



**HAL**  
open science

# Contribution à la modélisation des structures en béton armé par la méthode des éléments finis

Cléarchos Frantzeskakis

► **To cite this version:**

Cléarchos Frantzeskakis. Contribution à la modélisation des structures en béton armé par la méthode des éléments finis. Modélisation et simulation. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1987. Français. NNT: . tel-00529454

**HAL Id: tel-00529454**

**<https://pastel.hal.science/tel-00529454>**

Submitted on 25 Oct 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NS 13859(2)

THESE DE DOCTORAT DE L' ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES

présentée par:

Cléarchos FRANTZESKAKIS

POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR DE L' E.N.P.C.

SUJET DE LA THESE

CONTRIBUTION A LA MODELISATION  
DES STRUCTURES EN BETON ARME  
PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

soutenue le 22 juin 1987

Composition du jury:

Bernard HALPHEN	-Président
Quoc-Son NGUYEN	-Rapporteur
Jaques MAZARS	-Rapporteur
Jean-Noël THEILLOUT	-Directeur de thèse
Robert CHAUSSIN	-Examineur
Jean-Marie REYNOUARD	-Examineur
Pierre RICHARD	-Examineur



Laboratoire Central des Ponts et Chaussées - 58, bd Lefebvre

75732 Paris CEDEX 15

14



RESUME

Ce travail a pour but l'élaboration d'un code d'éléments finis pour le calcul des structures planes en béton armé sous charges monotones. La représentation "répartie" est utilisée tant pour les armatures que pour les fissures. Le béton est considéré comme un matériau élastoplastique écrouissable en compression avec une loi d'écoulement non-associée et élastique fragile en traction. Pour l'acier une loi élastique-parfaitement plastique est adoptée. L'adhérence acier-béton et l'engrènement sont introduits par des formulations totales non-linéaires réversibles, tandis que pour l'effet de goujon un modèle linéaire a été adopté. La réponse d'un élément fissuré est obtenue par la considération des phénomènes ci-dessus.

Une nouvelle stratégie de résolution a été conçue qui permet de suivre les fissurations des éléments une par une afin de bien tenir compte de ce phénomène particulièrement dépendant du trajet de chargement.

Les prévisions du programme ont été comparées avec les données expérimentales sur trois exemples de structures. Les résultats sont globalement prometteurs et plusieurs aspects de la réponse des structures ont été approchés d'une façon satisfaisante.

D'autre part, des indications sont obtenues sur des améliorations futures et notamment vers l'utilisation d'éléments d'ordre supérieur et l'adoption de modèles plus fins pour les phénomènes mentionnés.

MOTS-CLES

éléments finis (méthode)  
béton armé  
fissuration  
plasticité  
engrènement  
adhérence  
goujon  
algorithme non-linéaire



E.N.P.C.



DOC05462



### ABSTRACT

A computer program is developed for the finite element nonlinear analysis of two-dimensional reinforced concrete structures under monotonic loading. The smeared-crack approach is used and the reinforcement is considered uniformly distributed within the element. An elastic work-hardening plastic stress-strain relationship with nonassociated flow rule is assumed for the concrete in compression and an elastic brittle fracture behavior in tension. The steel is considered as an elastic perfectly plastic material. Nonlinear reversible formulations are used for the tension stiffening and the aggregate interlock while a linear model is adopted for the dowel action of the reinforcement. The overall behavior of a cracked element is obtained by combining the above phenomena in such a way that the normal and tangential effects are coupled.

A new solution algorithm is developed, with variable load level, which follows the subsequent cracking of elements. Therefore a better approximation of the behavior of the cracked structure, highly path dependent, is obtained.

Numerical examples are presented for three structures and comparison is made with experimental results. A good agreement is observed and many aspects of the behavior of the structures are well represented by the analysis. These applications also showed the improvements to carry out and particularly the use of higher order elements and better models for the phenomena mentioned above.

### KEY WORDS

finite element method

reinforced concrete

cracking

plasticity

aggregate interlock

bond

dowel action

nonlinear solution algorithm



## REMERCIEMENTS

J'exprime ma profonde reconnaissance à Monsieur B. HALPHEN, Professeur à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées et Chef du service de la Mécanique du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, pour ses précieux conseils et pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail ainsi que d'avoir accepté de présider le jury.

Je tiens à remercier particulièrement Monsieur Q. S. NGUYEN, Directeur de recherche au CNRS, et Monsieur J. MAZARS, Maître de Conférence à l'ENSET, qui ont eu l'amabilité d'accepter la charge d'être les rapporteurs de cette thèse.

Je remercie Monsieur J. N. THEILLOUT, responsable de la dalle d'essais au LCPC, Directeur de thèse, qui m'a encadré dans sa section et assuré les conditions indispensables à la réalisation de ce travail.

Mes remerciements vont aussi à Messieurs R. CHAUSSIN, Professeur à l'ENPC, J. M. REYNOUARD, Maître de Conférence à l'INSA-Lyon et P. RICHARD, Directeur Scientifique du groupe BOUYGUES, pour leur participation au jury de cette thèse.

Je remercie également

- le LCPC et son Directeur Monsieur J. C. PARRIAUD pour avoir mis à ma disposition les moyens nécessaires au bon déroulement de ce travail
- l'ENPC pour m'avoir admis à la formation par la recherche.

Mes vifs remerciements vont à Mlle NAPOLITANO pour le soin apporté à la dactylographie et la mise en page du rapport.

Je remercie chaleureusement

- tous mes amis thésards au LCPC de m'avoir soutenu jusqu'au bout
- mon amie Effie avec laquelle nous avons partagé les bons moments mais aussi les angoisses de la préparation d'une thèse
- ma famille pour son soutien tout au long de mes études en France.



## TABLE DES MATIERES

Résumé	p 3
Abstract	p 5
Remerciements	p 7
Table des matières	p 9
 <b>INTRODUCTION</b>	 p 13
 <b>CHAPITRE I Les composants du problème - Hypothèses générales</b>	
I.1 Description des phénomènes	p 15
I.2 Hypothèses générales	p 16
I.3 Facteurs retenus - Problèmes à considérer	p 17
 <b>CHAPITRE II Etude des travaux antérieurs</b>	
II.1 Schématisation des armatures et des fissures d'une structure en béton armé dans le cadre des EF	p 19
-Armatures	p 19
-Fissures	p 21
-Commentaires	p 22
II.2 Lois de comportement du béton	p 23
-Commentaires	p 26
II.3 L'adhérence acier-béton	p 27
-Adhérence et EF	p 30
II.4 L'engrènement	p 32
-Engrènement et EF	p 34
-Commentaires	p 35
II.5 L'effet de goujon	p 36
II.6 Eléments finis et béton-armé - Appréciation générale	p 38
 <b>CHAPITRE III Présentation générale de la démarche</b>	
III.1 Choix préliminaires concernant le type d'élément fini et la représentation des fissures et des armatures	p 41
III.2 L'établissement de la loi incrémentale du matériau "composite"	p 43
III.3 Choix des modèles particuliers - Première fissuration d'un élément	p 49

III.3.1	Loi de comportement du béton	p	49
III.3.2	Engrènement	p	56
III.3.3	Effet de goujon	p	58
III.3.4	Adhérence acier - béton	p	61
III.3.5	La première fissuration d'un élément	p	67
	-Commentaires	p	72
III.4	Autour de la stratégie de résolution	p	73
III.4.1	Méthodes de résolution des problèmes non-linéaires	p	73
III.4.2	Variante pour une stratégie adaptée au calcul des structures en béton-armé	p	76
	a.Principes de la méthode	p	76
	b.Détails de la méthode	p	77
	c.Influence de l'algorithme sur la solution d'un problème non-linéaire.Avantages de la méthode	p	79
	d. procédure d'accélération	p	80

#### CHAPITRE IV Présentation du programme

IV.1	L'intégration de la loi élastoplastique (sous-programmes "plastn" et "plastden")	p	83
IV.2	Recherche suivant un trajet de déformations de l'intersection avec une surface ultime (sous-programme "cisult")	p	86
IV.3	Intégration de la loi de comportement pour un élément fissuré (sous-programme "fisden")	p	87
IV.4	Calcul des efforts libérés et des grandeurs initiales à l'instant de la fissuration d'un élément (sous-programme "eflifis")	p	91
IV.5	La mise en oeuvre de la stratégie de résolution (sous-programme "grapac")	p	93

#### CHAPITRE V Applications - Vérifications

V.1	La qualité d'approximation de l'élément triangulaire-Une première conclusion	p	99
V.2	Deux exemples tirés des expériences de Leonhardt et Walther	p	100
V.2.1	Panneau WT3	p	101
V.2.1.a.	Influence du maillage	p	104
V.2.1.b.	Fissuration	p	107
V.2.1.c.	Réponse globale	p	111
V.2.1.d.	Charge de fissuration, charge et mode de ruine	p	114
V.2.1.e.	Plastification	p	116
V.2.1.f.	Déformations de l'acier dans la section médiane	p	117
	-Commentaires	p	118
V.2.2	Panneau WT4	p	119
	-Commentaires	p	123
V.3	La poutre-cloison de Cervenka	p	123
	-Commentaires	p	125
V.4	Considération de tous les exemples traités	p	127

V.5 Remarques sur le processus numérique	p 128
<b>CONCLUSION</b>	p 129
Annexe	p 131
Références bibliographiques	p 147



## INTRODUCTION

Le béton armé existe depuis la fin du 19ème siècle, période vers laquelle est apparue l'idée de palier les insuffisances de résistance à la traction du béton par des aciers noyés dans celui-ci.

La vérification des ouvrages en béton armé était basée, jusqu'à un passé récent, sur une analyse simplifiée qui considérait les deux constituants élastiques linéaires (le béton étant de plus supposé fragile en traction) et utilisait, dans la plupart des cas, les principes de la RDM.

Pour les configurations plus complexes (poutres-cloisons, plaques, etc) que l'on devait traiter suivant la mécanique du milieu continu, on ne disposait que de quelques rares solutions analytiques, le matériau étant toujours considéré élastique homogène. Il fallait donc recourir aux essais ou à l'expérience de construction qui se résumaient en des formules ou règles empiriques.

La tenue des ouvrages n'était pas habituellement mise en cause, grâce à l'action concomitante de plusieurs facteurs (coefficients sévères de sécurité, surestimation des charges nominales, sous-estimation de la résistance des matériaux etc).

Une telle analyse ne fournit aucune indication sur la marge de sécurité de la structure et, de toute façon, la réponse ainsi obtenue, particulièrement la prévision des déformations et des déplacements, est loin de la réalité.

D'autres méthodes, s'inspirant d'une analyse non-linéaire, ont permis de mieux estimer la marge de sécurité d'une structure. Il s'agit de la vérification d'une section aux états limites ultimes, récemment introduite dans la plupart des réglementations, qui considère les deux matériaux totalement plastifiés, ainsi que de l'analyse limite qui fournit un encadrement de la capacité globale de résistance d'une structure donnée sous une charge donnée. Ce type d'analyse exige une attention encore plus grande sur la vérification des déformations, parce que la tenue de l'ouvrage ainsi acquise n'assure pas forcément une déformée acceptable.

L'apparition de la méthode des Eléments Finis, dans les années 50, a permis la solution approchée des structures complexes en considérant les matériaux élastiques linéaires. Mais, particulièrement pour le béton armé, la validité de la linéarité est très limitée, ne couvrant même pas les charges de service, à cause, surtout, de la fissuration et d'une

façon secondaire du comportement du béton en compression. Par conséquent, même sous des charges faibles, les déformations obtenues sont loin de la réalité. Dans ce cas, et a fortiori sous un chargement élevé, au voisinage de la capacité portante de la structure, la réponse recherchée ne peut être obtenue que par la méthode d'EF qui prendrait en compte les phénomènes non-linéaires.

Une telle analyse est aujourd'hui indispensable pour les structures de forme et fonctionnement complexes qui subissent des charges importantes, surtout quand leur défaillance a des conséquences humaines et économiques graves.

D'autre part une telle analyse permet, aussi, de mieux concevoir les structures courantes et de mieux interpréter les essais au laboratoire, tout en réduisant leur nombre, et par conséquent leur coût.

Le présent travail se situe dans ce contexte ; notre objectif est l'élaboration d'un code d'éléments finis spécialement conçu pour le calcul des structures en béton armé, allant jusqu'à la ruine, en essayant d'incorporer la plupart des facteurs de leur réponse non-linéaire.

Notre cible est le calcul des structures entières plutôt que des détails des structures et nous nous intéressons particulièrement à la fissuration et ses conséquences, ce qui nous permettra d'approcher leur dégradation graduelle pendant leur chargement.

## CHAPITRE I : LES COMPOSANTES DU PROBLEME - HYPOTHESES GENERALES

Dans ce chapitre nous allons décrire les causes de la réponse non linéaire d'une structure en béton armé. Ensuite nous présenterons nos hypothèses générales et nous précisons les phénomènes retenus dans notre analyse.

### I.1. Description des phénomènes

Le béton armé est un matériau composite au comportement particulièrement complexe. Ses matériaux constitutifs, acier et béton, ont des propriétés mécaniques très différentes.

Le comportement du béton en compression dévie de la linéarité pour un niveau de sollicitation relativement bas. Les déformations sont influencées par le trajet de sollicitation suivi.

Les déformations instantanées mises à part, le béton subit des déformations différées dues au retrait et au fluage. Ces dernières dépendent, entre autres, de la température et de l'humidité de l'environnement et peuvent atteindre des valeurs importantes.

Le béton a une résistance en traction très faible par rapport à celle en compression. Son dépassement provoque l'apparition de fissures. Une structure en béton armé se fissure très tôt, habituellement sous les charges de service, et, parfois même, avant tout chargement, sous l'effet du retrait. La fissuration permet d'exploiter les capacités de résistance de l'acier, pourvu que l'interface acier-béton transmette les efforts correspondants. Elle met en jeu une série de phénomènes non-linéaires, notamment :

- forte redistribution des contraintes au voisinage de la fissure. La région fissurée, vue comme un ensemble, passe d'un comportement pratiquement isotrope à un autre, anisotrope, qui dépend de l'orientation des fissures et la disposition des armatures. Sa rigidité est radicalement réduite par rapport à la phase non-fissurée. En revanche l'adhérence acier-béton oblige les deux matériaux à collaborer entre les fissures et l'ensemble a un comportement plus rigide que l'acier nu (effet "tension stiffening").
- Une fois la fissure apparue, les déplacements relatifs de ses lèvres, qui présentent des aspérités, génèrent des efforts normaux et tangentiels. Donc, un certain "transfert" d'efforts s'effectue par la fissure (effet d'engrènement).



## CHAPITRE II - ETUDE DES TRAVAUX ANTERIEURS

Dans ce chapitre nous exposerons les points principaux de l'étude bibliographique que nous avons faite, concernant les composantes du problème. Elle nous a permis d'estimer le poids relatif de chaque facteur, de connaître les modèles proposés et elle a orienté nos choix.

### II.1. Schématisation des armatures et des fissures d'une structure en béton armé dans le cadre des EF

Généralement, deux manières principales sont utilisées : "discrète" et "répartie".

Armatures : selon la modélisation "discrète" l'acier est représenté par des éléments qui lui sont propres, ayant un comportement différent de ceux du béton et même une forme différente (par exemple éléments barre ou poutre - Figure II.1).

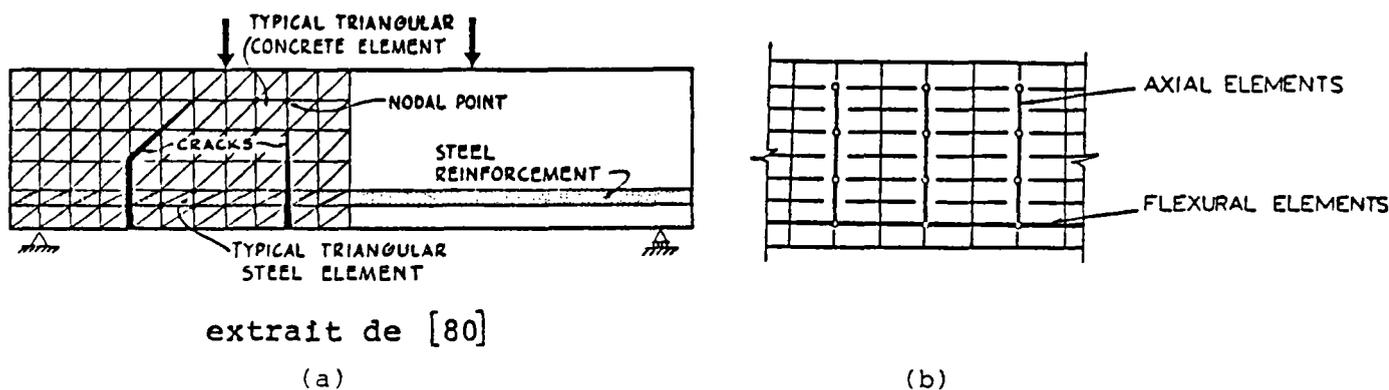


Fig. II.1 Schématisation "discrète" des armatures.  
 (a) éléments du même type que pour le béton  
 (b) éléments-"barre", éléments-"poutre".

La prise en compte de l'adhérence se fait en doublant les noeuds qui se trouvent sur l'interface des deux matériaux et en ajoutant, soit des éléments "ressorts" entre chaque paire de noeuds (Figure II.2.a), soit des éléments de contact sur toute leur interface (Figure II.2.b). Les caractéristiques mécaniques de ces éléments spéciaux sont fournis par la loi de l'adhérence adoptée. De la même façon est introduit l'effet de goujon, là où l'acier croise une fissure.

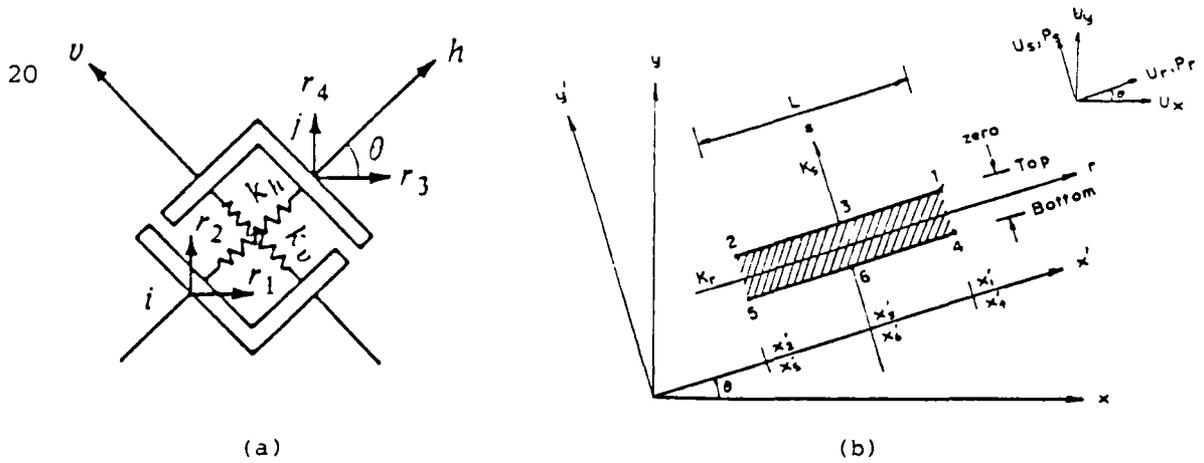


Fig. II.2 Eléments spéciaux de liaison pour la prise en compte de l'adhérence, de l'engrènement ou de l'effet de goujon. Schématisation "discrète".  
 (a) élément-ressort ajouté entre les noeuds  
 (b) élément de contact ajouté sur toute l'interface.

Ainsi, nous obtenons une très bonne approximation de l'interaction des deux matériaux (déplacements relatifs, efforts transmis), qui est parfois le phénomène primordial à modéliser. En revanche, la densification du maillage à cause d'une disposition dense des armatures, mais surtout la multiplication des noeuds à cause de la présence des éléments de contact, alourdissent considérablement le calcul.

L'autre alternative est de considérer l'acier comme un matériau avec rigidité uniquement axiale, suivant la direction des barres, et uniformément réparti dans l'élément (Figure II.3). Après fissuration nous pouvons introduire l'interaction acier-béton, de façon globale et approximative, en modifiant le comportement de l'un des deux matériaux.

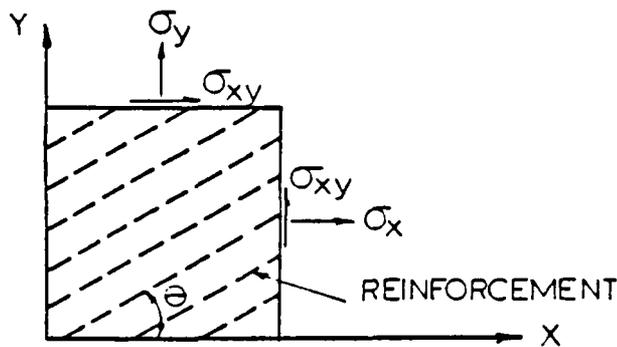


Fig. II.3 Représentation "répartie" des armatures.

Les avantages et les inconvénients sont exactement inversés par rapport à la modélisation "discrète". Ainsi on gagne en économie mais les effets d'interface sont mal pris en compte.

**Fissures** : une fissure est une discontinuité des déplacements dans le matériau ; une approche "naturelle" est alors de déconnecter les noeuds pour lesquels un critère de sollicitation est dépassé. Ainsi, une fissure "discrète" se forme et se propage dans la structure, mais elle ne peut suivre que le contour des éléments, donc le mode de fissuration obtenu est très pauvre et dépend du maillage (Figure II.4).

De plus, ces modifications changent la topologie de la structure, par conséquent la matrice globale de rigidité doit être réétablie chaque fois et elle risque d'avoir une grande largeur de bande. De ce fait, l'effort de calcul est considérablement augmenté.

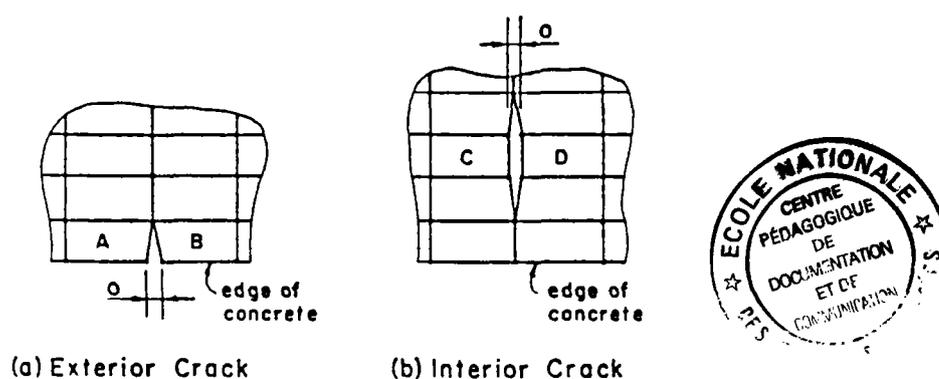


Fig. II.4 Schématisation "discrète" des fissures; formation des fissures selon Nilson; extrait de [81].

On introduit l'engrènement en ajoutant, entre les noeuds qui se séparent (lèvres de la fissure), des éléments de liaison spéciaux de la même forme qu'auparavant, dont la rigidité est calculée par la loi d'engrènement choisie.

L'avantage de cette représentation est le calcul direct de l'ouverture des fissures et une bonne approximation de l'engrènement.

Selon la schématisation "répartie" on considère que l'élément fissuré est traversé par une série de fissures parallèles avec espacement  $S$  et orientation  $\alpha$  (Figure II.5). Le comportement de l'élément devient ainsi anisotrope, s'il ne l'était pas déjà par la présence de l'acier réparti. L'engrènement et l'effet de goujon sont introduits globalement par des modifications supplémentaires du comportement de l'élément.

Avec une telle représentation toute la résolution s'effectue avec le même maillage et sans restreindre la direction des fissures, mais leur ouverture et les phénomènes qui s'y produisent sont mal modélisés.

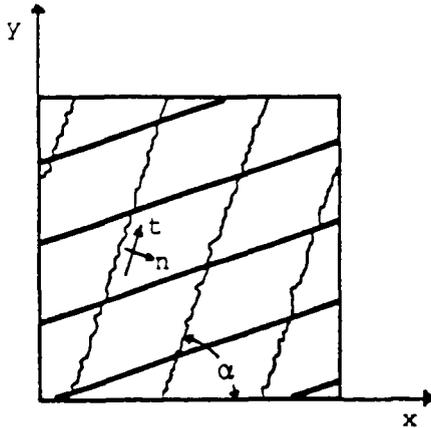


Fig. II.5. Représentation "répartie" des fissures

Pour terminer mentionnons une représentation "hybride" [5] (Figure.II.6) selon laquelle l'élément fissuré est traversé par une ou deux fissures "discrètes" ayant une orientation quelconque, ainsi le mode de fissuration devient indépendant du maillage.

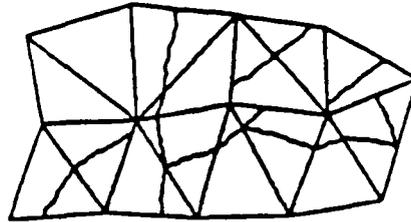


Fig. II.6 Représentation "hybride"; fissures possibles. extrait de [54]

### Commentaires

Dans les premières applications des éléments finis aux structures en béton armé ([80], [81]) la représentation "discrète" a été utilisée, tant pour les armatures, que pour les fissures. A cause des désavantages de cette dernière, la représentation "répartie" est devenue de plus en plus répandue et dans les publications récentes elle est presque exclusivement utilisée.

Notons tout de même que dans certains cas (zone d'ancrage, arrachement d'une barre etc) le choix de la représentation "discrète" des armatures est obligatoire.

Comme dans notre cas nous cherchons la réponse globale des structures et étant donné que le coût de la représentation "répartie" est plus faible, nous optons pour cette dernière, bien que, selon certains chercheurs, elle soit plutôt mal adaptée au calcul des structures dont la réponse est dominée par une ou peu de fissures, cas que nous voulons également considérer.

## II.2. Lois de comportement du béton

Le béton est un matériau hétérogène constitué de granulats dans une pâte de ciment hydraté. Même avant son chargement il existe des défauts au niveau de la microstructure (microfissures, microvides, décohésions intergranulaires etc.) qui évoluent sous sollicitation et se traduisent à l'échelle macroscopique par une modification des propriétés mécaniques.

Dans ce travail nous entendons par "béton" le matériau homogénéisé continu, dont nous approcherons le comportement par des lois macroscopiques qui doivent modéliser toutes les non-linéarités et irréversibilités.

Les résultats expérimentaux portant sur le comportement du béton mettent en évidence une réponse complexe. Nous observons entre autres :

- une déviation précoce de la linéarité (autour de 30 % de la résistance ultime) qui s'accroît sous sollicitations plus élevées (75 %-90 %).
- Résistance et déformabilité plus grandes sous compression biaxiale que pour une sollicitation uniaxiale.
- La présence d'une pression latérale de confinement conduit à une rupture ductile sous charges très élevées.
- Une partie descendante (écrouissage négatif) de la courbe contraintes-déformations après le "pic".
- Couplage entre les effets hydrostatiques et déviatoriques au delà d'un certain niveau de charge.
- Des déformations irréversibles importantes.

Pour approcher les divers aspects de la réponse du béton un grand nombre de lois de comportement ont été proposées.

Lois non-linéaires réversibles, indépendantes de l'histoire du chargement (hyperélastiques) qui sont obtenues :

- soit directement à partir des relations de l'élasticité linéaire isotrope en substituant aux constantes élastiques ( $E, \nu, k, G$ ) des fonctions des trois invariants du tenseur des contraintes et/ou des déformations ([21], [63], [64], [85]) ;
- soit en postulant pour l'énergie complémentaire (ou l'énergie de déformation) une forme polynomiale des invariants du tenseur des contraintes (ou des déformations) [25].

Les formulations du premier type risquent de nous conduire à des lois inadmissibles du point de vue thermodynamique (elles peuvent créer de l'énergie sous certains cycles de sollicitation), tandis que les autres ont l'inconvénient de contenir plusieurs constantes que nous ne pouvons pas déterminer par les expériences actuellement possibles.

Les formulations rigoureuses des lois incrémentalement linéaires (hypoélastiques) ([25], [31], [76]) présentent le même désavantage. D'autre part des lois plus simples de ce genre ont été proposées, en supposant un comportement incrémental du matériau isotrope [64] ou orthotrope ([35], [43]) ; mais la validité de telles hypothèses pendant la sollicitation d'une structure est vivement contestée ([8], [9], [76]). Malgré cela, les lois orthotropes ont été souvent utilisées dans des calculs par éléments finis ([1], [4], [34], [36], [49], [74]).

En se basant sur l'élastoplasticité classique ([55], [56], [93]) nous pouvons établir des lois incrémentalement linéaires, irréversibles qui sont relativement simples, mais surtout thermodynamiquement admissibles.

On peut d'abord considérer le béton comme matériau élastique parfaitement plastique et utiliser comme domaine d'élasticité un des critères de rupture proposés pour ce matériau. L'image unidimensionnelle du comportement ainsi obtenu est une droite OA, suivie par un plateau AB (Figure II.7) ; évidemment l'assouplissement intermédiaire du matériau (partie A'B', Figure II.7) ne peut pas se reproduire par un tel modèle.

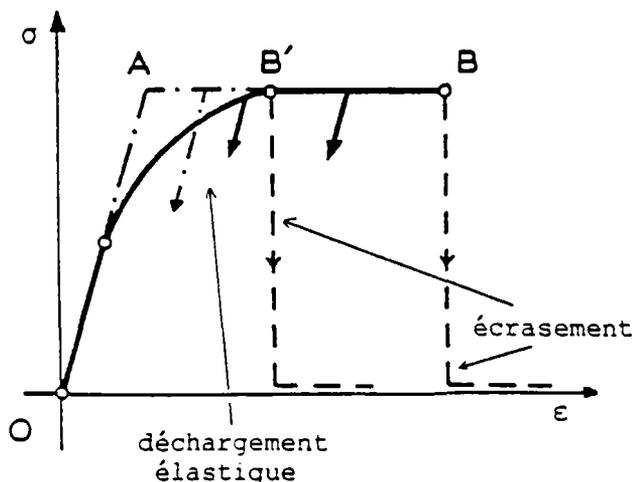


Fig.II.7. Image uniaxiale d'une loi élastoplastique

On suppose que la rupture survient quand l'état des déformations atteint une surface de ruine, qui provient, habituellement, de la conversion directe du domaine d'élasticité dans l'espace des déformations.

Le critère de Von-Mises<sup>'1'</sup> et le principe de normalité ont été largement utilisés pour des calculs du béton par éléments finis ([23], [51], [69], [103], [110]).

D'autre part nous obtenons une meilleure approximation du comportement du béton en le considérant comme matériau élastoplastique écrouissable.

De nombreuses lois ont été ainsi élaborées en adoptant un domaine actuel d'élasticité, soit fonction uniquement du 2ème invariant du déviateur (Von-Mises) [2], soit en ajoutant de plus l'influence de la pression hydrostatique ([18], [86]), soit enfin en introduisant une dépendance des trois invariants du tenseur des contraintes [57]. Dans la plupart des cas il s'agit des lois associées, mais des lois non associées sont aussi proposées [57].

Quand le domaine d'élasticité atteint sa position ultime on peut considérer, soit que le matériau s'écrase, soit qu'il continue à se déformer en étant parfaitement plastique jusqu'à atteindre ses déformations ultimes (Figure II.7).

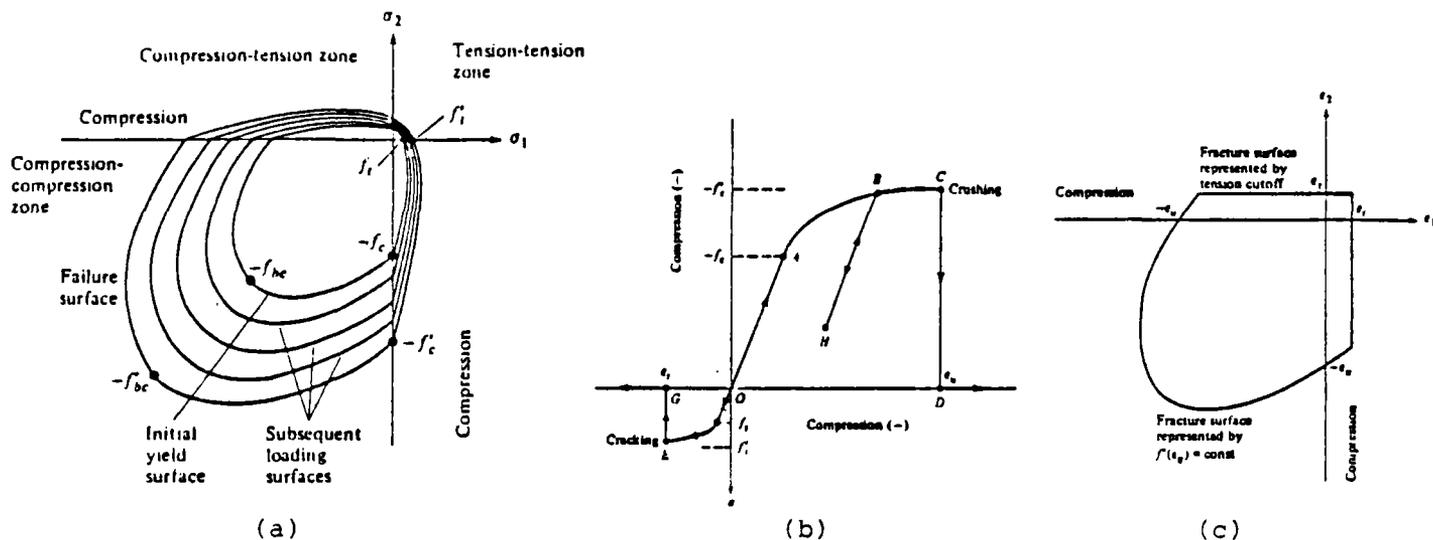
Un exemple typique d'une telle loi est le modèle de Chen et Chen ([26], [27]) (Figure II.8), qui a été largement utilisé pour des calculs par éléments finis ([28], [29], [96]) et est implanté dans de gros programmes professionnels (ADINA, MONSAP-C, [1]).

Aux frontières de l'élastoplasticité classique se trouvent les lois qui, pour prévoir le comportement du béton "après-pic" utilisent pour cette région les mêmes principes appliqués à des surfaces dans l'espace des déformations ([12], [57]).

Enfin des lois qui se basent sur la théorie endochronique ([10], [14]) ou sur l'endommagement linéaire isotrope [67] ont aussi été proposées. Les premières donnent une très bonne concordance avec les résultats expérimentaux, mais elles sont extrêmement complexes et font intervenir un très grand nombre de paramètres. La seconde ne prend pas bien en compte les irréversibilités du matériau.

---

<sup>'1'</sup> Normalement un tel domaine, qui ne dépend pas de la pression hydrostatique, ne doit pas être utilisé pour le béton, mais son adoption est légitime quand on se limite aux sollicitations biaxiales en compression.



extraits de [25]

Fig. II.8. Modèle élastoplastique des Chen et Chen ([26],[27])  
 (a) domaines d' élasticité (initial, intermédiaires, ultimes)  
 (b) image uniaxiale  
 (c) critère d' écrasement (espace des déformations)

### Commentaires

Malheureusement il n'y a pas une loi "miracle" simple et efficace pour le béton. Chaque pas que nous faisons vers les modèles plus compliqués est payé -parfois cher- par un alourdissement du calcul et par l'introduction de paramètres dont le sens physique n'est pas toujours évident.

Le choix du modèle doit être dicté par un compromis d'économie et d'efficacité suivant les caractéristiques du problème à résoudre. Ainsi même une loi linéaire élastique, combinée avec une rupture fragile ([30], [80]) a pu donner des résultats satisfaisants pour les structures où la fissuration était le phénomène dominant qui eclipsait la réponse non linéaire du béton.

En ce qui nous concerne, nous sommes limités aux structures en état des contraintes plan, mais nous voulons introduire l'assouplissement et les irréversibilités du matériau. Nous pensons donc qu'une loi élastoplastique classique couvre les besoins de notre objectif, ayant un coût acceptable.

### II.3. L'adhérence acier-béton

L'adhérence acier-béton, que nous pouvons définir comme la capacité de transfert des efforts tangentiels par l'interface des deux matériaux, est le phénomène qui permet au matériau composite béton armé d'exister. C'est elle qui assure que les deux constituants forment un ensemble et réagissent comme tel envers les sollicitations extérieures. Son rôle est primordial dans les régions fissurées, où l'acier doit assurer l'équilibre de la structure par la reprise de la quasi-totalité des efforts de traction, transfert qui s'effectue par l'adhérence.

Les déformations d'une pièce fissurée sont dues à l'ouverture des fissures et au comportement d'ensemble acier-béton entre les fissures. La réponse, donc, d'une structure fissurée est un problème d'adhérence.

D'autre part, si l'ensemble de l'effort d'une barre d'acier doit être transmis au béton sur une longueur limitée (comme c'est le cas d'une zone d'ancrage au bout d'une poutre, ou des jonctions de barres par recouvrement) un autre problème d'adhérence, beaucoup plus grave, surgit, parce que l'insuffisance de l'adhérence peut conduire à l'arrachement de la barre et la ruine prématurée de la structure.

Ces problèmes sont abordés en acceptant l'existence d'une relation fondamentale entre contrainte d'adhérence  $\tau$  et glissement local acier-béton  $S$ , qui a été mise en évidence par de nombreuses expériences ([17], [42], [59], [60], [75], [82], [100]).

Pour cette loi diverses relations sont proposées, basées sur les résultats expérimentaux ([42], [59], [75], [81]), mais aussi des modèles analytiques basés sur la considération des phénomènes physiques qui se produisent autour de la barre [97] (Figure II.9).

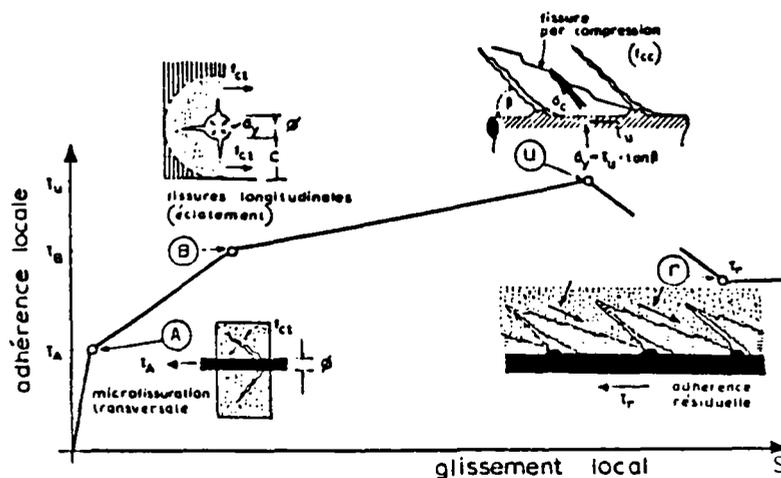


Fig. II.9. Loi contrainte d'adhérence-glisserment local de Tassios  
extrait de [98]

Chaque problème particulier peut être résolu en intégrant la loi locale  $\tau - S$  le long de la barre d'acier et en introduisant les conditions aux limites appropriées. C'est ainsi qu'ont été abordés les cas de la fissuration d'un tirant ([40], [52], [98], [99]) et des noeuds fissurés poutres-poteaux ([42], [48], [98], [99]). Malheureusement, cette intégration ne peut s'effectuer que numériquement si des lois  $\tau - S$  performantes mais compliquées sont utilisées. De même, certaines relations analytiques obtenues à l'aide des lois simples, sont elles aussi très compliquées [40].

En revanche, il existe, pour la fissuration d'un tirant, une approche semi-empirique simplifiée qui permet d'estimer la déformation moyenne, ainsi que l'ouverture moyenne des fissures et leur espacement moyen ([44], [89]).

Considérons un tirant soumis à une traction (Figure II.10). Dès que la résistance du béton en traction est atteinte une fissure apparaît (point A, Figure II.10). A cet endroit l'acier doit reprendre les efforts de

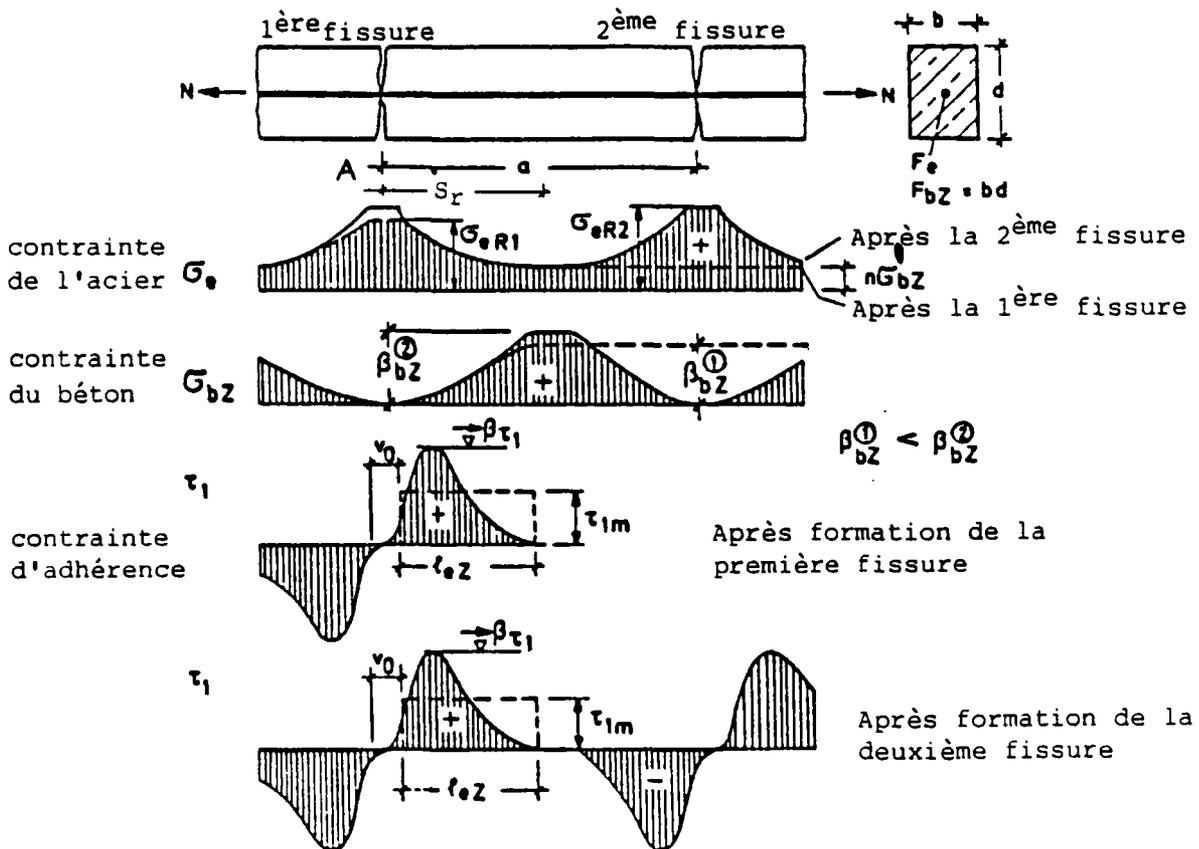


Fig.II.10. Tirant sous traction; répartition des contraintes après fissuration (acier, béton, interface)

traction supportés jusque là par le béton ; il subit alors un saut de contrainte, tandis que le béton se décharge complètement. Ainsi des glissements relatifs se produisent et les contraintes d'adhérence qui se mobilisent transmettent de nouveau l'effort de traction au béton. Donc au fur et à mesure qu'on s'éloigne de la fissure, la contrainte de l'acier baisse, à cause des tractions reprises par le béton, pour se retrouver au-delà d'une distance  $S_r$ , où l'égalité des déformations est de nouveau établie, à la valeur qui correspond à la section homogénéisée non fissurée.

A cause de cette participation du béton entre les fissures, la déformation de l'ensemble acier-béton est plus petite que celle de l'acier nu (effet "tension stiffening"). L'augmentation de la charge provoque la densification des fissures et la diminution de la participation du béton.

L'approche simplifiée admet que la déformation moyenne de la pièce en fonction de la contrainte de l'acier au niveau de la fissure suit une loi hyperbolique (Figure II.11) déduite des résultats expérimentaux. La différence entre cette courbe et la ligne droite qui correspond à l'acier nu, représente la participation du béton.

Cette approche a été appliquée avec succès à la fissuration des tirants par traction directe, ou par déformations imposées ([44], [91], [92]). Elle est aussi applicable aux poutres fléchies, où la partie fissurée est assimilée à un tirant, et elle constitue la base de calcul de la fissuration et des déformations des pièces en béton armé du CEB [20].

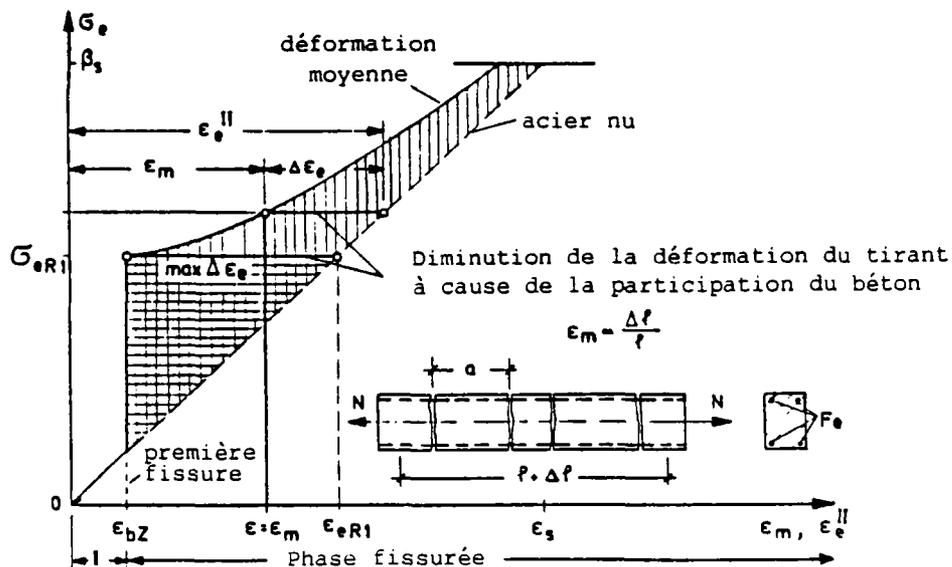


Fig. II.11 Approche semi-empirique simplifiée de l'adhérence; relation contrainte de l'acier au niveau de la fissure-déformation moyenne de la pièce.

### Adhérence et EF

Nous avons déjà dit que dans le cas de la schématisation "discrète" de l'acier l'adhérence est introduite par des éléments spéciaux dont le comportement est déterminé par une loi  $\tau - S$  que nous pouvons compliquer à notre guise. Dans le même contexte un élément original a été proposé [53], qui modélise la barre d'acier et la gaine dégradée du béton autour d'elle (Figure II.12).

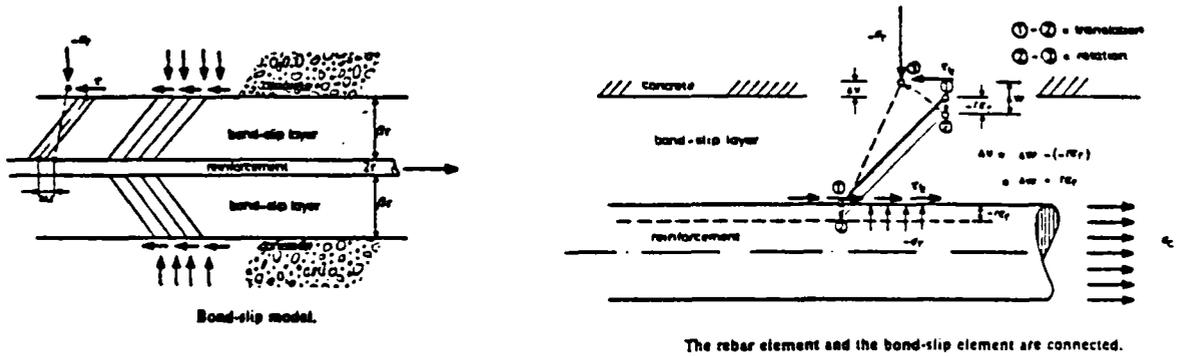
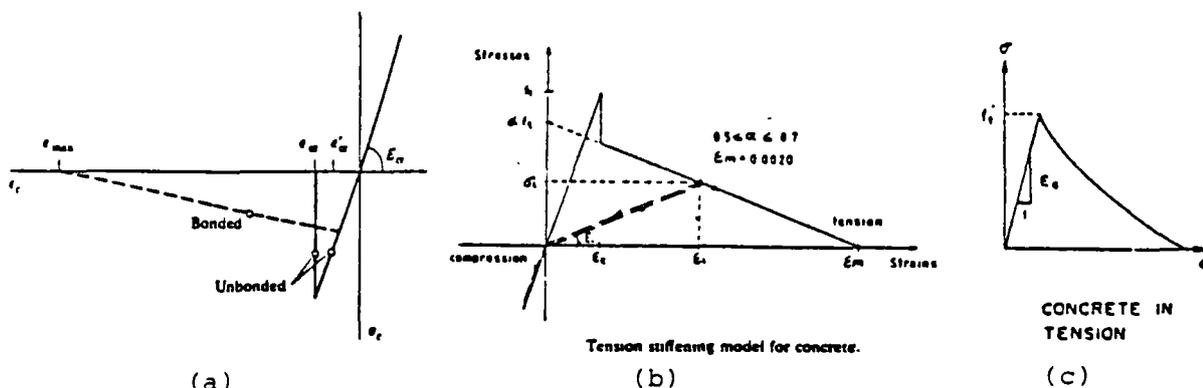


Fig. II.12. Élément spécial de Groot et al. pour la prise en compte de l'adhérence; schématisation "discrète" - extrait de [53]

Plusieurs calculs par EF de la région d'ancrage d'une barre ont été effectués en adoptant la représentation "discrète" ([53], [73]). Nous tenons à souligner encore une fois que le problème de l'extraction d'une barre du béton, faute d'une longueur d'ancrage suffisante, et toute défaillance d'une structure qui en résulte ne peuvent être abordés que par une représentation "discrète" de l'armature combinée avec une loi  $\tau - S$  appropriée.

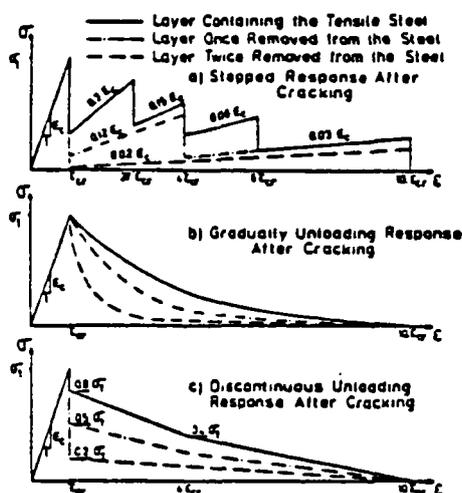
En revanche, dans la schématisation "répartie" nous pouvons tenir compte de l'autre aspect de l'adhérence, l'effet "tension stiffening". Ceci se fait par la modification appropriée du comportement soit du béton, soit de l'acier d'un élément fissuré. Ainsi certains auteurs ajoutent après fissuration une branche descendante, continue ou discontinue, au comportement du béton en traction ([16], [69], [86], Figure II.13a-d); d'autres modifient la loi de l'acier ([51], Figure II.13e). Un calcul comparatif a montré que les deux manières donnent des résultats presque identiques, mais la deuxième demande moins de temps de calcul et elle est plus facile à programmer.



(a)  
extrait de [16]

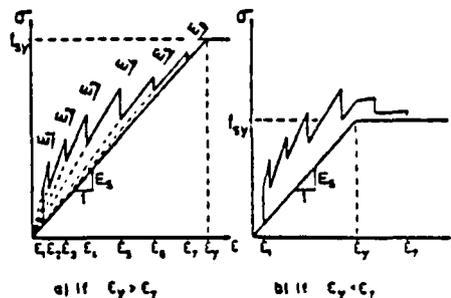
(b)  
extrait de [86]

(c)  
extrait de [69]



Alternative Stress-Strain Diagram for Concrete in Tension

(d)



Material Modelling Law

$E_s$	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_5$	$E_6$	$E_7$
$E_s$	$1.5 E_s$	$3 E_s$	$5 E_s$	$8 E_s$	$11 E_s$	$14 E_s$	$16 E_s$
$E_s$	$E_s$	$E_s$	$E_s$	$E_s$	$E_s$	$E_s$	$E_s$
$4.0 E_s$	$2.7 E_s$	$2.0 E_s$	$1.5 E_s$	$1.1 E_s$	$1.0 E_s$		

Modified Stress-Strain Diagrams for Tension Steel after Cracking

(e)

extraits de [51]

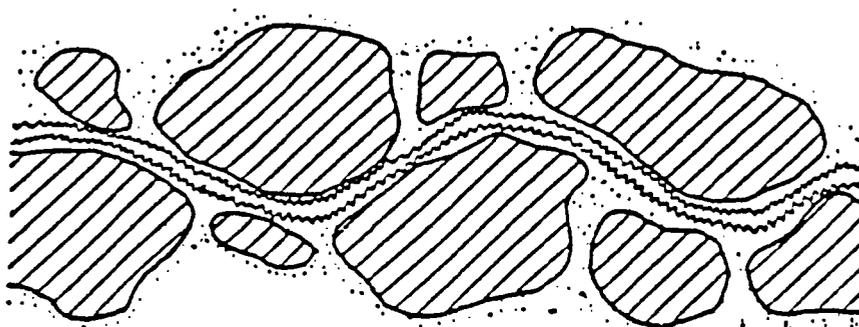
Fig. II.13. Représentation "répartie"; prise en compte de l'adhérence par modification de la loi du béton (a) à (d), ou de l'acier (e)

Dans le contexte de la représentation "répartie", vers laquelle nous sommes orientés, nous allons introduire l'effet "tension stiffening" par une modification de la loi de l'acier, que nous allons déduire de l'approche semi-empirique mentionnée, ce qui introduira l'influence des paramètres tels que le pourcentage d'armature, le diamètre etc.

#### II.4. L'engrènement

La surface d'une fissure est rugueuse, constituée par des aspérités petites et denses superposées à d'autres, beaucoup plus grandes et espacées, qui sont les protubérances des granulats (Figure II.14). Le glissement relatif des lèvres de la fissure met en contact ces aspérités, ce qui engendre d'une part l'apparition des efforts normaux et tangentiels et d'autre part l'écartement des lèvres (dilatance de la fissure).

Le phénomène de l'engrènement concerne les quatre grandeurs mentionnées, mais ce n'est que récemment que le couplage entre les effets normaux et tangentiels a reçu l'attention qu'il mérite.



**General and Local Roughness of Crack Faces**

Fig. II.14 Profil d' une fissure.

extrait de [45]

Les expériences ([47], [101], [106]) ont mis en évidence les paramètres primordiaux du phénomène, notamment l'ouverture de la fissure et la rugosité des lèvres, qui à son tour dépend de la taille des granulats ainsi que du rapport des résistances granulats/pâte.

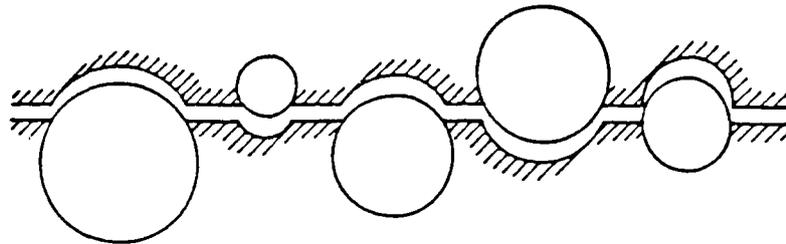
En outre, les résultats expérimentaux ont montré l'importance du phénomène. Ainsi l'engrènement fournit une partie considérable de la résistance à l'effort tranchant d'une poutre fissurée (33 % à 60 % selon [47], [101]) et des contraintes de l'ordre de 3 MPa ont été enregistrées sur des essais en cisaillement direct sous sollicitations cycliques sans atteindre la résistance ultime ([66], [109]).

Pour approcher l'engrènement Bazant et Gambarova [11] proposent une formulation totale, où chacune des contraintes, normale et tangentielle, est fonction des déplacements relatifs actuels. Il s'agit de relations

empiriques assez compliquées obtenues par le traitement de la plupart des résultats expérimentaux actuellement disponibles. Par ailleurs, Bazant et al. ([13], [15]) donnent une loi simplifiée sous forme de deux équations découplées :

une pour les contraintes  $|\sigma_{nt}| = -k\sigma_{nn} + c$  (frottement)  
 et une pour les déplacements  $\delta_n = \alpha_d |\delta_t| + e$  (dilatance)

D'autres auteurs proposent des modèles en faisant des hypothèses sur la forme de la fissure et la nature des phénomènes qui y ont lieu. Ainsi Fardis et Buyukozturk [45], [46] supposent que les lèvres sont constituées par une série d'arcs paraboliques aléatoires qui restent indéformables pendant leurs déplacements mutuels et sur lesquels se superposent des aspérités locales.



Generally observed structure of a crack plane.

Fig. II.15. Engrènement; forme de la fissure selon le modèle des Walraven et Reinhardt. extrait de [106]

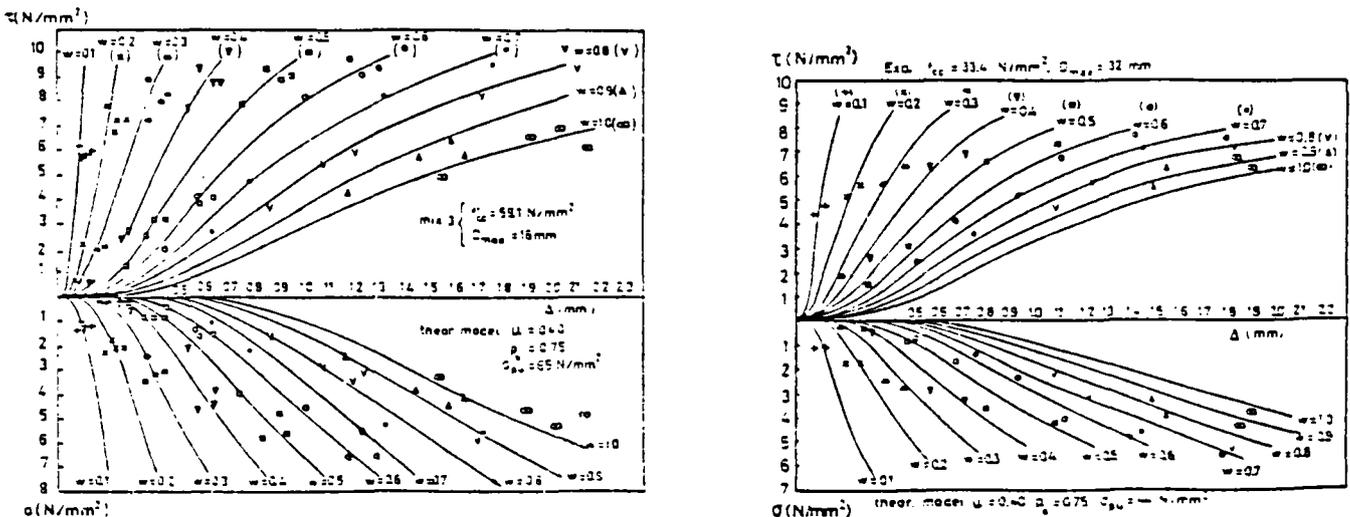


Fig. II.16. Engrènement; prévisions du modèle des Walraven et Reinhardt, comparaison avec les expériences - extrait de [106]

Walraven et Reinhardt [106] considèrent que la fissure traverse la pâte, assimilée à un matériau rigide parfaitement plastique, mais elle suit le contour des granulats, modélisés par des sphères rigides (Figure II.15). Notons que l'accord de ce modèle avec les résultats expérimentaux est impressionnant (Figure II.16), bien qu'il ne contienne que deux paramètres d'ajustement. Malheureusement les relations sont d'une extrême complexité.

### Engrènement et EF

La prise en compte du phénomène dans un code d'EF dépend de la représentation choisie des fissures. Ainsi, pour la schématisation "discrète" il suffit de choisir un modèle à partir duquel est déterminée la rigidité des éléments spéciaux de liaison que l'on interpose entre les lèvres de la fissure.

Pour la représentation "répartie", c'est dans la loi de comportement des éléments fissurés que l'on incorpore l'engrènement. La forme ci-dessous reliant les incréments des contraintes et des déformations est largement utilisée.

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_{nn} \\ \Delta\sigma_{tt} \\ \Delta\sigma_{nt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{nn} \\ \Delta\varepsilon_{tt} \\ \Delta\gamma_{nt} \end{Bmatrix} \quad \begin{array}{l} n: \text{ la normale à la fissure} \\ t: \text{ la tangente} \\ 0 \leq \beta \leq 1 \end{array}$$

Elle impose la nullité de la contrainte normale le long de la fissure mais permet un certain transfert des contraintes tangentielles. La rigidité tangentielle est fixée à un pourcentage du module de cisaillement ( $\beta G$ ), terme qui tient compte d'une façon globale, tant de l'engrènement que de l'effet de goujon.

Une multitude de valeurs constantes a été utilisée pour  $\beta$ , allant de zéro ([28], [78], [96]), ce qui signifie la suppression du phénomène, à 0.6 ([5], [51], [58], [69], [87], [94], [95], [110]) ; en bref on observe que ce paramètre, bien que supposé représenter un phénomène physique, est utilisé plutôt comme un facteur d'ajustement avec les résultats expérimentaux.

D'autres auteurs ([22], [86]) introduisent une décroissance linéaire ou hyperbolique de  $\beta$  avec la déformation normale à la fissure, pour tenir ainsi compte de la dégradation de l'engrènement avec l'ouverture des fissures (Figure II.17).

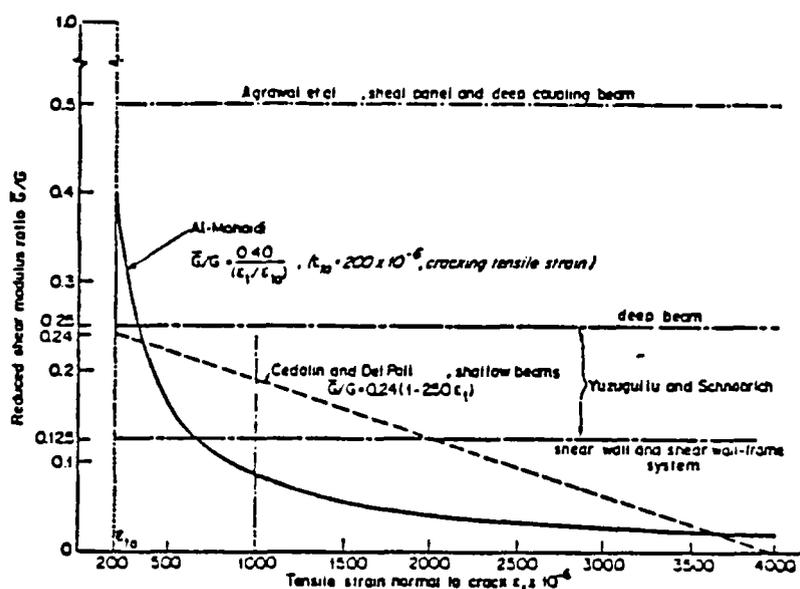


Fig. II.17. Diminution du coefficient  $\beta$  de la prise en compte de l'engrènement avec l'ouverture des fissures - extrait de [3]

Une telle forme de loi ne peut pas contenir, à cause des termes nuls en dehors de la diagonale, le couplage entre les effets normaux et tangentiels, ce qui constitue un défaut important.

Bazant et al. ([11], [13], [15]) et Walraven et Reinhardt [106] proposent le schéma suivant pour introduire ces effets dans la formulation. Par un développement limité au premier ordre des relations d'engrènement  $\sigma_{nn} = f_n(\delta_n, \delta_t)$ ,  $\sigma_{nt} = f_t(\delta_n, \delta_t)$

ils obtiennent

$$\begin{pmatrix} d\sigma_{nn} \\ d\sigma_{nt} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B_{nn} & B_{nt} \\ B_{tn} & B_{tt} \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} d\delta_n \\ d\delta_t \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} B_{nn} &= \frac{\partial f_n}{\partial \delta_n}, & B_{nt} &= \frac{\partial f_n}{\partial \delta_t} \\ B_{tn} &= \frac{\partial f_t}{\partial \delta_n}, & B_{tt} &= \frac{\partial f_t}{\partial \delta_t} \end{aligned}$$

Moyennant certaines hypothèses cette relation est introduite dans la loi de comportement du matériau fissuré (Voir aussi Chapitre III.2).

### Commentaires

Nous considérons que l'engrènement peut jouer un rôle non négligeable dans la réponse d'une structure en béton armé. Nous allons donc l'introduire dans notre code d'EF par le dernier schéma mentionné pour aussi tenir compte des effets de couplage.

## II.5. L'effet de goujon

L'effet de goujon est le transfert des efforts entre deux blocs, parallèlement à leur surface de séparation, par l'intermédiaire d'une barre qui traverse perpendiculairement cette surface (Figure II.18). Le phénomène a été étudié initialement à propos des joints des chaussées en béton, où la collaboration des parties voisines est assurée par goujons. Pour le cas d'une structure fissurée en béton armé il s'agit des armatures qui traversent une fissure.

L'approche de base est le modèle d'une poutre (la barre d'acier) qui repose sur une fondation élastique (le béton) assimilée à une série de ressorts linéaires indépendants ; la relation linéaire effort-déplacement tangentiel qui en résulte est obtenue par Friberg et ses prévisions concordent bien avec les résultats expérimentaux pour la phase linéaire du phénomène [108].

Cette phase se termine :

- soit par séparation du béton au niveau de la barre si l'enrobage est petit par rapport au diamètre de la barre ; ce qui arrive d'habitude à l'armature principale des poutres courantes (figure II.19),
- soit par écrasement du béton sous la barre et/ou plastification de la barre ; ce qui peut arriver quand les barres sont assez loin des frontières de la structure (Figure II.20).

Pour chacun de ces cas la suite du comportement est différent, ce qui a été aussi confirmé par les expériences ([7], [47], [62]). Il existe des formulations pour la phase non linéaire de chaque type de réponse qui sont, plus ou moins, compliquées ([39], [61], [104]).

D'autre part, les expériences ont montré que l'effet de goujon n'est pas très important, au moins pour les structures courantes [47]. Il est ainsi justifié d'adopter le modèle simple de la poutre sur sol élastique pour les calculs globaux des structures ([46], [106], [108]) ; choix pour lequel nous optons.

L'introduction de l'effet de goujon dans le calcul par EF se fait de la même manière que pour l'engrènement selon la représentation choisie des fissures et des armatures.

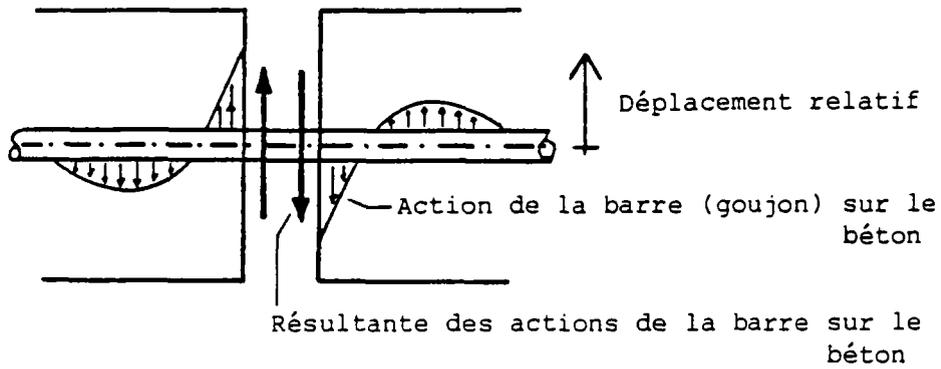


Fig. II.18 Effet de goujon

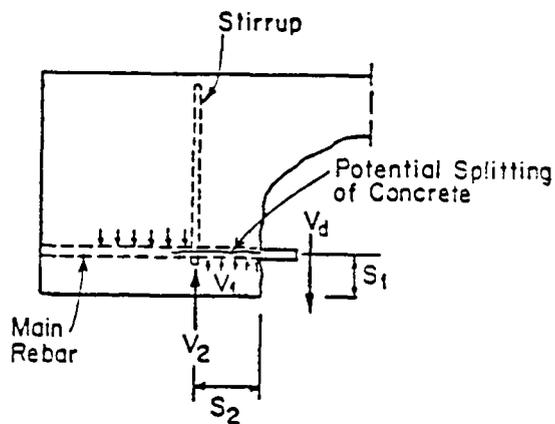


Fig. II.19 Effet de goujon;  
éclatement du béton  
au niveau de la barre.  
extrait de [3]

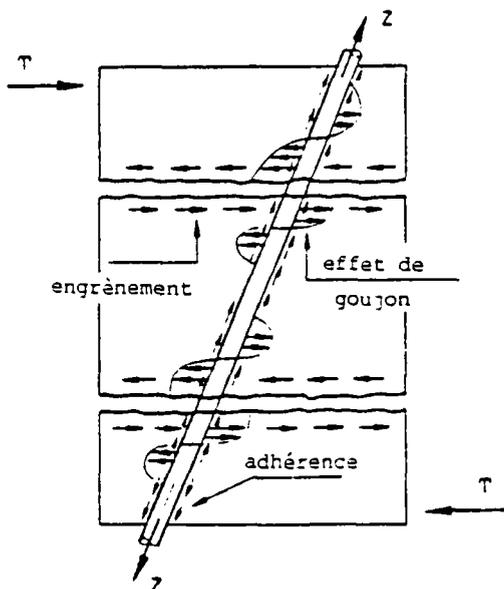


Fig. II.20 Effet de goujon;  
écrasement du béton ou  
plastification de la barre.  
extrait de [41]

## II.6. Eléments finis et béton armé - Appréciation générale

Les premières applications des EF au calcul d'une structure en béton armé datent de la fin des années 1960 ([80], [81]) ; depuis, une énorme quantité de travaux est apparue dans la littérature. Cet essor s'explique d'une part par l'intérêt du sujet et d'autre part par le nombre et la complexité des facteurs à prendre en compte ainsi que les diverses approches proposées pour chacun.

Comme tels facteurs on entend non seulement ceux développés le long de ce chapitre (loi du béton, adhérence, engrènement, goujon), mais aussi ceux exclus par nos hypothèses générales (non-linéarité géométrique, fluage, température etc).

Aujourd'hui une bonne partie de ces travaux gardent, au moins partiellement, leur originalité, chacun proposant une meilleure modélisation par rapport aux autres d'un phénomène particulier, ou une formulation plus simple et économique. Ceci parce que suivant le type de structure et le chargement auquel elle est soumise, le poids de chaque phénomène est différent ; on peut alors réduire le niveau d'approximation de certains d'entre eux, ou même les négliger, tout en suivant la réponse de la structure avec fidélité ; il va de soi que chaque simplification bien choisie nous permet des économies importantes tant dans la conception que dans l'exécution du programme. En revanche, il y a des cas où nous ne pouvons pas négliger un facteur sans appauvrir considérablement le niveau d'analyse. Par exemple :

- pour un tirant en traction, la loi de comportement du béton peut être très simple sans influencer les résultats ; ce qui s'est avéré aussi acceptable pour des structures de forme plus complexe (poutres, plaques, coques) dont la réponse est dictée par la fissuration du béton et la plastification de l'acier ([2], [22]). En revanche, nous avons intérêt à modéliser en détail l'adhérence acier-béton [54].
- Pour une structure en état des contraintes complexe, où la compression domine, l'introduction d'une loi de béton très sophistiquée est tout-à-fait justifiée. C'est le cas des enceintes de réacteurs en béton précontraint [70], ou des réservoirs sous-marins à grande profondeur [29], ou autres constructions industrielles [19]. Pour ce type de structures les effets de fluage, de la température et de leur couplage ont une grande importance et doivent être pris en compte ([1], [19]).
- Pour les structures à grand élanement, les non-linéarités géométriques peuvent jouer un rôle non négligeable autour des sollicitations ultimes ([2], [29], [94]).

- Enfin pour les structures soumises à un choc les termes d'inertie sont pris en compte, mais aussi l'influence du facteur "temps" (vitesse de sollicitation) sur la loi du béton [94].

Pour conclure on peut dire que la complexité du calcul par EF des structures en béton armé dans sa généralité incite à des hypothèses simplificatrices, que nous devons choisir minutieusement, en fonction de la forme de la structure et de son chargement.

Nous croyons que l'étude des travaux de recherche précédents justifie, par rapport à l'objectif que nous nous sommes posés, nos hypothèses générales, c'est-à-dire les facteurs retenus.

D'autre part, elle nous a guidé pour nos choix sur la modélisation de chaque facteur ; choix que nous avons mentionné succinctement et que nous allons développer dans le chapitre suivant.



### CHAPITRE III - PRESENTATION GENERALE DE LA DEMARCHE

Dans ce chapitre nous allons exposer les modèles choisis pour chacun des phénomènes énumérés au chapitre I.3 ainsi que leur prise en compte au niveau élémentaire.

Ensuite nous présentons la considération de la première fissuration d'un élément pour finir avec la description de la stratégie de résolution.

#### III.1. Choix préliminaires concernant le type d'élément fini et la représentation des fissures et des armatures

Nous avons choisi l'élément bidimensionnel le plus simple, c'est-à-dire le triangle à trois noeuds avec deux degrés de liberté par noeud qui sont ses déplacements  $U$  et  $V$  suivant les deux axes ( $x$  et  $y$ ). La variation des déplacements à l'intérieur de l'élément est linéaire (fonctions d'interpolation linéaires) et par conséquent l'état des déformations (et des contraintes aussi) est constant. Il est vrai qu'il s'agit de l'élément le plus "pauvre" et son utilisation peut paraître "démodée" mais nous l'avons adopté à cause de sa simplicité.

Pour les fissures et l'armature nous retenons la représentation "répartie". Par conséquent, il n'y a pas de fissures mais des éléments fissurés, chacun d'eux étant considéré comme traversé par une série de fissures parallèles d'espacement  $S$  et d'inclinaison  $\theta$  (Figure III.1). L'espacement peut diminuer en fonction des déformations actuelles (densification des fissures) jusqu'à une valeur minimale (stabilisation des fissures). L'inclinaison  $\theta$  est déterminée par les déformations à l'instant de la fissuration de l'élément et reste fixe par la suite. L'instant de la fissuration est déterminé à son tour par un critère portant sur les contraintes (voir chapitre III.3.1).

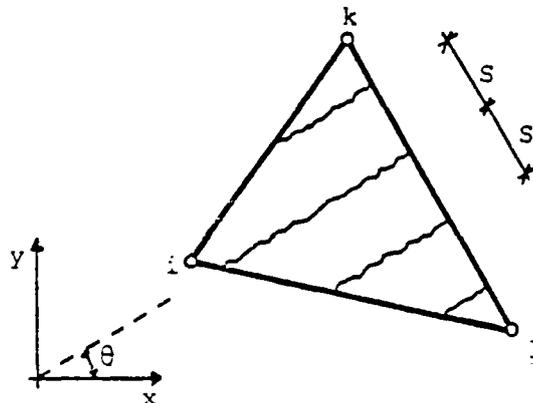


Fig.III.1. Élément fissuré

En ce qui concerne les armatures on considère qu'un groupe de barres d'orientation  $\phi$  équivaut à une tranche d'acier dans l'élément d'épaisseur  $\rho \cdot t$  ( $\rho$  étant le pourcentage des armatures et  $t$  l'épaisseur de l'élément) qui a une rigidité exclusivement uniaxiale suivant la direction des barres (Figure III.2).

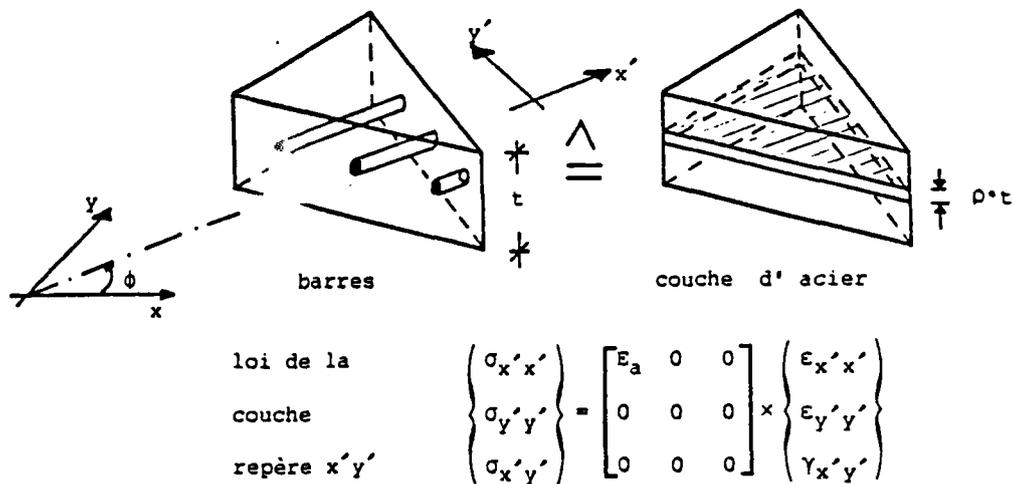


Fig. III.2. Représentation de l'acier

Evidemment ces choix entraînent les avantages et les désavantages de la représentation "répartie" mentionnés au chapitre II.1. Nous croyons que la possibilité d'effectuer toute la résolution sans modifier le maillage est insurpassable et compense largement le manque d'information sur les déplacements relatifs des fissures qui de toute façon auraient été calculés sur un schéma de fissuration discutable, en cas d'utilisation de la représentation "discrète".

La représentation "répartie" des armatures nous dispense de l'utilisation des éléments spéciaux de liaison pour l'adhérence ; en revanche il n'y a que l'aspect "tension stiffening" de ce phénomène qui est pris en compte et même d'une façon globale. Ainsi les situations comme l'ancrage des barres ou la rupture d'adhérence nous échappent, ce qui constitue un défaut plus grand mais inhérent à la formulation choisie.

Cette approche nous permet une certaine liberté du maillage par rapport à la disposition de l'armature, bien qu'il soit préférable, pour une meilleure représentativité des résultats, de tenir compte de sa présence quand on "découpe" notre structure : mailler par exemple d'une telle façon que le principe de la répartition uniforme des barres dans un élément armé, utilisé dans la modélisation, soit proche de la réalité ; ou encore mettre une bande d'éléments autour d'une barre qui ne dépasse pas sa section d'influence (selon le code-modèle du CEB la section du béton autour d'une barre qui collabore avec elle en traction se limite à un carré de côté quinze fois son diamètre).

### III.2. L'établissement de la loi incrémentale du matériau "composite"

Notre but est d'établir la loi de comportement incrémentale de l'élément "composite" acier-béton qui peut contenir des fissures et/ou de la plastification des matériaux.

Par loi incrémentale, on entend ici l'ensemble de relations qui permet l'évaluation de la variation des contraintes, provoquée dans chaque matériau par la variation des déformations de l'élément, calculée à partir des variables nodales. Ces relations peuvent aussi fournir, après multiplication par les fonctions appropriées et intégration dans les sous-domaines appropriés de l'élément, la rigidité -au sens des éléments finis- de l'élément composite.

Quand une liaison parfaite est assurée entre l'acier et le béton, c'est-à-dire quand ce dernier est intègre, les déformations des deux matériaux sont identiques et égales aux déformations de l'élément. Dans ce cas trivial il suffit alors d'utiliser les lois propres à chacun des matériaux et la rigidité de l'élément composite est tout simplement la superposition des rigidités des deux constituants. Ceci est valable tant pour la phase élastique linéaire des matériaux, les matrices des lois étant alors constantes, que pour leur éventuelle phase non-linéaire où nous utiliserons les matrices tangentes, déduites de la loi choisie pour chaque matériau, qui dépendent maintenant de l'état actuel des contraintes de chacun.

Le problème se complique quand le béton est déjà fissuré. Nous cherchons alors le comportement de l'élément "composite" armé uniformément et traversé par des fissures parallèles d'espacement  $S$ . C'est ici que nous allons introduire l'adhérence (plus précisément l'effet "tension stiffening"), l'engrènement et l'effet de goujon. Afin de ne pas troubler la présentation nous supposons que les modèles particuliers des phénomènes ci-dessus ainsi qu'une loi de comportement du béton sont déjà choisis ; nous les exposerons d'ailleurs dans le sous-chapitre suivant.

Nous faisons les hypothèses préliminaires suivantes : (Figure III.3)

- (a) Nous décomposons l'interaction acier-béton en deux : la partie suivant la direction de l'armature qui sera incorporée au comportement de l'acier et la partie transversale introduite par l'effet de goujon. Nous tenons ainsi compte de l'adhérence ("tension stiffening") par une modification appropriée de la loi de comportement de l'acier.
- (b) Nous négligeons l'influence des contraintes d'adhérence -plus ou moins autoéquilibrées- qui se développent sur l'interface béton-barre sur l'état des contraintes de la bande du béton.

- (c) Nous remplaçons les pressions exercées par la barre (goujon) à l'intérieur de la bande du béton par leur résultante que nous considérons ensuite répartie sur toute la facette de lèvre correspondant à la fissure. La barre étant en général inclinée par rapport à la fissure et la résultante étant normale à la direction de la barre, sa répartition donnera des contraintes tangentielles et normales sur la lèvre de la fissure. Des contraintes du même type y sont aussi présentes à cause de l'engrènement.

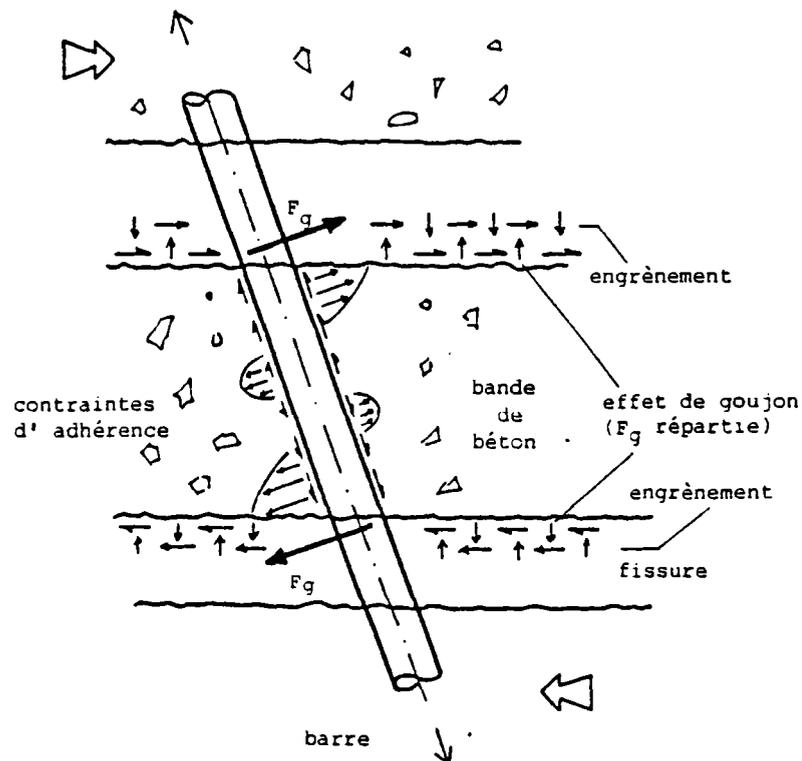


Fig. III.3 Efforts sur une "bande" de béton dans une région fissurée

Nous faisons les hypothèses de base suivantes :

- (i) les incréments des déformations de l'acier sont identiques aux incréments des déformations totales de l'élément ( $de$ ).
- (ii) Ces derniers sont décomposés en deux parties : l'une due aux fissures, ( $de^f$ ), l'autre due à la sollicitation de la bande du béton intègre entre les fissures ( $de^b$ ).

- (iii) La variation de l'état des contraintes dans la bande du béton est telle que le vecteur contrainte qui lui correspond sur la facette de la fissure soit égal à la variation des contraintes provoquée par l'engrènement et l'effet de goujon.

Ces hypothèses sont équivalentes à l'adoption pour l'élément armé-fissuré du modèle rhéologique de la Figure III.4 qui est constitué par deux branches liées en parallèle : l'acier modifié par l'adhérence et l'ensemble fissure-bande intègre du béton, liées en série. La fissure à son tour se compose de l'engrènement et de l'effet de goujon liés en parallèle.

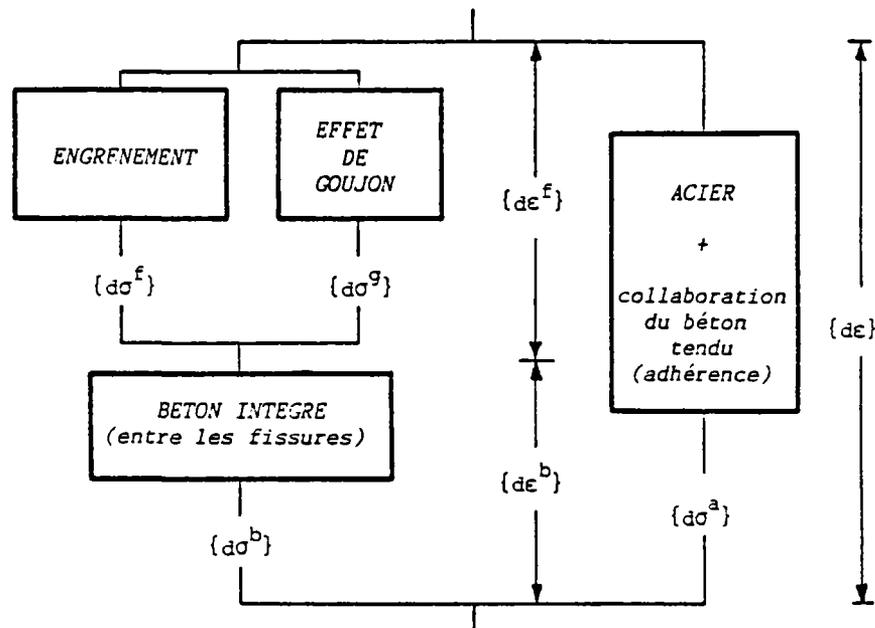


Fig. III.4 Modèle rhéologique pour l'élément armé-fissuré

Dans le repère de la fissure nt soient  $\{d\sigma^b\}$  et  $\{d\varepsilon^b\}$  les variations des contraintes et des déformations dans la bande du béton, liées entre elles par la loi de comportement du béton

$$\begin{pmatrix} d\sigma_{nn}^b \\ d\sigma_{tt}^b \\ d\sigma_{nt}^b \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} d\varepsilon_{nn}^b \\ d\varepsilon_{tt}^b \\ d\varepsilon_{nt}^b \end{pmatrix} \quad (\text{III.2.1})$$

et  $\{d\sigma^f\}$ ,  $\{d\sigma^g\}$  les variations des contraintes sur la facette de la fissure, qui n'ont que deux composantes, mobilisées par l'engrènement et

l'effet de goujon à cause d'une variation des déplacements relatifs des lèvres  $d\delta_{nn}$  et  $d\delta_{nt}$ .

La loi de l'engrènement donne

$$\begin{pmatrix} d\sigma_{nn}^f \\ d\sigma_{nt}^f \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B_{nn} & B_{nt} \\ B_{tn} & B_{tt} \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} d\delta_{nn} \\ d\delta_{nt} \end{pmatrix} \quad (\text{III.2.2})$$

et de l'effet de goujon

$$\begin{pmatrix} d\sigma_{nn}^g \\ d\sigma_{nt}^g \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} G_{nn} & G_{nt} \\ G_{tn} & G_{tt} \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} \delta_{nn} \\ \delta_{nt} \end{pmatrix} \quad (\text{III.2.3})$$

Ces relations peuvent être obtenues à partir des modèles de l'engrènement et de l'effet de goujon par un développement limité au premier ordre en utilisant en plus pour l'effet de goujon la supposition préliminaire (c).

La somme des deux phénomènes, vue leur liaison en parallèle, donne :

$$\begin{pmatrix} d\sigma_{nn}^{f+g} \\ d\sigma_{nt}^{f+g} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} H_{nn} & H_{nt} \\ H_{tn} & H_{tt} \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} d\delta_{nn} \\ d\delta_{nt} \end{pmatrix} \quad (\text{III.2.4})$$

avec  $H_{nn} = B_{nn} + G_{nn}$ ,  $H_{nt} = B_{nt} + G_{nt}$  etc

Soient enfin les déformations dues aux fissures ( $\varepsilon^f$ )

$$\{\varepsilon^f\} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{nn}^f \\ \varepsilon_{tt}^f \\ \gamma_{nt}^f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{nn}^f \\ 0 \\ \gamma_{nt}^f \end{pmatrix} \quad \varepsilon_{tt}^f \text{ étant forcément nulle}$$

$$\text{avec } \delta_{nn} = S(\varepsilon) \cdot \varepsilon_{nn}^f, \quad \delta_{nt} = S(\varepsilon) \cdot \gamma_{nt}^f \quad (\text{III.2.5}) \quad (\text{Fig. III.5})$$

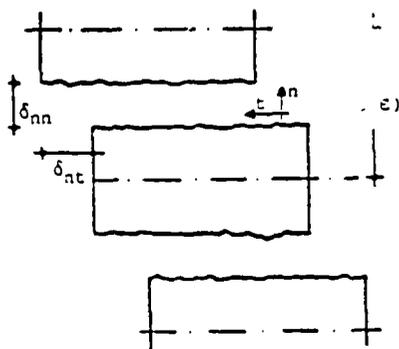


Fig III.5. Déplacements relatifs des lèvres des fissures

l'espacement  $S(\epsilon)$  est en général fonction de l'état des déformations, dépendance qui sera fournie par le modèle de l'adhérence et les variations  $\{d\epsilon^f\}$

$$\{d\epsilon^f\} = \begin{pmatrix} d\epsilon_{nn}^f \\ d\epsilon_{tt}^f \\ d\gamma_{nt}^f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\epsilon_{nn}^f \\ 0 \\ d\gamma_{nt}^f \end{pmatrix} \quad d\epsilon_{tt}^f \text{ étant aussi nulle}$$

L'hypothèse (i) et la loi de l'acier modifiée par l'adhérence permettent de calculer la variation de la contrainte uniaxiale de l'acier  $d\sigma^a$  provoquée par la variation des déformations totales de l'élément  $\{d\epsilon\}$ .

Les hypothèses (ii) et (iii) signifient respectivement

$$\begin{pmatrix} d\epsilon_{nn} \\ d\epsilon_{tt} \\ d\gamma_{nt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\epsilon_{nn}^b \\ d\epsilon_{tt}^b \\ d\gamma_{nt}^b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d\epsilon_{nn}^f \\ d\epsilon_{tt}^f \\ d\gamma_{nt}^f \end{pmatrix} \quad (\text{III.2.6})$$

$$d'où \quad d\epsilon_{tt} = d\epsilon_{tt}^b \quad \text{parce que } d\epsilon_{tt}^f = 0$$

$$\text{et} \quad d\sigma_{nn}^{g+f} = d\sigma_{nn}^b, \quad d\sigma_{nt}^{g+f} = d\sigma_{nt}^b \quad (\text{III.2.7})$$

Par différentiation des (III.2.5) les variations des déplacements relatifs sont :

$$\begin{aligned} d\delta_{nn} &= S \cdot d\epsilon_{nn}^f + dS \cdot \epsilon_{nn}^f \\ d\delta_{nt} &= S \cdot d\gamma_{nt}^f + dS \cdot \gamma_{nt}^f \end{aligned} \quad (\text{III.2.8})$$

l'espacement  $S$  est donné en fonction de  $\epsilon_{nn}$  par le modèle de l'adhérence basé sur l'analyse d'un tirant en traction (voir rel III.3.26) ; on admet que dans ce cas  $\epsilon_{nn}$  et  $\epsilon_{nn}^f$  sont interchangeable, c'est-à-dire :

$$S(\epsilon_{nn}) \equiv S(\epsilon_{nn}^f)$$

$$\text{et } dS = S' \cdot d\epsilon_{nn}^f, \quad S' \text{ étant la dérivée de } S \text{ par rapport à } \epsilon_{nn}^f$$

$$\begin{aligned} \text{et (III.2.8) deviennent} \quad d\delta_{nn} &= S \cdot d\epsilon_{nn}^f + S' \cdot \epsilon_{nn}^f \cdot d\epsilon_{nn}^f \\ d\delta_{nt} &= S \cdot d\gamma_{nt}^f + S' \cdot \gamma_{nt}^f \cdot d\epsilon_{nn}^f \end{aligned} \quad (\text{III.2.9})$$

que nous introduisons dans III.2.4 pour obtenir :

$$\begin{pmatrix} d\sigma_{nn}^{f+g} \\ d\sigma_{nt}^{f+g} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{nn} & C_{nt} \\ C_{tn} & C_{tt} \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} d\varepsilon_{nn}^f \\ d\gamma_{nt}^f \end{pmatrix} \quad (\text{III.2.10})$$

avec

$$\begin{aligned} C_{nn} &= S \cdot H_{nn} + S' \cdot (H_{nn}\varepsilon_{nn}^f + H_{nt}\gamma_{nt}^f), & C_{nt} &= S \cdot H_{nt} \\ C_{tn} &= S \cdot H_{tn} + S' \cdot (H_{tn}\varepsilon_{nn}^f + H_{tt}\gamma_{nt}^f), & C_{tt} &= S \cdot H_{tt} \end{aligned}$$

Les (III.2.7) en substituant les  $d\sigma_{nn}^b$ ,  $d\sigma_{nt}^b$  par (III.2.1) et  $d\sigma_{nn}^{f+g}$ ,  $d\sigma_{nt}^{f+g}$  par (III.2.10) deviennent :

$$\begin{aligned} C_{nn}d\varepsilon_{nn}^f + C_{nt}d\gamma_{nt}^f &= D_{11}d\varepsilon_{nn}^b + D_{12}d\varepsilon_{tt}^b + D_{13}d\gamma_{nt}^b \\ C_{tn}d\varepsilon_{nn}^f + C_{tt}d\gamma_{nt}^f &= D_{31}d\varepsilon_{nn}^b + D_{32}d\varepsilon_{tt}^b + D_{33}d\gamma_{nt}^b \end{aligned} \quad (\text{III.2.11})$$

et tenant compte des (III.2.6)

$$\begin{bmatrix} C_{nn} & -D_{12} & C_{nt} \\ 0 & 1 & 0 \\ C_{tn} & -D_{32} & C_{tt} \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} d\varepsilon_{nn}^b \\ d\varepsilon_{tt}^b \\ d\gamma_{nt}^b \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}+C_{nn} & 0 & D_{13}+C_{nt} \\ 0 & 1 & 0 \\ D_{31}+C_{tn} & 0 & D_{33}+C_{tt} \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} d\varepsilon_{nn}^b \\ d\varepsilon_{tt}^b \\ d\gamma_{nt}^b \end{pmatrix} \quad (\text{III.2.12})$$

La matrice du deuxième membre n'étant pas, en général, singulière

$$\begin{pmatrix} d\varepsilon_{nn}^b \\ d\varepsilon_{tt}^b \\ d\gamma_{nt}^b \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}+C_{nn} & 0 & D_{13}+C_{nt} \\ 0 & 1 & 0 \\ D_{31}+C_{tn} & 0 & D_{33}+C_{tt} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} C_{nn} & -D_{12} & C_{nt} \\ 0 & 1 & 0 \\ C_{tn} & -D_{32} & C_{tt} \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} d\varepsilon_{nn}^b \\ d\varepsilon_{tt}^b \\ d\gamma_{nt}^b \end{pmatrix} \quad (\text{III.2.13})$$

et en multipliant à gauche par [D] nous obtenons

$$\begin{pmatrix} d\sigma_{nn}^b \\ d\sigma_{tt}^b \\ d\sigma_{nt}^b \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} D_{11}+C_{nn} & 0 & D_{13}+C_{nt} \\ 0 & 1 & 0 \\ D_{31}+C_{tn} & 0 & D_{33}+C_{tt} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} C_{nn} & -D_{12} & C_{nt} \\ 0 & 1 & 0 \\ C_{tn} & -D_{32} & C_{tt} \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} d\varepsilon_{nn}^b \\ d\varepsilon_{tt}^b \\ d\gamma_{nt}^b \end{pmatrix} \quad (\text{III.2.14})$$

qui nous donne la matrice tangente qui lie les incréments des contraintes du béton avec les incréments des déformations de l'élément.

Nous rappelons que la relation analogue pour l'acier a été déjà obtenue par l'hypothèse (i), donc la loi incrémentale de l'élément "composite" est complètement déterminée.

La modélisation présentée contient le couplage des effets normaux et tangentiels pour l'engrènement et l'effet de goujon. Elle était déjà proposée par Bazant et al [13], [15] et reprise par Walraven et Reinhardt [106], mais bien qu'ils en aient conseillé l'application aux éléments finis, nous n'avons pas vu, jusqu'à présent, d'algorithme basé sur elle. De plus, dans leur formulation, le passage, à l'aide de l'espacement, entre variations des déplacements relatifs de la fissure ( $d\delta$ ) et incréments des déformations dues à la fissure ( $d\epsilon^f$ ) n'est valable que pour un espacement constant. La version exposée ci-dessus tient compte de l'espacement, ce qui, en principe, constitue une amélioration.

### III.3. Choix des modèles particuliers - Première fissuration d'un élément

#### III.3.1. Loi de comportement du béton

Dès le début, le comportement du béton ne se posait pas comme une question centrale de notre travail, qui était surtout orienté vers les effets de la fissuration. Il n'était alors pas question d'élaborer une nouvelle loi de comportement du béton, ni même d'adopter les formulations les plus sophistiquées (par exemple endochronique). Notre choix devait se faire parmi les lois relativement simples, élastoplastiques ou non linéaires élastiques pour tenir tout de même compte du comportement non linéaire du béton en compression.

Nous avons choisi le cadre de l'élastoplasticité classique avec écrouissage, qui couvre d'une certaine manière le déchargement, et nous avons élaboré un nouveau modèle assez simple.

On peut s'interroger sur la validité physique de l'élastoplasticité qui était appliquée au béton par analogie avec les métaux. Pour ces derniers elle se justifie aujourd'hui au niveau microscopique, ce qui n'est pas du tout le cas pour le béton. S'agit-il, alors, d'une approche semi-empirique dissimulée sous l'apparence "respectable" des fonctions de charge et des lois d'écoulement ? Même si c'est le cas, elle est de toute façon une approximation beaucoup plus fine et cohérente de point de vue

théorique que la plupart des lois élastiques non linéaires "intuitives" qui parfois se basent sur des considérations douteuses ou font une utilisation abusive de fonctions compliquées pour retrouver les résultats expérimentaux. Par rapport aux lois hyper ou hypoélastiques qui proviennent d'une formulation rigoureuse, l'élastoplasticité est aussi (sinon plus) simple et efficace sans contenir leurs petites ambiguïtés.

L'idée générale est que le béton est élastique-fragile en traction et élastoplastique écrouissable en compression. Nous adoptons une surface de charge qui évolue homothétiquement (écrouissage isotrope) et sa position ultime constitue aussi le critère d'écrasement du béton ; c'est-à-dire tout élément dont l'état de contraintes atteint cette surface est considéré comme complètement ruiné et les contraintes y tombent à zéro.

Les surfaces successives de plastification sont bornées dans les régions traction et compression-traction par une surface immobile -seuil de fissuration ; dès que l'état des contraintes d'un élément touche cette surface, ayant subi peut être déjà des déformations plastiques, nous considérons que des microfissures se forment tout en laissant une capacité de résistance à la région du béton entre elles.

Cette modélisation répond aux préoccupations suivantes : primo distinguer les deux types différents (fissuration et écrasement) de rupture du béton qui sont observés expérimentalement, chacun signifiant une autre suite de la réponse de l'élément ; deuxio dissocier les effets de traction et compression. Ainsi, ce sont les sollicitations à prédominance compressive qui peuvent faire évoluer le domaine actuel d'élasticité et la fissuration peut survenir sans que ce même domaine soit entraîné à sa position ultime, qui signifierait un comportement linéaire jusqu'à la ruine sous une sollicitation compressive de l'élément fissuré.

Pour fixer les idées sur les points mentionnés ci-dessus considérons quelques trajets des sollicitations biaxiaux dans l'espace des contraintes principales (Figure III.6). Les chemins  $OA_1$  et  $OB_2$  aboutiront à la fissuration de l'élément, qu'il ait subi (partie  $B_1B_2$ ) ou non ( $OA_1$ ) des déformations plastiques. Par la suite la bande du béton entre les fissures peut avoir un comportement élastique (parties  $B_2B_3$ ,  $A_1A_2$ ) ou élastoplastique (parties  $B_3B_4$ ,  $A_2A_3$ ) et elle peut, éventuellement, arriver à l'écrasement complet (points  $B_4$ ,  $A_3$ ). Pour les chemins  $OC_1C_2$ , où la compression domine, l'élément sera plastifié d'abord et écrasé ensuite sans qu'une fissuration apparaisse.

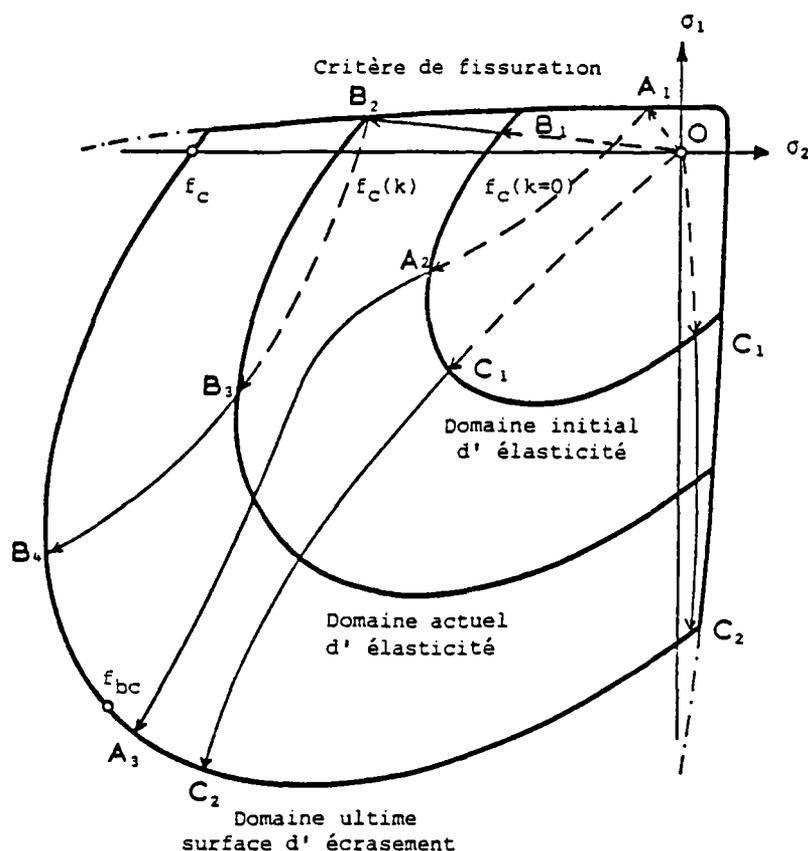


Fig. III.6. Trajets de sollicitation et comportements correspondants



Pour le domaine actuel d'élasticité nous avons choisi une fonction de type Drucker-Prager de la forme :

$$F = \frac{C\sqrt{J_2} + DI_1}{f_c(k)} - 1 = 0 \quad (\text{III.3.1})$$

qui dépend du deuxième invariant du déviateur des contraintes  $J_2$  et du premier invariant du tenseur des contraintes  $I_1$ . L'expérience a montré que la dépendance de la fonction de charge en  $J_2, I_1$  donne des résultats assez satisfaisants et de plus une telle forme simplifie beaucoup les calculs.

Deux points-états des contraintes suffisent pour déterminer les constantes  $C$  et  $D$ . Ce sont les points de compression simple  $f_c$  et de compression biaxiale  $f_{bc}$ . Vu l'homothétie des domaines successifs le rapport  $\mu = f_{bc}/f_c$  reste constant tout au long de l'évolution du domaine, ce qui donne :

$$C = \frac{\sqrt{3}(2\mu - 1)}{\mu}, \quad D = \frac{\mu - 1}{\mu} \quad (\text{III.3.2})$$

Pour  $\mu$  nous adoptons la valeur 1.16 provenant des résultats expérimentaux de Kupfer [63],[65].

Ainsi un seul paramètre suffit pour la définition de chaque domaine. Ce paramètre,  $f_c(k)$ , est l'intersection de ce domaine avec l'axe de compression simple et il dépend de l'état d'écroutissage du matériau. L'écroutissage étant isotrope son état est déterminé par un seul paramètre scalaire  $k$  défini comme l'intégrale du travail plastique sur le chemin de sollicitation

$$dk = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p, \quad k = \int \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p \quad (\text{III.3.3})$$

Pour le domaine d'élasticité initial nous avons choisi  $f_c(k=0) = 0,4f_c$  et le domaine ultime est obtenu, évidemment, pour  $f_c(k) = f_c$ ;  $f_c$  est la résistance du béton en compression simple.

Après une première comparaison avec les données expérimentales nous avons abandonné la règle de normalité et adopté un potentiel plastique  $G$  de type Drucker-Prager, mais différent de la fonction de charge (loi non associée).

$$G = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - K \quad (\text{III.3.4})$$

La décomposition de la variation des déformations en une partie élastique et une partie plastique

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p \quad (\text{III.3.5a})$$

la loi d'écoulement

$$d\epsilon_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{III.3.5b})$$

la condition de consistance

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial F}{\partial k} dk = 0 \quad (\text{III.3.5c})$$

avec la définition du paramètre d'écroutissage  $dk = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p$  nous permettent d'obtenir la loi élastoplastique du matériau

$$\{d\sigma\} = [D^{ep}] \{d\epsilon\} \quad \text{ou} \quad \{d\epsilon\} = [D^{ep}]^{-1} \{d\sigma\} \quad (\text{III.3.6})$$

$$\text{avec} \quad [D^{ep}] = [D^e] - \frac{[D^e] \{G\} \{F\}^T [D^e]}{h + \{F\}^T [D^e] \{G\}} \quad \text{et} \quad [D^{ep}]^{-1} = [D^e]^{-1} + \frac{1}{h} \{G\} \{F\}^T \quad (\text{III.3.7})$$

(G) et (F) étant les représentations vectorielles des tenseurs

$$\frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} = \alpha \delta_{ij} + \frac{1}{2\sqrt{J_2}} s_{ij} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{1}{f_c(k)} (D \delta_{ij} + \frac{C}{2\sqrt{J_2}} s_{ij}) \quad \text{c'est-à-dire}$$

les vecteurs

$$\{G\} = \begin{Bmatrix} \alpha + \frac{1}{2\sqrt{J_2}} s_{11} \\ \alpha + \frac{1}{2\sqrt{J_2}} s_{22} \\ \frac{1}{\sqrt{J_2}} s_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{f_c(k)} (D + \frac{C}{2\sqrt{J_2}} s_{11}) \\ \frac{1}{f_c(k)} (D + \frac{C}{2\sqrt{J_2}} s_{22}) \\ \frac{1}{f_c(k)} \cdot \frac{C}{\sqrt{J_2}} s_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.3.8})$$

[D\*] la matrice de la loi de comportement élastique du matériau

$$\text{et} \quad h = \frac{1}{f_c(k)} \cdot \frac{df_c(k)}{dk} \cdot \{G\}^T \{G\} = \frac{1}{f_c(k)} \cdot \frac{df_c(k)}{dk} (\alpha I_1 + \sqrt{J_2}) \quad (\text{III.3.9})$$

évidemment ces relations sont valables seulement s'il y a charge c'est-à-dire si les variations des contraintes  $d\sigma_{ij}$ , à partir d'un état  $\sigma_{ij}$ , sont telles que

$$F(\sigma_{ij}, k) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0$$

Pour le coefficient  $\alpha$  du potentiel nous adoptons la variation de la Figure III.7 en se basant sur les résultats expérimentaux de Kupfer [63]. Il est aussi révélé que la variation du paramètre  $f_c(k)$  avec  $k$  n'est pas unique pour divers états de sollicitation et nous avons introduit cette dépendance par la relation incrémentale

$$\frac{df_c(k)}{dk} = \frac{f_c^2 \cdot e}{(k + C \cdot f_c)^2} \quad (\text{III.3.10})$$

$e$  et  $c$  sont des paramètres qui dépendent de l'état des contraintes par la variable  $I_1/\sqrt{J_2}$  (Figure III.8).

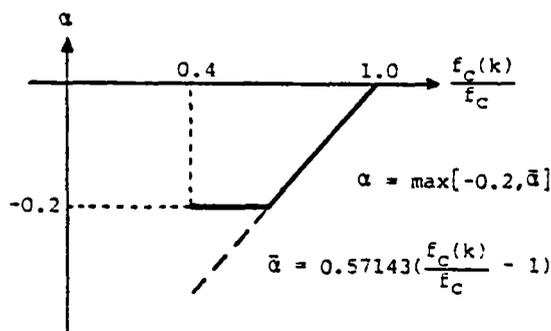


Fig. III.7. Variation du coefficient  $\alpha$  du potentiel plastique G

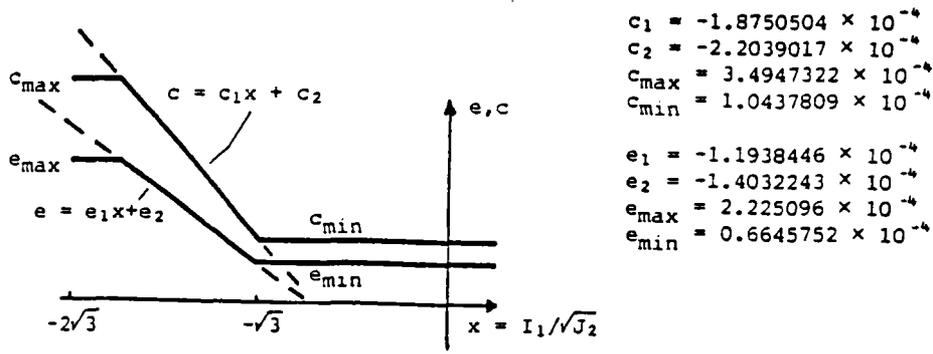


Fig. III.8. Variation des coefficients e et c de la relation III.3.10

L'accord entre les prévisions du modèle et les résultats expérimentaux de Kupfer est plutôt satisfaisant (\*) (Figure III.9). Les approximations des  $\alpha$  et  $\frac{df_c(k)}{dk}$  seront considérées comme valables pour tous les bétons dk étant donné le manque de données plus précises.

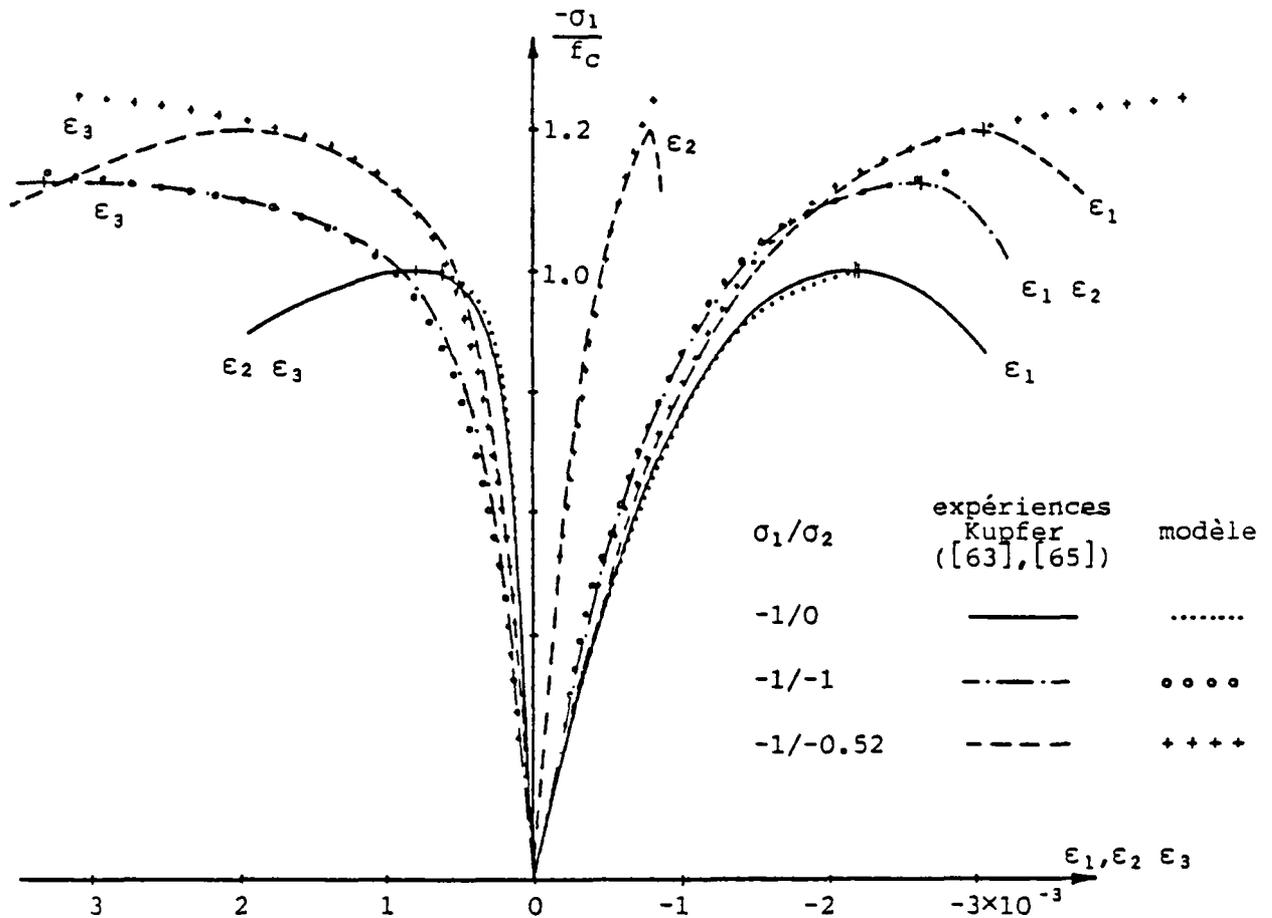


Fig. III.9. Loi de comportement du béton : prévisions du modèle et comparaison avec les résultats expérimentaux

(\*) De façon stricte ceci ne montre que la capacité du modèle de retrouver les résultats qui lui ont fourni ses paramètres mais nous admettons qu'une réponse raisonnable sera obtenue pour les autres sollicitations biaxiales.

En ce qui concerne la surface de fissuration nous avons adopté le critère de rupture à quatre paramètres proposé par Ottosen [84]

$$a \frac{J_2}{f_c^2} + \lambda \frac{\sqrt{J_2}}{f_c} + b \frac{I_1}{f_c} - 1 = 0 \quad (\text{III.3.11.})$$

$$\text{avec } \lambda = k_1 \cos\left[\frac{1}{3} \cos^{-1}(k_2 \cos 3\theta)\right] \quad \text{pour } \cos 3\theta \geq 0$$

$$\lambda = k_1 \cos\left[\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \cos^{-1}(-k_2 \cos 3\theta)\right] \quad \text{pour } \cos 3\theta \leq 0$$

$$\text{et } \cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{J_3}{J_2^{1,5}} \quad J_3 = \frac{1}{3} s_{ij} s_{jk} s_{ki}$$

Pour obtenir une rupture par écrasement, comme il est indiqué par les expériences [65], en compression-traction quand la traction est faible (inférieure à 1/15 de la compression) nous avons modifié la surface de fissuration sans trop s'éloigner des points expérimentaux dans la région où le critère de fissuration est actif (Figure III.10). Sur la même figure nous avons aussi tracé le domaine initial d'élasticité et la surface d'écrasement, identique au domaine final, ainsi que les résultats de Kupfer.

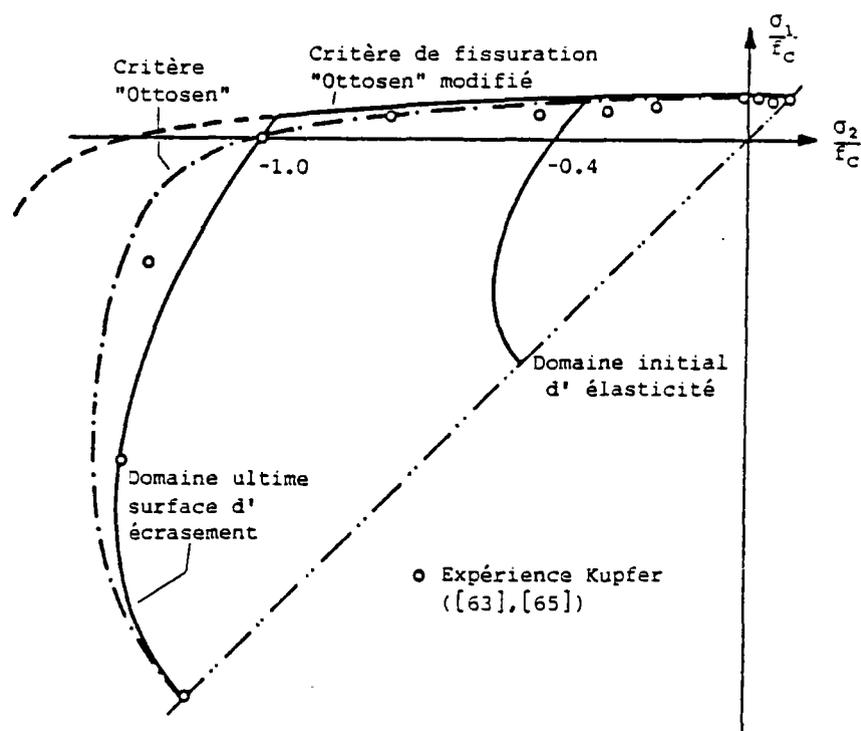


Fig. III.10. Loi de comportement du béton : Critère de fissuration et surfaces d'élasticité adoptées

### III.3.2. Engrènement

Parmi les formulations proposées dans la littérature pour le phénomène de l'engrènement nous en avons choisi une, assez simple et convenable, que nous allons utiliser telle quelle. Il s'agit des relations proposées par Walraven et Reinhardt [106] en 1981, obtenues par lissage à partir de leur résultats expérimentaux

$$|\sigma_{nt}| = -f_c/30 + [1,8|\delta_{nn}|^{-0,8} + (0,234|\delta_{nn}|^{-0,707-0,20}f_c)] \cdot |\delta_{nt}| \quad (\text{III.3.12a})$$

$$|\sigma_{nn}| = -f_c/20 + [1,35|\delta_{nn}|^{-0,63} + (0,191|\delta_{nn}|^{-0,552-0,15}f_c)] \cdot |\delta_{nt}| \quad (\text{III.3.12b})$$

$\sigma_{nt}$  et  $\sigma_{nn}$  étant les contraintes (tangentielle et normale respectivement) sur la facette de la fissure en MPa

$\delta_{nt}$  et  $\delta_{nn}$  les déplacements relatifs des lèvres de la fissure (tangentiels et normaux) en mm et

$f_c$  la résistance du béton en compression simple en MPa.

Les relations (III.3.12 a,b) sont linéaires en  $\delta_{nt}$  et elles ne passent pas par l'origine ; leur comparaison avec les résultats expérimentaux est donnée à la Figure III.11.

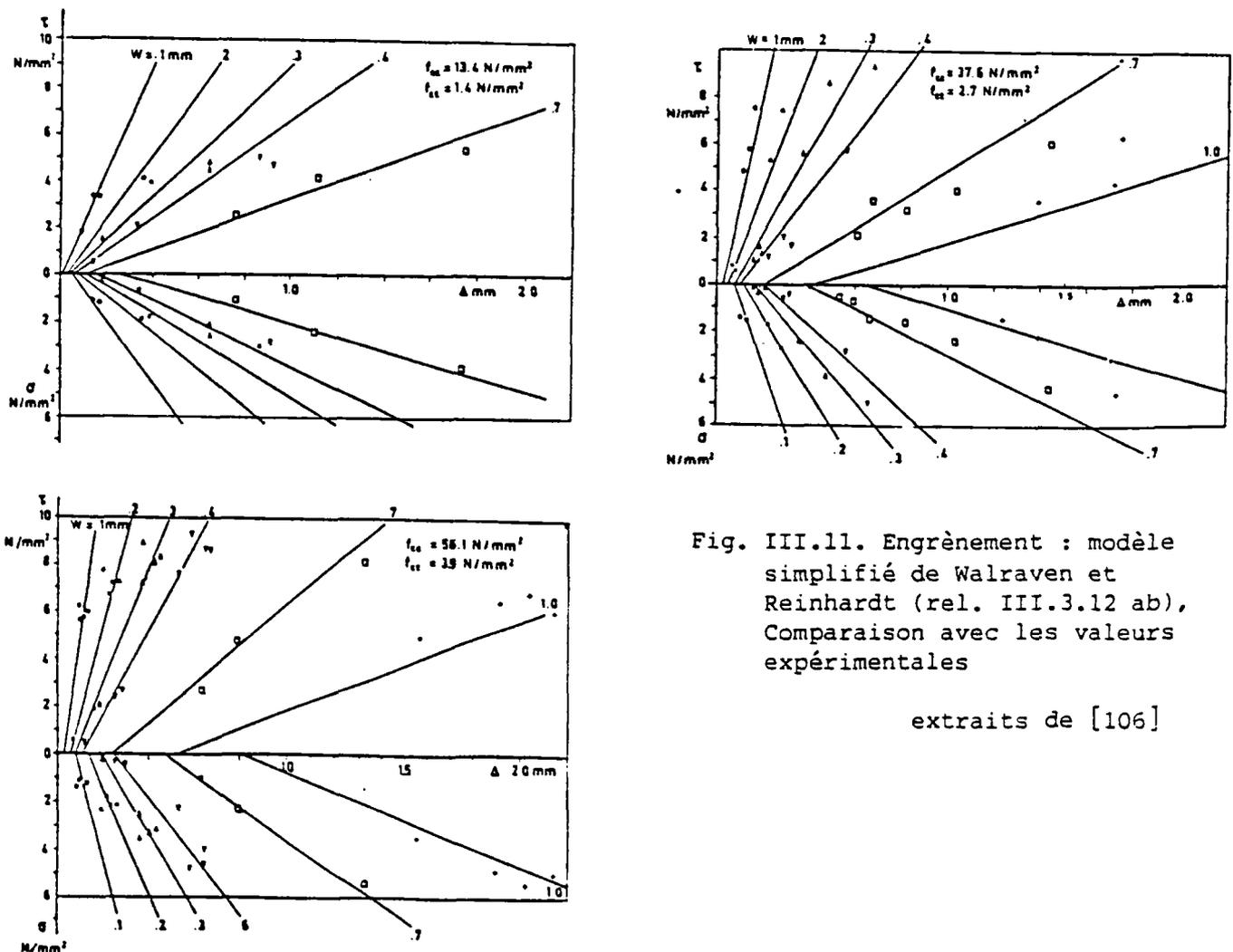


Fig. III.11. Engrènement : modèle simplifié de Walraven et Reinhardt (rel. III.3.12 ab), Comparaison avec les valeurs expérimentales

extraits de [106]

Soient  $\bar{\delta}_{nt}$  les déplacements qui correspondent à  $\sigma_{nt}$  ou  $\sigma_{nn}$  nulle ; on admet que pour l'intervalle  $0 \leq \delta_{nt} \leq \bar{\delta}_{nt}$  les  $\sigma_{nt}$  ou  $\sigma_{nn}$  sont respectivement nulles. On peut interpréter ces  $\bar{\delta}_{nt}$ , qui dépendent de l'ouverture de la fissure  $\delta_{nn}$  et augmentent avec elle, comme les déplacements tangentiels minimaux exigés pour que les aspérités se mettent en contact et que l'engrènement apparaisse.

Les relations (II.3.12 a,b) nous donnent la grandeur des contraintes ; il faut aussi préciser leur signe selon la convention habituelle. On constate (Figure III.12) que  $\sigma_{nn}$  est toujours négative et  $\sigma_{nt}$  suit le signe du déplacement relatif  $\delta_{nt}$ .

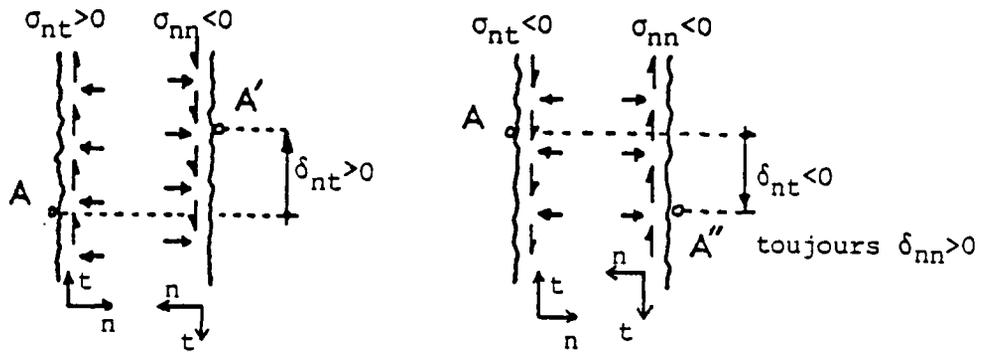


Fig.III.12. Engrènement: signe des contraintes en fonction du signe du déplacement relatif

Ainsi les contraintes sont complètement déterminées ; nous les avons tracées (Figure III.13) pour un  $\delta_{nn}$  constant en indiquant aussi les modifications à porter sur les relations (III.3.12 a,b) suivant les intervalles de  $\delta_{nt}$  pour respecter la convention de signes.

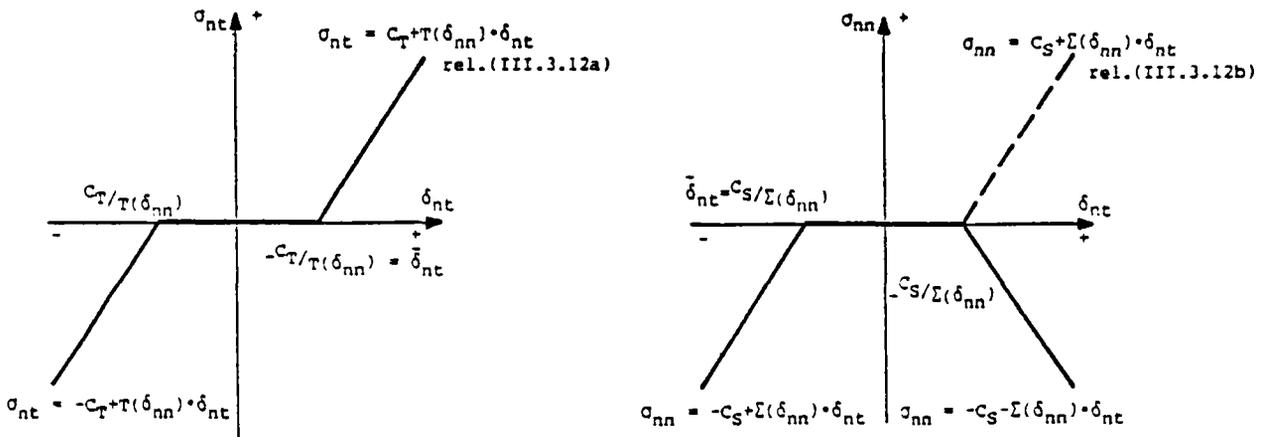


Fig. III.13. Engrènement: Prise en compte du signe des contraintes

Nous pouvons donc obtenir par différentiation, toutes précautions prises, les relations incrémentales de l'engrènement de la forme (III.2.2) et les utiliser ensuite à l'établissement du comportement incrémental du matériau fissuré décrit au paragraphe III.2. En réalité on se passe même de cette étape, parce que nous ne calculons pas la rigidité tangente d'un élément ; la différence des contraintes entre deux états des déplacements, dont nous avons besoin, se calcule directement par (III.3.12 a,b) modifiées selon la Figure III.13.

### III.3.3. Effet de goujon

Soit une barre d'acier qui traverse perpendiculairement une fissure (Figure III.14). L'effort exercé sur le béton à cause d'un déplacement relatif des lèvres AB est

$$F_{xy} = \frac{12\beta^3 E_s I}{12 + 12\beta L + 6\beta^2 L^2 + \beta^3 L^3} \cdot \Delta_{AB} \quad (\text{III.3.13})$$

avec  $\beta = \left[ \frac{DG_f}{4E_s I} \right]^{1/4}$

où  $G_f$  coefficient de fondation du béton

$E_s$  module d'Young de l'acier

$I$  moment d'inertie de la barre =  $\frac{\pi D^4}{64}$

$D$  diamètre de la barre

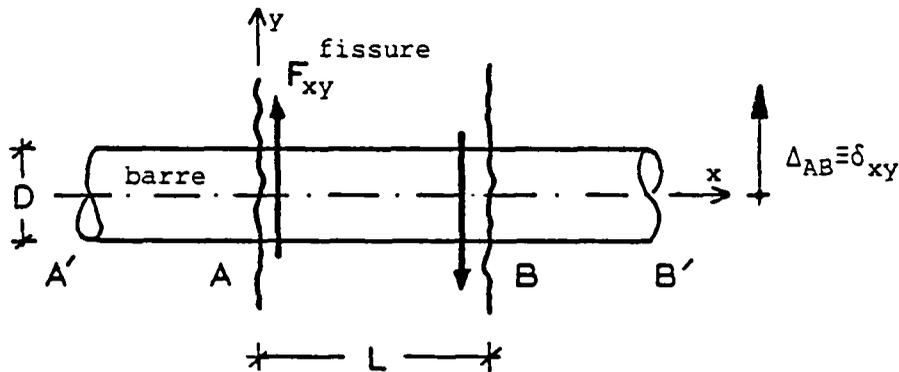


Fig. III.14. Effet de goujon

Cette relation est obtenue en considérant la partie  $AB$ , comprise entre les facettes de la fissure, comme une poutre élastiquement encastrée, et les parties  $AA'$  et  $BB'$  qui sont enfoncées dans le béton, comme des poutres qui reposent sur un sol élastique, ce qui fournit les coefficients d'encastrement élastique. Cette modélisation est proche de la réalité tant que la barre n'est pas plastifiée et que le béton n'éclate pas le long de la barre ni ne s'écrase sous la barre.

Si on néglige l'influence de la travée "libre"  $L$  de la barre, étant petite en soi ( $\approx 1$  mm) mais aussi par rapport au diamètre  $D$  ( $\approx 10+20$  mm), la relation (III.3.13) se simplifie en :

$$F_{xy} = \beta^3 E_S I \cdot \Delta_{AB} \quad (\text{III.3.14})$$

que nous écrivons

$$\begin{pmatrix} F_{xx} \\ F_{xy} \end{pmatrix} = \beta^3 E_S I \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} \delta_{xx} \\ \delta_{xy} \end{pmatrix} \quad (\text{III.3.15})$$

parce que pour l'effet de goujon on ne tient compte que de la rigidité transversale de la barre, l'effet axial étant pris en compte séparément avec l'acier (Figure III.4 et supposition préliminaire (a) Chap. III.2).

Pour le cas général où la barre est inclinée par rapport à la fissure (Figure III.15) la relation (III.3.15) transformée dans le repère  $nt$  de la fissure devient

$$\begin{pmatrix} F_{nn} \\ F_{nt} \end{pmatrix} = \beta^3 E_S I \begin{bmatrix} \sin^2 \phi & \sin \phi \cdot \cos \phi \\ \sin \phi \cdot \cos \phi & \cos^2 \phi \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} \delta_{nn} \\ \delta_{nt} \end{pmatrix} \quad (\text{III.3.16})$$

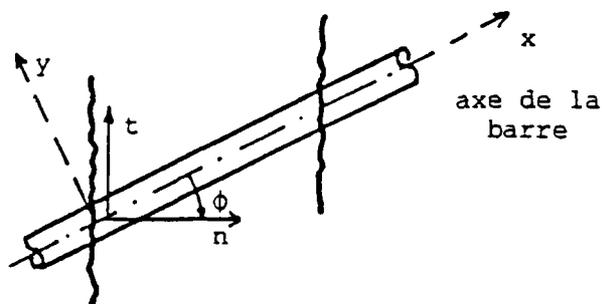


Fig.III.15. Effet de goujon

Il ne reste qu'à répartir sur la facette de la fissure les efforts  $F_{nn}$ ,  $F_{nt}$  qui ne sont autres que les résultantes des pressions que la barre exerce à l'intérieur du béton (supposition préliminaire (c), chap.III.2.).

La surface de la facette de la fissure  $A'_b$ , sur laquelle l'effet d'une barre doit être réparti, est calculée à partir du pourcentage d'armature  $\rho$  et du diamètre de la barre  $D$  (Figure III.16).

$$\rho = \frac{A^{\circ} e}{A^{\circ} b} = \frac{A' e}{A' b}, \quad A' e = \frac{\pi D^2}{4 \cos \phi} \rightarrow A' b = \frac{\pi D^2}{4 \rho \cos \phi}$$

$\sigma = \frac{F}{A'_b}$  et en tenant compte de  $I = \frac{\pi D^4}{64}$  nous obtenons

$$\begin{pmatrix} \sigma_{nn}^g \\ \sigma_{nt}^g \end{pmatrix} = \frac{\beta^3 E_s D^2 \rho \cos \phi}{16} \cdot \begin{bmatrix} \sin^2 \phi & \sin \phi \cdot \cos \phi \\ \sin \phi \cdot \cos \phi & \cos^2 \phi \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} \delta_{nn} \\ \delta_{nt} \end{pmatrix} \quad (\text{III.3.17})$$

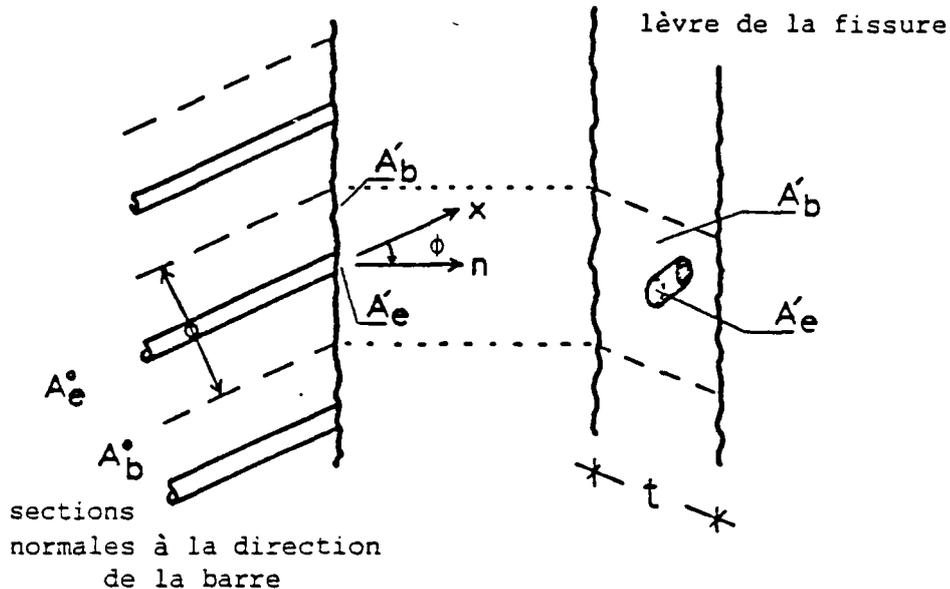


Fig. III.16. Répartition de la force du goujon sur la lèvre de la fissure

L'angle  $\phi$  est compté à partir de la direction de la barre jusqu'à la normale à la fissure ( $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$ , Figure III.17).

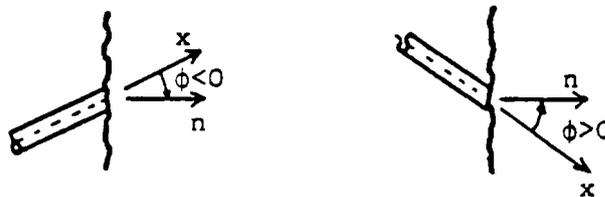


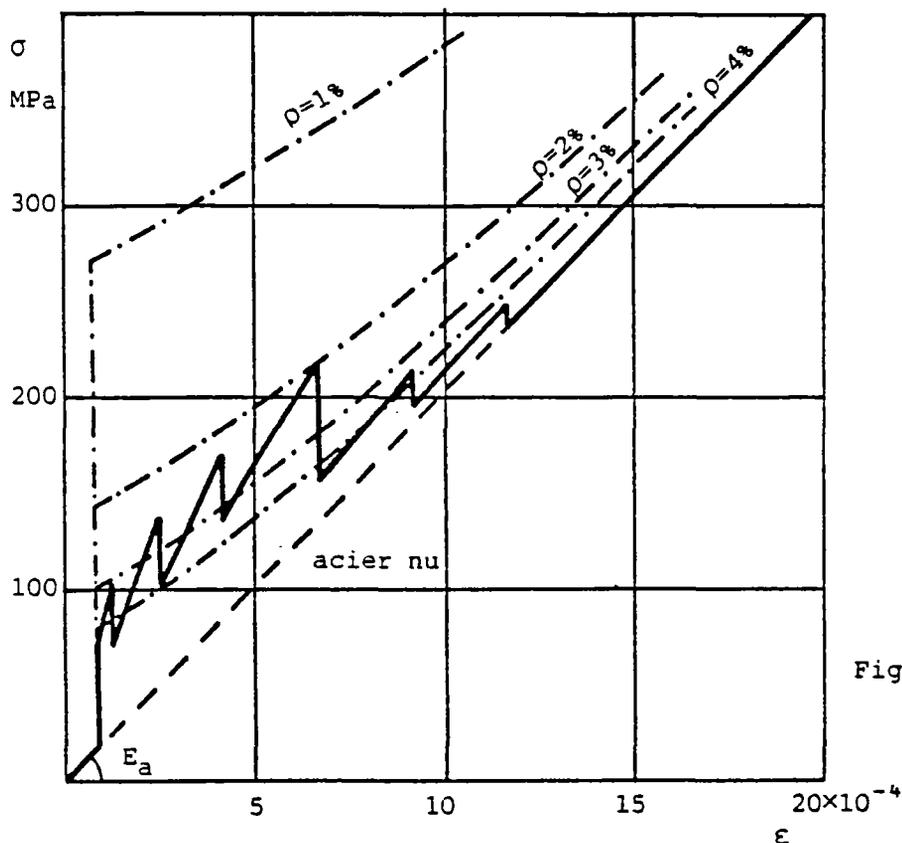
Fig. III.17. Signe de l'angle d'une barre

La non considération de l'influence de la travée "libre"  $L$  ni de l'écrasement ou éclatement du béton ou de la plastification de la barre a rendu les relations (III.3.17) de l'effet de goujon linéaires par rapport aux  $\delta_{nn}$ ,  $\delta_{nt}$  donc la forme totale et incrémentale coïncident.

En ce qui concerne l'inclinaison de la barre il n'y a que son effet purement géométrique qui est contenu dans la modélisation.

### III.3.4. Adhérence acier-béton

Comme nous l'avons déjà dit un élément fissuré en béton armé est plus rigide par rapport à l'acier nu parce que l'adhérence acier béton oblige une partie de béton entre les fissures à "collaborer" avec la barre (effet "tension stiffening"). Avec la représentation "répartie" il n'y a que de cet aspect de l'adhérence que nous pouvons prendre en compte. Ceci se fait en modifiant la loi de comportement de l'acier après la fissuration, de façon à inclure la collaboration du béton. La Figure III.18 montre une telle modification utilisée dans [51].

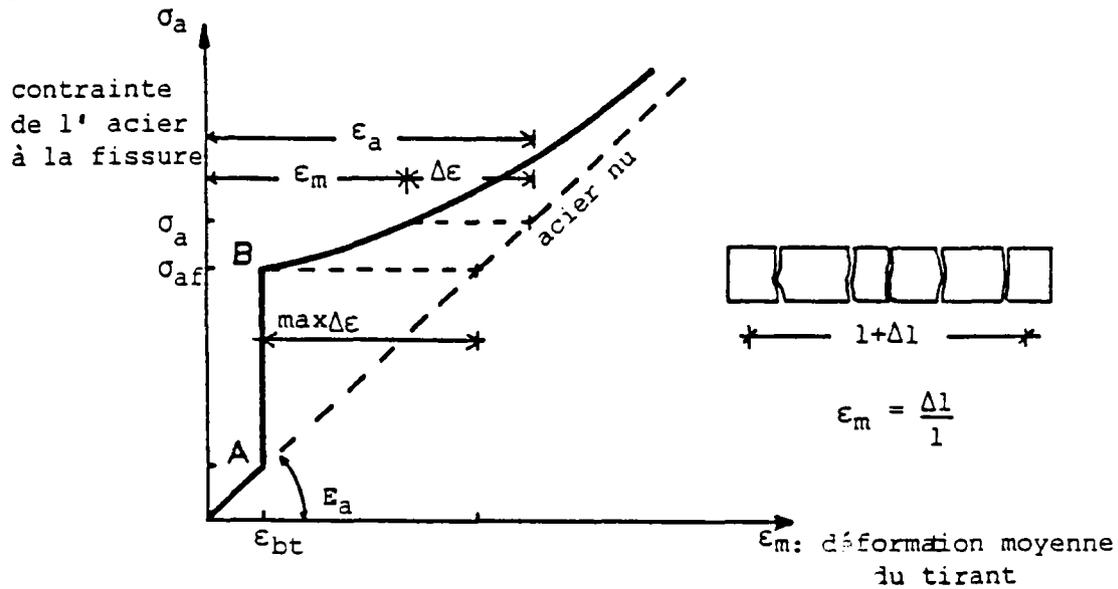


loi de l'acier après  
la fissuration selon [51]  
relation III.3.20 pour  
divers  $\rho$

Fig. III.18. Adhérence: loi  
modifiée de l'acier

Le domaine contenu entre la loi modifiée et la loi de l'acier nu, c'est-à-dire la droite  $\sigma = E_a \cdot \epsilon$ , représente la contribution du béton.

En ce qui nous concerne nous allons déduire la loi de l'acier après la fissuration de l'approche semi-empirique de la fissuration mentionnée au Chapitre II.3 qui nous donne la contrainte de l'acier au niveau de la fissure,  $\sigma_s$ , en fonction de la déformation totale moyenne de l'élément tendu,  $\epsilon_m$ , (Figure III.19) qui est mesurée sur une grande longueur pour pouvoir tenir compte de l'effet moyen des fissures.

Fig. III.19. Adhérence: Relation  $\sigma_a - \epsilon$ 

Ce modèle est basé sur l'analyse d'un tirant sous traction pure (Figure III.19). Après l'apparition de la première fissure la différence  $\Delta\epsilon$  entre la déformation moyenne  $\epsilon_m$  et la déformation de l'acier nu  $\epsilon_a$  représente la participation du béton tendu entre les fissures et elle tend vers zéro, c'est-à-dire  $\epsilon_m$  tend vers  $\epsilon_a$ , au fur et à mesure que la sollicitation augmente. Nous obtenons une bonne approximation des résultats expérimentaux en supposant que

$$\Delta\epsilon = (\max\Delta\epsilon) \cdot \frac{\sigma_{af}}{\sigma_a} \quad (\text{III.3.18})$$

où  $\sigma_{af}$  est la contrainte de l'acier au niveau de la première fissure à l'instant de son apparition.

Pour expliciter la relation précédente nous admettons, toujours pour un tirant, que l'effort de traction est le même juste avant et après la première fissure (points A et B, Figure III.19) et que la déformation moyenne n'est pas influencée par l'apparition de la première fissure, c'est-à-dire A et B correspondent à la même déformation  $\epsilon_{bt}$ , parce qu'elle est mesurée sur une grande longueur<sup>(1)</sup>. Ce qui donne

$$\sigma_{af} = \frac{f_{ct}}{\rho} [1 + (n-1)\rho] \quad \max\Delta\epsilon = \frac{f_{ct}(1-\rho)}{E_a\rho} \quad (\text{III.3.19})$$

avec  $f_{ct}$  : résistance du béton en traction

$n$  : rapport des modules d'Young de l'acier et du béton  $E_a/E_b$

$\rho$  : pourcentage d'armature = section de l'acier sur la section brute du béton  $A_e/A_b$

<sup>(1)</sup>Pour éviter la contradiction entre ces deux conditions, la deuxième doit être interprétée dans le sens que le tirant est suffisamment grand pour que la déformation moyenne ajoutée par la première fissure soit négligeable.

En reportant (III.3.19) dans (III.3.18) nous obtenons la relation recherchée entre  $\sigma_a$  et  $\epsilon_m$  :

$$\sigma_a = \frac{E_a \epsilon_m}{2} \left[ 1 + \sqrt{1 + k \left( \frac{2}{E_a \epsilon_m} \right)^2} \right] \quad \text{avec} \quad k = \frac{f_{ct}^2 (1-\rho) [1+(n-1)\rho]}{\rho^2} \quad (\text{III.3.20})$$

Nous rappelons que la déformation totale moyenne du tirant est aussi la déformation moyenne de l'armature (on retrouve ainsi l'hypothèse (i) du paragraphe III.2) et qu'elle correspond par définition à la déformation totale de l'élément fini utilisée là. Nous pouvons donc déduire directement de (III.3.20) le module tangent "effectif" de l'acier qui incorpore aussi l'effet rigidifiant du béton autour de l'armature dont nous avons besoin pour l'établissement de la loi incrémentale du matériau fissuré (Chapitre III.2).

Il est démontré expérimentalement que l'effet "tension stiffening" est d'autant plus grand que la section est plus faiblement armée ( $\rho$  petit) (Figure III.20). La relation III.3.20 contient, entre autres, l'influence de ce paramètre. Par conséquent son utilisation constitue une amélioration par rapport aux modifications qui introduisent l'effet "tension stiffening" indépendamment de l'armature (par exemple celle de la Figure III.18 où nous avons aussi tracé la relation III.3.20 pour divers  $\rho$ ).

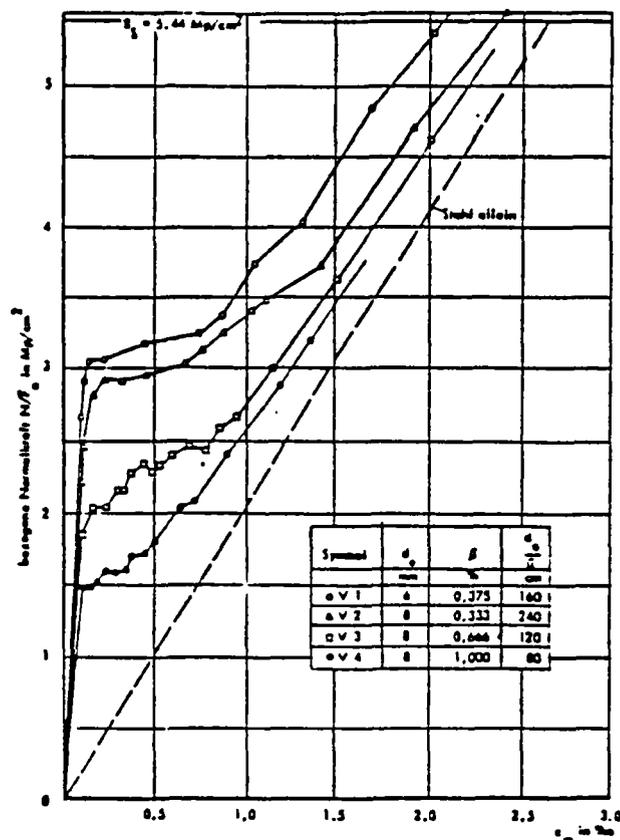


Fig. III.20. Réponse d'un tirant sous traction, résultats expérimentaux d'après [92]

Le saut de contrainte de l'acier AB (Figure III.19) correspond à la reprise par l'acier de l'ensemble de l'effort de traction ; c'était d'ailleurs par cette hypothèse que nous avons pu le calculer.

Cette reprise totale est évidente pour la fissuration d'un tirant sous traction à cause de sa forme et son chargement, mais non plus pour une région fissurée dans n'importe quelle structure. Dans ce cas une série de facteurs comme la forme de la structure, son chargement, la position exacte de la région fissurée, etc., influenceront la répartition des efforts libérés, que le béton fissuré ne peut plus subir, entre l'acier de cette région et le reste de la structure tout autour et par conséquent le saut de contrainte de l'acier provoqué par la fissuration.

La variante finale de la lci de l'acier après la fissuration, qui essaie de tenir compte aussi de ces facteurs, sera exposée ultérieurement au paragraphe relatif à la première fissuration d'un élément (Chapitre III.3.5) où il est plus commode de l'expliquer.

Pour estimer l'espacement minimal des fissures on considère un tirant avec une fissure et la contrainte sur le béton à son voisinage qui atteint de nouveau la valeur  $f_{ct}$  à une distance  $S$  qui est aussi la distance minimale entre fissures (Figure III.21).

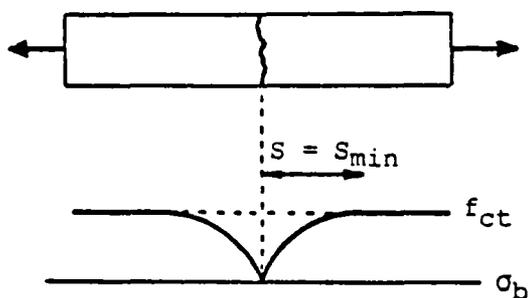


Fig. III.21. Contrainte du béton, tirant fissuré par traction

Par l'équilibre de la partie de longueur  $S_{min}$  du tirant nous avons :

$$S_{min} \cdot \Sigma u \cdot \bar{\tau} = f_{ct} \cdot A_b$$

avec  $\Sigma u$  : la somme des périmètres des barres

$\bar{\tau}$  : la contrainte moyenne d'adhérence sur la longueur  $S_{min}$

$f_{ct}$  : la résistance du béton en traction

$A_b$  : section du béton sous traction

avec  $\rho = A_e/A_b$  ,  $D$  le diamètre de chaque barre et  $n$  leur nombre

$$S_{min} \cdot n \cdot \pi \cdot D \cdot \bar{\tau} = f_{ct} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot n \cdot \frac{\pi D^2}{4} \rightarrow S_{min} = \frac{f_{ct}}{\bar{\tau}} \cdot 0,25 \cdot \frac{D}{\rho}$$

Les expériences ont montré que le rapport  $f_{ct}/\bar{\sigma}$  peut être considéré comme constant et il ne dépend que des propriétés d'adhérence des barres, avec une valeur conseillée de 0,4 pour les barres HA (CEB) ; alors

$$S_{\min} = 0,1 \frac{D}{\rho}$$

Selon cette relation  $S_{\min}$  tend vers zéro si l'armature est constituée d'éléments très fins ( $D \rightarrow 0$ ), en plus elle ne contient pas l'influence de l'enrobage  $c$  et de l'espacement des barres  $e$ . C'est pourquoi elle est corrigée en ajoutant un terme constant par exemple  $2(c+e/10)$  proposé par le CEB ( $e$  en mm) ou  $1+1.5c$  par Rostasy et Alda [91]. Ainsi nous avons

$$S_{\min} = 1,5c + 0,1 \frac{D}{\rho} \quad (\text{III.3.21})$$

La section  $A_b$  doit être comprise comme la section effective  $A_{b,ef}$  qui peut être influencée par les armatures et elle est égale à la réunion des carrés de côté  $15 \cdot D$  autour de chaque barre.

Nous allons étendre cette formule au cas des structures planes avec plusieurs groupes de barres d'orientations diverses (Figure III.22 où n'est montré que le groupe typique  $i$ ).

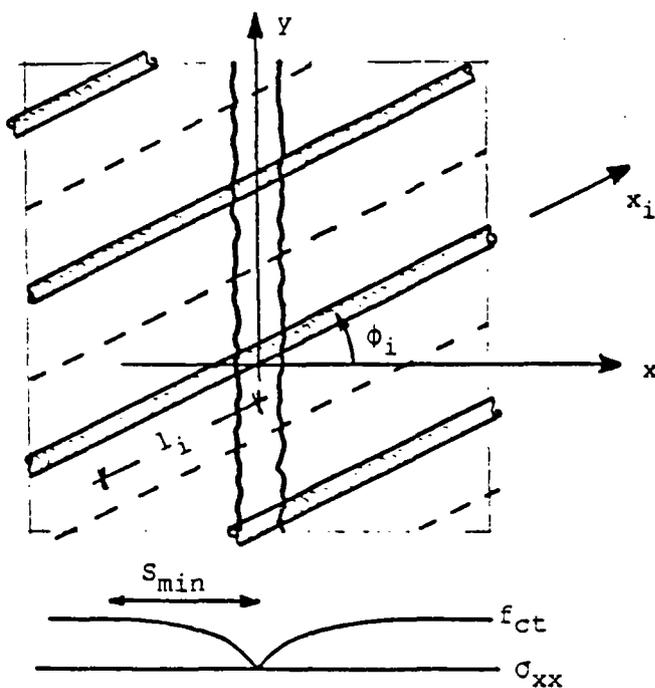


Fig. III.22. Espacement minimal des fissures pour une structure plane

La contrainte de traction suivant l'axe  $x_1$  introduite dans le béton par le groupe  $i$  est

$$\sigma_i = \frac{l_i \bar{\tau}_i \sum u_i}{A_b} = l_i \bar{\tau}_i \frac{4\rho_i}{D_i}$$

Chaque  $\sigma_i$  donne dans le repère  $xoy$ , lié à la fissure, une composante du tenseur  $\sigma$  égale à  $\cos^2\phi_i \sigma_i$  et leur somme est égale à  $f_{ct}$  à une distance  $S_{min}$  de la fissure.

$$f_{ct} = \sum_{i=1}^m l_i \bar{\tau}_i \frac{4\rho_i}{D_i} \cos^2\phi_i$$

$l_i = \frac{S_{min}}{\cos\phi_i}$  (figure III.22) et on accepte que  $\bar{\tau}_i = \bar{\tau}$  pour tous les groupes, alors

$$\frac{f_{ct}}{\bar{\tau}} = S_{min}^4 \cdot \sum_{i=1}^m \frac{\rho_i}{D_i} \cos\phi_i$$

En admettant comme avant que  $f_{ct}/\bar{\tau} = 0.4$  pour les barres HA et en ajoutant le terme constant 1,5c on trouve

$$S_{min} = 1,5c + \frac{0,1}{\sum_{i=1}^m \frac{\rho_i}{D_i} \cos\phi_i} \quad (\text{III.3.22})$$

si  $\phi_i > \pi/2$  nous remplaçons  $\cos\phi$  par sa valeur absolue.

### III.3.5. La première fissuration d'un élément

Nous considérons qu'un élément qui arrive au seuil de fissuration passe tout d'un coup de son état intègre, où il obéissait au comportement du béton intègre, à l'état de fissuration complète, c'est-à-dire traversé d'un bout à l'autre par un système de fissures parallèles. La phase de l'amorçage et de la propagation des fissures à l'intérieur d'un élément sort du cadre de notre approche et l'énergie dissipée pendant ce processus n'est pas prise en compte.

On admet qu'un élément se fissure quand son état des contraintes atteint la surface-seuil de fissuration définie dans l'espace des contraintes ; sa forme précise a été déjà donnée au Chapitre III.3.1. (loi de comportement du béton). La direction des fissures est déterminée par l'état des déformations à l'instant de la fissuration ; c'est la normale à la plus grande déformation principale (traction positive). Comme l'élément peut subir des déformations plastiques avant d'arriver à la surface de fissuration il est possible que les axes principaux des contraintes et des déformations ne coïncident plus.

Pour aborder les phénomènes de la première fissuration nous imaginons deux phases "artificielles".

Dans la première les noeuds de l'élément qui vient de se fissurer sont considérés momentanément fixés ; par conséquent les déformations totales, communes jusqu'ici pour l'acier et le béton, restent constantes. A l'aide des hypothèses que nous avons déjà utilisé pour dégager la loi incrémentale du béton armé fissuré (Chapitre III.2 Figure III.4), nous pouvons calculer les déformations dues aux fissures et celles de la bande du béton entre les fissures. C'est une sorte de "partage" des déformations bloquées à l'instant de fissuration entre fissures et béton.

Pour ce calcul on accepte qu'il n'y a que l'effet de goujon qui peut solliciter la facette de la fissure (l'engrènement ne participe pas) ; hypothèse physiquement justifiable parce que pendant ce mouvement initial des lèvres ce sont les déplacements normaux qui dominent et les aspérités ne sont pas encore mises en contact. Par ailleurs les relations (III.3.12a,b) de l'engrènement ne sont pas définies pour une ouverture nulle de la fissure. Nous supposons encore que l'espacement initial des fissures est égal à la projection de l'élément sur la direction perpendiculaire à la fissure (Figure III.23).

Les déformations totales de l'élément étant constantes, rien ne change pour l'acier dont les déformations n'ont pas changé (hypothèse (i) Chapitre III.2.) et la relation III.2.6. (hypothèse (ii) Chapitre III.2.) devient :

$$\Delta \epsilon_{nn}^b + \Delta \epsilon_{nn}^f = 0 \quad \Delta \gamma_{nt}^b + \Delta \gamma_{nt}^f = 0 \quad \Delta \epsilon_{tt}^b = 0 \quad (\text{III.3.23})$$

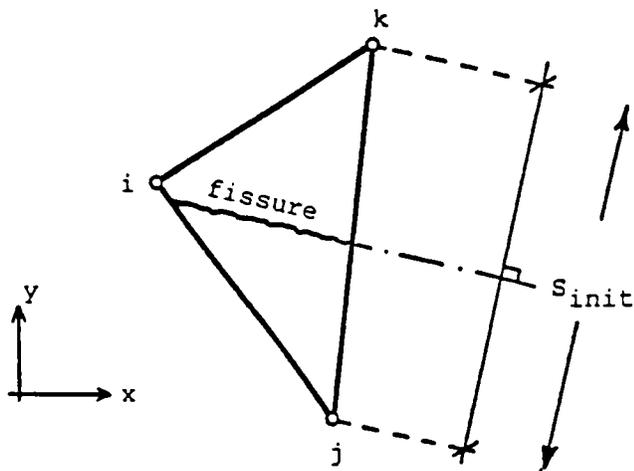


Fig.III.23. Espacement initial des fissures

Notons que les variations  $\{\Delta\epsilon^f\}$  sont égales aux  $\{\epsilon^f\}$  puisqu'à l'état intègre du béton il n'existaient pas de déformations dues aux fissures.

En ce qui concerne l'hypothèse (iii)

(Chapitre III.2), soient

$$\{\sigma^i\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{nn}^i \\ \sigma_{tt}^i \\ \sigma_{nt}^i \end{Bmatrix}, \quad \{\sigma^b\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{nn}^b \\ \sigma_{tt}^b \\ \sigma_{nt}^b \end{Bmatrix}$$

$\{\sigma^i\}$  étant l'état des contraintes du béton intègre au moment de la fissuration et  $\{\sigma^b\}$  l'état des contraintes recherché des bandes du béton après la formation des fissures ; à la différence du Chapitre III.2. ce ne sont plus les variations  $\sigma_{nn}^b - \sigma_{nn}^i$  et  $\sigma_{nt}^b - \sigma_{nt}^i$  qui sont égales aux efforts introduits à la facette à cause de l'effet de goujon (rappelons que l'engrènement ne participe pas) mais les  $\sigma_{nn}^b$  et  $\sigma_{nt}^b$  elles mêmes.

$$\begin{aligned} \sigma_{nn}^b &= S_{init} \cdot (G_{nn} \Delta \epsilon_{nn}^f + G_{nt} \Delta \gamma_{nt}^f) \\ \sigma_{nt}^b &= S_{init} \cdot (G_{tn} \Delta \epsilon_{nn}^f + G_{tt} \Delta \gamma_{nt}^f) \end{aligned} \quad (\text{III.3.24})$$

Cette différence apparente s'explique par le passage de l'état intègre à l'état fissuré. Ceci devient plus clair si on imagine le passage de  $\{\sigma^i\}$  à  $\{\sigma^b\}$  en deux étapes : une qui réduit les composantes  $\sigma_{nn}^i$  et  $\sigma_{nt}^i$  à zéro (fissuration en absence de l'effet de goujon) et la deuxième qui fait monter les contraintes de zéro à  $\sigma_{nn}^b$ ,  $\sigma_{nt}^b$  à cause de l'effet de goujon. En réalité il s'agit de la même hypothèse (iii) (Chapitre III.2.) qui doit être appliquée entre deux états fissurés de l'élément, zéro et  $\{\sigma^b\}$ , et non entre l'état intègre  $\{\sigma^i\}$  et l'état fissuré  $\{\sigma^b\}$ .

A l'aide des relations (III.3.23), (III.3.24) et de la loi de comportement du béton, qui de toute vraisemblance sera élastique, on calcule les  $\Delta \epsilon_{nn}^f$ ,  $\Delta \gamma_{nt}^f$  et l'état des contraintes du béton  $\{\sigma^b\}$ . La différence  $\{\sigma^b\} - \{\sigma^i\}$  nous donne les contraintes libérées par la fissuration et les efforts nodaux équivalents.

Ainsi se termine la première phase qui ne concerne que l'élément fissuré et qui nous a permis de calculer les valeurs initiales des déformations dues aux fissures  $\{\epsilon^f\}$ , les états des contraintes et des déformations du béton entre les fissures et les efforts libérés par la fissuration de l'élément. Comme un élément qui se fissure ne peut plus supporter le niveau de sollicitation actuel, une partie doit en être transmise à ses voisins. A la fin de cette première phase les contraintes des éléments ne sont donc plus en équilibre avec le chargement extérieur.

C'est précisément l'équilibre qu'on rétablit dans la deuxième phase en laissant libres les déplacements nodaux et en redistribuant ces efforts. Durant cette phase l'engrènement peut apparaître et l'espacement garde sa valeur initiale. Pendant ce processus il est probable que d'autres éléments vont se fissurer, et de nouveaux efforts libérés, calculés comme avant, vont s'ajouter à ceux qui n'étaient pas encore distribués. Le processus continue jusqu'à leur redistribution complète sans qu'un nouvel élément se fissure.

La répartition des efforts libérés entre l'élément fissuré (surtout son armature) et les éléments voisins dépend de la géométrie et du chargement de la structure, de la disposition de l'acier, de la position de l'élément fissuré dans la structure etc. Pour un tirant l'ensemble de la force extérieure est reprise par l'acier qui présente ainsi un module apparent infini (saut AB, Figure III.24) pendant la phase de redistribution. Pour une structure quelconque la répartition des efforts libérés est faite par les résolutions de la deuxième phase mentionnée ci-dessus où nous attribuons par analogie un module augmenté (par exemple  $10.E_a$ ) à l'acier des éléments fissurés. Ce module est retenu tant que l'extension de la région fissurée continue sous la même charge. La distribution complète de tous les efforts libérés ; c'est-à-dire l'établissement de l'équilibre à nouveau, signale la fin de la deuxième phase et détermine le saut de contrainte de l'acier pour chaque élément fissuré (AB' Figure III.24). Dans la suite du chargement l'acier de ces éléments aura le module "effectif" déduit de la branche B'C' qui est déterminée de la même façon que le modèle initial de l'adhérence (courbe BC, Figure III.24), c'est-à-dire avec l'hypothèse

$$\Delta \epsilon = (\max \Delta \epsilon) \cdot \frac{\sigma_{af}}{\sigma_a}$$

les  $\Delta \epsilon, \max \Delta \epsilon, \sigma_{af}, \sigma_a$  se réfèrent à la courbe B'C'.

Ce qui donne

$$\sigma_a = \frac{E_a \epsilon_m}{2} \left[ 1 + \sqrt{1 + \left( \frac{2}{\epsilon_m} \right)^2 \Lambda} \right] \quad \Lambda = (C_a - 1)(\epsilon_{B'} - \epsilon_A) [\epsilon_A + C_a(\epsilon_{B'} - \epsilon_A)] \quad (\text{III.3.25})$$

avec

$\sigma_a$  la contrainte de l'acier et

$\epsilon_m$  la déformation totale suivant l'axe de la barre.

$C_a$  le facteur de multiplication de  $E_a$  (par exemple 10)

$\epsilon_A$  et  $\epsilon_{B'}$  les déformations suivant l'axe de la barre à l'instant de la fissuration et à la redistribution complète respectivement.

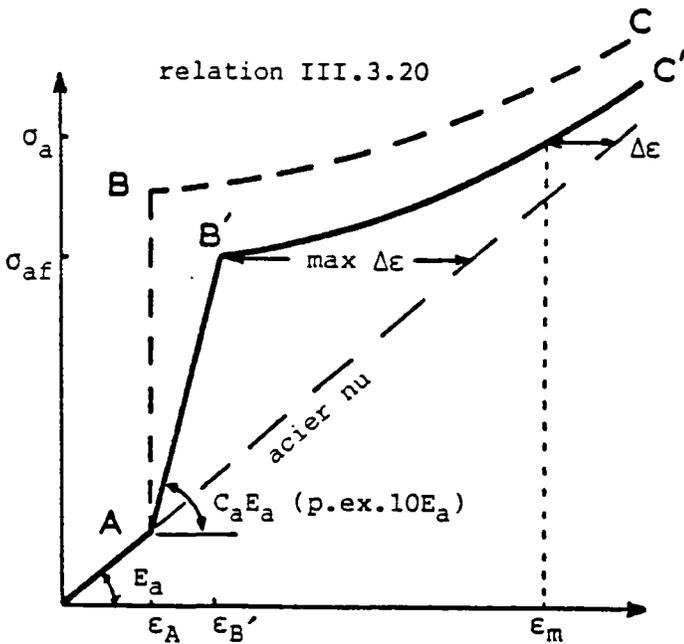


Fig.III.24. Forme finale de la loi de l'acier modifiée par l'adhérence (rel. III.3.25)

La relation III.3.25. est la forme finale de la loi de l'acier modifiée par la fissuration afin de tenir compte de l'effet "tension stiffening" et elle comprend la plupart des facteurs qui influencent le phénomène (disposition de l'armature, position de l'élément fissuré, etc). En revanche le coefficient  $C_a$  qu'elle contient est arbitraire et son rôle dans la réponse globale et locale des structures doit être exploré.

Pour les sollicitations élevées, l'acier est considéré comme un matériau élastique-parfaitement plastique. Par conséquent, tant la relation (III.3.25), qui représente l'ensemble acier-béton sollicité en traction, que la ligne droite de pente  $E_a$ , qui correspond au comportement de l'acier en compression, sont bornées par un palier horizontal d'ordonnée  $\pm \sigma_y$  qui est la contrainte-limite d'élasticité de l'acier (Figure III.25).

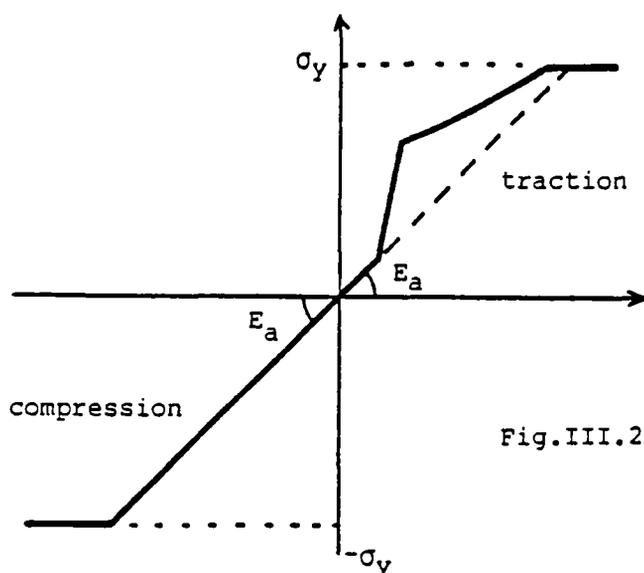


Fig.III.25. Plastification de l'acier

Pour l'évolution de l'espacement entre sa valeur initiale et sa valeur minimale nous avons adopté, inspirés par les expériences des tirants en traction directe, la relation hyperbolique suivante :

$$s = \frac{0,9}{1 - \frac{\epsilon^*}{\epsilon}} S_{\min} \quad (\text{Figure III.26})$$

$$(III.3.26)$$

où  $\epsilon^*$  est la déformation de l'élément au point B' et  $\epsilon$  la déformation totale actuelle, les deux dans la direction normale à la fissure.

$S_{\min}$  la valeur minimale calculée par (III.3.22)

L'évolution de l'espacement qui est irréversible, est valable pour les éléments armés parce que la densification des fissures est due à la présence de l'acier. Les éléments non-armés gardent un espacement constant égal à  $S_{init}$ , de même si  $S_{init}$  est inférieur à  $S_{minimal}$  ce qui peut arriver pour les éléments trop petits ou faiblement armés.

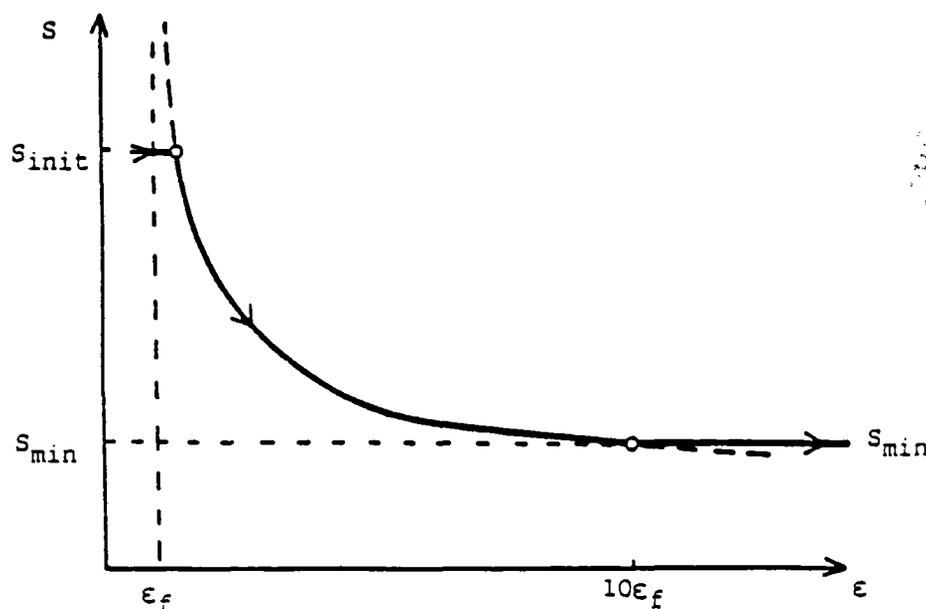


Fig.III.26. Evolution de l'espacement des fissures



### Commentaires

Les points suivants constituent, en principe, une amélioration par rapport aux modélisations existantes.

- . L'utilisation d'un modèle d'engrènement qui tient compte du couplage des effets tangentiels et normaux et l'introduction de ce couplage dans le comportement du matériau fissuré ; ceci était déjà proposé mais jamais appliqué (à notre connaissance) dans un code d'éléments finis.
- . L'introduction de l'effet "tension stiffening" de l'adhérence de façon à tenir compte de la disposition de l'armature, de la configuration de la structure (forme, type de chargement) et de la position de l'élément fissuré.

En revanche nous ne devons pas oublier que :

- Le modèle d'adhérence, bien qu'amélioré, est toujours basé sur une relation empirique, déduite des expériences sur tirants en traction, (structure et chargement unidimensionnels) tandis que nous allons l'appliquer aux structures en état des contraintes bidimensionnel.
- L'influence de la variation de l'espacement risque d'être annulée à cause de la valeur initiale de celui-ci, dépendante de la taille de l'élément qui doit être réduite afin d'approcher la solution exacte. En plus son évolution (rel III.3.26) n'est qu'une grossière approximation des expériences. Bien que l'espacement ne soit pas un résultat de grande importance en soi, sa "mauvaise" estimation se répercutera sur l'engrènement ; phénomène très sensible à l'ouverture des fissures qui est calculée précisément à l'aide de l'espacement.

Nous croyons tout de même que ces défauts n'annulent pas la valeur des améliorations proposées.

### III.4. AUTOUR DE LA STRATEGIE DE RESOLUTION

La discrétisation par éléments finis d'un problème non-linéaire conduit à un système d'équations également non-linéaire. Sa solution ne peut être obtenue que par une suite de résolutions linéaires dont le choix constitue la stratégie de résolution.

#### III.4.1. Méthodes de résolution des problèmes non linéaires

La méthode purement incrémentale constitue une linéarisation par intervalles de la réponse de la structure sans itérations sur l'équilibre, ce qui peut conduire à un écart considérable de la réalité par accumulation des erreurs (Figure III.27a).

Selon la méthode itérative on fixe le niveau de chargement et on itère le champ des déplacements jusqu'à l'équilibre en redistribuant les efforts non-équilibrés (résidus). Les itérations peuvent s'effectuer en utilisant la matrice de rigidité tangente (méthode Newton-Raphson standard, Figure.III.27b) ou initiale (méthode N-R modifiée, Figure III.27c), ou une approximation de la matrice tangente ou de son inverse (méthodes quasi-Newton, [50]).

Enfin, la combinaison des deux donne la méthode incrémentale avec itérations à l'équilibre ou mixte (Figure III.27d).

Les stratégies mentionnées ci-dessus, que nous pouvons appeler "classiques" ([111], [37], [38]), sont utilisées dans la plupart des codes non-linéaires d'éléments finis. Le choix du niveau de chargement et son découpage demande beaucoup d'intuition et une première idée sur la réponse de la structure à résoudre. De plus elles ne convergent pas au voisinage des points critiques et la réponse de la structure ne peut pas être tracée au-delà de ces points.

En imposant une condition supplémentaire on se passe de la charge constante et on itère dans l'espace combiné des déplacements et du niveau de chargement qui dépend d'un seul paramètre. Ainsi nous obtenons une autre stratégie. Sa première apparition avait comme but de dépasser les points critiques de la réponse d'une structure. La condition supplémentaire portait sur un déplacement caractéristique qui gardait pendant les itérations une valeur constante prédéterminée [6]. Le choix de ce déplacement demande une connaissance préalable du comportement de la structure et parfois nous devons le changer au cours de la résolution. Ainsi une extension naturelle est d'adopter une relation globale qui porterait sur l'ensemble des déplacements.

Riks [90] et Wempner [107] imposent d'abord une valeur prescrite à la longueur de la tangente généralisée (espace déplacements-niveau de

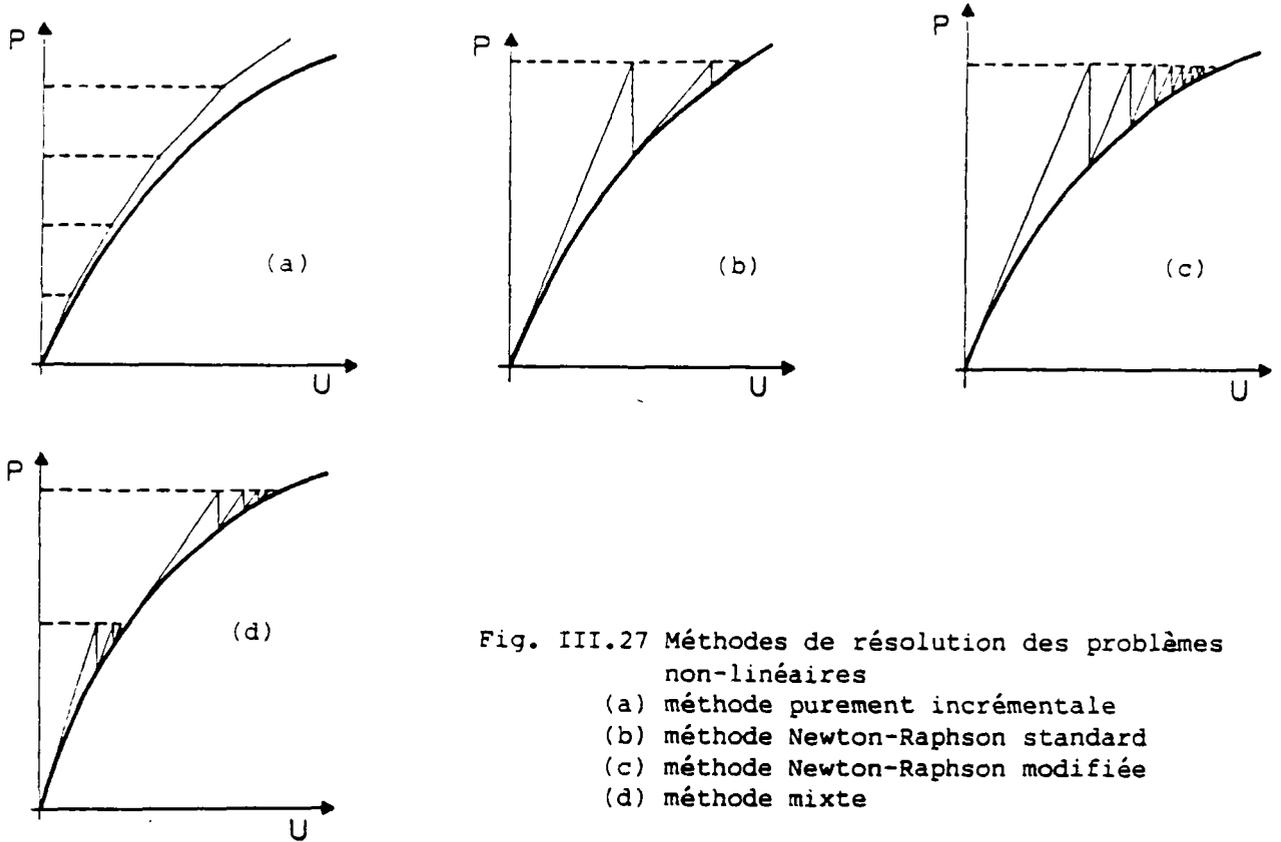


Fig. III.27 Méthodes de résolution des problèmes non-linéaires  
 (a) méthode purement incrémentale  
 (b) méthode Newton-Raphson standard  
 (c) méthode Newton-Raphson modifiée  
 (d) méthode mixte

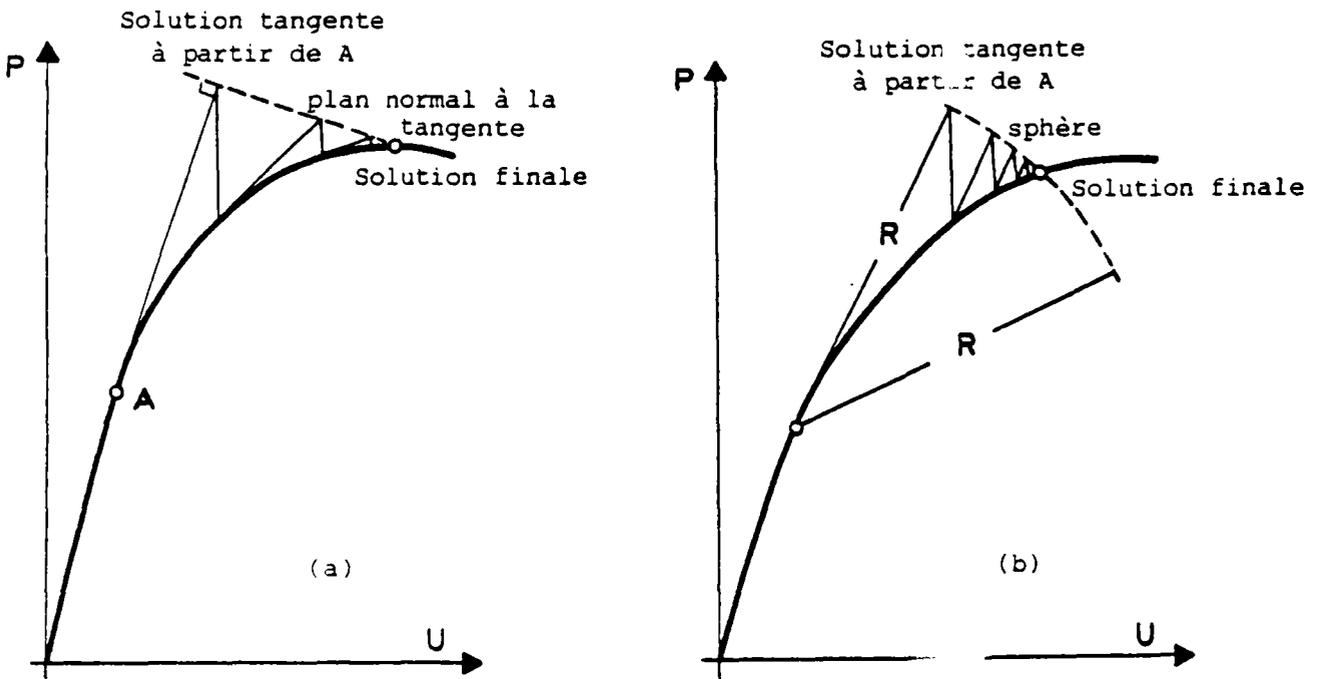


Fig. III.28. Méthodes de résolution des problèmes non-linéaires  
 (a) méthode du "plan tangent" (Riks-Wempner) avec rigidité tangente  
 (b) méthode de "l'arc constant" (Crisfield) avec rigidité constante

chargements) et cherchent ensuite la solution sur le plan normal à cette tangente (Figure III.28a), tandis que Crisfield [33] la cherche sur une sphère de rayon constant (Figure III.28b). Il s'agit en effet, comme le constate Ramm [88], de la même famille de résolutions avec différents types de relations supplémentaires. Les itérations peuvent s'effectuer, encore une fois, en utilisant la matrice tangente, ou initiale, ou sécante (Figure III.28a,b).

L'utilisation des relations supplémentaires s'est avérée bénéfique non seulement près des points critiques mais tout au long de la résolution parce qu'elle sert aussi de moyen d'incrémentation automatique du niveau de chargement, qui est ainsi adapté à la réponse de la structure.

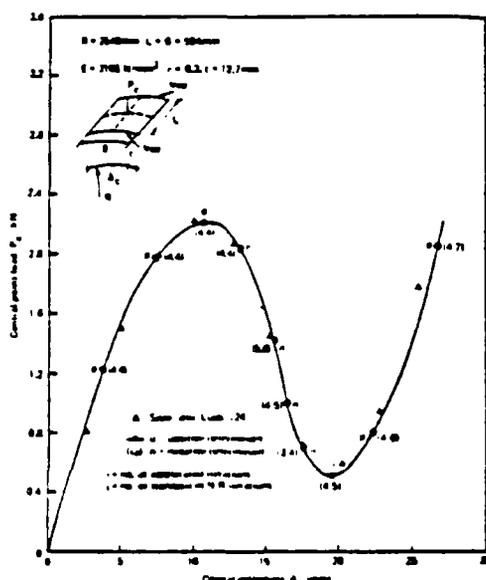


Fig. III.29. Réponse d'une coque obtenue avec la méthode de "l'arc constant"

extrait de [33]

Cette stratégie s'est avérée très efficace pour tracer la réponse des structures d'une extrême non-linéarité (coques en grandes déformations, Figure III.29). Ses capacités, même démontrées sur le calcul des structures d'un autre type, nous orientent vers une stratégie analogue. D'autant plus que les variations de la rigidité des éléments du béton (fissuration, présence éventuelle de l'engrènement, loi non-associée du béton etc) nous font craindre une défaillance numérique des stratégies classiques.

### III.4.2. Variante pour une stratégie adaptée au calcul des structures en béton armé

#### a. Principes de la méthode

La stratégie de résolution que nous proposons retient le principe du niveau de chargement variable pendant les itérations à l'équilibre. En revanche, la condition supplémentaire qui détermine ce niveau n'est plus une relation locale ou globale sur les déplacements mais la fissuration du "prochain" élément, c'est-à-dire une relation qui porte sur l'état des contraintes de l'élément qui va se fissurer le premier.

Ce choix entraîne deux difficultés par rapport aux stratégies mentionnées à la fin du paragraphe précédent. Pour elles la variation du chargement, d'une itération à l'autre, était directement calculée par la variation des déplacements, tandis que pour la nôtre nous devons passer des déplacements aux déformations et ensuite aux contraintes sur lesquelles porte la condition supplémentaire. Le premier passage est linéaire grâce à la linéarité géométrique mais le deuxième, qui se fait par l'intermédiaire de la loi du béton, ne l'est -en général- pas. Ainsi la variation recherchée du niveau de chargement nécessite un calcul plus long et compliqué. De plus on ne sait pas d'avance quel est l'élément qui se fissurera le premier, par conséquent ce calcul doit être répété pour tous les éléments et nous retiendrons le niveau de chargement le plus petit.

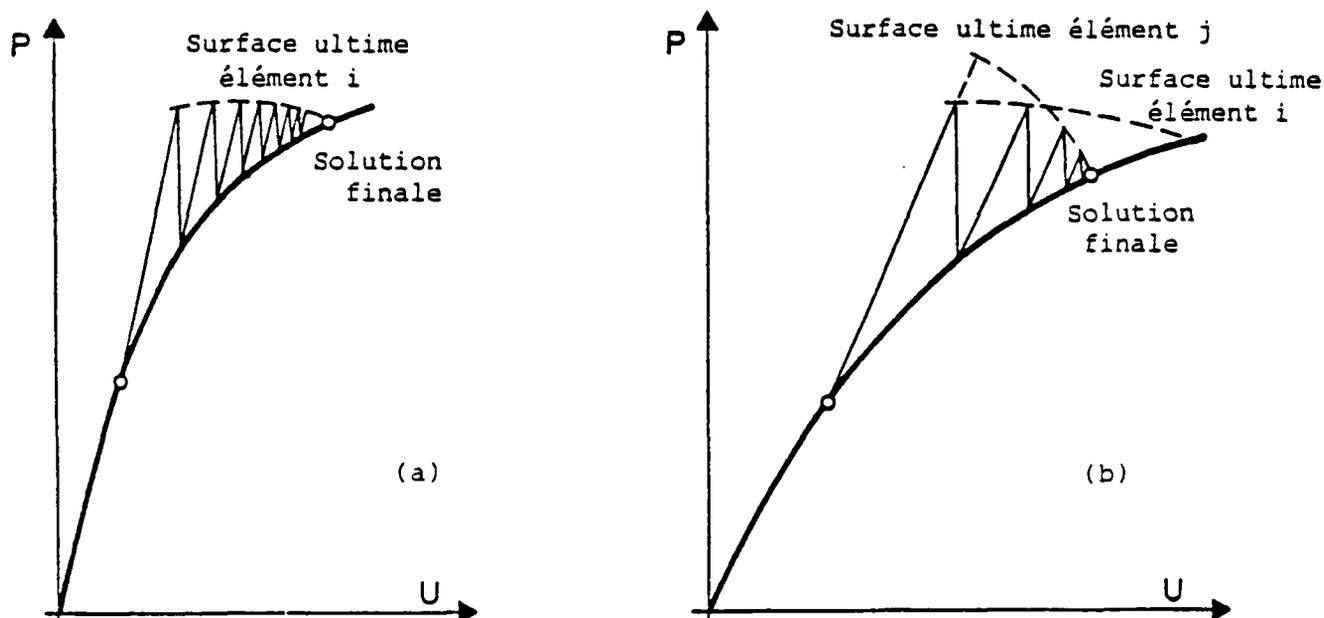


Fig. III.30. Stratégie de résolution proposée

- (a) l'élément "critique" reste le même pendant les itérations
- (b) l'élément "critique" change pendant les itérations



libérés que l'élément ne peut plus subir) doit être ajouté à ses noeuds pour assurer l'équilibre sous les mêmes déplacements. Donc la fissuration de l'élément peut être interprétée comme un saut soudain du chargement au point B (Figure III.31), en dehors du trajet réel des charges. Notons qu'en B la structure est en équilibre mais sous le système "fictif" de forces  $\lambda_A \bar{P} + R_i$ .

La redistribution des efforts libérés dans la structure, c'est-à-dire l'application des  $-R_i$ , correspond au parcours BA (trajet fictif) et ramènera le chargement sur le trajet réel. Cette application s'effectue aussi proportionnellement ( $\mu(-R_i)$ ,  $0 \leq \mu \leq 1$ ) ; on itère alors dans l'espace  $\mu - \Delta\mu$ ,  $\Delta\mu$  étant les variations des déplacements à partir de l'état  $U_A$ , sous la condition que le "prochain plus faible" élément j se trouve au seuil de fissuration. La charge réelle reste toujours constante et égale à  $\lambda_A \bar{P}$ . Si on atteint à nouveau le point A (redistribution complète des efforts libérés par la fissuration de l'élément i) sans qu'un nouvel élément se fissure on reprend le trajet réel AP avec augmentation de la charge extérieure jusqu'à la fissuration du "prochain plus faible" élément et ainsi de suite.

En revanche si l'élément j arrive au seuil de fissuration en un point intermédiaire C du parcours BA (Figure III.31), on bloque la redistribution à cette valeur  $\mu_C(-R_i)$ , on calcule les efforts  $R_j$  libérés par la nouvelle fissuration et le chargement saute de nouveau à cause de cette fissuration au point D. La redistribution, parcours DA, recommencera, toujours proportionnellement et sous la condition de fissuration du "prochain plus faible" élément, et elle comprendra tant les  $-R_j$  que la partie non-redistribuée  $(1 - \mu_C)(-R_i)$  de la fissuration précédente. Le processus continuera jusqu'à atteindre de nouveau le point A sans qu'une nouvelle fissuration intervienne, et ensuite nous reprendrons le trajet réel AP.

Alors le chargement de la structure avec les éventuelles fissurations peut être interprété comme un parcours dans l'espace des charges constitué par des trajets réels, des sauts en dehors de ceux-ci (fissurations) et des trajets fictifs (redistributions) qui ramènent de nouveau le chargement de la structure sur le trajet réel.

Les points en dehors du trajet réel (B, C, D Figure III.31) constituent aussi des états d'équilibre de la structure mais sous un système de forces différent de la charge extérieure réelle.

Tous les trajets, réels (OA,AP) ou fictifs (BC,DA), sont traités de la même façon comme applications proportionnelles d'une charge égale à  $P_{cible} - P_{départ}$  sous la condition que le prochain plus faible élément se trouve au seuil de fissuration ; il suffit de définir proprement, chaque fois, les  $P_{cible}$  et  $P_{départ}$ .

Dans ce contexte traiter un chargement extérieur général défini par une suite de points  $P_1, P_2 \dots P_n$  dans l'espace de charges ne présente aucune difficulté.

**c. Influence de l'algorithme sur la solution d'un problème non-linéaire - Avantages de la méthode**

Le comportement d'une structure en béton armé, et plus particulièrement sa fissuration, dépendent fortement du trajet de chargement suivi ; donc la réponse obtenue est proche de la réalité dans la mesure où l'algorithme utilisé reproduit fidèlement le trajet réel [16].

Un processus itératif n'est que la recherche d'une position d'équilibre dans l'espace charges-déplacements suivant un chemin fictif, autre que le trajet réel, et qui est, chaque fois, différent selon la méthode itérative utilisée (N-R standard ou modifiée, ou quasi-Newton). Si, alors, aucune précaution particulière n'est prise, et c'est le cas de la plupart de codes d'éléments finis traitant des structures en béton armé, [2], [19], [22], [86], [87]), le trajet suivi pendant les itérations provoque une fissuration artificielle et la solution obtenue s'éloigne de la réalité. Cet écartement peut être important parce que chaque fausse fissuration risque de fissurer faussement, à cause des efforts libérés par celle-ci une série d'éléments voisins. On trouvera un exemple caractéristique dans [78] où les réponses obtenues par la méthode N-R standard et modifiée sont sensiblement différentes, tant en ce qui concerne le mode de fissuration que le comportement global (courbe charge-flèche correspondante).

Il est alors très important de suivre les apparitions successives des fissures<sup>(1)</sup> et de connaître, à l'instant de chaque fissuration, les contraintes et les déformations qui déterminent les efforts libérés, l'orientation des fissures etc. La stratégie proposée répond à toutes ces exigences, tant pour l'augmentation de la charge extérieure, que pour les phases fictives de redistribution des efforts libérés ; son utilisation

---

<sup>(1)</sup> Suzuki et Chen [96] proposent un algorithme, nettement amélioré par rapport aux précédents, qui suit les fissurations successives mais la redistribution des efforts libérés s'effectue par solutions incrémentales sans itérations à l'équilibre. Leur algorithme nous a inspiré, entre autres, pour l'établissement de notre stratégie.

nous permettra, en principe, de mieux cerner la réalité<sup>(1)</sup>. De plus, pendant les itérations l'intégration de la loi de comportement pour les éléments plastifiés se fait à partir du point d'équilibre précédent et leurs paramètres sont actualisés après que la nouvelle solution soit trouvée. Ainsi le trajet fictif suivi n'influence aussi du point de vue "plastification" ni la recherche de la solution ni l'état final des éléments, ce qui permet d'éviter leurs déchargements fictifs [16].

Des efforts libérés, que nous devons ensuite redistribuer, apparaissent non seulement quand un élément se fissure mais aussi quand il s'écrase sous sollicitations compressives. Pour couvrir également ce cas nous étendons la condition supplémentaire, sous laquelle on effectue les itérations, et qui détermine chaque fois le niveau variable du chargement. Ce dernier est, maintenant, recherché comme la valeur minimale de charge qui provoque soit la fissuration soit l'écrasement d'un élément.

#### d. Procédure d'accélération

Pour les itérations nous avons choisi la méthode N-R modifiée. On utilise alors la matrice de rigidité initiale qui n'est formée et factorisée qu'une seule fois tout au long de la résolution. Elle est obtenue en considérant les deux matériaux (acier, béton) élastiques linéaires et sans aucune fissuration.

Vu le degré élevé de la non-linéarité du problème nous avons adopté le processus d'accélération proposé par Crisfield [32] pour réduire le nombre des itérations nécessaire à l'équilibre.

Ainsi les corrections des déplacements  $\delta_i$  ajoutées aux déplacements  $U_i$  au cours de l'itération  $i$

$$U_{i+1} = U_i + \delta_i \quad (\text{III.4.1})$$

---

<sup>(1)</sup>Ceci est limité par les limites de validité du critère de fissuration lui-même. Néanmoins l'incertitude sur le comportement du matériau, d'ailleurs ne concerne pas seulement la fissuration, n'annule pas l'intérêt de l'amélioration apportée à l'algorithme. Son importance pratique ne peut être estimée que par l'expérience d'application sur divers cas.

sont calculées par

$$\delta_i = e_i \delta_{i-1} + f_i \delta_i^* \quad (\text{III.4.2})$$

$\delta_i^*$  étant la correction selon la méthode classique N-R modifiée

$$\delta_i^* = K_0^{-1} g_i \quad (\text{III.4.3})$$

$K_0$  la rigidité globale initiale

$g_i$  les efforts non équilibrés correspondants aux  $U_i$  (avec le signe opposé que celui habituellement adopté)

$e_i$  et  $f_i$  les scalaires

$$f_i = -\frac{a_i}{b_i} \quad e_i = f_i \left(1 - \frac{c_i}{b_i}\right) - 1 \quad (\text{III.4.4})$$

et  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  les produits scalaires

$$\begin{aligned} a_i &= \delta_{i-1}^T g_{i-1} \\ b_i &= \delta_{i-1}^T (g_i - g_{i-1}) \\ c_i &= \delta_i^{*T} (g_i - g_{i-1}) \end{aligned} \quad (\text{III.4.5})$$

Le processus commence ( $i = 0$ ) avec  $f_0 = 1$ ,  $e_0 = 0$ ,  $g_0 = -\Delta q$  avec  $\Delta q$  la variation du vecteur des charges à partir de l'état d'équilibre précédent  $U_0$ .

Par rapport à la méthode classique N-R modifiée l'accélération exige la mémorisation supplémentaire des deux vecteurs  $\delta_{i-1}$  et  $g_{i-1}$ .

En multipliant les deux membres de (III.4.2) par  $(g_i - g_{i-1})$  on trouve

$$\delta_i^T (g_i - g_{i-1}) = -\delta_{i-1}^T g_i \quad (\text{III.4.6})$$

qui est un type de relation sécante. A une dimension (Figure III.32) la méthode sécante détermine  $\delta_i$  par la relation

$$\delta_i (g_i - g_{i-1}) = -\delta_{i-1} g_i \quad (\text{III.4.7})$$

alors la (III.4.6) peut être considérée comme la forme n-dimensionnelle de (III.4.7).

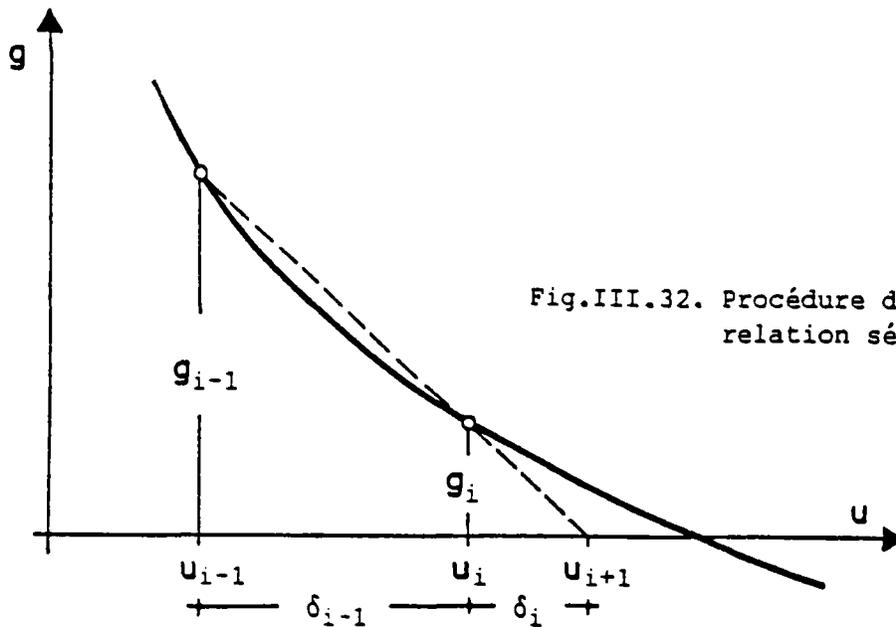


Fig.III.32. Procédure d'accélération;  
relation sécante

Les efforts non équilibrés  $g_i$  qui correspondent aux déplacements  $U_i$  sont donnés par

$$g_i = -\Delta q + \int B^T \Delta \sigma_i dv \quad (\text{III.4.8})$$

l'intégration porte sur tous les éléments et les efforts élémentaires sont assemblés pour toute la structure selon le processus habituel de la méthode des éléments finis.

Il suffit alors de pouvoir calculer, tant pour les éléments plastifiés que pour ceux fissurés, les variations des contraintes  $\Delta \sigma_i$  provoquées par les variations des déformations  $\Delta \epsilon_i$  qui correspondent aux déplacements  $U_i - U_0$ .

#### CHAPITRE IV. PRESENTATION DU PROGRAMME

Ayant présenté les grandes lignes de notre démarche, nous allons compléter notre exposé sur les points-clés du programme jusqu'au niveau opérationnel. Il s'agit de voir de plus près :

- l'intégration de la loi élastoplastique,
- l'intégration de la loi de comportement pour un élément fissuré, ce qui a nécessité la mise sur pied d'une procédure particulière,
- la détermination sur un chemin des déformations de l'état qui se trouve sur une surface ultime,
- le calcul de toutes les grandeurs relatives à la fissuration d'un élément.

Ensuite nous présenterons l'articulation des parties du programme pour constituer le processus de résolution ainsi que le déroulement des calculs, ce qui permettra l'éclaircissement complet de notre code.

##### IV.1. L'intégration de la loi élastoplastique (sous-programmes "plastn" et "plastden").

Soit un élément à l'état  $(\sigma, k)$  sur la surface actuelle d'élasticité ( $F(\sigma, k) = 0$ ). On cherche l'incrément des contraintes  $\{d\sigma\}$  dû à un incrément des déformations  $\{d\epsilon\}$ , suffisamment petit pour être considéré infinitésimal et qui provoque l'écoulement plastique.

La démarche classique ([79], [102], [112]) est de déterminer  $\{d\sigma\}$  par la relation

$$\{d\sigma\} = [D^{ep}(\sigma)]\{d\epsilon\} \quad (IV.1.1.)$$

(voir aussi III.3.6., III.3.7.)

Mais le nouvel état des contraintes  $\{\sigma + d\sigma\}$ , ainsi calculé, ne se trouve pas en général'' sur la nouvelle surface d'élasticité

---

''L'état  $\{\sigma + d\sigma\}$  calculé à partir de (IV.1.1) se trouve sur la nouvelle surface seulement quand  $\{d\sigma\}$  est proportionnel à  $\{\sigma\}$ ; en effet si  $\{d\sigma\} = \rho \cdot \{\sigma\}$  les conditions (IV.1.2) et (IV.1.3) coïncident.

( $F(\sigma+d\sigma, k+dk) \neq 0$ ) parce que la relation (IV.1.1) est obtenue en utilisant le développement au premier ordre :

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial F}{\partial k} dk = 0 \quad (\text{IV.1.2.})$$

de la condition  $dF = 0$ .

Ainsi une correction doit être apportée aux  $\{d\sigma\}$ , afin de ramener l'état final des contraintes sur la surface actuelle d'élasticité. Cette correction peut se faire suivant, soit un chemin radial, soit la normale à la surface des charges [79], ou encore la normale au potentiel [102] sans qu'un de ces choix soit plus justifié qu'un autre.

Pour éviter cette étape nous avons préféré utiliser directement la condition

$$F(\sigma+d\sigma, k+dk) = 0 \quad (\text{IV.1.3})$$

associée aux hypothèses habituelles de l'élastoplasticité

$$\begin{aligned} \{d\varepsilon\} &= \{d\varepsilon^e\} + \{d\varepsilon^p\} \\ (\text{IV.1.4}) \quad \{d\varepsilon^p\} &= \dot{\lambda}\{g\}, \quad \{g\} \text{ étant la représentation vectorielle de } \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \\ dk &= \{\sigma\}^T \{d\varepsilon^p\} \end{aligned}$$

A l'aide des (IV.1.4) l'état des contraintes  $\{\sigma\} + \{d\sigma\}$  est exprimé en fonction de  $\dot{\lambda}$

$$\{\sigma + d\sigma\} = \{\sigma\} + [D^e](\{d\varepsilon\} - \dot{\lambda}\{g\}) \quad (\text{IV.1.5})$$

de même le paramètre  $f_c(k+dk)$

$$f_c(k + dk) = f_c(k) + df_c(k) = f_c(k) + \frac{\partial f_c(k)}{\partial k} dk = f_c(k) + \dot{\lambda} \frac{\partial f_c(k)}{\partial k} \{\sigma\}^T \{g\} \quad (\text{IV.1.6})$$

En introduisant les (IV.1.5) et (IV.1.6) dans (IV.1.3), qui pour notre cas a la forme simple

$$\frac{\sqrt{J_2(\sigma+d\sigma)} + DI_1(\sigma+d\sigma)}{f_c(k+dk)} - 1 = 0 \quad (\text{IV.1.7})$$

nous obtenons une équation de deuxième degré qui détermine la valeur  $\lambda$  que nous utilisons ensuite pour trouver les  $\{\Delta \epsilon^e\}$ ,  $\{\Delta \sigma\}$  et  $\Delta k$  par les (IV.1.4).

Si l'incrément des déformations  $\{\Delta \epsilon\}$  correspond à une décharge, c'est-à-dire  $F(\sigma, k) \leq 0$  et  $F(\sigma + \Delta \sigma^e, k) \leq 0$  avec  $\{\Delta \sigma^e\} = [D^e]\{\Delta \epsilon\}$

le comportement de l'élément est purement élastique et  $\{\Delta \sigma^e\}$  est l'incrément recherché des contraintes.

Si  $F(\sigma, k) < 0$  et  $F(\sigma + \Delta \sigma^e, k) > 0$  un passage du comportement élastique au comportement élastoplastique s'effectue durant l'application de  $\{\Delta \epsilon\}$ . Nous devons alors déterminer le point intermédiaire  $\{\sigma\} + r\{\Delta \sigma^e\}$ ,  $0 < r < 1$  qui correspond à l'intersection avec la surface actuelle ( $F(\sigma + r\Delta \sigma^e, k) = 0$ ), et limiter le calcul élastoplastique à l'application de  $(1-r)\{\Delta \epsilon\}$ . Diverses approches approximatives ([79], [102]) sont proposées pour déterminer le coefficient  $r$ ; pour notre cas, grâce à la forme simple de la surface d'élasticité, ce calcul se fait directement par la résolution d'une équation de deuxième degré.

Le processus décrit jusqu'ici est effectué par le sous-programme "plastn".

En réalité les variations des déformations  $\{\Delta \epsilon\}$  que nous devons appliquer à un élément pendant la résolution sont finies et l'intégration de la loi élastoplastique pour trouver les  $\{\Delta \sigma\}$  se fait pas à pas en divisant  $\{\Delta \epsilon\}$  en  $m$  parties et en appliquant successivement les  $\{\Delta \epsilon\}/m$  (applications successives de "plastn"). Ce travail est effectué par le sous-programme "plastden" qui auparavant détecte les trajets purement ou partiellement élastiques pour économiser les appels inutiles de "plastn".

Le nombre de pas  $m$  peut être déterminé à partir de la valeur  $F(\sigma + \Delta \sigma^e, k)$  ([79], [102]) ou par la différence entre les contraintes obtenues par l'intégration élastoplastique à un et à deux pas [83].

Pour notre cas nous avons voulu que  $m$  soit "proportionnel" à l'incrément  $\{\Delta \epsilon\}$ , c'est-à-dire si  $\{\Delta \epsilon\}$  est appliqué en  $m$  parties, l'application de  $\lambda\{\Delta \epsilon\}$  se fasse en  $m, \approx \lambda m$  et ceci pour des raisons liées à la stratégie de résolution que nous expliciterons ultérieurement. Ainsi  $m$  est déterminé par la relation suivante qui remplit la condition de "proportionnalité" ci-dessus

$$m = \text{int} \left[ \frac{c\sqrt{J_2(\Delta \sigma^e)} + DI_1(\Delta \sigma^e)}{2f_c} \cdot n_{\text{max}} \right] + 1 \quad \{\Delta \sigma^e\} = [D^e]\{\Delta \epsilon\} \quad (\text{IV.1.8})$$

Le dénominateur  $2f_e$  provient d'une estimation approximative (résultats expérimentaux de Kupfer [63]) de la valeur  $C\sqrt{J_2(\Delta\sigma^e)} + DI_1(\Delta\sigma^e)$  qui correspond au passage du domaine initial au domaine ultime d'élasticité et  $n_{max}$  est le nombre maximal de subdivisions prévu pour ce passage et fixé par l'utilisateur.

Notons que "plastden" a deux options : une qui, après avoir trouvé le  $\{\Delta\sigma\}$  actualise aussi l'état des contraintes et les paramètres de comportement de l'élément ( $f_e(k)$  et  $k$ ) et une autre qui calcule seulement le  $\{\Delta\sigma\}$ . On applique la deuxième pendant les itérations et la première, après avoir trouvé la position d'équilibre, pour calculer l'état final des éléments. Ainsi l'intégration pendant les itérations se fait à partir du dernier point d'équilibre. Ce processus est relativement coûteux mais il garantit la non influence du trajet "fictif" des itérations sur la solution finale.

#### IV.2. Recherche suivant un trajet de déformations de l'intersection avec une surface ultime (sous-programme "cisult")

Soit un élément à l'état  $(\sigma, \epsilon, k)$ , qui correspond au point d'équilibre précédent de la structure, et un incrément des déformations  $\{\Delta\epsilon\}$ , provenant d'une itération. Nous considérons que l'état des déformations parcourt proportionnellement le chemin  $\{\epsilon\}$ ,  $\{\epsilon\} + \{\Delta\epsilon\}$ . La stratégie de résolution que nous avons exposé au Chapitre III.4.2. nécessite de déterminer le point de ce chemin,  $\{\epsilon\} + \lambda\{\Delta\epsilon\}$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$ , qui amène l'état de contraintes  $\{\sigma\} + \{\Delta\sigma\}$  sur une surface ultime dans l'espace de contraintes (fissuration ou écrasement). Ce calcul qui est effectué par le sous-programme "cisult", détermine ( $\lambda_{m \pm n}$  sur tous les éléments) le niveau du chargement.

Si ce parcours n'engendre pas de déformations plastiques, il suffit de déterminer le point  $\{\sigma\} + \lambda\{\Delta\sigma^e\} = \{\sigma\} + \lambda[D^e]\{\Delta\epsilon\}$  dans l'espace de contraintes qui est l'intersection avec la surface de fissuration, la seule surface ultime qu'on puisse atteindre par un chemin élastique. Sinon on trouve d'abord l'intersection  $\{\sigma\} + \lambda_1\{\Delta\sigma^e\}$  avec le domaine actuel d'élasticité et on procède ensuite à l'intégration élastoplastique de l'incrément  $(1 - \lambda_1)\{\Delta\epsilon\}$  en  $m$  parties,  $m$  étant calculé comme pour "plastden" par la relation (IV.1.8).

Après chaque sous-incrément nous examinons si une surface ultime est percée. Supposons que ceci arrive pendant le pas  $j$  ; nous avons alors

$$\lambda = \lambda_1 + \frac{(j-1) + \lambda_2}{m}$$

Le coefficient  $\lambda_2$  ( $0 \leq \lambda_2 \leq 1$ ) nous indique la position de l'intersection à l'intérieur du pas  $j$  et il est calculé en admettant la proportionnalité entre incréments de contraintes et de déformations, approximation acceptable vue la taille du sous-incrément.

Il est évident que le bon fonctionnement de l'algorithme exige de retrouver pour l'élément critique, celui qui a donné le  $\lambda_{\min}$  un état de contraintes sur la surface ultime si on lui applique uniquement l'incrément  $\{\lambda_{\min} \Delta \varepsilon\}$ . Ceci est assuré si le nombre de pas  $m$ , correspondant à  $\{\lambda_{\min} \Delta \varepsilon\}$ , et plus précisément à sa partie purement élastoplastique, est égal, à une unité près, au nombre de pas  $j$  parcouru pendant la recherche de  $\lambda_{\min}$ . D'où l'exigence du calcul "proportionnel" de  $m$  avec  $\{\Delta \varepsilon\}$  comme il a été exposé au Chapitre IV.1. Soulignons que ce n'est pas une précision exagérée sur la valeur des contraintes qui nous impose ce type de calcul de  $m$ , mais la capacité de "reconnaître" de nouveau, une fois la solution trouvée, l'élément critique, fissuré ou écrasé pour ce niveau des charges, en appliquant le critère correspondant.

#### IV.3. Intégration de la loi de comportement pour un élément fissuré (sous-programme "fidsen")

Il est plus difficile et moins trivial de pouvoir calculer la variation des contraintes du béton  $\{\Delta \sigma^b\}$  due à une variation des déformations  $\{\Delta \varepsilon\}$  d'un élément fissuré, travail effectué par le sous-programme "fidsen". Nous mentionnons seulement le béton parce que les contraintes dans l'acier sont calculées directement, ses déformations étant identiques à celles de l'élément (hypothèse de base (i) Chapitre III.2); la seule différence par rapport à un élément intègre est l'utilisation de la loi de l'acier qui incorpore l'effet "tension stiffening".

Au Chapitre III.2. nous avons élaboré, à l'aide de certaines hypothèses une loi incrémentale du matériau fissuré. En regardant de plus près la relation (III.2.14) qui l'explique, on constate qu'elle n'est pas directement utilisable parce que ses éléments, provenant de la loi du béton et de l'engrènement, peuvent prendre une multitude de valeurs sans que l'on sache à l'avance lesquelles choisir.

On peut mieux saisir cette difficulté par une comparaison avec un élément élastoplastique intègre. Dans ce cas, connaissant le  $\{\Delta \varepsilon\}$ , la position de l'état de contraintes  $\{\sigma\} + [D^e] \{\Delta \varepsilon\}$  par rapport au domaine actuel d'élasticité nous précise la loi du matériau à appliquer (élastique ou élastoplastique). Par contre pour un élément fissuré nous ne la connaissons pas et nous devrions "partager" les  $\{\Delta \varepsilon\}$  en  $\{\Delta \varepsilon^e\}$  et  $\{\Delta \varepsilon^b\}$  (relation III.2.13) pour pouvoir se prononcer, à partir de ces dernières, sur le comportement du béton. Mais la loi de comportement du matériau intervient déjà dans ce "partage", de même que l'engrènement qui

peut être actif ou non et les coefficients de sa loi peuvent changer de signe suivant la variation des déplacements des lèvres que l'on calcule à l'aide de  $\{\Delta \varepsilon^f\}$ .

Nous pouvons dire, alors, que la combinaison des fissures et du béton a rendu, d'une certaine façon, le comportement de l'ensemble incrémentalement non linéaire.

On aurait pu imaginer un processus qui chercherait la solution en épuisant toutes les possibilités, mais nous avons préféré nous attaquer au problème par une méthode itérative "quasi-Newton" que nous exposerons ensuite.

D'une façon générale, pour un système d'équations non-linéaires  $\{r(q)\} = \{0\}$  ( $\{r\}$  et  $\{q\}$  étant vecteurs de dimension  $n$ ), les méthodes "quasi-Newton" [50] recherchent la solution par un processus itératif qui utilise au lieu du jacobien  $(\partial\{r\}/\partial\{q\})$  une approximation  $[G]$  de celui-ci que l'on déduit en évaluant  $\{r(q)\}$  en deux points successifs  $\{\tilde{q}\}$  et  $\{q\}$ .

Cette matrice  $[G]$  doit satisfaire l'équation suivante, dite "quasi-Newton",

$$[G]\{d\} = \{r(q)\} - \{r(\tilde{q})\} = \{Y\}, \quad \{d\} = \{q\} - \{\tilde{q}\} \quad (\text{IV.3.1})$$

et il est souhaitable qu'elle soit facilement calculable en ajoutant à l'approximation précédente  $[G(\tilde{q})]$  une matrice corrective dépendante des  $\{d\}$  et  $\{Y\}$ .

Une telle approximation, la plus simple, qui vérifie l'équation "quasi-Newton" est :

$$[G] = [G(\tilde{q})] + \frac{(\{Y\} - [G(\tilde{q})]\{d\})\{u\}^T}{\{u\}^T\{d\}} \quad (\text{IV.3.2})$$

avec  $\{u\}$  un vecteur arbitraire tel que  $\{u\}^T\{d\} \neq 0$ .

Broyden propose  $\{u\} = \{d\}$ , donc

$$[G_B] = [G(\tilde{q})] + \frac{(\{Y\} - [G(\tilde{q})]\{d\})\{d\}^T}{\{d\}^T\{d\}} \quad (\text{IV.3.3})$$

et c'est l'approximation que nous retenons.

Alors une boucle typique du processus itératif se présente comme suit : ayant les  $\{G_k\}$ ,  $\{q_k\}$ ,  $\{r_k\}$

$$\begin{aligned} \text{on calcule} \quad \{d_k\} &= -[G_k]^{-1}\{r_k\} \\ \{q_{k+1}\} &= \{q_k\} + \{d_k\} \\ \{r_{k+1}\} &= \{r(q_{k+1})\} \end{aligned}$$

et on établit la nouvelle approximation de la matrice  $[G]$

$$[G_{k+1}] = [G_k] + \frac{(\{Y\} - [G_k]\{d_k\})\{d_k\}^T}{\{d_k\}^T\{d_k\}} = [G_k] + \frac{\{r_{k+1}\}\{d_k\}^T}{\{d_k\}^T\{d_k\}} \quad (\text{IV.3.4})$$

puisque  $\{Y\} = \{r_{k+1}\} - \{r_k\}$  et  $[G_k]\{d_k\} = -\{r_k\}$

ayant les  $\{G_{k+1}\}$ ,  $\{q_{k+1}\}$ ,  $\{r_{k+1}\}$  la boucle peut être répétée jusqu'à obtenir  $\{r_m\} \approx \{0\}$ .

Voyons maintenant l'application concrète du processus ci-dessus à notre problème. Il s'agit de trouver les  $\{\Delta\sigma^b\}$  d'un élément fissuré dont on connaît l'état actuel et qui subit une variation de déformations  $\{\Delta\varepsilon\}$ . Dans la suite toutes les grandeurs sont considérées dans le repère des fissures nt.

Rappelons les hypothèses (voir aussi hypothèses de base (i), (ii), (iii) Chapitre III.2.).

- décomposition des déformations totales :

$$\{\Delta\varepsilon\} = \{\Delta\varepsilon^f\} + \{\Delta\varepsilon^b\} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \Delta\varepsilon_{nn} \\ \Delta\varepsilon_{tt} \\ \Delta\gamma_{nt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta\varepsilon_{nn}^f \\ 0 \\ \Delta\gamma_{nt}^f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta\varepsilon_{nn}^b \\ \Delta\varepsilon_{tt}^b \\ \Delta\gamma_{nt}^b \end{pmatrix} \quad (\text{IV.3.5})$$

- les contraintes à la fissure  $\begin{pmatrix} \Delta\sigma_{nn}^{f+g} \\ \Delta\sigma_{nt}^{f+g} \end{pmatrix}$  dues aux  $\begin{pmatrix} \Delta\varepsilon_{nn}^f \\ \Delta\gamma_{nt}^f \end{pmatrix}$  et calculées

par les lois de goujon et de l'engrènement, sont égales aux  $\begin{pmatrix} \Delta\sigma_{nn}^b \\ \Delta\sigma_{nt}^b \end{pmatrix}$

- les  $\{\Delta\sigma^b\}$  sont calculés à partir des  $\{\Delta\varepsilon^b\}$  par la loi de comportement du béton.

A partir de l'état de déformations  $\{\varepsilon\} + \{\Delta\varepsilon\}$  on peut calculer (relation III.3.26) la nouvelle valeur de l'espacement des fissures  $S_n$  ; évidemment si  $S_n > S_a$ , l'ancienne valeur  $S_a$  est retenue puisque l'espacement ne peut pas croître au cours de la résolution.

On identifie le vecteur  $\begin{pmatrix} \Delta\varepsilon_{nn}^f \\ \Delta\gamma_{nt}^f \end{pmatrix}$  aux paramètres inconnus  $\{q\}$  et le vecteur  $\begin{pmatrix} \Delta\sigma_{nn}^{f+g} - \Delta\sigma_{nn}^b \\ \Delta\sigma_{nt}^{f+g} - \Delta\sigma_{nt}^b \end{pmatrix}$  aux résidus  $\{r\}$  la solution correspond à  $\{r\} = \{0\}$ .

Pour une approximation  $\{\Delta\varepsilon^f\}_k$  on peut calculer, par la décomposition, les  $\{\Delta\varepsilon^b\}_k = \{\Delta\varepsilon\} - \{\Delta\varepsilon^f\}_k$  parce que  $\{\Delta\varepsilon\}$  sont connues. On peut alors trouver les  $\{\Delta\sigma^b\}_k$  par une intégration élastoplastique (application "plastden").

Les  $\{\Delta\sigma^{f+g}\}_k$  sont calculées par les  $\{\Delta\varepsilon^f\}_k$  à l'aide des lois de goujon et de l'engrènement

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{nn}^{f+g} &= G_{nn} \Delta\delta_{nn} + G_{nt} \Delta\delta_{nt} + [S(\delta_{nn} + \Delta\delta_{nn}, \delta_{nt} + \Delta\delta_{nt}) - S(\delta_{nn}, \delta_{nt})] \\ \Delta\sigma_{nt}^{f+g} &= G_{tn} \Delta\delta_{nn} + G_{tt} \Delta\delta_{nt} + [T(\delta_{nn} + \Delta\delta_{nn}, \delta_{nt} + \Delta\delta_{nt}) - T(\delta_{nn}, \delta_{nt})] \end{aligned} \quad (\text{IV.3.6})$$

partie due à l'effet de goujon
partie due à l'engrènement

$$\begin{aligned} \text{avec } \Delta\delta_{nn} &= S_n(\varepsilon_{nn}^f + \Delta\varepsilon_{nn}^f) - S_a\varepsilon_{nn}^f = (S_n - S_a)\varepsilon_{nn}^f + S_n\Delta\varepsilon_{nn}^f \\ \Delta\delta_{nt} &= S_n(\gamma_{nt}^f + \Delta\gamma_{nt}^f) - S_a\gamma_{nt}^f = (S_n - S_a)\gamma_{nt}^f + S_n\Delta\gamma_{nt}^f \end{aligned} \quad (\text{IV.3.7})$$

Les  $G_{nn}$ ,  $G_{nt}$  etc proviennent de la loi pour l'effet de goujon (relation III.3.17) et les fonctions  $S(\delta_{nn}, \delta_{nt})$ ,  $T(\delta_{nn}, \delta_{nt})$  de la loi de l'engrènement (relations III.3.12. a et b). Les indices  $k$  de l'itération sont omis pour ne pas alourdir de surcroît l'écriture.

Ainsi on peut déterminer pour un  $\{\Delta\varepsilon^f\}_k$  le  $\{\Delta\sigma^{f+g} - \Delta\sigma^b\}_k$  correspondant et appliquer la méthode itérative exposée.

Le processus démarre avec

$$[G_0] = \begin{bmatrix} S_n G_{nn} + E/(1-\nu^2) & S_n G_{nt} \\ S_n G_{tn} & S_n G_{tt} + E/2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

$$\{r_0\} = \begin{Bmatrix} (S_n - S_a)(G_{nn}\epsilon_{nn}^f + G_{nt}\gamma_{nt}^f) - \frac{E}{1-\nu^2} (\Delta\epsilon_{nn} + \nu \cdot \Delta\epsilon_{tt}) \\ (S_n - S_a)(G_{tn}\epsilon_{nn}^f + G_{tt}\gamma_{nt}^f) - \frac{E}{2(1+\nu)} \Delta\gamma_{nt} \end{Bmatrix}$$

et  $\{q_0\} = \{0\}$ ,  $E$  et  $\nu$  le module d'Young et le coefficient de Poisson du béton.

Le  $\{d_0\}$  qu'on calcule la première fois par  $\{d_0\} = -[G_0]^{-1} \{r_0\}$  correspond à la solution du problème "linéaire", c'est-à-dire quand le béton est élastique linéaire et l'engrènement inactif.

Effectivement la relation  $[G_0] \{d_0\} + \{r_0\} = 0$  est celle qu'on trouve par  $\{\Delta\sigma^{f+g} - \Delta\sigma^b\} = 0$  avec

$$\{\Delta\sigma^b\} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \{\Delta\epsilon^b\} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} \Delta\sigma_{nn}^{f+g} \\ \Delta\sigma_{nt}^{f+g} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta\sigma_{nn}^g \\ \Delta\sigma_{nt}^g \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{nn} & G_{nt} \\ G_{tn} & G_{tt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\delta_{nn} \\ \Delta\delta_{nt} \end{Bmatrix}$$

donnés par (IV.3.7)

Notons que "fiscden" a deux options comme "plastden" et pour des raisons identiques. L'une, utilisée pendant les itérations, qui calcule uniquement les  $\{\Delta\sigma^b\}$  et l'autre, utilisée après avoir trouvé le point d'équilibre, qui actualise en plus tous les paramètres.

#### IV.4. Calcul des efforts libérés et des grandeurs initiales à l'instant de la fissuration d'un élément (sous-programme "eflifis")

A l'instant où un élément atteint la surface-seuil de fissuration nous considérons les noeuds fixés momentanément pour pouvoir faire la répartition initiale des déformations entre la partie due aux fissures et celle due aux bandes du béton. Cette phase a été longuement expliquée au Chapitre III.3.5. et les calculs correspondants sont effectués par le sous-programme "eflifis".

D'abord on calcule l'orientation des fissures ; c'est la normale à la plus grande déformation principale. Ensuite on trouve l'espacement initial des fissures  $S_i$  comme la projection de l'élément sur la direction perpendiculaire à la fissure.

Les contraintes mobilisées sur les lèvres des fissures, dues uniquement à l'effet de goujon sont

$$\sigma_{nn}^g = S_i (G_{nn} \cdot \Delta \varepsilon_{nn}^f + G_{nt} \cdot \Delta \gamma_{nt}^f)$$

$$\sigma_{nt}^g = S_i (G_{tn} \cdot \Delta \varepsilon_{nn}^f + G_{tt} \cdot \Delta \gamma_{nt}^f)$$

L'hypothèse de décomposition des déformations et l'invariabilité des déformations totales donnent

$$\Delta \varepsilon_{nn}^f + \Delta \varepsilon_{nn}^b = 0$$

$$\Delta \varepsilon_{tt}^b = 0$$

$$\Delta \gamma_{nt}^f + \Delta \gamma_{nt}^b = 0$$

le béton étant élastique linéaire pendant cette variation

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_{nn}^b &= \frac{E}{1-\nu^2} (\Delta \varepsilon_{nn}^b + \nu \cdot \Delta \varepsilon_{tt}^b) = \frac{E}{1-\nu^2} \Delta \varepsilon_{nn}^b = -\frac{E}{1-\nu^2} \Delta \varepsilon_{nn}^f \\ \Delta \sigma_{tt}^b &= \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \cdot \Delta \varepsilon_{nn}^b + \Delta \varepsilon_{tt}^b) = \nu \frac{E}{1-\nu^2} \Delta \varepsilon_{nn}^b = -\frac{\nu E}{1-\nu^2} \Delta \varepsilon_{nn}^f = \nu \Delta \sigma_{nn}^b \\ \Delta \sigma_{nt}^b &= \frac{E}{2(1+\nu)} \Delta \gamma_{nt}^b = -\frac{E}{2(1+\nu)} \Delta \gamma_{nt}^f \end{aligned}$$

La variation globale des contraintes du béton est  $\{\Delta \sigma^b\} = \{\sigma^b\} - \{\sigma^i\}$  où  $\{\sigma^i\}$  est l'état des contraintes du béton intègre au moment de la fissuration et  $\{\sigma^b\}$  celui des bandes du béton après la formation des fissures.

L'hypothèse de la continuité du vecteur contrainte à la facette des fissures donne:

$$\sigma_{nn}^g = \sigma_{nn}^b = \sigma_{nn}^i + \Delta \sigma_{nn}^b$$

$$\sigma_{nt}^g = \sigma_{nt}^b = \sigma_{nt}^i + \Delta \sigma_{nt}^b \quad \text{qui devient}$$

$$\begin{bmatrix} S_i G_{nn} + \frac{E}{1-\nu^2} & S_i G_{nt} \\ S_i G_{tn} & S_i G_{tt} + \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_{nn}^f \\ \Delta \gamma_{nt}^f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{nn}^i \\ \sigma_{nt}^i \end{Bmatrix}$$

d'où détermine les  $\{\Delta \varepsilon^f\} = \{\varepsilon^f\}$  et par la suite toutes les grandeurs recherchées ( $\{\Delta \sigma^b\}$ ,  $\{\sigma^b\}$ , etc.).

Les efforts nodaux  $R$  que nous devons ajouter (chargement fictif) aux noeuds de l'élément fissuré pour que la structure reste en équilibre sous les mêmes déplacements sont :

$$R = \int_B \sigma^b - \sigma^i dv = \int_B \Delta \sigma^b dv$$

l'intégration s'effectue dans le volume de l'élément fissuré.

Nous rappelons que rien ne change pour l'acier dont les déformations sont identiques à celles de l'élément qui restent constantes pendant cette phase.

#### IV.5. La mise en oeuvre de la stratégie de la résolution (sous-programme "grapac")

Nous avons présenté jusqu'ici les sous-programmes les plus importants ; voyons maintenant leur utilisation pour la mise en oeuvre de la stratégie de résolution décrite au Chapitre III.4.2. Ceci est fait essentiellement par le sous-programme "grapac", qui constitue le coeur de notre code, tandis que le programme principal effectue quelques travaux préliminaires (introduction de données, initialisation des variables etc) et commande les appels successifs de "grapac" jusqu'à la fin du chargement.

Dans "grapac" on peut distinguer deux parties. Etant donnés deux points  $P_{\text{depart}}$  et  $P_{\text{cible}}$  dans l'espace des chargements, la première partie consiste à rechercher la solution sur le segment  $P_{\text{depart}}, P_{\text{cible}}$  sous la condition que le plus faible élément se trouve sur une surface ultime. Après que cette solution ait été trouvée, la deuxième partie calcule les grandeurs correspondantes (déformations, contraintes) et prépare les valeurs  $P_{\text{depart}}$  et  $P_{\text{cible}}$  ainsi que tout autre élément indispensable pour la prochaine application de "grapac".

Recherche de la solution. Soit  $m$  le point précédent d'équilibre de la structure dans l'espace charges-déplacements, correspondant aux charges  $P_{\text{depart}}$ . Une boucle typique du processus itératif se présente comme suit.

Soient  $u_i$  les variations des déplacements à partir du point  $m$ , obtenues par l'itération précédente  $i$  qui correspond à une charge  $\lambda_t^i (P_c - P_d)$ . Avec les déformations dues au champ  $u_i$  nous déterminons, en appliquant "cisult" pour tous les éléments intègres et en retenant la plus petite valeur, le coefficient  $\lambda_{i+1}$  de sorte que l'application du champ  $\lambda_{i+1} u_i$  amène le plus faible élément sur une surface ultime.

Nous calculons ensuite les efforts non-équilibrés  $g_{i+1}$ , associés aux  $\lambda_{i+1} u_i$  le niveau de chargement étant réduit à  $\lambda_t^i \lambda_{i+1} (P_c - P_d) = \lambda_t^{i+1} (P_c - P_d)$

$$g_{i+1} = -\lambda_t^{i+1} (P_c - P_d) + \int_B^T \Delta \sigma dv$$

Les incréments des contraintes  $\Delta \sigma$  sont calculés par "plastden" pour les éléments intègres et par "fisden" pour ceux fissurés et nous utilisons leurs options qui n'actualisent pas les paramètres de comportement du matériau.

Enfin on calcule à partir des  $g_{i+1}$ , les corrections itératives accélérées  $\delta_{i+1}$ . Les nouvelles variations des déplacements sont

$$u_{i+1} = \lambda_{i+1}u_i + \delta_{i+1}$$

et elles correspondent à une charge  $\lambda_t^{i+1}(P_c - P_d)$  :  $\lambda_t^{i+1} = \lambda_t^i \cdot \lambda_{i+1}$

On peut alors reprendre la boucle et la procédure continue jusqu'à obtenir  $g_k \approx 0$ .

Les variations des déplacements  $u_0$ , par lesquelles le processus démarre, sont calculées pour une charge  $P_a - P_d$  ( $\lambda_t^0 = 1$ ) en utilisant la rigidité initiale de la structure. La Figure IV.1 donne une représentation graphique du processus.

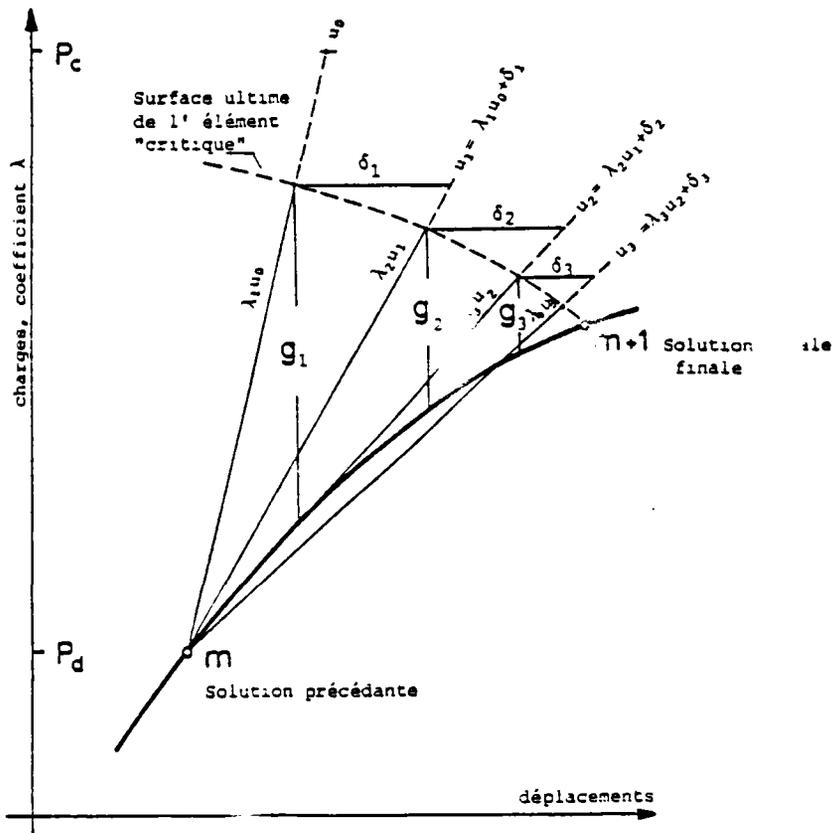


Fig. IV.1. Stratégie de résolution proposée; recherche de la solution sous la condition de la fissuration (ou écrasement) du plus "faible" élément

Préparation de l'application suivante. Ayant déterminé le point d'équilibre  $m+1$  nous calculons l'état des éléments (déformations, contraintes) en utilisant cette fois-ci les options des "plastden" et "fisden" qui actualisent aussi toutes les grandeurs. En même temps nous examinons si un élément a atteint une surface ultime et on calcule, si besoin est, les efforts libérés. Ces informations serviront à établir les données de la nouvelle application de "grapac".

Pour un élément qui touche la surface de fissuration les efforts libérés  $R_i$  ainsi que les valeurs initiales des paramètres de fissuration sont calculés par "eflifis".

Pour un élément qui s'écrase aucune capacité de résistance n'est retenue, donc les contraintes du béton  $\sigma^b$  doivent chuter à zéro et les efforts libérés sont :

$$R_i = \int B^T (\sigma_{\text{après}}^b - \sigma_{\text{avant}}^b) dv = - \int B^T \sigma_{\text{avant}}^b dv$$

Si un élément déjà fissuré s'écrase, non seulement les contraintes  $\sigma^b$  deviennent nulles mais la contrainte de l'acier chute aussi de la valeur qui comprenait la collaboration du béton tendu à celle de l'acier nu ; les efforts libérés doivent, alors, être calculés pour les deux chutes.

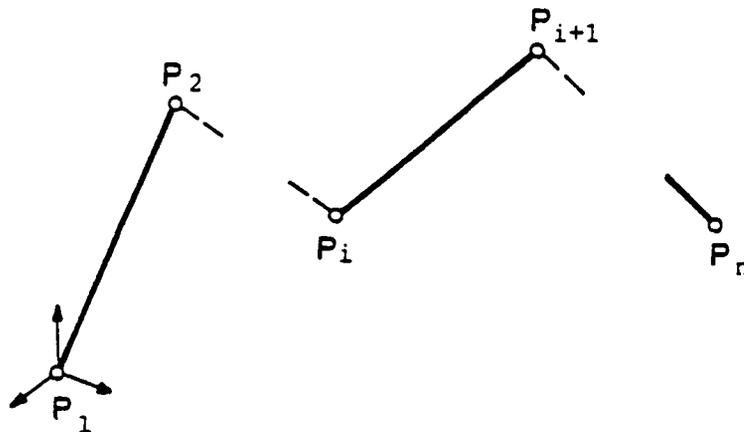


Fig. IV.2. Chargement "général" sous forme d' une "ligne brisée" dans l' espace des charges

Le chemin de chargement que nous imposons à la structure est défini par une série de points  $P_1, P_2 \dots P_n$  dans l'espace des charges (Figure IV.2). Celui-ci sera parcouru par segments réels entre lesquels s'interposent des trajets fictifs dûs aux fissurations (ou écrasements) des éléments. La succession des segments est formée au cours de la résolution par les applications de "grapac".

Ayant trouvé une position d'équilibre  $m+1$  (première partie de "grapac") nous déterminons la suite du trajet, c'est-à-dire les données de la nouvelle application de "grapac", à l'aide des éléments suivants :

- la nature du segment  $m, m+1$  (réel ou fictif) qui vient d'être parcouru, donnée par l'indice  $jtr$  associé à ce segment ( $jtr = 1$  réel,  $jtr = 0$  fictif),
- le coefficient final  $\lambda_t$  correspondant au point  $m+1$ , qui détermine aussi la valeur actuelle du vecteur de chargement

$$P_{act} = P_{départ} + \lambda_t (P_{cible} - P_{départ})$$

si  $\lambda_t$  est égal à 1 le point  $P_{cible}$  est atteint.

- Au point  $m + 1$  y a-t-il des éléments fissurés (ou écrasés) et si oui on calcule les efforts libérés correspondants  $R$ .
- L'indice  $nich$  désigne le prochain point du chemin de chargement  $P_1, P_2 \dots P_n$  et il a la valeur  $i + 1$  tant pour un segment réel contenu entre  $P_i$  et  $P_{i-1}$ , que pour un segment fictif qui se développe entre eux.

Dans cette procédure les règles suivantes doivent être respectées:

- Si la fin d'un segment réel ( $jtr = 1$ ) est signalée par une fissuration (ou écrasement) le prochain segment sera fictif ( $jtr = 0$ ) avec  $P_{cible}$  le  $P_{act}$  et  $P_{départ}$  le  $P_{act}+R$ .
- Si la fin d'un segment fictif ( $jtr = 0$ ) est signalée par une fissuration (ou écrasement) le prochain segment sera fictif ( $jtr = 0$ ) avec  $P_{départ}$  le  $P_{act} + R$ , tandis que le  $P_{cible}$  ne change pas (le  $P_{cible}$  du segment précédent).
- Si la fin d'un segment fictif ( $jtr = 0$ ) est signalée par l'arrivée au point  $P_{cible}$  ( $\lambda_t = 1$ ) sans qu'une fissuration (ou écrasement) apparaisse, le prochain segment sera réel ( $jtr = 1$ ) avec  $P_{départ}$  le  $P_{act}$  et  $P_{cible}$  le prochain point du chemin de chargement reconstitué à l'aide de l'indice  $nich$ .
- Si la fin d'un segment réel ( $jtr = 1$ ) est signalée par l'arrivée au point  $P_{cible}$  ( $\lambda_t = 1$ ) qui est le point  $P_i$  du chemin de chargement, l'indice  $nich$  qui avait la valeur  $i$  augmente d'une unité pour pouvoir viser le point  $P_{i-1}$ .

A titre d'exemple nous donnons au tableau ci-dessous le déroulement de cette procédure pour le parcours de la Figure IV.3 qui comprend des trajets fictifs à un ou plusieurs éléments fissurés (KH et BCDEFA respectivement) et passages par les "sommets" du chemin de chargement sans et avec fissuration ( $P_{i-1}$ ,  $P_{i-2}$ ).

Application "grapac"	jtr	P <sub>départ</sub>	P <sub>cible</sub>	nich	$\lambda_t$	fissuration ou écrasement	Données pour la prochaine application de "grapac"			
							jtr	P <sub>départ</sub>	nich	P <sub>cible</sub>
1	1	P <sub>i</sub>	P <sub>i+1</sub>	i+1	<1, P <sub>act</sub> = P <sub>A</sub>	oui	0	P <sub>act</sub> + R <sub>1</sub> = P <sub>B</sub>	i+1	P <sub>act</sub> = P <sub>A</sub>
2	0	P <sub>B</sub>	P <sub>A</sub>	i+1	<1, P <sub>act</sub> = P <sub>C</sub>	oui	0	P <sub>act</sub> + R <sub>2</sub> = P <sub>D</sub>	i+1	P <sub>A</sub>
3	0	P <sub>D</sub>	P <sub>A</sub>	i+1	<1, P <sub>act</sub> = P <sub>E</sub>	oui	0	P <sub>act</sub> + R <sub>3</sub> = P <sub>F</sub>	i+1	P <sub>A</sub>
4	0	P <sub>F</sub>	P <sub>A</sub>	i+1	=1, P <sub>act</sub> = P <sub>A</sub>	non	1	P <sub>act</sub> = P <sub>A</sub>	i+1	P <sub>i+1</sub>
5	1	P <sub>A</sub>	P <sub>i+1</sub>	i+1	=1, P <sub>act</sub> = P <sub>i+1</sub>	non	1	P <sub>act</sub> = P <sub>i+1</sub>	i+2	P <sub>i+2</sub>
6	1	P <sub>i+1</sub>	P <sub>i+2</sub>	i+2	<1, P <sub>act</sub> = P <sub>G</sub>	oui	0	P <sub>act</sub> + R <sub>4</sub> = P <sub>H</sub>	i+2	P <sub>act</sub> = P <sub>G</sub>
7	0	P <sub>H</sub>	P <sub>G</sub>	i+2	=1, P <sub>act</sub> = P <sub>G</sub>	non	1	P <sub>act</sub> = P <sub>G</sub>	i+2	P <sub>i+2</sub>
8	1	P <sub>G</sub>	P <sub>i+2</sub>	i+2	=1, P <sub>act</sub> = P <sub>i+2</sub>	oui	0	P <sub>act</sub> + R <sub>5</sub> = P <sub>L</sub>	i+3	P <sub>act</sub> = P <sub>i+2</sub>
9	0	P <sub>L</sub>	P <sub>i+2</sub>	i+3	=1, P <sub>act</sub> = P <sub>i+2</sub>	non	1	P <sub>act</sub> = P <sub>i+2</sub>	i+3	P <sub>i+3</sub>

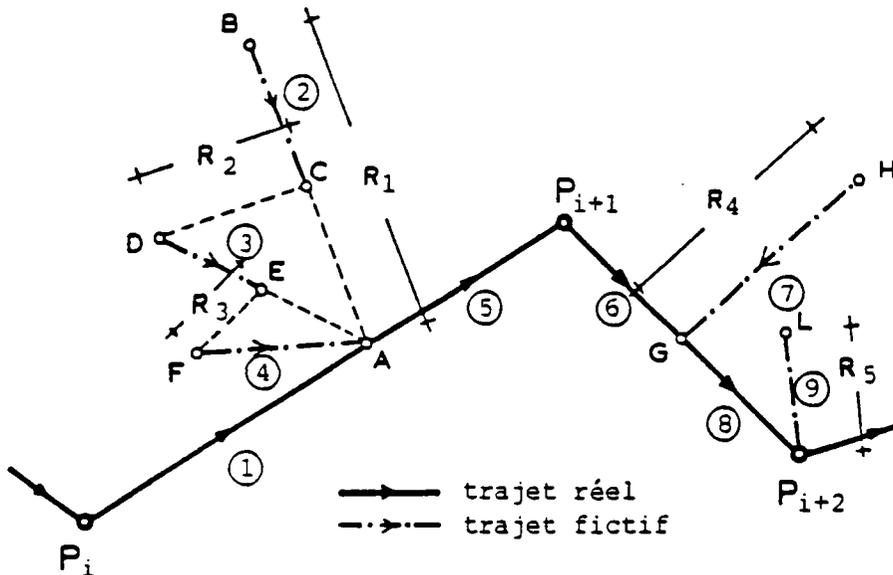


Fig. IV.3. Représentation dans l'espace des charges des étapes d'un calcul



## CHAPITRE V : APPLICATIONS - VERIFICATIONS

Dans ce chapitre nous allons présenter les résultats des calculs que nous avons effectués pour tester la validité du programme conçu. Tous les exemples concernent des structures ayant fait l'objet d'études expérimentales, ce qui permet la comparaison des résultats numériques avec la réalité.

D'autre part, nous avons essayé d'obtenir, par ces calculs, quelques indications sur l'influence des divers paramètres de résolution et de la prise en compte de phénomènes physiques tels que l'adhérence, l'effet de goujon, l'engrènement etc.

Avant cette présentation nous parlerons de la faible qualité d'approximation de l'élément triangulaire utilisé et ses conséquences telles qu'elles se sont révélées par l'expérience globale des applications; tous les résultats obtenus doivent être considérés et interprétés sous cette réserve.

### V.1. La qualité d'approximation de l'élément triangulaire - Une première conclusion.

L'approximation des déplacements et, a fortiori, des contraintes que nous obtenons avec un tel élément est assez pauvre. Dans le cas de notre algorithme ceci peut avoir de conséquences importantes en provoquant de fissures "anormales", tant en ce qui concerne leur apparition que leur orientation.

Dans certains cas cet effet est détectable. Ainsi, dans certaines régions (par exemple à la section médiane d'une structure simplement appuyée) les composantes  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  du tenseur des contraintes, qui devraient avoir des valeurs faibles, présentent une oscillation importante qui d'une part se traduit par une oscillation de la direction des fissures et d'autre part provoque une fissuration fictive, due à la présence d'une contrainte principale positive "faussement" élevée.

Ce phénomène a donné des résultats complètement "absurdes" dans le cas des poutres que nous avons essayé de résoudre et il a conduit à l'abandon de ce type de calculs. L'erreur sur  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$  a donné une contrainte principale de traction qui "déplaçait" l'état des contraintes vers le critère de fissuration (Figure V.1a); ainsi des éléments qui normalement

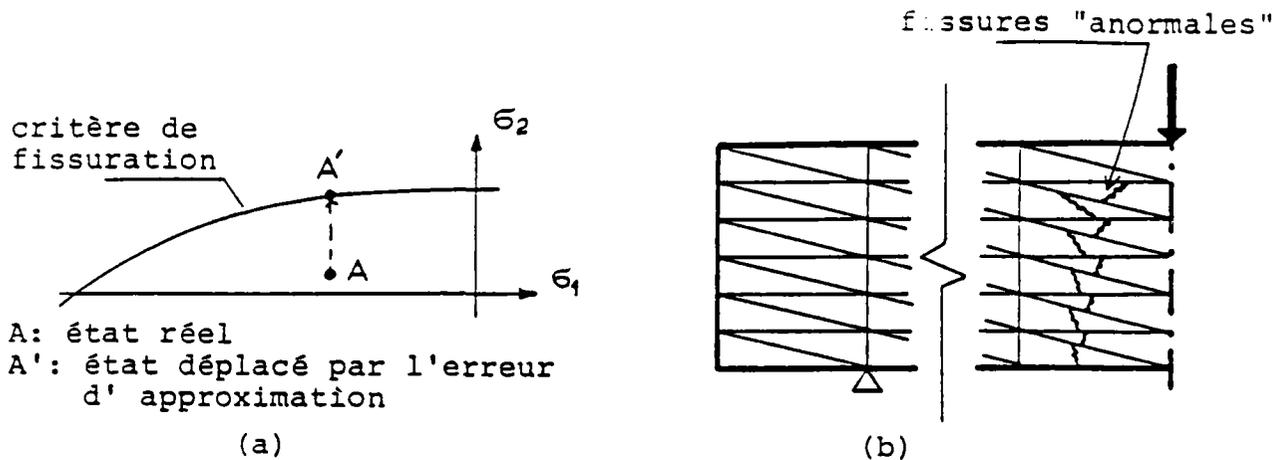


Fig.V.1. Effets de l' erreur d' approximation due à l' élément triangulaire utilisé

devraient être intégrés se trouvaient fissurés avec en plus une orientation qui tendait vers l'horizontale (Figure V.1b), ce qui vidait le calcul de tout son sens.

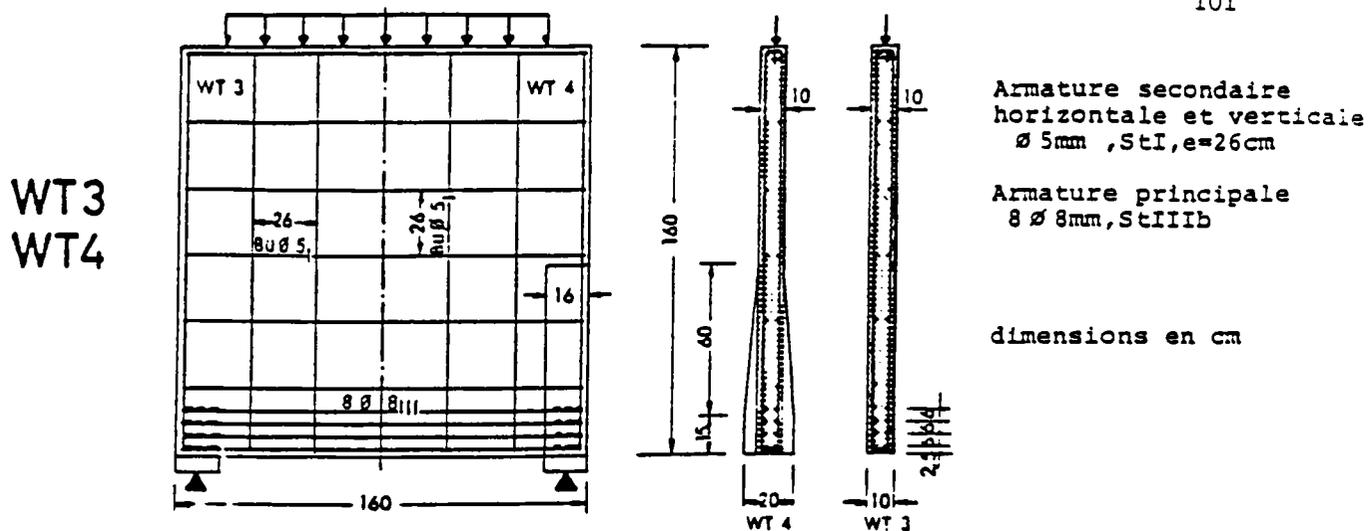
Nous soulignons donc que les résultats que nous exposerons dans la suite contiennent cette source d'erreur éventuelle dont l'influence est difficile à estimer et ils doivent être analysés sous cette réserve et révisés après élimination de ces effets "parasites".

Ainsi on peut avancer dès maintenant une première conclusion: il est indispensable d'introduire dans le programme des éléments d'ordre plus élevé pour pouvoir tirer des informations plus solides et mieux juger de l'influence des divers facteurs.

## V.2 Deux exemples tirés des expériences de Leonhardt et Walther.

Parmi les corps d'épreuves testés par Leonhardt et Walther [68] nous avons étudié les structures WT3 et WT4. Il s'agit de panneaux carrés de 1.60 m de côté et 0.10 m d'épaisseur, simplement appuyés et chargés à leur bord supérieur par une charge répartie. L'armature principale est constituée de 8 barres haute-adhérence, de diamètre de 8 mm, bien ancrées. Une armature secondaire de barres lisses ( $D = 5\text{mm}$ ) est disposée horizontalement et verticalement suivant un maillage de 26 cm d'espacement.

Les caractéristiques géométriques, l'armature, le chargement et les appuis sont donnés à la Figure V.2. La seule différence entre WT3 et WT4 est que ce dernier a des appuis renforcés par épaissements dont les dimensions sont aussi données à la Figure V.2.



extrait de [68]

Fig. V.2 Armatures, charges, dimensions des WT3, WT4

Les maillages utilisés, les pourcentages d'acier, ainsi que la prise en compte de l'épaississement des appuis pour WT4 sont montrés à la Figure V.3. Grâce à la symétrie nous ne résolvons que la moitié de la structure. Tous les noeuds sur l'axe de symétrie sont fixés suivant x et le noeud inférieur est de plus fixé suivant y; ces conditions limites sont montrées à la Figure V.3.

Les caractéristiques mécaniques du béton données par [68] sont les suivantes:

résistance en compression	WT3 29.63 MPa ; WT4 29.43 MPa
résistance en traction (mesurée par flexion sur prismes 10/10/53)	WT3 4.81 MPa ; WT4 4.32 MPa
module d'Young	WT3 et WT4 31400 MPa

L'acier de l'armature principale avait un module de 206000 MPa et une contrainte de rupture en traction égale à 536.6 MPa.

L'armature secondaire est constituée de barres lisses, mais le programme ne contient pas la possibilité d'attribuer des caractéristiques mécaniques différentes à l'acier selon les éléments. Ainsi, les mêmes qualités qu'à l'armature principale lui ont été attribuées.

### V.2.1 Panneau WT3

Le tableau V.1 présente tous les calculs effectués pour cette structure, qui constitue l'exemple le plus complet que nous avons traité, et les divers paramètres adoptés pour chacun.

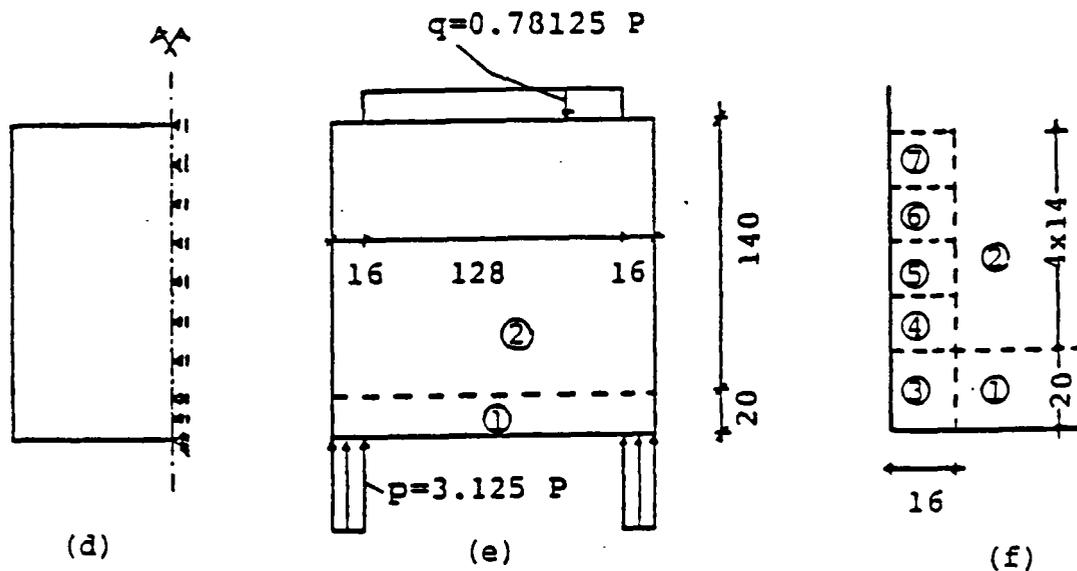
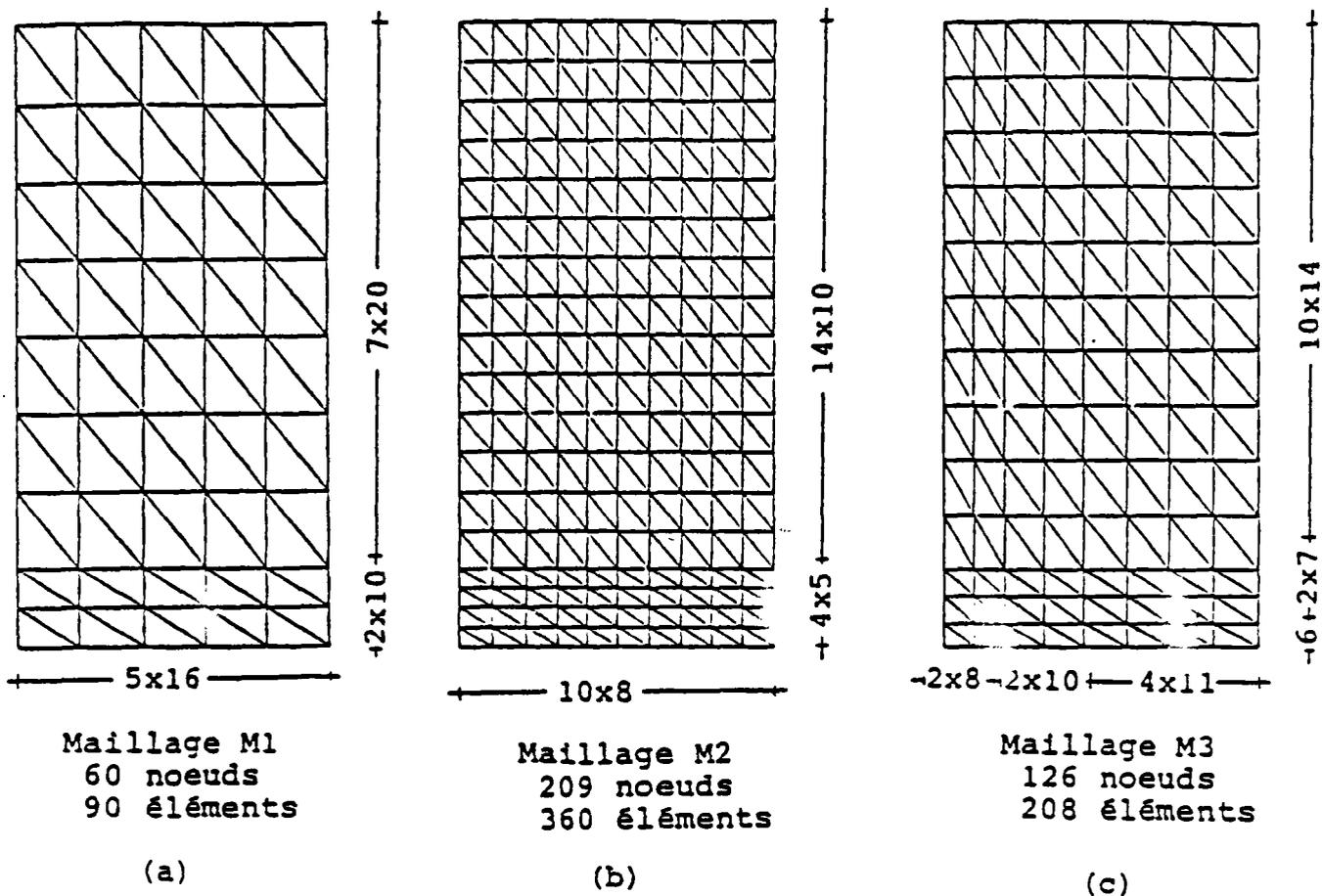


Fig. V.3 panneaux WT3, WT4

- (a, b, c) Maillages
- (d) Conditions limites
- (e) Chargement
- (f) Epaississement WT4
- (g) Epaisseur, pourcentage acier  
diamètre barres

①	t=10	$p_x=0.02$ $p_y=0.0017$	D=8mm D=5mm
②	t=10	$p_x=p_y=0.0017$	D=
③	t=20	$p_x=0.01$ $p_y=0.0009$	D=
④	t=18	$p_x=p_y=0.0009$	D=5mm
⑤	t=15	$p_x=p_y=0.0011$	D=5mm
⑥	t=13	$p_x=p_y=0.0013$	D=5mm
⑦	t=11	$p_x=p_y=0.0015$	D=5mm

(g)

Nous avons fait les calculs C1, C2 et C3 pour estimer l'influence du maillage et choisir un maillage pour la suite des calculs comparatifs.

Par les calculs C4, C6, C7 et C9 nous avons essayé d'estimer l'influence de l'adhérence, de l'engrènement et de l'effet de goujon.

Pour les calculs C5, C8, C9 et C10 nous avons fait varier la résistance en traction du béton  $f_t$  et le module d'Young  $E_b$  en nous appuyant sur une première exploitation des résultats des calculs précédents. Enfin par le calcul C11 nous avons voulu connaître la participation de la plastification du béton à la réponse globale de la structure.

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11
résistance en traction $f_t$ (MPa)	2.56	2.56	2.56	2.56	3.00	2.56	2.56	2.56	2.56	3.00	2.56
Module d' Young $E_b$ (MPa)	31400	31400	31400	31400	31400	31400	31400	21300	21300	21300	31400
Maillage	M1	M2	M3								
Adhérence $C_a^*$	10.0	10.0	10.0	1.0	10.0	10.0	10.0	10.0	1.0	10.0	10.0
Engrènement	oui	oui	oui	oui	oui	non	non	oui	oui	oui	oui
Effet de goujon	oui	oui	oui	oui	oui	oui	non	oui	oui	oui	oui

(\*)  $C_a$ : paramètre modélisant l'adhérence; elle détermine le "saut" de contrainte de l'acier à l'instant de fissuration (voir § III.3.5. rel. III.3.25). Si  $C_a = 1$ , l'adhérence est négligée

Tableau V.1. Paramètres des calculs effectués pour le panneau WT3

Nous obtenons pour  $f_t$  les valeurs 2.56 MPa et 3.00 MPa en divisant le module de rupture par 1.875 ou 1.6 selon les indications du code de l'ACI et du CEB respectivement.

La valeur réduite  $E_b = 21300$  MPa est choisie de façon à faire coïncider la réponse initiale linéaire du calcul avec celle de l'expérience.

Pour tous les calculs les paramètres communs suivants ont été utilisés:

module d'Young de l'acier  $E_s = 206000$  MPa

limite d'élasticité de l'acier  $\sigma_y = 536.6$  MPa

coefficient de Poisson du béton  $\nu = 0.2$

résistance en compression du béton  $f_c = 29.63$  MPa

(à l'exception du calcul C11 où la valeur fictive de 80 MPa est adoptée pour éviter la plastification du béton).

domaine d'élasticité initial du béton 0.4 de sa surface ultime

L'orientation des fissures pour tous les calculs et le niveau de charge qui provoque la fissuration de chaque élément sont donnés en Annexe (Figures 1 à 11).

**V.2.1a Influence du maillage.** Nous avons tracé à la Figure V.4 la flèche au milieu en fonction de la charge totale P obtenue par les calculs C1, C2 et C3 et les résultats expérimentaux correspondants.

L'allure générale des résultats numériques s'accorde assez bien avec l'expérience. Le raffinement du maillage conduit, comme attendu, à une réponse plus souple qui approche mieux l'expérience, bien que la différence entre C2 et C3 soit négligeable.

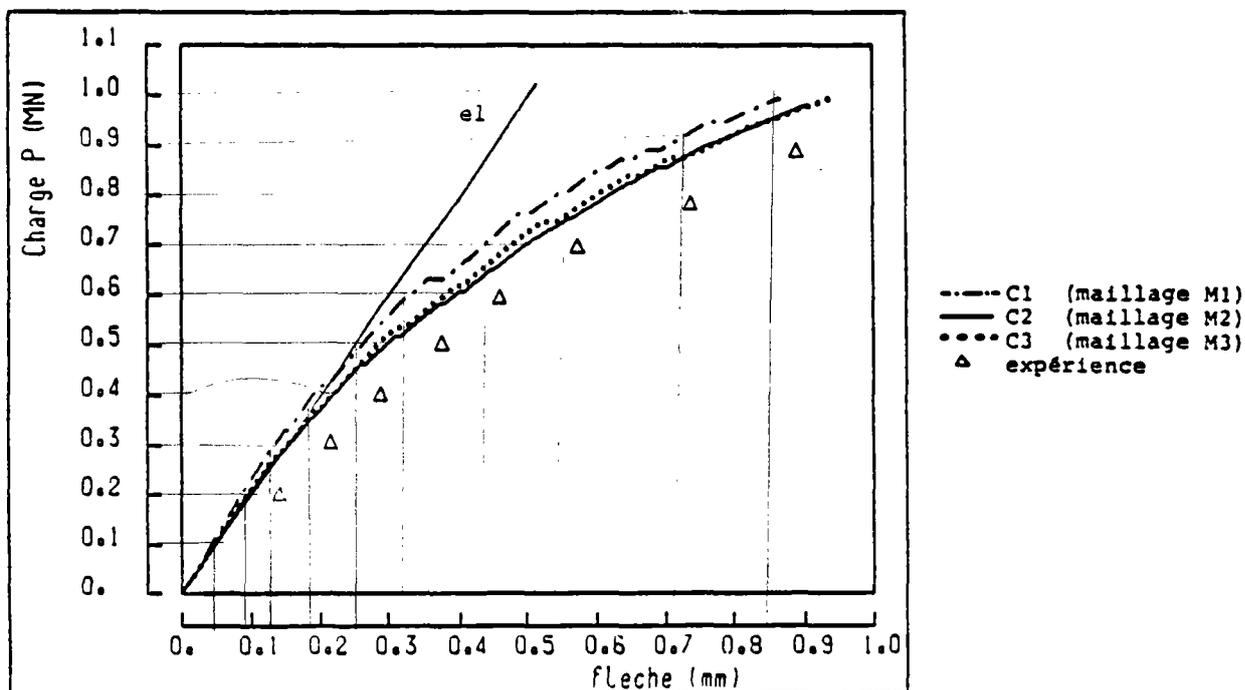


Fig. V.4 Courbe charge-flèche;panneau WT3;  
calculs C1,C2,C3 et solution élastique.

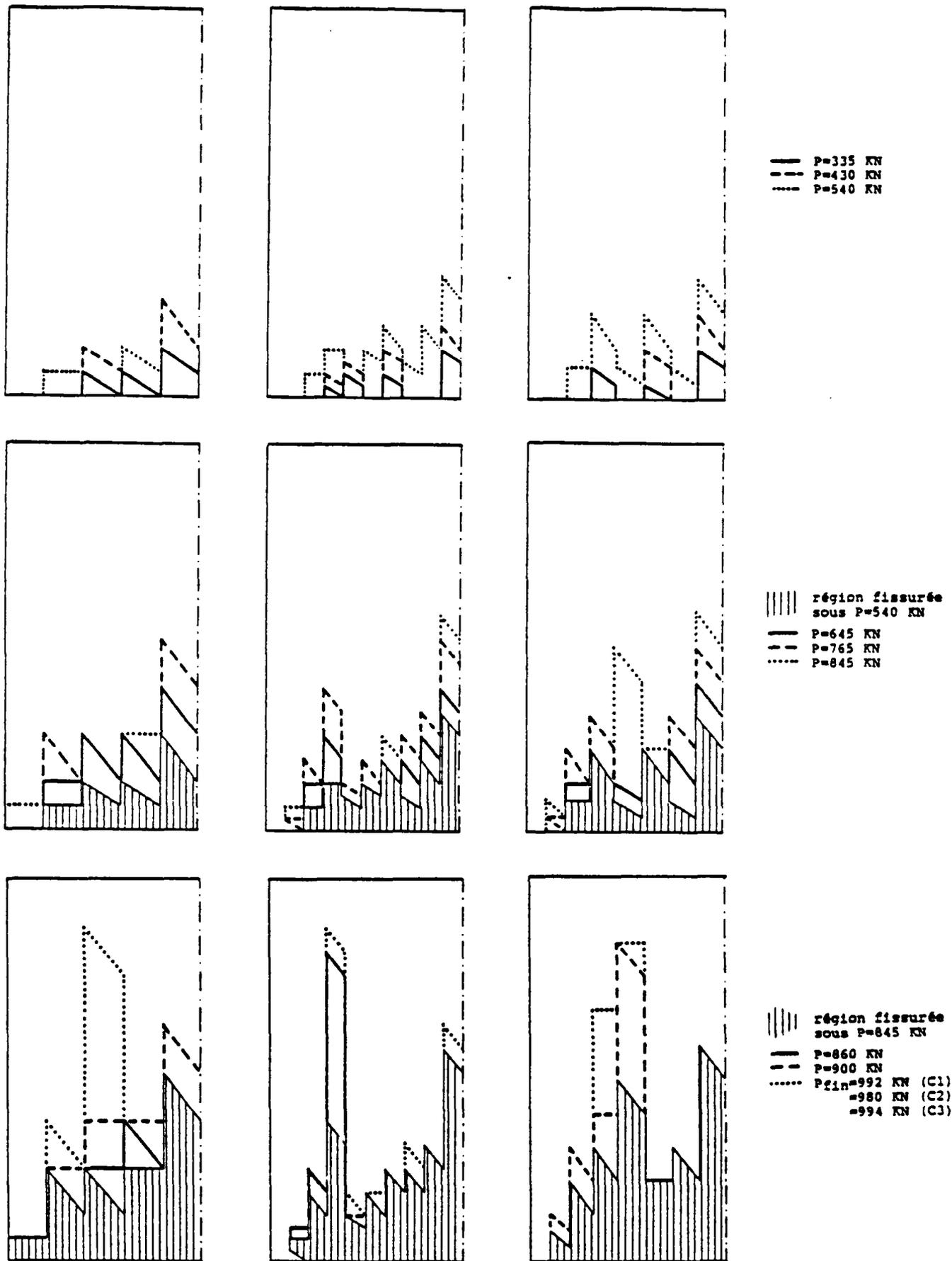


Fig. V.5 Evolution de la région fissurée;panneau WT3; calculs C1,C2,C3.

On observe une différence significative dans la pente initiale (partie élastique linéaire) entre l'expérience et les calculs que l'approximation du maillage ne suffit pas à justifier, ce qui a été confirmé par un calcul élastique en utilisant des éléments quadrilatéraux à huit noeuds (droite el. Figure V.4). Une explication plausible est que le module d'Young mesuré sur les éprouvettes caractérise mal le comportement de la structure; cette différence nous a conduits à effectuer les calculs avec  $E_0$  réduit.

En ce qui concerne la fissuration on s'attend à une influence relative du maillage vu que l'approximation du champ des contraintes, surtout pour les éléments à trois noeuds, dépend beaucoup de la finesse de celui-ci. Comme le montrent les Figures V.5 et V.6, les résultats peuvent être considérés comme raisonnables. La première donne l'évolution de la région fissurée pour les trois maillages différents pour plusieurs niveaux de charge et jusqu' à la ruine. A la Figure V.6 nous avons tracé l'évolution avec la charge de la hauteur des fissures, à mi-travée (V.6a) et près de l'appui (V.6b). La Figure V.6a montre une dispersion des résultats des trois calculs nettement plus petite que la Figure V.6b, peut-être parce que la région d'appui se trouve dans un état des contraintes plus complexe et donc plus sensible aux erreurs d'approximation.

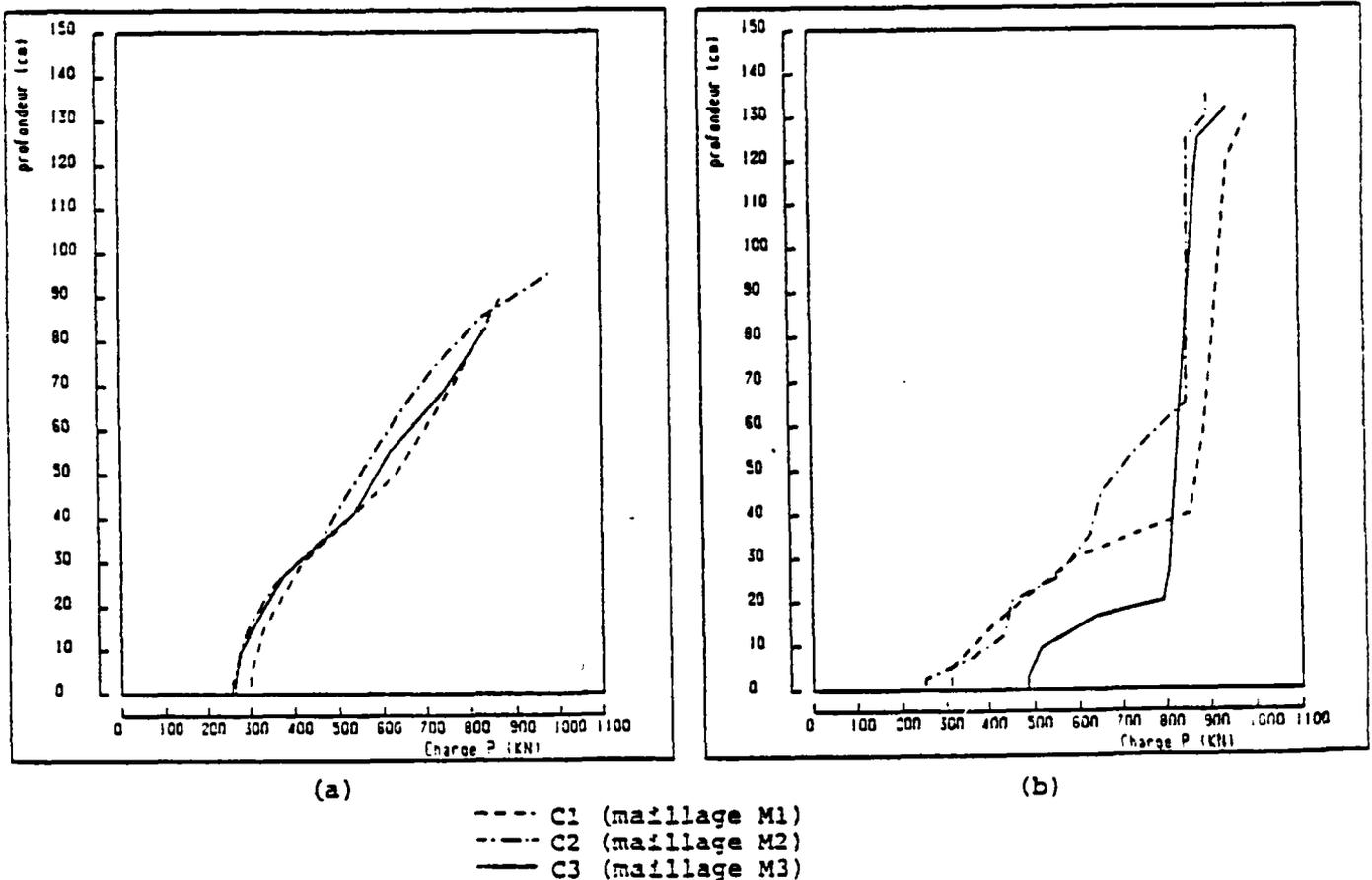


Fig. V.6 Evolution de la hauteur des fissures; (a) à mi-travée; (b) près de l'appui; panneau WT3, calculs C1, C2, C3.

Globalement on peut dire que ces résultats montrent une certaine indépendance par rapport au maillage. En revanche nous devons constater que pour le maillage M2 la fissure "près de l'appui" est concentrée sur une seule colonne d'éléments, ce qui n'a pas été observé pour les deux autres calculs.

Pour la suite des calculs comparatifs nous avons retenu le maillage M3; le calcul C3 servira comme calcul de référence.

**V.2.1b Fissuration.** En règle générale, la fissuration obtenue par les calculs est plus prononcée que celle observée expérimentalement, à l'exception du calcul C5, ce qui nous a poussé à effectuer les calculs C5 et C10 en adoptant pour  $f_c$  la valeur augmentée, et tout-à-fait légitime, de 3.00 MPa. Pour tous les calculs la direction des fissures est pratiquement la même et s'accorde bien avec l'expérience.

La Figure V.7 montre les modes de fissuration obtenus par les calculs C3, C4, C5 et C8 pour six niveaux de charge, ainsi que les fissures observées expérimentalement. Les Figures V.8a à V.8d montrent le nombre d'éléments fissurés pour divers groupes de calculs.

Pour tous les calculs, à l'exception de C5, nous observons une fissure (ou groupe de fissures) près de l'appui qui se développe assez rapidement, vers le stade final du chargement, et qui n'a pas été observée dans les expériences (voir Figure V.7). Cette fissuration correspond, dans la plupart des cas, à l'augmentation rapide du nombre d'éléments fissurés aux alentours de 900 KN (700 KN pour C4) (voir Figure V.8a).

Le calcul C5, avec la valeur augmentée de  $f_c$ , fournit les meilleurs résultats et l'accord avec l'expérience est très bon (Figure V.7).

L'évolution de la fissure dans la section médiane est très bien suivie par C3, tandis que le calcul C8 prévoit une pénétration plus petite (Figure V.7 colonnes (i)-(v)).

Les deux calculs (C3, C8) donnent des fissures près de l'appui mais celles du calcul C8, avec  $E_b$  réduit, évoluent moins que pour le calcul C3 (Figure V.7 colonnes (ii)-(v)). Cette tendance à une plus faible fissuration pour  $E_b$  plus petit est aussi visible sur la Figure V.8a (C3-C8); elle reste valable pour la paire C4-C9, particulièrement sous les charges intermédiaires (Figure V.8a), mais elle disparaît pour les C5-C10 apparemment à cause de la variation du paramètre  $f_c$ .

Le calcul C4, où l'adhérence acier-béton est négligée, donne une fissuration beaucoup plus importante tant par rapport à l'expérience que

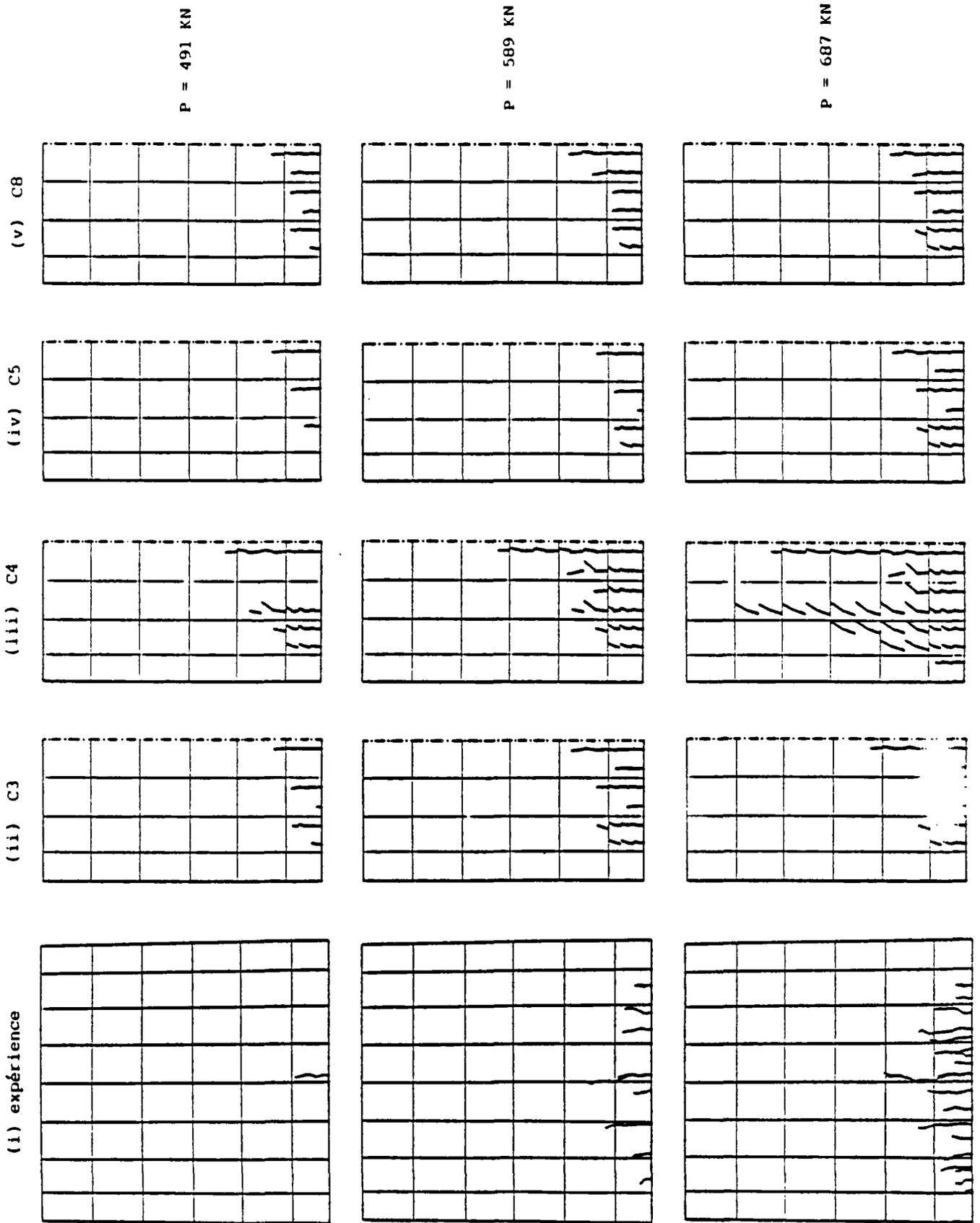


Fig. V.7. Fissuration, panneau WT3. C3 calcul standard; C4 sans adhérence;  
 C5  $f_t$  augmenté; C8  $E_b$  réduit

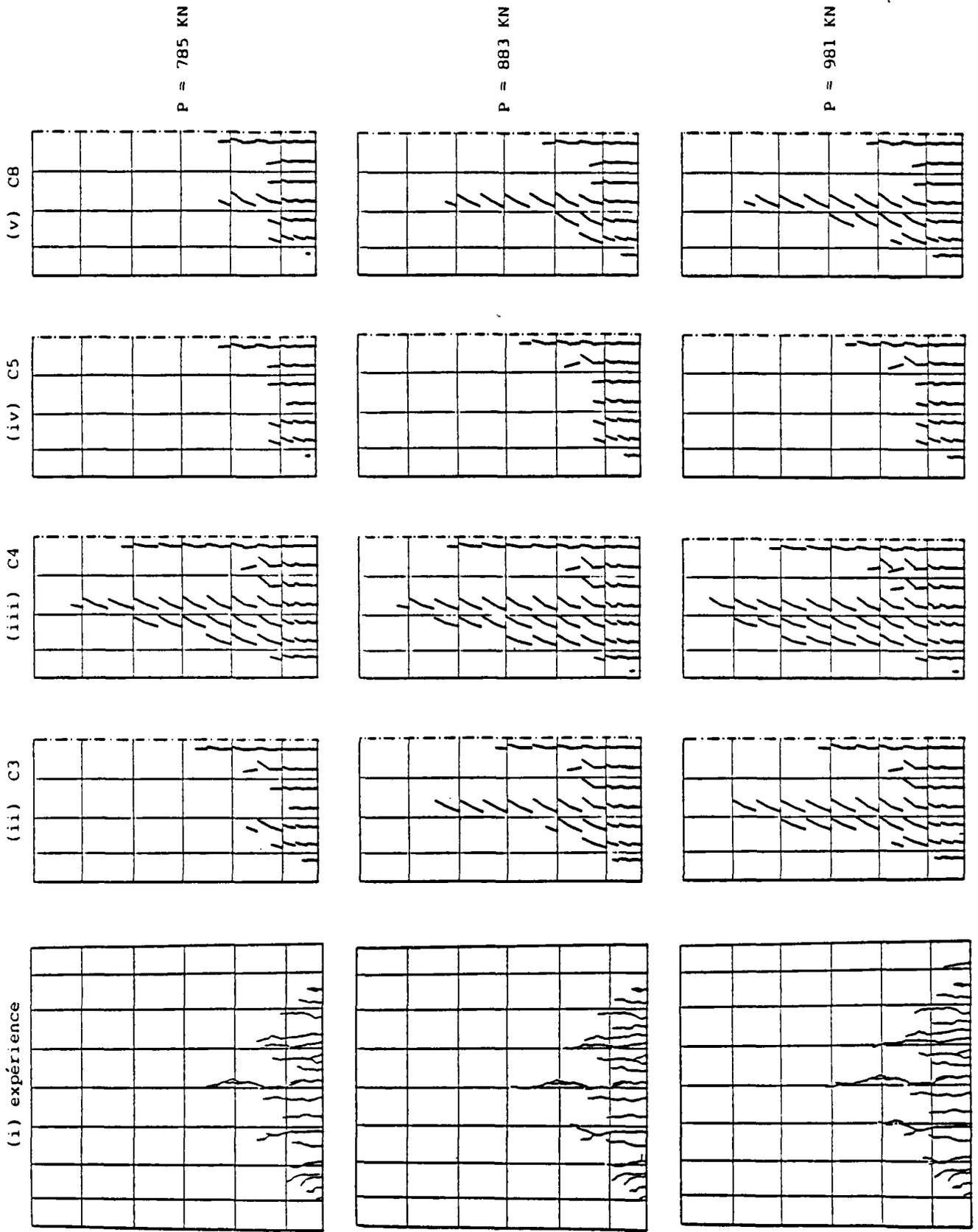
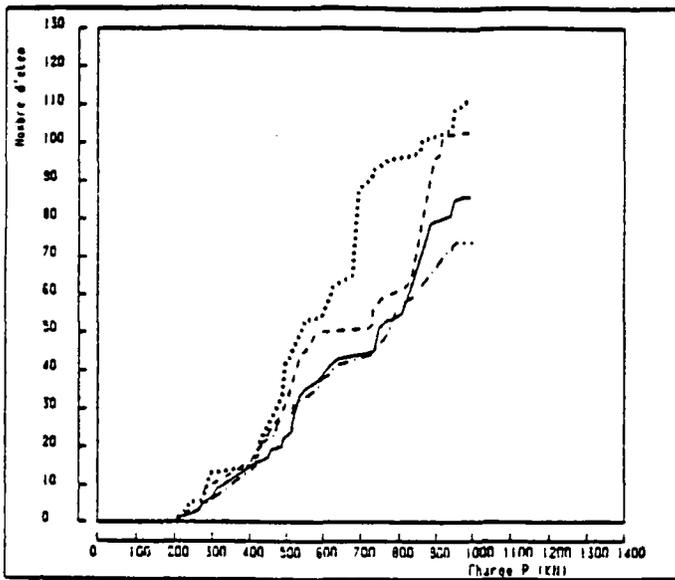
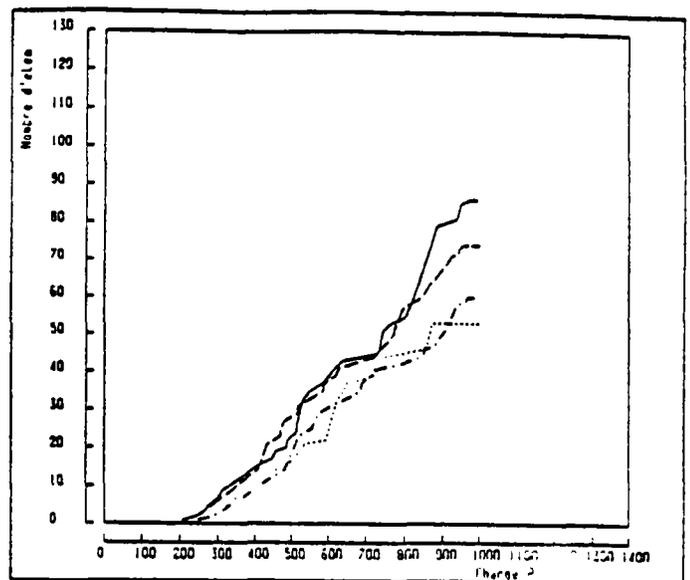


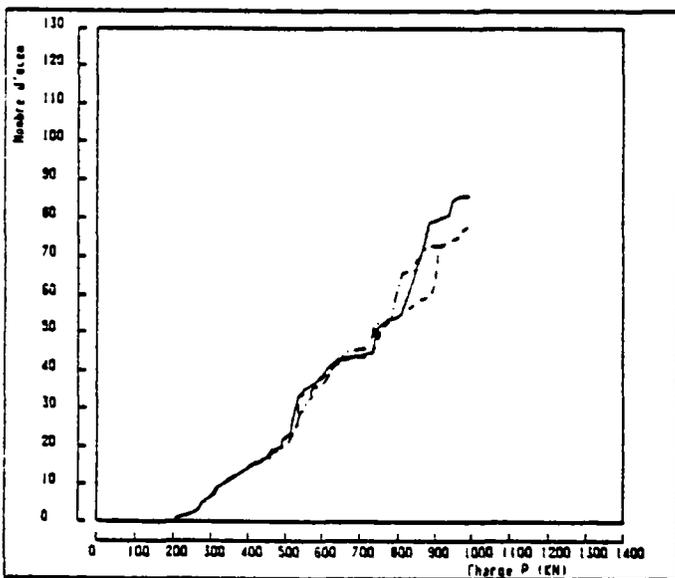
Fig. V.7. Fissuration, panneau WT3 (suite)



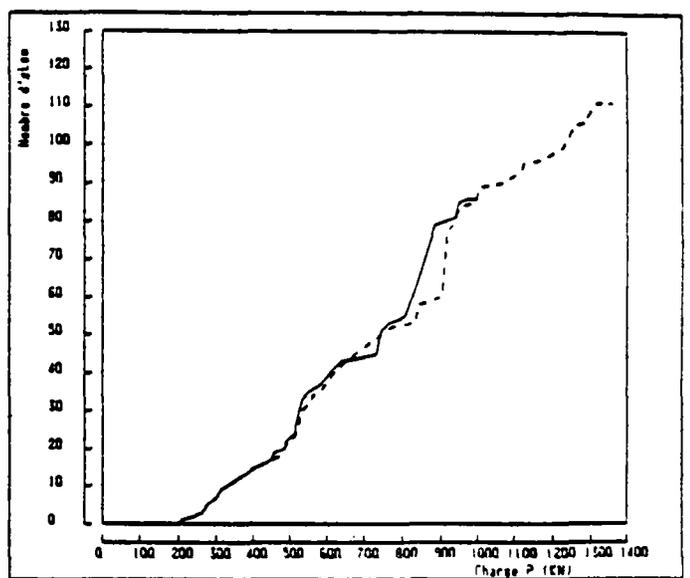
(a) — C3  
 ..... C4 sans adhérence  
 - - - C8  $E_b$  réduit  
 - · - C9 sans adhérence,  $E_b$  réduit



(b) — C3  
 ..... C5  $f_t$  augmentée  
 - - - C8  $E_b$  réduit  
 - · - C10  $f_t$  augmentée,  $E_b$  réduit



(c) — C3  
 - - - C6 sans engrènement  
 - · - C7 sans engrènement ni goujon



(d) — C3  
 - - - C11 sans plastification du béton

Fig. V.8 Nombre d'éléments fissurés en fonction de la charge; panneau WT3.

par rapport aux autres calculs. De plus, les fissures se développent relativement tôt. Ainsi sous une charge de 687 kN la fissure à mi-travée atteint déjà sa hauteur finale et les fissures près de l'appui sont largement développées (Figure V.7 colonne (iii)). La suite du chargement provoque un léger avancement et surtout la densification des fissures dans la région d'appui. Pour le même C4 nous observons une propagation abrupte des fissures dès leur naissance. Ainsi, sous charges relativement basses

une fissure traverse d'un seul coup toute la hauteur de la zone d'armature et même plus (Annexe, Figure 4, N° 6,8,11,12,14 et comparaison avec Figure 3).

La plus importante fissuration du calcul C4 par rapport au C3 apparaît clairement aussi à la Figure V.8a. On observe le même effet pour les calculs C8-C9, modifié pour les charges intermédiaires par le plus faible  $E_b$ .

Les calculs C6 et C7 ont donné une évolution de la fissuration légèrement différente par rapport au C3 et il semble que globalement négliger l'engrènement et l'effet de goujon conduit à une fissuration un peu moins importante (Figure V.8c).

**V.2.1c Réponse globale.** Les courbes flèche-charge pour tous les calculs sont tracées aux Figures V.9 à V.13; les résultats du calcul C4, sans considération de l'adhérence, montrent une concordance parfaite avec l'expérience au-delà d'une charge de 500 KN (Figure V.9). Cette impression est un peu trompeuse vu la différence dans la réponse élastique initiale. Si cette différence est éliminée (calcul C9) les flèches obtenues sont nettement plus grandes que les flèches expérimentales (Figure V.10).

La comparaison C3-C4 (Figure V.9) et C8-C9 (Figure V.10) montre que la variation d'un paramètre tiers, en l'occurrence de  $E_b$ , agit sur les différences entre les résultats avec ou sans adhérence.

La courbe flèche-charge des calculs C3, C6 et C7 ne présente aucune différence perceptible (Figure V.11), ce qui pourrait signifier que pour cette structure l'engrènement et l'effet de goujon n'influencent pas la réponse globale. Néanmoins, sur les points concernant ces deux phénomènes, qui sont très liés aux déformations tangentielles, on reste prudent puisqu'on ignore le rôle que la qualité de l'élément a pu jouer.

La Figure V.12 montre l'influence de la résistance en traction et du module d'Young sur la réponse obtenue; notons en passant l'accord des résultats du calcul C10 avec l'expérience.

Enfin, sur la Figure V.13 nous observons la participation de la plastification de l'appui à la partie non-linéaire de la courbe effort-flèche. Son influence apparaît au voisinage de 550 KN, et à la charge de ruine 40 % de la flèche non-linéaire est due à la plastification de l'appui.

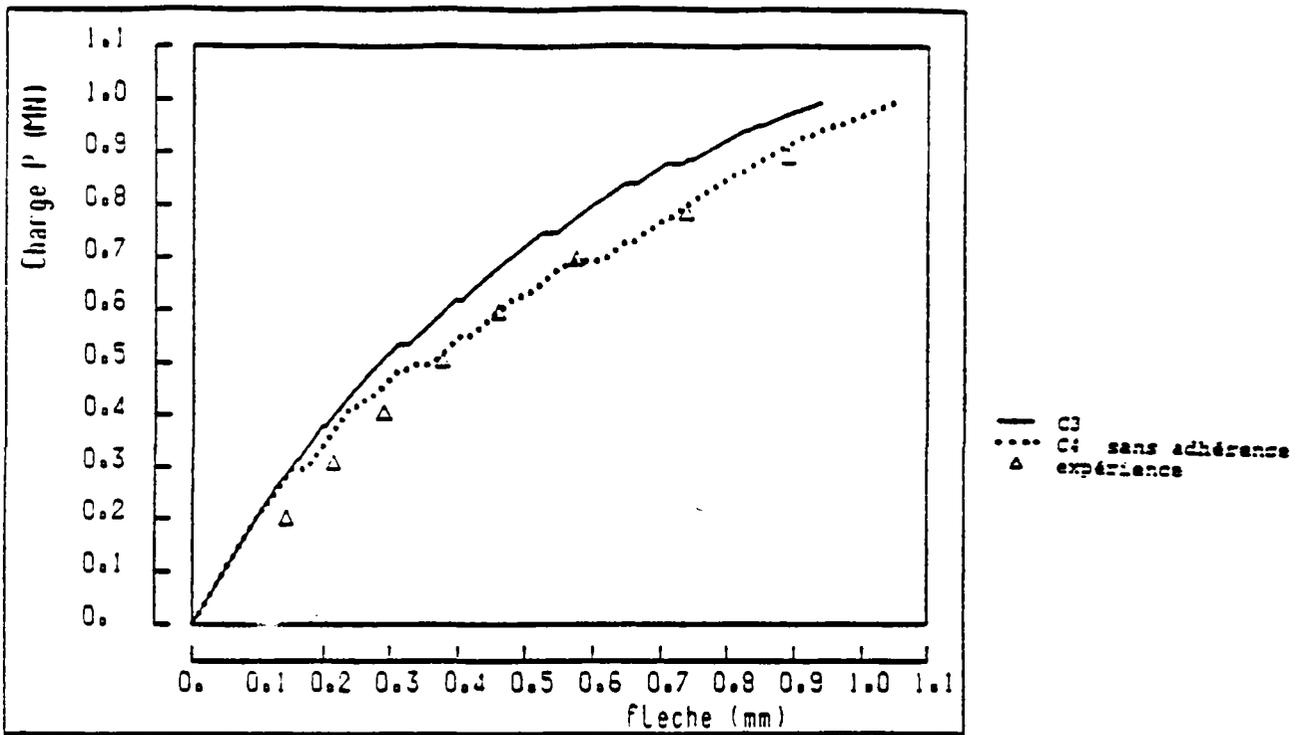


Fig. V.9 Courbe charge-flèche;panneau WT3;calculs C3,C4.

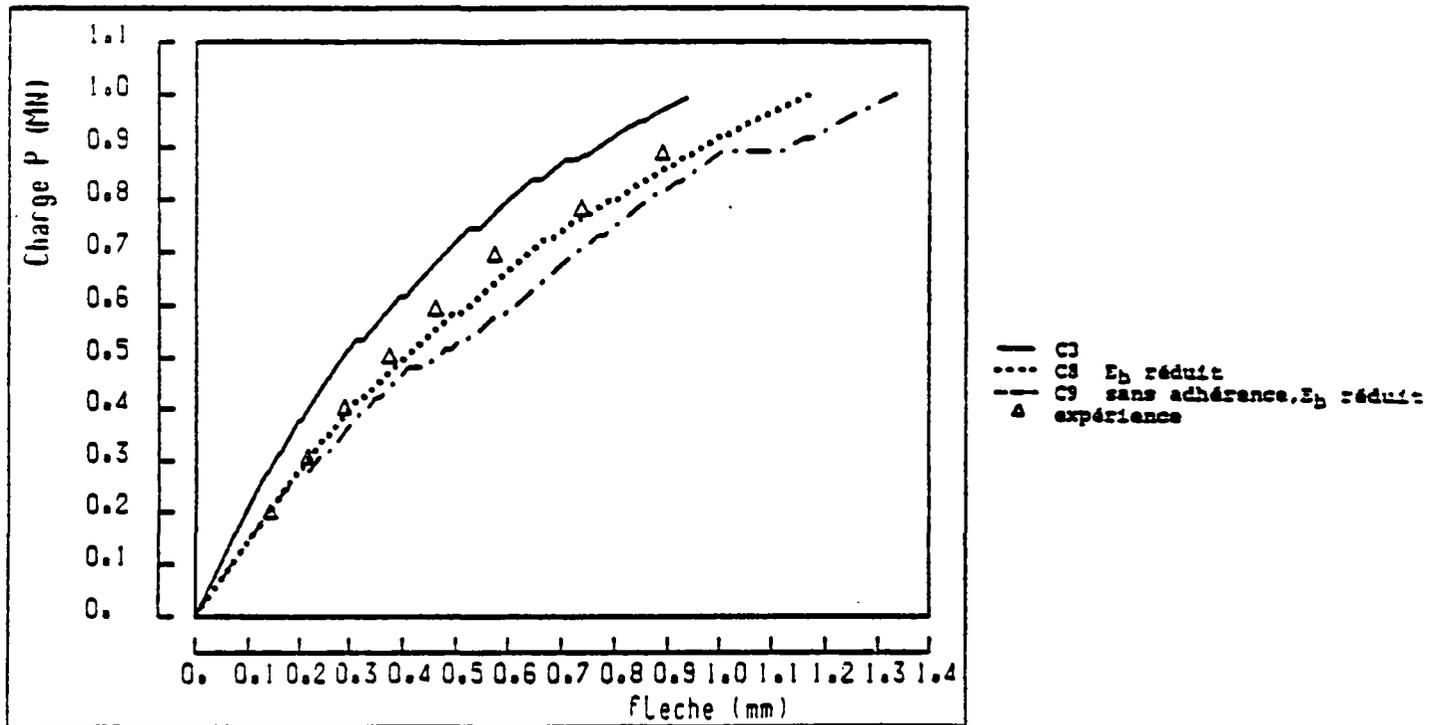


Fig. V.10 Courbe charge-flèche;panneau WT3;calculs C3,C8,C9.

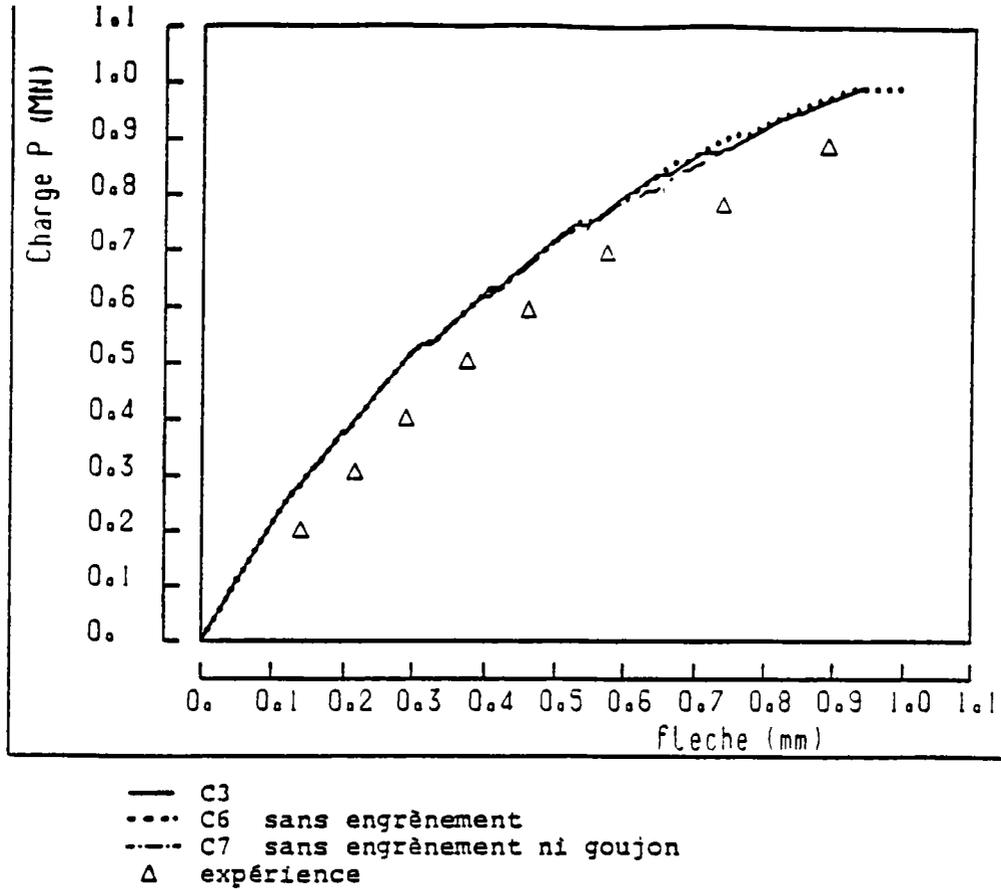


Fig. V.11 Courbe charge-flèche;panneau WT3;calculs C3,C6,C7.

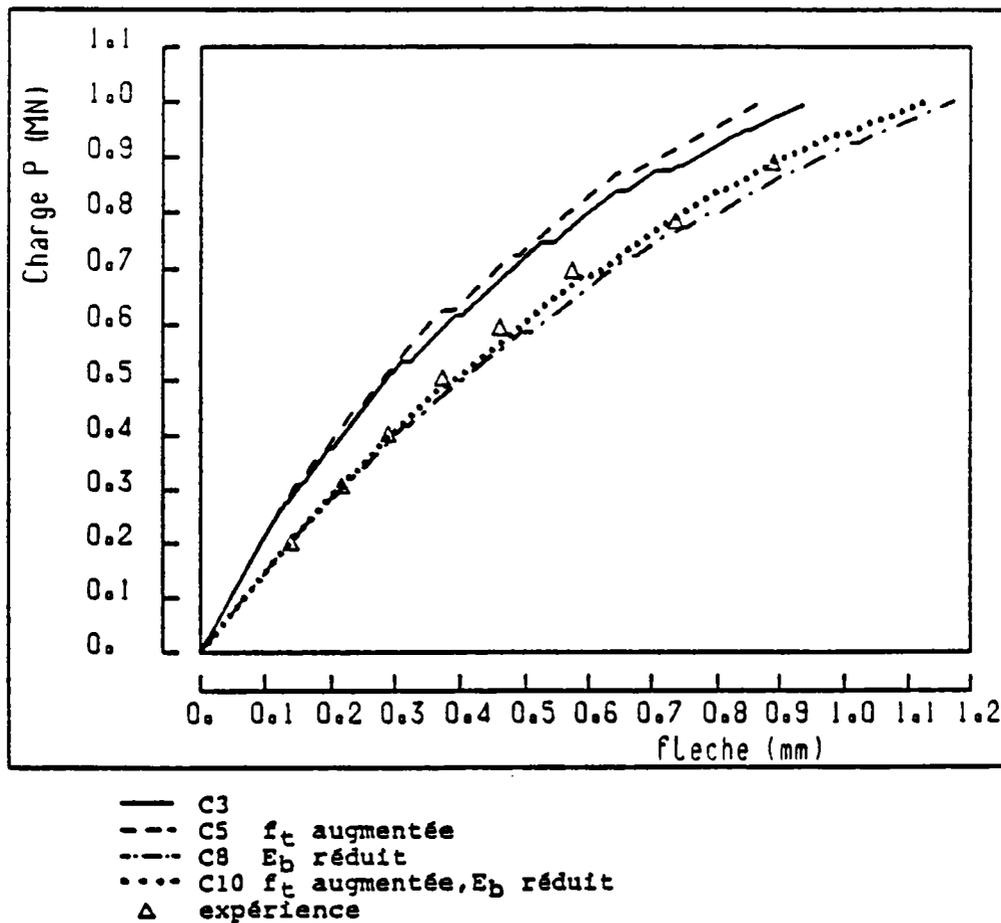


Fig. V.12 Courbe charge-flèche;panneau WT3;calculs C3,C5,C8,C10.

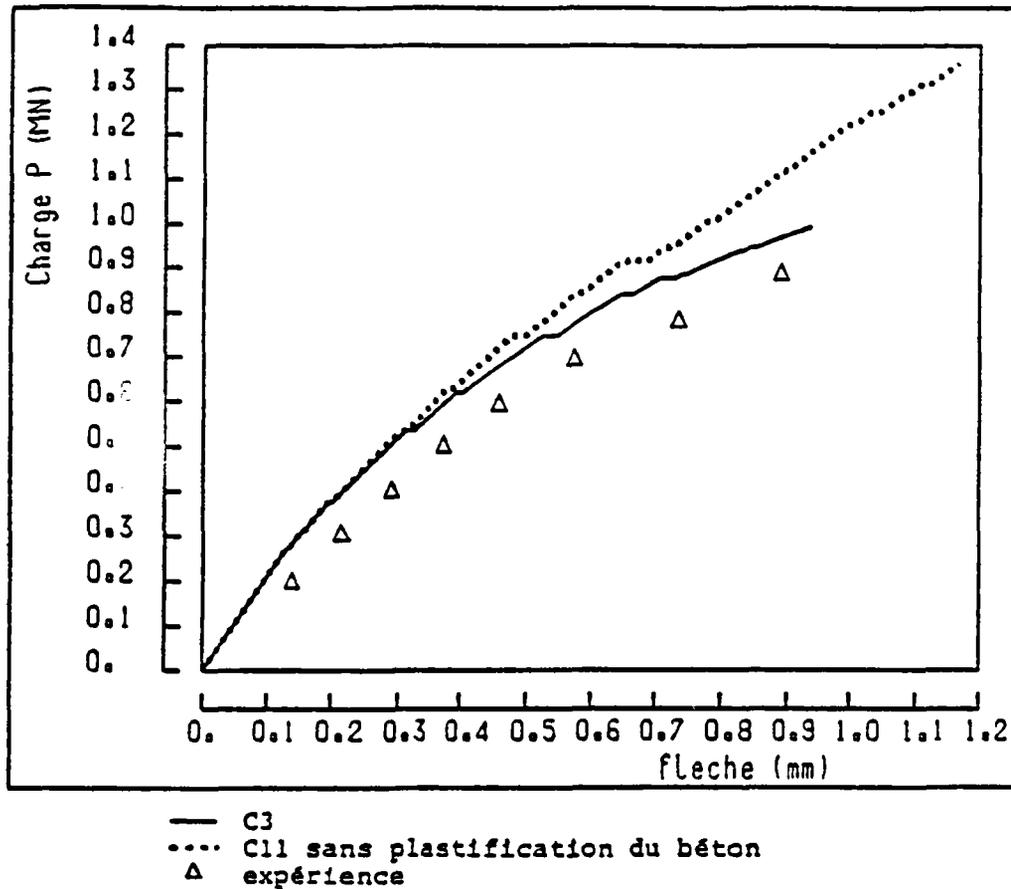
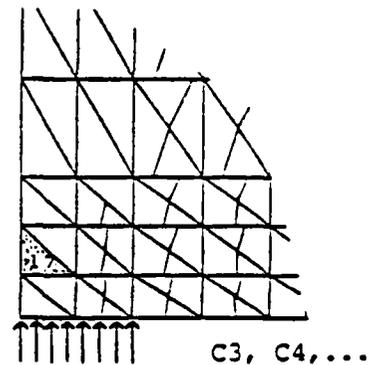
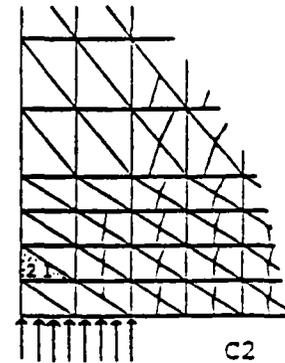
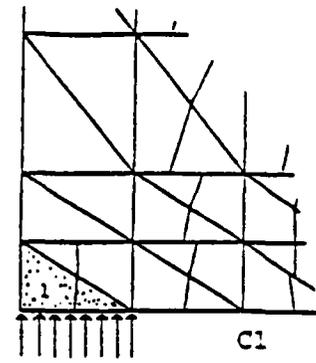


Fig. V.13 Courbe charge-flèche; panneau WT3; calculs C3, C11.

V.2.1d Charge de fissuration, charge et mode de ruine. Le tableau V.2 contient les résultats ci-dessus pour l'ensemble de calculs effectués.

Pendant l'expérience, l'appui gauche de la structure a d'abord cédé pour une charge de 981 kN; cette charge correspond à une pression de 30.66 MPa sur la surface de l'appui, soit 1.035 fois la résistance en compression simple. Ensuite la région d'appui a été réparée par des plaques d'acier et l'expérience a continué jusqu'à une charge de 1265.5 kN (pression d'appui 39.55 MPa = 1.335  $f_c$ ) où l'appui droit a aussi cédé. La charge de ruine que l'analyse peut approcher est, évidemment, la première.

	Charge de fissuration $P_f$ (kN)	Charge de ruine $P_u$ (kN)	Mode de ruine
C1	245	992	écrasement de l'élément 1 (déjà fissuré)
C2	197	980	écrasement de l'élément 21(intègre)
C3	207	994	écrasement de l'élément 17(intègre)
C4	207	996.8	"
C5	242	1000.7	"
C6	207	992.4	"
C7	207	932.8	?
C8	213.5	1001.5	écrasement de l'élément 17(intègre)
C9	213.6	1000.8	"
C10	250	1000.9	"



Région de l'appui, élément écrasé

Tableau V.2. Charges de fissuration, de ruine, panneau WT3

La charge de fissuration indiquée en [68] est égale à 490 kN. La charge de fissuration calculée est beaucoup plus petite que la valeur ci-dessus (40 % à 50 %). Une partie de cette différence peut s'expliquer par une fissuration préalable qui n'était pas visible de l'extérieur. Les déformations mesurées de l'acier à mi-travée (Figure V.15) indiquent la même chose: en effet la discontinuité de la pente qui correspond à la fissuration correspond au plus à 400 kN au lieu de 490 kN.

Comme attendu la charge de fissuration diminue pour un maillage plus fin et elle ne dépend de la prise en compte ni de l'adhérence, ni de l'engrènement, ni de l'effet de goujon.

Une forte diminution de  $E_b$  (32 %) conduit à une très faible augmentation de  $P_r$  (3.2 %) à cause de la plus grande "ductilité" du béton qui permet une sollicitation de l'acier un peu plus grande avant que l'élément critique arrive au seuil de fissuration.

L'augmentation de  $f_c$  provoque, évidemment, une augmentation proportionnelle de  $P_r$ .

La ruine a été provoquée pour tous les calculs, à l'exception du C7, par l'écrasement d'un élément dans la région d'appui. Pour le calcul C1 où la longueur d'appui correspond à un seul élément, celui-ci s'écrase après avoir été fissuré. A l'instant de l'écrasement l'élément se trouve pratiquement sous une compression uniaxiale (accompagnée d'une très faible traction). Pour les autres calculs (C2 à C10), où l'appui correspond à deux "colonnes" d'éléments, c'est un élément de la "colonne" extérieure qui s'écrase étant jusqu'à cet instant intègre. Il se trouve sous une compression légèrement biaxiale (la deuxième contrainte principale est égale au 1/15 de la première), ce qui conduit à une contrainte  $\sigma_y$  qui est, précisément, 4 % plus grande que la résistance en compression (voir pression d'appui de l'expérience). Cette différence explique la plus faible charge de ruine du calcul C1 par rapport aux autres calculs bien qu'il soit le calcul où le maillage est le moins fin.

Tous les calculs avec le même maillage, à part C7, prévoient une charge de ruine pratiquement identique (voir tableau V.2), ce qui est dû au type unique de ruine (écrasement de l'appui). Le maillage le plus fin a donné, évidemment, une charge  $P_u$  plus petite. La prévision de la charge de ruine est tellement bonne (0.1 % pour C2 !!!) qu'elle suscite notre méfiance et nous fait penser au concours d'une heureuse coïncidence (par exemple la taille de l'élément).

Un point intéressant est la plus faible charge  $P_u$  du calcul C7, sans engrenement ni effet de goujon, que nous pouvons expliquer par la défaillance de transmission des efforts par les éléments fissurés de l'appui (colonne "à droite") à cause de l'absence de l'effet de goujon.

**V.2.1e Plastification.** La Figure V.14 montre la zone plastique et le degré de plastification à l'instant de ruine. Pendant la redistribution des efforts libérés par les éléments fissurés on peut avoir charge ou décharge des éléments plastifiés selon leur position par rapport à l'élément qui vient de se fissurer. Il est important de signaler que vers le stade final certains éléments (non-fissurés) se trouvent en décharge sous une augmentation de la charge globale.

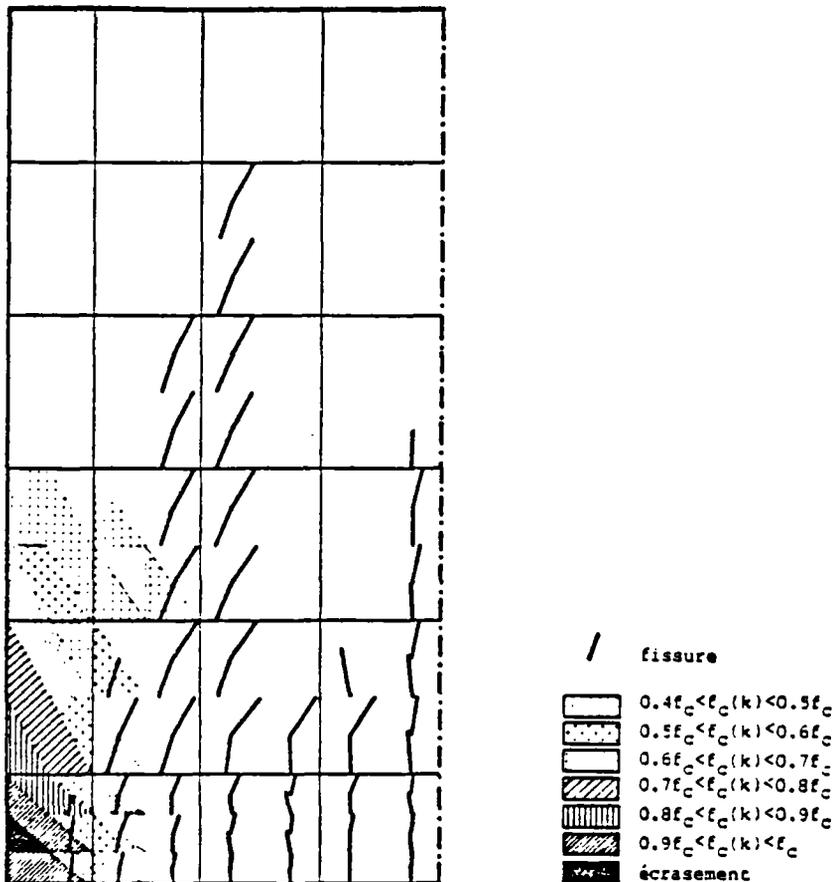


Fig.V.14. Eléments plastifiés et degré de plastification à la ruine - Panneau WT3 - Calcul C3

V.2.1f Déformations de l'acier dans la section médiane. La Figure V.15 présente l'évolution de la déformation de l'acier à mi-travée avec la charge et pour la zone la plus basse (moyenne de deux éléments).

Les résultats des calculs C3, C5 et C8 correspondent très bien aux résultats expérimentaux au-delà de 700 KN. Avant ce niveau, l'expérience montre des déformations plus petites. Le calcul C4, sans adhérence, prévoit des déformations plus grandes au début pour donner au-delà de 600 KN une ligne parallèle mais décalée par rapport aux autres calculs. Pour tous les calculs l'acier n' a pas été plastifié jusqu' à la ruine.

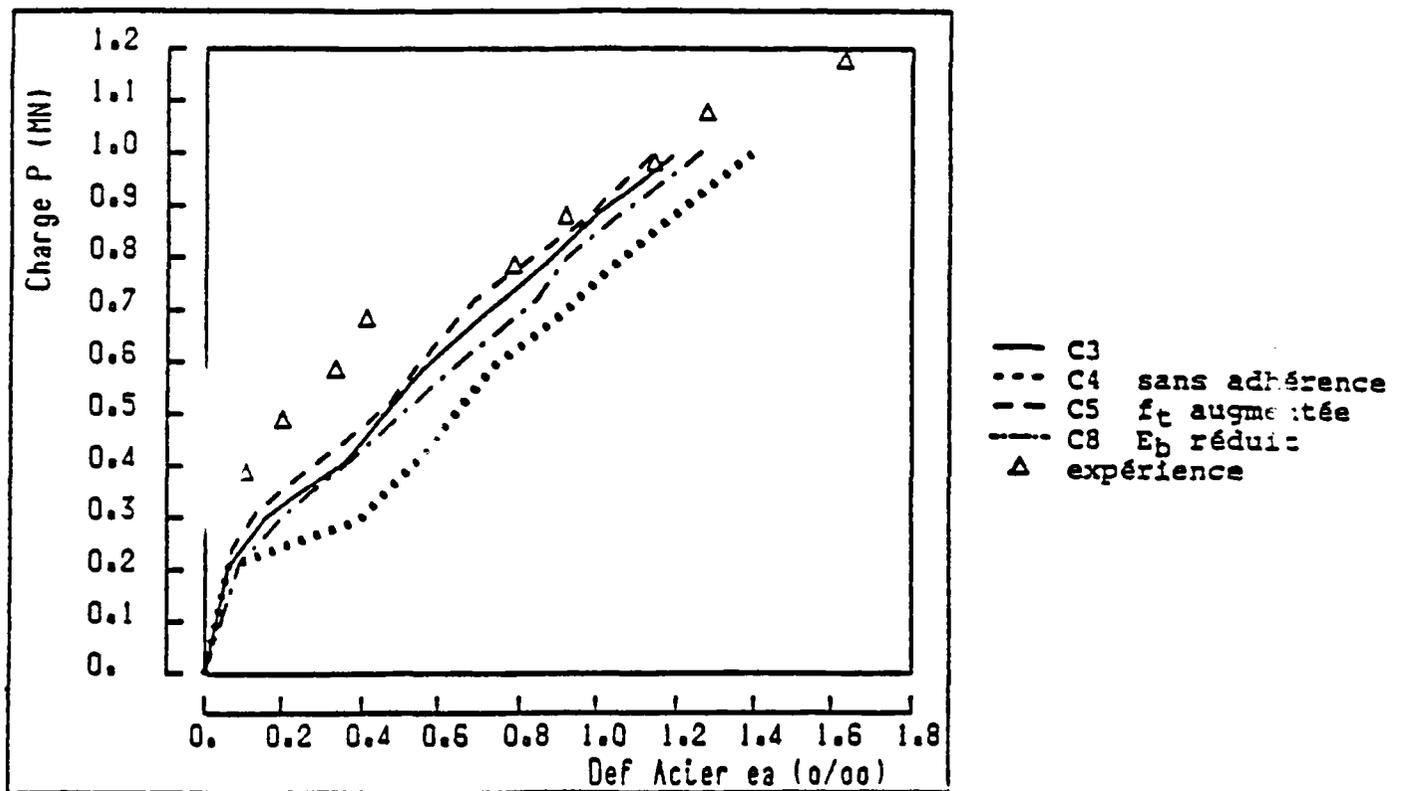


Fig. V.15 Déformations de l'acier à mi-travée; panneau WT3.

#### Conclusions

D'une façon globale pour cet exemple particulier les résultats fournis par le programme se comparent favorablement avec l'expérience.

Le moins bon résultat semble être le développement précoce de la fissure "près de l'appui" que tous les calculs sauf C5 ont donné.

Les résultats ont montré que l'adhérence acier-béton est un phénomène qu'il importe de prendre en compte. Néanmoins, il faut rappeler que la loi utilisée est semi-empirique et contient une bonne proportion d'arbitraire. D'ailleurs, il ne s'agit que d'une solution provisoire. La partie finale de la réponse globale du calcul C4 (Figure V.9) et le début des déformations de l'acier (Figure V.15) indiquent qu'une autre forme de loi qui tendrait plus rapidement vers l'acier "nu" et qui pourrait prévoir un plus grand saut à l'instant de la fissuration, serait plus appropriée. De toute façon, ce type de modifications ne peut faire face au fond du problème; l'adhérence doit faire l'objet d'une étude qui dégagerait une loi de comportement de l'acier modifiée par la collaboration du béton en se basant sur une approche plus théorique qui tiendrait compte des paramètres du phénomène (par exemple en intégrant une loi locale  $\tau$ - $S$  sensible à la qualité d'adhérence d'une barre particulière, aux conditions de confinement etc.).

### V.2.2 Panneau WT4

Pour cette structure nous n'avons effectué qu'un seul calcul; le maillage utilisé est le M3 avec le détail pour l'épaississement de l'appui (voir Figure V.3). Les caractéristiques mécaniques du béton sont:

module d'Young	$E_b =$	31400 MPa
résistance en compression simple	$f_c =$	29.43 MPa
résistance en traction (mesurée par flexion)	$=$	4.32 MPa
	d'où $f_t = 4.32 / 1.875 =$	2.30 MPa

Les caractéristiques de l'acier sont les mêmes que pour WT3; le paramètre de l'adhérence  $C_a$  est pris égal à 10 ; l'engrènement et l'effet de goujon sont pris en compte pour le calcul.

Pendant l'expérience la rupture du panneau est survenue sous une charge de 1668 KN par une fissure apparue entre le corps de la structure et l'épaississement et qui juste après a traversé obliquement le panneau jusqu'au bord supérieur (voir Figure V.16, expérience, stade final). La première fissure est apparue sous une charge de 486 KN.

La Figure 12 de l'Annexe donne la charge de fissuration pour tous les éléments et la direction des fissures de chacun. Le mode de fissuration obtenu par le calcul est comparé avec l'expérience à la Figure V.16 pour plusieurs niveaux de charges.

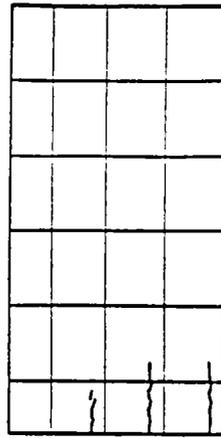
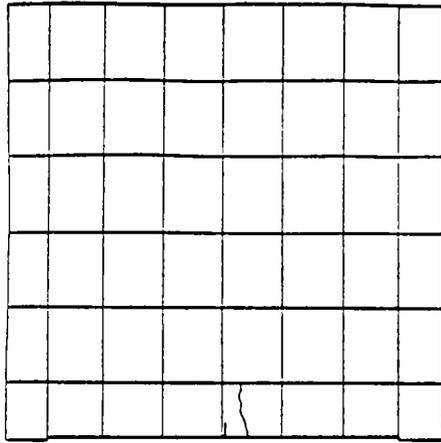
Le calcul a donné une fissuration beaucoup plus importante que l'expérience. La fissure "près de l'appui" se développe très tôt; sous une charge de 588 KN elle traverse 40 % de la hauteur pour avancer jusqu'à 90% de celle-ci sous une charge de 785 KN. Son évolution est plus rapide que pour le calcul C3 du panneau WT3. En revanche, la fissure à mi-travée se propage moins rapidement que dans l'expérience, apparemment à cause du développement préalable de la fissure "près de l'appui" qui constitue ainsi un point faible. Pour les charges prononcées la quasi-totalité de la structure est fissurée (Figure V.16).

La Figure V.17 compare la courbe flèche - charge du calcul à celle de l'expérience. Une très bonne concordance est observée jusqu'à 900-1000 KN; la prévision du programme se dégrade sensiblement au-delà de 1400 KN.

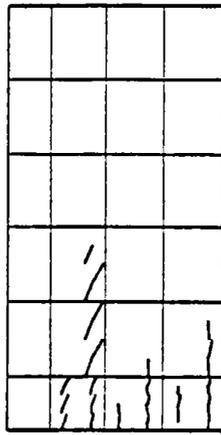
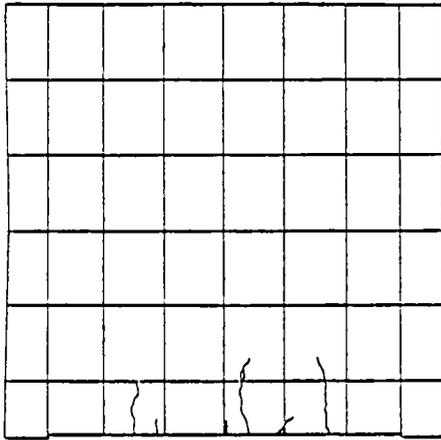
L'analyse a donné une charge de fissuration de 240 KN, la moitié de la valeur expérimentale, encore que dans l'expérience les déformations mesurées de l'acier à mi-travée indiquent le début de la fissuration (non-visible ?) autour des 350 KN (Figure V.18).

expérience

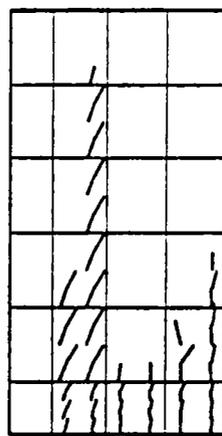
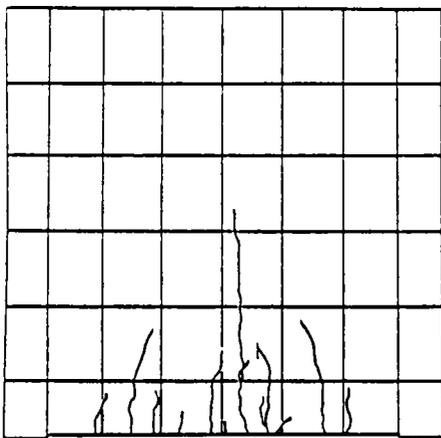
calcul



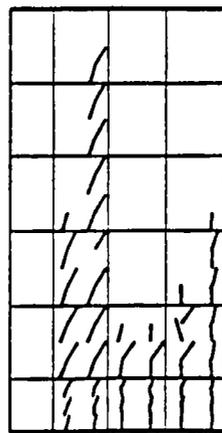
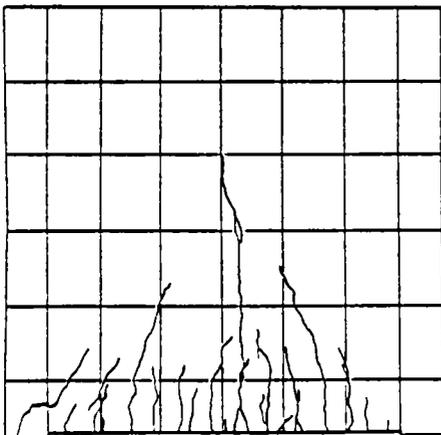
P = 491 KN



P = 589 KN



P = 785 KN



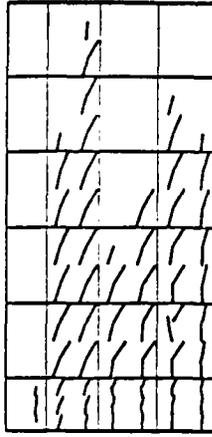
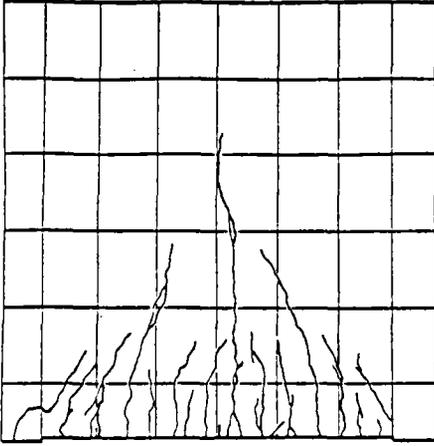
P = 981 KN

Fig. V.16. Fissuration, panneau WT4

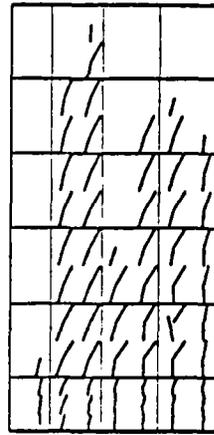
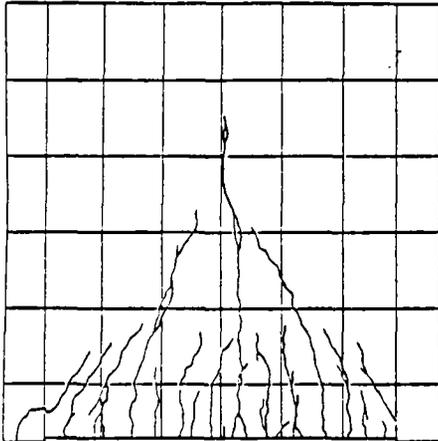
expérience

calcul

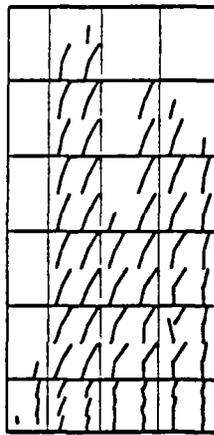
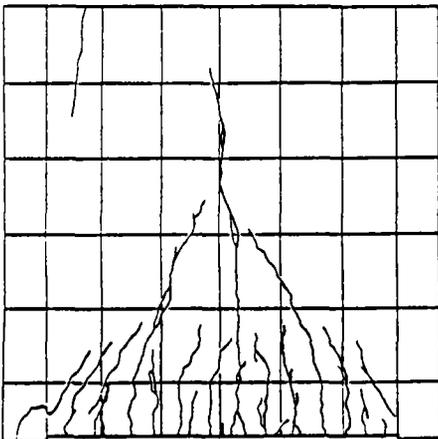
121



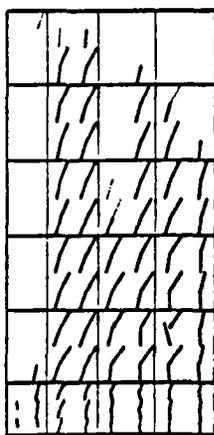
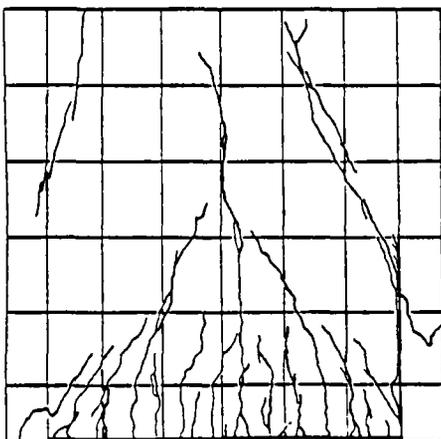
P = 1177 KN



P = 1373 KN



P = 1570 KN



P = 1668 KN

Fissures apparues entre cette charge et la charge ultime du calcul (1915 KN)

Fig.V.16. Fissuration, panneau WT4 (suite)



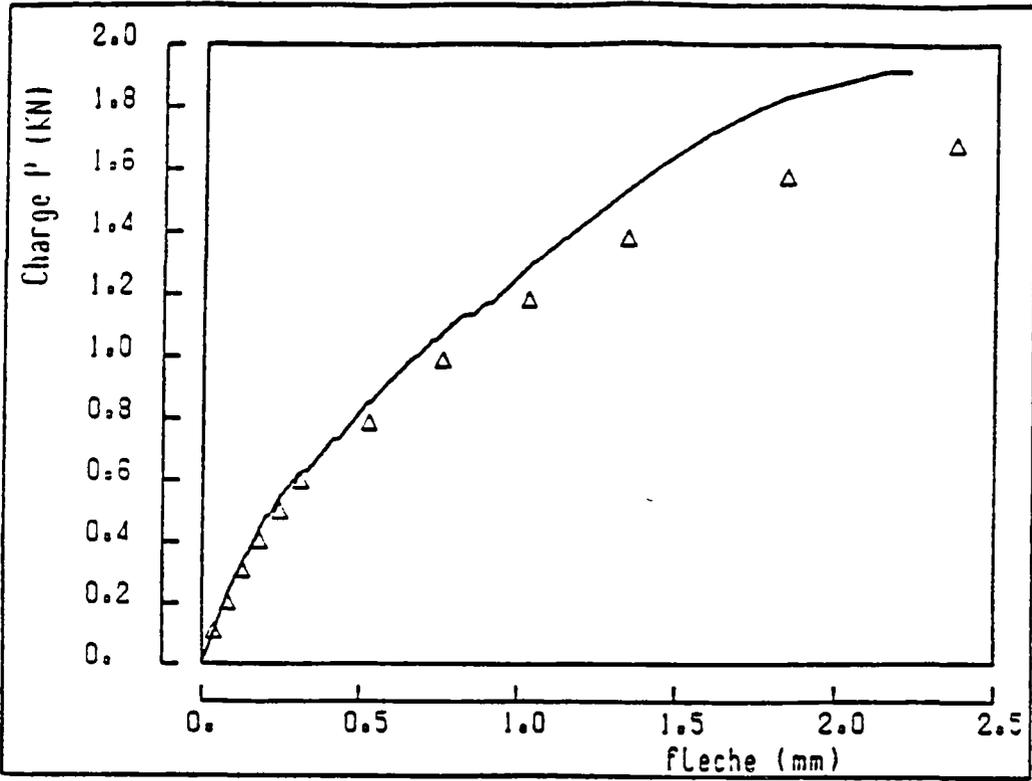


Fig. V.17 Courbe charge-flèche; panneau WT4.

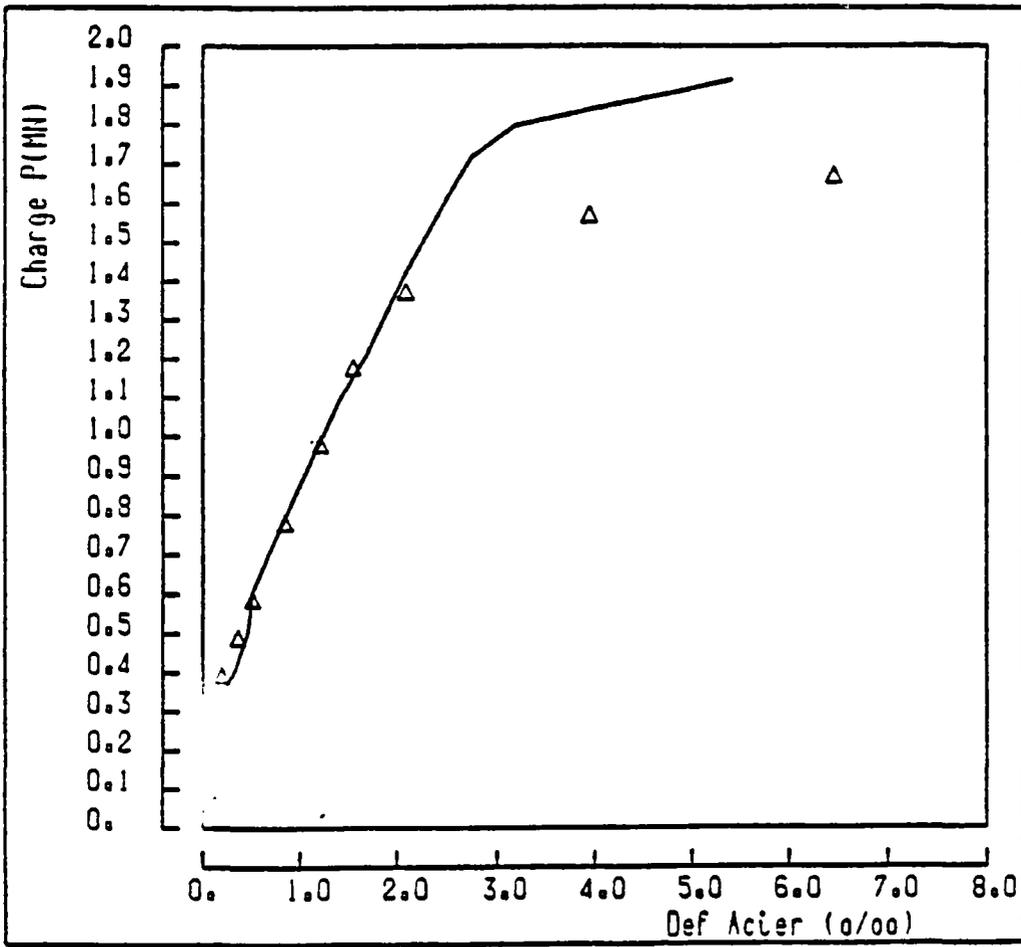


Fig. V.18 Déformations de l'acier à mi-travée; panneau WT4.

La charge de ruine prévue par l'analyse est 1915 KN. Sa différence avec la valeur expérimentale (15 %) aurait pu être acceptable si les modes de ruine du calcul et de l'expérience étaient les mêmes, mais cela n'est pas le cas. La ruine numérique survient par écrasement d'un élément de la région d'appui (du même que pour les calculs de WT3) et non pas par séparation comme il a été observé expérimentalement.

La Figure V.18 donne les déformations de la couche inférieure d'acier dans la section médiane; la concordance avec les valeurs expérimentales est très satisfaisante. La différence au-delà de 1400 KN est due à la considération pour l'acier d'un comportement élastique-parfaitement plastique avec un palier pour  $\sigma_y = 536.6$  MPa, tandis qu'en réalité il a une limite conventionnelle d'élasticité de 420 MPa et ensuite il s'écrouit jusqu'à la rupture à 536.6 MPa.

#### Commentaires

Pour ce deuxième exemple les prévisions de l'analyse sont moins satisfaisantes. Malgré les fissures précoces et importantes près de l'appui, qui traversent pratiquement toute la hauteur de la structure, aucun signe de rupture n'apparaît là où la ruine est réellement survenue, et l'analyse indique une ruine par écrasement de l'appui. Il semble donc que la suite des éléments fissurés surestime la "résistance" et la "déformabilité" d'une fissure réelle, au moins pour cette structure particulière. Par conséquent le mode réel de rupture nous échappe et la réponse calculée est nettement plus rigide que l'expérimentale au voisinage de la ruine.

### V.3 La poutre-cloison de Cervenka

Notre dernier exemple est la poutre-cloison W3 testée et analysée par Cervenka et Gerstle [24]. Sa forme géométrique, son armature et son chargement sont donnés à la Figure V.19. Le maillage, les conditions aux limites, la considération des charges et le pourcentage d'acier que nous avons utilisé pour le calcul sont donnés à la Figure V.20.

Les paramètres adoptés sont:

module d'Young du béton	$E_b = 20000$ MPa
résistance en compression du béton	$f_c = 26.75$ MPa
résistance en traction du béton (1)	$f_t = 2.20$ MPa
module d'Young de l'acier	$E_a = 189000$ MPa
limite d'élasticité de l'acier	$\sigma_y = 275.80$ MPa
(valeur correspondante à l'acier "grade 40")	

---

(1) La valeur proposée de 3.65 MPa nous a paru anormalement élevée vu la qualité du béton. Nous avons donc adopté la valeur de 2.20 MPa en utilisant la formule  $f_t = 0.6 + 0.06 * f_c$ .

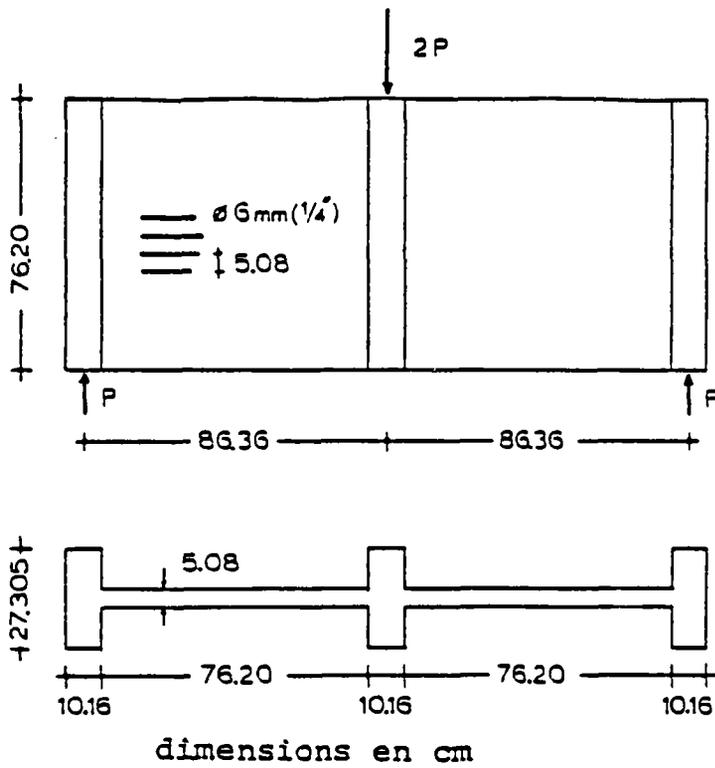


Fig. V.19 Poutre-cloison W3. Géométrie, charges, armatures.

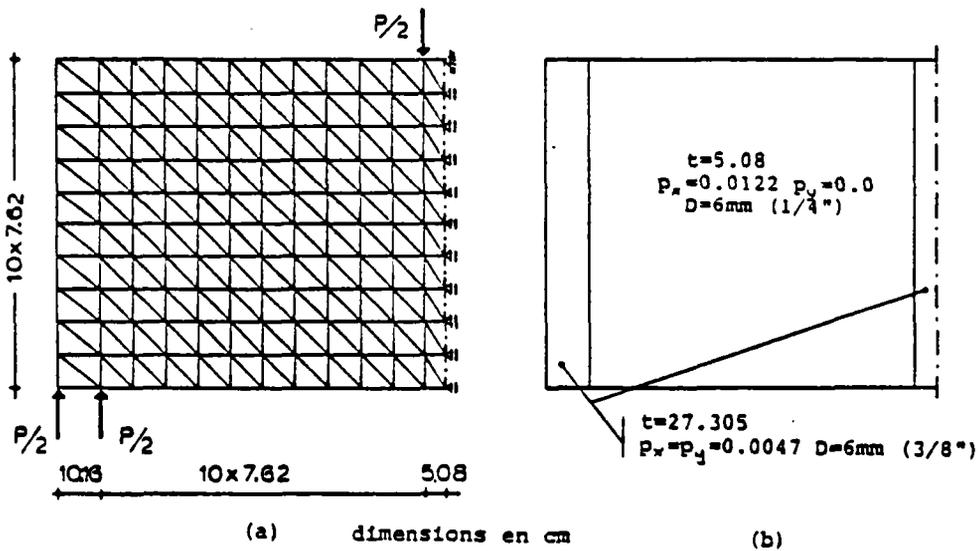


Fig. V.20 Poutre-cloison W3. (a) Maillage, chargement, conditions limites. (b) Epaisseur, armatures.

Pour la loi modifiée de l'acier (prise en compte de l'adhérence) nous avons adopté la valeur réduite, par rapport aux calculs précédents,  $C_a=4$  parce que l'armature est constituée de barres lisses, donc d'une qualité d'adhérence plus basse. L'analyse comprend l'engrènement et l'effet de goujon.

Les directions des fissures et la charge de fissuration pour chaque élément sont données à la Figure 13 de l'Annexe.

Pour cette structure Cervenka et Gerstle ont fait une résolution incrémentale par éléments finis en ignorant l'adhérence, l'effet de goujon et l'engrènement ([23],[24]).

Les Figures V.21 et V.22 montrent les résultats concernant la fissuration et la courbe flèche - charge obtenus par le calcul de Cervenka et le nôtre ainsi que les données expérimentales.

Notre calcul donne une fissuration beaucoup plus importante; en revanche les directions des fissures sont bien prévues.

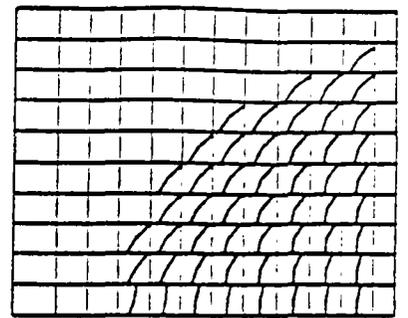
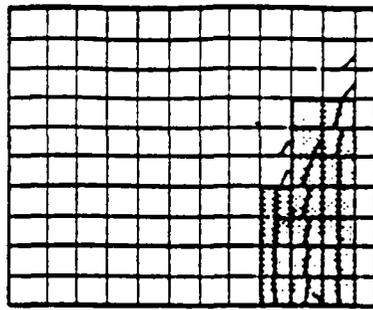
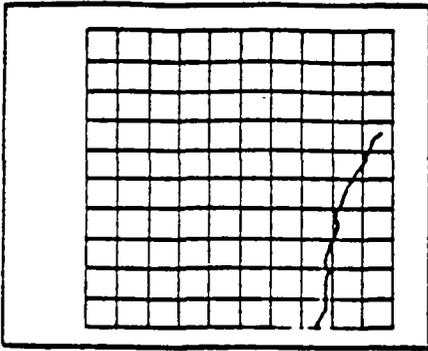
La réponse globale (Figure V.22) est très bien suivie jusqu'à une charge de 40 KN. Son fléchissement final est aussi très bien prévu et indique correctement la charge ultime par la pente pratiquement nulle de la courbe. Le calcul n'a pas été poussé plus loin parce que la plastification avancée de l'acier exigeait un très grand nombre d'itérations. A la fin du calcul, l'écrasement de l'élément le plus sollicité en compression était imminent (surface actuelle à 99.4 % de la surface ultime), ce qui montre le mode de ruine que l'analyse allait prévoir. Le même type de ruine a été prévu par le calcul de Cervenka. En revanche, le mécanisme de rupture observé expérimentalement était différent; il s'agissait d'une ruine typique par effort tranchant caractérisée par l'ouverture d'une fissure diagonale qui a provoqué la rupture brutale de la structure.

Cette différence est aussi signalée par Cervenka et il l'attribue à la défaillance des éléments finis pour représenter le béton fissuré.

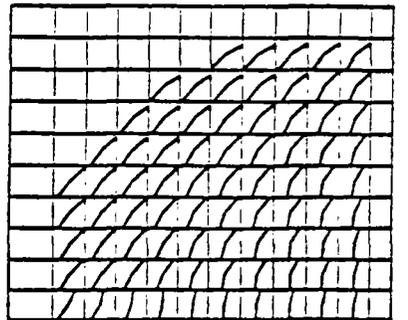
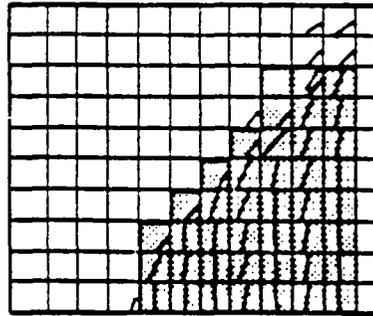
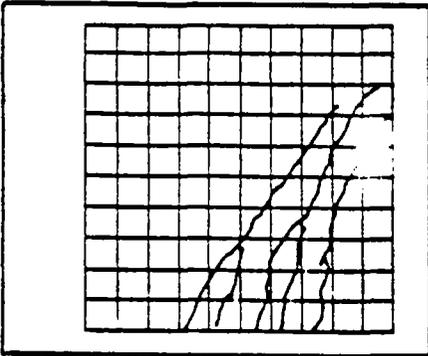
### Commentaires

Le calcul pour cet exemple, comme pour WT4, n'a pas pu prévoir le mécanisme réel de la rupture; en revanche, cette fois-ci la réponse globale est bien approchée. On peut donc penser que la "déformabilité" de la série des éléments fissurés est beaucoup plus proche de la réalité de la fissure que pour WT4. Une raison plausible de cette différence est la forme plus élancée du corps d'épreuve par rapport au WT4.

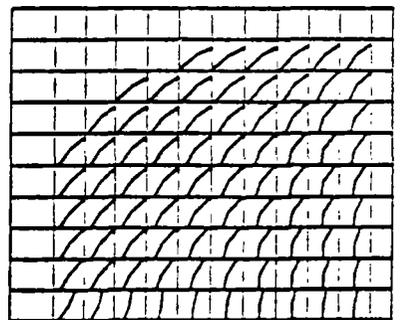
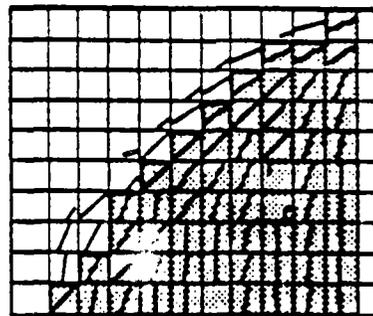
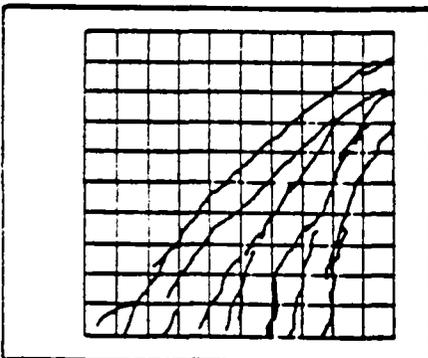
P = 40.22 KN



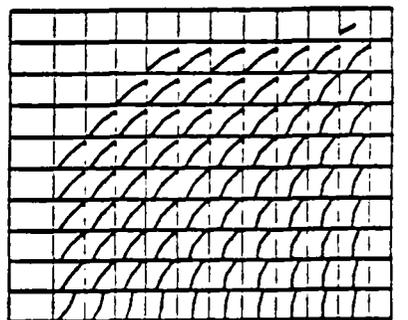
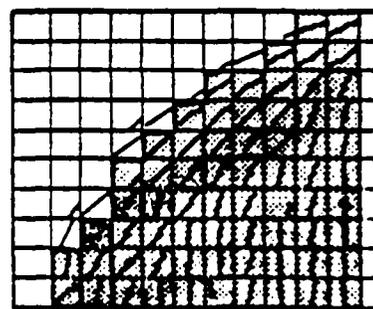
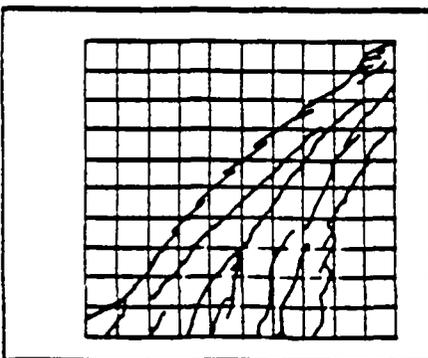
P = 52.97 KN



P = 58.86 KN



P = 61.80 KN



expérience

calcul Cervenka

notre calcul

Fig. V.21 Fissuration; poutre-cloison W3.

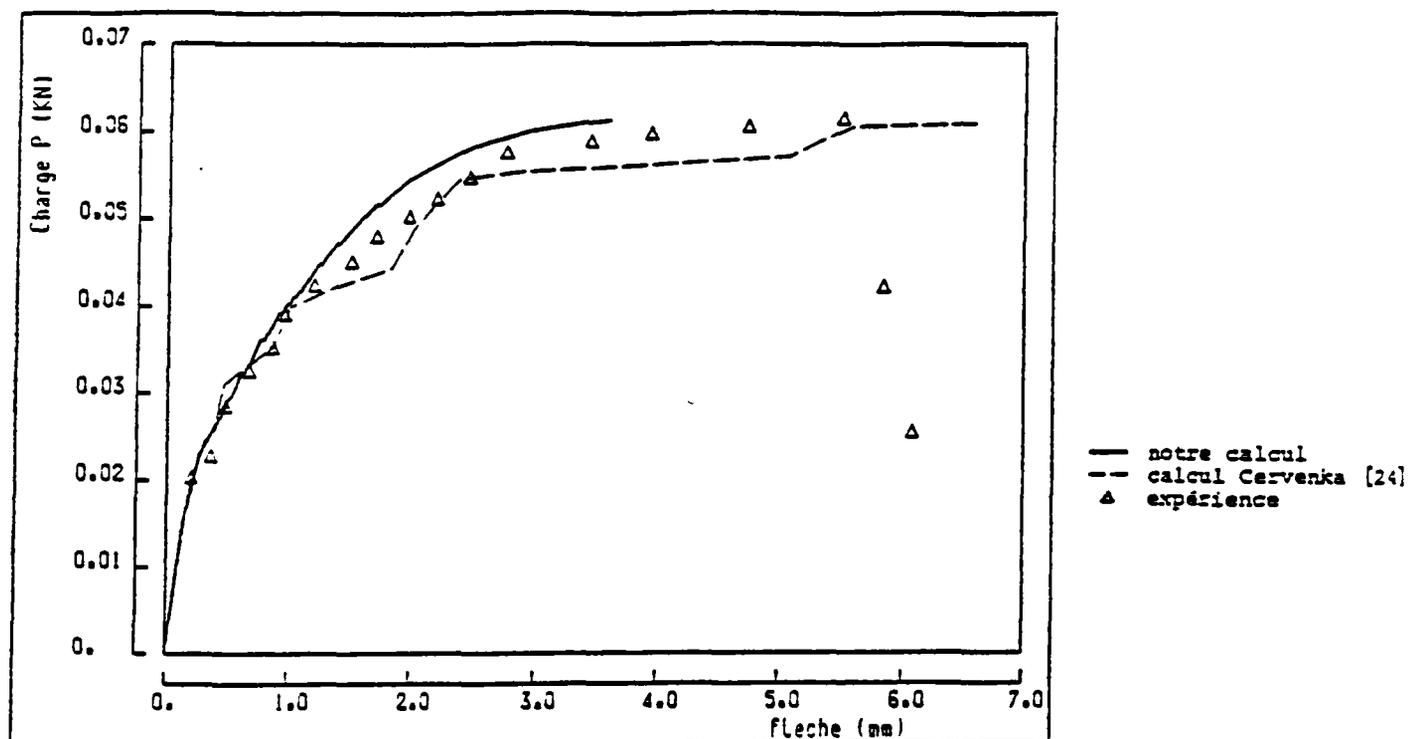


Fig. V.22 Courbe charge-flèche; poutre-cloison W3.

#### V.4 Considération de tous les exemples traités

Une comparaison globale des résultats obtenus pour ces trois structures permet les observations suivantes.

Certains types de ruine, et notamment ceux dus à l'effort tranchant, n'étaient pas reproduits par l'analyse et ceci parce que, apparemment, la série des éléments triangulaires fissurés simule mal le comportement réel d'une fissure. Sa modélisation a présenté une plus grande "résistance" et parfois une plus grande "rigidité", mais sur ce dernier point il semble que la géométrie de la structure joue un rôle important.

Nous ignorons si cet effet est dû à la "nature rigide" des éléments à trois noeuds, et alors il va disparaître - ou au moins radicalement se réduire - avec l'utilisation d'éléments d'ordre élevé, ou s'il persistera.

Nous ne pouvons pas non plus estimer quelles sont les limites que la représentation répartie des fissures impose, par sa nature même, à la bonne prévision d'une ruine caractérisée par la rupture brutale le long d'une fissure prédominante.

### V.5 Remarques sur le processus numérique

Nous avons pu vérifier que la solution trouvée est indépendante du trajet fictif suivi pendant les itérations. En effet les calculs effectués avec accélérateurs différents, et même sans aucune accélération, ont donné des résultats identiques. Ceci est dû au fait que pendant les itérations l'intégration de la loi de comportement des éléments s'effectue à partir du dernier point d'équilibre. La stratégie de résolution a, peut-être, joué un rôle dans le même sens.

Pendant toute la résolution nous utilisons la matrice de rigidité initiale de la structure (éléments intégrés et matériaux élastiques linéaires), ce qui nécessite un grand nombre d'itérations autour de la phase ultime de la structure malgré l'accélération utilisée. Il serait peut-être préférable, du point de vue temps de calcul, de recalculer périodiquement la matrice de rigidité.

La stratégie conçue suit la fissuration de chaque élément; un trajet fictif pendant lequel  $N$  éléments se fissurent exige  $N+1$  résolutions non-linéaires. Concrètement pour les calculs effectués ceci signifiait l'exécution de 100 à 200 résolutions selon le nombre d'éléments fissurés, d'où le coût très élevé des calculs que nous pouvons estimer comme dix fois plus grand que pour une résolution standard avec une dizaine ou vingtaine d'incrémentes. Par conséquent la stratégie conçue peut être retenue si son coût élevé est justifié par une étude comparative qui montre qu'elle obtient des résultats d'une qualité nettement meilleure. Nous ne disposons pas de tels éléments précis de comparaison et nous ne pouvons pas nous prononcer sur ce point.

## CONCLUSION

Nous avons élaboré un code pour le calcul par éléments finis des structures planes en béton armé sous charges monotones.

La représentation "répartie" est utilisée tant pour les armatures que pour les fissures.

Le béton est considéré comme élastoplastique écrouissable et l'acier élastique-parfaitement plastique.

L'adhérence acier-béton et l'engrènement sont introduits par des formulations totales non-linéaires réversibles, tandis que pour l'effet de goujon nous avons adopté un modèle linéaire.

Une attention particulière a été portée à la façon de combiner les phénomènes ci-dessus afin d'obtenir la réponse d'un élément fissuré.

Une nouvelle stratégie de résolution, inspirée par la méthode de "l'arc constant", a été conçue qui permet de suivre les fissurations des éléments une par une afin de bien tenir compte de ce phénomène particulièrement dépendant du trajet de chargement.

Les prévisions du programme ont été comparées avec les données expérimentales sur trois exemples de structures. Les résultats peuvent être considérés globalement prometteurs et plusieurs aspects de la réponse des structures ont été approchés d'une façon satisfaisante.

Des indications sont obtenues concernant l'influence de l'adhérence, de l'effet de goujon, de l'engrènement et d'autres paramètres (module d'Young, résistance en traction) sur la réponse calculée d'une structure.

D'autre part, nous avons pu constater que l'élément triangulaire à trois noeuds, adopté en raison de sa simplicité, est mal adapté pour ce cas. Ses "effets parasites" sur les contraintes ont conduit certains calculs à l'échec et nous ignorons son influence sur les autres.

La comparaison des exemples traités indique que la simulation d'une fissure par une série d'éléments fissurés manifeste une plus grande "résistance" et "rigidité" que la fissure réelle et par conséquent dégrade la qualité des prévisions pour les structures où une fissure est critique. Cet effet, ou du moins son deuxième aspect, dépend beaucoup de la forme géométrique de la structure.

Par manque d'éléments de comparaison précis nous ne pouvons pas nous prononcer sur la valeur pratique de l'algorithme conçu qui suit les fissurations. En revanche, son coût est très élevé - approximativement dix fois plus grand qu'un calcul conventionnel; il ne peut donc être retenu que pour des cas particuliers.

L'expérience acquise peut aider à proposer une suite à ce travail. D'abord des éléments d'ordre supérieur doivent être introduits dans le programme, ce qui permettra de regarder les résultats avec plus de confiance et d'estimer le poids de chaque facteur, pour chaque forme particulière de structure. Ce qui signifie aussi qu'il faut avoir des modèles performants pour chacun des phénomènes.

Pour le comportement du béton, qui est en soi un problème délicat et difficile, il existe un arsenal impressionnant de lois complexes mais nous obtenons aussi de bons résultats avec des lois relativement simples. Par contre, il est important d'élaborer pour l'adhérence un meilleur modèle et de tenir compte des irréversibilités importantes du phénomène. Il en serait de même pour l'engrènement, bien que la recherche fondamentale sur le phénomène soit assez récente et son influence moins connue.

L'introduction des lois irréversibles pour tous les phénomènes permettra l'analyse des structures sous chargement général, comprenant notamment la décharge quasi-statique; analyse qui constitue un pas vers les sollicitations sismiques, problème primordial pour les structures en béton armé.

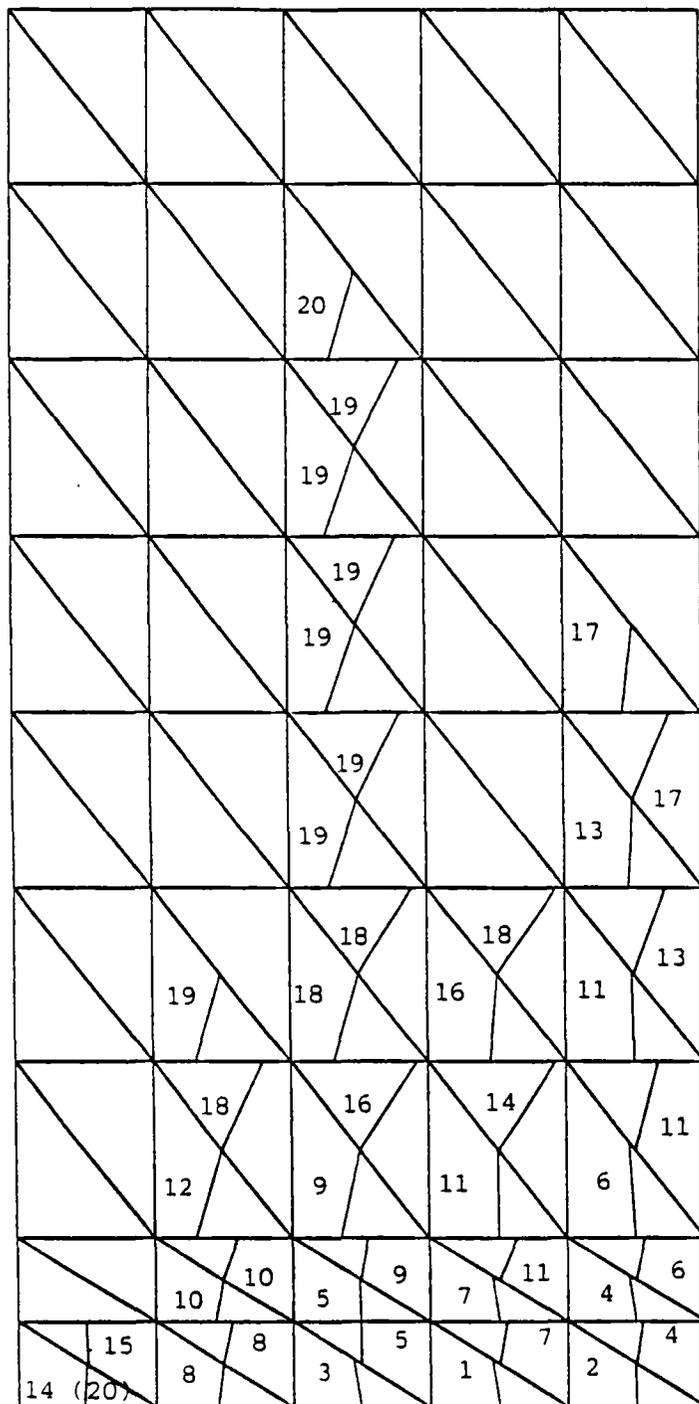
De toute façon, le travail présenté n'est qu'un pas dans ce domaine dont la complexité exige des efforts continus et de longue haleine pour pouvoir répondre au défi que l'analyse d'une structure en béton armé présente.

A N N E X E

---

Direction des fissures et charge d'apparition  
pour tous les calculs



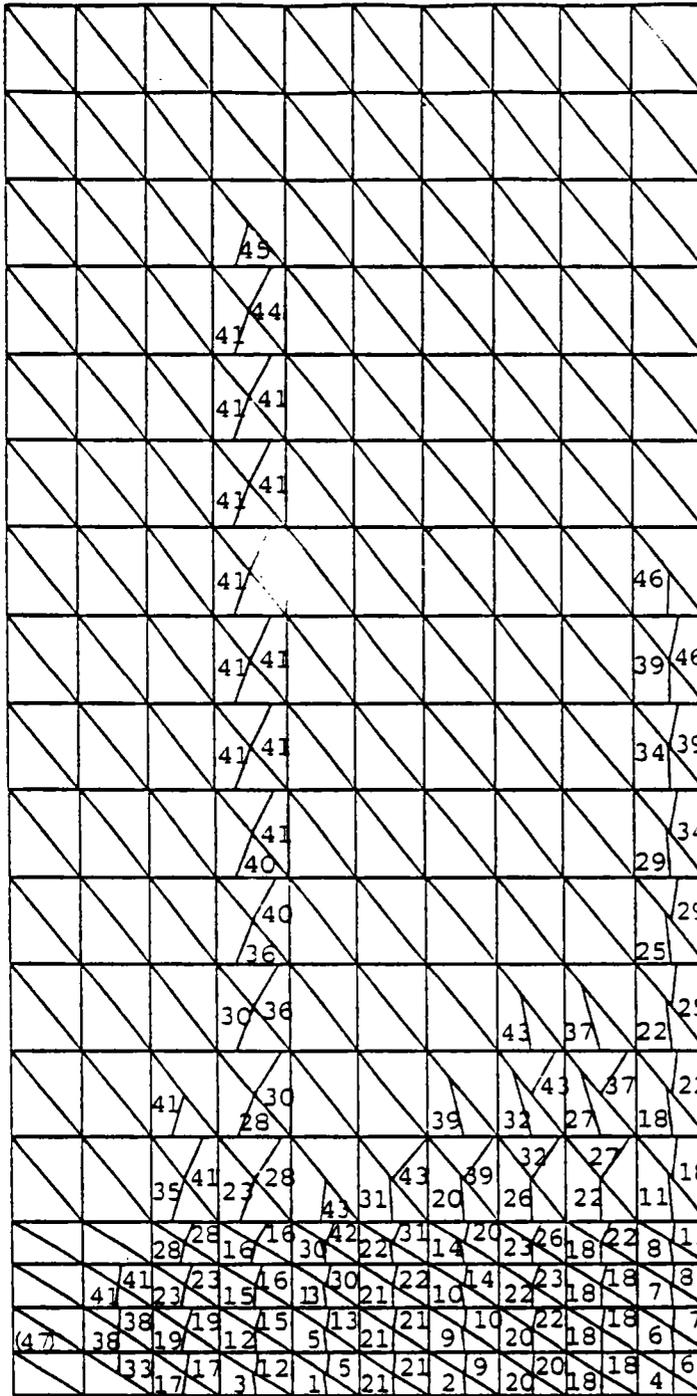


N°      Charge (KN)

1	245
2	300
3	312
4	331
5	414
6	420
7	483
8	524
9	594
10	612
11	631
12	669
13	765
14	805
15	842
16	856
17	873
18	891
19	947
20	992

rupture par  
écrasement  
de l' appui

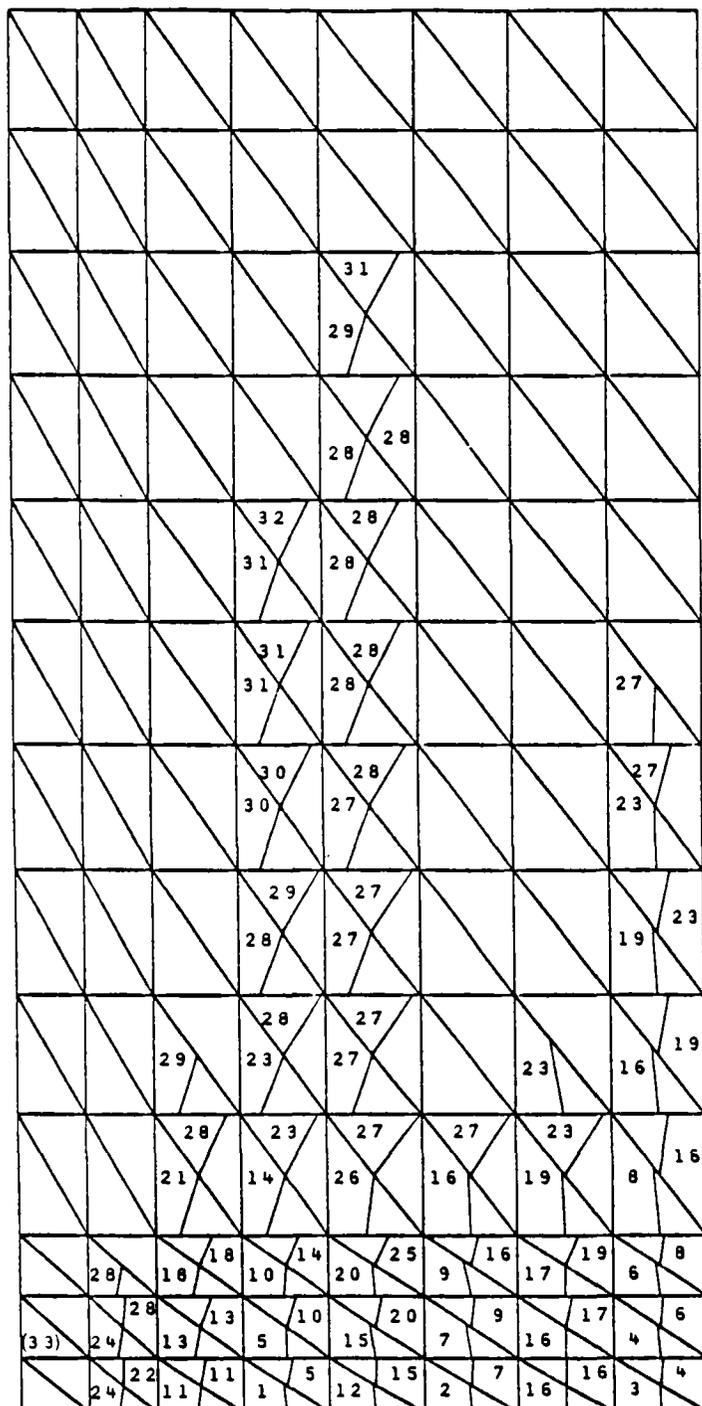
Fig.1. Panneau WT3 - Calcul 1



N°	Charge (KN)
1	197
2	242
3	252
4	256
5	263
6	269
7	283
8	309
9	324
10	336
11	356
12	365
13	370
14	400
15	437
16	451
17	460
18	462
19	473
20	489
21	515
22	518
23	547
24	563
25	582
26	605
27	607
28	626
29	650
30	654
31	675
32	714
33	716
34	730
35	736
36	741
37	752
38	773
39	826
40	850
41	856
42	896
43	900
44	903
45	905
46	979
(47)	980

rupture par  
écrasement

Fig. 2. Panneau WT3 - Calcul 2

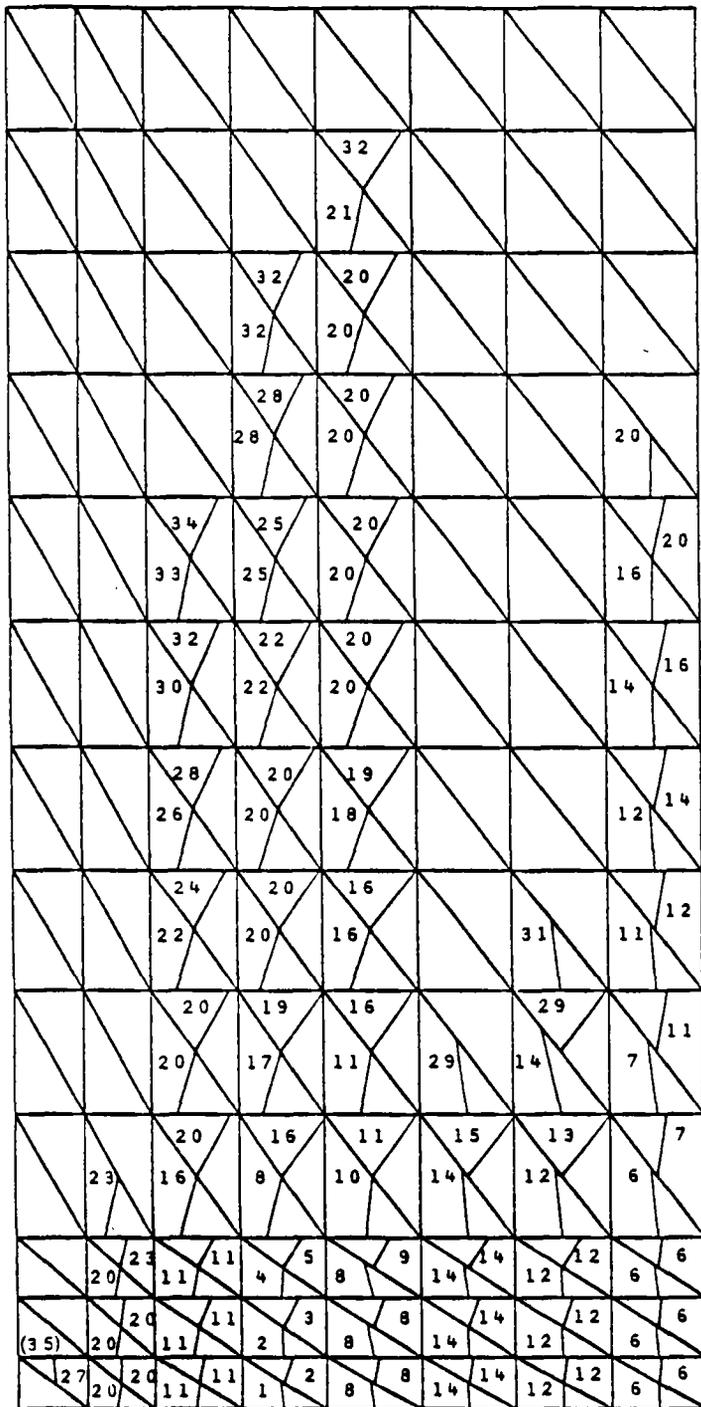


N° Charge (KN)

1	207
2	242
3	264
4	276
5	301
6	314
7	347
8	377
9	407
10	448
11	458
12	487
13	491
14	515
15	516
16	534
17	552
18	585
19	618
20	640
21	696
22	734
23	746
24	767
25	794
26	807
27	839
28	876
29	884
30	939
31	949
32	973
(33)	994

rupture par  
écrasement

Fig. 3. Panneau WT3 - Calcul 3

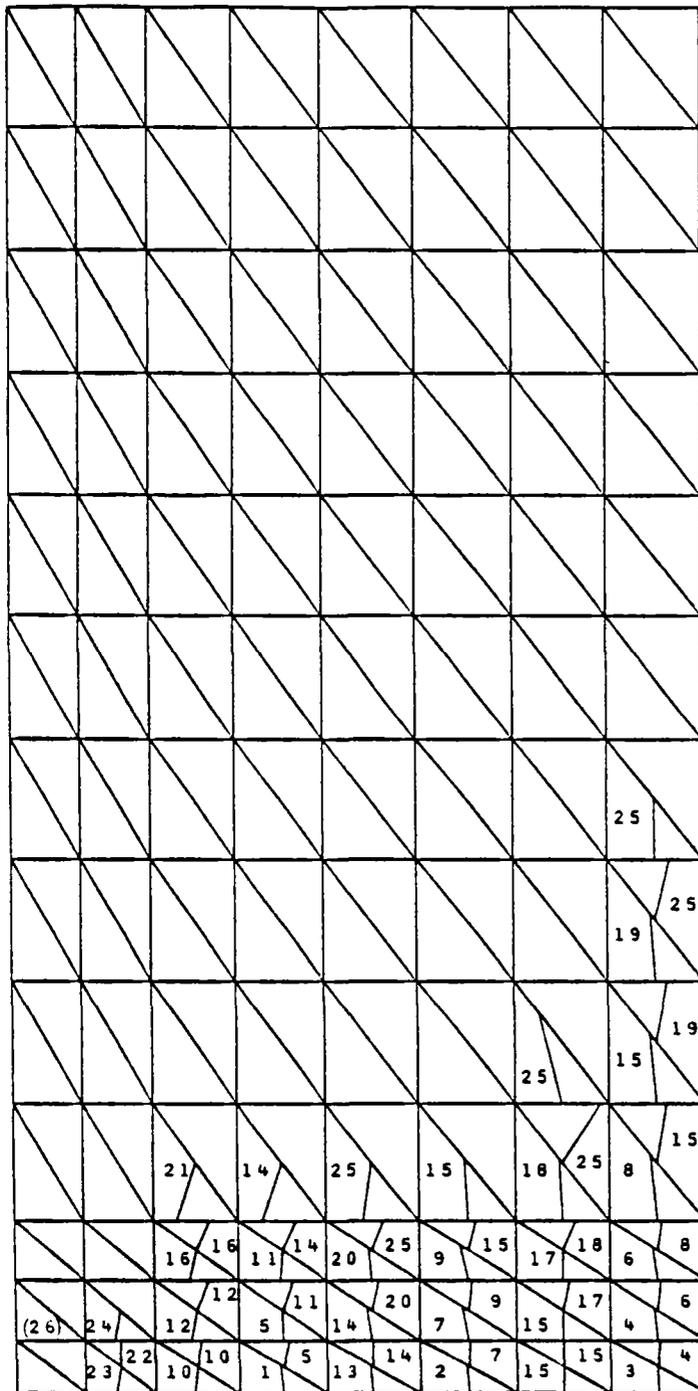


N°      Charge (KN)

1	207
2	227
3	236
4	238
5	273
6	296
7	415
8	426
9	433
10	436
11	497
12	506
13	506
14	551
15	597
16	625
17	627
18	643
19	678
20	692
21	695
22	727
23	729
24	745
25	774
26	830
27	855
28	860
29	924
30	941
31	945
32	950
33	969
34	980
(35)	997

rupture par  
écrasement

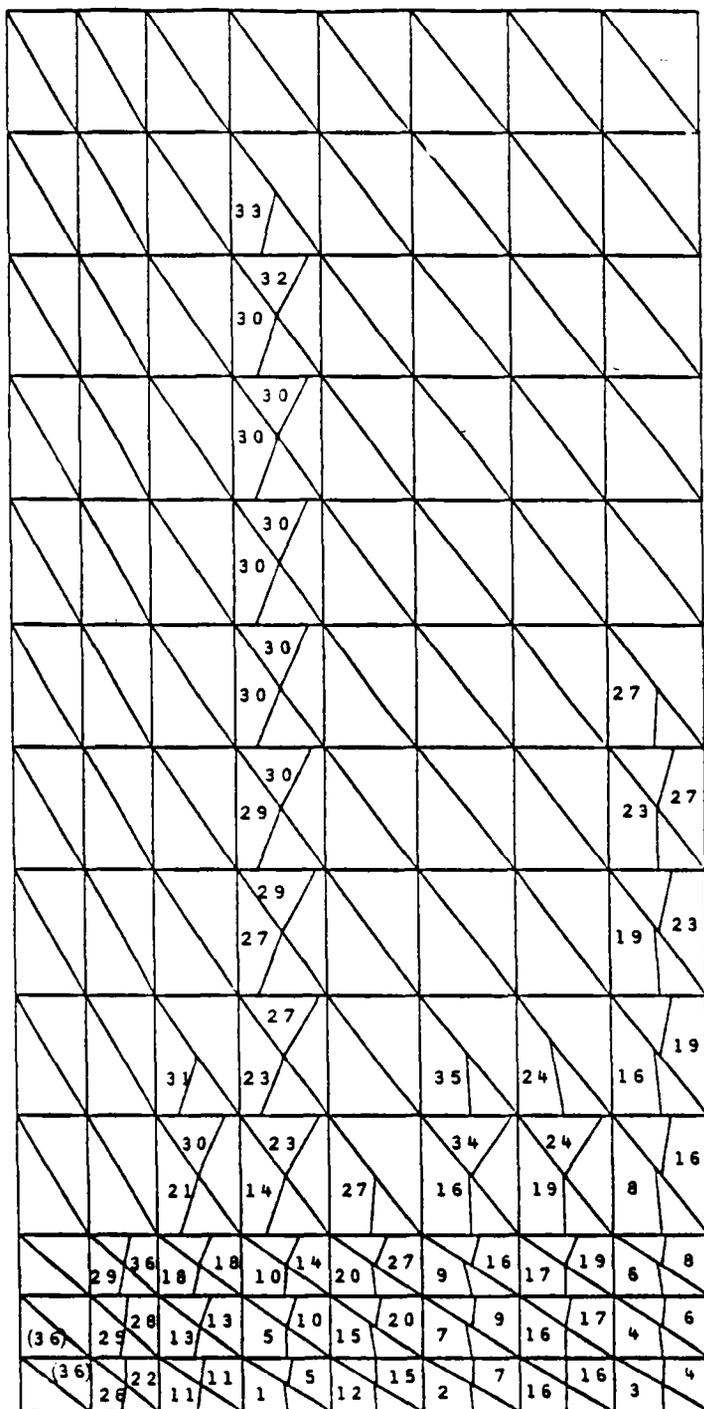
Fig. 4. Panneau WT3 - Calcul 4



N°	Charge (KN)
1	242
2	284
3	310
4	324
5	352
6	368
7	407
8	442
9	476
10	514
11	519
12	539
13	595
14	605
15	626
16	642
17	649
18	721
19	723
20	740
21	753
22	800
23	851
24	858
25	871
(26)	1000,73

rupture par écrasement

Fig. 5. Panneau WT3 - Calcul 5

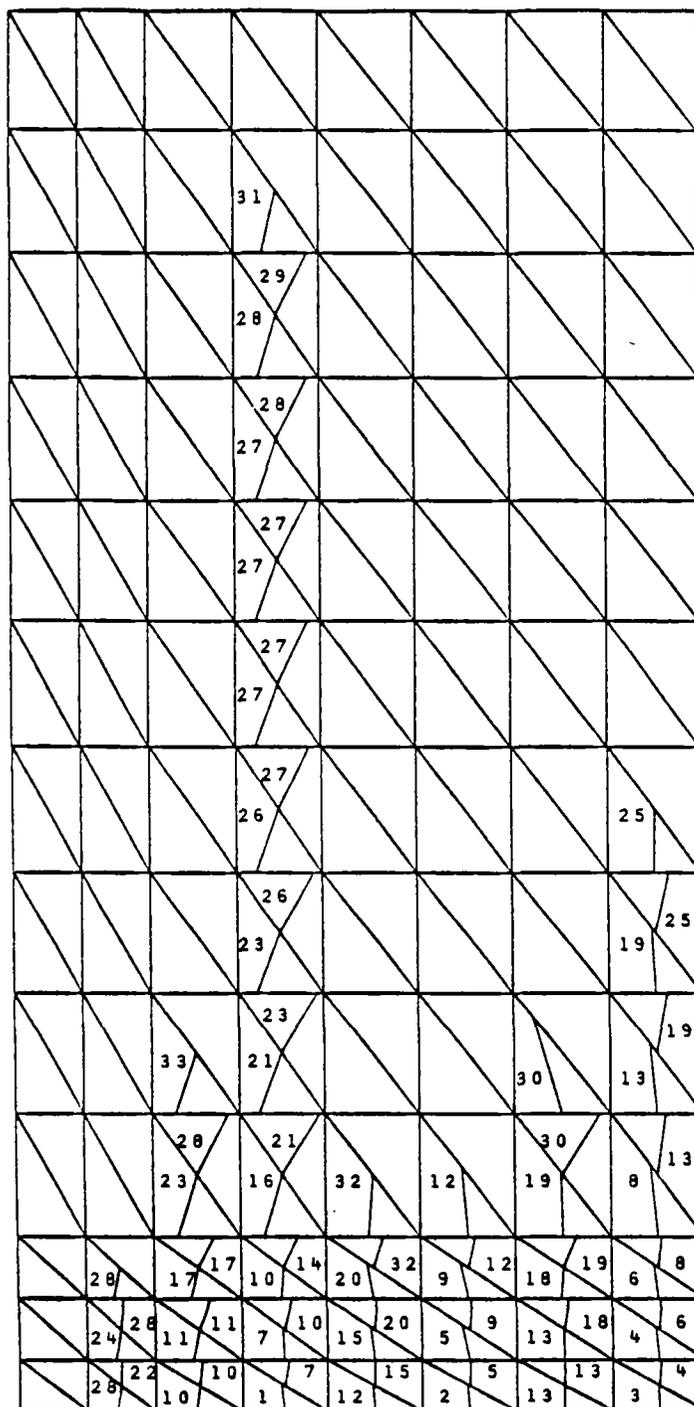


N° Charge (KN)

1	207
2	242
3	264
4	276
5	304
6	314
7	346
8	377
9	407
10	437
11	467
12	491
13	498
14	519
15	533
16	535
17	574
18	589
19	631
20	652
21	730
22	735
23	751
24	753
25	768
26	781
27	861
28	886
29	898
30	908
31	916
32	934
33	959
34	976
35	977
(36)	992

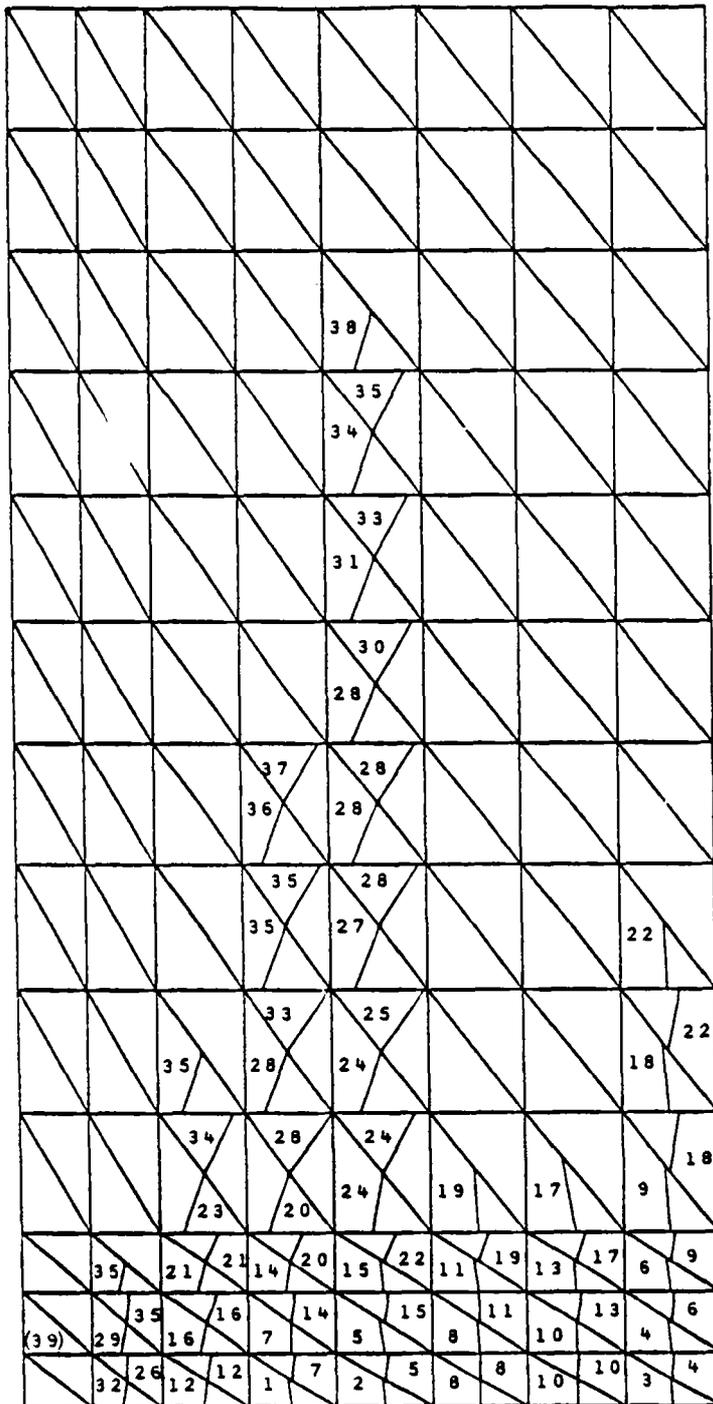
rupture par écrasement

Fig. 6. Panneau WT3 - Calcul 6



N°	Charge (KN)
1	207
2	242
3	264
4	277
5	305
6	320
7	339
8	379
9	402
10	476
11	507
12	524
13	541
14	553
15	556
16	572
17	572,4
18	608
19	633
20	652
21	660
22	726
23	732
24	736
25	737
26	782
27	793
28	810
29	845
30	845,5
31	855
32	870
33	881
(34)	933(Divergeance)

Fig. 7. Panneau WT3 - Calcul 7

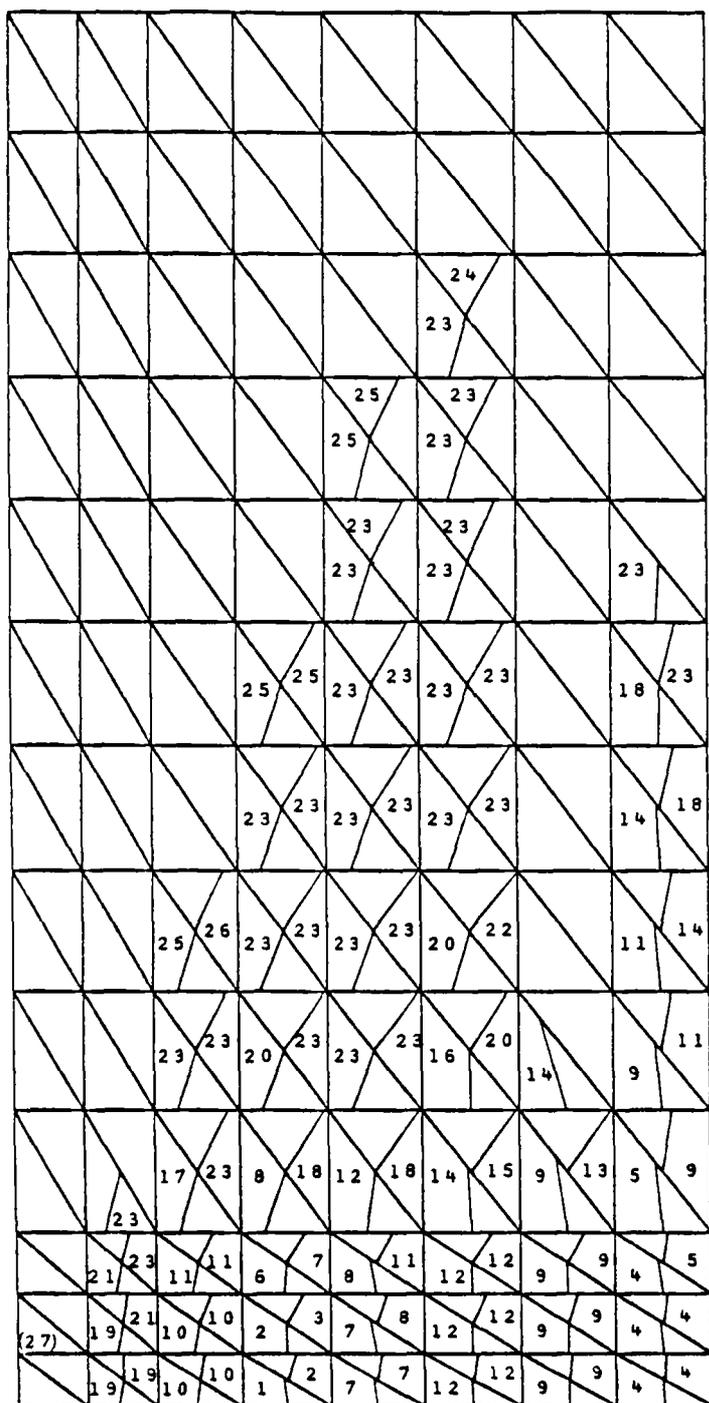


N°      Charge (KN)

1	214
2	244
3	258
4	286
5	312
6	341
7	364
8	409
9	418
10	428
11	436
12	471
13	472
14	483
15	518
16	519
17	555
18	587
19	590
20	621
21	631
22	723
23	730
24	759
25	764
26	773
27	774
28	797
29	811
30	833
31	843
32	853
33	864
34	882
35	926
36	944
37	945
38	956
(39)	1001

rupture par  
écrasement

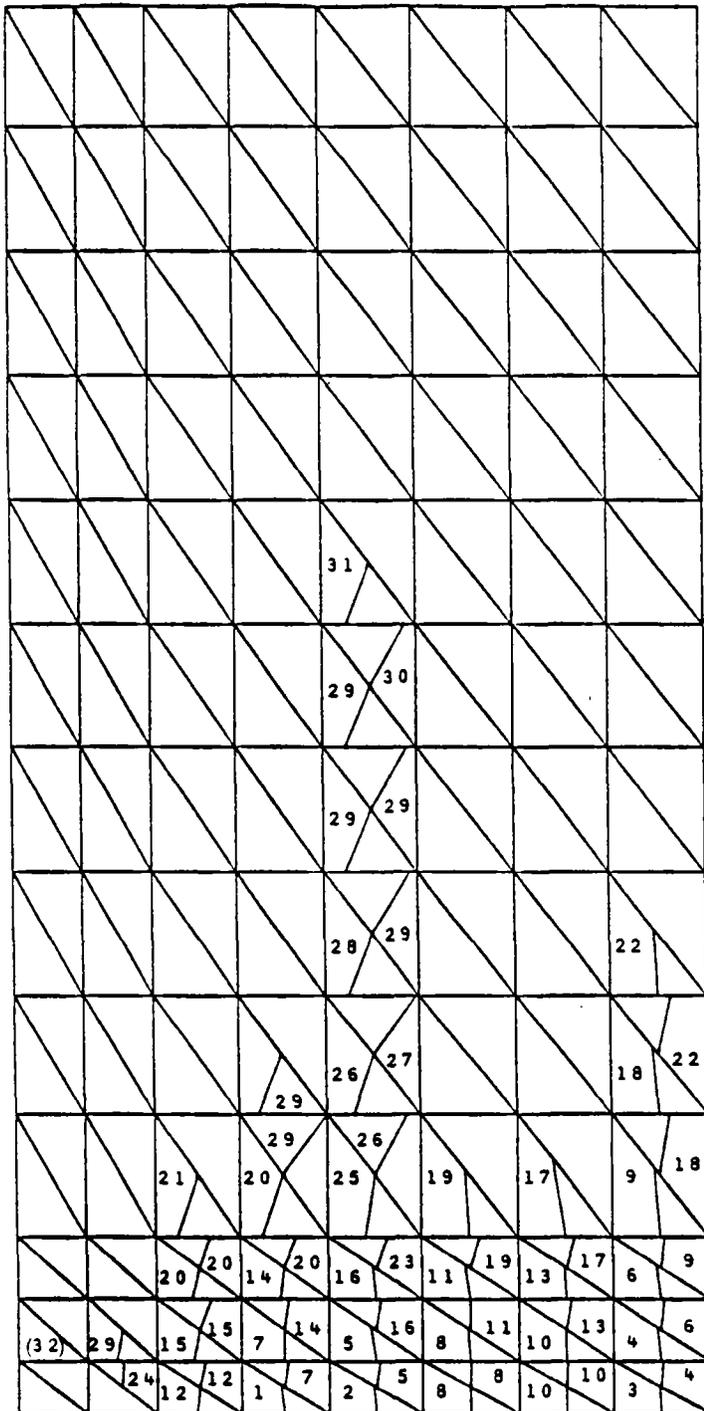
Fig. 8. Panneau WT3 - Calcul 8



N°	Charge (KN)
1	214
2	243
3	270
4	280
5	317
6	336
7	403
8	422
9	482
10	502
11	517
12	538
13	552
14	577
15	599
16	717
17	730
18	732
19	753
20	816
21	833
22	834
23	892
24	908
25	918
26	968
(27)	1000,8

rupture par  
écrasement

Fig.9. Panneau WT3 - Calcul 9

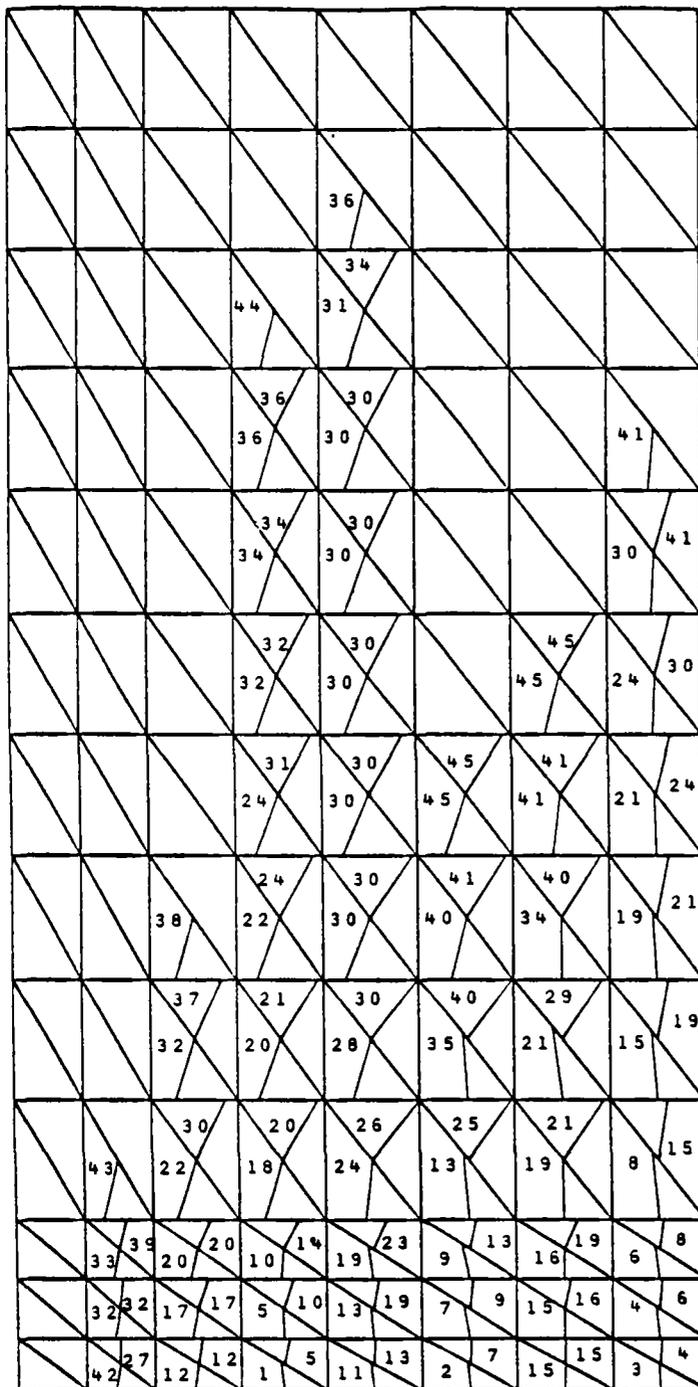


N° Charge (KN)

1	250
2	287
3	303
4	335
5	365
6	400
7	426
8	480
9	490
10	502
11	511
12	519
13	554
14	564
15	571
16	606
17	650
18	688
19	690
20	734
21	787
22	842
23	851
24	853
25	879
26	891
27	899
28	907
29	940
30	964
31	969
(32)	1000,93

rupture par  
écrasement

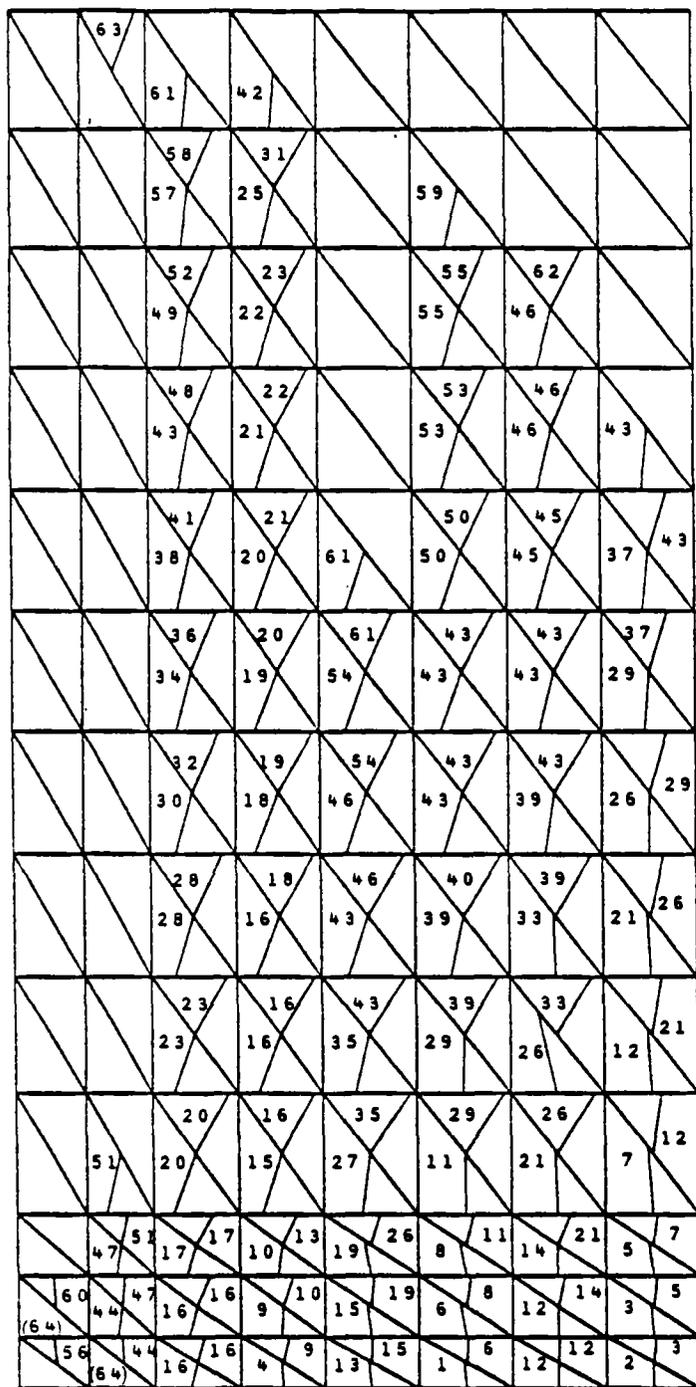
Fig.10. Panneau WT3 - Calcul 10



N°      Charge (KN)

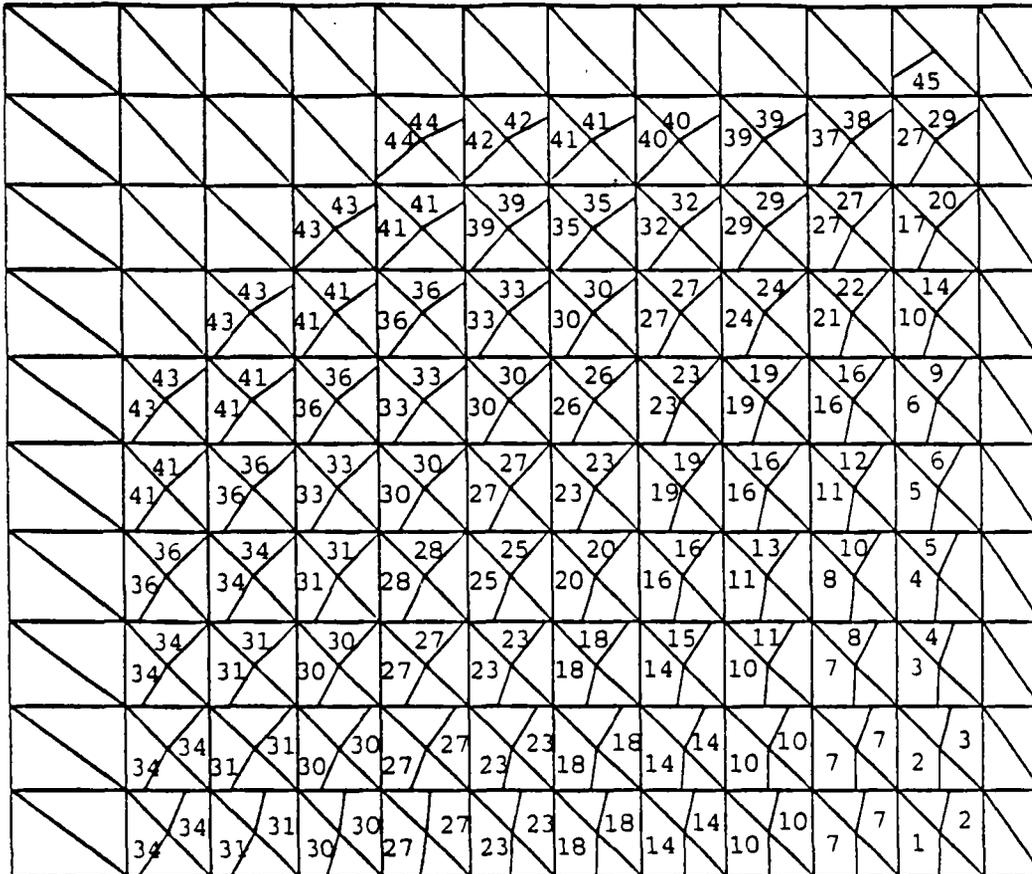
1	207,5
2	242
3	264
4	276
5	303
6	313
7	347
8	375
9	407
10	453
11	472
12	482
13	521
14	523
15	533
16	556
17	563
18	584
19	629
20	678
21	746
22	775
23	832
24	843
25	875
26	896
27	897
28	904
29	904,5
30	916
31	934
32	954
33	995
34	1005
35	1065
36	1117
37	1120
38	1124
39	1171
40	1222
41	1249
42	1252
43	1285
44	1285,4
45	1315

Fig. 11. Panneau WT3 - Calcul 11



N°	Charge (KN)	N°	Charge (KN)
1	240	34	947
2	255	35	958
3	268	36	989
4	296	37	999
5	300	38	1047
6	338	39	1049
7	357	40	1089
8	406	41	1099
9	422	42	1107
0	465	43	1123
1	488	44	1139
2	490	45	1163
13	503	46	1167,9
14	528	47	1168,3
15	536	48	1209
16	559	49	1279
17	564	50	1302
18	579	51	1314
19	599	52	1335
20	622	53	1345
21	632	54	1378
22	650	55	1429
23	682	56	1467
24	703	57	1470
25	733	58	1511
26	735	59	1611
27	736	60	1715
28	779	61	1718
29	851	62	1798
30	871	63	1831
31	880	(64)	1915
32	898		rupture par
33	923		écrasement

Fig. 12. Panneau WT4



N°	Charge (KN)	N°	Charge (KN)	N°	Charge (KN)
1	14,32	16	27,09	31	40,23
2	15,68	17	27,25	32	40,38
3	16,83	18	28,26	33	41,05
4	18,35	19	29,32	34	41,70
5	20,32	20	29,48	35	43,14
6	23,14	21	30,05	36	44,85
7	23,29	22	30,37	37	45,79
8	24,00	23	32,27	38	46,45
9	24,50	24	32,50	39	47,11
10	24,63	25	33,29	40	50,21
11	25,13	26	36,12	41	51,58
12	25,31	27	36,17	42	54,48
13	25,70	28	36,83	43	58,35
14	25,80	29	37,48	44	59,09
15	26,49	30	39,17	45	61,08

Fig. 13. Poutre-cloison W3



**REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES**

---

- [1] ANDERSON A.C., FUGELSO E.D. and BUTLER A.T. (1982)  
 "Triaxial Concrete Constitutive Models and their Application to the nonlinear Analysis of Nuclear Plant Structures"  
 Nonlinear Numerical Analysis of RC, presented at the winter Annual meeting of ASME, Phoenix Arizona 14-19 november 1982, edited by Leonard Schwer, ASME, pp. 49-74.
- [2] ARNENSEN A., SORENSEN S.I. and BERGAN P.G. (1980)  
 "Nonlinear analysis of reinforced concrete"  
 Computers & Structures, Vol. 12, pp. 571-579.
- [3] ASCE (1982) - Task Committee on FE Analysis of RC Structures of the Structural Division Committee on Concrete and Masonry Structures, "Finite Element Analysis of Reinforced Concrete. State-of-the-Art Report"  
 Spec. Publ. ASCE, New York.
- [4] BASHUR F. and DARWIN D. (1978)  
 "Nonlinear model for reinforced concrete slabs"  
 J. Struct. Div. ASCE, Vol. 104, n° ST1, proc. pap. 13493, January, pp. 157-170.
- [5] BATHE K.J. and RAMASWAMY S. (1979)  
 "On three-dimensional nonlinear analysis of concrete structures".  
 Nuclear Engineering and Design, n° 52, pp. 385-409.
- [6] BATOZ L.J. and DHATT G. (1979)  
 "Incremental Displacement Algorithms for nonlinear Problems"  
 Intern. J. of Numer. Methods in Engng., Vol. 14, n° 8, pp. 1262-1267.
- [7] BAUMANN Th. und RUCH H. (1970)  
 "Versuche zum Studium der Verdübelungswirkung der Biegezugbewehrung eines Stahlbetonbalkens"  
 Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 210, Berlin, pp. 43-83.

- [8] BAZANT P.Z. (1982)  
"Mathematical Models of Nonlinear Behavior and Fracture of Concrete"  
Nonlinear Numerical Analysis of RC presented at the winter Annual meeting of ASME, Phoenix Arizona 14-19/11/1982, edited by Leonard Schwer, ASME, pp. 1-25.
- [9] BAZANT Zdenek (1983)  
"Comment on Orthotropic Models for Concrete and Geomaterials"  
J. Eng. Mech. Div. ASCE, Vol. 109, n° 3, June, pp. 849-865.
- [10] BAZANT P.Z. and BHAT P. (1976)  
"Endochronic theory of Inelasticity and Failure of Concrete"  
Eng. Mech. Div. ASCE, Vol. 102, n° EM4, August, proc. pap. 12360, PP. 701-722.
- [11] BAZANT Z.P. and GAMBAROVA P. (1980)  
"Rough cracks in reinforced concrete"  
J. Struct. Div. ASCE, Vol. 106, n° ST4, April, proc. pap. 15330, pp. 819-842.
- [12] BAZANT Z.P. and KIM S.S. (1979)  
"Plastic fracturing theory for concrete"  
J. Eng. Mech. Div. ASCE, Vol. 105, n° EM3, June, proc.pap.14653, pp. 407-428.
- [13] BAZANT Z.P. and OH B.H. (1983)  
"Deformation of cracked net-reinforced concrete walls"  
J. Eng. Struct. ASCE, Vol. 109, n° 1, January, proc. pap. 17619, pp. 93-108.
- [14] BAZANT P.Z. and SHIEH L.C. (1980)  
"Hysteretic Fracturing Endochronic theory for Concrete"  
J. Eng. Mech. Div. ASCE, Vol. 106, n° EM5, October, paper 15781, pp. 929-950.
- [15] BAZANT Z.P. and TZUBAKI T. (1980)  
"Slip-dilatancy model for cracked reinforced concrete"  
J. Struct. Div. ASCE, Vol. 106, n° ST9, September, paper 15704, pp. 1947-1966.
- [16] BERGAN G.P. and HOLLAND I. (1979)  
"Nonlinear Finite Element Analysis of Concrete Structures"  
Computer Methods in Applied Mech. and Engineering, Vol. 17/18, Part II, Februar pp. 443-467.

- [17] BRESLER B. and BERTERO V. (1968)  
"Behavior of Reinforced Concrete under repeated Load"  
J. Struct. Div. ASCE, Vol. 94, n° ST6, June, paper 6013,  
pp. 1567-1590.
- [18] BUYUKOZTURK O. (1977)  
"Nonlinear Analysis of reinforced concrete structures"  
Computers & Structures, Vol. 17, pp. 149-156.
- [19] BUYUKOZTURK O. and SHAREEF S.S. (1985)  
"Constitutive Modeling of concrete in finite element analysis"  
Computers & Structures, Vol. 21, n° 3, pp. 581-610.
- [20] CEB (1985)  
"Design Manual on Cracking and Deformations"  
CEB, Bulletin d'information n° 158-E.
- [21] CEDOLIN L., CRUTZEN Y. and DEI POLI S. (1977)  
"Triaxial stress-strain relationship for concrete"  
J. Eng. Mech. Div. ASCE, Vol. 103, n° EM3, June, paper 12969,  
pp. 423-439.
- [22] CEDOLIN L. and DEI POLI S. (1977)  
"Finite element studies of shear-critical R/C beams"  
J. Eng. Mech. Div. ASCE, Vol. 103, n° EM3, June, paper 12968,  
pp. 395-410.
- [23] CERVENKA V. and GERSTLE K. (1971)  
"Inelastic Analysis of Reinforced Concrete Panels - Part 1 -  
Theory"  
Proc. of Int. Ass. Br. and Str. Eng. (IABSE), Vol. 31-II,  
pp. 31-45.
- [24] CERVENKA V. and GERSTLE K. (1972)  
"Inelastic Analysis of Reinforced Concrete Panels"  
Experimental Verification and Application - Part 2,  
Proc. of IABSE, Vol. 32-II, 1972, pp. 25-39.
- [25] CHEN F.W. (1982)  
"Plasticity in Reinforced concrete"  
Mc Graw-Hill Book Company, New York.

- [26] CHEN T.C.A. and CHEN F.W. (1975)  
"Constitutive Relations for Concrete"  
J. Eng. Mech. Div. ASCE, Vol. 101, n° EM4, proc. pap. 11529,  
August, pp. 465-481.
- [27] CHEN T.C.A. and CHEN W.F. (1975)  
"Constitutive Equations and Punch-Indentation of concrete"  
J. Eng. Mech. Div. ASCE, Vol. 101, n° EM6, proc. pap. 11809,  
December, pp. 889-906.
- [28] CHEN F.W. and SUZUKI H. (1980)  
"Constitutive models for concrete"  
Computers & Structures, Vol. 12, pp. 23-32.
- [29] CHEN W.F., SUZUKI H. and CHANG T.Y. (1980)  
"Nonlinear analysis of concrete cylinder structures under  
hydrostatic loading"  
Computers & Structures, Vol. 12, pp. 559-570.
- [30] COLVILLE J. and ABBASI J. (1974)  
"Plane stress reinforced concrete finite elements"  
J. Struct. Div. ASCE, Vol. 100, n° ST5, proc. pap. 10554, May,  
pp. 1067-1083.
- [31] COON D.M. and EVANS J.R. (1972)  
"Incremental constitutive laws and their associated failure  
criteria with application to plain concrete"  
Int. J. Solids & Structures. Vol. 8, n° 9, September,  
pp. 1169-1183.
- [32] CRISFIELD A.M. (1979)  
"A faster modified Newton-Raphson Iteration"  
Computer Methods in Applied Mechanics and Engng. Vol. 20, n° 3,  
December, pp. 267-278.
- [33] CRISFIELD A.M. (1981)  
"A Fast Incremental/Iterative Solution procedure that handles  
"shap--through"  
Computers & Structures, Vol. 13, n° 1-3, June, pp. 55-62.
- [34] DARWIN D. and PECKNOLD A.D. (1976)  
"Analysis of RC shear panels under cyclic loading"  
J. Struct. Div. ASCE, Vol. 102, n° ST2, proc. pap. 11896,  
February, pp. 355-369.

- [35] DARWIN D. and PECKNOLD A.D. (1977)  
"Nonlinear Biaxial stress-strain law for concrete"  
J. Eng. Mech. Div. ASCE, Vol. 103, n° EM2, proc. pap. 12839,  
April, pp. 229-241.
- [36] DARWIN D. and PECKNOLD A.D. (1977)  
"Analysis of cyclic loading of plane R/C structures"  
Computers & Structures, Vol. 7, pp. 137-147.
- [37] DESAI S.C. and ABEL F.J. (1972)  
"Introduction to the Finite Element Method. A numerical method  
for engineering analysis"  
Van Nostrand Reinhold company - New York
- [38] DHATT G. et TOUZOT G. (1984)  
"Une présentation de la méthode des éléments finis"  
Collection Université de Compiègne, Paris, deuxième ed.
- [39] DULACSKA Helen (1972)  
"Dowel Action of reinforcement crossing cracks in concrete"  
J. of ACI, Vol. 69, n° 12, December, pp. 754-757.
- [40] EDWARDS D.A. and PICARD A. (1972)  
"Theory of cracking in concrete members"  
J. Struct. Div. ASCE, Vol. 98, n° ST12, December, paper 9428,  
pp. 2687-2699.
- [41] EIBL J. und IVANYI G. (1976)  
"Studie zum Trag-und Verformungsverhalten von Stahlbeton"  
Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, H 260.
- [42] ELIGEHAUSEN, POPOV and BERTERO (1982)  
"Local Bond Stress-Slip Relationships of deformed bars under  
generalized excitations"  
Proceedings of the 7<sup>th</sup> European Conference on Earthquake  
Engineering, September 20-25, Athens Greece, Vol. 4, pp. 69-80.
- [43] ELWI A.A. and MURRAY W.D. (1976)  
"A 3D Hypoelastic concrete constitutive relationship"  
J. Eng. Mech. Div. ASCE, Vol. 105, n° EM4, proc. pap. 14746,  
August, pp. 623-641.

- [44] FALKNER HORST (1969)  
"Zur Frage der Rißbildung durch Eigen und Zwängspannungen infolge Temperatur in Stahlbetonbauteilen"  
Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, H 208.
- [45] FARDIS M.N. and BUYUKOZTURK O. (1979)  
"Shear transfer model of reinforced concrete"  
J. Eng. Mech. Div. ASCE, Vol. 105, n° EM2, April,  
proc. pap. 14507, pp. 255-275.
- [46] FARDIS M.N. and BUYUKOZTURK O. (1980)  
"Shear stiffness of concrete by finite elements"  
J. Struct. Div. ASCE, Vol. 106, n° ST6, June, proc. pap. 15463,  
pp. 1311-1327.
- [47] FENWICK R.C. and PAULAY T. (1968)  
"Mechanisms of Shear resistance of concrete beams"  
J. Struct. Div. ASCE, Vol. 94, n° ST10, October, proc. pap. 2325,  
pp. 2325-2350.
- [48] FILIPPOU C.F., POPOV P.E. and BERTERO V.V. (1983)  
"Modeling of R/C Joints under cyclic excitations"  
J. Struct. Div. ASCE, Vol. 109, n° 11, November,  
proc. pap. 18360, pp. 2666-2684.
- [49] FLOEGL H. and MANG H. (1982)  
"Tension stiffening concept based on bond slip"  
J. Struct. Div. ASCE, Vol. 108, n° ST12, December,  
proc. pap. 17572, pp. 2681-2701.
- [50] GERADIN M., IDELSOHN S. and HOGGE M. (1981)  
"Computational strategies for the Solution of large nonlinear  
problems via Quasi-Newton methods"  
Computers & Structures, Vol. 13, n° 1-3, June, pp. 73-81.
- [51] GILBERT R.I. and WARNER R.F. (1978)  
"Tension stiffening in reinforced concrete slabs"  
J. Struct. Div. ASCE, Vol. 104, n° ST12, December,  
proc. pap. 14211, pp. 1885-1900.

- [52] GIURIANI EZIO (1982)  
 "On the Effective Axial Stiffness of a bar in cracked concrete"  
 Bond in Concrete, Int. conf. Scotland Paisley 14-16/6/82,  
 organised by Concrete Society, Instn. Struct. Engineers and ACI,  
 edited by P. BARTOS, Applied Science Publishers, London,  
 pp. 107-126.
- [53] GROOT A.K., KUSTERS G.M.A. and MONNIER TH. (1981)  
 "Numerical modeling of bond-slip behaviour"  
 Heron, Vol. 26, n° 1B.
- [54] GROOTENBOER H.J., LEITJEN S.F.C.H. and BLAAUWENDRAAD J. (1981)  
 "Numerical models for reinforced concrete structures in plane  
 stress"  
 Heron, Vol. 26, n° 1C.
- [55] HALPHEN B. et NGUYEN S.Q. (1975)  
 "Sur les matériaux standards généralisés"  
 Journal de Mécanique, Vol. 14, n° 1, pp. 39-63.
- [56] HALPHEN B. et NGUYEN S.Q. (1975)  
 "Sur les lois d'évolution des paramètres d'écrouissage"  
 Industrie Minérale, Novembre, pp. 247-250.
- [57] HAN J D. and CHEN F.W. (1984)  
 "On Constitutive modeling of concrete materials"  
 Intern. Conf. "Concrete under Multiaxial Conditions",  
 Toulouse 22-24 Mai 1984, INSA Univ. Paul Sabatier, Vol. I,  
 pp. 210-219.
- [58] HAND F., PECKNOLD D. and SCHNOBRICH W. (1973)  
 "Nonlinear Layered Analysis of RC Plates and Shells"  
 J. Struct. Div. ASCE, Vol. 99, n° ST7, July, proc. pap. 9860,  
 pp. 1491-1505.
- [59] HAWKINS M.N., LIN J.I. and JEANG L.F. (1982)  
 "Local Bond Strength of concrete for cyclic reversed Loadings"  
 Bond in Concrete, Int. Conf. Scotland Paisley 14-16/6/82  
 organised by Concrete Society, Instn. Struct. Engrns and ACI,  
 edited by P. BARTOS, Applied Science Publishers, London,  
 pp. 151 -161.
- [60] JIANG H.D., SHAH P.S. and ANDONIAN T.A. (1984)  
 "Study of the Transfer of Tensile forces by Bond"  
 J. of ACI, May-June, Vol. 81, pp. 251-259.

- [61] JOHNSTON W.D. and ZIA P. (1971)  
 "Analysis of dowel action"  
 J. Struct. Div. ASCE, Vol. 97, n° ST5, May, proc. pap. 8147,  
 pp. 1611-1630.
- [62] KREFELD J.W. and THURSTON W.Ch. (1966)  
 "Contribution of Longitudinal steel to shear Resistance of  
 Reinforced concrete beams"  
 J. of ACI, Vol. 63, n° 3, March, pp. 325-344.
- [63] KUPFER HELMUT (1973)  
 "Das Verhalten des Betons unter mehrachsiger zeitbelastung  
 unter besonderer Berücksichtigung der zweiachsigen  
 Beanspruchung"  
 Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, H 229.
- [64] KUPFER G.H. and GERSTLE H.K.  
 "Behavior of concrete under biaxial stresses"  
 J. Eng. Mech. Div. ASCE, Vol. 99, n° EM4, proc. pap. 9917,  
 August, pp. 853-866.
- [65] KUPFER H., HILSDORF H. and RUSCH H. (1969)  
 "Behavior of concrete under biaxial stresses"  
 J. of ACI, Vol. 66, n° 8, August, pp. 656-666.
- [66] MIBLE P.J., WHITE N.R. and GERGELY P. (1977)  
 "Experimental Investigation of seismic shear Transfer across  
 cracks in concrete nuclear containment vessels"  
 ACI special publication 53, SP 53-9, ACI Detroit, pp. 203-226.
- [67] LEMAITRE J. et MAZARS J. (1982)  
 "Application de la théorie de l'endommagement au comportement non  
 linéaire et à la rupture du béton des structures"  
 Annales de l'ITBTP, n° 401, Janvier.
- [68] LEONHARDT F. und WALTHER R. (1966)  
 "Wandartige Träger"  
 Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 178, Berlin.

- [69] LIN S.C. and SCORDELIS A. (1975)  
 "Nonlinear Analysis of RC Shells of General Form"  
 J. Struct. Div. ASCE, Vol. 101, n° ST3, March, proc. pap. 11164,  
 pp. 523-538.
- [70] LOSETH Svein (1982)  
 "Nonlinear Analysis of axisymmetric reinforced concrete  
 structures"  
 The Norwegian Inst. of Technology - University of Trondheim,  
 Norway, Report n° 82-1, April.
- [71] MAZARS (1984)  
 "Modélisation du comportement non linéaire et de l'endommagement  
 du béton de structure"  
 Thèse de Doctorat d'Etat, Paris.
- [72] MAZARS J. (1984)  
 "Description du comportement multiaxial du béton par un modèle de  
 matériau élastique endommageable"  
 Intern. Conf. "Concrete under Multiaxial Conditions", Toulouse,  
 22-24 Mai 1984, INSA Univ. Paul Sabatier, Vol. I, pp. 190-200.
- [73] MEHLHORN G. and KOLLEGGER J., KEUSER M. and KOLMAR W. (1985)  
 "Nonlinear Contact Problems - A Finite Element approach  
 implemented in ADINA"  
 Computers and Structures, n° 1/2, Vol. 21, pp. 69-80.
- [74] MILFORD V.R. and SCHNOBRICH C.W. (1985)  
 "The application of the rotating crack model to the analysis of  
 reinforced concrete shells"  
 Computers & Structures, Vol. 20, n° 1-3, 225-234.
- [75] MIRZA M.S. and HOUDE J. (1979)  
 "Study of bond Stress-slip relationships in Reinf. Concr."  
 J. of ACI, Vol. 76, n° 1, January, pp. 19-46.
- [76] MURRAY W.D. (1979)  
 "Octahedral based incremental stress-strain matrices"  
 J. Eng. Mech. Div. ASCE, Vol. 105, n° EM4, proc. pap. 14734,  
 August, pp. 501-513.
- [77] NAAS Georges (1986)  
 "Calcul à la ruine des structures en béton"  
 Thèse de Doctorat de l'Université Paris 6.

- [78] NAM H.C. and SALMON C. (1974)  
"Finite Element Analysis of Concrete Beams"  
J. Struct. Div. ASCE, Vol. 100, n° ST12, December,  
proc. pap. 11016, pp. 2419-2432.
- [79] NAYAK C.G. and ZIENKIEWICZ C.O. (1972)  
"Elasto-plastic stress analysis. A generalization for various  
constitutive relations including strain softening"  
Intern. J. for Numer. Meth. in Engng., Vol 5, pp. 113-135.
- [80] NGO D. and SCORDELIS A.C. (1967)  
"Finite element analysis of reinforced concrete beams"  
J. of ACI, Vol. 64, n° 3, March, pp. 152-163.
- [81] NILSON ARTHUR (1968)  
"Nonlinear Analysis of reinforced concrete by the Finite Element"  
J. of ACI, Vol. 65, n° 9, September, pp. 757-766.
- [82] NILSON H.A. (1972)  
"Internal measurement of bond slip"  
J. of ACI, July, pp. 439-441.
- [83] NYSSSEN C. (1981)  
"An efficient and accurate iterative method allowing large  
incremental steps, to solve elasto-plastic problems"  
Computers & Structures, Vol. 13, n° 1-3, June, pp 63-71.
- [84] OTTOSEN S.N. (1977)  
"A failure criterion for concrete"  
J. Eng. Mech. Div. ASCE, Vol. 103, n° EM4, proc. pap. 13111,  
August, pp. 527-535.
- [85] OTTOSEN S.N. (1979)  
"Constitutive model for short-time loading of concrete"  
J. Eng. Mech. Div. ASCE, Vol. 105, n° EM1, proc. pap. 14375,  
February, pp. 127-141.
- [86] OWEN J.R.D., FIGUEIRAS A.J. and DAMJANIC F. (1983)  
"Finite Element Analysis of reinforced and prestressed concrete  
structures including thermal loading"  
Computer methods in Applied mechanics and engineering, Vol. 41,  
n° 4, December, pp. 323-366.

- [87] PHILLIPS V.D. and ZIENKIEWIECZ C.O. (1976)  
 "Finite element nonlinear analysis of concrete structures"  
 Proc. of Institution of Civ. Engineers, part 2, Vol. 61, March,  
 pp. 59-88.
- [88] RAMM E. (1982)  
 "The Riks/Wempner approach an extension of the displacement  
 control method in nonlinear analyses"  
 Recent Advances in Nonlinear Computational Mechanics edited by  
 Hinton, Owen, Taylor, Swansea U.K., Pineridge Press Ltd.,  
 pp. 63-86.
- [89] REHM G. and MARTIN H. (1968)  
 "Zur Frage der Rißbegrenzung im Stahlbetonbau"  
 Beton u. Stahlbetonbau, H 8, pp. 175-182.
- [90] RIKS E. (1979)  
 "An Incremental approach to the Solution of snapping and buckling  
 problems"  
 Intern. J. Solids & Structures, Vol. 15, n° 7, pp. 529-551.
- [91] ROSTASY S.F. and ALDA W. (1977)  
 Rißbreitenbeschränkung bei zentrischem Zwang von Stäben aus  
 Stanbeton und Stahlleichtbeton"  
 Beton u. Stahlbetonbau, H 6, pp. 149-156.
- [92] ROSTASY F., KOCH R. and LEONHARDT F. (1976)  
 "Zur Mindestbewehrung für Zwang von Außenwänden aus  
 Stahlleichtbeton"  
 Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, H 267, Berlin.
- [93] SALENCON J. et HALPHEN B. (1981)  
 "Cours de Calcul des Structures Anélastiques. Elasto-plasticité"  
 Cours ENPC, Paris.
- [94] SINISALO H.S., TUOMALA M.T.E. and MIKKOLA M.J. (1979)  
 "Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete slabs  
 subjected to transient impulsive loading"  
 Proc. of Int. Conf. of Concrete Slabs, Dundee 3-6/4/79,  
 pp. 140-148.
- [95] SUIDAN M. and SCHNOBRICH W. (1973)  
 "Finite Element Analysis of reinforced concrete"  
 J. Struct. Div. ASCE, Vol. 99, n° ST10, proc. pap. 10081,  
 October, pp. 2109-2122.

- [96] SUZUKI H. and CHEN W.F. (1983)  
"Elastic-plastic-fracture analysis of concrete structures"  
Computers & Structures, Vol. 16, n° 6, pp. 697-705.
- [97] TASSIOS TH. (1979)  
"Properties of bond between concrete and steel under load cycles  
idealizing seismic actions"  
CEB Bull. d'Info n° 131, Vol. 1, April, pp. 66-122.
- [98] TASSIOS TH. et YANNOPOULOS J. (1981)  
"Etudes analytiques sur l'adhérence acier-béton et la fissuration  
du béton armé sous charges cycliques"  
Annales de l'ITBTP, n° 393, Avril, série : théories et méthodes  
de calcul n° 242, pp. 45-62.
- [99] TASSIOS TH. and YANNOPOULOS P. (1981)  
"Analytical Studies on reinforced concrete members under cyclic  
loading based on bond stress-slip relationships"  
J. of ACI, May-June, Vol. 78, n° 3, pp. 206-216.
- [100] TASSIOS TH. and KORONEOS E. (1979)  
"Preliminary results of local bond slip relationships"  
Bull. d'Information du CEB, n° 132, Vol. II, April, pp. 85-94.
- [101] TAYLOR J.P.H. (1970)  
"Investigation of the forces carried across cracks in reinforced  
concrete beams in shear by interlock of aggregate"  
Cement and Concrete Association, Techn. Report 42.447, November,  
pp. 1-22.
- [102] THOMAS N.J. (1984)  
"An Improved Accelerated initial stress procedure for Elasto-  
plastic finite element analysis"  
Int. J. for Numer. and Analytical Methods in Geomechanics,  
Vol. 8, pp. 359-379.
- [103] VALLIAPPAN S. and DOOLAN T. (1972)  
"Nonlinear stress analysis of reinforced concrete"  
J. Struct. Div. ASCE, Vol. 98, n° ST4, April, proc. pap. 8845,  
pp. 885-898.

- [104] VINTZELEOU E.N. (1984)  
"Mechanisms of load transfer along reinforced concrete interfaces under monotonic and cyclic actions" (en grecque)  
PhD Thesis, Department of Civil Engineering, National Technical University of Athens, December.
- [105] VINTZELEOU N.E. and TASSIOS P.T. (1987)  
"Dowel mechanisme under cyclic actions ; an experimental research"  
Soumis à publication au J. of Aci.
- [106] WALRAVEN J.C. and REINHARDT H.W. (1981)  
"Theory and experiments on the mechanical behaviour of cracks in plain and reinforced concrete subjected to shear loading"  
Heron, Vol. 26, n° 1A.
- [107] WEMPNER G.A. (1971)  
"Discrete Approximations related to nonlinear Theories of Solids"  
Int. J. Solids & Structures, Vol. 7, pp. 1581-1599.
- [108] WHITE R., GERGELY P. and JIMENEZ R. (1979)  
"Sliding shear and dowel forces in cracked reinforced concrete subjected to seismic loading"  
CEB Bull. d'Info. n° 132, Avril, pp. 77-84, (AICAP-CEB Symp. Rome, Mai 1979).
- [109] WHITE N. Richard and HOLLEY J. Myle (1972)  
"Experimental Studies of membrane shear transfer"  
J. Struct. Div. ASCE, Vol. 98, n° ST8, August, proc. pap. 9145, pp. 1835-1852.
- [110] YUZUGULLU O. and SCHNOBRICH W. (1973)  
"A Numerical Procedure for the Determination of the Behavior of a Shear Wall Frame System"  
J. of ACI, Vol. 70, n° 7, July, pp. 474-479.
- [111] ZIENKIEWICZ (1979)  
"La méthode des éléments finis"  
Edition française, Mc. Graw-Hill, Paris.
- [112] ZIENKIEWICZ, VALLIAPPAN and KING (1969)  
"Elasto-plastic solutions of Engineering Problems, "initial stress", finite element approach"  
Int. J. for Num. Meth. in Enging., Vol. I, pp. 75-100.

- [113] DOTREPPE J.C. (1972)  
"Etude par éléments finis des dalles en béton armé jusqu'à la ruine"  
Thèse présentée à la Faculté des Sciences Appliquées en vue de l'obtention du grade scientifique de docteur en Sciences Appliquées de l'Université de Liège
- [114] LEMAIRE M. (1975)  
"Construction d'un code de calcul par éléments finis. Elaboration d'un modèle de la fissuration et de la plastification de pièces en béton"  
Thèse es Sciences Physiques de l'INSA de Lyon et de l'Université Claude Bernard-Lyon I
- [115] REYNOUARD J.M. (1974)  
"Structures Planes en Béton Armé, Elaboration d'un Modèle du Comportement jusqu'à la ruine et Résolution numérique"  
Thèse Docteur-Ingénieur Lyon