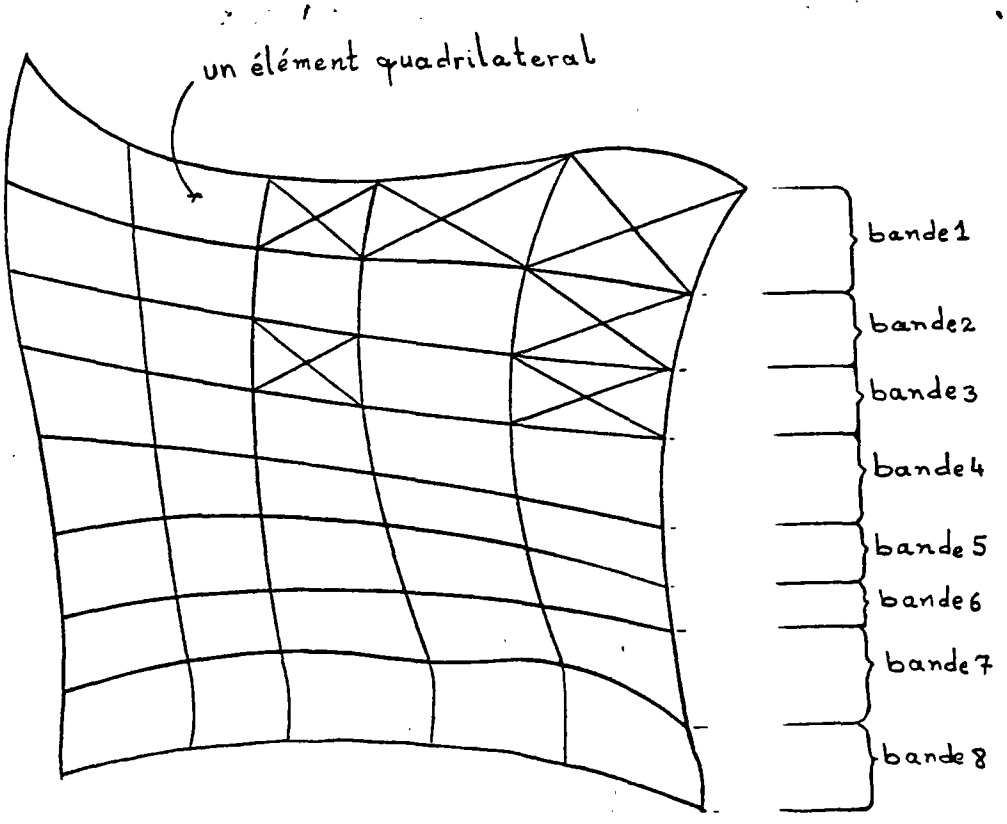


Fig. 12. Maillage de la structure Ω en 8 bandes (4 super-réseaux) chaque bande est constituée de 5 éléments quadrilatéraux et chaque quadrilatéral est découpé en quatre éléments triangulaires à trois noeuds.

Considérons l'élément quadrilatéral représenté sur la figure 13, nous savons que pour ce genre d'éléments les conditions d'incompressibilité exprimées sur chaque triangle nous donnent trois équations indépendantes (voir Nagtegaal et al, [54 , 1974]). En utilisant deux de ces trois équations, on peut supprimer les deux degrés de liberté correspondant au noeud interne E, il nous restera donc une équation à faire vérifier sur chaque quadrilatéral.

Nous supposons que notre domaine (Ω) est discrétisé en bandes de N éléments quadrilatéraux, et que chaque bande joint une frontière de maillage à l'autre frontière (Fig. 12).

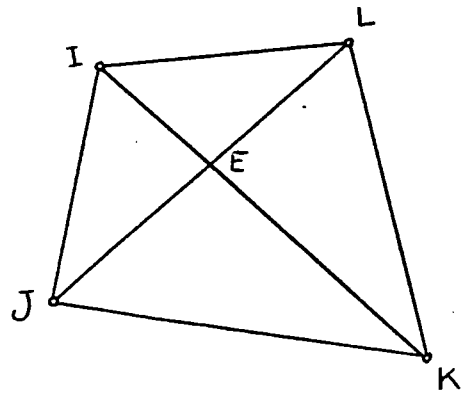


Fig. 13. Un élément quadrilatéral constitué de quatre triangles formés par un quadrilatéral et ses deux diagonales

Deux bandes ainsi définies constituent un super-réseau. Nous allons éliminer à l'aide des 2N équations d'incompressibilité qui nous restent pour un super-réseau, les degrés de liberté des noeuds communs entre les deux bandes constituant un super-réseau.

Considérons le super-réseau de la figure 14, il y a 2N+2 degrés de liberté associés à la ligne commune entre deux bandes tandis qu'il nous reste seulement 2N équations. De ces 2N équations nous pouvons facilement exprimer les vitesses des noeuds internes du super-réseau en fonction des vitesses des noeuds externes en utilisant 2N-2 équations d'incompressibilité.

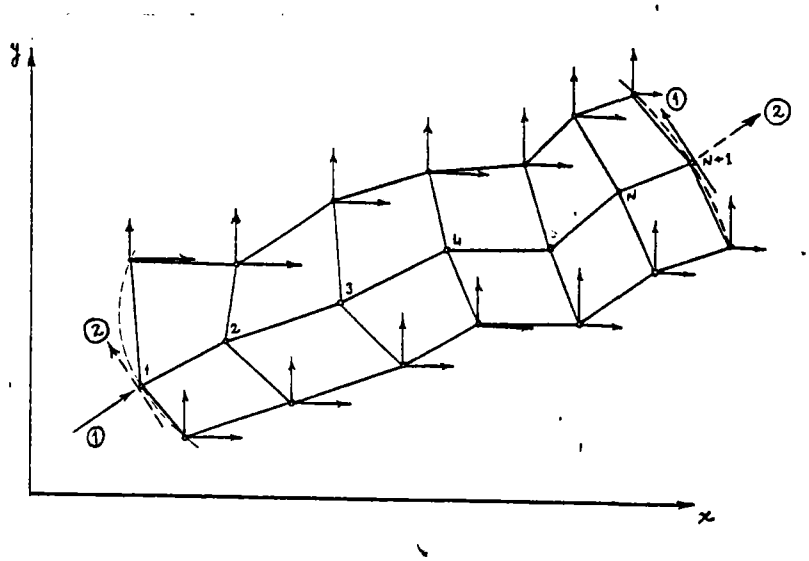


Fig. 14. Un super-réseau avec 4N+6 degrés de liberté
(en considérant les vecteurs 1 ou 2 avec les autres)

Les vitesses normales du premier et (N+1)ème noeud de la ligne commune de ce super-réseau ne sont pas indépendantes, en effet l'équation d'incompressibilité sur chaque super-réseau s'écrit :

$$\int_{\Omega_r} \operatorname{div} v \, d\Omega = 0 \qquad (2\text{-}2\text{-}2\text{-}2.1)$$

qui nous donne :

$$\int_{\Gamma_r} v_i \, n_i \, d\Gamma = 0$$

où Ω_r et Γ_r désignent la surface et la frontière du super-réseau, et $\vec{n}$ est le vecteur normal à Γ_r en chaque point. Donc les deux équations qui restent nous permettent de supprimer la vitesse normale d'un des noeuds 1er ou (N+1)ème de la ligne commune et la vitesse tangentielle de l'autre noeud. Ainsi il nous reste un super-réseau avec 4N + 6 degrés de liberté que l'on a représenté sur la figure 14.

Une fois les équations d'incompressibilité satisfaites tous les degrés de liberté qui restent interviennent dans l'expression de la fonctionnelle H(V) et il nous suffit pour minimiser cette fonctionnelle, d'annuler sa dérivée partielle par rapport au vecteur des vitesses qui restent (pour $p>1$).

Ainsi pour la structure Ω constituée des super-réseaux, on a $h' = 3m$ conditions d'incompressibilité indépendantes (m est le nombre des quadrilatères) exprimées sous la forme :

$$D^t \cdot V = 0 \qquad (2\text{-}2\text{-}2\text{-}2.3)$$

où V est le vecteur des vitesses nodales de dimension h et D est une matrice de dimension $[h \times h']$. Suivant la démarche indiquée au § II-1.1, on obtient $V = E \cdot V_f$ (voir la relation 1-1.3) où E est une matrice de dimension $[h \times (h-h')]$.

En considérant la relation (1-1.1) et (1-1.3), le problème à résoudre se ramène à :

$$(\mathcal{J}_d^{h,h'}) \quad \begin{cases} \text{Trouver un vecteur } V_f^{\star} \in \overline{V} \text{ tel que :} \\ H(V_f^{\star}) = \mathrm{Inf}\{H(V_f) \mid \quad \forall V_f \in \overline{V}\} \\ H(V_f) = \frac{1}{p}\lambda^{1-p} \sum_{e=1}^{4m} S_e \left[V_f^t E\, {}^tB_e E V_f\right]^{p/2} - V_f\, {}^tE\, {}^tQ \\ \overline{V} = \{V_f \mid V_f \in \mathbb{R}^{h-h'},\ V_{fi} = U_i \text{ sur } \overline{\Gamma}_U\} \end{cases} \qquad (2\text{-}2\text{-}2\text{-}2.4)$$

Posons $E^t B_e E = \overline{B}_e$ et $E^t Q = \overline{Q}$, on aura :

$$H(V_f) = \frac{1}{p}\lambda^{1-p} \sum_{e=1}^{4m} S_e [V_f^t \overline{B}_e V_f]^{p/2} - V^f \overline{Q} \qquad (2\text{-}2\text{-}2\text{-}2.5)$$

qui est équivalent au problème $(\mathcal{J}_c^h)$ en contraintes planes, il est donc raisonnable d'employer la même méthode pour résoudre ce problème. En suivant une démarche semblable à celle du § II-2-1-1, on obtient la formule de récurrence :

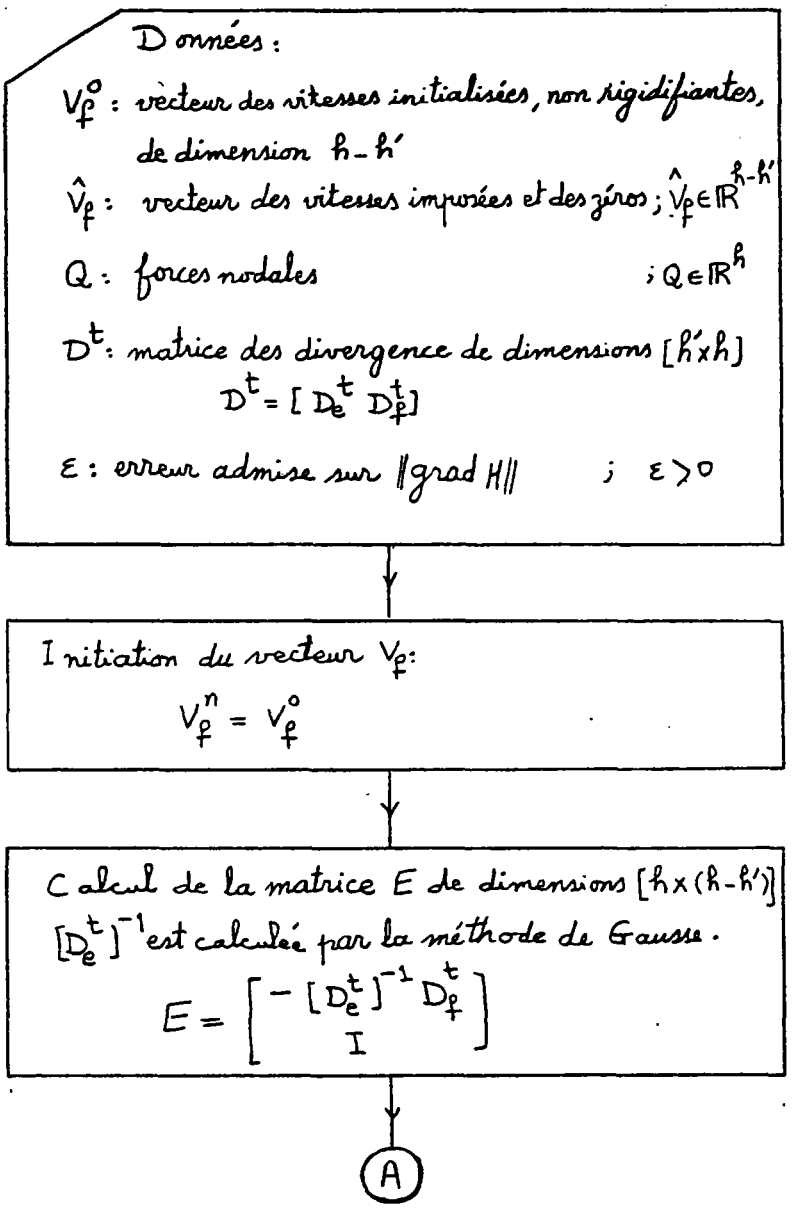
$$\begin{cases} B^{\star}(V_f^i) \cdot V_{0f}^{i+1} = \overline{Q} - B(V_f^i) \cdot \hat{V}_f \\ V_f^{i+1} = V_{0f}^{i+1} + \hat{V}_f \end{cases}$$

$\hat{V}_f$ et V_{0f} jouant les mêmes rôles que $\hat{V}$ et V_0 (§ II-2-1).

On continue l'itération jusqu'à ce que la $\left\| \frac{\partial H(V_f)}{\partial V_f} \right\|$ soit très faible, on obtient alors le vecteur V_f solution du problème $(\mathcal{P}_d^{h,h'})$, ensuite à l'aide de la relation $V = E\ V_f$ toutes les composantes du vecteur V seront connues.

Le temps nécessaire pour l'exécution de cette méthode est de l'ordre de deux fois le temps d'exécution du même problème sans conditions d'incompressibilité (par exemple le problème en contraintes planes) (Needleman et Shih [57, 1978]). Cette méthode semble être très économique par rapport aux autres méthodes déjà exposées.

On a représenté l'ordinogramme de cette méthode sur la figure 15.



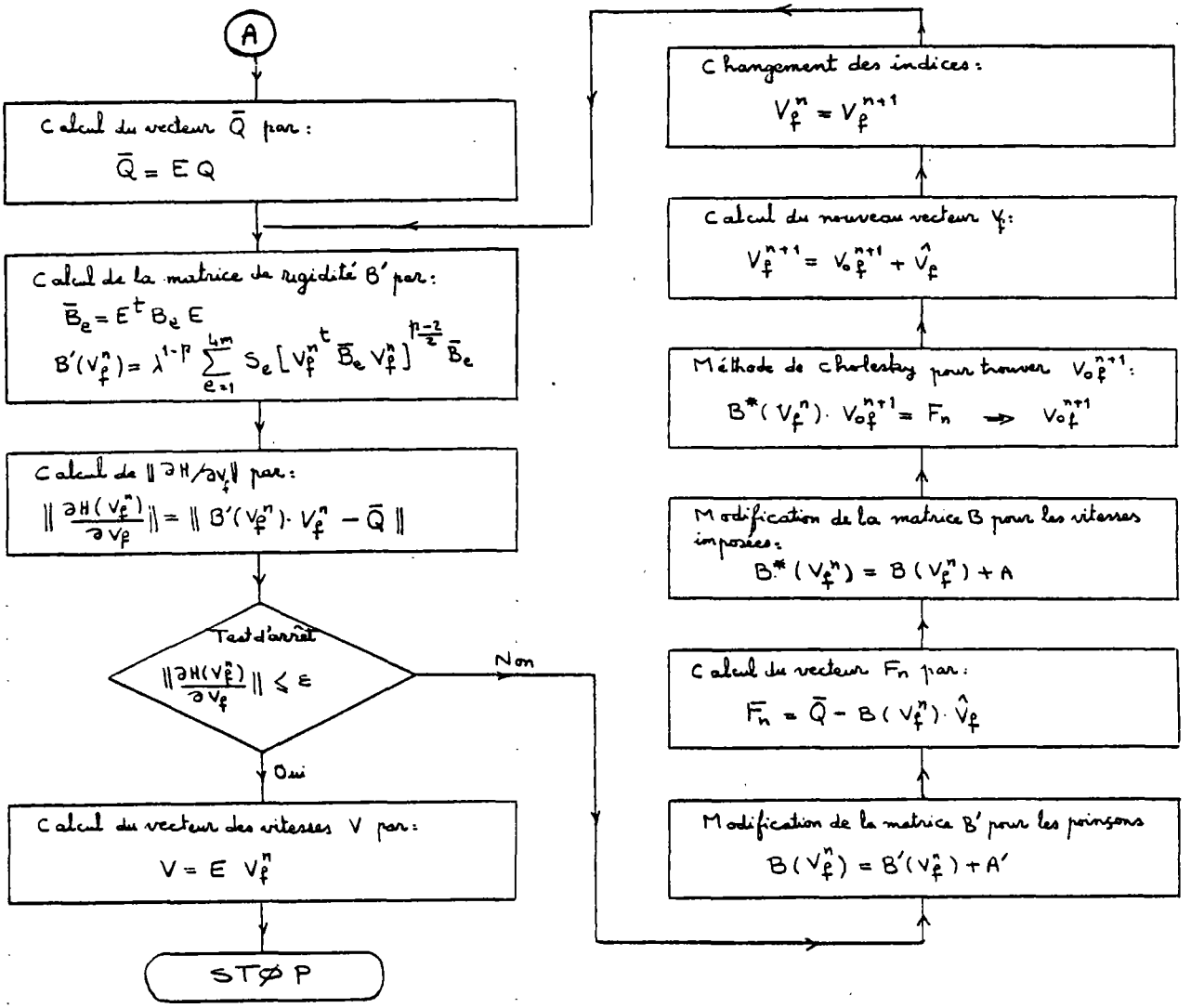


Fig. 15. Ordinogramme de la méthode d'élimination des degrés de liberté abondants

Le seul inconvénient de cette méthode est que l'on ne peut pas satisfaire entièrement les conditions aux limites sur les composantes de vitesses supprimées (V_e).

3. CALCUL DE LA CHARGE LIMITE (BORNE SUPERIEURE) POUR DES STRUCTURES BIDIMENSIONNELLES EN MATERIAU RIGIDE PLASTIQUE PARFAIT DE VON MISES .

La structure $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (en déformations planes ou en contraintes planes) constituée d'un matériau rigide plastique parfait de Von Mises, homogène, est soumise à des charges $\vec{T}$ sur Γ_T et $\vec{f}$ dans Ω. On considère un processus de chargement proportionnel (à un paramètre) c'est-à-dire que l'on se donne un sous-espace F_Σ de l'espace des chargements $F = \{\vec{T}$ sur Γ_T, $\vec{f}$ dans $\Omega\}$ de dimension 1 :

$$F_\Sigma = \{Q = \lambda Q_0 \mid \lambda \in \mathbb{R} \ ; \ Q_0 \in F\}$$

et on se propose de calculer λ^+, une borne supérieure de λ tel que la charge λQ_0 soit potentiellement supportable ($\lambda Q_0 \in K$).

On remplace le matériau de Von Mises par le matériau de Norton-Hoff sous jacent. D'après ce qu'on a vu au § I-3-3 (Théorèmes 5 et 6) on défini un convexe Kp de fonction jauge $G_p(Q)$ contenant le convexe K, de chargement potentiellement supportable par :

$$\mathcal{G}_p(Q) = \left[-\frac{q}{\mu(\Omega)} \mathrm{Inf}\{H(\vec{v}) \mid \vec{v} \in V_{C.A.}\} \right]^{1/q}$$

et on a :

$$K = \bigcap_{p \geq 1} K_p \quad \text{et} \quad K_{p'} \subset K_p \ \text{si} \ 1 < p' < p$$

Pour calculer la fonction jauge $\mathcal{G}_p(Q)$ du convexe K_p, il nous faut donc résoudre le problème d'écoulement du matériau de Norton-Hoff, ce qui est déjà fait au § II-1.

Nous utilisons la méthode dichotomique déjà utilisée par Delbecq et al [17, 1977]. Pour ce faire, on suit les étapes suivantes (voir Friaâ [27, 1979]) :

Première étape : On part d'une valeur $\lambda_{max} = \lambda^0$ assez grande pour laquelle on sait que la charge $Q = \lambda^0 Q_0$ n'est pas supportable et d'une valeur $\lambda_{min} = 0$.

Deuxième étape : On calcule la valeur $\lambda = \frac{\lambda_{max} + \lambda_{min}}{2}$ et $\Delta\lambda = \frac{|\lambda_{max} - \lambda_{min}|}{\lambda}$

.si $\Delta\lambda \leqslant \varepsilon$ on arrête le processus et on prend $Q_{lim} = \lambda Q_0$ ou $\lambda^+ = \lambda$

.si $\Delta\lambda > \varepsilon$ on passe à l'étape suivante.

Troisième étape : En utilisant les méthodes numériques du § II-1, on résout le problème d'écoulement pour différentes valeurs de p :

$p_1 = 2 > p_2 > \ldots > p_r > 1$ et on trouve $\mathcal{G}_{p_i}(Q)$: $(i = 1, r)$

.si $\mathcal{G}_{p_i}(Q) \geqslant 1$, $\forall i = 1, \ldots, r$, la charge λQ_0 est non supportable, on pose $\lambda_{max} = \lambda$ et on retourne à la deuxième étape ;

.si $\mathcal{G}_{p_r}(Q) < 1$, on pose $\lambda_{min} = \lambda$ et on retourne à la deuxième étape.

Donc pour calculer λ^+ une borne supérieure de λ nous avons l'ordinogramme suivant :

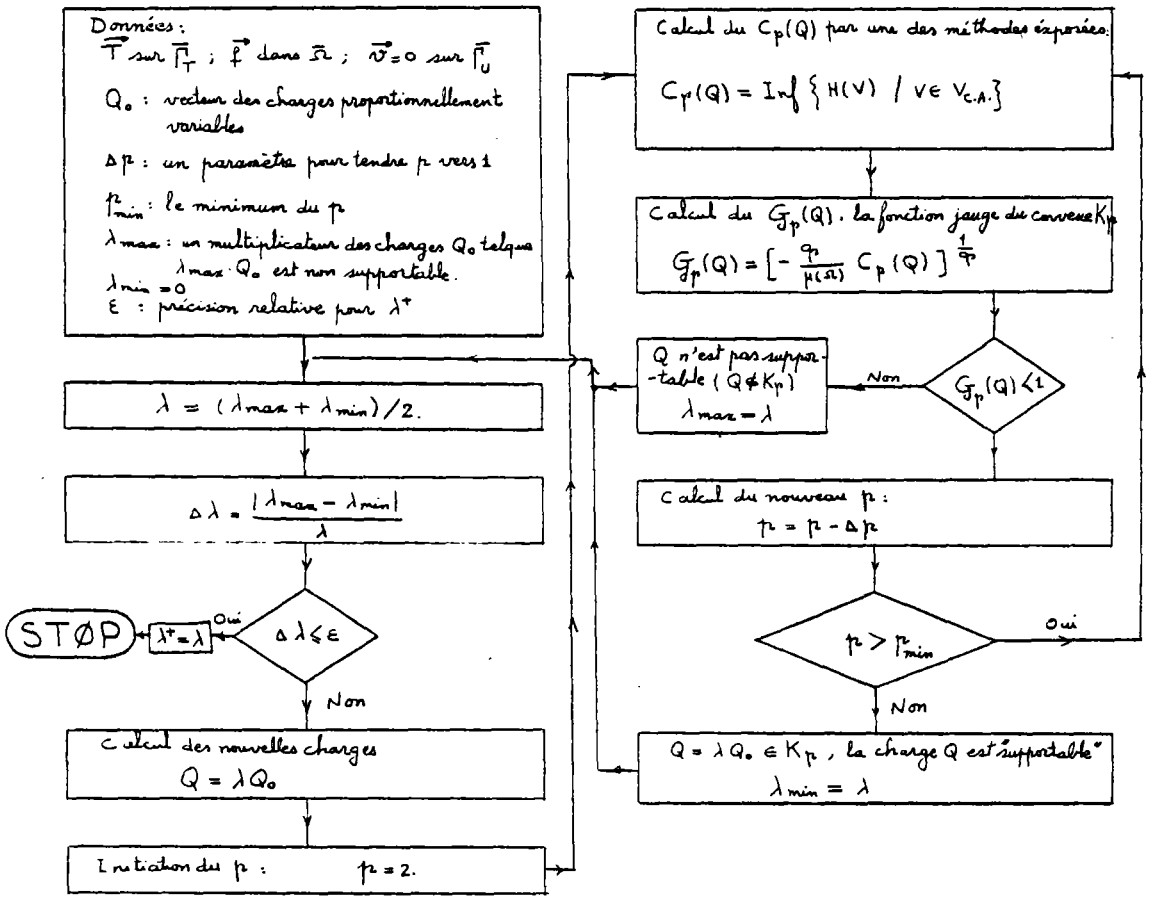


Fig. 16. Ordinogramme de calcul d'une borne supérieure de la charge limite

Remarque 1 : Il faut noter que souvent à cause des différentes erreurs numériques intervenues dans la minimisation de la fonctionnelle H(V), le calcul du minimum n'est pas exacte. On a donc une certaine erreur ΔCp, tel que :

$$[C_p(Q)]_{exa} = \left[\text{Inf}\{H(V) \mid V \in V_{C.A.}\}\right]_{exa} \leqslant [C_p(Q)]_{num}$$

où l'indice "exa" désigne la valeur exacte et l'indice "num" désigne la valeur numériquement obtenue, donc

$$\left[C_p(Q)\right]_{exa} = \left[C_p(Q)\right]_{num} - \Delta C_p \text{ avec } \Delta C_p \geqslant 0$$

La fonction jauge s'écrit donc :

$$\left[\mathcal{G}_p(Q)\right]_{exa} = \left[-\frac{q}{\mu(\Omega)}\left(\left[C_p(Q)\right]_{num} - \Delta C_p\right)\right]^{1/q} \geqslant \left[-\frac{q}{\mu(\Omega)}\left[C_p(Q)\right]_{num}\right]^{1/q} = \left[\mathcal{G}_p(Q)\right]_{num}$$

ce qui veut dire que quand $\left[\mathcal{G}_p(Q)\right]_{num} \geqslant 1$, on est sûr que la charge $Q \notin K$ est non supportable. Donc la charge limite obtenue par cette méthode constitue une borne supérieure de la charge limite exacte.

En plus cette remarque indique que si avant de calculer le minimum de H(V), dans le processus de la minimisation, on obtient un $\mathcal{G}_p(Q) \geqslant 1$, on peut être sûr que la charge Q n'est pas supportable et on n'est pas obligé alors de continuer le processus de la minimisation jusqu'à la fin.

Remarque 2 : Pour un cas particulier, où toutes les charges $Q_0 = \{\vec{T}_0$ sur Γ_T et $\vec{f}_0$ dans $\Omega\}$ varient proportionnellement à un paramètre λ, et notre but est de calculer λ^+, le minimum du λ tel que l'on puisse dire que $\lambda^+\vec{T}_0$ et $\lambda^+\vec{f}_0$ constitue un ensemble de chargement non supportable, on peut utiliser une nouvelle méthode.

En effet la fonction jauge du K_p est une fonction positivement homogène en Q (voir § I-3-3), on a :

$$\mathcal{G}_p(\lambda Q_0) = \lambda\, \mathcal{G}_p(Q_0) \qquad \lambda > 0$$

Supposons que nous ayons calculé la fonction jauge du convexe K_p pour la charge Q_0. Pour que la charge λQ_0 soit non supportable il faut et il suffit que

$$\mathcal{G}_p(\lambda Q_0) \geqslant 1 \text{ quand } p \longrightarrow 1$$

soit

$$\lambda \mathcal{G}_p(Q_0) \geqslant 1 \text{ quand } p \longrightarrow 1$$

et le minimum de λ, est alors :

$$\lambda^+ = \frac{1}{\mathcal{G}_p(Q_0)} \text{ quand } p \longrightarrow 1$$

et donc $\lambda^+ Q_0$ constitue une borne supérieure du convexe des chargements potentiellement supportables. Grâce à cette remarque l'ordinogramme de la figure 16 est modifié :

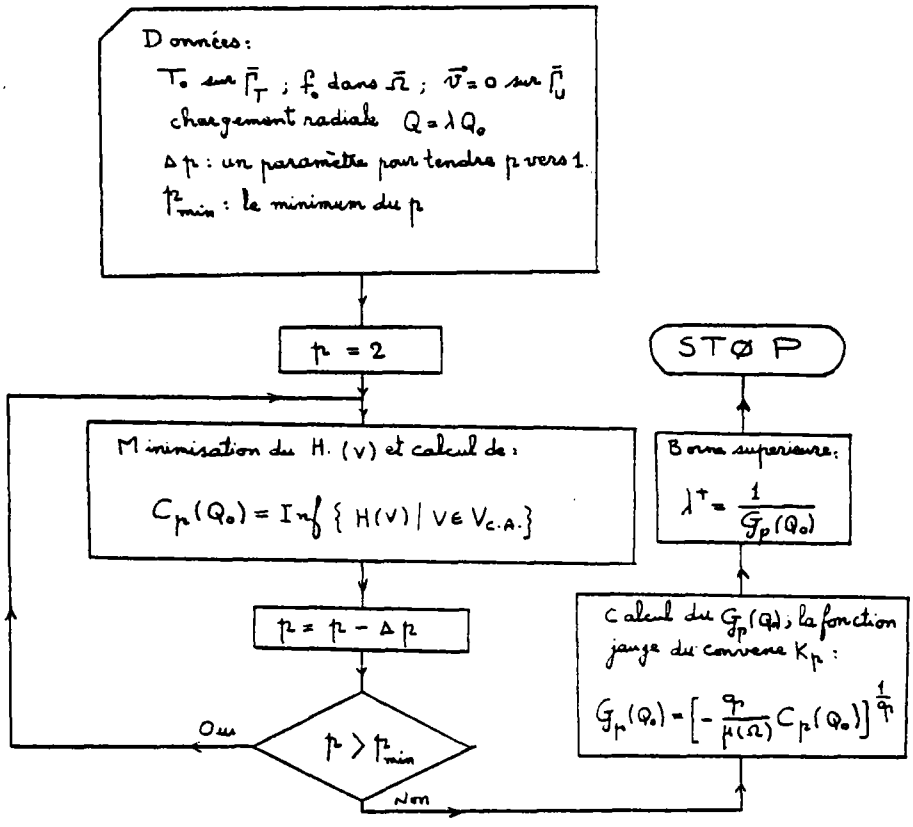


Fig. 17. Ordinogramme de calcul de la borne supérieure de la charge limite dans un processus de chargement radial

Dans cette méthode comme dans la méthode précédente il arrive qu'à cause des erreurs numériques on ne puisse pas calculer exactement le minimum de H(V), d'après la remarque 1, on a alors :

$$\left[\mathcal{G}_p(Q_0)\right]_{num} \leqslant \left[\mathcal{G}_p(Q_0)\right]_{exa}$$

soit

$$\left[\lambda^+\right]_{num} = \frac{1}{\left[\mathcal{G}_p(Q_0)\right]_{num}} \geqslant \frac{1}{\left[\mathcal{G}_p(Q_0)\right]_{exa}} = \left[\lambda^+\right]_{exa}$$

ce qui veut dire que l'on obtient une borne supérieure de λ avec une précision souvent inconnue.

TROISIEME PARTIE

.EXEMPLES NUMÉRIQUES :

- PROBLÈME D'ÉCOULEMENT
- ANALYSE LIMITE

INTRODUCTION

Dans cette partie nous traitons quelques exemples utilisant les méthodes exposées dans la deuxième partie, et nous comparons les résultats obtenus avec ceux déjà existants dans la littérature. Nous avons choisi de traiter en particulier :

1°) Deux problèmes intervenant en géophysique (collision himalayenne, évolution des Pyrénées), pour lesquels on a obtenu des résultats intéressants en faisant un certain nombre d'hypothèses simplificatrices.

2°) Le calcul en déformations planes des charges limites d'un bloc serré entre deux plateaux lisses, et d'un tube cylindrique soumis à une pression interne. Nos résultats correspondent aux charges limites exactes obtenues par les calculs élastoplastiques.

3°) Le calcul en déformation plane des charges limites d'un bloc serré entre deux plateaux rugueux. On obtient des charges limites qui dépendent du rapport des dimensions du bloc, ce qui vérifie les calculs plastiques fait par Salençon [75 , 1978] .

4°) Le problème des charges limites d'une plaque rectangulaire trouée en contrainte plane. On obtient des charges limites qui sont en très bon accord avec les résultats expérimentaux récemment trouvés par BEN SOUISSI et FRIAÂ [6 , 1981] . Cela montre que notre méthode est très satisfaisante pour les problèmes de contraintes planes.

5°) Le problème de stabilité d'une fouille verticale.

6°) D'autres problèmes de charges limites en déformation ou en contrainte plane.

En général on peut dire que :

Pour les problèmes en déformation plane, nous avons obtenu des bornes supérieures des charges limites avec un écart plus grand qu'en contrainte plane. Cela est probablement dû aux difficultés d'ordre numérique provenant

des conditions d'incompressibilité. En contrainte plane, nos résultats sont en très bon accord avec les résultats expérimentaux ou ceux obtenus par les méthodes classiques.

1. CALCUL DU CHAMP DE VITESSES DU CONTINENT D'ASIE, SOUMIS AU POINCON INDIEN

Des observations géophysiques et géologiques ont montré que la collision himalayenne s'effectue sur environ 2000 Km et à une vitesse d'environ 5cm/an (Friaâ [27,1979] et Daignières et al [15 , 1978] ou [16,1980]).

Dans ces articles on a étudié la collision himalayenne, en faisant les hypothèses suivantes ; pour estimer le champ de vitesses de déplacement dans la plaque d'Asie :

h1 - La plaque d'Asie est en matériau de Norton-Hoff avec p = 1,33.

h2 - Le poinçon (Inde) est rigide et lisse.

h3 - On ne tient pas compte de la courbure de la terre.

h4 - On néglige les effets de la pesanteur devant les effets de poinçonnement.

h5 - On assimile la plaque Asie à une plaque rectangulaire OCDE (Fig. 1).

h6 - Les conditions aux limites sont :

. sur OE : $v_x = v_y = 0$

. sur OA, BC et CD : $T_x = T_y = 0$

. sur ED : $v_y = T_x = 0$

. sur AB : $v_y = 5\text{cm/an}$; $T_x = 0$

h7 - L'épaisseur de la plaque est constante et égale à 90 Km

h8 - Le problème est en contraintes planes.

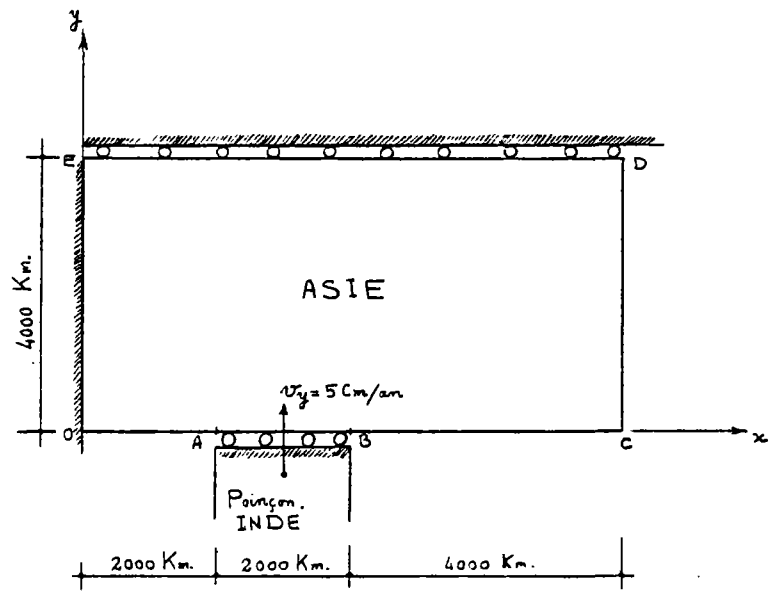


Fig. 1. Plaque Asie sous poinçon Inde

On a utilisé l'algorithme de minimisation décrit au § II-2-1, pour résoudre ce problème.

Il est clair que le champ de vitesses est indépendant du λ et du k du matériau de Norton-Hoff, on a donc pris $\lambda = k = 1$.

Les résultats obtenus sont représentés sur les figures 2, 3, 4 et 5. Les lignes de niveau des vitesses de déplacement vertical sont obtenues à partir de la condition d'incompressibilité comme on l'a déjà indiqué.

Pour les vitesses horizontales (dans le plan moyen de la plaque), on constate un mouvement d'ensemble vers le Nord au voisinage du poinçon, laissant un bloc rigide à l'Ouest et ayant une composante Ouest-Est, qui correspondrait à un décrochement dextre au Sud du Tibet. Au fur et à mesure que l'on s'éloigne du poinçon, le mouvement tourne, prenant une direction Ouest-Est.

L'ordre de grandeur de la vitesse horizontale du bloc situé au-dessus du poinçon est de 3cm/an ce qui est compatible avec les résultats paléomagné-

tiques. Pour la vitesse verticale, on constate un épaississement au voisinage immédiat du poinçon d'environ 1mm/an, ce qui est de l'ordre de grandeur de la vitesse de surrection de la chaîne himalayenne et concorde assez bien avec l'épaississement crustal observé (40 Km en 40 millions d'années).

La vitesse d'épaississement décroît au fur et à mesure que l'on s'éloigne du poinçon. On remarque toutefois une région où elle reste supérieure à 0,3 mm/an que l'on peut assimiler au plateau du Tibet et deux régions aux bordures Nord-Est et Sud-Est de la plaque où il y a amincissement que l'on peut rapprocher des régions où l'extension se manifeste : le Shansi et le Yunnan (en Chine). La vitesse d'épaississement négative dans la région Sud-Ouest qui n'existe pas en réalité est probablement due aux conditions aux limites au point O.

En définitive, on note que malgré les hypothèses simplificatrices, le modèle retenu pour représenter un phénomène à priori complexe a conduit à des résultats assez satisfaisants dans une première approche (Friaâ [27 ,1979]).

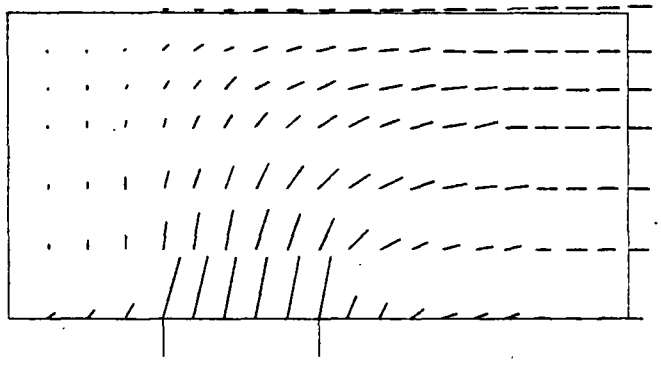


Fig. 2. Champ de vitesses dans le plan moyen de la plaque, en contrainte plane DL = 241 (d'après Daignières et al [15, 1978])

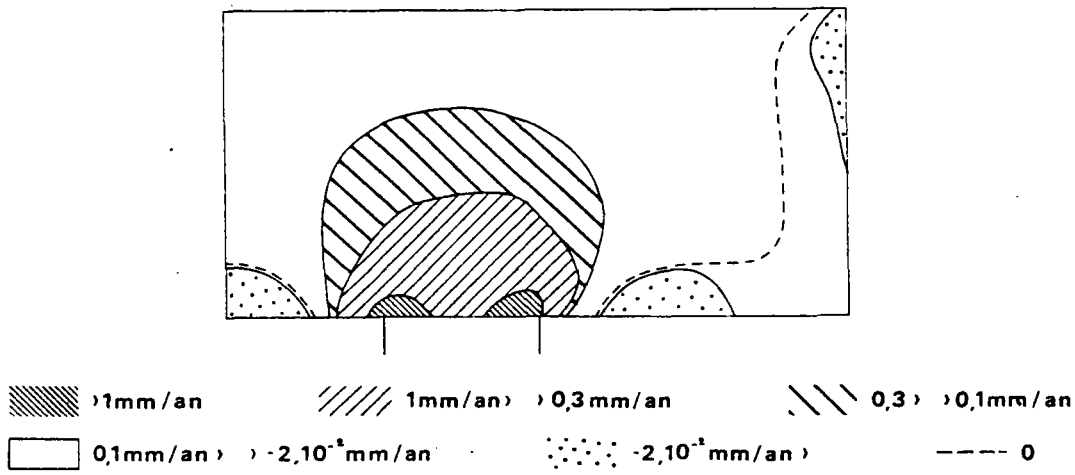


Fig. 3. Surrection de la surface de la plaque, en contrainte plane (d'après Daignières et al [15, 1978])

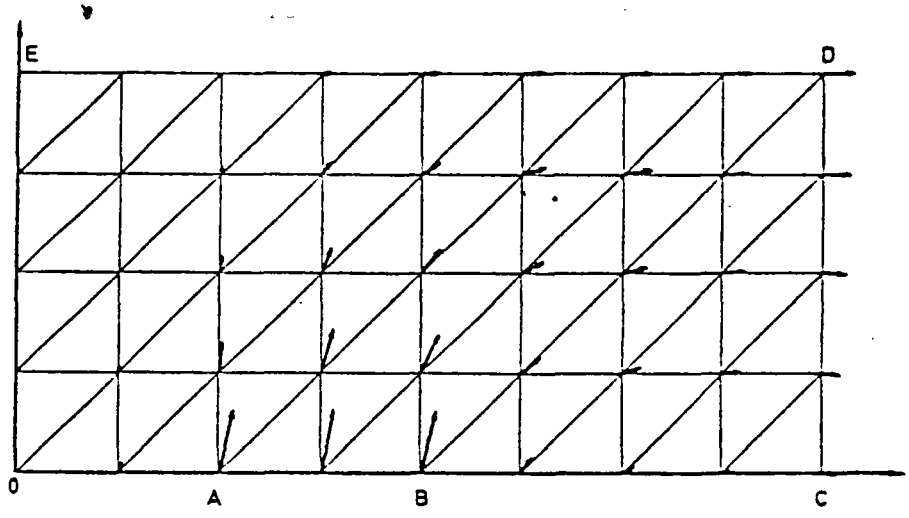


Fig. 4. Champ de vitesses dans le plan moyen de la plaque, en contrainte DL = 69 (d'après Frémond [20, 1979])

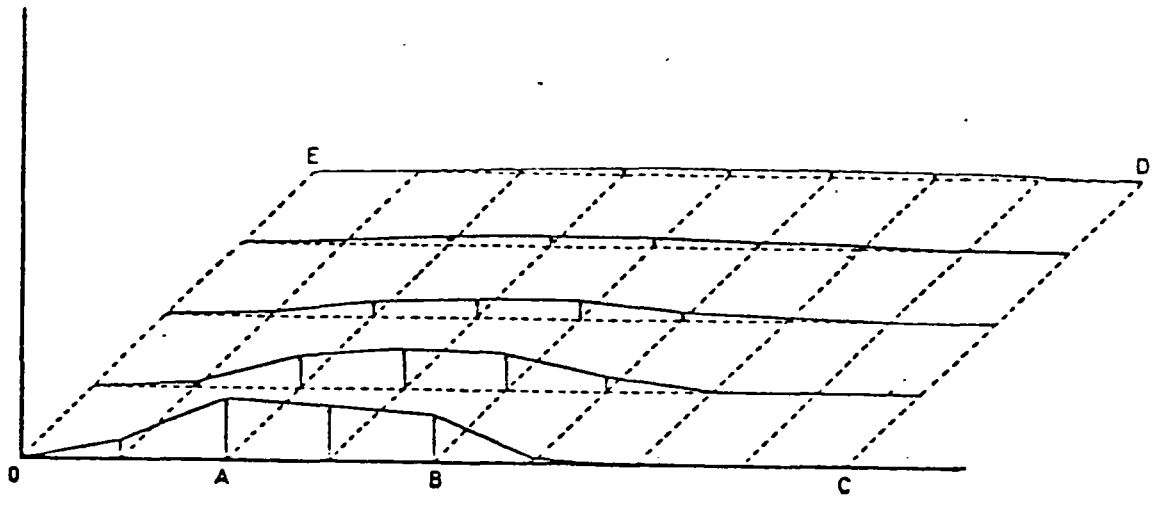


Fig. 5. Vitesses de surrection du plan supérieur de la plaque, en contrainte plane, DL = 69 (d'après Frémond [20,1979]).

Nous avons résolu le même problème mais en déformation plane, en prenant les hypothèses h1 à h7. L'algorithme employé est celui d'inversion de matrice (point fixe), indiqué au §II-2-2-1-4. Les conditions d'incompressibilité sont satisfaites en moyenne sur deux éléments triangulaires voisins et le test d'arrêt est porté sur la $\| \text{grad } \mathcal{L}(V,M) \| \leqslant \varepsilon$, avec $\varepsilon = 10^{-3}$. Les champs de vitesses obtenus sont représentés sur les figures 6 et 8. On note que dans le cas de déformation plane, les vitesses horizontales, en particulier sur la partie droite de la plaque sont plus importantes, cela paraît normal pour respecter la condition d'incompressibilité. On peut dire que contrairement à la déformation plane, dans le cas des contraintes planes, le matériau peut s'échapper dans la direction verticale pour respecter cette condition d'incompressibilité.

Pour comparer les deux cas de déformation et contrainte plane, on peut se référer aux figures 4 et 6 qui ont le même maillage. Pour apprécier la précision de la méthode d'inversion de matrice (point fixe), le champ de vitesses est représenté pour un maillage plus fin (Fig. 7 et 8) ; on peut noter qu'il n'y a pas de grandes différences entre les champs de vitesses des figures 6 et 8.

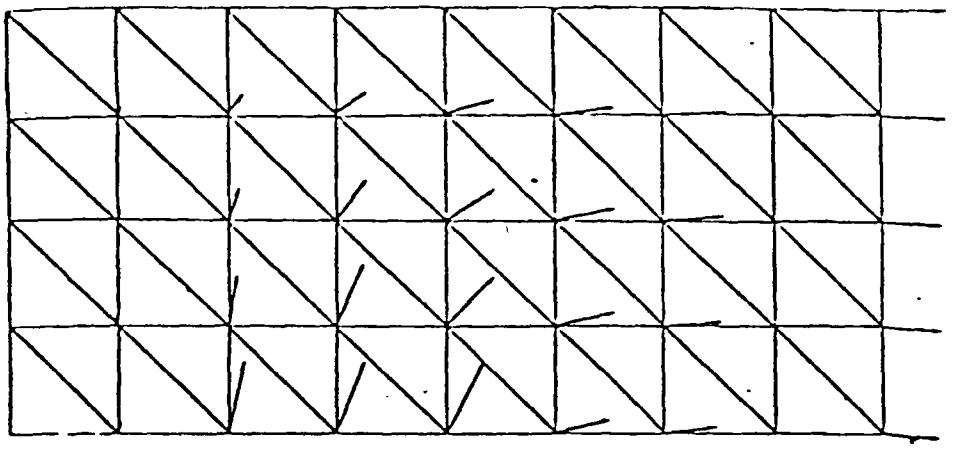


Fig. 6. Champ de vitesses de la plaque Asie, en déformation plane (DL = 37)

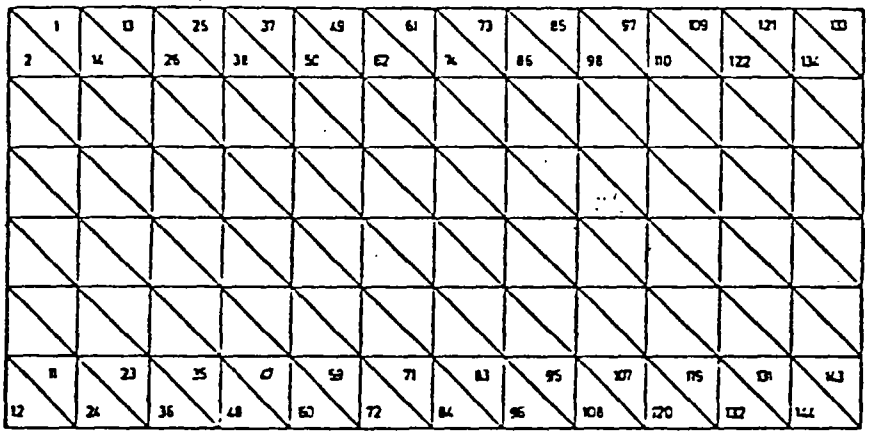


Fig. 7. Un maillage de la plaque Asie avec 144 éléments et 80 degrés de liberté

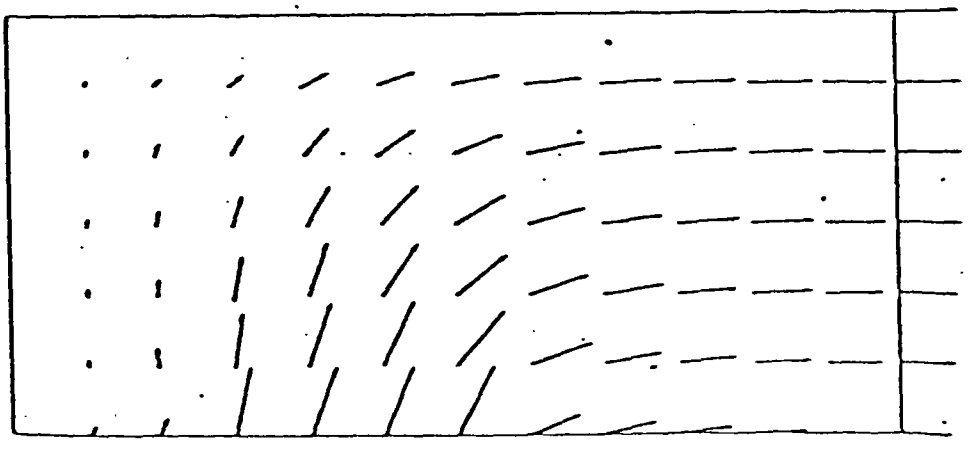


Fig. 8. Champ de vitesses de la plaque Asie, en déformation plane (DL = 80)

En réalité ces deux problèmes montrent que l'on pourrait résoudre les problèmes de géophysique (la théorie de la tectonique des plaques, et les mouvements des plaques lithosphériques par rapport aux autres) pour trouver un champ de vitesses de déplacement dans les plaques en utilisant le matériau de Norton-Hoff, et probablement on pourrait trouver ainsi des zones où la variation des vitesses de déplacement sont assez importantes qui correspondent aux zones où des failles se produisent. Dans ce cas, on peut retrouver avec une certaine précision les zones où il y a un danger de séisme provenant du mouvement relatif des plaques. Il faut indiquer que ce n'est pas encore une théorie prévisionnelle car on ne connaît pas le mécanisme exact des séismes ainsi que les données du problème.

On peut aussi introduire le temps dans nos calculs et dans ce cas on peut prévoir la forme des plaques continentales après un certain nombre d'années par un calcul incrémental.

2. EVOLUTION DES PYRENEES

Les résultats géophysiques ont révélé que l'évolution des Pyrénées est dûe au rapprochement de l'Espagne vers la France avec une vitesse de l'ordre de 3cm/an. En supposant que le matériau constituant la croûte terrestre est incompressible, ce rapprochement produit un épaississement de la croûte dans la zone des Pyrénées avec une vitesse de surrection de la surface supérieure de l'ordre de 1/3 de la vitesse d'enfoncement de la surface inférieure. Ce résultat a été obtenu par des essais locaux (Daignières [14, 1980]). Des observations montrent qu'il y a beaucoup de failles verticales avec une surface parallèle à l'axe de la chaîne des montagnes du côté de la France, en plus, la pente des montagnes côté France est plus inclinée que du côté Espagne (Fig. 9).

En considérant que la longueur de la chaîne des Pyrénées est assez grande par rapport aux dimensions de la coupe transversale, on peut supposer que la déformation de la section loin des extrémités de la chaîne est en état de déformation plane. Nous cherchons un modèle simple représentant le mieux, l'évolution de ces montagnes.

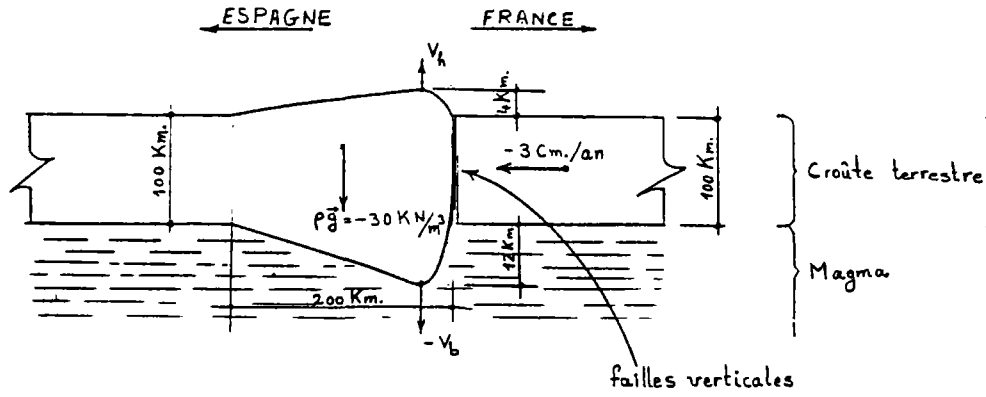


Fig. 9. Coupe transversale des Pyrénées

Nous faisons les hypothèses suivantes :

h1 - La loi de comportement du matériau constituant le corps des montagnes (la croûte terrestre) est une loi de type Norton-Hoff.

h2 - On ne tient pas compte de la variation des paramètres (k,λ,p) de la loi de Norton-Hoff en fonction de la température, elle-même fonction de la profondeur. On a pris $\lambda = 1$ Pa/sec et $p = 1,33$.

h3 - Le contact entre les faces de la faille verticale au pied des montagnes du côté de la France est sans frottement. On peut alors considérer que le côté droit (Fig. 9) est assimilable à un poinçon lisse et rigide.

h4 - On néglige la courbure de la terre.

h5 - On assimile la coupe transversale des montagnes à une plaque rectangulaire OABC, représentée sur la figure 10.

h6 - Les conditions aux limites sont :

. sur OA : $T_x = 0$; $T_y = R V_y + F$; en effet l'influence du magma se traduit par une pression constante d'intensité F(Pa) et une série des ressorts visqueux avec la loi de comportement $\sigma_{yy} = R V_y$ et $\sigma_{ij} = 0$ pour les autres indices où R est la viscosité des ressorts en N.sec/m^3.

. sur AB : $T_y = 0$, $v_x = -3$cm/an

. sur BC : $T_x = T_y = 0$

. sur OC : $V_x = V_y = 0$

h7 - Etat de déformation plane : $\dot{\varepsilon}_{zz} = \dot{\varepsilon}_{xz} = \dot{\varepsilon}_{yz} = 0$

h8 - La densité des forces volumiques est constante ($\vec{f} = -30$ KN/m^3)

h9 - On considère deux points D et E au milieu de BC et OA. Les composantes verticales des vitesses de ces deux points sont notées v_h et v_b. Nous supposons que $v_b/v_h = -3$.

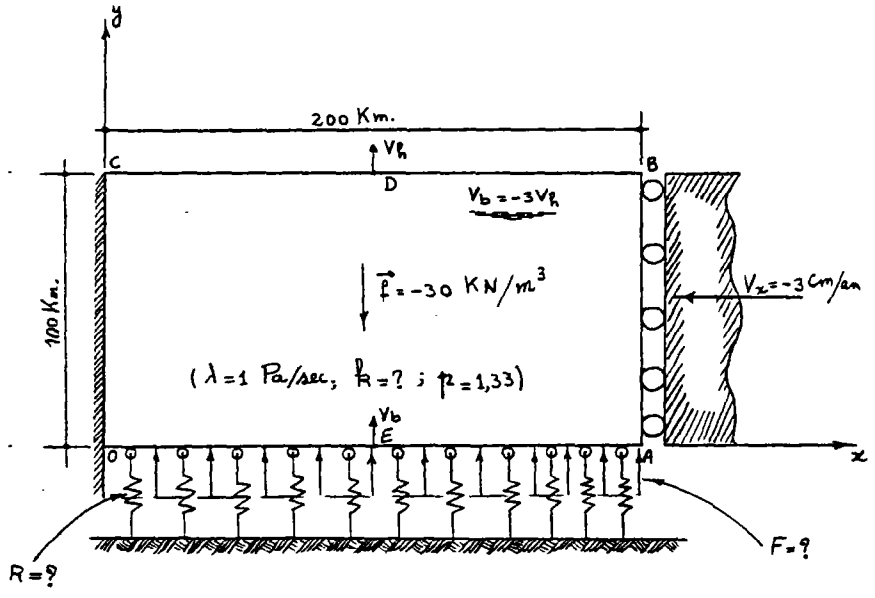


Fig. 10. Modèle choisi pour la coupe transversale des Pyrénées

Le problème posé consiste à trouver des valeurs de k, F et R tels que le rapport V_b/v_h soit égal à -3. On sait que l'ordre de grandeur de k est environ 10^{11}Pa (Gœtze et Brace [33, 1972]).

Nous utilisons l'algorithme décrit au §II-2-2-1-4 pour résoudre ce problème. Il faut noter que la condition aux limites utilisant des ressorts visqueux nous oblige de modifier la fonctionnelle $H(\vec{v})$ (§ II-2), elle aura la forme (Γ est la partie de la frontière de Ω où les forces T sont imposées et Γ_R la partie où il y a des ressorts) :

$$H(\vec{v}) = \frac{1}{p}\lambda^{1-p}\int_\Omega k^p(\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij})^{p/2}d\Omega - \int_{\Gamma_T} T_i v_i\, d\Gamma - \int_\Omega f_i v_i\, d\Omega + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_R} R v_y^2\, d\Gamma$$

ce qui nous donne après la discrétisation (§ II-2) :

$$H(V) = \frac{1}{p}\lambda^{1-p}\sum_{e=1}^{m} S_e(V^t B_e V)^{p/2} - Q^t V + \frac{1}{2} V^t K V$$

où la matrice K est tridiagonale, symétrique, définie positive.

Pour minimiser la fonctionnelle H(V), annulons sa dérivée (voir § II) :

$$\frac{\partial H(V)}{\partial V} = B(V).V - Q + KV.$$

En ajoutant à la matrice B(V) la matrice K, on obtient la nouvelle matrice de rigidité. On a pris un maillage de la surface OABC (Fig. 11) avec peu d'éléments pour faciliter les calculs.

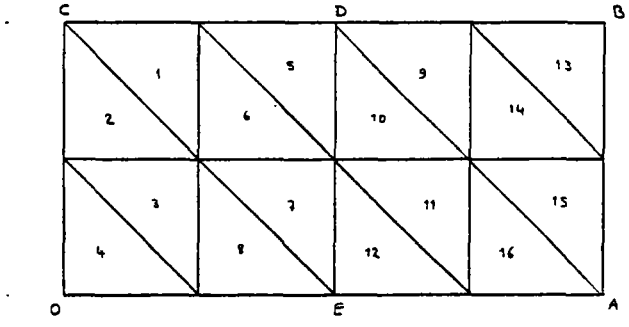


Fig. 11. Maillage du problème d'évolution des Pyrénées

Nous avons d'abord pris la rigidité des ressorts R = 0 et nous avons fait varier l'intensité de la force F et le paramètre k du matériau de Norton-Hoff. Une partie des résultats obtenus sont indiqués dans le tableau suivant :

TABLEAU DES VITESSES DES NOEUDS D ET E POUR DIFFERENTES COMBINAISONS DE K ET F (R=0.)

K (PA.)	F (PA.)	VH (M./SEC.)	VB (M./SEC.)	VB/VH
	5.34E+09	+0.116E-08	+0.841E-09	+0.725
	3.00E+09	+0.374E-09	-0.750E-11	-0.002
7.07E+10	1.69E+09	-0.950E-10	-0.480E-10	+5.004
	9.48E+08	-0.329E-09	-0.692E-09	+2.103
	9.48E+09	+0.139E-08	+0.108E-08	+0.779
	5.34E+09	+0.601E-09	+0.240E-09	+0.399
1.26E+11	3.00E+09	+0.277E-09	-0.109E-09	-0.392
	1.69E+09	+0.544E-10	-0.332E-09	-6.108
	9.48E+08	-0.635E-10	-0.446E-09	+7.020
	9.48E+09	+0.440E-09	+0.621E-10	+0.141
	5.34E+09	+0.296E-09	-0.891E-10	-0.301
3.97E+11	1.69E+09	+0.161E-09	-0.226E-09	-1.404
	3.00E+07	+0.101E-09	-0.287E-09	-2.857
	9.48E+09	+0.247E-09	-0.140E-09	-0.565
1.26E+12	1.69E+09	+0.185E-09	-0.203E-09	-1.097
	3.00E+07	+0.172E-09	-0.216E-09	-1.259

Nous avons représenté sur la figure 12, les lignes de niveaux pour les rapports v_b/v_h.

Cette figure présente trois zones :

. zone 1 : située au-dessus de la ligne de niveau zéro, où le rapport de $v_b/v_h > 0$ et $v_b > 0$, $v_h > 0$. Pour les combinaisons de k et F se trouvant dans cette zone, les deux points D et E ont tendance à se déplacer vers le haut.

. zone 2 : située au-dessous de la ligne de niveau zéro et à droite de la ligne de niveau $\pm\infty$. Pour les k et F se trouvant dans cette zone, le point D se déplace vers le haut ($v_h > 0$) et le point E se déplace vers le bas ($v_b < 0$).

. zone 3 : située à gauche de la ligne de niveau $\pm\infty$, où $v_h < 0$ et $v_b < 0$. Tous les deux points D et E se déplacent vers le bas.

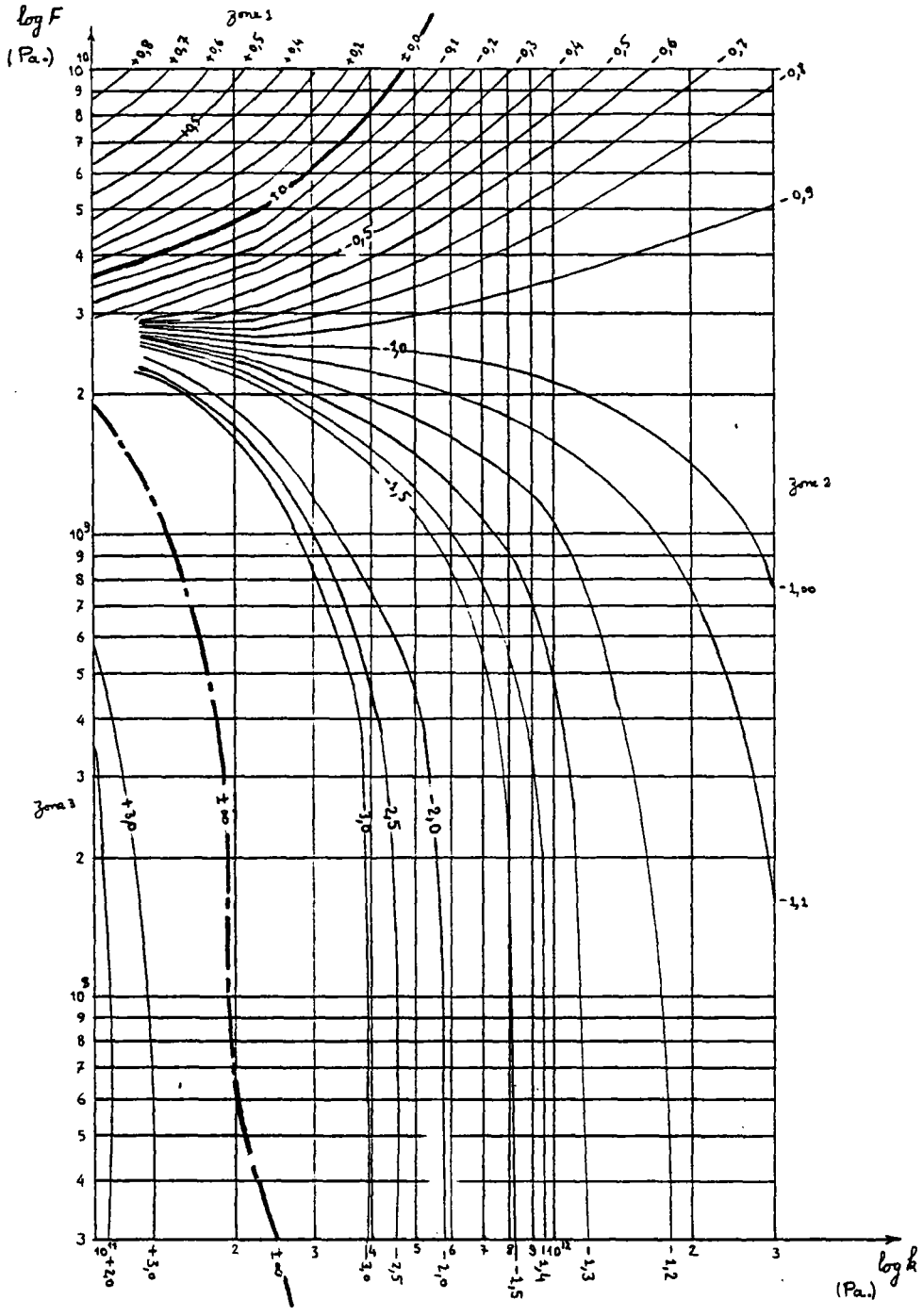


Fig. 12. Les lignes de niveau de v_b/v_h pour R = 0

Dans la zone I, l'intensité des forces F est prépondérante et l'ensemble de la structure se déplace vers le haut. Sur la ligne de niveau zéro, les forces volumiques $\vec{f}$ et les forces F sont telles que le déplacement du point E est nul ($v_b = 0$). Dans la zone 3, la rigidité de la structure (qui dépend de k) est faible, et la force F est insuffisante pour soulever la structure. Les

forces f sont donc prépondérantes et la structure se déplace vers le bas ($v_b < 0$; $v_h < 0$).

On voit sur la figure 12, que pour $3\times10^{11} \leqslant k \leqslant 8\times10^{11}$Pa et pour les $F < 3\times10^{8}$Pa le rapport de v_b/v_h reste presque constant. Nous avons choisi pour k, $3{,}97\times10^{11}$Pa et nous avons fait varier R et F. Une partie des résultats obtenus sont notés dans le tableau suivant :

TABLEAU DES VITESSES DES POINTS D ET E POUR DIFFERENTES C
COMBINAISONS DE F ET R (K=3.97E+11 PA.)

R (N.*SEC.)/(M.**3)	F (PA.)	VH (M./SEC.)	VB (M./SEC.)	VB/VH
	1.00E+08	+0.8514E-10	-0.3023E-09	-3.551
	2.00E+08	+0.8875E-10	-0.2987E-09	-3.366
2.00E+16	1.00E+09	+0.1179E-09	-0.2698E-09	-2.288
	2.00E+09	+0.1545E-09	-0.2331E-09	-1.509
	1.00E+08	+0.8722E-10	-0.3002E-09	-3.442
	2.00E+08	+0.9081E-10	-0.2967E-09	-3.267
2.00E+17	1.00E+09	+0.1197E-09	-0.2680E-09	-2.239
	2.00E+09	+0.1561E-09	-0.2316E-09	-1.484
	1.00E+08	+0.1064E-09	-0.2813E-09	-2.644
	2.00E+08	+0.1097E-09	-0.2779E-09	-2.533
2.00E+18	1.00E+09	+0.1365E-09	-0.2512E-09	-1.840
	2.00E+09	+0.1701E-09	-0.2174E-09	-1.278

Ces résultats sont représentés sur la figure 13 où les rapports de v_b/v_h sont comparés avec -3. Ce qui donne :

- si $R = 2\times10^{16}$N sec/m^3 et $F = 4{,}2\times10^{8}$ Pa, on obtient : $v_b/v_h = -3$.
- si $R = 2\times10^{17}$N sec/m^3 et $F = 3{,}7\times10^{8}$Pa, on a : $v_b/v_h = -3$.

On voit qu'il y a plusieurs possibilités de combinaison de (F,k et R) tel que $v_b/v_h = -3$. En plus quand $k = 3{,}97\times10^{11}$Pa, $2\times10^{16} \leqslant R \leqslant 2\times10^{18}$N.sec/m^3 et $1\times10^{8} \leqslant F \leqslant 2\times10^{9}$Pa la différence $v_h - v_b$ reste constante, de valeur moyenne de $0{,}3876\times10^{-9}$, ce qui nous permet de calculer v_h et v_b. On trouve :

$v_h = +9,6896\times10^{-11}$ m/sec = 0,305 cm/an

$v_b = -2,9069\times10^{-10}$ m/sec = - 0,917 cm/an.

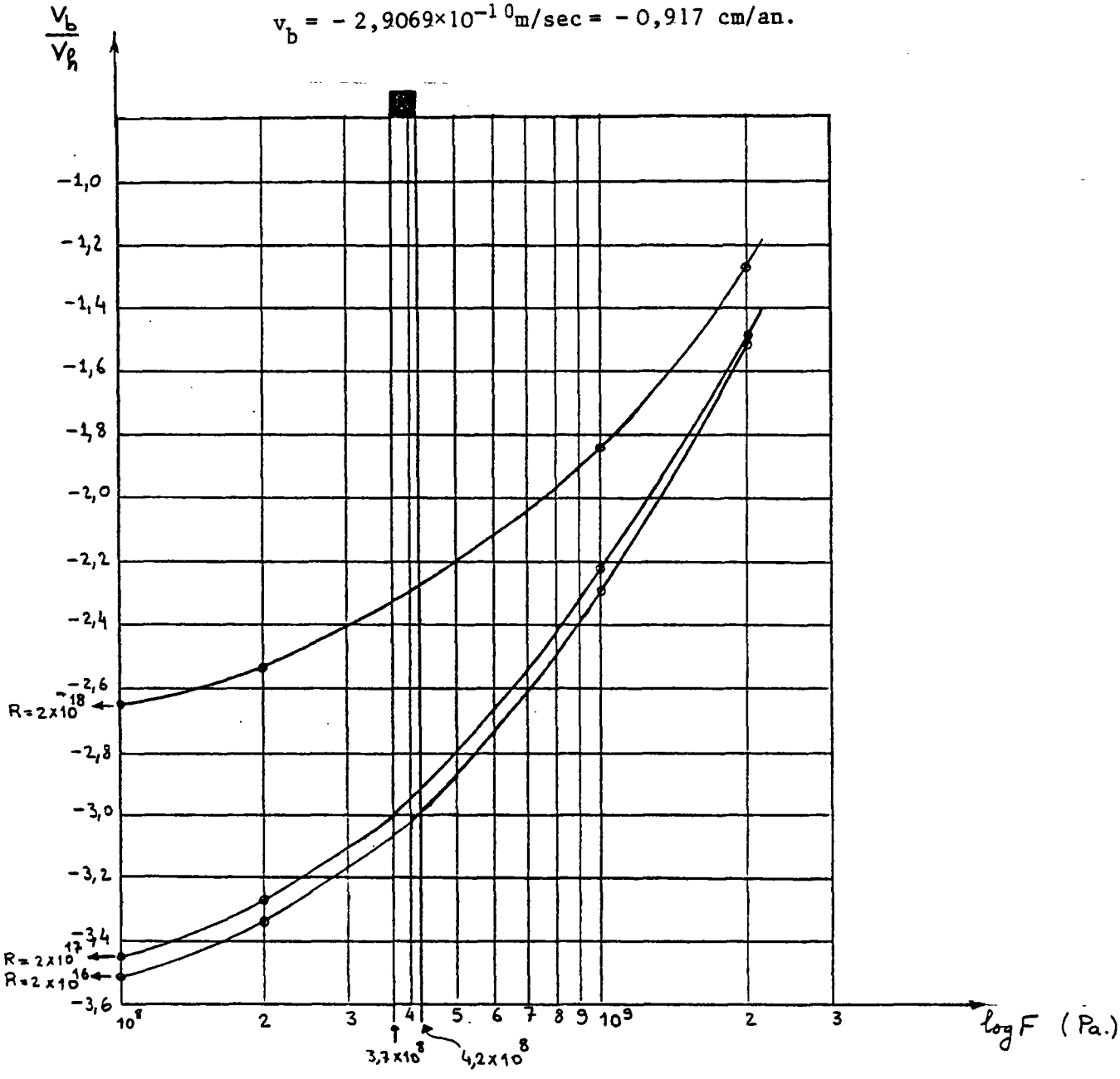


Fig. 13. Les variations de v_b/v_h pour $k = 3,97\ 10^{11}$Pa, F et R varient. Pour $k = 3,97\times10^{11}$Pa, $R = 2\times10^{16}$N sec/m^3 et $F = 4,2\times10^8$Pa (un des choix finaux possibles) on a obtenu des champs de vitesses représentés sur les figures 14 et 15.

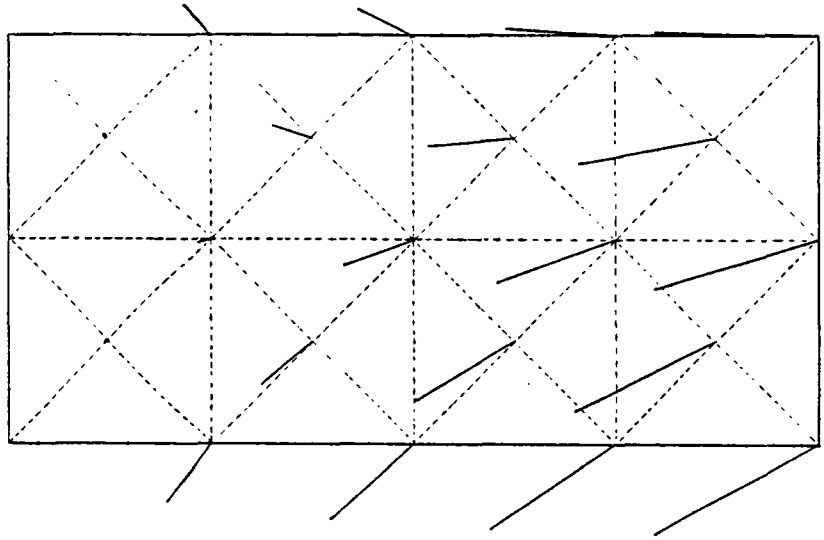


Fig. 14. Champ de vitesses de déplacement des Pyrénées

$k = 3,97\times10^{11}$Pa. ; $R = 2\times10^{16}$N sec/m^3 ; $F = 4,2\times10^{8}$Pa

DL = 35 ; $v_b = -0,2908\times10^{-9}$m/sec ; $v_h = +0,9673\times10^{-10}$m/sec.

$v_b/v_h = -3,006$; $v_h - v_b = 0,3875\times10^{-9}$m/sec.

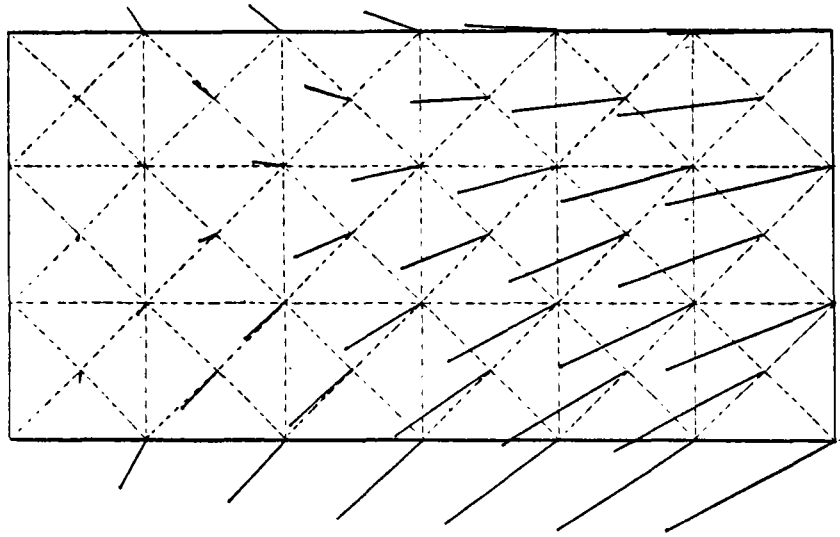


Fig. 15. Champ de vitesse de déplacement des Pyrénées, pour

$k = 3,97\times10^{11}$Pa ; $R = 2\times10^{16}$N sec/m^3 ; $F = 4,2\times10^{8}$Pa.

DL = 80 ; $v_b = -0,3055\ 10^{-9}$m/sec ; $v_h = +0,7974\times10^{-10}$m/sec

$v_b/v_h = -3,831$ et $v_h - v_b = 0,3852\times10^{-9}$m/sec

On a obtenu pour ce choix, $v_h - v_b = 1,223$ cm/an qui présente la vitesse d'épaississement de la croûte terrestre. On obtient donc pour ces montagnes, un âge de l'ordre de 1,3 millions d'années ($1,3 \times 10^6 \times 1,223$ cm = 16 km).

L'enfoncement du point B de la Fig. 15, qui n'existe pas en réalité est dû aux conditions aux limites sur AB. Dans la réalité il existe un certain frottement sur cette face AB. Le poinçon n'est donc pas complètement lisse. Les vitesses verticales sur AB sont donc irréalistes. Cependant la forme du soulèvement de la surface CD est en bon accord avec le soulèvement représenté sur la figure 9.

En définitive, on note que malgré les hypothèses simplificatrices et le peu de connaissance sur les paramètres k, F et R et le modèle retenu, on a obtenu des résultats satisfaisants dans une première approche.

3. CALCUL EN DEFORMATION PLANE DE LA CHARGE LIMITE D'UN BLOC DE MATERIAU DE VON MISES DE SECTION RECTANGULAIRE SERRE ENTRE DEUX PLATEAUX RIGIDES ET LISSES :

Ce bloc de dimension 2h×2b est soumis aux charges 2aQ et - 2aQ et est représenté sur la figure 16.

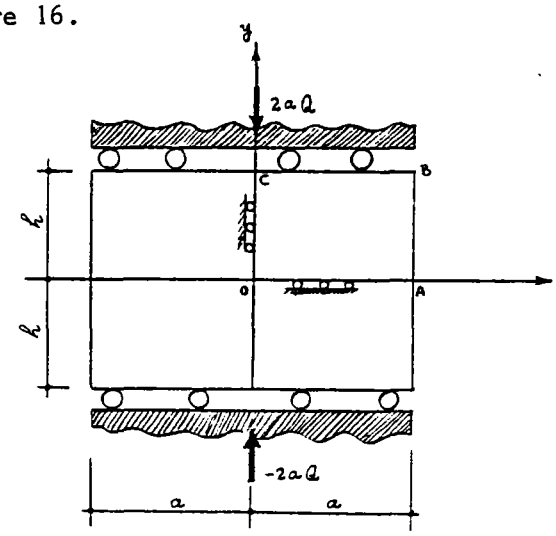


Fig. 16. Bloc rectangulaire en déformation plane, serré entre deux plateaux rigides et lisses

On néglige les forces volumiques et pour des raisons évidentes de symétrie on considère le quart de bloc, OABC avec $\Omega = \{(x,y) \mid 0<x<a \text{ et } 0<y<h\}$. Les conditions aux limites sont :

- sur OA : $v_y = T_x = 0$ - sur AB : $T_x = T_y = 0$
- sur BC : $\frac{\partial v_y}{\partial x} = 0$; $T_x = 0$ et $\int_0^a T_y \, dx = aQ$
- sur OC : $v_x = T_y = 0$.

Rappelons que ce problème a été déjà résolu analytiquement au § I-4-1 et la charge limite est $\left(\frac{|Q|}{k}\right)_{lim} = 2$ où k est la résistance au cisaillement du matériau de Von Mises.

Pour résoudre ce problème, nous remplaçons le matériau de Von Mises par le matériau de Norton-Hoff sous-jacent, et nous utilisons les quatre algorithmes suivants :

1°) Méthode d'Uzawa (§ II-2-2-1-1)

2°) Méthode d'Arrow-Hurwicz (§ II-2-2-1-3)

3°) Méthode de point fixe (§ II-2-2-1-4)

4°) Méthode des super-réseaux (§ II-2-2-2-2).

Nous prenons $a = 2$; $h = 1$; $\lambda = 1$ dans nos calculs. Notons que pour différentes valeurs des a et h, on obtient toujours la même charge limite, résultat que nous avons prouvé par nos calculs analytiques mais aussi numériques.

3.1. METHODE D'UZAWA

Comme on a vu au § II-2-2-1-1, il nous faut choisir un paramètre de montée (ρ) afin que cette méthode soit convergente. On peut démontrer facilement que ce paramètre est indépendant du vecteur Q, vecteur des forces nodales mais par contre il dépend du p et de la structure Ω. Dans la suite nous allons chercher pour un maillage donné le ρ optimal en fonction de p. Ensuite pour un p fixé, la variation de ce ρ optimal sera donnée en fonction du degré de liberté. Enfin les charges limites pour ce problème seront calculées.

3.1.1. Relation entre ρ_{opt} et p

Considérons le maillage de la figure 17 avec 3 degrés de liberté. Pour p et ρ donnés, nous calculons le nombre d'itérations nécessaires pour que la norme de $\nabla\mathcal{L}(V,M)$ soit inférieure à 10^{-3}.

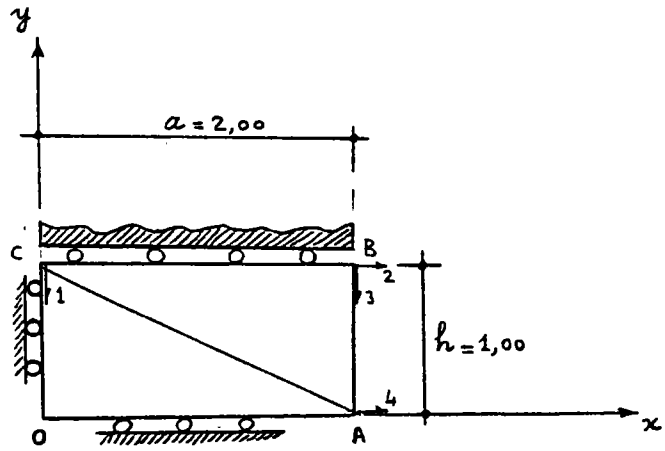


Fig. 17. Quart du bloc avec trois degrés de liberté

$$\text{Test d'arrêt} \begin{cases} \| \nabla\mathcal{L}(V,M) \| \leq 10^{-3} \\ n > 15 \text{ dans } M_{n+1} = M_n + \rho \dfrac{\partial\mathcal{L}(V,M_n)}{\partial M} \end{cases}$$

Les résultats obtenus sont représentés sur les figures 18 et 19 ainsi que dans le tableau suivant :

RELATION ENTRE RO(OPT.) , P ET LE TEMPS DE CALCUL

P	RO(OPT.)	NOMBRE D ITERATION SUR M POUR CALCULER RO(OPT.)	TEMPS DE CALCUL SUR IRIS -80 (MINUTES)	NOMBRE D ITER-ATIONS SUR M AVEC RO(OPT)	RO=.25
2.0	0.250	283	0.31	3	3
1.9	0.241	276	2.50	3	4
1.8	0.230	286	3.75	4	5
1.7	0.219	303	5.64	4	7
1.6	0.198	305	7.60	4	9
1.5	0.180	245	9.72	5	26
1.25	0.052	289	20.27	9	39

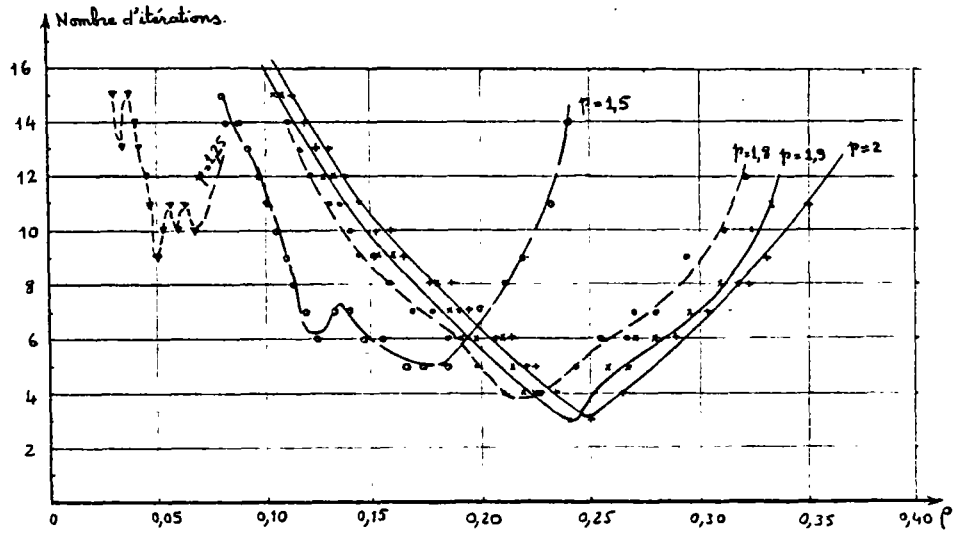


Fig. 18. Recherche de ρ_{opt} pour les différents p

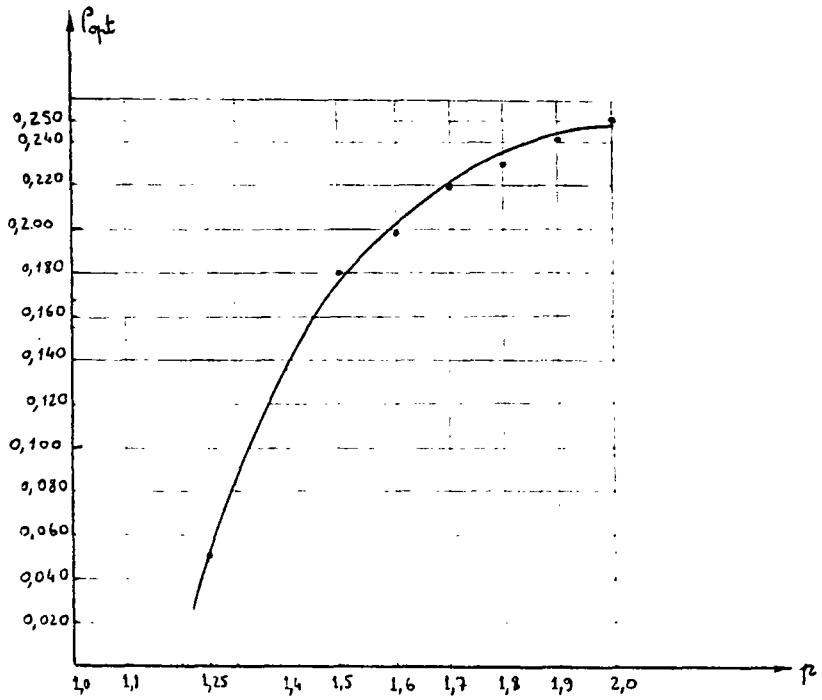


Fig. 19. Relation entre ρ_{opt} et p.

On voit sur la figure 19 que le ρ_{opt} est une fonction croissante de p. L'expérience numérique a montré que pour nos calculs, nous pouvons utiliser à la place de $\rho_{opt}(p)$ qui varie avec p, un ρ constant (ρ_{opt} pour $p = 2$) sans le modifier pour les différents p. Il est clair que dans ce cas on sera obligé

de faire, pour obtenir le point-selle, plus d'itérations que pour $\rho_{opt}(p)$. Mais ce nombre d'itération en plus sera largement compensé par le nombre d'itérations nécessaires pour trouver le ρ_{opt} en fonction de p car, quand p est voisin de 1, le nombre d'itérations nécessaires pour trouver le ρ_{opt} est plus important (voir le tableau ci-dessus) que si p est égal à 2. Par exemple, pour trouver un ρ_{opt} de $p = 1,25$, nous avons fait 289 itérations tandis que, si nous utilisons $\rho = 0,25$ (ρ_{opt} de $p = 2$) il nous faut 39 itérations au lieu de 9 pour arriver au point-selle.

3-1-2. Relation entre ρ_{opt} et le nombre de degré de liberté

Pour p fixé ($p = 2$), nous avons considéré différents maillages de la structure. Nous avons trouvé ainsi ρ_{opt} en fonction du nombre de degré de liberté. Les résultats sont indiqués sur le tableau suivant et la figure 20 qui représente une approximation linéaire de ces résultats.

3-1-3. La charge limite

Nous avons mis des ressorts avec $k_x = 0$ et $k_y = 10^{10}$ entre les noeuds qui sont en contact avec le poinçon (les noeuds de côté BC - Fig. 16) pour respecter la condition à la limite sur BC. L'algorithme utilisé est représenté sur la figure 6 de la partie II. Le test d'arrêt est $\| \nabla \mathcal{L} \| \leq 10^{-3}$ et la charge limite est calculée avec 0,5% de précision relative. On a obtenu :

$$\left(\frac{Q}{k}\right)_{lim} = 2,005 \pm 0,011.$$

Il faut noter que ce résultat était indépendant du nombre de degrés de liberté.

RELATION ENTRE RO(OPT.) ET DEGRES DE LIBERTE POUR P=2.

NOMBRE DES ELEMENTS	NOMBRE DES NOEUDS	DEGRE DE LIBERTE	RO(OPT.)
2	4	3	0.25
4	5	4	0.25
4	6	5	0.50
8	9	8	1.00
50	36	35	6.55
128	81	80	15.60

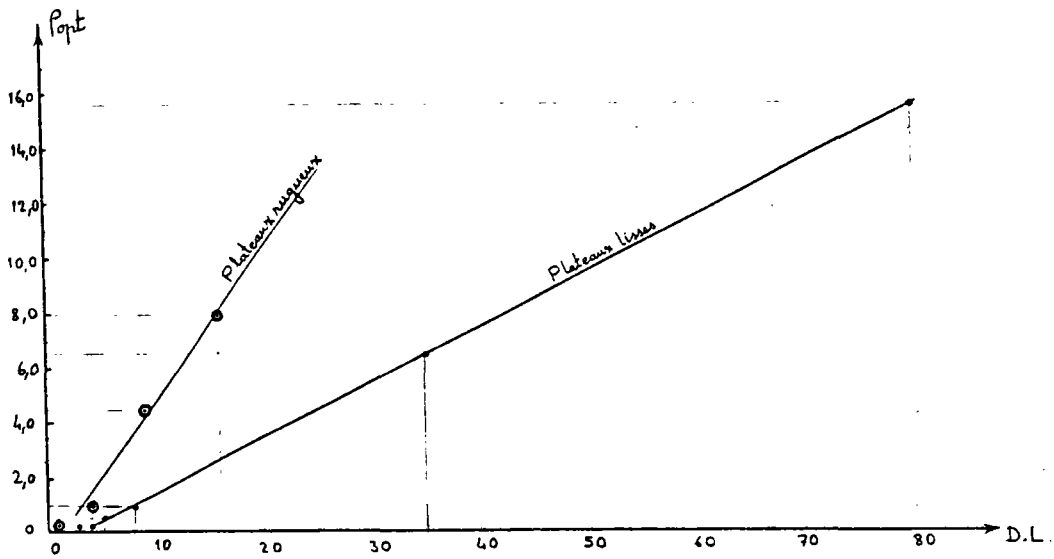


Fig. 20. Relation entre ρ_{opt} et le nombre de degrés de liberté (p = 2)

3.2. METHODE D'INVERSION DE MATRICE (ARROW-HURWICZ - §II 2-2-1-3)

Nous avons vu que cette méthode ne converge pas, dans le cas général (§ II-2-2-1-3). Mais il faut noter qu'elle a convergé pour le problème de bloc entre deux plateaux rigides et lisses. Ceci dû au fait que le paramètre ρ_n' défini au § II-2-2-1-3 est peu important dans ce problème. Avec les mêmes données du cas de la méthode d'Uzawa ($\lambda = 1$, $k = 1$, $a = 2$, $h = 1$) nous avons trouvé pour la charge limite :

$$\left(\frac{Q}{k}\right)_{lim} = 1,994 \pm 0,010.$$

3.3. METHODE D'INVERSION DE MATRICE (POINT FIXE - § II-2-2-1-4) :

Nous avons obtenu pour la charge limite :

$$\left(\frac{Q}{k}\right)_{lim} = 1{,}994 \pm 0{,}010.$$

3.4. METHODE DES SUPER-RESEAUX (§ II-2-2-2-2)

En utilisant cette méthode, nous avons obtenu :

$$\left(\frac{Q}{k}\right)_{lim} = 1{,}994 \pm 0{,}010,$$

et comme pour les autres méthodes la charge limite était indépendante du nombre de degrés de liberté et des dimensions (a et h) du bloc.

3.5. COMPARAISON DES METHODES UTILISEES

Pour cette comparaison nous avons pris un maillage de 8 éléments et 8 noeuds avec les degrés de liberté indiqués sur le tableau suivant ainsi que le temps de calcul et la place de mémoire occupée sur IRIS 80 :

TABLEAU DE TEMPS DE CALCUL ET LA PLACE DE MEMOIRE
POUR LES DIFFERENTES METHODES UTILISEES

LA METHODE UTILISEE	DEGRE DE LIBERTE	TEMPS DE CALCUL (MINUTES)	PLACE DE MEMOIRE
UZAWA RECHERCH RO(OPT.)	6	1.43 + 4.23	978
UZAWA CAL. CHARGE LIM.	6	2.80	978
INVERSION(ARROW-HURWICZ)	6	2.85	1234
INVERSION (POINT FIX)	6	3.36	1234
CHAMPS DES VIT.INCOMPRE.	4	2.39	874

On voit donc que le classement par temps de calcul croissant donne :

- La méthode des super-réseaux incompressibles ;
- La méthode d'inversion de matrice (Arrow-Hurwicz) ;
- La méthode d'inversion de matrice (point fixe) ;
- La méthode d'Uzawa.

Sur les figures 21 et 22 on a représenté les résultats en vitesses

et en contraintes principales, on voit bien que les contraintes principales (en traction) sont toutes dirigées dans la direction de la charge appliquée, ce qui est déjà obtenu eu § I-4-1.

La charge limite est très proche de :

$$\left(\frac{|Q|}{k}\right)_{lim} = 2{,}00$$

obtenue au § I-4-1 et aussi par Turgeman [80 ,1976] et Salençon [75 , 1978] qui ont utilisé les méthodes classiques.

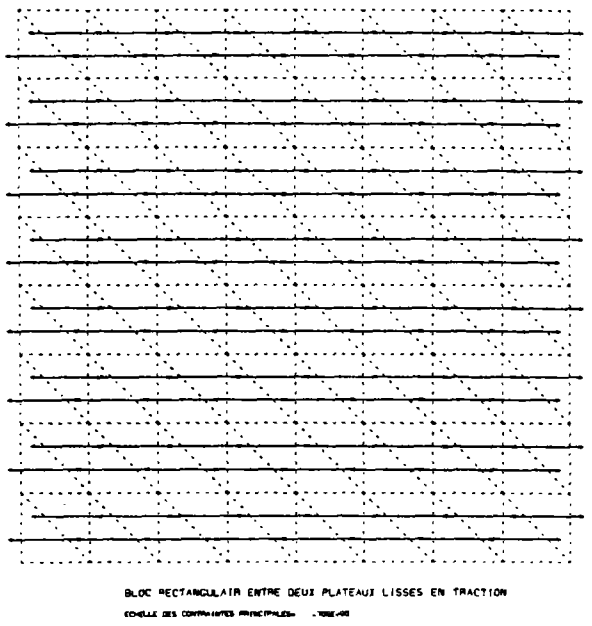


Fig. 21. Champ de contraintes principales (à une constante près)

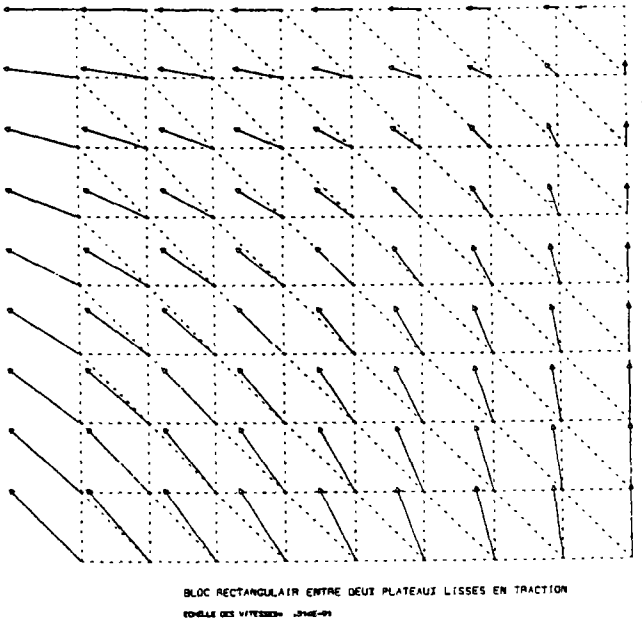


Fig. 22. Champ de vitesses de déplacement

4. CALCUL EN DEFORMATION PLANE DE LA CHARGE LIMITE D'UN BLOC DE MATERIAU DE VON MISES DE SECTION RECTANGULAIRE SERRE ENTRE DEUX PLATEAUX RIGIDES ET RUGUEUX

Ce bloc de dimension 2h×2b représenté sur la figure 23 est soumis aux charges 2aQ et -2aQ par l'intermédiaire des plateaux rigides et rugueux.

Pour des raisons évidentes de symétrie nous considérons un quart de bloc (OABC - Fig. 23) avec les conditions aux limites :

- sur OA : $v_y = T_x = 0$ - sur AB = $T_x = T_y = 0$
- sur BC : $\frac{\partial v_y}{\partial x} = 0$; $v_x = 0$; $\int_0^a T_y \, dx = aQ$.
- sur OC : $v_x = T_y = 0$.

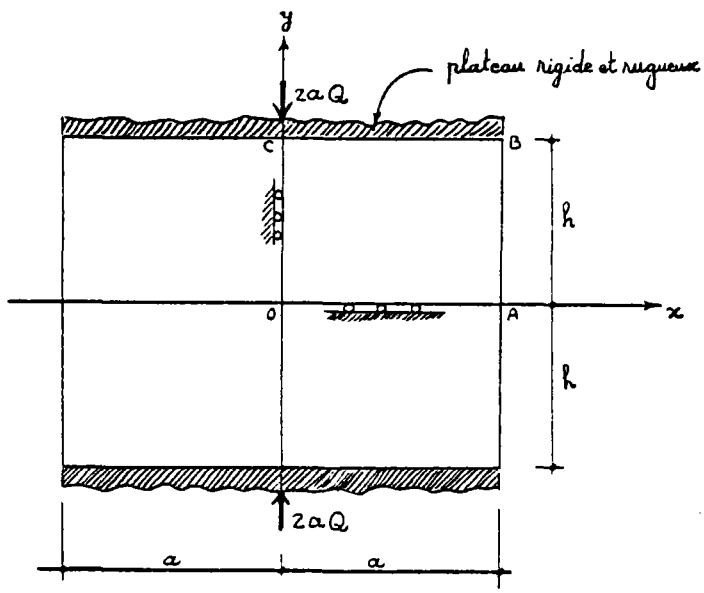


Fig. 23. Bloc en déformation plane entre deux plateaux rugueux et rigides

Nous avons utilisé les différentes méthodes numériques déjà présentée pour résoudre ce problème. Pour un seul degré de liberté nous avons choisi de résoudre directement ce problème par la méthode des éléments finis.

On verra que la charge limite pour ce bloc n'est plus indépendante des dimensions h et a.

4.1. PROBLEMES AVEC UN DEGRE DE LIBERTE

Considérons le maillage d'un quart de bloc (Fig. 24), constitué de quatre éléments triangulaires. On a noté les vitesses des noeuds par U, V, W et Z.

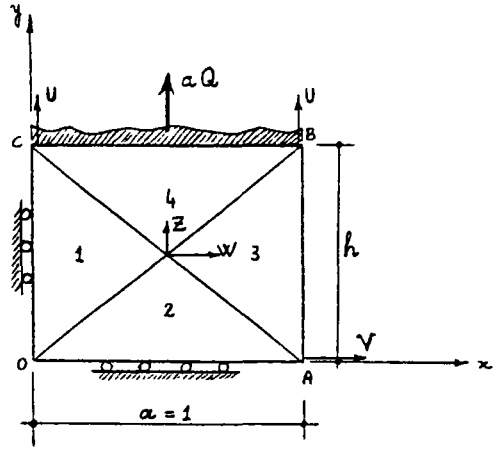


Fig. 24. Maillage d'un quart de bloc avec un degré de liberté

En considérant les conditions aux limites sur les vitesses et en prenant une distribution linéaire pour la vitesse à l'intérieur de chaque élément on a le tableau suivant :

NUMERO DE ELEMENT	COMPOSANTE HORIZONTALE DE VITESSE U(X)	COMPOSANTE VERTICALE DE VITESSE U(Y)	CONDITION DE INCOMPRESSIBILITI -E DIV(U)=0.
1	2.h.X	(2.Z-U)X+(U/H)Y	W=-(1/(2.H)).U
2	V.X+(1/H)(2W-V)Y	(2/H).Z.Y	Z=-(H/2).V
3	(V-2W)X-(1/H)VY +2W	(U-2Z)X+(1/H)UY +(2Z-U)	V=2W-(U/H)
4	-2WY(1/H)+2W	(2/H)(U-Z)Y+2Z -U	U=Z

Les quatre conditions d'incompressibilité ne sont pas indépendantes ce que l'on a déjà vu au § II-2-2-2-2. Nous pouvons exprimer, à l'aide des trois

équations indépendantes les vitesses V, W et Z en fonction de U :

$$W = -\frac{1}{2h}U \quad ; \quad V = -\frac{2}{h}U \quad ; \quad Z = U$$

d'où

- élément 1 :

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = -\frac{1}{h}U \quad ; \quad \dot{\varepsilon}_{yy} = \frac{1}{h}U \quad ; \quad \dot{\varepsilon}_{xy} = \frac{1}{2}U \text{ et } \dot{\varepsilon}_{h\ell}\dot{\varepsilon}_{h\ell} = \left(\frac{2}{h^2} + \frac{1}{2}\right)U^2$$

- élément 2 :

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = -\frac{2}{h}U \quad ; \quad \dot{\varepsilon}_{yy} = \frac{2}{h}U \quad ; \quad \dot{\varepsilon}_{xy} = \frac{1}{2h^2}U \text{ et } \dot{\varepsilon}_{h\ell}\dot{\varepsilon}_{h\ell} = \left(\frac{8}{h^2} + \frac{1}{2h^4}\right)U^2$$

- élément 3 :

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = -\frac{1}{h}U \quad ; \quad \dot{\varepsilon}_{yy} = \frac{1}{h}U \quad ; \quad \dot{\varepsilon}_{xy} = \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2}\right)U \text{ et } \dot{\varepsilon}_{h\ell}\dot{\varepsilon}_{h\ell} = \left(\frac{2}{h^4} + \frac{1}{2}\right)U^2$$

- élément 4 :

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = 0 \quad ; \quad \dot{\varepsilon}_{yy} = 0 \quad ; \quad \dot{\varepsilon}_{xy} = \frac{U}{2h^2} \text{ et } \varepsilon_{h\ell}\varepsilon_{h\ell} = \frac{1}{2h^4}U^2.$$

La fonctionnelle H(U) vaut alors

$$H(U) = \frac{1}{p}\alpha(p)U^p - QU$$

avec

$$\alpha(p) = \left\{\sqrt{2}^p \ \frac{h}{4}\left[\left(\frac{2}{h^2} + \frac{1}{2}\right)^{p/2} + \left(\frac{8}{h^2} + \frac{1}{2h^4}\right)^{p/2} + \left(\frac{2}{h^4} + \frac{1}{2}\right)^{p/2} + \left(\frac{1}{2h^4}\right)^{p/2}\right]\right\}$$

Elle atteint à son minimum avec :

$$U = \left[\frac{Q}{\alpha(p)}\right]^{1/(p-1)}$$

et vaut :

$$C_p(Q) = \mathrm{Inf}\{H(U)\} = \left(\frac{1}{p} - 1\right)\left[\frac{Q^p}{\alpha(p)}\right]^{1/(p-1)}.$$

La fonction jauge du convexe K_p est :

$$G_p(Q) = \left[-\frac{q}{h}C_p(Q)\right]^{1/q} \quad \text{avec } pq = p + q$$

Nous trouvons donc pour la charge limite :

$$\left(\frac{Q}{k}\right)_{\lim} = \lim_{\substack{p\to 1 \\ q\to+\infty}} h^{+1/q}\left[\alpha(p)\right]^{1/p} = \frac{h}{4}\left[\sqrt{\frac{4}{h^2}+1} + \sqrt{\frac{16}{h^2}+\frac{1}{h^4}} + \sqrt{\frac{4}{h^4}+1} + \frac{1}{h^2}\right].$$

Ainsi nous avons obtenu les charges limites pour les différents rapports de h/a :

LES CHARGES LIMITES D UN BLOC ENTRE 2 PLATEAUX
RIGIDES ET RUGUEUX (EN DEFORMATION PLANE) AVEC 1 DEGRE DE LIBERTE

H/A	(Q/K)LIM.	H/A	(Q/K)LIM.	H/A	(Q/K)LIM.
0.1	10.693	1.5	2.307	3.6	3.012
0.2	5.854	1.6	2.316	3.8	3.101
0.3	4.309	1.7	2.331	4.0	3.190
0.4	3.568	1.8	2.350	4.5	3.419
0.5	3.141	1.9	2.373	5.0	3.652
0.6	2.869	2.0	2.399	5.5	3.888
0.7	2.684	2.2	2.458	6.0	4.126
0.8	2.555	2.4	2.526	6.5	4.366
0.9	2.463	2.6	2.599	7.0	4.608
1.0	2.399	2.8	2.676	7.5	4.851
1.1	2.355	3.0	2.756	8.0	5.094
1.2	2.326	3.2	2.840	9.0	5.584
1.3	2.311	3.4	2.925	10.0	6.075
1.4	2.305				

Comme on voit la charge limite dans ce cas dépend du rapport de h/a. Les résultats sont représentés sur la figure 3.1.

4.2. PROBLEME AVEC PLUSIEURS DEGRES DE LIBERTE

Pour les maillages représentés sur les figures 25, 26, 27 et 28 avec un nombre de degrés de liberté égal à 3, 5, 7 et 30 nous avons calculé les charges limites pour différentes valeurs de h/a. La méthode utilisée est celle des super-réseaux incompressibles (§ II-2-2-2-2), et nous avons pris $p_{min} = 1{,}01$, le test d'arrêt étant porté sur la $\| \nabla H \| \leq 10^{-3}$. Les charges limites approchées sont calculées avec 0,5% d'erreur relative.

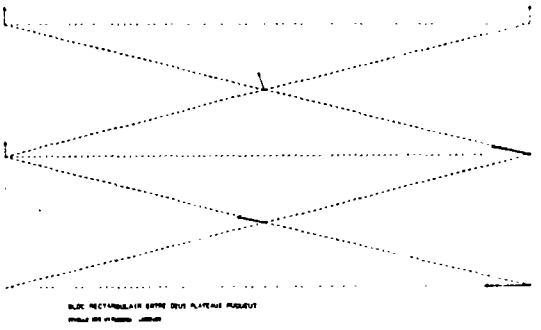


Fig. 25. Quart de bloc en déf. plane, serrée entre deux plateaux rigides et rugueux

$$\left(D.L. = 3 \; ; \; \frac{h}{a} = 0{,}5 \; ; \; \left(\frac{Q}{k}\right)_{lim} = 2{,}896 \right)$$

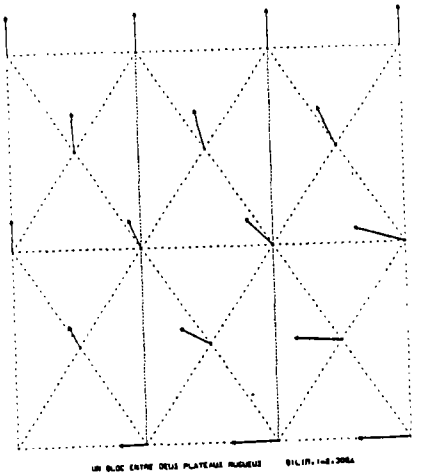


Fig. 26. Quart de bloc

$$D.L. = 5 \; ; \; \frac{h}{a} = 1 \; ; \; \left(\frac{Q}{k}\right)_{lim} = 2{,}306$$

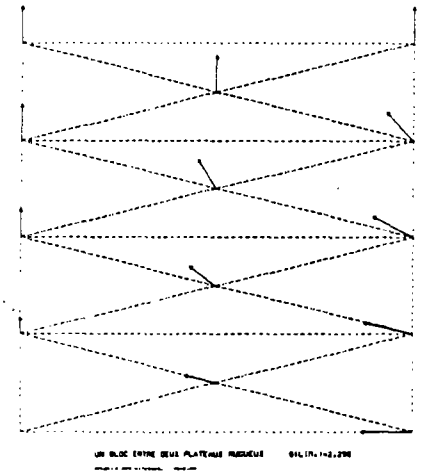


Fig. 27. Quart de bloc

$$D.L. = 7 \; ; \; \frac{h}{a} = 1, \; \left(\frac{Q}{k}\right)_{lim} = 2{,}296$$

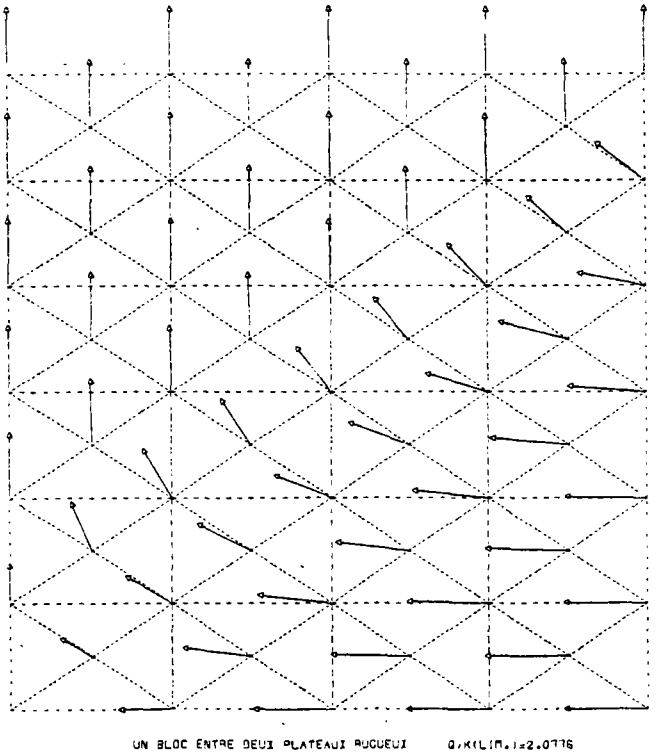


Fig. 28. Champ de vitesses pour un quart de bloc

$$D.L. = 30 \; ; \; \frac{h}{a} = 1 \; ; \; \left(\frac{Q}{k}\right)_{lim} = 2{,}078 \; .$$

Les résultats obtenus sont indiqués sur le tableau suivant :

LES CHARGES LIMITES D UN BLOC ENTRE DEUX PLATEAUX RIGIDES ET RUGUEUX EN DEF.PLANE POUR LES DIFFERENTS DEGRES DE LIBERTE

H/A	(Q/K)LIM. DL=3	DL=5	DL=7	DL=30	H/A	(Q/K)LIM. DL=3	DL=5	DL=7	DL=30
0.125	6.930	--	--	---	3.5	2.094	--	--	---
0.25	4.232	--	--	---	4.0	2.126	2.718	2.002	2.048
0.5	2.896	--	2.854	2.624	4.5	--	--	--	---
1.0	2.220	2.306	2.296	2.078	5.0	2.186	2.966	2.010	---
1.5	2.048	--	--	---	6.0	2.242	--	--	2.087
2.0	2.020	2.316	2.056	2.016	7.0	2.308	--	--	---
2.5	2.036	--	--	---	8.0	2.396	3.695	2.038	2.128
3.0	2.068	2.503	2.020	2.025	10.0	2.544	4.196	2.056	2.176
					20.0	--	--	--	2.442

A titre d'exemple pour le maillage de la figure 28, et un rapport de $h/a = 0,5$, on a mis 105,54 minutes sur l'ordinateur IRIS 80 pour obtenir la charge limite $\left(\frac{Q}{k}\right)_{lim} = 2,624$.

Pour le maillage représenté sur les figures 29 et 30, avec 80 éléments, 50 noeuds et $h/a = 2$, nous avons employé les deux méthodes suivantes :

1°) La méthode des champs de vitesses incompressibles (§ II-2-2-2-2) avec $p_{min} = 1,01$ et le test d'arrêt $\| \nabla H \| \leqslant 10^{-3}$. On a obtenu pour la charge limite $\left(\frac{Q}{k}\right)_{lim} = 2,095$, les champs de vitesses et de déviateurs des contraintes principales sont représentés sur la figure 29.

2°) La méthode d'inversion de matrice (point fixe § II-2-2-1-4) avec $p_{min} = 1,03$ et le test d'arrêt $\| \nabla \mathcal{L} \| \leqslant 10^{-3}$ en satisfaisant les conditions d'incompressibilité sur deux éléments voisins, ce qui donne pour le même maillage, 49 degrés de liberté. On a obtenu $\left(\frac{Q}{k}\right)_{lim} = 2,046$, les champs de vitesses et de contraintes principales (à une constante près) sont représentés sur la figure 30.

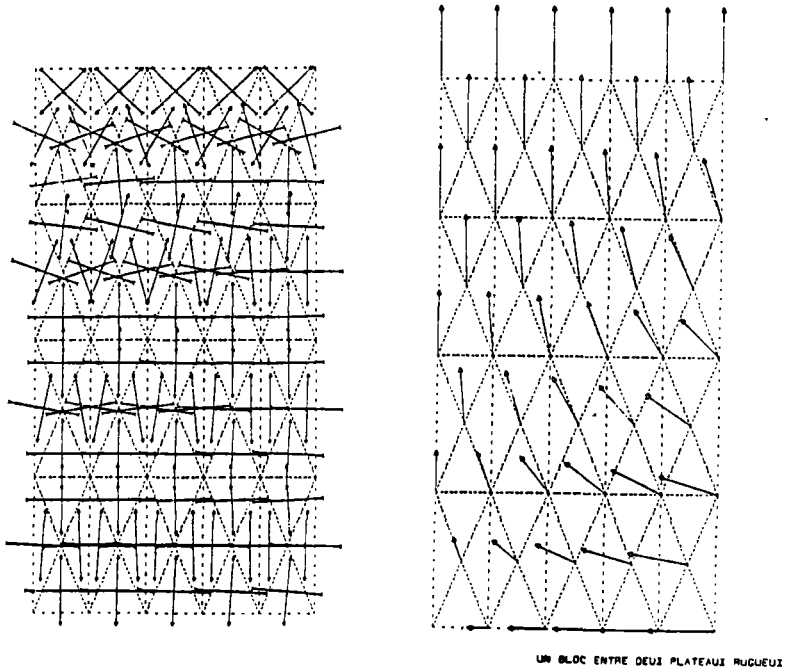


Fig. 29. Champs de vitesses et de déviateurs des contraintes principales (D.L. = 29)

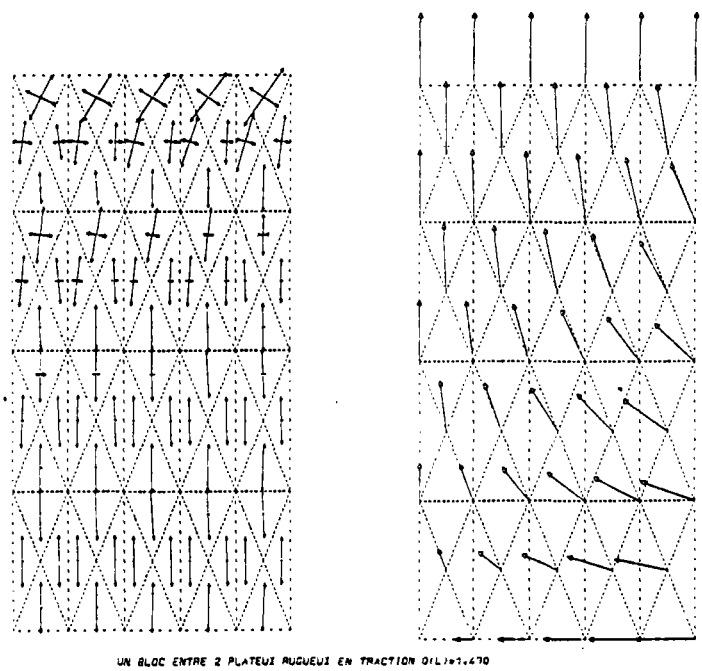


Fig. 30. Champs de vitesses et de contraintes principales (à une constante près) ; D.L. = 49.

On voit que les inclinaisons des vitesses et des contraintes principales sont à peu près semblables sur les deux figures 29 et 30.

Nous avons aussi utilisé la méthode d'Uzawa pour trouver la charge limite. Les résultats sont notés sur le tableau suivant :

LA CHARGE LIMITE POUR LE CAS OU H/A=0.5
METHODE D UZAWA (AVEC P(MIN)=1.03)- BLOC ENTRE
DEUX PLATEAUX RIGIDES ET RUGUEUX EN DEFORMATIONS PLANES

NOMBRE DES ELEMENTS	NOMBRE DES NOEUDS	DEGRE DE LIBERTE	RO OPTIMAL	LA CHARGE LIMITE (Q/K)LIM.
2	4	1	0.25	3.273
8	9	4	1.00	2.869
18	16	9	4.50	2.737
32	25	16	8.00	2.725

Il faut indiquer qu'en général la méthode d'inversion de matrice (Arrow-Hurwicz § II-2-2-1-3) ne converge que pour les p voisins de 2. Pour ce problème nous avons constaté que cette méthode n'est pas convergente pour les $p \leqslant 1{,}25$.

Pour différents rapports de h/a et degrés de liberté, les charges limites sont représentées sur la figure 31.

4.3. CONCLUSION

On voit (Fig. 31) que la charge limite est une fonction décroissante du rapport h/a. La partie montante des courbes est dûe à l'influence de la rugosité des poinçons et la rigidité de la structure. En effet si l'on met un nombre suffisant d'éléments entre les deux plateaux (pour le quart de bloc, entre BC et OA, Fig. 23), cet effet diminue et la pente de la partie montante des courbes diminue. Pour cela on peut comparer les charges limites des maillages des figures 24, 25 et 27.

Puisque toutes ces charges obtenues sont des bornes supérieures de la charge limite, l'enveloppe inférieure de ces courbes représente la meilleure borne supérieure.

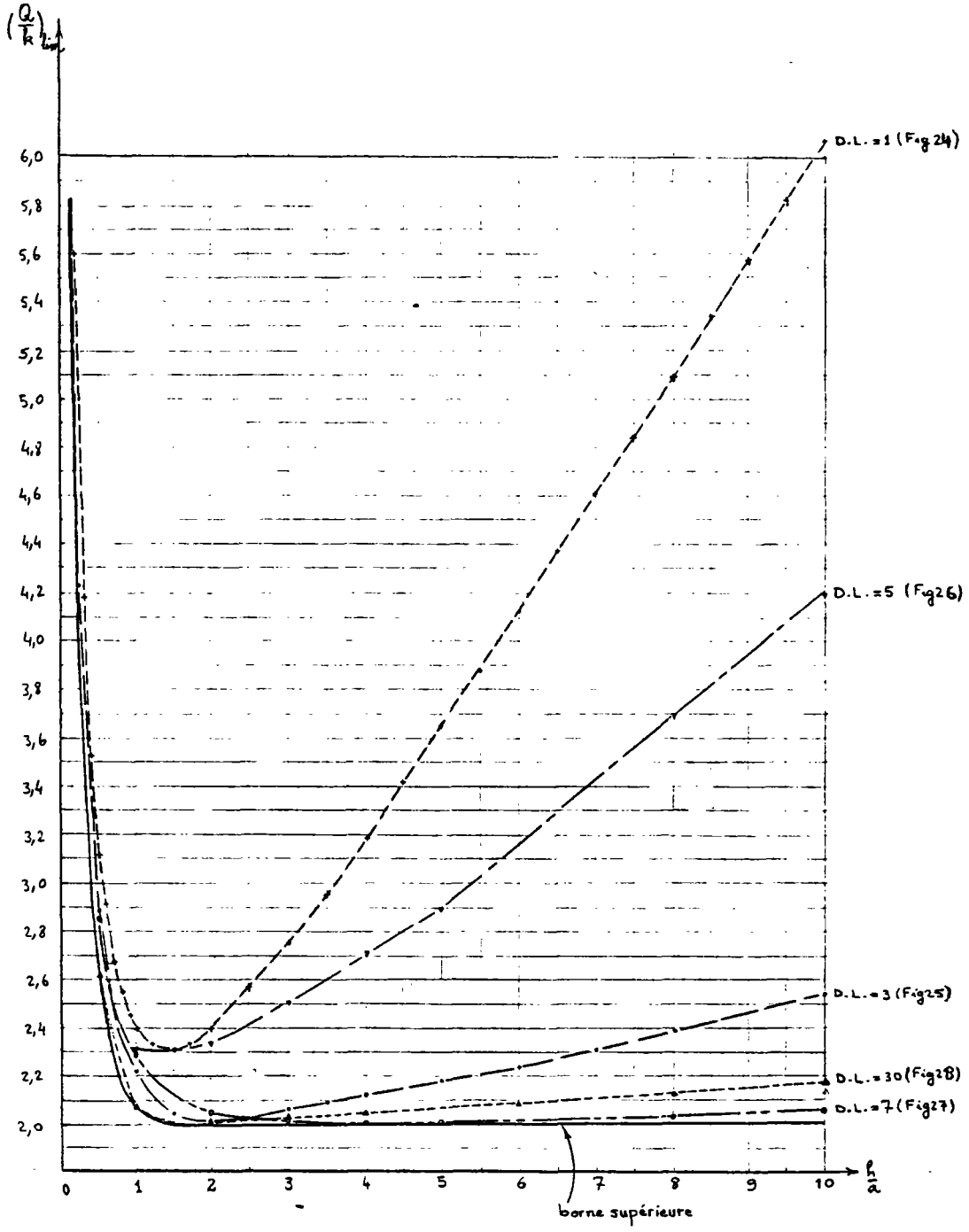


Fig. 31. Variation de la charge limite d'un bloc entre deux plateaux rigides et rugueux, en déformations planes en fonction de h/a et la forme du maillage.

Quand $\frac{h}{a} \geqslant 1$, Salençon [75, 1978] a démontré que la charge limite est unique pour le matériau de Von Misès, quelle que soit la condition de frottement de l'interface "plateaux-bloc", et vaut : $\left(\frac{Q}{k}\right)_{lim} = 2{,}000$ ce qui justifie aussi nos résultats.

5. CALCUL DE LA CHARGE LIMITE D'UN TUBE CYLINDRIQUE EN DEFORMATION PLANE SOUMIS A UNE PRESSION HYDRAULIQUE INTERIEURE

Ce problème est défini au § I-4-2 et nous avons vu que la charge limite d'un cylindre de rayon intérieur a et extérieur b est :

$$\left(\frac{Q}{k}\right)_{lim} = 2\ell n \frac{b}{a} .$$

Pour nos calculs numériques nous avons pris $\frac{b}{a} = 2$, et $k = 1$. Les résultats obtenus en utilisant la méthode d'inversion de matrice (point fixe - § II-2-2-1-4) avec le test d'arrêt $\| \nabla \mathcal{L} \| \leqslant 10^{-3}$ et $p_{min} = 1{,}03$ sont représentés sur le tableau suivant :

LA CHARGE LIMITE D UN TUBE DE RAYONS 2. ET 1. SOUS UNE PRESSION INTERNE D INTENSITE Q EN DEFORMATION PLANE

INO -	NOMBRE DES NOEUDS SUR LA PAROIS	NOMBRE DES NOEUDS SUR LE RAYON	NOMBRE DES ELEMENTS	NOMBRE DES NOEUDS	DEGRE DE LIBERTE	LA CHARGE LIMITE (Q/K)LIM.
1	3	2	4	6	6	1.369
2	5	3	16	15	16	1.393
3	11	2	20	22	30	1.563
4	9	3	32	27	32	1.428
5	9	4	48	36	40	1.403
6	9	5	64	45	48	1.393

Les résultats obtenus en vitesses sont représentés sur les figures 32 et 33. Nous avons pris deux formes de maillage avec 16 degrés de liberté, bien

que l'on ait obtenu des champs de vitesses différents (Fig. 32-c et 32-d), les charges limites sont égales $\left(\left(\frac{Q}{k}\right)_{lim} = 1,393\right)$.

Il est clair que le maillage de la Fig. 32-b ne représente pas bien notre structure car les trois noeuds se trouvant sur la circonférence du tube ne nous permettent pas de bien suivre la courbure de cette paroi. Il y a donc des parties de la structure qui sont supprimés. Il est donc normal de trouver une charge limite plus faible pour ce maillage (cf. Salençon [75 , 1978]).

D'autre part on sait que les vitesses doivent être indépendantes de l'angle polaire à cause de la symétrie de révolution. Si l'on considère alors plus de noeuds sur la paroi du cylindre, on n'arrive pas à améliorer les résultats en vitesses mais à mieux approcher la paroi réelle ce qui augmente la charge limite. Tandis que si l'on augmente le nombre de noeuds dans la direction de rayon du tube, on arrive à obtenir une meilleure distribution des vitesses ce qui nous permet de calculer avec plus de précision la charge limite (comparer les charges limite du tableau précédent, les lignes 4, 5 et 6).

Les charges limites sont représentées sur la figure 34 en fonction du nombre de degrés de liberté. On retrouve ce que l'on a indiqué plus-haut.

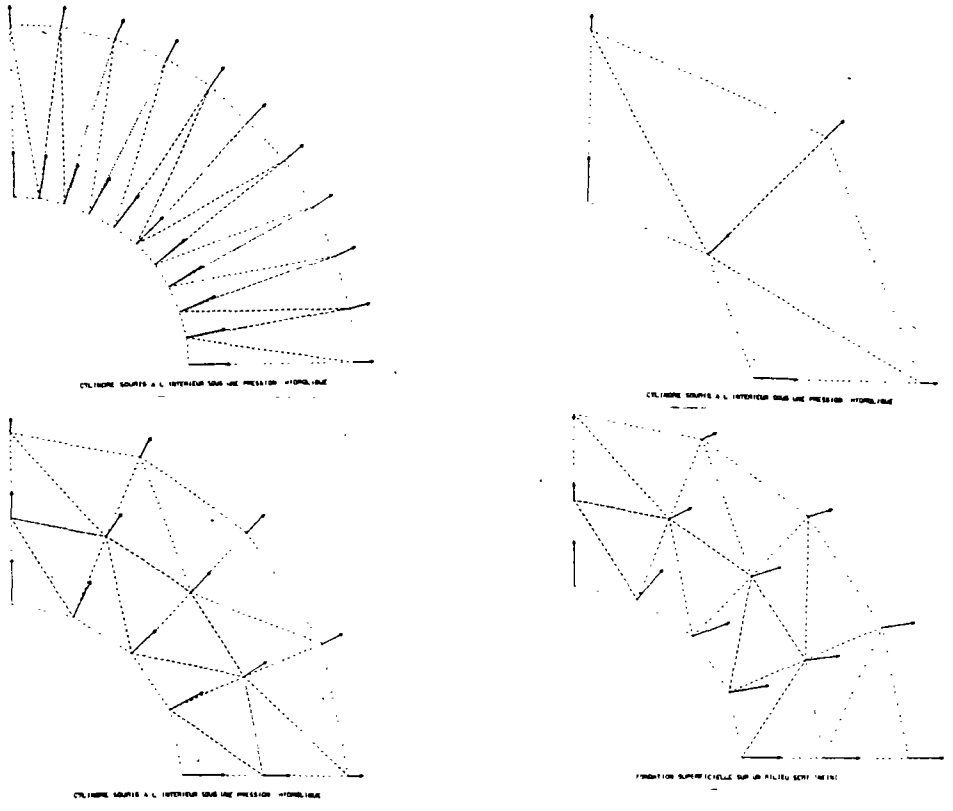


Fig. 32. Différents maillages du quart de tube

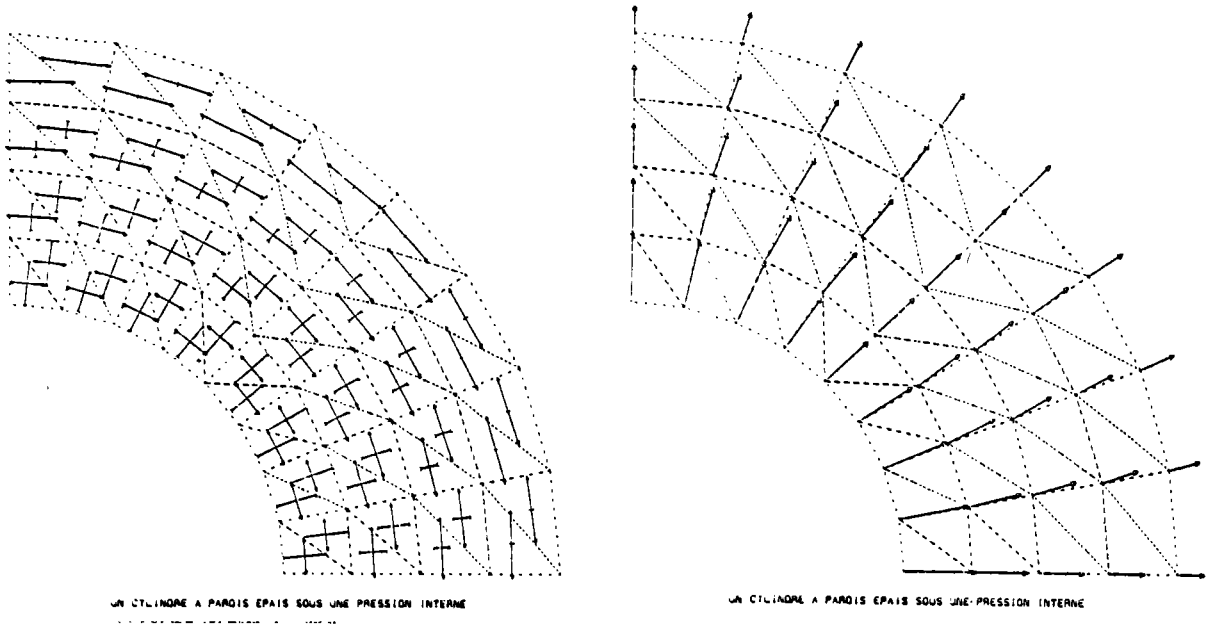


Fig. 33. Champs de vitesses et de contraintes principales à une constante près (D.L.= 48).

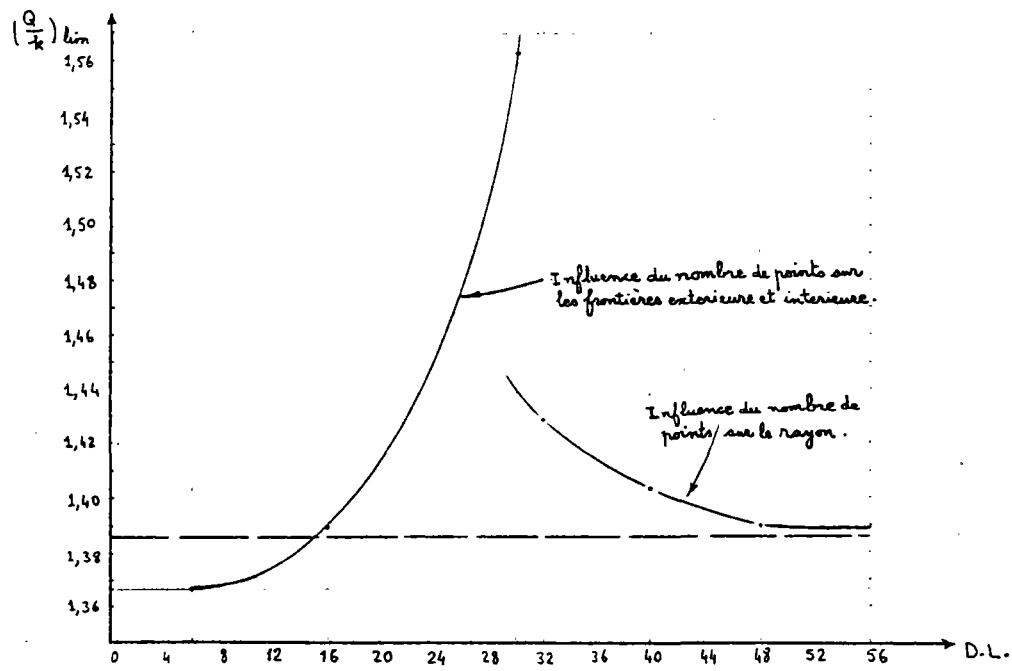


Fig. 34. Variation de la charge limite en fonction des degrés de liberté.

Nous avons trouvé pour 48 degrés de liberté (Fig. 33) une charge limite $\left(\frac{Q}{k}\right)_{lim} = 1,393$, ce qui donne le résultat exact ($2\ell n2 = 1,386$) avec moins de 1% d'erreur relative.

6. CALCUL DE LA HAUTEUR LIMITE D'UNE FOUILLE VERTICALE EN MATERIAU DE VON MISES

Considérons une fouille verticale DBAE (Fig. 35) constituée d'un matériau de Von Misès avec une résistance au cisaillement k, et une densité de force volumique $\vec{\gamma}$, de hauteur h. On se propose de calculer la hauteur limite de cette fouille.

Pour calculer la hauteur limite, on définit une valeur sans dimension $\left(\gamma \frac{h}{k}\right)$, et on fait varier le poids volumique γ avec une hauteur maintenue constante.

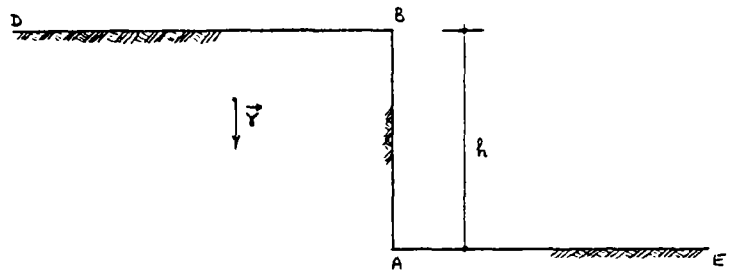


Fig. 35. Une fouille verticale

Ce problème a déjà été résolu par différents auteurs :

Taylor [77, 1948] ; Chen [9, 1971] ou [8, 1975] ; Coulomb [12,1773] ; Pastor [62, 1978] ; Nguyen Dang Hung [58, 1976] ; Mercier [50, 1977] ou [51, 1977] ; Delbecq et al [17, 1977] ; Salençon [75, 1978], etc... .

où la meilleure borne supérieur de $\gamma \frac{h}{k}$, égale à 3,83 a été obtenue à partir de la méthode des cercles de glissement. La meilleure borne inférieure égale

à 3,67 a été obtenue par Pastor en exhibant par la méthode des éléments finis un champ des contraintes statiquement admissible.

Mercier a utilisé la méthode des éléments finis en vitesses, et le matériau de Bingham comme matériau de base. Il a obtenu une borne supérieure de 3,87 pour un maillage de 200 degrés de liberté.

Delbecq et al. ont obtenu une borne supérieure de 3,97 en utilisant le matériau de Von Misès et des lignes de discontinuité de vitesses par la méthode des éléments finis. Ilsont utilisé aussi le matériau de Norton-Hoff comme matériau de base avec $p_{min} = 1{,}01$, ils ont obtenu $\left(\gamma \frac{h}{k}\right)_{lim} \leqslant 4{,}52$ pour un maillage constitué de 76 éléments, 54 noeuds et 57 degrés de liberté.

Dans nos calculs nous avons pris un schéma simple (Fig. 36) qui a déjà été utilisé par Mercier. Les conditions aux limites sont :

- sur OA et OC : $v_x = v_y = 0$,
- sur AB et BC : $T_x = T_y = 0$.

Il faut ajouter que ce schéma/ne nous permet de calculer qu'une borne supérieure de la hauteur limite, car en réalité nous avons supposé que la partie supprimée de la structure est rigide.

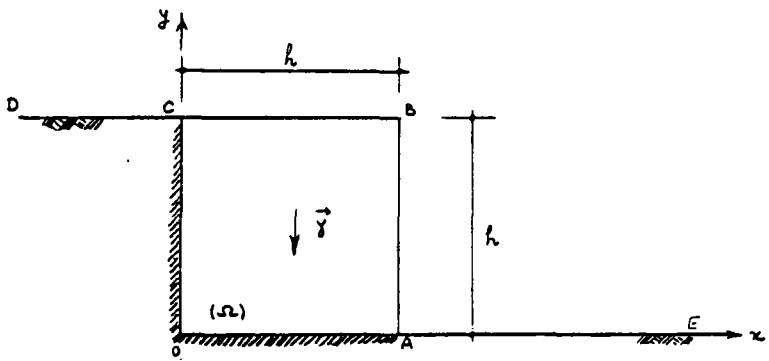


Fig. 36. Schéma simplifié de la fouille verticale

Nous avons remplacé le matériau de Von Mises par un matériau de Norton-Hoff convenable et nous avons pris $p_{min} = 1{,}03$. Le test d'arrêt était porté sur la norme de gradient de H ou de $\mathcal{L}$ (§ II), avec $\|\nabla H\| \leqslant 10^{-3}$ ou $\|\nabla \mathcal{L}\| \leqslant 10^{-3}$. Dans nos calculs nous avons pris $h = 10$ et $k = 1$. Nous avons fait varier γ pour

pour trouver $\left(\gamma \frac{h}{k}\right)_{lim}$. Les résultats obtenus ainsi que les méthodes utilisées sont présentés dans le tableau suivant.

L HAUTEUR LIMITE D UNE FOUILLE VERTICALE EN DEF.PLANE

NO	NOMBRE DES ELEMEN.	NOMBRE DES NOEUDS	DEGRE DE LIBER.	METHODE	(GAMA*H/K)LIM.
1	8	8	3	CHAMPS DES VITE -SSES INCOMPRE -SSIBLES (METHODE DES SU -PER-RESEAUX)	6.422
2	16	13	5		5.281
3	64	41	18		4.594
4	144	85	39		4.373
5	168	98	45		4.352
6	64	41	32	INVERSION DE MA -ATRICE DE RIGI DITE(POINT FIXE)	4.449
7	100	61	50		4.332

La condition à la limite sur OC (Fig. 36) ne peut être entièrement satisfaite en employant la méthode de champs des vitesses incompressibles (§ II-2-2-2-2). En effet dans cette méthode, pour chaque super-réseau constitué de deux bandes de N éléments, on a 6N équations indépendantes exprimant la condition d'incompressibilité et 10N + 6 degrés de liberté. Nous avons supprimé à l'aide des 6N équations, 6N degrés de liberté. Parmi ces degrés de liberté supprimés, il y a les composantes verticales d'un noeud sur deux qui se trouvent sur OC. On n'a donc pas la possibilité de fixer ces composantes de vitesses supprimées à priori, c'est la raison pour laquelle on a des composantes verticales non nulles des vitesses sur le côté OC (Fig. 39).

Les résultats obtenus en vitesses et en contraintes principales (à une constante près) sont représentées sur les figures 37 et 38 pour 64 éléments et 32 degrés de liberté (méthode d'inversion de matrice). Les champs de vitesses et de déviateurs de contraintes représentés sur les figures 39 et 40 ont été obtenus en utilisant la méthode de champs des vitesses incompressibles avec 144 éléments et 39 degrés de liberté.

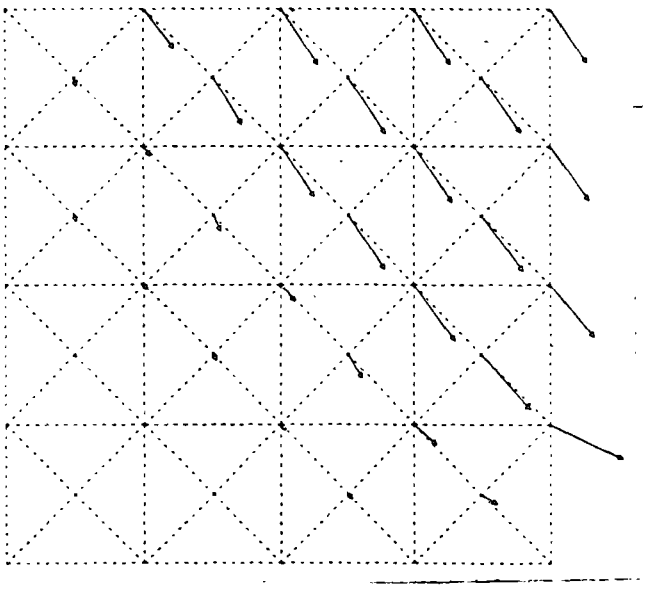


Fig. 37. Champ de vitesses (D.L. = 32)

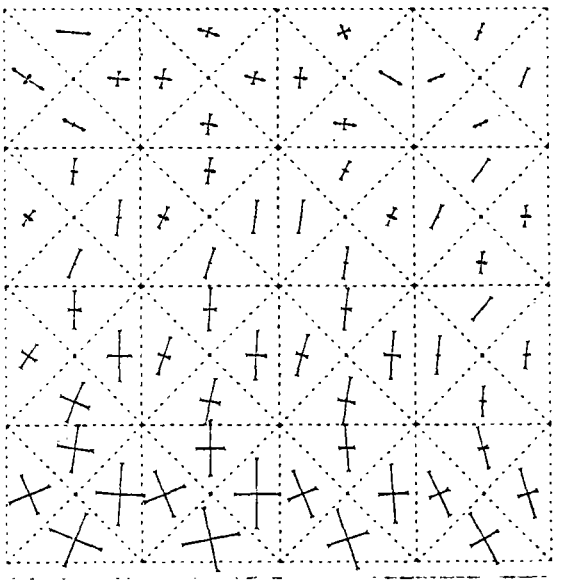


Fig. 38. Champ des contraintes principales (D.L. = 32)

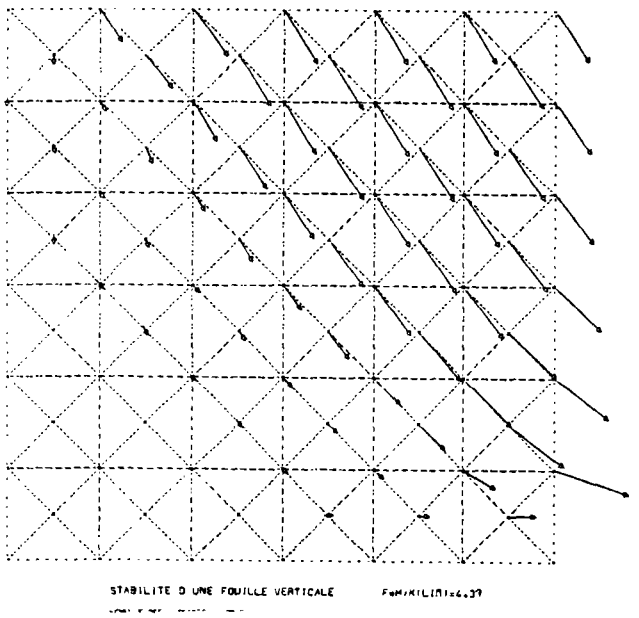


Fig. 39. Champ de vitesses (D.L. = 39)

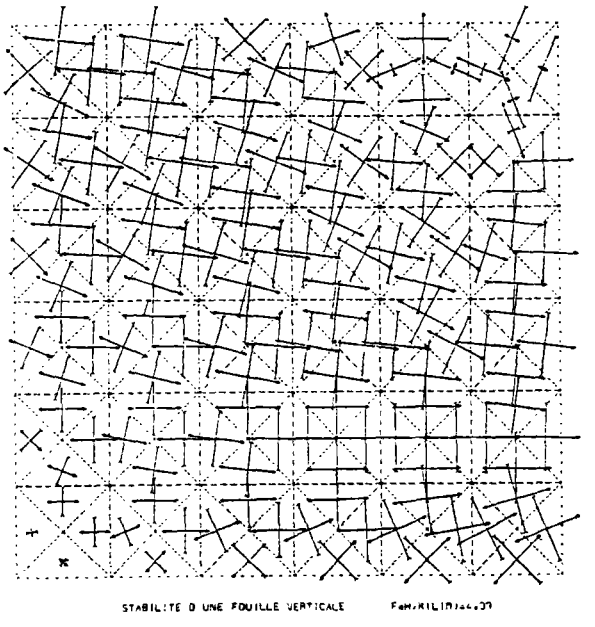


Fig. 40. Champ de déviateurs des contraintes principales

La variation de la charge limite en fonction des degrés de liberté est représentée sur la figure 41. Nous avons obtenu :

$$\left(\gamma \frac{h}{k}\right)_{lim} < 4,335$$

Ce résultat est inférieur à celui qui a été obtenu par Delbecq et al. [17 , 1977] en utilisant le matériau de Norton-Hoff. On doit bien noter que les conditions à la limite, ainsi que les maillages sont différents dans les deux approches.

En augmentant le nombre de degrés de liberté et tendant p de plus en plus vers 1, on peut améliorer ce résultat (cf. Guenouni [34 , 1982]).

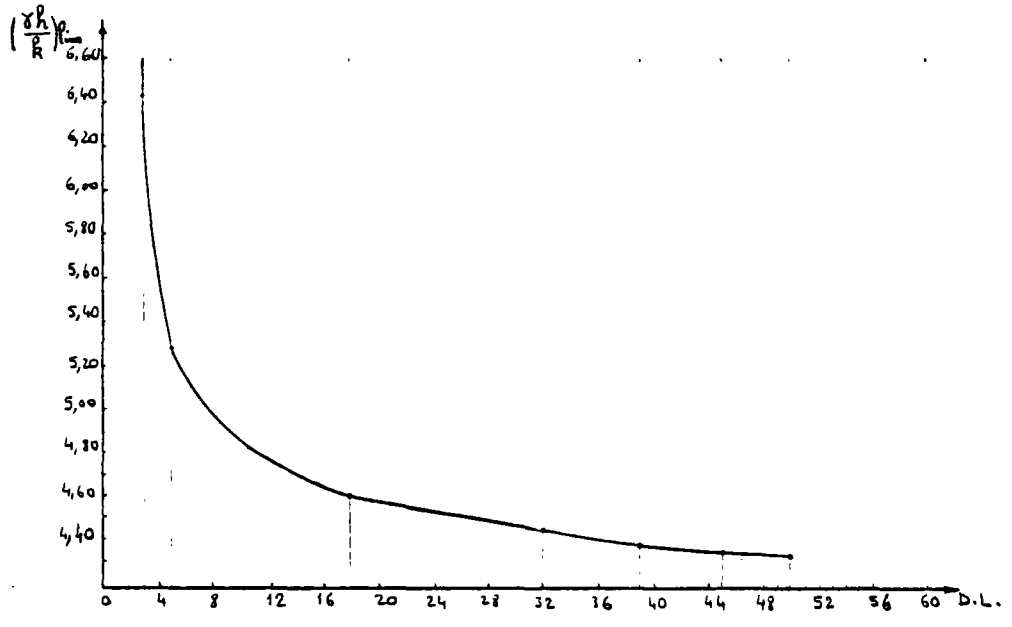


Fig. 41. La charge limite en fonction des degrés de liberté

7. CALCUL DE LA CHARGE LIMITE D'UNE PLAQUE CARREE, MUNIE D'UN TROU CIRCULAIRE CENTRE, SOUMISE A UNE TRACTION SIMPLE .

Les dimensions de cette plaque sont $2\ell \times 2\ell$, et le rayon de trou est r (Fig. 42). Elle est soumise dans la direction x'x à une charge uniformément

répartie d'intensité Q. On se propose de calculer la charge limite en contrainte plane et en déformation plane, sous l'hypothèse de petites déformations.

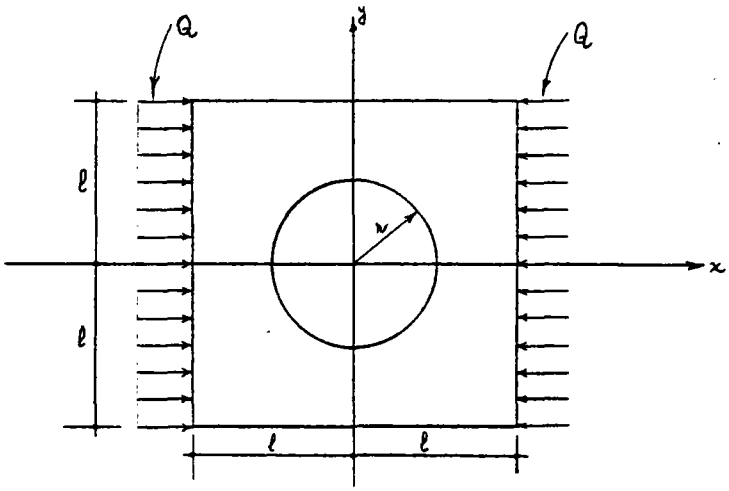


Fig. 42. Plaque trouée sous une compression Q.

Pour cela nous remplaçons le matériau de Von Misès par le matériau de Norton-Hoff sous-jacent. Nous utilisons les algorithmes déjà vus au § II pour résoudre ce problème. Dans le cas des contraintes planes, la valeur minimale de p étant $p_{min} = 1,01$, tandis que pour les déformations planes elle est de 1,03 (algorithme de point fixe § II-2-2-1-4). Le test d'arrêt est comme toujours $\| \nabla H \|$ ou $\| \nabla \mathcal{L} \| \leqslant 10^{-3}$. Nous avons pris $\ell = 60$ cm et r variable.

7.1. EN CONTRAINTE PLANE

Les résultats obtenus sont notés sur le tableau ci-après.

Les charges limites sont calculées avec 0,5% de précision. Nous représentons ces charges sur la figure 43 ainsi que les résultats existants dans la littérature.

LES CHARGES LIMITES D UNE PLAQUE CARREE MUNIE D UN TROU CENTRE
DE RAYON R. LES DIMENSIONS DE PLAQUE SONT L*L (EN CONTRAINTE PLANE)

R/L	NOM. DES ELM.	NOM. DES NOE.	DEG. DE LIB.	(Q/K)LIM.	R/L	NOM. DES ELM.	NOM. DES NOE.	DEG. DE LIB.	(Q/K)LIM.
0.000	128	81	144	1.740	0.416	491	278	520	0.990
0.083	132	84	144	1.650	0.500	120	78	144	0.770
0.083	456	260	480	1.650	0.500	484	276	528	0.730
0.083	532	300	560	1.650	0.583	484	276	528	0.490
0.083	588	330	616	1.640	0.667	120	78	144	0.330
0.083	864	476	896	1.610	0.667	480	275	528	0.300
0.167	120	77	132	1.510	0.750	128	85	160	0.190
0.167	476	270	504	1.490	0.750	504	285	540	0.160
0.200	480	272	512	1.430	0.833	120	84	160	0.090
0.200	864	476	896	1.420	0.833	476	280	544	0.070
0.250	144	90	160	1.350	0.917	104	81	156	0.030
0.250	480	272	512	1.330	0.917	440	270	538	0.020
0.333	128	81	144	1.210	0.958	122	87	156	0.009
0.333	468	266	504	1.190	1.000	---	---	---	0.000
0.333	864	476	896	1.190					

7.2. EN DEFORMATION PLANE

On a utilisé la méthode d'inversion de matrice (point fixe - § II-2-2-1-4), et les conditions d'incompressibilité étant satisfaites en moyenne sur deux éléments voisins. Les résultats obtenus sont indiqués sur le tableau suivant. Nous représentons sur les figures 21, 22, 44, 45 et 46 les résultats obtenus en vitesses et en contraintes principales (à une constante près). La figure 47 représente les charges limites obtenues pour les différents rayons et degrés de liberté. Ces résultats sont comparés avec ceux obtenus en annexe de ce travail.

LES CHARGES LIMITES D UNE PLAQUE CARREE MUNIE D UN TROU CENTRE
DE RAYON R. LES DIMENSIONS DE PLAQUE SONT L*L (EN DEFORMATION PLANE)

R/L	NOM. DES ELM.	NOM. DES NOE.	DEG. DE LIB.	(Q/K)LIM.	R/L	NOM. DES ELM.	NOM. DES NOE.	DEG. DE LIB.	(Q/K)LIM.
0.000	40	30	29	2.001	0.750	36	28	30	0.300
0.000	128	81	80	2.001	0.750	100	66	70	0.243
0.250	36	28	30	1.618	0.750	84	60	70	0.219
0.250	144	90	78	1.581	0.750	128	85	96	0.219
0.500	36	28	30	1.022	1.000	---	---	---	0.000
0.500	120	78	84	0.962					

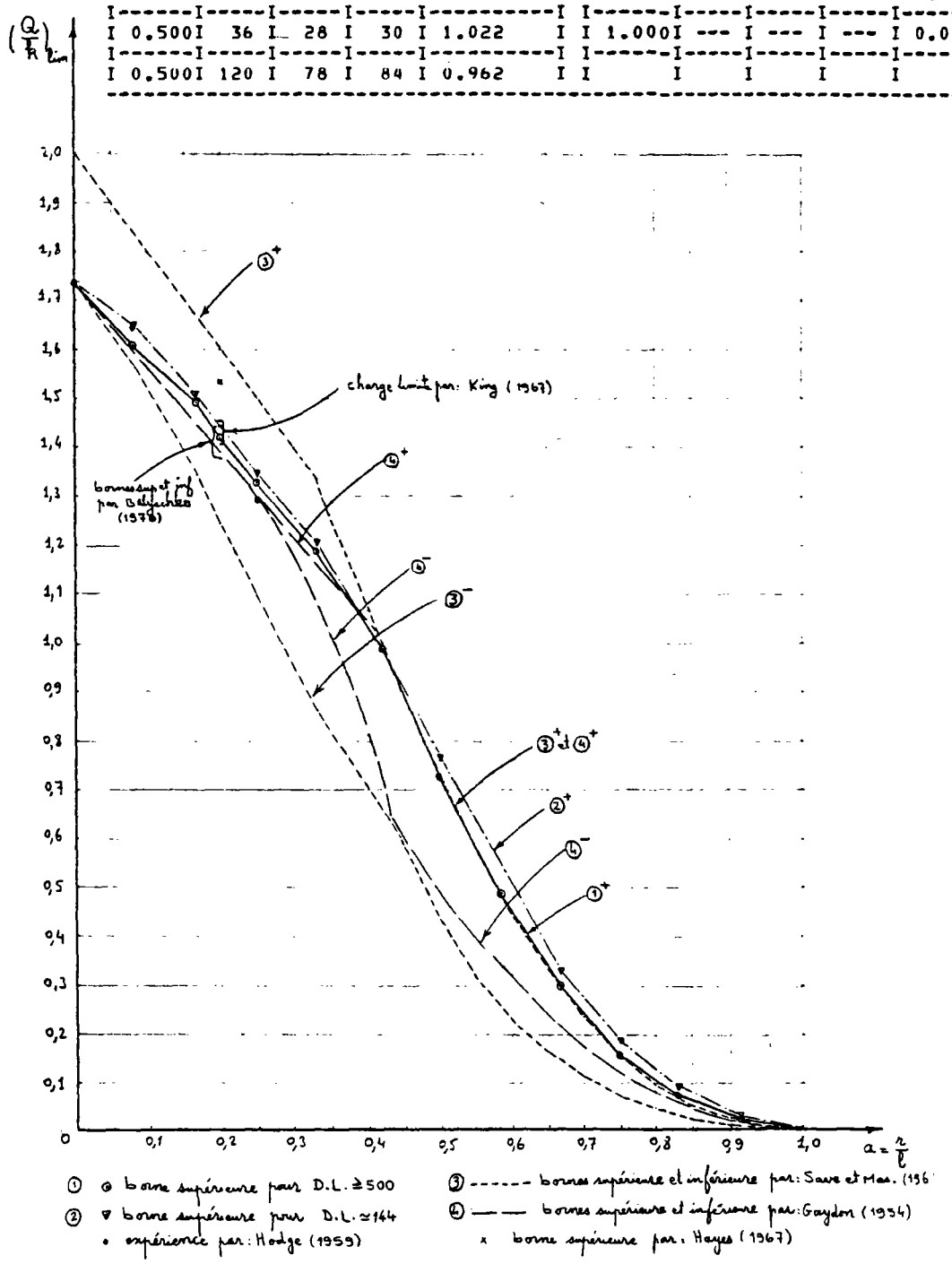


Fig. 43. Charges limites obtenues pour D.L. ≃ 144 et D.L. ⩾ 500. Comparaison avec celles déjà existantes dans la littérature (en contraintes planes)

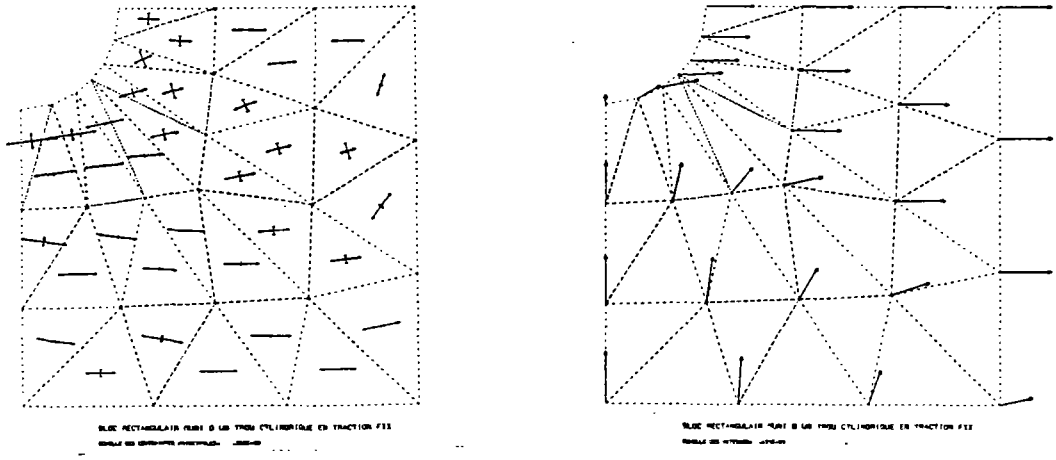


Fig. 44. Champs de vitesses et de contraintes principales pour r = 15 cm ; D.L. = 30 en déformations planes

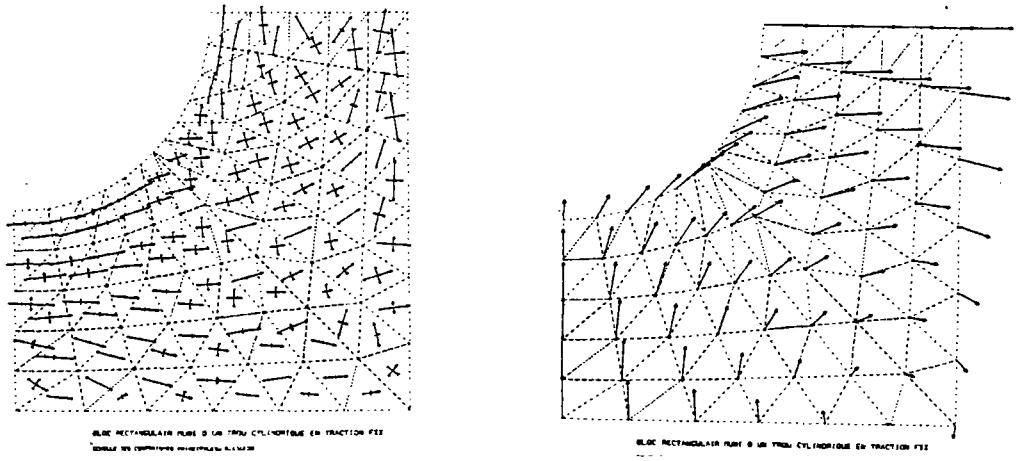


Fig. 45. Champs de vitesses et de contraintes principales r = 30 cm ; D.L. = 84 en déformations planes

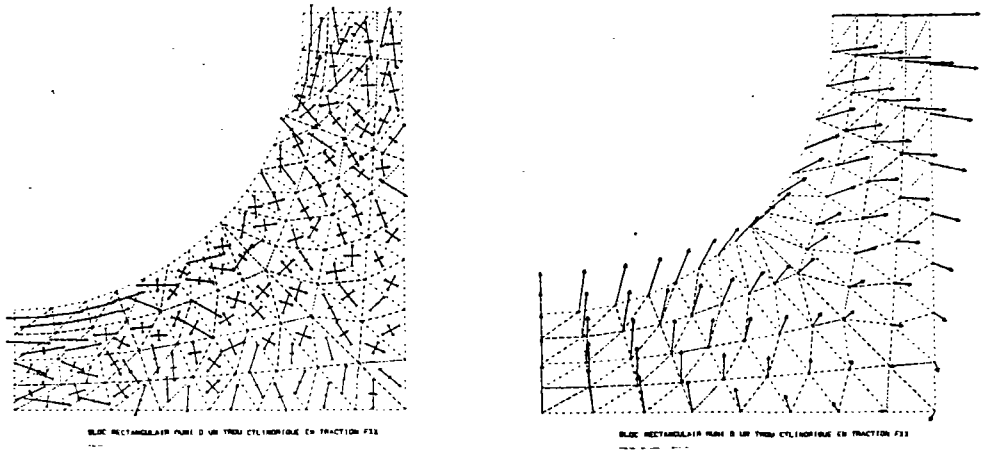


Fig. 46. Champs de vitesses et de contraintes principales pour r = 45cm, D.L. = 96 en déformations planes

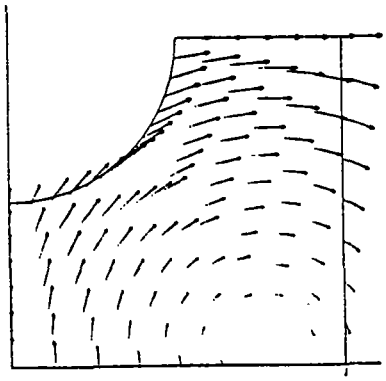


Fig. 46 a. Champ de vitesses en contraintes planes pour r = 30cm ; D.L. = 224.

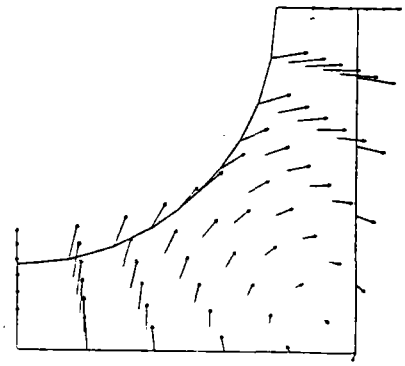


Fig. 46 b. Champ de vitesses en déformations planes pour r = 45 cm ; D.L. = 70

7.3. COMPARAISON AVEC DES RESULTATS EXISTANTS DANS LA LITTERATURE

a. en contraintes planes

Hodge [37 , 1959] et Massonet et Save [49 , 1963] ont résolu ce problème pour une plaque constituée d'un matériau de Tresca. Pour tirer des conclusions pour une plaque trouée en matériau de Von Misès nous utilisons la remarque suivante :

- A une structure Ω donnée, constituée d'un matériau rigide-plastique avec le convexe de plasticité C correspond un convexe de chargement potentiellement supportable K. Si on considère un autre convexe de plasticité C_{in} (ou C_{ex}) avec $C_{in} \subset C$ (ou $C_{ex} \supset C$), on trouve un convexe de chargement potentiellement supportable K_{in} (ou K_{ex}) qui est inclu dans K (ou contient le K). (Salençon [75 , 1978]).

Nous avons alors défini deux convexes de plasticité du type de Tresca, l'un contenant le convexe de Von Misès, tandis que l'autre y était inclus. Le convexe de Tresca circonscrit au convexe de Von Misès nous donne une borne supérieure de la charge limite de la structure constituée de matériau de Von

Misès. De la même façon on obtient une borne inférieure en employant un convexe de Tresca inscrit au convexe de Von Misès. Nous avons obtenu en notant $\frac{r}{\ell} = a$:

- borne supérieure :

$$0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{3} \quad \left(\frac{Q}{k}\right)^{+} = 2(1-a) \text{ et pour } \frac{1}{3} \leqslant a \leqslant 1 \quad \left(\frac{Q}{k}\right)^{+} = 2\left[\sqrt{2-4a+3a^2}-a\right]$$

- borne inférieure :

$$0 \leqslant a \leqslant 0{,}443 \quad \left(\frac{Q}{k}\right)^{-} = \sqrt{3}.\ \frac{(1-a)(1-\xi)}{a} \text{ avec } a = \frac{\xi(1-\xi)}{\sqrt{(3\xi-2)(2-\xi)}}$$

$$0{,}443 \leqslant a \leqslant 1 \quad \left(\frac{Q}{k}\right)^{-} = \sqrt{3}.\ \frac{(1-a)^2}{2a}$$

Gaydon et Mc Crum [30, 1954] ont résolu le problème en contraintes planes pour le critère de Von Misès et ils ont trouvé pour les deux bornes de la charge limite :

- borne supérieure :

$$0 \leqslant a \leqslant 0{,}43 \quad \left(\frac{Q}{k}\right)^{+} = \sqrt{3}(1-a) \text{ et pour } 0{,}43 \leqslant a \leqslant 1 \quad \left(\frac{Q}{k}\right)^{+} = 2\left[\sqrt{2-4a+3a^2} - a\right]$$

- borne inférieure :

$$0 \leqslant a \leqslant 0{,}204 \quad \left(\frac{Q}{k}\right)^{-} = \sqrt{3}(1-a)$$

$$0{,}204 \leqslant a \leqslant 0{,}412 \quad \left(\frac{Q}{k}\right)^{-} = \operatorname{Inf}\left\{ \operatorname{Sup}_{\xi \in [a,1]} \left\{ \frac{\sqrt{3}(1-a)(1-\xi)}{\sqrt{(1-a)^2(1-\xi)^2 - a(1-a)(1-\xi)+a^2}} \right\} \right.$$

$$\left. \frac{\sqrt{3}(1-a)\xi}{\sqrt{\xi^2 - a\xi + 4a^2}} \right\}$$

$$0{,}412 \leqslant a \leqslant 1 \quad \left(\frac{Q}{k}\right)^{-} = \operatorname{Inf}\left\{ \operatorname{Sup}_{\xi \in [a,1]} \left\{ \frac{\sqrt{3}(1-a)(1-\xi)}{\sqrt{(1-a)^2(1-\xi)^2 - a(1-a)(1-\xi)+a^2}} \right\} \right.$$

$$\left. \frac{\sqrt{3}(1-a)(\xi-a)}{a} \right\}$$

Hodge [37 , 1959] a obtenu expérimentalement pour deux plaques d'épaisseurs 6,35mm et de dimensions 90×90cm constituées d'un acier doux vérifiant le critère

de Von Misès, sans trou et munies d'un trou de rayon r = 22,5 cm :

$$a = \frac{r}{\ell} = 0 \quad \left(\frac{Q}{k}\right)_{lim} = 1,733$$

$$a = \frac{r}{\ell} = 0,25 \quad \left(\frac{Q}{k}\right)_{lim} = 1,296.$$

Belytschko et al [5 , 1970] ont trouvé par la méthode des éléments finis, pour une plaque trouée a = 0,2, avec un -maillage de 101 éléments et 117 degrés de liberté, les deux bornes suivantes :

$$a = 0,2 \quad 1,374 \leqslant \left(\frac{Q}{k}\right)_{lim} \leqslant 1,427$$

Hayes et Marcal [35 , 1967] ont trouvé une borne supérieure pour a = 0,2 :

$$\left(\frac{Q}{k}\right)^{+} = 1,533$$

King et Marcal [42 , 1967] par un calcul élastoplastique ont obtenu numériquement pour une plaque munie d'un trou circulaire avec a = 0,2 une charge limite qui varie entre $\left(\frac{Q}{k}\right)_{lim} \in [1,406,\ 1,451]$.

Ces résultats sont tous représentés sur la figure 43.

b. <u>en déformations planes</u>

A notre connaissance dans la littérature il n'existe pas la solution du problème en déformations planes. Pour comparer nos résultats numériques, nous avons résolu ce problème (cf. Annexe), en suivant une démarche semblable à celle de Gaydon et Mc. Crum [30, 1954] ou de Hodge [37, 1959] . Nous avons trouvé les deux bornes de la charge limite qui sont données en annexe et représentées sur la figure 47.

c. <u>Comparaison des résultats et conclusion</u>

Nos résultats numériques obtenus pour le cas de contraintes planes sont en très bon accord quand le rayon du trou varie de 25 cm (a = 0,4167) à 60 cm (a = 1), avec la borne supérieure trouvée analytiquement par Gaydon et Mc Crum (méthode statique-classique), tandis que pour les rayons variant de zéro à 25cm, la borne supérieure que nous avons obtenue est supérieure à celle trouvée ana-

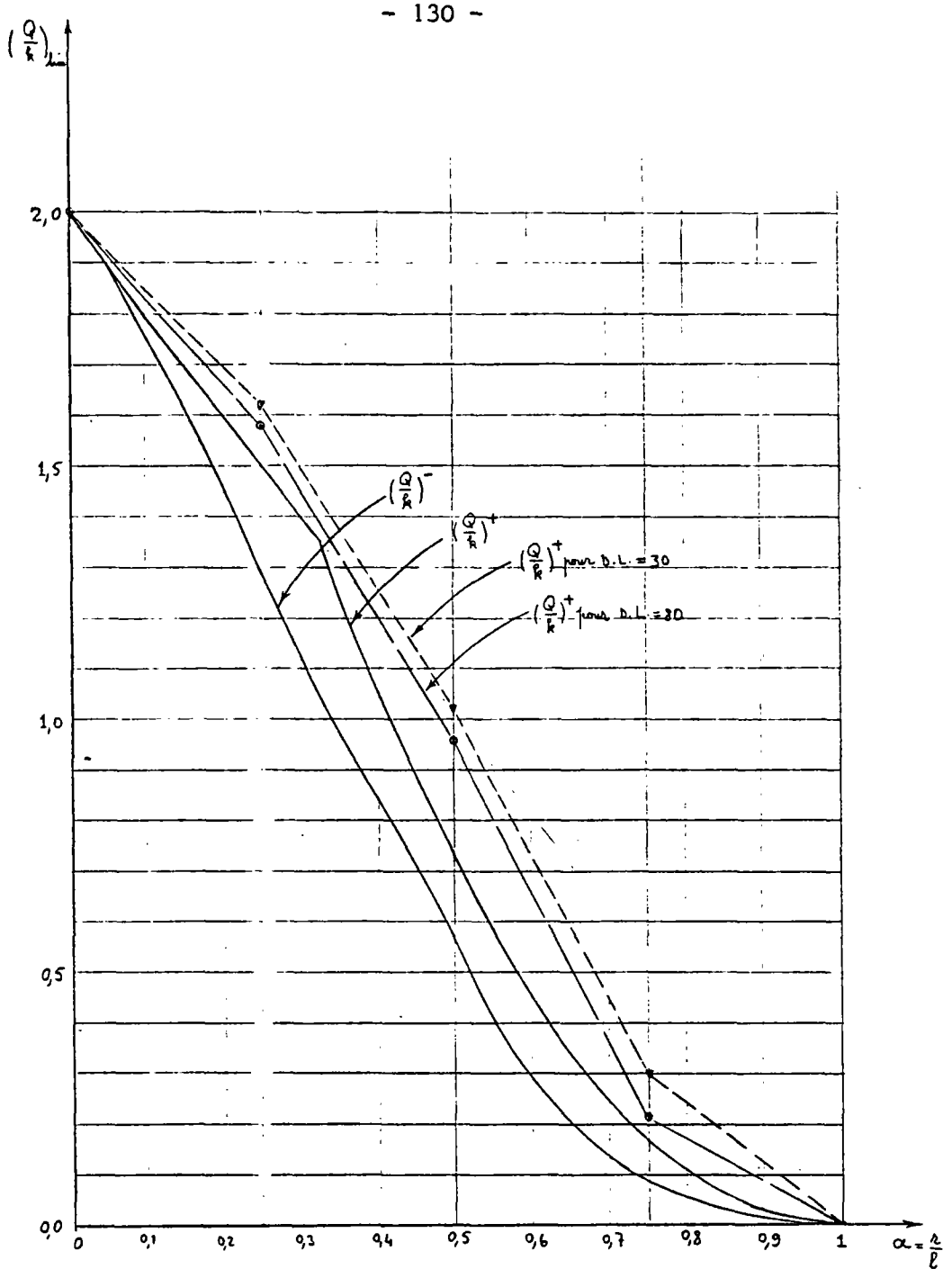


Fig. 47. Les bornes supérieure et inférieure de la charge limite et nos résultats numériques

lytiquement. Mais leur différence relative est très faible. Par exemple pour le rayon r = 20cm, analytiquement on a : $\left(\frac{Q}{k}\right)^+ = 1,155$ tandis que nous avons obtenu $\left(\frac{Q}{k}\right)^+ = 1,190 \pm 0,006$. L'erreur relative est de l'ordre de 3%, ce qui est souvent acceptable dans l'estimation de la charge limite.

Dans le cas de déformations planes, notre borne supérieure est plus importante que celle obtenue analytiquement et ceci pour deux raisons :

- d'abord parce que nous avons seulement 80 degrés de liberté ce qui est faible pour obtenir un bon résultat pour la structure réelle qui a un nombre infini de degrés de liberté ;

- parce que nous n'avons pas fait tendre p vers 1 au-delà de 1,03 ce qui nous donne une charge limite supérieure à la charge limite réelle.

Nous n'avons pas calculé la charge limite pour la structure en déformations planes en employant plus de degrés de degrés de liberté car nos calculs sont très coûteux. Par exemple pour un D.L. = 80, le calcul a pris 42 minutes sur l'ordinateur C.I.R.C.E. (utilisé par le L.C.P.C.).

Une partie de nos résultats sont indiqués en [1 ,1981]

8. CHARGE LIMITE D'UNE PLAQUE RECTANGULAIRE MINCE MUNIE D'UN TROU CIRCULAIRE CENTRE ENTRE DEUX MACHOIRES RIGIDES ET RUGUEUSES SOUS TRACTION SIMPLE

a. Résultats expérimentaux (Ben-Soussi et A. Friaâ [6 ,1981]).

Une plaque rectangulaire en acier doux avec une limite élastique de 240 M.Pa et une contrainte à la rupture de 340 M.Pa,de longueur efficace L = 180 mm, de largeur 100mm et d'épaisseur 10mm, munie d'un trou circulaire de rayon r (fig. 48), est serrée entre deux machoires d'une presse. Les machoires s'éloignent à une vitesse de 12mm/min. Les charges limites obtenues par cet essai sont représentées sur la figure 49, ainsi que sur le tableau suivant, avec Q, l'intensité moyenne de la charge limite F_e (limite d'écoulement) et $k = 240/\sqrt{3} = 138,56$ M.Pa est la limite élastique au cisaillement (on suppose que l'acier doux vérifie le critère de Von Misès).

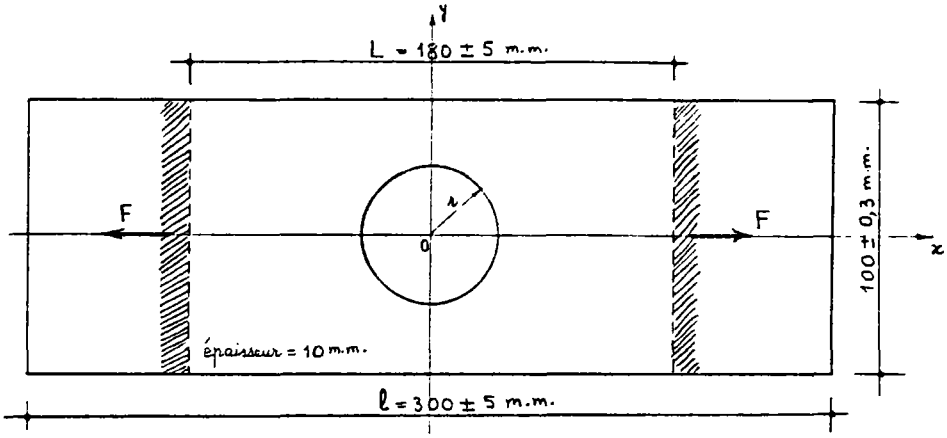


Fig. 48. Echantillon d'une plaque trouée en acier doux, sous une traction simple.

LES CHARGES LIMITES D UNE PLAQUE RECTANGULAIRE DE DIMENSIONS (HAUTEUR=180 MILIMETRES , LARGEUR=100 MILIMETRES , EPAISSEUR=10 MILIMETRES) MUNIE D UN TROU CIRCULAIRE CENTRE SOUMISE A UNE TRACTION PAR L INTERMEDIAIRE DE DEUX MACHOIRES RIGIDES (EXPERIENCE)

RAYON DE TROU R MILIMETR. PRECISION:0.15	LA CHARGE LIMITE DE ELASTICIT. F(E)+(OU- 400 DA-N.	LA GHARGE DE RUPTUR. F(R)+(OU- 400)DA-N.	AUGMENTATION DE LA LONGUEUR AVANT LA RUPTURE MILIMETRES	L INTENSITE MOYENNE DE LA CHARGE LIMITE (Q/K)LIMIT.
0.000	25.54E+03	37.00E+03	71+(OU-1)	1.843
5.000	21.60E+03	31.80E+03	52+(OU-1)	1.559
15.000	17.60E+03	27.70E+03	23+(OU-1)	1.270
20.000	14.50E+03	23.30E+03	21+(OU-1)	1.046
25.000	12.60E+03	20.80E+03	20+(OU-1)	0.909
30.000	10.10E+03	15.50E+03	19+(OU-1)	0.729
35.000	7.30E+03	10.30E+03	17+(OU-1)	0.527
40.000	4.64E+03	7.90E+03	13+(OU-1)	0.335

b. Résultats numériques

Les charges limites représentées sur la figure 49, et notées sur le tableau suivant ont été obtenues en utilisant l'algorithme du § II-2-1, avec $p_{min} = 1{,}01$, un test d'arrêt de $\|\nabla H\| \leqslant 10^{-3}$ et une précision relative de 0,5%.

LES CHARGES LIMITES D UNE PLAQUE RECTANGULAIRE DE DIMENSIONS (HAUTEUR=180 MILIMETRES, LARGEUR=100 MILIMETRES, EPAISSEUR=10 MILIMETRES) MUNIE D UN TROU CIRCULAIRE CENTRE SOUMISE A UNE TRACTION PAR L INTERMEDIAIRE DE DEUX PLATEAUX RIGIDES ET RUGUEUX

RAYON DE TROU R (M.M.)	NOMBRE DE DEGRE DE LIBERTE	LA CHARGE LIMITE (Q/K)LIM.	RAYON DE TROU R	NOMBRE DE DEGRE DE LIBERTE	LA CHARGE LIMITE (Q/K)LIM.
0.00	129	1.740	25.00	129	0.910
0.00	600	1.730	30.00	129	0.750
5.00	129	1.630	35.00	131	0.570
10.00	129	1.460	40.00	131	0.390
15.00	129	1.270	40.00	600	0.380
20.00	129	1.090	45.00	131	0.210
20.00	600	1.080	50.00	---	0.000

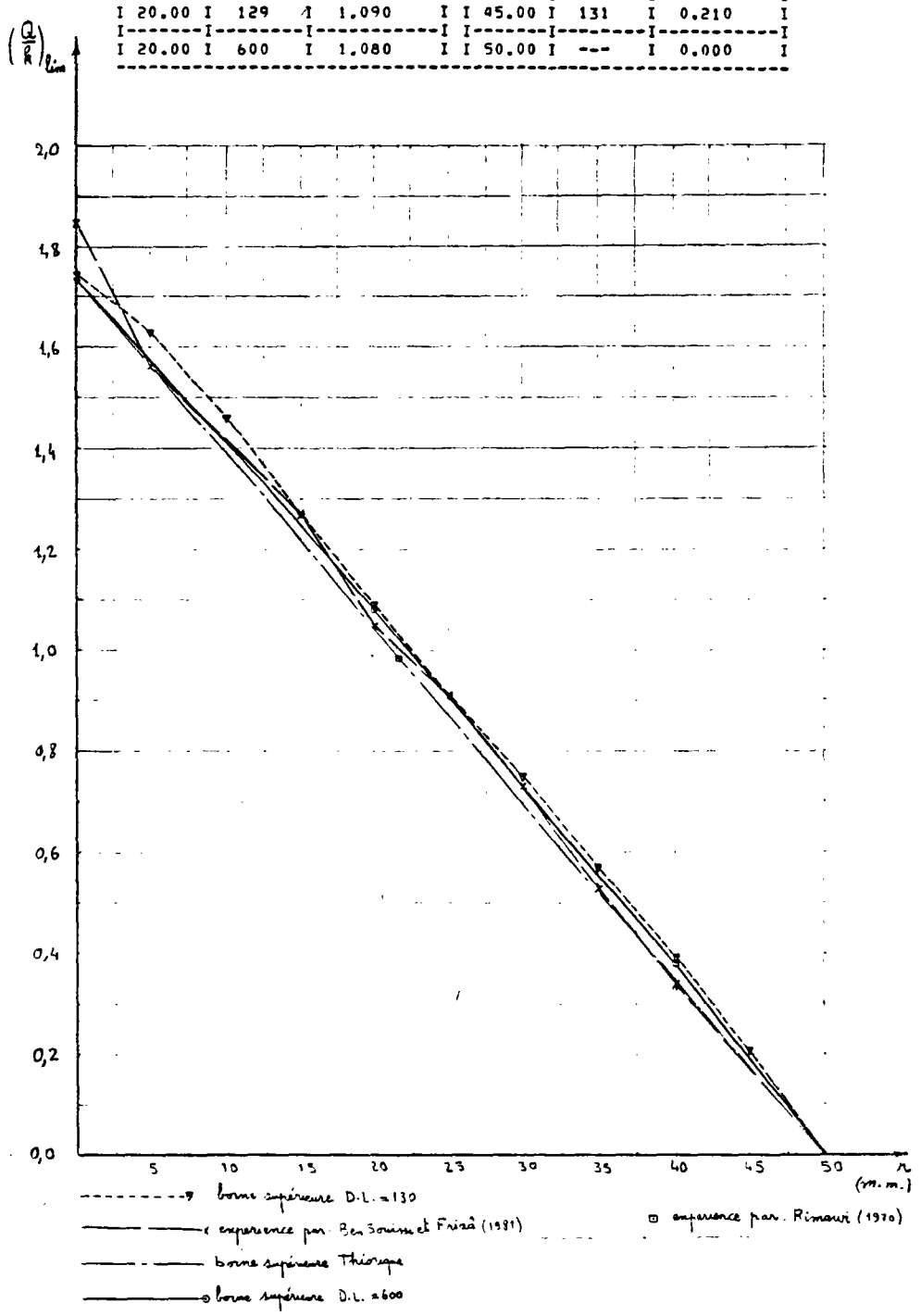


Fig. 49. Charges limites d'une plaque trouée en contraintes planes

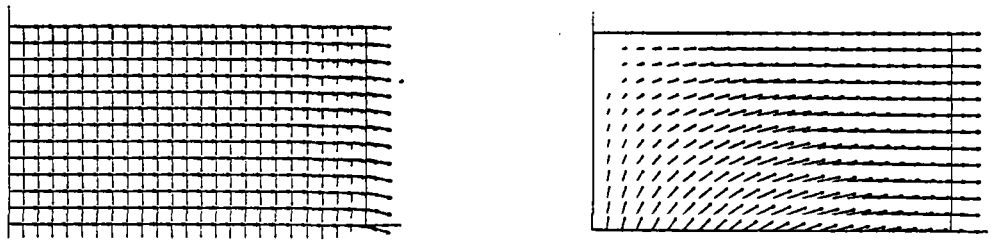


Fig. 50. Les champs de contraintes principales et de vitesses pour un quart de la plaque sans trou (D.L. = 600)

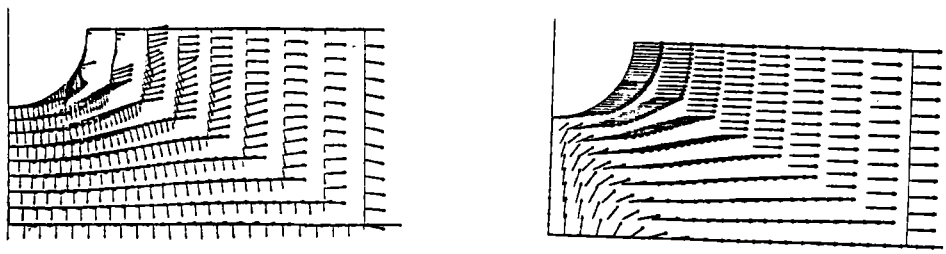


Fig. 51. Les champs de contraintes principales et de vitesses pour un quart de la plaque munie d'un trou de rayon r = 20 mm (D.L. = 600)

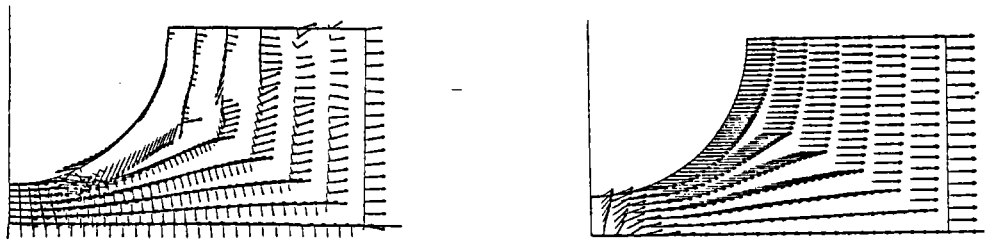


Fig. 52. Les champs de contraintes principales et de vitesses pour un quart de la plaque munie d'un trou de rayon r = 40mm (D.L. = 600)

Les figures 50, 51 et 52 représentent les champs de vitesses et de contraintes principales pour les rayons r = 0, 20 et 40mm avec 600 degrés de liberté.

c. Comparaison des résultats

Rimawi et Dogan [66,1970] ont obtenu en faisant des essais sur des plaques de dimensions L = 500 mm, h = 35mm, e = 5mm, munie d'un trou centré de diamètre 15mm, chargée dans la direction de la longueur, une charge limite $\left(\frac{Q}{k}\right)_{lim} = 0{,}990$ ce qui est presque équivalent à la charge limite d'une plaque de dimension (180×100×10mm) munie d'un trou de rayon $r = \frac{15}{35} \times 50 = 21{,}43$mm (Fig. 49). Ces auteurs ont indiqué que la charge limite pour des plaques de dimensions L×h×e (Fig. 48), munie d'un trou de rayon r est : $\left(\frac{Q}{k}\right)_{lim} = \sqrt{3}\left(1-\frac{r}{h}\right)$ qui est représentée par une droite sur la figure 49. On voit sur cette figure que nos résultats numériques sont en très bon accord avec les autres résultats. Pour la plaque sans trou la charge limite obtenue par Ben-Souissi et Friaâ est supérieure à celle que nous avons trouvée, de l'ordre de 6%. Cela est dû aux grands déplacements non négligeables qui se produisent avant l'écoulement, ainsi qu'à l'épaisseur de 10mm de la plaque qui ne présente pas exactement un état de contrainte plane.

9. LA CHARGE LIMITE D'UNE POUTRE EN FLEXION SIMPLE

Le problème est défini au § I-4-3. Rappelons que la poutre est supposée en état de déformations planes. Nous faisons l'hypothèse suivante :

- la distribution des contraintes, sur l'extrémité de la poutre dûe au moment fléchissant (voir la Fig. 6 de la partie I) est triangulaire.

Il est clair que sous cette hypothèse, on obtiendra une charge limite qui est plus faible que la charge limite réelle (cf. § I-4-3). Nous avons résolu ce problème en utilisant la méthode des super-réseaux indiquée au § II-2-2-2-2, avec $p_{min} = 1{,}01$ et un test d'arrêt $\|\nabla H\| \leq 10^{-4}$. Les résultats

obtenus sont notés sur le tableau suivant, la charge limite est calculée avec 0,5% de précision relative.

LA CHARGE LIMITE D UNE POUTRE EN FLEXION SIMPLE

NOMBRE DES ELEMENTS	NOMBRE DES NOEUDS	DEGRES DE LIBERTE	(M/(K*H**2))LIMITE
8	8	5	2.274
16	13	8	1.672
64	41	24	1.542
144	85	48	1.451

La figure 52, présente une charge limite de l'ordre de $\left(\frac{Q}{kh^2}\right)_{lim} = 1,45$ qui est bien une borne supérieure de la charge limite exacte, 4/3, obtenue au § I-4-3. Pour trouver un meilleur résultat il faut encore augmenter le nombre de degrés de liberté. Les figures 53, 54 et 55 représentent les champs de vitesses et de déviateurs des contraintes principales. On voit bien que ce sont seulement les éléments du coin où s'exercent la contrainte maximale (point B de la Fig. 6 de la Partie I), et qui sont plastifiés tandis que les autres éléments restent rigides. Ce qui veut dire que la charge que nous avons obtenue correspond au début de plastification de la poutre (donc la limite élastique)

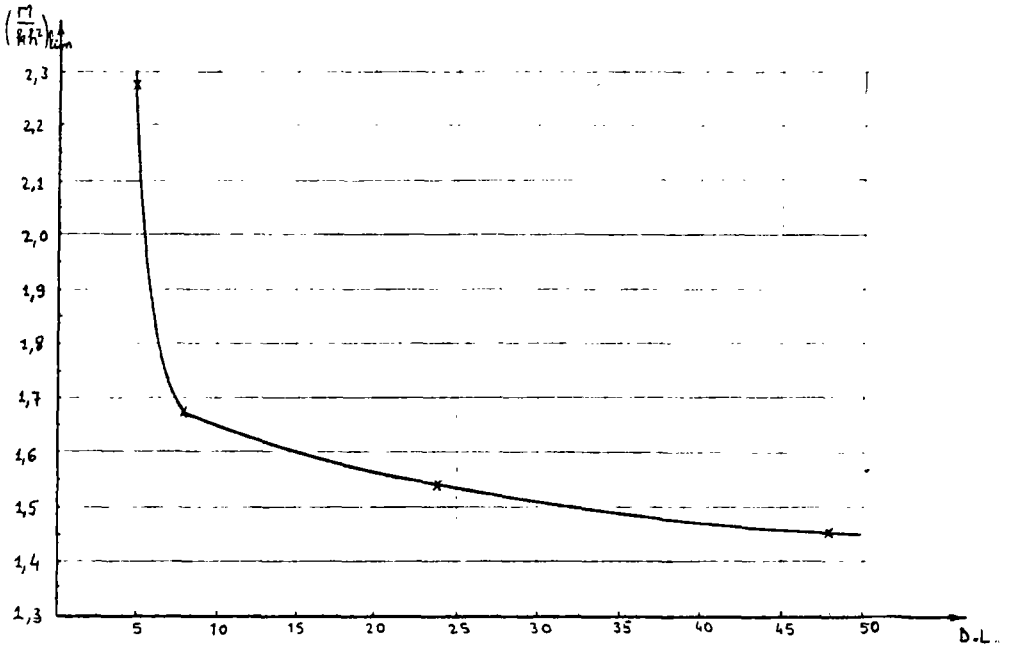


Fig. 52. Charge limite d'une poutre en flexion simple, en fonction de degrés de liberté.

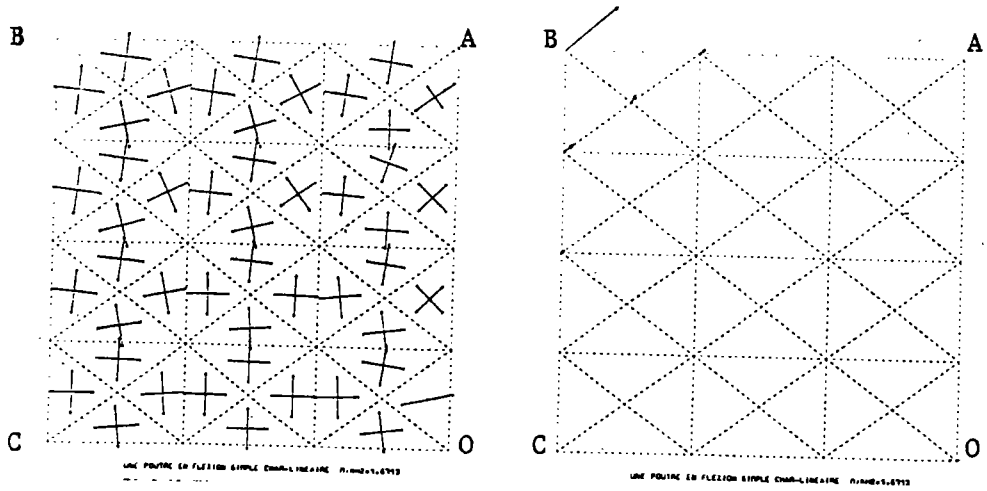


Fig. 53. Champs de déviateurs des contraintes principales et de votesses (D.L. = 17)

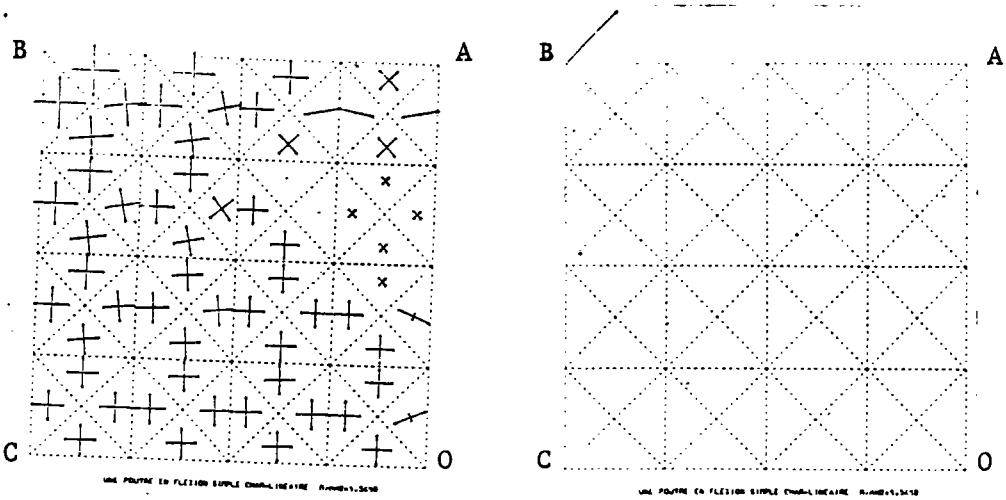
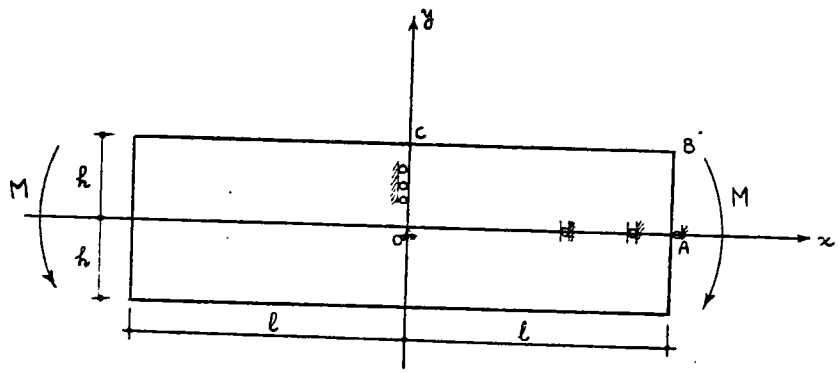


Fig. 54. Champs de déviateurs des contraintes principales et de vitesses (D.L. = 24)

et non à la charge de ruine (cf. § I-4-3). On pourrait dire aussi que la charge obtenue correspond à la charge de rupture d'un matériau fragile (§ I-4-3).



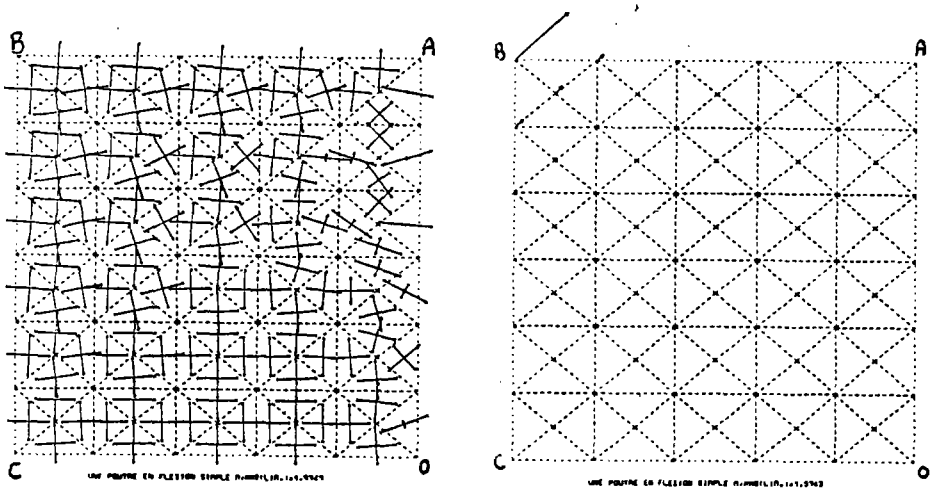


Fig. 55. Champs de déviateurs des contraintes principales et de vitesses (D.L. = 48)

10. CHARGE LIMITE D'UNE FONDATION SUPERFICIELLE SUR UN MILIEU SEMI-INFINI CONSTITUE D'UN MATERIAU DE VON MISES EN DEFORMATION PLANE

Une fondation rigide de largeur 2ℓ est appuyée sur un sol rigide-plastique avec le critère de Von Misès occupant un domaine (Ω), semi-infini (Fig. 56). Le contact entre la fondation et le sol est supposé rugueux. La fondation est chargée par une charge concentrée d'intensité moyenne Q. On se propose de calculer la charge limite dans le cas des déformations planes.

Ce problème est un problème classique de la mécanique des sols, et le résultat est connu $\left(\frac{Q}{k}\right)_{lim} = (\pi+2)$ où k est la résistance au cisaillement du matériau. Nous avons résolu ce problème en employant la méthode d'inversion de matrice (point fixe § II-2-2-1-4) avec $p_{min} = 1{,}03$ et un test d'arrêt de $\| \nabla \mathcal{L} \| \leqslant 10^{-3}$. Pour nos calculs nous avons considéré la moitié de la structure en la limitant à OABC (Fig. 56) avec $\ell = 2m$; et les conditions aux limites :

- sur OA : $v_y = T_x = 0$; - sur AB : $v_x = T_y = 0$
- sur BD : $T_x = T_y = 0$; - sur OC : $v_x = T_y = 0$
- sur CD : $\int_0^{\ell} \sigma_{yy}\, dx = \ell Q$; $v_x = 0$; $\frac{\partial v_y}{\partial x} = 0$,

Les résultats obtenus sont donnés sur le tableau suivant ainsi que sur la figure 57. Nous avons trouvé une borne supérieure de la charge limite. Pour l'améliorer il faut encore augmenter le nombre de degrés de liberté et tendre de plus en plus p vers 1.

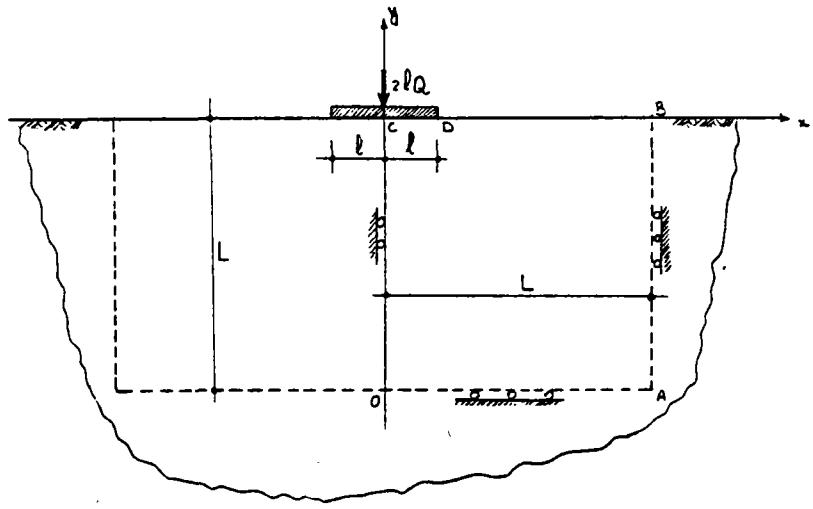


Fig. 56. Une fondation superficielle en déformations planes

Les champs de vitesses et de contraintes principales (à une constante près) sont représentés sur les figures 58, 59 et 60. On voit bien qu'une partie importante de notre structure est restée rigide, cela veut dire que la suppression de cette partie n'a pas d'influence sur la charge limite calculée. Donc en réalité le nombre de degrés de liberté est encore plus faible que celui représenté par ces figures. Ce problème peut être considéré simplement comme un essai de la méthode décrite au § II-2-2-1-4.

Wicks et al [82 , 1975] en utilisant la méthode cinématique classique et 8 éléments rectangulaires chacun possédant 8 noeuds, pour un nombre de degrés de liberté de l'ordre de 214 ont trouvé une charge limite qui est très proche de la charge réelle 5,142.

LA CHARGE LIMITE D UNE FONDATION SUPERFICIELLE EN DEFORMATION PLANE

NOMBRE DES ELEMENTS	NOMBRE DES NOEUDS	NOMBRE DES DEGRES DE LIBERTE	LA CHARGE LIMITE (Q/K)LIM.
18	16	9	11.089+(OU-)0.055
32	25	17	9.676+(OU-)0.048
64	41	33	8.270+(OU-)0.041
100	61	52	7.430+(OU-)0.037

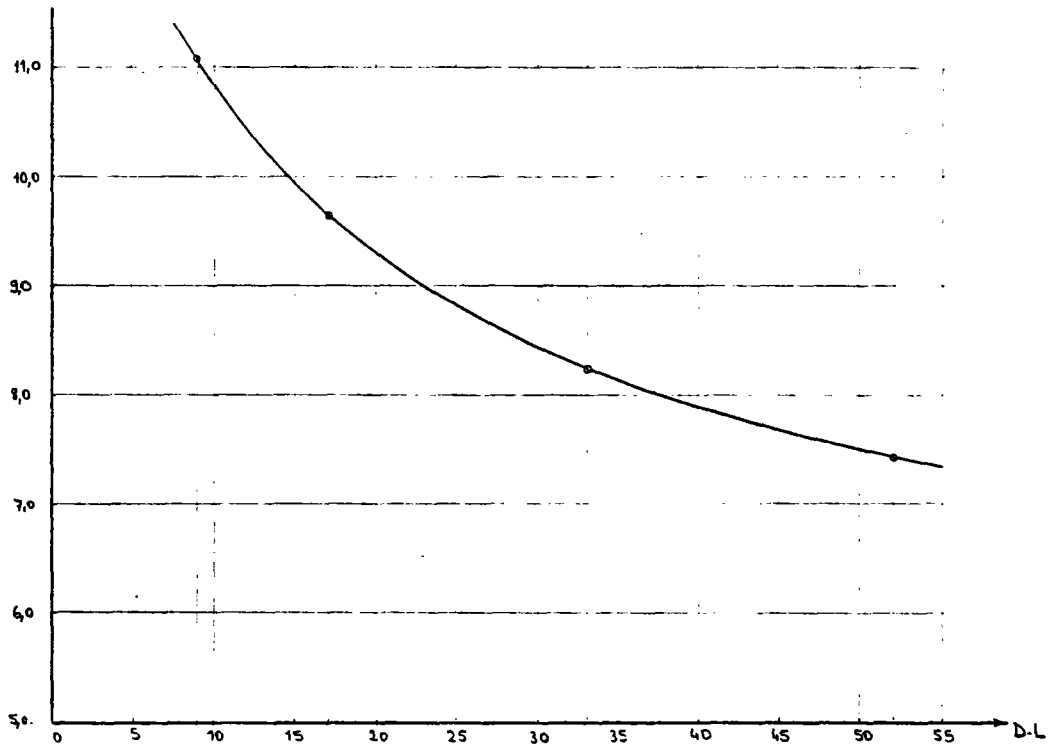


Fig. 57. Charge limite en fonction de degrés de liberté.

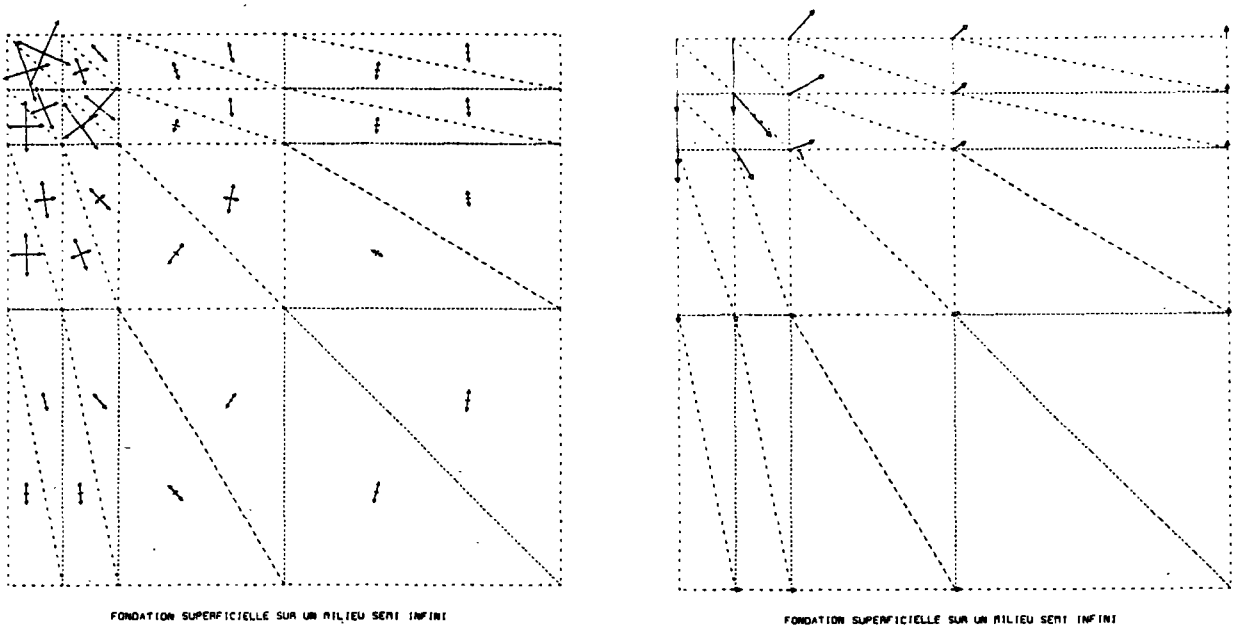


Fig. 58. Champs de contraintes principales et de vitesses (D.L. = 17 et $\ell/L = 0,1$)

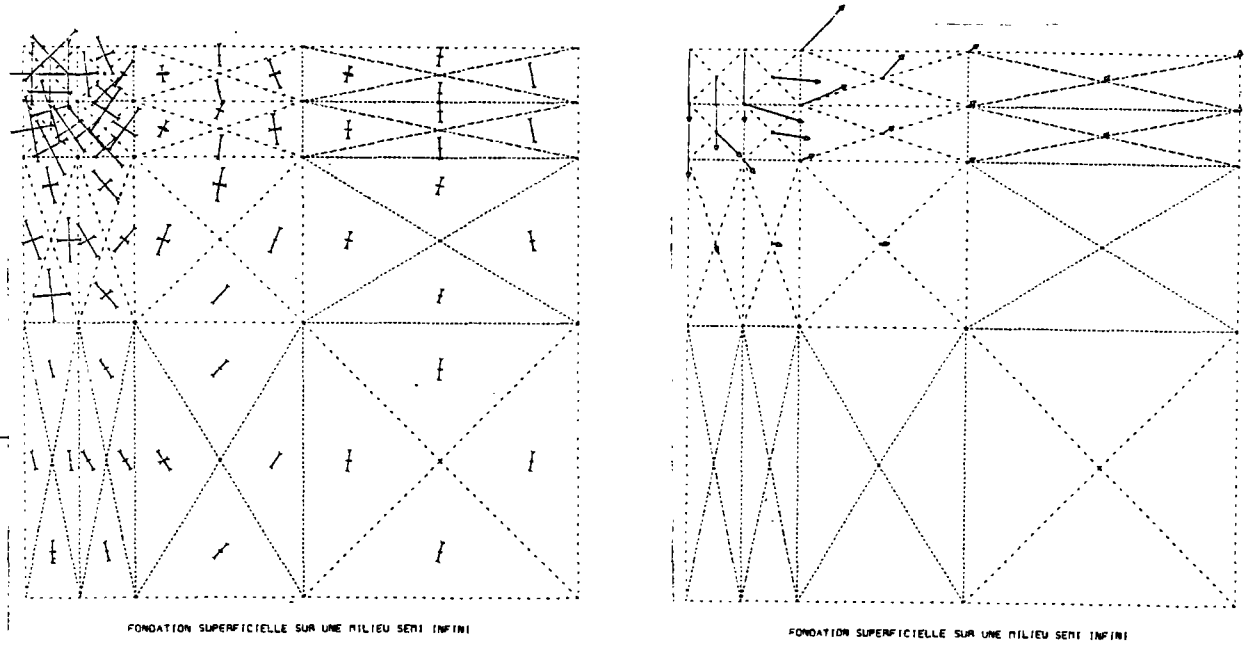


Fig. 59. Champs de contraintes principales et de vitesses (D.L. = 33 et $\ell/L = 0,1$)

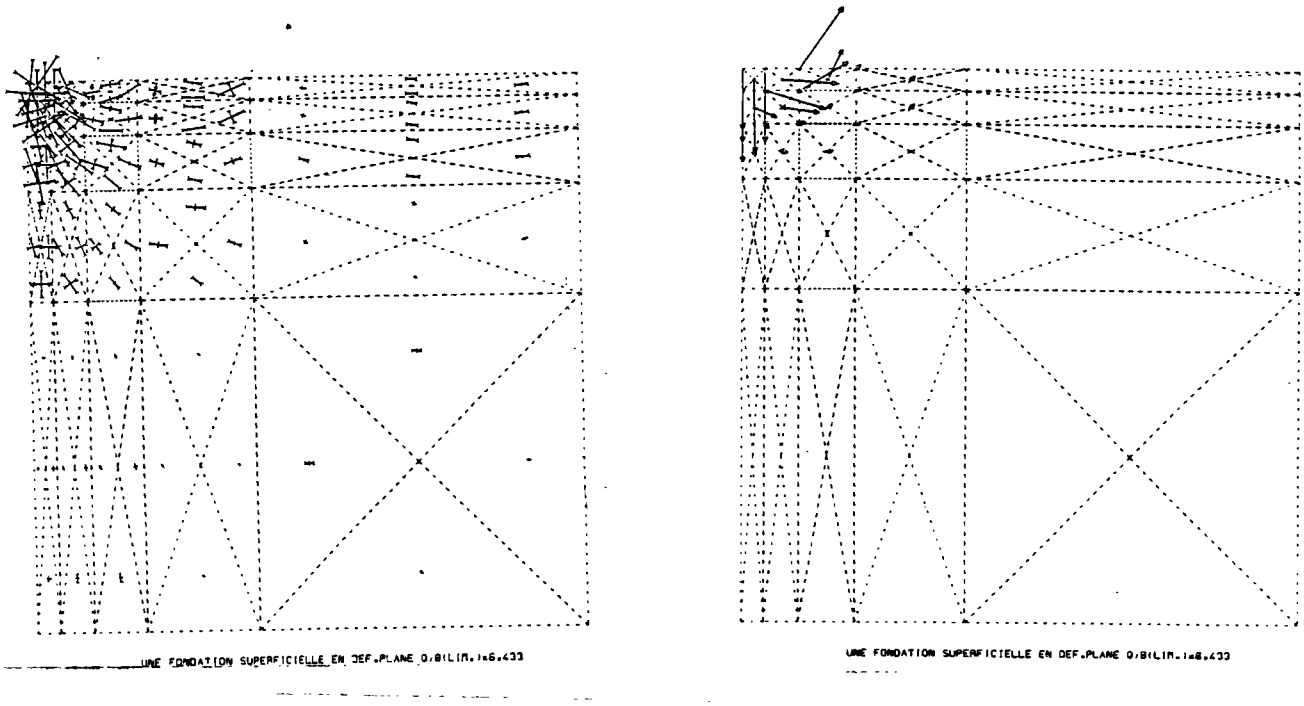


Fig. 60. Champs de contraintes principales et de vitesses (D.L. = 52 et $\ell/L = 0,04$)

CONCLUSION

En conclusion, on peut dire que la loi de Norton-Hoff peut jouer deux rôles essentiels :

.en tant que loi de comportement, généralisant la loi de Norton au cas des sollicitations multidimensionnelles ;

.en tant que modèle mathématique pour régulariser la loi de la plasticité parfaite de Von Mosès (FRIAÂ [27, 1979], SUQUET [76, 1981]).

Nous avons établi divers programmes de calculs basés sur ces idées pour le calcul de l'écoulement d'une structure et le calcul des charges-limite. Ces programmes ont donné dans de nombreux cas des résultats convenables.

Signalons pour l'avenir quelques problèmes à examiner :

- Etude de matériaux non homogènes ;
- Couplage avec les problèmes thermiques pour les problèmes de géophysiques. Les coefficients de la loi de Norton-Hoff dépendent en effet de la température.
- Problème de dynamique en géophysique.
- Etude complémentaire des problèmes en déformation plane qui posent encore, comme on l'a vu, des problèmes numériques dûs à la condition d'incompressibilité lorsque l'exposant p tend vers 1.

ANNEXE

CALCUL DE LA CHARGE LIMITE D'UNE PLAQUE CARREE MUNIE D'UN TROU CENTRE, EN DEFORMATIONS PLANES.

Considérons une plaque carrée de dimensions 2×2 unités, munie d'un trou circulaire centré de rayon a, soumise sur ses deux bords à une charge uniformément répartie d'intensité Q. La plaque est constituée d'un matériau rigide-plastique parfait de Von Misès, avec critère $s_{ij}\, s_{ij} \leqslant 2k^2$ où les s_{ij} $(i,j = 1 \text{ à } 3)$ sont les déviateurs de contraintes σ_{ij} et k est la résistance au cisaillement simple du matériau. Les déviateurs de contraintes principales sont donnés par :

$$s_1 = \frac{1}{3}[2\sigma_1 - (\sigma_2+\sigma_3)] \;\; ; \;\; s_2 = \frac{1}{3}[2\sigma_2 - (\sigma_1+\sigma_3)] \text{ et } s_3 = \frac{1}{3}[2\sigma_3 - (\sigma_1+\sigma_2)] .$$

Le convexe de Von Mises peut être mis sous forme de :

$$f(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) = \frac{2}{3}(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-\sigma_1\sigma_2-\sigma_2\sigma_3-\sigma_3\sigma_1) - 2k^2 \leqslant 0,$$

la loi de comportement du matériau (Loi de normalité) donne :

$$\frac{\dot{\varepsilon}_1}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_1}} = \frac{\dot{\varepsilon}_2}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_2}} = \frac{\dot{\varepsilon}_3}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_3}} = \lambda \qquad (\lambda > 0)$$

En déformations planes on a : $\dot{\varepsilon}_3 = 0$, d'où $\frac{\partial f}{\partial \sigma_3} = 0$ qui nous donne : $\sigma_3 = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}$ et donc $f(\sigma_1,\sigma_2) = \frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)^2 - 2k^2 \leqslant 0$ qui n'est rien d'autre que le matériau de Tresca.

1. Calcul de la borne inférieure de la charge limite $(\underline{Q})$ - méthode statique :

Il faut trouver le maximum de la charge Q équilibré avec au moins un champ de contraintes, ne violant pas le critère $f(\sigma_1,\sigma_2) \leqslant 0$.

Nous considérons un quart de la plaque (deux axes de symétrie), et le divisons en cinq zones à contraintes constantes (Fig. 1). On définit un champ de contraintes statiquement admissibles pour :

- zone 1 : $\sigma_1 = Q$; $\sigma_2 = \frac{Qa}{(1-a)(1-\xi)}$

- zone 2 : $\sigma_1 = \frac{Q(\xi-2a+\sqrt{4a^2+\xi^2})}{2\xi(1-a)}$; $\sigma_2 = \frac{Q(\xi-2a-\sqrt{4a^2+\xi^2})}{2\xi(1-a)}$

- zone 3 : $\sigma_1 = \frac{Q}{1-a}$; $\sigma_2 = 0$

- zone 4 : $\sigma_1 = 0$; $\sigma_2 = -\frac{Qa}{(1-a)(\xi-a)}$

- zone 5 : $\sigma_1 = 0$; $\sigma_2 = 0$.

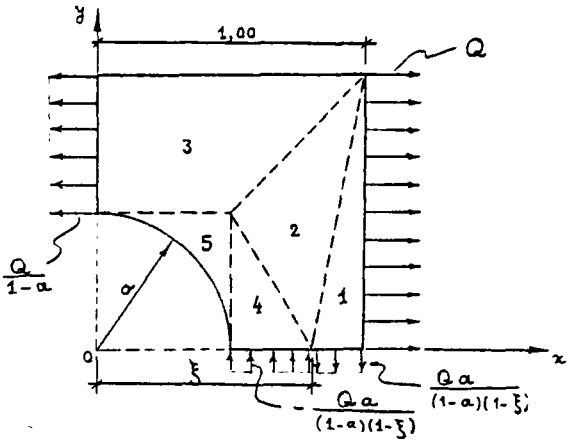


Fig. 1. Les 5 zones à contraintes constantes

Il nous faut donc maximiser la charge Q, tel que le champ des contraintes statiquement admissibles avec Q ne viole pas le critère :

$$f(\sigma_1,\sigma_2) = \frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)^2 - 2k^2 \leq 0.$$

- Pour la zone 1 on a :

$$f(\sigma_1,\sigma_2) \leq 0 \Rightarrow Q \leq \left|2 + \frac{2a}{(1-a)(1-\xi)-a}\right| .k \qquad (1)$$

- Pour la zone 2 :

$$Q \leqslant \frac{2\xi(1-a)}{\sqrt{4a^2+\xi^2}} .k \qquad (2)$$

- Pour la zone 3 :

$$Q \leqslant 2(1-a)k \qquad (3)$$

- Pour la zone 4 :

$$Q \leqslant \frac{2(1-a)(\xi-a)}{a} .k \qquad (4)$$

Posons pour la zone i (i = 1 à 5) ; $\rho_i = \frac{Q}{k}$. On sait que $0 \leqslant a \leqslant \xi \leqslant 1$ (5)

Maintenant nous devons trouver ρ_i maximum qui respecte les inégalités (6) à (11) :

$$\rho_1' \leqslant \frac{2(1-a)(1-\xi)}{1-2a-(1-a)\xi} \text{ si } 0 \leqslant \xi \leqslant \frac{1-2a}{1-a} \qquad (6)$$

$$\rho_1'' \leqslant \frac{2(1-a)(1-\xi)}{2a-1+(1-a)\xi} \text{ si } \frac{1-2a}{1-a} \leqslant \xi \leqslant 1 \qquad (7)$$

$$\rho_2 \leqslant \frac{2\xi(1-a)}{\sqrt{4a^2+\xi^2}} \qquad (8)$$

$$\rho_3 \leqslant 2(1-a) \qquad (9)$$

$$\rho_4 \leqslant \frac{2(1-a)(\xi-a)}{a} \qquad (10)$$

$$0 \leqslant a \leqslant \xi \leqslant 1 \qquad (11)$$

Traçons les inégalités (6) à (10) par rapport à ξ. On a les trois figures suivantes :

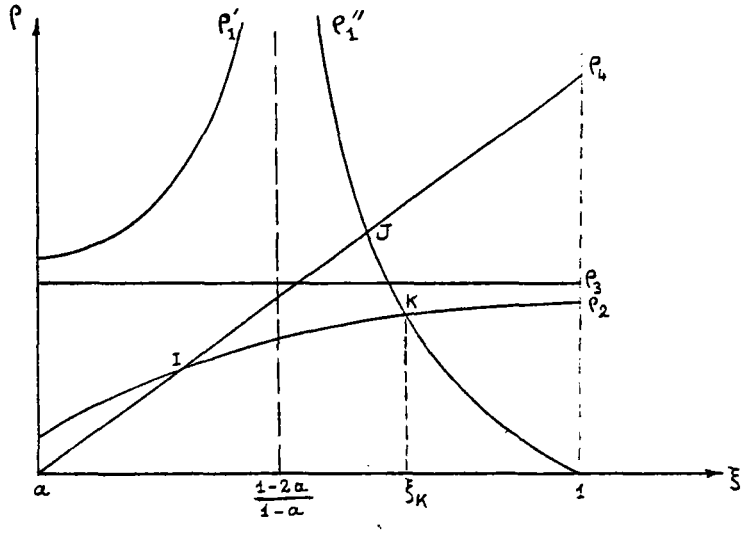


Fig. 2. Variation des ρ_i pour $0 \leqslant a \leqslant 0{,}381966$

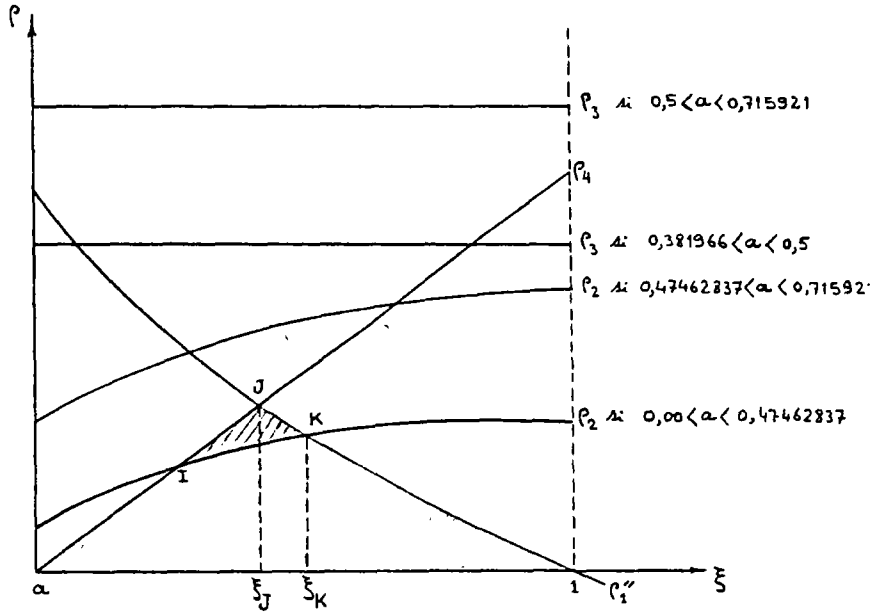


Fig. 3. Variation des ρ_i pour $0{,}381966 \leqslant a \leqslant 0{,}715921$

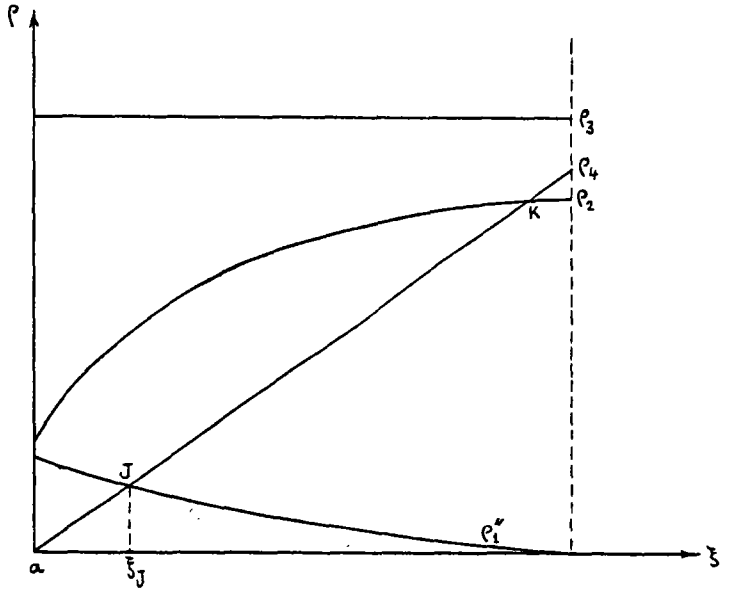


Fig. 4. Variation des ρ_i pour $0{,}71592 \leqslant a \leqslant 1$

On voit sur les figures 2,3 et 4 que dans le cas où $0 \leqslant a \leqslant 0{,}47462837$, ξ_K correspond au maximum de ρ et il vérifie l'équation d'intersection de ρ_2 et ρ_1'' :

$$a(a-2)\xi_K^4 + 2a(3-2a)\xi_K^3 - 4a\xi_K^2 + 8a^2\xi_K - 4a^2 = 0 \quad \text{avec } 0 \leqslant \xi_K \leqslant a$$

qui nous donne une borne inférieure de la charge limite :

$$\rho^- = \frac{2\xi_K(1-a)}{\sqrt{4a^2+\xi_K^2}}$$

Quand $0{,}47462837 \leqslant a \leqslant 1$, c'est ξ_J qui nous donne le maximum de ρ,

$$\xi_J = \frac{-(a-1)^2 + \sqrt{a^4-4a^3+10a^2-4a+1}}{2(1-a)}$$

qui nous donne :

$$\rho^- = \frac{a^2 - 4a + 1 + \sqrt{a^4-4a^3+10a^2-4a+1}}{a}$$

On a représenté ces résultats sur la figure 11.

2. Calcul de la borne supérieure de la charge limite (Q^+) - méthode cinématique

Pour le cas de déformations planes, une discontinuité de vitesses relatives $\vec{u}$ (tangente à la surface de glissement C), produit une puissance dissipée par l'unité de surface de glissement, qui est :

$$\pi(\vec{u}) = k|\vec{u}| \qquad \text{(voir Salençon [75, 1978]).}$$

Pour calculer la borne supérieure, nous considérons les mécanismes de rupture suivants :

1° mécanisme (Fig. 5) :

La puissance dissipée interne vaut :

$$\dot{\tau}_{in} = 4\left[\frac{1 - a\cos\theta}{\sin\beta}\right] \cdot \frac{v}{\cos\beta}\, k$$

et celle des forces extérieures vaut :

$$\dot{\tau}_{ex} = 4\,Q\,V.$$

Pour que la charge Q soit supportable, il faut que $\dot{\tau}_{ex} \leqslant \dot{\tau}_{in}$ d'où on a en posant $\frac{Q}{k} = \rho$

$$\rho \leqslant \frac{1 - a\cos\theta}{\sin\beta\cos\beta}$$

et son minimum correspond aux $\beta = \frac{\pi}{4}$ et $\theta = 0$, qui nous donne :

$$\rho^{+} \leqslant 2(1-a).$$

2° mécanisme (Fig. 6)

On garde les mêmes notations, on a :

$$\dot{\tau}_{in} = 4\left[\cos\theta - \sqrt{a^2 - \sin^2\theta}\right] \frac{V}{\sin\theta} k$$

$$\dot{\tau}_{ex} = 4\,Q\,V$$

$$\dot{\tau}_{ex} \leqslant \dot{\tau}_{in} \Rightarrow \rho \leqslant \frac{\cos\theta - \sqrt{a^2 - \sin^2\theta}}{\sin\theta}$$

et son minimum correspond à $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ qui nous donne :

$$\rho^{+} = \frac{1-a^2}{a}$$

3° mécanisme (Fig. 7)

Dans ce mécanisme un quart de plaque tourne autour d'un point A de coordonnées c et d, avec une vitesse de rotation ω. Il est clair qu'afin d'arriver à ce mécanisme de ruine, il faut que les contraintes dans les rotules plastiques arrivent à 2k (limite à la traction). On a alors

$$\dot{\tau}_{in} = 2k\omega\left[\frac{(1-d)^2}{2} + \frac{(d-a)^2}{2} + \frac{(1-c)^2}{2} + \frac{(c-a)^2}{2}\right]$$

$$\dot{\tau}_{ex} = Q\left[\frac{d^2}{2} - \frac{(1-d)^2}{2}\right] w$$

$$\dot{\tau}_{ex} \leqslant \dot{\tau}_{in} \Rightarrow \rho \leqslant \frac{4\left[1 + d^2 + a^2 + c^2 - (1+a)(d+c)\right]}{2d - 1}$$

ρ est minimum pour $c = \frac{1+a}{2}$ et $d = \frac{1 + \sqrt{3a^2 - 4a + 2}}{2}$ qui nous donne :

$$\rho^{+} = -\,2a + 2\sqrt{3a^2 - 4a + 2}$$

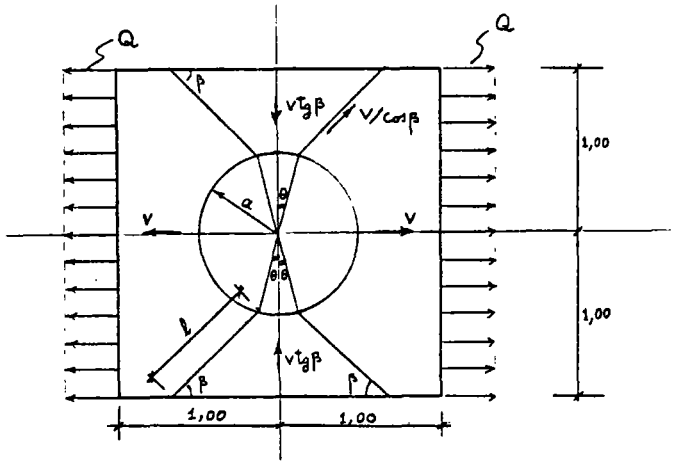


Fig. 5. 1° mécanisme de ruine $\ell = \dfrac{1 - a\cos\theta}{\sin\beta}$

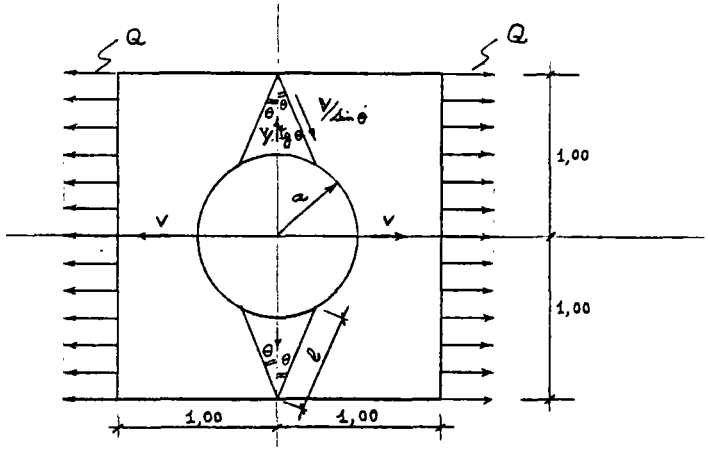


Fig. 6. 2° mécanisme de ruine $\ell = \cos\theta - \sqrt{a^2 - \sin^2\theta}$

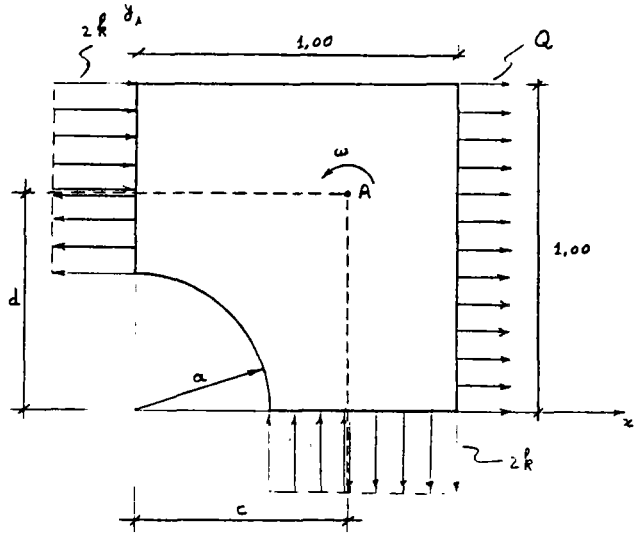


Fig. 7. 3° mécanisme de ruine

Nous avons donc trouvé les trois ρ^+ qui sont représentés sur la figure 8.

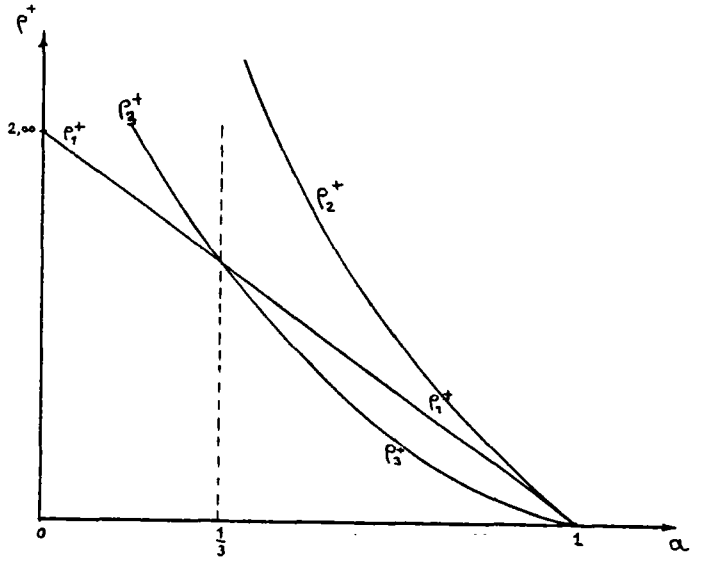


Fig. 8. Les bornes supérieures de la charge limite pour différents mécanismes

On a donc pour la borne supérieure de la charge limite :

$$\text{pour } 0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{3} \qquad \rho^+ = 2(1-a)$$

$$\text{pour } \frac{1}{3} \leqslant a \leqslant 1 \qquad \rho^+ = -2a + 2\sqrt{3a^2-4a+2},$$

Les deux bornes de la charge limite sont représentées sur la figure 9 ainsi que sur le tableau suivant :

LA CHARGE LIMITE D UNE PLAQUE CARREE DE DIMENSIONS 120*120 CM. MUNIE D UN TROU CIRCULAIRE DE RAYON R CENTRE A LA PLAQUE SOUMISE A UNE CHARGE UNIFORMEMENT REPARTIE D INTENSITE Q -EN DEFORMATION PLANE A=R/60 ET LA RESISTANCE AU CISAILLEMENT DU MATERIAU EST K

R(CM.)	A=R/L	(Q+)/K	(Q-)/K	R(CM.)	A=R/L	(Q+)/K	(Q-)/K
0.00	0.000	2.0000	2.0000	33.00	0.550	0.8523	0.4018
3.00	0.050	1.9000	1.8901	35.00	0.583	0.4917	0.3196
5.00	0.083	1.8333	1.8061	36.00	0.600	0.4492	0.2844
6.00	0.100	1.8000	1.7612	39.00	0.650	0.3340	0.1973
9.00	0.150	1.7000	1.6164	40.00	0.667	0.2997	0.1736
10.00	0.167	1.6667	1.5654	42.00	0.700	0.2371	0.1327
12.00	0.200	1.6000	1.4606	45.00	0.750	0.1583	0.0851
15.00	0.250	1.5000	1.3000	48.00	0.800	0.0971	0.0506
18.00	0.300	1.4000	1.1412	50.00	0.833	0.0654	0.0336
20.00	0.333	1.3333	1.0391	51.00	0.850	0.0521	0.0266
21.00	0.350	1.2672	0.9896	54.00	0.900	0.0221	0.0111
24.00	0.400	1.0762	0.8492	55.00	0.917	0.0151	0.0076
25.00	0.417	1.0151	0.8047	57.00	0.950	0.0053	0.0026
27.00	0.450	0.8972	0.7220	57.50	0.958	0.0036	0.0018
30.00	0.500	0.7321	0.5616	60.00	1.000	0.0000	0.0000

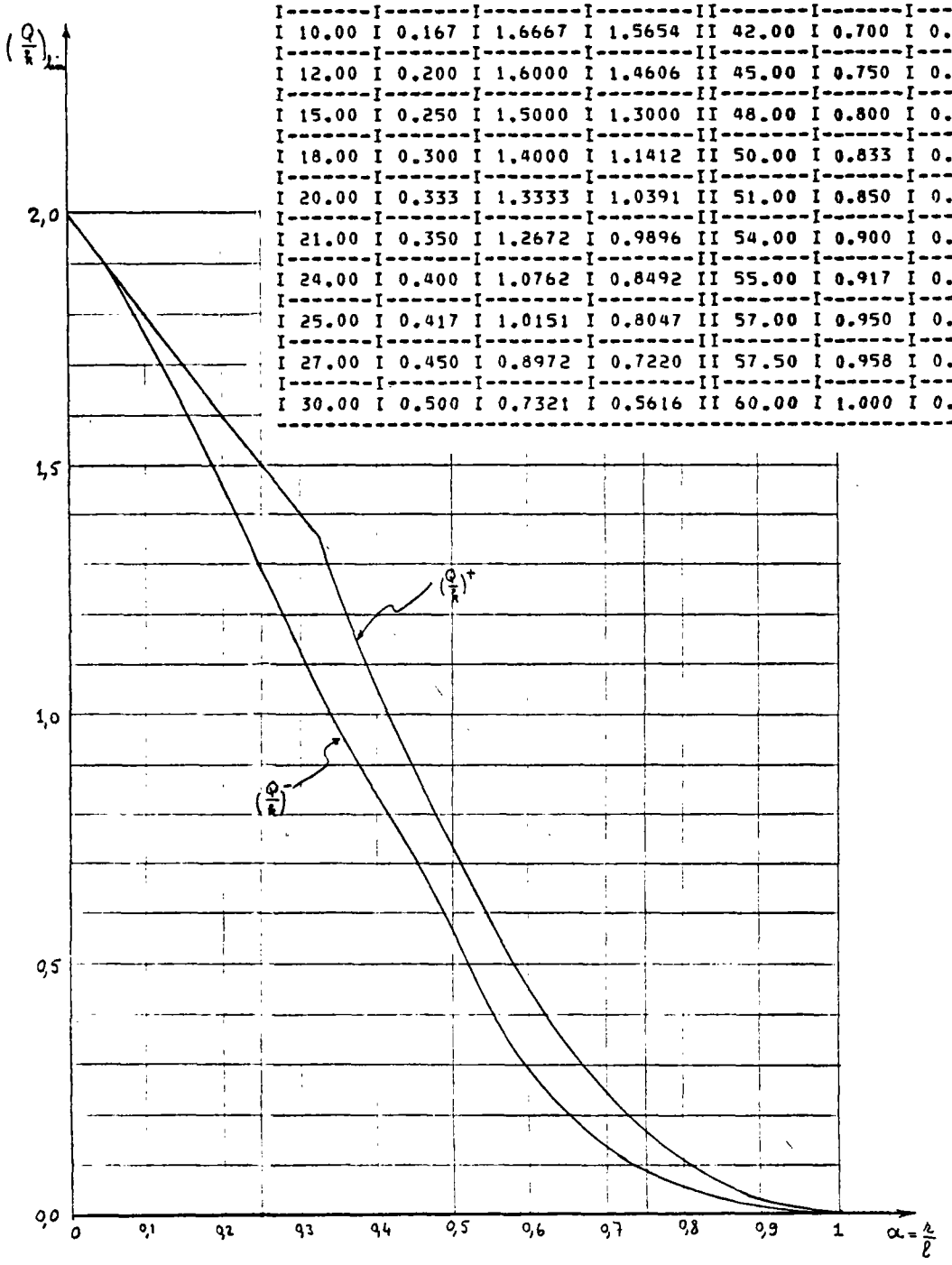


Fig. 9. Bornes supérieure et inférieure de la charge limite

BIBLIOGRAPHIE

[1] ABD SHARIF ABADI, H. ; BEN SOUISSI, F. ; FREMOND, M. ; FRIAÂ, A.- à paraître dans Mechanics Research Communications, N.Y. Paris, 1981

[2] ANDRADE, E.N.- The flow in metals under large constant stresses ; Proc. Roy. Soc. A90, pp. 329 ; 1914.

[3] ARGYRIS, J.H. ; DUNNE, P.C. ; JOHNSON, Th. L. : MULLER, M.- Linear systems with a large number of sparse constraints with applications to incompressible materials. Comp. Meth. in Appl. Mech. & Eng. Vol. 10, 1977, pp. 105-132.

[4] BASS, J.- Cours de mathématiques. Tome III, ed. Masson & Cie, 1971, Paris.

[5] BELYTSCHKO, Ted A.M. ASCE ; HODGE, Ph. G. Jr.- Plane stress limite analysis by finite elements. Jal of Eng. Mech. Division; vol. 96, N° EM6, Dec. 1970, pp. 931-944.

[6] BEN SOUISSI, F. ; FRIAÂ, A.- Charges limites d'une plaque trouée en acier doux soumise à une traction simple. A paraître.

[7] CEA, J.- Optimisation, théorie et algorithmes. Dunod, Paris 1971.

[8] CHEN, W.F.- Limite analysis and soil plasticity. Elsevier Sc. Pub. Comp. N.Y. 1975

[9] CHEN, W.F. ; GIGER, M.W.- Limite analysis of stability of slopes. Jal Soïl Mech. & Found. Division, A.S.C.E., Janvier 1971.

[10] CIARLET, P.G.- Cours d'Analyse Numérique, deuxième partie : Optimisation dans $\mathbb{R}^n$. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris 1976.

[11] CLAUDON, J.- Réflexions sur les déformations plastiques et les fonctions de seuil. Annales des Ponts et Chaussées, 132ème année, N°6, Nov-Déc. 1962.

[12] COULOMB, C.A.- Essai sur une application des règles maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture. Mémoires de la Math. et de Phys. Vol. 7, pp. 343-384, Paris 1973.

[13] COURBON, J.- Plasticité appliquée au calcul des structures. Cours de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, Juillet 1975.

[14] DAIGNIERES, M.- Communication privée.

[15] DAIGNIERES, M. ; FREMOND, M. ; FRIAÂ, A.- Modèle du type Norton-Hoff généralisé pour l'étude des déformations lithosphériques. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 186, Sér. B, pp. 371, Paris 1978.

[16] DAIGNIERES, M. ; FREMOND, M. ; FRIAÂ, A.- Modélisation de collisions continentales par la méthode des éléments finis. Application à la collision himalayenne soumis à tectonophysics. A paraître.

[17] DELBECQ, J.M. ; FREMOND, M. ; PECKER, A. ; SALENCON, J.- Eéléments finis en plasticité et visco-plasticité. Jal de Mech. Appliquée. Vol. 1, n°3, pp. 267-304, 1977.

[18] DESAI, C.S. ; ABEL, J.F.- Introduction to the finite element method. Von Nostrand Reinhold. Canada 1972.

[19] EKELAND, I. ; TEMAM, R.- Analyse convexe et problèmes variationnels. Dunod, Gauthier-Villars, Paris 1974.

[20] FREMOND, M.- Méthodes variationnelles en calcul des structures. Cours de D.E.A. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1979.

[21] FREMOND, M. Métodos variacionais em mecânica dos solidos. II escola de matematica aplicada, vol. 3, pp. 130-219, Rio de Janeiro, 7 Janvier-8 Février 1980.

[22] FREMOND, M. ; FRIAÂ, A.- Analyse limite. Comparaison des méthodes statique et cinématique. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 286, Sér. A, p. 107, Paris 1978.

[23] FREMOND, M. ; FRIAÂ, A.- Etude comparative des méthodes statique et cinématique en analyse limite. Ecoulements ε-libres ; Séminaire U.T.I./ C.I.S.C.O. : "Evolution et théorie modernes en élasticité et plasticité". St Remy lès chevreuse, France, 12-15 Déc. 1977, pp. 351-364.

[24] FREMOND, M. ; SALENCON, J.- Limit analysis by finite element method. Proc. Symp. on "Plasticity and Soil Mech.", Cambridge, Sept. 1973, pp. 297-309.

[25] FRIAÂ, A.- Le matériau de Norton-Hoff généralisé et ses applications en analyse limite. C.R.Acad. Sc. Paris, t. 286, sér. A, 1978.

[26] FRIAÂ, A.- Le matériau de Norton-Hoff généralisé. Applications. VIIIème congrès canadien de mécanique appliquée, Sherbrooke, 1979.

[27] FRIAÂ, A.- La loi de Norton-Hoff généralisée en plasticité et viscoplasticité. Thèse de Docteur ès-Sciences, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 1979.

[28] FRIAÂ, A. ; SUCH, C.- Un modèle rhéologique du type Maxwell-Norton pour le bitume routier. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 2888, Sér. B, 1979, p. 197.

[29] FUNG, Y.C.- Foundations of solid mechanics. Prentice Hall, Inc. New Jersey 1965.

[30] GAYDON, F.A. ; Mc CRUM, A.W.- A theorical investigation of the yield point loading of a square plate with a central circular hole. Jal of the Mech. & Phys of Solids, vol. 2, pp. 156-169, 1954 Pergamon Press Ltd, London.

[31] GLEN, J.W.- The creep of polycrystalline ice. Proc. Roy. Soc., A228, pp. 519-538, 1955, London.

[32] GLOWINSKY, R. ; LIONS, J.L. ; TREMOLIERES, R.- Analyse numérique des inéquations variationnelles, Tome 1, Dunod, Paris, 1976.

[33] GOETZE, C. ; BRACE, W.F.- Laboratory observations of high-temperature rheology of rocks. Tectonophysics, N°13, pp. 583-600, Amsterdam 1972.

[34] GUENOUNI, T.- Thèse de doctorat d'ingénieur. Ecole Nationale des Ponts & Chaussées (à paraître).

[35] HAYES, D.J. ; MARCAL, P.V.- Determination of upper bounds for plan stress using finite elements techniques. Int. Jal of Mech. Sc. Vol. 9, 1967, pp. 245-251.

[36] HILL, R.- On discontinuous plastic states with special reference to localized necking in the sheets. Jal of the Mech. and Phys. of Solids, vol. 1, n°1, Oct. 52

[37] HODGE, Ph. G.- Plastic analysis of structures. Mc Graw Hill, N.Y. 1959.

[38] HOFF, N.J.- Approximate analysis of structures in presence of moderately large creep deformations. Quart. Appl. Math. vol. 12, N°1, 1954.

[39] HOFF, N.J.- A survey of the theories of creep buckling. Proc. Third U.S. Nat. Cong. Appl. Mech., pp. 29-49, 1958.

[40] HULT, J.A.H.- Creep in engineering structures. Blaisdell Pub. Co., Waltham, 1966.

[41] KARMANOV, V.- Programmation mathématique. Ed. Mir, Moscou, 1977.

[42] KING, J.P. ; MARCAL, P.V.- Elastic plastic analysis of two dimensional stress systems by the finite element method. Int. Jal of Mech. Sc., vol. 9, 1967, pp. 143-155.

[43] KOHLSTEDT, D. ; GOETZE, C.- Law stress high temperature creep in olivine single cristals. Jal Geophys. Res., vol. 79, N°14, 1974, pp. 2045-2051.

[44] LADANYI, B.- An engineering theory of creep of frozen soils. Canada Geotech. Jal., vol. 9, 1972, pp. 63-80.

[45] LAI, J.S. ; FINDLEY, W.N.- Creep of 2618 aluminium under step stress changes predicted by a viscous viscoelastic model. Jal of Appl. Mech. March 1980, vol. 47, pp. 21-26.

[46] LIN, T.H.- Theory of inelastic structures. John Wiley & Sons Inc. N.Y., London, 1968.

[47] MANDEL, J.- Propriétés mécaniques des matériaux, Rhéologie-Plasticité, Eyrolles, Paris, 1978.

[48] MARIN, J. ; PAO, Y.H. ; CUFF, G.- Creep properties of lucite and plexiglas for tension, compression, bending and torsion, Trans. ASME, 73, 1951, pp. 705-718.

[49] MASSONNET, CH. ; SAVE, M.- Calcul plastique des constructions. Vol. II, Structures spatiales, Bruxelles, 1963.

[50] MERCIER, B.- Sur la théorie et l'analyse numérique de problèmes de plasticité. Thèse de Docteur ès-Sciences. Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 1977.

[51] MERCIER, B.- Une méthode pour résoudre le problème des charges limites. Jal Méca. Vol. 16, n°3, Paris, 1977, pp. 467-491.

[52] MOREAU, J.J.- Fonctionnelles convexes. Séminaire sur les équations aux dérivées partielles, Collège de France, Paris, 1966.

[53] MURRY, G.- La rhéologie. Monographies du Centre d'Actualisation Scientifique et Technique de l'INSA, n°3, Paris 1969, pp. 137-153.

[54] NAGTEGAAL, J.C. ; PARKS, D.M. ; RICE, J.R.- On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range. Comput. Meth. in Appl. Mech. & Eng., vol. 4, n°2, Sept. 1974, pp. 153-177.

[55] NAYROLES, B.- Essai de théorie fonctionnelle des structures rigides plastiques parfaites. Jal Mec., vol. 9, n°3, 1970, pp. 491-506.

[56] NAYROLES, B.- Quelques applications variationnelles de la théorie des fonctions duales à la mécanique des solides. Jal Mec., vol. 10, n°2, 1971, pp. 263-289.

[57] NEEDLEMAN, A. ; SHIH, C.F.- A finite element method for plane strain deformations of incompressible solids. Comput. Meth. in Appl. Mech. & Eng., vol. 15, n°2, Aug. 1978, pp. 223-240, North Holland Pub. Co.

[58] NGUYEN DANG HUNG.- Direct limit analysis via rigid plastic finite elements. Comput. Meth. in Appl. Mech. & Eng., vol. 8, 1976, pp. 81-116, North-Holland Pub. Co.

[59] NORTON, F.H.- The creep of steel at high temperature. Mc Graw Hill, N.Y., 1929.

[60] ODQVIST, F.K.G.- Proc. Fourth Intern. Congr. Appl. Mech., pp. 228, Cambridge, 1934.

[61] ODQVIST, F.K.G.- Mathematical theory of creep and creep rupture. Oxford Math. monographs, 1966.

[62] PASTOR, J.- Analyse limite : détermination numérique de solutions statiques complètes. Applications au talus vertical. Jal Mech. Appl., vol. 2, n°2, 1978, pp. 167-196.

[63] PASTOR, J. ; TURGEMAN, S.- Mise en oeuvre numérique des méthodes de l'analyse limite pour les matériaux de Von Misès et de Coulomb standard en déformation plane, Mech. Res. Comm. vol. 3, n°6, 1976, pp. 469-474.

[64] POIRIER, J.P.- Plasticité à haute température des solides cristallins Eyrolles, Paris, 1976.

[65] RABATNOV, Yu. N.- Creep problems in structural members. London 1969, North Holland Pub. Co.

[66] RIMAWI, W.H. ; DOGAN, E.- Experiments on yielding of tension specimens with notches and holes ; Experimental Mechanics, Oct. 1979, pp. 427-432.

[67] ROCKAFELLAR, R.T.- Convex Analysis. Princeton University Press, 1970

[68] SALENÇON, J.) Contraction quasi statique d'une cavité à symétrie sphérique ou cylindrique dans un milieu élastoplastique, Annales des Ponts et Chaussées, Mai-Juin 1966, n°3, pp. 175-187 & Juil. Août 1969, n°4, pp. 231-236.

[69] SALENÇON, J.- La théorie des charges limites dans la résolution des problèmes de plasticité en déformation plane. Thèse de Doctorat d'Etat, Faculté des Sc. de l'Université de Paris, 1969.

[70] SALENÇON, J.- Un exemple de non validité de la théorie classique des charges limites pour un système non standard. Int. Symp. on FOund. of Plasticity, Varsovie, 1972, pp. 32-39.

[71] SALENÇON, J.- Butée d'une paroi lisse sur un massif plastique, solutions statiques. Jal de Méca. vol. 11, N°1, Mars 1972, Paris, pp. 135-146.

[72] SALENÇON, J.- Bearing capacity of a footing on a $\phi = 0$ soil with linearly varying shear strength ; Géotechnique, vol. 24, n°3, Sept. 1974, London.

[73] SALENÇON, J.- Le comportement plastique. Séminaire à St Rémy les Chevreuse, 12-15 Déc. 1977 :"Evolution et théories modernes en élasticité et plasticité.

[74] SALENÇON, J.- Théorie de la plasticité pour les applications à la mécanique des sols. Ed. Eyrolles, Paris, 1974.

[75] SALENÇON, J.- Calcul à la rupture et analyse limite. Cours de D.E.A. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Oct. 1978.

[76] SUQUET, P.M.- Sur les équations de la plasticité : existence et régularité des solutions. Jal de Mécanique, vol. 20, n°1, Paris 1981, pp. 3-39.

[77] TAYLOR, D.W.- Fundamentals of soils mechanics ; Wiley, N.Y. 1948.

[78] TIMOSHENKO.- Résistance des matériaux, 2ème partie : Théorie développée et problèmes, Paris-Liège, 1949.

[79] TOMPSON, E.G. ; SAYLES, F.H.- In situ creep analysis of room frozen soil. Jal Soil Mech. Found. Div.; SM9, Sept. 1972, pp. 899-915.

[80] TURGEMAN, S.- Etude des fondations sollicitées à l'arrachement par la théorie de l'analyse limite. Thèse de Dr. de Spécialité. Grenoble, Fevr. 1976. Université Scientifique et Médicale et I.N.P.G.

[81] WATSON, L. ; YANG, W.H.- Some numerical methods for limit analysis in continuum mechanics. Compt. Meth. Appl. Mech. & Eng., vol. 15, n°3, 1978, pp. 353-364.

[82] WICKS, T.M. ; BECKER, E.B. ; YEW, C.H. ; DUSHMAN, R.S.- On application of the finite element method to limit analysis. Acad. Press, N.Y. 1975, pp. 957-967.

[83] WU, S.- Rheology of high solid coatings. Jal Appl. Polymer Sc. Vol. 22, 1978, Part I, pp. 2769-2782, Part II. pp. 2783-2791.

[84] ZIENKIEWICZ, O.C.- The finite element method in engineering science, McGraw Hill, London, 1971.