Contribution à l'étude et à la modélisation numérique des sols cloués : application au calcul en déformation des ouvrages de soutènement

Philippe Unterreiner

▶ **To cite this version:**

Philippe Unterreiner. Contribution à l'étude et à la modélisation numérique des sols cloués : application au calcul en déformation des ouvrages de soutènement. Modélisation et simulation. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1994. Français. NNT : . tel-00529508

HAL Id: tel-00529508

https://pastel.hal.science/tel-00529508

Submitted on 26 Nov 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NS 17999 (7.7) (4)

THESE DE DOCTORAT

Spécialité : Géotechnique

présentée à

l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées

par

Philippe UNTERREINER

Contribution à l'étude et à la modélisation numérique des sols cloués : application au calcul en déformation des ouvrages de soutènement

Volume I

Centre d'Enseignement et de Recherche en Mécanique des Sols
(CERMES/ENPC-LCPC)

Date de soutenance : jeudi 20 octobre 1994

Jury :

Président	:	M. François Schlosser
Rapporteurs	:	M. Marc Boulon
		M. Ioannis Vardoulakis
Examinateurs	:	M. Günther Gässler
		M. Ilan Juran
		M. Jean-Pierre Magnan
		M. Claude Plumelle
		M. Pierre Vézole

10

E.N.P.C.
INV00554

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier François Schlosser, Professeur à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Président du Comité Français de Mécanique des Sols, Président Directeur Général de Terrasol, pour m'avoir appris à aimer la géotechnique quand je n'étais encore qu'un étudiant à l'ENPC, puis pour avoir accepté d'assurer la direction et le suivi de cette thèse. Ces cinq années de collaboration étroite, que j'ai eu la chance de vivre intensément, en travaillant sur des projets de recherche nationaux (CLOUTERRE, FOREVER) ou européens (SCIENCE, ENVIRONNEMENT), sur des sujets fondamentaux mais aussi et surtout sur des sujets appliqués, dans les domaines de la recherche, de l'expérimentation sur ouvrages ou de la réglementation et la normalisation, m'ont formé au métier de Géotechnicien. Tout au long de ces années, c'est François Schlosser qui m'a appris les liens naturels, mais trop souvent ignorés, qui relient en Mécanique des Sols, l'expérimentation en laboratoire et sur ouvrages à la modélisation mécanique. Pour tout cela, mais aussi pour les rapports de confiance mutuelle, qui ont toujours été de règle entre nous, je voudrais qu'il trouve ici, le témoignage amical de mon estime et de ma profonde reconnaissance.

Mes remerciements vont ensuite à Ioannis Vardoulakis, Professeur à l'Ecole Polytechnique d'Athènes, et Marc Boulon, Professeur à l'Université Joseph Fourier de Grenoble, dont les travaux remarquables sur, respectivement, les milieux continus avec microstructure et le comportement des interfaces sol-structure, ont stimulé mes réflexions et nous ont conduits à monter ensemble, sous la direction de François Schlosser, le Projet Européen SCIENCE No. 659, dans le cadre duquel s'inscrivent les recherches exposées dans la partie A de cette thèse.

Je tiens également à remercier Claude Plumelle, Professeur au Conservatoire National des Arts et Métiers, pour m'avoir ouvert très gentiment ses dossiers et fourni toutes les données et mesures réalisées sur l'expérimentation en vraie grandeur CLOUTERRE-CEBTP No. 1, qu'il a dirigée dans le cadre du Projet National CLOUTERRE. Les recherches exposées dans les parties B et C font intégralement partie des deux Projets Nationaux successifs CLOUTERRE et CLOUTERRE II.

Mes remerciements vont également à Günter Gässler, Professeur à la Fachhochschule à Munich, Ilan Juran, Professeur et Directeur du Département de Génie Civil et Environnemental à l'Université Polytechnique de New-York, Jean-Pierre Magnan, Directeur Technique au LCPC, Pierre Vézole, Directeur Scientifique de la SAE et de la Forézienne d'Entreprises, d'avoir accepté de faire partie de mon Jury en y apportant leurs points de vue de praticiens de la Mécanique des Sols.

Qu'il me soit permis également de remercier tous ceux et toutes celles qui, tant à l'ENPC que dans les Projets Nationaux ou le Réseau des Laboratoires des Ponts et Chaussées, m'ont aidé dans mes recherches, à un titre ou à un autre, par leurs remarques et suggestions. Pour n'en citer que quelques uns, en espérant que tous les autres n'en prendront pas ombrage, je citerai, outre les personnes sus mentionnées, Roger Frank, Directeur du CERMES, Eric Leca et Philippe Mestat, Chefs de Section au LCPC, Michel Jean et Jean-Jacques Moreau, Professeurs à l'Université II de Montpellier, ainsi que tous mes collègues chercheurs au CERMES.

Je souhaite aussi remercier Emmanuel Delaure et Gérard Belmont, qui ont toujours été d'une aide précieuse dans le laboratoire, ainsi que Mesdames Josette Fayol et Dominique Barrière qui m'ont aidé à assembler et finaliser ce mémoire.

Je souhaite également remercier tous les étudiants que j'ai encadrés durant ces cinq dernières années : Djafar Chalhal, Octavian Vasiliu, Petre Babiceascu, Paolo Parovel, Brahim Benhamida, Antonios Zervos. Enseigner et travailler avec eux a été un réel plaisir.

Pour finir, je tiens à remercier mes parents, mes frères et ma soeur ainsi que mon épouse et mes deux fils, pour m'avoir soutenu et encouragé à mener jusqu'à son terme ce travail de longue haleine.

Sommaire

Introduction

Partie A

Résumé de la Partie A	A-3
Sommaire de la Partie A	A-7
1 Introduction sur les interfaces sol granulaire-structure	A-17
2 Résultats expérimentaux sur les interfaces	A-20
3 Résultats théoriques sur les couches d'interface dans un milieu continu classique	A-40
4 Importance des rotations des grains dans les couches d'interface et les bandes de cisaillement	A-48
5 Les milieux continus généralisés	A-70
6 Conditions aux limites	A-91
7 Exemple du milieu de Cosserat linéaire élastique anisotrope	A-107
8 Exemple du milieu de Cosserat rigide parfaitement plastique	A-136
9 Exemple du milieu de Cosserat élastoplastique avec écrouissage	A-154
10 Formulation de la méthode des éléments finis dans un milieu de Cosserat	A-216
11 Simulations numériques par éléments finis de phénomènes de localisation : bandes de cisaillement et couches d'interface	A-276
12 Conclusion et perspectives	A-349

Partie B

Résumé de la Partie B	B-3
Sommaire de la Partie B	B-7
1 Introduction et bibliographie	B-11
2 Calcul de la profondeur de gel et du profil de température derrière un mur de soutènement	B-17
3 Calcul des gonflements du sol sous l'action du gel	B-46
4 Champ de déplacements imposé par le gel au sol	B-58
5 Equilibre d'une tranche de sol ancrée par un lit de tirants	B-62
6 Equilibre d'un lit de clous renforçant une tranche de sol	B-69
7 Calculs en déformation de la paroi ancrée et du mur en sol cloué de La Clusaz	B-113
8 Etude de dispositions préventives pour limiter les effets du gel sur les murs en sol cloué	B-143
9 Conclusion et perspectives	B-151

Partie C

Résumé de la Partie C	C-3
Sommaire de la Partie C	C-7
1 Introduction	C-15
2 Etat des connaissances sur les calculs en déformation des murs en sol cloué	C-25
3 Eléments de modélisation des sols cloués	C-60
4 Modélisation d'essais triaxiaux de sol renforcé par des disques d'aluminium	C-101
5 Modélisation de l'essai d'arrachement du clou préalable No. 5	C-129
6 Calculs en déformation du mur en sol cloué CLOUTERRE-CEBTP No. 1	C-141
7 Conclusion et perspectives	C-275

Conclusion générale

Annexes

Bibliographie

Liste des annexes

Annexe 1 : Exemple de milieu de Cosserat : les poutres (21p)

Annexe 2 : Dérivation des équations d'équilibre d'un milieu continu de Cosserat à partir de la statique (9 p)

Annexe 3 : Construction des "cercles" de Mohr dans un milieu continu de Cosserat (16 p)

Annexe 4 : Analyse du cisaillement simple plan d'un milieu continu classique hétérogène avec une loi de comportement linéaire élastique (4 p)

Annexe 5 : Analyse du cisaillement simple plan d'un milieu continu classique homogène avec une loi de comportement rigide plastique parfaite (4 p)

Annexe 6 : Analyse du cisaillement simple plan d'un milieu continu de Cosserat homogène isotrope avec une loi de comportement linéaire élastique : dérivation des équations et solution générale (12 p)

Annexe 7 : Analyse du cisaillement simple plan d'un milieu continu de Cosserat homogène isotrope avec une loi de comportement linéaire élastique : exemples de conditions aux limites (17 p)

Annexe 8 : Analyse du cisaillement simple annulaire d'un milieu continu classique avec une loi de comportement : élastique, rigide ou rigide parfaitement plastique - solutions générales par zones de matériaux (10 p)

Annexe 9 : Analyse du cisaillement simple annulaire d'un milieu continu classique avec une loi de comportement : élastique, rigide ou rigide parfaitement plastique - solutions du problème aux limites (15 p)

Annexe 10 : Co-axialité des tenseurs symétriques des contraintes et déformations pour un matériau de Cosserat avec deux critères de rupture (3 p)

Annexe 11 : Analyse du cisaillement simple annulaire d'un milieu continu de Cosserat avec une loi de comportement rigide parfaitement plastique : équations générales (21 p)

Annexe 12 : Analyse du cisaillement simple annulaire d'un milieu continu de Cosserat avec une loi de comportement rigide parfaitement plastique : solution du problème statique (17 p)

Annexe 13 : Analyse du cisaillement simple annulaire d'un milieu continu de Cosserat avec une loi de comportement rigide parfaitement plastique : solution du problème cinématique (7 p)

Annexe 14 : Analyse du cisaillement simple annulaire d'un milieu continu de Cosserat avec une loi de comportement rigide parfaitement plastique : solution numérique et étude paramétrique (20 p)

Annexe 15 : Solution analytique d'un tirant soumis au gel (14 p)

Annexe 16 : Solution analytique d'un clou soumis au gel (11 p)

Introduction

Pendant longtemps, la mécanique des sols a été fondée essentiellement sur des méthodes de calcul et dimensionnement de type, analyse limite ou calcul à la rupture, c'est-à-dire sur des méthodes où de tous les paramètres des sols, seuls les paramètres plastiques sont pris en compte. Si de telles approches permettent de dimensionner les ouvrages en terre en assurant leur stabilité, par contre, elles ne donnent aucune information sur les déformations et les déplacements, qui sont de première importance dans de nombreux cas, comme par exemple, les fouilles en site urbain.

En clouage des sols, les méthodes de calcul et dimensionnement aux états limites ultimes (ELU), actuellement utilisées, sont basées sur un calcul à la rupture avec coefficients partiels de sécurité (Recommandations CLOUTERRE 1991). Cependant, les développements actuels se font principalement sur les méthodes de calcul en déformation, qui sont utilisées pour les états limites de service (ELS) mais qui pourraient également être utilisées pour les états limites ultimes (ELU).

Le développement de règles de dimensionnement aux ELS pour les ouvrages en sol cloué dépasse largement le cadre de cette thèse. Cependant, chacune des trois parties de cette étude apporte une contribution originale à l'état actuel des connaissances sur le calcul en déformation des sols cloués.

Dans la partie A, nous posons les bases théoriques et mécaniques pour une meilleure compréhension et modélisation en déformation des phénomènes de formation des couches d'interface, dans les sols granulaires, au contact avec des éléments de structure tels que des clous. Nous mettons en évidence, pour la première fois, le rôle fondamental joué par la microstructure des milieux granulaires dans la formation des couches d'interface et, en particulier, démontrons le rôle de la rotation de grains dans la localisation des déformations et la forte dilatance locale observée au sein des couches d'interface. Nous établissons, en outre, le lien entre les couches d'interface, qui correspondent à un phénomène de localisation surfacique, et les bandes de cisaillement, qui correspondent à un phénomène de localisation volumique.

Dans la partie B, nous étudions l'équilibre d'un lit d'inclusions, qui peuvent être des tirants ou des clous, soumis à l'influence du gel. Nous partons de théories existantes sur le gel et les sols gelés pour aboutir à une méthode simple de calcul des sur-tensions dans les inclusions et des déplacements du parement, que ce soit pour les murs en sol cloué ou les murs ancrés par tirants actifs. Ces résultats sont comparés et validés à partir des observations et mesures réalisées sur les ouvrages de soutènement de la Clusaz durant l'hiver 1980-1981. La compréhension des phénomènes et leur modélisation nous permettent d'analyser et de comparer les dispositions constructives qui sont utilisées actuellement et d'en proposer une nouvelle, simple, efficace et économique.

Dans la partie C, nous étudions en détail les hypothèses sur lesquelles sont basées les calculs en déformations planes, dits calculs 2D, afin de définir rigoureusement les relations d'équivalence entre les paramètres réels 3D et les paramètres du modèle 2D. Nous analysons précisément les méthodes de détermination des paramètres mécaniques des matériaux constitutifs d'un ouvrage en sol cloué à partir de l'exemple du mur CLOUTERRE-CEBTP No 1. Des calculs en déformation, à l'aide de trois logiciels de calcul, utilisant les méthodes des éléments finis ou des différences finies, sont réalisés sur les cinq premières phases de construction du mur CLOUTERRE-CEBTP No 1. Les résultats trouvés à l'aide de ces trois logiciels donnent des fourchettes, pour les tractions dans les clous ainsi que les déplacements du parement et du sol dans lesquelles s'inscrivent parfaitement les mesures.

Pour ce qui concerne la résolution de chacun des problèmes, nous nous sommes efforcés, à chaque fois, de développer autant que possible des solutions analytiques afin de mieux comprendre et mettre en évidence le rôle joué par chacun des paramètres des modèles développés.

C'est ainsi que dans la partie A, en nous intéressant aux deux lois de comportement les plus simples, que ce soit l'élasticité linéaire anisotrope et la loi de comportement rigide parfaitement plastique, nous avons pu mettre en évidence le rôle joué par la taille de la microstructure dans la formation des couches d'interface.

De même, dans la partie B, après avoir démontré que les hypothèses faites étaient appropriées, nous développons des solutions analytiques pour calculer les sur-tensions dues au gel dans les clous et utilisons celles-ci pour proposer des solutions simples et efficaces pour lutter contre les effets du gel sur les ouvrages de soutènements cloués ou ancrés.

Pour ce qui concerne la partie C, le développement de solutions analytiques étant impossible, vu la complexité du problème, nous menons une étude de sensibilité très détaillée afin de mettre en évidence les paramètres déterminants dans les calculs en déformation.

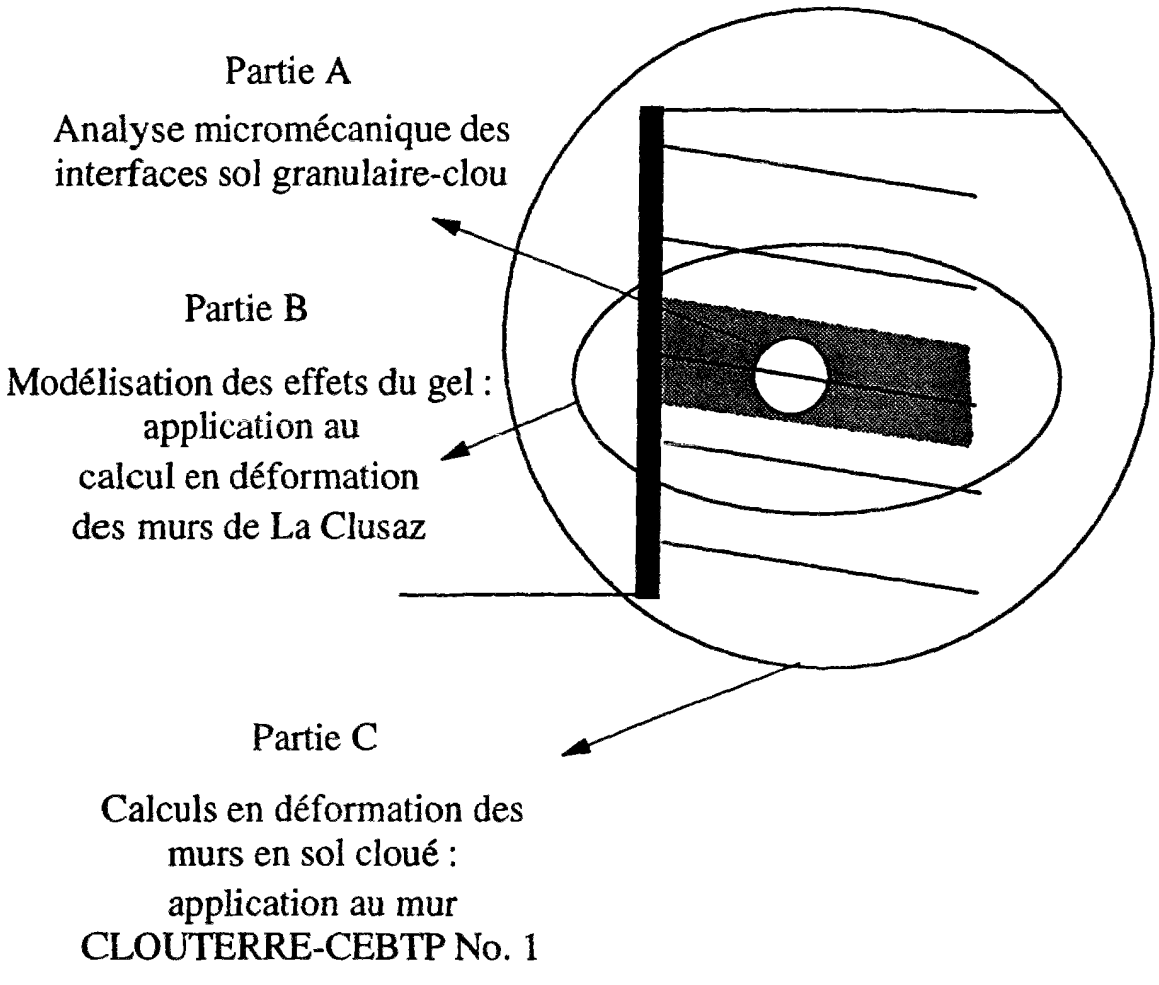


Figure 1 : Présentation d'ensemble de la thèse

Partie A

Analyse micromécanique des interfaces sol granulaire - clou

Welche Umstände bedingen die Elastizitäsgrenze und den Bruch eines Materiales?

Es unterliegt wohl keinem Zweifel, dass die endgültige Antwort auf die vorstehende Frage nicht durch theorische Betrachtungen, sondern nur auf dem Wege der Erfahrung gefunden werden kann.

Otto Mohr, Berlin, 1900

Quelles circonstances déterminent la limite d'élasticité et la rupture d'un matériau?

Il n'y a aucun doute que la réponse finale à la question ci-dessus ne peut pas être trouvée à partir d'observations théoriques mais seulement sur le chemin de l'expérience.

Résumé de la Partie A

Dans l'état actuel des connaissances et de la pratique, les propriétés mécaniques de la couche d'interface qui se forme dans un sol granulaire au contact avec un clou sont appréhendées d'un point de vue macroscopique. Elles sont, soit mesurées globalement à l'aide d'essais de cisaillement d'interface, soit déduites des propriétés mécaniques du sol granulaire à l'aide de règles empiriques, soit choisies arbitrairement pour faire converger les codes de calculs. La couche d'interface est ainsi considérée comme un " troisième corps " aux propriétés mécaniques particulières, différentes de celles du sol. Or, au début d'un essai de cisaillement d'interface, il n'y a pas de différences au sein de l'échantillon entre le sol qui formera la couche d'interface et le sol qui constituera la zone "tampon". La formation de la couche d'interface, qui se produit pour des déplacements d'interface très petits, ne peut pas être expliquée dans le cadre de la théorie de la bifurcation.

A l'échelle où les phénomènes d'interaction entre un sol granulaire et un clou se produisent, la microstructure du sol granulaire et de l'interface, c'est à dire la taille des grains et la rugosité de la surface de contact rigide, ne peut plus être ignorée. Les couches d'interface et les bandes de cisaillement sont caractérisées par : (1) le développement de forts gradients des déplacements, (2) une forte dilatance locale, (3) des rotations moyennes de grains très importantes par rapport à la rotation d'ensemble prédite par un milieu continu classique, et (4) des épaisseurs de quelques grains, quasiment indépendantes des dimensions géométriques. Ces phénomènes ont été observés sur des rouleaux de Schneebeli, des sables ainsi que sur des milieux granulaires modèles, simulés à l'aide de la méthode des éléments distincts.

Les milieux continus classiques, quelles que soient leurs lois de comportement ne peuvent expliquer la formation de couches d'interface. En particulier, nous montrons que pour un milieu continu classique, élastique et hétérogène, soumis à un cisaillement simple plan, il faut un rapport des modules de cisaillement, de l'ordre de 10^{30}, entre le sol près de l'interface et le haut de l'échantillon pour pouvoir modéliser une couche d'interface.

Dans le cas du cisaillement simple annulaire d'un milieu classique, rigide parfaitement plastique, avec un critère de Mohr-Coulomb, nous montrons que l'épaisseur de la zone plastique en contact avec l'interface est nulle, dans le cas d'une loi d'écoulement associé, tandis que cette épaisseur est finie et directement proportionnelle au rayon du cylindre d'interface, dans le cas d'une loi d'écoulement non associé. Les milieux continus classiques, quelles que soient leurs lois de comportement, ne sont donc pas capables de modéliser la formation de couches d'interface, car les lois de comportement classiques, du moins en statique, n'introduisent pas de longueur interne qui puisse contrôler l'épaisseur des zones localisées.

Cette limitation des milieux classiques peut être résolue dans le cadre des milieux continus généralisés. Parmi ceux-ci, les milieux continus avec microstructure rigide d'ordre un, c'est à dire les milieux continus de Cosserat, semblent les plus appropriés pour modéliser le comportement des milieux granulaires formés de grains ou rouleaux rigides sous faibles contraintes.

Des comparaisons entre des milieux granulaires, modélisés numériquement par la méthode des éléments distincts, et les milieux continus de Cosserat équivalents ont été faites par le passé et ont donné toute satisfaction. Les milieux de Cosserat sont caractérisés par l'existence d'au moins une longueur interne, qui peut être reliée à la taille des grains, et la nécessité d'introduire des conditions aux limites nouvelles par rapport aux milieux continus classiques. Si la première caractéristique des milieux de Cosserat a été largement étudiée et utilisée pour modéliser la formation des bandes de cisaillement au point de bifurcation, par contre, l'existence de ces nouvelles conditions aux limites a été quelque peu ignorée jusqu'à présent.

Les nouvelles conditions aux limites, dites de Cosserat, sont à relier à la microstructure de l'interface et jouent un rôle essentiel dans le phénomène d'initiation des couches d'interfaces. Plusieurs types de conditions aux limites sont étudiés et nous proposons, en particulier, un jeu de conditions aux limites cinématiques basé sur une approche micromécanique simple et qui mesure par un coefficient f_2 la fraction de déplacement d'interface W_I transféré au sol sous la forme d'une rotation de Cosserat.

L'exemple d'un milieu de Cosserat, linéaire élastique et hétérogène, soumis à un cisaillement simple plan est traité. Les équations de comportement élastique du milieu continu de Cosserat sont dérivées des caractéristiques élastiques du milieu granulaire par une approche micromécanique, qui nous fournit également des relations explicites entre, d'une part, les contraintes et les couples contraintes du milieu continu et, d'autre part, les forces intergranulaires. Contrairement au milieu classique qui se déforme de manière homogène, le milieu de Cosserat est caractérisé par la formation d'une couche limite près de l'interface, le reste de l'échantillon jouant un rôle de zone tampon, avec un comportement proche de celui du milieu classique. L'épaisseur de cette couche limite, qui peut être appelée couche d'interface, est définie en se fixant un seuil sur le niveau des déformations, du déplacement tangentiel ou de la rotation propre. Cette épaisseur est proportionnelle à la longueur interne élastique R et est indépendante de l'épaisseur de l'échantillon. La limite entre la couche d'interface et la zone tampon n'est pas caractérisée par une discontinuité particulière.

L'exemple du cisaillement simple annulaire d'un milieu de Cosserat, rigide parfaitement plastique, est ensuite traité. Nous reformulons le modèle rigide plastique de Bogdaneva-Bontcheva et Lippmann (1973) pour aboutir à deux critères : le critère classique de Mohr-Coulomb, qui est fonction uniquement des contraintes symétriques et peut être qualifié de critère microscopique, et un nouveau critère, de type microscopique, qui est fonction uniquement des contraintes antisymétriques et des couples contraintes. Deux critères microscopiques, linéaire et quadratique, sont proposés. Avec ce choix de critères, il est possible de développer des solutions semi-analytiques. En particulier, nous obtenons pour le cas limite du cisaillement simple plan, des expressions analytiques pour la couche d'interface. Celle-ci a une épaisseur finie, indépendante de l'épaisseur de l'échantillon. Elle est proportionnelle à la longueur interne plastique introduite par le deuxième critère microscopique et dépend de la rugosité de l'interface, mesurée par le rapport entre le couple contrainte introduit par la condition à la limite de Cosserat en interface et le couple contrainte maximal admissible par la microstructure vis à vis du second critère de rupture microscopique. Dans le cas du cisaillement simple annulaire, l'épaisseur de l'interface dépend du rayon du cylindre d'interface. Quand celui-ci est du même ordre de grandeur que la longueur interne R, l'épaisseur d'interface dépend significativement du rayon du cylindre d'interface. Quand le cylindre d'interface est très largement supérieur à R, celle-ci est quasiment égale à l'épaisseur donnée par le cisaillement simple plan.

Le cas d'un matériau de Cosserat élastoplastique avec écrouissage est ensuite abordé. Le critère de rupture est dérivé à partir d'une approche micromécanique. Il correspond au critère de Drucker-Praguer généralisé en y incluant les seconds invariants des tenseurs des contraintes antisymétriques et des couples contraintes. La loi d'écrouissage du matériau est formulée en se basant sur la théorie des mélanges. Le modèle, initialement proposé par Vardoulakis (1989), est généralisé aux milieux de Cosserat, sous une forme forte (critère linéaire) et une forme faible (critère quadratique). La résolution numérique est faite à l'aide de la méthode des éléments finis. Son adaptation au milieu de Cosserat est discutée en détail et un nouvel élément, de grande précision, de type Hermitien pour les déplacements et Lagrangien pour la rotation, est formulé. Par rapport aux éléments linéaires utilisés jusqu'à présent, il permet d'obtenir une solution numérique meilleure, pour un coût en degrés de liberté plus faible, à précision égale. Le schéma élastoplastique classique de type Newton-Raphson est sensiblement modifié pour traiter les milieux de Cosserat.

Plusieurs simulations numériques ont été réalisées. Deux cas particuliers intéressants sont traités en détail. Le premier cas concerne une interface légèrement rugueuse, c'est à dire telle que pour un déplacement d'interface W_I , seul 1% est transmis au sol sous la forme d'une rotation propre de Cosserat, tandis que 99% est transmis sous la forme d'un déplacement tangentiel du sol. Bien que cette condition à la limite de Cosserat soit très faible, des différences très importantes de comportement, par rapport au cas classique, sont observées au sein de l'échantillon. Une couche d'interface avec des rotations significatives et une forte dilatance se forme sur quelques longueurs internes. Les termes de rotation propre, déformation et contrainte antisymétriques ne sont importants que sur une distance d'environ 4 R de l'interface, c'est à dire environ 2 grains. Les termes de couple contrainte et de courbure, par contre, existent sur toute la couche d'interface d'épaisseur 14 R, c'est à dire environ 7 grains. La déformation de cisaillement généralisé est très élevée au sein de l'interface, de l'ordre de plusieurs centaines de pour-cents. Si l'on ne considère que les termes symétriques de déformation de cisaillement, l'angle de dilatance apparent que l'on peut calculer est nettement plus grand que l'angle de dilatance intrinsèque au matériau. L'énergie plastique dissipée en interface est constituée essentiellement par le terme de courbure tandis que les termes symétrique et antisymétrique sont du même ordre et plus faibles. La couche d'interface est très dissipatrice en énergie, de plusieurs ordres de grandeur par rapport au cas classique. La couche d'interface se forme pour un déplacement d'interface d'environ 5 à 10 R et n'évolue plus que très lentement avec le cisaillement, du moins dans le cas d'un écrouissage nul.

Le deuxième cas traité concerne un sol "encastré" dans l'interface ($f_2 = 0,0$). Le profil de déplacement tangentiel diffère des observations expérimentales et conduit à rejeter une telle condition à la limite. La contrainte antisymétrique et le couple contrainte atteignent en interface des valeurs du même ordre, si ce n'est plus grandes que les contraintes symétriques. L'énergie plastique symétrique est négative près de l'interface. Elle est très largement compensée par l'énergie plastique de courbure de sorte que l'énergie plastique totale est toujours positive et vérifie le deuxième principe de la thermodynamique. Il est à noter que l'échantillon est décomposé en deux zones, une couche élastique près de l'interface, sur 10 à 15 R, le reste de l'échantillon étant plastique.

Ces deux exemples sont caractéristiques du comportement pour des valeurs de f_2 supérieures ou inférieures à la valeur classique de f_2. Pour des valeurs de f_2 proches de 1, on observe dans l'échantillon des déplacements tangentiels négatifs. Ces résultats conduisent à sélectionner des valeurs de f_2 comprises entre la valeur classique et 0,6. Une étude paramétrique sur le cas de référence est ensuite réalisée pour étudier l'influence respective de chacun des paramètres : rigidité de la condition à la limite extérieure, niveau de la contrainte normale, coefficients élastiques h_i , angle de dilatance, coefficients plastiques h_i, épaisseur de l'échantillon.

Le cisaillement en déformations finies d'un milieu continu de Cosserat avec écrouissage, positif et négatif, est finalement abordé. Les essais à contrainte normale constante et à volume constant sont comparés dans le cas classique où f_2 est égal à 0,0025 et le cas de Cosserat où f_2 est pris égal à 0,01. Cette valeur est symbolique, puisqu'il n'est pas possible de mesurer avec une telle précision la rotation moyenne des grains dans un sol, mais suffisante pour initier la formation d'une couche d'interface.

Il faut noter, dans les deux cas de Cosserat, à contrainte normale constante et à volume constant, que la couche d'interface est composée de deux zones. Sur une épaisseur d'environ 4 R, les rotations sont très fortes et très différentes de la rotation du milieu continu. Sur le reste de la couche d'interface, les rotations sont nettement moins fortes mais les couples contraintes et les termes de courbures restent importants. Les termes de Cosserat existent donc sur toute l'épaisseur de l'interface, mais ils ne sont visibles que sur une épaisseur de 4 R, c'est à dire d'environ 2 grains.

La déformation plastique de cisaillement généralisée atteint des valeurs de l'ordre de plusieurs centaines de pour-cents à l'interface, ce qui induit un fort radoucissement mais aussi une forte dilatance locale.

Dans le plan de Mohr, le cercle des contraintes en interface est complètement translaté dans le demi-plan supérieur. La contrainte tangentielle sur une facette est toujours positive quelle que soit l'orientation de la facette.

Les énergies plastiques totales dissipées en interface, entre un essai classique et un essai avec une interface de Cosserat, différent de deux à trois ordres de grandeur, ce qui explique la cassure très importante des grains, qui est systématiquement observée au sein des couches d'interface.

La couche d'interface correspond à la couche plastique, en écrouissage positif puis négatif, qui se forme dès que le cisaillement démarre. Elle atteint son épaisseur maximale pour environ 22 R de déplacement d'interface W_I , se met à décroître puis à augmenter. L'épaisseur de la couche d'interface, calculée pour le cisaillement simple plan à contrainte normale constante, est égale à 14,02 R.

En utilisant exactement le même modèle élastoplastique, Vardoulakis et Sulem (1995) trouvent numériquement pour un essai biaxial sur le sable d'Osterkerde une demi-épaisseur de bande de cisaillement égale à 14,82 R. Les mesures expérimentales sur ce même sable donnent une demi-épaisseur d'environ 18,5 R. Boulon et al. (1993) trouvent sur le sable d'Hostun des épaisseurs d'interface variant entre 10 et 20 R pour une rugosité moyenne à forte. Les valeurs calculées et mesurées sont étonnamment proches et suggèrent une similitude très forte entre ces deux phénomènes de localisation, surfacique (couches d'interface) et volumique (bandes de cisaillement).

Sommaire de la Partie A

1 Introduction sur les interfaces sol granulaire - structure 17

2 Résultats expérimentaux sur les interfaces 20
2.1 Les essais de cisaillement d'interface 20
2.2 Localisation des déformations et comportement micromécanique des grains dans une couche d'interface 24
2.2.1 Résultats à la boîte de cisaillement annulaire 24
2.2.2 Résultats à l'appareil de cisaillement simple plan 24
2.2.3 Résultats à la boîte de cisaillement direct plane 25
2.3 Résultats expérimentaux sur les épaisseurs d'interface 26
2.3.1 Bandes de cisaillement 26
2.3.1.1 Cisaillement direct 26
2.3.1.2 Essais biaxiaux 27
2.3.2 Couches d'interface 27
2.3.2.1 Essais d'arrachement 27
2.3.2.2 Essai triaxial modifié 28
2.3.2.3 Essais dans un silo 28
2.3.2.4 Boîte de cisaillement direct annulaire 28
2.3.2.5 Essais de cisaillement simple plan 29
2.3.2.6 Essais de cisaillement simple annulaire 29
2.3.2.7 Essais de cisaillement direct 29
2.4 Synthèse des résultats expérimentaux 30

3 Résultats théoriques sur les "couches" d'interface dans un milieu continu classique 40
3.1 Cisaillement simple plan d'un milieu continu classique hétérogène 40
3.2 Cisaillement simple annulaire d'un milieu continu classique rigide parfaitement plastique 42

4 Importance des rotations des grains dans les couches interface et les bandes de cisaillement 48
4.1 Rotation moyenne des grains dans un essai homogène 49
4.2 Essai biaxial avec bande de cisaillement 51
4.3 Essai de cisaillement plan d'un sable (Boulon et al., 1992, 1993) 56
4.4 Essai de cisaillement simple annulaire de rouleaux 56
4.4.1 Définitions et notations 56
4.4.2 Construction de l'échantillon 57
4.4.3 Dérivation de la cinématique du milieu continu de Cosserat à partir de la cinématique du milieu granulaire 57
4.4.3.1 Valeurs moyennes des variables cinématiques 59
4.4.3.2 Validité des milieux continus équivalents 61
4.5 Conclusion 69

5 Les milieux continus généralisés 70
5.1 Présentation des milieux continus généralisés 70
5.1.1 Milieu continu classique 70
5.1.2 Milieu continu de Cosserat 71
5.1.3 Théories du gradient 72
5.1.3.1 Théorie du premier gradient 72
5.1.3.2 Théorie du second gradient 72
5.1.4 Théorie non locale 72
5.1.5 Milieux continus avec microstructure 73
5.1.6 Fluides micropolaires 74
5.2 Microstructure et longueurs internes 76
5.2.1 Calcul des longueurs internes par une approche micro-mécanique 76
5.2.2 Méthodes expérimentales 77
5.2.2.1 Effets de taille 77
5.2.2.2 Propagations d'ondes 78
5.2.2.3 Résultats expérimentaux 78
5.3 Milieux de Cosserat 78
5.3.1 Principe des puissances virtuelles et équations d'équilibre 78
5.3.1.1 Description de la cinématique d'un milieu continu de Cosserat 80
5.3.1.2 Expression du travail des efforts intérieurs 81
5.3.1.3 Expression du travail des efforts extérieurs 83
5.3.2 Equations d'équilibre d'un milieu continu de Cosserat 83
5.3.2.1 Application du principe des puissances virtuelles 83
5.3.2.2 Dérivation des équations d'équilibre à partir de la statique 84
5.3.2.3 Equations d'équilibre pour le cisaillement simple plan 85
5.3.2.4 Equations d'équilibre pour le cisaillement simple annulaire 86
5.3.3 Conditions aux limites 87
5.3.4 Vecteur contrainte totale et "cercles" de Mohr 88
5.3.5 Théorème d'unicité des solutions 90
5.3.5.1 Matériau élastique 90
5.3.5.2 Matériau élasto-plastique 90

6 Conditions aux limites 91
6.1 Introduction 91
6.2 Conditions aux limites dans le cadre des théories non locales 92
6.2.1 Interface sol-béton 92
6.2.2 Interface roche-outil de forage 92
6.3 Conditions aux limites dans un milieu de Cosserat 93
6.3.1 Conditions proposées par Teichmann 95
6.3.1.1 Interface très rugueuse 95
6.3.1.2 Interface lisse ou rugueuse 96
6.3.1.3 Critique des conditions aux limites 97
6.3.2 Conditions aux limites correspondant à une demi-bande de cisaillement 99

6.4 Formulation de conditions aux limites cinématiques à partir de considérations micromécaniques 99
6.4.1 Condition sur le déplacement normal 101
6.4.2 Conditions sur le déplacement tangentiel et la rotation 101
6.4.2.1 Cas extrêmes de grains "encastrés" 102
6.4.2.2 Conditions aux limites classiques 102
6.4.2.3 Cas extrême de grains tournant sur eux-mêmes 103
6.4.2.4 Cas général d'une interface 103
6.5 Conditions aux limites étudiées 105

7 Exemple du milieu de Cosserat linéaire élastique anisotrope 107
7.1 Equations de comportement d'un milieu continu de Cosserat linéaire élastique 107
7.1.1 Equations de comportement 107
7.1.2 Définition des longueurs internes 108
7.1.3 Potentiel élastique 110
7.1.4 Conditions nécessaires sur les valeurs des coefficients 113
7.1.5 Relations de comportement dans le cas des cisaillements simples 113
7.2 Dérivations des propriétés élastiques du milieu continu de Cosserat à partir des propriétés du milieu granulaire dans le cas d'un milieu 2D 114
7.3 Homogénéisation des forces intergranulaires du milieu granulaire pour calculer les efforts intérieurs du milieu continu de Cosserat équivalent 122
7.3.1 Homogénéisation de type volumique 122
7.3.2 Homogénéisation de type surfacique 124
7.4 Synthèse sur les modèles élastiques 126
7.5 Cisaillement simple plan d'un milieu continu de Cosserat avec une loi de comportement élastique linéaire 128
7.5.1 Milieu isotrope 128
7.5.1.1 Conditions aux limites 128
7.5.1.2 Solution exacte du problème aux limites 130
7.5.1.3 Solution loin de l'interface 131
7.5.1.4 Solution près de l'interface 132
7.5.1.5 Epaisseur de la couche limite 132
7.5.2 Milieu anisotrope 133
7.6 Conclusion sur le matériau de Cosserat élastique 135

8 Exemple du milieu de Cosserat rigide parfaitement plastique 136
8.1 Equations de comportement 136
8.1.1 Bibliographie sur les critères de rupture 136
8.1.2 Approche de Bogdaneva-Bontcheva et Lippmann (1972) 137
8.1.3 Nouvelle approche proposée 138
8.2 Cisaillement simple annulaire d'un milieu continu de Cosserat rigide parfaitement plastique 140
8.2.1 Analyse du problème 140
8.2.2 Solution du problème statique 143
8.2.2.1 Solution dans la couche d'interface 143
8.2.2.2 Solution hors de la couche d'interface 148
8.2.3 Solution du problème cinématique 148
8.3 Conclusions sur le modèle rigide plastique 153

9 Exemple du milieu de Cosserat élastoplastique avec écrouissage 154
9.1 Définition de la déformation et de la contrainte de cisaillement généralisées à partir de considérations micromécaniques 154
9.1.1 Modèle cinématique 154
9.1.2 Modèle statique 158
9.1.2.1 Interprétation physique des couples contraintes 158
9.1.2.2 Tenseur des contraintes généralisées 160
9.2 Loi de comportement élastoplastique 161
9.2.1 Invariants dans un milieu de Cosserat isotrope 161
9.2.2 Généralisation des critères de Drucker-Praguer ou von Mises 163
9.2.2.1 Forme générale 163
9.2.2.2 Ecriture du critère dans le cas d'un modèle 2D et du cisaillement simple plan 164
9.2.2.3 Détermination des coefficients dans le critère de rupture 165
9.3 Matrice de comportement élasto-plastique 165
9.3.1 Ecriture vectorielle des contraintes et du critère de rupture 165
9.3.2 Dérivées des invariants 166
9.3.3 Identification du multiplicateur plastique avec la déformation plastique de cisaillement généralisée 167
9.3.4 Différences fondamentales entre les coefficients hi et gi 170
9.3.5 Calcul de la matrice de comportement élasto-plastique 171
9.3.5 Comparaisons avec le milieu continu classique 173
9.4. Formulation de modèles de radoucissement 175
9.4.1. Etude bibliographique 175
9.4.1.1 Modèles de De Borst (1990) et Teichman (1993) 175
9.4.1.2 Modèle de Vardoulakis et al. (1992) 177
9.4.2 Formulation de lois d'écrouissage avec radoucissement à partir de la théorie des mélanges 177
9.4.2.1 Formulation théorique du modèle de Vardoulakis (1989) (modèle 1.1) 179
9.4.2.1.1 Définition et évolution des porosités 181
9.4.2.1.2 Identification des contraintes 182
9.4.2.1.3 Identification des déformations 182
9.4.2.1.4 Critères de rupture 183
9.4.2.1.5 Evolution des angles de frottement interne 184
9.4.2.1.6 Angle de dilatance globale 185
9.4.2.2 Formulation de l'angle de dilatance à partir de la théorie des mélanges (modèle 1.2) 187
9.4.2.3 Formulation de l'angle de dilatance à partir de la théorie des mélanges et de la règle de Taylor (modèle 1.3) 188
9.4.2.3.1 Règle de Taylor 188
9.4.2.3.2 Modèle linéaire 1.3 189

9.4.3 Généralisation du modèle de radoucissement à un milieu continu de Cosserat 191
9.4.3.1 Première généralisation par Vardoulakis (1989) 191
9.4.3.2 Deuxième généralisation proposée pour les milieux de Cosserat 192
9.4.3.2.1 Définition des fractions 192
9.4.3.2.2 Contraintes et couples contraintes 192
9.4.3.2.3 Déformations et courbures 194
9.4.3.2.4 Critères de rupture 195
9.4.3.2.5 Définition de l'angle de dilatance 196
9.4.3.2.5.1 Modèle 2.1 196
9.4.3.2.5.2 Modèles 2.2 et 2.3 197
9.4.4 Simulations numériques et comparaisons des différents modèles 199
9.4.4.1 Angle de frottement 200
9.4.4.2 Module tangent aux courbes d'écrouissage 203
9.4.4.3. Angle de dilatance 203
9.4.4.4 Déformation plastique 203
9.4.4.5 Porosité de la fraction fragile 204
9.4.5 Conclusion sur les modèles de radoucissement basés sur la théorie des mélanges 215

10 Formulation de la méthode des éléments finis dans un milieu de Cosserat 216
10.1 Etude bibliographique 216
10.1.1 Principe de la méthode des éléments finis 216
10.1.2 La méthode des éléments finis dans les milieux de Cosserat 216
10.2 Choix des variables nodales et du type d'élément 217
10.2.1 Conditions de continuité 217
10.2.2 Ordres d'interpolations des différentes variables 218
10.2.2.1 Elément Lagrangien minimal 219
10.2.2.2 Elément Lagrangien amélioré 220
10.2.2.3 Elément Hermitien-Lagrangien 221
10.2.3 Limites d'un schéma d'interpolation polynomial 222
10.2.4 Définition du vecteur généralisé des déplacements 223
10.3 Formulation de l'élément Hermitien-Lagrangien 225
10.3.1 Eléments réels et élément de référence 225
10.3.1.1 Vecteur élémentaire des variables nodales d'un élément réel 225
10.3.1.2 Elément de référence 226
10.3.1.2.1 Définition 226
10.3.1.2.2 Transformation géométrique 226
10.3.1.2.3 Vecteur généralisé des déplacements 227
10.3.1.2.4 Vecteur élémentaire des variables nodales 227

10.3.2 Fonctions d'interpolation sur l'élément de référence 227
10.3.2.1. Schéma d'interpolation 227
10.3.2.2 Conditions sur les fonctions d'interpolation 228
10.3.2.3 Fonctions d'interpolation et fonctions de forme 230
10.3.2.4 Fonctions d'interpolation pour les déplacements sur l'élément de référence 231
10.3.2.5 Fonctions d'interpolation pour la rotation sur l'élément de référence 232
10.3.3 Fonctions d'interpolation sur les éléments réels 232
10.3.3.1 Matrice de transformation du vecteur généralisé des déplacements entre l'élément de référence et un élément réel 232
10.3.3.2 Matrice de transformation des vecteurs des variables nodales 233
10.3.3.3 Fonctions d'interpolation sur les éléments réels 233
10.3.4 Avantages de l'élément Hermitien-Lagrangien 234

10.4 Formulation par éléments finis (formulation de Galerkine) 235
10.4.1 Ecriture du principe des puissances virtuelles 235
10.4.1.1 Travail des efforts intérieurs 235
10.4.1.2 Travail des efforts extérieurs 236
10.4.1.3 Application du principe des puissances virtuelles 236
10.4.1.4 Ecriture sous forme matricielle 237
10.4.2 Décomposition des vecteurs et matrices sur les éléments finis 237
10.4.2.1 Décomposition de la matrice de rigidité globale 237
10.4.2.2 Calcul du vecteur des forces intérieures 239
10.4.2.3 Décomposition du vecteur des forces extérieures 239
10.4.3 Méthodes d'intégration 240
10.4.3.1 Changement de variables 240
10.4.3.2 Intégration numérique de Gauss 240
10.4.4 Conditions aux limites 242
10.4.4.1 Conditions aux limites naturelles 242
10.4.4.2 Conditions aux limites essentielles 242
10.4.4.3 Cas particuliers de conditions aux limites 242
10.4.4.3.1 Rigidité normale imposée 242
10.4.4.3.2 Combinaison linéaire de variables nodales 243
10.4.5 Résumé des divers tableaux et vecteurs 244
10.4.6 Différences avec un milieu continu classique 245

10.5 Schémas de résolution numérique pour un matériau élastoplastique 246
10.5.1 Schémas explicites 246
10.5.2 Méthodes de calcul du coefficient R 247
10.5.2.1 Méthodes explicites approchées 247
10.5.2.2 Méthodes implicites approchées 249
10.5.2.3 Méthodes explicites exactes 249
10.5.3 Méthodes de Newton-Raphson (schéma implicite) 251
10.5.3.1 Principe des méthodes de Newton-Raphson 251
10.5.3.2 Choix d'un critère de convergence 253
10.5.3.3 Choix de la matrice tangente 253
10.5.3.4 Méthodes quasi-Newton 254
10.5.3.5 Etude détaillée des cas possibles de chargement 255
10.5.3.5.1 Etat de contraintes initialement élastique 255
10.5.3.5.1.1 Chargement élastique 255
10.5.3.5.1.2 Chargement élastique puis plastique 255
10.5.3.5.2 Etat de contraintes initialement plastique 256
10.5.3.5.2.1 Définition de la charge 256
10.5.3.5.2.2 Analyse détaillée des cas possibles 258
10.5.3.5.2.2.1 Projection positive 258
10.5.3.5.2.2.2 Projection négative 259
10.5.3.5.2.2.2.1 Etat de contraintes initialement situé à l'intérieur de la surface exacte 259
10.5.3.5.2.2.2.2 Etat de contraintes initial situé à l'extérieur de la surface exacte 259
10.5.3.6 Erreurs numériques 260
10.5.3.6.1 Contrôle de l'erreur numérique sur le critère de rupture 260
10.5.3.6.2 Correspondance entre les erreurs numériques sur les variables 263
10.5.3.7 Particularités des méthodes de Newton-Raphson dans les milieux de Cosserat 263

10.6 Formulation par éléments finis dans le cas de déformations finies 265
10.6.1 Hypothèses des petites déformations et petits déplacements 265
10.6.2 Déformations finies dans un milieu continu de Cosserat 266
10.6.2.1 Définitions des tenseurs 266
10.6.2.2 Equations d'équilibre (formulation forte) 267
10.6.2.3 Principe des puissances virtuelles (formulation faible) 268
10.6.2.4 Formulation de la matrice de rigidité tangentielle 269
10.6.3 Amélioration de la formulation en déformations finies 273
10.6.3.1 Analyse critique de la formulation de de Borst et Mühlhaus (1991) 273
10.6.3.2 Equations reliant les contraintes de Cauchy et les vrais couples contraintes aux premiers tenseurs de contraintes et couples contraintes de Piola-Kirchhoff 274
10.6.3.3 Modifications de l'algorithme de résolution par éléments finis pour prendre en compte les déformations finies 275

11 Simulations numériques par éléments finis de phénomènes de localisation : bandes de cisaillement et couches d'interface 276
11.1 Bibliographie sur les bandes de cisaillement 276
11.1.1 Milieu continu classique 276
11.1.1.1 Analyse du cisaillement simple plan d'un milieu continu classique 276
11.1.1.2 Dépendance de la solution numérique en fonction du maillage dans un milieu classique 276
11.1.1.3 Unicité de la solution du problème aux limites dans les milieux continus généralisés 278
11.1.2 Milieu continu de Cosserat 279
11.1.2.1 Bandes de cisaillement dans un essai de cisaillement simple plan 279
11.1.2.2 Bandes de cisaillement dans un essai biaxial 279
11.2 Simulations de couches d'interface 280
11.2.1 Validation du code de calcul par éléments finis 282
11.2.1.1 Couche d'interface dans un milieu de Cosserat élastique 282
11.2.1.2 Cisaillement d'un milieu de Cosserat élastique encastré à ses deux extrémités 284
11.2.1.3 Validation dans le cas élastoplastique 286

11.2.2 Simulations numériques d'essais de cisaillement d'un milieu de Cosserat élastoplastique sans écrouissage 290
11.2.2.1 Etude détaillée du cisaillement d'un sable dense à contrainte normale constante et pour une interface rugueuse (cas de référence f2 = 0,01) 290
11.2.2.1.1 Déplacements et rotations 291
11.2.2.1.2 Contraintes et couples contraintes 291
11.2.2.1.3 Déformations 296
11.2.2.1.4 Energies plastiques dissipée 297
11.2.2.1.5 Mesures globales et épaisseur de la couche d'interface 297
11.2.2.1.6 Analyse en déformations finies 304
11.2.2.2 Etude détaillée du cisaillement à contrainte normale constante, d'un sable dense encastré dans l'interface (f2 = 0,0) 304
11.2.2.2.1 Déplacements et rotation 304
11.2.2.2.2 Contraintes et couples contraintes 305
11.2.2.2.3 Déformations 305
11.2.2.2.4 Energies 305
11.2.2.3 Etude paramétrique dans le cas d'un matériau sans écrouissage 312
11.2.2.3.1 Influence du paramètre f2 312
11.2.2.3.2 Influence de la condition à la limite extérieure en contrainte ou déplacement normal 318
11.2.2.3.3 Influence de la contrainte normale 322
11.2.2.3.4 Influence des coefficients élastiques 326
11.2.2.3.5 Influence des coefficients plastiques hi 326
11.2.2.3.6 Influence de l'angle de dilatance 328
11.2.2.3.7 Influence de l'épaisseur de l'échantillon 328
11.2.3 Simulation en grandes déformations d'essais de cisaillement d'un matériau élastoplastique avec écrouissage 330
11.2.3.1 Déplacements et rotation 330
11.2.3.2 Contraintes et couples contraintes 330
11.2.3.3 Déformations 334
11.2.3.4 Energies 338
11.2.3.5 Epaisseur des couches d'interface 344
11.2.3.6 Comparaisons avec les bandes de cisaillement 344

12 Conclusion et perspectives 349

1 Introduction sur les interfaces sol granulaire - structure

Dans la plupart des ouvrages en Génie Civil, le sol interagit avec tout ou partie de la structure, que ce soit en fondation, soutènement ou dans les ouvrages souterrains. Pour de nombreux types de matériaux tels que les sols naturels, comme les sables ou les graviers (Vesic, 1977; Clichy et al., 1987; Boulon, 1989), ou tels que les matériaux modèles, comme les rouleaux de Schneebeli (Bogdaneva-Bontcheva et Lippmann, 9175; Löffelmann, 1989), il a été observé que, très tôt après que le cisaillement de l'interface sol-structure débute, les déformations se concentrent dans une fine couche de sol, d'épaisseur quelques grains, au contact avec la structure (Figure A.1-1). Cette fine couche de matériau, appelée couche d'interface, est caractérisée par : (1) de forts gradients des déplacements, (2) une forte dilatance locale et (3) des rotations de grains qui sont très importantes et peuvent être prépondérantes par rapport aux mouvements de translation des grains (Schlosser et Guilloux, 1981; Kishida et Uesugi, 1987; Boulon, 1989). L'épaisseur de cette couche d'interface dépend de la taille des grains du sol mais aussi de la rugosité de la surface de contact entre le sol et la structure considérée. A l'échelle où ces phénomènes d'interface entre un sol granulaire et une surface rigide se produisent, c'est à dire à l'échelle des grains, la surface d'interface, entre le sol et la structure, est "vue" par le sol comme étant infiniment longueur et large. La seule variable spatiale d'intérêt est alors la distance à l'interface.

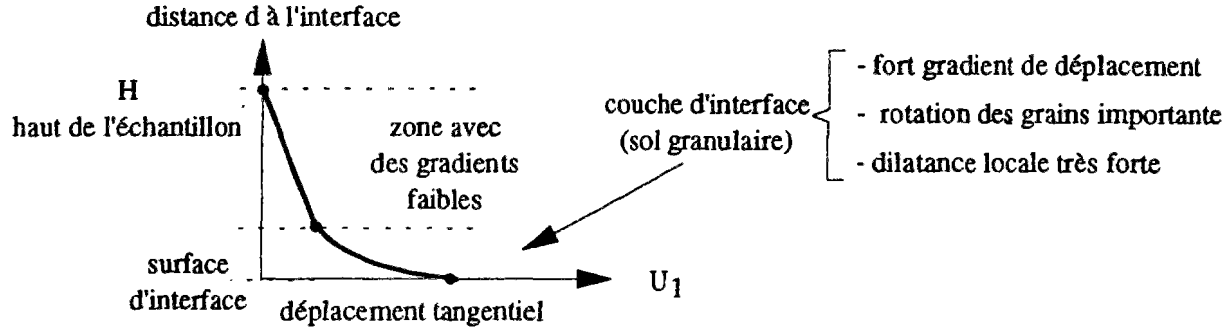


Figure A.1-1 : Phénomènes de localisation dans un matériau granulaire au contact avec un élément de structure rigide

Dans le cas de larges ouvrages, comme un mur de soutènement par exemple, l'échelle mésoscopique de ces phénomènes d'interface sol-structure étant très petite par rapport à l'échelle macroscopique de l'ouvrage lui-même, le comportement global est relativement insensible à ceux-ci. Cependant, quand la taille de la structure considérée est du même ordre de grandeur ou seulement d'un à deux ordres supérieurs à la taille des grains du sol, il a été classiquement observé des effets, dits de taille, qu'il convient de bien distinguer des effets d'échelle introduits en centrifugeuse. Ces effets de taille proviennent de ce que la nature granulaire du matériau utilisé ne peut plus être ignorée devant la petite taille des éléments de structures utilisés. En particulier, Siddiquee (1991) et Tatsuoka et al. (1994) ont mis expérimentalement en évidence des effets de taille des grains sur la capacité portante de fondations superficielles (figure A.1-2). Pour ce qui concerne les efforts limites d'arrachement d'inclusions cylindriques dans un sable, des effets de taille également significatifs ont été mis en évidence expérimentalement par Hettler (1982).

Ils peuvent être expliqués simplement, d'un point de vue théorique, par une analyse dimensionnelle du problème en prenant en compte l'épaisseur d'interface comme paramètre, au même titre que la taille de l'inclusion (figure A.1-3). La taille des grains d'un sol granulaire peut donc avoir un rôle important sur la réponse d'une structure, et ce d'autant plus que les éléments de structures considérés sont petits. Il convient donc quand on s'intéresse à des inclusions de petites dimensions, comme celles qui sont utilisées en renforcement des sols, et plus particulièrement en clouage des sols, de faire attention aux effets de taille qui peuvent apparaître.

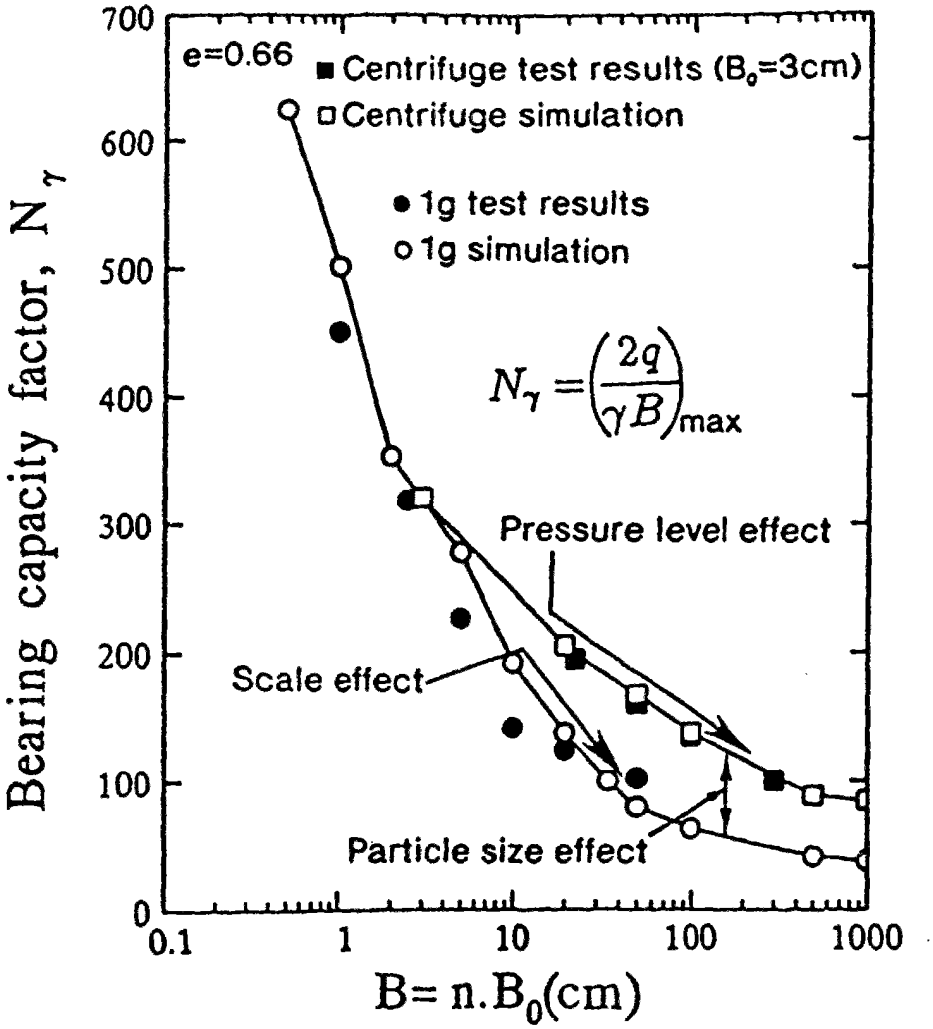


Figure A.1-2 : Effets de taille mis en évidence sur des essais de capacité portante de fondations superficielles (Siddiquee, 1991; Tatsuoka et al., 1994).

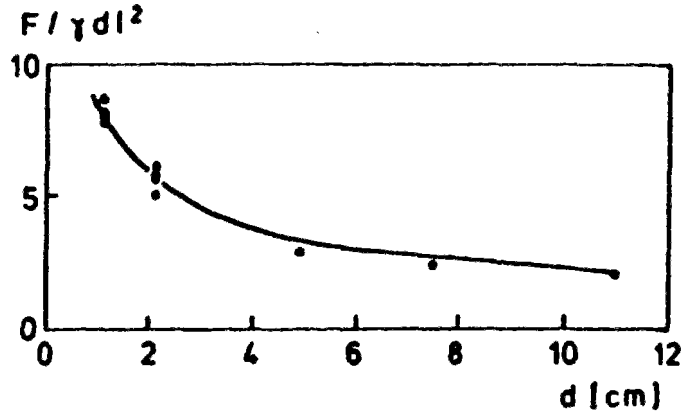


Figure A.1-3 : Comparaison avec la théorie des résultats d'essais d'arrachement d'inclusions sur modèles réduits et sur modèles de grandes tailles (Hettler, 1982) : F, force d'arrachement, d, diamètre de l'inclusion, γ, poids volumique du sol, l, longueur de l'inclusion

Les phénomènes d'interface entre un sol granulaire et une structure rigide se produisant à une échelle où la microstructure ne peut plus être ignorée. Il convient, pour étudier ces phénomènes d'un point de vue expérimental, de choisir avec soin les essais de cisaillement d'interface les plus appropriés pour une étude fine et précise. C'est ce que nous allons faire dans la section suivante où nous passerons en revue les différents essais de cisaillement existant puis les résultats expérimentaux qui ont été obtenus sur le phénomène de localisation d'interface dans les sols granulaires.

2 Résultats expérimentaux sur les interfaces

2.1 Les essais de cisaillement d'interface

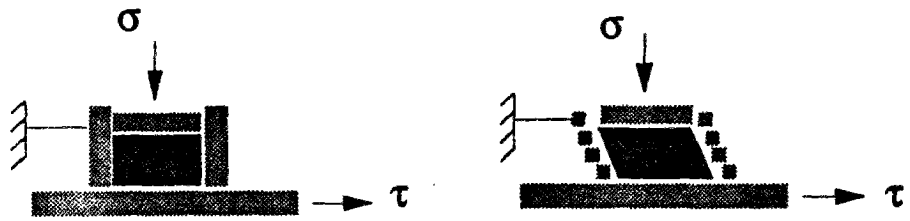
Un grand nombre d'essais de cisaillement a été développé pour tester les interfaces entre un matériau et un élément de structure, qui peut être en métal, en béton, en bois, etc. Il est possible de classer tous ces essais en deux grands groupes : les essais de cisaillement direct, où l'on impose au sol de glisser par rapport à l'interface et les essais de cisaillement simple, où le sol peut se déformer en volume (figure A.2-1).

Parmi les essais de cisaillement direct, il convient de mentionner :
(1) l'essai de cisaillement direct plan qui est dérivé de l'essai à la boîte de Casagrande (Potyondi, 1961; Desai et al., 1985; Boulon et al., 1986; Boulon et Nova, 1990; Hoteit, 1990);
(2) l'essai de cisaillement annulaire direct qui est dérivé de l'essai à l'appareil de Bromhead et qui permet d'éliminer les effets de coins de la boîte plane mais a, par contre, le désavantage d'imposer un gradient de déplacement tangentiel le long de l'interface (Yoshimi et Kishida, 1981; Boutrif, 1993; Boulon 1988);
(3) l'essai d'arrachement d'une inclusion cylindrique dans un échantillon de type triaxial, qui peut être qualifié d'essai de cisaillement direct axisymétrique (Brumunds et Leonards, 1973; Miyamoto et al., 1975).

Parmi les essais de cisaillement simple, il est intéressant de mentionner :
(1) le cisaillement simple plan (Kishida et Uesugi, 1987), qui a été abondamment utilisé pour tester le comportement des sols dans le passé (Roscoe, 1953; Oda, 1975. Vucetic et Lacasse, 1982; Saada et al., 1983; Budhu, 1984);
(2) le cisaillement simple annulaire qui utilise un appareillage nouveau (Unterreiner et al., 1994), mais fonctionne sur le principe du viscosimètre.

Il est à noter qu'une analyse systématique de tous les essais de cisaillement possibles d'un échantillon cubique ou annulaire de matériau conduit à retrouver les différents essais mentionnés ci-dessus, sauf un. Celui-ci consiste à cisailler un échantillon annulaire suivant la flèche numérotée 4 sur la figure A.2-1b ce qui, d'un point de vue technologique, est très difficilement réalisable puisque l'anneau d'interface devrait dilater durant le cisaillement.

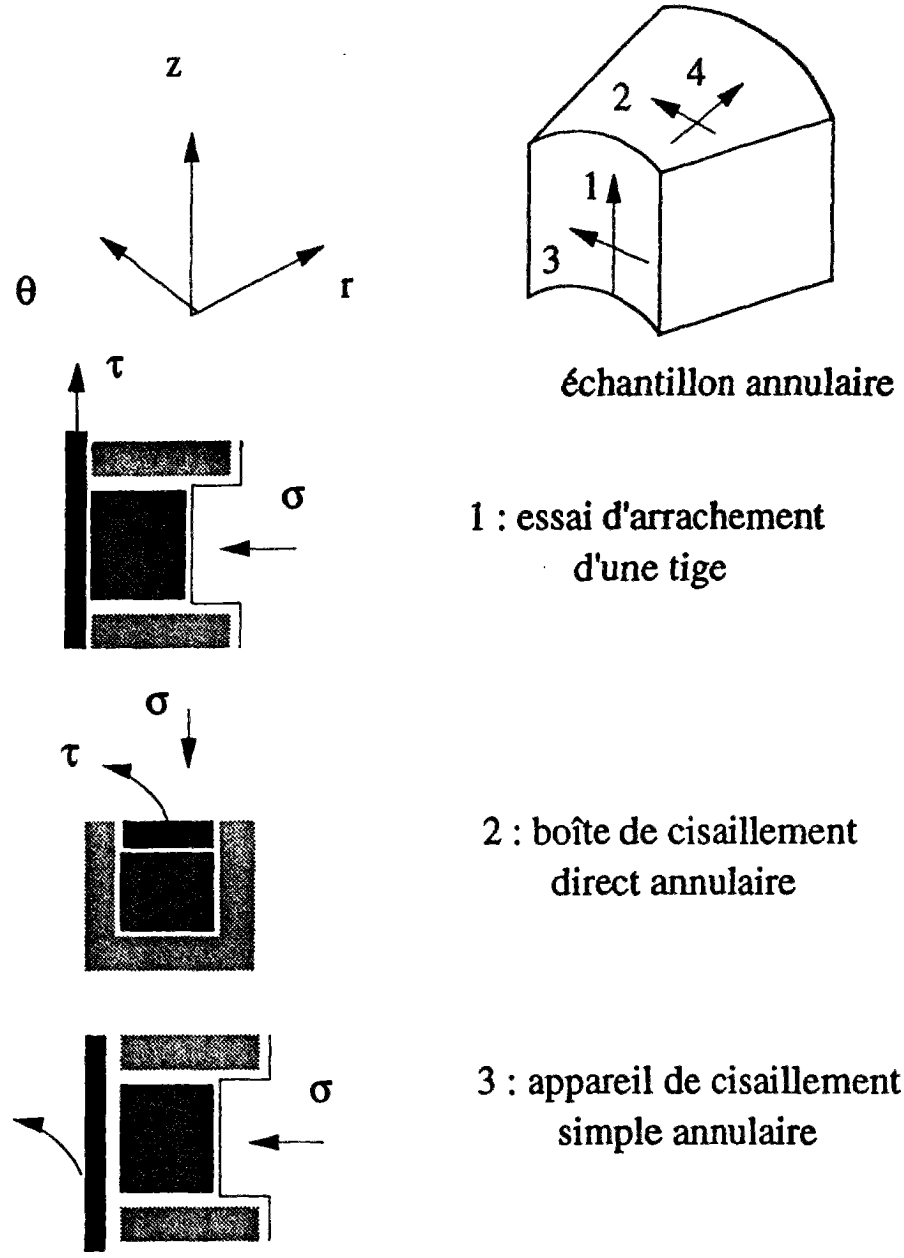
Pour étudier finement les phénomènes d'interface, il est important d'avoir le long de l'interface des conditions en déplacements, déformations et contraintes homogènes. Or, dans les essais de cisaillement direct, il existe toujours une partie amont où le sable est obligé de glisser par rapport à l'interface, et une partie aval, où le sable peut se déformer en volume avant de glisser le long de l'interface. Dans le cas, de la boîte de cisaillement direct plane, on peut s'affranchir en partie de ce problème en travaillant sur un échantillon de grande taille et ne considérer que la partie médiane où des conditions de cisaillement simple plan existent (Boulon et al., 1993) (figure A.2-2). Cependant, la réponse globale de l'essai sera influencée par ces effets de bords.



Boîte de cisaillement direct plan

Boîte de cisaillement simple plan

Figure A.2-1a : Boîtes de cisaillement plan



échantillon annulaire

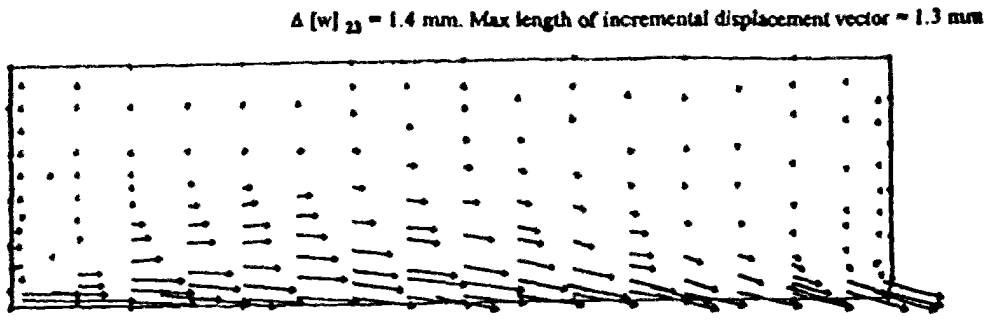
1 : essai d'arrachement d'une tige

2 : boîte de cisaillement direct annulaire

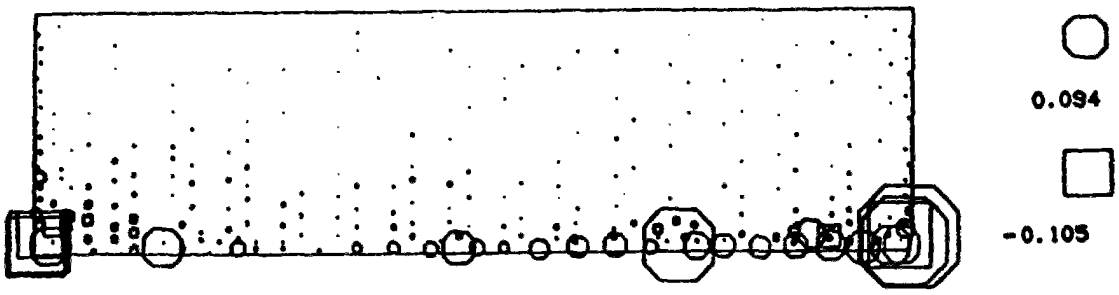
3 : appareil de cisaillement simple annulaire

Figure A.2-1b : Appareils de cisaillement annulaire

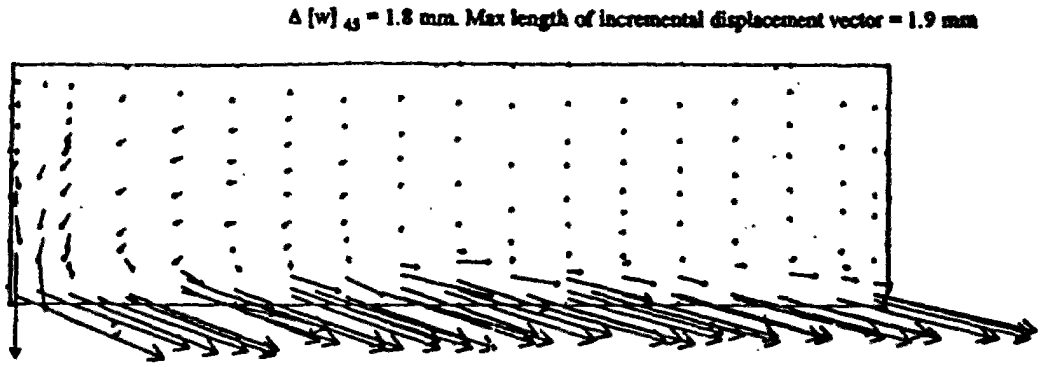
Figure A.2-1 : Classification des appareils de cisaillement d'interface



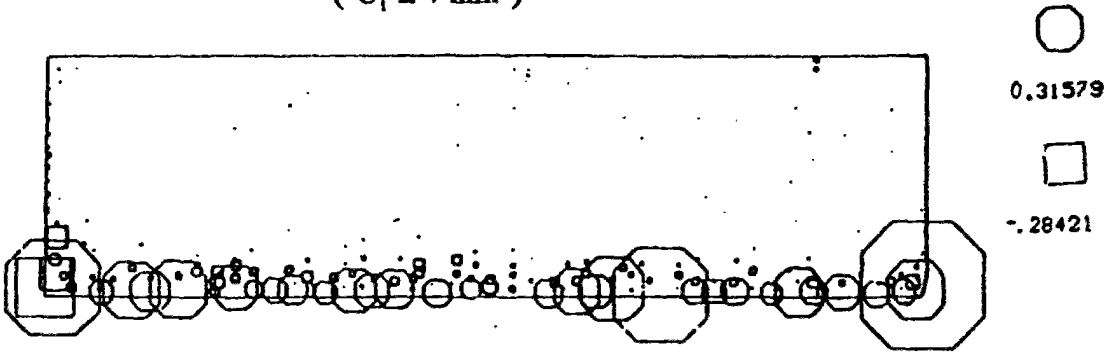
a : Déplacements incrémentaux entre les prises de vue P2 et P3
($U_t \equiv 2$ mm)



b : Déformation volumique entre les prises de vue P2 et P3
($U_t \equiv 2$ mm)



c : Déplacements incrémentaux entre les prises de vue P4 et P5
($U_t \equiv 4$ mm)



d : Déformation volumique entre les prises de vue P4 et P5
($U_t \equiv 4$ mm)

Figure A.2-2 : Dépouillement stéréo-photogrammétrique d'un essai de cisaillement direct plan, à contrainte normale constante (100 kPa), entre un sable d'Hostun dense et une interface rugueuse (Boulon et al., 1993)

C'est pourquoi, il semble préférable d'utiliser les essais de cisaillement simple où, a priori, l'état des contraintes et déformations est plus homogène. En particulier, Kishida et Uesugi (1987) et Uesugi et al. (1988) ont utilisé l'appareil de cisaillement simple plan (figure A.2-3a). Les résultats les plus importants obtenus à l'aide de cet appareil sont présentés dans le paragraphe A.2.1.

Plus récemment, l'appareil de cisaillement annulaire a été développé au CERMES afin d'éliminer les perturbations qui peuvent être générées par les cadres métalliques dans l'appareil de cisaillement simple plan (figure A.2-3).

Dans ces deux essais, les effets de bords sont minimisés au maximum ce qui permet d'avoir une réponse globale de l'essai entachée de très peu de perturbations et d'erreurs. En contrepartie, le sol se déforme uniformément dans le volume et si l'on veut analyser localement le comportement du sol près de l'interface, il convient de séparer dans la réponse globale, ce qui est dû à la déformation du sol en volume et ce qui est dû uniquement à l'interface.

Dans la suite, nous ne considérerons que deux essais : l'essai de cisaillement simple plan, qui modélise le cisaillement d'une longue couche de sol par un élément de structure plane (figure A.2-3a et A.2-3b), et l'essai de cisaillement simple annulaire, qui modélise le cisaillement d'un cylindre de sol sur sa face intérieure par un cylindre (figure A.2-3c et A.2-3d). Dans ces deux essais, la géométrie et les conditions aux limites latérales qui sont appliquées, engendrent des déplacements, déformations et contraintes qui ne dépendent que de la distance à l'interface. Dans le cas du cisaillement plan, cela est possible car les cadres métallique empilés permettent d'imposer des conditions de déformations planes ainsi qu'une invariance des variables le long de l'interface. Dans le cas du cisaillement annulaire, les conditions en déformations planes sont imposées par les deux plaques rigides et fixes entre lesquelles le sol est confiné. De plus, la géométrie possède une symétrie de révolution.

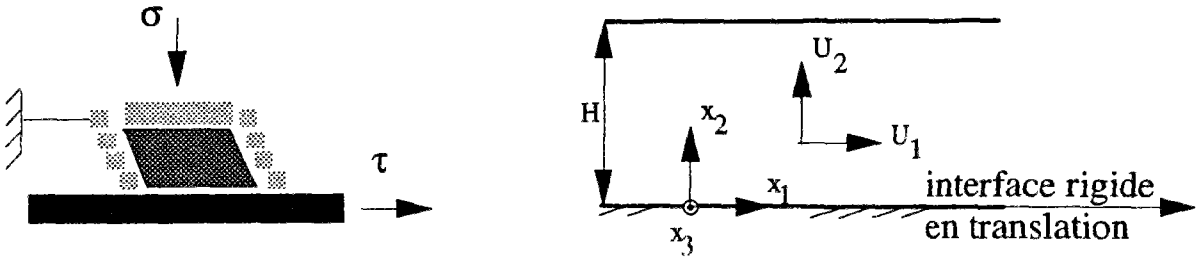


Figure A.2-3a : Essai de cisaillement simple plan et modélisation correspondante

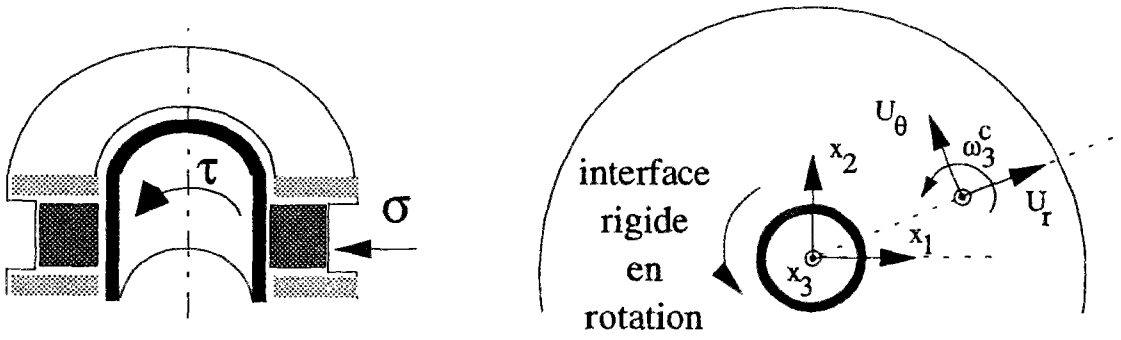


Figure A.2-3b : Essai de cisaillement simple annulaire et modélisation correspondante
Figure A.2-3 : Essais de cisaillement simples

2.2 Localisation des déformations et comportement micromécanique des grains dans une couche d'interface

2.2.1 Résultats à la boîte de cisaillement annulaire

Les premiers résultats expérimentaux sur le comportement des grains de sol dans les couches d'interfaces ont été obtenus par Yoshimi et Kishida (1981) à l'aide d'une boîte de cisaillement direct annulaire (figure A.2-4a). Les déplacements individuels des grains ont été "mesurés" par l'intermédiaire de petites billes de plomb, noyées dans le sol et suivies par radiographie (figure A.2-4b). Dans le cas d'une interface lisse, le sol se déforme uniformément dans la masse, tandis que dans le cas d'une interface rugueuse, les grains en contact subissent des déformations beaucoup plus importantes. Il y a localisation des déformations tangentielles près de l'interface. Sur les courbes donnant la variation du cisaillement en fonction du déplacement relatif sol-interface, on observe pour des surfaces très lisses ($R_{max} \leq 3$ µm) un phénomène de "stick-slip". Quand la rugosité augmente, la contrainte maximale mobilisée augmente tout en plafonnant à une valeur limite, quand la rugosité devient du même ordre de grandeur que la taille des grains. Sur les courbes donnant la déformation volumique en fonction du déplacement relatif sol-interface (figure A.2-4c), il convient de noter que pour des interfaces lisses ($R_{max} \leq 31$ µm), il n'y a quasiment pas de dilatance de l'échantillon, tandis que pour des rugosités plus grandes ($R_{max} \geq 100$ µm), on observe une dilatance très importante localisée dans l'interface.

2.2.2 Résultats à l'appareil de cisaillement simple plan

Dans l'expérimentation précédemment décrite, la présence des billes de plomb dans le sol peut modifier localement le champ de déformations. C'est pourquoi, un appareil de cisaillement simple plan équipé d'une fenêtre d'observation a été développé par Kishida et Uesugi (1987) et Uesugi et al. (1988). Les plans de l'appareillage sont donnés sur les figures A.2-5. Cependant, on peut se poser la question de savoir dans quelle mesure la vitre n'influe pas sur le comportement des grains que l'on observe, dans la mesure où l'angle de frottement d'un sable contre une vitre est de l'ordre de 20 à 25°. Uesugi et al. (1988) ont comparé le déplacement moyen des grains observés avec le déplacement des cadres d'aluminium qui enserrent le sol (figure A.2-6a). La différence est très faible même si dans le cas d'une interface rugueuse, on observe une différence non nulle près de l'interface. Cependant, c'est dans ce cas là que l'écart type des déplacements individuels des grains est le plus grand (figure A.2-6b). Compte tenu des incertitudes, on peut donc conclure que la vitre ne modifie pas sensiblement les déplacements des grains.

A partir des relevés des déplacements tangentiel (figures A.2-7a et A.2-8a), normal (figures A.2-7b et A.2-8b), et total (figures A.2-7c et A.2-8c), on observe, dans le cas d'une interface rugueuse, un phénomène de localisation du déplacement tangentiel près de l'interface avec apparition d'une forte dilatance locale. Par contre, dans le cas d'une interface lisse, le sol se déforme uniformément dans la masse sans aucun phénomène de dilatance locale à l'interface.

En ce qui concerne les courbes donnant la contrainte tangentielle en fonction du déplacement relatif total δ, il faut noter un comportement de type rigide plastique pour l'essai avec une interface lisse et un comportement moins rigide accompagné d'un radoucissement important dans le cas d'une interface rigide (figures A.2-7c et A.2-8c).

Pour pouvoir analyser finement ces essais, il est important de séparer dans le déplacement relatif δ entre le sommet de l'échantillon de sol et l'interface, le déplacement dû à la déformation du sol dans son volume, notée δ_2 , et le déplacement relatif de l'interface avec les grains de sable en contact, noté δ_1 (figure A.2-9). Il est alors possible d'observer que, dans la phase initiale de cisaillement, les courbes (τ , δ_1) sont toutes similaires et ont un module tangent initial très grand; le comportement est quasiment de type rigide. De plus, le radoucissement est directement relié à la rugosité. Pour une interface lisse, le comportement est de type parfaitement plastique, après glissement de l'interface. Pour une rugosité plus importante, on constate une phase initiale d'écrouissage positif suivie d'une phase d'écrouissage négatif (radoucissement).

L'évolution du coefficient de frottement sol-interface a pu être ainsi déterminé en fonction de la rugosité de la surface d'acier. La rugosité en métallurgie, qui par la suite sera notée R_{max} et sera appelée rugosité standard, est calculée en mesurant la différence entre le plus haut point et le plus bas point le long d'un profil de longueur de référence L = 2,5 mm (figure A.2-10a). Cette définition n'est pas adaptée à la mécanique des sols dans la mesure, où la rugosité doit tenir compte de la taille respective des grains de sable par rapport à la taille des aspérités qui définissent l'état de surface de l'interface. Il est alors intéressant de normaliser la rugosité standard R_{max} par le diamètre D_{50} des grains. Cependant, une telle définition ne permet pas de différencier entre une surface où la rugosité évolue sur de petites longueurs d'onde et une surface caractérisée par des longueurs d'onde grandes par rapport à la taille des grains. Kishida et Uesugi ont ainsi proposé de définir une rugosité normalisée où la distance L sur laquelle on mesure les aspérités R_{max} est calculée par rapport à la taille moyenne des grains D_{50} (figure A.2-10b) :

$$R_n = R_{max}(L = D_{50}) / R_{50} \qquad \text{(A.2-1)}$$

Cette définition est la plus appropriée pour étudier l'évolution du coefficient de frottement μ_y en fonction de la rugosité normalisée R_n . Il est à noter que pour ce qui concerne le frottement, le cisaillement simple et le cisaillement direct donnent sensiblement les mêmes résultats (figure A.2-10c). Par contre, pour ce qui concerne les modules de déformation, la différence est plus nette.

2.2.3 Résultats à la boîte de cisaillement direct plane

Dès 1975, Bogdaneva-Bontcheva et Lipmann ont noté qualitativement que dans le cas du cisaillement simple annulaire de rouleaux de Schneebeli, les rotations des rouleaux étaient en moyenne nettement plus grandes près de l'interface que dans le reste de l'échantillon. Kishida et Uesugi (1987), Uesugi et al. (1988) ont noté également dans leurs essais que les grains subissaient des rotations très importantes près d'une interface rugueuse.

Cependant, les premières mesures de rotation de grains de sable dans des couches d'interface n'ont été réalisées que récemment par Boulon et al. (1993). Une mesure systématique sur un grand nombre de grains est actuellement en cours au CERMES et au Laboratoire 3S/IMG dans le cadre du programme SCIENCE No. 659 et elle a déjà donné des résultats intéressants (figure A.2-11). En dépit des fortes variations d'un grain à l'autre, la tendance des grains près de l'interface est de tourner avec des rotations de l'ordre de 40° et des valeurs extrêmes parfois de 90°. Le même ordre de grandeur des rotations a été observé par Bardet et Proubet (1993), au sein de bandes de cisaillement, dans la simulation numérique par éléments distincts d'un essai biaxial d'un matériau granulaire modèle.

2.3 Résultats expérimentaux sur les épaisseurs d'interface

L'épaisseur des couches d'interface qui se forment dans un milieu granulaire, au contact avec un élément de structure, dépend essentiellement de la taille des grains, de la densité du matériau, de la rugosité de l'interface et des conditions aux limites extérieures. Ces épaisseurs sont le plus souvent mesurées par rapport à la taille moyenne des grains, en l'occurrence le diamètre moyen D_{50} . La plupart des modélisation actuellement utilisées font l'impasse sur un certain nombre de ces paramètres. En particulier, les lois de comportement d'interface ne tiennent pas compte de la variation de l'épaisseur réelle de l'interface suivant le problème étudié et donc, de sa réponse au niveau macroscopique.

2.3.1 Bandes de cisaillement

Avant de faire la bibliographie sur les épaisseurs d'interface, il est intéressant de rappeler quelques valeurs pour les bandes de cisaillement dans les sols.

Les bandes de cisaillement naissent dans le volume d'un matériau, au point de bifurcation, quand l'unicité de la solution est perdue. Par contre, en interface la naissance des couches d'interface ne peut pas être attribuée à un quelconque phénomène de bifurcation. Ce sont les conditions aux limites de type microscopique et correspondant à la microstructure de l'interface qui donnent naissance à une couche d'interface, très tôt en début de cisaillement.

Les bandes de cisaillement mettent en jeu la microstructure de la même manière que dans une interface. D'un point de vue intuitif, la demi-épaisseur d'une bande de cisaillement peut être considérée comme une valeur maximale d'épaisseur pour une couche d'interface puisque qu'au milieu d'une bande de cisaillement, les dérivées des variables cinématiques, déplacements et rotations, sont nulles.

2.3.1.1 Cisaillement direct

L'analyse par radiographie d'essais de cisaillement direct sur du sable a montré que l'épaisseur n'est pas constante à l'intérieur d'un échantillon. Cependant, une valeur moyenne de 5 à 10 grains est couramment admise pour différentes granulométries (Roscoe, 1970; Duthilleul, 1983; Bridgewater, 1970; Scarpelli et Wood, 1982).

2.3.1.2 Essais biaxiaux

Dans les essais biaxiaux sur des sables, la fourchette varie de 10 à 30 grains et le tableau A.2-2 synthétise un certain nombre de résultats obtenus par Vardoulakis et al. (1978). Des résultats tout à fait similaires ont été également obtenus par Desrues (1984).

Tableau A.2-1 : Epaisseurs de bandes de cisaillement mesurées dans des essais biaxiaux (Vardoulakis et al., 1985)

	diamètre moyen des grains D_{50} [mm]	largeur de bande $2\,d_E$ [mm]	$2\,d_E / D_{50} = d_E / R_{50}$ [mm]
sable fin	0,20	3,7	18,5
sable moyen	0,33	4,3	13,0

Il est à noter que l'épaisseur des bandes de cisaillement diminue quand la pression augmente (Hammad, 1992).

2.3.2 Couches d'interface

L'ensemble des auteurs qui se sont intéressés au comportement des interfaces entre un sol granulaire et une surface rigide rugueuse sont d'accord pour classifier les surfaces suivant l'échelle suivante des rugosités décrite dans le tableau A.2-2.

Tableau A.2-2 : Définition de la rugosité d'une interface

interface	rugosité R : différence entre le point le plus bas et le point le plus haut le long d'une surface de 2,5 mm de long
lisse	$R \cong 0$
rugueux	$\frac{D_{50}}{10} < R < \frac{D_{50}}{2}$
très rugueux	$D_{50} < R$

2.3.2.1 Essais d'arrachement

Lors d'essais d'arrachement d'un pieu foncé dans un sable, Robinsky et Morison (1964) ont observé une épaisseur maximale de 7 grains ; Wernick (1978) avance une épaisseur moyenne de 16 grains pour des pieux moulés en place. Plumelle (1979) trouve, pour des tirants préfabriqués et installés dans un remblai, une épaisseur de 7 à 14 grains.

2.3.2.2 Essai triaxial modifié

Dans des essais triaxiaux modifiés pour pouvoir tester une interface (figure A.2-12), Teichmann trouve une épaisseur variant entre 0 grain pour une interface lisse et 6 grains pour une interface rugueuse (tableau A.2-3).

Tableau A.2-3 : Essais réalisés au triaxial modifié (Teichman, 1990)

Rugosité	Epaisseur
lisse	0 D_{50}
rugueux	2 D_{50}
très rugueux	6 D_{50}

2.3.2.3 Essais dans un silo

Dans des essais d'écoulement de sable dans des silos en déformations planes, Teichman (1990) trouve une épaisseur d'interface variant, suivant la rugosité, entre 10 et 40 fois le rayon moyen des grains de sable D_{50} / 2 (tableau A.2-4). Cependant, ces valeurs extrêmes ne sont observées que dans le cas d'écoulement de milieux granulaire.

Tableau A.2-4 : Essais réalisés dans un silo en déformations planes (Teichman, 1990)

Rugosité	Sable	Epaisseur
lisse $R_n \equiv 0$	lâche ou dense	10 D_{50}
très rugueux $D_{50} < R_n$	lâche	40 D_{50}
très rugueux $D_{50} < R_n$	dense	30 à 40 D_{50}

2.3.2.4 Boîte de cisaillement direct annulaire

Dans des essais de cisaillement direct annulaire sur du sable, Yoshimi et Kishida (1986) ont observé par radiographie une épaisseur nulle pour une interface lisse et une épaisseur variant entre 5 et 8 grains pour une rugosité maximale ($R_{max} = D_{50} / 5$).

2.3.2.5 Essais de cisaillement simple plan

Dans des essais de cisaillement simple plan, Uesugi et al. (1988) observent une épaisseur d'environ 5 grains pour une interface rugueuse ($R_{max} > D_{50} / 10$).

2.3.2.6 Essais de cisaillement simple annulaire

Seuls des essais sur des rouleaux de Schneebeli ont été réalisés pour l'instant sur l'appareil de cisaillement simple annulaire (Bogdaneva-Bontcheva et Lippmann, 1972). Ils donnent une épaisseur d'interface d'environ 4 à 6 rouleaux pour une rugosité considérée comme importante (figure A.2-13).

2.3.2.7 Essais de cisaillement direct plan

C'est sur l'appareil de cisaillement direct, que l'étude la plus approfondie du comportement micromécanique et des épaisseurs d'interface a été faite par stéréophotogramétrie et vidéo (Hoteit, 1990; Boulon et al., 1993).

L'épaisseur est de 0 à 1 grains pour une interface lisse et de 5 à 10 grains pour une plaque rugueuse et pour des densités initiales moyenne et dense, respectivement. Le tableau A.2-5 résume l'ensemble des résultats obtenus par Hoteit (1990).

Tableau A.2-5 : Observations sur les couches d'interface (Hoteit, 1990)

observation	matériau	rugosité de l'interface	densité [kN/m^3]	épaisseur d'interface en régime établi
vidéo 1	Hostun D_{50} = 0,9 mm	lisse	15,60 (forte)	0 à 1 grains (0 à 2 R)
vidéo 2	Hostun D_{50} = 0,75 mm	rugueuse	15,62 (forte)	5 grains (10 R)
vidéo 3	Hostun D_{50} = 1,0 mm	rugueuse	16,80 (forte)	10 grains (20 R)
photo 7	Hostun D_{50} = 0,9 mm	rugueuse	15,34	5 grains (10 R)
photo 8	Hostun D_{50} = 9,0 mm	rugueuse	16,83	10 grains (20 R)
photo 21	Hostun D_{50} = 2,0 mm	rugueuse	14,90	5 grains (10 R)
photo 37	Hostun D_{50} = 0,74 mm	lisse	16,84	0 grains (0 R)
photo 43	Hostun D_{50} = 0,74 mm	lisse	15,42	0 grains (0 R)
photo 54	Hostun D_{50} = 0,73 mm	lisse	14,70	0 grains (0 R)

2.4 Synthèse des résultats expérimentaux

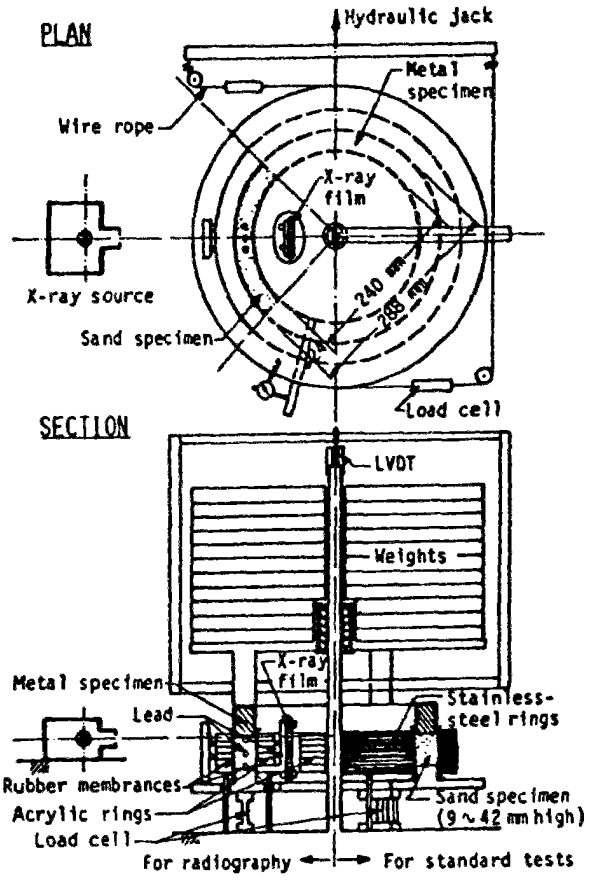
Lors du cisaillement d'un sol granulaire par une interface lisse, il est observé une déformation homogène du sol que ce soit dans la phase d'adhérence initiale ou dans la phase de glissement de l'interface par rapport au sol. Il n'y a donc pas, à proprement parler, de formation d'une couche d'interface. On considérera que l'épaisseur de la couche d'interface est nulle dans ce cas là.

Dans le cas d'une interface rugueuse, il est observé, de manière systématique, la formation d'une couche, dite d'interface, où le déplacement tangentiel se localise, les grains subissent des rotations importantes et une forte dilatance se développe.

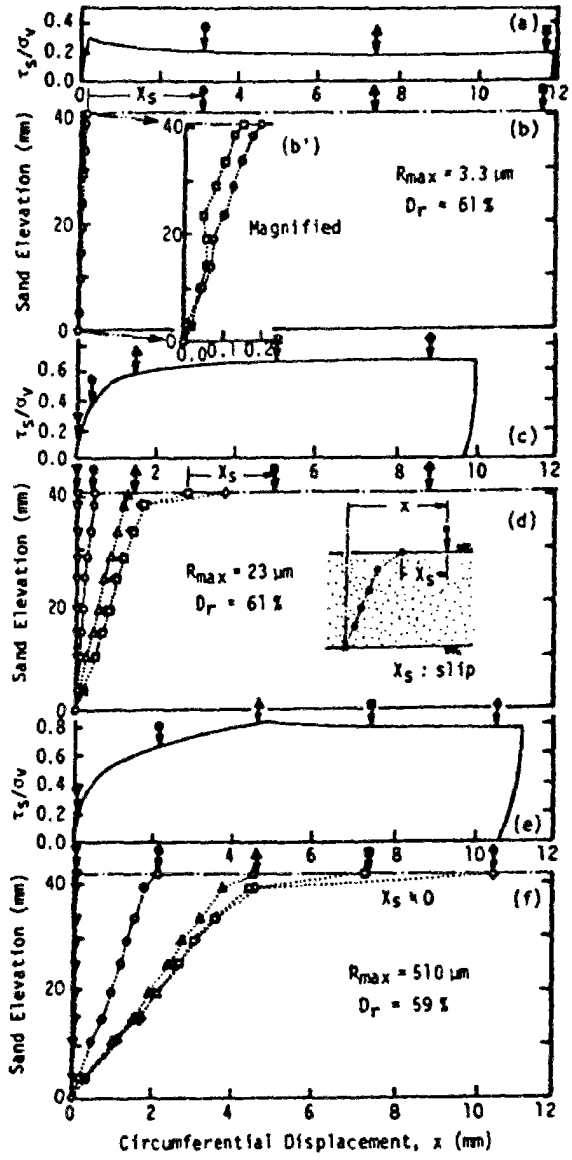
Pour les essais de cisaillement simple plan que nous modéliserons, cette épaisseur varie entre 5 et 10 grains suivant la densité du sable.

Pour d'autres types d'essais, les épaisseurs observées varient d'un essai à l'autre, ce qui tend à prouver que l'épaisseur d'une couche interface n'est pas une caractéristique intrinsèque du sol et de l'interface mais plutôt le résultat du problème aux limites étudié pour une géométrie donnée. En particulier, nous montrerons que pour le cisaillement simple annulaire il existe une dépendance significative de l'épaisseur de l'interface en fonction du rayon du cylindre d'interface.

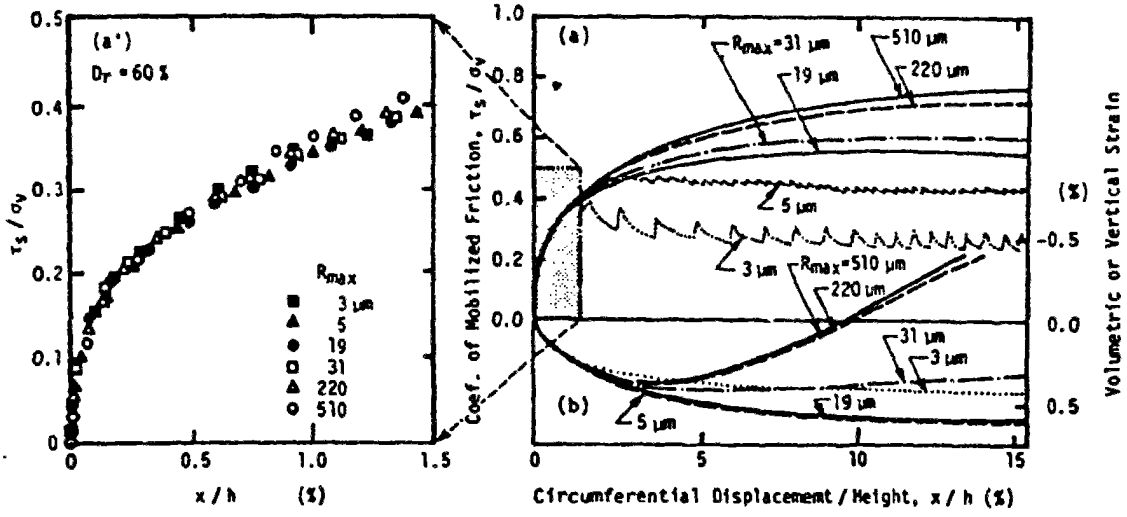
De plus, parallèlement à la formation de la couche d'interface, un fort écrouissage négatif se développe sur la courbe effort-déformation. Si dans le cas des essais de cisaillement direct, un tel radoucissement peut être qualifié de radoucissement géométrique, dans la mesure où le sol est forcé de glisser par rapport à l'interface, par contre dans le cas des cisaillements simples, un tel radoucissement ne peut être attribué qu'au comportement particulier du sol dans la couche d'interface. C'est ce que nous mettrons en évidence dans la suite, d'un point de vue théorique et numérique.



a : Boîte de cisaillement direct annulaire

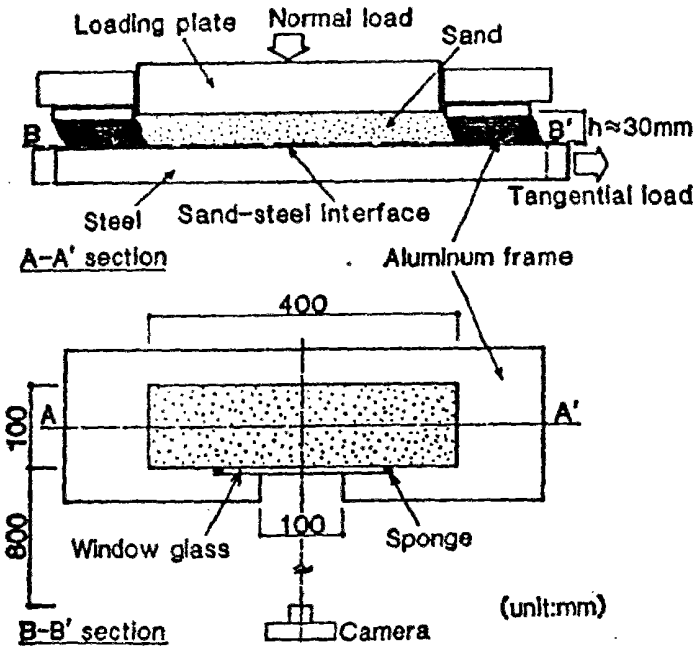


b : Déplacements dans le sol mesurés par radiographie

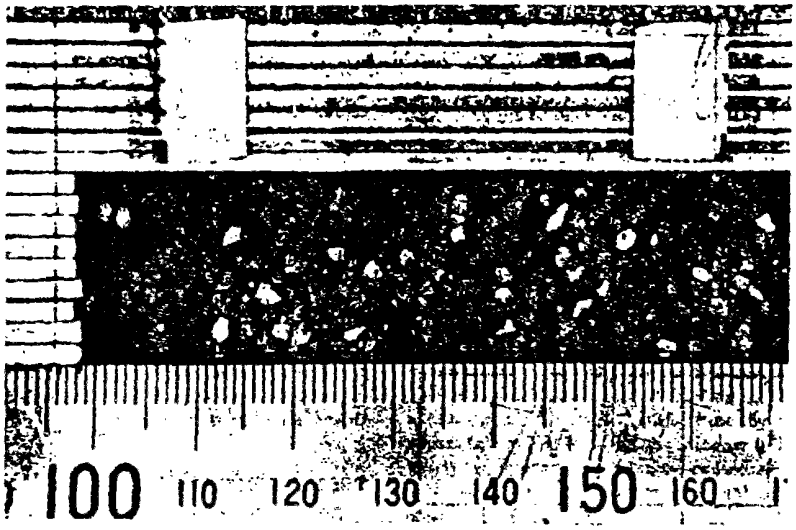


c : Contrainte tangentielle et déformation volumique

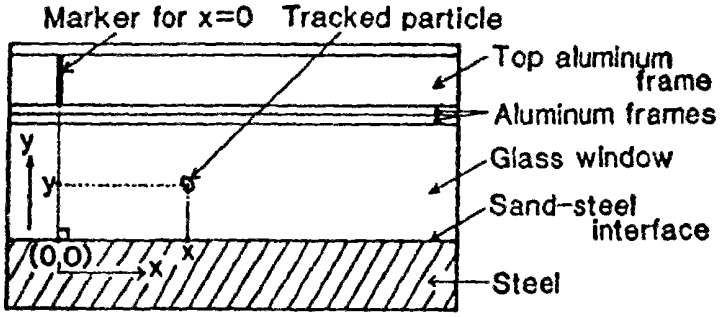
Figure A.2-4 : Essais entre le sable de Tonegawa et un acier (Yoshimi et Kishida, 1981)



a : Appareil de cisaillement simple plan

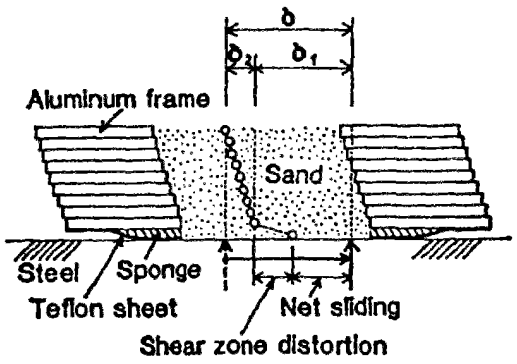


b : Photographie prise à travers la fenêtre d'observation

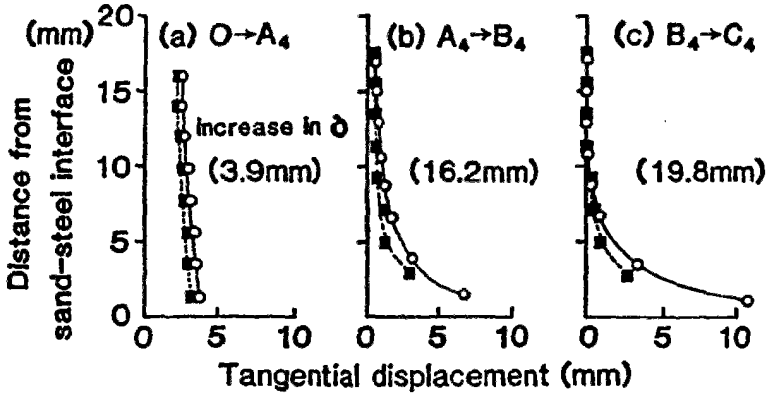


c : Détermination des coordonnées des particules de sols

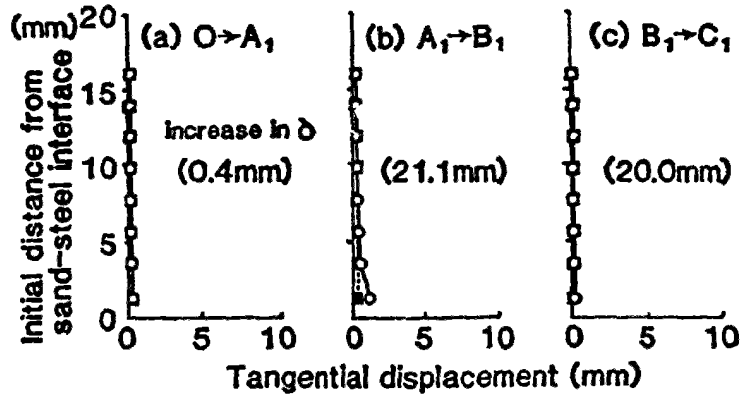
Figure A.2-5 : Essais de cisaillement simple plan sur le sable de Seto (Uesugi et al., 1988)



a : Définitions des déplacements δ , δ_1 et δ_2

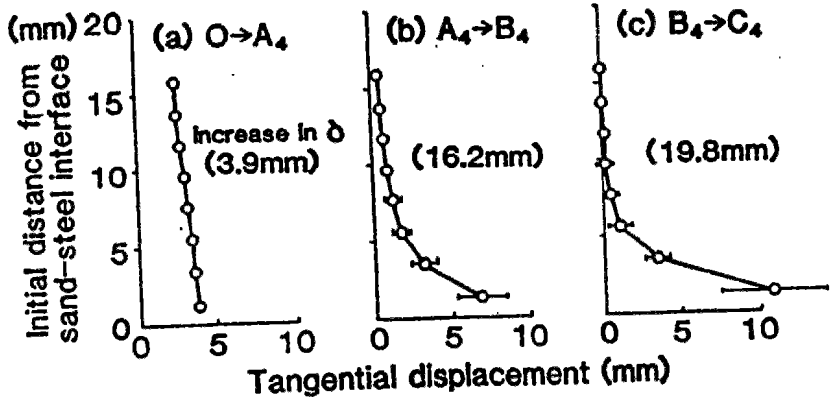


b : Déplacement tangentiel des grains de sable (-o-) et des cadres d'aluminium (-■-) pour une interface rugueuse

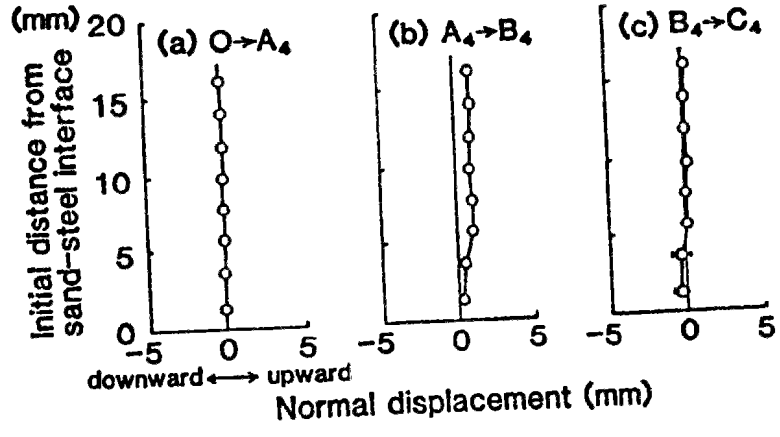


c : Déplacement tangentiel des grains de sable (-o-) et des cadres d'aluminium (-■-) pour une interface lisse

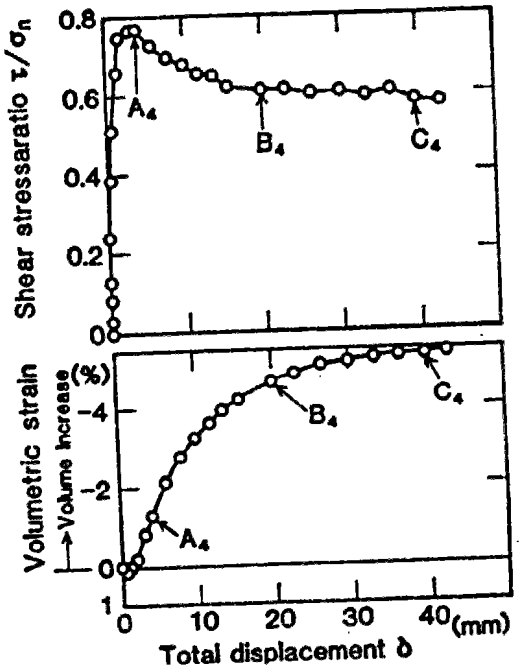
Figure A.2-6 : Essais de cisaillement simple plan sur le sable de Seto (Uesugi et al., 1988)



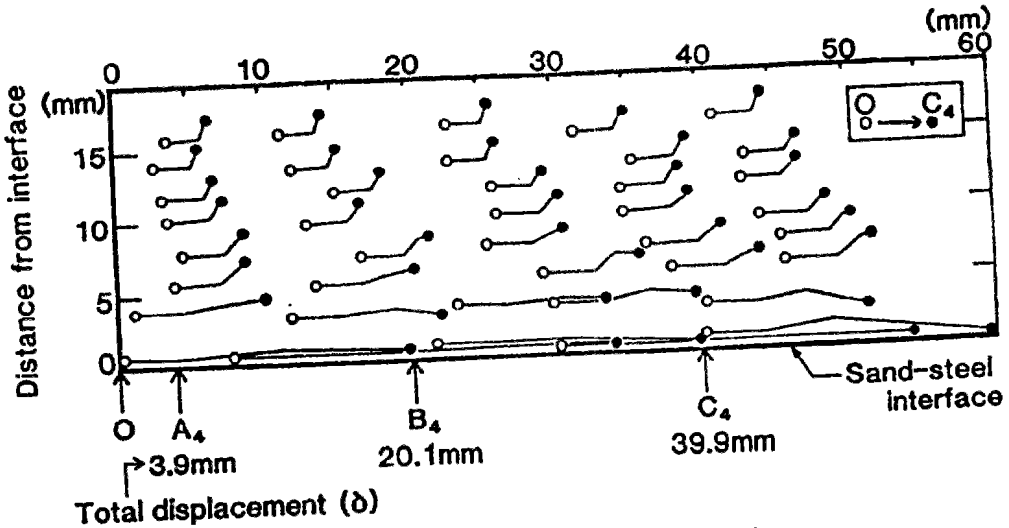
a : Déplacement tangentiel



b : Déplacement normal

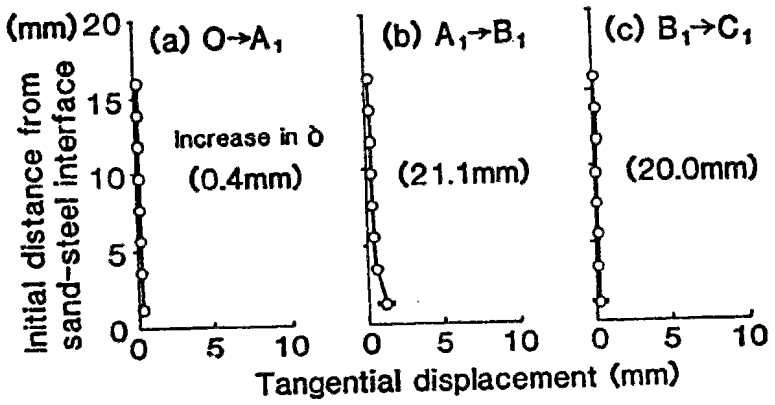


c : Contrainte de cisaillement τ
et déformation volumique ε_v
en fonction du déplacement relatif δ

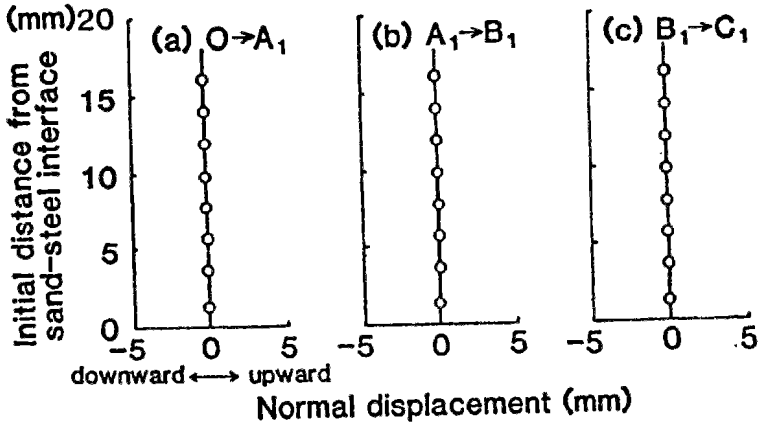


d : Déplacements des grains

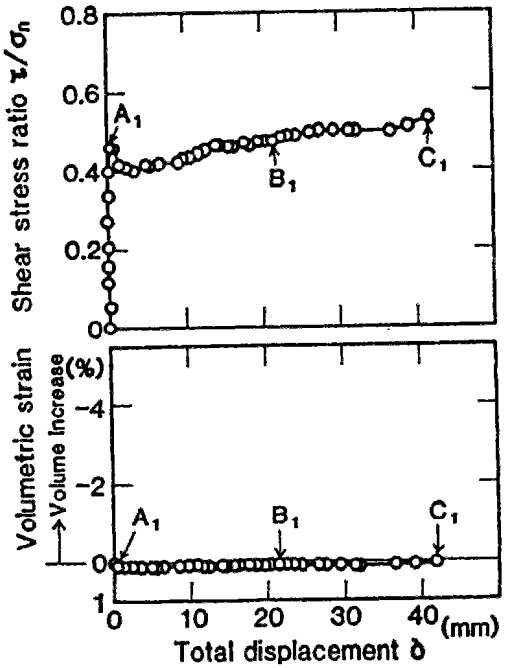
Figure A.2-7 : Essais de cisaillement simple plan entre le sable de Seto et une interface rugueuse (Uesugi et al., 1988)



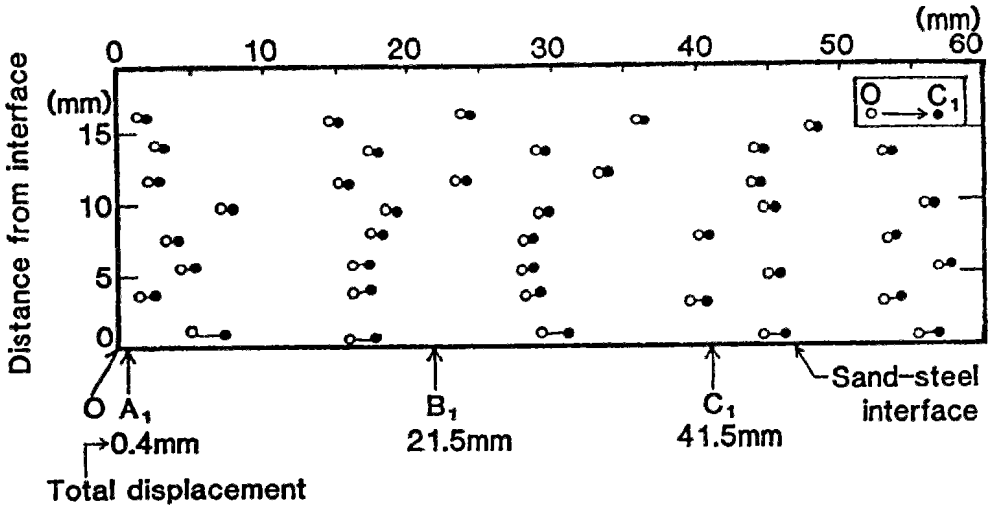
a : Déplacement tangentiel



b : Déplacement normal

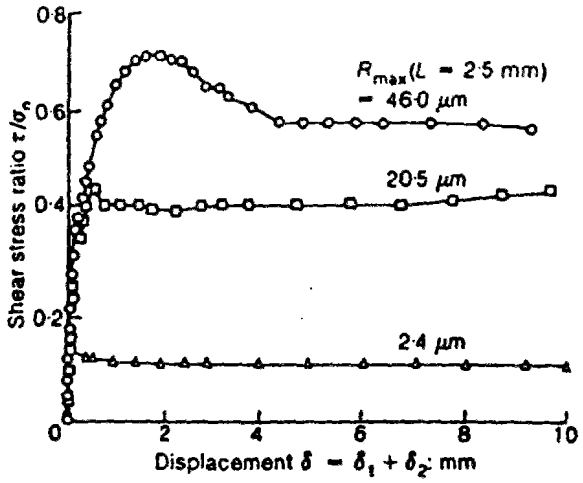


c : Contrainte de cisaillement τ
et déformation volumique ε_v
en fonction du déplacement relatif δ

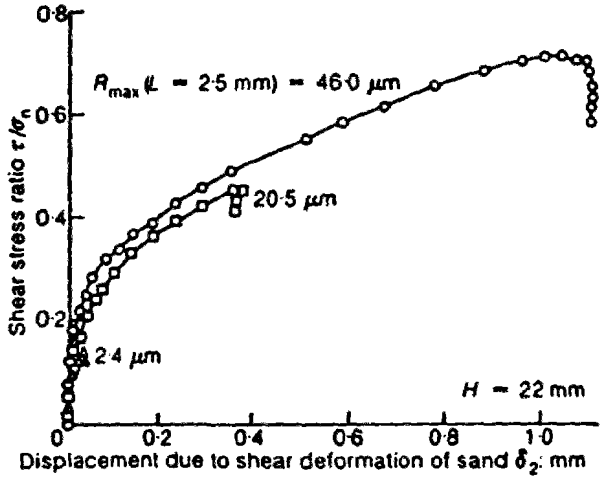


d : Déplacements des grains

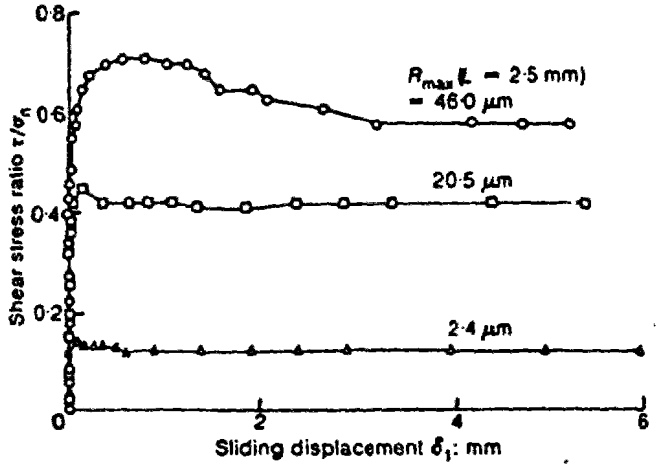
Figure A.2-8 : Essais de cisaillement simple plan entre le sable de Seto et une interface lisse (Uesugi et al., 1988)



a : Déplacement relatif total δ entre le sol et l'interface

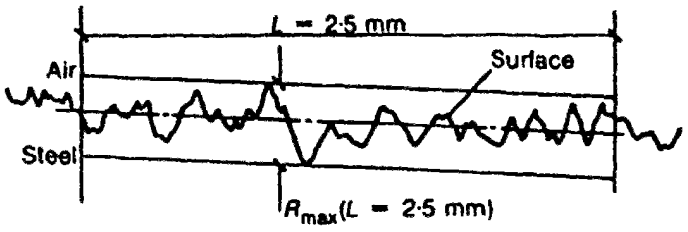


b : Déplacement relatif δ_2 dû à la déformation du sol en volume

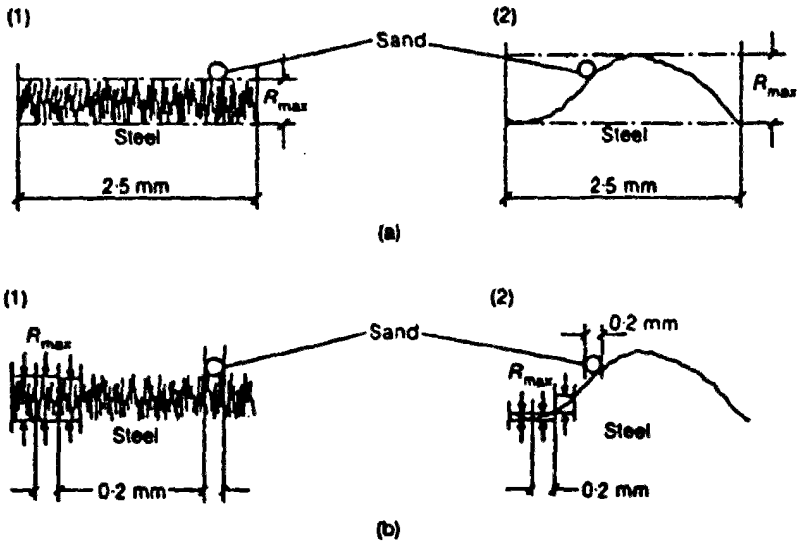


c : Déplacement relatif δ_1 dû au glissement du sol au contact avec l'interface

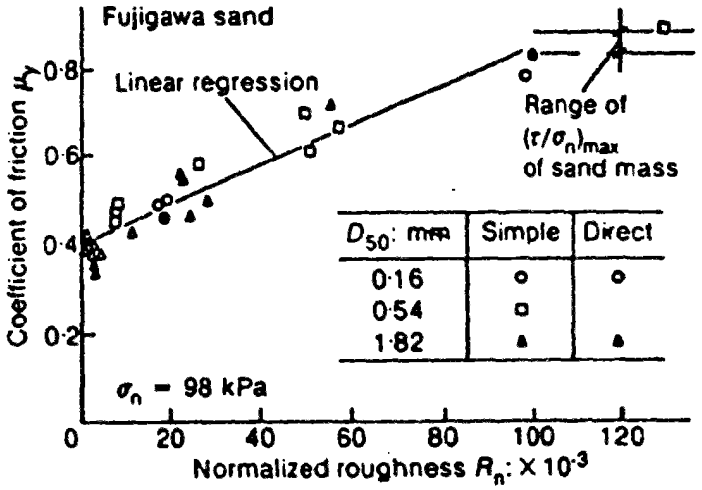
Figure A.2-9 : Essais de cisaillement simple plan (Kishida et Uesugi, 1987)



a : Mesure de la rugosité standard R_{max} d'une surface

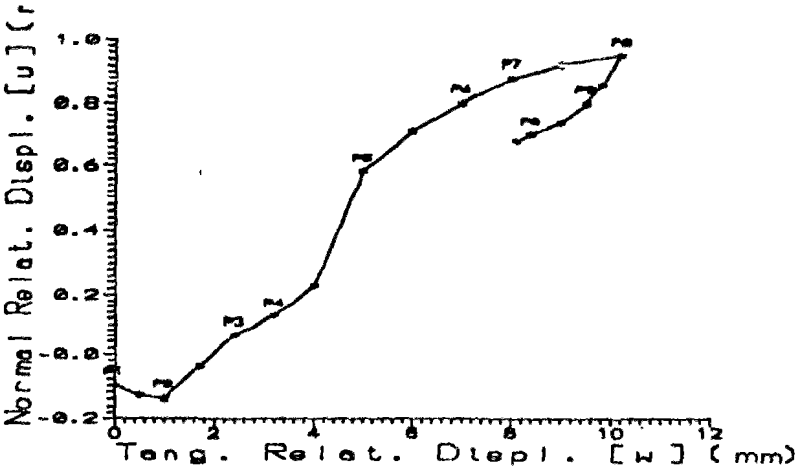


b : Comparaison de la rugosité standard R_{max} et de la rugosité normalisée R_n

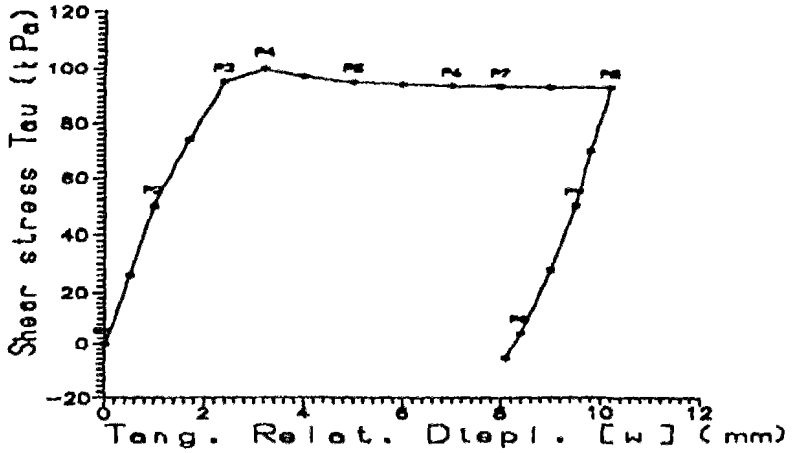


c : Evolution du coefficient de frottement μ_y en fonction de la rugosité normalisée R_n

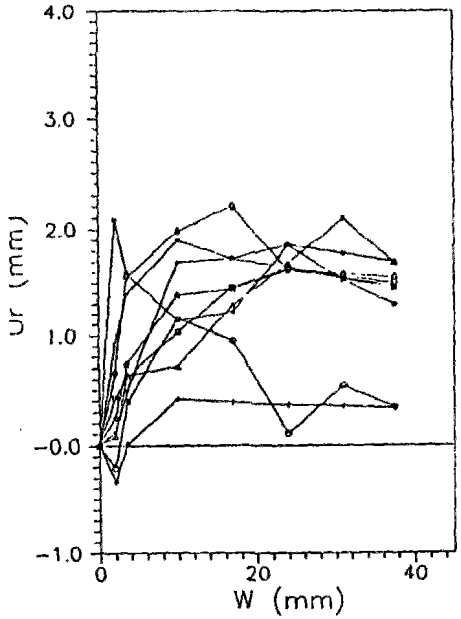
Figure A.2-10 : Etude sur le coefficient de frottement (Kishida et Uesugi, 1987)



a : Evolution de la contrainte tangentielle τ
en fonction du déplacement relatif sol-interface W

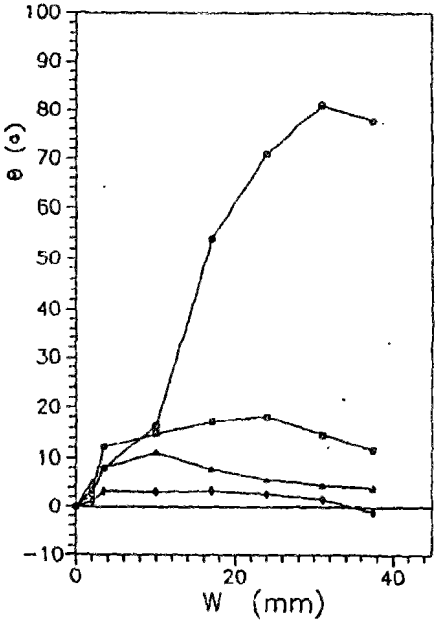


b : Evolution du déplacement normal
en fonction du déplacement relatif sol-interface W



Grain Number	Symbol	Distance to rough plate (mm)
2		4.7
3		10.0
4		10.0
6		23.8
7		25.0
8		26.9
9		33.6
10		33.8
12		60.6

c : Suivi du déplacement normal de grains



Grain Number	Symbol	Distance to rough plate (mm)
13		9.4
15		18.8
17		34.4
18		43.8

d : Suivi de la rotation individuelle des grains

Figure A.2-11 : Essai de cisaillement direct plan, à contrainte normale constante (100 kPa), entre un sable d'Hostun dense et une interface rugueuse (Boulon et al., 1993)

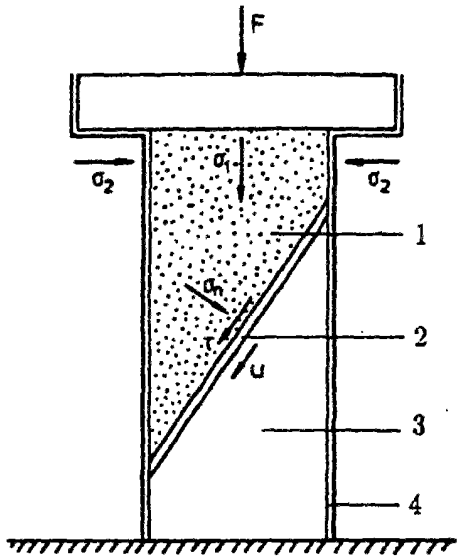


Figure A.2-12 : Biaxial adapté à l'étude des interfaces (Teichmann, 1989)

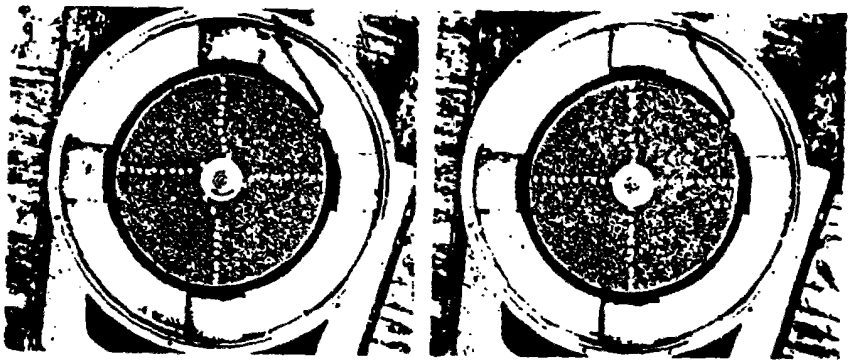


Figure A.2-13a : Vue d'ensemble de la déformée

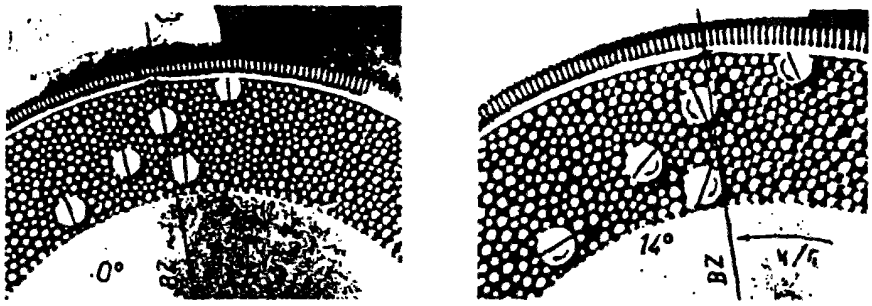


Figure A.2-13b : Détail des rotations de grains

Figure A.2-13 : Essai de cisaillement simple annulaire de rouleaux de Schneebeli (Bogdaneva-Bontcheva et Lippmann, 1975)

3 Résultats théoriques sur les "couches" d'interface dans un milieu continu classique

3.1 Cisaillement simple plan d'un milieu continu classique hétérogène

Dans l'essai de cisaillement simple plan, les équations d'équilibre pour un milieu continu classique, que ce soit dans une formulation en petites ou grandes déformations, imposent que les contraintes tangentielle σ_{12} et normale σ_{22} soient découplées et constantes sur toute la hauteur de l'échantillon.

Les équations en déplacement tangentiel U_1 et déformation de cisaillement ε_{12} sont respectivement (figure A.2-3a) :

$$2\,\varepsilon_{12}(x_2) = \frac{dU_1}{dx_2} \tag{A.3-1}$$

$$2\,\varepsilon_{12}(x_2) = \frac{\sigma_{12}\,(\text{constante})}{G(x_2)} \tag{A.3-2}$$

où le module de cisaillement G peut dépendre de la coordonnée x_2 dans le cas d'un milieu hétérogène. Dans le cas d'un matériau homogène, quelles que soient les conditions aux limites, la solution en déplacement tangentiel U_1 est linéaire en x_2 et la déformation de cisaillement ε_{12} est constante sur toute la hauteur de l'échantillon.

La concentration des déformations de cisaillement, localement près de l'interface, ne peut se produire que s'il existe une forte hétérogénéité avec un fort gradient du module de cisaillement $G(x_2)$ (cf. Annexe A-1). Considérons, par exemple, un module de cisaillement $G(x_2)$, variant exponentiellement entre l'interface, de coordonnée $x_2 = 0$, et la condition à la limite supérieure, de coordonnée $x_2 = H$, selon les équations suivantes avec $G(H) > G(0)$ (figure A.3-1a) :

$$G(x_2) = G(0)\exp\left(\lambda\frac{x_2}{H}\right) \tag{A.3-3}$$

$$\lambda = \ln\left(\frac{G(H)}{G(0)}\right) \tag{A.3-4}$$

Les conditions aux limites considérées sont résumées dans le tableau A.3-1.

Tableau A.3-1 : Conditions aux limites étudiées pour le cisaillement simple plan

	Interface $x_2 = 0$	Haut de l'échantillon $x_2 = H$
Conditions aux limites d'un milieu continu classique	$U_2 = 0$ interface rigide	σ_{22} = constante contrainte normale imposée
	$\sigma_{12} < 0$ cisaillement à l'interface	$U_1 > 0$ déplacement tangentiel

L'importance de l'hétérogénéité peut être mesurée par le gradient du module de cisaillement, c'est à dire sa dérivée $\partial G/\partial x_2$, qui introduit une longueur, notée ℓ , dans le problème. Celle-ci est de l'ordre de grandeur des dimensions géométriques de l'échantillon.

$$\ell^{-1} = \frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial x_2} = \frac{\lambda}{H} \tag{A.3-5}$$

La déformation de cisaillement ε_{12} et le déplacement tangentiel U_1 décroissent exponentiellement avec la distance à l'interface (figures A.3-1b et c) :

$$\varepsilon_{12}(x_2) = \frac{\sigma_{12}}{2\,G(0)} \exp\left(-\frac{x_2}{\ell}\right) \tag{A.3-6}$$

$$U_1(x_2) = U_1(0)\left(1 - \frac{1-\exp\left(-\frac{x_2}{\ell}\right)}{1-\exp\left(-\frac{H}{\ell}\right)}\right) \tag{A.3-7}$$

Ce type de solutions correspond à la formation, près de l'interface, d'une couche limite dont l'épaisseur peut être définie par rapport à la déformation de cisaillement ε_{12} ou le déplacement tangentiel U_1.

La distance à l'interface d_I (ε_{12}) sur laquelle la déformation de cisaillement décroît et atteint une valeur faible prise égale à p % est donnée par :

$$d_I[\varepsilon_{12} = p] = -\ell \ln\left(2\,p\,\frac{H}{U_1(0)}\,\frac{1-\exp\left(-\frac{H}{\ell}\right)}{\frac{H}{\ell}}\right) \tag{A.3-8}$$

L'épaisseur de cette couche limite dépend de l'épaisseur de l'échantillon H par l'intermédiaire de la longueur ℓ et de l'intensité du cisaillement, mesurée par le rapport $H / U_1(0)$.

La distance à l'interface d_I sur laquelle le déplacement tangentiel U_1 décroît et atteint une fraction p de sa valeur à l'interface $U_1(0)$, est donnée par :

$$d_I[U_1 = p\, U_1(0)] = -\ell \ln p \qquad \text{(A.3-9)}$$

et est proportionnelle à la hauteur de l'échantillon H par l'intermédiaire de la longueur ℓ.

Par exemple, pour un échantillon avec une hauteur H = 10 cm, une distance d_I de l'ordre de 5 grains, le diamètre de ceux-ci étant de 1 mm, et une fraction p de 10%, le coefficient λ est égal à 46 et le rapport G(H)/G(0) est de l'ordre de grandeur de 10^{20}.

C'est pourquoi, pour un milieu continu classique linéaire élastique, seule une très forte hétérogénéité peut expliquer la formation d'une couche limite où le déplacement tangentiel et la déformation de cisaillement décroissent très rapidement près de l'interface. Par conséquent, on peut s'attendre à ce que les simulations numériques avec une couche limite hétérogène conduisent à des problèmes aux limites particulièrement mal conditionnés.

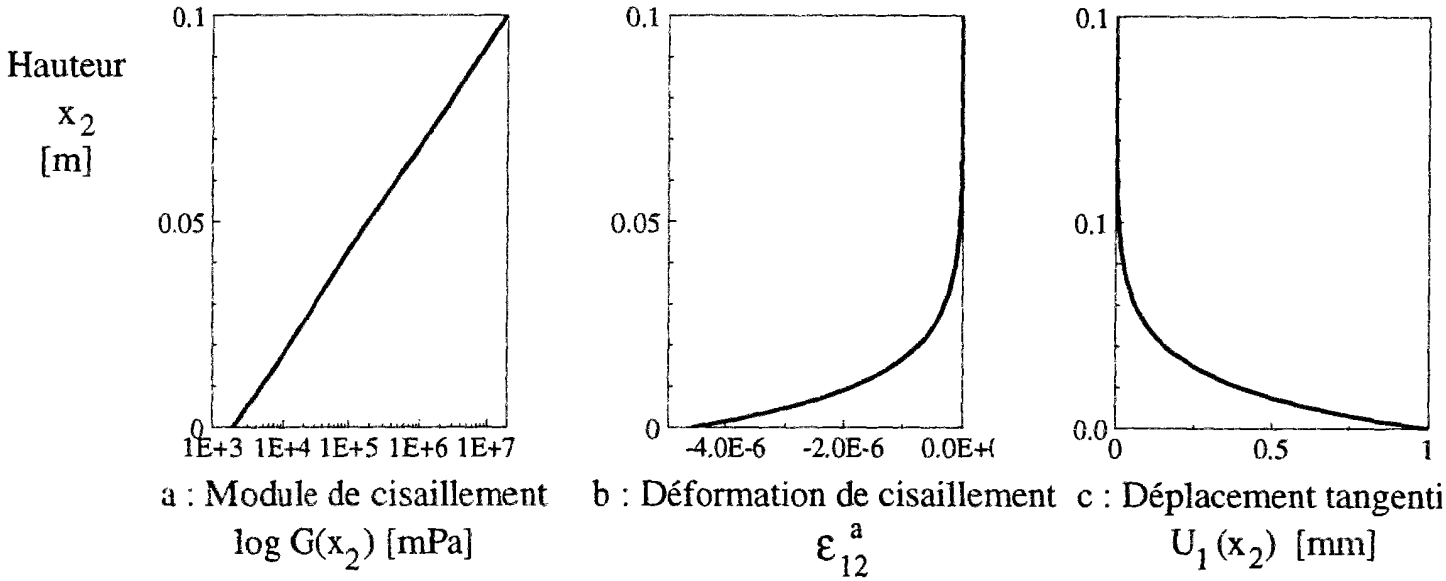


Figure A.3-1 : Cisaillement simple plan d'un milieu continu classique linéaire élastique hétérogène

3.2 Cisaillement simple annulaire d'un milieu continu classique rigide parfaitement plastique

Dans le présent paragraphe, nous nous proposons d'analyser le cisaillement simple annulaire d'un milieu continu classique avec une loi de comportement rigide parfaitement plastique (critère de Mohr-Coulomb) dans le cadre de la théorie des déformations totales en plasticité.

Une analyse de ce problème, encore appelé écoulement de Couette, a été faite par Bogdaneva-Bontcheva et Lippmann (1972) uniquement dans le cas d'un matériau plastique associé.

Dans le cadre de cette thèse, nous avons développé les solutions analytiques dans le cas plus général d'un matériau non associé. Les détails des solutions analytiques se trouvent dans les annexes A-3 et A-4. Dans le présent paragraphe, nous ne présentons qu'un résumé de ces résultats nouveaux.

Dans l'analyse du cisaillement simple annulaire d'un milieu continu classique, seules deux équations d'équilibre sont non nulles. Après intégration partielle, elles peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})}{r} = 0 \qquad \text{(A.3-10)}$$

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} = \frac{A}{r^2} \qquad \text{(A.3-11)}$$

Dans le cas présent, il est intéressant d'utiliser les deux invariants que sont la pression p et le déviateur q ainsi que l'angle α des directions principales comme inconnues, afin de résoudre, dans un premier temps, le problème statique puis, dans un deuxième temps, le problème cinématique :

$$\sigma_{rr} = p + q \cos 2\alpha \qquad \text{(A.3-12)}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = p - q \cos 2\alpha \qquad \text{(A.3-13)}$$

$$\sigma_{\theta r} = \sigma_{r\theta} = q \sin 2\alpha \qquad \text{(A.3-14)}$$

Comme critère de rupture, nous sélectionnons le critère de Mohr-Coulomb qui représente assez bien le comportement des sols granulaires tout en restant relativement simple :

$$F = q + p \sin\phi - c \cos\phi \qquad \text{(A.3-15)}$$

où ϕ est l'angle de frottement interne et c la cohésion.

Le potentiel plastique G est choisi comme étant de la même forme que le critère de rupture F :

$$G = q + p \sin\beta \qquad \text{(A.3-16)}$$

où β , l'angle de dilatance, est égal à ϕ pour un matériau associé et est inférieur à ϕ pour un matériau non associé.

Dans le cadre de la théorie des déformations plastiques totales (théorie J_2), les déformations totales, qui sont purement plastiques, sont données en fonction du multiplicateur plastique λ par les relations :

$$\varepsilon_{rr} = \lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma_{rr}} = \frac{\lambda}{2}(\sin\beta + \cos 2\alpha) \qquad \text{(A.3-17)}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma_{\theta\theta}} = \frac{\lambda}{2}(\sin\beta - \cos 2\alpha) \qquad \text{(A.3-18)}$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta r} = \lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma_{r\theta}} = \frac{\lambda}{2}\sin 2\alpha \qquad \text{(A.3-19)}$$

Les inconnues statiques du problème sont au nombre de 3 : (p, q, α). Les inconnues cinématiques sont au nombre de 6 : (ε_{rr} , $\varepsilon_{\theta\theta}$, $\varepsilon_{\theta r}$, U_r , U_θ , λ). Les deux équations d'équilibre plus le critère de plasticité donnent 3 équations uniquement en variables statiques, tandis que les 3 équations de comportement fournissent trois équations en contraintes, déformations et multiplicateur plastique.

Le problème statique peut donc être résolu indépendamment du problème cinématique pourvu que les conditions aux limites s'y prêtent. En l'occurrence, nous avons choisi 3 conditions aux limites de type statique de manière à pouvoir résoudre le problème statique séparément du problème cinématique. La quatrième condition est de type cinématique. Le tableau A.3-2 résume l'ensemble des conditions aux limites considérées. Elles correspondent toutes aux conditions aux limites réelles d'un essai de cisaillement simple annulaire.

Tableau A.3-2 : Conditions aux limites étudiées pour le cisaillement simple annulaire

	Rayon de l'interface r_{int}	Rayon extérieur r_{ext}
Conditions aux limites d'un milieu continu classique	$U_r = 0$ interface rigide	$\sigma_{rr} < 0$ pression de confinement
	$\sigma_{\theta r} < 0$ cisaillement à l'interface	$U_\theta = 0$ déplacement tangentiel

La seule condition à la limite : $U_r = 0$, qui soit de type cinématique, peut être transformée en condition statique, sachant que les tenseurs symétriques des contraintes et déformations sont co-axiaux (cf. Annexe A-5). La définition de la déformation $\varepsilon_{\theta\theta}$ permet d'écrire que cette condition à la limite est équivalente à $\alpha = -(\pi/4 - \beta/2)$ en r_{int} . L'angle α des direction principales des tenseurs des contraintes et déformations est donc fixé par la condition à la limite en interface.

D'autre part, α et r vérifient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d\alpha}{dr} = \frac{1}{r}\frac{\sin 2\alpha}{\sin\phi - \cos 2\alpha} \qquad \text{(A.3-20)}$$

La solution analytique de r en fonction de α est donnée par :

$$r = M\, f(\alpha) \qquad \text{(A.3-21)}$$

$$f(\alpha) = \left[\tan|\alpha|^{\sin\phi} / \sin 2|\alpha|\right]^{1/2} = \sin|\alpha|^{\frac{\sin\phi-1}{2}} \cos|\alpha|^{\frac{-\sin\phi-1}{2}} / \sqrt{2} \qquad \text{(A.3-22)}$$

où M est une constante d'intégration. Il convient de remarquer que les variations de α en fonction de r dépendent de l'angle de frottement ϕ mais pas de l'angle de dilatance β.

Connaissant la fonction $r(\alpha)$, les solutions en contrainte radiale $\sigma_{rr}(r)$, contrainte orthoradiale $\sigma_{\theta\theta}(r)$, pression $p(r)$ et contrainte déviatorique $q(r)$ s'obtiennent directement.

L'équation différentielle en U_r et α s'obtient en éliminant le multiplicateur plastique λ entre les équations de comportement (A.3-17) et (A.3-18). Après intégration, on obtient la solution analytique suivante :

$$U_r(\alpha) = K\, g_1(\alpha)\, g_2(\alpha) \qquad \text{(A.3-23)}$$

où :

$$g_1(\alpha) = \left[2 \sin|\alpha|^{1+\sin\beta} \cos|\alpha|^{1-\sin\beta}\right]^{1/2} \qquad \text{(A.3-24)}$$

$$g_2(\alpha) = \left[|\sin\beta - \cos 2\alpha|^{\frac{2\sin\beta}{\cos^2\beta}} \sin|\alpha|^{\frac{1+\sin\beta}{1-\sin\beta}} \cos|\alpha|^{\frac{1-\sin\beta}{1+\sin\beta}}\right]^{\frac{\sin\phi-\sin\beta}{2}} \qquad \text{(A.3-25)}$$

et K est une constante d'intégration. Dans le cas d'une loi d'écoulement associée ($\beta = \phi$), la fonction g se réduit à g_1 puisque g_2 est égale à 1. Ce cas particulier a été développé par Bogdaneva-Bontcheva et Lippmann (1972). La fonction g_1 est nulle si et seulement si l'angle α est égal à 0 ou $\pm \pi / 2$ (figure A.3-2).

Pour une loi d'écoulement associé, la condition à la limite en interface : $U_r = 0$ en r_{int}, impose que la constante K soit égale à zéro à l'intérieur de la zone plastique en contact avec l'interface. Il en résulte que le déplacement radial U_r est identiquement nul. Il s'ensuit que l'intervalle de variation de r est réduit au point r_{int} ; l'épaisseur de la zone plastifiée est donc nulle. La solution rigide plastique est constituée de deux zones : une zone plastique intérieure, d'épaisseur nulle, en contact avec l'interface, en r_{int}, et une zone rigide externe s'étendant de r_{int}^{+} à r_{ext}.

Dans le cas d'une loi d'écoulement non associé, il est possible de développer en plus une solution statique composée d'une zone plastique en contact avec l'interface mais s'étendant entre r_{int} et r_p avec $r_p > r_{int}$, et d'une zone rigide extérieure s'étendant entre r_p et r_{ext}. La limite r_p entre ces deux zones se calcule en assurant la continuité de la contrainte tangentielle σ_{rr} en $r(\alpha_p) = r_p$. On obtient alors l'équation ci-dessous en α_p :

$$\frac{f^2(|\alpha_{int}|)}{\left(\tan|\alpha_p|\right)^{\sin\phi}} \frac{\sin\phi - \cos 2\,\alpha_p}{\sin\phi} \frac{|\sigma_{\theta r}(r_{int})|}{\sigma_{rr}(r_{ext})} + \frac{\cos 2\,\alpha_p}{\tan\phi} \frac{c}{\sigma_{rr}(r_{ext})} = 1 \qquad \text{(A.3-26)}$$

Il s'ensuit que le rayon r_p est directement proportionnel au rayon de l'interface constitué par le cylindre intérieur de rayon de courbure r_{int} par l'intermédiaire de la relation suivante :

$$r_p = r_{int}\, f(\alpha_p)/f(\alpha_{int}) \qquad \text{(A.3-27)}$$

Cette analyse permet de conclure que, dans le cas du cisaillement simple annulaire d'un matériau continu classique avec une loi de comportement rigide plastique, la couche de sol en contact avec l'interface est, soit d'épaisseur nulle dans le cas associé, soit d'épaisseur non nulle et proportionnelle au rayon de courbure de l'interface (rayon du cylindre d'interface) dans le cas non associé.

Ces résultats qui ont été développés analytiquement dans le cas d'une loi de comportement rigide parfaitement plastique, restent valables pour des lois de comportement élasto-plastique générales, avec ou sans écrouissage. La couche de matériau plastifié à l'interface, que l'on peut appeler "couche d'interface", dépend des dimensions géométriques de l'échantillon et de l'interface. Cette dépendance provient non pas des lois de comportement mais du milieu continu utilisé pour modéliser le sol. Dans une description par milieu continu classique, les lois de comportement, du moins en statique, n'introduisent pas de longueur interne qui puisse contrôler la taille des zones plastiques. Il en résulte que la couche d'interface dépend directement des dimensions géométriques de l'échantillon et de l'interface.

Il existe de nombreux milieux continus qui ne soient pas classiques (cf. paragraphe 5 de la partie A). En statique, tous introduisent au moins une longueur interne qui contrôle la localisation des déformations, soit en bande de cisaillement, soit en couche d'interface.

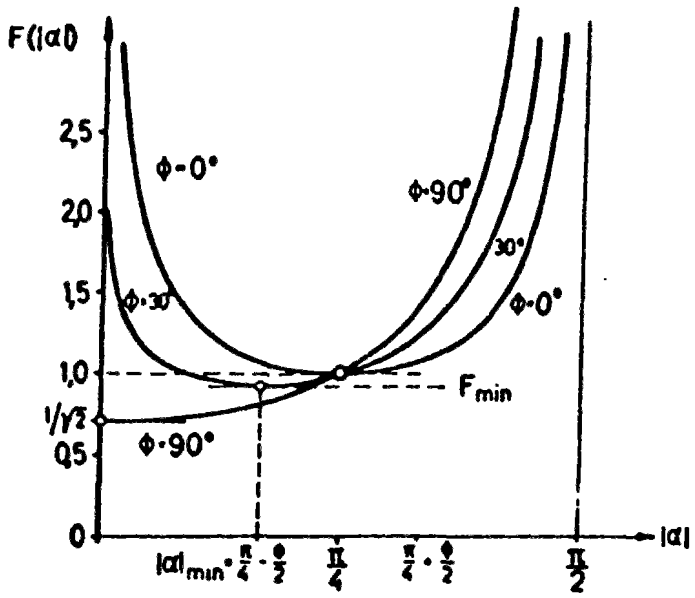


Figure A.3-2a : Fonction F(α)

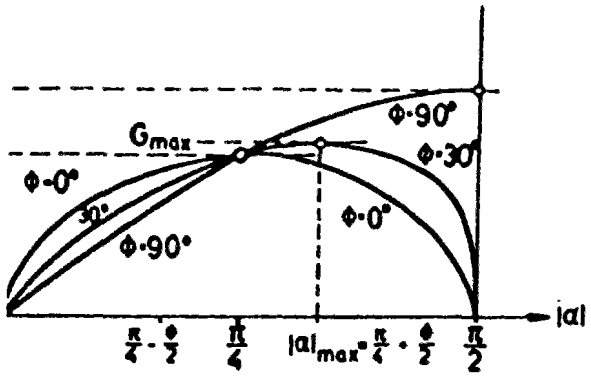


Figure A.3-2b : Fonction G(α)

Figure A.3-2 : Solutions analytiques pour le cas associé
(Bogdaneva-Bontcheva et Lippmann, 1972)

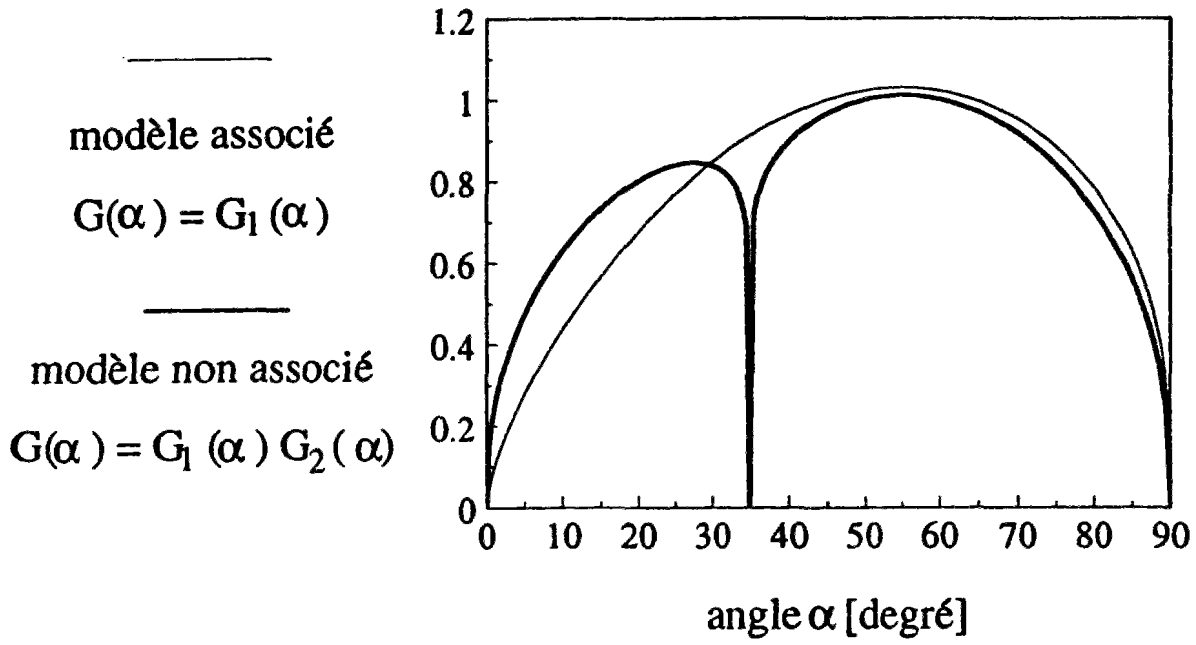


Figure A.3-3 : Solutions analytiques dans le cas général non associé;
fonction G(α) pour les valeurs numériques ($\phi = 35°$ et $\beta = 20°$ ou $35°$)

4 Importance des rotations des grains dans les couches d'interface et les bandes de cisaillement

Les essais en laboratoire et les simulations numériques de milieux granulaires par la méthode des éléments distincts tendent à montrer, de manière systématique, que le phénomène de localisation des déformations, que ce soit en bande de cisaillement ou en couche d'interface, est accompagné systématiquement par des rotations moyennes de grains très importantes (Mühlhaus et Vardoulakis, 1987; Bardet et Proubet, 1991; Ord et al., 1991; Teichman, 1989; Kishida et Uesugi, 1987; Boulon et al., 1992). L'ordre de grandeur de ces rotations moyennes de grains n'est pas de quelques degrés, comme l'on pourrait s'y attendre dans un milieu continu classique où les points matériels sont assujettis à suivre la rotation d'ensemble du milieu continu, notée Ω_{ij} , qui est définie comme étant la partie antisymétrique $U^a_{i,j}$ du gradient $U_{i,j}$ des déplacements, mais de l'ordre de plusieurs dizaines de degré en moyenne, avec un fort écart type, ce qui peut donner lieu à des rotations individuelles de l'ordre de 100°. Dans un milieu continu classique, la cinématique des points matériels est définie simplement à partir des degrés de liberté en translation, ce qui ne permet pas de modéliser des rotations individuelles des points matériels, autres que celles imposées par le milieu continu lui même. Seuls les milieux continus généralisés avec une microstructure peuvent permettre de modéliser des déformations et rotations au niveau local des points matériels (Mindlin, 1964; Eringen, 1966; Germain, 1973).

Quel que soit le modèle continu utilisé, classique ou généralisé, il convient de définir une correspondance entre la cinématique du milieu réel étudié et la cinématique du milieu modèle utilisé. Dans le cas d'un milieu continu classique, le champ de déplacements au sein d'un échantillon peut être obtenu de manière simple, s'il s'agit d'un essai homogène comme l'essai triaxial, en considérant le déplacement des embases, ou de manière plus complexe, dans le cas d'essai fortement hétérogène, par la méthode de la stéréophotogramétrie. Dans le cas d'un milieu continu généralisé avec microstructure, la définition et la mesure des champs de variables cinématiques est plus complexe puisqu'il s'agit de définir non seulement les champs de déplacements, dits macroscopiques, comme pour un milieu continu classique, ce qui est simple et classique, mais aussi les champs de déformations et rotations de la microstructure. Parmi les milieux continus avec microstructure, le milieu le plus simple est formé d'une microstructure rigide, qui n'introduit dans la cinématique que trois variables cinématiques nouvelles, les trois degrés de liberté de rotation. Un tel milieu est appelé milieu de Cosserat, en hommage aux frères Cosserat, qui les premiers introduisirent un tel milieu (1907, 1908, 1909). Dans un tel milieu continu, le problème essentiel est de relier le champ des rotations de Cosserat ω^c_{ij} au champ de rotation des grains ω^g_{ij} par une procédure appropriée.

La rotation des grains dans un milieu granulaire est un sujet qui a fait l'objet de nombreuses études et a suscité beaucoup de questions. En particulier, des rotations de grains très importantes ont été observées par Roscoe et Schofield (1964), Oda (1972), Ochiai et Yamanouchi (1972) lors d'écoulements de milieux granulaires. Plus précisément, Roscoe et Schofield (1964) ont écrit, en discutant la théorie de Rowe "stress dilatancy theory", qu'ils ont observé des rotations de grains égales et opposées de l'ordre de 15° pour des particules voisines dans un sable dense".

Cependant, en dehors des écoulements, il a toujours été supposé dans le passé que le glissement relatif des grains était le mécanisme prépondérant par rapport aux rotations des grains supposées négligeables (Newland et Allely, 1975; Rowe, 1962; Horne, 1965, 1969; Matsuoka, 1973; Oda, 1974; Murayama, 1977).

En fait, il convient de bien distinguer les essais homogènes, où les déformations ne présentent pas de forts gradients, et les essais avec localisation des déformations (figure A.4-1).

Dans le premier cas, des rotations de grains importantes peuvent se produire mais leur moyenne est égale à la rotation du milieu continu, du moins si le matériau est isotrope. Pour ce qui concerne les matériaux avec une anisotropie initiale, on pourra se référer au paragraphe 7 de la Partie A.

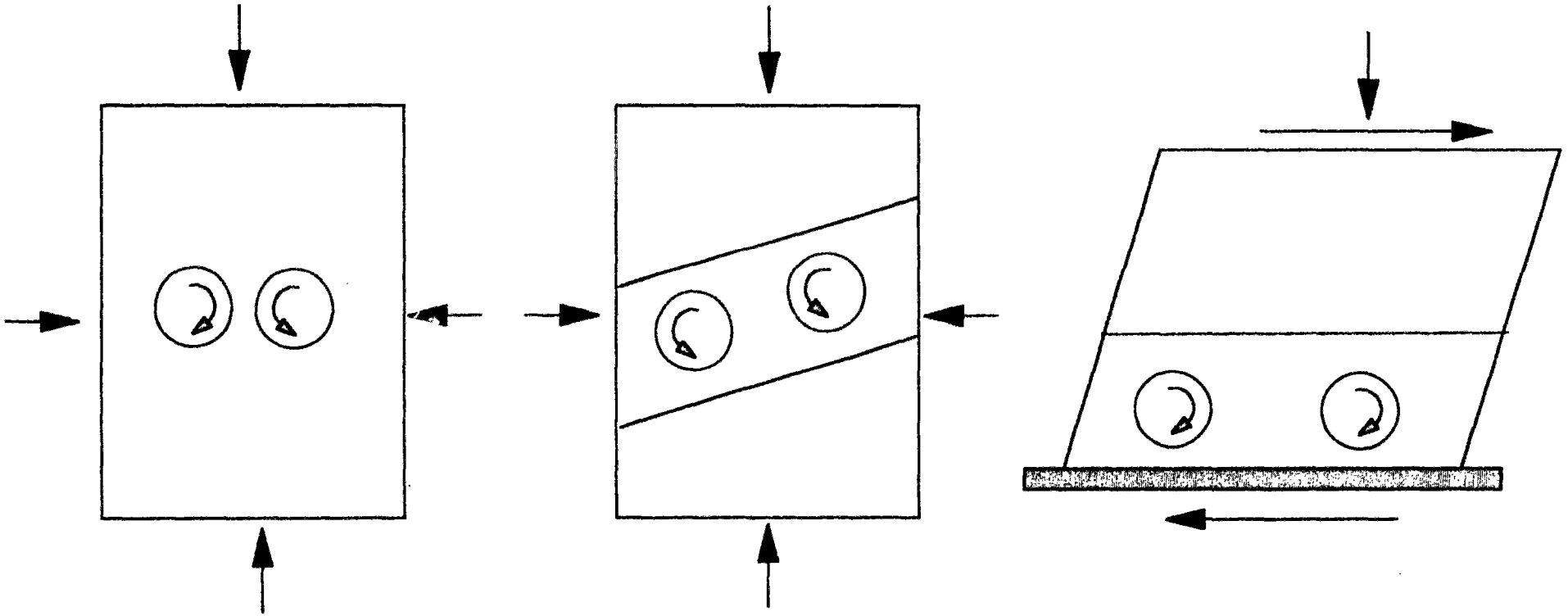
Dans le deuxième cas, les rotations des grains peuvent être très importantes dans les zones localisées, c'est à dire les bandes de cisaillement et les couches d'interface, et leur moyenne, définie sur ces zones localisées, diffère très nettement de la rotation d'ensemble du milieu continu (figure A.4-1).

4.1 Rotation moyenne des grains dans un essai homogène

En ce qui concerne les essais homogènes, les études menées par Oda et al. (1982) sont très intéressantes. Des essais à l'appareil biaxial ont été réalisés sur des mélanges de rouleaux de Schneebeli de différentes sections et tailles. Ils ont en particulier étudié le rapport R, entre le nombre de contacts où le glissement relatif est prédominant et le nombre de contacts où la rotation relative est prédominante. Ce rapport R est fonction de l'angle de frottement entre les grains et de l'angle de dépôt. Plus précisément, pour des ovales avec un élancement de 1,5 et un angle de frottement μ de 26°, le rapport R varie entre 0,2 et 0,51 tandis que pour des ovales avec un angle de frottement double de 52°, ce même rapport chute entre 0,12 et 0,23. Cette variation montre bien l'importance croissante des rotations des grains quand l'angle de frottement entre les grains augmente.

Les histogrammes des rotations des grains ω^g , en radian, normalisées par la déformation axiale ε_1 , sont présentés sur les figures A.4-2a, A.4-2b, A.4-2c et A.4-3a, A.4-3b, et A.4-3c pour deux angles de frottement $\mu = 26°$ et $\mu = 52°$ et trois angles de dépôt initial : $\theta = 0$, 60 et 90°. Il convient de noter la grande dispersion des résultats ainsi que l'importance des rotations observées. Par exemple, un rapport ω^g/ε_1 de 30 correspond, pour une déformation axiale de 1% à une rotation des grains de 30 radians.

Il faut noter également, dans le cas d'un angle de dépôt coïncidant avec la direction de la contrainte principale majeure ($\theta = 0$ °), que la rotation moyenne des grains est égale à 0°, ce qui est aussi la rotation du milieu continu (essai biaxial sans rotation des contraintes). Pour des angles de dépôt initial différents de 0°, la moyenne des rotations est non nulle mais très proche de 0°. Là aussi, la rotation moyenne des grains est très proche de la rotation d'ensemble donnée par le milieu continu anisotrope.



essai homogène

essai localisé
avec bande de cisaillement

essai localisé
avec couche d'interface

$-40° < \omega_g$ [radian] / $\varepsilon 1 < +40°$

$<\omega_g> = \Omega$

Oda et al. (1982)

$<\omega_g> \sim 50°$

$<\omega_g> >> \Omega$

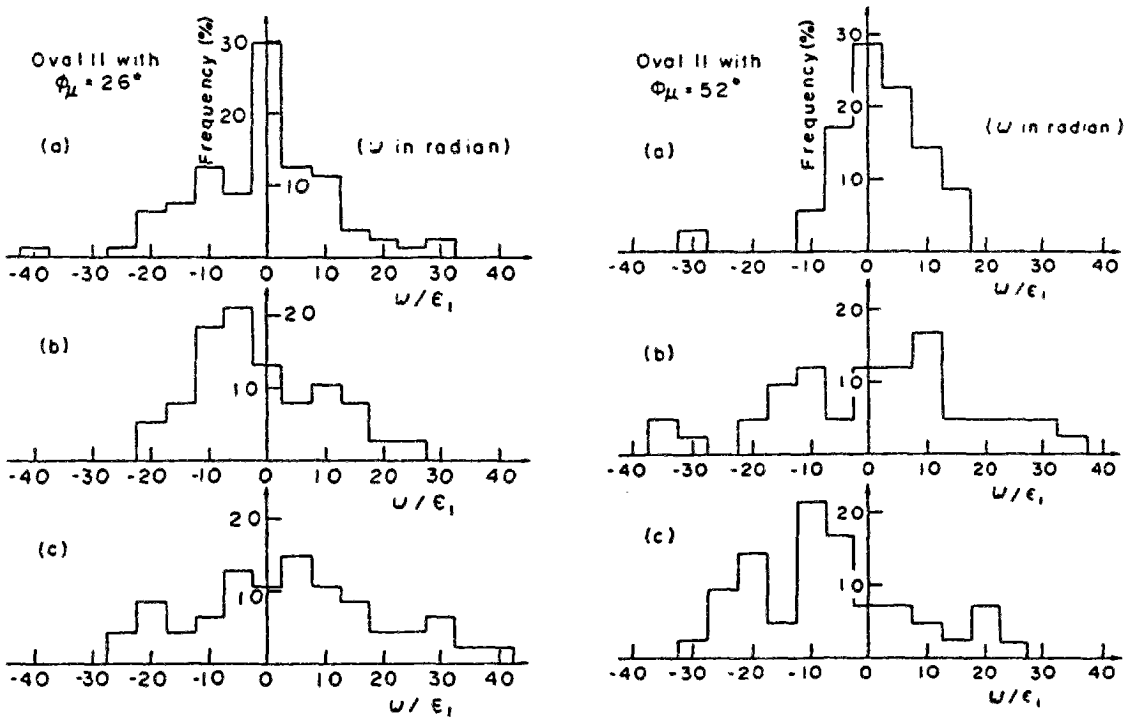
Bardet et Proubet (1993)

$<\omega_g> \sim 40°$à $60°$

$<\omega_g> >> \Omega$

Boulon et al. (1992)
présente thèse

Figure A.4-1 : Valeurs des rotations moyennes de grains suivant les essais



Histogrammes des rotations des grains pour des ovales avec divers angles de dépôt θ
Figure A.4-2: Angle de frottement μ=26° Figure A.4-3: Angle de frottement μ=52°
(a) θ = 0° , (b) θ = 60° et (c) θ = 90° (Oda et al., 1982)

4.2 Essai biaxial avec bande de cisaillement

Si dans un essai biaxial ou triaxial homogène, la rotation moyenne des grains coïncide avec la rotation d'ensemble du milieu continu, à un coefficient près, de l'ordre de 1 à 2, correspondant à l'anisotropie initiale (cf. paragraphe 7, partie A), par contre, dès que la localisation en bande de cisaillement a démarré, il est classiquement observé des rotations de grains très importantes, que ce soit dans les sables (Mühlhaus et Vardoulakis, 1987), les roches formées de grains noyés dans une matrice (Ord et al., 1991) ou dans les milieux granulaires modèles constitués de rouleaux (Bardet et Proubet, 1993). L'étude réalisée par Bardet et Proubet (1993) à l'aide de la méthode des éléments distincts est à ce titre très intéressante. Ils considèrent l'essai biaxial en grandes déformations d'un milieu granulaire modèle formé de disques (figure A.4-4). Très rapidement avec le chargement, une bande de cisaillement apparaît avec une largeur de l'ordre de 15 à 20 grains, qui évolue sensiblement au cours du cisaillement (figure A.4-5). La courbe effort-déformation est marquée par un important radoucissement tandis que la courbe déformation volumique - déformation axiale présente un angle de dilatance diminuant avec la chargement (figure A.4-6). Si l'on s'intéresse au déplacement normal, noté ici u_ξ , et à la rotation moyenne des grains, au travers de la bande de cisaillement, selon les coordonnées locales η, on observe de fortes rotations de grains au centre de la bande (η = 0), de l'ordre de 40 à 50°, ainsi qu'une forte dilatance locale (figure A.4-7).

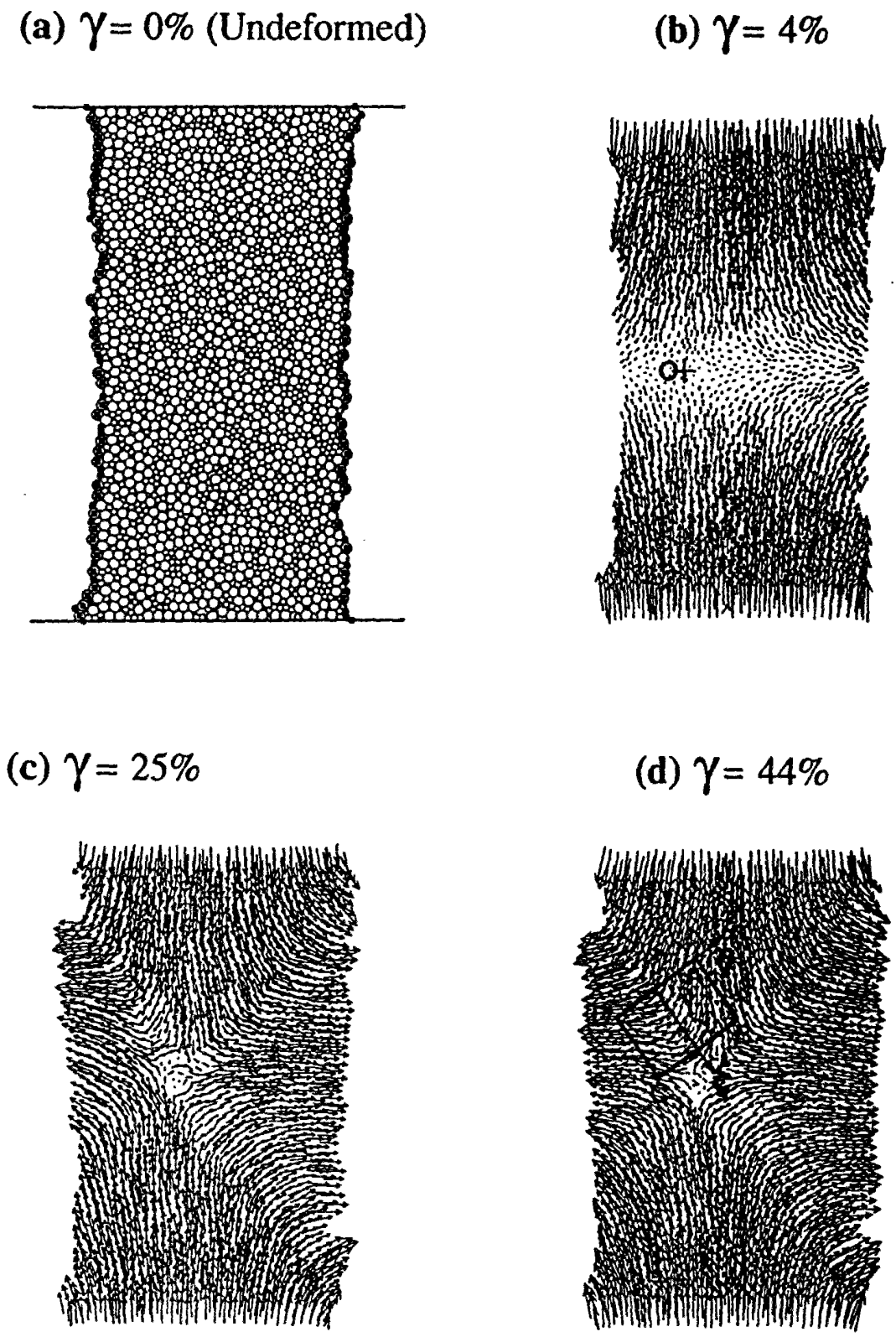


Figure A.4-4 : Modélisation par éléments distincts d'un essai biaxial et évolution du champ des déplacements en fonction de la déformation γ (Bardet et Proudet, 1993)

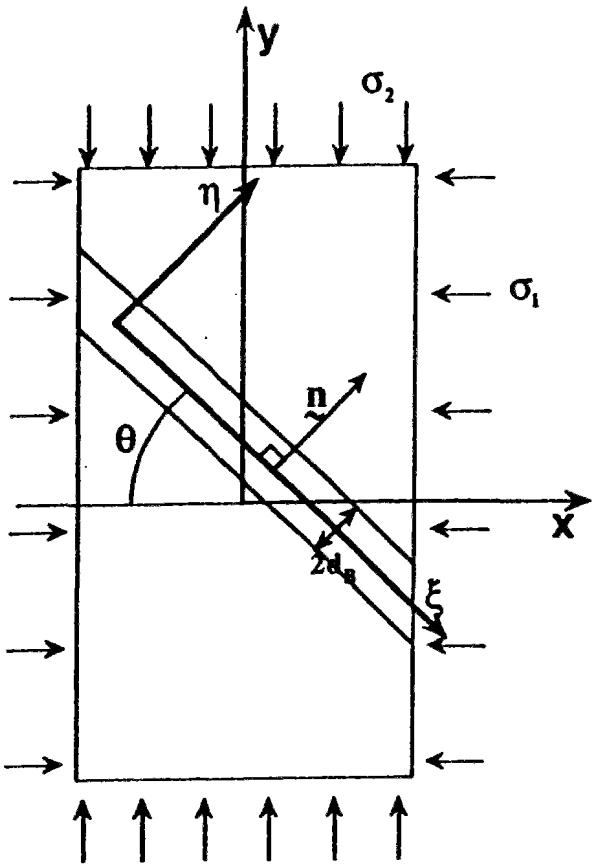


Figure A.4-5a : Essai biaxial (notations)

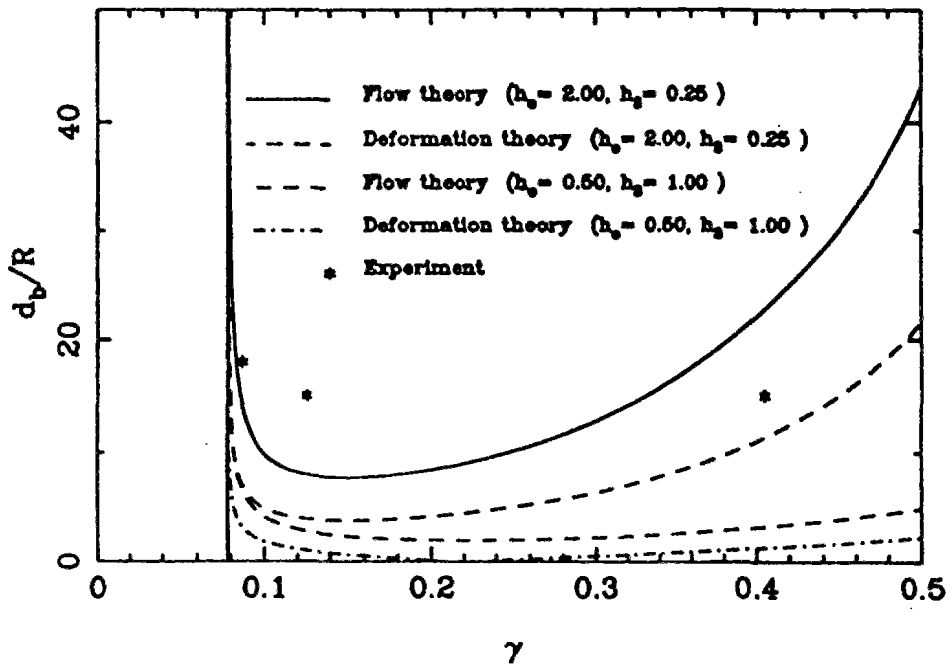


Figure A.4-5b : Evolution de l'épaisseur de la bande de cisaillement en fonction de la déformation γ

Figure A.4-5 : Modélisation d'un essai biaxial par éléments distincts et par milieu continu de Cosserat (Bardet et Proubet, 1993)

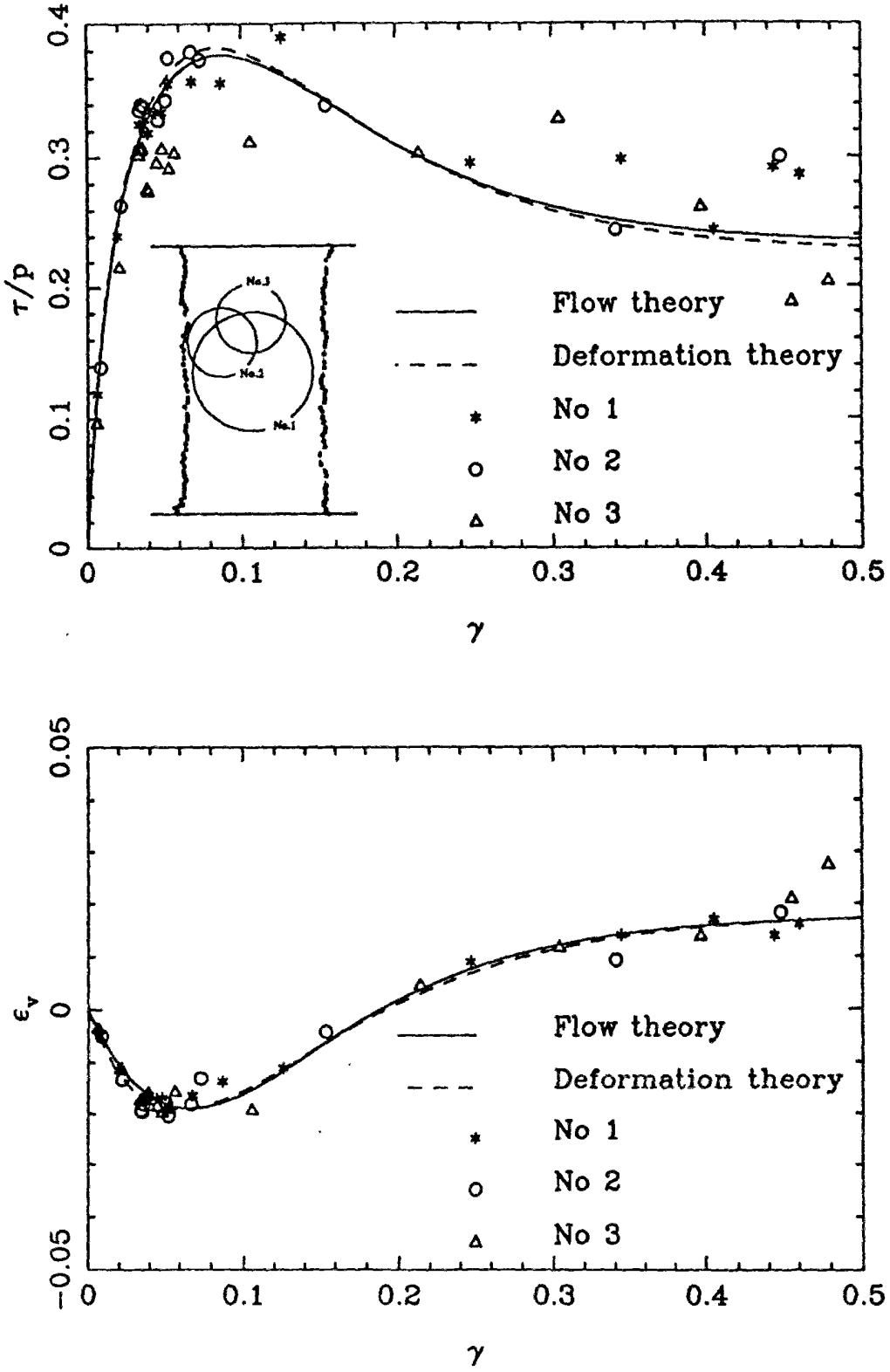


Figure A.4-6 : Evolution du cisaillement τ et de la déformation volumique ε_v en fonction de la déformation γ ; comparaison entre les modélisations par milieu continu et par éléments distincts (Bardet et Proudet, 1993)

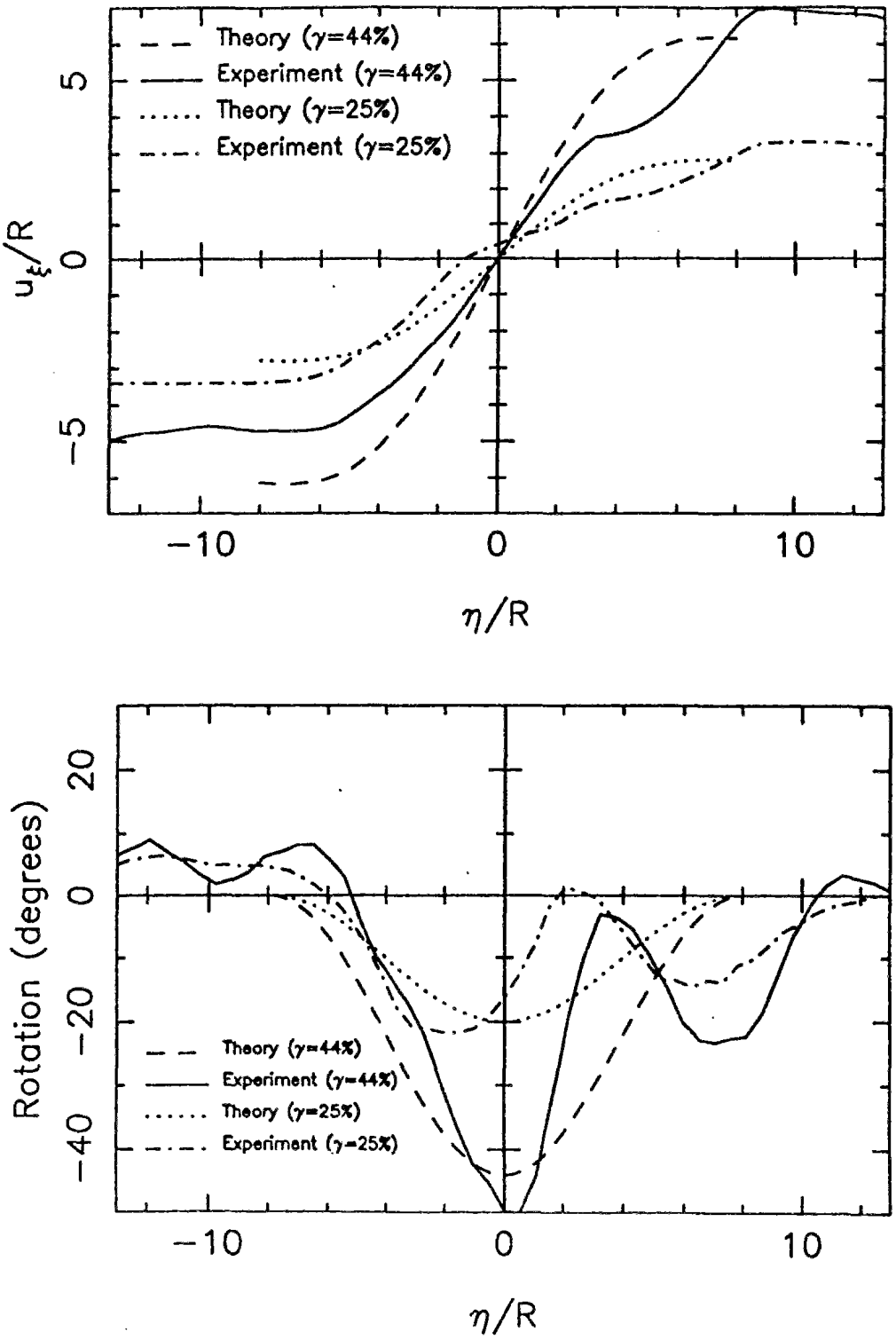


Figure A.4-7 : Profils selon la direction normale à la bande de cisaillement η/R
du déplacement tangentiel à la bande de cisaillement u_ξ
et de la rotation propre des grains ω_3^c
(Bardet et Proudet, 1993)

4.3 Essai de cisaillement direct plan d'un sable (Boulon et al., 1993)

Kishida et Uesugi (1987) ont noté au cours du cisaillement simple plan d'un sable avec une interface métallique des rotations de grains importantes au sein de la couche d'interface. Mais ce n'est que récemment que des mesures précises des rotations de grains au sein de couches d'interface ont été réalisées sur du sable grossier d'Hostun (Boulon et al., 1992, 1993). Quelques résultats sont présentés sur la figure A.2-11 dans le paragraphe 2 de la partie A. La moyenne des rotations de grains est de l'ordre de 40° avec des valeurs extrêmes de 90° pour des déplacements d'interface de l'ordre du centimètre.

4.4 Essai de cisaillement simple annulaire de rouleaux

Bogdaneva-Bontcheva et Lippmann (1973) ont noté qualitativement dans leurs essais de cisaillement simple annulaire de rouleaux de Schneebeli des rotations de rouleaux importantes près de l'interface mais ils n'ont fait aucune mesure. Pour obtenir, de manière simple et automatique, sur de grands nombres de grains, des mesures de déplacements et rotations au sein d'une couche d'interface, nous avons modélisé numériquement un essai de cisaillement simple annulaire à l'aide de la méthode des éléments distincts.

La méthode des éléments distincts est un outil puissant pour modéliser le comportement des milieux granulaires sur ordinateur et obtenir des résultats intéressants et souvent très généraux, à partir d'hypothèses simples sur l'interaction entre les grains. Pour ce qui concerne les interfaces, nous avons modélisé le cisaillement simple annulaire d'un milieu granulaire formé de disques rigides à l'aide du logiciel d'éléments distincts développé à l'Université de Montpellier II par Jean (1990). Dans ce paragraphe nous présenterons la méthodologie pour construire un échantillon par ordinateur puis pour dériver la cinématique du milieu continu de Cosserat équivalent à partir de la cinématique du milieu granulaire réel. La dérivation des champs de variables statiques, contraintes et couples contraintes, à partir des forces intergranulaires est présentée dans le paragraphe 7 de la partir A, car elle est fondée sur les mêmes hypothèses et équations que la dérivation des propriétés élastiques du milieu continu de Cosserat à partir de celles du milieu granulaire.

4.4.1 Définitions et notations

On considère le cisaillement simple annulaire d'un milieu granulaire formé de rouleaux de même taille. Les paramètres du problème sont définis et listés ci-dessous.

Géométrie et autres caractéristiques non mécaniques

N_g : nombre de grains
R_g : rayon des rouleaux
R_{int} : rayon intérieur de l'échantillon = rayon de l'interface
R_{ext} : rayon extérieur de l'échantillon (condition à la limite extérieure)
$H = R_{int} - R_{ext}$: épaisseur de l'échantillon

Pour les applications numériques présentées ci-dessous, nous avons pris les valeurs suivantes des paramètres : N_g = 1086 grains, R_{int} = 0.1 m, R_{ext} (avant consolidation) = 0,2 m et R_{ext} (après consolidation) = 0,15 m, R_g = 3 mm.

Cinématique du milieu granulaire

(u_1 , u_2) ou (u_r , u_θ) : déplacements des grains

ω^g : rotation des grains autour de l'axe x_3

Cinématique du milieu continu de Cosserat équivalent

(U_1 , U_2) ou (U_r , U_θ) : déplacements des points matériels

ω^c : rotation des points matériels autour de l'axe x_3

4.4.2 Construction de l'échantillon

L'échantillon est construit à partir d'un maillage d'éléments finis entre R_{int} et un rayon extérieur nettement plus grand que le rayon extérieur R_{ext} considéré pour l'essai. Le volume est découpé en éléments triangulaires de mêmes tailles. Dans chaque élément, un grain ou rouleau est ensuite inscrit. Le nombre final de grains désiré étant connu au démarrage, il conditionne le nombre d'éléments finis utilisés. On obtient ainsi un échantillon avec le nombre désiré de grains, disposés de manière très lâche puisque aucun des grains n'est en contact (figure A.4-8). Cet échantillon est ensuite compacté pour atteindre l'état initial de consolidation désiré (figure A.4-9).

4.4.3 Dérivation de la cinématique du milieu continu de Cosserat à partir de la cinématique du milieu granulaire

Le milieu granulaire est par définition discontinu. La cinématique du milieu granulaire n'est définie que sur les grains, supposés rigides. Les moyennes des déplacements des points d'un grain sont, par la définition même du centre de gravité, égales aux déplacements du centre de gravité :

$$\left\langle u_i(x_1', x_2') \right\rangle_{\text{volume d'un grain}} = u_i(G) \qquad \text{(A.4-1)}$$

où i varie de 1 à 2, x_i' sont les coordonnées locales et G est le centre de gravité du grain considéré.

Les grains sont considérés comme indéformables. Toutes les déformations sont concentrées aux points de contact. La cinématique du milieu granulaire est donc complètement décrite, à partir du moment où l'on connaît les déplacements u_i (j) avec i = 1 à 2, des centres de gravités G_j et la rotation ω^g de chacun des grains j = 1 à N_g .

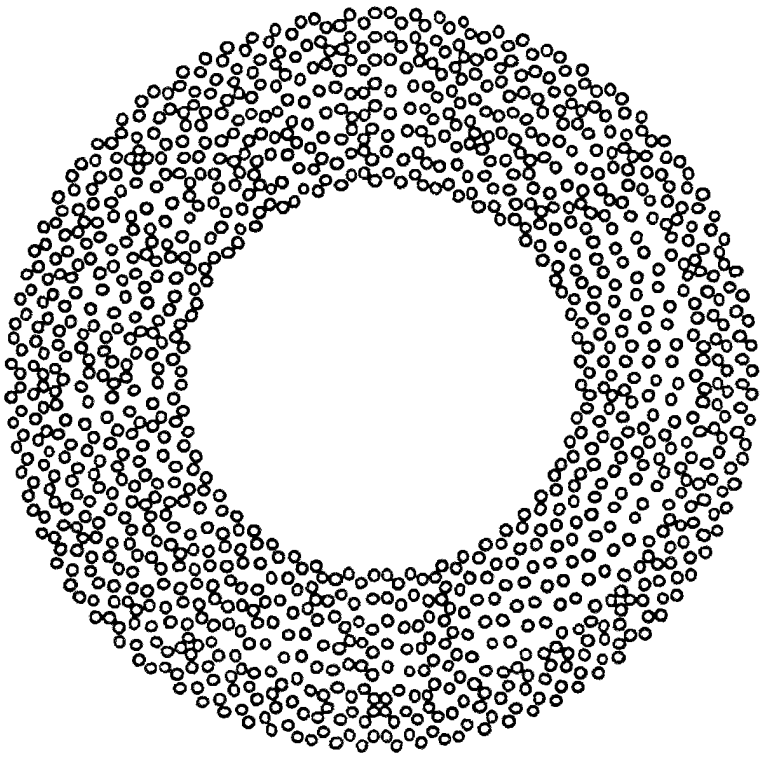


Figure A.4-7 : Echantillon avant consolidation
(R_{int} = 10 cm, R_{ext} = 15 cm, R_g = 1,5 mm)

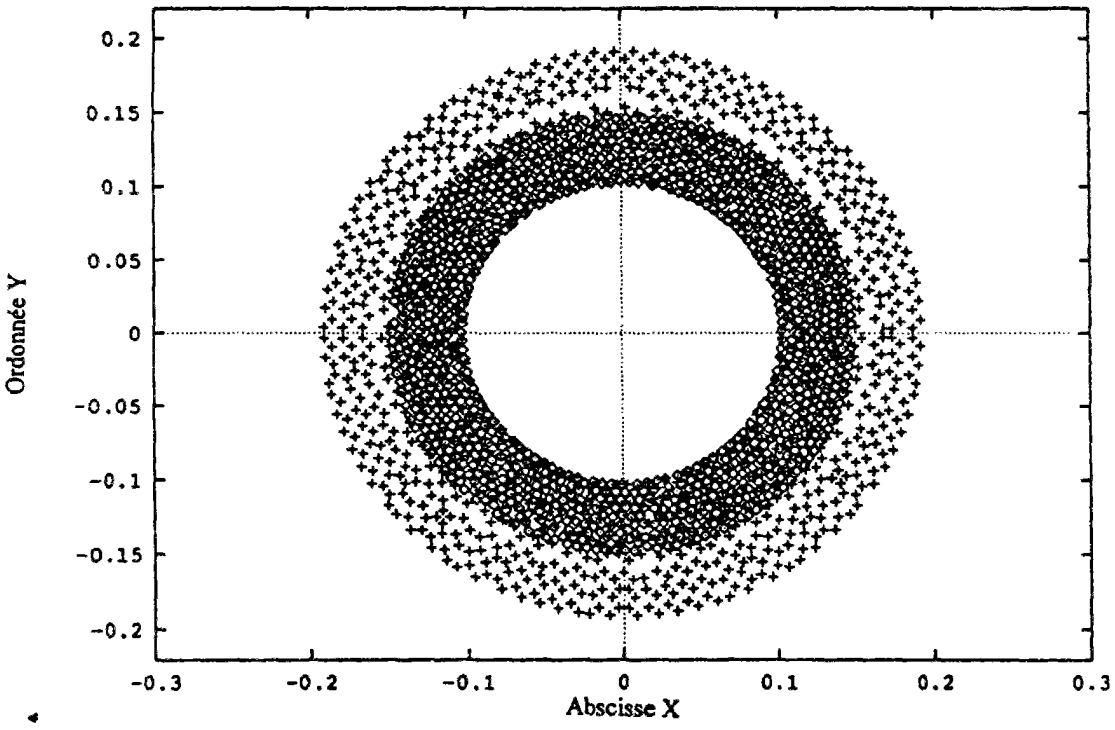


Figure A.4-8 : Echantillon avant et après consolidation
(1086 grains, R_g = 3,0 mm, R_{int} = 10 cm, R_{ext} = 15 cm, R_g = 1,5 mm)

Le cisaillement simple annulaire est, par définition, invariant par rapport à une rotation d'angle θ autour de l'axe x_3 . La seule variable spatiale d'intérêt est la distance à l'axe de rotation du cylindre d'interface, c'est à dire le rayon r, qui varie entre R_{int} et R_{ext} . Dans un essai réalisé sur le milieu granulaire modèle par la méthode des éléments distincts ou sur un matériau de Schneebeli réel, il est possible qu'il existe des variations des champs cinématiques suivant l'angle θ, variant entre 0 et 2 π. Ces variations n'ont pas de raisons d'être dans le milieu continu équivalent.

4.4.3.1 Valeurs moyennes des variables cinématiques

Les champs de déplacements $U_r(r)$, $U_\theta(r)$ et $\omega^c(r)$ du milieu continu de Cosserat équivalent sont construits en moyennant les champs de déplacements $u_r(r_j , \theta_j)$, $u_\theta(r_j , \theta_j)$ et $\omega^g(r_j , \theta_j)$ du milieu granulaire sur des volumes appropriés. En particulier, la valeur $U_r(r)$ sera obtenue en moyennant les déplacements $u_r(r_j , \theta_j)$ de tous les grains j , au nombre de $N(e_v)$, dont le centre de gravité G_j est situé dans l'anneau d'épaisseur e_v et défini par $r - \frac{e_v}{2} \le r_j \le r + \frac{e_v}{2}$ et $0 \le \theta_j \le 2\ \pi$:

$$U_r(r) = \left\langle u_r\left(r_j, \theta_j\right)\right\rangle_{r_j \in \left[r-\frac{e_v}{2}, r+\frac{e_v}{2}\right] \text{ et } \theta_j \in [0,2\ \pi]} \tag{A.4-2}$$

$$U_r(r) = \frac{1}{N(e_v)} \sum_{j \text{ tels que } r_j \in \left[r-\frac{e_v}{2}, r+\frac{e_v}{2}\right] \text{ et } \theta_j \in [0,2\ \pi]} u_r\left(r_j, \theta_j\right) \tag{A.4-3}$$

Les champs de déplacement tangentiel et de rotation sont calculés de même :

$$U_\theta(r) = \left\langle u_\theta\left(r_j, \theta_j\right)\right\rangle_{r_j \in \left[r-\frac{e_v}{2}, r+\frac{e_v}{2}\right] \text{ et } \theta_j \in [0,2\ \pi]} \tag{A.4-4}$$

$$\omega^c(r) = \left\langle \omega^g\left(r_j, \theta_j\right)\right\rangle_{r_j \in \left[r-\frac{e_v}{2}, r+\frac{e_v}{2}\right] \text{ et } \theta_j \in [0,2\ \pi]} \tag{A.4-5}$$

Les champs continus des déplacements $U_{i\ =\ 1,\ 2}$ et rotation ω^c ne sont définis qu'en un nombre N_p de points . Les valeurs aux autres points $r \in [R_{int}, R_{ext}]$ sont obtenus par interpolation entre ces valeurs.

Les déformations ε_{ij} et la courbure κ_{zr} sont obtenues à partir des dérivées des déplacements et rotations. Une première méthode de calcul consiste à utiliser un schéma d'interpolation de degré n et à calculer les dérivées avec le schéma d'interpolation correspondant d'ordre n-1. Une deuxième méthode consiste à approximer les données par une fonction définie par un certain nombre de paramètres, puis à optimiser ceux-ci suivant un critère donné (méthode des moindres carrés, etc.). Une amélioration consiste à choisir les paramètres de manière à optimiser simultanément la fonction et sa dérivée par rapport aux données.

Pour que les moyennes calculées aient un sens, il convient de considérer un nombre suffisant de grains dans chacun des N_p anneaux étudiés. Le nombre total de grains étudiés est de 1086. L'épaisseur de l'échantillon est de 5 cm. Le rayon des grains est de 3 mm. Le rapport H / R_g est donc d'environ 18. En prenant un nombre d'anneaux de 9, on a environ 120 grains par anneaux, ce qui a un sens statistiquement.

Le calcul des moyennes dépend de deux paramètres : le nombre d'anneaux N_p qui fixe en fait la distance d_v entre les points de calcul des moyennes :

$$d_v = H/N_v \qquad \text{(A.4-6)}$$

et l'épaisseur e_v des anneaux qui fixe le nombre de grains considérés en chaque point pour faire les moyennes des déplacements et rotations. Le nombre N_p de points en lesquels on peut calculer les champs moyens est limité par la nature granulaire du milieu. En moyenne, chaque anneau contient au moins N_g/N_p grains, si l'on prend une épaisseur $e_v = H/N_p$. Statistiquement, ce nombre doit être supérieur à 100.

Pour un nombre N_p d'anneaux donné, l'épaisseur e_v des anneaux peut être variée. Si elle est prise très grande, comme par exemple $e_v \geq 2\ H$, les champs de déplacements et rotation seront constants. Si elle est prise trop petite, le nombre de grains par anneau sera égal à 0 ou 1 au maximum, et les valeurs trouvées pour le milieu continu, seront en fait des valeurs ponctuelles. Les anneaux peuvent se recouvrir. Par contre, pour utiliser tous les grains dans le calcul, il convient de prendre au minimum $e_v \geq H / N_p$.

La figure A.4-10 présente le nombre de grains contenus dans 9 anneaux d'épaisseur e_v et disposés de manière régulière entre R_{int} et R_{ext}. Il convient de noter que localement près des bords, ce nombre de grains est légèrement plus faible, du fait des conditions de bords. Quand e_v / R_g prend les valeurs 1, 2, 3, 4, 6 et 10, le nombre moyen de grains par anneaux, varie de quelques dizaines à plusieurs centaines. Une épaisseur e_v donnant au minimum 100 grains par anneau semble acceptable, compte tenu de la taille de l'échantillon (1086 grains), ce qui nous conduit à sélectionner au minimum e_v supérieur à $2\ R_g$, c'est à dire, des anneaux d'épaisseur la taille des grains.

Les figures A.4-11a, A.4-12a et A.4-13a présentent la rotation ω_3^c, les déplacements tangentiel U_θ et normal U_r, obtenus à partir de moyennes sur des anneaux d'épaisseur e_v variant entre 2 et 10 R_g. Le nombre de points en lesquels ces moyennes sont calculées est gardé constant. Quand e_v augmente, les valeurs obtenues sont lissées et les gradients des différentes variables sont fortement réduits. Cependant, il convient de noter que pour une épaisseur e_v de $2\ R_g$, le nombre moyen de grains sur lesquels on calcule les moyennes est supérieur à 100 et on observe en interface, sur la première couche de grains une rotation moyenne d'environ 65 ° pour une rotation du cylindre d'interface de 45°. Il a été supposé pour ces simulations que l'interface était une surface parfaitement cylindrique avec un coefficient de frottement avec les grains, égal au coefficient de frottement intergranulaire, c'est à dire μ égale à 0,5. Quand l'épaisseur e_v augmente, les rotations moyennes près de l'interface diminuent et le fort gradient local disparaît. Il est observé un fort gradient à l'interface du déplacement tangentiel, caractéristique de la localisation en couche d'interface. En terme de déplacement normal, les résultats sont beaucoup moins nets du fait de la relative petite taille de l'échantillon et de la taille uniforme des grains.

Kishida et Uesugi (1986) ont noté expérimentalement dans les couches d'interface, une forte dispersion des déplacements autour des valeurs moyennes. Ce phénomène a été également observé sur les simulations (figures A.4-11b, A.4-12b et A.4-13b). Pour ce qui concerne les présentes simulations, l'écart type moyen des rotations dans la première couche de grains en contact avec l'interface est de l'ordre de 75°, pour une valeur moyenne de 65°. On peut donc s'attendre à observer dans la couche d'interface des rotations de grains dans l'intervalle 0 - 150° , ce qui a été confirmé par des observations sur du sable d'Hostun grossier (Boulon et al., 1993).

L'écart type d'une variable mesure les variations de cette variable par rapport à cette moyenne. Il mesure en quelque sorte la "température" du matériau, de manière similaire à ce qui existe dans la théorie des gaz parfaits ou la théorie des écoulements granulaires (Jenkins, 1993).

Pour une épaisseur e_v donnée, on peut faire varier le nombre N_p de points en lesquels on calcule les moyennes des variables. Sachant que l'épaisseur de l'échantillon est d'environ 18 R_g , c'est à dire 9 grains, il semble peut utile d'aller regarder les moyennes sur un nombre de points supérieur à 9. C'est ainsi que si l'on regarde avec une trop grande précision, les variations des paramètres, par exemple en 39 points, on obtient des courbes avec de fortes oscillations autour des valeurs moyennes calculées en 9 points (figures A.4-14a, b, c et d). La précision avec laquelle on peut calculer les champs de variables cinématiques dans un milieu granulaire est donc limitée par la taille même des grains. Il convient de noter que les oscillations observées, par exemple sur le nombre de grains contenus dans un anneau d'épaisseur e_v , peuvent être attribuée en grande partie à un phénomène de cristallisation des grains, puisque ceux-ci sont tous de même taille (figures A.4-14a, b, c et d).

4.4.3.2 Validité des milieux continus équivalents

Les simulations exposées dans le paragraphe précédent permettent de mettre en évidence les fortes rotations de grains et la localisation du déplacement tangentiel dans les couches d'interface. Cependant, elles ne sont que partielles, dans la mesure où l'on n'a construit que la cinématique du milieu continu équivalent. Dans le paragraphe 7 de la partie A, nous proposons deux méthodes pour construire la statique du milieu continu à partir de celle du milieu granulaire, une méthode basée sur des moyennes volumiques, et l'autre basée sur des moyennes surfaciques.

D'autres auteurs se sont intéressés à la validité des milieux continus. En particulier, on peut citer Mühlhaus et Chow (1991) qui ont comparé le cisaillement simple plan d'un milieu granulaire et du milieu continu de Cosserat équivalent, du point de vue de la statique et ont obtenu une bonne concordance.

Dans l'exemple du biaxial traité par Bardet et Proubet (1993), une comparaison entre milieu continu de Cosserat et milieu granulaire a été également faite, aussi bien pour la statique que pour la cinématique. Elle a donné des résultats satisfaisants compte tenu du nombre restreint de grains (figures A.4-6 et A.4-7).

Enfin, il faut citer les travaux de Chang et Liao (1990) qui ont comparé les champs de déplacements et rotations des grains entre un milieu granulaire et un milieu continu généralisé et ont obtenu d'excellents résultats. Les seules différences observées étant dans les coins, où les effets de bords sont les plus sensibles (figure A.4-15).

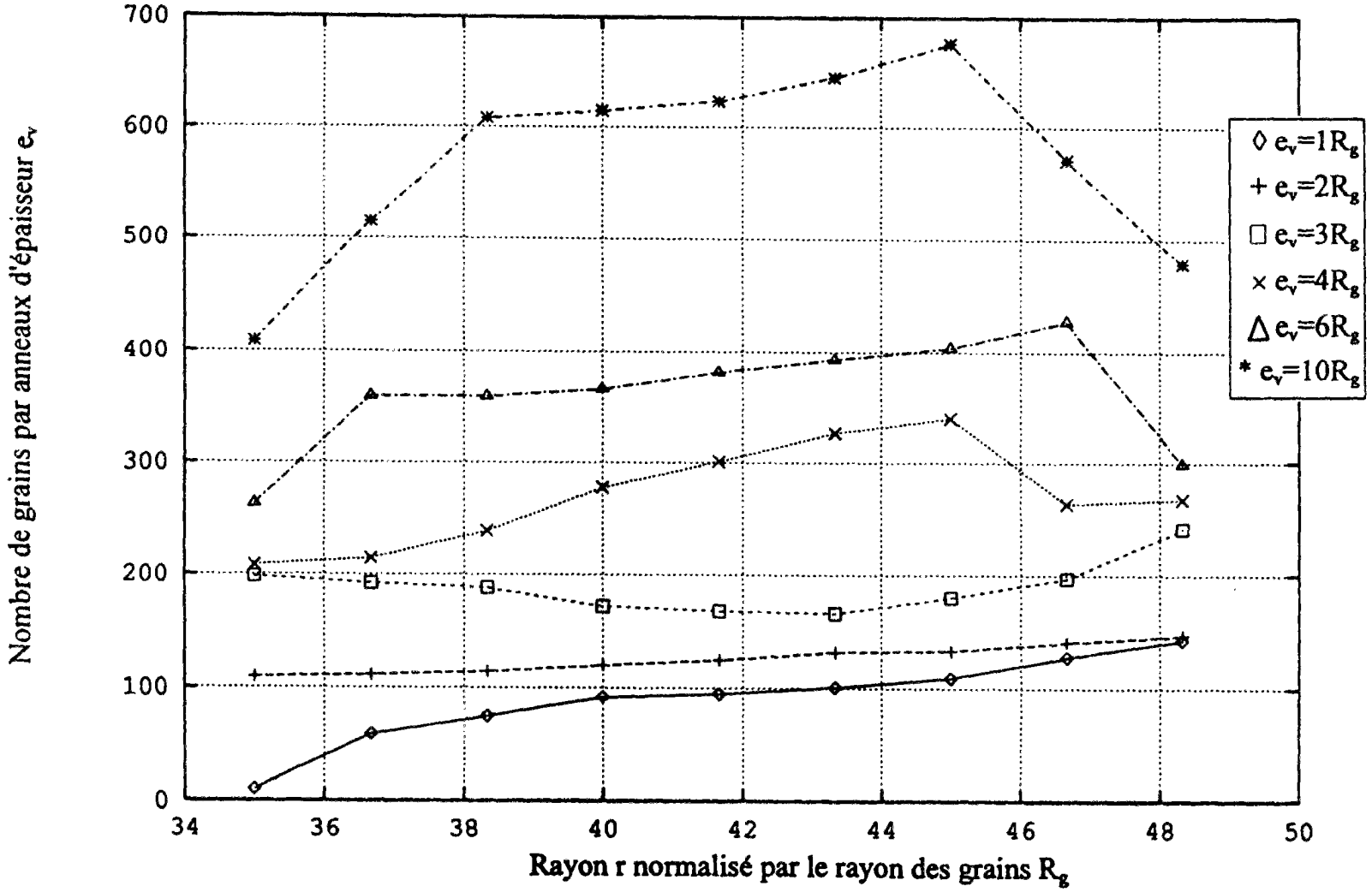


Figure A.4-10 : Nombre de grains considérés par point pour calculer les moyennes

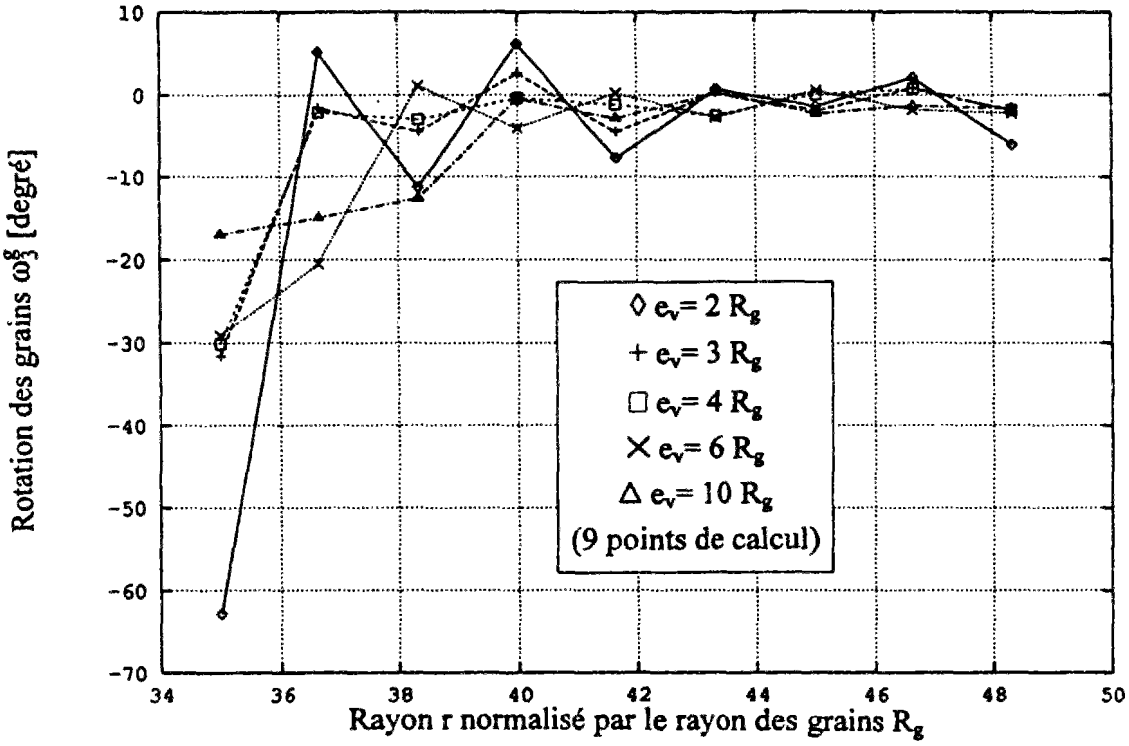


Figure A.4-11a : Rotation moyenne des grains dans l'échantillon

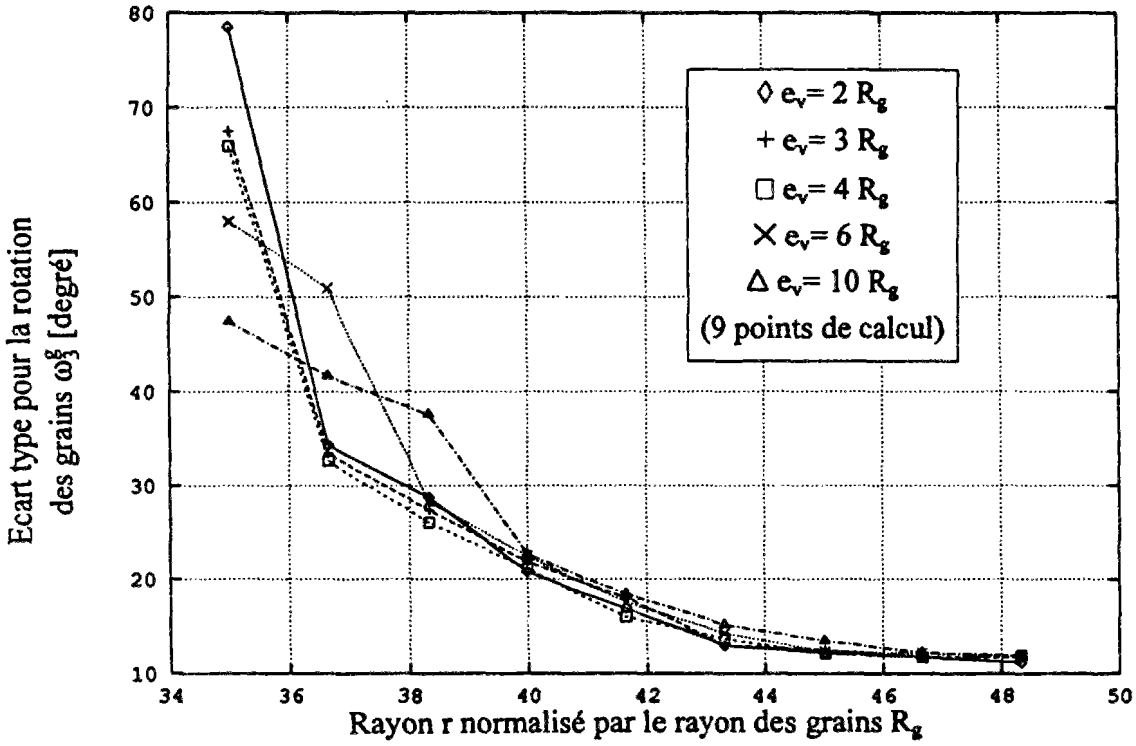


Figure A.4-11b : Ecart type de la rotation des grains dans l'échantillon

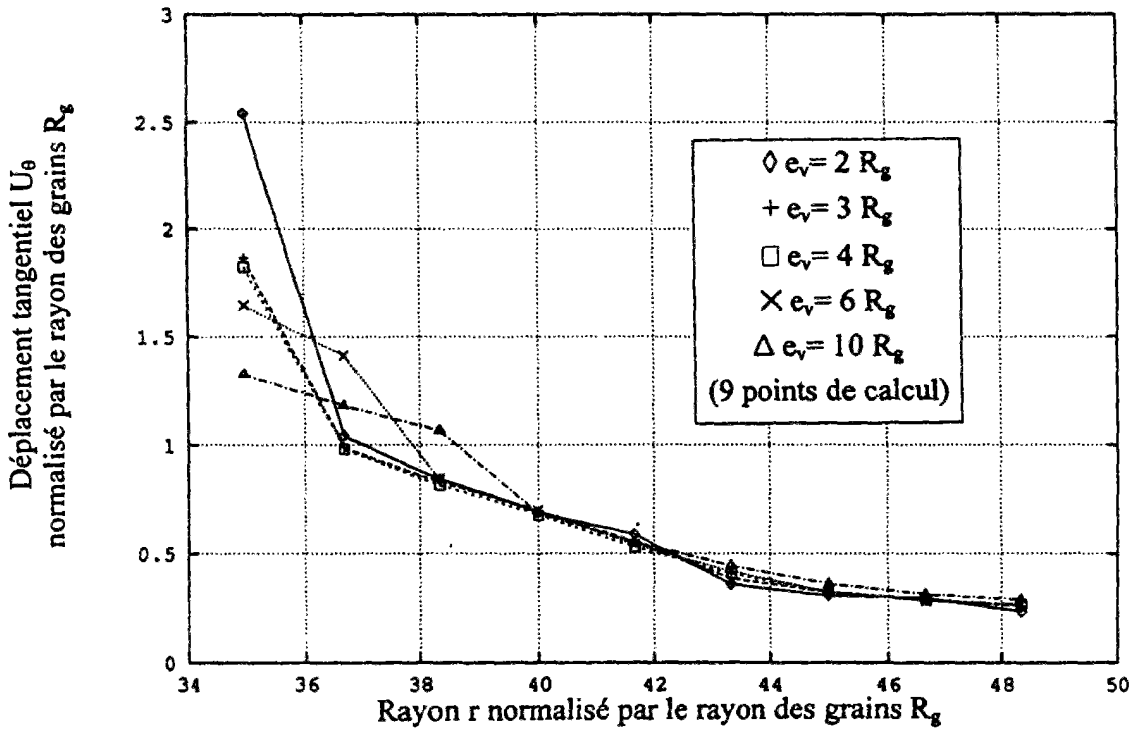


Figure A.4-12a : Déplacement tangentiel moyen des grains dans l'échantillon

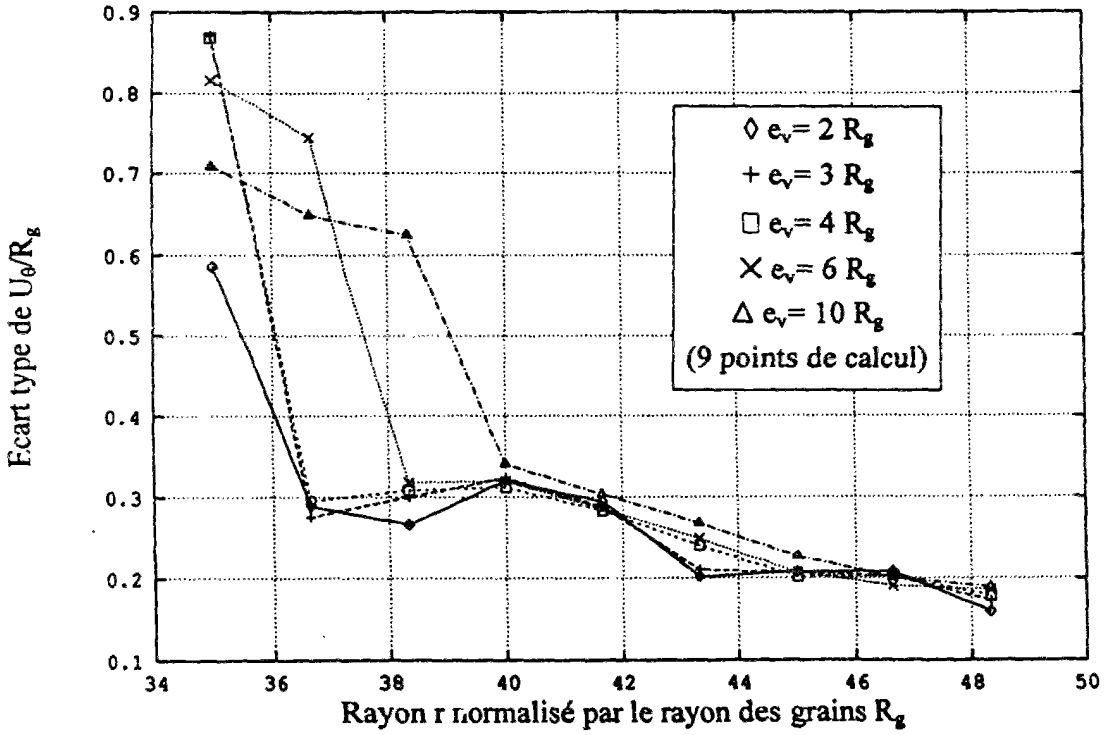


Figure A.4-12b : Ecart type du déplacement tangentiel des grains dans l'échantillon

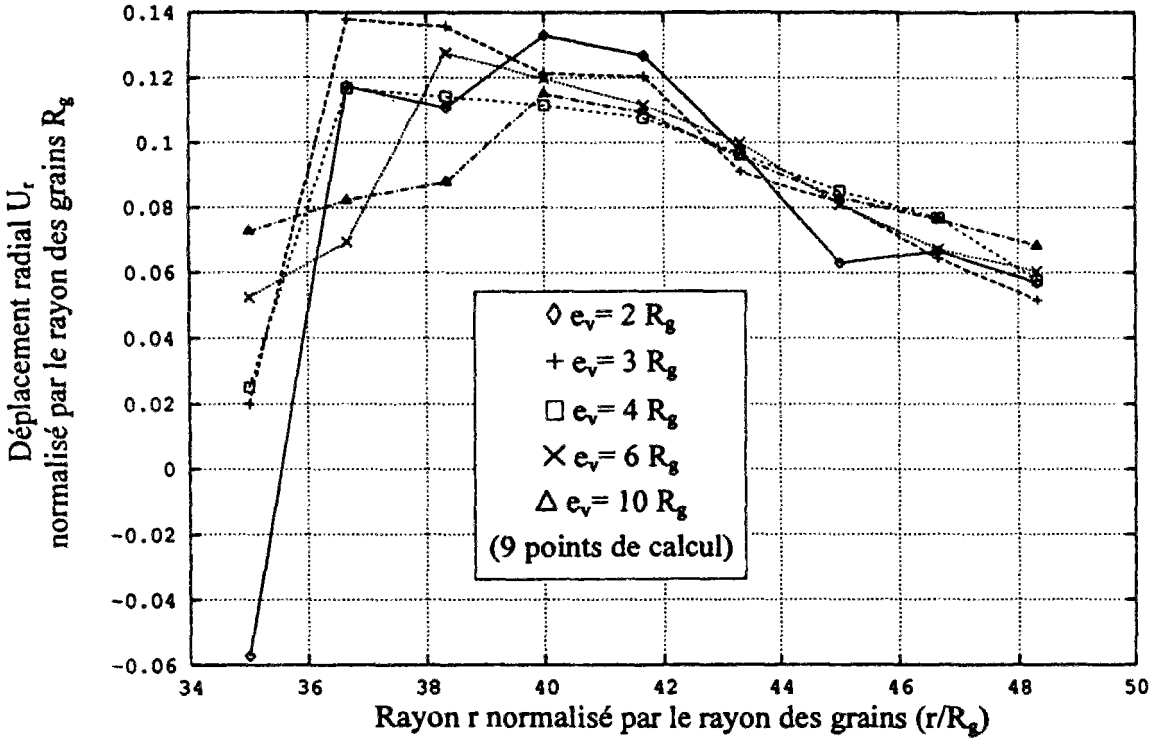


Figure A.4-13a : Déplacement normal moyen des grains dans l'échantillon

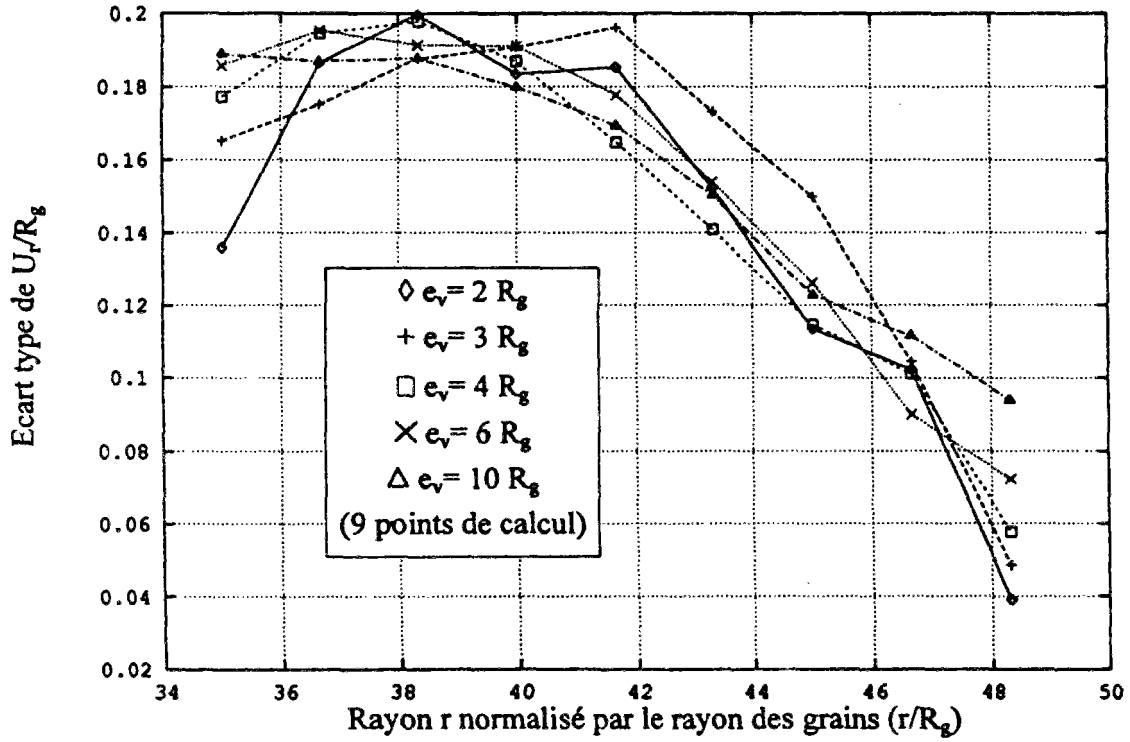


Figure A.4-13b : Ecart type du déplacement normal des grains dans l'échantillon

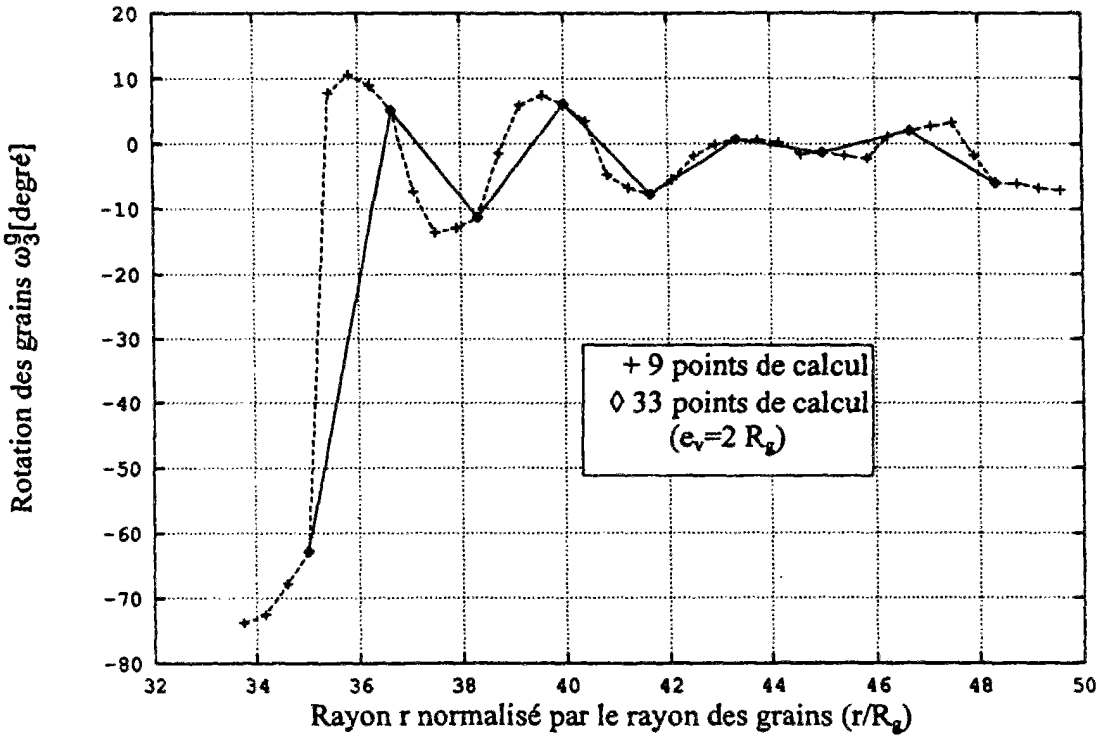


Figure A.4-14a : Influence sur la rotation moyenne
de la largeur des anneaux sur lesquels les moyennes sont calculées

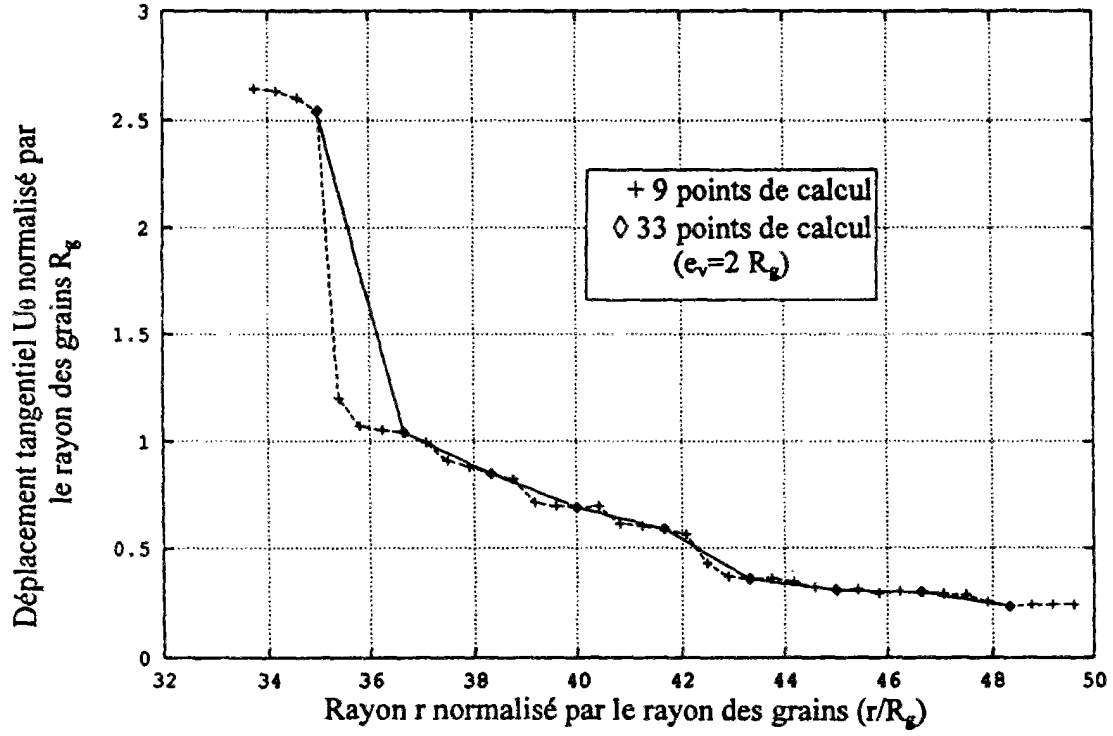


Figure A.4-14b : Influence sur le déplacement tangentiel moyen
de la largeur des anneaux sur lesquels les moyennes sont calculées

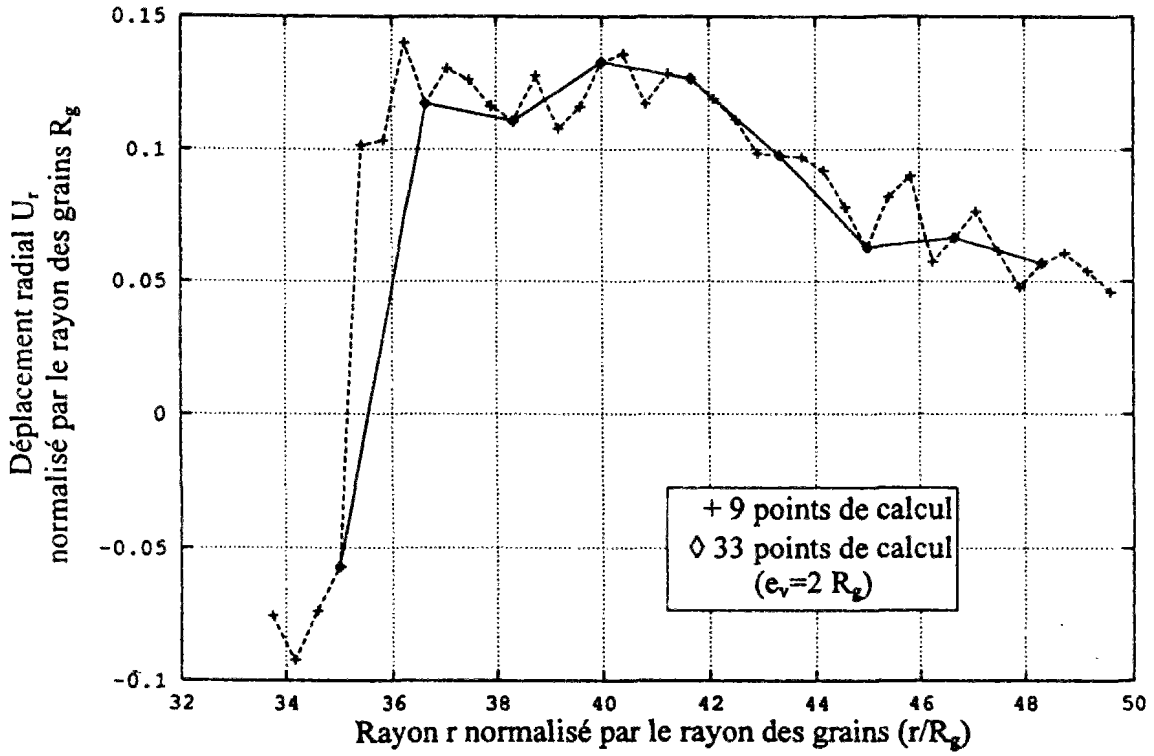


Figure A.4-14c : Influence sur le déplacement normal moyen
de la largeur des anneaux sur lesquels les moyennes sont calculées

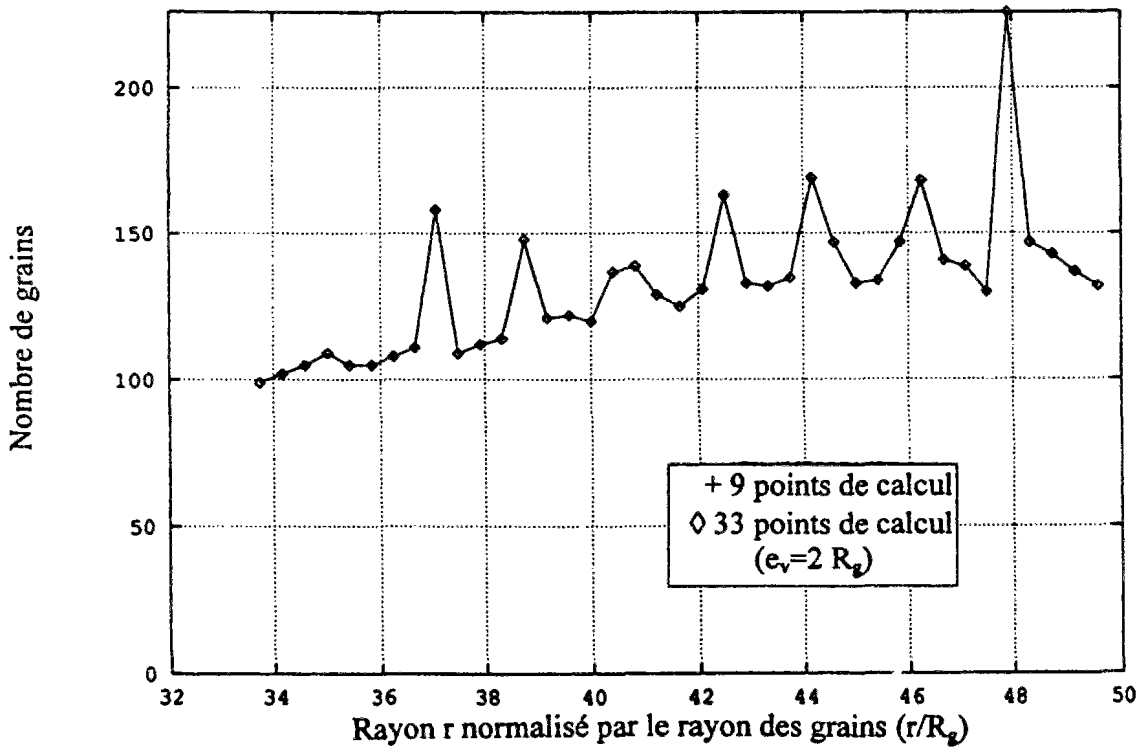
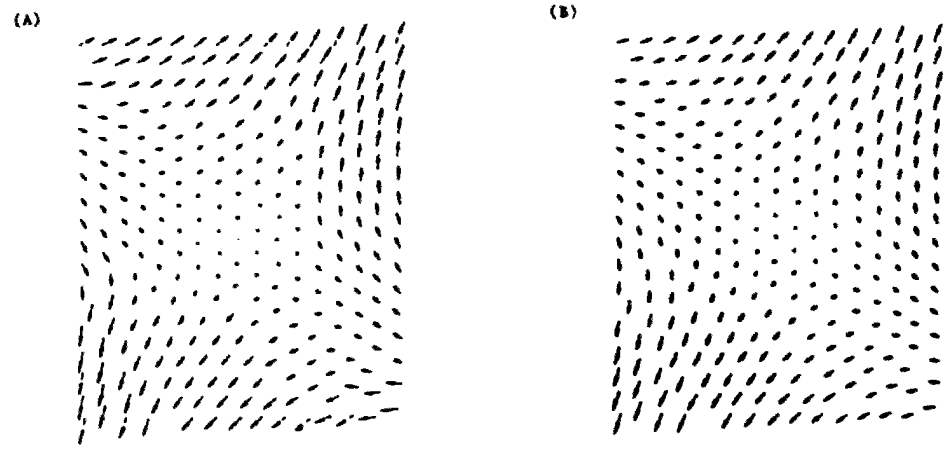
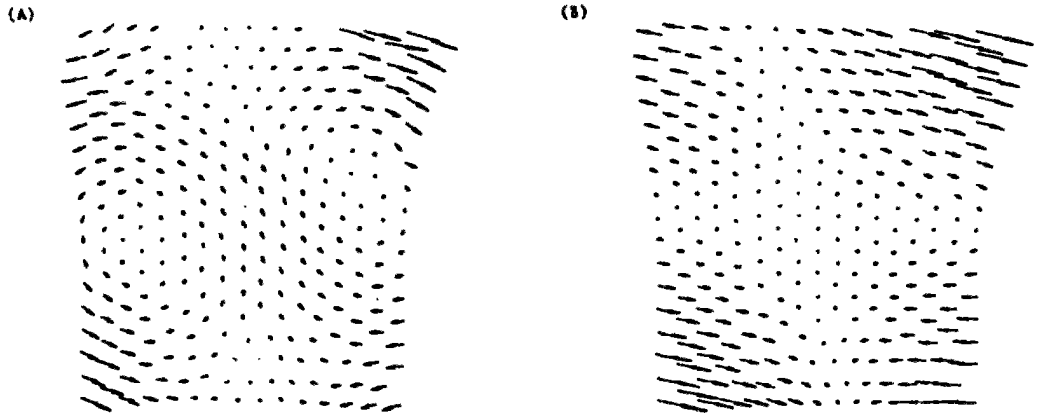


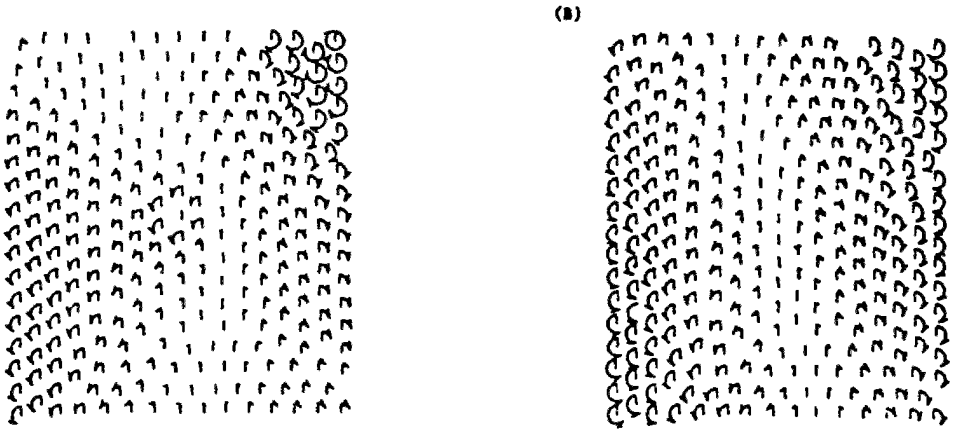
Figure A.4-14d : Nombre de grains par points de calcul



a : Comparaison des déplacements
entre la méthode des éléments discrets (A) et le modèle continu généralisé (B)
(chargement I)



b : Comparaison des déplacements
entre la méthode des éléments discrets (A) et le modèle continu généralisé (B)
(chargement II)



c : Comparaison des rotations propres des particules
entre la méthode des éléments discrets (A) et le modèle continu généralisé (B)
(chargement I)

Figure A.4-15 : Comparaison du modèle continu généralisé de Chang et Liao (1990)
avec une approche par éléments distincts

4.5 Conclusion

Des résultats expérimentaux actuellement disponibles, nous pouvons donc conclure que la rotation des grains dans les couches d'interface et les bandes de cisaillement est un phénomène majeur qui a été encore peu étudié mais qui ne peut être ignoré.

Le calcul des déplacements et rotations des points matériels du milieu continu équivalent à un milieu granulaire doit être fait en moyennant les déplacements et rotations des grains sur des volumes appropriés. En particulier, en interface, il convient de moyenner sur un nombre suffisant de grains, au moins 100, à une distance constante de l'interface, ce qui suppose, que dans l'essai utilisé, règne le long de l'interface des conditions d'invariance en translation (figure A.4-16). Seuls deux essais permettent un tel calcul; ce sont les essais de cisaillement simple plan et annulaire.

Parmi les milieux continus avec microstructure, où celle-ci est libre de tourner indépendamment du milieu continu, les milieux de Cosserat sont les plus simples. Ils correspondent à un milieu continu avec microstructure rigide d'ordre un (Germain, 1973). C'est ce que nous verrons dans le paragraphe 5 de la partie A.

Outre le fait qu'ils permettent de modéliser des rotations de points matériels, de tels milieux possèdent plusieurs caractéristiques qui les rendent attractifs pour modéliser la formation des bandes de cisaillement aussi bien que les couches d'interface. En effet, les lois de comportement de tels milieux introduisent toutes au moins une longueur interne, qui peut être corrélée à la taille des grains et qui contrôle les épaisseurs des bandes de cisaillement et des couches d'interface. De plus, en correspondance avec les nouveaux degrés de liberté, des conditions aux limites supplémentaires doivent être introduites afin de pouvoir écrire le principe des puissances virtuelles correctement. En particulier, ces nouvelles conditions aux limites doivent être introduites en correspondance avec la rugosité de l'interface mesurée à l'échelle des grains, ce que nous verrons dans le paragraphe 6 de cette partie A.

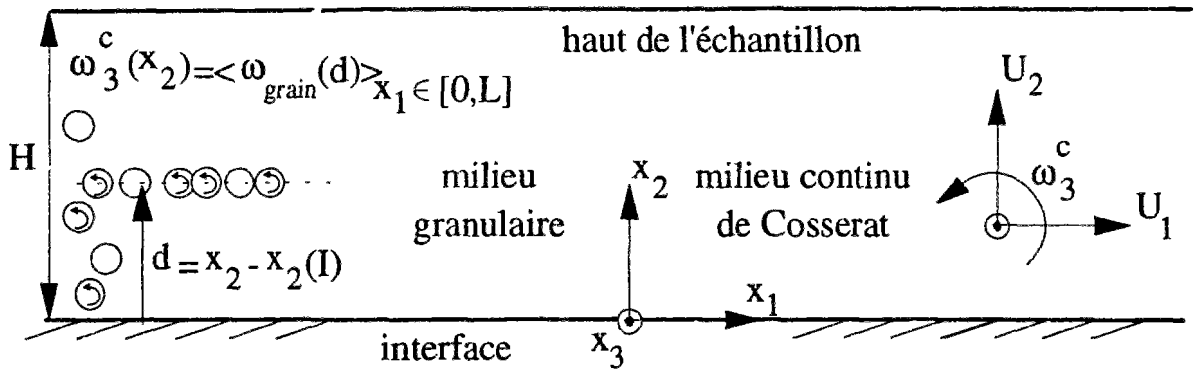


Figure A.4-16 : Passage du milieu granulaire au milieu continu équivalent

5 LES MILIEUX CONTINUS GENERALISES

5.1 Présentation des milieux continus généralisés

La théorie du milieu continu classique est la plus couramment utilisée. Cependant, il existe de nombreux autres types de milieux continus, suivant le nombre de degrés de liberté qui est considéré en chaque point matériel. Chacune des théories développées est consistante d'un point de vue mécanique et thermodynamique. Cependant, la validité d'une théorie est à juger par rapport à sa capacité à reproduire et à prédire des phénomènes physiques et mécaniques observés.

Par souci de simplification, nous ne considérerons, dans la présente étude bibliographique, que des milieux continus isotropes élastiques. L'extension à ces milieux continus généralisés, des lois classique de comportement visco-élastique ou élasto-plastique, a été faite par ailleurs mais ne sera pas abordée ici même.

Il est important de noter, qu'en statique, mis à part le milieu continu classique qui n'introduit pas de longueur interne, tous les milieux continus généralisés introduisent au moins une longueur interne par l'intermédiaire des lois de comportement. Cette ou ces longueurs internes peuvent être reliées à la taille de la microstructure du matériau mais ne jouent un rôle sur la réponse globale d'un système que si la taille de la structure considérée est du même ordre de grandeur que la ou les longueurs internes. C'est ce que l'on appelle communément les effets de taille (Lakes, 1994; Tatsuoka, 1994).

5.1.1 Milieu continu classique

Un milieu continu classique est un milieu pour lequel en chaque point, la cinématique est réduite aux trois déplacements de translation $U_{i=1,3}$. Pour un tel milieu, dans le cas le plus général de l'élasticité isotrope, la loi de comportement est définie par la donnée de deux paramètres élastiques, les coefficients de Lamé :

$$\sigma_{ij} = \lambda\, \varepsilon_{kk}\, \delta_{ij} + 2\, \mu\, \varepsilon_{ij} \qquad \text{(A.5-1)}$$

Cette loi de comportement peut être réécrite sous le forme suivante, en utilisant le module de déformation, K et le module de cisaillement, G (Fung, 1968; Sokolnikoff, 1983):

$$\sigma_{ij} = (K - G)\, \varepsilon_{kk}\, \delta_{ij} + 2\, G\, \varepsilon_{ij} \qquad \text{(A.5-2)}$$

En fait, il existe plusieurs milieux continus classiques suivant que l'on restreint ou non la cinématique. Par exemple, dans un milieu rigide, la déformation volumique est imposée nulle, ce qui réduit les degrés de liberté. Les deux constantes d'élasticité sont alors réduites à une seule. D'autres milieux classiques ont été définis également par le passé. Au début de l'élasticité, Navier a formulé une loi de comportement élastique à un paramètre en se basant sur l'hypothèse que les forces agissent le long des lignes joignant les paires d'atomes et qu'elles sont proportionnelles à la distance entre elles (Timoshenko, 1983).

Dans un milieu classique, les constantes élastiques, K et G, ont toutes la même dimension. Elles n'introduisent donc pas de longueur interne.

5.1.2 Milieu continu de Cosserat

L'exemple le plus simple de milieux de Cosserat est la poutre épaisse, où la rotation d'une section est indépendante de la rotation de la fibre. Une comparaison détaillée, en élasticité, de la théorie des poutres, épaisse et mince, avec la théorie des milieux de Cosserat élastiques, sans ou avec liaison interne sur la rotation de Cosserat, est présentée dans l'annexe A-6.

Dans la théorie des milieux continus de Cosserat (Cosserat et Cosserat, 1909), la cinématique en chaque point matériel est définie à partir des trois déplacements de translation $U_{i=1,3}$ ainsi que des trois degrés de liberté en rotation $\omega^c_{i=1,3}$. L'application du principe des puissances virtuelles permet alors de construire la statique qui comporte outre les forces contraintes, plus couramment appelées contraintes, des couples contraintes.

L'idée de couples contraintes remonte à Duhem (1893) et Voigt (1887, 1894), à l'époque où la théorie de l'élasticité était en phase de développement. Au début du XX^{ème} siècle, la théorie des milieux orientés, qui contient la théorie des milieux de Cosserat comme cas particulier, fut développée de manière approfondie (Cosserat et Cosserat, 1907, 1908, 1909). Cependant, ces développements furent largement ignorés et ce ne fut qu'au début des années 60, que la théorie a été redécouverte et complètement reformulée dans le cadre des milieux continus avec microstructure (Mindlin, 1965; Eringen, 1968). Elle est aussi connue sous le nom de théorie des milieux micropolaires (Eringen, 1968). Plus récemment, Germain (1973) a proposé d'utiliser le principe des puissances virtuelles comme seul outil pour reformuler le cadre général des milieux continus avec microstructure d'ordre n quelconque.

En trois dimensions, la loi de comportement élastique linéaire isotrope est définie à partir de 6 paramètres. Ceux-ci introduisent 2 longueurs internes (cf. paragraphe 7, partie A).

Un cas particulier des milieux de Cosserat mérite attention. Si le module de cisaillement de Cosserat G_c est pris infini, le matériau est "indéformable" pour la partie antisymétrique des déformations. Il en résulte que les contraintes antisymétriques sont indéterminées, de la même manière que la pression p est indéterminée dans un milieu incompressible. Par contre, il subsiste des couples contraintes. D'un point de vue de la cinématique, les points matériels sont assujettis à suivre la rotation d'ensemble du milieu. Cette théorie a été appelée théorie des couples contraintes (Mindlin et Tiersten, 1962; Cowin, 1970). Il se trouve que ces milieux sont très similaires aux milieux du second gradient (Vardoulakis, 1993).

5.1.3 Théories du gradient

5.1.3.1 Théorie du premier gradient

Dans la théorie du premier gradient (Germain1973), encore appelée théorie des matériaux avec vide (Cowin, 1983), on associe à chaque point matériel, outre les trois degrés de liberté en translation, un degré de liberté correspondant à la dilatation isotrope de la microstructure. Dans le cas d'un comportement élastique, les équations de comportement les plus générales sont :

$$\sigma_{kl} = \lambda\, \varepsilon_{rr}\, \delta_{kl} + 2\, \mu\, \varepsilon_{kl} + \beta\, \phi\, \delta_{kl} \qquad \text{(A.5-3)}$$

$$h_k = \alpha\, \phi_{,k} \qquad \text{(A.5-4)}$$

$$g = -\xi\, \phi - \beta\, \varepsilon_{rr} \qquad \text{(A.5-5)}$$

où λ et μ sont les constantes classiques de Lamé, h_k le vecteur des contraintes équilibrées, g la force volumique intrinsèque équilibrée, ϕ la variation de fraction volumique, et $\phi_{,k}$ le gradient de ϕ . Le terme ϕ peut être interprété comme une dilatation des points dans le milieu continu. Le coefficient α normalisé par le module de cisaillement introduit la longueur interne du modèle.

5.1.3.2 Théorie du second gradient

La théorie du premier gradient a été généralisée par Germain (1973) en prenant en compte dans la cinématique, non seulement le premier mais aussi le second gradient. Cette théorie s'apparente à la théorie des couples contraintes, qui est en fait le cas particulier des milieux de Cosserat où la rotation des points matériels est assujettie à suivre la rotation d'ensemble du milieu continu. Comme la loi de comportement fait intervenir la courbure, qui est le gradient de la rotation des points, et que celle-ci est par ailleurs égale à la partie antisymétrique du gradient des déplacements, le deuxième gradient des déplacements intervient dans la loi de comportement (Vardoulakis et al., 1993).

5.1.4 Théorie non locale

Dans un milieu continu non local, les points matériels peuvent se déplacer seulement en translation, mais les contraintes en un point donné, dépendent de la déformation dans une région autour du point considéré (Kröner, 1967; Eringen, 1972, 1977). Les équations de comportement sont du type :

$$\sigma_{ij}(x) = \int_V \alpha(|x' - x|)\left[\lambda\, \varepsilon_{kk}(x')\, \delta_{ij} + 2\, \mu\, \varepsilon_{ij}(x')\right] dV(x') \qquad \text{(A.5-6)}$$

La fonction $\alpha(|x|)$ vérifie la condition :

$$\int_V \alpha(|x'|)dV(x') = 1 \qquad \text{(A.5-7)}$$

L'influence non locale des déformations peut s'étendre de 0 à l'infini, suivant le choix de la fonction α qui introduit dans le modèle une longueur interne, notée a dans le cas présent.

Un exemple simple d'influence finie pour la fonction α est le suivant : pour $|x| < a$:

$$\alpha(|x|) = \frac{1}{2\,a} \qquad \text{(A.5-8)}$$

pour $|x| > a$:

$$\alpha(|x|) = 0 \qquad \text{(A.5-9)}$$

Un exemple d'influence jusqu'à l'infini est :

$$\alpha(|x|) = \frac{1}{2a}\exp(-|x|/a) \qquad \text{(A.5-10)}$$

Dans tous les cas, la fonction α introduit une longueur interne a dans le modèle de comportement. Cependant l'interprétation physique de cette longueur n'est pas facile, contrairement aux milieux continus avec microstructure. En outre, de tels milieux ne vérifient pas les lois thermodynamiques classiques.

Il faut noter que les milieux classiques élastiques peuvent être retrouvés en prenant pour la fonction α une fonction de Dirac, de sorte que la zone d'influence des points voisins sur un point donné est réduite au point matériel considéré. Dans ce cas là, la longueur interne est égale à zéro.

5.1.5 Milieux continus avec microstructure

Dans les milieux continus avec microstructure, encore appelés milieux micromorphiques (Mindlin, 1965; Eringen, 1968; Germain, 1973), en chaque point matériel, on définit en plus des trois déplacements macroscopiques $U_{i,j}$, les déformations de la microstructure.

La loi de comportement élastique linéaire isotrope la plus générale fait intervenir 18 constantes élastiques :

$$\sigma^a_{ij} = \lambda\,\delta_{pq}\,\varepsilon_{ii} + 2\,\mu\,\varepsilon_{pq} + g_1\,\delta_{pq}\,\gamma_{ii} + \gamma_2\left(\gamma_{pq} + \gamma_{qp}\right) \qquad \text{(A.5-11)}$$

$$\sigma^a_{pq} = g_1\,\delta_{pq}\,\gamma_{ii} + 2\,g_2\,\varepsilon_{pq} + b_1\,\delta_{pq}\,\gamma_{ii} + b_2\,\gamma_{pq} + b_3\,\gamma_{qp} \qquad \text{(A.5-12)}$$

$$\mu_{pqr} = a_1\left(\xi_{iip}\,\delta_{qr} + \xi_{rii}\,\delta_{pq}\right) + a_2\left(\xi_{iiq}\,\delta_{pr} + \xi_{iri}\,\delta_{pq}\right) + a_3\,\xi_{iir}\,\delta_{pq} + a_4\,\xi_{pii}\,\delta_{qr} +$$

$$a_5\left(\xi_{qii}\delta_{pr} + \xi_{ipi}\delta_{qr}\right) + a_8\,\xi_{iqi}\,\delta_{pr} + a_{10}\,\xi_{pqr} + a_{11}\left(\xi_{rpq} + \xi_{qrp}\right) + a_{13}\,\xi_{prq} + a_{14}\,\xi_{qpr} + a_{15}\,\xi_{rqp} \qquad \text{(A.5-13)}$$

où λ et μ, $g_{i=1,2}$, $b_{i=1,3}$ et $a_{i=1,2,3,4,5,8,10,11,13,14,15}$ sont les 18 constantes élastiques, σ^s_{ij} les contraintes symétriques de Cauchy, σ^a_{ij} les contraintes relatives antisymétriques, μ_{ijk} les double contraintes, ε_{ij} les déformations macroscopiques, γ_{ij} les déformations relatives, égales dans le cas présent aux macro-déformations ε_{ij} moins les micro-déformations η_{ij} , $\xi_{ijk} = \eta_{ij,k}$ le gradient des micro-déformations. Les dix coefficients a_i normalisés par le module de cisaillement classique introduisent autant de longueurs internes dans le système. Cependant, elles sont toutes reliées à la taille de la microstructure. La partie des double contraintes μ_{ijk}, antisymétrique par rapport aux deux derniers indices, correspond aux couples contraintes des milieux de Cosserat. La partie antisymétrique des déformations relatives correspond à la rotation relative, c'est à dire la rotation du milieu moins la rotation de Cosserat.

Cette théorie inclut l'élasticité de Cosserat et la théorie du premier gradient comme cas particuliers correspondant respectivement à une microstructure indéformable et une microstructure déformable de manière isotrope et assujettie à suivre la rotation du milieu. L'élasticité classique n'est qu'un particulier de l'élasticité des milieux de Cosserat ou des milieux du premier gradient.

5.1.6 Fluides micropolaires

Une application intéressante des milieux de Cosserat concerne les fluide micropolaires. En effet, la solution de l'écoulement d'un fluide micropolaire entre deux plaques (Cowin, 1962) a exactement la même forme mathématique que la solution du cisaillement simple d'un milieu de Cosserat élastique (cf. paragraphe 7, partie A).

On s'intéresse ici à un fluide qui contient des particules matérielles dispersées uniformément dans l'espace. Quand les particules sont solides, un tel matériau est une suspension. Quand les particules sont des gouttes liquides, on parle plutôt d'émulsion. Le mortier liquide est un tel matériau; les particules de sables sont dispersées dans le ciment liquide qui peut être considéré comme un liquide visqueux. Comme autre matériau de ce type, on peut citer le goudron, où les granulats sont dispersés dans le bitume, qui est un matériau très visqueux (Reiner, 1958; Richardson, 1950; Einstein, 1906). De tels matériaux peuvent être modélisés dans le cadre des milieux de Cosserat. L'orientation des particules est décrite par la rotation du trièdre attaché en chaque point matériel tandis que les déformations macroscopiques du milieu représentent les déformations du milieu liquide.

Cowin (1962) a étudié l'écoulement bidimensionnel permanent d'une telle suspension incompressible entre deux plaques (figure A.5-1). Comme conditions aux limites, il suppose que les déplacements sont nulles au niveau des deux plaques :

$$V_x(y = \pm a) = 0 \tag{A.5-14}$$

En outre, correspondant aux degrés de liberté en rotation, il spécifie une rotation propre des points matériels nulle au niveau des deux plaques :

$$\sigma^a_{xy}(y = \pm a) = 0 \tag{A.5-15}$$

Avec de telles conditions aux limites, la solution en déplacement sur une section $y \in [-a, +a]$ est donnée par :

$$V_x(y) = \frac{C}{2\,\mu}\left(a^2 - y^2\right) - \frac{C}{\mu}\frac{a\,\beta\,\theta}{\mu\,\sinh(\beta\,a)}\left(\cosh(\beta\,a) - \cosh(\beta\,y)\right) \tag{A.5-16}$$

où C est une constante d'intégration, μ , ϕ , θ sont trois constante mécaniques et β est égale à :

$$\beta = \sqrt{\frac{\phi\,\mu}{\theta\,(\phi + \mu)}} \tag{A.5-17}$$

Le rotation du milieu fluide ω_{xy} (vorticity) est décrite par :

$$\omega_{xy}(y) = \frac{C}{2\,\mu}\left[\frac{a\,\beta^2\,\theta}{\mu}\frac{\sinh(\beta\,y)}{\sinh(\beta\,a)} - y\right] \tag{A.5-18}$$

La rotation relative est décrite par l'équation :

$$\phi^a_{xy} = \frac{C}{2\,\mu}\left[\frac{a\,\beta^2\,\theta}{\phi}\frac{\sinh(\beta\,y)}{\sinh(\beta\,a)}\right] \tag{A.5-19}$$

La rotation propre des particules est alors décrite par :

$$\sigma^a_{xy} = \frac{C}{2\,\mu}\left[a\,\frac{\sinh(\beta\,y)}{\sinh(\beta\,a)} - y\right] \tag{A.5-20}$$

On peut remarquer que la solution pour un fluide micropolaire est formée de la solution classique (de type parabolique pour la vitesse, constante pour les trois termes de rotation), plus deux termes additionnels en exponentielle $\pm\,\beta\,y$, où β a la dimension inverse d'une longueur. Le mélange du fluide avec les particules a une viscosité apparente plus forte que le fluide seul, ce qui permet de déterminer expérimentalement la valeur de β.

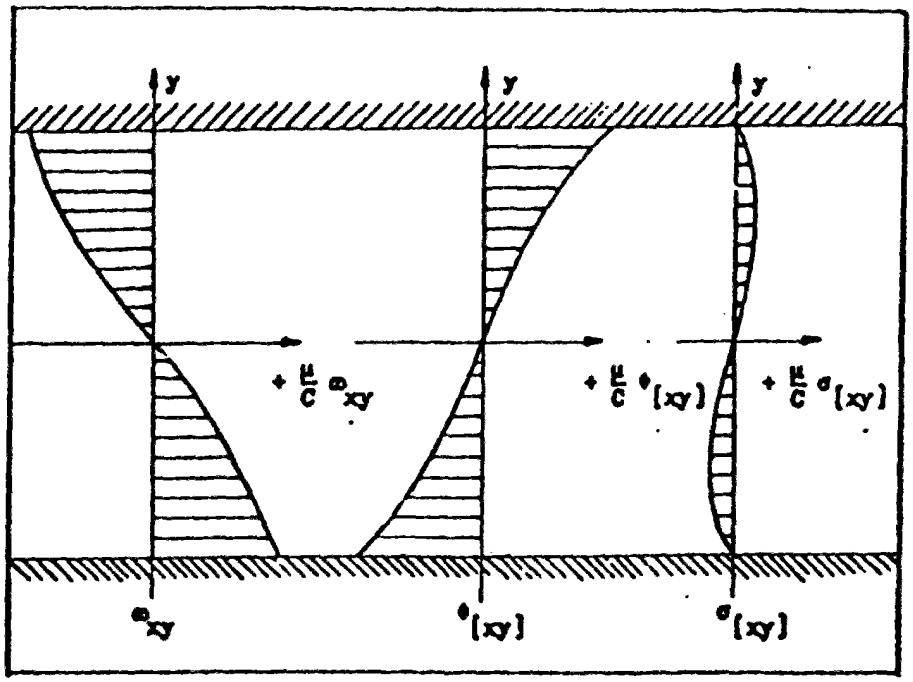


Figure A.5-1 : Distribution de la rotation d'ensemble, de la rotation relative et de la rotation propre des grains pour un milieu micropolaire (Cowin, 1963)

5.2 Microstructure et longueurs internes

5.2.1 Calcul des longueurs internes par une approche micro-mécanique

Les théories des milieux continus ne font pas référence aux caractéristiques structurales des matériaux qu'elles essayent de modéliser. Cependant, tous les matériaux, à une échelle plus ou moins petite, ont une structure qui influe sur le comportement macroscopique. L'origine première du comportement élastique est les forces inter-atomiques, essentiellement électromagnétiques entre les atomes. Les contraintes classiques correspondent à la moyenne des forces appliquées sur une surface représentative. De même, les couples contraintes correspondent à la moyenne des moments appliqués sur une surface représentative. De tels moments peuvent exister dans un métal du fait que les forces inter-atomiques se propagent plus loin qu'un atome (Kröner, 1963). De tels effets se produisent dans tous les matériaux solides mais ne sont pas toujours mesurables. Cependant, les moments peuvent être transmis à plus grande échelle par les fibres de matériaux composites ou par les grains dans un matériaux granulaire. Les longueurs internes introduites par ces microstructures sont alors plus grandes et accessibles aux moyens expérimentaux.

Des calculs analytiques ont été faits pour de nombreux matériaux. Dans les matériaux composites à fibres, la longueur interne l est de l'ordre de grandeur de la distance entre les fibres (Hlavacek, 1975). Dans les matériaux cellulaires, la longueur interne est comparable à la taille des cellules (Adomeit, 1967). Dans les matériaux stratifiés, elle est du même ordre de grandeur que les épaisseurs des strates (Herrmann et Achenbach, 1967). Dans les matériaux granulaires, la longueur interne plastique est directement reliée à la taille moyenne des grains (Kanatani, 1979).

Cependant, la formation de fabrique particulière telles que des "colonnes de grains" peut introduire des longueurs internes plus grandes que la taille des grains individuels (Oda, 1992) (figure A.5-1). Cependant, l'existence d'une microstructure n'engendre pas forcément un comportement de type Cosserat. Un matériau composite contenant des inclusions sphériques ou elliptiques, noyées dans une matrice, ne manifeste pas d'effets de Cosserat. Sa longueur interne est nulle (Hlavacek, 1976; Berglund, 1982). Pour qu'une telle microstructure génère des effets de Cosserat, il faut en fait que l'une de ses dimensions soit plus grandes que les autres, de façon à introduire localement une hétérogénéité des contraintes et donc des couples contraintes.

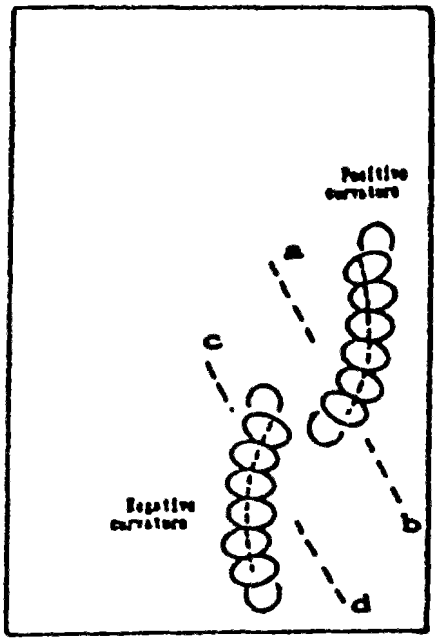


Figure A.5-2 : Flexion de colonnes de grains au sein d'un bande de cisaillement dans un essai biaxial (Oda, 1992)

5.2.2 Méthodes expérimentales

Une excellente bibliographie des différentes méthodes expérimentales disponibles pour mesurer les longueurs internes des matériaux élastiques a été faite par Lakes (1994).

5.2.2.1 Effets de taille

La détermination des caractéristiques mécaniques d'un milieu avec microstructure ne peut se faire que sur des essais où la microstructure joue un rôle. Les essais mettant en évidence des effets de taille sont ainsi le plus souvent utilisés. En particulier, la rigidité d'un matériau de Cosserat dépend de la taille de l'échantillon. Les méthodes le plus souvent utilisées consistent donc à mettre en évidence des effets de taille sur la réponse à des essais. Les essais de tension ne produisent pas d'effets de Cosserat (Gauthier et Jahsman, 1975). Des effets de taille se produisent par contre dans les essais de flexion et torsion (Krishna et Venkatasubramanian, 1978; Ariman, 1968; Gauthier et Jahsman, 1976; Park et Lakes, 1987).

5.2.2.2 Propagations d'ondes

L'analyse de la propagation d'ondes dans un matériau peut être utilisée pour déterminer si le modèle continu et les lois de comportement considérées sont appropriées.

Les ondes planes dans un matériau continu classique élastique se propagent sans dispersion. Leur vitesse est indépendante de la fréquence. Les modules élastiques peuvent être calculés à partir des ondes longitudinale et transverse et de la densité du matériau.

Les ondes planes sont dispersives dans les milieux de Cosserat (Eringen, 1968), dans les milieux avec microstructure (Mindlin, 1964), dans les milieux non locaux (Eringen, 1972) et dans les milieux du premier et second gradient (Puri et Cowin, 1985).

Les limites de ces méthodes résident dans le fait que les matériaux visco-élastique ont aussi des ondes dispersives. Il faut que les effets de la viscosité soient relativement faibles pour pouvoir mettre en évidence les effets de la microstructure.

5.2.2.3 Résultats expérimentaux

Des auteurs ont essayé de mesurer pour de nombreux matériaux (métaux, graphite, os humain, etc.) les deux longueurs internes R_t et R_b existant dans les milieux continus de Cosserat élastiques. Les résultats expérimentaux donnent tous des longueurs internes du même ordre de grandeur que la taille de la microstructure du matériau étudié (tableau A-5.1).

5.3 Milieux de Cosserat

5.3.1 Principe des puissances virtuelles et équations d'équilibre

La dérivation des équations d'équilibre d'un milieu continu de Cosserat a été faite par de nombreux auteurs (Mindlin, 1964; Eringen, 1966, 1968, 1970). Dans un article daté de 1972, Germain propose de dériver de façon systématique les équations d'équilibre d'un milieu continu, classique ou généralisé, en utilisant le principe des puissances virtuelles comme seul outil mécanique (Germain, 1972). En particulier, il applique cette approche à la théorie du second gradient (Germain, 1973a) ainsi qu'aux milieux continus avec microstructure d'ordre n (Germain, 1973b).

Dans ce paragraphe, nous résumerons et appliquerons la méthode générale proposée par Germain et l'appliquerons à un milieu continu avec une microstructure rigide d'ordre un, c'est à dire un milieu continu de Cosserat.

Dans un milieu continu avec microstructure rigide (milieu continu de Cosserat), chaque particule est encore représentée par un point matériel à l'échelle macroscopique. Cependant, au niveau microscopique la cinématique est définie avec un raffinement supplémentaire. Au niveau d'observation microscopique, un point M apparaît lui-même comme une particule, c'est à dire un milieu continu V(M) de petite dimension, avec M en son centre de gravité (figure A.5-3).

Material	Elastic constants Classical E(MPa)	G(MPa)	ν	Cosserat ℓ_t(mm)	ℓ_b(mm)	N^2	Ψ	Structure Size	Comment
1 Aluminum	73000	--	--	--	<0.03	*	--		Bend plate
2 Aluminum	69000	--	--	--	<0.05	*	--	≅0.05mm	Bend plate
3 Steel	212000	--	--	--	<0.05	*	--	≅0.05mm	Bend plate
4 KNO_3	≅36000	--	--	≅6×10^{-8}		≅0.03		atomic	Waves
5 Foam, PVC	--	2.8	--	0.95	--	*	--	≅1mm	Resonance shear thickness
6 Epoxy/ aluminum particle	--	7000	--	≅0	--	--	--	≅1.4mm	Torsion, rod Classical
7 PMMA		--	1000	--	≅0	*	--	≅0.1nm	Torsion, rod
8 Human bone	12000	4000	--	0.22	0.45	≥0.5	1.5	≅0.2mm	Bend, torsion Anisotropic
9 Graphite, H237	4500	--	0.06	1.6	2.8	*	--	≅1.6mm	Bend bar
10 Foam, PS	0.6	1.1	0.07	3.8	5.0	0.09	1.5	≅1mm	Bend, torsion of rods
11 Foam, dense polyurethane	300	104	0.4	0.62	0.33	0.04	1.5	≅0.18mm	Bend, torsion of rods
12 Foam, syntactic	2758	1033	0.34	0.065	0.032	0.1	1.5	≅0.15mm	Bend, torsion Nearly classical

*: Interpretation based on couple stress theory for which N = 1 (its upper bound) by assumption.
All except waves were done by a size effect approach.
References: 1, Schijve, 1966; 2, Ellis and Smith, 1968; 4, Askar, 1972; 5, Perkins and Thompson, 1973; 6, Gauthier and Jahsman, 1975; 7, Yang and Lakes, 1981; 8, Yang and Lakes, 1981; Yang and Lakes, 1982; Lakes and Yang, 1983; 9, Tang, 1983; 10, Lakes, 1983; 11, Lakes, 1986; 12, Lakes, 1986.

Tableau A.5-1 : Constantes élastiques, classiques et de Cosserat, mesurées pour différents matériaux d'après Lakes (1994)

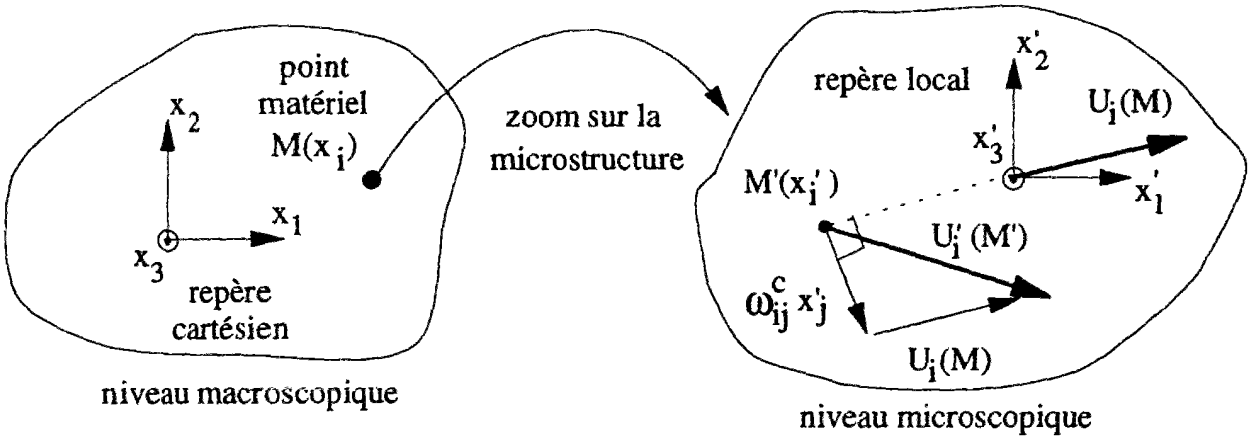


Figure A.5-3 : Cinématique d'un milieu continu avec microstructure

5.3.1.1 Description de la cinématique d'un milieu continu de Cosserat

Un milieu continu classique est composé d'une distribution continue de particules, chacune étant représentée géométriquement par un point M de coordonnées x_i dans un repère Cartésien et étant caractérisée cinématiquement par un champ de déplacements U_i .

Introduisons un repère local x'_i attaché à la particule, parallèle au repère Cartésien de coordonnées x_i et avec M en son centre. Le déplacement U'_i dans le repère Cartésien, d'un point M' situé sur la particule considérée, est fonction des coordonnées locales x'_i du point M'. Puisque la taille de la microstructure est petite comparée aux dimensions du continuum macroscopique, il est possible de développer asymptotiquement les déplacements U'_i en séries de Taylor en fonction des cordonnées locales x'_i et de s'arrêter aux termes d'ordre un, d'où le nom de milieu continu avec microstructure d'ordre un :

$$U'_i = U_i + \chi_{ij}\, x'_j \qquad \text{(A.5-21)}$$

La description de la cinématique d'un tel milieu est complètement définie si l'on connaît : le champ des déplacements macroscopiques U_i et le gradient χ_{ij} des déplacements microscopiques U'_i . Pour un milieu avec une microstructure rigide, qui n'est pas autorisée à se déformer et ne peut donc que tourner, le gradient des déplacements microscopiques χ_{ij} est antisymétrique et sera appelé tenseur des rotations microscopiques ou tenseur de Cosserat ω^c_{ij} (figure A.5-3). On peut alors introduire le vecteur des rotations de Cosserat ω^c_i , qui est défini à l'aide du tenseur alterné :

$$\omega^c_{ij} = -e_{ijk}\,\omega^c_k \qquad \text{(A.5-22)}$$

où e_{ijk} est le tenseur alterné qui possède les propriétés suivantes :$e_{ijk} = e_{jki} = e_{kij}$, $e_{ijj} = 0$, $e_{123} = 1$ et $e_{213} = -1$.

5.3.1.2 Expression du travail des efforts intérieurs

Il est supposé que le travail des efforts intérieurs $W_{(i)}$ est une fonction linéaire du déplacement macroscopique U_i, de son gradient $U_{i,j}$, du vecteur des rotations microscopiques ω_i^c et de son gradient $\kappa_{ij} = \omega_{i,j}^c$, encore appelé tenseur des courbures :

$$W_{(i)} = -\int_V \left\{ a_i U_i + b_{ij} U_{i,j} + c_{ij} \omega_{ij}^c + d_{ij} \kappa_{ij} \right\} dV \qquad \text{(A.5-23)}$$

où les coefficients a_i , b_{ij} , c_{ij} et d_{ij} sont les variables statiques associées en énergie avec les variables cinématiques considérées dans l'expression du travail des efforts intérieurs.

Puisque le travail des efforts intérieurs est une quantité objective, il doit être indépendant du repère Cartésien dans lequel on le calcule. Il en résulte que les coefficients a_i sont nuls et l'on peut alors réécrire ce travail sous la forme suivante :

$$W_{(i)} = -\int_V \left\{ \sigma_{ij}^s U_{i,j}^s + \sigma_{ij}^a \left(U_{i,j}^a - \omega_{ij}^c \right) + \mu_{ij} \kappa_{ij} \right\} dV \qquad \text{(A.5-24)}$$

où les variables statiques peuvent être identifiées : σ_{ij}^s est le tenseur des contraintes symétriques (tenseur des contraintes de Cauchy), σ_{ij}^a est le tenseur antisymétrique des contraintes et μ_{ij} est le tenseur des couples contraintes. Le tenseur des contraintes σ_{ij} est dans le cas général d'un milieu continu, un tenseur général qui comporte une partie symétrique et une partie antisymétrique (figure A.5-4) :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^s + \sigma_{ij}^a \qquad \text{(A.5-25)}$$

Les déformations associées aux variables statiques : σ_{ij}^s, σ_{ij}^a et μ_{ij} , sont respectivement identifiées comme étant les déformations symétriques ε_{ij}^s , les déformations antisymétrique ε_{ij}^a et les courbures κ_{ij} . Les relations suivantes permettent dans le cas général de calculer les différentes déformations et courbures :

$$\varepsilon_{ij}^s = U_{i,j}^s = \frac{U_{i,j} + U_{j,i}}{2} \qquad \text{(A.5-26)}$$

$$\Omega_{ij} = U_{i,j}^a = \frac{U_{i,j} - U_{j,i}}{2} \qquad \text{(A.5-27)}$$

$$\varepsilon_{ij}^a = \Omega_{ij} - \omega_{ij}^c \qquad \text{(A.5-28)}$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^s + \varepsilon_{ij}^a = U_{i,j} - \omega_{ij}^c \qquad \text{(A.5-29)}$$

$$\kappa_{ij} = \omega_{i,j}^c \qquad \text{(A.5-30)}$$

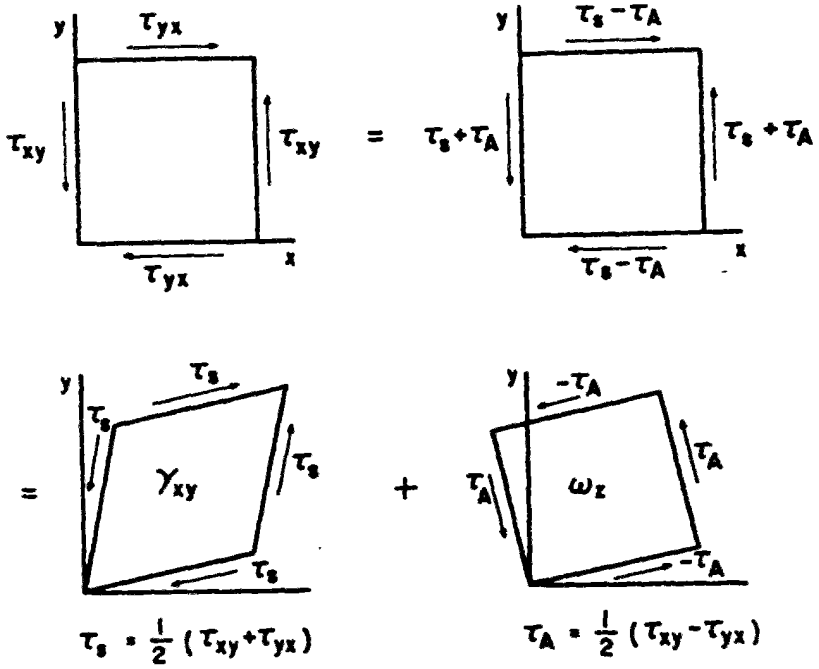


Figure A.5-4 : Déformation et rotation non équilibrée
engendrées par les contraintes symétriques et antisymétriques (Mindlin, 1964)

L'interprétation physique des différentes variables cinématiques peut être trouvée dans Mindlin (1964) avec la terminologie correspondante qui est la plus appropriées d'un point de vue physique. Les U_i sont les déplacements macroscopiques. La partie symétrique des déformations ε^s_{ij} est égale à la partie symétrique du gradient des déplacements macroscopiques; elle mesure donc les déformations macroscopiques du milieu continu. La partie antisymétrique du gradient des déplacements macroscopiques $U^a_{i,j}$ mesure la rotation d'ensemble du milieu continu et est notée Ω_{ij} . La partie antisymétrique des déformations ε^a_{ij} , qui est égale à la différence entre la rotation d'ensemble du milieu Ω_{ij} et la rotation microscopique de la microstructure ω^c_{ij} , mesure la rotation relative de la microstructure par rapport au milieu continu. Ce tenseur peut être appelé tenseur des déformations ou rotations relatives. Le tenseur des rotations microscopiques ω^c_{ij} correspond en fait au gradient des déplacements microscopiques de la microstructure, c'est donc le tenseur des déformations microscopiques. Le tenseur des courbures κ_{ij} est défini comme le gradient du vecteur des rotations microscopiques, c'est donc le gradient des déformations microscopiques.

En correspondance avec les déformations, on peut appeler σ^s_{ij} les contraintes macroscopiques, σ^a_{ij} les contraintes relatives et μ_{ij} les contraintes microscopiques. Il est à noter que les contraintes relatives n'existent que si la microstructure ne suit pas le mouvement d'ensemble du milieu continu macroscopique.

Le travail des efforts intérieurs $W_{(i)}$ sur un volume V peut être écrit sous la forme :

$$W_{(i)} = -\int_V \left\{ \sigma_{ij}\, U_{i,j} - \sigma^a_{ij}\omega^c_{ij} + \mu_{ij}\kappa_{ij} \right\} dV \qquad \text{(A.5-31)}$$

Après intégration par parties, on obtient :

$$W_{(i)} = \int_V \left\{ \sigma_{ij}\, U_i + \left(\mu_{ij,j} + 2\,\sigma^a_i\right) \omega^c_i \right\} dV - \int_S \left\{ \sigma_{ij}\, n_j\, U_i + \mu_{ij}\, n_j\, \omega^c_i \right\} dS \qquad \text{(A.5-32)}$$

où n_i est le vecteur normal à la surface S et σ^a_i le vecteur des contraintes antisymétriques défini à l'aide du tenseur alterné e_{ijk} :

$$\sigma^a_{ij} = -\, e_{ijk}\, \sigma^a_k \qquad \text{(A.5-33)}$$

5.3.1.3 Expression du travail des efforts extérieurs

La forme générale du travail des forces extérieurs $W_{(e)}$ dans un milieu continu de Cosserat est définie de façon similaire au travail des efforts intérieurs, en introduisant des forces volumiques f_i et des couples contraintes volumiques c_i ainsi que des forces de contact t_i et des couples de contact m_i en correspondance avec les champs des déplacements et des rotations :

$$W_{(e)} = \int_V \left\{ f_i U_i + c_i \omega^c_i \right\} \rho dV + \int_S \left\{ t_i U_i + m_i \omega^c_i \right\} dS \qquad \text{(A.5-34)}$$

5.3.2 Equations d'équilibre d'un milieu continu de Cosserat

5.3.2.1 Application du principe des puissances virtuelles

Après application du principe des puissances virtuelles (formulation faible), qui impose que le travail des efforts intérieurs soit égale au travail des forces extérieures pour tout champ de déplacements et rotations cinématiquement admissibles, on obtient les équations d'équilibre (formulation forte) :

$$\sigma_{ij,j} + \rho\, f_i = 0 \qquad \text{(A.5-35)}$$

$$\mu_{ij,j} + 2\,\sigma^a_i + \rho\, c_i = 0 \qquad \text{(A.5-36)}$$

avec les conditions aux limites correspondantes :

$$\sigma_{ij}\, n_j = t_i \qquad \text{(A.5-37)}$$

$$\mu_{ij}\, n_j = m_i \qquad \text{(A.5-38)}$$

Le raffinement de la cinématique dans un milieu continu de Cosserat introduit de nouvelles variables statiques σ^a_{ij} et μ_{ij} avec en correspondance de nouvelles variables cinématiques conjuguées : ε^a_{ij} et κ_{ij} , ainsi que de nouvelles conditions aux limites, qui dans la suite seront appelées conditions aux limites de Cosserat. Les équations d'équilibre introduisent un couplage entre les contraintes macroscopiques σ^s_{ij} et les contraintes microscopiques μ_{ij} par l'intermédiaire des contraintes relatives σ^a_{ij} . Si celle-ci sont nulles, il y a découplage. Des couples contraintes, de type microscopiques, peuvent exister mais ils doivent vérifier l'équation suivante :

$$\mu_{ij,j} + \rho\, c_i = 0 \qquad \text{(A.5-39)}$$

En l'absence de couples contraintes volumiques dans le milieu et de couples contraintes surfaciques aux conditions aux limites, les couples contraintes sont identiquement nuls et l'on retrouve le milieu continu classique. Dans la suite, nous ne considérerons pas de forces volumiques f_i , ce qui revient à négliger l'influence de la pesanteur devant la taille des échantillon, ni de couples contraintes volumiques c_i . Ces derniers peuvent exister en électromagnétisme mais il n'existe pas dans les matériaux granulaires.

5.3.2.2 Dérivation des équations d'équilibre à partir de la statique

Il est intéressant, pour mieux comprendre les milieux continus de Cosserat, de dériver les équations d'équilibre à partir de l'équilibre statique d'un volume élémentaire sur lequel les efforts exercées sont dues non seulement aux forces contraintes, plus couramment appelées contraintes, mais aussi à des couples contraintes. L'annexe A-7 présentant en détail les calculs, nous ne résumerons ici que les résultats les plus importants (tableau A.5-2).

Si les contraintes σ_{ij} et les couple contraintes μ_{ij} sont développés en série de Taylor avec le même ordre, on obtient que le tenseur des contraintes doit être symétrique. Pour retrouver les équations d'équilibre d'un milieu de Cosserat, il faut développer les couples contraintes μ_{ij} au moins un ordre de plus que les contraintes. Physiquement, cela implique qu'à l'échelle d'un volume élémentaire, le gradient des couples contraintes (contraintes microscopiques) est plus fort que le gradient des forces contraintes (contraintes macroscopiques) qui peut être négligé.

Tableau A.5-2 : Milieu continu avec forces contraintes et couples contraintes (Annexe A-7)

Equilibre d'un volume élémentaire	Conditions en forces (elles ne font pas intervenir μ_{ij})	Conditions en moments (elles font intervenir σ_{ij} et μ_{ij})
ordre 0 pour σ_{ij} et μ_{ij}	satisfait automatiquement	$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ est symétrique
ordre 1 pourσ_{ij} et μ_{ij}	$\sigma_{ij,j} = 0$	
0 pourσ_{ij} et ordre 1 pour μ_{ij}		$\dfrac{\partial \mu_{ij}}{\partial x_j} - 2\,\sigma^a_i = 0$
ordre 1 pour σ_{ij} et ordre 2 pour μ_{ij}		satisfait automatiquement

5.3.2.3 Equations d'équilibre pour le cisaillement simple plan

Dans l'essai de cisaillement simple plan, modélisé comme le cisaillement d'une couche d'épaisseur finie par une interface, les équations d'équilibre se réduisent à (figure A.5-5) :

$$\frac{d\left(\sigma_{12}^{s}+\sigma_{12}^{a}\right)}{dx_2}=0 \qquad \text{(A.5-40)}$$

$$\frac{d\sigma_{22}^{s}}{dx_2}=0 \qquad \text{(A.5-41)}$$

$$\frac{d\mu_{32}}{dx_2}-2\,\sigma_{12}^{a}=0 \qquad \text{(A.5-42)}$$

Les déformations et courbures pour le cisaillement simple plan d'un milieu continu de Cosserat sont définies par les relations suivantes :

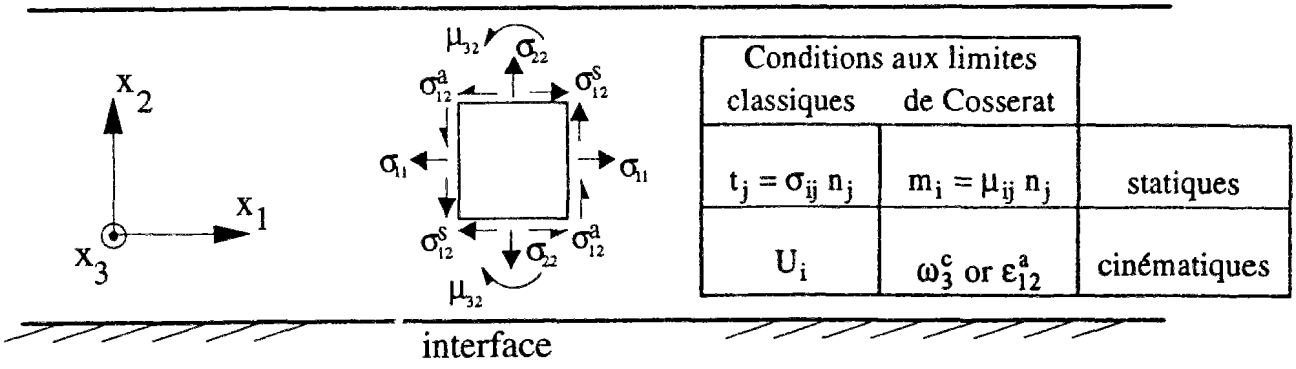
$$\varepsilon_{11}=0 \qquad \text{(A.5-43)}$$

$$\varepsilon_{22}=\frac{dU_2}{dx_2} \qquad \text{(A.5-44)}$$

$$\varepsilon_{12}^{s}=\frac{1}{2}\frac{dU_1}{dx_2} \qquad \text{(A.5-45)}$$

$$\varepsilon_{12}^{a}=\frac{1}{2}\frac{dU_1}{dx_2}+\omega_3^{c} \qquad \text{(A.5-46)}$$

$$\kappa_{32}=\frac{d\omega_3^{c}}{dx_2} \qquad \text{(A.5-47)}$$



Conditions aux limites classiques	de Cosserat	
$t_j = \sigma_{ij}\, n_j$	$m_i = \mu_{ij}\, n_j$	statiques
U_i	ω_3^c or ε_{12}^a	cinématiques

Figure A.5-5 : Variables statiques dans le cisaillement simple plan d'un milieu continu de Cosserat

5.3.2.4 Equations d'équilibre pour le cisaillement simple annulaire

Dans le cas du cisaillement simple annulaire, qui possède une symétrie de révolution et qui est en déformations planes, les équations d'équilibre se réduisent à (figure A.5-6) :

$$\frac{d\sigma^s_{rr}}{dr} + \frac{\left(\sigma^s_{rr} - \sigma^s_{\theta\theta}\right)}{r} = 0 \qquad \text{(A.5-48)}$$

$$\frac{d\left(\sigma^s_{\theta r} + \sigma^a_{\theta r}\right)}{dr} + 2\frac{\sigma^s_{\theta r}}{r} = 0 \qquad \text{(A.5-49)}$$

$$\frac{d\mu_{zr}}{dr} + \frac{\mu_{zr}}{r} - 2\,\sigma^a_{r\theta} = 0 \qquad \text{(A.5-50)}$$

Quand r tend vers l'infini, ces équations se réduisent à celles du cisaillement simple plan avec la correspondance (r, θ, z) = (2, 1, 3).

En combinant les deux dernières équations et après intégration partielle, on peut réécrire les deux dernières équations sous la forme suivante :

$$\sigma^s_{\theta r} = \frac{A}{r^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_{zr}}{r} - \frac{d\mu_{zr}}{dr}\right) \qquad \text{(A.5-51)}$$

$$\sigma^a_{\theta r} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_{zr}}{r} + \frac{d\mu_{zr}}{dr}\right) \qquad \text{(A.5-52)}$$

où A est une constante d'intégration. La solution de Cosserat peut être écrite sous la forme de la solution classique complétée par des termes fonction du couple contrainte μ_{zr} et de sa dérivée première.

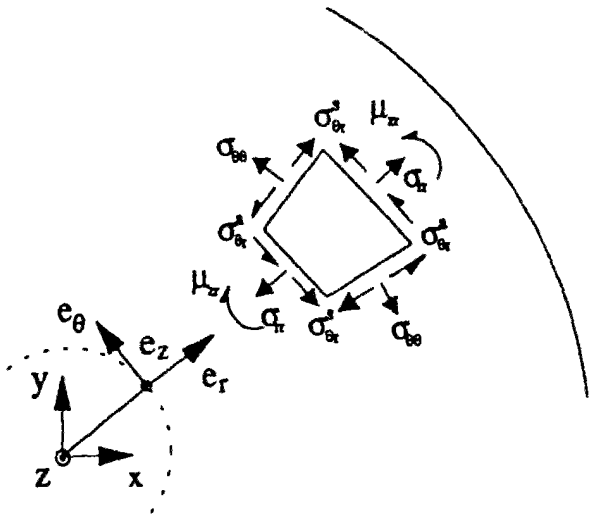


Figure A.5-6 : Variables statiques pour le cisaillement simple annulaire d'un milieu continu de Cosserat

Le cas d'un matériau classique s'obtient en supposant, soit que les contraintes antisymétriques σ^a_{ij} sont nulles et qu'une condition à la limite en couple contrainte $\mu_{ij}n_j = m_i$ est nulle, soit que le tenseur des couples contraintes μ_{ij} est identiquement nul; il en résulte alors que les contraintes antisymétriques σ^a_{ij} sont nulles.

Les déformations et courbures pour le cisaillement simple annulaire d'un milieu continu de Cosserat sont définies par les relations suivantes :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{dU_r}{dr} \tag{A.5-53}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{U_r}{r} \tag{A.5-54}$$

$$\varepsilon^s_{\theta r} = \frac{1}{2}\left(\frac{dU_\theta}{dr} - \frac{U_\theta}{r}\right) \tag{A.5-55}$$

$$\varepsilon^a_{\theta r} = \frac{1}{2}\left(\frac{dU_\theta}{dr} + \frac{U_\theta}{r}\right) - \omega^c_z \tag{A.5-56}$$

$$\kappa_{zr} = \frac{d\omega^c_z}{dr} \tag{A.5-57}$$

5.3.3 Conditions aux limites

Les conditions aux limites de Cosserat peuvent être de type statique et formulées en termes de contraintes antisymétriques σ^a_{ij} ou couples contraintes μ_{ij} . Ces conditions aux limites peuvent être de type cinématique et formulées en termes de rotation relative ε^a_{ij} , de rotation de Cosserat ω^c_{ij} ou de courbure κ_{ij} (figure A.5-5).

Les conditions aux limites formulées en couple contrainte μ_{ij} ou rotation de Cosserat ω^c_{ij} peuvent être appelées conditions aux limites microscopiques puisqu'elles n'impliquent que des termes de type microscopique. Les conditions aux limites formulées en contrainte σ_{ij} peuvent être qualifiées de conditions aux limites totales puisqu'elles combinent des termes macroscopiques et microscopiques. Ces conditions aux limites doivent être formulées en prenant en compte les caractéristiques microscopiques de la surface d'interface et notamment sa rugosité mesurée à l'échelle des grains, c'est à dire sur une longueur de l'ordre de grandeur du diamètre D_{50} .

5.3.4 Vecteur contrainte totale et "cercles" de Mohr

Le vecteur contrainte totale $\{f\}$ qui s'applique sur une facette quelconque de normale $\{n\}$ est par définition égale à :

$$\{f\} = [\sigma]\{n\} \tag{A.5-58}$$

Il comporte une composante $\{f^s\}$, dite symétrique puisque provenant du tenseur symétrique des contraintes $[\sigma^s]$ et une composante $\{f^a\}$, dite antisymétrique puisque provenant du tenseur antisymétrique des contraintes $[\sigma^a]$:

$$\{f\} = \{f^s\} + \{f^a\} \tag{A.5-59}$$

$$\{f^s\} = [\sigma^s]\{n\} \tag{A.5-60}$$

$$\{f^a\} = [\sigma^a]\{n\} \tag{A.5-61}$$

La composante normale $\{\sigma\}$ de $\{f\}$ sur le plan considéré provient uniquement du tenseur symétrique. Par contre, les deux vecteurs symétrique $\{f^s\}$ et antisymétrique $\{f^a\}$ ont une composante tangentielle, notées respectivement $\{\tau^s\}$ et $\{\tau^a\}$. Il en résulte la décomposition suivante (figure A.5-7) :

$$\{f^s\} = \{\sigma\} + \{\tau^s\} \tag{A.5-62}$$

$$\{f^a\} = \{\tau^a\} \tag{A.5-63}$$

Le couple (σ , τ^s) décrit un cercle dans le plan de Mohr de manière identique au cas d'un milieu continu classique. Par contre, les couples (σ , τ^a) et (σ , τ) décrivent des courbes plus compliquées (figure A.5-8). La notion de cercle de Mohr n'est plus appropriée sauf dans le cas particulier où le vecteur antisymétrique est tangent au plan considéré. C'est par exemple le cas des déformations planes parallèlement au plan (X_1 , X_2), le vecteur $\{\sigma^a\}$ est parallèle à l'axe X_3 autour duquel tournent tous les plans de normale contenues par le plan (X_1 , X_2). Dans ce cas là, le couple (σ , τ) décrit un cercle que l'on obtient à partir du cercle de Mohr classique correspondant à (σ , τ^s), par translation de σ_3^a parallèlement à l'axe τ (figure A.5-9).

Si le critère de rupture classique n'est pas modifié et est appliqué tel quel aux contraintes totales, qui sont les contraintes que l'on mesure sur une facette, un radoucissement sera observé. La microstructure peut donc jouer un rôle important dans les phénomène de radoucissement et même l'expliquer (Satake, 1968).

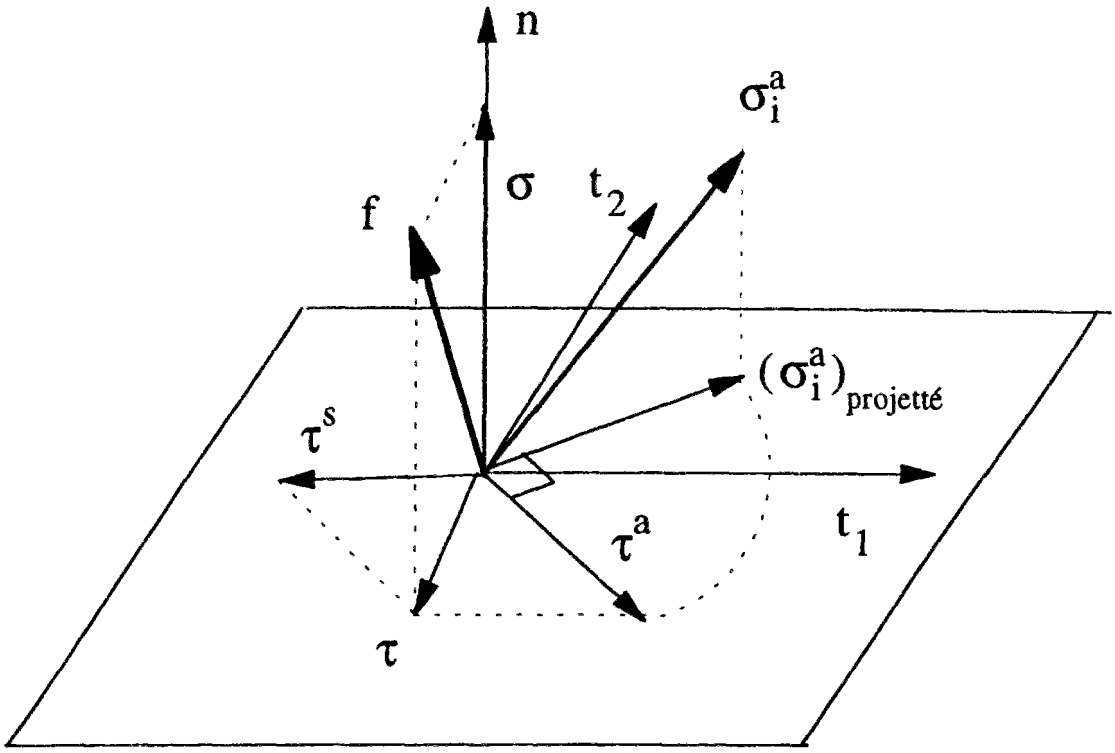


Figure A.5-7 : Construction du vecteur contrainte totale
dans un milieu continu de Cosserat (cf. Annexe A-8)

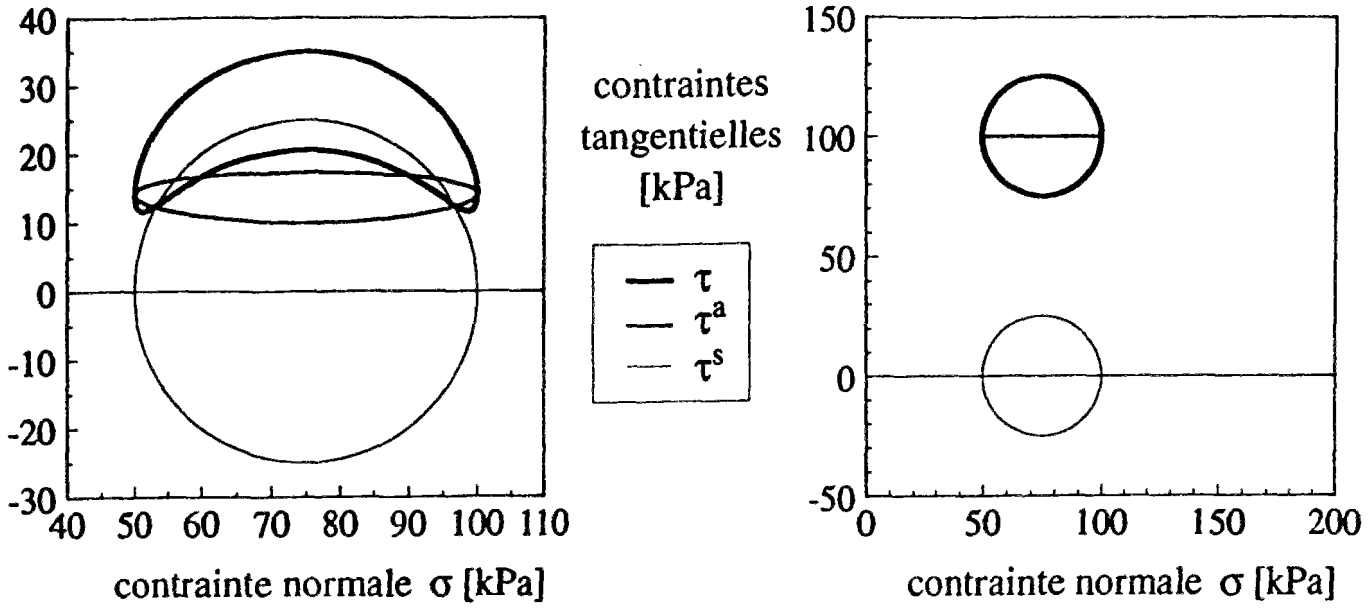


Figure A.5-8 :
(σ_1^a = 10 kPa , σ_2^a = 10 kPa , σ_3^a = 10 kPa)

Figure A.5-9 :
(σ_1^a = 0 kPa , σ_2^a = 0 kPa , σ_3^a = 100 kPa)

Figure A.5-8 et 9 : Courbe décrite par le vecteur (τ , σ) dans le plan de Mohr
(σ_1 = 50 kPa, σ_2 = 100 kPa)

5.3.5 Théorème d'unicité des solutions

5.3.5.1 Matériau élastique

Mindlin et Tiersten ont démontré que dans la cas d'un milieu continu de Cosserat avec une loi de comportement linéaire élastique, il y a unicité de la solution d'un problème aux limites correctement posé si le potentiel élastique est une forme positive défini. Il en résulte des conditions nécessaires de stabilité au sens Hadamard et qui portent sur les coefficients élastiques.

5.3.5.2 Matériau élasto-plastique

La perte d'unicité de la solution d'un problème aux limites dans un milieu continu classique se traduit mathématiquement par le passage d'équations de type elliptique à parabolique. Il en résulte numériquement une forte dépendance de la solution éléments finis en fonction du maillage utilisé. Steinmann et Kaspar (1969) ont analysé l'influence des nouveaux termes en couples contraintes sur le tenseur acoustique. Ils ont pu démontré que la présence simultanée de contraintes et couples contraintes, stabilise le tenseur acoustique par rapport au cas classique où les couples contraintes sont nuls et le tenseur des contraintes symétrique. Cependant, ils ont noté que cet effet positif pouvait être annihilé par un radoucissement important ou une loi de comportement non associée.

Dans le cas d'une théorie incrémentale de plasticité et un critère de type J2, Steinmann et Kaspar (1969) démontrent que le tenseur de localisation est stabilisé par la présence simultanée de contraintes et couples contraintes, qui agit de manière similaire au durcissement d'un matériau. Alors que dans le cas classique, il existent deux directions préférentielles pour la localisation, dans le cas d'un milieu de Cosserat où les couples contraintes sont prépondérants, il n'existe plus qu'une seule direction préférentielle. Ce qui rappelle le résultat remarquable du critère de Mohr-Coulomb, généralisé aux milieux de Cosserat par Bogdaneva-Bontcheva et Lippmann (1973), et qui détermine le plan de cisaillement maximal de manière unique.

Steinmann et Kaspar (1969) soulignent que "**les singularités des opérateurs traditionnels du matériau sont stabilisés dans la plupart des cas, si ce n'est, toutes supprimées, dans le cas où les conditions aux limites mobilisent simultanément les contraintes et couples contraintes**", ce qui est bien le cas en interface.

6 Conditions aux limites

6.1 Introduction

Dans un milieu continu généralisé, il convient d'introduire en plus des conditions aux limites de type classique, c'est à dire correspondant aux trois degrés de liberté d'un milieu continu classique, des conditions aux limites nouvelles. Celles-ci peuvent remplacer les conditions aux limites classiques, dans le cas des théories non locales, ou les compléter, quand la cinématique est enrichie, comme par exemple dans le cas d'un milieu de Cosserat.

Les milieux continus généralisés sont souvent utilisés dans les études sur les phénomènes de bifurcation car ils permettent : (1) de régulariser les équations du problème, qui, dans le cas classique, perdent l'unicité de la solution, mais dans le cas généralisé, retrouvent l'unicité, et (2) d'introduire une ou plusieurs longueurs internes qui fixent l'épaisseur des zones localisées (bandes de cisaillement) ou déterminent le choix entre plusieurs modes de bifurcation. Dans ces applications des milieux généralisés pour traiter la bifurcation, les conditions aux limites utilisées sont classiques et, le plus souvent, n'interviennent même pas dans la solution, comme cela se produit pour la localisation volumique où la localisation est supposée se produire dans le volume loin de toute condition aux limites.

Un trait important des milieux continus généralisés est l'existence de nouvelles conditions aux limites en correspondance avec les nouveaux degrés de liberté introduits. Celles-ci doivent être introduites de manière systématique en utilisant le principe des puissances virtuelles (Germain, 1973). Quand elles sont prises nulles, le matériau généralisé se comporte comme un matériau classique (figure A.6-1).

L'existence de ces nouvelles conditions aux limites est primordiale dans les phénomènes de localisation d'interface puisque ce sont elles, qui vont initier la localisation, et non pas un phénomène de bifurcation. En effet, dans un essai de cisaillement simple plan, au point de bifurcation, la formation de bandes de cisaillement se fait dans des directions, a priori, différentes de l'interface. Pour que ces bandes soient alignées avec l'interface, il faut attendre des niveaux de déformations incompatibles avec les observations expérimentales qui indiquent que la formation de l'interface se fait pour des déplacements de l'interface de l'ordre de 5 à 10 fois le rayon des grains étudiés (Kishida et Uesugi, 1987).

Si le principe des puissances virtuelles permet de poser correctement le problème en indiquant le nombre et les types de conditions aux limites qu'il convient d'introduire, en revanche, il ne donne pas d'indication sur celles qui correspondent à la réalité. Seul les observations expérimentales peuvent apporter une réponse.

Il convient de noter que dans le cas général de deux milieux en contact l'un avec l'autre, les phénomènes d'interaction auront pour effet de dégrader les deux milieux simultanément durant un cisaillement. Dans le cas particulier d'une structure très rigide par rapport à un matériau granulaire, les caractéristiques mécaniques étant très contrastées, seul le matériau granulaire se dégradera sous l'effet du cisaillement. Le problème est simplifié. Les conditions aux limites imposées par l'interface rigide seront alors fortement dépendantes du comportement du matériau granulaire. Ce seront des conditions aux limites constitutives au matériau granulaire.

Très peu d'études ont été consacrées aux conditions aux limites généralisées qu'il convient d'introduire dans un problème aux limites pour un milieu continu généralisé. En effet, le problème de la localisation volumique peut être résolu en faisant quasiment abstraction des conditions aux limites. Par contre, dans le problème de la localisation d'interface, les conditions aux limites jouent par définition un rôle essentiel.

Avant de faire le point sur les milieux de Cosserat, nous analyserons les deux seules études où la définition de ces conditions aux limites généralisés a été abordée.

6.2 Conditions aux limites dans le cadre des théories non locales

6.2.1 Interface sol-béton

Chen et Schreyer (1987) se sont intéressés à l'interface entre un béton et un sol granulaire modélisé dans le cadre d'une théorie non locale où, dans le critère Mohr-Coulomb, l'angle de frottement est une fonction décroissante du second invariant du gradient des déformations inélastiques. La fonction d'écrouissage introduit alors une longueur interne qui contrôle l'épaisseur des zones localisées. En ce qui concerne les conditions aux limites, il est supposé que le sol adhère au béton durant tout le chargement mais que l'interface sol-béton introduit initialement une imperfection qui est modélisée par la réduction des caractéristiques mécaniques du premier élément fini en contact avec le béton. Le béton est supposé parfaitement rigide. Tel quel le problème est incomplet. Il convient de rajouter une condition à l'interface. Chen et Schreyer (1987) proposent de rajouter la condition que le gradient des déformations inélastiques est nul dans le premier élément. D'un point de vue physique, cela correspond à un flux nul des déformations plastiques, à la limite entre le béton qui se comporte de manière élastique et le sol qui plastifie.

6.2.2 Interface roche-outil de forage

Vardoulakis et al. (1992) ont étudié l'interface entre un outil de forage rigide et une roche, modélisée dans le cadre d'une théorie élasto-plastique du second de gradient. Dans un tel milieu, il convient de considérer, outre les contraintes de Cauchy, des contraintes relatives et des couples contraintes. Le principe des puissances virtuelles permet de montrer qu'il faut compléter les conditions aux limites classiques en traction par de nouvelles conditions aux limites portant sur les couples contraintes ou sur les dérivées des déplacements.

Dans un tel milieu, les tractions imposées correspondent aux contraintes totales. Cependant, pour la loi de comportement utilisée, la condition à la limite en traction est équivalente à spécifier une combinaison linéaire des dérivées premières et troisièmes des déplacements. Une condition aux limites en couples contraintes est équivalente à spécifier le laplacien des déplacements. Plus généralement, il est possible de spécifier une condition aux limites portant sur les dérivées d'ordre 1, 2 et 3 des déplacements. Les conditions aux limites considérées par Vardoulakis et al. (1992) sont résumées dans les tableaux A.6-1 et A.6-2.

Tableau A.6-1 : Conditions aux limites de type Dirichlet
Vardoulakis et al. (1992)

	Interface	Haut de la couche
conditions classiques	$U = U_0$	$U = 0$
nouvelles conditions	$\frac{dU}{dY} = R_0$	$\frac{d^2U}{dY^2} = 0$

Tableau A.6-2 : Conditions aux limites de type Neumann
Vardoulakis et al. (1992)

	Interface	Haut de la couche
conditions classiques	$U = U_0$	$U = 0$
nouvelles conditions	$\frac{d^2U}{dY^2} = M_0$	$\frac{d^2U}{dY^2} = 0$

La variable Y est l'ordonnée normalisée par la longueur interne l_0 du modèle. La constante R_0 a donc la dimension d'une longueur tandis que la constante M_0 a la dimension du carré d'une longueur. Toutes deux constituent des mesures de la rugosité de l'interface.

Pour le problème de Dirichlet, les déformations plastiques sont maximales à quelque distance de l'interface, tandis que pour le problème de Neumann, le maximum est atteint à l'interface (figure A.6-2). L'évolution des épaisseurs des zones de sol plastique, durcissant et radoucissant, est représentée sur la figure A.6-3.

6.3 Conditions aux limites dans un milieu de Cosserat

Dans la littérature, seules deux études ont été partiellement consacrées au problème des conditions aux limites dans un milieu de Cosserat.

Bogdaneva-Bontcheva et Lippmann (1973) ont ainsi considéré des conditions aux limites statiques en contraintes totales et couples contraintes. Un tel choix, que nous avons fait également dans la partie 8 de cette partie A, permet de résoudre analytiquement le cisaillement simple annulaire d'un milieu rigide parfaitement plastique, mais ne permet pas d'aller plus loin.

Teichmann (1989, 1994) s'est intéressé à la formulation de conditions aux limites plus générales. Il a ainsi proposé deux séries de conditions que nous résumerons ci-dessous avant de les critiquer pour les modifier et aboutir à une formulation plus générale et acceptable physiquement.

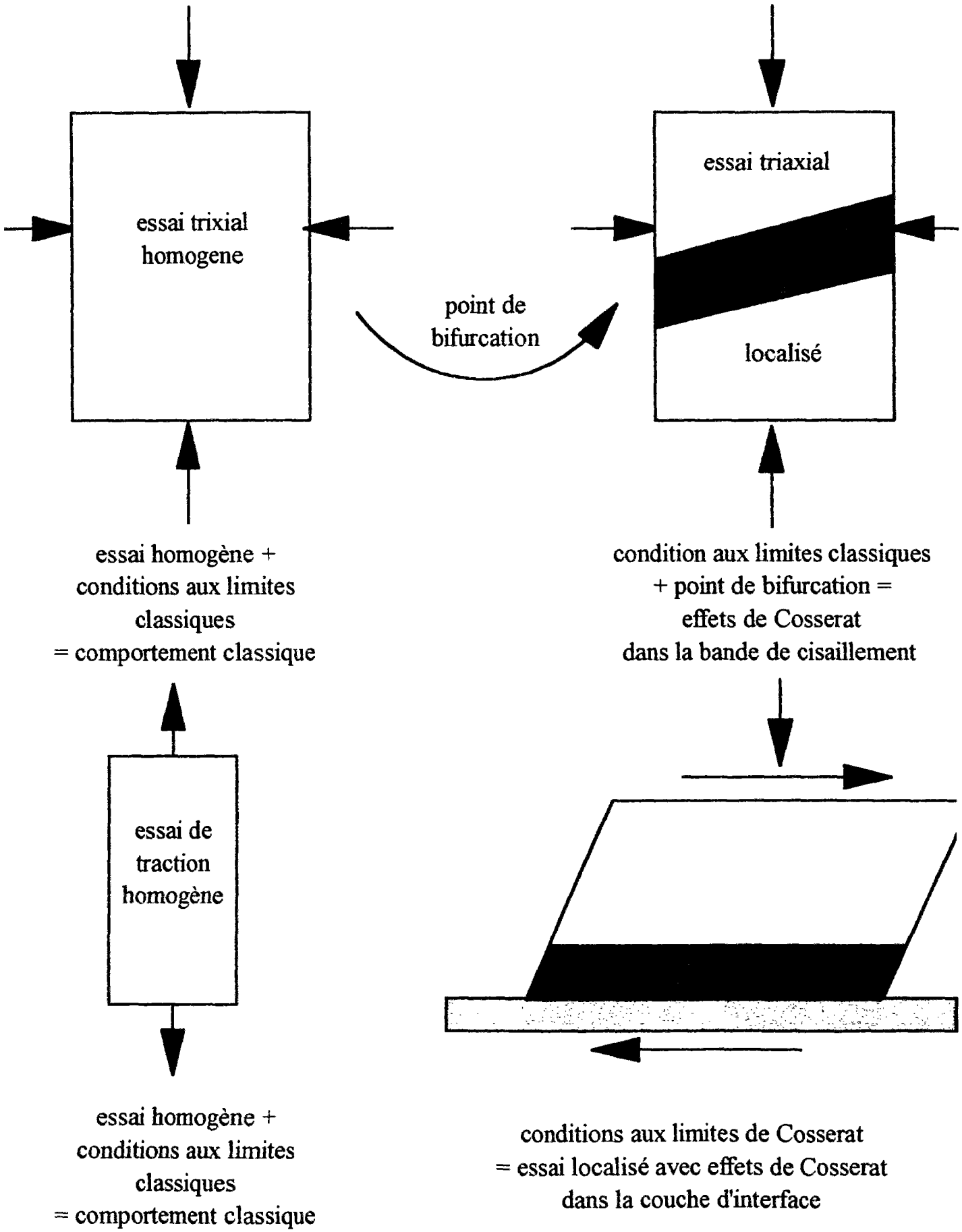


Figure A.6-1 : Essais homogènes et localisés

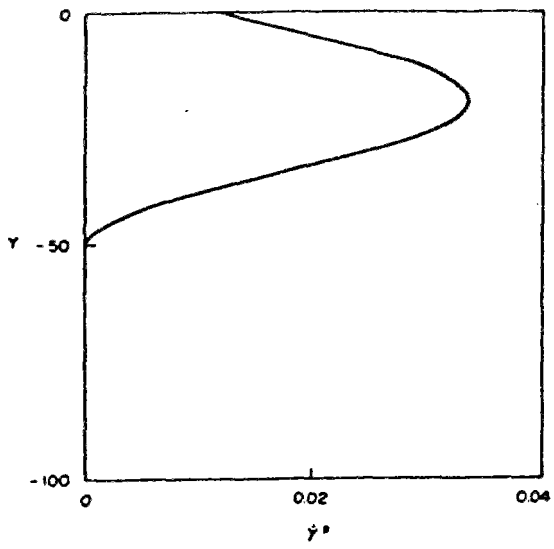


Figure A.6-2a : Problème de Dirichlet

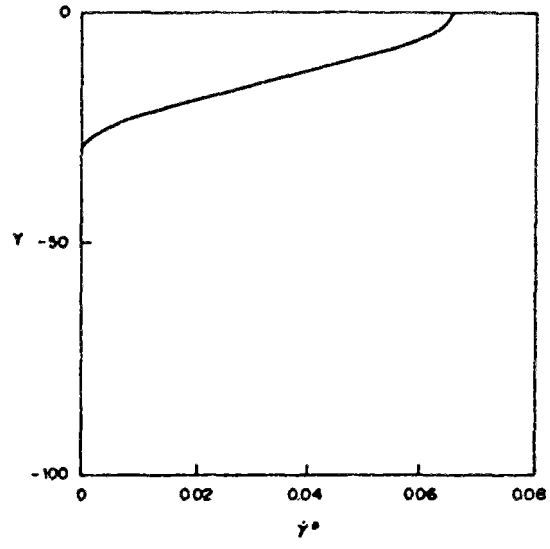


Figure A.6-2b : Problème de Neumann

Figure A.6-2 : Variations de la déformation plastique avec la distance à l'interface (Vardoulakis et al., 1993)

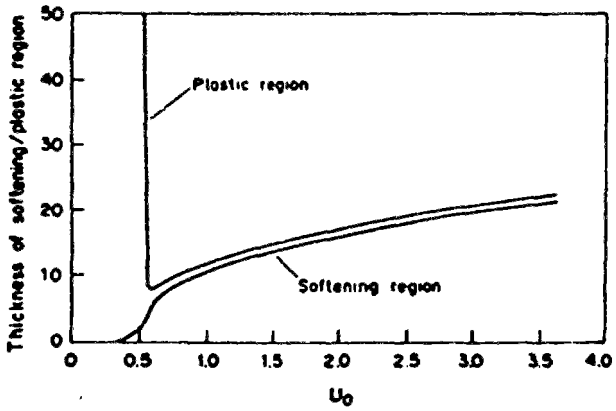


Figure A.6-3 : Evolution des zones plastiques durcissante et radoucissante (Vardoulakis et al., 1993)

6.3.1 Conditions proposées par Teichmann

6.3.1.1 Interface très rugueuse

Pour une interface très rugueuse, Teichman (1994) considère que le glissement ne se produit que lorsque la valeur résiduelle du frottement du sol est atteinte dans la couche d'interface. Pendant la phase dite d'adhérence, les conditions aux limites sont les suivantes :

$$U_1(I) = W_I \qquad \text{(A.6-1)}$$

$$R\omega_3^c(I) = 0 \qquad \text{(A.6-2)}$$

$$U_2(I) = 0 \qquad \text{(A.6-3)}$$

Le paramètre W_I est le déplacement de l'interface. La rotation nulle des grains peut être interprétée, au moins dans la phase initiale de cisaillement, par le fait que la première rangée de grains en contact avec l'interface est collée et ceux-ci sont simplement translatés sans rotation.

Ce choix de conditions aux limites est critiquable à plusieurs points de vue. Si dans la phase initiale de cisaillement, on peut considérer que le sol collé fait partie du matériau testé, très vite, une séparation très nette entre les grains collés et les grains non collés se produit. D'un point de vue numérique, on observe la formation d'une couche d'interface élastique d'épaisseur quelques longueurs internes tandis que tout le reste de l'échantillon reste plastique, ce qui n'est pas satisfaisant d'un point de vue physique. Du point de vue des déplacements et déformations, le profil obtenu n'est pas en accord avec les observations expérimentales puisque localement, le gradient est nul à l'interface, du fait de l'"encastrement" des grains dans l'interface. Une dernière raison en défaveur de ce genre de conditions aux limites est la discontinuité de comportement observée quand on passe d'une interface rugueuse à très rugueuse (figure A.6-4).

6.3.1.2 Interface lisse ou rugueuse

Dans le cas d'une interface lisse ou rugueuse, Teichman (1989) propose de considérer les trois relations suivantes :

$$\frac{\omega_3^c(I)}{U_1(I)} = C_1 \qquad \text{(A.6-4)}$$

$$U_2(I) = 0 \qquad \text{(A.6-5)}$$

$$\frac{\mu_{32}(I)}{\sigma_{12}(I)} = C_2 \qquad \text{(A.6-6)}$$

La constante C_1 quantifie la rotation de Cosserat imposée par l'interface pour un déplacement du sol U_1 donné. La constante C_2 relie le couple contrainte $\mu_{32}(I)$ imposé par la rugosité de l'interface avec la contrainte tangentielle totale $\sigma_{12}(I)$. La constante C_2 a la dimension d'une longueur et caractérise les fluctuations de la contraintes tangentielle. La détermination des deux constantes C_1 et C_2 a été faite pour le problème du silo à partir des simulations numériques. Pour un mur rugueux, Teichman obtient :

$$C_1 = \frac{1}{4\ R} \qquad \text{(A.6-7)}$$

tandis que pour un mur lisse il obtient :

$$C_1 = \frac{1}{20\ 000\ R} \qquad \text{(A.6-8)}$$

Pour ce qui concerne C_2 la valeur obtenue est égale à :

$$C_2 \equiv \frac{R}{5} \qquad \text{(A.6-9)}$$

Cependant, cette valeur est tellement petite qu'une condition en couple contrainte nul donne quasiment les mêmes résultats. Entre 1989 et 1994, Teichman a laissé tombé la troisème condition à la limite statique pour ne garder que des conditions aux limites cinématiques. Cependant, même avec ces valeurs, le calage des calculs avec les mesures n'a pas pu être fait de manière satisfaisant. Plusieurs raisons peuvent être avancées et notamment, la complexité de l'essai considéré. En effet, c'est le cisaillement direct plan qui a été modélisé alors qu'il est caractérisé par des effets de bords très importants comme cela est classiquement observé expérimentalement et cela a été retrouvé numériquement (figure A.6-5).

L'épaisseur de la couche d'interface a été modélisée de manière satisfaisante. Les valeurs trouvées pour une interface lisse et une interface rugueuse sont respectivement 0 - 0,5 cm et 0,5 - 1,0 cm pour une valeur de R égale à 0, 5 mm. En termes d'épaisseurs normalisées, cela donne entre 10 et 20 R suivant la rugosité. Cependant, les courbes de frottement calculées sont très différentes des mesures notamment (figure A.6-6).

6.3.1.3 Critique des conditions aux limites

Teichman (1994) indique que pour des valeurs de la constante C_1 supérieure à 1/2 R, les résultats numériques sont identiques à ceux d'une interface rugueuse. Telle que proposée, la rotation imposée à l'interface $\omega_3^c(I)$, dans le cas d'une interface rugueuse à très rugueuse, peut être très importante puisque $\frac{R\,\omega_3^c(I)}{U_1(I)} \geq \frac{1}{2}$. Par contre, dans le cas d'une interface classée comme "très rugueuse", la rotation imposée est nulle. Au niveau de la formulation, il y a donc une discontinuité très nette entre les interfaces lisses et très rugueuses (figure A.6-4).

D'autre part, pour une interface lisse, la rotation imposée est très faible $\frac{R\,\omega_3^c(I)}{U_1(I)} \geq \frac{1}{20\,000}$ mais différente de ce qu'il conviendrait d'imposer dans le cas classique, ce qui ne permet pas de retomber sur le cas d'un milieu classique, à la limite.

Enfin, ces conditions aux limites ont été testées sur des cas complexes, tels qu'un silo ou la boîte de cisaillement direct plane, ce qui ne permet pas de mettre en évidence les différences importantes et la discontinuité entre les conditions aux limites proposées (Teichmann, 1994). Notamment, la condition à la limite en rotation nulle ne nous apparaît pas appropriée car elle conduit à avoir en interface une couche élastique alors que le reste de l'échantillon reste plastique, du moins dans le cisaillement simple plan, qui est un essai unidimensionnel, sans effets de bords (paragraphe 11, partie A).

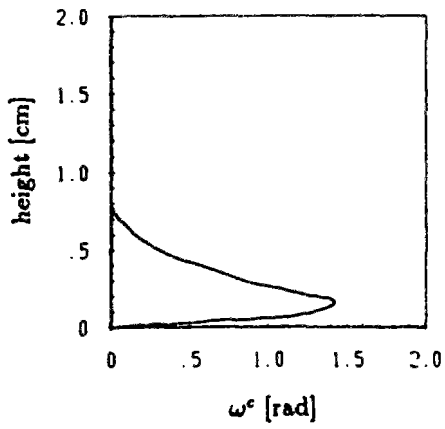


Figure A.6-4a : Interface très rugueuse

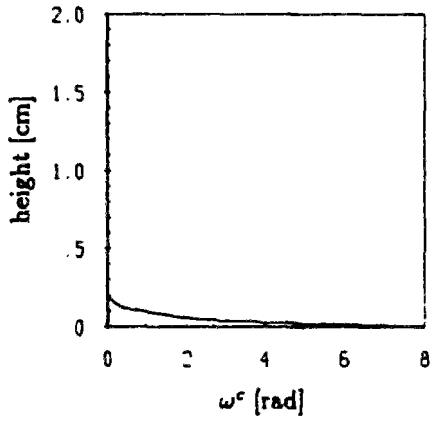


Figure A.6-4b : Interface rugueuse

Figure A.6-4 : Variations de la rotation de Cosserat avec la distance à l'interface, dans le cas d'une interface rugueuse et d'une interface lisse (Teichman, 1994)

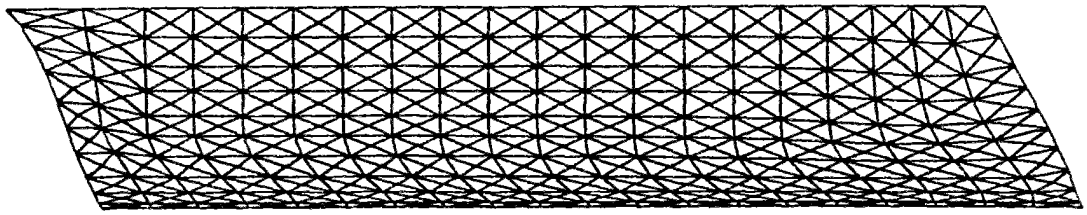


Figure A.6-5a : Interface très rugueuse

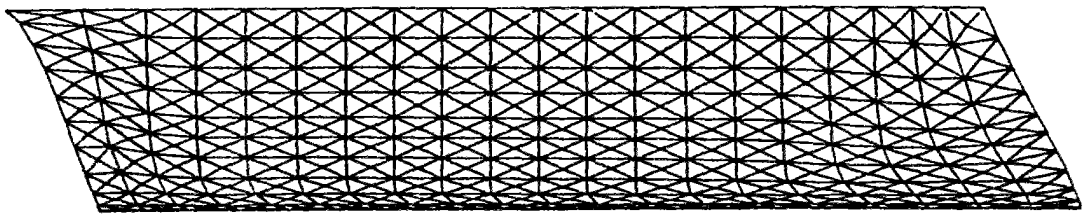


Figure A.6-5b : Interface rugueuse

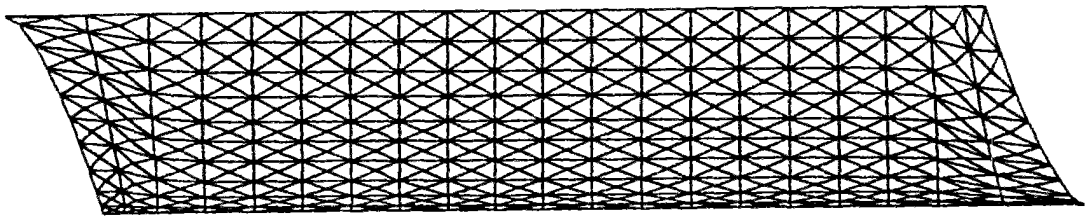


Figure A.6-5c : Interface lisse

Figure A.6-5 : Cisaillement direct plan d'un sable dense ($W_I = 2$ cm)
(Teichmann, 1994)

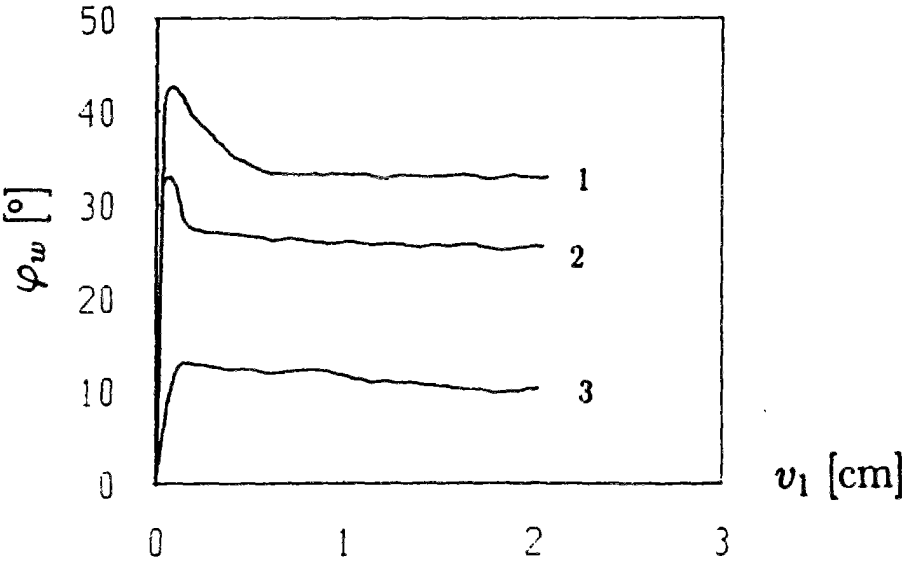


Figure A.6-6 : Mobilisation du "frottement" au cours d'essais de cisaillement direct plan d'un sable dense et d'une interface (1) très rugueuse, (2) rugueuse et (3) lisse ($W_I = 2$ cm)
(Teichmann, 1994)

6.3.2 Conditions aux limites correspondant à une demi-bande de cisaillement

Il peut être intéressant de considérer comme conditions aux limites à l'interface, celles qui existent au milieu d'une bande de cisaillement. Ce jeu de conditions aux limites donne une couche d'interface égale à la demi-bande de cisaillement, ce qui constitue une borne supérieure par rapport à l'épaisseur que l'on obtient pour tout autre jeu de conditions aux limites. En effet, en imposant à la dérivée de la rotation ω_3^c d'être nulle, on impose une décroissance très lente de celle-ci près de l'interface. Les effets de Cosserat ont alors tendance à pénétrer plus profondément dans le volume de sol.

Par raison de symétrie, au sein d'une bande de cisaillement, les rotations ω_3^c sont égales pour des points situés de part et d'autre de l'axe de la bande. La dérivée de ω_3^c , selon la direction normale à la bande de cisaillement, est donc nulle au milieu de la bande de cisaillement. Les deux conditions aux limites classiques sont en déplacement tangentiel $U_1(I)$ imposé non nul et en déplacement normal $U_2(I)$ nul. Pour la troisième condition à la limite en interface, il convient de prendre la dérivée de la rotation de Cosserat nulle, c'est à dire la courbure nulle :

$$\frac{\partial \omega_3^c}{\partial x_2}(I) = 0 \qquad \text{(A.6-10)}$$

Dans le cas élastique, cette condition est équivalente à prendre un couple contrainte nul. Par contre, dans le cas élastoplastique, cette condition est plus complexe et est équivalente à une combinaison linéaire sur les dérivées des déplacements, la rotation et sa dérivée première.

6.4 Formulation de conditions aux limites cinématiques à partir de considérations micromécaniques

Dans les milieux continus avec microstructure, la mesure des variables de type microscopique : déformations de la microstructure, contraintes antisymétriques, couples contraintes, est difficile, si ce n'est impossible.

Les contraintes macroscopiques dans un échantillon sont classiquement obtenues en mesurant la déformation macroscopique subie par un matériau (anneau métallique, corde vibrante, jauges de déformation, etc.) dont les caractéristiques mécaniques sont suffisamment bien connues pour pouvoir remonter aux contraintes.

La mesure de contraintes relatives ou antisymétriques, comme par exemple σ_{12}^a, ne put être réalisée que si l'on sait mesurer les contraintes tangentielles macroscopiques sur deux facettes perpendiculaires, dans les zones où le tenseur des contraintes est antisymétrique. Or ces zones, par définition sont des zones, d'épaisseurs faibles, avec de forts gradients des déformations et contraintes.

Mesurer des couples contraintes dans une structure constituée de blocs de grandes tailles, comme le Parthénon ou la Cathédrale de Beauvais, est possible à condition d'être capable de mesurer la non uniformité des contraintes appliquées sur les facettes de blocs. Il faut noter, à ce propos, que la terminologie microscopique/macroscopique utilisée classiquement et reprise systématiquement ici même, n'est pas la plus appropriée. Il conviendrait plutôt de parler d'échelles mésoscopique/macroscopique et de garder le niveau microscopique pour le niveau des atomes.

Cependant, d'un point de vue mécanique, on n'a, dans le problème étudié, que deux échelles, et l'une peut être qualifiée de microscopique, tandis que l'autre sera qualifiée de macroscopique.

Mesurer des couples contraintes dans un milieu granulaire est beaucoup plus difficile. Le passage micro-macro développé dans le paragraphe 7 de la partie A, permet de relier les contraintes et couples contraintes aux forces de contact entre les grains. Les contraintes sont reliées aux composantes normales et tangentielles des forces tandis que les couples contraintes ne dépendent que des forces tangentielles. Mais ces dernières ne sont accessibles que dans le cas de simulations numériques par éléments distincts (cf. paragraphe 3, partie A). D'un point de vue expérimental, seuls des essais sur des billes ou rouleaux en photoélasticité pourraient donner accès aux valeurs des forces intergranulaires et ainsi aux couples contraintes. La mesure des contraintes antisymétriques et couples contraintes est donc quasiment impossible dans les milieux granulaires.

Si les variables statiques de type microscopique sont difficilement accessibles, par contre, les variables cinématiques sont plus facilement observables, pourvu que l'on sache réaliser le passage entre la cinématique du milieu granulaire et la cinématique du milieu continu de Cosserat équivalent. Une telle démarche est possible (cf. paragraphe 3, partie A) et requiert beaucoup de patience et d'efforts pour mesurer sur un nombre suffisant de grains les déplacements et rotations (Boulon et al., 1992, 1993). En outre, il convient d'utiliser des essais où les conditions de déformations et contraintes le long de l'interface soient invariantes par translation sur une longueur suffisante afin de s'affranchir de la variabilité spatiale le long de l'interface.

En terme de conditions aux limites, purement cinématiques, celles-ci peuvent être obtenues simplement en moyennant les déplacements u_1 et u_2 des centres de gravité G ainsi que les rotations ω_3^g des premiers grains en contact avec l'interface rigide, qui se déplace avec un déplacement tangentiel noté W_I, pour obtenir les déplacements $U_1(I)$ et $U_2(I)$ ainsi que la rotation de Cosserat $\omega_3^c(I)$ à introduire comme conditions à la limite en interface dans le milieu continu de Cosserat. L'évolution de ces trois variables peut être suivie simplement au cours d'un essai. Elle dépend a priori des caractéristiques du sol, de l'interface et notamment sa rugosité, mais aussi des conditions aux limites extérieures. A priori, elles dépendent de toutes les données du problème aux limites et peuvent être qualifiés de conditions aux limites constitutives.

Il est commode de reformuler ces conditions aux limites sous la forme suivante en se basant sur une approche micro-mécanique simple (figure A.6-7). Considérons un grain moyen en contact avec l'interface. Quand l'interface rigide se déplace de W_I, celui-ci se déplace tangentiellement de $U_1(I)$, normalement de $U_2(I)$ et tourne de $R\omega_3^c(I)$. Introduisons les fractions f_1 et f_2 définies par les relations suivantes :

$$U_1(I) = f_1 \, W_I \tag{A.6-11}$$

$$R\omega_3^c(I) = f_2 \, W_I \tag{A.6-12}$$

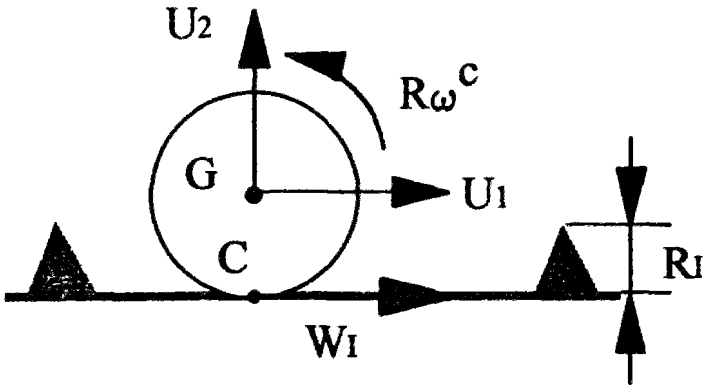


Figure A.6-7 : Interaction entre un grain et une interface rugueuse

La fraction f_1 est la fraction de déplacement de l'interface W_I qui est transmise au sol sous forme de translation. La fraction f_2 est la fraction de déplacement de l'interface W_I qui est transmise au sol sous forme de rotation. LA somme des deux fractions f_1 et f_2 n'est pas égale à un. Notons f_3 , la fraction de déplacement de l'interface W_I qui n'est pas transmise au sol. Elle correspond à un glissement relatif des grains par rapport à la surface de contact :

$$f_1 + f_2 + f_3 = 1 \qquad \text{(A.6-13)}$$

A partir de considération géométrique présentée sur la figure A.6-7, il est possible de développer des bornes pour chacune des variables.

6.4.1 Condition sur le déplacement normal

En particulier, le déplacement normal moyen $U_2(I)$ des premiers grains est limité par la rugosité R_I de la surface de contact, sachant que celle-ci est plafonnée au rayon des grains R^g , puisque dès que R_I est plus grand que R^g , les premiers grains sont transportés avec l'interface. Ils en font partie et ne soulèvent pas. Si R_I est plus petit que R^g , il est possible que des grains soient soulevés par les aspérités de la surface. Cependant, l'amplitude maximale de ce soulèvement sera R^g :

$$0 \le U_2(I) \le \min\left(R_I, R^g\right) \qquad \text{(A.6-14)}$$

La borne inférieure nulle correspond à l'hypothèse d'une interface rigide. Dans le cas, d'un géotextile, il conviendra de tenir compte de la variation de l'épaisseur de la nappe avec le niveau de tension.

Dans les simulations, vue la faible amplitude du déplacement U_2 (I) on considérera qu'il est nul, ce qui permettra de mettre en évidence plus facilement la forte dilatance locale due aux termes de Cosserat dans la couche d'interface.

6.4.2 Conditions sur le déplacement tangentiel et la rotation

Pour déterminer la plage de variation des fraction f_1 et f_2 considérons un grain en contact avec l'interface. Le déplacement tangentiel u_1 du point de contact C est relié au déplacement u_1 et à la rotation ω_3^g du centre de gravité G par la relation :

$$u_1(C) = u_1(G) + R\omega_3^g(G) \qquad \text{(A.6-15)}$$

Le point de contact C peut glisser par rapport à l'interface d'une amplitude $f_3\ W_I$. Le déplacement $u_1(C)$ est alors égal à :

$$u_1(C) = (1 - f_3) W_I \qquad \text{(A.6-16)}$$

Appelons f_1 la fraction de W_I qui est transmise au grain sous forme de translation u_1 et f_2 la fraction qui est transmise sous forme de rotation ω_3^g. On obtient alors la relation suivante sur les fractions :

$$f_1 + f_2 + f_3 = 1 \qquad \text{(A.6-17)}$$

La part relative du déplacement tangentiel par rapport à la rotation ne peut être déterminée à partir du schéma simple étudié. En effet, suivant la rugosité relative de l'interface par rapport à la taille des grains, le niveau de contraintes considéré, la rigidité de l'interaction entre le grain et l'interface, les grains seront plus ou moins transportés et moins ou plus roulés. Cependant, quatre cas peuvent être considérés et sont représentés sur la figure A.6-8.

6.4.2.1 Cas extrêmes de grains "encastrés"

Un premier cas intéressant concerne des grains encastrés dans l'interface, c'est à dire ayant une rotation absolue nulle. Le coefficient f_2 est alors nul, ce qui correspond à la borne inférieure :

$$U_1(I) = (1 - f_3)\ W_I \qquad \text{(A.6-18)}$$

$$R\omega_3^c(I) = 0 \qquad \text{(A.6-19)}$$

Un tel cas correspond à des grains collés avec une colle très rigide sur une surface elle-même rigide. Dans la phase initiale du chargement, où les grains collés et non collés forment un milieu quasiment homogène, c'est ce genre de condition à la limite qui existe. Cependant, au cours du cisaillement, les grains non collés ont tendance à se dégager des grains collés et ces derniers ne peuvent plus être considérés comme faisant partie du matériau granulaire testé.

6.4.2.2 Conditions aux limites classiques

Dans le cas du cisaillement simple plan, au cours d'un incrément de chargement défini par le déplacement W_I , le milieu continu de Cosserat se comporte comme un milieu classique, si l'on injecte en interface, une rotation de Cosserat correspondant à la rotation d'ensemble qu'aurait le milieu classique pour le même déplacement tangentiel $U_1(I)$:

$$R\omega_3^c(I) = \Omega_3 = \frac{U_1(I)}{2\ H} \qquad \text{(A.6-20)}$$

Tout calcul fait, on obtient pour les fractions f_1 et f_2 les valeurs suivantes :

$$f_1 = (1 - f_3)\frac{1}{1 + R/2H} \tag{A.6-21}$$

$$f_2 = (1 - f_3)\frac{R/2H}{1 + R/2H} \tag{A.6-22}$$

Supposons f_3 égal à 0 et prenons H égale à 200 R, ce qui correspond aux dimensions de l'essai simulé plus loin dans le paragraphe 11, on obtient alors une valeur de 0,9975 pour f_1 et de 0,0025 pour f_2 , ce qui est très faible.

6.4.2.3 Cas extrême de grains tournant sur eux-mêmes

Un deuxième cas extrême, donnant une borne supérieure pour la fraction f_2 , est constitué par des grains ne se déplaçant pas et tournant sur eux-mêmes :

$$U_1(I) = 0 \tag{A.6-23}$$

$$R\omega_3^c(I) = (1 - f_3)W_I \tag{A.6-24}$$

Ce cas n'est pas acceptable physiquement car il conduit à avoir des déplacements tangentiels négatifs dans le sol, pour un déplacement positif de l'interface W_I.

6.4.2.4 Cas général d'une interface

Dans le cas le plus général, le coefficient f_2 est compris dans la fourchette [0, 1]. Cependant, d'un point de vue physique nous avons vu que les valeurs extrêmes près de 1 étaient à exclure. Les valeurs comprises entre 0 et la valeur $f_{2,classique}$, correspondant au cas classique, sont également à exclure car elles donnent naissance à des interfaces élastiques et des profils de déplacements tangentiels irréalistes. Pour modéliser une interface, les valeurs comprises entre $f_{2,classique}$ et environ 0,6 nous semblent les plus appropriées, a priori. Cependant, seule une étude expérimentale exhaustive pourrait conforter ce point de vue.

Il faut également garder à l'esprit que les fractions f_i ne sont pas constantes au cours d'un essai. Par exemple, dans le cas d'une interface lisse, c'est à dire correspondant à des conditions aux limites de type classique, le coefficient f_3 évolue de manière très sensible. En début de chargement, quand le sol adhère à l'interface, f_3 est proche de 0. Quand, le sol glisse par rapport à l'interface, ce même coefficient devient très proche de 1. En ce qui concerne f_1 et f_2 , des variations importantes de ces coefficients au cours d'un même essai ne sont pas à exclure, et là encore, seuls des essais nombreux et soigneusement dépouillés pourraient apporter une réponse précise.

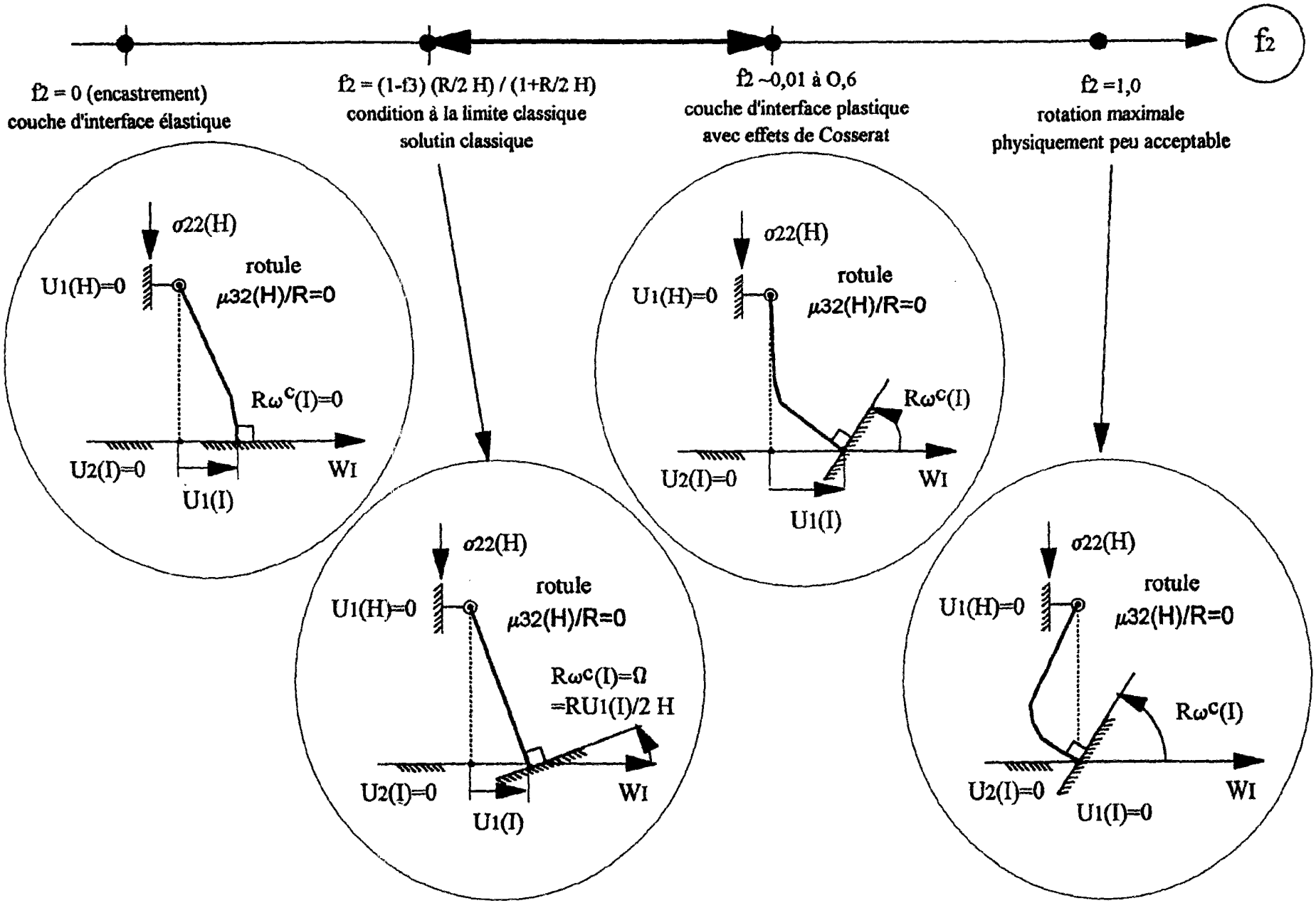


Figure A.6-8 : Conditions aux limites cinématiques pour un milieu de Cosserat

6.5 Conditions aux limites étudiées

Dans cette thèse, trois jeux de conditions aux limites ont été étudiés pour respectivement : (1) le cisaillement simple plan d'un milieu élastique, (2) le cisaillement simple annulaire d'un milieu rigide plastique et (3) le cisaillement simple plan d'un milieu élasto-plastique.

Dans le cas du cisaillement simple plan d'un milieu continu de Cosserat élastique, nous avons privilégié en interface les conditions aux limites cinématiques de façon à pouvoir mettre en facteur explicitement le terme $\left[\omega_3^c(I) - \frac{U_1(I)}{2\,H}\right]$ dans les solutions analytiques (tableau A.6-3). Ce terme mesure au niveau de l'interface, la différence entre la rotation de Cosserat et la rotation d'ensemble qu'aurait le milieu de Cosserat, s'il se comportait comme un milieu classique. Il constitue une mesure des effets de Cosserat, puisqu'il s'annule dans le cas de la solution classique. Sur la face supérieure de l'échantillon, nous avons choisi une condition à la limite portant sur la rotation relative ε_{12}^a, ce qui a pour effet d'imposer localement une solution de type classique. Nous aurions pu prendre une solution en couple contrainte nulle, de façon équivalente, mais la solution analytique aurait été plus longue à développer.

Tableau A.6-3 : Conditions aux limites prises pour l'analyse du cisaillement simple plan d'un milieu continu de Cosserat élastique linéaire anisotrope
(paragraphe 7, partie A)

		Interface $x_2(0)$	Face supérieure H
milieu continu de Cosserat	conditions aux limites d'un milieu continu classique	$U_2(0) = 0$ interface rigide	$\sigma_{22}(H) < 0$ contrainte normale constante
		$U_1(0) = f_1\ W_I > 0$ déplacement tangentiel imposé	$U_1(H) = 0$ déplacement tangentiel nul
	conditions aux limites de Cosserat	$R\ \omega_3^c(0) = f_2\ W_I > 0$ rotation de Cosserat imposée	$\varepsilon_{12}^a(H) = \Omega_3(H) - \omega_3^c(H) = 0$ rotation relative nulle "solution classique"

Dans le cas du cisaillement simple annulaire d'un milieu continu de Cosserat rigide parfaitement plastique, nous avons privilégié les conditions aux limites de type statique, de manière à pouvoir résoudre de manière explicite le problème statique, dans un premier temps, puis le problème cinématique, dans un deuxième temps (tableau A.6-4). Un tel choix n'est pas approprié pour caler le modèle de comportement, puisqu'il n'est pas possible de mesurer aussi bien les couples contraintes que les contraintes antisymétriques.

Tableau A.6-4 : Conditions aux limites étudiées pour le cisaillement simple annulaire d'un milieu continu de Cosserat rigide plastique
(paragraphe 8, partie A)

	Rayon de l'interface r_{int}	Rayon extérieur r_{ext}
Conditions aux limites d'un milieu continu classique	$U_r = 0$ interface rigide	$\sigma_{rr} < 0$ pression de confinement
	$\sigma_{\theta r} < 0$ contrainte de cisaillement à l'interface	$U_\theta = 0$ déplacement tangentiel
Conditions aux limites de type Cosserat	$\mu_{zr}(r_{int}) > 0$ mesure de la rugosité de l'interface	$\mu_{zr}(r_{ext}) = 0$ condition correspondant à la "solution classique"

Dans le cas du cisaillement simple plan d'un milieu continu de Cosserat élastoplastique avec écrouissage, nous avons privilégié les conditions aux limites purement cinématiques en interface, puisque ce sont les seules à pouvoir être mesurée dans un essai et à permettre ainsi la calibration des paramètres du modèle (tableau A.6-5). En extérieur, nous avons pris un couple contrainte nul, ce qui correspond, dans le cas du cisaillement simple annulaire à la membrane.

Tableau A.6-5 : Conditions aux limites prises pour le cisaillement simple plan d'une milieu continu de Cosserat élastoplastique avec écrouissage
(paragraphe 11, partie A)

		Interface $x_2(0)$	Face supérieure H
milieu continu de Cosserat	conditions aux limites d'un milieu continu classique	$U_2(0) = 0$ interface rigide	$\sigma_{22}(H) < 0$ contrainte normale constante
		$U_1(0) = f_1\ W_I > 0$ déplacement tangentiel imposé	$U_1(H) = 0$ déplacement tangentiel nul
	conditions aux limites de Cosserat	$R\ \omega_3^c(0) = f_2\ W_1 > 0$ rotation propre imposée	$\mu_{32}(H) = 0$ couple contrainte nul "solution classique"

7 Exemple du milieu de Cosserat linéaire élastique anisotrope

7.1 Equations de comportement d'un milieu continu de Cosserat linéaire élastique

7.1.1 Equations de comportement

Les équations générales caractérisant le comportement linéaire élastique d'un milieu continu de Cosserat isotrope, sont définies à partir de six coefficients : les deux modules classiques de déformation, K et G , plus quatre nouveaux coefficients : G_c , L , M , et M_c (Schaeffer, 1962; Mindlin, 1964; Koiter, 1963; Neuber, 1966) :

$$\sigma_{ij} = (K - G)\, \varepsilon_{kk}\, \delta_{ij} + (G + G_c)\, \varepsilon_{ij} + (G - G_c)\, \varepsilon_{ji} \qquad \text{(A.7-1)}$$

$$\mu_{ij} = (L - M)\, \kappa_{kk}\, \delta_{ij} + (M + M_c)\, \kappa_{ij} + (M - M_c)\, \kappa_{ji} \qquad \text{(A.7-2)}$$

La signification physique de ces six coefficients est plus apparente si l'on écrit les relations de comportement en séparant les parties volumiques, symétriques déviatoriques et antisymétriques déviatoriques, des tenseurs des déformations et courbures ainsi que des contraintes et couples contraintes :

$$p = \frac{\sigma_{kk}}{3} = \frac{3K - G}{3} \varepsilon_{kk} \qquad \text{(A.7-3)}$$

$$s^s_{ij} = 2\, G\, e^s_{ij} \qquad \text{(A.7-4)}$$

$$s^a_{ij} = 2\, G_c\, e^a_{ij} \qquad \text{(A.7-5)}$$

$$m = \frac{\mu_{kk}}{3} = \frac{3L - M}{3} \kappa_{kk} \qquad \text{(A.7-6)}$$

$$m^s_{ij} = 2\, M\, k^s_{ij} \qquad \text{(A.7-7)}$$

$$m^a_{ij} = 2\, M_c\, k^a_{ij} \qquad \text{(A.7-8)}$$

Le module (3 K-G)/3 relie la pression p à la déformation volumique ε_v, le module de cisaillement classique G relie les contraintes symétriques déviatoriques s^s_{ij} aux déformations symétriques déviatoriques e^s_{ij} , le module de cisaillement de Cosserat G_c relie les contraintes antisymétriques (déviatoriques) s^a_{ij} aux déformations antisymétriques (déviatoriques) e^a_{ij} . De manière tout à fait similaire, on peut définir le module (3 L-M)/3 , qui relie la partie sphérique m des couples contraintes à la partie sphérique k_{ii} des courbures , le module M, qui relie les couples contraintes symétriques déviatoriques m^s_{ij} aux courbures symétriques déviatoriques k^s_{ij} et le module M_c , qui relie les couples contraintes antisymétriques (déviatoriques) m^a_{ij} aux courbures antisymétriques (déviatoriques) k^a_{ij} .

7.1.2 Définition des longueurs internes

Dans les relations de comportement, les modules élastiques K , G , G_c ont la dimension d'une contrainte tandis que les modules L , M , M_c ont la dimension d'un couple contrainte, c'est à dire d'une contrainte par une longueur au carré. Les rapports de ces trois derniers modules par le module de cisaillement classique G introduisent donc trois longueurs internes. Il est d'usage d'introduire la longueur caractéristique en torsion R_t et la longueur caractéristique en flexion R_b :

$$R_t = \sqrt{\frac{M - M_c}{4\,G}} \tag{A.7-9}$$

$$R_b = \sqrt{\frac{M}{G}} \tag{A.7-10}$$

Dans les essais de cisaillement simples plan et annulaire, seuls les coefficients M et M_c jouent un rôle puisque la partie sphérique des courbures est nulle pour des raisons de symétrie, de déformations planes ou d'invariance parallèlement à l'interface. Dans le cas du cisaillement simple plan, seule la courbure κ_{32} est non nulle. Si l'on ne désire pas que cette courbure donne naissance à des couples contraintes μ_{31} et μ_{13} , il convient de prendre M et M_c égaux. Le même problème se pose pour le cisaillement simple annulaire où seule la courbure κ_{zr} est nulle. Dans ces cas là, la loi de comportement élastique est définie complètement par la donnée de seulement 4 coefficients : K , G , G_c et M.

On posera dans la suite que M est égal à N R^2 où R est la seule longueur interne introduite par la loi de comportement pour les deux cas étudiés. Après normalisation des couples contraintes et courbures par la longueur interne R, les équations (A.7-7) et (A.7-8) se simplifient de la façon suivante :

$$\frac{\mu_{ij}}{R} = 2\,N\,\left(R\,\kappa_{ij}\right) \tag{A.7-11}$$

Dans ces cas là, la longueur caractéristique en torsion R_t est nulle tandis que la longueur caractéristique en flexion R_b est reliée à la longueur R par la relation :

$$R_t = R\,\sqrt{\frac{N}{G}} \tag{A.7-12}$$

Plusieurs auteurs dont Lakes (1994) ont proposé de définir d'autres coefficients tels que le coefficient de couplage (coupling number) C :

$$C = \sqrt{\frac{G_c}{G + G_c}} = \sqrt{\frac{1}{4\,h_1}} \tag{A.7-13}$$

Le coefficient de polarité (polar ratio) ψ est défini par :

$$\psi = \frac{2M}{L+M} \tag{A.7-14}$$

Le coefficient de couplage C, qui est positif, est inférieur ou égal à 1. Sa valeur maximale 1 correspond à une valeur de G_c infinie. C'est le cas particulier d'un milieu de Cosserat avec contrainte interne sur la rotation relative nulle. Dans un tel milieu, la rotation de la microstructure est égale à la rotation du milieu macroscopique.

Schaeffer (1967) a également proposé d'autres notations de manière à généraliser le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν.

Dans la suite, nous utiliserons uniquement les coefficients K , G , G_c , L et N et N_c qui définissent les 6 relations de comportement dont nous aurons besoin et que nous rappelons ci-dessous :

$$p = \frac{\sigma_{kk}}{3} = \frac{3K-G}{3}\varepsilon_{kk} \tag{A.7-15}$$

$$s_{ij}^s = 2\,G\,e_{ij}^s \tag{A.7-16}$$

$$s_{ij}^a = 2\,G_c\,e_{ij}^a \tag{A.7-17}$$

$$m/R = \frac{\mu_{kk}/R}{3} = \frac{(3L/R^2)-2N}{3}\,R\,\kappa_{kk} \tag{A.7-18}$$

$$\frac{m_{ij}^s}{R} = 2\,N\,(R\,k_{ij}^s) \tag{A.7-19}$$

$$\frac{m_{ij}^a}{R} = 2\,N_c\,(R\,k_{ij}^a) \tag{A.7-20}$$

Ce choix de coefficients permet d'établir un parallélisme complet entre d'une part les contraintes, les déformations et les modules K , G et G_c , et d'autre part les couples contraintes normalisés par R, les courbures normalisées par R et les coefficients L/R^2 , N et N_c .

7.1.3 Potentiel élastique

Il est possible pour un milieu de Cosserat de définir, de la même façon que pour un milieu classique, un potentiel élastique W^e à partir duquel on peut dériver les variables cinématiques conjuguées ou duales en énergie avec une variable statique donnée.

Pour un milieu classique, ce potentiel élastique peut être mis sous la forme compacte suivante :

$$W^e = \frac{p^2}{2K} + \frac{\tau^2}{2G} \tag{A.7-21}$$

où τ est égal à :

$$\tau = \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}} \tag{A.7-22}$$

La variable cinématique conjuguée avec τ est égale à par définition à :

$$\gamma = \frac{\partial W^e}{\partial \tau} \tag{A.7-23}$$

ce qui donne :

$$\gamma = \sqrt{2\, e_{ij}\, e_{ij}} \tag{A.7-24}$$

La forme de W^e dans l'équation (A.7-21) est intéressante car elle permet de séparer les termes volumiques des termes déviatoriques qui sont regroupés dans le cisaillement τ.

Le potentiel élastique d'un milieu de Cosserat peut être facilement établi si l'on écrit les équations de comportement élastique en séparant les termes volumiques, déviatoriques symétriques, déviatoriques antisymétriques pour respectivement les tenseurs des contraintes et couples contraintes. Le calcul du potentiel plastique est alors immédiat :

$$W^e = \frac{p^2}{2K} + \frac{1}{4G} s^s_{ij} s^s_{ij} + \frac{1}{4G_c} s^a_{ij} s^a_{ij} + \frac{(m/R)^2}{2\left(L/R^2\right)} + \frac{1}{4N}\left(\frac{m^s_{ij} m^s_{ij}}{R^2}\right) + \frac{1}{4N_c}\left(\frac{m^a_{ij} m^a_{ij}}{R^2}\right) \tag{A.7-25}$$

Ce potentiel peut être ensuite réécrit en fonction des tenseurs des contraintes totales et des couples contraintes :

$$W^e = \frac{p^2}{2K} + \frac{G+G_c}{8GG_c} s_{ij} s_{ij} + \frac{G-G_c}{8GG_c} s_{ij} s_{ji} + \frac{(m/R)^2}{2\left(L/R^2\right)} + \frac{N+N_c}{8NN_c}\left(\frac{m_{ij} m_{ij}}{R^2}\right) + \frac{N-N_c}{8NN_c}\left(\frac{m_{ij} m_{ji}}{R^2}\right) \tag{A.7-26}$$

Plusieurs auteurs dont Mühlhaus (1986), Mühlhaus et Vardoulakis (1987) ont proposé de garder la forme compacte classique (A.7-21) en remplaçant le cisaillement classique τ par un cisaillement généralisé τ_g :

$$W^e = \frac{p^2}{2\,K} + \frac{\tau_g^2}{2\,G} \tag{A.7-27}$$

Cette démarche conduit à poser que τ_g soit égale à :

$$\tau_g^2 = \frac{1}{2}\, s_{ij}^s s_{ij}^s + \frac{G}{2\,G_c}\, s_{ij}^a s_{ij}^a + \frac{G}{2\,N}\left(\frac{m_{ij}^s m_{ij}^s}{R^2}\right) + \frac{G}{2\,N_c}\left(\frac{m_{ij}^a m_{ij}^a}{R^2}\right) \tag{A.7-28}$$

Si l'on note h_i les coefficients définissant le cisaillement généralisé τ_g :

$$\tau_g^2 = h_1\, s_{ij}\, s_{ij} + h_2\, s_{ij}\, s_{ji} + h_3\left(\frac{m_{ij}\, m_{ij}}{R^2}\right) + h_3\left(\frac{m_{ij}\, m_{ji}}{R^2}\right) \tag{A.7-29}$$

ce qui s'écrit aussi sous la forme :

$$\tau_g^2 = \left(\frac{h_1 + h_2}{2}\right) s_{ij}^s\, s_{ij}^s + \left(\frac{h_1 - h_2}{2}\right) s_{ij}^a\, s_{ij}^a + \left(\frac{h_3 - h_4}{2}\right)\left(\frac{m_{ij}^s\, m_{ij}^s}{R^2}\right) + \left(\frac{h_3 - h_4}{2}\right)\left(\frac{m_{ij}^a\, m_{ij}^a}{R^2}\right) \tag{A.7-30}$$

On obtient quatre relations entre les coefficients h_i et les modules élastiques de cisaillement généralisés : G , G_c , M et M_c :

$$h_1 + h_2 = \frac{1}{2} \tag{A.7-31}$$

$$h_1 - h_2 = \frac{G_c}{2\,G} \tag{A.7-32}$$

$$h_3 + h_4 = \frac{N}{2\,G} \tag{A.7-33}$$

$$h_3 - h_4 = \frac{N_c}{2\,G} \tag{A.7-34}$$

En procédant ainsi, on obtient des relations entre les coefficients h_i et les modules K , G , G_c , N et N_c qui sont purement élastiques.

Partant de l'expression générale du cisaillement généralisé τ_g en fonction des h_i , sa variable cinématique duale en énergie et notée γ_g , est calculée en dérivant le potentiel élastique W^e :

$$\gamma_g = \frac{\partial W^e}{\partial \tau_g} \tag{A.7-35}$$

On obtient après calcul :

$$\gamma_g = \sqrt{(g_1 + g_2)\, e^s_{ij}\, e^s_{ij} + (g_1 - g_2)\, e^a_{ij}\, e^a_{ij} + (g_3 + g_4)\, Rk^s_{ij}\, Rk^s_{ij} + (g_3 - g_4)\, Rk^a_{ij}\, Rk^a_{ij}} \tag{A.7-36}$$

où les coefficients η_i sont reliées aux h_i et aux modules élastiques par les 4 relations suivantes :

$$g_1 + g_2 = 4\,(h_1 + h_2) \tag{A.7-37}$$

$$g_1 - g_2 = 4\left(\frac{G_c}{G}\right)^2 (h_1 - h_2) \tag{A.7-38}$$

$$g_3 + g_4 = 4\left(\frac{N}{G}\right)^2 (h_3 + h_4) \tag{A.7-39}$$

$$g_3 - g_4 = 4\left(\frac{N_c}{G}\right)^2 (h_3 - h_4) \tag{A.7-40}$$

Après simplification et en prenant en compte les équations (A.7-31) à (A.7-34), on obtient les relations suivantes :

$$g_1 + g_2 = \frac{1}{h_1 + h_2} = 2 \tag{A.7-41}$$

$$g_1 - g_2 = \frac{1}{h_1 - h_2} \tag{A.7-42}$$

$$g_3 + g_4 = \frac{1}{h_3 + h_4} \tag{A.7-43}$$

$$g_3 - g_4 = \frac{1}{h_3 - h_4} \tag{A.7-44}$$

Ces relations sont très similaires à celles que l'on obtient quand on veut identifier le multiplicateur plastique $d\lambda^p$ avec le cisaillement plastique généralisé $d\gamma^p$ (cf. paragraphe 9, partie A).

7.1.4 Conditions nécessaires sur les valeurs des coefficients

Les conditions nécessaires de stabilité au sens d'Hadamard, c'est à dire que le potentiel élastique est une forme quadratique positive des variables statiques, peuvent être obtenue à partie de l'expression du potentiel élastique. On obtient ainsi :

$$3\,K - G > 0 \qquad \text{(A.7-45)}$$

$$G > 0 \qquad \text{(A.7-46)}$$

$$G_c > 0 \qquad \text{(A.7-47)}$$

$$3\,(L/R^2) - N > 0 \qquad \text{(A.7-48)}$$

$$N > 0 \qquad \text{(A.7-49)}$$

$$N_c > 0 \qquad \text{(A.7-50)}$$

Si l'on considère les coefficients h_i , les conditions (A.7-47), (A.7-49) et (A.7-50) peuvent être réécrites sous la forme suivante :

$$(h_1 - h_2) > 0 \qquad \text{(A.7-51)}$$

$$(h_3 + h_4) > 0 \qquad \text{(A.7-52)}$$

$$(h_3 - h_4) > 0 \qquad \text{(A.7-53)}$$

d'où les conditions :

$$h_1 > \frac{1}{4} \qquad \text{(A.7-54)}$$

$$h_2 < \frac{1}{4} \qquad \text{(A.7-55)}$$

$$h_3 > 0 \qquad \text{(A.7-56)}$$

$$h_3 > h_4 > -h_3 \qquad \text{(A.7-57)}$$

7.1.5 Relations de comportement dans le cas des cisaillements simples

Dans le cas du cisaillement simple plan et du cisaillement simple annulaire, les équations de comportement linéaire élastique peuvent être mise sous la forme vectorielle suivante :

$$\{\sigma\} = [L]\{\varepsilon\} \qquad \text{(A.7-58)}$$

La matrice de comportement est donnée par :

$$L_{ij} = \begin{vmatrix} K+G & K-G & & & & \\ K-G & K+G & & & & \\ & & 2G & & & \\ & & & 2G_c & & \\ & & & & 2N & \end{vmatrix} \qquad \text{(A.7-59)}$$

où les vecteurs $\{\sigma\}$ et $\{\varepsilon\}$ sont les vecteurs contraintes et déformations, généralisées et normalisées.

Dans le cas du cisaillement simple plan, ils sont égaux à :

$$\{\sigma\}^t = \left\{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}^s, \sigma_{12}^a, \frac{\mu_{32}}{R}\right\} \qquad \text{(A.7-60)}$$

$$\{\varepsilon\}^t = \left\{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}^s, \varepsilon_{12}^a, R\,\kappa_{32}\right\} \qquad \text{(A.7-61)}$$

Dans le cas du cisaillement simple annulaire, ils sont égaux à :

$$\{\sigma\}^t = \left\{\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{\theta r}^s, \sigma_{\theta r}^a, \frac{\mu_{zr}}{R}\right\} \qquad \text{(A.7-62)}$$

$$\{\varepsilon\}^t = \left\{\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{\theta r}^s, \varepsilon_{\theta r}^a, R\,\kappa_{zr}\right\} \qquad \text{(A.7-63)}$$

7.2 Dérivations des propriétés élastiques du milieu continu de Cosserat à partir des propriétés du milieu granulaire dans le cas d'un milieu 2D

Les coefficients élastiques d'un milieu continu de Cosserat peuvent être obtenus à partir des propriétés du milieu granulaire discontinu par une approche micro-mécanique (Mühlhaus et al., 1991).

Considérons un milieu granulaire formé de rouleaux de même rayon R. La position des centres de gravités G des rouleaux dans un système de coordonnés cartésiennes est notée (x_1 , x_2). Au point de coordonnées (x_1 , x_2), nous définissons un rouleau représentatif dont la cinématique est décrite par le vecteur déplacement u_i de son centre de gravité G et sa rotation propre ω^g . Les déplacements u_i et rotation ω^g des grains sont obtenus en moyennant sur un nombre suffisant de grains, contenus dans un volume V(M) approprié au problème étudié (cf. paragraphe 4, partie A). Les variables u_i et ω^g seront par la suite supposées continues par rapport aux coordonnées x_i.

Considérons deux rouleaux en contact (figure A.7-1). Le déplacement relatif et la rotation relative entre les deux particules considérées sont donnés par les relations :

$$u_i' - u_i = 2\,R\,u_{i,j}\,n_j \tag{A.7-64}$$

$$\omega^{g'} - \omega^g = 2\,R\,\omega^g_{,i}\,n_i \tag{A.7-65}$$

où n_i est le vecteur unitaire d'origine le centre de la particule 1 et passant par le point de contact des particules. Il s'ensuit que le déplacement relatif entre les deux rouleaux au point de contact est donné par la relation :

$$\Delta u_i = 2\,R\left(\varepsilon_{ij} + R\,e_{3ij}\,\kappa_{3k}n_k\right)n_j \tag{A.7-66}$$

où ε_{ij} est la déformation généralisée et κ_{3k} la courbure, définies respectivement par :

$$\varepsilon_{ij} = u_{i,j} - \omega^g_{ij} \tag{A.7-67}$$

$$\kappa_{3k} = \omega^g_{3,k} \tag{A.7-68}$$

Dans une telle approche, il est supposé que la microstructure constituée par les rouleaux ou grains est indéformable. Toute l'élasticité est supposée être concentrée aux points de contact entre les grains.

Si l'on impose aux grains de suivre la rotation du milieu, c'est à dire $\omega^g_{ij} = u^a_{i,j}$, et que l'on ne garde dans l'expression de Δu_i que les termes du premier ordre en R, on obtient la définition suivante pour le déplacement relatif entre deux grains voisins :

$$\Delta u_i = 2\,R\,\varepsilon_{ij}\,n_j \tag{A.7-69}$$

où cette fois-ci la déformation généralisée ε_{ij} est symétrique et correspond à la déformation classique (Digby, 1981). Cependant, le milieu continu obtenu n'est pas nécessairement un milieu classique comme cela a été observé par Mühlhaus et al. (1993). Vardoulakis et al. (1992) ont montré sur l'exemple du cisaillement simple plan d'une couche que le milieu obtenu est de type non local, puisque les dérivées secondes des déplacements interviennent dans la loi de comportement. Un tel milieu s'inscrit donc dans le cadre de la théorie du second gradient. Pour retomber sur le milieu continu classique, il faut également supposer que la courbure est nulle.

L'expression des contraintes et couples contraintes dans le milieu continu équivalent s'obtient à partir du principe des travaux virtuels, en écrivant que les travaux des efforts intérieurs dans le milieu granulaire et le milieu continu équivalent sont égaux (figure A.7-2).

$$dW^g_{int} = dW^c_{int} \tag{A.7-70}$$

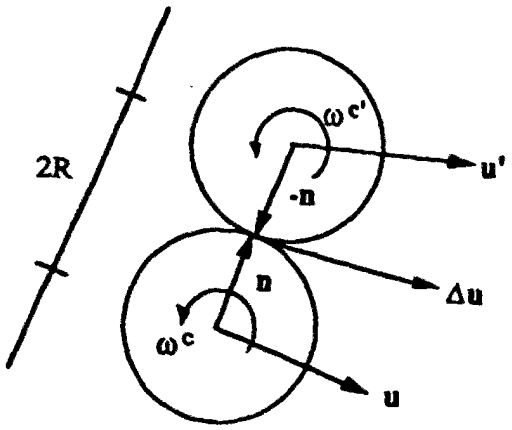


Figure A.7-1 : Déplacement relatif et rotation relative entre deux grains en contact

Le milieu granulaire est caractérisé par la fonction de distribution des contacts $A(\psi)$ qui est définie de manière à ce que le nombre probable de contacts dans l'angle d'amplitude $d\psi$, centré autour de ψ, soit égale à $A(\psi)d\psi$, la force moyenne de contact $F_i(\psi)$ et le vecteur normal $n_i(\psi)$ dans la direction ψ, le nombre moyen de contact par grains, noté k (coordination number), et la porosité n.

Le travail des efforts intérieurs δW^g_{int} dans un volume V du milieu granulaire et pour tout champ de déplacements virtuels δu_i et rotations virtuelles $\delta\omega^g_i$ des grains, est donné par la relation :

$$\delta W^g_{int} = M\, V \int_0^{2\pi} A(\psi) F_i(\psi)\, \delta\Delta u_i\, d\psi \qquad \text{(A.7-71)}$$

où M est le nombre total de contacts par volume unitaire et V le volume considéré. Le nombre de grains par unité de volume est relié à la porosité par la relation :

$$N = \frac{1-n}{\pi R^2} \qquad \text{(A.7-72)}$$

Le paramètre k étant le nombre moyen de contact par grain, on obtient la relation suivante pour M :

$$M = \frac{1}{2} k N \qquad \text{(A.7-73)}$$

Le travail des efforts intérieurs δW^c_{int} pour le volume considéré, dans le milieu continu équivalent, et pour tout champ de déplacements virtuels δU_i et rotations virtuelles $\delta\omega^c_i$ des points matériels est donné par :

$$dW^c_{int} = \int_V \left(\sigma_{ij}\, \delta\varepsilon_{ij} + \mu_{3j}\, \delta\kappa_{3j}\right) dV \qquad \text{(A.7-74)}$$

Si l'on considère pour le milieu granulaire des champs virtuels de déplacements des grains δu_i , égaux aux champs virtuels de déplacements des points matériels δU_i du milieu continu équivalent, ainsi que des champs virtuels de rotations propres des grains $\delta\omega_i^g$ égaux aux champs virtuels de rotation des points matériels $\delta\omega_i^c$:

$$\delta u_i = \delta U_i \tag{A.7-75}$$

$$\delta\omega_3^g = \delta\omega_3^c \tag{A.7-76}$$

alors le déplacement virtuel relatif entre deux grains du milieu granulaire est égale à :

$$\Delta\delta u_i = 2\ R\left(\delta\varepsilon_{ij} + R\ e_{3ij}\ \delta\kappa_{3k} n_k\right) n_j \tag{A.7-77}$$

où les déformations et les courbures virtuelles sont données en fonction des déplacements et rotations virtuels du milieu continu équivalent :

$$\delta\varepsilon_{ij} = \delta U_{i,j} - \delta\omega_{ij}^c \tag{A.7-78}$$

$$\delta\kappa_{3k} = \delta\omega_{3,k}^c \tag{A.7-79}$$

L'égalité des travaux intérieurs pour tout champ virtuel donne les expressions suivantes pour les contraintes et couples contraintes :

$$\sigma_{ij} = \frac{(1-n)\,k}{\pi R}\int_0^{2\pi}\left[n_i\ n_j\ P + m_i\ n_j\ T\right] A(\psi)\ d\psi \tag{A.7-80}$$

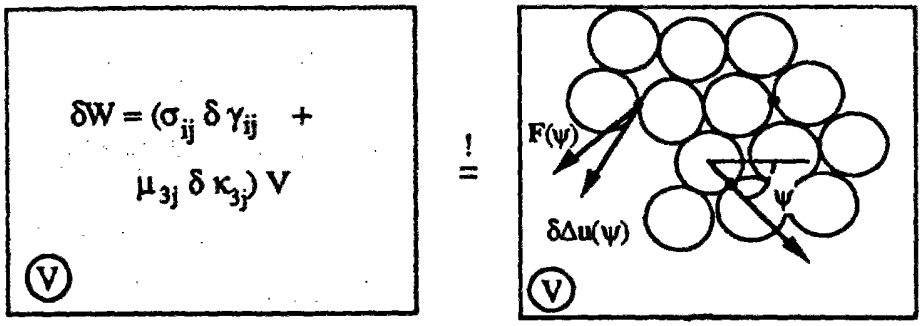
$$\mu_{3k} = \frac{(1-n)\,k}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[e_{3ij}\ n_i\ n_j\ P + e_{3ij}\ m_i\ n_j\ T\right] n_k A(\psi) d\psi \tag{A.7-81}$$

Le terme $n_j\ m_i$ étant égal à $-e_{3ik}\ n_j\ n_k$ puisque les deux vecteurs n_i et m_i sont orthogonaux, Mühlhaus et al. (1993) ont proposé de réécrire les contraintes sous la forme suivante :

$$\sigma_{ij} = \frac{(1-n)\,k}{\pi R}\int_0^{2\pi} A(\psi)\ P(\psi)\ n_i(\psi)\ n_j(\psi)\ d\psi - e_{3ik}\int_0^{2\pi} A(\psi)\ T(\psi)\ n_j(\psi)\ n_k(\psi)\ d\psi \tag{A.7-82}$$

En fait, il existe une expression plus simple, qui n'est pas sans rappeler la notion de viriel en mécanique des fluides :

$$\sigma_{ij} = \frac{(1-n)\,k}{\pi R}\int_0^{2\pi} F_i\ n_j\ A(\psi)\ d\psi \tag{A.7-83}$$



$$\delta W = MV \int_0^{2\pi} A(\psi)\, F_i\, \delta\Delta u_i\, d\psi$$

Figure A.7-2 : Principe d'équivalence entre les travaux des efforts intérieurs du milieu granulaire et du milieu continu de Cosserat équivalent (Mühlhaus et al., 1993)

Cette nouvelle expression est intéressante car elle donne la vecteur force t_i agissant sur une facette de normale n_j , comme étant une moyenne volumique des vecteurs forces F_i . Cela correspond exactement à la définition des contraintes suivant Mohr, sauf que dans le cas présent la moyenne est faite sur un volume alors que dans le cas des contraintes de Mohr elle est faite sur une surface.

Comme le terme $e_{3ij}\, n_i\, n_j$ est nul et le terme $e_{3ij}\, m_i\, n_j$ est égal à 1. il en résulte que le couple contrainte est égale à :

$$\mu_{3k} = \frac{(1-n)\,k}{\pi} \int_0^{2p} n_k T(\psi)\, A(\psi) d\psi \qquad \text{(A.7-84)}$$

$$F_i = P\, n_i + T\, m_i \qquad \text{(A.7-85)}$$

où P et T sont respectivement les composantes normales et tangentielles de la force F_i tandis que les deux vecteurs n_i et m_i sont orthogonaux :

$$n_i m_i = 0 \qquad \text{(A.7-86)}$$

L'hypothèse importante du modèle est que les déformations des grains sont concentrées aux points de contact. Il convient alors d'introduire des rigidités normales K_n et tangentielle K_m qui caractérisent le comportement de ces contacts (Digby, 1984; Walton, 1987; Jenkins et al., 1989) :

$$P = K_n\, \Delta u^n \qquad \text{(A.7-87)}$$

$$T = K_m\, \Delta u^m \qquad \text{(A.7-88)}$$

$$\Delta u^n = \Delta u_i\, n_i \qquad \text{(A.7-89)}$$

$$\Delta u^m = \Delta u_i\, m_i \qquad \text{(A.7-90)}$$

Comme l'on s'intéresse à la réponse élastique du milieu granulaire on supposera que les rigidités normale et tangentielle sont élastiques et constantes.

Pour compléter le modèle, il convient de définir explicitement la fonction de distribution des contacts $A(\psi)$. Celle-ci s'obtient à partir du tenseur de fabrique du matériau A_{ij} par l'expression suivante :

$$A(\psi) = \frac{1}{2\pi}\left(1 + A_{ij}\, n_i\, n_j\right) \tag{A.7-91}$$

où le vecteur n_i a pour coordonnées $(\cos\psi\ ,\ \sin\psi)$.

La définition la plus utilisée pour le tenseur de fabrique (Bathurst et Rothenburg, 1990; Jenkins et al., 1989; Kanatani, 1984; Mühlhaus et al., 1993) est la suivante :

$$A_{ij} = -a\left(\delta_{ij} - 2\, s_i\, s_j\right) \tag{A.7-92}$$

où a est l'amplitude de l'anisotropie initiale et s_i l'axe de symétrie de révolution correspondant à cette anisotropie.

L'expression de la fonction $A(\psi)$ est alors donnée par :

$$A(\psi) = \frac{1}{2\pi}(1 - a\cos 2\psi) \tag{A.7-93}$$

La combinaison des équations de comportement des contacts avec l'expression de la fonction A et des contraintes et couples contraintes donne les relations de comportement suivantes

$$\sigma_{11} = \left[K\left(1+\frac{a}{2}\right) + G\right]\varepsilon_{11} + [K - G]\varepsilon_{22} \tag{A.7-94}$$

$$\sigma_{22} = [K - G]\varepsilon_{11} + \left[K\left(1-\frac{a}{2}\right) + G\right]\varepsilon_{22} \tag{A.7-95}$$

$$\sigma_{12} = [G + G_c(1-a)]\varepsilon_{12} + [G - G_c]\varepsilon_{21} \tag{A.7-96}$$

$$\sigma_{21} = [G - G_c]\varepsilon_{12} + [G + (1+a)G_c]\varepsilon_{21} \tag{A.7-97}$$

$$\mu_{31} = 2\, G_c\, R^2\left(1-\frac{a}{2}\right)\kappa_{31} \tag{A.7-98}$$

$$\mu_{32} = 2\, G_c\, R^2\left(1+\frac{a}{2}\right)\kappa_{32} \tag{A.7-99}$$

Les 3 constantes élastiques macroscopiques sont définies par :

$$K = \frac{1-n}{2\pi} k K_n \qquad \text{(A.7-100)}$$

$$G = \frac{(1-n)}{4\pi} k (K_n + K_m) \qquad \text{(A.7-101)}$$

$$G_c = \frac{1-n}{2\pi} k K_m \qquad \text{(A.7-102)}$$

Par rapport au cas isotrope, on s'aperçoit que les termes symétriques et antisymétriques ne sont plus découplés :

$$\sigma_{12}^s = 2 G \varepsilon_{12}^s - a G_c \varepsilon_{12}^a \qquad \text{(A.7-103)}$$

$$\sigma_{12}^a = -a G_c \varepsilon_{12}^s + 2 G_c \varepsilon_{12}^a \qquad \text{(A.7-104)}$$

Une déformation symétrique peut engendrer une contrainte antisymétrique et vice versa. Par contre, les contraintes normales σ_{ii} restent découplées des contraintes tangentielles σ_{12} et σ_{21}. Le cisaillement à contrainte normale constante n'engendre pas de variation de volume.

En reprenant les notations utilisées au début de ce chapitre, on constate, du moins dans le cas d'un milieu granulaire 2D, que les six constantes élastiques macroscopiques qui existent dans le cas général, se réduisent à quatre : K, G, G_c, M, puisque la constante L n'intervient pas, les termes μ_{ii} étant nuls, et puisque la constante M_c est égale à la constante M, car les couples contraintes de flexion μ_{31} et μ_{32} s'exerçant sur des facettes perpendiculaires 1 et 2 sont complètement découplés.

Il faut noter, de plus, que cette approche micro-macro permet d'obtenir les deux nouvelles constantes G_c et M à partir des deux constantes classiques K et G :

$$G_c = 2 G - K \qquad \text{(A.7-105)}$$

$$M = G_c R^2 = (2 G - K) R^2 \qquad \text{(A.7-106)}$$

Il convient également de remarquer que si les rouleaux sont lisses, c'est à dire possède une rigidité tangentielle nulle, $K_m = 0$, alors le module de cisaillement de Cosserat G_c ainsi que le module de flexion M sont nuls. Il n'y a plus d'effets de Cosserat, les contraintes antisymétriques étant nulles. De plus, dans ce cas là, la théorie prédit que le module classique de compression volumique K est égal à 2 fois le module de cisaillement classique G.

Les équations pour un milieu de Cosserat anisotrope se réduisent à celle d'un milieu continu de Cosserat isotrope quand la constante a est prise nulle.

Les conditions nécessaires de stabilité au sens d'Hadamard pour les nouvelles constantes de Cosserat, se traduisent de fait, par des conditions supplémentaires sur les constantes classiques K et G , à savoir :

$$G_c = 2\,G - K > 0 \qquad \text{(A.7-107)}$$

$$M = G_c\,R^2 > 0 \qquad \text{(A.7-108)}$$

Comme le module K est égal à G / (1 - 2 ν) , on en déduit la condition supplémentaire sur le coefficient de Poisson d'un milieu granulaire 2D :

$$\nu < 0{,}25 \qquad \text{(A.7-109)}$$

Ce résultat a été également obtenu par Walton (1987) pour un milieu continu classique formé d'une assemblée aléatoire de grains de mêmes diamètres.

Si l'on veut obtenir un milieu continu classique à partir du milieu de Cosserat élastique anisotrope, il faut que les couples contraintes μ_{3i} soient nuls. Les équations d'équilibres requièrent alors que la contrainte soit symétrique, ce qui induit la relation suivante sur les déformations :

$$\varepsilon^a_{12} = \frac{a}{2}\,\varepsilon^s_{12} \qquad \text{(A.7-110)}$$

Si le milieu est isotrope, a est nul. Cette relation est satisfaite automatiquement et les grains suivent la rotation du milieu :

$$\varepsilon^a_{12} = U^a_{1,2} - \omega^c_{12} = 0 \qquad \text{(A.7-111)}$$

Si le milieu est anisotrope, a $\neq$ 0, la rotation des grains diffère de celle du milieu continu et ce, d'autant plus que le milieu est fortement anisotrope :

$$\omega^c_{12} = -\omega^c_3 = U^a_{1,2} - \frac{a}{2}U^s_{1,2} \qquad \text{(A.7-112)}$$

Par exemple, dans le cas du cisaillement simple plan d'un milieu continu classique, les rotations des grains pour les milieux anisotrope et isotrope diffèrent par un coefficient de 1-a/2 :

$$\frac{\omega^c_{12}(\text{anisotrope})}{\omega^c_{12}(\text{isotrope})} = 1 - \frac{a}{2} \qquad \text{(A.7-113)}$$

Pour a = 1, c'est à dire pour une anisotropie initiale maximale, le rapport est de 1/2. Cependant, les valeurs observées expérimentalement sont nettement plus grandes que deux fois les valeurs prédites par le milieu continu classique. L'anisotropie ne peut donc pas expliquer les rotations importantes observées dans les couches d'interface.

7.3 Homogénéisation des forces intergranulaires du milieu granulaire pour calculer les efforts intérieurs du milieu continu de Cosserat équivalent

7.3.1 Homogénéisation de type volumique

Le passage micro-macro réalisé précédemment pour obtenir les modules élastiques du milieu de Cosserat, à partir des propriétés élastiques du milieu granulaire, permet de calculer les efforts intérieurs du milieu de Cosserat, contraintes et couples contraintes, à partir des forces intergranulaires dans le milieu granulaire. En effet, le travail des efforts intérieurs pour le milieu granulaire est donné par :

$$W_{int}^{g} = \sum_{k=1,N_c(V)} f_k \, \Delta u_k \qquad \text{(A.7-114)}$$

où f_k est le vecteur force au point de contact numéroté k entre deux grains, tandis que Δu_k est le déplacement relatif des deux grains en ce même point.

Si le nombre de contacts est suffisamment grand dans le milieu granulaire, les deux opérateurs : discret $\sum_{k=1,N_c(V)} Y_k$ et continu $k\frac{1-n}{2\,\pi R^2} V \int_0^{2\pi} Y(\psi)\, A(\psi)\, d\psi$, opérant sur une fonction Y quelconque, sont équivalents, sachant que $A(\psi)\, d\psi$ représente le nombre probable de contacts dans l'angle $[\psi - d\psi/2, \psi + d\psi/2]$ et $N_c(V)$ est le nombre total de contacts dans le volume V :

$$W_{int}^{g} = k\frac{1-n}{2\,\pi R^2} V \int_0^{2\pi} f_i(\psi)\, \Delta u_i\, A(\psi)\, d\psi \qquad \text{(A.6-115)}$$

Après écriture de l'égalité entre le travail des efforts intérieurs dans le milieu granulaire W_{int}^{g} et le milieu continu équivalent W_{int}^{c}, on obtient pour les contraintes et les couples contraintes les expressions suivantes :

$$\sigma_{ij} = \frac{(1-n)\, k}{\pi R} \int_0^{2\pi} \left[F_i(\psi)\, n_j(\psi) \right] A(\psi)\, d\psi \qquad \text{(A.7-116)}$$

$$\mu_{3j} = \frac{(1-n)\, k}{\pi} \int_0^{2p} T(\psi)\, n_j(\psi)\, A(\psi) d\psi \qquad \text{(A.7-117)}$$

Après retour au milieu granulaire et substitution de l'opérateur discontinu par l'opérateur continu, on obtient pour les contraintes :

$$\sigma_{ij} = \frac{2\,R}{V} \sum_{k=1,N_c(V)} F_i(k)\, n_j(k) \qquad \text{(A.7-118)}$$

Pour les couples contraintes, on obtient :

$$\frac{\mu_{3j}}{R} = \frac{2\,R}{V} \sum_{k=1,N_c(V)} T(k)\, n_j(k) \qquad \text{(A.7-119)}$$

Dans le cas d'un milieu bidimensionnel, le volume V est égale à la section S dans le plan de la feuille, multipliée par une longueur unitaire correspondant à la profondeur.

Il est à noter que dans le cas où l'on considère une rangée de grains alignés, le volume V est égal à 2 R L et le coefficient 2 R / V est égal à L. La moyenne volumique est alors égale à la somme des efforts intergranulaires projetés sur la normale n_j et divisés par la longueur L, qui est en fait une surface de un mètre de profondeur par rapport au plan de la page. Cette définition est donc très similaire à la définition de Mohr des contraintes. Cependant, dans le cas présent, la moyenne se fait sur un volume alors que dans le cas des contraintes de Mohr, la moyenne se fait sur une surface.

Dans le cas du cisaillement simple annulaire, il est intéressant de développer l'expression complète de ces moyennes (figure A.7-3). Le repère de coordonnées cartésiennes est noté (x, y, z). Le repère de coordonnées polaires est noté (e_r, e_θ, z). Le repère local au point de contact entre deux grains est noté (m, n, z), où m est la tangente, n la normale orientée du grain "antagoniste" vers le grain "candidat". Soient θ, l'angle entre les axes e_x et e_r , β, l'angle entre e_r et n , et ψ, l'angle entre e_r et F, où la force intergranulaire F est décomposée suivant :

$$F_i = P\, n_i + T\, m_i \qquad \text{(A.7-120)}$$

Les vecteurs n_i et m_i sont égaux respectivement à $(\cos(\beta+\theta), \sin(\beta+\theta), 0)$ et $(\sin(\beta+\theta), -\cos(\beta+\theta), 0)$ dans le repère (x, y, z). Les vecteurs e_r et e_θ ont pour coordonnées respectives $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ et $(-\sin\theta, \cos\theta, 0)$ dans le repère (x, y, z). Les composantes radiale F_r et orthoradiale F_θ sont respectivement égales à :

$$F_r = F\cos\psi = T\sin\beta + P\cos\beta \qquad \text{(A.7-121)}$$

$$F_\theta = F\sin\psi = -T\cos\beta + P\sin\beta \qquad \text{(A.7-122)}$$

Tout calcul fait, on obtient les expressions :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} \end{bmatrix} = \frac{2\,R}{V} \sum_{k=1,N_c(V)} F(k) \begin{bmatrix} \cos\beta(k)\cos\psi(k) & \cos\beta(k)\sin\psi(k) \\ \sin\beta(k)\cos\psi(k) & \sin\beta(k)\sin\psi(k) \end{bmatrix} \qquad \text{(A.7-123)}$$

$$\frac{\mu_{3r}}{R} = \frac{2\,R}{V} \sum_{k=1,N_c(V)} F(k)\cos\beta(k)\sin[\psi(k)-\beta(k)] \qquad \text{(A.7-125)}$$

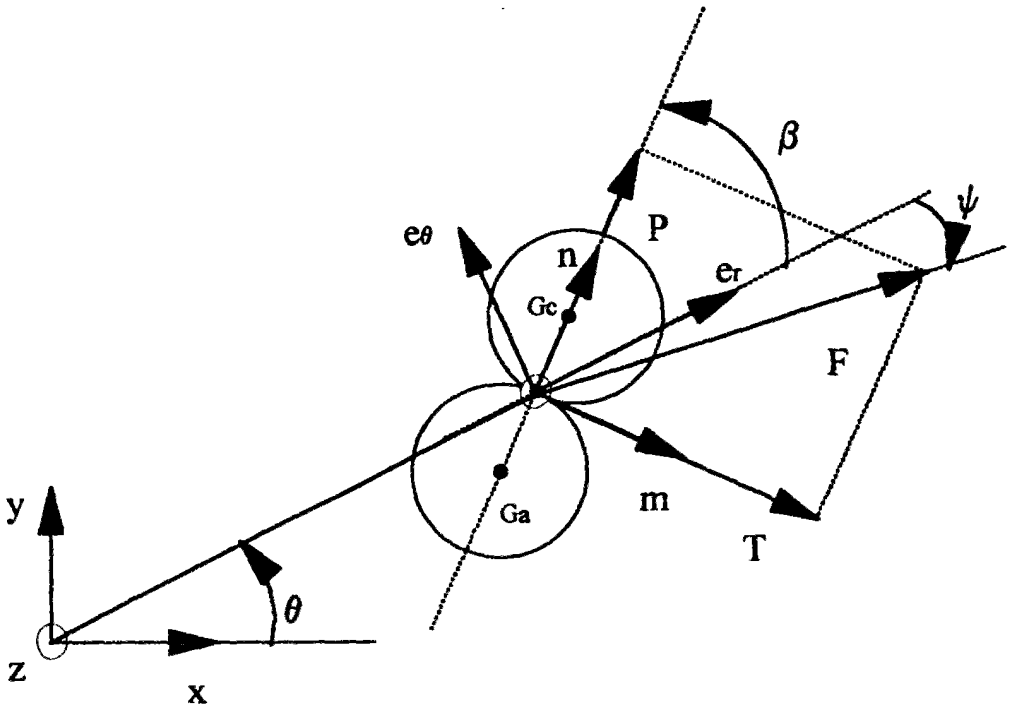


Figure A.7-3 : Définition des angles pour le calcul des contraintes et couples contraintes du milieu continu équivalent à partir des forces intergranulaires du milieu granulaire

On en déduit l'expression suivante pour la contrainte antisymétrique :

$$\sigma^{a}_{\theta r} = \frac{2\,R}{V} \sum_{k=1,N_c(V)} F(k)\,\sin[\psi(k) - \beta(k)] \qquad \text{(A.7-126)}$$

A partir de ces équations, il apparaît que dans le cas général, le tenseur des contraintes est antisymétrique et que les couples contraintes sont non nuls. Reste à déterminer numériquement, sur des simulations par éléments distincts, par exemple, l'ordre de grandeur de ces variables de Cosserat.

7.3.2 Homogénéisation de type surfacique

Selon la définition de Mohr, le tenseur des contraintes est défini à partir du vecteur contrainte t_i agissant sur une facette de normale n_j :

$$t_i = \sigma_{ij}\, n_j \qquad \text{(A.7-127)}$$

Dans le cas d'un milieu granulaire, le vecteur contrainte agissant sur une facette de normale n_i s'obtient en additionnant toutes les forces intergranulaires intersectées par le plan de la facette et en divisant par la surface totale de la facette.

Dans le cas du cisaillement simple annulaire, les contraintes σ_{rr} et $\sigma_{\theta r}$ en un point r sont donc obtenues avec les formules :

$$\sigma_{rr}(r) = \frac{\sum_{j=1,N_r} F(j)\, e_r}{2\,\pi\, r} \qquad \text{(A.7-128)}$$

$$\sigma_{\theta r}(r) = \frac{\sum_{j=1,N_r} F(j)\, e_\theta}{2\,\pi\, r} \qquad \text{(A.7-129)}$$

où N_r est le nombre total de branches (forces intergranulaires reliant les centres de gravité des deux rouleaux considérés) intersectant le cercle de rayon r, F(j) les forces de contact toutes orientées dans le sens de r croissant.

Dans le cas des contraintes $\sigma_{\theta\theta}$ et $\sigma_{r\theta}$, le calcul est plus complexe. Il faut en effet considérer N_{plan} orthoradiaux, disposés tous les $2\,\pi\,/\,N_{plan}$ radians. Chaque plan est ensuite découpé en tronçons, de longueur e_v . Les contraintes $\sigma_{\theta\theta}$ et $\sigma_{r\theta}$, en un point r, se calculent en ajoutant les forces intersectant les N_{plan} tronçons :

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{1}{N_{plan} e_v} \sum_{p=1,N_{plan}} \sum_{j=1,N_r} F(j,p)\, e_\theta \qquad \text{(A.7-130)}$$

$$\sigma_{r\theta}(r) = \frac{1}{N_{plan} e_v} \sum_{p=1,N_{plan}} \sum_{j=1,N_r} F(j,p)\, e_r \qquad \text{(A.7-131)}$$

Le tenseur des contraintes ainsi obtenu est, a priori, non symétrique. Si l'on calcule, pour un volume V du milieu granulaire, le travail des efforts intérieurs W^g_{int} et qu'on le compare au travail des efforts intérieurs du milieu continu équivalent W^c_{int} , en ne prenant en compte que les termes de contraintes et déformations :

$$W^c_{int} = \int_V \sigma_{ij}\, \varepsilon_{ij}\, dV \qquad \text{(A.7-132)}$$

il est fort peu probable que l'on obtienne les mêmes valeurs, du moins dans les zones où le tenseur des contraintes est antisymétrique. Pour avoir égalité des travaux intérieurs entre le milieu granulaire et le milieu continu, il est donc indispensable d'introduire des termes complémentaires, en l'occurrence le terme énergétique, correspondant à la courbure κ_{3r} :

$$W^c_{int} = \int_V \left[\sigma_{ij}\, \varepsilon_{ij} + \mu_{3r}\, \kappa_{3r}\right] dV \qquad \text{(A.7-133)}$$

Le calcul du couple contrainte μ_{3r} est alors immédiat. En chaque point r, on considère les grains j dont le centre de gravité G_j est situé dans l'anneau $r-e_v/2 \leq r \leq r+e_v/2$. Cet ensemble de grains définit un volume V sur lequel, nous calculons dans un premier temps, les efforts intérieurs. Dans un deuxième temps, nous calculons les déplacements, rotations, déformations, courbure et contraintes du milieu continu équivalent. Puis, comparons le travail des efforts intérieurs dans le milieu granulaire, correspondant à ces contraintes, au travail des efforts intérieurs dans le milieu granulaire, pour en déduire le couple contrainte :

$$\mu_{3r}(r)\,\kappa_{3r}(r) = \frac{W_{int}^{g}\left(r-\frac{e_v}{2} \leq r_j \leq r+\frac{e_v}{2}\right)}{V} - \sigma_{ij}(r)\,\varepsilon_{ij}(r) \qquad \text{(A.7-134)}$$

Cette méthode d'homogénéisation est de type surfacique et a priori devrait donner des résultats différents de la méthode précédemment exposée. Cependant, toutes deux sont basées sur l'égalité des travaux des efforts intérieurs dans le milieu granulaire et dans le milieu continu de Cosserat équivalent.

7.4 Synthèse sur les modèles élastiques

Comme nous venons de le voir, plusieurs modèles de comportement ont été développés et nous en distinguerons deux types.

Le premier type a été développé par Mühlhaus et Vardoulakis (1987), qui, pour limiter le nombre de nouveaux paramètres introduits, ont choisi de prendre des coefficients h_i élastiques, qui définissent les modules élastiques, égaux aux coefficients plastiques η_i , qui définissent le cisaillement généralisé τ_g . En se basant sur deux approches micromécaniques différentes, une statique et l'autre cinématique, ils ont obtenus deux modèles, qui sont qualifiés de modèles, statique et cinématique.

Le deuxième type de modèles qui peut être développés, est basé sur une distinction claire entre les coefficients élastiques h_i et les coefficients plastiques η_i . Les coefficients élastiques sont obtenus par l'approche micromécanique élastique de Mühlhaus et al. (1993), tandis que les coefficients η_i sont obtenus par l'approche micromécanique plastique de Mühlhaus et Vardoulakis (1987).

Le tableau A.7-1 synthétise les valeurs des coefficients pour chacun des modèles considérés.

Tableau A.7-1 : Coefficients h_i et η_i des modèles de Cosserat 2D

<table>
<tr><td>coefficients élastiques h_i</td><td>coefficients plastiques η_i</td></tr>
<tr><td colspan="2">modèles de Mühlhaus et Vardoulakis (1987)
où les coefficients élastiques h_i et plastiques η_i sont égaux</td></tr>
<tr><td colspan="2">modèle statique MV-stat
$(h_i) = (\eta_i) = (3/4, -1/4, 1, 0)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">modèle cinématique MV-ciné
$(h_i) = (\eta_i) = (3/8, -1/8, 1/4, 0)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">modèle de Mühlhaus et al. (1993) pour les coefficients élastiques h_i;
pour les coefficient plastiques η_i, nous prendrons les valeurs proposées par Mühlhaus et Vardoulakis (1987)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$h_1 = \frac{1-3\nu}{2(1-4\nu)}$ $\quad h_2 = \frac{-\nu}{2(1-4\nu)}$
$h_3 = \frac{1-2\nu}{1-4\nu}$ $\quad h_4 = 0$
où ν est le coefficient de Poisson classique</td><td>modèle statique M-stat
$(\eta_i) = (3/4, -1/4, 1, 0)$</td></tr>
<tr><td>modèle cinématique M-ciné
$(\eta_i) = (3/8, -1/8, 1/4, 0)$</td></tr>
</table>

Pour comprendre la différence entre chacun des modèles, il est important de regarder les poids respectifs des contraintes symétriques, $h_1 + h_2$, contraintes antisymétriques, $h_1 + h_2$, et des couples contraintes, h_3 (tableau A.7-2).

Les modèles statiques et cinématiques accordent des poids égaux aux contraintes antisymétriques et aux couples contraintes, $h_3 / (h_1 - h_2) = 1$. Par contre, le modèle statique accorde un poids deux fois plus important aux contraintes antisymétriques qu'aux contraintes symétriques, $(h_1 - h_2) / (h_1 + h_2) = 2$, tandis que le modèle cinématique leur accorde un poids deux fois plus faible, $(h_1 - h_2) / (h_1 + h_2) = 1/2$.

Dans l'approche de Mühlhaus et al. (1993), le poids des couples contraintes est deux fois plus important que celui des contraintes antisymétriques, $h_3 / (h_1 - h_2) = 2$. Par contre, le poids des contraintes antisymétriques par rapport à celui des contraintes symétriques, dépend du coefficient de Poisson ν, qui? quand il varie entre 0 et 0,25, fait varier $(h_1 - h_2) / (h_1 + h_2)$ entre 1 et l'infini.

Ces poids relatif sont très importants car ils vont déterminer en grande partie l'épaisseur des bandes de cisaillement et des couches d'interface.

Tableau A.7-2 : Poids relatif des contraintes symétriques, antisymétriques et couples contraintes

paramètres de τ_g	MV-stat	MV-ciné	Mühlhaus et al. (1993)	$\nu = 0,0$	$\nu = 0,1$	$\nu = 0,2$
h_1	3/4	3/8	$(1-3\nu)/2(1-4\nu)$	0,5	0,5833	1
h_2	-1/4	1/8	$-\nu/2(1-4\nu)$	0	-0,0833	-1/2
h_3	1	1/4	$(1-2\nu)/(1-4\nu)$	1	1,3333	3
h_4	0	0	0	0	0	0
$h_1 + h_2$ $= 1/(g_1 + g_2)$	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
$h_1 - h_2$ $= 1/(g_1 - g_2)$	1	1/4	$(1-2\nu)/2(1-4\nu)$	1/2	2/3	3/2
$(h_1 - h_2)/(h_1 + h_2)$ $=$ $(g_1 + g_2)/(g_1 - g_2)$	2	1/2	$(1-2\nu)/(1-4\nu)$	1	4/3	3
$h_3/(h_1 - h_2)$ $= (g_1 - g_2)/g_3$	1	1	2	2	2	2

7.5 Cisaillement simple plan d'un milieu continu de Cosserat avec une loi de comportement élastique linéaire

7.5.1 Milieu isotrope

La loi de comportement d'un milieu continu de Cosserat élastique linéaire isotrope a été développée dans la paragraphe 7.1. La solution général du cisaillement simple plan est présentée dans l'Annexe A.9. Dans le présent paragraphe nous nous intéresserons à un jeu de conditions aux limites particulier dont la solution complète est présentée dans l'Annexe A.10.

Dans la solution classique, comme dans la solution de Cosserat, les variables normales à l'interface sont découplées des variables tangentielles. En particulier, le cisaillement simple plan se fait à volume constant si la contrainte normale est maintenue constante. Dans la suite, nous ne intéresserons qu'aux variables tangentielles.

7.5.1.1 Conditions aux limites

Le problème aux limites dans un milieu classique et celui dans un milieu de Cosserat différent uniquement par la condition supplémentaire à l'interface, qui existe en correspondance avec le nouveau degré de liberté en rotation ω_3^c .

En particulier, les deux conditions aux limites classiques, que nous prendrons égales à :

$$U_1(0) = f_1 \, W_I \tag{A.7-135}$$

$$U_1(H) = 0 \tag{A.7-136}$$

doivent être complétées par deux conditions aux limites, une en interface et une sur la face supérieure, portant soit sur la rotation propre ω_3^c , soit sur la rotation relative ε_{ij}^a , soit sur le couple contrainte μ_{32} . Dans le cas présent, nous avons sélectionner les deux conditions aux limites ci-dessous :

$$\omega^c(0) = f_2 \frac{W_I}{R} \tag{A.7-137}$$

$$\varepsilon_{12}^a(H) = 0 \tag{A.7-138}$$

W_I est le déplacement tangentiel de l'élément de structure qui constitue l'interface, $f_1 \in [0,1]$ est la fraction du déplacement de l'interface W_I qui est transmise au sol sous la forme d'une translation et $f_2>0$ est la fraction qui est transmise sous la forme d'une rotation propre des points matériels. La deuxième condition à la limite de type Cosserat impose que le sol se comporte de la même manière qu'un milieu continu classique, au moins près de la limite supérieure. Ce choix correspond aux observations expérimentales. La partie haute de l'échantillon est relativement peu cisaillée et forme une zone tampon où les rotations des grains sont très faibles et semblent être égales à la rotation du milieu continu. L'ensemble des conditions aux limites considérées est résumé dans le tableau A.7-3 ci-dessous.

Tableau A.7-3 : Conditions aux limites prises pour l'analyse du cisaillement simple plan d'un milieu continu de Cosserat

		Interface $x_2(0)$	Face supérieure H
milieu continu de Cosserat	conditions aux limites d'un milieu continu classique	$U_2(0) = 0$ interface rigide	$\sigma_{22}(H) < 0$ contrainte normale constante
		$U_1(0) = f_1 \, W_I > 0$ déplacement tangentiel imposé	$U_1(H) = 0$ déplacement tangentiel nul
	conditions aux limites de Cosserat	$R \, \omega_3^c(0) = f_2 \, W_I > 0$ rotation de Cosserat imposée	$\varepsilon_{12}^a(H) = \Omega_3(H) - \omega_3^c(H) = 0$ rotation relative nulle "solution classique"

7.5.1.2 Solution exacte du problème aux limites

Pour résoudre le problème du cisaillement simple plan, il est intéressant de prendre la rotation relative ε_{12}^a comme inconnue. On obtient alors l'équation différentielle suivante en ε_{12}^a :

$$\frac{d^2}{dx_2^2}\left(\varepsilon_{12}^a\right)-\frac{\alpha^2}{R^2}\varepsilon_{12}^a=0 \qquad \text{(A.7-139)}$$

où le coefficient α est sans dimension et est défini par la relation suivante :

$$\alpha=\sqrt{\frac{2\,G\,G_c}{N\left(G+G_c\right)}}=\sqrt{\frac{h_3}{h_1}} \qquad \text{(A.7-140)}$$

Les conditions nécessaires de stabilité, au sens d'Hadamard, imposent que les deux coefficients h_1 et h_3 soient tous les deux positifs. Il en résulte que α^2 est toujours positif et les solutions de l'équation différentielles sont de type exponentielle $\exp(\pm\alpha\, x_2/R)$. Dans le cas du modèle statique, les coefficients h_i sont égaux à (3/4, -1/4, 1) tandis que dans le cas du modèle cinématique, ils sont égaux à (3/8, 1/8, 1/4) (Mühlhaus et Vardoulakis, 1987). Les valeurs de α correspondantes sont respectivement $\sqrt{4/3}$ et $\sqrt{2/3}$. La solution de Cosserat est égale à la solution classique, plus deux termes supplémentaires en $\exp(\pm\alpha\, x_2/R)$ qui varient très rapidement sur quelques longueurs internes. Ce type d'équations est typique des couches limites.

La solution en déplacement tangentiel U_1 et rotation de Cosserat ω_3^c est donnée par :

$$U_1(x_2)=U_1(0)+\frac{\sigma_{12}(0)}{G}x_2-\frac{2\beta}{X}R\left[\omega_3^c(0)-\frac{U_1(0)}{2H}\right]\left(\mathrm{ch}\left(\alpha\frac{x_2-H}{R}\right)-\mathrm{ch}\left(-\alpha\frac{H}{R}\right)\right) \qquad \text{(A.7-141)}$$

$$\omega_3^c(x_2)=\omega_3^c(0)+\frac{1}{X}\left[\omega_3^c(0)-\frac{U_1(0)}{2H}\right]\left(\mathrm{sh}\left(\alpha\frac{H}{R}\right)+\mathrm{sh}\left(\alpha\frac{x_2-H}{R}\right)\right) \qquad \text{(A.7-142)}$$

où les deux termes adimensionnels β et X sont définis par :

$$X=-\mathrm{sh}\left(\alpha\frac{H}{R}\right)+\frac{R}{H}\beta\left(\mathrm{ch}\left(\alpha\frac{H}{R}\right)-1\right) \qquad \text{(A.7-143)}$$

$$\beta=\frac{1}{4\sqrt{h_1h_3}}=\sqrt{\frac{N\,G_c}{2\,G\left(G+G_c\right)}} \qquad \text{(A.7-144)}$$

On a la relation suivante :

$$\alpha\,\beta = \frac{G_c}{G+G_c} = \frac{1}{4\,h_1} \tag{A.7-145}$$

La solution en déformations symétrique et antisymétrique est donnée part :

$$\varepsilon_{12}^{s}(x_2) = \frac{\sigma_{12}(0)}{2\,G} - \frac{1}{4\,h_1\,X}\left[\omega_3^c(0) - \frac{U_1(0)}{2\,H}\right] sh\left(\alpha\frac{x_2 - H}{R}\right) \tag{A.7-146}$$

$$\varepsilon_{12}^{a}(x_2) = \frac{(h_1 - h_2)}{2\,h_1\,X}\left[\omega_3^c(0) - \frac{U_1(0)}{2\,H}\right] sh\left(\alpha\frac{x_2 - H}{R}\right) \tag{A.7-147}$$

Il est important de noter que tous les nouveaux termes, dits de Cosserat, ont en facteur le terme $\omega_3^c(0) - U_1(0)/2\,H$ qui représente la différence entre la rotation de Cosserat $\omega_3^c(0)$ à l'interface et sa valeur dans le cas de la solution classique $\Omega_{12}(0) = U_1(0)/2\,H$. Il apparaît alors que si les conditions aux limites nouvelles ne sollicitent pas le degré de liberté en rotation plus qu'il n'est sollicité dans la solution classique, la solution de Cosserat se réduit à la solution classique. Le matériau de Cosserat se comporte alors comme un matériau classique. Par exemple, si l'on change en interface la condition à la limite de Cosserat $R\,\omega_3^c(0) = f_2\,W_I > 0$ en $\omega_3^c(0) - \frac{U_1(0)}{2\,H} = 0$ ou en $\varepsilon_{12}^{a}(0) = 0$, on obtiendra la solution classique.

7.5.1.3 Solution loin de l'interface

Loin de l'interface et en particulier près de la limite extérieure en $x_2 = H$, la solution exacte peut être développée sous la forme suivante :

$$U_1(x_2) = U_1(0) + \frac{\sigma_{12}(0)}{G}x_2 \tag{A.7-148}$$

$$\omega_3^c(x_2) = \Omega_3(x_2) \equiv \frac{U_1(0)}{2\,H} \tag{A.7-149}$$

$$\varepsilon_{12}^{a}(x_2) \equiv 0 \tag{A.7-150}$$

La solution approchée loin de l'interface est donc la solution classique, avec des déplacements linéaires, des contraintes et des déformations constantes, et une rotation relative nulle.

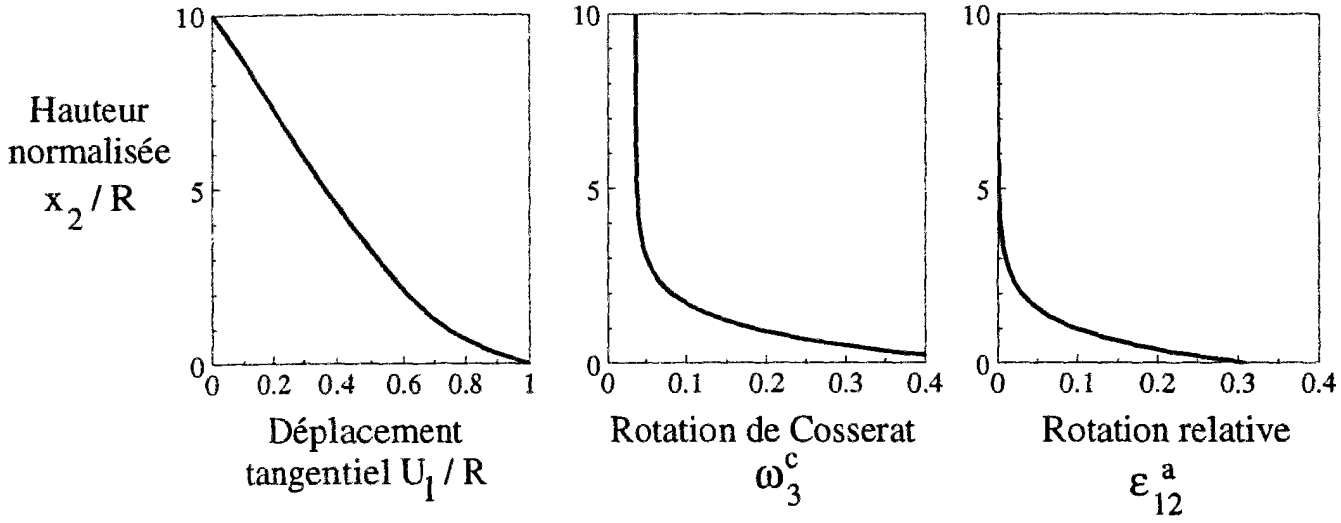


Figure A.7-4 : Cisaillement simple plan d'un milieu élastique de Cosserat isotrope

7.5.1.4 Solution près de l'interface

La longueur interne R est du même ordre de grandeur que le rayon moyen des grains. Elle est donc beaucoup plus petite que la hauteur H d'un échantillon.

La solution exacte présentée ci-dessus peut être approximée de la façon suivante près de l'interface :

$$U_1(x_2) = U_1(0) + \frac{\sigma_{12}(0)}{G} x_2 + 2\beta R \left[\omega^c(0) - \frac{U_1(0)}{2H}\right]\left(\exp\left(-\alpha\frac{x_2}{R}\right) - 1\right) \quad \text{(A.7-151)}$$

$$\omega^c(x_2) = \omega^c(0) + \left[\omega^c(0) - \frac{U_1(0)}{2H}\right]\left(\exp\left(-\alpha\frac{x_2}{R}\right) - 1\right) \quad \text{(A.7-152)}$$

$$\varepsilon_{12}^a(x_2) = \frac{h_1 - h_2}{2h_1}\left[\omega^c(0) - \frac{U_1(0)}{2H}\right]\exp\left(-\alpha\frac{x_2}{R}\right) \quad \text{(A.7-153)}$$

7.5.1.5 Epaisseur de la couche limite

Localement près de l'interface, la solution décroît très rapidement, tandis qu'au loin, elle varie très lentement et est très proche d'une solution classique. Dans ce type de solution, on observe la formation d'une couche limite similaire à ce qui est observé en dynamqiue des fluides.

Il est à noter que dans l'équation différentielle (A.7-139), récrite sous la forme (A.7-154), la dérivée seconde de la déformation antisymétrique est multipliée par la longueur interne au carré, qui est un terme du deuxième ordre très petit. Loin de l'interface, dans la zone de type classique, où les gradient sont très faible, la dérivée seconde est très faible et elle peut être négligée devant le deuxième terme de l'équation, d'autant plus qu'elle est multipliée par la longueur interne.

Près de l'interface, la dérivée seconde, même multipliée par R^2 ne peut plus être négligée, et il convient de considérer des solutions de type exponentiel :

$$R^2 \frac{d^2}{dx_2^2}\left(\varepsilon_{12}^a\right) - \alpha^2 \varepsilon_{12}^a = 0 \qquad \text{(A.7-154)}$$

Utilisant les formules approchées, il est possible de calculer simplement la distance d_I à l'interface sur laquelle les variables cinématiques U_1 , ω^c et ε_{12}^a décroissent et atteignent une fraction p de leurs valeurs à l'interface. Ces distance sont données par :

$$\frac{d_I(U_1)}{R} = (1-p)\, 4\, h_1 \frac{U_1(0)}{R\, \omega^c(0)} \qquad \text{(A.7-155)}$$

$$\frac{d_I(\omega^c)}{R} = \frac{d_I(\varepsilon_{12}^a)}{R} = -\sqrt{\frac{h_1}{h_3}} \ln p \qquad \text{(A.7-156)}$$

Toutes ces distances sont indépendantes de la hauteur H de l'échantillon. Elles sont directement proportionnelles à la longueur interne R, avec un coefficient de proportionnalité qui dépend des coefficients élastiques h_i et de la fraction p. Seule $d_I(U_1)$ dépend de la valeur de la condition à la limite et précisément, le rapport entre le déplacement tangentiel $U_1(0)$ et la rotation de Cosserat $R\, \omega_3^c$ qui sont imposés au sol en contact avec l'interface. Les applications numériques pour p égal à 1% et un rapport de $U_1(0)$ par $R\, \omega_3^c$ égal à 2, donnent $d_I(U_1) = 4\, R$ et $d_I(\omega^c) = d_I(\varepsilon_{12}^a) = 3\, R$ pour le modèle statique (figure A.7-4). Pour le modèle cinématique, on obtient respectivement 5,6 et 1,5 R.

7.5.2 Milieu anisotrope

Dans le cas d'un milieu de Cosserat possédant une anisotropie initiale selon la direction normale notée ici 2, la loi de comportement élastique est modifiée de la façon suivante :

$$\sigma_{12}^s = 2\, G\, \varepsilon_{12}^s - a\, G_c\, \varepsilon_{12}^a \qquad \text{(A.7-157)}$$

$$\sigma_{12}^a = -a\, G_c\, \varepsilon_{12}^s + 2\, G_c\, \varepsilon_{12}^a \qquad \text{(A.7-158)}$$

$$\mu_{32} = 2\, N\, R^2 \left(1 + \frac{a}{2}\right) \kappa_{32} \qquad \text{(A.7-159)}$$

où le scalaire a mesure, en quelque sorte, l'importance de l'anisotropie initiale. Pour a = 0, on retrouve le comportement isotrope et pour a = 1, l'anisotropie est maximale.

Tout calcul fait, on obtient l'équation suivante en X^{α} :

$$\frac{d^2X^a}{dx_2^2} - \frac{\alpha^2}{R^2}X^a = 0 \qquad \text{(A.7-160)}$$

où la variable X^a est reliée à la déformation antisymétrique ε_{12}^a par la relation :

$$X^a = \varepsilon_{12}^a - \frac{a\,\sigma_{12}}{4\,G - a^2\,G_c} \qquad \text{(A.7-161)}$$

Le coefficient α^2 / R^2 est égale dans le cas présent à :

$$\alpha^2 = \frac{2\,G\,G_c}{N\,(G+G_c)} \frac{\left(1 - \frac{a^2\,G_c}{4\,G}\right)}{\left(1 - a\frac{G_c}{G+G_c}\right)} \qquad \text{(A.7-162)}$$

ce qui s'écrit aussi sous la forme :

$$\alpha^2 = \frac{h_3}{h_1} \frac{\left(1 - \frac{a^2}{8\,(h_1 - h_3)}\right)}{\left(1 - \frac{a}{4\,h_1}\right)} \qquad \text{(A.7-163)}$$

Pour un milieu isotrope, c'est à dire pour a égal 0, on retrouve bien le coefficient α précédemment trouvé.

Pour un milieu fortement anisotrope a = 1 et pour le modèle statique (h_1 , h_2) = (3/4 , -1/4), on trouve un coefficient α^2 qui est égale à 21/16 ème du coefficient isotrope. Pour le modèle cinématique, on a (h_1 , h_2) = (3/8 , -1/8) et le coefficient α^2 anisotrope est égal à 3/2 fois le coefficient isotrope. L'influence de l'anisotropie initiale sur l'épaisseur de la zone cisaillée près de l'interface, qui est inversement proportionnelle à α, est donc relativement faible. Il est à noter que la rotation relative est non nulle dans le cas d'un milieu continu classique anisotrope.

7.6 Conclusion sur le matériau de Cosserat élastique

La loi de comportement élastique d'un milieu de Cosserat 2D élastique linéaire introduit une longueur interne R, qui est indépendante des dimensions géométriques de l'interface ou de l'échantillon et qui permet de modéliser le phénomène de localisation des déformations près des interfaces. La couche qui se forme près d'une interface rugueuse est une couche limite, caractérisée par une forte décroissance locale. L'épaisseur de cette couche doit être définie en se fixant un pourcentage portant sur le niveau de la déformation de cisaillement ou du déplacement tangentiel à la limite avec le reste de l'échantillon. Il n'y a pas de discontinuité de comportement et des variables statiques et cinématiques entre la couche limite d'interface et le reste de l'échantillon. Sous cette forme, l'élasticité n'est pas suffisante pour reproduire le phénomène de formation de couches d'interfaces observé expérimentalement.

L'analyse du cisaillement simple plan d'un milieu continu de Cosserat élastique a permis, par ailleurs, de mettre en évidence l'importance des conditions aux limites sur le comportement d'un matériau de Cosserat. En particulier, nous n'avons, par rapport au cas d'un milieu continu classique, introduit qu'une seule nouvelle condition à la limite afin de tenir compte de la rugosité de l'interface qui est mesurée à l'échelle des grains. Cette seule condition à la limite de type microscopique suffit à déterminer si le comportement est de type classique avec des déformations constantes ou de type Cosserat avec de forts gradients des déformations et déplacement tangentiel près de l'interface dans la couche limite. La solution du problème aux limites est donc très sensible aux conditions aux limites de type Cosserat.

Un passage micro-macro nous a également permis de calculer les paramètres élastiques du milieu de Cosserat équivalent, à partir des paramètres élastiques du milieu granulaire. Il est à noter qu'aucun paramètre élastique nouveau n'est introduit dans cette approche puisque les deux coefficients de Cosserat G_c et M sont calculés à partir du module de cisaillement classique G et du coefficient de Poisson classique ν. Sous cette forme, l'enrichissement du milieu de classique pour aboutir à un milieu classique est fait avec un nombre minimal de paramètres. Le seul paramètre nouveau qu'il convient de déterminer expérimentalement est la condition à la limite en interface portant sur la rotation de Cosserat (coefficient f_2).

Le formalisme introduit lors du passage micro-macro nous a permis, par ailleurs, de développer complètement le calcul des contraintes et couples contraintes à partir des forces intergranulaires, et de montrer que dans le cas général, les tenseurs des contraintes et couples contraintes sont non nuls. Reste à faire des simulations numériques, par exemple à l'aide de la méthode des éléments distincts, pour déterminer l'ordre de grandeur de ces variables par rapport aux contraintes de Cauchy classiques.

8 Exemple du milieu de Cosserat rigide parfaitement plastique

8.1 Equations de comportement

8.1.1 Bibliographie sur les critères de rupture

Alors que beaucoup de recherches ont été menées sur les milieux élastiques de Cosserat (Schaeffer, 1963; Koiter, 1963; Neuber, 1966), très peu a été fait sur les milieux de Cosserat élasto-plastiques. En particulier, très peu de recherches ont été conduites afin de définir des critères de rupture appropriés à de tels milieux.

En mécanique des roches, plusieurs études ont été faites pour obtenir à partir de considérations micromécaniques des critères de rupture pour des roches fissurées et modélisées par un milieu continu équivalent anisotrope de Cosserat (Besdo, 1974; Mühlhaus, 1993).

En ce qui concerne les milieux granulaires, modélisés comme milieux continus de Cosserat isotropes, les études réalisées par le passé ont été faites principalement par Lippmann (1969), Bogdaneva-Bontcheva et Lippmann (1972), Kanatani (1979), Mühlhaus et Vardoulakis (1987).

Pour les milieux continus isotropes élasto-plastiques de Cosserat, deux approches ont été développées par le passé.

La première, qui est aussi la plus ancienne, consiste à généraliser le critère de Mohr-Coulomb à un milieu de Cosserat en y incorporant les contraintes antisymétriques. En outre, pour que le problème soit bien posé, il faut introduire un deuxième critère de rupture, de type microscopique et qui porte sur les couples contraintes (Lippmann, 1969; Bogdaneva-Bontcheva et Lippmann, 1972). Cette approche avec deux critères semble la plus adaptée aux milieux granulaires formés de grains oblongs ou anguleux, qui s'imbriquent les uns dans les autres.

La deuxième approche, qui est aussi la plus récente, consiste à généraliser le critère de Drucker-Praguer ou Von Mises à un milieu de Cosserat, en y incorporant tous les nouveaux termes statiques, en l'occurrence, les contraintes antisymétriques et les couples contraintes (Kanatani, 1979; Mühlhaus et Vardoulakis, 1987). Dans une telle approche, le critère généralisé est suffisant pour poser correctement le problème et il n'y a pas nécessité à introduire de deuxième critère de rupture. Cette dernière approche, qui sera développée plus loin pour un milieu élastoplastique avec écrouissage, semble plus adaptée aux milieux granulaires formés de particules rondes et peu anguleuses.

Il existe, cependant, un lien entre ces deux approches. Ce lien sera mis en évidence lors de la formulation d'une loi d'écrouissage avec radoucissement, basée sur la théorie des mélanges. En particulier, si l'on définit deux fractions, une de type classique obéissant au critère classique de Drucker-Praguer, et l'autre de type Cosserat, obéissant au critère quadratique microscopique définit ci-après dans le cadre d'une plasticité à deux critères, on obtient pour le mélange des deux fractions, un seul critère et qui se trouve être le critère de Drucker-Praguer généralisé (cf. paragraphe 9, partie A).

Dans le présent paragraphe, nous reprendrons l'approche à deux critères, développée par Lippmann au début des années 1970, et la reformerons afin d'obtenir de nouveaux résultats.

8.1.2 Approche de Bogdaneva-Bontcheva et Lippmann (1972)

Bogdaneva-Bontcheva et Lippmann (1972) ont proposé de généraliser à un milieu continu de Cosserat, le critère de Mohr-Coulomb classique :

$$F_1 = q + p\sin\phi - c\cos\phi = 0 \qquad \text{(A.8-1)}$$

où q est le déviateur, p est la pression, ϕ est l'angle de frottement interne et c est la cohésion du matériau.

Pour cela, ils partent de la définition que pour un sol vérifiant le critère Mohr-Coulomb, la contrainte tangentielle τ_α , agissant sur tout plan d'inclinaison α, est bornée suivant la règle de frottement :

$$F_1 = \max_{\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}\{f(\alpha)\} \qquad \text{(A.8-2)}$$

$$f(\alpha) = |\tau_\alpha| + \sigma_\alpha \tan\phi - c \qquad \text{(A.8-3)}$$

où les contraintes tangentielle τ_α et normale σ_α , agissant sur la facette d'angle α sont données par :

$$\tau_\alpha = q\sin 2\alpha + \sigma_{12}^{\alpha} \qquad \text{(A.8-4)}$$

$$\sigma_\alpha = p + q\cos 2\alpha \qquad \text{(A.8-5)}$$

La maximisation de la fonction $f(\alpha)$ conduit à trouver que celle-ci est maximale pour une seule valeur de α :

$$\alpha = \text{signe}\left(\sigma_{\theta r}^{a}\right)\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) \qquad \text{(A.8-6)}$$

On obtient alors le critère de rupture de Mohr-Coulomb généralisé à un milieu continu de Cosserat 2D :

$$F_1 = q + p\sin\phi - c\cos\phi + \left|\sigma_{12}^{a}\right|\cos\phi = 0 \qquad \text{(A.8-7)}$$

Il est à remarquer que l'indétermination sur l'angle α qui existe dans un milieu classique est levée dans le cas d'un milieu de Cosserat, puisque des deux plans $\pm\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)$, c'est celui dont la pente va dans le sens du roulement, qui est favorisé.

L'existence de contraintes antisymétriques engendre une cohésion négative (décohésion), qui a pour effet de réduire le domaine d'élasticité, avec un radoucissement directement proportionnel au gradient des couples contraintes, puisque celui-ci est proportionnel aux contraintes antisymétriques.

Un tel critère ne suffit pas pour définir complètement la loi de comportement puisqu'il n'inclut pas les couples contraintes μ_{ij} . Il est nécessaire alors d'introduire un deuxième critère F_2 , qui soit fonction au moins des couples contraintes. Le critère le plus général considéré par Bogdaneva-Bontcheva et Lippmann (1972), contient les couples contraintes μ_{ij} et la pression p, ce qui donne pour le cisaillement simple annulaire :

$$F_2 = |\mu_{zr}/R| + p \sin \phi_2 - N = 0 \qquad \text{(A.8-8)}$$

où R est la longueur interne introduite par le deuxième critère, p est la pression, ϕ_2 et N sont respectivement, l'angle de frottement et la cohésion correspondant à la rotation des grains dans le milieu. Bien que ce critère introduise une longueur interne, l'analyse du cisaillement simple annulaire pour un milieu de Cosserat rigide plastique avec les deux critères précédents donne une interface d'épaisseur nulle.

8.1.3 Nouvelle approche proposée

Dans ce paragraphe, nous préférons repartir du critère de Mohr-Coulomb classique et le garder tel quel :

$$F_1 = q + p \sin\phi - c \cos\phi = 0 \qquad \text{(A.8-9)}$$

Sous cette forme, et dans le contexte d'un milieu de Cosserat, ce critère sera qualifié de critère macroscopique. Pour compléter la loi de comportement, nous introduisons un deuxième critère F_2 , qui est fonction des contraintes antisymétriques et des couples contraintes. Ce critère F_2 pourrait également contenir des contraintes symétriques, en particulier la pression, mais nous préférons dans un premier temps nous limiter au minimum de variables. Avec ce choix, le deuxième critère F_2 peut être qualifié de critère microscopique. De plus, ce choix de critères introduit un découplage complet entre les variables macroscopiques et les variables microscopiques. Deux types de critère microscopique ont été développés et étudiés dans la présente étude.

De manière similaire au critère de Mohr-Coulomb qui est une fonction linéaire des premier et deuxième invariants, p et q, du tenseur des contraintes symétriques σ^s_{ij} , on peut penser à un critère F_2 fonction linéaire des deux nouveaux invariants : $\sqrt{J_2(\sigma^a_{ij})}$ et $\sqrt{J_2(\mu_{ij})}$. Dans le cas du cisaillement simple annulaire, ces deux invariants se réduisent à : $|\sigma^a_{\theta r}|$ et $|\mu_{zr}|/\sqrt{2}$ respectivement.

Ce critère, qui sera appelé critère linéaire, peut être écrit sous la forme :

$$F_2 = h_2 \left|\sigma^a_{\theta r}\right| + \frac{h_3}{R}\left|\mu_{zr}\right| - N = 0 \qquad \text{(A.8-10)}$$

où les coefficients h_2 et h_3 sont sans dimension, N est une sorte de cohésion pour la rotation, et R est la longueur interne plastique. L'équation (A.8-10) n'introduit en fait que deux nouveaux paramètres : $\sigma^a_{max} = N/h_2$ et $\mu^{max}_{zr} = N\,R/h_3$ puisque F_2 peut être réécrit sous la forme suivante :

$$F_2 = \frac{\left|\sigma^a_{\theta r}\right|}{\sigma^a_{max}} + \frac{\left|\mu_{zr}\right|}{\mu^{max}_{zr}} - 1 = 0 \qquad \text{(A.8-11)}$$

Un deuxième critère de rupture F_2 peut être développé à partir du cisaillement généralisé τ_g défini par Kanatani (1979) et Mühlhaus et Vardoulakis (1987) :

$$\tau_g = \sqrt{(\eta_1 + \eta_2)\, s^s_{ij}\, s^s_{ij} + (\eta_1 - \eta_2)\, s^a_{ij}\, s^a_{ij} + (\eta_3 + \eta_4)\frac{m^s_{ij} m^s_{ij}}{R^2} + (\eta_3 - \eta_4)\frac{m^a_{ij} m^a_{ij}}{R^2}}. \qquad \text{(A.8-12)}$$

Si l'on sépare dans τ_g , les termes classiques des termes nouveaux de Cosserat, on obtient deux invariants qui sont respectivement, le cisaillement classique q, défini à partir de σ^s_{ij} et un nouveau cisaillement, dit de Cosserat et noté q_c , qui est fonction de σ^a_{ij} et de μ_{ij} :

$$\tau_c^2 = q^2\left(\sigma^s_{ij}\right) + q_c^2\left(\sigma^a_{ij}, \mu_{ij}\right) \qquad \text{(A.8-13)}$$

Le cisaillement classique q est déjà inclus dans le premier critère de rupture F_1 , nous n'en tiendrons pas compte dans le deuxième. Le nouveau terme q_c , qui mesure la partie du cisaillement qui est due à la rotation relative des grains par rapport à leurs voisins, sera par contre inclus dans le deuxième critère F_2 . Dans le cas du cisaillement simple annulaire, q_c est de la forme :

$$q_c = \sqrt{h_2 \left|\sigma^a_{\theta r}\right|^2 + \frac{h_3}{R^2}\left|\mu_{zr}\right|^2} \qquad \text{(A.8-14)}$$

où h_2 et h_3 sont deux constantes sans dimension, et R est la longueur interne plastique.

Pour le deuxième critère, nous considérerons donc un critère, dit quadratique, qui est de la forme :

$$F_2\left(\sigma^a_{ij}, \mu_{ij}\right) = q_c - N = 0 \qquad \text{(A.8-15)}$$

où N est une sorte de cohésion pour la rotation des grains.

Bien qu'écrit avec 4 constantes : h_2 , h_3 , R et N, le critère quadratique n'introduit que deux nouvelles constantes $\sigma^a_{max} = N/\sqrt{h_2}$ et $\mu_{zr}^{max} = N\,R/\sqrt{h_3}$:

$$F_2 = \sqrt{\left(\frac{\sigma^a_{\theta r}}{\sigma^a_{max}}\right)^2 + \left(\frac{\mu_{zr}}{\mu_{zr}^{max}}\right)^2} - 1 = 0 \qquad \text{(A.8-16)}$$

Les deux constantes σ^a_{max} et μ_{zr}^{max} , qui interviennent dans les critères, linéaire et quadratique, peuvent être interprétées comme étant respectivement, la contrainte antisymétrique et le couple contrainte, maximaux admissibles par la microstructure. Leur rapport, qui a la dimension d'une longueur au carré, introduit la longueur interne plastique R. Cette longueur, bien que notée avec le même symbole que la longueur interne élastique vue précédemment, est différente.

Dans la suite, nous considérerons un matériau rigide plastique régi par deux critères de rupture : un critère macroscopique, qui est le critère de Mohr-Coulomb et un critère microscopique, qui sera linéaire ou quadratique.

Avec un tel choix, le critère de Mohr-Coulomb dans le plan (p, q) reste inchangé. Comme la représentation des critères dans l'espace à quatre dimensions (p , q , $\sigma^a_{\theta r}$, μ_{zr}) n'est pas facile, nous nous restreindrons à l'espace à trois dimensions (q , $\sigma^a_{\theta r}$, μ_{zr}) pour une valeur de la pression p donnée. Dans cet espace, le critère de Mühlhaus et Vardoulakis (1987) est représenté par un ellipsoïde (Figure A.8-1d) tandis que les critères, linéaire et quadratique, sont représentés par des cylindres parallèles à l'axe q et de sections, un parallélogramme et une ellipse, respectivement (figures A.8-1a, c et d). Le critère quadratique peut donc être considéré comme une approximation du critère de Mühlhaus et Vardoulakis (1987).

8.2 Cisaillement simple annulaire d'un milieu continu de Cosserat rigide parfaitement plastique

8.2.1 Analyse du problème

Dans ce paragraphe, nous étudions le cisaillement simple annulaire d'un milieu continu de Cosserat avec une loi de comportement rigide parfaitement plastique dans le cadre de la théorie des déformations totales. Le comportement est défini à partir de deux critères de rupture découplés : le critère de Mohr-Coulomb classique noté F_1 , qui est de type macroscopique, et un deuxième critère, linéaire ou quadratique, noté F_2 , et qui est de type microscopique. La loi d 'écoulement est prise non associée par rapport au premier critère de rupture ($G_1 \neq F_1$) et elle est associée par rapport au deuxième critère de rupture ($G_2 = F_2$).

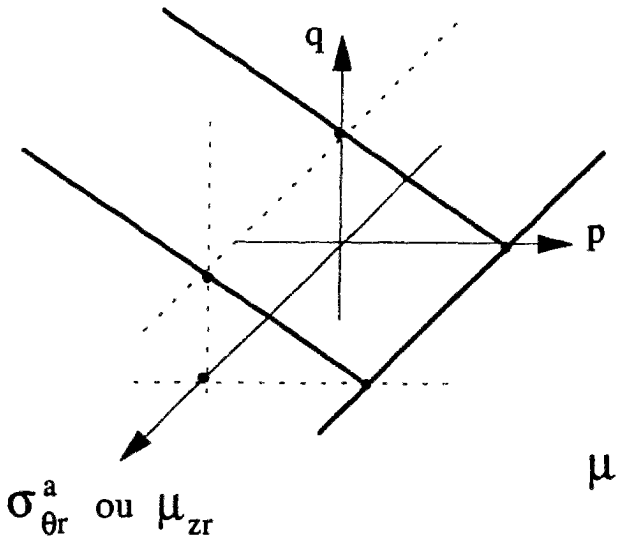


Figure A.8-1a: Critère de Mohr-Coulomb

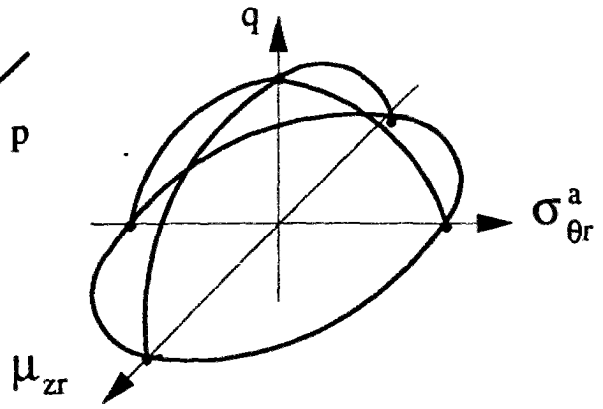


Figure A.8-1b: Critère de Mühlhaus et Vardoulakis (1987)

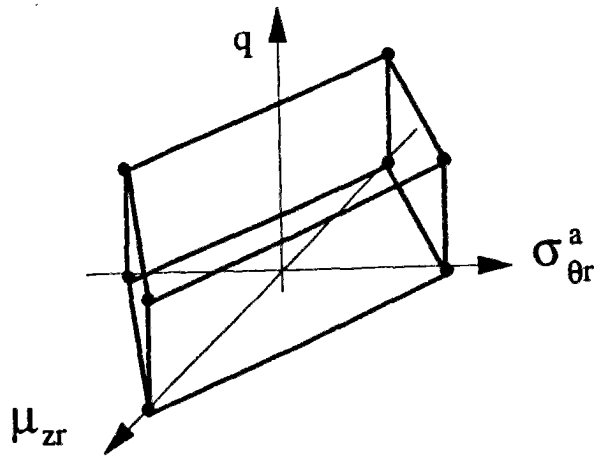


Figure A.8-1c: Critère microscopique linéaire

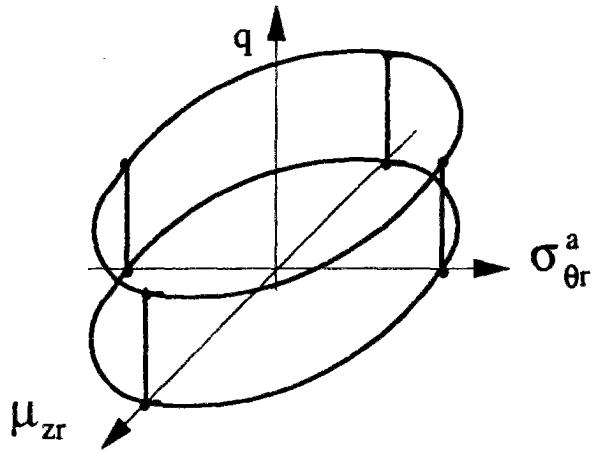


Figure A.8-1d: Critère microscopique quadratique

Figure A.8-1: Critères de rupture étudiés dans cette étude

Avec ce choix de critères, le problème peut être résolu semi-analytiquement pour les quatre raisons énumérées ci-dessous.

En effet, dans les zones plastiques par rapport aux deux critères, les variables statiques sont au nombre de 5 : σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma^s_{\theta r}$, $\sigma^a_{\theta r}$, μ_{zr} alors qu'il y a 5 équations uniquement en variables statiques : les 3 équations d'équilibre plus les deux critères de rupture. Cette particularité permet de résoudre le problème statique indépendamment du problème cinématique, pourvu que les conditions aux limites soient formulées en variables statiques.

Les deux critères sont découplés. Le premier critère macroscopique est fonction uniquement des contraintes symétriques, tandis que le deuxième critère microscopique est fonction des contraintes antisymétriques et des couples contraintes. Il est alors possible de résoudre en variables statiques microscopiques, c'est à dire en contraintes antisymétriques et en couples contraintes, indépendamment des variables statiques macroscopiques.

Du fait du découplage des critères de rupture et des potentiels plastiques, les deux multiplicateurs plastiques λ_1 et λ_2 sont déterminés indépendamment l'un de l'autre et les tenseurs des contraintes et déformations symétriques sont coaxiaux (cf. Annexe A-5).

Les conditions aux limites considérées sont toutes de type statique sauf la condition à la limite en interface correspondant à un déplacement normal nul. Cependant, la définition des déformation ainsi que la coaxialité des tenseurs symétriques des contraintes et déformations permettent de réécrire cette condition sous la forme d'une condition portant sur l'angle α, qui est à la fois de type statique et cinématique, l'angle α étant l'angle que font les directions principales des tenseurs des contraintes et déformations symétriques avec les axes (r, θ).

Développer la solution pour un chargement complet nécessiterait de définir une loi d'évolution des conditions à la limite en interface et en particulier l'évolution de la contrainte tangentielle par rapport au couple contrainte. Il faudrait introduire de nouveaux paramètres qui ne sont pas connus à l'heure actuelle. C'est pourquoi, dans la suite, nous nous limiterons à développer la solution complète en un point donné du chargement, pour le jeu de conditions aux limites résumé dans le tableau A.8-1 ci-dessous.

Quand on compare ces conditions aux limites à celles d'un milieu continu classique, seule une nouvelle condition à la limite est introduite en interface : le couple contrainte en r_{int} . Ce couple contrainte mesure la rugosité de l'interface d'un point de vue microscopique, à l'échelle des grains. Nous définissons la rugosité normalisée R_n comme étant le rapport entre le couple contrainte $\mu_{zr}(r_{int})$ imposé à l'interface et le couple contrainte μ_{zr}^{max} maximal admissible par la microstructure :

$$R_n = \left|\mu_{zr}(r_{int})\right| / \mu_{zr}^{max} \qquad \text{(A.8-17)}$$

Pour une interface lisse, la rugosité R_n est égale à 0. Pour une interface rigide, elle est égale à 1.

Tableau A.8-1 : Conditions aux limites pour le cisaillement simple annulaire

	Rayon de l'interface r_{int}	Rayon extérieur r_{ext}
Conditions aux limites d'un milieu continu classique	$U_r = 0$ interface rigide	$\sigma_{rr} < 0$ pression de confinement
	$\sigma_{\theta r} < 0$ contrainte de cisaillement à l'interface	$U_\theta = 0$ déplacement tangentiel
Conditions aux limites de Cosserat	$\mu_{zr}(r_{int}) > 0$ mesure de la rugosité de l'interface	$\mu_{zr}(r_{ext}) = 0$ condition correspondant à la "solution classique"

Quatre types de zones avec des comportements différents peuvent exister dans le cas d'un milieu continu de Cosserat rigide plastique avec deux critères.

Zone R1-R2 : Aucun des deux critères F_1 ou F_2 n'est atteint ($F_1 < 0$ et $F_2 < 0$). Le sol se comporte comme un matériau rigide classique.

Zone P1-R2 : Seul le premier critère macroscopique F_1 est atteint ($F_1 = 0$ et $F_2 < 0$). Le sol se comporte comme un matériau classique parfaitement plastique. La rotation de Cosserat est assujettie à suivre la rotation du milieu continu.

Zone R1-P2 : Seul le deuxième critère microscopique est atteint ($F_1 < 0$ et $F_2 = 0$). Les déplacements macroscopiques sont ceux d'un milieu classique rigide. Dans le cas présent, l'échantillon suit un mouvement de corps rigide en rotation autour de l'axe z : $U_r(r) \equiv 0$ et $U_\theta(r) = \Omega_z r$. Cependant, la microstructure est libre de tourner et sa rotation propre est contrôlée par le deuxième potentiel plastique G_2 . Il y a un écoulement plastique en rotation propre alors que les déplacements sont ceux d'un corps rigide. Concernant les solutions dans ce type de zones, le lecteur pourra se reporter à l'annexe A-11 où nous les analysons en détails.

Zone P1-P2 : Les deux critères sont atteints ($F_1 = 0$ et $F_2 = 0$). Le sol se plastifie en translation et en rotation. C'est dans cette zone que le comportement du sol est le plus proche de ce qui passe expérimentalement dans une couche d'interface pleinement développée.

C'est pourquoi, nous avons choisi de développer une solution avec une zone P1-P2, d'épaisseur e, près de l'interface ($r_{int} \leq r \leq r_{int} + e$). Au début du chargement, d'autres types de zones peuvent exister près de l'interface mais ces solutions ne seront pas considérées car elles ne correspondent pas à une couche d'interface complètement développée.

En partant d'une zone P1-P2 près de l'interface, les zones suivantes qui peuvent exister pour des raisons mécaniques sont successivement une zone P1-R2, entre $r_{int} + e$ et r_p , puis une zone R1-R2, entre r_p et r_{ext} .

8.2.2 Solution du problème statique

8.2.2.1 Solution dans la couche d'interface

A l'intérieur de la zone P1-P2, où les deux critères F_1 et F_2 sont atteints, il est possible d'éliminer la contrainte antisymétrique $\sigma^a_{\theta r}$ dans l'équation du deuxième critère $F_2 = 0$ en utilisant les équations d'équilibre. On obtient alors une équation non linéaire du premier degré en couple contrainte μ_{zr}. Au contact avec l'interface, le couple contrainte $\mu_{zr}(r_{int})$ est fixé par la condition à la limite de Cosserat. Nous nous intéressons à une solution où les effets de Cosserat n'existent pas hors de la couche d'interface, c'est à dire où les couples contraintes sont nuls. Nous prendrons donc μ_{zr} nul hors de la couche d'interface et, en particulier, à la limite extérieure de cette couche, en $r_{int} + e$, puisque ce couple contrainte doit être continu pour assurer la continuité du vecteur couple contrainte.

Les valeurs du couple contrainte μ_{zr} étant connues en r_{int} et en $r_{int} + e$, il est possible de résoudre les équations en épaisseur d'interface e. Dans le cas du cisaillement simple annulaire, l'équation différentielle ne peut pas être intégrée analytiquement. Les figures A.8-2 et A.8-3 montrent respectivement, les solutions numériques en couple contrainte et contrainte antisymétrique, pour le critère microscopique linéaire et le jeu de paramètres constitutifs suivant : $h_2 = 1$, $h_3 = 1/16$, $N = 8\ 000$ kPa et $R = 1$ mm.

Le cisaillement simple plan peut être obtenu comme cas limite du cisaillement simple annulaire quand le rayon r tend vers l'infini et que l'épaisseur de l'échantillon r_{ext}-r_{int} reste constante et égale à une valeur H. Dans le cas du critère linéaire, l'équation en couple contrainte μ_{zr} peut être intégrée sous la forme suivante :

$$\frac{\mu_{zr}(r)}{\mu_{zr}^{max}} = 1 - \left(1 - \frac{\mu_{zr}(r_{int})}{\mu_{zr}^{max}}\right) \exp\left[2\,\frac{h_3}{h_2}\,\frac{r - r_{int}}{R}\right] \qquad \text{(A.8-18)}$$

où le rapport $(h_3/h_2\ R)$ est égal au rapport de σ_{max}^{a} par μ_{zr}^{max}. L'épaisseur de l'interface e est alors donnée par :

$$e = -\frac{R}{2}\,\frac{h_2}{h_3}\,\ln\left[1 - \frac{\mu_{zr}(r_{int})}{\mu_{zr}^{max}}\right] = -\frac{1}{2}\,\frac{\mu_{zr}^{max}}{\sigma_{max}^{a}}\,\ln\left[1 - \frac{\mu_{zr}(r_{int})}{\mu_{zr}^{max}}\right] \qquad \text{(A.8-19)}$$

Elle dépend de la longueur interne plastique R, qui est reliée à la taille des grains, ainsi que de la rugosité de l'interface R_n , mesurée par le couple contrainte à l'interface. Pour une interface lisse, l'épaisseur e est nulle. Quand la rugosité augmente, l'épaisseur e augmente et tend vers l'infini pour une rugosité maximale et égale à 1. Ceci est une limite du critère linéaire, dans le cas du cisaillement simple plan. Dans le cas du cisaillement simple annulaire, l'épaisseur e, calculée numériquement, reste bornée, même pour une rugosité maximale et égale à 1. Cependant, l'expérience donne des épaisseurs d'interface qui sont finies quel que soit le problème aux limites étudié. Le critère linéaire ne peut donc pas être retenu de ce point de vue là.

Dans le cas du cisaillement simple plan et du critère quadratique, l'équation différentielle en μ_{zr} peut être intégrée de la manière suivante :

$$\frac{\mu_{zr}}{\mu_{zr}^{max}} = \sin\left(\operatorname{asin}\left[\frac{\mu_{zr}(r_{int})}{\mu_{zr}^{max}}\right] + 2\,\sqrt{\frac{h_3}{h_2}}\,\frac{r - r_{int}}{R}\right) \qquad \text{(A.8-20)}$$

où le terme $\sqrt{h_2/h_3}\ R$ est égale au rapport de σ_{max}^{a} et μ_{zr}^{max}. L'épaisseur de la couche d'interface est donnée par :

$$e = \frac{R}{2}\,\sqrt{\frac{h_2}{h_3}}\,\operatorname{asin}\left(\frac{\mu_{zr}(r_{int})}{\mu_{zr}^{max}}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\mu_{zr}^{max}}{\sigma_{max}^{a}}\,\operatorname{asin}\left(\frac{\mu_{zr}(r_{int})}{\mu_{zr}^{max}}\right) \qquad \text{(A.8-21)}$$

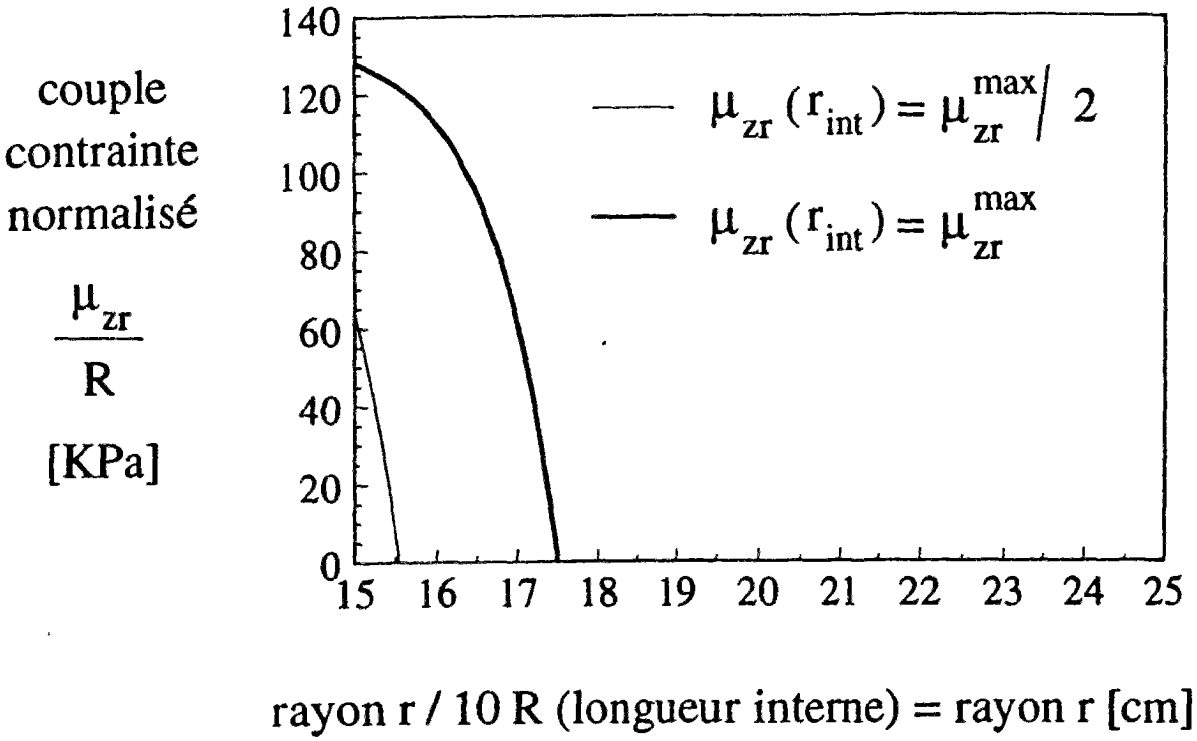


Figure A.8-2 : Variations du couple contrainte dans l'échantillon
(critère linéaire)

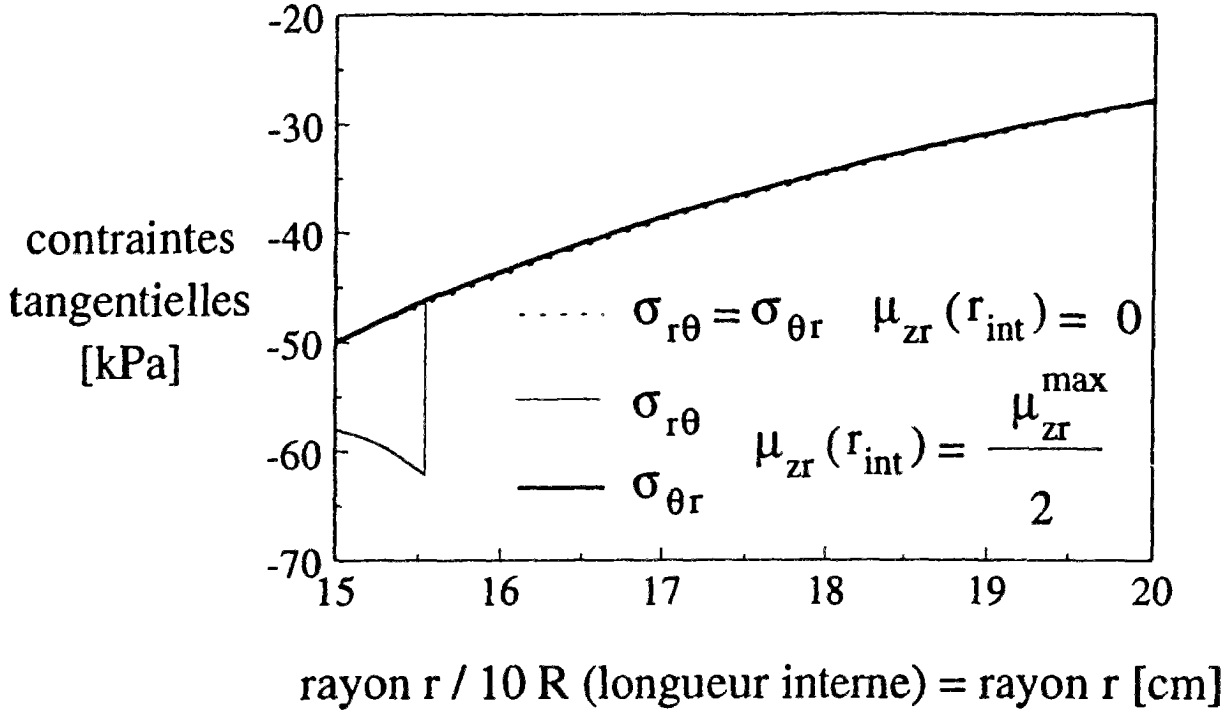


Figure A.8-3 : Variations de la contrainte antisymétrique dans l'échantillon
(critère linéaire)

L'épaisseur trouvée est toujours finie quelque soit le valeur de la rugosité. Pour une interface lisse, l'épaisseur d'interface est nulle. Pour une rugosité maximale et égale à 1, la valeur maximale de l'épaisseur d'interface e est donnée par :

$$e_{max} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{h_2}{h_3}}\,R = \frac{\pi}{4}\,\frac{\mu_{zr}^{max}}{\sigma_{max}^{a}} \qquad \text{(A.8-22)}$$

La figure A.8-4 présente l'évolution de l'épaisseur de l'interface e, en fonction de la rugosité R_n , dans le cas d'un critère quadratique, et pour les cisaillement simples, plan et annulaire (r_{int} = 15 cm). La différence entre les épaisseurs données par les deux essais est très faible car le rayon de l'interface est 150 fois plus grand que la longueur interne R.

Dans le cas du cisaillement simple annulaire, l'épaisseur e de l'interface doit être calculée numériquement. Pour une rugosité maximale et égale à 1, l'épaisseur est maximale et est notée e(CSA). Quand le rayon de l'interface r_{int} , augmente et tend vers l'infini, l'épaisseur e(CSA) augmente et tend vers une limite finie, qui est constituée par l'épaisseur maximale du cisaillement simple plan, notée e(CSP).

L'influence du rayon de l'interface r_{int} sur l'épaisseur de l'interface est un effet de taille qui n'a encore jamais été mis en évidence. La figure A.8-5 montre l'évolution de l'épaisseur e(CSA), normalisée par sa valeur maximale e(CSP), en fonction du rapport r_{int} / R. On constate pour des petits rayons d'inclusions, dans l'intervalle 0 à 20 R, une forte variation de l'épaisseur normalisée e(CSA)/e(CSP) entre 0,4 et 0,85 environ. Cependant, l'intervalle : 0 à 20 R, correspond à des inclusions de la taille "d'une aiguille dans un sable fin". Dans un tel cas, l'interaction entre les grains de sable et l'inclusion se fait à une échelle telle que l'on ne peut plus la modéliser de manière continue. La modélisation par milieu continu, classique ou généralisé, n'est valable que si l'interface est "vu" par les grains comme étant très large et très longue, c'est à dire, pour des valeurs de r_{int} supérieures à 20 R. Dans un tel intervalle, l'épaisseur e(CSA) donnée par le cisaillement simple annulaire, ne diffère de celle donnée par le cisaillement simple plan e(CSP), que d'une dizaine de pour-cents environ, ce qui, compte tenu de la précision des mesures expérimentales d'épaisseurs d'interface, conforte les observations faites et indiquant une épaisseur quasiment indépendante de la géométrie de l'interface et des dimensions géométriques de l'échantillon.

Il est à noter que quand l'épaisseur de la couche d'interface augmente, l'épaisseur de la zone classique plastique diminue (figure A.8-6), alors que l'énergie dissipée globalement reste la même. Cette observation montre très clairement, le pouvoir dissipatif des zones de Cosserat plastiques.

Connaissant les variations du couple contrainte μ_{zr} entre r_{int} et r_{int} + e, on en déduit immédiatement les variations des contraintes antisymétrique $\sigma_{\theta r}^{a}$ et symétrique $\sigma_{\theta r}^{s}$, qui sont reliées au couple contrainte et à sa dérivée première.

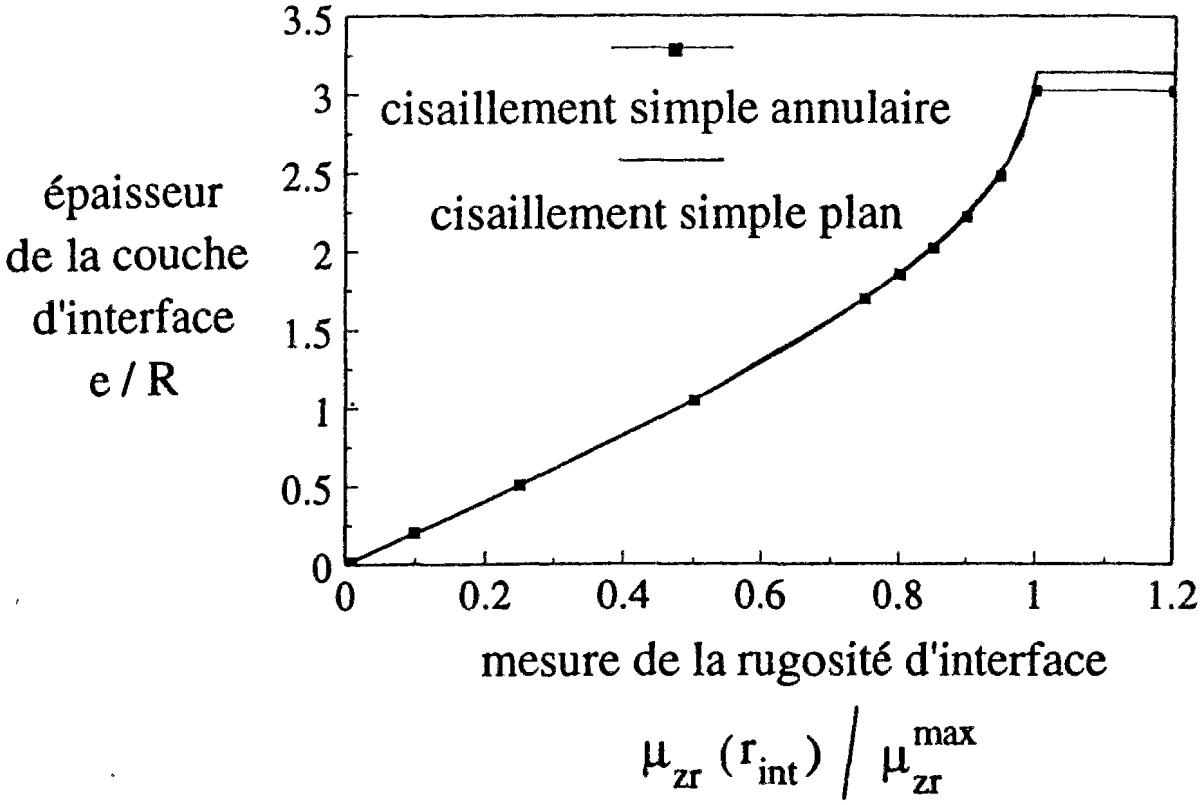


Figure A.8-4 : Variation de l'épaisseur d'interface avec la rugosité normalisée (cisaillements simples plan et annulaire r_{int} = 150 R)

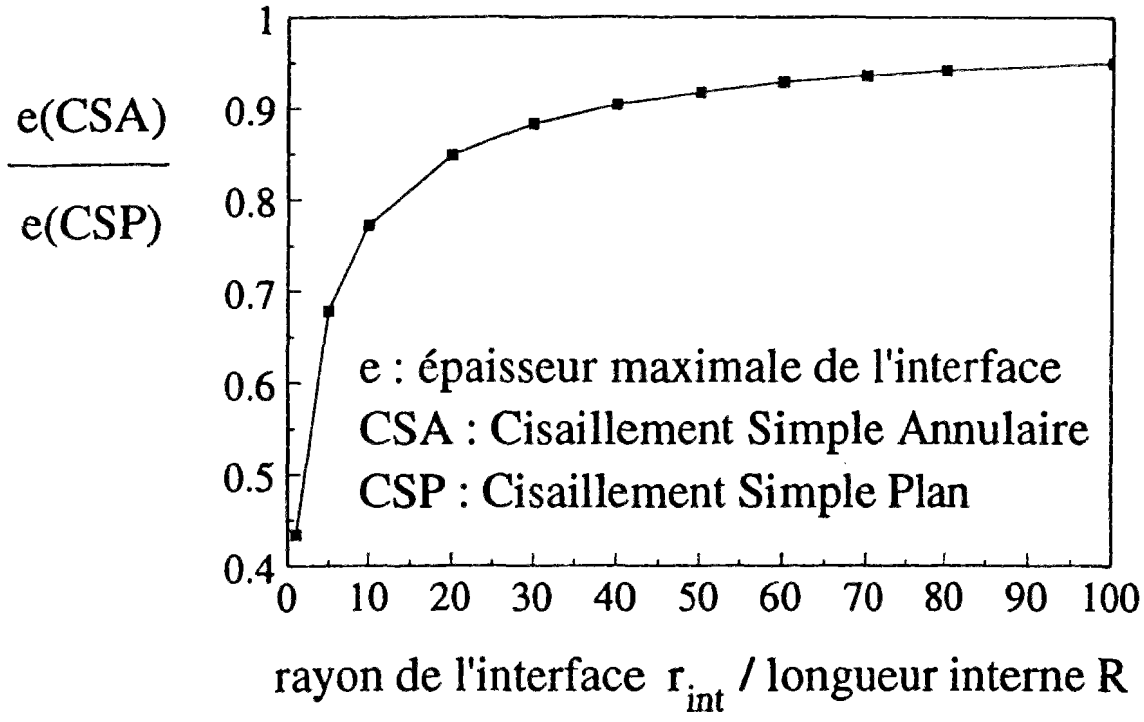


Figure A.8-5 : Variation de l'épaisseur maximale e(CSA) de la couche d'interface du cisaillement simple annulaire en fonction du rayon de l'interface r_{int}

8.2.2.2 Solution hors de la couche d'interface

La résolution du problème statique peut être poursuivie en utilisant l'angle α et les invariants p et q du tenseur symétrique des contraintes. La valeur de α en r_{int} , à l'interface, est fixée par la condition à la limite d'une interface rigide, $U_r = 0$, qui est équivalente à la condition sur l'angle α = signe $(\sigma^s_{\theta r})$ $(\pi/4-\beta/2)$. Connaissant les variations de l'angle α, de la contrainte symétrique $\sigma^s_{\theta r}$, on en déduit celles de q puis de p.

A la limite de la couche d'interface (zone P1-P2) et la zone suivante, seules les variables μ_{zr} , $\sigma_{\theta r}$ et σ_{rr} doivent être continues. A l'extérieur de la couche d'interface (zone P1-P2), on supposera que le matériau se comporte de manière classique avec un couple contrainte μ_{zr} et une contrainte antisymétrique $\sigma^a_{\theta r}$ nulles. En r_{int} + e, μ_{zr} est donc nul et il reste nul pour $r \geq r_{int} + e$. La contrainte antisymétrique $\sigma^a_{\theta r}$ n'est pas nulle en $r_{int} + e^-$ mais il est possible de la ramener à zéro en $r_{int} + e^+$, pourvu que la continuité de $\sigma_{\theta r}$ soit assurée. Une fois que les discontinuités des variables sont connues, la solution classique dans les zones P1-R2 et R1-R2 est obtenue directement. Le point r_p à la limite entre les deux zones est calculé de manière à assurer la continuité de la contrainte radiale σ_{rr} . La figure A.8-7 présente les variations de la contrainte radiale σ_{rr} avec la distance à l'interface. Dans le cas du milieu continu de Cosserat, il convient de noter, par rapport au cas classique, l'augmentation sensible de la contrainte radiale, localement à l'interface. Ce résultat est à rapprocher des observations expérimentales indiquant de fortes surcontraintes radiales, le long d'inclusions, dans des sols granulaires (Schlosser et Guilloux, 1981).

8.2.3 Solution du problème cinématique

Comme pour la plupart des problèmes aux limites dans un milieu classique rigide parfaitement plastique, la construction d'une solution cinématiquement admissible à la limite entre une zone classique plastique (zone P1-R2) et une zone classique rigide (zone R1-R2) n'est pas possible. La combinaison du comportement rigide plastique avec la géométrie de l'essai rend impossible la construction d'une solution respectant la continuité du déplacement radial U_r . Celui-ci doit être nul dans la zone classique rigide quelles que soient les conditions aux limites imposées.

Cependant, si l'on se restreint aux zones P1-P2 et P1-R2, il est possible de développer une solution cinématique partielle, qui donne des indications très intéressantes. Nous développerons donc une solution dans les zones P1-P2 et P1-R2, avec $U_\theta = O$ et $\omega^c_z = 0$ comme conditions aux limites en r_p . Pour remplacer la condition sur U_r en r_p , nous considérons une condition portant sur le multiplicateur plastique λ_l au contact avec l'interface, de manière similaire à ce qui se fait dans les théories de gradient. Cette condition est équivalente à imposer une condition sur la dérivée du déplacement radial U_r à l'interface.

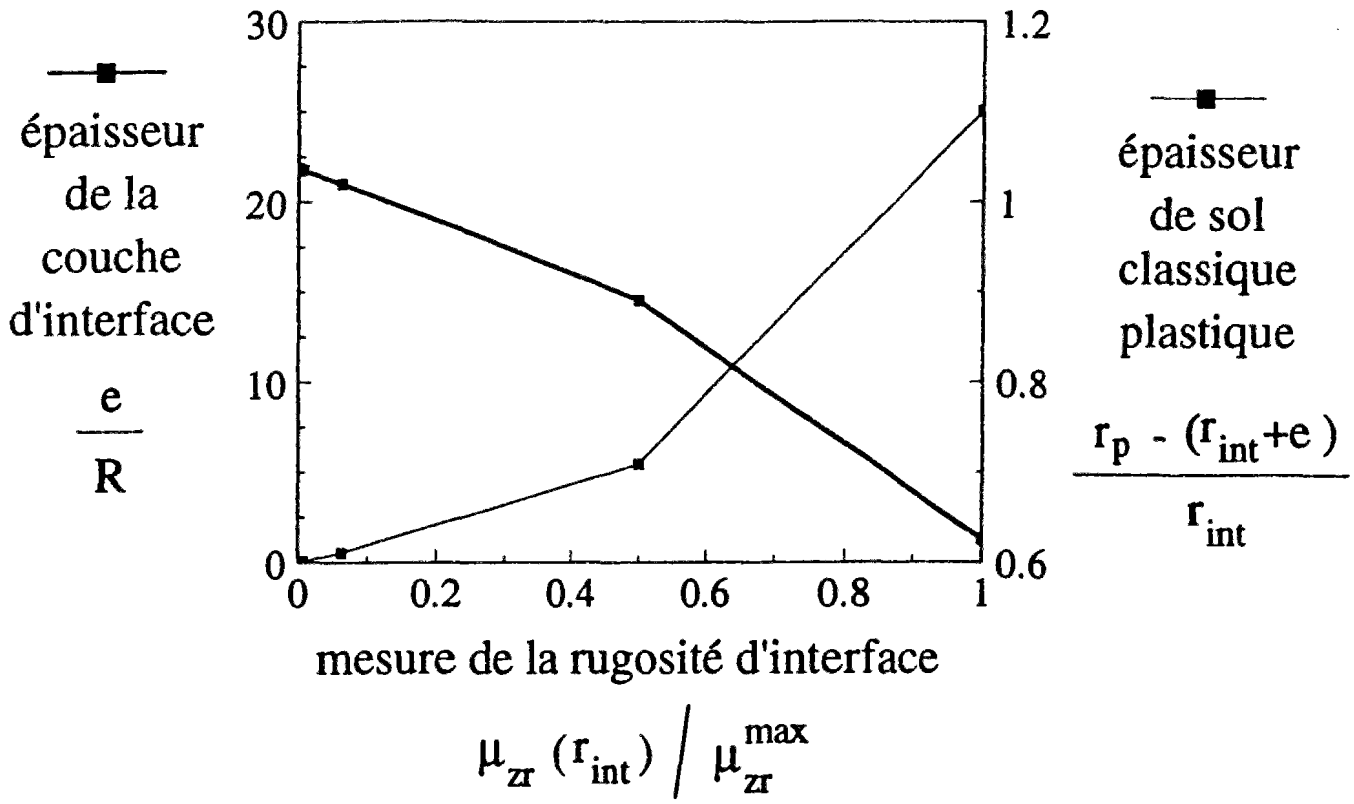


Figure A.8-6 : Variations de l'épaisseur e de la couche d'interface et de l'épaisseur de la zone plastique classique du cisaillement simple annulaire en fonction de la rugosité

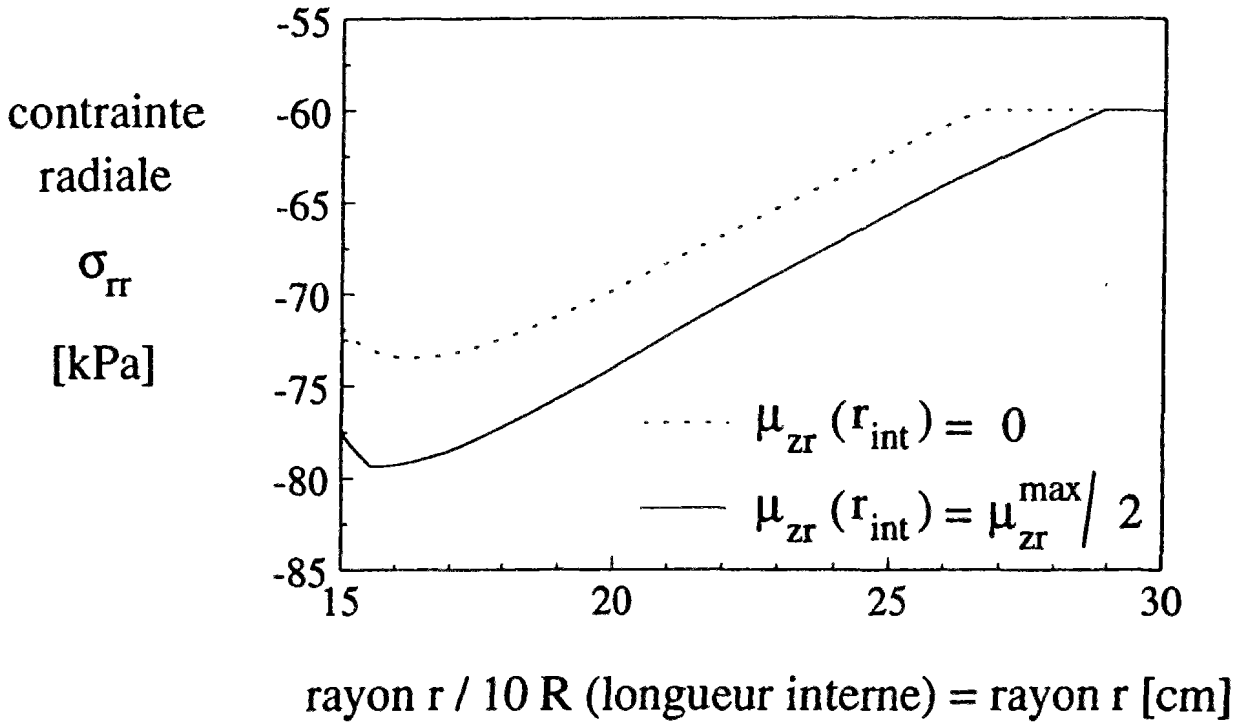


Figure A.8-7 : Variation de la contrainte radiale en fonction du rayon de l'interface r_{int}

La solution en angle α est connue à partir de la solution du problème statique puisque les tenseurs symétriques des contraintes et déformations sont coaxiaux. la solution en U_r est obtenue après intégration de l'équation différentielle en U_r et α . Le multiplicateur plastique λ_1 se calcule alors aisément. La solution en déplacement tangentiel U_θ sur les zones P1-P2 et P1-R2 est obtenue en partant de la condition à la limite en r_p où $U_\theta = 0$. La figure A.8-8 présente les résultats numériques pour le déplacement tangentiel U_θ dans le cas du critère linéaire. Il faut noter la discontinuité du gradient du déplacement tangentiel U_θ à la limite entre la couche d'interface, qui est une zone de Cosserat plastifiée (zone P1-P2) et la zone classique plastique (zone P1-R2).

Comme les conditions à la limite en interface sont spécifiées en contrainte tangentielle totale $\sigma_{\theta r}$ et en couple contrainte μ_{zr} , alors que le déplacement tangentiel U_θ est bloqué en r_p , les solutions pour trois rugosités différentes 0 (lisse), 1/2 (rugueux) et 1 (très rugueux) ne donnent pas les mêmes déplacements tangentiels en interface.

La solution en rotation de Cosserat ω_z^c dans la zone classique plastique P1-R2 est assujettie à suivre la rotation d'ensemble du milieu continu Ω_z . Elle est fonction du déplacement tangentiel U_θ et de sa dérivée première. Dans la couche d'interface, l'équation différentielle en rotation de Cosserat ω_z^c est obtenue à partir de la loi d'écoulement portant sur le deuxième potentiel plastique. Dans la couche d'interface, il faut noter l'importance de la rotation propre ω_z^c , qui est de quelques centaines de degrés, par rapport à la rotation d'ensemble du milieu continu Ω_z , qui est de quelques degrés (figure A.8-9 et A.8-10). Dans cette couche d'interface, un écoulement plastique en rotation se produit. Il en résulte que la rotation relative $\varepsilon_{12}^a = \Omega_z - \omega_z^c$ est très importante dans la zone d'interface alors qu'à l'extérieur dans les zones classiques, elle est nulle (figure A.8-11).

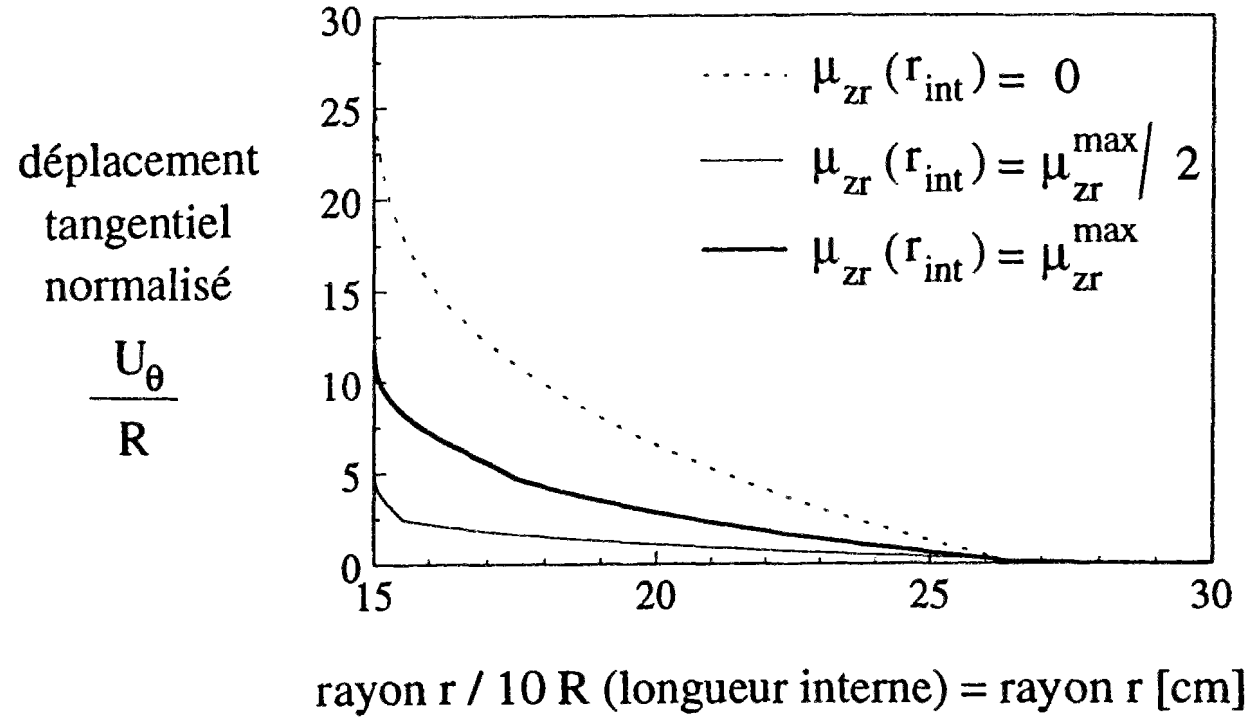


Figure A.8-8 : Variation du déplacement tangentiel U_θ / R
en fonction du rayon de l'interface r_{int}

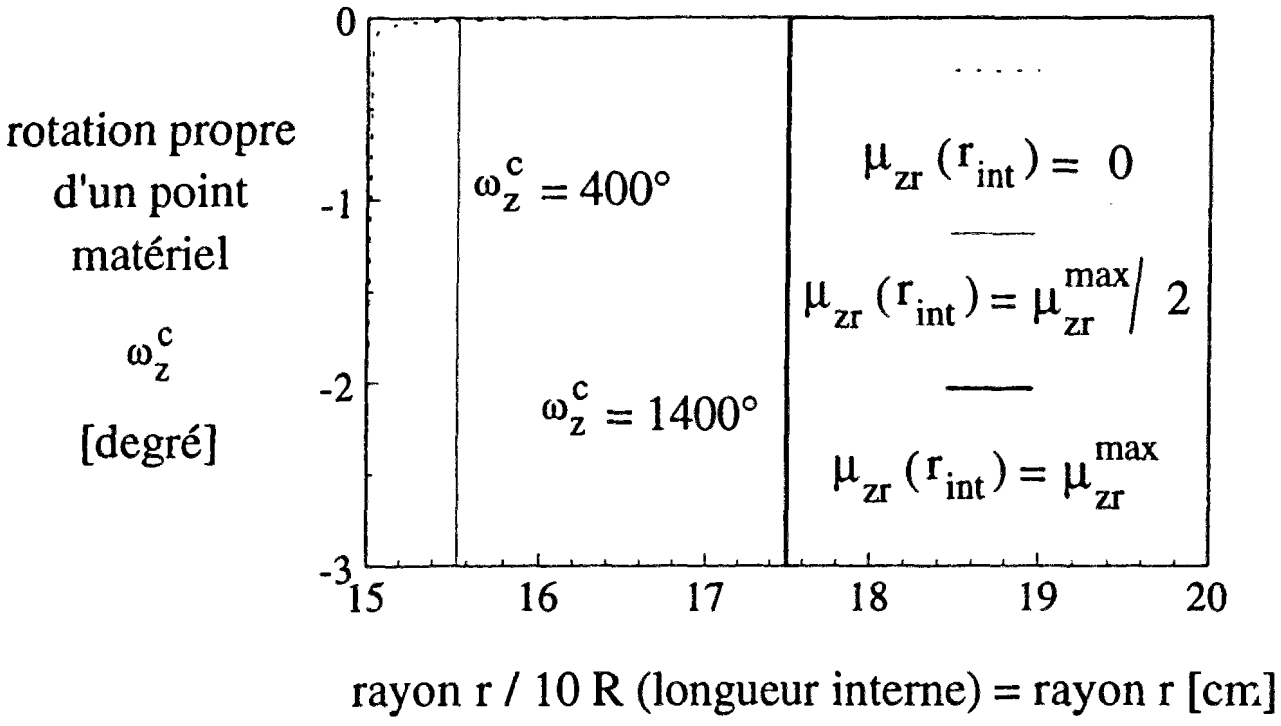


Figure A.8-9 : Variation de la rotation de Cosserat
en fonction du rayon de l'interface r_{int}

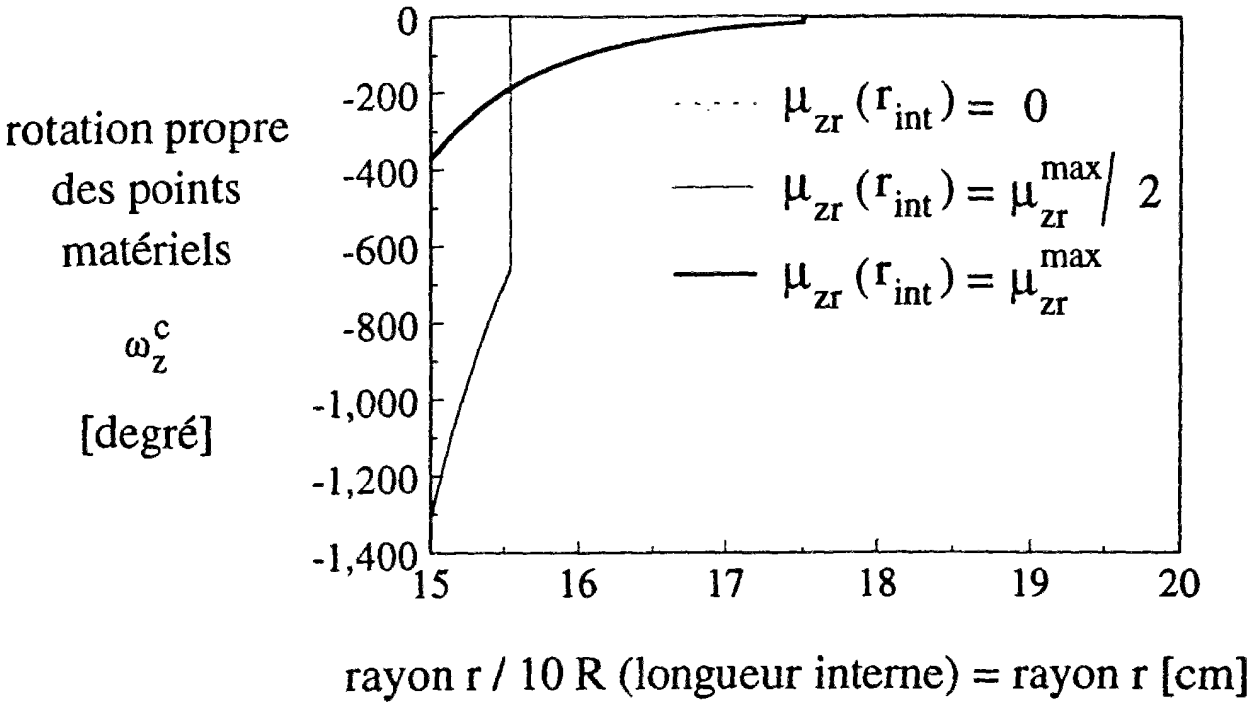


Figure A.8-10 : Variation de la rotation de Cosserat
en fonction du rayon de l'interface r_{int}

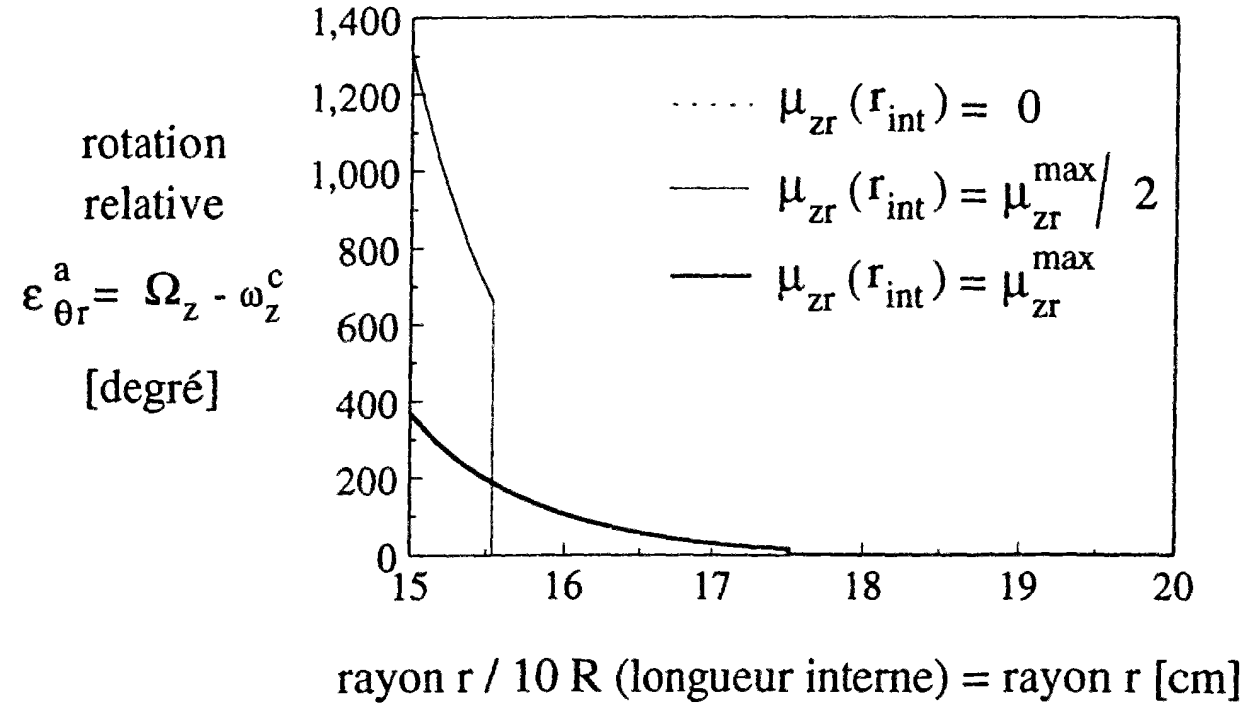


Figure A.8-11 : Variation de la rotation relative
en fonction du rayon de l'interface r_{int}

8.3 Conclusions sur le modèle rigide plastique

La loi de comportement d'un milieu de Cosserat rigide parfaitement plastique doit être formulée à partir de deux critères de rupture, l'un qui peut être qualifié de critère macroscopique, l'autre étant de type microscopique. Quel que soit le choix de ces deux critères, la loi de comportement introduit au moins une longueur interne plastique, que l'on peut définir à partir du rapport des deux dérivées du deuxième critère microscopique : $\partial F_2/\partial \sigma_{ij}$ et $\partial F_2/\partial \mu_{ij}$. Cependant, l'introduction d'une longueur interne n'est pas suffisante pour régulariser le problème et donner une épaisseur d'interface finie, non nulle (Bogdaneva-Bontcheva et Lippmann, 1972). Il faut aussi définir le deuxième critère de rupture microscopique à partir des contraintes antisymétriques et des couples contraintes.

Deux critères microscopiques simples et respectant cette condition, ont été développés et étudiés. Nous avons montré en particulier que l'épaisseur de la couche d'interface, dans le cas du cisaillement simple annulaire, était proportionnelle au rapport de $\partial F_2/\partial \sigma^a_{\theta r}$ et $\partial F_2/\partial \mu_{zr}$. Dans le cas où le deuxième critère ne dépend pas des contraintes antisymétriques, l'épaisseur obtenue pour la couche d'interface est nulle, ce qui est tout à fait cohérent avec l'approche précédemment développée par Bogdaneva-Bontcheva et Lippmann (1972).

L'épaisseur prédite par le modèle quadratique, qui s'avère être le plus adéquat, augmente quand la rugosité augmente, et atteint une limite finie pour une rugosité maximale. Dans le cas du cisaillement simple annulaire, l'épaisseur doit être calculée numériquement, tandis que dans le cas du cisaillement simple plan, des solutions analytiques ont pu être développées.

Des effets de taille ont été mis en évidence quand le cylindre d'interface a un rayon de l'ordre de grandeur de la longueur interne R. Cependant, pour des rayon d'interface supérieurs à 20 fois la longueur interne R, l'épaisseur maximale donnée par le cisaillement simple annulaire est égale à l'épaisseur maximale donnée par le cisaillement simple plan, à environ 10% près.

Enfin, il faut noter que si, dans le cas élastique, la couche d'interface est une couche limite, caractérisée par une forte décroissance et une limite définie arbitrairement à partir d'un pourcentage de déformations, dans le cas présent, la couche d'interface est une couche plastique par rapport aux deux critères de rupture. La limite de la couche d'interface avec le reste de l'échantillon, qui se comporte comme une zone tampon, est caractérisée par une discontinuité du comportement et de certaines variables telles que le gradient du déplacement tangentiel. La plasticité est donc un cadre plus approprié que l'élasticité pour modéliser les couches d'interface.

9 Exemple du milieu de Cosserat élastoplastique avec écrouissage

9.1 Définition de la déformation et de la contrainte de cisaillement généralisées à partir de considérations micromécaniques

Les coefficients élastiques du milieu continu de Cosserat équivalent peuvent être obtenus à partir des propriétés élastiques du milieu granulaire discontinu par une approche micromécanique, c'est ce qui a été développé dans le paragraphe 7 de la partie A.

Dans le présent paragraphe, nous résumerons la méthode proposée par Mühlhaus et Vardoulakis (1987) pour définir la déformation et la contrainte de cisaillement généralisées, dans un milieu granulaire modélisé par un milieu continu de Cosserat. Les notations employées seront les mêmes que celles utilisées pour le passage micro-macro dans le cas élastique.

9.1.1 Modèle cinématique

Considérons un milieu granulaire formé de rouleaux de mêmes rayons R. La position des centres de gravités G des rouleaux, dans un système de coordonnés cartésiennes est noté (x_1 , x_2). Au point de coordonnées (x_1 , x_2), nous définissons un rouleau représentatif dont la cinématique est décrite par le vecteur déplacement u_i de son centre de gravité G (écrit avec un petit u pour le distinguer du vecteur des déplacements U_i du milieu continu), et sa rotation propre ω^g (écrite avec un g en indice pour la distinguer de la rotation de Cosserat), en supposant que le grain est indéformable. Les variables u_i et ω_i^g seront par la suite supposées continues par rapport aux coordonnées.

Considérons deux rouleaux en contact (figure A.9-1). Le déplacement relatif et la rotation relative entre ces deux particules sont donnés par les relations :

$$u_i' - u_i = 2\,R\,u_{i,j}\,n_j \tag{A.9-1}$$

$$\omega_i^{g\prime} - \omega_i^g = 2\,R\,\omega_{i,j}^g\,n_j \tag{A.9-2}$$

où n_i est le vecteur unitaire d'origine le centre de la particule 1 et passant par le point de contact des particules. Il s'ensuit que le déplacement relatif entre les deux rouleaux, au point de contact, est donné par la relation :

$$\Delta u_i = 2\,R\left(\varepsilon_{ij}^g + R\,e_{3ij}\,\kappa_{3k}^g n_k\right)n_j \tag{A.9-3}$$

où ε_{ij}^g et κ_{3k}^g sont respectivement, la déformation et la courbure définies à partir des champs continus des déplacements u_i et des rotations propres ω_i^g des grains :

$$\varepsilon_{ij}^g = u_{i,j} - \omega_{ij}^g \tag{A.9-4}$$

$$\kappa_{3k}^g = \omega_{3,k}^g \tag{A.9-5}$$

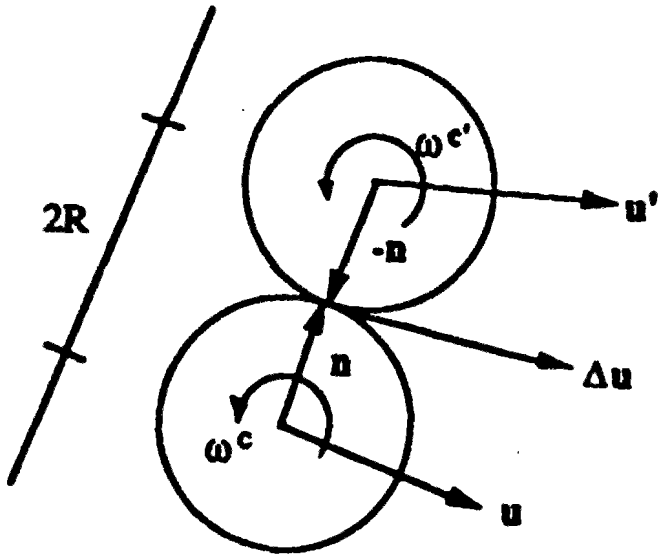


Figure A.9-1 : Déplacement relatif et rotation relative entre deux grains en contact

Dans une telle approche, il est supposé que la microstructure constituée par les rouleaux ou grains est indéformable.

Si l'on impose aux grains de suivre la rotation du milieu, c'est à dire $\omega_{ij}^c = u_{i,j}^a$, et que l'on ne garde dans l'expression de Δu_i que les termes du premier ordre en R, on obtient l'expression suivante pour le déplacement relatif entre deux grains voisins :

$$\Delta u_i = 2\ R\ \varepsilon_{ij}^g\ n_j \qquad \text{(A.9-6)}$$

où cette fois-ci, la déformation généralisée ε_{ij}^g est symétrique et correspond à la déformation classique (Digby, 1981). Cependant, le milieu continu obtenu n'est pas nécessairement un milieu classique comme cela a été observé par Mühlhaus et al. (1993). Vardoulakis et al. (1992) ont montré sur l'exemple du cisaillement simple plan que le milieu obtenu est de type non local (théorie du second gradient), puisque les dérivées secondes des déplacements interviennent dans la loi de comportement. Pour obtenir le milieu continu classique, il faut également supposer que les courbures sont nulles.

La composante normale Δu_i^n du vecteur déplacement relatif entre deux grains est définie par :

$$\Delta u_i^n = \Delta u^n n_i \qquad \text{(A.9-7)}$$

où l'amplitude du déplacement relatif normal, notée Δu^n, est donnée par :

$$\Delta u^n = \Delta u_i\ n_i \qquad \text{(A.9-8)}$$

Dans l'expression du vecteur déplacement relatif, il convient de séparer les termes symétriques des termes antisymétriques car ces derniers n'interviennent pas dans le calcul de la composante normale :

$$\Delta u_i = 2\ R\left[u^s_{i,j} + \left(u^a_{i,j} - \omega^g_{ij}\right) + R\ e_{ij3}\ \kappa^g_{3k}\ n_k\right] n_j \qquad \text{(A.9-9)}$$

On en déduit l'expression suivante de la composante normale :

$$\Delta u^n = 2\ R\ u^s_{i,j}\ n_j\ n_i \qquad \text{(A.9-10)}$$

La composante tangentielle Δu^t_i du vecteur déplacement relatif entre deux grains est définie par :

$$\Delta u^t_i = \Delta u_i - \Delta u^n_i \qquad \text{(A.9-11)}$$

et est égale à :

$$\Delta u^t_i = 2\ R\left[u^s_{i,j} - u^s_{k,l}\ n_k\ n_l\ \delta_{ij} + \left(u^a_{i,j} - \omega^g_{ij}\right) + R\ e_{ij3}\ \kappa^g_{3k}\ n_k\right] n_j \qquad \text{(A.9-12)}$$

L'amplitude moyenne sur l'angle [0, 2π] de la composante normale Δu^n_i du vecteur déplacement relatif entre les grains est définie par l'intégrale :

$$\left\langle \Delta u^n \right\rangle = \int_0^{2\pi} \Delta u^n A(\psi) d\psi \qquad \text{(A.9-13)}$$

où $A(\psi)$ est la fonction de distribution des contacts et $A(\psi)\ d\psi$ représente le nombre probable de contact dans l'angle d'amplitude $d\psi$ et centré sur ψ.

Dans le cas général, $A(\psi)$ varie avec l'angle ψ, et permet de décrire simplement l'anisotropie du milieu comme cela a été fait en élasticité. Nous nous contenterons dans un premier temps, d'un modèle élastoplastique isotrope et nous supposerons donc que $A(\psi)$ est constante et égale à $1 / 2\ \pi$.

L'amplitude moyenne de Δu^n est alors égale à :

$$\left\langle \Delta u^n \right\rangle = \frac{R}{\pi} \int_0^{2\pi} u^s_{i,j}\ n_i\ n_j\ d\psi \qquad \text{(A.9-14)}$$

Après combinaison avec la relation suivante, on obtient les expressions suivantes :

$$\int_0^{2\pi} n_i\ n_j\ d\psi = \pi\ \delta_{ij} \qquad \text{(A.9-15)}$$

$$\left\langle \Delta u^n \right\rangle = R\ u_{i,i} \qquad \text{(A.9-16)}$$

Les variations de distance entre les grains sont reliées aux variations de volume du milieu granulaire. L'amplitude moyenne de Δu^n mesure donc la variation de volume du milieu granulaire. Si l'on identifie le champ de déplacement moyen des centres de gravité des grains u_i avec le champ de déplacement U_i du milieu continu de Cosserat, la déformation volumique du milieu continu de Cosserat équivalent est alors égale à :

$$d\varepsilon_v = \frac{U_{i,i}}{2} = \frac{u_{i,i}}{2} = \frac{\langle \Delta u^n \rangle}{2R} \tag{A.9-17}$$

Il est à noter que le coefficient 2 R entre $\langle \Delta u^n \rangle$ et $d\varepsilon_v$, provient de ce que la variation de distance est de Δu^n pour une longueur de 2 R entre les centres de gravité de deux grains.

L'amplitude moyenne de la composante tangentielle Δu_i^t du vecteur déplacement relatif entre deux grains est définie à partir de la moyenne quadratique :

$$\langle\langle \Delta u^t \rangle\rangle = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Delta u_i^t \, \Delta u_i^t \, d\psi} \tag{A.9-18}$$

Sachant que l'on a les égalités suivantes :

$$\int_0^{2\pi} n_i \, n_j \, d\psi = \pi \, \delta_{ij} \tag{A.9-19}$$

$$\int_0^{2\pi} n_i \, n_j \, n_k \, d\psi = 0 \tag{A.9-20}$$

$$\int_0^{2\pi} n_i \, n_j \, n_k \, n_l \, d\psi = \frac{\pi}{4} \left(\delta_{ij} \, \delta_{kl} + \delta_{ik} \, \delta_{jl} + \delta_{il} \, \delta_{jk} \right) \tag{A.9-21}$$

$$\int_0^{2\pi} n_i \, n_j \, n_k \, n_l \, d\psi = 0 \tag{A.9-22}$$

qui peuvent se généraliser aisément, on obtient l'expression suivante, avec $(g_i) = (3, -1, 4, 0)$:

$$\langle\langle \Delta u_i^t \rangle\rangle = \frac{R}{\sqrt{2}} \sqrt{g_1 e_{ij}^g e_{ij}^g + g_2 e_{ij}^g e_{ji}^g + g_3 k_{ij}^g k_{ij}^g + g_4 k_{ij}^g k_{ji}^g} \tag{A.9-23}$$

Dans le cas d'un milieu continu classique, les grains suivent la rotation d'ensemble du milieu :

$$\omega_{ij}^g = u_{i,j}^a \tag{A.9-24}$$

$$\kappa_{3j} = \frac{\partial \omega_3^g}{\partial x_j} = 0 \tag{A.9-25}$$

L'amplitude moyenne du déplacements tangentiel relatif entre deux grains est alors égale au cisaillement classique, à un coefficient $\sqrt{2}/R$ après avoir identifié les champs moyens de déplacements u_i et rotation ω_i^g des grains aux champs de déplacements U_i et rotations ω_i^c du milieu continu de Cosserat.:

$$\gamma = \sqrt{2\, e_{ij}\, e_{ij}} = \frac{\sqrt{2}}{R}\left\langle \Delta u_i^t \right\rangle \tag{A.9-26}$$

Dans le cas d'un milieu continu de Cosserat, où les grains ne sont plus assujettis à suivre la rotation d'ensemble du milieu, Kanatani (1979) et Mühlhaus et Vardoulakis (1987) ont proposé d'introduire un cisaillement généralisé, qui contient non seulement la partie symétrique déviatorique des contraintes mais aussi la partie antisymétrique déviatorique et les courbures, après avoir identifié les champs moyens de déplacements u_i et rotation ω_i^g des grains aux champs de déplacements U_i et rotations ω_i^c du milieu continu de Cosserat. Ce cisaillement est défini par :

$$\gamma_g = \frac{\sqrt{2}}{R}\left\langle \Delta u_i^t \right\rangle \tag{A.9-27}$$

$$\gamma_g = \sqrt{g_1 e_{ij} e_{ij} + g_2 e_{ij} e_{ji} + g_3 k_{ij} k_{ij} + g_4 k_{ij} k_{ji}} \tag{A.9-28}$$

avec $(g_i) = (3, -1, 4, 0)$.

9.1.2 Modèle statique

9.1.2.1 Interprétation physique des couples contraintes

Dans une poutre, l'existence de moments macroscopiques M_y est directement relié à l'existence de contrainte normale σ_{xx} non uniforme sur la microstructure, en l'occurrence la section droite de la poutre (figure A.9-2). Si celles-ci sont uniformes, la poutre se comporte alors comme une barre avec des moments nuls. Il est important de noter que dans le cadre de la théorie au premier ordre des poutres épaisses, les contraintes tangentielles ne sont pas égales sur deux facettes orthogonales. C'est une limitation de la théorie au premier ordre, qui n'est pas reliée au fait que les poutres sont des milieux de Cosserat unidimensionnels.

Dans un milieu continu de Cosserat, qui peut être considéré comme une généralisation au cas 2D et 3D de la théorie des poutres, une manière d'interpréter les couples contraintes est de considérer, qu'à l'échelle d'un volume élémentaire, les contraintes normales sont non uniformément réparties. En particulier, l'hypothèse la plus simple est de supposer que la contrainte normale sur une facette de normale n_i varie linéairement sur cette facette de la manière suivante (figure A.9-3):

Cette hypothèse peut se justifier, sachant que dans les milieux avec microstructure, les gradients des contraintes sont très forts et leurs variations à l'échelle de la microstructure ne peuvent plus être ignorées.

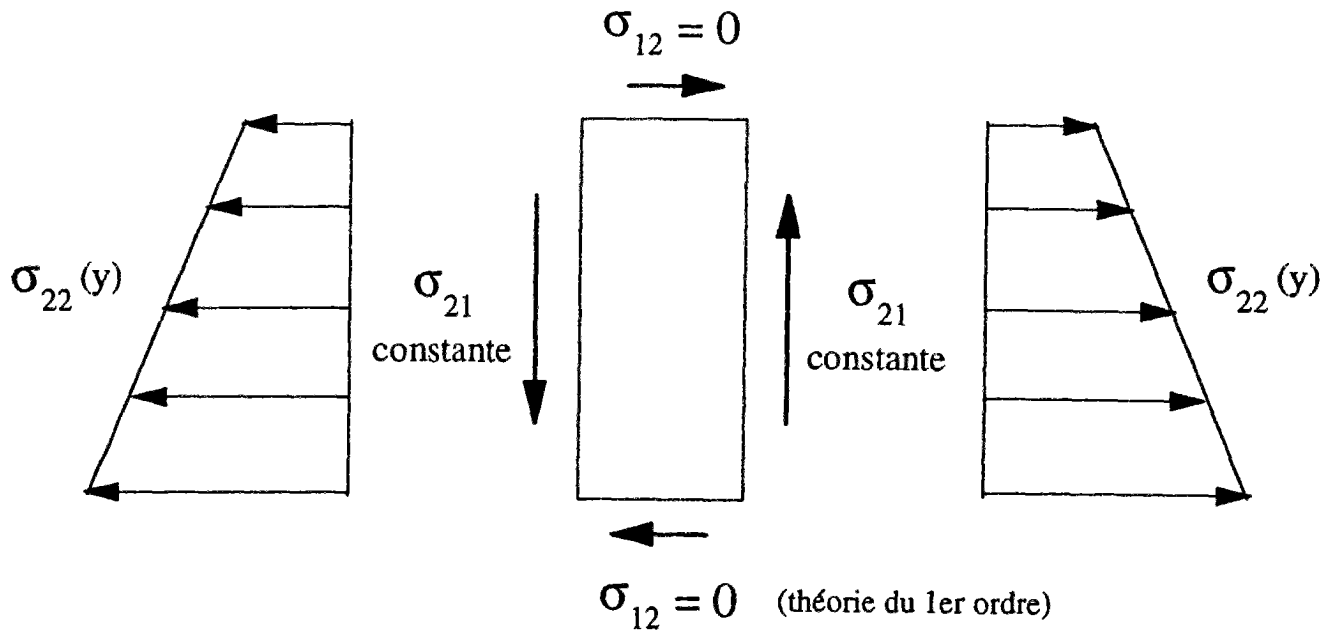


Figure A.9-2 : Etat des contraintes dans une poutre épaisse
modélisée par une théorie du premier ordre

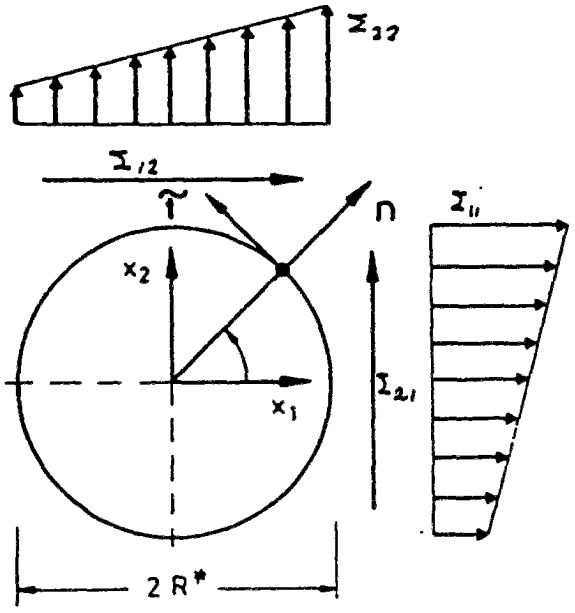


Figure A.9-3: Représentation de l'état de contraintes sur un volume élémentaire
dans un milieu de Cosserat 2D ou 3D
(Mühlhaus et Vardoulakis, 1987)

9.1.2.2 Tenseur des contraintes généralisées

Mühlhaus et Vardoulakis (1987) ont proposé d'introduire le tenseur des contraintes généralisé suivant Σ_{ij} :

$$\Sigma_{ij} = \sigma_{ij} + \frac{1}{R}\, e_{ij3}\, \mu_{3k}\, n_k \tag{A.9-29}$$

Le vecteur contrainte t_i s'appliquant sur une facette est alors donné par:

$$t_i = \Sigma_{ij}\, n_j \tag{A.9-30}$$

Les composantes normale t^n et tangentielle t^t sont respectivement données par:

$$t_i^n = \Sigma_{jk}\, n_j\, n_k\, n_i \tag{A.9-31}$$

$$t_i^t = \left(\delta_{ij} - n_i\, n_j\right) \Sigma_{jk}\, n_k \tag{A.9-32}$$

La moyenne du vecteur contrainte sur un angle [0, 2 π] donne les mesures suivantes pour les contraintes normale σ et tangentielle τ :

$$\sigma = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t^n\, d\theta = \sigma_{ii}/2 \tag{A.9-33}$$

$$\tau = \frac{2}{\pi}\sqrt{\int_0^{2\pi} t_i^a\, t_i^a\, d\theta} = \left(h_1\, s_{ij}\, s_{ij} + h_2\, s_{ij}\, s_{ji} + \frac{h_3}{R^2}\, m_{ij}\, m_{ij} + \frac{h_4}{R^2}\, m_{ij}\, m_{ij} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{A.9-34}$$

avec les valeurs suivantes pour les paramètres $(h_i) = (3/4, -1/4, 1, 0)$.

La même approche peut être développée au cas d'un milieu tridimensionnel (Sulem et Vardoulakis, 1990).

Il faut noter que dans le cas d'un milieu continu classique, les contraintes antisymétriques et les couples contraintes étant nuls, le cisaillement généralisé défini ci-dessus se réduit au cisaillement classique.

La déformation généralisée de cisaillement, duale en énergie au cisaillement défini ci-dessus, diffère de la définition obtenue dans le modèle cinématique par les valeurs des coefficients g_i. Le tableau A.9-1 présente les coefficients, h_i et g_i , pour les variables τ_g et γ_g , duales en énergie, dans les modèles dit statique et cinématique, bidimensionnel et tridimensionnel.

Tableau A.9-1 : Valeurs des coefficients, h_i et g_i ,
pour les modèles statiques et cinématiques 2D et 3D

	modèle 2D	modèle 3D
modèle statique	Mühlhaus et Vardoulakis (1987) $(h_i) = (3/4 , -1/4 , 1 , 0)$ $(g_i) = (3/2 , 1/2 , 1 , 0)$	Sulem et Vardoulakis (1990) $(h_i) = (2/3 , -1/6 , 2/3 , -1/6)$ $(g_i) = (8/5 , 2/5 , 8/5 , 2/5)$
modèle cinématique	Mühlhaus et Vardoulakis (1987) $(h_i) = (3/8 , 1/8 , 1/4 , 0)$ $(g_i) = (3 , -1 , 4 , 0)$	Mühlhaus (1986) $(h_i) = (4/5 , 1/10 , 4/5 , 1/10)$ $(g_i) = (8/3 , -2/3 , 8/3 , -2/3)$

9.2 Loi de comportement élastoplastique

On considère dans la suite une loi de comportement élastoplastique avec ou sans écrouissage. L'élasticité est linéaire. On se place dans le cadre de la théorie incrémentale de la plasticité et pour simplifier, nous ne considérerons, dans un premier temps, qu'un seul critère de rupture F et un seul potentiel plastique G.

9.2.1 Invariants dans un milieu de Cosserat isotrope

Le critère de rupture, noté F , est défini comme une fonction de l'état des contraintes σ_{ij} et des couples contraintes μ_{ij} ainsi que d'un paramètre d'écrouissage noté γ^p. Le critère de rupture F, dans le cas le plus général d'un matériau isotrope avec écrouissage isotrope est fonction des 6 invariants des tenseurs des contraintes σ_{ij} et couples contraintes μ_{ij} , qui sont énumérés ci-dessous.

(1) Premier invariant du tenseur des contraintes

Le premier invariant du tenseur des contraintes σ_{ij} , noté $J_1(\sigma_{ij})$, correspond à la pression p. Il est aussi égal au premier invariant du tenseur symétrique des contraintes σ^s_{ij} .

$$J_1(\sigma_{ii}) = p = \sigma_{ii} / 3 \text{ (milieu 3D)} \qquad \text{(A.9-35)}$$

$$J_1(\sigma_{ii}) = p = \sigma_{ii} / 2 \text{ (milieu 2D)} \qquad \text{(A.9-36)}$$

(2) Deuxième invariant du tenseur symétrique des contraintes

Le deuxième invariant du tenseur symétrique des contraintes σ^s_{ij} , noté $J_2(\sigma^s_{ij})$, est encore appelé déviateur q :

$$J_2(\sigma^s_{ij}) = \frac{1}{2} s^s_{ij} \, s^s_{ij} \qquad \text{(A.9-37)}$$

avec:

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - p \, \delta_{ij} \qquad \text{(A.9-38)}$$

(3) Deuxième invariant du tenseur antisymétrique des contraintes

Le deuxième invariant du tenseur antisymétrique des contraintes σ^a_{ij} , noté $J_2(\sigma^a_{ij})$, est égal à :

$$J_2(\sigma^a_{ij}) = \frac{1}{2} s^a_{ij}\, s^a_{ij} = \frac{1}{2}\sigma^a_{ij}\, \sigma^a_{ij} = (\sigma^a_i)^2 = \|\sigma^a_i\|^2 \qquad \text{(A.9-39)}$$

(4) Premier invariant du tenseur des couples contraintes

Le premier invariant du tenseur des couples contraintes μ_{ij} , noté $J_1(\mu_{ij})$, est égal à :

$$J_1(\mu_{ii}) = \mu_{ii} / 3 \qquad \text{(A.9-40)}$$

(5) Deuxième invariant du tenseur symétrique des couples contraintes

Le deuxième invariant du tenseur symétrique des couples contraintes μ^s_{ij} , noté $J_2(\mu^s_{ij})$, est égal à :

$$J_2(m^s_{ij}) = \frac{1}{2} m^s_{ij}\, m^s_{ij} \qquad \text{(A.9-41)}$$

où le déviateur de μ_{ij} est défini par :

$$m_{ij} = \mu_{ij} - \frac{\mu_{kk}}{3}\, \delta_{ij} \qquad \text{(A.9-42)}$$

(6) Deuxième invariant du tenseur antisymétrique des couples contraintes

Le deuxième invariant du tenseur antisymétrique des couples contraintes μ^a_{ij} , noté $J_2(\mu^a_{ij})$, est égal à .

$$J_2(\mu^a_{ij}) = \frac{1}{2} m^a_{ij}\, m^a_{ij} = \frac{1}{2}\mu^a_{ij}\, \mu^a_{ij} = (\mu^a_i)^2 = \|\mu^a_i\|^2 \qquad \text{(A.9-43)}$$

Dans le cas le plus général, le critère de rupture d'un milieu de Cosserat élastoplastique isotrope est fonction des 6 invariants définis ci-dessus, où les quatre derniers termes sont nouveaux par rapport à un milieu classique

Outre les 4 seconds invariants énumérés ci-dessus, on peut définir d'autres invariants comme par exemple : $s_{ij}\, s_{ij}$, $s_{ij}\, s_{ji}$, $m_{ij}\, m_{ij}$, $m_{ij}\, m_{ji}$. Dans la suite, on utilisera indifféremment l'un ou l'autre jeu d'invariants du second ordre.

9.2.2 Généralisation des critères de Drucker-Praguer ou von Mises

9.2.2.1 Forme générale

Dans le cas d'un milieu classique où le tenseur des contraintes est symétrique, les critères de Drucker-Praguer et von Mises peuvent être écrits sous la forme :

$$F = \sqrt{J_2(\sigma_{ij})} + \mu(\gamma^p)\, J_1(\sigma_{ij}) - c \qquad \text{(A.9-44)}$$

où le terme :

$$\sqrt{J_2(\sigma^s_{ij})} = \sqrt{\frac{1}{2}\sigma^s_{ij}\sigma^s_{ij}} \qquad \text{(A.9-45)}$$

classiquement noté τ, mesure le cisaillement tandis que le deuxième terme $J_1(\sigma_{ij})$ est la pression (négative en compression). Le coefficient μ est le coefficient de frottement mobilisé en fonction du paramètre d'écrouissage γ^p tandis que c est la cohésion (positive). Ce critère peut être rendu adimensionnel après division par la pression p

Sur la base d'une approche micro-macro, Kanatani (1979), Mühlhaus et Vardoulakis (1987) ont proposé de généraliser ce type de critère en introduisant un cisaillement généralisé, noté τ_g . D'un auteur à l'autre, et suivant si le milieu étudié est 2D ou 3D, ce cisaillement généralisé peut prendre plusieurs formes. Cependant, la forme la plus générale à laquelle on peut penser et qui permet d'inclure tous les critères similaires précédemment développés, est du type suivant :

$$\tau_c = \sqrt{h_1 s_{ij} s_{ij} + h_2 s_{ij} s_{ji} + \frac{h_3}{R^2} m_{ij} m_{ij} + \frac{h_4}{R^2} m_{ij} m_{ji}} \qquad \text{(A.9-46)}$$

En séparant les termes classiques des nouveaux termes de Cosserat, le cisaillement généralisé τ_g peut être réécrit sous la forme suivante :

$$\tau_g^p = \sqrt{(h_1 + h_2) s^s_{ij} s^s_{ij} + (h_1 - h_2) s^a_{ij} s^a_{ij} + \frac{(h_3 + h_4)}{R^2} m^s_{ij} m^s_{ij} + \frac{(h_3 - h_4)}{R^2} m^a_{ij} m^a_{ij}} \qquad \text{(A.9-47)}$$

ce qui s'écrit aussi comme une combinaison des nouveaux invariants :

$$\tau_g^p = \sqrt{2\,(h_1 + h_2)\, J_2(\sigma^s) + 2\,(h_1 - h_2) J_2(\sigma^a) + \frac{2\,(h_3 + h_4)}{R^2} J_2(\mu^s) + \frac{2\,(h_3 - h_4)}{R^2} J_2(\mu^a)} \qquad \text{(A.9-48)}$$

Le cisaillement généralisé est ainsi la racine carrée d'une combinaison linéaire des 4 seconds invariants des tenseurs des contraintes et couples contraintes. C'est la forme la plus générale à laquelle on peut penser, du moins pour un critère de type quadratique.

Le critère de Drucker-Praguer peut être ainsi généralisé à un milieu de Cosserat en remplaçant le cisaillement classique τ par le cisaillement généralisé τ_g :

$$F = \tau_c + \mu(\gamma^p)\, J_1(\sigma_{ij}) - c \qquad \text{(A.9-49)}$$

Dans le cas d'un matériau non-associé, on postule, en outre, l'existence d'un potentiel plastique G, défini de manière similaire à la fonction de charge F :

$$G = \tau_c + \beta(\gamma^p)\, J_1(\sigma_{ij}) - \bar{c} \qquad \text{(A.9-50)}$$

où β est l'angle de dilatance mobilisé et $\bar{c}$, une cohésion qui n'intervient pas au niveau des calculs, et qui sera donc omise par la suite.

On peut remarquer qu'un tel critère plastique introduit formellement deux longueurs internes plastiques qui sont associées respectivement aux deux invariants des couples contraintes. Celles-ci sont a priori indépendantes. Cependant, en choisissant de manière appropriée les deux coefficients h_3 et h_4 , on peut les rendre égales, ce qui limite le nombre des nouveaux paramètres introduits et sera considéré dans la suite.

9.2.2.2 Ecriture du critère dans le cas d'un modèle 2D et du cisaillement simple plan

Dans le cas d'un milieu classique et du cisaillement plan, le cisaillement τ est égal à :

$$\tau = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + (\sigma_{12})^2} = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right) \qquad \text{(A.9-51)}$$

Le paramètre τ mesure le rayon du cercle de Mohr dans le plan de Mohr tandis que la pression p correspond au centre du cercle.

Dans le cas d'un milieu de Cosserat bidimensionnel et pour l'essai de cisaillement simple, le cisaillement généralisé τ_g s'écrit sous la forme suivante :

$$\tau_g = \sqrt{2\,(h_1 + h_2)\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + h_1\left(\sigma_{12}^2 + \sigma_{21}^2\right) + 2\, h_2\, \sigma_{12}\, \sigma_{21} + h_3\left(\frac{\mu_{32}}{R}\right)^2} \qquad \text{(A.9-52)}$$

Il peut être exprimé en fonction du cisaillement τ classique par la relation :

$$\tau_g^{\,2} = \tau^2 + 2\,(h_1 - h_2)\left(\sigma_{12}^a\right)^2 + h_3\left(\frac{\mu_{32}}{R}\right)^2 \qquad \text{(A.9-53)}$$

puisque les deux constantes h_1 et h_2 sont choisies de manière à ce que τ_g soit égale à τ, dans le cas d'un milieu de Cosserat qui n'est pas sollicité en tant que tel, c'est à dire qui se comporte comme un milieu classique avec des tenseurs des contraintes antisymétriques et des couples contraintes nuls.

9.2.2.3 Détermination des coefficients dans le critère de rupture

En dehors de toute considération micro-mécanique, il importe que le critère de Drucker-Praguer généralisé au milieu de Cosserat, se réduise au modèle classique dans le cas où le milieu de Cosserat se comporte comme un milieu classique. En l'absence de couples contraintes $\mu_{ij} = 0$, les contraintes antisymétriques σ^{a}_{ij} disparaissent du fait des équations d'équilibre en moment. Le cisaillement généralisé se réduit à:

$$\tau_g = \sqrt{(h_1 + h_2) s_{ij} s_{ij}} \qquad \text{(A.9-54)}$$

si et seulement si, la relation suivante est vérifiée entre h_1 et h_2 :

$$h_1 + h_2 = \frac{1}{2} \qquad \text{(A.9-55)}$$

ce qui permet de fixer l'une des deux constantes : h_1 et h_2 .

La détermination des autres paramètres est faite à partir d'une approche micromécanique, en considérant un milieu granulaire 2D ou 3D, et en partant, soit de la statique, soit de la cinématique, ce qui donne deux modèles qualifiés respectivement, de modèle statique et de modèle cinématique. Le calcul des coefficients, h_i et g_i , pour les modèles cinématique et statique, dans le cas 2D, est détaillé au début de ce paragraphe 9.

9.3 Matrice de comportement élasto-plastique

9.3.1 Ecriture vectorielle des contraintes et du critère de rupture

Pour la programmation, l'écriture des tenseurs des contraintes et déformations sous forme vectorielle est préférable. Dans la suite, on considérera : (1) le vecteur généralisé des contraintes $\{\sigma\}$, qui contient les contraintes σ_{ij} mais aussi les couples contraintes μ_{ij} normalisés par la longueur interne R, de façon à avoir les unités d'une contrainte et (2) le vecteur généralisé des déformations $\{\varepsilon\}$, qui contient les déformations ε_{ij} mais aussi les courbures κ_{ij} normalisées par la longueur interne R, de façon à avoir les unités d'une déformation.

Pour le cisaillement simple plan, le vecteur généralisé des contraintes est égal à :

$$\{\sigma\} = \{ \sigma_{11} , \sigma_{22} , \sigma_{12} , \sigma_{21} , \mu_{32} / R \} \qquad \text{(A.9-56)}$$

tandis que le vecteur généralisé des déformations est égale à :

$$\{\varepsilon\} = \{ \varepsilon_{11} , \varepsilon_{22} , \varepsilon_{12} , \varepsilon_{21} , R \kappa_{32} \} \qquad \text{(A.9-57)}$$

Les invariants τ_g et p peuvent être alors écrits sous la forme matricielle suivante :

$$\tau_c = {}^t\{\sigma\}[J_2]\{\sigma\} \tag{A.9-58}$$

où :

$$[J_2] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline (h_1+h_2)/2 & -(h_1+h_2)/2 & & & \\ \hline -(h_1+h_2)/2 & (h_1+h_2)/2 & & & \\ \hline & & h_1 & h_2 & \\ \hline & & h_2 & h_1 & \\ \hline & & & & h_3 \\ \hline \end{array} \tag{A.9-59}$$

et :

$$p = {}^t\{J_1\}\{\sigma\} \tag{A.9-60}$$

où :

$$\{J_1\} = \{\ 1/2\ ,\ 1/2\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\} \tag{A.9-61}$$

Le critère de rupture F peut être écrit sous la forme suivante :

$$F = \sqrt{{}^t\{\sigma\}[J_2]\{\sigma\}} + \mu(\gamma^p)\,{}^t\{J_1\}\{\sigma\} - c \tag{A.9-62}$$

tandis que le potentiel plastique peut être écrit sous la forme compacte suivante :

$$G = \sqrt{{}^t\{\sigma\}[J_2]\{\sigma\}} + \beta(\gamma^p)\,{}^t\{J_1\}\{\sigma\} \tag{A.9-63}$$

9.3.2 Dérivées des invariants

La dérivée de la pression est simplement égale à :

$$\left\{\frac{\partial p}{\partial \sigma}\right\} = \{J_1\} \tag{A.9-64}$$

La direction normale à la surface de charge F = 0 est définie par :

$$\{f\} = \left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\} \tag{A.9-65}$$

où le gradient de F est égal à :

$$\left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\} = \frac{1}{\tau_g}[J_2]\{\sigma\} - \mu(\gamma^p)\{J_1\} \tag{A.9-66}$$

La direction normale au potentiel plastique G est définie par :

$$\{g\} = \left\{\frac{\partial G}{\partial \sigma}\right\} \tag{A.9-67}$$

où le gradient de G est égal à :

$$\left\{\frac{\partial G}{\partial \sigma}\right\} = \frac{1}{\tau_g}[J_2]\{\sigma\} - \beta(\gamma^p)\{J_1\} \tag{A.9-68}$$

avec $\tau_g = \mu(\gamma^p)\ p - c$ car le critère est atteint quand les relations ci-dessus sont utilisées.

9.3.3 Identification du multiplicateur plastique avec la déformation plastique de cisaillement généralisée

Dans un milieu classique élastoplastique avec un critère de Drucker-Praguer, le paramètre d'écrouissage utilisé classiquement est la déformation plastique de cisaillement :

$$d\gamma^p = \sqrt{2\ de_{ij}^p\ de_{ij}^p} \tag{A.9-69}$$

où e_{ij}^p est la déformation plastique déviatorique.

En compression ou extension uniaxiale, $d\gamma^p$ se réduit à la déformation plastique d'extension de_{11}^p (milieu 2D).

Une généralisation de la déformation de cisaillement $d\gamma^p$ pour un milieu de Cosserat peut être faite à partir des invariants des tenseurs déviatoriques de déformation et courbure avec une fonctionnelle de la même forme que celle utilisée pour définir la contrainte de cisaillement généralisé τ_g , ce qui donne :

$$d\gamma_g^p = \sqrt{g_1\ de_{ij}^p\ de_{ij}^p + g_2\ de_{ij}^p\ de_{ji}^p + g_3\ R^2\ dk_{ij}^p\ dk_{ij}^p + g_4\ R^2\ dk_{ij}^p\ dk_{ji}^p} \tag{A.9-70}$$

Pour que cette définition se réduise à la définition classique dans le cas d'un milieu de Cosserat qui n'est pas sollicité en tant que tel ($\sigma_{ij}^a = 0$ et $\mu_{ij} = 0$), il est nécessaire de prendre :

$$g_1 + g_2 = 2 \tag{A.9-71}$$

Cette déformation $d\gamma_g^p$ peut être écrite sous la forme matricielle suivante :

$$(d\gamma^p)^2 = {}^t\{d\varepsilon^p\}[I_2]\{d\varepsilon^p\} \tag{A.9-72}$$

La matrice $[I_2]$ est égale à :

$$[I_2] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline (g_1+g_2)/2 & -(g_1+g_2)/2 & & & \\ \hline -(g_1+g_2)/2 & (g_1+g_2)/2 & & & \\ \hline & & g_1 & g_2 & \\ \hline & & g_2 & g_1 & \\ \hline & & & & g_3 \\ \hline \end{array} \qquad \text{(A.9-73)}$$

La règle d'écoulement permet d'écrire le vecteur incrémentale des déformations plastiques $\{d\varepsilon^p\}$ en fonction du multiplicateur plastique $d\lambda^p$ et des contraintes :

$$\{d\varepsilon^p\} = d\lambda^p \left\{\frac{\partial G}{\partial \sigma}\right\} \qquad \text{(A.9-74)}$$

où la dérivée du potentiel plastique G est donnée par :

$$\left\{\frac{\partial G}{\partial \sigma}\right\} = \frac{1}{\tau_c}[J_2]\{\sigma\} - \beta(\gamma^p)\{J_1\} \qquad \text{(A.9-75)}$$

Après substitution, on obtient :

$$(d\gamma^p)^2 = (d\lambda^p)^2 \left[{}^t\left\{\frac{\partial G}{\partial \sigma}\right\}[I_2]\left\{\frac{\partial G}{\partial \sigma}\right\}\right] \qquad \text{(A.9-76)}$$

ce qui donne :

$$(d\gamma^p)^2 = (d\lambda^p)^2 \left[\left(\frac{1}{\tau_c^2}\,{}^t\{\sigma\}\,{}^t[J_2][I_2][J_2]\{\sigma\}\right) - \left(\frac{\mu}{\tau_c}\,{}^t\{J_1\}[I_2][J_2]\{\sigma\}\right) - \left(\frac{\mu}{\tau_c}\,{}^t\{\sigma\}\,{}^t[J_2][I_2]\{J_1\}\right) + \left(\mu^2\,{}^t\{J_1\}[I_2]\{J_1\}\right)\right] \qquad \text{(A.9-77)}$$

Comme les termes $[J_2]\{J_1\}$ et $[I_2]\{J_1\}$ sont nuls, il en résulte que la déformation de cisaillement $d\gamma^p$ est directement proportionnelle au multiplicateur plastique $d\lambda^p$:

$$\frac{d\gamma^p}{d\lambda^p} = \frac{\sqrt{{}^t\{\sigma\}\,{}^t[J_2][I_2][J_2]\{\sigma\}}}{\tau_c} \qquad \text{(A.9-78)}$$

Le coefficient de proportionnalité est le rapport de deux cisaillements généralisé définis respectivement pour le numérateur et le dénominateur, à l'aide des matrices ${}^t[J_2]\,[I_2]\,[J_2]$ et $[J_2]$. Si l'on veut avoir $d\gamma^p$ qui soit égale à $d\lambda^p$, il est nécessaire de prendre :

$${}^t[J_2]\,[I_2]\,[J_2] = [J_2] \qquad \text{(A.9-79)}$$

Le produit des 3 matrices : ${}^t[J_2]$, $[I_2]$, $[J_2]$ est une matrice de la même forme que $[I_2]$ ou $[J_2]$ et il est égal à :

$${}^t[J_2]\,[I_2]\,[J_2] = \begin{bmatrix} X & -X & & & \\ -X & X & & & \\ & & Y & Z & \\ & & Z & Y & \\ & & & & W \end{bmatrix} \qquad \text{(A.9-80)}$$

où :

$$X = \frac{g_1 + g_2}{2}(h_1 + h_2)^2 \qquad \text{(A.9-81)}$$

$$Y = g_1\left(h_1^2 + h_2^2\right) + 2\,g_2\,(h_1\,h_2) \qquad \text{(A.9-82)}$$

$$Z = g_2\left(h_1^2 + h_2^2\right) + 2\,g_1\,(h_1\,h_2) \qquad \text{(A.9-83)}$$

$$W = g_3\,h_3^2 \qquad \text{(A.9-84)}$$

Comme l'on impose à cette matrice d'être égale à $[J_2]$, on obtient les relations suivantes:

$$\frac{h_1 + h_2}{2} = \frac{g_1 + g_2}{2}(h_1 + h_2)^2 \qquad \text{(A.9-85)}$$

$$h_1 = g_1\left(h_1^2 + h_2^2\right) + 2\,g_2\,(h_1\,h_2) \qquad \text{(A.9-86)}$$

$$h_2 = g_2\left(h_1^2 + h_2^2\right) + 2\,g_1\,(h_1\,h_2) \qquad \text{(A.9-87)}$$

qui donnent :

$$g_1 + g_2 = \frac{1}{h_1 + h_2} \qquad \text{(A.9-88)}$$

et :

$$g_1 - g_2 = \frac{1}{h_1 - h_2} \qquad \text{(A.9-89)}$$

Dans le cas général où l'on a 4 constantes h_i , avec i = 1 à 4, les coefficients h_3 et h_4 sont reliés aux coefficients g_3 et g_4 par des relations similaires à celles qui relient h_1 et h_2 avec g_1 et g_2 , c'est à dire :

$$g_3 + g_4 = \frac{1}{h_3 + h_4} \tag{A.9-90}$$

et :

$$g_3 - g_4 = \frac{1}{h_3 - h_4} \tag{A.9-91}$$

Dans le cas présent où h_4 est nul, ces deux dernières relations se réduisent à une seule :

$$g_3 = \frac{1}{h_3} \tag{A.9-92}$$

Il est à remarquer que ces relations qui permettent de calculer les η_i à partir des h_i ont été obtenues sans faire aucune hypothèse sur les valeurs des η_i et h_i , notamment, sans utiliser la relation : $h_1 + h_2 = 1/2$, et sans faire d'autres hypothèses que (1) de définir le potentiel plastique à partir de G et (2) d'identifier le multiplicateur plastique avec la déformation de cisaillement généralisé.

9.3.4 Différences fondamentales entre les coefficients h_i et g_i

L'approche micromécanique de Mühlhaus et Vardoulakis (1987) permet de définir une mesure du cisaillement entre les grains à partir des 4 invariants du second ordre, des contraintes et couples contraintes, ainsi que de 4 coefficients notés h_i. Ce calcul est basé uniquement sur des considérations de micromécanique et de statique. Aucune hypothèse sur la loi de comportement n'est en particulier formulée. Ces coefficients h_i ne peuvent donc pas être classés comme étant élastiques ou plastiques, même si l'invariant τ_g défini à partir des h_i est utilisé ensuite pour formuler le critère de Drucker-Praguer généralisé.

Une déformation de cisaillement plastique généralisée $d\gamma^p$ est également définie à l'aide de coefficients g_i , que l'on peut qualifiés de coefficients plastiques. L'identification de cette déformation plastique de cisaillement avec le multiplicateur plastique conduit à quatre relations entre les h_i et les g_i , ce sont les relations A.9-88 à 91.

En ce qui concerne l'élasticité, deux approches sont possibles.

La première, qui est aussi la plus ancienne (Mühlhaus et Vardoulakis, 1987), consiste à forcer le potentiel élastique W^e à s'écrire sous la forme suivante :

$$W^e = \frac{p^2}{2\,K} + \frac{\tau_g^2}{2\,G} \tag{A.9-93}$$

ce qui conduit à relier les modules d'élasticité K, G, G_c et M aux quatre coefficients h_i , précédemment introduits.

Or ces h_i ne sont en rien reliés aux paramètres élastiques du matériau granulaire. Une telle approche est possible parce que le cisaillement généralisé et le potentiel élastique sont tous deux quadratiques en contraintes et couples contraintes, ce qui conduit à avoir les relations A.7-41 à 44, reliant les h_i et g_i élastiques, identiques aux relations A.9-88 à 89, reliant les h_i et g_i plastiques.

La deuxième approche consiste à calculer les modules élastiques K, G, G_c et M en fonction des paramètres élastiques du matériau granulaire, à l'aide d'une deuxième approche micromécanique (Mühlhaus et al., 1992). On obtient ainsi des coefficients h_i purement élastiques. Ces h_i permettent tout naturellement d'écrire le potentiel élastique W_e sous la forme précédemment introduite dans l'équation A.9-94, avec un deuxième cisaillement généralisé τ_g défini en fonction de ces h_i élastiques. La déformation élastique de cisaillement généralisée γ_g , conjuguée en énergie avec ce cisaillement, s'écrit en fonction d'un deuxième jeu de coefficients g_i purement élastiques.

La première approche, qui est aussi la plus ancienne, a été choisie par Mühlhaus et Vardoulakis (1987) afin de minimiser le nombre de nouveaux paramètres introduits par rapport au cas classique. Cependant, si elle rigoureuse d'un point de vue mécanique, d'un point de vue physique et micromécanique, elle n'est pas acceptable. C'est cette première approche qui est utilisée systématiquement dans toutes les études sur la bifurcation et la localisation des déformations. Nous l'utiliserons donc dans les simulations afin de pouvoir comparer nos résultats sur les couches d'interfaces aux résultats obtenus par d'autres auteurs sur les bandes de cisaillement.

Cependant, d'un point de vue physique, la deuxième approche est préférable et devrait être employée systématiquement. Nous l'utiliserons également dans les simulations numériques.

9.3.5 Calcul de la matrice de comportement élasto-plastique

Par définition de la règle d'écoulement, l'incrément plastique des déformations et courbures est parallèle à la normale au potentiel plastique G, c'est à dire, il est proportionnel au gradient de G. En utilisant les variables généralisées, écrites sous forme vectorielle, la règle d'écoulement, dans le cas le plus général, s'écrit sous la forme suivante :

$$d\varepsilon_i^p = d\lambda^p \frac{\partial G}{\partial \sigma_i} \qquad \text{(A.9-94)}$$

$$\left\{ d\varepsilon^p \right\} = d\lambda^p \left\{ \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right\} \qquad \text{(A.9-95)}$$

où, le multiplicateur plastique $d\lambda^p$ est déterminé à partir de la règle de consistance, qui traduit le fait que l'état de contraintes et couples contraintes est et reste sur le surface de charge (critère de rupture) au cours d'un incrément de chargement plastique :

$$F(\{\sigma\}) = F(\{\sigma + d\sigma\}) = 0 \qquad \text{(A.9-96)}$$

Le développement en série de Taylor au premier ordre donne la règle d'écoulement sous la forme suivante :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma_i} d\sigma_i + \frac{\partial F}{\partial \gamma^p} d\gamma^p = 0 \qquad \text{(A.9-97)}$$

$$dF = {}^t\left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}\{d\sigma\} + \frac{\partial F}{\partial \gamma^p} d\gamma^p = 0 \qquad \text{(A.9-98)}$$

Après identification du multiplicateur plastique λ^p avec le paramètre d'écrouissage γ_g^p, qui est la déformation plastique de cisaillement généralisée, on obtient l'expression suivante pour l'incrément du multiplicateur plastique $d\lambda^p$:

$$d\lambda^p = \frac{-1}{p\, h_t} \frac{\partial F}{\partial \sigma_i} d\sigma_i = \frac{-1}{p\, h_t} {}^t\left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}\{d\sigma\} \qquad \text{(A.9-99)}$$

où le module d'écrouissage h_t est défini par :

$$h_t = \frac{\partial \mu(\gamma^p, n_0)}{\partial \gamma^p} = \frac{1}{p} \frac{\partial F}{\partial \gamma^p} \qquad \text{(A.9-100)}$$

Ce module est positif dans la phase de durcissement (écrouissage positif) et négatif dans la phase de radoucissement (écrouissage négatif).

L'incrément de contraintes $\{d\sigma\}$ est relié à l'incrément de déformations élastiques $\{d\varepsilon^e\}$ par la matrice de comportement élastique :

$$d\sigma_i = D_{ij}^e \, d\varepsilon_j^e \qquad \text{(A.9-101)}$$

$$\{d\sigma\} = [D^e]\{d\varepsilon^e\} \qquad \text{(A.9-102)}$$

et l'incrément de déformations élastiques est relié à l'incrément de déformations totales par :

$$d\varepsilon_i^e = d\varepsilon_i - d\varepsilon_i^p \qquad \text{(A.9-103)}$$

$$\{d\varepsilon^e\} = \{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon^p\} \qquad \text{(A.9-104)}$$

L'incrément de déformations plastiques est donné par la loi d'écoulement, ce qui permet de déduire la matrice de comportement élasto-plastique sous la forme suivante :

$$d\sigma_i = D_{ij}^e \left(d\varepsilon_j - d\lambda^p \frac{\partial G}{\partial \sigma_j} \right) \qquad \text{(A.9-105)}$$

$$\{d\sigma\} = [D^e]\left(\{d\varepsilon\} - d\lambda^p \left\{\frac{\partial G}{\partial \sigma}\right\} \right) \qquad \text{(A.9-106)}$$

En combinant avec la règle de consistance, on obtient dans un premier temps, l'expression du multiplicateur plastique $d\lambda^p$:

$$d\lambda^p = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial \sigma_i} D^e_{ij}\, d\varepsilon_j}{\dfrac{\partial F}{\partial \sigma_i} D^e_{ij} \dfrac{\partial G}{\partial \sigma_j} - p\, h_t} \tag{A.9-107}$$

$$d\lambda^p = \frac{{}^t\left\{\dfrac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}\left[D^e\right]\{d\varepsilon\}}{{}^t\left\{\dfrac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}\left[D^e\right]\left\{\dfrac{\partial G}{\partial \sigma}\right\} - p\, h_t} \tag{A.9-108}$$

puis l'expression de la matrice élasto-plastique :

$$D^{ep}_{ij} = D^e_{ij} - \frac{D^e_{ik} \dfrac{\partial G}{\partial \sigma_k} \dfrac{\partial F}{\partial \sigma_l} D^e_{lj}}{\dfrac{\partial F}{\partial \sigma_m} D^e_{mp} \dfrac{\partial G}{\partial \sigma_p} - p\, h_t} \tag{A.9-109}$$

ce qui s'écrit encore sous la forme matricielle suivante :

$$\left[D^{ep}\right] = \left[D^e\right] - \frac{\left[D^e\right] {}^t\left\{\dfrac{\partial G}{\partial \sigma}\right\}\left\{\dfrac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}\left[D^e\right]}{{}^t\left\{\dfrac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}\left[D^e\right]\left\{\dfrac{\partial G}{\partial \sigma}\right\} - p\, h_t} \tag{A.9-110}$$

Dans le cas d'une loi d'écoulement non associé, la matrice élasto-plastique n'est pas symétrique.

9.3.5 Comparaisons avec le milieu continu classique

Dans le cas d'un sol purement frottant, modélisé par un milieu continu classique, l'angle de frottement est défini par le rapport du cisaillement classique τ et de la pression p, tandis que dans le cas d'une modélisation par un milieu continu de Cosserat, il convient de prendre le rapport du cisaillement généralisé τ_g et de la pression p. Les deux cisaillement τ et τ_g diffèrent d'un terme, que nous appellerons cisaillement de Cosserat, et qui est défini par :

$$\tau_g = \sqrt{(\tau)^2 + (\tau_c)^2} \tag{A.9-111}$$

Ce cisaillement de Cosserat est égal à :

$$\tau_c = \sqrt{(h_1 - h_2)s_{ij}^a s_{ij}^a + (h_3 + h_4)\frac{m_{ij}^s}{R}\frac{m_{ij}^s}{R} + (h_3 - h_4)\frac{m_{ij}^a}{R}\frac{m_{ij}^a}{R}} \qquad \text{(A.9-112)}$$

De même, l'angle de dilatance d'un milieu continu classique est défini par le rapport entre la déformation volumique plastique $d\varepsilon_v^p$ et l'incrément de déformation plastique de cisaillement classique $d\gamma^p$:

$$\sin\beta = \frac{d\varepsilon_v^p}{d\gamma^p} \qquad \text{(A.9-113)}$$

tandis que dans le cas d'un milieu continu de Cosserat, il convient de considérer la déformation plastique de cisaillement généralisée $d\gamma_g^p$:

$$\sin\beta = \frac{d\varepsilon_v^p}{d\gamma_g^p} \qquad \text{(A.9-114)}$$

La différence entre les deux déformations : classique $d\gamma^p$ et généralisée $d\gamma_g^p$, peut être importante si les rotations relatives plastiques $\varepsilon_{ij}^{a,p}$ et/ou si les courbures plastiques k_{ij}^p sont importantes. Cette différence peut induire une différence entre les angles de dilatance suivant le cadre dans lequel ils sont interprétés. En particulier, dans le cas d'un essai où les effets de Cosserat sont importants, si l'on divise la déformation volumique $d\varepsilon_v^p$, que l'on mesure, par la déformation de cisaillement classique $d\gamma^p$, que l'on calcule à partir des mesures en se basant sur des hypothèses de milieu continu classique, on obtient un angle de dilatance $\sin\beta$ plus important que l'angle de dilatance réel, qui s'obtient en divisant $d\varepsilon_v^p$ par la déformation généralisée $d\gamma_g^p$. Ce phénomène peut expliquer pourquoi en interface, où les effets de Cosserat sont importants, les angles de dilatance observés sont plus importants que ceux observés dans d'autres essais, dits classiques. Il est donc intéressant, au cours d'un essai de cisaillement, de suivre respectivement les déformations plastiques de cisaillement, classique et généralisée. Pour affiner encore un peu plus la compréhension des phénomènes, nous suivrons les déformations de cisaillement plastiques : symétrique $d\gamma_{sym}^p$, c'est à dire classique, antisymétrique $d\gamma_{asym}^p$ et de courbures $d\gamma_{cour}^p$, définies respectivement par :

$$d\gamma_{sym}^p = d\gamma^p = \sqrt{(h_1 + h_2)de_{ij}^{s,p}de_{ij}^{s,p}} \qquad \text{(A.9-115)}$$

$$d\gamma_{asym}^p = \sqrt{(h_1 - h_2)de_{ij}^{a,p}de_{ij}^{a,p}} \qquad \text{(A.9-116)}$$

$$d\gamma_{cour}^p = \sqrt{(h_3 + h_4)dk_{ij}^{s,p}dk_{ij}^{s,p} + (h_3 - h_4)dk_{ij}^{a,p}dk_{ij}^{a,p}} \qquad \text{(A.9-117)}$$

9.4. Formulation de modèles de radoucissement

Il est classique d'observer dans les sols, qu'ils soient cohérents ou frottants, une phase de radoucissement après que le pic de chargement ait été atteint (Drescher et al., 1990; Han et Drescher, 1993) (figure A.9-4). Pratiquement, seuls les essais triaxiaux anti-frettés sur des sables très lâches ne manifestent pas de radoucissement. Une partie du radoucissement peut être attribué à la localisation des déformations en une ou plusieurs bandes de cisaillement, c'est ce qui est parfois qualifié de radoucissement géométrique.

Cependant, il est généralement accepté que les sols manifestent, sous certaines conditions, un radoucissement intrinsèque qu'il convient de modéliser (figure A.9-5). Cependant, à l'heure actuelle, la plupart des modèles de radoucissement sont basée plus sur du calage de courbes que sur une approche physique et mécanique du problème.

En interface, un radoucissement est presque toujours observé après le pic mais il faut aussi noter parfois l'existence d'une phase de durcissement après le radoucissement. La phase radoucissante peut être attribuée à la cassure des grains dans la couche d'interface, sous l'effet des fortes contraintes (Boulon, 1988). L'existence d'une phase durcissante après la phase radoucissante est, par contre, plus difficile à expliquer et semble être plutôt liée à l'évolution de la couche d'interface. Il est fort peu probable que celle-ci soit de nature intrinsèque au matériau comme cela a été montré par Vardoulakis et al. (1992) dans le cadre de la théorie du second gradient.

9.4.1. Etude bibliographique

La modélisation du radoucissement dans les géomatériaux a fait l'objet de nombreuses études. Cependant, en ce qui concerne les milieux de Cosserat, très peu a été fait. Nous citerons en particulier trois études.

9.4.1.1 Modèles de de Borst (1990) et Teichman (1993)

Pour les matériaux dont la résistance mécanique est due, plus à la cohésion qu'au frottement interne, de Borst (1990) a proposé de prendre une cohésion $\bar{\sigma}$ décroissant linéairement avec la déformation plastique cumulée.

Teichman (1994) a proposé de compléter la phase de radoucissement par une phase de plasticité parfaite suivie d'une phase de durcissement avec un nouveau palier de plasticité parfaite (figure A.9-6).

Si, conceptuellement cette hypothèse de re-durcissement peut être intéressante, elle n'a, à l'heure actuelle, que peu de fondements physiques. De plus, l'utilisation de telles lois à des matériaux granulaires est critiquable (Teichman, 1994).

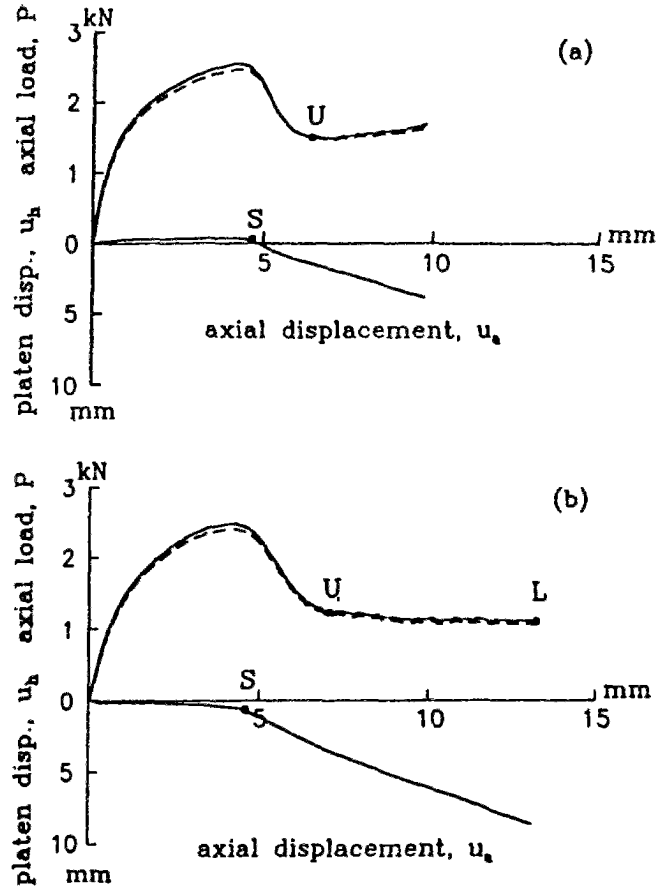


Figure A.9-4 : Essais biaxiaux sur du sable :
(a) essai qualifié de non homogène (la bande de cisaillement intersecte l'une des embases),
(b) essai qualifié d'homogène (la bande de cisaillement n'intersecte pas d'embase)
(Drescher et al., 1990)

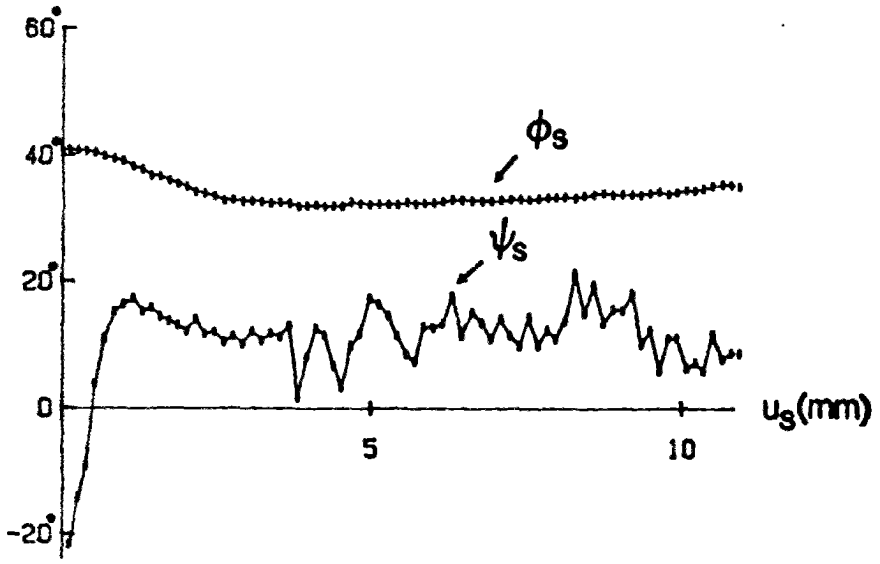


Figure A.9-5 : Essai biaxial réalisé par Vardoulakis et al. (1988) sur du sable d'Ottawa; variations de l'angle de frottement et de l'angle de dilatance avant et après la rupture

9.4.1.2 Modèle de Vardoulakis et al. (1992)

Vardoulakis et al. (1992) ont proposé d'utiliser pour des roches de type fragile, soumises à de fortes contraintes, un critère de Mohr-Coulomb avec un coefficient de frottement μ constant et une cohésion apparente c variable (figure A.9-8).

La cohésion apparente c est décomposée en une cohésion intrinsèque T au matériau et un terme α_T correspondant aux contraintes internes :

$$c = T + \alpha_T \tag{A.9-118}$$

Pour le milieu étudié dans le cadre de la théorie du second gradient, l'évolution du terme α_T est donnée par :

$$\dot{\alpha}_T = -G\, l_c^2\, \nabla^2 \dot{\gamma}^p \tag{A.9-119}$$

où l_c est une longueur interne et $\nabla^2\dot{\gamma}^p$ est le second gradient de $\dot{\gamma}^p$.

L'interprétation physique de cette définition est qu'il existe une "décohésion" (cohésion négative) dans les zones de forts gradients des déformations plastiques, c'est à dire dans les bandes de cisaillement et les couches d'interface.

L'évolution de la cohésion réelle T est donnée par une loi simple du type, écrouissage positif constant puis radoucissement constant avant d'atteindre une phase de plasticité parfaite (figure A.9-9).

9.4.2 Formulation de lois d'écrouissage avec radoucissement à partir de la théorie des mélanges

La loi d'écrouissage d'un sable est typiquement composée de trois phases : une première phase d'écrouissage positif (durcissement), avec un angle de dilatance quasiment constant, une deuxième phase d'écrouissage négatif (radoucissement), où l'angle de dilatance tend à décroître, et une phase de plasticité parfaite quand le sable a atteint l'état critique, avec un angle de dilatance quasiment nul.

De nombreux modèles ont été proposés pour modéliser les courbes d'évolution de l'angle de frottement en fonction de la déformation plastique cumulée (Papanastasiou et Vardoulakis; 1992). Cependant, presque tous se contentent d'ajuster une loi d'évolution avec les résultats expérimentaux sans proposer de justifications physiques.

Le modèle développé par Vardoulakis (1989) a l'avantage d'être fondé sur une approche physique et de fournir une base, dans le cadre de la théorie des mélanges, pour le développement d'autres modèles, ce que nous ferons dans le prochain paragraphe après un rappel du modèle initialement proposé.

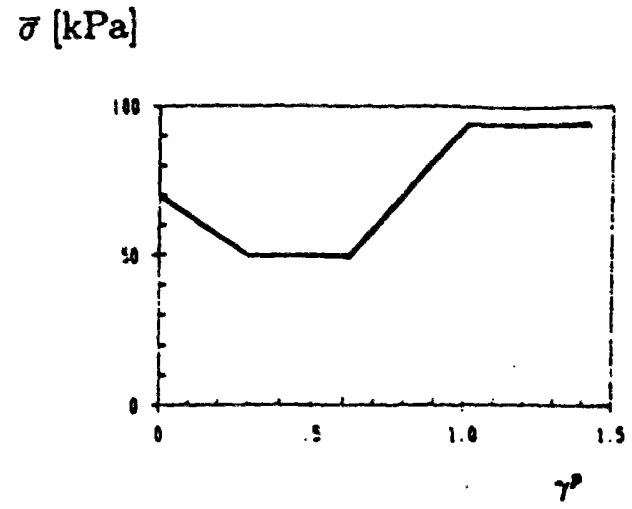


Figure A.9-6 : Courbe d'écrouissage proposée par Teichman (1994) pour la "cohésion" d'un matériau granulaire

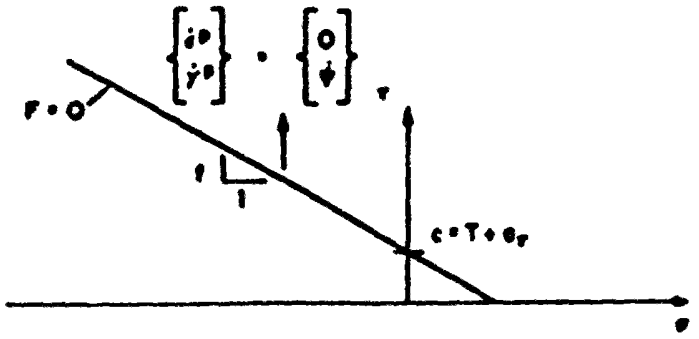


Figure A.9-7 : Critère de Mohr-Coulomb

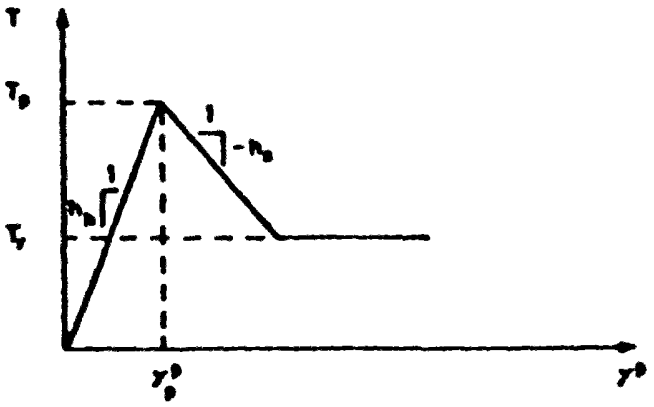


Figure A.9-8 : Evolution de la cohésion réelle T du matériau (Vardoulakis et al., 1992)

9.4.2.1 Formulation théorique du modèle de Vardoulakis (1989) (modèle 1.1)

Selon Dietrich (1976), il est possible de distinguer dans un matériau granulaire, deux populations ou fractions de grains : (1) la fraction faible, notée avec un indice f, et dans laquelle les grains possèdent un nombre de contacts restreints et (2) la fraction forte ou compétente, notée avec un indice c, dans laquelle les grains possèdent un nombre de contacts plus important. Ces deux fractions peuvent être aisément visualisées et identifiées quand les forces intergranulaires sont représentées avec des traits d'épaisseurs variables suivant l'intensité de la force de contact (Cundall, 1988) (figure A.9-9). Il est à noter que la distribution spatiale de ces forces ainsi que leurs intensités varient de manière très importante au cours d'un chargement même des plus simples (figure A.9-10) (Bathurst et Rothenburg, 1990).

Vardoulakis (1989) a proposé de modéliser un matériau granulaire comme un mélange de deux fractions, une fraction fragile et une fraction compétente, de sorte que durant le chargement monotone d'un sable dense, avec un indice des vides supérieur à l'indice critique, le nombre de contacts décroît, ce qui signifie dans le cas présent, que la fraction compétente est transformée en fraction faible de manière irréversible. Ce concept d'un milieu continu formé du mélange de deux fractions, dans des états différents et superposés, peut être trouvé également dans Aïfantis (1984) et Frantziskonis et Desai (1987).

Comme il est souvent admis pour les mélanges avec des fractions non diffuses, les deux fractions sont supposées avoir des contraintes différentes $\sigma_{ij}^{c} \neq \sigma_{ij}^{f}$.

Plus précisément, les parties sphériques, c'est à dire les pressions sont supposées être les mêmes dans les deux fractions :

$$p^{c} = p^{f} = p \tag{A.9-120}$$

tandis que les parties déviatoriques sont supposées être différentes :

$$\sigma_{ij}^{c} \neq \sigma_{ij}^{f} \neq \sigma_{ij} \tag{A.9-121}$$

Les déformations du mélange sont obtenues à partir de l'écriture du principe des puissances virtuelles. On trouve ainsi des déformations sphériques différentes :

$$\varepsilon_{v}^{c} \neq \varepsilon_{v}^{f} \neq \varepsilon_{v} \tag{A.9-122}$$

tandis que les déformations déviatoriques sont égales dans les deux fractions :

$$e_{ij}^{c} = e_{ij}^{f} = e_{ij} \tag{A.9-123}$$

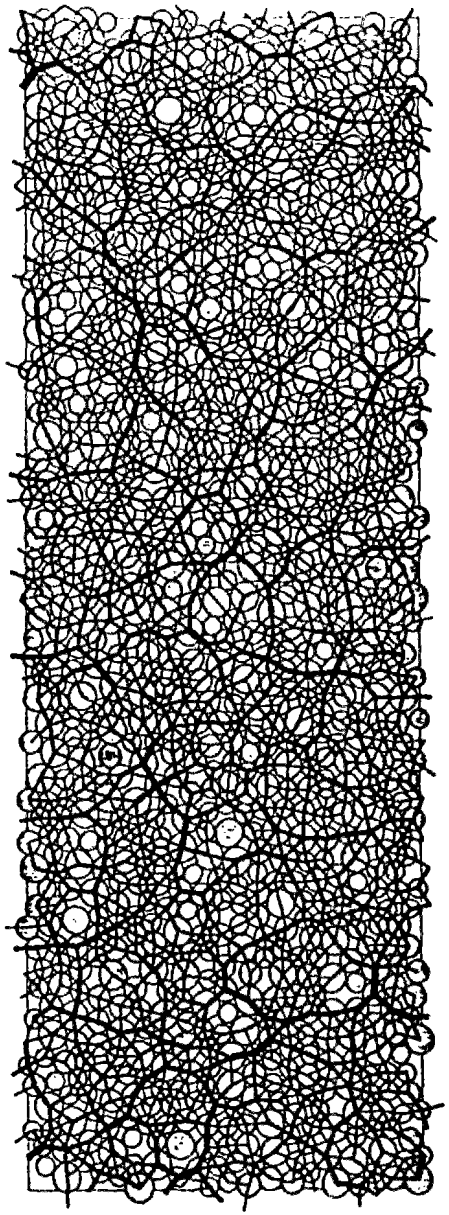


Figure A.9-9 : Répartition des grains entre les deux fractions, compétente et fragile, dans un essai biaxial modélisé par la méthode des éléments distincts (Cundall, 1988)

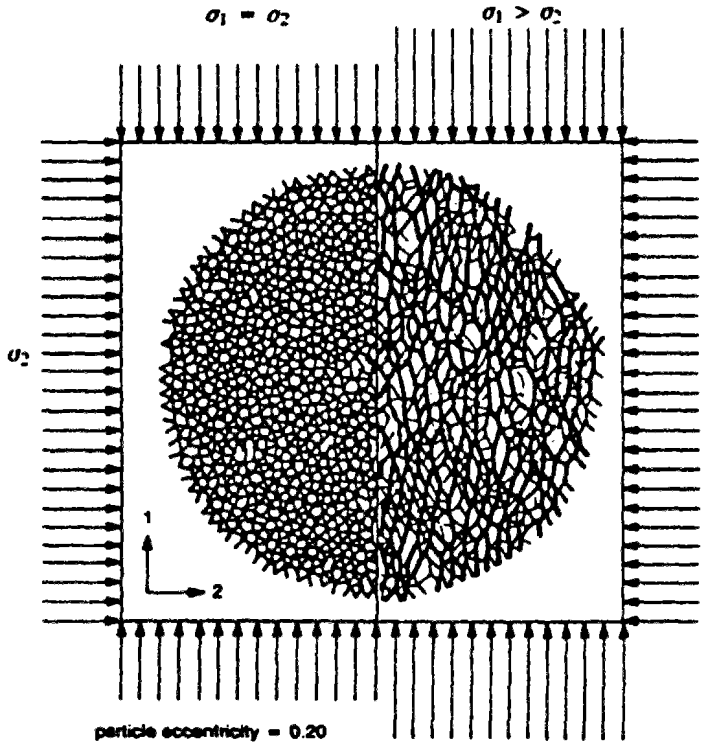


Figure A.9-10 : Evolution de la distribution des forces de contact intergranulaires entre un état initial de consolidation isotrope et le pic du cisaillement dans un essai biaxial (Bathurst et Rothenburg, 1990)

9.4.2.1.1 Définition et évolution des porosités

On définit pour chacune des fractions les porosités n^f et n^c , encore appelés "fractions" volumiques :

$$n^f = \frac{dV^f}{dV} \tag{A.9-124}$$

$$n^c = \frac{dV^c}{dV} = 1 - n^f \tag{A.9-125}$$

où dV^f est le volume de grains faibles, dV^c est le volume de grains compétents, dV est le volume total.

En outre, il est supposé que l'évolution de la porosité de la fraction fragile n^f, est inversement proportionnelle à la variation du nombre de contacts, qui est elle-même directement reliée à la variation de la porosité du mélange n. En particulier, Vardoulakis (1989) a proposé de prendre n^f égale à l'indice de densité :

$$n^f = \frac{n - n_{min}}{n_{max} - n_{min}} \tag{A.9-126}$$

où n est la porosité du matériau formé du mélange des deux fractions, n_{min} est la porosité minimale et n_{max} est la porosité maximale. La porosité n^f vérifie la relation :

$$0 \leq n^f \leq 1 \tag{A.9-127}$$

A partir de considérations portant sur la conservation de la masse, on obtient la relation classique suivante entre la variation de la porosité n et la déformation volumique totale ε_v :

$$\dot{n} = -(1-n)\,\dot{\varepsilon}_v \tag{A.9-128}$$

Dans un milieu granulaire soumis à des contraintes de cisaillement, les déformations volumiques élastiques ε_v^e sont faibles :

$$\left|\dot{\varepsilon}_v^{el}\right| \langle\langle \left|\dot{\varepsilon}_v^{p}\right| \tag{A.9-129}$$

et l'évolution de la porosité est principalement irréversible. Après intégration, il en résulte la relation suivante :

$$n \cong 1 - (1 - n_0)\exp\left(-\varepsilon_v^p\right) \tag{A.9-130}$$

où n_0 est la porosité initiale et ε_v^p la déformation volumique plastique totale, qui est intégrée sur tout le chargement :

$$\varepsilon_v^p = \int d\varepsilon_v^p \tag{**A.9-131**}$$

9.4.2.1.2 Identification des contraintes

La contrainte totale σ_{ij} est décomposée en une partie sphérique $p = \sigma_{ii} / 2$, dans le cas 2D ou $p = \sigma_{ii}/3$ dans le cas 3D, et une partie déviatorique $s_{ij} = \sigma_{ij} - p\,\delta_{ij}$. On supposera que les parties sphériques des contraintes dans les deux fractions sont égales :

cas 2D

$$p = \frac{\sigma_{ii}^c}{2} = \frac{\sigma_{ii}^f}{2} = \frac{\sigma_{ii}}{2} \tag{A.9-132}$$

cas 3D

$$p = \frac{\sigma_{ii}^c}{3} = \frac{\sigma_{ii}^f}{3} = \frac{\sigma_{ii}}{3} \tag{A.9-133}$$

Par contre, les parties déviatoriques seront supposées différentes (Frantziskonis et Desai, 1987). En supposant que les fractions n^f et n^c sont distribuées statistiquement de manière anisotrope, on obtient, en considérant une surface dA découpée en deux surfaces dA^f et dA^c :

$$dA^f = n^f\, dA \tag{A.9-134}$$

$$dA^c = n^c\, dA \tag{A.9-135}$$

$$\sigma_{ij} n_j = \frac{dt_i}{dA} = \frac{dt_i^c + dt_i^f}{dA} = \frac{dt_i^c}{dA^c} n^c + \frac{dt_i^f}{dA^f} n^f = \left(\sigma_{ij}^c n_j\right) n^c + \left(\sigma_{ij}^f n_j\right) n^f = \left(\sigma_{ij}^c n^c + \sigma_{ij}^f n^f\right) n_j \tag{A.9-136}$$

La contrainte totale obtenue est alors égale à :

$$\sigma_{ij} = \left(1 - n^f\right)\, \sigma_{ij}^c + n^f\, \sigma_{ij}^f \tag{A.9-137}$$

9.4.2.1.3 Identification des déformations

La détermination des déformations totales se fait à partir de l'écriture du travail total des efforts intérieurs et des travaux des efforts intérieurs dans chacune des deux fractions :

$$dW_{int} = n^c\, dW_{int}^c + n^f\, dW_{int}^f \tag{A.9-138}$$

$$dW_{int} = p\, \varepsilon_v + s_{ij}\, e_{ij} \tag{A.9-139}$$

$$dW_{int}^c = p\, \varepsilon_v^c + s_{ij}^c\, e_{ij}^c \tag{A.9-140}$$

$$dW_{int}^f = p\, \varepsilon_v^f + s_{ij}^f\, e_{ij}^f \tag{A.9-141}$$

Les deux fractions subissent la même pression p. Les contraintes déviatoriques s_{ij} , s_{ij}^c et s_{ij}^f sont reliées par une relation similaire à la relation A.9-138. On en déduit les relations suivantes entre les déformations :

$$\varepsilon_v = n^c \, \varepsilon_v^c + n^f \, \varepsilon_v^f \tag{A.9-142}$$

$$e_{ij} = e_{ij}^c = e_{ij}^f \tag{A.9-143}$$

Seules les déformations déviatoriques sont égales dans les deux fractions.

9.4.2.1.4 Critères de rupture

On suppose que, quand le critère macroscopique, qui est défini en fonction de la contrainte totale σ_{ij} , est atteint :

$$F(\sigma_{ij}) = \tau + \mu \, p = 0 \tag{A.9-144}$$

avec :

$$\tau = \sqrt{\frac{1}{2} \, s_{ij} \, s_{ij}} \tag{A.9-145}$$

les deux fractions sont à la rupture. Elles vérifient donc simultanément leurs propres critères de rupture, F^c et F^f :

$$F^c(\sigma_{ij}^c) = \tau^c + \mu^c \, p = 0 \tag{A.9-146}$$

avec :

$$\tau^c = \sqrt{\frac{1}{2} \sigma_{ij}^c \, \sigma_{ij}^c} \tag{A.9-147}$$

et

$$F^f(\sigma_{ij}^f) = \tau^f + \mu^f \, p = 0 \tag{A.9-148}$$

avec :

$$\tau^f = \sqrt{\frac{1}{2} \sigma_{ij}^f \, \sigma_{ij}^f} \tag{A.9-149}$$

Ces deux critère sont définis à partir de deux angles de frottement : ϕ^f et ϕ^c , ou deux coefficients de frottement : μ^c et μ^f .

Comme les deux fractions subissent la même pression p, les invariants τ, τ^c et τ^f des contraintes déviatoriques s_{ij} , s^c_{ij} , et s^f_{ij} sont proportionnels quand les trois critères rupture sont atteints simultanément. Nous ferons en plus l'hypothèse que les trois tenseurs, et non pas seulement leurs invariants, sont proportionnels quand les trois critères sont atteints simultanément, ce qui donne les relations de proportionnalité suivantes entre s^c_{ij} , s^f_{ij} et s_{ij} :

$$s^c_{ij} = \frac{\tau^c}{\tau} s_{ij} \tag{A.9-150}$$

$$s^f_{ij} = \frac{\tau^f}{\tau} s_{ij} \tag{A.9-151}$$

Après substitution de s^c_{ij} et s^f_{ij} dans s_{ij} , on obtient :

$$\tau = \sqrt{\frac{1}{2}\, s_{ij}\, s_{ij} \left(n^f \frac{\tau^f}{\tau} + \left(1 - n^f\right) \frac{\tau^f}{\tau} \right)^2} \tag{A.9-152}$$

d'où la relation entre les trois invariants τ , τ^c , τ^f :

$$\tau = n^f\, \tau^f + \left(1 - n^f\right) \tau^c \tag{A.9-153}$$

Comme les trois critères F, F^c et F^f sont vérifiés simultanément, on en déduit la relation suivante entre les trois coefficients de frottement :

$$\mu = n^f\, \mu^f + \left(1 - n^f\right) \mu^c \tag{A.9-154}$$

La loi d'écrouissage du mélange est obtenue par interpolation linéaire entre les lois d'écrouissage de chacune des fractions, à l'aide des porosités respectives de chacune d'elles.

9.4.2.1.5 Evolution des angles de frottement interne

Vardoulakis (1989) propose de prendre l'angle ϕ^f mobilisé dans la fraction fragile comme étant constant et égal à l'angle de frottement critique ϕ_{cv} , c'est à dire celui correspondant à la densité critique.

Par contre, l'angle de frottement ϕ^c , mobilisé dans la fraction compétente, est pris variable en fonction de la déformation plastique de cisaillement cumulée γ^p et est considéré comme étant toujours en écrouissage positif :

$$\phi^c = \phi^c\left(\gamma^p, n_0\right) \tag{A.9-155}$$

avec :

$$\frac{d\phi^c}{d\gamma^p} > 0 \tag{A.9-156}$$

Dans le domaine des faibles déformations, le comportement global est dominé par la réponse de la fraction compétente. En première approximation, on obtient $n \approx n_o$, d'où $n^f \approx 0$ et $\mu \approx \mu^c$. La fraction compétente étant toujours en écrouissage positif avec un angle de frottement maximal mobilisable noté ϕ^c_{max} , le mélange, c'est à dire, le matériau est en écrouissage positif du moins en début de chargement.

Quand la déformation se localise dans une bande de cisaillement ou une couche d'interface, elle induit une forte dilatance locale, qui se manifeste par une forte augmentation de volume et donc de la porosité de la fraction faible n^f . A l'intérieur de la zone localisée, n^f tend vers 1 et μ tend vers $\mu^f << \mu^c$, ce qui conduit à un fort radoucissement à l'intérieur des bandes de cisaillement et des couches d'interface.

L'angle de frottement mobilisé dans la fraction compétente peut être approximé par une loi du type hyperbolique :

$$\mu = \frac{\gamma^p}{C_1 + C_2\,\gamma^p} \tag{A.9-157}$$

L'angle de frottement maximum mobilisable dans la fraction compétente est alors calculé à partir de l'asymptote :

$$\phi^c_{max} = \arcsin\left(\frac{1}{C_2}\right) \tag{A.9-158}$$

9.4.2.1.6 Angle de dilatance globale

Vardoulakis (1989) a proposé de définir globalement l'évolution de l'angle de dilatance β du mélange sans faire référence à la théorie des mélanges, ce qui donne le modèle présenté ci-dessous.

Dans le régime initial d'écrouissage positif, l'angle de dilatance mobilisé change mais relativement peu. La courbe de la déformation volumique est modélisée par une fonction du type :

$$\varepsilon^p_v = C_3\,\gamma^p \tag{A.9-159}$$

L'angle de dilatance β est donc à peu près constant en début de chargement et égal à :

$$\beta = \text{asin}(C_3) \tag{A.9-160}$$

Cet angle de dilatance qui est maximal, correspond à l'angle de dilatance de la fraction compétente β^c

$$\beta^c = \text{asin}(C_3) \tag{A.9-161}$$

En fin de chargement, la dilatance décroît de sorte que l'état critique est atteint asymptotiquement et la déformation volumique tend vers une valeur constante, ce qui peut être modélisé par la fonction exponentielle suivante :

$$\varepsilon_v^p = C_4 \left(1 - \exp\left(-\frac{C_3}{C_4} \gamma^p \right) \right) \qquad \text{(A.9-162)}$$

L'angle de dilatance β est alors donné par la relation suivante :

$$\sin\beta = C_3 \exp\left(-\frac{C_3}{C_4} \gamma^p \right) \qquad \text{(A.9-163)}$$

Ce type de fonction permet d'obtenir à la limite, quand γ^p tend vers zéro, un angle de dilatance maximal pour la fraction compétente β^c, et quand γ^p tend vers l'infini, un angle de dilatance β^f nul pour la fraction fragile.

L'évolution de l'angle de dilatance β est limitée par la condition que quand la déformation plastique de cisaillement γ^p tend vers l'infini, la valeur asymptotique de la porosité n doit être la porosité maximale n_{max} .

Par exemple, si l'on suppose un angle de dilatance β constant, la porosité n évolue en fonction de la déformation plastique γ_p suivant la relation :

$$n = 1 - (1 - n_0) \exp(-\sin\beta \, \gamma^p) \qquad \text{(A.9-164)}$$

Quand γ_p tend vers l'infini, la porosité tend vers 1, ce qui n'est pas acceptable puisque la porosité maximale est inférieure strictement à 1. L'angle de dilatance doit donc être variable et décroître avec le cisaillement.

La loi de variation de l'angle β proposée par Vardoulakis et al. (1989), donne après intégration l'évolution suivante pour la porosité n :

$$n = 1 - (1 - n_0) \exp\left\{ -C_4 \left(1 - \exp\left(-\frac{C_3}{C_4} \gamma^p \right) \right) \right\} \qquad \text{(A.9-165)}$$

Pour γ^p nul, on retrouve bien la porosité initiale n_0 , et pour γ^p infini, on trouve n_{max} à condition de choisir la constante C_4 de la manière suivante :

$$C_4 = \ln\left(\frac{1 - n_{max}}{1 - n_0} \right) \qquad \text{(A.9-166)}$$

Ce modèle sera numéroté 1.1 dans la suite du paragraphe.

9.4.2.2 Formulation de l'angle de dilatance à partir de la théorie des mélanges (modèle 1.2)

Le modèle, présenté ci-dessus pour l'angle de dilatance, a l'avantage de bien reproduire les courbes d'écrouissage mais est développé indépendamment de la théorie des mélanges. En effet, l'angle de dilatance du mélange est défini globalement.

Pour assurer à la théorie une cohérence complète, nous proposons dans ce paragraphe de définir l'angle de dilatance du matériau, considéré comme un mélange, à partir des angles de dilatance respectifs de chacune des fractions, de manière tout à fait similaire à ce qui a été fait pour les angles de frottement, et en respectant toutes les conditions physiques aussi bien que mécaniques.

Dans les deux fractions, nous avons vu que les pressions étaient supposées être les mêmes :

$$p = p^f = p^c \tag{A.9-167}$$

Il en résulte que la déformation plastique du mélange est reliée aux déformations plastiques des deux fractions par la relation suivante que nous écrirons en terme d'incréments :

$$d\varepsilon_v^p = \left(1 - n^f\right) d\varepsilon_v^{c,p} + n^f d\varepsilon_v^{f,p} \tag{A.9-168}$$

On suppose que la fraction fragile, qui est identifiée comme étant la fraction critique qui se déforme à volume constant, a un angle de dilatance nul :

$$d\varepsilon_v^{f,p} = \sin\beta^f \, d\gamma^p \tag{A.9-169}$$

avec β^f pris égale à 0.

On prend pour la fraction compétente un angle de dilatance β^c constant non nul :

$$d\varepsilon_v^{c,p} = \sin\beta^c \, d\gamma^p \tag{A.9-170}$$

Comme les deux fractions partagent les mêmes déformations déviatoriques e_{ij} , les déformations de cisaillement sont les mêmes dans les deux fractions :

$$\gamma^p = \gamma^{c,p} = \gamma^{f,p} \tag{A.9-171}$$

On en déduit aisément l'angle de dilatance β du mélange à partir des angles de dilatance des deux fractions :

$$d\varepsilon_v^p = \left[\left(1 - n^f\right) \sin\beta^c + n^f \sin\beta^f\right] d\gamma^p \tag{A.9-172}$$

d'où :

$$\sin\beta = \left(1 - n^f\right) \sin\beta^c + n^f \sin\beta^f \tag{A.9-173}$$

Dans le domaine des faibles déformations, le comportement global est dominé par la réponse de la fraction compétente. En première approximation, on obtient $n \approx n_o$, d'où $n^f \approx 0$ et $\beta \approx \beta^c$. L'angle de la fraction compétente sera donc pris égale à l'angle de dilatance initiale maximal β^c_{max}.

Quand la fraction fragile devient prépondérante, ce qui se produit par exemple dans les bandes de cisaillement et les couches d'interface, n^f tend vers 1 et β tend vers β^f. Les observations expérimentales donne un angle de dilatance nul dans les zones de densité critique, ce qui justifie le choix précédemment fait d'un angle β^f nul.

L'évolution de la porosité dans le cas d'un angle β^f nul et d'un angle β^c contant, est donnée par la relation suivante :

$$\frac{1-n}{n_{max}-n} = \frac{1-n_0}{n_{max}-n_0}\exp\left(\frac{1-n_{max}}{n_{max}-n_{min}}\sin\beta^c\gamma^p\right) \tag{A.9-174}$$

ce qui s'écrit aussi sous la forme :

$$n = n_{max} - \left(\frac{1-n_{max}}{1-n_0}\right)\frac{(n_{max}-n_0)\exp\left(-\left(\frac{1-n_{max}}{n_{max}-n_{min}}\right)\sin\beta^c\gamma^p\right)}{1-\left(\frac{n_{max}-n_0}{1-n_0}\right)\exp\left(-\left(\frac{1-n_{max}}{n_{max}-n_{min}}\right)\sin\beta^c\gamma^p\right)} \tag{A.9-175}$$

Ce nouveau modèle sera appelé modèle linéaire 1.2.

9.4.2.3 Formulation de l'angle de dilatance à partir de la théorie des mélanges et de la règle de Taylor (modèle 1.3)

Par rapport au modèle 1.1 initialement développé par Vardoulakis (1989) où l'angle de dilatance du mélange est formulé globalement, et par rapport au modèle 1.2 que nous proposons et où l'angle de dilatance du mélange est obtenu à partir de la théorie des mélanges de la même manière que l'angle de frottement, il est encore possible d'améliorer le modèle en utilisant la règle de Taylor (1948).

9.4.2.3.1 Règle de Taylor

Dans un milieu continu, classique ou de Cosserat, avec une loi de comportement de type élastoplastique isotrope, avec ou sans écrouissage, l'énergie dissipée est de type plastique et donnée par la formule suivante en écriture tensorielle :

$$\delta W^p = \sigma_{ij}\,\delta\varepsilon^p_{ij} + \mu_{ij}\,\delta\kappa^p_{ij} \tag{A.9-176}$$

et en écriture vectorielle généralisée :

$$\delta W^p = \sigma_i \delta\varepsilon^p_i \tag{A.9-177}$$

Considérons un critère de rupture F, de type Drucker-Praguer généralisé, avec une cohésion nulle et un angle de frottement ϕ :

$$F = \tau_g + \sin\phi \; p \tag{A.9-178}$$

Considérons un potentiel plastique G de la même forme que le critère de rupture F avec un angle de dilatance β, a priori quelconque :

$$G = \tau_g + \sin\beta \; p \tag{A.9-179}$$

A partir de la règle d'écoulement et de la définition de l'énergie plastique dissipée, ainsi que du critère de plasticité qui est vérifié, nous obtenons l'expressions suivante :

$$\delta W^p = \delta\lambda^p (\sin\beta - \sin\phi) \; p \tag{A.9-180}$$

où $\delta\lambda^p$ est le multiplicateur plastique, toujours positif, et p est la pression négative en compression. Du deuxième principe de thermodynamique, il résulte que l'énergie dissipée doit être positive, ce qui astreint l'angle de dilatance β à être inférieur ou égal à l'angle de frottement ϕ. Ce résultat est classique.

Il est cependant intéressant de noter que pour un matériau purement frottement comme un sable propre (c = 0), l'énergie plastique dissipée est nulle si le matériau est associé, ce qui va à l'encontre de toute intuition physique et incite à utiliser une loi d'écoulement non associée pour les sols frottants.

Taylor (1948) a proposé une théorie appelée "stress-ratio dilatancy theory", reprise plus tard par Vardoulakis et Sulem (1995), et qui repose sur l'idée que les normales au critère de rupture F et au potentiel plastique G, différent d'un angle qui reste constant durant la plastification :

$$\sin\phi - \sin\beta = \text{constante} \tag{A.9-181}$$

Il s'ensuit que cette constante peut être identifiée comme étant le sinus de l'angle de frottement ϕ_{cv} au point critique quand le sol passe d'un état dilatant à un état contractant. Cet angle est par ailleurs égal au rapport des contraintes au point critique :

$$\sin\phi - \sin\beta = \sin\phi_{cv} = \left(\frac{\tau}{p}\right)_{\sin\beta = 0} \tag{A.9-182}$$

9.4.2.3.2 Modèle linéaire 1.3

Si l'on applique la règle de Taylor à un matériau indépendamment de toute référence à la théorie des mélanges, le coefficient de dilatance peut être pris égal à la différence entre le coefficient de frottement mobilisé à tout instant du chargement $\sin\phi$ et le coefficient de frottement résiduel $\sin\phi_{cv}$ quand l'état critique est atteint (Vardoulakis et Sulem, 1995) :

$$\sin\beta = \sin\phi - \sin\phi_{cv} \tag{A.9-183}$$

Nous proposons de réécrire cette formule dans le cadre de la théorie des mélanges sous la forme suivante :

$$\sin\beta = \left(1 - n^f\right)\left(\mu^c - \mu^f\right) \tag{A.9-184}$$

en prenant pour la fraction fragile un angle de dilatance β^f nul, ce qui correspond aux observations expérimentale d'un angle de dilatance nulle quand l'état critique est atteint :

$$\sin\beta^f = \sin\beta_{cv} = 0 \tag{A.9-185}$$

et pour la fraction compétente un angle de dilatance β^c égal à :

$$\sin\beta^c = \mu^c - \mu^f \tag{A.9-186}$$

ce qui revient, en quelque sorte, à appliquer la règle de Taylor à la fraction compétente et à en déduire l'angle de dilatance du mélange à partir de la théorie des mélanges.

Cet approche est donc consistante et le modèle obtenu, qui sera appelé modèle linéaire 1.3, est tout à fait similaire au modèle 1.2 précédemment obtenu, où l'angle de dilatance de la fraction compétente était pris constant et égal à :

$$\sin\beta^c = \mu^c_{max} - \mu^f \tag{A.9-187}$$

L'évolution de la porosité dans ce cas là est donnée par la relation suivante :

$$\frac{1-n}{n_{max}-n} = \frac{1-n_0}{n_{max}-n_0}\exp\left(\frac{1-n_{max}}{n_{max}-n_{min}}\left(\left(\mu_c^{max}-\mu_{cv}\right)\gamma^p - \frac{C_1}{C_2^2}\ln\left(1+\frac{C_1}{C_2}\gamma^p\right)-\right)\right) \tag{A.9-188}$$

ce qui s'écrit aussi sous la forme :

$$n = n_{max} - \left(\frac{1-n_{max}}{1-n_0}\right)\frac{(n_{max}-n_0)\exp\left(-\left(\frac{1-n_{max}}{n_{max}-n_{min}}\right)\left(\left(\mu^c_{max}-\mu_{cv}\right)\gamma^p - \frac{C_1}{C_2^2}\ln\left(1+\frac{C_1}{C_2}\gamma^p\right)\right)\right)}{1-\left(\frac{n_{max}-n_0}{1-n_0}\right)\exp\left(-\left(\frac{1-n_{max}}{n_{max}-n_{min}}\right)\left(\left(\mu^c_{max}-\mu_{cv}\right)\gamma^p - \frac{C_1}{C_2^2}\ln\left(1+\frac{C_1}{C_2}\gamma^p\right)\right)\right)} \tag{A.9-189}$$

9.4.3 Généralisation du modèle de radoucissement à un milieu continu de Cosserat

9.4.3.1 Première généralisation par Vardoulakis (1989)

Une première généralisation possible du modèle 1.1 exposé ci-dessus aux milieux de Cosserat a été faite par Vardoulakis (1989). Les deux fractions n^f et n^c sont définies de la même manière que pour un milieu classique. Elles sont supposées avoir la même pression $p = p^{cl} = p^{co}$, mais des déformations déviatoriques : $e_{ij} \neq e^c_{ij} \neq e^f_{ij}$ et des courbures différentes : $k_{ij} \neq k^c_{ij} \neq k^f_{ij}$. Le reste du raisonnement est identique à celui pour un milieu classique. La seule différence réside dans le fait que les critères de rupture sont définis à partir du cisaillement généralisé τ_g au lieu d'être définis à partir du cisaillement classique τ.

Le critère macroscopique F est défini à partir du cisaillement généralisé τ_g sous la forme suivante :

$$F = \tau_g + \mu\, p = 0 \tag{A.9-190}$$

$$\tau_g = \sqrt{h_1\, s_{ij}\, s_{ij} + h_2\, s_{ij}\, s_{ji} + \frac{h_3}{R^2}\, m_{ij}\, m_{ij} + \frac{h_4}{R^2}\, m_{ij}\, m_{ji}} \tag{A.9-191}$$

On suppose que quand le critère global est atteint, les deux fractions vérifient simultanément les deux critères suivants :

$$F^c = \tau^c_g + \mu^c\, p = 0 \tag{A.9-192}$$

$$\tau^c_g = \sqrt{h_1\, s^c_{ij}\, s^c_{ji} + h_2\, s^c_{ij}\, s^c_{ji} + \frac{h_3}{R^2}\, m^c_{ij}\, m^c_{ji} + \frac{h_4}{R^2}\, m^c_{ij}\, m^c_{ji}} \tag{A.9-193}$$

et

$$F^f = \tau^f_g + \mu^f\, p = 0 \tag{A.9-194}$$

$$\tau^f_g = \sqrt{h_1\, s^f_{ij}\, s^f_{ji} + h_2\, s^f_{ij}\, s^f_{ji} + \frac{h_3}{R^2}\, m^f_{ij}\, m^f_{ji} + \frac{h_4}{R^2}\, m^f_{ij}\, m^f_{ji}} \tag{A.9-195}$$

Comme les deux fractions subissent la même pression p, les trois invariants τ , τ^c et τ^f des contraintes et couples contraintes sont proportionnels. Nous faisons en outre l'hypothèse plus forte que les contraintes et couples contraintes dans les deux fractions sont proportionnels aux contraintes et couples contraintes dans le mélange. Cette dernière hypothèse n'est pas en contradiction avec les hypothèses précédentes. Il est alors possible d'écrire les relations suivantes :

$$s^f_{ij} = \frac{\tau^f_g}{\tau_g} s_{ij} \tag{A.9-196}$$

$$m_{ij}^{f} = \frac{\tau_g^f}{\tau_g} m_{ij} \tag{A.9-197}$$

$$s_{ij}^{c} = \frac{\tau_g^c}{\tau_g} s_{ij} \tag{A.9-198}$$

$$m_{ij}^{c} = \frac{\tau_g^c}{\tau_g} m_{ij} \tag{A.9-199}$$

Après combinaison de ces relations avec les critères, on obtient la relation suivante :

$$\mu = n^f \mu^f + \left(1 - n^f\right) \mu^c \tag{A.9-200}$$

En ce qui concerne l'angle de dilatance du mélange, les trois modèles de dilatance vus précédemment peuvent être généralisés sans aucune changement. Ils seront appelés respectivement modèles 1.1, 1.2 et 1.3.

9.4.3.2 Deuxième généralisation proposée pour les milieux de Cosserat

9.4.3.2.1 Définition des fractions

Les observations expérimentales indiquent que les degrés de liberté en rotation des grains sont sollicités principalement dans les bandes de cisaillement et les couches d'interface, où la densité est la plus faible et le nombre de contacts par grains est le plus faible. On peut remarquer qu'il est d'autant plus facile à un grain de tourner indépendamment du matériau granulaire dans lequel il se trouve, que son nombre de points de contact est faible.

On définit alors deux fractions dans le matériau granulaire : une fraction, dite classique, et une fraction, dite de Cosserat. La fraction classique est notée avec un indice cl et est caractérisée par un nombre de contacts importants et des rotations individuelles des grains en moyenne égales à la rotation du milieu dans lequel ils se trouvent. Le comportement dans cette fraction s'apparente à un comportement de type classique. La fraction de Cosserat est notée avec un indice co et est caractérisée par un nombre de contacts faible et des rotations individuelles des grains en moyenne différentes de la rotation du milieu dans lequel ils se trouvent. Le comportement dans cette fraction s'apparente à un comportement de type Cosserat.

9.4.3.2.2 Contraintes et couples contraintes

On suppose que les deux fractions, classique et de Cosserat, ont des contraintes et couples contraintes différents. En particulier, on suppose que dans la fraction classique, le tenseur des contraintes σ_{ij}^{cl} est symétrique et que le tenseur des couples contraintes est négligeable:

$$\sigma_{ij}^{cl} = \sigma_{ij}^{s} \tag{A.9-201}$$

$$\mu_{ij}^{cl} \cong 0 \tag{A.9-202}$$

Dans la fraction de Cosserat, on suppose que le tenseur des contraintes σ_{ij}^{co} a une partie symétrique qui est purement sphérique et une partie déviatorique qui est principalement antisymétrique :

$$\sigma_{ij}^{co} = p\,\delta_{ij} + s_{ij}^{a} \tag{A.9-203}$$

tandis que le tenseur des couples contraintes est non nul

$$\mu_{ij}^{co} \cong \mu_{ij} \tag{A.9-204}$$

Après introduction des porosités des fractions n^{cl} et n^{co}, et en supposant que les fractions sont distribuées statistiquement de manière anisotrope, on obtient, en considérant une surface dA découpée en deux surfaces dA^{cl} et dA^{co} :

$$dA^{cl} = n^{cl}\,dA \tag{A.9-205}$$

$$dA^{co} = n^{co}\,dA \tag{A.9-206}$$

$$\sigma_{ij}n_j = \frac{dt_i}{dA} = \frac{dt_i^{cl} + dt_i^{co}}{dA} = \frac{dt_i^{cl}}{dA^{cl}}n^{cl} + \frac{dt_i^{co}}{dA^{co}}n^{co} = \left(\sigma_{ij}^{cl}n_j\right)n^{cl} + \left(\sigma_{ij}^{co}n_j\right)n^{co} = \left(\sigma_{ij}^{cl}n^{cl} + \sigma_{ij}^{co}n^{co}\right)n_j \tag{A.9-207}$$

d'où la relation entre les contraintes des deux fractions et la contrainte totale :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{cl}n^{cl} + \sigma_{ij}^{co}n^{co} \tag{A.9-208}$$

La contrainte totale σ_{ij} est décomposée en :

(1) une partie sphérique que les deux fractions subissent de manière similaire :

$$p = p^{cl} = \frac{\sigma_{ii}^{cl}}{2} = p^{co} = \frac{\sigma_{ii}^{co}}{2} \tag{A.9-209}$$

(2) une partie déviatorique symétrique que seule la fraction classique n^{cl} porte :

$$s_{ij}^{s} = s_{ij}^{cl} \tag{A.9-210}$$

et (3) une partie déviatorique antisymétrique que seule la fraction Cosserat n^{co} subit :

$$s_{ij}^{a} = s_{ij}^{co} \tag{A.9-211}$$

d'où la décomposition de la contrainte totale :

$$\sigma_{ij} = p\,\delta_{ij} + s_{ij}^{s}\,n^{cl} + s_{ij}^{a}\left(1 - n^{cl}\right) \tag{A.9-212}$$

En procédant de la même manière, on obtient une relation entre les couples contraintes dans les deux fractions et le couple contrainte total :

$$\mu_{ij} = \mu_{ij}^{cl}\, n^{cl} + \mu_{ij}^{co}\, n^{co} \qquad \text{(A.9-213)}$$

Comme la fraction classique ne porte pas de couple contrainte, le couple contrainte total μ_{ij} se compose d'un seul terme qui est porté uniquement par la fraction de Cosserat.

Le partage des termes sphériques et déviatoriques, symétriques et antisymétriques, contraintes et couples contraintes, a été fait de manière à satisfaire les conditions énumérées ci-dessous.

(1) En début de chargement, quand $n^{cl} \approx 1$, les termes classiques sont prépondérants et les termes dits de Cosserat, contraintes antisymétriques et couples contraintes, sont négligeables.

(2) Le seul terme statique partagé par les deux fractions est la pression p supposée égale dans les deux fractions. Cette hypothèse est importante pour pouvoir définir des angles de frottement propres aux deux fractions.

(3) En fin de chargement, dans les zones où la déformation se localise $n^{co} \approx 1$, les termes, dits de Cosserat, sont prépondérants par rapport aux termes classiques. En particulier, le cisaillement le long d'une bande de cisaillement ou d'une interface est purement antisymétrique.

9.4.3.2.3 Déformations et courbures

La déterminations des déformations totales en fonction des déformations dans chacune des deux fractions se fait à partir de l'écriture du travail des efforts intérieurs dans chacune des fractions :

$$dW_{int} = n^{cl}\, dW_{int}^{cl} + n^{co}\, dW_{int}^{co} \qquad \text{(A.9-214)}$$

$$dW_{int} = p\, \varepsilon_v + s_{ij}\, e_{ij} + \mu_{ij}\, \kappa_{ij} \qquad \text{(A.9-215)}$$

$$dW_{int}^{cl} = p\, \varepsilon_v^{cl} + s_{ij}^{cl}\, e_{ij}^{cl} \qquad \text{(A.9-216)}$$

$$dW_{int}^{co} = p\, \varepsilon_v^{co} + s_{ij}^{co}\, e_{ij}^{co} + \mu_{ij}^{co}\, \kappa_{ij}^{co} \qquad \text{(A.9-217)}$$

Les deux fractions subissant la même pression p, les déformations volumiques dans les deux fractions sont reliées par :

$$\varepsilon_v = \left(1 - n^{co}\right) \varepsilon_v^{cl} + n^{co}\, \varepsilon_v^{co} \qquad \text{(A.9-218)}$$

Les contraintes déviatoriques s_{ij} , s^c_{ij} et s^f_{ij} ne sont pas égales, d'où les relations suivantes entre les déformations déviatoriques totales et dans les deux phases:

$$e^s_{ij} = e^{cl}_{ij} \tag{A.9-219}$$

$$e^a_{ij} = e^{co}_{ij} \tag{A.9-220}$$

$$\kappa_{ij} = \kappa^{co}_{ij} \tag{A.9-221}$$

9.4.3.2.4 Critères de rupture

Considérons le cisaillement généralisé, noté τ_g , défini par :

$$\tau_g^2 = h_1\, s_{ij}\, s_{ij} + h_2\, s_{ij}\, s_{ji} + \frac{h_3}{R^2} m_{ij}\, m_{ij} + \frac{h_4}{R^2} m_{ij}\, m_{ji} \tag{A.9-222}$$

qui s'écrit aussi sous la forme suivante :

$$\tau_g^2 = (h_1 + h_2)\, s^s_{ij}\, s^s_{ij} + (h_1 - h_2)\, s^a_{ij}\, s^a_{ij} + \left(\frac{h_3 + h_4}{R^2}\right) m^s_{ij}\, m^s_{ij} + \left(\frac{h_3 - h_4}{R^2}\right) m^a_{ij}\, m^a_{ij} \tag{A.9-223}$$

Après substitution des contraintes et couples contraintes propres à chacune des deux fractions, on obtient :

$$\tau_g^2 = (h_1 + h_2)\, s^s_{ij}\, s^s_{ij} (n^{cl})^2 + (h_1 - h_2)\, s^a_{ij}\, s^a_{ij}\, (1 - n^{cl})^2 + \left(\frac{h_3 + h_4}{R^2}\right) m^s_{ij}\, m^s_{ij} (1 - n^{cl})^2 + \left(\frac{h_3 - h_4}{R^2}\right) m^a_{ij}\, m^a_{ij} (1 - n^{cl})^2 \tag{A.9-224}$$

En début de chargement, quand le sol se comporte dans sa quasi-totalité comme un milieu classique, on a $n^{cl} \approx 1$. Le cisaillement généralisé τ_g coïncide alors avec le cisaillement classique τ :

$$\tau_g^2 \equiv (h_1 + h_2)\, s^s_{ij}\, s^s_{ij} = \tau^2 \tag{A.9-225}$$

Dans une bande de cisaillement ou une interface, la fraction Cosserat n^{co} est prépondérante, $n^{co} \approx 1$ et $n^{cl} = 0$. Les termes de Cosserat sont prépondérants dans le cisaillement généralisé, qui est alors égal au cisaillement τ_{co} , dit de Cosserat :

$$\tau_g^2 \approx (h_1 - h_2)\, s^a_{ij}\, s^a_{ij} + \left(\frac{h_3 + h_4}{R^2}\right) m^s_{ij}\, m^s_{ij} + \left(\frac{h_3 - h_4}{R^2}\right) m^a_{ij}\, m^a_{ij} = \tau^2_{co} \tag{A.9-226}$$

On définit deux angles de frottement, ϕ^{cl} et ϕ^{co} , respectivement pour chacune des fractions classique et de Cosserat. L'angle ϕ^{cl} est l'angle de frottement mobilisé dans un volume de sol où la fraction n^{cl} est prépondérante :

$$\tau = \sqrt{(h_1 + h_2)\, s^s_{ij}\, s^s_{ij}} = -\mu^{cl}\, p \tag{A.9-227}$$

avec :

$$\mu^{cl} = \sin\left(\phi^{cl}\right) \tag{A.9-228}$$

L'angle ϕ^{co} est l'angle de frottement mobilisé dans un volume de sol où la fraction $n^{co} = 1 - n^{cl}$ est prépondérante :

$$\tau_{co} = \sqrt{\left(h_1 - h_2\right) s_{ij}^a \, s_{ij}^a + \left(\frac{h_3 + h_4}{R^2}\right) m_{ij}^s \, m_{ij}^s + \left(\frac{h_3 - h_4}{R^2}\right) m_{ij}^a \, m_{ij}^a} = -\mu^{co} p \tag{A.9-229}$$

où :

$$\mu^{co} = \sin\left(\phi^{co}\right) \tag{A.9-230}$$

Dans un mélange des deux fractions n^{co} et n^{cl} , l'angle de frottement mobilisé μ est à tout instant donné par

$$\tau_g + \mu \, p = 0 \tag{A.9-231}$$

ce qui donne après substitution :

$$\mu = \sqrt{\left(\mu^{cl}\right)^2 \left(n^{cl}\right)^2 + \left(\mu^{co}\right)^2 \left(1 - n^{cl}\right)^2} \tag{A.9-232}$$

L'angle de frottement du mélange est obtenu par interpolation quadratique entre les angles de frottement de chacune des deux fractions, à l'aide des porosités respectives de chacune d'elles.

Il est raisonnable de penser que μ^{cl} est supérieur à μ^{co} puisque μ^{cl} correspond à l'angle de frottement d'un matériau dense sous faible contrainte tandis que μ^{co} correspond à l'angle de frottement d'un matériau lâche.

Avec une telle approche, nous admettons que l'apparition d'effets de Cosserat est à l'origine du radoucissement observé dans les bandes de cisaillement et les interfaces. L'approche de Bogdaneva et Lippmann permet de façon similaire d'introduire un radoucissement quand les effets de Cosserat existent, simplement par l'intermédiaire d'une cohésion négative égale à $-\left|\sigma^a\right| \cos\phi$ dans le critère de Mohr Coulomb généralisé :

$$F = q + p \sin\phi - c \cos\phi + \left|\sigma^a\right| \cos\phi \tag{A.9-233}$$

9.4.3.2.5 Définition de l'angle de dilatance

9.4.3.2.5.1 Modèle 2.1

La définition de l'angle de dilatance du mélange peut être faite de manière directe sans référence à la théorie des mélanges, ce qui est simple mais pas satisfaisant et donne un premier modèle quadratique numéroté 2.1.

9.4.3.2.5.2 Modèles 2.2 et 2.3

Elle peut être aussi faite dans le cadre de la théorie des mélanges. Pour dériver l'angle de dilatance du mélange à partir des angles de chacune des fractions, il convient de repartir des relations fondamentales suivantes :

$$p = p^{cl} = p^{co} \tag{A.9-234}$$

$$d\varepsilon_v^p = \left(1 - n^{co}\right) d\varepsilon_v^{cl,p} + n^{co}\, d\varepsilon_v^{co,p} \tag{A.9-235}$$

L'angle de dilatance β^{cl} de la fraction classique est défini à partir de la relation :

$$d\varepsilon_v^{cl,p} = \sin\beta^{cl}\, d\gamma^{cl,p} \tag{A.9-236}$$

où $d\gamma^{cl,p}$ est la déformation plastique de cisaillement classique qui est conjuguée en énergie avec le cisaillement classique τ^{cl} et est égal à :

$$d\gamma^{cl,p} = \sqrt{(g_1 + g_2) e_{ij}^{cl,p} e_{ij}^{cl,p}} \tag{A.9-237}$$

L'angle de dilatance β^{co} de la fraction de Cosserat est défini à partir de la relation suivante :

$$d\varepsilon_v^{co,p} = \sin\beta^{co}\, d\gamma^{co,p} \tag{A.9-238}$$

où $d\gamma^{co,p}$ est la déformation plastique de cisaillement de Cosserat, qui est conjuguée en énergie avec le cisaillement de Cosserat τ^{co} et est égale à :

$$d\gamma^{cl,p} = \sqrt{(g_1 - g_2) e_{ij}^{co,p} e_{ij}^{co,p} + (g_3 + g_4) k_{ij}^{co,s,p} k_{ij}^{co,s,p} + (g_3 - g_4) k_{ij}^{co,a,p} k_{ji}^{co,a,p}} \tag{A.9-239}$$

L'angle de dilatance du mélange est défini à partir de la relation suivante :

$$d\varepsilon_v^p = \sin\beta\, d\gamma_g^p \tag{A.9-240}$$

où $d\gamma^p$ est la déformation plastique de cisaillement généralisé, qui est conjuguée en énergie avec le cisaillement généralisé τ_g . Ce dernier est reliée aux cisaillements, classique et de Cosserat, par la relation :

$$d\gamma_g^p = \sqrt{\left(d\gamma^{cl,p}\right)^2 + \left(d\gamma^{co,p}\right)^2} \tag{A.9-241}$$

On en déduit la relation suivante entre les trois angles de dilatance :

$$\sin\beta = \left(1 - n^{co}\right)\sin\beta^{cl}\frac{d\gamma^{cl,p}}{\sqrt{\left(d\gamma^{cl,p}\right)^2 + \left(d\gamma^{co,p}\right)^2}} + n^{co}\sin\beta^{co}\frac{d\gamma^{co,p}}{\sqrt{\left(d\gamma^{cl,p}\right)^2 + \left(d\gamma^{co,p}\right)^2}} \qquad \text{(A.9-242)}$$

Il est à noter que l'angle de dilatance du matériau, considéré comme un mélange, dépend, du fait de la définition précédente, du type d'essai et en particulier de l'importance des effets de Cosserat par rapport aux termes classiques. Il n'est pas intrinsèque.

Définissons dans le plan $\left(d\gamma^{cl,p}, d\gamma^{co,p}\right)$, le rayon $d\gamma^{p}$:

$$d\gamma^{p} = \sqrt{\left(d\gamma^{cl,p}\right)^2 + \left(d\gamma^{co,p}\right)^2} \qquad \text{(A.9-243)}$$

et l'angle de Cosserat χ :

$$\chi = \frac{d\gamma^{co,p}}{d\gamma^{cl,p}} \qquad \text{(A.9-244)}$$

L'angle de dilatance du modèle quadratique 2.2 peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\sin\beta = \left(1 - n^{co}\right)\sin\beta^{cl}\cos\chi + n^{co}\sin\beta^{co}\sin\chi \qquad \text{(A.9-245)}$$

Pendant un incrément de chargement de type classique, l'angle de Cosserat χ est nul, et l'angle de dilatance du modèle quadratique 2.2 est donné par :

$$\sin\beta = \left(1 - n^{co}\right)\sin\beta^{cl} \qquad \text{(A.9-246)}$$

Il coïncide avec l'angle de dilatance des modèles linéaires 1.1 et 1.2.

Pendant un incrément de chargement extrême de type Cosserat, l'angle de Cosserat χ est égal à $\pi/2$, et l'angle de dilatance du modèle quadratique 2.2 est donné par :

$$\sin\beta = n^{co}\sin\beta^{co} \qquad \text{(A.9-247)}$$

Il est égal à 0 puisque la fraction fragile de Cosserat se déforme à volume constant.

Il faut noter que l'angle de dilatance du mélange pendant un incrément de chargement, dépend des incréments respectifs des deux fractions durant ce même incrément. Il est donc défini de manière implicite. Ce modèle élasto-plastique possède donc des caractéristiques de type incrémental non linéaire.

9.4.4 Simulations numériques et comparaisons des différents modèles

Pour les essais de Vardoulakis et Graf (1985) sur du sable fin de dune d'Osterskede, analysés avec une loi de comportement 2D, les valeurs numériques résumées dans les tableaux A.9-2 et A.9-3 ont été choisies afin de pouvoir comparer les résultats sur les couches d'interface avec ceux obtenus par Vardoulakis (1989) et Vardoulakis et Sulem (1995) pour les bandes de cisaillement. La calibration des paramètres a été réalisée à partir de résultats d'essais biaxiaux et pour un modèle 2D (tableaux A.9-2 et A.9-3).

Tableau A.9-2 : Valeurs numériques des paramètres pour les angles de frottement

Paramètre	Notation	Valeurs numériques
porosités		
porosité initiale	n_0	0,383
porosité minimale	n_{min}	0,362
porosité maximale	n_{max}	0,482
porosité critique	n_{cr}	0,482
modules élastiques		
module d'Young	E	110,748 MPa
coefficient de Poisson	ν	0,1
module de déformation volumique	$K = G / (1-2\nu)$	62,925 MPa
module de cisaillement	$G = E / 2(1+\nu)$	52,34 MPa
angle de frottement du mélange (modèles linéaires 1.1, 1.2 et 1.3) $\mu = (1-n^f)\,\mu^c + n^f\,\mu^f$ angle de frottement du mélange (modèles quadratiques 2.1, 2.2 et 2.3) $\mu = \sqrt{((1-n^f)\,\mu^c)^2 + (n^f\,\mu^f)^2}$		
paramètres d'écrouissage de l'angle de frottement de la fraction compétente $\mu^c = \sin\phi^c = \frac{\gamma^p}{C_1 + C_2\,\gamma^p}$		
coefficient d'écrouissage	C_1	2,8582E-3
coefficient d'écrouissage	C_2	1,2166E+0
angle de frottement maximum	$\phi^c_{max} = \mathrm{asin}\left(\frac{1}{C_2}\right)$	55,28°
coefficient de frottement maximal	$\mu^c_{max} = \frac{1}{C_2}$	0,822
angle de frottement de la fraction fragile $\phi^f = \phi_{cv}$		
angle de frottement critique	$\phi^f = \phi_{cv}$	24,33
coefficient de frottement	$\mu^f = \mu_{cv}$	0,412

Tableau A.9-3 : Valeurs numériques des paramètres pour les angles de dilatance

Angle de dilatance du mélange (modèles 1.1 et 2.1) $\sin\beta = C_3 \exp\left(-\frac{C_3}{C_4}\gamma^p\right)$		
coefficient d'écrouissage	C_3	3,7931E-1
coefficient d'écrouissage	$C_4 = \ln\left(\frac{1-n_0}{1-n_{cv}}\right)$	0,1749
angle de dilatance maximale	$\beta^c_{max} = \text{asin}(C_4)$	10,075
angle de dilatance du mélange (modèles linéaires 1.2 et 1.3) $\sin\beta = (1-n^f)\sin\beta^c + n^f \sin\beta^f$		
angle de dilatance du mélange (modèle quadratique 2.2 et 2.3) $\sin\beta = (1-n^f)\sin\beta^c\cos\chi + n^f \sin\beta^f\sin\chi$		
angle de dilatance de la fraction compétente ou fragile	$\sin\beta^c = \mu^c_{max} - \mu^f$ $\sin\beta^c = \frac{1}{C_2} - \sin\phi_{cv}$ (modèle 1.2 et 2.2) $\sin\beta^c = \mu^c - \mu^f$ $\sin\beta^c = \mu(\gamma^p) - \sin\phi_{cv}$ (modèle 1.3 et 2.3)	$\sin\beta^c = 0,41$ $\beta^c = 24,2048$
angle de dilatance de la fraction fragile ou de Cosserat	$\beta^f = \beta_{cv}$	0,0

9.4.4.1 Angle de frottement

Le principe d'une interpolation linéaire ou quadratique entre les angles de frottement des deux fractions, compétente et fragile, permet de modéliser une phase d'écrouissage positif dans un premier temps puis d'écrouissage négatif ensuite (figures A.9-11, A.9-12 et A.9-13). Cependant, il faut noter que pour les modèles quadratiques 21 et 22, ces deux phases sont suivies d'une nouvelle phase d'écrouissage positif (re-hardening). Dans tous les cas, les modèles quadratiques présentent un pic plus faible, ainsi qu'un radoucissement plus fort et plus rapide que les modèles linéaires.

Si l'on compare les modèles linéaires entre eux, on peut observer que le modèle 13 présente un pic légèrement plus fort et un radoucissement plus faible que les deux autres modèles 11 et 12 (figure A.9-14). Dans le cas des modèles quadratiques, les mêmes tendances sont observées, si ce n'est que le modèle 23, qui radoucit peu et relativement lentement, n'atteint jamais de phase de re-durcissement si l'angle de Cosserat χ reste constant durant le chargement, ce qui n'est le cas que pour un chargement classique (figure A.9-15).

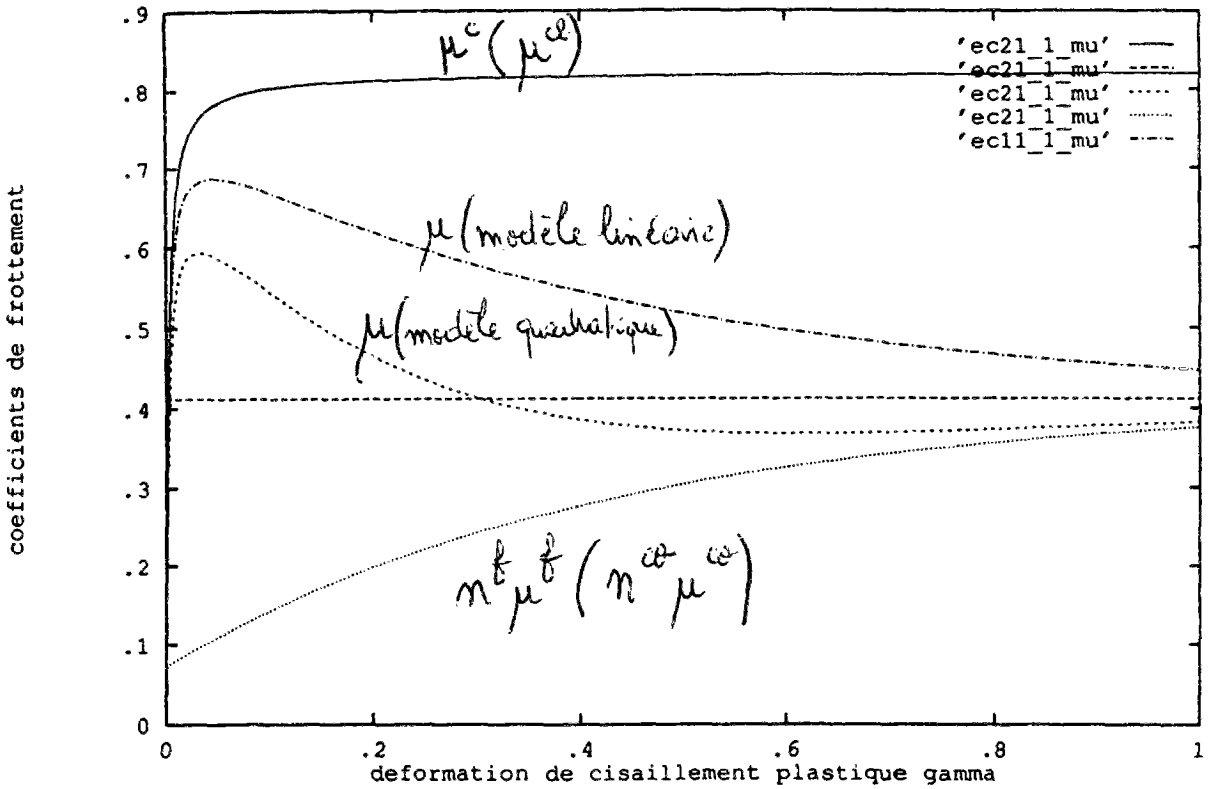


Figure A.9-11 : Evolution des coefficients de frottement des modèles :
linéaire 11 et quadratique 21, en fonction de la déformation plastique de cisaillement γ^p

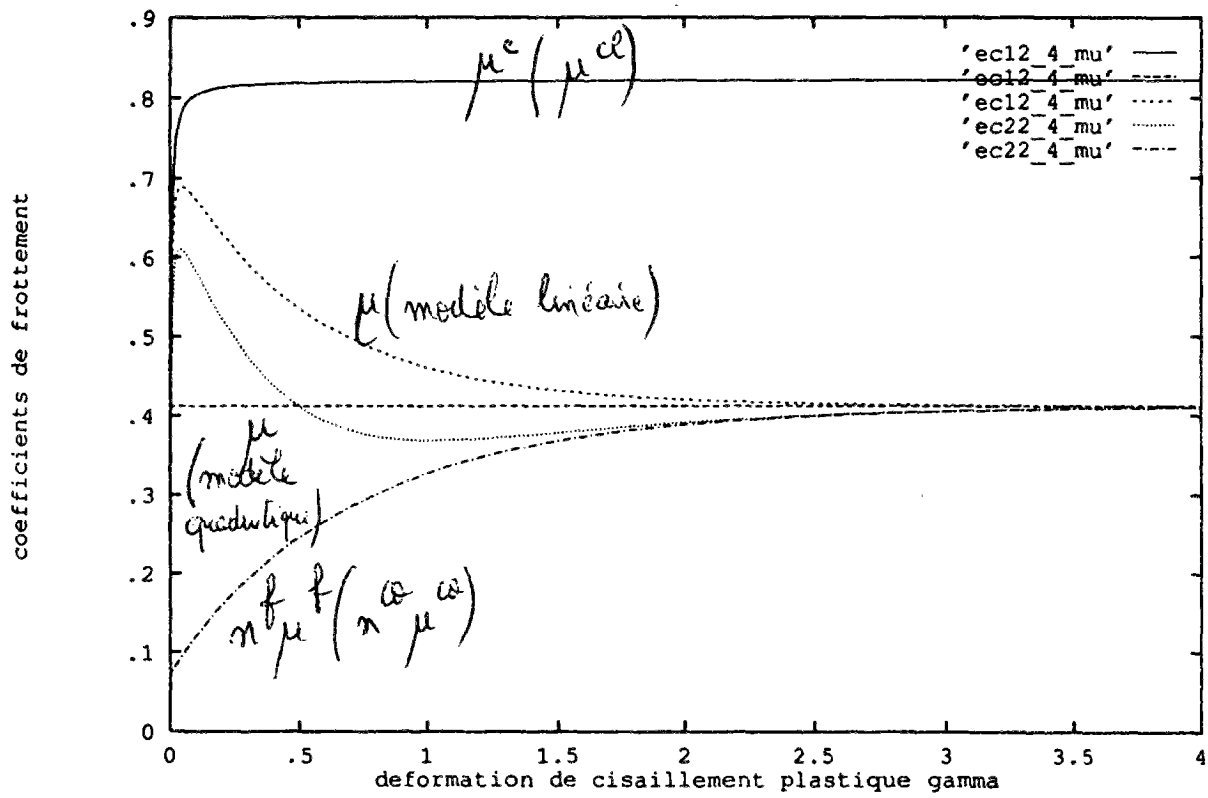


Figure A.9-12 : Evolution des coefficients de frottement des modèles :
linéaire 12 et quadratique 22, en fonction de la déformation plastique de cisaillement γ^p

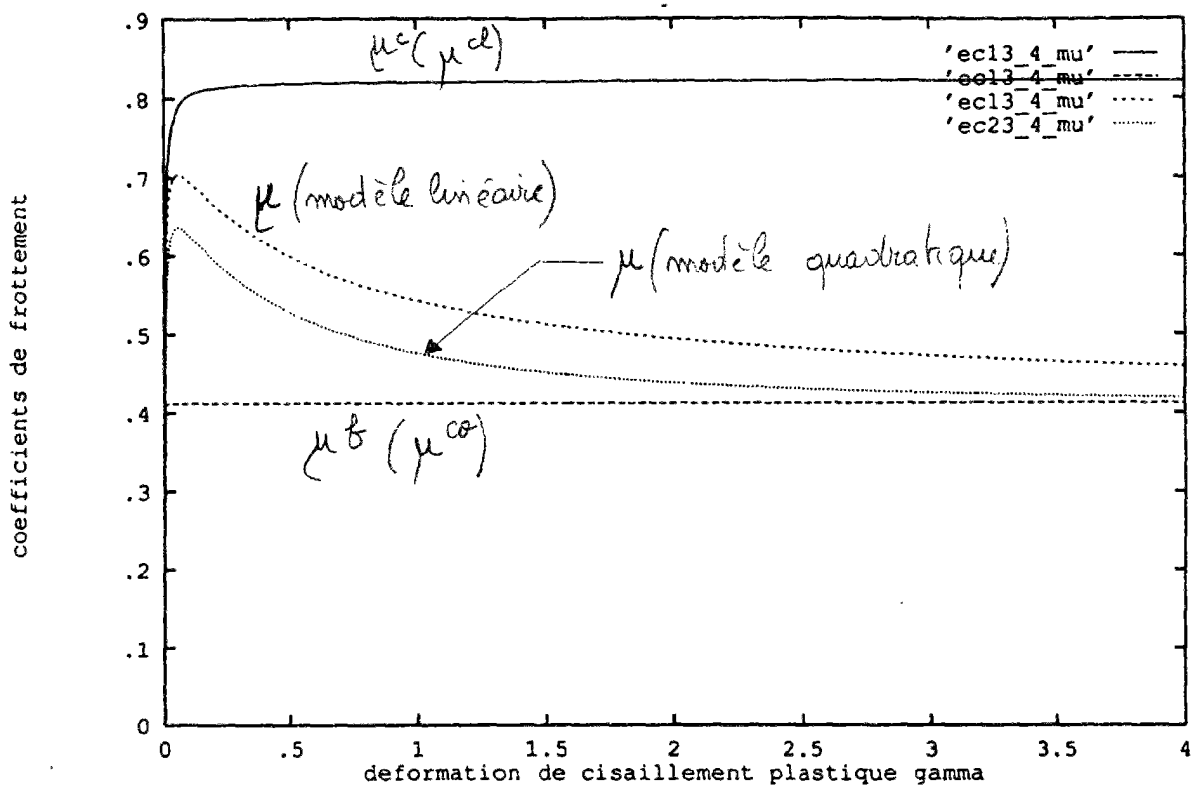


Figure A.9-13 : Evolution des coefficients de frottement des modèles :
linéaire 13 et quadratique 23, en fonction de la déformation plastique de cisaillement γ^p

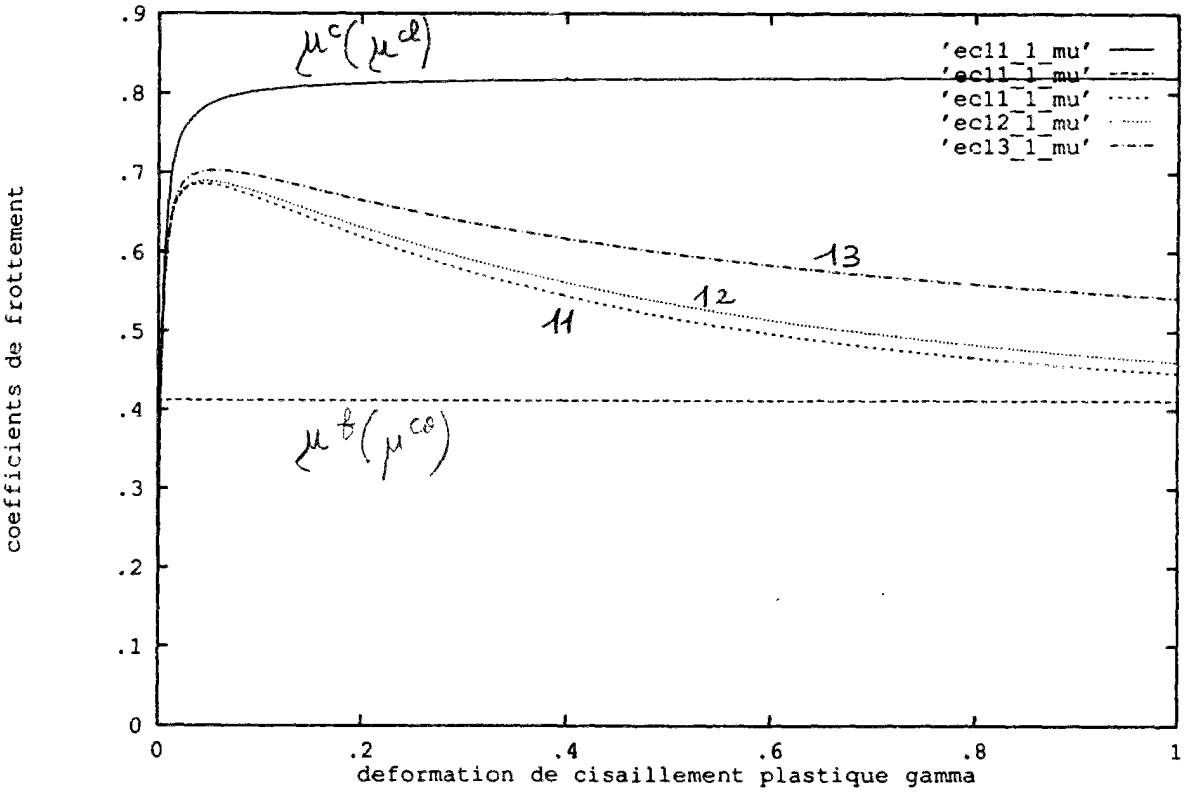


Figure A.9-14 : Comparaison des coefficients de frottement
entre les modèles linéaires 11, 12 et 13

L'influence de l'angle de Cosserat sur les modèles quadratiques 22 et 23 est très importante. Par exemple, pour χ égal à 0°, le comportement du modèle 22 est caractérisé par une phase durcissante puis radoucissante et de nouveau durcissante, tandis que pour χ égal à 90°, le comportement est toujours durcissant (figure A.9-16). Dans le cas du modèle 23, la deuxième phase de durcissement n'existe pas pour un angle χ constant (figure A.9-17). Cependant, au cours d'un cisaillement d'interface, l'angle χ évolue de 0° à 90° dans des cas extrêmes, la courbe d'évolution de μ remonte donc vers la courbe supérieure ce qui induit une deuxième phase de durcissement, suivant le chargement suivi et l'importance des effets de Cosserat.

9.4.4.2 Module tangent aux courbes d'écrouissage

Les figures A.9-18, A.9-19 et A.9-20 présentent les modules tangents h_t des 6 modèles. Il faut noter que tous les modèles quadratiques sont caractérisés par un radoucissement plus rapide et plus fort que les modèles linéaires correspondant. La différence est cependant plus faible pour les modèles 13 et 23.

9.4.4.3. Angle de dilatance

Pour les modèles 11 et 21, l'angle de dilatance du mélange est défini globalement indépendamment de toute référence à la théorie des mélanges. Par contre, pour les modèles 12, 13, 22 et 23, l'angle de dilatance du mélange est obtenu par interpolation entre l'angle de dilatance de la fraction compétente β^c , qui est de nature dilatante, et l'angle de la fraction fragile qui est supposée se déformer à volume constant et a donc un angle de dilatance β^f nul (figures A.9-21 et A.9-22). Il est à noter que les modèles 13 et 23 présentent une phase contractante en début de chargement alors que les modèles 11, 12, 21 et 22 n'en présentent pas une. Les expériences donnent toujours une phase initiale contractante, du moins pour les sables lâches à moyennement denses.

Entre le modèle 1.1 initialement développé (Vardoulakis, 1989) et le modèle 1.2, très peu de différences sont observées sur les simulations, alors que du point de vue de la formulation, l'angle de dilatance du modèle 1.1 est défini globalement, indépendamment de la théorie des mélanges, tandis que l'angle de dilatance du modèle 1.2 est défini dans le cadre de la théorie des mélanges, de la même manière que l'angle de frottement.

L'influence de l'angle de Cosserat χ est là encore très importante comme cela peut s'observer sur la figure A.9-23 pour le modèle 22 et sur le figure A.9-24 pour le modèle 23.

9.4.4.4 Déformation plastique

Les modèles linéaires et quadratiques, dans l'ordre *1, *2 et *3, sont moins dilatants (figures A.9-25 et A.9-26). Il est à noter que l'angle de Cosserat χ a pour effet, quand il est égale à 90°, c'est à dire quand les effets de Cosserat sont maximaux, de maintenir la déformation plastique volumique nulle (figures A.9-27 et A.9-28).

9.4.4.5 Porosité de la fraction fragile

L'évolution de la porosité n^f de la fraction fragile dans le cas des modèles linéaires ou n^{co} de la fraction de Cosserat dans le cas des modèles quadratiques, contrôle l'évolution des angles de frottement et de dilatance, puisque ceux-ci sont interpolés à l'aide de ce coefficient. Cette fraction évolue plus lentement pour les modèles 13 et 23 que pour les autres modèles (figures A.9-29 et A.9-30). L'influence de l'angle de Cosserat χ est importante. Quand il tend vers 90°, la porosité n'évolue plus et les angles de frottement et de dilatance, par conséquent, n'évoluent plus eux aussi (figures A.9-31 et A.9-32).

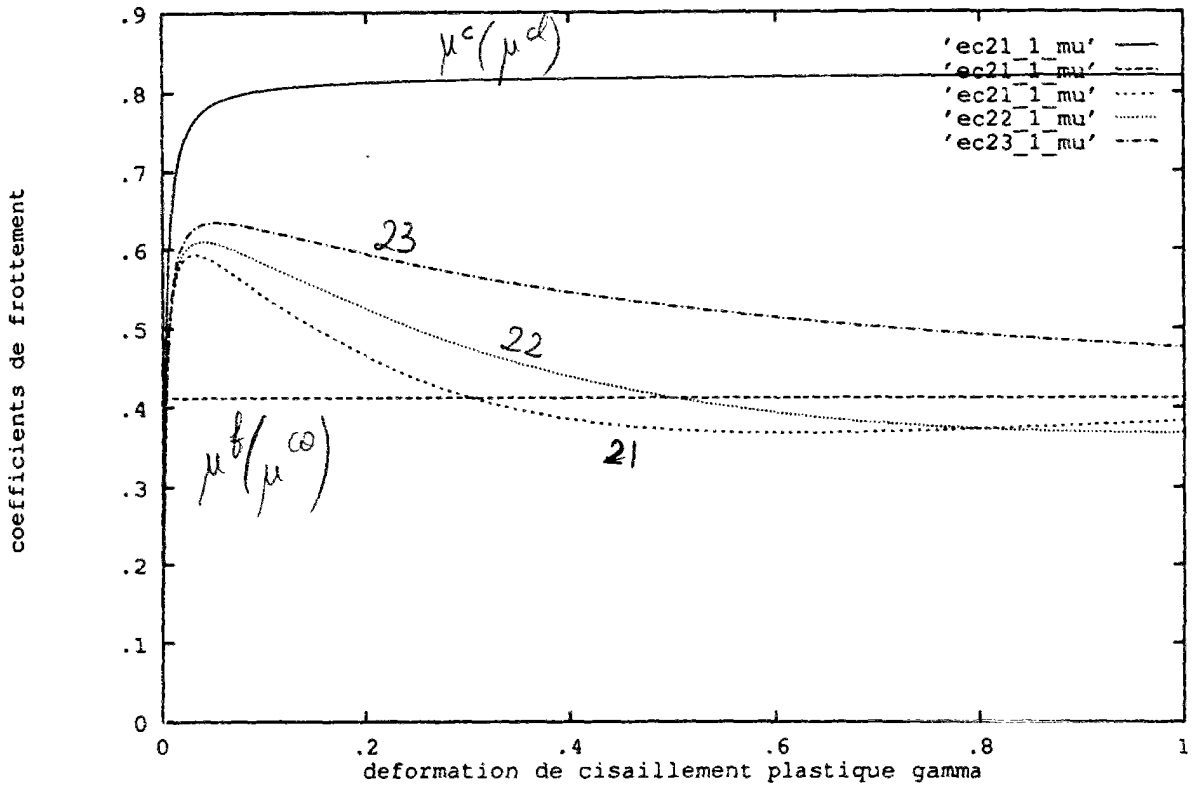


Figure A.9-15 : Comparaison des coefficients de frottement entre les modèles quadratiques 21, 22 et 23

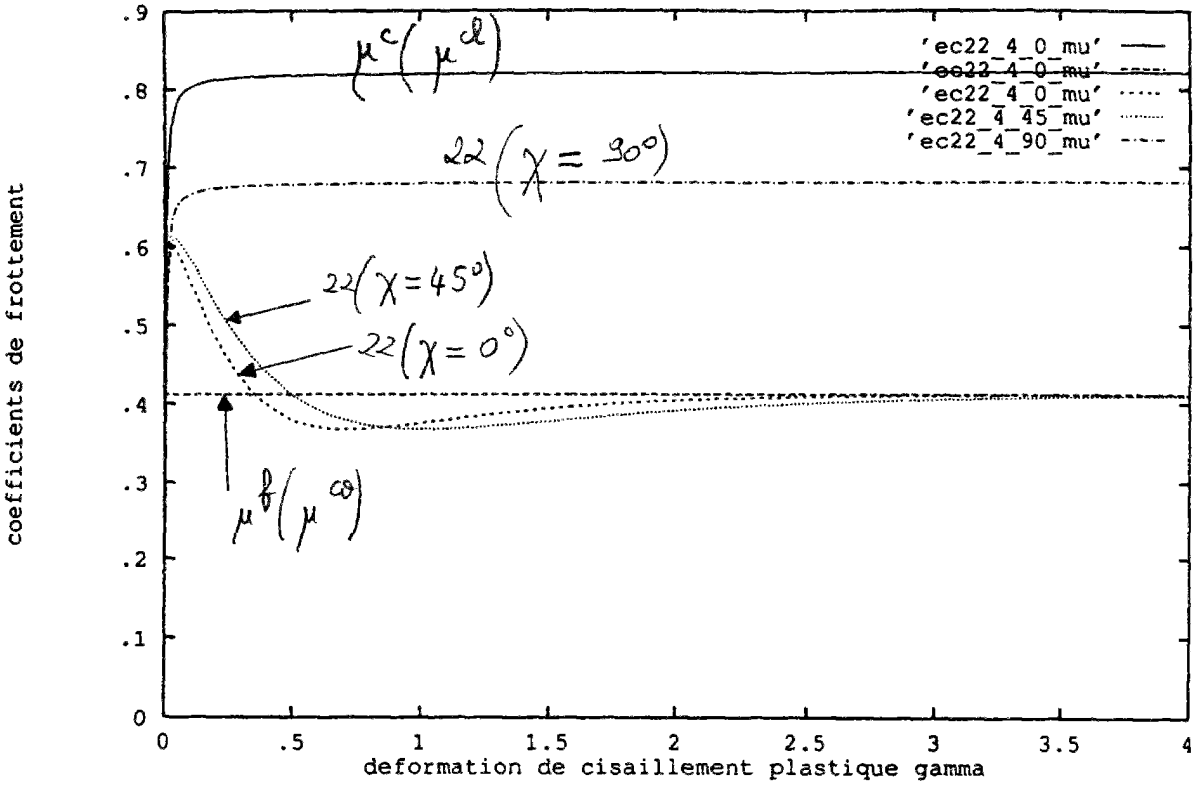


Figure A.9-16 : Influence de l'angle de Cosserat χ
sur le coefficient de frottement du modèle quadratique 22

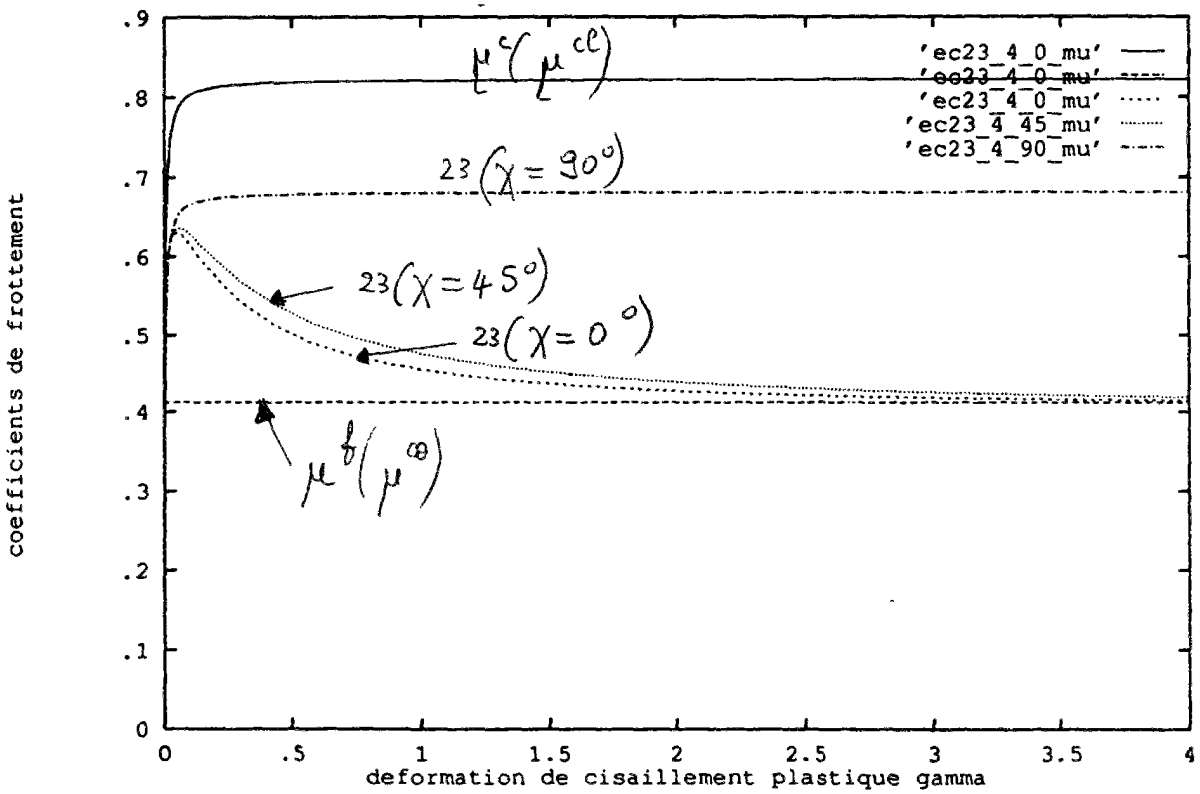


Figure A.9-17 : Influence de l'angle de Cosserat χ
sur le coefficient de frottement du modèle quadratique 23

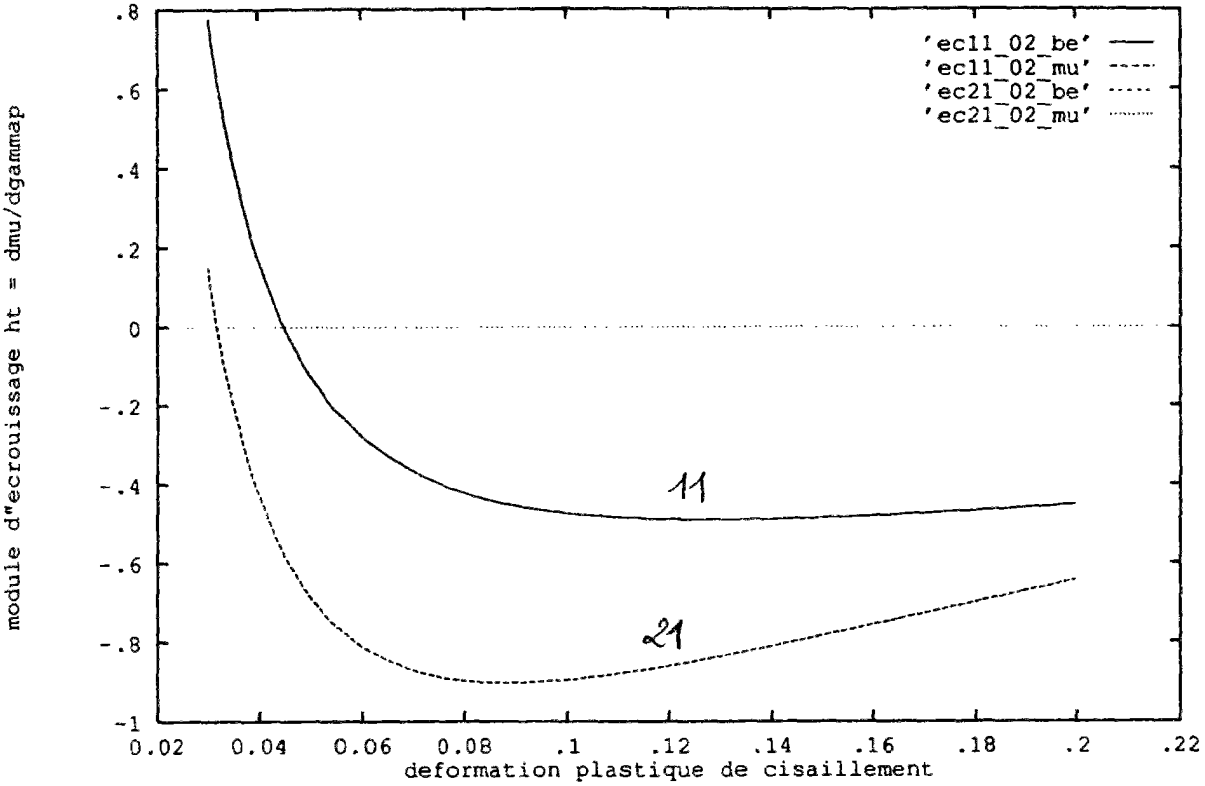


Figure A.9-18 : Evolution du module d'écrouissage h_t des modèles 11 et 21 en fonction de la déformation plastique de cisaillement γ^p

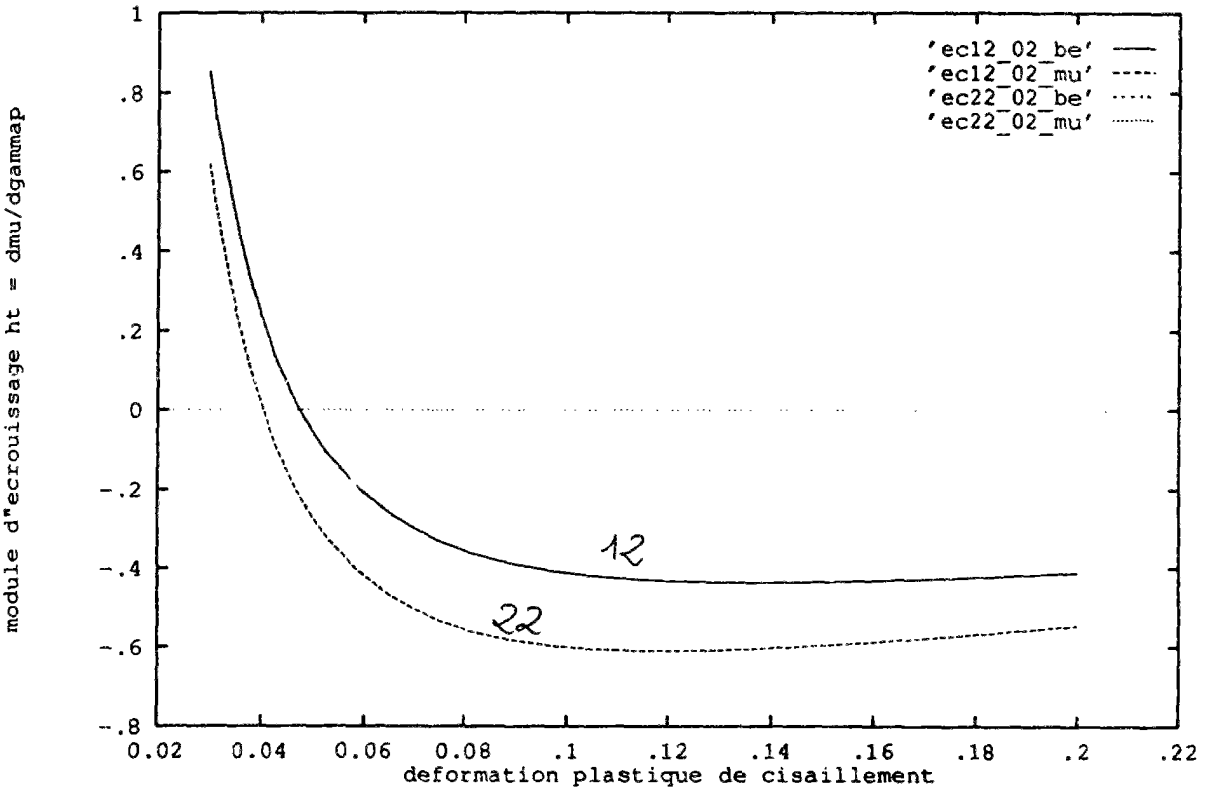


Figure A.9-19 : Evolution du module d'écrouissage h_t des modèles 12 et 22 en fonction de la déformation plastique de cisaillement γ^p

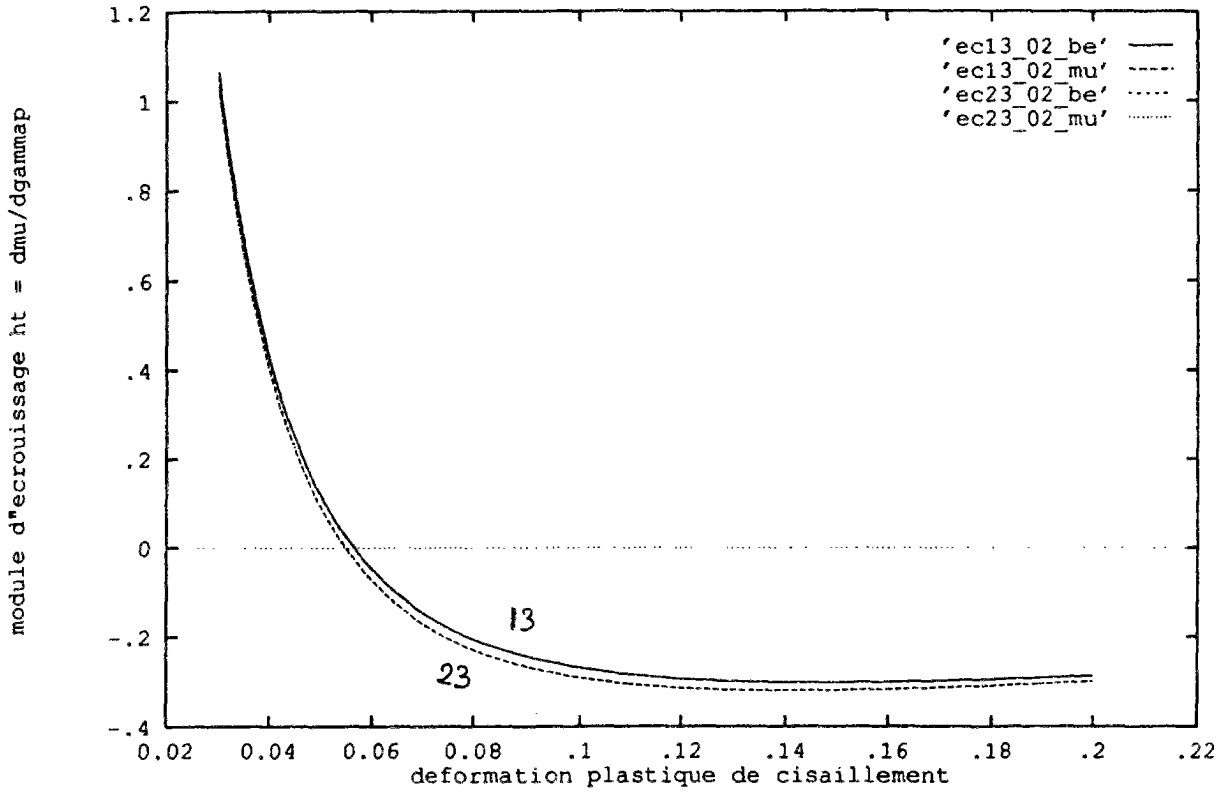


Figure A.9-20 : Evolution du module d'écrouissage h_t des modèles 13 et 23 en fonction de la déformation plastique de cisaillement γ^p

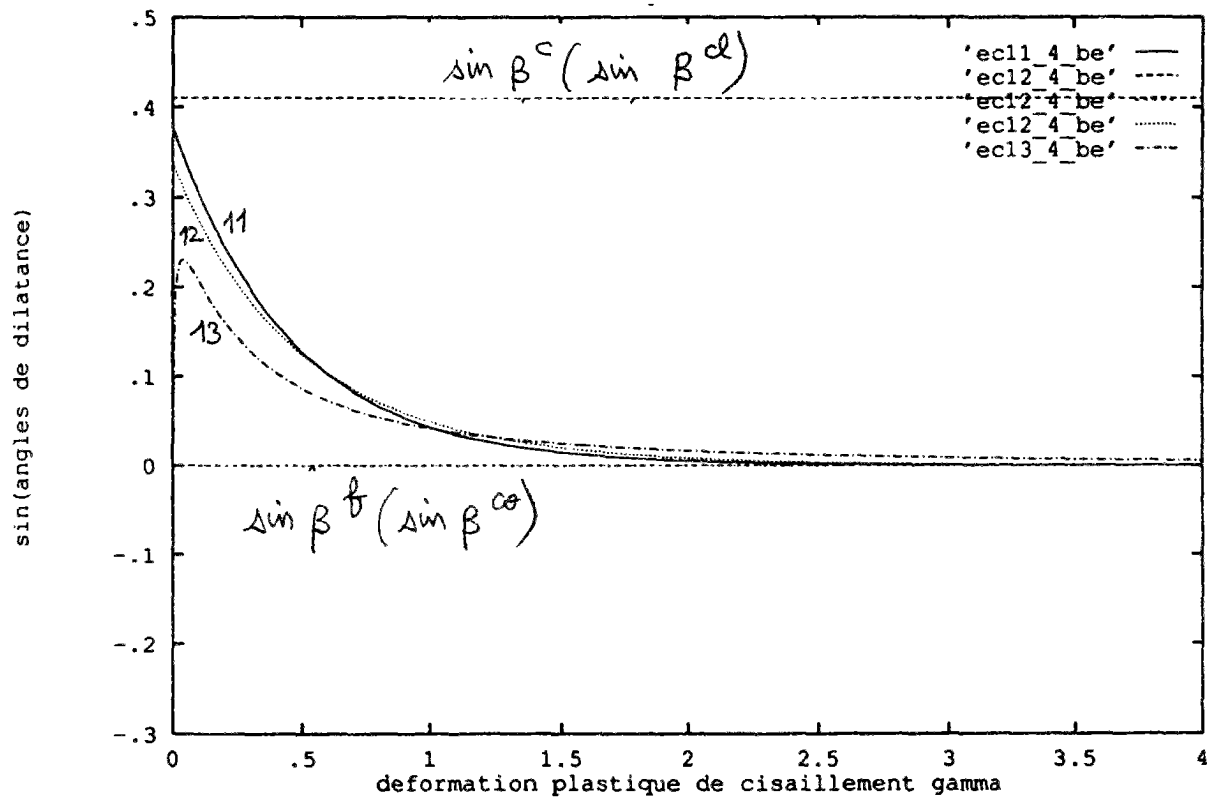


Figure A.9-21 : Evolution de l'angle de dilatance des modèles 11, 12 et 13 en fonction de la déformation plastique de cisaillement γ^p

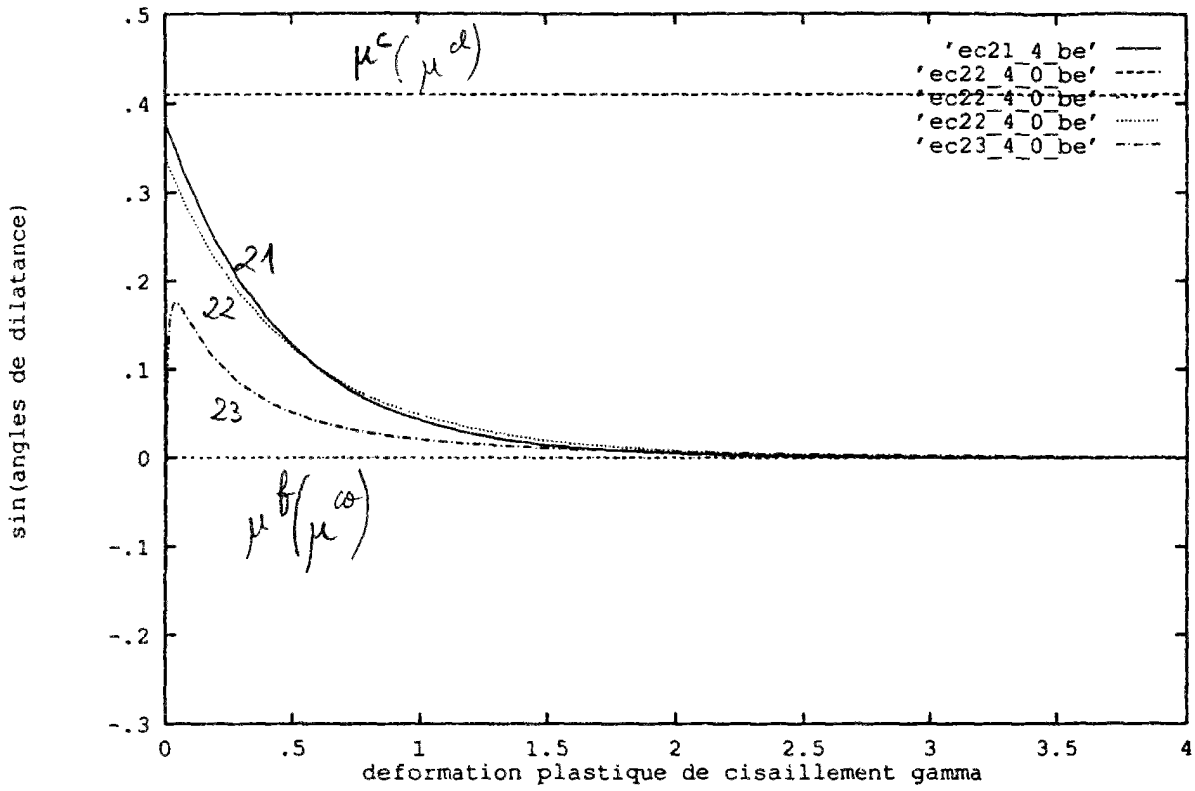


Figure A.9-22 : Evolution de l'angle de dilatance des modèles 21, 22 et 23 en fonction de la déformation plastique de cisaillement γ^p

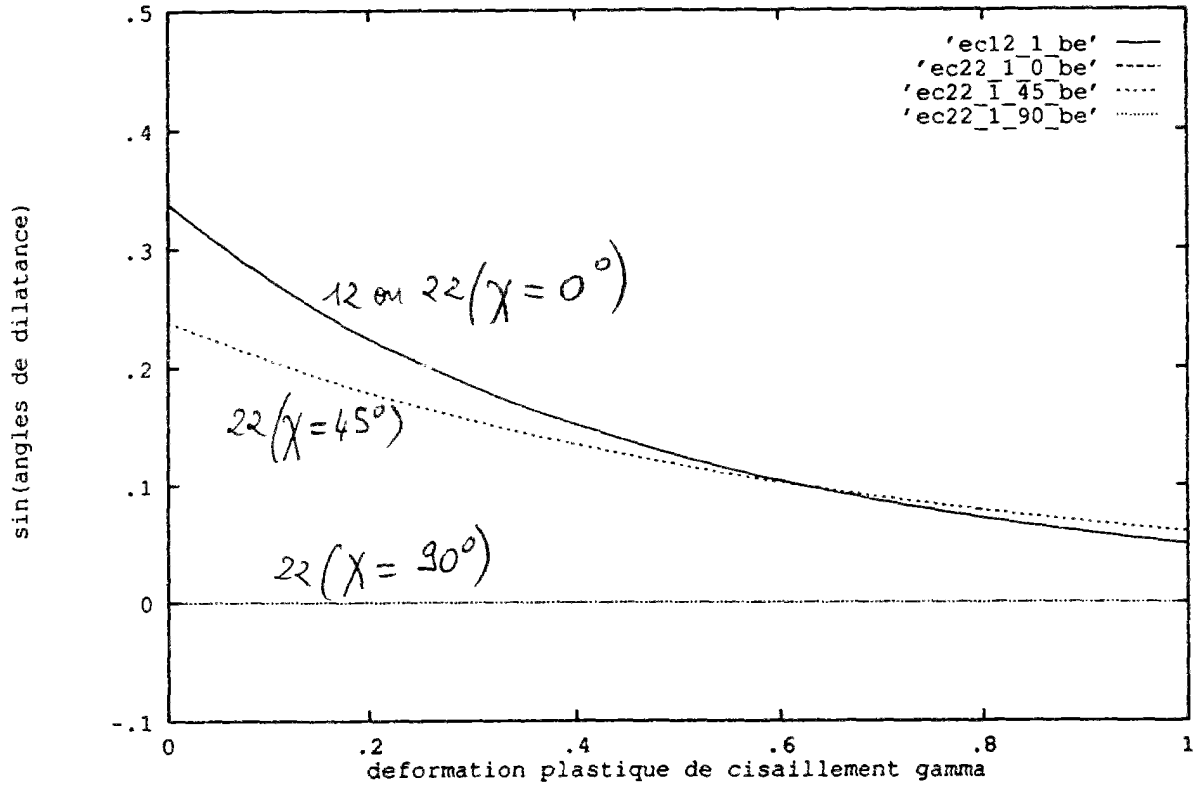


Figure A.9-23 : Influence de l'angle de Cosserat χ sur l'angle de dilatance du modèle 22

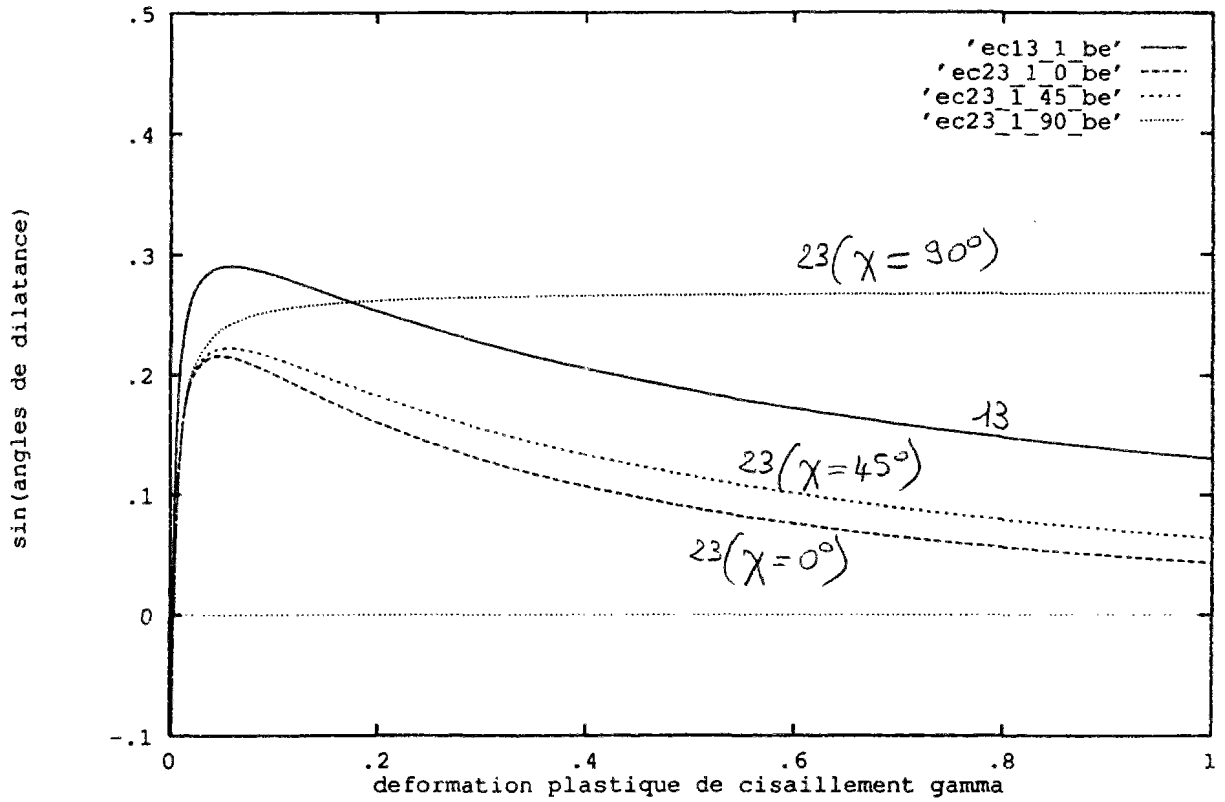


Figure A.9-24: Influence de l'angle de Cosserat χ sur l'angle de dilatance du modèle 23

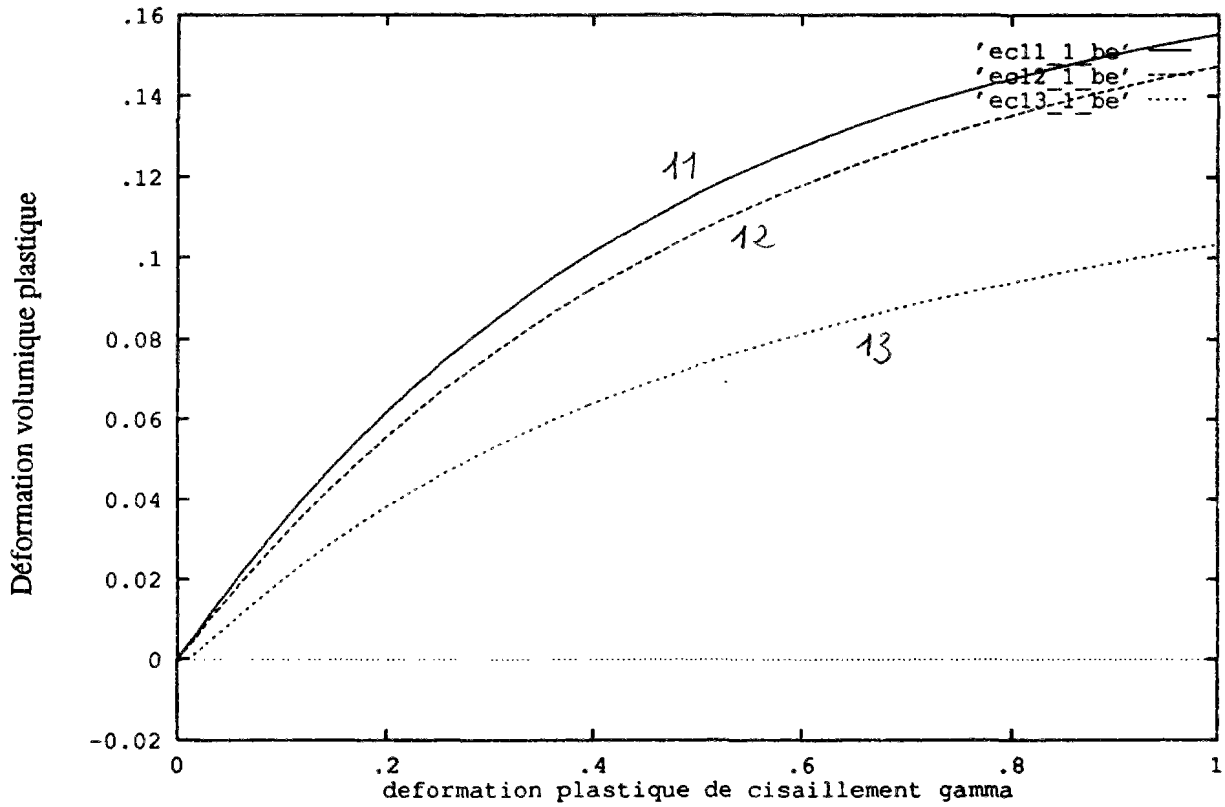


Figure A.9-25: Comparaison de la déformation volumique plastique des modèles 11, 12 et 13

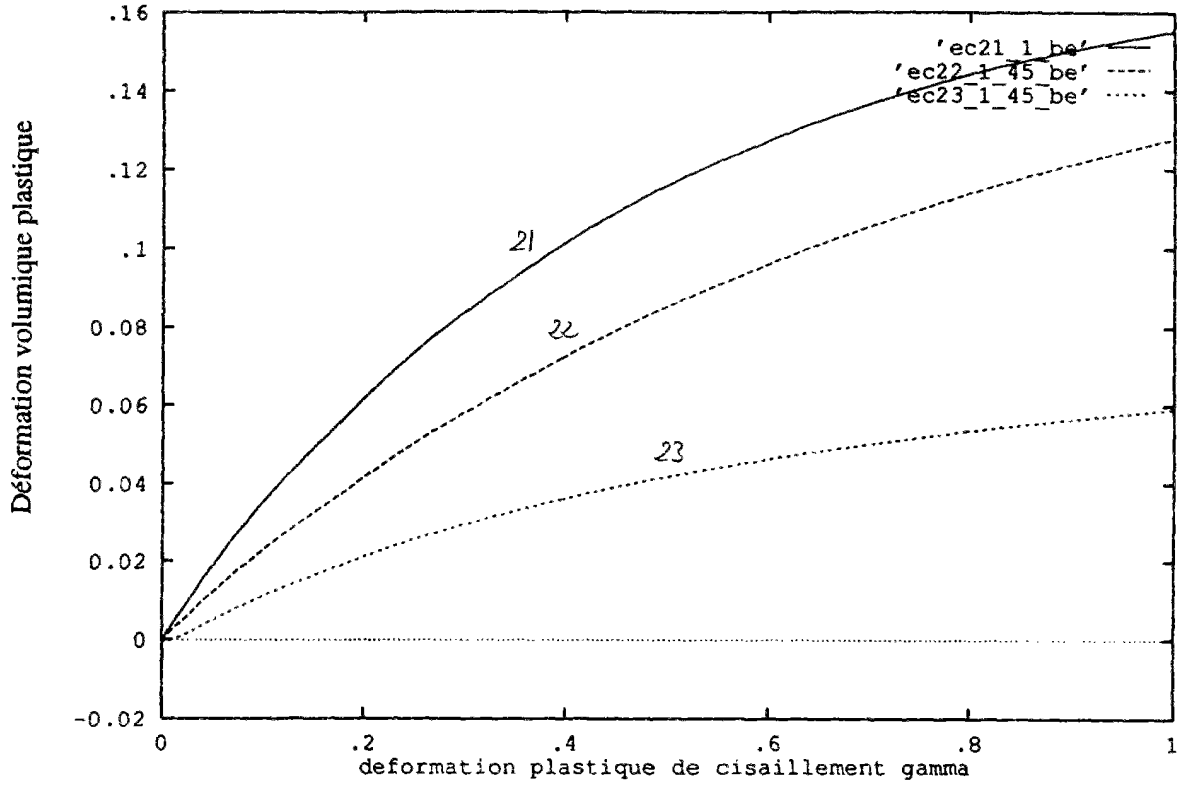


Figure A.9-26: Comparaison de la déformation volumique plastique des modèles 21, 22 et 23

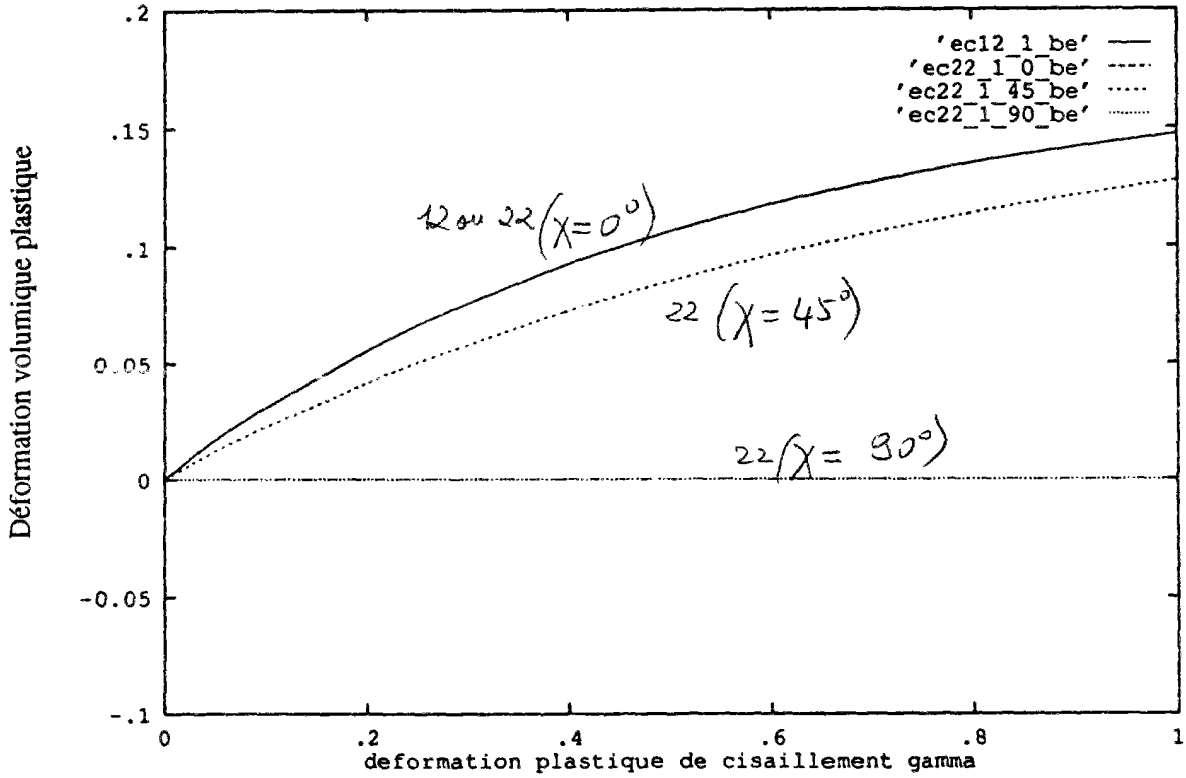


Figure A.9-27 : Influence de l'angle de Cosserat χ
sur la déformation volumique plastique du modèle 22

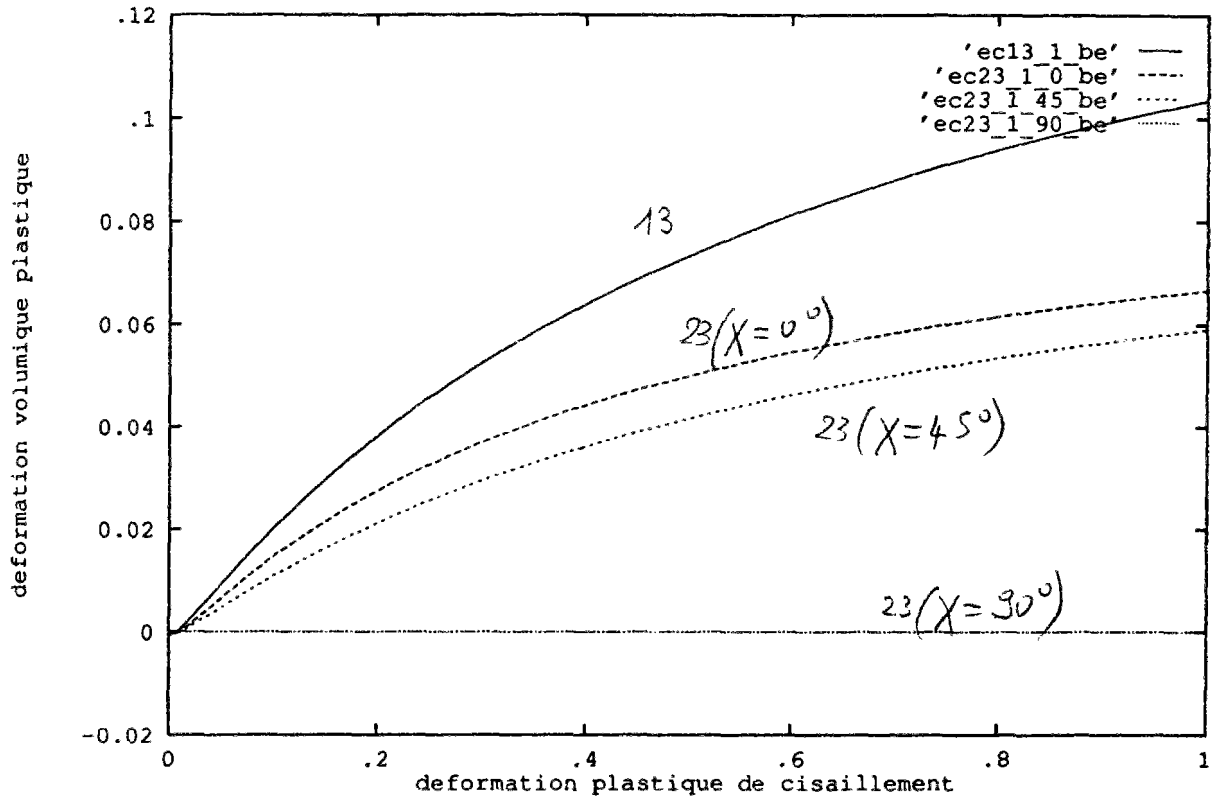


Figure A.9-28 : Influence de l'angle de Cosserat χ
sur la déformation volumique plastique du modèle 23

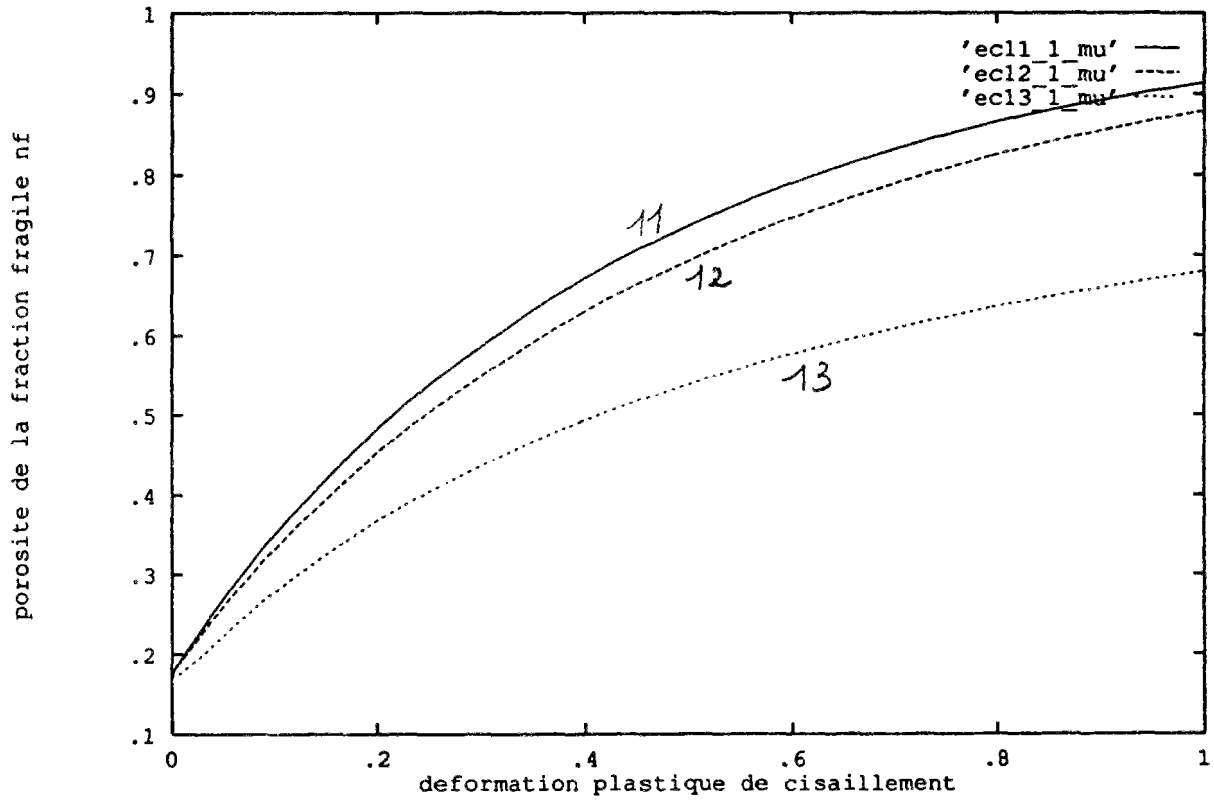


Figure A.9-29 : Evolution de la porosité de la fraction fragile en fonction de la déformation plastique de cisaillement γ_p pour les modèles 11, 12 et 13

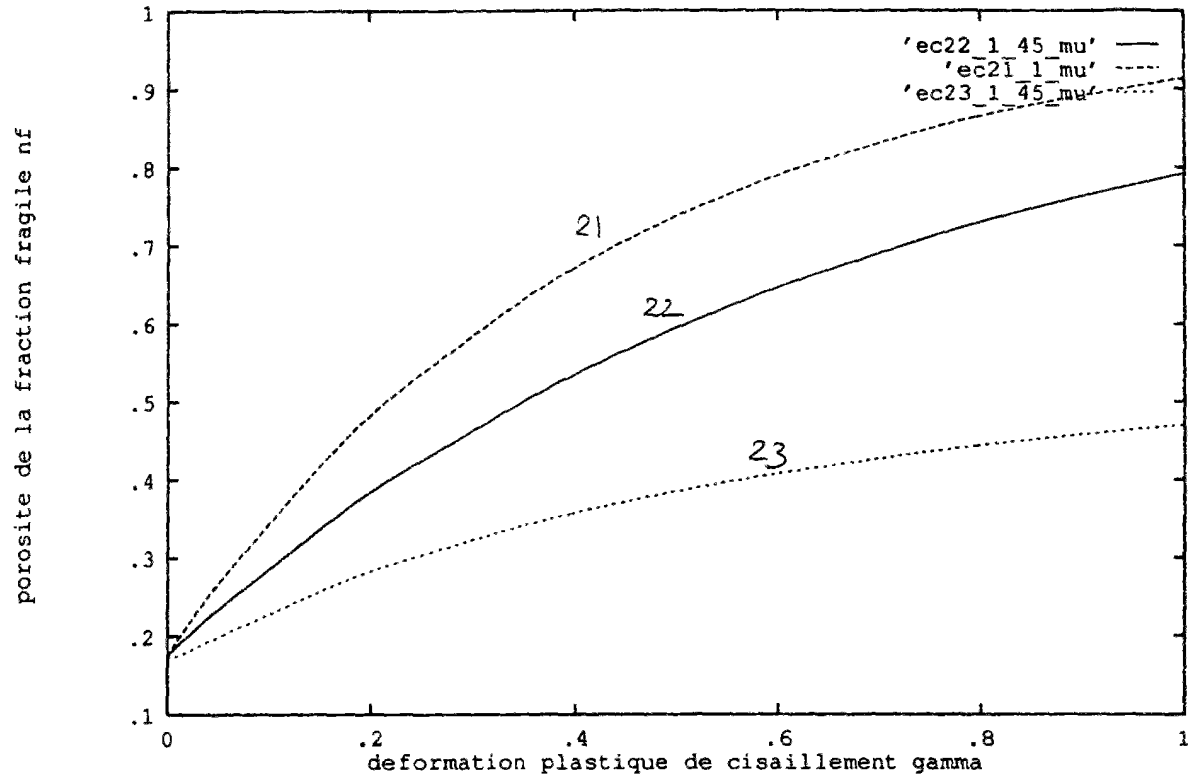


Figure A.9-30 : Evolution de la porosité de la fraction fragile en fonction de la déformation plastique de cisaillement γ_p pour les modèles 21, 22 et 23

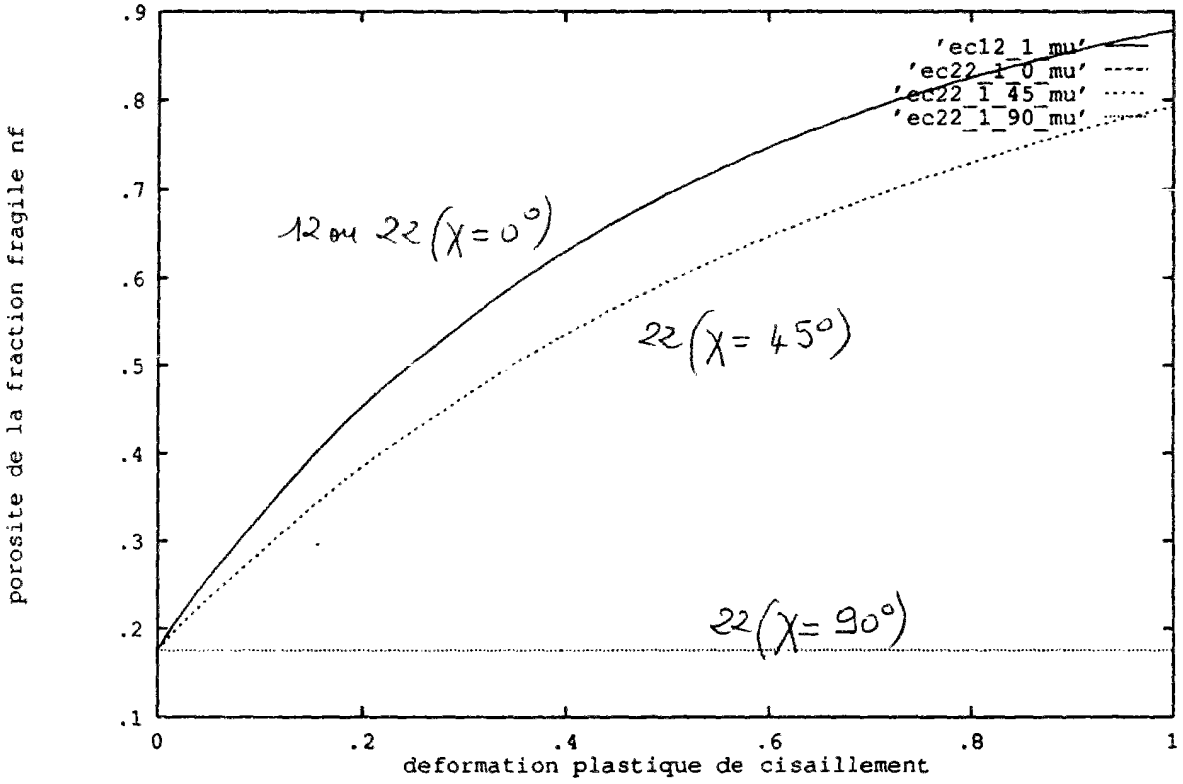


Figure A.9-31 : Influence de l'angle de Cosserat χ
sur la porosité de la fraction fragile pour le modèle quadratique 22

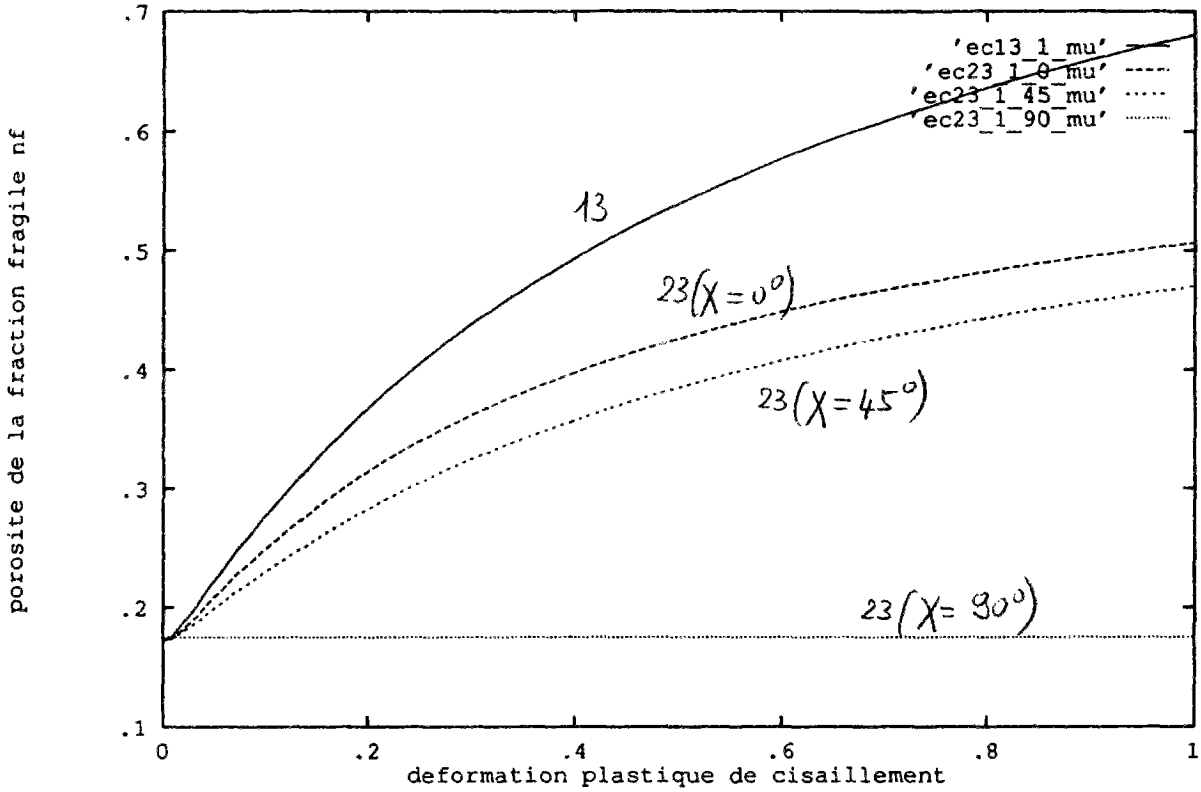


Figure A.9-32 : Influence de l'angle de Cosserat χ
sur la porosité de la fraction fragile pour le modèle quadratique 23

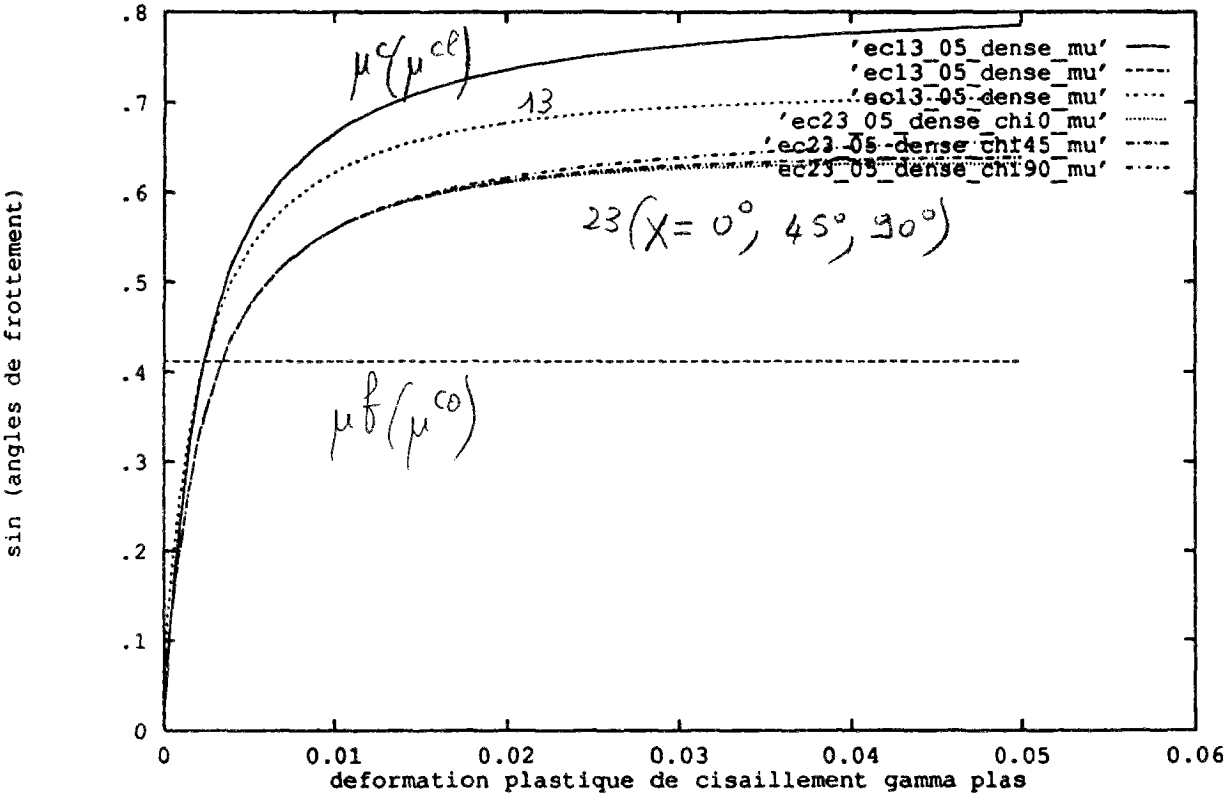


Figure A.9-33 : Evolution des coefficients de frottement des modèles 13 et 23
en fonction de la déformation plastique de cisaillement γ^p
et pour des faibles niveaux de déformations

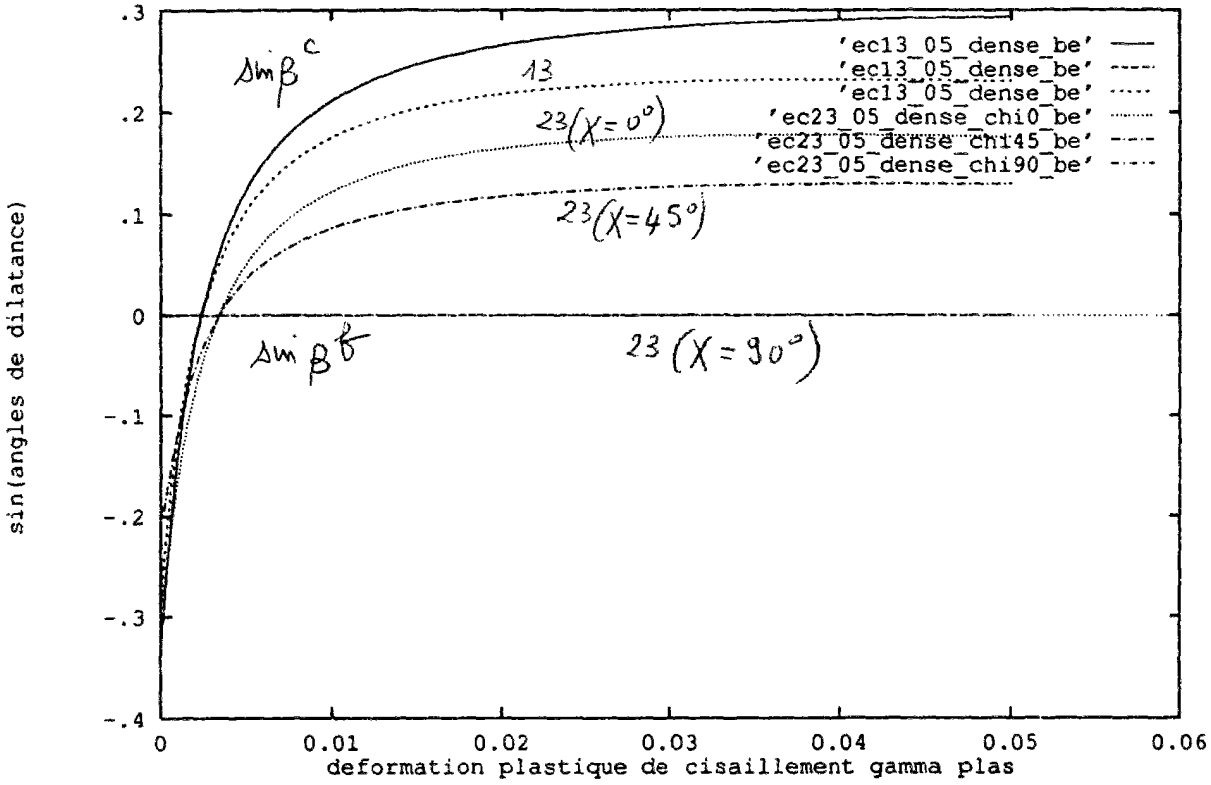


Figure A.9-34 : Evolution des angles de dilatance des modèles 13 et 23
en fonction de la déformation plastique de cisaillement γ^p
et pour des faibles niveaux de déformations

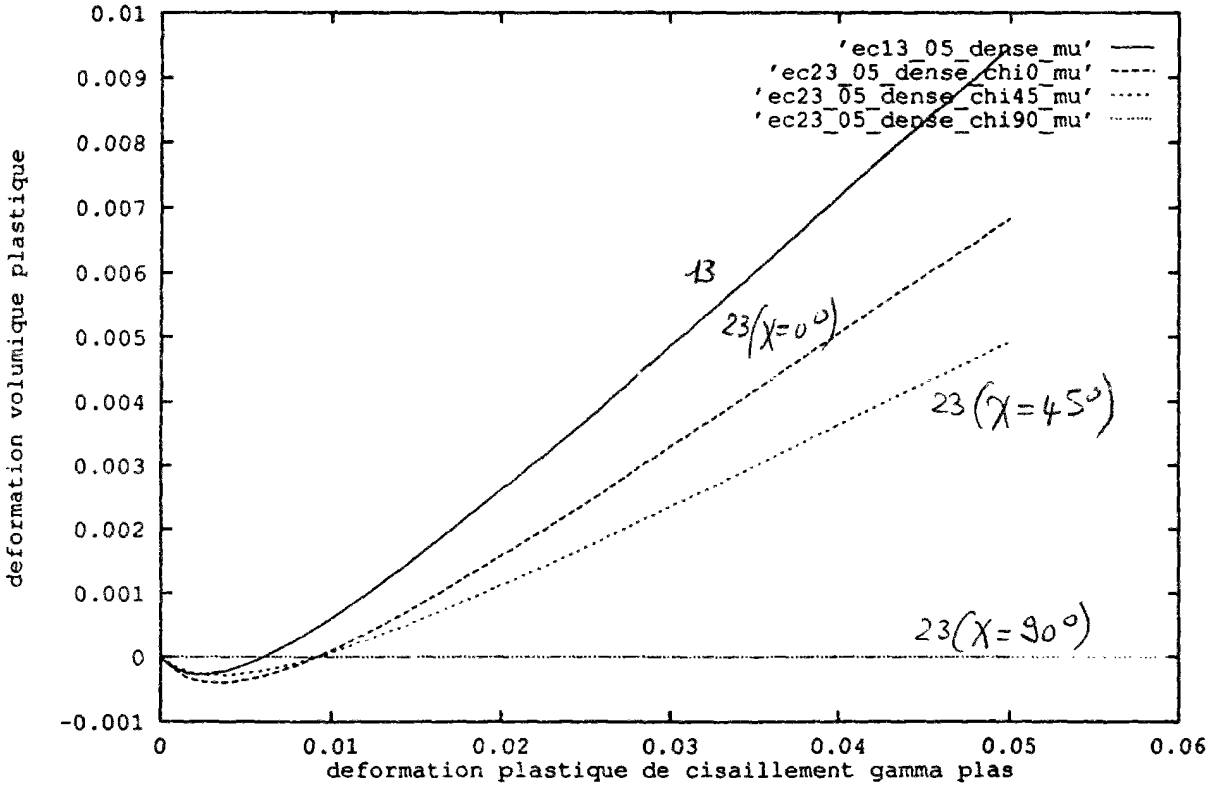


Figure A.9-35 : Evolution de la déformation volumique plastique des modèles 13 et 23
en fonction de la déformation plastique de cisaillement γ^p
et pour des faibles niveaux de déformations

9.4.5 Conclusion sur les modèles de radoucissement basés sur la théorie des mélanges

La théorie des mélanges fournit un cadre général très intéressant dans lequel il est possible de formuler des lois d'écrouissage fondées sur des hypothèses physiques, ce qui est une amélioration par rapport à d'autres méthodes consistant à ajuster des courbes et formules mathématiques en fonction de résultats expérimentaux.

A partir du modèle 1.1, initialement développé par Vardoulakis (1989) pour les milieux continus classiques puis généralisé aux milieux de Cosserat, nous avons développé successivement cinq autres modèles.

Deux d'entre eux, les modèles linéaires 1.2 et 1.3, constituent une amélioration par rapport au modèle 1.1. En effet, dans le modèle 1.1 l'angle de dilatance du mélange est formulé globalement, indépendamment du cadre de la théorie des mélanges. Dans le cas des modèles 1.2 et 1.3, l'angle de dilatance du mélange est formulé à partir des angles de dilatance des deux fractions, de la même manière que l'angle de frottement du mélange.

Les trois autres modèles, dits quadratiques : 2.1, 2.2 et 2.3, sont entièrement nouveaux. Ils constituent une généralisation "faible" aux milieux de Cosserat, alors que les trois modèles linéaires constituent une généralisation "forte". Ils permettent, en se fondant sur des hypothèses physiques simples, d'introduire la notion de re-durcissement. Ces trois modèles permettent de modéliser plus fidèlement le comportement de type Cosserat dans les bandes de cisaillement et les couches d'interface. Ces trois modèles sont consistents dans le cadre de la théorie des mélanges, aussi bien pour l'angle de dilatance que pour l'angle de frottement.

Parmi les six modèles présentées ci-dessus, nous sélectionnons les modèles, linéaire 13 et quadratique 23, comme étant les meilleurs pour modéliser le comportement réel des sables, à des petits et grands niveaux de déformations. Les simulations ont été présentées pour un sable dense et des niveaux de déformations importants, tels que ceux qui sont rencontrés en localisation des déformations aux sein des bandes de cisaillement ou des couches d'interface. Les modèles présentés sont également capables de modéliser le comportement d'un sable lâche ou moyennement dense.

Les figures A.9-33, A.9-34 et A.9-35 présentent des simulations à faible niveau de déformations (5%). L'angle de frottement est en écrouissage positif sur toute la plage étudiée. L'angle de dilatance et la déformations volumique plastique présentent en début de chargement, pour des déformations, inférieures au pour-cent, une petite phase de contractance suivie d'une phase de dilatance. Sur le modèle 23, il convient de noter l'influence très importante de l'angle de Cosserat χ. Si celui-ci est égal à 0°, comme cela se produit sur un chemin de contraintes classique, le modèle quadratique 23 est équivalent au modèle linéaire 13. Si l'angle χ prend des valeurs extrêmes pouvante aller jusqu'à 90°, comme cela peut se produire au sein d'une bande de cisaillement ou une couche d'interface, le comportement sera complètement différent. Ce modèle possède des caractéristiques de type incrémentale, ce qui rend le problème de détermination des paramètres plus compliqué, mais permet d'introduire, de manière simple, la notion de re-durcissement, qui n'a encore jamais été expliquée pour les sables ni modélisée physiquement.

Enfin, la théorie des mélanges permet de faire le lien de manière très intéressante entre le modèle de plasticité à deux critères développé précédemment dans le paragraphe 8 de la partie A et le modèle de plasticité à un critère développé dans ce paragraphe 9. Bien que pouvant apparaître comme tout à fait différents, ils possèdent des points communs, et le lien peut être fait simplement comme nous l'avons mis en évidence dans le cadre de la théorie des mélanges.

10 Formulation de la méthode des éléments finis dans un milieu de Cosserat

10.1 Etude bibliographique

10.1.1 Principe de la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis consiste à résoudre les équations d'équilibre, dans leur formulation faible, avec les équations de comportement et les conditions aux limites, sur un domaine V, discrétisé en N éléments de dimensions finies, appelés éléments finis. Dans le cas d'un problème "unidimensionnel" (toutes les variables cinématiques et statiques ne dépendent que d'une seule variable spatiale), le domaine étudié est un intervalle $[y_0 , y_H]$, qui est divisé en N sous-intervalles.

La solution exacte en déplacements et rotations est approximée sur le domaine V, en construisant une solution approchée à partir des valeurs aux points nodaux et en utilisant des fonctions d'interpolation de type polynomiale.

La solution approchée est construite de manière à minimiser l'énergie du système pour tous les champs de déplacements virtuels considérés. En l'occurrence, on prend pour les fonctions test un nombre fini de variations arbitraires de la solution approchée.

Le choix des variables nodales et des fonctions d'interpolation est primordial, car il détermine la précision et la forme de la solution approchée.

10.1.2 La méthode des éléments finis dans les milieux de Cosserat

La méthode des éléments finis, qui est très utilisée dans les milieux continus classiques pour résoudre numériquement les problèmes aux limites (cf. partie C), peut se généraliser aux milieux continus de Cosserat sans difficulté majeure. Cependant, il convient de faire attention à certains détails dans la formulation. En particulier, l'ordre d'interpolation des différentes variables doit être choisi avec soin, et les vecteurs doivent être généralisés de manière astucieuse afin de retomber sur la formulation classique.

Toutes les simulations par éléments finis de milieux de Cosserat ont été faites jusqu'à présent, en utilisant des éléments Lagrangiens linéaires en déplacements et rotations (Mühlhaus et al., 1991; De Borst 1991; Teichmann, 1994). Pour de tels éléments, le degré d'interpolation des déplacements et rotations est le même, et il est égal à 1. Les déformations symétriques et les courbures sont donc constantes au sein des éléments, tandis que les déformations antisymétriques sont interpolées linéairement. Le travail des efforts intérieurs est composé de termes tels que $\sigma_{ij}^{s}\, d\varepsilon_{ij}^{s}$ et $\mu_{ij}\, d\kappa_{ij}$ qui sont de degré 0, tandis que les termes $\sigma_{ij}^{a}\, d\varepsilon_{ij}^{a}$ sont de degré 2. Pour intégrer exactement les termes de degré 0, un point de Gauss suffit, tandis que pour intégrer les polynômes de degré 2, il en faut 2. Le choix d'une intégration avec seulement un point de Gauss permet de réaliser une sous-intégration, qui se révèle être sélective, et permet, a posteriori, de régler numériquement le problème des ordres d'interpolation des déplacements et rotations. Cependant, ce type d'élément n'est pas précis puisque les contraintes et couples contraintes sont constants par élément. Pour capturer et modéliser une couche d'interface ou une bande de cisaillement d'épaisseur 20 R, au sein d'un échantillon d'épaisseur 200 R, par exemple, il conviendra de prendre au minimum 20 éléments à l'intérieur de la zone localisée et plusieurs dizaines jusqu'à une centaine à l'extérieur. Nous avons fait le choix dans cette thèse, d'utiliser des éléments de grande précision, et avons pour cela, formuler plusieurs nouveaux éléments. Après comparaison, nous avons sélectionné un élément Hermitien pour les déplacements et Lagrangien pour les rotations.

Cet élément Hermitien-Lagrangien possède une excellente précision numérique, quand on le teste par rapport à des solutions analytiques élastiques, dans des cas extrêmes avec de forts gradients, et en utilisant peu d'éléments et un maillage régulier (cf. paragraphe 11, partie A).

L'intégration de Gauss est faite sans avoir recours à une sous-intégration, puisque ce type d'élément est très stable numériquement. Trois points de Gauss sont utilisés. La précision sur l'épaisseur d'une couche d'interface ou une bande de cisaillement s'estime à partir du nombre de points de Gauss, puisque ces zones localisées sont plastiques. La précision est définie par la distance entre deux points de Gauss. Un élément Hermitien-Lagrangien à 3 points de Gauss est donc équivalent de ce point de vue là à 3 éléments Lagrangiens linéaires. En terme de degrés de liberté, un élément Hermitien-Lagrangien possède 11 degrés tandis que trois éléments Lagrangiens linéaires en possèdent 12. Le nouvel élément Hermitien-Lagrangien est donc plus précis pour la solution numérique globale ainsi pour l'épaisseur de la couche d'interface, tout en étant moins coûteux en temps de calcul, puisqu'il utilise moins de degrés de liberté.

10.2 Choix des variables nodales et du type d'élément

10.2.1 Conditions de continuité

En tout point, il faut assurer au minimum :

(1) la continuité des déplacements U_1 et U_2 pour le cisaillement simple plan (CSP) et U_r et U_θ pour le cisaillement simple annulaire (CSA), ce qui traduit l'hypothèse d'un milieu continu;

(2) la continuité du vecteur contrainte sur toute facette parallèle à l'interface, c'est à dire la continuité du vecteur $\{\sigma_{12}\ ,\ \sigma_{22}\ \}$ pour le CSP et du vecteur $\{\sigma_{rr}\ ,\ \sigma_{\theta r}\ \}$ pour le CSA, ce qui traduit le principe d'action-réaction;

(3) la continuité du vecteur couple contrainte sur toute facette parallèle à l'interface, c'est à dire la continuité du vecteur $\{\ 0\ ,\ \mu_{32}\ \}$ pour le CSP et du vecteur $\{\mu_{zr}\ ,\ 0\ \}$ pour le CSA, ce qui traduit ici encore le principe d'action-réaction (les couples contraintes comme les moments de flexion proviennent d'une distribution non uniforme, sur un volume élémentaire, des contraintes normales, qui sont elles-mêmes continues).

On peut remarquer que la continuité de la rotation de Cosserat ω_3^c n'est pas obligatoire d'un point de vue physique. Notamment, entre deux zones de matériaux avec des comportements différents, elle peut être discontinue. Cependant, à l'intérieure d'une zone élastique par exemple, pour assurer des couples contraintes finis, il est nécessaire d'avoir des rotations continues, ce qui assure des courbures finies, et donc des couples contraintes finis.

La continuité des dérivées des déplacements n'est pas obligatoires. Cependant, pour assurer la continuité des contraintes au sein d'une zone de même comportement, il faut assurer la continuité des déformations symétriques et donc des dérivées premières des déplacements.

De même, la continuité des dérivées des rotations n'est pas obligatoires. Cependant, pour assurer la continuité du couple contrainte μ_{32} au sein d'une zone de même comportement, élastique par exemple, il faut assurer la continuité de la dérivée première de ω_3^c et donc de la courbure.

Si l'on désirait satisfaire à toutes ces conditions de continuité : déplacements U_1 et U_2, dérivées premières de U_1 et U_2, rotation ω_3^c , dérivée première de la rotation ω_3^c, il faudrait formuler des éléments Hermitien avec continuité C^1 des déplacements et des rotations aux noeuds. Cependant, le problème est plus complexe puisqu'il faut interpoler les rotations avec des polynômes ayant un degré de moins que les déplacements. Il en résulterait des éléments Hermitiens C^2 en déplacements et C^1 en rotations.

Or, les simulations pour ce type d'élément, montrent que la précision gagnée par une telle approche, au prix d'une complexité importante, est en fait perdue car on force des polynômes de degrés élevés à s'adapter à des conditions trop strictes. Les éléments Hermitiens sont trop raides. Des oscillations au sein des éléments en résultent et font perdre le degré de précision de tels éléments.

Il est nécessaire de reformuler le problème de manière plus faible. Des conditions précédentes, on gardera, cependant, la condition minimale de continuité des déplacements U_1 et U_2 pour le CSP et U_r et U_θ pour le CSA puisque le milieu de Cosserat est continu. De plus, on assurera la continuité de la rotation ω_3^c pour le CSP, et de la rotation ω_z^c pour le CSA, afin d'assurer une énergie de courbure finie dans le travail des efforts intérieurs. Ce sont les conditions strictement nécessaires à respecter physiquement.

Dans la suite, toutes les expressions seront calculées pour le cas du CSP. Le cas du CSA étant obtenu à partir du cas du CSA par la transformation : 1 => r, 2 = > θ, y = >y

10.2.2 Ordres d'interpolations des différentes variables

L'application du principe des puissances virtuelles permet de définir les déformations généralisées à partir des déplacements et rotations. En particulier, les déformations symétriques et antisymétriques ainsi que les courbures sont définies par :

$$\varepsilon_{ij}^{s} = \left(U_{i,j} + U_{j,i}\right)/2 \qquad \text{(A.10-1)}$$

$$\varepsilon_{ij}^{a} = \left(U_{i,j} - U_{j,i}\right)/2 - \omega_{ij}^{c} \qquad \text{(A.10-2)}$$

$$\kappa_{ij} = \omega_{i,j}^{c} \qquad \text{(A.10-3)}$$

Pour avoir une bonne estimation des déformations antisymétriques, il importe d'approximer les rotations avec la même précision, et donc le même degré, que les dérivées premières des déplacements. Si p est le degré des polynômes d'interpolation des déplacements, les rotations seront interpolées avec des polynômes de degré p-1, tandis que les courbures le seront avec des polynômes de degré p-2.

Tableau A.10-1 : Degré des polynômes d'interpolation
obtenus à partir de l'expression du travail des efforts intérieurs

Variables cinématiques	Degrés des polynômes d'interpolation
déplacements	p
dérivées des déplacements rotations de Cosserat	p-1
courbures (dérivées des rotations)	p-2

Le travail des efforts intérieurs est donné par l'expression suivante :

$$dW^{(i)} = \int_V \left(\sigma_{ij}^{s}\, d\varepsilon_{ij}^{s} + \sigma_{ij}^{a}\, d\varepsilon_{ij}^{a} + \kappa_{ij}\, d\mu_{ij}\right) dV \qquad \text{(A.10-4)}$$

Pour que l'énergie associée à chacun des termes dans l'intégrale soit bornée, il est nécessaire que les dérivées des déplacements et rotations restent bornées afin qu'aucune énergie ne soit dissipée aux interfaces entre éléments. Ceci implique que le degré p-2 d'interpolation des courbures doit être au moins égal à 0. Au minimum, il convient donc d'assurer la continuité des rotations et de les interpoler avec des fonctions linéaires. Ceci engendre des courbures constantes par éléments mais discontinues d'un élément à l'autre. Les couples contraintes sont alors constants par éléments et discontinus d'un élément à l'autre.

10.2.2.1 Elément Lagrangien minimal

Au minimum, il faut un élément Lagrangien quadratique en déplacements (3 noeuds pour les déplacements) et linéaire en rotations (2 noeuds) (tableau A.10-2).

Tableau A.10-2 : Elément Lagrangien minimal

élément i = 1 à N

y_1 noeud extrême 2 i - 2		y_2 noeud médian 2 i - 1		y_3 noeud extrême 2 i	
variable nodale	numéro degré de liberté	variable nodale	numéro degré de liberté	variable nodale	numéro degré de liberté
$U_1(y_1)$	5(i-1)+0	$U_1(y_2)$	5(i-1)+3	$U_1(y_3)$	5(i-1)+5
$U_2(y_1)$	5(i-1)+1	$U_2(y_2)$	5(i-1)+4	$U_2(y_3)$	5(i-1)+6
$R\omega_3^c(y_1)$	5(i-1)+2			$R\omega_3^c(y_3)$	5(i-1)+7

Pour un tel élément, les courbures et les couples contraintes sont constants par éléments, ce qui peut poser un problème pour les milieux de Cosserat. En effet, pour assurer l'équilibre d'un volume élémentaire de sol considéré comme un "solide", soumis à des "forces" et "moments de flexion", il faut absolument prendre en compte, à l'échelle de l'élément, le gradient des couples contraintes et supposer que les contraintes sont, par contre, constantes (cf. annexe A-7). Il est donc important, au niveau d'un élément, de laisser la liberté au couple contrainte de varier à l'intérieur. Avec l'élément Lagrangien précédemment décrit, le maillage doit être plus fin que la longueur interne puisque les couples contraintes se dissipent sur quelques longueurs internes. Le coût en éléments est donc très important.

Pour laisser aux couples contraintes la possibilité de varier au sein d'un élément, il convient d'avoir des dérivées de rotations approximées par des polynômes de degré au moins 1, des rotations et dérivées de déplacements approximées par des polynômes de degrés au moins 2 et des déplacements de degrés 3. Deux choix sont alors possibles : (1) garder des éléments Lagrangiens et augmenter le nombre de noeuds, ou (2) garder le même nombre de noeuds et augmenter les degrés de liberté par noeuds, en considérant les dérivées par exemple, ce qui conduit à utiliser des éléments Hermitiens. Les deux solutions ont été testées.

Tableau A.10-3 : Degrés des polynômes d'interpolation pour l'élément Lagrangien minimal

Variables cinématiques	Degrés des polynômes d'interpolation	Variables statiques (en élasticité)
déplacements U_1 et U_2	2	
dérivées des déplacements U_1 et U_2 rotation ω_3^c déformations ε_{ij}	1	contraintes symétriques et antisymétriques
courbure κ_{ij} (dérivée de la rotation)	0	couples contraintes

Tableau A.10-4 : Continuité des différentes variables pour l'élément Lagrangien minimal

Variables cinématiques	Continuité	Variables statiques (en élasticité)
déplacements U_1 et U_2	C^0	
dérivées des déplacements U_1 et U_2 déformations ε_{ij} rotation ω_3^c	discontinues C^0	contraintes symétriques et antisymétriques
courbure κ_{ij} (dérivée de la rotation)	discontinues (constants par morceaux)	couple contrainte

10.2.2.2 Elément Lagrangien amélioré

L'élément Lagrangien le plus simple, qui permet d'avoir un couple contrainte non constant à l'intérieur d'un élément, est cubique à 3 noeuds équidistants pour les déplacements, et quadratique à 2 noeuds pour la rotation. Avec un tel choix, la continuité des déplacements et rotations est satisfaite. Par contre, la continuité des vecteurs contraintes et couples contraintes n'est pas respectée.

Tableau A.10-5 : Elément Lagrangien amélioré

<table>
<tr><td colspan="10">élément i = 1 à N</td></tr>
<tr><td colspan="2">noeud extrême y_1</td><td colspan="2">noeud y_2</td><td colspan="2">noeud y_3</td><td colspan="2">noeud y_4</td><td colspan="2">noeud extrême y_5</td></tr>
<tr><td>$U_1(y_1)$</td><td>8i-8</td><td>$U_1(y_2)$</td><td>8i-5</td><td>$R\omega_3^c$ (y_3)</td><td>8i-3</td><td>$U_1(y_4)$</td><td>8i-2</td><td>$U_1(y_5)$</td><td>8i</td></tr>
<tr><td>$U_2(y_1)$</td><td>8i-7</td><td>$U_2(y_2)$</td><td>8i-4</td><td colspan="2"></td><td>$U_2(y_4)$</td><td>8i-1</td><td>$U_2(y_5)$</td><td>8i+1</td></tr>
<tr><td>$R\omega_3^c$ (y_1)</td><td>8i-6</td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td>$R\omega_3^c$ (y_5)</td><td>8i+2</td></tr>
</table>

Par noeud extrême, il y a 3 degrés de liberté, par noeud médian en déplacements, il y a 2 degrés de liberté, par noeud médian en rotation, il y a 1 degré de liberté. Par élément, il y a donc 11 degrés de liberté et globalement, cela donne 8 N + 3 degrés de liberté ou variables nodales.

Tableau A.10-6 : Degrés des polynômes d'interpolation pour l'élément Lagrangien amélioré

Variables cinématiques	Degrés d'interpolation	Variables statiques (en élasticité)
déplacements U_1 et U_2	3	
dérivées des déplacements U_1 et U_2 rotation ω_3^c déformations ε_{ij}	2	contraintes symétriques et antisymétriques
courbure κ_{ij} (dérivée de la rotation)	1	couples contraintes

Tableau A.10-7 : Continuité des différentes variables pour l'élément Lagrangien amélioré

Variables cinématiques	Continuité	Variables statiques (en élasticité)
déplacements U_1 et U_2	C^0	
dérivées des déplacements U_1 et U_2 déformations ε_{ij}	discontinues (quadratiques par morceaux)	contraintes symétriques et antisymétriques
rotation ω_3^c	C^0	
courbure κ_{32} (dérivée de la rotation)	discontinue (linéaire par morceaux)	couple contrainte

10.2.2.3 Elément Hermitien-Lagrangien

Si l'on veut augmenter le degré des polynômes d'interpolation mais conserver le même nombre de noeuds, on est conduit à utiliser des éléments de type Hermite, c'est à dire pour lesquels les dérivées des variables sont prises comme variables nodales. L'élément de type Hermite, équivalent, d'un point de vue du degré d'interpolation, avec l'élément de type Lagrange amélioré, est un élément combinant un élément Hermitien cubique C^1 pour les déplacements (2 noeuds extrêmes avec les déplacements et leurs dérivées comme variables nodales) et un élément Lagrangien quadratique C^0 pour les rotations (3 noeuds équidistants avec les rotations comme variables nodales).

Tableau A.10-8 : Degrés des polynômes d'interpolation pour l'élément Hermitien-Lagrangien

Variables cinématiques	Degrés d'interpolation	Variables statiques (en élasticité)
déplacements U_1 et U_2	3	
dérivées des déplacements U_1 et U_2 rotation ω_3^c déformations ε_{ij}	2	contraintes symétriques et antisymétriques
courbure κ_{32} (dérivée de la rotation)	1	couple contrainte

Avec un tel choix, on satisfait la continuité des déplacements et rotations, des dérivées des déplacements et donc des contraintes symétriques et antisymétriques, du moins en élasticité. Par contre, la continuité du vecteur couple contrainte n'est pas respectée. C'est le meilleur compromis que l'on puisse faire au niveau complexité et coût de calcul pour un élément de type Hermite en déplacement.

Tableau A.10-9 : Continuité des différentes variables pour l'élément Hermitien-Lagrangien

Variables cinématiques	Continuité	Variables statiques (en élasticité)
déplacements U_1 et U_2	C^1	
dérivées des déplacements U_1 et U_2 rotation ω_3^c déformations ε_{ij}	C^0	contraintes symétriques et antisymétriques
courbure κ_{32} (dérivée de la rotation)	discontinues (linéaire par morceaux)	couples contraintes

Tableau A.10-10 : Elément Hermitien-Lagrangien

y_1 noeud extrême 2 i - 2		y_3 noeud médian 2 i - 1		y_2 noeud extrême 2 i	
variable nodale	numéro degré de liberté	variable nodale	numéro degré de liberté	variable nodale	numéro degré de liberté
$U_1(y_1)$	6(i-1)+0	$R\omega_3^c(y_3)$	6(i-1)+5	$U_1(y_2)$	6(i-1)+6
$\frac{\partial U_1}{\partial y}(y_1)$	6(i-1)+1			$\frac{\partial U_1}{\partial y}(y_2)$	6(i-1)+7
$U_2(y_1)$	6(i-1)+2			$U_2(y_2)$	6(i-1)+8
$\frac{\partial U_2}{\partial y}(y_1)$	6(i-1)+3			$\frac{\partial U_2}{\partial y}(y_2)$	6(i-1)+9
$R\omega_3^c(y_1)$	6(i-1)+4			$R\omega_3^c(y_2)$	6(i-1)+10

On a donc, par noeud extrême, 5 degrés de liberté, par noeud médian, 1 degré de liberté, par élément, 11 degrés de liberté. Pour N éléments, on aura donc N+1 noeuds extrêmes et N noeuds médians, ce qui donne globalement 6 N + 5 degrés de liberté ou variables nodales. Des éléments isoparamétriques, c'est à dire pour lesquels les fonctions d'interpolation et les fonctions de forme sont les mêmes, seront utilisés.

10.2.3 Limites d'un schéma d'interpolation polynomial

Les ordres respectifs des polynômes d'interpolation entre les différentes variables cinématiques ont été choisis en considérant uniquement la formulation faible du problème aux limites, c'est à dire le principe des puissances virtuelles (tableau A.10-11). Si l'on s'intéresse aux équations d'équilibre (formulation forte du problème), on peut observer que les contraintes symétriques et antisymétriques doivent être interpolées avec le même degré d'interpolation puisqu'elles interviennent dans la même équation d'équilibre :

$$\mathrm{div}\left(\sigma_{ij}^{s}+\sigma_{ij}^{a}\right)=0 \qquad \text{(A.10-5)}$$

Par contre, les couples contraintes doivent être interpolés avec un degré de plus puisque leurs dérivées sont directement reliées aux contraintes antisymétriques par les équations d'équilibre :

$$\mathrm{div}(\mu_{ij}) - 2\,\sigma_i^a = 0 \qquad \text{(A.10-6)}$$

Tableau A.10-11 : Degrés d'interpolation pour les variables statiques (formulation forte et comportement élastique)

Variables statiques	Degré des polynômes d'interpolation
contraintes symétriques et antisymétriques	q-1
couples contraintes	q

Les relations de comportement élastique imposent à des polynômes de degré q d'être égaux à des polynômes de degré p-2, tandis que des polynômes de degré q-1 doivent être égaux à des polynômes de degré p-1. Il y a là, en quelque sorte, une incompatibilité qui provient de ce que la solution exacte est formée d'un polynôme de degré 1 (solution classique) plus deux termes en exponentielle (nouveaux termes de Cosserat). La formulation forte impose, en quelque sorte, des conditions trop fortes pour la solution approchée. Elle impose à la solution approchée de vérifier exactement les équations d'équilibre, ce qui n'est pas le but recherché. La solution approchée est une solution, qui est la meilleure d'un point de vue énergétique (formulation faible), mais pour laquelle, les contraintes trouvées ne vérifient pas les équations d'équilibre de manière exacte (formulation forte).

10.2.4 Définition du vecteur généralisé des déplacements

D'un point de vue mécanique, il est intéressant de définir un vecteur généralisé des déplacements, ce qui permet d'obtenir une formulation de la méthode des éléments finis dans les milieux de Cosserat très similaire aux milieux classiques.

Pour le cisaillement simple plan (CSP), le vecteur généralisé des déplacements est pris égal à:

$$\{U(y)\} = \{\, U_1(y)\,,\, U_2(y)\,,\, R\,\omega_3^c(y) \,\} \qquad \text{(A.10-7)}$$

où la rotation de Cosserat a été normalisée par la longueur interne R.

De plus, dans le cadre de la formulation par éléments finis avec des éléments Hermitiens, il est intéressant d'y incorporer les dérivées des déplacements et de la rotation, ce qui donne pour le CSP :

$$\{U(y)\} = \{\, U_1(y)\,,\, \partial U_1/\partial y(y)\,,\, U_2(y)\,,\, \partial U_2/\partial y(y)\,,\, R\omega_3^c(y)\,,\, \partial R\omega_3^c/\partial y(y) \,\} \qquad \text{(A.10-8)}$$

Pour le cisaillement simple annulaire (CSA), le vecteur généralisé des déplacements est pris égal à :

$$\{U(r)\} = \{\, U_r(r)\,,\, U_\theta(r)\,,\, R\,\omega_z^c(r) \,\} \qquad \text{(A.10-9)}$$

De plus, dans le cadre de la formulation par éléments finis avec des éléments Hermitiens, on y incorpore les dérivées des déplacements et de la rotation, ce qui donne pour le CSA :

$$\{U(r)\} = \{\, U_r(r)\,,\, \partial U_r/\partial r(r)\,,\, U_\theta(r)\,,\, \partial U_\theta/\partial r(r)\,,\, R\omega_z^c(r)\,,\, \partial R\omega_z^c/\partial r(r) \,\} \qquad \text{(A.10-10)}$$

Avec un tel choix pour les vecteurs généralisés des déplacements, on obtient une matrice déplacements-déformations, notée [B] , qui est un opérateur linéaire au lieu d'être un opérateur différentiel :

$$\{\varepsilon(y)\} = [B]\,\{U(y)\} \qquad \text{(A.10-11)}$$

On considère donc un vecteur généralisé des déplacements {U(y)} ou {U(r)}, qui comporte les déplacements et la rotation ainsi que leurs dérivées premières.

Le vecteur des déformations {ε} est lui aussi généralisé en y incorporant le terme de courbure après l'avoir normalisé. Pour le CSP, on prendra {ε} égal à :

$$\{\varepsilon\} = \{\ \varepsilon_{11}\ ,\ \varepsilon_{22}\ ,\ \varepsilon_{12}\ ,\ \varepsilon_{21}\ ,\ R\,\kappa_{32}\ \} \qquad \text{(A.10-12)}$$

Pour le CSA, on prendra {ε} égal à :

$$\{\varepsilon\} = \{\ \varepsilon_{rr}\ \varepsilon_{\theta\theta}\ ,\ \varepsilon_{r\theta}\ ,\ \varepsilon_{\theta r}\ ,\ R\,\kappa_{zr}\ \} \qquad \text{(A.10-13)}$$

La matrice [B], pour le CSP, est alors égale à :

$[B]_{5x6} =$

			1		
	1			1/R	
				-1/R	
					1

(A.10-14)

puisque :

$$\varepsilon_{11} = 0 \qquad \text{(A.10-15)}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial U_2}{\partial y} \qquad \text{(A.10-16)}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\partial U_1}{\partial y} + (R\omega_3^c) / R \qquad \text{(A.10-17)}$$

$$\varepsilon_{21} = -\,(R\omega_3^c) / R \qquad \text{(A.10-18)}$$

$$R\,\kappa_{32} = \frac{\partial (R\omega_3^c)}{\partial y} \qquad \text{(A.10-19)}$$

tandis que, pour le CSA, elle est égale à :

$[B]_{5x6} =$

	1				
1/r			1		
		-1 / r		+1/R	
			1	-1/R	
					1

(A.10-20)

Les déformations généralisées sont égales à :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{dU_r}{dr} \tag{A.10-21}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{U_r}{r} \tag{A.10-22}$$

$$\varepsilon_{r\theta} = -\frac{U_\theta}{r} + \omega_z^c \tag{A.10-23}$$

$$\varepsilon_{\theta r} = \frac{dU_\theta}{dr} - \omega_z^c \tag{A.10-24}$$

$$R\kappa_{zr} = \frac{dR\omega_z^c}{dr} \tag{A.10-25}$$

et

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{r\theta}, \varepsilon_{\theta r}, R\,\kappa_{zr}\} \tag{A.10-26}$$

10.3 Formulation de l'élément Hermitien-Lagrangien

10.3.1 Eléments réels et élément de référence

10.3.1.1 Vecteur élémentaire des variables nodales d'un élément réel

Les variables nodales pour les noeuds extrêmes sont : les déplacements U_1 , U_2 et leurs dérivées premières $\frac{\partial U_1}{\partial y}$, $\frac{\partial U_2}{\partial y}$, la rotation de Cosserat ω_3^c , et, pour le noeud médian, la rotation de Cosserat ω_3^c .

Le vecteur $\{U_y\}_{elt}$ formé des 11 variables nodales de l'élément réel numéroté elt est le vecteur élémentaire des variables nodales de l'élément réel considéré :

$$\{U_y\}_{elt} = \{\, U_1(y_1)\,,\, \partial U_1/\partial y(y_1)\,,\, U_2(y_1)\,,\, \partial U_2/\partial y(y_1)\,,\, R\omega_3^c(y_1)\,,\, R\omega_3^c(y_3)\,, \tag{A.10-27}$$
$$U_1(y_2)\,,\, \partial U_1/\partial y(y_2)\,,\, U_2(y_2)\,,\, \partial U_2/\partial y(y_2)\,,\, R\omega_3^c(y_2)\,\}$$

L'assemblage des vecteurs élémentaires des variables nodales permet de constituer un vecteur global $\{U_y\}_G$, de taille 6N+5, dans lequel les variables nodales sont ordonnées suivant le tableau A.10-12.

Tableau A.10-12 : Composition du vecteur global des variables nodales

Numéro du degré de liberté $j = 0$ à N $0 \le i \le 6N + 4$	Variables nodale	Noeud $0 \le k \le 2N$
$i = 6j + 0$	U_1	noeud $k = 2j$
$i = 6j + 1$	$\frac{\partial U_1}{\partial y}$	
$i = 6j + 2$	U_2	
$i = 6j + 3$	$\frac{\partial U_2}{\partial y}$	
$i = 6j + 4$	$R\omega_3^c$	
$i = 6j + 5$	$R\omega_3^c$	noeud $k = 2j + 1$

Le vecteur élémentaire $\{U_y\}_{elt}$ des 11 variables nodales d'un élément réel numéroté elt, est obtenu en extrayant du vecteur global $\{U_y\}_G$ les variables concernées à l'aide d'une matrice d'extraction $[A]_{elt}$ de taille 11 par 6N+5 et telle que :

$$\{U_y\}_{elt} = [A]_{elt} \{U_y\}_G \qquad \text{(A.10-28)}$$

10.3.1.2 Elément de référence

Tous les éléments réels peuvent être mis en correspondance avec un élément de référence, l'intervalle [-1 , +1], moyennant une transformations géométrique $\mathcal{J}$.

10.3.1.2.1 Définition

L'élément de référence est l'intervalle : $\xi \in [-1 , +1]$.

Les éléments réels sont du type : $y \in [y_1 , y_2]$ avec un point médian y_3 .

10.3.1.2.2 Transformation géométrique

Entre l'élément de référence : $\xi \in [-1 , +1]$ et les éléments réels qui sont du type : $y \in [y_1 , y_3]$, on introduit la transformation géométrique $\mathcal{J}$ suivante :

$$\mathcal{J}\ \xi \in [-1 , +1] \text{ ------> } y(\xi) \text{ avec } y \in [y_1 , y_2] \qquad \text{(A.10-29)}$$

Les conditions à respecter pour la transformation géométrique sont :

$$y(\xi = -1) = y_1 \qquad \text{(A.10-30)}$$

$$y(\xi = 0) = y_3 \qquad \text{(A.10-31)}$$

$$y(\xi = +1) = y_2 \qquad \text{(A.10-32)}$$

avec :

$$y_1 < y_3 < y_2 \qquad \text{(A.10-33)}$$

10.3.1.2.3 Vecteur généralisé des déplacements

Comme le vecteur généralisé des déplacements $\{U(y)\}$ contient des dérivées de variables cinématiques, le vecteur généralisé des déplacements $\{U(\xi)\}$, correspondant sur l'élément de référence, est différent.

Le vecteur généralisé des déplacements $\{U(\xi)\}$ de l'éléments de référence est :

$$\{U(\xi)\} = \{ U_1(\xi) , \partial U_1 / \partial\xi(\xi) , U_2(\xi) , \partial U_2 / \partial\xi(\xi) , R\omega_3^c(\xi) , \partial R\omega_3^c / \partial\xi(\xi) \} \quad \text{(A.10-34)}$$

Il est relié au vecteur généralisé des déplacements réels par la matrice de transformation $[T_6(\ell)]$:

$$\{U(y)\} = [T_6(\ell)] \{U(\xi)\} \quad \text{(A.10-35)}$$

La matrice $[T_6(\ell)]$ est calculée à partir de la transformation géométrique $\mathcal{T}$.

10.3.1.2.4 Vecteur élémentaire des variables nodales

Sur l'élément de référence, on introduit le vecteur élémentaire des variables nodales $\{U_\xi\}_{elt}$ qui diffère du vecteur élémentaire des variables nodales de l'élément réel $\{U_y\}_{elt}$ puisqu'ils contiennent tous les deux des dérivées :

$$\{U_\xi\}_{elt} = \{ U_1(\xi_1) , \partial U_1 / \partial\xi(\xi_1) , U_2(\xi_1) , \partial U_2 / \partial\xi(\xi_1) , R\omega_3^c(\xi_1) , R\omega_3^c(\xi_3) , \quad \text{(A.10-36)}$$
$$U_1(\xi_2) , \partial U_1 / \partial\xi(\xi_2) , U_2(\xi_2) , \partial U_2 / \partial\xi(\xi_2) , R\omega^c(\xi_2) \}$$

Il en résulte que les fonctions d'interpolation sur les éléments réels $N_i(y)$ et sur l'élément de référence $N_i(\xi)$ sont différentes. Les premières dépendent de la taille des éléments (longueurs ℓ) tandis que les secondes n'en dépendent pas.

10.3.2 Fonctions d'interpolation sur l'élément de référence

10.3.2.1. Schéma d'interpolation

Le vecteur élémentaire des variables nodales de l'élément de référence est égale à :

$$\{U_\xi\}_{elt} = \{ U_1(\xi_1), \partial U_1/\partial\xi(\xi_1), U_2(\xi_1), \partial U_2/\partial\xi(\xi_1), R\omega_3^c(y_1), R\omega_3^c(y_3), \quad \text{(A.10-37)}$$
$$U_1(\xi_2), \partial U_1/\partial\xi(\xi_2), U_2(\xi_2), \partial U_2/\partial\xi(\xi_2), R\omega_3^c(\xi_2) \}$$

Les déplacements $U_1(\xi)$, $U_2(\xi)$ sont interpolés en tout point $\xi \in [-1 , +1]$ en utilisant un jeu de 4 fonctions d'interpolation :

$$\{N\}_\xi = \{N_1(\xi) , N_2(\xi) , N_3(\xi) , N_4(\xi) \} \quad \text{(A.10-38)}$$

tandis que la rotation de Cosserat ω_3^c est interpolée en utilisant un jeu de 3 fonctions d'interpolation :

$$\{M\}_\xi = \{M_1(\xi) , M_2(\xi) , M_3(\xi) \} \quad \text{(A.10-39)}$$

L'indice ξ signifie que la base d'interpolation est différente entre l'élément de référence et les éléments réels. Le schéma d'interpolation sur l'élément de référence est défini par :

$$U_1(\xi) = N_1(\xi)\, U_1(\xi_1) + N_2(\xi)\, \partial U_1/\partial\xi(\xi_1) + N_3(\xi)\, U_1(\xi_2) + N_4(\xi)\, \partial U_1/\partial\xi(\xi_2) \quad \text{(A.10-40)}$$

$$U_2(\xi) = N_1(\xi)\, U_2(\xi_1) + N_2(\xi)\, \partial U_2/\partial\xi(\xi_1) + N_3(\xi)\, U_2(\xi_2) + N_4(\xi)\, \partial U_2/\partial\xi(\xi_2) \quad \text{(A.10-41)}$$

$$R\omega_3^c(\xi) = M_1(\xi)\, R\omega_3^c(\xi_1) + M_2(\xi)\, R\omega_3^c(\xi_3) + M_3(\xi)\, R\omega_3^c(\xi_2) \quad \text{(A.10-42)}$$

De façon similaire, les dérivées des déplacements et de la rotation peuvent être interpolées sur l'élément de référence en utilisant les dérivées des fonctions d'interpolation :

$$\partial U_1/\partial\xi(\xi) = \partial N_1/\partial\xi(\xi)\, U_1(\xi_1) + \partial N_2/\partial\xi(\xi)\, \partial U_1/\partial\xi(\xi_1) + \partial N_3/\partial\xi(\xi)\, U_1(\xi_2) + \partial N_4/\partial\xi(\xi)\, \partial U_1/\partial\xi(\xi_2) \quad \text{(A.10-43)}$$

$$\partial U_2/\partial\xi(\xi) = \partial N_1/\partial\xi(\xi)\, U_2(\xi_1) + \partial N_2/\partial\xi(\xi)\, \partial U_2/\partial\xi(\xi_1) + \partial N_3/\partial\xi(\xi)\, U_2(\xi_2) + \partial N_4/\partial\xi(\xi)\, \partial U_2/\partial\xi(\xi_2) \quad \text{(A.10-44)}$$

$$\partial R\omega_3^c/\partial\xi(\xi) = \partial M_1/\partial\xi(\xi)\, R\omega_3^c(\xi_1) + \partial M_2/\partial\xi(\xi)\, R\omega_3^c(\xi_3) + \partial M_3/\partial\xi(\xi)\, R\omega_3^c(\xi_2) \quad \text{(A.10-45)}$$

Le schéma d'interpolation peut être écrit sous une forme matricielle plus compacte

$$\{U(\xi)\} = [N(\xi)]\, \{U\xi\}_{elt} \quad \text{(A.10-46)}$$

où le vecteur généralisé des déplacements $\{U(\xi)\}$ est de taille 6x1 tandis que le vecteur élémentaire des variables nodales de l'élément de référence est de taille 11x1.

La matrice d'interpolation $[N(\xi)]$ sur l'élément de référence est de taille 6x8. Elle est donnée dans le tableau A.10-13 ci-dessous.

10.3.2.2 Conditions sur les fonctions d'interpolation

Les fonctions d'interpolation sont choisies de manière à ce que les valeurs interpolées aux points nodaux pour les déplacements, leurs dérivées premières et les rotations, soient égales à leurs valeurs nodales.

En particulier, la condition que les déplacements interpolés aux points nodaux soient égaux aux valeurs nodales, s'écrit sous la forme suivante, pour i = 1 et 2 :

$$N_1(\xi_i) = \delta_{1i} \quad \text{(A.10-47)}$$

$$N_2(\xi_i) = 0 \quad \text{(A.10-48)}$$

$$N_3(\xi i) = \delta_{2i} \quad \text{(A.10-49)}$$

$$N_4(\xi_i) = 0 \quad \text{(A.10-50)}$$

Tableau A.10-13 : Matrice d'interpolation sur l'élément de référence (élément Hermitien-Lagrangien)

	$U_1(\xi_1)$	$\frac{\partial U_1}{\partial \xi}(\xi_1)$	$U_2(\xi_1)$	$\frac{\partial U_2}{\partial \xi}(\xi_1)$	$R\,\omega_3^c(\xi_1)$	$R\,\omega_3^c(\xi_3)$	$U_1(\xi_2)$	$\frac{\partial U_1}{\partial \xi}(\xi_2)$	$U_2(\xi_2)$	$\frac{\partial U_2}{\partial \xi}(\xi_2)$	$R\,\omega_3^c(\xi_2)$
$U_1(\xi)$	$N_1(\xi)$	$N_2(\xi)$					$N_3(\xi)$	$N_4(\xi)$			
$\frac{\partial U_1}{\partial \xi}(\xi)$	$\frac{\partial N_1}{\partial \xi}(\xi)$	$\frac{\partial N_2}{\partial \xi}(\xi)$					$\frac{\partial N_3}{\partial \xi}(\xi)$	$\frac{\partial N_4}{\partial \xi}(\xi)$			
$U_2(\xi)$			$N_1(\xi)$	$N_2(\xi)$					$N_3(\xi)$	$N_4(\xi)$	
$\frac{\partial U_2}{\partial \xi}(\xi)$			$\frac{\partial N_1}{\partial \xi}(\xi)$	$\frac{\partial N_2}{\partial \xi}(\xi)$					$\frac{\partial N_3}{\partial \xi}(\xi)$	$\frac{\partial N_4}{\partial \xi}(\xi)$	
$R\,\omega_3^c(\xi)$					$M_1(\xi)$	$M_2(\xi)$					$M_3(\xi)$
$\frac{\partial R\omega_3^c}{\partial \xi}(\xi)$					$\frac{\partial M_1}{\partial \xi}(\xi)$	$\frac{\partial M_2}{\partial \xi}(\xi)$					$\frac{\partial M_3}{\partial \xi}(\xi)$

La condition que les dérivées premières des déplacements interpolées aux points nodaux, soient égales aux valeurs, s'écrit sous la forme suivante, pour i = 1 et 2 :

$$\partial N_1 / \partial \xi(\xi_i) = 0 \qquad \text{(A.10-51)}$$

$$\partial N_2 / \partial \xi(\xi_i) = \delta_{1i} \qquad \text{(A.10-52)}$$

$$\partial N_3 / \partial \xi(\xi_i) = 0 \qquad \text{(A.10-53)}$$

$$\partial N_4 / \partial \xi(\xi_i) = \delta_{2i} \qquad \text{(A.10-54)}$$

On obtient ainsi 16 relations qui permettent de déterminer de manière unique les 16 coefficients des polynômes d'Hermite $N_i(\xi)$.

La condition que les rotations interpolées aux points nodaux soient égales aux valeurs nodales, s'écrit sous la forme suivante, pour i = 1 et 2 :

$$M_1(\xi_i) = \delta_{1i} \qquad \text{(A.10-55)}$$

$$M_2(\xi_i) = \delta_{3i} \qquad \text{(A.10-56)}$$

$$M_3(\xi i) = \delta_{2i} \qquad \text{(A.10-57)}$$

On obtient ainsi 6 relations qui permettent de déterminer de manière unique les 6 coefficients des polynômes de Lagrange $M_i(\xi)$.

10.3.2.3 Fonctions d'interpolation et fonctions de forme

On utilisera des éléments isoparamétriques, c'est à dire pour lesquels, les fonctions de forme T_i qui définissent la transformation géométrique $\mathcal{J}$, sont égales aux fonctions d'interpolation. Dans le cas présent, il y a deux jeux de fonction d'interpolations N_i et M_i. Cependant, on peut définir une transformation géométrique qui utilise l'un ou l'autre jeu, tout en donnant le même résultat.

En utilisant le jeu de fonctions d'interpolation pour les déplacements, on peut définir $\mathcal{J}$ de la façon suivante :

$$y(\xi) = {}^t\{N_i(\xi)\}\ \{Y\} \tag{A.10-58}$$

avec :

$$\{Y\} = \{\ y_1\ ,\ (y_2-y_1)/2\ ,\ y_2\ ,\ (y_2-y_1)/2\ \} \tag{A.10-59}$$

et :

$$\{N_i(\xi)\} = \{\ N_1(\xi)\ ,\ N_2(\xi)\ ,\ N_3(\xi)\ ,\ N_4(\xi)\ \} \tag{A.10-60}$$

Ce qui donne la formule de transformation suivante :

$$y(\xi) = y_1\ N_1(\xi) + ((y_2 - y_1)/2)\ N_2(\xi) + y_2\ N_3(\xi) + ((y_2 - y_1)/2)\ N_4(\xi) \tag{A.10-61}$$

et qui est équivalent à :

$$y(\xi) = y_1\ (1-\xi)/2 + y_2\ (1+\xi)/2 \tag{A.10-62}$$

car on a :

$$-N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = \xi \tag{A.10-63}$$

$$N_1 + N_3 = 1 \tag{A.10-64}$$

En utilisant le jeu de fonctions d'interpolation pour la rotation, on peut définir $\mathcal{J}$ de la façon suivante :

$$y(\xi) = {}^t\{M_i(\xi)\}\ \{Y\} \tag{A.10-65}$$

avec :

$$\{Y\} = \{\ y_1\ ,\ y_3 = (y_1 + y_2)/2\ ,\ y_2\ \} \tag{A.10-66}$$

et :

$$\{N_i(\xi)\} = \{\ M_1(\xi)\ ,\ M_2(\xi)\ ,\ M_3(\xi)\ \} \tag{A.10-67}$$

ce qui donne la formule de transformation suivante :

$$y(\xi) = y_1\ M_1(\xi) + ((y_1 + y_2)/2)\ M_2(\xi) + y_2\ M_3(\xi) \tag{A.10-68}$$

Cette formule de tranformation est équivalente à :

$$y(\xi) = y_1 (1-\xi) / 2 + y_2 (1+\xi) / 2 \qquad \text{(A.10-69)}$$

car :

$$M_1 + M_2 + M_3 = 1 \qquad \text{(A.10-70)}$$

et :

$$- M_1 + M_3 = 1 \qquad \text{(A.10-71)}$$

Les trois conditions sur la correspondance entre les ξ_i et les y_i sont alors respectées.

La dérivée de la transformation géométrique $\mathcal{T}^{-1}$: $y = y(\xi)$ est donnée par :

$$\frac{\partial y(\xi)}{\partial \xi} = \frac{y_2 - y_1}{2} = \frac{\ell}{2} \qquad \text{(A.10-72)}$$

où ℓ est la longueur de l'élément réel et 2 est la longueur le l'élément de référence.

Les dérivées des déplacements et de la rotation sur l'élément réel et sur l'élément de référence sont reliées par :

$$\frac{\partial U_1}{\partial \xi} = \frac{\partial U_1}{\partial y}\frac{\partial y(\xi)}{\partial \xi} = \frac{\ell}{2}\frac{\partial U_1}{\partial y} \qquad \text{(A.10-73)}$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial \xi} = \frac{\partial U_2}{\partial y}\frac{\partial y(\xi)}{\partial \xi} = \frac{\ell}{2}\frac{\partial U_2}{\partial y} \qquad \text{(A.10-74)}$$

$$\frac{\partial R\omega_3^c}{\partial \xi} = \frac{\partial R\omega_3^c}{\partial y}\frac{\partial y(\xi)}{\partial \xi} = \frac{\ell}{2}\frac{\partial R\omega_3^c}{\partial y} \qquad \text{(A.10-75)}$$

10.3.2.4 Fonctions d'interpolation pour les déplacements sur l'élément de référence

Les déplacements sont interpolés en utilisant des éléments cubiques de type Hermite (continuité C^1). Par noeuds extrêmes j = 1 et 2, on a deux variables, les déplacements $U_i(\xi_j)$ et leurs dérivées première $\frac{\partial U_i}{\partial \xi}(\xi_j)$. Les 4 fonctions N_i , qui sont déterminées à partir des 16 relations précédemment écrites, se décomposent en fonction des monômes élémentaires (tableau A.10-14).

Tableau A.10-14 : Décomposition des fonctions d'interpolation N_i en monômes élémentaires

Monômes	$N_1(\xi)$	$\frac{\partial N_1}{\partial \xi}(\xi)$	$N_2(\xi)$	$\frac{\partial N_2}{\partial \xi}(\xi)$	$N_3(\xi)$	$\frac{\partial N_3}{\partial \xi}(\xi)$	$N_4(\xi)$	$\frac{\partial N_4}{\partial \xi}(\xi)$
1	2 / 4	- 3 / 4	1 / 4	- 1 / 4	2 /4	3 / 4	- 1 / 4	- 1 / 4
ξ	-3 / 4	0	- 1 / 4	- 2 / 4	3 /4	0	- 1 / 4	2 / 4
ξ^2	0	3 / 4	- 1 / 4	+ 3 / 4	0	- 3 / 4	1 / 4	3 /4
ξ^3	1 / 4	0	1 / 4	0	- 1 / 4	0	1 / 4	0

Tableau A.10-15 : Décomposition des fonctions d'interpolation en monômes élémentaires

Monômes	$M_1(\xi)$	$\frac{\partial M_1}{\partial \xi}(\xi)$	$M_2(\xi)$	$\frac{\partial N_2}{\partial \xi}(\xi)$	$M_3(\xi)$	$\frac{\partial M_3}{\partial \xi}(\xi)$
1	0	- 1 / 2	1	0	0	1
ξ	-1 / 2	1	0	- 2	1 /2	1
ξ^2	1 /2	0	- 1	0	1 / 2	0

Ces 4 fonctions satisfont les deux relations suivantes :

$$N_1 + N_3 = 1 \qquad \text{(A.10-76)}$$

$$-N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = \xi \qquad \text{(A.10-77)}$$

10.3.2.5 Fonctions d'interpolation pour la rotation sur l'élément de référence

La rotation est interpolée en utilisant des éléments quadratiques de type Lagrange (continuité C^0). Par noeud, extrême ou médian, j = 1, 2 ou 3, on a une variable nodale, la rotation $R\omega_3^c(\xi_j)$. Les 3 fonctions M_i , qui sont déterminées à partir des 9 relations précédemment écrites, se décomposent en fonction des monômes élémentaires sous la forme suivante.

Ces 4 fonctions satisfont les deux relations suivantes :

$$M_1 + M_2 + M_3 = 1 \qquad \text{(A.10-78)}$$

$$-M_1 + M_3 = \xi \qquad \text{(A.10-79)}$$

10.3.3 Fonctions d'interpolation sur les éléments réels

10.3.3.1 Matrice de transformation du vecteur généralisé des déplacements entre l'élément de référence et un élément réel

La matrice $[T_6(\ell)]$ de transformation du vecteur des déplacements $\{U_y\}_{elt}$ de l'élément réel $[y_1, y_2]$, en vecteur des déplacements $\{U\xi\}_{elt}$ de l'élément de référence $[\xi_1,\xi_2]$, est définie par :

$$\{U_\xi\}_{elt} = [T_6(\ell)]\,\{U_y\}_{elt} \qquad \text{(A.10-80)}$$

où ℓ est la longueur de l'élément réel considéré, et est égale à :

$$\ell = (y_2 - y_1) / 2 \qquad \text{(A.10-81)}$$

tandis que la matrice $[T_6(\ell)]$ est égale à :

$$[T_6(\ell)] = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & (\ell/2) & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & (\ell/2) & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & (\ell/2) \end{bmatrix} \qquad \text{(A.10-82)}$$

10.3.3.2 Matrice de transformation des vecteurs des variables nodales

Les vecteurs des variables nodales, qui contiennent les dérivées des déplacements, ne sont pas les mêmes entre l'élément réel et l'élément de référence. On peut définir une matrice de transformation $[T_{11}(\ell)]$ telle que :

$$\{U_\xi\}_{elt} = [T_{11}(\ell)]\,\{U_y\}_{elt} \qquad \text{(A.10-83)}$$

$[T_{11}(\ell)]$ =

1										
	$(\ell/2)$									
		1								
			$(\ell/2)$							
				1						
					1					
						1				
							$(\ell/2)$			
								1		
									$(\ell/2)$	
										1

(A.10-84)

10.3.3.3 Fonctions d'interpolation sur les éléments réels

La matrice d'interpolation [N(y)] sur l'élément réel est définie par la relation :

$$\{U(y)\} = [N(y)]\,\{U_v\}_{elt} \qquad \text{(A.10-85)}$$

Elle s'obtient à partir de la matrice d'interpolation sur l'élément de référence et des matrices de transformation :

$$\{U(y)\} = [T_6(\ell)]^{-1}\,\{U(\xi)\} = [T_6(\ell)]^{-1}\,[N(\xi)]\,\{U_\xi\}_{elt} = [T_6(\ell)]^{-1}\,[N(\xi)]\,[T_{11}(\ell)]\,\{U_y\}_{elt} \qquad \text{(A.10-86)}$$

On obtient ainsi les fonction d'interpolation sur l'élément réel, qui différent de celles sur l'élément de référence, uniquement pour les déplacements.

Tableau A.10-16 : Fonctions d'interpolation pour les déplacements sur les éléments réels

Fonctions d'interpolation sur l'élément réel $N_i(y)$	Définitions à partir des fonction d'interpolation sur l'élément de référence $N_i(\xi)$
$N_1(y)$	$N_1(\xi(y))$
$N_2(y)$	$(\ell/2)\,N_2(\xi(y))$
$N_3(y)$	$N_3(\xi(y))$
$N_4(y)$	$(\ell/2)\,N_4(\xi(y))$

Les fonction $M_i(y)$ s'obtiennent simplement à partir des $M_i(\xi)$ après transformation géométrique :

$$M_i(y) = M_i(\xi(y)) \qquad \text{(A.10-87)}$$

10.3.4 Avantages de l'élément Hermitien-Lagrangien

Deux jeux différents de fonctions d'interpolation ont été choisis pour les déplacements et la rotation puisque cette dernière doit être interpolée avec des polynômes de degrés inférieurs. De la même manière que ce qui se fait pour les poutres ou les plaques, on pourrait garder les mêmes fonctions d'interpolation pour les deux types de variables. Cependant une telle approche, fournirait pour le travail des efforts intérieures des polynômes avec un degré supérieur de deux à ce que l'on obtient dans le cas présent. En effet, la partie antisymétrique des déformations est fonction des dérivées des déplacements mais aussi de la rotation.

Pour intégrer de manière exacte, il faudrait augmenter le nombre de points de Gauss, mais la solution obtenue ne serait pas bonne et présenterait des oscillations. Pour y remédier, il faudrait sous-intégrer de manière sélective, ce qui marche bien dans le cas des poutres où l'on peut démontrer simplement et analytiquement, que la sous-intégration sélective est équivalente à choisir des fonctions d'interpolation différentes pour les déplacements et la rotation. Cependant, ce qui marche pour les poutres où le comportement élastique est simple, ne marche pas forcément pour les milieux de Cosserat et numériquement les simulations faites n'ont pas permis de le mettre clairement en évidence.

On choisira donc des fonctions d'interpolations différentes, ce qui permet, premièrement de savoir clairement l'ordre des interpolations que l'on utilise pour chacune des variables, et deuxièmement, de réduire de deux le degré des polynômes à intégrer dans le travail des efforts intérieurs.

Tableau A.10-17 : Matrice d'interpolation sur les éléments réels pour l'élément Hermitien-Lagrangien

	$U_1(y_1)$	$\frac{\partial U_1}{\partial y}(y_1)$	$U_2(y_1)$	$\frac{\partial U_2}{\partial y}(y_1)$	$R\,\omega_3^c(y_1)$	$R\,\omega_3^c(y_3)$	$U_1(y_2)$	$\frac{\partial U_1}{\partial y}(y_2)$	$U_2(y_2)$	$\frac{\partial U_2}{\partial y}(y_2)$	$R\,\omega_3^c(y_2)$
$U_1(y)$	$N_1(y)$	$(\ell/2)\,N_2(y)$					$N_3(y)$	$(\ell/2)\,N_4(y)$			
$\frac{\partial U_1}{\partial y}(y)$	$(2/\ell)\frac{\partial N_1}{\partial y}(y)$	$\frac{\partial N_2}{\partial y}(y)$					$(2/\ell)\frac{\partial N_3}{\partial y}(y)$	$\frac{\partial N_4}{\partial y}(y)$			
$U_2(y)$			$N_1(y)$	$(\ell/2)\,N_2(y)$					$N_3(y)$	$(\ell/2)\,N_4(y)$	
$\frac{\partial U_2}{\partial y}(y)$			$(2/\ell)\frac{\partial N_1}{\partial y}(y)$	$\frac{\partial N_2}{\partial y}(y)$					$(2/\ell)\frac{\partial N_3}{\partial y}(y)$	$\frac{\partial N_4}{\partial y}(y)$	
$R\,\omega_3^c(y)$					$M_1(y)$	$M_2(y)$					$M_3(y)$
$\frac{\partial R\omega_3^c}{\partial y}(y)$					$(2/\ell)\frac{\partial M_1}{\partial y}(y)$	$(2/\ell)\frac{\partial M_2}{\partial y}(y)$					$(2/\ell)\frac{\partial M_3}{\partial y}(y)$

10.4 Formulation par éléments finis (formulation de Galerkine)

10.4.1 Ecriture du principe des puissances virtuelles

La formulation de Galerkine consiste à appliquer le principe des puissances virtuelles au champ de déplacements approchés {U(y)}, en utilisant comme champs virtuels de déplacements, des variations arbitraires {δU(y)} de la solution approchée, qui sont cinématiquement admissibles. Un champ de déplacements virtuels est cinématiquement admissible si les déplacements virtuels sont nuls aux points où les déplacements réels sont imposés comme conditions aux limites.

10.4.1.1 Travail des efforts intérieurs

Pour une variation arbitraire {δU(y)} de la solution approchée {U(y)}, qui donne un champ de déformations {δε(y)} égal par définition à :

$$\{\delta\varepsilon(y)\} = [B]\{\delta U(y)\} \tag{A.10-88}$$

le travail des efforts intérieurs correspondant au nouvel état de contraintes {σ(y)+dσ(y)} est égal à :

$$W^{(i)} = \int_V {}^t\{\delta\varepsilon(y)\}\{\sigma(y)+d\sigma(y)\}dV \tag{A.10-89}$$

Après introduction de la matrice [B] qui relie les déplacements aux déformations, le travail des efforts intérieurs peut être réécrit sous la forme :

$$W^{(i)} = \int_V {}^t\{\delta U(y)\}\,{}^t[B]\{\sigma(y)+d\sigma(y)\}\,dV \tag{A.10-90}$$

Les champs de déplacements virtuels {δU(y)}, qui sont choisis comme fonctions tests, sont obtenus par interpolation entre les variations arbitraires des variables nodales $\{\delta U_y\}$ en utilisant le même schéma d'interpolation que la solution approchée :

$$\{\delta U(y)\} = [N(y)]\{\delta U_y\} \tag{A.10-91}$$

On peut alors réécrire le travail des efforts intérieurs sous la forme suivante :

$$W^{(i)} = \int_V {}^t\{\delta U_y\}\,{}^t[N(y)]\,{}^t[B]\{\sigma(y)+d\sigma(y)\}\,dV \tag{A.10-92}$$

Comme le vecteur des variations des variables nodales $\{\delta U_y\}$ est un vecteur global qui est indépendant de y, on peut le sortir de l'intégrale :

$$W^{(i)} = {}^t\{\delta U_y\}\int_V {}^t[N(y)]\,{}^t[B]\{\sigma(y)+d\sigma(y)\}dV \tag{A.10-93}$$

On introduit ensuite le vecteur des forces nodales {F} et son incrément{dF} définis par :

$$\{F\} = \int_V {}^t[N(y)]\,{}^t[B]\{\sigma(y)\}dV \tag{A.10-94}$$

$$\{dF\} = \int_V {}^t[N(y)]\,{}^t[B]\{d\sigma(y)\}dV \tag{A.10-95}$$

On peut alors réécrire le travail des efforts intérieurs sous la forme :

$$W^{(i)} = {}^{t}\{\delta U_y\}\{F + dF\} \qquad \text{(A.10-96)}$$

Le vecteur {F} peut être interprété comme le vecteur des forces intérieures qui agissent sur les noeuds pour un état de contraintes $\{\sigma\}$ donné.

10.4.1.2 Travail des efforts extérieurs

Pour une variation arbitraire $\{\delta U(y)\}$ de la solution approchée $\{U(y)\}$, le travail correspondant aux nouveaux efforts extérieurs {t+dt} est égal à :

$$W^{(e)} = \int_S {}^{t}\{\delta U(y)\}\{t(y) + dt(y)\}\, dS \qquad \text{(A.10-97)}$$

où le vecteur {t} est le vecteur généralisé des forces extérieures, qui contient les tractions aussi bien que les couples prescrits aux frontières :

$$\{t\} = \{\sigma_{12}, 0, \sigma_{22}, 0, \mu_{32}, 0\} \qquad \text{(A.10-98)}$$

De manière similaire au travail des efforts intérieurs, le travail des efforts extérieurs peut être réécrit sous la forme suivante :

$$W^{(e)} = - {}^{t}\{\delta U_y\}\{P + dP\} \qquad \text{(A.10-99)}$$

où le vecteur des forces extérieures {P} et son incrément {dP} sont définis comme suit :

$$\{P\} = -\int_S {}^{t}[N(y)]\{t(y)\}\, dS \qquad \text{(A.10-100)}$$

$$\{dP\} = -\int_S {}^{t}[N(y)]\{dt(y)\}\, dS \qquad \text{(A.10-101)}$$

10.4.1.3 Application du principe des puissances virtuelles

Le principe des puissances virtuelles stipule que pour tout champ de déplacements virtuels $\{\delta U(y)\}$, il y a égalité des travaux des efforts intérieurs et extérieurs :

$${}^{t}\{\delta U_v\}\{F+dF\} = {}^{t}\{\delta U_v\}\{P+dP\} \qquad \text{(A.10-102)}$$

ce qui est équivalent à :

$$\{F+dF\} = \{P+dP\} \qquad \text{(A.10-103)}$$

Ceci peut être réécrit sous la forme :

$$\{dF\} = \{dP\} \qquad \text{(A.10-104)}$$

puisque le principe des puissances virtuelles appliqué à l'état de contraintes initiales donne :

$$\{F\} = \{P\} \qquad \text{(A.10-105)}$$

10.4.1.4 Ecriture sous forme matricielle

La loi de comportement est introduite dans le travail des efforts intérieurs par l'intermédiaire de la matrice élasto-plastique $[D^{ep}(y)]$, qui relie les incréments de contraintes $\{d\sigma(y)\}$ et les incréments de déformations $\{d\varepsilon(y)\}$:

$$\{d\sigma(y)\} = [\, D^{ep}(y)\,]\,\{d\varepsilon(y)\} \qquad \text{(A.10-106)}$$

D'autre part, l'incrément des déformations réelles $\{d\varepsilon(y)\}$ est relié à l'incrément de déplacements $\{dU(y)\}$ par la matrice $[B]$:

$$\{d\varepsilon(y)\} = [B]\,\{dU(y)\} \qquad \text{(A.10-107)}$$

Enfin, la solution $\{dU(y)\}$ est interpolée à partir du vecteur des variables nodales $\{dU_y\}$:

$$\{dU(y)\} = [N(y)]\{dU_y\} \qquad \text{(A.10-108)}$$

Ceci permet de réécrire le vecteur incrémental des forces nodales $\{dF\}$ sous la forme :

$$\{dF\} = \int_V {}^t[N(y)]\,{}^t[B][D^{ep}(y)][B][N(y)]\{dU_y\}dV \qquad \text{(A.10-109)}$$

Comme le vecteur $\{dU_y\}$ est indépendant de y, on peut réécrire $\{dF\}$ sous la forme suivante :

$$\{dF\} = [K]\,\{dU_V\} \qquad \text{(A.10-110)}$$

La matrice globale de rigidité $[K]$ est donnée par :

$$[K] = \int_V {}^t[N(y)]\,{}^t[B][D^{ep}(y)][B][N(y)]dV \qquad \text{(A.10-111)}$$

Le principe de puissances virtuelles est ainsi équivalent à :

$$[K]\,\{dU\} = \{dP\} \qquad \text{(A.10-112)}$$

où $[K]$ est la matrice globale de rigidité, $\{dP\}$ l'incrément des forces extérieures et $\{dU\}$ l'incrément de déplacements.

10.4.2 Décomposition des vecteurs et matrices sur les éléments finis

10.4.2.1 Décomposition de la matrice de rigidité globale

Par définition la matrice globale de rigidité $[K]$ est égale à :

$$[K] = \int_V {}^t[N(y)]\,{}^t[B][D^{ep}(y)][B][N(y)]dV \qquad \text{(A.10-113)}$$

L'intégrale sur le volume total V est décomposée en N termes correspondant aux N éléments :

$$[K] = \sum_{elt=1,N}[K(elt)] \qquad \text{(A.10-114)}$$

La matrice [K(elt)] est la partie de la matrice globale qui correspond à l'intégration sur l'élément numéroté elt :

$$[K(elt)] = \int_{V_{elt}} {}^t[N(y)]^t[B][D^{ep}(y)][B][N(y)]dV \qquad \text{(A.10-115)}$$

Pour un élément donné, numéroté elt, avec elt = 1 à N, seul un nombre réduit de fonctions d'interpolation n'est pas égale à zéro. Ce sont les fonctions d'interpolation correspondant aux degrés de liberté attachés aux noeuds de l'élément considéré. La matrice [K(elt)] est ainsi composée de zéro sauf pour un bloc, noté $[k]_{elt}$, de taille 11x11, où 11 est le nombre total de degrés de liberté attachés à un élément. Ce bloc peut être extrait de la matrice globale [K(elt)] par une matrice d'extraction $[A]_{elt}$:

$$[k]_{elt} = {}^t[A]_{elt}\,[K(elt)]\,[A]_{elt} \qquad \text{(A.10-116)}$$

La matrice $[A]_{elt}$ a la propriété suivante :

$${}^t[A]_{elt}\,[A]_{elt} = [\text{Identité}] \qquad \text{(A.10-117)}$$

L'extraction de la matrice élémentaire $[k]_{elt}$ à partir de la matrice globale [K(elt)] se fait par la relation :

$$[k]_{elt} = {}^t[A]_{elt}\,[K(elt)]\,[A]_{elt} \qquad \text{(A.10-118)}$$

alors que le calcul de la partie [K(elt)] de la matrice globale [K] , correspondant à l'élément elt, se fait à partir des matrices élémentaires $[k]_{elt}$:

$$[K(elt)] = [A]_{elt}\,[k]_{elt}\,{}^t[A]_{elt} \qquad \text{(A.10-119)}$$

La matrice globale est alors égale à :

$$[K] = \sum_{elt=1,N} [K(elt)] = \sum_{elt=1,N} [A]_{elt}[k]_{elt}\,{}^t[A]_{elt} \qquad \text{(A.10-120)}$$

La matrice de rigidité élémentaire $[k]_{elt}$ est égale à :

$$[k]_{elt} = {}^t[A]_{elt}[K(elt)][A]elt \qquad \text{(A.10-121)}$$

$$[k]_{elt} = {}^t[A]_{elt} \left(\int_{V_{elt}} {}^t[N(y)]\,{}^t[B]\left[D^{ep}(y)\right][B] \right)[N(y)]\,dV \quad [A]_{elt} \qquad \text{(A.10-122)}$$

$$[k]_{elt} = \int_{V_{elt}} {}^t([N(y)][A]_{elt})\,{}^t[B]\left[D^{ep}(y)\right][B]\,([N(y)][A]_{elt})\,dV \qquad \text{(A.10-123)}$$

Après introduction de la matrice d'interpolation élémentaire $[N(y)]_{elt}$:

$$[N(y)]_{elt} = [N(y)]\,[A]_{elt} \qquad \text{(A.10-124)}$$

la matrice de rigidité élémentaire peut s'écrire sous la forme suivante :

$$[k]_{elt} = \int_{V_{elt}} {}^t[N(y)]_{elt}\,{}^t[B]\left[D^{ep}(y)\right][B][N(y)]_{elt}\,dV \qquad \text{(A.10-125)}$$

10.4.2.2 Calcul du vecteur des forces intérieures

Par définition, le vecteur global des forces intérieures {F} est égale à :

$$\{F\} = \int_V {}^t[N(y)]^t[B]\{\sigma(y)\}dV \qquad \text{(A.10-126)}$$

Il peut être décomposé sur les N éléments :

$$\{F\} = \sum_{elt=1,N} \{F(elt)\} \qquad \text{(A.10-127)}$$

$$\{F(elt)\} = \int_{V_{elt}} {}^t[N(y)]^t[B]\{\sigma(y)\}dV \qquad \text{(A.10-128)}$$

Pour un élément elt donné, seule les lignes correspondant aux degrés de liberté attachés aux noeuds de l'élément considéré sont non nulles. On notera le bloc correspondant sous la forme du vecteur élémentaire $\{f\}_{elt}$ égale à :

$$\{f\}_{elt} = {}^t[A]_{elt}\{F(elt)\} \qquad \text{(A.10-129)}$$

qui peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$\{f\}_{elt} = \int_{V_{elt}} {}^t[A]_{elt}\,{}^t[N(y)]^t[B]\{\sigma(y)\}dV \qquad \text{(A.10-130)}$$

Le vecteur global des forces intérieur peut alors s'obtenir par assemblage des vecteurs élémentaires $\{f\}_{elt}$ avec les matrices d'assemblage $[A]_{elt}$:

$$\{F\} = \sum_{elt=1,N} \{F(elt)\} = \sum_{elt=1,N} [A]_{elt}\{f\}_{elt} \qquad \text{(A.10-131)}$$

Le vecteur élémentaire $\{f\}_{elt}$ est calculé comme suit :

$$\{f\}_{elt} = {}^t[A]_{elt}\int_{V_{elt}} {}^t[N(y)]^t[B]\{\sigma(y)\}dV \qquad \text{(A.10-132)}$$

10.4.2.3 Décomposition du vecteur des forces extérieures

Par définition le vecteur {P} est égale à :

$$\{P\} = -\int_S {}^t[N(y)]\{t(y)\}dS \qquad \text{(A.10-133)}$$

La frontière sur laquelle il faut intégrer est en fait réduite à deux points y_0 et y_N :

$$\{P\} = \{P(y_0)\} + \{P(y_N)\} \qquad \text{(A.10-134)}$$

où 0 et N sont les deux points frontière.

Ces deux vecteurs se réduisent à :

$$\{P(y_0)\} = -{}^t[N(y_0)]\{t(y_0)+dt(y_0)\} \quad \text{(A.10-135)}$$

$$\{P(y_N)\} = -{}^t[N(y_N)]\{t(y_N)+dt(y_N)\} \quad \text{(A.10-136)}$$

et sont égaux à :

$${}^t\{P(y_0)\} = \{\sigma_{12}(y_0)\ ,\ 0\ ,\ \sigma_{22}(y_0)\ ,\ 0,\ \mu_{32}(y_0)/\ R,\ 0,\ .....\} \quad \text{(A.10-137)}$$

$${}^t\{P(y_N)\} = \{0,\ ....,\ 0,\ \sigma_{12}(y_N)\ ,\ 0\ ,\ \sigma_{22}(y_N)\ ,\ 0,\ \mu_{32}(y_N)\ /\ R\ \} \quad \text{(A.10-138)}$$

10.4.3 Méthodes d'intégration

10.4.3.1 Changement de variables

Les matrices de rigidité élémentaire s'obtiennent par intégration de polynômes sur les éléments réels qui sont tous des intervalles du type $y \in [\ y_1\ ,\ y_2\ ]$:

$$[k]_{elt} = \int_{[y_1\ ,\ y_2]} {}^t[N(y)]_{elt}\ {}^t[B]\left[D^{ep}(y)\right][B][N(y)]_{elt}\ dy \quad \text{(A.10-139)}$$

Il est plus facile de les intégrer sur l'élément de référence après changement de variable y en ξ, c'est à dire en utilisant la transformation géométrique :

$$\mathcal{J} : y \in [\ y_1\ ,\ y_2\ ] \text{--------}> \xi \in [-1\ ,\ +1\ ] \quad \text{(A.10-140)}$$

ce qui donne pour la matrice de rigidité élémentaire :

$$[k]_{elt} = \int_{[-1,+1]} {}^t\left[N(y(\xi))\right]_{elt}\ {}^t[B]\left[D^{ep}(y(\xi))\right][B]\left[N(y(\xi))\right]_{elt} \frac{\partial y}{\partial \xi}\, d\xi \quad \text{(A.10-141)}$$

La matrice d'interpolation [N(y(ξ))]] dépend de l'élément réel et notamment sa longueur $\ell = (y_1 - y_2)\ /\ 2$, puisque les dérivées sont prises comme variables dans le vecteur des déplacements généralisés :

$$[N(y(\xi))]_{elt} = [T_6(\ell)\ ]^{-1}\ [N(\xi)]\ [T_{11}(\ell)\ ] \quad \text{(A.10-142)}$$

10.4.3.2 Intégration numérique de Gauss

Les intégrales sont évaluées en utilisant la méthode de Gauss plutôt que la méthode de Newton-Cote dans la mesure, où la première méthode nécessite moins de points d'intégration. La méthode de Gauss avec r points d'intégration donne la valeur exacte de l'intégrale d'un polynôme quelconque de degré inférieur ou égal à 2 r - 1 :

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi)\, d\xi = \sum_{i=1}^{r} w_i\ f(\xi_i) \quad \text{(A.10-143)}$$

Les fonctions d'interpolation pour les déplacements sont de degré 3 et de degré 2 pour la rotation. Les déformations et courbures sont interpolées avec des polynômes de degré 2 puisque la déformation antisymétrique est définie comme une combinaison linéaire des dérivées des déplacements et de la rotation, qui sont toutes interpolées avec des polynômes de degré 2. Le travail des efforts intérieurs est composé de termes du type $\varepsilon_i \, d\sigma_i$, qui sont des polynômes de degré 4 pour une loi élastoplastique générale, et de termes du type $\kappa_i \, d\mu_i$ qui sont de degré 2 pour une loi élastique, et de degré 3 pour une loi élastoplastique générale. Pour intégrer de manière exacte, il faudrait prendre au minimum 3 points d'intégration.

Tableau A.10-18 : Degré des termes polynomiaux dans le travail des efforts intérieurs pour une interpolation de degré 3 en déplacement et 2 en rotation

Degré maximum des termes polynomiaux	Loi élastique	Loi élastoplastique
déplacements	3	
rotations	2	
déformations symétriques et antisymétriques		
courbures	1	
termes $\varepsilon_i^s \, d\sigma_i^s$ et $\varepsilon_i^a \, d\sigma_i^a$	4	4
termes $\kappa_i \, d\mu_i$	2	3

Si l'on choisit les mêmes fonctions d'interpolation de degré 3 pour les déplacements et rotations, les termes $\varepsilon_i^s \, d\sigma_i^s$ sont des polynômes de degré 4 pour une loi élastique, et de degré 6 dans le cas général. Les termes $\varepsilon_i^a \, d\sigma_i^a$ sont des polynômes de degré 6 quelle que soit la loi de comportement et les termes $\kappa_i \, d\mu_i$ sont des polynômes de degré 4 pour une loi élastique et de degré 6 pour une loi élastoplastique générale. Pour intégrer de manière exacte, il faudrait prendre au minimum 4 points d'intégration.

Tableau A.10-19 : Degré des termes polynomiaux pour une interpolation de degré 3 en déplacement et rotation

Degré maximum des termes polynomiaux	Loi de comportement élastique	Loi de comportement élasto-plastique
déplacements et rotations	3	
déformations symétriques	2	
déformations antisymétriques	3	
courbures	2	
termes $\varepsilon_i^s \, d\sigma_i^s$	4	5
termes $\varepsilon_i^a \, d\sigma_i^a$	6	6
termes $\kappa_i \, d\mu_i$	4	5

Entre les deux cas précédents, on peut remarquer que le choix de fonctions d'interpolation différentes est primordial aussi bien pour garder des ordres d'interpolation comparable entre les différents termes du travail des efforts intérieurs que pour limiter le degré des polynômes à intégrer.

Ce qui est classiquement fait dans les poutres et coques est de garder pour les déplacements et rotations les mêmes fonctions d'interpolation mais d'intégrer sélectivement les termes du travail dus aux déplacements et ceux dus aux rotations. En l'occurrence, les termes de flexion sont sous-intégrés d'un point d'intégration par rapport aux termes de traction et cisaillement. Dans le cas d'une poutre élastique, il peut être démontré analytiquement que la sous-intégration sélective est équivalente à prendre des fonctions d'interpolation d'ordres différents, car les énergies associées à ces différents termes sont séparables et les équations de comportement se prêtent bien à une telle procédure. Par contre, dans le cas d'un milieu de Cosserat, une telle approche numérique n'est pas adaptée. En effet, pour pouvoir intégrer sélectivement, il faut pouvoir séparer les termes d'énergie or cela n'est possible que dans le cas d'un comportement élastique, ce qui n'est pas le cas le plus intéressant. D'autre part, la démonstration mathématique d'une équivalence des méthodes reste à démontrer. Par contre, la sous-intégration uniforme peut être une astuce numérique intéressante afin de stabiliser des solutions trop oscillantes, mais à conditions de l'avoir valider sur des cas précis où les solutions analytiques existent.

Avec l'élément Hermitien-Lagrangien de grande précision utilisé, nous n'avons pas eu besoin de sous intégrer pour stabiliser la solution numérique, puisqu'elle est stable.

10.4.4 Conditions aux limites

10.4.4.1 Conditions aux limites naturelles

Les conditions aux limites, dites naturelles, sont directement prises en compte dans le principe des puissances virtuelles, par l'intermédiaire du vecteur des forces extérieures {P}, qui inclut aussi bien les forces que les couples appliqués sur les bords du domaine étudié.

10.4.4.2 Conditions aux limites essentielles

En ce qui concerne les conditions aux limites dites naturelles, qui peuvent être de type Dirichlet ou Neumann, la solution approchée {U(y)} est choisie de manière à les satisfaire de façon explicite.

Dans la formulation par éléments finis de type Galerkine, les lignes de la matrice globale de rigidité, correspondant à un degré de liberté imposé en condition aux limites, sont remplacées par la condition à la limite correspondante, qui peut être de type Dirichlet : en déplacement U_i, en rotation ω_3^c, ou de type Neumann : en déformation antisymétrique ε_{ij}^a, en courbure κ_{ij} ou dans le cas le plus général sous la forme d'une combinaison linéaire des variables nodales.

10.4.4.3 Cas particuliers de conditions aux limites

10.4.4.3.1 Rigidité normale imposée

Pour les essais d'interface, les travaux de Boulon (1988) on montré l'importance de la rigidité normale k_n imposée dans les essais à la boîte de cisaillement plane :

$$d\sigma_{22}(y_H) = k_n \, dU_2(y_H) \qquad \text{(A.10-144)}$$

Pour prendre en compte une telle condition à la limite, la méthode la plus simple est de considérer que l'incrément $d\sigma_{22}$ (y_H) est imposée comme une condition à la limite naturelle. Cet incrément $d\sigma_{22}$ (y_H) est alors incorporé dans le vecteur des forces extérieures comme une force extérieure que l'on écrit en fonction de k_n et de dU_2 qui est une des variables nodales. Si la rigidité k_n est nulle, on retrouve bien le cas d'un incrément de contrainte $d\sigma_{22}$ imposé nulle. Si la rigidité k_n est non nulle, on transfère le terme $k_n\ dU_2$ de l'autre coté de l'égalité dans la matrice de rigidité puis on divise toute la ligne par $-k_n$. Quand k_n tend vers l'infini, on retrouve la ligne de la matrice de rigidité globale correspondant à une condition à la limite en déplacement dU_2 imposé nul. Cette approche est tout à fait similaire à la "méthode du terme diagonal dominant" qui se réduit à la "méthode du terme diagonal unité" dans le cas où k_n tend vers l'infini.

Une telle formulation permet de passer de manière continue d'une condition à la limite en contrainte normale imposée nulle ($k_n = 0$) à une condition à la limite en déplacement imposé nul ($k_n = \infty$).

10.4.4.3.2 Combinaison linéaire de variables nodales

Une condition à la limite en déformation antisymétrique ou en dérivée de la rotation de Cosserat se traite dans le cadre général d'un changement de variables nodales. En effet, pour des éléments de type Hermite où les dérivées des déplacements sont incluses dans les variables nodales, on peut traiter simplement une condition à la limite écrite sous la forme d'une combinaison des déplacements, de leurs dérivées et de la rotation, par un changement de variables approprié.

Soit [R] la matrice de transformation qui permet de passer des nouvelles variables {U'} aux anciennes variables {U} :

$$\{U\} = [R]\ \{U'\} \tag{A.10-145}$$

La forme intégrale globale donnée par le principe des puissances virtuelles s'écrit en utilisant les anciennes variables sous la forme :

$$dW = {}^t\{\delta U\}\left([K]\{dU\} - \{dF\}\right) = 0 \tag{A.10-146}$$

Après changement de variables nodales, on obtient :

$$dW = {}^t\{\delta U'\}\left({}^t[R][K][R]\{dU'\} - {}^t[R]\{dF\}\right) = 0 \tag{A.10-147}$$

ce qui permet d'identifier la nouvelle matrice de rigidité globale et le nouveau vecteur des forces extérieures :

$$[K'] = {}^t[R]\ [K]\ [R] \tag{A.10-148}$$

$$\{dF'\} = {}^t[R]\ \{dF\} \tag{A.10-149}$$

Après modification de la nouvelle matrice de rigidité globale pour tenir compte des conditions imposées sur les nouvelles variables aux frontières et résolution du système algébrique d'équations linéaires pour obtenir la solution {dU'}, on retrouve le vecteur des anciennes variables solution {dU} par la transformation :

$$\{dU\} = [R]\ \{dU'\} \qquad \text{(A.10-150)}$$

Une telle méthode a été utilisée pour les conditions aux limites formulées en déformation antisymétrique imposée nulle.

10.4.5 Résumé des divers tableaux et vecteurs

Les tableaux ci-dessous regroupent les divers vecteurs et tableaux qui sont utilisés dans la formulation par éléments finis.

Tableau A.10-20 : Vecteurs et matrices définis sur l'élément de référence

	Elément Hermitien-Lagrangien
vecteur généralisé des déplacements : $\{U(\xi)\}$	6 * 1
matrice d'interpolation : $[N(\xi)]$	6 * 11
vecteur des variables nodales : $\{U_\xi\}_{elt}$	11 * 1

Tableau A.10-21 : Matrices de transformation entre les éléments réels et l'élément de référence

	Elément Hermitien-Lagrangien
matrice de transformation entre les vecteurs généralisés des déplacements de l'élément de référence et d'un élément réel $\{U(y)\} = [T_{6x6}(\ell)]\ \{U(\xi)\}$	6 x 6
matrice de transformation entre les vecteur des variables nodales de l'élément de référence et d'un élément réel $\{U_y\} = [T_{11x11}(\ell)]\ \{U_\xi\}$	11 x 11

Tableau A.10-22: Vecteurs et matrices définis en tout point y

	Elément Hermitien-Lagrangien
vecteur généralisé des déplacements : $\{U(y)\}$	6 * 1
vecteur généralisé des déformations : $\{\varepsilon(y)\}$	5 * 1
vecteur généralisé des contraintes : $\{\sigma(y)\}$	5 * 1
matrice déplacements-déformations : $[B]$ $\{\varepsilon(y)\} = [B]\ \{U(y)\}$	5 * 5
matrice de comportement élasto-plastique : $[D^{ep}(y)]$ $\{d\sigma(y)\} = [D^{ep}(y)]\ \{d\varepsilon(y)\}$	5 * 5

Tableau A.10-23 : Vecteurs et matrices définis sur un élément réel

	Elément Hermitien-Lagrangien
vecteur généralisé des déplacements : $\{U(y)\}$	6 * 1
matrice d'interpolation : $[N(y)]$	6 * 11
vecteur élémentaire des variables nodales : $\{U_v\}_{elt}$	11 * 1
matrice d'extraction ou assemblage : $[A]_{elt}$	11 * (6N+5)
matrice élémentaire de rigidité d'un élément: $[k]_{elt}$	11 * 11
Vecteur des forces extérieures : $\{f\}_{elt}$	11 * 1

Tableau A.10-24 : Vecteurs et matrices globaux

	Elément Hermitien-Lagrangien
vecteur généralisé des déplacements : $\{U(y)\}$	6 * 1
matrice globale d'interpolation sur les éléments réels : $[N(y)]_G$	6 * 11
vecteur global des variables nodales : $\{U_v\}_G$	11 * 1
vecteur global des forces extérieures: $\{P\}_G$	(6N+5) * 1
matrices d'extraction ou assemblage : $[A]_{elt}$	11 * (6N+5)
matrice globale de rigidité : $[K]_G$	(6N+5)*(6N+5)
matrice de rigidité correspondant à un élément : $[K(elt)]_G$	(6N+5)*(6N+5)

On peut remarquer que les matrices de transformation $[T_{6*6}(\ell)]$ et $[T_{11*11}(\ell)]$ entre l'élément de référence et les éléments réels se réduisent à la matrice identité dans le cas où les variables nodales ne contiennent pas de dérivées (schéma d'interpolation linéaire ou quadratique avec continuité C^0).

10.4.6 Différences avec un milieu continu classique

Par rapport à ce qui est fait dans un milieu continu classique élastoplastique en statique, l'application de la méthode des éléments finis aux milieux de Cosserat ne diffère que sur quelques points.

Les déplacements et les rotations doivent être interpolés avec des degrés différents ou alors, il faut avoir recours à une méthode de sous-intégration, uniforme ou sélective. Nous avons fait le choix de développer un élément Hermitien-Lagrangien, plutôt qu'un élément Lagrangien, ce qui nous a conduit à introduite les dérivées des déplacements comme variables nodales. Il en résulte, que les vecteurs déplacements généralisés sur les éléments réels et sur l'élément de référence, ainsi que les fonctions d'interpolation sur les éléments réels et sur l'élément de référence, différent les unes des autres, ce qui introduit dans l'écriture du principe des puissances virtuelles des matrices de transformation $[T_6(\ell)]$ et $[T_{11}(\ell)]$ qui dépendent des longueurs des éléments réels.

Pour retrouver une bonne similitude avec les milieux continus classiques, il convient de généraliser les vecteurs déplacements en y incluant les rotations normalisées par R, les vecteurs déformations en y incluant les courbures normalisées par R, et les vecteurs contraintes en y incluant les couples contraintes normalisés par R.

Enfin, pour simplifier l'opérateur [B] de transformation des déplacements en déformations, nous y avons inclus la dérivée de la rotation, même si elle n'intervient pas comme variable nodale, car cela de travailler avec un opérateur [B] linéaire et non pas différentiel.

Il est à noter que dans les milieux classiques avec fluide, les variables nodales sont les déplacements et la pression interstitielle, qui sont de natures et d'ordres différents. Pour les traiter de manière adéquate, il convient de les approximer par des polynômes de degrés différents, afin d'éviter des problèmes d'oscillations numériques.

Enfin, les poutres épaisses et minces, ainsi que les plaques et les coques, constituent des milieux de Cosserat respectivement 1D et 2D, dans lesquels interviennent, outre les déplacements, une ou plusieurs rotations. Dans de tels milieux, avec des lois simples de comportement, et où des solutions analytiques peuvent être développées, il est très courant d'utiliser les mêmes polynômes d'interpolation pour les déplacements et rotations, puis pour stabiliser la solution et la faire converger, des "astuces" numériques, telles que la sous-intégration, uniforme ou sélective, sont employées (Crisfield, 1979).

10.5 Schémas de résolution numérique pour un matériau élastoplastique

La méthode de résolution sera développée dans le cas général d'un matériau élastoplastique, avec ou sans écrouissage isotrope, positif ou négatif.

La surface de charge est définie par la fonction F, qui dépend de l'état de contraintes et couples contraintes actuel, noté sous la forme d'un vecteur σ_i , et du paramètre d'écrouissage généralisé, noté simplement γ^p :

$$F(\sigma_i, \gamma^p) = 0 \tag{A.10-151}$$

La direction de la normale extérieure n_i à la surface de charge $F(\sigma_i , \gamma^p) = 0$, au point de coordonnées σ_i , est donnée par les formules :

$$n_i = f_i / \|f_i\| \tag{A.10-152}$$

$$f_i = \frac{\partial F(\sigma_i, \gamma^p)}{\partial \sigma_i} \tag{A.10-153}$$

10.5.1 Schémas explicites

Il est possible de développer des schémas explicites de résolution numérique. La figure A.10-1 en présente un exemple. Dans un tel schéma de résolution, la matrice de comportement en tout point de Gauss et pour une itération de chargement, est calculée en interpolant entre la matrice de comportement élastique $[D^e]$ et la matrice de comportement élastoplastique $[D^{ep}]$, avec le coefficient R qui représente la fraction du chargement situé à l'intérieur de la surface de charge :

$$[D] = R[D^e] + (1 - R)[D^{ep}] \tag{A.10-154}$$

La matrice élastoplastique $[D^{ep}]$, quant à elle, est calculée au point d'intersection avec la surface de charge.

L'inconvénient majeur de ce genre de méthodes est qu'elles ne permettent pas d'assurer une convergence précise sur la surface de charge (Papanastasiou, 1990). Les erreurs numériques sont beaucoup trop grandes, notamment dans les zones avec des forts gradients de contraintes et couples, ce qui est le cas aussi bien en interface qu'au sein des bandes de cisaillement. Il est donc préférable d'avoir recours à des algorithmes implicites, comme par exemple les méthodes dites de Newton-Raphson, qui permettent de satisfaire le critère avec une très bonne précision dans les zones plastiques.

Le seul cas où la méthode explicite peut donner un résultat satisfaisant, est le cas d'un essai homogène. C'est cette méthode qui a été utilisée dans la présente étude, pour développer le cas du cisaillement simple plan d'un milieu continu classique élastoplastique, qui a servi à valider le cas général du cisaillement simple plan d'un milieu continu de Cosserat élastoplastique se comportant comme un milieu classique.

10.5.2 Méthodes de calcul du coefficient R

Tous les schémas de résolution, explicites ou implicites, sont basés sur la détermination, à un moment donné dans l'algorithme, du point de contact avec la surface de charge, partant d'un état initial de contraints et couples contraintes, noté σ_i , et suivant une direction de chargement $d\sigma_i$.

Deux types de méthodes ont été développées : les méthodes explicites et les méthodes implicites. Certaines sont approchées et d'autres sont exactes. Vu la relative simplicité des méthodes explicites exactes, nous avons préféré ces dernières afin d'atteindre une bonne précision numérique de l'ordre de 10^{-6} sur le critère de rupture normalisé par la pression.

10.5.2.1 Méthodes explicites approchées

Parmi les méthodes explicites donnant une valeur approchée de R, on distingue les méthodes suivantes. La plus simple consiste à écrire un développement asymptotique en R de l'expression $F\left(\sigma_i + R\, d\sigma_i^e\ ,\ \gamma^p\right) = 0$ et à s'arrêter pour un ordre donné.

A l'ordre un, on obtient l'approximation suivante (Nayak et Zienkiewicz, 1972) :

$$F\left(\sigma_i + R\, d\sigma_i^e\ ,\ \gamma^p\right) = F\left(\sigma_i\ ,\ \gamma^p\right) + R\ {}^t\left\{\frac{\partial F\left(\sigma_i\ ,\ \gamma^p\right)}{\partial \sigma_i}\right\}\left\{d\sigma_i^e\right\} + o(d\sigma) = 0 \qquad \text{(A.10-155)}$$

ce qui donne la valeur approchée suivante de R :

$$R = \frac{-F\left(\sigma_i\ ,\ \gamma^p\right)}{{}^t\left\{\frac{\partial F\left(\sigma_i\ ,\ \gamma^p\right)}{\partial \sigma_i}\right\}\left\{d\sigma_i^e\right\}} \qquad \text{(A.10-156)}$$

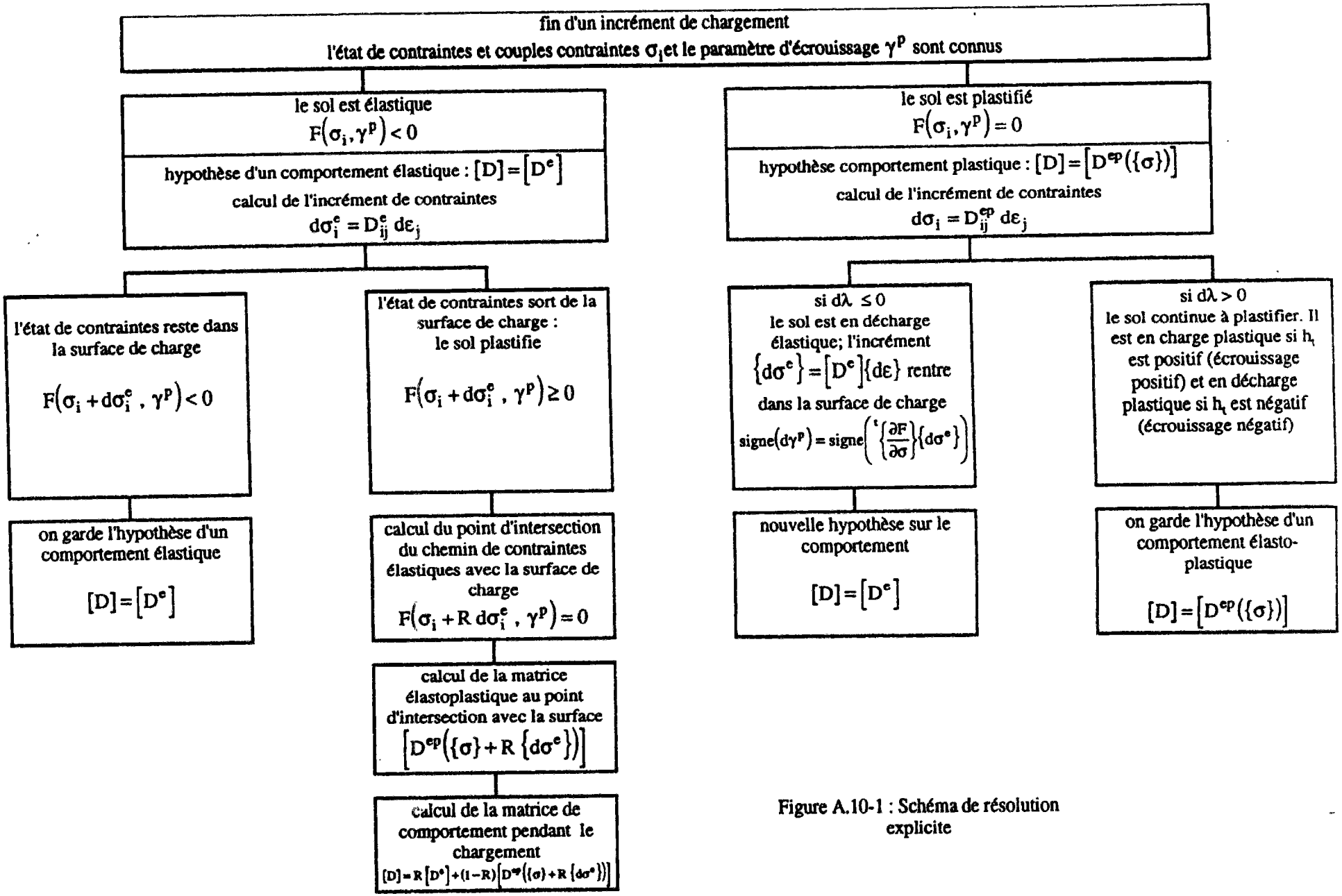


Figure A.10-1 : Schéma de résolution explicite

Une meilleure approximation peut être obtenue en développant au deuxième ordre, ce qui donne une équation explicite du deuxième degré en R (Chen et Han, 1989):

$$F\left(\sigma_i + R\, d\sigma_i^e\ ,\ \gamma^p\right) = F\left(\sigma_i\ ,\ \gamma^p\right) + R\ {}^t\left\{\frac{\partial F\left(\sigma_i\ ,\ \gamma^p\right)}{\partial \sigma_i}\right\}\left\{d\sigma_i^e\right\} + \frac{R^2}{2}\ {}^t\left\{d\sigma_i^e\right\}\left[\frac{\partial^2 F\left(\sigma_i\ ,\ \gamma^p\right)}{\partial \sigma_i \partial \sigma_j}\right]\left\{d\sigma_j^e\right\} + o(d\sigma^2) = 0 \qquad \text{(A.10-157)}$$

Malheureusement, cette dernière méthode, qui se trouve être assez lourde numériquement, donne une valeur approchée alors qu'il suffit de résoudre une équation similaire du deuxième degré pour avoir la valeur exacte.

10.5.2.2 Méthodes implicites approchées

Partant de la valeur approchée de R, calculée au premier ordre, Nayak et Zienkiewicz (1972) ont proposé un schéma itératif qui a été amélioré par Marques (1984) puis William et al. (1987). Cette méthode donne numériquement des résultats tout à fait comparables avec les valeurs exactes mais au prix d'une boucle d'itération supplémentaire.

10.5.2.3 Méthodes explicites exactes

Les méthodes précédentes se trouvent en fait être relativement lourdes et approximatives par rapport au calcul de la valeur exacte qui est possible par la résolution d'une équation quadratique pour la plupart des critères usuels (Bicanis, 1989).

Pour la simplicité des équations, Nous utiliserons une écriture vectorielle des invariants plutôt que leurs expressions en fonction des contraintes principales, comme cela a été proposé par Bicanic (1989). L'écriture vectorielle se prête en effet plus facilement à la programmation numérique.

Le scalaire R recherché est solution exacte de l'équation suivante :

$$F\left(\sigma_i + R\, d\sigma_i^e\ ,\ \gamma^p\right) = 0 \qquad \text{(A.10-158)}$$

où l'incrément de contraintes $d\sigma_i^e$ est donné par :

$$d\sigma_i^e = L_{ij}^e\, d\varepsilon_j \qquad \text{(A.10-159)}$$

Le critère F est écrit en fonction des deux invariants que l'on définit en introduisant un tenseur $[J_2]$, un vecteur $\{J_1\}$, et deux scalaires qui sont respectivement, le coefficient de frottement mobilisé, $\mu(\gamma^p)$ et la cohésion, c :

$$F\left(\sigma_i + R\, d\sigma_i^e\ ,\ \gamma^p\right) = \sqrt{{}^t\left\{\sigma + R\, d\sigma^e\right\}\left[J_2\right]\left\{\sigma + R\, d\sigma^e\right\}} - \mu(\gamma^p)\ {}^t\left\{J_1\right\}\left\{\sigma + R\, d\sigma^e\right\} + c \qquad \text{(A.10-160)}$$

Après avoir élevé au carré chacun des membres de l'équation en R, on obtient :

$${}^t\left\{\sigma + R\, d\sigma^e\right\}\left[J_2\right]\left\{\sigma + R\, d\sigma^e\right\} = \left(\mu(\gamma^p)\ {}^t\left\{J_1\right\}\left\{\sigma + R\, d\sigma^e\right\} - c\right)^2 \qquad \text{(A.10-161)}$$

Cette raletion peut s'écrire sous la forme d'une équation du deuxième degré en R :

$$AR^2 + BR + C = 0 \qquad \text{(A.10-162)}$$

avec trois coefficients A, B et C.

Le coefficient A est égal à :

$$A={}^t\{d\sigma^e\}[J_2]\{d\sigma^e\}-\left(\mu(\gamma^p)\,{}^t\{J_1\}\{d\sigma^e\}\right)^2 \qquad \text{(A.10-163)}$$

et peut se réécrire sous la forme suivante :

$$A=\left(\tau_c(d\sigma^e)\right)^2-\left(\mu(\gamma^p)\,p(d\sigma^e)\right)^2 \qquad \text{(A.10-164)}$$

où on note :

$$\tau_c(\sigma)=\sqrt{{}^t\{\sigma\}[J_2]\{\sigma\}} \qquad \text{(A.10-165)}$$

et

$$p(\sigma)={}^t\{J_1\}\{\sigma\} \qquad \text{(A.10-166)}$$

Le coefficient B est égal à :

$$B={}^t\{\sigma\}\left({}^t[J_2]+[J_2]\right)\{d\sigma^e\}-2\,\mu(\gamma^p)\left({}^t\{J_1\}\{d\sigma^e\}\right)\left(\mu(\gamma^p)\,{}^t\{J_1\}\{\sigma\}-c\right) \qquad \text{(A.10-167)}$$

et peut se réécrire sous la forme suivante, puisque $[J_2]$ est symétrique :

$$B={}^t\{\sigma\}\left(2\,[J_2]\right)\{d\sigma^e\}-2\,\mu(\gamma^p)\,p(d\sigma^e)\left(\mu(\gamma^p)\,p(\sigma)-c\right) \qquad \text{(A.10-168)}$$

Le coefficient C est égal à :

$$C={}^t\{\sigma\}[J_2]\{\sigma\}-\left(\mu(\gamma^p)\,{}^t\{J_1\}\{\sigma\}-c\right)^2 \qquad \text{(A.10-169)}$$

ce qui peut s'écrire aussi :

$$C=\tau_c(\sigma)^2-\left(\mu(\gamma^p)p(\sigma)-c\right)^2 \qquad \text{(A.10-170)}$$

Le discriminant de l'équation du deuxième degré est égal à :

$$\Delta = B^2 - 4\,A\,C \qquad \text{(A.10-171)}$$

Comme le discriminant est positif, il y a deux racines de signes opposés : $R_2 \le 0 \le R_1$. La racine positive R_1 est comprise entre 0 et 1, car pour R = 0 on a $F(\sigma,\gamma^p) < 0$, tandis que pour R = 1 on a $F(\sigma+d\sigma^e,\gamma^p) > 0$.

On prendra donc la solution :

$$R_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4\,A\,C}}{2\,A} \qquad \text{(A.10-172)}$$

On peut remarquer que si $F(\sigma,\gamma^p) = 0$, l'état de contraintes et couples contraintes σ_i est déjà sur la surface de charge. Le coefficient C est nul. La solution positive est nulle : $R_1 = 0$. L'autre racine est strictement négative.

10.5.3 Méthodes de Newton-Raphson (schéma implicite)

10.5.3.1 Principe des méthodes de Newton-Raphson

Le principe des méthodes de Newton-Raphson est, pour un incrément de chargement, (1) d'assembler la matrice de rigidité globale [K], (2) de résoudre le système algébrique d'équation linéaires pour obtenir l'incrément de déplacement {dU}, (3) de calculer en chaque point de Gauss l'incrément de déformations {dε} puis de contraintes dites élastiques $\{d\sigma^e\}$ en supposant un comportement élastique durant l'incrément, (4) d'étudier en chaque point de Gauss si, durant l'incrément de chargement, le comportement a été élastique, élastique puis plastique ou plastique, afin de calculer l'incrément de contrainte correspondant qui respecte les hypothèses de comportement et le critère de rupture, (5) puis d'itérer sur chacune des étapes (1) à (4) afin d'atteindre le critère de convergence choisi, qui peut être en forces, déplacement ou autres. Les détails de l'algorithme sont présentés ci-dessous.

A la fin d'un incrément de chargement numéroté m, on obtient le vecteur global de déplacements ${}^m\{U\}$, le vecteur des efforts intérieurs ${}^m\{F\}$, calculé à partir des contraintes et couples contraintes en chaque point de Gauss, et le vecteur des efforts extérieurs ${}^m\{P\}$, tels que le résidu soit nul aux erreurs numériques près :

$$R\left({}^m\{U\}\right) = {}^m\{F\} - {}^m\{P\} \qquad \text{(A.10-173)}$$

L'incrément de déplacements $\{dU\} = {}^{m+1}\{U\} - {}^m\{U\}$, correspondant à la variation des conditions aux limites, c'est à dire à l'incrément du vecteur des forces extérieures $\{dP\} = {}^{m+1}\{P\} - {}^m\{P\}$, est obtenu de manière itérative. La matrice de rigidité globale ${}^{m+1}[K]$ de l'incrément de chargement considéré est assemblée. Nous verrons dans la suite quelle est la manière la plus appropriée de calculer cette matrice de rigidité globale suivant le problème traité.

La résolution du système algébrique d'équations linéaires suivant, qui correspond à l'écriture du principe des puissances virtuelles, permet d'obtenir une première approximation $\{dU\}^1$ du vecteur des déplacements solution. :

$${}^{m+1}[K]^0\{dU\}^1 = {}^{m+1}\{P\} - {}^m\{F\} \qquad \text{(A.10-174)}$$

En chaque point de Gauss, on a les incréments de déformations et contraintes correspondants :

$$\{d\varepsilon\} = [B]\{dU\}^0 \qquad \text{(A.10-175)}$$

$$\left\{d\sigma^e\right\} = \left[D^e\right]\{d\varepsilon\} \qquad \text{(A.10-176)}$$

Plusieurs cas sont à considérer pour savoir si, durant l'incrément de chargement, le comportement a été élastique, élastique puis plastique ou plastique. La liste détaillée de chacun des cas est donnée dans le paragraphe 10.5.3.5 de cette partie A. Après mise à jour des contraintes en chaque point de Gauss, on obtient un nouveau vecteur des efforts intérieurs ${}^{m+1}\{F\}^{l}$, qui donne le résidu suivant :

$${}^{m+1}\{R\}^{l}={}^{m+1}\{P\}-{}^{m+1}\{F\}^{l} \qquad \text{(A.10-177)}$$

tandis que pour les déplacements on obtient le nouveau vecteur :

$${}^{m+1}\{U\}^{l}={}^{m}\{U\}+\{dU\}^{l} \qquad \text{(A.10-178)}$$

Tableau A.10-25 : Principe des méthodes de Newton-Raphson

calcul de la matrice de rigidité tangente initiale au cours de l'initialisation du problème aux limites, si la méthode de Newton-Raphson avec matrice tangente initiale est utilisée

incrément de chargement m+1

calcul de la matrice de rigidité tangente au début de chaque incrément de chargement m+1, si la méthode de Newton-Raphson modifiée est utilisée

initialisation à l'itération i : ${}^{m+1}\{F\}^{0}={}^{m}\{F\}$ et ${}^{m+1}\{U\}^{0}={}^{m}\{U\}$

boucle d'itération i
le résidu de l'itération précédente est égal à : ${}^{m+1}[R]^{i-1}={}^{m+1}\{P\}-{}^{m+1}\{F\}^{i}$

calcul de la matrice de rigidité tangente au début de chaque itération i, si la méthode de Newton-Raphson complète est utilisée

résolution du système algébrique d'équations linéaires en $\{dU_i\}$:
${}^{m+1}[K]^{i+1}\{dU\}^{i}={}^{m+1}[R]^{i-1}$

calcul des déformations correspondant : $\{d\varepsilon\}=[B]\{dU\}^{i}$
puis des contraintes élastiques : $\left\{d\sigma^{e}\right\}=\left[D^{e}\right]\{d\varepsilon\}$

boucle sur les points de Gauss
et étude des différents cas de chargement (cf. tableau A.10-26)

mise à jour des contraintes puis du vecteur des déplacements :
$${}^{m+1}\{F\}^{i}=\int_{V}{}^{t}[BN]\{\sigma+d\sigma\}dV$$
et du vecteur des forces intérieures : ${}^{m+1}\{U\}^{i}={}^{m+1}\{U\}^{i-1}+\{dU\}^{i}$

critère de convergence, portant sur les déplacements ou les forces
et fin de la boucle d'itération

fin de l'incrément de chargement

10.5.3.2 Choix d'un critère de convergence

Le critère de convergence de la solution peut être défini en fonction des déplacements ou des forces intérieures.

Le critère en déplacements peut être défini à partir de la variation relative du vecteur déplacements solution, sous la forme suivante:

$$\frac{\left\| {}^{m}\{U\}^{i+1} - {}^{m}\{U\}^{i} \right\|_2}{\left\| {}^{m}\{U\}^{i} \right\|_2} \leq \text{tolerance}(U) \qquad \text{(A.10-179)}$$

Le critère en forces intérieures peut être défini de manière similaire à partir de la variation relative du vecteur des forces intérieures :

$$\frac{\left\| {}^{m}\{F\}^{i+1} - {}^{m}\{F\}^{i} \right\|_2}{\left\| {}^{m}\{F\}^{i} \right\|_2} \leq \text{tolerance}(F) \qquad \text{(A.10-180)}$$

Un critère parfois utilisé, consiste à comparer, en norme, les forces résiduelles non équilibrées aux forces extérieures appliquées :

$$\frac{\left\| {}^{m}\{P\} - {}^{m}\{F\}^{i} \right\|_2}{\left\| {}^{m}\{P\} \right\|_2} \leq \text{tolerance}(P) \qquad \text{(A.10-181)}$$

10.5.3.3 Choix de la matrice tangente

Le choix de la matrice de rigidité globale [K] qui servira à calculer l'incrément de déplacement à chaque itération, est très important. Cette matrice peut être a priori quelconque d'après le théorème de convergence. Cependant, le choix doit être fait de manière à assurer la convergence rapide du schéma numérique et à minimiser le nombre d'itérations nécessaires.

La méthode complète de Newton-Raphson consiste à assembler au début de chaque itération i+1, pour un incrément de chargement m+1, la matrice globale de rigidité ${}^{m+1}[K]^{i}$ afin d'obtenir la $i+1^{ème}$ approximation du vecteur déplacement $\{U\}^{i+1}$, connaissant le résidu ${}^{m+1}\{R\}^{i}$ de la $i^{ème}$ itération :

$${}^{m+1}[K]^{i+1}\{dU\}^{i+1} = {}^{m+1}\{R\}^{i} \qquad \text{(A.10-182)}$$

Cette méthode complète de Newton-Raphson revient à linéariser la réponse du système autour de la solution exacte actuelle, par un développement en série de Taylor au 1^{er} ordre en déplacements. La convergence est donc quadratique. Cependant, cette méthode complète est très lourde, dans la mesure où elle nécessite d'assembler la matrice complète en début de chaque itération.

La méthode de Newton-Raphson avec matrice tangente initiale consiste à garder pendant tous les incréments de chargement, la même matrice de rigidité globale, calculée initialement au début de la résolution du problème aux limites. Pour des systèmes évoluant de manière importante, une telle méthode peut engendrer une convergence lente.

La méthode de Newton-Raphson modifiée fournit une solution intermédiaire, puisqu'elle consiste à n'assembler et à ne mettre à jour la matrice de rigidité globale, qu'au début de chaque incrément de chargement. Quand elle converge, elle converge plus vite que la méthode avec matrice tangente initiale et moins vite que la méthode complète. Cependant, elle ne converge d'un point de vue mathématique que dans le cas de chargements continus, monotones, sans zone en décharge élastique ou en écrouissage négatif.

10.5.3.4 Méthodes quasi-Newton

Une alternative à toutes ces méthodes, dites de Newton-Raphson, existe avec les méthodes dites quasi-Newton, qui consistent à calculer une approximation sécante ${}^{m+1}[K]^i$ de [K] entre les itérations i et i+1. La matrice considérée satisfait l'équation quasi-Newton suivante :

$${}^{m+1}[K]^i\{\delta U\}^i = \{\delta R\}^i \tag{A.10-183}$$

où :

$$\{\delta U\}^i = {}^{m+1}\{U\}^i - {}^{m+1}\{U\}^{i-1} \tag{A.10-184}$$

$$\{\delta R\}^i = {}^{m+1}\{R\}^i - {}^{m+1}\{R\}^{i-1} \tag{A.10-185}$$

Ces méthodes sont un bon compromis entre les méthodes de Newton-Raphson, complète et modifiée. Parmi, ces méthodes, la méthode BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanna) est la plus efficace. Elle consiste : (1) à évaluer un incrément de déplacements $\{\Delta U\}$, qui va définir la direction du déplacement final, (2) à faire une recherche dans la direction $\{\Delta U\}$ en calculant le coefficient β tel que le nouvel incrément de déplacement :

$${}^{m+1}\{U\}^i = {}^{m+1}\{U\}^{i-1} + \beta\{\Delta U\} \tag{A.10-186}$$

donne une composante des forces non équilibrées ${}^{m+1}\{P\} - {}^{m+1}\{F\}^i$ à l'itération i, dans la direction $\{\Delta U\}$, plus petite qu'à l'itération précédante :

$${}^t\{\Delta U\}\left({}^{m+1}\{P\} - {}^{m+1}\{F\}^i\right) \le C\,{}^t\{\Delta U\}\left({}^{m+1}\{P\} - {}^{m+1}\{F\}^{i-1}\right) \tag{A.10-187}$$

et (3) à évaluer la correction à apporter à la matrice de rigidité globale [K].

Dans le cas de systèmes très grands, avec un grand nombre de degrés de liberté, la méthode BFGS s'avère être très performante. Cependant, pour notre problème, l'élément Hermitien-Lagrangien utilisé permet de réduire significativement le nombre de degrés de liberté. Nous ne retiendrons pas la méthode BFGS dans son intégralité mais par contre, utiliserons la technique d'accélération de convergence basée sur l'optimisation du coefficient β en complément de la méthode de Newton-Raphson, soit complète, soit avec matrice tangente initiale.

10.5.3.5 Etude détaillée des cas possibles de chargement

Les différents cas de chargement sont représentés sur la figure A.10-2.

10.5.3.5.1 Etat de contraintes initialement élastique

Partant d'un état de contraintes initiales $\{\sigma\}$, situé strictement à l'intérieur de la surface de charge $F(\{\sigma\}, \gamma^p) < 0$, supposons un comportement élastique pendant tout l'incrément de chargement. Par abus de langage, les contraintes obtenues sont dites élastiques et notées $\{d\sigma^e\}$, puisqu'elles correspondent à une hypothèse de comportement élastique. Deux cas sont possibles.

10.5.3.5.1.1 Chargement élastique

Soit le nouvel état de contraintes $\{\sigma + d\sigma^e\}$ est encore situé strictement à l'intérieur de la surface de charge initiale :

$$F\left(\sigma_i + d\sigma_i^e \, , \, \gamma^p\right) < 0 \qquad \text{(A.10-188)}$$

Dans ce cas, numéroté 1, l'hypothèse d'un comportement élastique pendant tout l'incrément de chargement est correcte. On a donc $\{d\sigma\} = \{d\sigma^e\}$.

10.5.3.5.1.2 Chargement élastique puis plastique

Soit le nouvel état de contraintes $\{\sigma+d\sigma^e\}$ est situé sur ou à l'extérieur de la surface de charge initiale :

$$F\left(\{\sigma + d\sigma^e\} \, , \, \gamma^p\right) > 0 \qquad \text{(A.10-189)}$$

Dans ce cas, numéroté 2, le sol a plastifié pendant l'incrément de chargement, et il faut déterminer le point exact d'intersection de la surface de charge initiale avec le chemin de contraintes $\{d\sigma^e\}$ obtenu en faisant l'hypothèse d'un comportement élastique. Ce point de contact est classiquement calculé en réduisant par un facteur R l'incrément de contraintes élastiques $\{d\sigma^e\}$:

$$F\left(\{\sigma + R\, d\sigma^e\} \, , \, \gamma^p\right) = 0 \qquad \text{(A.10-190)}$$

Afin d'assurer la convergence des calculs, une bonne estimation du facteur R est importante. Il existe plusieurs méthodes permettant de calculer ce facteur R. Une méthode explicite exacte, exposée précédemment a été utilisée systématiquement dans tous les calculs.

Dans le cas présent, puisque la fonction $F\left(\{\sigma + R\, d\sigma^e\} \, , \, \gamma^p\right)$ est négative strictement pour R égal à 0, et positive ou nulle pour R égal à 1, le discriminant est positif ($\Delta > 0$) et il existe deux racines telles que :

$$R_2 < 0 < R_1 \leq 1 \qquad \text{(A.10-191)}$$

L'incrément de chargement est divisé en deux parties : (1) la première partie du chargement, de $\{\sigma\}$ à $\{\sigma\}+R_1\{d\sigma^e\}$, correspond à un comportement élastique linéaire, (2) La deuxième partie, de $\{\sigma\}+R_1\{d\sigma^e\}$ à $\{\sigma\}+\{d\sigma^e\}$, correspond à la phase de plastification du sol, l'état de contraintes ayant déjà atteint la surface de charge.

L'incrément de contraintes $(1-R_1)\{d\sigma^e\}$, qui est situé hors de la surface de charge, doit être redistribué le long de la surface de charge, qui peut évoluer durant cette redistribution, de manière à atteindre la surface de charge finale :

$$F\left(\left\{\sigma + R\,d\sigma\right\},\ \gamma^p + d\gamma^p\right) \qquad \text{(A.10-192)}$$

La redistribution se fait en découpant l'incrément de déformation totale élastoplastique restant, $(1-R_1)\{d\varepsilon\}$, en N_{si} sous incrément. Pour chaque sous incrément, l'incrément de déformations totales $(1-R_1)\{d\varepsilon\} / N_{si}$ étant connu, on calcule le multiplicateur plastique correspondant $d\lambda^p$, les déformations plastiques $\{d\varepsilon^p\}$, puis les déformations élastique $\{d\varepsilon^e\}$, à partir desquelles on calcule l'incrément de contraintes $\{d\sigma\}$ le long de la surface de rupture. Le choix du nombre de sous incréments est important car il conditionne la précision avec laquelle l'état de contraintes, à la fin de l'incrément de chargement, sera situé sur la surface de charge exacte. Etant donné que cette redistribution est faite localement, en chaque point de Gauss, sans assembler de matrice globale, elle n'est pas lourde en calcul et il est intéressant de prendre un nombre de sous incrément important de l'ordre de 100 pour garder une précision en 10^{-8} sur le critère de rupture après redistribution.

Il n'existe pas de méthode générale pour optimiser le nombre de sous incréments. Seuls des cas particuliers ont été développés. En particulier, de Borst (1990) propose un algorithme de retour sur la surface de charge qui donne une solution exacte mais cet algorithme repose sur deux hypothèses très restrictives : les coefficients h_i sont choisis de sorte que :

$$[J_2][D^e][J_2] = \mu[J_2] \qquad \text{(A.10-193)}$$

et la loi d'écrouissage est linéaire en γ^p ; le module tangent d'écrouissage h_t est donc constant.

Dans le cas général, la méthode la plus simple consiste à calculer l'erreur sur le critère F donnée par l'incrément de contrainte $(1-R)\{d\sigma^e\}$ à partir du point de contact sur la surface de charge $\{\sigma\} + R\{d\sigma^e\}$ et à moduler suivant la valeur de cette erreur, le nombre de sous incréments. Numériquement, on observe que si le nombre de sous incréments est trop faible, les incréments du multiplicateur plastique peuvent devenir artificiellement négatifs, tandis que l'erreur sur le critère devient inacceptable.

10.5.3.5.2 Etat de contraintes initialement plastique

10.5.3.5.2.1 Définition de la charge

Partant d'un état de contraintes initiales $\{\sigma\}$, situé sur la surface de charge, l'incrément de contraintes $\{d\sigma^e\}$ sera orienté vers l'extérieur de la surface de charge si sa projection, notée proj, sur la direction normale à la surface de charge est positive :

$$\text{proj} = \frac{\partial F\left(\sigma_i\ ,\ \gamma^p\right)}{\partial \sigma_i}\ d\sigma_i \geq 0 \qquad \text{(A.10-194)}$$

et il sera orienté vers l'intérieur si sa projection est négative :

$$\text{proj} = \frac{\partial F\left(\sigma_i\ ,\ \gamma^p\right)}{\partial \sigma_i}\ d\sigma_i \leq 0 \qquad \text{(A.10-195)}$$

Matériau parfaitement plastique

Dans le cas d'un matériau élastique parfaitement plastique, la surface de charge n'évolue pas avec le paramètre d'écrouissage γ^p :

$$F(\sigma_i, \gamma^p) \equiv F(\sigma_i) \tag{A.10-196}$$

La charge ne peut donc se faire que par un déplacement de l'état de contrainte $\{\sigma + d\sigma\}$ le long de la tangente à la surface de rupture :

$$F(\sigma_i) = 0 \quad \text{et} \quad F(\sigma_i + d\sigma_i) = 0 \tag{A.10-197}$$

ce qui s'écrit aussi sous la forme :

$$\text{proj} = \frac{\partial F(\sigma_i)}{\partial \sigma_i}\, d\sigma_i = 0 \tag{A.10-198}$$

Cette formule s'interprète de la façon suivante. L'incrément de contraintes $d\sigma_i$ est orthogonal à la direction normale $\partial F/\partial \sigma$ à la surface de charge $F(\sigma_i) = 0$ et est donc tangent à celle-ci.

Matériau avec écrouissage

Dans le cas d'un matériau avec écrouissage positif, la surface de charge évolue en s'élargissant, tandis que dans le cas d'un écrouissage négatif, elle évolue en diminuant de taille.

Partant d'un état de contraintes initiales σ_i , situé sur la surface de charge $F(\sigma_i , \gamma^p) = 0$, on suppose que le comportement reste plastique pendant tout le chargement. L'état de contrainte reste pendant tout le chargement sur la surface de charge, qui évolue avec le chemin de contraintes :

$$F\left(\sigma_i\ ,\ \gamma^p\right) = F\left(\sigma_i + d\sigma_i\ ,\ \gamma^p + d\gamma^p\right) = 0 \tag{A.10-199}$$

ce qui donne l'expression suivante, encore appelée règle de consistance :

$$\frac{\partial F(\sigma_i\ ,\ \gamma^p)}{\partial \sigma_i}\, d\sigma_i + \frac{\partial F(\sigma_i, \gamma^p)}{\partial \gamma^p}\, d\gamma^p = 0 \tag{A.10-200}$$

Il y aura charge plastique si le point représentatif du nouvel état de contraintes $\sigma_i + d\sigma_i$ sort de la surface de charge initiale :

$$F\left(\sigma_i + d\sigma_i\ ,\ \gamma^p\right) > 0 \tag{A.10-201}$$

ce qui implique que :

$$\frac{\partial F(\sigma_i, \gamma^p)}{\partial \gamma^p}\, d\gamma^p < 0 \tag{A.10-202}$$

Dans ce cas, comme l'incrément du multiplicateur plastique $d\gamma^p$ est positif, il en résulte que $\partial F / \partial \gamma^p$ est négatif. Prenons une surface de charge fonction de la pression p et déviateur s_i :

$$F(\sigma_i\ ,\ \gamma^p) = \text{fonction}\ (s_i) + \mu(\gamma^p)\ p \tag{A.10-203}$$

On a alors l'expression suivante pour la dérivée du critère de charge :

$$\frac{\partial F(\sigma_i\ ,\ \gamma^p)}{\partial \gamma^p} = p\ \frac{d\mu(\gamma^p)}{d\gamma^p} \qquad \text{(A.10-204)}$$

où h_t est la dérivée de μ par rapport à γ^p. Il en résulte que la charge plastique se fait pour un régime où h_t est positif (écrouissage positif).

Il y aura décharge plastique si le nouvel état de contraintes est situé à l'intérieur de la surface de charge initiale :

$$F(\sigma_i + d\sigma_i\ ,\ \gamma^p) < 0 \qquad \text{(A.10-205)}$$

ce qui implique que :

$$\frac{\partial F(\sigma_i, \gamma^p)}{\partial \gamma^p}\ d\gamma^p > 0 \qquad \text{(A.10-206)}$$

Comme :

$$\frac{\partial F(\sigma_i\ ,\ \gamma^p)}{\partial \gamma^p} = p\ \frac{d\mu(\gamma^p)}{d\gamma^p} = p\ h_t \qquad \text{(A.10-207)}$$

et que la pression est négative, il en résulte que la décharge se fait pour un régime où h_t est négatif (écrouissage négatif).

Dans le cas d'un matériau avec écrouissage strictement positif ou nul, ce qui inclut le cas d'un matériau élastique parfaitement plastique, une décharge est toujours élastique.

Dans le cas d'un matériau avec une phase d'écrouissage strictement négatif, c'est à dire présentant un radoucissement, la surface de charge peut diminuer de taille. La décharge, qui est définie par rapport à la surface de charge initiale $F(\sigma_i\ ,\ \gamma^p)$, peut être élastique, si le nouvel état de contraintes $\sigma_i + d\sigma_i$ quitte réellement la surface de charge, ce qui se traduit par $d\gamma_p < 0$, ou plastique si l'état de contraintes $\sigma_i + d\sigma_i$ reste sur la surface de charge à tout instant mais celle-ci rétrécit. Dans ce cas, on a $d\gamma^p > 0$ mais $h_t < 0$.

10.5.3.5.2.2 Analyse détaillée des cas possibles

L'incrément de contraintes $\{d\sigma^e\}$ est calculé à partir de l'incrément de déformations totales $\{d\ \varepsilon\}$ obtenu au début de l'itération en supposant un comportement élastique. On regarde la projection, notée proj, de cet incrément $\{d\sigma^e\}$ sur la normale $\{\partial F/\partial\sigma\}$ à la surface de charge initiale.

10.5.3.5.2.2.1 Projection positive

Si la projection est positive strictement, l'incrément est entièrement plastique et il convient de redistribuer tout l'incrément de contraintes $\{d\sigma^e\}$ le long de la surface de manière à ce qu'à tout instant l'état de contraintes reste sur la surface.

10.5.3.5.2.2.2 Projection négative

Dans le cas où la projection est négative, il faut regarder la position de l'état de contraintes initiales $\{\sigma\}$ par rapport à la surface de charge $F(\{\sigma\},\gamma^p)=0$ exacte d'un point de vue numérique.

10.5.3.5.2.2.2.1 Etat de contraintes initialement situé à l'intérieur de la surface exacte

Supposons, dans un premier temps, que le point initial $\{\sigma\}$ est situé à l'intérieur de la surface de charge exacte, avec une tolérance, notée tol_F :

$$-\text{tol_F} \le F(\{\sigma\},\gamma^p) \le 0 \qquad \text{(A.10-208)}$$

Comme l'incrément de contraintes $\{d\sigma^e\}$ est orienté vers l'intérieur de la surface de charge, on aura les deux cas :

$$F(\{\sigma+d\sigma^e\},\gamma^p) < 0 \qquad \text{(A.10-209)}$$

$$0 \le F(\{\sigma+d\sigma^e\},\gamma^p) \qquad \text{(A.10-210)}$$

Dans le premier cas, l'état de contrainte reste strictement dans la surface de charge exacte et il y décharge élastique, d'où $\{d\sigma\} = \{d\sigma^e\}$. L'équation en R : $F(\{\sigma+Rd\sigma^e\},\gamma^p)<0$ a alors deux racines telles que $R_2 \le 0 < 1 < R_1$ (cas 42). Dans le deuxième cas, l'incrément de contraintes rentre dans la surface de charge puis en ressort. L'équation en R a deux racines telles que $R_2 \le 0 < R_1 < 1$. Il y a décharge élastique entre 0 et R_1 $\{d\sigma^e\}$, puis charge plastique entre R_1 $\{d\sigma^e\}$ et $\{d\sigma^e\}$ (cas 52). Il faut redistribuer l'incrément de contraintes élastiques restant, $(1-R_1)$ $\{d\sigma^e\}$, le long de la surface de charge, en N_{si} sous incréments. Dans la résolution de l'équation en R, il existe un troisième cas correspondant à un discriminant positif et deux racines telles que : $R_2 \le R_1 \le 0 < 1$. Ce cas ne devrait pas exister physiquement, et il n'a pas été rencontré.

10.5.3.5.2.2.2.2 Etat de contraintes initial situé à l'extérieur de la surface exacte

Supposons, dans un deuxième temps, que le point $\{\sigma\}$ est situé à l'extérieur de la surface de charge exacte avec une tolérance notée tol_F :

$$0 \le F(\{\sigma\},\gamma^p) \le \text{tol_F} \qquad \text{(A.10-211)}$$

Comme l'incrément de contraintes $\{d\sigma^e\}$ est orienté vers l'intérieur de la surface de charge approchée, on aura les trois cas :

$$0 \le F(\{\sigma+d\sigma^e\},\gamma^p) \le F(\{\sigma\},\gamma^p) \le \text{tol_F} \qquad \text{(A.10-212)}$$

$$F(\{\sigma+d\sigma^e\},\gamma^p) < 0 \le F(\{\sigma\},\gamma^p) \le \text{tol_F} \qquad \text{(A.10-213)}$$

$$0 < F(\{\sigma\},\gamma^p) \le \text{tol_F} \le F(\{\sigma+d\sigma^e\},\gamma^p) \qquad \text{(A.10-214)}$$

Dans le premier cas, l'état de contrainte se rapproche de la surface de charge initiale sans y pénétrer. Ceci est possible à cause des erreurs numériques. Dans ce cas là, il convient de distinguer le cas 31 où l'équation $F\left(\left\{\sigma + R d\sigma^e\right\}, \gamma^p\right) = 0$ n'a pas de racine ($\Delta<0$), et qui correspond à un état de contraintes se rapprochant de la surface sans la viser, et le cas 32 où cette équation à deux racines positives $0 < 1 < R_2 \leq R_1$, et qui correspond à un vecteur pointant vers la surface sans l'atteindre. Pour ces deux cas, le comportement est plastique sur tout l'incrément. Il faut tolérer des projections négatives qui sont du même ordre de grandeur que l'erreur numérique autorisée sur le critère F :

$$-tol_F \leq \frac{\partial F}{\partial \sigma_i} d\sigma_i^e \Big/ \left\| \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\| \leq 0 \qquad \text{(A.10-215)}$$

ainsi que des variations négatives du multiplicateur plastique $d\lambda^p$, du même ordre de grandeur que l'erreur sur le critère F divisé par le module d'Young du matériau étudié :

$$-tol_F/E \leq d\lambda^p = \frac{\partial F}{\partial \sigma_i} d\sigma_i^e \Big/ p\, h_t + \frac{\partial F}{\partial \sigma_i} D^e \frac{\partial G}{\partial \sigma_j} \leq 0 \qquad \text{(A.10-216)}$$

Il peut être démontré que le dénominateur du multiplicateur plastique $d\lambda^p$ est toujours positif, que l'écrouissage soit positif ($h_t > 0$), négatif ($h_t < 0$) ou nul ($h_t = 0$) (Papanastasiou, 1990). Il en résulte que le signe de la projection du vecteur $\{d\sigma^e\}$ sur la normale à la surface de charge initiale est le même que celui du multiplicateur plastique $d\lambda^p$.

Dans le deuxième cas, l'incrément de contraintes rentre dans la surface de charge et y reste. La décharge est entièrement élastique et $\{d\sigma\} = \{d\sigma^e\}$ (cas 41).

Dans le troisième cas, l'incrément de contraintes rentre dans la surface et en ressort (cas 51). Ce est relativement rare mais a été rencontré dans les simulations numériques. Par exemple, quand on passe de la consolidation au cisaillement simple plan, les points situés près de l'interface, traversent de part en part la surface de charge. Dans ce cas là, l'équation en R : $F\left(\left\{\sigma + R d\sigma^e\right\}, \gamma^p\right) = 0$ a deux racines telles que $0 \leq R_2 \leq R_1 < 1$. Le chargement sera élastique de 0 à R_1 $\{d\sigma^e\}$ puis plastique de R_1 $\{d\sigma^e\}$ à $\{d\sigma^e\}$. Il faut redistribuer le long de la surface de charge, l'incrément de contraintes, $(1-R_1)$ $\{d\sigma^e\}$, en N_{si} sous incréments.

10.5.3.6 Erreurs numériques

10.5.3.6.1 Contrôle de l'erreur numérique sur le critère de rupture

Au cours d'un incrément, lors de la redistribution des contraintes (1-R) $\{d\sigma^e\}$ le long de la surface de charge, la précision sur le critère se détériore dans les zones plastiques, qui nous intéressent puisqu'elles constituent la couche d'interface.

Une première solution possible consiste à adopter un nombre de sous incrément de redistribution très grand, ce qui peut finir par être très coûteux en temps de calcul.

Une deuxième solution consiste à développer un algorithme de retour exacte sur la surface. Cependant, cela n'est possible que dans des cas très particuliers de fonction d'écrouissage et de valeurs des paramètres du cisaillement généralisé. Pour développer un tel algorithme, de Borst (1991) a été amené à choisir pour les paramètres h_i , des valeurs irréalistes d'un point de physique, et une fonction d'écrouissage pour la cohésion, linéaire en fonction de la déformation plastique.

Tableau A.10-26 : Différents cas de chargements possibles

l'état de contraintes initial est élastique : $F(\{\sigma\},\gamma^p) < 0$ on regarde si le nouvel état de contraintes $\{\sigma + d\sigma^e\}$ est situé dans ou hors de la surface initiale		
cas 1	$F(\{\sigma + d\sigma^e\},\gamma^p) < 0$ charge entièrement élastique	l'incrément de contraintes est élastique $\{d\sigma\} = \{d\sigma^e\}$
cas 2	$F(\{\sigma + d\sigma^e\},\gamma^p) \geq 0$ charge élastique puis plastique l'équation en R : $F(\{\sigma + R\, d\sigma^e\},\gamma^p) = 0$ est telle que : $\Delta > 0$ et $R_2 < 0 < R_1 \leq 1$ car la fonction en R : $F(\{\sigma + R\, d\sigma^e\},\gamma^p)$ est < 0 pour $R = 0$ et ≥ 0 pour $R = 1$	charge élastique entre 0 et R_1 $\{d\sigma^e\}$ puis plastique entre R_1 $\{d\sigma^e\}$ et $\{d\sigma^e\}$ il faut redistribuer l'incrément $(1\text{-}R_1)$ $\{d\sigma^e\}$ le long de la surface de charge

l'état de contraintes initial $\{\sigma\}$ est plastique on regarde si l'incrément $\{d\sigma^e\}$ des contraintes, dites élastique, est orienté vers l'intérieur ou l'extérieur de la surface de charge initiale

cas 3, 31 et 32 : charge plastique

cas 3	$\text{proj} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_i}\, d\sigma_i^e \Big/ \left\|\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\| > 0$ charge plastique	charge plastique il faut redistribuer l'incrément $\{d\sigma^e\}$ le long de la surface de charge
cas 31 et 32 : la projection du vecteur des contraintes élastiques est négative mais dans la limite des erreurs numériques : $\text{-tol_F} \leq \text{proj} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_i}\, d\sigma_i^e \Big/ \left\|\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\| \leq 0$		
cas 31	l'équation en R : $F(\{\sigma\} + R\,\{d\sigma^e\},\gamma^p) = 0$ n'a pas de racines ($\Delta < 0$); le vecteur $\{d\sigma^e\}$ ne pointe pas vers la surface de charge	charge plastique il faut redistribuer l'incrément $\{d\sigma^e\}$ le long de la surface de charge
cas 32	l'équation en R : $F(\{\sigma\} + R\,\{d\sigma^e\},\gamma^p) = 0$ a deux racines ($\Delta \geq 0$) telles que $0 < 1 < R_2 \leq R_1$ le vecteur $\{d\sigma^e\}$ pointe vers la surface de charge sans l'atteindre	charge plastique il faut redistribuer l'incrément $\{d\sigma^e\}$ le long de la surface de charge

cas 41, 42, 51 et 52 : la projection du vecteur des contraintes élastiques est négative et inférieure aux erreurs numériques : $\text{proj} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_i}\, d\sigma_i^e \Big/ \left\|\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\| < \text{-tol_F} < 0$
cas 41 et 42 : décharge élastique

cas 41	l'équation $F(\{\sigma\} + R\,\{d\sigma^e\},\gamma^p) = 0$ a deux racines ($\Delta \geq 0$) telles que $0 \leq R_2 < 1 < R_1$ l'incrément de contrainte $\{d\sigma^e\}$ reste strictement dans la surface de charge exacte	décharge élastique $\{d\sigma\} = \{d\sigma^e\}$

cas 42	l'équation $F\left(\{\sigma\}+R\left\{d\sigma^e\right\},\gamma^p\right)=0$ a deux racines ($\Delta \geq 0$) telles que $R_2 \leq 0 < 1 < R_1$ l'incrément de contrainte $\{d\sigma^e\}$ reste strictement dans la surface de charge exacte	décharge élastique $\{d\sigma\} = \{d\sigma^e\}$
cas 51et 52 : décharge élastique suivie d'une charge plastique		
cas 51	l'équation $F\left(\{\sigma\}+R\left\{d\sigma^e\right\},\gamma^p\right)=0$ a deux racines ($\Delta \geq 0$) telles que $0 < R_2 <= R_1 < 1$ l'incrément de contrainte $\{d\sigma^e\}$ rentre dans la surface de charge exacte puis en ressort	décharge élastique entre 0 et R_1 $\{d\sigma^e\}$ puis charge plastique entre R_1 $\{d\sigma^e\}$ et $\{d\sigma^e\}$ il faut redistribuer l'incrément de contraintes $(1-R_1)$ $\{d\sigma^e\}$ le long de la surface de charge
cas 52	l'équation $F\left(\{\sigma\}+R\left\{d\sigma^e\right\},\gamma^p\right)=0$ a deux racines ($\Delta \geq 0$) telles que $R_2 <= 0 < R_1 < 1$ l'incrément de contrainte $\{d\sigma^e\}$ sort de la surface de charge exacte	décharge élastique entre 0 et R_1 $\{d\sigma^e\}$ puis charge plastique entre R_1 $\{d\sigma^e\}$ et $\{d\sigma^e\}$ il faut redistribuer l'incrément de contraintes $(1-R_1)$ $\{d\sigma^e\}$ le long de la surface de charge

cas 6 : impossibilité physique		
cas 6	la projection $proj = \frac{\partial F}{\partial \sigma_i} d\sigma_i^e \Big/ \left\|\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\|$ est négative et l'équation $F\left(\{\sigma\}+R\left\{d\sigma^e\right\},\gamma^p\right)=0$ a deux racines ($\Delta \geq 0$) telles que $R_2 <= R_1 < 0 < 1$	ce cas n'a pas de raison d'être d'un point de vue physique

Une troisième solution consiste à adopter un nombre de sous incréments suffisant pour ne pas trop s'éloigner de la surface de charge, par exemple de l'ordre d'une centaine, puis à forcer le critère à être satisfait de manière très précise à la fin de chaque incrément de chargement. Pour cela, on force l'état de contraintes à rejoindre la surface suivant la normale $\partial F/\delta\sigma$ à la surface $F = 0$, en calculant le coefficient α tel que :

$$F\left((\sigma+d\sigma)+\alpha\frac{\partial F}{\partial \sigma}(\sigma+d\sigma),\gamma^p+d\gamma^p\right)=0 \qquad \text{(A.10-217)}$$

En pratique, avec un nombre de sous incréments de l'ordre de 100, le critère F est satisfait à la fin d'un incrément de chargement avec une précision de 10^{-7} . Un retour forcé avec un coefficient α de l'ordre de 10^{-2} permet de satisfaire le critère de rupture avec une précision de 10^{-16}, ce qui est l'erreur numérique inhérente aux ordinateurs.

La correction apportée à l'état de contrainte selon la normale à la surface de charge ne vérifie pas les équations d'équilibre. Cependant, dans le cas d'un matériau purement frottant, elle ne modifie pas l'énergie plastique dissipée. A l'incrément suivant, les forces non équilibrées résultant de cette correction sont rééquilibrées automatiquement par la méthode de résolution.

10.5.3.6.2 Correspondance entre les erreurs numériques sur les variables

L'erreur sur le critère de rupture F est notée tol_F :

$$-\text{tol_F} \le F\left(\{\sigma\}, \gamma^p\right) \le \text{tol_F} \qquad \text{(A.10-218)}$$

Le nouvel état de contrainte au cours d'une itération peut se rapprocher de la surface exacte tout en restant dehors. Dans ce cas là, la projection de l'incrément de contraintes sur la normale à la surface est du même ordre de grandeur que l'erreur sur le critère de rupture :

$$-\text{tol_F} \le \text{proj} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial \sigma} d\sigma}{\left\| \dfrac{\partial F}{\partial \sigma} \right\|} \le 0 \qquad \text{(A.10-219)}$$

L'incrément $d\lambda^p$ du multiplicateur plastique correspondant à ce cas là, est négatif, de l'ordre de la tolérance sur le critère tol_F divisée par le module G, puisque la normale $\partial F/\partial\sigma$ est de l'ordre de l'unité tandis que le dénominateur de $d\lambda^p$ est de l'ordre des modules élastiques :

$$d\lambda^p = \frac{{}^t\{\partial F/\partial\sigma\}\left[D^e\right]\{d\varepsilon\}}{p\, h_t + {}^t\{\partial F/\partial\sigma\}\left[D^e\right]\{\partial G/\partial\sigma\}} \approx \frac{\text{proj}}{G} \approx \frac{\text{tol_F}}{G} \qquad \text{(A.10-220)}$$

Le module élastique G étant de l'ordre de 10^{-7} kPa et l'erreur sur le critère durant une itération étant de l'ordre de 10^{-7}, il faut accepter des variations négatives de λ^p de l'ordre de 10^{-14}.

10.5.3.7 Particularités des méthodes de Newton-Raphson dans les milieux de Cosserat

La généralisation des méthodes de Newton-Raphson aux milieux continus de Cosserat se fait aisément à condition de travailler avec les vecteurs généralisés des déplacements, déformations et contraintes. Il n'y a pas alors de différences fondamentales entre les milieux classiques et les milieux continus de Cosserat.

Parmi les points particuliers à noter, il convient de remarquer qu'entre la consolidation oedométrique et le cisaillement simple, les points situés près de l'interface traversent de part en part la surface de charge, suivant une décharge élastique puis une charge plastique, au cours d'un même incrément. Ce cas est assez rarement rencontré dans les milieux classiques.

La concentration des déformations au sein de la couche d'interface sur quelques longueurs internes, nécessite d'avoir une très bonne précision sur le critère de rupture au sein de cette même couche. En particulier, une précision de l'ordre de 10^{-8} sur le critère de rupture, ce qui est obtenu après une centaine de sous incréments de redistribution des contraintes élastiques, n'est pas suffisante, car elle conduit à avoir des incréments négatifs du même ordre de grandeur pour le multiplicateur plastique, dans les cas où le vecteur contraintes se rapproche de la surface de charge en la tangentant (cas 31 et 32). Il est nécessaire de forcer l'état de contraintes à rejoindre la surface de charge avec une très grande précision, de l'ordre de 10^{-16}, à la fin de chaque incrément, en corrigeant suivant la normale à la surface de rupture.

Enfin, les couches d'interfaces sont des zones plastiques qui subissent de fortes déformations et sont donc soumises très rapidement à un radoucissement au cours du cisaillement. La méthode de Newton-Raphson modifiée n'est pas appropriée pour de tels cas, car elle ne converge pas. Nous avons utilisés, soit la méthode complète, soit la méthode avec matrice tangente initiale.

Figure a

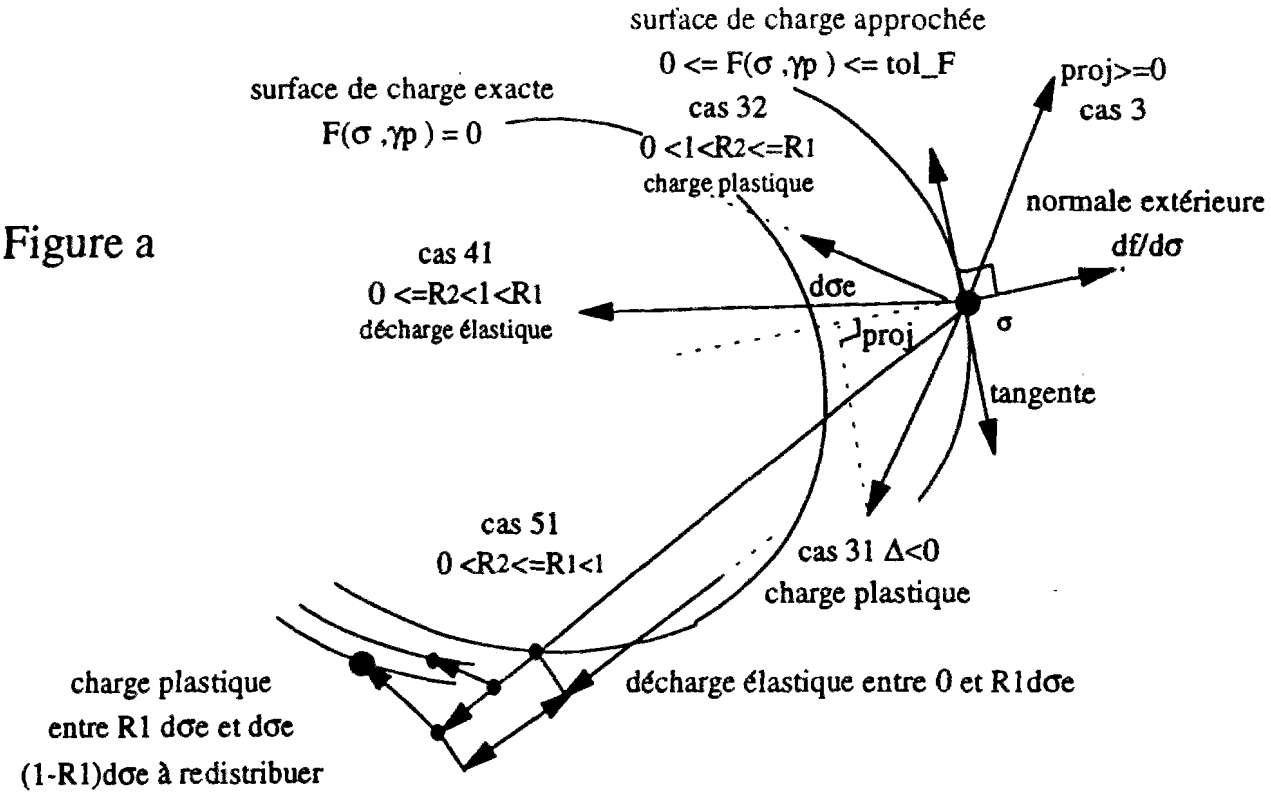


Figure b

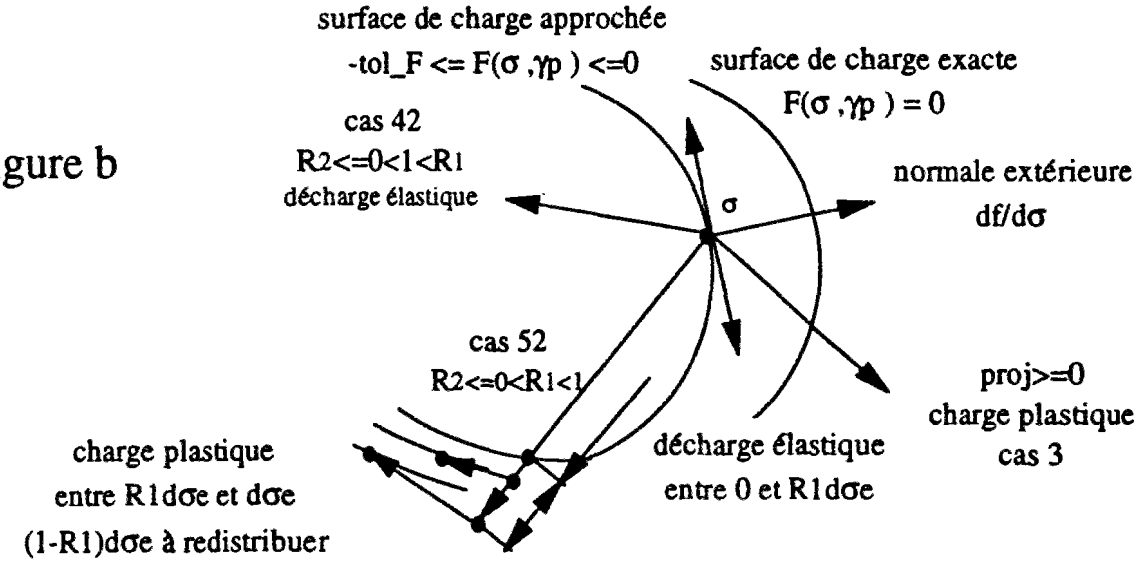
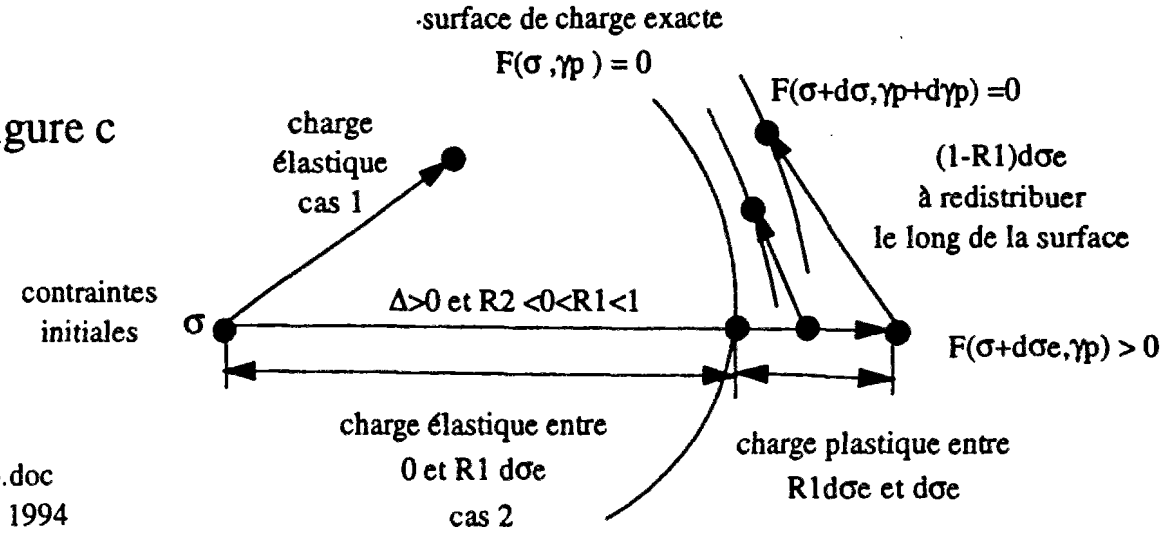


Figure c



fi_ep6.doc
8 aout 1994

Figure A.10-1 : Schéma de résolution élastoplastique

10.6 Formulation par éléments finis dans le cas de déformations finies

Dans le cadre des milieux continus classiques, plusieurs formulations en déformations finies ont été proposées (Mc Meeking et Rice, 1975; Mandel, 1982; Rougee, 1980, 1991). Si dans le cas des milieux élastoplastiques isotropes, de grandes tendances se dessinent actuellement, par contre dans le cas de milieux continus élastoplastiques anisotropes, l'état actuel des connaissances n'est pas encore figé. Cependant, il faut garder à l'esprit que pour ,les milieux isotropes, les théories disponibles donnent des résultats drastiquement différents, et il convient sur ce sujet là de ne pas tirer de conclusion trop générale à partir de quelques résultats.

Dans les milieux de Cosserat, l'état actuel des connaissances est limité à une publication par de Borst et Mühlhaus (1991) et il reste encore beaucoup de recherches à faire comme nous le verrons dans les paragraphes ci-dessous.

10.6.1 Hypothèses des petites déformations et petits déplacements

Dans le cas d'une transformation infinitésimale et dans l'hypothèse des petites perturbations, on peut confondre les variables d'Euler et les variables de Lagrange, ce qui revient à négliger les termes du 2ème ordre dans les développements qui permettent de passer des secondes aux premières variables :

$$\gamma_i(\text{variables d'Euler}) = \frac{\cdot\, dv_i}{\cdot\, dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial t} \qquad \text{(A.10-221)}$$

$$\gamma_i(\text{variables de Lagrange}) = \frac{\cdot\, dv_i}{\cdot\, dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} \qquad \text{(A.10-222)}$$

où γ_i est le vecteur accélération, v_i le vecteur vitesse, dv_i/dt la dérivée particulaire, $\partial v_i/\partial t$ la dérivée partielle par rapport au temps. Dans le cas d'une transformation infinitésimale, la dérivée particulaire étant une dérivée partielle, on peut commuter les opérateurs gradient et dérivée pour obtenir le tenseur des déformations comme étant la partie symétrique du gradient des déplacements.

En pratique, l'hypothèse des petites déformations peut être appliquée tant que le carré du module des déformations reste inférieur à l'ordre de grandeur de la précision des calculs envisagés, soit :

$$|\varepsilon| \leq 2 \text{ à } 5\ 10^{-2} \qquad \textbf{(A.10-223)}$$

10.6.2 Déformations finies dans un milieu continu de Cosserat

10.6.2.1 Définitions des tenseurs

Le tenseur des contraintes de Cauchy, encore appelées vraies contraintes, est noté σ_{ij} . Il est défini en considérant les configurations C et $\overline{C}$, aux instants t et t+dt, respectivement. Le vecteur contrainte dt_i , agissant sur une surface dS_k , de normale n_k , dans la configuration initiale C, est défini par :

$$dt_i = \sigma_{ik}\, dS_k \tag{A.10-224}$$

$$dS_k = n_k\, dS \tag{A.10-225}$$

Le vecteur contrainte $d\overline{t}_i$, agissant sur une surface $d\overline{S}_k$, de normale $\overline{n}_k$, dans la configuration finale $\overline{C}$, est défini par :

$$d\overline{t}_i = \overline{\sigma}_{ik}\, d\overline{S}_k \tag{A.10-226}$$

$$d\overline{S}_k = \overline{n}_k\, d\overline{S} \tag{A.10-227}$$

Le 1er tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff est noté τ_{ij} . Il est défini en projetant sur la configuration initiale C, les vecteurs contraintes agissant sur la configuration finale $\overline{C}$, d'où la définition :

$$d\overline{t}_i = \tau_{ik}\, dS_k \tag{A.10-228}$$

où dS_j est reliée à $d\overline{S}_j$ par la transformation :

$$d\overline{S} = dS + \Delta dS \tag{A.10-229}$$

avec :

$$\Delta dS = \left(\Delta\varepsilon_{kk} - \Delta\varepsilon_{lm}\, n_l\, n_m\right) dS \tag{A.10-230}$$

$$\overline{n}_i = n_i + \Delta n_i \tag{A.10-231}$$

$$\Delta n_i = n_k\left(n_i\, n_l - \delta_{il}\right)\partial_l \Delta u_k \tag{A.10-232}$$

Le 1er tenseur de Piola-Kirchhoff est alors relié au tenseur de Cauchy par la relation :

$$\tau_{ij} = \left(\det F_{lm}\right)\sigma_{ik}\, F^{-1}_{jk} \tag{A.10-233}$$

Pour définir le taux corotationnel, encore appelé taux de Jaumann, du 1er tenseur de Piola-Kirchhoff dans la configuration actuelle, deux solutions sont possibles.

La première solution, qui est couramment utilisée pour les milieux continus classiques, est de considérer la rotation du milieu continu Ω_{ij} :

$$\tau_{ij}^{J} = \dot{\sigma}_{ij} + \dot{\varepsilon}_{kk}\sigma_{ij} - \dot{\Omega}_{ik}\sigma_{kj} + \sigma_{ik}\dot{\Omega}_{kj} \qquad \text{(A.10-234)}$$

Cependant, dans le cas présent, il est plus naturel d'utiliser la rotation de Cosserat ω_{ij}^{c} dans la définition du taux corotationnel :

$$\tau_{ij}^{c} = \dot{\sigma}_{ij} + \dot{\varepsilon}_{kk}\sigma_{ij} - \dot{\omega}_{ik}^{c}\sigma_{kj} + \sigma_{ik}\dot{\omega}_{kj}^{c} \qquad \text{(A.10-235)}$$

C'est cette dernière définition que de Borst et Mühlhaus (1991) proposent d'adopter et que nous utiliserons dans la suite. En ce qui concerne les couples contraintes μ_{ij} , il convient également de définir des taux objectifs de la manière que pour les contraintes.

10.6.2.2 Equations d'équilibre (formulation forte)

Les équations d'équilibre en translation sont écrites sous la forme suivante :

$$\sigma_{ij,j}^{R} = 0 \qquad \text{(A.10-236)}$$

où σ_{ij}^{R} est le taux du 1er tenseur de Piola-Kirchhoff défini dans la configuration actuelle, c'est à dire :

$$\sigma_{ij}^{R} = \dot{\sigma}_{ij} + \dot{\varepsilon}_{kk}\,\sigma_{ij} - \sigma_{ik}\,\dot{u}_{j,k} \qquad \text{(A.10-237)}$$

L'équilibre en rotation sur un volume élémentaire V de surface S s'écrit sous la forme :

$$\int_{S} \mu_{ji}\, n_i\, dS + \int_{V} e_{ikj}\, x_i\, \sigma_{kl}\, n_l dV = 0 \qquad \text{(A.10-238)}$$

ce qui donne après substitution :

$$m_{ij,j} + e_{ijl}\,\tau_{lj} = 0 \qquad \text{(A.10-239)}$$

Le nouveau terme m_{ij} correspond au tenseur de Piola-Kirchhoff des couples contraintes. Il est relié aux vrais couples contraintes μ_{ij} par :

$$m_{ij} = (\det F_{ln})\ \mu_{ik}\, F_{jk}^{-1} \qquad \text{(A.10-240)}$$

Après différentiation de (A.10-239) et en se référant à la configuration actuelle, on obtient :

$$m_{ij,j}^{R} + e_{ijl}\left(\dot{\varepsilon}_{kk}\,\sigma_{lj} + \dot{\sigma}_{lj}\right) = 0 \qquad \text{(A.10-241)}$$

Le taux du 1er tenseur des couples contraintes de Piola-Kirchhoff m_{ij}^R est défini par :

$$m_{ij}^R = \dot{\mu}_{ij} + \dot{\varepsilon}_{kk}\,\mu_{ij} - \mu_{ik}\,\dot{u}_{j,k} \qquad \text{(A.10-242)}$$

En déformations planes, le 1er tenseur de Piola-Kirchhoff des couples contraintes se trouve être un tenseur objectif. De plus, dans le cas bidimensionnel, m_{ij}^R est égale au taux de Jaumann du tenseur de Piola-Kirchhoff des couples contraintes.

De Borst et Mühlhaus (1991) proposent de définir la loi de comportement en reliant m_{ij}^R aux taux des courbures $\dot{\kappa}_{ij}$. Cette approche est quelque peu inconsistante puisque pour les couples contraintes, le taux corotationnel est défini à partir de la rotation de Cosserat tandis que pour les contraintes, le taux corotationnel est défini à partir de la rotation du milieu continu. Pour faire cette hypothèse, ces auteurs avancent l'idée que les termes en couples contraintes sont du deuxième ordre et sont très petits par rapport aux contraintes, ce qui permet de les considérer comme des termes perturbateurs et d'adopter l'hypothèse précédente. Cette hypothèse a l'avantage dans le cas général 2D de simplifier considérablement les développements. Dans le cas présent, qui est 1D, elle n'apporte pas de réelles simplifications et, en plus, l'hypothèse sur les couples contraintes qui seraient du 2ème ordre n'est pas forcément vérifiée. Nous ferons donc les modifications nécessaires pour rendre le modèle de de Borst et Mühlhaus (1991) consistant, dans les paragraphes qui suivent.

10.6.2.3 Principe des puissances virtuelles (formulation faible)

La formulation faible des équations d'équilibre à partir des 1ers tenseurs de Piola-Kirchhoff des contraintes et couples contraintes s'écrit sous la forme suivante :

$$\int_V \sigma_{ij,j}^R\,\delta u_i\,dV + \int_V m_{3j,j}^R + e_{3jl}\left(\dot{\varepsilon}_{kk}\,\sigma_{lj} + \dot{\sigma}_{lj}\right)\delta\omega_3^c\,dV = 0 \qquad \text{(A.10-243)}$$

Après substitution de σ_{ij}^R à l'aide de l'équation (A.10-237), on obtient :

$$\int_V \left(\tau_{ij}^c - \dot{\varepsilon}_{ik}\,\sigma_{kj} + \sigma_{ik}\,\dot{\varepsilon}_{jk}\right)\delta\varepsilon_{ij}\,dV + \int_V m_{3k}^R\,\delta\kappa_{3k}\,dV + \int_V \dot{u}_{i,k}\,\sigma_{kj}\,\delta F_{ij}\,dV - \int_V \dot{u}_{i,k}\left(\sigma_{kj} - \sigma_{jk}\right)\delta\omega_{ij}^c\,dV = 0 \qquad \text{(A.10-244)}$$

Quand les effets de Cosserat disparaissent, les 2ème et 4ème termes dans la relation précédente disparaissent. Le tenseur des déformations est symétrique. Les deux rotations Ω_{ij} et ω_{ij}^c coïncident et l'on retrouve la matrice de rigidité tangentielle de Mc Meeking et Rice (1975).

10.6.2.4 Formulation de la matrice de rigidité tangentielle

La loi de comportement est définie entre τ_{ij}^{c} et ε_{kl} , d'une part, et m_{3k}^{R} et κ_{3k} , d'autre part. On notera la loi de comportement sous la forme compacte suivante :

$$\tau_{ij}^{c} = L_{ijkl}^{ep}\ \dot{\varepsilon}_{kl} \tag{A.10-245}$$

où L^{ep} est la matrice élastoplastique de comportement.

Les deux premières intégrales dans l'expression du principe des puissances virtuelles, qui correspondent au comportement du matériau et non pas à l'évolution de la géométrie, s'écrivent sous la forme suivante :

$$\int_V \dot{\varepsilon}_{kl}\left(L_{ijkl}^{ep} - \delta_{ik}\,\sigma_{lj} - \sigma_{il}\,\delta_{kj}\right)\delta\varepsilon_{ij}\,dV + \int_V m_{3k}^{R}\,\delta\kappa_{3k}\,dV = \int_V {}^{t}\{\delta\dot{u}\}\,{}^{t}\left[L_L\right]\left(\left[L^{ep}\right] - \left[\Sigma_1\right]\right)\left[L_L\right]\{\dot{u}\}\,dV \tag{A.10-246}$$

avec :

$${}^{t}\{\dot{u}\} = \left\{\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{\omega}_3^{c}\right\} \tag{A.10-247}$$

$${}^{t}\left\{\tau^{c}\right\} = \left\{\tau_{11}^{c}, \tau_{22}^{c}, \tau_{33}^{c}, \tau_{12}^{c}, \tau_{21}^{c}, m_{31}^{R}, m_{32}^{R}\right\} \tag{A.10-248}$$

$${}^{t}[L_L] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline \partial/\partial x & & & \partial/\partial y & & & \\ \hline & \partial/\partial y & & & \partial/\partial x & & \\ \hline & & & 1 & -1 & \partial/\partial x & \partial/\partial y \\ \hline \end{array} \tag{A.10-249}$$

$$[\Sigma_1] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 2\,\sigma_{11} & & & \sigma_{12}+\sigma_{21} & & & \\ \hline & 2\,\sigma_{22} & & & \sigma_{12}+\sigma_{21} & & \\ \hline & & & & & & \\ \hline \sigma_{12} & \sigma_{12} & & \sigma_{22} & \sigma_{11} & & \\ \hline \sigma_{21} & \sigma_{21} & & \sigma_{22} & \sigma_{11} & & \\ \hline & & & & & & \\ \hline & & & & & & \\ \hline \end{array} \tag{A.10-250}$$

La 1ère partie de la matrice de rigidité, due à la transformation géométrique, est écrite sous la forme :

$$\int_V \dot{u}_{i,k}\,\sigma_{kj}\,\delta F_{ij}\,dV = \int_V \left({}^{t}\{\delta u\}\,{}^{t}\left[L_{NL}\right]\right)\left[\Sigma_2\right]\left(\left[L_{NL}\right]\{\dot{u}\}\right)dV \tag{A.10-251}$$

Les matrices $[L_{NL}]$ et $[\Sigma_2]$ sont définies par :

$$[L_{NL}] = \begin{array}{|c|c|c|}\hline \partial/\partial x & & \\ \hline \partial/\partial y & & \\ \hline & \partial/\partial x & \\ \hline & \partial/\partial x & \\ \hline \end{array} \qquad \text{(A.10-252)}$$

$$[\Sigma_2] = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \sigma_{11} & \sigma_{21} & & \\ \hline \sigma_{12} & \sigma_{22} & & \\ \hline & & \sigma_{11} & \sigma_{21} \\ \hline & & \sigma_{12} & \sigma_{22} \\ \hline \end{array} \qquad \text{(A.10-253)}$$

On obtient alors l'expression :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \delta u_{1,1} & \delta u_{1,2} & \delta u_{2,1} & \delta u_{2,2} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \sigma_{11} & \sigma_{21} & & \\ \hline \sigma_{12} & \sigma_{22} & & \\ \hline & & \sigma_{11} & \sigma_{21} \\ \hline & & \sigma_{12} & \sigma_{22} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|}\hline \dot{u}_{1,1} \\ \hline u_{1,2} \\ \hline u_{2,1} \\ \hline u_{2,2} \\ \hline \end{array} =$$

$$= \sigma_{11}\left(\delta u_{1,1}\,\dot{u}_{1,1} + \delta u_{2,1}\,\dot{u}_{2,1}\right) + \sigma_{12}\left(\dot{u}_{1,1}\,\delta u_{1,2} + \dot{u}_{2,1}\,\delta u_{2,2}\right) +$$
$$\sigma_{21}\left(\delta u_{1,1}\,\dot{u}_{1,2} + \delta u_{2,1}\,\dot{u}_{2,2}\right) + \sigma_{22}\left(\dot{u}_{1,2}\,\delta u_{1,2} + \dot{u}_{2,2}\,\delta u_{2,2}\right) = \delta u_{k,j}\,\sigma_{ij}\,\dot{u}_{k,i} \qquad \text{(A.10-254)}$$

Dans le cas du cisaillement simple, seuls les termes $u_{1,2}$ et $u_{2,2}$ sont non nulles, ce qui donne l'expression suivante pour le premier terme d'ordre géométrique :

$$\int_V \dot{u}_{i,k}\,\sigma_{kj}\,\delta F_{ij}\,dV = \int_V \sigma_{22}\left(\delta u_{1,2}\,\dot{u}_{1,2} + \delta u_{2,2}\,\dot{u}_{2,2}\right)dV \qquad \text{(A.10-255)}$$

Il est intéressant d'écrire ce terme sous une forme qui permette d'en tenir compte de manière simple, par exemple, comme une correction, notée $[G_1]$, de la matrice de rigidité en déformations infinitésimale :

$$\int_V \dot{u}_{i,k}\,\sigma_{kj}\,\delta F_{ij}\,dV = -\int_V {}^t\{\delta\varepsilon\}\,[G_1]\,\{\dot{\varepsilon}\}\,dV \qquad \text{(A.10-256)}$$

Dans le cas présent, et en prenant pour le vecteur des déformations, la définition adoptée précédemment dans la formulation par éléments finis :

$$\{\dot{\varepsilon}\} = \{\dot{\varepsilon}_{11},\ \dot{\varepsilon}_{22},\ \dot{\varepsilon}_{12},\ \dot{\varepsilon}_{21},\ R\dot{\kappa}_{32}\} \qquad \text{(A.10-257)}$$

Les déformations sont définies par :

$$\dot{\varepsilon}_{11} = 0 \tag{A.10-258}$$

$$\dot{\varepsilon}_{22} = \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial y} \tag{A.10-259}$$

$$\dot{\varepsilon}_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + R\dot{\omega}_3^c/R \tag{A.10-260}$$

$$\dot{\varepsilon}_{21} = -R\dot{\omega}_3^c/R \tag{A.10-261}$$

$$R\dot{\kappa}_{32} = \frac{\partial (R\dot{\omega}_3^c)}{\partial y} \tag{A.10-262}$$

On obtient pour la matrice $[G_1]$:

$$[G_1] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline & -\sigma_{22} & & & \\ \hline & & -\sigma_{22} & -\sigma_{22} & \\ \hline & & -\sigma_{22} & -\sigma_{22} & \\ \hline & & & & \\ \hline \end{array} \tag{A.10-263}$$

Il est à noter, que pour un sol en compression $-\sigma_{22}$ est positif et le premier terme géométrique $[G_1]$, que l'on retranche à la matrice de comportement, a pour effet de réduire les modules, ce qui peut engendrer un radoucissement de type géométrique.

La deuxième partie de la matrice de rigidité due à la transformation géométrique est écrite sous la forme :

$$\int_V \dot{u}_{i,k} \left(\sigma_{kj} - \sigma_{jk}\right) \delta\omega_{ij}^c \, dV = \int_V {}^t\{\delta u\} \, {}^t\left[L_R\right] \left[L_{NL}\right] \{\dot{u}\} \, dV \tag{A.10-264}$$

avec :

$${}^t[L_R] = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline (\sigma_{21} - \sigma_{12}) & & & (\sigma_{21} - \sigma_{12}) \\ \hline \end{array} \tag{A.10-265}$$

Ce deuxième terme géométrique s'annule pour un milieu continu classique, tandis que le premier terme géométrique reste.

Dans le cas général, ce deuxième terme est égal à :

$$\int_V \dot{u}_{i,k} \left(\sigma_{kj} - \sigma_{jk}\right) \delta\omega_{ij}^c \, dV = \int_V \delta\omega_c^3 (\sigma_{21} - \sigma_{12}) \left(\frac{\partial \dot{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial x_2} \right) dV \tag{A.10-266}$$

Il est intéressant, là encore, d'écrire ce terme comme une correction, notée $[G_2]$, de la matrice de rigidité en déformations infinitésimales :

$$\int_V \dot{u}_{i,k} \left(\sigma_{kj} - \sigma_{jk}\right) \delta\omega_{ij}^c \, dV = -\int_V {}^t\{\delta\varepsilon\} \, [G_2] \{\dot{\varepsilon}\} \, dV \qquad \text{(A.10-267)}$$

Comme on a :

$$\delta\omega_3^c = -\delta\varepsilon_{21} \qquad \text{(A.10-268)}$$

$$\dot{u}_{2,2} = \dot{\varepsilon}_{22} \qquad \text{(A.10-269)}$$

la matrice $[G_2]$ est égale à :

$[G_2]=$

	$(\sigma_{21}-\sigma_{12})$			

(A.10-270)

Il est à noter, que dans le cas général, le terme géométrique $[G_2]$ peut être négatif ou positif, suivante le signe de la partie antisymétrique des contraintes $\sigma_{21} - \sigma_{12}$. Cependant, cette contrainte antisymétrique est reliée à la dérivée première du couple contrainte par la relation :

$$\mu_{32} + (\sigma_{21} - \sigma_{12}) = 0 \qquad \text{(A.10-271)}$$

C'est donc la décroissance ou la croissance de celui-ci qui contrôlera si le deuxième terme géométrique est de type radoucissant ou durcissant. En particulier, en interface le couple contrainte est positif et décroît. La dérivée première est négative et la contrainte antisymétrique positive. Le deuxième terme $[G_2]$ a donc un effet de radoucissement.

Après assemblage des termes correcteurs de la matrice de rigidité en petites déformations, on obtient l'expression suivante pour la puissance des efforts intérieurs :

$$\int_V {}^t\{\delta\varepsilon\}\left(\left[L^{ep}\right] - \left[\Sigma_1 + G_1 + G_2\right]\right)\{\dot{\varepsilon}\}dV \qquad \text{(A.10-272)}$$

où la somme des termes correcteurs est égale à :

$[\Sigma_1 + G_1 + G_2]=$

$2\sigma_{11}$		$(\sigma_{12}+\sigma_{21})$		
	$2\,\sigma_{22} - \sigma_{22}$		$(\sigma_{12}+\sigma_{21})$	
σ_{12}	σ_{12}	$\sigma_{22} - \sigma_{22}$	$\sigma_{11} - \sigma_{22}$	
σ_{21}	$\sigma_{21} + (\sigma_{21}-\sigma_{12})$	$\sigma_{22} - \sigma_{22}$	$\sigma_{11} - \sigma_{22}$	

(A.10-273)

Il est à noter que les termes correcteurs introduits par la formulation en déformations finies, qui sont de l'ordre de grandeur des contraintes au sein du matériau, n'ont un effet significatif que s'ils sont du même ordre que les termes de la matrice de comportement. Pour un matériau élastique, les termes de $[L^{ep}]$ sont de l'ordre du module d'Young, c'est à dire en 10^{+5} kPa, alors que les termes correcteurs, pour un essai de cisaillement à contraintes courantes, sont au maximum en 10^{+3} kPa. Pour un matériau élastoplastique avec écrouissage, les termes correcteurs peuvent prendre de l'importance, dans une phase de fort radoucissement (écrouissage négatif), quand les termes de la matrice de comportement peuvent être divisés par un coefficient de 10 à 100, par rapport aux modules tangents initiaux.

10.6.3 Amélioration de la formulation en déformations finies

10.6.3.1 Analyse critique de la formulation de de Borst et Mühlhaus (1991)

La formulation proposée par de Borst et Mühlhaus (1991) n'est pas consistante entre les contraintes et les couples contraintes. En effet, la loi de comportement est définie, entre d'une part, τ_{ij}^c et $\dot{\varepsilon}_{ij}$, c'est à dire le taux corotationnel du 1er tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, qui est une quantité objective, et le taux de déformations, et, d'autre part, m_{3k}^R et κ_{3k} , c'est à dire le taux du 1er tenseur de Piola-Kirchhoff des couples contraintes, qui n'est pas une quantité objective, et le taux de courbures. Pour rendre la formulation consistante, il faut définir la loi de comportement entre τ_{ij}^c et ε_{kl} , d'une part, et m_{3k}^c et κ_{3k} , d'autre part.

Si dans le cas général bidimensionnel, ce choix peut être lourd, dans le cas présent, qui est unidimensionnel, il est possible de définir la loi de comportement de manière consistante, sans alourdir les calculs de manières significatives. Pour cela, il suffit de développer le terme $\int_V m_{3k}^R \, \delta\kappa_{3k} \, dV$ en fonction de m_{3k}^c avant d'introduire la matrice de comportement. Entre m_{3k}^R et m_{3k}^c, on a la relation :

$$m_{3k}^R = m_{3k}^c + \dot{\omega}_{3i}^c \sigma_{ik} - \sigma_{3i} \dot{\omega}_{ik}^c - \mu_{3i} \dot{u}_{k,i} \qquad \text{(A.10-274)}$$

Dans le cas du cisaillement simple plan, seuls le couple contrainte μ_{32} et les rotations ω_{12}^c et ω_{21}^c sont non nuls. Le terme de puissance intérieure correspondant à la courbure est donc égale à :

$$\int_V m_{3k}^R \, \delta\kappa_{3k} \, dV = \int_V \left(m_{32}^c - \mu_{32} \, \dot{u}_{2,2} \right) \delta\kappa_{32} \, dV \qquad \text{(A.10-275)}$$

Ce terme peut être écrit sous la forme suivante :

$$\int_V m_{3k}^R \, \delta\kappa_{3k} \, dV = \int_V m_{3k}^c \, \delta\kappa_{3k} \, dV - \int_V {}^t\{\delta\varepsilon\} [G_3] \{\dot{\varepsilon}\} \, dV \qquad \text{(A.10-276)}$$

La matrice $[G_3]$, qui est un terme correcteur de nature géométrique pour la matrice de comportement, est égale à :

$$[G_3]= \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & \mu_{32}/R & & & \\ \hline \end{array} \qquad \text{(A.10-277)}$$

En interface, le couple contrainte est positif, ce troisième terme géométrique introduit donc aussi un radoucissement.

Tout calcul fait, les termes correcteurs s'écrivent sous la forme suivante :

$$[\Sigma_1 + G_1 + G_2 + G_3]= \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 2\,\sigma_{11} & & \sigma_{12}+\sigma_{21} & & \\ \hline & \sigma_{22} & & \sigma_{12}+\sigma_{21} & \\ \hline \sigma_{12} & \sigma_{12} & & \sigma_{11}-\sigma_{22} & \\ \hline \sigma_{21} & 2\,\sigma_{21}-\sigma_{12} & & \sigma_{11}-\sigma_{22} & \\ \hline & \mu_{32}/R & & & \\ \hline \end{array} \qquad \text{(A.10-278)}$$

Par rapport à la formulation de de Borst et Mühlhaus (1991), seul le nouveau terme en couple contrainte μ_{32}/R a été introduit. Nos simulations de couches d'interface donnent pour les couples contraintes normalisés par la longueur interne, des valeurs numériques du même ordre de grandeur que les autres contraintes, en particulier dans le cas où la rotation de Cosserat est bloquée à l'interface. L'hypothèse consistant à négliger, ces termes, classés comme termes du 2ème ordre perturbateurs, n'est donc pas acceptable en interface.

10.6.3.2 Equations reliant les contraintes de Cauchy et les vrais couples contraintes aux premiers tenseurs de contraintes et couples contraintes de Piola-Kirchhoff

La loi de comportement est définie en fonction des taux des 1ers tenseurs de Piola-Kirchhoff des contraintes et couples contraintes. Or les contraintes vraies sont les contraintes de Cauchy. Il convient donc, après la résolution au cours d'un incrément, de revenir aux vrais contraintes et couples contraintes.

On trouve la relation suivante entre les vrais contraintes et couples contraintes et les premiers tenseurs de contraintes et couples contraintes de Piola-Kirchhoff :

$$\left\{\dot{\sigma}_{ij}\right\} = \left\{\dot{\tau}^c_{ij}\right\} + \begin{vmatrix} \sigma_{11}\left(-\dot{\varepsilon}_v\right) + \left(\sigma_{12}+\sigma_{21}\right)\left(-\dot{\omega}^c_3\right) \\ \sigma_{22}\left(-\dot{\varepsilon}_v\right) + \left(\sigma_{12}+\sigma_{21}\right)\left(\dot{\omega}^c_3\right) \\ \sigma_{12}\left(-\dot{\varepsilon}_v\right) + \left(\sigma_{11}-\sigma_{22}\right)\left(\dot{\omega}^c_3\right) \\ \sigma_{21}\left(-\dot{\varepsilon}_v\right) + \left(\sigma_{11}-\sigma_{22}\right)\left(\dot{\omega}^c_3\right) \\ \frac{\mu_{32}}{R}\left(-\dot{\varepsilon}_v\right) \end{vmatrix} \qquad \text{(A.10-279)}$$

10.6.3.3 Modifications de l'algorithme de résolution par éléments finis pour prendre en compte les déformations finies

Les modifications à apporter à la formulation par éléments finis en petites déformations sont les suivantes.

(1) Au début de chaque incrément de chargement, on assemble la matrice de rigidité globale [K], suivant la méthode de méthode de Newton-Raphson choisie, et en prenant en compte les termes correcteurs $[\Sigma_1]$, $[G_1]$, $[G_2]$, $[G_3]$ dus aux déformations finies.

(2) En chaque point, on calcule les contraintes et couples contraintes de Piola-Kirchhoff en utilisant la matrice de comportement $[D^{ep}]$ puis on en déduit les contraintes de Cauchy et les vrais couples contraintes. Ce sont les vrais contraintes et couples contraintes qui sont utilisés pour déterminer si l'état des contraintes et couples contraintes reste élastique ou plastique, et s'il faut redistribuer des contraintes le long de la surface de charge.

(3) A la fin de chaque incrément de chargement, les coordonnées des noeuds du maillage sont mises à jour pour tenir compte de la déformation des éléments. Les coordonnées des points de Gauss sur les éléments réels sont à modifier également. Comme le schéma d'interpolation fait intervenir les dérivées des déplacements, les points de Gauss ont des positions relatives différentes sur les éléments réels et sur l'élément de référence. Deux choix sont possibles : faire suivre aux points de Gauss les déplacements du maillage, ce qui fait perdre de la précision sur les intégrales puisque les coordonnées relatives des points de Gauss sur l'élément de référence changent, ou maintenir leurs positions relatives constantes tout au long du calcul, ce qui oblige à transporter l'état de contraintes et couples contraintes entre les anciens et nouveaux points de Gauss au cours d'un incrément de chargement. La première solution a été choisie. Une vérification de la précision de l'intégration de Gauss avec les points de Gauss transportés a donné, pour des déplacements d'interface importants, de l'ordre de plusieurs centimètres, une précision en $10^{-2\%}$, pour des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à 5 et une erreur supérieure à $10^{-0\%}$ pour des polynômes de degrés supérieurs ou égaux à 6. Avec les vrais points de Gauss, la précision sur les intégrales pour de degrés inférieurs ou égaux à 5 est en 10^{-18} %, en $10^{-3\%}$ pour des degrés égaux à 6 ou 7, et l'erreur est supérieure à $10^{-1\%}$ pour des polynômes de degrés supérieurs ou égaux à 8. La précision sur les intégrales reste donc acceptable.

11 Simulations numériques par éléments finis de phénomènes de localisation : bandes de cisaillement et couches d'interface

11.1 Bibliographie sur les bandes de cisaillement

11.1.1 Milieu continu classique

11.1.1.1 Analyse du cisaillement simple plan d'un milieu continu classique

Dans l'essai de cisaillement simple plan d'un milieu classique, l'état de déformations et contraintes, et donc le cisaillement τ , sont constants sur toute la hauteur de l'échantillon :

$$\frac{\partial \tau}{\partial x_2} = 0 \qquad \text{(A.11-1)}$$

Si la loi de comportement est de type élastoplastique avec écrouissage positif ou nul, il ne peut y avoir formation de deux zones de comportements différents. En effet, pour une valeur du cisaillement τ, il n'existe qu'une seule valeur de la déformation de cisaillement γ (figure A.11-1a). Il ne peut donc y avoir localisation et formation d'une bande de cisaillement ou d'une couche d'interface.

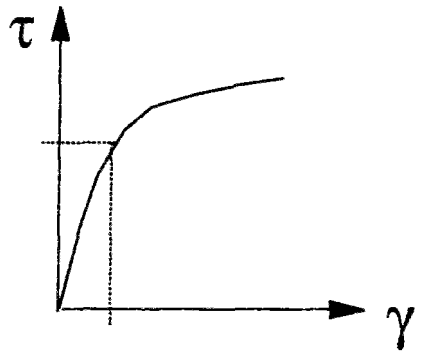
Pour donner la possibilité à deux zones de comportements différents de se former, il est nécessaire d'introduire un écrouissage négatif (radoucissement). Pour les valeurs du cisaillement τ, comprises entre la valeur au pic et la valeur résiduelle, il existe alors deux valeurs différentes de γ (Figure A.11-1b).

Cependant, l'introduction d'un écrouissage négatif n'est pas suffisant pour faire naître une bande de cisaillement. Il est nécessaire aussi d'introduire une imperfection, même très faible, de l'ordre du pour-cent, afin de générer un état de contraintes non-homogène dans l'échantillon.

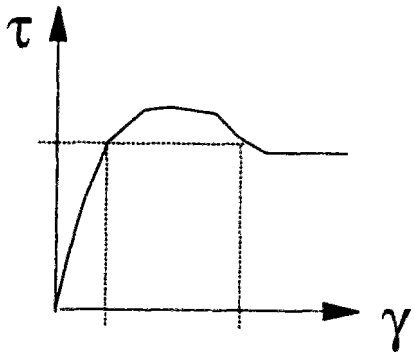
11.1.1.2 Dépendance de la solution numérique en fonction du maillage dans un milieu classique

L'initiation de bandes de cisaillement au cours du cisaillement simple plan d'un milieu classique élastoplastique avec une petite imperfection, a été étudiée par de Borst (1991).

Au cours du chargement, la solution associée à une déformation homogène de toute la couche est instable, même au cours d'un essai contrôlé en déplacement, car il existe des solutions localisées qui donnent une courbe effort-déformation plus basse que celle associée à un mode homogène de déformation (figure A.11-2a). De tels chemins d'équilibre sont suivis si de petites imperfections sont introduites dans la couche de sol. Les déformations se localisent alors sur un seul élément, quelle que soit la finesse de la discrétisation. L'épaisseur de la zone cisaillée est contrôlée par la taille des éléments du maillage (figure A.11-2b).



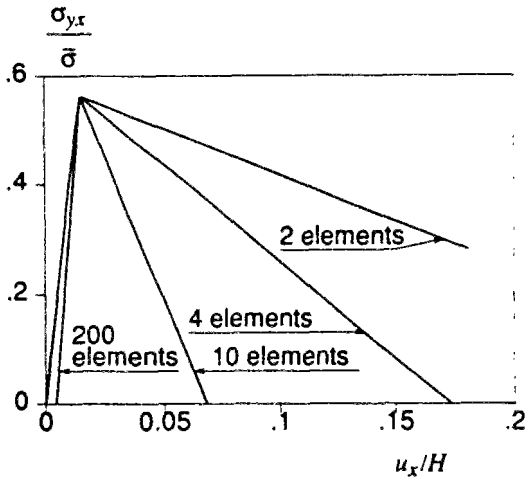
a : modèle sans radoucissement



b : modèle avec radoucissement

Figure A.11-1a : Ecrouissage positif ou nul Figure A.11-1b : Ecrouissage positif ou négatif

Figure A.11-1 : Exemples de loi d'écrouissage d'un milieu continu



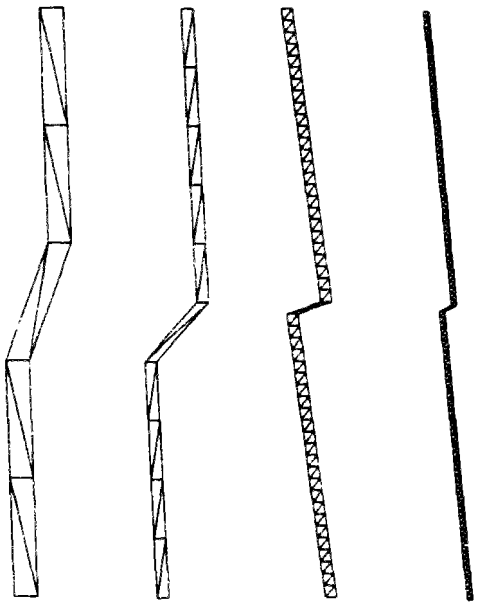


Figure A.11-2a : Courbes effort-déplacement normalisées

Figure A.11-2b : Déformées incrémentales à l'état résiduel $\sigma_{vx}/\bar{\sigma} = 0,28$

Figure A.11-2 : Cisaillement simple plan d'un milieu classique avec écrouissage négatif: (a) 10 éléments, (b) 20 éléments, (c) 100 éléments, et (d) 200 éléments (de Borst, 1991)

11.1.1.3 Unicité de la solution du problème aux limites dans les milieux continus généralisés

Dans le cas d'un matériau continu classique élasto-plastique avec écrouissage positif, il y a unicité de la solution pour un problème aux limites, correctement posé en termes de conditions aux limites. La solution par éléments finis, qui n'est qu'une solution approchée, converge alors vers la solution exacte quand le maillage est raffiné.

Dans le cas d'un matériau classique avec écrouissage négatif, les équations différentielles du problème aux limites changent de type hyperbolique pour devenir de type parabolique en cours de chargement. Il y a perte d'unicité de la solution (Schaefer, 1990). Il en résulte une dépendance des résultats numériques en fonction de la taille du maillage (Bazant et Lin, 1988).

Pour régulariser le problème aux limites, qui est mal posé dans le cas d'un milieu continu classique avec écrouissage négatif, plusieurs types de méthodes ont été proposés. Trois grandes classes de méthodes, dites de régularisation, existent :

1 les **modèles de comportement non local** (Bazant et Chang, 1987; Pijaudier-Cabot, 1992);
2 les **théories de gradient**, qui font intervenir le gradient et/ou le second gradient des déformations dans la formulation des lois de comportement (Triantafyllidis et Aïfantis, 1986; Aïfantis, 1987; Mühlhaus et Aïfantis, 1991; Vardoulakis et Aïfantis, 1991);
3 les **milieux continus avec microstructure** tels que les **milieux de Cosserat** (Mühlhaus, 1986; Mühlhaus et Vardoulakis, 1987; Mühlhaus, 1989).

Si le premier type de méthodes n'a encore jamais été utilisé pour modéliser des interfaces, par contre, les théories de gradient ont été appliquées sous des formes différents (Chen et Schreyer, 1987; Vardoulakis et al., 1992) ainsi que les milieux de Cosserat (Teichman, 1989, 1994).

Si les théories du gradient sont intéressantes et permettent d'apporter des réponses aux problèmes de la localisation des déformations le long d'une, par contre, il est très difficile de formuler des conditions aux limites de manière simple et rigoureuse en fonction de la rugosité de l'interface. Les conditions aux limites font intervenir, par exemple, le flux de déformations plastiques au travers de l'interface, quantité qu'il n'est pas aisé d'interpréter ou mesurer.

En ce qui concerne les milieux de Cosserat, l'unicité de la solution pour un problème aux limites et une loi de comportement avec écrouissage négatif a été démontrée (Steinmann et Kaspar, 1969). La capacité de ces milieux à modéliser les phénomènes de localisation en bandes de cisaillement a été également mise en évidence (Mühlhaus et Vardoulakis, 1987) (cf. paragraphes 5, partie A). L'études des interfaces dans de tels milieux a été également abordée par Bogdaneva-Bontcheva et Lippmann (1973) ainsi que Teichmann (1989, 1994), mais il reste encore beaucoup à faire (cf. paragraphe 6, partie A).

Dans le paragraphe qui suit, nous ferons une brève synthèses des résultats existants, pour un milieu de Cosserat élastoplastique avec écrouissage, sur les bandes de cisaillement, que ce soit dans un essai de cisaillement simple plan ou dans un essai biaxial, avant d'aborder les simulations numériques d'interfaces qui ont été réalisées dans le cadre de cette thèse et qui constituent un résultat nouveau.

11.1.2 Milieu continu de Cosserat

11.1.2.1 Bandes de cisaillement dans un essai de cisaillement simple plan

Alors que pour un milieu classique, il est nécessaire d'introduire une imperfection pour initier la formation d'une bande de cisaillement, dans un milieu de Cosserat, un tel artefact n'est pas nécessaire.

En effet, si l'on prend des conditions aux limites du type "encastrement" du sol, aussi bien en interface qu'en haut de l'échantillon :

$$\omega_3^c(I) = 0 \qquad \text{(A.11-2)}$$

$$\omega_3^c(H) = 0 \qquad \text{(A.11-3)}$$

l'état de contraintes et déformations qui se développe dans l'échantillon n'est plus homogène. Trois zones avec de forts cisaillement se développent. Aux deux extrémités de l'échantillon, deux couches limites se développent, sur une épaisseur de quelques longueurs internes, tandis qu'au milieu de l'échantillon, existe une bande de cisaillement (paragraphe 11.2.1.2, partie A).

L'épaisseur de cette bande de cisaillement est indépendant la discrétisation introduite par la maillage, pourvu que celui-ci soit assez fin. Quand le maillage est raffiné au point d'avoir plusieurs éléments dans la bande de cisaillement, l'épaisseur de celle-ci, qui est calculée numériquement, devient constante (figure A.11-3a). En outre, la courbe effort-déformation converge vers une solution unique (figure A.11-3b).

Il faut noter que l'indépendance de l'épaisseur vis-à-vis du maillage n'est pas due à l'hétérogénéité locale du champ de contraintes mais au fait que les équations restent elliptiques, même après que le pic ait été atteint et dépassé. La longueur interne introduite par la loi de comportement du matériau contrôle l'épaisseur de la bande de cisaillement.

11.1.2.2 Bandes de cisaillement dans un essai biaxial

Mühlhaus et Vardoulakis (1987) ont été les premiers à mettre en évidence la capacité du milieu continu de Cosserat à expliquer et modéliser les bandes de cisaillement observées dans les essais biaxiaux de sables. Plusieurs modèles de comportement élastoplastiques ont été successivement développés par Vardoulakis et d'autres auteurs pour modéliser et calculer les épaisseurs de bandes de cisaillement. Pour ne citer que les travaux les plus marquants, il convient de noter que le modèle initial était un modèle 2D formulé dans le cadre de la théorie des déformations plastiques totales (Mühlhaus et Vardoulakis, 1987). Plus récemment, un modèle élastoplastique a été formulé dans le cadre de la théorie incrémentale de la plasticité (Vardoulakis, 1989). C'est le modèle que nous avons analysé dans le paragraphe 9 de cette partie A et qui est numéroté 1.3. Enfin, les dernières simulations ont été faites avec le modèle que nous avons numéroté 1.3 (Vardoulakis et Sulem, 1995). C'est à ce dernier modèle auquel nous nous intéresserons, pour plusieurs raisons.

La loi d'écrouissage est formulée à partir de la théorie des mélanges en se basant sur des hypothèses simples et physiques. Ce modèle a été calibré sur des essais biaxiaux réalisés sur le sable d'Osterkerde. Les résultats des dernières simulations nous ont été aimablement communiqués par le Professeur Vardoulakis, ce qui nous permettra de comparer précisément les épaisseurs de bandes de cisaillement, calculées et mesurées, aux épaisseurs de couches d'interface calculées dans le cadre de cette thèse, ce qui constitue un résultat original puisque de telles comparaisons n'ont encore jamais été réalisées.

Il est à noter que dans le cas d'un essai biaxial, l'apparition de bandes de cisaillement et de la microstructure sous-jacente, est liée à un phénomène de bifurcation. A un certain point du chargement, l'unicité de la solution homogène n'est plus assurée, et une solution non homogène, constituée d'une bande de cisaillement entre deux zones homogènes, peut se développer. Pour une synthèse sur les phénomènes de localisation et l'analyse complète des bandes de cisaillement dans les essais biaxiaux, le lecteur pourra se référer à Vardoulakis et Sulem (1994). La figure A.11-4 présente l'évolution de la largeur de la bande de cisaillement dans le cas d'un essai biaxial et du modèle élastoplastique 1.3 (cf. paragraphe 9, partie A). Le modèle statique prédit une épaisseur d'environ 7 R tandis que le modèle cinématique donne une épaisseur de 15 R. Les épaisseurs mesurées sont en moyenne égales à 18,5.

Dans le cas des couches d'interface, les phénomènes de bifurcation ne peuvent expliquer la formation des couches d'interface, puisque celles-ci apparaissent très tôt, pour des déplacements d'interface de l'ordre de 5 à 10 fois la longueur interne (Kishida et Uesugi, 1987; Boulon et al., 1993).

11.2 Simulations de couches d'interface

Dans le cas du cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastique, il est possible de développer une solution analytique complète en déplacements, déformations et contraintes (cf. paragraphe 7, partie A). Dans ce cas là, la couche d'interface est une couche limite et la limite avec le reste de l'échantillon n'est pas caractérisé par une discontinuité. Elle est définie à partir d'un seuil qu'il faut se fixer sur le niveau de déformations, de déplacement tangentiel ou de la rotation propre.

Dans le cas du cisaillement simple annulaire d'un milieu de Cosserat rigide parfaitement plastique, nous avons développé la solution semi-analytique pour le cas général non associé (cf. paragraphe 8, partie A). Dans ce cas là, la couche d'interface correspond à la couche plastique par rapport aux deux critères de rupture, macroscopique et microscopique. La limite avec le reste de l'échantillon est caractérisée par une discontinuité de comportement, qui se traduit par une discontinuité des tenseurs des contraintes et déformations ainsi que du gradient du déplacement tangentiel.

Dans le cas du cisaillement simple plan d'un milieu continu de Cosserat élastoplastique avec écrouissage, il n'est plus possible de développer de solution analytique et il faut avoir recours à une méthode numérique pour résoudre le problème aux limites complet. Nous avons choisi la méthodes des éléments finis et avons pour cela développer un nouveau type d'élément (cf. paragraphe 10, partie A). Le code d'éléments finis développé spécialement dans le cadre de cette thèse a été validé sur plusieurs cas, élastiques et élastoplastiques, c'est ce qui fait l'objet du prochain paragraphe 11.2.1.

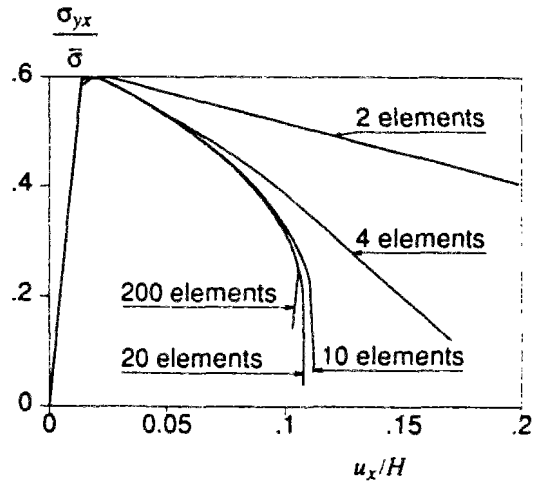


Figure A.11-3a : Courbes effort-déplacement normalisées

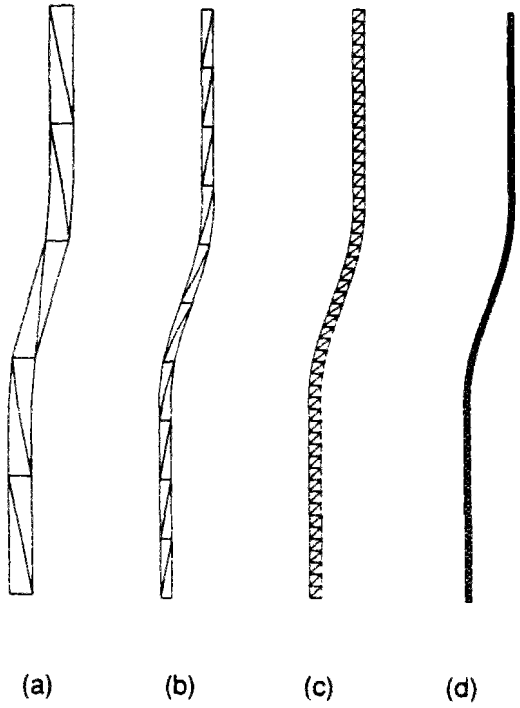


Figure A.11-3b : Déformées incrémentales à l'état résiduel $\sigma_{yx}/\bar{\sigma} = 0{,}28$

Figure A.11-3 : Cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat avec écrouissage négatif : (a) 10 éléments, (b) 20 éléments, (c) 100 éléments, et (d) 200 éléments (de Borst, 1991)

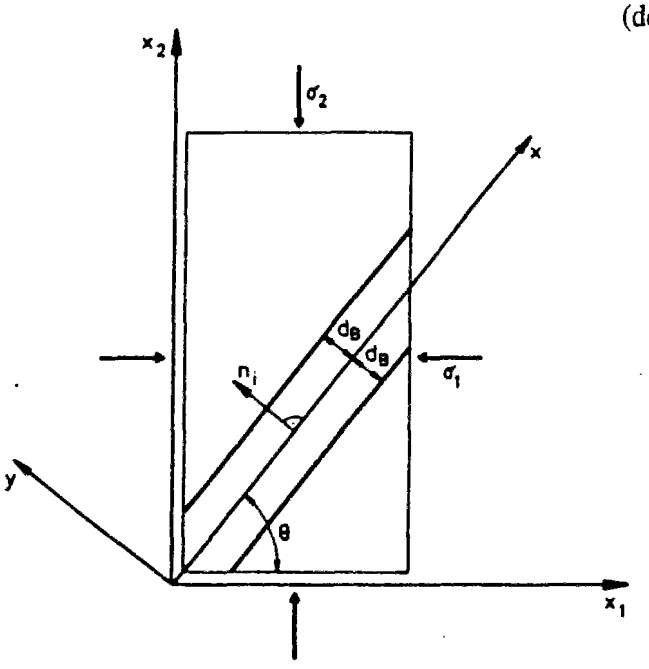


Figure A.11-4a : Echantillon avec localisation sous la forme d'une bande de cisaillement

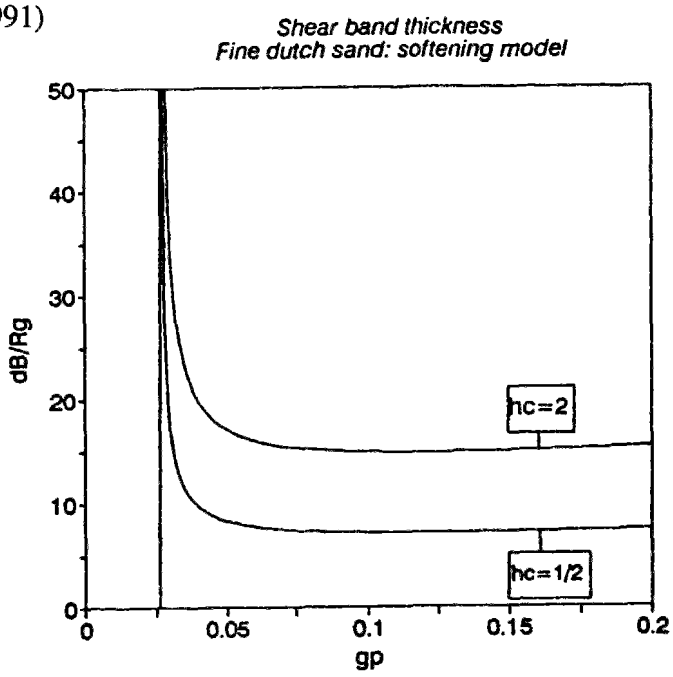


Figure A.11-4b : Evolution de la demi-épaisseur d_B normalisée par le rayon moyen des grains R_g

Figure A.11-4 : Analyse de l'évolution des bandes de cisaillement dans les essais biaxiaux d'un sable fin de dune Danois (Vardoulakis et Sulem, 1995)

Dans le cas d'une loi de comportement élastoplastique, la couche d'interface est caractérisée par une discontinuité de comportement avec le reste de l'échantillon. Il en résulte une discontinuité des tenseurs des contraintes et déformations. La continuité du gradient du déplacement tangentiel est assuré dans le cas présent par le choix d'éléments C^2 en déplacements. Par contre, comme la rotation n'est que C^1 , la courbure est discontinue. Suivant la valeur du coefficient f_2 qui caractérise la fraction de déplacement tangentiel W_I de l'interface transféré au sol sous forme de rotation propre, le sol en contact avec l'interface pourra être élastique ou plastique sur quelques longueurs internes R. Le comportement définissant la couche d'interface n'est pas fixé a priori. Cependant, les valeurs de f_2 qui initient des couches d'interface élastiques tandis que le reste de l'échantillon est plastique, ne sont pas réalistes physiquement. La couche d'interface est donc caractérisée par un comportement plastique, qui peut être durcissant en début de chargement, mais devient très vite radoucissant du fait des grandes déformations de cisaillement qui règnent au sein de la couche d'interface. C'est ce que nous verrons dans les prochains paragraphes.

11.2.1 Validation du code de calcul par éléments finis

Le code d'éléments finis, développé et utilisé, a été comparé et validé par rapport à deux types de solutions : le cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastique linéaire, dans le cas de deux jeux de conditions aux limites très contraignantes, et le cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastoplastique avec écrouissage, soumis à un jeu de conditions aux limites classiques, c'est à dire se comportant comme un milieu classique élastoplastique. Le code a donc été validé par rapport à des solutions élastiques, d'une part, et des solutions plastiques, d'autre part (tableau A.11-1).

Tableau A.11-1 : Validation du code de calcul par éléments finis
par rapport à des solutions analytiques

Lois de comportement	Milieux continus classiques	Milieux de Cosserat
linéaire élastique	comparaison avec des solutions analytiques	comparaison avec des solutions analytiques
élastoplastique sans écrouissage	comparaison avec des solutions analytiques	pas de solution analytique
élastoplastique avec écrouissage	pas de solution analytique mais programmation indépendante	pas de solution analytique

11.2.1.1 Couche d'interface dans un milieu de Cosserat élastique

La solution numérique pour 5 et 30 éléments de mêmes longueurs a été comparée à la solution analytique dans le cas du cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastique linéaire et pour le jeu de conditions aux limites résumé dans le tableau A.11-2. La comparaison de la solution numérique avec la solution analytique, pour les déplacements, tangentiel U_1 et normal U_2 , et la rotation de Cosserat ω_3^c , est présentée sur les figures A.11-5, A.11-6 et A.11-7. La précision de la solution numérique est excellente aussi bien pour les déplacements que pour la rotation, et quel que soit le nombre d'éléments finis utilisé (5 ou 30).

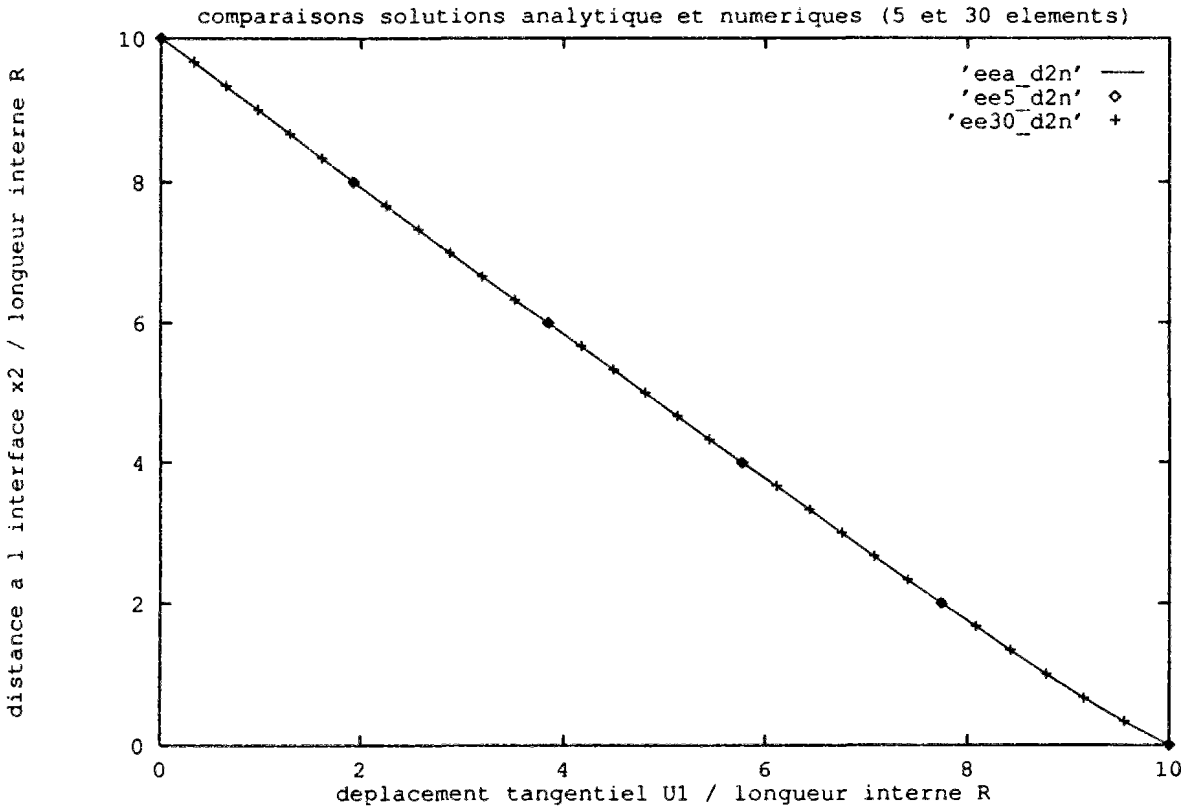


Figure A.11-5 : Profil du déplacements tangentiel U_1 dans le cas du cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastique avec formation d'une couche limite en interface; comparaison des solutions analytique et numériques (5 et 30 éléments)

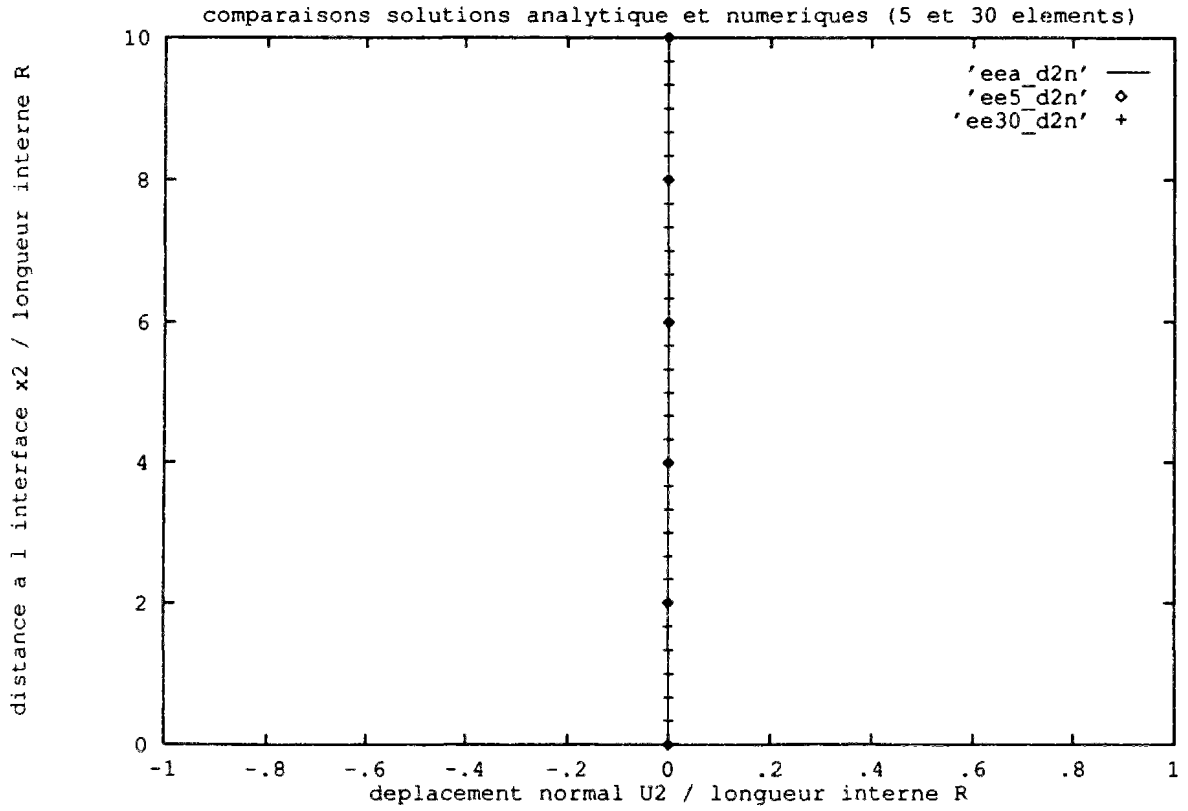


Figure A.11-6 : Profil du déplacements normal U_2 dans le cas du cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastique avec formation d'une couche limite en interface; comparaison des solutions analytique et numériques (5 et 30 éléments)

En ce qui concerne les contraintes et déformations, la précision est très bonne. Les équations d'équilibre imposent à la contrainte tangentielle σ_{12} d'être constante. Quel que soit le nombre d'éléments, la contrainte σ_{12} calculée est constante sur tout l'échantillon. Cependant, dans le cas de 5 éléments la précision relative est égale à 0,2% tandis que pour 30 éléments elle est égale à $2\ 10^{-4}$% (figure A.11-8). La contrainte σ_{21} n'est pas constante sur la hauteur de l'échantillon. Les simulations avec 5 éléments donnent quelques oscillations faibles près de l'interface tandis que la solution avec 30 éléments est très bonne (figure A.11-9).

Tableau A.11-2 : Conditions aux limites pour le cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastique linéaire avec formation d'une couche limite à l'interface

		Interface $x_2(0)$	Sommet de l'échantillon H
milieu continu de Cosserat	conditions aux limites d'un milieu continu classique	$U_2(0) = 0$ interface rigide	$\sigma_{22}(H) < 0$ contrainte normale imposée
		$U_1(0) = f_1\ W_I > 0$ déplacement tangentiel imposé	$U_1(H) = 0$ déplacement tangentiel nul
	conditions aux limites d'un milieu de Cosserat	$R\ \omega_3^c(0) = f_2\ W_I > 0$ rotation de Cosserat imposée	$\mu_{32}(H)/R = 0$ "rotule" = condition classique

11.2.1.2 Cisaillement d'un milieu de Cosserat élastique encastré à ses deux extrémités

Un deuxième cas intéressant et très contraignant en termes de conditions aux limites, correspond au cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastique, encastré à ses deux extrémités (tableau A.11-3).

Tableau A.11-3 : Conditions aux limites pour le cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastique linéaire encastré à ses deux extrémités

		interface $x_2(0)$	sommet de l'échantillon H
milieu continu de Cosserat	conditions aux limites d'un milieu continu classique	$U_2(0) = 0$ interface rigide	$\sigma_{22}(H) < 0$ contrainte normale imposée
		$U_1(0) = f_1\ W_I > 0$ déplacement tangentiel imposé	$U_1(H) = 0$ déplacement tangentiel nul
	conditions aux limites d'un milieu de Cosserat	$R\ \omega_3^c(0) = 0$ rotation de Cosserat nulle = encastrement	$R\ \omega_3^c(H) = 0$ rotation de Cosserat nulle = encastrement

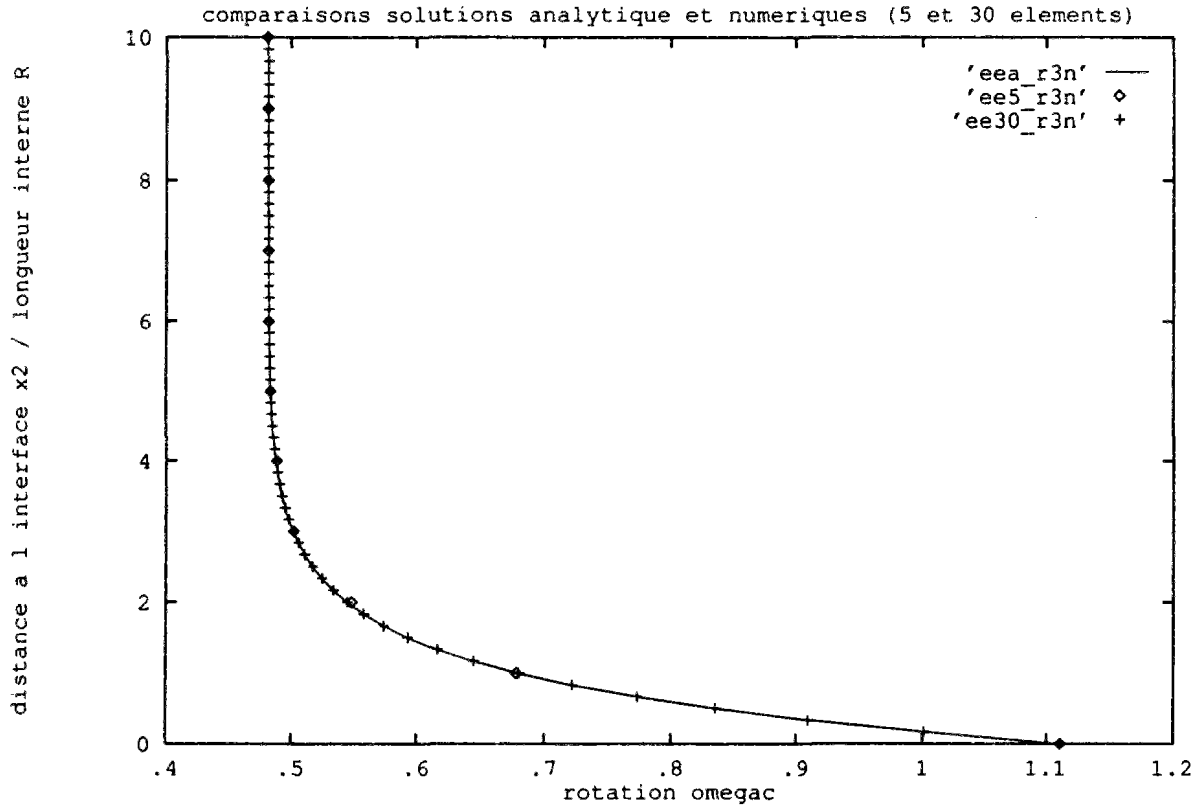


Figure A.11-7 : Profil de la rotation propre ω_3^c dans le cas du cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastique avec formation d'une couche limite en interface; comparaison des solutions analytique et numériques (5 et 30 éléments)

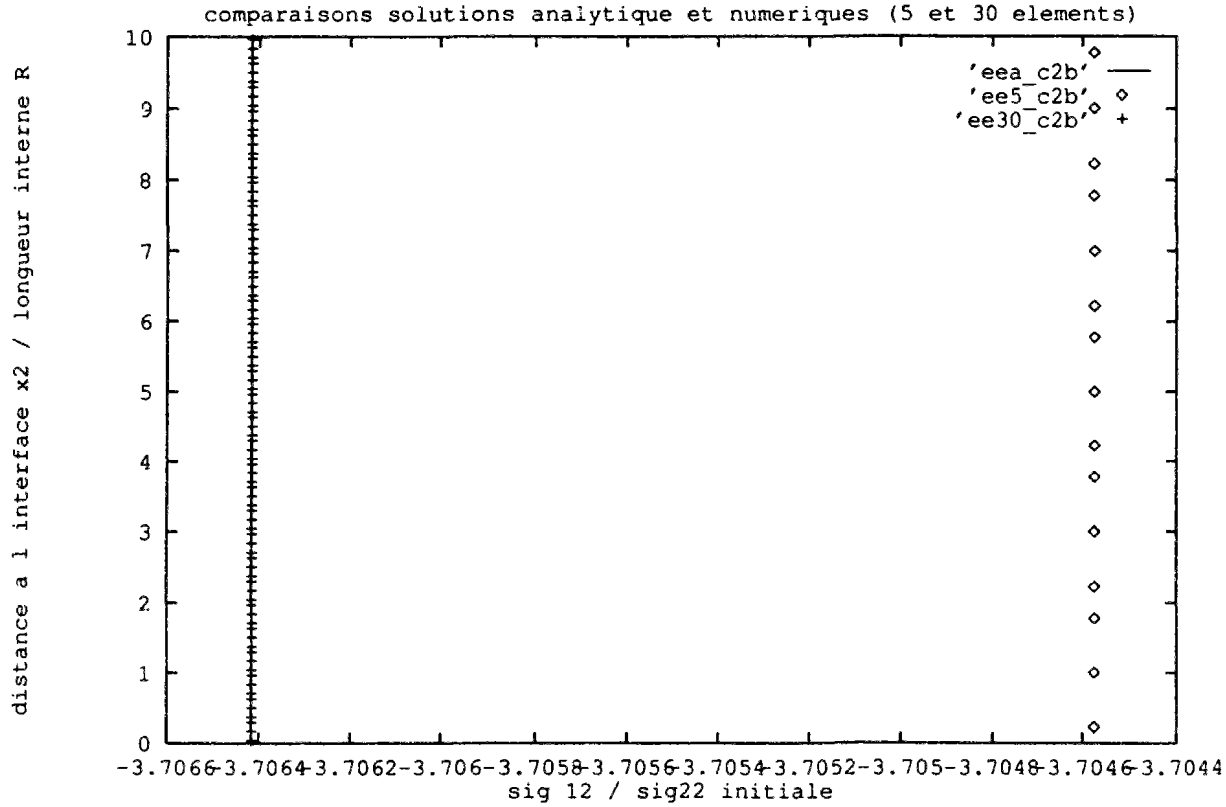


Figure A.11-8 : Profil de la contrainte σ_{12} dans le cas du cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastique avec formation d'une couche limite en interface; comparaison des solutions analytique et numériques (5 et 30 éléments)

Les figures A.11-10, A.11-11 et A.11-12 présentent les profils des déplacements, tangentiel U_1 et normal U_2 , ainsi que la rotation de Cosserat ω_3^c . La précision de la solution numérique est très bonne, quel que soit le nombre d'éléments (5 ou 30). Il faut noter que le déplacement normal est nul, puisque pour un milieu de Cosserat, comme pour un milieu classique, le cisaillement simple à contrainte normale constante se fait à déformation volumique nulle. En ce qui concerne les contraintes, les résultats des comparaisons sont similaires au cas précédemment étudié.

Dans le cas présent, il est intéressant de regarder la distribution de l'énergie élastique dans l'échantillon. Le profil de l'énergie élastique totale dans l'échantillon est caractérisé par trois valeurs extrêmes, deux près des interfaces et une en milieu d'échantillon. La solution numérique avec 5 éléments donne des résultats relativement bon, vu le peu de points de Gauss sur lequel elle est calculée (figure A.11-13). La solution avec 30 éléments donne des résultats excellents, puisqu'elle donne les valeurs exactes aux points où les valeurs sont extrêmes.

D'un point de vue phénoménologique, il est intéressant de regarder la répartition de l'énergie élastique, entre les termes "classiques", c'est à dire symétriques, les termes antisymétriques et les termes de courbures, sachant que l'énergie, dite totale, est la somme de ces trois termes. Il convient de noter, que l'énergie, dite symétrique, est maximale au milieu de l'échantillon et est prépondérante par rapports aux autres termes, tout en restant du même ordre de grandeur. Les énergies antisymétrique et de courbure sont maximales près des extrémités de l'échantillon et sont toutes deux du même ordre de grandeur. La somme de ces trois termes donne l'énergie totale élastique, qui a un profil relativement complexe que la solution numérique avec 30 éléments retrouve avec une très bonne précision (figure A.11-14).

11.2.1.3 Validation dans le cas élastoplastique

Dans le cas général du cisaillement simple d'un milieu de Cosserat élastoplastique, il n'existe pas de solution analytique. Le seul cas où il est possible de développer des solutions analytiques ou des solutions numériques indépendantes, correspond au cisaillement simple d'un milieu de Cosserat élastoplastique, sollicité par des conditions aux limites classiques, et qui se comporte donc comme un milieu classique. Le cas élastique parfaitement plastique, qui donne lieu à des solutions analytiques, ainsi que le cas général élastoplastique avec écrouissage, qui peut donner lieu au développement de solutions numériques indépendantes, ont été utilisés comme bases de comparaisons pour valider le code de calcul dans le cas élastoplastique. Les simulations numériques ont donné toute satisfaction.

A titre d'exemple, pour 30 éléments et une loi élastoplastique sans écrouissage, nous avons trouvés des déplacements et rotation constants, avec une erreur inférieure à 10^{-20}, des contraintes et déformations constantes avec une erreur relative inférieure à 10^{-19} .

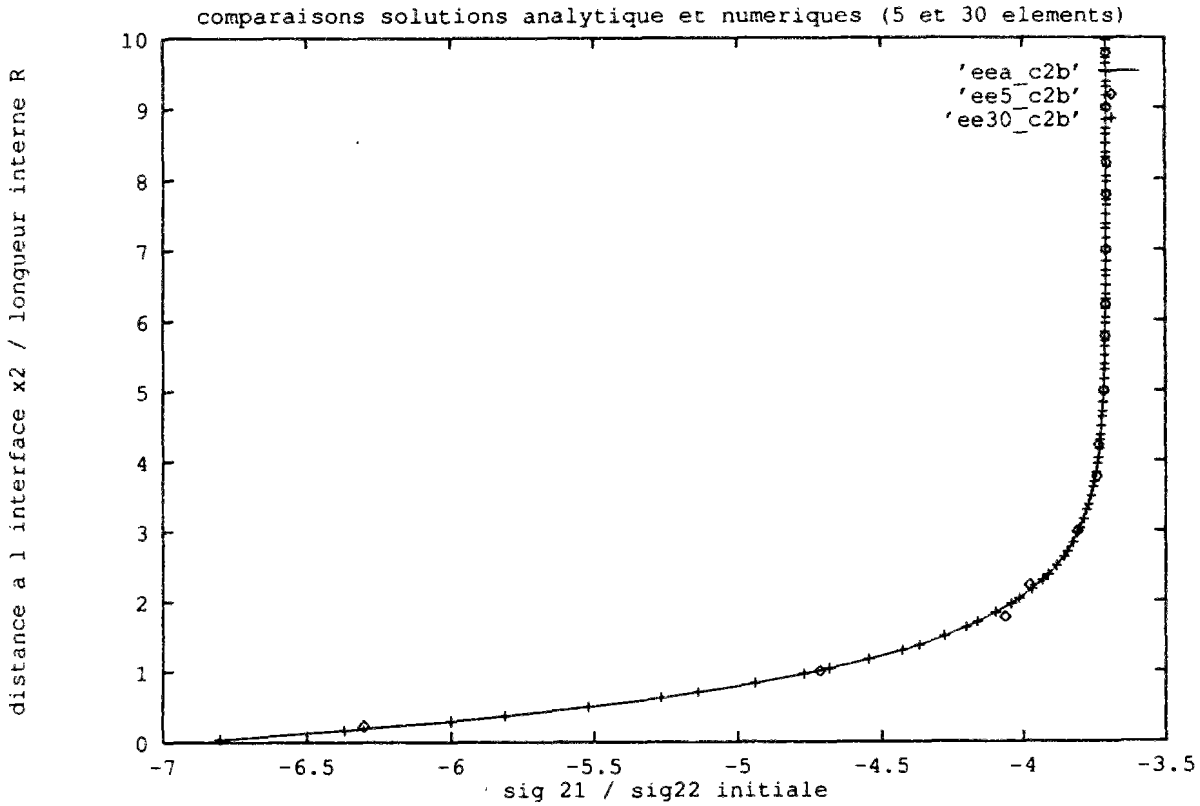


Figure A.11-9 : Profil de la contrainte σ_{21} dans le cas du cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastique avec formation d'une couche limite en interface; comparaison des solutions analytique et numériques (5 et 30 éléments)

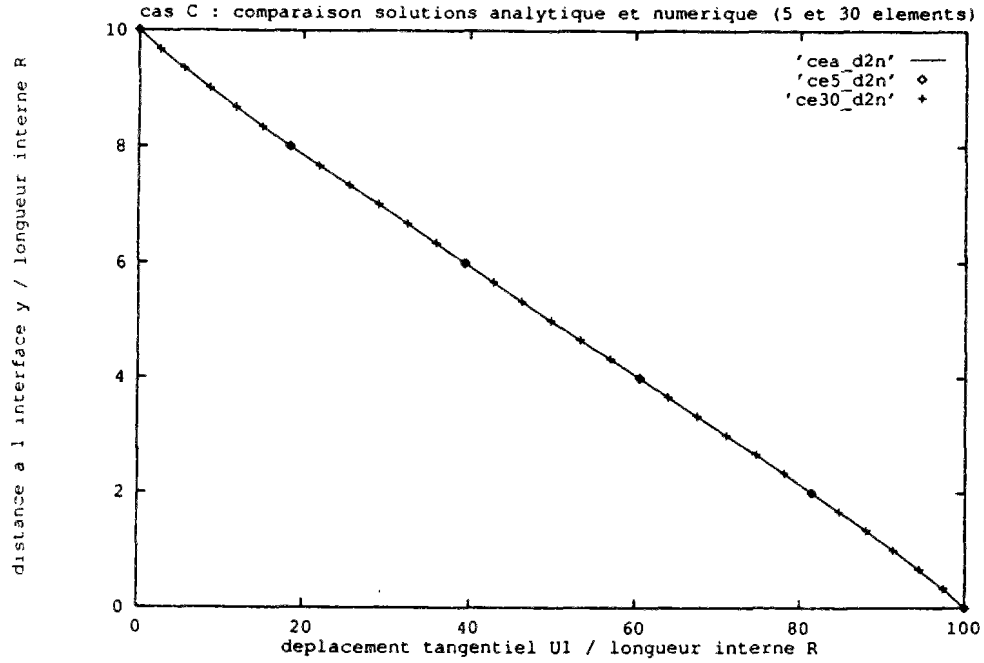


Figure A.11-10 : Profil du déplacements tangentiel U_1 dans le cas du cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastique encastré à ses deux extrémités; comparaison des solutions analytique et numériques (5 et 30 éléments)

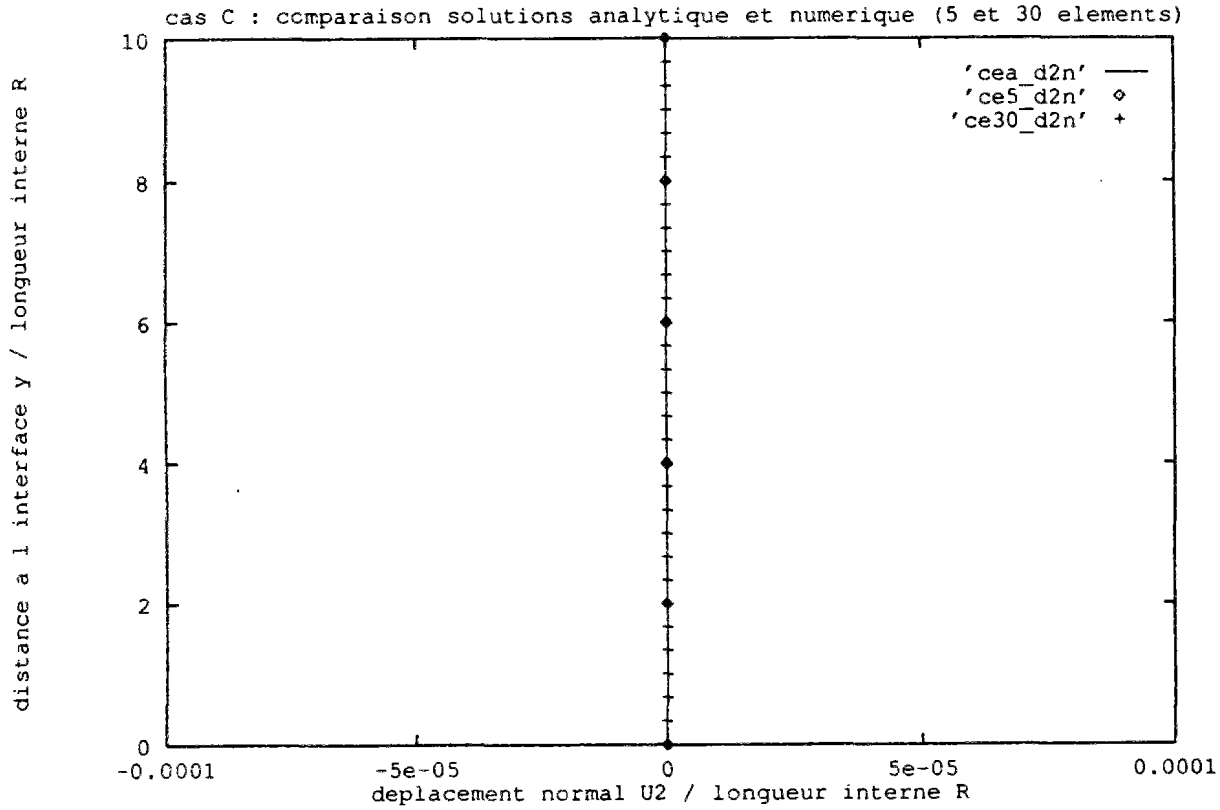


Figure A.11-11 : Profil du déplacements normal U_2 dans le cas du cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastique encastré à ses deux extrémités; comparaison des solutions analytique et numériques (5 et 30 éléments)

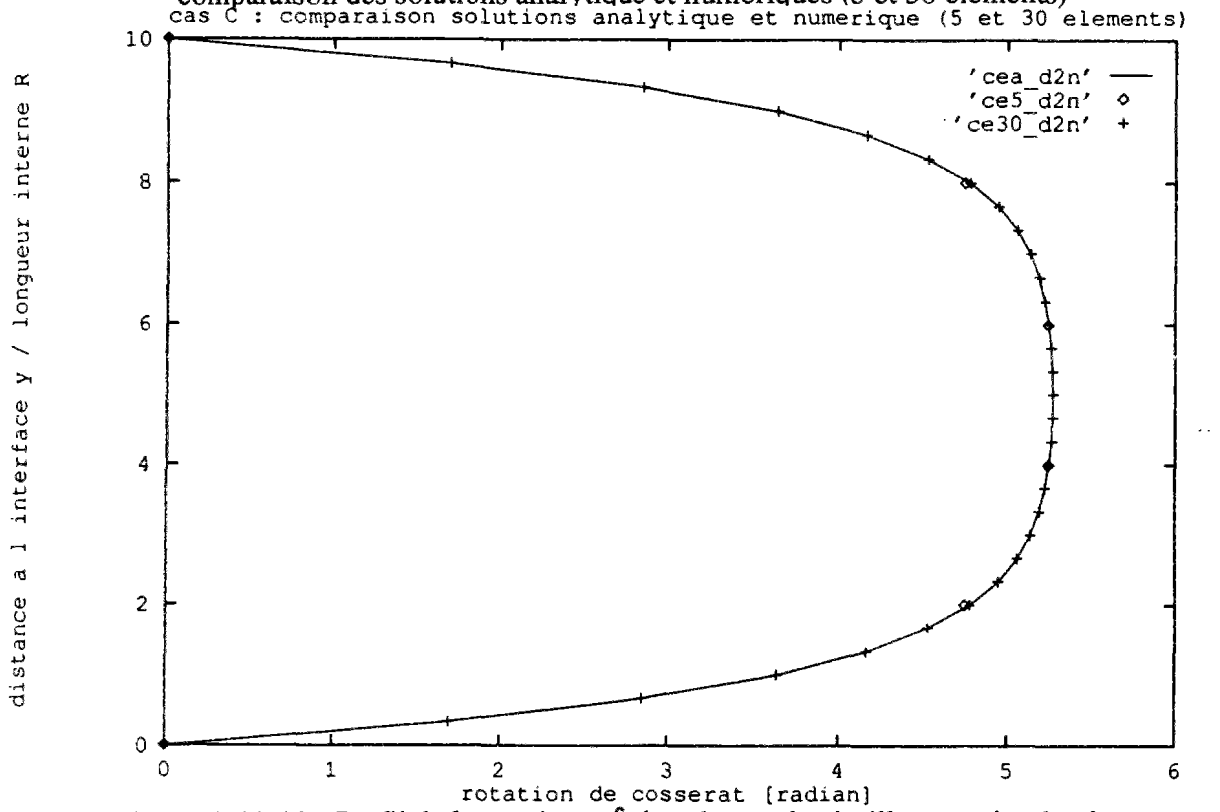


Figure A.11-12 : Profil de la rotation ω_3^c dans le cas du cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastique encastré à ses deux extrémités; comparaison des solutions analytique et numériques (5 et 30 éléments)

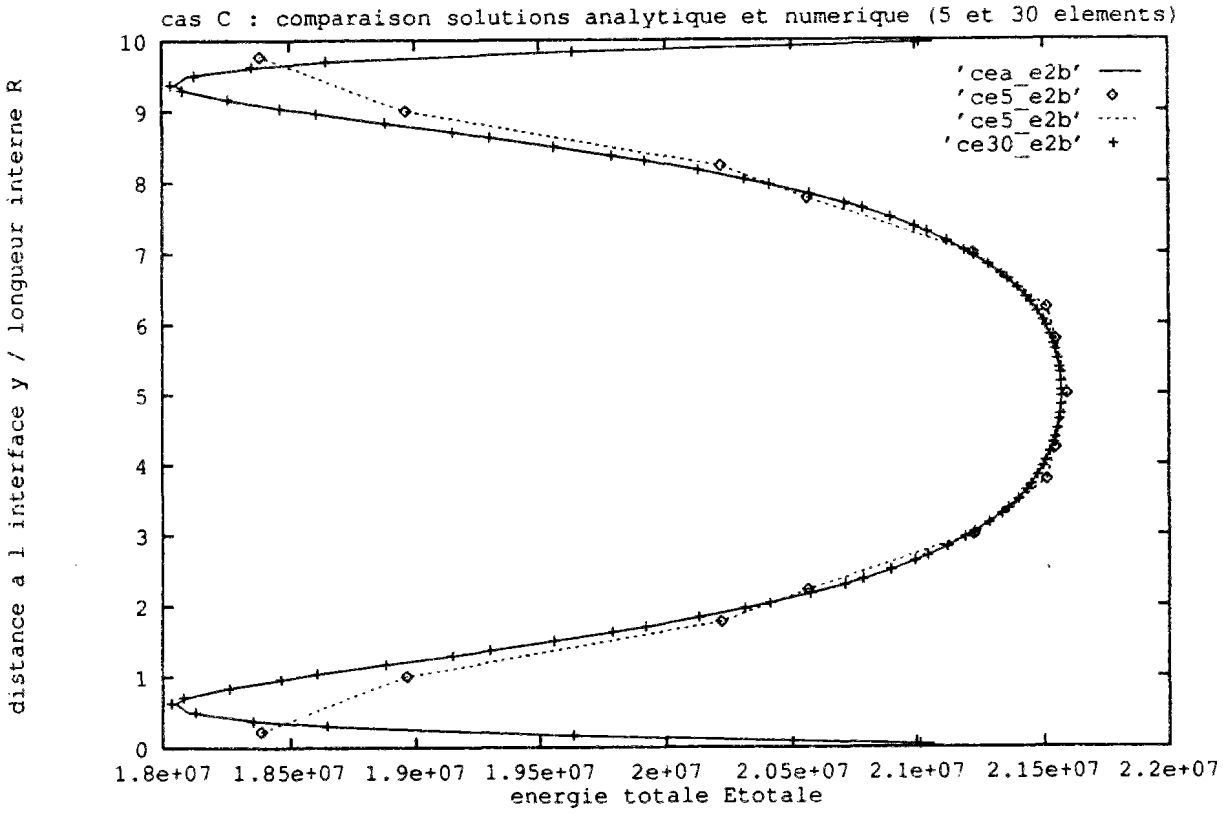


Figure A.11-13 : Profil de l'énergie élastique totale dans le cas du cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastique encastré à ses deux extrémités; comparaison des solutions analytique et numériques (5 et 30 éléments)

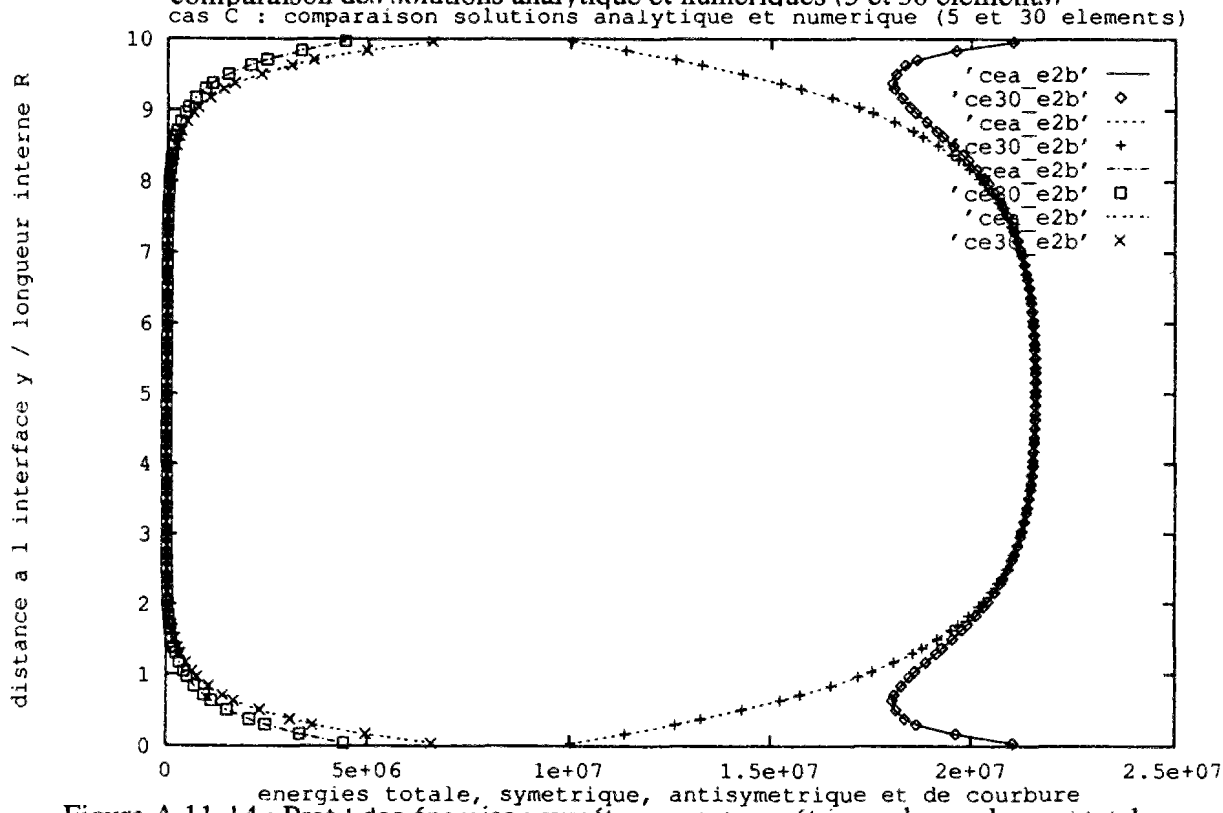


Figure A.11-14 : Profil des énergies : symétrique, antisymétrique, de courbure et totale, dans le cas du cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastique encastré à ses deux extrémités; comparaison des solutions analytique et numériques (30 éléments)

11.2.2 Simulations numériques d'essais de cisaillement d'un milieu de Cosserat élastoplastique sans écrouissage

11.2.2.1 Etude détaillée du cisaillement d'un sable dense à contrainte normale constante et pour une interface rugueuse (cas de référence $f_2 = 0.01$)

Nous avons sélectionné, comme exemple de référence, l'essai de cisaillement simple plan d'un milieu élastoplastique sans écrouissage, pour les conditions aux limites résumées dans le tableau A.11-2 et les paramètres élastoplastiques présentés dans le tableau A.11-4.

Un modèle de comportement des plus simples, c'est à dire élastique linéaire parfaitement plastique, a été choisi de manière à minimiser le nombre de paramètres constitutifs. L'écrouissage ne sera introduit, quant à lui, que plus loin, pour étudier l'influence du radoucissement. Le modèle cinématique de Mühlhaus et Vardoulakis (1987) a été choisi, dans un premier temps, puisqu'il donne les largeurs de bandes de cisaillement et de couche d'interface les plus grandes.

Un maillage avec 42 éléments, 169 points et 257 degrés de liberté est utilisé. L'élément le plus petit près de l'interface, a une longueur 0,35 R tandis que l'élément le plus long a une longueur de 18,65 R. L'échantillon fait 20 mm d'épaisseur, ce qui correspond à 200 R. L'essai est réalisé avec une contrainte normale constante de 100 kPa et en supposant un état de contraintes initiales de type géostatique (état K_0).

Tableau A.11-4 : Paramètres constitutifs pour le calcul de référence

Paramètres élastiques		
module d'Young	E	110,748 kPa
coefficient de Poisson	ν	0,1
coefficient	h_1	0,375
coefficient	h_2	0,125
coefficient	h_3	0,250
coefficient	h_4	0,0
module de compressibilité	K	62,925 kPa
module de cisaillement classique	G	50,340 kPa
module de cisaillement de Cosserat	G_c	100,68 kPa
module de flexion de Cosserat	N	100,68 kPa
Paramètres plastiques (modèle cinématique)		
angle de frottement	ϕ	45°
cohésion	c	0,0 kPa
angle de dilatance	ψ	25°
coefficient	h_1	0,375
coefficient	h_2	0,125
coefficient	h_3	0,250
coefficient	h_4	0,0
Autres paramètres constitutifs		
longueur interne	R	0,1 mm

Le paramètre déterminant dans les conditions aux limites est le paramètres f_2 qui définit la condition à la limite en interface de type Cosserat. Toutes les autres conditions aux limites sont classiques et ne peuvent rien apporter par rapport au cas classique. La valeur qui a été prise peut être qualifiée de "faible". En effet, le coefficient f_2 a été pris égal à 0,01, ce qui correspond à imposer au sol en contact avec l'interface, une rotation propre égale à 1% du déplacement de l'interface W_I. Par ailleurs, le coefficient f_1 a été pris égal à 0,99 (f_3 = 0,0). Une telle valeur de la rotation propre des grains en interface est en fait très difficilement mesurable, si ce n'est impossible. Cependant, son influence sur le comportement est déterminante comme nous allons le voir ci-dessous. L'évolution des déplacements et rotation aux deux extrémités de l'échantillon, I et H, est représentée sur la figure A.11-15.

11.2.2.1.1 Déplacements et rotations

La figure A.11-16 présente les profils des déplacements U_1 et U_2 ainsi que de la rotation ω_3^c sur toute l'épaisseur de l'échantillon. L'amplitude de la rotation est très faible mais elle suffit à initier localement près de l'interface, pour des déplacement W_I de l'ordre de 10 R, une couche d'interface avec un fort gradient du déplacement tangentiel U_1 et une dilatance locale très importante. Si l'on regarde à la rotation, on peut observer également un fort gradient de celle-ci sur quelques longueurs internes (figure A.11-17). Cependant, il faut noter là encore, que la rotation s'amortit beaucoup plus vite que le déplacement tangentiel. Les rotations importantes n'existent donc pas sur toute l'épaisseur de la couche d'interface. C'est un résultat important, qui concorde avec les observations expérimentales de Boulon et al. (1993).

11.2.2.1.2 Contraintes et couples contraintes

L'état de contraintes et couples contraintes dans l'échantillon est fortement hétérogène près de l'interface, sur une épaisseur de 20 R et quasiment constant sur le reste de l'échantillon, que l'on peut qualifier de zone tampon (figure A.11-18). Alors que la contrainte antisymétrique σ_{12}^a est non nulle que sur environ 3 R, le couple contrainte μ_{32} / R est non nul sur environ 15 R (figure A.11-19). Il faut noter que le couple contrainte et la contrainte antisymétrique sont du même ordre que les autres contraintes tout en étant plus faibles. Ce résultat est en accord avec la troisième équation d'équilibre, qui relie la dérivée du couple contrainte à la contrainte antisymétrique. Entre 3 R et 15 R, la contrainte antisymétrique est faible et à peu près constante. Le gradient du couple contrainte est donc à peu près constant et celui-ci décroît très lentement sur environ 12 R. Les contraintes antisymétriques importantes n'existent donc que très près de l'interface tandis que les couples contraintes existent sur toute l'épaisseur. En ce qui concerne la pression p, celle-ci est nettement plus importante près de l'interface, de l'ordre de 50% de plus que dans le reste de l'échantillon (figure A.11-19).

Le cercle de Mohr du premier point dans le sol à l'interface est plus grand que celui du dernier point dans le sol en haut de l'échantillon, et très légèrement translaté vers le haut, du fait de la contrainte antisymétrique non nulle et négative (figure A.11-20). Le sol est en compression. Le même essai, analysé en supposant un comportement élastique sans plasticité, donne des tractions dans le sol et un décalage du cercle de Mohr en interface, plus important vers le bas du fait de la contrainte antisymétrique positive (figure A.11-21). Les conventions de signes pour le tracé des cercles de Mohr sont données sur la figure A.11-22. Le cercle de Mohr dans le cas d'un milieu de Cosserat 2D est translaté de $-\sigma_{12}^a$ parallèlement à l'axe vertical. Entre le cas élastique et le cas élastique parfaitement plastique, il convient de noter la différence en signe et en amplitude de la contrainte antisymétrique.

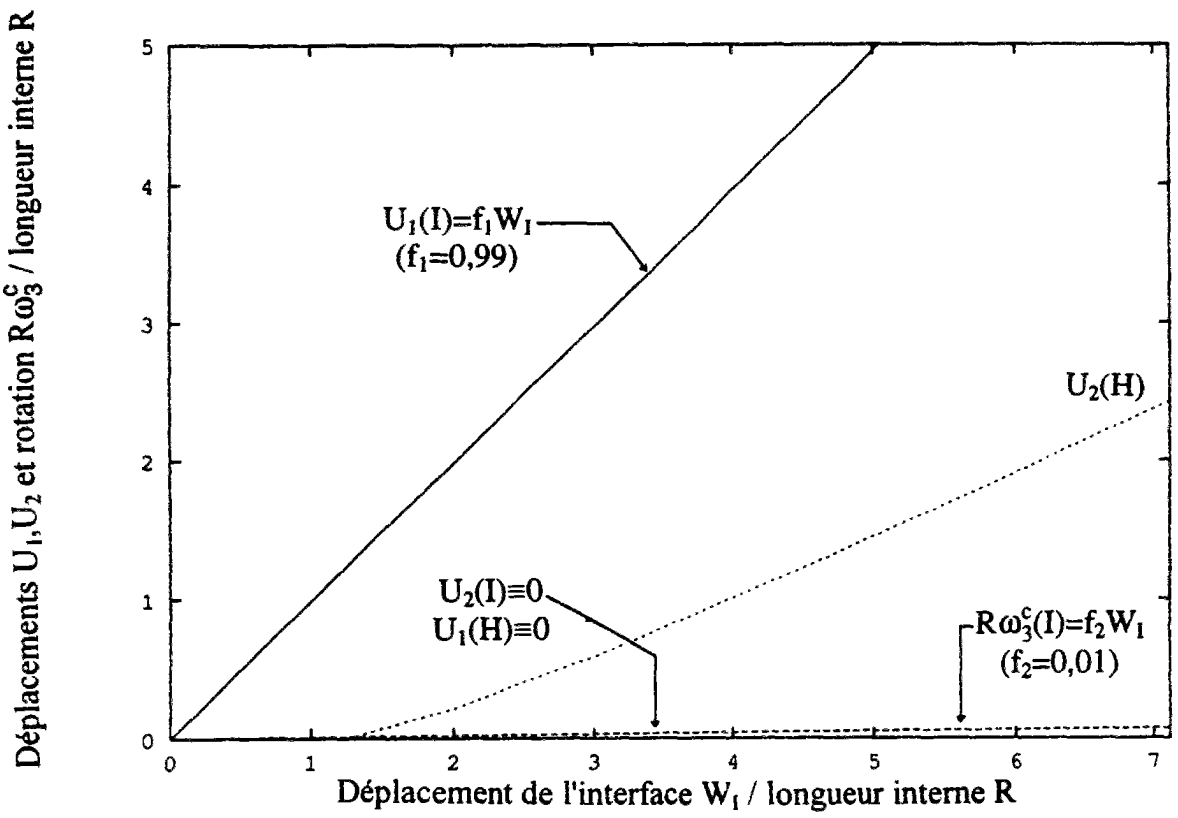


Figure A.11-15 : Evolution des déplacements et rotation, en I et H,
pour le cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastoplastique sans écrouissage
(exemple de référence $f_2 = 0,01$)

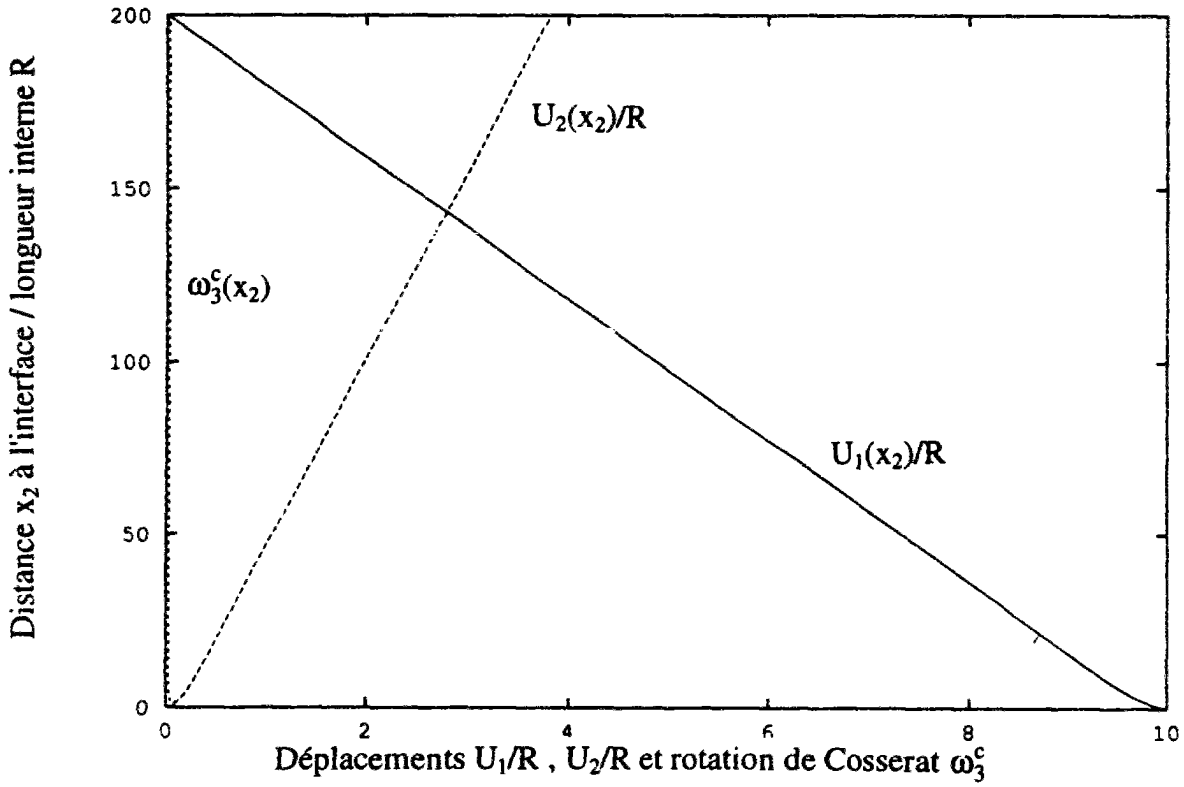


Figure A.11-16 : Profils des déplacements et rotation sur tout l'échantillon,
pour le cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastoplastique sans écrouissage
(exemple de référence $f_2 = 0,01$)

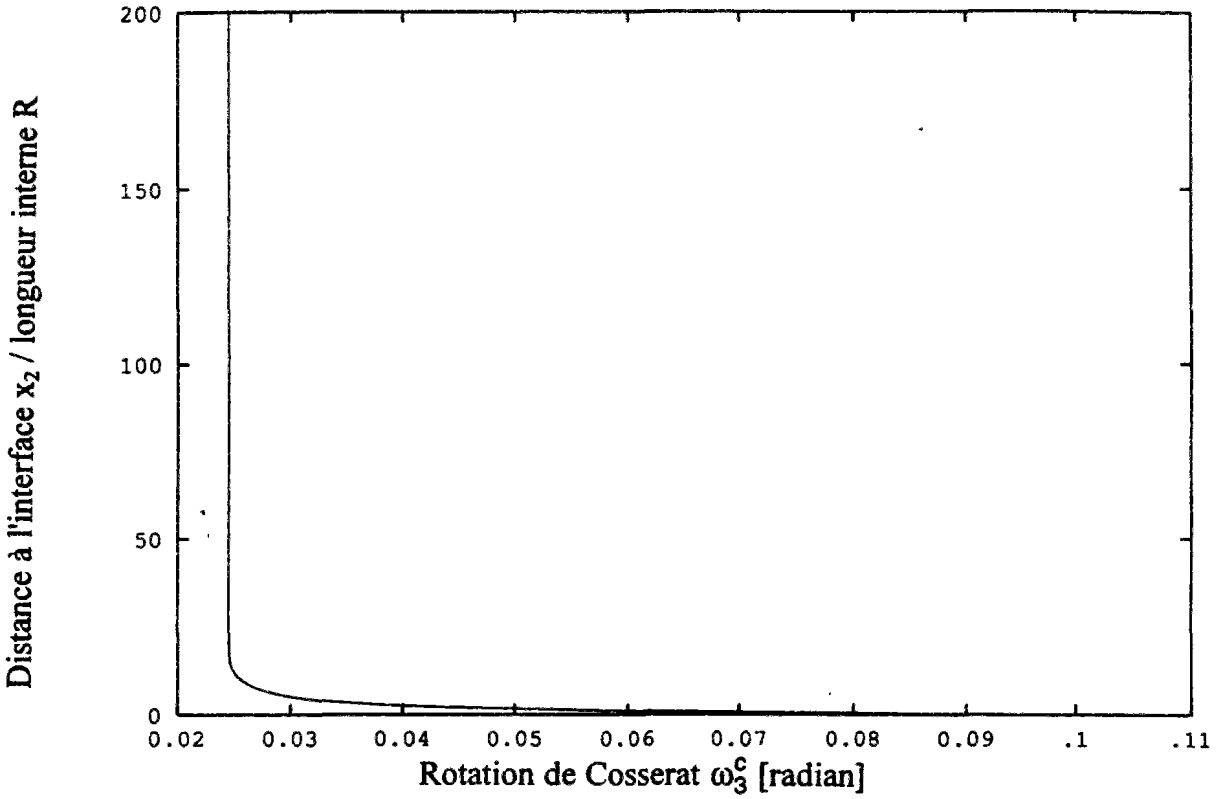


Figure A.11-17 : Profil de la rotation de Cosserat sur tout l'échantillon,
pour le cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastoplastique sans écrouissage
(exemple de référence $f_2 = 0{,}01$)

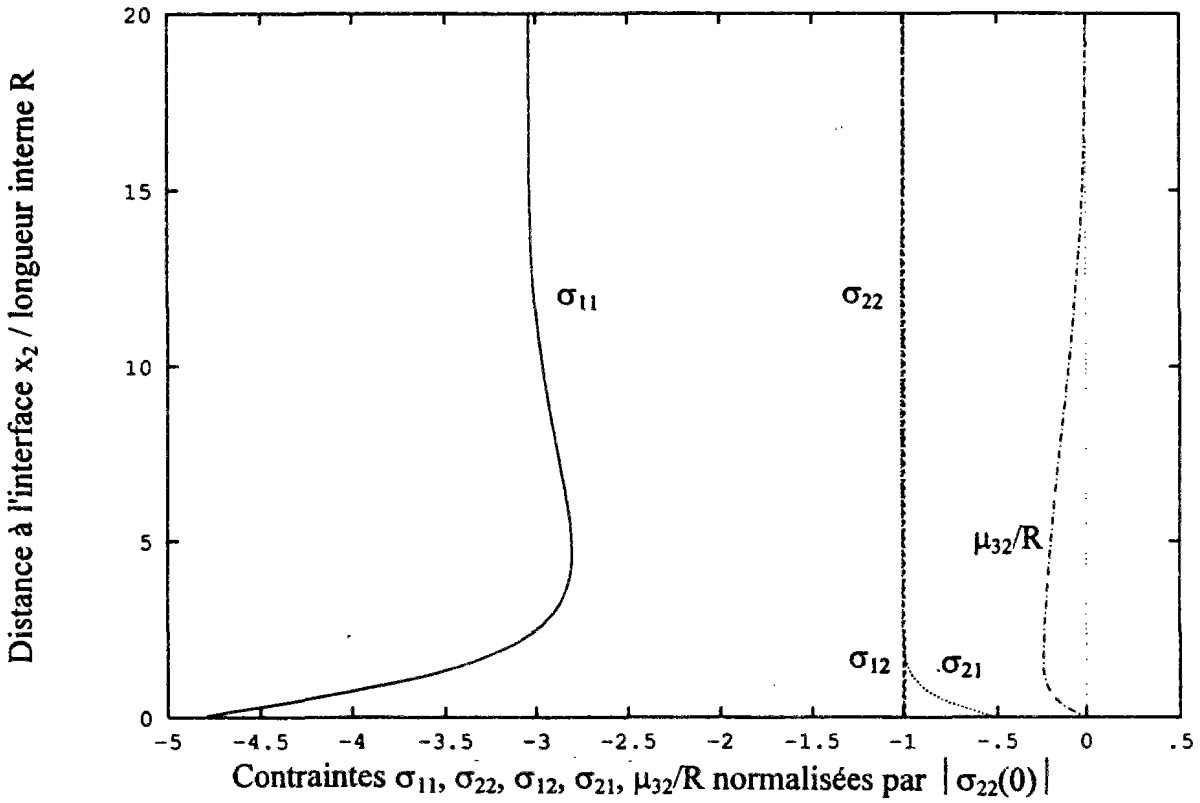


Figure A.11-18 : Profil des contraintes et couple contrainte près de l'interface,
pour le cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastoplastique sans écrouissage
(exemple de référence $f_2 = 0{,}01$)

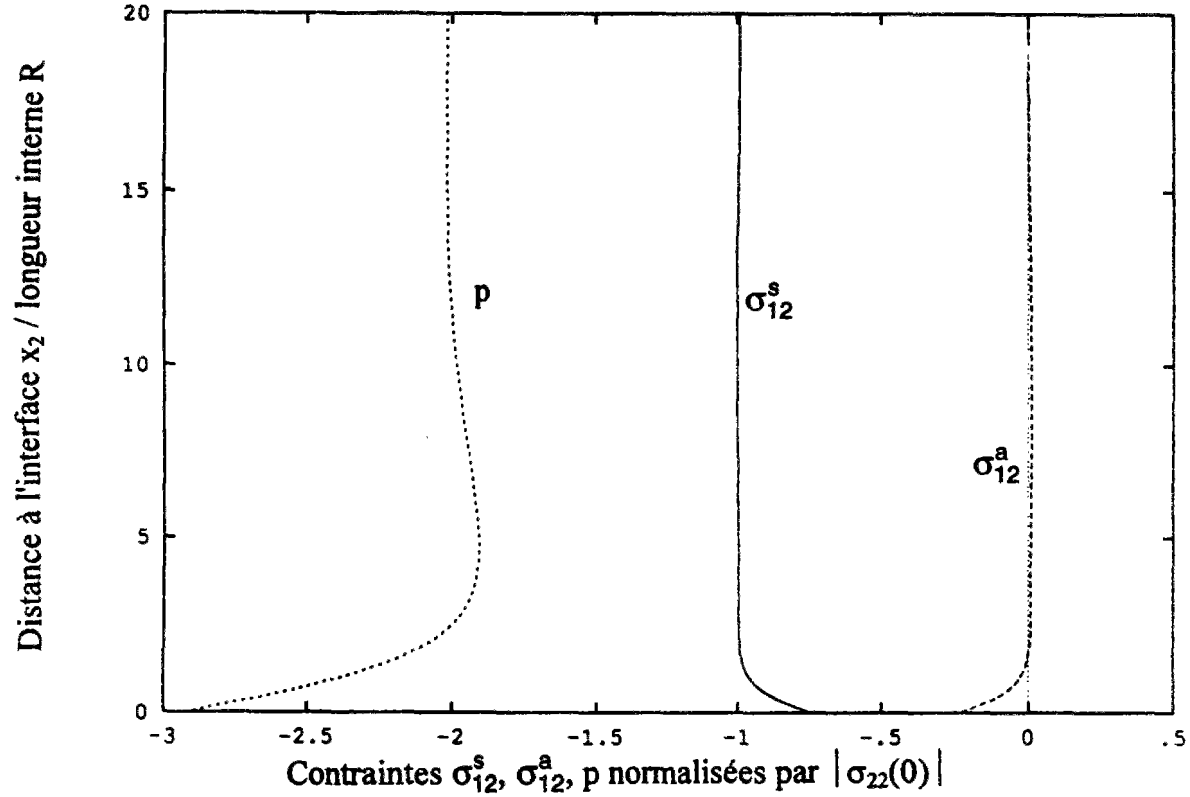


Figure A.11-19 : Profil des contraintes tangentielles, symétrique et antisymétrique, et de la pression, pour le cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastoplastique sans écrouissage (exemple de référence $f_2 = 0{,}01$)

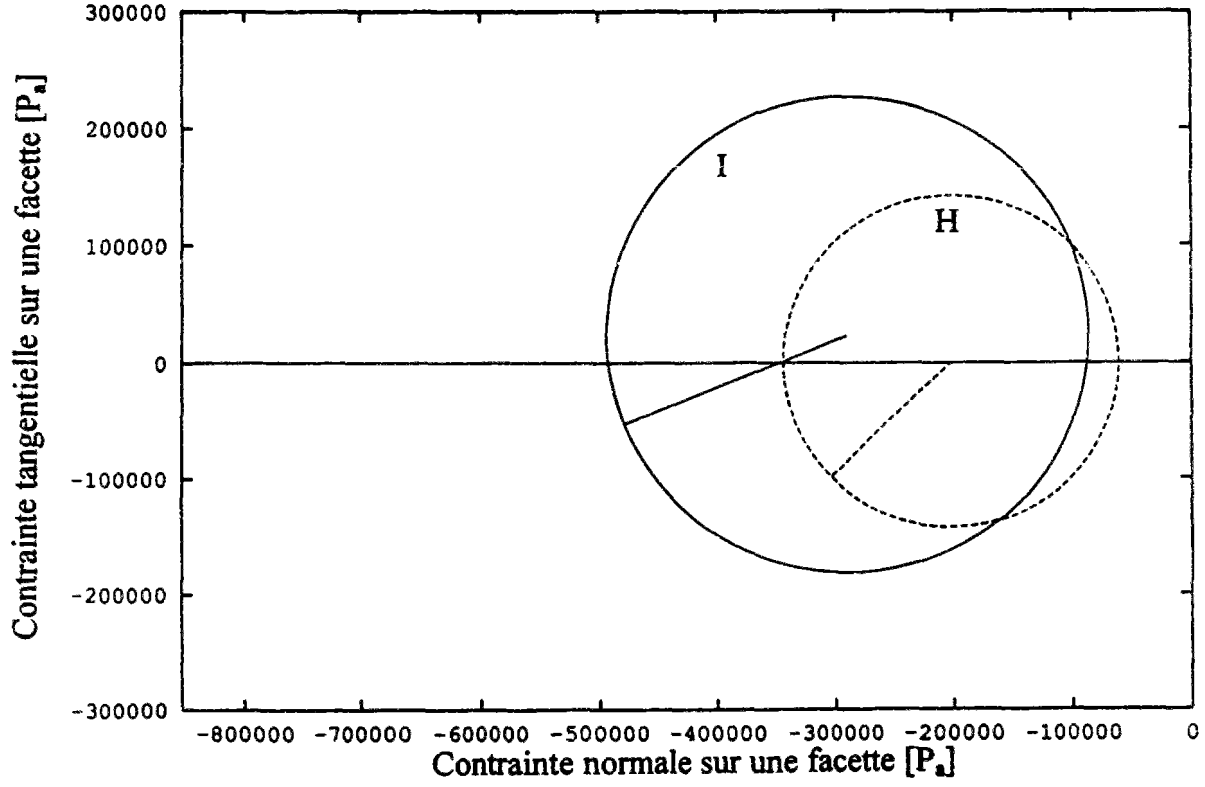


Figure A.11-20 : Cercles de Mohr en interface et en haut d 'échantillon, pour le cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastoplastique sans écrouissage (exemple de référence $f_2 = 0{,}01$)

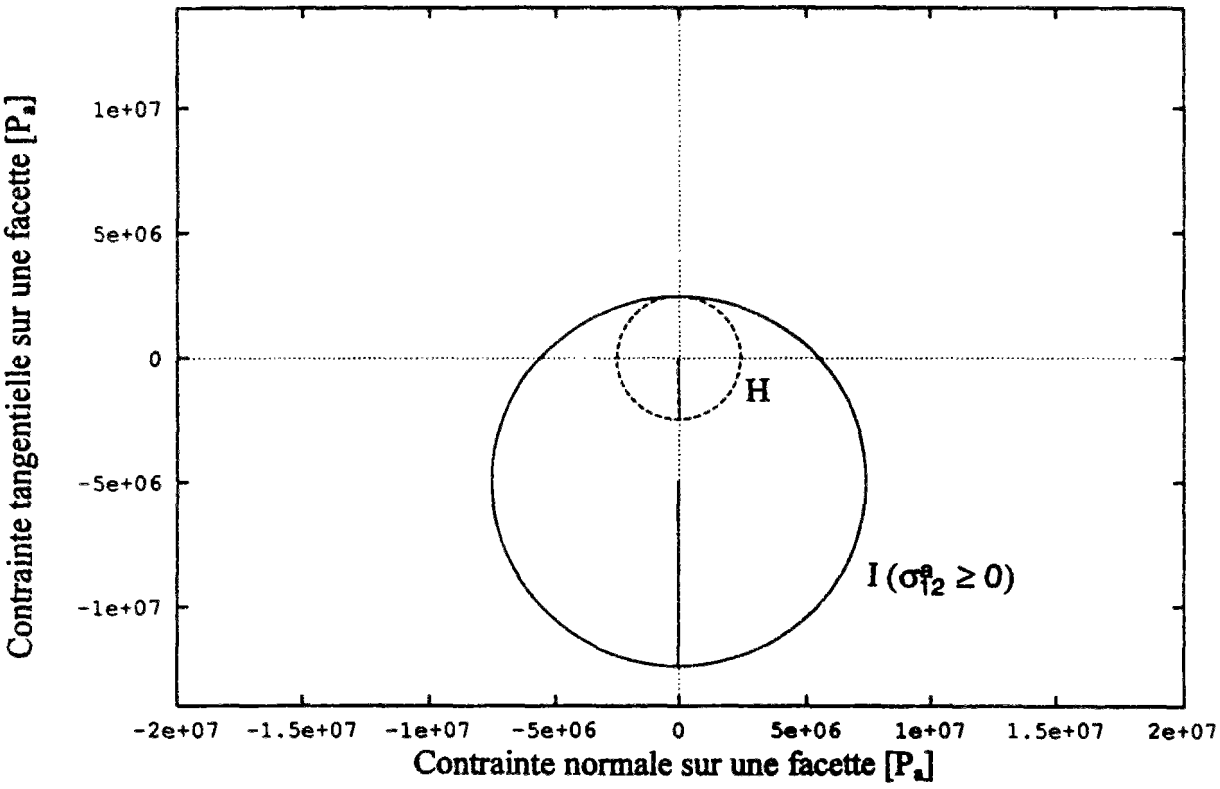


Figure A.11-21 : Cercles de Mohr en interface et en haut d 'échantillon, dans le cas du cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastique (exemple de référence $f_2 = 0{,}01$ avec comportement élastique)

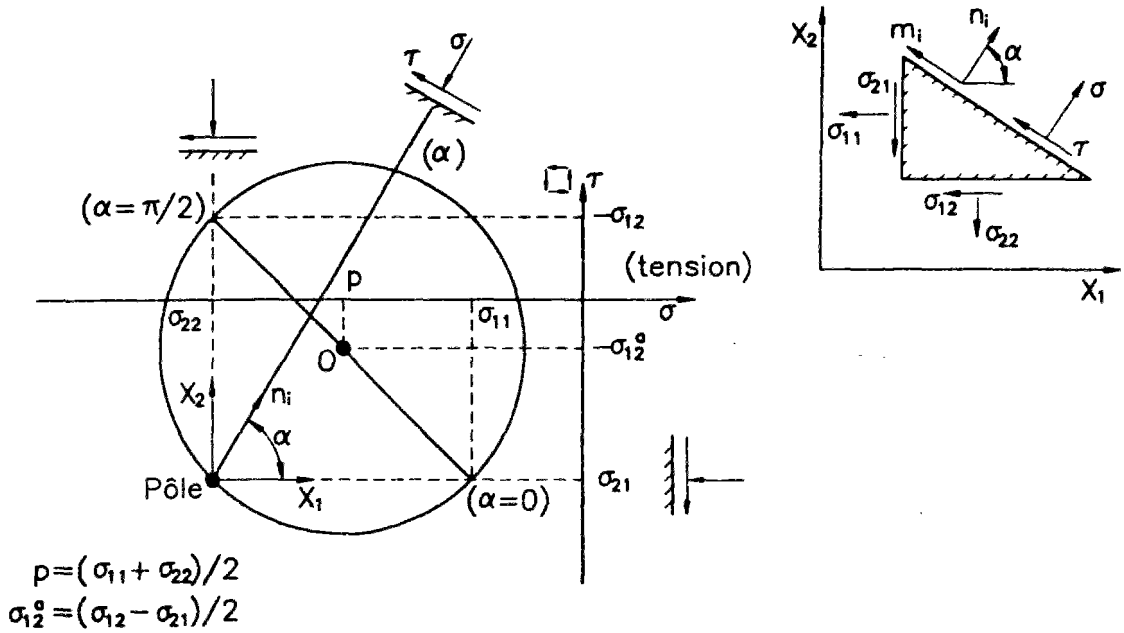


Figure A.11-22 : Conventions de signes utilisées pour le tracer des cercles de Mohr

Les chemins de contrainte suivis dans le plan de Mohr par les couples (τ_g (I), p(I)) , (τ_{sym} (I), p(I)) sont quasiment identiques puisque les deux cisaillements ne différent que de peu (figure A.11-23).

En ce qui concerne le critère de rupture, celui-ci après normalisation par le produit de la pression p et le coefficient de frottement μ, est vérifié dans la couche d'interface avec une grande précision, de l'ordre de 10^{-16} (figure A.11-24).

La contrainte de cisaillement symétrique τ_{sym} , définie à partir des termes symétriques déviatoriques des contraintes, est quasiment égale à la contrainte de cisaillement généralisée τ_g . Les termes τ_{asym} et τ_{cour} sont du même ordre de grandeur mais nettement plus faibles que le terme symétrique τ_{sym} . La contrainte antisymétrique n'existe de manière significative que près de l'interface sur une épaisseur de 2 à 3 R tandis que le couple contrainte existe sur une profondeur plus grande, jusqu'à environ 15 R.

Ce résultat est important et nouveau, car il démontre que les couples contraintes sont présents sur toute l'épaisseur de la couche d'interface, tandis que les contraintes antisymétriques n'existent que très localement près de l'interface (figure A.11-25).

11.2.2.1.3 Déformations

L'évolution des déformations de cisaillement plastiques : symétrique γ_{sym} , antisymétrique γ_{asym} , de courbure γ_{cour} et généralisée γ_g , aussi bien en interface qu'en H, est présentée sur la figure A.11-26. Les termes symétriques sont environ 2 fois plus importants que les termes de courbures, qui sont eux-mêmes deux fois plus importants que les termes antisymétriques, pour ce qui concerne l'interface I. En H, la déformation généralisée coïncide avec la déformation symétrique puisque les termes antisymétrique et de courbure sont nuls. Les mêmes tendances sont observées au sein de la couche d'interface. Les déformations γ_g et γ_{sym} ne diffèrent de manière notable que sur une épaisseur de 5 R alors que la couche d'interface s'étend sur environ 15 R (figure A.11-27).

Il est intéressant de regarder le rapport entre la déformation volumique plastique ε_v^p et les déformations de cisaillement plastiques, symétriques et généralisée, γ_{sym} et γ_g . Le sinus de l'angle de dilatance réel, noté sin β, correspond au rapport de ε_v^p par γ_g tandis que le rapport de ε_v^p par γ_{sym} définit le sinus d'un angle de dilatance apparent, noté sin β^* par analogie au coefficient de frottement apparent introduit par Schlosser et Elias (1978) pour les sols renforcés (figure A.11-28). Une différence sensible entre ces deux angles peut être observée dans le cas présent, bien que les effets de Cosserat soient relativement faibles (figure A.11-29). Les fortes dilatances observées en interface par de nombreux auteurs (Wernick, 1978; Schlosser et Guilloux, 1981) ou au sein de bandes de cisaillement (Desrues, 1984) proviennent de l'interprétation dans le cadre classique de résultats où les effets de Cosserat ne sont pas négligeables. Le fort cisaillement au sein de la couche d'interface induit une forte dilatance locale, qui se traduit par une augmentation de la porosité relativement importante, compte tenu du faible déplacement de l'interface simulé (figure A.11-30).

11.2.2.1.4 Energies plastiques dissipée

L'analyse du cisaillement simple annulaire d'un milieu rigide parfaitement plastique a permis de mettre en évidence le fort pouvoir dissipatif des couches d'interface (paragraphe 8, partie A). Dans le cas présent, une analyse encore plus précise a été réalisée. L'énergie plastique totale E^p_{totale} a été décomposée en énergie plastique symétrique E^p_{sym} , antisymétrique E^p_{asym} et de courbure E^p_{cour}.(figure A.11-31). L'évolution de ces quatre termes, en I et en H, a été suivie au cours du cisaillement. Il est intéressant d'observer qu'en interface, l'énergie plastique de courbure est 3 fois plus grande que les énergie symétrique et antisymétriques qui sont du même ordre de grandeur. En H, où les effets de Cosserat sont quasiment inexistants, l'énergie totale coïncide avec l'énergie symétrique, tandis que les énergies antisymétrique et de courbure sont nulles. La rotation des points matériels dans un milieu de Cosserat est donc fortement dissipatrice en énergie, même quand les effets de Cosserat peuvent être qualifiés comme étant très faibles.

Si en interface, l'énergie de courbure est prépondérante, très vite, sur 2 à 3 R, l'énergie symétrique redevient prépondérante, tandis que les deux termes antisymétrique et de courbure deviennent quasiment nuls sur 5 R. Cependant, la couche d'interface s'étend sur environ 15 R (figure A.11-32). Les mêmes tendances peuvent être observées sur les courbes d'énergies totale, élastique et plastique (figure A.11-33). Sur la figure A.11-33, de petites oscillations numériques peuvent être observées en ce qui concerne le terme d'énergie symétrique plastique. Ceci est l'un des rares cas où un tel phénomène d'oscillations numériques a été observé.

11.2.2.1.5 Mesures globales et épaisseur de la couche d'interface

En termes de mesures globales, l'introduction de la microstructure dans la loi de comportement et la condition à la limite en interface a pour effet de réduire le coefficient de frottement donné par l'essai de cisaillement simple plan (figure A.11-33). Dans le cas présent, la réduction est faible, vu que la condition à la limite en interface de type Cosserat est faible (f_2 = 0,01). Mais c'est un résultat qui reste vrai pour toutes les autres simulations qui ont été faites. Il est en accord avec les résultats expérimentaux puisque l'angle de frottement global mesuré dans un essai d'interface est systématiquement plus faible que l'angle de frottement interne du matériau testé. La sollicitation de la microstructure par les conditions à la limite en interface introduit donc un affaiblissement.

L'évolution de l'épaisseur de la couche d'interface est représentée sur la figure A.11-34. Il faut noter que la couche d'interface se développe pour des déplacements de l'interface W_I de l'ordre de 5 à 10 R, ce qui est très faible mais correspond aux observations expérimentales faites au Japon par Kishida et Uesugi (1987) et en France par Boulon (1988). Cependant, très peu de mesures fines ont été faite pour suivre précisément l'évolution de cette couche d'interface, en fonction du déplacement d'interface et de la taille des grains. Ce sujet mériterait de plus amples recherches expérimentales.

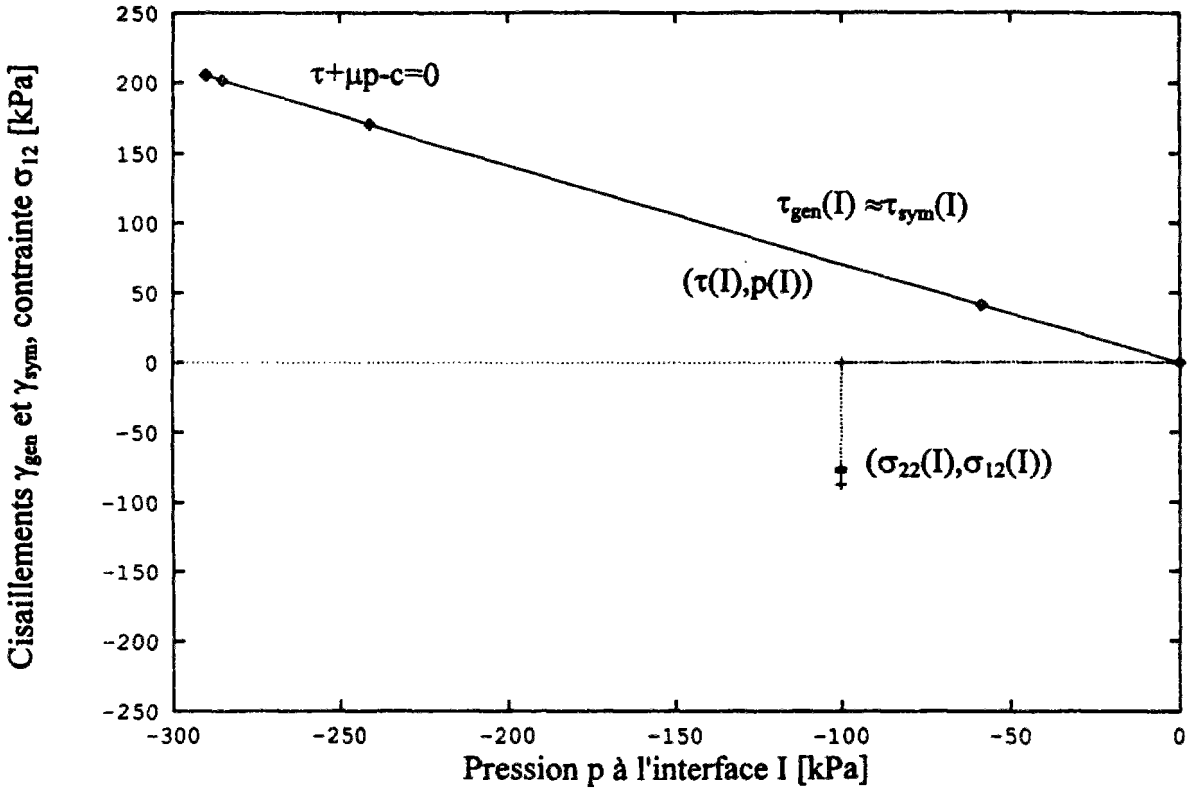


Figure A.11-23 : Chemins de contraintes dans le plan de Mohr,
pour le cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastoplastique sans écrouissage
(exemple de référence $f_2 = 0{,}01$)

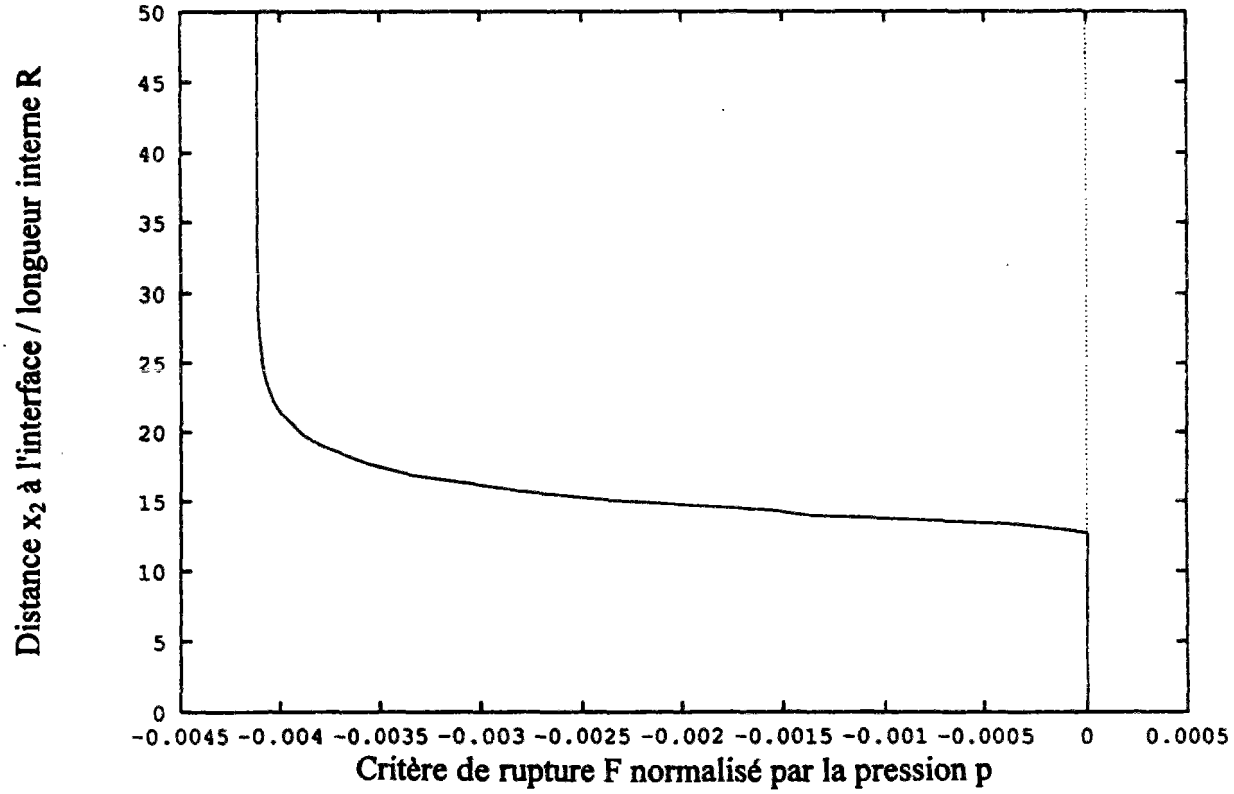


Figure A.11-24 : Profil du critère de rupture normalisé,
pour le cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastoplastique sans écrouissage
(exemple de référence $f_2 = 0{,}01$)

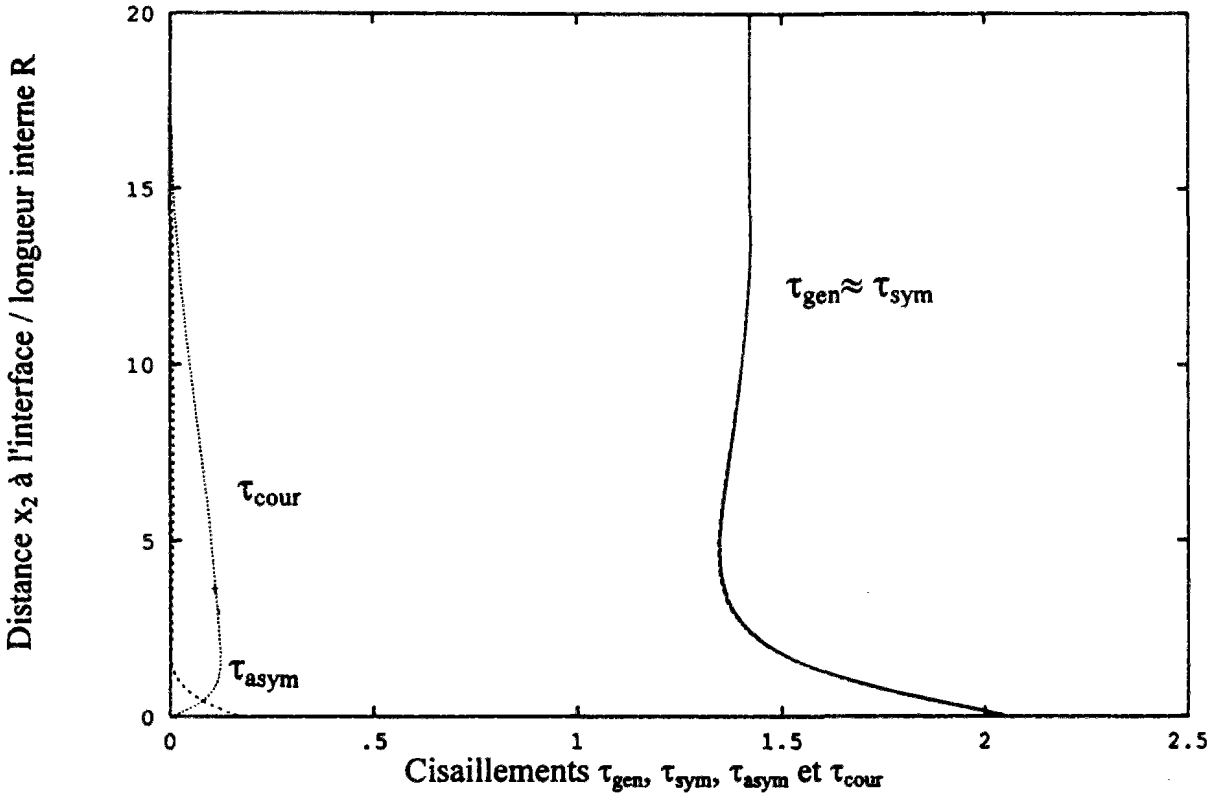


Figure A.11-25 : Profils des cisaillements symétrique, antisymétrique, de courbure et généralisé, dans le cas du cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastoplastique sans écrouissage (exemple de référence $f_2 = 0{,}01$)

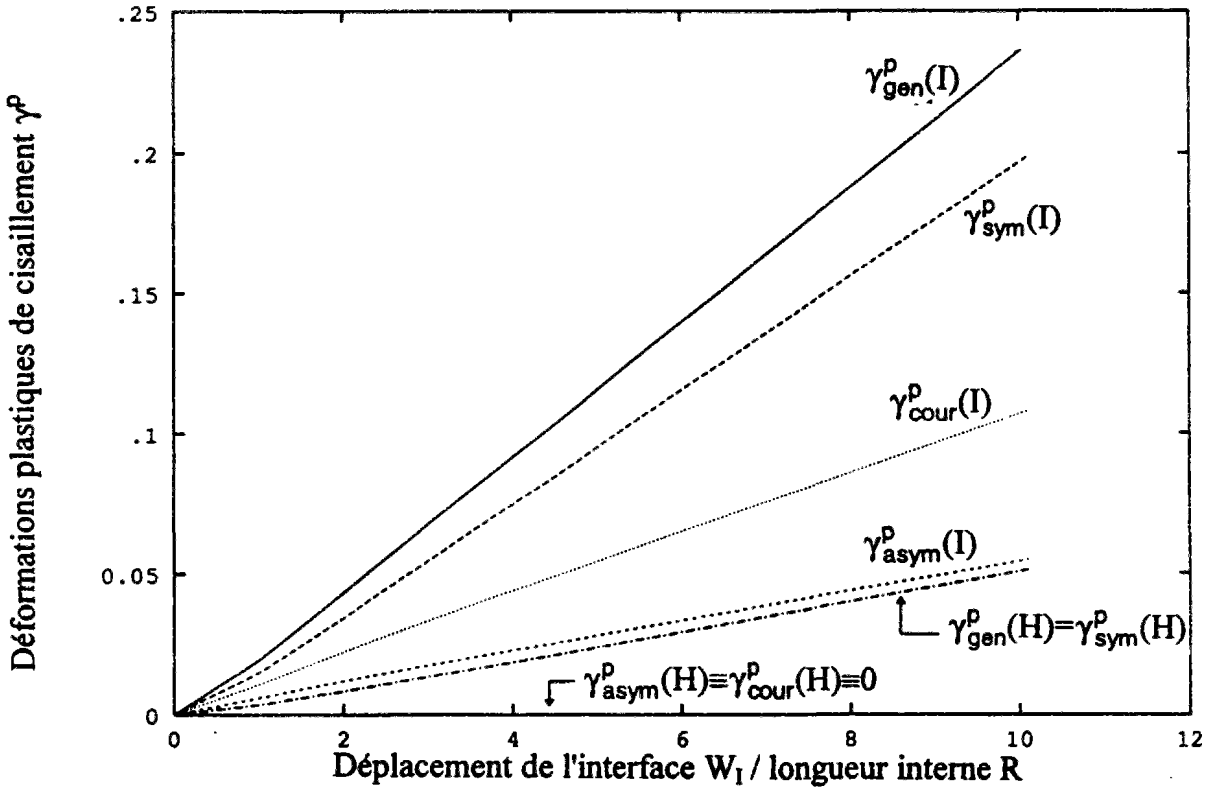


Figure A.11-26 : Evolution des déformations plastiques de cisaillement symétrique, antisymétrique, de courbure et généralisée, en I et en H, pour le cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastoplastique sans écrouissage (exemple de référence $f_2 = 0{,}01$)

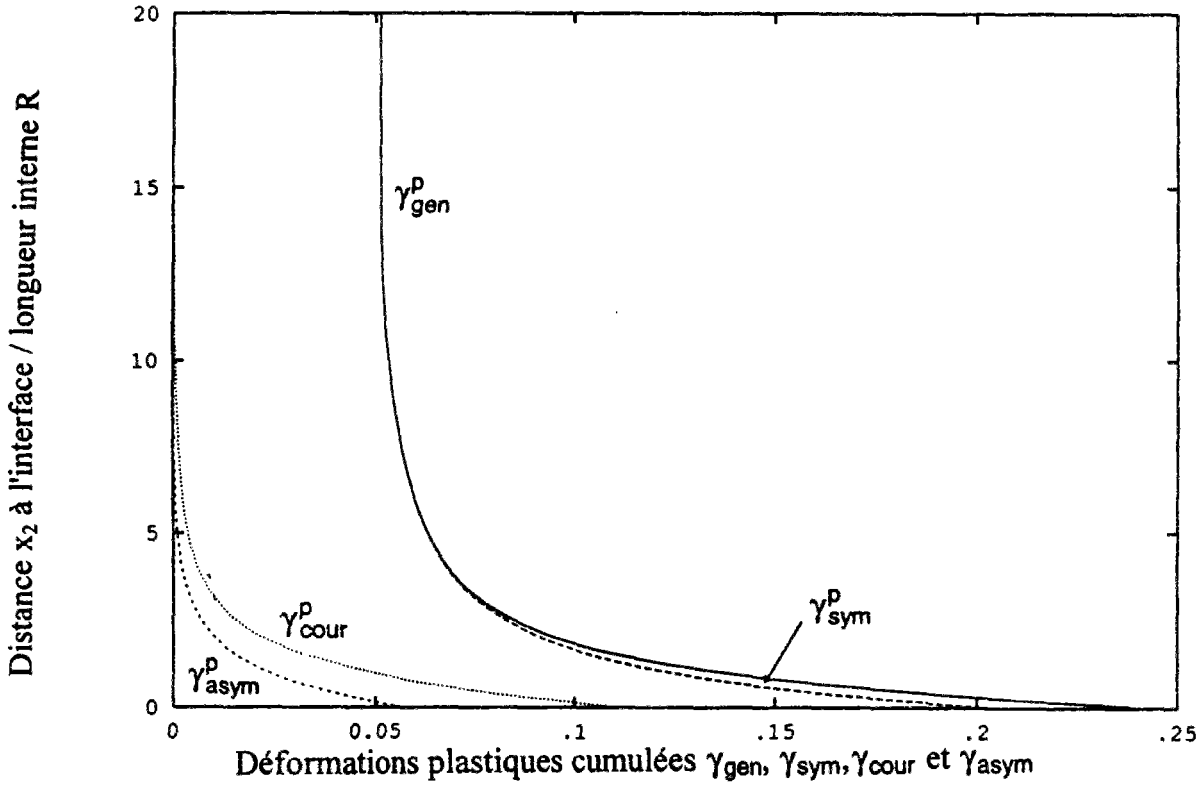


Figure A.11-27 : Profils des déformations plastiques de cisaillements symétrique, antisymétrique, de courbure et généralisé, dans le cas du cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastoplastique sans écrouissage (exemple de référence $f_2 = 0{,}01$)

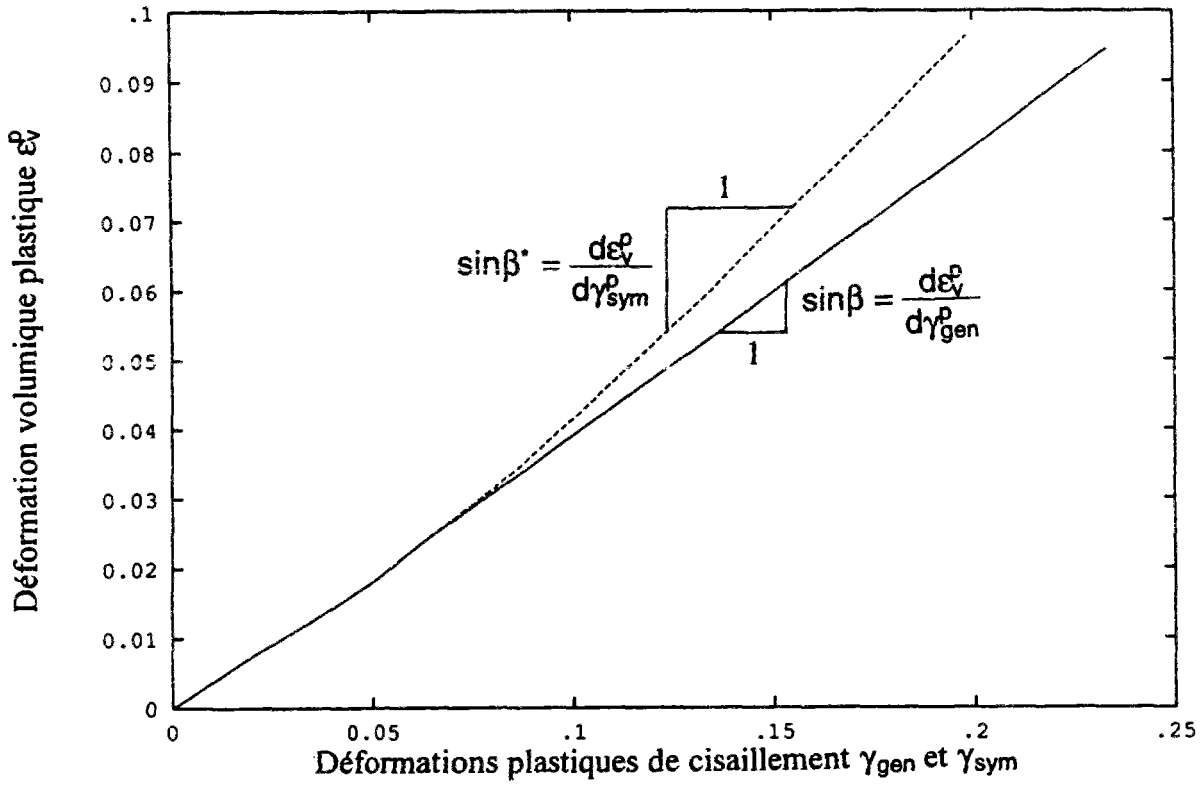


Figure A.11-28 : Déformation volumique plastique en fonction des déformations plastiques de cisaillement, symétrique et généralisée, dans le cas du cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastoplastique sans écrouissage (exemple de référence $f_2 = 0{,}01$)

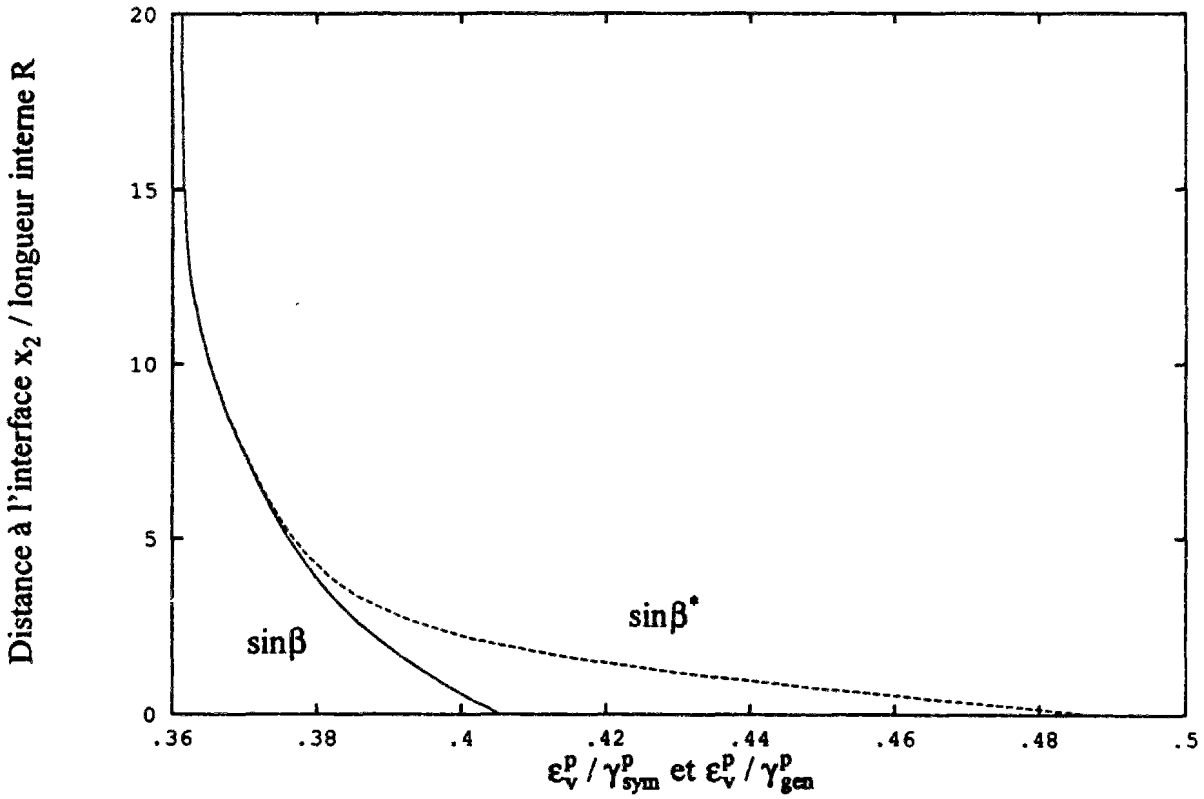


Figure A.11-29 : Profils des angles de dilatance, intrinsèque et apparent,
pour le cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastoplastique sans écrouissage
(exemple de référence $f_2 = 0{,}01$)

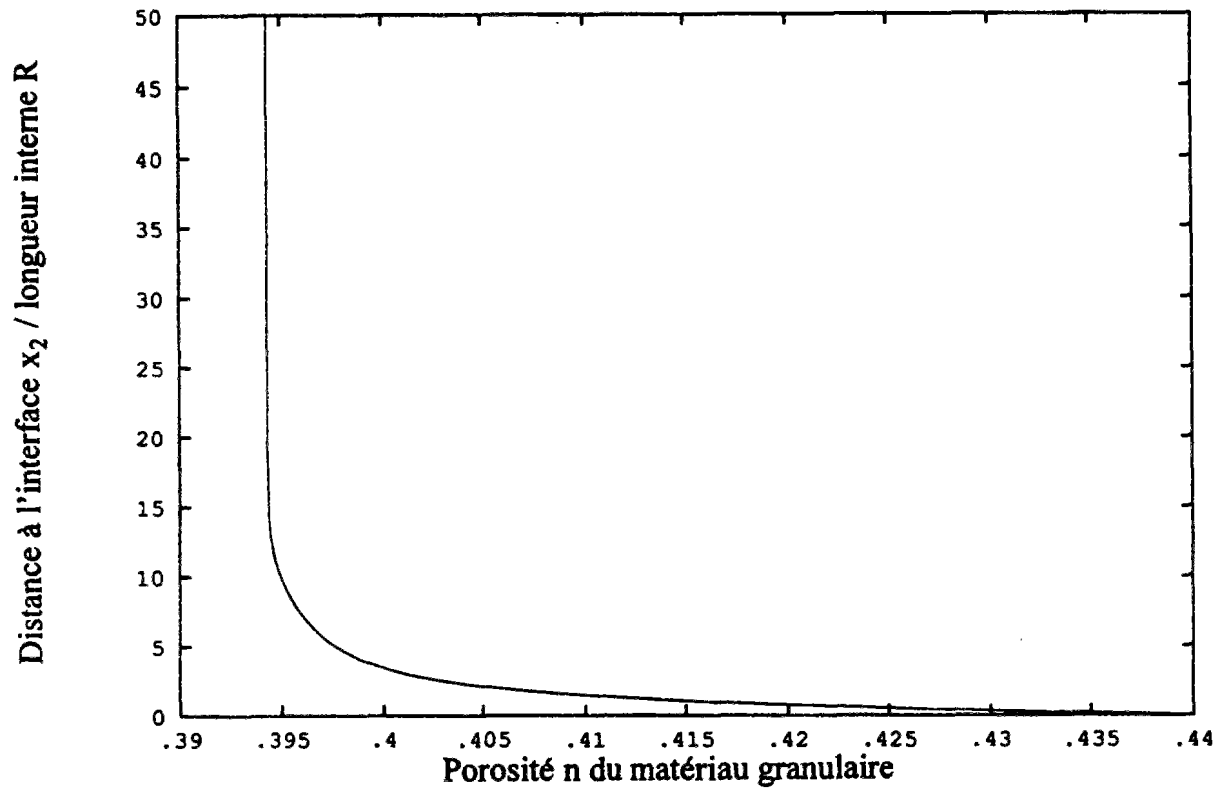


Figure A.11-30 : Profil de la porosité, près de l'interface,
pour le cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastoplastique sans écrouissage
(exemple de référence $f_2 = 0{,}01$)

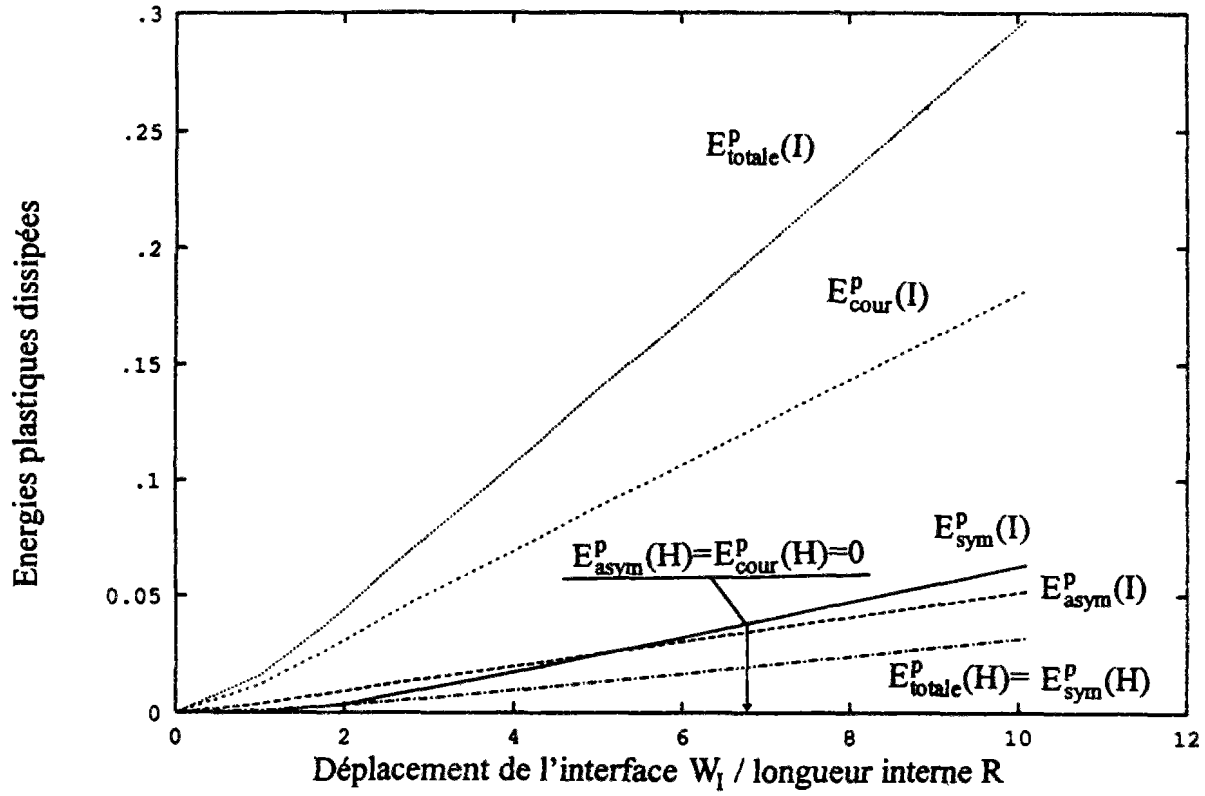


Figure A.11-31 : Evolution des énergies plastiques, symétrique, antisymétrique, de courbure et totale, en I et en H, dans le cas du cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastoplastique sans écrouissage (exemple de référence $f_2 = 0{,}01$)

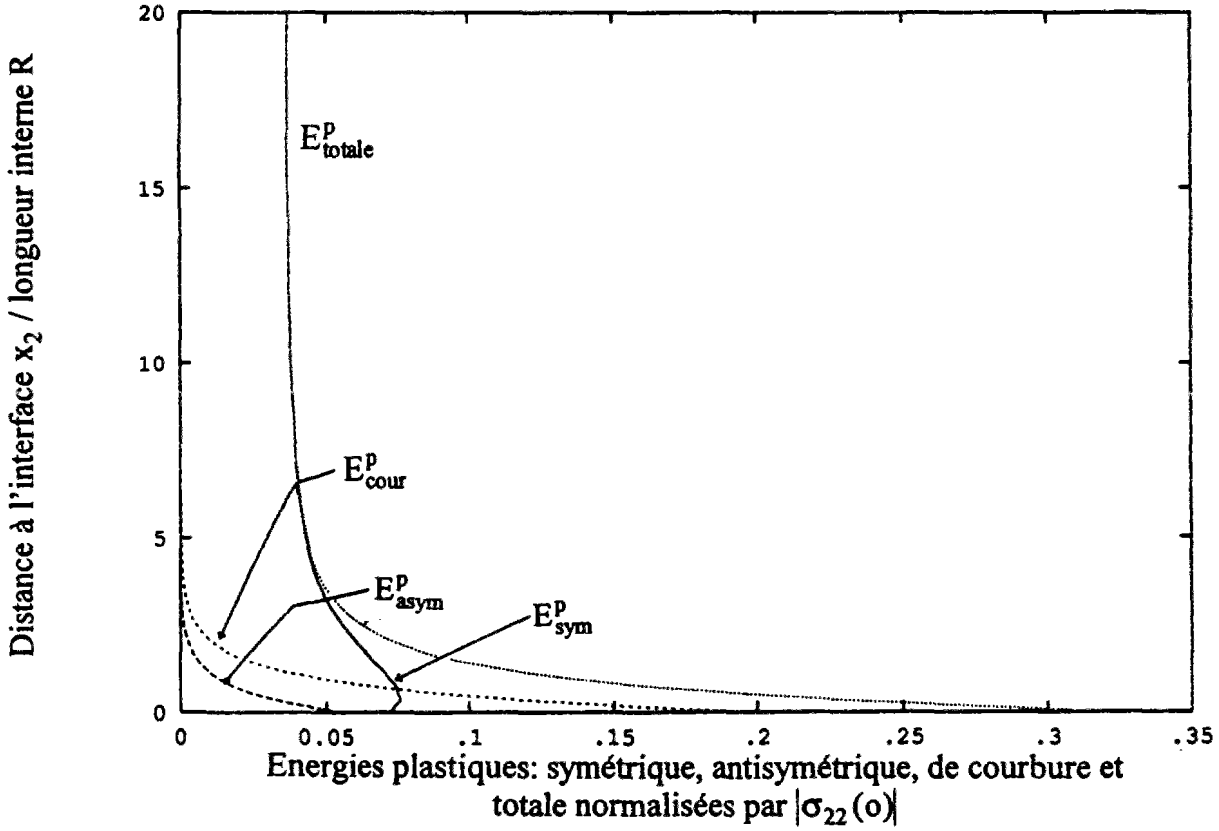


Figure A.11-32 : Profils des énergies plastiques, symétrique, antisymétrique, de courbure et totale, dans le cas du cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastoplastique sans écrouissage (exemple de référence $f_2 = 0{,}01$)

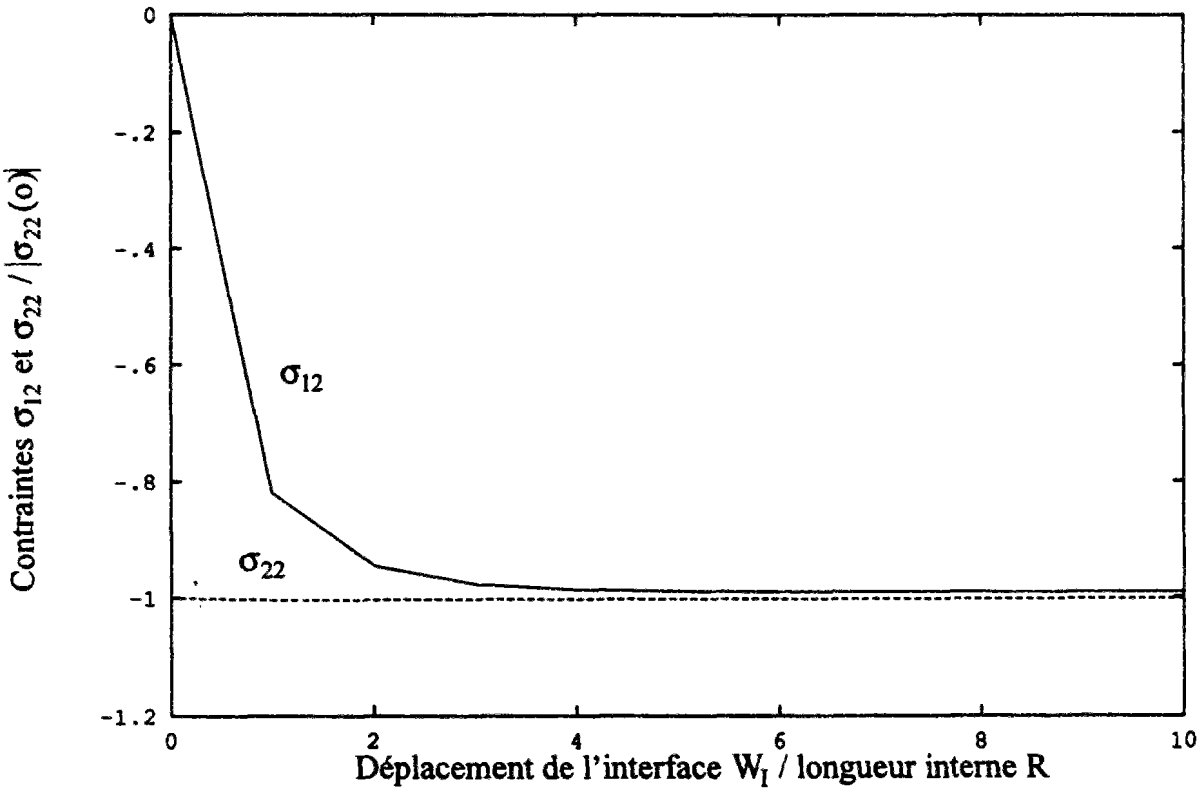


Figure A.11-33 : Evolution des contraintes, normale et tangentielle, mesurées au cours du déplacement d'interface W_I (exemple de référence $f_2 = 0{,}01$)

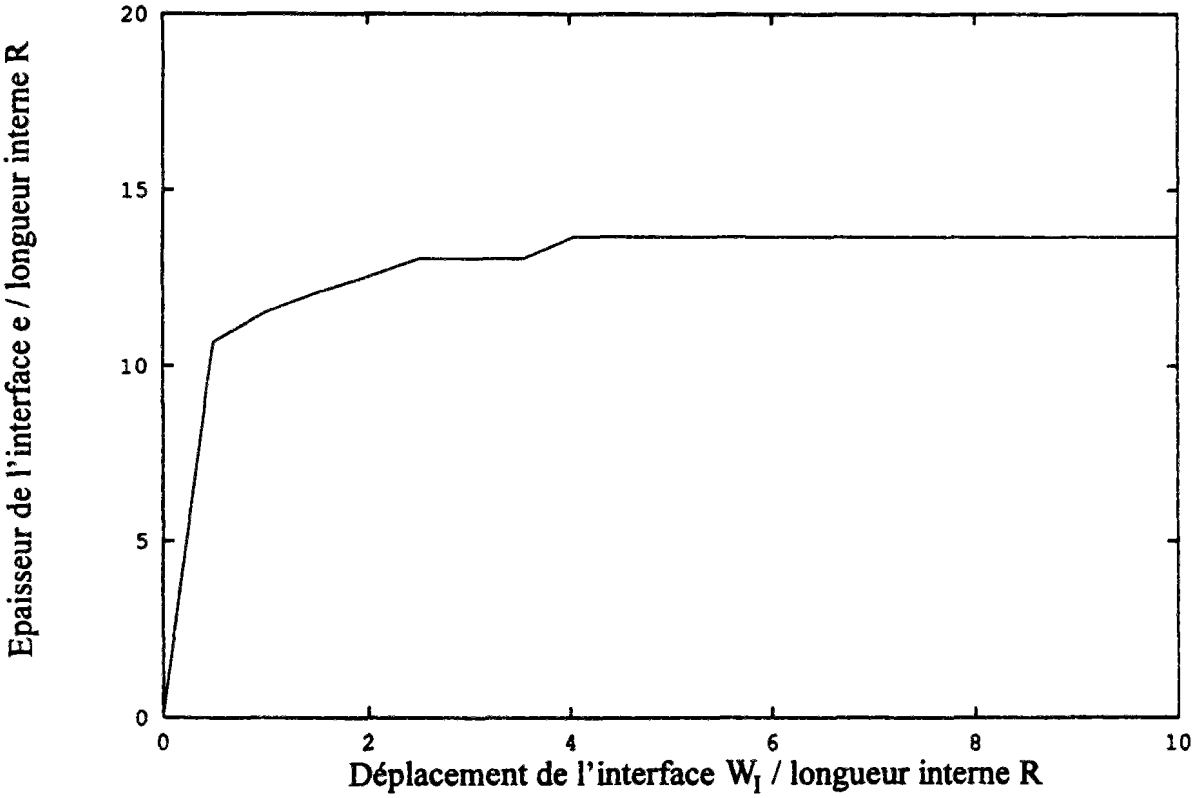


Figure A.11-34 : Evolution de l'épaisseur d'interface au cours du cisaillement (exemple de référence $f_2 = 0{,}01$)

11.2.2.1.6 Analyse en déformations finies

Les simulations indiquent que la couche d'interface se forme très tôt pour des déplacements de l'interface W_I de l'ordre de 5 à 10 R Dans le cas d'un matériau élastoplastique sans écrouissage, nous nous sommes intéressés à pousser le cisaillement jusqu'à 100 R, ce qui dans le cas présent correspond à 10 mm, afin de voir si les résultats obtenus pour de petites déformations étaient sensiblement modifiés.

En ce qui concerne les déplacements U_1 et U_2 et la rotation ω_3^c , les profils obtenus pour W_I égal à 10 R et à 100 R sont quasiment identiques (figures A.11-16 et A.11-35). La rotation en interface, bien qu'étant très faible par rapport au déplacement tangentiel normalisé U_1 / R , puisqu'elle ne représente que 1% de W_I alors qu'il représente 99%, finit par atteindre des valeurs significatives et observables, de l'ordre de 60°, après un déplacement d'interface de 100 R, c'est à dire de 10 mm (figure A.11-36). Cet ordre de grandeur a été observé par Boulon et al. (1994). Il convient de noter que la rotation s'amortit très vite, sur une épaisseur de l'ordre de 5 R, alors que la couche d'interface a une épaisseur d'environ 15 R. Ce résultat, là aussi, concorde avec les observations de Boulon et al. (1994). Seules les premières rangées de grains sont réellement soumises à de fortes rotations tandis que le sol est cisaillé plus en profondeur comme l'analyse stéréophotogrammétrique le met en évidence (Boulon et al., 1993).

La couche d'interface, après s'être développée complètement pour un déplacement W_I de l'ordre de 5 à 10 R, n'évolue que très lentement avec le cisaillement. Il faut noter une très faible augmentation de l'épaisseur, de l'ordre de 0,5 R, pour un déplacement de 100 R (figure A.11-37). Ce résultat est important pour les études paramétriques qui seront menées dans les prochains paragraphes, car il permet de s'affranchir des calculs en déformations finies et des grands déplacements d'interface W_I . Les études paramétriques seront donc menées pour des déplacements d'interface de 10 R, en faisant varier les paramètres les uns après l'autre, afin de mieux comprendre leurs influences respectives.

11.2.2.2 Etude détaillée du cisaillement à contrainte normale constante, d'un sable dense encastré dans l'interface ($f_2 = 0,0$)

Le cas d'un sol "encastré" dans l'interface, c'est à dire transporté par l'interface ($f_1 = 1,0$ et $f_3 = 0,0$) et pour lequel la rotation de Cosserat est nulle ($f_2 = 0,0$), est un cas extrême qui est intéressant en tant que tel, mais qui ne peut représenter le comportement d'une interface rugueuse, contrairement à ce que certains auteurs ont pu écrire (Teichmann, 1994). Par rapport au cas dit de référence, la seule modification apportée concerne la condition à la limite en interface de type Cosserat, où la rotation en interface est imposée nulle ($f_2 = 0,0$). Toutes les autres paramètres ont été gardés inchangés.

11.2.2.2.1 Déplacements et rotation

La figure A.11-38 présente les profils des déplacements et rotation. Il convient de noter à l'interface la courbure du déplacement tangentiel qui est inversée par rapport à ce qui peut être observée. Il est tentant de vouloir modéliser une interface rugueuse constituée de grains collés par un "encastrement" du matériau. Cependant, si en début de chargement, les grains collés peuvent être considérés comme faisant partie du matériau, très vite, les grains non collés se dégagent des grains collés, et il convient d'utiliser un autre type de condition à la limite.

11.2.2.2.2 Contraintes et couples contraintes

L'état de contraintes et couples contraintes dans l'échantillon est caractérisé par un couple contrainte μ_{32}/R et une contrainte antisymétrique σ^a_{12} avec des valeurs en interface relativement importantes, d'environ 150 et -70 kPa, respectivement (figure A.11-39 et A.11-40). Ce sont des valeurs importantes qui s'expliquent par la condition à la limite de Cosserat très forte qui a été prise ($f_2 = 0,0$). Dans le plan de Mohr, le cercle correspondant à l'interface I est très nettement translaté vers le haut par rapport au cercle de Mohr correspondant à H (figure A.11-41). En termes de cisaillements, symétrique, antisymétrique, de courbure et généralisé, il faut noter l'importance des termes antisymétrique et de courbure en interface. Le cisaillement généralisé dans le sol n'est pas maximum à l'interface, mais à une distance de l'ordre de 1 R. Les cisaillements généralisé et symétrique coïncident à partir d'une distance à l'interface d'environ 5 R, alors que les cisaillements antisymétrique et de courbure n'atteignent une valeur quasiment nulle qu'aux environs de 15 R (figure A.11-42).

Dans le plan de Mohr, le chemin de contrainte suivi par le point de coordonnées (p(I), τ_g (I)) suit la droite intrinsèque. Le point de coordonnées (p(I), τ_{sym} (I)) s'en écarte pas contre de manière significative. Ce point se déplace sur une droite, à peu près parallèle à la droite intrinsèque et décalée comme s'il existait une cohésion négative (figure A.11-43). L'analyse dans le cadre classique d'un tel essai conduirait à imaginer un radoucissement de type décohésion, ce qui rappelle le critère de Mohr-Coulomb généralisé aux milieux de Cosserat par Bogdaneva-Bontcheva et Lippmann (1973) (cf. paragraphe 8, partie A).

11.2.2.2.3 Déformations

L'évolution des déformations de cisaillement plastiques, symétriques, antisymétriques, de courbure et généralisées, en interface I, est représentée sur la figure A.11-44. C'est le terme de courbure qui est prépondérant, tandis que les termes symétrique et antisymétrique sont du même ordre. En bloquant la rotation à zéro en interface, la courbure est maximale à l'interface.

11.2.2.2.4 Energies

L'évolution des énergies plastiques, symétrique, antisymétrique, de courbure et totale, en interface I, est intéressante à plusieurs titres (figure A.11-45). Il convient de noter que l'énergie plastique symétrique est négative durant tout le cisaillement, ce qui est formellement interdit dans un milieu classique, mais peut se produire dans un milieu de Cosserat, puisque le deuxième principe de thermodynamique impose seulement que l'énergie plastique totale soit positive. Dans le cas présent, l'énergie de courbure, qui est très importante et positive, compense largement l'énergie symétrique négative. Les termes du deuxième ordre régularisent le problème, qui serait mal posé dans le cadre d'un milieu continu classique.

Cet effet de régularisation des termes du deuxième ordre sur l'énergie plastique a été également trouvé dans le cadre de la théorie du second gradient. Au sein d'une zone localisée en écrouissage négatif, l'énergie plastique des termes du premier ordre est négative, mais la prise en compte des termes énergétiques dus au second gradient des déformations plastiques permet globalement de satisfaire le 2ème principe de thermodynamique (Vardoulakis, 1995). Le même phénomène peut s'observer sur les profils des énergies plastiques au sein de l'échantillon (figure A.11-47). L'énergie symétrique ne redevient positive que pour une distance d'environ 0,5 R de l'interface. L'énergie de courbure est très importante et même supérieure à l'énergie totale en interface. L'énergie antisymétrique reste relativement faible comparativement. Dans le cas présent, ce sont donc les couples contraintes et les courbures qui jouent un rôle important par rapport aux contraintes et déformations antisymétriques.

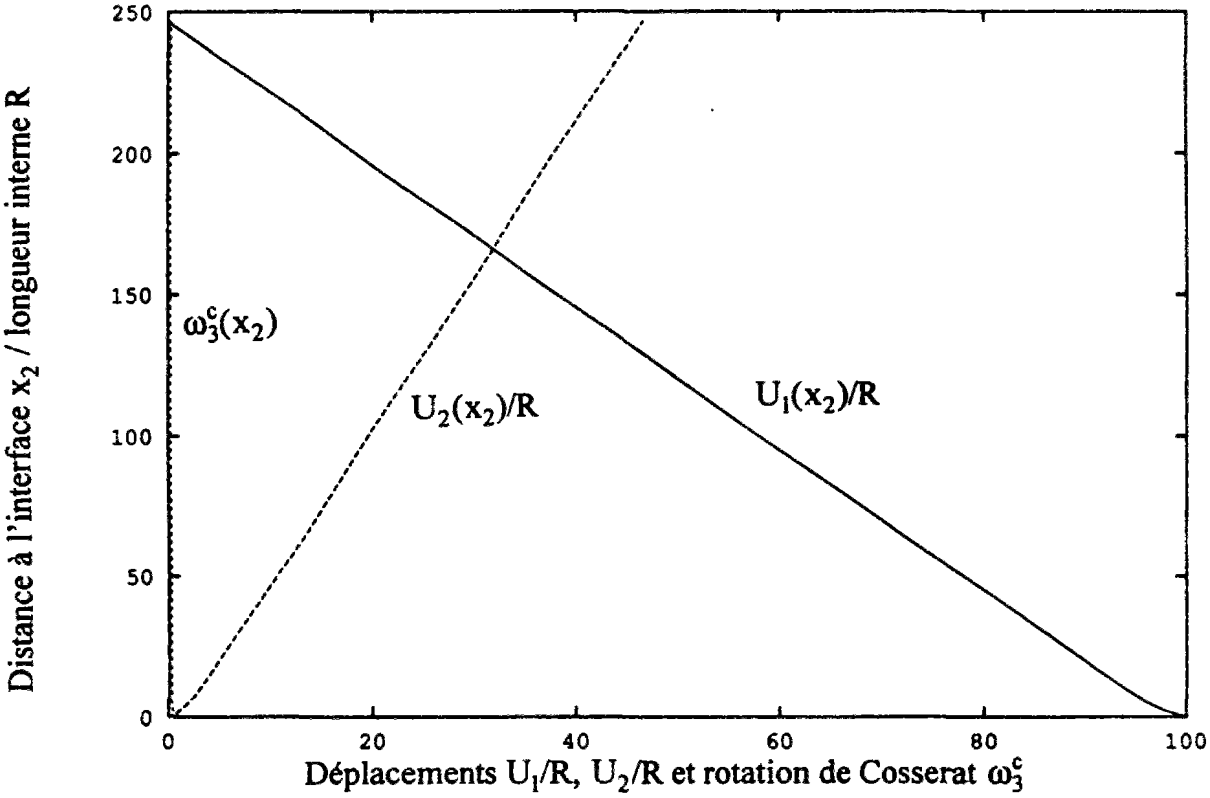


Figure A.11-35 : Profils des déplacements et rotation sur toute l'épaisseur de l'échantillon, dans le cas du cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastoplastique sans écrouissage en déformations finies (exemple de référence $f_2 = 0{,}01$)

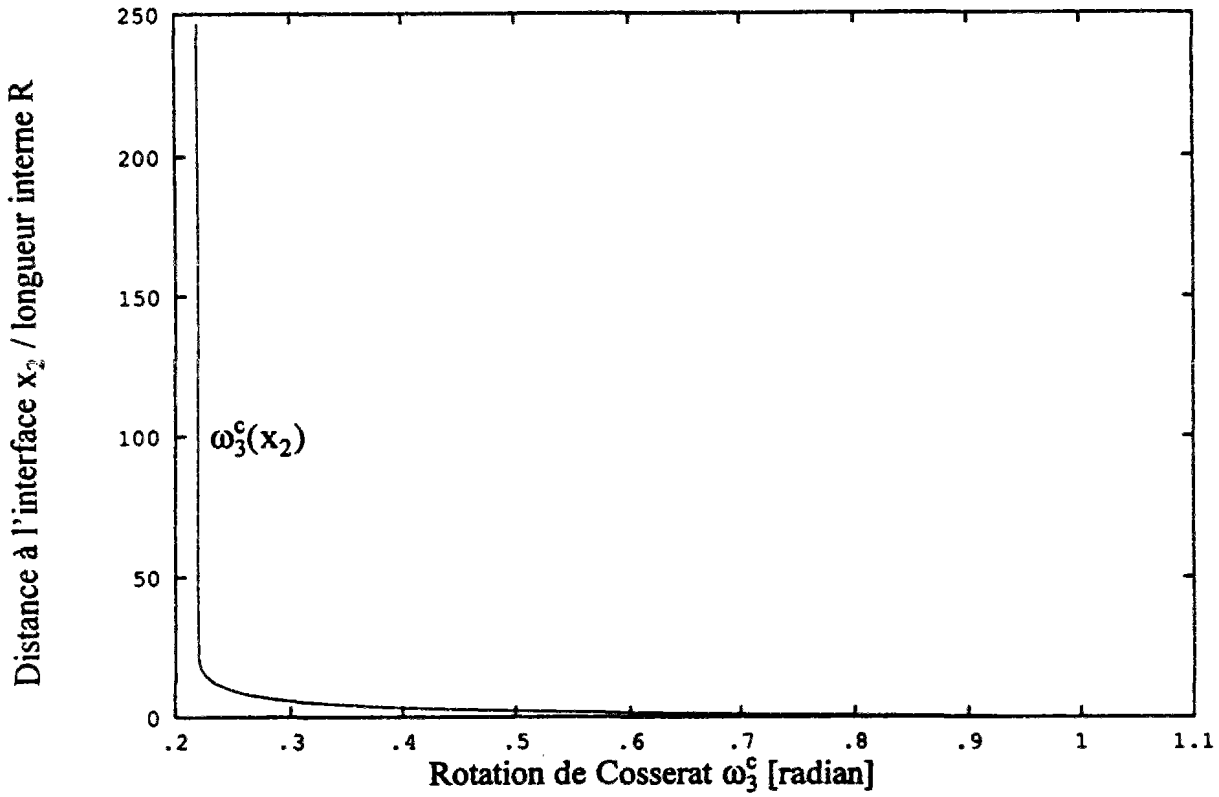


Figure A.11-36 : Profils de la rotation, dans le cas du cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastoplastique sans écrouissage en déformations finies (exemple de référence $f_2 = 0{,}01$)

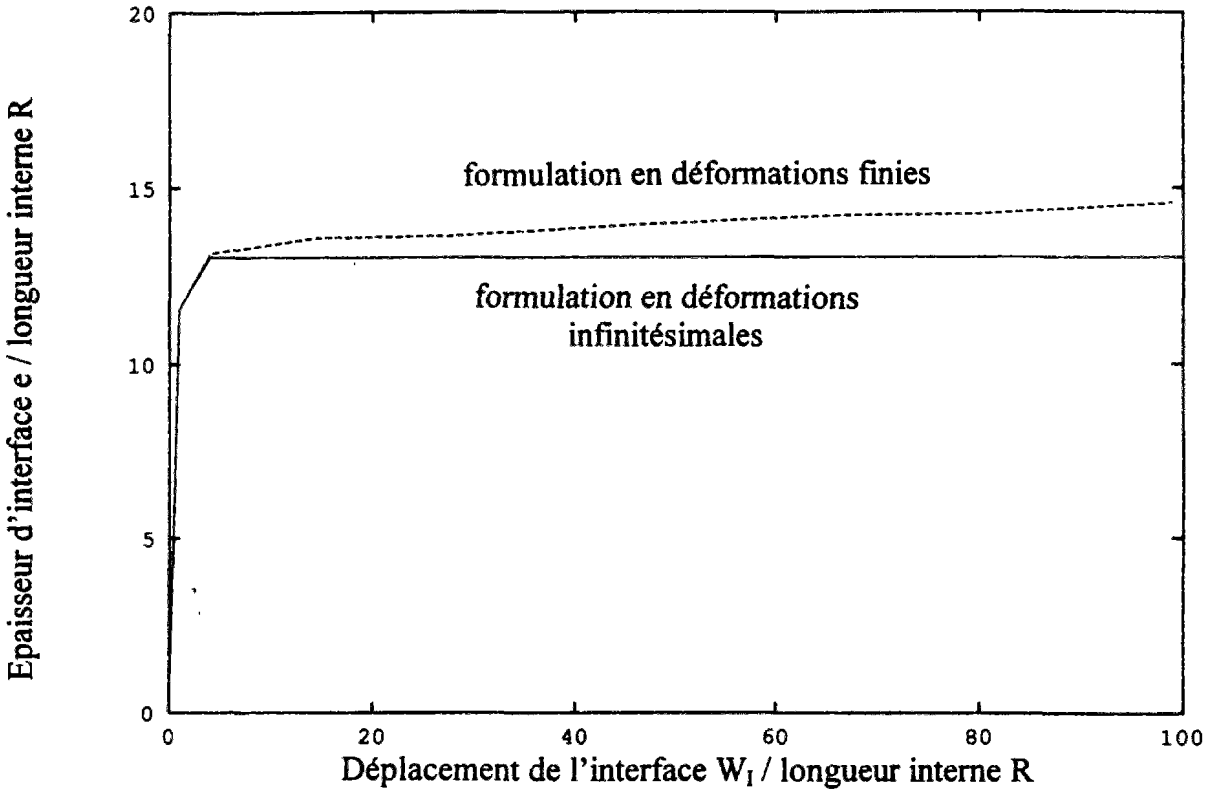


Figure A.11-37 : Evolution de l'épaisseur d'interface, dans le cas du cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastoplastique sans écrouissage en déformations finies (exemple de référence $f_2 = 0{,}01$)

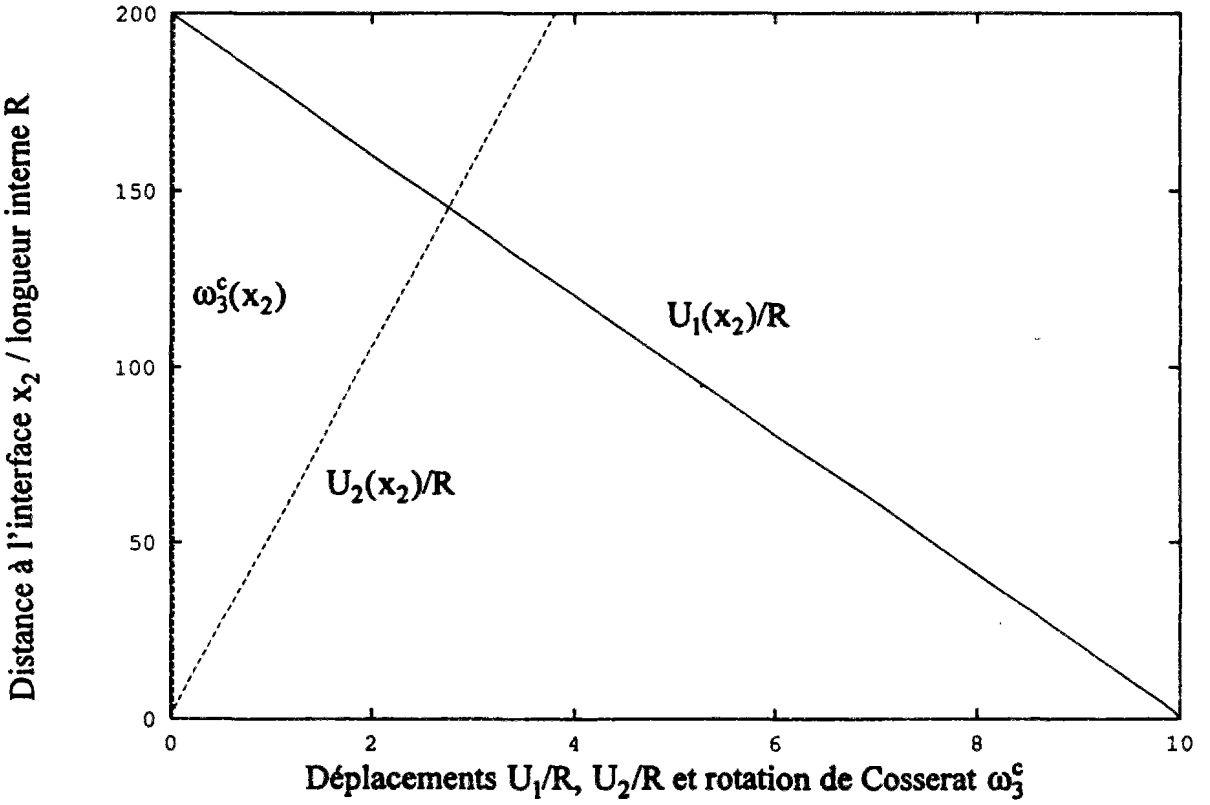


Figure A.11-38 : Profils des déplacements et de la rotation, dans le cas du cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastoplastique sans écrouissage encastré à ses extrémités

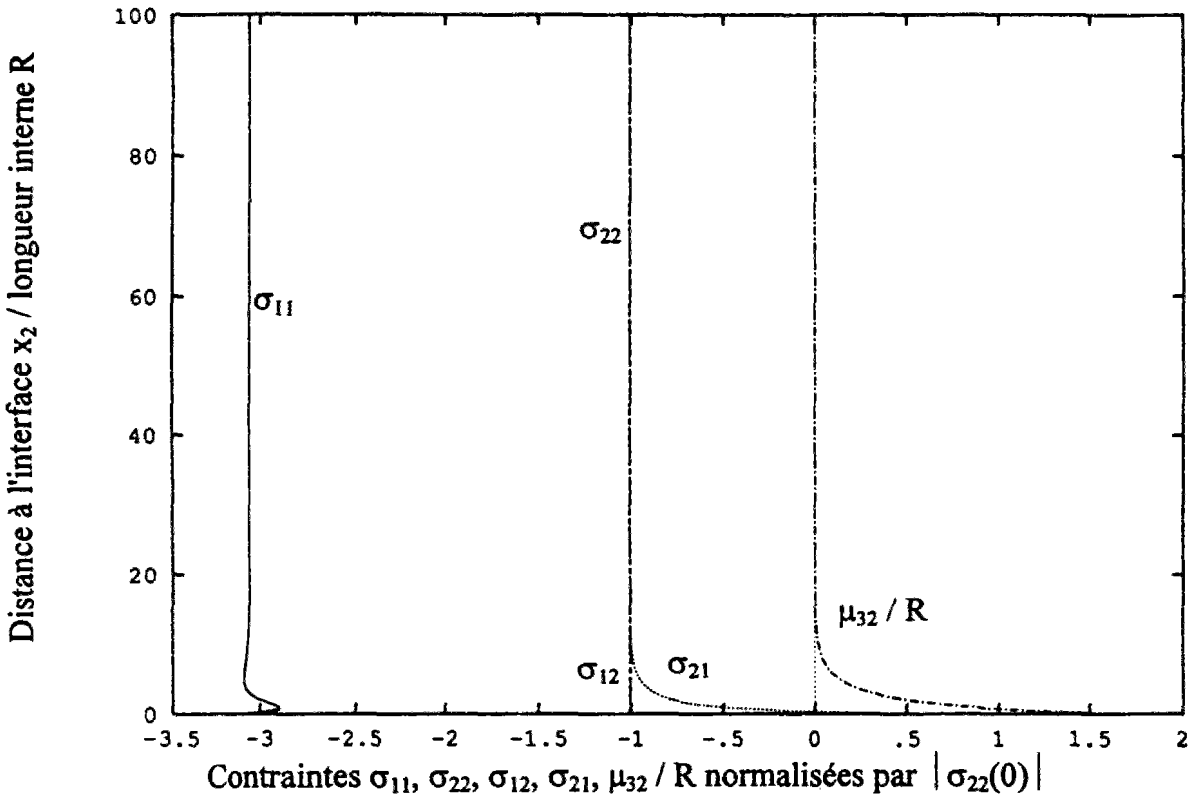


Figure A.11-39 : Profils des contraintes et couple contrainte,
pour le cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastoplastique sans écrouissage
encastré à ses deux extrémités

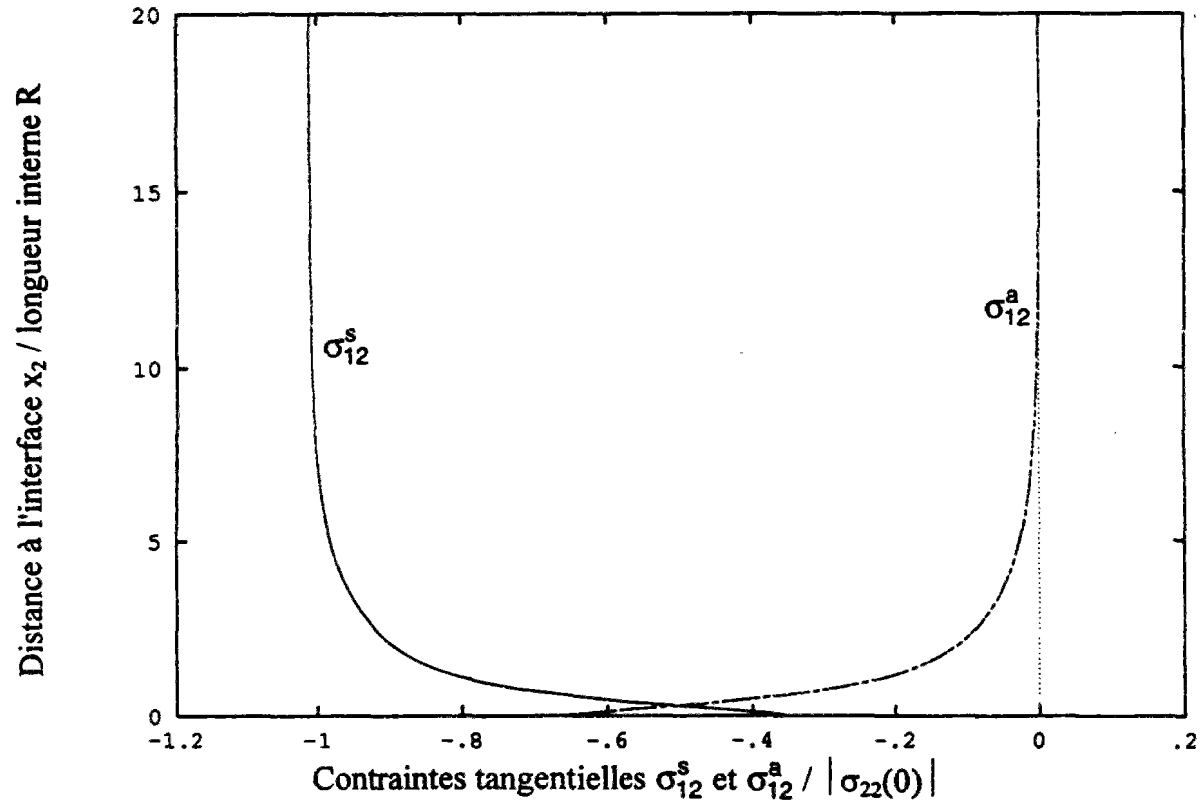


Figure A.11-40 : Profils des contraintes tangentielles, symétrique et antisymétrique,
pour le cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastoplastique sans écrouissage
encastré à ses deux extrémités

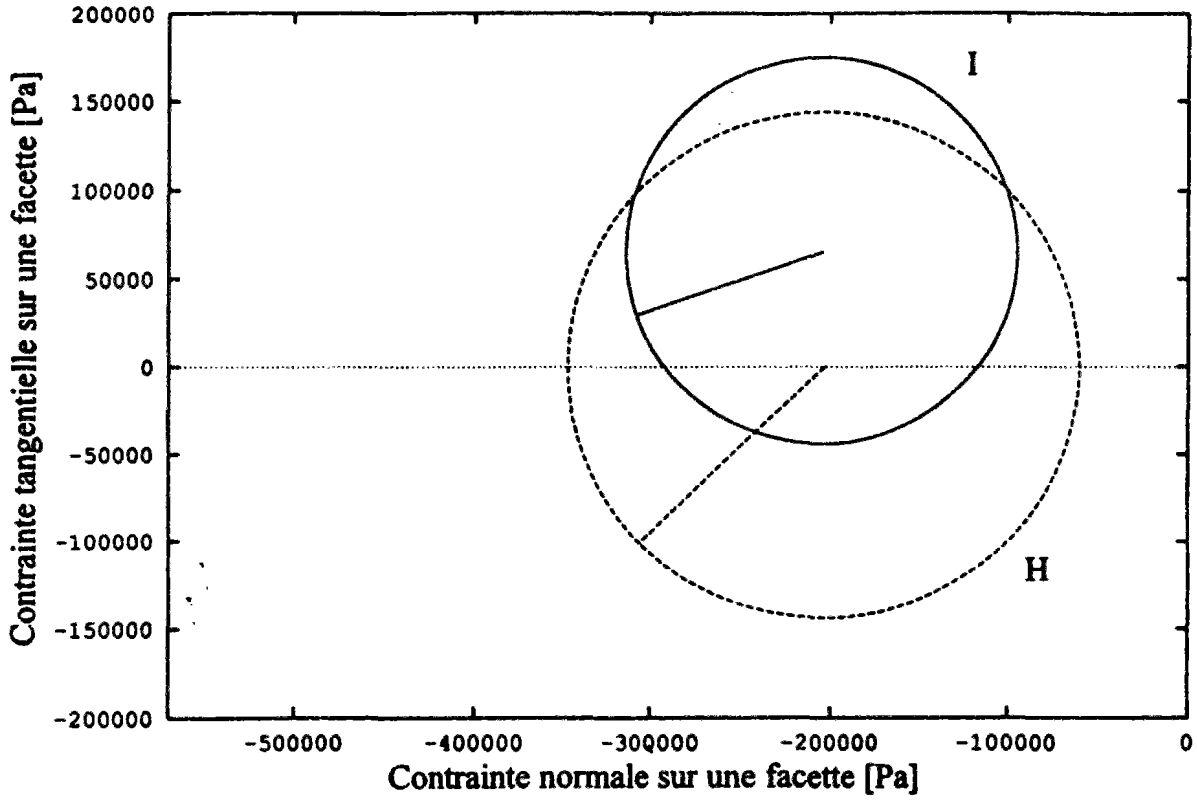


Figure A.11-41 : Cercles de Mohr en interface et en haut de l'échantillon, dans le cas du cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastoplastique sans écrouissage encastré à ses deux extrémités

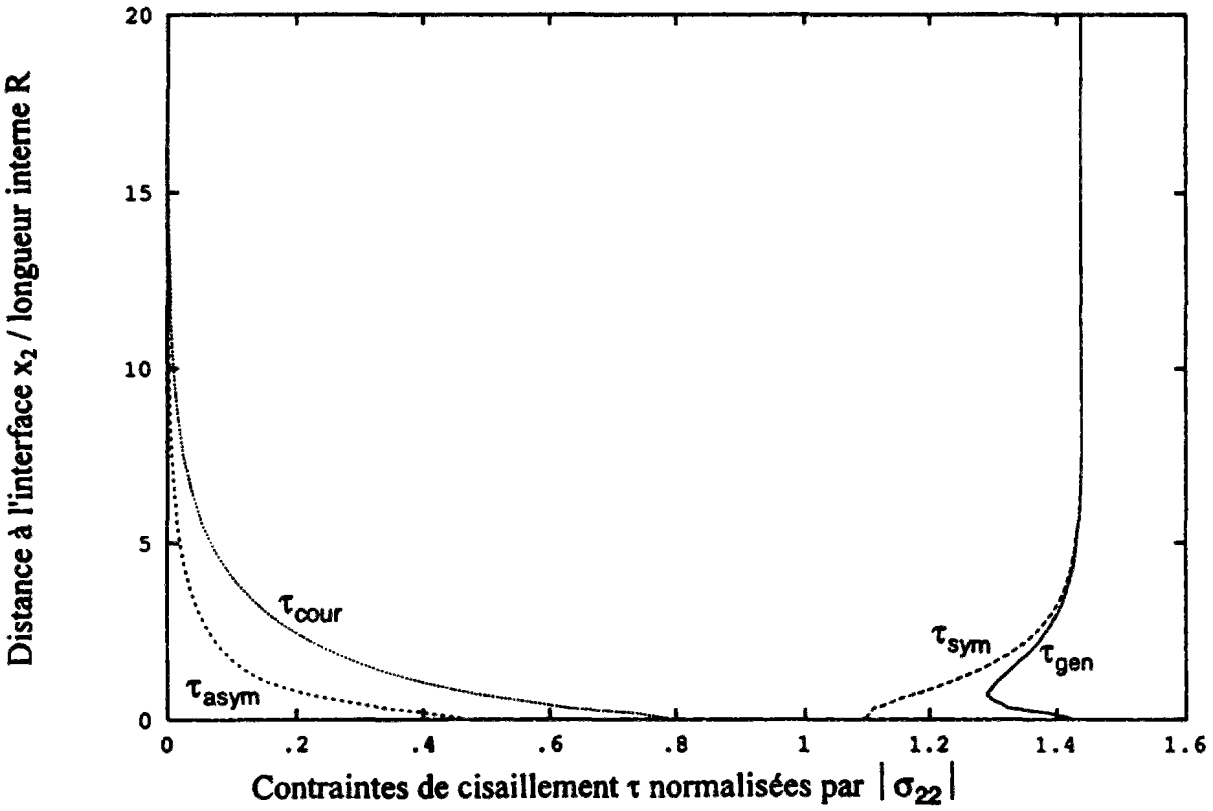


Figure A.11-42 : Profils des contraintes de cisaillement, symétrique, antisymétrique, de courbure et généralisée, dans le cas du cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastoplastique sans écrouissage encastré à ses deux extrémités

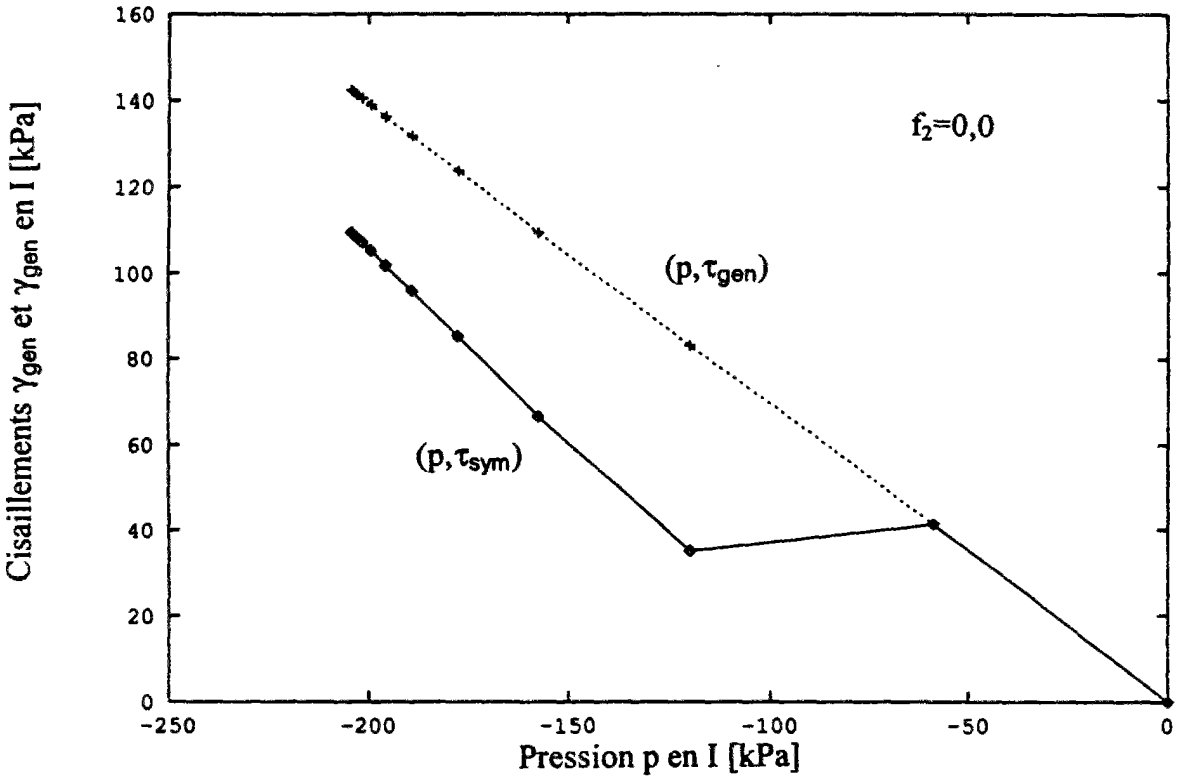


Figure A.11-43 : Chemins de contraintes dans le plan de Mohr,
pour le cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastoplastique sans écrouissage
encastré à ses deux extrémités

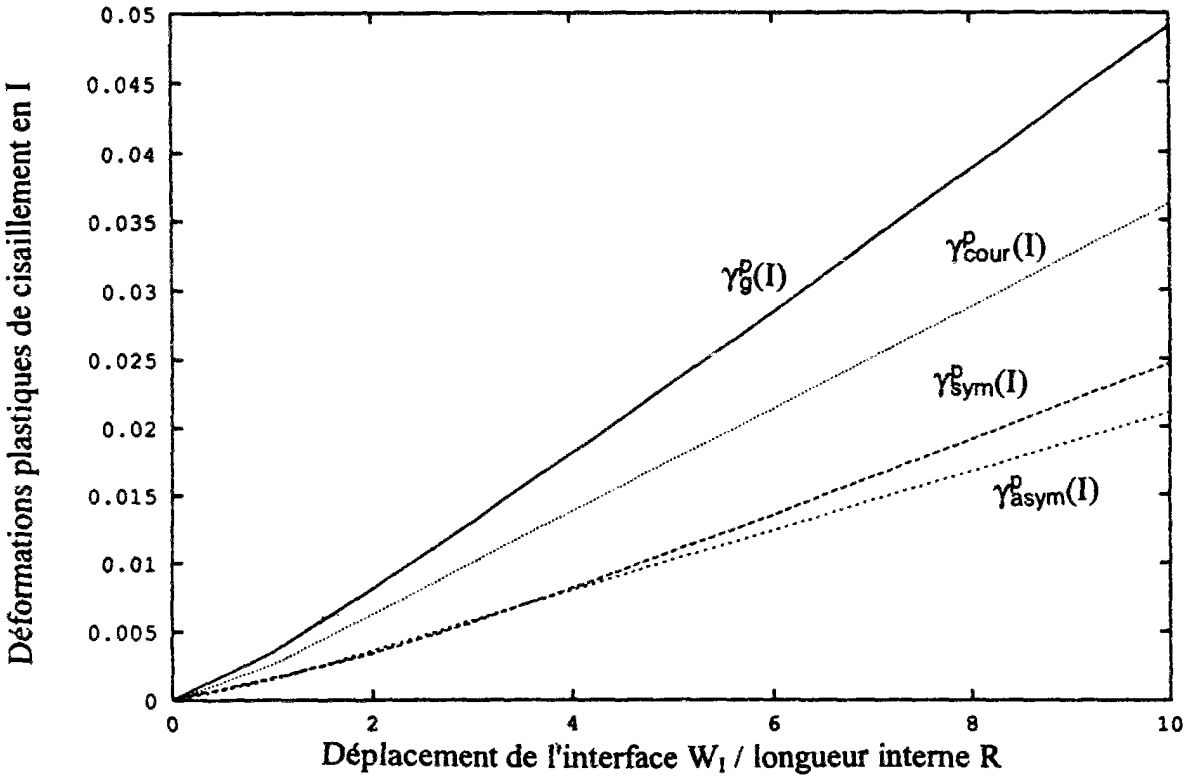


Figure A.11-44 : Evolution en interface des déformations plastiques de cisaillement,
symétrique, antisymétrique, de courbure et généralisée,
pour le cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastoplastique sans écrouissage
encastré à ses deux extrémités

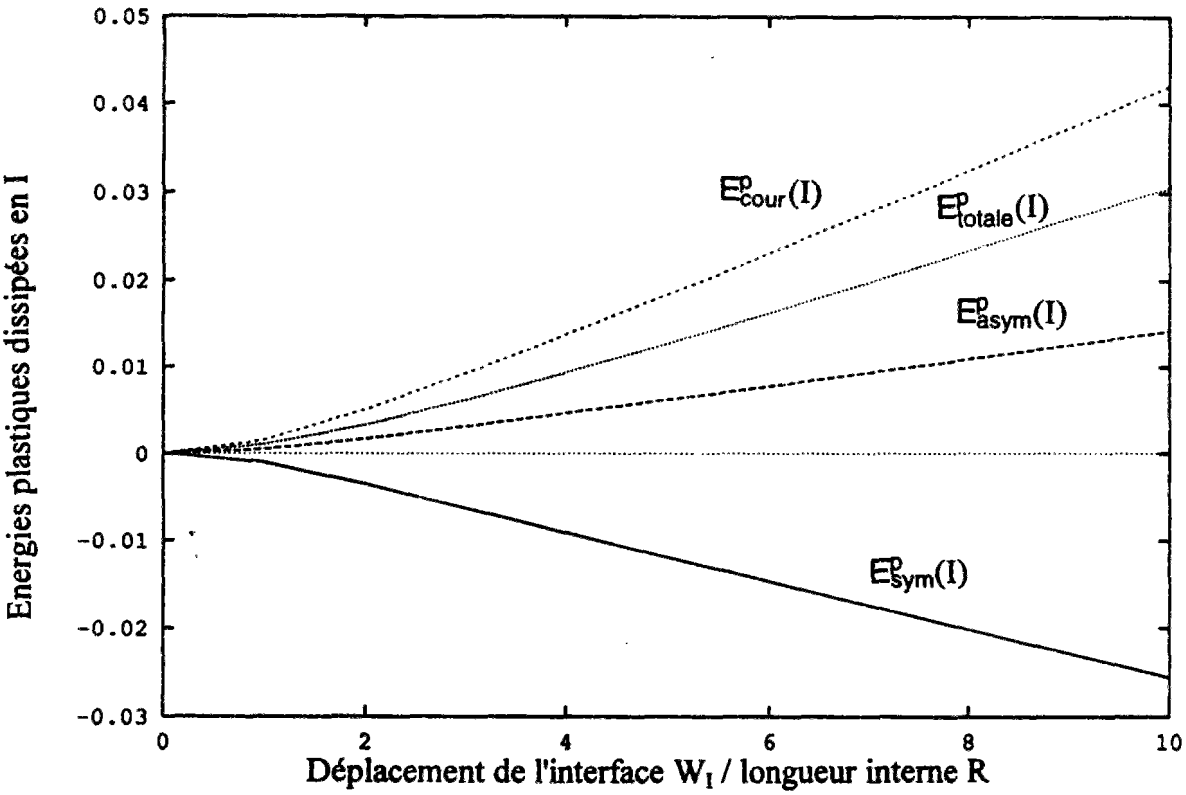


Figure A.11-45 : Evolution en interface des énergies plastiques symétrique, antisymétrique, de courbure et généralisée, dans le cas du cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastoplastique sans écrouissage encastré à ses deux extrémités

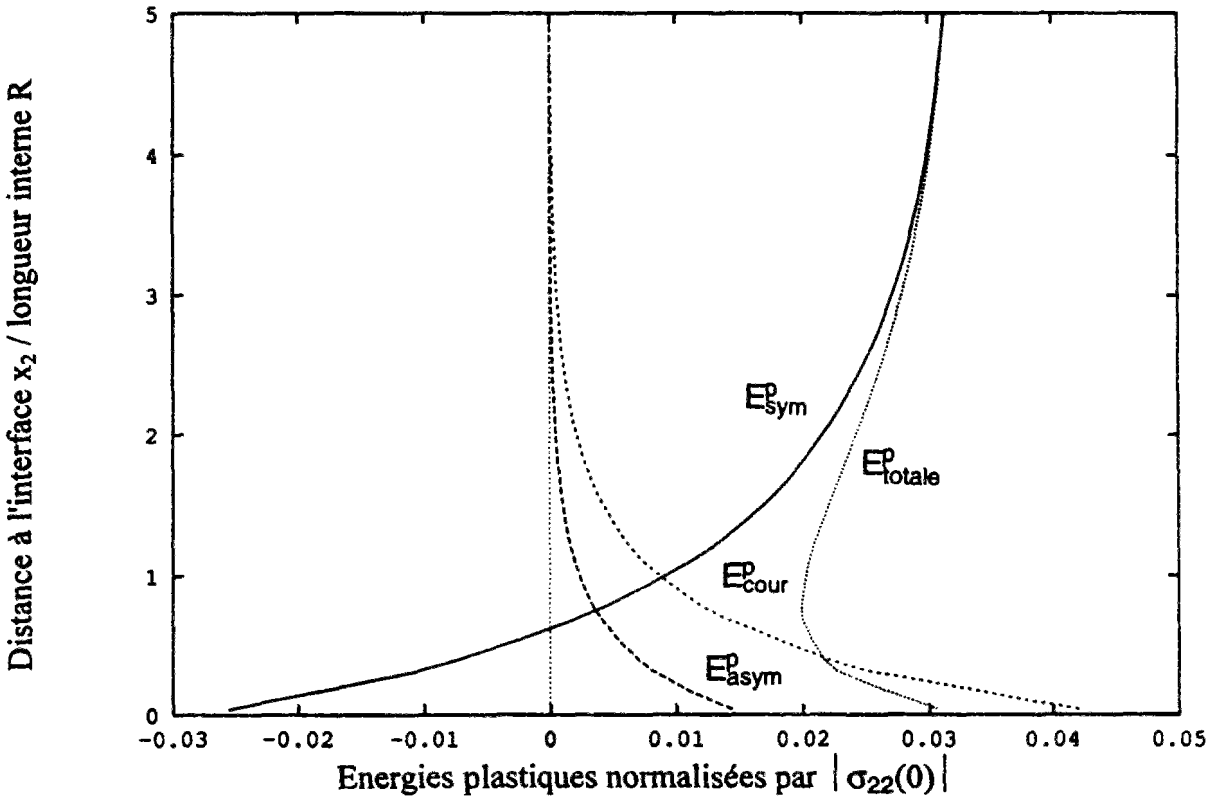


Figure A.11-46 : Profils des énergies plastiques symétrique, antisymétrique, de courbure et généralisée, dans le cas du cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastoplastique sans écrouissage encastré à ses deux extrémités

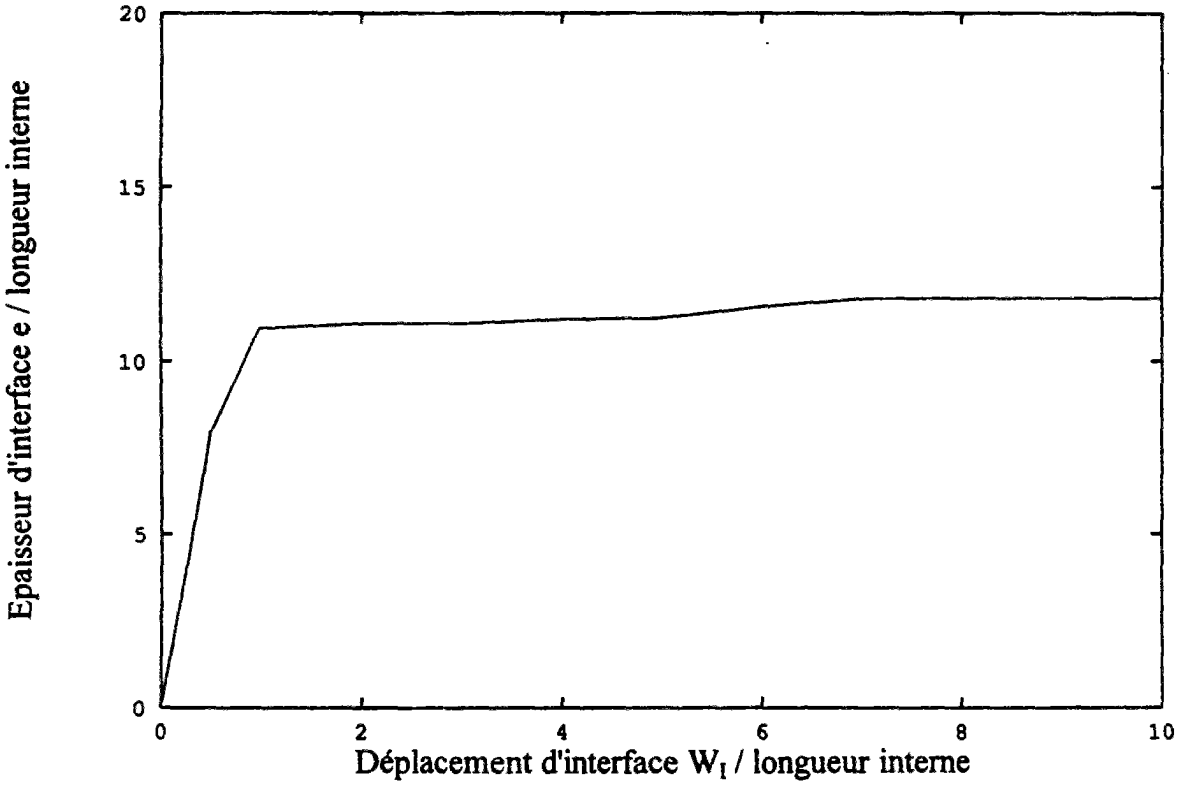


Figure A.11-47 : Evolution de l'épaisseur de la couche d'interface élastique, dans le cas du cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastoplastique sans écrouissage encastré à ses deux extrémités

11.2.2.3 Etude paramétrique dans le cas d'un matériau sans écrouissage

11.2.2.3.1 Influence du paramètre f_2

Sur les six conditions aux limites qui sont définies dans le cisaillement simple plan, cinq sont de type classiques, une est de type Cosserat. Il suffit de changer cette dernière en condition de type classique, pour que le milieu de Cosserat se comporte comme un milieu classique et que l'on retombe sur le cisaillement simple plan classique.

Cette condition à la limite de Cosserat est donnée dans le cas présent par le coefficient f_2 qui définit la fraction de déplacement de l'interface W_I qui est transféré au sol sous la forme de rotation de Cosserat :

$$R\,\omega_3^c = f_2\,W_I \qquad \text{(A.11-4)}$$

L'analyse micromécanique exposée dans le paragraphe 6 de la partie A a permis de définir une fourchette entre 0 et 1,0 pour ce coefficient. Les deux exemples traités ci-dessus correspondent respectivement aux valeurs 0,01 et 0,0.

La valeur, définie ci-dessous, correspond à une condition à la limite de type classique et induit un comportement classique dans le sol.:

$$f_2^{classique} = \frac{R}{2H} \Big/ 1 + \frac{R}{2H} \qquad \text{(A.11-5)}$$

Les simulations numériques nous ont donné deux comportements complètement différents, pour des valeurs de f_2 situées de part et d'autre de la valeur classique $f_2^{classique}$.

Pour des valeurs inférieures et positives, on observe la formation, près de l'interface, d'une couche élastique de quelques longueurs internes d'épaisseur, tandis que tout le reste de l'échantillon est plastique.

Pour des valeurs supérieures à la valeur classique $f_2^{classique}$ et inférieures à 1,0, on observe la formation, près de l'interface, d'une couche plastique de quelques longueurs internes d'épaisseur, tandis que tout le reste de l'échantillon est élastique. Il existe donc une discontinuité très importante quand le coefficient f_2 franchit la valeur classique $f_2^{classique}$ (figure A.11-48). Les observations expérimentales donnent des résultats continus, depuis la rugosité la plus faible jusqu'à la rugosité la plus forte.

Modéliser des interfaces très rugueuses avec un coefficient $f_2 = 0,0$ et des interfaces rugueuses avec un coefficient $f_2 = 0,001$, par exemple, n'est pas acceptable de ce point de vue là (tableau A.11-5). De plus, quand on regarde en détail les profils de déplacement tangentiel pour plusieurs valeurs de f_2 , on observe que pour des valeurs de f_2 inférieures à la valeur classique $f_2^{classique}$, la courbure près de l'interface est positive (convexité), tandis que pour des valeurs supérieures, la courbure est négative (concavité) (figure A.11-49). Pour la valeur classique, le profil est linéaire et il marque nettement la limite entre les deux types de comportement. Les observations expérimentales donnent des résultats plus proches du deuxième cas que du premier cas. Cela nous conduit à sélectionner des valeurs de f_2 supérieure à la valeur classique $f_2^{classique}$.

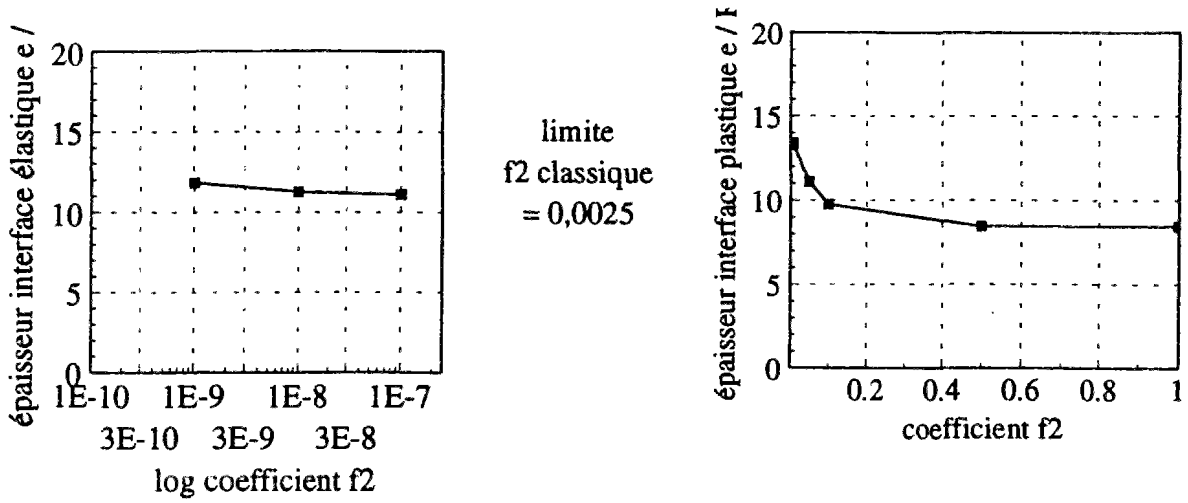


Figure A.11-48 : Influence du coefficient f_2 sur l'épaisseur de la couche d'interface, pour le cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastoplastique parfait

Tableau A.11-5 : Influence du coefficient f_2 sur la couche d'interface

Valeur de f_2	Epaisseur de la couche d'interface : e / R	Angle de frottement global : $\phi^* = \text{asin}(\sigma_{12}/\sigma_{22})$
0,0 (encastrement)	16,89 (élastique)	43,0
10^{-7}	11.82 (élastique)	45,0
10^{-6}	11,82 (élastique)	45,0
10^{-5}	11,82 (élastique)	45,0
10^{-4}	11,25 (élastique)	45,0
10^{-3}	11,09 (élastique)	45,0
$2,5\ 10^{-3}$ ($f_2^{\text{classique}}$)	0 ou H = 200 R	45,
$5,0\ 10^{-3}$	13,35 (plastique)	44,9
10^{-2}	13,35 (plastique)	44,7
$5,0\ 10^{-2}$	11,09 (plastique)	43,4
10^{-1}	9,77 (plastique)	42,7
$5,0\ 10^{-1}$	8,44 (plastique)	$\sigma_{12} < 0$
1,0	8,44 (plastique)	$\sigma_{12} < 0$

Pour des valeurs de f_2 proches de 1,0, on observe des déplacements tangentiels négatifs dans le sol près de l'interface. Pour la valeur 1,0, tous les déplacements sont négatifs alors que le déplacement de l'interface W_I est positif (figure A.11-50). De plus, la contrainte tangentielle σ_{12} est négative (tableau A.11-5). Il convient donc de rejeter les valeurs de f_2 supérieure à environ 0.5.

En ce qui concerne le profil du déplacement normal U_2 sur toute la hauteur de l'échantillon, il convient de noter que la dilatance locale à l'interface est d'autant plus grande que le coefficient f_2 est grand (figure A.11-51). Elle se traduit globalement par un soulèvement plus grand du haut de l'échantillon. Si pour des valeurs de f_2 supérieures à 0,1, il est possible de faire une différence par rapport au cas classique, par contre, pour des valeurs inférieures, la différence est très faible (figure A.11-52). Globalement, l'essai de cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat donne des résultats proches de l'essai de cisaillement simple du matériau classique correspondant. Cependant, localement près de l'interface, au sein de la couche d'interface, les différences de comportement sont très importantes.

Quelle que soit la valeur de f_2 , la rotation de Cosserat s'amortit très rapidement sur environ 5 R (figure A.11-53). Entre les différentes valeurs de f_2 , la différence se fait au niveau de l'amplitude de cette rotation. L'épaisseur de la couche d'interface, quant à elle, varie entre 8,44 et 13,35 R.

La couche d'interface, qu'elle soit élastique ou plastique, est complètement formée pour des déplacements de l'interface W_I de l'ordre de 10 R (figure A.11-54). L'épaisseur maximale est obtenue pour des valeurs de f_2 autour de 0.01. L'épaisseur minimale est obtenue pour f_2 égal à 1,0.

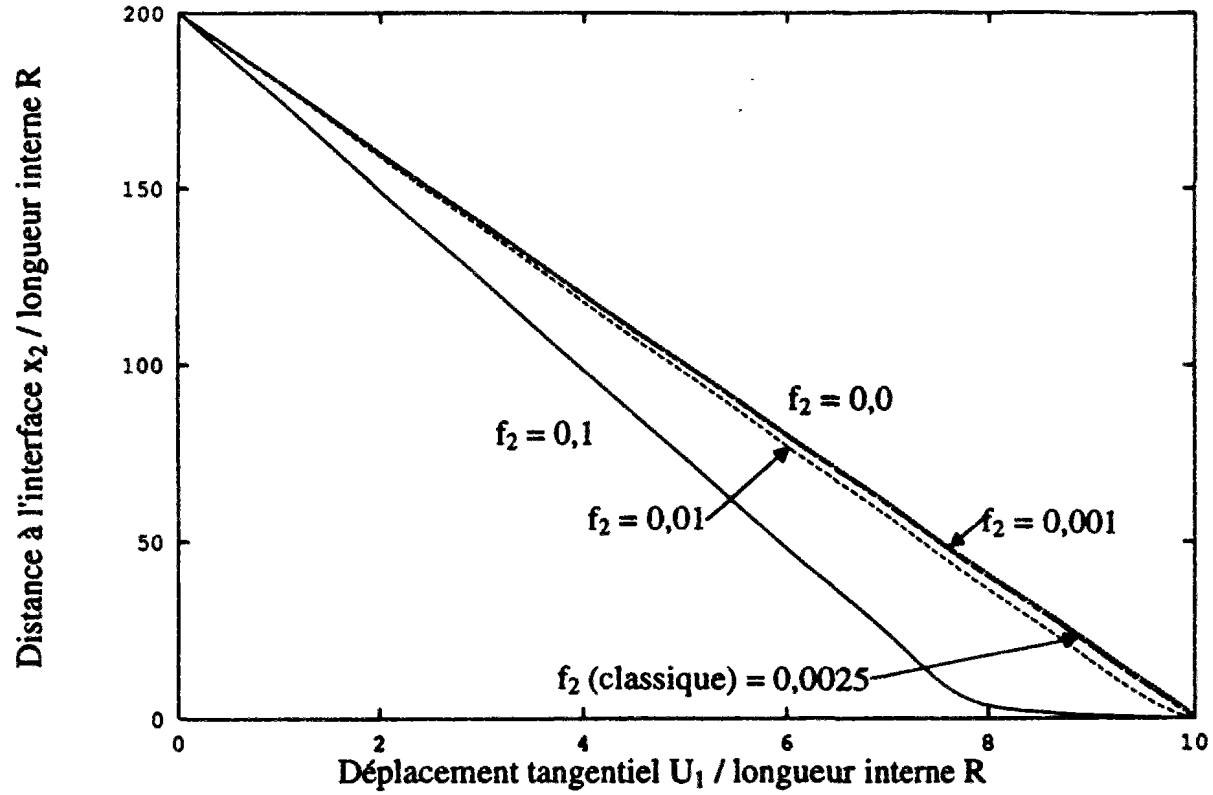


Figure A.11-49 : Profils du déplacement tangentiel pour différentes valeurs de f_2 et le cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastoplastique sans écrouissage

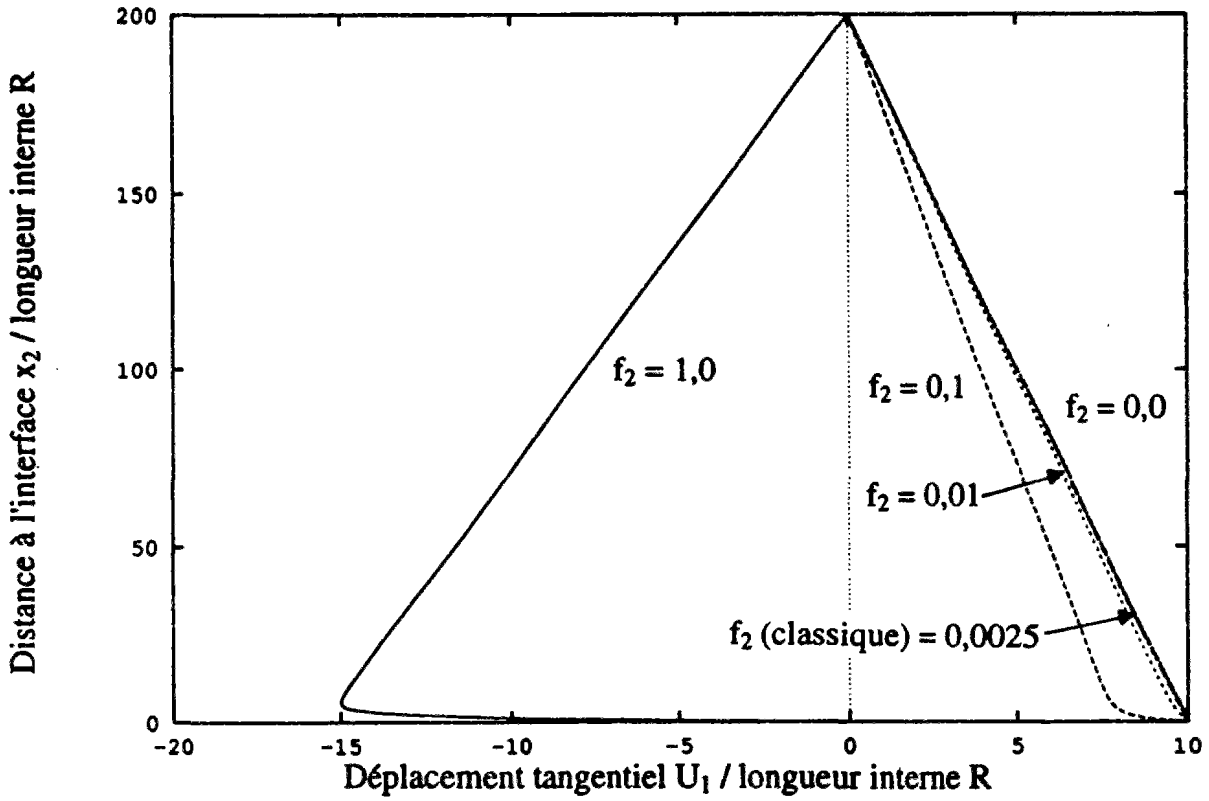


Figure A.11-50 : Profils du déplacement tangentiel pour différentes valeurs de f_2 et le cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastoplastique sans écrouissage

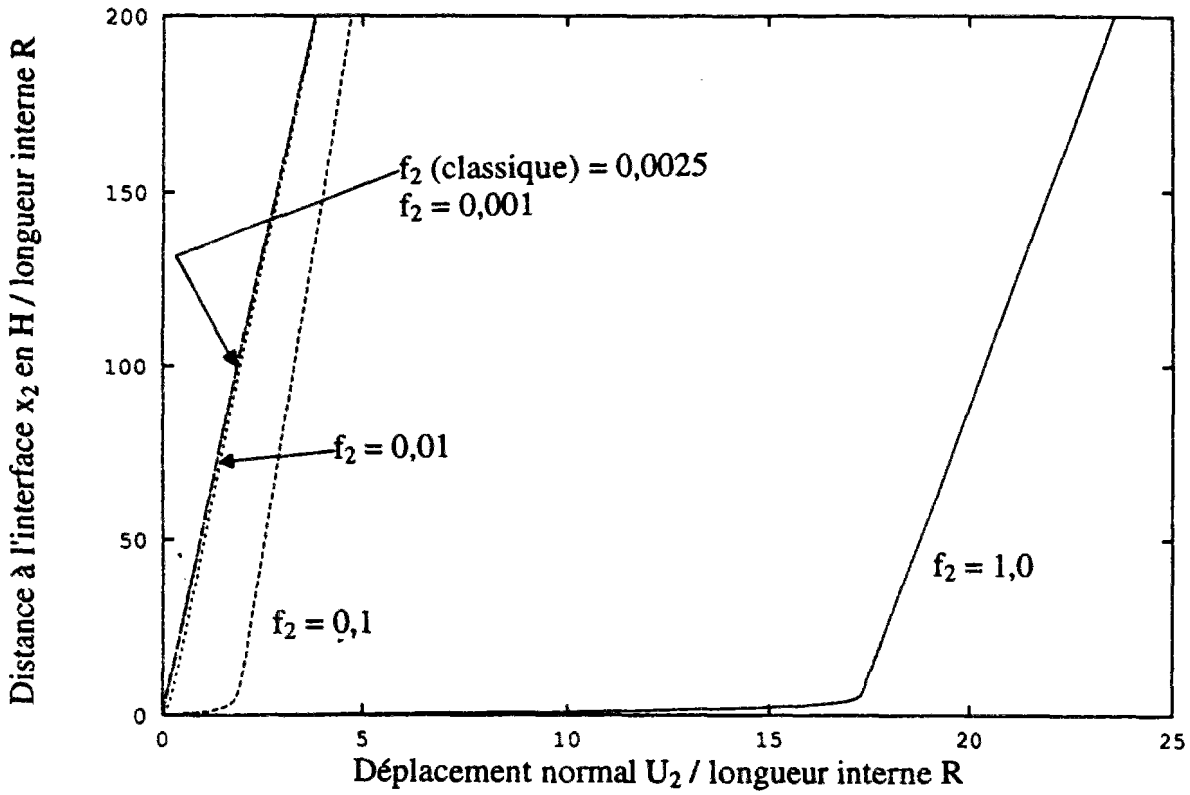


Figure A.11-51 : Profils du déplacement normal pour différentes valeurs de f_2 et le cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastoplastique sans écrouissage

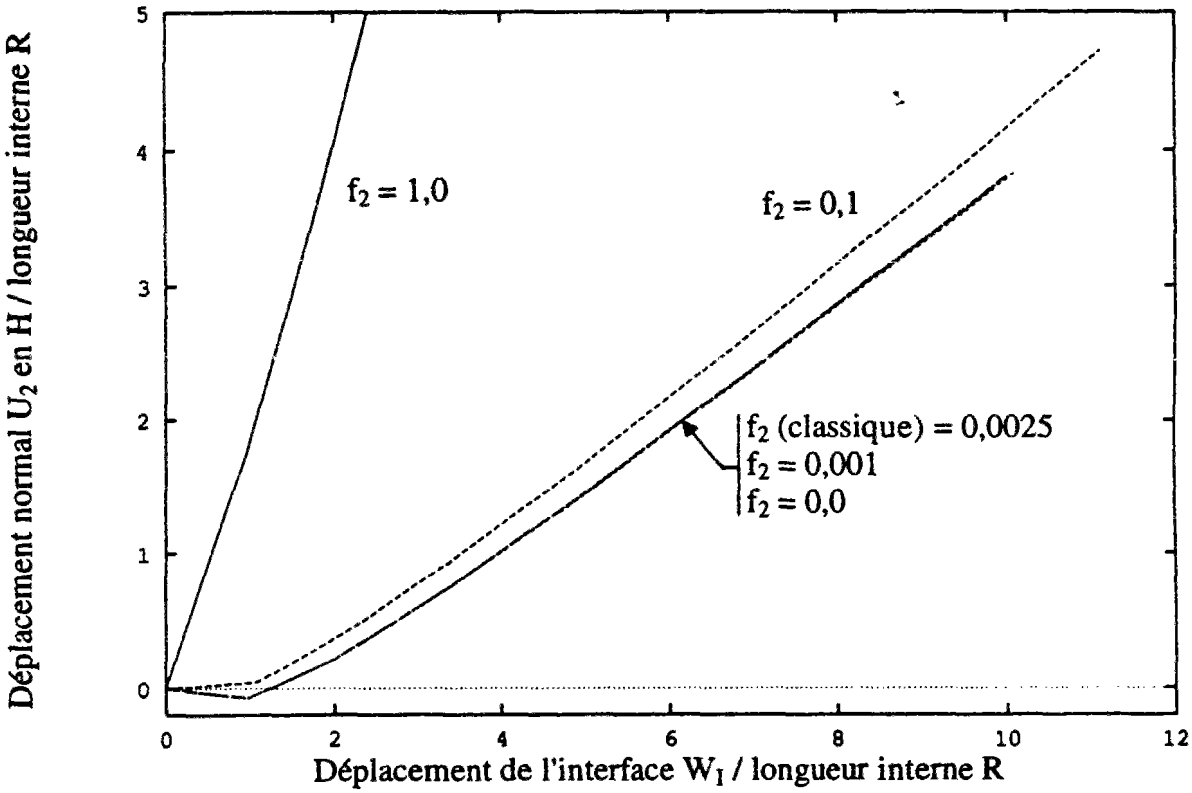


Figure A.11-52 : Evolution du déplacement U_2 en H pour différentes valeurs de f_2 et le cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastoplastique sans écrouissage

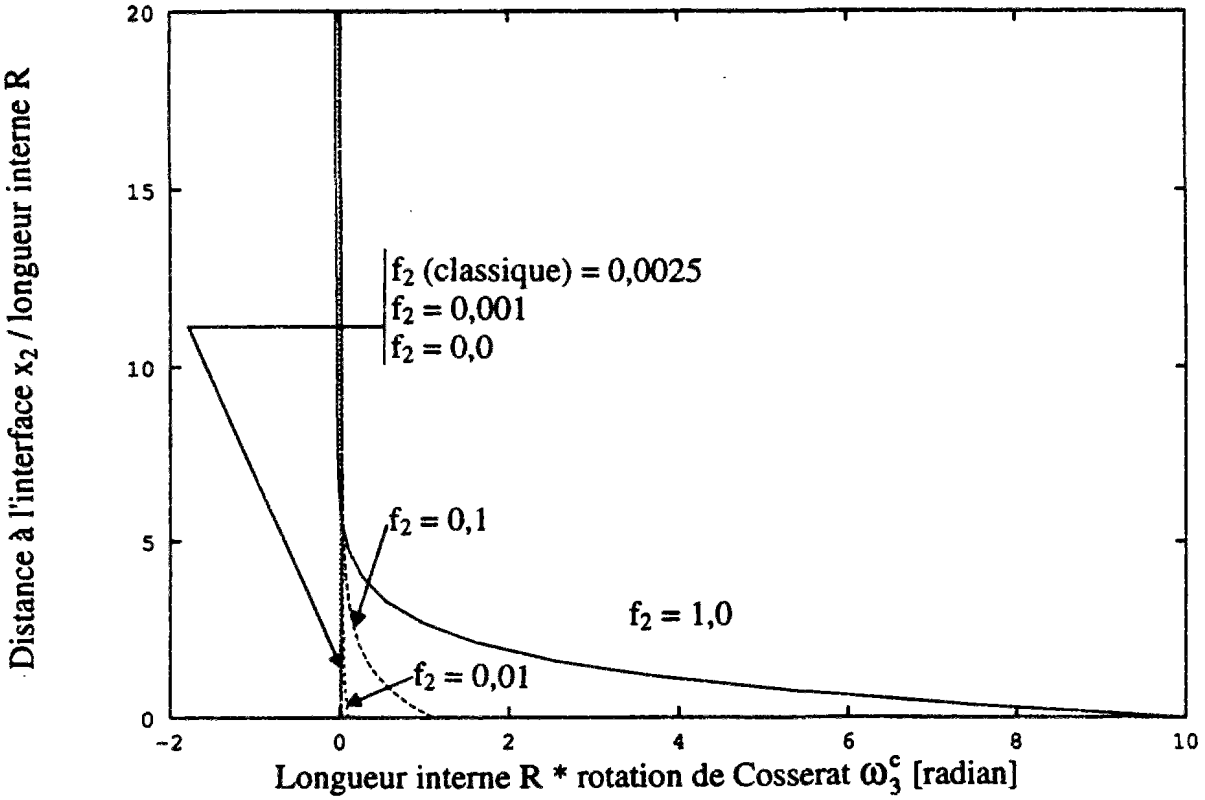


Figure A.11-53 : Profils de la rotation de Cosserat pour différentes valeurs de f_2 et le cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastoplastique sans écrouissage

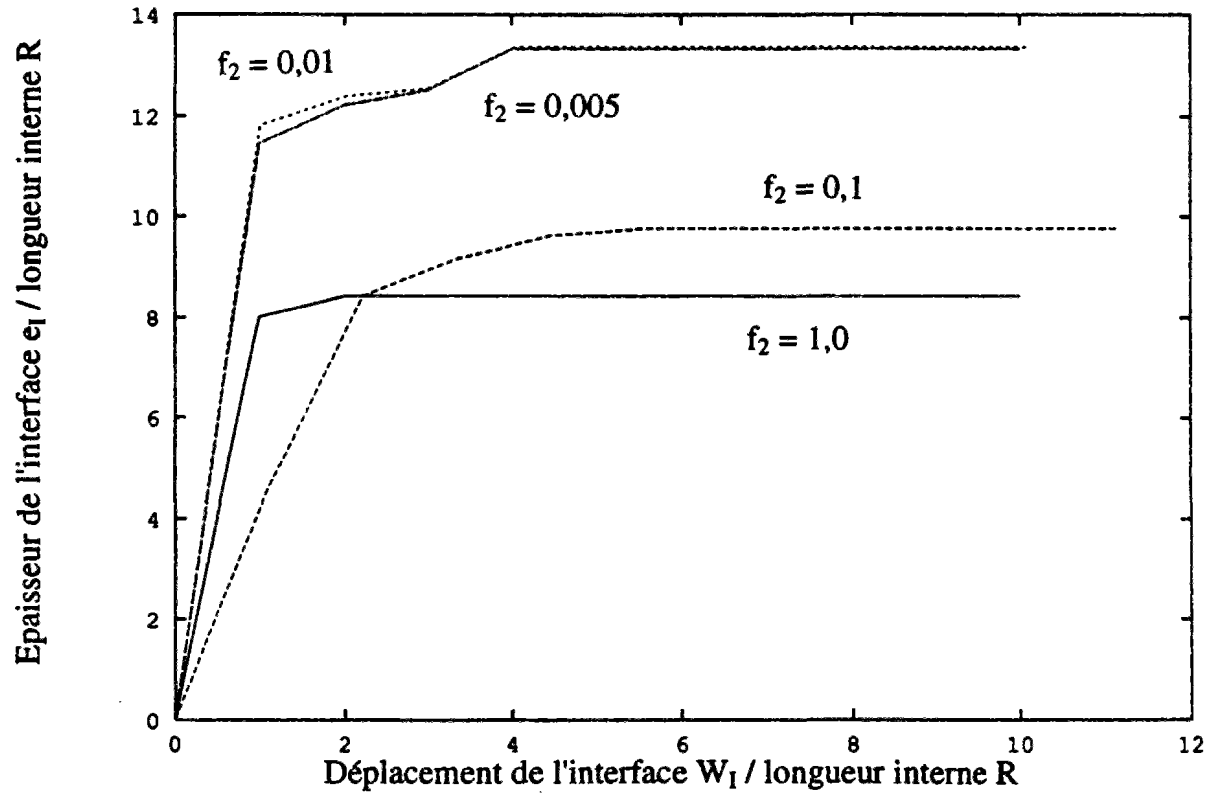


Figure A.11-54 : Epaisseur de la couche d'interface pour différentes valeurs de f_2 et le cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastoplastique sans écrouissage

11.2.2.3.2 Influence de la condition à la limite extérieure en contrainte ou déplacement normal

Que ce soit pour un milieu continu classique, ou un milieu continu de Cosserat, la condition à la limite extérieure, en contrainte ou en déplacement normal, joue un rôle déterminant sur la réponse du matériau testé. Les deux cas extrêmes sont l'essai à contrainte normale constante et l'essai à déplacement normal imposé nul. Si le premier cas est facile à réaliser, le second par contre est toujours difficile à réaliser car il faut pouvoir disposer d'un appareillage d'une rigidité suffisante, ce qui est très rare.

Dans ce paragraphe, nous avons choisi de prendre en interface une condition à la limite de Cosserat significative ($f_{2_c} = 0,1$) afin de mettre en évidence les effets de Cosserat par rapport au cas classique correspondant. Nous regarderons quatre essais : les essais classiques et de Cosserat, à contrainte normale constante et à déplacement normal imposé nul.

La figure A.11-55 présente pour les quatre essais les profils du déplacement tangentiel. Les deux cas classiques donnent un profil linéaire, tandis que les deux essais avec le milieu de Cosserat donnent, localement à l'interface, une zone avec de forts gradients de déplacement (figure A.11-55).

Si dans le cas du déplacement tangentiel, la différence entre les essais à contrainte normale constante ou à déplacement normal nul est très faible, pour ce qui concerne le déplacement normal, la différence est très sensible (figure A.11-56). Dans les deux cas classiques, la dilatance est uniformément répartie. Par contre, dans les deux cas Cosserat, toute la dilatance se concentre dans la couche d'interface.

Dans le cas de l'essai à déplacement normal nul, la zone tampon contracte pendant que la couche d'interface dilate, afin de maintenir le volume total constant. Il est intéressant de remarquer que les grandes différences de comportement au sein de l'échantillon, entre la couche d'interface et la zone tampon, ne sont pas perceptibles, si l'on s'intéresse uniquement à la mesure globale du déplacement normal U_2 en H (figure A.11-57. La différence entre les cas classique et de Cosserat, pour une condition en contrainte normale constante est très faible. Un interprétation globale de l'essai peut ainsi conduire à des interprétations erronées.

En terme de rotation propre, celle-ci est beaucoup plus importante dans les cas de Cosserat que dans les cas classiques, puisque dans ces derniers, elle est assujettie à suivre la rotation d'ensemble du milieu. Entre les deux cas de Cosserat, les profils de la rotation sont très semblables (figure A.11-58.

Les essais à déplacement normal imposé nul sont caractérisés par une augmentation de la contrainte normale de façon très significative, avec une effet plus important dans le cas Cosserat (figure A.11-59). Il en résulte parallèlement une très forte augmentation de la contrainte tangentielle (figure A.11-60). Si l'on raisonne en terme de frottement global, on observe sur la figure A.11-61 que l'introduction de la microstructure dans la loi de comportement et dans les conditions à la limite en interface a pour effet de réduire l'angle de frottement global par rapport à l'angle de frottement interne du matériau testé. Ceci explique pourquoi les interfaces ont systématiquement des angles de frottement plus faibles que le matériau testé.

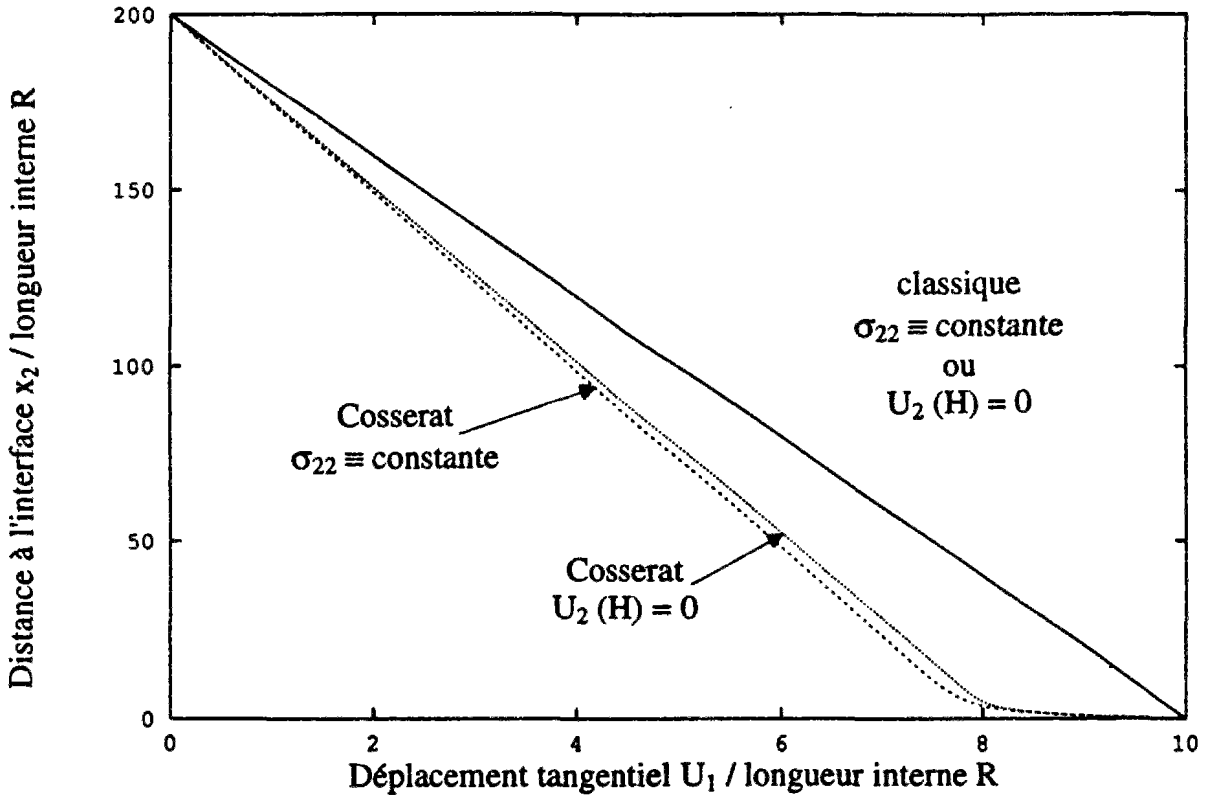


Figure A.11-55 : Déplacement tangentiel pour différentes conditions aux limites et pour le cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat et d'un milieu classique élastoplastiques sans écrouissage

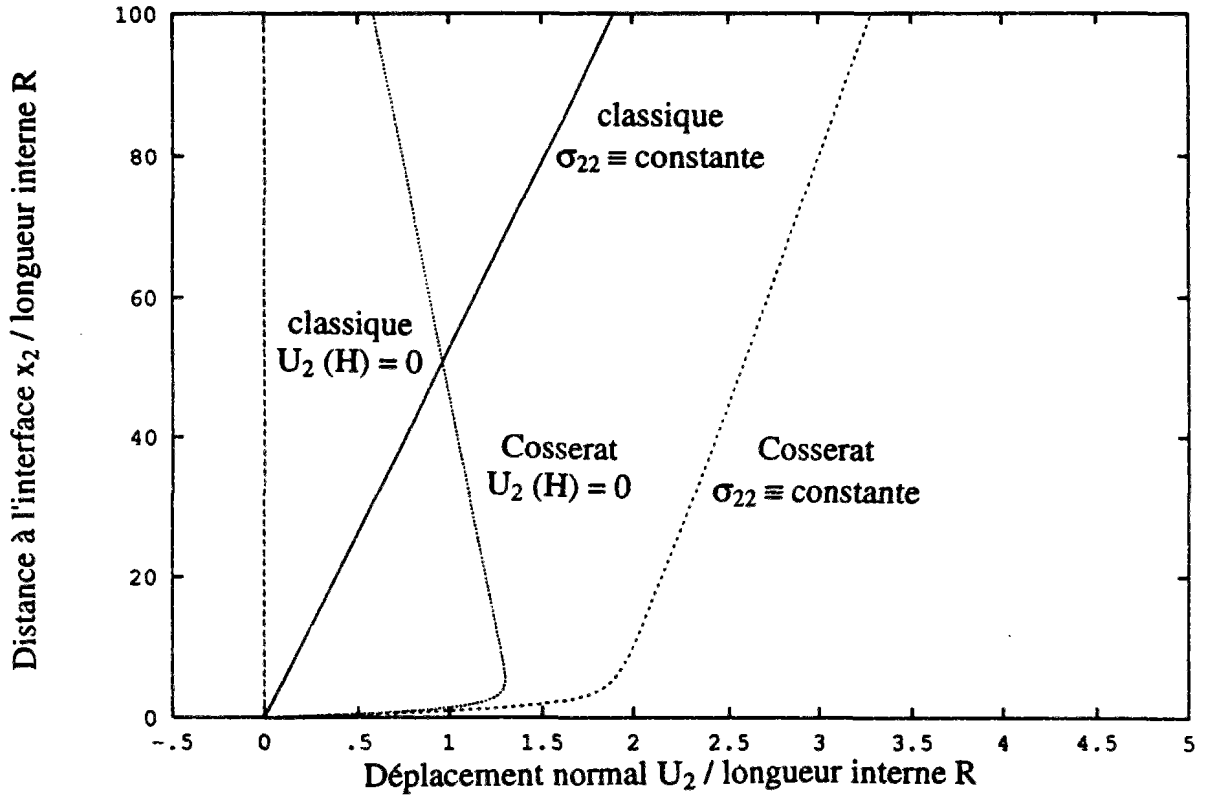


Figure A.11-56 : Déplacement normal pour différentes conditions aux limites et pour le cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat et d'un milieu classique élastoplastiques sans écrouissage

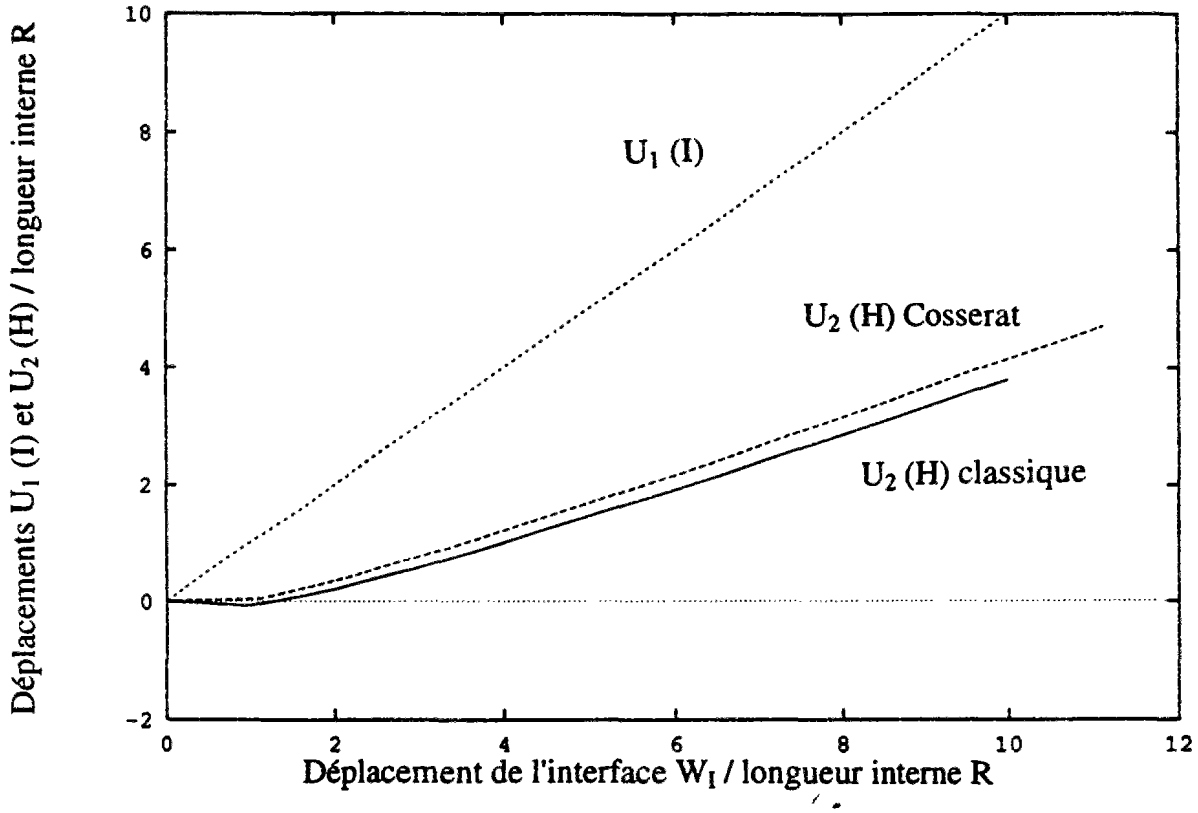


Figure A.11-57 : Evolution des déplacements en I et en H,
pour le cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat et d'un milieu classique
élastoplastiques sans écrouissage

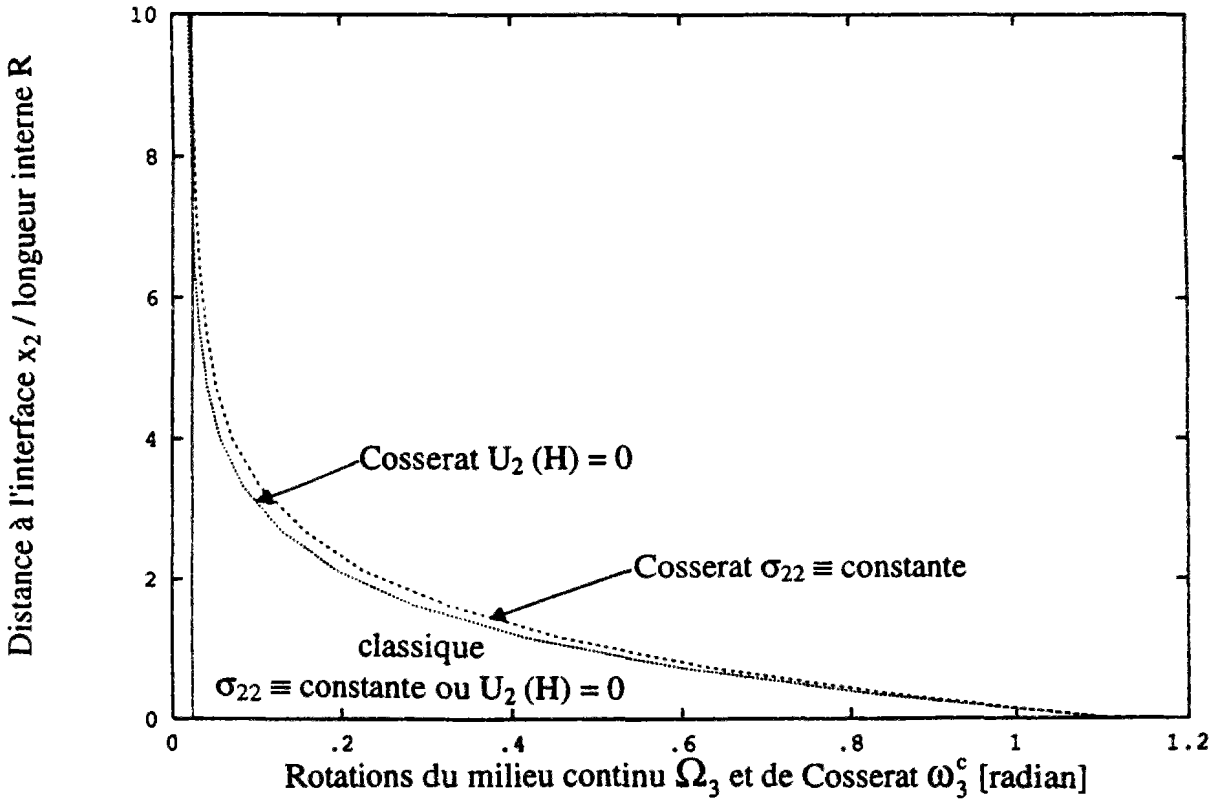


Figure A.11-58 : Rotation de Cosserat pour différentes conditions aux limites
et pour le cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat et d'un milieu classique
élastoplastiques sans écrouissage

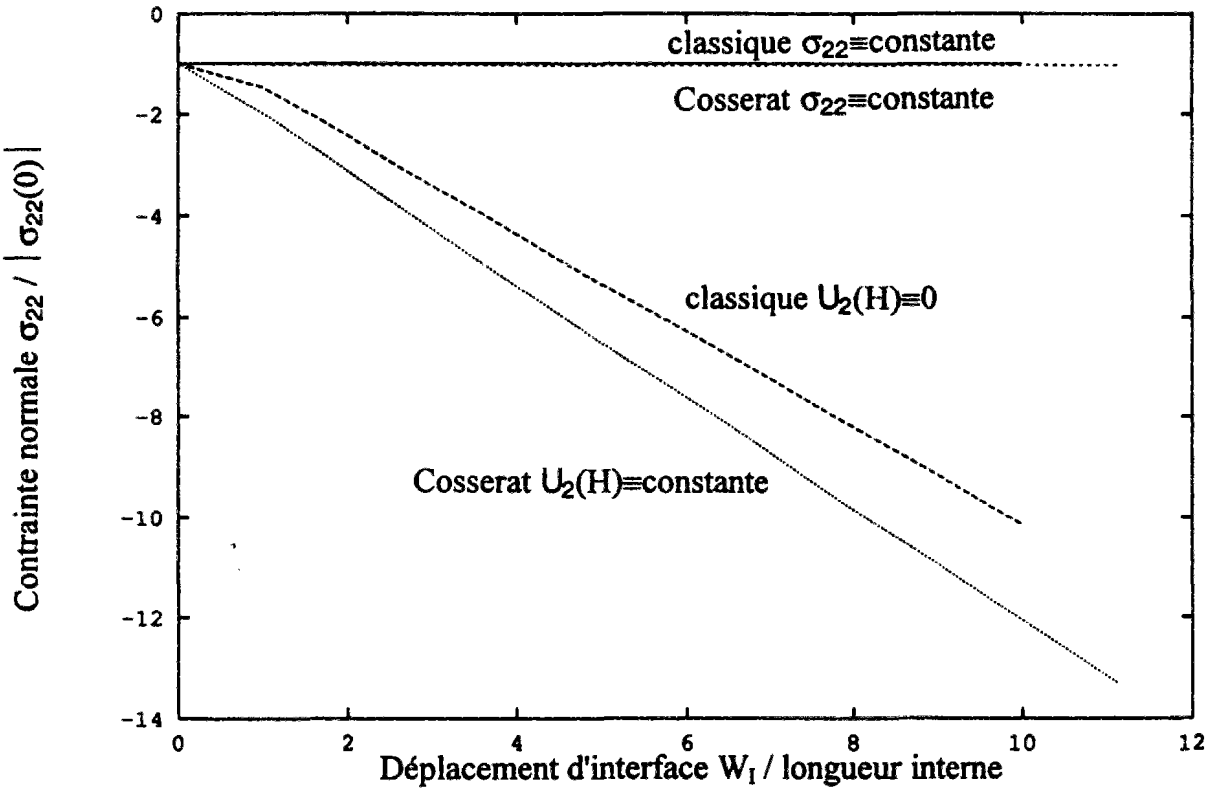


Figure A.11-59 : Evolution de la contrainte normale pour le cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat et d'un milieu classique élastoplastiques sans écrouissage

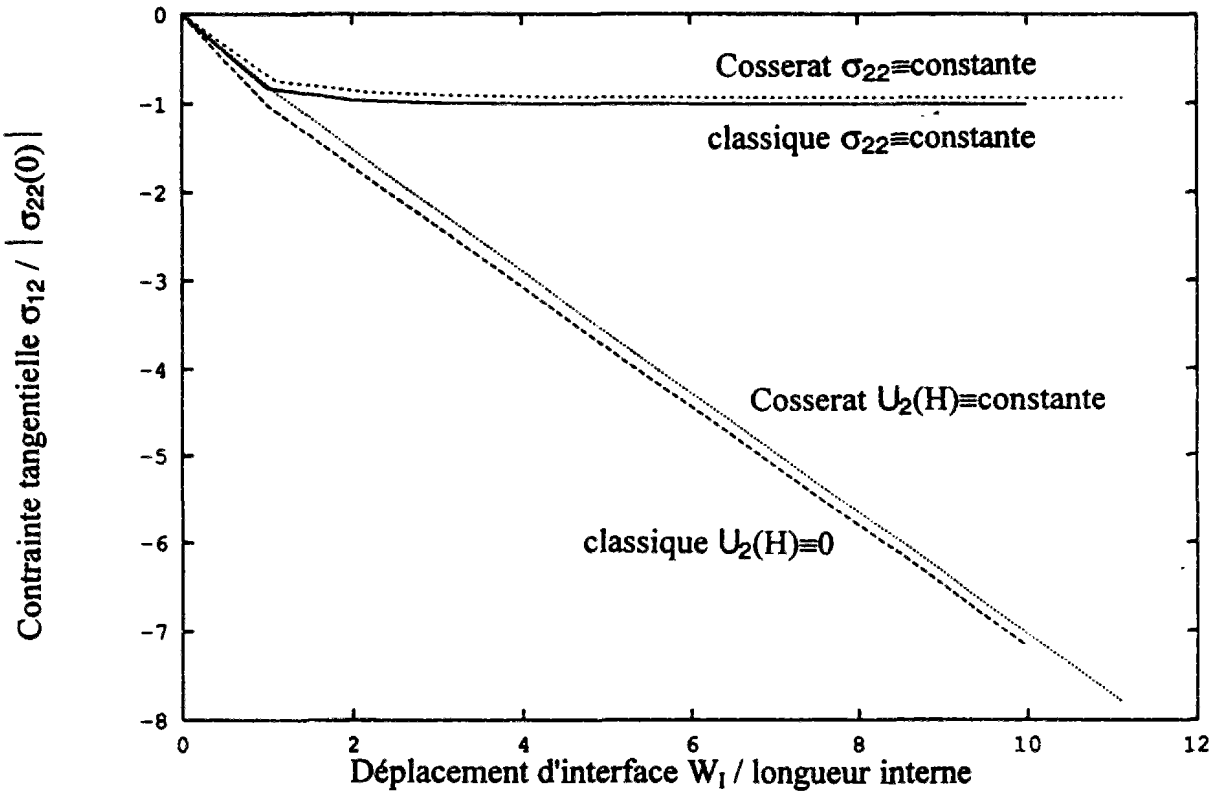


Figure A.11-60 : Evolution de la contrainte tangentielle pour le cisaillement plan d'un milieu de Cosserat et d'un milieu classique élastoplastiques sans écrouissage

La déformation de cisaillement plastique généralisée γ_g^p , qui est égale à la déformation de cisaillement plastique classique γ^p , dans le cas d'un milieu classique, mesure la distorsion plastique du sol. Dans le cas d'un matériau classique, elle est constante dans l'échantillon. Dans le cas d'un matériau de Cosserat, elle varie au sein du matériau et est intense au sein des bandes de cisaillement et des couches d'interface. Dans le cas présent, il convient de noter les valeurs importantes qui sont calculées, de l'ordre de 300%, et qui obligent à travailler dans le cadre des déformations finies (figure A.11-62).

L'énergie plastique dissipée dans le sol en contact avec l'interface au cours du cisaillement et pour les quatre cas considéré, est tracée sur la figure A.11-63a. Il convient de noter que l'énergie plastique dissipée en I dans les deux cas de Cosserat est de trois ordres de grandeur supérieure à l'énergie qui peut être dissipée dans les cas classique (figure A.11-63b). Dans les deux cas Cosserat, l'énergie plastique est dissipée essentiellement sur une épaisseur de 4 à 5 R, alors que la couche d'interface s'étale jusqu'à environ 15 R (figure A.11-64). Le pouvoir dissipatif des termes plastiques de rotation relative et de courbure est donc énorme, et explique pourquoi les grains dans les couches d'interface sont brisés au cours d'un essai (Hoteit, 1989).

En ce qui concerne l'épaisseur de l'interface, nous avons trouvé une épaisseur de 13,35 R pour une contrainte normale constante de 100 kPa tandis que pour l'essai à déplacement normal imposé, nul l'épaisseur n'est que de 8,77 R, sachant qu'en fin d'essai la contrainte normale régnant au sein de l'échantillon est 714 kPa. La condition à la limite extérieure, en contrainte normale ou en déplacement normal, a une influence significative sur l'épaisseur de l'interface.

11.2.2.3.3 Influence de la contrainte normale

Nous nous sommes intéressés dans le paragraphe précédent aux deux cas extrêmes de condition à la limite extérieure. Cependant, dans le cas d'une condition en déplacement normal imposé nul, la contrainte normale varie au cours de l'essai. Pour étudier l'influence réelle de la contrainte normale, il convient de regarder des essais où la contrainte normale est constante durant tout l'essai (tableau A.11-6, figure A.11-65a).

Tableau A.11-6 : Influence de la contrainte normale sur l'épaisseur de l'interface et l'angle de frottement global

contrainte normale σ_{22} kPa	épaisseur de l'interface e / R	angle de frottement global ϕ
1000	11,43	38,63
800	11,99	39,95
600	12,16	41,35
400	13,01	42,73
200	13,18	44,14
100	13,36	44,44

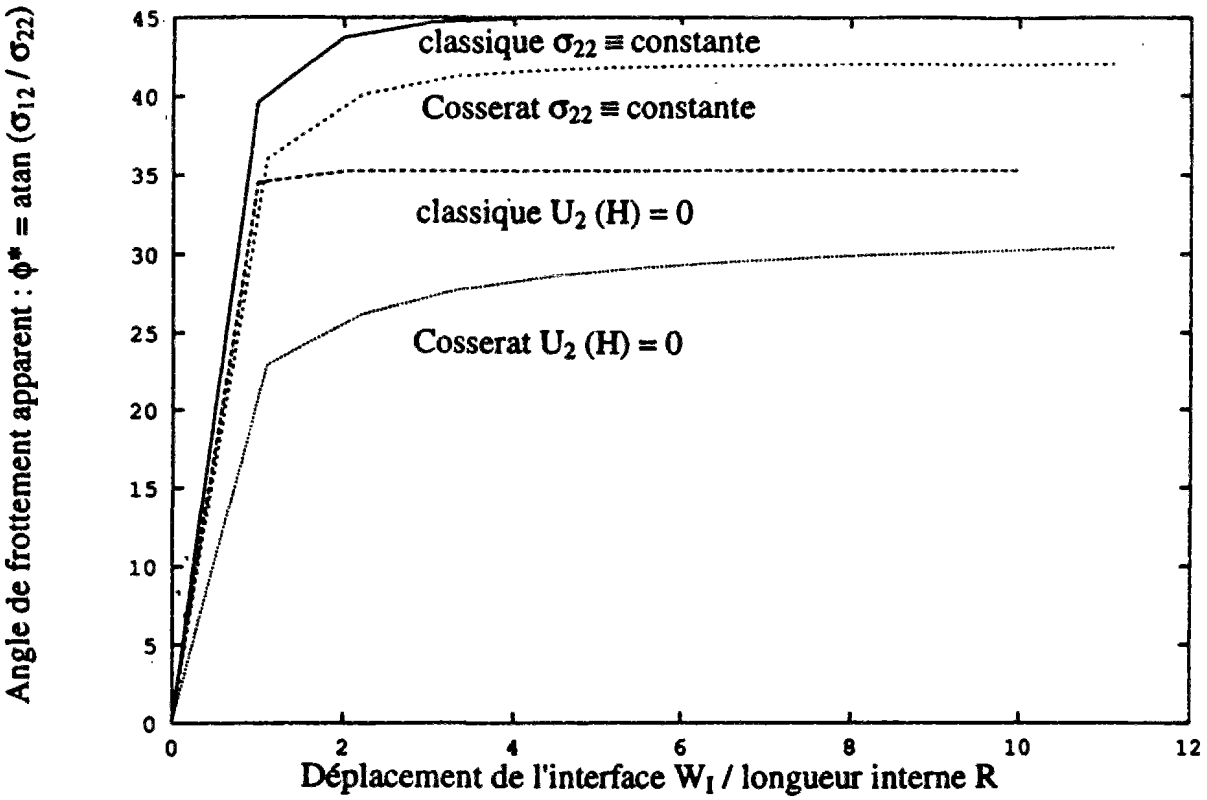


Figure A.11-61 : Evolution de l'angle de frottement global pour le cisaillement plan d'un milieu de Cosserat et d'un milieu classique élastoplastiques sans écrouissage

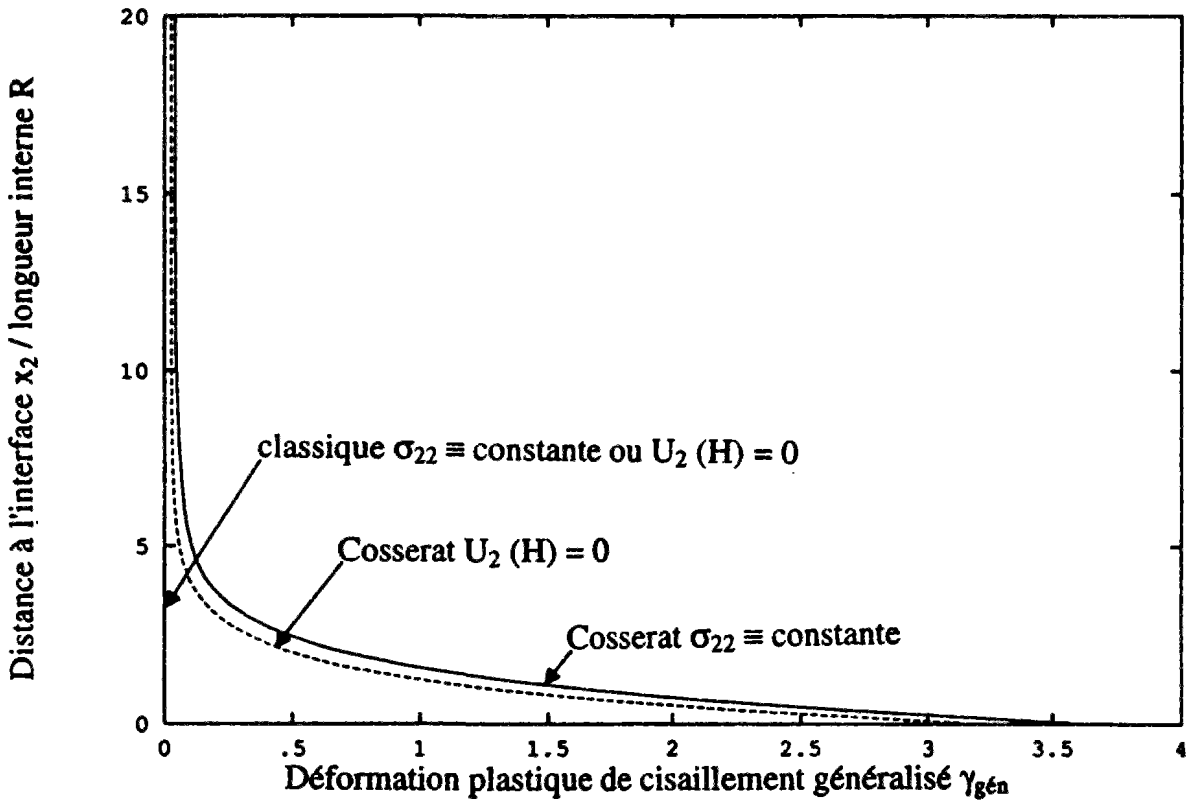


Figure A.11-62 : Profils de la déformation plastique de cisaillement généralisée, pour différents conditions aux limites et dans le cas du cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat et d'un milieu classique élastoplastique sans écrouissage

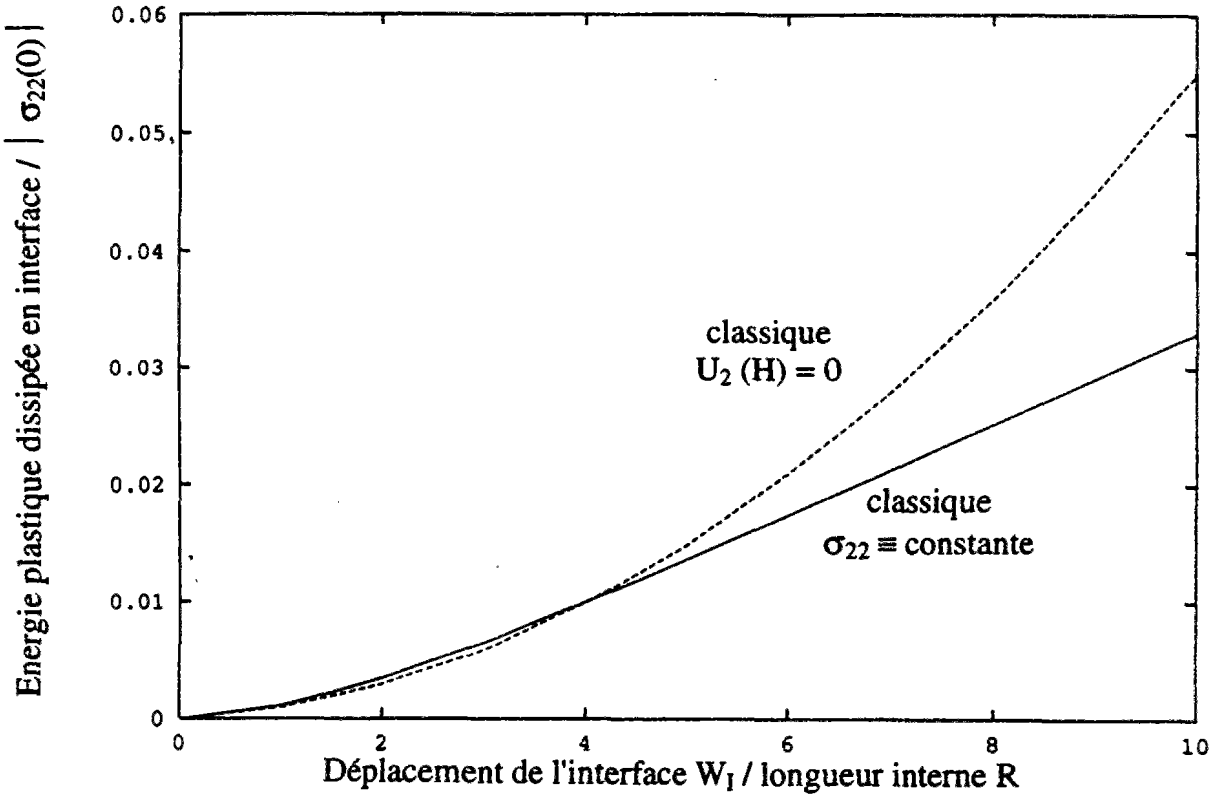


Figure A.11-63a : Evolution de l'énergie plastique dissipée en I au cours du cisaillement, dans le cas du cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastoplastique sans écrouissage

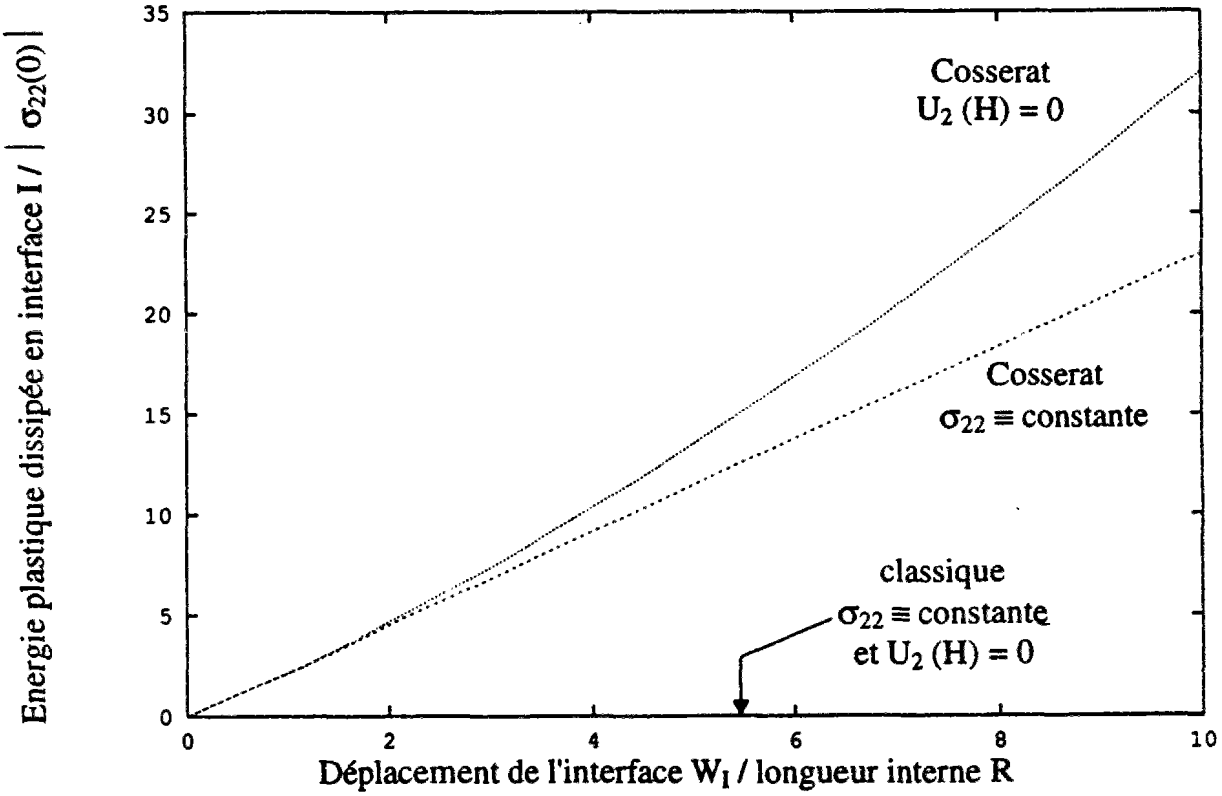


Figure A.11-63b : Evolution de l'énergie plastique dissipée en I au cours du cisaillement, dans le cas du cisaillement simple plan d'un milieu classique élastoplastique sans écrouissage

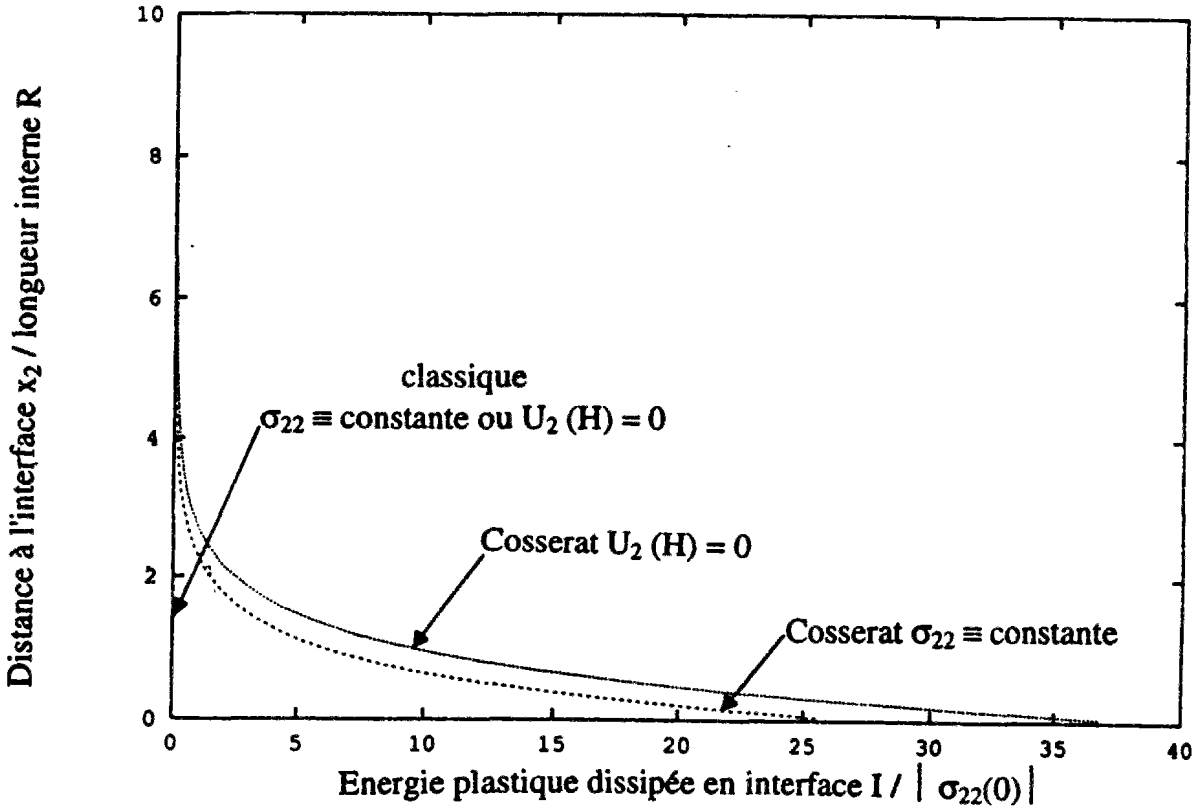


Figure A.11-64 : Profils de l'énergie plastique dissipée,
pour différents conditions aux limites et dans le cas du cisaillement simple plan
d'un milieu de Cosserat et d'un milieu classique élastoplastique sans écrouissage

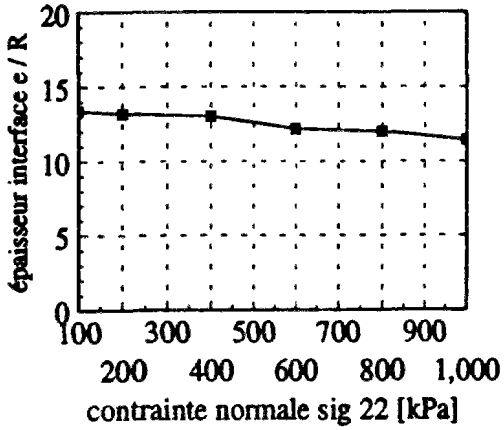


Figure A.11-65a : Simulations en interface

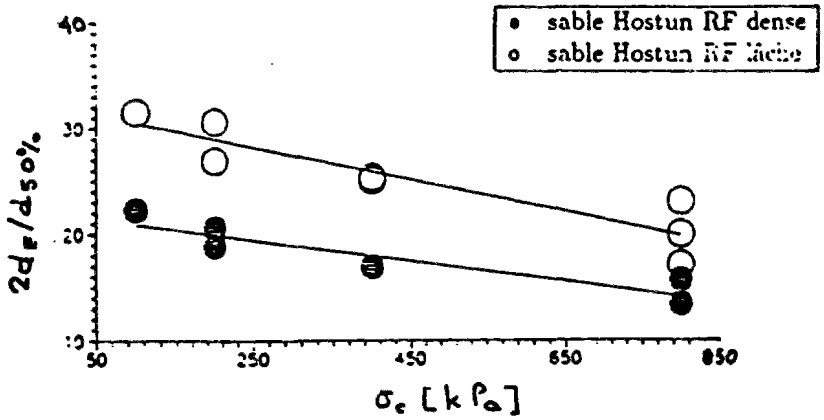


Figure A.11-65b : Mesures expérimentales sur des bandes de cisaillement (Hammad, 1991)
Figure A.11-65 : Influence de la contrainte sur les interfaces et les bandes de cisaillement

Hammad (1991) a observé que les bandes de cisaillement ont une épaisseur qui diminue sensiblement avec la contrainte de confinement (figure A.11-65b). En particulier, il trouve qu'entre 100 et 800 kPa, la demi-épaisseur diminue d'environ 3 R, c'est à dire de 6% pour un sable dense. Ce résultat est à rapprocher de nos simulations sur un sable dense, qui donnent une variation de l'épaisseur de la couche d'interface entre 100 et 800 kPa, d'environ 1,4 R, c'est à dire de 11%.

11.2.2.3.4 Influence des coefficients élastiques

La couche d'interface étant une zone plastique, du moins pour des valeurs de f_2 physiquement acceptables, on peut se demander quel rôle jouent les paramètres élastiques sur l'épaisseur de l'interface. Trois types d'études paramétriques ont été réalisées.

Dans le cas du modèle élastique de Mühlhaus et al. (1991) complété par le modèle de Mühlhaus et Vardoulakis (1987), nous avons fait varier le coefficient de Poisson ν. L'influence est non négligeable comme cela peut être observé sur le tableau A.11-7.

Tableau A.11-7 : Influence du coefficient de Poisson

Coefficient de Poisson ν	Epaisseur de l'interface e / R	Angle de frottement global
0,0	8,52	44,17
0,1	8,40	44,04
0,2	6,93	43,67

Dans le cas du modèle cinématique de Mühlhaus et Vardoulakis (1987) où les coefficients h_i , élastiques et plastiques, sont confondus, nous avons fait varier uniquement les paramètres élastiques h_i , les coefficients h_i plastiques restant inchangés.

Quand le coefficient $h_1 - h_2$ tend vers 0, l'épaisseur tend vers une valeur limite égale à 13,98 R. Quand $h_1 - h_2$ augmente, l'épaisseur diminue. L'épaisseur est donc une fonction décroissante du coefficient $h_1 - h_2$. Quand celui-ci augmente, G_C diminue , le sol est plus déformable en terme de rotation relative et l'épaisseur de l'interface diminue (figure A.11-66a).

Quand le coefficient h_3 augmente, l'épaisseur diminue presque linéairement avec en fonction de la puissance de h_3 . En effet, quand celui-ci augmente, le module de flexion de Cosserat N diminue, le sol est moins rigide en terme de courbure et l'interface diminue d'épaisseur (figure A.11-66b).

11.2.2.3.5 Influence des coefficients plastiques h_i

Dans le cas du modèle cinématique de Mühlhaus et Vardoulakis (1987) où les coefficients h_i , élastiques et plastiques, sont confondus, nous avons fait varier uniquement les paramètres plastiques h_i , les coefficients h_i élastiques restant inchangés.

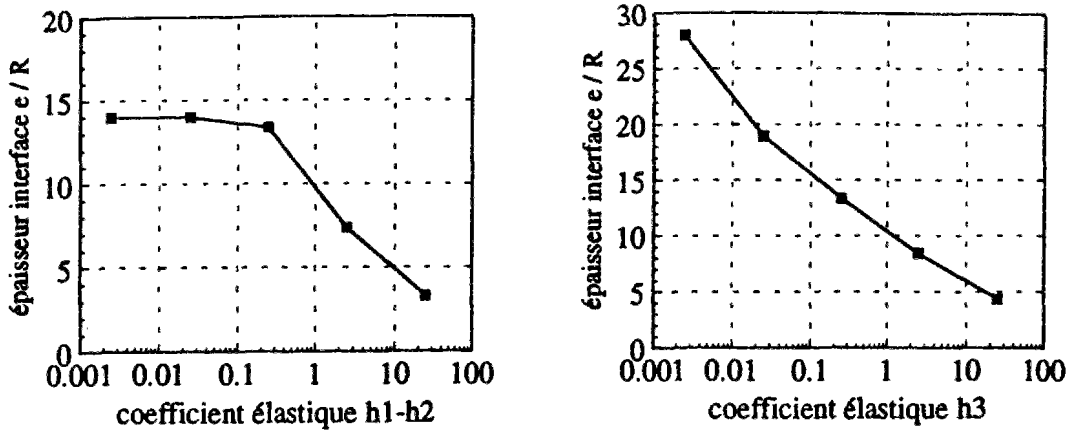


Figure A.11-66 : Influence des coefficients h_i élastiques sur l'épaisseur d'interface

Quand le coefficient $h_1 - h_2$ tend vers 0, l'épaisseur tend vers une valeur limite égale à 12,55 R. Quand $h_1 - h_2$ augmente, l'épaisseur augmente. L'épaisseur est donc une fonction croissante du coefficient $h_1 - h_2$. Quand celui-ci augmente, le poids des termes de contraintes antisymétriques dans le cisaillement généralisé augmente tandis que le poids des rotations relatives dans la déformation généralisée de cisaillement diminue (figure A.11-67a).

Quand le coefficient h_3 augmente, l'épaisseur diminue. L'épaisseur est donc une fonction décroissante du coefficient h_3 . Quand celui-ci augmente, le poids des termes de couples contraintes dans le cisaillement généralisé augmente tandis que le poids des courbures dans la déformation généralisée de cisaillement diminue (figure A.11-67b).

L'analyse pour un milieu rigide parfaitement plastique a montré que l'épaisseur varie en fonction du rapport de $h_1 - h_2$ par h_3 (cf. paragraphe 9, partie A), ce qui est confirmé par la présente analyse paramétrique.

Quand le paramètre élastique $h_1 - h_2$ augmente, l'épaisseur diminue, tandis que quand le paramètre plastique $h_1 - h_2$ augmente, l'épaisseur augmente. Les tendances sont donc complètement inversées et il n'est pas bon dans un modèle élastoplastique de Cosserat de prendre les h_i élastiques et plastiques égaux. Ce que nous avons par ailleurs démontré sur la base d'autres arguments physiques (paragraphe 9, partie A).

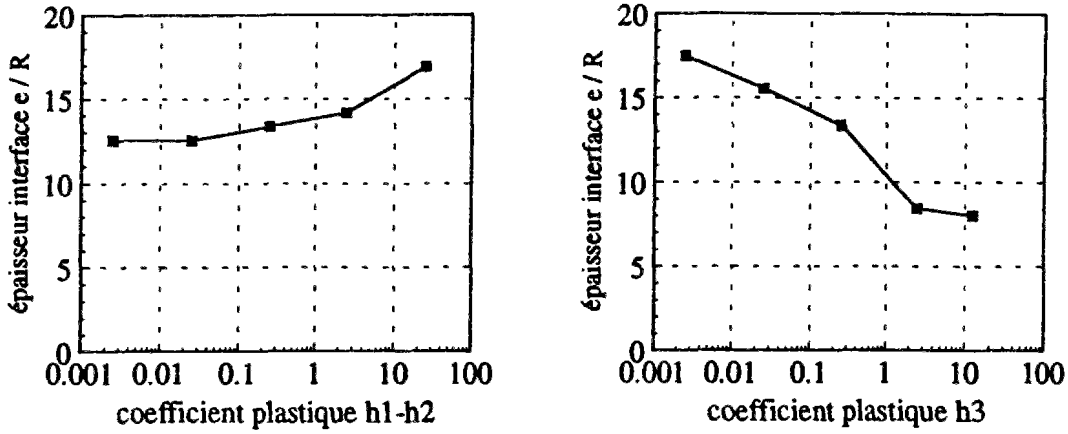


Figure A.11-67 : Influence des coefficients h_i plastiques sur l'épaisseur d'interface

11.2.2.3.6 Influence de l'angle de dilatance

L'angle de dilatance a été varié entre 0 et 45 degrés, et pour deux types de condition à la limite extérieure, en contrainte normale constante et en déplacement normal imposé nul (figure A.11-68a et b). A part le cas d'un angle de dilatance nul, les essais à contrainte normale imposée donnent des épaisseurs plus grandes que les essais à volume constant, ce qui se comprent puisque le sol est empêché de dilater. La différence est sensible, de l'ordre de 6 R, c'est à dire 3 grains en moyenne, ce qui devrait pouvoir être mis en évidence expérimentalement. Si dans le cas des essais à volume constant, l'épaisseur diminue légèrement et de manière constante quand l'angle augmente, par contre, dans le cas des essais à contrainte constante, l'épaisseur est maximale pour un angle de 15° (tableau A.11-8).

Tableau A.11-8 : Influence de l'angle de dilatance sur l'épaisseur de l'échantillon

Angle de dilatance ψ	Epaisseur e / R contrainte σ_{22} = 100 kPa	Epaisseur e / R déplacement $U_2(H)$ imposé nul
45	10.94	8,01
35	12,39	8,43
25	13,35	8,77
15	13,80	9,09
5	13,01	9,24
0	9,29	11,47

11.2.2.3.7 Influence de l'épaisseur de l'échantillon

Le problème aux limites considéré contient plusieurs longueurs. En particulier dans le cas du cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat analysé à l'aide de la méthodes des éléments finis, trois longueurs existent : (1) l'épaisseur de l'échantillon H, qui est une longueur géométrique, (2) la longueur des éléments finis, qui est une longueur caractéristique de la discrétisation, et (3) la longueur interne R, qui est une longueur caractéristique du matériau granulaire.

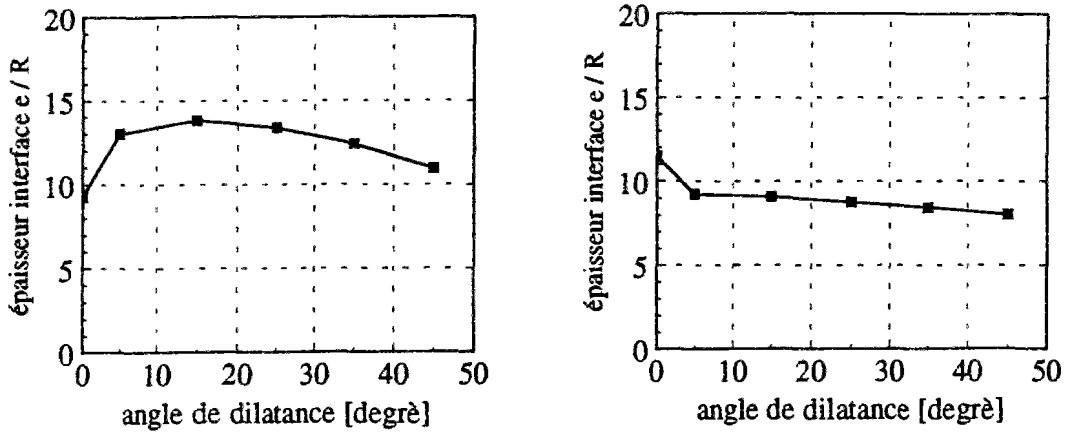


Figure A.11-68 : Influence de l'angle de dilatance sur l'épaisseur d'interface

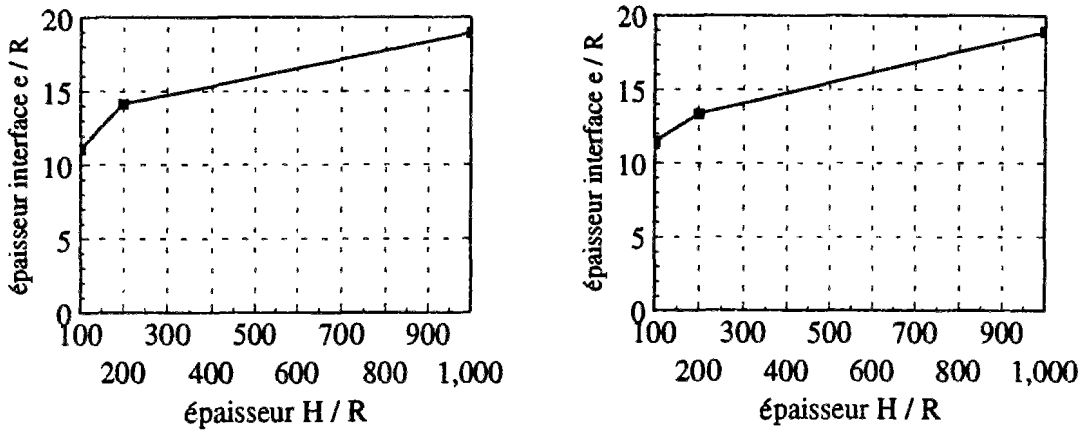
Dans le cas d'un milieu classique avec écrouissage négatif, la longueur des éléments finis contrôle l'épaisseur des zones localisées, comme nous l'avons vu en début de ce paragraphe 11. Dans le cas d'un milieu de Cosserat, l'épaisseur de la couche d'interface est indépendante du maillage utilisé, pourvu qu'il y ait plus d'un élément fini au sein de la couche d'interface, et nous l'avons vérifié en faisant varier le nombre d'éléments dans l'interface.

Dans le cas d'un milieu de Cosserat, c'est la longueur interne R qui contrôle l'épaisseur de la couche d'interface, comme nous l'avons montré dans le cas d'un milieu élastique (paragraphe 7, partie A) ou d'un milieu rigide parfaitement plastique (paragraphe 8, partie A). Cependant, les autres longueurs géométriques du problème peuvent avoir un influence sur l'épaisseur de la couche d'interface.

Par exemple dans le cas du cisaillement simple annulaire d'un milieu de Cosserat rigide plastique, nous avons mis en évidence une influence du rayon de l'interface r_{int} sur l'épaisseur de la couche d'interface e, si r_{int} et e sont du même ordre de grandeur.

Dans le cas présent, la seule longueur géométrique du problème est l'épaisseur de l'échantillon H. Nous l'avons fait varier entre 10 et 1 000 R, alors que les exemples traités ci-dessus correspondent tous à une hauteur d'échantillon H de 200 R (figure A.11-68).

Il convient de noter que pour les épaisseurs faibles d'échantillon, de l'ordre de 10 à 50 R, c'est à dire d'environ 5 à 25 grains, le sol est entièrement plastique et la couche d'interface n'est pas encore formée, pour des déplacements d'environ 10 R. Pour des épaisseurs d'échantillon variant entre 100 R et 1 000 R, l'épaisseur de la couche d'interface varie notablement, mais les valeurs restent dans la fourchette observée expérimentalement sur site.



a : modèle 13

b : modèle sans écrouissage

Figure A.11-69 : Influence de l'épaisseur de l'échantillon sur l'épaisseur d'interface

11.2.3 Simulation en grandes déformations d'essais de cisaillement d'un matériau élastoplastique avec écrouissage

Des simulations utilisant le formalisme des déformations finies ont été réalisées avec le modèle d'écrouissage 13. Quatre différents cas ont été étudiés : les cisaillement simples classiques, à contrainte normale σ_{22} constante et à déplacement normal U_2 nul en H (volume global constant), et les cisaillement simples plans correspondants au cas d'une interface imposant une rotation de Cosserat faible, mais non nulle et égale à 1% du déplacement de l'interface W_I . Les résultats seront analysés en détail pour l'essai, dit de Cosserat, à contrainte normale constante.

Les conditions à la limite des deux types essais sont résumées dans le tableau A.11-2 (figure A.11-70). Pour les deux essais, dits classiques, le coefficient f_2 est pris de façon à ce que le sol se comporte comme un matériau classique. Il convient de noter la valeur très faible de la rotation de Cosserat, dans les essais de Cosserat. Celle-ci a une influence relativement faible sur les résultats globaux mais une influence majeure, localement dans la couche d'interface. Le déplacement U_2 mesuré en H est quasiment identique pour les essais de Cosserat et classiques.

11.2.3.1 Déplacements et rotation

Les profils des déplacements et rotations dans les deux cas de Cosserat sont caractérisés par l'existence d'une couche d'interface, d'épaisseur environ 14 grains pour l'essai à contrainte constante et 12 grains pour l'essai à volume constant (figure A.11-71, A.11-72, A.11-73). Le gradient du déplacement tangentiel est plus fort pour l'essai à volume constant que pour l'essai à contrainte normale constante. Les profils des essais classiques sont linéaires. La rotation de Cosserat est très importante sur une épaisseur d'environ 4 R, c'est à dire environ 2 grains, avec des valeurs allant jusqu'à 60 °. mais elle est plus faible dans le reste de la couche d'interface, avec une amplitude maximale d'environ 20°. Dans le reste de l'échantillon, que l'on peut qualifié de zone tampon, elle est égale à la rotation du milieu et elle est plus faible pour les essais de Cosserat que pour les essais classiques (figure A.11-73). Dans l'essai à contrainte normale constante, la rotation de Cosserat est maximale à l'interface, tandis que dans l'essai à volume constant, elle est maximale à une distance d'environ 4 R.

11.2.3.2 Contraintes et couples contraintes

L'état des contraintes dans l'essai de Cosserat à contrainte constante est représenté sur la figure A.11-74. Il est tout à fait similaire pour l'essai à volume constant. Il convient de noter la complexité des contraintes au sein de la couche d'interface ainsi que l'amplitude du couple contrainte normalisé, qui est du même ordre que les contraintes classiques de Cauchy. Les cercles de Mohr de l'essai à contrainte normale constante, pour le point en I et en H, dans les cas de Cosserat et classique sont représentés sur la figure A.11-75. Dans les essais classiques les contraintes sont toutes constantes dans tout l'échantillon. Il convient de noter que le cercle de Mohr en interface de l'essai de Cosserat est complètement translaté dans le demi-espace supérieur. Cela est dû, premièrement, au fort radoucissement qui se produit en interface (les déformations plastiques cumulées sont supérieures à 200%), ce qui réduit le diamètre du cercle, et deuxièmement, à l'amplitude de la contrainte antisymétrique négative, qui translate le centre du cercle vers le haut. Le même phénomène est observé pour l'essai à volume constant (figure A.11-76).

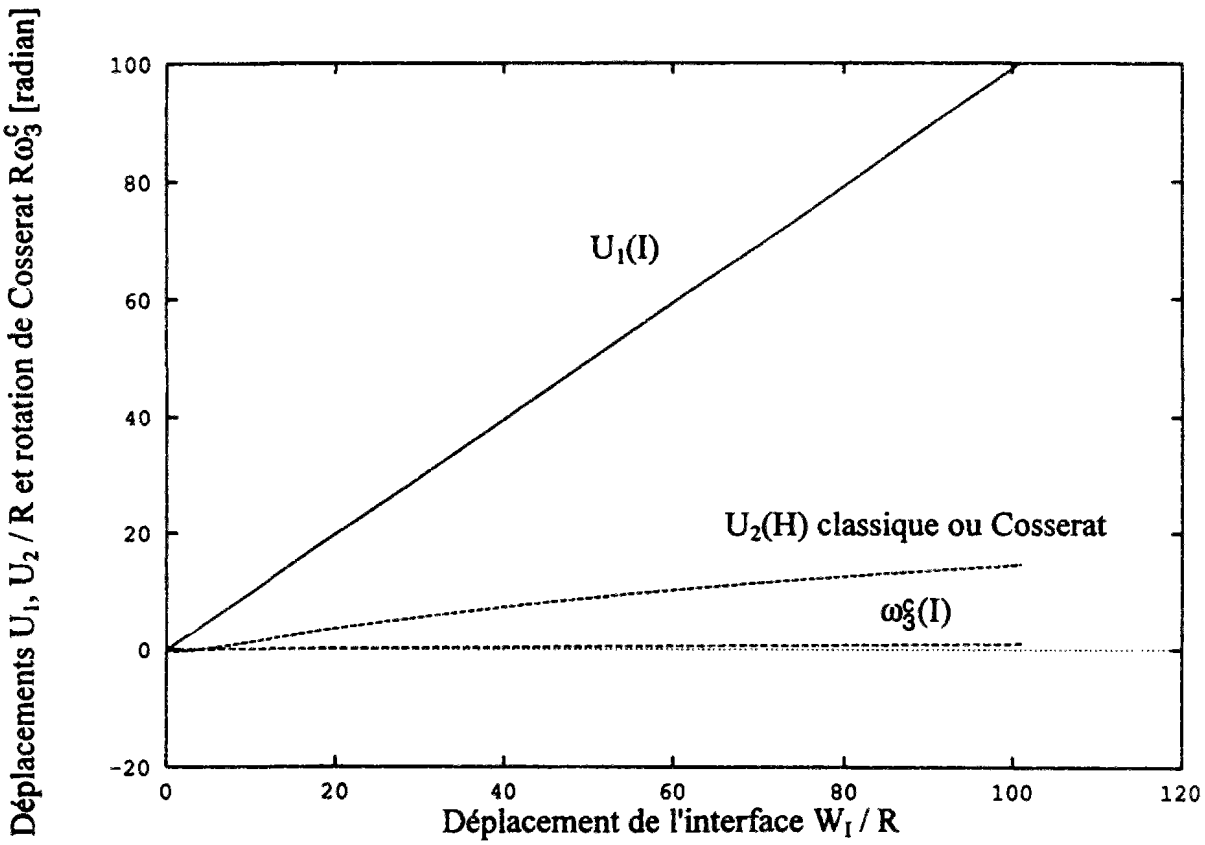


Figure A.11-70 : Evolution des déplacements et rotation en I et en H pour les essais de Cosserat et classique à contrainte normale constante

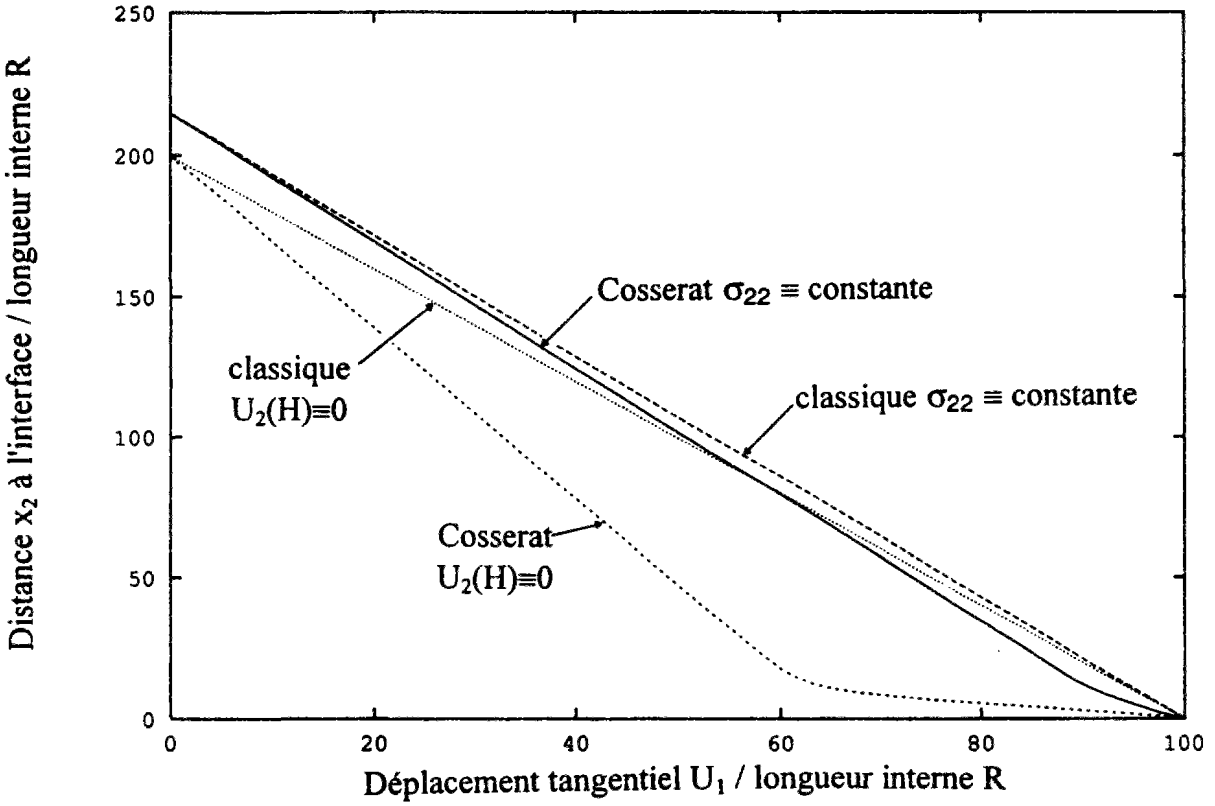


Figure A.11-71 : Profil du déplacement tangentiel U_1 dans l'échantillon pour les essais classique et de Cosserat, à contrainte constante et à volume constant

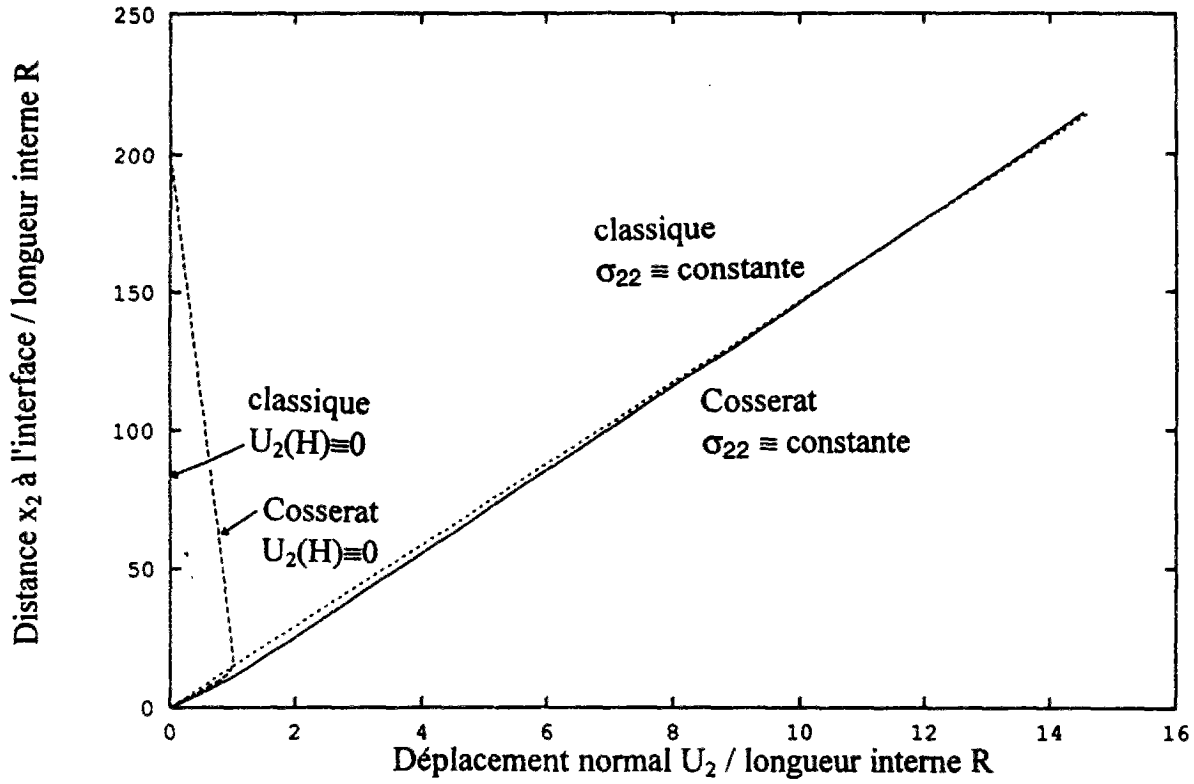


Figure A.11-72 : Profil du déplacement normal U_2 dans l'échantillon
pour les essais classique et de Cosserat, à contrainte constante et à volume constant

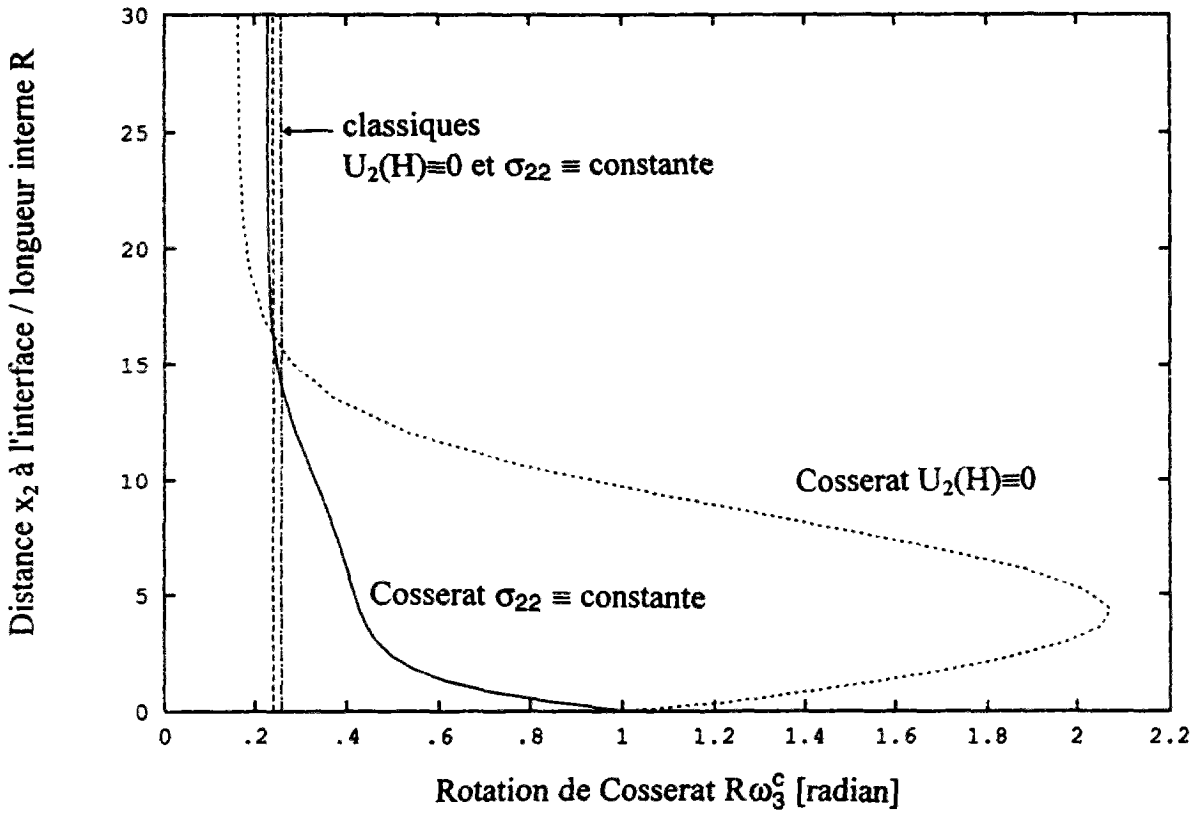


Figure A.11-73 : Profil de la rotation dans l'échantillon
pour les essais classique et de Cosserat, à contrainte constante et à volume constant

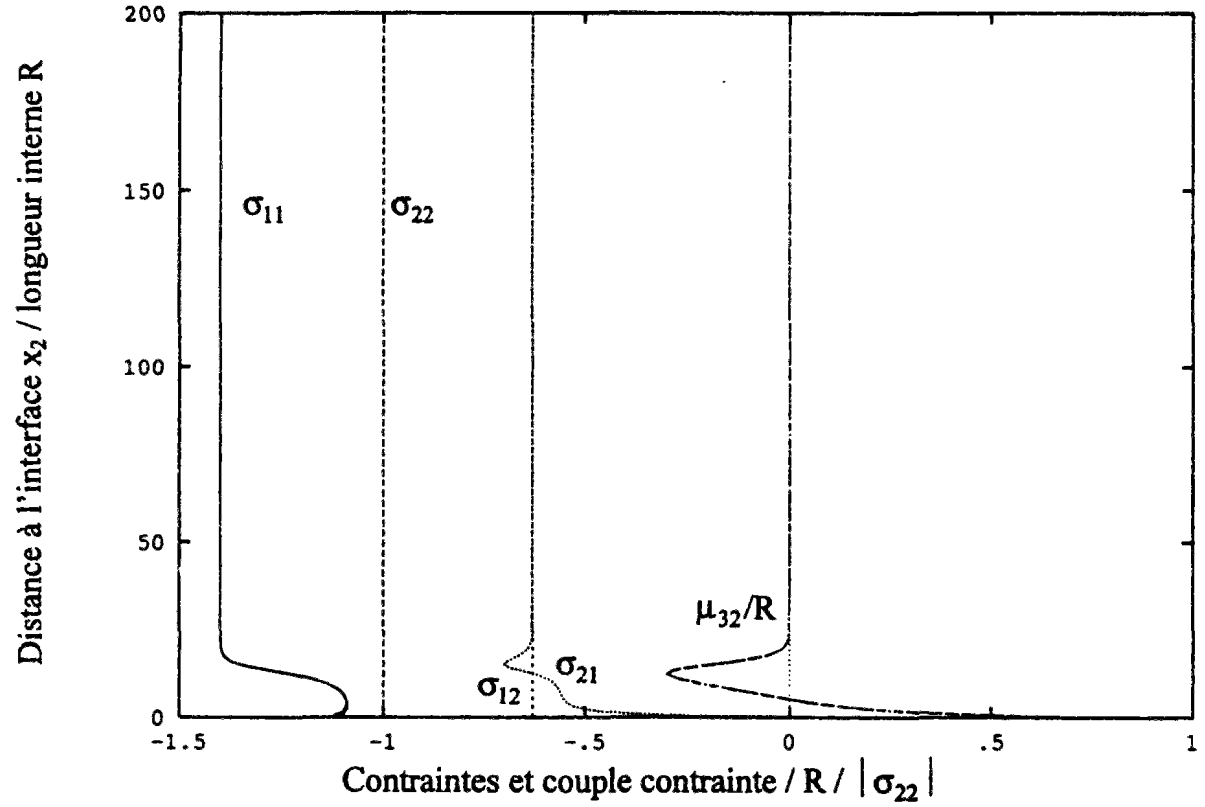


Figure A.11-74 : Profil des contraintes et couple contraintes dans l'échantillon pour l'essai de Cosserat à contrainte normale constante

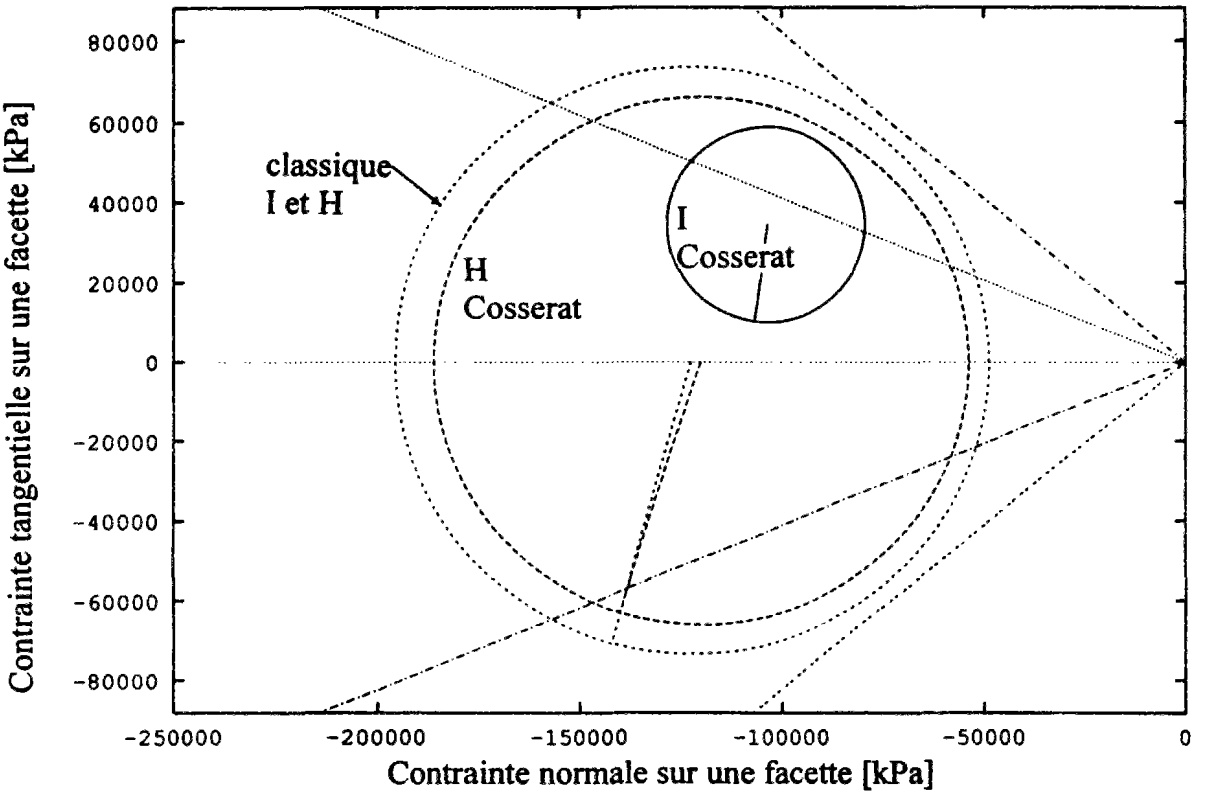


Figure A.11-75 : Cercles de Mohr en I et en H pour les essais classique et de Cosserat à contrainte normale constante

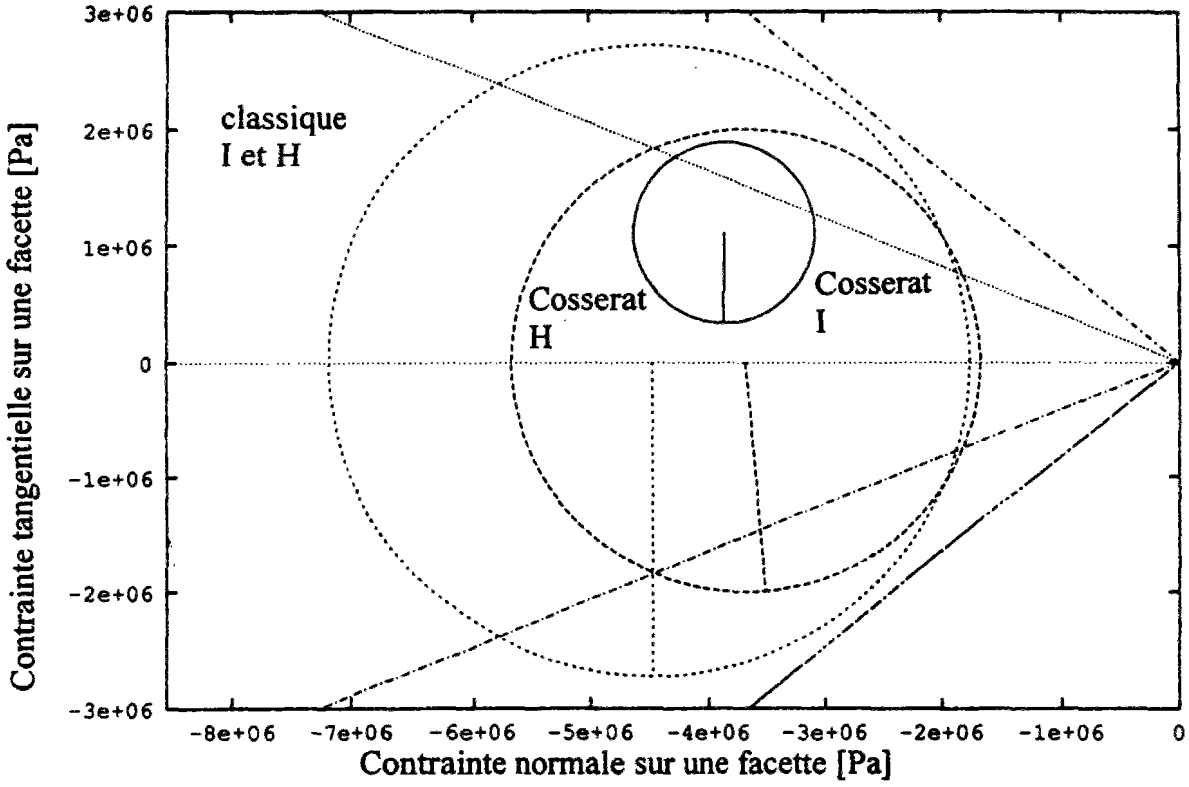


Figure A.11-76 : Cercles de Mohr, en I et en H,
pour les essai de Cosserat et classique à volume constant

L'évolution de la contrainte tangentielle σ_{12} , mesurée au cours des essais à contrainte normale constante et à volume constant, est présentée sur les figures A.11-77 et A.11-78. La formation de la couche d'interface induit un radoucissement des courbes, nettement plus marqué dans le premiers cas, et introduit un radoucissement qui n'existait pas dans le deuxième cas. L'analyse en terme d'angle de frottement global ou apparent, c'est à dire correspondant au rapport entre les contraintes tangentielle et normale mesurées, est présentée sur les figure A.11-79 et A.11-80. Le radoucissement est plus net, dans le premier cas. Dans le deuxième cas, il est beaucoup plus tardif.

11.2.3.3 Déformations

Le profil des déformations plastiques de cisaillement symétrique, antisymétrique, de courbure et généralisée est présenté pour l'essai à contrainte normale constante sur la figure A.11-81. La déformation symétrique ne diffère de la déformation généralisée que très près de l'interface, sur une épaisseur d'environ 4 R, c'est à dire 2 grains environ. Hors de cette fine zone, la déformation antisymétrique est quasiment nulle. Par contre, la déformation de courbure est non nulle dans toute la couche d'interface.

La comparaison des profils de déformations plastiques de cisaillement généralisé entre les quatre essais est présentée sur la figure A.11-82. Dans l'essai à volume constant, le cisaillement est maximal à quelque distance de l'interface, avec des valeurs de l'ordre de 430%, alors que pour l'essai à volume constant, celui-ci est maximal à une distance de 4 R de l'interface.

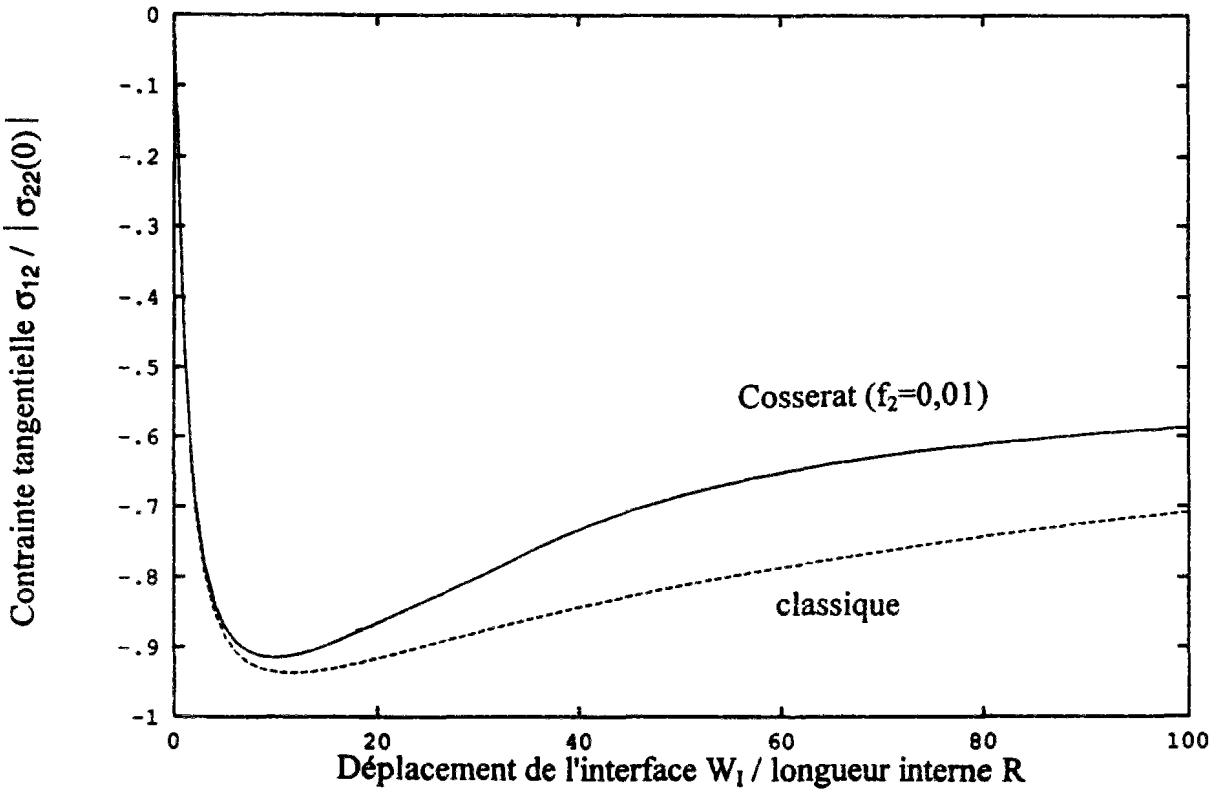


Figure A.11-77 : Evolution de la contrainte tangentielle
pour les essais de Cosserat et classique à contrainte normale constante

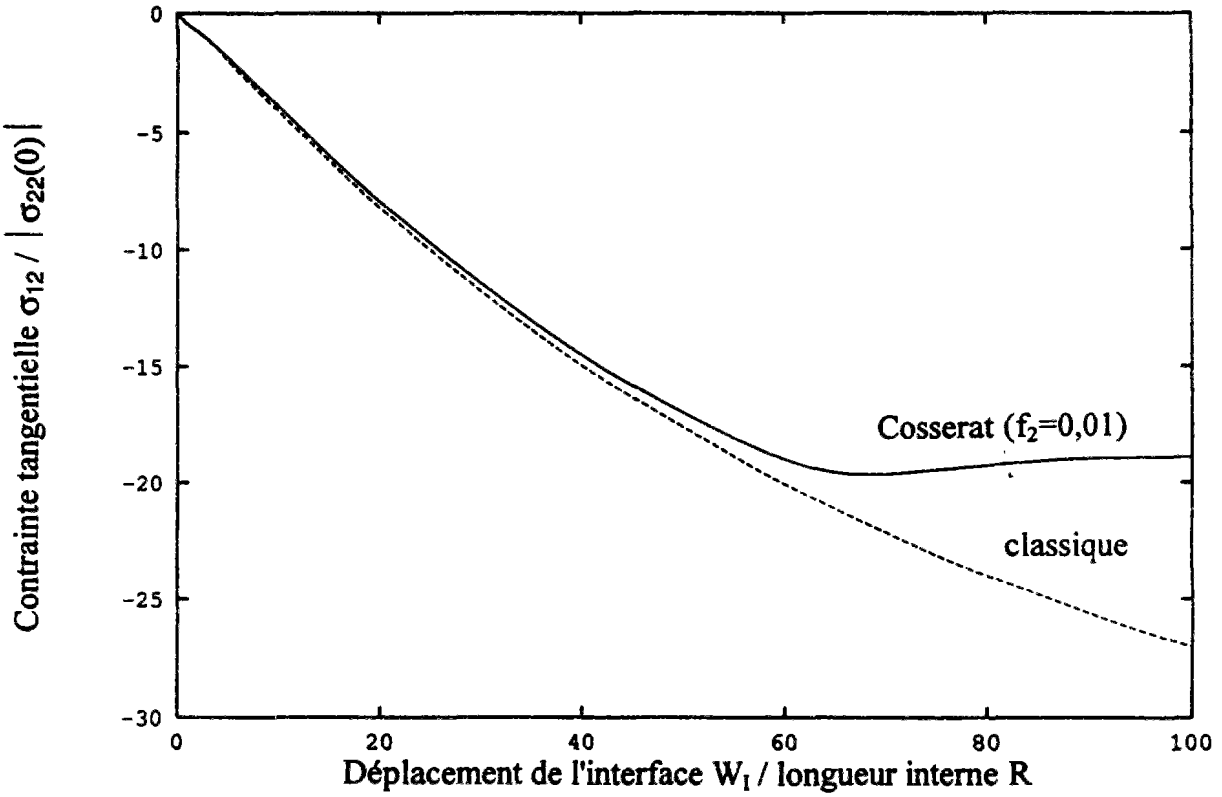


Figure A.11-78 : Evolution de la contrainte tangentielle
pour les essais de Cosserat et classique à contrainte normale constante

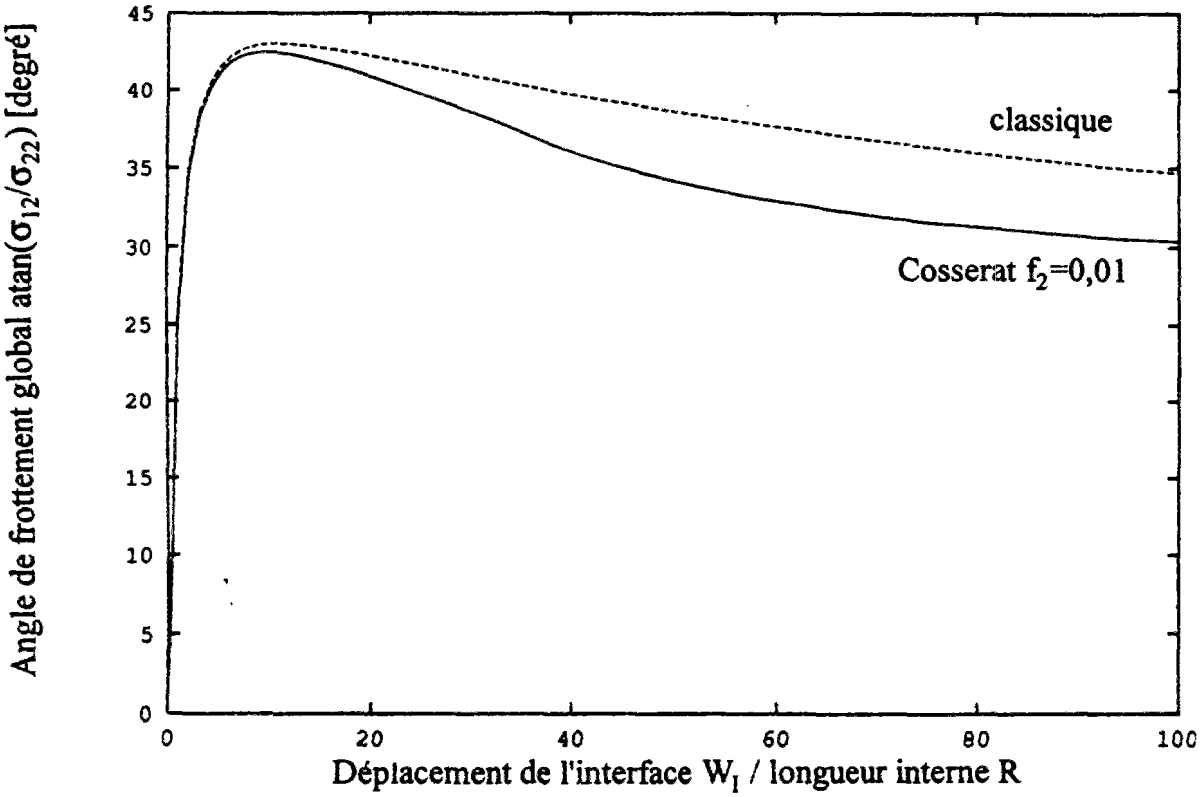


Figure A.11-79 : Evolution de l'angle de frottement global
pour les essais de Cosserat et classique à contrainte normale constante

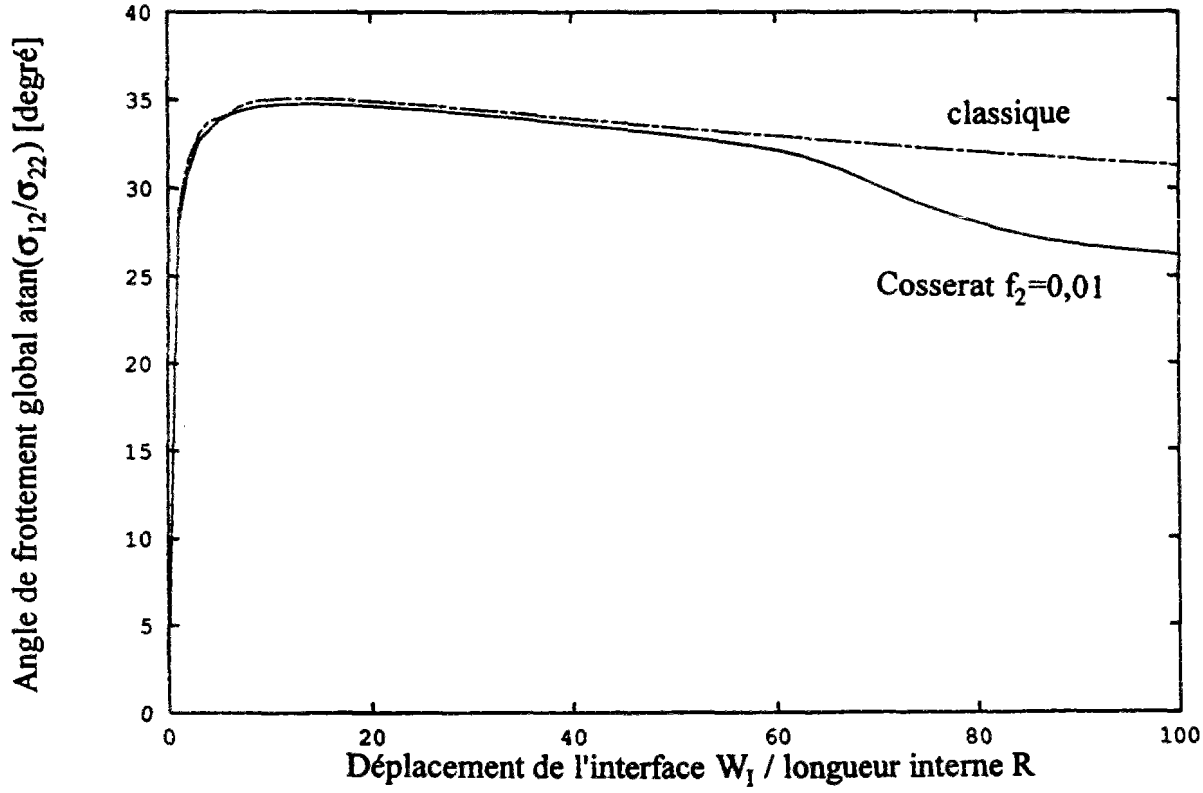


Figure A.11-80 : Evolution de l'angle de frottement global
pour les essais de Cosserat et classique à volume constant

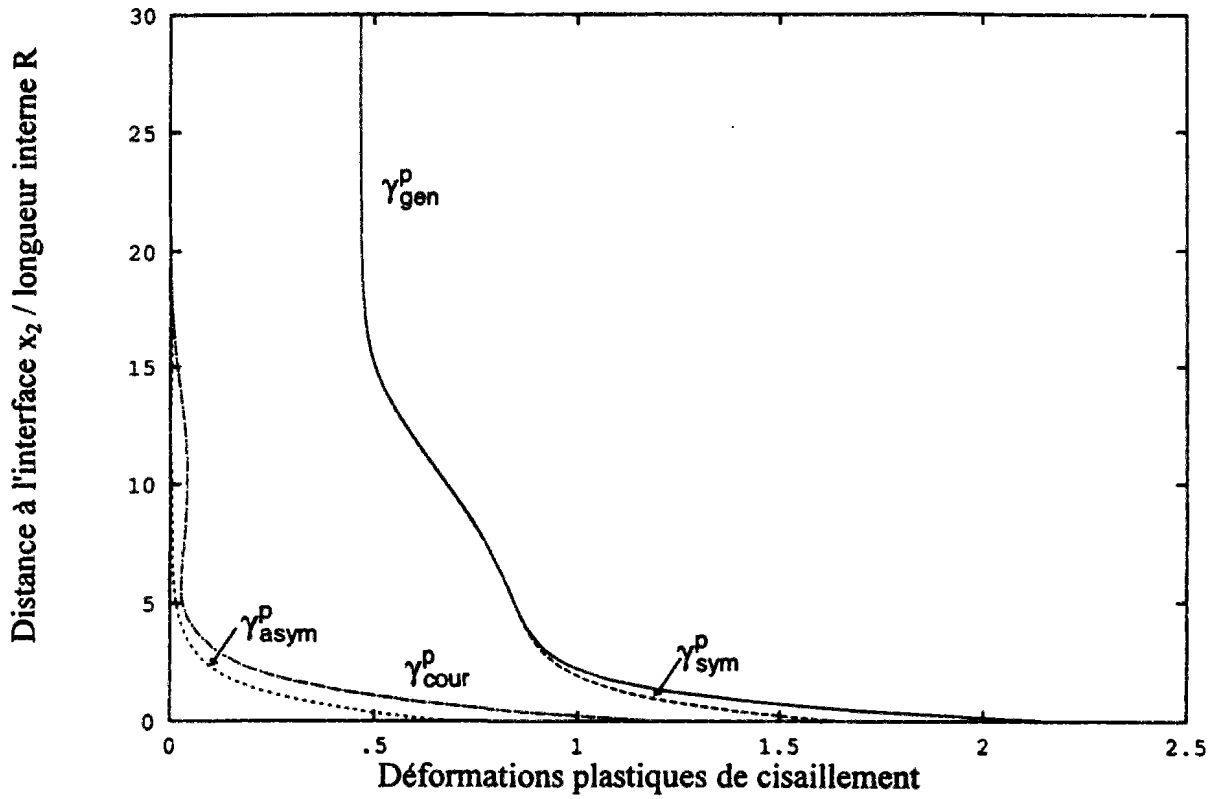


Figure A.11-81 : Profil des déformations plastiques de cisaillement dans l'échantillon pour l'essai de Cosserat à contrainte normale constante

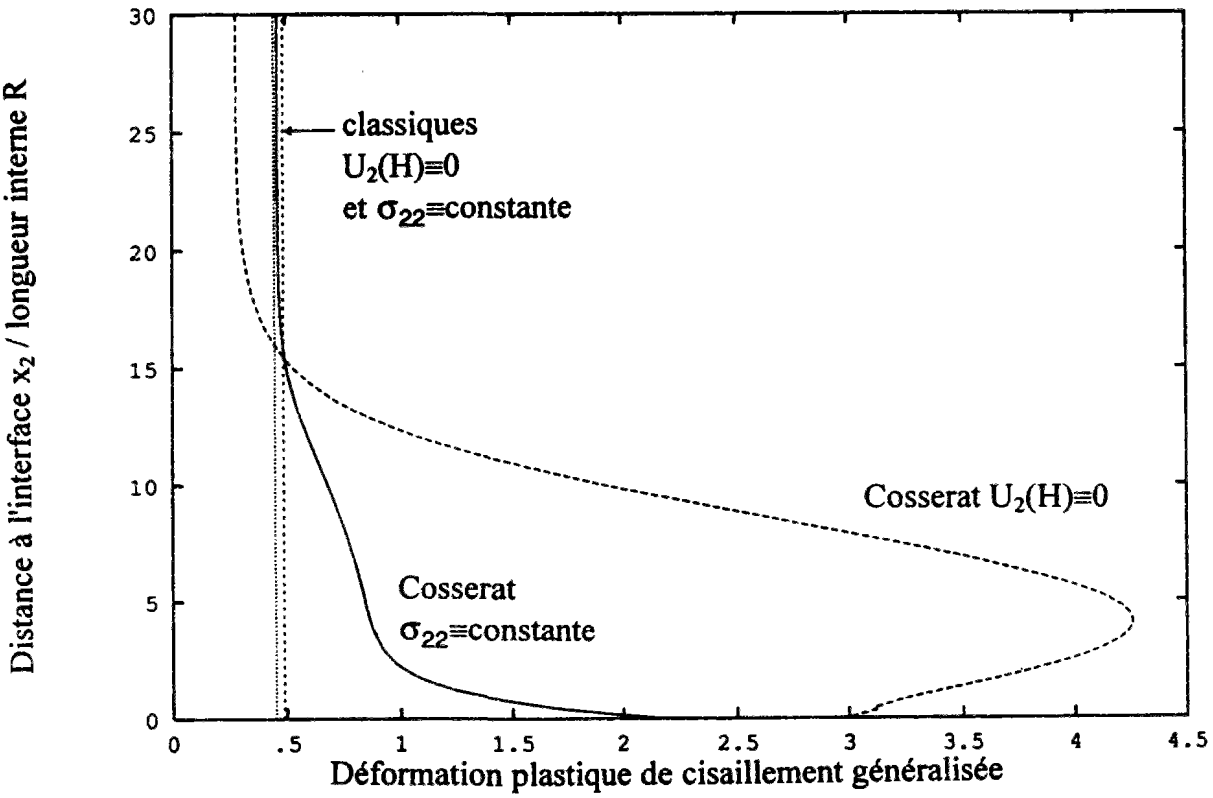


Figure A.11-82 : Profil de la déformation plastique de cisaillement généralisé dans l'échantillon pour les essais de Cosserat et classique, à contrainte normale constante et à volume constant

Il convient de noter, là aussi, l'existence de deux zones au sein de la couche d'interface. Ces deux zones peuvent être mis en évidence avec le profil de l'angle de Cosserat χ, qui mesure le rapport des incréments de déformation plastique de cisaillement de Cosserat et symétrique (figure A.11-83).

L'évolution des déformations plastiques de cisaillement, en I et en H, est présentée sur la figure A.11-84. Les termes symétriques sont prépondérants. La déformation plastique atteint une valeur d'environ 2,1, c'est à dire 210%, pour 100 R de déplacement d'interface W_I. En H, cette déformation est égale à environ 0,4, c'est à dire 40%.

Pour les essais de Cosserat, la déformation plastique en I est égale à 370% et 210%, pour les essais à volume constant et à contrainte normale constante, respectivement. Pour les deux essais classiques, cette déformation n'est plus que de 50%. Le sol en interface subit donc des cisaillements très importants, qui nécessitent l'emploi d'une formulation en grandes déformations (figure A.11-85).

L'angle de dilatance β du milieu de Cosserat est défini par le rapport entre les incréments plastiques de déformation volumique et de déformation de cisaillement généralisée. Si l'on utilise la déformation de cisaillement symétrique, on obtient un angle de dilatance apparent β^* qui est plus grand que l'angle réel β (figure A.11-86). Il convient donc d'analyser l'angle de dilatance, au sein des couches d'interface et des bandes de cisaillement, en utilisant la déformation généralisée.

La dilatance locale qui se produit dans la couche d'interface induit une forte augmentation de la porosité dans la couche d'interface, tandis que, dans le reste de l'échantillon, elle est plus faible que celle obtenue pour le cas classique(figure A.11-86). Les profils diffèrent entre les essais à contrainte normale constante ou à volume constant mais les valeurs de porosité obtenues dans la couche d'interface sont du même ordre.

L'évolution des paramètres plastiques est contrôlée par la déformation plastique de cisaillement généralisée, qui coïncide avec le multiplicateur plastique. Le profil du module h_t, au sein de l'échantillon, délimite de manière très nette la couche d'interface du reste de l'échantillon, qui joue le rôle de zone tampon (figure A.11-88).

11.2.3.4 Energies

L'énergie plastique dissipée dans la couche d'interface est 5 fois supérieure à celle qui est dissipée dans le reste de l'échantillon, pour l'essai à contrainte normale constante (figure A.11-89). Dans l'essai à volume constant, ce rapport augmente de manière encore plus importante. L'énergie dissipée dans la couche est 10 fois supérieure à celle dans le reste de l'échantillon. La rotation relative des grains, par rapport au milieu, est donc un phénomène fortement dissipatif (figure A.11-90). L'énergie plastique dissipée en interface est 5 fois plus grande que celle en H, pour l'essai de Cosserat à contrainte normale constante (figure A.11-91). En interface, l'énergie totale est composée, à hauteur de moitié par les termes symétriques, tandis que le reste est composé, aux trois quarts, par le terme de courbure et, pour un quart, par le terme antisymétrique. Du fait de la concentration des déformations près de l'interface, l'énergie plastique dissipée en I est beaucoup plus grande pour les essais de Cosserat que les essais classiques, la différence s'élevant à au moins un ordre de grandeur (figure A.11-92).

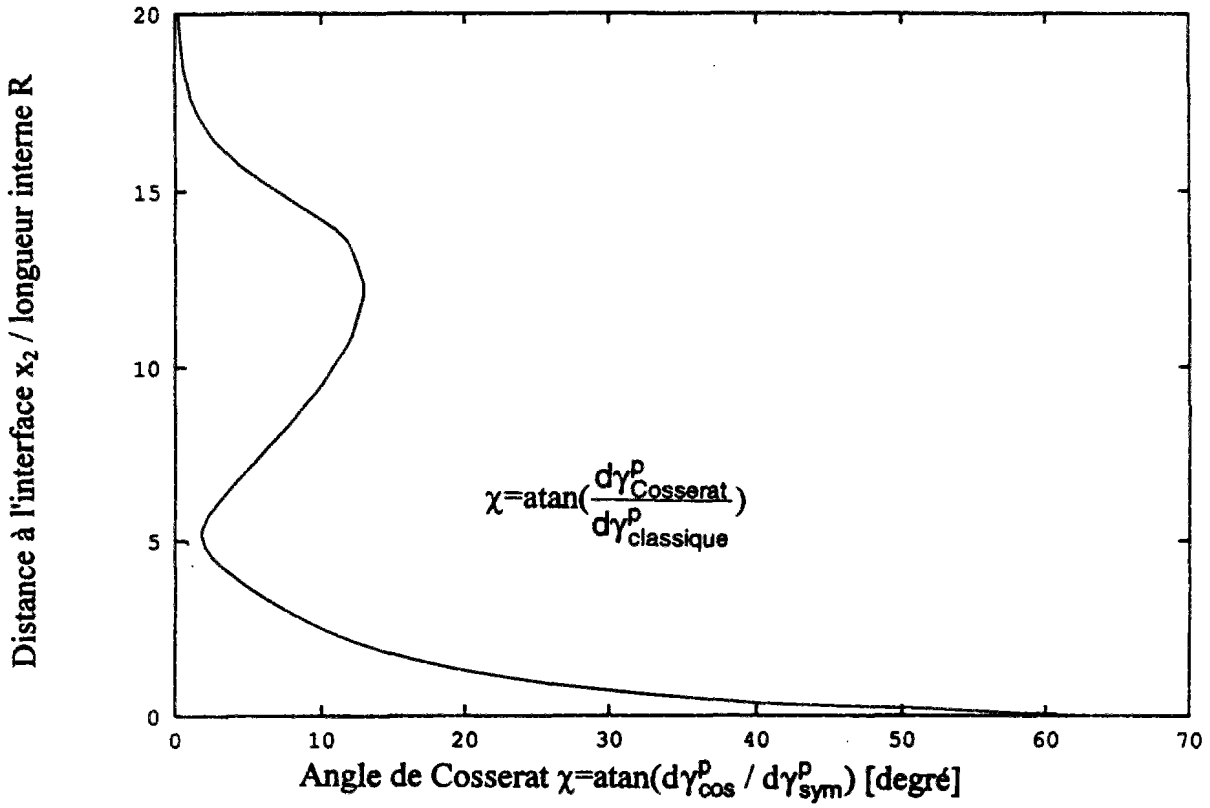


Figure A.11-83 : Profil de l'angle de Cosserat dans l'échantillon pour l'essai de Cosserat à contrainte normale constante

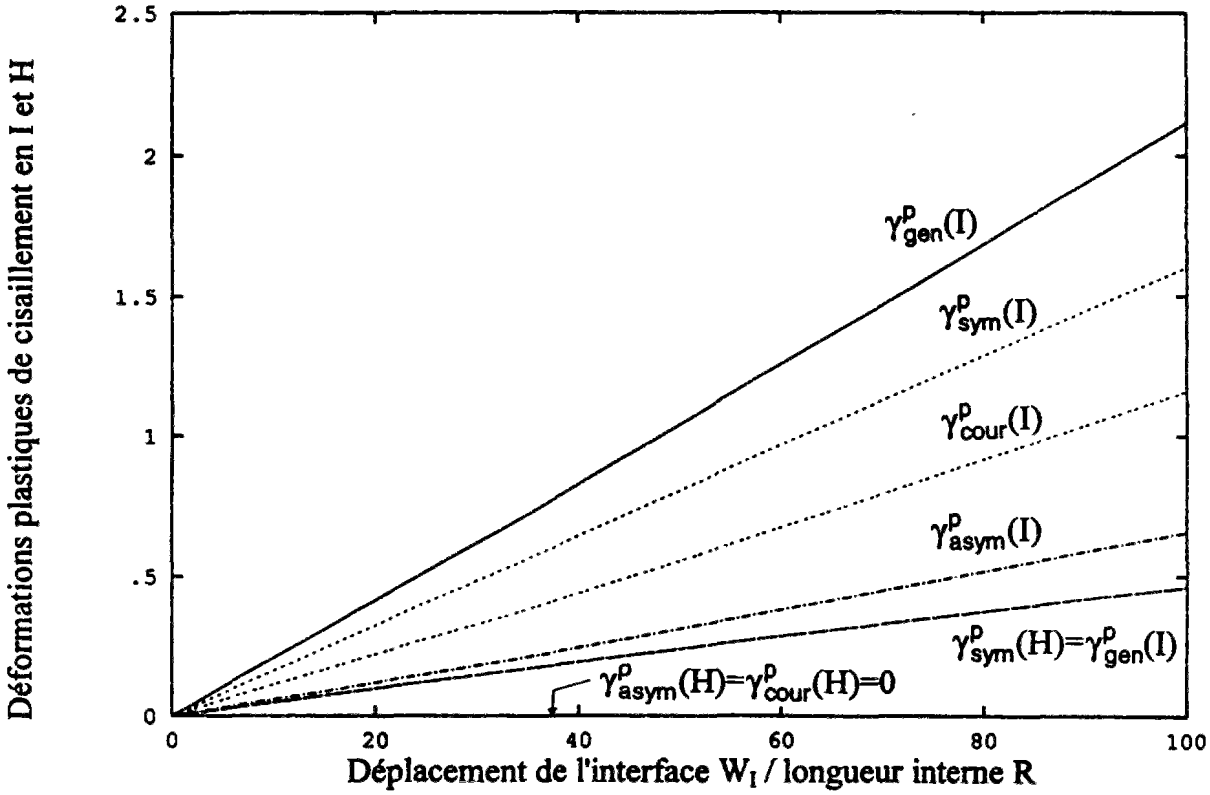


Figure A.11-84 : Evolution des déformations plastiques en I et en H pour l'essai de Cosserat à contrainte normale constante

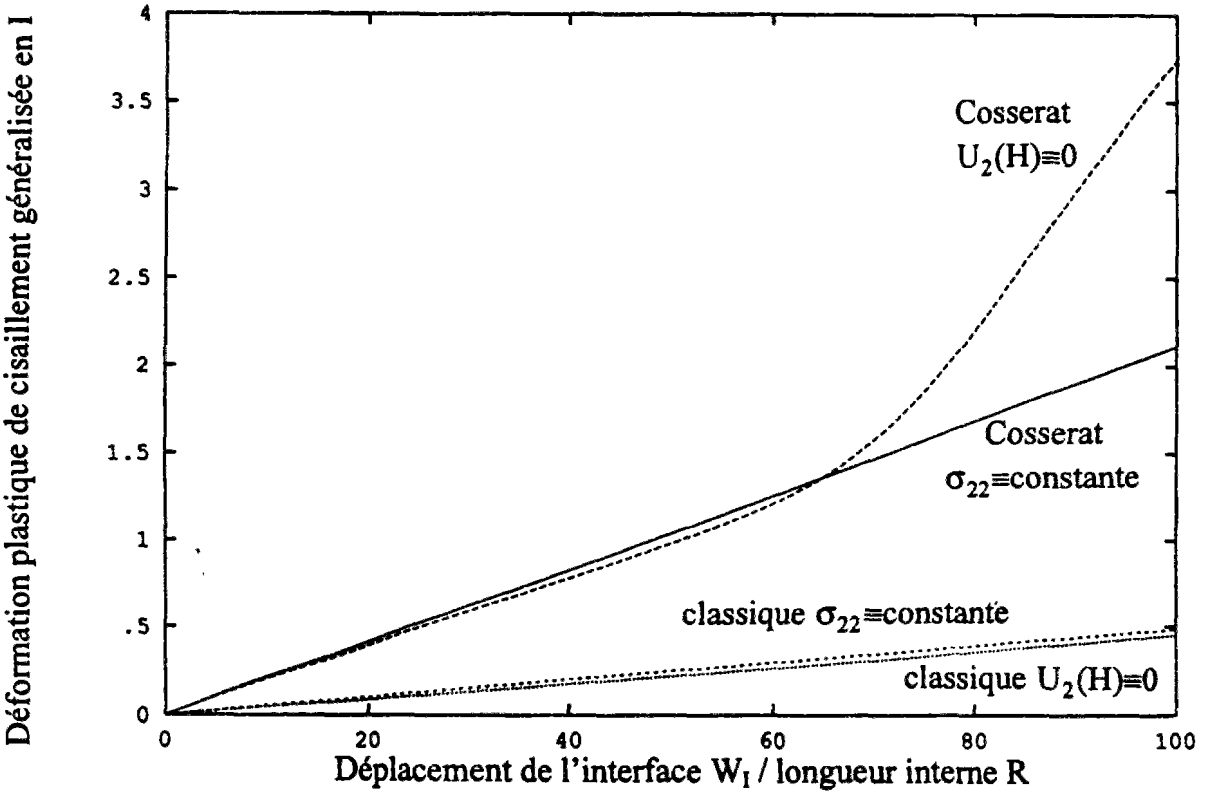


Figure A.11-85 : Evolution de la déformation plastique généralisée en I, pour les essais de Cosserat et classiques, à contrainte normale constante et à volume constant

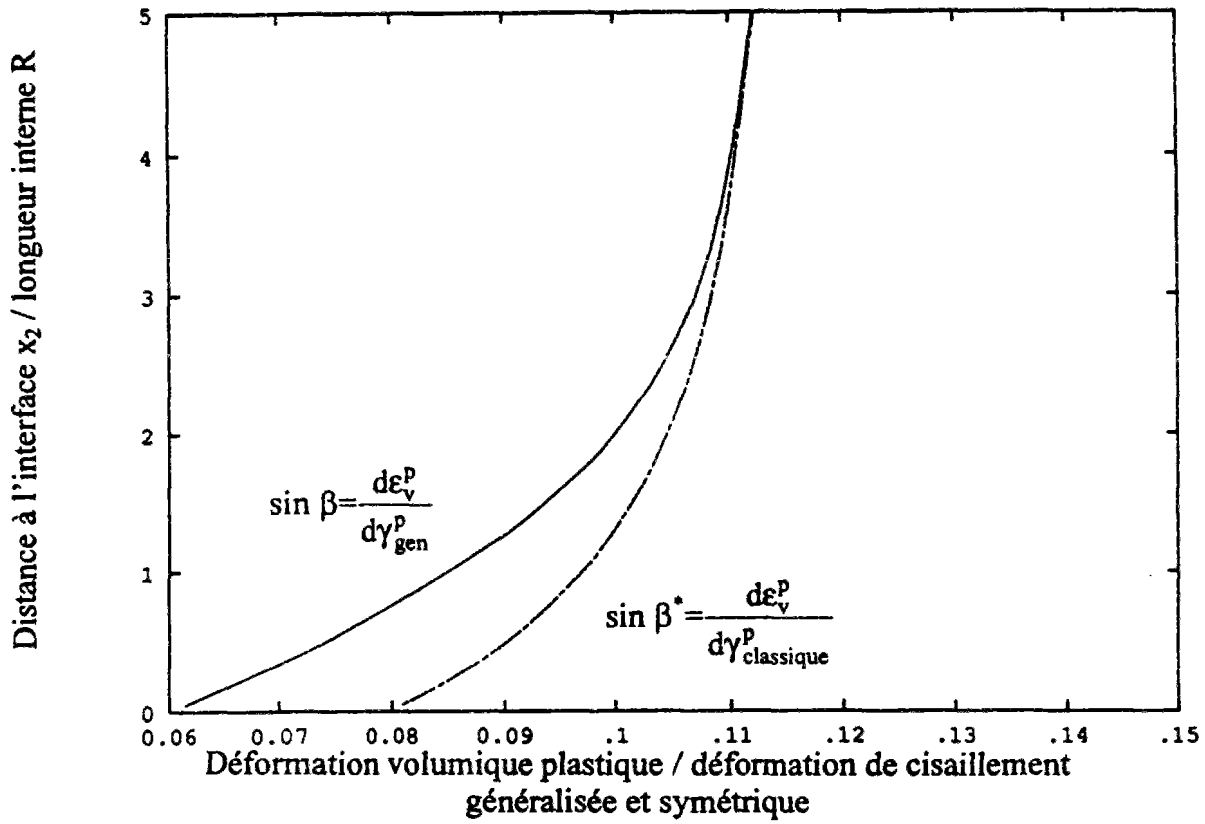


Figure A.11-86 : Profil du sinus des angles de dilatance réel sin β et apparent β* dans l'échantillon pour l'essai de Cosserat à contrainte normale constante

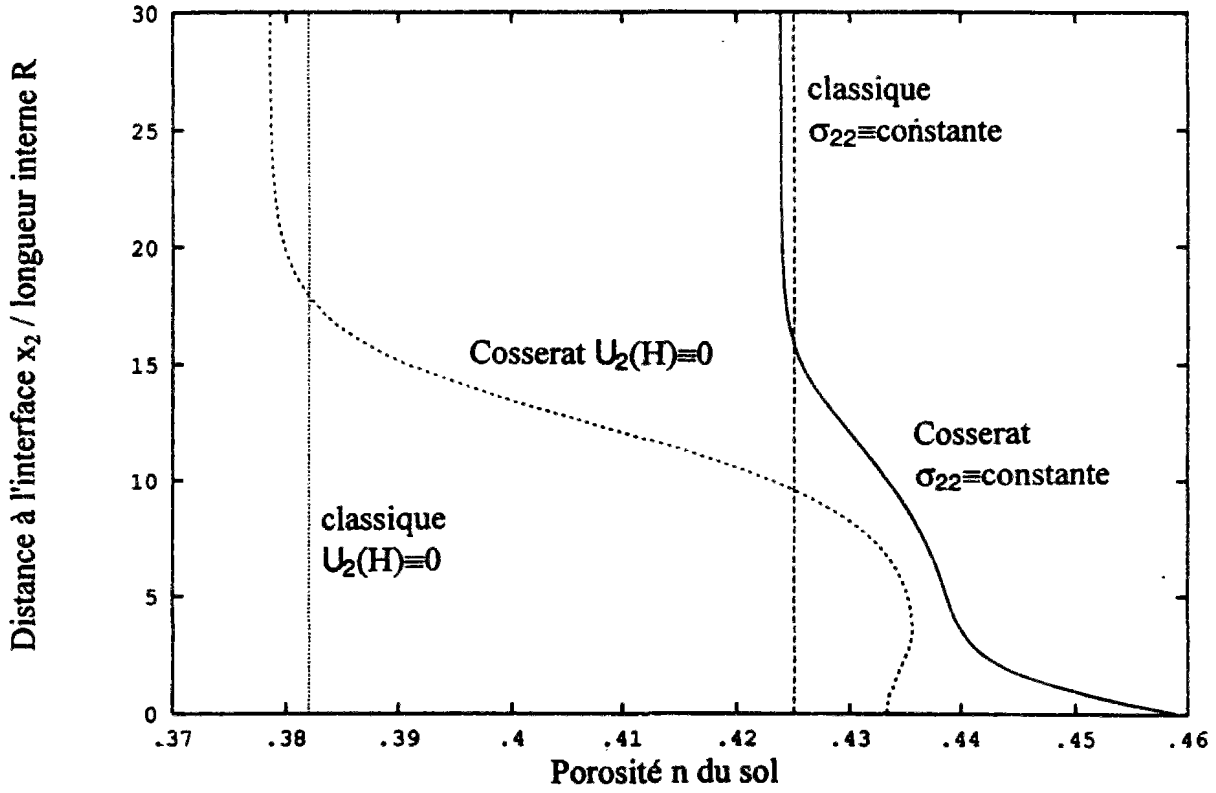


Figure A.11-87 : Profil de la porosité dans l'échantillon pour les essais de Cosserat et classiques, à contrainte normale constante et à volume constant

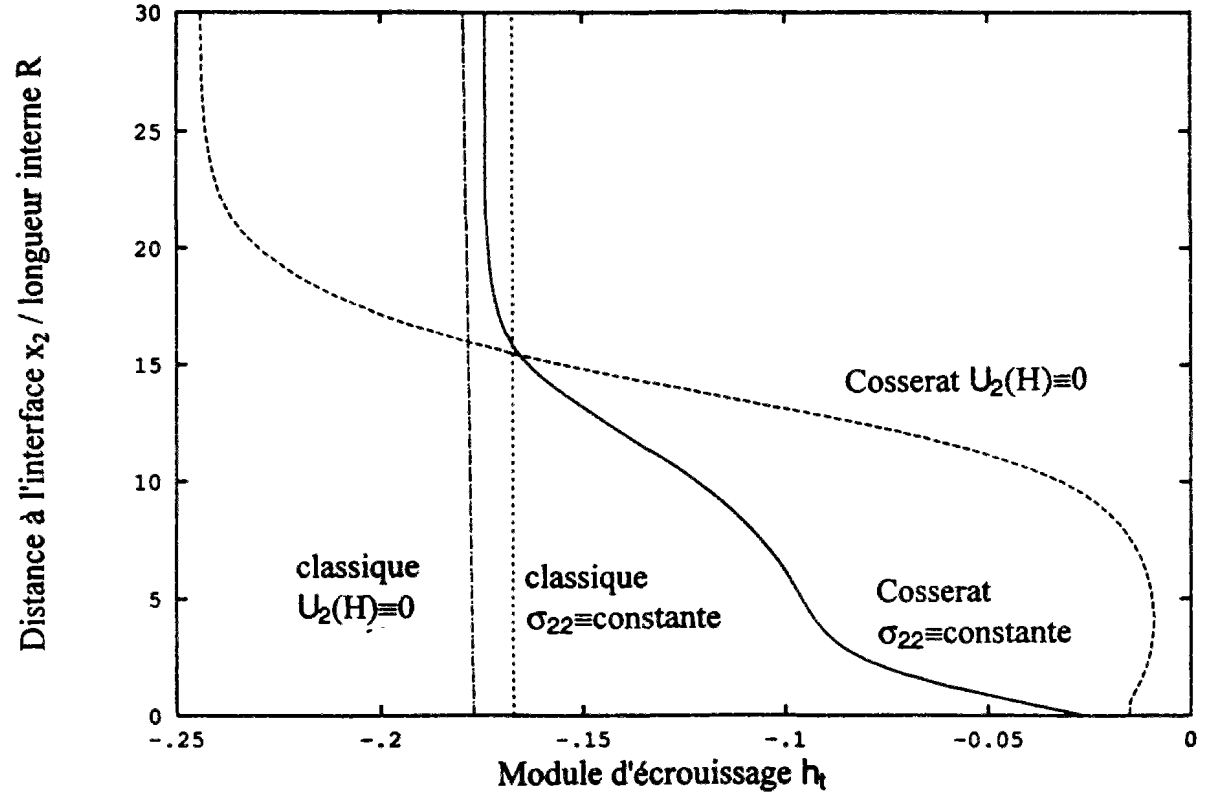


Figure A.11-88 : Profil du module d'écrouissage h_t dans l'échantillon pour les essais de Cosserat et classiques, à contrainte normale constante et à volume constant

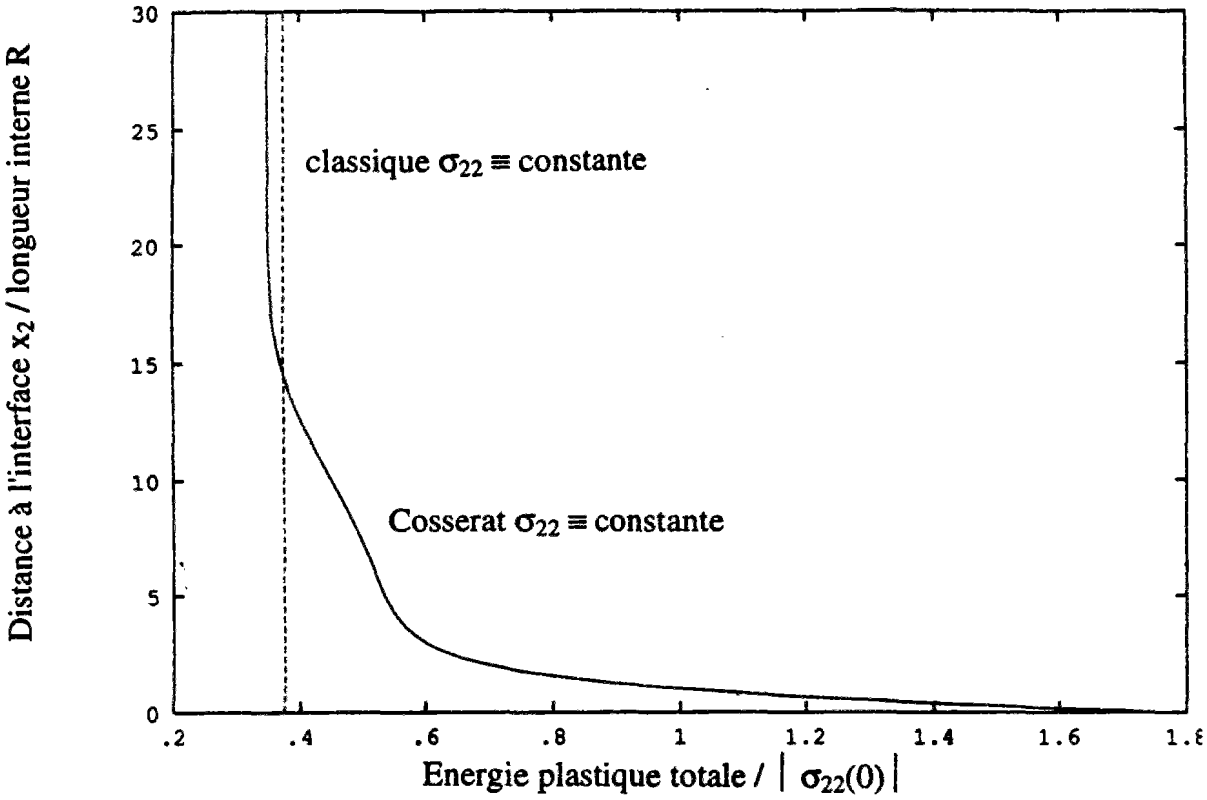


Figure A.11-89 : Profil de l'énergie plastique totale dans l'échantillon pour les essais de Cosserat et classiques, à contrainte normale constante

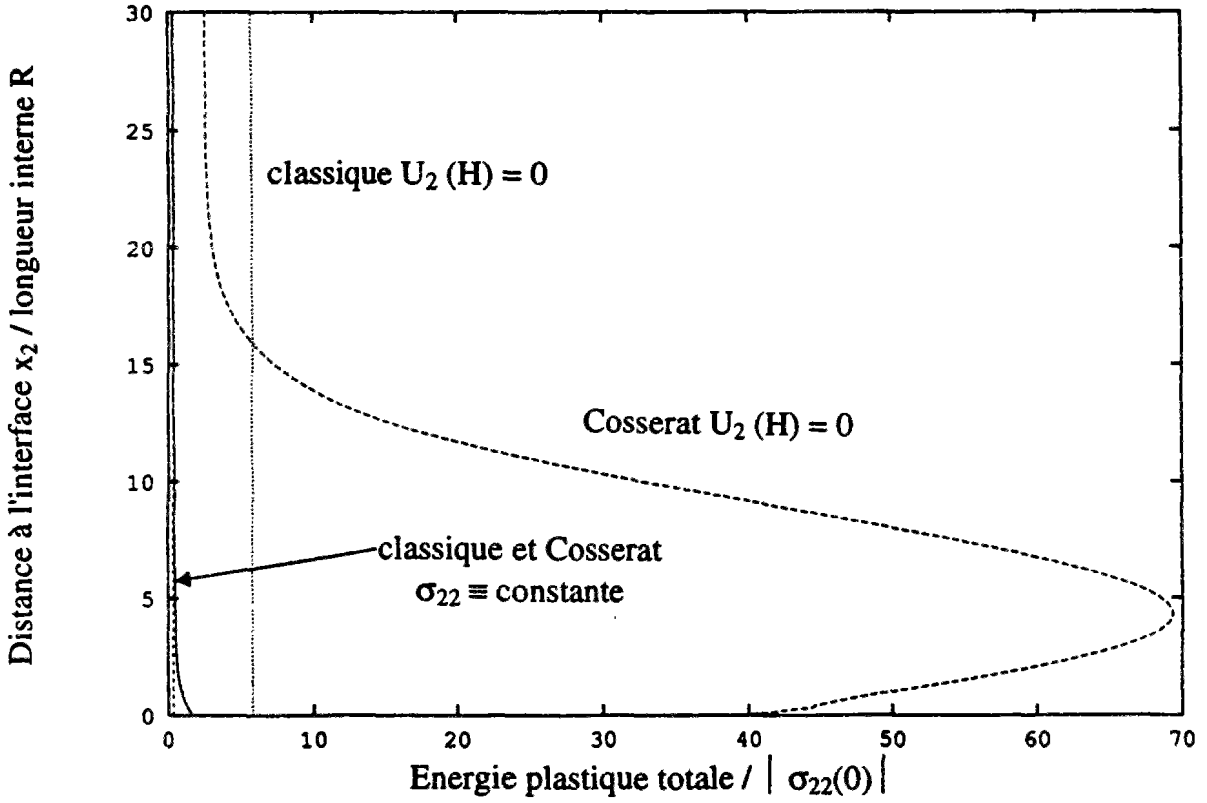


Figure A.11-90 : Profil de l'énergie plastique totale dans l'échantillon pour les essais de Cosserat et classiques, à contrainte normale constante et à volume constant

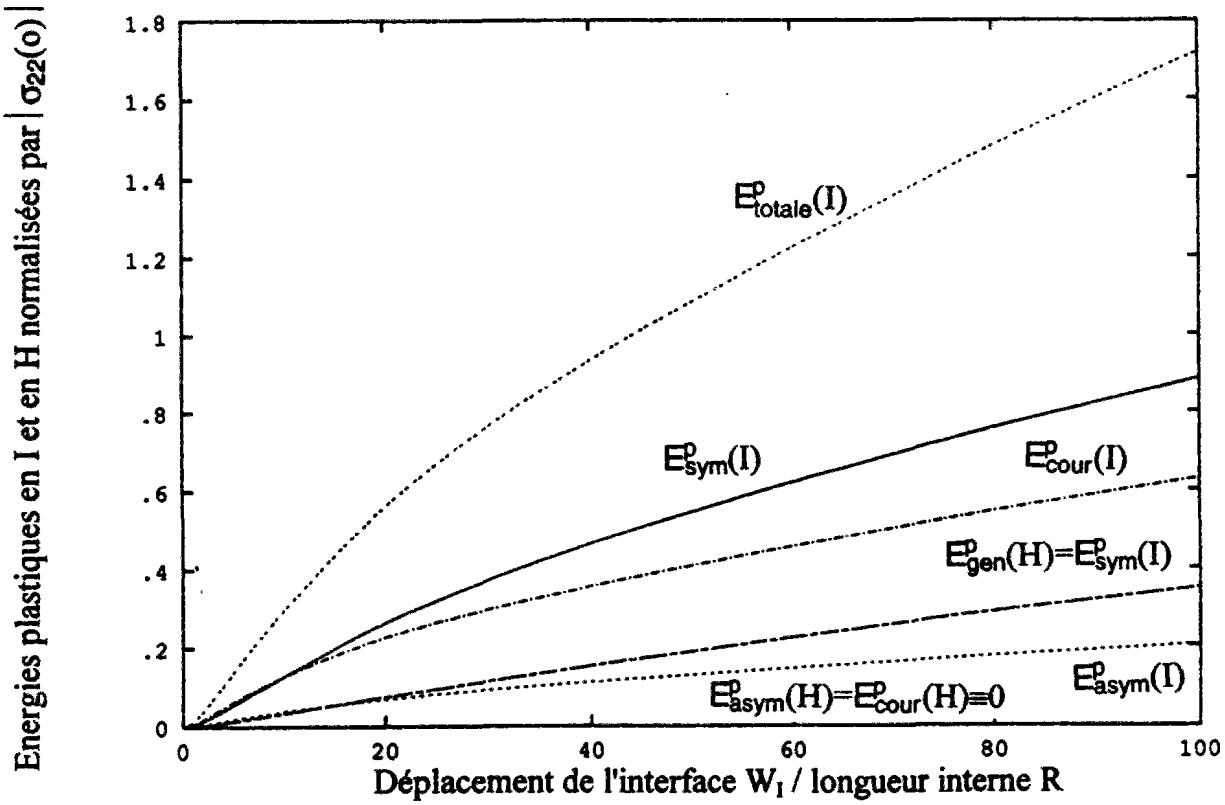


Figure A.11-91 : Evolution des énergies plastiques en I et en H,
pour l'essai de Cosserat à contrainte normale constante

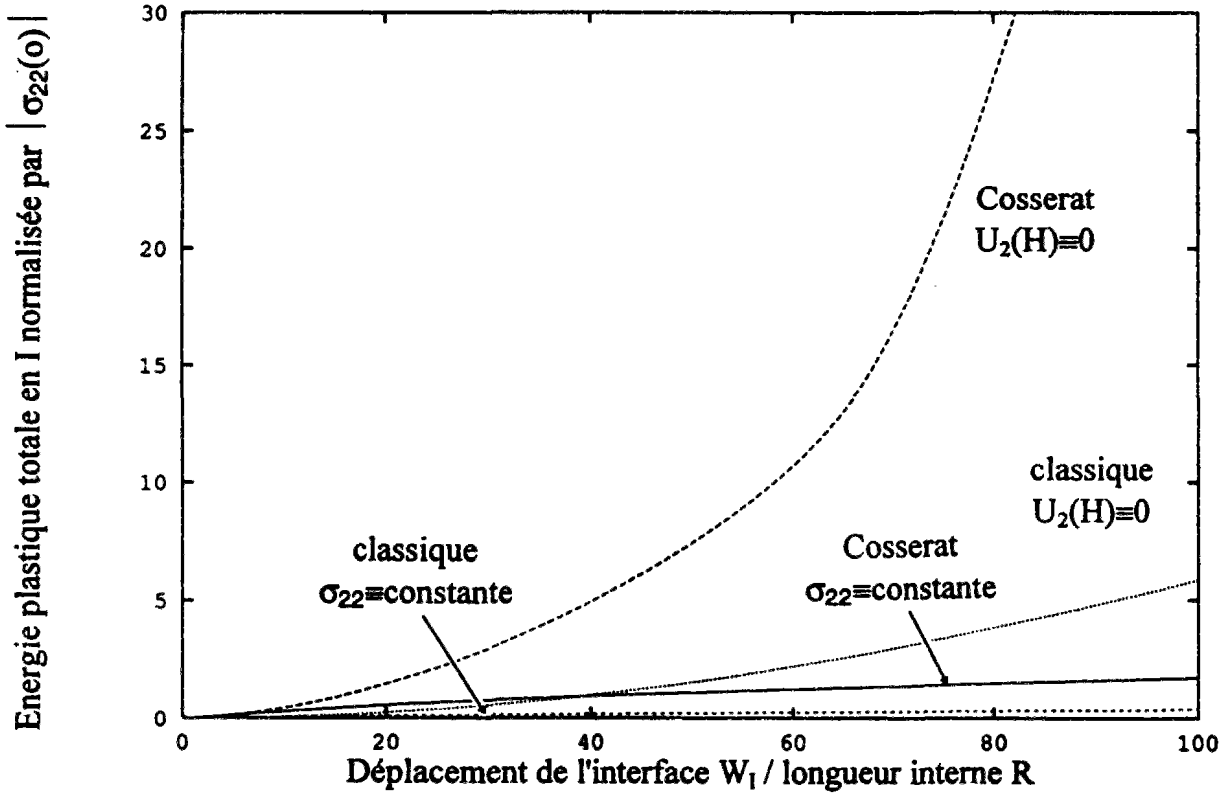


Figure A.11-92 : Evolution des énergies plastiques en I et en H,
pour les essais de Cosserat et classiques, à contrainte normale constante et à volume constant

11.2.3.5 Epaisseur des couches d'interface

L'évolution des zones plastiques est présentée sur la figure A.11-93 pour l'essai à contrainte constante et sur la figure A.11-93 pour l'essai à volume constant. Les limites de zones plastiques ont été définies à partir de l'état de contraintes aux points de Gauss.

Dans l'essai à contrainte normale constante, la couche d'interface correspond initialement à la zone plastique en écrouissage positif près de l'interface. Cependant, pour un déplacement d'interface d'environ 12 R, la couche d'interface plastique passe d'un régime d'écrouissage positif à un régime négatif. Autour de 22 R de déplacement, la couche est développée à son premier maximum et elle est toute en écrouissage négatif. Ensuite, l'épaisseur diminue légèrement puis se remet à croître pour atteindre une valeur de 13.77 R pour un déplacement d'interface W_I de 100 R. Il faut noter l'existence, pour un déplacement W_I entre 4 et 16 R, d'une petite zone élastique en décharge près de l'interface. Elle est due à la décharge trop rapide du sol. Autour de 16 R, cette zone disparaît et le sol se remet en charge plastique. Dans la théorie du second gradient, Vardoulakis et al. (1992) ont observé une zone élastique entre les deux zones plastiques, durcissante et radoucissante. Cette zone n'existe pas dans le cas présent, les limites inférieure durcissante et supérieure radoucissante coïncident.

Pour l'essai à volume constante (U_2 (H) = 0), le même profil d'évolution est observé (figure A.11-94). Comme différences, il faut noter que le premier pic d'épaisseur est atteint beaucoup plus tard, autour de 50 R de déplacement d'interface. De plus, la zone élastique en décharge près de l'interface existe plus longtemps, jusqu'à environ 35 R.

11.2.3.6 Comparaisons avec les bandes de cisaillement

Il est intéressant de comparer les épaisseurs de bandes de cisaillement et des couches d'interface, tout en gardant à l'esprit que les résultats obtenus par Vardoulakis et Sulem (1994) ont été obtenus semi-analytiquement, sur une configuration très simple et idéale. Il faut noter, notamment, que la structure de la solution qu'ils construisent pour les bandes de cisaillement est très simple, les variables varient en sinus ou cosinus au travers de la bande de cisaillement. C'est ce type de solution qui a été obtenu pour les couches d'interface dans le cisaillement d'un milieu de Cosserat rigide plastique à deux critères. Dans le cas présent, il faut noter la complexité de la structure de la solution au sein de la couche d'interface.

La demi-épaisseur de bande, mesurée dans le sable d'Osterkerde, est égale à environ 18,5 R, si l'on assimile le rayon moyen des grains R_g à la longueur interne R. Le modèle statique prédit une demi-bande d'épaisseur 7,15 R tandis que le modèle cinématique prédit une demi-épaisseur de 14.82 R. Il existe donc un coefficient d'à peu près 2 entre les deux solutions. Ces valeurs correspondent à l'épaisseur minimale, quand la bande de cisaillement émerge à un niveau de déformation de 11,6%. C'est le modèle d'écrouissage 1.3 qui a été utilisé pour ces simulations de bandes.

Pour ce qui concerne les épaisseurs de couches d'interface simulées avec le même modèle d'écrouissage, la différence entre les modèles statique et cinématique est plus faible. On observe pour le modèle cinématique une couche 50% plus épaisse que le modèle statique, au pic ainsi que pour un déplacement W_I de 100 R. Il faut noter que la condition à la limite extérieure a une influence non négligeable sur l'épaisseur au pic mais moindre pour de grands déplacements d'interface. La comparaison entre les couches d'interface et les bandes de cisaillement doit être faite sur la base d'essais d'interface à contrainte normale constante, ce qui correspond le plus aux conditions aux limites d'un essai biaxial.

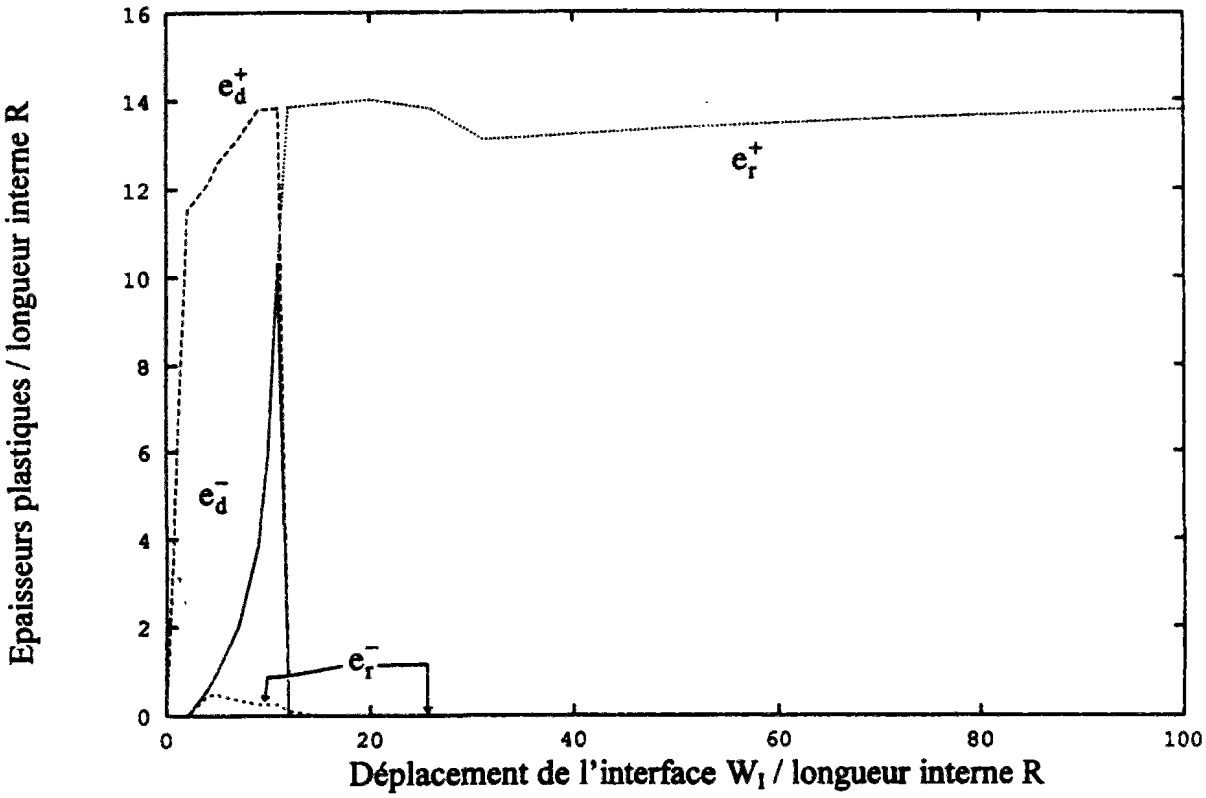


Figure A.11-93 : Evolution des épaisseurs plastiques, durcissante et radoucissante, en fonction du déplacement d'interface W_I pour l'essai de Cosserat à contrainte normale constante

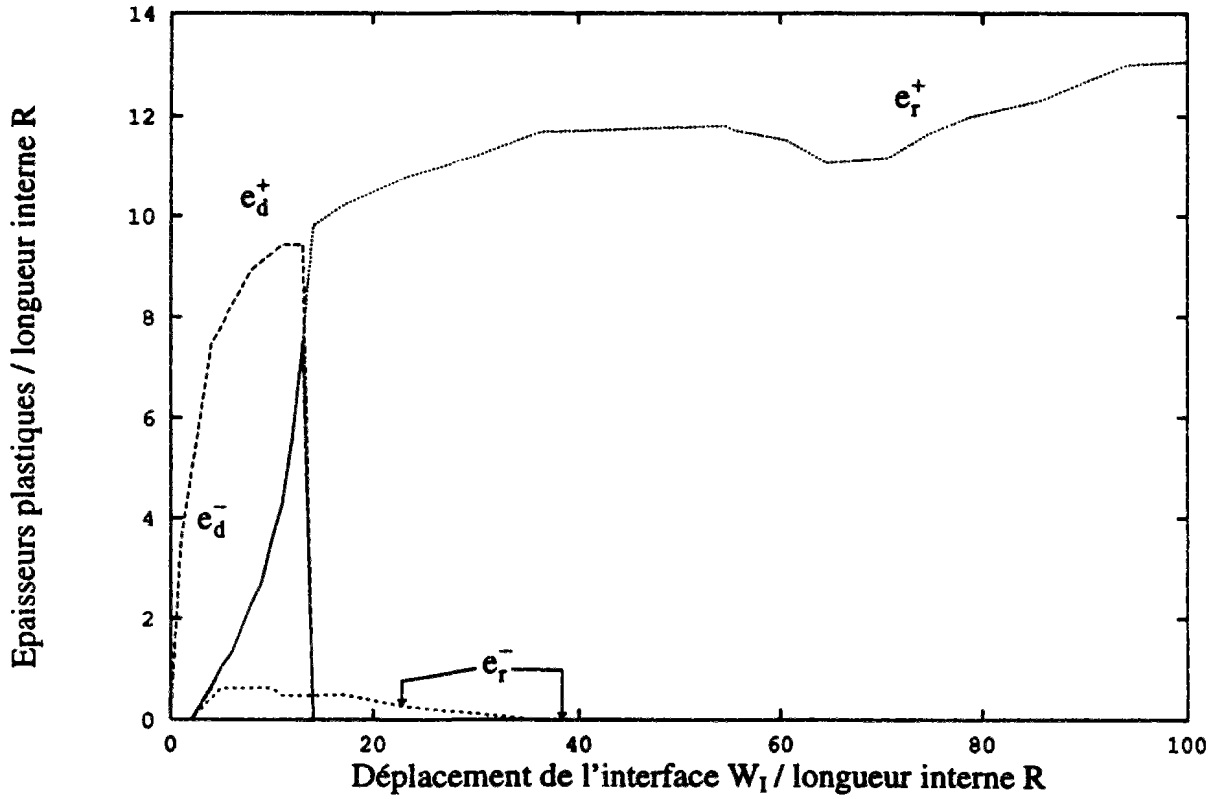


Figure A.11-94 : Evolution des épaisseurs plastiques, durcissante et radoucissante, en fonction du déplacement d'interface W_I pour l'essai de Cosserat à volume constant

Tableau A.11-10 : Synthèse des résultats expérimentaux et numériques sur les bandes de cisaillement dans du sable d'Osterkerde

Demi-épaisseur dB / rayon moyen des grains R_e Vardoulakis (1989), Vardoulakis et Sulem (1995)	
épaisseur mesurée par rayons X	18,5
épaisseur calculée avec le modèle statique (modèle d'écrouissage 1.3)	7,15 (γ^p = 11,6%)
épaisseur calculée avec le modèle cinématique (modèle d'écrouissage 1.3)	14,82 (γ^p = 11,6%)

Tableau A.11-11 : Synthèse des résultats numériques obtenus dans la présente étude sur les couches d'interface dans du sable d'Osterkerde

Epaisseur de couche d'interface calculée dans la présente étude (modèle d'écrouissage 1.3)		
modèle	épaisseur au pic et déplacement d'interface W_I correspondant	épaisseur pour un déplacement d'interface W_I de 100 R
modèle cinématique et essai à contrainte σ_{22} constante	e_{pic} / R = 14,02 pour W_I = 20 R	e (W_I = 100 R) / R = 13,77
modèle cinématique et essai à volume constant : U_2 (H)	e_{pic} / R = 11,81 pour W_I = 50 R	e (W_I = 100 R) / R = 13,07
modèle statique et essai à contrainte σ_{22} constante	e_{pic} / R = 8,76 pour W_I = 25 R	e (W_I = 100 R) / R = 8,57

La comparaison entre la demi-épaisseur de la bande de cisaillement dans un essai biaxial avec l'épaisseur de la couche d'interface dans un essai de cisaillement simple plan à contrainte normale constante, pour des modèles de comportement identiques et des niveaux de contraintes similaires, est présentée dans le tableau A.11-12. Les valeurs calculées sont étonnamment proches et suggèrent une similitude très forte entre ces deux phénomènes de localisation. Il est difficile de comparer les niveaux de déformations auxquels ces épaisseurs sont obtenues, dans la mesure où les essais biaxiaux sont homogènes jusqu'au point de bifurcation où apparaissent les bandes de cisaillement, tandis que les essais d'interface sont fortement hétérogènes.

Tableau A.11-12 : Comparaison de la demi-épaisseur de bande de cisaillement à l'essai biaxial avec l'épaisseur de la couche d'interface à l'essai de cisaillement plan pour les modèles, cinématique et statique, et une loi d'écrouissage 1.3

	Demi-épaisseur de la bande de cisaillement dans un essai biaxial drainé	Epaisseur de la couche d'interface dans un essai de cisaillement plan à contrainte constante
modèle cinématique (modèle d'écrouissage 1.3)	$dB_{min} / R = \mathbf{14,82}$ ($\gamma^p = 11,6\%$)	$e_{DIC} / R = \mathbf{14,02}$ pour $W_I = 20\ R$
modèle statique (modèle d'écrouissage 1.3)	$dB_{min} / R = \mathbf{7,15}$ ($\gamma^p = 11,6\%$)	$e_{DIC} / R = \mathbf{8,76}$ pour $W_I = 25\ R$

Les seules mesures systématiques d'épaisseurs de couches d'interface ont été réalisées par Boulon et son équipe sur du sable d'Hostun. Les valeurs mesurées expérimentalement sont du même ordre de grandeur que les simulations réalisées sur le sable d'Osterkerde. Les recherches futures devraient se concentrer, dans le futur, sur la calibration du modèle proposé, par rapport à des résultats expérimentaux obtenus aussi bien dans des essais biaxiaux que des essais de cisaillement simple plan.

Tableau A.11-13 : Synthèse des résultats expérimentaux obtenus par Boulon et al. (1993) sur les couches d'interface sur du sable d'Hostun grossier

Epaisseur de couche d'interface mesurée par Boulon et al. (1993)	
interface lisse	$e / R \approx 0$
interface rugueuse	$e / R \approx 10$
interface très rugueuse	$e / R \approx 20$

Les résultats théoriques présentés ci-dessus ont été confirmés qualitativement par les premiers essais réalisés à la boîte de cisaillement simple annulaire (photo A.11-1a) (Lerat, 1995). En particulier, l'épaisseur observée correspond à l'épaisseur donnée par le modèle cinématique (photo A.11-1b), les rotations observées sont principalement localisées au contact avec l'interface, sur une à deux rangées de grains, une très forte énergie est dissipée dans la couche d'interface par cassure des grains et formation d'une abondante poussière, qui est nettement visible en fin d'expérience puisqu'elle s'accumule sur la vitre d'observation (photo A.11-1c).

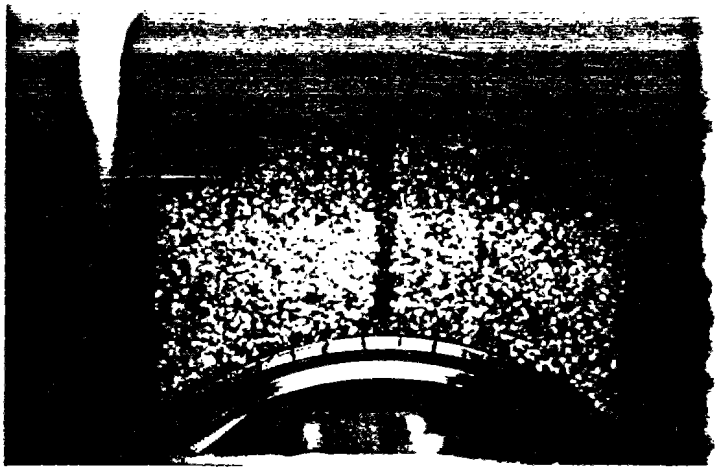


Photo A.11-1a : Echantillon avant le cisaillement

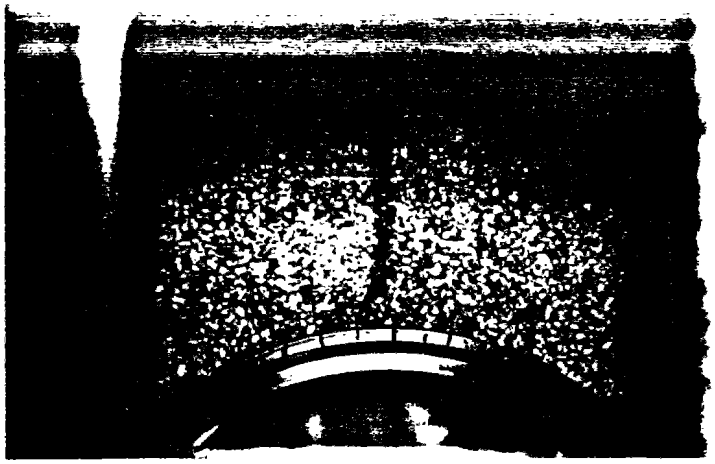


Photo A.11-1b : Echantillon durant le cisaillement

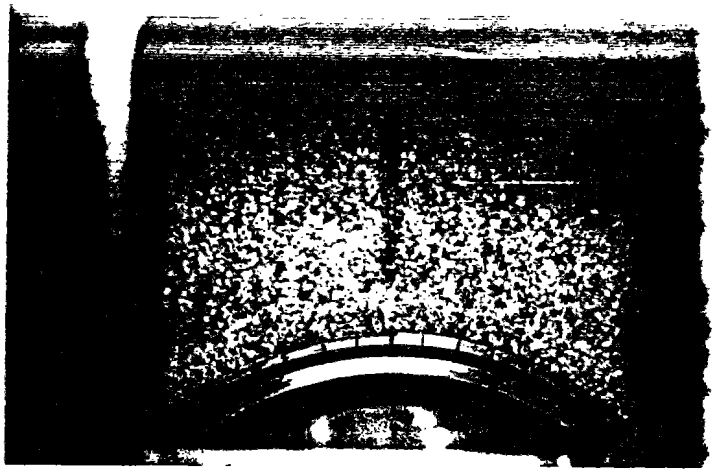


Photo A.11-1c: Echantillon en fin de cisaillement

Photos A.11-1 : Essai de cisaillement simple annulaire sur un sable grossier d'Hostun

12 Conclusion et perspectives

Les milieux de Cosserat fournissent un cadre général très intéressant dans lequel il est possible de modéliser la formation de bandes de cisaillement et de couches d'interface. Dans les deux cas, l'épaisseur des zones localisées est contrôlée par la ou les longueurs internes introduites par la loi de comportement. Les dimensions géométriques de l'échantillon et de l'interface peuvent jouer un rôle quand elles sont du même ordre de grandeur que la longueur interne. Cependant, dès que les dimensions géométriques sont nettement plus grandes que la longueur interne, l'épaisseur des bandes de cisaillement et des couches d'interfaces ne dépend plus que de la ou les longueurs internes. L'épaisseur des couches d'interface est maximale pour une rugosité maximale de l'interface. La rugosité est définie à partir de l'amplitude des termes de Cosserat imposés par la nouvelle condition à la limite en interface.

Des trois lois de comportement étudiées, linéaire élastique, rigide parfaitement plastique et élastoplastique avec écrouissage, nous pouvons tirer les enseignements suivants. L'élasticité est insuffisante pour modéliser les couches d'interface car elle ne donne naissance qu'à des couches limites. La plasticité est par contre suffisante. Dans le cas d'un modèle rigide parfaitement plastique à deux critères, la couche d'interface est la couche plastique par rapport aux deux critères. La limite avec le reste de l'échantillon est caractérisée par une discontinuité du comportement, des tenseurs de contraintes et couples contraintes ainsi que du gradient du déplacement tangentiel. La zone tampon est une zone rigide par rapport au critère microscopique. C'est donc une zone classique où la rotation propre est égale à la rotation d'ensemble du milieu. L'épaisseur de l'interface ne dépend que du rapport des coefficients plastiques h_1-h_2/h_3 , de la longueur interne R et de la rugosité en interface mesurée en terme de couple contrainte.

Dans le cas d'un modèle élastoplastique à un critère, la couche d'interface est la couche plastique en contact avec l'interface. La limite avec le reste de l'échantillon est caractérisée, là aussi, par une discontinuité du comportement, des tenseurs de contraintes et couples contraintes. Par contre, le gradient des déplacements est continu pour la solution numérique que nous avons développée à l'aide de la méthode des éléments finis. La zone tampon est élastique. Même si les termes de Cosserat y sont très faibles, ils ne sont pas nuls. Formellement, cette zone n'est pas classique. Le nombre de paramètres qui influent sur l'épaisseur de la couche d'interface est plus important que dans le cas rigide parfaitement plastique. En particulier, il faut noter que les coefficients élastiques h_i ont une influence sur l'épaisseur de la couche aussi importante que celle des coefficients plastiques h_i. Quand le coefficient élastique h_1-h_2 augmente, l'épaisseur diminue. Par contre, quand le coefficient plastique h_1-h_2 augmente, l'épaisseur augmente. Ces variations contradictoires ne sont pas en faveur du modèle élastoplastique de Mühlhaus et Vardoulakis (1987) où les coefficients h_i , élastiques et plastiques, sont confondus.

La condition à la limite extérieure, en contrainte normale constante ou en déplacement normal imposé nul, a une influence très importante sur l'épaisseur de la couche d'interface. Pour un angle de dilatance non nul et positif, l'épaisseur est nettement plus importante pour un essai à contrainte normale constante que pour un essai à volume global constant. Ceci peut s'expliquer par l'empêchement du sol à dilater mais aussi par l'augmentation de la contrainte normale durant un essai à volume constant. En effet, si l'on fait varier la contrainte normale entre 100 et 800 kPa, pour des essais à contrainte normale imposée, on trouve une diminution de 11% de l'épaisseur d'interface. Ce résultat est à rapprocher de ceux obtenus par Desrues et Hammad (1992) pour les bandes de cisaillement.

Des essais de cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat élastoplastique, avec ou sans écrouissage, pour des valeurs de f_2 physiquement acceptables, nous pouvons tirer un certain nombre d'enseignements utiles dans le futur, aussi bien pour des développements théoriques que pour des études expérimentales. Au sein d'une couche d'interface, les rotations ne sont importantes que sur quelques longueurs internes, de l'ordre de 4 R, c'est à dire environ 2 grains, tandis que la couche d'interface s'étend sur 14 R, c'est à dire environ 7 grains. La rotation s'amortit donc beaucoup plus vite que le déplacement tangentiel. L'observation et l'analyse des essais d'interface doit tenir compte de cet amortissement très rapide de la rotation par rapport au déplacement tangentiel. Alors que les contraintes antisymétriques n'existent que sur une épaisseur d'environ 4 R, les couples contraintes existent sur toute l'épaisseur de la couche d'interface. Les termes de Cosserat existent donc sur toute l'épaisseur de l'interface même s'ils ne sont visibles que près de l'interface.

La déformation plastique de cisaillement généralisé, qui mesure le cisaillement des grains, en translation et en rotation, atteint des valeurs très importantes au sein de la couche d'interface pour de petits déplacements. Pour un déplacement d'interface de l'ordre de 100 R, des déformations de cisaillement généralisé de l'ordre de 400% ont été calculées, ce qui rend indispensable une formulation en grandes déformations.

En correspondance, une déformation volumique plastique très importante se développe et la porosité évolue de manière importante. Si l'on calcule l'angle de dilatance correspondant à partir seulement des termes symétriques de cisaillement, on obtient un angle de dilatance apparent nettement plus fort que l'angle de dilatance réel.

L'énergie plastique totale dissipée en interface est plus grande que l'énergie plastique du milieu continu correspondant, de plusieurs ordres de grandeur. Ce sont les termes symétriques et de courbure qui sont prépondérants tandis que l'énergie plastique antisymétrique est relativement faible. Le pouvoir dissipatif des couches d'interface est donc énorme, ce qui explique la cassure très importante des grains au sein des couches d'interface.

La réponse globale des essais de cisaillement simple plan du milieu de Cosserat et du milieu classique sont très proches, quand on ne s'intéresse qu'aux mesures en I et H. Par contre, au sein de l'échantillon, des différences énormes existent, notamment, dans la couche d'interface.

Sur les six conditions aux limites nécessaires pour définir complètement le problème aux limites du cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat, cinq sont classiques, une est de type Cosserat. Il suffit de changer cette dernière en condition classique pour obtenir le comportement homogène classique du matériau. Dans ce cas là, l'angle de frottement global obtenu est l'angle de frottement interne. Si cette dernière condition à la limite est de type Cosserat, une couche d'interface se forme. Ses caractéristiques et son comportement mécanique dépendent de toutes les données du problème aux limites. L'angle de frottement global obtenu est appelé classiquement l'angle de frottement de l'interface. Nous avons trouvé qu'il était systématiquement inférieur à l'angle de frottement interne du matériau testé, ce qui concorde avec les observations expérimentales. La prise en compte de la microstructure, aussi bien dans la loi de comportement que dans les conditions aux limites, conduit donc à un affaiblissement du matériau.

Dans le cas du modèle cinématique élastoplastique de Mühlhaus et Vardoulakis (1987), avec ou sans écrouissage, nous avons trouvé une épaisseur maximale de la couche d'interface sensiblement égale à l'épaisseur de la demi-bande de cisaillement calculée avec le même modèle élastoplastique. Ce résultat corrobore l'idée intuitive qu'une couche d'interface d'épaisseur maximale correspond à une demi-bande de cisaillement.

Partie B

Modélisation des effets du gel : application au calcul en déformation des murs de La Clusaz

Se le palle non cadono come diciano su danno, diremo de non parliamo di elle.

Galileo

Si les boulets de canon ne tombent pas comme je le dis, qu'ils soient maudits, je n'en parlerai pas.

Galilée

Résumé de la Partie B

L'influence mécanique du gel sur une paroi ancrée par tirants actifs ou un mur en sol cloué peut être néfaste à la structure dans la mesure où les gonflements du sol peuvent engendrer dans les inclusions des augmentations de traction très importantes. Les murs de La Clusaz sont particulièrement intéressants de ce point de vue là (Guilloux et al., 1983). En effet, sur le même site, deux types d'ouvrages de soutènement ont été construits, instrumentés et soumis aux températures rudes de l'hiver 1980-1981. Sur les deux ouvrages, des gonflements de l'ordre de 4 cm et 1 cm, respectivement pour la paroi ancrée et le mur en sol cloué, ont été observés après une période de gel d'environ 2 mois. Des augmentations de traction, de l'ordre de 40% après 71 jours de gel, ont été mesurées sur les trois tirants d'une section de la paroi berlinoise ancrée, exposée au Nord. Sur le clou No. 15 d'une section du mur en sol cloué, exposée au Nord, la traction au parement a augmenté avec une amplitude nettement plus forte, d'environ 715%, passant de 40 kN à 326 kN après 63 jours de gel. Les tirants qui avaient été prétendus à 0,75 T_G plastifièrent. Les têtes de clous, quant à elles, poinçonnèrent le parement sur une profondeur d'environ 1 cm.

Les phénomènes qui interagissent dans un ouvrage de soutènement soumis au gel sont de trois types : thermique, hydraulique et mécanique, ce qui constitue une première difficulté. Une deuxième complexité provient de la géométrie bidimensionnelle des ouvrages. Afin de simplifier le problème étudié, nous avons considéré l'équilibre unidimensionnel d'une tranche de sol, ancrée par un lit de tirants ou renforcée par un lit de clous et confinée par la section de parement correspondante.

Le principe de la modélisation développée est, pour un intervalle de temps donné, de calculer la nouvelle profondeur de gel, le nouveau profil de températures derrière le mur, puis le gonflement total induit sur le front de gel. Ce gonflement est supposé être concentré sur le front de gel tandis que le parement et le sol déjà gelé se déplacent ensemble comme un bloc monolithique. Parallèlement, le sol non gelé subit une compression oedométrique. Ce profil de déplacements imposés par le gel au sol modifie l'équilibre du tirant ou du clou. Le nouvel état d'équilibre est calculé à partir de l'équation d'équilibre unidimensionnelle de l'inclusion qui interagit avec le béton, le sol gelé, le sol en train de geler et le sol non gelé par l'intermédiaire de fonctions de transfert de charge. Le nouvel état d'équilibre mécanique étant connu, les variables thermiques et hydrauliques sont mis à jour en tenant compte des nouvelles variables mécaniques, ce qui permet de réintroduire le couplage. Comme les phénomènes mis en jeu sont fortement non linéaires, le problème est résolu incrémentalement. Cependant, dans un cas particulier, il est possible de développer une solution analytique complète aussi bien pour les tirants que pour les clous.

La pénétration du gel dans la couche de sol est modélisée par la loi de Stefan, dans l'hypothèse d'une température à la surface du sol constante, et par la loi de Portnov, dans le cas contraire. Dans les deux cas, l'évolution de la profondeur de gel est caractérisée par un seul coefficient, le coefficient de pénétration, qui est déterminé à partir des mesures de profondeur de gel réalisées sur le site en fin d'hiver. Le profil de températures est supposé linéaire par zones de matériaux, gelés ou non gelés.

A tout instant, connaissant la profondeur de gel, les conductibilités thermiques des différents matériaux ainsi que les températures initiale dans le sol et en surface du parement, le profil de températures est connu dans tout le soutènement. Plusieurs jeux d'hypothèses portant sur les températures à la surface du parement et dans le sol en contact avec le parement ainsi que sur l'évolution de la profondeur de gel sont considérés (cas I, IIa, IIb, IIc et IId). Le cas IIa est le plus intéressant mathématiquement car il permet de développer des solutions analytiques. Il repose sur l'hypothèse d'une température dans le sol en contact avec le béton, constante et égale à la température moyenne réelle.

Les gonflements sont modélisés dans le cadre de la théorie du Potentiel de Ségrégation (Konrad et Morgenstern, 1980). Cette théorie, qui a été développée pour des applications pratiques, repose sur une analyse thermodynamique rigoureuse. Le gonflement total du sol pendant un intervalle de temps se décompose en deux termes : (1) l'augmentation de volume due au gel de l'eau interstitielle présente initialement dans le sol et (2) l'apport et l'augmentation de volume dus au gel de l'eau aspirée vers le front de gel. Le gonflement des lentilles de glace dépend du gradient de températures dans la zone gelée et de la pression extérieure P_{ext} , appliquée par le clou ou le tirant sur le front de gel. Deux paramètres sont nécessaires : le potentiel de ségrégation à pression extérieure nulle, noté SP_0 , et un coefficient b, dont l'inverse 1/b correspond à la pression d'arrêt des gonflements. Le coefficient SP_0 a été déterminé à partir des données dans la littérature tandis que le coefficient b a été calculé à partir des mesures réalisées sur le tirant N de la paroi ancrée.

Le champ de déplacements imposés par le gel au sol est décomposé en trois zones : une première zone où le parement et le sol déjà gelé sont supposés se déplacer d'un seul bloc, une deuxième zone où le sol en train de geler est soumis à une extension uniformément répartie et une troisième zone où le sol non gelé subit une compression oedométrique. Dans le cas d'un tirant, les deux premières hypothèses n'entrent pas en jeu puisque le tirant n'interagit pas avec la zone de sol en train de geler ou déjà gelé. La tête du parement suit simplement le gonflement total du sol diminué de la compression oedométrique du sol non gelé. Dans le cas d'un clou, la forme du profil de déplacements détermine les zones où le clou sera soumis aux plus forts cisaillements.

Les équations incrémentales d'un lit de tirants soumis au gel sont développées. Dans le cas IIa où la température dans le sol au contact avec le parement est supposée constante et la pénétration du gel suit une loi de Stefan, il est possible de développer une solution analytique en traction et déplacement.

Les équations incrémentales d'un lit de clous soumis au gel sont ensuite développées. L'interaction entre, d'une part, le clou, et, d'autre part, le parement, le sol gelé et le sol non gelé, est modélisée par plusieurs fonctions de transfert de charge. Pour le béton et le sol non gelé nous avons choisi le modèle élastoplastique de Frank et Zhao (1982). Pour le sol gelé, nous avons été amenés, du fait des spécificités du problème, à formuler une fonction de transfert de charge nouvelle. Des trois types de fluages : primaire, secondaire et tertiaire, seuls les deux premiers sont modélisés. L'approche de Hult (1966) consistant à linéariser les courbes de fluage a été retenue. Le déplacement relatif entre le sol et le clou est décomposé en trois termes : un déplacement pseudo-instantané réversible, un déplacement pseudo-instantané irréversible et un déplacement différé.

Dans le cas d'un mur en sol cloué où le sol est confiné, la relaxation est prépondérante. Il convient donc de séparer dans le déplacement pseudo-instantané, les termes réversible et irréversible. Dans le modèle de Johnston et Ladanyi (1972) les déplacements pseudo-instantanés, réversible et irréversible, sont modélisés globalement. Ce modèle n'est donc pas approprié au problème mais il nous a servi de base de départ pour développer une fonction de transfert de charge où (1) le déplacement pseudo-instantanée irréversible est séparé du déplacement pseudo-instantanée réversible, (2) les fonctions de transfert de charge correspondant au déplacement pseudo-instantanée irréversible et au déplacement de fluage sont dérivées de la loi de comportement du sol, de façon similaire au modèle de Johnston et Ladanyi (1972) et (3) la fonction de transfert de charge correspondant au déplacement pseudo-instantanée réversible est dérivée à partir du modèle de Frank et Zhao (1982). Les paramètres du modèle ont été estimés à partir des données dans la littérature. Le problème est résolu numériquement en discrétisant le sol et les clous en N éléments finis. Sur chaque élément, la solution exacte est développée en fonction de deux constantes d'intégration. Les 2 N constantes d'intégration sont déterminées en écrivant la continuité du déplacement normal et de la traction entre les éléments. Un programme spécifique, dénommé INGEL (INclusion soumise au GEL) a été développé à partir du logiciel PIVER qui traite des pieux chargés verticalement.

Des solutions analytiques peuvent être développées dans le cas d'une interaction linéaire élastique entre le clou et le sol et pour les hypothèses thermiques du cas IIa. Cette solution analytique permet de mettre en évidence la différence importante de comportement entre un tirant et un clou, notamment, en ce qui concerne la rigidité imposée par chacun des types d'inclusions sur le front de gel. En particulier, la rigidité d'un tirant de grande longueur libre est donnée par $E_a A_a / L_l$ où E_a est le module d'Young de l'acier, A_a la section d'acier et L_l la longueur libre. Pour un clou, la rigidité varie avec la profondeur de gel. Cependant, elle peut être approximée par $E_a A_a / a_u$ où a_u est la longueur de transfert dans le sol. Dans le cas des ouvrages de La Clusaz, la rigidité imposée par le clou sur le front de gel est de 5 à 13 fois plus grande que celles imposées par les tirants. Il en résulte que les gonflements derrière le mur en sol cloué sont beaucoup plus faibles que ceux derrière la paroi ancrée.

Avant d'aborder les calculs en déformation des ouvrages de soutènement de La Clusaz, la synthèse des donnés et mesures est présentée. Parmi les résultats importants, il convient de noter qu'à la fin de la construction du mur en sol cloué la ligne des tractions maximales, qui résulte de la stabilité d'ensemble, est située à 0,3 H du parement. Durant le gel, les gonflements du sol derrière le parement mettent les clous en tension près du parement. La ligne des tractions maximales se déplace alors vers le parement pour y rester. Le nouvel état d'équilibre qui en résulte est plus local que global. Cette observation justifie le choix d'un modèle unidimensionnel constitué d'une couche de sol ancrée par un lit de tirants ou renforcée par un lit de clous.

D'une première étude numérique sur la paroi ancrée et le mur en sol cloué de La Clusaz, il ressort que le modèle développé permet de calculer avec une relative bonne précision les tractions et les déplacements aussi bien pour la paroi ancrée que pour le mur en sol cloué. Cette précision est toute relative, compte tenu de la dispersion des mesures ainsi que des conditions difficiles dans lesquelles elles ont été réalisées. Les simulations ayant donné de bons résultats par rapport aux mesures, nous nous sommes attachés à réduire le nombre des paramètres du modèle ainsi qu'à faire varier les hypothèses thermiques.

La modélisation de l'interaction entre le clou et le sol gelé requière au minimum cinq paramètres de fluage. Le modèle présenté ci-dessus peut être qualifié de complet. Il a été comparé à un modèle, dit simplifié, dans lequel nous avons pris pour l'interaction entre le clou et le sol gelé la même fonction de transfert de charge que pour le sol non gelé. Les simulations avec le modèle simplifié nous ont donné des tractions supérieures d'environ 10 kN aux tractions maximales calculées avec le modèle complet, qui sont égales à 270 kN. Le modèle simplifié fournit donc des résultats proches de ceux du modèle complet, à quelques pour-cents près, et du côté de la sécurité.

Les données météorologiques sont de nature stochastique. Faire un calcul complet en tenant compte de toutes les variations journalières est très lourd. Nous avons donc comparé un calcul où toutes les variations journalières de température à la surface du parement sont prises en compte (cas IId) avec un calcul où la température en surface est supposée constante dans le temps et égale à la température moyenne réelle mesurée (cas IIc). A part les cinq à dix premiers jours de gel, où les variations journalières ont une influence relativement importante sur les résultats, les résultats à la fin de l'hiver sont quasiment insensibles à ces variations. Un calcul ne prenant en compte que la température moyenne en surface est donc très bon (cas IIc).

Le cas IIa donne des résultats très proches de ceux obtenus pour les calculs IIc et IId avec une différence de l'ordre de 5%. De plus, il permet de développer des solutions analytiques pour les tirants et les clous dans le cas d'un interaction élastique entre le clou et le sol.

Des simulations ont été réalisées pour les tirants ainsi que pour un clou en utilisant les jeux d'hypothèses IIa, IIc et IId. Les valeurs calculées pour les tirants sont en très bon accord avec les mesures, sur la première moitié de l'hiver, et diverge sensiblement, en fin d'hiver. En ce qui concerne le clou, les tractions maximales calculées sont légèrement plus fortes que les mesures durant tout l'hiver. Le déplacement calculé du parement est, par contre, en très bon accord avec les mesures en début d'hiver tandis qu'en fin d'hiver des divergences sensibles sont observées. Ce phénomène peut être attribué à une dérive dans le temps des jauges utilisées sur le site dans des conditions climatiques difficiles.

En l'absence de méthode de calcul permettant de déterminer les augmentations de traction dans les clous sous l'effet du gel, il est recommandé actuellement d'isoler le parement par un matériau non gélif (Recommandations CLOUTERRE 1991). La modélisation proposée permet de calculer ces surtensions ainsi que les déplacements du parement correspondant. Nous avons donc réalisé une étude paramétrique sur deux types de dispositions constructives qui permettent de réduire les surtensions dans les clous. Une première disposition consistant à rajouter des clous courts de 2 m entre les clous longs de 9 m qui assurent la stabilité d'ensemble a été étudiée. La deuxième disposition étudiée consiste à rajouter en tête de chaque clou une longueur libre, qui peut être faible, de l'ordre de 0,5 m, de manière à éviter que le front de gel n'intersecte la longueur scellée, ou beaucoup plus longue et pouvant aller jusqu'à 9 m. Il faut noter que le simple fait de laisser en tête des clous une longueur libre de 0,5 m permet de réduire de 21% les tractions. Pour une longueur totale de clous supplémentaires faible, la deuxième disposition est la plus économique, tandis que pour une longueur plus grande, la première disposition devient la plus économique.

Sommaire de la Partie B

1 Introduction et bibliographie 11

2 Calcul de la profondeur de gel et du profil de température derrière un mur de soutènement 17
2.1 Profondeur de gel derrière un mur de soutènement 17
2.1.1 Synthèse bibliographique 17
2.1.1.1 Problème étudié 17
2.1.1.2 Formules analytiques 21
2.1.2 Validité des formules analytiques 23
2.1.3 Prise en compte du parement 25
2.2 Profil de température derrière un mur de soutènement 27
2.2.1 Equations 27
2.2.2 Modélisation 28
2.3 Conclusion de l'étude bibliographique sur la thermique 29
2.3.1 Lois de pénétration du gel 29
2.3.2 Jeux d'hypothèses considérées 30
2.3.2.1 Cas I 30
2.3.2.2 Cas IIa 30
2.3.2.3 Cas IIb 31
2.3.2.4 Cas IIc 31
2.3.2.5 Cas IId 32
2.4 Détermination des paramètres thermiques pour le site de La Clusaz 32
2.4.1 Indice de gel et température moyenne en surface 32
2.4.1.1 Estimations a priori 33
2.4.1.2 Calculs à partir des données météorologiques 35
2.4.1.2.1 Paroi berlinoise ancrée 35
2.4.1.2.2 Mur en sol cloué 36
2.4.2.1 Formule de Stefan 40
2.4.2.2 Formule de Portnov 40
2.4.2.3 Simulations pour les différents cas 40
2.4.3 Profile de température dans le sol 44
2.4.3.1 Température initiale dans le sol 44
2.4.3.2 Coefficients de conductibilité thermique 44
2.4.3.2 Simulations numériques 44

3 Calcul des gonflements du sol sous l'action du gel 46
3.1 Etude bibliographique 46
3.2 Calcul des gonflements 49
3.3 Détermination du potentiel de ségrégation 50
3.3.1 Influence du taux de refroidissement 50
3.3.2 Influence de la succion 50
3.3.3 Influence de la pression extérieure 50
3.4 Valeurs typiques des paramètres 53
3.5 Détermination des paramètres à partir de corrélations 54
3.6 Calcul des paramètres à partir des mesures 56
3.7 Synthèse et modélisation adoptée 57

4 Champ de déplacements imposé par le gel au sol 58
4.1 Observations 58
4.2 Compression oedométrique du sol non gelé 58
4.3 Gonflement de la zone de sol en train de geler 61
4.4 Déplacement du bloc rigide parement - sol gelé 61

5 Equilibre d'une tranche de sol ancrée par un lit de tirants 62
5.1 Hypothèses de calcul et équations incrémentales 62
5.2 Synthèse et algorithme de résolution numérique 66
5.3 Solution analytique 66

6 Equilibre d'un lit de clous renforçant une tranche de sol 69
6.1 Etat de contraintes dans le sol 69
6.2 Equilibre d'une inclusion interagissant avec le sol sur toute sa longueur 69
6.3 Fonctions de transfert de charge entre l'inclusion et le sol gelé 72
6.4 Fonctions de transfert de charge entre l'inclusion et le sol gelé 73
6.4.1 Synthèse sur les propriétés mécaniques des sols gelés 73
6.4.1.1 Comportement des sols gelés 73
6.4.1.2 Modélisation des courbes de fluage 75
6.4.1.3 Synthèse sur la modélisation adoptée pour le comportement des sols gelés 79
6.4.2 Fonctions de transfert de charge entre le sol gelé et une inclusion scellée 81
6.4.2.1 Résultats expérimentaux 81
6.4.2.2 Schématisation des fonctions de transfert de charge 83
6.4.2.3 Dérivation des fonctions de transfert de charge pour une température donnée 83
6.4.2.3.1 Calculs des déplacements différés à partir des déformations différées du sol gelé 84
6.4.2.3.2 Calcul des déplacements pseudo-instantanés irréversibles à partir des déformations pseudo-instantanées irréversibles du sol gelé) 85
6.4.2.3.3 Calcul des déplacements pseudo-instantanés réversibles à partir des déformations pseudo-instantanées réversibles du sol gelé 86

6.4.2.3.4 Courbe de transfert de charge pour le déplacement total 87
6.4.2.4 Détermination des paramètres de fluage et exemples de valeurs numériques 88
6.4.2.5 Influence de la température sur le .comportement mécanique et les fonctions de transfert de charge 89
6.4.2.5.1 Dépendance en température des paramètres de déformations différées 89
6.4.2.5.2 Dépendance en température des paramètres de déformations pseudo-instantanées irréversibles 91
6.4.2.5.3 Dépendance en température des paramètres de déformations pseudo-instantanées réversibles 91
6.4.2.6 Influence de la pression moyenne sur le comportement mécanique d'un sol gelé 92
6.4.2.6.1 Influence de la pression moyenne sur la résistance au cisaillement 92
6.4.2.6.2 Influence de la pression moyenne sur les déformations 94
6.4.2.7 Frottement latéral unitaire limite 97
6.4.2.7.1 Critère de rupture d'un sol gelé 98
6.4.2.7.2 Critère de rupture de l'interaction inclusion - sol gelé 99
6.5 Modélisation des conditions aux limites 101
6.6 Programmation 102
6.6.1 Hypothèse 102
6.6.2 Fonctions de transfert de charge incrémentales 102
6.6.2 1 Fonction de transfert de charge incrémentale du sol non gelé 103
6.6.2.2 Fonction de transfert de charge incrémentale du sol gelé 103
6.6.2.2.1 Hypothèses de calcul 103
6.6.2.2.2 Calcul de la fonction de transfert de charge incrémentale 104
6.6.2.2.3 Interprétation physique des coefficients A et B 105
6.6.3 Résolution numérique 106

7 Calculs en déformation de la paroi ancrée et du mur en sol cloué de La Clusaz 113
7.1 Résumé des données et mesures disponibles 113
7.1.1 Historique des murs de La Clusaz 113
7.1.2 Caractéristiques des soutènements de La Clusaz 114
7.1.2.1 Caractéristiques des sols 114
7.1.2.2 Caractéristiques de la paroi berlinoise ancrée 115
7.1.2.3 Caractéristiques du mur en sol cloué 115
7.1.3 Analyse des observations et mesures 116
7.1.3.1 Paroi berlinoise ancrée par tirants actifs 117
7.1.3.2 Mur en sol cloué 118
7.1.4 Conclusion sur les observations et mesures 120

7.2 Calculs en déformation des soutènements de La Clusaz 120
7.2.1 Détermination des paramètres de calcul 120
7.2.2 Première étude 121
7.2.2.1 Résumé des paramètres 121
7.2.2.1.1 Hypothèses de calcul 121
7.2.2.1.2 Paramètres thermiques 121
7.2.2.1.3 Paramètres de gonflement 121
7.2.2.1.4 Paramètres mécaniques 122
7.2.2.2 Calculs en déformation de la paroi berlinoise ancrée 123
7.2.2.3 Calculs en déformation du mur en sol cloué 123
7.2.2.4 Comparaisons des deux types de soutènement 127
7.2.2.5 Simplification du modèle 130
7.2.3 Deuxième étude 131
7.2.3.1 Simulations numériques sur les tirants 132
7.2.3.2 Simulations numériques pour le clou No. 15 138
7.3 Conclusions sur les simulations 141

8 Etude de dispositions préventives pour limiter les effets du gel sur les murs en sol cloué 143
8.1 Installation de clous courts supplémentaires 144
8.2 Installation d'une longueur libre supplémentaire 146

9 Conclusion et perspectives 151

1 Introduction et bibliographie

Depuis la construction du premier mur en sol cloué à Versailles en 1971-1972, le clouage des sols s'est développé pour de multiples applications dont les murs de soutènement en excavation (Recommandations CLOUTERRE 1991). Avec l'utilisation croissante du clouage des sols, de plus en plus d'ouvrages en sol cloué sont construits dans des régions variées, comme par exemple les régions montagneuses en Europe et le Nord de l'Amérique, où la saison hivernale impose des conditions sévères aux ouvrages.

Si la littérature abonde de références sur des murs ancrés soumis au gel (Morgenstern et Sego, 1981; Eigenbrod et Burak ,1992), par contre, très peu d'exemples de murs en sol cloué soumis au gel ont été publiés (Guilloux et al. , 1983; Juran et Elias, 1987; Vengeon, 1989) (figure B.1-1).

Dans le cas d'un sol gélif, le gel de l'eau en place s'accompagne de la formation de lentilles de glace par suite de la migration d'eau du sol non gelé vers le front de gel. Lorsque le sol est libre, c'est à dire soumis à une pression extérieure nulle, ce phénomène de ségrégation se traduit par des gonflements de plusieurs pour-cents. Quand le sol est confiné par un mur de soutènement, le gonflement est partiellement empêché; il en résulte alors des surpressions sur le parement et des surtensions dans les ancrages actifs (tirants) aussi bien que passifs (clous).

L'influence de ces gonflements sur la structure diffère notablement entre une paroi ancrée où les tirants n'interagissent avec le sol qu'à travers le parement et le bulbe situé très loin en arrière dans le massif, et un mur en sol cloué où les clous interagissent de plus avec le sol sur toute leur longueur. A cet égard, l'exemple des murs de La Clusaz, publié par Guilloux et al. (1983), est très intéressant.

Durant l'hiver rigoureux 1980-1981, une paroi berlinoise ancrée par tirants actifs et un mur en sol cloué construits pour une même fouille à La Clusaz, station de ski alpine (altitude 1060 m), furent soumis à des températures très basses. A la demande du maître d'oeuvre, les deux types d'ouvrages avaient été instrumentés de façon à pouvoir mesurer les tractions dans les tirants et les clous ainsi que les déplacements des deux ouvrages (figures B.1-2 et B.1-3).

Le parement de la berlinoise se déplaça par endroits d'environ 4 cm, générant dans les tirants des augmentations de tension de l'ordre de 40%. Le sol dans le mur en sol cloué, par contre, subit des gonflements plus faibles, de l'ordre de 1 cm, mais avec des tractions qui furent multipliées par dix, sur certains clous près du parement. Les têtes des clous poinçonnèrent par endroits la parement sur une profondeur de 1 cm environ. Par sécurité, le maître d'oeuvre décida de relâcher les tractions en têtes des clous afin d'éviter un "déboutonnage" du parement.

Un deuxième type de désordres que l'on peut rencontrer sur les murs de soutènement soumis au gel, concerne le bouchage des drains par la glace avec comme résultat la montée des pressions interstitielles derrière la zone de sol gelée. Dans les cas extrêmes, ce type d'incidents peut conduire à un mécanisme de rupture global, comme cela s'est produit pour un mur en Terre Armée à Modane. Ce type de désordre peut conduire à la rupture partielle ou totale de l'ouvrage. Il ne sera pas abordé dans le cadre de cette thèse.

Pour prévenir ces deux types de problèmes, les Recommandations CLOUTERRE 1991 préconisent d'isoler le sol gélif en doublant le parement d'un isolant suffisant. Dans le prolongement de ce premier Projet National CLOUTERRE, le Projet National CLOUTERRE II a été lancé avec parmi ses axes de recherches, l'étude de l'influence mécanique du gel sur un mur en sol cloué (Unterreiner et al., 1993, 1994).

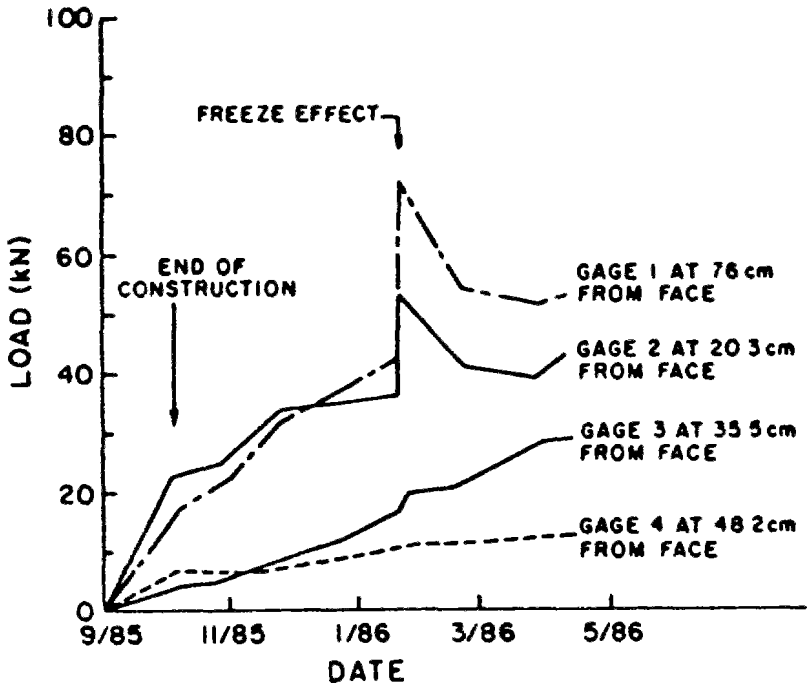


Figure B.1-1 : Evolution des tractions dans le mur en sol cloué de Cumberland Gap durant l'Hiver 1985-1986 (Juran et Elias, 1987)

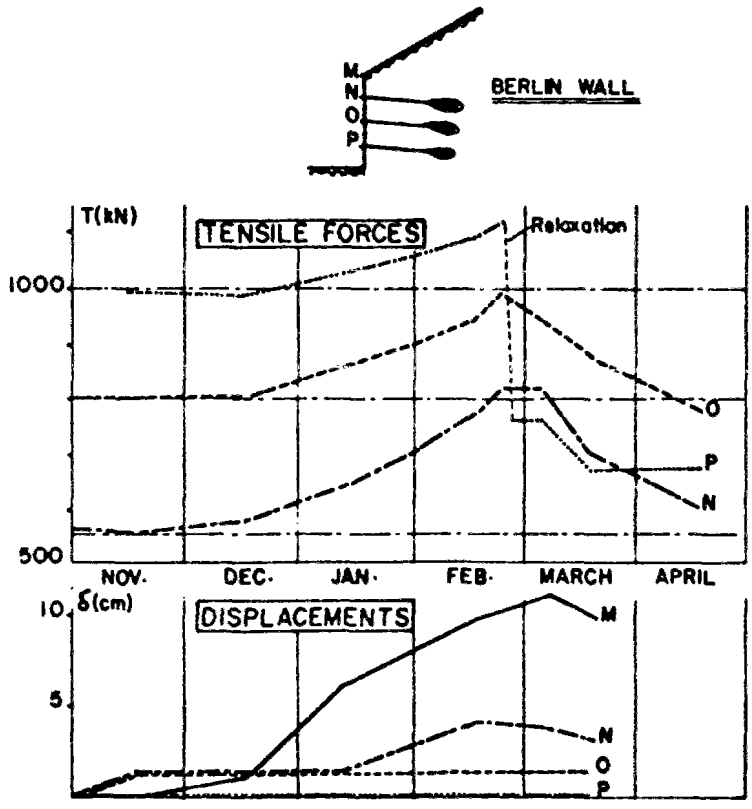


Figure B.1-2 : Evolution des tractions dans les tirants et des déplacements du parement de la paroi Berlinoise ancrée à La Clusaz (Guilloux et al., 1983)

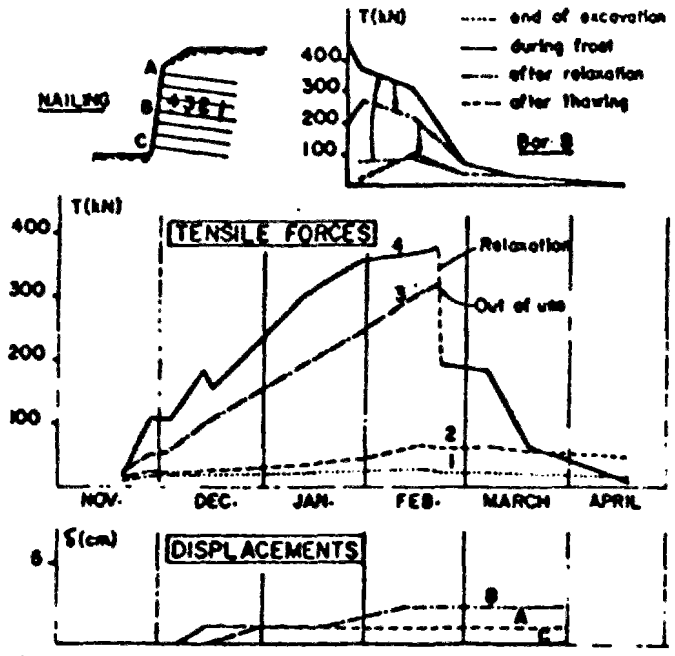


Figure B.1-3 : Evolution des tractions dans les clous et des déplacements du parement du mur en sol cloué à La Clusaz (Guilloux et al., 1983)

La complexité du problème est double : la géométrie est tridimensionnelle et les problèmes hydrauliques, thermiques et mécaniques sont couplés. A l'heure actuelle, il n'existe pas de code de calcul permettant de traiter ces trois problèmes couplés, même pour des géométries simples d'ouvrages.

En effet, il existe des programmes permettant de traiter les aspects hydraulique et thermique, comme par exemple le logiciel GEL 2D développé au LCPC (Frémond et Williams, 1979). Ce programme a notamment été utilisé pour étudier les murs de soutènement de la piste de Bobsleigh réalisés à La Plagne pour les Jeux Olympiques d'Albertville (Vengeon, 1989). Les résultats obtenus sont très intéressants, car ils apportent des éléments sur les flux de chaleur et d'eau dans un mur de soutènement ayant une forme géométrique complexe (mur avec des redans). Cependant, l'interaction mécanique sol-clou n'y est modélisée que de manière très simpliste en modifiant la matrice de rigidité des noeuds de maillage situés sur les lignes correspondant aux lits de clous.

Un des éléments que l'on peut retirer des simulations réalisées sur un maillage bidimensionnel (figure B.1-4) est que les champs des vitesses d'eau (figure B.1-5), d'isothermes et flux thermiques (figure B.1-6) et de déplacements (figure B.1-7) sont à peu près unidimensionnels dans la partie médiane de chacun des murs de soutènements étudiés.

Pour simplifier l'étude, nous nous proposons d'étudier le problème unidimensionnel d'une couche de sol ancrée par un lit de tirants précontraints ou renforcée par un lit de clous, ces derniers étant reliés à un parement en béton (figure B.1-8).

Les problèmes hydraulique et thermique sont résolus dans un premier temps, à partir de théories classiques, en calculant : la profondeur de gel, le profil des températures et le champ des déplacements imposés par le gonflement. Dans un deuxième temps, on impose au sol et parement, le champ de déplacements trouvé précédemment et on détermine le nouvel état d'équilibre de l'inclusion étudiée. Les comportements étant fortement non linéaires, le problème est résolu incrémentalement et itérativement.

Le modèle ainsi développé est ensuite appliqué à la paroi berlinoise ancrée par tirants actifs et au mur en sol cloué de La Clusaz, sur lesquels des mesures ont été réalisées durant l'hiver 1980-1981. Différentes hypothèses thermiques et mécaniques sont considérées pour pouvoir développer des solutions analytiques et numériques. La comparaison des solutions entre elles et avec les mesures permet de choisir la solution analytique la meilleure et la solution numérique offrant le meilleur compromis entre performance et coût de calcul.

La solution analytique est utilisée ensuite pour étudier en détails deux types de dispositions constructives permettant de réduire les surtensions dans les clous : (1) ajout de clous courts en complément des clous longs qui assurent la stabilité d'ensemble, et (2) installation d'une longueur libre supplémentaire en tête des clous scellés. Nous démontrons grâce à la solution analytique explicite que la rigidité imposée au front de gel par un clou scellé est supérieure d'au moins un ordre de grandeur par rapport à celle imposée par un tirant avec une longueur libre. Les simulations numériques confirment ce résultat et permettent de conclure que la deuxième disposition constructive est la plus simple et la plus efficace pour réduire les surtensions dans les clous.

Dans toute cette partie B, nous parlerons systématiquement de clous. Cependant, la méthode de calcul en déformation développée est beaucoup plus générale, puisqu'elle s'applique aux tirants, cas que nous traiterons en détails car il permet de bien comprendre les phénomènes, mais aussi à tout type d'inclusion scellée et interagissant avec le sol sur toute ou partie de sa longueur. Que le mur soit un soutènement de remblai ou déblai, n'a pas d'importance, cependant, les sols gélifs ne sont pas, en principe, utilisés pour construire de soutènement de remblai.

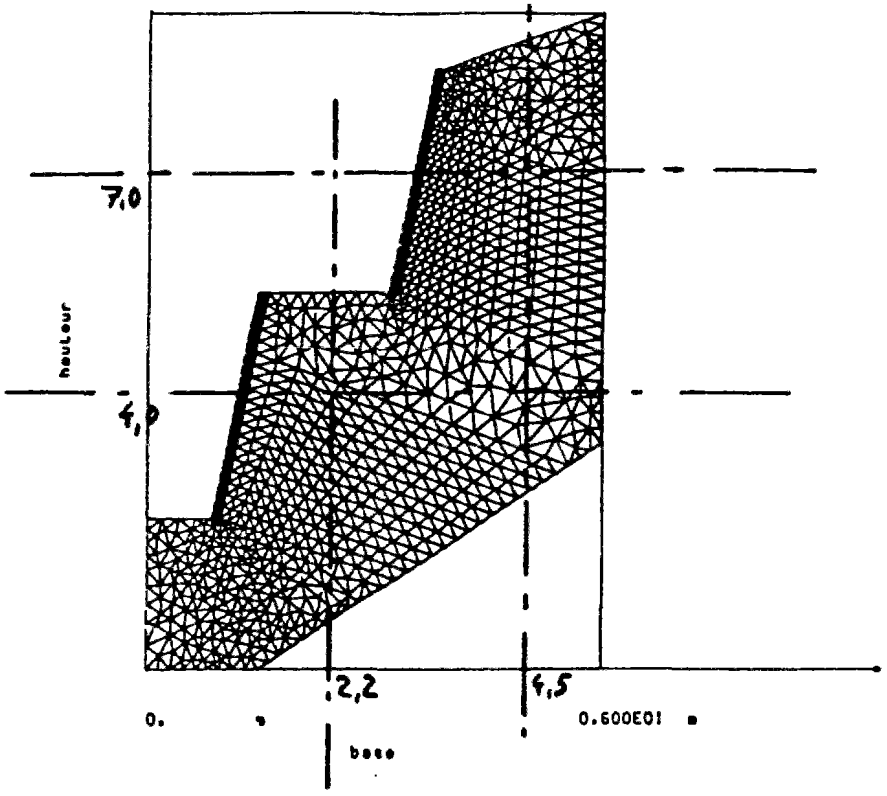


Figure B.1-4 : Maillage utilisé pour les simulations par GEL 2D du mur de La Plagne soumis au gel durant l'hiver 1988-1989 d'après Vengeon (1989)

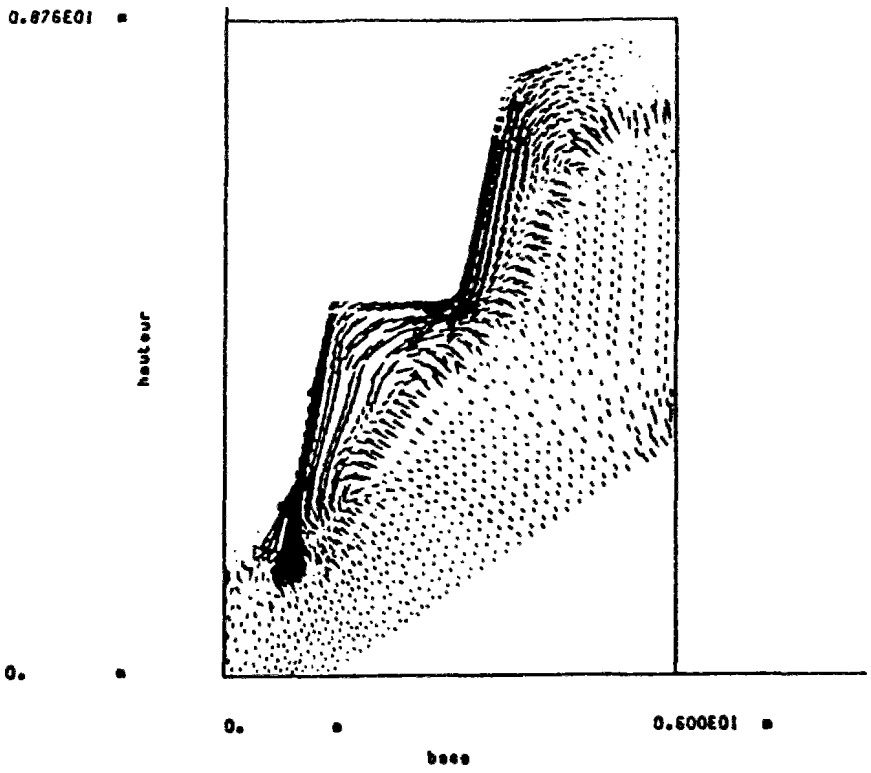


Figure B.1-5 : Champ des vitesses d'eau ; simulations par GEL 2D du mur de La Plagne soumis au gel durant l'hiver 1988-1989 d'après Vengeon (1989)

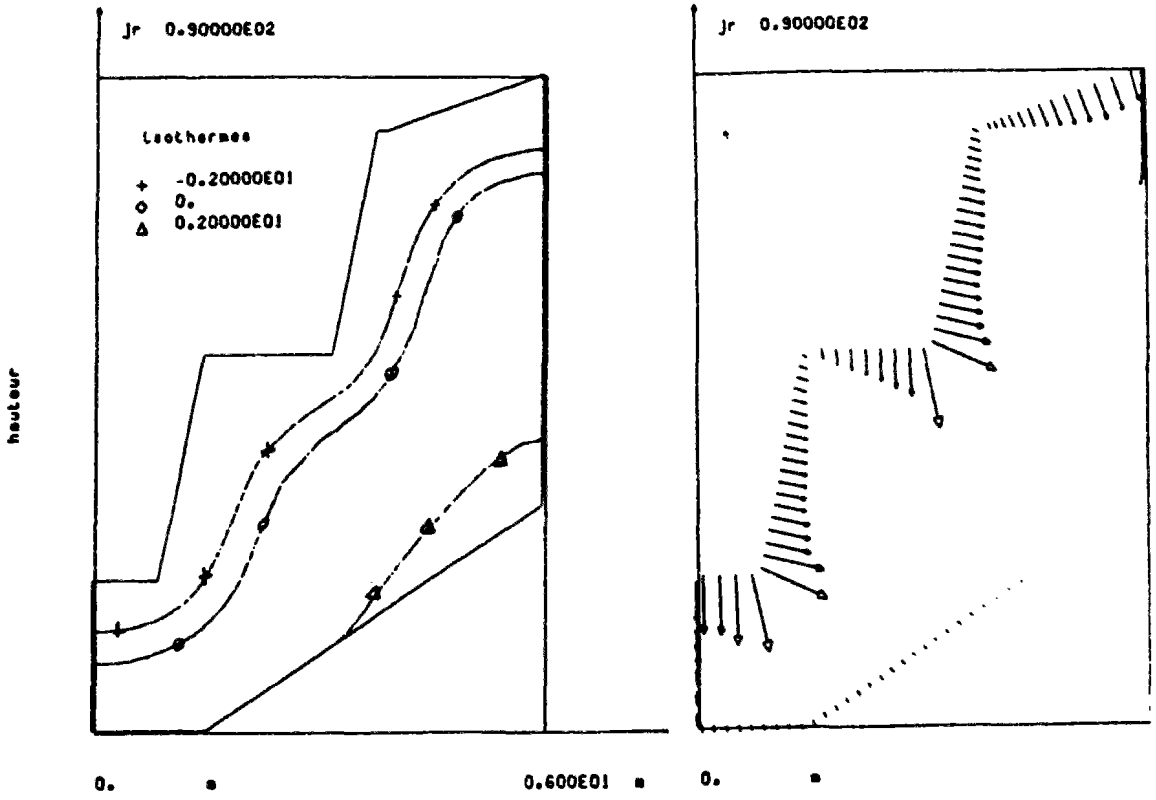


Figure B.1-6 : Isothermes et flux thermiques ; simulations par GEL 2D du mur de la Plagne soumis au gel durant l'hiver 1988-1989 d'après Vengeon (1989)

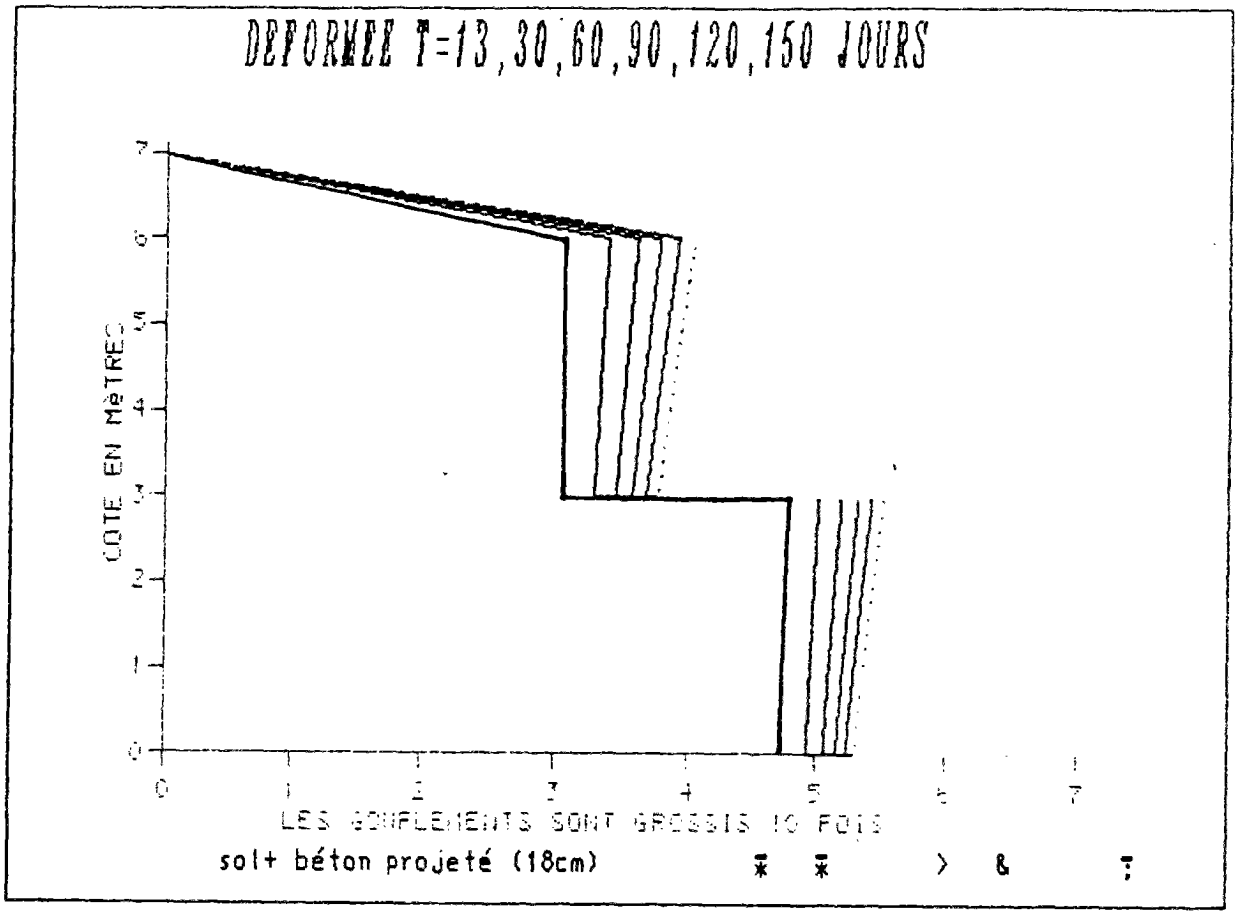


Figure B.1-7 : Déformée du mur de La Plagne; simulations par GEL 2D du mur de La Plagne soumis au gel durant l'hiver 1988-1989 d'après Vengeon (1989)

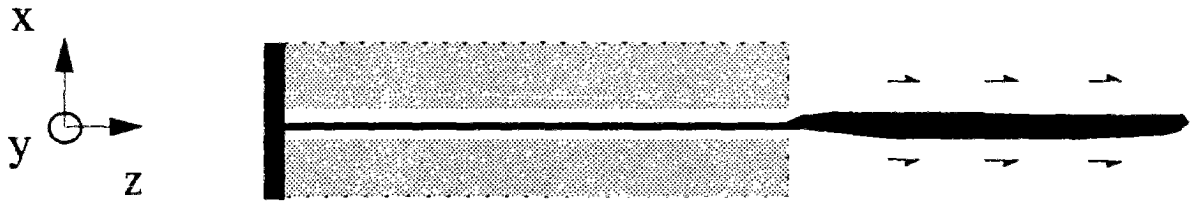


Figure B.1-8a : Premier problème étudié : tranche de sol ancrée par une lit de tirants

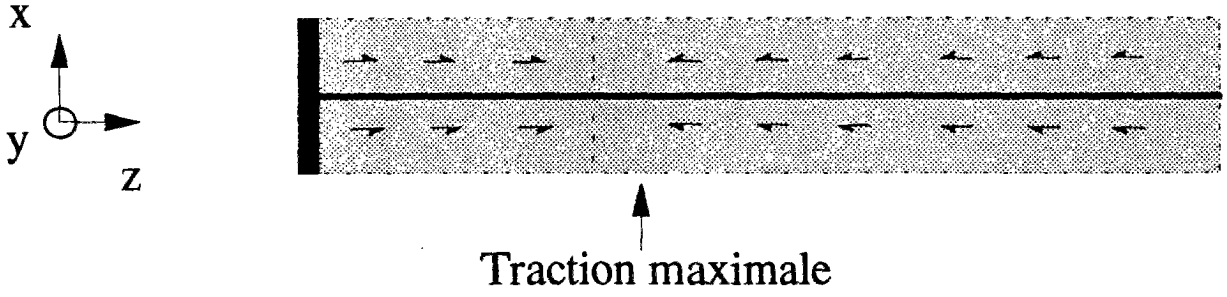


Figure B.1-8b : Deuxième problème étudié : tranche de sol renforcé par un lit de clous

2 Calcul de la profondeur de gel et du profil de température derrière un mur de soutènement

Nous nous intéressons au calcul de la profondeur notée X [mètre], atteinte par le gel dans le sol derrière un mur de soutènement, qu'il soit ancré ou cloué. Par simplification, nous étudierons la couche de sol afférente à un lit de tirants ou de clous, située en partie médiane du mur (figure B.2-1). La géométrie du problème étudié étant unidimensionnelle, le calcul de la profondeur de gel, dans le cas présent, est identique au calcul de la profondeur de gel dans un massif infini homogène et isotrope; problème pour lequel des solutions analytiques ont été développées, moyennant un certain nombre d'hypothèses simplificatrices, par Stefan dès 1890.

2.1 Profondeur de gel derrière un mur de soutènement

2.1.1 Synthèse bibliographique

2.1.1.1 Problème étudié

On considère un demi-espace infini formé d'un sol homogène et isotrope, de propriétés géotechniques et thermiques supposées constantes par rapport à la température θ. L'eau est supposée geler à 0°C. On étudie la propagation du front de gel, c'est à dire de l'isotherme zéro degré, pour les conditions aux limites suivantes :

(1) le profil de température (positive) initiale dans le sol est quelconque : $\theta_0(z) \geq 0°C$ pour $z \geq 0$ et $t \leq 0$

(2) la température de surface en $z = 0$, notée $\theta_S(t)$, évolue de manière quelconque, mais est négative à partir de l'instant initial $t = 0$: $\theta_S(t) \leq 0$ pour $t \geq 0$

Les différentes solutions analytiques proposées par Stefan (1890), Neumann, Berggren (1943), Portnov (1962) puis plus récemment par Lefur et al.(1964), ne diffèrent que par les hypothèses prises sur les fonctions $\theta_0(z)$ et $\theta_S(t)$ définissant les conditions initiales et les conditions aux limites en températures (figure B.2-2a et b).

Solution de Stefan

La solution de Stefan (1890), qui fut la première proposée, correspond au jeu de conditions le plus simple :

(1) la température initiale dans le sol est supposée uniforme et égale à 0°C : $\theta_0(z) \equiv 0°C$;

(2) la température de surface $\theta_S(t)$ est portée, à l'instant initial $t = 0$, à $\theta_S < 0$ et reste constante dans le temps : $\theta_S(t) = \theta_S < 0$ pour $t > 0$.

Solutions de Neumann et Berggren

Neumann a généralisé la solution de Stefan en considérant dans le sol une température initiale uniforme quelconque : $\theta_0(z) \equiv \theta_0 > 0°C$, mais en gardant en surface une température constante (Carslaw et Jaeger, 1947).

A partir de la solution de Neumann, Berggren a développé une formule légèrement différente, qui sous sa forme modifiée par Aldrich et Paynter est connue sous le nom de "formule de Berggren modifiée" (Berggren, 1943).

Solution de Portnov

Les hypothèses prises par Portnov (1962) sont les suivantes :

(1) la température initiale dans le sol est uniforme et égale à 0°C : $\theta_0(z) \equiv 0°C$;
(2) la température de surface est une fonction quelconque du temps t : $\theta_S(t) \leq 0°C$.

Solution de Lefur et al.

Lefur, Aguirre-Puente et Bataille (1964) ont généralisé la solution de Portnov en considérant une température initiale dans le sol, uniforme, positive mais quelconque : $\theta_0(z) \equiv \theta_0 \geq 0$ °C.

La solution de Lefur et al., citée ci-dessus, n'est qu'un cas particulier de la solution plus générale développée par ces mêmes auteurs, pour le cas où la température de congélation de l'eau n'est pas supposée constante.

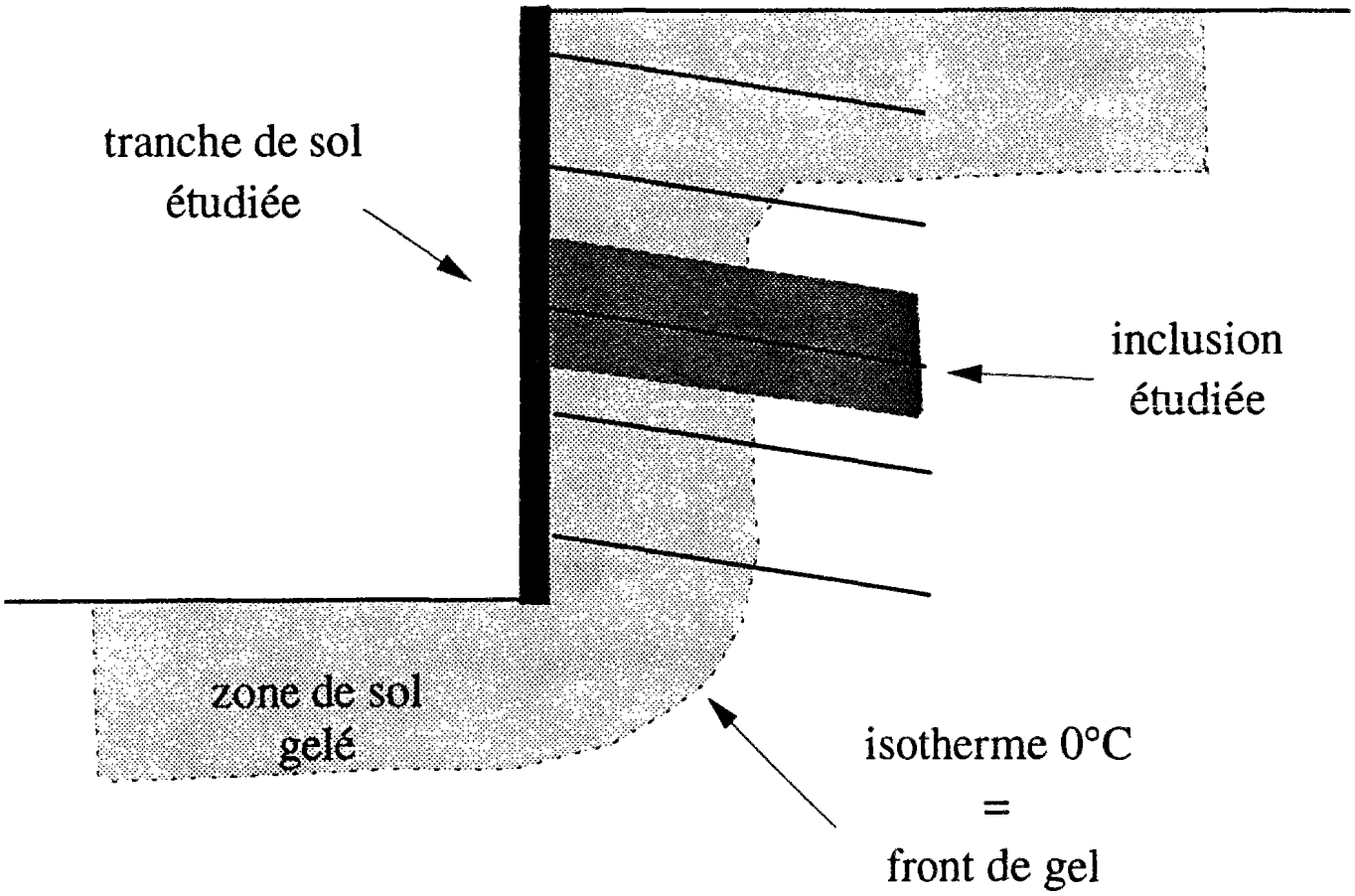
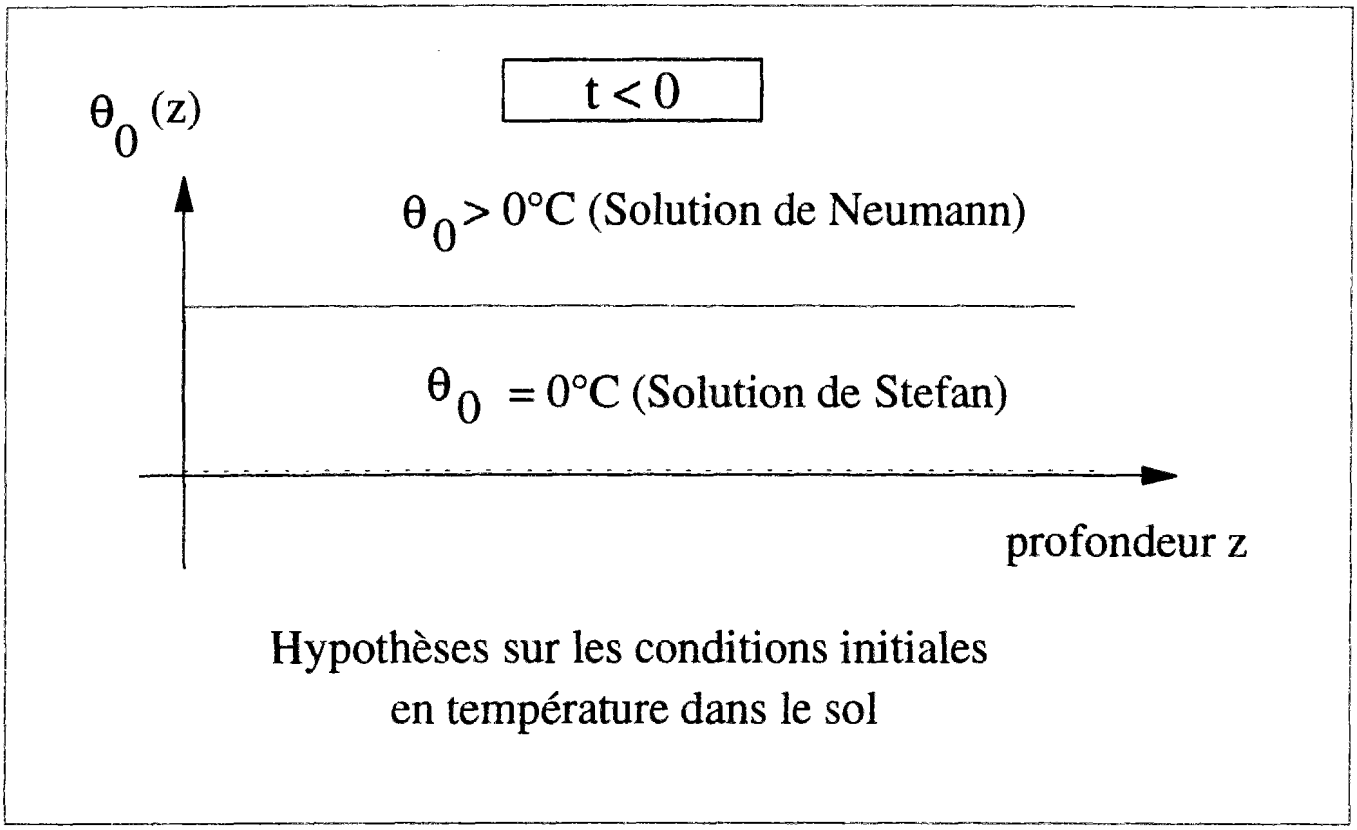
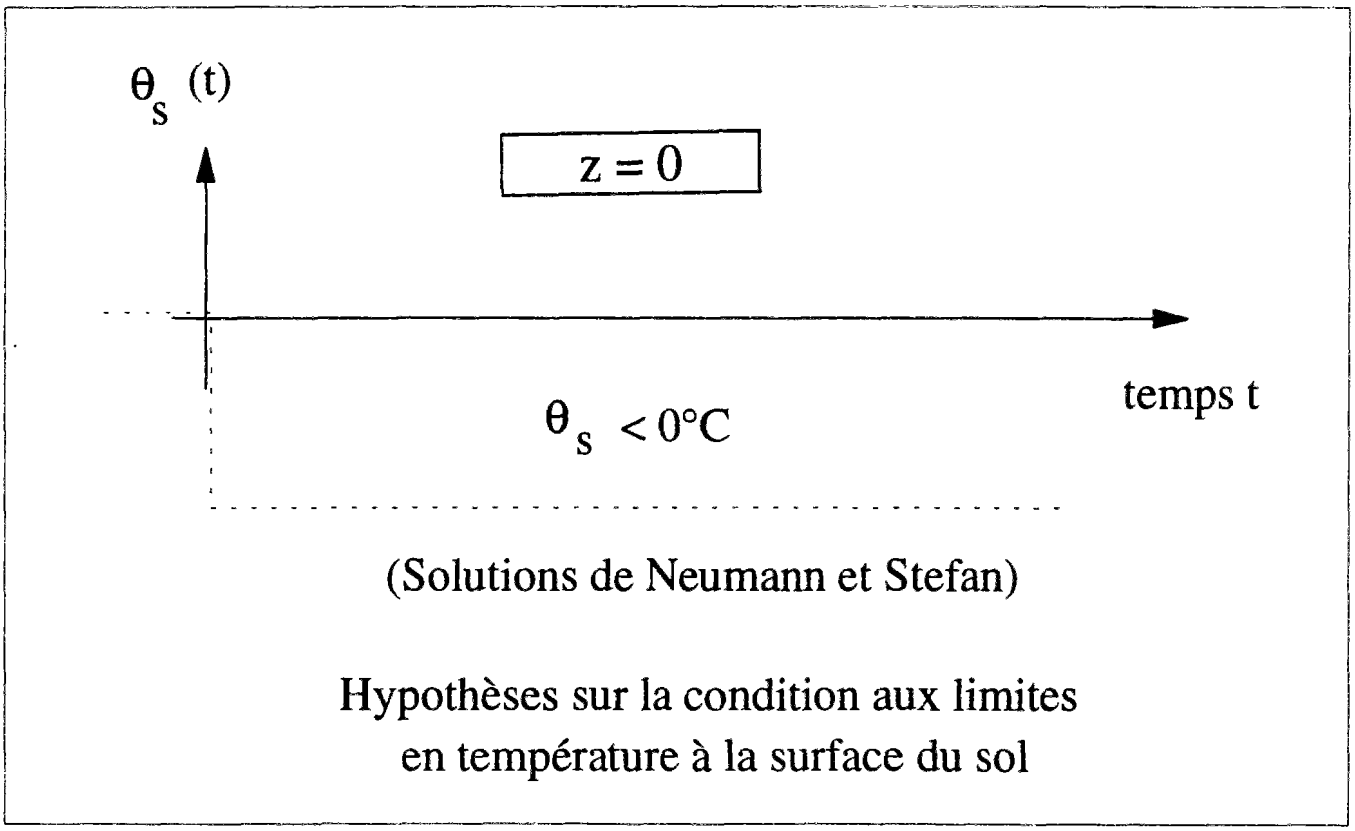


Figure B.2-1 : problème étudié : couche de sol en partir médiane d'un mur de soutènement, ancrée par un lit de tirants actifs ou renforcée par un lit de clous passifs



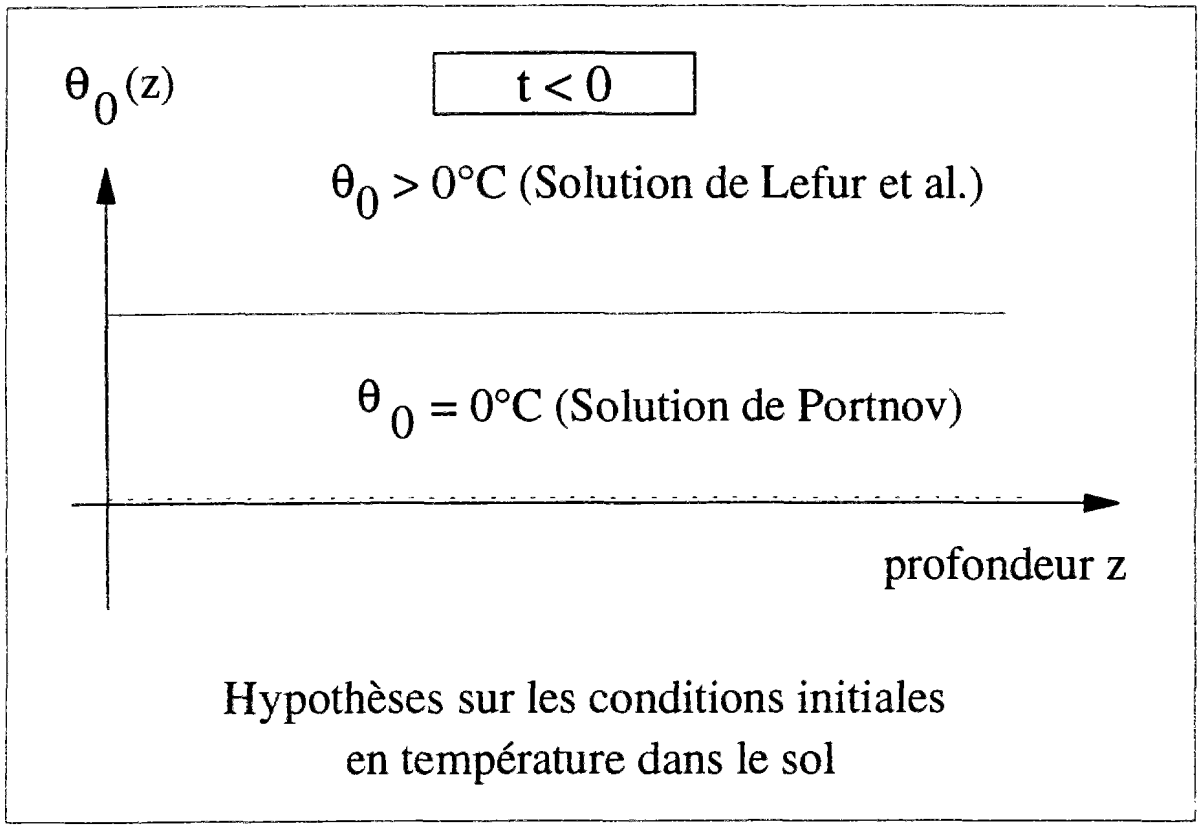
Hypothèses sur les conditions initiales
en température dans le sol



(Solutions de Neumann et Stefan)

Hypothèses sur la condition aux limites
en température à la surface du sol

Figure B.2-2a : Hypothèses prises sur les conditions initiales et aux limites en température dans le cas des solutions de Stefan et Neumann



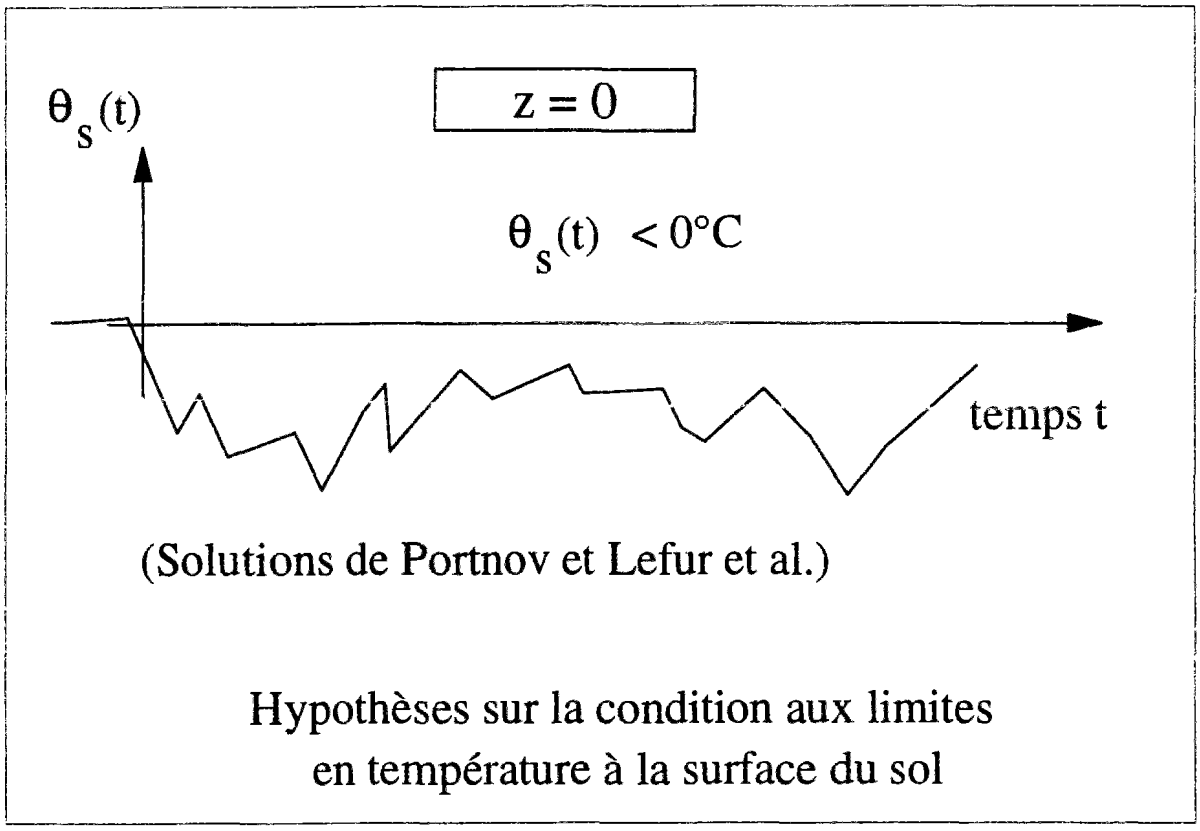


Figure B.2-2b : Hypothèses prises sur les conditions initiales et aux limites en température, dans le cas des solutions de Berggren, Portnov et Lefur et al.

2.1.1.2 Formules analytiques

Dans le cas de la solution de Stefan, la profondeur de gel X(t) se calcule avec la formule suivante :

$$X(t) = \sqrt{\frac{2k_f(-\theta_s)t}{L}} \qquad \text{(B.2-1)}$$

où :

k_f : coefficient de conductibilité thermique du sol gelé [J / jour m °C]
θ_S : température négative à la surface du sol [°C] (supposée constante dans le temps)
L : chaleur latente volumique de congélation du sol [J / m^3]

La solution de Portnov, qui généralise la solution de Stefan pour une température de surface θ_S variable dans le temps s'écrit :

$$X(t) = \sqrt{\frac{2k_f I}{L}} \qquad \text{(B.2-2)}$$

L'indice de gel en surface, noté I [°C jour], est défini comme l'aire de la courbe de la température de surface θs (t) en fonction du temps t, située en dessous de 0°C. Pour une température à la surface θs(t) supposée restée négative dans le temps, I se calcule avec la formule suivante :

$$I = -\int_0^t \theta_s(t)dt \qquad \text{(B.2-3)}$$

Sur un diagramme des températures moyennes journalières cumulées en fonction du temps, l'indice de gel apparaît comme la différence d'ordonnée entre le maximum (début du gel) et le minimum (fin du gel, début du dégel) de la courbe obtenue.

Les formules de Stefan et Portnov ont été établies avec l'hypothèse que la température du sol non gelé est égale à la température de congélation du sol, ce qui revient, dans le cas où la température θ_O est strictement positive, à négliger le gradient thermique dans la zone de sol non gelé et supposer qu'aucune frigorie disponible n'est mobilisée pour refroidir le sol avant de le congeler. Les valeurs obtenues pour la profondeur de gel X(t) sont donc surestimées par rapport aux valeurs réelles, ce qui est conservatif pour un dimensionnement.

La solution de Neumann permet de tenir compte d'une température initiale uniforme strictement positive dans le sol $\theta_O(z) \equiv \theta_O > 0°C$ mais suppose une température à la surface constante $\theta_S(t) \equiv \theta_S < 0°C$.

La solution de Neumann s'écrit aussi sous la forme :

$$X(t) = \alpha\sqrt{t} \qquad \text{(B.2-4)}$$

avec un coefficient α qui, cette fois-ci, n'est pas donné explicitement. Il est solution de l'équation transcendantale suivante :

$$\frac{\exp(-\alpha^2/4D_f)}{\exp(\alpha/2\sqrt{D_f})} - \frac{\theta_0 k_u}{\theta_s k_f}\sqrt{\frac{D_f}{D_u}}\frac{\exp(\alpha^2/4D_u)}{erfc(\alpha/2\sqrt{D_u})} = \frac{L\sqrt{\pi}\alpha}{2\sqrt{D_f}C_f\theta_s} \qquad \text{(B.2-5)}$$

avec :

erf : fonction erreur
D_f : diffusivité thermique du sol gelé [m^2 / j] définie par $D_f = k_f / C_f$
D_u : diffusivité thermique du sol non gelé [m^2 / j] définie par $D_u = k_u/C_u$
k_f : coefficient de conductibilité thermique du sol gelé [J / j m °C]
k_u : coefficient de conductibilité thermique du sol non gelé [J / j m °C]
L : chaleur latente volumique de congélation du sol [J / m^3]
C_f : capacité thermique volumique du sol gelé [J / m^3 °C]
C_u : capacité thermique volumique du sol non gelé [J / m^3 °C]

Le coefficient α est fonction des sept paramètres suivants : k_u, k_f, C_u, C_f, L, θ_0 et θ_S. Berggren a proposé de réécrire la solution de Neumann sous la forme suivante :

$$X(t) = \lambda\sqrt{\frac{2k_f(-\theta_s)t}{L}} \qquad \text{(B.2-6)}$$

où le coefficient sans dimension λ, qui varie entre 0 et 1, apparaît comme un coefficient correcteur par rapport à la solution de Stefan qui constitue une borne supérieure de X(t). Ce coefficient dépend des paramètres : k_u, k_f, C_u, C_f, L, θ_0, θ_S.

Une analyse dimensionnelle du problème permet en fait de réécrire λ comme une fonction des 3 paramètres adimensionnels : le paramètre thermique défini par le rapport $\theta_0 C_u / \theta_S C_f$, le paramètre de fusion défini par le rapport $\theta_S C_f / L$, et le coefficient sans dimension $\sqrt{\frac{k_f C_u}{C_f k_u}}$.

Comme indiquée précédemment, la formule de Berggren ne s'applique que pour une température de surface négative constante à partir de l'instant initial. Néanmoins, par similarité avec la solution de Portnov qui tient compte de fluctuations de θ_s (t) et qui est proportionnelle à $\sqrt{t}$, la formule de Berggren a été extrapolée au cas où la température θ_s varie dans le temps. en introduisant l'indice de gel I, ce qui donne :

$$X(t) = \lambda\sqrt{\frac{2k_f I}{L}} \qquad \text{(B.2-7)}$$

C'est cette dernière formule qui est appelée "formule de Berggren modifiée".

Que ce soit la formule de Stefan, de Portnov, de Neumann ou de Berggren, toutes s'écrivent sous la forme suivante, dans le cas où la température en surface est constante :

$$X(t) = \alpha\sqrt{t} \qquad \text{(B.2-8)}$$

avec α coefficient en m / $\sqrt{jour}$, indépendant du temps t et fonction des 5 paramètres thermiques du sol : k_u, k_f, C_u, C_f, L et des deux températures θ_0 et θ_s correspondant aux conditions initiales et aux limites en températures dans le sol. Connaissant ces 7 paramètres, il est possible de déterminer numériquement ou analytiquement la valeur exacte de α pour un jeu d'hypothèses sur les conditions initiales et aux limites donné.

Dans la pratique, en l'absence de connaissances précises sur tous ces paramètres et vu leurs très grandes variabilités (Kersten, 1948), la valeur de α est calculée en se basant sur les mesures de la profondeur de gel réalisées sur site. Il suffit d'une seule mesure pour pouvoir estimer le coefficient α.

2.1.2 Validité des formules analytiques

La formule généralisée précédente est basée sur un certain nombre d'hypothèses pour les conditions aux limites et initiales mais aussi sur des hypothèses simplificatrices pour le comportement du sol, notamment : (1) les propriétés thermiques k_u, k_f, C_u, C_f, et L sont homogènes et supposées constantes en fonction de la température, et (2) l'eau libre dans le sol est supposée geler à 0° C.

L'hypothèse (1) n'est qu'approximativement vérifiée dans la mesure où C et k évoluent de manière continue avec la température. Dans la pratique de la géotechnique routière aux Etats-Unis et en France, seules les valeurs moyennes C_{av} et k_{av} sont utilisées :

$$C_{av} = (C_u + C_f)/2 \qquad \text{(B.2-9)}$$

$$k_{av} = (k_u + k_f)/2 \qquad \text{(B.2-10)}$$

Les résultats donnés par les formules ne diffèrent pas trop des mesures effectuées sur site ou en laboratoire (Philippe, 1967).

D'autre part, avec les phénomènes de flux d'eau vers le front de gel, la teneur en eau w varie très significativement dans la zone gelée et non gelée. Comme, tous les paramètres thermiques, notamment L, dépendent directement de la teneur en eau, ceux-ci évoluent de manière significative. Les solutions citées ci-dessus ne permettent pas de traiter ce phénomène de couplage thermique-hydraulique (Frémond et Williams, 1979).

L'hypothèse (2) a été étudiée par Nixon et McRoberts (1980). Ils ont supposé que l'eau ne gelait que progressivement entre 0°C et $\theta_{gel} < 0$°C, avec différentes décroissances possibles et ils ont résolu numériquement le problème. De leurs simulations, on peut conclure que la profondeur de gel X reste proportionnelle à $\sqrt{t}$, avec un coefficient α différent, et que seul le profil de température est sensiblement affecté (figures B.2-3a, B.2-3b et B.2-3c).

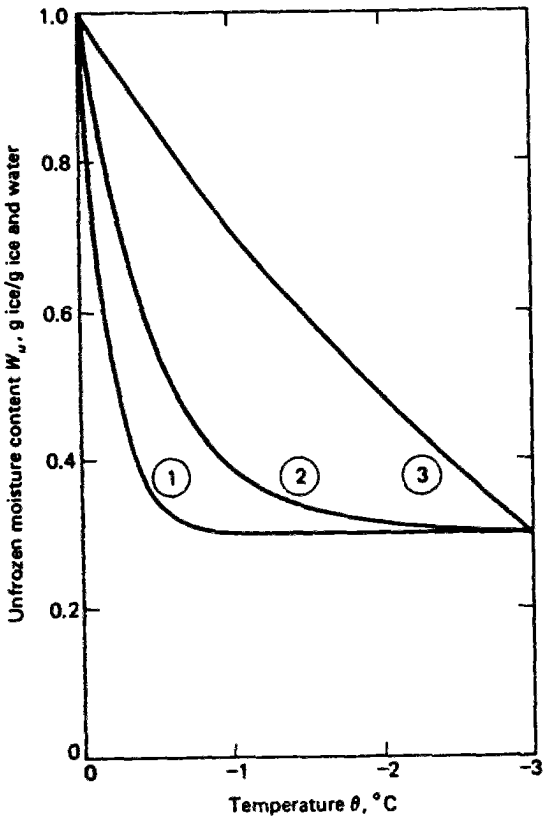


Figure B.2-3a : Courbes teneur en eau non gelée - température négative, utilisées pour l'analyse numérique (Nixon et McRoberts, 1980)

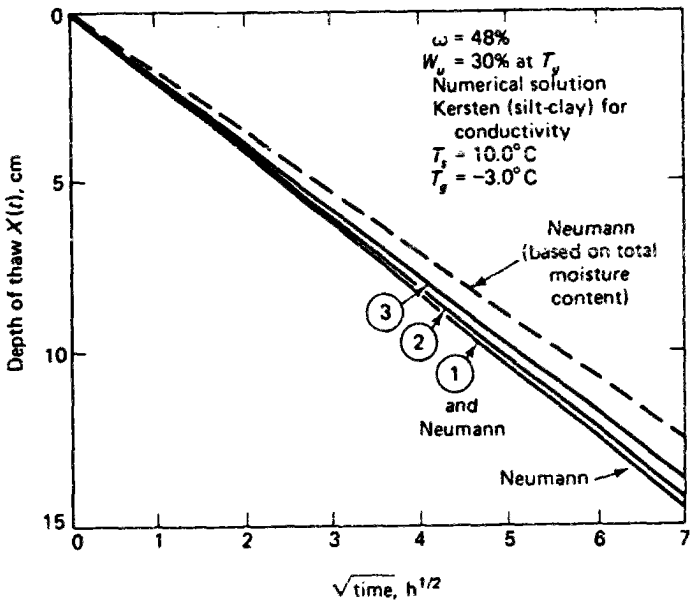


Figure B.2-3b : Influence de la température de gel de l'eau sur l'évolution de la profondeur de gel X(t) en fonction du temps (Nixon et McRoberts, 1980)

Figure B.2-3 : Influence de la température de gel de l'eau sur la profondeur de gel X(t) et le profil de température dans le sol (Nixon et McRoberts, 1980)

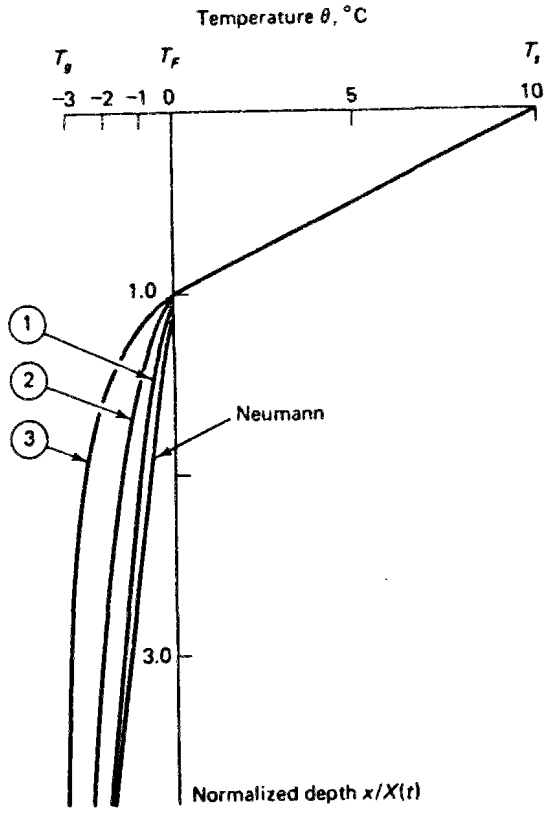


Figure B.2-3c : Influence de la température de gel de l'eau sur le profil de températures dans le sol (Nixon et McRoberts, 1980)

Figure B.2-3 : Influence de la température de gel de l'eau sur la profondeur de gel X(t) et le profil de température dans le sol (Nixon et McRoberts, 1980)

2.1.3 Prise en compte du parement

Les formules précédemment citées ont été généralisées aux cas de multicouches en définissant notamment un monocouche équivalent.

Les effets du gel dans le parement peuvent être négligés par rapport à ceux dans le sol, dans la mesure où les phénomènes de gonflement dus à la formation de lentilles de glace discrètes, ne se manifestent principalement que dans le sol. Il est à noter, cependant, que dans des cas très extrêmes, des phénomènes de gonflement avec formation de lentilles de glace discrètes, ont été observés dans des bétons, mais les études sur ce sujet sont encore trop partielles pour pouvoir en tirer des conclusions à l'heure actuelle.

D'un point de vue thermique, la présence du parement en béton a un double effet : (1) la propagation du gel dans le sol est retardée d'un temps t_b , nécessaire au gel pour traverser l'épaisseur du parement; le parement joue alors un rôle de retardateur du gel dans le sol; (2) la température à l'interface sol-béton est plus élevée qu'à la surface du parement, ce dernier servant d'isolant.

Le temps t_b mis par le gel pour traverser l'épaisseur du parement et atteindre le sol peut se calculer avec la formule de Berggren (1943) :

$$X_b = \lambda_b \sqrt{\frac{2k_b(-\theta_s)t_b}{L_b}} \qquad \text{(B.2-11)}$$

qui est équivalente à :

$$t_b = \left(\frac{X_b}{\lambda_b}\right)^2 \frac{L_b}{2k_b(-\theta_s)} \qquad \text{(B.2-12)}$$

où :

X_b : épaisseur du parement [m]
L_b : chaleur latente volumique de congélation du béton [J / m^3]
k_b : coefficient de conductibilité thermique du béton [J / jour m °C]
θ_S : température à la surface du sol [°C]
λ_b : coefficient correcteur pour le béton [sans unité]

La conductibilité thermique k_b d'un béton ordinaire à base d'agrégats silico-calcaires est égale à 1,6 J / s m °C, c'est à dire 1,38 10^5 J / jour m °C, tandis que la capacité calorifique volumique C_b est égale à 2,5 10^3 kJ / m^3 °C (Acker, 1986).

La chaleur latente volumique de congélation du béton, quant à elle, est directement proportionnelle à la teneur en eau libre du béton w_b et son poids volumique total γ_b , en prenant pour chaleur volumique de fusion de la glace l_{eau} = 333 kJ / kg :

$$L_b = 333000 \frac{W_b}{100 + w_b} \frac{\gamma_b}{10} \qquad \text{(B.2-13)}$$

Le poids volumique du béton projeté armé γ_b vaut environ 23,5 kN / m^3 . Pour le calcul de la chaleur latente L_b , seule la fraction d'eau non liée chimiquement dans le béton est à prendre en compte. L'eau liée chimiquement ne gèle en effet que pour des températures très inférieures à 0°C. Pour un mur en béton n'ayant qu'une seule face en contact avec l'air, l'eau libre est présente dans la proportion moyenne de 100 litres par m^3, ce qui donne une teneur en eau libre d'environ 5 %. La chaleur latente du béton est donc de l'ordre de 37,3 10^6 J / m^3.

Pour une épaisseur de béton de 15 cm environ, valeur typique pour un parement d'un mur en sol cloué, et en prenant un coefficient λ_b égal à 0,6, le temps t_b mis par le gel pour traverser le parement en béton vaut environ 29 heures. Le temps t_b est donc de l'ordre de un à deux jours, ce qui est négligeable comparé à la durée moyenne d'un hiver d'environ 90 jours. L'effet retardateur du parement est donc quasiment négligeable.

La différence de température entre la face du parement exposée aux intempéries et celle en contact avec le sol est directement proportionnelle à l'épaisseur du parement X_b et inversement proportionnelle à la conductibilité thermique du béton k_b . Sur le site de La Clusaz, la température en fin d'hiver (environ 70 jours de froid) à l'interface sol-béton était de -5 °C alors qu'à la surface extérieure, la température moyenne avoisinait -7 °C. Le rôle d'isolant joué par les 15 cm de béton projeté du parement du mur en sol cloué est donc très important par rapport à son rôle de retardateur de gel.

2.2 Profil de température derrière un mur de soutènement

2.2.1 Equations

L'équation de diffusion de la chaleur dans une colonne de sol où l'on suppose un régime quasi-stationnaire atteint, s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = D\frac{\partial\theta}{\partial t} = 0 \qquad \text{(B.2-14)}$$

où D est le coefficient de diffusivité thermique (m / jour).

Si les matériaux ont des paramètres thermiques indépendants de la température, ce qui sera supposé par la suite, la température est à chaque instant une fonction linéaire de z par zones de matériaux gelés ou non gelés.

On peut remarquer que ceci n'est plus vrai si, dans la zone gelée, l'eau ne gèle que progressivement entre 0 °C et une température négative donnée (Nixon et McRoberts, 1973). Nixon et McRoberts ont étudié cet aspect et trouvé des profils de température non linéaires dans la zone gelée mais linéaires dans les autres zones. Cependant, pour des applications pratiques, le profil de température dans la zone gelée peut être raisonnablement approximé par des segments de droite. Par souci de simplification, nous considérerons un profil de température linéaire par morceaux.

L'écriture de la loi de Fourrier et de la conservation du flux de chaleur à l'interface sol béton, sur le front de gel et à l'interface sol gelé - sol non gelé, à un instant $t \geq 0$, permet d'obtenir les égalités suivantes :

$$k_b \left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)_{\text{béton}} = k_{sf} \left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)_{\text{sol gelé}} = k_{su} \left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)_{\text{sol non geié}} \qquad \text{(B.2-15)}$$

où k_b , k_{sf} et k_{su} sont respectivement les coefficients de conductibilité thermiques du béton (gelé), du sol gelé et du sol non gelé. On en tire les égalités :

$$k_b \frac{\theta_i - \theta_s}{X_b} = k_{sf} \frac{(-\theta_i)}{X(t)} = k_{su} \frac{\theta_0}{(X_b + X_0) - (X_b + X(t))} \qquad \text{(B.2-16)}$$

où θ_i est la température à l'interface béton - sol, θ_S la température à la surface du parement et θ_0 la température initiale dans le sol.

Connaissant à tout instant la position du front de gel X(t), il est possible de calculer la température θ_i à l'interface parement en béton - sol :

$$\theta_i = \frac{\theta_s}{1 + \left(\frac{k_{sf}\, X_b}{k_b\, X(t)}\right)} \qquad \text{(B.2-17)}$$

Il est possible ensuite d'en déduire la position X_0 de l'isotherme θ_0 limitant la zone de sol non gelé froid ($\theta < \theta_0$) de celle chaude ($\theta > \theta_0$) :

$$X_o = X(t) + \left(\frac{\theta_o}{-\theta_s}\right)\left(X(t)\frac{k_{su}}{k_{sf}} + X_b\frac{k_{su}}{k_b}\right) \qquad \text{(B.2-18)}$$

où z est la profondeur, nulle à la surface du parement et positive dans le parement et le sol, tandis que X est la distance au parement. Par définition :

$$z = X_b + X \qquad \text{(B.2-19)}$$

On remarquera dans les formules précédentes que le parement, en tant qu'isolant, réduit très significativement la température à l'interface sol - béton θ_i , par rapport à la température extérieure en surface, θ_S .

Sur le site de La Clusaz, la température mesurée à l'interface béton-sol à la fin de l'hiver est d'environ -5 °C, pour une épaisseur du béton du parement X_b de 15 cm, tandis que la profondeur de gel est de 38 cm. Pour un béton, k_b vaut en moyenne 1,6 W / m °C. Pour un sol grenu de type gravier, k_{sf} peut être estimé à partir des formules de Kersten à 2,68 J / s m °C, ce qui donne une température moyenne à la surface estimée à 7,7 °C.

2.2.2 Modélisation

Le profil de température derrière la paroi ancrée, ou le mur en sol cloué, sera considéré comme étant linéaire par zones de matériaux, gelés ou non gelés. A tout instant t, connaissant la température en surface θ_S et la profondeur de gel X(t), la température θ_i à l'interface sol - béton est calculé avec la formule suivante:

$$\theta_i = \frac{\theta_s}{1 + \left(\frac{k_{sf}\,X_b}{k_b\,X(t)}\right)} \qquad \text{(B.2-20)}$$

Connaissant la température initiale dans le sol θ_0 prise égale à +6 °C, la position de l'isotherme θ_0 se calcule avec la formule suivante :

$$X_o = X(t) + \left(\frac{\theta_o}{-\theta_s}\right)\left(X(t)\frac{k_{su}}{k_{sf}} + X_b\frac{k_{su}}{k_b}\right) \qquad \text{(B.2-21)}$$

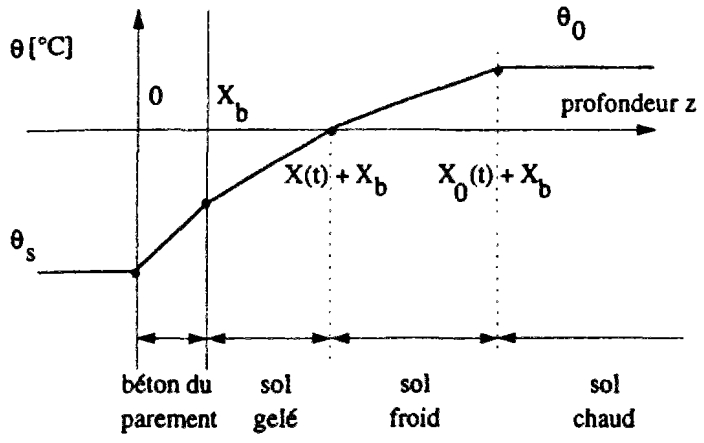


Figure B.2-4 : Profil de température dans le sol à un instant t

2.3 Conclusion de l'étude bibliographique sur la thermique

2.3.1 Lois de pénétration du gel

De l'étude bibliographique, on peut conclure que l'évolution de la profondeur de gel X(t) dans un milieu homogène, peut être correctement représentée par une loi de type puissance dans le cas où la température à la surface du sol ne varie pas trop et peut être considérée comme à peu près constante au cours du temps :

$$X(t) = \alpha \sqrt{t} \qquad \text{(B.2-22)}$$

Le coefficient α de pénétration du gel peut être calculé précisément à partir des mesures sur le terrain, ou estimé à partir des valeurs typiques des paramètres thermiques des sols et des formules disponibles dans la littérature.

Dans le cas où la température à la surface du sol varie beaucoup, il est préférable d'utiliser la formule de Portnov avec l'indice de gel I, qu'il faut calculer à partir de la température réelle subie par le sol à sa surface :

$$X(t) = \alpha^* \sqrt{I} \qquad \text{(B.2-23)}$$

Le coefficient α^* de pénétration du gel peut être aussi calculé à partir des mesures sur le terrain, ou bien estimé à partir des valeurs typiques des paramètres thermiques des sols et des formules disponibles dans la littérature.

Ces deux lois ont la propriété remarquable de ne faire intervenir qu'un seul coefficient, ce qui permet de les calibrer simplement. Les deux lois de propagation du gel seront testées et comparées pour connaître la validité de chacune d'elle.

On prendra comme origine des temps, l'instant où le front de gel atteint l'interface sol-béton. Avant l'instant $-t_b$, le gel est extérieur à la structure. Entre $-t_b$ et 0, il traverse le béton. Pour $t \geq 0$, le front de gel pénètre dans le sol suivant l'une des deux lois introduites ci-dessus.

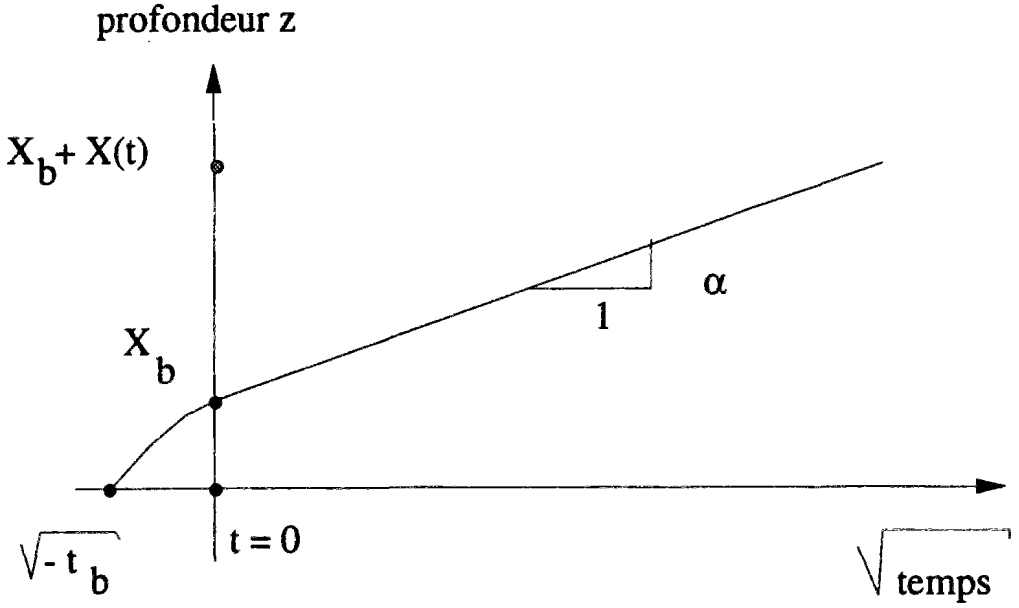


Figure B.2-5 : Loi de Stefan pour l'évolution de la profondeur de gel X(t)
(la profondeur z est nulle à la surface du parement et positive dans le massif de sol)

2.3.2 Jeux d'hypothèses considérées

Nous démontrerons par la suite que pour pouvoir développer des solutions analytiques, il est nécessaire de faire l'hypothèse que le front de gel se propage suivant la racine carrée du temps, ce qui correspond, par un curieux hasard, à la loi de Stefan. Or, celle-ci n'est a priori valable que pour une température à la surface du sol constante au cours du temps.

D'autre part, la température journalière varie de manière stochastique. Tenir compte de toutes ses variations journalières est lourd et peut être évité dans une certaine mesure. A l'inverse, supposer une température constante sur tout l'hiver, est une hypothèse simple et facile, mais qui peut ne pas rendre compte de manière fidèle des phénomènes observés.

Ces points nous ont donc amené à étudier plusieurs jeux d'hypothèses thermiques, afin de déterminer lequel était le meilleur en terme de donnés requises mais aussi en termes de résultats par rapport aux mesures. Les cinq jeux d'hypothèses thermiques sont détaillés ci-dessous.

2.3.2.1 Cas I

Le cas I correspond à un sol sans parement, directement soumis aux variations de température $\theta_s(t)$ de l'air où $\theta_s(t)$ est supposée constante :

$$\theta_s(t) \equiv \text{constante} = <\theta_s(t)>_{\text{hiver}} \qquad \text{(B.2-24)}$$

où $<\theta_s(t)>_{\text{hiver}}$ est la température moyenne de l'air sur tout l'hiver.

La température moyenne en surface peut être approchée à partir de l'indice de gel en surface :

$$\langle \theta_s(t) \rangle_{\text{moyen}} \cong \frac{I_s}{n_{\text{gel,surface}}} \qquad \text{(A.3-25)}$$

où I_s est l'indice de gel en surface et $n_{\text{gel,surface}}$ le nombre de jours de gel en surface durant tout l'hiver.

La formule de Stefan est exacte pour les hypothèses prises. Ce cas I correspond aux hypothèses en températures les plus simples et les plus conservatives. Il est possible de développer des solutions analytiques en traction et déplacement pour les tirants et les clous.

2.3.2.2 Cas IIa

Par rapport au cas précédent I, seule les valeurs de températures en surface sont changées. Les mêmes hypothèses simples sur la loi de pénétration du gel sont considérées. Il est là aussi possible de développer des solutions analytiques en tractions et déplacements pour les tirants et les clous.

La formule de pénétration du gel ne tient pas compte directement de la présence du parement. Cependant, celui-ci est pris en compte pour les calculs de températures à la surface du sol, puisque c'est la température moyenne réelle à

l'interface parement en béton - sol , notée $\theta_i(t)$, qui est choisie. Elle est plus élevée que la température en surface du parement $\theta_S(t)$, qui se trouve être trop conservative :

$$\theta_I(t) = \text{constante} = \langle \theta_I(t) \rangle_{\text{réelle}} \qquad \text{(B.3-26)}$$

où $<\theta_I(t)>_{\text{réelle}}$ est la température moyenne réelle à l'interface parement en béton - sol. Celle-ci peut être calculée à partir de l'indice de gel I_i à l'interface :

$$\langle \theta_i(t) \rangle = \frac{I_i}{n_{gel,sol}} \qquad \text{(A.3-27)}$$

où I_I est l'indice de gel à l'interface parement en béton-sol et $n_{gel,sol}$ est le nombre de jours de gel dans le sol au contact avec le parement.

La formule de Stefan est exacte pour les hypothèses prises et elle permet de développer des solutions analytiques en tractions et déplacements pour les tirants et les clous.

2.3.2.3 Cas IIb

Le cas IIb correspond aux hypothèses d'une température en surface constante et d'une température à l'interface variable, tandis que la loi de Stefan est gardée pour modéliser la pénétration du gel dans le sol

La température à la surface du parement est supposée constante :

$$\theta_s(t) = \text{constante} = \langle \theta_s(t) \rangle_{\text{hiver}} \qquad \text{(A.3-28)}$$

L'existence du parement est prise en compte par son influence sur la température à l'interface béton du parement - sol qui est variable :

$$\theta_i(t) = \frac{\theta_s(t)}{1 + \dfrac{k_{sf}\, X_b}{k_b\, X(t)}} \qquad \text{(A.3-29)}$$

Pour le calcul de la profondeur de gel, la formule de Stefan est encore utilisée bien qu'elle ne soit qu'une solution approchée, dans le cas présent. Il n'est pas possible de développer une solution analytique exacte. Cependant, nous essayerons de modifier la solution analytique rigoureuse obtenue pour les deux cas précédents, afin de l'adapter au cas présent. Cette solution analytique, qui n'est plus exacte, sera qualifiée de solution analytique approchée.

2.3.2.4 Cas IIc

Le cas IIc correspond aux hypothèses d'une température en surface constante et d'une température à l'interface variable tandis que la loi de Portnov, qui est exacte dans le cas présent, est utilisée pour calculer la profondeur de gel. Il n'est pas possible de développer des solutions analytiques pour les tirants et clous.

La température à la surface du parement constante est prise constante :

$$\theta_s(t) = \text{constante} = \langle \theta_s(t) \rangle_{\text{hiver}} \qquad \text{(A.3-30)}$$

La température à l'interface parement en béton - sol est variable et calculée avec la formule suivante qui correspond à l'hypothèse d'un profil de température linéaire et stationnaire :

$$\theta_i(t) = \frac{\theta_s(t)}{1 + \dfrac{k_{sf}\, X_b}{k_b\, X(t)}} \qquad \text{(A.3-31)}$$

La formule de Portnov est une solution exacte pour les hypothèses prises mais elle ne permet pas de développer de solutions analytiques. La solution aussi bien pour la température à l'interface $\theta_i(t)$ que pour les tractions et déplacements dans les clous et tirants sera obtenue numériquement.

2.3.2.5 Cas IId

Le cas IId correspond à des hypothèses de températures en surface et à l'interface béton du parement - sol variables tandis que la solution de Portnov, qui est exacte dans le cas présent, est prise pour le calcul de la profondeur de gel. Ce cas est le plus complexe et le plus lourd à gérer puisqu'il nécessite la donnée des températures journalières sur toute la période de l'hiver.

La température $\theta_s(t)$ à la surface du parement est variable et elle correspond aux données de la météorologie nationale. La température à l'interface parement en béton - sol est variable et est calculée avec la relation (A.3-21). Ce choix correspond à une approximation puisque pour des variations rapides journalières, il conviendrait de faire un calcul en tenant compte de l'inertie des matériaux qui introduit un retard. Cependant, comme nous le verrons, cela n'a pas une influence importante.

Dans le cas présent, il n'est pas possible de développer de solutions analytiques. La solution aussi bien pour la température à l'interface que pour les déplacements et les tractions dans les clous et tirants sera obtenue numériquement.

2.4 Détermination des paramètres thermiques pour le site de La Clusaz

2.4.1 Indice de gel et température moyenne en surface

Dans les formules de calcul de profondeur de gel, intervient l'indice de gel en surface I_S. Cet indice n'est pas égal à l'indice de gel de l'air I_{air} qui est classiquement mesuré dans les stations météorologiques. En pratique, l'indice de gel du sol n'est mesuré qu'exceptionnellement. La différence entre les deux indices dépend en partie de l'état de surface du parement (couverture végétale, manteau neigeux) mais aussi de l'exposition (Nord ou Sud).

Dans le cas d'un mur de soutènement typique, vertical ou subvertical, sans couverture végétale ni manteau neigeux, exposé au Nord, il est acceptable de prendre pour indice de gel en surface, l'indice de gel de l'air. Cependant, le sol derrière le parement est soumis à des températures différentes et c'est l'indice de gel du sol en contact avec le béton du parement qui joue le rôle le plus important.

2.4.1.1 Estimations a priori

Un première étude sur les murs de La Clusaz a été réalisée dans le cadre du Projet National CLOUTERRE II (Unterreiner et al., 1992). Dans cette première étude, les donnés météorologiques n'étant pas disponibles, l'indice de gel de l'air de l'hiver 1980-1981, qui fut particulièrement rigoureux, ont été estimées à partir de l'indice de gel décennal couramment utilisé en France et qui est calculé sur la base de l'hiver 1962-1963.

A partir de ces données, il est possible d'extrapoler que dans la région de La Clusaz, l'indice de gel pour une altitude moyenne de 300 m est d'environ 350 °C jours pour un hiver rigoureux. Si l'on corrige pour l'altitude qui est d'environ 1100 m sur le site, on obtient à partir des corrélations données par Dysli (figure B.2-6), un indice de gel d'environ 700 °C jour.

La température moyenne en surface θ_S peut être calculée ensuite à partir de corrélations avec l'indice de gel de l'air (Dysli, 1991) (figure B.2-7). La température moyenne obtenue d'environ - 5 °C à partir de ces abaques semble faible dans la mesure où, à la fin de l'hiver 1980-1981, la température dans le sol derrière le parement qui sert d'isolant, était de - 5 °C environ pour le mur en sol cloué.

Un calcul très approximatif de θ_S peut être aussi réalisé en divisant l'indice de gel I par le nombre moyen annuel de jours de gelée sous abri, obtenu à partir de données météorologiques (Mothes, Faure et Boutonnet, 1973). A La Clusaz, le nombre moyen annuel de jours de gelée est de l'ordre de 100, ce qui donne une température θ_S moyenne à la surface du parement de -7 °C , typique d'un climat de montagne rude.

Dans la présente étude, nous avons obtenu auprès de la météorologie nationale les données précises de l'hiver 1980-1981, ce qui nous a permis de calculer avec un bonne précision les indices de gel correspondant aux périodes sur lesquelles les murs ancré et cloué ont été soumis au gel.

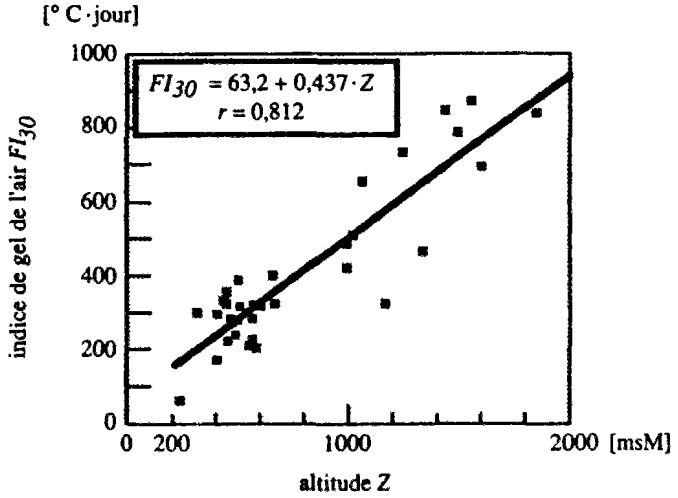


Figure B.2-6 : Corrélation entre l'indice de gel de l'air et l'altitude. Ensemble de la Suisse 1931-1970. Chaque carré représente une station de mesure et l'indice de gel est la moyenne des trois hivers les plus froids d'une période de 30 ans (Dysli, 1991)

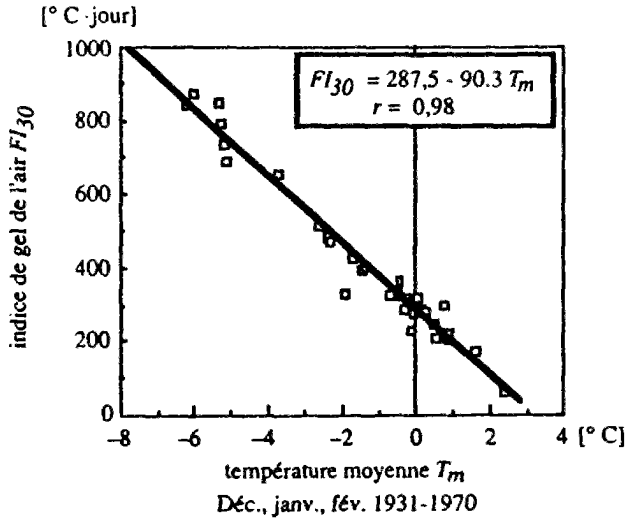


Figure B.2-7 : Corrélation entre l'indice de gel de l'air I_{air} et la température moyenne des mois de décembre, janvier et février. Ensemble de la Suisse 1931-1970.
Chaque carré représente une station de mesure et l'indice de gel I est la moyenne des trois hivers les plus froids d'une période de 30 ans (Dysli, 1991)

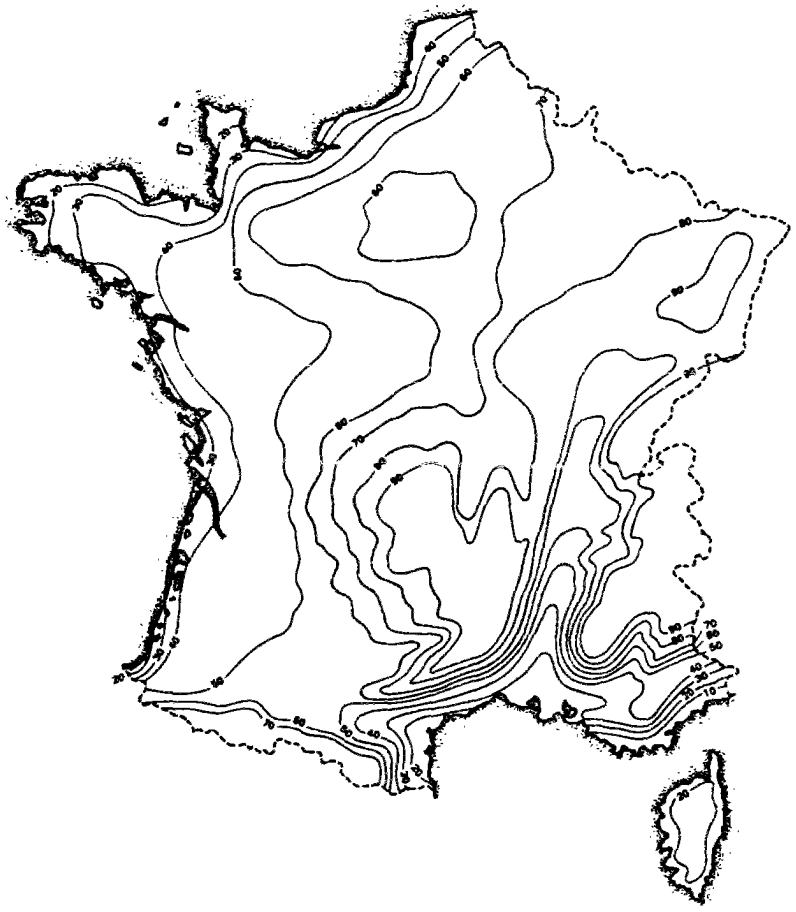


Figure B.2-8: Nombre moyen annuel de jours de gelée sous abri
(Mothes, Faure et Boutonnet, 1973)

2.4.1.2 Calculs à partir des données météorologiques

Les données météorologiques utilisées dans le présent rapport ont été fournies par le poste de la météorologie à La Clusaz (1100m). Ces données se présentent sous la forme des températures journalières minimales, maximales et moyennes entre le 1er septembre 1980 et le 31 mars 1981. La température minimale correspond à la température minimale enregistrée pendant 24 h : entre 18h la veille et 18 h le jour même. La température maximale correspond à la température maximale enregistrée pendant 24 h : entre 6h la veille et 6 h le jour même. La température moyenne correspond à la moyenne des températures minimale et maximale du jour considéré (figure B.2-9). Il est à noter que pour un même jour, l'écart des températures mesurées peut aller jusqu'à 20°C.

L'indice de gel en surface ne dépend pas seulement de la température de l'air mais aussi des autres paramètres météorologiques : radiations solaires directes, vent, apports calorifiques dus aux précipitations, etc. En particulier, l'indice de gel peut être est très sensiblement modifiée par l'indice de radiation qui quantifie le degré d'ensoleillement de la surface. Pour une surface très ensoleillée, l'indice de radiation peut atteindre 200°C*jour (Dysli,1991). Les profilés de la paroi berlinoise ancrée et du mur en sol cloué considérés sur le site de La Clusaz sont orientés plein nord. Ils restent toujours ombragés et l'indice de radiation peut être considéré comme nul. L'indice de gel en surface est alors égal à l'indice de gel de l'air.

Les courbes cumulées des températures, minimales, moyennes et maximales sur toute la période de septembre 1980 à mars 1981 sont représentées sur la figure B.2-11. Il convient de noter que la courbe correspondant aux températures maximales est quasiment monotone, ce qui donne un indice de gel très faible, de l'ordre de quelques dizaines de °C jours. La courbe correspondante aux températures minimales présente durant l'hiver une forte décroissance et donne un indice de gel de plusieurs centaines de °C jours. Ces observations sont à relier aux mesures réalisées sur deux sections de la paroi berlinoise, exposées suivant deux directions opposées, Nord et Sud. Le mur exposé Sud n'a subi aucun gonflement alors que le mur exposé au Nord a subi des gonflements importants. Pour cette raison là, nous avons calculé l'indice de gel pour les murs et parois exposés plein Nord, à partir des températures minimales mesurées.

L'analyse des données météorologiques montre que l'hiver 1980-1981 est caractérisé par une seule et longue période froide. La période froide a commencé le 26 novembre 1980. Après cette date, les périodes froides sont prédominantes et les températures minimales en valeur absolue sont beaucoup plus grandes que les températures maximales. Pour cette période, la température moyenne est négative la plupart du temps. L'indice de gel pour l'hiver se calcule sur cette unique période froide.

2.4.1.2.1 Paroi berlinoise ancrée

Le 26 novembre 1980, les travaux sur la paroi berlinoise ancrée étaient en grande partie terminés. Les simulations sur les tirants ont donc été faites en prenant en compte les températures minimales mesurés à partir du 26 novembre 1980 et sur toute la période froide. La fin de l'hiver coïncide avec la date des dernières mesures sur la paroi ancrée, c'est à dire le 5 mars 1981. Pour les simulations sur les tirants, nous

avons donc pris la période du 26 novembre 1980 au 5 mars 1981, comme base de calcul.

Les températures minimales, maximales et moyennes, cumulées sur cette période sont présentées sur la figure B.2-11. Les températures moyennes mesurées sur cette période sont :

- moyenne des températures minimales : -6,21°C
- moyenne des températures moyennes : -2,19°C
- moyenne des températures maximales : +1,85°C

L'indice de gel de l'air calculé à partir des températures minimales sur cette période vaut 621,06°C jour. Les simulations effectuées précédemment sur la paroi berlinoise étaient basées sur une température de l'air constante égale à -7,0°C et un indice de gel de 700°C jour. Cet indice de gel et la température correspondante avait été estimé, à partir de la carte des indices de gel de l'hiver 1962-1963 et des formules de correction pour l'altitude proposées par Dysli (1991) (Unterreiner et al., 1992). Les estimations a priori sont donc très proches des valeurs réelles dans la mesure où l'hiver 1980 - 1981 a été un hiver rigoureux, proche de l'hiver décennal.

2.4.1.2.2 Mur en sol cloué

La construction du mur en sol cloué a été commencée le 26 novembre 1980, mais les travaux n'ont été terminés que le 15 décembre 1980. Le mur a donc subi un premier petit gel durant sa construction, ce qui peut avoir perturbé les mesures.

Pour les simulations sur le mur en sol cloué, nous avons pris la période froide du 16 décembre 1980 au 16 février 1981, comme base de calcul. Cette dernière date correspond aux dernières mesures réalisées sur le mur en sol cloué.

Les courbes des températures cumulées minimales, maximales, moyennes, sur cette période sont présentées sur la figure B.2-12. Les températures moyennes sur cette période sont :

- moyenne des températures minimales : -6,06°C
- moyenne des températures moyennes : -1,91°C
- moyenne des températures maximales : +2,27°C

Les simulations effectuées précédemment sur les murs de La Clusaz ont été faites avec une température de l'air constante et estimée à partir des données disponibles dans la littérature à -7.0°C (Unterreiner et al., 1992).

Dans les calculs, c'est l'indice de gel dans le sol au contact avec le parement qui importe. Le rôle d'isolant joué par le béton du parement peut être vu facilement quand on compare l'indice de gel à la surface du parement avec l'indice de gel à l'interface parement en béton - sol (figure B.2-13). Le calcul a été fait pour la paroi berlinoise ancrée, en tenant compte des variations journalières de la températures et en utilisant la formule de Portnov. Un calcul similaire a été fait en ne prenant pas en compte les variations journalière des températures et en comparant les formules de Stefan et Portnov (figure B.2-14). La différence entre les deux indices de gel à l'interface parement en béton - sol est très faible. La présence des 20 cm de béton du

parement de la paroi berlinoise a pour effet de réduire quasiment par 3 l'indice de gel auquel le sol est soumis sur une période de 100 jours. Les 15 cm de béton pour le mur en sol cloué réduisent l'indice de gel par un coefficient de 1,5 pour une période d'environ 65 jours.

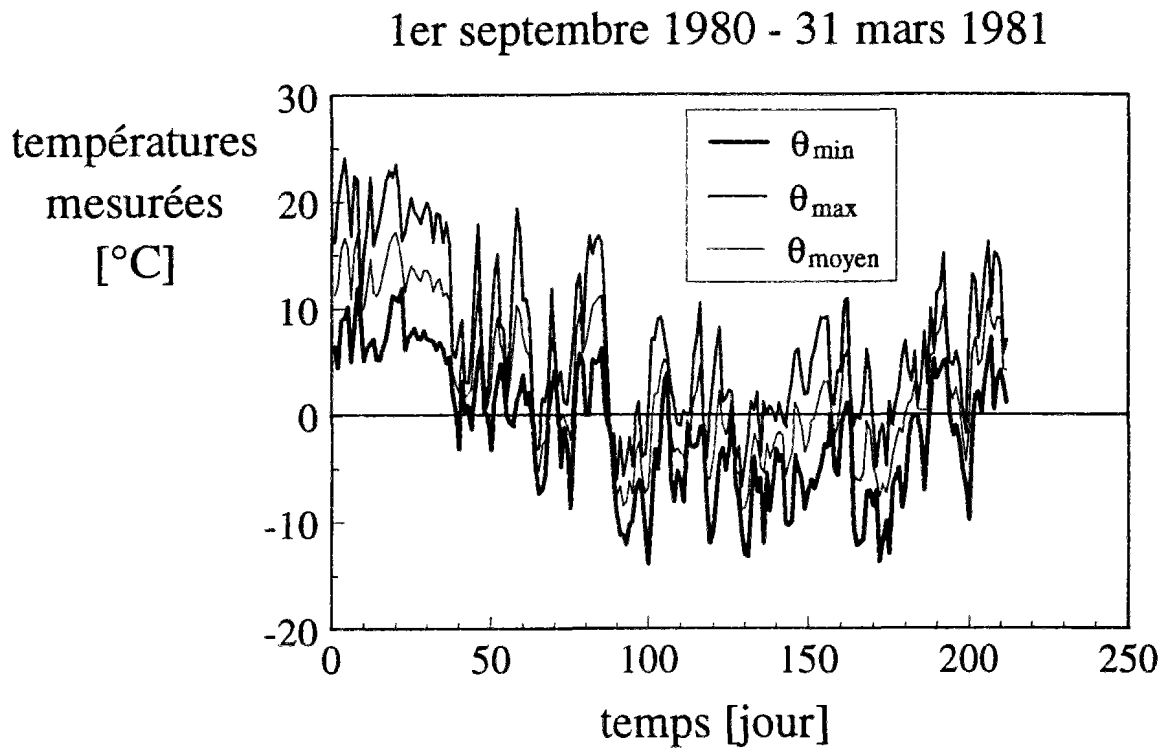


Figure B.2-9 : Températures mesurées à La Clusaz durant l'hiver 10980-1981

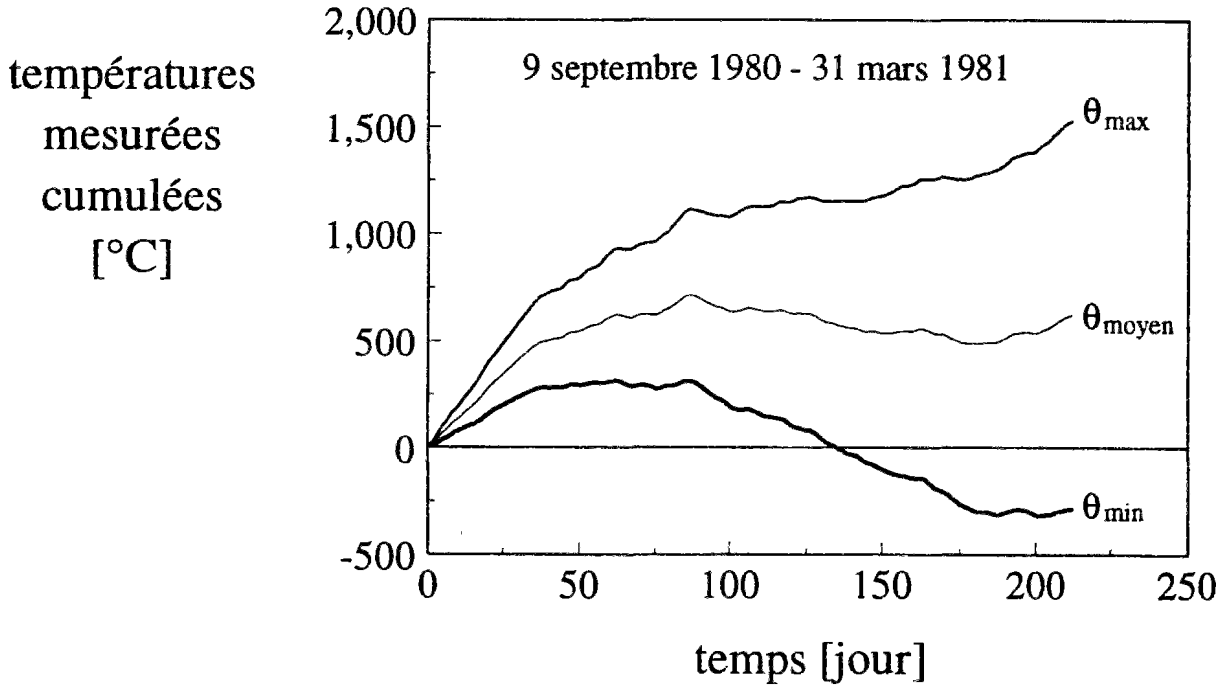


Figure B.2-10 : Températures cumulées mesurées à La Clusaz durant l'hiver 10980-1981

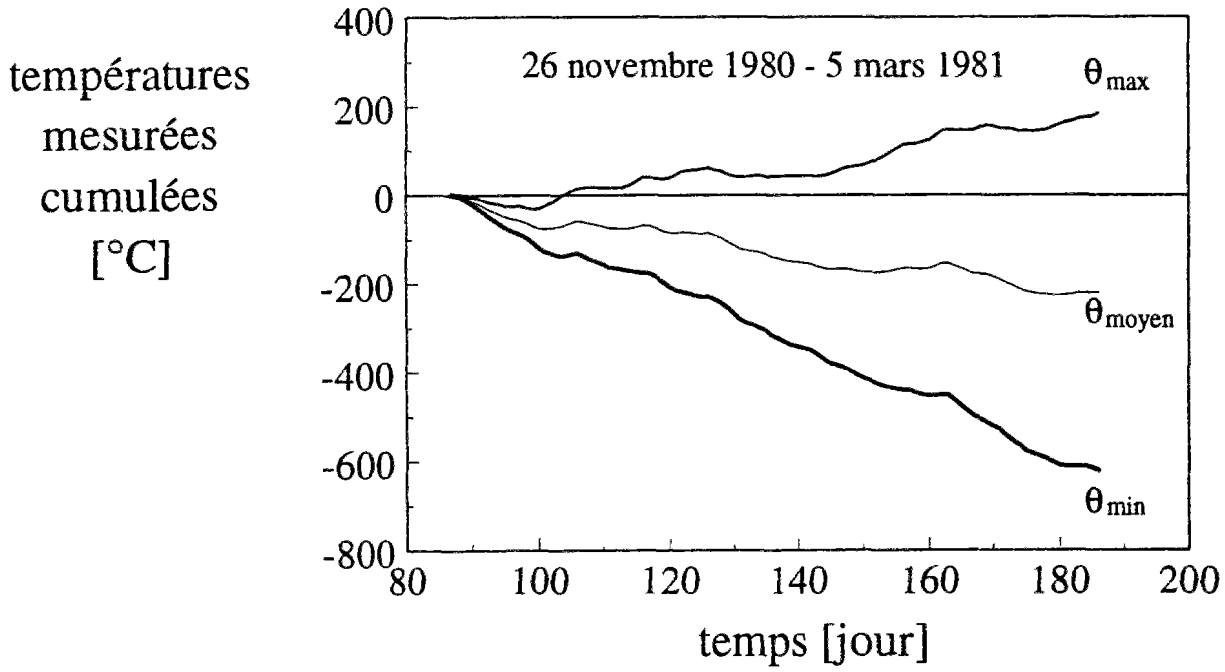


Figure B.2-11 : Températures cumulées mesurées à La Clusaz durant l'hiver 10980-1981 et pour la durée de service de la paroi berlinoise ancrée

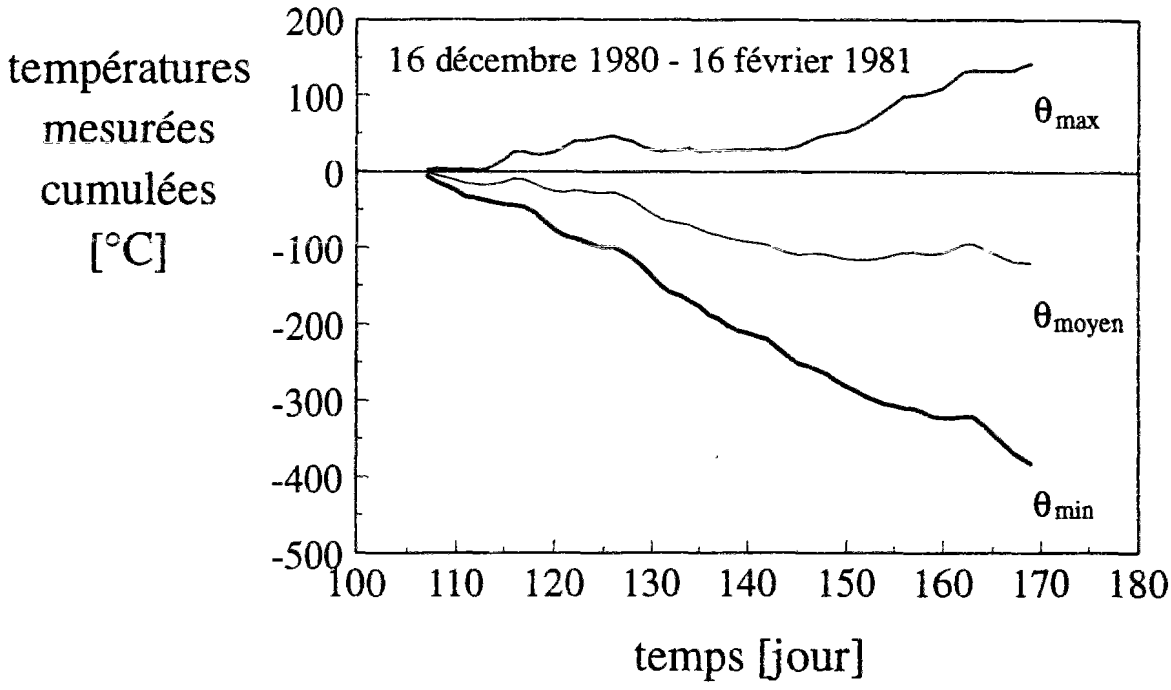


Figure B.2-12 : Températures cumulées mesurées à La Clusaz durant l'hiver 10980-1981 et pour la durée de service du mur en sol cloué

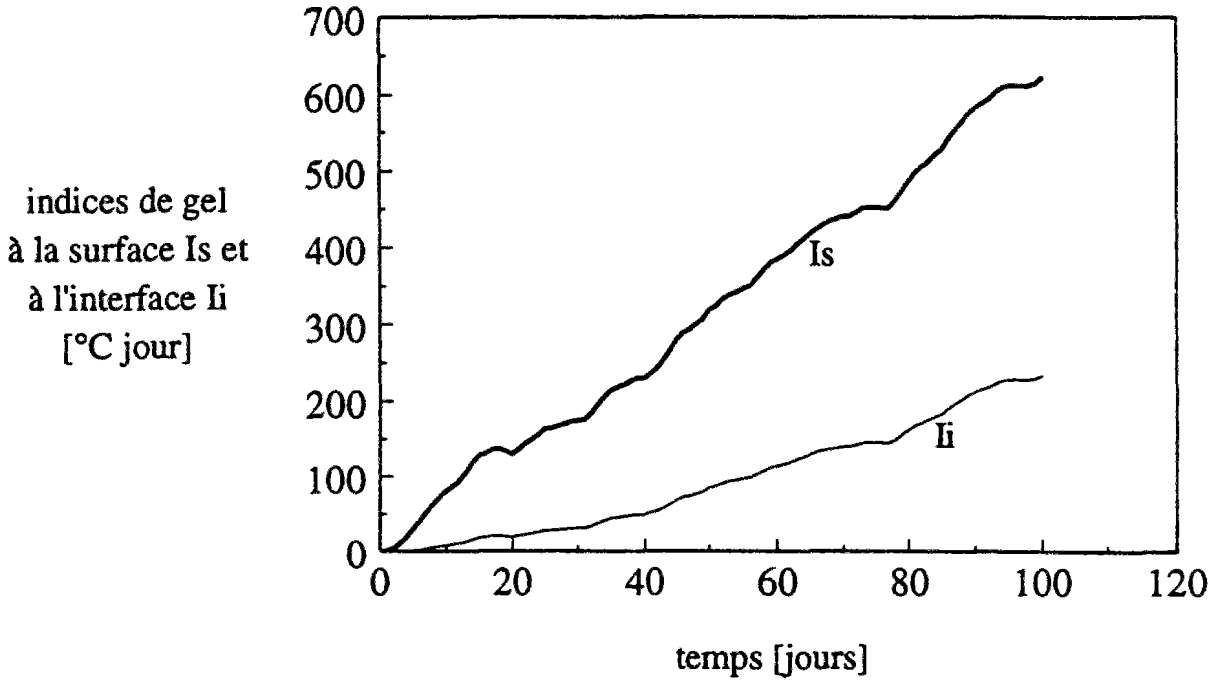


Figure B.2-13 : Indices de gel en surface (mesuré) et à l'interface béton - sol (calculé) à La Clusaz pour la durée de service de la paroi berlinoise ancrée durant l'hiver 10980-1981

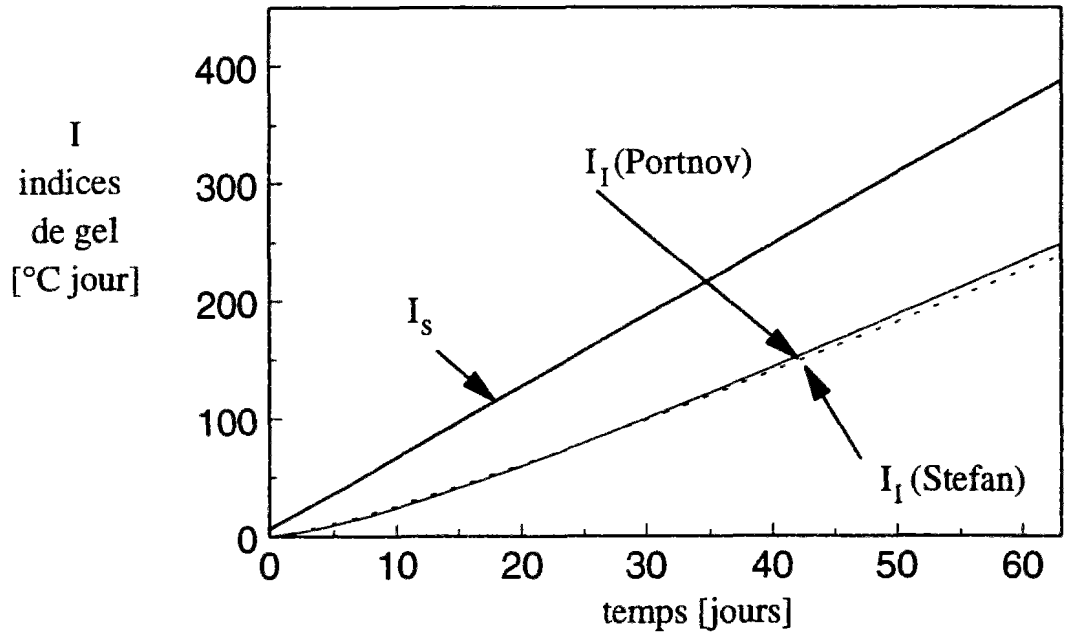


Figure B.2-14 : Indices de gel en surface moyen (mesuré) et à l'interface béton - sol (calculé) à La Clusaz pour la durée de service du mur en sol cloué durant l'hiver 10980-1981

2.4.2.1 Formule de Stefan

Le coefficient de pénétration du gel, α ou α *, peut être calculé à partir de l'une des formules analytiques citées ci-dessus, à condition de connaître les cinq paramètres thermiques du sol et les deux températures dont il dépend. Les paramètres thermiques du sol étant inconnus, il est préférable de calculer ce coefficient de pénétration directement à partir des mesures de températures réalisées sur le site durant l'hiver.

Les mesures effectuées sur le site de La Clusaz indiquent qu'à la fin de l'hiver, après environ 70 jours de froid, la profondeur de gel dans le sol est de 38 cm pour le mur en sol cloué. On en déduit pour le coefficient α propre au mur en sol cloué une valeur de 0.0454 m / $\sqrt{\text{jour}}$, dans le cas de la loi de Stefan (cas I, IIa et IIb).

Pour la paroi berlinoise ancrée, l'épaisseur du parement est de 20 cm. La profondeur de gel mesurée à la fin de l'hiver est de 22 cm. On en déduit la valeur de α propre à la paroi ancrée et qui est égale à 0.0263 m / $\sqrt{\text{jour}}$, dans le cas de la loi de Stefan (cas I, IIa et IIb).

2.4.2.2 Formule de Portnov

Dans le cas de la loi de Pomov, qui est utilisée pour les deux cas IIc et IId, il faut calculer l'indice de gel à l'interface parement en béton - sol à la fin de l'hiver pour pouvoir calculer le coefficient de pénétration du gel α *. Tout calcul fait, nous avons trouvé pour la paroi berlinoise ancrée un coefficient α* de 0.0145 m / $\sqrt{°\text{C jour}}$ et pour le mur en sol cloué un coefficient α* de 0,031m / $\sqrt{°\text{C jour}}$.

2.4.2.3 Simulations pour les différents cas

Des simulations de la profondeur de gel pour les différents cas ont été faites, aussi bien pour la paroi berlinoise ancrée (figure B.2-15 et B.2-16) que pour le mur en sol cloué (figure B.2-17 et B.2-18). Les courbes de profondeur de gel pour les deux cas IIc et IId sont très proches. Les petites variations de la température à la surface du parement sur quelques jours (cas IId) n'ont pas d'influence notable sur l'évolution de la profondeur de gel par rapport au cas IIc où l'on utilise une température en surface constante et égale à la température moyenne réelle. C'est le cumul des températures, mesuré par l'indice de gel, qui contrôle l'évolution de la profondeur de gel. Un calcul numérique avec la température moyenne en surface réelle (cas IIc) est donc très bon de ce point de vue là.

La formule de Stefan donne une vitesse de pénétration du gel plus importante en début d'hiver par rapport à la formule de Portnov. En fin d'hiver, la formule de Portnov donne une pénétration du gel plus rapide. Ce sont les premiers gonflements en tête qui ont l'effet le plus négatif sur les clous, puisqu'ils génèrent les incréments de tension les plus importants. La formule de Stefan est donc conservative, de ce point de vue.

L'influence de l'épaisseur du parement sur la profondeur de pénétration X(t) peut se voir sur la figure B.2-19 où l'on compare la loi de Stefan entre la paroi berlinoise ancrée (épaisseur 20 cm) et le mur en sol cloué (épaisseur 15 cm). Parallèlement à la pénétration du gel, la limite de la zone chaude notée X_0 (t) recule (Figure B.2-20).

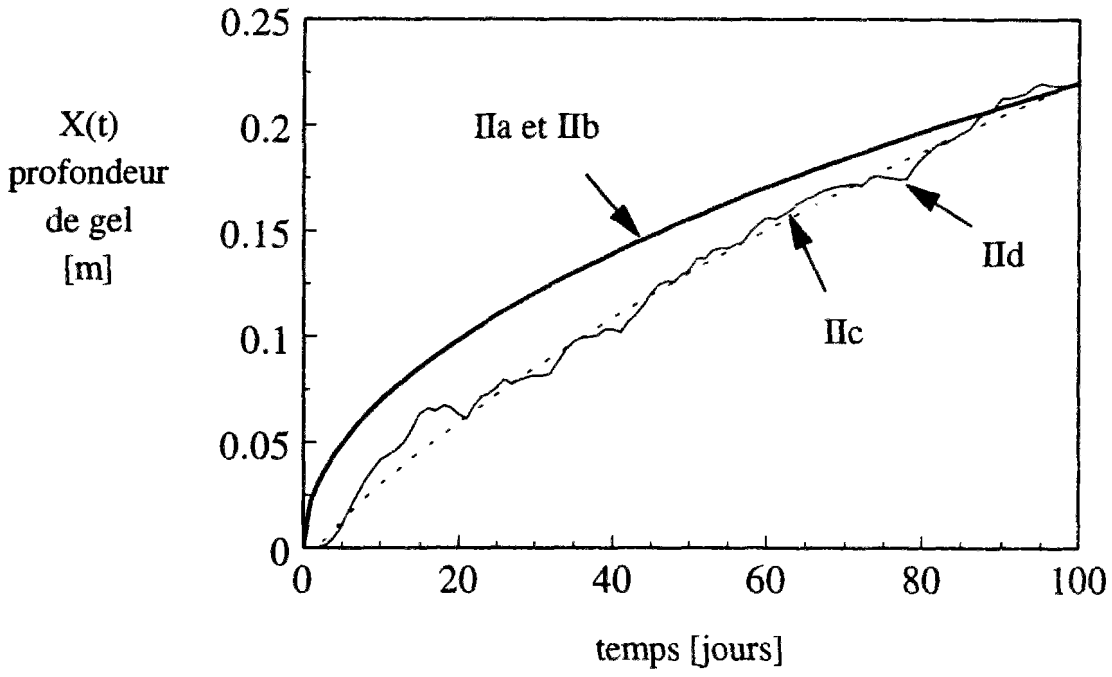


Figure B.2-15 : Evolution de la profondeur de gel X(t) en fonction du temps t, pour les différents cas étudiés. Paroi berlinoise ancrée de La Clusaz

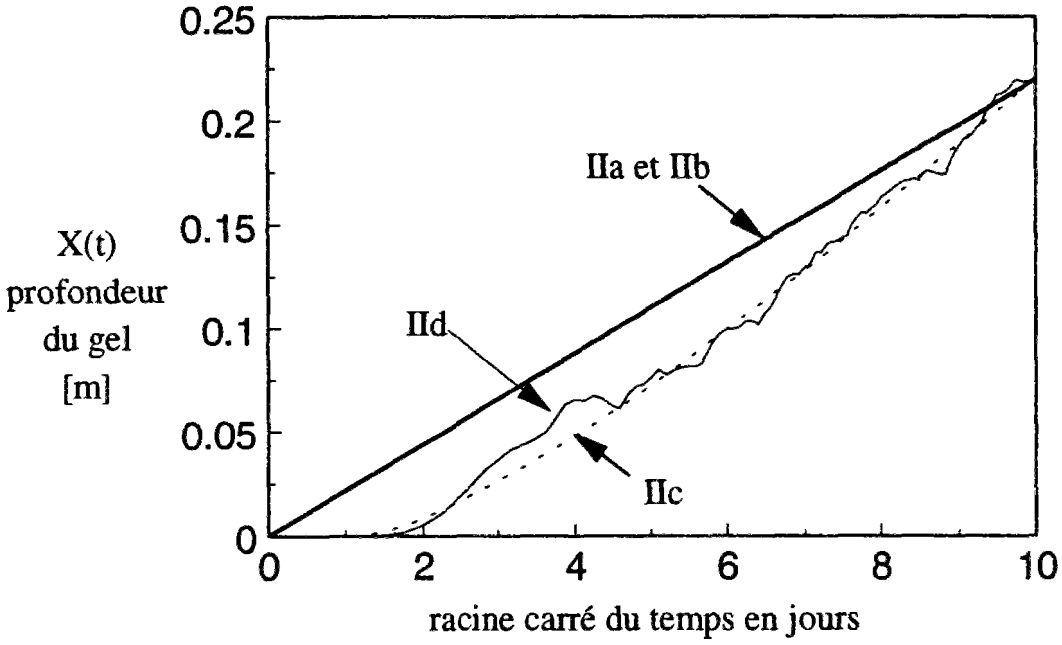


Figure B.2-16 : Evolution de la profondeur de gel X(t) en fonction de la racine carrée du temps t pour les différents cas étudiés; Paroi berlinoise ancrée de La Clusaz

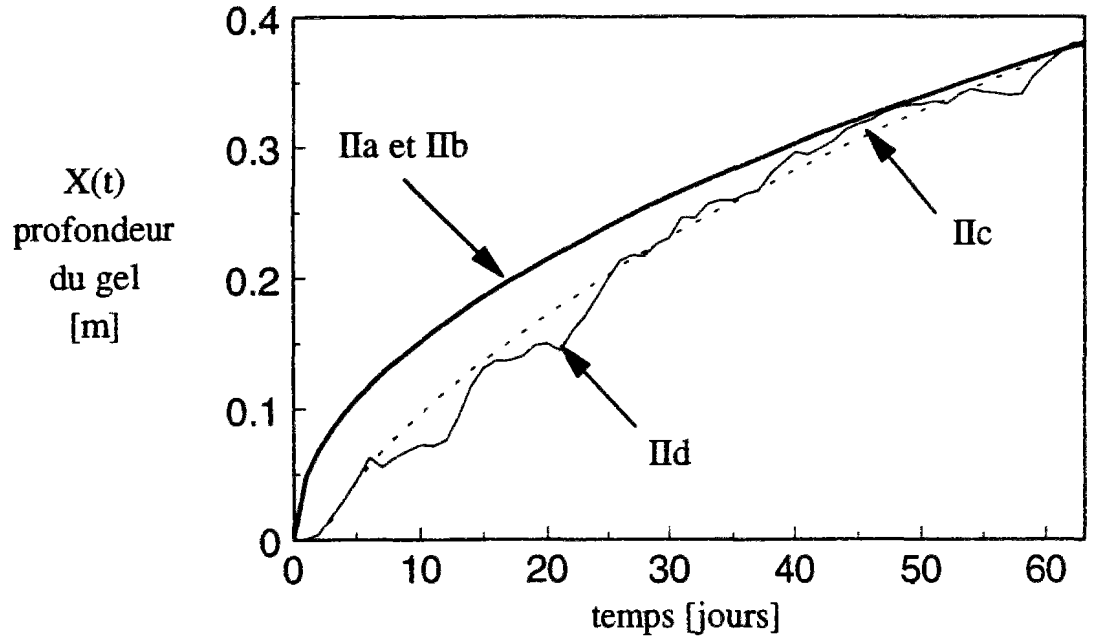


Figure B.2-17 : Evolution de la profondeur de gel X(t) en fonction du temps t, pour les différents cas étudiés. Mur en sol cloué de La Clusaz

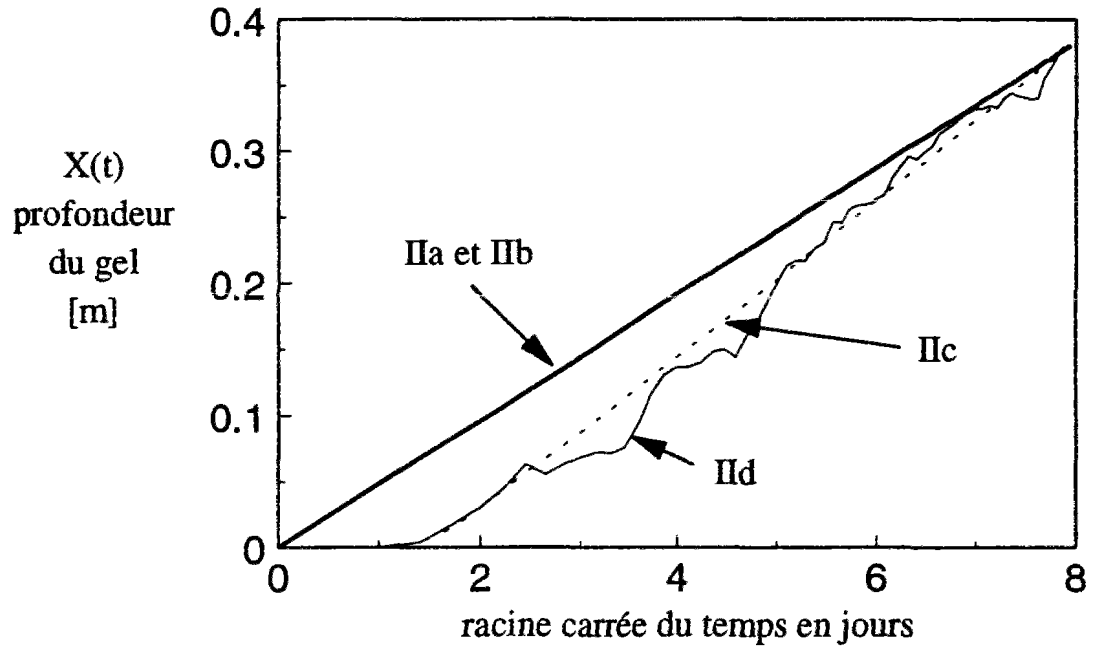


Figure B.2-18 : Evolution de la profondeur de gel X(t) en fonction de la racine carrée du temps t pour les différents cas étudiés; Mur en sol cloué de La Clusaz

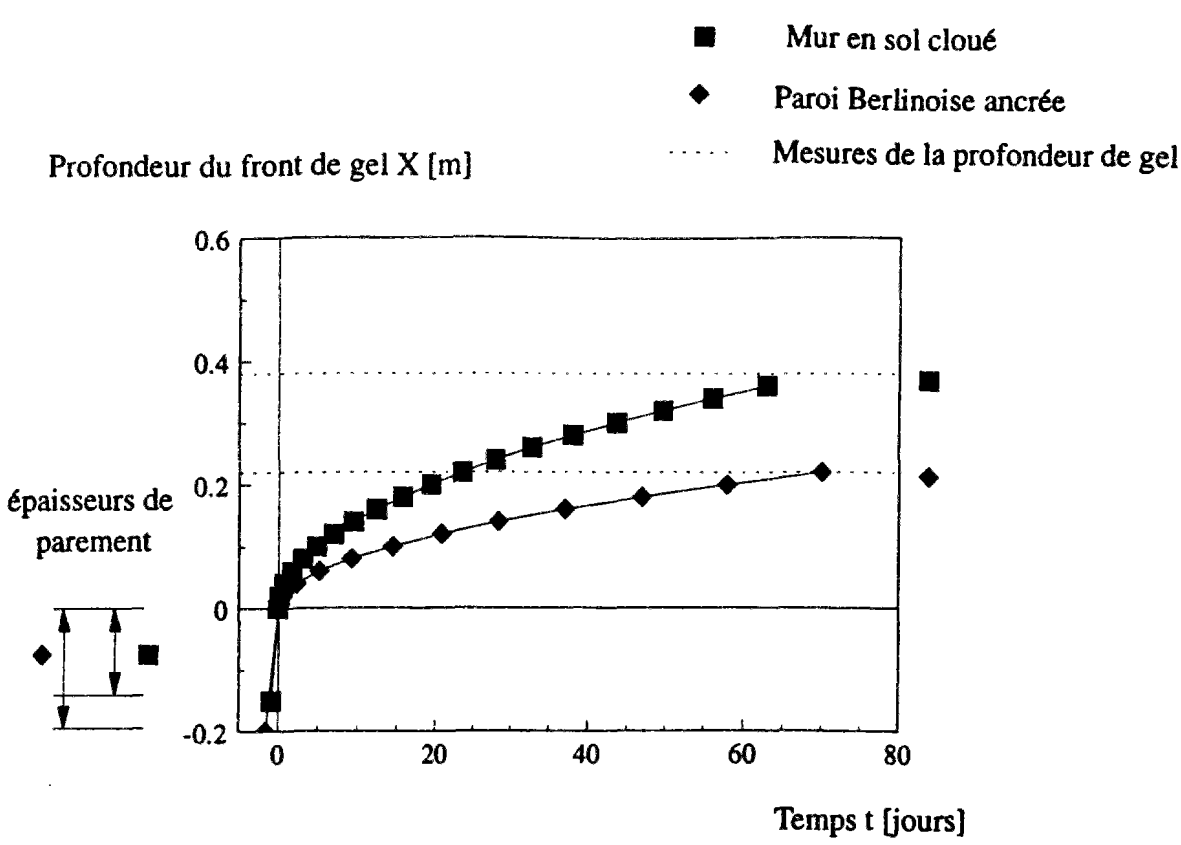


Figure B.2-19 : Evolution de la profondeur de gel X(t) derrière les parements de la paroi berlinoise ancrée et du mur en sol cloué (loi de Stefan)

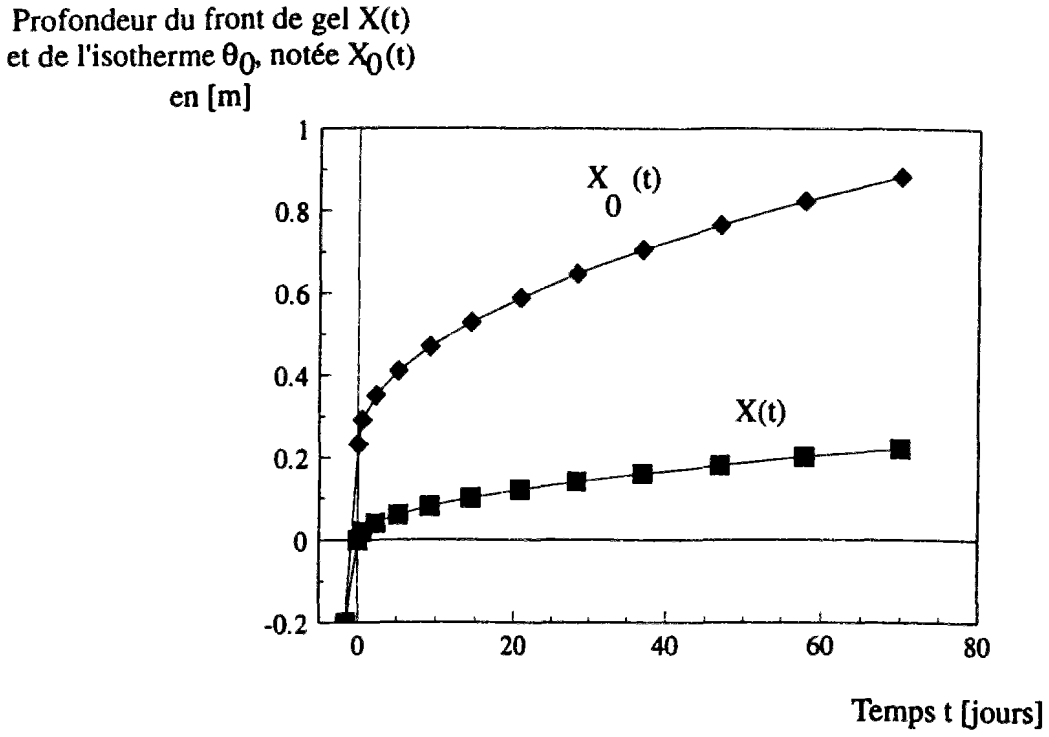


Figure B.2-20 : Evolution des profondeurs de gel X(t) et de la zone chaude X_0 (t) pour le mur en sol cloué (loi de Stefan)

2.4.3 Profile de température dans le sol

2.4.3.1 Température initiale dans le sol

Dans le cas d'un mur de soutènement à peine terminé, et donc soumis à un premier gel, θ_0 peut être pris égal à la température moyenne annuelle. Mais ceci n'est plus vrai pour une structure déjà soumise à un cycle de gel. La température moyenne annuelle à La Clusaz étant inconnue, un calcul à rebours à partir des mesures semble le plus approprié.

A La Clusaz, les mesures de température en profondeur dans le mur en sol cloué, à la fin de l'hiver, indiquent une valeur de + 6 °C à environ 1,5 m du parement. Pour la Berlinoise ancrée, les mesures sont identiques. On prendra donc pour les calculs une température initiale dans le sol θ_0 de +6 °C.

2.4.3.2 Coefficients de conductibilité thermique

En ce qui concerne le coefficient de conductibilité thermique du sol, celui-ci a été estimé à partir des études réalisées par Kersten (1949, 1952, 1963) et qui sont encore aujourd'hui les références en ce domaine. En se basant sur ces résultats, Philippe (1967) a proposé des abaques pour quatre types de sol : sols grenus, gelés et non gelés, sols fins, gelés et non gelés. A partir de ces abaques, on obtient directement pour un sol avec un poids volumique sec γ_d = 20,4 kN / m^3 et une teneur en eau w = 8% , un coefficient k_u pour le sol non gelé de 7,2 10^{-3} cal / s cm °C , c'est à dire de 3,01 W / m °C tandis que pour le sol gelé on obtient un coefficient k_f égal à 6,4 10^{-3} cal / s cm °C , c'est à dire 2,68 W / m °C.

On peut remarquer que les valeurs données par les abaques de Philippe pour les sols grenus (graves) correspondent au haut de la fourchette donnée par Dysli et établie à partir des essais de Kersten, ainsi que d'essais plus récents réalisés à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.

2.4.3.2 Simulations numériques

Avec les valeurs numériques sélectionnées ci-dessus, les simulations de profils de températures, aussi bien dans le sol de la paroi berlinoise ancrée que celui du mur en sol cloué sont en bon accord avec les mesures réalisées sur le site à la fin de l'hiver (figures B.2-21 et B.2-22).

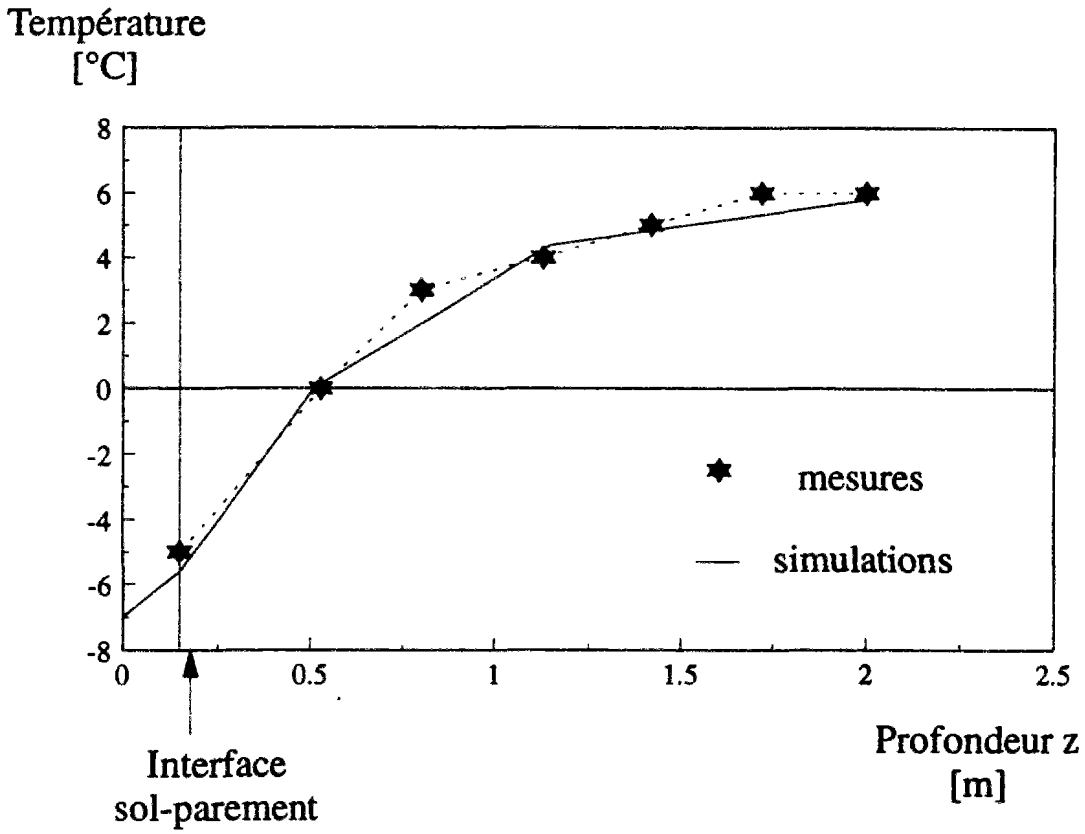


Figure B.2-21 : Profils de température derrière le parement de la berlinoise ancrée, mesuré (le 5 mars 1981 après 70 jours de gel) et calculé (loi de Stefan)

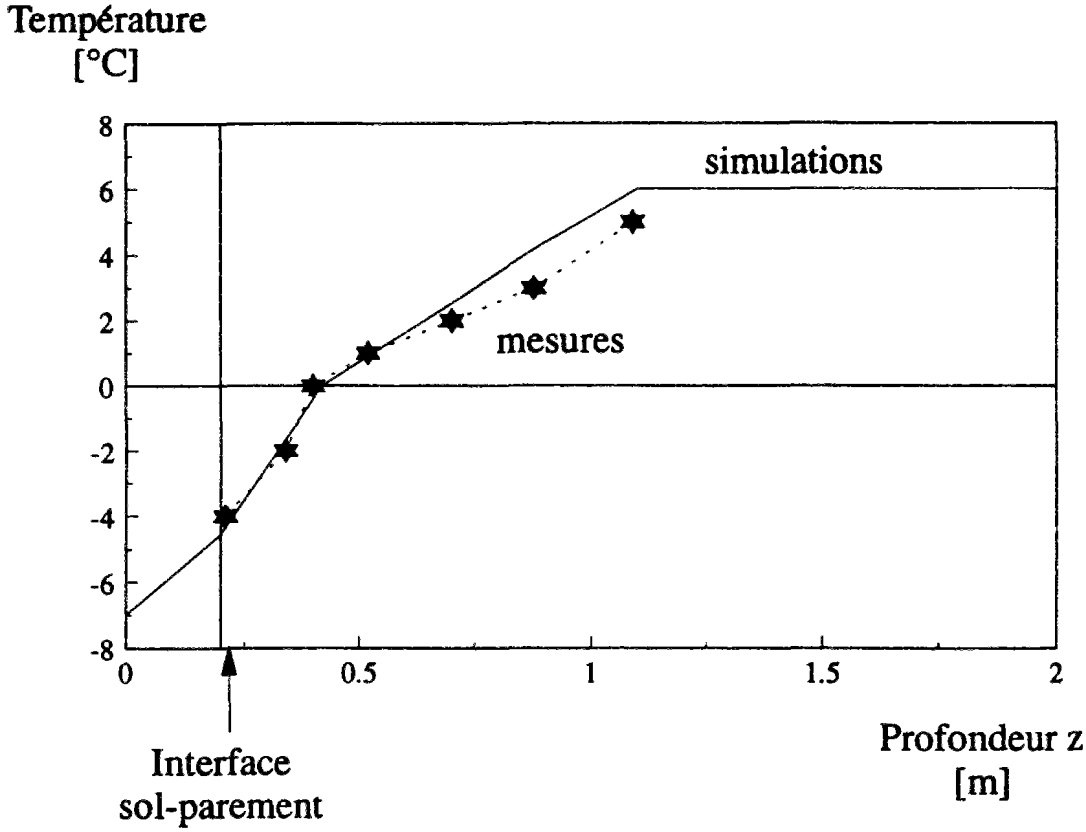


Figure B.2-22 : Profils de température derrière le parement du mur en sol cloué, mesuré (le 5 mars 1981 après 70 jours de gel) et calculé (loi de Stefan)

3 Calcul des gonflements du sol sous l'action du gel

3.1 Etude bibliographique

Lors de la pénétration du gel dans le sol, des phénomènes liés à la capillarité produisent une dépression sur le front de gel, appelée succion cryogénique (Chaloub, 1971). Celle-ci provoque une aspiration d'eau vers le front de gel (figure B.3-1). Cet apport d'eau, qui peut être très important par rapport à l'eau présente initialement dans le sol, provoque un gonflement dans les structures (routes, ouvrages en terre) qui peut atteindre plusieurs décimètres dans des pays comme le Canada. Les valeurs mesurées en France sont plutôt de l'ordre de quelques centimètres (Philippe et al., 1973).

Il est à remarquer que les gonflements observés à La Clusaz sont d'un ordre de grandeur bien supérieur à ceux qui pourraient résulter de la simple augmentation du volume de l'eau interstitielle déjà présente, lors du changement de phase.

Une estimation, à partir des formules données dans le paragraphe 3.2, du gonflement dû simplement au gel de l'eau interstitielle déjà présente, donne pour les murs de La Clusaz (teneur en eau w égale à 8%) une variation de volume au maximum de 1,6 % et donc un gonflement de 0,7 cm pour une profondeur de gel de 45 cm.

L'ordre de grandeur des gonflements que l'on pourrait attendre pour le sol de La Clusaz est donc de quelques millimètres au maximum. Les gonflements observés étant de l'ordre de 10 cm pour la paroi ancrée, et 3 cm pour le mur en sol cloué, il est clair que la moraine de La Clusaz était un sol gélif bien qu'elle soit constituée à plus de 65% de matériaux granulaires (sables, graviers, blocs de rocher).

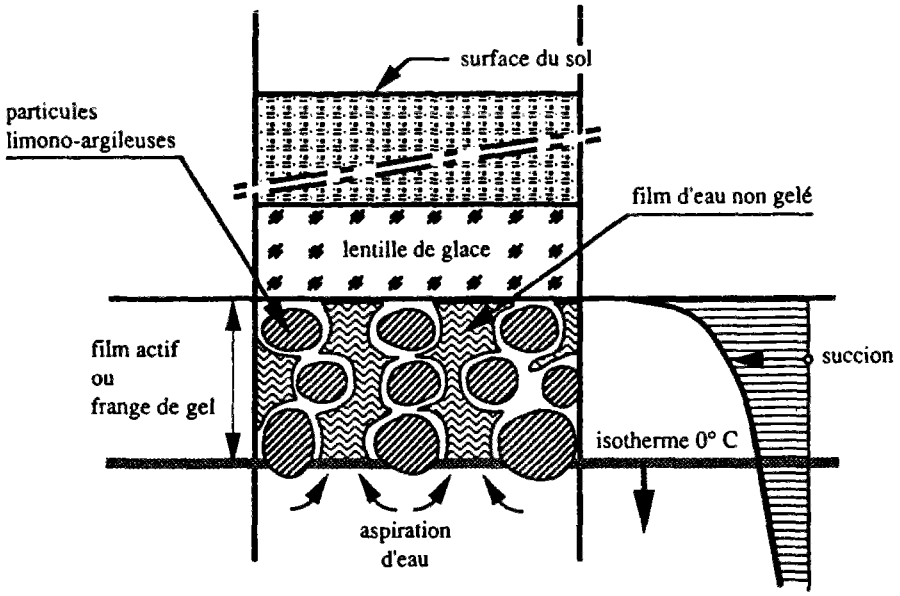


Figure B.3-1 : Mécanisme de formation des lentilles de glace sur le front de gel (Dysli, 1991)

Selon la classification d'un sol, il est possible de déterminer le caractère gélif d'un sol. Dans les régions tempérées à froides, où la durée des hivers est trop courte pour produire la migration d'une quantité d'eau suffisante à la formation des lentilles de glace, l'argile est considérée comme non gélive. Ceci n'est plus le cas dans les pergélisols où des lentilles de plusieurs mètres d'épaisseur ont pu être observées dans des argiles. Les sols sableux à grossiers ne sont pas considérés comme gélifs. Seuls les sols limoneux sont gélifs (Dysli, 1991).

A La Clusaz, le pourcentage d'argile était très faible (pourcentage passant 2 μ inférieur à 5 %) tandis que le pourcentage de particules limoneuses (de taille entre 2 μ et 80 μ) était assez important et de l'ordre de 30 %. C'est donc cette dernière fraction qui est responsable des gonflements observés.

Plusieurs théories ont été développées pour calculer ces gonflements. Par souci de simplifications on choisira la théorie de Konrad et Morgenstern qui offre l'avantage de la simplicité tout en tenant compte des paramètres importants du problème présent, notamment la prise en compte de l'influence de la pression exercée par le parement sur le sol et qui tend à réduire les gonflements aussi bien pour une paroi ancrée que pour un mur en sol cloué (Konrad et Morgenstern, 1980, 1981, 1982a, 1982b).

Cette théorie, qui a été développée pour des applications pratiques ("engineering theory of frost heave"), repose sur des analyses thermodynamiques rigoureuses mais simplifiées.

(1) Le flux d'eau aspirée vers le front de gel ou encore la vitesse de l'eau interstitielle dans la zone de sol gelé notée V_u est proportionnelle au gradient de température dans la zone de sol gelé, noté $\text{grad}_f\ \theta$. Le coefficient de proportionnalité étant appelé potentiel de ségrégation SP :

$$V_u = SP\ \text{grad}_f\ \theta \qquad \text{(B.3-1)}$$

Il est intéressant de remarquer que le potentiel de ségrégation, qui est un facteur de proportionnalité entre la vitesse de l'eau et le gradient de température, fait le lien entre les phénomènes de transferts d'eau et de transferts de chaleur (Konrad et Morgenstern, 1980) (figure B.3-2).

(2) Le potentiel de ségrégation dépend :

(2.1) de la succion moyenne dans la frange gelée qui est directement reliée à la succion existante à l'interface entre le sol gelé et non gelé (Konrad et Morgenstern, 1981)(Figure B.3-3),
(2.2) de la pression extérieure P_{ext} appliquée sur l'échantillon (Konrad et Morgenstern, 1982b), (Figure B.3-4),
(2.3) la vitesse de refroidissement de la frange gelée (Konrad et Morgenstern, 1982a) (Figure B.3-5).

Par rapport aux quatre publications précitées, à partir desquelles la théorie du potentiel de ségrégation a été développée, un certain nombre d'améliorations ou critiques ont été proposées ultérieurement.

Concernant la définition du potentiel de ségrégation, Nixon (1991) a proposé d'utiliser la vitesse de l'eau dans la zone gelée V_{ff} et le gradient de température dans cette même zone $grad_{ff}\ \theta$ plutôt que V_u et $grad_f\ \theta$ afin d'améliorer les prévisions dans le cas de régimes transitoires.

D'autre part, suivant la théorie de Konrad et Morgenstern le potentiel de ségrégation devrait être indépendant des conditions aux limites imposées et du type d'essai utilisé. Cependant, il est observé expérimentalement une dépendance qui reste néanmoins relativement faible. Pour améliorer la méthode du potentiel de ségrégation, d'autre théories plus complexes ont été publiées plus récemment, notamment la méthode des lentilles de glace discrètes de Nixon (1991).

Cette théorie plus complexe, nécessite la connaissance de paramètres supplémentaires par rapport à la méthode du potentiel de ségrégation. Elle ne donne pas de solution explicite, mais nécessite une résolution itérative. Enfin, elle n'a pas été validée sur suffisamment de sites pour pouvoir être utilisée en pratique.

L'application à des cas pratiques, de la théorie du potentiel de ségrégation, telle qu'elle est définie dans les quatre articles de 1980, 1981, 1982a, 1982b donne d'assez bons résultats aussi bien pour des calculs de soulèvement de plaques (Nixon, 1982; Hayhoe et Balchin, 1990), la modélisation de gazoducs enterrés (Carlson et Nixon, 1988; Konrad et Morgenstern, 1984) que des simulations de gonflements sous des routes soumises au gel (Konrad et Morgenstern, 1983; Konrad, 1992). La méthode du potentiel de ségrégation sera donc utilisée dans la suite du rapport pour calculer les gonflements dus à la formation de lentilles discrètes.

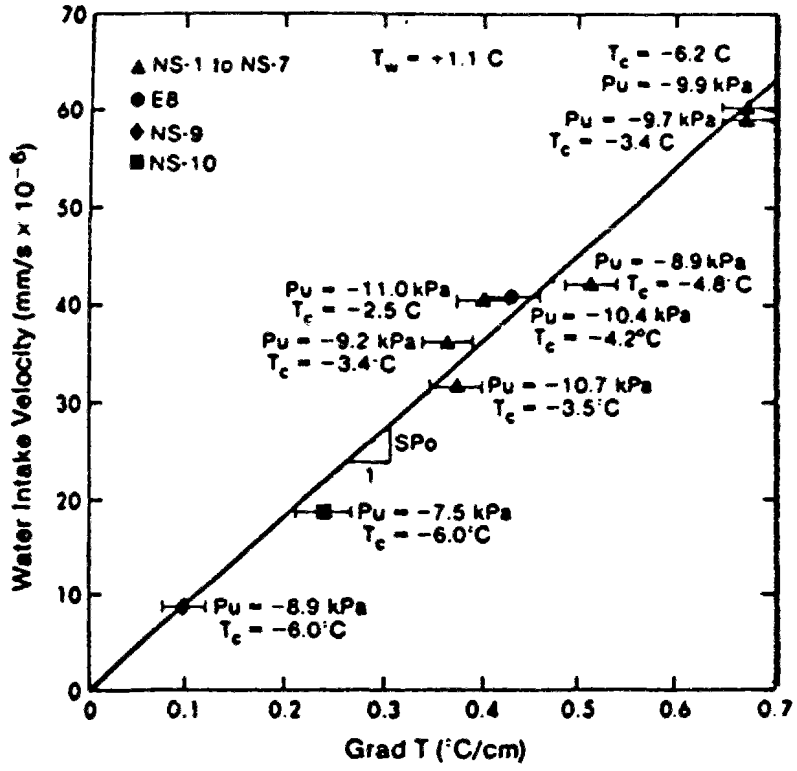


Figure B.3-2 : Relation entre le flux d'eau aspirée vers le front de gel et le gradient de température dans la zone gelée (d'après Konrad et Morgenstern, 1981)

3.2 Calcul des gonflements

Le gonflement total du sol Δh_t pendant l'intervalle de temps Δt, se décompose en deux termes:

(1) l'augmentation de volume (9 %) due au gel de l'eau interstitielle présente initialement dans le sol, notée Δh_i, et

(2) l'apport et l'augmentation de volume dus au gel de l'eau aspirée vers le front de gel par la succion , notés Δh_S.

(1) Pour une tranche de sol d'épaisseur Δz, le premier terme se calcule simplement sous la forme suivante en supposant que le sol est saturé et que toute l'eau interstitielle gèle à 0°C.

$$\Delta h_i = \frac{9}{100} \frac{w}{w + 100 \frac{\gamma_w}{\gamma_s}} \Delta z \qquad \text{(B.3-2)}$$

Le terme Δh_i ainsi calculé est surestimé, mais cela n'a pas beaucoup d'influence sur le problème car le terme Δh_S est prépondérant.

Pendant l'intervalle de temps Δt, le front de gel avance de ΔX :

$$\Delta X = \left(\frac{dX}{dt} \right) \Delta t \qquad \text{(B.3-3)}$$

d'où le gonflement correspondant :

$$\Delta h_i = \frac{9}{100} \frac{w}{w + 100 \frac{\gamma_w}{\gamma_s}} \left(\frac{dX}{dt} \right) \Delta t \qquad \text{(B.3-4)}$$

(2) Le gonflement dû à la formation des lentilles de glace se calcule avec la relation suivante :

$$\Delta h_s = 1{,}09 \; v(t) \; dt \qquad \text{(B.3-5)}$$

Le facteur 1,09 tient compte de l'apport d'eau (+ 100 %) et de son augmentation de volume en gelant (+ 9 %).

La vitesse d'arrivée d'eau dans la frange de sol gelé se calcule avec le potentiel de ségrégation:

$$v = SP \; \text{grad}_f \, \theta \qquad \text{(B.3-6)}$$

où, v est la vitesse d'arrivée d'eau par m^2 [m / jour], SP le potentiel de ségrégation du sol [m^2 / jour °C], et grad θ le gradient de température dans la zone de sol gelé [°C / m].

3.3 Détermination du potentiel de ségrégation

Dans les quatre publications de 1980, 1981, 1982a et 1982b, Konrad et Morgenstern démontrent que pour des essais de gel en laboratoire le potentiel de ségrégation dépend essentiellement : (1) du taux de refroidissement de la frange de sol gelée noté $\frac{d\theta_f}{dt}$, (2) de la succion sur le front de gel, et (3) de la pression extérieure appliquée P_{ext}.

Pour ce qui concerne les conditions de gel sur un site, celles-ci peuvent apparaître plus complexes; néanmoins, il est possible d'obtenir une borne supérieure des gonflements en considérant les simplifications suivantes :

3.3.1 Influence du taux de refroidissement

Il peut être montré que les caractéristiques au gel du sol sur un site réel sont quasiment égales à celles correspondant à des essais en laboratoire avec des conditions aux limites en température constantes. Le terme $\frac{d\theta_f}{dt}$ peut être alors pris égal à zéro (régime stationnaire).

3.3.2 Influence de la succion

La succion au front de gel influence le potentiel de ségrégation: celui-ci augmente quand la succion diminue (figure B.3-3). En prenant une succion nulle, on obtient donc une borne supérieure des gonflements, ce qui est le plus souvent conservatif.

Cette simplification, qui donne des résultats conservatifs pour un sol non soumis à une surcharge ou pression extérieure nulle (SP peut alors varier du simple au triple), est par contre justifiée dans le cas d'un sol soumis à une pression extérieure P_{ext} significative. Konrad et Morgenstern ont en effet établi que l'influence de la succion au front de gel sur le potentiel de ségrégation décroît très rapidement quand la pression extérieure appliquée P_{ext} augmente (Figure B.3-6).

Pour une pression extérieure aux environs de 100 à 200 kPa, l'influence de la succion devient suffisamment faible pour être ignorée par rapport à l'influence de la pression extérieure.

3.3.3 Influence de la pression extérieure

L'influence de la pression extérieure P_{ext} sur le gonflement du sol ne peut, par contre, pas être négligée. Par exemple pour le limon de Devon, le potentiel de ségrégation diminue de 100 à 1,0 10^{-5} mm ^{2} /s° C quand P_{ext} varie de 0 à 250 kPa (figure B.3-4). Konrad et Morgenstern proposent ainsi d'écrire le potentiel de ségrégation sous la forme suivante :

$$SP = SP_0 \exp(-b\, P_{ext}) \qquad \text{(B.3-7)}$$

où SP_0 et b sont deux constantes qui peuvent être déterminées en laboratoire.

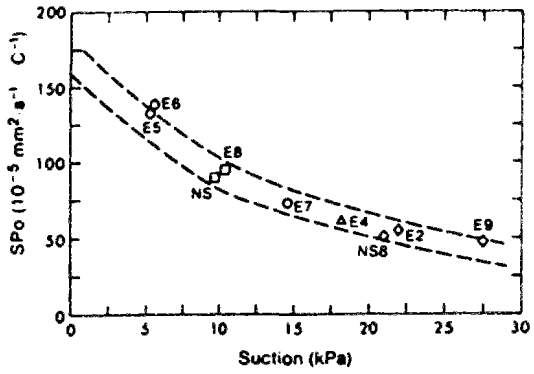


Figure B.3-3 : Variation du potentiel de ségrégation en fonction de la succion au front de gel; limon de Devon (Konrad et Morgenstern, 1981)

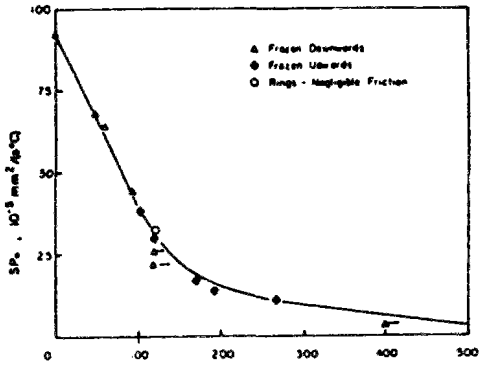


Figure B.3-4 : Variation du potentiel de ségrégation avec la pression extérieure appliquée; limon de Devon (Konrad et Morgenstern, 1982b)

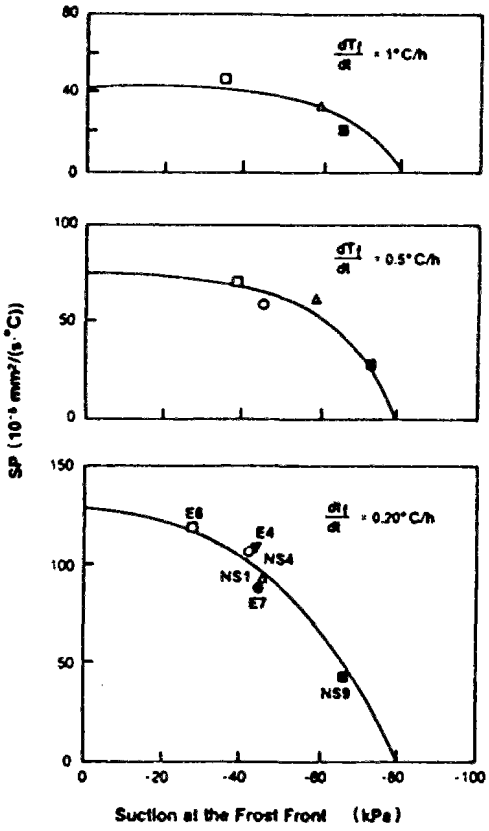


Figure B.3-5 : Variations des courbes potentiel de ségrégation en fonction de la succion au front de gel pour différentes vitesses de refroidissement de la zone gelée; limon de Devon (Konrad et Morgenstern, 1982a)

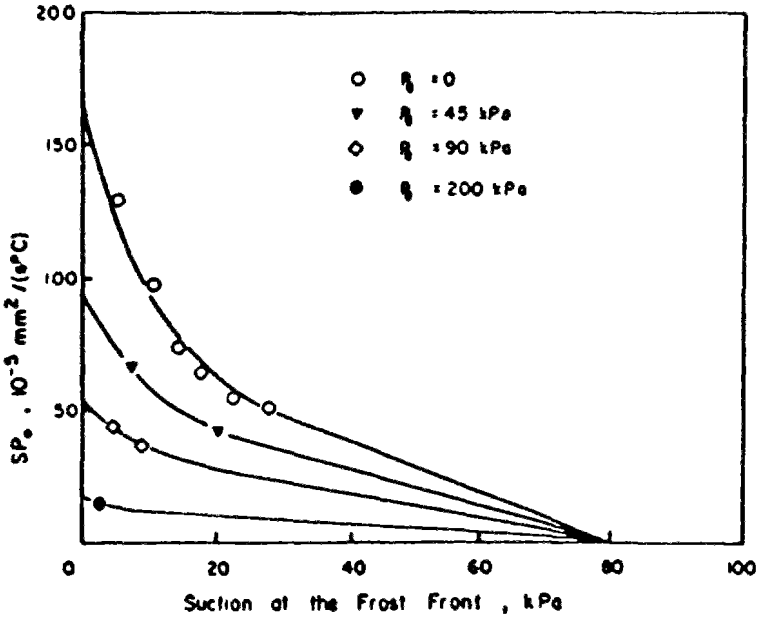


Figure B.3-6 : Variation du potentiel de ségrégation en fonction de la pression extérieure P_{ext} appliquée et de la succion au front de gel ; limon de Devon (Konrad et Morgenstern, 1982)

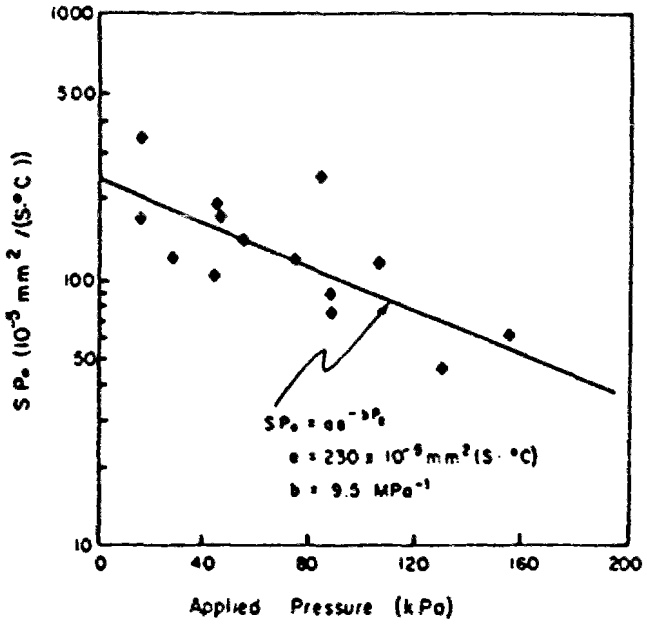


Figure B.3-7 : Variation du potentiel de ségrégation avec la pression extérieure appliquée pour le limon de Devon; établie par Konrad et Morgenstern, 1982 à partir des essais du Northern Engineering Services, 1975

3.4 Valeurs typiques des paramètres

La théorie du potentiel de ségrégation a été adoptée par le Comité Technique sur le gel de la Société Internationale de Mécanique des Sols et des Fondations (ISSMFE) en 1989 pour classer les sols suivant leur susceptibilité au gel.

Tableau B.3-1 : Classement des sols suivant leur susceptibilité au gel (classification de l'ISSMFE, 1989)

Susceptibilité Unités	négligeable	faible	moyenne	forte
mm^2 / h °C	$0 < SP_0 \leq 0,5$	$0,5 < SP_0 \leq 1,5$	$1,5 < SP_0 \leq 3,0$	$3,0 < SP_0$
m^2 / jour °C	$0 < SP_0 \leq 1,2\ 10^{-5}$	$1,2\ 10^{-5} < SP_0 \leq 3,6\ 10^{-5}$	$3,6\ 10^{-5} < SP_0 \leq 7,2\ 10^{-5}$	$7,2\ 10^{-5} < SP_0$

Unités : 1 mm^2 / °C h = $2,4\ 10^{-5}$ m^2 / j °C

Il est à noter que les recherches faites en France sur les sols gélifs étant directement orientées sur la géotechnique routière, où les sols sont soumis à des pressions extérieures très faibles de l'ordre de 10 à 20 kPa, très peu de travaux ont été conduits en France sur l'influence de la pression extérieure appliquée sur les gonflements des sols gélifs. L'essai au gel, développé par le LCPC pour classer les sols selon leur gélivité, se fait à pression extérieure appliquée nulle (Dupas et al., 1987).

L'un des avantages de la théorie du potentiel de ségrégation est son emploi quasi systématique au Canada et l'existence d'une base de données assez importantes de valeurs. A titre indicatif, quelques valeurs sont présentées ci-dessus dans le tableau B.3-2.

Tableau B.3-2 : Valeurs typiques des paramètres de gonflements

Références	Caractéristiques du sol	Valeurs des coefficients SP_0 et b
Northern Engineering Services (1975) Nes (1975), Penner et Ueda (1971)	Limon de Calgary (13% sable, 64% limon, 23% argile)	$SP_0 = 2,3\ 10^{-3}$ mm^2 / s °C $= 1,98\ 10^{-4}$ m^2 / jour °C $SP_{0.min} = 1,8\ 10^{-3}$ mm^2 / s °C $= 1,55\ 10^{-4}$ m^2 / jour °C $SP_{0.max} = 3,0\ 10^{-3}$ mm^2 / s °C $= 2,59\ 10^{-4}$ m^2 / jour °C b = 9,5 MPa^{-1}
Konrad et Morgenstern (1982)	Limon de Devon	$SP_0 = 1,2\ 10^{-3}$ mm^2 / s °C b = 8,95 MPa^{-1}
Hayhoe et Balchin (1990)	Terreau argileux (26% sable, 40% limon, 34% argile)	$SP_0 = 5,5\ 10^{-4}$ mm^2 / s °C

3.5 Détermination des paramètres à partir de corrélations

En l'absence de résultats d'essai au gel disponibles, il existe des corrélations permettant de corréler les paramètres SP_0 et b avec les résultats des essais d'identification.

Une bonne corrélation existe entre le potentiel de ségrégation et la courbe granulométrique, et en particulier, la teneur en particules fines ainsi que la limite de liquidité w_L . Rieke et al. (1985) ont ainsi défini un facteur de finesse du sol, noté R_f :

$$R_f = \frac{(\% < 2\mu m)(\% < 74\mu m) \cdot 100}{(\% < 400\mu m) \cdot w_L} \qquad \text{(B.3-8)}$$

La susceptibilité au gel d'un sol augmente quand la teneur en particules fines du sol croit. La figure B.3-8 montre que le coefficient SP_0 augmente avec l'augmentation du facteur de finesse R_f jusqu'à une valeur de 20-30%. Pour des valeurs plus grandes, SP_0 diminue et la susceptibilité du sol au gel diminue. Une valeur grande du facteur de finesse signifie un pourcentage élevé d'argile contenue dans le sol. Dans les sols riches en argile, la migration de l'eau ne dépend pas seulement de la perméabilité de la frange de gel, mais aussi de la perméabilité du sol chaud non gelé, ce qui explique la diminution du potentiel de ségrégation pour un facteur de finesse élevé (>30%).

Le paramètre b contrôle l'influence de la pression appliquée au sol sur le potentiel de ségrégation. La dépendance du potentiel de ségrégation en fonction de la pression extérieure diminue quand le pourcentage d'argile augmente (figure B.3-9).

Il est à noter que ces corrélations ont été développées à partir d'un spectre très large de sols (figure B.3-10).

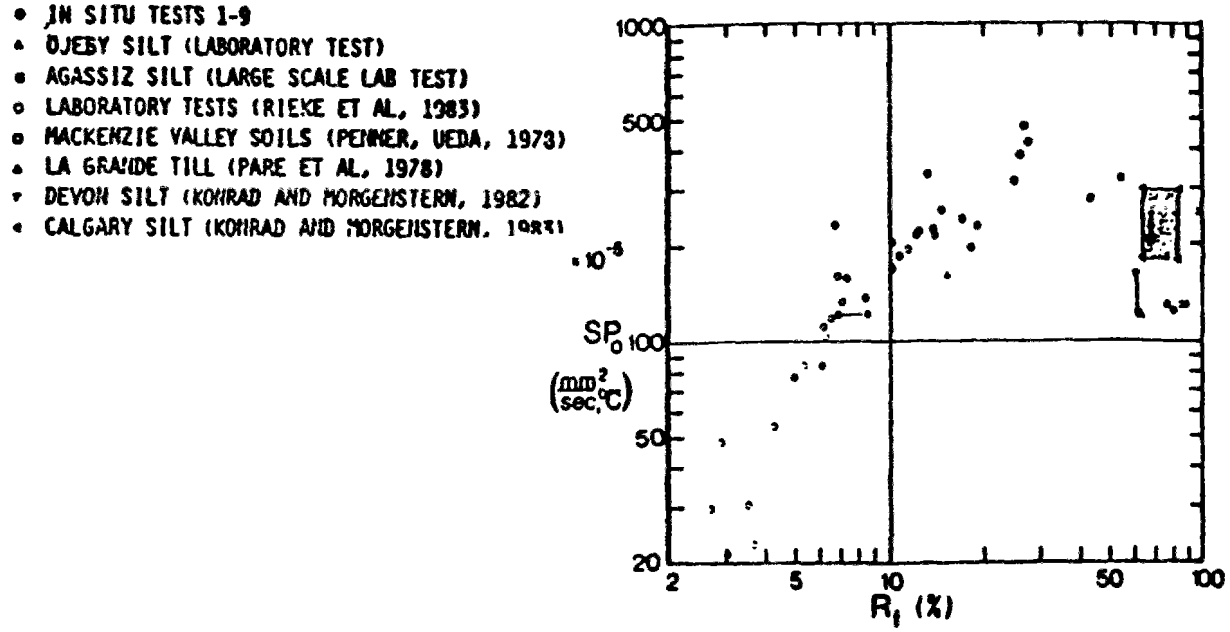


Figure B.3-8 : Corrélation entre le potentiel de ségrégation et le facteur de finesse du sol (Knutsson, Domaschuk, Chandler, 1985)

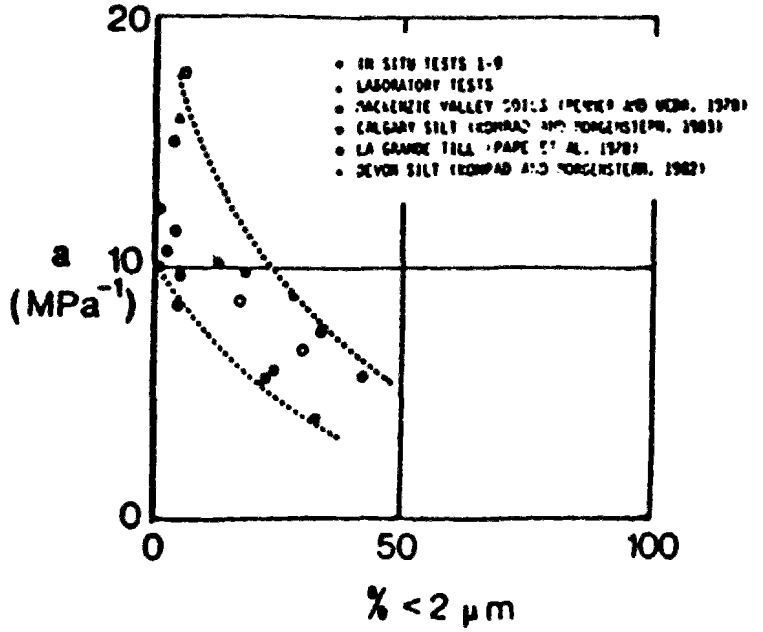


Figure B.3-9 : Corrélation entre le paramètre de gonflement b et la teneur en argile du sol (Knutsson, Domaschuk, Chandler, 1985)

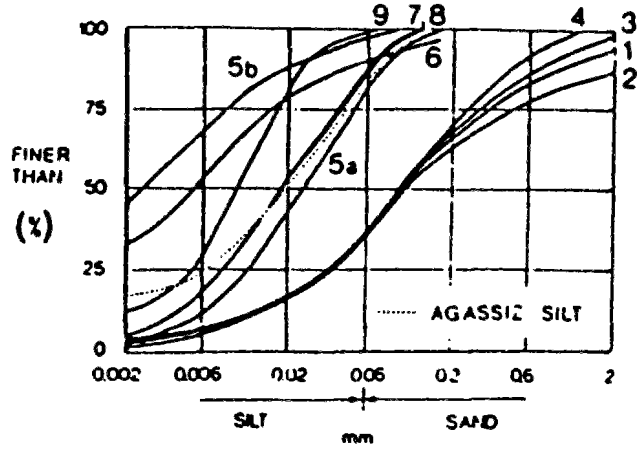


Figure B.3-10 : Courbes granulométrique des sols utilisés par Knutsson, Domaschuk, et Chandler (1985) pour développer leurs corrélations

3.6 Calcul des paramètres à partir des mesures

Des essais de gel ont été réalisés pour le mur de La Clusaz, mais leurs résultats ne sont pas disponibles. Ces essais indiquent que la moraine de La Clusaz, ou du moins l'échantillon reconstitué avec les éléments les plus fins qui entrent dans le moule, se situe dans la classe des "sols peu gélifs" à la limite des "sols très gélifs" selon la classification LCPC (Dupas et al., 1987). En l'absence de mesures des paramètres SP_0 et b, nous avons estimé le premier à partir de données dans la littérature et calculé le second à partir de simulations numériques sur la paroi berlinoise ancrée.

Le coefficient SP_0 qui correspond au potentiel de ségrégation pour une pression extérieure nulle ($P_{ext} = 0$) varie entre 0,5 et 3,0 mm^2 / h °C pour les sols faiblement à moyennement gélifs selon la classification du Comité Technique sur le gel de la ISSMFE. La teneur en particules limoneuses étant le paramètre déterminant pour le degré de gélivité d'un sol, nous avons pris pour la moraine de La Clusaz, qui contient environ 30% de limon, une valeur moyenne de 1,0 10^{-4} m^2 / jour °C, c'est à dire de 4,2 mm^2 / h °C par comparaison avec les autres données disponibles dans la littérature.

Sur la hauteur du profilé 33 du site de La Clusaz, quatre points ont été équipés en mesure de déplacements. Le point M situé en partie haute (tête du parement) a connu les déplacements horizontaux les plus importants pendant le gel, de l'ordre de 88 mm. Vu sa position, à plus de 6,5 mètres du premier lit de tirant N, le point M peut être considéré comme étant soumis à une pression extérieure quasi-nulle. Cependant, étant situé dans un coin du mur, les conditions thermiques aussi bien que mécaniques auxquelles il est soumis sont complexes (bidimensionnelles). L'application du modèle développé ci-dessus au point M, avec une pression extérieure nulle, n'est donc pas approprié.

L'amplitude des gonflements mesurés aux points N, O, P correspondant aux têtes de tirants sont nettement plus faibles qu'au point M du fait du confinement apporté par le parement. L'amplitude de ces déplacements est ainsi inversement proportionnelle à la précontrainte (traction) initiale du tirant considéré (tableau B.3-3).

Tableau B.3-3 : Mesures réalisées sur la paroi berlinoise ancrée (24 février 1981)

Point de mesure	Déplacement mesuré en fin de gel w_f [mm]	Traction initiale du tirant [kN]	Pression exercée sur le sol P_{ext} [kPa]	Traction finale après le gel [kN]
M	88	0	0	0
N	28	575	24,6	816
O	2	800	34,2	991
P	≤ 1	985	42,1	1274

Le tirant N situé en milieu de la paroi berlinoise semble le plus approprié pour caler le paramètre b de gonflement vu sa position dans l'ouvrage. Une valeur de 0,091 kPa^{-1} pour la coefficient b a été choisie de manière à retrouver les mesures et les calculs sur le tirant N en début d'hiver, quand la température extérieure était la plus uniforme. Tous les autres paramètres ont été déterminés à partir de la géométrie de l'ouvrage et des caractéristiques connues.

3.7 Synthèse et modélisation adoptée

Le calcul du gonflement dû à la formation des lentilles de glace pendant la durée Δt sera fait avec les formules suivantes :

- Calcul du potentiel de ségrégation :

$$SP = SP_0 \exp(-b\, P_{ext}) \qquad \text{(B.3-9)}$$

- Calcul du gradient de température dans la zone de sol gelé :

$$\text{grad}_f\theta = \frac{-\theta_i}{X(t)+h(t)} \qquad \text{(B.3-10)}$$

- Calcul de la vitesse d'arrivée d'eau :

$$v(t) = SP(P_{ext})\ \text{grad}_f\ \theta \qquad \text{(B.3-11)}$$

- Gonflement dû à la formation des lentilles :

$$\Delta h_s = 1{,}09\ v(t)\ dt \qquad \text{(B.3-12)}$$

Le gonflement total, Δh_t , pendant la durée Δt, est la somme des deux termes Δh_i et Δh_S :

$$\Delta h = \Delta h_i + \Delta h_s \qquad \text{(B.3-13)}$$

4 Champ de déplacements imposé par le gel au sol

4.1 Observations

Entre les instants t et t + Δt, le front de gel se déplace de $\Delta X = \left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)\Delta t$ (figure B.4-1a). Si l'on suppose que : (1) le parement et le sol gelé se déplacent comme un bloc rigide indéformable, (2) le gonflement se concentre dans la zone de sol qui gèle entre t et t+Δt, et (3) que le sol non gelé subit une compression oedométrique, on obtient le champ de l'incrément de déplacement du sol, noté ΔS_{sol} , et représenté sur la figure B.4-1b.

La profondeur z dans le mur de soutènement est comptée positivement à partir de la tête du clou, c'est à dire à partir de la face extérieure du parement.

Le déplacement du sol au point de coordonnée z, noté S_{sol} (z) est noté positif suivant la direction z (compression oedométrique) et négatif dans la direction opposée (gonflement). La compression oedométrique de la zone non gelée est noté w_u (positive). Le déplacement du parement, qui est le déplacement de toute la zone gelée supposée rigide, est noté w_f .

Dans l'hypothèse, le sol gelé est supposé incompressible par rapport au sol non gelé, ce qui est justifié en première approximation, vu le rapport des modules d'Young entre un sol gelé et non gelé (figure B.4-2) (Dysli, 1991; Tsytovich, 1975).

Les simulations réalisées par Vengeon (1989) ont montré que pour un gel "profond", le gonflement près du parement peut se traduire aussi par une compression quasi-oedométrique de la zone non gelée.

4.2 Compression oedométrique du sol non gelé

On notera E_{oedo} le module oedométrique du sol non gelé, de module d'Young E_u et de coefficient de Poisson ν_u :

$$E_{oedo} = \frac{(1-\nu_u)E_u}{(1+\nu_u)(1-2\nu_u)} \qquad \text{(B.4-1)}$$

Pour une tranche de sol d'épaisseur δz, la déformation $\Delta\varepsilon_{zz}$ se calcule à partir du déplacement ΔS_{SOl} avec la formule :

$$\Delta\varepsilon_{zz} = -\frac{\Delta S_{sol}(z+\delta z) - \Delta S_{sol}(z)}{\delta z} \qquad \text{(B.4-2)}$$

L'épaisseur de la zone non gelée, égale à L - (X + ΔX), où L est la longueur de la tranche de sol considérée, est découpée en éléments d'épaisseurs δz_i . La compression totale de la zone non gelée, notée Δw_u, correspondant au déplacement imposé par le gel, entre les instants t et t+Δt, se calcule avec la formule :

$$\Delta w_u = \sum_{X_b + X(t) + dX \le z_i \le L} \Delta\varepsilon_{zz}(z_i)\,\delta z_i \qquad \text{(B.4-3)}$$

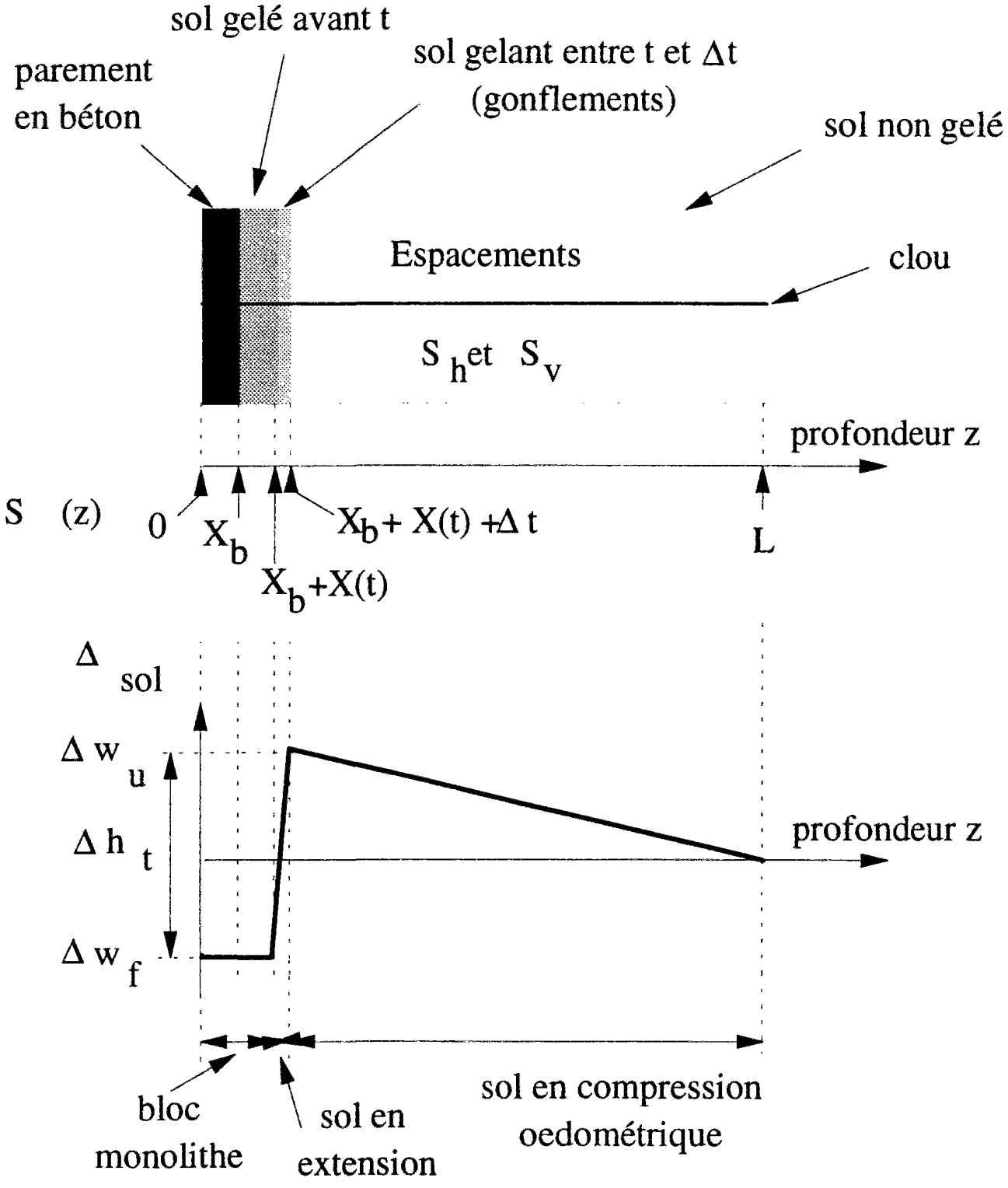


Figure B.4-1 : Profil de déplacements imposé par le gel au sol

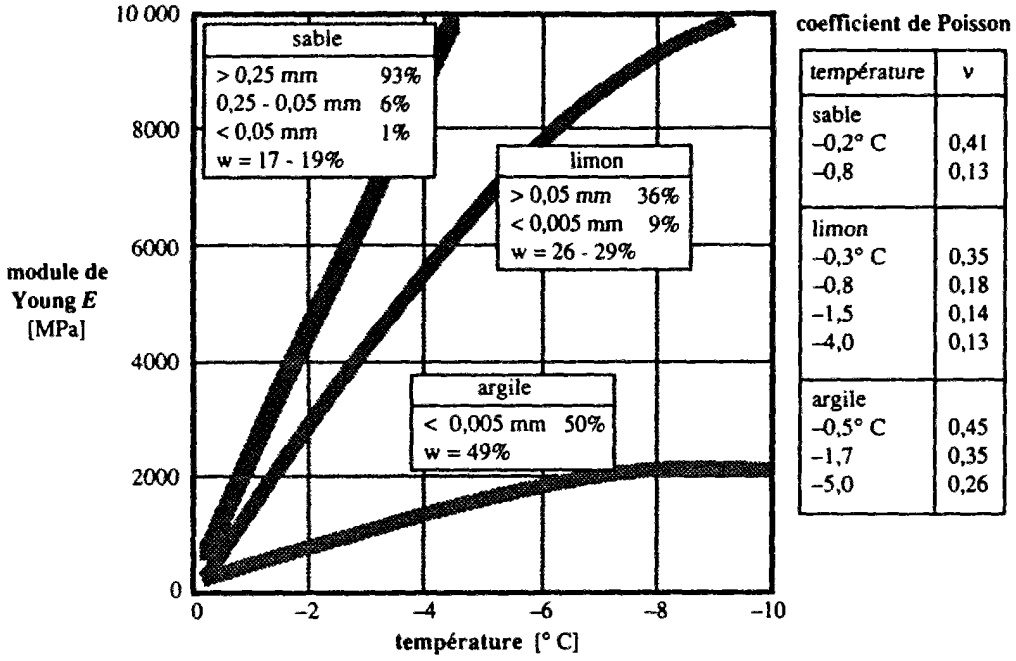


Figure B.4-2 : Module d'Young et coefficient de Poisson de quelques sols gelés; adapté de Tsytovich (1986) par Dysli (1991)

La déformation du sol $\Delta\varepsilon_{zz}$ est reliée à la contrainte $\Delta\sigma_{zz}$ par le module de compression oedométrique E_{oedo} mesuré "horizontalement" :

$$\Delta\varepsilon_{zz} = \frac{\Delta\sigma_{zz}}{E_{oedo}} \qquad \text{(B.4-4)}$$

La contrainte normale σ_{zz} en z_i , qui est supposée uniforme sur l'épaisseur "verticale" de la tranche "horizontale", se calcule à partir de la traction $N(z_i)$ dans le tirant ou clou et des espacements S_v et S_h :

$$\sigma_{zz}(z_i) = -\frac{N(z_j)}{S_v\, S_h} \qquad \text{(B.4-5)}$$

La compression de la zone de sol non gelé, de longueur L - (X+ΔX), se calcule donc à partir de la distribution de traction dans le clou ou dans le tirant par la formule suivante :

$$\Delta w_u = \left(\frac{-1}{E_{oedo}\, S_v\, S_h}\right) \sum_{X_b+X(t)+dX \le z_i \le L} \Delta N(z_i)\, \delta z_i \qquad \text{(B.4-6)}$$

Dans le cas d'un tirant, où la traction est constante le long de la longueur libre, la formule précédente se réduit à l'expression suivante :

$$\Delta w_u = \left(\frac{-\Delta N}{E_{oedo}\, S_v\, S_h} \right) (L - X_b - X(t) - \Delta X) \qquad \text{(B.4-7)}$$

qui se simplifie, pour un tirant de longueur libre grande par rapport à l'épaisseur du parement en béton X_b et à la profondeur de gel X(t), sous la forme suivante :

$$\Delta w_u \cong \frac{-\Delta N}{E_{oedo}\, S_v\, S_h} L \qquad \text{(B.4-8)}$$

4.3 Gonflement de la zone de sol en train de geler

Pendant l'intervalle de temps Δt, le front de gel se déplace de ΔX. C'est dans la zone comprise entre X(t) et X(t)+ΔX que l'eau gèle et que les lentilles de glace se forment essentiellement. Ceci n'est vrai que parce que l'on s'intéresse à des durées de l'ordre de quelques mois et ne le serait plus pour les sols gelés en permanence (pergélisols) (cf. paragraphe 3, partie B).

Pour le champ de déplacements imposé par le gel au sol et noté ΔS_{sol} (z), on suppose donc que le sol situé entre X(t) et X(t)+ΔX subit, pendant l'intervalle de temps Δt, une extension, uniformément répartie sur l'épaisseur ΔX.

Cette hypothèse de concentration du gonflement sur une faible épaisseur, du moins pour un intervalle de temps considéré faible, n'a aucune influence sur le comportement du tirant dans la mesure où celui-ci ne "ressent" que le déplacement en tête, noté Δw_f . Par contre, cette hypothèse a une grande importance sur le comportement du clou car, en concentrant tout le gonflement sur l'épaisseur ΔX, de forts cisaillements sont engendrés dans le clou dans le voisinage de cette zone en extension.

4.4 Déplacement du bloc rigide parement - sol gelé

Le déplacement absolu du parement, noté Δw_f, se calcule en retranchant au gonflement Δh_t la compression oedométrique de la zone non gelée, notée Δw_u.

$$\Delta w_f = \Delta w_u - \Delta h_t \qquad \text{(B.4-9)}$$

Si le sol non gelé est très compressible avec des déplacements ($\Delta w_u \geq 0$) très importants par rapport aux gonflements dus au gel ($\Delta w_u >> \Delta h_t \geq 0$), Δw_f est positif et le mur recule. Le plus souvent, comme c'est le cas pour le site de La Clusaz, la compression oedométrique du sol non gelé est assez faible par rapport aux gonflements ($\Delta h_t >> \Delta w_u \geq 0$); il en résulte un déplacement Δw_f négatif, c'est à dire un déplacement du mur vers l'extérieur.

Le déplacement mesuré en pratique, par des inclinomètres fichés suffisamment profonds dans le sol de fondation, est le terme w_f .

5 Equilibre d'une tranche de sol ancrée par un lit de tirants

5.1 Hypothèses de calcul et équations incrémentales

On ne s'intéressera qu'à un tirant dont la longueur libre est suffisamment grande par rapport à la longueur scellée pour que le bulbe de scellement soit hors de portée de l'atteinte du gel. Dans toute la suite, on s'intéresse à l'équilibre d'une tranche de sol horizontale, d'épaisseur S_v , de largeur S_h , de longueur L_s , ancrée par un lit de tirants inclinés de β par rapport à l'horizontale et confinée par un parement vertical. Pour qu'une telle schématisation puisse correctement représenter le comportement d'un lit de tirants dans une paroi ancrée, il est nécessaire de considérer uniquement les lits de tirants en partie médiane dont les lits voisins sont précontraints à des tensions du même ordre de grandeur. Sous ces conditions, on peut raisonnablement supposer que le sol dans le volume considéré est soumis, de la part du parement, à un chargement uniformément réparti et qu'il subit une compression ou extension oedométrique (figure B.5-1).

Les contraintes σ_{yz} et σ_{zz} sont directement reliées à la traction dans le tirant par les équations d'équilibre (figure B.5-1) :

$$\sigma_{yz} = \frac{-N \sin\beta}{S_v S_h} \qquad \text{(B.5-1)}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{-N \cos\beta}{S_v S_h} \qquad \text{(B.5-2)}$$

Pour des tirants peu inclinés par rapport à l'horizontale, la contrainte σ_{yz} est quasiment nulle et les conditions d'une compression oedométrique sont respectées rigoureusement. La pression P_{ext} appliquée par le parement sur le sol en train de geler est la contrainte σ_{zz} .

La longueur L_S de la tranche de sol considérée est prise égale à $L_l \cos \beta$ où L_l est la longueur libre des tirants.

L'effort normal N, négatif en traction et positif en compression, étant constant dans le tirant le long de sa longueur libre, σ_{zz} est constant dans le sol le long de la tranche étudiée. Pour les contraintes dans le sol, il est rappelé que c'est la convention de la mécanique des sols, c'est à dire, σ_{zz} positive en compression et négative en extension, qui est adoptée.

L'interaction mécanique du tirant avec le sol se limite à la pression exercée par le tirant sur le sol à travers le parement. Le champ de déplacement imposé par le gel au sol (cf. paragraphe 4, partie B) est transmis à la tête du tirant par le parement. Pour des tirants inclinés de β par rapport à l'horizontale, et en supposant que la parement est vertical, le déplacement absolu de la tête du tirant dans son axe Δw_t est égal à :

$$\Delta w_t = \Delta w_f / \cos\beta \qquad \text{(B.5-3)}$$

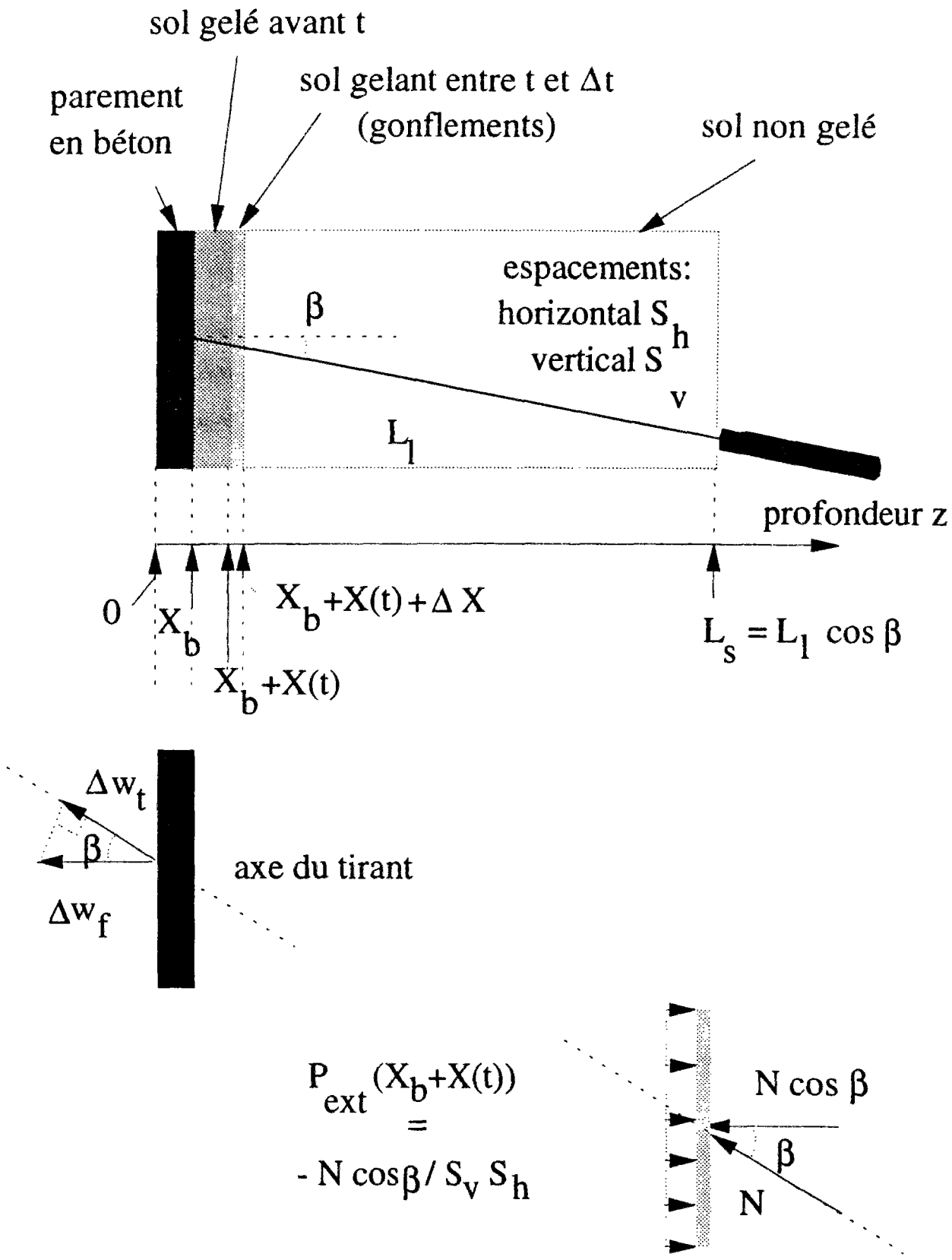


Figure B.5-1 : Equilibre d'une tranche de sol ancrée par un lit de tirants

L'ensemble du tirant (tête de tirant + partie libre + partie scellée) est modélisé comme un ressort de raideur globale k_t pour une longueur L_t :

$$\Delta N = \left(\frac{k_t}{L_t}\right)\Delta w_t \qquad \text{(B.5-4)}$$

Le problème est alors équivalent à celui d'une tranche de sol de longueur L_S soumise à une pression P_{ext} appliquée par un ressort de rigidité k_t et longueur L_t avec les conditions aux limites en température suivantes :

en $z = 0$: $\theta = \theta_s < 0$ °C
en $z = L_s$: $\theta = \theta_0 > 0$ °C

La raideur globale du tirant est composée de trois termes : la raideur de la connexion tirant - parement, la raideur propre de l'acier (partie libre de longueur L_l) et la raideur du bulbe de scellement interagissent avec le sol non gelé (partie scellée de longueur L_a). Pour une partie libre très longue, un bon ancrage du tirant, et une connexion très rigide avec le parement, la raideur globale du tirant est égale à la raideur de la partie libre. On en déduit la valeur suivante de k_t :

$$k_t = E_a\left(\frac{\pi D^2}{4}\right) \qquad \text{(B.5-5)}$$

où E_a est le module d'Young de l'acier et $\pi D^2 / 4$ la section d'acier du tirant.

La loi de comportement de l'acier du tirant peut être élastique ou élasto-plastique puisque le problème est formulé en incréments de traction et de déplacement. Le module E_a est le module tangent de l'acier du tirant, module constant pour un acier travaillant dans son domaine élastique, et variable hors du domaine élastique.

La variation de traction ΔN dans le tirant est relié au déplacement (selon l'axe horizontal) Δw_f par l'équation :

$$\Delta N = \frac{k_t}{L_l}\left(\frac{\Delta w_f}{\cos\beta}\right) \qquad \text{(B.5-6)}$$

où β est l'inclinaison des tirants par rapport à l'horizontale.

Cette relation est équivalente à :

$$\Delta w_f = \Delta N \frac{L_l \cos\beta}{k_t} \qquad \text{(B.5-7)}$$

Le déplacement Δw_f du parement est égal au gonflement Δh_t moins la compression Δw_u de la zone non gelée, qui est elle-même reliée à la variation de traction ΔN dans le tirant :

$$\Delta h_t = \Delta w_u(\Delta N) - \Delta w_f(\Delta N) \tag{B.5-8}$$

$$\Delta w_u = -\frac{\Delta N \cos\beta \; L_s}{E_{oedo} \; S_v \; S_h} \tag{B.5-9}$$

Il est alors possible de trouver la relation explicite suivante entre la variation de traction ΔN et le gonflement Δh_t pendant l'intervalle de temps Δt :

$$\Delta N(t) = \frac{-\Delta h_t(P_{ext}(t))}{\frac{L_l \cos\beta}{k_t} + \frac{L_s \cos\beta}{E_{oedo} S_v S_h}} \tag{B.5-10}$$

Le gonflement Δh_t est fonction de la pression extérieure P_{ext} (t) appliquée à l'instant t, pression qui est directement reliée à la traction N(t) dans le tirant à l'instant t par :

$$P_{ext}(t) = -\frac{N(t)}{S_v \; S_h} \tag{B.5-11}$$

Connaissant la traction N(t) à un instant t, l'incrément de traction ΔN engendré par les gonflements du sol Δh_t , pendant l'intervalle de temps Δt, se calcule directement à partir des formules B.5-10 et B.5-11.

La compressibilité du sol non gelé est équivalente à un ressort, de rigidité $E_{oedo} \; S_v \; S_h$ et de longueur L_s , monté en série avec le tirant.

On peut remarquer que, pour un sol incompressible, E_{oedo} est infini; la compression de la zone non gelée est donc nulle : $\Delta w_u = 0$. Il en résulte que le déplacement du parement Δw_f est égal au gonflement du sol Δh_t et que la tête du tirant se déplace de Δh_t / cos β. L'équation donnant $\Delta N(t)$ en fonction de Δh_t se réduit simplement à l'expression de la loi de comportement du tirant :

$$\Delta N = \frac{k_t}{L_l} \Delta w_t = \frac{k_t}{L_l}\left(\frac{\Delta h_t}{\cos\beta}\right) \tag{B.5-12}$$

5.2 Synthèse et algorithme de résolution numérique

L'algorithme de résolution se présente sous la forme suivante:

instant initial t :

. traction dans le tirant : N(t)
. pression extérieure appliquée par le tirant sur le sol en train de geler
$P_{ext}(t) = - N(t) / S_v S_h$

intervalle de temps Δt :

. nouvelle profondeur de gel $X(t+\Delta t) = \alpha \sqrt{t + \Delta t}$
. épaisseur de sol gelé pendant Δt : $\Delta X = X(t + \Delta t) - X(t)$
. gonflement du sol : $\Delta h_t = \Delta h_t (\Delta X, P_{ext}(t))$
. augmentation de traction dans le tirant $\Delta N = \Delta N (\Delta h_t)$
. compression du sol non gelé : $\Delta w_u = \Delta w_u (\Delta N)$
. déplacement du parement : $\Delta w_f = \Delta w_u - \Delta h_t$
. augmentation de la pression extérieure appliquée $\Delta P_{ext} = - \Delta N / S_v S_h$

nouvelles valeurs à l'instant $t+\Delta t$:

. traction $N(t+\Delta t) = N(t)+\Delta N$
. pression $P_{ext}(t+\Delta t) = P_{ext}(t)+\Delta P_{ext}$
. déplacement du parement $w_f(t+\Delta t) = w_f(t)+\Delta w_f$

5.3 Solution analytique

Après combinaison des équations précédantes, nous obtenons l'équation différentielle suivante en traction N et en temps t :

$$-\frac{L_l \cos\beta}{k_t} dN = \left[f \frac{9}{100} \frac{w}{w + 100 \frac{\gamma_w}{\gamma_s}} \left(\frac{dX}{dt} \right) + \frac{109}{100} SP_0 \exp\left(\frac{bN(t)}{S_v S_h} \right) \left(-\theta_i(t) \right) \frac{1}{X(t)} \right] dt \qquad \text{(B.5-13)}$$

Il n'est possible de résoudre cette équation que dans le cas où les variables N et t sont séparables. Pour cela, deux hypothèses sont nécessaires : (1) la température θ_i (t) est constante en fonction du temps t :

$$\theta_i(t) \equiv \theta_i \qquad \text{(B.5-14)}$$

et (2) la profondeur de gel est inversement proportionnelle à sa dérivée. Le seul cas où cette dernière hypothèse est vérifié correspond à la loi de Stefan. Nous supposerons donc que la pénétration du gel est régie par la loi de Stefan.

Ces hypothèses ne sont pas contraignantes à condition de prendre pour la température constante θ_i , la température moyenne réelle subie par le sol en contact avec le parement en béton. elle se calcule partir de l'indice de gel réel à l'interface béton -sol et du nombre de jours de gel derrière le parement. par la formule :

$$\theta_i = \frac{I_i}{n_{gel}} \tag{B.5-15}$$

Tout calcul fait, on obtient la solution analytique suivante en traction et gonflement :

$$N(t) = N_0 + N_g \ln\left(\frac{A}{-B\exp(N_0/N_g) + (A + B\exp(N_0/N_g))\exp(D\sqrt{t})}\right) \tag{B.5-16}$$

$$h(t) = 2\frac{A}{D}\ln\left(1 + \frac{A + B\exp(N_0/N_g)}{A}(\exp(D\sqrt{t}) - 1)\right) \tag{B.5-17}$$

où les constantes A, B, D et N_g , qui sont toujours positives, sont égales à :

$$A = f\frac{9}{100}\frac{w}{w + 100\frac{\gamma_w}{\gamma_s}}\frac{\alpha}{2} \tag{B.5-18}$$

$$B = \frac{109}{100}SP_0(-\theta_i)\frac{1}{\alpha} \tag{B.5-19}$$

$$D = 2\,A\,\frac{k_{eq}}{L_{eq}\cos\beta}\frac{b}{S_v S_h} \tag{B.5-20}$$

$$N_g = \frac{S_v\,S_h}{b} \tag{B.5-21}$$

La constante A, qui est en mètre / $\sqrt{\text{jour}}$, représente la vitesse "initiale" de gonflement de l'eau interstitielle à t = 1 jour :

$$\frac{dh_i}{dt}(1\,\text{jour}) = A \tag{B.5-22}$$

La constante B est la vitesse "initiale" du gonflement des lentilles de glace, pour une pression extérieure nulle (N = 0) et à t = 1 jour.

$$\frac{dh_s}{dt}(1\,\text{jour}, N_0 = 0\,\text{kPa}) = B \tag{B.5-23}$$

La vitesse initiale de gonflement, à 1 jour et pour une pression N_0 appliquée sur le front de gel est :

$$\frac{dh}{dt}(1\,\text{jour}, N_0) = A + B\exp\left(N_0/N_g\right) \tag{B.5-24}$$

La constante N_g est la traction d'arrêt de gonflement des lentilles de glace tandis que la constante D mesure la rigidité relative du tirant par rapport à la traction d'arrêt de gonflement des lentilles de glace.

Les solutions analytiques asymptotiques en traction et gonflement sont données par :

$$N(t) = N_g\left(\ln\left(\frac{A\exp\left(N_0/N_g\right)}{A + B\exp\left(N_0/N_g\right)}\right) - D\sqrt{t}\right) \tag{B.5-25}$$

$$h(t) = 2\,\frac{A}{D}\left(\ln\left(\frac{A + B\exp\left(N_0/N_g\right)}{A}\right) + D\sqrt{t}\right) \tag{B.5-26}$$

La traction N(t) et le gonflement h(t) sont donc asymptotiquement linéaires en racine carrée du temps.

Il est à noter que les ordonnés à l'origine des deux asymptotes dépendent du coefficient B qui contrôle les gonflements de ségrégation et de A qui contrôle le gonflement de l'eau en place. Par contre, les pentes asymptotiques dépendent de A mais pas de B. Au bout d'un certain temps t, la traction N et la pression P_{ext} appliquée sur le front de gel deviennent très grandes, ce qui a pour effet de rendre nuls le gonflement des lentilles de glace. C'est alors le gonflement de l'eau en place qui devient prépondérant.

Pour plus de détails et des applications numériques dans le cas des murs de La Clusaz, le lecteur pourra se référer à l'annexe A15.

6 Equilibre d'un lit de clous renforçant une tranche de sol

Les équations d'équilibre d'un clou différent de celles d'un tirant, dans la mesure où l'interaction du clou avec le sol se fait sur toute sa longueur. Cette interaction est modélisée par des fonctions de transfert de charge qui diffèrent entre le sol non gelé, dont le comportement est de type élasto-plastique, et le sol gelé, dont le comportement est de type thermo-visco-élasto-plastique.

6.1 Etat de contraintes dans le sol

Entre deux lits de renforcements (clous, armatures de remblais, etc.), le cisaillement $\tau = \sigma_{xz}$ change de signe. Il existe donc une surface entre deux lits de renforcements où le cisaillement σ_{xz} s'annule. Par raison de géométrie, on supposera que le cisaillement τ est nul sur les plans médians entre deux lits de renforcements.

En tout point de l'inclusion, de coordonnée z_0 , on supposera que la contrainte σ_{zz} est uniformément répartie sur le plan (x, y) d'équation $z = z_0$. Ce qui suppose que la poussée des terres sur un plan (x, y) quelconque est uniformément répartie.

L'équation d'équilibre du béton et de la partie de sol comprise entre $z = 0$ et $z = z_0$ donne alors l'équation :

$$N(z_0) = S_v S_h \sigma_{zz}(z_0) \qquad \text{(B.6-1)}$$

qui permet de relier la traction N(z) dans l'inclusion en fonction de la poussée des terres $\sigma_{zz}(z)$ en tout point de coordonnée z le long de l'inclusion .

Contrairement à un tirant où la traction est constante le long de la partie dite libre, pour un clou la traction N(z) évolue le long de celui-ci; la pression des terres $\sigma_{zz}(z)$ est donc une fonction de z.

6.2 Equilibre d'une inclusion interagissant avec le sol sur toute sa longueur

On considère une inclusion comme par exemple une armature de remblai ou un clou dans un sol in situ, de longueur L_c , de diamètre D_c , de section S_c égale à $(\pi D_c^2 / 4)$, interagissant avec le sol sur toute sa longueur.

L'état de contraintes dans l'inclusion est défini par la distribution de traction N(z) le long de celle-ci. A partir de N(z) on peut déduire directement la contrainte normale σ_{zz} dans l'inclusion. De plus, l'équation d'équilibre axial de l'inclusion fournit la contrainte de cisaillement à l'interface avec le sol, notée $\tau = \sigma_{xz}$:

$$\frac{dN(z)}{dz} = -\pi D_c \tau(z) \qquad \text{(B.6-2)}$$

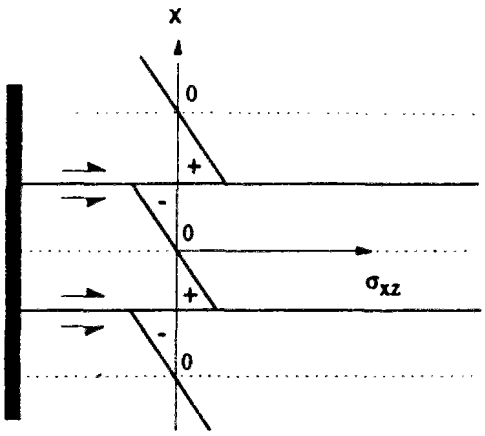


Figure 6.1a : Variation du cisaillement $\tau = \sigma_{xz}$ dans le sol entre deux lits de clous

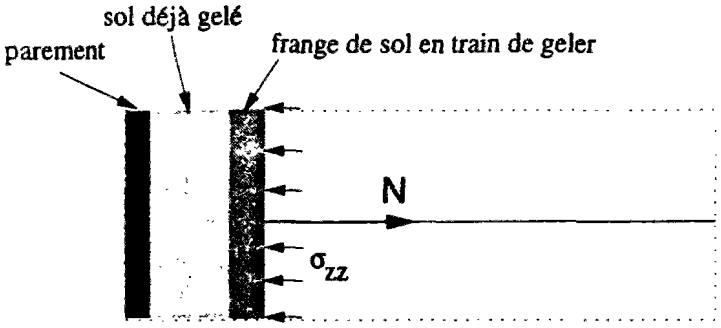


Figure 6.1a : Variation de la contrainte normale σ_{zz} dans le sol entre deux lits de clous

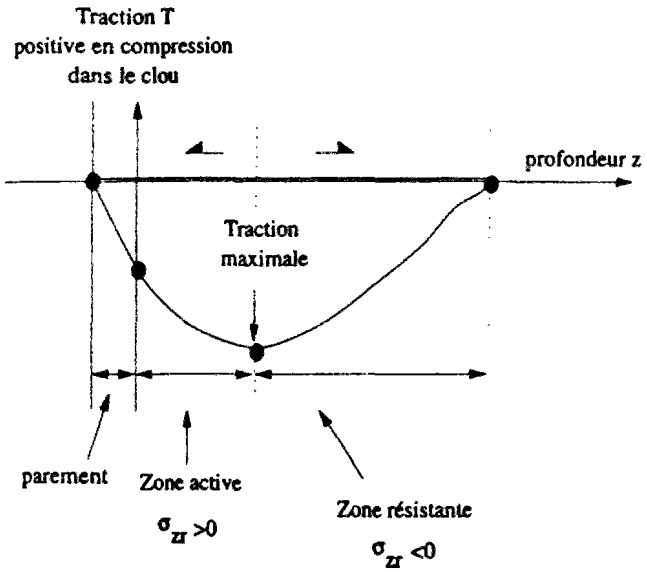


Figure B.6-2 : Distribution de la traction initiale dans un renforcement avant gel, résultant de l'équilibre d'ensemble de l'ouvrage

Par convention, l'effort normal N dans l'inclusion sera positif en compression et négatif en traction; le cisaillement τ sera pris positif s'il s'oppose au déplacement de l'inclusion par rapport au sol, ce qui correspond aussi à la convention de mécanique des sols.

Le calcul de l'influence du gel sur un mur en sol cloué sera fait à partir d'un état initial de contraintes dans les clous et le sol, défini par la distribution de traction initiale N_0 (z). Cette distribution sera supposée connue, soit par des mesures in situ, soit par un calcul en déplacements pouvant utilisé notamment la méthode des éléments finis et permettant de tenir compte du phasage de la construction.

Entre les instants t et t+Δt, le mur est soumis au gel qui impose au sol un champ de déplacement, dit libre, noté ΔS_{sol} . Par définition, S_{sol} est le déplacement absolu du sol, c'est à dire par rapport à un repère fixe. Via l'interaction continue sol-inclusion, l'inclusion va atteindre un nouvel état d'équilibre caractérisé par les incréments des variables suivants :

ΔS_a (z) : incrément de déplacement absolu de l'inclusion. c'est à dire par rapport un repère fixe
$\Delta N(z)$: augmentation de traction dans l'inclusion
$\Delta\tau(z)$: variation de cisaillement le long de l'inclusion

L'équation d'équilibre incrémentale s'écrit :

$$\frac{d\Delta N(z)}{dz} + \pi D_c \Delta\tau(z) = 0 \qquad \text{(B.6-3)}$$

La loi de comportement de l'inclusion permet de relier la variation de traction ΔN à l'incrément d'extension ou compression de l'inclusion $\Delta\varepsilon_{zz}$ égale, par définition, à :

$$\Delta\varepsilon_{zz} = -\frac{d\Delta S_a}{dz} \qquad \text{(B.6-4)}$$

$$\Delta N = E_c(N) A_c \Delta\varepsilon_{zz} \qquad \text{(B.6-5)}$$

où E_c (N) est le module tangent de l'inclusion, qui peut dépendre de l'état de contrainte actuel pour un comportement élasto-plastique et A_c la section du clou. La déformation ε_{zz} est positive en compression et négative en extension.

En combinant les équations d'équilibre et de comportement, on obtient l'équation suivante en ΔS_a :

$$\frac{d\left[E_c(N)\ A_c \frac{d\Delta S_a}{dz}\right]}{dz} - \pi D_c \Delta\tau = 0 \qquad \text{(B.6-6)}$$

L'incrément de cisaillement $\Delta\tau(z)$ est relié au déplacement relatif sol-inclusion, noté ΔS_r , par la courbe de mobilisation du frottement latéral, encore appelée fonction de transfert de charge :

$$\Delta\tau = \Delta\tau(\Delta S_r) \tag{B.6-7}$$

avec :

$$\Delta S_r = \Delta S_a - \Delta S_{sol} \tag{B.6-8}$$

L'équation d'équilibre incrémentale en ΔS_a s'écrit donc, dans le cas le plus général, sous la forme suivante :

$$\frac{d\left[E_c(N)A_c\frac{d\Delta S_a}{dz}\right]}{dz} - \pi D_c \Delta\tau(\Delta S_a - \Delta S_{sol}) = 0 \tag{B.6-10}$$

où le déplacement du sol ΔS_{sol} est supposé connu à chaque pas de temps.

La courbe de mobilisation du frottement latéral $\Delta\tau = \Delta\tau(\Delta S_r)$ est définie pour chaque incrément, en chaque couche de matériau, de manière différente suivant que le matériau est gelé ou non.

6.3 Fonctions de transfert de charge entre l'inclusion et le sol gelé

Un grand nombre de fonctions de transfert de charge existent dans la littérature. Elles peuvent être classées en deux grandes catégories.

La première catégorie concerne les fonctions de transfert de charge dérivées de l'analyse mécanique de l'essai d'arrachement d'une inclusion cylindrique dans un milieu continu de comportement plus ou moins complexe. La détermination des paramètres caractérisant la fonction de transfert de charge, notamment le module tangent initial noté k_β et le palier de frottement q_s , se fait alors à partir de la connaissance des paramètres mécanique intrinsèques du sol et de l'interface sol-inclusion, notamment le module de cisaillement G du sol, l'angle de frottement interne du sol ϕ_{sol} et l'angle de frottement de l'interface ϕ_I , dans le cas d'un sol non gelé.

Dans cette catégorie de fonctions de transfert de charge se classent les fonctions de transfert de charge développées par Johnston et Ladanyi pour l'interaction sol gelé - inclusion scellée et qui sont dérivées du comportement du sol moyennant une analyse de l'essai d'arrachement de l'inclusion.

La deuxième catégorie concerne les fonctions de transfert dont les paramètres sont calculés à partir des essais en place, l'essai le plus couramment utilisé en France étant le pressiomètre (Frank et Zhao, 1982).

En l'absence de connaissances très précises sur les propriétés mécaniques du sol lui-même, il est préférable d'utiliser les corrélations pressiométriques; c'est ce qui sera fait pour les murs de La Clusaz.

6.4 Fonctions de transfert de charge entre l'inclusion et le sol gelé

6.4.1 Synthèse sur les propriétés mécaniques des sols gelés

6.4.1.1 Comportement des sols gelés

Le comportement mécanique des sols gelés dépend de la température et du temps. Quand un sol est soumis à un chargement, des déformations instantanées et différées se produisent. Selon Vyalov (1959), 5 types de déformation peuvent être observées : (1) des déformations élastiques instantanées (réversibles), (2) des déformations plastiques instantanées (irréversibles), (3) des déformations visco-élastiques (différées), (4) une consolidation (irréversible) due à l'expulsion de l'eau avec un certain retard et (5) des déformations visco-plastiques encore appelées fluage (irréversibles).

Aucune de ces déformations ne se produit de manière isolée. Elles se produisent simultanément, leur importance relative dépendant du temps écoulé depuis l'application de la charge, de l'état du sol, de sa température et du niveau de chargement. Par exemple, pour une fondation sous charge de service ordinaire, les déformations réversibles (1) et (3) sont très petites par rapport aux déformations irréversibles (2), (4) et (5).

Pour ce qui concerne les déformations différées, il est utile de faire une comparaison entre les sols gelés et non gelés. Dans un sol fin non gelé, les déformations différées sont dues à la consolidation et au fluage qui se compose de deux termes : un fluage volumique et un fluage de cisaillement. L'expérience tend à montrer que le fluage de cisaillement est prédominant par rapport au fluage volumique. Les déformations dues à la consolidation sont par du même ordre de grandeur que les déformations de fluage. Pour ce qui concerne les sols gelés, les déformations dues à la consolidation sont considérées comme très faibles pour les sols gelés durs ("hard frozen soils"). Pour les sols gelés chauds ("warm frozen soils"), c'est-à-dire contenant une grande partie d'eau non gelée et à des températures entre $0^{\circ}C$ et quelques degrés négatifs, les déformations de consolidation peuvent devenir prédominantes (Vyalov, 1959; Brodskaia, 1962). On ne s'intéressera dans la suite qu'aux sols gelés durs. Dans ce cas, les déformations de consolidation sont négligeables par rapport aux déformations dues au fluage. Ces dernières quant à elles, sont fonction principalement du cisaillement et très peu de la pression isotrope moyenne. C'est à dire, le fluage de cisaillement est prédominant par rapport au fluage volumique. Les figures B.6-3 montrent les courbes de fluage typiques d'un essai triaxial à pression constante imposé sur un sol gelé. Ce type de courbes peut être généralisé à d'autres essais et types de matériaux, notamment aux essais d'arrachement de barres scellées dans un sol gelé.

Quand le sol gelé est soumis à une charge appliquée très rapidement et maintenue ensuite constante (palier de chargement), une déformation instantanée (élastique et plastique) notée ε_0 sur la figure 6-3b se produit. Par la suite, des déformations différées viennent s'ajouter. Sur les courbes de fluage (figure B.6-3.b et 6-3.c), on observe classiquement trois zones :

Zone I : fluage primaire, la vitesse de déformation décroît dans un premier temps, puis se stabilise;

Zone II : fluage secondaire, la vitesse de déformation reste constante dans un deuxième temps,

Zone III : fluage tertiaire, la vitesse de déformation augmente dans un troisième temps, conduisant dans certains cas, à une rupture différée.

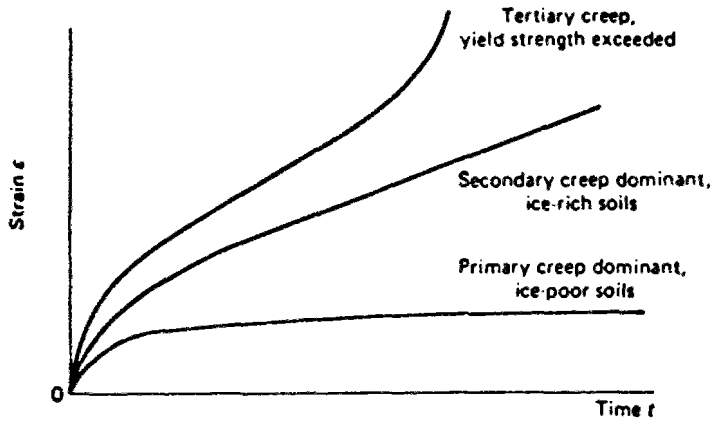


Figure B.6-3.a : Essais de fluage à charge constante

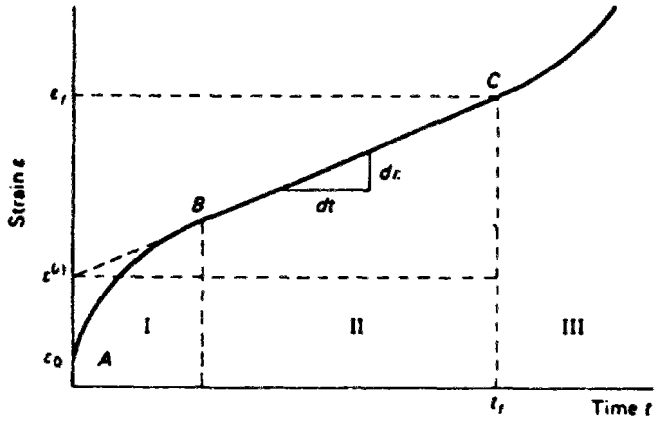


Figure B.6-3.b : Courbe de fluage type

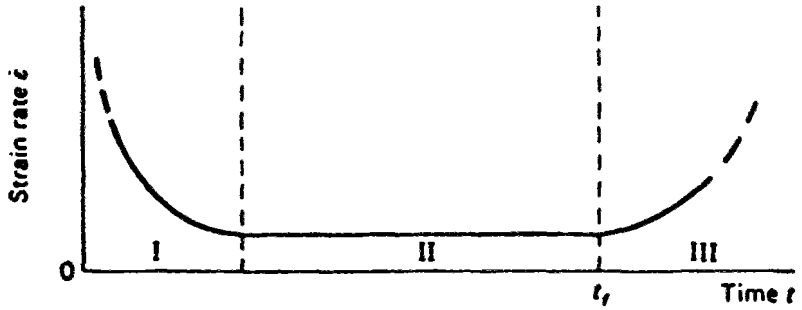


Figure B.6-3.c : Evolution de la vitesse de déformation en fonction du temps

Figure B.6-3 : Courbes de fluage d'un essai à charge constante

L'importance relative des différents fluages : primaire, secondaire et tertiaire est conditionnée par la position de l'état de contraintes par rapport à la surface de rupture à long terme. Par exemple, sur la figure 6-4 correspondant à des essais triaxiaux, si l'état de contrainte final est représenté par le point A, situé au dessous de la surface de rupture à long terme, le fluage s'atténuera avec le temps. Par contre, si l'état de contraintes est représenté par le point B situé au dessus de la surface de rupture à long terme, le fluage augmentera avec le temps conduisant à une rupture différée inéluctable après un temps suffisant (Ladanyi, 1975).

6.4.1.2 Modélisation des courbes de fluage

Sur une courbe de fluage, le fluage tertiaire n'est jamais modélisé en pratique, car celui-ci est considéré se produire au-delà du seuil de rupture. Les fluages primaire et secondaire sont par, contre, modélisés. L'importance relative de l'un par rapport à l'autre dépend, notamment, de l'intervalle de temps étudié. Pour des durées supérieures à 1 jour, la somme des déformations instantanées et de celles dues au fluage primaire, représentent moins de 10 % de la déformation totale (instantanée plus différée) (Vyalov, 1959) Dans le cas d'un sol soumis à une charge constante sur de grandes périodes, on peut négliger les déformations instantanées et celles dues au fluage primaire. Par contre, dans le cas d'un sol soumis à des conditions aux limites complexes (confinement dû au parement et à l'interaction sol-clou) et pour lequel des phénomènes de fluage et/ou relaxation peuvent se produire simultanément, il ne faut pas négliger les déformations instantanées et celles dues au fluage primaire, car cela conduirait à une erreur d'estimation des variations de contraintes dues à la relaxation.

Pour ce qui concerne la portion initiale d'une courbe de fluage (déformations instantanées, fluages primaire et secondaire), Hult (1966) a proposé une modèle simple consistant à linéariser par 2 segments (figure B.6-5). A tout instant t, la déformation se décompose en deux termes : une déformation pseudo-instantanée $\varepsilon^{(i)}$ et une déformation de fluage $\varepsilon^{(c)}(t)$:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon^{(i)} + \varepsilon^{(c)}(t) \qquad \text{(B.6-11)}$$

La déformation pseudo-instantanée $\varepsilon^{(i)}$ est la somme algébrique de quatre termes :

$$\varepsilon^{(i)} = \varepsilon_0^{(e)} + \varepsilon_0^{(p)} + \varepsilon^{(cI)}(t_I) - \varepsilon^{(cII)}(t_I) \qquad \text{(B.6-12)}$$

(1) la déformation instantanée élastique $\varepsilon_0^{(e)}$ qui est réversible,

(2) la déformation instantanée plastique $\varepsilon_0^{(p)}$ qui est irréversible,

(3) la déformation différée due au fluage primaire $\varepsilon^{(cI)}(t_I)$, calculée sur la durée tI. Le fluage primaire n'est supposé se produire que jusqu'à un temps noté t_I ,

(4) la déformation différée due au fluage secondaire $\varepsilon^{(cII)}(t_I)$ si celui-ci s'était produit entre les instants $t = 0$ et $t = t_I$

La déformation pseudo-instantanée $\varepsilon^{(i)}$ n'a donc pas de signification physique ou mécanique particulière. Elle n'est définie que pour simplifier les calculs et réduire le nombre de paramètres au minimum.

Le terme $\varepsilon^{(c)}(t)$ représente la déformation différée due au fluage secondaire. Le fluage tertiaire n'est pas modélisé car il est considéré comme se produisant au-delà du seuil de rupture.

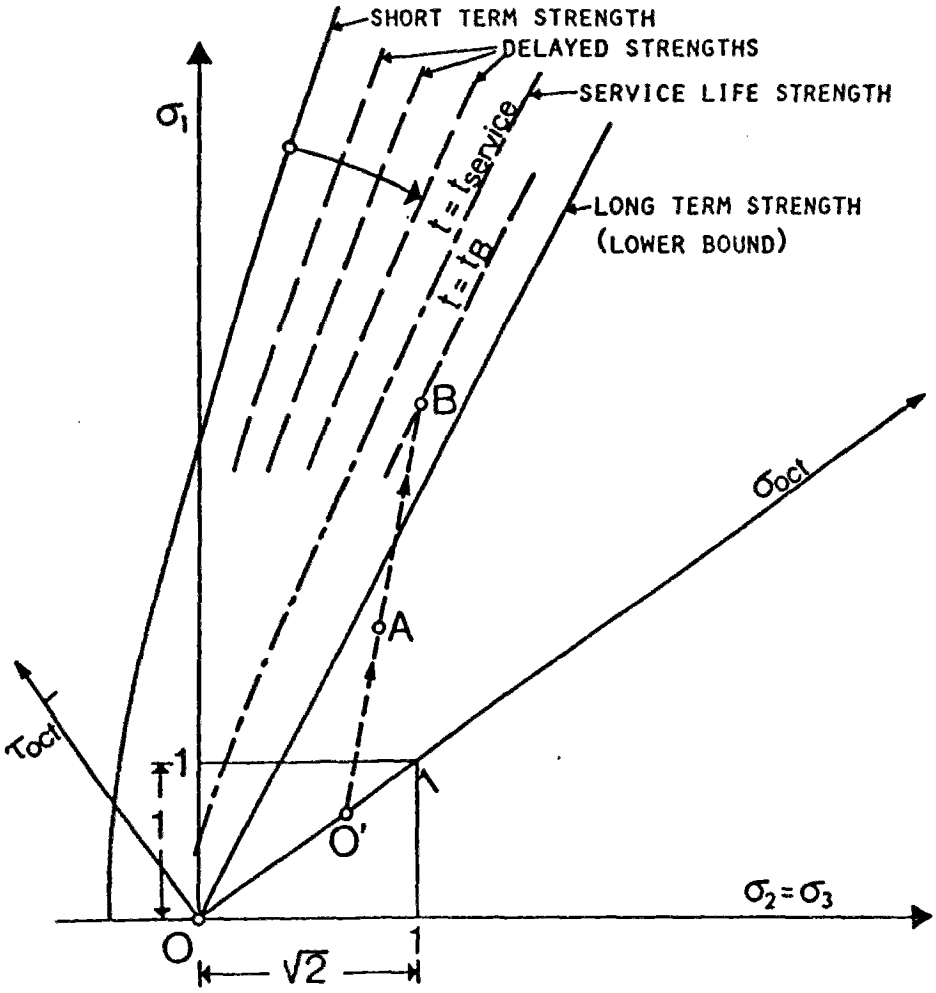


Figure B.6-4 : Evolution des surfaces de rupture en fonction du temps pour un sol gelé dans l'espace des contraintes principales (Ladanyi, 1975).

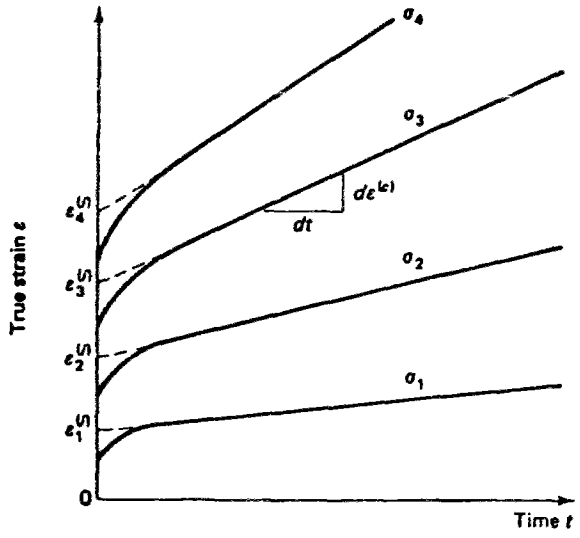


Figure B.6-5 : Linéarisation des courbes de fluage (Hult, 1966)

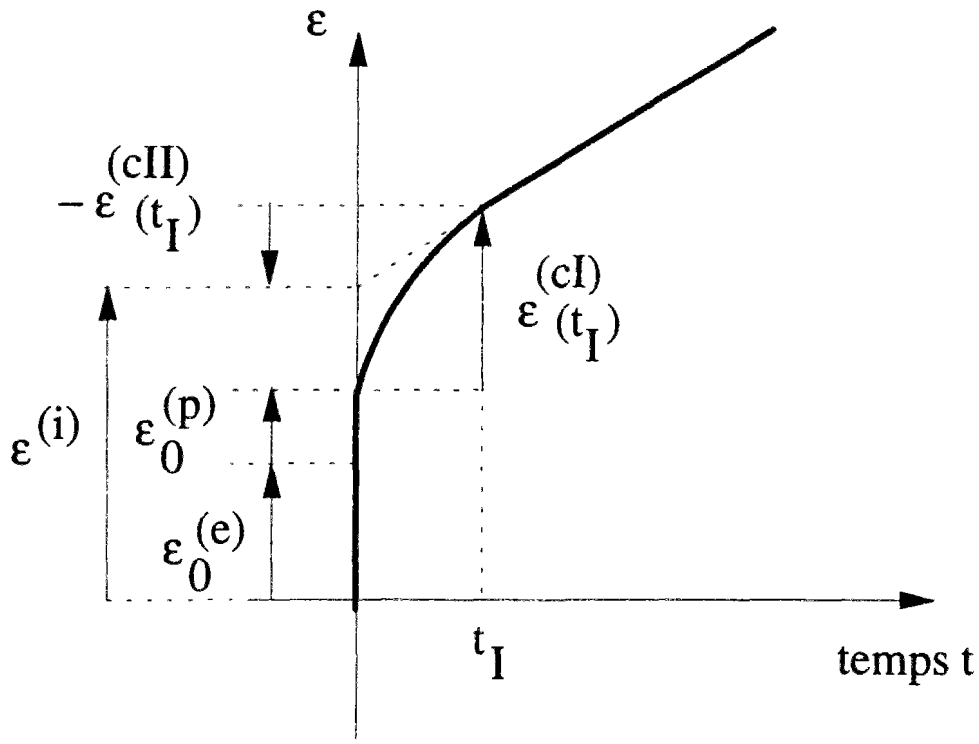


Figure B.6-6a : Représentation de la déformation pseudo-instantanée.

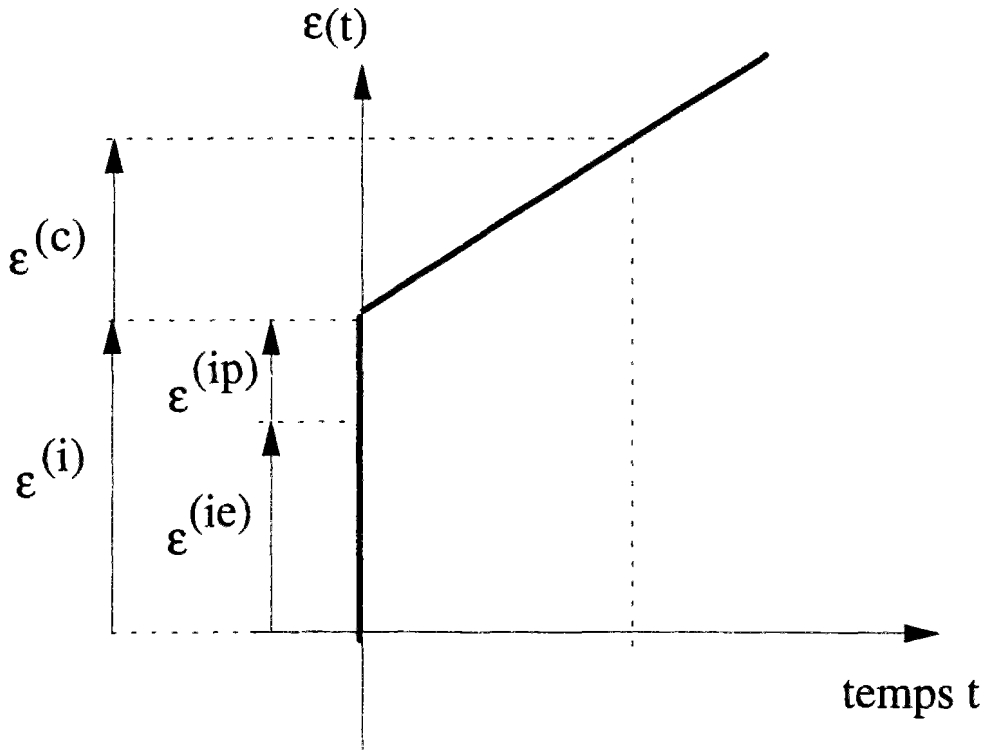


Figure B.6-6b : Représentation de la déformation de fluage

L'avantage de la méthode développée par Hult est de simplifier les courbes de fluage et de minimiser le nombre de paramètres du modèle. La difficulté dans la résolution d'un problème est alors de déterminer expérimentalement la valeur de ces paramètres qui n'ont plus de sens physique propre.

La linéarisation des courbes de fluage, dans leur partie initiale, peut introduire une erreur dans le calcul des déformations différées pour des durées inférieures à t_I (t_I typiquement est de quelques heures). Mais cette erreur est quasiment nulle pour des durées supérieures à t_I, c'est-à-dire de l'ordre du jour.

Le terme $\varepsilon^{(i)}$ des déformations pseudo-instantanées peut être écrit sous plusieurs formes. Une première forme consiste à séparer la partie élastique $\varepsilon^{(ie)}$ et la partie plastique $\varepsilon^{(ip)}$ (Marin et al., 1957 ; Odquist et Hult, 1962).

$$\varepsilon^{(i)} = \varepsilon^{(ie)} + \varepsilon^{(ip)} \qquad \text{(B.6-13)}$$

Une deuxième forme souvent préférée (Kondner, 1963 ; Kondner et Krizek, 1965) est d'utiliser une seule et même expression regroupant toutes les déformations pseudo-instantanées (Johnston et Ladanyi, 1972). Malheureusement, sous cette forme, il n'est plus possible de séparer, dans le cas d'une décharge, la partie des déformations réversible de la partie irréversible. Dans le cas du mur de La Clusaz, on peut noter que la pente de la courbe de la traction N en fonction de la profondeur z, change de signe près du parement au cours de l'hiver. Ce qui signifie clairement que le cisaillement change de signe et qu'il y a déchargement local.

On préférera donc écrire la déformation pseudo-instantanée sous la forme d'une somme de deux termes (cf. équation B.6-13) : $\varepsilon^{(ie)}$ déformation pseudo-instantanée élastique (réversible) et $\varepsilon^{(ip)}$ déformation pseudo-instantanée plastique (irréversible).

La déformation pseudo-instantanée élastique $\varepsilon^{(ie)}$ peut s'écrire (Ladanyi, 1972) sous la forme :

$$\varepsilon^{(ie)} = \sigma / E(\theta) \qquad \text{(B.6-14)}$$

où E(T) est un module d'Young fictif, plus petit que le module d'Young instantané car $\varepsilon^{(ie)}$ contient notamment les termes visco-élastiques. Cette expression est valable aussi bien en décharge qu'en charge.

La déformation pseudo-instantanée irréversible $\varepsilon^{(ip)}$ peut s'écrire sous la forme suivante d'après Marin et al., 1951 et Odquist et Hult, 1962 :

$$\varepsilon^{(ip)} = \varepsilon_k \left(\frac{\sigma}{\sigma_k(\theta)} \right)^{k(\theta)} \qquad \text{(B.6-15)}$$

où ε_k est une déformation introduite pour normaliser l'équation et qui est fixée arbitrairement, $\sigma_k(\theta)$ joue le rôle d'un module de déformation qui dépend de la température θ, et $k(\theta)$ est un exposant strictement supérieur à 1 et qui est très peu influencé par la température θ. Le terme $\varepsilon^{(ip)}$ est nul dans le cas d'une décharge.

Le terme de fluage $\varepsilon^{(c)}$ est souvent écrit sous la forme suivante (Hult, 1966; Martin et al., 1951 ; Norton, 1929; Odquist, 1966):

$$\dot{\varepsilon}^{(c)} = \frac{d\varepsilon^{(c)}}{dt} = \dot{\varepsilon}^{c}\left(\frac{\sigma}{\sigma_c(\theta)}\right)^{n(\theta)} \qquad \text{(B.6-16)}$$

Ce qui est confirmé expérimentalement particulièrement dans le domaine des contraintes faibles et intermédiaires (Laks et al., 1957)

Les paramètres σ_c (θ) et $n(\theta)$ sont des paramètres de fluage. Le premier dépend de la température beaucoup plus que le deuxième. Le paramètre $\dot{\varepsilon}^{c}$ qui est le taux de déformation de fluage pour un niveau de contrainte égal à σ_c est introduit pour normaliser l'équation; il donc est fixé arbitrairement.

6.4.1.3 Synthèse sur la modélisation adoptée pour le comportement des sols gelés

Le terme des déformations pseudo-instantanées est écrit comme une fonction notée $F(\sigma, \theta)$ de l'état des contraintes σ et de la température θ :

$$\varepsilon^{(ie)} = F(\sigma, \theta) \qquad \text{(B.6-17)}$$

La partie élastique réversible $\varepsilon^{(ie)}$ est écrite sous la forme :

$$\varepsilon^{(ie)} = \frac{\sigma}{E(\theta)} \qquad \text{(B.6-18)}$$

La partie plastique irréversible des déformations pseudo-instantanées $\varepsilon^{(ip)}$ est écrite sous la forme suivante :

$$\varepsilon^{(ip)} = \varepsilon_k\left(\frac{\sigma}{\sigma_k(\theta)}\right)^{k(\theta)} \qquad \text{(B.6-19)}$$

d'où l'expression de $F(\sigma, \theta)$:

$$F(\sigma,\theta) = \frac{\sigma}{E(\theta)} + \varepsilon_k\left(\frac{\sigma}{\sigma_k(\theta)}\right)^{k(\theta)} \qquad \text{(B.6-20)}$$

Pour une température θ donnée, l'expression de l'incrément des déformations pseudo-instantanées $\Delta\varepsilon^{(i)}$, en charge, sera :

$$\Delta\varepsilon^{(i)} = \frac{\Delta\sigma}{E(\theta)} + \frac{\varepsilon_k}{\sigma_k(\theta)}k\left(\frac{\sigma}{\sigma_k(\theta)}\right)^{k(\theta)-1}\Delta\sigma \qquad \text{(B.6-21)}$$

En décharge, elle est donnée par :

$$\Delta\varepsilon^{(i)} = \frac{\Delta\sigma}{E(\theta)} \qquad \text{(B.6-22)}$$

Pour ce qui concerne les déformations différées de fluage irréversibles, la vitesse de déformation : $\dot{\varepsilon}^{(c)}$ est écrit sous la forme d'une fonction $G(\sigma, \theta)$:

$$\dot{\varepsilon}^{(c)} = \frac{d\varepsilon^{(c)}}{dt} = G(\sigma,\theta) \qquad \text{(B.6-23)}$$

On adoptera l'expression classique de $G(\sigma , \theta)$:

$$G(\sigma,\theta) = \dot{\varepsilon}_c \left(\frac{\sigma}{\sigma_c(\theta)} \right)^{n(\theta)} \qquad \text{(B.6-24)}$$

Pour une température θ donnée, que le sol soit en charge ou en décharge, l'incrément de déformations différées correspondant à la durée Δt s'écrira sous la forme :

$$\Delta\varepsilon^{(c)} = G(\sigma,\theta)\ \Delta t \qquad \text{(B.6-25)}$$

Si le sol ne peut pas se déformer :

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^{(i)} + \Delta\varepsilon^{(c)} = 0 \qquad \text{(B.6-26)}$$

le sol se décharge (relaxation). L'amplitude de la décharge des contraintes $\Delta\sigma$ est contrôlée par l'équation suivante pour une température constante :

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma}\Delta\sigma + G(\sigma,\theta)\Delta t = 0 \qquad \text{(B.6-27)}$$

Comme Δt, et $\partial F/\partial\sigma$ sont positifs, G est du signe de σ, $\Delta\sigma$ est du signe opposé à σ. L'amplitude de la réduction des contraintes $\Delta\sigma$ est contrôlée par le rapport G à $\partial F/\partial\sigma$, c'est à dire le rapport de la vitesse des déformations différées $\varepsilon^{(c)}$ au module tangent des déformations pseudo-instantanées réversibles $\varepsilon^{(ie)}$, dans le cas d'une décharge, d'où l'importance de modéliser ces deux déformations avec la même précision.

Pour une succession d'incréments de chargement en σ et pour une température θ variable T, menant de l'état initial (σ_0 , θ_0) à un état final (σ_n , θ_n), la déformation totale $\varepsilon(t)$ cumulée jusqu'à l'instant t, se calcule par la formule suivante :

$$\varepsilon(t) = F(\sigma_n,\theta_n) + \sum_{i=1\,\text{à}\,n} G(\sigma_{i-1},\theta_{i-1})\Delta t_i \qquad \text{(B.6-28)}$$

La déformation pseudo-instantanée finale :

$$\varepsilon^{(i)} = F(\sigma_n, \theta_n) \qquad \text{(B.6-29)}$$

n'est fonction que de l'état de contraintes σ_n et température θ_n finales. La déformation de fluage finale $\varepsilon^{(c)}$ est la somme d'incréments de déformations qui se sont développés avec des vitesses différentes suivant l'évolution de la contrainte σ et de la température θ :

$$\varepsilon^{(c)}(t) = \sum_{i=1 \text{ à } n} G(\sigma_{i-1}, \theta_{i-1})\Delta t_i \qquad \text{(B.6-30)}$$

6.4.2 Fonctions de transfert de charge entre le sol gelé et une inclusion scellée

6.4.2.1 Résultats expérimentaux

L'approche présentée ci-dessus, qui avait été initialement développée pour les métaux puis qui a été adaptée pour les sols gelés, a été généralisée par Johnston et Ladanyi (1972) aux courbes de mobilisation du frottement latéral entre un sol gelé et une inclusion constituée d'une barre scellée avec un coulis. Pour leurs études, Johnston et Ladanyi se sont appuyés sur une série d'essais d'arrachement de 18 tirants dans la province du Manitoba au Canada (9 à Thompson, 9 à Gillam). Les figures B.6-7a, 6-7b et 6-7c présentent quelques uns de leurs résultats. Sur les figures B.6-7a et 6-7b, on observe clairement que des barres scellées dans un sol gelé , soumises à un effort d'arrachement constant présentent un comportement typique du fluage. On observe nettement trois phases de fluage : primaire, secondaire et tertiaire suivant que la vitesse de déplacement décroît, est constante ou croît de manière similaire à un sol gelé (figure B.6-3) (Andersland et Anderson, 1978).

Il est clair, du point de vue du dimensionnement, qu'une vitesse de déformation croissante avec le temps, c'est-à-dire des déformations qui accélèrent dans le temps, n'est pas acceptable. Le seuil de rupture qui permet de définir la surface de rupture dans le plan de Mohr est donc classiquement défini comme la limite entre le fluage secondaire et tertiaire.

Il est à remarquer que, pour ce qui concerne le frottement sol gelé-inclusion scellée, le seuil de rupture, tel qu'il est défini ci-dessus coïncide avec le début du glissement relatif sol-barre. Ce point a été confirmé par des observations de Johnston et Ladanyi, 1972. Le champ de déformation de cisaillement autour d'une inclusion se décompose en deux zones : (1) une zone très fine au contact sol-inclusion où les déformations de cisaillement se concentrent et (2) une zone extérieure où les déformations de cisaillement sont plus uniformément réparties et décroissent avec la distance en 1/r. Johnston et Ladanyi pensent que la première zone est le siège du fluage tertiaire conduisant à la rupture par glissement de l'inclusion par rapport au gel, tandis que la zone extérieure serait soumise plutôt aux fluages primaire et secondaire. Les déformations de cette zone extérieure sont nécessaires pour mobiliser à l'interface sol-inclusion le frottement latéral limite.

Sur les figures B.6-7a et 6-7b on peut aussi observer que pour des durées de l'ordre de 1 à 2 jours, le fluage secondaire est prédominant par rapport au fluage primaire et aux déplacements instantanés. Pour ce qui concerne les déformations des sols gelés, Vyalov était arrivé à une conclusion similaire. Néanmoins, comme l'amplitude de la relaxation des contraintes est contrôlée par la vitesse de déplacement dû au fluage secondaire sur le module tangent des déplacements pseudo-instantanés, il ne faut négliger aucun des déplacements dans le cas présent.

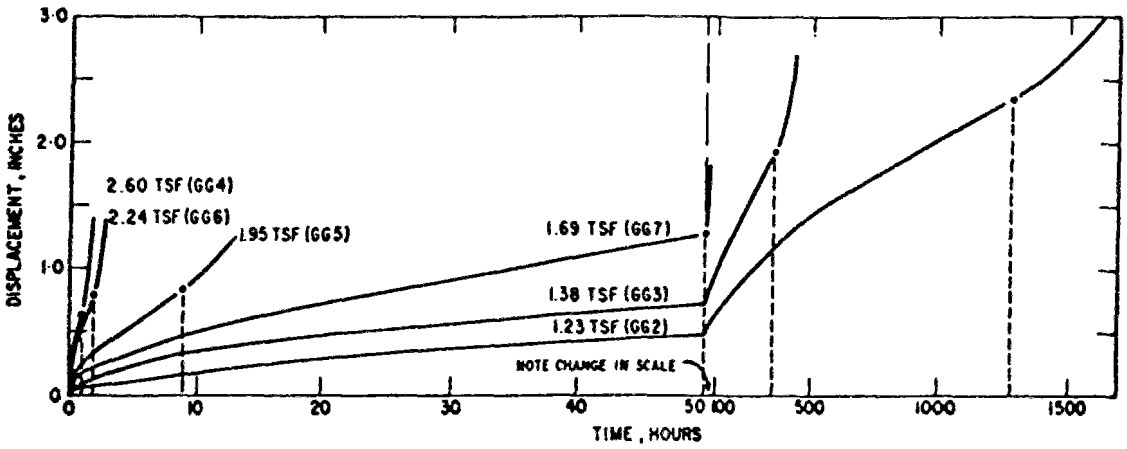


Figure B.6-7a : Essais d'arrachement à charge constante réalisés à Gillam, Manitoba, Canada (Johnston et Ladanyi, 1972).

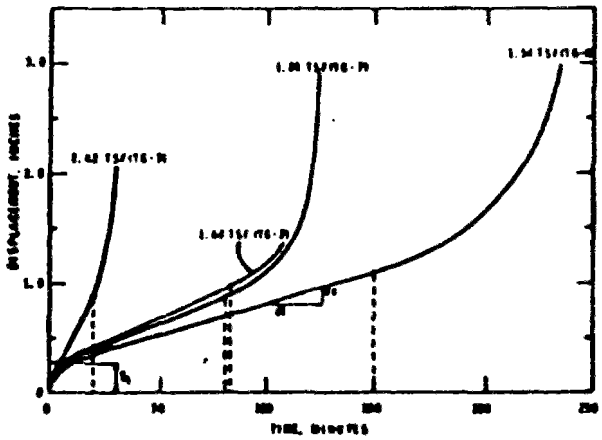


Figure B.6-7b : Essais d'arrachement à charge constante réalisés à Thompson, Manitoba, Canada (Johnston et Ladanyi, 1972).

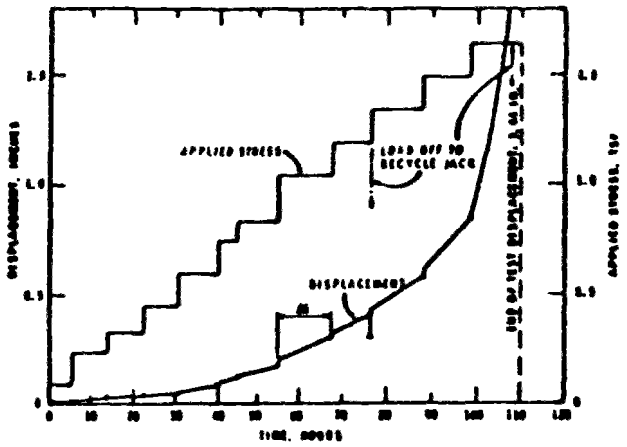


Figure B.6-7c : Essais d'arrachement par paliers de charge constante réalisés à Thompson, Manitoba, Canada (Johnston et Ladanyi, 1972).

6.4.2.2 Schématisation des fonctions de transfert de charge

A partir des travaux antérieurs sur le fluage des sols et de leurs propres essais d'arrachement, Johnston et Ladanyi développent une théorie sur les courbes de mobilisation du frottement dans les sols gelés qui sera exposée ci-dessous et modifiée pour les besoins de la présente étude.

Le déplacement relatif sol-inclusion à l'instant t, noté s(t) par simplification par rapport à la notation précédemment utilisée S_r (t), est décomposé sous la forme d'un déplacement pseudo-instantané noté $s^{(i)}$ et d'un déplacement différé $s^{(c)}$.

Le déplacement pseudo-instantané $s^{(i)}$ est écrit sous la forme d'une fonction F dépendant de l'état de contrainte σ et de la température θ :

$$s^{(i)} = F(\sigma, \theta) \qquad \text{(B.6-30)}$$

Johnston et Ladanyi, ne s'intéressant qu'aux essais de chargement, utilisent une formulation de F où il n'est pas possible de séparer la partie réversible des déplacements pseudo-instantanés $s^{(ie)}$ de celle irréversible $s^{(ip)}$. Or en décharge, seule la partie réversible $s^{(ie)}$ est récupérée. On préférera donc décomposer la déformation pseudo-instantanée :

$$s^{(i)} = s^{(ie)} + s^{(ip)} \qquad \text{(B.6-31)}$$

La vitesse de déplacement différé $\dot{s}^{(c)}$ est supposé être indépendant du temps (hypothèse classique pour le fluage secondaire) et ne dépendre que de l'état de contrainte σ et de la température θ. Il est écrit sous la forme :

$$\dot{s}^{(c)} = G(\sigma, \theta) \qquad \text{(B.6-32)}$$

Pour une sucession d'incréments de chargement où σ et θ varient , le déplacement se calcule donc par la formule suivante :

$$s(t) = F(\sigma_n, \theta_n) + \sum_{i=1 \text{ à } n} G(\sigma_{i-1}, \theta_{i-1})\Delta t_i \qquad \text{(B.6-33)}$$

L'approche de Johnston et Ladanyi est très intéressante dans la mesure où elle permet de calculer les courbes de mobilisation du frottement latéral à partir des paramètres propres du sol gelé.

6.4.2.3 Dérivation des fonctions de transfert de charge pour une température donnée

L'approche de Johnston et Ladanyi est très intéressante dans la mesure où elle permet de calculer les courbes de mobilisation du frottement latéral à partir des paramètres propres du sol gelé.

Les hypothèses suivantes sont supposées être vérifiées afin de pouvoir calculer les fonctions F et G.

(1) Le sol gelé est à une température constante T dans le temps et uniforme dans l'espace sur une section perpendiculaire à l'inclusion. Ceci est vérifié dans le cas présent puisque les isothermes sont perpendiculaires à l'inclusion.

(2) L'inclusion est cylindrique et suffisamment longue. Elle est scellée dans un demi-espace infini où les forces de gravité peuvent être négligées localement.

Le cisaillement noté τ décroît alors en 1/r :

$$\tau = \tau_R \left(\frac{R}{r} \right) \tag{B.6-34}$$

où τ_R est le cisaillement à l'inclusion, R est le rayon de l'inclusion et r est la distance à l'inclusion. La distorsion du sol, notée γ est reliée au déplacement tangentiel du sol par rapport à l'inclusion noté u par :

$$\gamma = -\frac{du}{dr} \tag{B.6-35}$$

ce qui peut s'écrire aussi avec $\dot{\gamma} = -\frac{d\dot{u}}{dr}$, vitesse de distorsion, et $\dot{u}$ vitesse de déplacement :

$$\dot{\gamma} = -\frac{d\dot{u}}{dr} \tag{B.6-36}$$

6.4.2.3.1 Calculs des déplacements différés à partir des déformations différées du sol gelé

La loi de comportement la plus simple, utilisée classiquement pour un matériau visco-élastique non linéaire, tel qu'un métal à toute température ou un sol gelé (Vyalov, 1959 ; Nadai, 1963 ; Odquist, 1966 ; Hult, 1966) est du type :

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_c \left(\frac{\tau}{\tau_c} \right)^n \tag{B.6-37}$$

où τ_c est le paramètre de fluage en kPa, n le paramètre de fluage sans dimension et $\dot{\gamma}_c$ la vitesse de déformation arbitraire introduite pour normaliser la loi de comportement. En combinant les équations précédentes, on obtient :

$$\frac{d\dot{u}}{dr} = -\dot{\gamma}_c \left(\frac{\tau_R}{\tau_c} \frac{R}{r} \right)^n \tag{B.6-38}$$

L'intégration entre r = R où $\dot{u} = \dot{u}_R$ et un r arbitraire donne :

$$\dot{u}_R - \dot{u} = \frac{\dot{\gamma}_c}{n-1} R \left(\frac{\tau_R}{\tau_c} \right)^n \left[1 - \left(\frac{R}{r} \right)^{n-1} \right] \tag{B.6-39}$$

En conditions aux limites extérieures, $\dot{u}$ est nulle à l'infini d'où la vitesse tangentielle du sol au contact avec l'inclusion, notée $\dot{u}_R$ en fonction du cisaillement τ_R au même point :

$$\dot{u}_R = \frac{\dot{\gamma}_c}{n-1} R \left(\frac{\tau_R}{\tau_c} \right)^n \qquad \text{(B.6-40)}$$

Dans la phase initiale de mobilisation du frottement latéral, il est observé une adhérence quasi-parfaite entre le sol et l'inclusion et des déformations de cisaillement uniformément réparties dans le sol. La vitesse $\dot{u}_R$ est donc égale à la vitesse $\dot{s}$ où s est, par définition, le déplacement relatif inclusion-sol fixe à l'infini. D'où la fonction de transfert de charge relative aux déformations différées (fluage secondaire) dans la phase initiale de mobilisation où le sol adhère à l'inclusion :

$$\dot{s}^{(c)} = G(\tau_R) = \frac{\dot{\gamma}_c}{n-1} R \left(\frac{\tau_R}{\tau_c} \right)^n \qquad \text{(B.6-41)}$$

6.4.2.3.2 Calcul des déplacements pseudo-instantanés irréversibles à partir des déformations pseudo-instantanées irréversibles du sol gelé)

La méthode exposée ci-dessus et développée par Johnston et Ladanyi peut être aussi utilisée pour calculer le déplacement pseudo-instantané irréversible $s^{(ip)}$ de l'inclusion connaissant la loi régissant les déformations pseudo-instantanées irréversibles du sol gelé $\gamma^{(ip)}$.

La partie pseudo-instantanée irréversible des déformations d'un sol est classiquement modélisée par une relation du type :

$$\gamma^{(ip)} = \gamma_k \left(\frac{\tau}{\tau_k} \right)^k \qquad \text{(B.6-42)}$$

d'où comme :

$$\gamma^{(ip)} = -\frac{du^{(i)}}{dr} \qquad \text{(B.6-43)}$$

$$\tau = \tau_R \left(\frac{R}{r} \right) \qquad \text{(B.6-44)}$$

l'équation différentielle en $u^{(ip)}$

$$\frac{du^{(ip)}}{dr} = -\gamma_k \left(\frac{\tau_R}{\tau_k} \frac{R}{r} \right)^k \qquad \text{(B.6-45)}$$

qui se résout en

$$u^{(ip)} = \frac{\gamma_k}{k-1} R \left(\frac{\tau_R}{\tau_k} \right)^k \qquad \text{(B.6-46)}$$

Dans la phase initiale de mobilisation du frottement latéral $s^{(ip)} = u^{(ip)}$ d'où :

$$s^{(ip)} = \frac{\gamma_k}{k-1} R \left(\frac{\tau_R}{\tau_k} \right)^k \qquad \text{(B.6-47)}$$

où γ_k est la déformation introduite pour normaliser l'équation de comportement, R est le rayon de l'inclusion, k et $\tau_k(T)$ sont deux paramètres de fluage.

6.4.2.3.3 Calcul des déplacements pseudo-instantanés réversibles à partir des déformations pseudo-instantanées réversibles du sol gelé

La déformation pseudo-instantanée réversible d'un sol s'écrit sous la forme :

$$\gamma^{(ie)} = \frac{\tau}{G(\theta)} \qquad \text{(B.6-48)}$$

où $G(\theta)$ est un module de cisaillement fonction de la température θ.

Contrairement aux déformations pseudo-instantanées irréversibles $\gamma^{(ip)}$ ou à la vitesse de déformations différées $\dot{\gamma}^{(c)}$ qui sont proportionnels au cisaillement τ à la puissance n et k respectivement, avec les deux exposants strictement supérieurs à 1, la déformation pseudo-instantanée réversible $\gamma_{(ie)}$ est directement proportionnelle à τ (exposant égal à l'unité), ce qui pose un problème pour l'intégration. La démarche développée par Johnston et Ladanyi pour calculer $s_{(ip)}$ et $\dot{s}^{(c)}$ à partir de $\gamma^{(ip)}$ et $\dot{\gamma}^{(c)}$ n'est donc plus valable. Il faut avoir recours à une approche telle que celle développée par Frank (1974).

Le cisaillement τ décroît en 1/r au voisinage de l'inclusion pour $r \leq \alpha R$:

$$\tau = \tau_R \left(\frac{R}{r} \right) \qquad \text{(B.6-49)}$$

La distorsion γ, dans le cas présent, est égale à :

$$\gamma = -\frac{du}{dr} \qquad \text{(B.6-50)}$$

En combinant avec la loi de comportement :

$$\gamma = \frac{\tau}{G(\theta)} \qquad \text{(B.6-51)}$$

on obtient l'équation différentielle suivante :

$$-\frac{du}{dr} = \frac{\tau_R}{G(\theta)} \left(\frac{R}{r} \right) \qquad \text{(B.6-52)}$$

Celle-ci s'intègre entre R et α R sous la forme :

$$u(R) = u(\alpha R) + R\frac{\tau_R}{G}\int_R^{\alpha R}\frac{1}{r}dr \qquad \text{(B.6-53)}$$

$$u(R) = u(\alpha R) + R\frac{\tau_R}{G}\ln\alpha \qquad \text{(B.6-54)}$$

Le cisaillement τ ne décroît en 1/R que localement près de l'inclusion pour $r \leq \alpha$ R. Ensuite la décroissance est plus rapide. On peut écrire τ sous la forme suivante, pour $r \geq \alpha$ R avec $\beta > 0$:

$$\tau = \tau_R\, R\, \frac{(\alpha R)^{\beta}}{r^{1+\beta}} \qquad \text{(B.6-55)}$$

$$\tau = \tau(\alpha R)\left(\frac{\alpha R}{r}\right)^{1+\beta} \qquad \text{(B.6-56)}$$

La fonction de transfert de charge s'écrit alors sous la forme :

$$s = \kappa R\, \frac{\tau_R}{G} \qquad \text{(B.6-57)}$$

avec :

$$\kappa = \ln\alpha + \frac{1}{\beta} \qquad \text{(B.6-58)}$$

La fonction de transfert de charge relative aux déplacements pseudo-instantanés réversibles peut donc être écrite sous la forme :

$$s^{(ie)} = \kappa\frac{\tau R}{G} \qquad \text{(B.6-59)}$$

avec κ constante adimensionnelle qui dépend de la géométrie de l'inclusion.

6.4.2.3.4 Courbe de transfert de charge pour le déplacement total

La distorsion γ étant une fonction linéaire du déplacement u, la courbe de transfert de charge pour le déplacement total s s'obtient en ajoutant les 3 termes : $s^{(ie)}$, $s^{(ip)}$ et $s^{(c)}$.

La fonction $F(\sigma, \theta)$ qui définit $s^{(i)}$ est écrite sous la forme :

$$s^{(i)} = F(\sigma,\theta) \qquad \text{(B.6-60)}$$

$$F(\sigma,\theta) = \kappa\frac{\tau}{G}R + \frac{\gamma_k}{k-1}R\left(\frac{\tau_R}{\tau_k}\right)^k \qquad \text{(B.6-61)}$$

La fonction $G(\sigma, \theta)$ qui définit $\dot{s}^{(c)}$ est écrite sous la forme :

$$\dot{s}^{(c)} = G(\sigma,\theta) \tag{B.6-62}$$

$$G(\sigma,\theta) = \frac{\dot{\gamma}_c}{n-1} R \left(\frac{\tau_R}{\tau_c}\right)^n \tag{B.6-63}$$

Le déplacement total vaut donc :

$$s(t) = s^{(i)}(\sigma,\theta) + \int_0^t \dot{s}^{(c)}(\sigma,\theta)dt \tag{B.6-64}$$

6.4.2.4 Détermination des paramètres de fluage et exemples de valeurs numériques

La séparation du déplacement pseudo-instantané en deux parties, une partie réversible et une partie irréversible plastique, est très importante pour le problème étudié où l'on ne sait pas a priori si le sol va être localement en charge ou décharge. La plupart des auteurs dont : Kondner (1963), Kondner et Krizek (1965), Ladanyi (1972), Johnston et Ladanyi (1972), Andersland et Anderson (1978) regroupent les deux termes : $\gamma^{(ie)}$ et $\gamma^{(ip)}$ en un seul terme $\gamma^{(i)}$ et approximent ce dernier soit par une fonction hyperbolique, soit par une fonction de type puissance. Il n'existe donc pas, ou peu, de données expérimentales disponibles et utilisables dans le cas présent.

Les valeurs expérimentales présentées ci-dessous correspondent à une formulation où les deux termes $\gamma^{(ie)}$ et $\gamma^{(ip)}$ sont regroupés et modélisés par un fonction de type puissance (Johnston et Ladanyi, 1972). Elles sont donc à manier avec précaution.

La détermination des paramètres de plasticité (k, τ_k) et de fluage (n, τ_c) se fait à partir des essais de fluage en traçant log τ en fonction de respectivement log $s^{(ip)}$ et log $\dot{s}^{(c)}$ ainsi qu'après s'être défini les constantes γ_k et $\dot{\gamma}_c$.

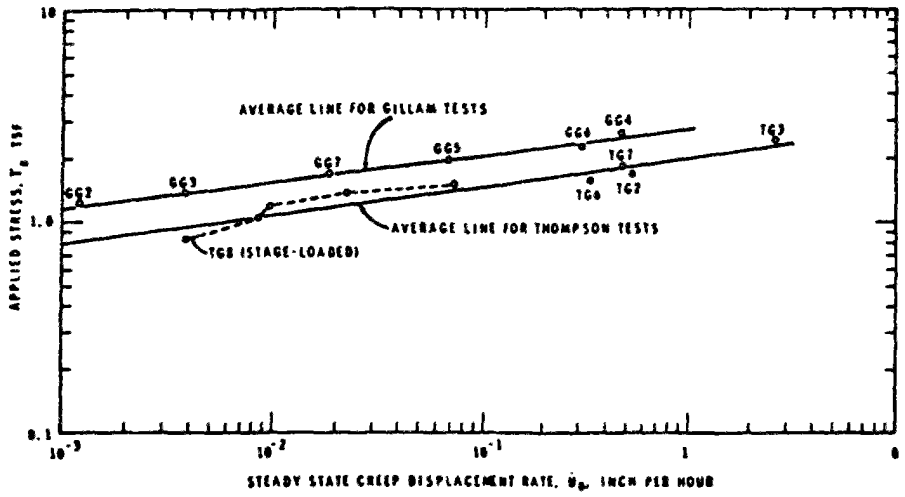


Figure B.6-8 : Exemple de courbes log τ en fonction de log $\dot{s}^{(c)}$, permettant la détermination des paramètres de fluage (Johnston et Ladanyi, 1972)

Les résultats des essais de Johnston et Ladanyi donnent les valeurs numériques suivantes :

Tableau B.6-1 : Paramètres des essais de Gillam et Thompson (Johnston et Ladanyi, 1972)

paramètre	unités	Essais de Gillam	Essais de Thompson
exposant n	sans	8,05	7,5
exposant k	sans	3,0	3,0
τ_k	TSF kPa	0,571 55,81	0,571 55,81
τ_c	TSF kPa	1,1535 112,74	0,7858 76,80
s_k	pouce m	0,1 $2{,}54\ 10^{-3}$	0,01 $2{,}54\ 10^{-4}$
$\dot{s}_c$	pouce/heure m/jour	0,001 0,61	0,001 0,61

Nota : 1 T = 2000 lbs
1 livre(lb)=0,454 kg
1 pied(ft) = 12 pouces(inches)
1 pouce (inch) = 2,54 m
1 tonne par pied carré (TSF) = 97,736 kPa

6.4.2.5 Influence de la température sur le comportement mécanique et les fonctions de transfert de charge

6.4.2.5.1 Dépendance en température des paramètres de déformations différées

La fonction $G(\sigma, \theta)$ qui définit le taux des déformations différées $\dot{s}^{(c)} = G(\sigma,\theta)$ dépend de trois paramètres : $\dot{\gamma}_c$, n et τ_c .

Le taux de déformation $\dot{\gamma}_c$ est fixé arbitrairement car il est introduit pour normaliser les expressions; il ne dépend donc pas de la température θ. L'exposant n dépend très peu de θ. Pour l'intervalle restreint de températures auquel on s'intéresse, n sera pris constant, ce qui est très classiquement fait. Seul le paramètre τ_c , qui joue le rôle d'un module de déformation, dépend de manière significative de la température $\theta[^\circ C]$.

Dépendance en température du paramètre τ_c

Toutes choses égales par ailleurs, la vitesse de déformation de fluage secondaire d'un sol gelé est fonction de la température absolue T [°K] (positive) avec une loi du type (AlNouri, 1969) :

$$\dot{\varepsilon}^{(c)} = A \exp\left(-\frac{L}{T}\right) \qquad \text{(B.6-65)}$$

où L est une constante de normalisation [°K] et A est une constante [s^{-1}].

Si l'on combine cette dépendance en température (relation B.6-65) avec la relation B.6-24 définissant le fluage pour une température donnée (Glen (1955) ; Gold (1970) ; Laks et al. (1957), la constante A peut être éliminée pour obtenir la dépendance du paramètre σ_c en fonction de la température absolue T.

$$\sigma_c(T) = \sigma_c(T = 273° K) \exp\left[\frac{L\,(273-T)}{273\,n\,T}\right] \qquad \text{(B.6-70)}$$

Si l'on utilise la température θ en °C reliée à la température absolue T en °K par

$$\theta\,[°C] = T - 273\,[°K] \qquad \text{(B.6-71)}$$

la dépendance de σ_c en fonction de la température θ peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\sigma_c(\theta) = \sigma_c(\theta = 0°C) \exp\left[-\frac{L\,\theta}{273^2\,n}\right] \qquad \text{(B.6-72)}$$

en considérant des températures θ proche de 0°C et petites par rapport à 273°C.

Le paramètre L [°K] peut être relié à l'énergie d'activation des particules d'eau via une analyse thermodynamique. Les valeurs expérimentales trouvées pour L sont :

sable d'Ottawa saturé gelé : L = 4274°K [Andersland et AlNouri, 1970]
glace polycristalline : L = 10 000°K [Gold, 1970]

Pour des sols contenant de l'eau salée gelée, les valeurs de L sont beaucoup plus grandes.

Pour un sol gelé (ne contenant pas de sel), L est au maximum de l'ordre de 10 000°C. L'exposant n, qui a été introduit précédemment dans la relation 6-24, vaut en moyenne 7 à 8. La température θ, pour ce qui concerne l'étude présente, varie de 0 °C à -10°C au maximum. Le terme $L\,\theta / 273^2\,n$ est donc de l'ordre 0,1 en prenant les valeurs moyennes suivantes L = 5 000°C, θ = -10°C, n = 7,5. La fonction $\sigma_C(\theta)$ peut être approximée linéairement près de 0°C :

$$\sigma_c(\theta) = \sigma_c(\theta = 0°C)\left[1 + \left(\frac{L}{273^2\,n}\right)\theta\right] \qquad \textit{(B.6-73)}$$

6.4.2.5.2 Dépendance en température des paramètres de déformations pseudo-instantanées irréversibles

Le déplacement pseudo-instantané irréversible $s^{(ip)}$ est défini à partir de 3 paramètres : γ_k , k, τ_k .

La déformation γ_k est introduite dans la formule pour la rendre adimensionnelle. Elle est donc indépendante de la température θ.

L'exposant k dépend très peu de la température pour l'intervalle restreint de températures considéré [0°C, -10°C]. Il sera donc considéré comme indépendant de θ.

Expérimentalement k est toujours trouvé supérieur à 1, ce qui est important pour pouvoir calculer simplement les fonctions de transfert de charge. Le cas k = 1 correspond à l'élasticité linéaire et l'intégration de $\frac{du}{dr}$ donne une solution u(r) en log r, qui est infini pour r infini. Il faut alors avoir recours à d'autres hypothèses pour pouvoir obtenir une fonction de transfert de charge (Frank, 1983).

Seul τ_k dépend de θ de manière significative. On supposera, comme cela est classiquement fait, que σ_k dépend de θ de la même manière que σ_k :

$$\sigma_k(\theta) = \sigma_k(\theta = 0°C)\left[1+\left(\frac{L}{273^2 k}\theta\right)\right] \qquad \text{(B.6-74)}$$

6.4.2.5.3 Dépendance en température des paramètres de déformations pseudo-instantanées réversibles

Le module de cisaillement G qui intervient dans le calcul de $s^{(ie)}$ est un module pseudo-élastique dans la mesure où il inclut les effets visco-élastiques. Il est donc plus faible que le module élastique instantané.

Le coefficient κ dépend de ν, coefficient de Poisson du sol. Comme ν dépend de la température, κ dépend aussi de θ.

G se calcule à partir de E et ν par la formule :

$$G = \frac{E}{2\ (1+\nu)} \qquad \text{(B.6-75)}$$

Comme E et ν varient avec la température, G dépend de la température. L'influence de θ est beaucoup plus importante pour E que pour ν.

Dans la suite on appellera B le module initial de la courbe de mobilisation du frottement latéral relative à $s^{(ie)}$; B est donc égal à :

$$B = \frac{G(\theta)}{\kappa(\theta)\ R} \qquad \text{(B.6-76)}$$

Pour des températures positives, B peut se calculer à partir d'essais in situ (pressiomètre) (Frank et Zhao, 1982) sans passer par le calcul des propriétés élastiques élémentaires E et ν du sol (Frank, 1984).

Le module E augmente de manière très lente entre 0°C et -5°C puis à peu près linéairement pour des température jusqu'à -50°C.

Entre 0°C et -5°C, la teneur en eau non gelée dans le sol est encore assez élevée. Elle dépend du type de sol (figure B.6-9) (Dupas et Van Vliet-Lanoë, 1987).

Pour un limon typique, autour de -4°C, la teneur en eau non gelée est autour de 10% pour une teneur en eau initiale de 20%. Pour une première étude, on supposera que le module $B(\theta)$ est constant dans la plage de température du problème.

Pour des températures plus faibles, $E(\theta)$ et donc $B(\theta)$ augmentent à peu près linéairement avec θ (figure B.6-10).

Tableau B.6-2 : Valeurs typiques d'accroissement du module B suivant le type de sol

type de sol	augmentation de E n kPa/°C	augmentation de B en kPa/mm/°C
sable	$2{,}35\ 10^{+6}$	$9{,}038\ 10^{+3}$
limon	$1{,}50\ 10^{+6}$	$5{,}770\ 10^{+6}$
argile	$0{,}32\ 10^{+6}$	$0{,}32\ 10^{+6}$

6.4.2.6 Influence de la pression moyenne sur le comportement mécanique d'un sol gelé

6.4.2.6.1 Influence de la pression moyenne sur la résistance au cisaillement

Les résultats obtenus par Sayles (1973) sur la résistance au cisaillement d'un sol granulaire gelé indiquent que les courbes intrinsèques, correspondant à un temps t_f donné pour atteindre la rupture, peuvent être raisonnablement approximées par des droites parallèles (figure B.6-11).

Il a été observé expérimentalement que l'angle de frottement ϕ dépend très peu du temps t_f et de la température θ pour des températures de l'ordre de quelques dizaines de degrés. Par contre, la cohésion c dépend du temps t_f et de la température θ car elle est directement reliée à la structure de la glace, tandis que l'angle de frottement du sol est directement relié au squelette granulaire :

$$\tau = c(t_f, \theta) + \sigma \tan\phi \qquad \text{(B.6-77)}$$

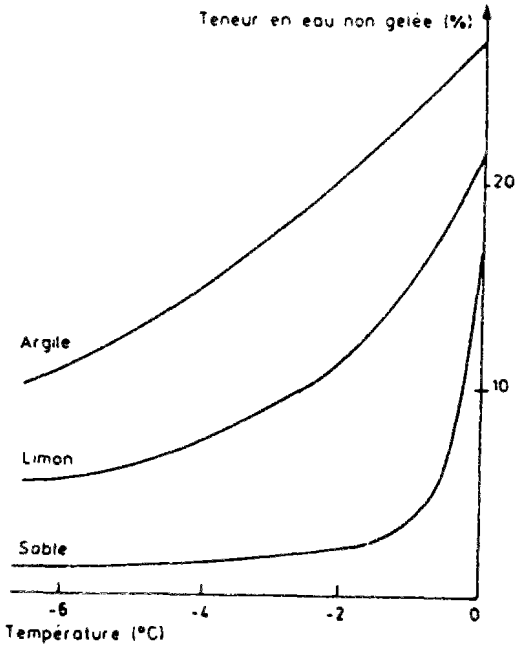


Figure B.6-9 : Evolution de la teneur en eau non gelée en fonction de la température pour trois types de sol (Dupas et Van Vliet-Lanoë, 1987)

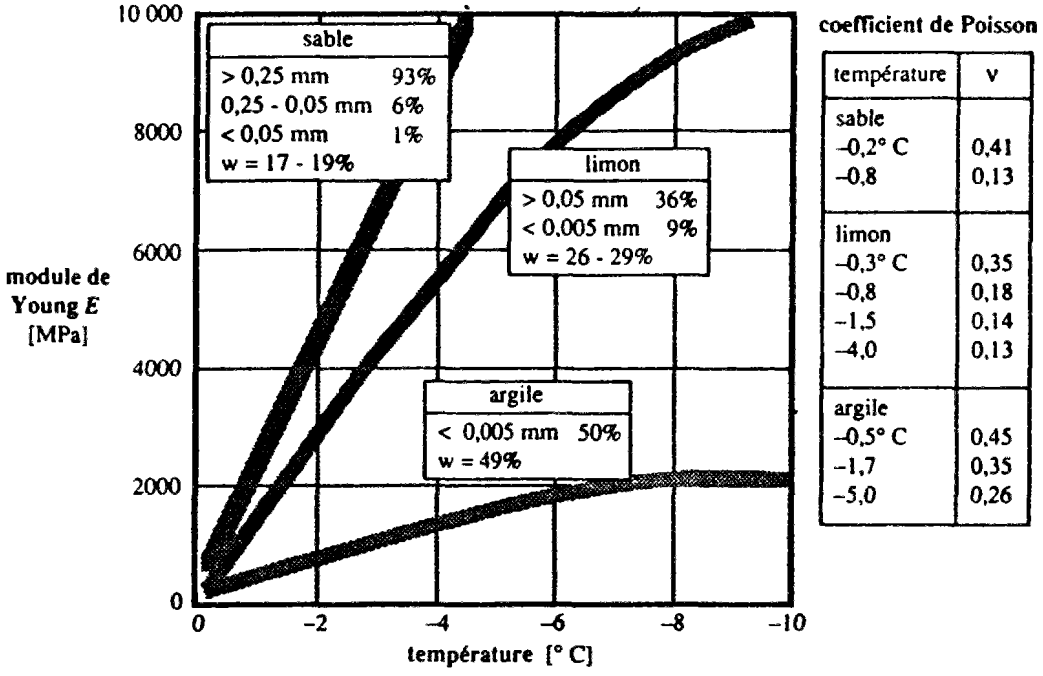


Figure B.6-10 : Variations du module d'Young E des sols avec la température, adaptée de Tsytovitch (1975) par Dysli (1991)

L'équation de la courbe intrinsèque en fonction des contraintes principales s'écrit sous la forme suivante :

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_f = \sigma_{fu}(t_f, \theta) + \sigma_3 (N_\phi - 1) \qquad \text{(B.6-78)}$$

avec :

$$N_\phi = \frac{(1+\sin\phi)}{(1-\sin\phi)} \qquad \text{(B.6-79)}$$

et σ_{fu} résistance à la compression simple ($\sigma_3 = 0$).

La résistance au cisaillement est donc fonction du temps t_f et de la contrainte de confinement σ_3 à température θ donnée (figure B.6-12).

6.4.2.6.2 Influence de la pression moyenne sur les déformations

Pour ce qui concerne la loi de comportement avant la rupture, l'influence de la pression de confinement est moins claire que pour la résistance au cisaillement.

Sur le plan théorique, Ladanyi (1972), par exemple, en partant de l'hypothèse que le critère de Mohr-Coulomb est vérifié avant la rupture, dès le début du chargement, et que les déformations de fluage sont prédominantes, on obtient l'équation de comportement suivante :

$$\dot{\varepsilon}^{(c)} = \dot{\varepsilon}_c \left[\frac{\sigma_1 - N_\phi \sigma_3}{\sigma_{cu0} f(\theta)} \right]^n \qquad \text{(B.6-80)}$$

en combinant le critère de rupture :

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{cu}(t, \theta) + \sigma_3 (N_\phi - 1) \qquad \text{(B.6-81)}$$

avec la loi de fluage secondaire :

$$\sigma_{fu}(t, \theta) = \sigma_{cu0} \left(\frac{\dot{\varepsilon}^{(c)}}{\dot{\varepsilon}_c} \right)^{\frac{1}{n}} f(\theta) \qquad \text{(B.6-82)}$$

La formule B.6-80 donne un taux de déformation différée $\dot{\varepsilon}^{(c)}$ non nul pour un état de contrainte sphérique $\sigma_1 = \sigma_3$, c'est à dire sans déviateur, ce qui n'est pas acceptable puisque le fluage ne se produit que pour un déviateur non nul.

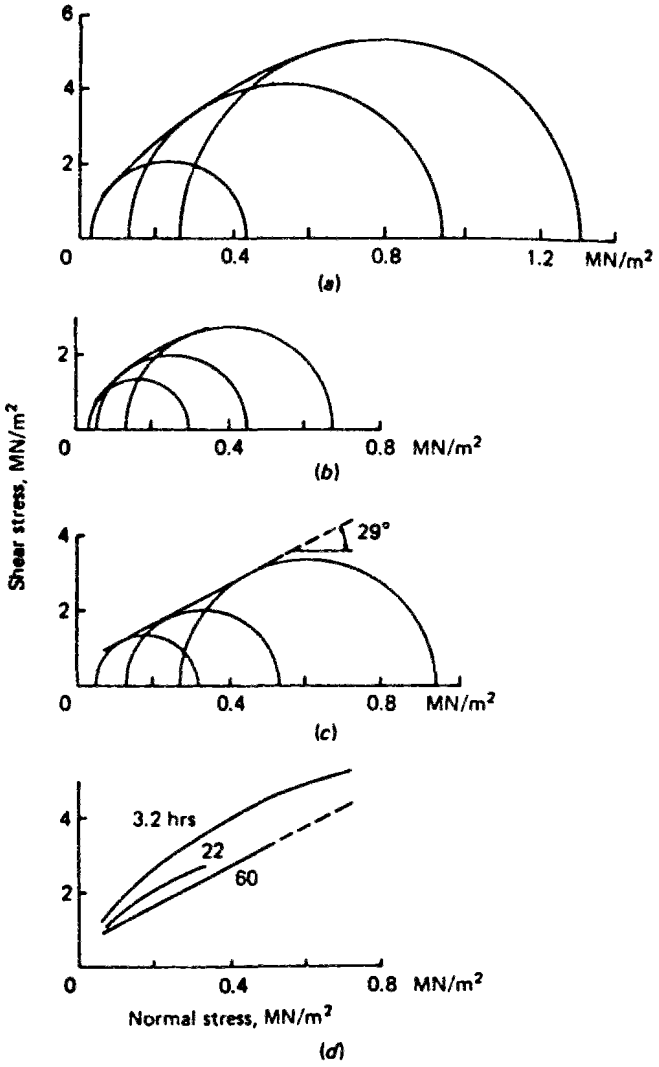


Figure B.6-11 : Courbes intrinsèques pour le sable d'Ottawa gelé à -3,85°C pour un temps t_f menant à la rupture ; (a) t_f = 3,2h, (b) t_f = 22h et (c) t_f 60h et (d) pour les trois temps regroupés d'après Sayles (1973)

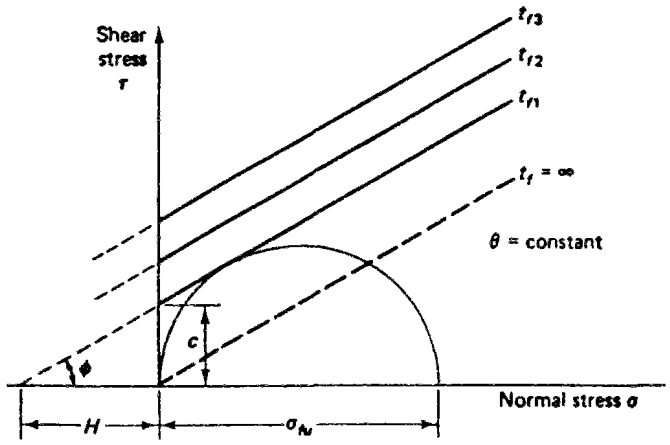


Figure B.6-12 : Approximation des courbes intrinsèques par des droites de Mohr-Coulomb d'après Ladanyi (1972)

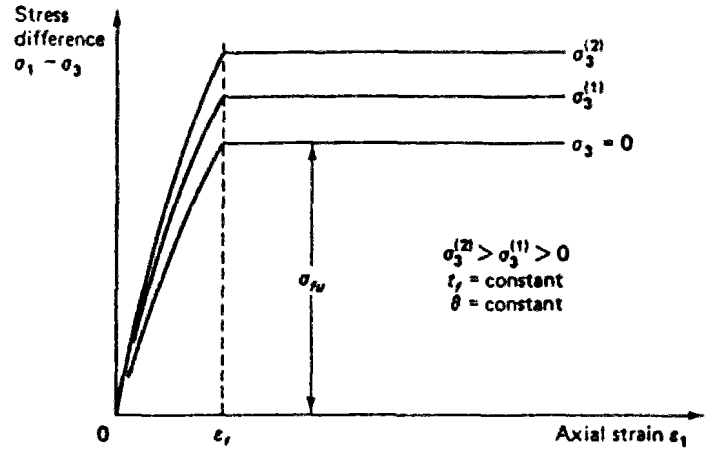


Figure B.6-13 : Forme des courbes contraintes-déformations proposées par Ladanyi (1972)

Cet inconvénient peut être éliminé (Ladanyi, 1972) en réécrivant l'équation sous la forme :

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \left(\frac{\dot{\varepsilon}^{(c)}}{\dot{\varepsilon}_c}\right)^{\frac{1}{n}} \left[\sigma_{cu0}\, f(\theta) + \sigma_3 (N_\phi - 1)\right] \qquad \text{(B.6-83)}$$

ce qui donne :

$$\dot{\varepsilon}^{(c)} = \dot{\varepsilon}_c \left[\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_{cu0}\, f(\theta) + \sigma_3 (N_\phi - 1)}\right] \qquad \text{(B.6-84)}$$

Pour un déviateur nul σ_1 - σ_3 = 0, le taux de déformation de fluage est nul. Cependant, le critère de Mohr-Coulomb ainsi réécrit implique que l'angle de frottement ϕ dépend du temps t_f , ce qui n'est pas vérifié expérimentalement.

La dépendance du taux de déformation de fluage secondaire $\dot{\varepsilon}^{(c)}$ en fonction de σ_m est en fait plus théorique qu'expérimentale. Elle résulte de l'hypothèse très forte, faite par Ladanyi, notamment sur le fait que le critère de rupture est vérifié dès qu'il y a déformation.

Il y a plusieurs autres études expérimentales qui indiquent que, pour les matériaux solides (béton, roches) et les sols denses, la contrainte moyenne n'influence pas la portion initiale des courbes contrainte-déformation, notamment Andersland et AlNouri (1970) ; Sayles (1973) ; Alkire et Andersland (1973) (figure B.6-14). Les résultats de Sayles (1973), Alike et Andersland (1973), notamment, montrent que même en triplant le confinement σ_3 , la portion initiale des courbes contrainte-déformation n'est pas modifiée sensiblement.

Pour la modélisation de l'influence du gel sur un mur en sol cloué, on ne tiendra donc pas compte de l'influence de la contrainte moyenne sur la courbe contrainte-déformation, que ce soit pour les déformations pseudo-instantanées ou différées.

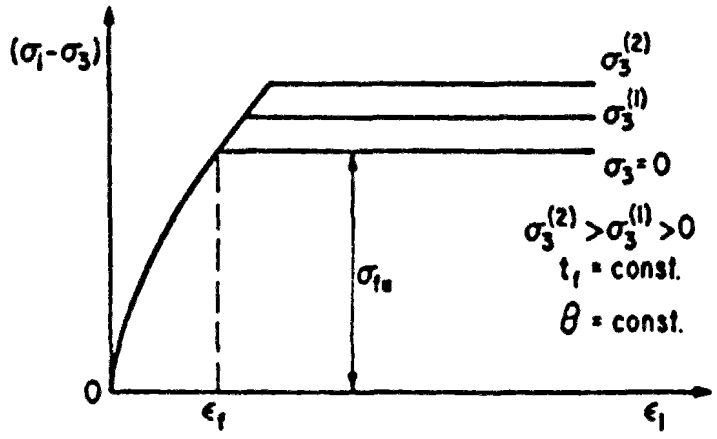


Figure B.6-14 : Forme type des courbes contraintes-déformations pour θ et t_f donnés (Andersland et AlNouri, 1970)

6.4.2.7 Frottement latéral unitaire limite

Dans tout essai d'arrachement d'inclusions (pieux, barres scellées ou non), dans le cas d'un sol gelé ou non, on observe systématiquement qu'après une phase initiale de déformations uniformes du sol autour du pieu, se développe un glissement relatif pieu-sol concentré dans la couche d'interface. Ce glissement, pour les sols gelés, démarre avec le fluage tertiaire qui se développe principalement dans la couche d'interface. Sur une courbe de mobilisation du frottement latéral, le glissement correspond au palier $\tau = q_s$. Le frottement latéral unitaire q_S est fonction du temps t, de la température, de l'état de contraintes et en particulier de la contrainte normale.

L'influence de la contrainte normale sur le frottement latéral unitaire entre un sol gelé et l'inclusion, n'est pas facile à identifier dans la mesure où le sol, en gelant, augmente la contrainte normale qu'il exerce sur une inclusion cylindrique.

Il est à noter que le gonflement des sols gélifs se fait sous la forme de lentilles de glace se développant parallèlement à l'isotherme 0°C. Dans le cas d'un mur de soutènement soumis au gel, ces lentilles de glace sont perpendiculaires aux clous, au moins dans la partie médiane du mur, ce qui tend à augmenter le frottement. La configuration la plus défavorable correspondrait à des lentilles de glace, parallèles aux renforcements, ce qui ne peut se produire que pour le premier lit de clous situé en partie supérieure du mur en sol cloué, là où la pénétration du front de gel se fait parallèlement au lit de clous. On peut donc raisonnablement penser que le frottement sol gelé-inclusion est uniforme le long de l'inclusion.

6.4.2.7.1 Critère de rupture d'un sol gelé

Vyalov (1956) a très tôt formulé l'idée que la rupture d'un sol gelé est due à l'accumulation des déformations de fluage irréversibles $\gamma^{(c)}$ qui augmentent jusqu'à atteindre une valeur limite $\gamma_f^{(c)}$, à partir de laquelle la rupture se produit (début du fluage tertiaire avec des déformations s'accélérant dans le temps).

La constante $\gamma_f^{(c)}$ est un paramètre constant pour un sol donné, mais qui ne dépend ni de l'état des contraintes ni du temps mis par le sol pour atteindre la rupture du moins pour des durées pas trop courtes (supérieures à une heure).

L'existence de la valeur limite $\gamma_f^{(c)}$ peut être interprétée physiquement en disant que la rupture se produit pour un endommagement du matériau mesuré par la déformation différée irréversible. L'existence d'une valeur limite $\gamma_f^{(c)}$ a été signalée aussi par Goldstein (1957) qui a mesuré des valeurs de $\gamma_f^{(c)}$ de l'ordre de 0,1 pour des essais s'étendant sur des durées de 1 min à 10^{+5} min.

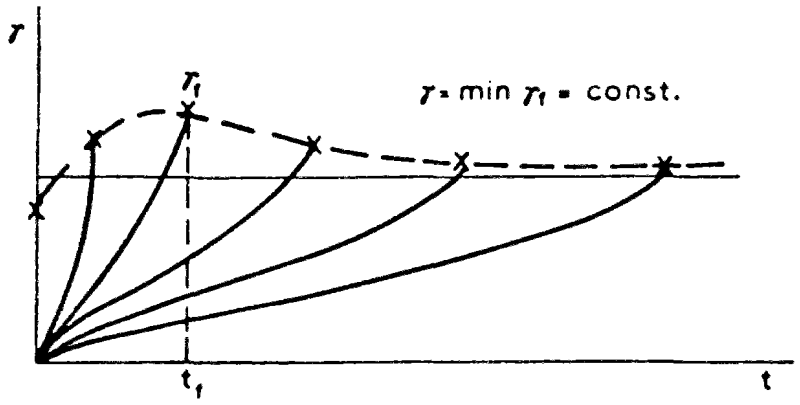


Figure B.6-15 : Condition de rupture à long terme d'un sol gelé
(Vyalov, 1956)

En négligeant les déformations irréversibles pseudo-instantanée et en fixant la contrainte σ et la température θ pendant la durée de l'essai, la déformation différée à la rupture se calcule simplement par :

$$\gamma^{(c)}(t) = \dot{\gamma}^{(c)}\, t \qquad \text{(B.6-85)}$$

Comme la déformation $\gamma^{(c)}$ est limitée à $\gamma_f^{(c)}$, on obtient une relation linéaire entre le taux de déformation différée $\dot{\gamma}^{(c)}$, constant pendant tout l'essai puisque la contrainte σ et la température θ sont maintenues constantes, et l'inverse de l'instant de rupture t_f. Cette relation linéaire a été vérifiée expérimentalement notamment par Saito et Uezawa (1961), Saito (1965, 1969), Liam Finn et Shead (1973).

A partir des références précitées, ainsi que de ses propres données, Vyalov (1986) a développé la figure B.6-16 où l'on peut observer une relation linéaire entre $\dot{\gamma}^{(c)}$ et l'inverse de t_f, ceci pour tous les essais confondus.

La figure ci-dessus tend à prouver que la valeur $\gamma_f^{(c)}$ dépend assez peu du type de sol. Par contre, elle dépend beaucoup du type de sollicitations auquel le sol est soumis : compression, traction, torsion ou cisaillement.

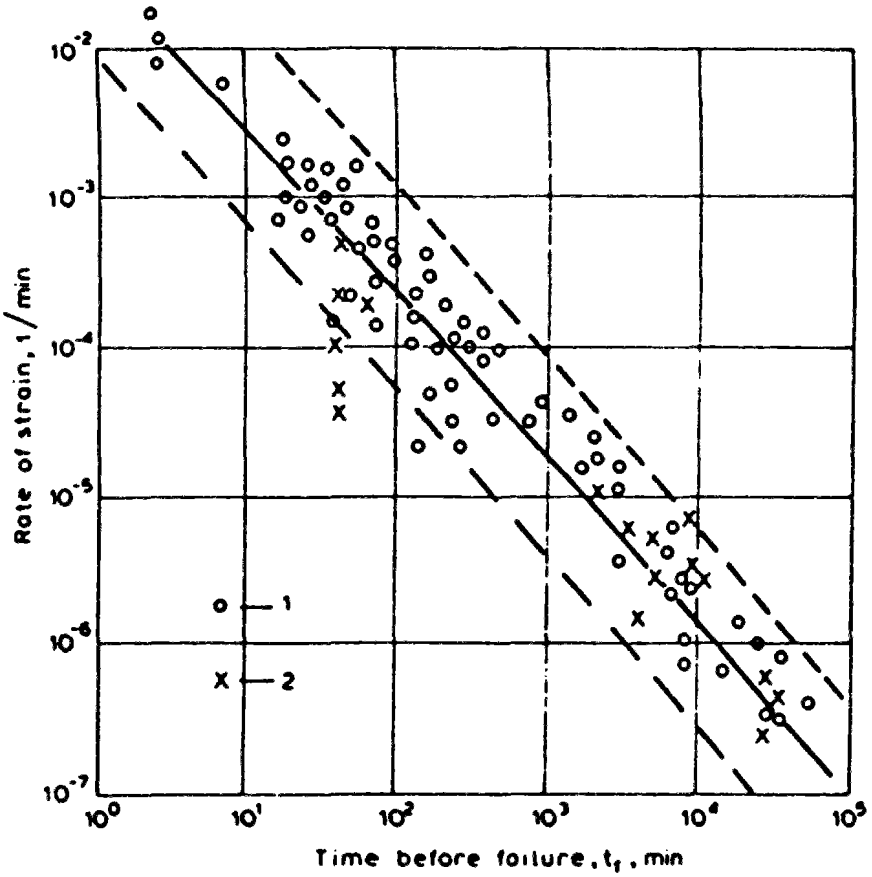


Figure B.6-16 : Relation entre la vitesse de déformation différée $\dot{\gamma}^{(c)}$ et le temps de la rupture t_f ; (1) toutes données obtenues en laboratoire; (2) toutes données obtenues sur le terrain (Vyalov, 1986)

6.4.2.7.2 Critère de rupture de l'interaction inclusion - sol gelé

Dans le cas d'essais d'arrachement d'inclusions scellées dans un sol gelé, Johnston et Ladanyi (1972) ont observé l'existence d'une valeur limite $s_f^{(c)}$ du déplacement relatif sol-inclusion de l'ordre de 2,5 à 5 cm.

Le taux de distorsion différée du sol en contact avec l'inclusion $\dot{\gamma}_R^{(c)}$ se calcule avec la loi de fluage :

$$\dot{\gamma}_R^{(c)} = \dot{\gamma}_c \left(\frac{\tau_R}{\tau_c} \right)^n \qquad \text{(B.6-85)}$$

Pour des essais d'arrachement à charge (cisaillement τ) et température θ constants, la déformation du sol au contact avec l'inclusion est égale à :

$$\gamma_R^{(c)} = t\,\dot{\gamma}_c \left(\frac{\tau_R}{\tau_c}\right)^n \qquad \text{(B.6-86)}$$

Connaissant pour le même type d'essais le déplacement de l'inclusion $s^{(c)}$:

$$s^{(c)} = \frac{R}{n-1}\, t\,\dot{\gamma}_c \left(\frac{\tau_R}{\tau_c}\right)^n \qquad \text{(B.6-87)}$$

la relation suivante peut être obtenue entre $\gamma_R^{(c)}$ et $s^{(c)}$:

$$\gamma_R^{(c)} = \frac{(n-1)}{R} s^{(c)} \qquad \text{(B.6-88)}$$

Le déplacement différé de l'inclusion $s^{(c)}$ est directement relié à la distorsion du sol au contact avec l'inclusion $\gamma_R^{(c)}$. Johnston et Ladanyi indiquent qu'à la rupture $\gamma_R^{(c)}$ est constant pour chacune de leurs séries d'essais, ce qui est en accord avec les observations pré-citées sur le comportement des sols gelés en général.

Johnston et Ladanyi raisonnent en terme de déplacement différé $s_f^{(c)}$ à la rupture. Comme le déplacement dépend du rayon R de l'inclusion et du paramètre de fluage n, il est préférable de raisonner en terme de déformation à la rupture $\gamma_f^{(c)}$ propre au sol. Pour les essais de Thompson, la moyenne de $\langle s_f^{(c)} \rangle$ était de 3,81 cm (1,5 pouce), le rayon R était de 7,6 cm et le paramètre de fluage moyen $\langle n \rangle$ valait 7,5 d'où la déformation différée limite moyenne $\langle \gamma_f^{(c)} \rangle$ égale à 3,25. Par un calcul similaire, en prenant $\langle s_f^{(c)} \rangle$ égale à 2,3 cm, un rayon R de 5 cm, un paramètre n moyen $\langle n \rangle$ égale à 8,05, on obtient pour Gillam, $\langle \gamma_f^{(c)} \rangle = 3{,}24$.

Il est intéressant de constater que les deux valeurs $\gamma_f^{(c)}$, trouvées pour les deux sites, sont à peu près égales alors que les valeurs $s_f^{(c)}$ sont différentes, ce qui tend à corroborer l'idée de Vyalov (1986) selon laquelle $\gamma_f^{(c)}$ dépend très peu du sol mais surtout du type d'essais et de sollicitation.

La valeur obtenue pour $\gamma_f^{(c)}$ de l'ordre de 3.2 est très forte au regard de l'hypothèse des déformations pour laquelle la théorie des fonction de transfert de charge est développée.

Connaissant la constante $s_f^{(c)}$ et la fonction de transfert de charge avant rupture $s(t,\tau)$, il est possible de calculer la relation entre le cisaillement appliqué τ_R sur l'inclusion et le temps de la rupture t_f pour des essais d'arrachement à cisaillement τ_R et température constants.

Supposant une valeur limite $s_f^{(c)}$ égale à 2,5 cm et en utilisant les paramètres de fluage déterminés par ailleurs sur les courbes de fluage, Johnston et Ladanyi (1972) obtiennent des courbes (τ_R , t_f) pour les essais de Gillam et de Thompson, qui sont très proches des points de mesure (figure B.6-17).

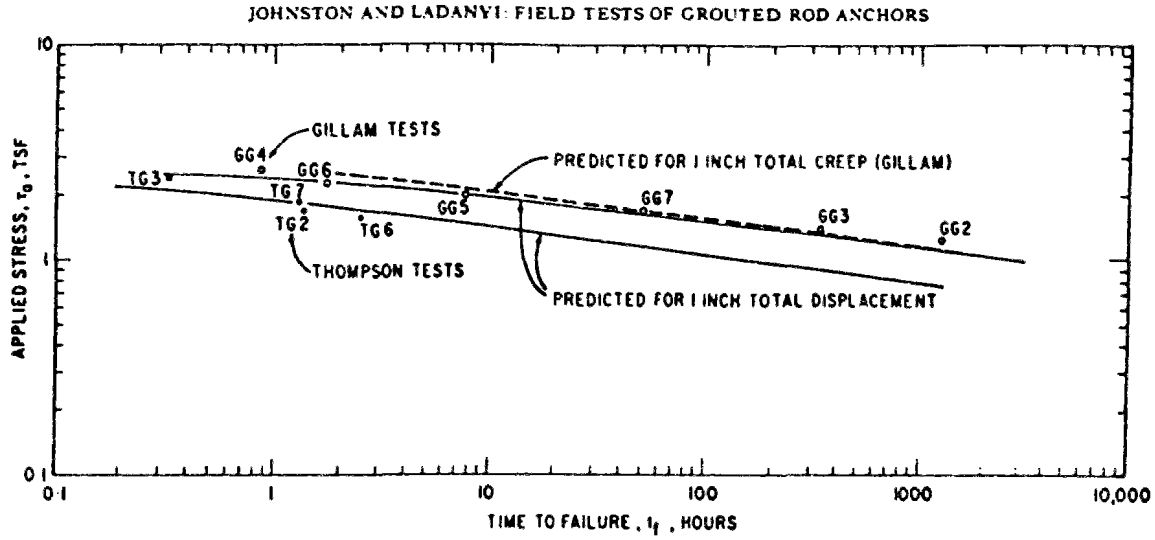


Figure B.6-17 : Courbe contrainte de cisaillement τ_R à l'inclusion en fonction du temps de rupture t_f pour les essais de Gillam et de Thompson (Johnston et Ladanyi, 1972)

Pour ce qui concerne les courbes de mobilisation du frottement latéral, on adoptera la modélisation suivante : le cisaillement τ_R est mobilisé et augmente à l'interface avec le déplacement relatif sol-inclusion tant que

$$s^{(c)} \leq s_f^{(c)} \qquad \text{(B.6-89)}$$

Quand le déplacement différé limite $s_f^{(c)}$ est atteint, la rupture du contact sol-inclusion se produit sous la forme d'un glissement relatif sol-inclusion très grand à frottement latéral unitaire q_S constant dans le temps. Ceci correspond au palier de la fonction de transfert de charge.

6.5 Modélisation des conditions aux limites

L'extrémité libre de l'inclusion dans le sol, en z = L, étant libre, la traction N y est nulle. Ceci implique que la dérivée du déplacement absolu du clou S_a y est nulle.

La traction dans le clou à l'interface sol-parement est non nulle $N(z = X_b) \neq 0$. A un instant t donné, l'incrément de traction ΔN qui va résulter du chargement mécanique dû au gel ne peut être connu a priori. Il est fonction de la nouvelle distribution $\Delta N(z)$ le long de l'inclusion. Imposer une condition aux limites en $z = X_b$, que ce soit en traction N ou déplacement S_a , n'est pas simple à formuler.

La solution la plus simple, qui a été déjà utilisée par Byrne, 1992, notamment, est d'imposer une traction nulle sur l'extrémité de l'inclusion qui sort du parement et de modéliser l'interaction inclusion-parement, à travers la connection de l'inclusion au parement, par une fonction de transfert de charge de l'inclusion dans le parement, de manière similaire à ce qui se fait pour l'interaction sol non gelé-clou. Cette dernière est obtenue séparément du problème d'interaction sol-inclusion, à partir de la courbe donnant l'effort dans l'inclusion au contact sol-parement $N(X_b)$ en fonction de l'enfoncement de la tête de l'inclusion dans le parement δ_p (poinçonnement du parement par la tête du clou) :

$$N(X_b) = \text{fonction}(S_D) \qquad \text{(B.6-90)}$$

La courbe de transfert de charge τ_p (S_p) s'obtient en ramenant l'effort $N(X_b)$ à la surface de l'inclusion noyée dans le béton $S_p = 2\,\pi\,R_c\,X_b$:

$$\tau_p = \frac{N(X_b)}{2\,\pi\,R_c\,X_b} = \frac{\text{fonction}(S_p)}{2\,\pi\,R_c\,X_b} \qquad \text{(B.6-91)}$$

6.6 Programmation

6.6.1 Hypothèse

A chaque incrément de temps Δt, le déplacement libre du sol ΔS_{sol} est utilisé comme "chargement" pour calculer le nouvel état d'équilibre de l'inclusion et de traction. Si l'on tient compte dans le calcule de ΔS_{sol} de la compression du sol non gelé Δw_u , qui est fonction de l'incrément de traction ΔN de la solution cherchée, on obtient une équation implicite en ΔN. Il faut alors supposer une variation de $\Delta N(z)$ initiale pour calculer les premières valeurs de Δw_u et de ΔS_{sol} sur lesquelles il sera ensuite possible d'itérer. Dans le cas d'un tirant, par contre, il est possible d'obtenir une relation explicite entre ΔN et les gonflements. Sur les simulations réalisées avec les tirants et le sol de La Clusaz, on observe que, comme la moraine est très dense, le tassement oedométrique de la moraine non gelée ne représente que quelques pour-cents du gonflement total du sol. Il est donc acceptable, dans ce cas, de négliger le tassement oedométrique de la moraine non gelée.

L'influence de la température sur les paramètres de fluage τ_c et τ_k et donc sur le déplacement S_r est de l'ordre de quelques pour-cents au maximum, quand la température θ varie entre -5°C et 0°C, alors que l'influence du cisaillement τ_R sur le déplacement S_r est de plusieurs ordres de grandeur supérieure. En conséquence, pour l'étude présente, on négligera l'influence de la température sur la fonction de transfert de charge entre le clou et le sol gelé.

6.6.2 Fonctions de transfert de charge incrémentales

Les phénomènes mis en jeu étant non linéaires, le problème étudié est résolu incrémentalement à partir d'un état initial, défini par la distribution de traction $N(z,t=0)$ le long du clou, à partir de laquelle il est possible de calculer un déplacement relatif sol-inclusion initial $S_r\,(z,t=0)$.

Pendant l'intervalle de temps Δt, les problèmes thermiques et hydriques sont résolus dans un premier temps en calculant : la profondeur de gel, le profil de température et le champ de déplacements imposé par les gonflements. Dans un deuxième temps, on détermine le nouvel état d'équilibre de l'inclusion étudiée, tirant ou clou, connaissant le déplacement du sol qui est imposé par les gonflements et les lois d'interaction entre le sol, le parement et l'inclusion.

Pour la résolution du problème deux options sont possibles : soit travailler avec les variables instantanées $N(z,t)$, $S_r(z,t)$, $S_a(z,t)$, et $S_{sol}(z,t)$ en utilisant les courbes de transfert de charge globales, soit travailler avec les incréments des variables $\Delta N(z,t)$, $\Delta S_r(z,t)$, $\Delta S_a(z,t)$, et $\Delta S_{sol}(z,t)$ en utilisant les courbes de transfert de charge incrémentales. C'est cette dernière option qui a été choisie.

6.6.2 1 Fonction de transfert de charge incrémentale du sol non gelé

Pour une couche de sol non gelée avant l'instant $t+\Delta t$, la fonction de transfert de charge utilisée pour le calcul correspondant à l'intervalle de temps Δt, sera la courbe globale translatée dans le nouveau repère correspondant à l'état de contraintes à l'instant t.

L'équation d'équilibre incrémentale à résoudre B.6-10 est très similaire d'un point de vue mathématique à celle d'un pieu vertical soumis à un déplacement de sol libre et à une charge axiale. La même résolution numérique et donc les mêmes sous-programmes informatiques peuvent être utilisée dans les deux cas. C'est ce qui a été fait en partant du programme PIVER-LCPC qui permet de traiter le cas d'un pieu vertical soumis à un effort vertical et à un déplacement libre de sol.

Cependant le logiciel PIVER-LCPC ne permettant pas de prendre en compte la décharge, une boucle d'itération sur l'hypothèse de charge ou décharge a été ajoutée avec pour dans les deux cas des courbes de transfert de charge différentes.

L'option du programme PIVER-LCPC de permettre en entrées une courbe de transfert de charge quelconque a été gardé. Cependant, puisque la charge et la décharge sont rendues possibles, la fonction de transfert de charge globale $\tau = \tau(S_r, \tau_{max})$ doit évoluer avec la plastification. En l'occurrence, on a considéré un écrouissage isotrope évoluant avec le seuil de plastification, défini par le cisaillement maximal subi et noté τ_{max}. La mise à jour de la fonction de transfert de charge avec la plastification et le changement d'origine ont été automatisés.

6.6.2.2 Fonction de transfert de charge incrémentale du sol gelé

6.6.2.2.1 Hypothèses de calcul

Par souci de simplification, les incréments de déplacement du front de gel coïncident avec la discrétisation spatiale du sol, ce qui permet d'éviter à une couche d'être partiellement gelée à un instant t quelconque.

D'autre part, l'intervalle de temps Δt est supposé assez petit, de manière à pouvoir linéariser la courbe de mobilisation du frottement latéral pendant l'intervalle de temps Δt et éviter ainsi une itération supplémentaire de convergence.

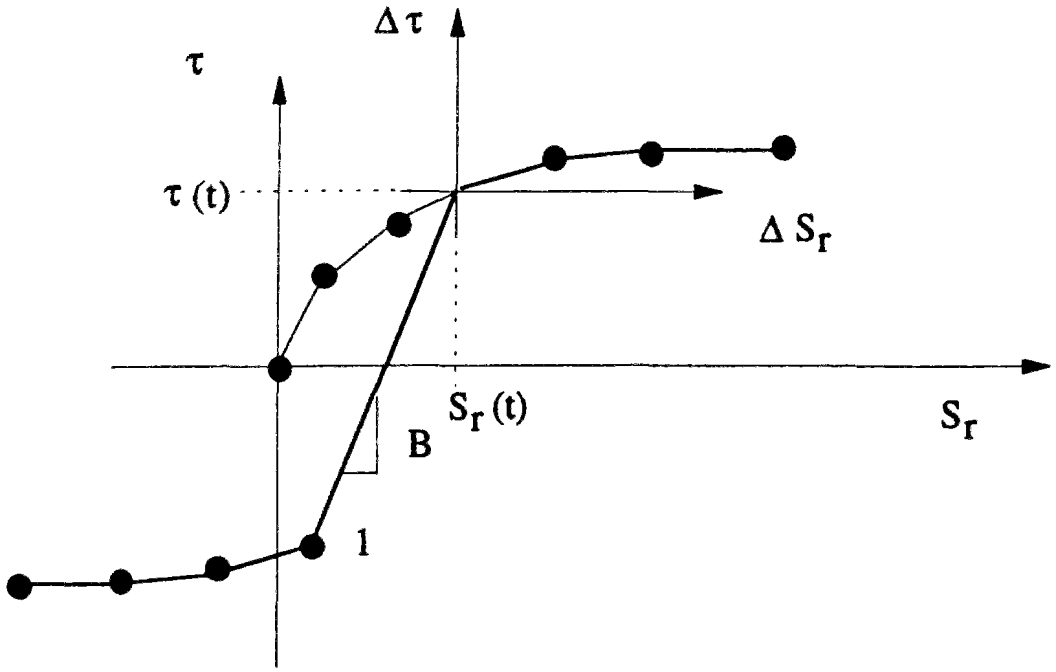


Figure B.6-18 : Calcul de la courbe incrémentale de transfert de charge pour le sol non gelé à partir de la courbe globale

6.6.2.2.2 Calcul de la fonction de transfert de charge incrémentale

L'état de contrainte et de déplacement initial est caractérisé par un cisaillement τ et un déplacement relatif S_r . L'incrément de chargement sera caractérisé par le déplacement du sol ΔS_{sol} imposé par le gel qui engendre le nouvel état d'équilibre caractérisé par le déplacement relatif sol-inclusion ΔS_{sol} et l'augmentation de cisaillement $\Delta\tau$. Ceux-ci sont reliés par la fonction de transfert de charge incrémentale $\Delta\tau = \Delta\tau(\Delta S_r)$ qui s'écrit sous la forme suivante en supposant que l'influence de la température est négligeable :

$$\Delta S_r = \frac{\partial F(\tau)}{\partial \tau}\Delta\tau + G(\tau)\,\Delta t \qquad \text{(B.6-92)}$$

La fonction de transfert de charge incrémentale s'écrit donc sous la forme suivante :

$$\Delta\tau = A(\tau,\Delta t) + B(\tau)\,\Delta S_r \qquad \text{(B.6-93)}$$

avec :

$$A(\tau,\Delta t) = -\frac{G(\tau)\Delta t}{\dfrac{\partial F(\tau)}{\partial \tau}} \qquad \text{(B.6-94)}$$

$$B(\tau) = \frac{1}{\dfrac{\partial F(\tau)}{\partial \tau}} \qquad \text{(B.6-95)}$$

Dans le cas où la fonction de transfert de charge est définie en terme de force de tension par mètre de longueur et déplacement relatif sol-inclusion, la fonction de transfert de charge s'écrit sous la forme suivante :

$$\Delta(2\,\pi\,R_c\,\tau)=\{2\,\pi\,R_c\,A(\tau,\Delta t)\}+\{2\,\pi\,R_c\,B(\tau)\}\,\Delta S_r \qquad \text{(B.6-96)}$$

6.6.2.2.3 Interprétation physique des coefficients A et B

A cisaillement τ constant, $\Delta\tau = 0$, la variation de déplacement relatif sol-inclusion correspondante, qui est due au fluage uniquement, sera égale à :

$$\Delta S_r = -\frac{A(\tau,\Delta t)}{B(\tau)} = G(\tau)\,\Delta t = \Delta S_r^{(c)} \qquad \text{(B.6-97)}$$

Le terme ΔS_r est du même signe que le cisaillement τ.

A déplacement imposé constant, $\Delta S_r = 0$, la variation de cisaillement correspondante, qui est due uniquement à la relaxation, est égale à :

$$\Delta\tau = A(\tau,\Delta t) = \frac{-G(\tau)}{\left(\frac{\partial F(\tau)}{\partial\tau}\right)}\Delta t = -\frac{\Delta S_r^{(c)}}{B^{(i)}} \qquad \text{(B.6-98)}$$

Le module $B^{(i)}$ est le module tangent des déplacements pseudo-instantanés :

$$B^{(i)}(\tau) = \frac{1}{\left(\frac{\partial S_r^{(i)}(\tau)}{\partial\tau}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{\partial F(\tau)}{\partial\tau}\right)} \qquad \text{(B.6-99)}$$

Sa valeur dépend de la charge et de la décharge. En charge :

$$B^{(i)}(\tau) = \frac{\kappa R}{G} + \frac{k}{k-1} R\,\frac{\gamma_k}{\tau_k}\left(\frac{\tau_R}{\tau_k}\right)^{k-1} \qquad \text{(B.6-100)}$$

En décharge :

$$B^{(i)}(\tau) = \frac{\kappa R}{G} \qquad \text{(B.6-101)}$$

La relaxation du cisaillement est donc contrôlée par le quotient du déplacement différé $\Delta S_r^{(c)}$ par le module tangent $B^{(i)}$ du déplacement pseudo-instantané, qui est égal, en décharge, à au module tangent du déplacement pseudo-instantané réversible.

Quand le sol gèle, il est déjà sous un état de contrainte non nul ($\tau = 0$). Les déformations pseudo-instantanées du sol gelé correspondant à cet état de contraintes existant avant le gel, sont supposées ne pas se produire pendant le gel. C'est l'hypothèse la plus simple qui puisse être prise.

Le frottement latéral unitaire limite q_S est atteint quand le déplacement relatif de fluage secondaire total, calculé en additionnant les valeurs absolues des incréments $\Delta S^{(c)}$, atteint la valeur limite $S_f^{(c)}$ calculée à partir de la déformation de rupture $\gamma_f^{(c)}$ par la relation suivante :

$$S_f^{(c)} = \gamma_f^{(c)} \frac{R}{(n-1)} \qquad \text{(B.6-102)}$$

Une fois la rupture atteinte, le sol à l'interface glisse relativement à l'inclusion à contrainte de cisaillement constante, ce qui est l'hypothèse la plus simple et acceptable, compte tenu de l'état actuel des connaissances.

6.6.3 Résolution nuémrique

Dans ce paragraphe, on se contentera de rappeler les traits principaux de la résolution numérique développée dans le programme PIVER-LCPC par Frank et Romagny (1979), en insistant sur les développements nouveaux (barre élasto-plastique, pénétration du gel et profils de température, calcul des gonflements et du profil de déplacement de sol en résultant, comportement du sol non gelé en charge et décharge, comportement du sol gelé avec prise en compte du fluage, en charge et décharge).

Le pieu est découpé en tronçons ou éléments finis, sur lesquels on fait les hypothèses suivantes.

(1) La rigidité E(N) S est constante par éléments, ce qui suppose dans le cas d'une barre élasto-plastique que la traction N ne varie pas trop brusquement le long de l'inclusion.
(2) La courbe de mobilisation du frottement latéral est unique sur chaque tronçon; ceci n'est vrai que pour les éléments où le sol est soit gelé, soit non gelé, sur tout le contact avec l'inclusion. Pour simplifier le problème, dans un premier temps, les incréments de déplacement du front de gel coïncideront avec la discrétisation spatiale en couches du sol. Pour chaque couche, la courbe de mobilisation correspondant aux valeurs moyennes des paramètres d'état est prise en compte.

(3) La variation du déplacement libre du sol ΔS_{sol} est prise linéaire en z par élément de l'inclusion:

$$\Delta S_{sol} = a_0 + a_1 z \qquad \text{(B.6-103)}$$

Comme la discrétisation du sol coïncide avec les incréments de déplacement du front de gel, le profil de déplacement libre ΔS_{sol} , qui est linéaire en trois zones, peut être représenté exactement avec l'hypothèse (3).

En linéarisant le cisaillement $\Delta\tau$ sur chaque élément par une fonction du type :

$$2\pi R_c \Delta\tau = A + B\,(\Delta S_a - \Delta S_{sol}) \qquad \text{(B.6-104)}$$

où A et B sont deux constantes connues, Frank et Romagny développent une solution explicite, par tronçons, en introduisant deux constantes d'intégration a et b par élément :

1er cas : $B \neq 0$ (le cisaillement $\Delta\tau$ dépend du déplacement relatif ΔS_r)

La solution incrémentale de l'équation d'équilibre incrémental 6-14 est alors :

$$\Delta S_r = a\ ch(m\ z) + b\ sh(m\ z) - (A/B) \qquad \text{(B.6-105)}$$

$$\Delta S_{sol} = a_0 + a_1\ z \qquad \text{(B.6-106)}$$

$$\Delta S_a = \Delta S_r + \Delta S_{sol} \qquad \text{(B.6-107)}$$

avec :

$$m = \sqrt{\frac{\pi\ D\ B}{E(N)\ S}} \qquad \text{(B.6-108)}$$

2ème cas : $B = 0$ (le cisaillement $\Delta\tau$ est fixé indépendamment de ΔS_r ; ce dernier est interpolé entre les valeurs aux extrémités de l'élément considéré)

$$\Delta S_a = a\ z + b + \frac{\pi\ D\ A}{E(N)\ S}\left(\frac{z^2}{2}\right) \qquad \text{(B.6-109)}$$

$$\Delta S_{sol} = a_0 + a_1\ z \qquad \text{(B.6-110)}$$

$$\Delta S_r = \Delta S_a - \Delta S_{sol} \qquad \text{(B.6-111)}$$

Pour une inclusion divisée en N éléments, il y a 2 N inconnus à déterminer : a(i) et b(i), pour i = 1 à N. La continuité du déplacement ΔS_a , de l'effort normal dans l'inclusion ΔN donne 2(N-1) équations. En rajoutant les deux conditions aux limites, le nombre d'équations est égale au nombre d'inconnues (2 N).

6.7 Solution analytique d'un clou soumis au gel

6.7.1 Hypothèses

Les hypothèses prises pour développer la solution analytique complète d'un lit de clous soumis au gel ainsi que les détails des calculs sont exposés en détail dans l'annexe A16. Les hypothèses thermiques ainsi que le modèle de gonflement sont les mêmes que pour la solution analytique d'un lit de tirants soumis au gel (cf. annexe A15). Il convient simplement de rajouter les hypothèses portant sur l'interaction clou-sol. Il est supposé que l'interaction entre, d'une part, le clou, et d'autre part, le béton, le sol gelé, le sol en train de geler et le sol non gelé peut être modélisée par des fonctions de transfert de charge linéaires élastiques. Pour le béton et pour un sol non gelé, raide et peu plastique, cette hypothèse d'élasticité est acceptable. Pour ce qui concerne le sol gelé, il convient de noter que les simulations numériques réalisées et exposées dans le paragraphe 7 ont montré que la non prise en compte des effets différés de l'interaction clou - sol gelé est conservative et conduit à des estimations de tractions supérieures seulement de quelques pour-cents. Enfin, pour ce qui concerne la fonction de transfert de charge entre le clou et le sol en train de geler, nous supposons que le coefficient de frottement latéral est nul pendant l'intervalle de temps où le sol gèle, ce qui revient à supposer que la traction est constante et maximale sur le front de gel.

6.7.2 Notion de longueur de transfert de charge

La solution analytique d'un lit de clous fait intervenir la notion classique de longueur de transfert, notée a, et qui est définie par :

$$a = \sqrt{\frac{E_a A_a}{\pi D_c k_\tau}} \qquad \text{(A.6-1)}$$

où E_a est le module d'Young de l'armature d'acier du clou, D_c le diamètre du clou, A_a la section d'acier de l'armature du clou et k_τ le module de mobilisation du frottement latéral unitaire.

6.7.3 Solution générale en traction et déplacement

Si l'on suppose que le déplacement absolu du sol S_s est une fonction linéaire en z, la solution analytique par zone de matériau est du type :

$$\Delta S_r = \Delta S_c - \Delta S_s = C\,ch\left(\frac{z}{a}\right) + D\,sh\left(\frac{z}{a}\right) \qquad \text{(B.6-2)}$$

$$\Delta N = -\frac{E_a\,A_a}{a}\left(C\,sh\left(\frac{z}{a}\right) + D\,ch\left(\frac{z}{a}\right)\right) \qquad \text{(B.6-3)}$$

où C et D sont des constantes d'intégration et a est la longueur de transfert, à déterminer pour chacune des zones en fonction des conditions aux limites et de l'interaction clou - matériau.

Un cas particulier intéressant concerne un clou soumis à un effort de traction en tête (z = 0), noté N_0 , et ayant une extrémité (z = L) libre. La distribution de la traction et du cisaillement le long de ce clou est alors donnée par :

$$N(z) = N_0 \frac{sh(L - z/a)}{sh(L/a)} \qquad \text{(B.6-4)}$$

$$\tau(z) = \frac{N_0}{\pi D_c a} \frac{ch(L - z/a)}{sh(L/a)} \qquad \text{(B.6-5)}$$

Pour une longueur de clou L très grande devant la longueur de transfert a (L >> a), le cisaillement τ varie lentement près de la tête du clou et peut être considéré comme constant (z << L). La longueur d'ancrage L_a est définie comme la longueur du clou telle que l'effort en tête N_0 est transmis intégralement au sol sur la longueur de transfert a. Elle vérifie l'équation :

$$th(L_a/a) = \frac{\pi D_c \, a \, \tau}{N_0} = 1 \qquad \text{(B.6-6)}$$

Comme th(2) est égal à 0,964 , on obtient une longueur d'ancrage L_a égale à environ 2 fois la longueur de transfert a. Pour des géotextiles très déformables, la longueur de transfert est de quelques dizaines de centimètres, ce qui donne une longueur d'ancrage de moins d'un mètre. Pour des inclusions moins déformables, les longueurs de transfert sont plus importantes, ce qui explique pourquoi les clous, par exemple, sont sollicités sur quasiment toute leurs longueurs. Dans la partie C, nous verrons qu'une réduction du coefficient k_τ de mobilisation du frottement latéral unitaire par un facteur 10, a pour effet au niveau d'un clou de réduire la longueur de transfert de charge et au niveau de l'ouvrage en sol cloué de repousser la ligne des tractions maximales vers le parement.

6.7.4 Notion de rigidité imposé par le clou en un point donné

Pour bien comprendre la différence de comportement sous l'effet du gel entre un tirant et un clou, il convient d'introduire la notion de rigidité apparente imposée par le clou en un point donné du sol. Cette notion de rigidité est très importante en mécanique, car elle contrôle le comportement des interfaces sol - renforcement (cf. partie A) ou, dans le cas présent, le comportement de la frange de sol en train de geler (cf. partie B).

La rigidité apparente du clou interagissant avec le sol non gelé, se calcule à la limite du sol non gelé avec la frange de sol en train de geler, en $z = X_b + X + \Delta X$. Elle est définie par le rapport de la traction et du déplacement en ce point :

$$\frac{k_u}{L_u} = \frac{\Delta N}{\Delta S_c}(z = X_b + X + \Delta X) \qquad \text{(B.6-7)}$$

Elle est égale à :

$$\frac{k_u}{L_u} = \frac{E_a \, A_a}{a_u} th\left(\frac{X + \Delta X - L_c}{a_u}\right) \qquad \text{(B.6-8)}$$

Pour une profondeur de gel X, petite devant la longueur du clou L_c , et donc un incrément de profondeur de gel ΔX encore plus petit, la rigidité apparente est égale à :

$$\frac{k_u}{L_u} \cong \frac{E_a A_a}{a_u} \tag{B.6-9}$$

Le clou a donc une rigidité dans la zone de sol non gelé comparable à un tirant de longueur libre a_u , où a_u est typiquement de l'ordre du mètre. Comparé à un tirant ayant une longueur libre de plusieurs mètres, un clou a une rigidité beaucoup plus faible.

La rigidité apparente du clou interagissant avec le parement et le sol gelé, se calcule au point $z = X_b + X$. Elle est définie par:

$$\frac{k_{fp}}{L_{fp}} = \frac{\Delta N}{\Delta S_c - \Delta S_s}(X_b + X) \tag{B.6-10}$$

Tout calcul fait (cf. annexe A16), on obtient :

$$\frac{k_{fp}}{L_{fp}} = \frac{-E_a A_a}{a_f}\left[\frac{K\,sh\left(\frac{X_b + X}{a_f}\right) + ch\left(\frac{X_b + X}{a_f}\right)}{K\,ch\left(\frac{X_b + X}{a_f}\right) + sh\left(\frac{X_b + X}{a_f}\right)}\right] \tag{B.6-11}$$

où le coefficient K est égal à :

$$K = \frac{sh\left(\frac{X_b}{a_p}\right)sh\left(\frac{X_b}{a_f}\right) - \left(\frac{a_p}{a_f}\right)ch\left(\frac{X_b}{a_p}\right)ch\left(\frac{X_b}{a_f}\right)}{-sh\left(\frac{X_b}{a_p}\right)ch\left(\frac{X_b}{a_f}\right) + \left(\frac{a_p}{a_f}\right)ch\left(\frac{X_b}{a_p}\right)sh\left(\frac{X_b}{a_f}\right)} \tag{B.6-12}$$

6.7.5 Solution en traction maximale et gonflement

Pendant l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$, l'incrément de traction dans le clou est maximal entre X(t) et X(t)+ΔX . L'abscisse z du maximum des tractions varie avec le temps. L'intégration explicite de la solution n'est donc pas possible. Cependant, les maxima des incréments de traction restent tous localisés autour de la tête du clou, dans la zone où le sol est gelé sur quelques dizaines de centimètres, tandis que le clou a une longueur de plusieurs mètres. En intégrant en fonction du temps l'incrément maximal de la traction $\Delta N_{max}(t)$ et l'incrément de gonflement $\Delta h_t(t)$, on obtient un majorant de l'incrément final de traction ΔN_{max} et un minorant du gonflement h_t , qui ne sont pas très différents de la solution exacte. Les équations à intégrer sont :

$$dN_{max}(t) = \frac{-k_{eq}}{L_{eq}} dh(t) \tag{B.6-13}$$

La rigidité équivalente est donnée par :

$$\frac{k_{eq}}{L_{eq}} = \frac{1}{\frac{L_u}{k_u} + \frac{L_{fp}}{k_{fp}} + \frac{\Delta X}{EA}} \qquad \text{(B.6-14)}$$

L'évolution des gonflements est donnée par :

$$dh(t) = \left[A + B \exp \frac{N_{max}(t)}{N_g} \right] \frac{dt}{\sqrt{t}} \qquad \text{(B.6-15)}$$

Les équations sont identiques à celles obtenues précédemment pour un tirant. La seule différence réside dans le calcul de la rigidité équivalente du clou k_{eq} / L_{eq} qui varie en fonction du temps.

Le terme L_u / k_u est égal à $a_u / E_a A_a$, pour un clou de grande longueur devant la profondeur de gel X (cf. équation B.6-9).

Le terme $\Delta X / E_a A_a$ peut être négligé devant le terme L_u / k_u puisque la longueur de transfert a_u est de l'ordre du mètre tandis que ΔX est de l'ordre du centimètre ou décimètre.

La rigidité k_{fp} / L_{fp} dépend de la profondeur de gel X. Cependant, on peut supposer, dans un premier temps, que dans la zone de sol gelé la longueur de transfert a_f est très grande devant X_b et X. Cette hypothèse est équivalent à supposer que la traction est constante et maximale dans la zone de sol gelé. Cela permet d'écrire :

$$\frac{L_{fp}}{k_{fp}} = \frac{a_p}{E_a A_a} \coth\left(\frac{X_b}{a_p} \right) \qquad \text{(B.6-16)}$$

On obtient finalement, une rigidité équivalente du clou constante et égale à:

$$\frac{k_{eq}}{L_{eq}} \cong \frac{E_a A_a}{a_u + a_p \coth\left(X_b / a_p \right)} \qquad \text{(B.6-17)}$$

La longueur de transfert a_p du parement est égale à environ $X_b/2$. Comme coth(2) est peu différent de 0,964, on en déduit :

$$\frac{k_{eq}}{L_{eq}} \cong \frac{E_a A_a}{a_u + a_p} \qquad \text{(B.6-18)}$$

Toutes les simplifications possibles ayant été faites, on retrouve les équations d'un tirant avec une rigidité équivalente constante. La rigidité dans le cas présent étant nettement plus grande que celle d'un tirant. Il est donc logique d'avoir des gonflements plus faibles et des tractions plus fortes pour un clou que pour un tirant.

6.8 Synthèse et conclusion sur la modélisation de l'interaction clou - sol

L'équilibre d'un lit de clou soumis au gel est gouverné par l'interaction entre, d'une part, le clou et, d'autre part, le sol et le béton. Suivant que le sol est gelé ou non gelé, il convient de prendre des fonctions de transfert de charge différentes.

Pour le sol non gelé nous avons choisi le modèle de Frank et Zhao (1982) qui est de type élastoplastique.

Pour le sol gelé, nous avons été amené, du fait des spécificités du problème, à formuler une fonction de transfert de charge nouvelle. Des trois types de fluages : primaire, secondaire et tertiaire, seuls les deux premiers ont été modélisés. La limite entre les fluages secondaire et tertiaire étant prise comme le seuil de rupture à partir duquel le clou glisse par rapport au sol. L'approche de Hult (1966) consistant à linéariser les courbes de fluage a été retenue. Le déplacement relatif sol - clou est décomposé en trois termes : un déplacement pseudo-instantané réversible $S^{(ie)}$, un déplacement pseudo-instantané irréversible $S^{(ip)}$ et un déplacement différé $S^{(c)}$. Dans le cas d'une fondation, superficielle ou profonde, le sol n'est pas confiné et c'est le fluage qui est prépondérant. Dans le cas d'un mur en sol cloué où le sol est confiné, c'est la relaxation qui est prépondérante. Il convient donc de séparer dans le déplacement pseudo-instantané, les termes réversible et irréversible. En effet, c'est le rapport entre le déplacement de fluage et le module tangent du déplacement pseudo-instantané qui contrôle l'amplitude de la relaxation. Le déplacement pseudo-instantané irréversible ne se produisant pas en décharge, c'est à dire pendant la relaxation. Dans le modèle de Johnston et Ladanyi (1972) les déplacements pseudo-instantanés réversible ou irréversible sont modélisés globalement. Ce modèle n'est donc pas approprié au problème. Cependant, ce modèle fournit un cadre général à partir duquel il est possible de développer des fonctions de transfert de charge clou - sol à partir de la loi de comportement du sol. Nous sommes donc reparti de ce modèle pour développer une fonction de transfert de charge où (1) le déplacement pseudo-instantanée irréversible est séparé du déplacement pseudo-instantanée réversible, (2) les fonctions de transfert de charge correspondant au déplacement pseudo-instantanée irréversible et au déplacement de fluage sont dérivées de la loi de comportement du sol de façon tout à fait similaire au modèle de Johnston et Ladanyi (1972), et (3) la fonction de transfert de charge correspondant au déplacement pseudo-instantanée réversible est dérivée à partir du modèle de Frank et Zhao (1982). Les valeurs des sept paramètres du modèle ont été estimées à partir des données disponibles dans la littérature sur des essais d'arrachement d'inclusions scellées dans des sols gelés similaires à ceux rencontrés sur le site de La Clusaz.

Le problème est résolu numériquement en discrétisant le sol et les clous en N éléments finis. Sur chaque élément, la solution exacte est développée en fonction de deux constantes d'intégration. Les deux 2 N constantes d'intégration sont déterminées en écrivant la continuité du déplacement normale et de la traction entre les éléments. Un programme spécifique, dénommé INGEL (INclusion soumise au GEl) a été développée à partir du logiciel PIVER qui traite des pieux chargés verticalement.

Des solutions analytiques peuvent être développées dans le cas d'un interaction clou - sol linéaire élastique, tout le long du clou, et pour la loi de pénétration du gel de Stefan. cette solution analytique permet de mettre en évidence la différence importante de comportement entre un tirant et un clou, notamment en ce qui concerne la rigidité imposée par l'un ou l'autre type d'inclusion sur le front de gel.

7 Calculs en déformation de la paroi ancrée et du mur en sol cloué de La Clusaz

7.1 Résumé des données et mesures disponibles

Les soutènements de La Clusaz ont fait l'objet de plusieurs rapports ou publications. Les rapports internes Terrasol signés par Guilloux (1980) et Schlosser et Guilloux (1981) constituent les données de référence. Guilloux et al. (1983) en ont fait une présentation rapide à la 8ème Conférence Européenne de Mécanique des Sols et Travaux de Fondations à Helsinki. Plus récemment, dans le cadre du Projet National CLOUTERRE, l'ensemble des données et mesures disponibles a été intégralement publié dans un rapport interne CLOUTERRE II (Unterreiner et al., 1993) pour servir d'exemple de référence.

Dans ce paragraphe, après un rapide historique, nous ferons une synthèse des données et mesures, avant de présenter les résultats des calculs en déformation effectués sur la paroi berlinoise ancrée et le mur en sol cloué.

7.1.1 Historique des murs de La Clusaz

Pour la construction d'un parking souterrain à La Clusaz, une fouille a été réalisée avec une profondeur maximale variant entre 3 et 21 mètres dans un terrain naturel pentu, d'inclinaison comprise entre 5° et 25°. La fouille est retenue sur trois de ses côtés par des murs de soutènement temporaires. Le site étant à une altitude de 1050 mètres dans une zone montagneuse très enneigée l'hiver (station de ski), la fouille est restée ouverte durant tout l'hiver 1981 par suite de l'interruption des travaux (figure B.7-1).

Le sol est constitué d'une moraine très épaisse, recouverte par une couche d'argile de 3 à 4 mètres d'épaisseur. Le substratum rocheux, formé de schiste est situé profondément en dessous du fond de fouille. A l'issue de la reconnaissance géotechnique initiale, il a été décidé d'utiliser une paroi berlinoise ancrée par trois lits de tirants. Cependant, lors de la réalisation de celle-ci, il est devenu très vite évident que le sol était trop compacte et surtout, que les nombreux blocs de rocher présents dans la moraine empêcheraient les travaux d'excavation d'être achevés avant l'hiver. Il a été alors nécessaire de développer une solution alternative pouvant s'adapter aux conditions de terrain et permettant de finir la fouille dans les temps. La technique du clouage des sols, bien qu'encore récente à l'époque, a été ainsi retenue pour les murs Nord et Sud non encore commencés tandis que la technique de la berlinoise a été gardée pour le mur Est déjà en partie réalisé (hauteur 17 mètres).

La technique du clouage avec des clous scellés dans des forages préalables de petits diamètres, a permis ainsi de contourner les difficultés rencontrées lors du forage de gros diamètres pour des pieux de type IPE 330 ou HEB 300.

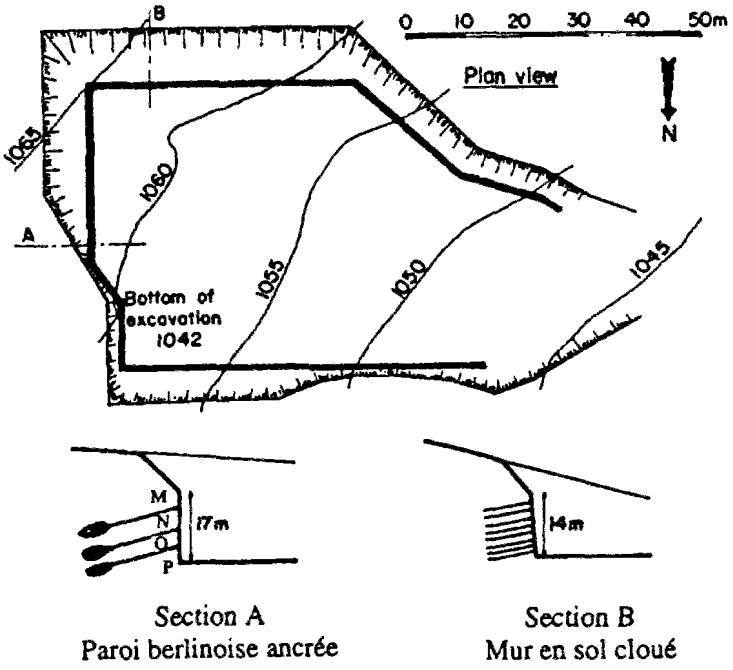


Figure B.7-1 : Vue en plan de la fouille de La Clusaz (Guilloux et al., 1983)

7.1.2 Caractéristiques des soutènements de La Clusaz

7.1.2.1 Caractéristiques des sols

Le sol concerné par la fouille est une moraine très compacte, recouverte par une couche d'argile de 3 à 4 m d'épaisseur, qui n'est traversée, ni par les tirants, ni par les clous, et qui donc n'a pas d'intérêt pour le problème. La moraine a une granulométrie très étalée avec une taille des grains de sol variant continûment depuis les particules d'argiles jusqu'aux blocs de rocher de l'ordre du mètre. Le pourcentage d'argile (passant le tamis 200) est relativement faible, de l'ordre de 5%. Le pourcentage de particules plus petites que 80 microns est d'environ 35%. La teneur en limon, sol gélif par excellence, est donc relativement importante, de l'ordre de 30%. Le poids volumique total mesuré est de 23,5 kN / m^3 , avec une teneur en eau moyenne assez faible de 8%.

La résistance au cisaillement de la moraine a été étudiée à l'aide d'essais à la boîte de cisaillement direct. Bien que la teneur en argile et limon soit importante, de l'ordre de 35%, la moraine se comporte comme un matériau frottant avec un angle de frottement interne, défini comme la tangente à la courbe intrinsèque, variant entre 70° aux faibles contraintes et 35° aux fortes contraintes, ce qui est caractéristique des matériaux granulaires grossiers très compactes dilatants (Bishop, 1966; Schlosser et Guilloux, 1980).

7.1.2.2 Caractéristiques de la paroi berlinoise ancrée

Le paroi berlinoise ancrée, qui fait l'objet de la présente étude, a une hauteur de 17 m et comporte 3 lits de tirants, N, O et P, de longueurs totales variant entre 15 et 16m, de longueurs libres comprises entre 12 et 9 m, inclinés de 25° à 30° par rapport à l'horizontale, de sections d'acier respectives 465, 651 et 744 mm^2 , et précontraints initialement à respectivement 500, 750 et 890 kN.

Il est à remarquer que lors de leur mise en place, les tirants, qui étaient destinés à être temporaires, ont été prétendus à 0,75 T_G Durant la construction mais aussi durant les premiers jours de l'hiver, jusqu'au 15 décembre 1980, avant que la période de gel ne commence, leur traction a sensiblement augmenté.

Le parement est constitué par un béton projeté de 0,20 m d'épaisseur, armé dans la partie supérieure (H < 2.0 m) d'un lit de treillis soudé, et dans la partie inférieure, de deux lits de treillis soudé, avec un recouvrement de 1,6 m au centre.

7.1.2.3 Caractéristiques du mur en sol cloué

La partie du mur en sol cloué situé au Sud (exposition Nord) et qui a été instrumentée fait 14 m de haut. Les sept lits de clous ont été disposés suivant un maillage S_v = 2m , S_h = 3,0 m pour une hauteur totale de 14 m. La longueur des clous varie entre 7 m à la base du mur et 11 m en partie haute.

Les clous sont constitués de barres Dywidag de diamètre ϕ = 25,6 mm, scellées dans un forage ϕ = 120 mm. Les caractéristiques mécaniques des aciers des barres sont :limite élastique en traction σ_e = 850 MPa, traction limite élastique T_G = 437 kN, limite de rupture en traction σ_r = 1100 MPa, traction limite de rupture T_L = 566 kN, module d'Young E = 210 000 MPa.

Des essais d'arrachement de clous, scellés à une profondeur supérieure à 1,5 m, ont donné un frottement latéral limite q_s supérieur ou égal à 640 kPa pour l'interaction entre les clous et le sol non gelé. Pour simplifier l'analyse, nous prendrons le modèle de Frank et Zhao (1982), qui est caractérisé par un palier plastique à q_s et un module élastique initial k_β . Dans le cas d'un continuum élastique de module de cisaillement G, la raideur initiale k_β de la pente de mobilisation se calcule par la formule :

$$k_\beta = G/k\,R \qquad \text{(B.7-1)}$$

où R est le rayon de l'inclusion et k un facteur sans dimension.

Le module de cisaillement G se calcule à partir du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν, par la formule :

$$G = E/2\,(1+\nu) \qquad \text{(B.7-2)}$$

D'après Bowles (1990), le module d'Young E d'une moraine glacière dense est d'environ 144 à 720 MPa et pour une moraine très dense, de 478 à 1440 MPa. Dans le cas de La Clusaz, la fraction d'argiles et limons est d'environ 35%. Le limon étant beaucoup plus compressible, nous prendrons une valeur moyenne de 250 MPa pour le module d'Young E et un coefficient de Poisson égal à 0,3.

Le calcul du coefficient k est fait à partir de la formule proposée par Frank (1984), dans le cas d'un pieu de longueur L et de rayon R :

$$k = \ln(3{,}75\ L/2\ (1+\nu)\ R) \qquad \text{(B.7-3)}$$

Dans le cas présent, cette formule donne pour une longueur L de 10 m, un rayon R de 0.06 m et un coefficient de Poisson ν de 0.3, une valeur moyenne de k égale à 5,5. La valeur de B correspondante est alors de 291 kPa/mm.

Les programmes PIVER-LCPC et INGEL utilisent en entrée la relation entre $2\ \pi\ R\ \tau$, effort de traction par mètre de longueur de clou et S_r , déplacement relatif sol-inclusion. Le module à prendre en compte est alors $2\ \pi\ R\ k_\beta$ qui vaut $1{,}1\ 10^5$ kPa.

Le parement du mur en sol cloué est constitué d'un béton projeté de 15 cm d'épaisseur, armé côté terre par une nappe de treillis soudé et renforcé au droit de chaque clou par deux carrés en treillis soudé.

7.1.3 Analyse des observations et mesures

A la demande du client, un suivi des deux types d'ouvrages avec de nombreuses mesures a été réalisé pendant la construction ainsi que l'hiver, ce qui s'avère être une excellente idée, dans la mesure où il n'existe que deux murs en sol cloué qui aient été instrumentés et soumis au gel (Juran et Elias, 1987). Le mur en sol cloué de La Clusaz est celui qui apporte le plus de mesures et de résultats. D'autre part, le site de La Clusaz est le seul cas où deux types de murs de soutènement différents, soumis aux mêmes conditions thermiques et mécaniques, ont été suivis en parallèle. Ceci est très intéressant puisque l'interaction entre un clou et le sol est fondamentalement différente de celle entre un tirant et un sol.

Il convient de remarquer que dans l'article de Guilloux et al. (1983), la chute brutale de tension en fin d'hiver, aussi bien dans les clous que dans les tirants, est appelée relaxation sur les figures. Cette dénomination n'est pas appropriée dans la mesure où elle n'a rien à voir avec la relaxation du sol ou de l'acier mais est due simplement au fait que les clous et tirants furent détendues par mesure de sécurité. L'évolution des tractions dans les deux types d'inclusions après la fin de la période de gel est donc très particulière et il ne faudrait pas en tirer des conclusions générales sur le comportement après dégel.

Un certain nombre d'observations et de mesures, effectuées sur le site, pendant et à la fin de l'hiver, ont prouvé que le sol a gelé derrière les parements sur une profondeur de 30 à 40 cm. En particulier, des mesures de température par thermocouples ont été faites le 5 mars 1981 sur le mur Est de la paroi berlinoise ancrée, situé dans l'ombre, entre les profilés 32 et 33, à 6,5 m du fond de fouille, et sur la partie Sud du mur en sol cloué.

7.1.3.1 Paroi berlinoise ancrée par tirants actifs

Sur la partie de l'excavation retenue par une berlinoise, cinq profilés numérotés : 29, orienté Nord, 33 et 37, orientés Ouest, 40 et 44, orientés Sud-Ouest, ont été instrumentés en points de mesure de déplacement. Les profilés 33 et 40 ont été équipés de cellules Gloetz pour la mesure des efforts dans les tirants.

Les observations sur le site indiquent pour les profilés 33 et 37, exposés à l'Ouest et toujours ombragés, une augmentation régulière pendant tout l'hiver des déplacements et tractions. Par contre, pour le profilé 40, qui est orienté Sud-Ouest et est souvent exposé au soleil, les augmentations de tractions sont très faibles et directement corrélées aux périodes de mauvais temps (tableaux B.7-1 et B.7-2)

Tableau B.7-1 : Mesures effectuées sur le profilé 33 de la paroi Berlinoise ancrée

Traction	Tirant P	Tirant O	Tirant N
15 décembre 1980 t = 0 j	985 kN	800 kN	575 kN
12 janvier 1981 t = 28 j	1026 kN	854 kN	632 kN
29 janvier 1981 t = 45 j	1052 kN	896 kN	698 kN
15 février 1981 t = 62 j	1100 kN	944 kN	769 kN
24 février 1981 t = 71 j	1274 kN	991 kN	816 kN

Tableau B.7-2 : Déplacements mesurés sur le profilé 33 de la paroi Berlinoise ancrée

Déplacement	Sol libre, point M	Tirant N	Tirant O	Tirant P
15 décembre 1980 t = 0 j	0 mm	0 mm	0 mm	0 mm
12 janvier 1981 t = 28 j	52 mm	2 mm	≤ 1 mm	≤ 1 mm
29 janvier 1981 t = 49 j	72 mm	13 mm	≤1 mm	≤1 mm
15 février 1981 t = 62 j	88 mm	28 mm	≤ 2 mm	≤ 1 mm

7.1.3.2 Mur en sol cloué

La partie la plus importante du mur en sol cloué de La Clusaz est exposée au Nord (mur Sud). Un petit soutènement cloué est exposé au Sud (mur Nord). Les mesures de déplacements en 23 points de mesures donnent des déplacements à peine mesurables pour le mur exposé au Sud et des déplacements de l'ordre de 2 cm pour les parties de mur en sol cloué exposées au Nord.

La figure B.7-2 donne les efforts dans les clous en fin de chantier, au 15 décembre 1980, au milieu de l'hiver, le 12 janvier 1981, et à la fin de l'hiver, le 16 février 1981, pour quatre clous d'une section située dans la partie la plus haute du soutènement exposée au Nord (hauteur 14 m). L'analyse de cette figure suggère que le parement met progressivement en traction les clous près du parement, sur une profondeur de l'ordre de 3 à 5 m, en tirant sur les têtes de clous. Les déplacements sont concentrés près du parement dans la zone qui est gelée et a gonflé suite à la formation de lentilles de glaces. Il est à noter que les plaques d'appui des clous sur le parement se sont imprimées dans le béton projeté avec des enfoncements pouvant atteindre par endroits 1 cm.

Tableau B.7-3 : Mesures des tractions sur le clou N° 15 (longueur 9m)

Numéro de jauge	Distance au parement	Traction mesurée le 15/12/1980 t = 0 jours	Traction mesurée le 12/1/1981 t = 28 jours	Traction mesurée le 16/2/1981 t = 63 jours
4	0,5 m	40 kN	202 kN	326 kN
3	2,5 m	72 kN	153 kN	200 kN
2	3,5 m	28 kN	40 kN	58 kN
1	5.5 m	7 kN	7 kN	18 kN

Tableau B.7-4 : Déplacements mesurés sur le mur en sol cloué à La Clusaz

Temps t	Déplacement le 15/12/1980 t = 0 jour	Déplacement le 30/12/1980 t = 15 jours	Déplacement le 12/01/1981 t = 28 jours	Déplacement le 16/01/1981 t = 63 jours
Point A	0 mm	1 mm	2 mm	12 mm
Point B	0 mm	10 mm	12 mm	12 mm
Point C	0 mm	0 mm	0 mm	0 mm

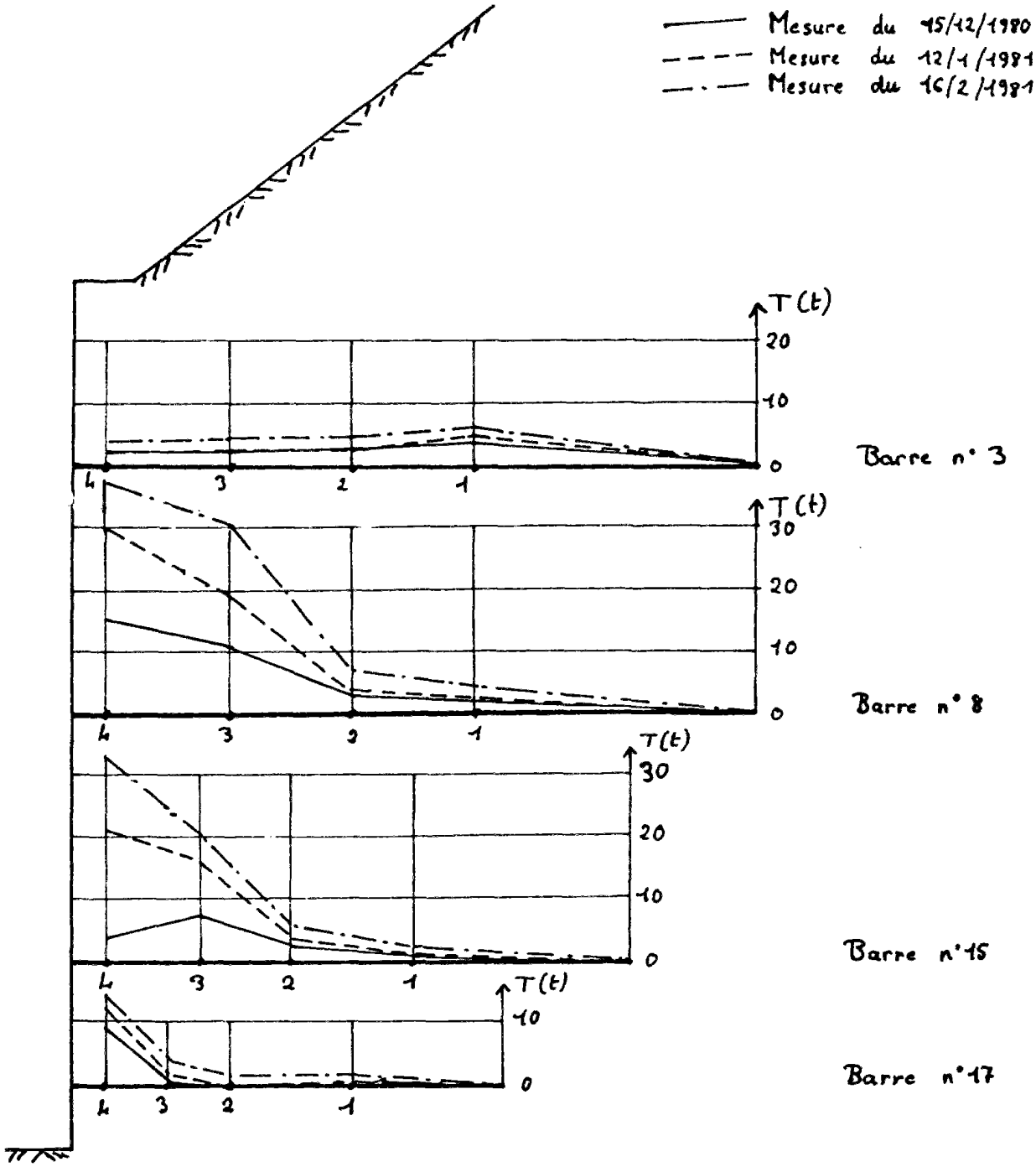


Figure B.7-2 : Evolution des tractions dans les clous du mur en sol cloué de La Clusaz pendant l'hiver 1980-1981 (rapport interne Terrasol, 1981)

7.1.4 Conclusion sur les observations et mesures

L'analyse des mesures sur le mur en sol cloué et sur la paroi ancrée soumis au gel sur une période d'environ 70 jours, montre que le phénomène observé est local et qu'il conduit à des pressions exercées sur le parement très élevées. Il ne s'agit en aucun cas d'un déplacement d'ensemble dû, par exemple, à l'accumulation d'eau derrière le parement, de façon similaire à ce qui s'est produit pour un mur en Terre Armée à Modane. La meilleure preuve étant le déplacement vers le parement de la ligne des tractions maximales des clous. Celle-ci est initialement à une distance d'environ 0,3 H. En fin d'hiver, les tractions sont maximale au parement.

Parce que le phénomène de gonflement et de mise en tension des tirants et clous est local, il est possible de le modéliser pour chaque lit d'inclusion, indépendamment des autres lits. Il est donc loisible de se limiter au calcul unidimensionnel d'un lit de clous ou de tirants dans une couche de sol et la partie de parement afférentes.

Nous prendrons comme données de référence pour les simulations numériques, le profilé 33 de la paroi berlinoise ancrée (cf. tableaux B.7-1 et B.7-2) et le lit de clous No. 15 du mur en sol cloué (cf. tableaux B.7-3 et B.7-4). Les deux sections de soutènement correspondantes sont exposées plein Nord et sont donc ombragées durant tout l'hiver, ce qui correspond aux conditions les plus extrêmes en terme de température.

7.2 Calculs en déformation des soutènements de La Clusaz

7.2.1 Détermination des paramètres de calcul

Trois types de paramètres sont nécessaires pour réaliser des calculs en déformation pour les deux types de murs de soutènement : les paramètres thermiques, de gonflement et mécaniques. Pour le site de La Clusaz, seule une partie des paramètres thermiques et mécaniques est disponible.

En l'absence des autres données, une détermination, a posteriori, des paramètres thermiques manquants a été faite à partir des mesures de températures réalisées sur le site (cf. paragraphe 2, partie B).

Le paramètre de gonflement SP_0 a été choisi à partir des données disponibles dans la littérature pour des sols similaires à ceux rencontrés à La Clusaz. L'autre paramètre b a été ensuite calculé à partir des mesures effectuées sur le tirant N du profilé 33 de la paroi berlinoise ancrée, où tous les paramètres mécaniques et géométriques sont connus.

Des simulations ont ensuite été réalisées, pour tous les autres tirants de ce profilé 33, avec les valeurs trouvées précédemment pour les paramètres thermiques et de gonflement ainsi que les paramètres géométriques et mécaniques connus, ceci sans hypothèse supplémentaire.

Les paramètres thermiques et de gonflement été déterminés, l'étude du mur en sol cloué est abordée. Seuls les paramètres mécaniques d'interaction entre le clou et le sol non gelé sont partiellement disponibles. Ils ont été complétés par des valeurs trouvées dans la littérature pour des sols similaires à ceux de La Clusaz. En particulier, les paramètres caractérisant l'interaction entre le clou et le sol gelé ont été calculés à partir des mesures réalisées par Johnston et Ladanyi (1972) sur les sites de Gillam et Thompson, en l'absence d'autres données actuellement disponibles sur ce sujet. Des simulations pour le lit de clous No. 15, situé dans la partie du mur en sol cloué exposée au Nord, sont ensuite effectuées.

7.2.2 Première étude

7.2.2.1 Résumé des paramètres

7.2.2.1.1 Hypothèses de calcul

Une première série de calculs sur les murs de La Clusaz a été réalisée en prenant comme hypothèses : (1) une températures à la surface du parement constante dans le temps et égale à -7°C ainsi que (2) une loi de Stefan pour la pénétration du gel dans le sol derrière les parements (Unterreiner et al., 1993). Ce sont les hypothèses du cas noté IIa dans le paragraphe 2 de cette partie B. Les paramètres thermiques, de gonflement et mécaniques, utilisés pour cette première étude sont résumés dans le tableau B.7-5 ci-dessous.

7.2.2.1.2 Paramètres thermiques

Les paramètres thermiques ont été calculés à partir des profondeurs de gel mesurées à la fin de l'hiver derrière la paroi ancrée et le mur en sol cloué. Ils donnent donc des profils de températures simulés en très bon accord avec les mesures (figures B.2-21 et B.6-22). De même l'évolution de la profondeur de gel simulée est en bon accord avec les mesures (figure B.2-19).

7.2.2.1.3 Paramètres de gonflement

Le modèle du potentiel de ségrégation nécessite la détermination des deux paramètres, SP_0 et b. En l'absence de mesures, le paramètre SP_0 a été déterminé à partir de la classification de l'ISSMFE et des résultats d'essais canadiens sur des sols avec des teneurs en limon similaires au sol de La Clusaz. La paramètre b, quant à lui, a été calculé à partir des mesures faites sur le tirant N du profilé 33 de la paroi ancrée.

Le coefficient SP_0 , qui correspond au potentiel de ségrégation pour une pression extérieure nulle ($P_{ext} = 0$), varie entre 0,5 et 3,0 mm^2 / h °C pour les sols faiblement à moyennement gélifs selon la classification du Comité Technique sur le gel de la SIMSTF. La teneur en particules limoneuses étant le paramètre déterminant pour le degré de gélivité d'un sol, nous avons pris pour la moraine de La Clusaz qui contient environ 30% de limon, une valeur moyenne de 1,0 10^{-4} m^2 / jour °C, c'est à dire de 4,2 mm^2 / h °C par comparaison avec les données publiées.

Tableau B.7-5 : Paramètres thermiques pris en compte dans la première étude

Mur	Paroi berlinoise ancrée	Mur en sol cloué
épaisseur du béton X_b	0,20 m	0,15 m
conductivité thermique du béton k_b	1,38 10^{+5} J / j m °C	
chaleur latente du béton L_b	3,73 10^{+7} J / m^3	
coefficient de pénétration du gel α	0,0263 m / $\sqrt{j}$	0,0454 m / $\sqrt{j}$
conductivité thermique du sol gelé k_{sf}	0,82 10^{+5} J / j m °C	
conductivité thermique du sol non gelé k_{su}	1,87 10^{+5} J / j m °C	
température de surface θ_s	-7 °C	
température initiale du sol θ_0	+6 °C	

Le tirant N, situé en partie médiane de la paroi berlinoise ancrée, nous a semblé le plus approprié pour calculer le paramètre b de gonflement vu sa position dans l'ouvrage. Une valeur de 0,091 kPa^{-1} pour la coefficient b a été ainsi choisie de manière à retrouver par le calcul les mesures.

Tableau B.7-6 : Paramètres de gonflement sélectionnés pour les calculs

Paramètres	Valeurs sélectionnées
potentiel de Ségrégation SP_0	1,0 10^{-4} m^2 / jour °C
paramètre b	0,091 kPa^{-1}

7.2.2.1.4 Paramètres mécaniques

Les caractéristiques mécaniques des tirants N, O et P du profilé 33 de la paroi ancrée et du clou No. 15 du mur en sol cloué sont données respectivement dans les paragraphe 7.1.2.2 et 7.1.2.3 de cette partie B.

Le coefficient k_β de mobilisation du frottement latéral unitaire dans le sol non gelé a été estimé à partir de données existantes dans la littérature sur les moraines glacières. Le frottement latéral unitaire a été mesuré sur le site comme étant supérieur ou égal à 640 kPa.

En ce qui concerne l'interaction entre le clou et sol gelé, les 5 paramètres du modèle développé dans la présente étude ont été déterminés à partir des résultats des essais de Johnston et Ladanyi (1972) sur des tirants scellés dans un sol gelé de nature similaire au sol rencontré à La Clusaz (cf. paragraphe 6, partie B).

7.2.2.2 Calculs en déformation de la paroi berlinoise ancrée

Le paramètre de gonflement b, qui correspond à l'inverse de la pression d'arrêt de gonflement des lentilles de glace, ayant été déterminé à partir des mesures de traction sur le tirant N, l'accord entre les simulations et les mesures est excellent pour celui-ci. Tous les paramètres thermiques, de gonflement et mécaniques étant connus, des simulations pour les autres tirants, O et P, ont été réalisées. Elles donnent des tractions qui sont en assez bon accord avec les mesures en début d'hiver, mais divergent sensiblement en fin d'hiver. (figure B.7-3a). Les simulations pour les déplacements concordent entre elles et sont très régulières par rapport aux mesures qui ne concordent pas entre elles et sont assez irrégulières (figure B.7-3b). Cependant, l'ordre de grandeur des déplacements mesurés sur le tirant N est retrouvé par les calculs. Pour les tirants O et P, les simulations donnent 1 à 1,5 cm alors que, d'après les mesures, ces tirants n'auraient pratiquement pas bougé. Cependant, les conditions difficiles de mesures rendent ces dernières assez contestables.

Il est à noter que ces simulations ont été faites en supposant, par souci de simplification, une température extérieure égale à -7°C, constante dans le temps, alors qu'il a été observé en fin d'hiver une période plus froide. Ceci peut expliquer la bonne concordance en début d'hiver, sur les 40 premiers jours de gel, et la différence significative en fin d'hiver entre les simulations et les mesures de tractions. Une autre explication peut être la dérive en fin d'hiver des jauges de mesure utilisées.

La figure B.7-4 présente les gonflements calculés : h_i , h_s , h_t , la compression oedométrique du sol non gelé w_u et le déplacement du parement w_f qui en résulte. On peut observer, que pour un sol très raide comme la moraine dense et compacte de La Clusaz, l'amplitude du tassement oedométrique est environ 100 fois inférieure à l'amplitude des gonflements. Le terme de tassement w_u peut donc être négligé dans le cas présent. Le gonflement h_s des lentilles de gel représente plus des trois quarts du gonflement total h_t .

7.2.2.3 Calculs en déformation du mur en sol cloué

Les simulations ont été faites sur le lit de clous No. 15, situé en partie médiane du mur en sol cloué, et pour la période du 15 décembre 1980 au 15 février 1981.

Il est à noter que les simulations, si elles donnent des tractions au parement en assez bon accord avec les mesures, du moins pour la première moitié de l'hiver (simulation à 28 jours), prédisent par contre, des tractions plus faibles en arrière du massif, ce qui peut s'expliquer par la valeur élevée du frottement latéral unitaire prise ainsi que par la géométrie unidimensionnelle du problème considéré (figure B.7-5a).

- Traction T [kN]

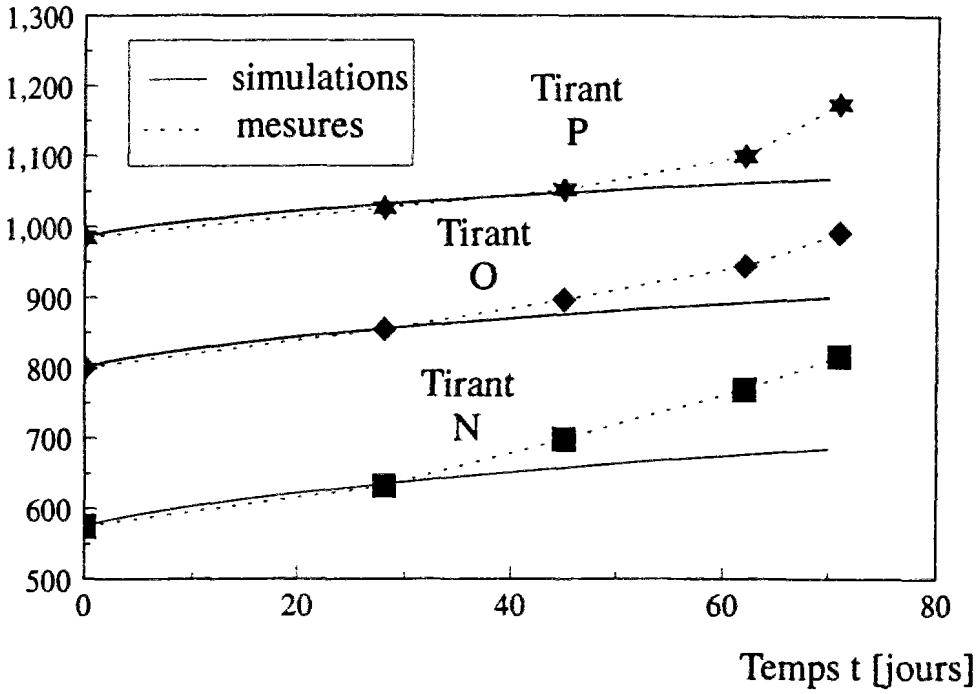


Figure B.7-3a : Evolution des tractions dans les tirants en fonction du temps
paroi berlinoise ancrée par tirants à La Clusaz

Déplacement du parement w_f [mètre]

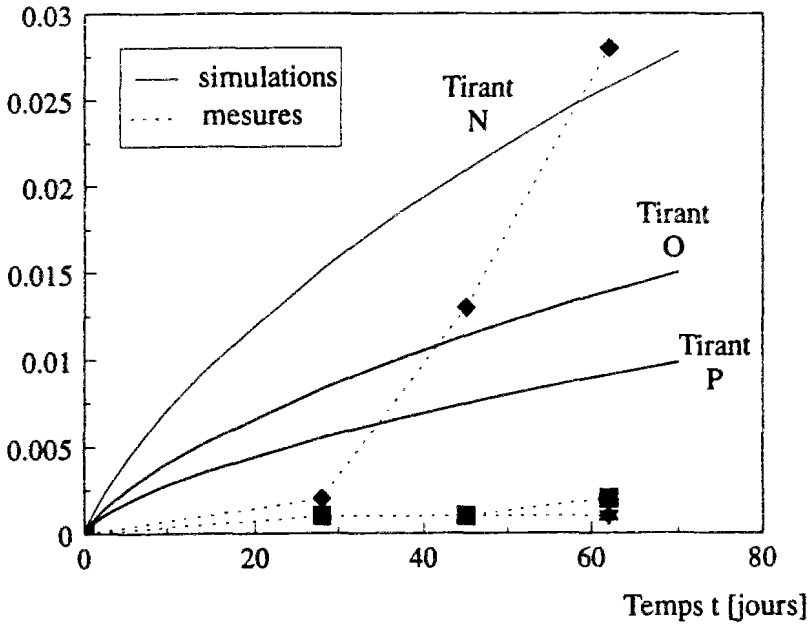


Figure B.6-3b : Evolution du déplacement du parement en fonction du temps
paroi berlinoise ancrée par tirants à La Clusaz

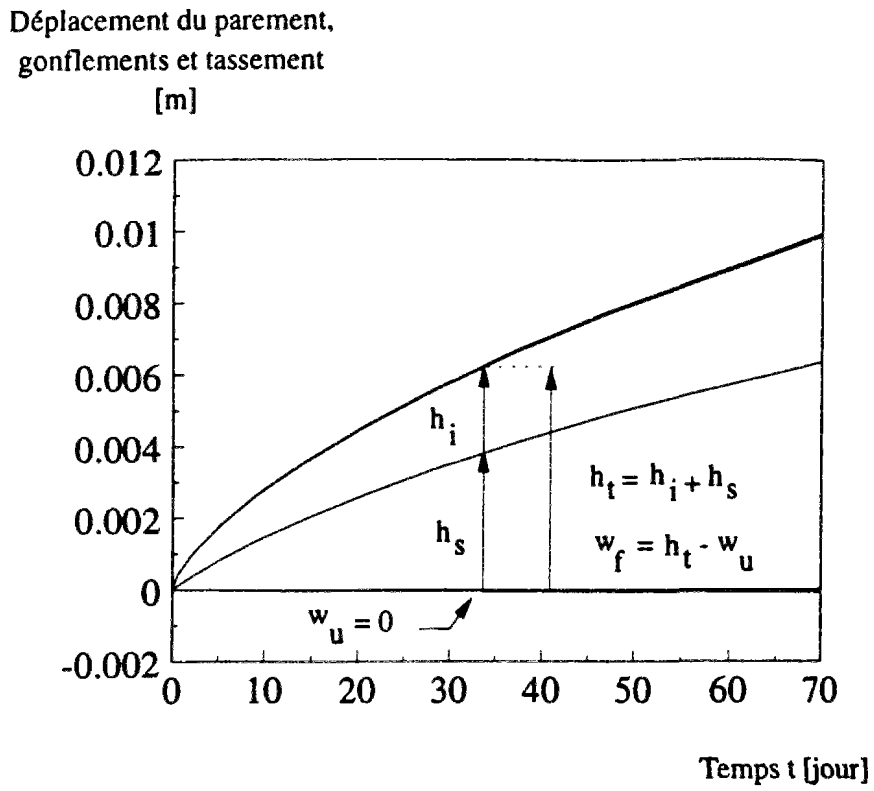


Figure B.7-4 : Déplacements, gonflements et tassement du sol derrière la paroi berlinoise ancrée de La Clusaz (simulations)

Une valeur de 640 kPa a été prise pour le frottement latéral unitaire q_s , ce qui correspond à la valeur mesurée à court terme sur le site pendant la construction. Cependant, on peut observer qu'une telle valeur semble être un peu forte, compte tenu de la pente observée sur la distribution des tractions mesurées le long du clou (figure B.7-2). Une valeur de q_s plus faible aurait pour effet de transférer une partie des efforts de traction plus en arrière dans le massif cloué et de rapprocher sensiblement les simulations des mesures. De même que pour les tirants, les tractions données par les simulations en fin d'hiver (62 jours) pour le clou, sont plus faibles que les mesures, ce qui peut s'expliquer par l'hypothèse d'une température en surface constante, alors que la fin de l'hiver 1980-1981 a été beaucoup plus froide que le début.

Les déplacements calculés pour le mur en sol cloué (figure B.7-5b) sont en assez bon accord avec les résultats des mesures, compte tenu de la dispersion observée entre les lits de clous sur une même section du mur en sol cloué.

La figure B.7-6 présente les gonflements calculés : h_i , h_s , h_t , la compression oedométrique du sol non gelé w_u et le déplacement du parement qui en résulte w_f . On peut observer, que pour un sol très raide comme la moraine dense et compacte de La Clusaz, le tassement oedométrique est 100 fois inférieure aux gonflements. Le terme de tassement w_u peut donc être négligé dans le cas présent. Le gonflement de ségrégation h_s représente plus des trois quarts du gonflement total h_t . Ces résultats sont très similaires à ceux obtenus pour la paroi berlinoise ancrée.

- Traction T [kN]

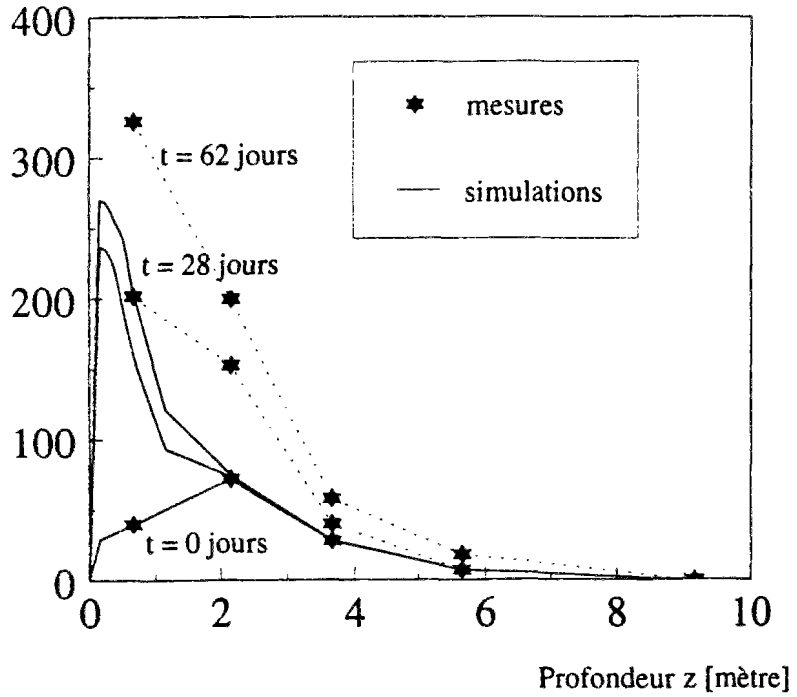


Figure B.7-5a : Comparaison des calculs et des mesures de traction dans le clou 15 du mur en sol cloué de La Clusaz

Déplacement du parement [m]

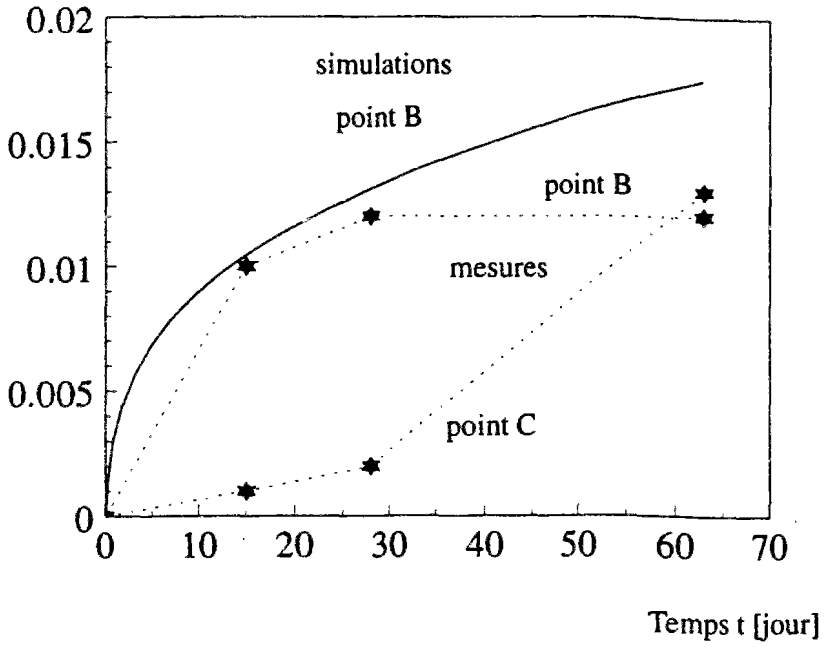


Figure B.7-5b : Comparaison des calculs et des mesures de déplacement du parement au niveau du clou 15 du mur en sol cloué de La Clusaz

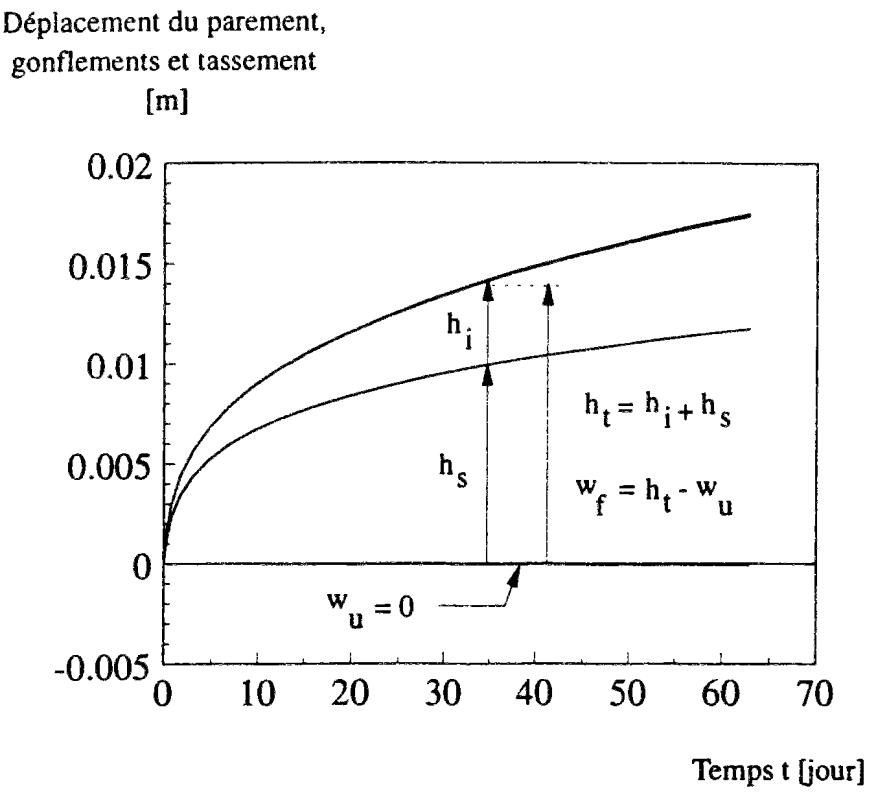


Figure B.7-6 : Déplacements, gonflements et tassement calculés pour le mur en sol cloué de La Clusaz

7.2.2.4 Comparaisons des deux types de soutènement

Les déplacements calculés pour les deux types de mur sont en assez bon accord avec les mesures, ce qui est rassurant pour une méthode calcul en déformation. La comparaison des déplacements calculés pour les deux types de murs de soutènement est présentée sur la figure B.7-7. Deux paramètres gouvernent l'évolution de ces déplacements : la rigidité équivalente k_{eq} / L_{eq} imposée par l'inclusion à la frange de sol en train de geler et la pression extérieure P_{ext} imposée au front de gel. Le tableau B.7-7 présente les valeurs de la pression P_{ext} appliquée par le tirant et le clou sur la frange de sol en train de geler.

Tous les tirants exercent des pressions P_{ext} initiales sur le front de gel très supérieures à celle que peut exercer le clou No. 15. Cependant, les augmentations de traction dans le clou sont telles que celui-ci finit par exercer sur le front de gel une pression P_{ext} plus grande que n'importe laquelle des pressions initiales exercées par les tirants. Cette forte pression tend à réduire très nettement les gonflements du sol dans le mur en sol cloué par rapport à ceux dans la paroi ancrée, du moins, dans le cas du tirant le moins précontraint, c'est à dire N.

La courbure du déplacement du parement en fonction du temps, est beaucoup plus prononcée pour le mur en sol cloué que pour les tirants. Le déplacement du mur cloué semble tendre vers une valeur limite finie, alors que le déplacement de la paroi ancrée, quelque soit le niveau de la précontrainte du tirant considéré, ne semble pas se stabiliser sur la période concernée.

Tableau B.7-7 : Traction T dans les inclusions et pression P_{ext} appliquée sur le front de gel

	Clou N° 15	Tirant N	Tirant O	Tirant P
$S_v * S_h$	3 m * 2 m	5,7 m * 4,1 m	5,7 m * 4,1 m	5,7 m * 4,1 m
T(t=0)	29 kN	575	800	985
P_{ext} (t=0 jours)	4,8	24,6	34,2	42,1
T(t=28 jours)	200 kN			
P_{ext} (t=28 jours)	35,0 kPa			
T(t=62 jours)	314 kN			
P_{ext} (t=62 jours)	52,3			

Une analyse quantitative plus fine peut être faite en se basant sur les solutions analytiques développées dans les annexes 15 et 16, et résumées dans les paragraphes 5 et 6 de cette partie B. La solution analytique en gonflement total h_t , qui se trouve être égal au déplacement du parement puisque la consolidation oedométrique w_u du sol non gelé est quasiment nulle, est donnée par :

$$h(t) = 2\frac{A}{D}\ln\left(1+\frac{A+B\exp\left(N_0/N_g\right)}{A}\left(\exp(D\sqrt{t})-1\right)\right) \qquad \text{(B.7-4)}$$

où A, B, D et N_g sont quatre constantes, toujours positives, données par :

$$A = f\frac{9}{100}\frac{w}{w+100\frac{\gamma_w}{\gamma_s}}\frac{\alpha}{2} \qquad \text{(B.7-5)}$$

$$B = \frac{109}{100}SP_0(-\theta_i)\frac{1}{\alpha} \qquad \text{(B.7-6)}$$

$$D = 2\,A\,\frac{k_{eq}}{L_{eq}\cos\beta}\frac{b}{S_v S_h} \qquad \text{(B.7-7)}$$

$$N_g = \frac{S_v S_h}{b} \qquad \text{(B.7-8)}$$

La rigidité k_{eq} / L_{eq} , dans le cas d'un tirant de grande longueur libre, scellé sur un longueur d'ancrage suffisante et relié au parement par une bonne connexion, est donnée par $E_a A_a / L_l$ où, E_a est le module d'Young de l'acier, A_a la section d'acier et L_l la longueur libre. Pour un clou, cette rigidité équivalente varie avec la profondeur de gel. Cependant, elle peut être approximée par $E_a A_a / (a_u + a_p) \approx E_a A_a / a_u$ où a_u et a_p sont respectivement les longueurs de transfert dans le sol non gelé et dans le parement. Cette dernière peut être négligée dans le cas présent.

Il est à noter que l'augmentation du gonflement total est contrôlée principalement par le coefficient D, qui diffère entre la paroi ancrée et le mur en sol cloué.

Le produit $S_v S_h$ est égal à 5,7 m x 4,1 m pour la paroi ancrée et à 2,0 m x 3,0 m pour le mur en sol cloué, ce qui donne un aire de répartition des tractions 4 fois plus grande pour les tirants que pour les clous.

Les rigidités équivalentes des tirants O, N et P sont respectivement égales à 8 138 kN, 13 671 kN et 23 334 kN. La longueur de transfert du clou peut être estimée à environ 1,0 m (cf. paragraphe 7.1.2.3, partie B), ce qui donne une rigidité équivalente de 108 100 k, c'est à dire de 5 à 13 fois plus grande que celles des tirants N, O et P, ce qui permet d'expliquer pourquoi les gonflements derrière le mur en sol cloué sont beaucoup plus faibles que ceux derrière la paroi berlinoise ancrée.

Il en résulte que le coefficient D pour le clou est 52, 31 et 18 fois plus grand que les coefficients D pour les tirants N, O et P, respectivement.

D'autre part, la solution asymptotique en gonflement est donnée par :

$$h(t) = 2\,\frac{A}{D}\ln\left(\frac{A + B\exp\left(N_0/N_g\right)}{A}\right) + 2A\sqrt{t} \qquad \text{(B.7-9)}$$

Il convient de remarquer que la pente de l'asymptote est égale à 2 A et est indépendante des caractéristiques mécaniques de la paroi ancrée ou du mur en sol cloué. L'ordonnée à l'origine, par contre, est inversement proportionnelle à D. Les coefficients A et B sont indépendants des caractéristiques mécaniques de la paroi ancrée ou du mur en sol tandis que N_g et D en dépendent. Le rapport N_0 / N_g est compris entre 0,2 à 0,4 pour les tirants N, O et P. Il varie durant l'hiver, de 0,1 à 0,5, pour le clou considéré. Il n'a donc pas d'influence déterminante sur le résultat.

Les courbes de déplacement du parement pour les tirants et les clous tendent donc vers des asymptotes qui sont toutes parallèles mais ont des ordonnées à l'origine différentes. Comme le coefficient D est 18 à 52 fois plus important pour les clous que pour les tirants, la courbe du clou tend plus vite vers son asymptote que les courbes des tirants et l'allure des courbes sur la figure B.7-7 se trouve ainsi expliquée.

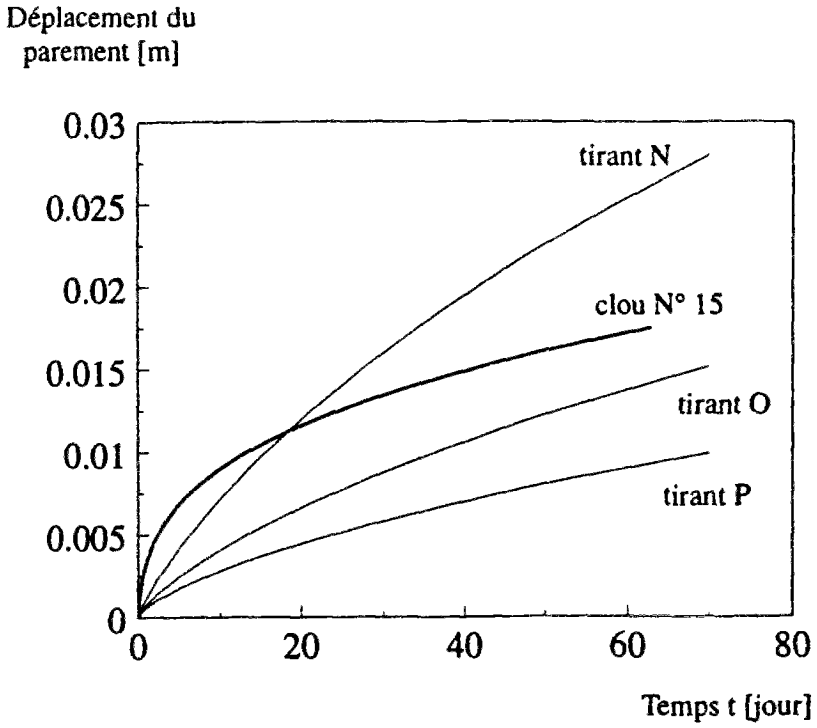


Figure B.7-7 : Comparaisons des déplacements du parement pour le mur en sol cloué (clou 15) et la paroi ancrée (tirants N, O et P)

7.2.2.5 Simplification du modèle

Le chemin de contraintes suivi par le sol près du parement du mur en sol cloué est très complexe. Près du parement, le cisaillement est initialement positif. Quand le sol se met à geler, l'augmentation de traction engendrée dans le clou est telle que le sol en arrière du front de gel est en décharge et le cisaillement devient négatif. Quand le front de gel arrive en un point donné, l'augmentation de cisaillement, imposée par le déplacement du sol correspondant, est tellement importante que le sol à peine gelé est soumis à de très fortes contraintes. Comme il est confiné, une forte relaxation se produit quasi-instantanément, ce qui à pour effet de relâcher le cisaillement et donc de réduire la pente de la courbe T(z), localement près du parement. Les tractions au parement sont donc plus faibles que celles qui pourraient être calculées en gardant pour le sol gelé la même courbe de mobilisation du frottement latéral que le sol non gelé (figure B.7-8).

Une calcul simplifié, qui permet de s'affranchir de la détermination des cinq paramètres de fluage, cinq étant le nombre minimum de paramètres dont nous avons besoin dans notre modèle pour caractériser les courbes de fluage, fournit pour les tractions au parement une estimation majorée d'environ 10 kN, ce qui correspond en relatif à 4%. Le paramètre déterminant pour le dimensionnement du parement est la traction en tête des clous car elle induit sur le parement une pression qui contrôle l'épaisseur du béton et son ferraillage. Surestimer les tractions en tête des clous est donc conservatif.

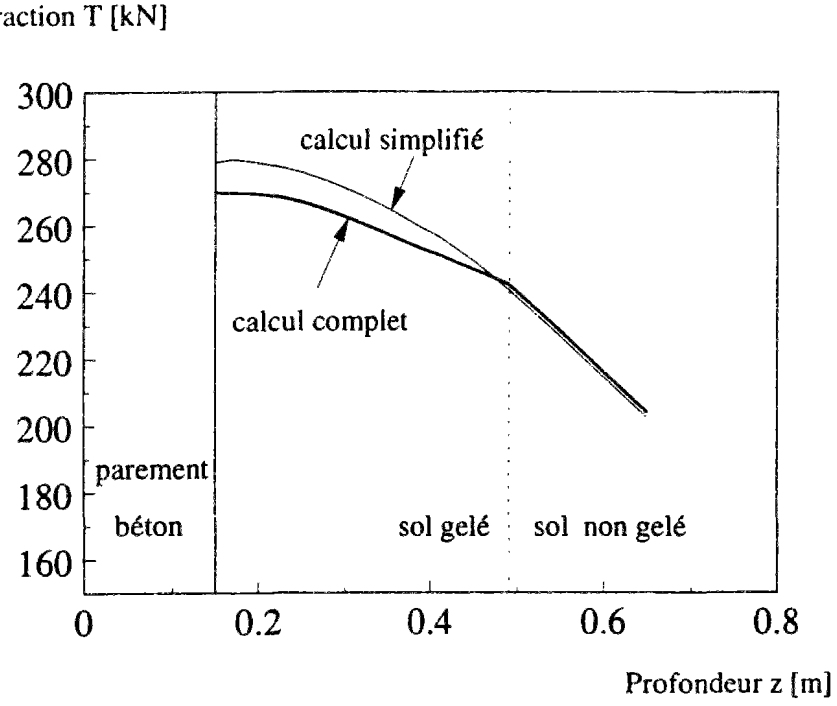


Figure B.7-7 : Comparaisons des tractions simulées par un calcul complet, avec fonction de transfert de charge spécifique au sol gelé, et un calcul simplifié, où la fonction de transfert de charge du non gelé est gardée pour les calculs dans le sol gelé

Ce résultat a été obtenu dans le cas particulier du mur en sol cloué de La Clusaz et pour le modèle considéré. Il conviendrait d'étudier ultérieurement d'autres modèles de comportement pour l'interaction entre le clou et le sol gelé ainsi que d'autres exemples de mur avant de vouloir généraliser ce résultat.

Pour le reste des études numériques présentées dans cette thèse, nous garderons pour le sol gelé la fonction de transfert de charge élastoplastique utilisée pour le sol non gelé afin de limiter au minimum, les paramètres de calcul.

7.2.3 Deuxième étude

Suite aux résultats de la première étude, la fonction de transfert de charge entre le clou et le sol gelé a été prise systématiquement égale à celle entre le clou et le sol non gelé pour les toutes simulations numériques de la deuxième étude exposées dans le présent paragraphe.

Plusieurs jeux d'hypothèses thermiques ont été considérés et comparés aussi bien entre eux qu'avec les mesures réalisées. Cette comparaison a pour objectifs : (1) de déterminer dans quelle mesure les solutions analytiques développées diffèrent des solutions numériques et (2) d'évaluer l'influence que peuvent avoir les variations journalières de la température sur la solution numérique.

La méthode de détermination des paramètres ainsi que les valeurs numériques utilisées dans cette deuxième étude ont été présentées dans les paragraphes 2 et 3 de cette partie B.

7.2.3.1 Simulations numériques sur les tirants

La solution analytique développée pour un tirant élastoplastique a été comparée à la solution numérique donnée par le logiciel INGEL afin de valider ce dernier. La comparaison des résultats numériques et analytiques est bonne, pour ce qui concerne la solution analytique, c'est à dire le cas IIa (figure B.7-9a).

La solution analytique du cas IIa a été obtenue dans l'hypothèse d'une température à l'interface θ_i constante (cf. annexes A15 et A16). Elle a été modifiée pour pouvoir tenir compte des variations de la température θ_i , qui peuvent, dans une certaine mesure, être considérées comme lentes. Nous avons ainsi obtenu une solution analytique dite approchée dans le cas noté IIb. Les simulations numériques présentées sur la figure B.7-9a indiquent que cette solution analytique approchée n'est pas bonne. Elle diffère de plus de 30% de la solution numérique. Dans la suite, nous ne considérerons plus cette solution analytique approchée.

Le jeu d'hypothèses correspondant au cas I permet de développer une solution analytique complète. Les hypothèses, prises dans ce cas là, consistent à supposer que le parement n'existe pas et que le sol est soumis directement à la température extérieure, qui est supposée constante dans le temps. Les simulations présentées sur la figure B.7-9a indiquent que, comme l'on pouvait s'y attendre, ce cas est très conservatif et fournit un déplacement du parement et une traction beaucoup trop grande par rapport aux autres cas étudiés. Par la suite, nous ne considérerons plus ce cas I.

L'évolution de la traction pour les quatre cas IIa, IIb, IIc et IId est présentée sur la figure B.7-10a, en fonction du temps, et sur la figure B.7-10b, en fonction de la racine carrée du temps. Les deux cas, IIa et IIb, utilisent la loi de Stefan tandis que les deux cas, IIc et IId, utilisent la loi de Portnov. Entre les cas IIa et IIb, la température à l'interface béton - sol est prise constante pour le premier, tandis qu'elle est prise variable pour le second cas. Cette dernière hypothèse est très importante puisque l'on obtient pour IIb un résultat tout à fait comparable aux cas IIc et IId tandis que IIa donne un résultat légèrement différent. Cependant, les tractions sont surestimées de moins de 5%, ce qui est faible et conservatif.

Il est à noter qu'il n'est possible de développer une solution analytique que dans le cas IIa. Dans le cas IIb, il faut se contenter d'une solution analytique approchée qui n'est pas bonne comme nous l'avons vu précédemment.

Les mêmes conclusions peuvent être tirées des figures B.7-11a et B.7-11b qui présentent l'évolution du déplacement du parement en fonction du temps t et de la racine carrée du temps.

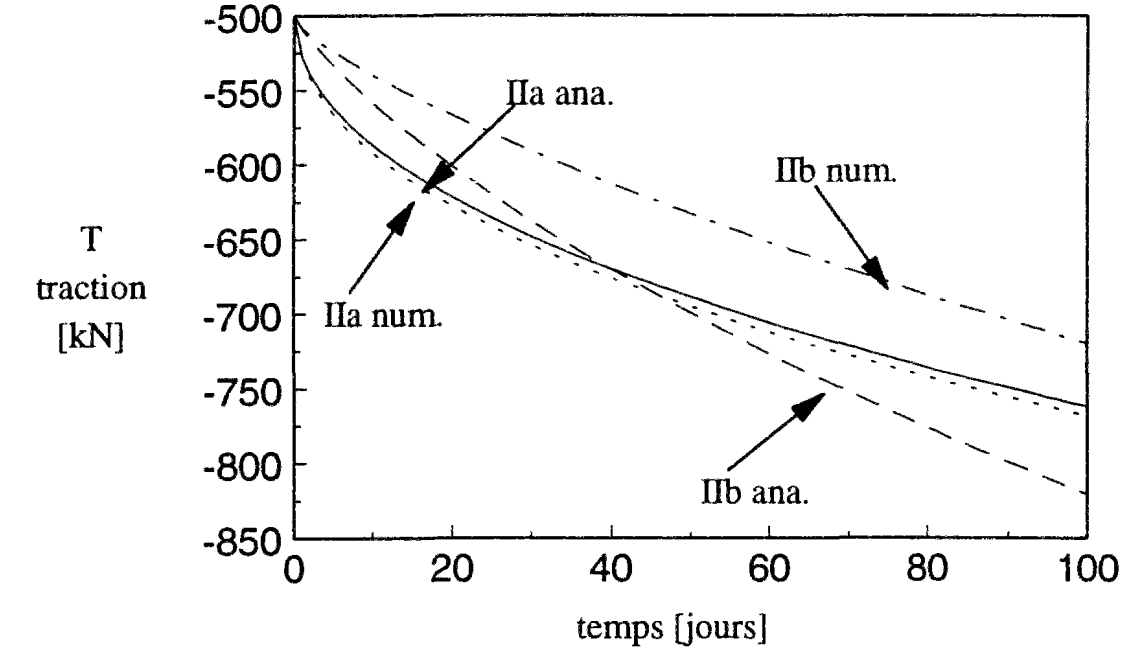


Figure B.7-9a : Evolution de la traction en fonction du temps pour les cas IIa et IIb; comparaisons des solutions analytiques et numériques

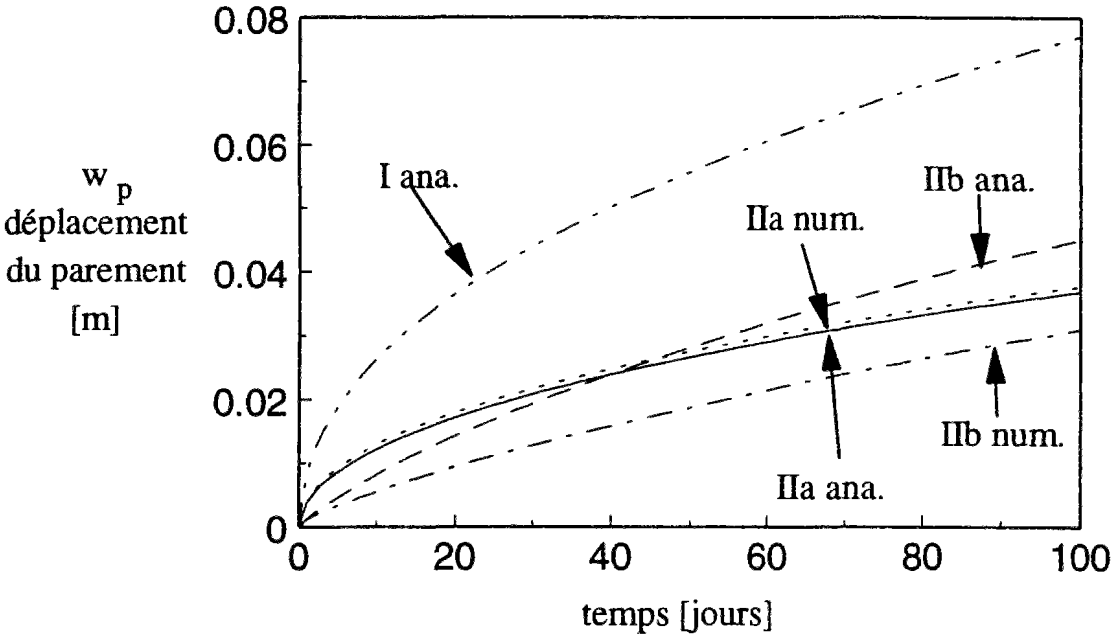


Figure B.7-9b : Evolution du déplacement en fonction du temps pour les cas I, IIa et IIb; comparaison des solutions analytiques et numériques

Dans les cas IIc et IId, la loi de Portnov est utilisée pour calculer la profondeur de gel. Dans le cas IIc, la température en surface du parement est prise constante dans le temps, tandis que dans le cas IId, toutes les variations journalières de température sont prises en compte. On peut constater qu'entre ces deux cas, aussi bien pour les tractions que pour le déplacement du parement, la différence est très faible et ne justifie pas le coût d'un calcul complet avec prise en compte de toutes les variations journalières. Ce résultat peut s'expliquer par le fait que la profondeur de gel dépend de la température cumulée. Durant les premiers jours, quand l'indice de gel est très faible, toute variation de cet indice a une répercussion importante sur la traction et le déplacement, comme cela peut s'observer sur les courbes en début d'hiver. Cependant, dès que l'indice de gel a pris une valeur suffisante, au bout de quelques jours, les variations journalières n'ont plus qu'une influence relative faible, et un calcul ne prenant en compte que la température moyenne en surface du parement est excellent.

Des comparaisons entre les solutions numériques nous retiendrons que la solution analytique approchée développée pour le cas IIb n'est pas acceptable d'un point de vue numérique.

Le cas IIa, qui est l'un des plus simples, est le seul qui permette de développer une solution analytique. Il donne des résultats numériques très proches des trois autres cas IIb, IIc et IId. Les tractions calculées sont surestimées d'environ 5%, ce qui est faible et conservatif. Ce jeux d'hypothèses représente donc un bon compromis.

Entre les cas IIc et IId, il convient de noter que la prise en compte de toutes les variations journalières n'apporte rien par rapport à un calcul où l'on suppose une température extérieure constante dans le temps. La lourdeur du cas IId peut donc être évitée avec le cas IIc, tout en obtenant des résultats quasiment identiques.

En terme de complexité, les deux cas, IIb et IIc sont similaires. Le premier repose sur des hypothèses plus fortes et moins réalistes que le second, mais cela ne permet pas pour autant de développer des solutions analytiques. En outre, les simulations numériques sont tout à fait comparables.

Les tractions calculées pour les cas IIa (solution analytique), IIc et IId sont comparées aux mesures sur la figure B.7-12, aussi bien pour le tirant N, qui a servi pour calculer les paramètres de gonflement, que pour les deux autres tirants O et P. En début d'hiver, les résultats des calculs concordent relativement bien avec les mesures surtout pour les tirants N et P. Par contre, pour le tirant O, qui présente un comportement légèrement différent des deux autres, l'accord n'est pas aussi bon. La solution analytique (cas IIa) surestime systématiquement les tractions. Les solutions IIc et IId sont très proches l'une de l'autre mais divergent sensiblement des mesures en fin d'hiver. Ce phénomène peut être expliqué par une dérive des jauges de mesures après la longue période de gel à laquelle elles ont été soumises. Il peut être expliqué aussi par la simplicité du modèle utilisé. Les simulations présentent toutes la même courbure vers le haut. Les mesures présentent toutes une courbure vers le haut en début d'hiver. Par contre, en fin d'hiver, la courbure est inversée et orientée vers le bas. Cette tendance en fin d'hiver mériterait plus d'études expérimentales en laboratoire et sur le terrain afin de bien identifier les phénomènes mis en jeu de façon à pouvoir les intégrer dans notre modèle.

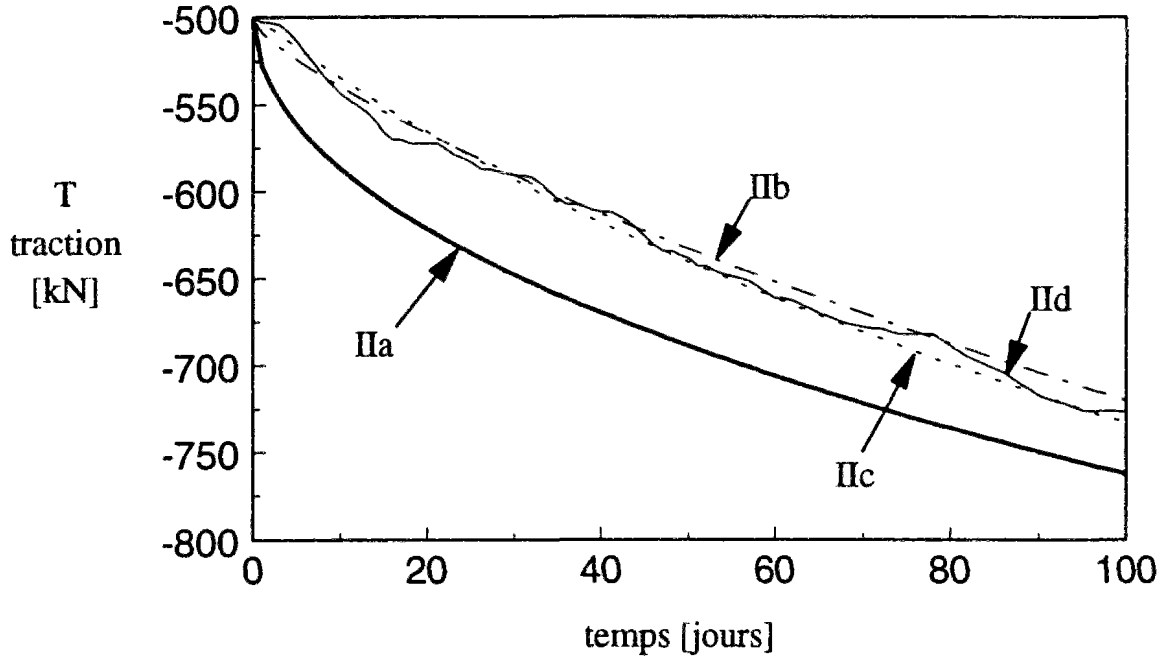


Figure B.7-10a : Evolution de la traction en fonction du temps
pour les cas IIa, IIb, IIc et IId

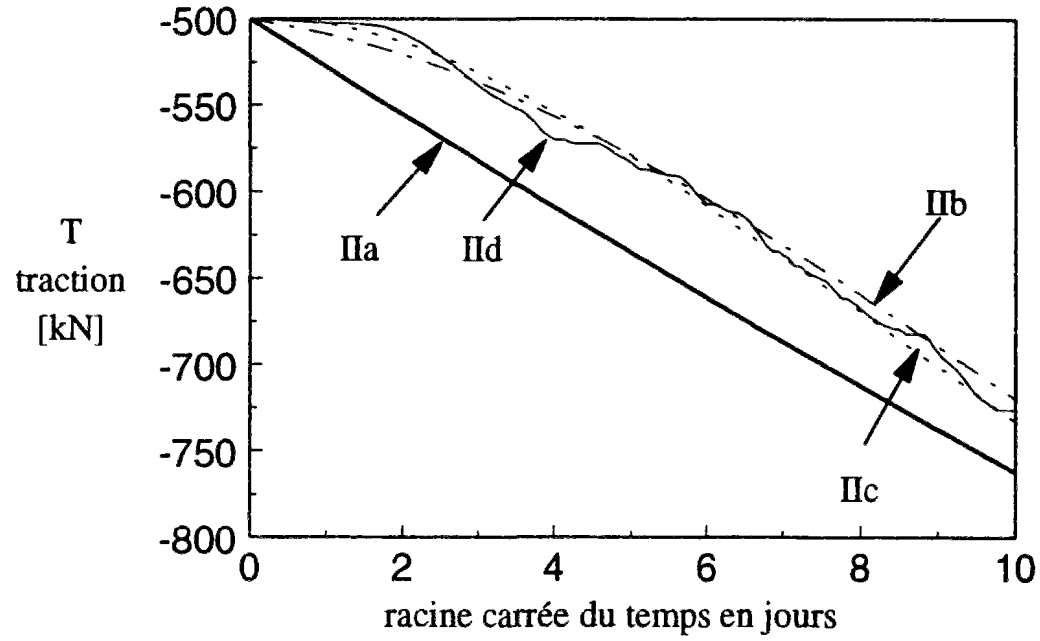


Figure B.7-10b : Evolution de la traction en fonction de la racine carrée du temps
pour les cas IIa, IIb, IIc et IId

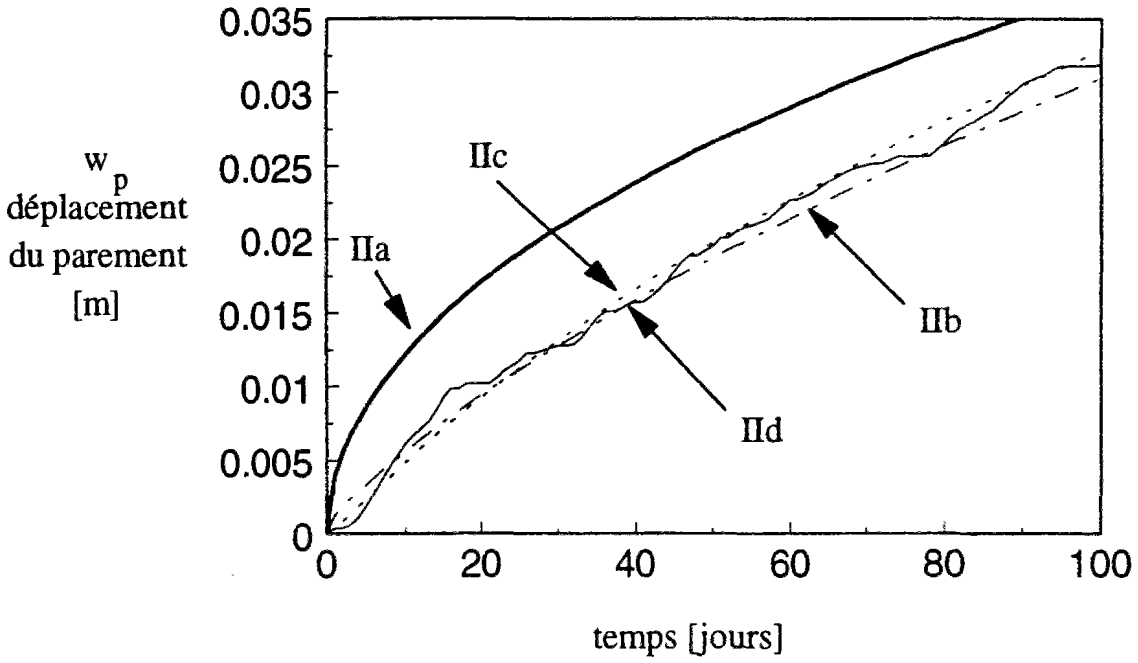


Figure B.7-11a : Evolution du déplacement en fonction du temps pour les cas IIa, IIb, IIc et IId

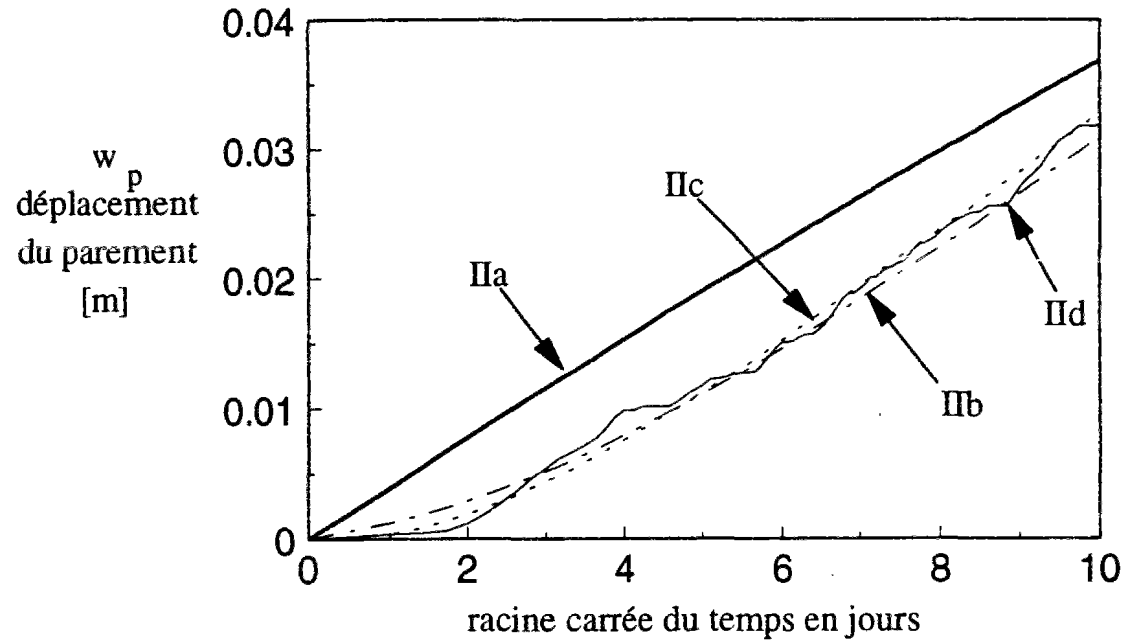
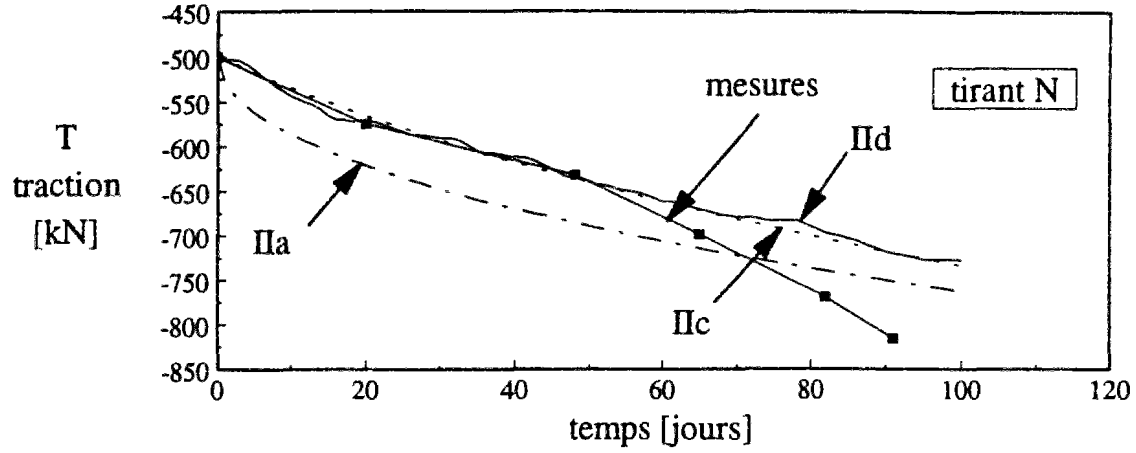
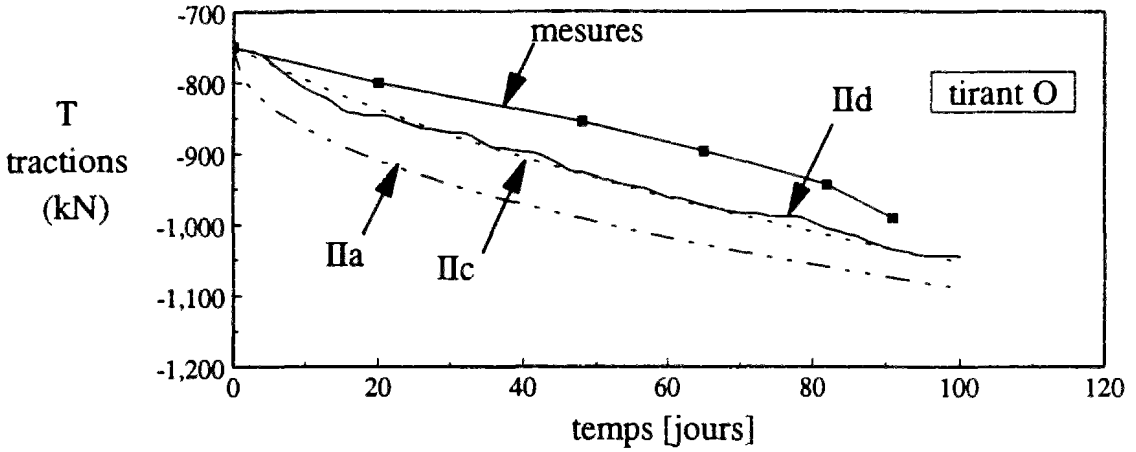


Figure B.7-11b : Evolution du déplacement en fonction de la racine carrée du temps pour les cas IIa, IIb, IIc et IId





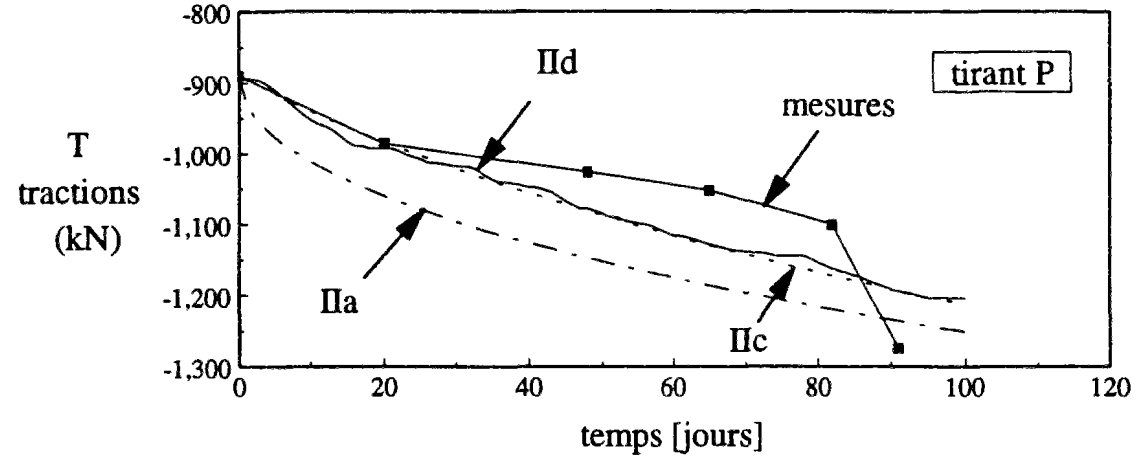


Figure B.7-12 : Comparaison des simulations (cas IIa, IIc et IId) avec les mesures pour les tirants N, O et P de La Clusaz

7.2.3.2 Simulations numériques pour le clou No. 15

L'évolution de la traction en tête du parement a été simulée pour les cas IIa, IIb, IIc et IId afin de la comparer aux mesures réalisées sur le site (figures B.7-13a et B.7-13b). Il est à noter que les mesures considérées ont été faites sur la jauge 4 du clou 33, qui est situé à 0,5 m de la face intérieure du parement. Ce n'est donc pas la traction maximale dans le clou qui a été mesurée.

Le cas IIa donne une valeur de la traction surestimée de 18% par rapport aux mesures et d'environ 1% par rapport aux autres cas. C'est une tendance qui a été observée aussi sur les tirants. Les trois cas IIb, IIc et IId donnent une traction maximale surestimée systématiquement par rapport aux mesures. Cependant, l'écart n'est pas très important.

L'évolution du déplacement du parement est présentée sur les figures B.7-14a et B.7-14b. Les simulations donnent des déplacements, tous dans la même fourchette, et proches des mesures en début d'hiver. Cependant, en fin d'hiver, l'écart entre les calculs et les mesures devient relativement important. Le modèle donne les mêmes tendances que les mesures en début d'hiver, mais en fin d'hiver, les tendances diffèrent sensiblement. Il conviendrait dans des études futures d'identifier la source de ces divergences afin de pouvoir modéliser les phénomènes correspondants.

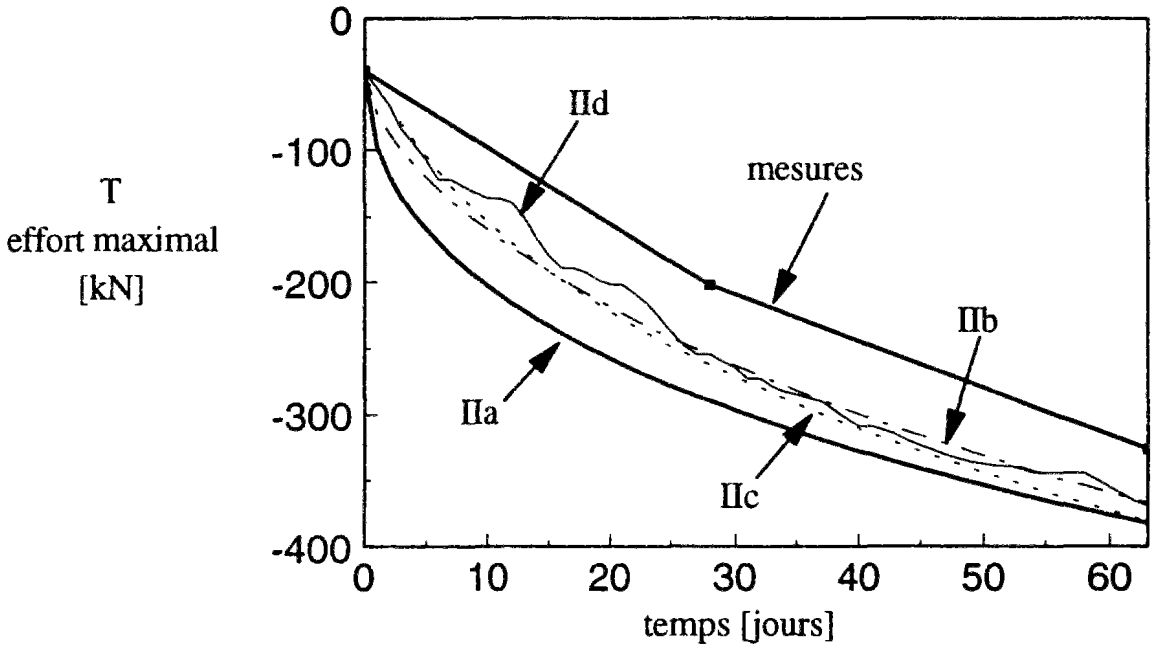


Figure B.7-13a : Comparaison des simulations (cas IIa, IIb, IIc et IId) avec les mesures pour l'évolution de la traction dans le clou 15 en fonction du temps

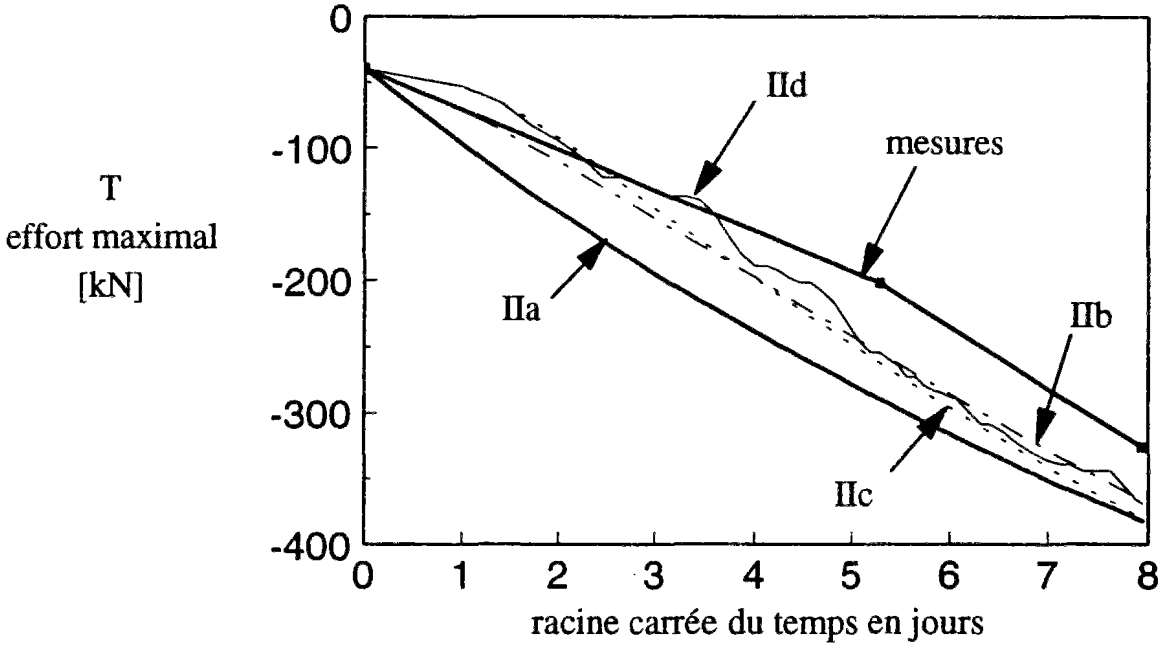


Figure B.7-13b : Comparaison des simulations (cas IIa, IIb, IIc et IId) avec les mesures pour l'évolution de la traction dans le clou 15 en fonction de la racine carrée du temps

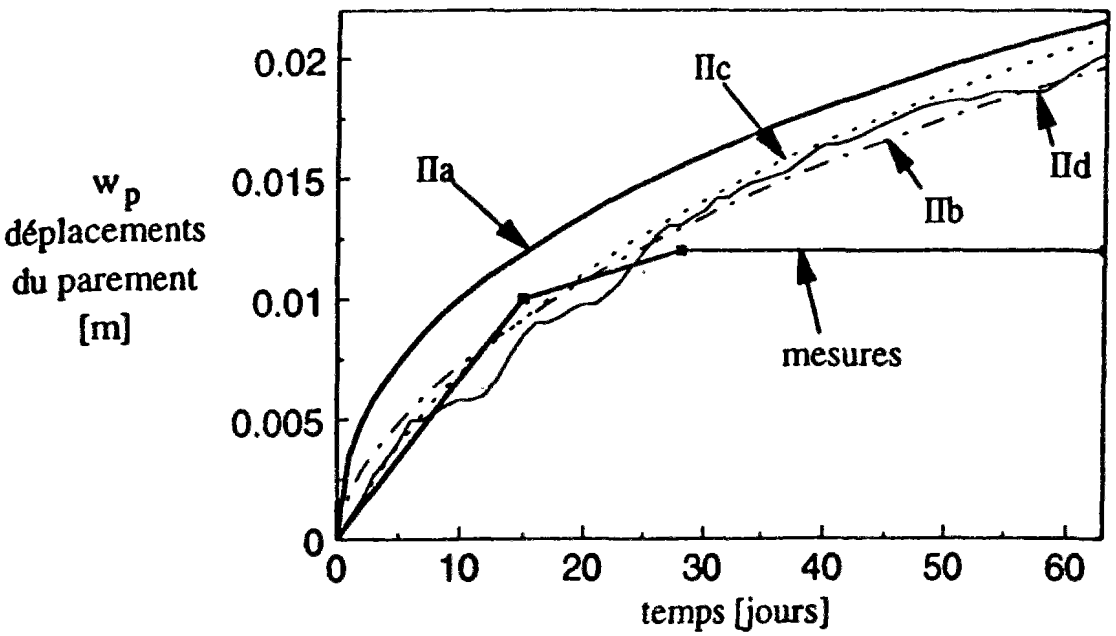


Figure B.7-14a : Comparaison des simulations (cas IIa, IIb, IIc et IId) avec les mesures pour l'évolution du déplacement du parement au niveau du clou 15 en fonction du temps

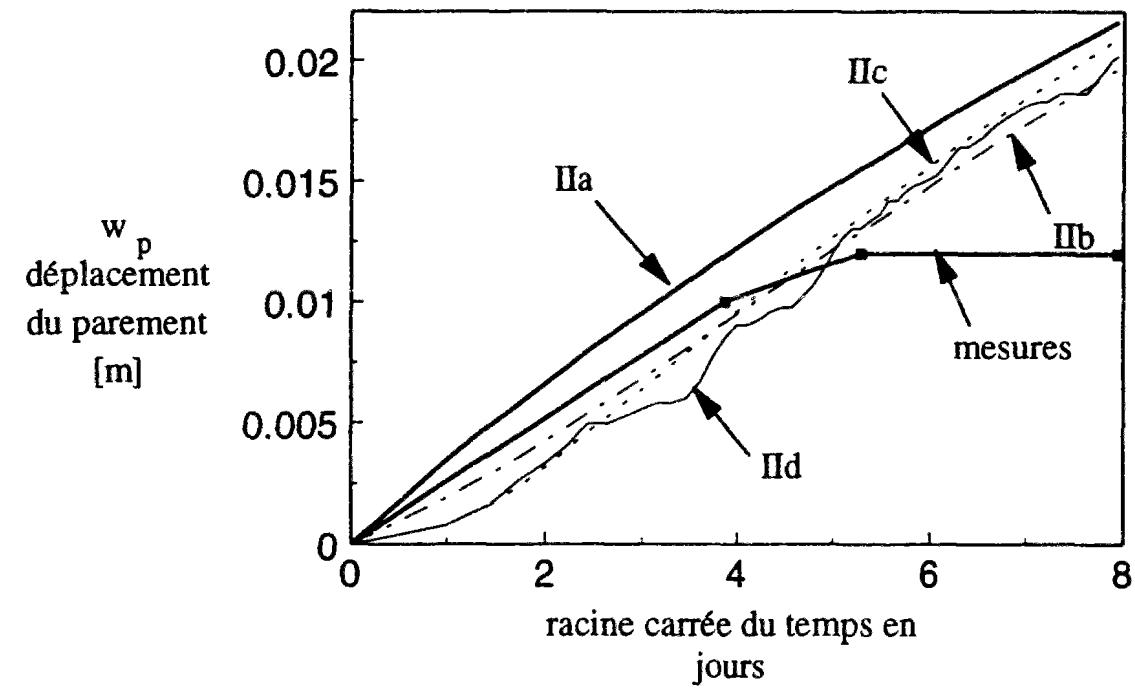


Figure B.7-14b : Comparaison des simulations (cas IIa, IIb, IIc et IId) avec les mesures pour l'évolution du déplacement du parement au niveau du clou 15 en fonction de la racine carrée du temps

7.3 Conclusions sur les simulations

Le modèle complet, développé dans le cadre de cette thèse pour modéliser les effets du gel sur les parois ancrées par tirants ou les murs en sol cloué, a été testé et validé sur les ouvrages en vraie grandeur de La Clusaz.

De la première étude numérique, il ressort que le modèle permet de calculer avec une relative bonne précision, les tractions et les déplacements, aussi bien pour la paroi ancrée que pour le mur en sol cloué de La Clusaz. Cette précision est toute relative, compte tenu de la dispersion des mesures ainsi que des conditions difficiles dans lesquelles elles ont été réalisées.

Les simulations ayant donné de bons résultats par rapport aux mesures réalisées sur un ouvrage en vraie grandeur, soumis à des conditions hivernales réelles, nous nous sommes attachés à simplifier le nombre des paramètres du modèle ainsi qu'à faire varier les hypothèses thermiques.

La modélisation de l'interaction entre le clou et le sol gelé requière, au minimum, cinq paramètres de fluage qui ne sont pas le plus souvent mesurés. Le modèle initial, dit complet, a été comparé au modèle, dit simplifié, dans lequel nous avons pris pour l'interaction entre le clou et le sol gelé la même fonction de transfert de charge que pour le sol non gelé. Les simulations avec le modèle simplifié nous ont donné des tractions supérieures d'environ 10 kN aux tractions maximales calculées avec le modèle complet, qui sont égales par ailleurs à 270 kN. Ce résultat est dû à deux phénomènes. D'un part, le sol gelé, qui est fortement confiné, est soumis à une relaxation très importante. D'autre part, la frange de sol en train de geler est soumise à une extension très concentrée qui le fait plastifier très rapidement.

De cette première étude avec le modèle complet, il est possible de conclure que le modèle simplifié fournit des résultats proches de ceux du modèle complet, à quelques pour-cents, et du côté de la sécurité. Pour les simulations numériques ultérieures, nous avons donc utilisé le modèle simple.

Cependant, ce résultat a été obtenu pour un modèle d'interaction entre le clou et le sol gelé et dans le cas des murs de La Clusaz. Il conviendrait dans des études futures, d'étudier si ce résultat peut être généralisé dans le cas d'autres modèles d'interaction et s'il s'applique à d'autres murs.

A part les paramètres de fluage, il n'est pas possible de simplifier plus le modèle. Par contre, il est intéressant de travailler sur les hypothèses thermiques afin de voir leurs influences respectives.

Les données météorologiques sont de nature stochastique. Faire un calcul complet, en tenant compte de toutes les variations journalières est très lourd. Nous avons donc comparé un calcul, où toutes les variations journalières de la température à la surface du parement sont prises en compte (cas IId), avec un calcul, où la température en surface est supposée constante dans le temps et égale à la température moyenne réelle mesurée (cas IIc). A part les cinq à dix premiers jours de gel, où les variations journalières ont une influence relativement importante sur les résultats, les résultats à la fin de l'hiver sont quasiment insensibles à ces variations. Ceci s'explique par le fait que la profondeur de gel dépend de la température cumulée, qui, quand elle est devenue importante au bout de quelques jours, n'est plus réellement influencée par les variations journalières. Un calcul ne prenant en compte que la température moyenne en surface est donc tout à fait bon (cas IIc).

Il existe un jeu d'hypothèses thermiques simples qui donne des résultats très proches de ceux obtenus par les calculs IIc et IId, avec une différence de l'ordre de 5%, et qui permet de développer des solutions analytiques pour les tirants et pour les clous dans le cas d'un interaction élastique entre le clou et le sol. C'est le cas IIa. Les hypothèses en question sont simples et réalistes : (1) la température dans le sol en contact avec le béton est prise constante et égale à la température moyenne réelle, et (2) le gel pénètre dans le sol suivant une loi de Stefan. Ce jeu d'hypothèses a été choisi pour étudier en détail la différence de comportement entre les tirants et les clous ainsi que pour réaliser une étude paramétrique sur les différentes méthodes possibles pour réduire les effets du gel sur les parois ancrées et les murs en sol cloué.

Dans le cas du modèle simplifié, des simulations ont été réalisées pour les tirants N, O, P ainsi que pour le clou No. 15 de La Clusaz, en utilisant les jeux d'hypothèses IIa, IIc et IId. Les valeurs calculées pour les tirants N et P sont en très bon accord avec les mesures sur la première moitié de l'hiver et diverge sensiblement en fin d'hiver. Les mesures réalisées sur le tirant O étant en légère contradiction avec celles réalisées sur les tirants N et P, tandis que les simulations pour les trois tirants sont homogènes, l'accord entre les mesures et les valeurs calculées est moins bon pour ce tirant que pour les deux autres. Pour ce qui concerne le clou No. 15, les tractions maximales calculées sont légèrement plus fortes que les mesures durant tout l'hiver. Le déplacement calculé du parement est, par contre, en très bon accord avec les mesures en début d'hiver tandis qu'en fin d'hiver des divergences sensibles sont observées.

Les simulations sur les tirants aussi bien que sur les clous donnent donc les mêmes tendances. Le modèle prédit bien les tractions et déplacements durant la première moitié de l'hiver. En fin d'hiver, les valeurs calculées divergent sensiblement des mesures. En particulier, on peut noter sur les courbes donnant les tractions dans les tirants en fonction du temps, que la courbure est constamment négative pour les courbes simulées. Par contre, pour les mesures, il existe une inversion de courbure en milieu d'hiver. Ce phénomène avait été attribué dans la première étude (Unterreiner et al., 1993) aux variations de températures journalières, mais la prise en compte de celles-ci dans le calcul n'a pas apporté d'amélioration sensible. Il peut être aussi attribué à une dérive dans le temps des jauges utilisées sur le site dans des conditions climatiques difficiles. En l'absence de plus de données, il conviendrait dans des études futures de regarder plus en détail ce dernier point.

8 Etude de dispositions préventives pour limiter les effets du gel sur les murs en sol cloué

Dans la modélisation développée précédemment, la fonction de transfert de charge entre le sol gelé et le clou fait intervenir des paramètres de fluage qui ne sont pas le plus souvent étudiés et mesurés. Il semble, au vu des résultats des simulations numériques, qu'un calcul simplifié, où l'on garde pour le sol gelé la même fonction de transfert de charge que celle du sol non gelé, donne des valeurs légèrement majorées pour les tractions. Un tel calcul est donc conservatif du point de vue du dimensionnement du parement et permet de s'affranchir des paramètres de fluage.

Les mesures et les simulations ont donné pour la paroi berlinoise ancrée de La Clusaz des augmentations de traction dans les tirants d'une valeur maximale de 50%. Les tirants ayant été précontraints à 0,75 T_G , les tractions maximales atteintes dans les tirants en fin d'hiver sont donc de l'ordre de 1,1 T_G . Certains tirants ont plastifié mais ne se sont pas rompus puisque la traction limite de rupture est encore loin. En ce qui concerne les liaisons des tirants avec le parement, ces augmentations de traction n'ont pas eu un effet important, compte tenu des coefficients de sécurité pris habituellement pour le dimensionnement des têtes de tirants.

Pour ce qui concerne les clous, les surtensions induites par le gel dans les clous sont nettement plus importantes que dans le cas des tirants et restent concentrées essentiellement près du parement. Il en résulte des surtensions au parement qui peuvent conduire à une plastification du clou en tête et/ou un poinçonnement du parement. En l'occurrence, à La Clusaz, la traction initiale à 0,5 m de la face intérieure du parement était de 40 kN le 15 décembre 1980. Après 63 jours de gel, celle-ci est montée à 326 kN le 16 février 1981, ce qui représente une augmentation de 715%. Le poinçonnement local du béton du parement par les têtes de clous a été ainsi observé avec des enfoncement de l'ordre du centimètre.

Les surtensions locales induites par le gel au niveau des têtes de clous peuvent avoir des effets catastrophiques sur un ouvrage, si les liaisons des clous avec le parement ne sont pas dimensionnées en conséquence. La rupture successive des liaisons peut en effet conduire à un "déboutonnage" du parement.

Parmi les solutions qui ont été envisagées, dans le passé, pour prévenir de tels dégâts, on peut citer :

(1) l'isolation partielle ou totale du sol gélif, par un sol non gélif lui-même ou par un isolant thermique de synthèse ainsi que l'utilisation d'un chauffage;

(2) l'installation d'une liaison souple entre les clous et le parement pour laisser du "mou" au niveau des liaisons;

(3) l'augmentation du confinement du sol de manière à réduire le gonflement des lentilles de glace, qui représente environ les trois quarts du gonflement total. Pour augmenter le confinement plusieurs solutions existent, dont l'augmentation des sections des clous (sur-dimensionnement des clous) ou encore l'installation de clous supplémentaires de plus courtes longueurs, solution qui a déjà été employée en France.

L'isolation préventive des sols gélifs cloués est la solution actuellement recommandées par les Recommandations CLOUTERRE 1991 ainsi que la norme Française NFP 94 240 sur le clouage. Elle est efficace mais peut coûter chère suivant les cas.

Le surdimensionnement des clous est une solution préventive qui ne peut être utilisée que si le concepteur est capable de calculer les surtensions dans les clous. La méthode de calcul en déformation développée dans la présente thèse permet pour la première fois d'apporter une réponse en attendant que d'autres recherches complémentaires soient réalisées.

La disposition constructive consistant à rajouter des clous courts entre les clous longs a été déjà utilisée en France. Le principe est simple. Les clous longs assurent la stabilité d'ensemble indépendamment du gel. Les courts ne participent pas à la stabilité d'ensemble; ils servent à augmenter le confinement du sol gélif près du parement, de manière à réduire les gonflements et donc les surtensions. Cette méthode pour être utilisée avec efficacité, doit être basée sur un calcul, ce qui n'était pas possible jusqu'à présent puisqu'il n'existait pas de méthode de calcul. Dans le paragraphe qui suit, nous regarderons en détail comment cette méthode aurait pu être utilisée de manière préventive dans le cas de La Clusaz.

Les résultats des calculs présentés dans le paragraphe 7 de la partie B nous ont conduit à imaginer une nouvelle méthode, simple et économique, pour réduire les surtensions dans les clous de manière significative. Le principe est de laisser en tête des clous une longueur libre suffisante, de manière à ce que la rigidité équivalente imposée par les clous sur le front de gel soit comparable à celle d'un tirant. Au lieu d'avoir des augmentations de plusieurs centaines de pour-cents, les clous ne subissent plus que des augmentations de l'ordre de quelques dizaines de pour-cents. Cet ordre de grandeur est tout à fait tolérable puisqu'à la fin de la construction, la traction au parement n'est une faible fraction de la traction maximale dans le clou. Cette nouvelle méthode sera exposée dans les prochains paragraphes.

8.1 Installation de clous courts supplémentaires

L'intérêt d'ajouter des clous courts entre les clous longs, qui assurent par ailleurs la stabilité d'ensemble, a été étudié sur l'exemple de La Clusaz. Nous avons considéré un mur avec des clous longs identiques au clou No. 15 du mur en sol cloué de La Clusaz.

Deux types de maillage avec des clous courts ont été étudiés. La première configuration consiste à installer un clou court de 2 m de long au centre d'une maille constituée par 4 clous longs de 9 m. La deuxième configuration consiste à rajouter en plus du clou court précédemment installé, un clou court à mi-distance de tous les clous longs. Sans les clous courts, chaque clou long a une aire attribuée égale à $S_v S_h$. Dans le cas de la première configuration, l'aire attribuée par clou, court ou long, devient égale à $S_v S_h / 2$. Dans le deuxième cas, elle est égale à $S_v S_h / 4$.

Vu que l'on attribue à chaque clou, court ou long, la même aire alors qu'ils n'ont pas la même longueur, il en résulte que les tractions et déplacements au niveau de chaque type de clous seront différents.

Les simulations ont été faites pour les conditions thermiques de l'hiver 1980-1981 qui régnaient sur le site de La Clusaz et en utilisant les hypothèses de modélisation du cas IIa pour lequel il existe des solutions analytiques.

Les figures B.8-1a et B.8-1b présentent les simulations pour la première configuration tandis que les figures B.8-2a et B.8-2b présentent les simulations pour la deuxième configuration. Le tableau A.8-1 résume les réductions de traction et de déplacement observées.

Tableau A.8-1 : Influence des clous courts sur le comportement des clous longs

	Cas 1 (1 clou court pour 1 clou long)	Cas 2 (3 clous courts pour 1 clou long)
aire attribuée	$S_v S_h / 2$	$S_v S_h / 4$
traction (fin d'hiver)	- 18%	- 37%
déplacement du parement (fin d'hiver)	- 24%	- 39%

Les réductions sont significatives vu le peu de clous courts rajoutés. Entre le premier et le second cas, on rajoute trois fois plus de clous courts par clou long. L'incrément de traction ΔN est réduit d'un coefficient de deux; par contre, le déplacement est à peine réduit de moitié. Les relations ne sont pas linéaires et sont même plutôt complexes comme l'analyse mathématique présentée ci-dessous le montre.

Les solutions analytiques en traction et gonflement, qui est égal ici au déplacement du parement, sont de la forme :

$$N(t) = N_0 + N_g \ln\left(\frac{A}{-B\exp(N_0/N_g) + (A + B\exp(N_0/N_g))\exp(D\sqrt{t})}\right) \qquad \text{(B.8-1)}$$

$$h(t) = 2\frac{A}{D}\ln\left(1 + \frac{A + B\exp(N_0/N_g)}{A}(\exp(D\sqrt{t}) - 1)\right) \qquad \text{(B.8-2)}$$

où A, B, D et N_g sont quatre constantes, qui sont toujours positives. Seules N_g et D dépendent du maillage. Dans la paragraphe 7 de cette partie B, nous avons vu que pour le clou de La Clusaz, le rapport N_0 / N_g varie entre 0,1 et 0,5 durant la période hivernale. Ce rapport n'a donc qu'une influence très faible sur le comportement du mur. Par contre, N_g peut jouer par lui-même un aussi important que le coefficient D.

Ces coefficients sont donnés par :

$$D = 2\,A\,\frac{k_{eq}}{L_{eq}\cos\beta}\,\frac{b}{S_v S_h} \qquad \text{(B.8-3)}$$

$$N_g = \frac{S_v\,S_h}{b} \qquad \text{(B.8-4)}$$

En rajoutant des clous courts, on joue sur l'aire $S_v\ S_h$. Quand celle-ci est divisée par un coefficient α, le coefficient D est multiplié par α tandis que N_g est divisé par α. Les incréments ΔN et Δh sont divisés par α mais parallèlement le terme $D\sqrt{t}$ est multiplié par α. Comme on en prend successivement l'exponentielle puis le logarithme népérien, le résultat n'est pas linéaire en fonction de l'aire attribuée $S_v\ S_h$.

8.2 Installation d'une longueur libre supplémentaire

Nous avons étudié la nouvelle disposition constructive consistant à rajouter une longueur libre en tête du clou No. 15 du mur en sol cloué de La Clusaz. Les valeurs numériques sont les mêmes que celles utilisées précédemment pour étudier les configurations avec des clous courts et longs.

Le clou fait une longueur scellée de 9 m. Cette longueur scellée est gardée constante. On rajoute simplement en tête une longueur libre L_l , variant entre 0 et 9 m. Le cas d'une longueur libre nulle correspond au clou. La longueur libre minimale considérée est de 0.5 m afin d'éviter que le front de gel n'intersecte la longueur scellée d'un tirant au cours de l'hiver.

Les figures B.8-3a et B.8-3b présentent l'évolution de la traction et du déplacement du parement pour chacun des cas étudiés. La variation, en fonction de la longueur libre choisie, de la traction maximale et du déplacement final calculés en fin d'hiver, est représentée sur les figures B.8-4a et B.8-4b. Il convient de noter qu'un petite longueur libre de 0,5 m suffit à réduire de 20% la traction finale tandis que lé déplacement est réduit de 0,7%. Pour réduire par deux la traction finale, il faut installer une longueur libre égale quasiment à la longueur scellée. Le clou n'est plus alors qu'un tirant passif de petite capacité.

Tableau B.8-2 : Réductions de traction et déplacement
dues à la présence d'un longueur libre en tête du clou

	Traction	Déplacement
clou $L_l = 0{,}0$ m	-21%	-7%
clou avec $L_l = 6{,}0$ m (≈ 3 clous supplémentaires)	-42%	-15%
"tirant passif" $L_l = 9{,}0$ m	-47%	-16%

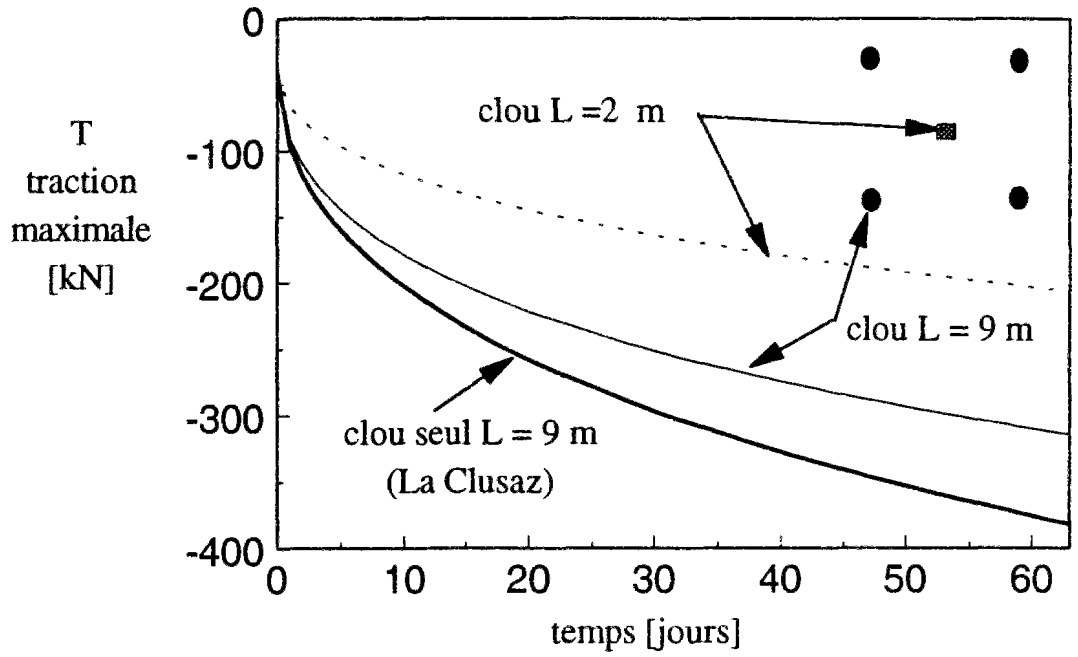


Figure A.8-1a : Evolution des tractions maximales dans les clous courts et longs pour la première configuration

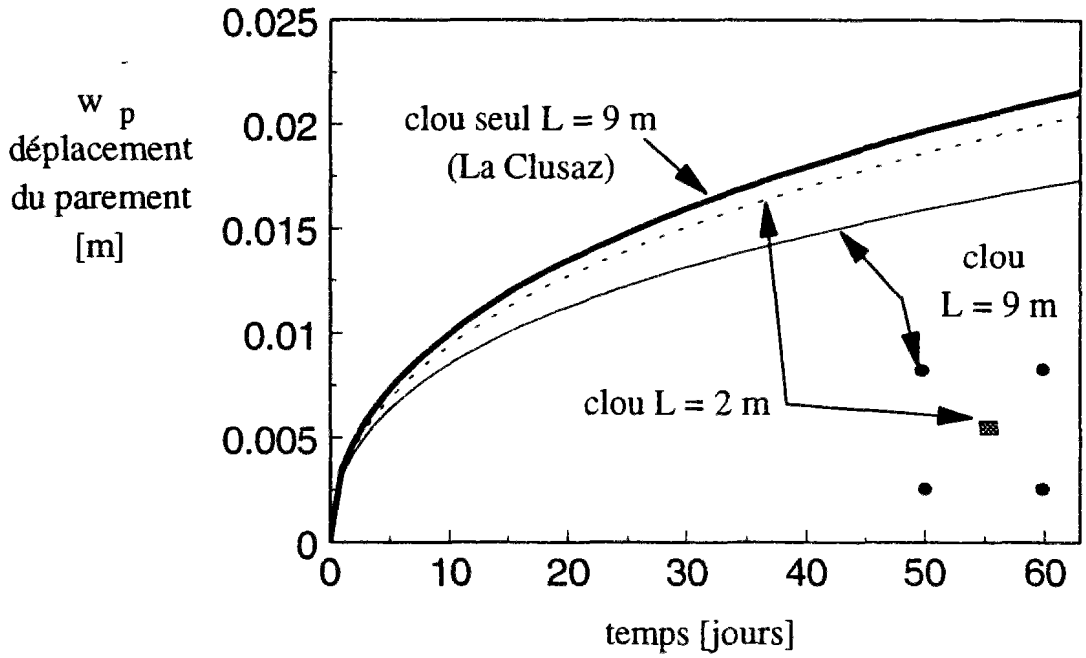


Figure A.8-1b : Evolution des déplacements dans les clous courts et longs pour la première configuration

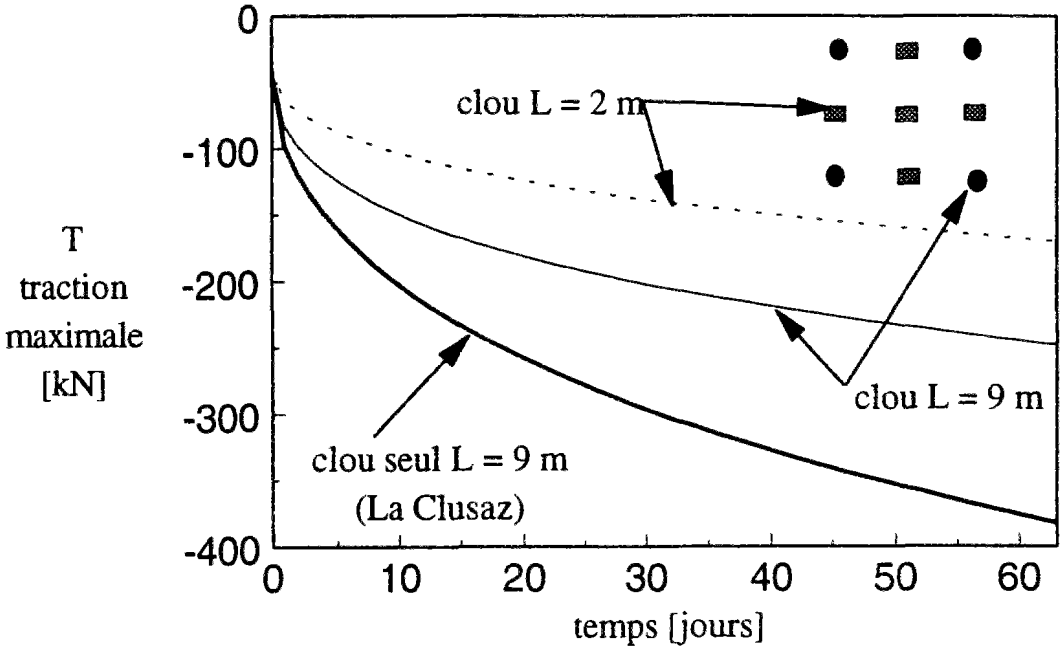


Figure A.8-2a : Evolution des tractions maximales dans les clous courts et longs pour la deuxième configuration

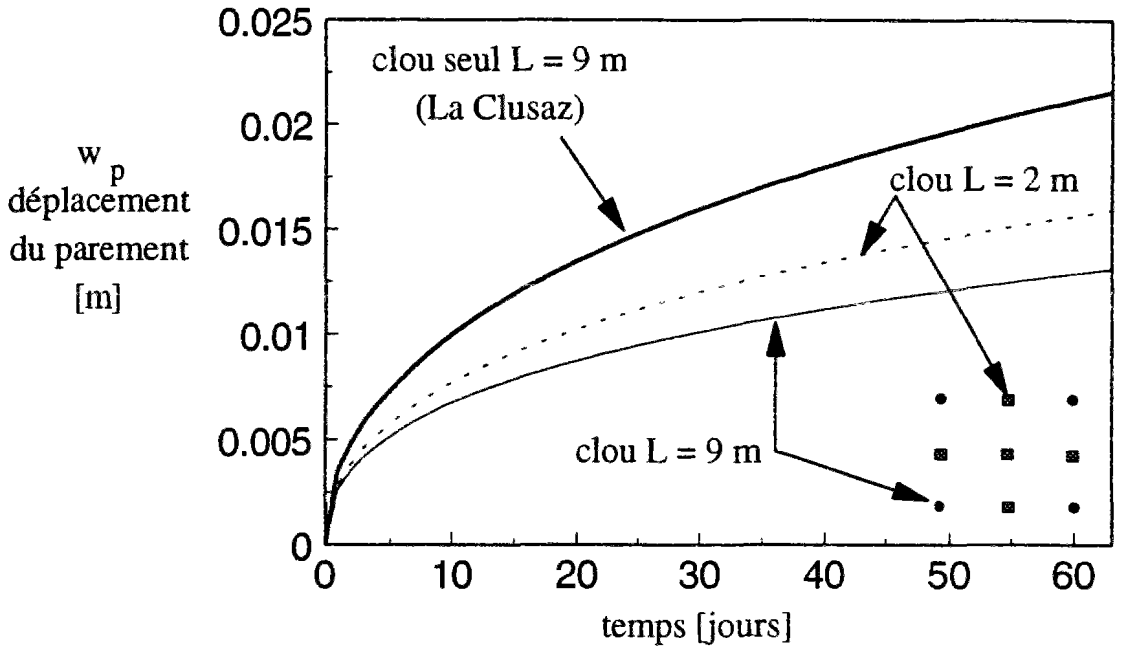


Figure A.8-2b : Evolution des déplacements dans les clous courts et longs pour la deuxième configuration

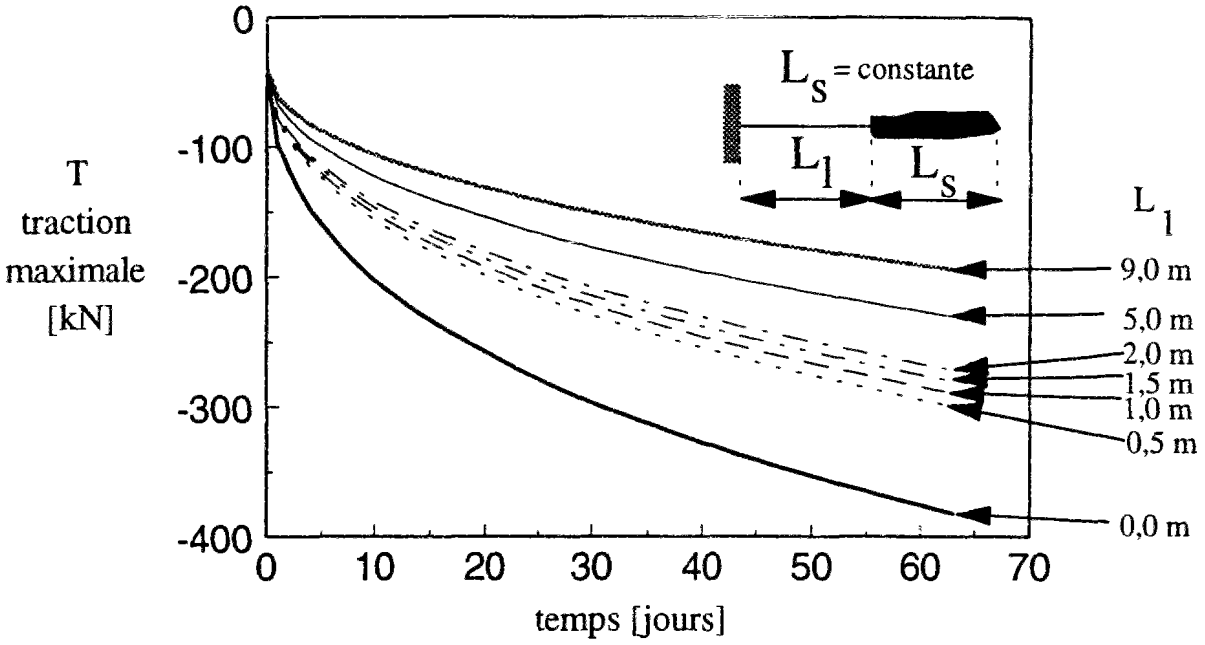


Figure B.8-3a : Comparaison de l'évolution au cours du temps
des tractions maximales dans les clous pour différentes longueurs libres

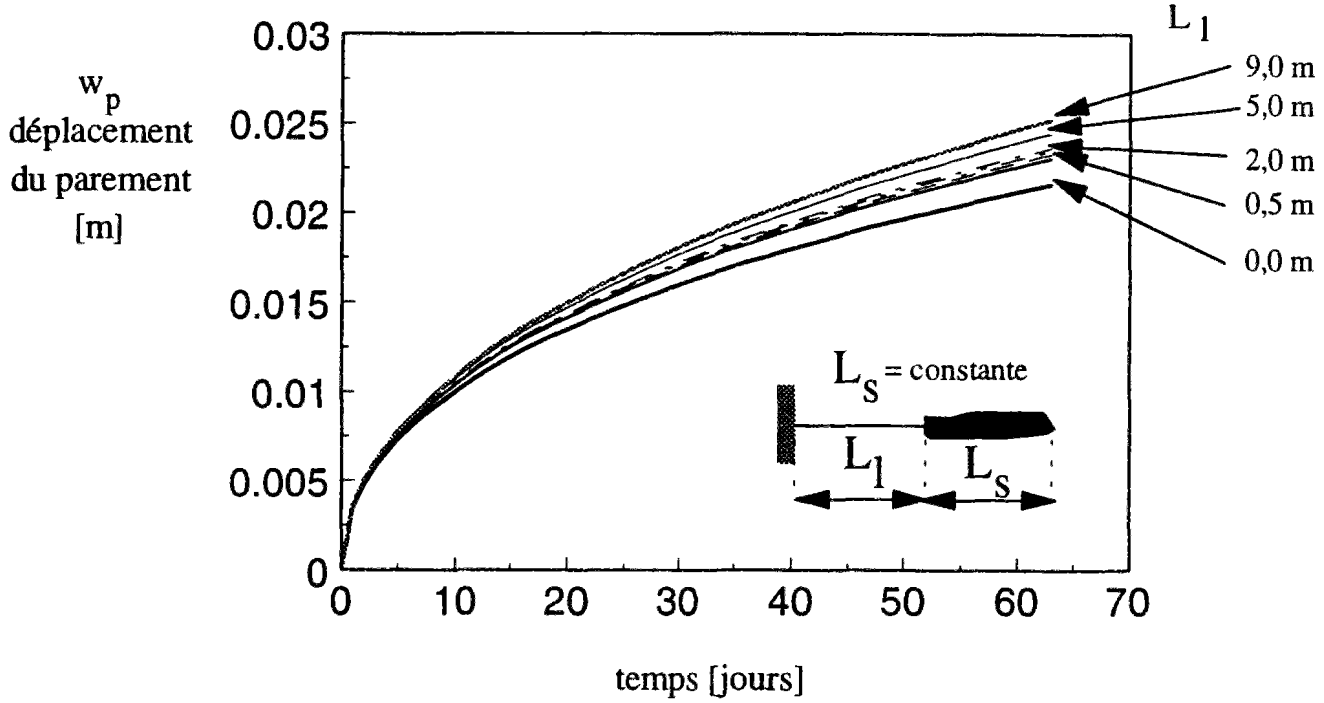


Figure B.8-3b : Comparaison de l'évolution au cours du temps
du déplacement du parement au niveau des clous pour différentes longueurs libres

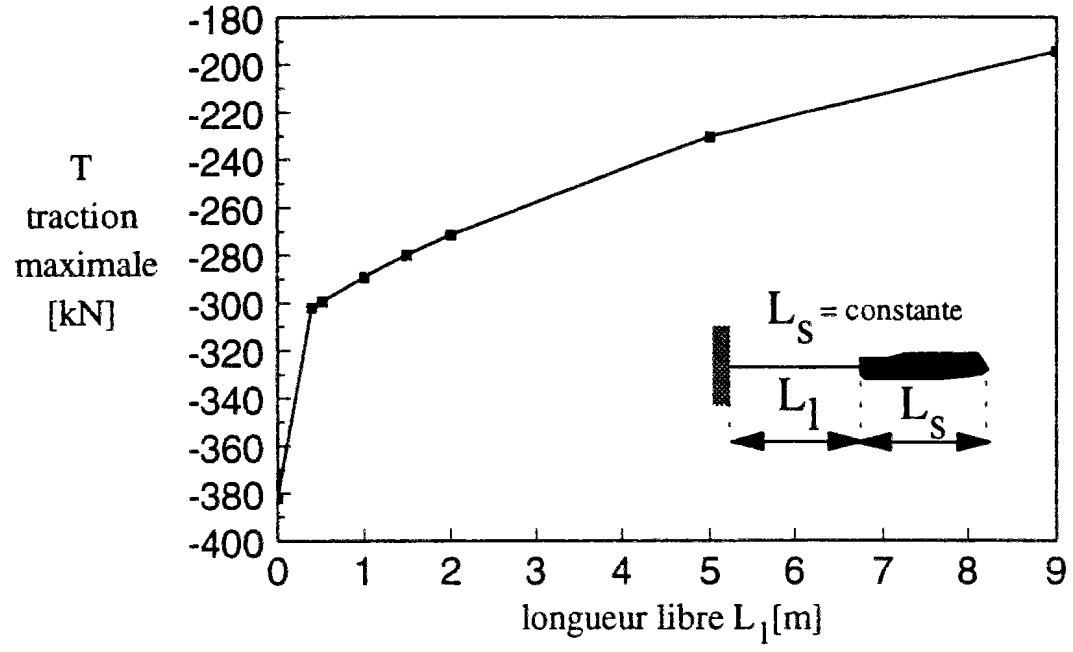


Figure B.8-4a : Variation de la traction maximale finale dans les clous en fonction de la longueur libre

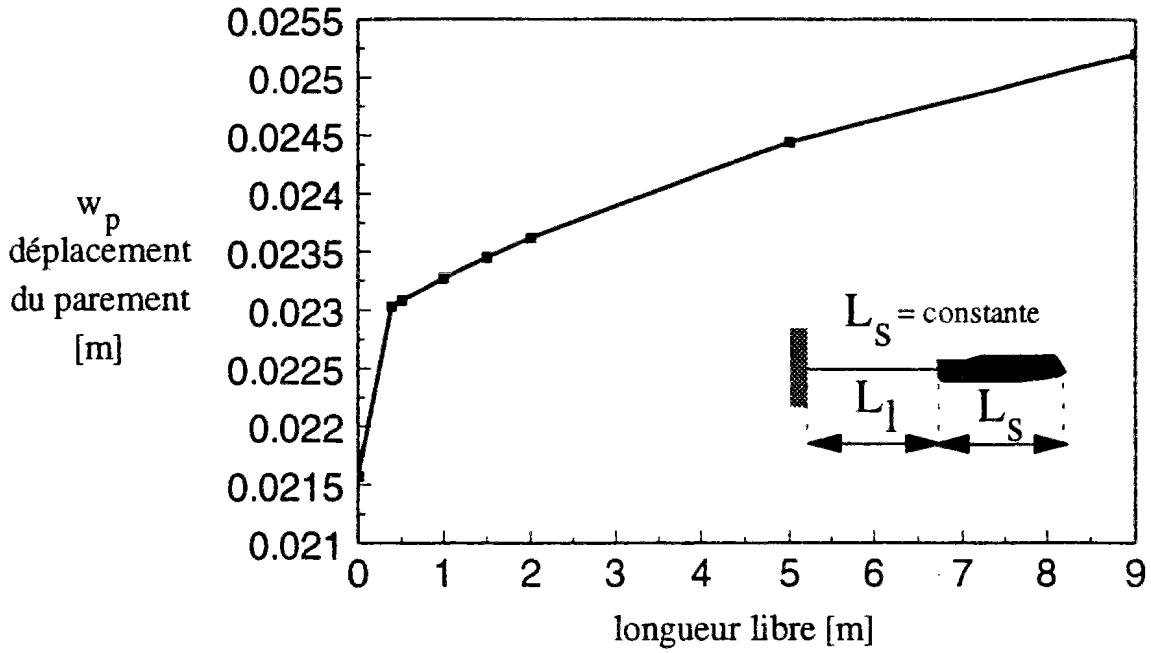


Figure B.8-4b : Variation du déplacement final du parement en fonction de la longueur libre

9 Conclusion et perspectives

Un modèle complet, permettant de modéliser les effets mécaniques du gel sur une paroi ancrée par tirants et un mur en sol cloué, a été présenté.

Il a été développé à partir de théories existantes aussi bien en thermique (lois de pénétration du gel de Stefan et Portnov), en hydraulique (modèle du Potentiel de Ségrégation) qu'en mécanique (loi de Frank et Zhao pour l'interaction entre le clou et le sol non gelé, modèle de Johnston et Ladanyi pour l'interaction entre le clou et le sol gelé). Des modifications ou améliorations ont été apportées à ces théories afin de tenir compte de la spécificité du problème étudié. Les développements concernent la modélisation de l'interaction entre le clou et le sol gelé, où il a fallu séparer les déformations pseudo-élastiques réversible et irréversible afin de traiter la relaxation au sein d'un mur en sol cloué.

Au cours d'un intervalle de temps, le gel induit des gonflements localisés qui définissent un profil de déplacements de "sol libre". Ces déplacements sont imposés au clou ou au tirant, par l'intermédiaire des fonctions de transfert de charge et de la connexion avec le parement, ce qui induit un nouvel état d'équilibre, caractérisé par un nouvel état de tractions et des déplacements du parement.

Les aspects thermiques et hydrauliques sont découplés des aspects mécaniques, au cours d'un intervalle de temps. Cependant, à la fin de chaque incrément de chargement, les variables thermiques et hydrauliques sont remises à jour en tenant compte des variables mécaniques, ce qui réintroduit le couplage complet dans le problème.

Le modèle développé et présenté a été testé et validé par rapport aux mesures obtenues sur deux ouvrages en vraie grandeur, soumis à des conditions réelles de températures hivernales à La Clusaz. Les calculs en déformation réalisés donnent des valeurs numériques en bon très accord avec les mesures, en début d'hiver, et légèrement divergentes, en fin d'hiver. Compte tenu de la simplicité du modèle, qui est unidimensionnel, ainsi que de la dispersion des mesures et des conditions difficiles dans lesquelles elles ont été réalisées, le modèle peut être considéré comme validé.

Le modèle développé peut être qualifié de complet, dans la mesure où il tient compte de tous les phénomènes : thermiques, hydrauliques et mécaniques. Cependant, il peut être simplifié en prenant pour la fonction de transfert de charge entre le clou et le sol gelé, la même que pour le clou et le sol non gelé. Cette hypothèse n'introduit qu'une différence d'environ 5% sur les tractions calculées, ce qui est dans le sens de la sécurité. Dans le cas du modèle simplifié, pour les hypothèses thermiques du cas IIa et si l'interaction entre le clou et le sol est supposée élastique, il est possible de développer des solutions analytiques. Celles-ci nous ont servis pour : (1) mettre en évidence la différence fondamentale de comportement entre un tirant et un clou et (2) pour étudier les deux types de dispositions constructives permettant de limiter préventivement les surtensions induites par le gel dans les clous.

Une première disposition, consistant à rajouter des clous courts de 2 m entre les clous longs de 9 m qui assurent la stabilité d'ensemble, a été étudiée pour deux configurations. La première configuration consiste à rajouter en moyenne un clou court pour chaque clou long, tandis que la deuxième consiste à rajouter trois clous courts pour chaque clou long.

Une deuxième disposition consiste à rajouter en tête de chaque clou une longueur libre, qui peut être faible, de l'ordre de 0,5 m, de manière à éviter que le front de gel n'intersecte la longueur scellée, ou beaucoup plus longue, si l'on rajoute une longueur libre égale à la longueur scellée de 9 m. Il faut noter que le simple fait de laisser en tête des clous une longueur libre de 0,5 m permet de réduire de 21% les tractions.

Entre les deux dispositions, si l'on considère une longueur totale de clous supplémentaires équivalente, comme par exemple, trois clous courts de 2 m pour la première disposition et une longueur libre supplémentaire de 6 m pour la deuxième, on obtient respectivement des réductions de -37% et -42%. Ce cas particulier constitue une sorte de point d'équilibre économique en terme de longueur totale des clous supplémentaires. En effet, si l'on considère une longueur totale de clous supplémentaires plus faible, c'est la deuxième disposition qui est la économique, tandis que si elle est plus grande, c'est la première disposition qui se retrouve être la plus économique.

Même si le modèle développé a donné de bons résultats, il conviendrait dans des études futures d'améliorer plusieurs points.

Le modèle d'interaction entre le clou et le sol gelé est basé sur la modélisation du fluage dans les sols gelés, proposée par Johnston et Ladanyi (1972). D'autres modèles ont été proposés et mériteraient d'être appliqués au cas présent. En particulier, il est de première importance de savoir si l'on peut généraliser les conclusions de la présente étude, pour ce qui concerne les modèles, dits complet et simplifié. En effet, le calcul simplifié, consistant à garder pour le sol gelé la même fonction de transfert de charge que pour le sol non gelé, donne, dans le cas présent, des valeurs majorées pour les tractions dans les clous au parement.

Un deuxième point important concerne les tendances du modèle sur la deuxième moitié de l'hiver. Les mesures indiquent toutes une inversion de tendance au milieu de l'hiver. Par contre, le modèle garde la même tendance sur tout l'hiver. Plusieurs explications peuvent être proposées. Les mesures peuvent être remises en cause puisqu'elles sont très dispersées et ont été réalisées dans des conditions climatiques difficiles avec une dérive possible des jauges en fonction du temps. Ce point mériterait d'être éclairci sur les mesures ultérieures, réalisées sur des ouvrages en vraie grandeur, soumis à des conditions climatiques hivernales rudes. Dans le cas où les tendances observées à La Clusaz seraient confirmées, il conviendrait d'identifier les phénomènes physiques responsables afin de pouvoir les modéliser et les intégrer au modèle proposé.

Un dernier point qui mériterait plus de recherches concerne la détermination des paramètres. La théorie du Potentiel de Ségrégation, qui a été choisie pour modéliser les gonflements, est utilisée principalement au Canada. Les paramètres de cette théorie n'ont pas ou peu été mesurés pour des sols français. Il conviendrait, sur ce point, de constituer une base de données propre aux sols français. Dans le même ordre d'idées, pratiquement aucun essai d'arrachement d'inclusions scellées dans des sols gelés n'a été réalisé en France. Ce sujet mériterait lui aussi de plus amples recherches.

NS 17 999 (7.2)(4)

THESE DE DOCTORAT

Spécialité : Géotechnique

présentée à

l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées

par

Philippe UNTERREINER

Contribution à l'étude et à la modélisation numérique des sols cloués : application au calcul en déformation des ouvrages de soutènement

Volume II

Centre d'Enseignement et de Recherche en Mécanique des Sols
(CERMES/ENPC-LCPC)

Date de soutenance : jeudi 20 octobre 1994

Jury :

Président	:	M. François Schlosser
Rapporteurs	:	M. Marc Boulon
		M. Ioannis Vardoulakis
Examinateurs	:	M. Günther Gässler
		M. Ilan Juran
		M. Jean-Pierre Magnan
		M. Claude Plumelle
		M. Pierre Vézole

E.N.P.C.
INV00555

10

Partie C

Calculs en déformation des murs en sol cloué : application au mur CLOUTERRE-CEBTP No.1

Cherchant la vérité, poursuivant ma tentative de savoir tout ce qui se passe sur la terre, je vis ainsi les oeuvres de Dieu passer sous mon regard et je reconnus que l'homme, quand même jour et nuit il refuserait le sommeil à ses yeux, ne saurait arriver à la compréhension de ce qui arrive sous le soleil. Non, quelque effort, quelque recherche qu'il fasse, il n'y arrivera jamais, et tel savant qui prétend en savoir quelque chose en réalité n'y comprend rien.

Alors j'ai chanté un hymne à la joie, puisqu'il n'y a rien de bon pour l'homme sous le soleil que de manger, de boire, de se réjouir, et que c'est là tout ce qui lui reste des travaux auxquels il s'est livré durant les jours de vie que Dieu lui a donnés sous le soleil.

"Un temps pour tout", L'écclésiaste, traduit de l'Hébreu par Ernest Renan

Résumé

La technique du clouage, qui est apparue en 1972, a connu depuis un formidable développement, en France ainsi qu'à l'étranger. En France, un important effort de recherche a été réalisé, de 1986 à 1991, dans le cadre du Projet National CLOUTERRE. Le but de ce projet, orienté sur les ouvrages de soutènement, était de mieux connaître le comportement des murs en sol cloué, durant leur construction, leur mise en service et jusqu'à la rupture afin de définir des règles de conception et de dimensionnement. La méthode de dimensionnement, développée dans le cadre de ce projet, est une méthode aux états limites ultimes avec coefficients partiels de sécurité. L'analyse est conduite par un calcul à la rupture qui permet d'assurer la stabilité d'un ouvrage mais ne permet pas de calculer ses déformations. L'objectif du Projet National CLOUTERRE II, lancé dans le prolongement du premier projet CLOUTERRE, est d'étudier les méthodes de calcul en déformation. Les recherches présentées dans cette thèse font partie de ce vaste cadre d'étude.

Parmi les méthodes de calcul en déformation d'ouvrages en sol cloué, il convient de distinguer deux types d'approches, l'approche discrète où les clous sont modélisés séparément du sol, et l'approche par homogénéisation où le sol renforcé est considéré comme un matériau. Parmi les approches discrètes, nous distinguons : (1) les méthodes générales, qui consistent à résoudre numériquement les équations d'équilibre et de comportement pour l'ensemble de l'ouvrage considéré, en utilisant des lois de comportement plus ou moins complexes pour chacun des matériaux, (2) la méthode de l'équilibre local, qui consiste à étudier l'équilibre d'une tranche de sol et de parement autour d'un élément de renforcement horizontal, et (3) les méthodes semi-empiriques, qui fournissent des règles simples d'estimation des déplacements à partir de résultats expérimentaux antérieurs. De toutes ces méthodes, seules les méthodes générales telles que : la méthode des éléments finis ou la méthode des différences finies, permettent de traiter les ouvrages réels dans toute leur complexité, géométrique et rhéologique.

Plusieurs études ont été réalisées sur les calculs en déformation d'ouvrage en sol cloué. Shafiee (1986) a montré l'importance du phasage de la construction sur le champ de déplacements. Chiguer (1989) a montré que les efforts dans les clous sont relativement insensibles au module de déformation du sol et il a obtenu pour le mur en sol cloué CLOUTERRE-CEBTP No. 1 des résultats très bons pour les tractions mais plutôt médiocres pour les déplacements. Ouelogo (1989) a montré l'importance du glissement relatif du sol par rapport aux clous ainsi que la nécessité d'imposer des relations linéaires entre le sol de part et d'autre des clous, de manière à assurer la continuité du sol, dans le cas du modèle de la plaque équivalente. Nanda (1989) a utilisé la loi de Duncan et Chang pour modéliser le mur CLOUTERRE-CEBTP No. 1. Il a obtenu des résultats, bons pour les déplacements et moins bons pour les tractions, en choisissant pour le module d'Young du sol le module pressiométrique.

La modélisation en déformation des murs en sol cloué repose sur plusieurs hypothèses qu'il convient d'analyser en détail afin de bien comprendre les limites des modèles. En particulier, un calcul, dit 2D, est un calcul tridimensionnel dans lequel, il est supposé que les déformations sont planes. Or, dans un mur en sol cloué, seules les sections situées à mi-distance de deux rangées verticales de clous peuvent, dans une certaine limite, être considérées comme étant en déformations planes.

Le modèle de la plaque équivalente, qui a été beaucoup utilisé jusqu'à présent, considère une section verticale passant par une rangée de clous où les conditions de déformations planes ne sont jamais respectées. Ce modèle est fondé sur une hypothèse très forte d'adhérence du sol avec les clous pour obtenir le module équivalent, et une hypothèse contradictoire de glissement relatif du sol par rapport aux clous pour obtenir le frottement latéral limite. De plus, l'équivalence entre les paramètres des clous réels et ceux des renforcements modèles, qui n'est jamais clairement formulée, varie d'un auteur à l'autre. En particulier, les effets 3D importants, mis en évidence par Chaoui (1989) entre les essais d'arrachement d'un clou cylindrique et de la plaque équivalente, proviennent en grande partie du choix des paramètres équivalents. La même rigidité de cisaillement des éléments d'interface a été prise pour le clou cylindrique et pour la plaque, ce qui conduit à avoir une interaction entre la plaque et le sol dix fois plus rigide que l'interaction entre le clou et le sol. Nous développons rigoureusement le calcul des paramètres équivalents dans le cas de "clous placés hors du sol", puis montrons dans quel cas particulier cette méthode et celle de la plaque équivalente sont équivalentes.

La modélisation des phases d'excavation par la méthode des éléments finis a fait l'objet de nombreuses études depuis le début des années 1970. Nous montrons les progrès successivement réalisés pour arriver aux méthodes actuelles qui permettent de calculer précisément les forces appliquées sur les bords d'une excavation. Les méthodes originelles donnaient des forces surestimées de plusieurs à quelques dizaines de pour-cents, ce qui engendre des soulèvements de fond de fouille excessifs.

Trois exemples, correspondants successivement : (1) aux essais triaxiaux de sol seul et de sol renforcé par disques d'aluminium réalisés par Schlosser et Long (1972), (2) à l'essai d'arrachement du clou préalable No. 5 et (3) au mur exprimental en vraie grandeur CLOUTERRE-CEBTP No. 1 (Plumelle, 1986), sont ensuite modélisés à l'aide de trois logiciels de calcul. Ces trois exemples ne sont pas des cas d'école théoriques mais correspondant tous à des essais ou des ouvrages, réalisés et instrumentés. Les deux premiers exemples ont été modélisés à l'aide du logiciel d'éléments finis CESAR et du logiciel de différences finies FLAC. Pour le calcul en déformation du mur CLOUTERRE-CEBTP No. 1, nous avons, en outre, utilisé le logiciel d'éléments finis PLAXIS.

Il ressort de l'étude réalisée sur les essais triaxiaux et sur l'essai d'arrachement, que les résultats obtenus par les deux méthodes numériques sont très proches. En particulier, sur les exemples où seuls des éléments volumiques sont utilisés, avec adhérence parfaite entre le sol et les renforcements, les résultats sont égaux à moins d'un pour-cent, ce qui correspond aux erreurs numériques inhérentes à ce genre de calcul. Dans les exemples où existent des éléments d'interface, nous avons noté des différences du même ordre de grandeur, en général, sauf dans le cas particulier d'un essai triaxial de sol renforcé par des disques d'aluminium, modélisé avec des interfaces frottants et une loi d'écoulement associé, où une différence plus importante a été trouvée pour ce qui concerne la contrainte déviatorique limite. Cette différence peut être attribuée à la précision des éléments d'interface, qui sont à 4 noeuds dans un cas, et à 6 noeuds, dans l'autre cas. Dans l'essai d'arrachement, qui est très simple, la différence entre les deux méthodes est négligeable.

L'objet de l'étude réalisée sur l'essai d'arrachement est de comparer les différentes méthodes de calcul ou d'estimation du coefficient élastique de mobilisation du frottement latéral unitaire. Nous avons pu ainsi calculer la valeur réelle de ce module et ensuite déterminer le bon coefficient de corrélation entre ce module et le module pressiométrique. Ce point est important car dans les études réalisées antérieurement sur le mur CLOUTERRE -CEBTP No. 1, aucune analyse de ce type n'a été faite.

Le mur en sol cloué CLOUTERRE-CEBTP No. 1 est le seul mur en vraie grandeur, construit dans un sol homogène, aux propriétés connues, a avoir été instrumenté et suivi, depuis sa construction jusqu'à la rupture. L'analyse des mesures réalisées sur le mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1, durant sa construction, nous a conduit à sélectionner comme base de référence pour les calculs en déformation, les cinq premières phases de construction, dans la mesure où elles ont été réalisées sur une période de quelques semaines. Il convient de noter que les données inclinométriques du site avaient été dépouillées en 1986 en faisant l'hypothèse que les déplacements sont nuls en pied de mur. Depuis ce dépouillement, les études numériques réalisées sur des murs en sol cloué ont montré que le sol se déforme en profondeur, très largement en dessous du pied du parement. Nous avons donc repris les données inclinométriques initiales, pour les dépouiller à nouveau, en faisant, cette fois-ci, l'hypothèse que les déplacements sont nuls seulement aux pieds des inclinomètres. Nous avons ainsi obtenu de nouvelles valeurs qui ont servies comme base de référence pour tous les calculs présentés. Pour ce qui concerne les tractions, les données originelles de Plumelle (1986) ont été utilisées.

Les différentes parties de l'ouvrage ont été modélisées en utilisant des lois de comportement, soit linéaires élastiques pour le béton du parement et du mur de soutènement en arrière du massif en sol cloué, soit linéaires élastiques parfaitement plastiques pour le sol de remblai, le sol de fondation, les clous, les interfaces entre le sol et les clous, l'interface entre le sol et le béton du mur de soutènement, les interfaces entre les clous et le béton du parement. Pour un comportement élastoplastique, le nombre de paramètres est réduit au minimum indispensable : 2 paramètres pour la partie linéaire élastique (E, module d'Young et ν, coefficient de Poisson) et 4 paramètres pour la partie plastique du comportement (c, cohésion, ϕ, angle de frottement interne, σ_t , résistance en traction, si le critère est tronqué et ψ , angle de dilatance). Compte tenu du nombre de matériaux constitutifs du mur en sol cloué, environ 28 paramètres mécaniques sont à déterminer précisément .

Une analyse détaillée des méthodes de détermination des paramètres à partir des essais in situ et en laboratoire a été réalisée afin de choisir les paramètres les plus appropriés pour les calculs en déformation. Les paramètres des sols de remblai et de fondation ont été déterminés à partir des résultats des essais pressiométriques réalisés sur le site ainsi que d'essais triaxiaux réalisés en laboratoire sur le sable de Fontainebleau. Le module d'Young a été pris égal à deux fois le module pressiométrique moyen mesuré sur le site. La cohésion a été estimée à partir de deux études réalisées dans le passé sur la cohésion apparente dans des sables similaires. Les propriétés des clous ont été calculées à partir de celles des tubes d'aluminium, dans la mesure où le coulis de scellement est très vite fissuré sous des efforts de traction. Pour le frottement latéral unitaire, nous avons pris les valeurs des abaques CLOUTERRE, bien qu'elles soient très largement sous estimées.

Ce choix se justifie dans la mesure où les interfaces plastifient peu durant la construction. Le module de mobilisation du frottement latéral a été déterminé grâce à l'étude sur l'essai d'arrachement du clou préalable No. 5. Les paramètres du béton projeté ont été estimés à partir des valeurs de référence proposées par le BAEL.

Les paramètres ayant été choisis grâce à une analyse détaillée et précise, des calculs en déformations, à l'aide des logiciels d'éléments finis CESAR et PLAXIS et du logiciel de différences finies FLAC, ont été réalisés. Les tractions calculées par ces trois logiciels, à la fin de la phase 5 (H = 5m), sont en assez bon accord avec les mesures, à plus ou moins 3 kN. Les déplacements calculés au parement sont très légèrement sur-estimés mais restent proches. Dans le sol à 2 m, du parement, les mesures sont parfaitement encadrées par les calculs. Plus loin, en arrière dans le massif de sol cloué, à 4 et 8 m du parement, les déplacements calculés sont légèrement sur-estimés. Dans l'ensemble, les résultats trouvés sont nettement meilleurs que ceux obtenus antérieurement puisque les mesures sont encadrés dans une fourchette dont la largeur est réduite par un coefficient de 2. A part les deux premières phases où la tête du parement se soulève, celui-ci tasse durant tout le reste de la construction. Les calculs avec pour le sol un module d'Young, égal à 2 et 4 fois le module pressiométrique, encadrent très précisément le déplacement en tête du mur. Les déplacements horizontaux calculés par les trois logiciels encadrent bien les mesures. Les soulèvements de fond de fouille restent tous dans des valeurs raisonnables, inférieures au centimètre. Les soulèvements excessifs observés dans le passé n'ont pas été rencontrés dans le cas présent.

Une étude de sensibilité a été réalisée. Parmi les paramètres qui ont été variés, il faut noter que (1) l'hypothèse de clous élastiques, (2) l'initialisation des contraintes en faisant un calcul complet des phases de construction du remblai, (3) la variation des paramètres élastiques et plastiques en fonction de la profondeur, (4) le choix d'un module du béton dix fois plus important et (5) la pré-tension des clous à leur installation, n'ont pas changé les résultats de manière significative. Par contre, le choix (1) d'un module de déformation pour les clous double, (2) d'un coefficient de mobilisation du frottement latéral divisé par dix, (3) d'une résistance en traction du sol σ_t différente de c / tan ϕ , (4) d'une cohésion légèrement plus importante de 1 kPa, (5) d'un angle de dilatance nul, ou (6) d'un module d'Young du sol deux fois plus important et égal à 4 E_M , modifie les résultats des calculs de manière très sensible. En particulier, nous avons montré que les deux paramètres de rupture : c et σ_t , ont une influence très importante sur les déplacements. Les deux calculs avec une cohésion, égale à 3 et 4 kPa, tous les autres paramètres restant inchangés, donnent des déplacement de parement qui encadrent parfaitement les mesures. La résistance en traction du sol, quant à elle, ne peut pas être réduite sans qu'une rupture locale en pied de mur ne se produise et induise des déplacements très importants en tête du mur. Pour ce qui concerne les paramètres de déformation élastique, comme le module du sol, le module des clous et le coefficient de mobilisation, leur influence sur la réponse du mur était évidente et elle a été peu évaluée précisément. Il à noter, que vu la faible hauteur du mur en sol cloué, la prise en compte d'une variation linéaire avec la profondeur des paramètres géotechniques ne modifie pas de manière sensible les résultats des calculs. Ceci est en faveur de modèles élastoplastiques où le module d'Young ne varie pas avec la profondeur. Dans des ouvrages de plus grande hauteur, ces variations devraient avoir une influence nettement plus grande.

Table des matières

1 Introduction 15
1.1 Historique 15
1.2 La technique du clouage 16
1.3 Développement du clouage 17
1.4 Avantages et limitations du clouage 18
1.5 Applications 19
1.6 Comportement des murs en sol cloué 19
1.7 Problème étudié 22

2 Etat des connaissances sur les calculs en déformation de murs en sol cloué 25
2.1 Les calculs en déformation en renforcement des sols 25
2.1.1 Approches discrète et homogénéisée 26
2.1.2 Méthodes numériques 28
2.1.2.1 Méthodes générales 28
2.1.2.1.1 Méthode des éléments finis 28
2.1.2.1.2 Méthode des différences finies 32
2.1.2.1.3 Méthodes des équations intégrales 33
2.1.2.2 Méthode de l'équilibre local 33
2.1.2.3 Méthodes semi-empiriques 35
2.1.3 Conclusion sur les méthodes de calcul en déformation 37
2.2 Bibliographie sur les calculs en déformation de murs en sol cloué 37
2.2.1 Synthèse des études de Shafiee (1986) 38
2.2.1.1 Déplacements 38
2.2.1.2 Tractions 41
2.2.2 Synthèses des études de Chiguer (1989) 43
2.2.2.1 Soulèvements et déplacements 43
2.2.2.2 Tractions 44
2.2.3 Synthèse des études de Nanda (1988, 1989) 47
2.2.3.1 Loi de comportement 47
2.2.3.2 Première étude 47
2.2.3.3 Deuxième étude 48
2.2.4 Synthèse des études de Ouelogo (1989) 50
2.2.5 Synthèse des études de Salama (1992) 55
2.2.6 Conclusion de l'étude bibliographique 57

3 Eléments de modélisation des sols cloués 60
3.1 Interaction entre le sol et les clous 60
3.1.1 Introduction et remarques générales 60
3.1.1.1 Modification de l'état des contraintes durant l'installation 60
3.1.1.2 Hypothèses sur le comportement des interfaces 60
3.1.1.3 Comportements local et global 61
3.1.2 Analyse des conditions de déformations planes dans un ouvrage en sol cloué 62
3.1.2.1 Comparaison entre un clou et une plaque 62
3.1.2.2 Eléments de renforcement linéaires et bidimensionnels 69

3.1.2.3 Conditions de déformations planes pour des clous sub-horizontaux 70
3.1.2.3.1 Clous souples 72
3.1.2.3.2 Clous rigides 72
3.1.2.4 Conditions de déformations planes pour des clous sub-verticaux 73
3.1.3 Modélisation "2D" d'un mur cloué 74
3.1.3.1.1 Loi de comportement de la plaque équivalente 76
3.1.3.1.1.1 Module élastique 76
3.1.3.1.1.2 Résistance en traction 79
3.1.3.1.2 Interaction entre la plaque équivalente et le sol 79
3.1.3.2 Modèles avec fonction de transfert de charge pour des "clous placés hors du sol" 80
3.1.3.2.1 Définitions et notations 80
3.1.3.2.2 Loi de comportement des clous 81
3.1.3.2.3 Interaction entre le sol et les clous 82
3.1.4 Relations entre le modèle de la plaque équivalente et le modèle des clous placés hors du sol 85
3.1.5 Motifs de sols cloué 86
3.2 Modélisation des phases d'excavation 87
3.3 Lois de comportement des matériaux 95
3.3.1 Déformations "différées" 95
3.3.2 Déformations "instantanées" 96
3.3.2.1 Rotation des contraintes 97
3.3.2.2 Lois de comportement pour les sols 97
3.3.2.3 Lois de comportement pour les interfaces 98
3.4 Contraintes initiales et conditions aux limites 100
3.4.1 Etat de contraintes initiales 100
3.4.2 Conditions aux limites 100

4 Modélisation d'essais triaxiaux de sol renforcé par des disques d'aluminium 101
4.1 Présentation des essais 101
4.2 Détermination des paramètres de calcul 101
4.3 Modélisation des essais 102
4.3.1 Sol 102
4.3.2 Aluminium 103
4.3.3 Eléments d'interface 104
4.3.4 Modélisation du chargement 105
4.4 Analyse des résultats des essais triaxiaux 106
4.4.1 Essais à 380 kPa 106
4.4.2 Essais à 10 kPa 107
4.4.3 Courbes intrinsèques des matériaux : sol et sol-renforcé 110
4.4.4 Analyse de l'état des contraintes et déformations au sein des échantillons 111
4.5 Conclusion de l'étude 114

5 Modélisation de l'essai d'arrachement du clou préalable No. 5 129
5.1 Descriptif de l'essai d'arrachement 129
5.1.1 Caractéristiques des clous 129

5.1.2 Influence possible du coulis de scellement 130
5.2 Calcul du coefficient de mobilisation du frottement latéral 131
5.2.1 Calcul à partir de la courbe d'arrachement 131
5.2.2 Estimation à partir du module d'Young du sol 132
5.2.3 Estimation à partir de la formule de Frank et Zhao (1982) 132
5.2.4 Estimation à partir des corrélations CLOUTERRE 133
5.2.5 Comparaison des différentes méthodes 134
5.3 Simulations numériques de l'essai d'arrachement 136
5.3.1 Maillage et caractéristiques mécaniques 136
5.3.2 Courbes effort - déplacement en tête 138
5.3.3 Conclusion sur les simulations numériques de l'essai d'arrachement 140

6 Calculs en déformation du mur en sol cloué CLOUTERRE-CEBTP No. 1 141
6.1 Présentation de l'expérimentation 141
6.2 Analyse des résultats de l'instrumentation 141
6.3 Détermination des caractéristiques des éléments constitutifs 147
6.3.1 Sols 148
6.3.1.1 Paramètres élastiques 148
6.3.1.1.1 Corrélations avec les essais pressiométriques 148
6.3.1.1.2 Essais triaxiaux en compression 151
6.3.1.2 Paramètres plastiques 154
6.3.1.3 Synthèse des valeurs de calcul des paramètres mécaniques des sols 157
6.3.2 Détermination des caractéristiques des clous 158
6.3.2.1 Essais de tubes d'aluminium 158
6.3.2.2 Essai d'un clou fabriqué en place et testé en laboratoire 159
6.3.3 Interaction sol-clou 161
6.3.3.3.1 Coefficient de mobilisation 161
6.3.3.3.2 Frottement latéral unitaire limite 162
6.3.3.3.3 Interaction entre le béton et les clous 165
6.3.4 Béton 167
6.3.6 Contacts entre le sol et les bétons 169
6.3.6.1 Contact entre le sol de remblai et le béton projeté du parement 169
6.3.6.2 Contact entre le sol de remblai et le béton du soutènement à l'arrière 169
6.3.7 Remarques sur les paramètres de calcul pour PLAXIS 169
6.4 Modélisation du problème aux limites 170
6.4.1 Maillage 170
6.4.2 conditions aux limites 173
6.4.3 Initialisation des contraintes 173
6.4.4 Phasage de la construction 173
6.4.4 Dépouillement des déplacements 175
6.5 Calcul de référence 175
6.5.1 Calcul de référence avec le logiciel CESAR 176
6.5.2 Calcul de référence avec le logiciel FLAC 189
6.5.3 Calcul de référence avec le logiciel PLAXIS 194

6.5.4 Comparaison des calculs de référence 196
6.6 Etude de sensibilité des paramètres 210
6.6.1 Première étude de sensibilité 210
6.6.1.1 Clous élastiques 210
6.6.1.2 Module de déformation des clous 215
6.6.1.3 Coefficient de mobilisation du frottement latéral 215
6.6.1.4 Résistance en traction du sol 215
6.6.1.4.1 Critère tronqué à zéro 222
6.6.1.4.2 Critère tronqué à 2 c tan ($\pi/4 - \phi/2$) 222
6.6.1.4.3 Conclusion sur le critère tronqué 222
6.6.1.5 Cohésion du sol 229
6.6.1.6 Angle de dilatance du sol 229
6.6.1.7 Paramètres variables avec la profondeur 229
6.6.1.8 Continuité du maillage 241
6.6.1.9 Comparaison de tous les calculs 241
6.6.2 Deuxième étude de sensibilité 249
6.6.1.1 Module d'Young du sol 249
6.6.1.2 Module de déformation du béton 249
6.6.1.3 Etat des contraintes initiales 256
Calculs avec deux types d'initialisation des contraintes dans le sol (CESAR) 261
6.6.1.4 Pré-tension des clous 262
6.6.1.6 Comparaison des calculs 267
6.7 Conclusion des calculs en déformation 273

7 Conclusion de l'étude 275

1 Introduction

1.1 Historique

Le premier mur en sol cloué a été réalisé en France en 1972-1973 à Versailles pour l'élargissement de voies SNCF (Rabejac et Toudic, 1974). Le clouage a ensuite connu un développement remarquable en France et en Allemagne, puis dans les autres pays (Gässler, 1990). Actuellement, la technique est utilisée aussi bien pour des ouvrages provisoires, temporaires que permanents.

La technique du clouage des sols en soutènement consiste à renforcer un sol en place, au fur et à mesure de son excavation, en plaçant des inclusions sub-horizontales dans le sol et en réalisant un parement le plus souvent en béton projeté, renforcé par une ou deux nappes de treillis (figure C.1-1).

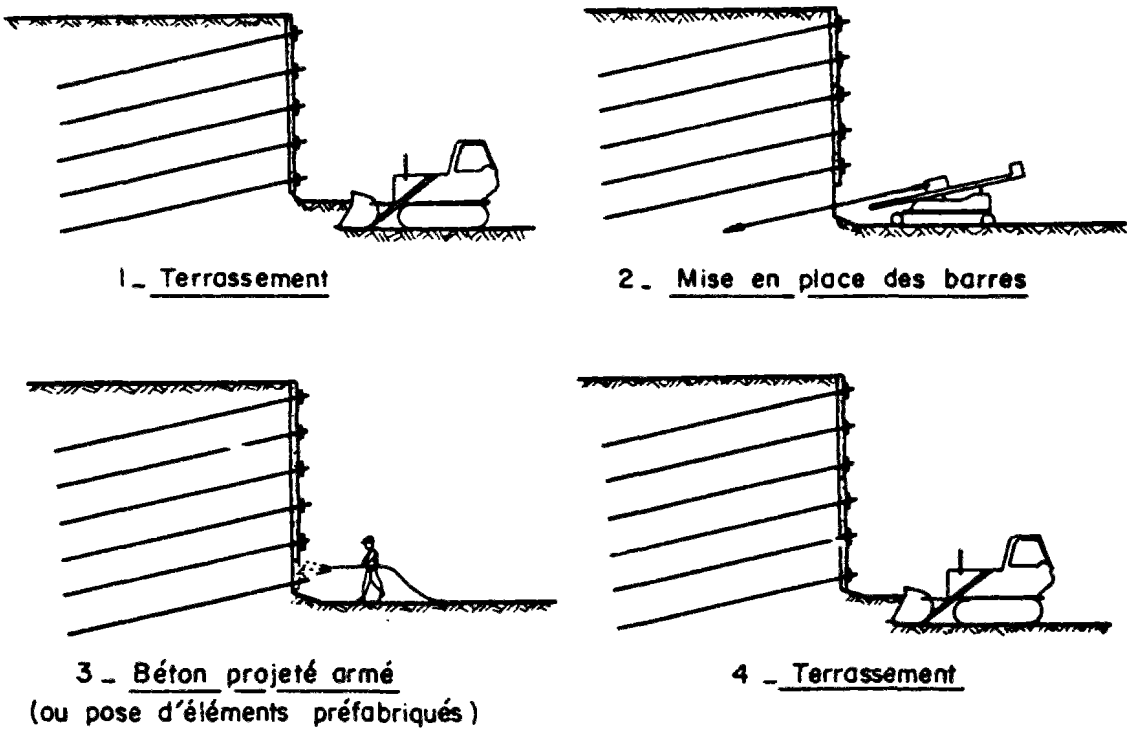


Figure C.1-1 : Phases de construction d'un mur en sol cloué

1.2 La technique du clouage

Plusieurs types d'inclusions, qui correspondent en quelque sorte à des techniques différentes, sont utilisés et désignés tous sous le terme générique de clouage (tableau C.1-1). La première technique, qui est la plus ancienne, est désignée sous le terme de Hurpinoise du nom de son inventeur M. Hurpin. Elle consiste à battre dans le sol des cornières métalliques de longueur assez courte, selon un maillage serré. Un exemple remarquable de cette technique Hurpinoise est constitué par le mur de l'opéra de Montpellier (1985), qui fait une hauteur de 21 m. La deuxième technique utilise des barres métalliques, plus longues, scellées dans un forage et disposées selon un maillage plus large. Le mur en sol cloué le plus haut, qui fait un hauteur de 28 m, a été réalisé avec cette technique sur la tête Sud du tunnel de Dombes pour le TGV Rhônes-Alpes.

Pour qu'un ouvrage en sol cloué se comporte comme un sol renforcé, il est indispensable de ne pas trop espacer les clous. La limite supérieure, préconisée dans les Recommandations CLOUTERRE 1991 et la norme Française NF P 94 240 sur le clouage, se situe autour d'un clou pour 6 m^2 de parement.

Tableau C.1-1 : Ordre de grandeur des caractéristiques dimensionnelles des murs de soutènement en sol cloué (Recommandations CLOUTERRE 1991)

	Ouvrage à maillage serré*	Ouvrage à maillage large **
Longueur des clous	0,5 à 0,7 H	0,8 à 1,2 H
Nombre de clous par m^2 de parement	1 à 2	0,15 à 0,4
Périmètre des clous	150 à 200 mm	200 à 600 mm
Résistance en traction de l'armature	120 à 200 kN	100 à 600 kN
Densité de clouage	0,4 à 1,5	0,13 à 0,6

* armatures battues ou vibro-foncées, armatures scellées de petits diamètres
** armatures de gros diamètres scellées dans le terrain

La densité de clouage, qui est un paramètre sans dimension permettant de caractériser le clouage, dans le cas de géométries simples, est définie par :

$$d = \frac{T_L}{\gamma S_v S_h L} \qquad \text{(C.1-1)}$$

où T_L est la traction maximale mobilisable par frottement latéral dans un clou et γ est le poids volumique du sol. Ce paramètre fait abstraction de la résistance en traction simple des clous et représente l'effort maximal mobilisable par frottement latéral dans un clou, ramené au poids du sol correspondant à la maille de sol cloué.

1.3 Développement du clouage

Le développement rapide du clouage en France est dû à deux facteurs principaux. D'une part, des raisons économiques : la technique est très rapide de mise en oeuvre et ne nécessite qu'un équipement réduit tout en pouvant s'adapter à tout type de sol et de géométrie. D'autre part, un important effort de recherche sur la technique a été réalisé en France, de 1986 à 1991, dans le cadre du premier Projet National CLOUTERRE (Schlosser, 1989; Schlosser et al., 1992). Le but de ce projet, orienté sur les ouvrages de soutènement, était de mieux connaître le comportement des murs en sol cloué, aussi bien en service qu'à la rupture, de donner les limites d'utilisation de la technique et de définir des règles de dimensionnement pour les ouvrages provisoires, temporaires et permanents. Les recommandations, développées dans le cadre du Projet National CLOUTERRE, pour la conception, le calcul, l'exécution et le contrôle des soutènements réalisés par clouage des sols ont été publiées dans les "Recommandations CLOUTERRE 1991".

Le premier objectif du Projet National CLOUTERRE a été atteint avec l'instrumentation et le suivi de trois murs en vraie grandeur, réalisés dans un sol aux propriétés parfaitement contrôlées, instrumentés et suivis intégralement depuis la construction jusqu'à la rupture. Les trois murs CLOUTERRE-CEBTP, No. 1, 2 et 3, ont été poussés à la rupture suivant trois modes de rupture différents. Le premier mur, qui fait l'objet des calculs en déformations présentés ci-après, a été poussé par saturation du remblai à l'aide d'un bassin rempli d'eau en tête. Le second a été rompu durant sa construction par suite d'une trop grande hauteur d'excavation non protégée. Enfin, le troisième a été poussé progressivement à la rupture, en raccourcissant les longueurs des clous télescopiques utilisés. Outre ces trois ouvrages expérimentaux en vraie grandeur, qui on été poussés à la rupture, cinq ouvrages en service, construits pour des applications différentes, ont été instrumentés et suivis dans divers types de sol. L'ensemble des résultats obtenus a permis de bien comprendre le comportement des ouvrages en sol cloué, aussi bien en service qu'à la rupture.

Le deuxième objectif du Projet National CLOUTERRE était de promouvoir le clouage en soutènement en définissant des règles de dimensionnement pour les ouvrages provisoires, temporaires et permanents. La méthode de dimensionnement actuellement recommandée par les Recommandations CLOUTERRE 1991 et la norme française NF P 94 240 repose sur un calcul aux états limites ultimes (ELU) avec coefficients partiels de sécurité. Cette analyse aux ELU est conduite, dans le cadre de l'analyse limite ou du calcul à la rupture, en recherchant les surfaces de rupture potentielle les plus critiques. Quand les clous possèdent une certaine inertie, il convient de tenir compte de la rigidité en flexion en utilisant le principe du multicritère. Cette méthode, développée notamment dans le logiciel Talren, a été validée sur tous les types de rupture observés et, notamment, sur la rupture du mur CLOUTERRE-CEBTP No. 1 (figure C.1-2) (Schlosser et al., 1993). Ce mur en vraie grandeur a été poussé à la rupture en saturant progressivement le sol, ce qui a eu pour effet d'augmenter le poids volumique, mais aussi de réduire la cohésion apparente initiale due à la non saturation.

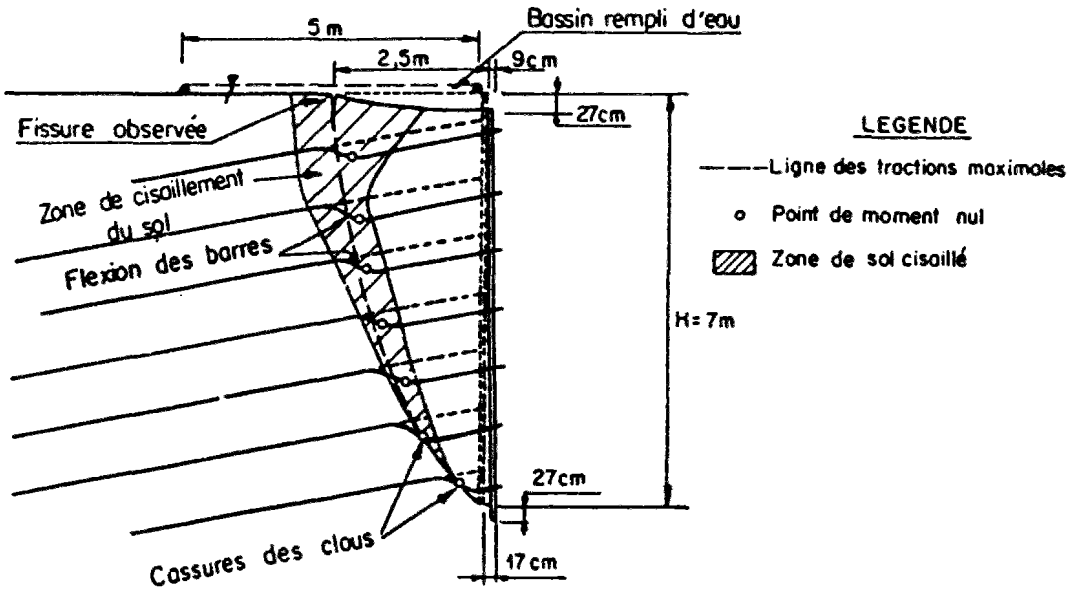


Figure C.1-2 : Coupe à la rupture du mur CLOUTERRE-CENBTP No.1

Si le premier Projet National CLOUTERRE a permis d'aboutir à une méthode de dimensionnement aux états limites ultimes (ELU), qui est en accord avec la réglementation des Eurocodes (Schlosser et Unterreiner, 1994), par contre, pour ce qui concerne les états limites de service (ELS), l'analyse actuellement proposée repose seulement sur une estimation des déplacements (cf. paragraphe 2.1.2.3 partie C). Dans le prolongement du premier Projet National CLOUTERRE, un deuxième Projet National, intitulé CLOUTERRE II, a été lancé afin d'étudier et de développer une méthode de dimensionnement aux ELS, basée sur un calcul en déformation. Les résultats, présentés dans les parties B et C de cette thèse, s'inscrivent dans le cadre des objectifs du Projet National CLOUTERRE II.

1.4 Avantages et limitations du clouage

Le clouage des sols est une technique qui présente de nombreux avantages, aussi bien économiques que techniques. Elle ne nécessite qu'un matériel de construction réduit : un engin de terrassement pour l'excavation, un engin de forage et une centrale d'injection pour les clous scellés ou un engin de battage pour les clous battus, une machine pour projeter le béton, dans le cas où le parement est en béton projeté. La construction peut être réalisée rapidement car les opérations d'excavation, installation de clous et de construction du parement peuvent être réalisées en parallèle sur plusieurs sections. Du fait du matériel léger requis et de la grande adaptabilité de la technique, le clouage des sols peut être utilisé dans des sites d'accès difficiles et dans le cas de géométries complexes. Bien que le clouage ait été jusqu'à présent utilisé principalement dans des sols homogènes, c'est une technique qui s'adapte particulièrement bien aux hétérogénéités des terrains, puisqu'il suffit localement d'augmenter la densité de clouage.

Le clouage des sols en soutènement présente cependant deux limitations dans ses applications : il ne peut être utilisé que pour des sols hors nappe ou à l'abri d'un rabattement de nappe; par ailleurs, les conditions de sols doivent permettre d'assurer à court terme la stabilité locale du sol pendant les phases intermédiaires d'excavation.

Ce problème de stabilité durant les phases intermédiaires d'excavation, où le sol est excavé et non protégé, est crucial. La stabilité locale en pied de mur est contrôlée par deux facteurs : la cohésion "apparente" à court terme et la résistance à la traction du sol. Si le premier paramètre a été identifié très tôt comme étant essentiel, le second n'a pas encore fait l'objet de beaucoup d'études. Pourtant, comme nous le verrons dans le prochain paragraphe 6.6, ce dernier paramètre est encore plus important. Il contrôle la rupture en pied de mur ainsi que la position des fissures observées à la surface derrière le parement.

1.5 Applications

Le clouage des sols, grâce au Projet National CLOUTERRE, est de nos jours utilisé aussi bien pour des ouvrages provisoires, temporaires que permanents.

Quand le clouage est utilisé en site urbain pour soutenir une fouille, il est souvent associé avec des tirants ou des buttons afin de limiter les déplacements en tête, qui peuvent avoir une incidence sur les ouvrages environnants.

Il peut être aussi utilisé en stabilisation de talus ou de pente. Cependant, la stabilisation de pentes instables par des inclusions de gros diamètres est une technique complètement différente du clouage en soutènement, car elle fait travailler les inclusions en cisaillement et flexion principalement, alors qu'en soutènement, les clous travaillent essentiellement en traction. Dans cette thèse, nous restreindrons le champ de nos études au clouage en soutènement par des clous de faible inertie.

Les mesures sur le premier mur expérimental en vraie grandeur CLOUTERRE-CEBTP No. 1 ont montré que dans un mur de soutènement les clous ne commencent à être sollicités en flexion et en cisaillement que très près de la rupture. En service, les efforts de traction sont prédominants dans les clous. Nous pouvons donc considérer que les clous travaillent essentiellement en traction dans un mur de soutènement en sol cloué en service. Pour une synthèse complète sur les techniques de renforcement en remblai aussi bien qu'en déblai, le lecteur pourra se référer à Schlosser et Unterreiner (1994).

1.6 Comportement des murs en sol cloué

Grâce aux murs expérimentaux du Projet National CLOUTERRE, instrumentés depuis la construction jusqu'à la rupture, ainsi qu'aux ouvrages en service instrumentés et suivis, le comportement des murs en sol cloués, en service et à la rupture, est bien connu.

Durant les phases successives d'excavation, le sol en pied de mur est soumis à une décompression latérale et à un tassement. Il en résulte, en fin de construction, une déformée du parement qui est inclinée vers l'avant, avec des déplacements maximaux en tête (figure C.1-3).

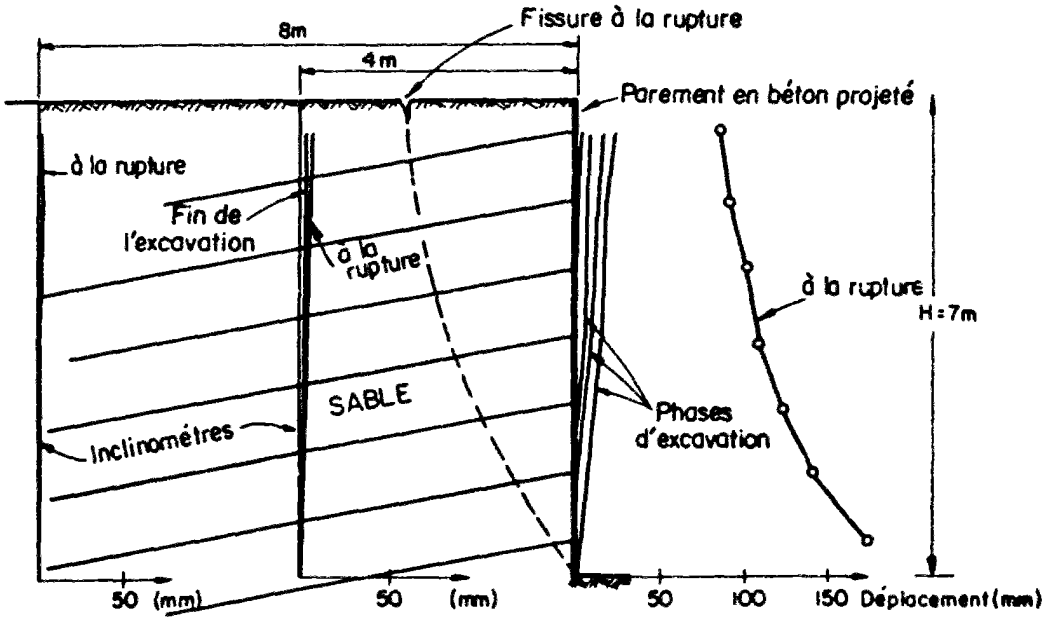


Figure C.1-3 : Déformations du mur en sol cloué CLOUTERRE-CEBTP No. 1 durant sa construction et à la rupture

La décompression horizontale du sol excavé et non protégé a pour effet direct de mettre en tension les lits de clous installés au dessus. Regardons, par exemple, la traction mobilisée dans le clou No. 3 du mur CLOUTERRE-CEBTP No.1, au fur et à mesure des phases d'excavation (figure C.1-4). Lors de son installation, le clou a été prétendu à environ 1,8 kN. Il n'est mis en traction qu'aux phases suivantes : 4, 5 et 6. La phase ultérieure 7 n'a pas d'influence significative sur ce lit de clous. La pré-tension initiale est actuellement considérée comme un moyen de réduire les déplacements du parement. Dans l'étude paramétrique que nous exposons plus loin, nous avons modélisé pour chaque lit de clous une petite pré-tension de l'ordre de 1 à 2 kN. Les résultats obtenus n'ont été changés que de quelques pour-cents par rapport au cas de référence où cette pré-tension n'est pas modélisée. L'effet bénéfique de cette mise en pré-tension initiale doit être recherchée surtout du côté d'une meilleure adhérence entre le parement et le sol. Un bon contact entre le béton et le sol étant nécessaire pour que le parement ne glisse pas. Cet aspect peut être étudié avec le motif de sol cloué que nous avons développé spécialement et que nous présenterons plus loin.

La distribution des tractions dans les lits de clous est caractérisée par l'existence d'une ligne des tractions maximales, qui passe par tous les points des clous où la traction est maximale (figure C.1-5). Cette ligne définie deux zones, la zone active, où le sol a tendance à se déplacer vers l'extérieur tandis que les clous sont retenus à l'intérieur, et la zone résistante, où le sol a tendance à rester en place tandis que les clous sont entraînés vers l'extérieur. L'existence d'une ou plusieurs lignes des tractions maximales est une caractéristique des ouvrages en sol renforcé par des éléments, linéaires ou bidimensionnels, de taille macroscopique. La position de cette ligne des tractions maximale dépend principalement des déformabilités des clous et de l'interaction entre le sol et les clous par rapport à la déformabilité du sol. Dans l'étude paramétrique, qui est présentée dans le paragraphe 6.6, nous verrons, en particulier, comment cette ligne des tractions maximales se déplace vers le parement, quand l'interaction entre les clous et le sol perd de sa rigidité.

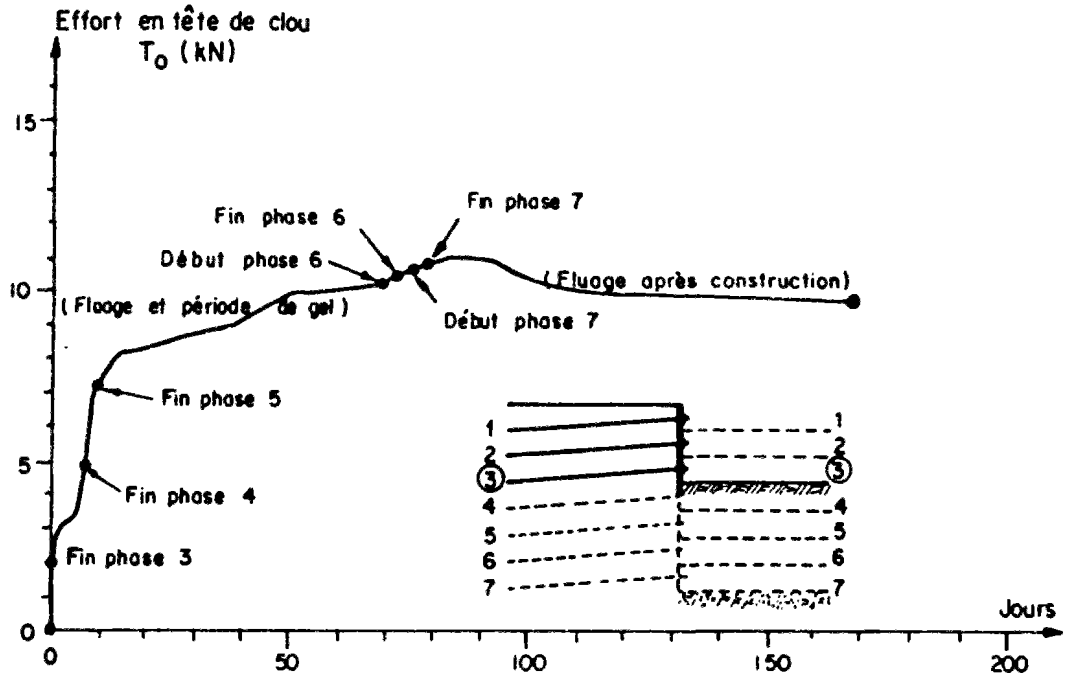


Figure C.1-4 : Mise en tension progressive du clou No. 3
du mur en sol cloué CLOUTERRE-CEBTP No. 1

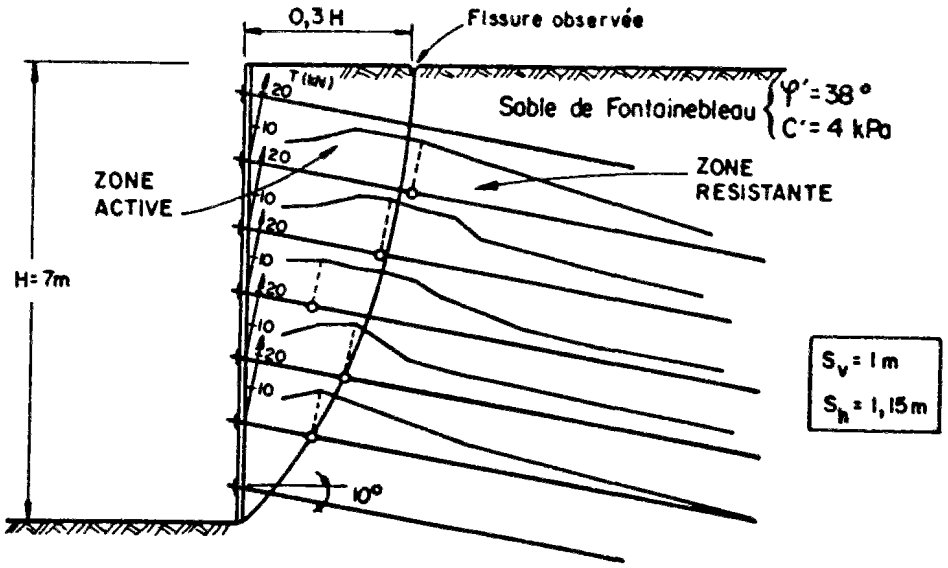


Figure C.1-5 : Distribution des tractions dans les clous
du mur en sol cloué CLOUTERRE-CEBTP No. 1 à la fin de la construction

Parmi les modes de rupture d'un mur en sol cloué, il convient de distinguer la rupture interne et la rupture externe. Dans une rupture interne, le mur peut être rompu par cassure des clous ou par arrachement des clous hors du sol. Une rupture interne par cassure des clous a été provoquée dans le premier mur expérimental en vraie grandeur, réalisé au CEBTP, dans le cadre du Projet National CLOUTERRE (Plumelle et Schlosser, 1991). Une rupture interne par arrachement des clous s'est produite accidentellement sur le mur des Eparris en 1981 (Schlosser et Guilloux, 1982). Une rupture mixte, c'est à dire une rupture dans laquelle la surface de glissement passe à la fois à l'intérieur et à l'extérieur du massif de sol cloué, a été provoquée sur le troisième mur expérimental en vraie grandeur du Projet National CLOUTERRE (Schlosser et al., 1992).

Il est à noter que, contrairement aux armatures ou nappes de remblais, les clous scellés sont en général rigides et peuvent résister à la flexion. Dans ce cas là, à la rupture, il ne se développe pas une surface de rupture franche autour de la ligne des tractions maximales mais une zone de sol cisaillé dont l'épaisseur est fonction de la rigidité des renforcements (figure C.1-2). Les différents modes de rupture observés sur des ouvrages en vraie grandeur ont permis de valider la méthode de dimensionnement actuellement recommandée aux états limites ultimes (Schlosser et al., 19923).

Si les murs expérimentaux CLOUTERRE-CEBTP, ont fait l'objet de plusieurs analyses approfondies, pour ce qui concerne leurs ruptures, relativement peu a été fait pour les analyser en déformation. Ainsi, les murs CLOUTERRE-CEBTP No. 1 et 3 ont été analysés à la rupture, par la méthode du multicritère et le logiciel Talren (Schlosser et al, 1992, 1993, 1994). En ce qui concerne les calculs en déformation, seul le premier mur a fait l'objet d'études (Nanda, 1989; Chiguer, 1989; Ouelogo, 1989). Les résultats obtenus sont intéressants mais insuffisants. Une analyse bibliographique détaillée en sera faite dans le paragraphe 2.2.

1.7 Problème étudié

Pendant longtemps, le dimensionnement des ouvrages géotechniques a été basé principalement sur un calcul à la rupture. Cependant, si un tel calcul permet d'assurer la stabilité des ouvrages, il ne permet pas de calculer les déformations de l'ouvrage, durant sa construction et sa mise en service.

Or, il existe de nombreuses situations, où les déplacements de l'ouvrage sont primordiales, comme par exemple les fouilles en site urbain. La solution, qui est utilisée parfois pour limiter les déplacements, consiste à augmenter de manière significative le coefficient de sécurité. Des corrélations ont été ainsi développées par Clough et Mana (1981) pour les fouilles butonnées dans l'argile molle (figure C.1-5).

De nos jours, avec la puissance de calcul des ordinateurs et le travail réalisé ces vingt dernières années sur la modélisation numérique du comportement des sols, ce genre de solution peut paraître désuet. Une multitude de lois de comportement de type élastoplastique ou incrémentale non linéaire a été développée pour les sols. Plusieurs méthodes numériques existent et elles ont été implantées dans des logiciels de calcul disponibles sur le marché. Cependant, les calculs en déformation ne sont pas encore couramment utilisés dans les bureaux d'étude. La majeure partie de la Géotechnique courante continue à être traitée par des calculs traditionnels à la rupture. La raison principale qui peut être avancée, du moins pour les murs de soutènement, est l'absence de règles et de spécifications techniques précises.

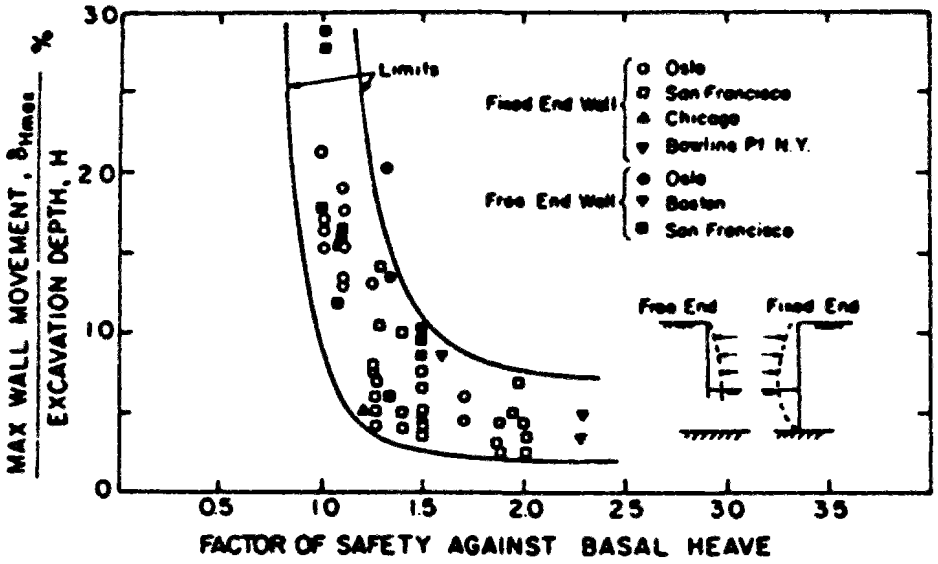


Figure C.1-5 : Corrélations entre les déplacements et le facteur de sécurité pour une excavation butonnée dans de l'argile (Clough et Mana, 1986)

L'objectif de ce travail n'est pas de développer une méthode de calcul en déformation, ce qui est très largement hors de la portée du travail d'une thèse, mais de regarder en détail sur les murs en sol cloué, les possibilités et les limitations des méthodes actuelles de calcul en déformation. Plusieurs points importants seront étudiés en particulier, avant de réaliser des simulations sur des essais triaxiaux de sable renforcé par des disques d'aluminium, l'essai d'arrachement du clou préalable No. 5 et le mur en sol cloué CLOUTERRE-CEBTP No. 1.

(1) En premier lieu, nous commencerons par regarder quels sont les mécanismes importants mis en jeu dans un mur en sol cloué et qu'il convient de modéliser aussi fidèlement que possible. En particulier, se pose le problème de la correspondance entre l'ouvrage réel, qui est tridimensionnel, et de l'ouvrage modèle étudié, qui est calculé en déformations planes. Sur ce point, nous regarderons en détails les hypothèses et leurs implications sur les résultats des calculs.

(2) Le modèle étudié ayant été défini précisément, se pose la question de la détermination des paramètres mécaniques. Si l'on regarde les modèles de comportement développés ces dernières années, il faut constater que, pour beaucoup d'entre eux, le nombre de paramètres nécessaires dépasse largement les capacités expérimentales disponibles actuellement en laboratoire et, a fortiori, sur le terrain. Sur ce point, nous avons choisi d'utiliser une loi de comportement isotrope, élastique linéaire, parfaitement plastique, avec un critère de Mohr Coulomb, tronqué ou non, et une loi d'écoulement, associé ou non, pour chacun des matériaux constitutifs du mur en sol cloué. Cette loi élastoplastique, qui est l'une des plus simples, requière déjà deux paramètres élastiques : le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν, et quatre paramètres plastiques : l'angle de frottement ϕ, la cohésion c, la résistance en traction σ_t et l'angle de dilatance ψ. La méthode de détermination de chacun des paramètres est décrite en détail et discutée de manière approfondie. En outre, une étude de sensibilité est réalisée pour déterminer la précision requise sur chacun des paramètres.

(3) Pour résoudre un problème aux limites général, plusieurs méthodes numériques sont disponibles. Les deux plus couramment utilisées en mécanique des sols sont : la méthode des éléments finis et la méthode des différences finies. Chacune a été implantée dans au moins un logiciel de calcul disponible sur le marché. D'un point de vue formel et, en particulier, si l'on s'intéresse au problème d'unicité de la solution et de convergence numérique, toutes les méthodes de calculs devraient donner le même résultat, aux erreurs numériques près. Or, les simulations réalisées sur des murs en sol cloué par la méthode des différences finies (Fairhurst et Lorig, 1992) semblent meilleurs que ceux obtenus par la méthode des éléments finis (Nanda, 1989). Il n'existe, a priori, aucune raison pour que les deux méthodes donnent des résultats différents. Cependant, entre deux logiciels de calcul différents, il n'est pratiquement jamais possible de trouver exactement les mêmes lois de comportement, les mêmes types d'éléments, le même schéma de résolution élastoplastique, etc. Ces petites différences peuvent néanmoins avoir une influence importante sur le résultat.

(4) Nous étudierons donc, à l'aide de trois logiciels de calculs, qui correspondent à deux méthodes numériques différentes, trois exemples de mécanique des sols, qui vont du plus simple au plus compliqué.

Le premier exemple concerne des essais triaxiaux de sable, renforcé ou non par des disques d'aluminium. Les simulations ont été comparées aux résultats expérimentaux obtenus par Schlosser et Long (1972). Cet exemple permet de mettre en évidence le rôle fondamental du glissement relatif entre le sol et le clou dans la mobilisation des efforts dans les renforcements.

Le deuxième exemple modélisé concerne l'essai d'arrachement du clou préalable No. 5 qui a été réalisé en préparation pour la construction du mur CLOUTERRE-CEBTP No. 1. Cet exemple, qui est très simple et donc intéressant à ce titre pour comparer des méthodes de calcul, a permis, en outre, de confirmer la valeur choisie pour le module de mobilisation du frottement latéral unitaire. La détermination précise de cette valeur est nécessaire pour un calcul en déformation du mur en sol cloué CLOUTERRE-CEBTP No. 1.

Le dernier exemple considéré est le mur CLOUTERRE-CEBTP No. 1. Cet exemple, qui peut être qualifié de complexe, a été analysé à l'aide de trois logiciels de calcul, qui correspondent à deux méthodes numériques différentes. Les résultats trouvés sont réconfortants dans la mesure où, globalement, les trois logiciels donnent les mêmes résultats. Cependant, il existe de petites différences qui sont amplifiées localement au pied du mur en sol cloué. Les résultats de ces calculs, aussi bien pour les tractions que pour les déplacements, sont encourageants car ils constituent un progrès par rapport aux résultats obtenus antérieurement.

2 Etat des connaissances sur les calculs en déformation de murs en sol cloué

L'étude bibliographique, exposée ci-dessous, concerne les méthodes de calcul en déformation pour les murs en sol cloué. Cependant, ces méthodes sont générales et peuvent être appliquées en Géotechnique à de nombreux problèmes. Le développement important de ces méthodes de calcul, durant les dernières vingt années, est fortement lié à l'évolution intervenue dans le domaine de l'informatique. Pour une vue d'ensemble des méthodes de calcul en géotechnique et des moyens informatiques correspondant, le lecteur pourra se référer, par exemple, aux actes du récent colloque international "Géotechnique et Informatique" organisé par l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées (ENPC) en 1992.

Dans le domaine des soutènements, l'étude aux états limites de service (ELS) des ouvrages en sol renforcé se fait à l'aide d'un calcul en déformation, par opposition au dimensionnement aux états limites ultimes (ELU) qui se fait à l'aide d'un calcul à la rupture. Cependant, la réglementation européenne préconise de vérifier, aux ELS et ELU, le niveau de déformations de la structure afin de maintenir ses fonctions dans le cas des ELS et son intégrité dans le cas des ELU (Eurocode 7). Il conviendrait donc, dans l'absolu, de traiter les ELS et les ELU par des calculs en déformation. Cependant, en l'état actuel des connaissances, du moins pour les soutènements, on ne sait traiter les ELU que par un calcul à la rupture, tandis que les ELS sont étudiés par différents méthodes en déformation. Il en résulte parfois une confusion entre les calculs aux ELS et en déformation.

Dans ce paragraphe, après une étude bibliographique générale sur les différentes méthodes de calcul en déformation utilisées en renforcement des sols, nous regarderons, en détail et d'un point de vue critique, les calculs en déformation qui ont été menés pour le mur CLOUTERRE-CEBTP No.1.

2.1 Les calculs en déformation en renforcement des sols

La modélisation d'un ouvrage renforcé par des clous peut être faite de plusieurs manières et en utilisant différents types de méthodes de calcul.

En premier lieu, l'ouvrage peut être modélisé d'un point de vue mécanique, soit en considérant les clous, un par un, interagissant avec le sol, soit en homogénéisant le sol cloué, c'est à dire en le représentant par un matériau homogène, dans lequel il n'y a plus lieu de distinguer le sol des clous. Le matériau homogénéisé est défini de manière à être équivalent au matériau discret, vis à vis de critères mécaniques, qu'il convient de se fixer. Le choix de l'approche discrète ou homogénéisée, est indépendant du choix de la méthode numérique utilisée pour résoudre le problème aux limites.

Nous regarderons, dans un premier temps, les avantages et inconvénients de la méthode homogénéisée par rapport à l'approche discrète, puis nous aborderons l'étude bibliographique sur les méthodes numériques (Schlosser et Unterreiner, 1994).

2.1.1 Approches discrète et homogénéisée

Dans une approche par homogénéisation, le massif hétérogène, constitué du sol et des clous, est représenté par un matériau homogène aux propriétés macroscopiques équivalentes avec celles du matériau hétérogène, pour un ou plusieurs critères donnés.

Le calcul de la plaque équivalente est un exemple d'homogénéisation, où les matériaux sont supposés élastiques et l'interface entre les clous et le sol est considérée en adhérence parfaite. Le critère macroscopique considéré est que les déformations dans la direction des clous et les tractions dans les renforcements sont égales entre le lit de clous réels et la plaque équivalente. L'hypothèse d'adhérence parfaite entre le sol et les clous est indispensable pour pouvoir écrire que le sol et les clous ont les mêmes déformations tout en subissant des efforts différents. On en déduit alors facilement les relations entre, d'une part, les modules du sol et des clous, et d'autre part, le module de la plaque équivalente.

L'idée d'homogénéisation en renforcement des sols remonte à Schlosser et Long (1972) qui, les premiers, ont proposé de considérer un sol renforcé d'un point de vue global en définissant un angle de frottement apparent ϕ^* et une cohésion apparente c^* (cf. paragraphe 4, partie C). L'homogénéisation en élasticité linéaire a été faite par Harrison et Gerrard (1972), Gerrard (1982), Cardoso et Carretto (1989). L'homogénéisation des caractéristiques plastiques n'a été faite que récemment par de Buhan et Salençon (1987) dans le cadre du calcul à la rupture, en considérant des éléments de renforcement travaillant uniquement en traction, un sol vérifiant un critère de rupture de Mohr-Coulomb et l'adhérence parfaite entre le sol et les renforcements. Une approche par homogénéisation a été également faite en élasticité non linéaire pour le sol (modèle hyperbolique de Duncan), élasticité linéaire pour les clous et adhérence parfaite entre le sol et les clous par Romstadt et al. (1976), Gerrard, (1981) , Nanda, (1988). Quelle que soit la loi de comportement considérée, le matériau homogénéisé est anisotrope avec une orientation privilégiée dans la direction des renforcements.

L'avantage de telles méthodes est de simplifier les calculs, dans une certaine mesure, puisqu'il n'y a plus besoin de représenter chaque clou individuellement. Cependant, ces méthodes présentent plusieurs inconvénients majeurs. Elles ne s'appliquent qu'à des structures où les clous sont tous identiques et disposés de manière très régulière, avec le même espacement et la même inclinaison sur l'horizontale. D'autre part, elles ne permettent pas de tenir compte des effets de bords même de manière simple. En particulier, trois "effets de bords" très importants sont à modéliser dans un ouvrage en sol cloué : (1) le parement, qui assure le confinement du sol entre les clous et permet ainsi à celui-ci de travailler de manière optimale avec les clous, (2) les extrémités des clous, qui sont partiellement arrachées du sol mais ne mettent pas celui-ci en traction contrairement à ce qui est prédit par les modèles homogénéisé, et (3) la transition, pour un niveau de sol, entre le moment où il est excavé sans être cloué et le moment où il est cloué et peut être alors homogénéisé. Or il se trouve que cette phase est la plus importante en ce qui concerne les déformations d'ensemble du mur.

Enfin, l'aspect le plus important qui n'est pas pris en compte par ces méthodes d'homogénéisation en élasticité, linéaire ou non, est le glissement relatif entre les clous et le sol. Celui-ci est à l'origine du déversement progressif du volume de sol cloué. De plus, il empêche le développement de zones de sol en traction juste à l'arrière des clous. Pour mieux comprendre ces divers points nous regarderons plus en détail deux études qui ont été réalisées sur ce sujet.

Une première étude intéressante a été réalisée par Cardoso et Carreto (1989) qui ont considéré des sols linéaires élastiques dont le module croit avec la profondeur. Le sol cloué, qui est étudié en 3D, est homogénéisé en introduisant un facteur, noté w, qui permet de tenir compte du glissement relatif entre le sol et les clous. Dans le cas où w est égal à 1, l'adhérence est parfaite et ils retrouvent exactement les résultats de Gerrard (1982). Si w est égal à 0, les propriétés du sol cloué sont égales à celles du sol sans clous. Ce dernier cas limite n'est pas acceptable, car des clous qui glissent par rapport au sol contribuent quand même à la stabilité et à la réduction des déformations. Parallèlement, ils ont fait un calcul 2D avec l'hypothèse de la plaque équivalent et des lois de comportement de type hyperbolique pour le sol et les interfaces entre le sol et les clous. Les comparaisons entre le modèle 3D et le modèle 2D est en faveur du modèle 3D, grâce à un choix approprié du facteur w.

Cette étude ne permet pas de conclure puisque des lois de comportement différentes ont utilisées dans les cas 2D et 3D, d'une part. D'autre part, l'homogénéisation de matériaux élastiques est fondée mécaniquement sur l'hypothèse d'adhérence parfaite entre chacun des matériaux. C'est une hypothèse indispensable qui a été contournée dans cette étude par l'introduction du coefficient w mais le résultat obtenu n'est pas généralisable.

En ce qui concerne le modèle non linéaire de Duncan et Chang (1970), deux études d'homogénéisation ont été réalisées. Toutes deux considèrent, pour le sol, la loi de Duncan et Chang (1970), pour les clous, une loi élastique linéaire, tandis que pour l'interface entre les clous et le sol, il est supposé une adhérence parfaite. Le modèle obtenu a été testé sur deux murs en vraie grandeur.

Shen et al. (1981) ont analysé le mur de Davis avec cette méthode. Ils ont obtenu un profil de déplacements relativement bon. Cependant, les conditions géotechniques du site sont très difficiles, avec de vieux remblais très hétérogènes, et le choix des paramètres mécaniques pour les calculs n'est pas explicité. En outre, il faut noter que les tractions calculées différent très nettement des mesures.

Nanda (1988) a repris cette approche avec sensiblement les mêmes hypothèses de comportement pour modéliser le mur CLOUTERRE-CEBTP No. 1. Il a comparé l'approche discrète avec l'approche homogénéisée, tout en gardant pour les matériaux les mêmes valeurs de paramètres constitutifs. Les tractions calculées avec l'approche discrète différent très sensiblement des mesures. Elles sont beaucoup plus fortes, près du parement, et nettement plus faibles, loin du parement (figure C.2-1a). Le profil des tractions calculé par l'approche homogénéisée est meilleur que celui calculé par l'approche discrète (figure C.2-1b). Cependant, les valeurs obtenues dans le premier cas sont très nettement supérieures à celles obtenues dans le deuxième cas. Il n'y a pas clairement formation d'une zone active dans l'approche homogénéisée. Il faut noter que dans les deux cas, l'adhérence parfaite a été supposée entre le sol et les clous, ce qui est une hypothèse très forte comme nous le verrons plus loin dans l'étude bibliographique.

L'approche homogénéisée donne des déplacements horizontaux qui varient presque linéairement avec la profondeur, aussi bien à 2 m qu'à 4 m de distance du parement, ce qui n'a pas été observé sur l'ouvrage en vraie grandeur (figures C.2-3). Les déplacements, calculés par les deux approches, sont nettement plus importants que ceux mesurés (figures C.2-3 et C.2-4). Les déplacements calculés par l'approche homogénéisée sont plus faibles que ceux calculés par une approche discrète, aussi bien au parement qu'à l'intérieur du massif de sol cloué (figure C.2-2). Cela peut s'expliquer par le comportement monolithique du massif homogénéisé qui bouge d'un seul morceau.

2.1.2 Méthodes numériques

2.1.2.1 Méthodes générales

Il convient de distinguer un premier groupe de méthodes, dites générales, qui peuvent être appliquées à tout type de problème aux limites en mécanique. Ce sont, entre autres, les méthodes des éléments finis (Mestat et al., 1992), des différences finies (Fairhurst et Lorig, 1992), des équations intégrales aux frontières (Boulon et Rouainia, 1994). Ces méthodes numériques consistent à résoudre numériquement les équations d'équilibre et de comportement pour l'ensemble de l'ouvrage considéré, en utilisant des lois de comportement plus ou moins complexes pour chacun des matériaux : sol, renforcement et interface entre le sol et le renforcement. Les calculs peuvent être faits en déformations planes, ce que l'on appelle couramment un calcul 2D, ou en configuration tridimensionnelle, ce que l'on appelle un calcul 3D. L'intérêt de ces méthodes est, en fait, limité par la connaissance relativement réduite des lois de comportement des matériaux considérés, tels que le sol, et de l'état initial des contraintes dans le massif de sol. Cependant, ce sont les seules méthodes qui soient suffisamment générales pour pouvoir être utilisées, quel que soit le type d'ouvrage considéré.

2.1.2.1.1 Méthode des éléments finis

Le principe de la méthode des éléments finis est de résoudre les équations d'équilibre, dans leur formulation faible (principe des puissances virtuelles), avec les relations de comportement et les conditions aux limites, sur l'ensemble de l'ouvrage, discrétisé en éléments de tailles finies, appelés éléments finis. Il convient de distinguer, dans un code d'éléments finis, la partie correspondant à la discrétisation, c'est à dire : les variables nodales, les fonctions d'interpolation, les fonctions de forme, les points d'intégration et les points d'échantillonnage, de la partie proprement spécifique aux lois de comportement élastoplastique, c'est à dire : la matrice de comportement et le schéma élastoplastique de convergence numérique.

Si les efforts de développement, au début de la généralisation de la méthode des éléments finis, ont porté surtout sur la discrétisation et les types d'éléments finis, ces dernières dix années, l'effort a été essentiellement concentré sur les problèmes liés aux lois élastoplastiques et, en particulier, le schéma élastoplastique de convergence numérique, qui posait des problèmes avec les premières générations de codes de calcul.

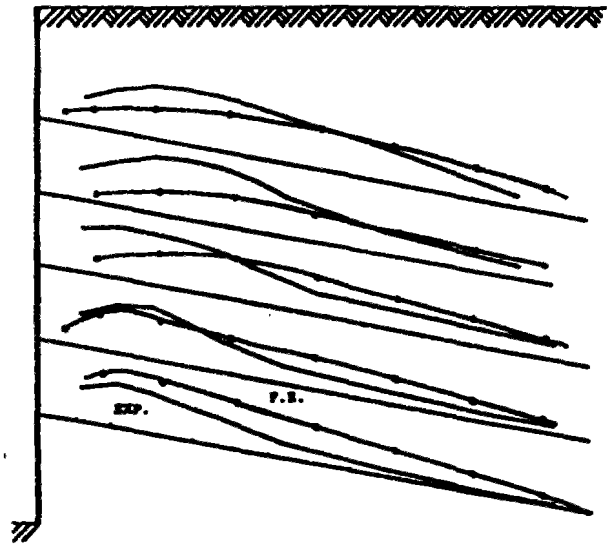


Figure C.2-1a : Tractions dans les clous à la phase 7 (H = 7 m) par l'approche discrète (Nanda, 1988)

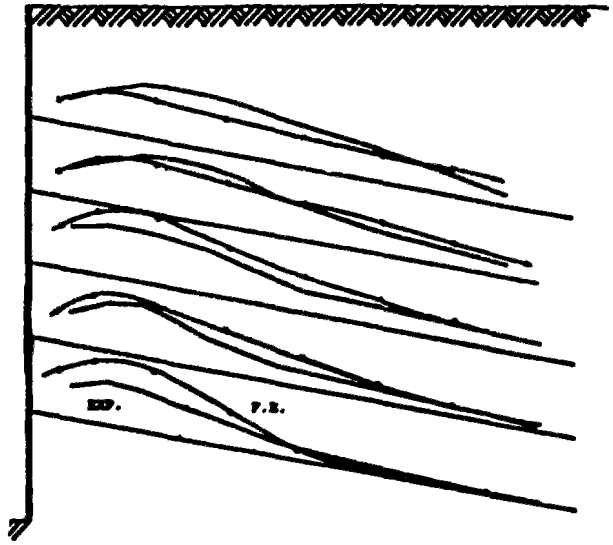


Figure C.2-1b : Tractions dans les clous à la phase 7 (H = 7 m) par l'approche homogénéisée (Nanda, 1988)

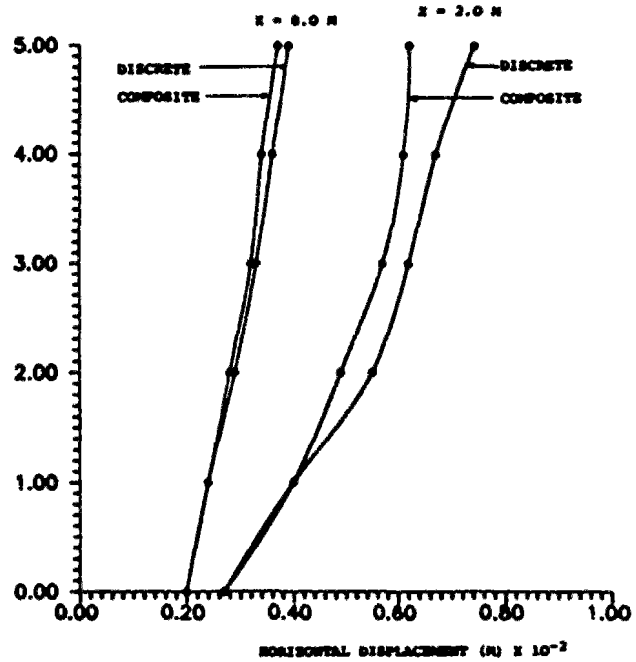
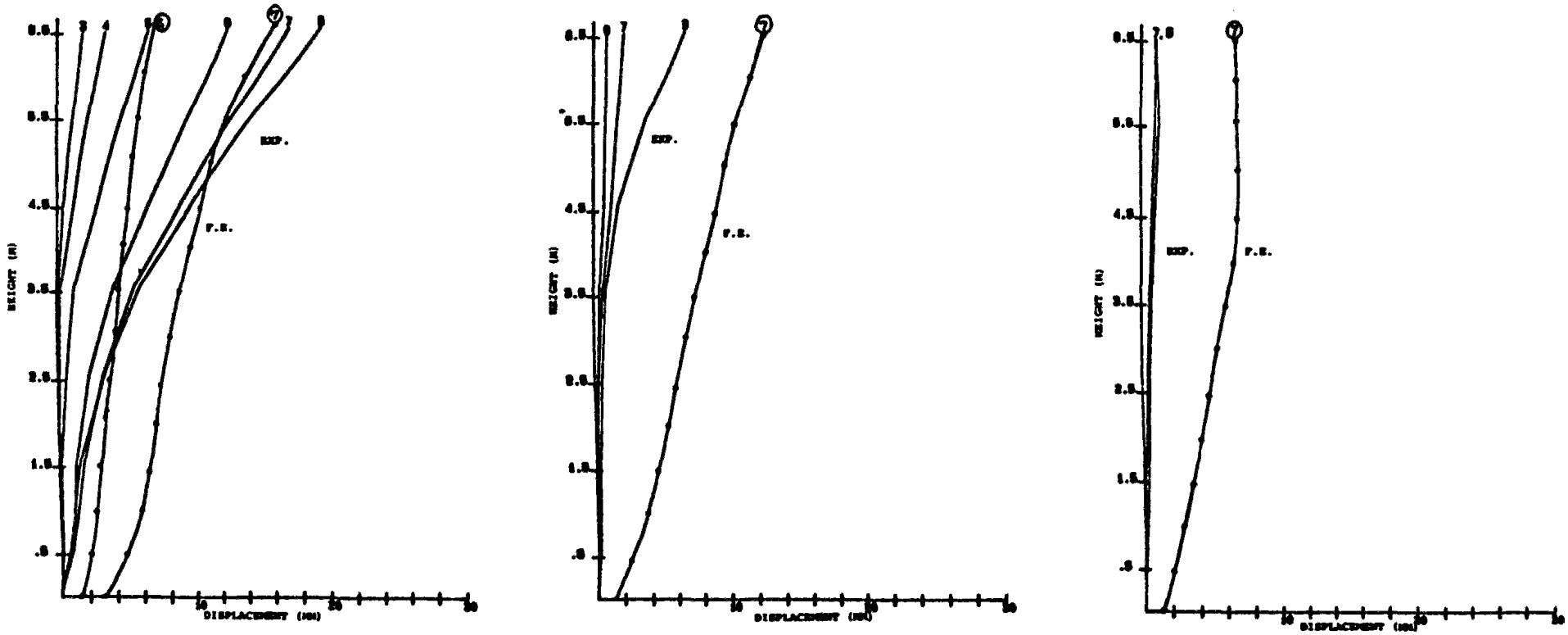
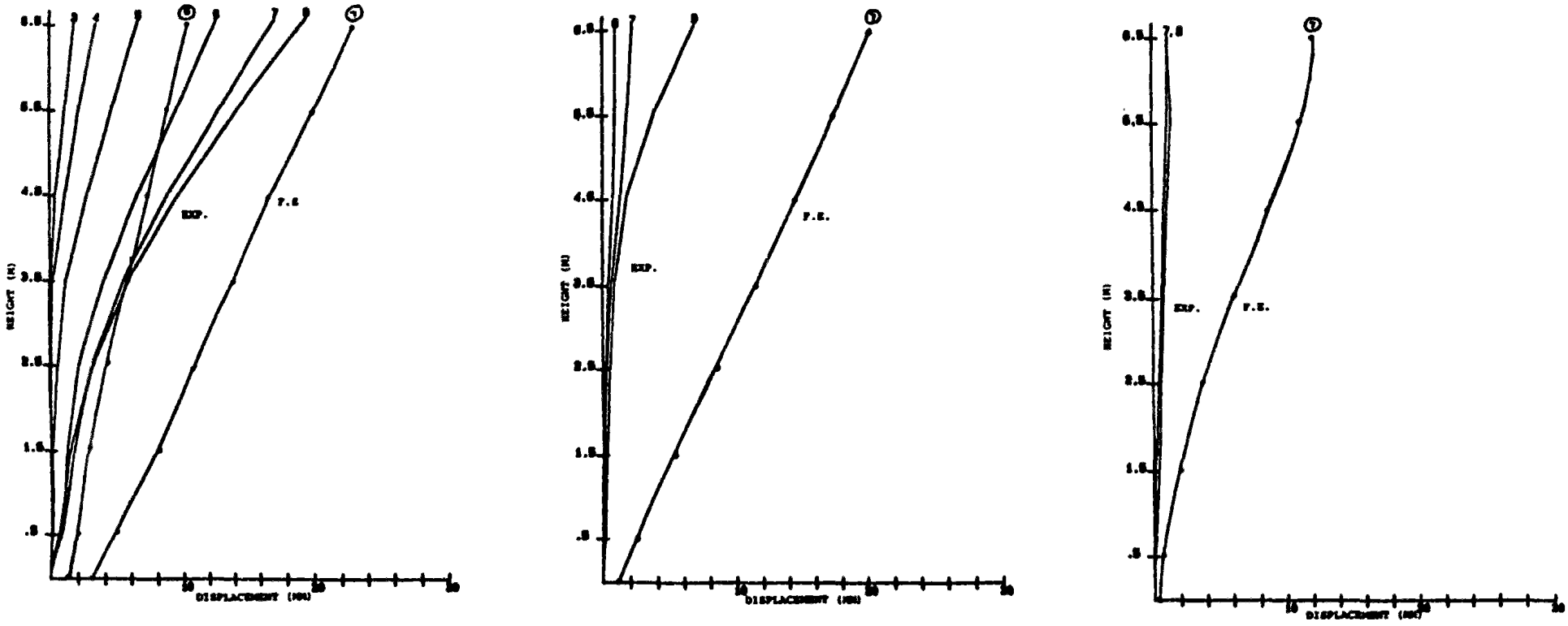


Figure C.2-2 : Déplacements dans le sol cloué pour les approches discrète et homogénéisée (Nanda, 1988)



a : Distance au parement égale à 2 m b : Distance au parement égale à 4 m c : Distance au parement égale à 8 m

Figure C.2-3 : Profil des déplacements horizontaux obtenus par une approche discrète (Nanda, 1988)



a : Distance au parement égale à 2 m b : Distance au parement égale à 4 m c : Distance au parement égale à 8 m

Figure C.2-4 : Profil des déplacements horizontaux obtenus par une approche homogénéisée (Nanda, 1988)

Depuis environ vingt ans, le LCPC a développé des programmes de calcul par éléments finis. Au premier code de calcul généraliste, dénommé ROSALIE-LCPC, qui a été utilisé par Saïba (1989) pour modéliser le mur CLOUTERRE-CEBTP No. 1, a succédé le code CESAR-LCPC, qui offre plus de possibilité et est plus performant dans le domaine de l'élastoplasticité (Mestat et al., 1992). Ce logiciel a été utilisé par Chaoui (1992) pour étudier le clouage d'une pente instable en 2D et 3D. Cependant, aucun calcul avec ce logiciel n'a été encore réalisé sur le mur CLOUTERRE-CEBTP No. 1.

Parallèlement, à ces codes de calcul généralistes, un logiciel PAREF a été développé au LCPC pour modéliser les soutènements de fouilles (Balay et al., 1985). Il a été modifié et amélioré au CERMES par Shafiee (1986) afin de pouvoir traiter le renforcement des sols. Ce code de calcul a été utilisé par Chiguer pour modéliser le mur CLOUTERRE-CEBTP No. 1.

Il convient de noter en outre le développement au CERMES du logiciel WALL par Nanda (1988, 1989), à partir d'un code de calcul développé par Duncan aux Etats-Unis. Le logiciel WALL a été utilisé pour modéliser le mur CLOUTERRE-CEBTP No. 1 (Nanda, 1988, 1989; Nanda et Delage, 1989).

Sur le marché français existent également de nombreux autres logiciels de calcul par éléments finis. Parmi ceux-ci, certains comme PLAXIS, permettent de traiter le renforcement des sols.

2.1.2.1.2 Méthode des différences finies

La méthode des différences finies consiste à "discrétiser" sur l'ouvrage étudié les équations d'équilibre dans leur formulation forte. Les dérivées présentes dans les équations sont remplacées par des expressions algébriques écrites en fonction des variables du problème qui ne sont calculées qu'aux noeuds. Par opposition, dans la méthode des éléments finis, les variables sont connues sur tout le domaine étudié grâce au schéma d'interpolation qui permet de calculer les variables en un point quelconque à partir des valeurs aux noeuds. Dans les deux cas, on obtient un système d'équations algébrique, qui peut être équivalent, si le schéma d'interpolation est linéaire pour la méthode des éléments finis (Billaux et Cundall, 1993).

Dans sa formulation dite traditionnelle, la méthode des différences finies n'utilise que des éléments rectangulaires. En fait, il existe d'autres formulations (Wilkins, 1964) qui permettent d'utiliser des éléments de n'importe quelle forme. C'est une telle formulation qui est utilisée dans FLAC.

Il convient de noter, également, que FLAC utilise le formalisme Lagrangien des déformations finies, dans lequel le maillage se déforme avec le matériau. La formulation en déformations finies n'est pas nécessaire pour le calcul d'ouvrages en service, pourvu que le niveau des déformations reste inférieur à un seuil maximal d'environ 5%. Or, dans les calculs avec CESAR, qui est formulé en petites déformations, nous avons noté des déformations plastiques de cisaillement de l'ordre de 8%, en pied de mur, à la fin de la phase 5. Dans la première partie de cette thèse, à propos des milieux de Cosserat, nous avons été amenés à regarder plus en détail les modifications à apporter à une formulation en petites déformations pour passer à une formulation en grandes déformations.

La différence la plus apparente concerne le maillage qui se déforme avec le matériau. Cependant, il convient aussi de modifier les matrices de comportement et de rigidité. En termes de résultats numériques, les différences sensibles, qui sont observées entre CESAR et FLAC, peuvent provenir des formulations différentes. Le premier logiciel est formulé en déformations infinitésimales tandis que dans le second est formulé en déformations finies. Cette explication repose sur la constatation que les déformées du sol et du parement, entre les deux codes, ne différent qu'en pieds de mur, où le sol est soumis à de fortes distorsions.

2.1.2.1.3 Méthodes des équations intégrales

La méthode des équations intégrales, qui est aussi connue sous le nom de méthode des "éléments de frontière", consiste à résoudre les équations d'équilibres, sous une forme pré-intégrée sur les frontières. La solution est approximée sur les éléments aux frontières dont la géométrie est définie par des fonctions de formes de type polynomiale. Cette méthode est très performante quand les matériaux étudiées sont élastiques, car il est alors possible d'utiliser des formules analytiques pour les intégrales. Elle permet ainsi de traiter des problèmes tridimensionnels grâce à l'intégration des équations ce qui réduit les dimensions du problème aux limites d'une unité. Cependant, il n'est possible d'introduire facilement des non linéarités qu'au niveau des contact entres les matériaux élastiques (Selvadurai et Boulon, 1992; Boulon et Garnica, 1994).

Cette méthode a été utilisée pour des calculs de murs en sol cloué (Marchina, 1984) mais elle n'est pas la plus adaptée. En effet, le résultat dépend, certes, des non linéarités aux interfaces entre le sol et les clous, mais aussi et surtout, des déformations plastiques dans le sol en pied de mur. Or, la méthode des équations intégrales aux frontières perd tout intérêt pratique dès qu'on introduit des non linéarités dans le sol et en particulier des déformations plastiques.

2.1.2.2 Méthode de l'équilibre local

La méthode de l'équilibre local, qui fut développée pour la première fois pour la Terre Armée, consiste à étudier l'équilibre d'une tranche de sol et de parement autour d'un élément de renforcement horizontal (figure C.2-5). Comme l'état des contraintes et des déformations dans ce volume réduit de sol dépend du comportement d'ensemble de l'ouvrage, il faut faire appel à un certain nombre d'hypothèses ainsi qu'à des résultats de mesures sur des ouvrages réels similaires pour pouvoir résoudre le problème.

Il est supposé que les contraintes tangentielles τ_i (x) et τ_{i+1} (x) sur les faces supérieure et inférieure s'équilibrent ainsi que les efforts tranchants horizontaux dans le parement. Par ailleurs, le cisaillement τ est nul au point de traction maximale T_{max} car T est maximale et sa dérivée, qui est proportionnelle à τ , est nulle. Il en résulte que les directions horizontale et verticale sont les directions principales pour les contraintes.

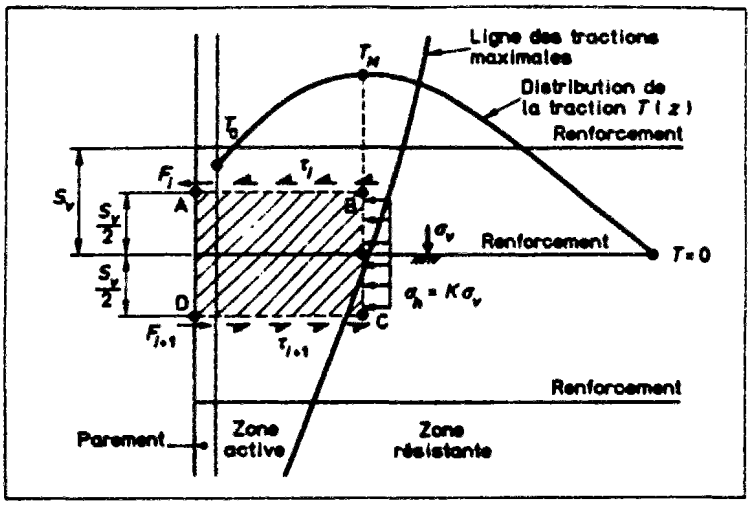


Figure C.2-5 : Principe de la méthode de l'équilibre local

La face arrière de la tranche est prise verticale au point de traction maximale T_{max} , ce qui permet d'écrire simplement l'équilibre horizontal de la tranche sous la forme suivante :

$$T_{max} = S_v \, S_h \, K \, \sigma_v(z) \qquad \text{(C.2-1)}$$

où S_v et S_h sont les espacements vertical et horizontal, $\sigma_v(z)$ la contrainte verticale à la profondeur z et au point de traction maximale et K le coefficient reliant la contrainte horizontale à la contrainte verticale (figure C.2-6).

Les hypothèses précédentes sont à compléter à la fois par la connaissance du coefficient K, lequel peut être interprété comme un coefficient moyen de poussée des terres le long de la ligne des T_{max} , et par la distribution de la contrainte verticale σ_v (z) en fonction de la profondeur. La figure C.2-6 présente les courbes expérimentales K(z) prises en compte dans les recommandations américaines pour différents types de renforcement en fonction de leur extensibilité (Christopher et al., 1990). La distribution de la contrainte verticale $\sigma_V(z)$ le long d'un renforcement horizontal est supposée non uniforme et de type Meyerhof pour les remblais renforcés quasi-inextensibles (Norme NF P 94 220). Connaissant la distribution des efforts dans chaque renforcement aux états de service et sa loi de comportement, il est même possible d'évaluer une partie des déformations de l'ouvrage en service.

Cette méthode s'avère bien adaptée pour le dimensionnement aux états limites de service des techniques de renforcement de remblai qui sont relativement bien standardisées. En effet, le coefficient K(z) et la distribution de contraintes $\sigma_v(z)$ doivent être connus à partir de mesures réalisées sur des ouvrages en service. Cependant, pour les autres techniques et notamment pour les ouvrages en sol cloué, qui sont utilisés dans tous les types de sol et avec des géométries très variables, une telle méthode ne peut pas être utilisée couramment. Juran (1977), qui avait initialement proposé la méthode de l'équilibre local, a essayé de l'adapter au clouage des sols (Jurant et al., 1990). Cependant, si cette méthode donne des résultats acceptables pour des géométries simples, elle ne permet pas de traiter systématiquement n'importe quel mur de soutènement.

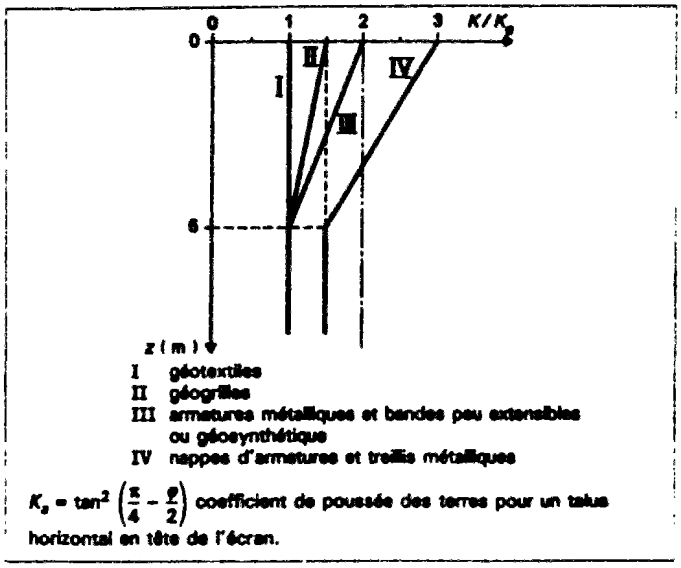


Figure C.2-6 : Variation du coefficient K suivant l'extensibilité du renforcement (Christopher et al., 1990)

2.1.2.3 Méthodes semi-empiriques

Dans la technique du clouage des sols, la méthode actuellement recommandée pour évaluer les déformations des ouvrages en service est de type semi-empirique, en l'absence d'autres méthodes éprouvées (Recommandations CLOUTERRE 1991). Les déplacements, horizontal δ_h et vertical δ_v , qui sont maximaux en tête du mur en sol cloué, sont estimés à partir de la formule suivante :

$$\lambda = H\,(1 - \tan\eta)\,\kappa \qquad \text{(C.2-2)}$$

où H est la hauteur du mur, η le fruit du parement, κ le coefficient d'amortissement et λ la distance sur laquelle les déplacements δ_h et δ_v s'amortissent (tableau C.2-1 et figure C.2-7). Cette formule a été développée à partir de mesures réalisées sur des ouvrages en service, notamment dans le cadre du Projet National CLOUTERRE (Recommandations CLOUTERRE 1991).

Tableau C.2-1 : Règles semi-empiriques d'estimation des déplacements (Recommandations CLOUTERRE 1991)

	Sols semi-rocheux	Sables	Argiles
$\delta_v = \delta_h$	H / 1000	2 H / 1000	4 H / 1000
κ	0,8	1,25	1,5

Cette approche semi-empirique peut être utile au niveau du dimensionnement pour estimer les déformations d'une structure "standard". Cependant, ces formules ont été développées pour des murs en sol cloué sans surcharge en tête, tels qu'un immeuble ou un talus, et ne comportant ni tirants ou butons. Or en site urbain, là où les déplacements sont le paramètre important, le clouage est très souvent associé à un ou deux lits de tirants ou butons. Ces formules perdent alors tout leur intérêt.

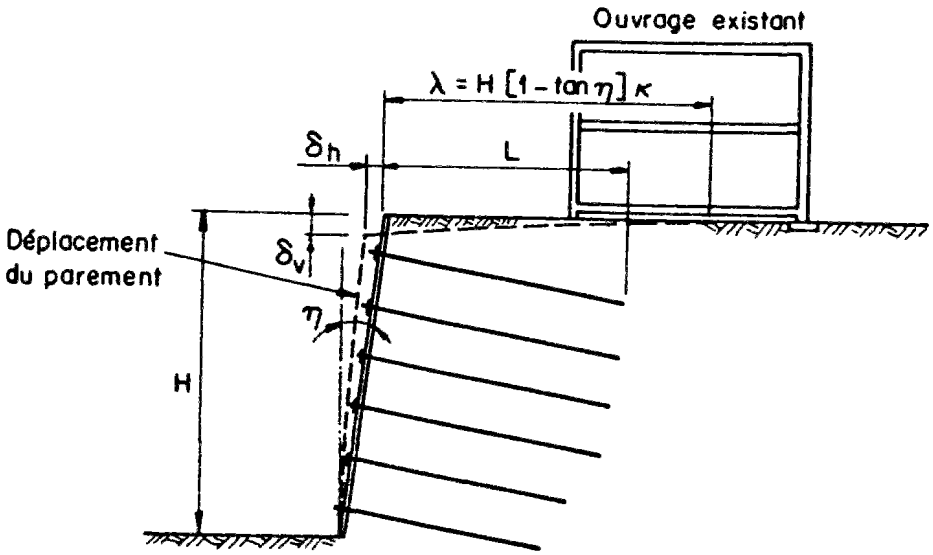


Figure C.2-7a : Déformations schématiques d'un mur en sol cloué

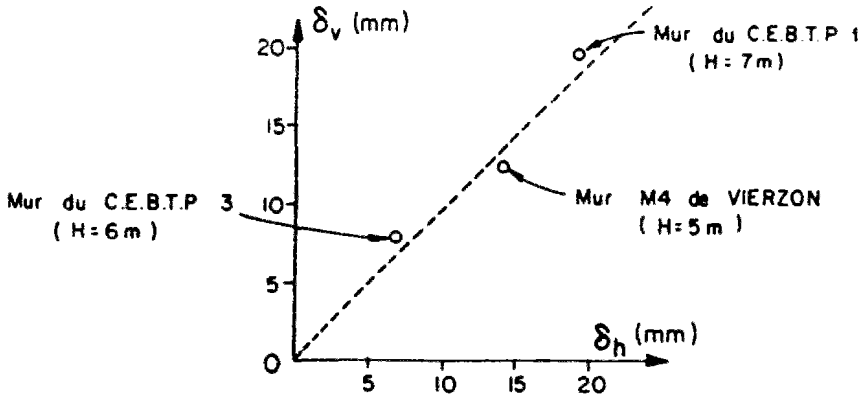


Figure C.2-7b : Déplacements observés sur des murs en sol cloué en vraie grandeur

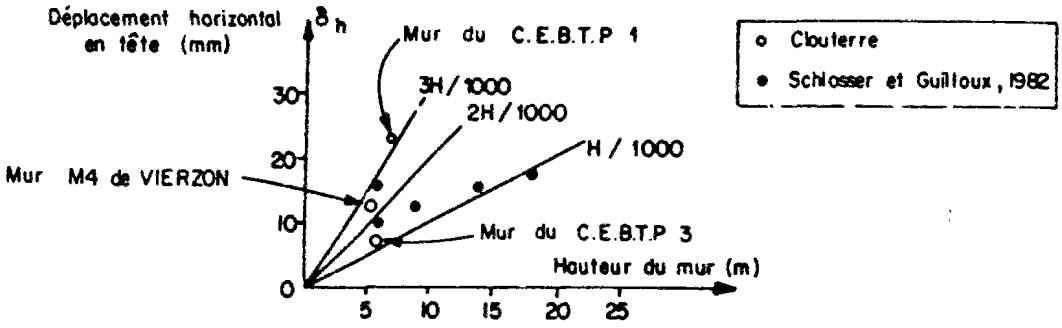


Figure C.2-7c : Déplacements horizontaux observés sur des murs en vraie grandeur

Figure C.2-7 : Règles semi-empiriques d'estimation des déplacements d'un mur en sol cloué sans surcharge, tirant ou buton (Recommandations CLOUTERRE 1991)

2.1.3 Conclusion sur les méthodes de calcul en déformation

De toutes ces méthodes de calcul des déformations d'un ouvrage en sol cloué, seules les méthodes générales telles que : la méthode des éléments finis ou la méthode des différences finies, permettent de traiter les ouvrages réels dans toute leur complexité, aussi bien géométrique que rhéologique. Les autres méthodes, notamment, les méthodes semi-empiriques peuvent être utiles pour un pré-dimensionnement. Cependant, elles ne sauraient suffire pour modéliser complètement un ouvrage en sol cloué.

2.2 Bibliographie sur les calculs en déformation de murs en sol cloué

Depuis l'apparition du clouage des sols en soutènement, plusieurs études ont été réalisés sur les calculs en déformation de mur en sol cloué, que ce soit en France, ou à l'étranger. Dans cette étude bibliographique détaillée, nous ne nous intéresserons qu'aux simulations numériques qui ont donné lieu à des comparaisons avec des ouvrages en vraie grandeur, instrumentés de manière complète. Parmi les pays à s'être intéressés les premiers au clouage, après le démarrage en France, il convient de mentionner l'Allemagne et les Etats-Unis.

En France, après une phase initiale où les recherches ont été principalement orientées sur les calculs à la rupture afin de développer une méthode de dimensionnement permettant de prendre en compte la rigidité des clous en flexion (Schlosser 1982, 1983), méthode qui a été validée sur les expérimentations en vraie grandeur du Projet National CLOUTERRE (Schlosser et al., 1992, 1993), les recherches se sont principalement orientées sur les calculs en déformation (Shafiee, 1986; Nanda, 1988; Chiguer, 1989; Saïba, 1989).

En Allemagne, un gros projet de recherche intitulé "Bodenvernagelung" s'est déroulé, de 1975 à 1980, en coopération entre le constructeur Bauer et l'Université de Karlsruhe. Plusieurs murs en vraie grandeur ont été instrumentés et poussés jusqu'à la rupture. Les nombreuses mesures obtenues sur ces ouvrages ainsi que les calculs de la rupture de ces murs dans le cadre de l'analyse limite ont fait l'objet de plusieurs publications (Stocker et al., 1979; Gässler et Gudehus, 1981, 1983; Gässler, 1987, 1990, 1992, 1993). Par contre, il semblerait qu'aucun calcul en déformation sur ces murs expérimentaux en vraie grandeur n'ait été publié, à ce jour.

Aux Etats-Unis, après les études initiales réalisées sur le mur de Davis (Romstadt et al., 1976; Herrmann et Al-Yassin, 1978; Shen et al., 1981; Shen et Herrmann, 1981), très peu de recherches ont été conduites. Il faut attendre la fin des années 1980, la publication du rapport de synthèse NCHRP 290 sur les techniques de renforcement (Mitchell et Villet, 1986) et la collaboration entre la Federal Highway Administration (FHWA) et le Projet National CLOUTERRE, pour que les recherches sur le clouage reviennent au goût du jour. Il faut noter, en particulier, le développement du code de calcul par éléments finis SNAP, qui a été ensuite utilisé pour étudier les murs associant la technique du clouage aux tirants (Salama, 1980). Ce code a été testé sur un mur expérimental en vraie grandeur, construit par Schnabel Foundation Co. et sponsorisé par la FHWA.

Outre ces trois pays, il convient de mentionner le Japon, où de nombreuses études et calculs en déformation ont été réalisés sur des pentes stabilisées par clouage (Matsui et San, 1989, 1990; Matsui et al., 1990, 1993). Cependant, il semblerait qu'assez peu a été fait sur la technique du clouage en soutènement

Dans le paragraphe qui suit, nous passerons en revue les études en déformation, qui ont été réalisées au cours des dix dernières années et qui ont contribué au développement de l'état des connaissance (Shafiee, 1986; Chiguer, 1989; Nanda, 1989; Saïba, 1989; Salama, 1992).

2.2.1 Synthèse des études de Shafiee (1986)

Shafiee (1986) s'est intéressé au comportement d'un mur en sol cloué de 5 m de haut, dans un sol élastoplastique et en supposant un contact entre le sol et les clous élastiques en adhérence parfaite.

2.2.1.1 Déplacements

L'évolution du profil des déplacements horizontaux, au cours des différentes phases de construction, est présentée sur la figure C.2-8. Il faut noter pour les quatre premières phases un basculement du mur en arrière qui peut être attribué, en partie, à l'hypothèse d'adhérence parfaite entre le sol et les clous.

Shafiee (1986) a été l'un des premiers à mettre en évidence numériquement l'importance du phasage de la construction sur les déformations. En particulier, les observations expérimentales, réalisées par Schlosser (1983) sur les ouvrages en Terre Armée et les murs en sol cloué, ont été confirmées par cette étude numérique. Pour que le profil des déplacements d'un mur de soutènement en sol cloué soit comparable à ce qui est observé sur les ouvrages en vraie grandeur, il convient de modéliser la construction, phase par phase. La modélisation en une phase conduit à un profil de déplacement horizontal, ballonné dans la partie inférieure du mur, ce qui est caractéristique des murs en Terre Armée. Il est à noter que la modélisation d'un mur en Terre Armée, en une ou plusieurs phases, conduit sensiblement aux mêmes résultats. (figure C.2-9). Par contre, pour un mur en sol cloué, il est indispensable de modéliser toutes les phases de construction, du haut vers le bas, afin de retrouver un profil de déplacements du parement similaire à ce qui est observé.

L'influence du phasage peut être aussi observé sur le champ de déplacements de l'ouvrage (figures C.2-10a et C.10-b). La modélisation de la construction en une phase conduit à des soulèvements du mur et du sol de fondation tandis que la modélisation de la construction en cinq phases conduit à un soulèvement du fond de fouille et un tassement du mur en fin de construction.

Saïba (1989) a obtenu, dans ses calculs, un soulèvement du mur en sol cloué, quelle soit la phase de construction considérée (figure C.2-23). Ce soulèvement systématique en tête peut être attribué, en partie, à une mauvaise modélisation du phasage de la construction.

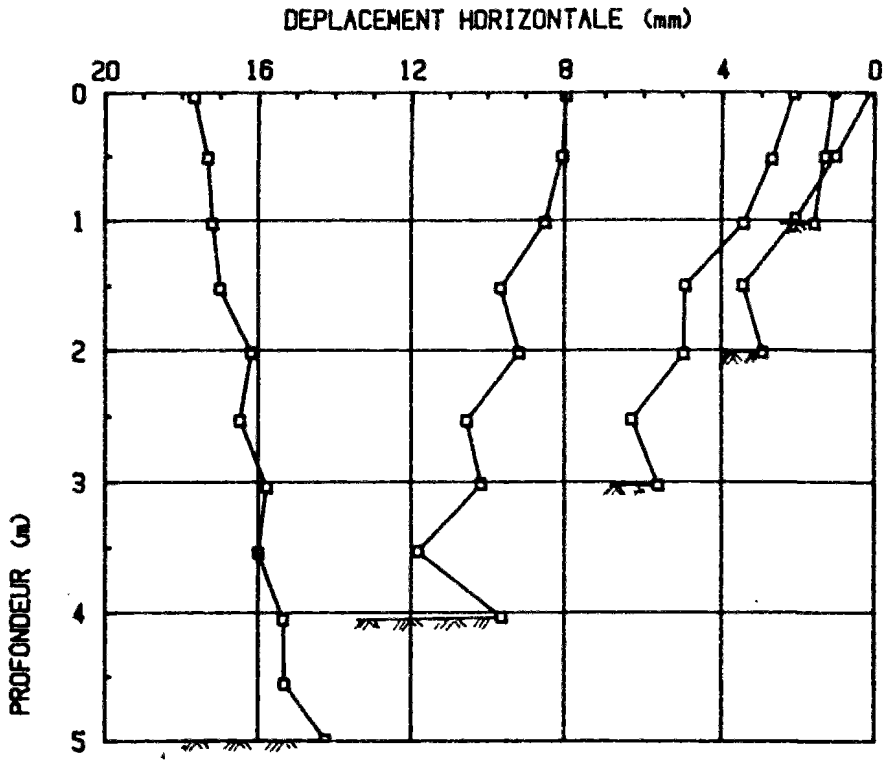


Figure C.2-8 : Déplacements horizontaux d'un mur en sol cloué de 5 m de haut au cours des phases d'excavations (Shafiee, 1986)

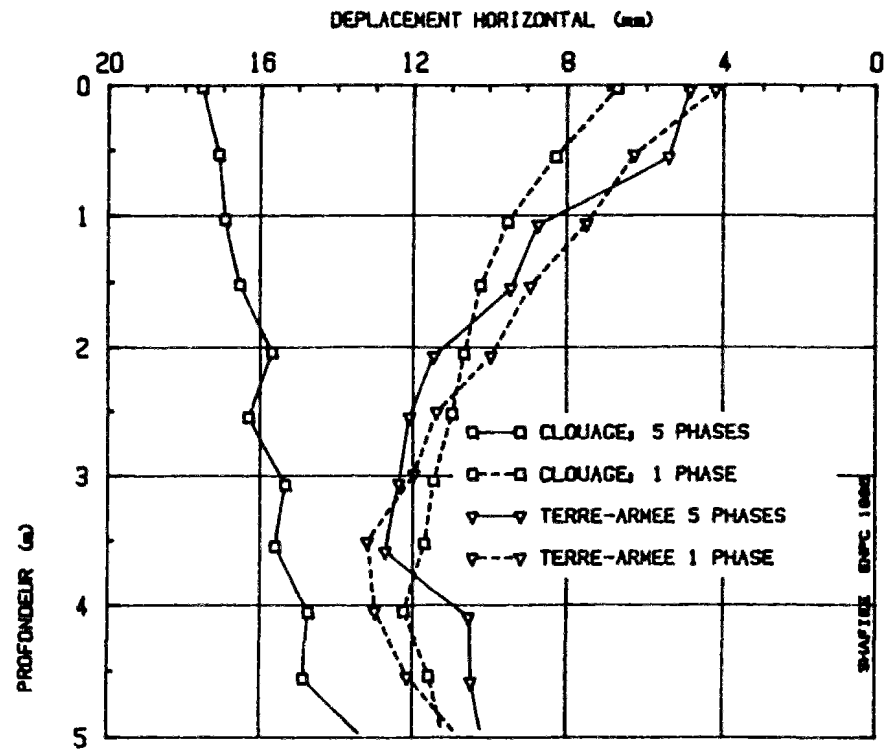


Figure C.2-9 : Comparaison des déplacements horizontaux pour un mur en sol cloué, construit en 1 ou 5 phases, et un mur en Terre Armée, construit en 1 ou 5 phases (Shafiee, 1986)

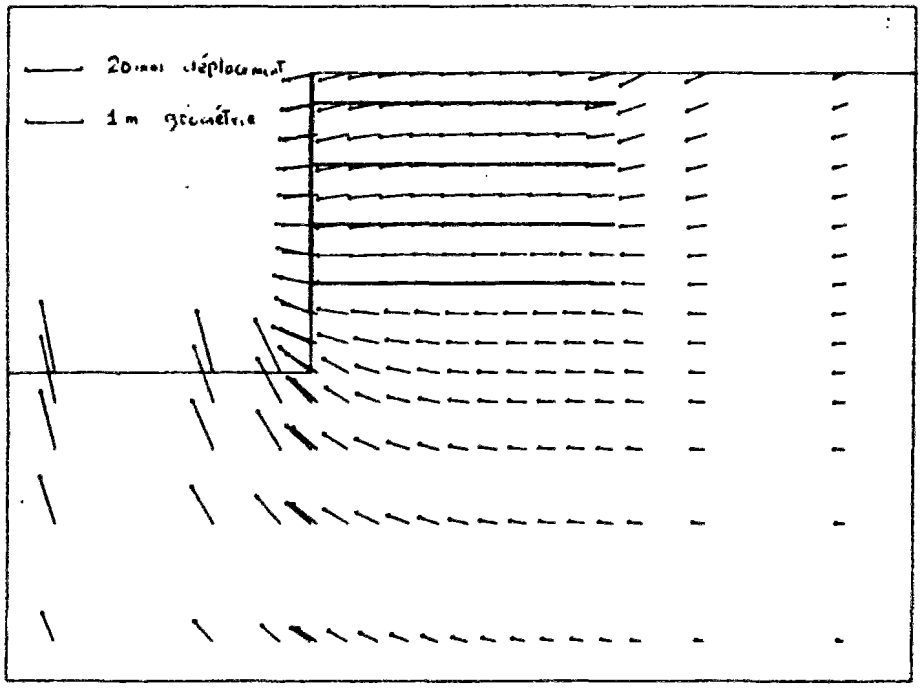


Figure C.2-10a : Champ de déplacements pour un mur en sol cloué construit en une phase

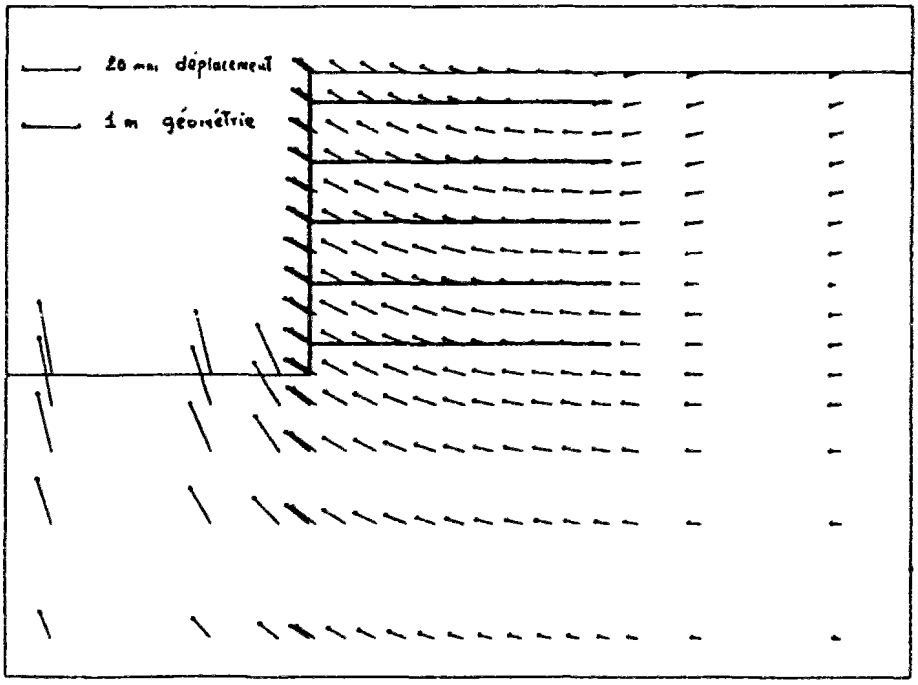


Figure C.2-10b : Champ de déplacements pour un mur en sol cloué construit en cinq phases

Figure C.2-10 : Simulation de la construction d'un mur en sol cloué (Shafiee, 1986)

2.2.1.2 Tractions

L'influence déterminante du phasage peut être aussi observée sur les valeurs des tractions développées dans les clous ainsi que sur la forme de la zone active. Pour un mur en sol cloué, la modélisation en une phase conduit à une ligne des tractions maximales très proche du parement, à 0,43 m, tandis que le calcul en cinq phases donne une ligne des tractions située plus loin du parement, à 1,4 m. D'autre part, le dernier clou est le plus sollicité dans le cas d'une construction en une phase, alors que dans le cas d'une construction en cinq phases, il n'est quasiment pas sollicité. Ce dernier cas correspond le plus aux observations sur ouvrages réels.

L'influence de l'interaction entre le sol et les clous a été étudiée par Shafiee (1986), pour le cas d'un mur en sol cloué par des clous horizontaux, construit en cinq phases, en considérant les deux cas extrêmes, adhérence parfaite et couche d'interface à critère de rupture orientée. Les figures C.2-11a et C.2-11b présentent la distribution des tractions dans les quatre lits de clous supérieurs pour chacun des deux cas étudiés. Les efforts dans le cas adhérent sont supérieurs d'environ 5 à 15% aux efforts dans le cas où les clous peuvent glisser par rapport au sol. L'adhérence empêche les déformations et induit des efforts plus grands dans les renforcements. La position de la ligne des tractions maximales n'est pas sensiblement modifiée. Il faut, cependant, noter que dans le cas adhérent, les efforts aux extrémités des clous sont non nuls, de l'ordre de 5 à 8 kN, ce qui n'est pas négligeable quand on considère par exemple le clou No. 1 dont la traction maximale est égale à 11 kN. Dans le cas où les clous peuvent glisser par rapport au sol, les efforts sont bien nuls aux extrémités des clous. Pour réduire le temps des calculs, Shafiee (1986) propose de ne considérer que le cas d'une adhérence parfaite, ce qui ne permet pas de tirer des conclusions générales de son étude. Saïba (1989) a, par ailleurs, mis en évidence que l'adhérence parfaite entre le sol et les clous n'est acceptable que dans le cas de clous horizontaux.

Le choix d'une adhérence parfaite entre le sol et les clous a une influence très importante sur le champ des déplacements puisque les clous en traction à leurs extrémités, mettent également en traction le sol en arrière du massif cloué. Il en résulte des déplacements horizontaux très importants, à l'arrière du massif en sol cloué, alors que toutes les mesures sur ouvrages réels donnent des déplacements qui s'amortissent très rapidement avec la distance au parement.

Il est à noter sur les calculs effectués avec le logiciel CLUTER la présence de zones plastiques réparties en pied de mur, le long du parement et en arrière des clous (figure C.2-12). La présence de zones plastiques en arrière des clous peut être expliquée par la mise en traction du sol puisque les clous ne sont pas détachés du sol comme ils devraient l'être. Cependant; aussi bien en arrière des clous qu'en pied de mur, il est difficile d'expliquer la forme des zones plastiques avec des éléments élastiques noyés au milieu d'éléments plastifiés.

Tous les résultats de Shafiee (1986) sont à relativiser par rapport aux hypothèses qu'il a considérées dans sa modélisation. En particulier, l'hypothèse d'adhérence parfaite entre le sol et les clous est très contraignante et influence de manière très sensible les résultats.

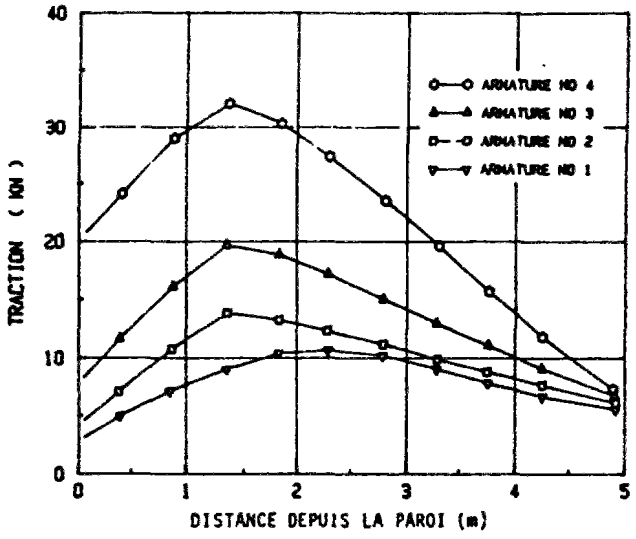


Figure C.2-11a : Hypothèse d'adhérence parfaite entre le sol et les clous

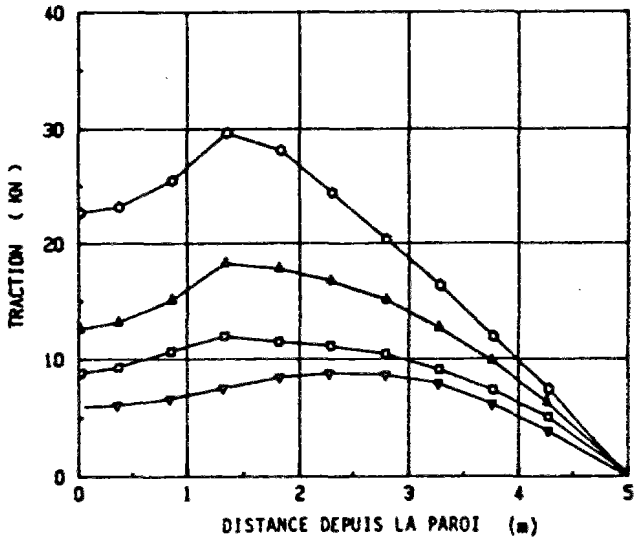


Figure C.2-11b : Interface modélisé par une couche d'interface à critère de rupture orienté

Figure C.2-11 : Distribution des tractions dans les quatre lits de clous supérieurs d'un mur en sol cloué modélisé en 5 phases de construction (Shafiee, 1986)

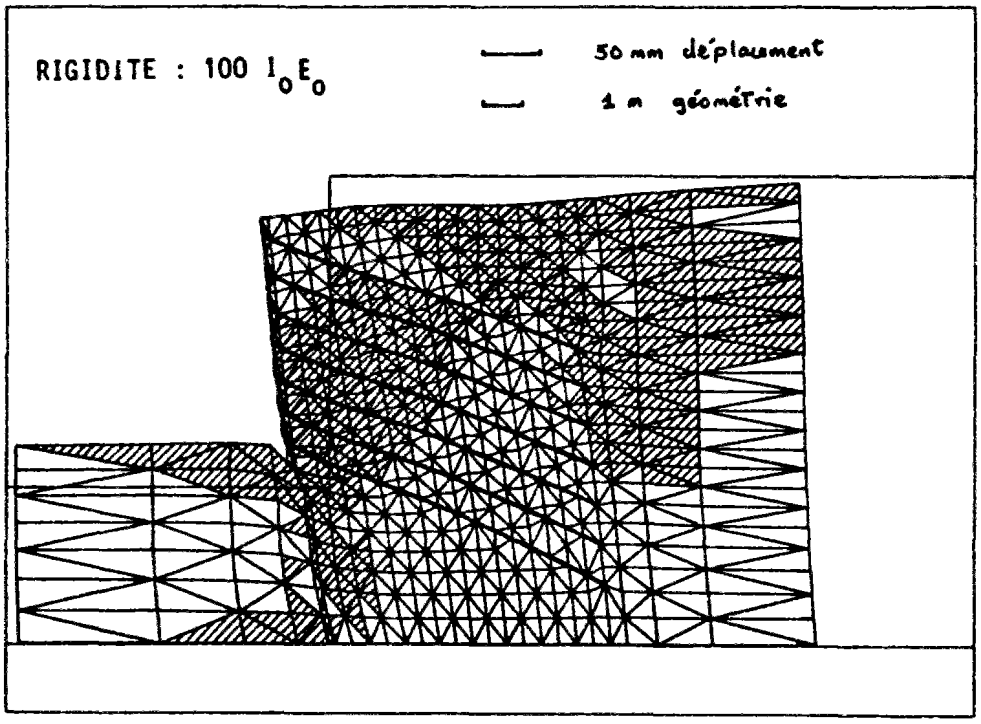


Figure C.2-12 : Exemple de zones plastiques obtenues avec CLUTER (Shafiee, 1986)

2.2.2 Synthèses des études de Chiguer (1989)

Chiguer (1989) a réalisé une série de calculs en faisant varier à chaque fois un paramètre, tous les autres étant maintenus constants par ailleurs (tableau C.2-2). Plusieurs remarques peuvent être faites sur les résultats de ses travaux.

Tableau C.2-2 : Etude de sensibilité des paramètres effectuée par Chiguer (1989)

No.	Sol					Interface		Mur	Clous
	ϕ [°]	c [kPa]	E [kPa]	ν [sans]	ψ [°]	ϕ_i [°]	c_i [kPa]	E_b [MPa]	θ [°]
1	38	3	2 E_M	0,33	32	38	0	20 000	0
2	38	3	E_M	0,33	32	38	0	20 000	0
3	38	3	2 E_M	0,33	32	38	0	20 000	0
4	38	3	2 E_M	0,33	32	38	0	2 000	0
5	38	3	2 E_M	0,33	32	adhérence		20 000	0
6	38	3	2 E_M	0,33	32	adhérence		20 000	10

2.2.2.1 Soulèvements et déplacements

Le massif de sol se soulève en tête et en fond de fouille durant les 3 premières phases de construction (figure C.2-13). Par la suite, les soulèvement ne se manifestent plus qu'en fond de fouille, le haut du mur ayant tendance à tasser. Ceci peut être attribué à l'élasticité linéaire même si le module d'Young est pris variable avec la profondeur ainsi qu'aux performances de l'algorithme élastoplastique.

Le profil des déplacements du mur est bombé dans sa partie inférieure et quasiment vertical dans sa partie haute. Il ne correspond pas du tout au déversement, progressif avec les phases successives d'excavation, observé sur les ouvrages réels. Un peu plus en profondeur dans le massif en sol cloué, les profils de déplacements sont plus proches de la réalité mais les déplacements calculés sont beaucoup trop importants par rapport à ceux mesurés.

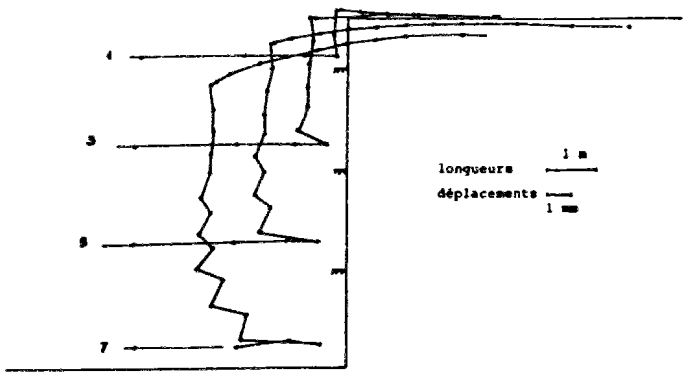


Figure C.2-13 : Déformée du parement
à la fin des phases de construction No. 1, 3, 5, et 7 (Chiguer, 1989)

L'amplitude des déplacements horizontaux calculés en tête de l'inclinomètre No. 1 est de 3 mm, à la fin de la 5ème phase, pour le calcul No. 1 où le module d'Young du sol est égal à 2 E_M , alors que les mesures donnent un déplacement d'environ 9 mm (figure C.2-14). Le calcul No. 2 avec un module d'Young du sol égal à E_M donne un déplacement maximal en tête de l'inclinomètre de 5,5 mm (figure C.2-15). Le déplacement δ_h est donc quasiment doublé quand E est divisé par 2 et il se rapproche des mesures. Cependant, il n'est pas raisonnable de caler le module d'Young E à des valeurs aussi faible afin d'obtenir des résultats acceptables (Nanda et Delage, 1989).

Plusieurs auteurs dont Delage et al. (1988) et Nanda (1989) ont noté que la déformée du parement, obtenue par le calcul, ne présente qu'une similarité très lointaine avec le profil des déplacements de parement mesurés (figure C.2-16). Notamment, la déformée présente des irrégularités très importantes. Ce phénomène peut être expliqué très simplement, si l'on analyse les déplacements horizontaux mesurés. Ce sont des déplacements relatifs, mesurés à partir de l'instant où les mires sont installées. Les résultats des calculs sont des déplacements absolus, obtenus sur des éléments volumiques, initialement considérés comme du sol, puis transformés en béton au cours de la modélisation du phasage. Un traitement approprié, qui n'a pas été fait dans le passé, est proposé dans la présente étude (cf. paragraphe 6.4.4, partie C).

L'influence du modèle d'interface, adhérence parfaite ou couche fine d'éléments avec critère de plasticité orientée, sur la déformée du parement à la fin de la 7ème phase de construction, est relativement faible d'après Chiguer (1989) (figure C.2-17). On peut noter, tout au plus, des déplacements plus faibles en tête du mur dans le cas de l'adhérence parfaite. Ceci peut s'expliquer par les valeurs choisies pour le frottement latéral unitaire q_s , qui sont trop fortes. En particulier, la valeur la plus faible, prise pour les renforcements modèles, est de 58 kPa alors que Plumelle (1986) a mesuré tout au plus 30 kPa lors des essais préliminaires. Avec un tel choix, il en a résulté une plastification de l'interface et des déplacements relatifs entre les clous et le sol quasiment nuls. D'autre part, comme le module de déformation de ces éléments a été pris égal à celui du sol, les deux calculs ont donné les mêmes résultats.

2.2.2.2 Tractions

Il est à noter que dans les premières phases de construction, les tractions calculées sont en assez bon accord avec les mesures pour les deux lits les plus bas (figure C.2-18). Pour les deux lits les plus haut, les calculs sous-estiment les mesures d'environ 50%. Pour les phases 6 et 7, les différences s'accentuent, mais cela peut être attribué au fluage qui s'est produit sur deux mois, entre les phases 5 et 7, et qui n'est pas pris en compte dans l'étude. Une étude de sensibilité a été menée en faisant varier le module d'Young de 2 E_M à E_M , entre les calculs No. 1 et 2. La réduction de E a pour effet d'augmenter les efforts dans les lits de clous les plus bas. La différence est au maximum de quelques kN, pour un module divisé par deux. Les efforts sont donc relativement peu sensibles au choix du module de déformation du sol. C'est un résultat que nous avons par ailleurs obtenu dans l'étude paramétrique présentée plus loin.

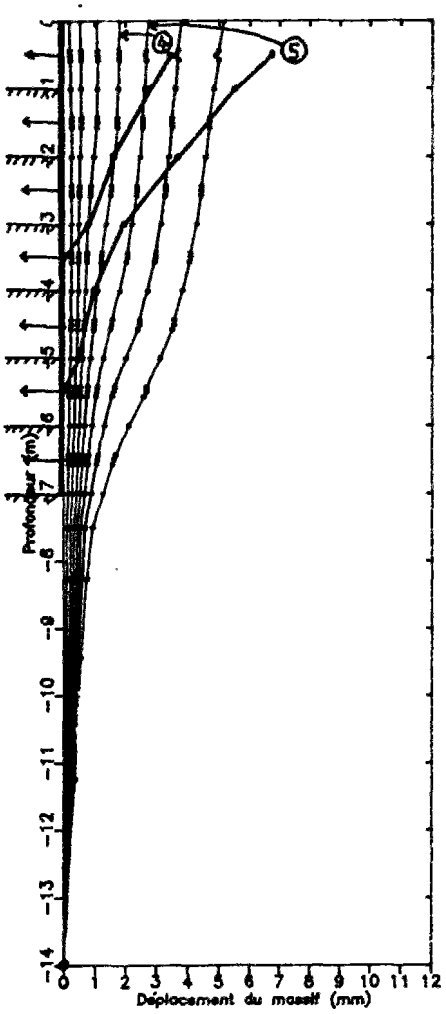


Figure C.2-14 : Déformée du parement du mur en sol cloué CEBTP-No. 1 pour le calcul No. 1 ($E = 2\ E_M$) (Chiguer, 1989)

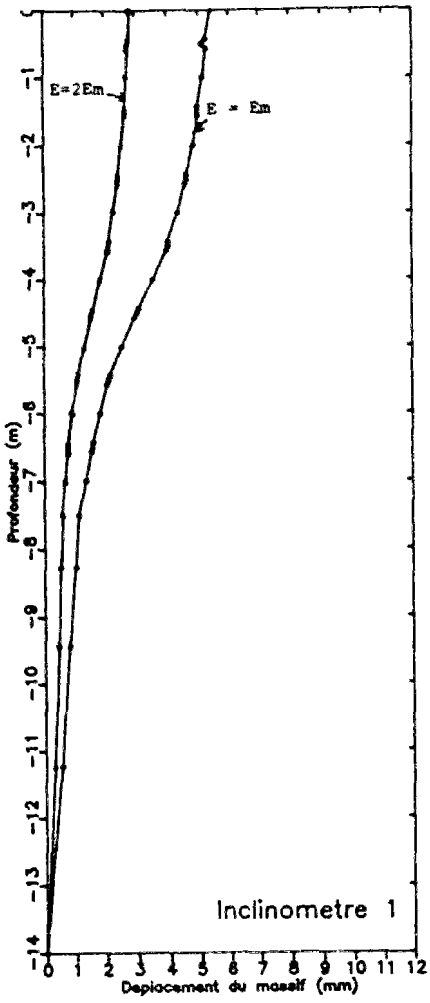


Figure C.2-15 : Déplacements du sol à 2 m du parement (inclinomètre No. 1); calculs No.1 ($E=2\ E_M$) et No.2 ($E=E_M$) (Chiguer, 1989)

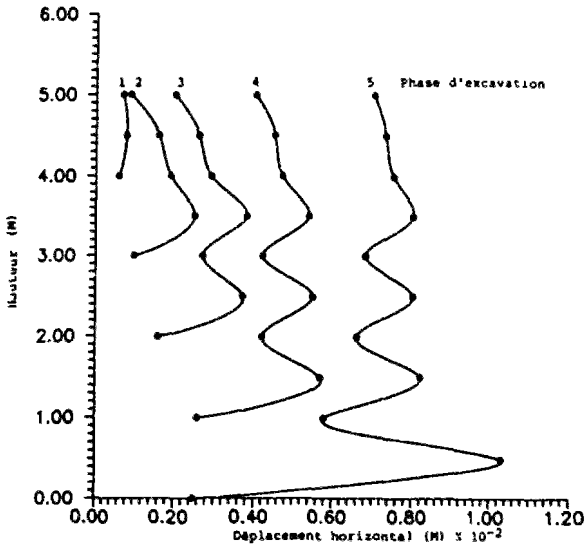


Figure C.2-16 : Evolution de la déformée du parement avec les phases de construction (Delage et al., 1989)

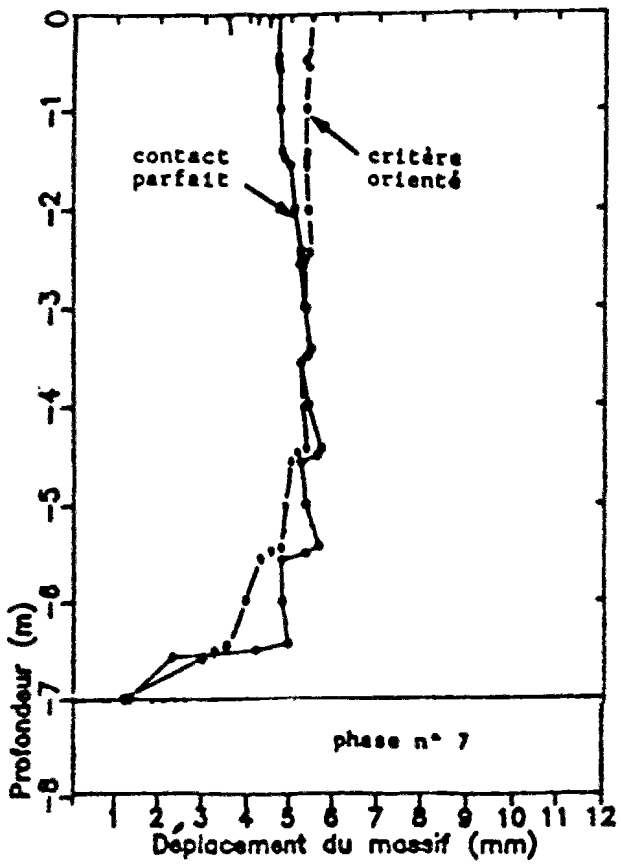


Figure C.2-17 : Déformées du parement
pour les calculs No. 1 (couche d'éléments avec critère de plasticité orientée)
et No. 5 (adhérence parfaite) (Chiguer, 1989)

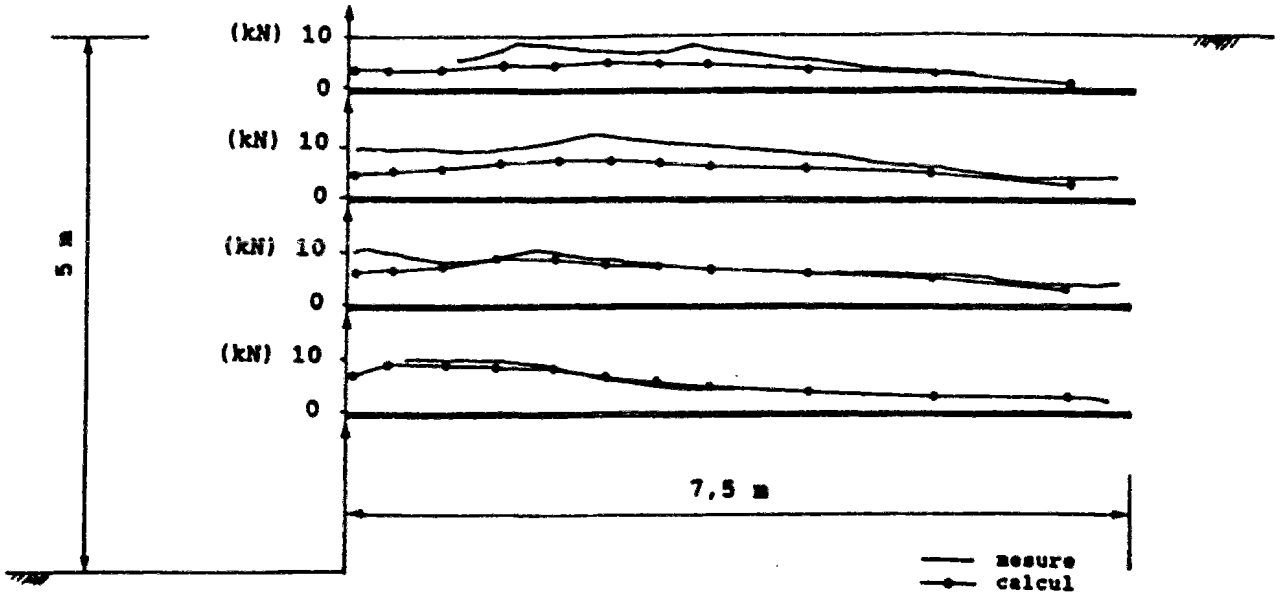


Figure C.2-18 : Répartition des tractions dans les clous
à la fin de la 7ème phase de construction pour les calculs No. 1 et 2
du mur CEBTP No. 1 du Projet National CLOUTERRE (Chiguer, 1989)

2.2.3 Synthèse des études de Nanda (1988, 1989)

2.2.3.1 Loi de comportement

Nanda (1988, 1989) a suggéré l'emploi d'une des lois de Duncan pour modéliser le sol dans un ouvrage en sol cloué. La raison principale de ce choix est la possibilité, dans ce modèle, de choisir un module de décharge différent du module de charge. Les sols manifestent, assez souvent, une rigidité en décharge supérieure à la rigidité en charge. Le formalisme élastoplastique classique n'est pas approprié pour modéliser ce type de phénomène, dans la mesure où le module élastique est par définition, identique, en charge et en décharge. La possibilité d'utiliser un module en décharge différent de celui en charge doit donc être considéré principalement comme une astuce numérique, qui ne rentre pas dans le cadre du formalisme élastoplastique rigoureux.

Un deuxième trait des lois de Duncan est la dépendance des modules d'Young tangents, en charge et en décharge, en fonction de la pression de confinement :

$$E_i = K_L P_a \left(\frac{\sigma_3}{P_a} \right)^n \qquad \text{(C.2-1)}$$

$$E_{UR} = K_{UR} P_a \left(\frac{\sigma_3}{P_a} \right)^n \qquad \text{(C.2-2)}$$

où E_i est le module tangent initial, K_L et n , deux paramètres élastiques adimensionnels, P_a , la pression atmosphérique, σ_3 , la contrainte de confinement, E_{UR} , le module tangent en décharge et K_{UR} , un paramètre adimensionnel.

Le choix des paramètres de la loi de Duncan et Chang (1970), fait par Nanda (1989), donne pour le module tangent initial E_L , en supposant que la contrainte principale σ_3 est égale à $K_0 \gamma z$, des valeurs formant une enveloppe des modules pressiométriques mesurés (figure C.2-19). Ce choix correspond à une fourchette basse puisqu'il consiste à prendre un module d'Young du sol égal simplement au module pressiométrique.

2.2.3.2 Première étude

L'hypothèse d'adhérence parfaite entre le sol et les clous, conduit, quelle que soit la loi de comportement utilisée : élastique parfaitement plastique (Delage et al., 1988) ou élastique non linéaire (Nanda, 1988), à des profils de déplacements horizontaux très différentes de ceux observés sur les ouvrages en vraie grandeur. En outre, les déplacements calculés à l'arrière du massif de sol cloué sont beaucoup trop grands . En effet, les clous, qui sont collés au sol, ont tendance à entraîner tout le sol, cloué et non cloué, dans un mouvement d'ensemble vers l'avant. Le mur s'affaisse au cours des différentes phases d'excavation, avec un ballonnement important dans sa partie inférieure et relativement peu de déversement en tête.

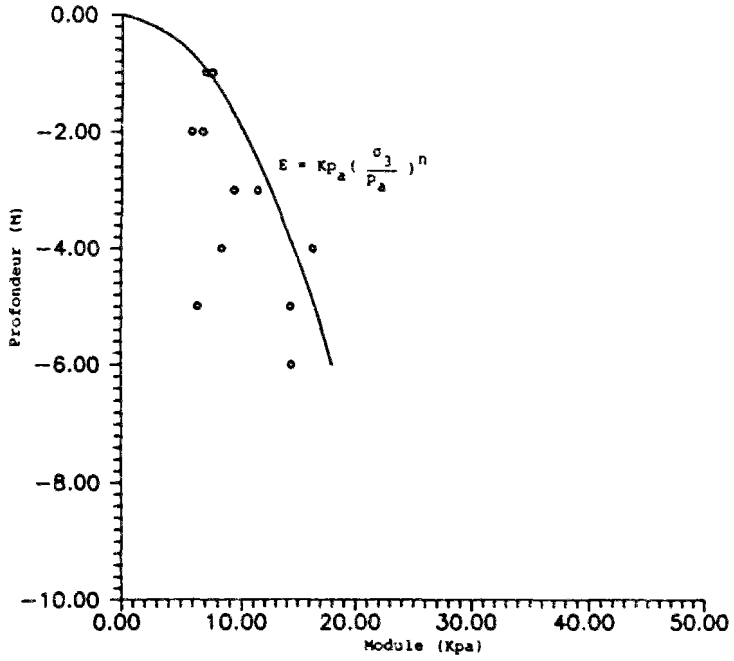


Figure C.2-19 : Variations du module pressiométrique mesuré
et du module tangent initial de la loi de Duncan avec la profondeur z (Nanda, 1989)

Bien que les profils, calculés par Nanda (1988) et observés, aient des formes très différentes, les déplacements horizontaux calculés aux phases 5 et 7, en tête de l'inclinomètre No. 1, qui se trouve à 2 m du parement, sont très proches des valeurs mesurées (figure C.2-4a et C.2-4b). La déformée calculée est beaucoup plus bombée dans sa partie inférieure et moins déversée dans sa partie supérieure que la déformée observée. Même si le choix des paramètres a permis de caler les déplacements horizontaux maximaux en tête à 2 m du parement, aux phases 5 et 7, à 4 m, la différence entre les calculs et les mesures est très importantes. Les valeurs calculées sont 4 à 5 fois plus grandes que les mesures.

La distribution des tractions calculée dans les clous est sensiblement différente des mesures, notamment, pour les trois clous les plus hauts (figure C.2-1a). Cependant, dans l'ensemble les valeurs calculées sont relativement proches des mesures. Il est à noter que la ligne des tractions maximales calculée est sensiblement en retrait de la ligne observée. Ceci peut être expliqué par l'hypothèse d'adhérence parfaite entre le sol et les clous qui tend à faire bouger le massif de sol cloué comme un bloc monolithique. Le recul de la ligne des tractions maximales doit être également rapproché de la surestimation des déplacements, au milieu et à l'arrière des clous.

2.2.3.3 Deuxième étude

Nanda (1989), dans sa deuxième étude, arrive à caler les déplacements calculés et mesurés à 2 m derrière le parement, pour les phases 5 et 7, mais, par contre, à 4 et 8 m, les déplacements calculés sont beaucoup plus importants que les valeurs mesurées (figure C.2-21a et C.2-21b). Cependant, ces résultats sont nettement meilleurs que ceux qui ont été obtenus antérieurement, avec des calculs supposant l'adhérence parfaite entre le sol et les clous (Delage et al., 1988; Chiguer, 1989). Les traction prédites sont proches des mesures, à 30% près, sur les trois lits les plus bas et, à 50% près, sur le lit le plus haut (figure C.2-22).

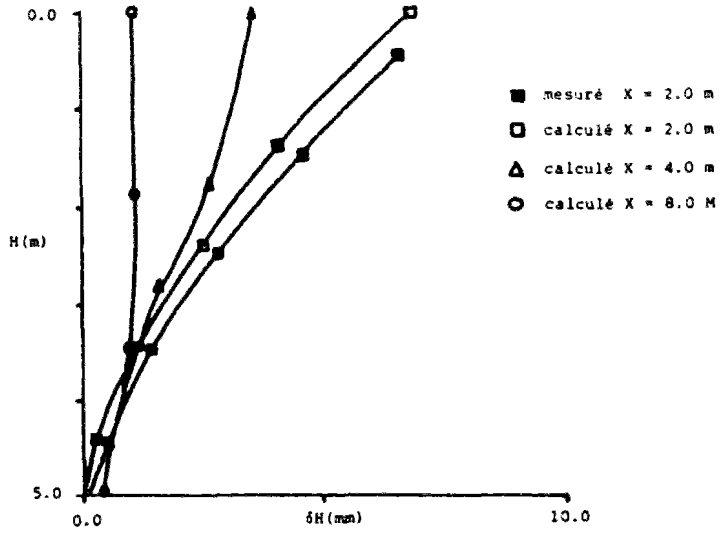


Figure C.2-21a : Déplacements horizontaux dans le sol à 2, 4 et 8 m à la fin de la 5ème phase (Nanda, 1989)

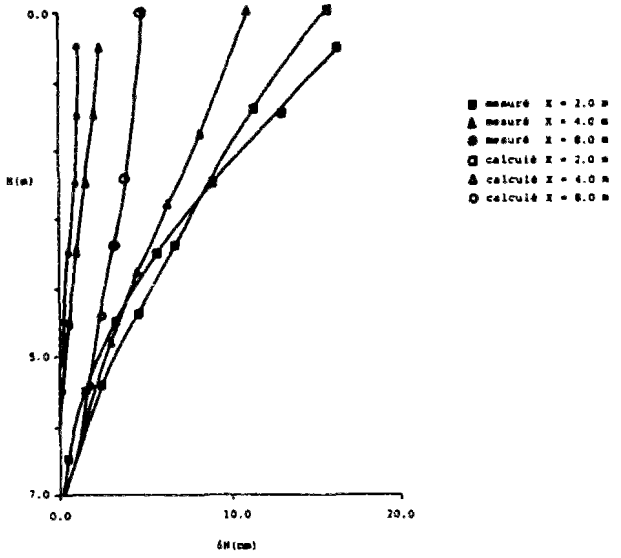


Figure C.2-21b : Déplacements horizontaux dans le sol à 2, 4 et 8 m à la fin de la 7ème phase (Nanda, 1989)

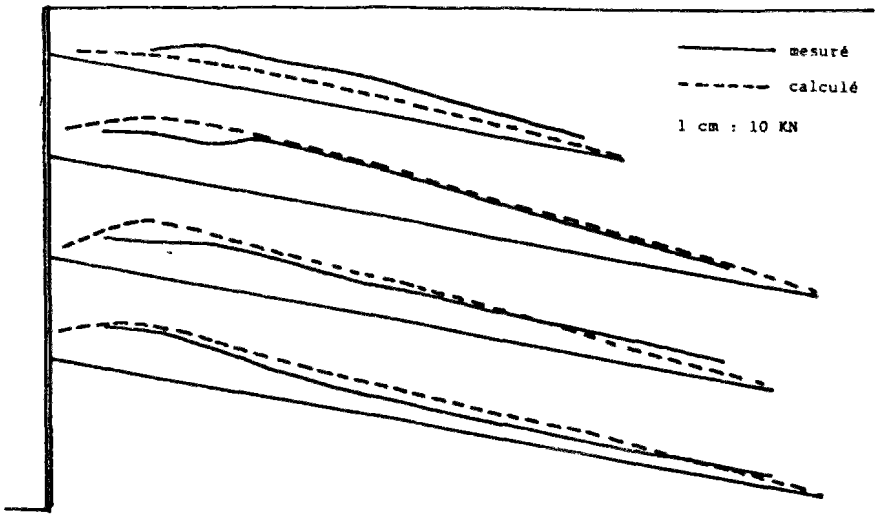


Figure C.2-22 : Tractions dans les clous à la fin de la phase 7 (Nanda, 1989)

2.2.4 Synthèse des études de Saïba (1989)

Les travaux de Saïba (1989) s'inscrivent dans le prolongement d'une première étude, réalisée par Abdelhedi (1983) sur un talus cloué sans parement, modélisé avec ROSALIE.

Shafiee (1986), dans sa thèse, a étudié sur un ouvrage cloué avec des clous horizontaux, l'influence du frottement entre le sol et les clous. Il a comparé en particulier, un calcul avec adhérence parfaite entre les clous et le sol avec un calcul où l'interaction entre le sol et les clous est modélisée par une loi de frottement de type Coulomb. Pour l'ouvrage considéré, Shafiee n'a trouvé que de petites différences au niveau des tractions et déformations. Il en a conclu que l'hypothèse d'adhérence parfaite est tout à fait acceptable et tous ses calculs paramétriques, portant notamment sur l'effet de l'inclinaison des clous, sont basés sur cette hypothèse qui s'avère être très forte. Saïba (1989) a vérifié le domaine de validité de l'hypothèse d'adhérence parfaite sur un cas simple, consistant en un élément de sol renforcé par une nappe, inclinée par rapport à l'horizontale. Il a trouvé que l'hypothèse d'adhérence parfaite n'est acceptable que dans le cas de clous horizontaux soumis à des efforts faibles. Ce résultat concorde avec les résultats qui ont pu être trouvés sur les murs en Terre Armée, où l'hypothèse d'une adhérence parfaite entre le sol et les armatures est acceptable car le sol est mis en place avec les armatures horizontales. Par contre, dans le cas du clouage, les clous sont toujours légèrement inclinés par rapport à l'horizontale et ils sont installés dans le sol en place, qui ne se déforme qu'après coup. Il est donc indispensable de modéliser le glissement relatif du sol par rapport aux clous, dans un ouvrage en sol cloué, sauf cas très particulier.

Un deuxième point important mis en évidence par Saïba (1989) concerne les discontinuités introduites par les renforcements dans la modélisation en déformations planes d'une section de mur en sol cloué. Sur le même cas simple précédemment présenté, des forces tangentielles de signes opposées ont été mis en évidence dans les éléments interfaces, dans le cas de renforcements inclinés, pouvant glisser par rapport au sol. Ce changement de signes, entre les deux faces du renforcement, indique que le sol est canalisé par le renforcement incliné. Deux points de sol, situés de part et d'autre du renforcement, ont des déplacements dans des directions opposées. La discontinuité matérielle introduite par le renforcement se traduit par une discontinuité au niveau des déplacements du sol. Il est donc indispensable, si l'on veut obtenir un profil de déplacements réaliste, de maintenir la continuité du sol, de part et d'autre des renforcements, en employant des relations linéaires.

Des soulèvements très importants ont été observés par Saïba (1989) dans ses simulations d'excavation sur ROSALIE. Ce problème de soulèvement n'est pas nouveau (Guellec et al., 1976; Simpson et al., 1979). Il a été résolu par Saïba (1986) en adoptant, pour le module du sol en décharge au fond de la fouille, des valeurs dix fois plus fortes que pour le reste de l'ouvrage, ce qui conduit à prendre respectivement, 200 et 20 MPa. Le choix dans le modèle de Duncan (Nanda et Delage, 1989), d'un module élastique en décharge, différent et nettement plus grand que le module en charge, est une astuce numérique tout à fait similaire. Dans le paragraphe 3 de cette partie C, nous verrons plus en détail les différentes techniques de modélisation d'excavation depuis les premières méthodes simples, développées au début des années 1970, jusqu'aux méthodes les plus récentes, qui sont efficaces.

Les problèmes de soulèvement, rencontrés par Saïba (1989), sont d'origine numérique; ils sont dus, en partie, à la modélisation des forces d'excavation à appliquer sur les bords de la fouille. Suivant le schéma d'excavation utilisé, ces forces sont surestimées et induisent des soulèvements excessifs. Ces problèmes de soulèvement excessif, rencontrés avec les codes d'éléments finis, que l'on pourrait qualifiés de première génération, n'ont pas été rencontrés avec les trois codes de calculs récents, utilisés pour la présente étude.

Saïba (1989) a réalisé une étude paramétrique très approfondie sur un mur en sol cloué type, de 5 mètres de haut, afin de déterminer les paramètres importants. En particulier, il a comparé un calcul où le sol est linéaire élastique avec un calcul où le sol est supposé élastoplastique parfait. Dans le cas élastique, le mur remonte après 5 phases de construction, tout en se déplaçant vers la fouille (figure C.2-23a). Il n'y a pas de basculement notable. Le soulèvement en fond de fouille est uniformément réparti. Dans le cas élastoplastique, le mur se soulève un peu plus. Il se déplace vers la fouille comme un bloc monolithe (figure C.2-23b). Le soulèvement en fond de fouille est concentré autour du pied du parement. Les différences de comportement entre les deux cas sont mis en évidence sur la figure C.3-23c où les déplacements du cas élastique sont soustraits aux déplacements du cas élastoplastique. L'arrière du mur et le pied du mur se soulèvent plus dans le cas élastoplastique que dans le cas élastique, ce qui est quelque peu bizarre. En ce qui concerne les tractions dans les clous, les deux calculs donnent sensiblement les mêmes résultats. Saïba (1989) en conclut que la simulation numérique avec une loi élastique linaire donne des résultat plus proches du comportement réel d'un mur de soutènement que ceux obtenus avec une loi élastoplastique. Ces résultats sont à considérer avec un certain recul par rapport aux capacités du logiciel ROSALIE à simuler les phases d'excavation et la redistribution des contraintes autour d'une fouille.

Une étude paramétrique très détaillée a été réalisée par Saïba (1989) sur le phasage, les paramètres géométriques, comme l'inclinaison et la longueur des clous, les paramètres mécaniques tels la rigidité des clous, etc. Pour ces études paramétriques, tous les calculs ont été faits en modélisant la construction en une seule phase, afin d'économiser le temps de calcul. Par contre, l'interaction entre le sol et les clous a été modélisé avec des éléments d'interface frottants, ce qui est un plus par rapport aux calculs de Shafiee (1986) où le contact entre le sol et les clous est en adhérence parfaite.

Des calculs en déformation ont été réalisés par Saïba (1989) sur le mur CLOUTERRE-CEBTP No.1 (figure C.3-24). En ce qui concerne le maillage, il faut noter que celui-ci ne correspond pas à l'expérimentation, du moins à l'arrière de la zone de sol cloué. D'autre part, les conditions aux limites, en aval du mur, sont à une distance nulle du pied de talus et à une distance de H du parement. Ce choix de géométrie est un peu inhabituel, compte tenu de la distance d'influence d'un mur de soutènement, qui est de l'ordre de 2 H, où H est la hauteur du mur.

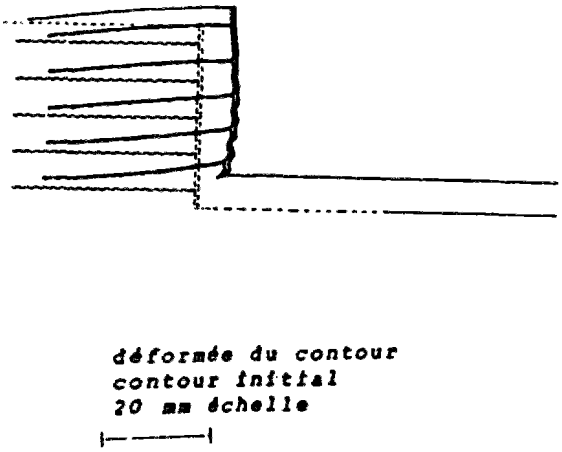


Figure C.3-23a : Déformée à la cinquième phase pour un sol linéaire élastique

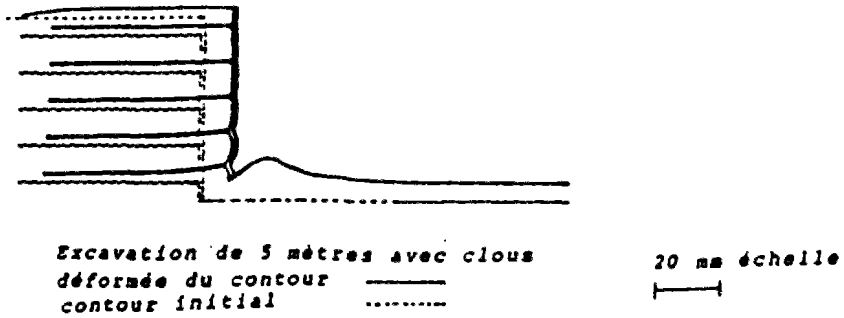


Figure C.3-23b : Déformée à la cinquième phase pour un sol élastoplastique

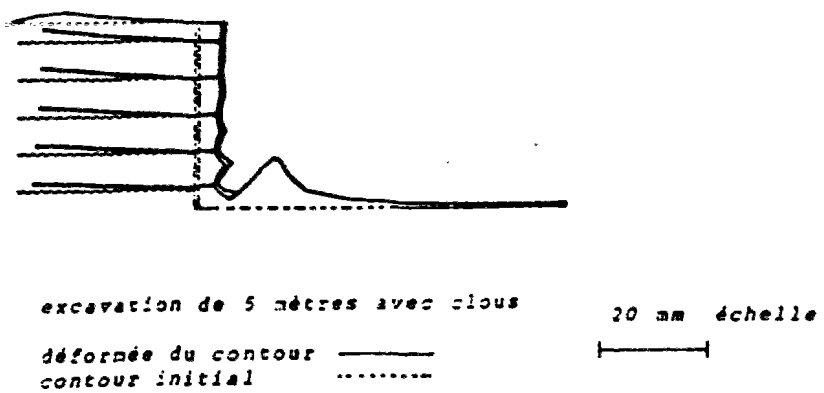


Figure C.3-23c : Différence entre les déformées élastique et élastoplastique

Figure C.3-23 : Calculs en déformation d'un mur en sol cloué de 5 m de haut à l'aide de ROSALIE (Ouelogo, 1989)

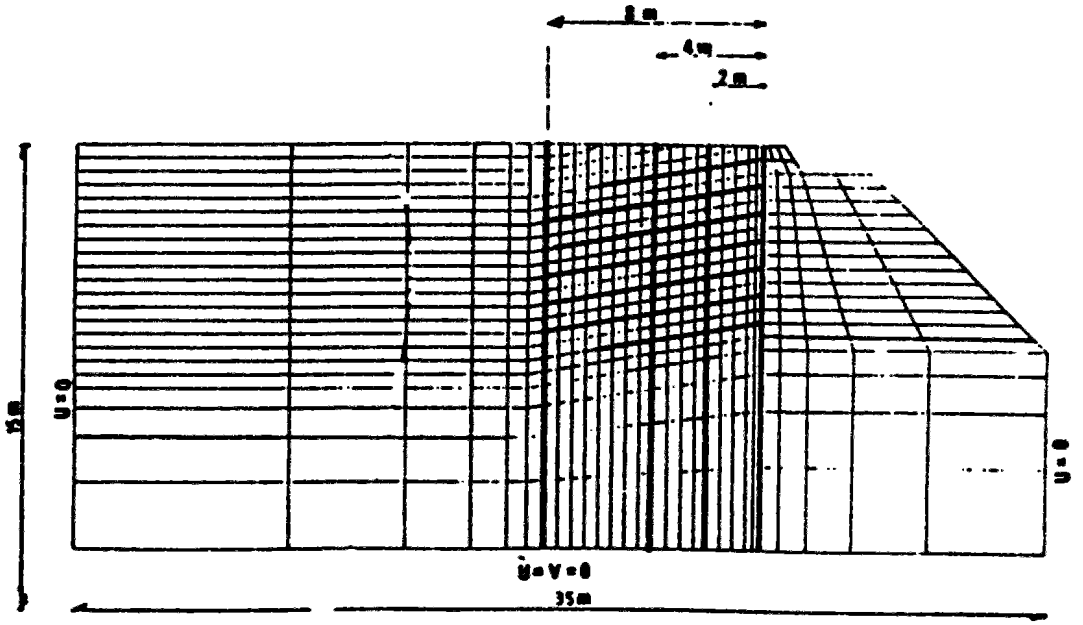


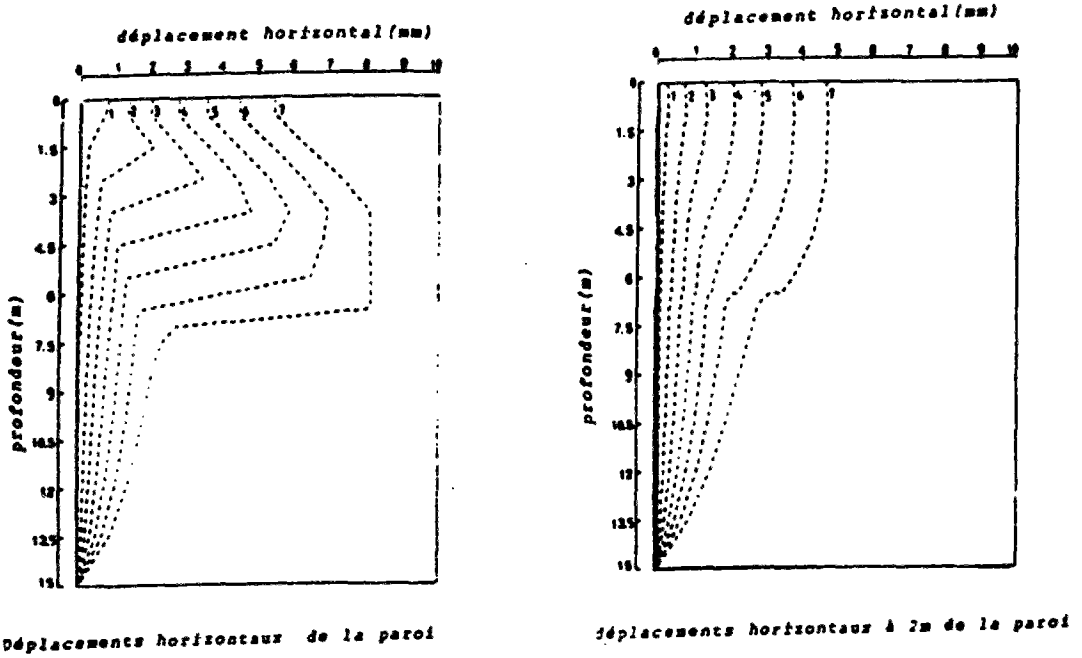
Figure C.3-24 : Maillage utilisé par Saïba (1989) pour modéliser le mur CLOUTERRE-CEBTP No. 1

Plusieurs calculs ont été réalisés. Nous ne considérerons que le calcul qui, a priori, représente le plus fidèlement les conditions rencontrés sur l'ouvrage réel. Le sol est élastoplastique parfait. Le module élastique du sol varie linéairement avec la profondeur, de 10 MPa, en surface à 30 MPa, à 7 m de profondeur. Il est multiplié par dix dans les zones en décharge en fond de la fouille. L'angle de frottement est de 38°, la cohésion de 3 kPa. Le coefficient de Poisson de 0,3. Les clous sont élastiques. La section totale des barres et du coulis est prise en compte pour le calcul de la rigidité des clous.

L'interaction entre le sol et les clous est modélisée par des éléments d'interface avec un frottement latéral limite unitaire de 100 kPa. La continuité du déplacement tangentiel est assurée tant que le seuil de plasticité n'est pas atteint. Le comportement des interfaces est de type rigide parfaitement plastique, ce qui est relativement simpliste. En effet, avec la valeur de frottement limite considérée, seule une toute petite partie des clous glisse par rapport au sol. Cette modélisation est, dans les faits, quasiment équivalente à une modélisation avec adhérence parfaite. La continuité des déplacements de part et d'autre des renforcements est assurée par des relations linéaires.

Les déplacements horizontaux calculés en modélisant les sept phases d'excavation sont représentés sur la figure C.2-25. Les profils simulés différent des mesures, aussi bien par la forme que par l'amplitude des déplacements calculés. Les déplacements horizontaux calculés en tête du mur sont nettement plus faibles que ceux mesurés (tableau C.2-3).

Les déplacements verticaux, calculés en tête du parement, sont positifs quelle que soit la phase. Le mur se soulève durant toutes les phases alors que les mesures indiquent un tassement quelle que soit la phase (figure C.2-26).



Déplacements horizontaux de la paroi

Déplacements horizontaux à 2m de la paroi

Figure C.2-25a : Déformée du parement Figure C.2-25b : Sol à 2 m du parement

Figure C.2-25 : Déformées du parement et du sol à la fin de la phase 7 de construction du mur en sol cloué CLOUTERRE-CEBTP No. 1 (Saïba, 1989)

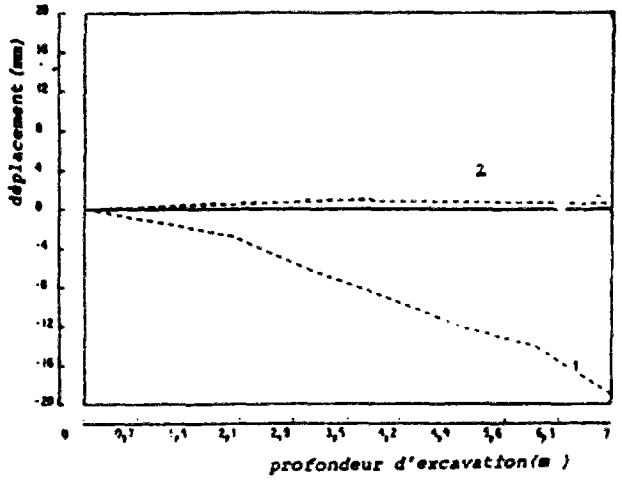


Figure C.2-26 : Déplacements verticaux mesurés (1) et calculés (2) (Saïba, 1989)

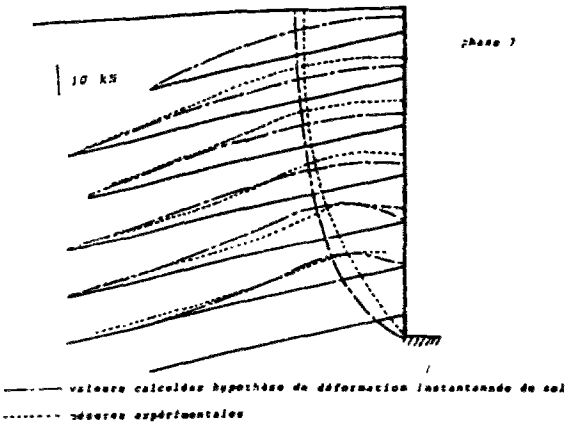


Figure C.2-27 : Tractions mesurées et calculées par Saïba (1989)

Tableau C.2-3 : Déplacements horizontaux en tête
calculés par Saïba (1989) et mesurés

Déplacement en tête [mm]	Phase 2	Phase 3	Phase 4	Phase 5	Phase 6	Phase 7
Simulations	1,38	2,00	2,75	3,55	4,45	5,43
Mesures	1,20	2,50	5,20	9,30	13,80	18,90

Les tractions calculées à la phase 7 sont en assez bon accord avec les mesures, pour les deux clous les plus bas (figure C.2-27). Pour les quatre clous les plus hauts, le calcul sous-estime d'environ 60% les mesures.

2.2.5 Synthèse des études de Salama (1992)

Le sol est modélisé par la loi de comportement de Ghaboussi et Momen (1979, 1982) et Momen (1980), qui est élastoplastique avec un écrouissage isotrope et cinématique combiné. Cette loi est très générale et permet, en particulier, de traiter les chargements cycliques et de modéliser l'anisotropie induite par le chargement. Dans sa forme la plus simple, le modèle requière neufs paramètres de comportement, qui ont été déterminés à partir d'essais en laboratoires, réalisés antérieurement sur des sols similaires, ainsi que des résultats des essais SPT effectués sur le site. Il faut noter que le modèle élastoplastique le plus simple ne requière que cinq paramètres. Le sol est discrétisé en éléments quadrilatères à 4 ou 8 noeuds. L'interaction entre le sol et les clous est modélisé à l'aide d'éléments d'interface et la loi de Goodman et al. (1968). Le parement est modélisé avec des éléments à deux noeuds, de type poutre, de même que les clous, qui sont supposés élastiques.

L'ouvrage considéré consiste d'un mur en sol cloué de 10,3 m de haut, avec sept lits de clous de 3,7 m de long et un lit de tirants précontraints (figure C.2-28). Le principe de fonctionnement de ce mur mixte est de créer un bloc élancé de sol cloué dont la stabilité globale est assurée par le lit de tirants en partie haute. Il faut noter que durant les phases intermédiaires de construction, le troisième lit de clous, qui est situé sous la poutre de répartition des tirants, est initialement mis en compression.

Les simulations numériques réalisées sur cet ouvrage ont donné dans l'ensemble des résultats peu satisfaisants, par rapport à la complexité des modèles de comportement utilisés. Il faut noter, à la décharge des simulations, que sur le site les 2 à 3 premiers mètres de sol sont mauvais et que le sol a manifesté un fluage important, qui ne peut pas être pris en compte dans une telle analyse élastoplastique. L'allure de la déformée est retrouvée avec des déplacements en tête sous-estimés d'environ 20% (figure C.2-29). Les efforts sont sous-estimés d'environ 60% dans le lit de clous No. 2, qui est le plus proche des tirants. Pour les autres clous, les efforts ne sont sous-estimés que d'environ 40%.

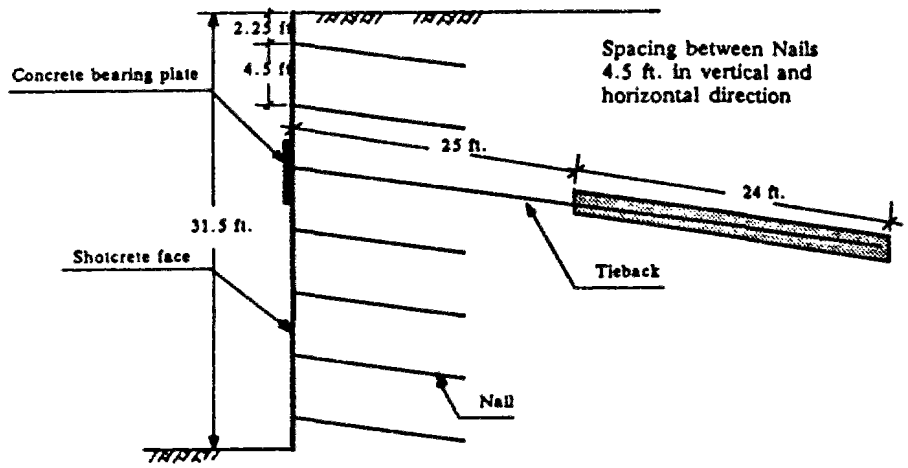


Figure C.2-28 : Section du mur en sol cloué mixte étudié par Salama (1992)

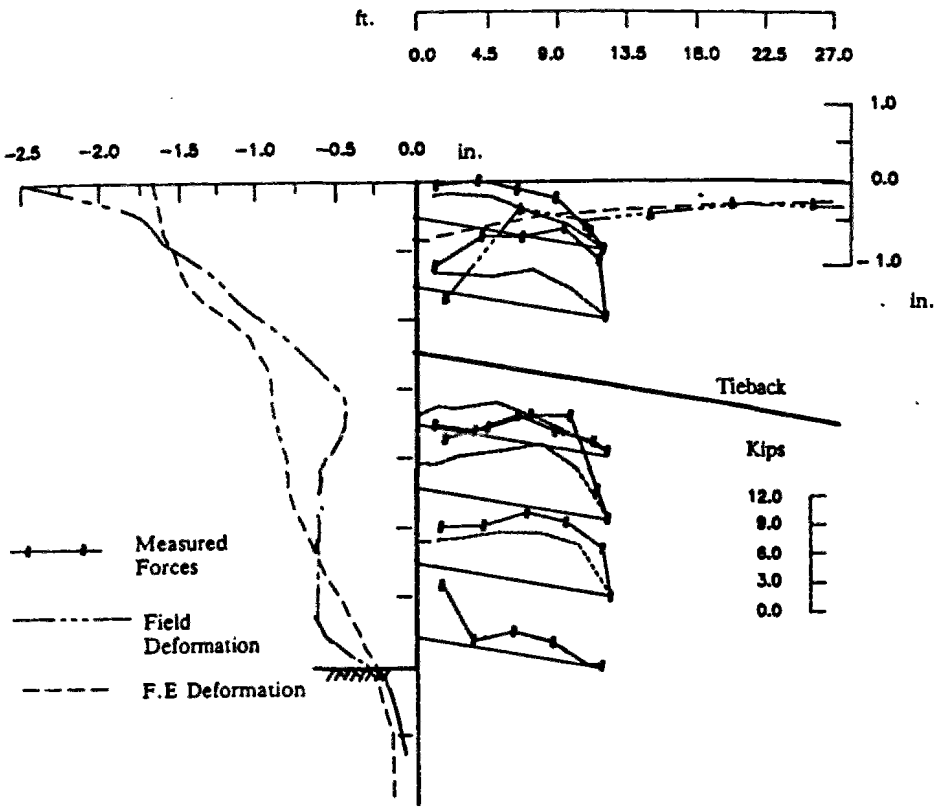


Figure C.2-29 : Déformée du parement et tractions dans les clous, mesurées et calculées par Salama (1992)

2.2.6 Conclusion de l'étude bibliographique

Entre les approches homogénéisée et discrète, seules les secondes permettent de modéliser un mur en sol cloué dans toute sa complexité. Notamment, les "effets de bords" comme, par exemple, le rôle de confinement joué par le parement, ne peuvent être modélisés simplement que dans le cadre d'une approche discrète.

Entre les méthodes numériques : (1) générales, (2) de l'équilibre local et (3) semi-empiriques, seules les premières sont adaptées à des techniques comme le clouage des sols, où les ouvrages différent tous les uns des autres. La méthode de l'équilibre local est très intéressante et utile pour des techniques bien standardisées comme la Terre Armée. Les méthodes semi-empiriques peuvent être très utiles au niveau d'un avant projet pour estimer les déplacements. Par contre, dès qu'il s'agit d'analyser en détail un ouvrage dans toute sa complexité, seules les méthodes générales sont capables de le faire.

Entre la méthode des éléments finis, des différences finies et des équations intégrales, seules les deux premiers types de méthodes sont actuellement suffisamment développées pour permettre de calculer un ouvrage en sol cloué, en prenant en compte les déformations réversibles et irréversibles qui se produisent, aussi bien dans le volume du sol qu'aux interfaces entre le sol et les clous.

Des études numériques réalisées, ces dix dernières années, sur les murs en sol cloué, un certain nombre d'enseignements peuvent être tirés.

En particulier, Shafiee (1986) a montré que la modélisation du phasage de la construction doit être aussi fidèle que possible du mode de construction réel, si l'on veut obtenir des profils de déplacements comparables aux profils observés. Pour un mur en sol cloué, la construction doit être modélisée en autant de phases qu'il y a de lits de clous et allant du haut vers le bas.

Les études de Saïba (1989) sur un exemple simple ont permis de montrer qu'un modèle avec adhérence parfaite entre le sol et les clous n'est plus valable dès que les clous sont légèrement inclinés. Shafiee (1986), par exemple, observe un renversement en arrière du mur durant les deux premières phases. Celui-ci peut être attribué, en partie, à l'hypothèse d'adhérence qu'il prend.

Dans toutes les études, des problèmes de soulèvement en tête du mur et en fond de fouille ont été rencontrés. Dans les études de Shafiee (1986) et Saïba (1989), des soulèvements très importants ont été observés en fond de fouille alors que Nanda (1989) et Chiguer (1989) ont obtenu des soulèvements moins importants. En ce qui concerne les soulèvements en tête, Shafiee (1986) a mis en évidence de manière très nette qu'ils dépendent de la modélisation du phasage. La modélisation en une phase de la construction d'un mur en sol cloué de 5 m de haut donne des soulèvements de mur en tête alors que le même mur modélisé en cinq phases donne des tassements en tête. Ces problèmes de soulèvement en tête sont particulièrement critiques dans les calculs de Saïba (1989) puisque la tête de mur ne tasse pas durant les sept phases de construction.

Un tel problème peut être attribué aux performances du schéma élastoplastique et à la modélisation des phases d'excavation. Avec les logiciels utilisés dans cette étude, qui prennent tous en compte les derniers progrès en termes de schéma élastoplastique et de modélisation d'excavation, de tels problèmes n'ont pas été rencontrés. Les soulèvements en fond de fouille restent tout à fait raisonnables, de l'ordre du centimètre, tandis que la tête du parement ne se soulève très légèrement que durant les deux premières phases d'excavation.

On peut se demander, dans quelle mesure, le modèle de Duncan peut améliorer les simulations numériques de par ses caractéristiques (Nanda. 1988; Nanda et Delage, 1989). En particulier, se pose la question de savoir si la variation des modules élastiques avec la contrainte de confinement apporte réellement un plus dans les simulations. Nous avons réalisé deux types de calcul : un premier calcul où les paramètres sont constants avec la profondeur, et un deuxième, où ils varient linéairement avec la profondeur. La différence entre les deux calculs est négligeable et ne mérite pas que l'on complique la détermination des paramètres.

En outre, si l'on fait varier le module du sol on peut se demander s'il ne faut pas faire varier aussi le module de mobilisation du frottement latéral dans la mesure où ils sont tous les deux corrélés. Nous avons donc fait varier le module du sol et le module de mobilisation du frottement latéral pour être consistant.

Salama (1992) a utilisé une loi élastoplastique relativement compliquée, puisqu'elle combine un écrouissage isotrope avec un écrouissage cinématique. Dans sa forme la plus simple, cette loi requière neuf paramètres qui ne sont pas accessibles à partir d'essais en place ou d'essais triaxiaux classiques. Les résultats obtenus par Salama (1992) pour un mur en sol cloué mixte sont un peu décevant par rapport à la complexité de la loi de comportement utilisée. Nous avons donc préféré utilisé la loi de comportement élastoplastique la plus simple, c'est à dire une loi linéaire élastique parfaitement plastique avec une loi d'écoulement non associée. Ce modèle ne requière que deux paramètres élastiques (E, ν) et trois paramètres plastiques (ϕ, c et ψ).

Nanda (1989) est le premier à avoir trouvé pour les déplacements dans le sol à 2 m du parement, des ordres de grandeur comparables aux mesures. Cependant, il faut noter que les modules élastiques qu'il a pris sont particulièrement faibles. Le module d'Young correspond, en fait, à l'enveloppe des modules pressiométriques mesurés sur le terrain, ce qui, comme nous le verrons dans le paragraphe 6.3, consacré à la détermination des paramètres, est vraiment trop faible par rapport à tous les standards actuels. L'essai pressiométrique Ménard standard est un essai où le sol est très largement remanié dans le forage. Il est plutôt habituel de prendre un module d'Young tangent égale à 2 ou 3 fois le module pressiométrique. Un tel choix nous a donné d'excellents résultats.

Le tableau C.2-4 résume les caractéristiques principales des études numériques, réalisées dans le passé et dans la présente thèse.

Tableau C.2-4 : Synthèse des études numériques réalisées sur des murs en sol cloué en vraie grandeur instrumentés

Références	Programme	Loi de comportement du sol	Variations des paramètres avec z	Modèle d'interaction sol-clou	Variations de q_s
Shafiee (1986)	CLUTER	élastoplastique parfait	E constant par couche	adhérence et critère orienté	q_s constant
Nanda (1988)	WALL	élastique non linéaire (Duncan et Chang, 1970)	module variable E(z)	adhérence	q_s constant
Nanda (1989)	WALL	élastique non linéaire (Duncan et Chang, 1970)	module E(z)	élasto-plastique parfait	$q_s(z \geq 2.5m)$ constant
Chiguer (1989)	CLUTER	élastoplastique parfait	E constant par couche	critère orienté	$q_s(z)$ variable
Saïba (1989)	ROSALIE	élastoplastique parfait	E(z) variable avec z et $E_{décharge} = 10\ E_{charge}$	rigide parfaitement plastique	q_s constant
Salama (1992)	SNAP	élastoplastique avec écrouissage isotrope et cinématique (Ghaboussi et Momen)	E constant par couche	hyperbolique (Goodman et al., 1968)	q_s constant
présente étude	CESAR	élastoplastique parfait	E constant et E(z) variables	élastoplastique parfait	q_s et k_β constants et variables
présente étude	FLAC	élastoplastique parfait	E constant et E(z) variables	élastoplastique parfait	q_s et k_β constants et variables
présente étude	PLAXIS	élastoplastique parfait	E constant	élastoplastique parfait	q_s et k_β constants

3 Eléments de modélisation des sols cloués

3.1 Interaction entre le sol et les clous

3.1.1 Introduction et remarques générales

Avant de rentrer dans les détails de la modélisation des sols cloués, il convient de regarder plusieurs points importants de l'interaction entre le sol et les clous. Ces points ont une influence essentielle sur le comportement des ouvrages. Au niveau de la modélisation, ils sont souvent pris en compte, mais de manière implicite.

3.1.1.1 Modification de l'état des contraintes durant l'installation

L'état de contraintes initiales avant l'installation des clous, qui peut être considéré comme respectant les déformations planes, est perturbé par le forage qui relâche les contraintes, puis le scellement sous gravité ou faible pression qui rétablit partiellement les contraintes initiales, ou le scellement sous haute pression, qui augmente très sensiblement les contraintes radiales autour des clous. Ceci dit, par suite des effets de voûte, les contraintes radiales ne sont modifiées que très localement autour d'un clou, sur une distance de quelques diamètres au grand maximum.

Durant le glissement relatif d'un clou par rapport au sol, des contraintes de cisaillement se développent le long du clou. Une augmentation significative de la contrainte radiale se produit également sous l'effet de la dilatance empêchée (Schlosser et Guilloux, 1981). Ces variations de contraintes s'amortissent très rapidement avec la distance à l'interface. Elles ne peuvent être modélisées en tant que telles dans un calcul en déformations planes. Cependant, tous ces phénomènes sont très locaux (cf. partie A). Ils se produisent autour des clous, seulement sur quelques dizaines de centimètres au grand maximum, alors que l'espacement entre les clous est de l'ordre du mètre.

Dans la modélisation, nous supposerons que les clous sont installés au cours de la construction, sans que leur mise en place n'influence ou ne modifie l'état de contraintes dans le sol. Cette hypothèse est justifiée par le fait que l'installation de clous avec une pression de scellement faible ne perturbe le sol et son état de contraintes que très localement autour du forage. La section de sol à mi-distance entre deux rangées verticales de clous est donc très peu perturbée par l'installation des clous.

3.1.1.2 Hypothèses sur le comportement des interfaces

Il est à noter que le comportement d'une interface le long d'un clou sub-horizontal, orienté selon la direction y, dépend des contraintes normale σ_n et tangentielle σ_t à l'interface mais est quasiment indépendant de la contrainte σ_{yy} (figure C.3-1).

Cette remarque est importante car, durant la construction d'un mur de soutènement, cloué ou non, le relâchement des contraintes le plus fort est dans la direction y. Le comportement de l'interface le long d'un clou sub-horizontal est donc relativement peu perturbé par l'excavation. Par contre, le comportement d'une interface le long d'une inclusion sub-verticale est très perturbé par l'excavation puisque la contrainte σ_{yy} est la contrainte normale sur une des faces de l'inclusion. En ce qui concerne les clous sub-horizontaux, il est donc loisible de prendre les mêmes fonctions de transfert de charge pour toutes les phases d'excavation d'un mur en sol cloué.

3.1.1.3 Comportements local et global

Si l'on s'intéresse au comportement global d'une section de sol, à mi-distance entre deux rangées verticales de clous, il n'est pas utile de représenter à l'échelle de la structure tous les phénomènes locaux qui se produisent autour des clous et que seul un calcul tridimensionnel pourrait, éventuellement, prendre en compte. Comme nous l'avons vu dans la partie A, les phénomènes locaux d'interaction entre le sol et les clous mettent en jeu la microstructure du sol. Pour pouvoir les modéliser en détail, il faudrait utiliser un milieu continu généralisé avec une loi de comportement appropriée. Or, une telle approche, qui est déjà lourde en 1D, le serait encore plus en 2D ou en 3D. Pour alléger un calcul 2D ou 3D et le rendre possible, le comportement des couches d'interface autour des clous doit être modélisé d'un point de vue macroscopique.

Des calculs 3D de murs en Terre Armée et en sol cloué ont ainsi été faits par Smith (1992) qui a représenté les couches d'interface réelles par des éléments de sol fins, avec des caractéristiques réduites par rapport au sol. Par contre, Chaoui (1989) a utilisé des éléments d'interface d'épaisseurs nuls pour modéliser le clouage des pentes en 3D.

Au sein d'un ouvrage en sol cloué, l'interaction entre le sol et les clous se fait au niveau des couches d'interface. Dans un calcul 3D, il est possible de représenter directement ces couches d'interfaces par des éléments d'interface, volumiques ou d'épaisseurs nulles, avec une loi de comportement correspondant au comportement rhéologique macroscopique de ces interfaces. Dans une telle démarche, le comportement des interfaces est intégré une première fois, pour passer du niveau microscopique de l'interaction des grains avec la surface des clous, au niveau de la couche d'interface. Dans un calcul 2D, l'interaction entre le sol et les clous ne peut plus être modélisée de la même manière. Il convient de regarder globalement le transfert des efforts entre un clou et la section du mur étudiée en déformations planes. Dans cette démarche, le comportement de la couche d'interface est intégré une deuxième fois, pour passer du niveau d'une couche d'interface interagissant avec un clou, au niveau d'un lit ou d'une rangée de clous interagissant avec la section de sol considérée (figure C.2-2).

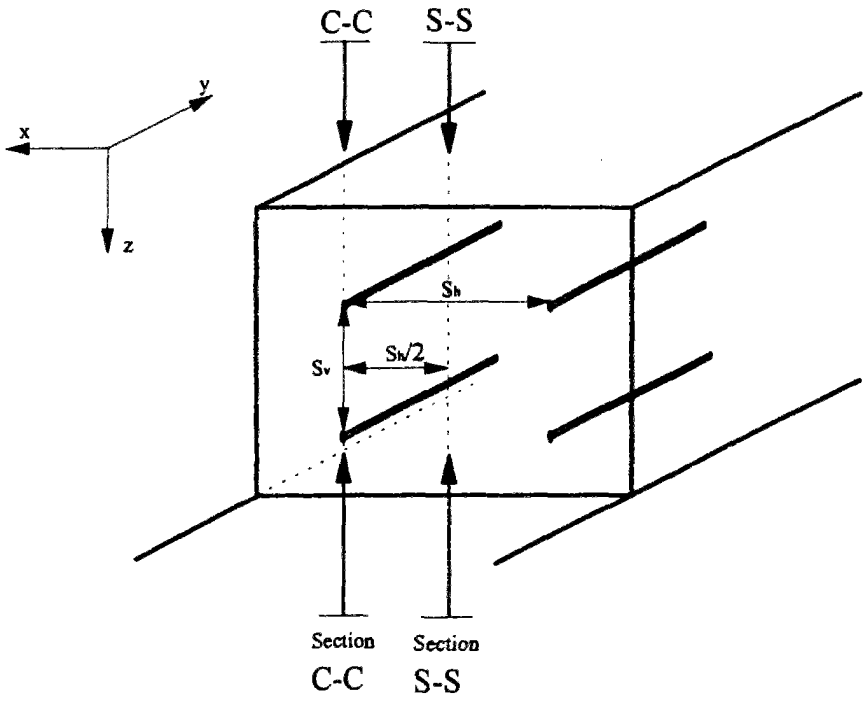


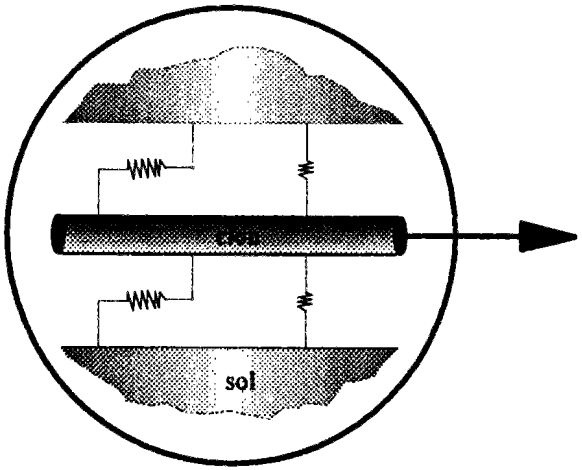
Figure C.3-1 : Vue en perspective d'un mur en sol cloué

Ces intégrations pour passer d'un niveau à l'autre ne sont possibles que si les phénomènes intégrés sont locaux. Leur comportement peut dépendre de la réponse de l'ensemble de l'ouvrage, mais ils doivent rester locaux dans l'espace. En particulier, les couches d'interface doivent rester petites devant les dimensions de l'ouvrage, ce qui est le cas, comme nous l'avons démontré dans la partie A. De même, l'intégration du comportement local du sol et de l'interface pour aboutir aux fonctions de transfert de charge entre un clou et le sol environnant, repose sur l'idée que le comportement le long d'une section transversale du clou ne dépend que de cette section, ce qui permet d'intégrer dessus.

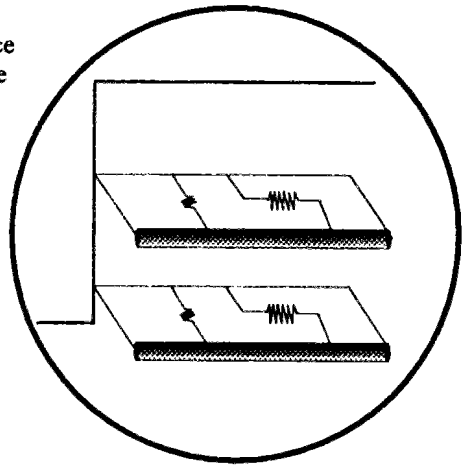
3.1.2 Analyse des conditions de déformations planes dans un ouvrage en sol cloué

3.1.2.1 Comparaison entre un clou et une plaque

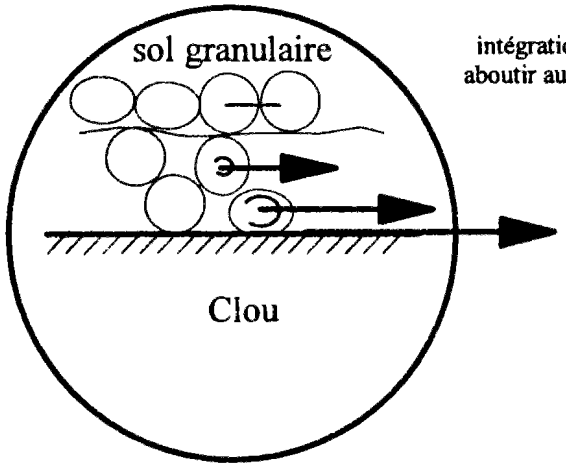
Les conditions de géométrie cylindrique autour des clous n'ont aucun rapport avec celles qui peuvent être modélisées par un calcul supposant des conditions de déformations planes. Cette idée importante peut être mise en évidence facilement dans le cas d'une inclusion cylindrique et d'une inclusion plane. Par exemple, si l'on applique une contrainte radiale sur un échantillon annulaire renforcé par une inclusion cylindrique, ce qui est le cas par exemple de l'essai de cisaillement simple annulaire, la contrainte radiale sur l'inclusion est très différente de la contrainte de confinement. Par contre, dans le cas de l'arrachement d'une inclusion plane, la contrainte à l'interface est la contrainte appliquée à la surface du sol, de manière similaire au cisaillement simple plan, où la contrainte normale appliquée est constante dans tout l'échantillon. Ce phénomène est d'ailleurs très contraignant dans le cas du cisaillement simple plan, puisqu'il rend impossible toute explication du phénomène de formation d'une couche d'interface avec un modèle continu classique. Pour plus de détails sur ces aspects le lecteur pourra se référer à la partie A de cette thèse.



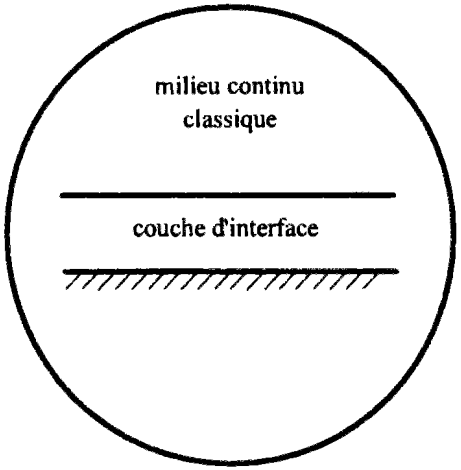
intégration du comportement du sol et de l'interface pour aboutir à des fonctions de transfert de charge (Partie B)



modélisation 2D (en déformations planes) d' un mur en sol cloué 3D (Partie C)



interaction entre le sol granulaire et le clou au niveau microscopique (Partie A)



intégration du comportement de type Cosserat pour aboutir au comportement macroscopique de la couche d'interface (Partie A)

Figure C.3-2 : Modélisation de l'interaction entre le sol et les clous

Chaoui (1992) a modélisé numériquement l'essai d'arrachement d'un clou à l'aide du logiciel CESAR. Un calcul 3D de l'arrachement d'une inclusion cylindrique a été réalisé, dans un premier temps. Dans un deuxième temps, un calcul en déformations planes (2D) avec le modèle de la plaque équivalente ont été fait (figure C.2-3). Comme l'on pouvait s'y attendre les résultats sont très différents. Il convient de noter sur la figure C.2-3 que la plaque glisse par rapport au sol beaucoup plus que le clou cylindrique. Le sol, dans ce dernier cas, est très largement entraîné. En terme de réponse globale, les courbes donnant l'effort d'arrachement en fonction du déplacement en tête sont d'allures similaires mais différentes (figure C.2-4). Le rapport des modules obtenus pour les deux calculs est de l'ordre de 2 tandis qu'à la rupture par arrachement du clou, l'effort maximal théorique est obtenu aux erreurs numériques près.

De cette étude, on pourrait conclure, à première vue, qu'un modèle 2D est inadéquat. Cependant, il convient d'être prudent car il existe plusieurs manières de calculer les paramètres du modèle 2D à partir des paramètres du modèle 3D. Le tableau C.3-1 rassemble les paramètres utilisés pour les calculs 2D et 3D.

Tableau C.3-1 : Correspondance entre les valeurs des paramètres 2D et 3D (Chaoui, 1992)

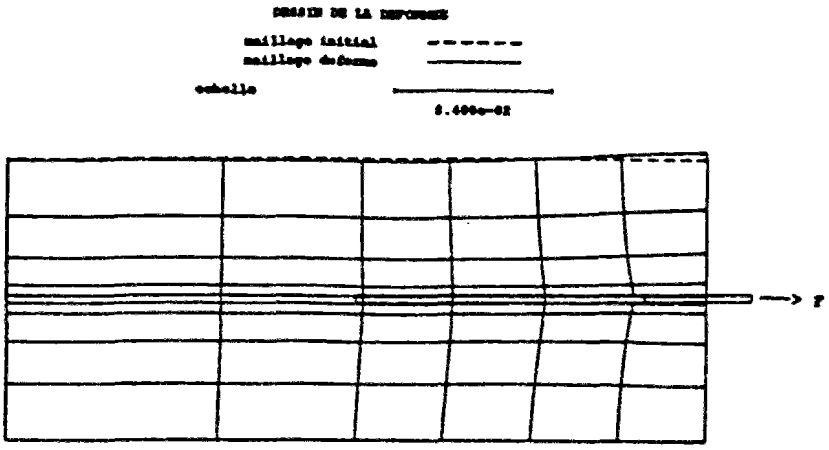
	Modèle 2D	Modèle 3D
Sol élastoplastique parfait	**mêmes paramètres** γ = 15,1 kN/m^3, E = 25 10^{+3} kPa, ν = 0,33, c = 3 kPa et $\phi = \psi = 33°$	
"Clou" (élastique linéaire)	plaque équivalente γ = 25 kN/m^3 , ν = 0,25 et **E = 3,95 10^{+5} kPa**	clou cylindrique γ = 25 kN/m^3 , D = 63 mm, ν = 0,25 et **E = 7,0 10^{+6} kPa**
Interface sol-clou (élastoplastique parfait)	élément d'interface plan **E = min(E$_{sol}$,E$_{clou}$) = 25 10^{+3} kPa,** R_t = 0 kPa, $\phi = \psi = 0°$ et **c = 7,9 kPa**	élément d'interface cylindrique **E = min(E$_{sol}$,E$_{clou}$) = 25 10^{+3} kPa,** R_t = 0 kPa, $\phi = \psi = 0°$ et **c = 7,9 kPa**

Si il est logique de garder pour le sol, que le modèle soit en déformations planes (2D) ou en 3D, les mêmes propriétés mécaniques, par contre, pour ce qui concerne les caractéristiques du renforcement et de son interaction avec le sol, il convient de calculer des équivalences.

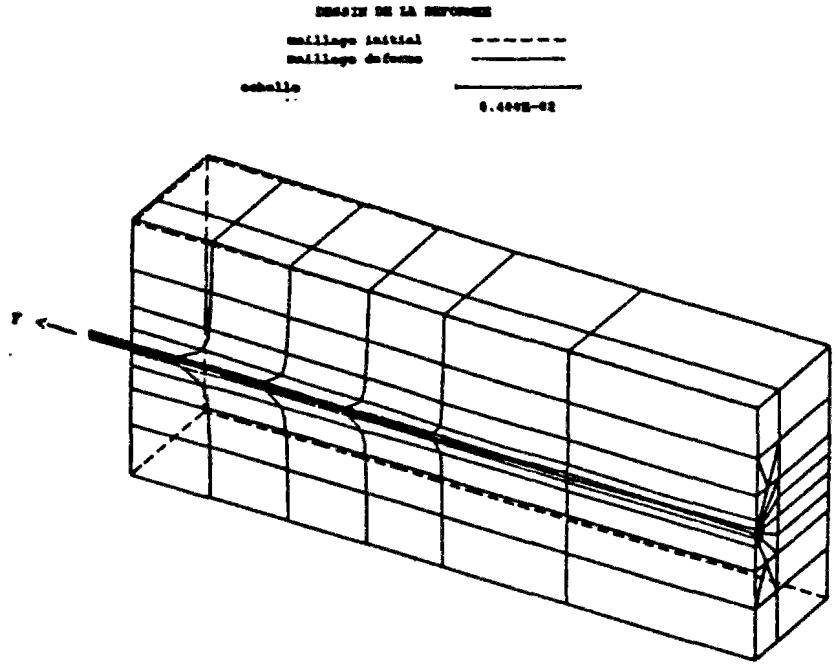
Les caractéristiques de la plaque équivalente, qui sont le module élastique E_{eq} et l'épaisseur ϕ_{eq} , sont calculées par Chaoui (1992), en écrivant l'égalité des rigidité en traction et en flexion pour le lit de clous réels et la plaque modèle équivalente :

$$E_{eq}A_{eq} = E_{clou}A_{clou} \qquad \text{(C.3-1)}$$

$$E_{eq}I_{eq} = E_{clou}I_{clou} \qquad \text{(C.3-2)}$$

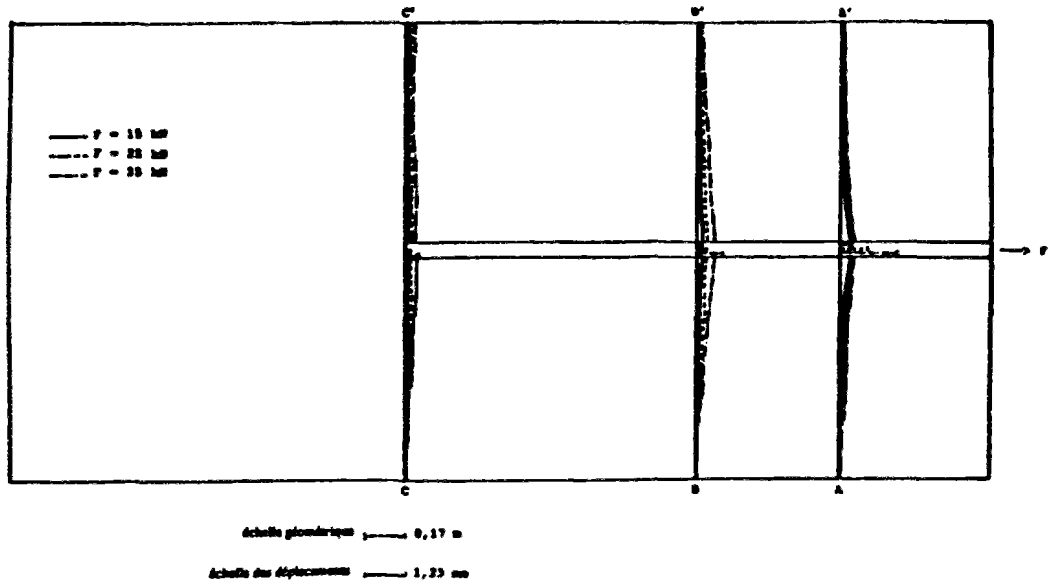


a. : Déformée du maillage bidimensionnel pour F=25 kN
avec rappel du contour initial.

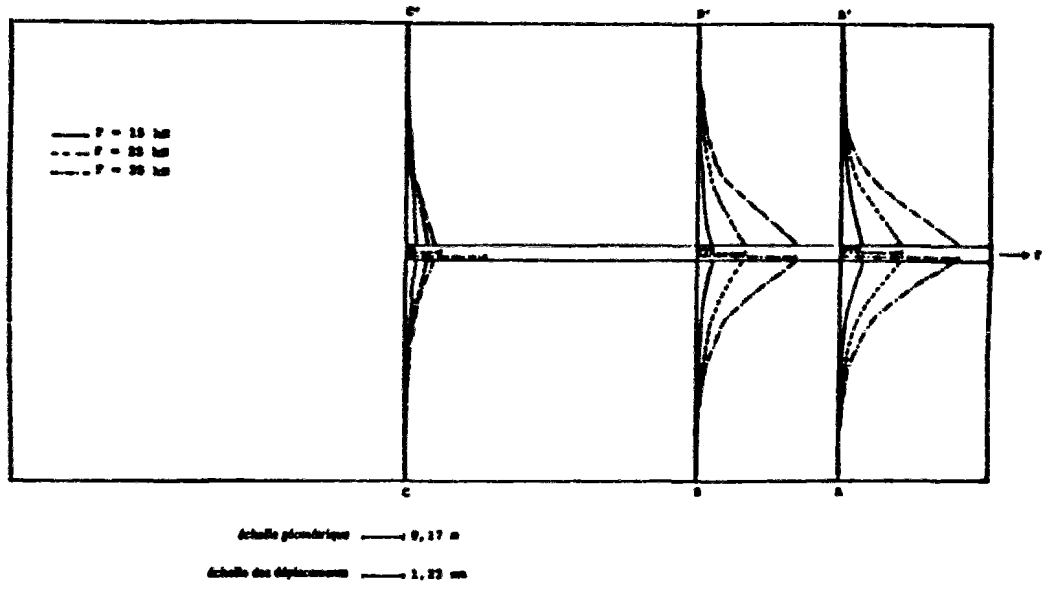


b. : Déformée du maillage tridimensionnel pour F=25 kN
avec rappel du contour initial.

Figure C.2-3 : Modélisations 2D et 3D de l'essai d'arrachement d'un clou
(CHAOUI, 1992)



c. : Déplacements du sol et du clou suivant des coupes, modélisation bidimensionnelle.



d. : Déplacements du sol et du clou suivant des coupes, modélisation tridimensionnelle.

Figure C.2-3 : Modélisations 2D et 3D de l'essai d'arrachement d'un clou (CHAOUI, 1992)

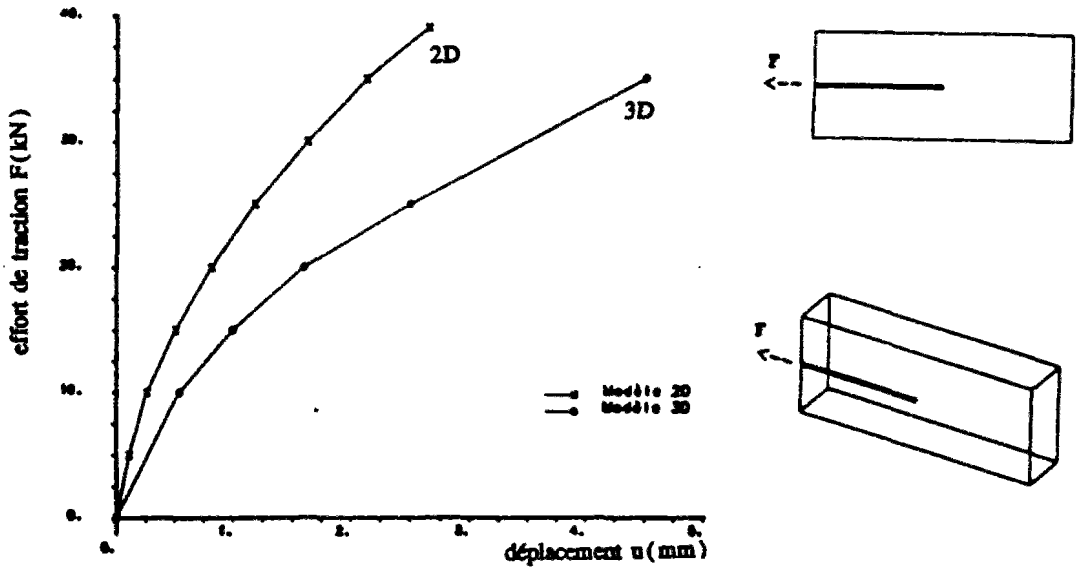


Figure C.3-4 : Courbes d'effort d'arrachement en fonction du déplacement en tête pour les calculs 2D et 3D (Chaoui, 1992)

Dans le cas d'une barre pleine, ces deux relations se transforment en :

$$b\, E_{eq}\, \phi_{eq} = \frac{E_{clou}\, \pi\, \phi_{clou}^2}{4} \qquad \text{(C.3-3)}$$

$$b\, E_{eq}\, \frac{1}{12}\, \phi_{eq}^3 = \frac{E_{clou}\, \pi\, \phi_{clou}^4}{64} \qquad \text{(C.3-4)}$$

où b st la largeur de la plaque équivalente prise égale à 1,0 m.

On obtient ainsi deux équations en E^{eq} et ϕ^{eq} , ce qui permet de les calculer explicitement :

$$\phi^{eq} = \frac{\sqrt{3}}{2}\phi_c \qquad \text{(C.3-5)}$$

$$E^{eq} = \frac{12}{64}\, \pi\, \frac{\phi_{clou}^4}{\phi_{eq}^3} E_{clou} \qquad \text{(C.3-6)}$$

On peut se demander pourquoi dans le cas d'un essai d'arrachement, Chaoui (1992) écrit l'égalité des rigidités en flexion en plus de l'égalité des rigidités en traction. En écrivant simplement l'égalité de la rigidité en traction, on obtient l'expression suivante :

$$b\, E_{eq}\, \phi_{eq} = E_{clou}\, \pi\, \frac{\phi_{clou}^2}{4} \qquad \text{(C.3-7)}$$

En prenant b égal à 1,0 m et en considérant pour la plaque équivalente une épaisseur ϕ_{eq} égale au diamètre des clous ϕ_{clou} , on obtient :

$$E_{eq} = E_{clou}\ \pi\ \frac{\phi_{clou}}{4} \qquad \text{(C.3-8)}$$

Avec cette formule, on obtient un module E_{eq} de 346 10^{+3} kPa, 14% plus faible que le module calculé par Chaoui et qui est égal à 395 10^{+3} kPa. Cette différence peut expliquer, en partie, pourquoi le modèle 2D est plus raide que le modèle 3D. La deuxième source de différences provient du choix de modules de mobilisation du frottement latéral égaux dans les cas 2D et 3D.

Le choix d'un module d'interface 3D, égal au plus petit des modules du sol et du clou, est un choix basé plus sur des raisons numériques que physiques. Cependant, dans le cas d'une étude purement numérique, cela n'a pas d'importance.

Par contre, entre les modèles 2D et 3D, il faut calculer l'équivalence des modules d'interface. Dans le modèle 3D, il faut introduire un module d'interface E_i qui correspond réellement au module k_τ de mobilisation du frottement latéral le long du clou. Dans le modèle 2D, il convient par contre, d'introduire un module d'interface E_i différent, que nous noterons k_s , et qui est relié à k_τ par la relation :

$$k_s = \frac{\pi\ D_c\ k_\tau}{2\ S_h} \qquad \text{(C.3-9)}$$

où S_h est l'espacement entre les clous, pris égal à 1,0 m dans le cas présent.

Dans le cas considéré, nous obtenons une valeur de k_s qui est égale à 2,47 10^{+3} kPa, c'est à dire, qui est 10 fois plus petite que la valeur de 25 10^{+3} kPa prise pour le calcul 3D par Chaoui (1992).

La courbe de mobilisation de la traction en fonction du déplacement en tête du clou est fonction de plusieurs paramètres : le module de mobilisation du frottement latéral, la déformabilité du clou et celle du sol. De ces trois aspects, nous avons pu mettre en évidence, par notre analyse, que le module de mobilisation du frottement a été surestimé par un coefficient de 10 tandis que le module de la plaque équivalente a été surestimé par un coefficient de 1,14. Il n'existe pas de formule analytique permettant de calculer le module apparent k_{T0} de mobilisation de la traction en tête du clou, aussi bien dans le cas 2D que dans le cas 3D. Si l'on utilise la formule dérivée dans le cas unidimensionnel (cf. paragraphe 5, partie C), on obtient que ce module apparent est approximativement proportionnel à la racine carrée du rapport entre la rigidité axiale du renforcement $(E\ A)_{renforcement}$ et le module de cisaillement de l'interface k_i :

$$k_{T0} \propto \sqrt{\frac{(E\ A)_{renforcement}}{k_i}} \qquad \text{(C.3-10)}$$

Avec les valeurs numériques calculées ci-dessus, on obtient que le module de mobilisation de la traction en tête dans le cas 2D devrait être réduit par un coefficient égal à $\sqrt{11.4}$, c'est à dire environ 3,3.

De l'analyse précédente, il convient de retenir que la trop grande rigidité des résultats 2D par rapport aux calculs 3D, dans l'étude de Chaoui (1992) provient, en grande partie, du calcul des paramètres 2D équivalents. La géométrie doit certainement jouer aussi un rôle mais pour le déterminer précisément, il faudrait refaire un calcul complet avec les bons paramètres équivalents. Enfin, pour ce qui concerne le frottement latéral limite, la formule utilisée par Chaoui (1992) est correcte, ce qui explique la concordance entre les valeurs des tractions limites des deux calculs.

La détermination des paramètres 2D équivalents aux paramètres 3D doit donc être faite avec un grand soin, c'est ce que nous étudierons en détail dans le paragraphe 3.1.3. Avant de rentrer dans le détail de ces calculs, nous regarderons, d'un point de vue théorique, dans quelle mesure un calcul en déformations planes est acceptable pour modéliser un ouvrage tridimensionnel.

3.1.2.2 Eléments de renforcement linéaires et bidimensionnels

Un calcul en déformations planes n'est acceptable, a priori, que pour des renforcements bidimensionnels (nappe en géotextile, géogrille, ou treillis métallique, etc.) qui sont continus dans leur plan, du moins à l'échelle de l'ouvrage.

Pour les renforcements linéaires se pose la question de la validité d'un calcul en déformations planes, encore appelé calcul bidimensionnel ou 2D, dans la mesure où les nappes de renforcements linéaires qui sont, par définition, discontinues dans un plan horizontal, sont modélisées comme des éléments de type plaque ou coque qui sont continus.

De plus, suivant le procédé, les éléments linéaires peuvent être disposés parallèlement entre eux ou en zigzag, ce qui vient encore plus compliquer le problème. Dans la présente étude, nous nous limiterons au calcul de soutènements renforcés par éléments linéaires, sub-horizontaux et placés parallèlement les uns aux autres.

Un calcul tridimensionnel, du même type que ceux effectués par Chaoui (1992) ou Smith (1992), semble, a priori, le plus approprié. Même si actuellement, avec la puissance de calcul disponible, un tel calcul est devenu abordable, il reste cependant lourd. Le calcul 3D de l'arrachement d'un clou, réalisé par Chaoui (1992), prend 10 heures de temps CPU sur une station SUN 4 (390) pour 6 incréments de chargement tandis que le calcul 2D équivalent ne prend que 8 minutes pour 8 incréments de chargement.

Se pose alors la question de savoir si les calculs 3D sont réellement nécessaires. D'après Smith (1992), un calcul 3D est indispensable pour calculer en déformation la rupture par arrachement des clous d'un mur en sol cloué, à cause des déplacements relatifs importants entre le sol et les clous.

De même, en stabilisation de pentes par des clous verticaux, un calcul 3D semble recommandé du fait des déplacements relatifs du sol entre les clous verticaux, qui induisent des effets, dits 3D, très importants comme Chaoui (1992) l'a mis en évidence. Par contre, pour ce qui concerne l'analyse en service d'un mur en sol cloué par des clous sub-horizontaux, un calcul en déformations planes peut être suffisant et très bon, à condition de calculer les paramètres 2D équivalents, de manière appropriée. C'est ce que nous essayerons d'analyser dans le prochain paragraphe d'un point de vue théorique, avant de réaliser des calculs numériques.

3.1.2.3 Conditions de déformations planes pour des clous sub-horizontaux

Les conditions correspondant à l'hypothèse d'un calcul en déformations planes sont (figure C.3-5 et photo C.3-1) :

(1) le déplacement U_x est nul en tout point, ce qui signifie physiquement qu'un point M situé initialement dans une section verticale (y_0 , z_0) reste dans sa section, d'où :

$$U_x \equiv 0 \qquad \text{(C.3-11)}$$

(2) les déplacements U_y et U_z sont fonctions uniquement des deux coordonnées y et z, ce qui s'écrit, d'un point de vue mathématique, sous la forme suivante :

$$\frac{\partial U_y}{\partial x} = \frac{\partial U_z}{\partial x} \equiv 0 \qquad \text{(C.3-12)}$$

Physiquement, cela signifie que le champ de déplacements U_y et U_z est invariant le long du mur. Toutes les sections verticales (y, z) ont le même champ de déplacements.

Si ces hypothèses sont vérifiées, le tenseur des déformations ε_{ij} , qui est de taille 3 * 3 , est réduit à un tenseur 2*2 non nul :

$$[\varepsilon] = \begin{array}{|l|l|l|} \hline \varepsilon_{xx} = U_{x,x} = 0 \quad \text{car } U_x \equiv 0 & \varepsilon_{xy} = \dfrac{(U_{x,y} + U_{y,x})}{2} = 0 \quad \text{car } U_x \equiv 0 \quad \text{et } \dfrac{\partial U_y}{\partial x} = \dfrac{\partial U_z}{\partial x} \equiv 0 & \varepsilon_{xz} = \dfrac{(U_{x,z} + U_{z,x})}{2} = 0 \quad \text{car } U_x \equiv 0 \quad \text{et } \dfrac{\partial U_y}{\partial x} = \dfrac{\partial U_z}{\partial x} \equiv 0 \\ \hline 0 & \varepsilon_{yy} = U_{y,y} \neq 0 & \varepsilon_{yz} = \dfrac{(U_{y,z} + U_{z,y})}{2} \neq 0 \\ \hline 0 & \varepsilon_{yz} = \dfrac{(U_{y,z} + U_{z,y})}{2} \neq 0 & \varepsilon_{zz} = U_{z,z} \neq 0 \\ \hline \end{array} \qquad \text{(C.3-13)}$$

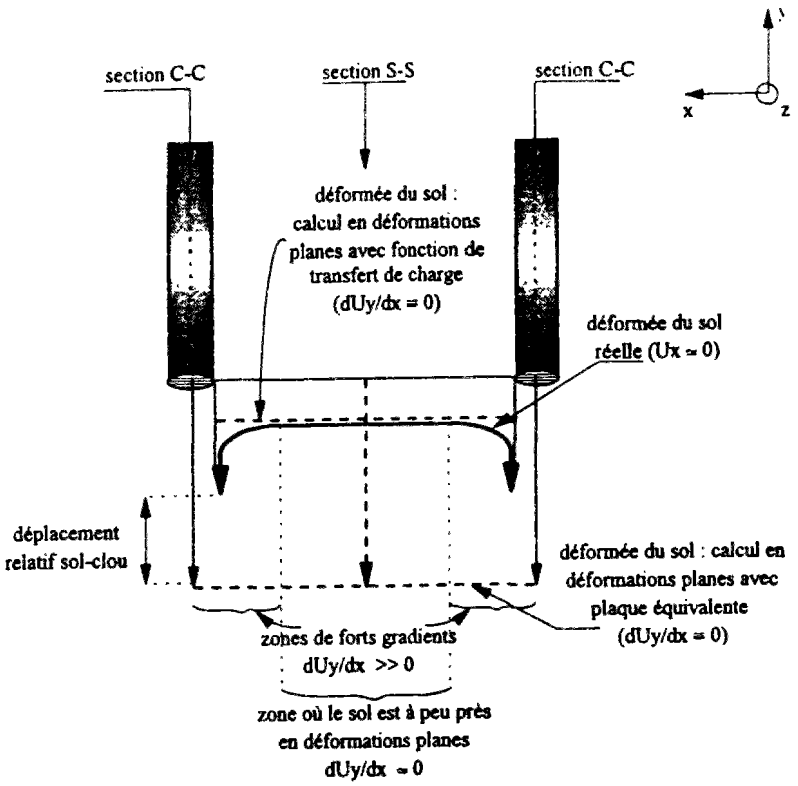


Figure C.3-5 : Vue de dessus des déformations d'un mur en sol cloué

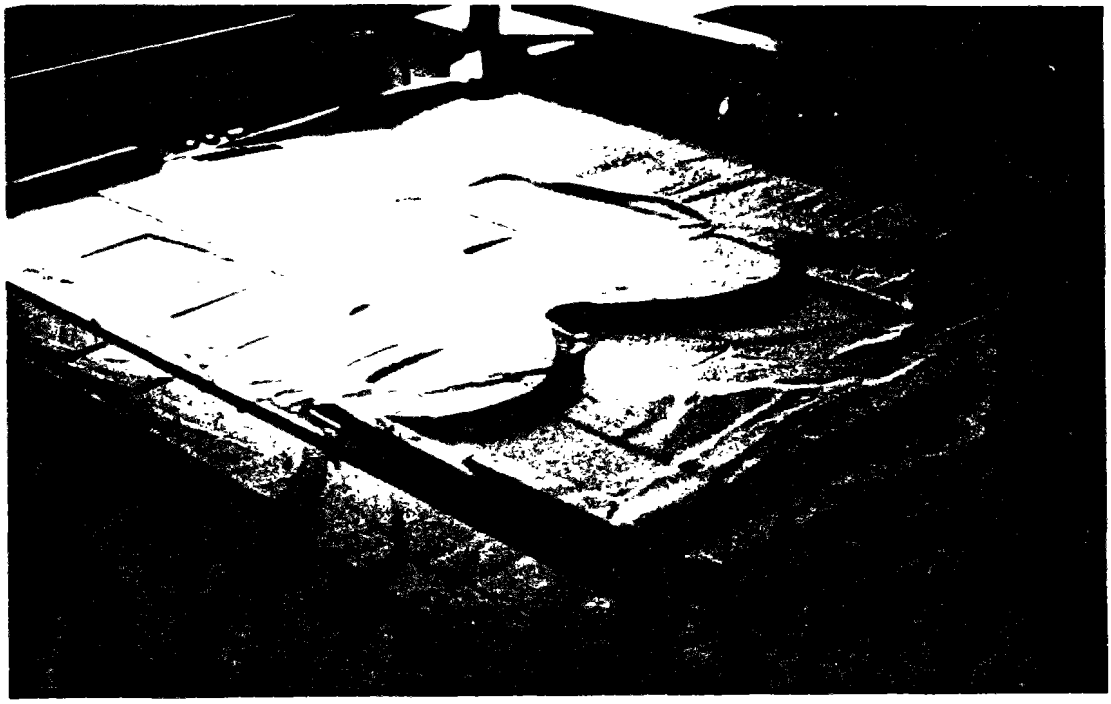


Photo C.3-1 : Vue d'un modèle réduit en Terre Armée à la rupture
(Archives du CERMES)

Pour ce qui concerne le tenseur des contraintes 3*3, il s'écrit sous la forme suivante :

$$[\sigma] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \sigma_{xx} \neq 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \hline 0 & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \\ \hline \end{array} \qquad \text{(C.3-14)}$$

3.1.2.3.1 Clous souples sub-horizontaux

Le profil schématique des déplacements U_y dans un mur en sol cloué est présenté en vue de face sur la figure C.3-5 pour des éléments linéaires souples, c'est à dire ne travaillant qu'en traction. Comme l'on peut aisément le remarquer, le déplacement U_y dépend de x surtout si les éléments de renforcement sont arrachés hors du sol. Cette dépendance est d'autant plus faible que le sol est adhérent au renforcement et que les renforcements travaillent peu en traction.

Il est à remarquer qu'un point du sol situé dans le plan vertical d'une rangée de renforcements reste dans ce plan. Il ne le donc traverse pas ce qui justifie l'hypothèse $U_x \equiv 0$.

La section où le déplacement U_y varie le plus localement dans la direction x est la section C-C qui passe par une rangée verticale de clous. La section, où le déplacement U_y varie le moins localement dans la direction x, est la section S-S à mi-distance de deux rangées verticales de clous. Cette dernière peut être considérée comme étant approximativement en déformations planes, alors que la première ne peut, en aucun cas, être considérée comme en déformations planes.

3.1.2.3.2 Clous rigides sub-horizontaux

Le profil schématique de déplacement U_z est présenté sur la figure C.3-6 en vue de face pour des éléments linéaires rigides, c'est à dire travaillant en traction, cisaillement et flexion. Comme l'on peut aisément le remarquer, le déplacement U_z dépend de x surtout si les éléments de renforcement sont sollicités en flexion et en cisaillement. Cette dépendance est d'autant plus faible que les éléments de renforcements sont souples et suivent le sol.

Il est à remarquer qu'un point du sol situé dans le plan d'une nappe de renforcements ne reste pas dans ce plan, il le traverse .

La section, où le déplacement U_z varie le plus localement dans la direction x, est la section C-C qui passe par une rangée verticale de clous. Celle, où le déplacement U_z varie le moins localement selon la direction x, est la section S-S à mi-distance de deux rangées verticales de clous.

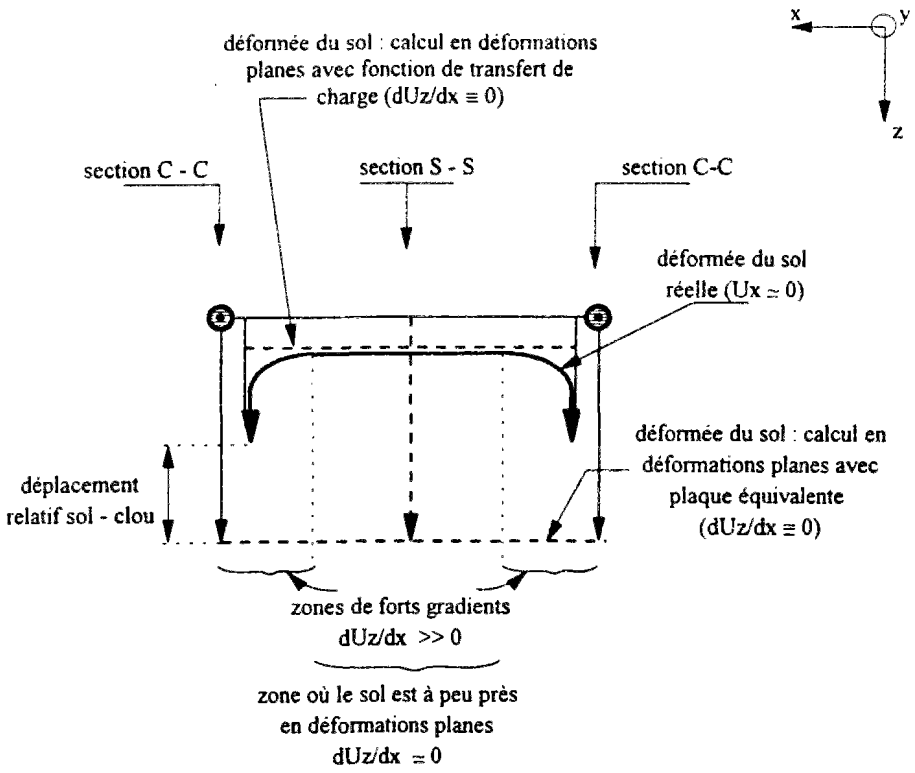


Figure C.3-6 : Vue de face des déformations d'un mur en sol cloué

3.1.2.4 Conditions de déformations planes pour des clous sub-verticaux

La stabilisation des pentes par éléments verticaux se fait le plus souvent avec des éléments rigides qui travaillent en compression, cisaillement et flexion. Dans un tel problème, le sol a tendance à se déplacer parallèlement à la pente. Le profil schématique des déplacements est présenté sur la figure C.3-7 en vus de dessus pour des éléments linéaires rigides. Comme l'on peut aisément le remarquer, le déplacement U_z dépend de x surtout si les éléments de renforcement sont sollicités en cisaillement et en flexion. Cette dépendance est d'autant plus faible que le éléments de renforcements sont souples et suivent le sol.

Il est à remarquer qu'un point du sol situé dans le plan d'une rangées de clous verticaux ne reste pas dans ce plan. Il le traverse de part en part, ce qui pose encore plus de problèmes pour la modélisation par plaque équivalente. Dans un mur en sol cloué, les points de sol, situés dans le plan d'un lit de clous, restent dans ce plan, même s'ils se déplacent par rapport aux clous. Il n'est donc pas étonnant qu'en stabilisation de pente, les effets dits 3D, c'est à dire les différences entre un modèle 3D et le modèle 2D correspondant, soient nettement plus importants que dans les soutènements.

La section, où le déplacement U_z varie le plus localement dans la direction x, est la section C-C qui passe par une rangée verticale de clous. Celle, où le déplacement U_z varie le moins localement selon la direction x, est la section S-S à mi-distance de deux rangées verticales de clous.

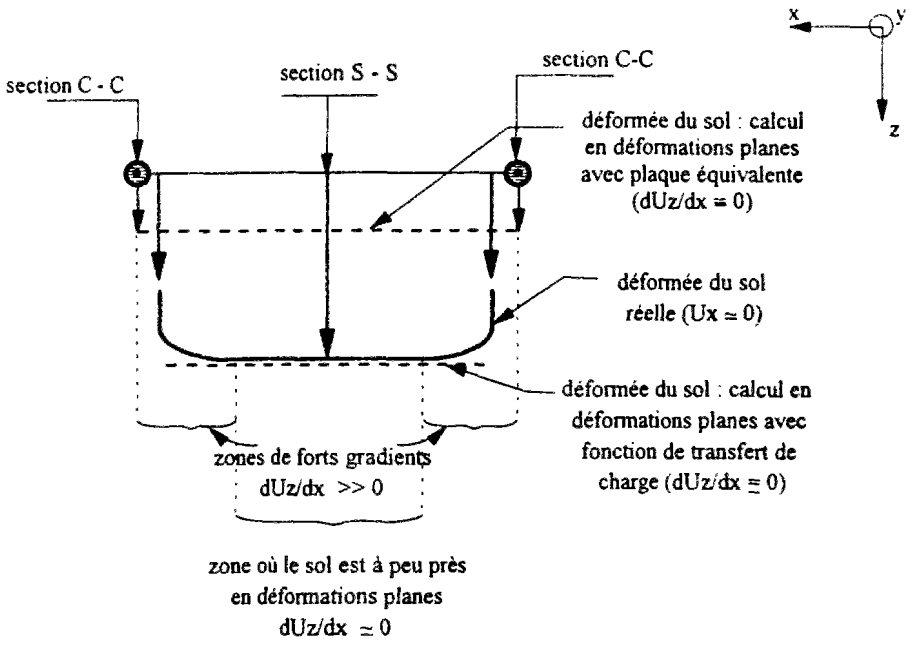


Figure C.3-7 : Vue de dessus d'une pente clouée par des clous rigides

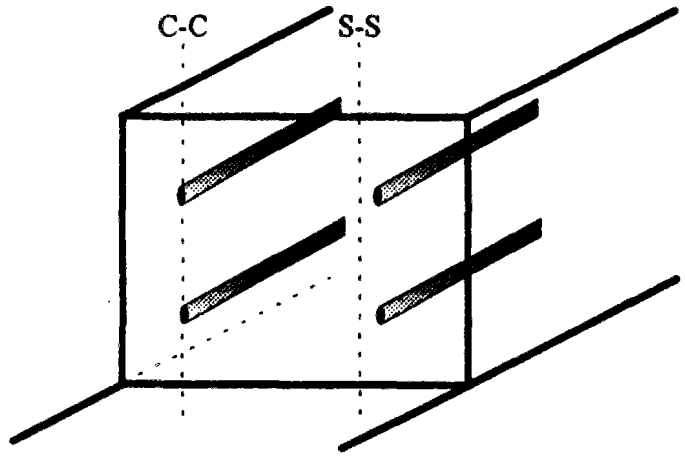
3.1.3 Modélisation "2D" d'un mur cloué

Deux grands types de méthodes existent pour modéliser les murs de soutènement renforcés par éléments linéaires. Toutes deux reposent sur l'hypothèse des déformations planes (figure C.3-8).

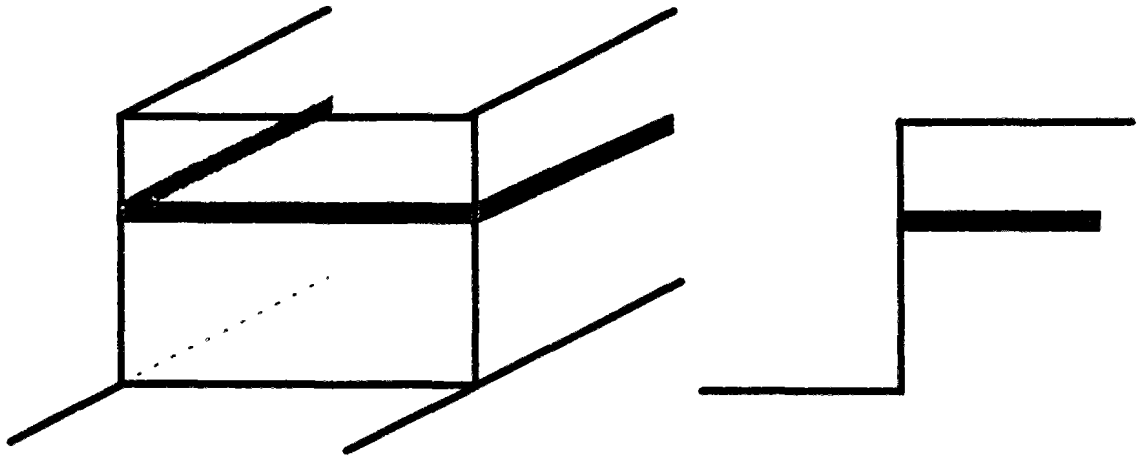
La première méthode consiste à remplacer une nappe discontinue de clous par une nappe continue, dont les propriétés macroscopiques sont équivalentes à celles de la nappe réelle, vis à vis d'un ou plusieurs critères, et moyennant certaines hypothèses. Dans une telle approche, c'est la section verticale C-C passant par une rangée de clous qui est étudiée.

Une deuxième approche consiste à étudier la section S-S où la continuité du sol n'est pas rompue. Reste alors à modéliser l'influence des clous sur cette section de sol. Une première méthode a été proposée par Naylor (1978). Nous en proposerons une deuxième.

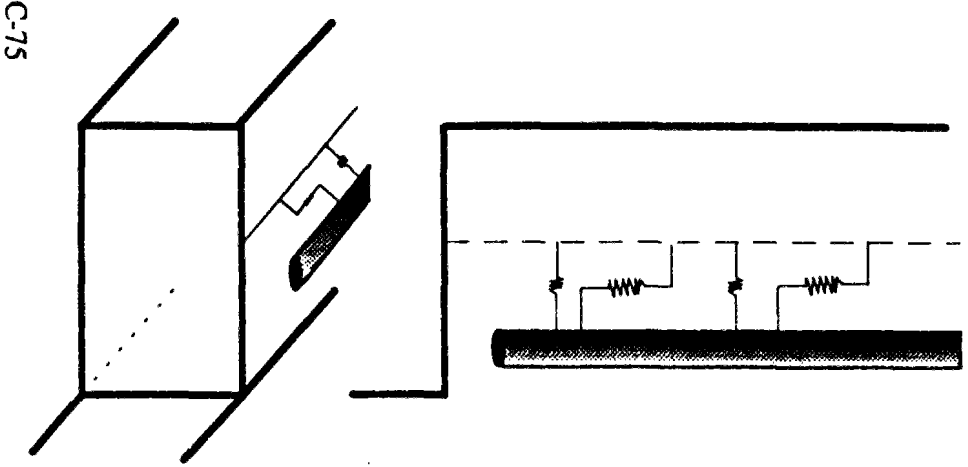
Dans la paragraphe qui suit, la relation exacte entre ces deux approches est étudiée en détail après une analyse critique détaillée de la méthode de la plaque équivalente, qui a été la plus utilisée dans le passé.



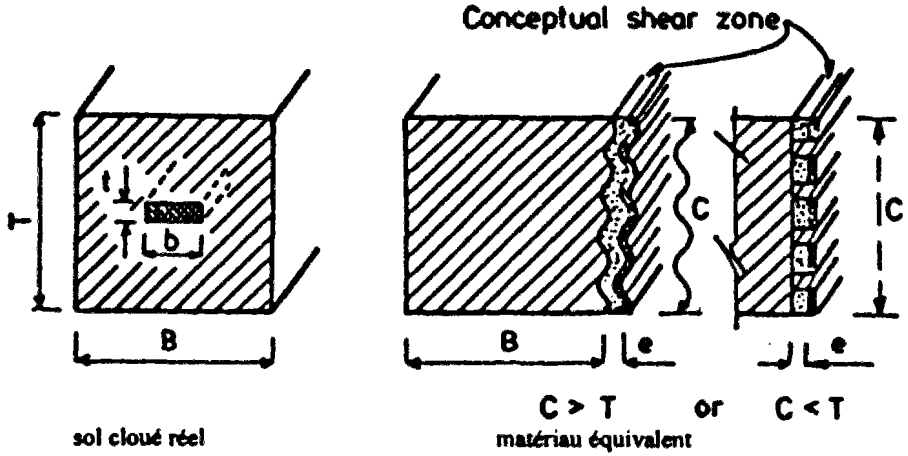
a : Structure réelle avec discontinuité horizontale des clous et continuité verticale du sol dans la section C-C



b : Modélisation en déformations planes (2D) avec une plaque équivalente; discontinuité verticale du sol dans la section C-C et continuité horizontale des clous



c : Modélisation en déformations planes (2D) avec une fonction de transfert de charge; discontinuité horizontale des clous dans la section S-S et continuité verticale du sol



d : "Slipping strip analysis (Naylor, 1978) avec discontinuité horizontale et discontinuité verticale des clous et continuité verticale du sol dans la section S-S

Figure C.3-8 : Modélisations des murs en sol cloué

3.1.3.1 Analyse critique du modèle de la "plaque équivalente"

Une première modélisation possible d'une nappe de clous consiste à remplacer le matériau composite "sol + clous" par une plaque homogène, de propriétés différentes de celles du sol ou du clou. Cette méthode a deux inconvénients majeurs. Premièrement, le sol est coupé par les plaques équivalentes, ce qui rompt la continuité des déplacements, des déformations et des contraintes, entre les points de sol situés de part et d'autre de la nappe. Deuxièmement; le sol est guidé par les plaques. Ce phénomène est d'autant plus sensible que les plaques sont inclinées et que l'interface a un frottement faible.

Une solution pour remédier à ces problèmes est d'imposer aux points de sol, situés de part et d'autre de la plaque, d'avoir les mêmes déplacements, à l'aide de relations linéaires.

Dans les lignes qui suivent, nous regarderons en détail la formulation de la plaque équivalente et plus particulièrement les hypothèses sur lesquelles elle est fondée. Nous restreindrons notre étude à des clous travaillant en traction. Cependant, il faut garder à l'esprit que les hypothèses prises pour calculer la plaque équivalente, dans le cas de clous rigides, sont encore plus fortes et contraignantes que pour des clous flexibles. Notamment, les mouvements de sol perpendiculairement et à travers la rangée verticale de clous sont proscrits. Pour la dérivation de la plaque équivalente dans le cas de clous rigides, travaillant en traction, en cisaillement et en flexion, le lecteur pourra se référer à Chaoui (1992).

3.1.3.1.1 Loi de comportement de la plaque équivalente

3.1.3.1.1.1 Module élastique

Commençons par des clous élastiques interagissant avec un sol élastique. Selon une direction, qui peut être parallèle ou perpendiculaire aux clous, la loi de comportement est caractérisée par les relations suivantes :

$$\sigma_{clou} = E_{clou}\, \varepsilon_{clou} \qquad \text{(C.3-15)}$$

$$\sigma_{sol} = E_{sol}\, \varepsilon_{sol} \qquad \text{(C.3-16)}$$

où σ_{sol} et σ_{clou} sont les contraintes, ε_{sol} et ε_{clou} les déformations, E_{sol} et E_{clou} les modules élastiques de déformation selon la direction considérée, pour respectivement le sol et les clous.

Pour obtenir la relation d'équivalence des modules élastiques entre les matériaux réels et la plaque équivalente, il est indispensable de faire l'hypothèse que le sol et les clous réels subissent les mêmes déformations, et que cette déformation est celle de la plaque équivalent modèle :

$$\varepsilon_{clou} = \varepsilon_{sol} = \varepsilon_{eq} \qquad \text{(C.3-17)}$$

La force totale agissant dans la plaque équivalente est donnée par la somme des produits des contraintes agissant dans chacun des matériaux par les sections respectives :

$$A_{eq}\,\sigma_{eq} = A_{clou}\,\sigma_{clou} + A_{sol}\,\sigma_{sol} \qquad \text{(C.3-18)}$$

Compte tenu des relations précédentes entre les déformations, de la définition du module E_{eq} de la plaque équivalente, de la répartition de la section A_{eq} de la plaque entre le sol A_{sol} et les clous A_{clou} , on obtient la relation suivante entre les modules de déformation, pour la direction considérée :

$$E_{eq}A_{eq} = E_{clou}A_{clou} + E_{sol}A_{sol} \qquad \text{(C.3-19)}$$

Pour obtenir cette relation très classique, l'hypothèse absolument indispensable est que le sol et les clous sont adhérents dans le plan du lit des clous, de manière à pouvoir écrire qu'ils ont les mêmes déformations. Dès qu'on autorise un glissement relatif, cette relation n'est plus vérifiée.

Dans le cas du mur CLOUTERRE-CEBTP No. 1, les clous sont en aluminium avec un module de 70 000 MPa. Le clou le plus petit a une section d'aluminium de 122,5 10^{-6} m^2. Le produit E_{clou} A_{clou} est égal à 8,6 10^{+3} kN. Pour le sol de Fontainebleau avec un module de 10 MPa, on obtient, en considérant une couche d'épaisseur le diamètre extérieur des clous de 63 mm, une valeur de 0,6 10^{+3} kN. Le sol contribue donc à la rigidité axiale à hauteur de 7%.

Ce cas est extrême dans la mesure où les clous utilisés sur les ouvrages réels sont en acier, beaucoup plus rigides, et avec des sections plus importantes. Il faut noter que le mur du CEBTP a été dimensionné avec un facteur de sécurité de 1,1. Dans le cas général, on obtient la relation approchée suivante :

$$E_{eq}A_{eq} \cong E_{clou}A_{clou} \qquad \text{(C.3-20)}$$

Il se trouve que cette relation est exactement la relation obtenue quand on raisonne en terme de fonctions de transfert de charge, sans faire aucune hypothèse sur l'adhérence entre le sol et les clous. Au contraire même, le déplacement relatif entre le clou et le sol est supposé non nul dans ce cas là. En forçant le trait, on pourrait dire que la méthode de la plaque équivalente donne, par un pur hasard, les mêmes relations que la méthode des fonctions de transfert de charge. Le hasard provient de ce que le sol est moins rigide et moins résistant en traction que les clous. Si cela n'était pas vrai, les deux méthodes donneraient des relations différentes.

Dans le cas de clous cylindriques de diamètre ϕ_{clou} , d'une plaque équivalente d'épaisseur ϕ_{eq} et de largeur b, on obtient la relation suivante :

$$b\,E_{eq}\,\phi_{eq} = E_{clou}\,\pi\,\frac{\phi_{clou}^2}{4} \qquad \text{(C.3-21)}$$

En prenant b égal à 1,0 m et en considérant pour la plaque équivalente une épaisseur ϕ_{eq} égale au diamètre des clous ϕ_{clou} , on obtient :

$$E_{eq} = E_{clou}\ \pi\ \frac{\phi_{clou}}{4} \qquad \text{(C.3-22)}$$

Chaoui (1992) propose d'écrire l'égalité des rigidité en traction et en flexion pour le lit de clous réels et la plaque modèle équivalente :

$$E_{eq}A_{eq} = E_{clou}A_{clou} \qquad \text{(C.3-23)}$$

$$E_{eq}I_{eq} = E_{clou}I_{clou} \qquad \text{(C.3-24)}$$

Dans le cas d'une barre pleine, ces deux relations se transforment en :

$$b\ E_{eq}\ \phi_{eq} = \frac{E_{clou}\ \pi\ \phi_{clou}^2}{4} \qquad \text{(C.3-25)}$$

$$b\ E_{eq}\ \frac{1}{12}\ \phi_{eq}^3 = \frac{E_{clou}\ \pi\ \phi_{clou}^4}{64} \qquad \text{(C.3-26)}$$

où b est la largeur de la plaque équivalente prise égale à 1.0 m.

On obtient ainsi deux équations en E_{eq} et ϕ_{eq} . ce qui permet de les calculer explicitement :

$$\phi_{eq} = \frac{\sqrt{3}}{2}\phi_c \qquad \text{(C.3-27)}$$

$$E_{eq} = \frac{12}{64}\ \pi\ \frac{\phi_{clou}^4}{\phi_{eq}^3}E_{clou} \qquad \text{(C.3-28)}$$

Après remplacement de ϕ_{eq} en fonction de ϕ_c , on obtient la relation :

$$E_{eq} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\ \pi\ \phi_{clou}E_{clou} \qquad \text{(C.3-29)}$$

Le rapport entre la valeur obtenue par Chaoui (1992) et celle que nous calculons avec la relation C.3-22 est égal à $2/\sqrt{3}$, c'est à dire 1,15. La différence est donc d'environ 15%, ce qui est significatif.

3.1.3.1.1.2 Résistance en traction

Il est supposé, comme cela est classique en renforcement, que le sol et les clous mobilisent simultanément leurs résistances à la rupture. C'est ce qui est communément appelé l'hypothèse de compatibilité des déformations à la rupture.

A la rupture du matériau sol-renforcé, le sol et les clous atteignent leurs résistances respectives. On peut alors déduire de la relation (C.3-18) entre les contraintes, la relation suivante entre les résistances en traction :

$$A_{eq}\ \sigma^{r}_{eq} = A_{clou}\ \sigma^{r}_{clou} + A_{sol}\ \sigma^{r}_{sol} \qquad \text{(C.3-30)}$$

Cette relation suppose, elle aussi, que les déformations dans le sol et les clous sont les mêmes. Le sol a une résistance en traction de l'ordre de 4 kPa si la cohésion est de 3 kPa, ce qui est négligeable devant l'aluminium. A la rupture, on obtient donc :

$$A_{eq}\ \sigma^{r}_{eq} = A_{clou}\ \sigma^{r}_{clou} \qquad \text{(C.3-31)}$$

Le calcul de la résistance en traction pour la plaque équivalente donne lui aussi une relation identique à celle obtenue pour les fonctions de transfert de charge, parce que le sol a une résistance en traction négligeable devant celle des clous. Là aussi, c'est par pur hasard que l'on retombe sur les mêmes relations, bien que l'on ai fait des hypothèses différentes.

3.1.3.1.2 Interaction entre la plaque équivalente et le sol

Alors que pour dériver le module élastique de la plaque, il est supposé que le sol et les clous se déforment de manière identique, pour calculer le frottement entre le sol et les clous, il faut faire l'hypothèse que le sol se déplace relativement au sol. Ceci constitue une incohérence de la méthode de la plaque équivalente.

La surface de contact entre un clou réel et le sol est égale à $\pi\ \phi_{clou}\ dl$, où dl est la longueur considérée le long du clou. La surface de contact entre la plaque équivalente et le sol modèle est donnée par : $2\ b\ dl$, où b est la profondeur du mur considérée. Nous prendrons une longueur unitaire de mur (dl = 1,0 m) et une longueur unitaire le long de clous (b = 1m). Après avoir écrit que les efforts résistants entre le lit de clous réels et la plaque équivalente sont égaux, on obtient immédiatement :

$$c_{eq} = \frac{1}{2\ S_h}\ \pi\ \phi_{clou}\ c_{interface} \qquad \text{(C.3-32)}$$

où S_h est l'espacement horizontal des clous réels et $c_{interface}$ la cohésion de l'interface entre les clous et le sol. Ce calcul a été fait pour une interface cohérente mais il pourrait être fait de manière semblable pour une interface frottante.

3.1.3.2 Modèles avec fonction de transfert de charge pour des "clous placés hors du sol"

Dans l'analyse avec la plaque équivalente, la section du mur en sol cloué qui est étudiée est une section du type C-C. Or, autour de cette section, les conditions de déformations planes ne sont pas du tout réalisées. En effet, c'est autour des clous que le gradient des déplacements, déformations et contraintes est le plus fort. Il semble préférable de considérer des sections du type S-S, où les conditions de déformations planes sont à peu près vérifiées. Un avantage de cette solution est de garder la continuité du sol sur toute sa hauteur.

Une première méthode, basée sur cette idée, a été proposée par Naylor (1978) sous le nom anglo-saxon de "slipping strip analysis" (figure C.3-8d). La section étudiée est une section verticale à mi-distance entre deux rangées verticales de renforcements. L'interaction entre le sol et la rangée verticale de clous est modélisée conceptuellement par une zone verticale d'interface, appelée "conceptual shear zone". Formellement, cette méthode revient à placer les renforcements hors de la section de sol étudiée et à utiliser une sorte de fonction de transfert de charge pour modéliser l'interaction entre les clous et le sol.

L'idée de Naylor (1978) est intéressante mais il n'y a pas besoin d'introduire une zone verticale continue d'interfaces. Il suffit simplement de modéliser l'interaction entre la section de sol S-S et chaque clou par une fonction de transfert de charge (figure C.3-8d). Celle-ci doit être calculée de manière appropriée ou mesurée à partir d'essais d'arrachement sur le terrain.

3.1.3.2.1 Définitions et notations

Nous étudions en déformations planes une section de mur en sol cloué de 1,0 m de largeur. Le mur réel est renforcé par des clous de diamètre total D_c , renforcés par une armature métallique de diamètre D_a et espacés horizontalement de S_h et verticalement de S_v (figure C.3-1). Tous les clous dans un même lit sont supposés travailler avec les mêmes efforts (T, Q, M) et les mêmes déformations ε_{ij} , et se déplacer par rapport au sol du même déplacement relatif y. Les efforts disponibles dans un lit de clous réels, par mètre de largeur de mur, sont donc (T/S_h , Q/S_h , M/S_h).

Si le lit de clous est modélisé par un élément unidimensionnel de type poutre, les efforts dans l'élément modèle, notés $(\tilde{T}, \tilde{Q}, \tilde{M})$, doivent être égaux aux efforts dans le lit de clous réels par unité de largeur du mur, ce qui donne les relations :

$$\tilde{T} = T/S_h \qquad \text{(C.3-33)}$$

$$\tilde{Q} = Q/S_h \qquad \text{(C.3-34)}$$

$$\tilde{M} = M/S_h \qquad \text{(C.3-35)}$$

En outre, on impose aux déplacements $\tilde{U}_i$ et déformations $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ du modèle d'être égaux aux déplacements U_i et aux déformations ε_{ij} réels.

• 3.1.3.2.2 Loi de comportement des clous

Pour une barre modèle travaillant uniquement en traction $\tilde{T}$, la loi de comportement linéaire élastique parfaitement plastique est définie par les relations :

$$\tilde{T} = \tilde{E}\,\tilde{A}\,\tilde{\varepsilon}_{axiale} \qquad \text{(C.3-36)}$$

$$\tilde{T} \leq \tilde{T}_R = \tilde{A}\,\tilde{\sigma}_y \qquad \text{(C.3-37)}$$

où $\tilde{A}$ est la section de la barre, $\tilde{E}$ le module élastique et $\tilde{\sigma}_y$ la contrainte limite.

Le comportement d'un clou réel, constitué d'une armature métallique de section A_a , de module élastique E_a , de contrainte limite σ_y , scellée dans un coulis de scellement est modélisé simplement par une loi élastique parfaitement plastique où l'on ne tient pas compte du coulis pour le module de déformation :

$$Q = E_a\,A_a\,\varepsilon_{axiale} \qquad \text{(C.3-38)}$$

Par contre, on peut tenir compte de celui-ci pour le calcul de la traction maximale de rupture :

$$T_R > A_a\,\sigma_{ya} \qquad \text{(C.3-39)}$$

A partir des relations précédentes, on obtient les relations suivantes entre les modules et les tractions limites des clous réels et des renforcements modèles :

$$\tilde{E}\,\tilde{A} = \frac{E_a\,A_a}{S_h} \qquad \text{(C.3-40)}$$

$$\tilde{T}_R = \frac{T_R}{S_h} \qquad \text{(C.3-41)}$$

A l'heure actuelle, le code de calcul CESAR ne permet pas de modéliser une loi de comportement élastoplastique pour les éléments unidimensionnels (barre, poutre). Introduire une telle loi nécessiterait d'écrire un sous programme pour calculer la matrice élastoplastique correspondante mais aussi de compléter le programme pour calculer, à la fin de chaque itération de convergence, le résidu des termes correspondant aux éléments unidimensionnels. Pour une première étude sur CESAR, nous avons choisi d'utiliser les options existantes, ce qui nous a conduit à utiliser des barres élastiques linéaires.

Les relations précédentes suffisent dans le cas d'une modélisation par barres. Si l'on utilise des éléments de renforcement volumiques, d'épaisseur $\tilde{e}$, l'effort de traction développé est égal à :

$$\tilde{T} = \tilde{e}\,\tilde{\sigma}_{axiale} \qquad \text{(C.3-42)}$$

Cet effort doit être égal à l'effort de traction disponible dans un lit de clous réels, par mètre de largeur du mur, c'est à dire T / S_h . Après prise en compte de la loi de comportement des clous réels, on obtient la loi de comportement élastique suivante selon la direction des renforcements :

$$\tilde{\sigma}_{axiale} = \frac{E_a A_a}{S_h \tilde{e}}\,\tilde{\varepsilon}_{axiale} \qquad \text{(C.3-43)}$$

Verticalement la rigidité des éléments volumiques de renforcements sera prise égale à celle du sol, d'où la relation :

$$E_v(\text{renforcement modèle}) = E_{sol} \qquad \text{(C.3-44)}$$

La traction maximale mobilisable dans les éléments volumiques de renforcement, par unité de largeur du mur, est donnée par :

$$\tilde{T}_R = \tilde{e}\,\tilde{\sigma}_t \qquad \text{(C.3-45)}$$

où $\tilde{\sigma}_t$ est la résistance en traction. Cette traction doit être égale à la traction maximale mobilisable dans un lit de clous, par unité de largeur du mur, d'où la relation :

$$\tilde{T}_R = \tilde{e}\,\tilde{\sigma}_t = T_R / S_h \qquad \text{(C.3-46)}$$

3.1.3.2.3 Interaction entre le sol et les clous

La fonction de transfert de charge le long d'un clou est définie par une relation du type :

$$\tau = \tau(y) \qquad \text{(C.3-47)}$$

où τ est la contrainte de cisaillement le long du clou et y le déplacement relatif entre le clou et le sol supposé fixe à l'infini. Dans le cas le plus simple d'un comportement de type linéaire élastique parfaitement plastique, la fonction de transfert de charge est entièrement décrite par deux paramètres, qui sont le coefficient de mobilisation du frottement latéral unitaire, noté k_τ , et le frottement latéral unitaire limite, noté q_s . Il est parfois utile de travailler avec la force de frottement, par unité de longueur de clou, notée t et égale à :

$$t = \pi D_c \tau \qquad \text{(C.3-48)}$$

La courbe de mobilisation de la force unitaire t est alors décrite par deux paramètres, qui sont le module de mobilisation de la force unitaire t, noté k_t , et la valeur limite de t , égale à $\pi D_c q_s$.

La force de traction T en un point z est donnée par la relation :

$$T(z) = -\int_z^L \pi D_c \tau(z) \, dz \qquad \text{(C.3-49)}$$

La courbe T_0/L en fonction du déplacement y_0 , où T_0 et y_0 sont respectivement la force de traction et le déplacement en tête, a un module tangent initial k_{T0} plus petit que k_t et ce, d'autant plus que le clou est plus déformable (cf. paragraphe 5, partie C).

Dans le cas d'un mur avec un espacement horizontal S_h , la force disponible par mètre de largeur de mur, qui correspond au mètre de largeur de sol modélisé en déformations planes, est égale à T/S_h . La force de frottement réellement disponible, par mètre de largeur de mur, est égale à $\pi D_c \tau / S_h$. Si les clous sont modélisés par des éléments unidimensionnels, tels qu'une barre ou une poutre, ou des éléments volumiques, la force de frottement modélisée, par unité de largeur du mur, est donnée par $2 \tilde{\tau}$ où $\tilde{\tau}$ est la contrainte de cisaillement le long des éléments de renforcement modèles. On en déduit la relation entre le cisaillement dans les clous réels et dans les éléments de renforcement modèles :

$$\tilde{\tau} = \frac{\pi D_c}{2 S_h} \tau \qquad \text{(C.3-50)}$$

Comme le déplacement relatif $\tilde{y}$ des éléments de renforcement modèles est pris égal au déplacement relatif des clous réels, la raideur de cisaillement $k_s = \tilde{\tau}/\tilde{y}$ des éléments d'interface utilisés dans le modèle est reliée au coefficient de mobilisation k_τ du frottement le long des clous réels :

$$k_s = \frac{\pi D_c}{2 S_h} k_\tau \qquad \text{(C.3-51)}$$

Le frottement maximal mobilisable dans les éléments d'interface est relié au frottement latéral unitaire le long des clous réels par la relation :

$$\tau_{max} = \frac{\pi D_c}{2 S_h} q_s \qquad \text{(C.3-52)}$$

Si l'on modélise le critère de rupture de la fonction de transfert de charge par un critère de Mohr-Coulomb, deux paramètres c_i et ϕ_i sont à déterminer. Cependant, les essais d'arrachement ne donnent accès qu'à un paramètre, le frottement latéral unitaire limite q_s. Il est difficile, dans les résultats d'essais d'arrachement, de séparer la cohésion du frottement, sachant qu'il a été observé que le frottement latéral unitaire était quasiment constant avec la profondeur pour des inclusions linéaires (Schlosser et Guilloux, 1981).

Nanda (1989) propose de prendre une cohésion c_i nulle afin de rendre compte des effets de dilatance dans le sable de Fontainebleau. Le calcul de ϕ_i est ensuite fait en 3 étapes : (1) calcul de la contrainte verticale σ_v en supposant que celle-ci est égale au poids des terres γ z, (2) détermination du frottement latéral unitaire q_s à partir d'essai ou d'abaques et (3) calcul de l'angle de frottement apparent ϕ_i :

$$\tan\phi_i = q_s/\gamma z \qquad \text{(C.3-53)}$$

Avec une telle approche, Nanda (1989) obtient une variation de l'angle de frottement ϕ_i avec la profondeur qu'il coupe arbitrairement à une valeur donnée de 3,9 tan ϕ_{sol} .

Cette approche est en fait purement formelle, puisqu'un calcul en déformations planes ne donne pas, au niveau d'un clou, un état de contraintes, de type axisymétrique, correspondant à ce qui existe dans la réalité autour d'un clou. Elle introduit des angles de frottement entre le sol et le renforcement très importants par rapport à l'angle de frottement du sol lui-même. Ce frottement tend à limiter le glissement relatif entre le sol et les clou mais surtout induit dans le massif de sol une forte dilatance qui n'a pas lieu d'être modélisée. Ceci peut être à l'origine des différences importantes qu'il trouve entre les simulations et les mesures.

Nous avons préféré, dans la présente étude, définir la résistance limite des éléments d'interface, utilisés comme fonctions de transfert de charge, uniquement en terme d'adhésion c_i , en prenant un angle de frottement ϕ_i nul. La cohésion des interfaces, notée c_i , s'obtient à partir de q_s par la relation :

$$c_i = \frac{\pi D_c}{2 S_h} q_s \qquad \text{(C.3-54)}$$

Se pose alors la question de savoir si le frottement latéral unitaire q_s varie avec la profondeur. La même question peut être posée pour le module k_τ de mobilisation du frottement latéral unitaire. En fondations profondes, il est classique de garder la même fonction de transfert de charge le long d'un pieu dans un sol homogène. Cartier et Gigan (1983) ont constaté, pour des cornières sur le site de l'A 86, que q_s est quasiment indépendant de la profondeur. C'est la raison pour laquelle, la majorité des dimensionnements de mur en sol cloué se fait en supposant un frottement latéral unitaire constant. Dans les techniques de renforcement de remblais granulaires, du type de la Terre Armée, il est classique de prendre un angle de frottement variable avec la profondeur jusqu'à 6 m de profondeur puis ensuite de le plafonner. Cependant, q_s et k_τ sont corrélés à la pression limite pressiométrique p_l et au module pressiométrique E_M , respectivement. Ceux-ci varient sensiblement avec la profondeur dans le cas du remblai de Saint-Rémy. Il semble donc raisonnable de prendre q_s et k_τ variables avec la profondeur.

3.1.4 Relations entre le modèle de la plaque équivalente et le modèle des clous placés hors du sol

Bien que les méthodes de la plaque équivalente et des fonctions de transferts de charges soient basées sur différentes hypothèses, elles peuvent donner les mêmes résultats, dans certains cas. C'est ce que nous allons examiner dans un premier temps.

Quand les lits de clous sont modélisés par une plaque équivalente, les points de sol, situés de part et d'autre de la plaque, suivent des déplacements horizontaux différents. La continuité du sol n'existe pas dans un modèle avec la plaque équivalente. Dans un mur réel, à part les sections C-C où le sol est discontinu, le sol dans sa grande majorité est continu, notamment le long des sections S-S. Si l'on veut réintroduire la continuité du sol dans une modélisation par plaque équivalente, il convient d'imposer aux points de sol, situés de part et d'autre d'une même nappe, des relations linéaires.

Le critère de non pénétration des éléments volumiques de sol dans les éléments d'interface ainsi que le choix d'une rigidité normale des éléments d'interface très importante pour éviter aux interfaces de s'ouvrir, implique automatiquement que les points de sol, situés de part et d'autre d'une nappe, ont les mêmes déplacments normaux :

$$U_n\left(M_{sol}^{-}\right) = U_n\left(M_{sol}^{+}\right) \tag{C.3-55}$$

Pour imposer qu'ils aient les mêmes déplacments U_x et U_y , il suffit de rajouter la condition que les déplacements tangentiels par rapport à la nappe sont égaux :

$$U_t\left(M_{sol}^{-}\right) = U_t\left(M_{sol}^{+}\right) \tag{C.3-56}$$

Considérons un clou incliné de θ par rapport à l'horizontale, cette relation s'écrit alors sous la forme suivante

$$\cos\theta\, U\left(M_{sol}^{+}\right) + \sin\theta\, V\left(M_{sol}^{+}\right) - \cos\theta\, U\left(M_{sol}^{-}\right) - \sin\theta\, V\left(M_{sol}^{-}\right) = 0 \tag{C.3-57}$$

où U est le déplacement horizontal et V le déplacement vertical.

Avec ces relations linéaires, la méthode de la plaque équivalente n'introduit plus de discontinuité dans le champ de déplacements du sol. Cette méthode est alors équivalente à la méthode des fonctions de transfert de charge si et seulement si le module de cisaillement des éléments d'interface k_s est égal à la moitié du module de mobilisation du frottement latéral k_τ (figure C.3-10) :

$$k_s = \frac{1}{2} k_\tau \tag{C.3-58}$$

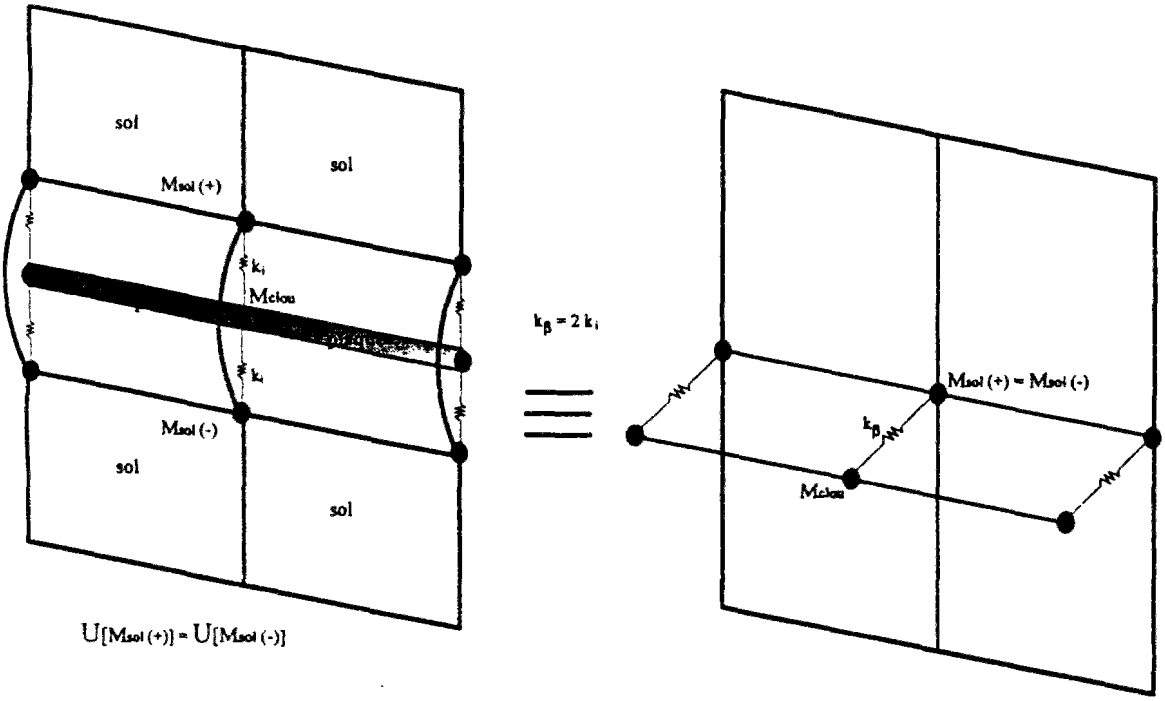


Figure C.3-9 : Correspondance entre une plaque équivalente associée à des éléments d'interface et des clous situés "hors du sol" et associés à des fonctions de transfert de charge

A l'heure actuelle, certains programmes comme FLAC raisonnent en terme de fonctions de transfert de charge entre le sol et les clous. D'autres programmes, comme CESAR ou PLAXIS, ne permettent pas de travailler avec des fonctions de transfert de charge. Il convient alors d'utiliser la méthode de la plaque équivalente avec les valeurs de paramètres appropriées.

3.1.5 Motifs de sols cloué

Dans le pré-processeur MAX2D de CESAR, deux motifs de sols renforcés sont déjà installés. Ils correspondent à une maille Terre Armée (figure C.3-10) et à un section de parement, renforcée par une nappe pouvant être rigide (figure C.3-11).

Ces deux motifs ne sont pas adaptés au clouage des sols dans la mesure, où ils n'autorisent pas le glissement relatif du sol par rapport au parement. Ce point est très important, car l'accrochage du parement durant les phases de construction est un point clef.

D'autre part, le parement est vertical tandis que les renforcements sont horizontaux. Dans le cas d'un mur en sol cloué, les clous sont, en principe, inclinés par rapport à l'horizontale de 10 à 20° , tandis que la parement est vertical.

Enfin, la notion de transfert de charge entre les clous et le sol doit être aussi appliquée au transfert de charge entre les clous et le parement. Le déplacement relatif entre les clous et le parement correspond alors à l'enfoncement de la tête du clou dans le béton du parement. Ce dernier point n'est pas à négliger si l'on veut étudier par exemple l'influence de la rigidité de la fixation des clous sur la répartition des pressions des terres derrière le parement.

Pour ces raisons; nous avons développé un motif propre au clouage (figure C.3-12). Celui-ci n'étant pas implanté dans le préprocesseur MAX2D, la génération doit être faite en assemblant, à l'aide de ce préprocesseur, des parties construites manuellement sur un fichier de données formaté. Ce motif, qui fonctionne sur le principe de la plaque équivalente, est équivalent au motif avec fonctions de transfert de charge que nous avons construit pour FLAC (figure C.3-13). Avec PLAXIS de tels manipulations ne sont pas possibles et nous nous sommes contentés d'utiliser le motif existant de géotextile.

Il convient de noter que le module k_s de cisaillement des éléments d'interface dans CESAR et PLAXIS doit être pris égal à la moitié du module k_τ de mobilisation du frottement latéral dans les fonctions de transfert de charge de FLAC.

3.2 Modélisation des phases d'excavation

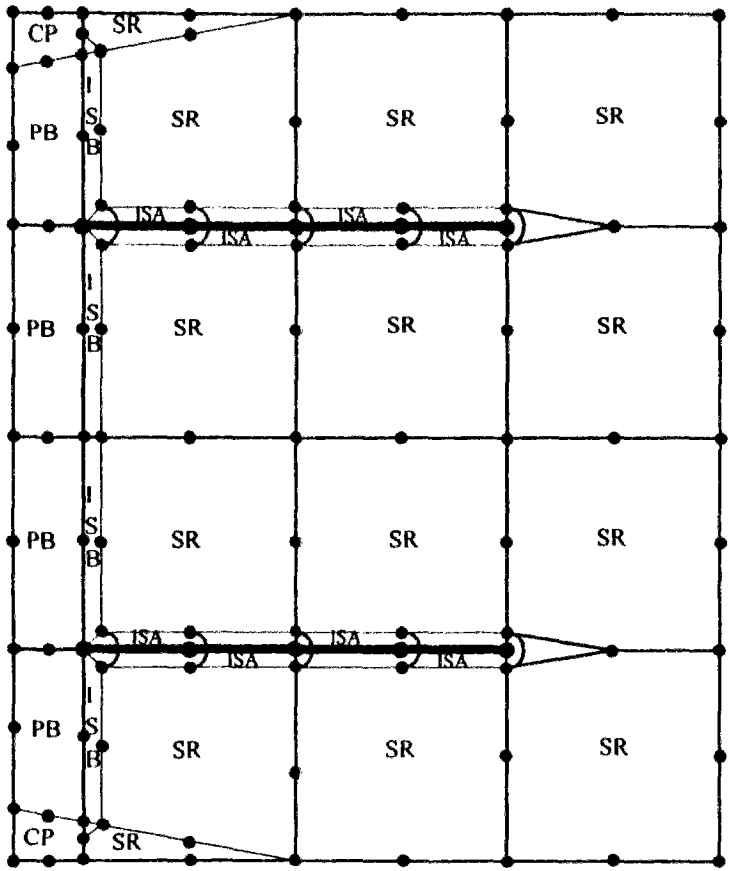
Le principe de la modélisation d'excavation en éléments finis est de calculer, dans la configuration initiale, les vecteurs contraintes initiaux existants sur les bords des zones à excaver, pour ensuite appliquer sur les facettes des éléments en bordure d'excavation, des forces surfaciques opposées et égales à ces vecteurs contraintes (Ghaboussi et Pecknold, 1984) (figure C.3-14).

Le calcul des forces à appliquer peut être fait de plusieurs manières.

(1) La méthode la plus naturelle est de calculer directement à partir de l'état des contraintes dans l'ouvrage, les contraintes appliquées sur les faces de l'excavation. La détermination des contraintes sur les noeuds en bordure d'excavation peut être faite, soit à partir des contraintes calculées aux noeuds, ce qui n'est pas précis puisque celles-ci ne sont bien connues qu'aux points de Gauss, soit en utilisant un schéma d'interpolation polynomiale.

Dans le cas d'éléments quadrilatère à 4 noeuds, les contraintes sont connues seulement aux centres des éléments. Clough et Mana (1969) ont proposé une méthode relativement complexe pour interpoler les contraintes sur les noeuds des bords de l'excavation à partir des contraintes aux centres des éléments adjacents. Cette méthode donne des résultats de simulations qui dépendent du nombre de phases d'excavation.

Christian et Wong (1973) ont utilisé des éléments d'ordre supérieur de manière à améliorer le calcul des contraintes. Cependant, même cette méthode ne donne pas des résultats indépendants du nombre de phases. De plus, elle pose des problèmes dans les zones de géométries complexes, en particulier dans les coins, où il faut faire attention au choix des éléments à partir desquels les valeurs sont interpolées (Ghaboussi et Pecknold, 1984).



Eléments linéiques

C : clou

Relations linéaires

RL : sol (+) - sol (-)

Eléments volumiques

SR : sol renforcé

PB : parement en béton

CP : coussin entre deux paneaux de parement

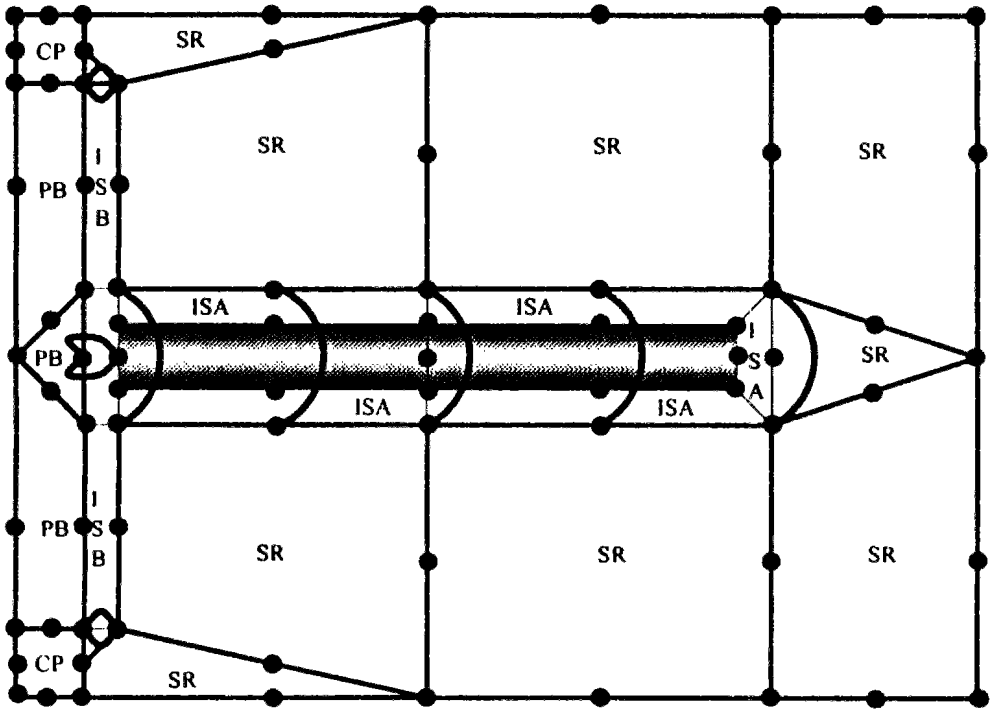
Eléments d'interface

ISA : interface sol-armature

ISB : interface sol-béton

Figure C.3-10 : Motif de terre armée dans CESAR

Une écaille et deux armatures sans flexion (éléments BB3)



Relations linéaires

RL : sol (+) - sol (-)

RL : sol - béton

continuité en U

continuité en V

RL : clou - béton

continuité en U

continuité en V

Eléments volumiques

SR : sol renforcé

PB : parement en béton

CP : coussin entre deux paneaux de parement

Clou : (Q8)

Eléments d'interface

ISA : interface sol-armature

ISB : interface sol-béton

Figure C.3-11 : Motif de terre armée dans CESAR

Une écaille et une armature en flexion (éléments Q8)

Eléments linéiques

C : clou

Relations linéaires

RL : sol (+) - sol (-)

Eléments volumiques

SE : sol excavé

PB : parement en béton

SRM : sol remanié

SR : sol de remblai cloué

Eléments d'interface

ICB : interface clou-béton

ICSRM : interface clou-sol remanié

ICS : interface clou-sol remblai

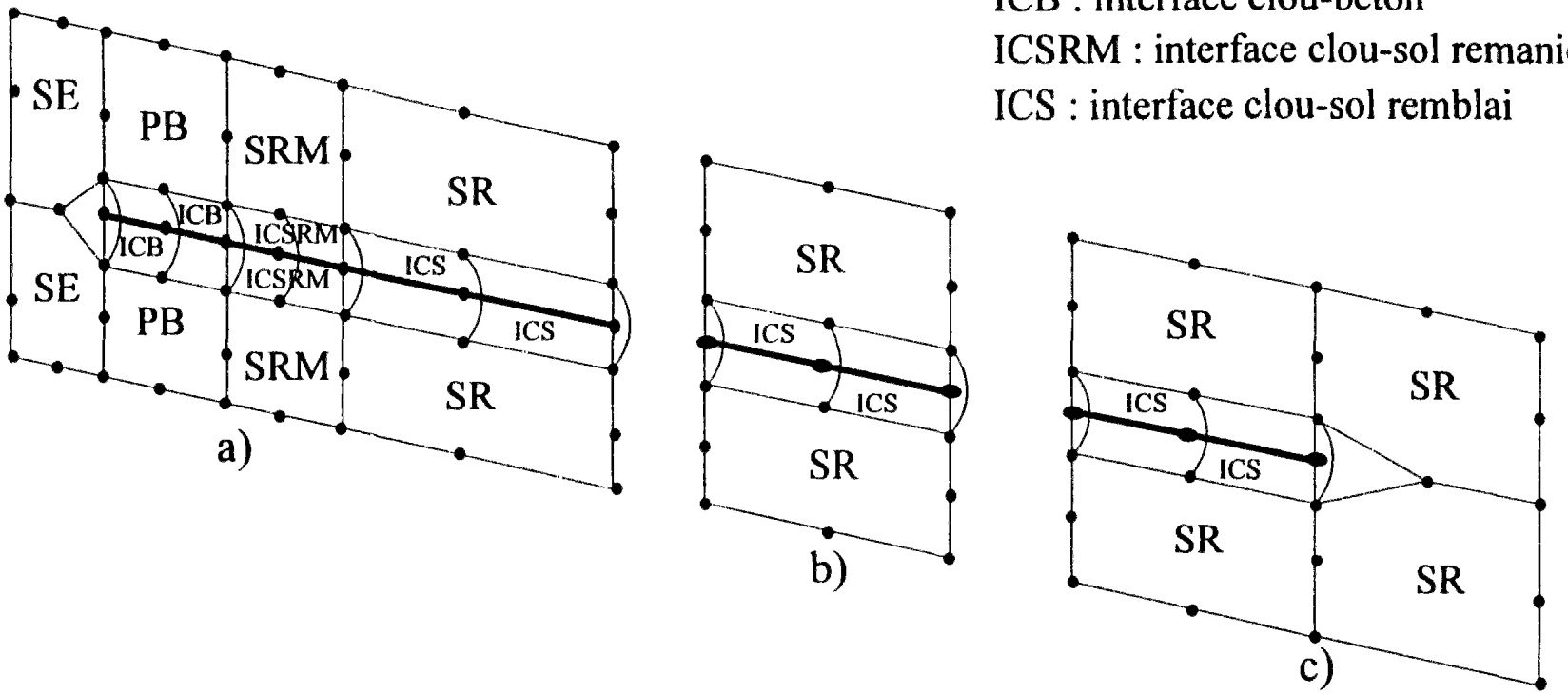


Figure C.3-12 : Motif de sol cloué créé pour CESAR : a) tête de clou : jonction sol-parement, b) section courante dans le sol, c) pied de clou dans le sol

Eléments linéiques

C : clou

Fonction de transfert de charge

FTC : clou - sol

Eléments volumiques

SE : sol excavé

PB : parement en béton

SRM : sol remanié

SR : sol de remblai cloué

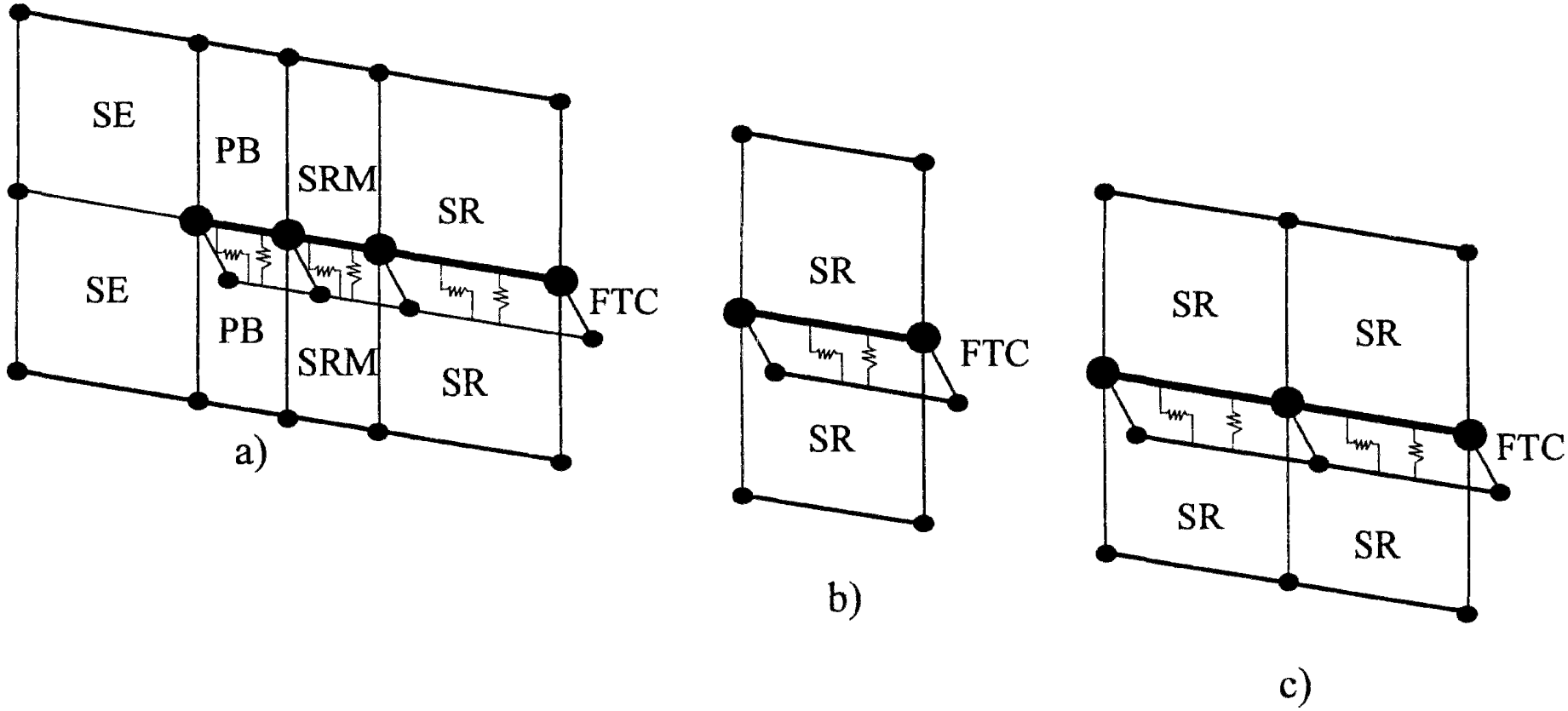
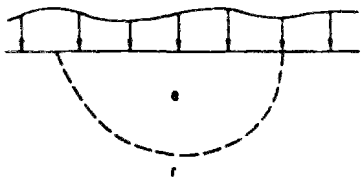


Figure C.3-13 : Motif de sol cloué dans FLAC : a) tête de clou : jonction sol-parement, b) section courante dans le sol, c) pied de clou dans le sol



(a) Initial configuration of stressed body showing region *e* to be excavated and region *r* remaining after excavation

(b) Stresses acting on region *r* in the initial configuration

(c) Excavation of region *e*

Figure C.3-14 : Principe de modélisation des zones excavées

(2) La deuxième méthode consiste à calculer les forces surfaciques appliquées sur les bords de la zone excavée, en intégrant sur une partie de cette zone l'état de contraintes initiales (Mana, 1976; Clough et Mana, 1976) :

$$\{f\} = \sum_{m=1}^{M} \int_V {}^t[B]\{\sigma\} dV \qquad \text{(C.3-59)}$$

où M est le nombre d'éléments qui ont une facette commune avec les éléments non excavés, [B] est la matrice donnant les déformations en fonction des déplacements, $\{\sigma\}$ est le vecteur contraintes et $\{f\}$ le vecteur des forces appliquées initialement sur les bords de la zone à excaver.

Clough et Mana (1976) écrivent que cette méthode donne des résultats indépendants du nombre de phases (figure C.3-15). Cependant, Desai et Sargand (1984) ont trouvé des exemples simples où cette méthode ne marche pas, comme, par exemple, une colonne de sol à laquelle on enlève des éléments. Ils proposent, pour améliorer le calcul de cette intégrale, d'utiliser une formulation par éléments finis de type mixte, avec les déplacements et les contraintes comme variables nodales. Une telle formulation par éléments finis permet d'obtenir des valeurs de contraintes aux noeuds aussi bonnes que les déplacements, alors qu'une formulation en déplacements donnent des valeurs aux noeuds, qui sont bonnes pour les déplacements mais mauvaises pour les contraintes. Il faut regarder ces dernières aux points de Gauss pour avoir une précision sur celles-ci aussi bonne que sur les déplacements. Cependant, une formulation mixte est relativement complexe à développer et n'est pas sans poser des problèmes de formulation.

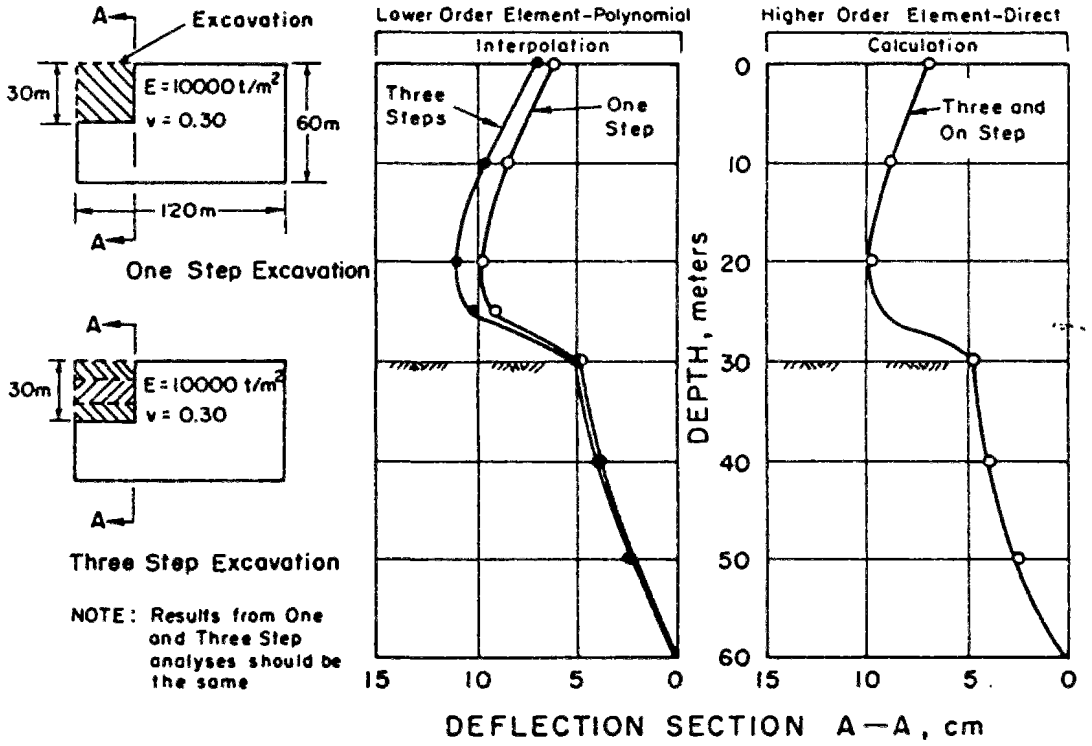


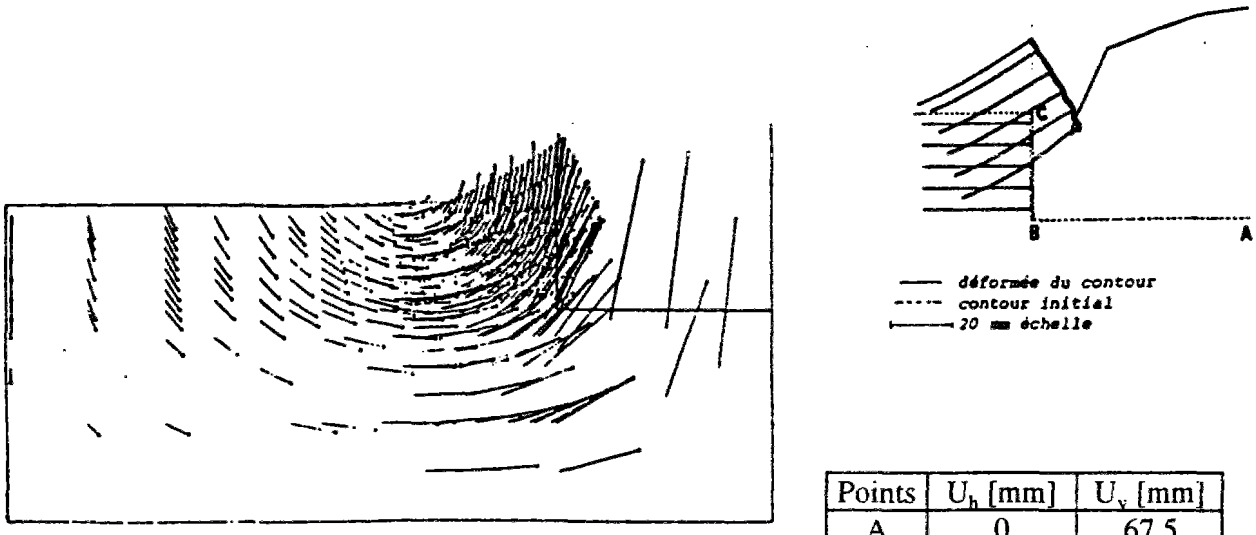
Figure C.3-15 : Simulation d'une excavation dans un milieu élastique et étude de l'influence du nombre de phases de calcul (Mana et Clough, 1976)

(3) Ghaboussi et Pecknold (1984) ont proposé une méthode générale, consistant à calculer les forces d'excavation à appliquer à partir des forces volumiques, surfaciques et des contraintes dans les éléments non excavés, adjacents à l'excavation. Ils démontrent, dans le cas général élastoplastique où un schéma de résolution de type Newton-Raphson est utilisé, que leur méthode fournit un résultat indépendant du nombre de phases et égal aux valeurs des contraintes réellement appliquées sur les bords de l'excavation.. Une approche similaire a été proposée par Brown et Booker (1985). Elle consiste à intégrer les forces volumiques et surfaciques ainsi que les contraintes sur tout l'ouvrage de manière à satisfaire, à chaque phase de construction, l'équilibre global de l'ouvrage. La différence essentielle, entre ces deux dernières méthodes et la deuxième méthode précédemment exposée, réside dans la prise en compte des forces volumiques.

La modélisation de l'excavation doit être jugée par rapport à deux critères : sa précision et son indépendance par rapport au nombre de phases d'excavation. Les deux aspects sont découplés. L'indépendance est fonction de la linéarité du modèle alors que la précision est fonction de l'ordre des éléments finis utilisés. Ghaboussi et Pecknold (1985) ont regardé en détail les différences entre les méthodes. Les forces d'excavation, calculées en intégrant les contraintes sur les éléments excavés, correspondent exactement aux contraintes exercées sur les bords de l'excavation, si et seulement si, les contraintes dans les éléments excavés respectent exactement l'équilibre local.

En conclusion, il convient de noter que les méthodes (1), simples et intuitives, consistant à extrapoler les contraintes dans les éléments, ne sont pas précises et donnent des résultats qui dépendent du nombre de phases. Les méthodes (2), consistant à intégrer les contraintes au sein des éléments pour calculer les vecteurs forces aux bords de la zone excavée, constituent une amélioration nette, mais ne sont pas assez générales pour donner des résultats consistants dans tous les cas. En particulier, leur précision dépend beaucoup de la précision des calculs en pied de mur et en fond de fouille. Une alternative consiste à utiliser une formulation mixte en éléments finis mais ce genre de formulation n'est pas couramment utilisée dans les codes de calcul disponibles sur le marché. Dans les cas où les méthodes (2) sont défaillantes, les forces calculées en fond de fouille sont surestimées, ce qui induit des soulèvements très importants caractéristiques. Les méthodes (3), qui sont les plus générales, permettent de s'affranchir de ces problèmes tout en fournissant une solution indépendante du nombre de phases d'excavation.

Les méthodes (1) datent des années 70. Des progrès ont été réalisés avec les méthodes (2), au début des années 80, tandis que les méthodes (3), qui datent de la fin des années 80, ont permis de réaliser des progrès significatifs. Comme les forces appliquées sur les bords de la fouille conditionnent, en grande partie, les déplacements dans la massif en sol cloué et les soulèvement en fond de fouille, il est très important qu'une des méthodes (3) soient utilisée pour calculer ces forces. Dans les codes d'éléments finis, utilisant les méthodes (1) ou (2), des soulèvements de fond de fouille très importants ont été observés (Ouelogo, 1989; Nanda, 1988) (figure C.3-16). Les calculs réalisés, dans le cadre de cette thèse, avec les logiciels CESAR et FLAC, qui utilisent une des méthodes générales (3) décrites ci-dessus, ont donné des soulèvements en fond de fouille de l'ordre du centimètre, ce qui est tout à fait acceptable.



Points	U_h [mm]	U_v [mm]
A	0	67,5
B	12	27
C	0	24

Figure C.3-16 : Déformée d'un mur en sol cloué dans un sol élastique modélisé en 5 phases de 1 m (E=10 MPa, ν=0,33) avec ROSALIE (Ouelogo, 1989)

3.3 Lois de comportement des matériaux

Les sols peuvent, dans certaines circonstances, présenter des déformations qui dépendent du temps et de la vitesse de chargement, et que nous appellerons déformations différées. L'influence de ces déformations différées sur le comportement d'un mur en sol cloué ayant fait l'objet de peu d'études, nous commencerons par faire une synthèse bibliographique rapide sur ce sujet avant d'aborder la modélisation des sols cloués par des lois élastoplastiques.

3.3.1 Déformations "différées"

Le fluage a été observé sur de nombreux ouvrages en sol cloué (Plumelle, 1986; Cartier et Gigan, 1983; Gässler, 1993). Ce fluage peut être attribué à plusieurs des matériaux constitutifs d'un ouvrage, le sol, le béton et le coulis de scellement. Cependant, vu l'amplitude des déformations de fluage observées, c'est le sol qui est à l'origine la plus probable de ce fluage.

Le fluage des argiles, drainées et non drainées, a été observé depuis longtemps (Singh et Mitchell, 1968). Le sable peut aussi donner du fluage (Murayama et al., 1984. Delage et al., 1990; Frank, 1994).

Sur un ouvrage en sol cloué, le fluage a pour effets d'induire des déplacements supplémentaires, tout en redistribuant les efforts dans la structure et, en particulier, dans les clous. C'est ainsi que le dernier lit de clous, qui est sous tension nulle, à la fin de la construction, est mis en traction progressivement sous l'effet du fluage et de la redistribution des efforts dans le mur en sol cloué.

Une modélisation du fluage dans un mur en sol cloué a été faite par Nanda (1988), en utilisant le modèle de Singh et Mitchell (1968), généralisé en 3 dimensions, ce qui donne trois nouveaux paramètres constitutifs. L'état des contraintes et déformations dans le mur CLOUTERRE-CEBTP No. 1, à la fin de la construction, a été obtenu par une modélisation de type élastique non linéaire qui ne prend pas en compte le fluage. A partir de cet état, le fluage a été modélisé en convertissant, à chaque incrément de temps, l'incrément de déformations en un vecteur force de manière à recalculer le nouvel état d'équilibre (Zienkiewicz et Cormeau, 1976).

Sous l'effet du fluage, le massif cloué se déplace comme un bloc monolithique, avec une amplitude des déplacements d'environ 8 mm pour un temps t de 10^5 min (figure C.3-17a). Le fluage tend à augmenter les tractions dans les clous, avec un maximum des augmentations près du parement. C'est le clou le plus bas qui subit l'augmentation de traction la plus forte (figure C.3-17b). Dans l'ensemble, le comportement du modèle correspond aux observations. Cependant, il est à noter la très grande sensibilité des résultats aux valeurs des paramètres de fluage et l'absence de méthode expérimentales de mesures de ces paramètres tridimensionnels de fluage (Chiguer, 1989).

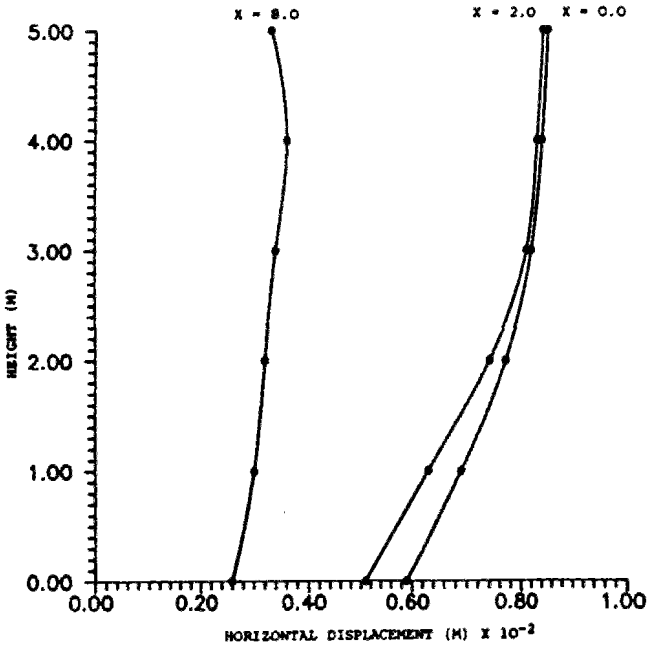


Figure C.3-17a : Déformées du sol derrière le parement

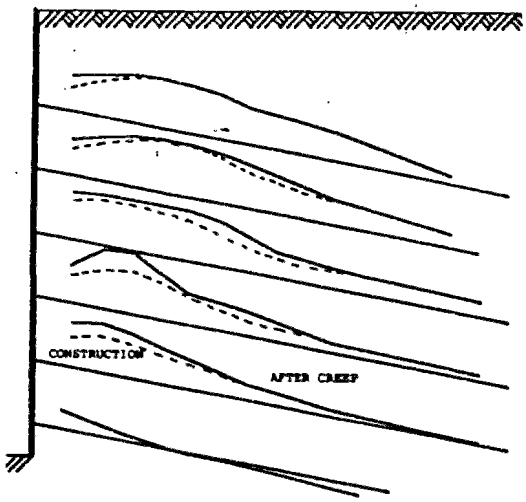


Figure C.3-17b : Augmentation des tractions dans les clous

Figure C.3-17 : Modélisation de l'influence du fluage sur un mur en sol cloué (Nanda, 1988)

3.3.2 Déformations "instantanées"

Dans la suite de cette étude, nous laisserons de côté les déformations "différées", qui dépendent du temps et de la vitesse de chargement, afin de mieux nous concentrer sur les déformations "instantanées", qui n'en dépendent pas.

Nous supposerons que le comportement du sol ne dépend pas du temps et de la vitesse de chargement. Pour cette raison, nous ne considérerons que les cinq premières phases de construction du mur CLOUTERRE-CEBTP No. 1, qui se sont déroulés sans interruption, si ce n'est les week-ends. A la fin de la cinquième phase, la construction du mur a été arrêtée trois mois. Des déformations et déplacements significatifs se sont produits sur environ deux mois. Les contraintes dans le sol et les tractions dans les clous se sont redistribuées. Les données, rassemblées lors des cinq premières phases, constitueront la base de référence pour nos calculs en déformation.

Deux types de lois existent pour modéliser le comportement des sols : les lois incrémentales non linéaires et les lois élastoplastiques. Nous utiliserons ces dernières, car les codes de calcul : CESAR, FLAC et PLAXIS utilisent le formalisme élastoplastique. D'autre part, il existe de nombreuses corrélations entre les paramètres de ces lois et les résultats des essais in situ.

3.3.2.1 Rotation des contraintes

Chiguer (1989) et Nanda et Delage (1989) insistent beaucoup sur la rotation des contraintes au sein d'un mur en sol cloué. Ce phénomène est, en fait, général à la mécanique des sols et n'a rien de propre au clouage. Tout chargement non uniformément réparti sur un demi-espace infini s'accompagne forcément d'une rotation des contraintes. Symes et al. (1984) a mis en évidence des déformations irréversibles dans des essais drainés, à déviateur constant, et dans lesquels les contraintes principales suivent des cycles entre 0 et 20° (figure C.3-18). Quatre cycles de rotations des contraintes, d'amplitude 20°, peuvent générer des déformations déviatoriques de l'ordre du pour cent, quand l'état des contraintes est proche du critère de rupture. Cependant, sur un cycle initial, les même essais ne donnent qu'une déformation déviatorique d'environ 0,2 %, ce qui est relativement faible comparé aux déformations subies, par ailleurs, du fait de la variation de l'état de contraintes.

Derrière un mur en sol cloué, le sol subit, au maximum, une rotation des contraintes. Il n'est pas soumis à plusieurs cycles. Il n'y donc pas lieu de se focaliser sur ce problème, d'autant plus, qu'il existe de nombreuses autres sources de déformations irréversibles, importantes et mal contrôlées. Pour n'en citer qu'une, dans un ouvrage les déformations se développent rarement dans le volume. Elles ont plutôt tendance à ce concentrer dans des zones qui peuvent être appelées à devenir des bandes de cisaillement ou des fissures. Ce type de problème qui modifie de manière très importante le champ de déplacements et déformations n'a pas encore fait l'objet de beaucoup d'études, du moins au niveau d'un ouvrage en sol.

3.3.2.2 Lois de comportement pour les sols

Parmi les lois de comportement de type élastoplastique, il convient de mettre, un peu à part, les lois de Duncan. Ces lois, qui sont parfois appelées lois élastiques non linéaires, ne se situent pas, formellement, dans le cadre élastoplastique. La première loi a été développée initialement par Duncan et Chang (1970). Depuis, plusieurs versions successives sont apparues.

Ce modèle n'est pas rigoureusement formulé dans le cadre de la théorie de l'élastoplasticité. En effet, il contient un module élastique en charge qui est différent du module en décharge. Cette astuce, qui n'est pas acceptable dans le cadre de l'élastoplasticité, permet ainsi de modéliser des sols plus raides en décharge qu'en charge. Les problèmes de soulèvement de fond de fouille excessifs sont alors réduits mais pas forcément éliminés. D'autre part, dans ce modèle le module d'Young dépend de la pression moyenne appliquée sur le sol. Cela permet de modéliser facilement un sol, plus mou en surface qu'en profondeur, sans avoir à découper les sols de remblai et fondation en couches de modules élastiques différents. La variation des modules élastiques avec la profondeur a été présentée par Nanda et Delage (1989) comme étant à l'origine de leurs résultats meilleurs par rapport à ceux obtenus avec un modèle élastoplastique parfait (Chiguer, 1989; Ouelogo, 1989). Dans nos simulations, nous avons comparé un calcul avec des paramètres élastiques, constants en fonction de la profondeur, et une calcul avec des paramètres variables. Les résultats obtenus sont si proches l'un de l'autre qu'il n'est pas nécessaire de compliquer les calculs avec ces variations, du moins pour des murs de hauteurs comparables à celui étudié.

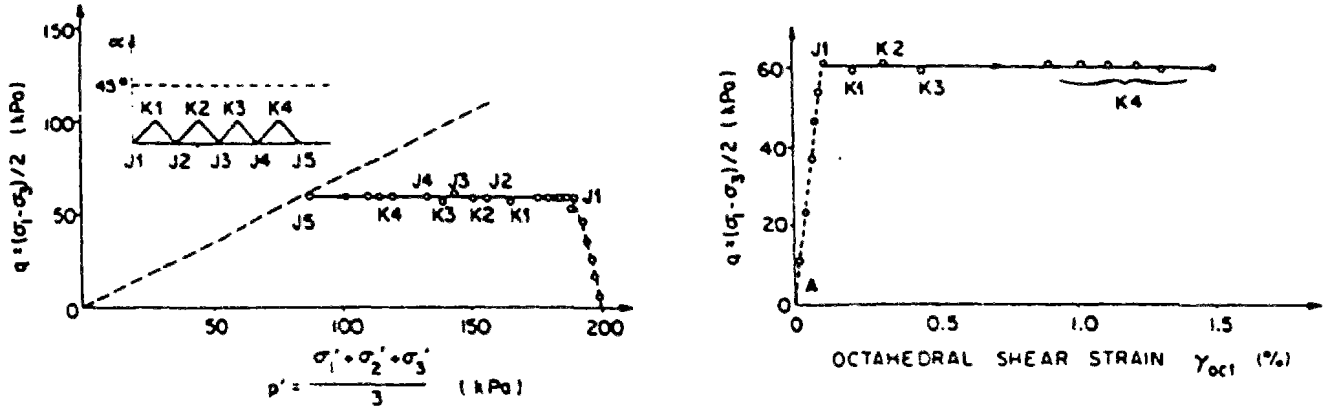


Figure C.3-18 : Effet de plusieurs cycles de rotation des contraintes principales sur un sol (Symes et al., 1984)

Les modèles de Duncan ont été beaucoup employés aux débuts des années 70, quand les algorithmes élastoplastiques de convergence étaient peu performants et qu'un modèle non linéaire, sans réel algorithme de convergence, pouvait suffire à modéliser des excavations (Dunlop et Duncan, 1970; Chang et Duncan, 1970). Ce modèle est encore beaucoup employé, car il existe des corrélations entre les résultats des essais en place et les paramètres de Duncan (Matsui et San, 1988, 1989; Bathurst, 1993).

Cependant, les vrais modèles élastoplastiques sont, de nos jours, plus couramment employés dès qu'il s'agit de modéliser des excavations, car la redistribution des contraintes autour de l'excavation est le phénomène primordiale. Le modèle élastoplastique le plus simple est le modèle élastoplastique parfait non associé (Mana et Clough, 1981). Dans l'échelle de la complexité et du nombre croissant de paramètres, on trouve les modèles de type Cam-Clay (Borja, 1990). Viennent en suite les modèles élastoplastique à écrouissage isotrope, puis à écrouissage cinématique. Tous ces modèles peuvent être également généralisés, en introduisant dans la surface de charge des déformations plastiques qui sont fonction de la distance à la surface de charge (Pastor et Zienkiewicz, 1983). De manière à simplifier le problème de détermination des paramètres, nous utiliserons uniquement des lois de comportement élastoplastiques parfaitement plastiques pour les matériaux constitutifs du mur en sol cloué.

3.3.2.3 Lois de comportement pour les interfaces

Les mêmes types de lois de comportement sont utilisés pour les interfaces que pour les sols. Il convient de distinguer plusieurs types de modèles d'interface. L'adhérence parfaite correspond au cas où aucun glissement relatif entre le sol et les clous n'est autorisé. Des modèles linéaires ou bilinéaires ont été également proposés (Matsui et San, 1989). Des modèles non linéaires, développés initialement pour les roches (Goodman et al., 1961), ont été adaptés aux sols avec des lois hyperboliques similaires aux modèles de Duncan (Clough et Duncan, 1971).

Parmi les modèles élastoplastiques, le plus simple est le modèle élastoplastique sans écrouissage. Des modèles plus complexes avec écrouissage ont été également adaptés des sols aux interfaces, comme par exemple le modèle de Nova (Boulon et Nova, 1993). Enfin, il convient de noter les lois incrémentales non linéaires qui permettent de tenir compte de multiples paramètres comme, la dilatance et contractance, la cassure des grains, etc., mais qui sont relativement difficiles d'emploi. Cependant, pour les interfaces plus encore que pour les sols, se pose le problème de la détermination des paramètres à partir des essais en place ou des essais en laboratoire.

Le tableau C.3-2 présente les différentes lois de comportement utilisées pour modéliser des ouvrages en sol cloué, en vraie grandeur et instrumentés.

Tableau C.3-2 : Liste de calculs en déformation réalisés sur des murs en sol cloué instrumentés

Références	Programmes	Loi de comportement du sol	Loi de comportement des interfaces
Shaffie (1986)	CLUTER	élastoplastique parfait	adhérence et critère orienté
Nanda (1988)	WALL	élastique non linéaire (Duncan)	adhérence
Nanda (1989)	WALL	élastique non linéaire (Duncan)	élastoplastique parfait
Chiguer (1989)	CLUTER	élastoplastique parfait	critère orienté
Ouelogo (1989)	ROSALIE	élastoplastique parfait	rigide parfaitement plastique
Salama (1992)	SNAP	élastoplastique avec écrouissage cinématique (Ghaboussi)	élastoplastique parfait

Il est à noter que, dans le cas d'un calcul tridimensionnel, il est nécessaire de connaître la loi de comportement locale entre le sol et les clous avec beaucoup de précision. Par contre, dans un calcul bidimensionnel, c'est la fonction de transfert de charge entre les clous et le sol qui est utilisée. Celle-ci s'obtient par intégration des lois de comportement de l'interface et du sol, sur un anneau de sol autour du clou. Il n'est donc pas nécessaire de connaître ce qui se passe localement dans la couche d'interface. Un modèle global est tout à fait suffisant. Le passage entre les deux niveaux a été fait par quelques auteurs dans le domaine des pieux (Frank, 1984) ou des inclusions dans des sols gelés (Johnston et Ladanyi, 1972). Mais la démarche la plus classique quand il s'agit de calculer un ouvrage est de caler le modèle de fonction de transfert de charge choisie sur des mesures. Pour les calculs en déformations du mur CLOUTERRE-CEBTP No. 1, nous utiliserons une fonction de transfert de charge élastoplastique parfaite dont les paramètres seront déterminés à partir de l'essai d'arrachement du clou préalable No. 5.

3.4 Contraintes initiales et conditions aux limites

3.4.1 Etat de contraintes initiales

Trois méthodes existent pour déterminer l'état de contraintes initiales dans un sol. La première méthode consiste à simplement prendre l'état de contraintes géostatique, c'est à dire correspondant à un demi-plan infini. La deuxième consiste à charger progressivement le massif de sol avec les forces volumiques de gravité. La troisème consiste à utiliser les résultats d'un calcul précédent, qui peut modéliser, par exemple, les phases de construction du remblai dans lequel le mur en sol cloué est réalisé.

La première méthode n'est adaptée que si la géométrie de l'ouvrage, avant la construction, est des plus simples. Entre la deuxième et la troisième méthode, nous n'avons pas trouvé de différence sensibles, du moins pour le mur CLOUTERRE-CEBTP No. 1 (cf. paragraphe 6, partie C).

3.4.2 Conditions aux limites

La modélisation des conditions aux limites a une influence faible sur la réponse d'un ouvrage, si les bords du maillage sont suffisamment éloignés de la zone excavée et du mur de soutènement. Il est ainsi classique de prendre un maillage, s'étendant à au moins 2 H de l'amont et de l'aval du soutènement considéré. Pour les fondations, des valeurs similaires devraient en principe être prises. Cependant, dans le cas des murs construits au CEBTP pour le Projet National CLOUTERRE, le sol de fondation, à 7 m en dessous du remblai expérimental, est particulièrement dense. Il est donc possible de considérer que la limite du maillage s'arrête à la limite avec le substratum rigide, ce qui permet d'économiser sur le nombre d'éléments.

Il est classique de prendre, en fond de fouille, des déplacements horizontaux et verticaux nuls, ce qui correspond à un substratum rugueux, tandis que sur les bords, seuls les déplacements horizontaux sont bloqués. Les déplacements verticaux sont laissés libres pour éviter la formation de zones plastiques.

4 Modélisation d'essais triaxiaux de sol renforcé par des disques d'aluminium

4.1 Présentation des essais

La modélisation d'essais triaxiaux sur des échantillons de sol, renforcé ou non par des disques d'aluminium, a été conduite pour tester et comparer sur des exemples simples, les deux méthodes numériques les plus employées : la méthode des éléments finis (logiciel CESAR) et la méthode des différences finies (logiciel FLAC). Les résultats numériques ont été comparés entre eux ainsi qu'avec les résultats expérimentaux obtenus par Schlosser et Long (1972).

Trois types d'essai triaxial ont été modélisés : l'essai sur un sol non renforcé, l'essai sur un sol renforcé par des nappes d'aluminium avec adhérence parfaite entre le sol et les renforcements, l'essai sur un sol renforcé par des nappes d'aluminium avec frottement entre le sol et les renforcements. Différentes pressions de confinement σ_3 , variant entre 1 kPa et 380 kPa, ont été simulées. Les échantillons ont été poussés jusqu'à la rupture, qui se produit pour des niveaux de déformations relativement petits, ne nécessitant pas une formulation en grandes déformations. Les échantillons font 20 cm de haut et ont un diamètre de 12 cm. Ils sont renforcés par 4 série de 5 nappes d'aluminium.

Schlosser et Long (1972) ont mis en évidence deux types de rupture des échantillons de sol renforcé. A faibles contraintes, les échantillons se rompent par glissement du sol entre les nappes d'aluminium. A plus fortes contraintes, la rupture des échantillons se fait par cassure des nappes de renforcement. Les deux hypothèses sur l'interface entre le sol et les nappes : frottement et adhérence parfaite, correspondent, respectivement, à ces deux modes de rupture. La comparaison des calculs correspondants à ces deux hypothèses permet de mettre en évidence facilement le mode de rupture privilégié, pour un niveau de contraintes donné.

4.2 Détermination des paramètres de calcul

Les tableaux C.4-1 et C.4-2 résument l'ensemble des caractéristiques mécaniques du sol et de l'aluminium, données par Schlosser et Long (1972).

Tableau C.4-1 : Caractéristiques mécaniques du sol

Caractéristiques mécaniques du sol	Symboles	Valeurs mesurées
angle de frottement	ϕ	35 °
poids volumique	γ	16,9 kN/m^3
module sécant E_S ($\varepsilon_1 \approx 1\%$) $\approx$ 0,5 module tangent initial E_t ($\varepsilon_1 \approx 0\%$)	E	6,0 10^4 kPa
coefficient de Poisson	ν	0,3

Tableau C.4-2 : Caractéristiques mécaniques de l'aluminium

Caractéristiques mécaniques de l'aluminium	Symboles	Valeurs pour une feuille d'aluminium (épaisseur 18 µm)
résistance en traction simple	R_T	1,15 g par cm linéaire
contrainte de rupture	σ_y	64 10^3 kPa.
poids volumique	γ	27,1 kN/m^3
module d'Young	E	73 10^6 kPa
coefficient de Poisson	ν	0,33

Schlosser et Long (1972) donnent une résistance en traction simple R_T de 1,15 kg par cm linéaire pour des bandes d'aluminium d'épaisseur 18 µm. Cette valeur de R_T donne une contrainte de rupture σ_y de 63,89 10^6 kPa pour l'aluminium, ce qui est un peu fort. La limite élastique σ_e de l'aluminium pur est d'environ 2 10^4 kPa. La contrainte de rupture σ_y pour un aluminium varie entre 100 et 120 MPa. Visiblement, une erreur s'est glissée dans l'article originel de 1972. En conséquence, nous avons pris une résistance en traction simple de 1,15 g par cm linéaire pour des bandes d'aluminium d'épaisseur 18 µm, ce qui donne une contrainte de rupture σ_y d'environ 64 10^3 kPa.

Aucune donnée n'est disponible en ce qui concerne l'interaction entre les feuilles d'aluminium et le sable. Celle-ci est complexe et met en jeu le frottement entre les grains et l'aluminium, mais aussi le poinçonnement des feuilles, car celles-ci ont une épaisseur de 18 µm. Le coefficient de frottement a été estimé à 20° avec un angle de dilatance de 10°.

4.3 Modélisation des essais

4.3.1 Sol

Le sol a été modélisé par des éléments volumiques MBQ8 de dimension 2 cm par 2 cm dans CESAR et des éléments MB4 de dimensions 1 cm par 1 cm dans FLAC. Pour chaque élément MBQ8 dans CESAR, 4 éléments MBQ4 ont été utilisés dans FLAC, puisque les éléments MBQ8 ont un schéma d'interpolation quadratique tandis que les MB4 ont un schéma linéaire pour les déplacements. Un tel choix permet d'avoir une précision équivalente entre les deux calculs

Une loi de comportement élastoplastique sans écrouissage avec un critère de Mohr-Coulomb et une loi d'écoulement non associé a été choisie pour le sol. Le module élastique est pris égal à environ 50% du module tangent initial, ce qui correspond aussi au module sécant à 1% de déformation, sachant que la déformation à la rupture a été mesurée à environ 2% de déformation. Le module d'Young choisi pour les modèles numériques est donc un module moyen qui est, dans tous les cas, différent du module élastique réel du sable.

Le tableau C.4-3 résume la valeur des caractéristiques mécaniques qui ont été choisies pour les calculs sur FLAC.

Tableau C.4-3 : Caractéristiques mécaniques des éléments de sol modèles

Caractéristiques mécaniques du sol	Symboles	Valeurs de calcul
angle de frottement	ϕ	35°
cohésion	c	0 kPa
angle de dilatance	ψ	20 °
résistance en traction (critère tronqué)	σ_t	10^{11} kPa
poids volumique	γ	16,9 kN/m^3
module d'Young	E	6 10^4 kPa
module de compressibilité	K	5 10^4 kPa
module de cisaillement	G	2.3 10^4 kPa
coefficient de Poisson	ν	0,3

4.3.2 Aluminium

Aussi bien dans CESAR que dans FLAC, il n'est pas possible de modéliser, en axisymétrique, des disques par des éléments de barre ou de poutre. Des éléments volumiques ont donc été utilisés. L'épaisseur choisie est de 2 mm, ce qui donne un élancement pour les éléments volumiques de 1 pour 10, dans CESAR, et de 1 pour 5, dans FLAC.

Les valeurs des caractéristiques mécaniques de l'aluminium, prises en compte dans les calculs par éléments finis et différences finies, ont été calculées de manière à ce que les éléments modélisés aient les mêmes déformations que les éléments réels à contraintes de traction égales. Les formules d'équivalence suivantes ont donc été prises entre les caractéristiques réelles et les caractéristiques du modèle (cf. paragraphe 3 de la partie C) :

$$E\, e = E_{eq}\, e_{eq} \qquad \text{(C.4-1)}$$

$$\sigma_y\, e = \sigma_{y,eq}\, e_{eq} \qquad \text{(C.4-2)}$$

où E est le module d'Young de l'aluminium, E_{eq} le module d'Young des éléments modèles, e l'épaisseur totale des 5 feuilles d'aluminium, e_{eq} l'épaisseur des éléments volumiques modèles, σ_y la contrainte limite de l'aluminium, $\sigma_{y,eq}$ la contrainte limite dans les éléments modèles.

Une loi de comportement élastoplastique, sans écrouissage, avec un critère de Mohr-Coulomb et une loi d'écoulement associé, a été choisie pour l'aluminium, avec un angle de frottement ϕ nul et une cohésion c calculée pour que la résistance en traction du matériau modèle corresponde à la contrainte de rupture de 5 feuilles d'aluminium :

$$c = \sigma_y / 2 \qquad \text{(C.4-3)}$$

Le tableau C.4-4 donne les valeurs des caractéristiques mécaniques utilisées pour les renforcements modèles.

Tableau C.4-4: Caractéristiques mécaniques des éléments d'aluminium modèles

Caractéristiques mécaniques des éléments volumiques modélisant les plaques d'aluminium	Symboles	Valeurs de calcul pour des éléments volumiques d'épaisseur 2 mm et pour une loi de comportement élastique parfaitement plastique(critère de Mohr-Coulomb)
cohésion	c	1.44 10^3 kPa.
angle de frottement	ϕ	0°
angle de dilatance	ψ	0°
poids volumique	γ	2.7 kg/m^3
module d'Young	E_{eq}	3.28 10^6 kPa
coefficient de Poisson	ν	0.33
module de compressibilité	K_{eq}	3.22 10^6 kPa
module de cisaillement	G_{eq}	1.23 10^6 kPa

4.3.3 Eléments d'interface

Les éléments d'interface, utilisés aussi bien dans CESAR que dans FLAC, sont d'épaisseurs nulles. Dans le premier cas, les six noeuds de l'élément permettent d'avoir un schéma d'interpolation quadratique, tandis que, dans le second cas, les quatre noeuds ne permettent d'avoir qu'un schéma linéaire. Les premiers éléments sont plus précis puisqu'ils autorisent des contraintes variables au sein d'un élément, tandis que les seconds ont des contraintes constantes.

Les éléments d'interface proposés dans FLAC se comportent comme deux ressorts découplés, un ressort normal de rigidité au décollement k_n et un ressort tangentiel de rigidité au cisaillement k_s . Pour assurer la convergence numérique, la rigidité normale k_n et la rigidité tangentielle k_s doivent être prises égales. D'autre part, la rigidité normale est évaluée à partir du module de compression oedométrique E_{eodo} :

$$E_{oedo} = K + \frac{4}{3}G = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad \text{(C.4-4)}$$

Ce module oedométrique vaut, dans le cas présent, environ 8.1 10^4 kPa. Le module k_n est choisi de manière à ce que la rigidité globale k_n d'un élément d'interface, qui est d'épaisseur nulle, soit équivalente à la rigidité normale globale des éléments volumiques adjacents dont l'épaisseur minimale est notée Δz_{min} . Cette procédure conduit à prendre k_n égal à :

$$k_n = \frac{E_{eodo}}{\Delta z_{max}} \qquad \text{(C.4-5)}$$

Une loi de comportement élastoplastique, sans écrouissage, avec un critère de Mohr-Coulomb et une loi d'écoulement associé, a été choisie pour sa simplicité. Dans FLAC, le critère peut être tronqué mais cette option n'a pas été utilisée. Pour définir les valeurs des paramètres k_n et k_s , le calcul ci-dessus a été fait à partir des caractéristiques du sol, qui est l'élément le moins rigide.

Dans CESAR, le choix du module de mobilisation du frottement latéral le long des nappes de renforcement a été fait indépendamment. Il a été pris égal au module du sol lui-même, en l'absence de plus de données. Par railleurs, il n'y pas besoin de définir de rigidité normale.

Le tableau C.4-5 rassemble les caractéristiques mécaniques des éléments d'interface utilisés pour modéliser l'interaction entre le sol et les nappes d'aluminium.

Tableau C.4-5: Caractéristiques mécaniques des éléments d'interfaces sol-aluminium

Caractéristiques mécaniques	Valeurs de calcul pour une loi de comportement élastique parfaitement plastique (critère de Mohr-Coulomb)
cohésion c	0 kPa
angle de frottement ϕ	20 °
angle de dilatance ψ (CESAR) angle de dilatance ψ (FLAC)	10°(non associé) ou 20° (associé) 20°
résistance en traction (critère de Mohr Coulomb tronqué)	10^7 kPa
rigidité tangentielle k_s (FLAC) module d'Young E (CESAR)	$8{,}0\ 10^6$ kPa/m $6{,}0\ 10^4$ kPa/m
rigidité normale k_n (FLAC)	$8{,}0\ 10^6$ kPa

4.3.4 Modélisation du chargement

La modélisation d'éléments de rigidités très différentes, comme par exemple, un piston en acier et un sol, posent moins de problème dans un code d'éléments finis que dans un code de différences finies. En effet, dans le second cas, les vitesses de propagation d'ondes dans les deux matériaux étant trop différentes, des problèmes de convergence numérique sont rencontrés. Des astuces numériques existent pour résoudre ce genre de problème (Parovel, 1994).

Les essais en laboratoire sont classiquement pilotés en déplacement, de manière à pouvoir suivre un radoucissement éventuel. Les essais modélisés ont été pilotés en contrainte verticale, puisque ni CESAR, ni FLAC, n'autorisent à piloter en déplacement. Dans une telle approche, il n'est donc pas possible d'utiliser une loi élastoplastique avec radoucissement.

4.4 Analyse des résultats des essais triaxiaux

La loi de comportement utilisée étant très simple, il n'est pas possible de modéliser fidèlement la phase initiale de mobilisation, d'autant plus que nous avons choisi pour le module d'Young la valeur du module sécant à 1% de déformation. Cependant, on observe qualitativement des tendances. Les échantillons renforcés sont légèrement plus rigides que les échantillons de sol non renforcé. En outre, leur résistance mécanique est atteinte pour des déformations à la rupture, légèrement plus faibles d'environ 0,5%.

Dans les paragraphes qui suivent, nous nous intéresserons principalement aux valeurs des contraintes à la rupture. Il a été démontré, dans le cadre du calcul à la rupture, que la valeur du déviateur à la rupture, quel que soit le matériau considéré, est indépendante des modules élastiques du sol, de l'aluminium ou de l'interface entre le sol et l'aluminium (Salençon, 1983).

Schlosser et Long (1972) ont mis en évidence, très tôt, que la présence des nappes de renforcement a pour effet d'augmenter la résistance mécanique du sable en lui conférant une cohésion c* apparente tandis que l'angle de frottement interne n'est quasiment pas modifié. Ces résultats ont par la suite été démontrés théoriquement, à partir d'une technique d'homogénéisation des matériaux composites, dans le cadre de la théorie du calcul à la rupture (de Buhan, 1986).

Les résultats des essais triaxiaux en laboratoire nous montrent que, pour des contraintes de confinement faibles, la rupture des échantillons renforcés se fait par rupture du sol. Au contraire, pour des contraintes de confinement plus élevées, la rupture se produit par cassure des renforcements.

4.4.1 Essais à 380 kPa

Les figures C.4-1 et C.4-2 présentent la variation du déviateur σ_1-σ_3 en fonction de la déformation axiale ε_1 , pour l'essai à 380 kPa de confinement. Les résultats expérimentaux sont comparés aux valeurs obtenues avec les logiciels CESAR et FLAC. On observe, pour les valeurs au pic, une bonne concordance des valeurs calculées numériquement et mesurées expérimentalement.

L'analyse des tableaux C.4-6 et C.4-7 indique que, pour les essais avec une contrainte de confinement σ_3 de 380 kPa, la même charge de rupture est obtenue pour les hypothèses d'adhérence et de frottement entre le sol et les renforcements. Ceci confirme que, pour des contraintes de confinement élevées, la rupture de l'échantillon se fait par cassure des armatures et non pas par glissement du sol par rapport aux nappes d'aluminium.

La figure C.4-3 compare les résultats numériques de CESAR et FLAC. Les différences sont très minimes, que ce soit pour les échantillons de sol seul ou les échantillons renforcés. Les différences entre les deux méthodes de calcul s'élèvent au maximum à 1%, ce qui, compte tenu des erreurs numériques inhérentes aux méthodes, peut être considéré comme négligeable. Il faut remarquer que les essais modélisés ont donné des résultats très satisfaisants par rapport aux résultats des essais réels (figure C.4-2). La différence est inférieure à 5%.

Tableau C.4-6 : Résultats des essais triaxiaux
pour une contrainte de confinement σ_3 de 380 kPa

Essais	Symboles	Déviateur $\sigma_1 - \sigma_3$ [kPa] (calculs avec CESAR)	Déviateur $\sigma_1 - \sigma_3$ [kPa] (calculs avec FLAC)
sol (essai)	1e	1000	1000
sol (calculé avec $\phi = 35°$)	1e	1040	1040
sol (calcul)	1c	1020	1030
sol renforcé (essai)	2e	1225	1225
sol renforcé (calculs avec adhérence sol-aluminium)	2ca	1290	1290
sol renforcé (calculs avec frottement sol-aluminium)	2cf	1290	1280

4.4.2 Essais à 10 kPa

Pour les essais avec une contrainte de confinement σ_3 de 10 kPa, la résistance des échantillons armés, avec adhérence entre le sol et les nappes, est plus grande que celle des échantillons armé où le sol peut glisser par rapport aux nappes de renforcement. Ceci indique clairement que la rupture se produit à l'interface entre le sol et les renforcements. A propos de ces essais, il faut noter qu'au tout début du chargement, il y a adhérence du sol par rapport aux armatures. A la rupture, le sol glisse par rapport aux nappes. Le sol est, en quelque sorte, extrudé entre les nappes.

Tableau C.4-7 : Résultats des essais triaxiaux
pour une contrainte de confinement σ_3 de 10 kPa

Essais	Symboles	Déviateur $\sigma_1 - \sigma_3$ [kPa] (calculs avec CESAR)	Déviateur $\sigma_1 - \sigma_3$ [kPa] (calculs avec FLAC)
sol (calculé avec $\phi = 35°$)	1e	27	27
sol (calcul)	1c	27	27
sol renforcé (calculs avec adhérence sol-aluminium)	2ca	300	300
sol renforcé (calculs avec frottement sol-aluminium)	2cf	230 (associé $\phi=\psi=20°$) 200 (non associé $\phi=20°$ et $\psi=10°$)	170 (associé $\phi=\psi=20°$)

La figure C.4-4 compare les résultats de CESAR et FLAC, pour des essais à 10 kPa de confinement. Que ce soit pour le sol seul ou le sol renforcé par des nappes d'aluminium adhérentes, on observe des différences très faibles, inférieures au kPa, entre les deux méthodes de calcul. Les résultats avec CESAR semblent à peine plus rigides que ceux avec FLAC. La différence entre les deux codes aux grandes déformations ne peut être appréhendée, dans le cas présent, puisque les déformations sont limitées à 2 pour cents.

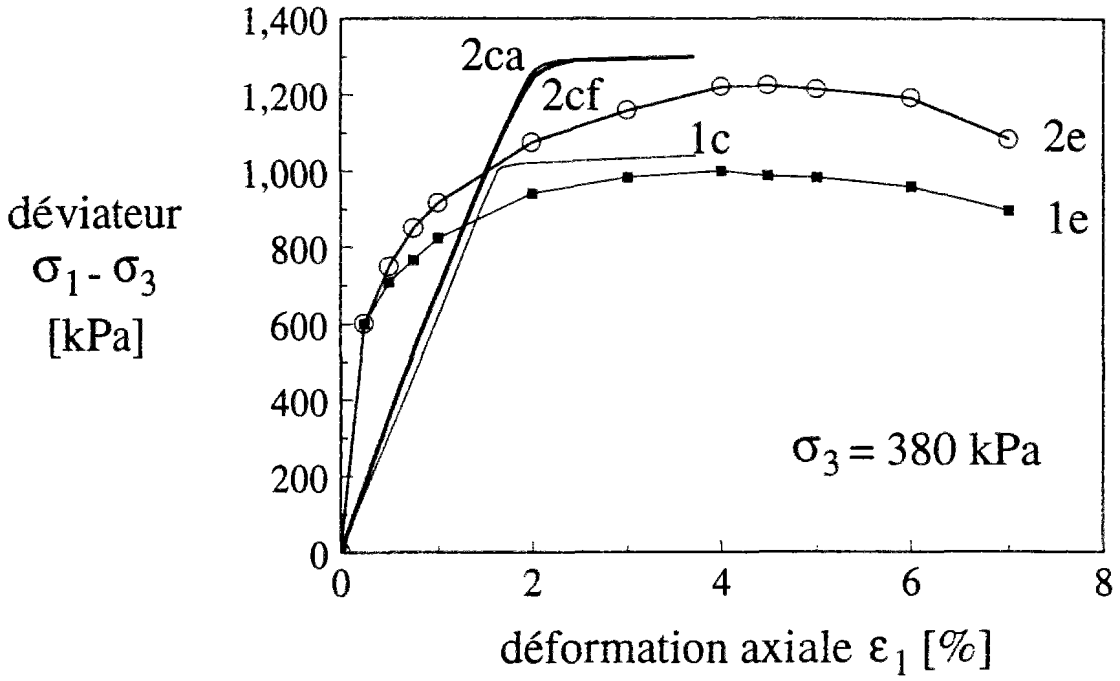


Figure C.4-1 : Essais triaxiaux sur des échantillons de sol renforcé et non renforcé (calculs avec CESAR)

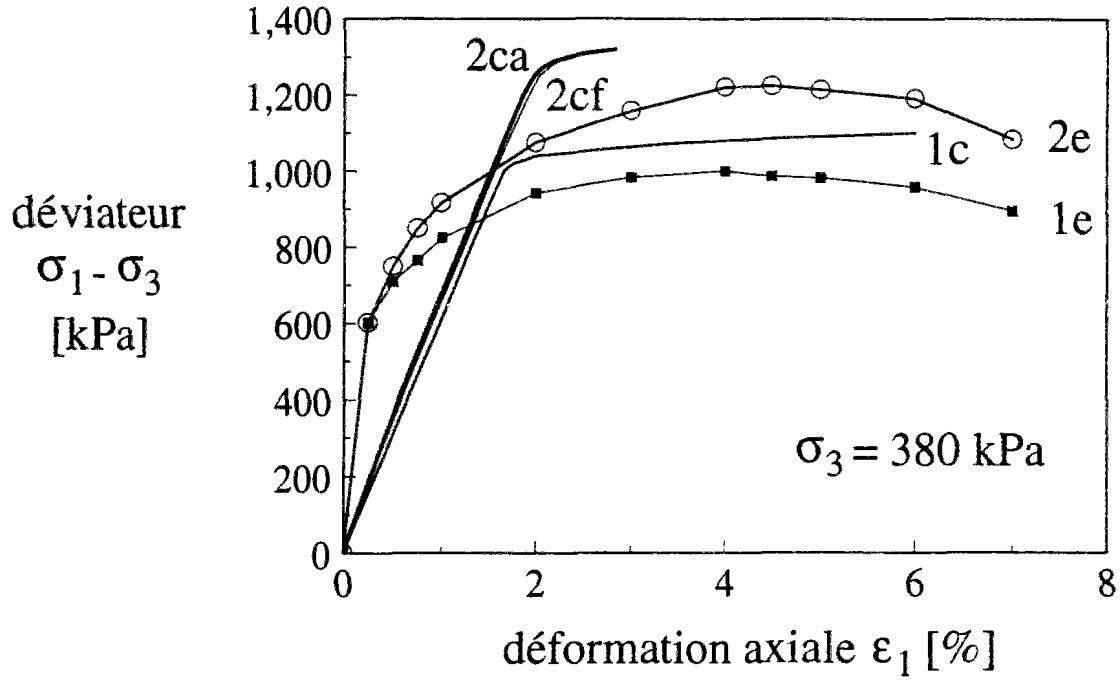


Figure C.4-2 : Essais triaxiaux sur des échantillons de sol renforcé et non renforcé (calculs avec FLAC)

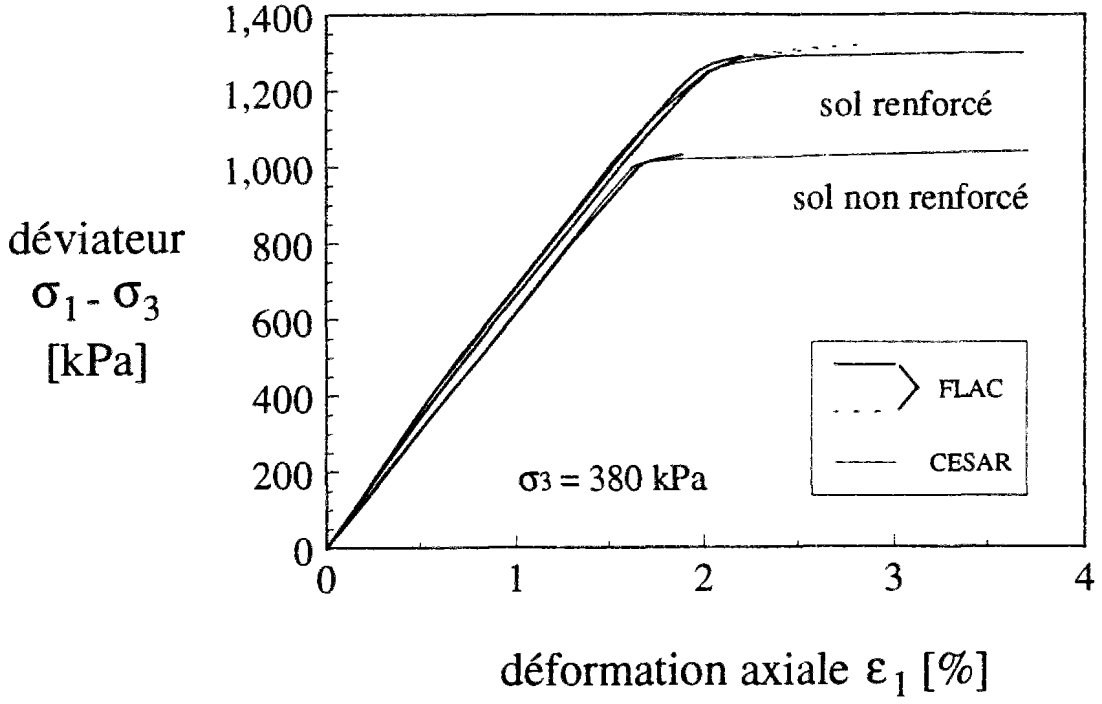


Figure C.4-3 : Comparaison des résultats obtenus avec CESAR et FLAC sur des essais triaxiaux de sol renforcé et non renforcé à 380 kPa

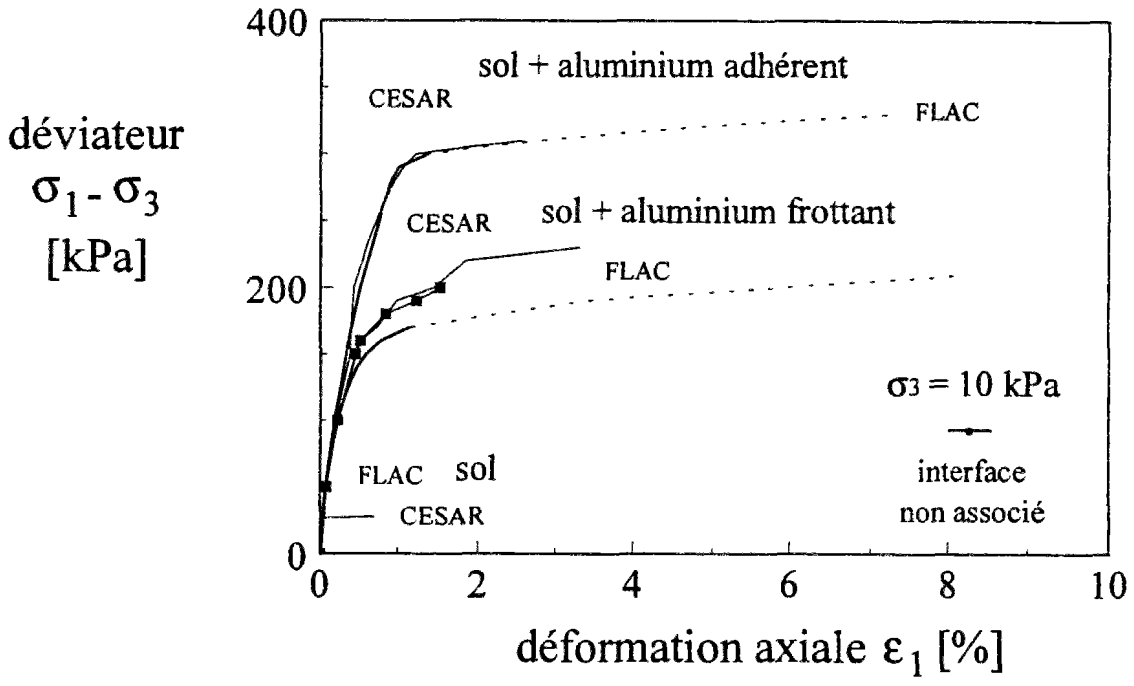


Figure C.4-4 : Comparaison des résultats obtenus avec CESAR et FLAC sur des essais triaxiaux de sol renforcé et non renforcé à 10 kPa

Pour les essais avec des éléments d'interface frottant, on constate des petites différences entre les deux codes, notamment, près de la rupture, qui se produit pour une déformation axiale moyenne d'environ 1%. Alors que dans les deux calculs présentés ci-dessus, seuls des éléments volumiques sont utilisés, dans le cas présent, des éléments d'interface sont utilisés. Ce sont, sans doute, eux qui sont à l'origine des petites différences entre les résultats. La précision des éléments d'interface à quatre noeuds est nettement moins bonne que celle des éléments à six noeuds, surtout dans les zones à forts gradients de contraintes, comme dans le cas présent. Cependant, la différence entre les deux méthodes numériques reste raisonnable, de l'ordre de 20%.

4.4.3 Courbes intrinsèques des matériaux : sol et sol-renforcé

Dans le cas d'un essai triaxial sur un échantillon de sol non renforcé, la contrainte verticale σ_1 , à la rupture, pour une contrainte de confinement σ_3 , est donnée par :

$$\sigma_1 = \sigma_3 \tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2}\right) \approx 3{,}69\ \sigma_3 \qquad \text{(C.4-6)}$$

Aux faibles contraintes, c'est à dire pour un confinement σ_3 inférieur à 50 kPa, le mode de rupture prépondérant est la rupture par glissement du sol par rapport aux nappes de renforcement. Cela se caractérise au niveau modélisation, par une différence importante entre le cas "adhérence parfaite entre le sol et l'aluminium", où aucun déplacement relatif entre le sol et l'aluminium n'est autorisé, et le cas "frottement entre le sol et l'aluminium", où le sol est autorisé à glisser par rapport à l'aluminium (figure C.4-4). Dans ce dernier cas, le comportement de l'élément d'interface est défini par un module de mobilisation k_s et un critère de rupture de type Mohr-Coulomb non associé (tableau C.4-8).

Aux contraintes plus fortes, au dessus de 50 kPa, les deux modélisations "adhérence parfaite entre le sol et l'aluminium" et "frottement entre le sol et l'aluminium" donnent les mêmes résultats (figures C.4-1, C.4-2 et C.4-3). A ces niveaux de contraintes, le sol ne glisse que très peu par rapport aux nappes de renforcement. Cela s'observe très facilement sur les déformées des échantillons. A 380 kPa, le sol est retenu par les nappes de renforcement et se déforme en tonneau (figures C.4-9 et C.4-15). A 10 kPa de σ_3 , le sol est extrudé entre les nappes de renforcement (figures C.4-18, C.4-19 et C.4-20).

Les figures C.4-5 et C.4-6 présentent les critères de rupture pour les trois matériaux que sont : le sol seul, le sol renforcé par des nappes d'aluminium adhérentes au sol et le sol renforcé par des nappes frottantes par rapport au sol. Schlosser et Long (1972) ont fait plusieurs séries d'essai avec un nombre de feuilles d'aluminium variable, de 1 à 5. Les calculs numériques ont été faits pour des nappes constituées de 5 feuilles. Les résultats, obtenus pour l'essai à 380 kPa de confinement et présentés sur la figure C.4-1, sont en bon accord avec les résultats des essais expérimentaux.

La figure C.4-5 rassemble les simulations pour 5 feuilles d'aluminium tandis que les essais ont été faits avec une seule feuille. La courbe intrinsèque obtenue pour des interfaces frottantes entre le sol et l'aluminium est simplement translatée par rapport à la courbe expérimentale.

Tableau C.4-8 : Contraintes à la rupture pour les essais triaxiaux modélisés avec CESAR (entre parenthèses les résultats avec FLAC)

Contrainte latérale σ_3 [kPa]	Contrainte verticale σ_1 à la rupture [kPa]		
	sable non renforcé	adhérence entre le sol et les nappes	frottement entre le sol et les nappes
1	3,8	41	21
10	38 (37)	320 (310)	210 (180)
20	75	360	300
50	188	530	490
100	374	710	710
200	750	1070	1070
380	1420 (1410)	1680 (1660)	1680 (1670)

Sur la figure C.4-6, il est à noter que les simulations, en supposant l'adhérence parfaite entre le sol et les nappes, donnent une courbe intrinsèque à peu près parallèle à celle du sol seul. La distance entre les deux correspond à la cohésion apparente c* apportée par les nappes au sable. Dans un tel matériau modèle, le seul mode de rupture possible est la cassure des nappes.

Les simulations faites en supposant un frottement entre le sol et les nappes donnent une courbe intrinsèque parallèle à celle du sol seul, pour les fortes contraintes, tandis que, pour les faibles contraintes, la courbe du sol renforcé est incurvée et rejoint la courbe du sol seul à l'origine. En dessous de 50 kPa, le mode de rupture prépondérant est le glissement relatif du sol par rapport aux nappes. Aux fortes contraintes, c'est la cassure des clous et les simulations avec adhérence ou frottement donnent alors des résultats identiques.

4.4.4 Analyse de l'état des contraintes et déformations au sein des échantillons

Les essais triaxiaux ont été modélisés avec des embases frettées, c'est à dire en supposant l'adhérence entre le sol et les embases. Le frettage s'observe très nettement quand on considère les points plastiques (figure C.4-7). En dessous des deux embases, le sol reste dans un état élastique. On observe, très nettement aussi, la formation des plans de rupture sur les courbes d'isovaleurs des déplacements horizontaux et verticaux des essais de sol seul à 380 kPa de confinement.

Entre les simulations avec adhérence et frottement, très peu de différences sont observées à 380 kPa de confinement (figure C.4-8 et C.4-9). Le sol est légèrement plus extrudé entre les nappes pour le cas frottant. Il faut noter, dans les deux cas, la concentration des contraintes radiales de traction dans les renforcements qui jouent pleinement leur rôle.

La mise en évidence des zones actives et passives peut être faite en considérant le long des deux renforcements supérieurs, le déplacement radial U_r , la contrainte radiale σ_{rr} et les déformations plastiques cumulées (figures C.4-10, C.4-11 et C.4-12).

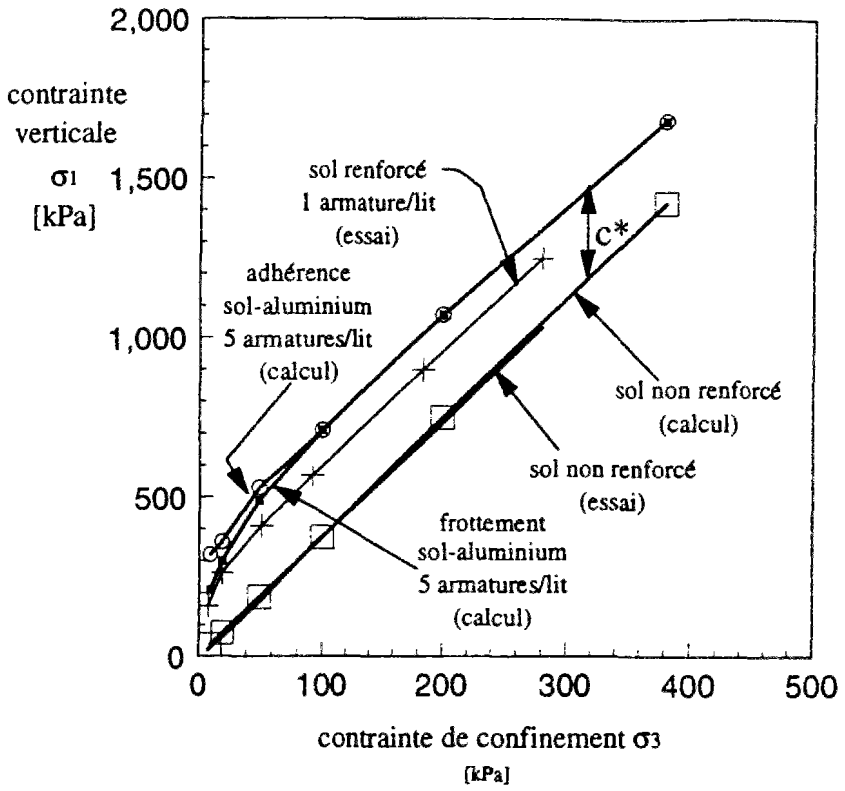


Figure C.4-5 : Critère de rupture du sol renforcé ou non : calculs et essais

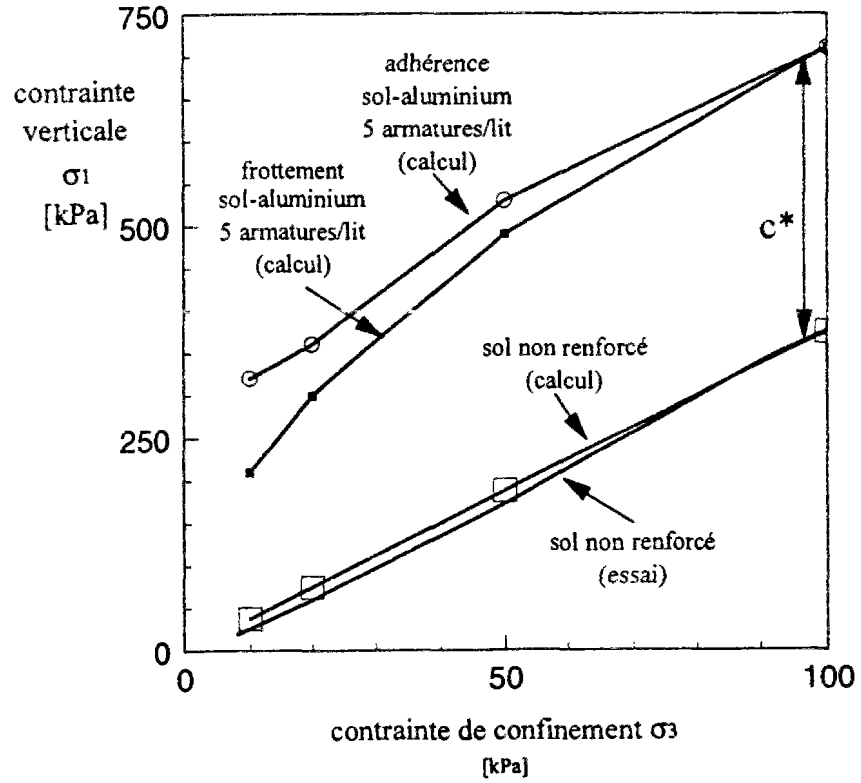


Figure C.4-6 : Critère de rupture du sol renforcé ou non : calculs et essais

Pour respecter les conditions de symétrie, il conviendrait d'avoir une tangente nulle pour les déplacements le long de l'axe de rotation. Cependant, dans la formulation par éléments finis utilisée, seule la continuité des déplacements est assurée. Les dérivées premières ne sont pas continues, il en résulte que U_r est minimal sur l'axe de symétrie mais ne possède pas une tangente nulle (figure C.4-11).

Dans la phase initiale de chargement, le déplacement radial varie graduellement de l'intérieur vers l'extérieur. A la rupture, on observe sur la deuxième nappe une variation similaire. Par contre, sur la nappe supérieure, il existe un point d'inflexion à 4 cm de l'axe. Ce point indique un maximum de la dérivée du déplacement radial, c'est à dire de la déformation en extension ε_{rr} . La ligne d'extension maximale passe donc par ce point là.

De même, sur les courbes donnant la contrainte radiale en fonction de r, on observe un maximum à 4 cm pour la première nappe. Pour la deuxième nappe, il existe un maximum, qui est beaucoup moins marqué (figure C.4-10).

Sur les courbes donnant la déformation plastique cumulée en fonction du rayon r, la ligne des tractions maximales est mise en évidence plus facilement. En début de chargement, les nappes ne sont pas plastifiées. A la rupture, la déformation plastique présente un maximum très marqué, à 4 cm pour la première nappe. Sur la deuxième nappe, le maximum se trouve situé sur l'axe de rotation. La ligne des tractions maximales, qui correspond aussi à la ligne des extensions maximales, passe donc par la première nappe mais pas par la seconde (figure C.4-11).

Des fissures, situées à une distance de l'axe d'environ les 2/3 du diamètre des échantillon, ont été observées (Schlosser et long, 1972). Les échantillons font 12 cm de diamètre. La distance de 4 cm, calculée par éléments finis et différences finies, concorde donc parfaitement avec les observations.

4.5 Conclusion de l'étude

Les simulations, réalisées à l'aide de la méthode des éléments finis (logiciel CESAR) et de la méthode des différences finies (logiciel FLAC), ont donné des résultats en très bon accord avec les essais expérimentaux, que ce soit pour les courbes effort-déformation des essais triaxiaux ou les modes de déformation et rupture observés.

Les deux logiciels donnent exactement les mêmes résultats, aux erreurs numériques près, quand on modélise des essais triaxiaux avec l'adhérence parfaite entre le sol et les nappes de renforcement. Dans ce cas là, seuls des éléments volumiques sont utilisés et les deux méthodes donnent les mêmes résultats.

Par contre, dans le cas d'essais triaxiaux avec frottement entre le sol et les nappes, des différences sensibles ont été observées entre les deux méthodes numériques. Ces différences sont de l'ordre de 20% sur le déviateur à la rupture et peuvent être attribuées, en grande partie, à la précision des éléments d'interface utilisés respectivement dans les deux codes. Ces essais sont caractérisés par des forts gradients de contraintes et déformations le long des nappes de renforcement. Des éléments d'interface à deux noeuds avec un schéma d'interpolation linéaire ne permettent pas d'obtenir une bonne précision sur la distribution des contraintes alors que des éléments à six noeuds avec un schéma d'interpolation quadratique permettent une meilleure précision.

Il convient de noter que le niveau de déformations auquel ces essais sont réalisés ne permet pas de mettre en évidence de différences entre la formulation en petites déformations utilisée dans CESAR et la formulation en grandes déformations implantée dans FLAC.

DESSIN DE LA DEFORMEE

maillage initial - - - maillage deforme ———

echelle 0.400E-01

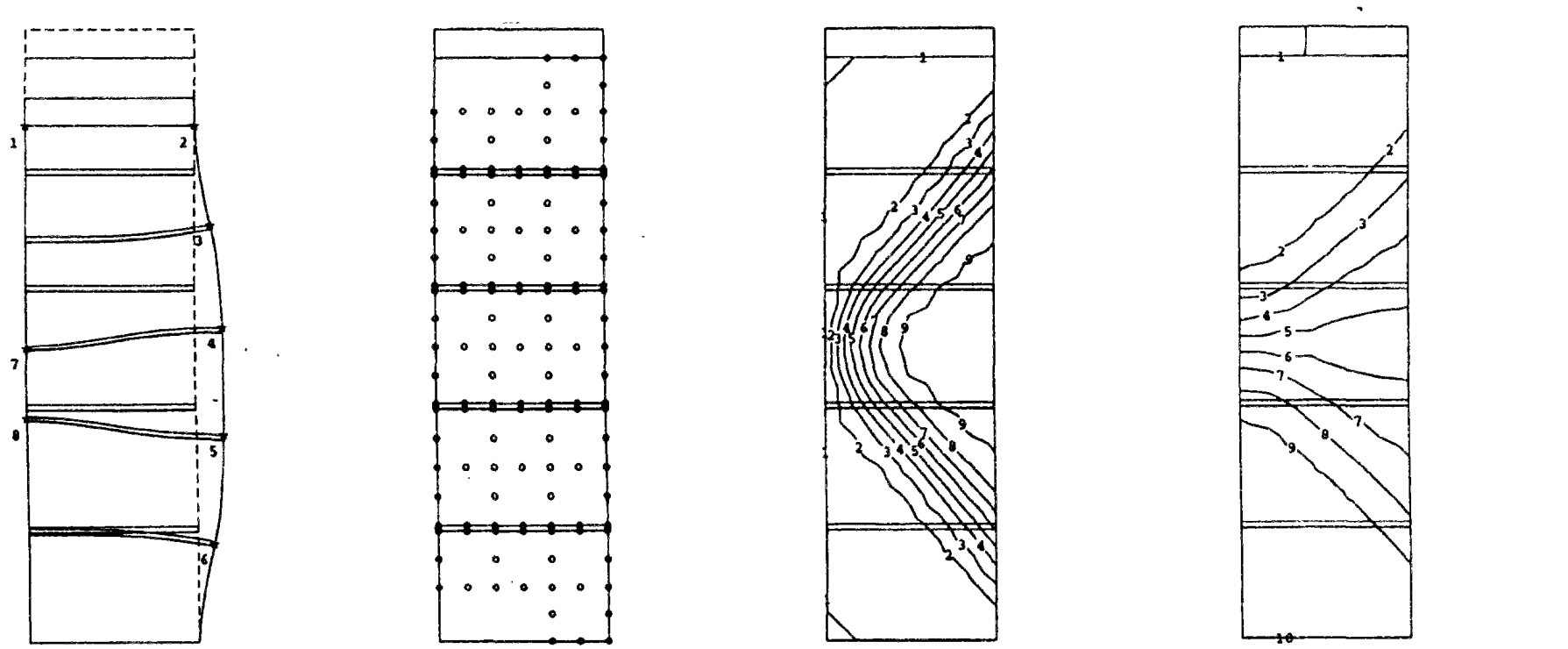
U	V	U	V
0.00000E+00	-0.17245E-01	0.66632E-02	-0.71777E-02
0.49335E-06	-0.17242E-01	0.39664E-02	-0.34977E-02
0.38401E-02	-0.13871E-01	0.00000E+00	-0.14624E-01
0.66410E-02	-0.10182E-01	0.00000E+00	-0.26136E-02

DEPLACEMENT U

1 :	-0.351E-06	6 :	0.378E-02		
2 :	0.756E-03	7 :	0.454E-02		
3 :	0.151E-02	8 :	0.530E-02		
4 :	0.227E-02	9 :	0.605E-02		
5 :	0.303E-02	10 :	0.681E-02		

DEPLACEMENT V

1 :	-0.172E-01	6 :	-0.766E-02
2 :	-0.153E-01	7 :	-0.575E-02
3 :	-0.134E-01	8 :	-0.383E-02
4 :	-0.115E-01	9 :	-0.192E-02
5 :	-0.958E-02	10 :	-0.698E-09



Déformée du maillage | Points plastiques | Isovaleurs des déplacements radiaux | Isovaleurs des déplacements verticaux

Figure C.4-7 : Essai triaxial d'un sol non renforcé à la rupture (σ_1= 1420 kPa et σ_3 = 380 kPa)
Calculs sur CESAR

DESSIN DE LA DEFORMEE

maillage initial - - - maillage deforme ———

echelle 0.140E-01

U	V	U	V
0.00000E+00	-0.76735E-02	0.20682E-02	-0.38357E-02
0.46677E-06	-0.76705E-02	0.17758E-02	-0.22701E-02
0.81223E-03	-0.68992E-02	0.81177E-03	-0.77164E-03
0.17765E-02	-0.54011E-02	0.00000E+00	-0.54894E-02

DEPLACEMENT U

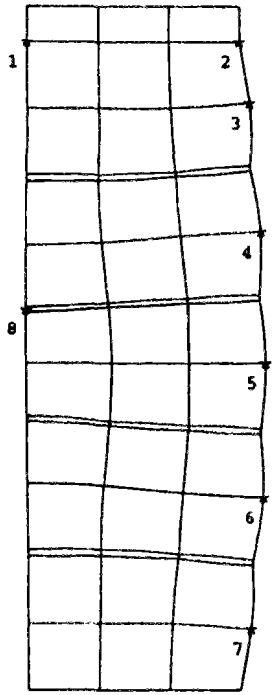
1 :	-0.286E-06	6 :	0.115E-02
2 :	0.230E-03	7 :	0.138E-02
3 :	0.459E-03	8 :	0.161E-02
4 :	0.689E-03	9 :	0.184E-02
5 :	0.919E-03	10 :	0.207E-02

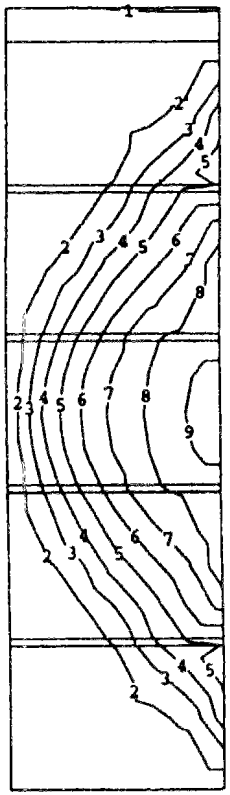
DEPLACEMENT V

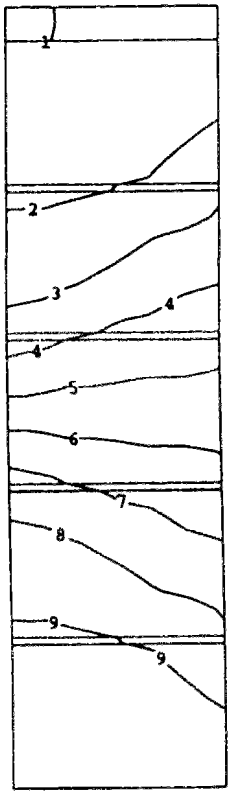
1 :	-0.767E-02	6 :	-0.341E-02
2 :	-0.682E-02	7 :	-0.256E-02
3 :	-0.597E-02	8 :	-0.171E-02
4 :	-0.512E-02	9 :	-0.853E-03
5 :	-0.426E-02	10 :	0.815E-09

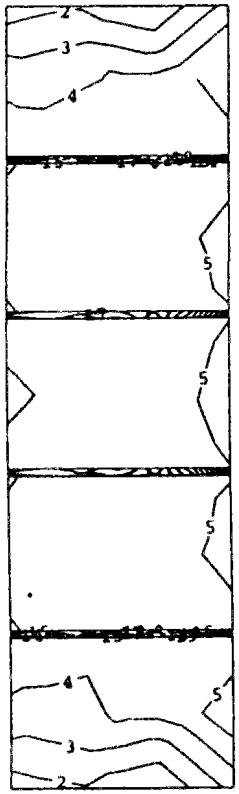
CONTRAINTE SR

1 :	-0.958E+03	11 :	0.376E+03
3 :	-0.691E+03	13 :	0.643E+03
5 :	-0.424E+03	15 :	0.910E+03
7 :	-0.156E+03	17 :	0.116E+04
9 :	0.109E+03	19 :	0.144E+04









Déformée | Isovaleurs des déplacements radiaux | Isovaleurs des déplacements verticaux | Isovaleurs de la contrainte radiale

Figure C.4-8 : Essai triaxial d'un sol renforcé (adhérence entre sol et aluminium) à la rupture (σ_1= 1680 kPa et σ_3 = 380 kPa)
Calculs sur CESAR

DESSIN DE LA DEFORMEE

maillage initial - - - maillage deforme ———

echelle 0.700E-02

U	V	U	V
0.00000E+00	-0.78858E-02	0.21748E-02	-0.39418E-02
0.46852E-06	-0.78828E-02	0.18625E-02	-0.23361E-02
0.84661E-03	-0.70894E-02	0.84610E-03	-0.79382E-03
0.18632E-02	-0.55495E-02	0.00000E+00	-0.56279E-02

DEPLACEMENT U

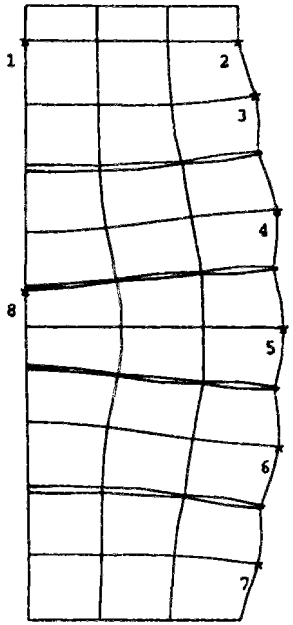
1 :	-0.288E-06	6 :	0.121E-02		
2 :	0.241E-03	7 :	0.145E-02		
3 :	0.483E-03	8 :	0.169E-02		
4 :	0.725E-03	9 :	0.193E-02		
5 :	0.966E-03	10 :	0.217E-02		

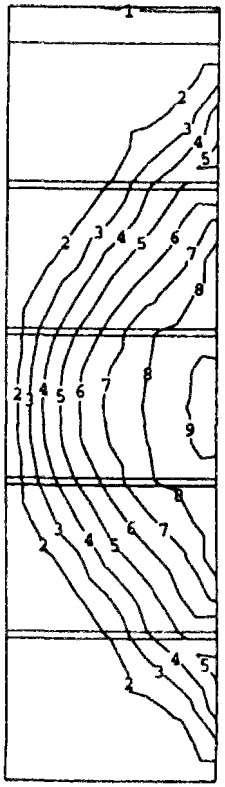
DEPLACEMENT V

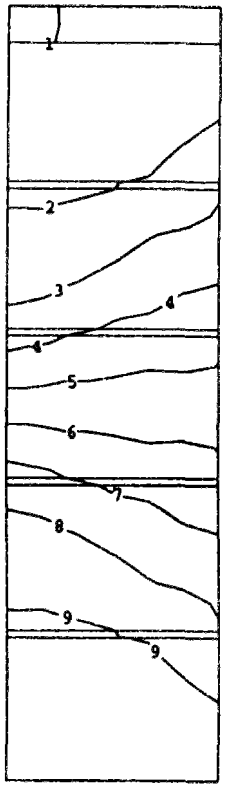
1 :	-0.789E-02	6 :	-0.350E-02		
2 :	-0.701E-02	7 :	-0.263E-02		
3 :	-0.613E-02	8 :	-0.175E-02		
4 :	-0.526E-02	9 :	-0.876E-03		
5 :	-0.438E-02	10 :	0.698E-09		

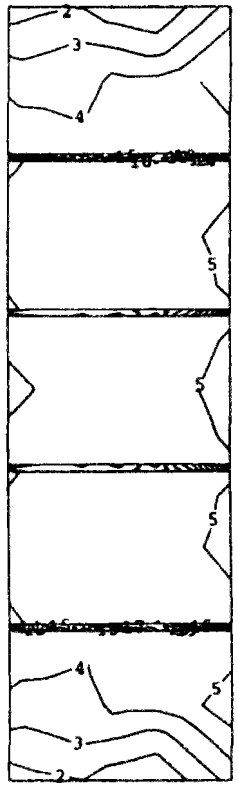
CONTRAINTE SR

1 :	-0.966E+03	11 :	0.399E+03		
3 :	-0.693E+03	13 :	0.672E+03		
5 :	-0.420E+03	15 :	0.945E+03		
7 :	-0.147E+03	17 :	0.122E+04		
9 :	0.126E+03	19 :	0.149E+04		









Déformée | Isovaleurs des déplacements radiaux | Isovaleurs des déplacements verticaux | Isovaleurs de la contrainte radiale

Figure C.4-9 : Essai triaxial d'un sol renforcé (frottement entre sol et aluminium) à la rupture (σ_1= 1680 kPa et σ_3 = 380 kPa)
Calculs sur CESAR

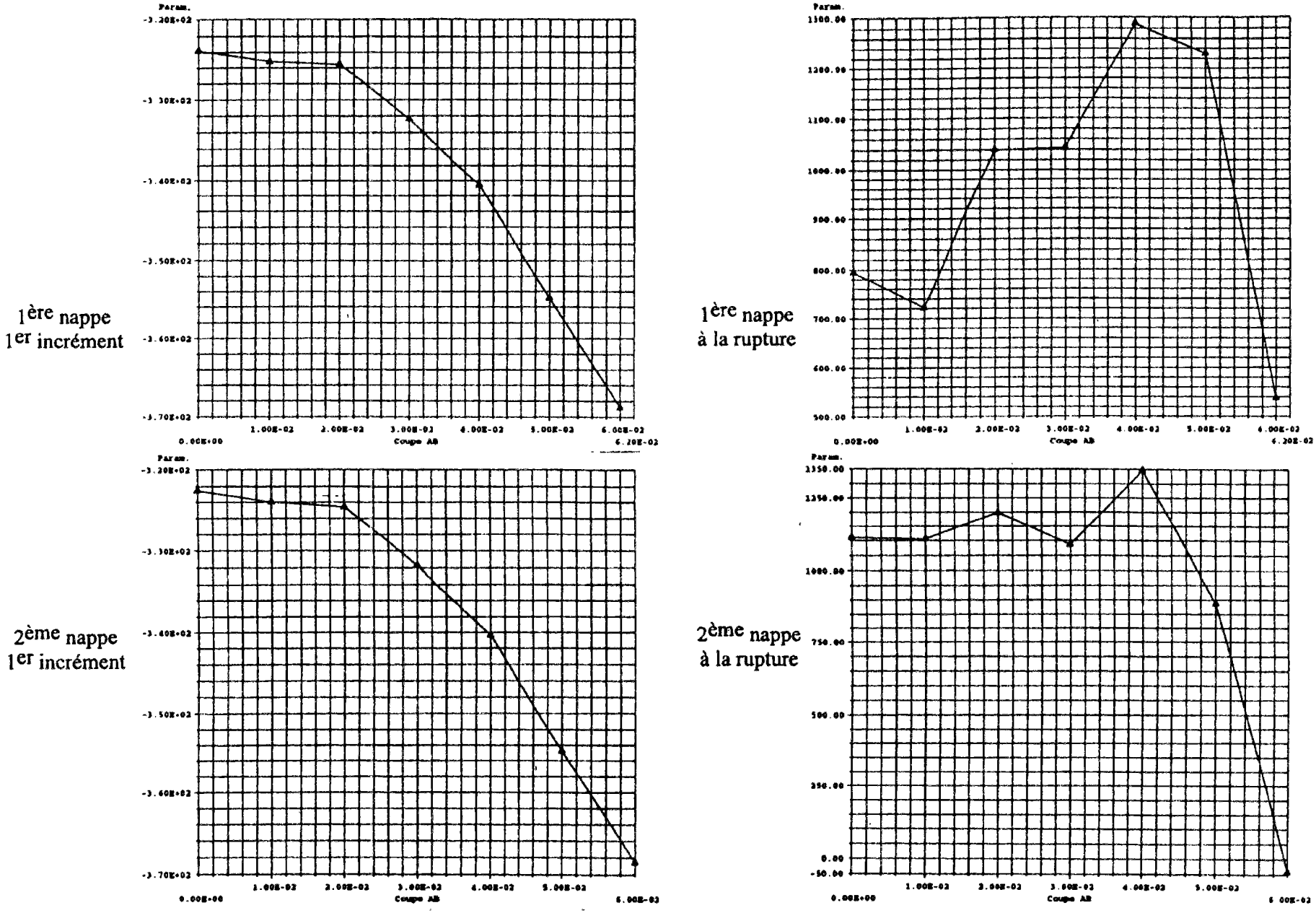
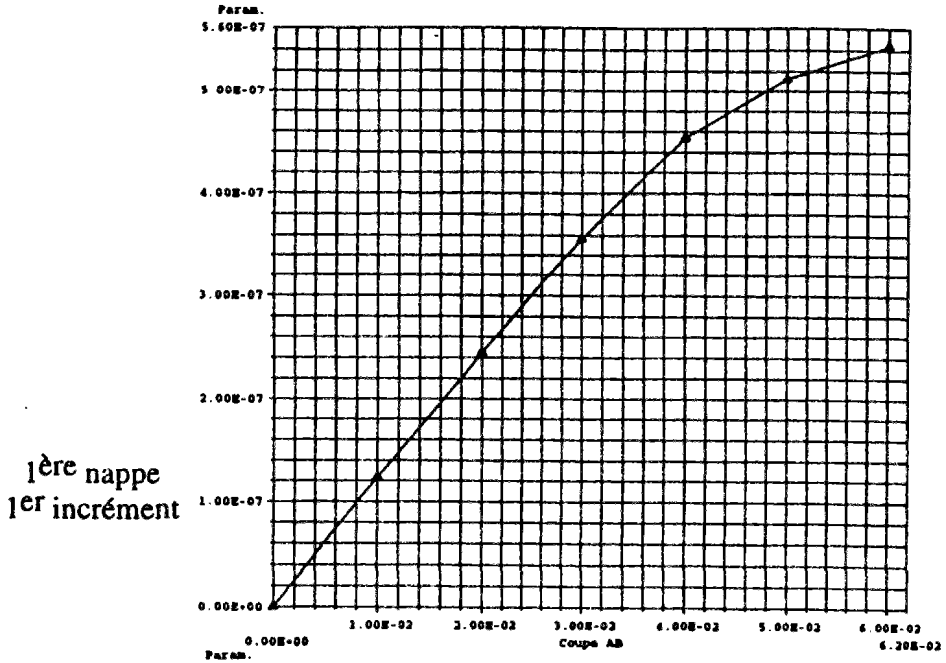
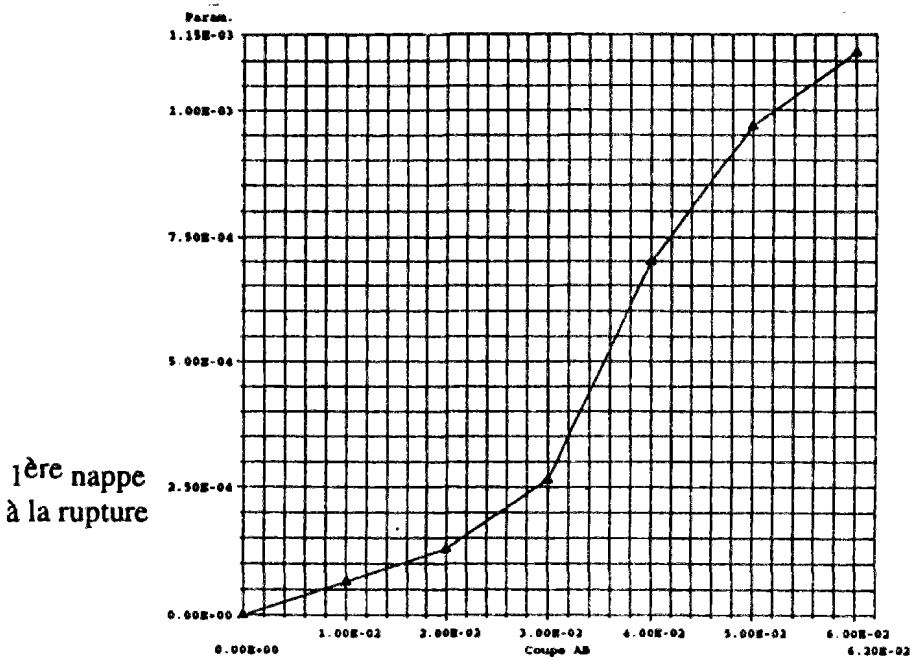
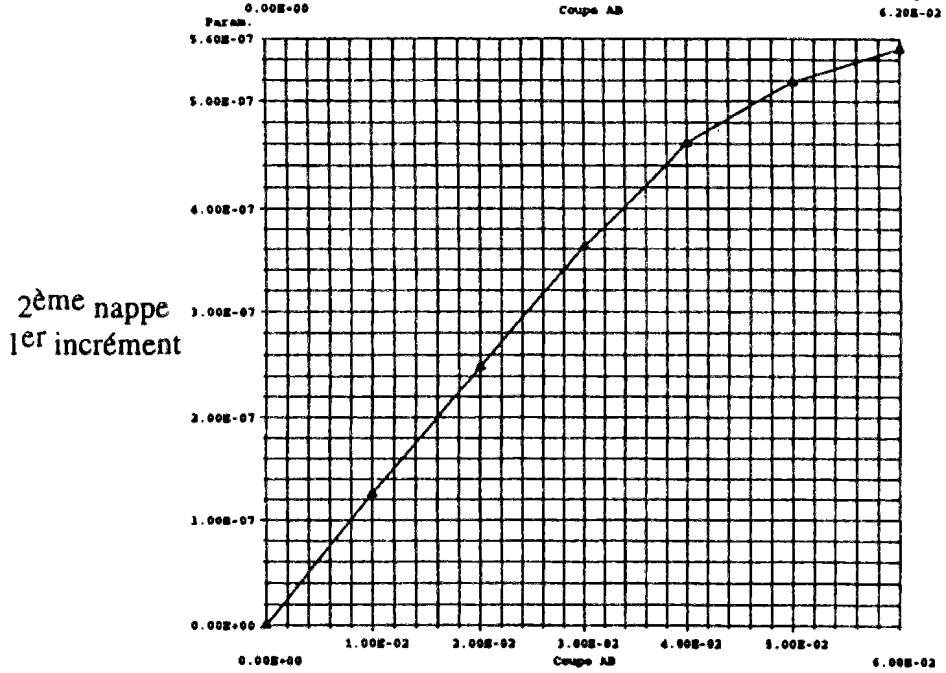


Figure C.4-10 : Contrainte radiale σ_{rr} le long des nappes de renforcement







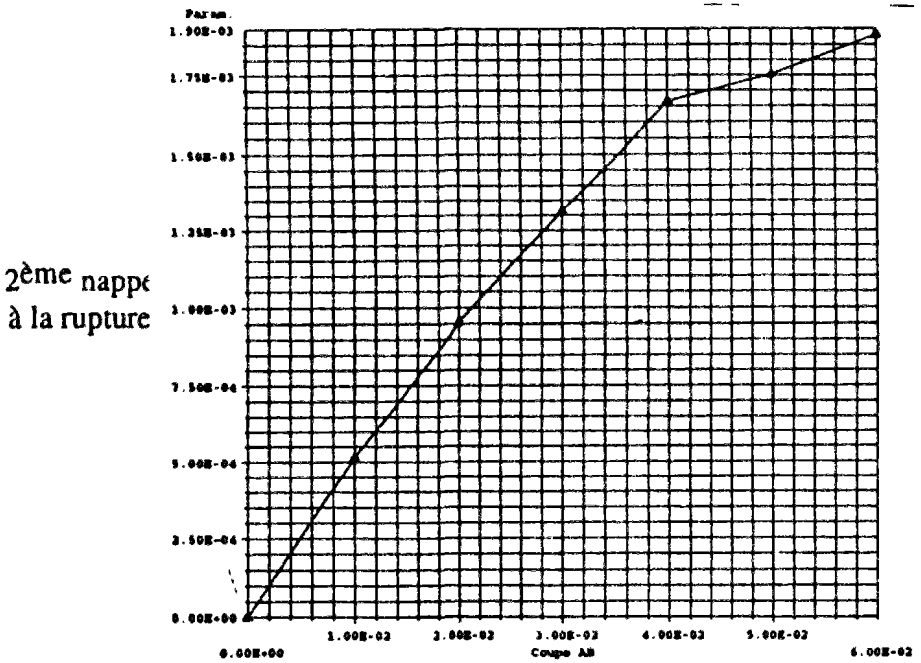
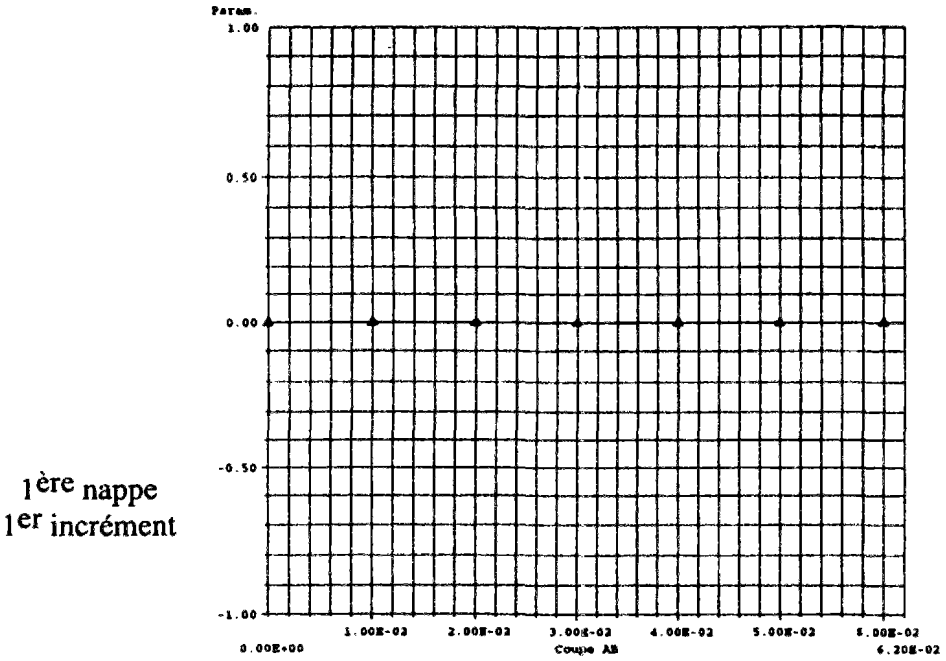
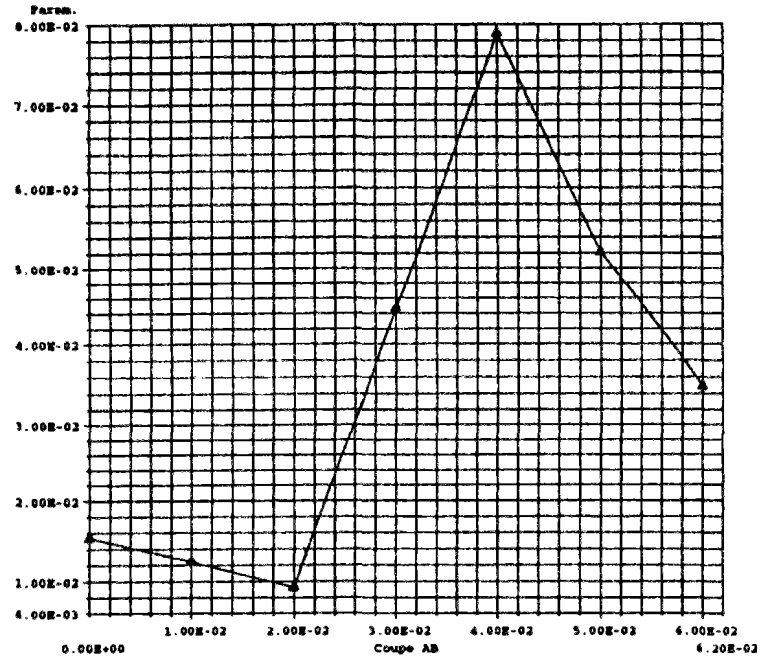


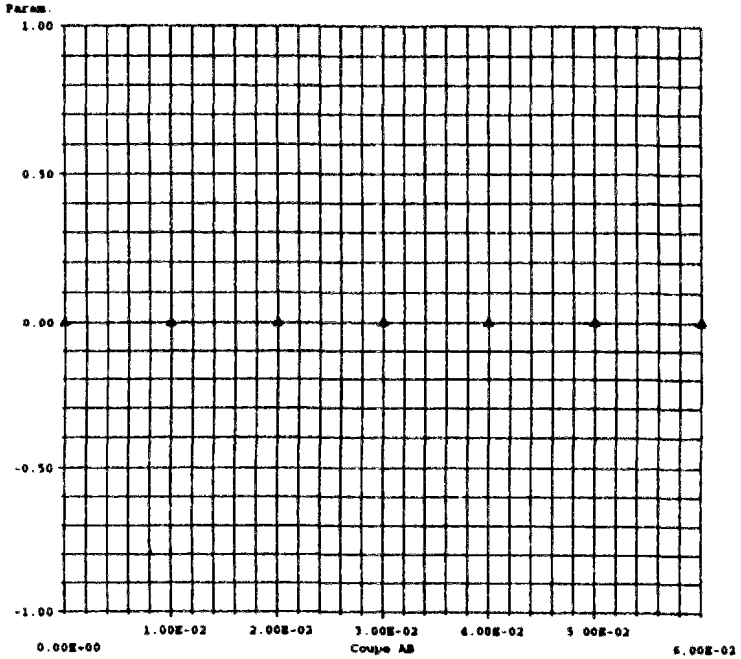
Figure C.4-11 : Déplacements radiaux le long des nappes de renforcement



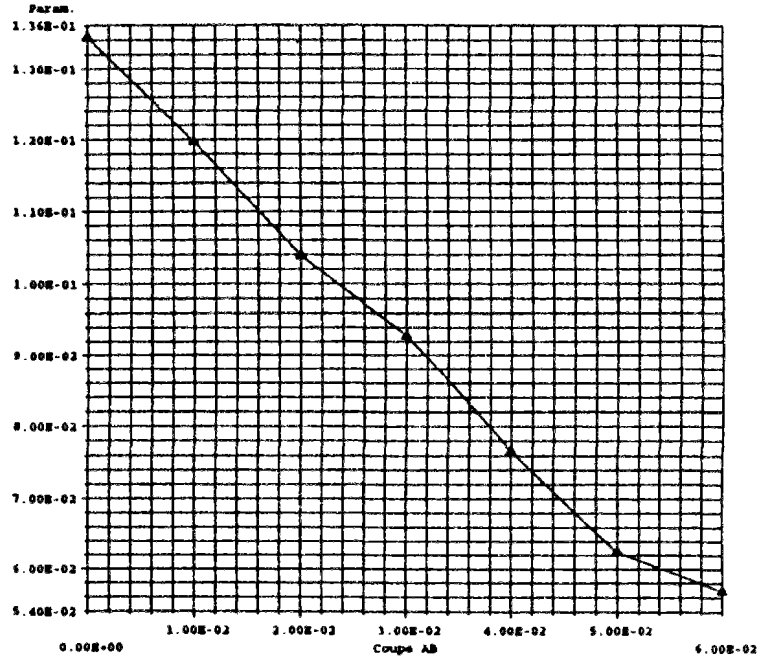
1ère nappe
1er incrément



1ère nappe
à la rupture



2ème nappe
1er incrément



2ème nappe
à la rupture

Figure C.4-12 : Déformation plastique le long des nappes de renforcement

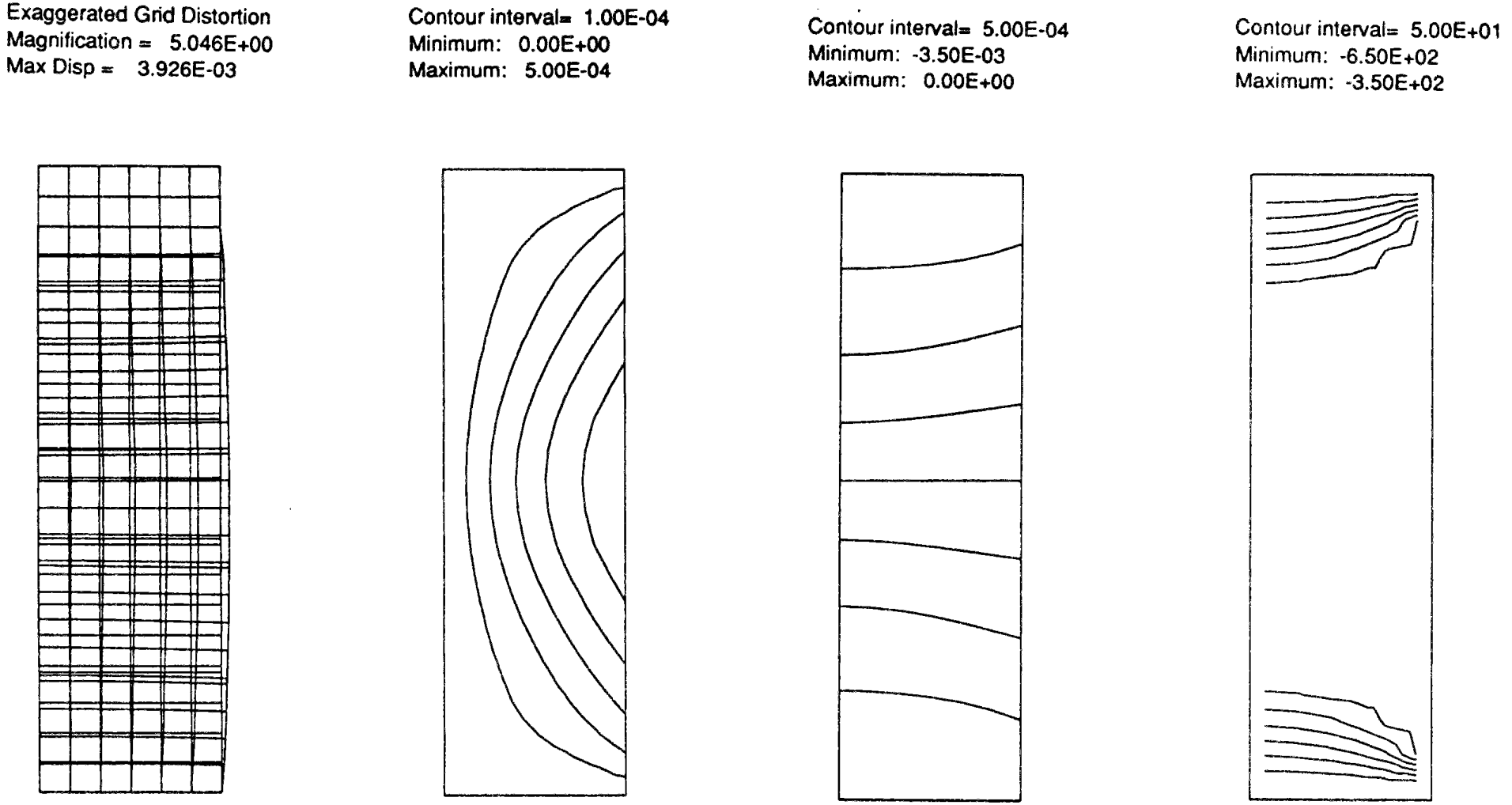
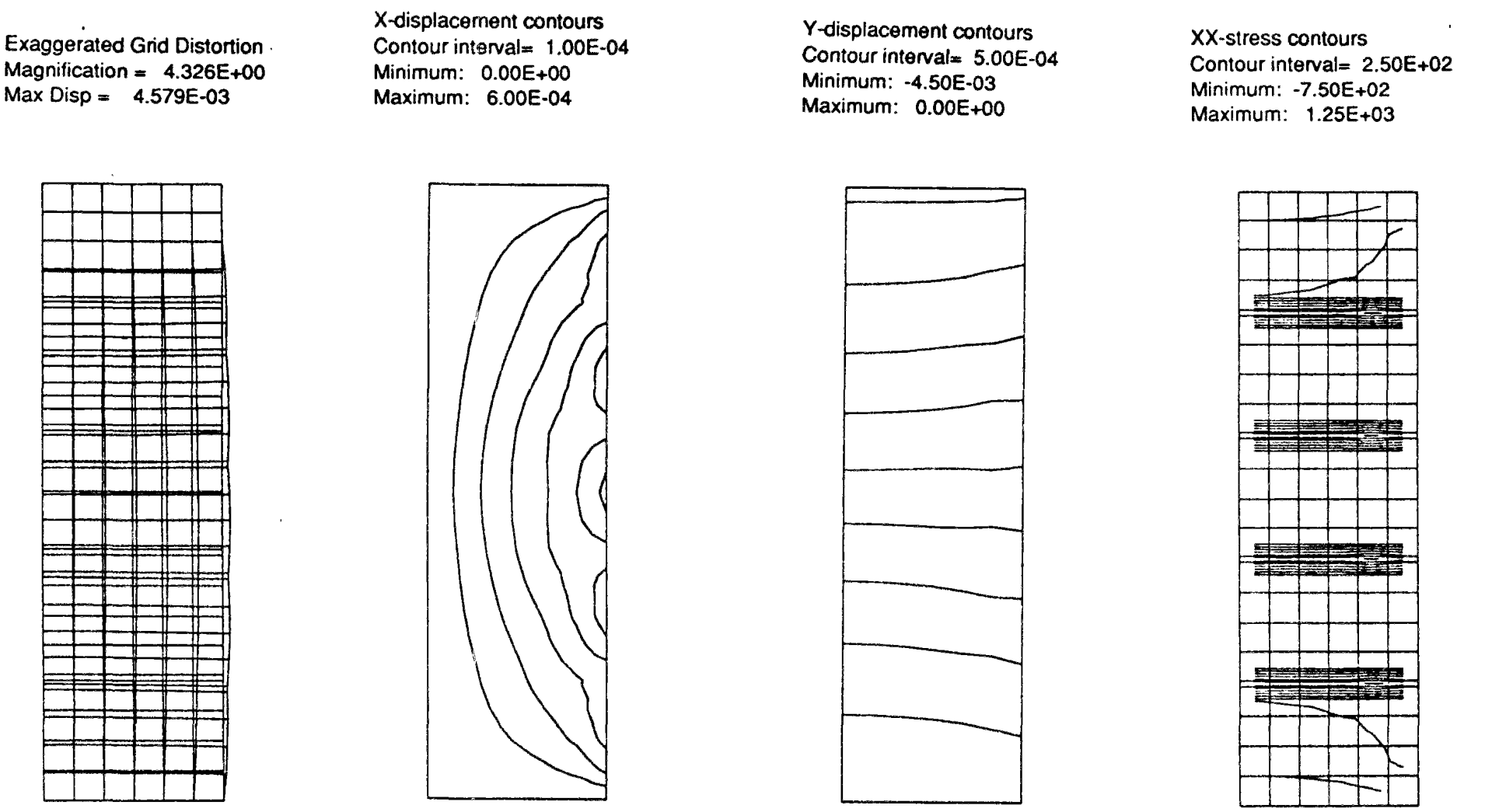


Figure C.4-13 : Essai triaxial d'un sol non renforcé à la rupture (σ_1= 1410 kPa et σ_3 = 380 kPa)
Calculs sur FLAC



Déformée avec maillage initial | Isovaleurs des déplacements radiaux | Isovaleurs des déplacements verticaux | Isovaleurs de la contrainte radiale

Figure C.4-14 : Essai triaxial d'un sol renforcé (adhérence entre sol et aluminium) à la rupture (σ_1= 1670 kPa et σ_3 = 380 kPa)
Calculs sur FLAC

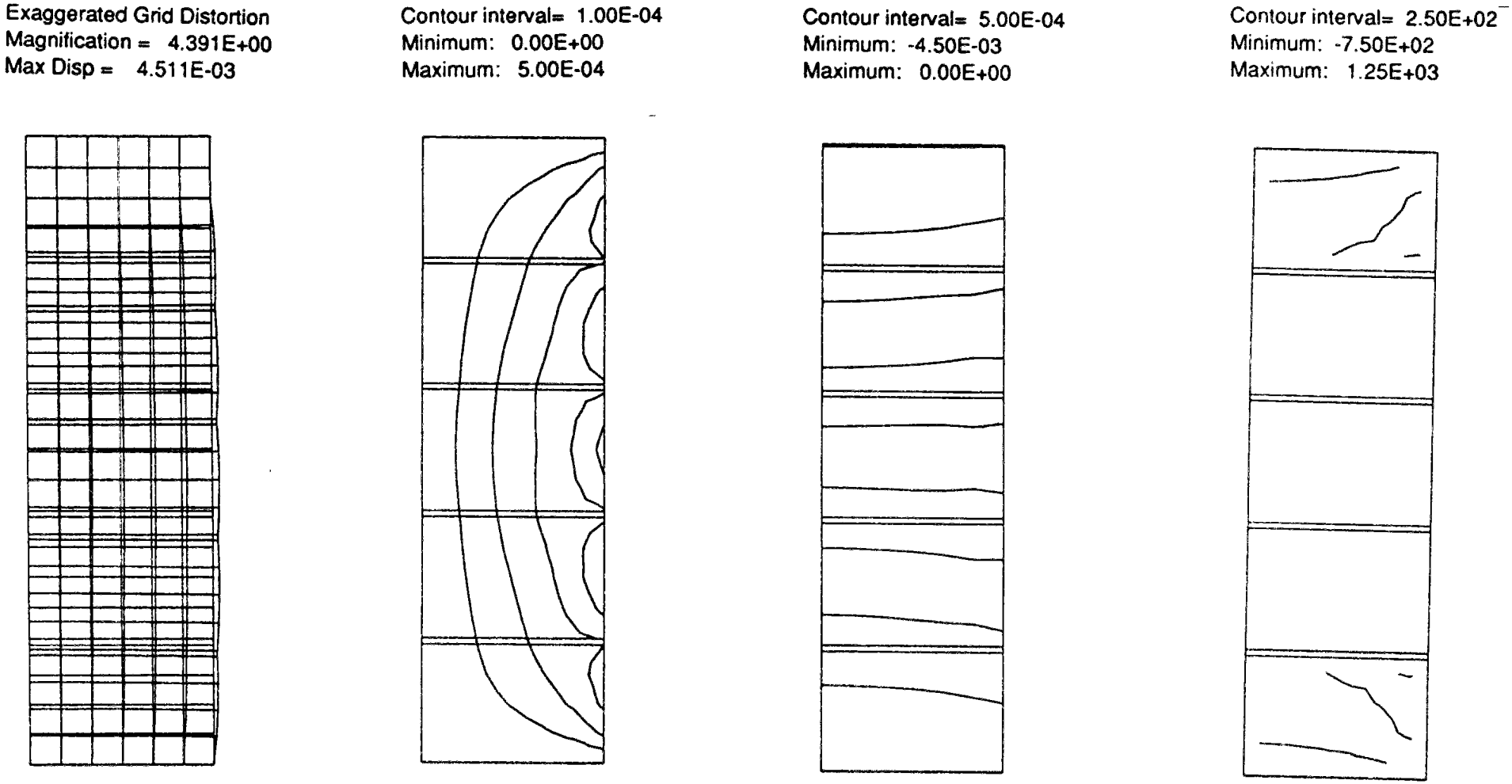
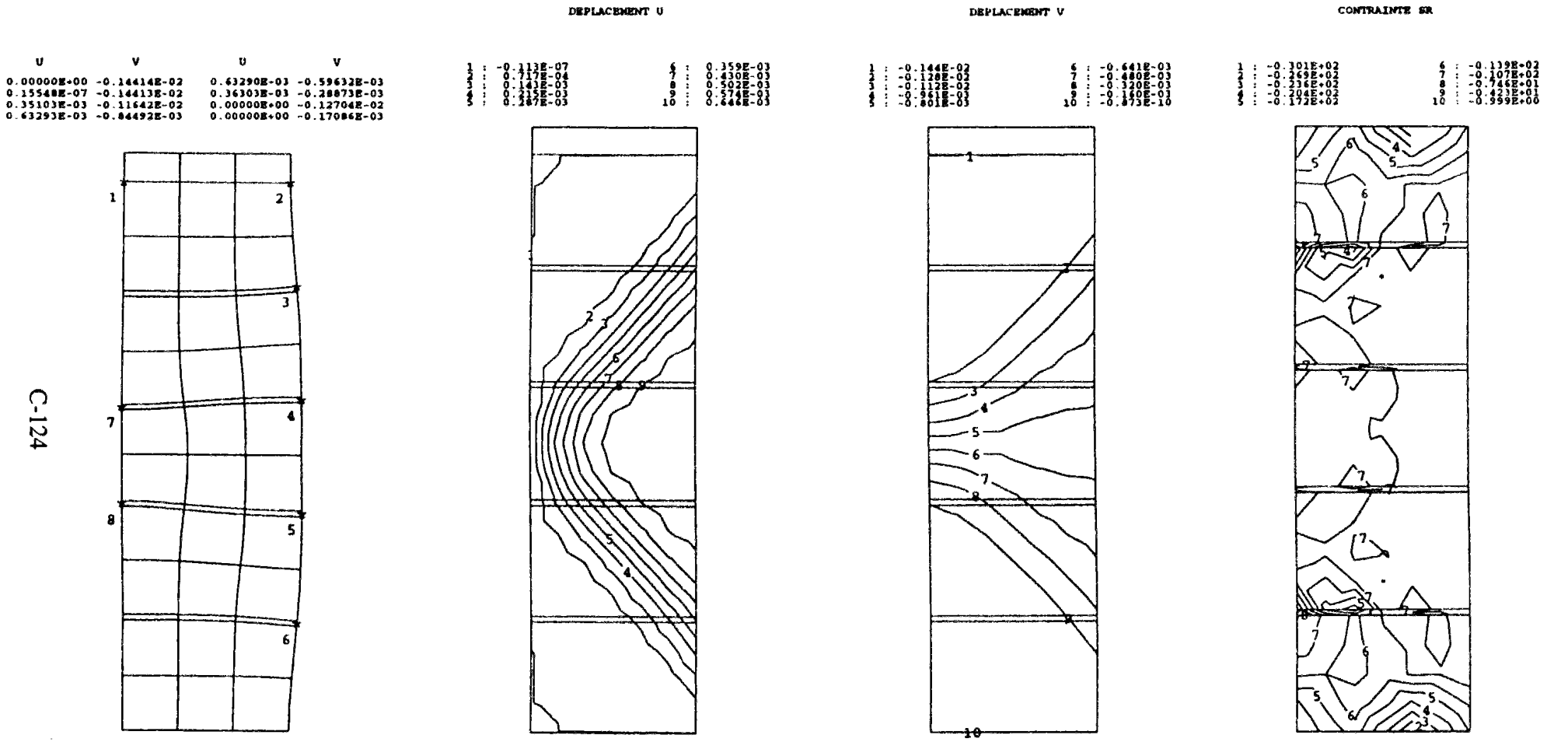
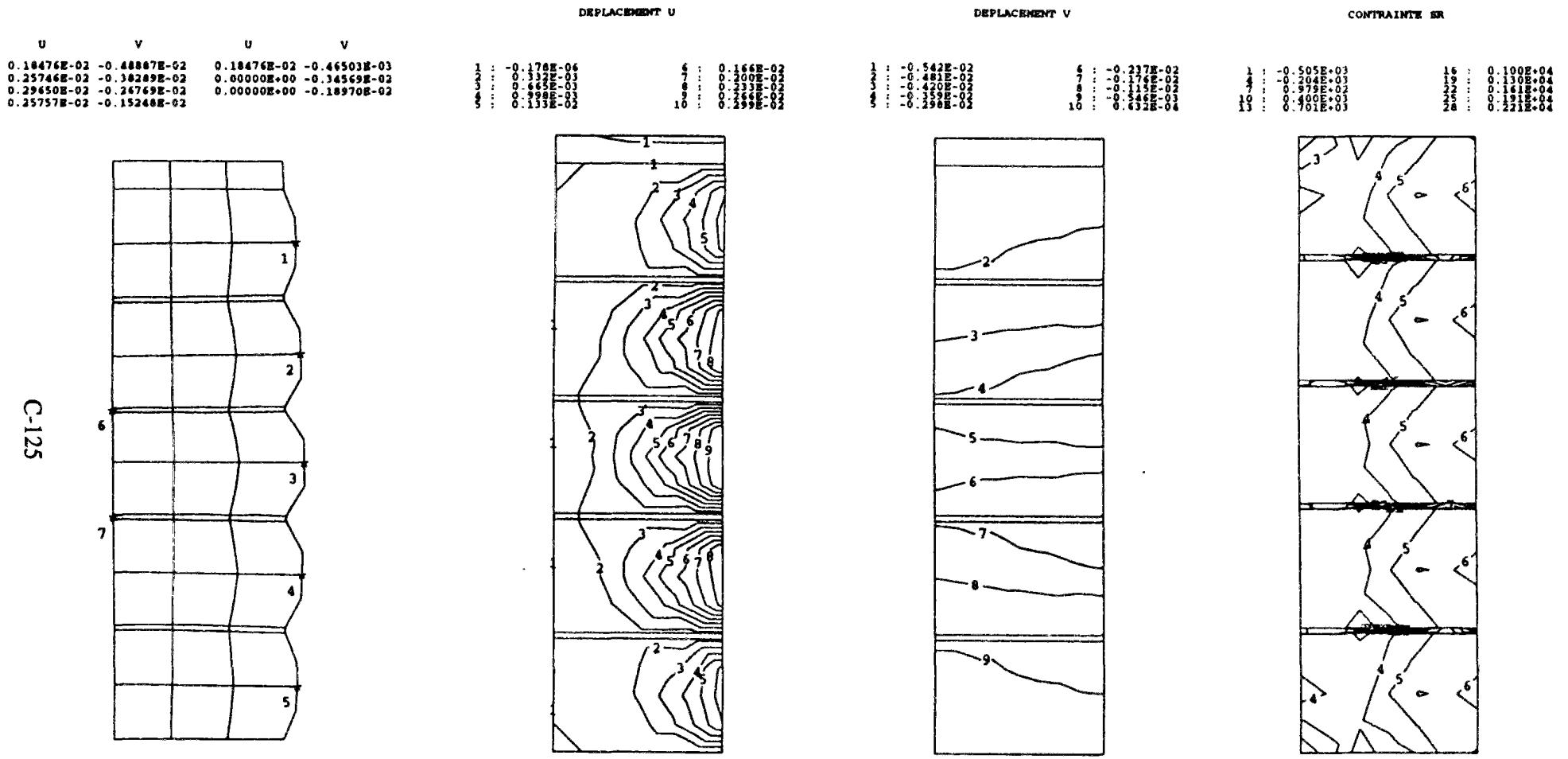


Figure C.4-15 : Essai triaxial d'un sol renforcé (frottement entre sol et aluminium) à la rupture (σ_1= 1660 kPa et σ_3 = 380 kPa)
Calculs sur FLAC



Déformée | Isovaleurs des déplacements radiaux | Isovaleurs des déplacements verticaux | Isovaleurs de la contrainte radiale

Figure C.4-16 : Essai triaxial d'un sol non renforcé à la rupture (σ_1= 38 kPa et σ_3 = 10 kPa)
Calculs sur CESAR



Déformée | Isovaleurs des déplacements radiaux | Isovaleurs des déplacements verticaux | Isovaleurs de la contrainte radiale

Figure C.4-17 : Essai triaxial d'un sol renforcé (adhérence entre sol et aluminium) à la rupture (σ_1= 320 kPa et σ_3 = 10 kPa)
Calculs sur CESAR

U	V	U	V
0.93800E-03	-0.36374E-02	0.85280E-03	-0.18880E-03
0.12588E-02	-0.28414E-02	0.00000E+00	-0.26025E-02
0.12348E-02	-0.20486E-02	0.00000E+00	-0.19036E-02
0.20706E-02	-0.11223E-02	0.00000E+00	-0.48589E-03

DEPLACEMENT U

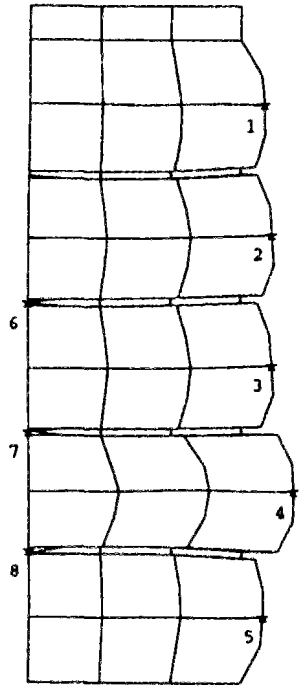
1 :	-0.138E-06	6 :	0.115E-02
2 :	0.230E-03	7 :	0.138E-02
3 :	0.460E-03	8 :	0.161E-02
4 :	0.690E-03	9 :	0.184E-02
5 :	0.920E-03	10 :	0.207E-02

DEPLACEMENT V

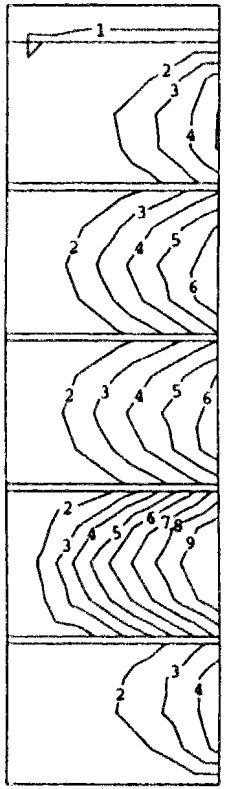
1 :	-0.388E-02	6 :	-0.170E-02
2 :	-0.345E-02	7 :	-0.127E-02
3 :	-0.301E-02	8 :	-0.832E-03
4 :	-0.258E-02	9 :	-0.396E-03
5 :	-0.214E-02	10 :	0.395E-04

CONTRAINTE SR

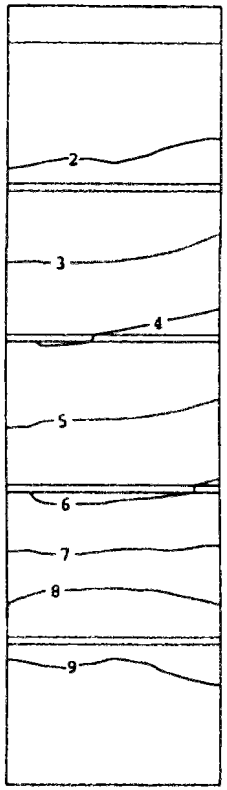
1 :	-0.191E+04	16 :	0.116E+04
4 :	-0.130E+04	19 :	0.178E+04
7 :	-0.682E+03	22 :	0.239E+04
10 :	-0.671E+02	25 :	0.301E+04
13 :	0.547E+03		



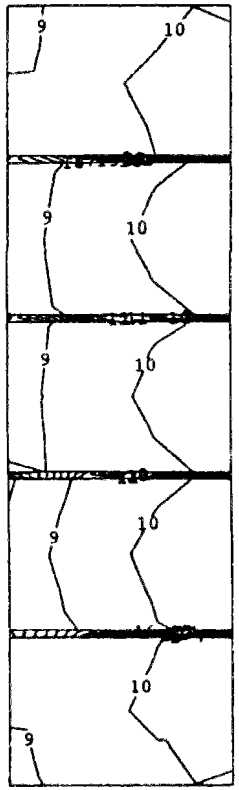
Déformée



Isovaleurs des déplacements radiaux



Isovaleurs des déplacements verticaux



Isovaleurs de la contrainte radiale

Figure C.4-18 : Essai triaxial d'un sol renforcé (frottement entre sol et aluminium : interface associé) à la rupture (σ_1= 230kPa et σ_3 = 10 kPa)
Calculs sur CESAR

U	V	U	V
0.51958E-03	-0.24438E-02	0.45741E-03	-0.11798E-03
0.15453E-02	-0.17075E-02	0.00000E+00	-0.20839E-02
0.63954E-03	-0.10708E-02	0.00000E+00	-0.15708E-02
0.81048E-03	-0.64756E-03	0.00000E+00	-0.76571E-03

DEPLACEMENT U

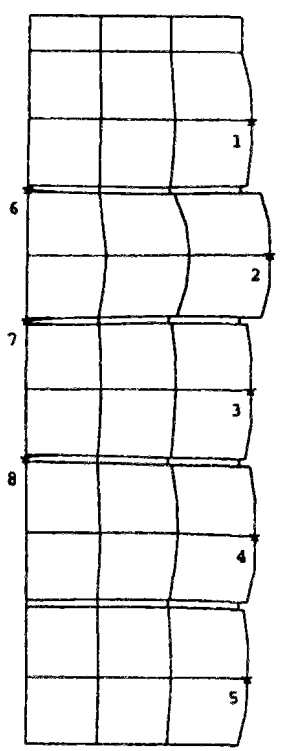
1 :	-0.111E-06	6 :	0.858E-03
2 :	0.172E-03	7 :	0.103E-02
3 :	0.343E-03	8 :	0.120E-02
4 :	0.515E-03	9 :	0.137E-02
5 :	0.687E-03	10 :	0.155E-02

DEPLACEMENT V

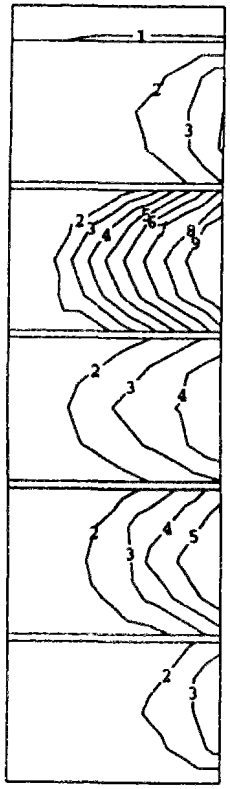
1 :	-0.259E-02	6 :	-0.114E-02
2 :	-0.230E-02	7 :	-0.856E-03
3 :	-0.201E-02	8 :	-0.567E-03
4 :	-0.172E-02	9 :	-0.279E-03
5 :	-0.143E-02	10 :	0.974E-05

CONTRAINTE SR

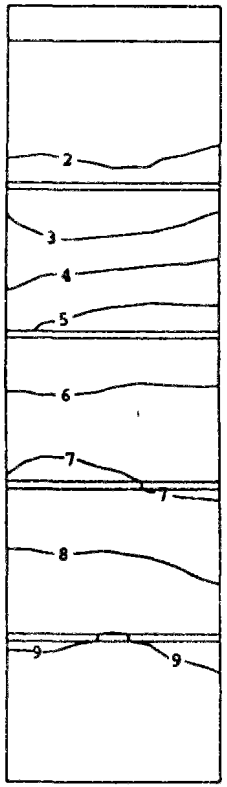
1 :	-0.166E+04	16 :	0.757E+03
4 :	-0.118E+04	19 :	0.124E+04
7 :	-0.692E+03	22 :	0.172E+04
10 :	-0.209E+03	25 :	0.221E+04
13 :	0.274E+03	28 :	0.269E+04



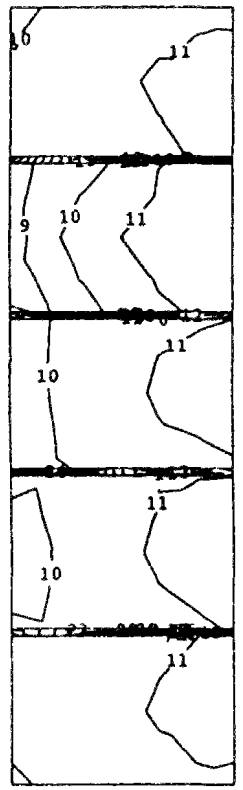
Déformée



Isovaleurs des déplacements radiaux



Isovaleurs des déplacements verticaux



Isovaleurs de la contrainte radiale

Figure C.4-19 : Essai triaxial d'un sol renforcé (frottement entre sol et aluminium : interface non associé) à la rupture (σ_1= 200 kPa et σ_3 = 10 kPa)
Calculs sur CESAR

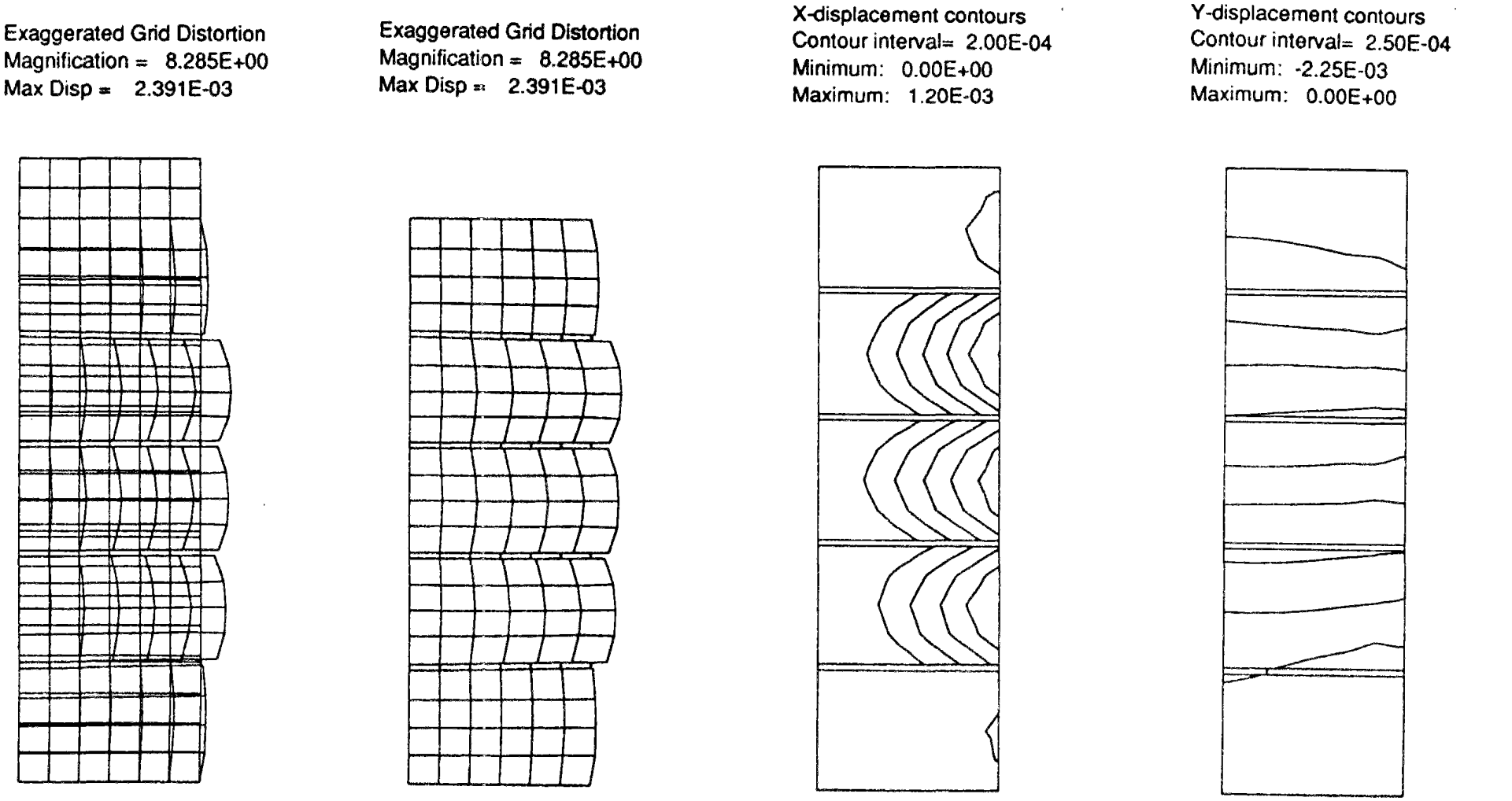


Figure C.4-20 : Essai triaxial d'un sol renforcé (frottement entre sol et aluminium) à la rupture (σ_1= 180 kPa et σ_3 = 10 kPa)
Calculs sur FLAC

5 Modélisation de l'essai d'arrachement du clou préalable No. 5

La modélisation d'essais triaxiaux de sol, renforcé ou non par des nappes d'aluminium, nous a permis de tester et comparer les méthodes numériques des éléments finis et des différences finies sur des cas simples (cf. paragraphe 4, partie C). En particulier, nous avons mis en évidence des petites différences dans le cas où l'on utilise des éléments d'interface entre le sol et les nappes. Cette différence est sans doute due plus aux types d'éléments qu'aux méthodes numériques elles-mêmes.

La modélisation de l'essai d'arrachement préalable No. 5 a deux objectifs. Le premier est de comparer les deux méthodes numériques dans un cas où les éléments d'interface sont soumis à des gradients de contraintes et déformations beaucoup plus faibles que ceux d'un essai triaxial. Le deuxième objectif est de déterminer, à partir des résultats de l'essai d'arrachement réalisé sur le site, en préparation à la construction du mur en sol cloué CLOUTERRE-CEBTP No. 1, les caractéristiques élastiques de la loi de mobilisation du frottement latéral unitaire. En particulier, nous analysons, de manière très détaillée, les méthodes de détermination du coefficient k_β de mobilisation du frottement latéral à partir des résultats d'un essai d'arrachement.

5.1 Descriptif de l'essai d'arrachement

Les essais d'arrachement ont été réalisés 24 heures après le scellement du clou préalable dans le coulis. En outre, une barre Dywidag a été scellée à l'intérieur du tube d'aluminium pour pouvoir tirer dessus sans écraser ce dernier.

5.1.1 Caractéristiques des clous

Les caractéristiques mesurées du clou préalable No. 5 sont résumées dans les tableaux C.5-1 et C.5-2 ci-dessous.

Tableau C.5-1 : Caractéristiques du clou préalable No. 5

Caractéristiques	Mesures
diamètre de forage : D_c	63 mm
diamètre extérieur du tube d'aluminium : D_{al}	40 mm
épaisseur du tube d'aluminium : e_{al}	1 mm
section d'aluminium : A_{al}	$122{,}5\ 10^{-6}$ m^2
longueur du clou : L_c	5,50 m
longueur du clou scellée dans le sol : L_s	5,50 m
module d'Young de l'aluminium : E_{al}	$70\ 10^{+6}$ kPa
contrainte de rupture de l'aluminium : σ_y	$240\ 10^{+3}$ kPa
traction limite de cassure : $T_R = \sigma_y A_{al}$	29,4 kN

Tableau C.5-2 : Caractéristiques mesurées de l'interface sol-clou

Caractéristiques	Mesures
force limite d'arrachement du clou T_{lim} *	30 kN
surface de contact sol-clou $\pi D_c L_c$	1.088 m^2
frottement latéral limite sol-clou q_s	$\geq$ 27,1 kPa
module tangent initial de mobilisation de la force d'arrachement $B_0 = dT_0 / dy_0$	10 840 kN/m
valeur estimée du coefficient k_τ à partir de B_0 : $k_\tau = B_0 / \pi D_c L$	9 635 kPa/m

* Un examen plus précis sur le clou No. 5 a montré que la rupture s'était produite plutôt par glissement du tube d'aluminium dans le coulis de ciment que par glissement du coulis dans le sol. Le clou préalable No. 4 n'a pas été examiné. Cependant, la surface de contact entre l'aluminium et le coulis de ce clou étant plus réduite, car le diamètre extérieur du tube d'aluminium est de 30 mm, on peut supposer que lui aussi s'est rompu par glissement du tube d'aluminium dans le coulis de scellement.

5.1.2 Influence possible du coulis de scellement

La rupture s'étant produite entre l'aluminium et le coulis âgé seulement de 24 heures, on peut se demander si la rigidité initiale mesurée dans l'essai d'arrachement ne dépend pas de la rigidité du coulis de scellement. Le coefficient initial k_τ de mobilisation du frottement latéral unitaire q_s dans le sol au contact du coulis est d'environ 69 10^{+3} kPa/m. Le coefficient de mobilisation du frottement dans l'anneau de coulis de diamètre intérieur D_{al} et de diamètre extérieur D_c est donné par :

$$k_\tau(\text{coulis}) = \frac{2\,G_s}{D_{al}\,\ln\left(1+\dfrac{D_s - D_{al}}{D_{al}}\right)} \qquad \text{(C.5-1)}$$

où G_s est le module de cisaillement du coulis à 24 heures. G_s se calcule à partir du module d'Young E_s du coulis de scellement et de son coefficient de Poisson ν, pris égal à 0,2.

Supposons une résistance f_{c28} du coulis de 20 MPa, la résistance f_{c1} à 1 jour est alors de 3.58 MPa, ce qui donne un module E_s de 16,8 MPa et un module G_s de 7,0 MPa. On en déduit un coefficient k_τ(coulis) pour le coulis de 770,5 10^{+3} kPa/m. Le coefficient k_τ(coulis) du coulis étant 11 fois plus grand que celui du sol, la rigidité initiale B_0 de l'essai d'arrachement peut être considérée comme étant indépendante de celui-ci, du moins dans la phase initiale élastique du sol. Dans la phase plastique, le coefficient tangent de l'interaction entre le sol et le clou diminue de façon très sensible et il n'est plus alors possible de négliger la déformabilité du coulis de scellement. Il ne faut donc pas essayer de tirer de conclusions à partir des fins de courbes d'arrachement. Par contre, il est possible de tirer des indications très intéressantes sur le coefficient élastique de mobilisation du frottement latéral, à partir des courbes initiales.

5.2 Calcul du coefficient de mobilisation du frottement latéral

5.2.1 Calcul à partir de la courbe d'arrachement

Le module tangent initial de mobilisation de la force d'arrachement B_0 est donné, dans le cas d'un clou de diamètre D_c , armé d'une barre élastique de module d'Young E, de section A, et d'une interaction élastique entre le sol et le clou avec un coefficient de mobilisation du frottement latéral k_τ , par la formule suivante :

$$B_0 = \frac{dT_0}{dy_0} = \frac{E\,A}{\ell} \text{th}\left(\frac{L}{\ell}\right) \qquad \text{(C.5-2)}$$

où la longueur de transfert ℓ est donnée par:

$$\ell = \sqrt{\frac{E\,A}{\pi\,D_c\,k_\tau}} \qquad \text{(C.5-3)}$$

Dans le cas d'un clou très court, $L \cong 0$, la tangente hyperbolique peut être approximée par $\text{th}(L/\ell) \cong L/\ell$ d'où l'expression de B_0 :

$$B_0 = \pi\,D_c\,L\,k_t \qquad \text{(C.5-4)}$$

La courbe donnant la force d'arrachement T_0 en fonction du déplacement en tête y_0 est identique, dans ce cas là, à la fonction de transfert de charge entre le sol et le clou.

Dans le cas d'un clou très long, $L >> \ell$, la tangente hyperbolique peut être approximée par $\text{th}(L/\ell) \cong 1$, d'où l'expression de B_0 :

$$B_0 = \sqrt{E\,A\,\pi\,D_c\,k_\tau} \qquad \text{(C.5-5)}$$

Le rapport des modules tangents initiaux B_0 , entre un clou long et un clou court, est donné par :

$$\frac{B_0(\text{clou long})}{B_0(\text{clou court})} = \sqrt{\frac{E\,A}{\pi\;D_c\,k_\tau\,L^2}} \qquad \text{(C.5-6)}$$

La courbe donnant la force d'arrachement T_0 en fonction du déplacement en tête y_0 est d'autant plus différente de la fonction de transfert de charge entre le sol et le clou que le clou est long (longueur L grande), qu'il est déformable (module de déformation axiale E A faible) ou que le coefficient de mobilisation k_τ est grand.

Pour le sable de Fontainebleau, la longueur de transfert ℓ est de l'ordre de la dizaine de centimètres. Pour un clou de 5,5 m de longueur, on pourra supposer que $th(L/\ell) \equiv L/\ell$. Le module B_0 est alors égal à $B_0 = \sqrt{E\,A\,\pi\,D_c\,k_\tau}$. On en déduit une valeur de 69 000 kPa/m pour k_τ sachant que B_0 = 10 840 KN/m, E_{al} = 70 000 MPa, A_{al} = 122,5 10^{-6} m^2 et D_c = 63 10^{-3} m. Cette valeur de k_τ donne une longueur de transfert de 0,037 m, qui est très petite par rapport à la longueur du clou, et justifie l'hypothèse initiale $\ell << L_c$.

5.2.2 Estimation à partir du module d'Young du sol

L'essai d'arrachement a été réalisé sous une couverture de 1m, dans un sol avec un module pressiométrique E_M moyen d'environ 10 MPa.

La formule de Frank (1984) donne la relation suivante entre le coefficient de mobilisation du frottement latéral k_τ et le module d'Young E du sol :

$$k_\tau = \frac{E}{(1+\nu)\,\kappa\,D_c} \qquad \text{(C.5-7)}$$

$$\kappa = \ln\left(\frac{3,75\,L}{D_c\,(1+\nu)}\right) \qquad \text{(C.5-8)}$$

Pour un clou de longueur L égale à 5,5m , de diamètre extérieur D_c égal à 63 mm, avec un sol de module d'Young E choisi comme étant égal à 2 E_M , c'est à dire 20 MPa, un coefficient de Poisson ν de 0,3 , on obtient un coefficient κ de 5,53 et un coefficient k_τ de 44 10^{+3} kPa/m.

5.2.3 Estimation à partir de la formule de Frank et Zhao (1982)

Pour une loi bilinéaire de mobilisation du frottement latéral (Frank et Zhao, 1982), il est classique de prendre, pour les sols granulaires, la relation suivante entre le coefficient de mobilisation k_τ et le module pressiométrique Ménard E_M:

$$k_\tau = 0,8\,\frac{E_M}{D_c} \qquad \text{(C.5-9)}$$

Pour un sol avec un module E_M d'environ 10 MPa et un clou de diamètre D_c égal à 63 mm, on obtient ainsi un coefficient de mobilisation k_τ de 127 000 kPa/m.

Il est à noter que ce coefficient k_τ est un coefficient tangent initial, que l'on pourrait qualifier d'élastique. Le coefficient sécant à la rupture, noté $k_{\tau,u}$ est égal à $k_\tau/3$ tandis qu'un coefficient sécant moyen plus représentatif de l'ensemble de la courbe de mobilisation serait égal à k_τ / 2 (figure C.5-1).

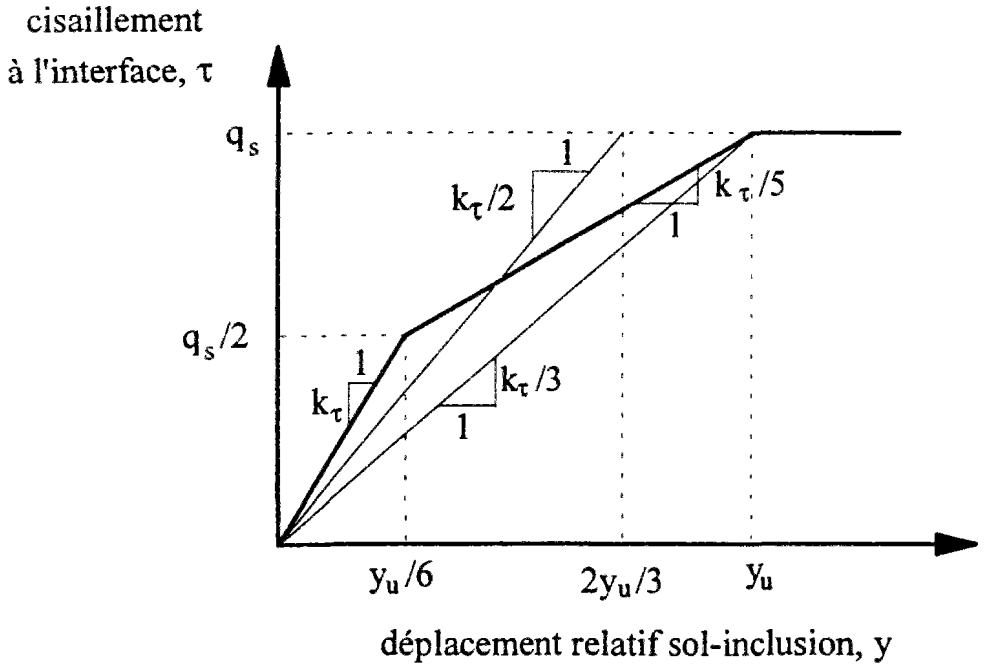


Figure C.5-1 : Modèle de Frank et Zhao (1982)

5.2.4 Estimation à partir des corrélations CLOUTERRE

Les Recommandations CLOUTERRE 1991 donnent une corrélation entre le module pressiométrique E_M , le rayon du clou R_c et le coefficient de mobilisation k_τ (figure C.5-2) :

$$k_\tau = \frac{2}{m}\frac{E_M}{D_c} \qquad \text{(C.5-10)}$$

où le coefficient m varie entre 1,4 et 4,6 , avec une valeur moyenne de 3,0.

Le module pressiométrique est d'environ 10 MPa, le diamètre D_c de 64 mm, on en déduit un coefficient k_τ variant entre 48 10^{+3} kPa/m et 159 10^{+3} kPa/m avec un valeur moyenne de 104 10^{+3} kPa/m.

La fourchette basse des corrélations CLOUTERRE correspond le mieux à l'essai d'arrachement du clou préalable No. 5, qui a été installé dans un forage et scellé gravitairement, dans un sable avec une teneur en fine relativement faible. Dans un tel sol, le coulis s'essore rapidement, et à moins qu'une deuxième injection de coulis ne soit réalisée à la source pour combler la lunule qui se forme, le contact entre le coulis et le sol est de qualité moyenne. La dilatance du sol est relativement peu mobilisée.

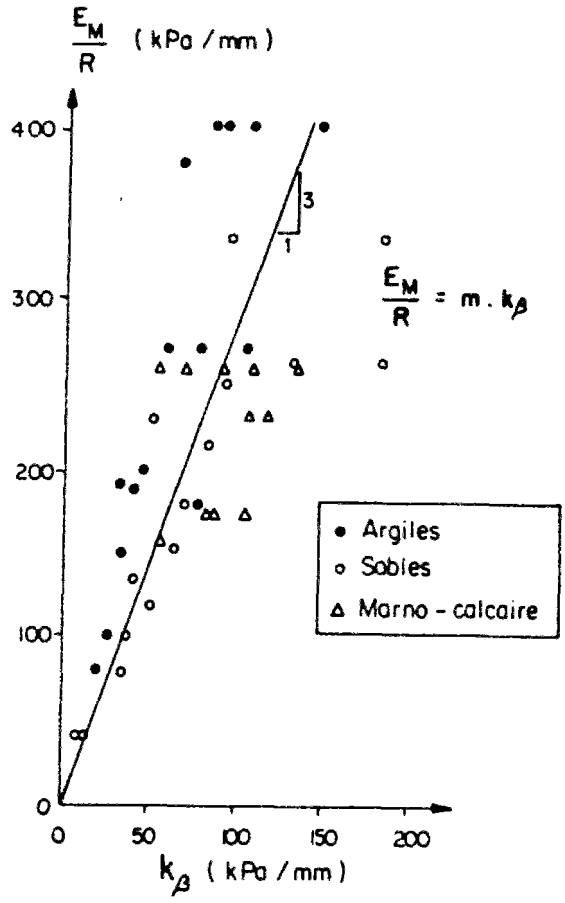


Figure C.5-2 : Corrélations CLOUTERRE entre E_M et k_τ

5.2.5 Comparaison des différentes méthodes

Le tableau C.5-3 synthétise les différentes méthodes de calcul ainsi que les valeurs obtenues.

La valeur la plus précise, a priori, est celle calculée à partir du module initiale B_0 de la courbe d'arrachement en prenant en compte l'allongement du clou. Le choix de cette valeur a permis de modéliser très précisément la courbe initiale d'arrachement par éléments finis et par différences finies. C'est ce que nous verrons dans le prochain paragraphe 5.2.6. Si l'on ne corrige pas le module B_0 pour l'allongement, le coefficient réel k_τ est très largement sous-estimé.

Le calcul de k_τ à partir du module d'Young du sol, considéré comme un continuum, donne un valeur légèrement plus faible de 30%. La corrélation de Frank et Zhao (1982) donne un coefficient tangent initial deux fois trop fort. Il faut prendre le coefficient sécant moyen pour retomber sur la bonne valeur.

Enfin, dans les corrélations CLOUTERRE, qui ont été développées pour tous les types de sols confondus, il faut prendre la fourchette basse pour retrouver la bonne valeur de k_τ

Tableau C.5-3: Valeurs estimées du coefficient k_τ de mobilisation du frottement

Méthode utilisée	Valeurs
estimation à partir de la pente initiale B_0 de la courbe d'arrachement sans correction : $B_0 \equiv \pi D_c L k_\tau$	9,6 10^{+3} kPa/m
estimation à partir de B_0 et après correction pour l'allongement du clou : $B_0 = \sqrt{E A \pi D_c k_\tau}$	69 10^{+3} kPa/m
estimation à partir du module d'Young du sol $E = 2 E_M \approx 20$ MPa (Frank, 1984) : $k_\tau = \frac{E}{(1+\nu)\kappa D_c}$	44 10^{+3} kPa/m
estimation par la formule de Frank et Zhao (1982) avec $E_M \approx 10$ MPa et $k_\tau = 0.8 \frac{E_M}{D_c}$	
coefficient tangent initial k_τ	127 10^{+3} kPa/m
coefficient sécant moyen $k_\tau / 2$	63,5 10^{+3} kPa/m
coefficient sécant à la rupture $k_{\tau,u} = k_\tau / 3$	42 10^{+3} kPa/m
corrélations CLOUTERRE : $k_\tau = \frac{2}{m} \frac{E_M}{D_c}$	
$E_M = 10$ MPa et $m = 1,4$	227 10^{+3} kPa/m
$E_M = 10$ MPa et $m = 3,0$	106 10^{+3} kPa/m
$E_M = 10$ MPa et $m = 4,6$	69 10^{+3} kPa/m

5.3 Simulations numériques de l'essai d'arrachement

5.3.1 Maillage et caractéristiques mécaniques

L'essai d'arrachement a été modélisé en utilisant un maillage relativement simple, c'est à dire une couche de 2 m de hauteur et 7,50 m de longueur, puisque l'essai réel a lui-même été réalisé à faible profondeur, dans des conditions elles-mêmes très simples (figure C.5-3). Les caractéristiques mécaniques des matériaux utilisées dans les simulations sont résumées dans le tableau C.5-4.

Tableau C.5-4 : Récapitulatif des données du calcul de l'essai d'arrachement préalable sur le clou n°5

Sol élastique parfaitement plastique critère de Mohr-Coulomb, loi d'écoulement non associée		
module d'Young	E	$20\ 10^3$ kPa
poids volumique	γ	16.9 kN/m^3
coefficient de Poisson	ν	0.3
angle de frottement	ϕ	38°
angle de dilatance	ψ	20°
cohésion	c	3 kPa
Parement en béton linéaire élastique		
module d'Young	E_b	$25\ 10^6$ kPa
poids volumique	γ	24 kN/m^3
coefficient de Poisson	ν	0.2
épaisseur	e	0.10 m
Clou en aluminium élastique parfaitement plastique		
module d'Young	E_{al}	$70\ 10^6$ kPa
longueur	L	5.50 m
surface	A	$122.5\ 10^{-6}$ m^2
diamètre forage	D_c	$63\ 10^{-3}$ m
diamètre tube	D_{al}	$40\ 10^{-3}$ m
épaisseur tube	e	$1\ 10^{-3}$ m
coefficient de mobilisation du frottement	k_τ	$69\ 10^3$ kPa/m
frottement latéral unitaire	q_s	27.1 kPa
force limite de rupture	y	100 kN
Barre d'acier élastique linéaire en tête du clou		
module d'Young	E_a	$2.1\ 10^8$ kPa
longueur	l	1.00 m
surface	a	$122.5\ 10^{-6}$ m^2
force limite de rupture	y	200 kN

Les isovaleurs des déplacements vertical et horizontal sont présentées sur les figures C.5-4a et C.5-4b. Le sol, situé de part et d'autre du clou, est entraîné vers le parement et le comprime. En outre, il faut noter, du fait de la faible profondeur de l'essai, le soulèvement du sol en surface. Le sol tendant à s'accumuler derrière la parement. Les efforts de traction dans le clou décroissent relativement lentement avec la distance au parement, ce qui est caractéristique des inclusions, dites de type rigide (figure C.5-5).

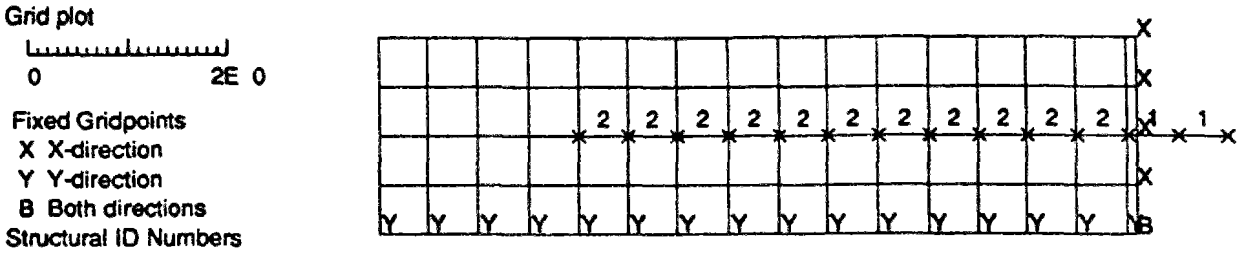


Figure C.5-3 : Maillage utilisé pour l'essai d'arrachement du clou préalable No. 5
(calcul avec FLAC)

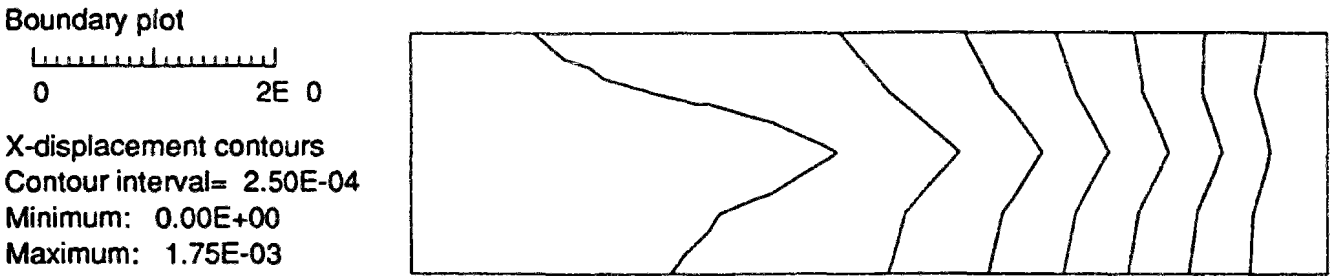


Figure C.5-4a : Isovaleurs du déplacement horizontal
(calcul avec FLAC)

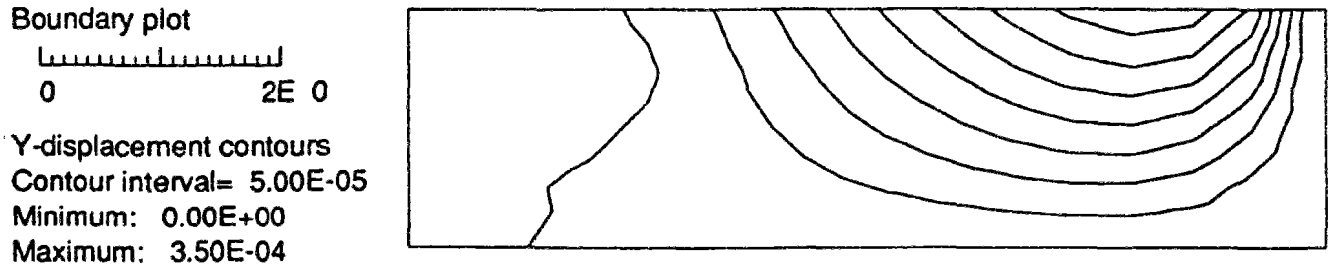


Figure C.5-4b : Isovaleurs du déplacement vertical
(calcul avec FLAC)

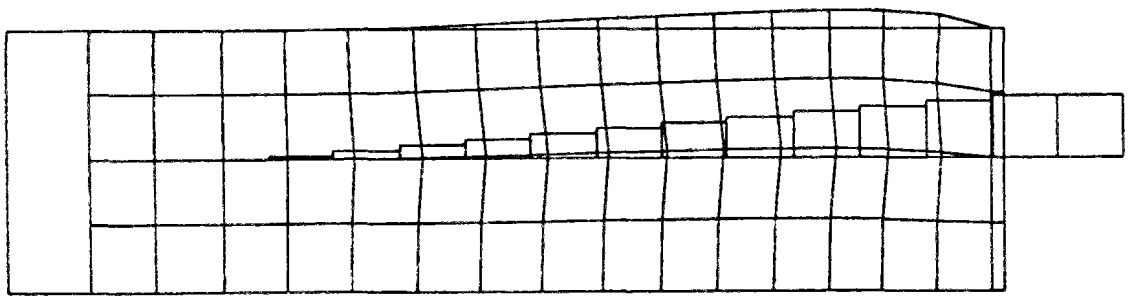


Figure C.5-5 : Distribution de la traction le long du clou et déformée du maillage (calcul avec FLAC)

5.3.2 Courbes effort - déplacement en tête

Les figures C.5-6 et C.5-7 présentent les courbes, donnant l'effort en tête T_0 en fonction du déplacement en tête y_0 , obtenues avec les logiciels FLAC et CESAR pour deux jeux de paramètres. Le premier jeu de paramètres est résumé dans le tableau C.5-1. Le deuxième jeu a été obtenu en multipliant par un coefficient de 2 le module d'Young du tube d'aluminium, ce qui revient à prendre pour le clou le module tangent initial, qui est à peu près égal à 2 fois le module de l'aluminium.

En début de chargement, FLAC donne des courbes légèrement plus basses que CESAR, tandis qu'en fin de chargement CESAR donne les courbes les plus basses. La méthode des éléments finis utilisée est donc plus rigide que la méthode des différences finies, en début de chargement, tandis qu'en fin de chargement, les tendances sont inversées. Cependant, globalement, les différences sont très faibles entre les résultats des deux méthodes numériques. La différence est au maximum de 1kN pour des efforts de l'ordre de 30 kN.

Les simulations sont très proches des mesures en début de chargement, c'est à dire dans la partie élastique des courbes. Ceci vient conforter la méthode de calcul proposée pour le coefficient de mobilisation k_τ à partir du module B_0 de la courbe d'arrachement, en tenant compte de l'allongement du clou (Recommandations CLOUTERRE 1991).

En fin de chargement, les simulations donnent des résultats un peu trop faibles. Un moyen de recaler les courbes est de prendre un module élastique deux fois plus fort. Cependant, la complexité de l'essai réel en fin de chargement est telle, notamment à cause du glissement de la barre d'aluminium par rapport au coulis, qu'il est inutile de vouloir modéliser simplement l'esssai.

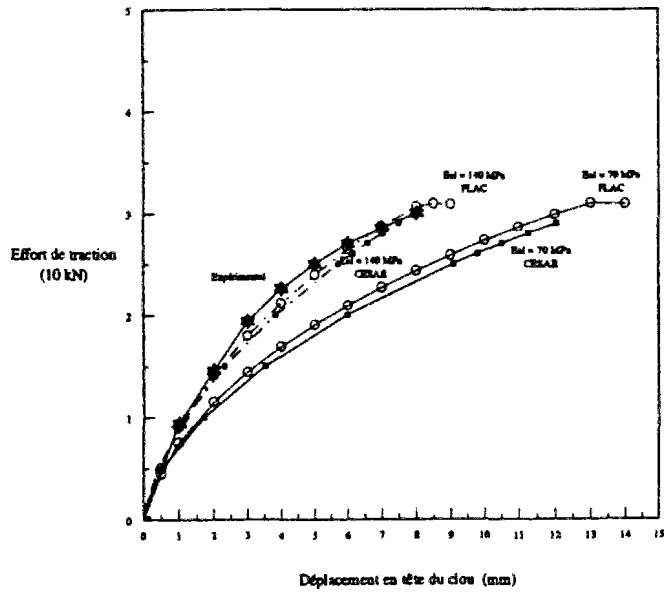


Figure C.5-6 : Courbes complètes donnant l'effort d'arrachement T_0 en fonction du déplacement en tête; comparaison des simulations avec les mesures. Essai d'arrachement du clou préalable No. 5

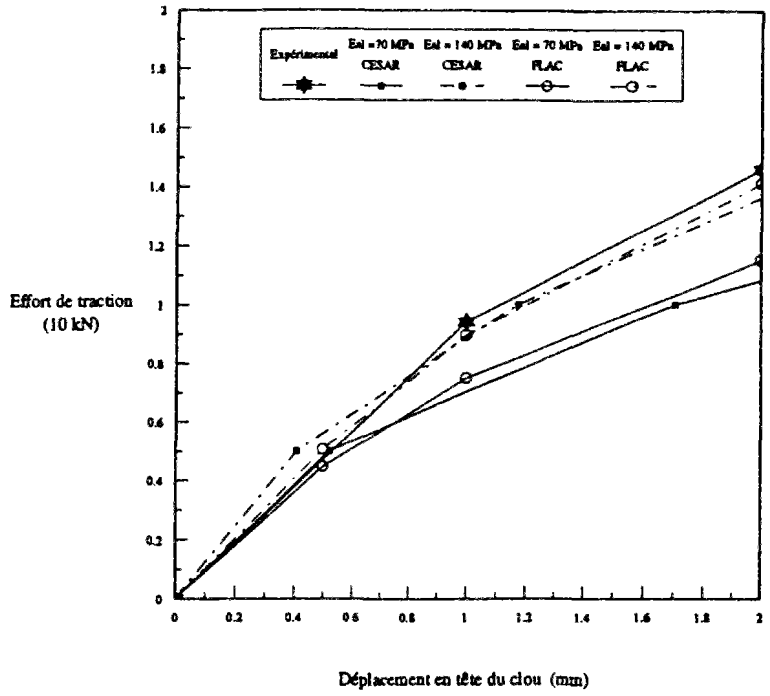


Figure C.5-7 : Courbes initiales donnant l'effort d'arrachement T_0 en fonction du déplacement en tête; comparaison des simulations avec les mesures. Essai d'arrachement du clou préalable No. 5

5.3.3 Conclusion sur les simulations numériques de l'essai d'arrachement

Une comparaison des différentes méthodes de détermination du coefficient de mobilisation du frottement latéral unitaire k_τ , à partir des résultats des essais d'arrachement et des essais pressiométrique, a été réalisée dans un premier temps.

Il est indispensable de réaliser des essais d'arrachement à vitesse contrôlée, en mesurant très précisément la courbe donnant l'effort d'arrachement en fonction du déplacement en tête, si l'on veut obtenir une valeur précise du coefficient de mobilisation du frottement latéral. Les valeurs estimées à partir des corrélations varient, en effet, dans un rapport de 1 à 5, ce qui n'est pas suffisamment précis pour réaliser un calcul en déformation d'un ouvrage au comportement aussi compliqué qu'un mur en sol cloué.

Connaissant précisément la valeur de k_τ pour l'essai d'arrachement du clou préalable No. 5, nous pouvons conclure que c'est la fourchette basse des corrélations CLOUTERRE, avec un coefficient m de 4,6 , qui correspond le mieux au site de Saint-Rémy-Lès-Chevreuse et au type de clou utilisé pour le mur CLOUTERRE-CEBTP No. 1. C'est cette corrélation qui est utilisée pour calculer les coefficients k_τ au niveau de chaque lit de clous, dans la simulation numérique complète du mur qui est présenté dans le prochain paragraphe 6.

En ce qui concerne la comparaison des méthodes des éléments finis et des différences finies, il convient de noter que celles-ci donnent des résultats très proches, à environ 1 kN près.

En début de chargement, les efforts prédits par la méthode des différences finies sont plus faibles, par contre, en fin de chargement, ils sont systématiquement plus élevés, ce qui tend à indiquer que les simulations par la méthode des différences finies, utilisée dans le cas présent, sont légèrement plus rigides que celles réalisées par la méthode des éléments finis. Cette différence de rigidité peut être attribuée, en partie, aux types d'éléments volumiques utilisés. Les éléments à quatre noeuds sont légèrement plus rigides que les éléments à huit noeuds.

Il convient de noter que, dans le cas présent, les gradients des contraintes et déformations aux niveaux des interfaces sont relativement faibles. Les différences observées entre les deux méthodes, dans le cas des essais triaxiaux avec frottement entre le sol et les nappes de renforcement, ne sont pas rencontrées ici même.

6 Calculs en déformation du mur en sol cloué CLOUTERRE-CEBTP No. 1

6.1 Présentation de l'expérimentation

L'originalité du Projet National CLOUTERRE a consisté dans la réalisation au CEBTP, sous la direction de Monsieur Claude Plumelle (1986), de trois murs expérimentaux en vraie grandeur qui ont été instrumentés et suivis depuis la construction jusqu'à la rupture. Pour une présentation plus détaillée de chacune de ces expérimentation, le lecteur pourra se référer aux rapports internes CLOUTERRE et aux Recommandations CLOUTERRE 1991.

L'objet de ce paragraphe étant le calcul en déformation des murs de soutènement en sol cloué, nous ne nous intéresserons pas à l'analyse de la rupture des trois murs en vraie grandeur, construits dans le cadre de CLOUTERRE. Les ruptures des murs CLOUTERRE-CEBTP No. 1 et 3 ont fait, par ailleurs, l'objet de plusieurs publications (Schlosser et al., 1991, 1992, 1993).

Parmi les trois murs en sol cloué en vraie grandeur du Projet National CLOUTERRE, nous avons sélectionné le mur CLOUTERRE-CEBTP No. 1 comme exemple de référence pour tester et valider les méthodes de calcul en déformations, que ce soit, la méthode des éléments finis ou la méthode des différences finies.

Le mur CLOUTERRE-CEBTP No. 1 a été construit dans un massif de sable reconstitué de 7 m de haut, 10 m de long et 7,5 m de large, entre deux murs verticaux recouverts de feuilles de polyane, graissées et assurant les conditions de déformations planes. Le mur a été construit en 7 phases de 1 m avec un espacement vertical S_v de 1,0 m et un espacement horizontal S_h de 1,15 m. Les clous sont inclinés de 10° par rapport à l'horizontale et leurs longueurs varient entre 6 et 8 m (figure C.6-1).

Les observations et mesures effectuées sur le mur CLOUTERRE-CEBTP No. 1 ont fait l'objet de plusieurs rapports internes CLOUTERRE et articles. Pour une présentation détaillée et complète, le lecteur pourra se référer à Plumelle (1993). Dans le paragraphe 6.2 qui suit, nous nous contenterons de présenter les résultats essentiels et en rapport direct avec les calculs effectués dans cette partie C.

6.2 Analyse des résultats de l'instrumentation

Le dépouillement et l'interprétation des mesures, effectuées sur des ouvrages en vraie grandeur, parfois dans des conditions difficiles, sont toujours sujets à débat, dans la mesure où le passage des données brutes recueillies à des variables, comme les déplacements ou les efforts de tractions et les contraintes, est forcément basé sur des hypothèses.

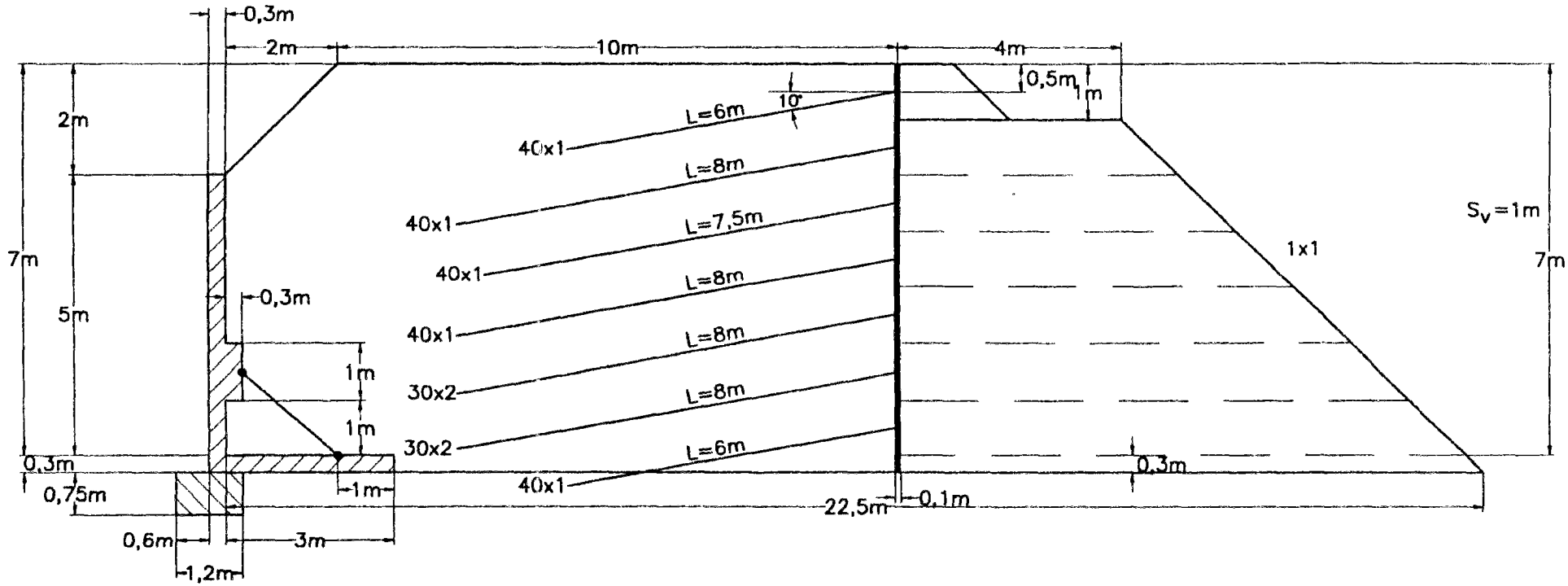


Figure C.6-1 : Vue en coupe du mur expérimental en vraie grandeur
CLOUTERRE-CEBTP No. 1 (Plumelle, 1986)

En particulier, le passage des déformations d'extension, mesurées sur les barres d'aluminium, aux efforts réels de traction dans les clous est, sans aucun doute, le plus difficile. En effet, la fissuration du coulis et la plastification de l'aluminium compliquent singulièrement l'interprétation des mesures. Le dépouillement des tractions dans les clous, réalisé par Plumelle (1986), peut être considéré, à plusieurs égards, comme très soigné et le meilleur qui soit possible, dans l'état actuel des connaissances. La figure C.6-2 présente les tractions mesurées dans les quatre lits de clous supérieurs à la fin de la phase 5.

Pour ce qui concerne les mesures inclinométriques, un problème similaire se pose, car ce sont des déplacements relatifs qui sont mesurés alors que nous sommes intéressés par des déplacements absolus. Le dépouillement initial des données inclinométriques brutes a été basé sur l'hypothèse qu'au dessous du niveau temporaire du fond de la fouille, il n'y avait pas de déplacements dans le sol. Rétrospectivement, cette hypothèse peut être considérée comme trop forte, étant donné les résultats des simulations numériques qui ont été réalisées depuis. Toutes celles-ci ont donné des déplacements plus faibles en pied de mur mais non nuls.

Nous avons donc repris les données inclinométriques brutes, qui nous ont été fournies gracieusement par Monsieur Claude Plumelle, et les avons dépouillées, en faisant, cette fois-ci, l'hypothèse que les déplacements sont nuls aux pieds des inclinomètres. Nous avons obtenus des valeurs de déplacements, légèrement plus importantes, mais qui restent encore dans la fourchette classiquement constatée sur les ouvrages en vraie grandeur. Ce sont ces données inclinométriques qui ont été choisies comme référence pour les calculs présentés ci-dessous dans le paragraphe 6.4 (figures C.6-3 et C.6-4).

Les cinq premiers mètres du mur en sol cloué CLOUTERRE-CEBTP No. 1 ont été construits en un mois, de décembre 1984 à janvier 1985. Le chantier a été ensuite arrêté pendant deux mois. Des déplacements différés significatifs se sont alors produits. Notamment, en tête du parement, une augmentation du déplacement δ_h , d'environ 2,4 mm, a été mesurée sur deux mois. Les deux dernières phases ont été achevées en moins de 15 jours.

Dans la présente étude, nous ne nous intéressons qu'aux déformations, dites instantanées, d'un mur en sol cloué. Nous ne considérerons pas les déformations différées des murs en sol cloué (cf. paragraphe 2, partie C). Seules les mesures, réalisées sur le mur pendant les cinq premières phases de construction, sont exemptes de tout effet de fluage du sol ou du béton. Par contre, les mesures réalisées durant les phases 6 et 7, ont été influencées de manière significative par les deux mois d'arrêt où un fluage important s'est produit.

Dans la suite de cette partie C, nous ne considérerons donc que les mesures des déplacements et tractions, effectuées durant les cinq premières phases de construction du mur CLOUTERRE-CEBTP No. 1. Les mesures des tractions à la cinquième phase sont présentées sur la figure C.6-2 tandis que les mesures des déplacements du parement et du sol aux niveaux des inclinomètres sont présentées sur les figures C.6-3 et C.6-4.

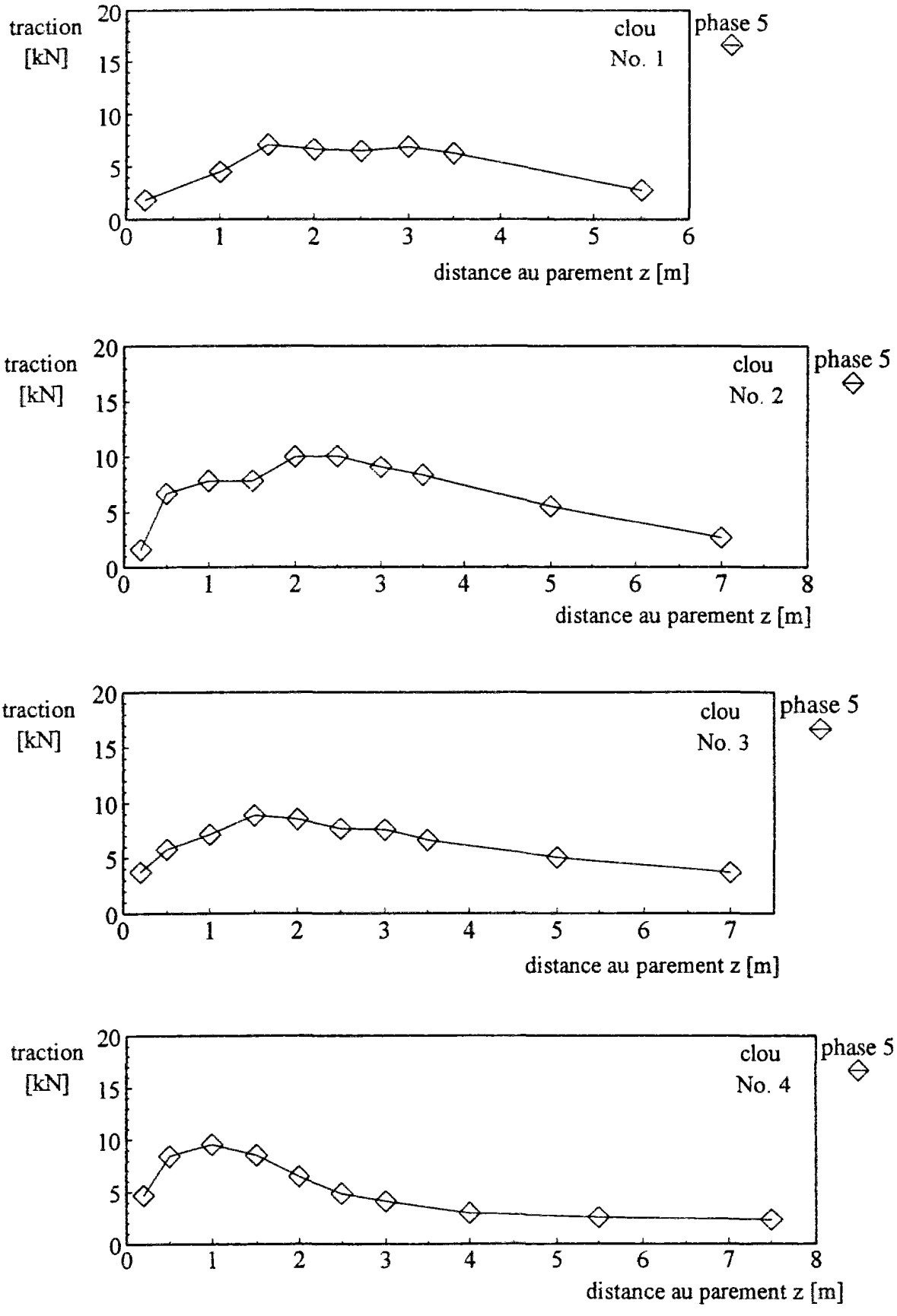


Figure C.6-2 : Distribution des tractions dans les clous à la fin de la phase 5
Mur CLOUTERRE-CEBTP No. 1

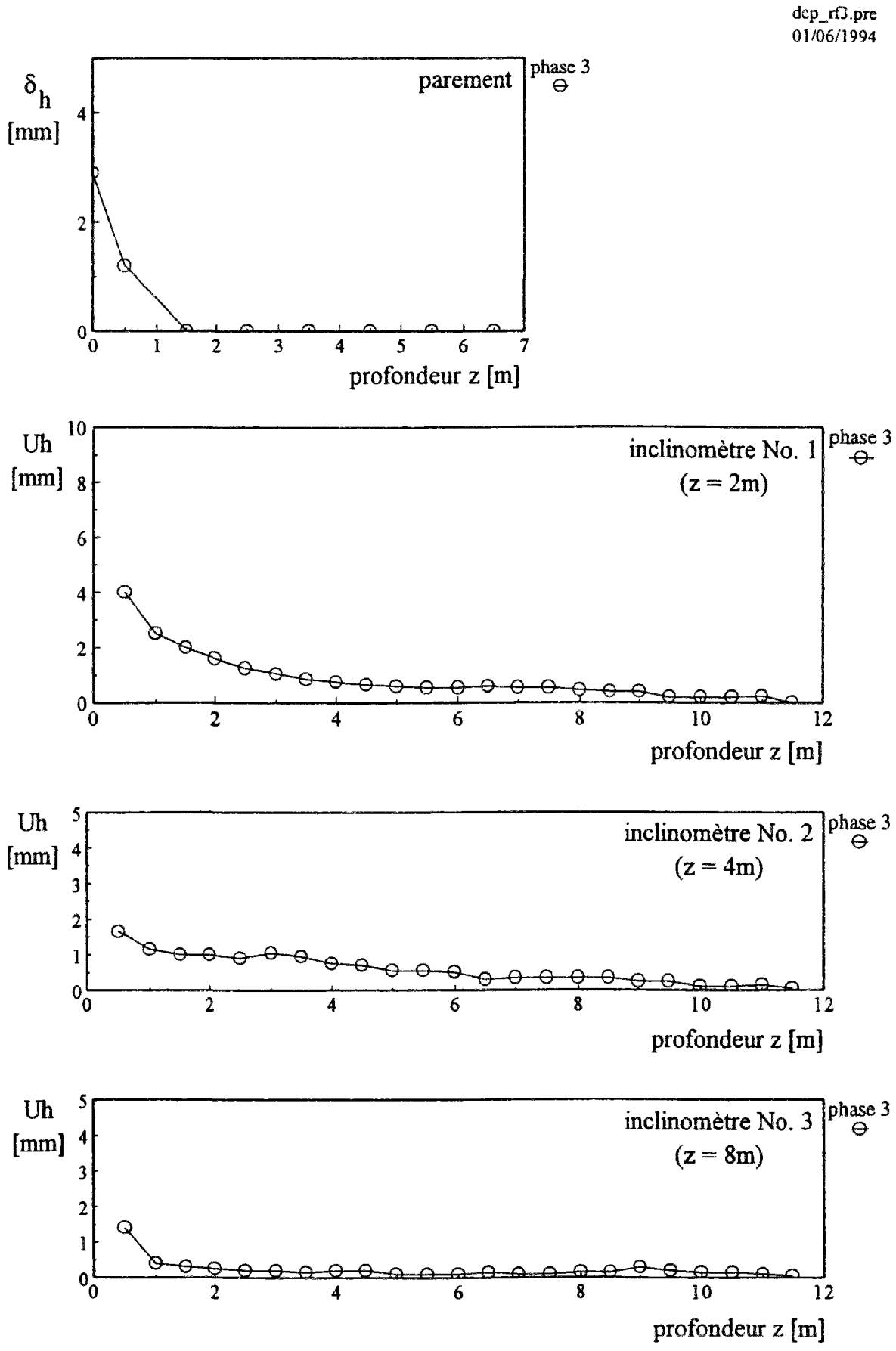


Figure C.6-3 : Déplacements du parement et du sol à la fin de la phase 3
mur en sol cloué CLOUTERRE-CEBTP No. 1

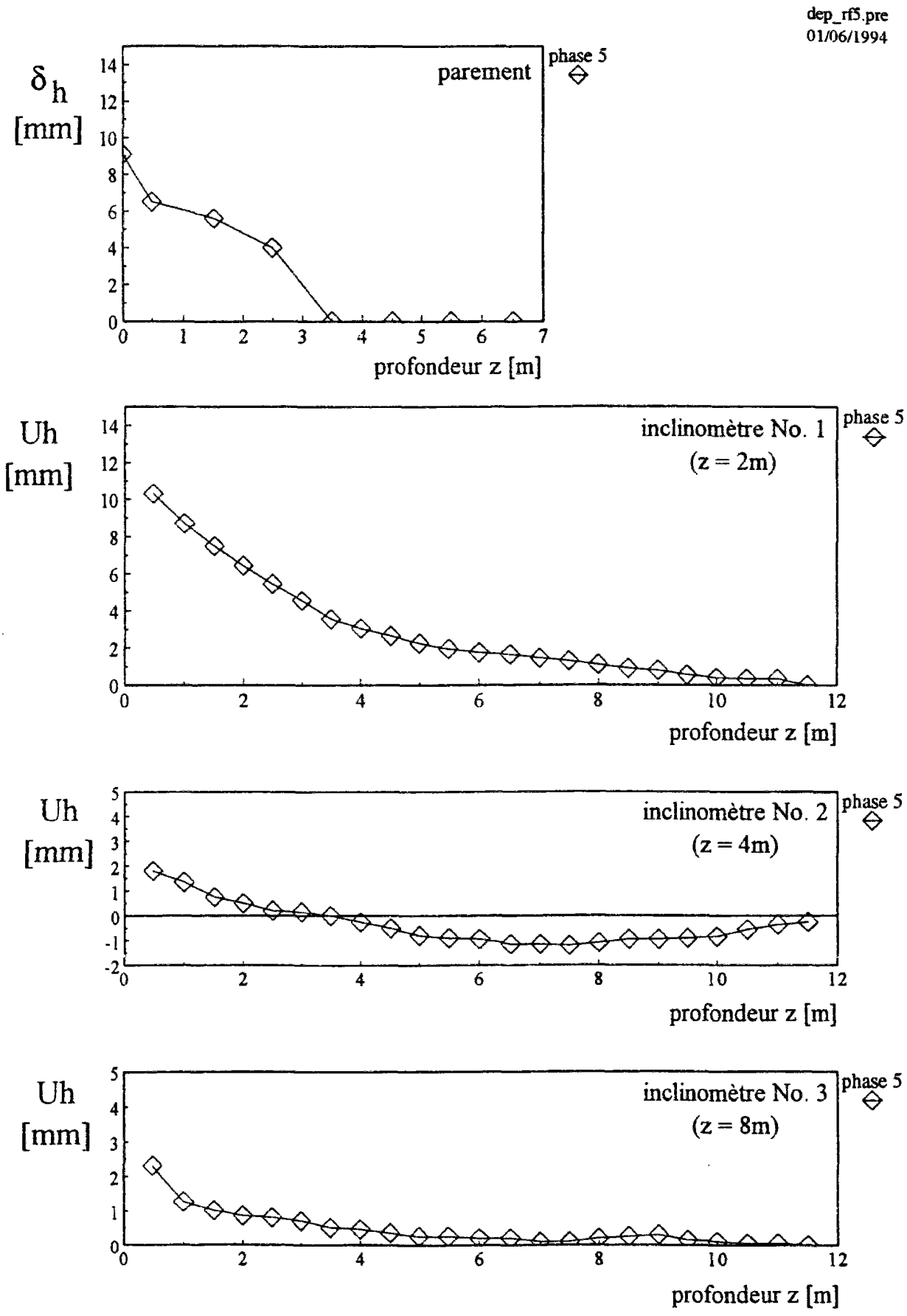


Figure C.6-4 : Déplacements du parement et du sol à la fin de la phase 5
mur en sol cloué CLOUTERRE-CEBTP No. 1

6.3 Détermination des caractéristiques des éléments constitutifs

Les différentes matériaux constitutifs du mur en sol cloué sont modélisés à l'aide de lois de comportement linéaires élastiques (béton du parement et du mur de soutènement en arrière du massif en sol cloué) ou élastiques parfaitement plastiques non associées (sol de remblai, sol de fondation, clous, interface sol-clou, interface sol-béton du mur de soutènement, interface clou-béton du parement).

Pour une loi de comportement élastoplastique parfaite avec une loi d'écoulement non associé, le nombre de paramètres est réduit au minimum indispensable : 2 paramètres pour la partie linéaire élastique du comportement (E, module d'Young et ν, coefficient de Poisson) et 4 paramètres pour la partie plastique (c, cohésion, ϕ, angle de frottement interne, σ_t , résistance en traction, si le critère est tronqué, et ψ , angle de dilatance). Compte tenu du nombre de types de matériaux, environ 28 paramètres mécaniques sont à déterminer de manière précise.

La détermination des paramètres a été faite à partir des données disponibles pour le mur CLOUTERRE-CEBTP No. 1, des données publiées dans la littérature et d'essais réalisés en laboratoire.

L'un des points essentiels, dans les calculs en déformation de mur en sol cloué, est la détermination des paramètres de déformation, élastiques (E, ν) et plastiques (ψ). La recherche en Géotechnique a pendant longtemps été axée sur la détermination des paramètres de rupture qui suffisent pour un calcul à la rupture d'ouvrage. Ce n'est que récemment, avec le développement des méthodes de calcul en déformation, que les recherches se sont plus orientées sur la détermination des paramètres de déformation. A titre d'exemple, le 11ème Congrès Européen de Mécanique des Sols et Travaux de Fondations, qui s'est déroulé à Florence en 1991, a choisi comme thème : "Déformation du sol et déplacements des structures".

Les paramètres de rupture ne sont pas pour autant à négliger car ils contrôlent le facteur de sécurité. Quand celui-ci s'approche de 1, les déformations augmentent de manière significative. En particulier, dans l'étude paramétrique présentée plus loin, nous avons trouvé une influence très importante de la cohésion du sol sur les déplacements du mur en sol cloué. Quand elle passe de 3 kPa à 4 kPa, tous les autres paramètres étant maintenus constants, les déplacements en tête du parement varient du simple au double, tandis que les tractions dans certains clous varient d'environ 30%. La détermination des paramètres de rupture est donc tout aussi importante que celle des paramètres de déformation pour un calcul en déformation.

Dans les paragraphes qui suivent, nous nous attacherons à analyser, en détail et de manière critique, les méthodes de détermination des paramètres pour chacun des matériaux constitutifs d'un mur en sol cloué.

6.3.1 Sols

Le sable utilisé pour le mur CLOUTERRE-CEBTP No. 1 est du type sable de Fontainebleau. Il a été mis en place à une densité relative de 0,6, ce qui correspond à un sable moyennement dense. Le poids volumique moyen, contrôlé en place au gammadensimètre, est de 16,1 kN/m^3. Les caractéristiques mécaniques du sable à déterminer pour les calculs en déformation sont : le module d'Young E, le coefficient de Poisson ν, la cohésion c, l'angle de frottement ϕ, l'angle de dilatance ψ, la résistance en traction σ_t .

Le module d'Young et le coefficient de Poisson des sols de remblai et de fondation ont été déterminés à partir des résultats des essais pressiométriques réalisés sur le site, des données publiées dans la littérature sur le sable de Fontainebleau ainsi que d'essais triaxiaux réalisés au CERMES sur ce sable.

Plusieurs types d'essais en place : SPT, pénétromètre dynamique léger et pressiomètre, ont été réalisés sur le remblai reconstitué à Saint-Rémy-Lès-Chevreuse pour les besoins du Projet National CLOUTERRE. Tous les essais in situ concordent entre eux.

6.3.1.1 Paramètres élastiques

6.3.1.1.1 Corrélations avec les essais pressiométriques

Deux essais pressiométriques ont été réalisés, à 5 et 6 m de profondeur dans le remblai reconstitué (Plumelle, 1986) (figure C.6-5). Par ailleurs, pour les besoins de l'expérimentation du mur Freyssisol (Schlosser et al., 1993), deux essais, à 6 et 20 m, ont été réalisés dans le sol de fondation (figure C.6-6).

Il ressort des essais pressiométriques profonds, qu'il existe une couche de sol très raide ($E_M >> 50$ MPa et $p_l >> 5$ MPa), entre 7 et 11 m sous le remblai utilisé pour le mur en sol cloué. Le maillage des modèles numériques s'arrête au niveau du sommet de cette couche raide.

Les résultats des essais pressiométriques réalisés dans le sol de remblai sont rassemblés sur la figure C.6-5 et le tableau C.6-1. Une régression linéaire a été faite pour déterminer le profil pressiométrique continu (tableau C.6-2).

Jézéquel et Méhauté (1979) ont proposé des corrélations entre le module pressiométrique Ménard E_M et les modules pressiométriques mesurés au pressiomètre autoforeur (PAF), à 0, 2 et 5% de déformation volumique $\Delta V/V_0$ (tableau C.6-3).

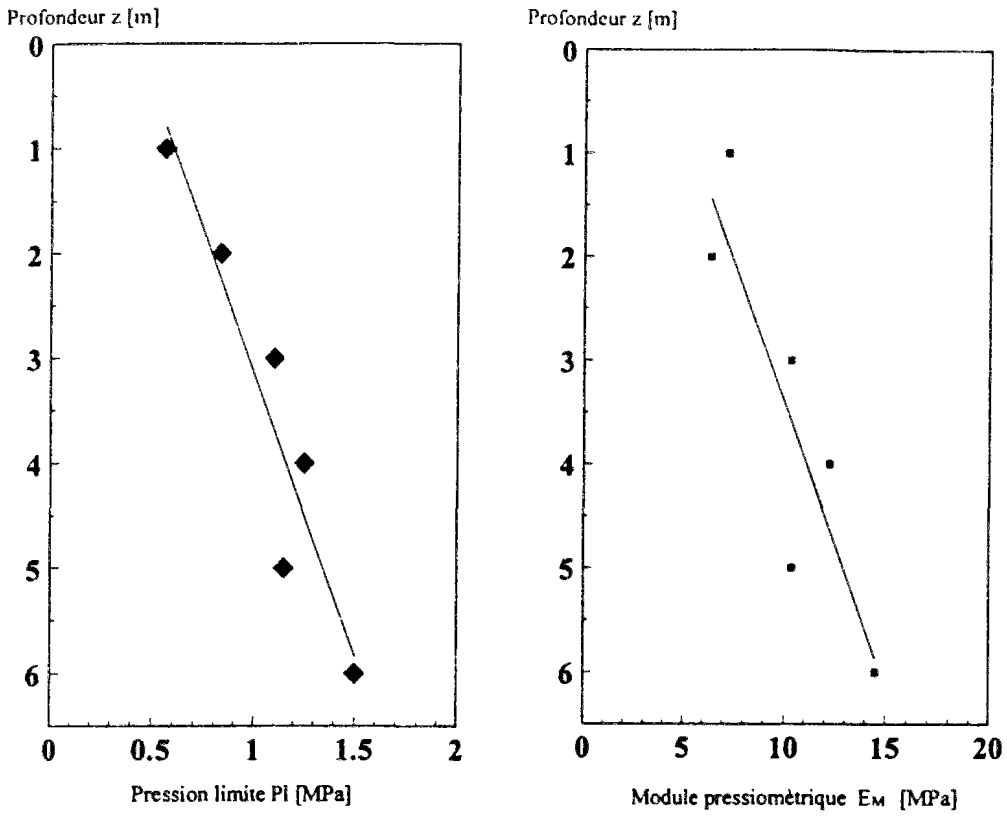


Figure C.6-5 : Profil pressiométrique dans le sol de remblai : mesures (Plumelle, 1986) et régression linéaire

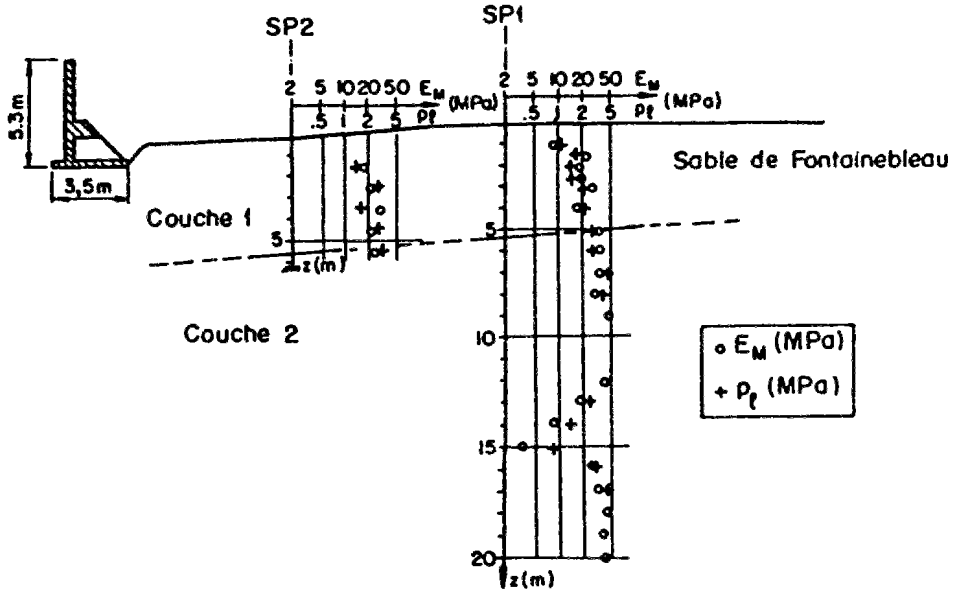


Figure C.6-6 : Profil pressiométrique dans le sol de fondation (Schlosser et al., 1993)

Tableau C.6-1: Résultats pressiométriques des forages PR1 et PR2 (Plumelle, 1986)

No. de lit de clous	Profondeur z [m]	Forage PR1		Forage PR2		Module E_M moyen 10^3 kPa	Pression p_l moyenne 10^3 kPa
		module E_M 10^3 kPa	pression p_l 10^3 kPa	module E_M 10^3 kPa	pression p_l 10^3 kPa		
1	0,5	6,9	0,53	7,5	0,58	7,2	0,55
2	1,5	5,8	0,8	6,9	0,86	6,35	0,83
3	2,5	9,3	1,1	11,3	1,1	10,3	1,1
4	3,5	16,0	1,2	8,3	1,3	12,15	1,25
5	4,5	14,3	1,3	6,4	1,0	10,35	1,15
6	5,5			14,5	1,5	14,5	1,5
7	6,5			14,5	1,5	14,5	1,5

Tableau C.6-2: Régression linéaire sur les résultats pressiométriques

No. du lit de clous	Profondeur z [m]	Module E_M 10^3 kPa	Pression p_l 10^3 kPa
1	0,5	6,55	0,65
2	1,5	7,99	0,82
3	2,5	9,43	0,99
4	3,5	10,87	1,16
5	4,5	12,31	1,33
6	5,5	13,75	1,50
7	6,5	13,75	1,50

Tableau C.6-3 : Corrélations proposées par Jézéquel et Le Méhauté (1979)

	G_{p0} / G_M	G_{p2} / G_M	G_{p5} / G_M
argiles	11,3	5,42	3,03
sables	4,1	3,47	2,53

L'essai pressiométrique Ménard est un essai qui est réalisé dans un forage où le sol est partiellement remanié. Le module pressiométrique Ménard E_M ne peut donc pas être considéré comme étant égal au module de déformation du sol. L'essai au pressiomètre autoforeur (PAF) est un essai où le sol est beaucoup moins remanié autour du forage. Le module mesuré au PAF peut, dans une certaine mesure, être considéré comme une valeur approchée du module du sol non remanié. Les corrélations indiquées ci-dessus donnent, pour un sable, une valeur du module d'Young du sol comprise entre 2 et 4 fois la valeur du module pressiométrique Ménard E_M :

$$2\,E_M \leq E \leq 4\,E_M \qquad \text{(C.6-1)}$$

Ces corrélations sont basées sur les mêmes données que les corrélations de Frank et Zhao (1982) qui servent pour l'estimation du coefficient k_τ de mobilisation du frottement latéral unitaire en fonction du module pressiométrique Ménard E_M . La comparaison des valeurs données par ces corrélations pour l'essai d'arrachement du clou préalable No. 5 (cf. paragraphe 5, partie C), avec les valeurs réellement mesurées pour le coefficient k_τ , nous a permis de conclure que le coefficient initial de mobilisation k_τ de la loi de Frank et Zhao (1082) est trop rigide par un coefficient d'environ 2. Si l'on applique cette règle aux corrélations de Jézéquel et Le Méhauté (1979), comme le module initial est égal à 4,1 fois le module E_M , nous obtenons pour le module d'Young une valeur égale à environ 2 fois E_M .

Ce choix semble un bon compromis, par rapport aux études antérieures où le module d'Young a été pris simplement égal au module pressiométrique E_M (Nanda et Delage, 1989) et par rapport au module tangent initial égal à 4,1 E_M , qui semble un peu trop raide. Les comparaisons entre deux calculs en déformation du mur en sol cloué, avec un module d'Young E égal dans un cas à 2 E_M et dans l'autre cas à 4 E_M , nous ont donné une fourchette dans laquelle les mesures de déplacements en tête s'inscrivent parfaitement (cf. paragraphe 6.5.1).

Le module pressiométrique moyen au sein du remblai, entre 0 et 7,3 m de profondeur, est de 10 MPa. Nous prendrons donc dans le calcul de référence un module d'Young de 20 MPa pour le sol de remblai.

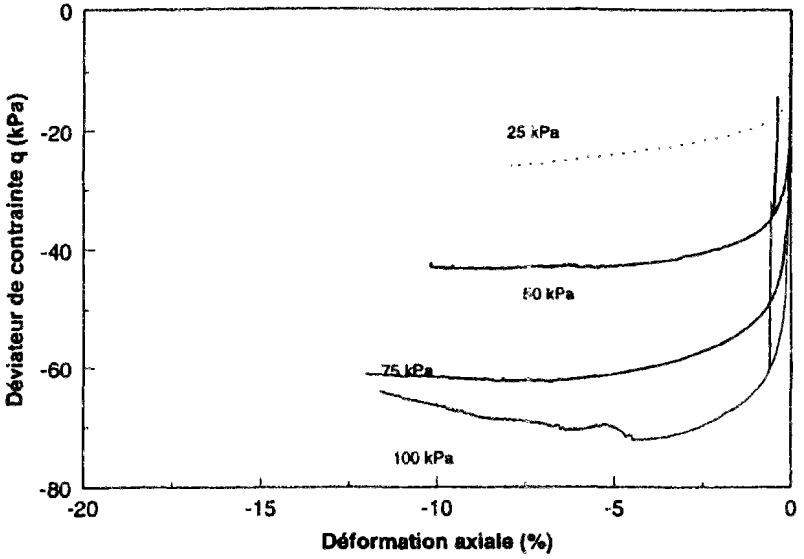
Pour le sol de fondation, entre 0 et 7 m de profondeur sous le remblai, le module pressiométrique moyen est de 35 MPa. Nous en déduisons une valeur de 70 MPa pour le module d'Young du sol de fondation.

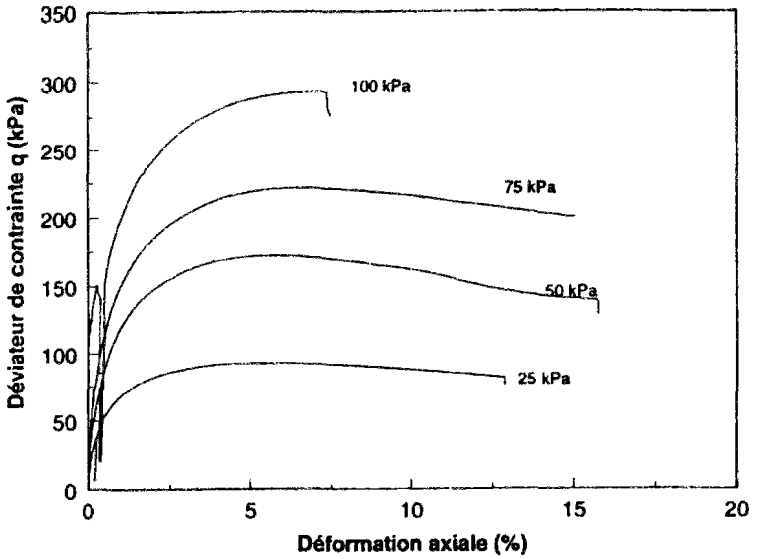
6.3.1.1.2 Essais triaxiaux en compression

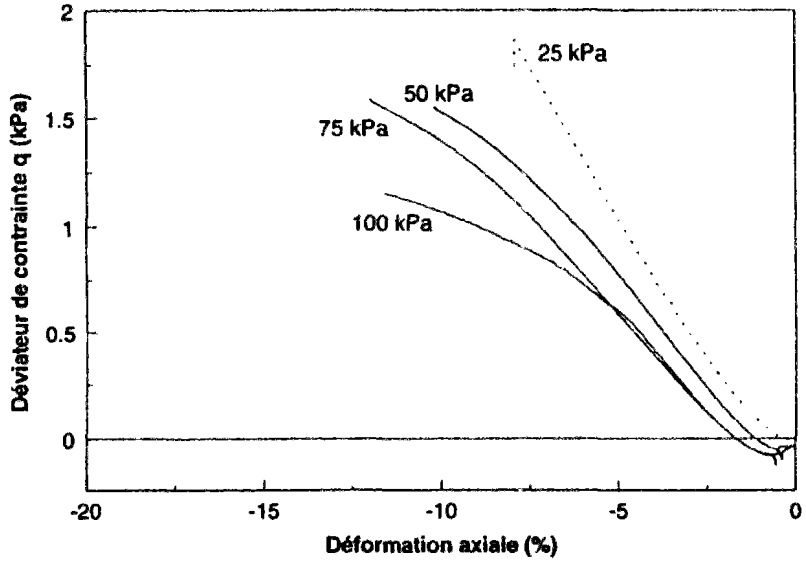
Des essais triaxiaux, en compression et en extension, ont été réalisés sur le sable de Fontainebleau utilisé sur le site de Saint-Rémy-Lès-Chevreuse (Dupla et Canou, 1994) (tableaux C.6-4 et C.6-5) (figures C.6-7a et C.6-7b).

Le module tangent initial E_t , qui n'est pas le module élastique, varie entre 21 et 59 MPa, pour les essais en compression, et entre 13,7 et 35 MPa, pour les essais en extension. Le module élastique E_u , qui est mesurée en décharge, varie entre 60 et 153 MPa, pour les essais en compression, et entre 31 et 51 MPa, pour les essais en extension. Comme cela a été classiquement observé, les modules en extension sont plus faibles que ceux en compression. Les essais en extension sont, a priori, plus adaptés au chemin de chargement suivi par le sol en fond de fouille, tandis que les essais en compression sont plus adaptés au chemin suivi par le sol derrière le mur.

Si l'on calcule une contrainte de confinement équivalente à la profondeur, en prenant la pression moyenne et un coefficient de poussée des terres au repos de 0,4, on obtient un rapport de E_t par E_M , qui varie entre 2,2 et 2,8, pour les essais en compression, et de 1,4 et 2,2, pour les essais en extension. Le rapport de E_u par E_M , varie entre 6,3 et 7,4, pour les essais en compression, tandis que pour les essais en extension, les rapports pour les deux valeurs disponibles tournent autour de 2,4.







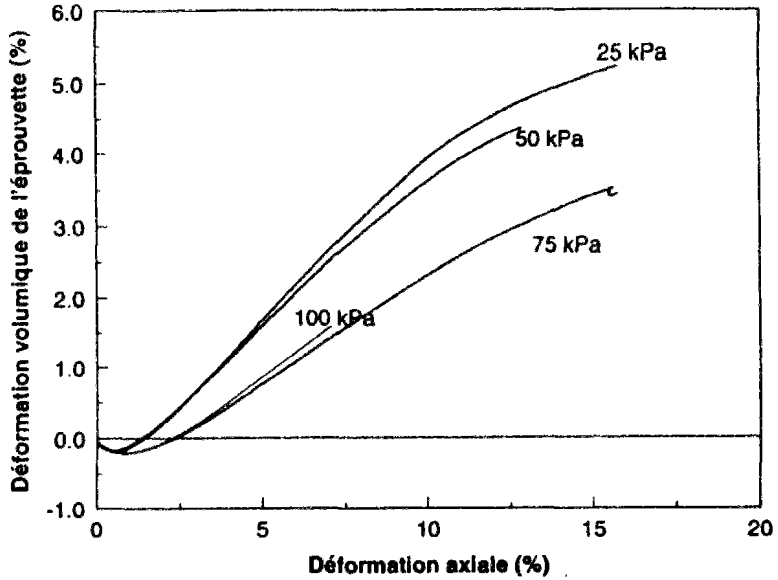


Figure C.6-7a : Essais en compression

Figure C.6-7b : Essais en extenssion

Figure C.6-7 : Essais triaxiaux réalisés sur le sable de Fontainebleau
du site de Saint-Rémy-Lès-Chevreuse (Dupla et Canou, 1994)

Le module élastique réel, qui se mesure en décharge, est connu pour être trop rigide dans les calculs en déformation. Le module tangent initial est, en fait, un module sécant, à un niveau de déformation très faible, de l'ordre du dixième de pour-cent, suivant l'appareillage utilisé et la précision des mesures. Il est plus adapté aux calculs en déformation d'ouvrages. Le rapport entre ces deux modules, E_u / E_t , est en moyenne de 2,8, pour les essais en compression, et de 1,1, pour les essais en extension. Tout essai confondu, on obtient un rapport d'environ 2.

La valeur moyenne du rapport E_t / E_M , entre 0 et 7 m de profondeur, est de 2,5, pour les essais en compression, et de 1,8, pour les essais en extension. Nous avons choisi précédemment une valeur de 2 entre le module d'Young du sol et le module pressiométrique Ménard, ce qui correspond à la fourchette des essais en laboratoire.

Tableau C.6-4 : Résultats des essais triaxiaux en compression réalisés par Dupla et Canou (1994)

I_D [--]	σ_c [kPa]	z [m]	E_t [MPa]	E_u [MPa]	ϕ [°]	ψ^* [°]	υ [--]	E_M [MPa]	E_t/E_M [--]	E_u/E_M [--]	E_u/E_t [--]
0,65	100	10,35	59	153	36,4	22.3	0,37	20,7	2,84	7,40	2,60
0,60	75	7,76	46	121	37	21,2	0.42	17,0	2,63	7,14	2,72
0,65	50	5,18	35	108	39,1	32,6	0,40	13,2	2,71	8,19	3,02
0,60	25	2,59	21	60	40,3	33.2	0,41	9,55	2,197	6,28	2,86

(*) : $\sin\Psi=\sqrt{(2/3)}*s/(1-s)$ où s est la pente de la courbe (ε_v, ε_1)

Tableau C.6-5 : Résultats des essais triaxiaux en extension réalisés par Dupla et Canou (1994)

I_D [--]	σ_c [kPa]	z [m]	E_t [MPa]	E_u [MPa]	ϕ [°]	ψ^* [°]	υ [--]	E_M [MPa]	E_t/E_M [--]	E_u/E_M [--]	E_u/E_t [--]
0,65	100	10,3	35	53	24.2	9.6	0,36	20,7	1,69	2,56	0,95
0,60	75	7,76	37.0	--------	29.3	10	0,40	17,0	2,18	--------	----------
0,60	50	5,18	24.2	31	28.1	----	-----	13,2	1,85	2,35	1,27
0,65	50	5,18	20.4	--------	27.1	10,5	0,38	13,2	1,55	--------	----------
0,60	25	2,59	13.7	--------	-----	15	0,41	9,55	1,44	--------	----------

Le coefficient de Poisson ν a été pris égal à 0,33 dans les calculs, avant que les essais en laboratoire ne soient disponibles. L'influence de ν est, toute proportion gardée, relativement faible sur les résultats.

6.3.1.2 Paramètres plastiques

En ce qui concerne les paramètres plastiques du sable de Fontainebleau, plusieurs sources de données existent. Pour l'ensemble des calculs à la rupture qui ont été réalisés sur le mur CLOUTERRE-CEBTP No. 1, une valeur de 38° a été choisie en combinaison avec une cohésion apparente de 3 kPa. Ce couple de valeurs a donné toute satisfaction (Schlosser et al., 1992,1993; Recommandations CLOUTERRE 1991). Les essais de cisaillement réalisés par Freyssisol sur le même sol ont donné un angle de frottement de 37° pour une cohésion apparente de 5kPa (figure C.6-8). Le dépouillement des essais, aussi bien triaxiaux que de cisaillement, donne un couple de valeurs, (c, ϕ). La valeur de c dépend fortement du choix qui est fait pour l'angle de frottement ϕ.

Des essais triaxiaux, en compression et en extension, ont été réalisés au CERMES par Dupla et Canou (1994) dans le cadre de CLOUTERRE II (figures C.6-7a et C.6-7b). Les essais en compression ont donné un angle de frottement variant entre 37 et 40° , suivant la contrainte de confinement. En extension, l'angle varie de 24 à 29°. La majeure partie de l'ouvrage en sol cloué étant soumis à une compression, nous avons choisi un angle de frottement de 38°.

Un sable de granulométrie uniforme avec une légère teneur en fine et une teneur en eau non nulle, comme le sable de Fontainebleau utilisé pour le mur en sol cloué CLOUTERRE-CEBTP No. 1, possède une cohésion apparente, de l'ordre de quelques kPa. La détermination de cette cohésion apparente est primordiale, car elle conditionne le stabilité du sol excavé et non protégé en pied de mur. La détermination de cette cohésion, qui est due aux forces capillaires entre les grains, a fait l'objet de peu d'études.

Un étude très intéressante a été menée par Petit (1987) sur ce sujet. Un mélange de sable de Fontainebleau avec différentes teneurs en limon, variant entre 0 et 50%, et différentes teneurs en eau, comprises entre 6 et 12%, a été étudié. La figure C.6-9a donne l'évolution de la cohésion apparente en fonction du pourcentage de limon. La figure C.6-9b donne l'évolution de la cohésion en fonction de la teneur en eau w. Quand celle-ci augmente, la cohésion diminue. Pour le sable du site de Saint-Rémy-Lès-Chevreuse, la teneur en eau est de 10,7% tandis que la teneur en particule argileuse est de 5%. On en déduit une valeur de la cohésion apparente de l'ordre de 3 à 4 kPa.

Des résultats tout à fait similaires ont été publiés par Gässler (1993) pour un sable fin avec une granulométrie uniforme (figure C.6-10a). Deux types d'essais ont été réalisés. Le premier type d'essais consiste d'essais de cisaillement en place, sur un sol non remanié, avec une boite de cisaillement fabriquée ad hoc. Le second type d'essais consiste d'essais en laboratoire sur des échantillons remaniés. Les essais indiquent que la cohésion apparente, qui est due aux forces capillaires entre les grains, dépend du niveau de déformation (figure C.6-10b). En effet, au cours du cisaillement, les grains se réarrangent et les forces intergranulaires sont très nettement réduites. Les valeurs de cohésion apparente obtenues pour ce sable, dont la teneur en eau moyenne est de 5,8%, varient entre 2 et 6 kPa (tableau C.6-6). Ces résultats concordent avec les mesures de Petit (1987).

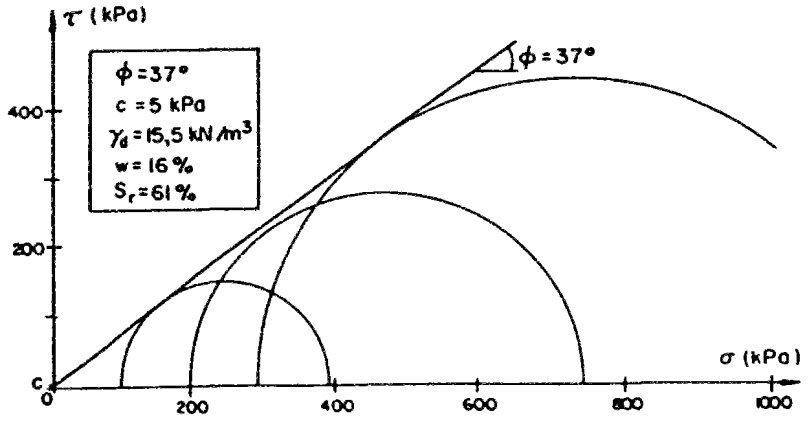


Figure C.6-8 : Résultats d'essais de cisaillement direct sur le sable de Fontainebleau (Schlosser et al., 1993)

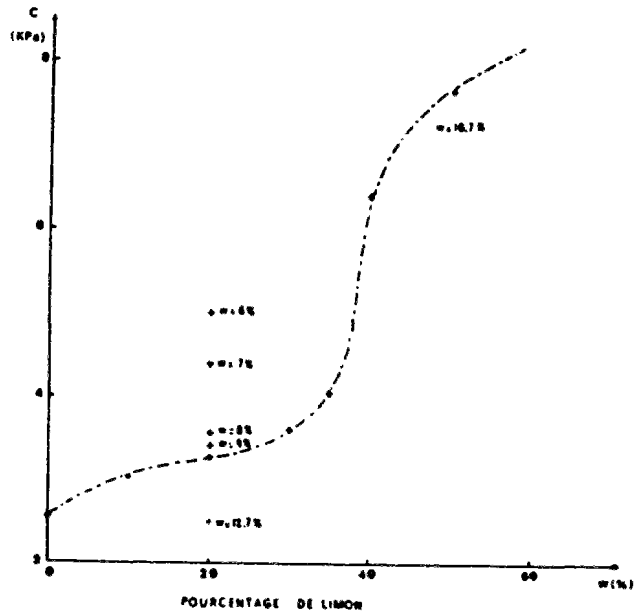


Figure C.6-9a : Evolution de la cohésion apparente en fonction de la teneur en limon

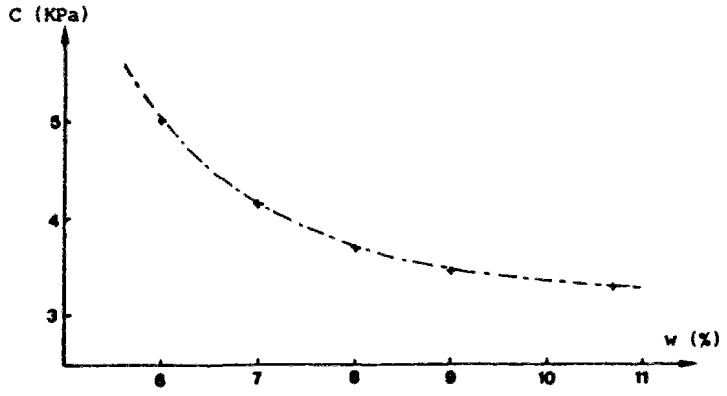


Figure C.6-9b : Evolution de la cohésion apparente en fonction de la teneur en eau

Figure C.6-9 : Etude de Petit (1987) sur des mélanges de sable de Fontainebleau et de limon à différentes teneur en eau

sample	depth [m]
①	1.50
②	2.40
③	3.75
④	5.30

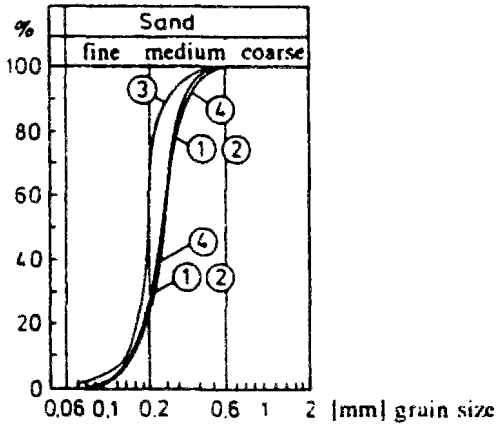


Figure C.6-10a : Courbes granulométriques du sable

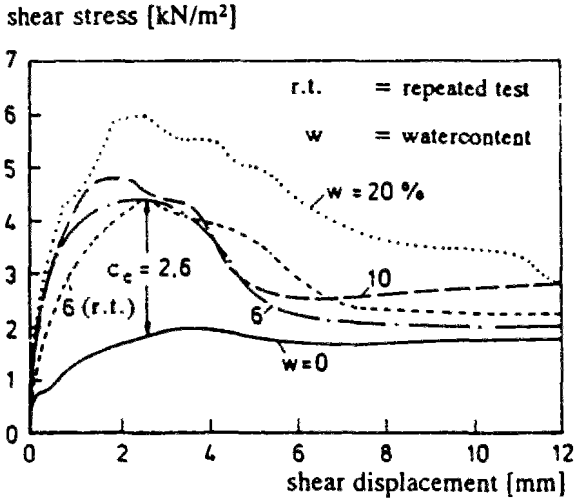


Figure C.6-10b : Résultats des essais de cisaillement direct réalisés sur le sable

Figure C.6-10 : Etude réalisée par Gässler (1993) pour le premier mur exprimental en sol cloué construit en 1976

Tableau C.6-6 : Cohésion apparente obtenu avec des essais de cisaillement in situ (Gässler, 1993)

No. des tests	Profondeur [m]	Cohésion apparente [kPa]	Valeur moyenne de la cohésion apparente [kPa]
1	2,5	3,2	2,9
2		2,0	
3		3,5	
4	5,0	4,9	5,5
5		6,2	

Outre les deux paramètres de rupture du critère de Mohr-Coulomb, c et ϕ, il convient de déterminer pour un sol élastoplastique, l'angle de dilatance ψ, qui est le seul paramètre de déformation plastique. La détermination de cet angle n'est pas possible à partir des essais in situ. Seuls les essais en laboratoire, avec mesure des déformations volumiques, permettent de le déterminer. Très peu de données sur l'angle de dilatance du sable de Fontainebleau ont été publiées. Les seules données, que nous ayons trouvées, sont les essais triaxiaux de Dupla et Canou (1994). Ils ont mesurés, en compression, un angle de dilatance variant entre 21 et 33°, et en extension, un angle variant entre 10 et 15°, quand la pression de confinement varie entre 25 et 100 kPa. Pour les calculs du mur en sol cloué, nous avons été amenés à prendre une valeur de 25° , ce qui correspond à la moyenne des ψ mesurés aux essais triaxiaux en laboratoire, pour des niveaux de contraintes correspondant aux sept premiers m du remblai. Pour le sol de fondation, l'angle a été pris égal à 20°. Un calcul paramétrique avec un angle de dilatance variable a été réalisé en faisant varier linéairement l'angle ψ, entre 30 et 20°, de 0 à 7 m de profondeur.

6.3.1.3 Synthèse des valeurs de calcul des paramètres mécaniques des sols

Les valeurs de calculs des paramètres mécaniques des sols de remblai et de fondation sont rassemblées dans les tableaux C.6-7 et C.6-8.

Tableau C.6-7 : Récapitulatif des données du "**calcul de référence**" avec paramètres constants du mur en sol cloué CLOUTERRE-CEBTP N°1 : données relatives au sol de fondation et au sol de remblai

Sol de remblai cloué (SRi) ou excavé (SEi) loi de comportement élastique parfaitement plastique critère de Mohr-Coulomb non tronqué, loi d'écoulement non associée		
Module d'Young constant avec la profondeur $\langle E_M \rangle_{z = 0 \text{ à} 7,3m} = 10$ MPa	$E = 2 \langle E_M \rangle$	20,0 10^3 kPa
poids volumique	γ	16.1 kN/m^3
coefficient de Poisson	ν	0.33
angle de frottement	ϕ	38°
angle de dilatance	ψ	25°
cohésion	c	3 kPa
Sol de fondation (SFi) loi de comportement élastique parfaitement plastique critère de Mohr-Coulomb non tronqué, loi d'écoulement non associée		
Module d'Young constant avec la profondeur ($\langle E_M \rangle_{z = 7,3 \text{ à} 14,3m} = 35$ MPa)	$E = 2 \langle E_M \rangle$	70 10^3 kPa
poids volumique	γ	17 kN/m^3
coefficient de Poisson	ν	0.33
angle de frottement	ϕ	38°
angle de dilatance	ψ	20°
cohésion	c	0 kPa

Tableau C.6-8 : Récapitulatif des données du calcul de référence avec propriétés variables du mur en sol cloué CLOUTERRE-CEBTP N°1 : données relatives au sol de fondation et au sol de remblai

Sol de remblai cloué (SRi) ou excavé (SEi) loi de comportement élastique parfaitement plastique critère de Mohr-Coulomb non tronqué, loi d'écoulement non associée							
hauteur / fondation	$\langle E_M \rangle$	$E = 2 \langle E_M \rangle$	γ	ν	ϕ	ψ	c
m	kPa	kPa	kN/m^3	.33	degré	degré	kPa
13.3-14.3	6.55 10^3	13.10 10^3	16.1	.33	38	20	3
12.3-13.3	7.99 10^3	15.98 10^3	16.1	.33	38	21.66	3
11.3-12.3	9.43 10^3	18.86 10^3	16.1	.33	38	23.33	3
10.3-11.3	10.87 10^3	21.74 10^3	16.1	.33	38	24.99	3
9.3-10.3	12.31 10^3	24.62 10^3	16.1	.33	38	26.66	3
8.3-9.3	13.75 10^3	27.50 10^3	16.1	.33	38	28.33	3
7.0-8.3	13.75 10^3	27.50 10^3	16.1	.33	38	30	3
Sol de fondation (SFi) loi de comportement élastique parfaitement plastique critère de Mohr-Coulomb non tronqué, loi d'écoulement non associée							
hauteur / fondation	$\langle E_M \rangle$	$E = 2 \langle E_M \rangle$	γ	ν	ϕ	ψ	c
m	kPa	kPa	kN/m^3	.33	degré	degré	kPa
6-7	24.6 10^3	49.2 10^3	17	.33	38	20	0
5-5	27.8 10^3	55.6 10^3	17	.33	38	20	0
5-5	30 10^3	60 10^3	17	.33	38	20	0
3-4	33.2 10^3	66.4 10^3	17	.33	38	20	0
2-3	36.4 10^3	72.8 10^3	17	.33	38	20	0
1-2	39.6 10^3	79.2 10^3	17	.33	38	20	0
0-1	42.8 10^3	85.6 10^3	17	.33	38	20	0

6.3.2 Détermination des caractéristiques des clous

La loi de comportement réelle des clous utilisés pour le mur en sol cloué CLOUTERRE-CEBTP No. 1 est relativement bien connue, dans la mesure où un essai en laboratoire a été réalisé sur un clou fabriqué en place dans le remblai puis déterré pour être testé. Le comportement des clous est relativement complexe car la fissuration progressive du coulis joue un rôle important.

6.3.2.1 Essais de tubes d'aluminium

Deux essais de traction ont été réalisés en laboratoire sur un tube, de diamètre ϕ 40 mm, d'épaisseur e 1 mm, et sur un tube, de diamètre ϕ 30 mm, d'épaisseur e 2 mm. Le module d'Young E_{al} mesuré est de 70 000 MPa. La limite élastique conventionnelle σ_e mesurée à 0,2% est de 127 MPa pour le tube ϕ 40 mm et de 94 MPa pour le tube ϕ 30 mm, alors que la limite élastique garantie par le vendeur est de 80 MPa.

Tableau C.6-9 : Caractéristiques de l'aluminium

Caractéristiques mécaniques	Symboles	Mesures
module d'Young	E_{al}	70 000 MPa
limite élastique à 0,2 %	σ_e (0,02 %)	garantie :80 MPa tube ϕ 40 : 127 MPa tube ϕ 30 : 94 MPa tube carré 40 : 177 MPa
contrainte limite	σ_y	garantie :200 MPa tube ϕ 40 : 245 MPa tube ϕ 30 : 235 MPa tube carré 40 : 206 MPa

Par contre, pour la contrainte de rupture σ_y , celle-ci est mesurée à 245 MPa (ε = 17 %) et 235 MPa (ε = 22 %) respectivement pour les tubes ϕ 40 et 30 mm, alors qu'elle est garantie à 200 MPa pour une déformation ε_r de 17% (tableau C.6-9). Un essai supplémentaire sur un tube rectangulaire en alliage d'aluminium, fourni par le même fournisseur, a donné une contrainte limite élastique σ_e de 177 kPa et une contrainte limite de rupture σ_y de 206 kPa, à 10,6% de déformation axiale.

6.3.2.2 Essai d'un clou fabriqué en place et testé en laboratoire

Dans le cadre de l'expérimentation CLOUTERRE-CEBTP No. 1, un clou fabriqué sur le site, a été déterré puis testé en laboratoire pour mesurer ses caractéristiques mécaniques réelles (Plumelle, 1986) (figure C.6-11). La courbe donnant la force en fonction de la déformation axiale est caractérisée par trois phases. Dans la première phase, jusqu'à un effort de 4 kN, le coulis est intact et globalement le clou a une rigidité supérieure au tube d'aluminium seul :

$$E_c A_c = E_{al} A_{al} + E_s A_s \qquad \text{(C.6-2)}$$

où E_{al} est le module d'Young de l'aluminium, A_{al} , la section d'aluminium, E_s , le module d'Young du coulis de scellement, A_s , la section de coulis de scellement, $E_c A_c$, la rigidité globale du clou, qui est mesurée et égale à 22 000 kN.

Dans une deuxième phase, entre 4 et 13 kN, le coulis est fissuré et le clou a un module de rigidité tangent qui est quasiment égal à celui du tube d'aluminium seul :

$$E_c A_c \equiv E_{al} A_{al} \qquad \text{(C.6-3)}$$

où $E_c A_c$ est égale à environ 8 470 kN. Ce module de rigidité est quasiment 2,5 fois plus faible que le module de rigidité initial. Si on le divise par la section d'aluminium A_{al} égale à 122,5 10^{-6} m^2 , on trouve un module d'Young E_{al} pour l'aluminium de 69 105 kPa, qui est très proche du module mesuré sur les tubes seuls de 70 000 kPa.

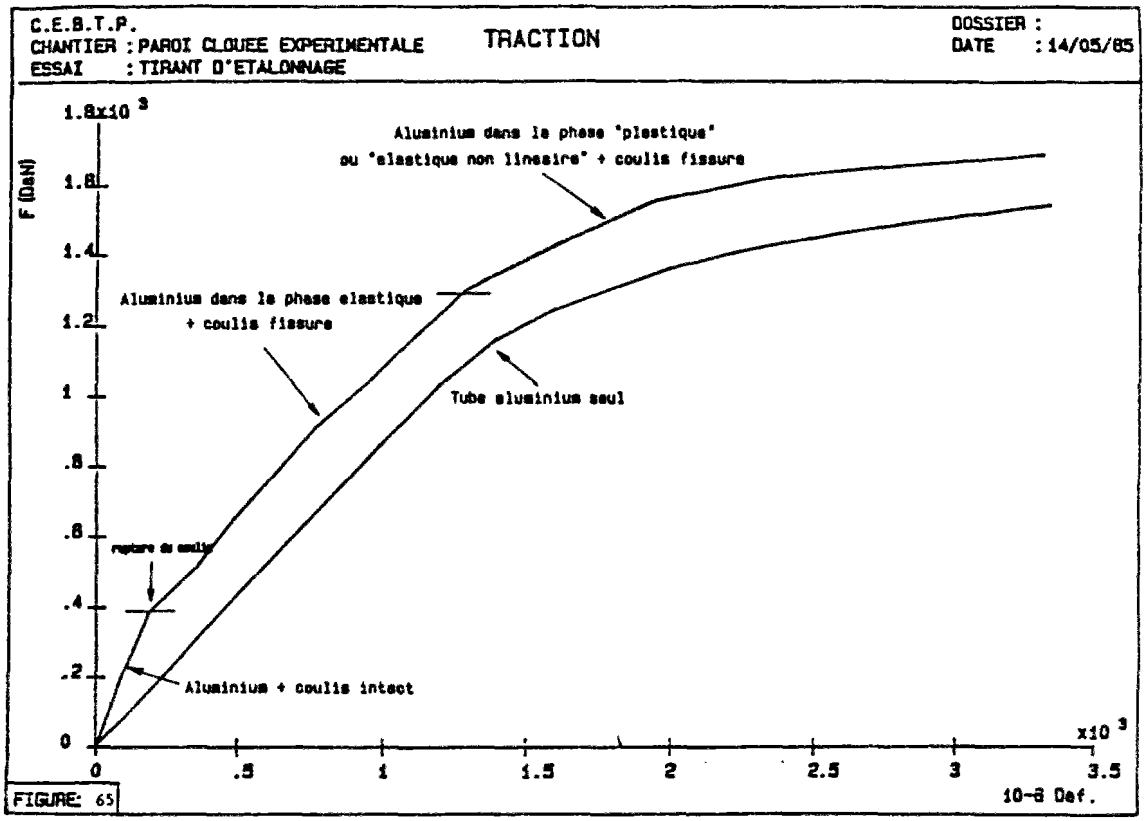


Figure C.6-11 : Essai du clou fabriqué sur site et testé en laboratoire (Plumelle, 1986)

Dans la troisième phase, le clou plastifie et l'essai est arrêté pour une déformation axiale ε_a de 3,5% et une traction de 16,81 kN, qui est légèrement supérieure à la traction de rupture T_R du tube seul, qui est de 14,27 kN :

$$T_R \equiv A_{al}\, \sigma_y \qquad \text{(C.6-4)}$$

La rupture du tube d'aluminium se produit pour une déformation de 17%. L'essai du clou a donc été arrêté bien avant que la rupture de l'aluminium ne soit atteinte. La valeur mesurée est donc intermédiaire entre la limite élastique et la limite de rupture.

La courbe effort-déformation des clous scellés sera modélisée par un comportement élastoplastique sans écrouissage où la rigidité axiale du clou, notée $E_c\, A_c$, sera pris égale au module du tube seul, c'est à dire $E_{al}\, A_{al}$ où E_{al} est égal à 70 000 MPa et A_{al} est la section du tube d'aluminium. La traction limite des clous modèles sera prise égale à la traction limite élastique des tubes d'aluminium seuls.

Un tel choix conduit à avoir des clous modèles plus déformables que les clous réels, en début de chargement, et moins déformables, en fin de chargement, quand la limite de rupture est atteinte. La différence, entre le comportement initial des clous réels et celui des clous modèles, est d'autant plus grande que le rapport des sections entre le coulis et l'aluminium est grand.

Le passage entre les propriétés mécaniques des clous réels et celles des clous modèles est détaillé dans le paragraphe 3 de cette partie C. Le tableau C.6-10 résume les propriétés élastoplastique sélectionnés pour les clous réels et celles utilisées dans les calculs en déformation du mur en sol cloué CLOUTERRE-CEBTP No. 1. Le tableau C.6-11 présente le détail pour chaque lit de clous.

Tableau C.6-10 : Récapitulatif des données du "**calcul de référence**" du mur en sol cloué CLOUTERRE-CEBTP N°1 : données relatives aux clous, à l'interaction sol-clou et clou-parement

Clous modèles (Cij) loi de comportement élastique parfaitement plastique		
Module d'Young des clous modèles (réduit par rapport aux clous réels pour tenir compte de l'espacement)	$\tilde{E} = E/S_h$	$61\ 10^6$ kPa
Module d'Young des clous réels	E	$70\ 10^6$ kPa
Sections des clous modèles (prises égales aux sections des clous réels pour respecter la relation $\tilde{E}\tilde{S} = ES/S_h$)	$\tilde{S} = S$	variable suivant les lits
contrainte limite élastique (réduite par rapport aux clous réels pour tenir compte de l'espacement $\tilde{S}\ \tilde{\sigma}_e = S\ \sigma_e/S_h$)	$\tilde{\sigma}_e = \sigma_e/S_h$	$95{,}65\ 10^3$ kPa
contrainte limite élastique des clous réels	σ_e	$110\ 10^3$ kPa

Tableau C.6-11 : Caractéristiques de chacun des lits de clous

No. clou	Tube diamètre [mm] * épaisseur [mm]	Section A_{al} [mm²]	Longueur L_c [m]	Rigidité E_{al} A_{al} [kN]	Traction limite σ_e A_{al} [kN]
1	16*1	$47{,}1\ 10^{-6}$	6,0	2 873	5,2
2	40*1	$122{,}5\ 10^{-6}$	8,0	7 473	13,5
3	40*1	$122{,}5\ 10^{-6}$	7,5	7 473	13,5
4	40*1	$122{,}5\ 10^{-6}$	8,0	7 473	13,5
5	30*2	$175{,}9\ 10^{-6}$	8,0	10 730	19,3
6	30*2	$175{,}9\ 10^{-6}$	8,0	10 730	19,3
7	40*1	$122{,}5\ 10^{-6}$	6,0	7 473	13,5

6.3.3 Interaction sol-clou

6.3.3.3.1 Coefficient de mobilisation

L'analyse précise des résultats de l'essai préalable d'arrachement No. 5, avec une modélisation numérique par éléments finis et différences finies (cf. paragraphe 5, partie C), a permis de choisir le paramètre m, le plus approprié au site de Saint-Rémy-Lès-Chevreuse, dans la corrélation CLOUTERRE qui donne le module de mobilisation k_τ en fonction du module pressiométrique E_M (Recommandations CLOUTERRE 1991).

Connaissant cette corrélation, il a été ensuite possible de calculer le coefficient élastique de mobilisation k_τ , moyen pour le sol de remblai, dans le cas du calcul de référence où les propriétés sont constantes en fonction de la profondeur.

Dans le calcul paramétrique où les propriétés mécaniques sont variables avec la profondeur, le coefficient élastique k_τ pour chaque niveau de clous a été calculé à partir du profil pressiométrique mesuré sur le site (tableau C.6-12).

Tableau C.6-12 : Calcul du coefficient de mobilisation du frottement latéral à partir du module pressiométrique

No. de lit de clous	Profondeur z [m]	Module E_M 10^3 kPa (régression linéaire)	Corrélation de k_τ avec E_M / R_c par le coefficient m		
			m = 1,4 10^3 kPa	m = 3 10^3 kPa	m = 4,6 10^3 kPa
1	0,5	6,55	148,5	69,3	45,2
2	1,5	7,99	181,2	84,6	55,1
3	2,5	9,43	213,8	99,8	65,1
4	3,5	10,87	246,5	115	75
5	4,5	12,31	279,1	130,3	85
6	5,5	13,75	311,8	145,5	94,9
7	6,5	13,75	311,8	145,5	94,9

La corrélation entre E_M / R_c où R_c est le rayon extérieur du clou, qui est égal à 31,5 mm, et k_τ est donnée par la relation linéaire suivante :

$$\frac{E_M}{R_c} = m\, k_\tau \qquad \text{(C.6-5)}$$

où la valeur du coefficient adimensionnel m a été déterminé pour le site de Saint-Rémy-Lès-Chevreuse comme étant égal à 4,6 (cf. paragraphe 5, partie C).

6.3.3.3.2 Frottement latéral unitaire limite

Il est classique de considérer que le frottement latéral unitaire limite est constant avec la profondeur z (Cartier et Gigan, 1983). Cette hypothèse est en fait une hypothèse simplificatrice, compte tenu de la grande dispersion observée sur les résultats des essais d'arrachement, sur un même site et pour une même technique. Cependant, si l'on admet que le frottement latéral unitaire limite q_s est directement corrélé à la pression limite pressiométrique p_l , il faut en tirer alors la conclusion que le frottement latéral varie avec la profondeur.

A cet égard, les résultats obtenus sur le site des murs CLOUTERRE-CEBTP No. 1, 2 et 3 sont intéressants. Le profil pressiométrique donne une pression limite qui augmente avec la profondeur avec un taux d'environ 0,17 MPa par mètre de profondeur (figure C.6-5).

Lors de la mise en rupture du mur CLOUTERRE-CEBTP No. 3, par raccourcissement des clous télescopiques, le frottement latéral le long des barres métalliques utilisées a été mesuré précisément. Le frottement latéral unitaire q_s , pour ce type de clous, augmente avec la profondeur à un taux d'environ 25 kPa par mètre de profondeur (figure C.6-12).

L'approximation linéaire des corrélations CLOUTERRE entre 0,5 et 1,0 MPa de pression p_l , conduit à un rapport de 0,067 entre q_s et p_l . On déduit alors du profil pressiométrique et des corrélations CLOUTERRE que le frottement latéral q_s devrait augmenter d'environ 12 kPa par mètre. Les mesures donnent un taux de 25 kPa par mètre. Le frottement latéral donné par les corrélations est donc deux fois trop faible, ce qui normal puisque les courbes, sur lesquelles sont basées les corrélations CLOUTERRE, correspondent à la moyenne moins un écart type des données collectées pour le base d'essais d'arrachement.

Le mur en sol cloué CLOUTERRE-CEBTP No. 1 a été dimensionné pour qu'il se rompe par cassure des clous. Cela se voit sur l'analyse à la rupture du mur en fin de construction, qui est insensible à toute réduction du frottement latéral unitaire q_s par un coefficient $\Gamma_{m,qs}$ inférieur à 4,3. Le comportement du mur à la rupture, mais aussi durant la construction, est donc insensible à une réduction par un coefficient 2 du frottement latéral unitaire. Nous prendrons donc, pour les calculs en déformation, les valeurs données par les corrélations CLOUTERRE.

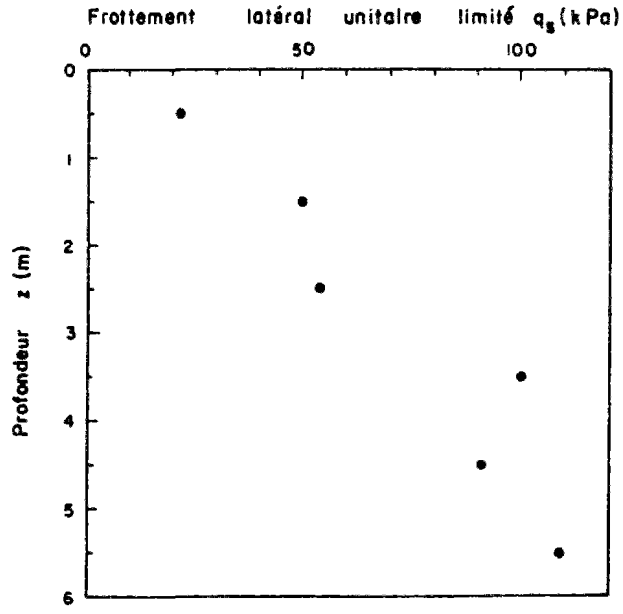


Figure C.6-12 : Variation du frottement latéral unitaire avec la profondeur
Mur CLOUTERRE-CEBTP No. 3 (Schlosser et al., 1993)

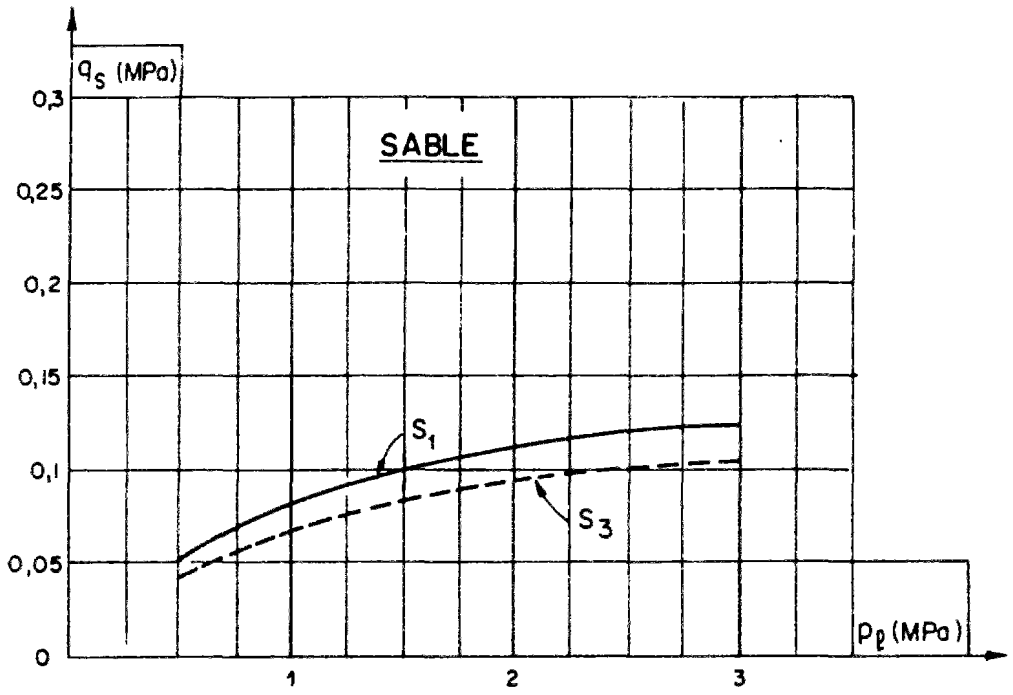


Figure C.6-13: Corrélations CLOUTERRE pour des clous scellés sous pression gravitaire ou battus dans un sable (Recommandations CLOUTERRE 1991)

Si l'on regarde soigneusement, la distribution de la traction $T_i(z)$, dans le clou numéroté i, pour une phases quelconque, il faut noter que la pente dT/dz est très faible. Cllle-ci est directement reliée au cisaillement $\tau(z)$ par le relation classique :

$$\tau = \frac{1}{\pi D_c} \frac{dT}{dz} \qquad \text{(C.6-6)}$$

La pente maximale mesurée sur les distributions des tractions dans les clous est de l'ordre de 10 kN/m, ce qui donne pour des clous, de diamètre de forage 63 10^{-3} m, un cisaillement maximal de 50 kPa environ. Or les corrélations CLOUTERRE, qui sont relativement conservatives, donnent un frottement latéral unitaire minimal de 65 kPa (figure C.6-13). Le choix de la valeur de q_s pour les calculs en déformation, durant les phases de construction, a donc une faible importance et nous prendrons les valeurs des corrélations CLOUTERRE.

Il est intéressant de comparer les corrélations CLOUTERRE, par rapport aux corrélations disponibles dans le littérature pour des inclusions de type similaire. En particulier, nous avons regardé les corrélations fournies par le FOND 72 et par Bustamante et Gianeselli (1981) (tableau C.6-13). On peut constater que les corrélations CLOUTERRE fournissent des valeurs de frottement latéral, qui sont conservatives, et qui pourtant sont très supérieures aux valeurs données par les autres corrélations plus anciennes, ce qui peut s'expliquer par l'amélioration des techniques d'injection (Recommandations CLOUTERRE 1991).

Tableau C.6-13 : Valeurs du frottement latéral unitaire données par les corrélations CLOUTERRE, FOND 72 et Bustamante et al. (1984)

Clous No.	Profondeur z [m]	Pression p_l [MPa]	Corrélations de q_s avec p_l		
			CLOUTERRE	FOND. 72	Bustamante et Gianeselli (1981)
1	0,5	65	65	50	68
2	1,5	82	82	67	73
3	2,5	99	99	77	80
4	3,5	116	116	85	80
5	4,5	133	113	95	80
6	5,5	150	150	100	80
7	6,5	150	150	100	80

Le tableau C.6-14 récapitule l'ensemble des données nécessaires pour les calculs en déformation, en ce qui concerne l'interaction entre le sol et les clous. Le passage entre les propriétés réelles de l'interaction tridimensionnelle sol-clou et les propriétés mécaniques équivalentes en déformations planes (calcul 2D) des interfaces sol-clou modèles est expliqué en détail dans le paragraphe 3 de cette partie C. Le tableau C.6-14 ne présente que les valeurs numériques qui en résultent.

6.3.3.3.3 Interaction entre le béton et les clous

Suivant le motif de sol cloué utilisé, les clous peuvent être rattachés directement au parement sans être autorisés à se déplacer par rapport à celui-ci ou glisser par rapport à celui-ci. Il serait souhaitable, dans un motif de sol cloué, de modéliser l'interaction entre les clous et le béton du parement de la même manière qu'entre les clous et le sol.

La définition de la fonction de transfert de charge est alors plus délicate. Le déplacement relatif entre un clou et le béton du parement, correspond au glissement du clou dans le béton, qui est très faible, et à l'enfoncement du parement autour de la tête du clou. C'est un détail qui ne joue pas souvent un rôle important. Cependant, quand on veut modéliser un début de rupture par arrachement des clous hors du parement, comme cela a pu être observé sur certains murs, il est alors indispensable de modéliser l'interaction entre les clous et le béton du parement par une fonction de transfert de charge.

Cette option a été développée dans le motif de sol cloué utilisé sur CESAR. Le coefficient de mobilisation du frottement latéral dans le béton a été pris arbitrairement égal à 100 fois la valeur de celui pour l'interaction entre les clous et le sol, pour une première étude (tableau C.6-15).

Tableau C.6-14 : Récapitulatif des données du "**calcul de référence**" du mur en sol cloué CLOUTERRE-CEBTP N°1 : données relatives aux clous, à l'interaction sol-clou et clou-parement

Interaction sol-clou (ISCi) loi de comportement élastique parfaitement plastique critère de Coulomb non tronqué loi d'écoulement non associée		
module de rigidité normale de l'interface modèle*	k_n	10^{+8} kPa/m
module de rigidité tangentielle de l'interface modèle ** $k_s = k_\tau \frac{\pi D_c}{2 S_h}$	k_s	5,94 10^3 kPa/m
module réel de mobilisation du frottement latéral : $k_\tau = 2 \langle E_M \rangle / m D_c$ avec $\langle E_M \rangle_{z=0 \text{ à } 7,3 \text{ m}} = 10$ MPa et m = 4.6	k_τ	69 10^3 kPa/m
diamètre du forage des clous réels	D_c	63 10^{-3} m
espacement horizontal des clous réels	S_h	1,15 m
cohésion des éléments d'interface : $c_i = \frac{\pi D_c}{2 S_h} q_s$ **	c_i	9,25 kPa
angle de frottement des éléments d'interface	ϕ_i	0°
frottement latéral unitaire des clous réels : $q_s = 0.1\ p_l$ avec $\langle p_l \rangle_{z=0 \text{ à } 7.3 \text{ m}} = 1,07$ MPa	q_s	107,5 kPa

*Dans CESAR et PLAXIS, la fonction de transfert de charge entre un clou et le sol ou le béton du parement, est modélisée par deux éléments d'interface. Il faut introduire une rigidité normale, qui est purement numérique, pour ces deux éléments d'interface. Dans FLAC, la fonction de transfert de charge entre un clou et le sol ou le béton est modélisée directement, il n'y a pas besoin d'introduire de rigidité normale.

** Dans CESAR ET PLAXIS, la fonction de transfert de charge entre un clou et le sol, est modélisée par deux éléments d'interface, d'où le coefficient 2 au dénominateur, puisque les deux "ressorts tangentiels" de rigidité k_s et de frottement limite défini par la cohésion c_i , sont montés en parallèle. Dans FLAC, la fonction de transfert de charge entre un clou et le sol ou le béton du parement est modélisée directement, il n'y a donc pas besoin du coefficient 2.

Tableau C.6-15 : Récapitulatif des données du "**calcul de référence**" du mur en sol cloué CLOUTERRE-CEBTP N°1 : données relatives à l'interaction clou-parement

Interaction clou-béton du parement loi de comportement élastique		
module de rigidité normale de l'interface modèle*	k_n	10^{+8} kPa/m
module de rigidité tangentielle de l'interface modèle : k_s(clou – béton) = 100 k_s(sol – clou)	k_s	7 10^6 kPa/m

6.3.4 Béton

Les caractéristiques mécaniques du béton évoluent avec le temps t , mesuré en jours. Dans les cas courants, un béton est défini par la valeur de sa résistance à la compression à l'âge de 28 jours, notée f_{c28} , et encore appelée valeur caractéristique requise ou spécifiée. Pour des sollicitations s'exerçant sur un béton dont l'âge de j jours est inférieur à 28 jours, on se réfère à la résistance mécanique f_{cj} obtenue au jour considéré. Par exemple la résistance caractéristique à la traction du béton à j jours, notée f_{tj} est conventionnellement définie la formule suivante qui est valable pour f_{tj} et f_{cj} exprimées en MPa et $f_{cj} \leq 60$ MPa :

$$f_{tj} = 0,6 + 0,06\, f_{cj} \qquad \text{(C.6-7)}$$

Le module de déformation longitudinal E_{ij} d'un béton dépend de nombreux facteurs et en particulier, il évolue avec la durée du chargement et les déformations différées (retrait et fluage). Pour un béton durcissant naturellement sans chargement et sous des contraintes normales d'une durée d'application inférieure à 24 heures, on admet qu'à l'âge de j jours, le module E_{ij} est donnée par la formule suivante où la résistance f_{cj} est exprimée en MPa :

$$E_{ij} = 11\,000\, \sqrt[3]{f_{cj}} \qquad \text{(C.6-8)}$$

Si les effets du retrait et du fluage sont pris en compte dans le calcul des déformations, le module de déformations différée E_{ij} à j jours, qui permet de calculer la déformation finale du béton (déformations instantanées augmentées du fluage), est donnée par la formule suivante où la résistance f_{cj} est exprimée en MPa :

$$E_{ij} = 3\,700\, \sqrt[3]{f_{cj}} \qquad \text{(C.6-9)}$$

Les valeurs données ci-dessus pour le retrait tiennent compte d'un pourcentage moyen de ferraillage. La présence du ferraillage, typiquement de l'ordre de 0,5% pour une nappe de ferraillage et un parement d'épaisseur 15 cm, a pour effet de rigidifier légèrement le parement. Cependant, comme le parement est fissuré sous l'effet du retrait du béton, on pourra ne pas tenir compte du ferraillage pour le module du béton.

Il est admis que pour des bétons tels que $f_{c28} \leq 40$ MPa, la résistance caractéristique en compression f_{cj} à j jours d'un béton non traité thermiquement évolue en fonction du temps suivant la loi ci-dessous :

$$f_{cj} = \frac{j}{4,76 + 0,83j} f_{C28} \qquad \text{(C.6-10)}$$

D'autre part, pour les bétons standards, "une résistance f_{c28} de 20 MPa est facilement atteinte sur les chantiers convenablement outillés" (BAEL 1991). Pour un béton projeté, qui n'est pas très compact du fait de sa mise en oeuvre, une résistance caractéristique à la compression f_{c28} à 28 jours de 20 MPa semble donc raisonnable. Il en résulte une résistance f_{c2} à 2 jours de 6,2 MPa, f_{c7} à 7 jours de 13,2 MPa et f_{c14} à 14 jours de 17,1 MPa.

On peut noter qu'à part une interruption prolongée, entre les phases 5 et 6, chaque phase de construction de l'expérimentation en vraie grandeur No. 1 au CEBTP, a été en moyenne réalisée sur une période inférieure à 7 jours. En outre, le béton projeté commence à travailler dès sa mise en place, puisque les phases d'excavation successives se poursuivent alors que le béton est âgé à peine de 2 jours. Il faut noter également que l'augmentation des tractions dans un lit de clous numéroté i, et donc des pressions sur le parement au même niveau i, ne se fait que pour les 2 à 3 phases suivantes numérotées i+1 et i+2. On peut donc considérer qu'une section de parement est mise en charge progressivement sur une période de 14 jours.

Durant les 5 premières phases de la construction du mur en sol cloué au CEBTP, on prendra une valeur de f_{cj} de 12 MPa, qui est intermédiaire entre f_{c2} = 6,2 MPa et f_{c14} = 17,1 MPa. Pour des calculs après la construction, on pourra prendre une valeur f_{c28} de 20 MPa, ce qui donne, en tenant compte des effets de retrait et du fluage, un module E_{ij} de 10 MPa. En correspondance avec la valeur f_{cj} de 12 MPa, on obtient un module de déformation E_{ij} de 25 10^{+3} MPa.

Il faut noter que les valeurs prises pour le béton, durant les cinq premières phases de construction du mur en sol cloué CLOUTERRE-CEBTP No. 1, sont des valeurs à court terme. A long terme, notamment pour des ouvrages permanents, il conviendrait de prendre une valeur plus faible, de l'ordre de 10 MPa, pour le module du béton afin de tenir compte, en partie, des effets différés.

Le mur de soutènement en béton, situé à l'arrière du massif de sol cloué, a été modélisé avec ces caractéristiques mécaniques de long terme. Les contreforts verticaux, qui le rigidifient, ont été modélisés de manière équivalente par un "tirant élastique" avec une rigidité de 3,3 10^{+6} kN (tableau C.6-16).

Forfaitairement, le coefficient de Poisson est pris égal à 0,2 pour le calcul des déformations selon le BAEL 1991 tandis que le poids volumique est pris égal à 24 kN/m^3 .

Tableau C.6-16 : Caractéristiques du béton du parement pour les 5 premières phases de calcul du mur en sol cloué CLOUTERRE-CEBTP No. 1

Béton du parement (BPi) et du mur de soutènement (MS) loi de comportement élastique linéaire		
module d'Young	E	25 10^6 kPa
poids volumique	γ	24 kN/m^3
coefficient de Poisson	ν	0.2
Elément barre modélisant les contreforts loi de comportement élastique linéaire		
module d'Young (acier)	E_a	2.1 10^8 kPa
section de la barre	S	15.84 10^{-3} m^2

6.3.6 Contacts entre le sol et les bétons

6.3.6.1 Contact entre le sol de remblai et le béton projeté du parement

Les propriétés mécaniques du contact, entre le sol et le béton projeté du parement, dépendent, en grande partie, de la qualité d'exécution du béton projeté entre les mailles des treillis métalliques qui renforcent le béton. Dans le cas du mur en sol cloué CLOUTERRE-CEBTP No. 1, la qualité de l'exécution n'est pas à mettre en doute et l'on peut considérer que le béton adhère parfaitement au sol. Par contre, dans le cas général, il faudra considérer pour le sol en contact avec le béton, des propriétés réduites par rapport à celles du sol. Le sol peut, en quelque sorte, être considéré comme remanié.

6.3.6.2 Contact entre le sol de remblai et le béton du soutènement à l'arrière

Le coefficient de frottement entre un sol et un béton coulé dans un coffrage est généralement considéré comme étant égal à 2/3 du coefficient de frottement interne. Il en est de même pour l'adhésion entre le sol et le béton, qui est prise égale à 2/3 de la cohésion du sol (tableau C.6-17). L'influence de ces paramètres est très faible sur la réponse de l'ensemble de l'ouvrage, même si localement ils peuvent avoir une importance en contrôlant l'accrochage du sol sur le mur de soutènement.

Tableau C.6-17 : Récapitulatif des données du "**calcul de référence**" du mur en sol cloué CLOUTERRE-CEBTP N°1 : données relatives à l'interface entre le sol et le béton du parement

Interface sol-béton du mur de soutènement (ISB) loi de comportement élastique parfaitement plastique critère de Mohr-Coulomb non tronqué, loi d'écoulement non associée		
rigidité de cisaillement $k_s = 2/3\ E_{remblai}$	E	$13{,}33\ 10^3$ kPa
angle de frottement $\phi = 2/3\ \phi_{remblai}$	ϕ	27.51°
angle de dilatance	ψ	20°
cohésion $c=2/3\ c_{remblai}$	c	2 kPa

6.3.7 Remarques sur les paramètres de calcul pour PLAXIS

Dans PLAXIS, l'interaction entre le sol et les lits de clous, modélisés comme des nappes, est définie par un coefficient de réduction R des propriétés mécaniques du sol :

$$\tau_{interface} = R\ (c_{sol} + \sigma_v(z)\ \tan\phi_{sol}) \qquad \text{(C.6-11)}$$

Le calcul de référence est fait avec un frottement latéral unitaire constant en fonction de la profondeur. Il faut alors choisir un coefficient R de réduction variable avec la profondeur des clous suivant le tableau C.6-18.

Tableau C.6-18 : Variations du coefficient R de réduction avec la profondeur

L [m]	Clou No.	z (tête) [m]	z (pied) [m]	z moyen [m]	R(z)
6	1	0,5	1,5	1,0	0,584
8	2	1,5	2,9	2,2	0,302
7,5	3	2,5	3,8	3,1	0,217
8	4	3,5	4,9	4,2	0,166
8	5	4,5	5,9	5,2	0,135

Les éléments d'interface ont une épaisseur fictive, notée t_i , qui n'existe que pour des raisons numériques et qui ne doit pas être assimilée aux épaisseurs d'interfaces, calculées dans la partie A de cette thèse. La rigidité de cisaillement k_s de ces éléments d'interface est définie par :

$$k_s = \frac{R^2 G_{sol}}{t_i} \qquad \text{(C.6-12)}$$

La rigidité au cisaillement est prise constante dans le calcul de référence. Le coefficient R varie avec la profondeur z. Le module du sol G_{sol} est constant. Il faut donc faire varier l'épaisseur fictive t_i , suivant le tableau C.6-19, de manière à ce que k_s reste constant .

Tableau C.6-19 : Variations de l'épaisseur fictive des interfaces avec la profondeur

Clou No.	Profondeur [z]	Coefficient de réduction R(z)	Epaisseur fictive des interfaces t_i
1	1,0	0,584	0,432
2	2,2	0,302	0,115
3	3,1	0,217	0,059
4	4,2	0,166	0,035
5	5,2	0,135	0,023

6.4 Modélisation du problème aux limites

6.4.1 Maillage

Pour les simulations avec les logiciels CESAR, FLAC et PLAXIS, des maillages équivalents ont été utilisés (figures C.6-14a, C.6-14b et C.6-14c). Les mêmes zones ont été maillées avec le même degré de précision. Les bords du maillage sont tous situés, à la même distance de la zone d'intérêt.

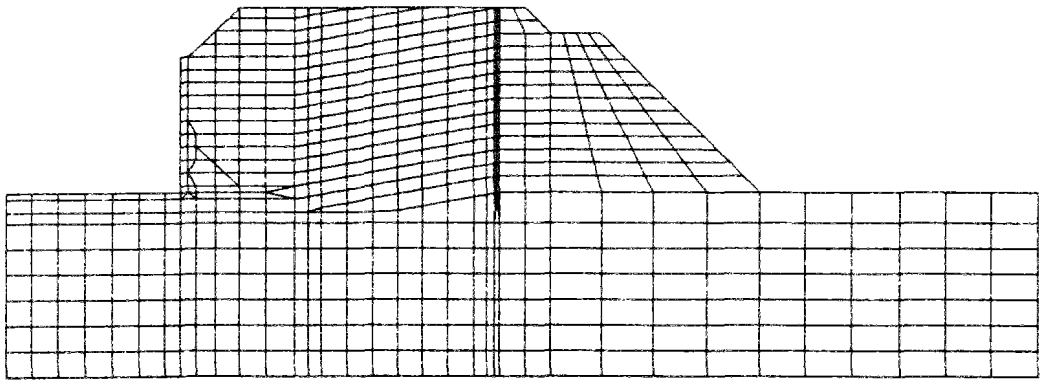


Figure C.6-14a : Maillage utilise pour CESAR

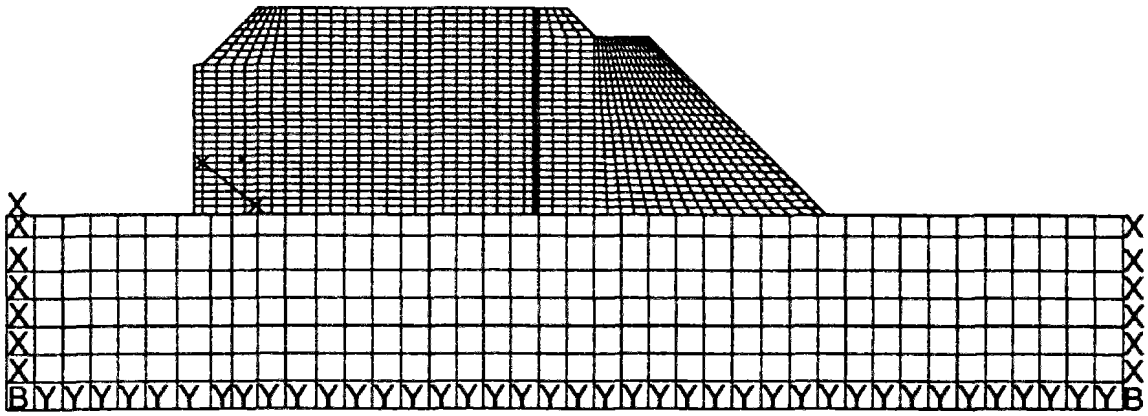


Figure C.6-14b : Maillage utilise pour FLAC

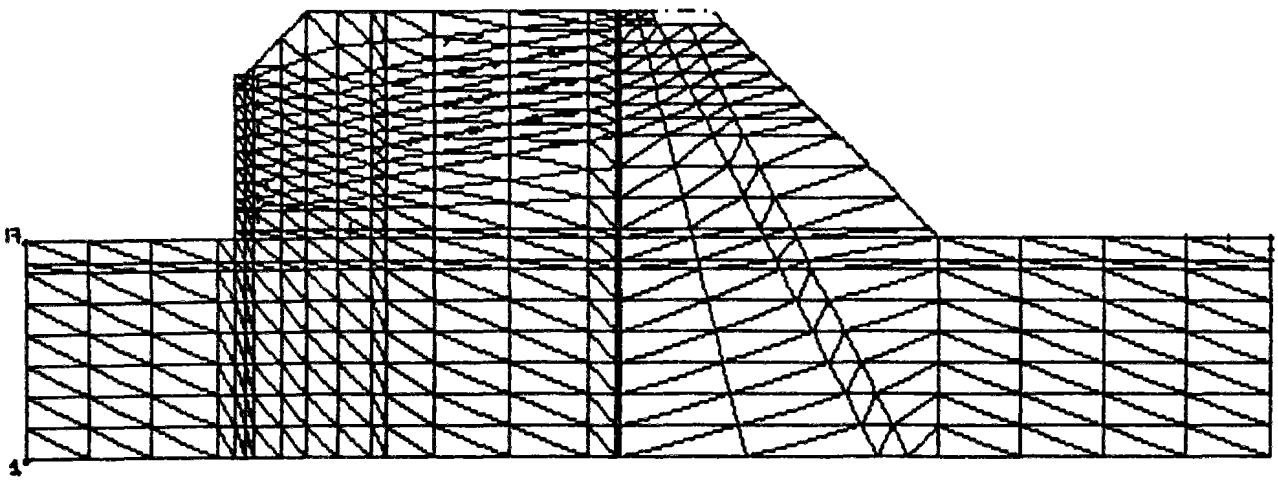


Figure C.6-14c : Maillage utilise pour PLAXIS

Figure C.6-14 : Maillages utilises pour les calculs numériques

Les éléments volumiques sont des quadrilatères à 8 noeuds, dans CESAR, des quadrilatères à 4 noeuds, dans FLAC, et des triangles à 6 noeuds, dans PLAXIS. Il existe dans PLAXIS des triangles de très grande précision, à 15 noeuds, mais ils n'ont pas été choisis car il n'existe pas d'éléments équivalents dans les autres codes.

La figure C.6-14b présente le maillage utilisé pour toutes les simulations avec FLAC. Le sol de fondation a été discrétisé plus grossièrement que le sol de remblai. Les éléments du sol de fondation font environ 1m par 1m tandis que dans le remblai ils font 0,5 par 0,25. A l'interface entre les deux maillages, il est possible avec le logiciel FLAC d'utiliser des éléments d'interface au lieu d'utiliser des éléments triangulaires comme cela se fait plus classiquement avec d'autres logiciels d'éléments finis. Les propriétés de ces éléments sont choisies de la manière suivante. Les déplacements relatifs suivant les directions tangentielle et normale sont caractérisées par les rigidités élastiques normale k_n et tangentielle k_s . Ces deux rigidité sont choisies comme étant égales pour accélérer la convergence des calculs. Ces rigidités k_n et k_s pourraient être choisies comme très grandes afin d'assurer la continuité précise des déplacements normal et tangentiel. Cependant, un tel choix conduirait à une convergence lente, dans la mesure où la pondération des masses des éléments dépend de leur rigidité. Il est donc conseillé de prendre, pour ces éléments d'interface, des rigidités plus grandes que les éléments volumiques de sol voisins, mais pas trop grandes. En particulier, il est recommandé de prendre un rapport de l'ordre de 10. La rigidité normale d'un élément volumique soumis à une compression simple, c'est à dire une consolidation oedométrique, est donnée par :

$$k_n(\text{élément volumique}) = \frac{K + \frac{4}{3}G}{\Delta y} \qquad \text{(C.6-13)}$$

où K et G sont respectivement les modules de compression et de cisaillement tandis que Δy est la taille de l'élément suivant la direction normale à l'interface considéré. Pour un maillage quelconque, il est conseillé de prendre la valeur suivante pour la rigidité normale des éléments d'interface :

$$k_n(\text{interface}) = k_s(\text{interface}) \cong 10 \max\left[\frac{K + \frac{4}{3}G}{\Delta y_{min}}\right] \qquad \text{(C.6-14)}$$

Dans une telle approche, la continuité des déplacements n'est pas assurée, puisque l'amplitude des déplacements relatifs dépend des valeurs des rigidités. Au plus celles-ci sont grandes, au plus les discontinuités seront faibles. Par contre, comme pour tous les éléments d'interface, il y a continuité du vecteur contrainte, c'est à dire des contraintes normale et tangentielle, mais pas du tenseur des contraintes. Pour valider cette approche proposée sur FLAC, une comparaison entre un maillage avec discontinuité et un maillage régulier sans discontinuité a été faite et est présentée plus loin. Sur les simulations, il faut noter la discontinuité des déplacements, dans le premier cas de maillage. Cependant, les résultats dans la partie haute de l'ouvrage sont peu sensibles à cette discontinuité à la base du mur.

6.4.2 conditions aux limites

Les conditions aux limites sont prises en déplacements, horizontal et vertical, nuls sur le fond, ce qui correspond au substratum, sableux et très dense, rencontré par les sondages, tandis que sur les bords latéraux, seuls les déplacements horizontaux sont maintenus nuls.

La partie de sol de fondation modélisée s'étend sur une largeur L de 40 mètres de large, ce qui représente un rapport L / H de 7 où H est la hauteur finale du mur après les 7 phases de construction. Seule la modélisation des 5 premières phases est présentée ci-dessous. Avec un tel choix de géométrie, l'influence des bords latéraux est limitée au minimum.

La profondeur du sol de fondation, en dessous de la zone clouée, est de 7 m dans le modèle, ce qui correspond à la couche de sable très dense et rigide, localisée par les essais pressiométrique (p_l >> 5 MPa et E_M >> 50 MPa) à 7 mètres de profondeur.

6.4.3 Initialisation des contraintes

Les contraintes ont été initialisées en chargeant avec le poids volumique puis en annulant les déplacements et les déformations en résultant. Dans l'étude paramétrique, un calcul complet de la construction du remblai, par couche de un mètre, derrière le mur de soutènement, a été réalisé pour obtenir un état "initial" des contraintes différents et, a priori, plus proche des conditions réelles. Les différences observées sont très faibles.

6.4.4 Phasage de la construction

Les étapes de la construction sont décomposées en phases suivant le tableau C.6-20 et la figure C.6-15, présentés ci-dessous .

Tableau C.6-20 : Phasage de la construction du mur en sol cloué

Phase 0	(0) initialisation des contraintes (déplacements et vitesses nuls)
Phase 1	(11) excavation du sol au niveau 1 sur S_x
Phase 2	(21) mise en place du clou 1 et du parement 1 (22) excavation du sol au niveau 2 sur S_x
Phase 3	(31) mise en place du clou 2 et du parement 2 (32) excavation du sol au niveau 3 sur S_x
Phase 4	(41) mise en place du clou 3 et du parement 3 (42) excavation du sol au niveau 4 sur S_x
Phase 5	(51) mise en place du clou 4 et du parement 4 (52) excavation du sol au niveau 5 sur S_x
Phase 6	(61) mise en place du clou 5 et du parement 5

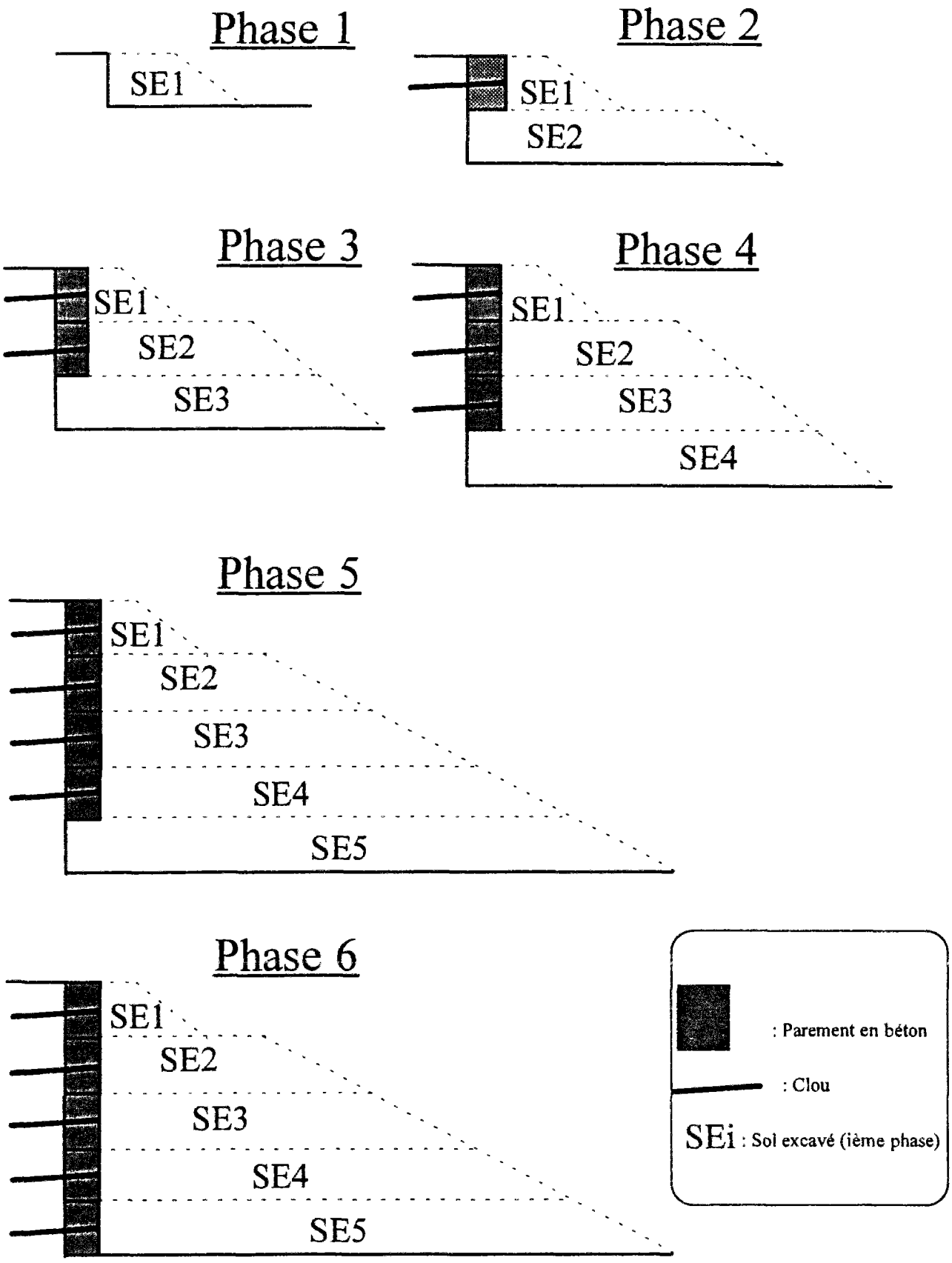


Figure C.6-15 : Phasage de la construction
du mur en sol cloué CLOUTERRE-CEBTP No. 1

6.4.4 Dépouillement des déplacements

Les mesures de déplacements du parement, réalisées sur un chantier, au fur et à mesure de la construction, correspondent aux incréments de déplacement, entre la mesure et le moment où le point de repère a été mis en place. Ce sont donc des déplacements relatifs, notés δ_h et δ_v . Ils se calculent à partir des déplacements absolus, notés U_h et U_v , suivant la procédure détaillée dans le tableau C.6-21.

Tableau C.6-21 : Calcul des déplacements δ_h et δ_v du parement à partir des déplacements absolus

	Niveau O tête du parement	Niveau 1 clou 1	Niveau 2 clou 2	Niveau 3 clou 3	Niveau 4 clou 4	Niveau 5 clou 5
Phase 1	$U_D(1)$					
δ_h	0					
Phase 2	$U_D(2)$	$U_{cl}(2)$				
δ_h	0	0				
Phase 3	$U_D(3)$	$U_{cl}(3)$	$U_{cl}(3)$			
δ_h	$U_D(3)-U_D(2)$	$U_D(3)-U_D(2)$	0			
Phase 4	$U_D(4)$	$U_{cl}(4)$	$U_{cl}(4)$	$U_{cl}(4)$		
δ_h	$U_D(4)-U_D(2)$	$U_D(4)-U_D(2)$	$U_D(4)-U_D(3)$	0		
Phase 5	$U_D(5)$	$U_{cl}(5)$	$U_{cl}(5)$	$U_{cl}(5)$	$U_{cl}(5)$	
δ_h	$U_D(5)-U_D(2)$	$U_D(5)-U_D(2)$	$U_D(5)-U_D(3)$	$U_D(5)-U_D(4)$	0	

6.5 Calcul de référence

Le jeu de paramètres présentés ci-dessus a été choisi comme "cas de référence". Il correspond aux valeurs les meilleures que l'on puisse choisir à partir des résultats in situ et en laboratoire, dans l'état actuel des connaissances et pour les lois de comportement choisies.

Avec ce jeu de paramètres, trois calculs, dits de référence, ont été fait à l'aide des logiciels CESAR, FLAC et PLAXIS. Parmi les personnes qui ont aidé à la réalisation de ces trois calculs, il convient de remercier tout particulièrement : Brahim Benhamida (CERMES) et Philippe Mestat (LCPC), pour les calculs sur CESAR, Paolo Parovel (CERMES) et Sylvie Bretelle (TERRASOL), pour les calculs sur FLAC, ainsi que Catherine Leidwanger, Marc Boulon (Laboratoire 3S/IMG) et Pierre Vézole (La Forézienne d'Entreprises), pour les calculs sur PLAXIS.

Les trois calculs de références sont analysés en détail et comparés entre eux ainsi qu'avec les mesures réalisées sur le mur en sol cloué réel. Parmi les paramètres qui méritent attention, nous avons regardé les déplacements du parement qui sont maximaux en tête, les déformations dans le massif de sol cloué, les tractions dans les clous, les contraintes horizontales et verticales qui s'exercent le long du parement, la déformée du sol en surface, aussi bien en amont qu'en aval du mur. Nous procédons ensuite à une étude de sensibilité sur les paramètres les plus importants.

6.5.1 Calcul de référence avec le logiciel CESAR

Un premier calcul de référence a été fait avec CESAR, en utilisant le motif de clouage développé spécialement dans le cadre de cette étude. Le maillage déformé, à la fin de la phase 5, est présenté sur la figure C.6-16. Les éléments excavés sont encore représentés, mais au niveau des calculs, ils sont considérés avec des caractéristiques mécaniques réduites, quasi nulles, ce qui amplifie les déformations dans la zone excavée. La zone de sol concernée par les déformations est localisée autour du mur en sol cloué. Les isovaleurs des déplacements, horizontaux U et verticaux V, sont dessinées sur les figures C.6-17 et C.6-18, respectivement. On observe derrière le parement la formation d'un coin de sol, similaire au coin de Coulomb. Le remblai a un mouvement d'ensemble vers l'aval. Les déplacements verticaux calculés en fond de fouille sont de l'ordre du centimètre, ce qui est tout à fait raisonnable par rapport aux soulèvement trouvés antérieurement (Shafiee, 1986; Ouelogo, 1989). Les bords du maillage sont soumis à quasiment aucun déplacement, ce qui confirme que ceux-ci sont placés à une distance suffisante.

Les isovaleurs des contraintes verticales σ_y, horizontales σ_x, et de cisaillement σ_{xy}, sont représentées sur les figures C.6-19, C.6-20 et C.6-21. Ils convient de noter que les isovaleurs près des bords sont horizontales, ce qui confirme que ces bords sont situés suffisamment loin du mur pour ne pas influencer son comportement. Localement, près du parement du mur en sol cloué, les contraintes verticales sont réduites, du fait de l'accrochage du sol sur le parement et les clous. Dans le mur de soutènement en béton armé, à l'arrière de la zone cloué, la distribution des contraintes est très complexe, mais cette zone est suffisamment loin pour ne pas influencer trop le comportement du sol cloué.

Les contraintes initiales ont été calculées en imposant progressivement les forces volumiques de gravité. Il en a résulté un état de contraintes initiales, qui diffère très nettement de l'état de contrainte géostatique, du fait de la géométrie complexe de du remblai. Le sol est plastifié initialement par endroits (figure C.6-22). Les zones plastiques se situent autour du mur de soutènement en béton armé, sous le remblai de sol qui sera cloué et en pied du talus qui sera excavé. A la fin de la phase 5, les zones plastiques initialement le restent, par contre, de nouvelles zones apparaissent derrière le parement du mur en sol cloué (figure C.6-23). Elles forment une sorte de coin de Coulomb. Cependant, l'amplitude de la déformation plastique cumulée, dans ces zones, reste très faible. Ces déformations sont de l'ordre de 10^{-2} % (figure C.6-24). Par contre, très localement autour du pied du parement, les déformations plastiques de cisaillement peuvent atteindre des valeurs nettement plus importantes, de l'ordre de 8%, ce qui commence à être important et mériterait d'être traité dans le cadre des déformations finies (figure C.6-25). Ceci est un point qui peut expliquer les différences obtenues entre CESAR et FLAC.

Le glissement du sol par rapport aux clous ne s'est produit, durant les 5 phases de construction, que dans la zone active ainsi qu'aux extrémités des clous, à l'arrière du massif de sol cloué (figure C.6-26). Le long du mur de soutènement en béton, le sol a également glissé, suite au déconfinement du sol du côté du parement du mur en sol cloué.

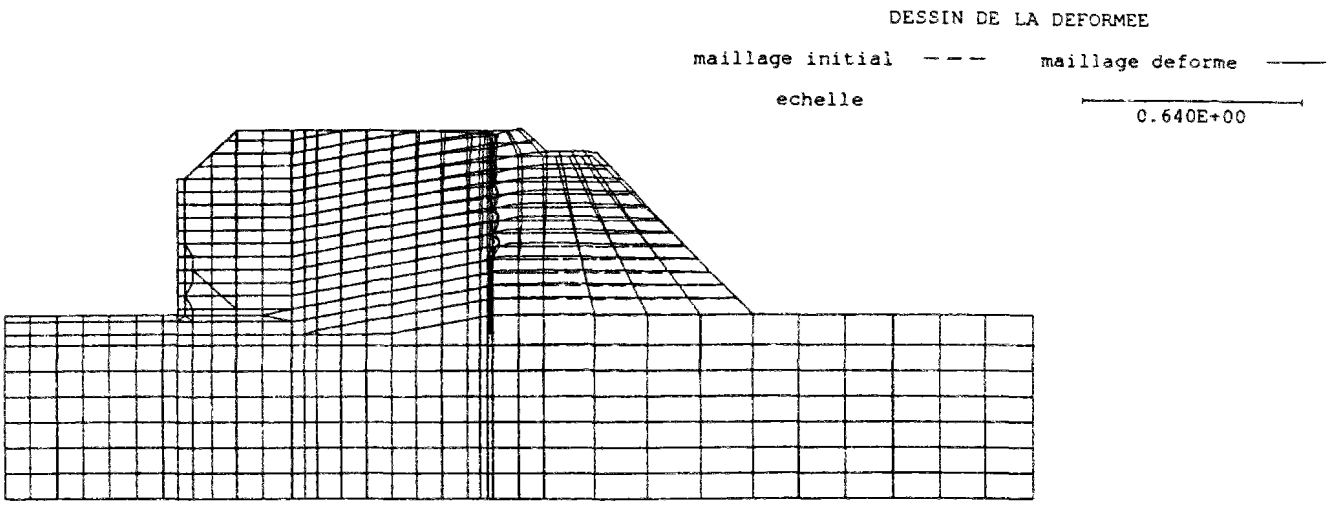


Figure C.6-16 : Déformée du maillage à la phase 5 (H = 5m)
Calcul de référence avec CESAR

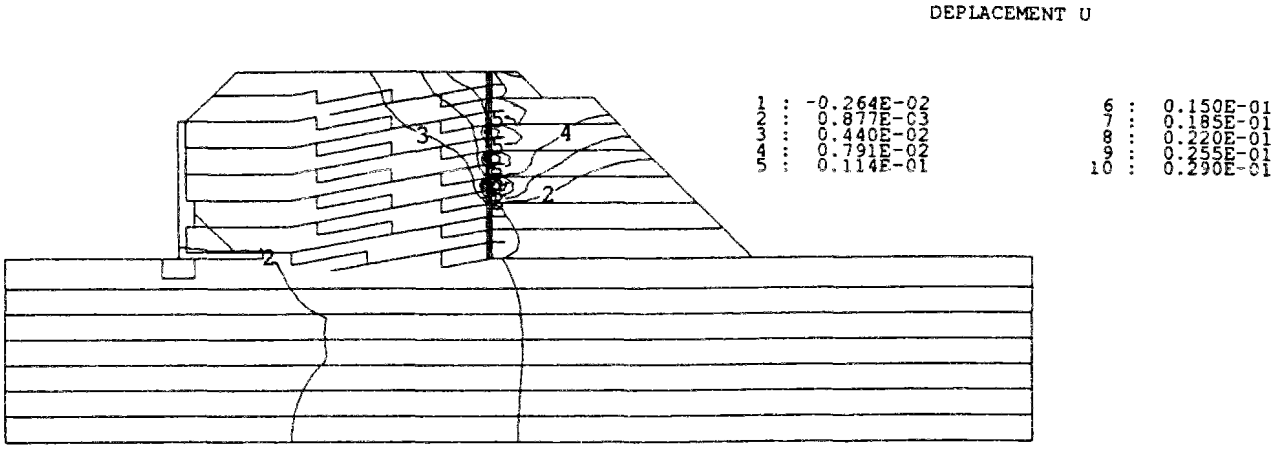


Figure C.6-17 : Isovaleurs des déplacements horizontaux U[m] à la phase 5 (H = 5m)
Calcul de référence avec CESAR

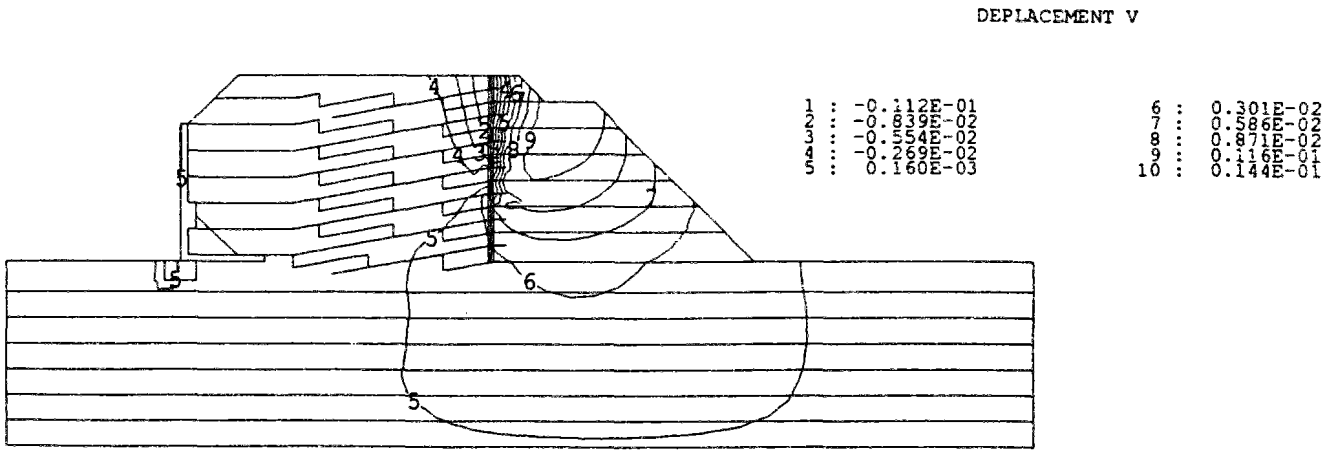


Figure C.6-18 : Isovaleurs des déplacements verticaux V[m] à la phase 5 (H = 5m)
Calcul de référence avec CESAR

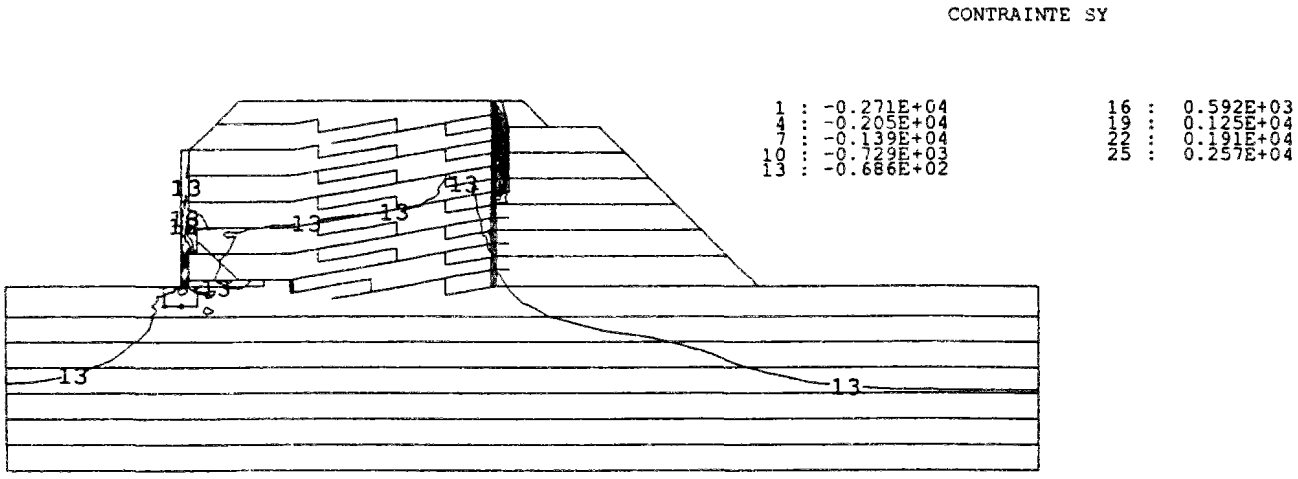


Figure C.6-19 : Isovaleurs des contraintes verticales σ_y [kPa] à la phase 5 (H = 5m)
Calcul de référence avec CESAR

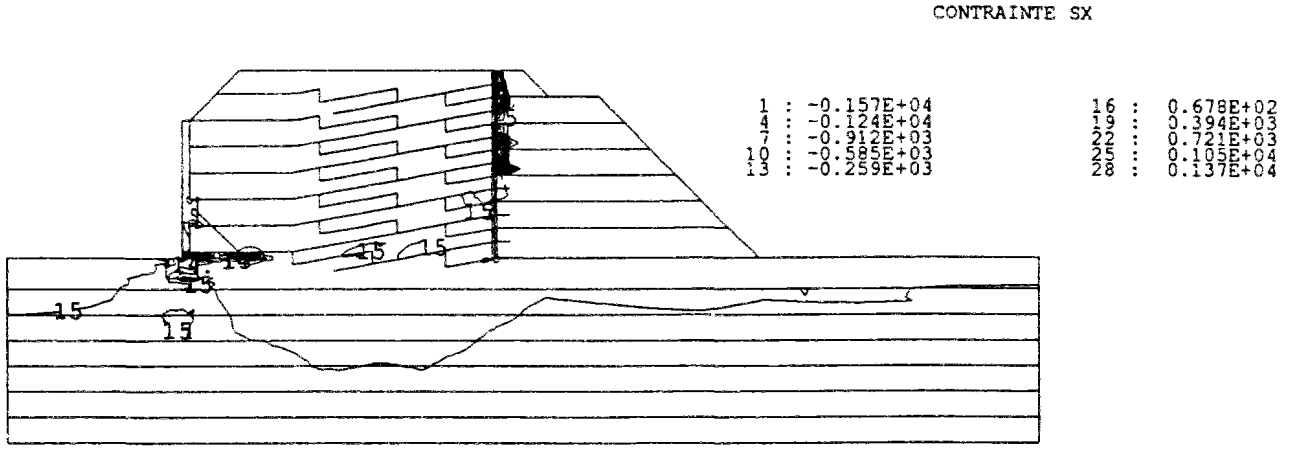


Figure C.6-20 : Isovaleurs des contraintes horizontales σ_x [kPa] à la phase 5 (H = 5m)
Calcul de référence avec CESAR

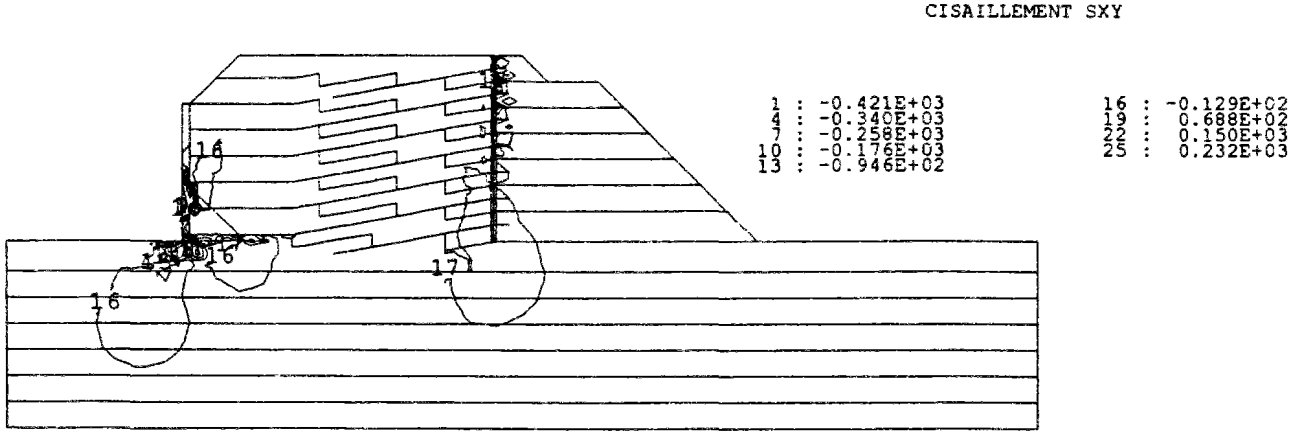


Figure C.6-21 : Isovaleurs du cisaillement σ_{xy} [kPa] à la phase 5 (H = 5m)
Calcul de référence avec CESAR

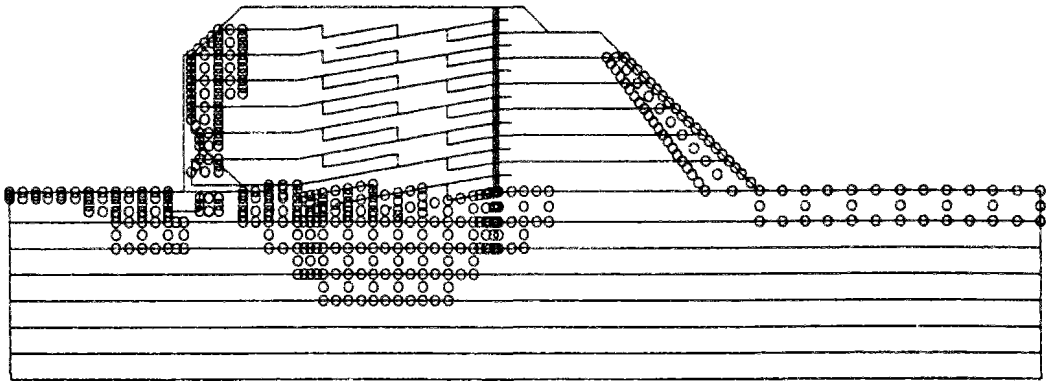


Figure C.6-22 : Points plastiques à la fin de l'initialisation des contraintes (phase 0)
Calcul de référence avec CESAR

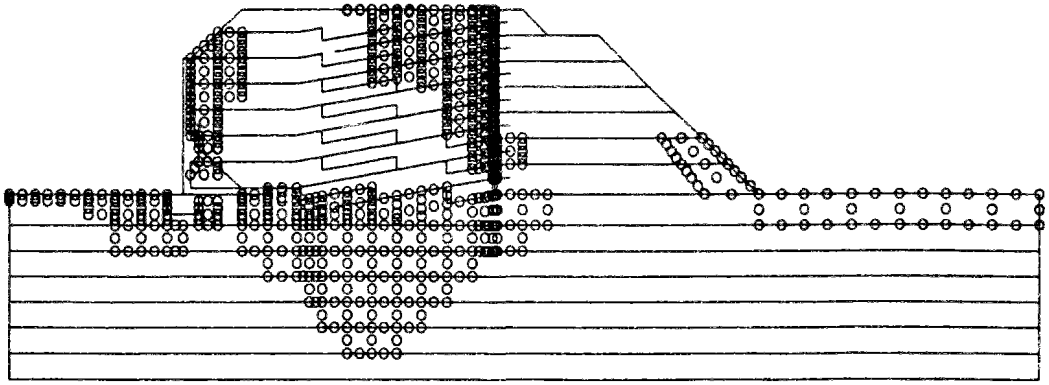


Figure C.6-23 : Points plastiques à la fin de la phase 5 (H = 5m)
Calcul de référence avec CESAR

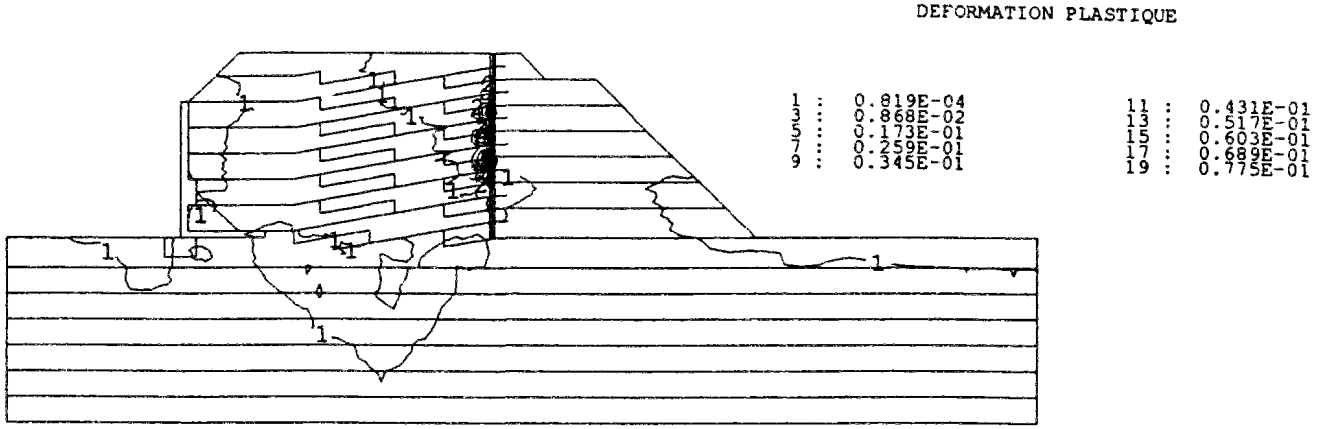


Figure C.6-24 : Isovaleurs de la déformation plastique cumulée à la phase 5 (H = 5m)
Calcul de référence avec CESAR

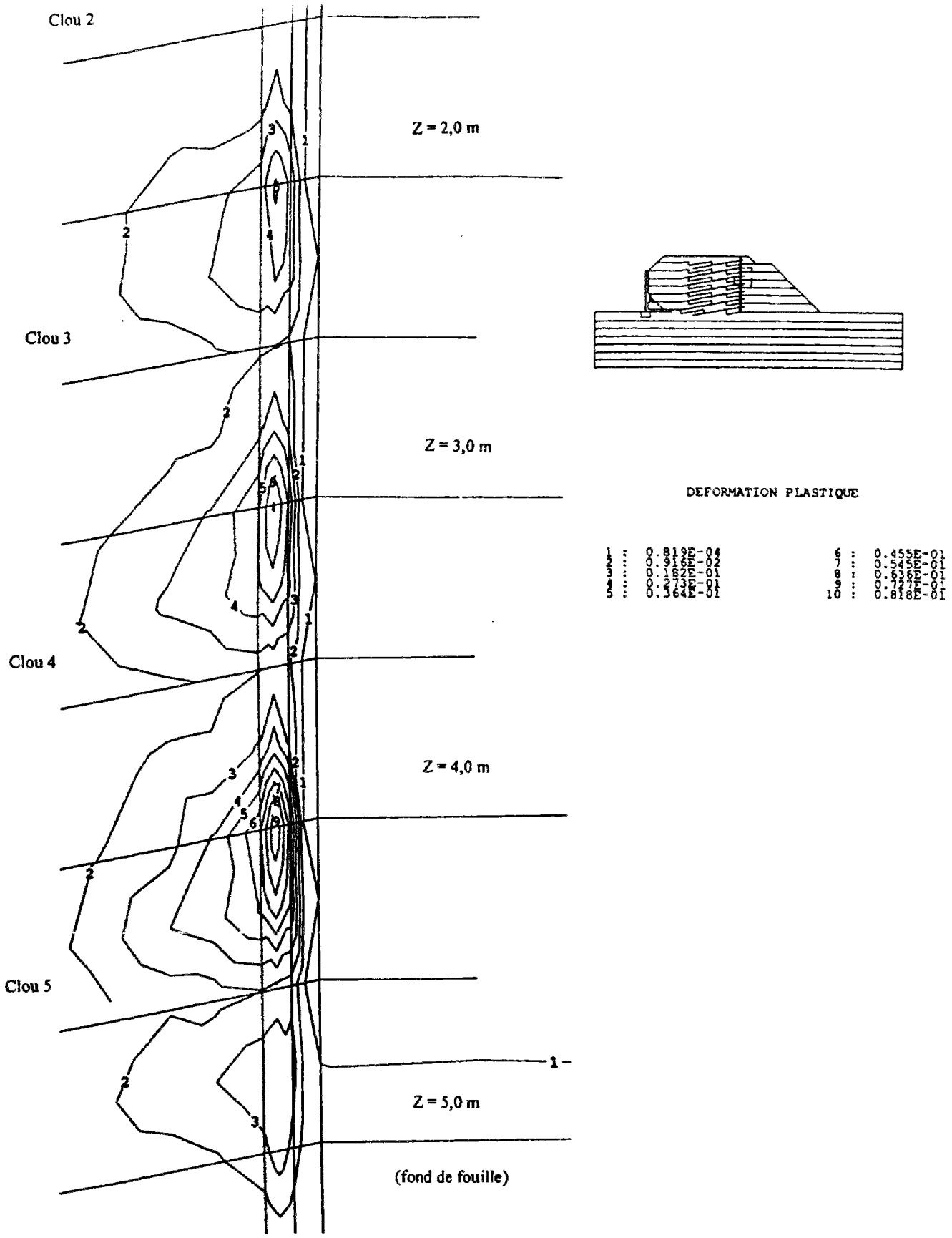


Figure C.6-25 : Isovaleurs de la déformation plastique cumulée à la phase 5 (H = 5m)
autour du pied du parement du mur en sol cloué
Calcul de référence avec CESAR

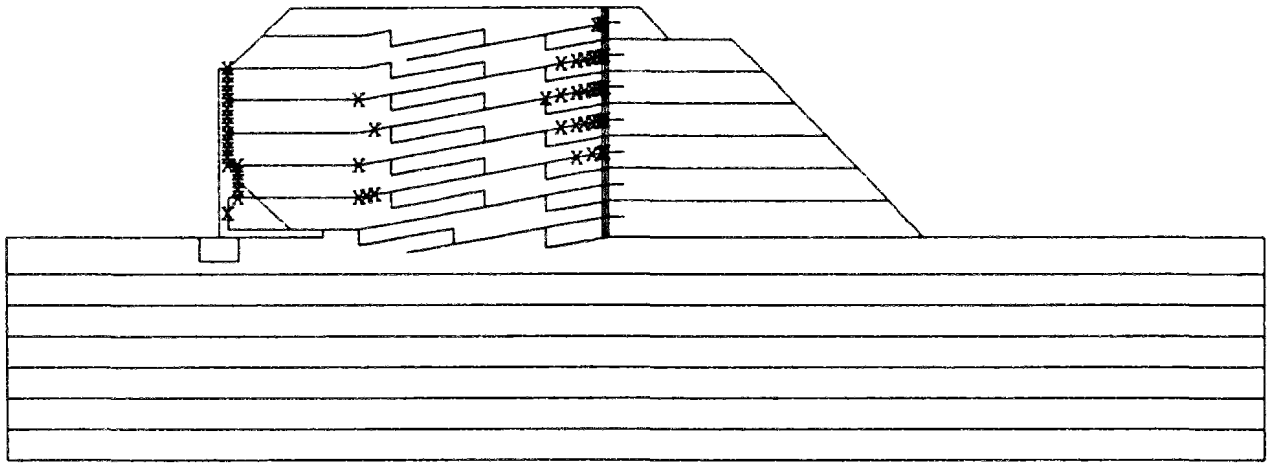


Figure C.6-26 : Dessins des points de glissement à la phase 5 (H = 5m)
Calcul de référence avec CESAR

La distribution des contraintes, horizontale et verticale, dans le sol, le long du parement, à la fin de la phase 5 (H = 5 m), est présentée sur la figure C.6-27. Il convient de noter la concentration très forte des contraintes horizontales au niveau des clous alors que la contrainte verticale est réduite par suite de l'accrochage du sol sur le parement et des effets de voûte, entre les lits de clous. Il a été supposé une adhérence parfaite entre le sol et le béton projeté.

La décompression progressive du sol, par suite des phases successives d'excavation, engendre des déplacements latéraux du sol. Ceux-ci, par l'intermédiaire du frottement entre le sol et les clous, génèrent des tractions dans les clous. A la fin de la phase 5, quand les 5 premiers lits de clous sont installé, seuls les 4 premiers lits de clous sont mis en tension. Le dernier lit de clou, qui a été mis en place, ne subit, quant à lui, que des tractions négligeables. Il ne se mettra en traction qu'aux phases 6 et 7. La distribution des tractions, calculée dans les clous, à la fin de la phase 5, est présentée sur la figure C.6-28.

Par rapport aux études antérieures, il convient de faire plusieurs remarques. L'échelle adoptée, dans la présente étude, est très largement amplifiée, par rapport aux études antérieures (figure C.2-1a, C.2-18, C.2-22, C.2-27). Les courbes calculées paraissent ainsi très différentes des courbes mesurées. Si l'on regarde précisément les valeurs numériques, les présents calculs encadrent les tractions mesurées, dans une fourchette de - 4 kN à + 5 kN (figure C.6-22). Des valeurs tout à fait similaires ont été trouvées par Nanda (1988) avec une fourchette de -5 kN à +3 kN, par Chiguer (1989), avec une fourchette de - 2 kN à + 2 kN, et par Ouelogo (1989), avec une fourchette -4 kN à + 3 kN.

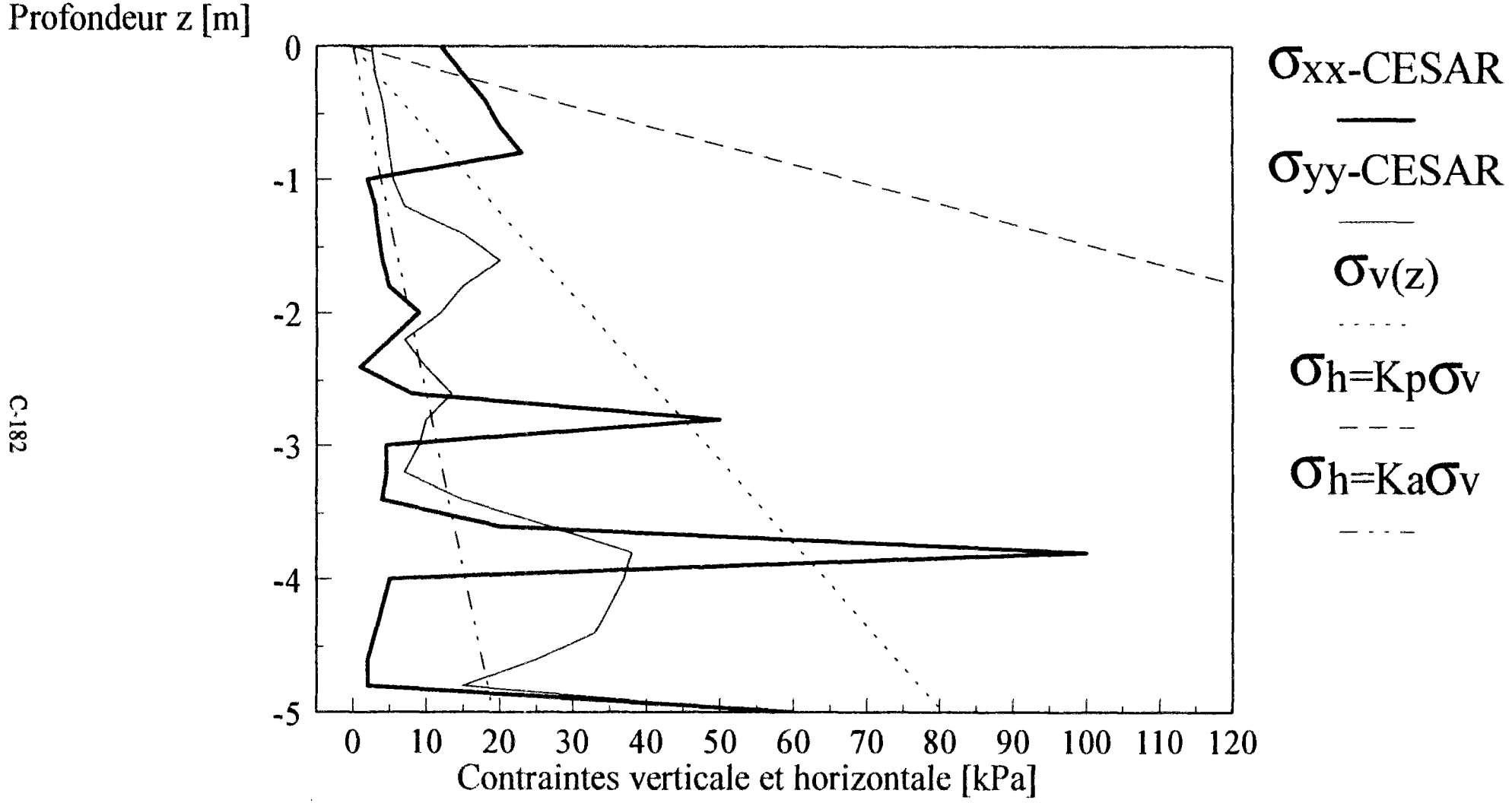


Figure C.6-27 : Distribution des contraintes, horizontale et verticale,
le long du parement à la fin de la phase 5 (H = 5 m).
Calcul de référence avec CESAR

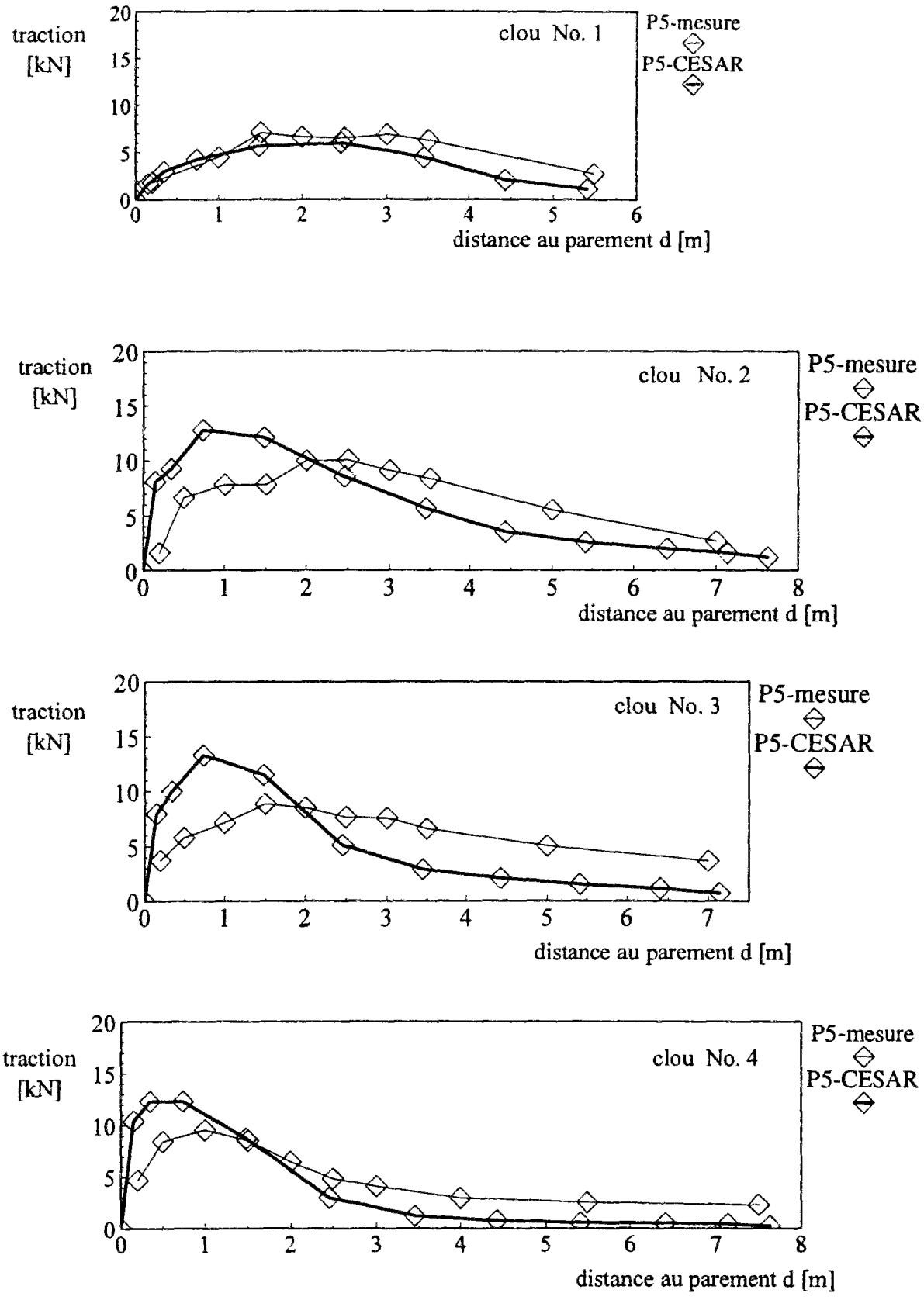


Figure C.6-28 : Distribution des tractions dans les clous à la fin de la phase 5.
Calcul de référence avec CESAR

Les déplacements du parement et du sol, au niveau des trois inclinomètres, sont présentés sur les figures C.6-29 et C.6-30. L'amplitude des déplacements du parement est retrouvée par le calcul, avec une assez bonne précision. Par contre, la forme incurvée des déplacements du parement n'est pas obtenue. Aucun calcul, quelles que soient la méthode numérique et les valeurs des paramètres, ne permet de retrouver cette forme incurvée vers l'intérieur, au niveau des deux premiers lits de clous. Pour pouvoir modéliser cette forme, il faudrait supposer que le premier lit de clous ait une résistance à l'arrachement plus faible ou que le sol en surface soit moins résistant.

La déformée du sol, à 4 m du parement, coïncide avec celle mesurée pour la phase 3. Par contre, à la phase 5, c'est la déformée à 2 m qui approche le mieux les mesures. Il convient, là aussi, de noter que les déformées inclinométriques sur le premier mètre de profondeur, qui est le plus soumis aux aléas de chantiers, ne donnent pas les mêmes tendances qu'en profondeur.

Les déplacements dans le sol et au parement sont estimés dans une fourchette allant de -1 mm à + 3 mm, pour la phase 5. Nanda (1988) retrouve les déplacements mesurés dans un fourchette allant de -1 mm à + 7 mm. Nanda et Delage (1989) trouvent une fourchette variant de -1 mm à + 9 mm tandis que Ouelogo (1989) trouve une fourchette de - 8 mm à + 2 mm.

Dans l'ensemble, les résultats trouvés sont meilleurs puisque la largeur de la fourchette est réduite par un coefficient de 2 et les calculs encadrent les mesures. Au parement, les déplacements sont surestimés, à 2 m, ils sont sous-estimés, à 4 et 8 m, ils sont à nouveau surestimés.

Les soulèvements en fond de fouille sont très faibles, inférieurs au centimètre, ce qui est tout à fait raisonnable par rapport aux soulèvements obtenus dans les études antérieures.

L'évolution du déplacement vertical absolu U_v , en tête du parement est présentée sur la figure C.6-31. Il convient de noter que le déplacement vertical est positif durant les deux premières phases, ce qui correspond à un léger soulèvement en tête du mur. Alors qu'Ouelogo (1989) trouve un soulèvement en tête systématiquement à toutes les phases, dans la présente étude, ce soulèvement n'existe que pour les deux premières, dans le cas du calcul de référence. Si le module du sol est multiplié par 2, ce soulèvement n'existe plus alors que pour la première phase. L'évolution des déplacements, horizontal et vertical, calculés en tête du parement, est parallèle à l'évolution des mesures. Le rapport U_v / U_h mesuré est légèrement supérieur à 1, tandis que les mesures donnent un rapport légèrement inférieur.

L'évolution du déplacement horizontal U_h , en tête du mur, en fonction de la hauteur d'excavation H_i , est présentée sur la figure C.6-32, pour deux valeurs du module d'Young du sol, égales respectivement à 2 E_M et 4 E_M . La fourchette obtenue encadre parfaitement es résultats mesurés.

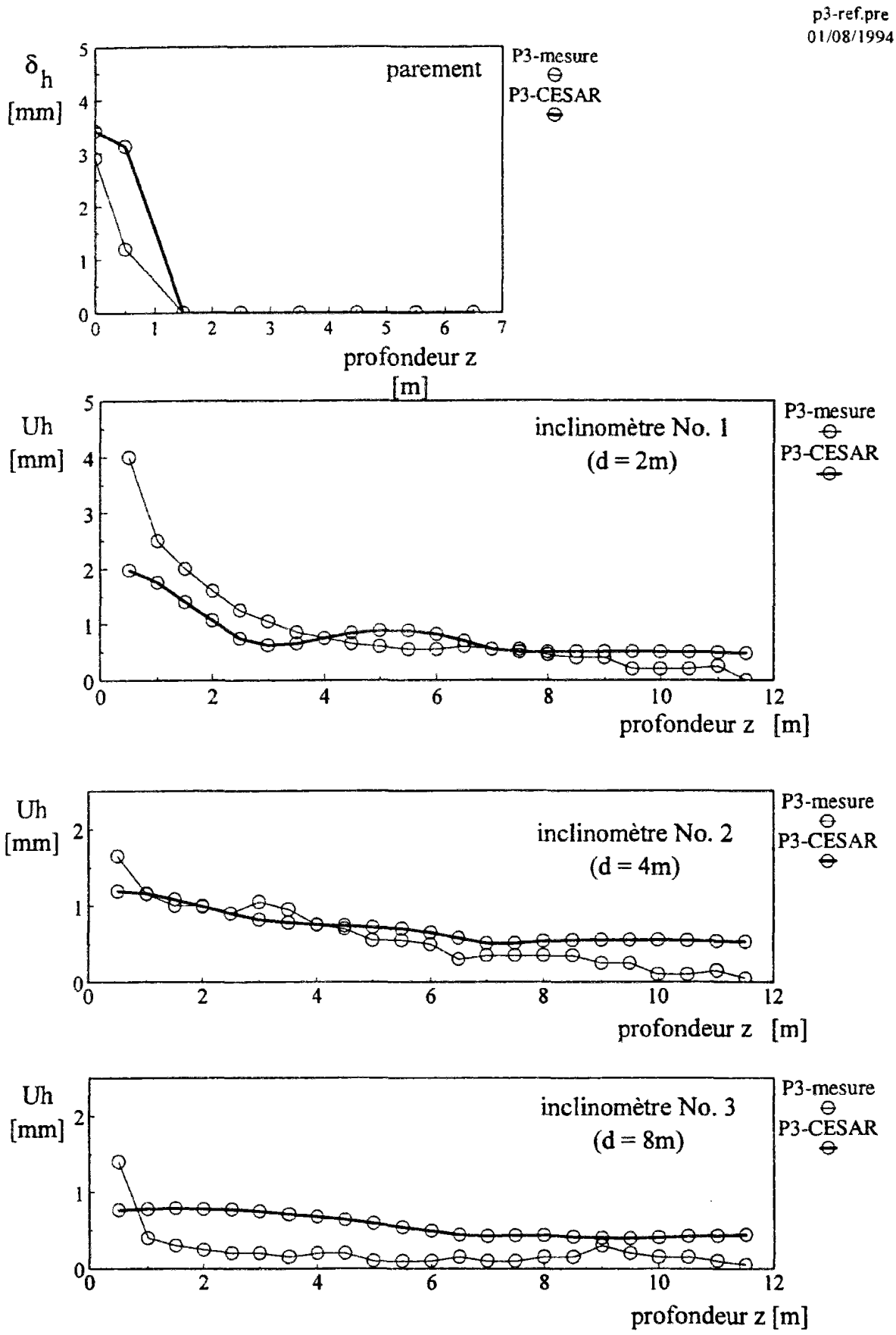


Figure C.6-29 : Déformées du parement et du sol à la fin de la phase 3.
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1.
Calcul de référence avec CESAR.

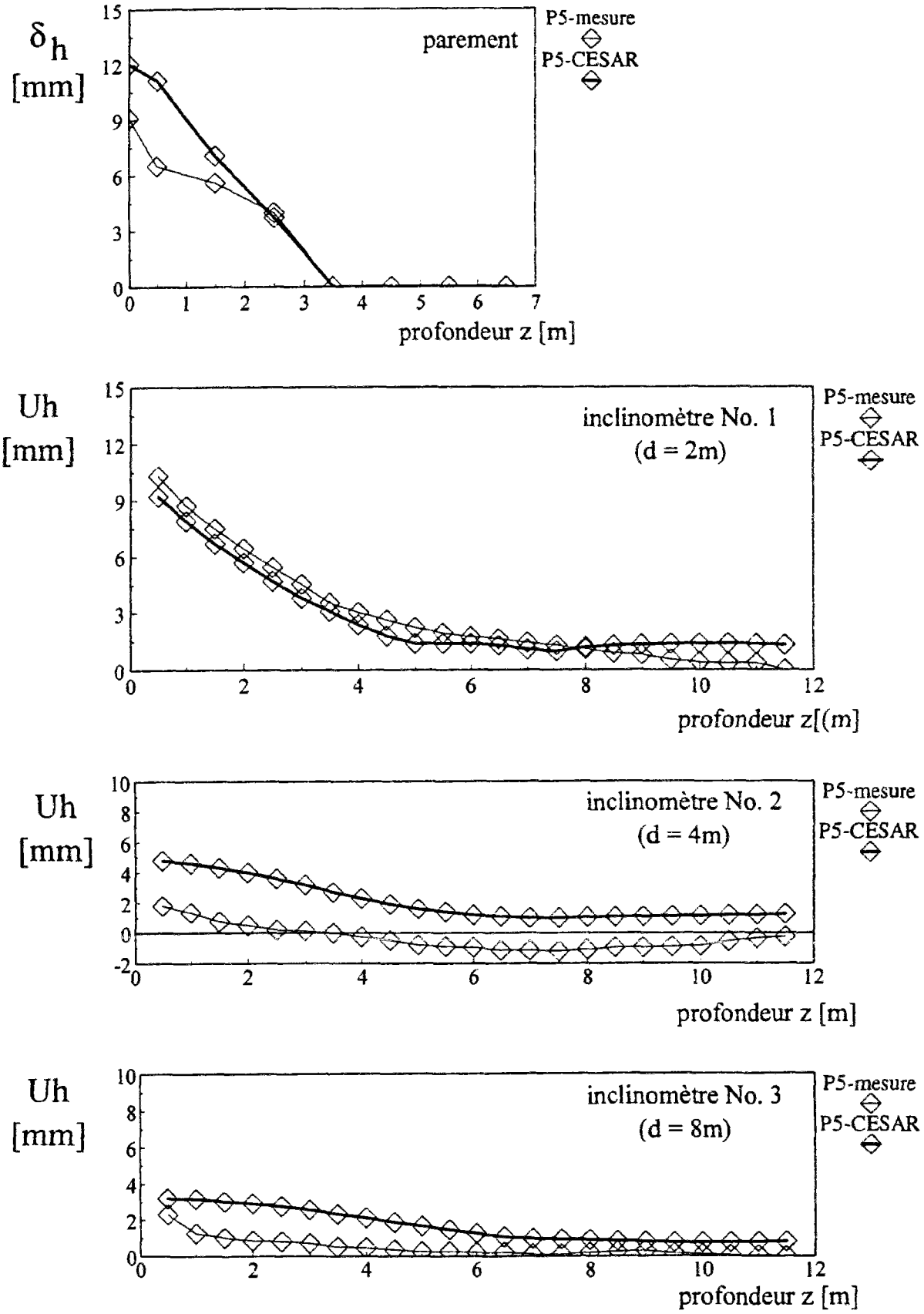


Figure C.6-30 : Déformées du parement et du sol à la fin de la phase 5.
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1.
Calcul de référence avec CESAR.

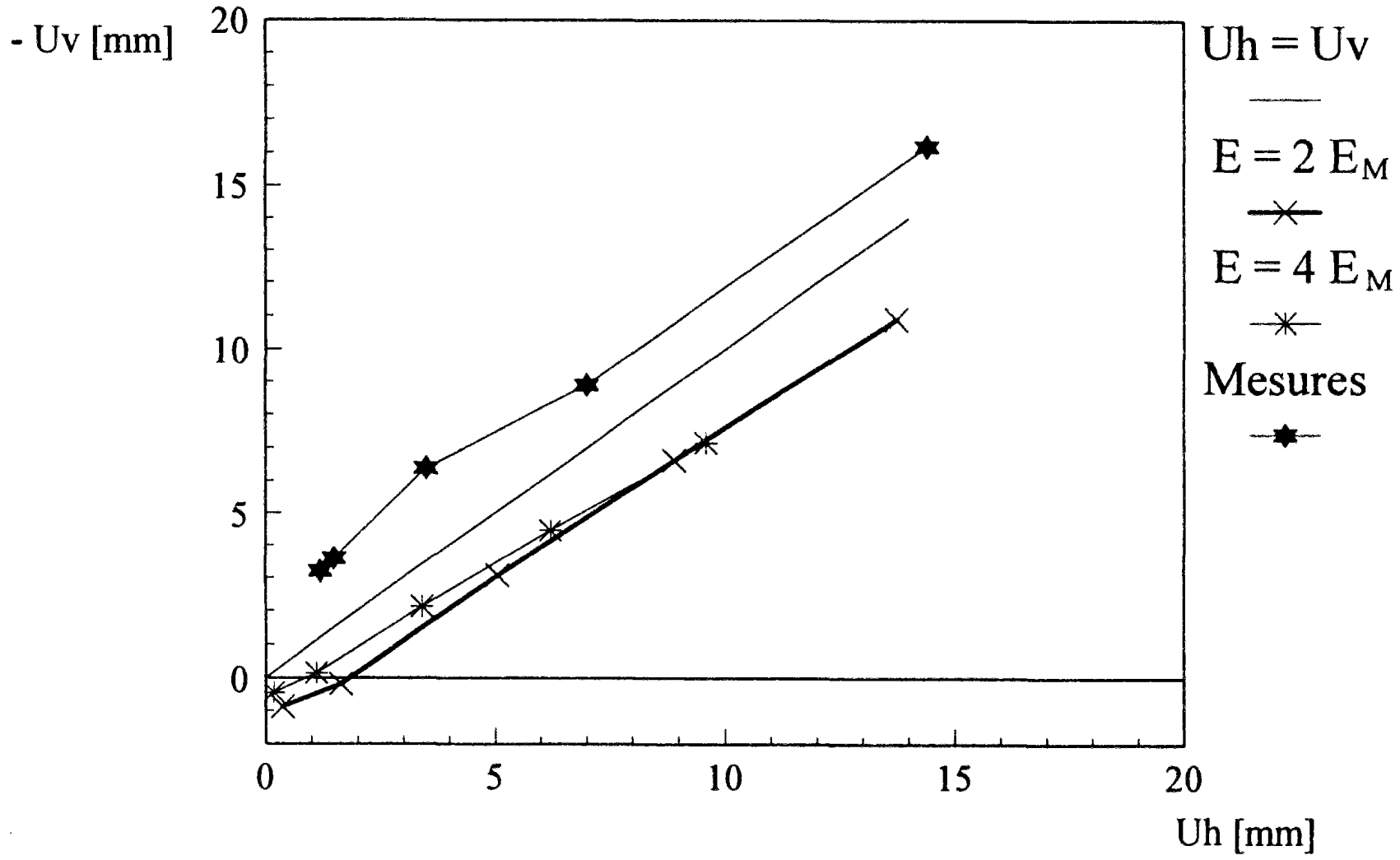


Figure C.6-31 : Comparaison des déplacements absolus, horizontal et vertical, en tête du parement pour les calculs et les mesures
Calculs avec CESAR

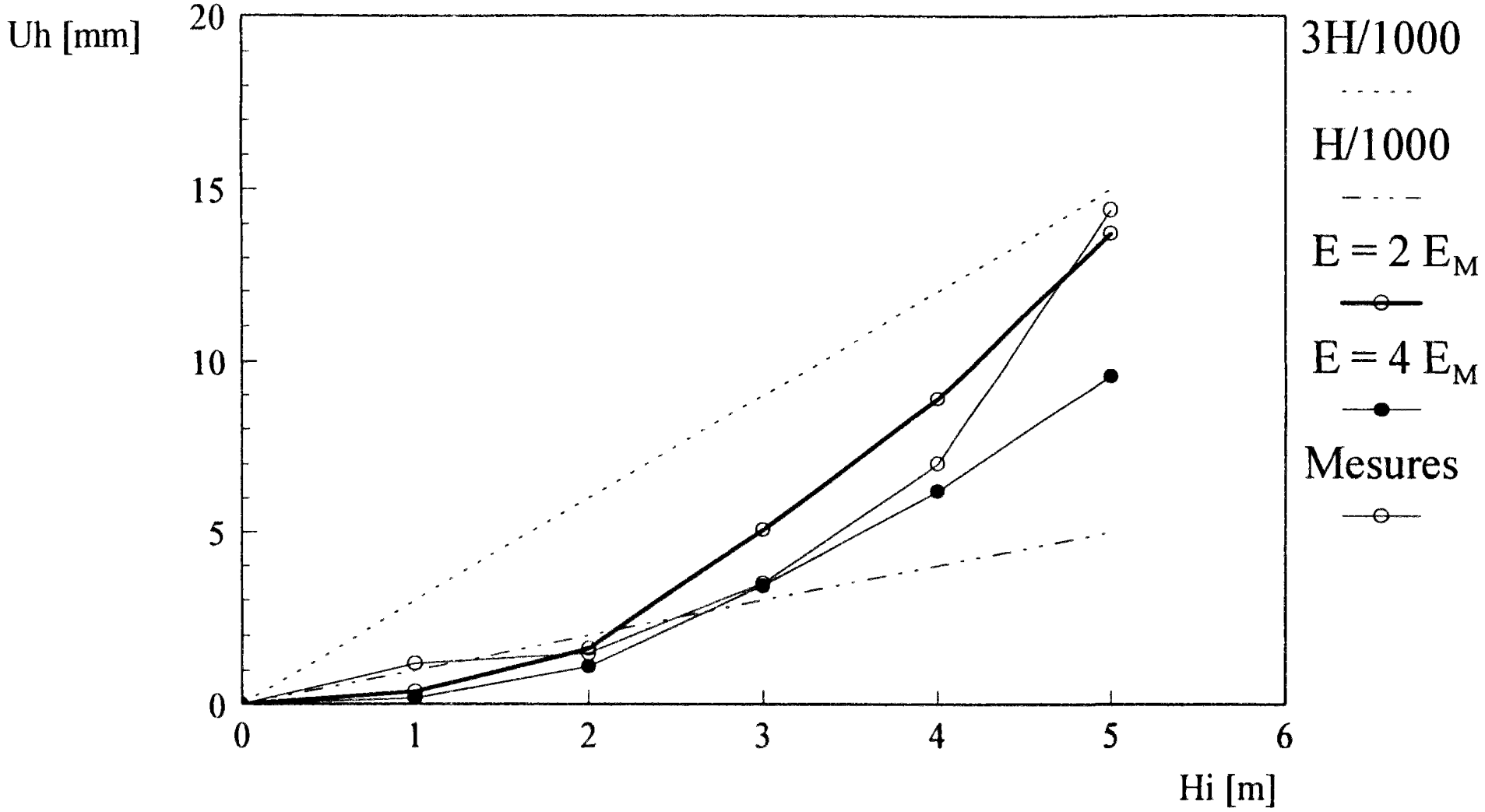


Figure C.6-32 : Evolution du déplacement horizontal en tête du mur au cours des phases d'excavation. Calculs avec CESAR et mesures

6.5.2 Calcul de référence avec le logiciel FLAC

Un calcul de référence a été également réalisé avec le logiciel FLAC qui est basé sur la méthode des différences finies. Pour ce calcul, les clous ont été supposés élastoplastique, ce qui correspond plus à la réalité. Une telle option n'est pas possible dans CESAR. Par contre, la comparaison des trois logiciels sur les calculs de référence, qui est présentée dans le paragraphe 6.5.3 ci-dessous, est faite pour des clous élastiques.

Les valeurs des tractions calculées dans les clous sont plus proches des mesures, dans une fourchette de -3 kN à + 4 kN (figure C.6-33). La traction dans le clou supérieur est moins proche des résultats, par contre, les tractions dans les trois autres clous sont plus proches. La plastification du clou supérieure est nettement mis en évidence.

Contrairement à CESAR, qui donne de bons résultats pour les déformées du sol et de moins bons résultats pour la déformée du parement, FLAC donne de bons résultats pour le parement, avec des différences inférieures au mm, et de moins bons résultats pour le sol (figures C.6-34 et C.6-35). Cependant, les calculs encadrent les mesures en sur-estimant les déplacements du parement, en sous-estimant les déplacements dans le sol, à 2 m, et en les sur-estimant plus loin dans le massif, à 4 et 8m.

La distribution des contraintes, verticale et horizontale, dans le sol, le long du parement du mur en sol cloué, est présentée sur la figure C.6-36. Sont également tracées les droites correspondant aux contraintes verticales géostatiques et aux contraintes horizontales, de poussée et butée. Ces dernières ont été tracées sans tenir compte de la cohésion de 3 kPa.

Les contraintes σ_v et σ_h varie très rapidement entre chaque lit de clous. En première approximation, les pics de contraintes horizontales et verticales correspondent aux niveaux des lits de clous, tandis qu'entre ceux-ci, du fait des effets de voûtes dans le sol, les contraintes sont réduites très nettement. Le rapport des contraintes horizontale et verticale peut ainsi atteindre des valeurs de l'ordre de 10. L'accrochage du sol sur le parement a également une influence non négligeable de ce point de vue là. Il permet d'expliquer pourquoi les contraintes horizontales descendent en dessous de la ligne correspondant aux contraintes horizontales de poussée. Pour tous les calculs, il a été supposé une adhérence parfaite entre le sol et le béton du parement.

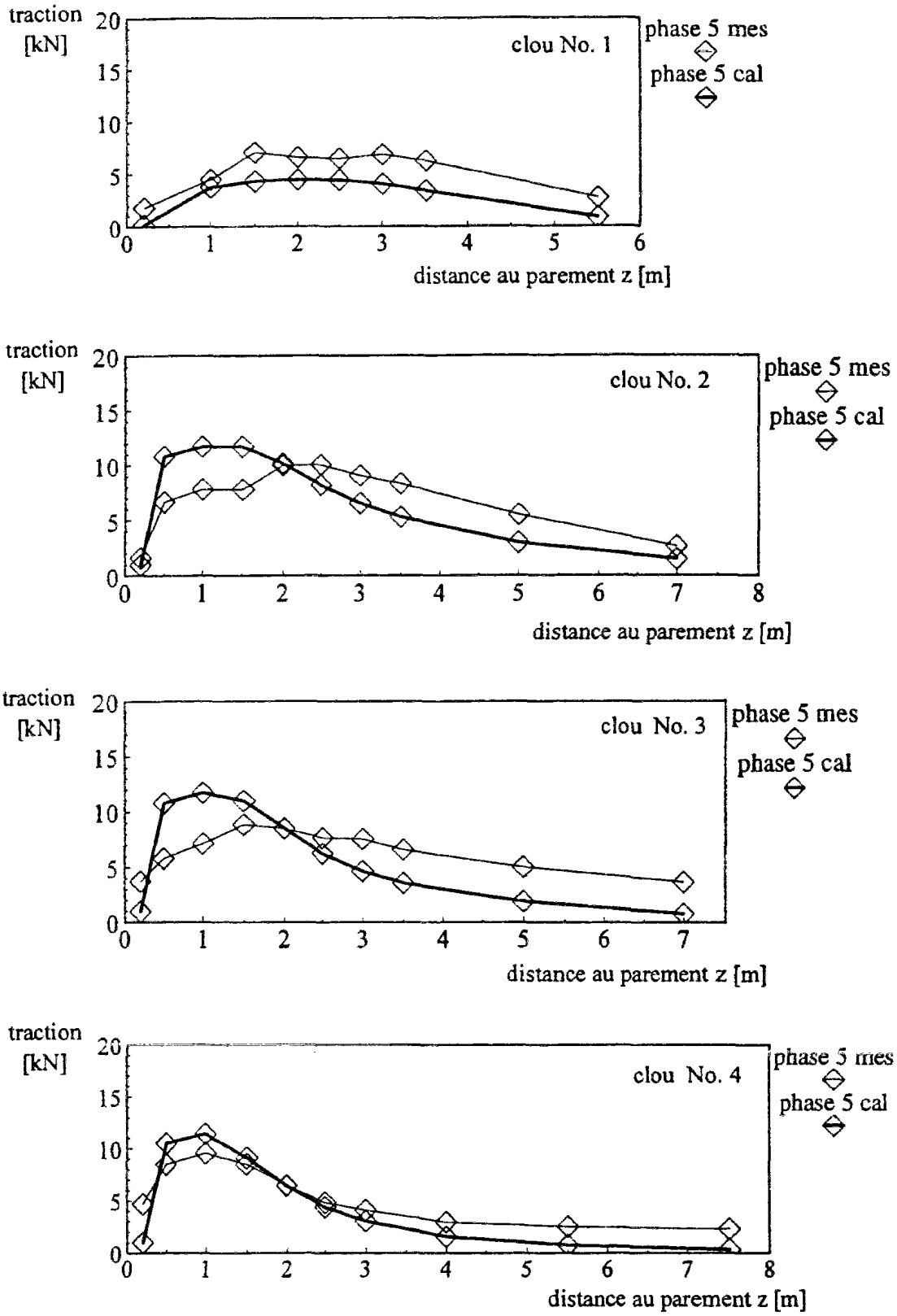


Figure C.6-33 : Efforts dans les clous à la fin de la phase 5.
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1.
Calcul de référence avec FLAC.

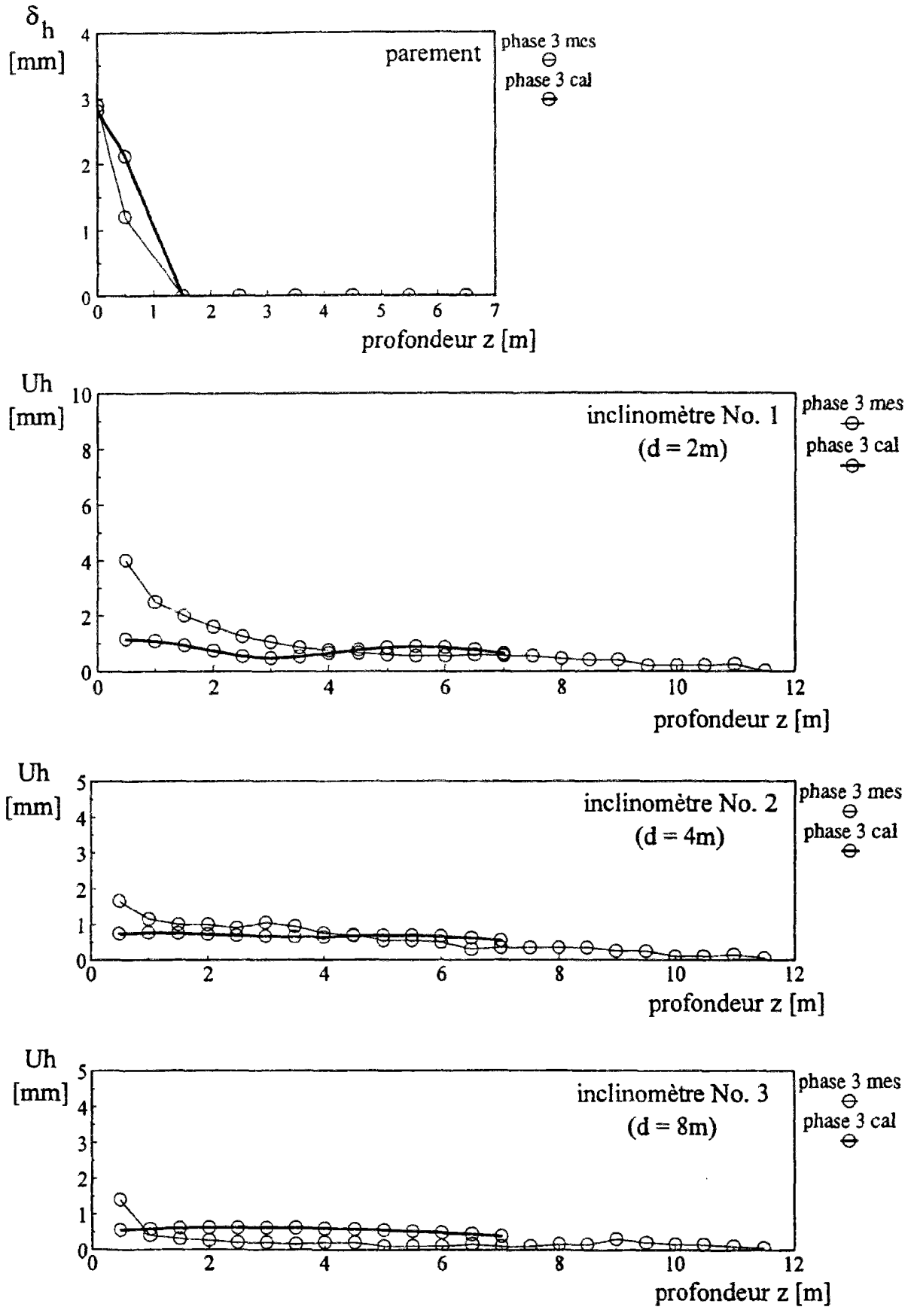


Figure C.6-34 : Déformées du parement et du sol à la fin de la phase 3.
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1.
Calcul de référence avec FLAC.

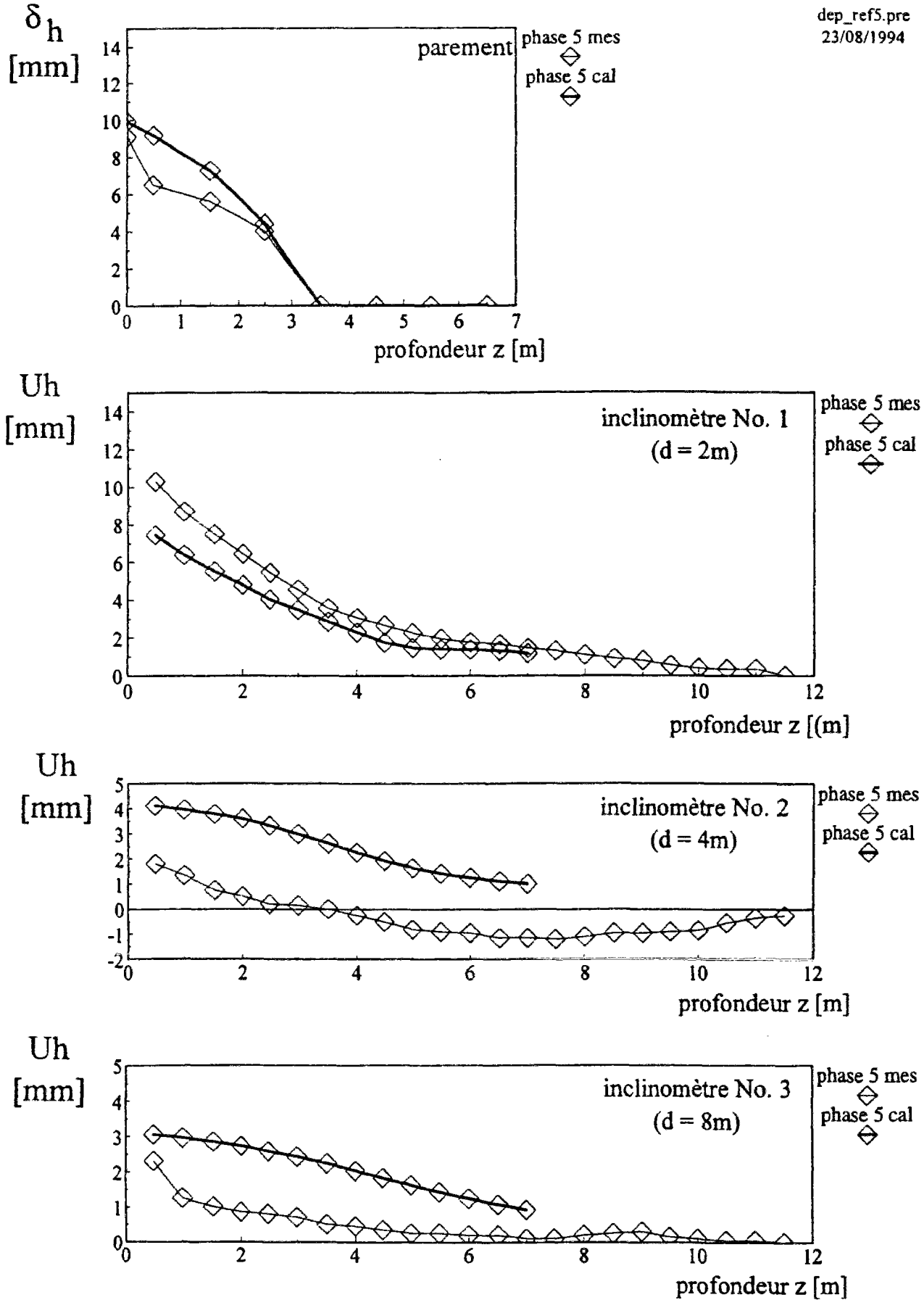


Figure C.6-35 : Déformées du parement et du sol à la fin de la phase 5.
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1.
Calcul de référence avec FLAC.

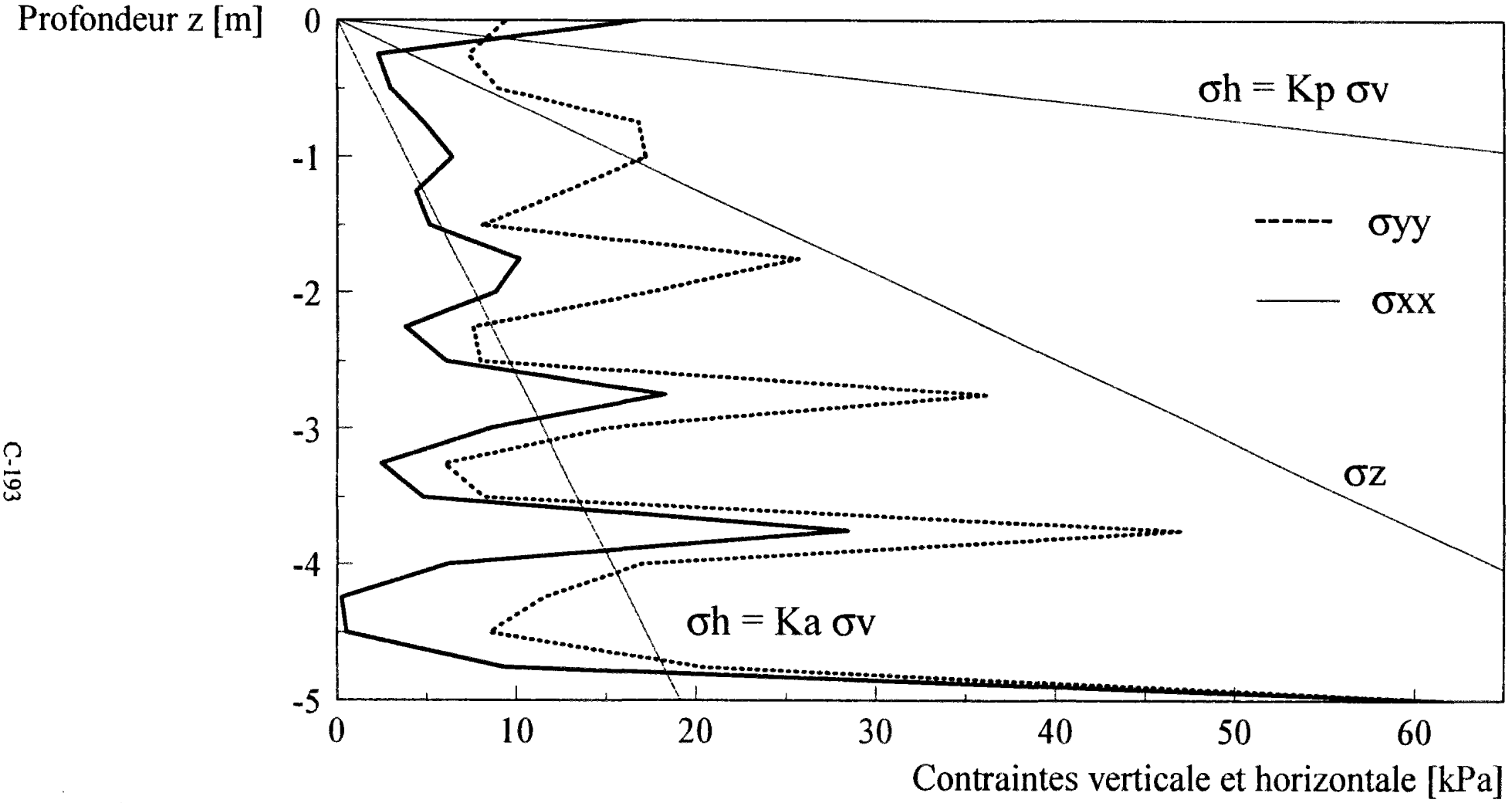


Figure C.6-36 : Contraintes, horizontale et verticale, le long du parement (phase 5).
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1.
Calcul de référence avec FLAC.

Le déplacement horizontal en tête du mur U_h , normalisé par la hauteur du mur à la phase correspondante H_i , augmente presque linéairement avec cette hauteur H_i à partir de la deuxième phase (tableau C.6-22). C'est un résultat qui a été observé expérimentalement par Plumelle (1986). A la fin de la 5ème phase, le rapport U_h sur H est d'environ 2 pour 1000. Si l'on extrapole à la 7ème phase on obtient un rapport de 3 pour 1000, qui tombe dans la fourchette observée sur de nombreux ouvrages. Le déplacement vertical en tête du mur est positif pour la première phase, ce qui correspond à un soulèvement. Mais dès la deuxième phase il redevient négatif et augmente progressivement avec la hauteur de la construction. Le rapport U_h / U_v est relativement élevé en début de construction, mais il tend vers 1 au fur et à mesure que la hauteur du mur augmente.

Le soulèvement du sol s_f en fond de fouille augmente avec la hauteur H_i . A la 5ème phase, il est d'environ 1 cm, ce qui est tout à fait raisonnable comparé aux soulèvements qui ont pu être observés dans d'autres simulations (Ouelogo, 1989).

Tableau C.6-22 : Déplacements en tête et en fond de fouille pour le calcul de référence avec paramètres constants

Phase	Hauteur H_i [m]	U_h (tête) (mm)	U_h / H_i [1/1000]	U_v (tête) (mm)	U_v / H_i [1/1000]	U_h / U_v	Soulèvement fouille s_f [mm]
1	1	0,313	0,31	0,815	0,81		1,830
2	2	0,612	0,31	-0,113	0,05	5,41	4,734
3	3	2,793	0,93	-2,041	0,68	1,37	7,357
4	4	5,870	1,47	-4,994	1,25	1,17	9,081
5	5	9,970	1,99	-8,835	1,77	1,13	9,699

6.5.3 Calcul de référence avec le logiciel PLAXIS

Un calcul de référence a été aussi réalisé avec le logiciel PLAXIS qui est basé sur la méthode des éléments finis. Il est possible de choisir entre les formulations en petites et grandes déformations. La première a été choisie.

Jusqu'à la phase 4, les calculs ont convergé facilement. Des problèmes de convergence numérique ont été rencontrés en pied de fouille, à la phase 5. Ces problèmes ont très largement perturbé les résultats obtenus pour cette phase. Il conviendrait, dans des études futures, de reprendre ces calculs et d'améliorer la précision du maillage en pied de mur pour éviter des problèmes de convergence numérique. Les résultats obtenus, cependant, permettent de tirer quelques conclusions partielles mais intéressantes.

La distribution des tractions dans les trois derniers clous est fortement perturbée par les problèmes de convergence numérique alors que dans le premier lit de clou, qui est peu influencé par la phase 5, les valeurs des tractions sont en très bon accord avec les mesures (figure C.6-37).

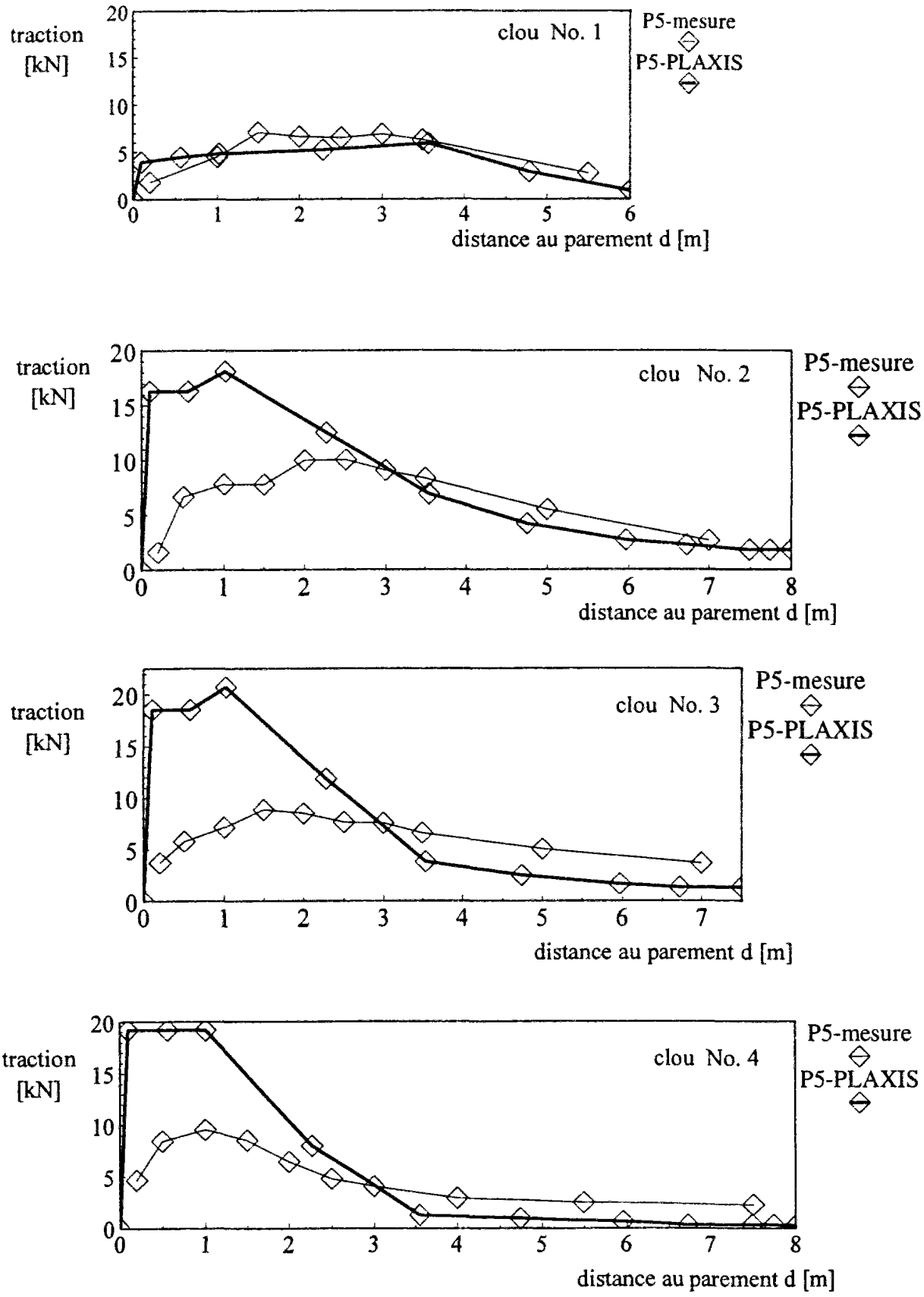


Figure C.6-37 : Efforts dans les clous à la fin de la phase 5.
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1.
Calcul de référence avec PLAXIS.

Pour ce qui concerne les déplacements, ceux-ci sont assez bien encadrés à la phase 3. A la phase 5, les déplacements au parement sont sur-estimés, à 2 m du parement ils sont remarquablement bien calculés, à 4 et 8 m, il sont sur-estimés, comme dans tous les calculs numériques réalisés (figure C.6-38 et C.6-39).

Le champ de déplacement à la fin de la phase 5 est représenté sur la figure C.6-40. Il convient de noter que la flèche la plus grande correspond au volume de sol en équilibre local limite, qui a posé des problème de convergence. A part ce point particulier, l'ensemble de l'ouvrage s'est comporté de manière très similaire à tous les autres calculs.

6.5.4 Comparaison des calculs de référence

Tous les calculs considérés dans la présente comparaison ont été réalisés avec des clous élastiques. Les trois calculs donnent quasiment les mêmes tractions pour le premier lit de clous et celles-ci sont en très bon accord avec les mesures (figure C.6-41). Au niveau des trois autres lits de clous, il convient de ne regarder que CESAR et PLAXIS; ceux-ci donnent, à 1 ou 2 kN près, les mêmes tractions. Les mesures sont légèrement plus faibles en tête et plus fortes en pied de clous. Il convient de noter que, d'un point de vue purement mécanique, les tractions devraient être nulles aux extrémités libres des clous. Cela n'est vrai ni pour les mesures ni pour les calculs. Pour ces derniers, cela s'explique simplement dans le cas d'éléments de barres, à 2 noeuds, par le fait que la traction, étant constante par élément fini, elle est discontinue le long des barres.

Les déformées données par les calculs pour le parement et le sol, aussi bien pour la phase 3 que la phase 5, sont toutes groupées, ce qui est rassurant pour des méthodes de calculs qui, d'un point de vue mathématiques, devraient converger vers exactement la même solution, aux erreurs numériques près. Au parement, les calculs donnent tous des déplacements légèrement plus importants. Dans le massif de sol cloué, à la phase 3, les déplacements à 2 m sont tous sous-estimés, à 4 m, ils sont plus proches des mesures et à 8 m, ils sont surestimés (figure C.6-42). A la phase 5, les déplacements au parement sont là encore sur-estimés, à 2 m, ils encadrent bien les mesures, à 4 et 8 m, ils sur-estiment les mesures (figure C.6-43).

Les déformées du sol en surface, en amont et en aval du mur, sont présentées sur les figures C.6-44 et C.6-45. Loin des zones plastiques, c'est à dire en arrière du mur, et très en aval du parement, les codes FLAC et CESAR donnent exactement les mêmes réponses. Localement en pied de mur, il faut noter l'affaissement du mur qui est plus prononcé pour CESAR que pour FLAC. Il en résulte en tête des déplacements légèrement différents. Les maillages utilisés sont à priori équivalents. Les méthodes numériques sont également équivalentes en terme de précision et de convergence. Une explication possible réside dans les formulations différentes utilisées. FLAC est basée sur une formulation en déformation finies alors que CESAR est basée sur une formulation en déformations infinitésimales. Le niveau des déformations rencontrées dans CESAR est de l'ordre de 8% (figure C.6-25), ce qui est à la limite de validité d'une formulation en déformations infinitésimales.

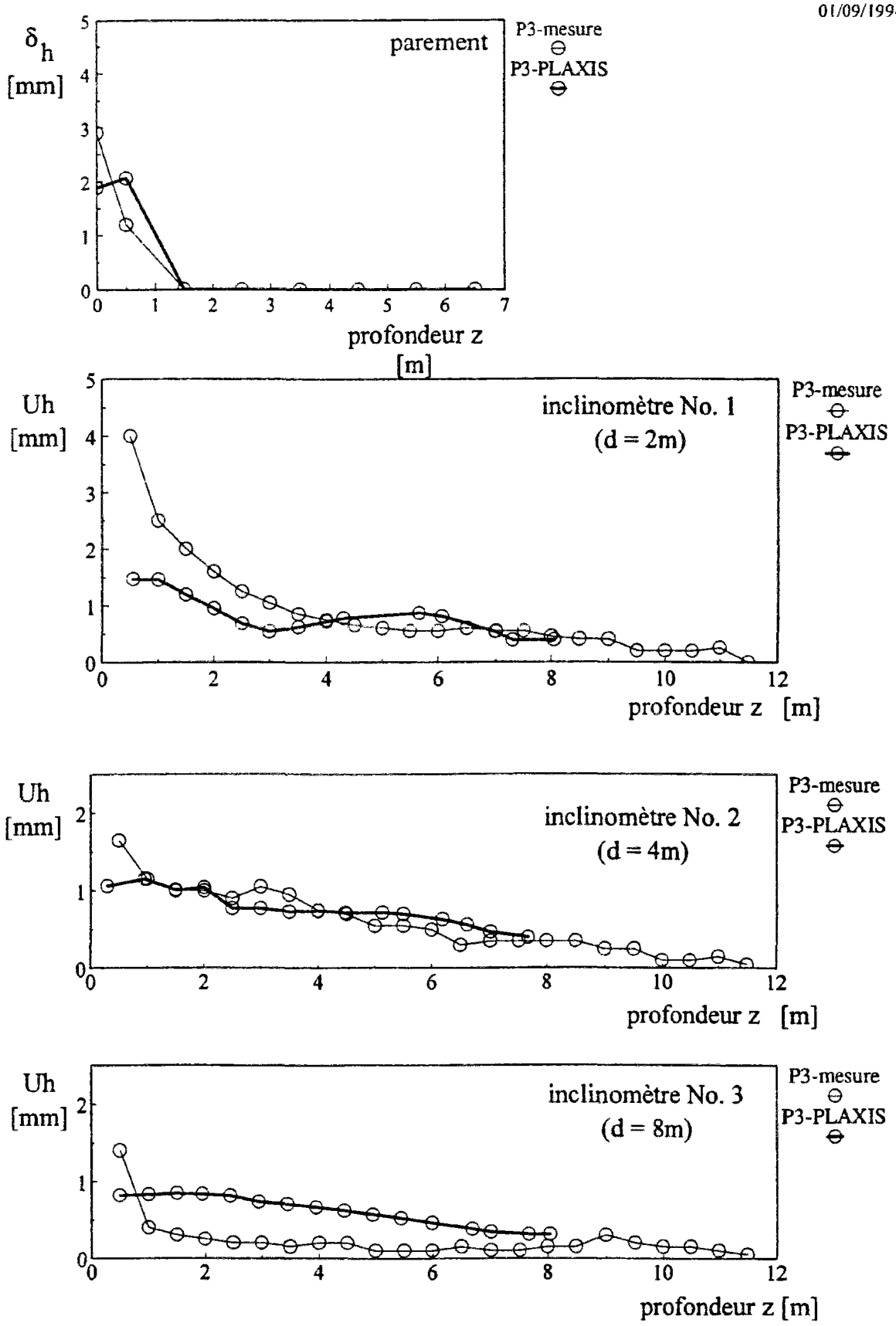


Figure C.6-38 : Déformées du parement et du sol à la fin de la phase 3.
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1.
Calcul de référence avec PLAXIS.

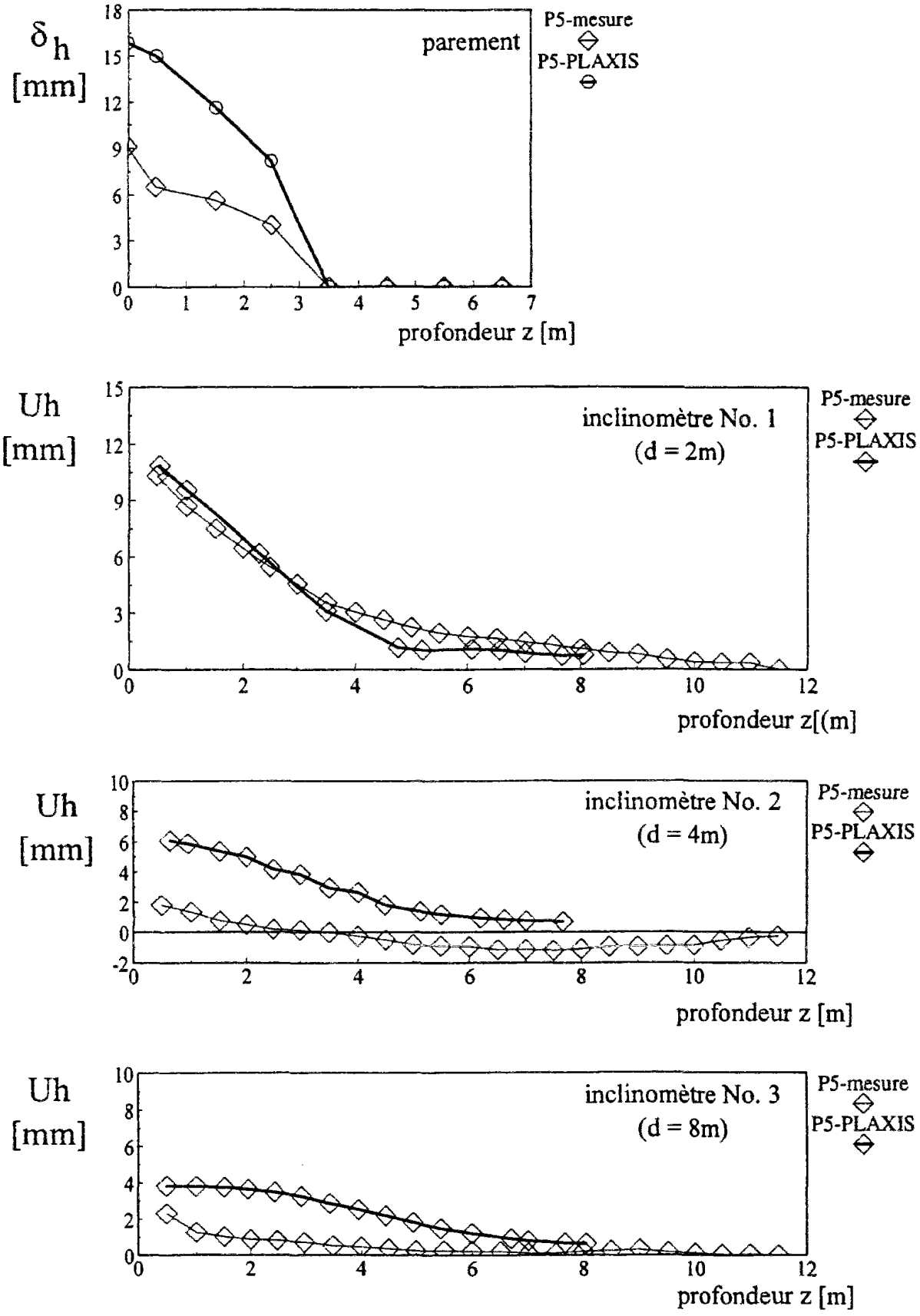


Figure C.6-39 : Déformées du parement et du sol à la fin de la phase 5.
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1.
Calcul de référence avec PLAXIS.

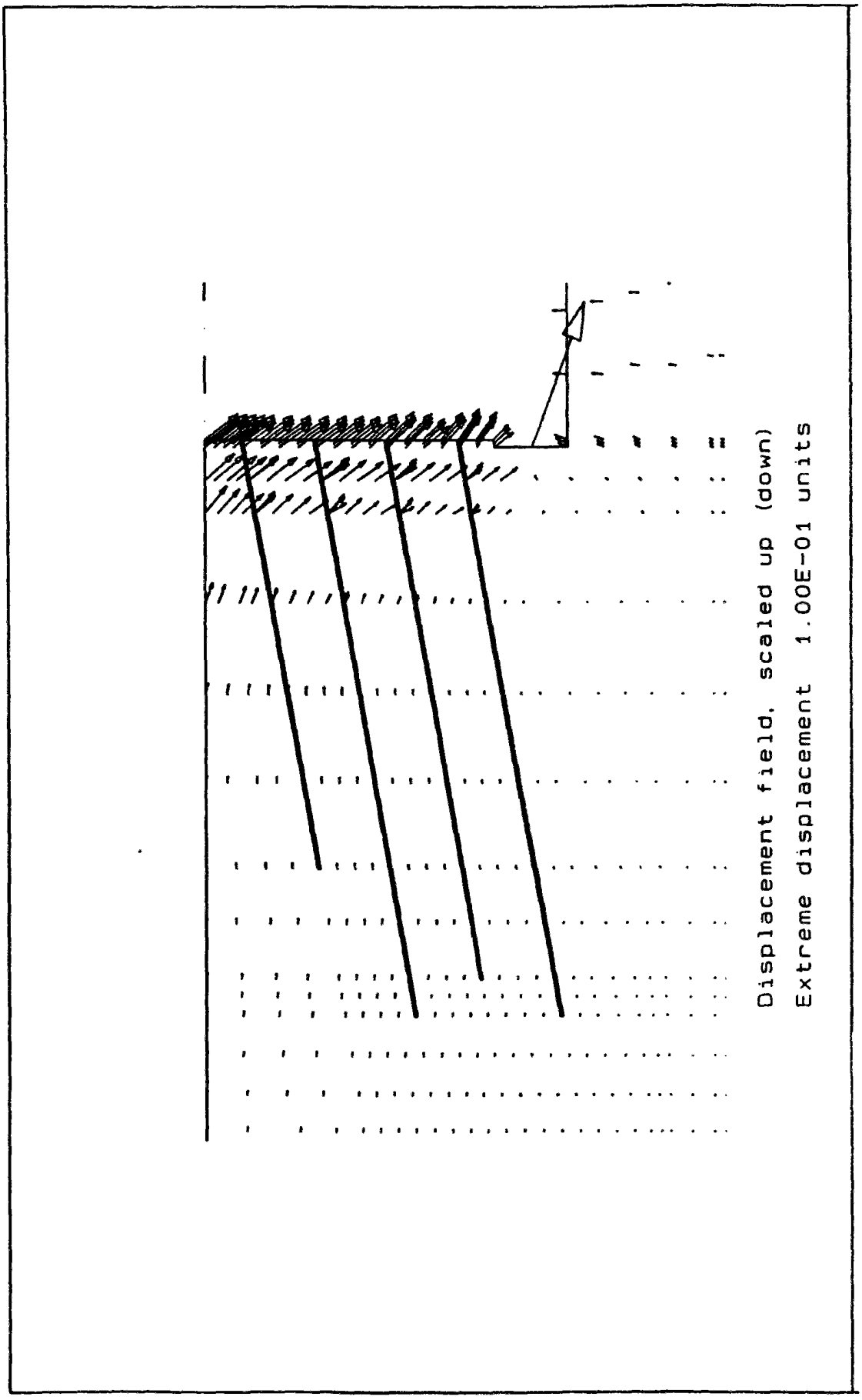


Figure C.6-40 : Champ de déplacements à la fin de la phase 5
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1.
Calcul de référence avec PLAXIS.

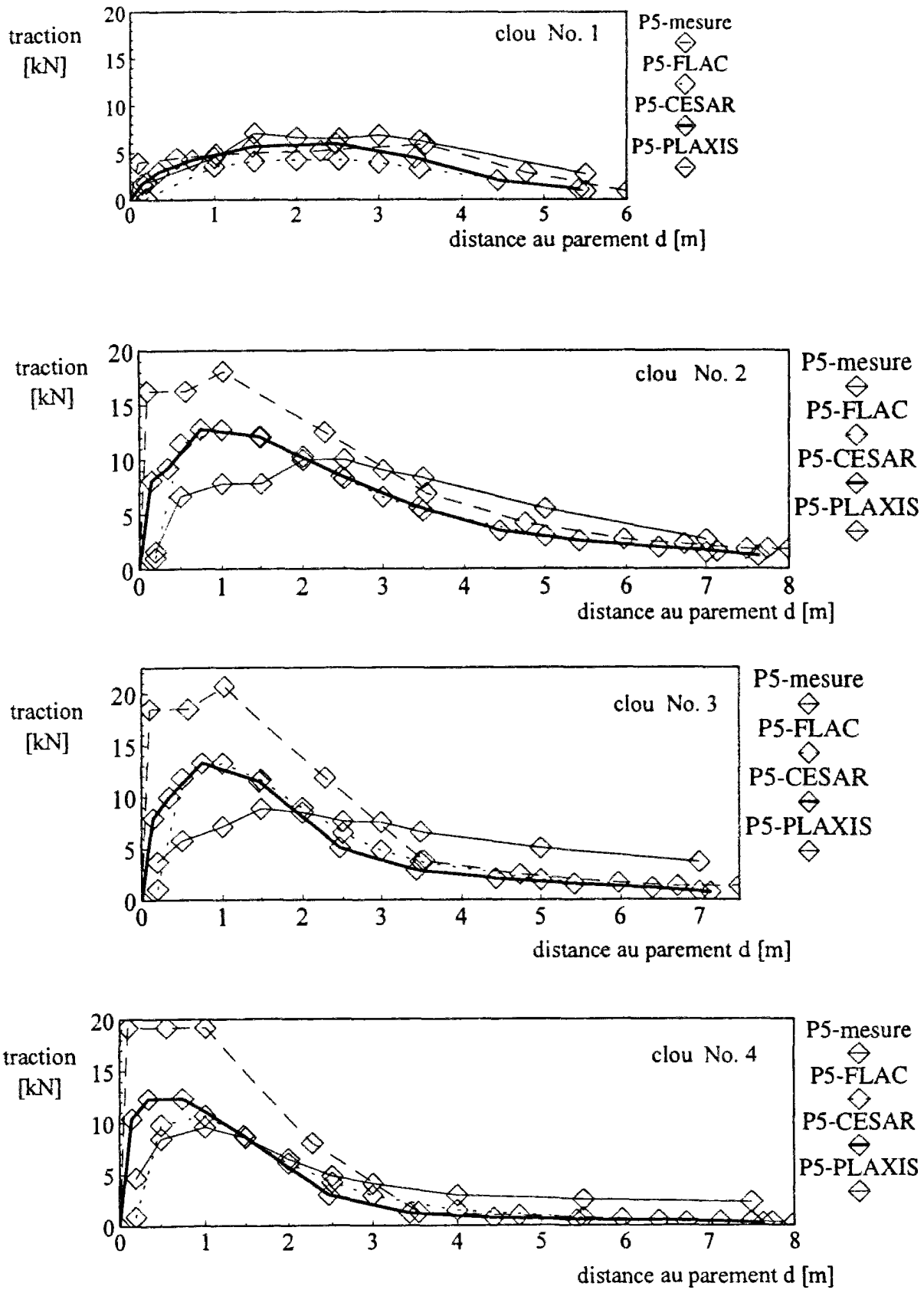


Figure C.6-41 : Comparaison des efforts dans les clous à la fin de la phase 5.
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1.
Calcul de référence avec CESAR, FLAC et PLAXIS.

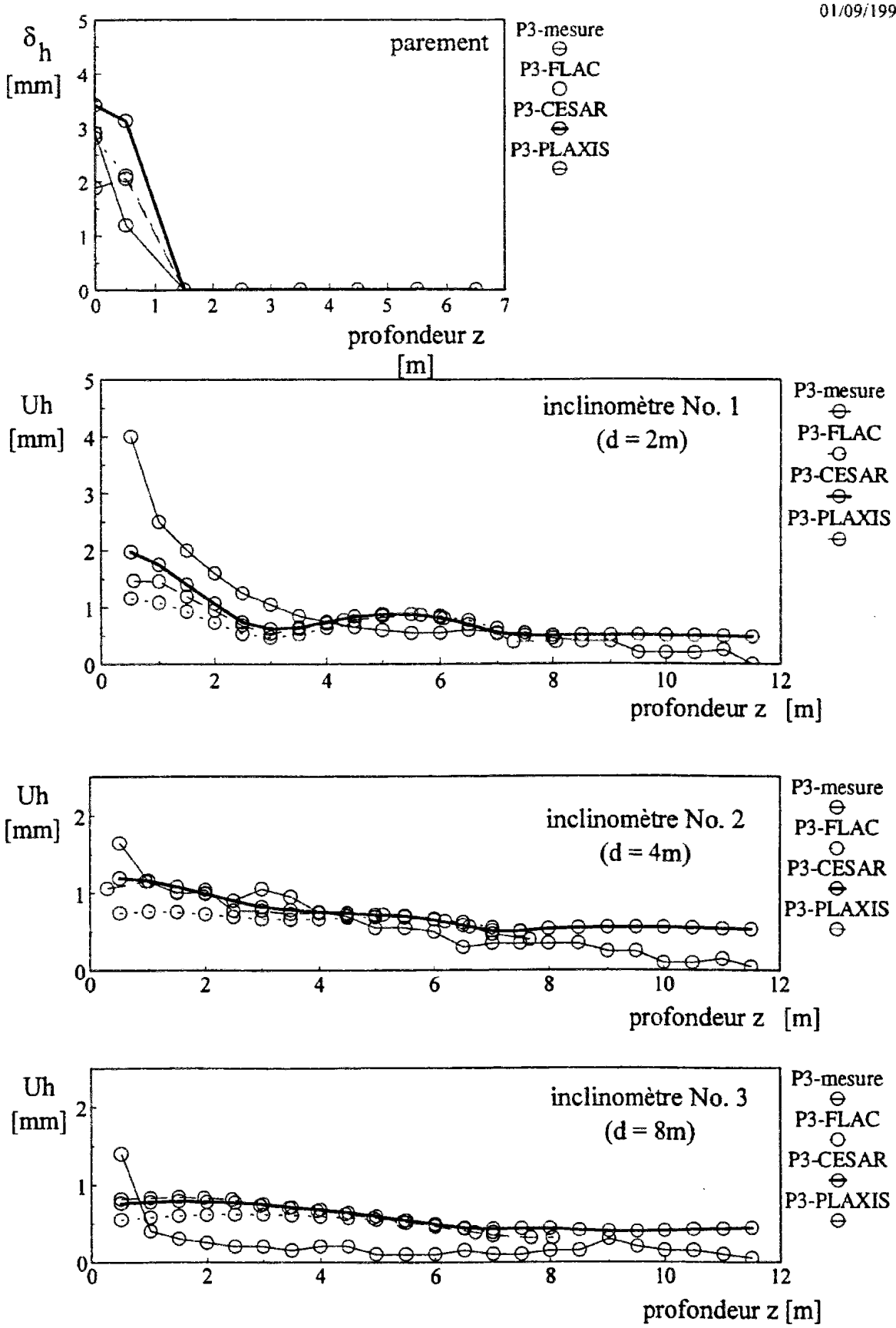


Figure C.6-42 : Comparaison des déformées du parement et du sol à phase 3.
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1.
Calcul de référence avec CESAR, FLAC et PLAXIS.

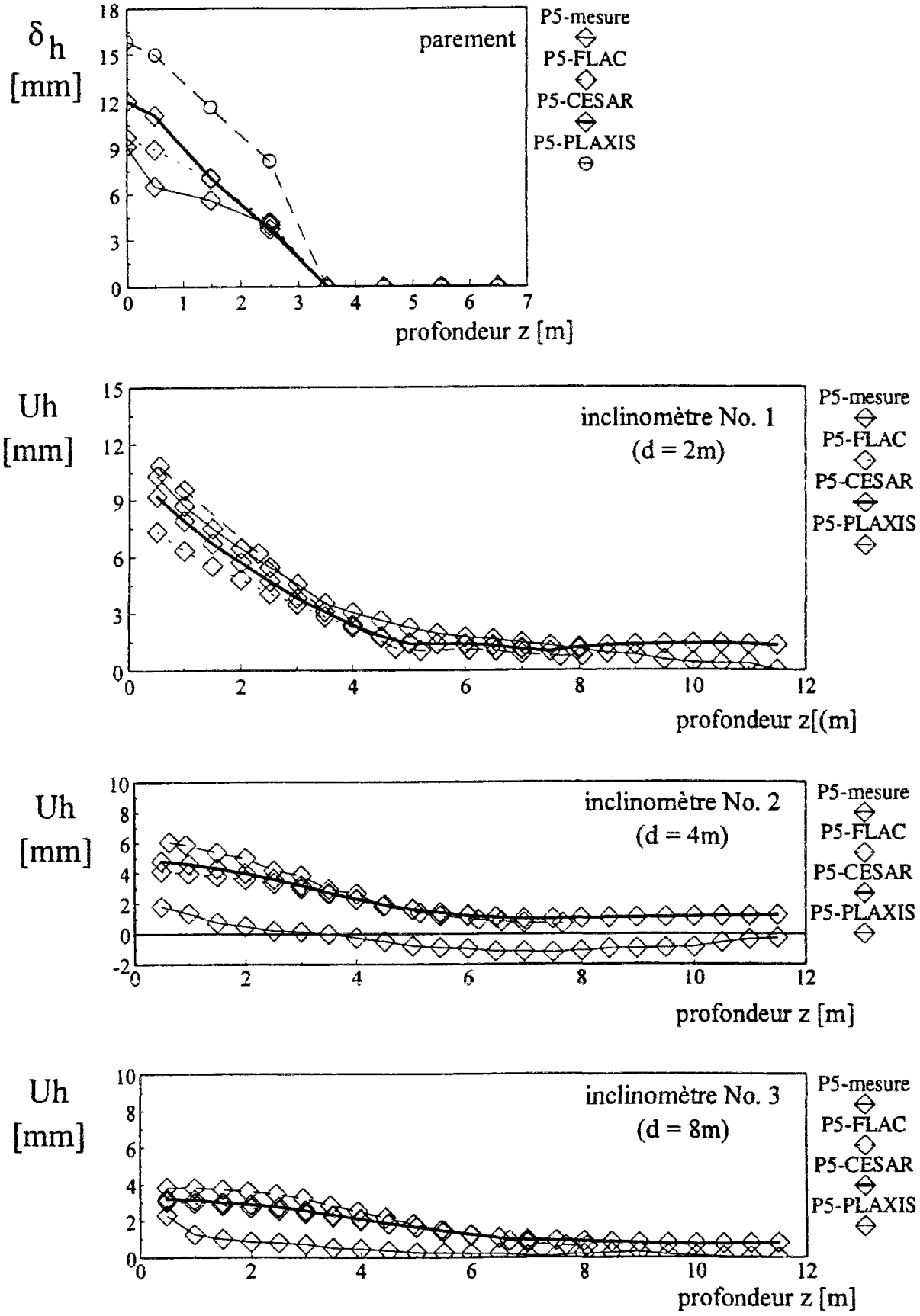


Figure C.6-43 : Comparaison des déformées du parement et du sol à la phase 5.
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1.
Calcul de référence avec CESAR, FLAC et PLAXIS.

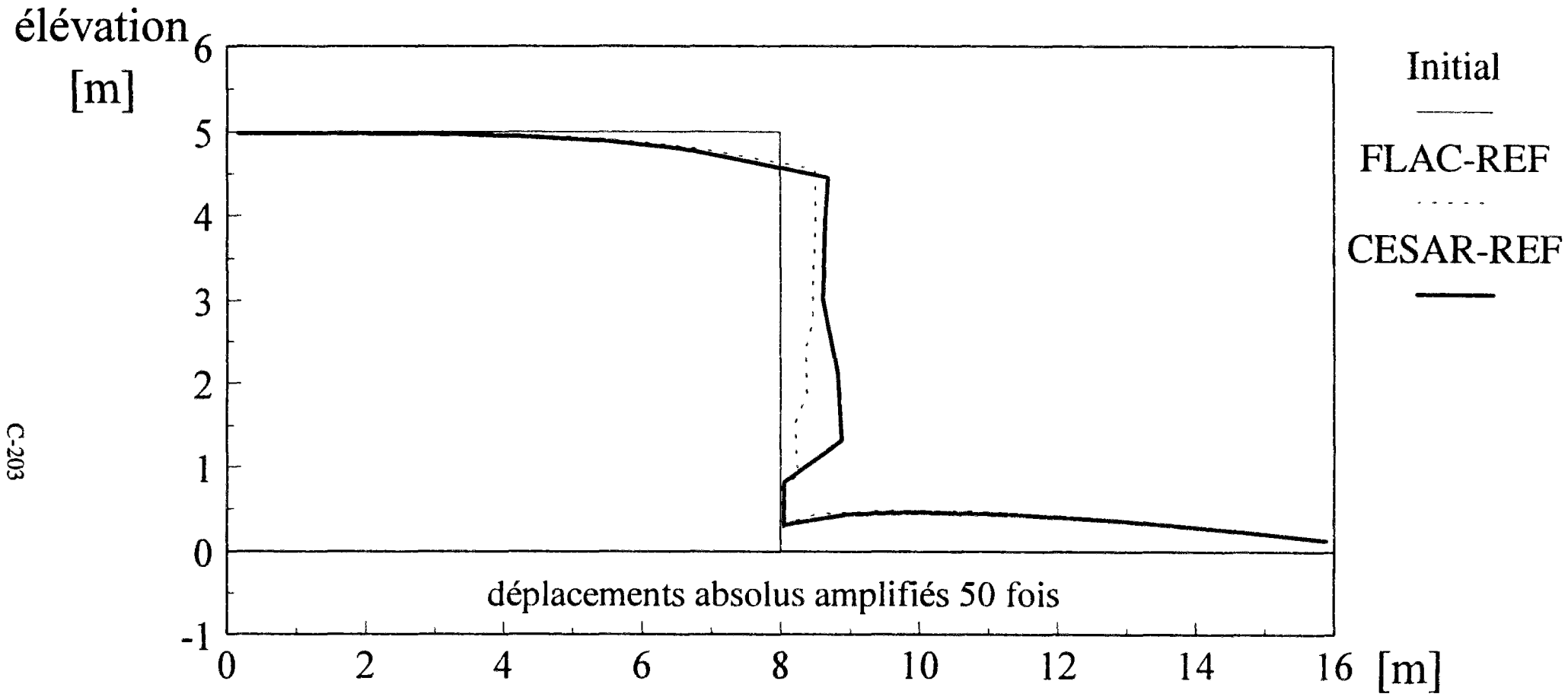


Figure C.6-44 : Comparaison des déformées du sol en surface à la phase 5.
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1.
Calcul de référence avec CESAR, FLAC et PLAXIS.

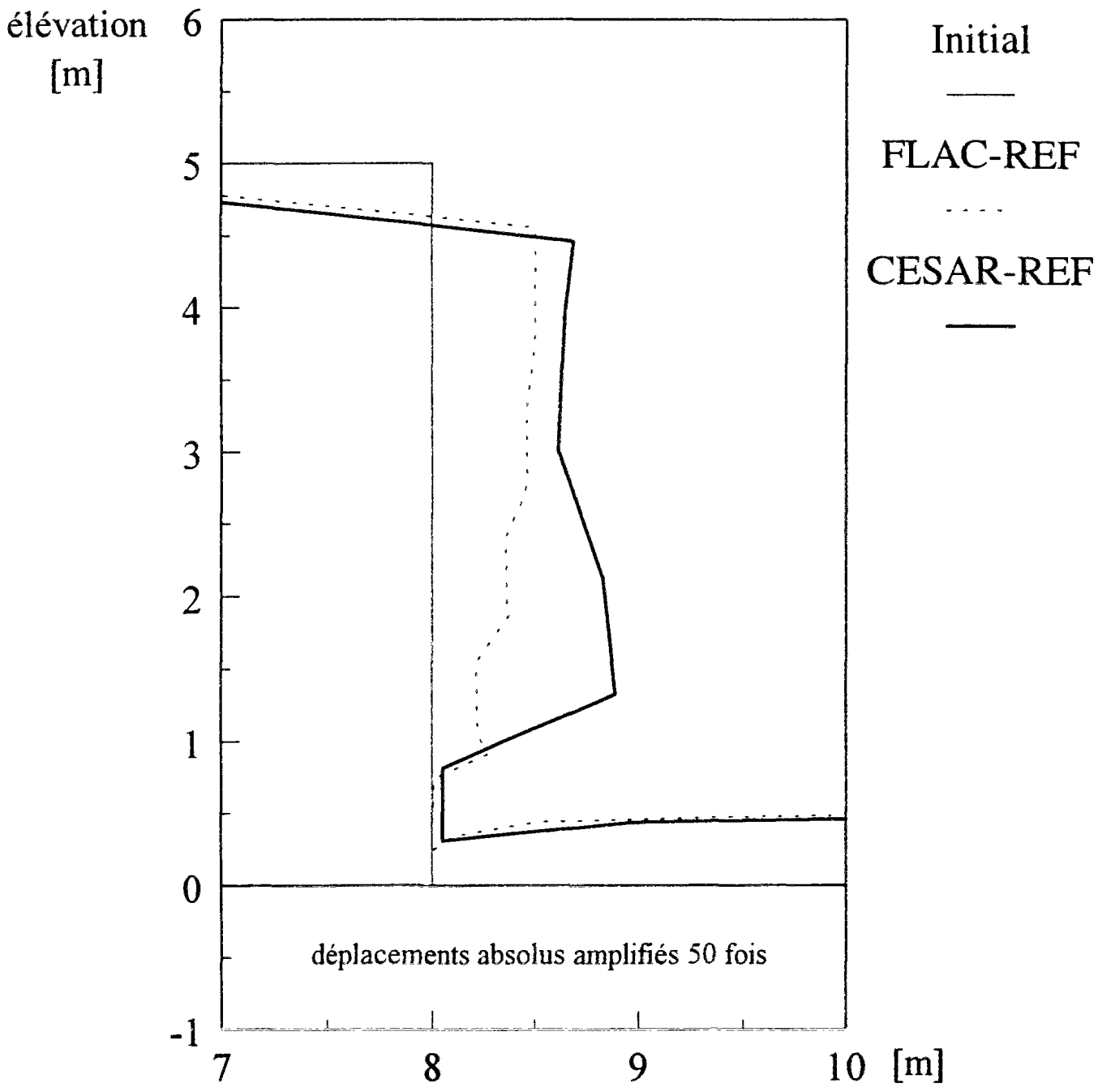


Figure C.6-45 : Comparaison des déformées du sol en surface à la phase 5.
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1.
Calcul de référence avec CESAR, FLAC et PLAXIS.

L'évolution du déplacement vertical U_v en tête en fonction de la hauteur H_i du mur est présentée sur la figure C.6-46 tandis que l'évolution du déplacement horizontal U_h en tête est présentée sur la figure C.6-47. Il faut noter que le déplacement vertical est positif durant les deux première phases pour les deux calculs avec CESAR et PLAXIS, tandis que pour FLAC ce déplacement n'est positif que durant la première phase. Ceci constitue un net progrès par rapport aux calculs qui ont pu être faits par Ouelogo (1989) et qui donnent systématiquement des soulèvements de mur durant toutes les phases de construction. Les trois calculs sont groupés et sous-estiment les tassement en tête très légèrement. L'évolution du déplacement horizontal en fonction des phases de construction est donné sur la figure C.6-47. Cette évolution est très bien modélisée par les calculs. Les trois codes donnent des valeurs qui sont groupées et qui encadrent les mesures dans une fourchette de - 4 à + 2 mm.

Les contraintes, horizontale et verticale, calculées avec FLAC et CESAR, dans le sol, le long du parement sont présentées sur les figures C.6-48 et C.6-49. Les profils trouvés ont des allures très proches même si des différences au niveau des valeurs numériques existent. Les contraintes horizontales autour d'un lit de clou varient dans un rapport de 1 à 10. Pour le dimensionnement du parement en béton projeté, il faut tenir compte de ces fortes variations de contraintes.

Il convient de noter que tous les logiciels donnent des soulèvement de fond de fouille inférieur au centimètre (figures C.6-40, C.6-44 et tableau C.6-23).

Tableau C.6-23 : Déplacements en tête du parement et en fond de fouille pour les calculs de référence avec CESAR, FLAC et PLAXIS

	Déplacement horizontal U_h [mm]				Déplacement vertical U_v [mm]				soulèvement fond de fouille [mm]		
hauteur H_i (m)	mesures	FLAC	CESAR	PLAXIS	mesures	FLAC	CESAR	PLAXIS	FLAC	CESAR	PLAXIS
1	1,2	0,313	0,373		-3,2	0,815	0,887		1,830	1,678	
2	1,5	0,612	1,639	0,734	-3,6	-0,113	0,189	1,08	4,734	4,44	
3	3,5	2,793	5,057	2,62	-6,4	-2,041	-3,071	-1,60	7,357	6,866	
4	7	5,870	8,899	5,75	-8,9	-4,994	-6,635	-5,64	9,081	8,577	
5	14,4	9,970	13,67	16,6	-16,2	-8,835	-10,85	-21,30	9,699	9,202	9,831

Les mesures de déplacements sont donc bien encadrées par les calculs, aussi bien à la phase 3 qu'à la phase 5, et ce, quels que soient le logiciel et la méthode numérique utilisés. Les fourchettes de prédiction sont de + 0 à + 4 mm, au niveau du parement, de - 2 à + 1 mm, à 2 m du parement, de + 2 à + 4 mm, à 4 m du parement et de + 2 à +3 mm, à 8 m du parement.

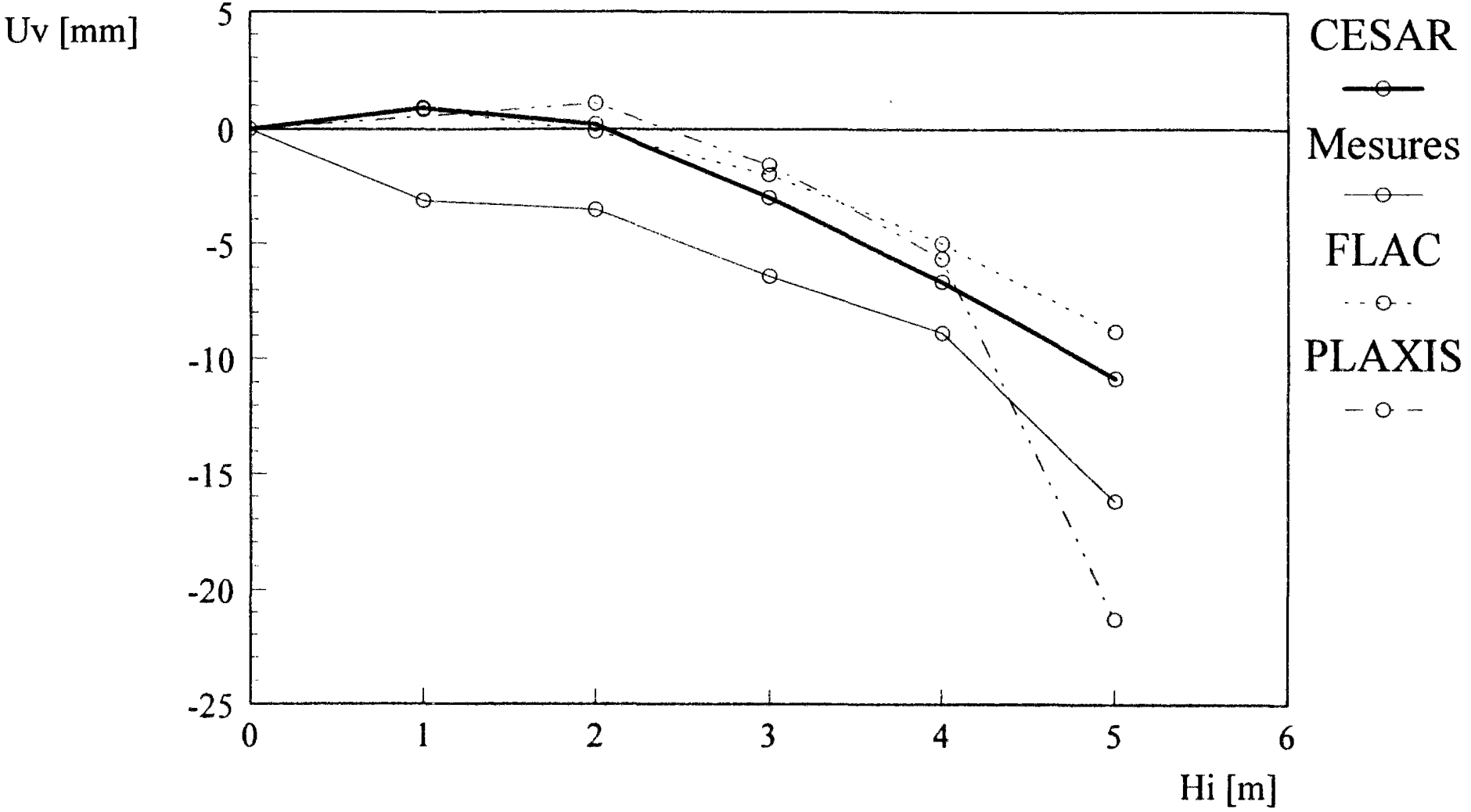


Figure C.6-46 : Evolution du déplacement vertical en tête du mur durant les phases.
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1.
Calcul de référence avec CESAR, FLAC et PLAXIS.

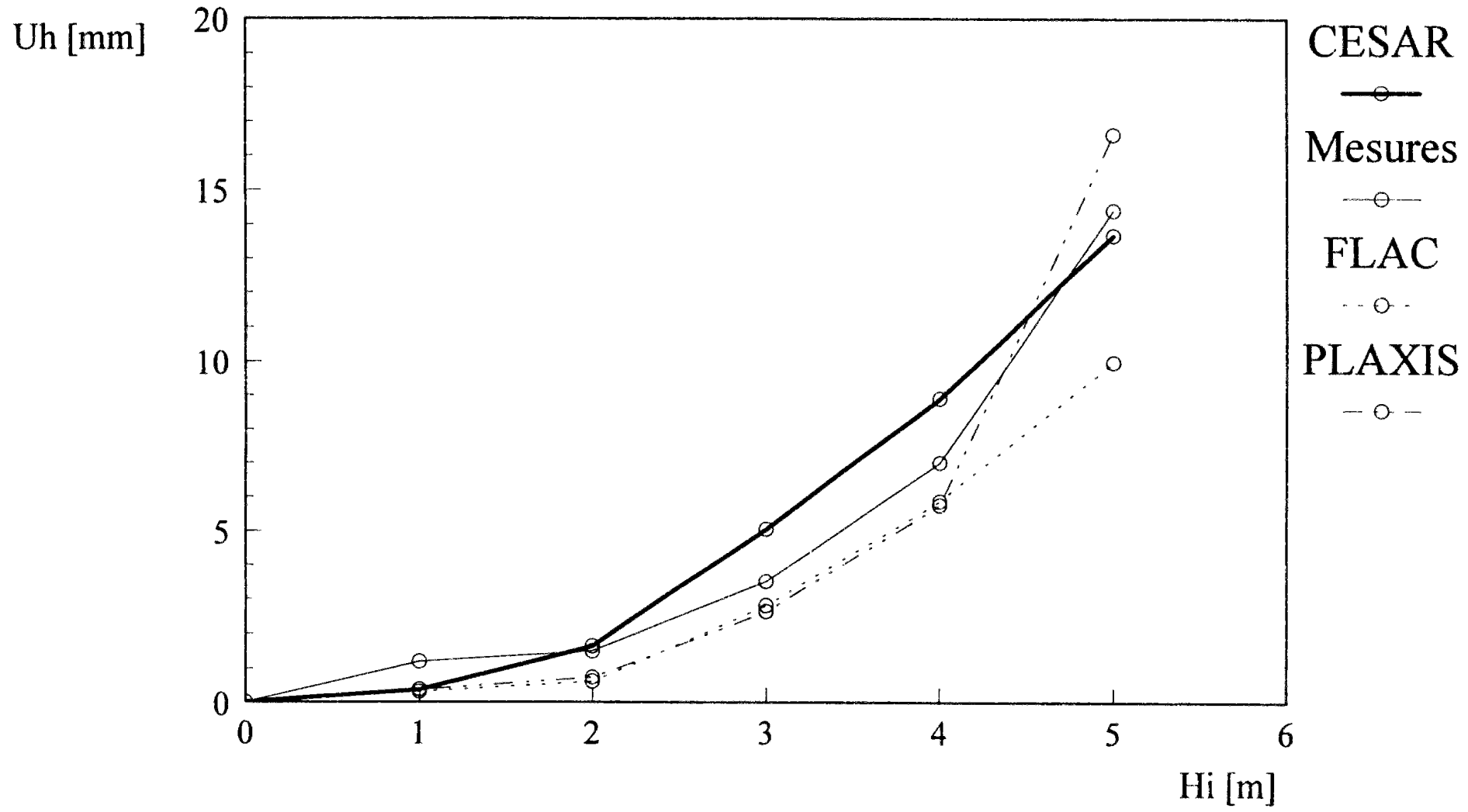


Figure C.6-47 : Evolution du déplacement vertical en tête du mur durant les phases.
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1.
Calcul de référence avec CESAR, FLAC et PLAXIS.

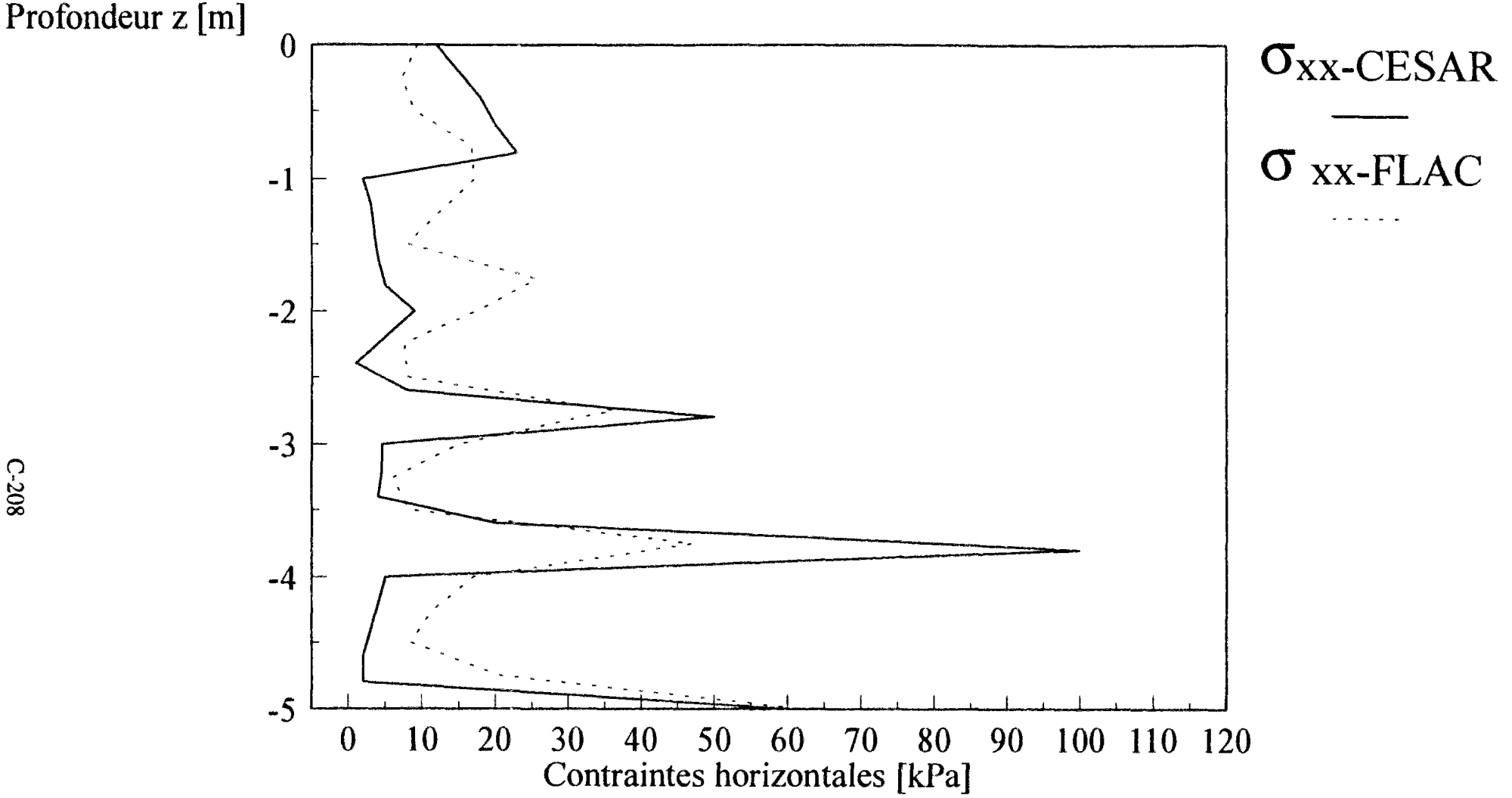


Figure C.6-48 : Contrainte horizontale le long du parement (phase 5).
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1.
Calcul de référence avec CESAR et FLAC.

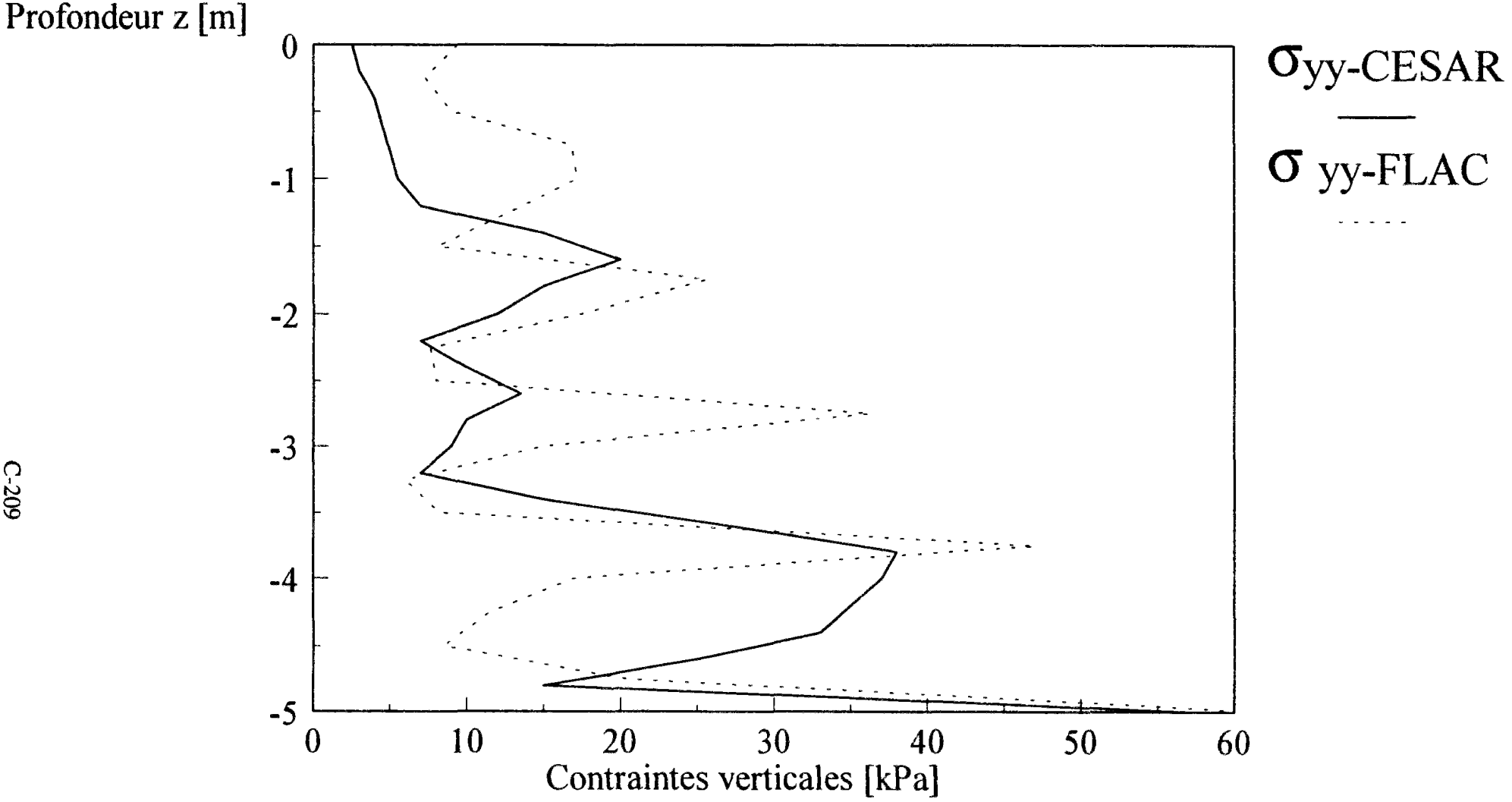


Figure C.6-49 : Contrainte verticale le long du parement (phase 5).
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1.
Calcul de référence avec CESAR et FLAC.

Les déformées du parement sont plus bombées que les mesures, par contre, au sein du massif de sol cloué, les déformées obtenues ont qualitativement la même forme et courbure que les déformées mesurées. Ce dernier point est très positif, car il démontre clairement que dans le massif en sol cloué, où le sol plastifie peu, les calculs sont très performants. Par contre, au niveau du parement, où le sol plastifie avec des niveaux de déformations plastiques non négligeables, de l'ordre de 8%, les calculs donnent des résultats nettement moins bons.

Il apparaît donc que les développement futurs devraient se concentrer sur ces problèmes de plastification en pied de mur. La formulation en grandes déformations est sans doute une voie intéressante, puisque FLAC donne une déformée de parement plus proche des mesures que les autres logiciels, qui sont formulés en petites déformations. Ceci étant, il existe d'autres voies à étudier et, notamment, les problèmes de localisation des déformations devrait être pris en compte, car ils induisent localement des champs de déformations très différents de ce qu'un milieu classique peut prédire.

6.6 Etude de sensibilité des paramètres

6.6.1 Première étude de sensibilité

Une première étude de sensibilité du résultat aux paramètres a été réalisée avec le logiciel FLAC. Dans l'ordre, nous avons regardé l'influence des paramètres suivants pour les clous : limite d'élasticité des clous, module de déformation des clous, pour l'interaction entre le sol et les clous : coefficient de mobilisation élastique du frottement latéral, pour le sol : résistance en traction, cohésion, angle de dilatance, variations des paramètres mécaniques avec la profondeur, puis pour le maillage : continuité et discontinuité du maillage.

6.6.1.1 Clous élastiques

Le choix d'une contrainte limite infinie pour les clous a pour effet de les faire travailler uniquement dans leur domaine élastique. Les efforts de traction ne sont plus plafonnés. Par rapport au calcul de référence, on observe des tractions plus fortes (figure C.6-50). Cependant, la différence est relativement faible, de l'ordre de 1 à 3 kPa. Il est à noter que la contrainte limite qui a été choisie est la contrainte limite élastique σ_e or celle-ci est beaucoup plus faible que la contrainte limite de rupture σ_y. Les mesures n'ont pas indiqué de plastification des clous sauf pour le lit de clous No. 1. Si l'on remonte très légèrement la contrainte limite dans les calculs, seul le lit de clous No. 1 plastifiera, ce qui a été observé sur l'ouvrage en vraie grandeur.

Les différences entre les déformées calculées et mesurées, aussi bien à la phase 3 qu'à la phase 5, sont très faibles (figures C.6-34 et C.6-51), si ce n'est quasiment nulles (figure C.6-35 et C.6-52). Sur la figure C.6-53 donnant les déplacements en surface, autour du mur en sol cloué, les différences, entre le calcul, dit de référence, où les clous sont élastoplastiques et le présent calcul où les clous sont élastiques, sont quasiment nulles.

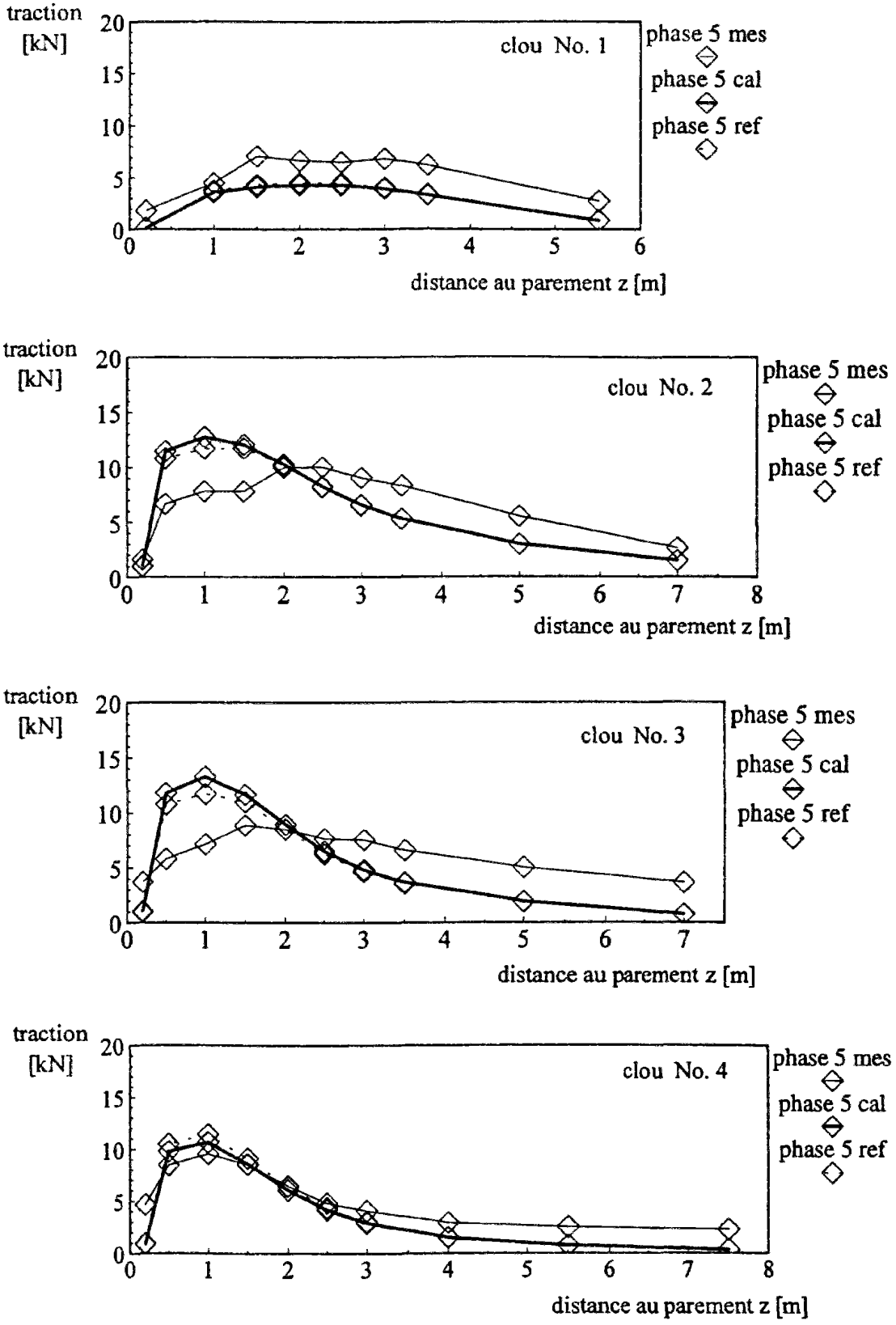


Figure C.6-50 : Efforts de traction dans les clous à la fin de la phase 5 (H = 5 m)
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calcul avec des clous élastiques (FLAC)

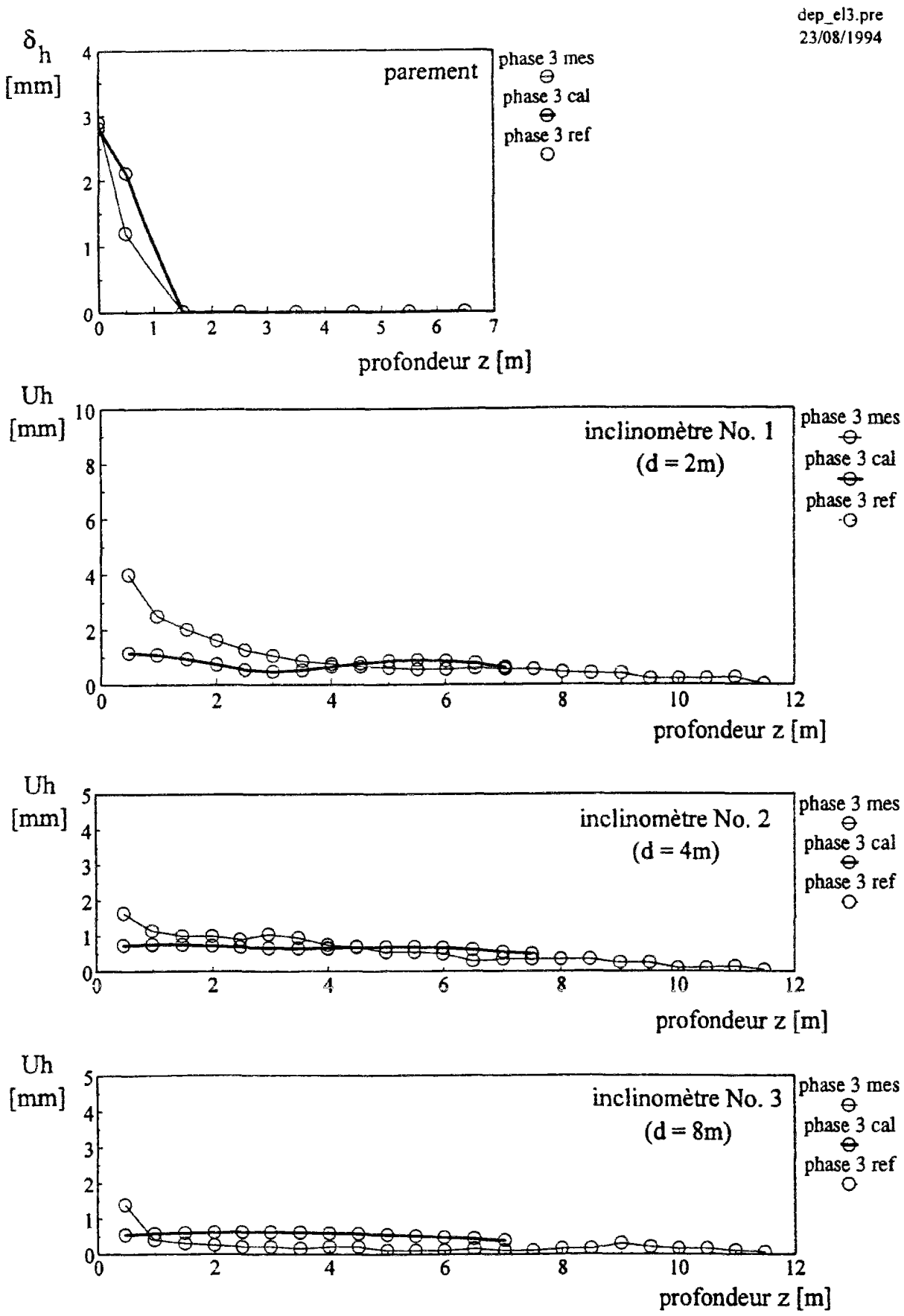


Figure C.6-51 : Déformées du parement et du sol à la fin de la phase 3 (H = 3 m)
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calcul avec des clous élastiques (FLAC)

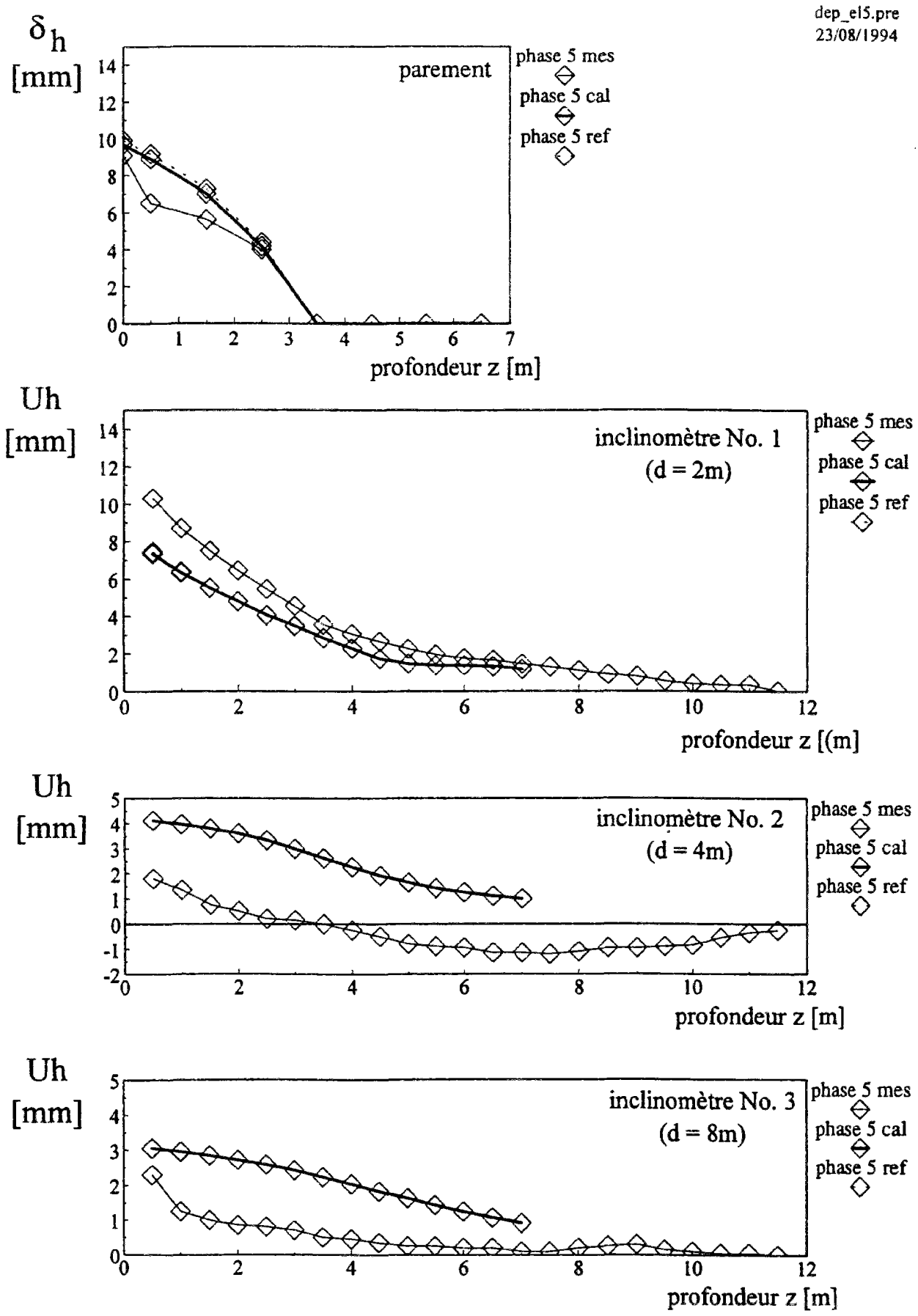


Figure C.6-52 : Déformées du parement et du sol à la fin de la phase 5 (H = 5 m)
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calcul avec des clous élastiques (FLAC)

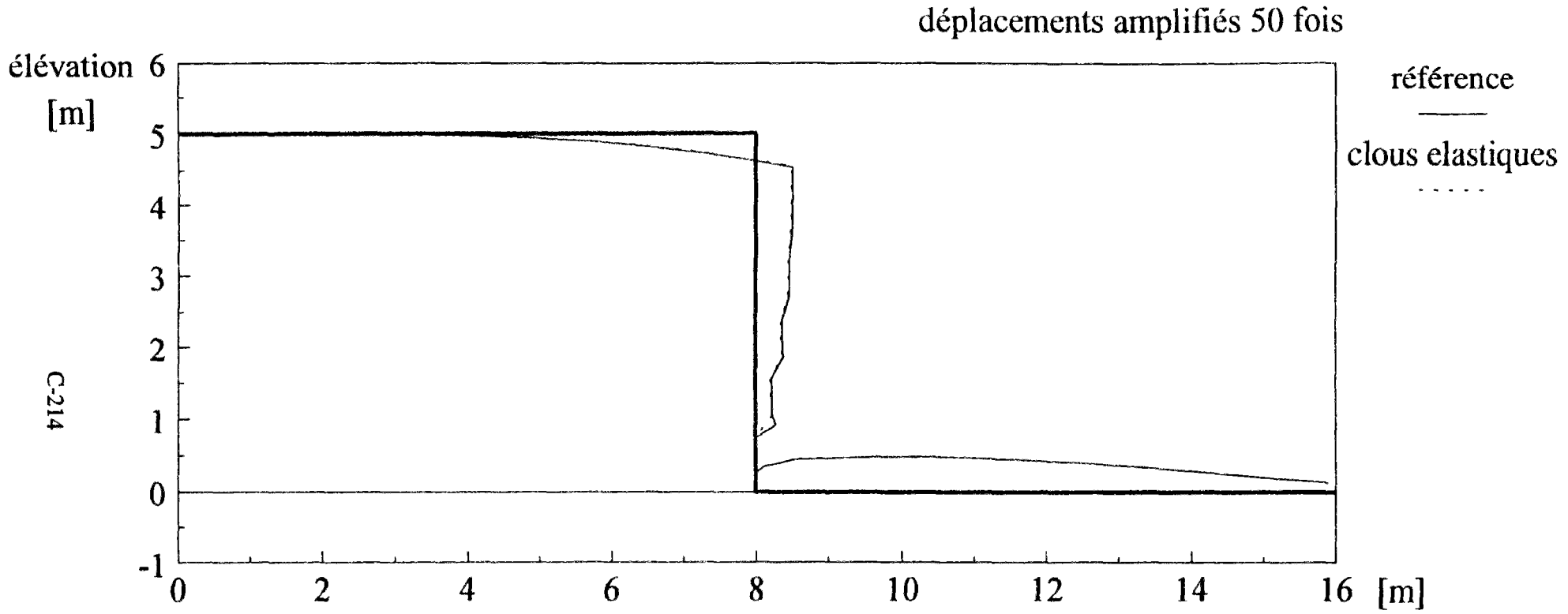


Figure C.6-53 : Comparaison des déformées du sol en surface à la phase 5 (H = 5 m)
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calcul de référence et calcul avec des clous élastiques (FLAC)

6.6.1.2 Module de déformation des clous

Le doublement du module d'Young des clous par un coefficient 2 a pour effet d'induire des tractions plus grandes, d'où une plastification plus rapide des clous et le déplacement de la ligne des tractions maximales vers le parement (figure C.6-54).

En ce qui concerne les déformations, celles-ci sont plus faibles, puisque les clous raides se déforment moins et retiennent d'autant plus les déplacements du sol (figures C.6-55 et C.6-56). Les calculs donnent systématiquement des déplacements plus faibles que les mesures, ce qui tend à conforter le choix du module de déformations des tubes d'aluminium pour modéliser le comportement des clous en état de service, c'est à dire, fissurés sur une grande partie de leur longueur.

6.6.1.3 Coefficient de mobilisation du frottement latéral

La réduction du module de mobilisation du frottement latéral par un coefficient 10 a une influence très importante sur la réponse du mur en sol cloué. Il faut noter, par exemple, le déplacement très net de la ligne des tractions maximales vers le parement, à une distance de l'ordre de 50 cm (figure C.6-57). Ce phénomène a été également observé sur les murs Freyssisol pour lesquels l'interaction sol-bande de renforcement est beaucoup plus molle que ce qui peut exister dans les murs en Terre Armée ou les murs en sol cloué. Comme la mobilisation du frottement latéral nécessite des déplacements plus importants pour mobiliser les mêmes efforts, les déplacements du parement et du sol sont beaucoup plus importants que ceux donnés par le calcul de référence ou les mesures.

La déformée du parement a une courbure très prononcée, différente de ce qui a été observé (figure C.6-58 et C.6-59). Par contre, la courbure de la déformée du sol à 2 m du parement est très proche de ce qui a été mesurée. On peut alors se demander dans quelle mesure, le long d'un clou donné, le module d'interaction avec le sol est constant et si la mise en place par scellement gravitaire est réellement uniforme le long des clous.

6.6.1.4 Résistance en traction du sol

Le critère de Mohr-Coulomb est un critère, qui, quand il y a une petite cohésion, autorise le matériau à travailler en traction. Par exemple, en extension isotrope, le matériau peut résister à des contraintes de tractions inférieures ou égales à $c/\tan(\phi)$. Drucker et Praguer (1952) ont montré que la stabilité d'une fouille était très largement conditionnée par la résistance en traction autorisée par le critère. En particulier, dans le cas d'un critère de Mohr-Coulomb avec une cohésion non nulle, la borne inférieure de stabilité d'une fouille de hauteur H peut être calculée comme étant supérieure au égale à $2\frac{c}{\gamma}\tan(\pi/4+\phi/2)$ par l'approche statique, tandis que la borne supérieure peut être calculée comme étant inférieur au égale à $4\frac{c}{\gamma}\tan(\pi/4+\phi/2)$ par l'approche cinématique. Le rapport de ces deux limites est de 2 dans le cas d'un critère non tronqué. Par contre, dans le cas d'un critère tronqué à 0, c'est à dire pour un sol qui n'est pas autorisé à travailler en traction, la borne supérieure peut être rapprochée de la borne inférieure et atteindre la valeur de $2,5\frac{c}{\gamma}\tan(\pi/4+\phi/2)$. Il suffit pour cela de considérer un mécanisme de rupture par traction du sol.

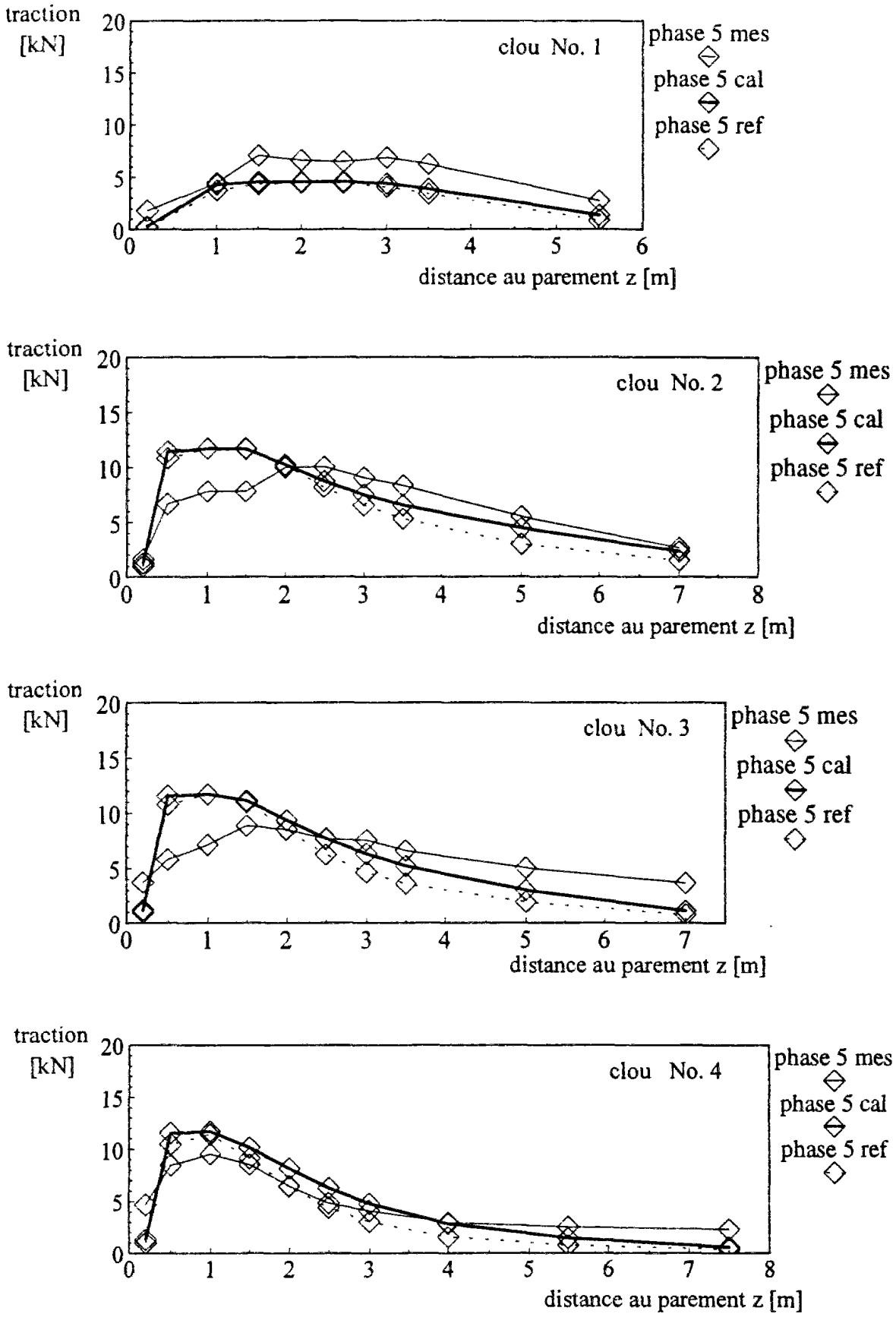


Figure C.6-54 : Efforts de traction dans les clous à la fin de la phase 5 (H = 5 m)
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calcul avec des clous deux fois plus rigides (FLAC)

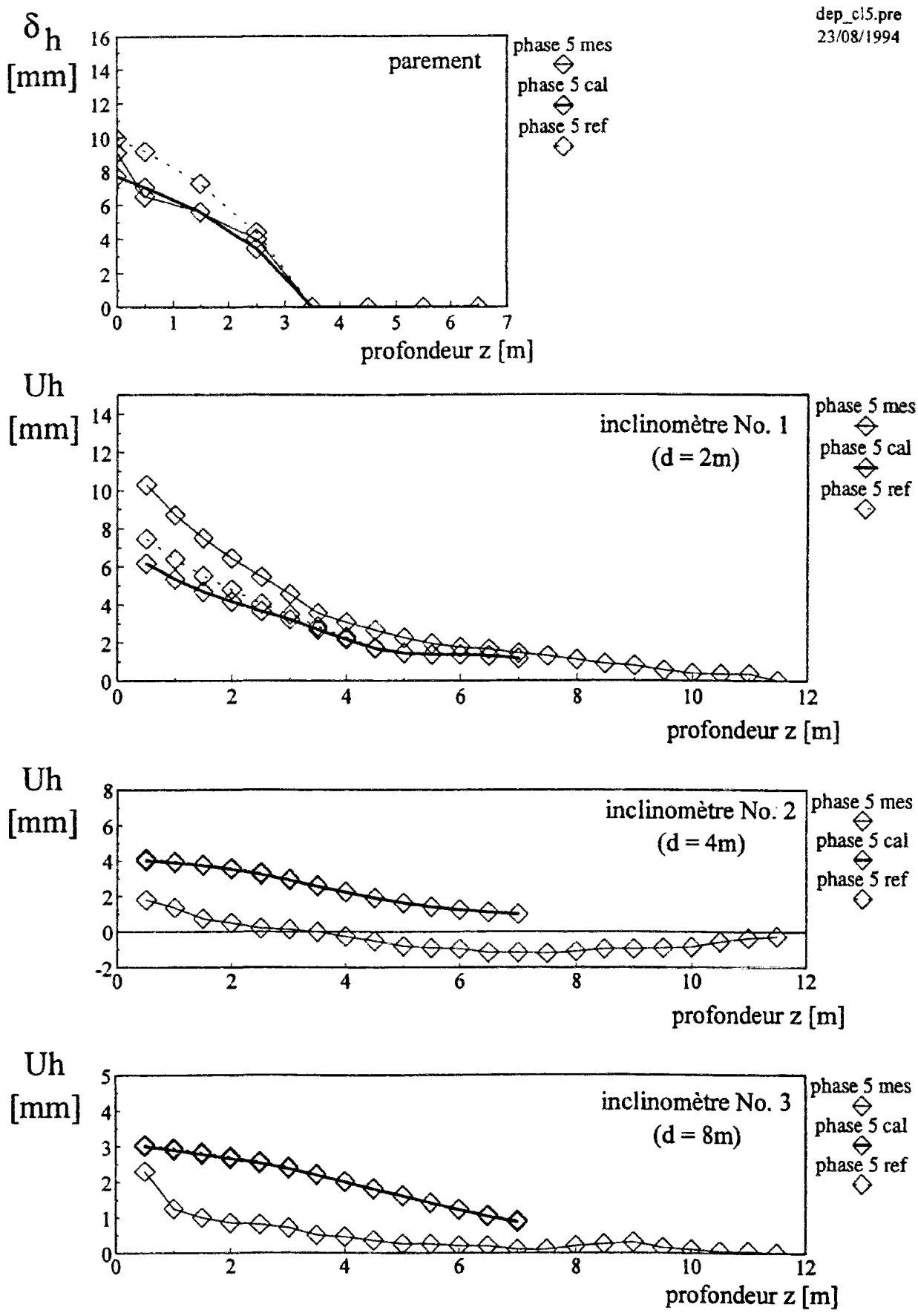


Figure C.6-55 : Déformées du parement et du sol à la fin de la phase 3 (H = 3 m)
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calcul avec des clous deux fois plus rigides (FLAC)

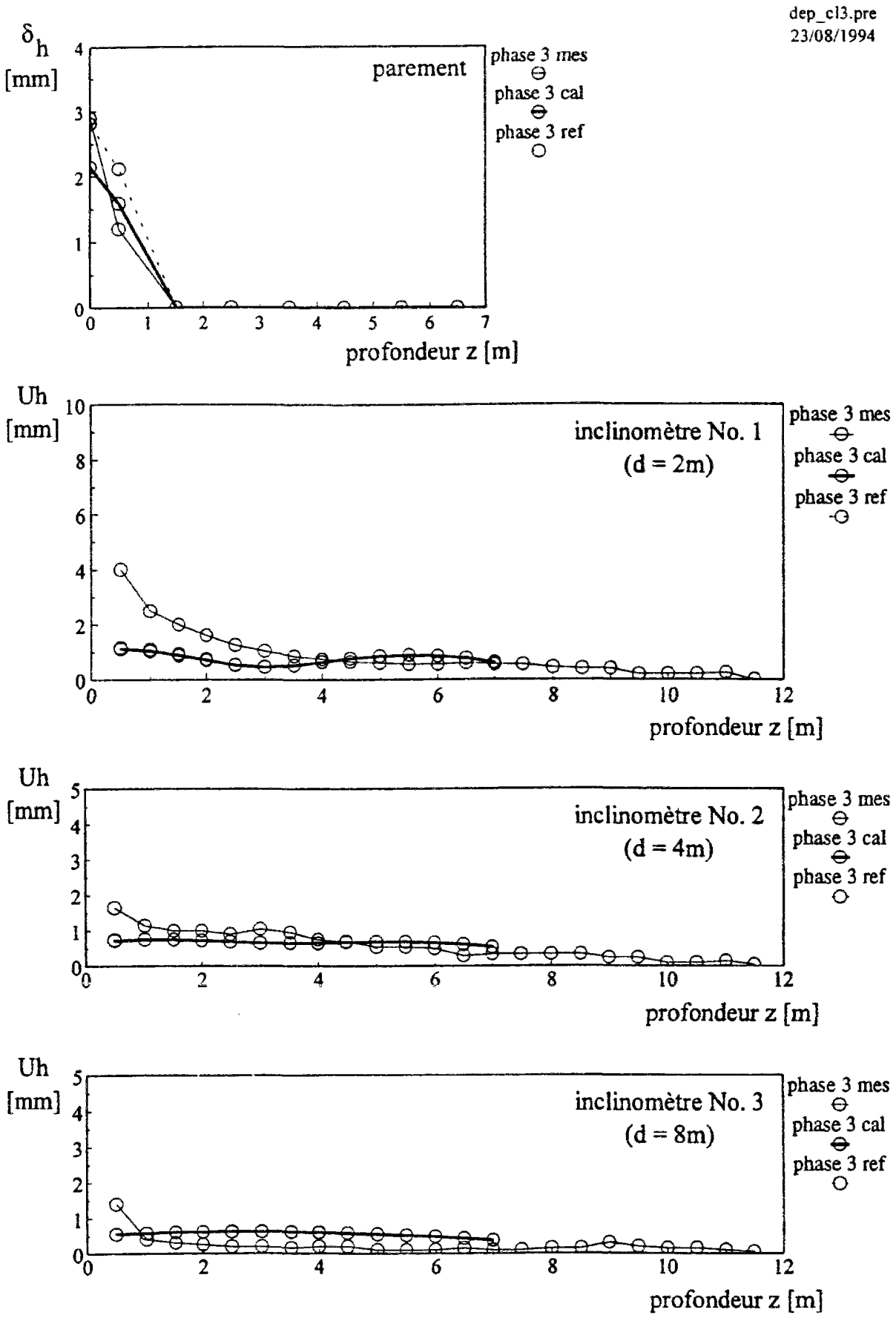


Figure C.6-56 : Déformées du parement et du sol à la fin de la phase 5 (H = 5 m)
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calcul avec des clous deux fois plus rigides (FLAC)

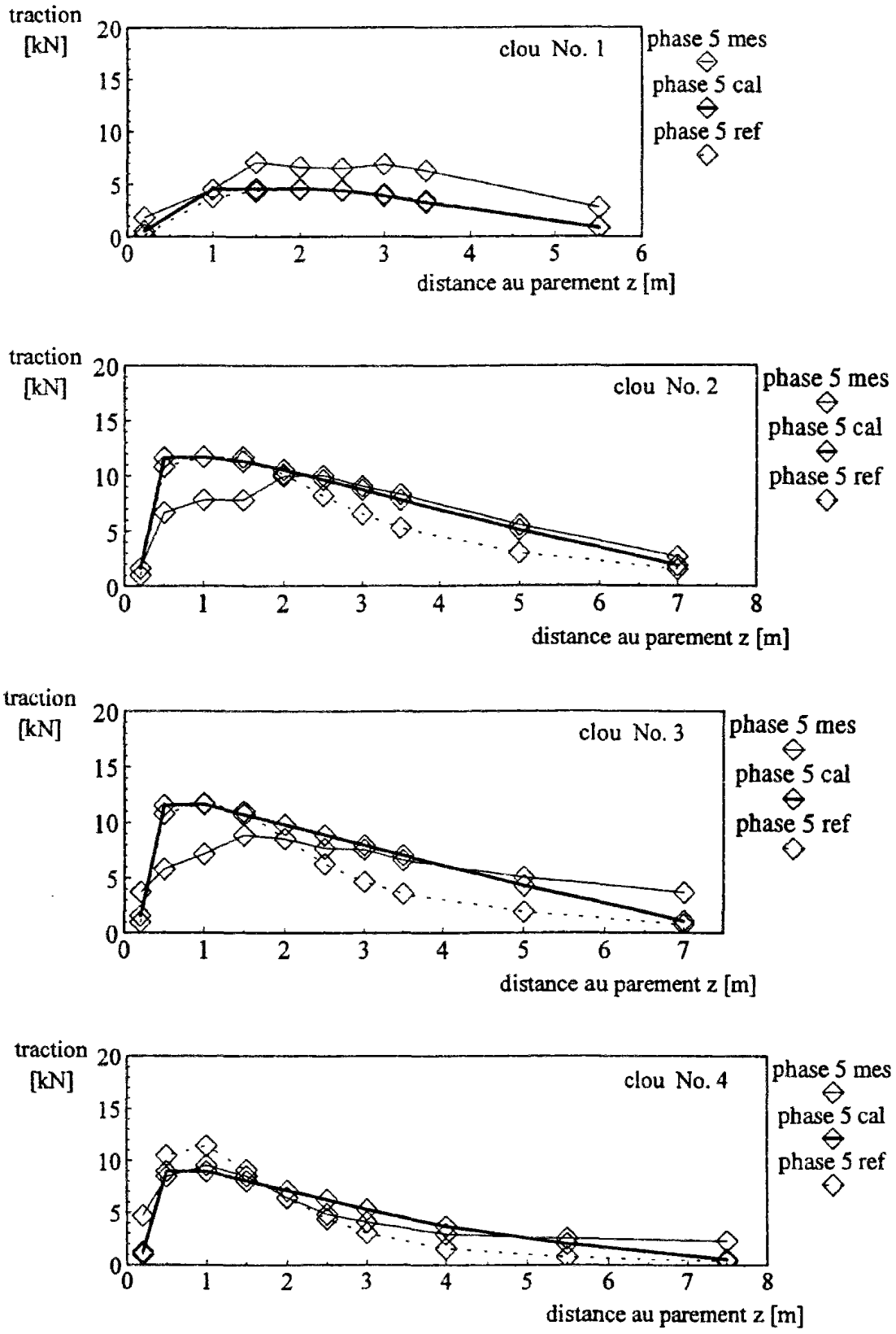


Figure C.6-57 : Efforts de traction dans les clous à la fin de la phase 5 (H = 5 m)
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calcul avec des interfaces 10 fois moins rigides (FLAC)

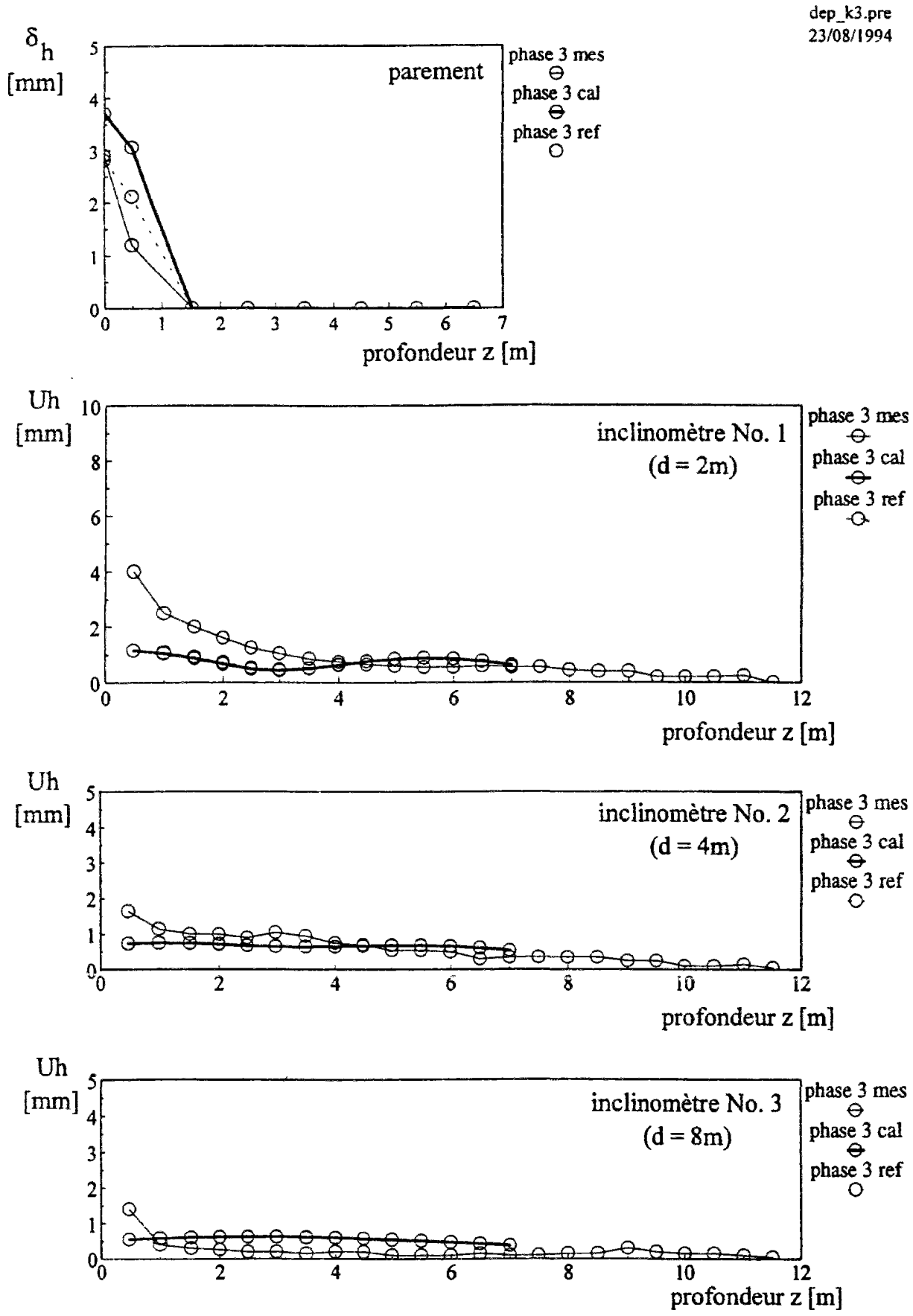


Figure C.6-58 : Déformées du parement et du sol à la fin de la phase 3 (H = 3 m)
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calcul avec des interfaces 10 fois moins rigides (FLAC)

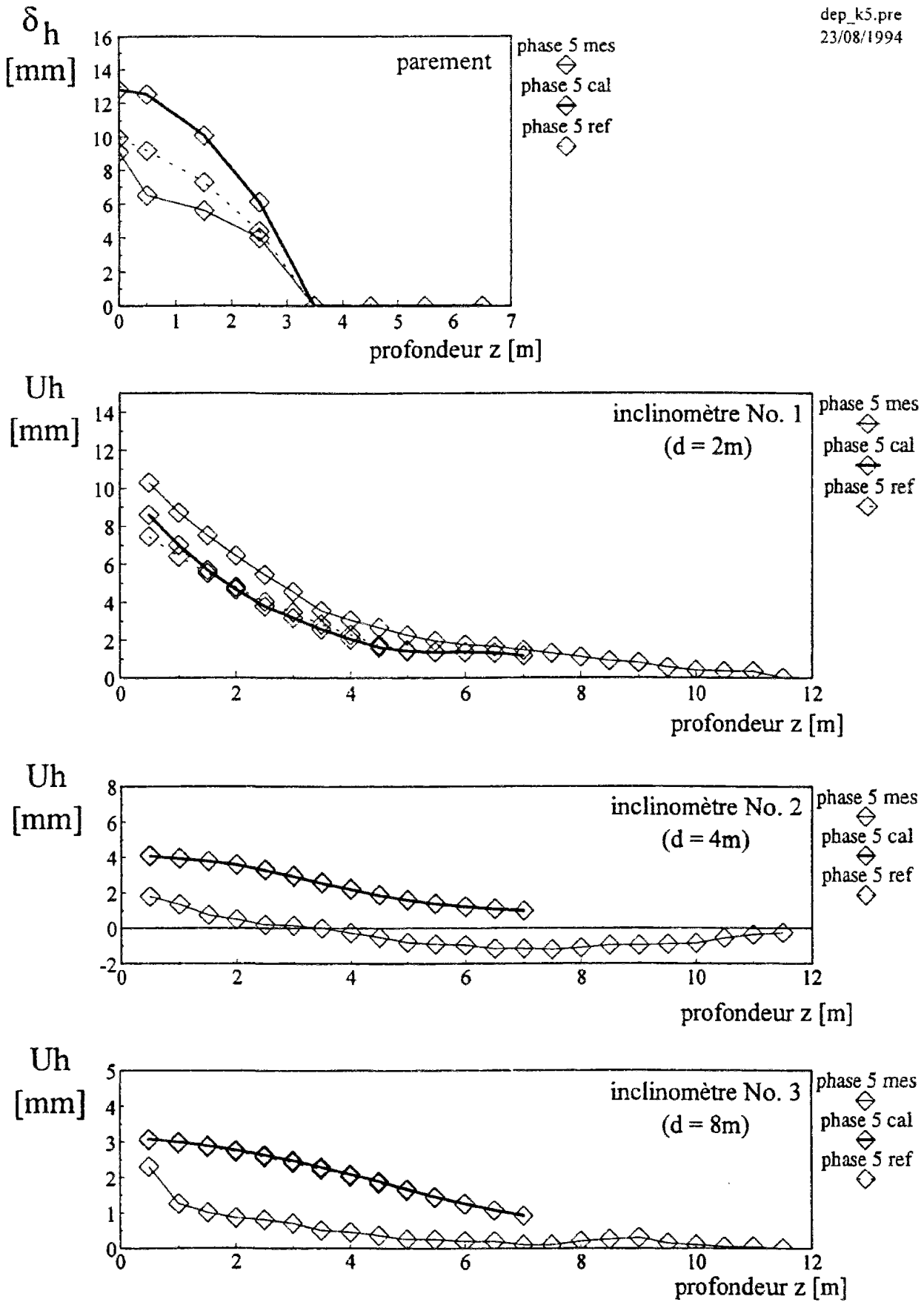


Figure C.6-59 : Déformées du parement et du sol à la fin de la phase 5 (H = 5 m)
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calcul avec des interfaces 10 fois moins rigides (FLAC)

La résistance en traction, notée σ_t , utilisée en combinaison avec le critère de Mohr-Coulomb, a donc une influence très importante sur la stabilité d'un ouvrage. En particulier, dans le cas présent, le mur peut être construit sans aucun problème de stabilité jusqu'à une hauteur de 7 mètres si l'on suppose un critère de Mohr-Coulomb non tronqué et une cohésion de 3 kPa. Dans ce cas là résistance en traction σ_t est égale à c/tan ϕ , c'est à dire à environ 4 kPa.

6.6.1.4.1 Critère tronqué à zéro

Si la résistance en traction σ_t est choisie nulle, le mur n'est stable que jusqu'à la phase 3 (H = 3 mètres) (figure C.6-60). A la phase 4, des déplacements importants en fond de fouille sont observés. Une rupture locale s'amorce. Le calcul avec FLAC peut cependant être poursuivi jusqu'à la phase 5, puisque FLAC utilise le formalisme des grandes déformations. On observe alors un déversement du mur en tête qui est important mais encore limité à 14 mm (figure C.6-61). Cependant, il faut noter, à 4 m du parement, des déplacements importants. Les tractions, quant à elles, sont relativement importantes (figure C.6-60).

6.6.1.4.2 Critère tronqué à 2 c tan ($\pi/4 - \phi/2$)

La résistance en traction σ_t peut être tronquée à 2 c tan($\pi/4 - \phi/2$), ce qui correspond à un cercle tangent à l'enveloppe de Mohr et à l'axe des τ, c'est à dire pour lequel la contrainte principale majeure est nulle. Dans le cas présent, cela revient à tronquer à 3 kPa alors que le critère non tronqué a une résistance en traction d'environ 4 kPa. La troncature est donc très petite et locale. Cependant, dans ce cas là, on observe que le mur est instable à partir de la phase 4. Les efforts sont moins importants que dans le cas précédent (figure C.6-63). La rupture du mur à la phase 5 se voit très nettement sur les déformées (figures C.6-64 et C.6-65).

6.6.1.4.3 Conclusion sur le critère tronqué

Des résultats précédents, on peut conclure que la troncature du critère de Mohr-Coulomb a un effet très important sur le comportement de l'ouvrage. Cependant, cet effet est d'autant plus important que, dans le cas présent, la cohésion est très faible (3 kPa). Toute réduction de celle-ci, sans troncature du critère, rend le mur instable. Cette valeur de 3 kPa est donc vraiment une valeur minimale. De manière similaire, pour cette valeur de 3 kPa de cohésion, toute troncature du critère, même la plus faible, a pour effet d'induire une instabilité locale en pied du mur. De ce point de vue là aussi, la cohésion de 3 kPa est une valeur minimale.

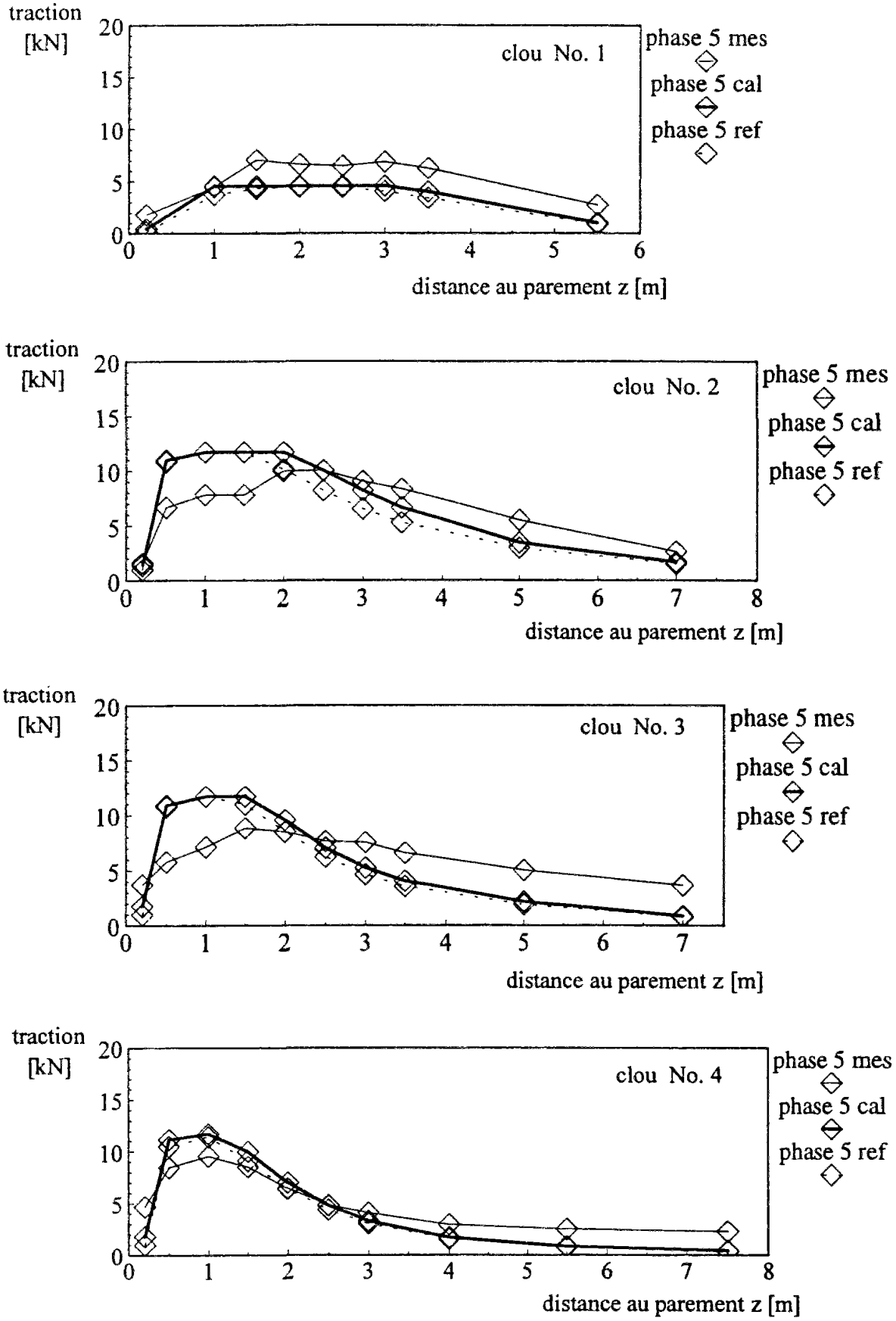


Figure C.6-60 : Efforts de traction dans les clous à la fin de la phase 5 (H = 5 m)
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calcul avec une résistance en traction nulle pour le sol (FLAC)

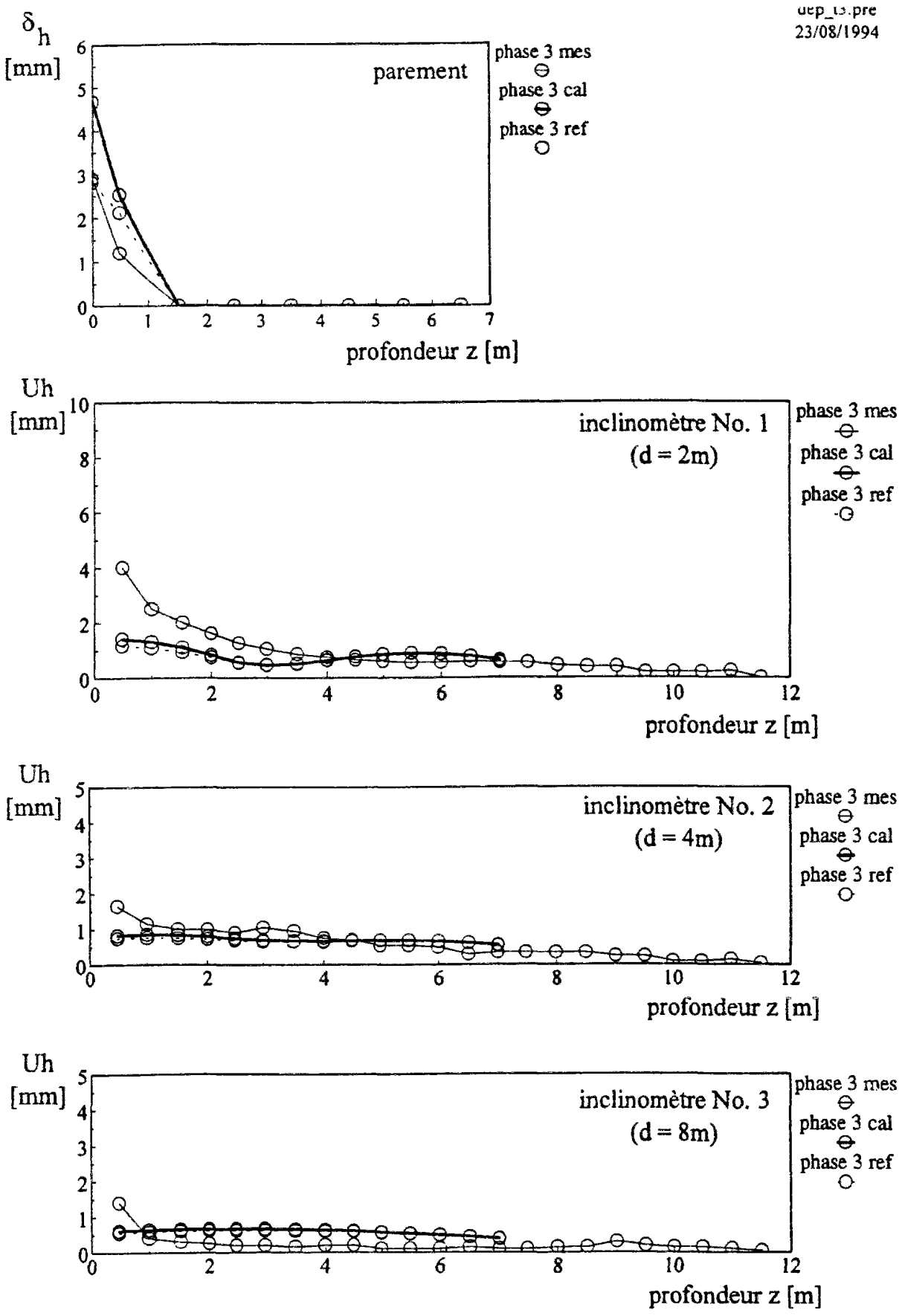


Figure C.6-61 : Déformées du parement et du sol à la fin de la phase 3 (H = 3 m)
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calcul avec une résistance en traction nulle pour le sol (FLAC)

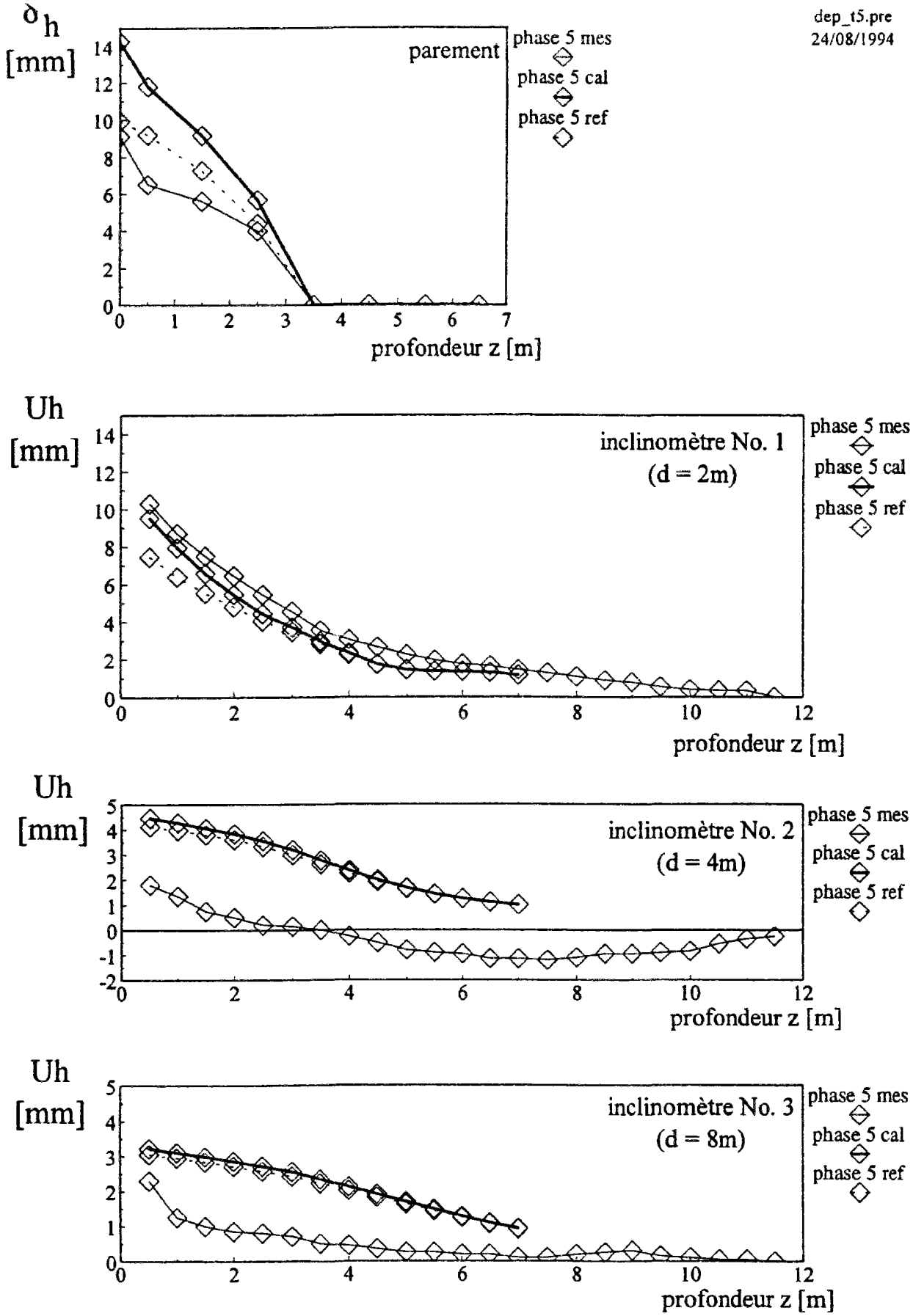


Figure C.6-62 : Déformées du parement et du sol à la fin de la phase 5 (H = 5 m)
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calcul avec une résistance en traction nulle pour le sol (FLAC)

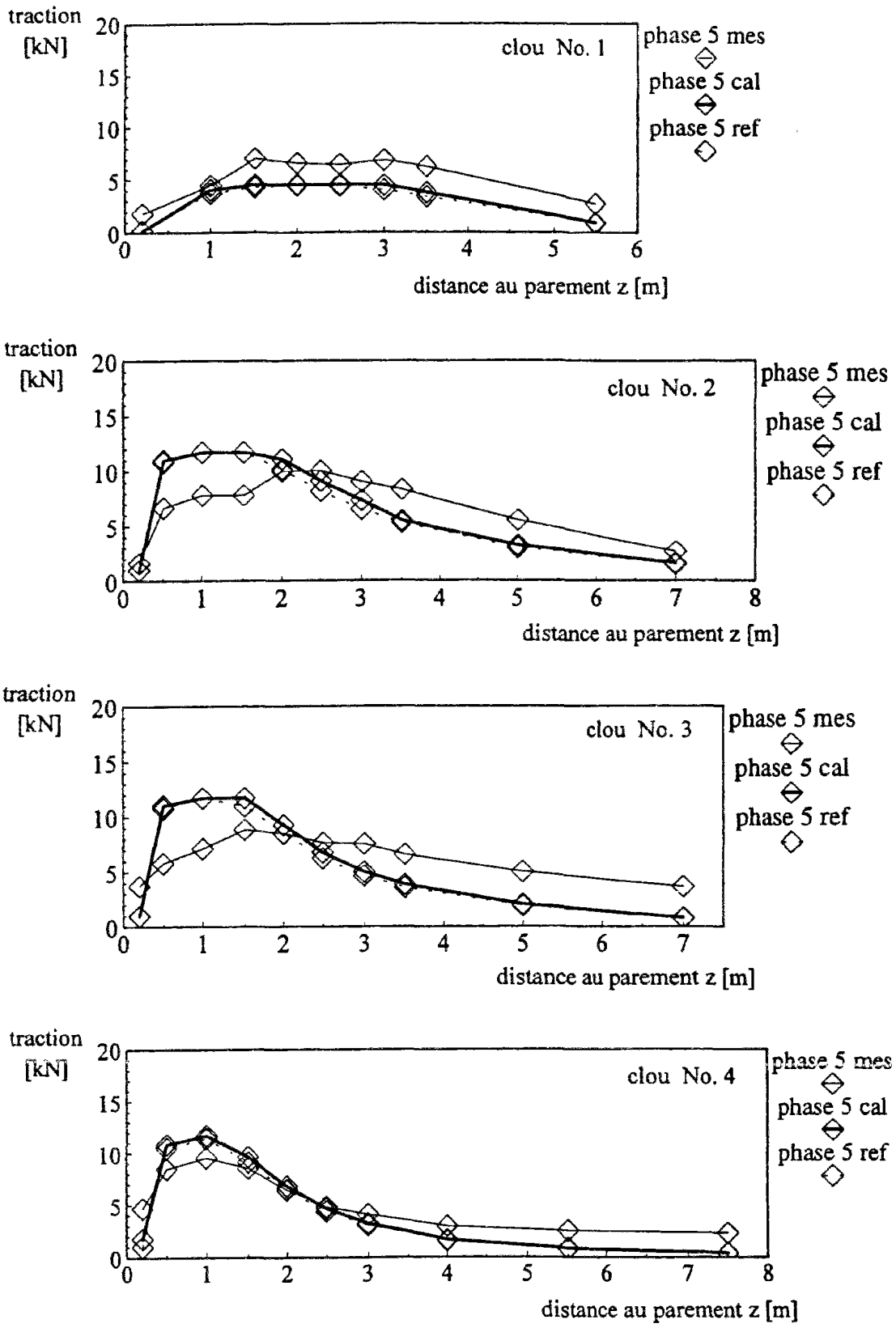


Figure C.6-63 : Efforts de traction dans les clous à la fin de la phase 5 (H = 5 m)
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calcul avec une résistance en traction de 2 c cotan$(\pi/4 - \phi/2)$ pour le sol (FLAC)

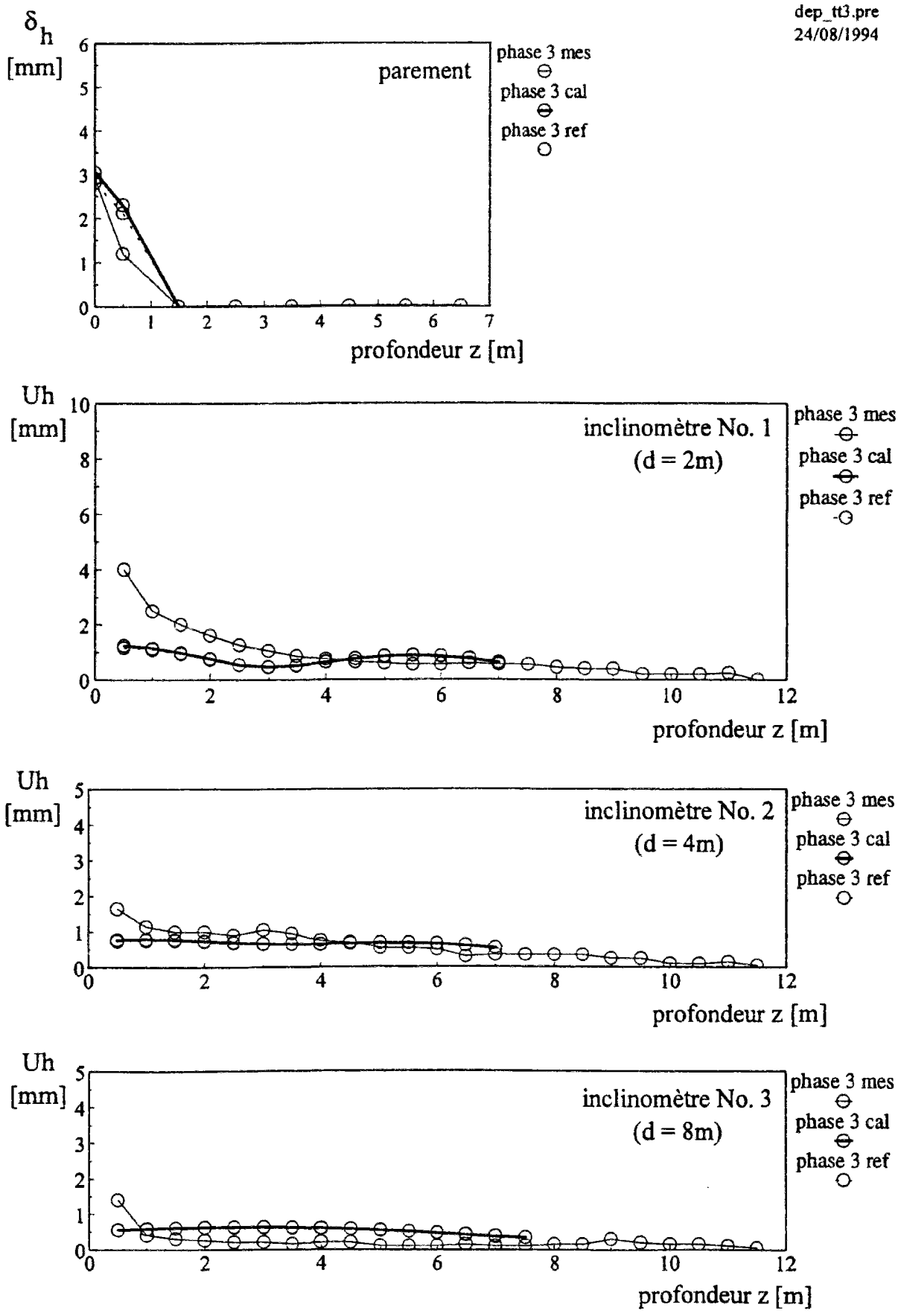


Figure C.6-64 : Déformées du parement et du sol à la fin de la phase 3 (H = 3 m)
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calcul avec une résistance en traction de 2 c cotan$(\pi/4 - \phi/2)$ pour le sol (FLAC)

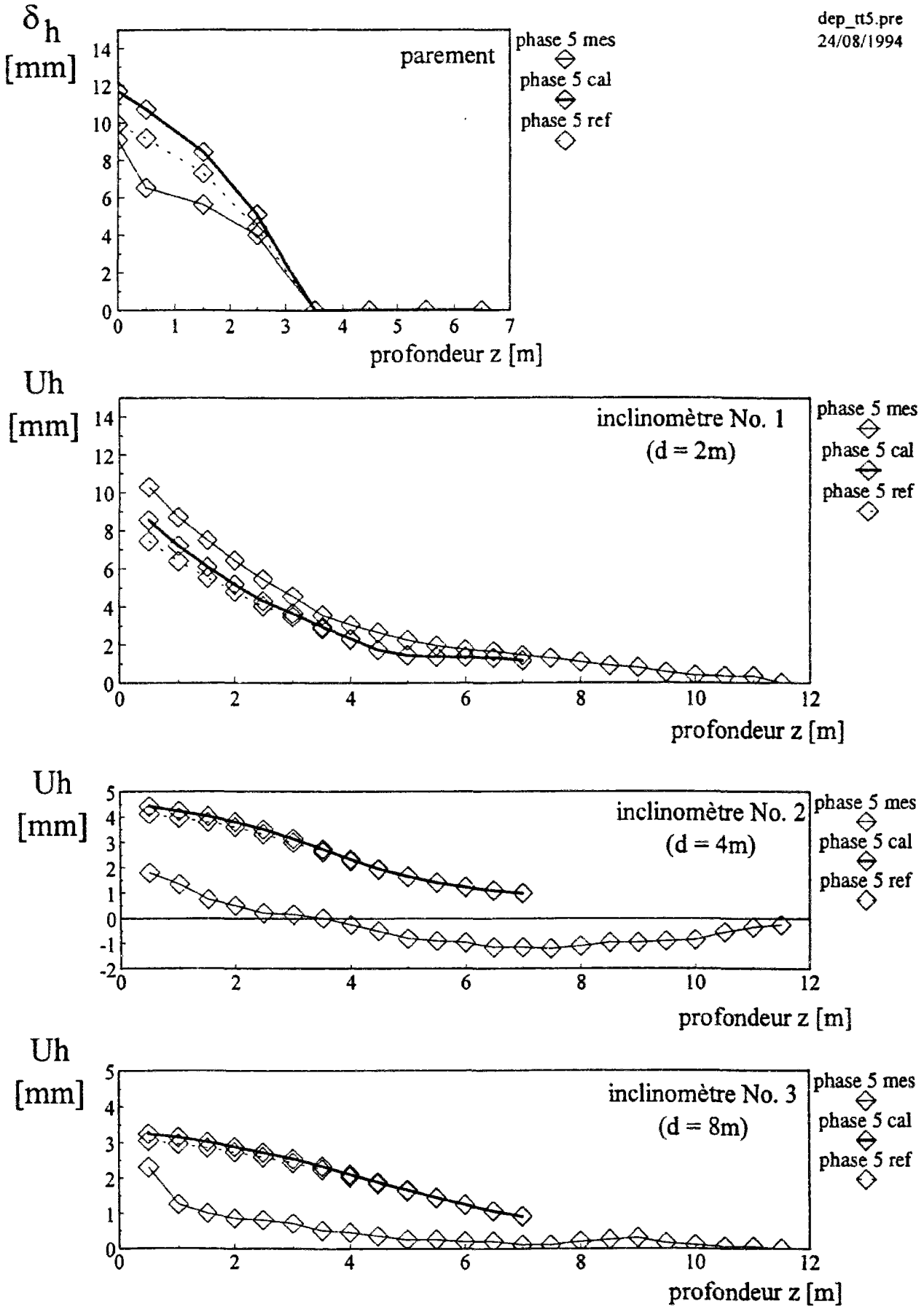


Figure C.6-65 : Déformées du parement et du sol à la fin de la phase 5 (H = 5 m)
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calcul avec une résistance en traction de 2 c cotan$(\pi/4 - \phi/2)$ pour le sol (FLAC)

6.6.1.5 Cohésion du sol

Une augmentation de la cohésion de 1 kPa, dans le cas du critère non tronqué, a pour effet de réduire sensiblement les tractions dans les clous et en particulier au niveau des lits de clous No. 1 et 2 (figure C.6-66). Les lits de clous No. 3 et 4 sont moins influencés.

En ce qui concerne les déplacements, ceux-ci sont fortement réduits près du parement, ce qui s'explique par une plastification plus réduite du sol en pied de mur (figures C.6-67 et C.6-68). A l'arrière du mur, les déplacements sont comparables au calcul de référence.

La figure C.6-69 présente une comparaison des déformées pour les deux cas : c = 3 kPa et c = 4 kPa. Il faut noter que dans le cas de la cohésion la plus faible, le tassement et les déformations sont plus importants en pied de mur (figure C.6-69).

6.6.1.6 Angle de dilatance du sol

Le calcul avec un angle de dilatance nul a pour effet d'induire des déplacements plus importants du massif de sol cloué, ce qui engendre aussi des efforts plus importants dans les clous (figure C.6-70). Ceux-ci plastifient plus tôt et sur une longueur de 1 à 2 mètres.

Il est intéressant de noter qu'à la phase 3, la forme générale de la déformée du parement a quasiment la même concavité que les mesures. Cette concavité ayant tendance à s'inverser aux phases suivantes (figure C.6-72). A la 5ème phase, il faut noter le fort déversement en tête au niveau du parement mais aussi à 2 mètres en arrière.

Cette influence importante de l'angle de dilatance a été peu observée dans le passé. Il faut noter, qu'entre 0 et 7 mètres de profondeur, l'angle de dilatance varie de manière très significative avec une variation de l'ordre de 10 à 20°. Il convient donc d'être très précis quant à sa détermination.

6.6.1.7 Paramètres variables avec la profondeur

On pourrait penser que la prise en compte des variations des paramètres mécaniques sur la hauteur du mur en sol cloué aurait une influence importante sur la réponse de l'ouvrage, or il en est rien. Ceci peut s'expliquer par la faible hauteur du mur considéré (H = 5 m).

Au niveau des efforts, la différence entre le calcul de référence et le calcul avec des paramètres variables avec la profondeur, est quasiment nulle (figure C.6-73). En ce qui concerne les déplacements, ils sont légèrement plus forts à la 3ème phase et légèrement plus faibles, d'environ 0,5 mm, à la 5ème phase (figures C.6-74 et C.6-75). Les déformées de la surface du sol sont de même très proches l'une de l'autre (figure C.6-76). Le soulèvement de fond de fouille est légèrement réduit de même que les déplacements en tête.

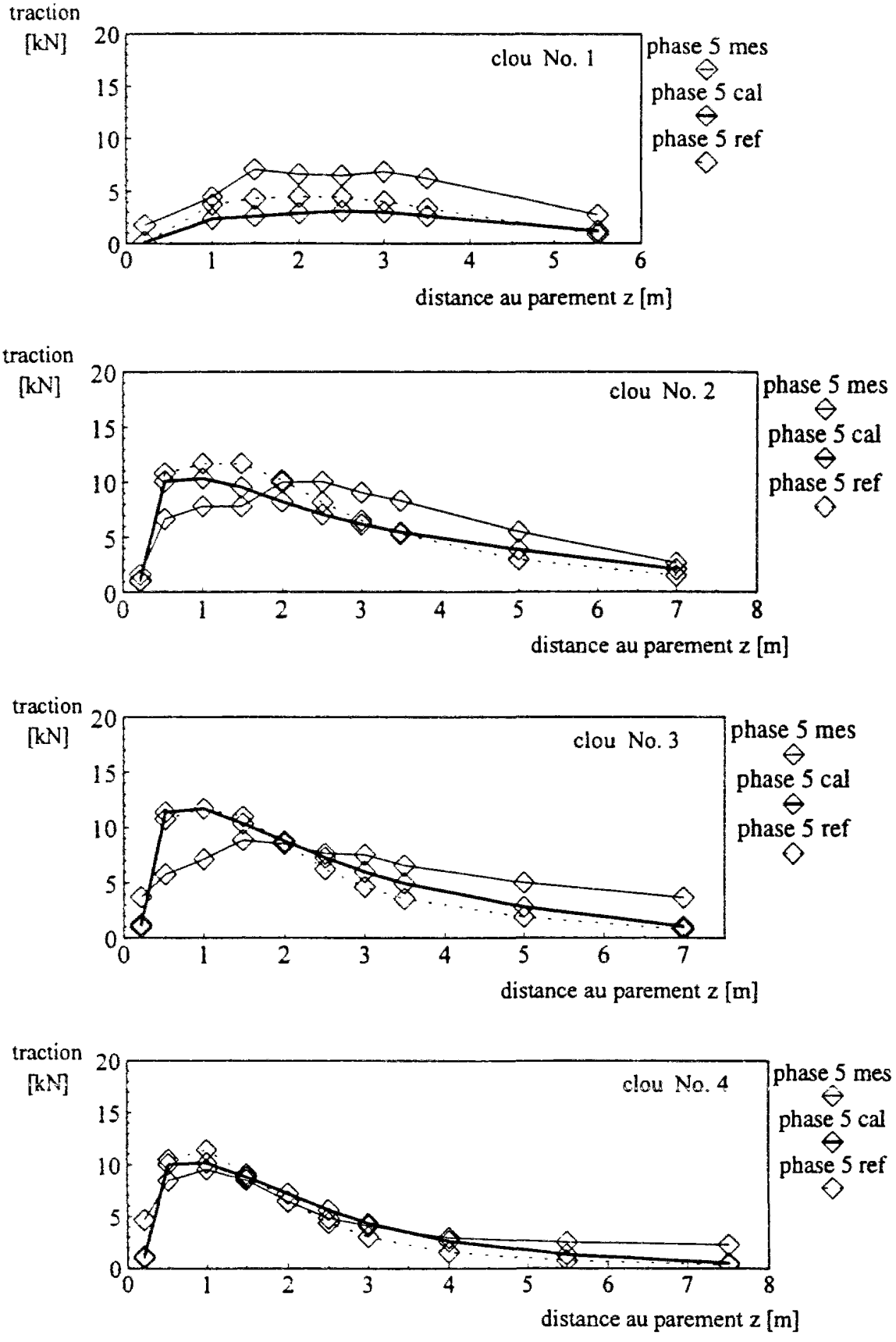


Figure C.6-66 : Efforts de traction dans les clous à la fin de la phase 5 (H = 5 m)
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calcul avec une cohésion de 4 kPa pour le sol (FLAC)

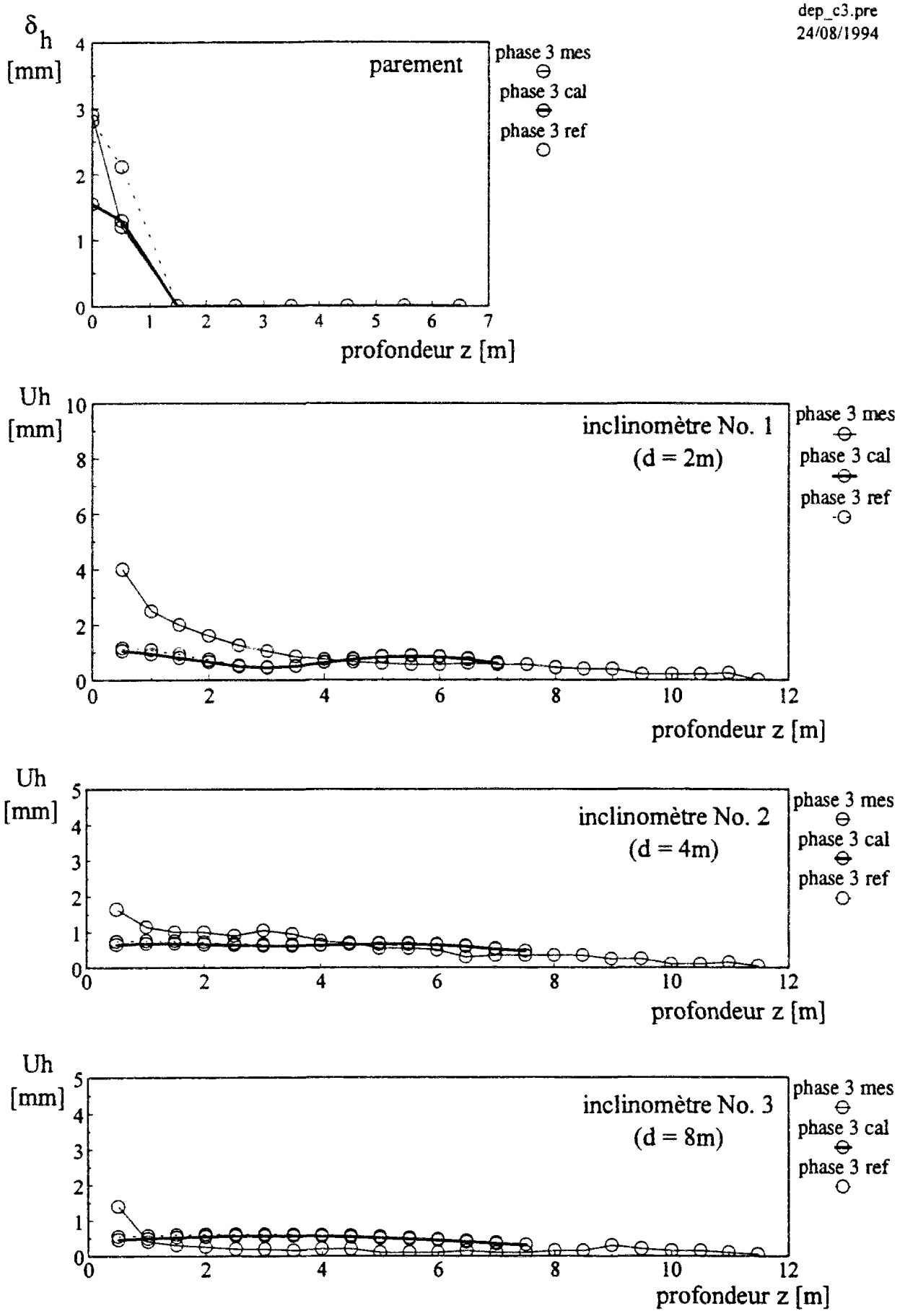


Figure C.6-67 : Déformées du parement et du sol à la fin de la phase 3 (H = 3 m)
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calcul avec une cohésion de 4 kPa pour le sol (FLAC)

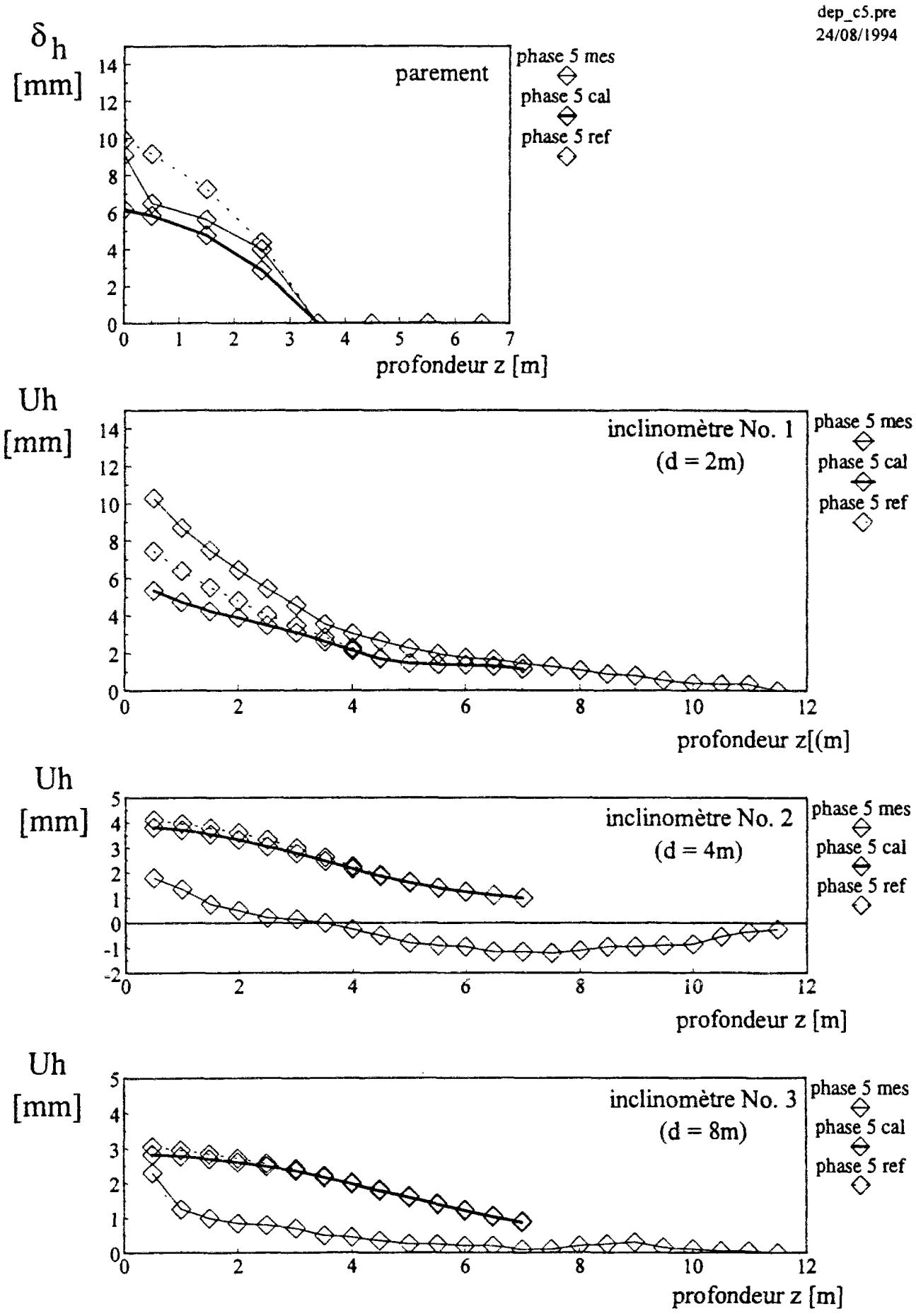


Figure C.6-68 : Déformées du parement et du sol à la fin de la phase 5 (H = 5 m)
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calcul avec une cohésion de 4 kPa pour le sol (FLAC)

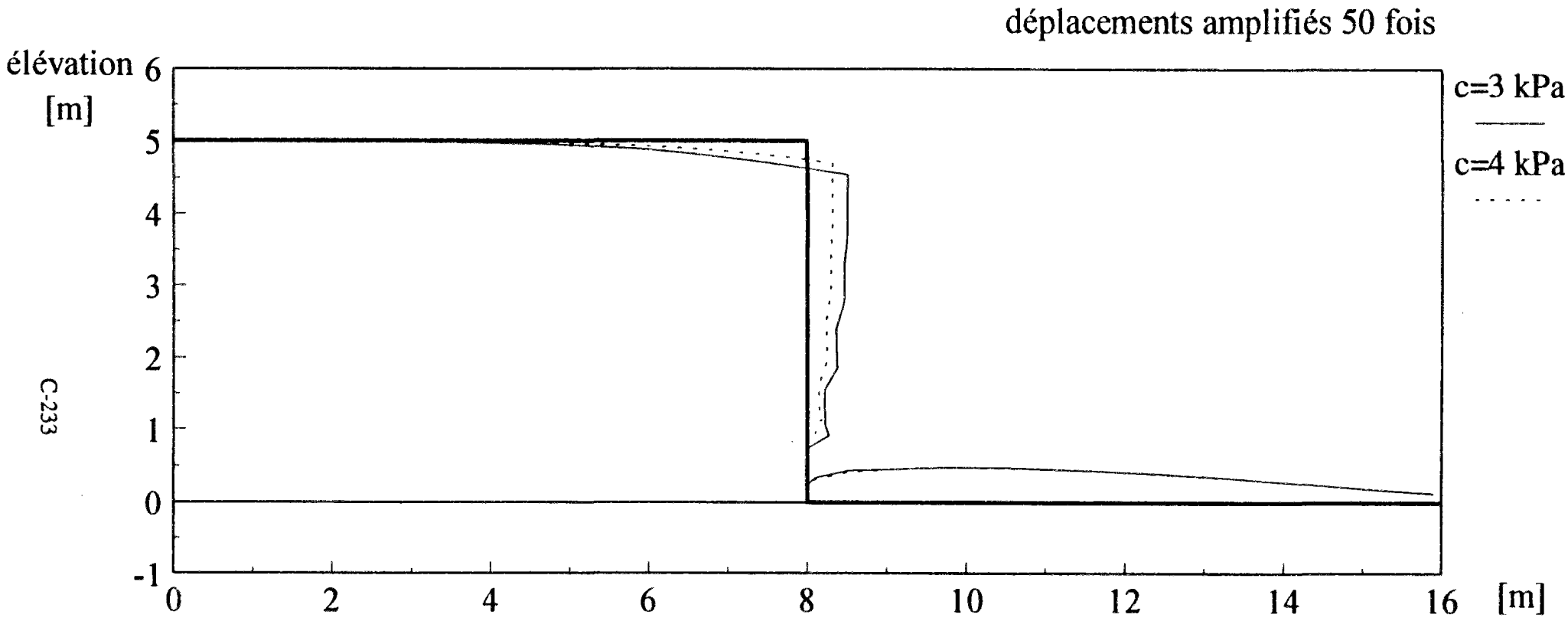


Figure C.6-69 : Comparaison des déformées du sol en surface à la phase 5 (H = 5 m)
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calcul avec une cohésion de 4 kPa pour le sol (FLAC)

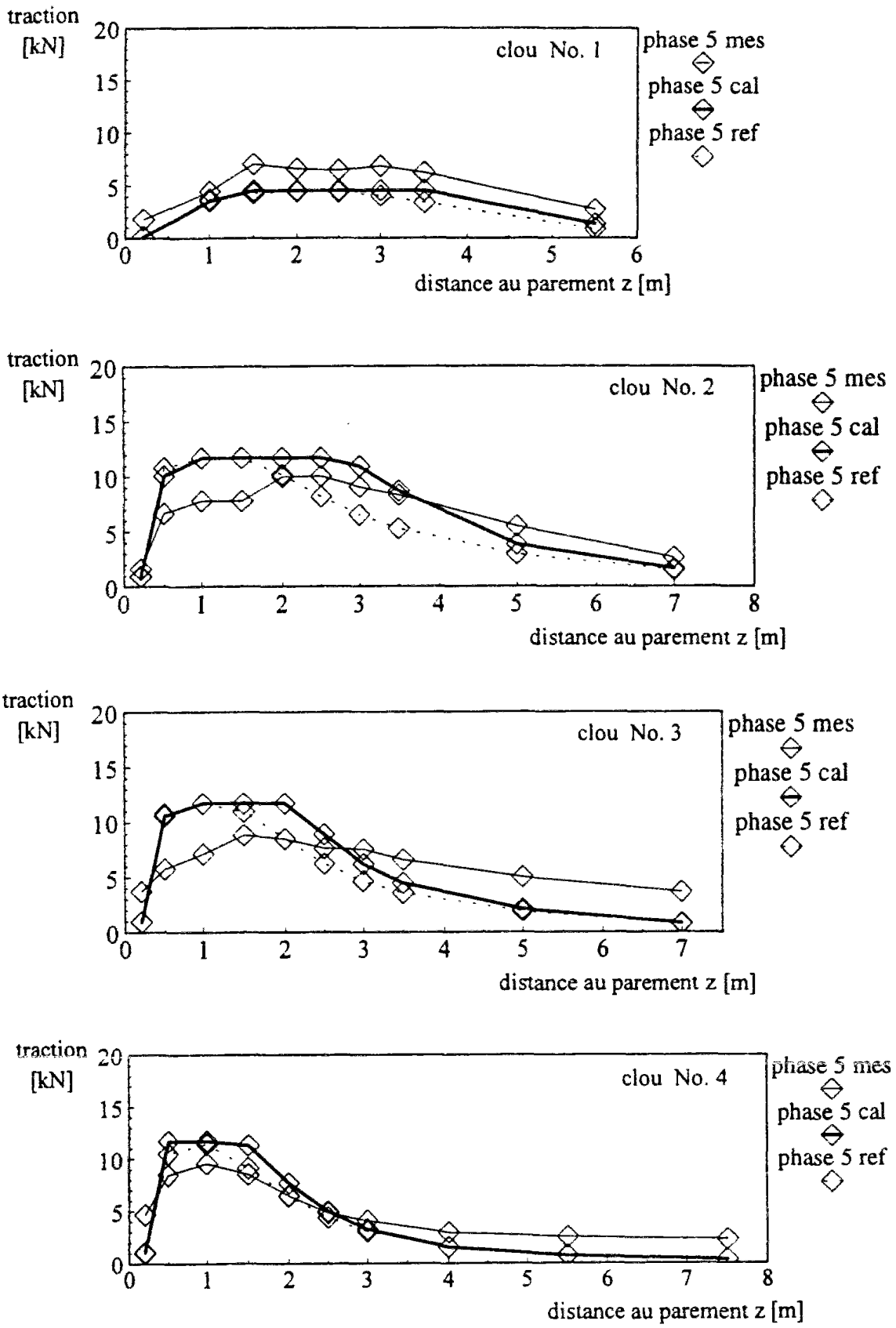


Figure C.6-70 : Efforts de traction dans les clous à la fin de la phase 5 (H = 5 m)
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calcul avec un angle de dilatance nul pour le sol (FLAC)

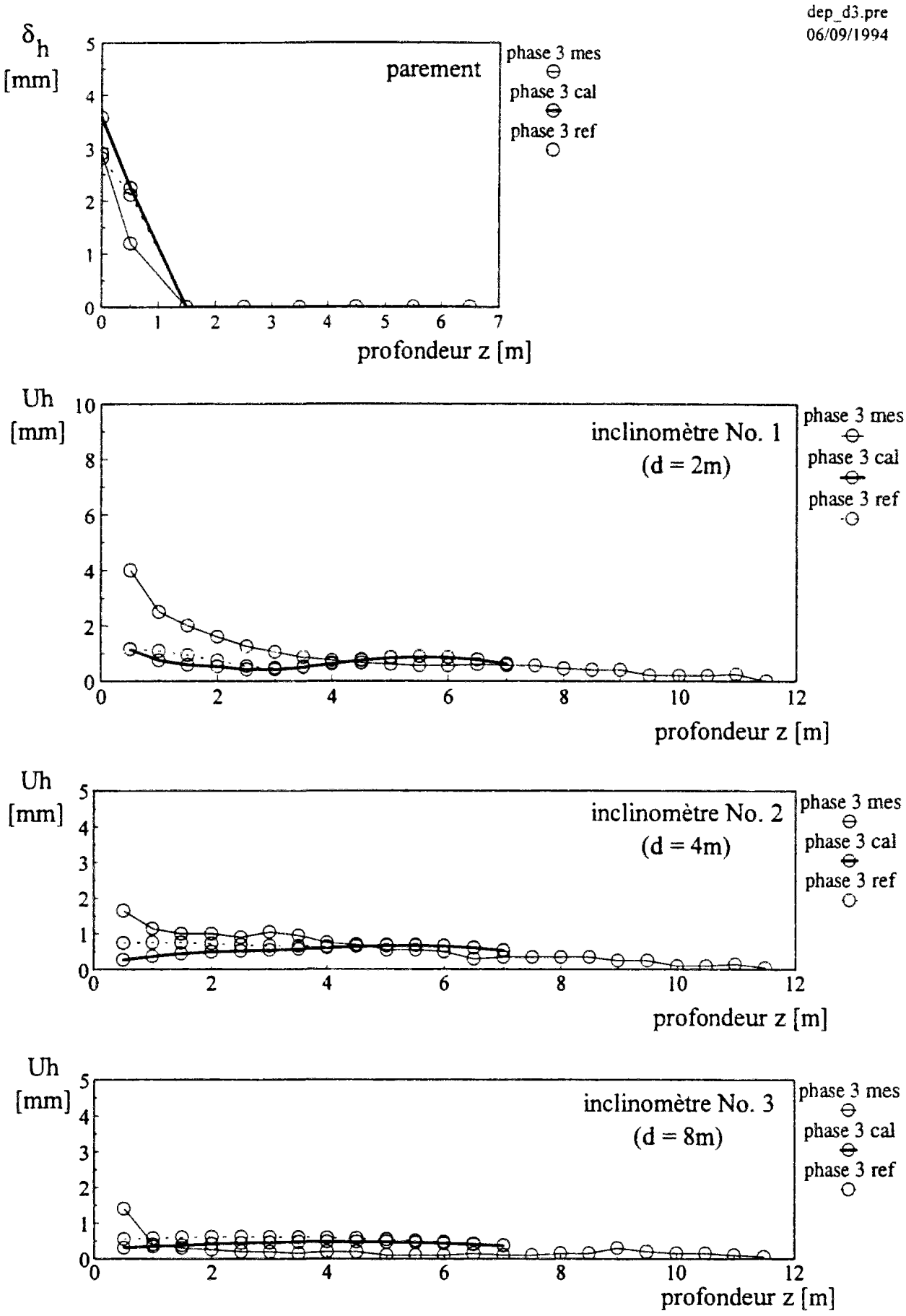


Figure C.6-71 : Déformées du parement et du sol à la fin de la phase 3 (H = 3 m)
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calcul avec un angle de dilatance nul pour le sol (FLAC)

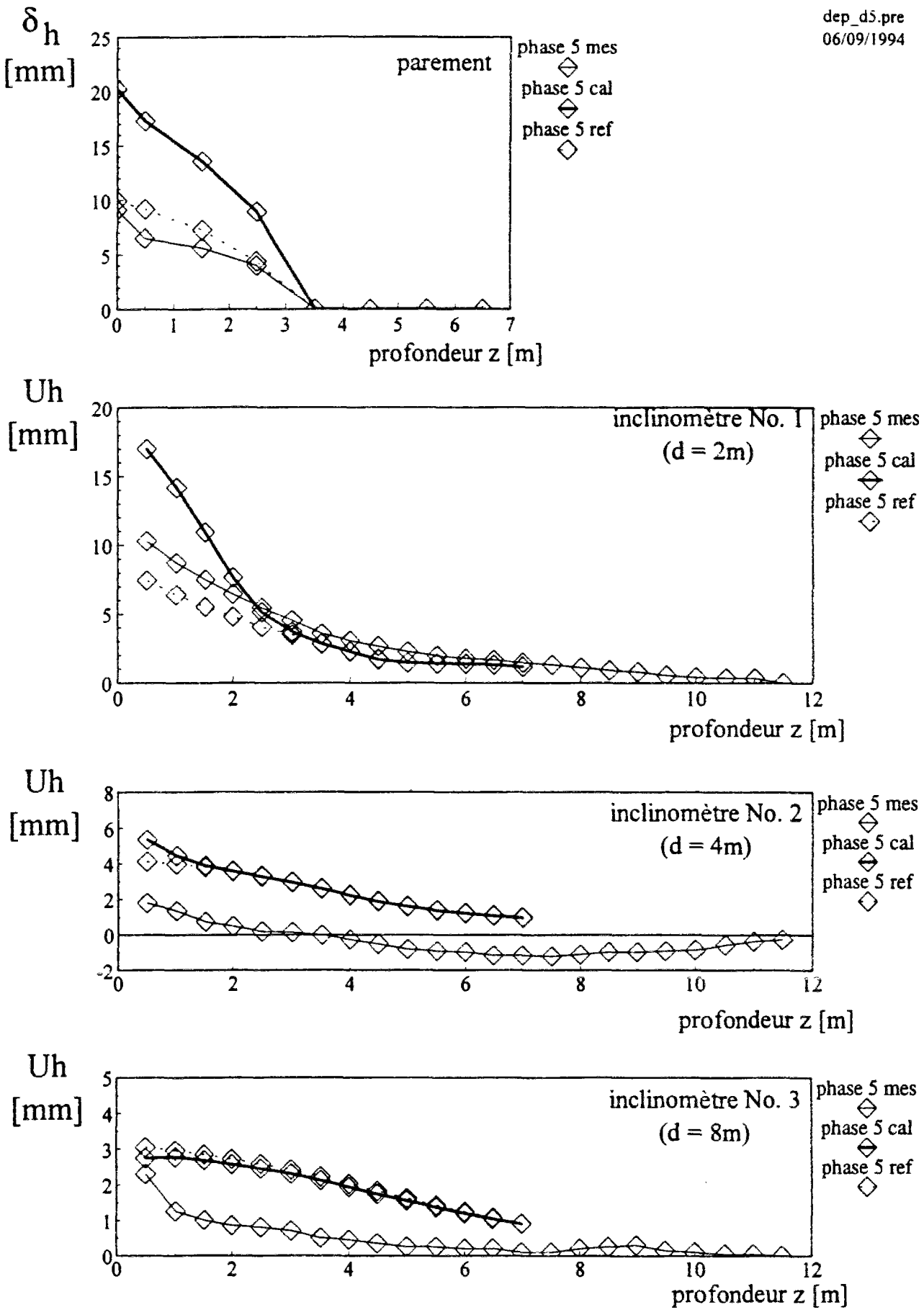


Figure C.6-72 : Déformées du parement et du sol à la fin de la phase 5 (H = 5 m)
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calcul avec un angle de dilatance nul pour le sol (FLAC)

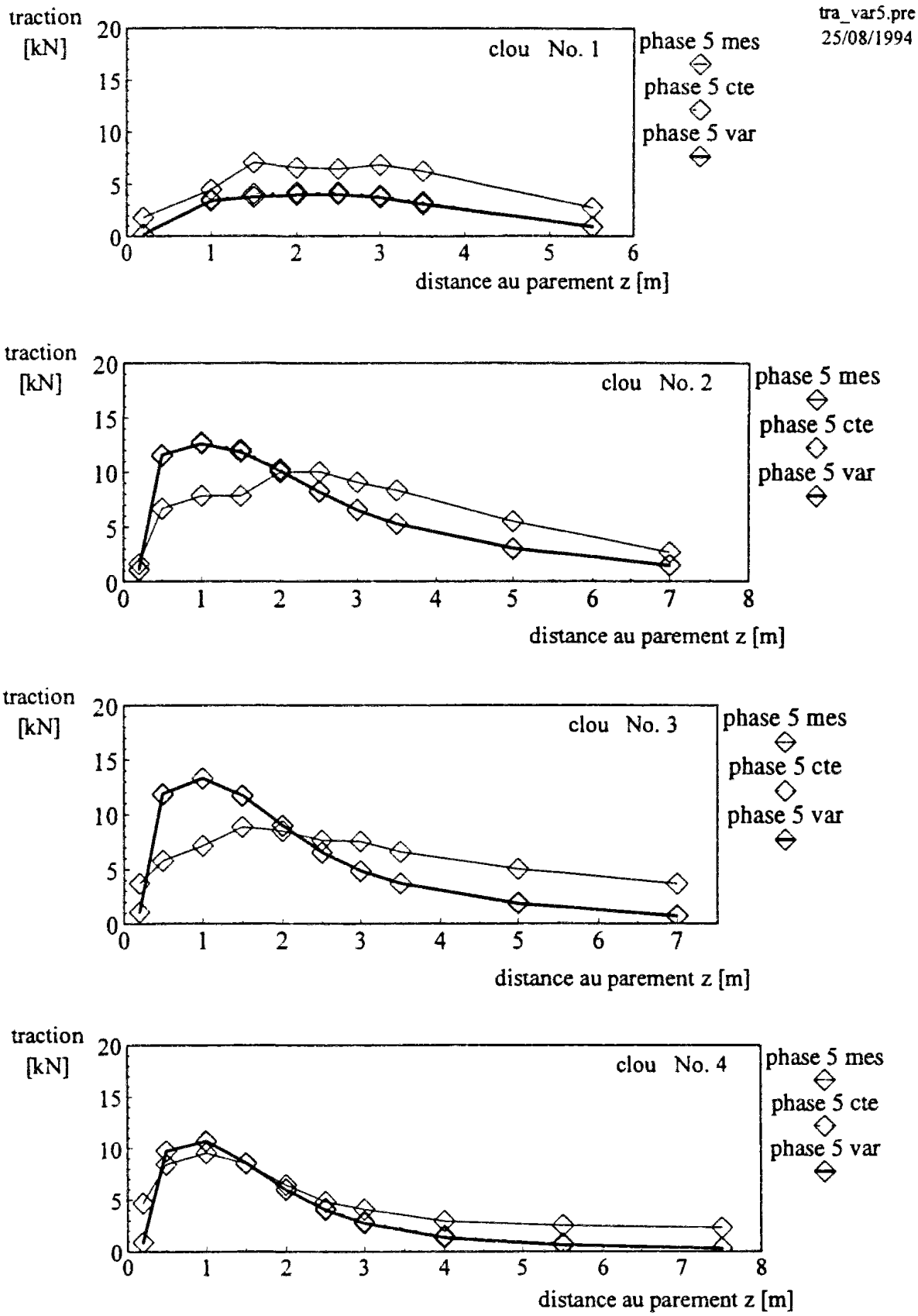


Figure C.6-73 : Efforts de traction dans les clous à la fin de la phase 5 (H = 5 m)
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calcul avec des propriétés variables en fonction de la profondeur (FLAC)

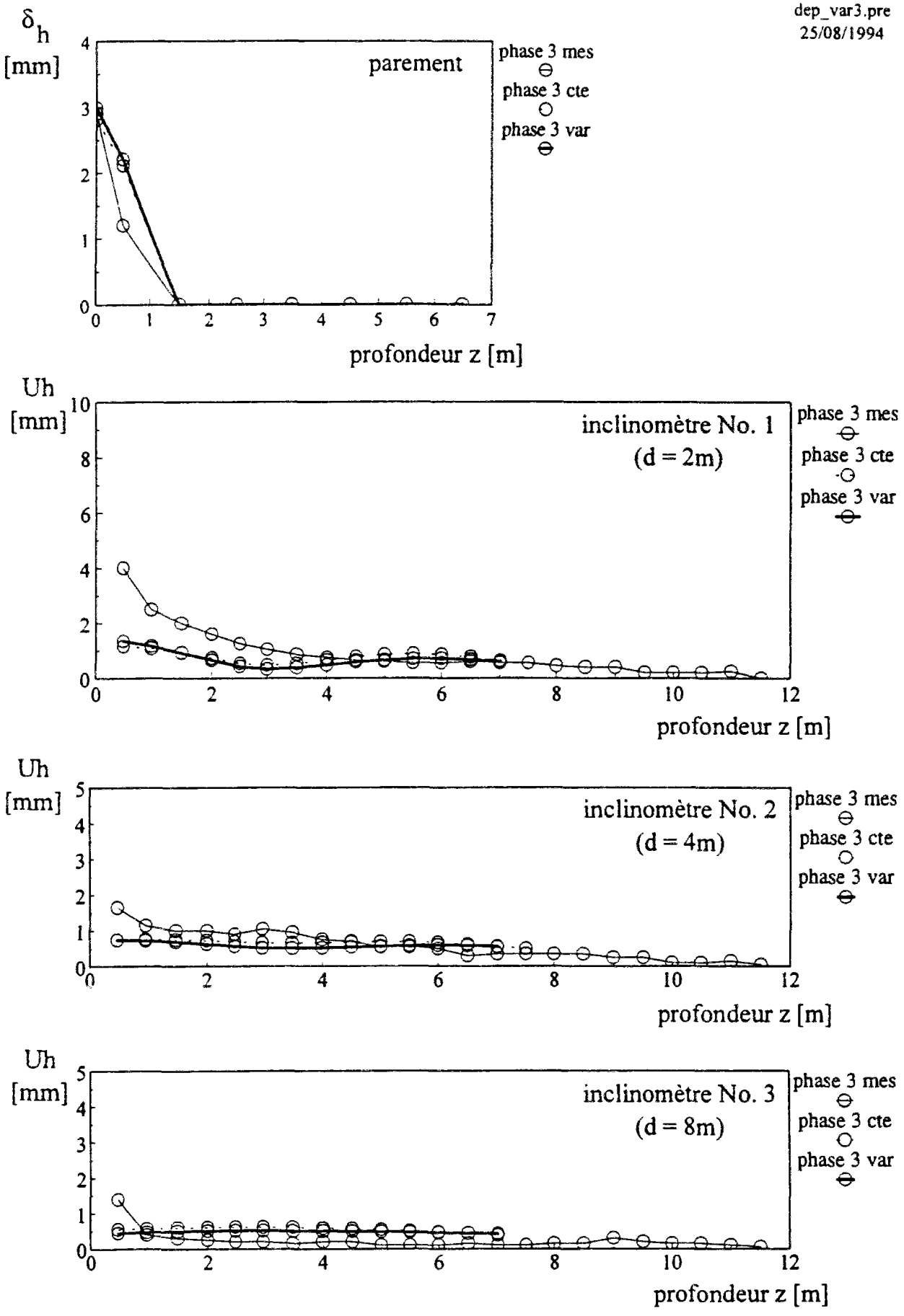


Figure C.6-74 : Déformées du parement et du sol à la fin de la phase 3 (H = 3 m)
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calcul avec des propriétés variables en fonction de la profondeur (FLAC)

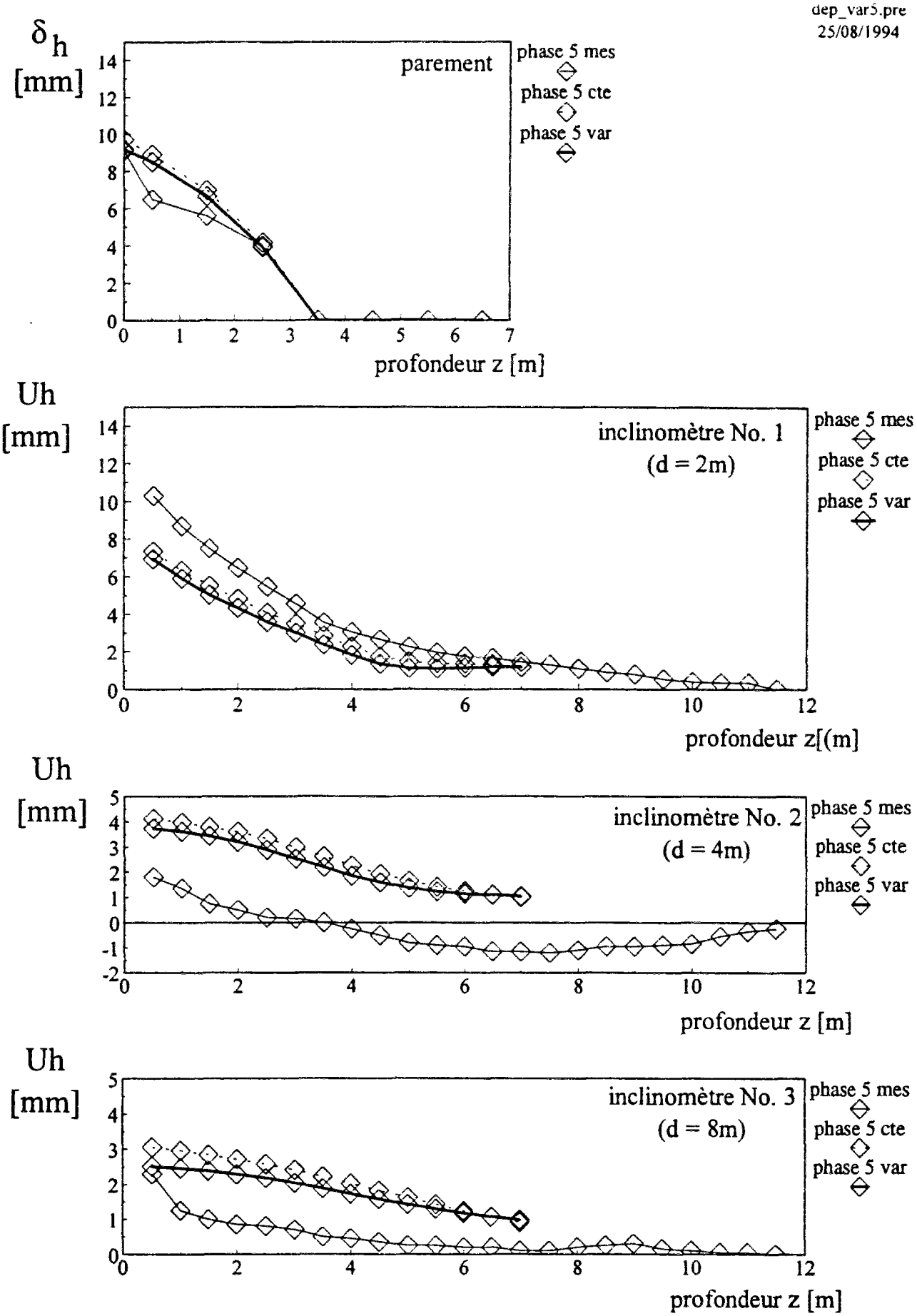


Figure C.6-75 : Déformées du parement et du sol à la fin de la phase 5 (H = 5 m)
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calcul avec des propriétés variables en fonction de la profondeur (FLAC)

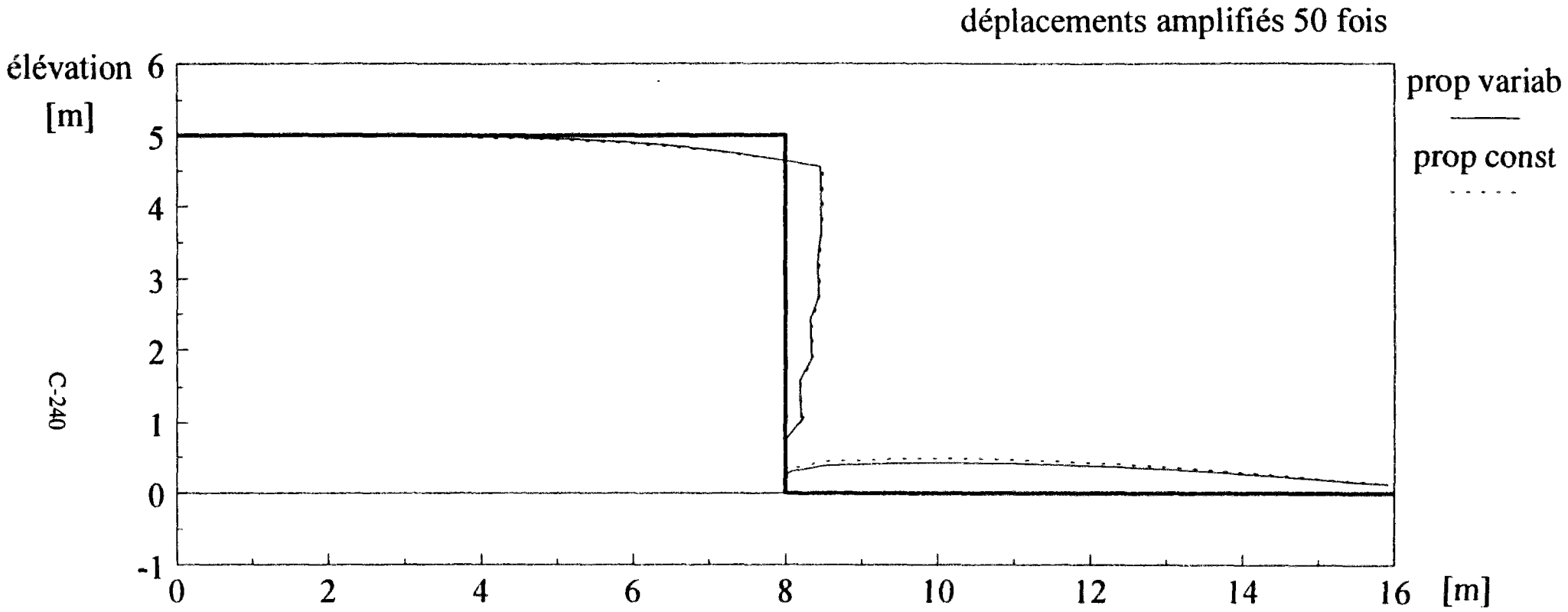


Figure C.6-76 : Comparaison des déformées du sol en surface à la phase 5 (H = 5 m)
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calculs de référence et calcul avec des propriétés variables avec la profondeur (FLAC)

6.6.1.8 Continuité du maillage

Le logiciel FLAC offre la possibilité d'utiliser des zones voisines avec des maillages de caractéristiques géométriques différentes. Cependant, pour assurer une certaine continuité des déplacements et la continuité du vecteur contrainte, les éléments d'interface doivent être choisis de manière appropriée.

Un calcul avec un maillage discontinu entre la zone de sol remblayé, maillée très finement, et le sol de fondation, maillé plus grossièrement, a été comparé avec un calcul où le maillage est continu, afin de voir l'influence de la continuité du maillage sur la réponse du mur en sol cloué. La différence entre les deux calculs est très faible au niveau du parement ou du sol à 2 m à l'arrière du parement, du moins dans la zone de sol cloué (figure C.6-77a). Au dessous, dans le sol de fondation, le maillage discontinu donne des déplacements négatifs, c'est à dire dirigés vers l'arrière du massif et discontinus par rapport à ce qui se passe au dessus. Le maillage continu donne, par contre, des déformées continues dans le sol à la limite du sol remblayé et du sol de fondation. La différence entre les deux calculs est plus notable à 4 et 8 mètres du parement (figure C.6-77b). Cependant, les différences sont au maximum de 0,5 millimètres. Les déformées du sol en surface pour les deux calculs sont remarquablement proches l'une de l'autre (figure C.6-78).

Il est intéressant de remarquer que les mesures inclinométriques à l'arrière du massif de sol cloué ont donné des déplacements négatifs, c'est à dire orientés vers l'intérieur, surtout pour les inclinomètres à 4 et 8 mètres. Ces mesures sont à considérer avec un certain recul par rapport à leur précision et les erreurs inhérentes. Mais l'on pourrait concevoir une discontinuité des propriétés mécaniques entre le sol remblayé et le sol de fondation.

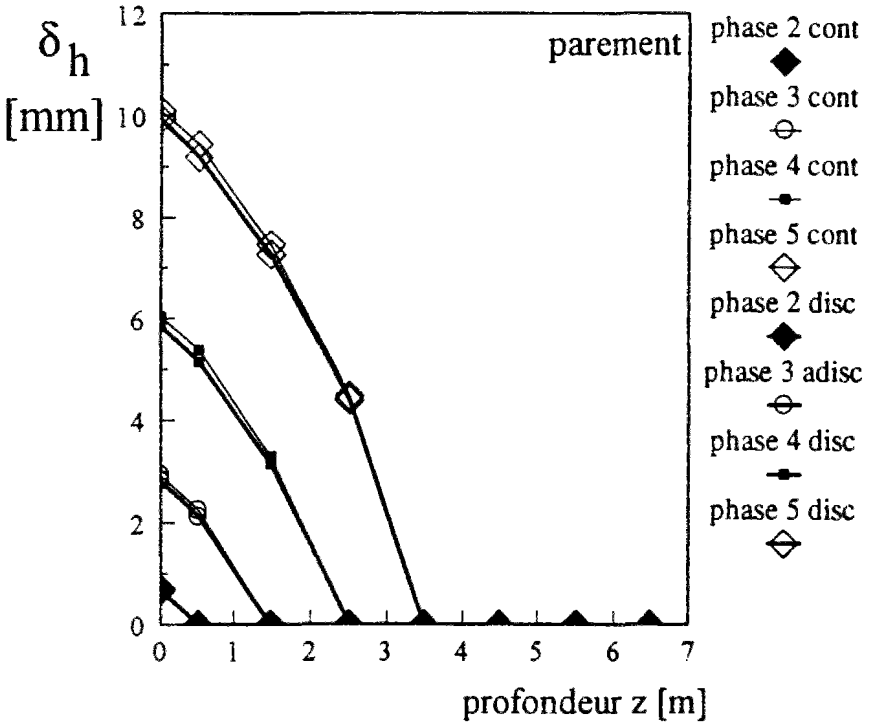
6.6.1.9 Comparaison de tous les calculs

Les figures C.6-79a et C.6-79b regroupent les déformées de la surface du sol, obtenues en faisant varier les paramètres considérés dans l'étude de sensibilité (tableau C.6-24).

Sur la vue d'ensemble, il convient de noter que les déformations du sol ne sont perceptibles que près du mur en sol cloué et ceci, pour tous les calculs, quelles que soient les valeurs des paramètres (figure C.6-79a).

L'influence respective des différents facteurs sur les déplacements du mur et, notamment, en tête et en fond de fouille, est synthétisée dans le tableau C.6-25.

Le choix de clous élastiques, plutôt qu'élastoplastiques, n'a pas une influence importante sur les résultats dans la mesure où les clous travaillent à des niveaux de contraintes très proches de la contrainte limite élastique.



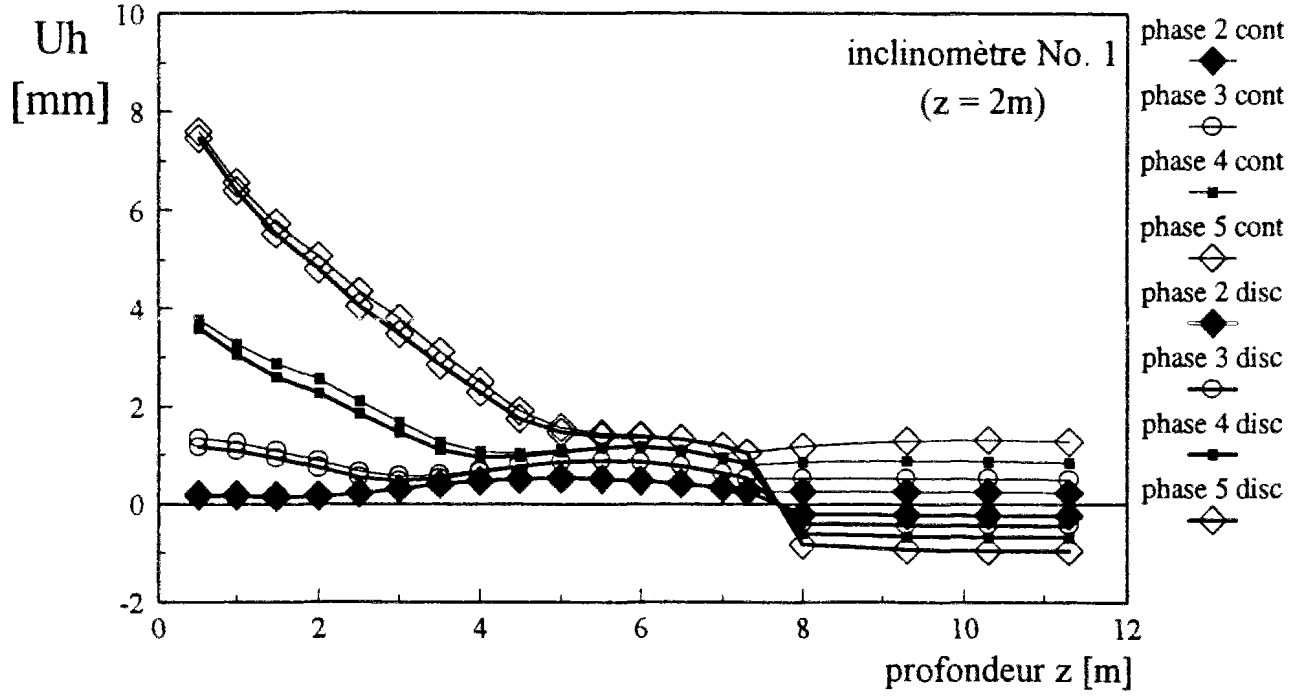
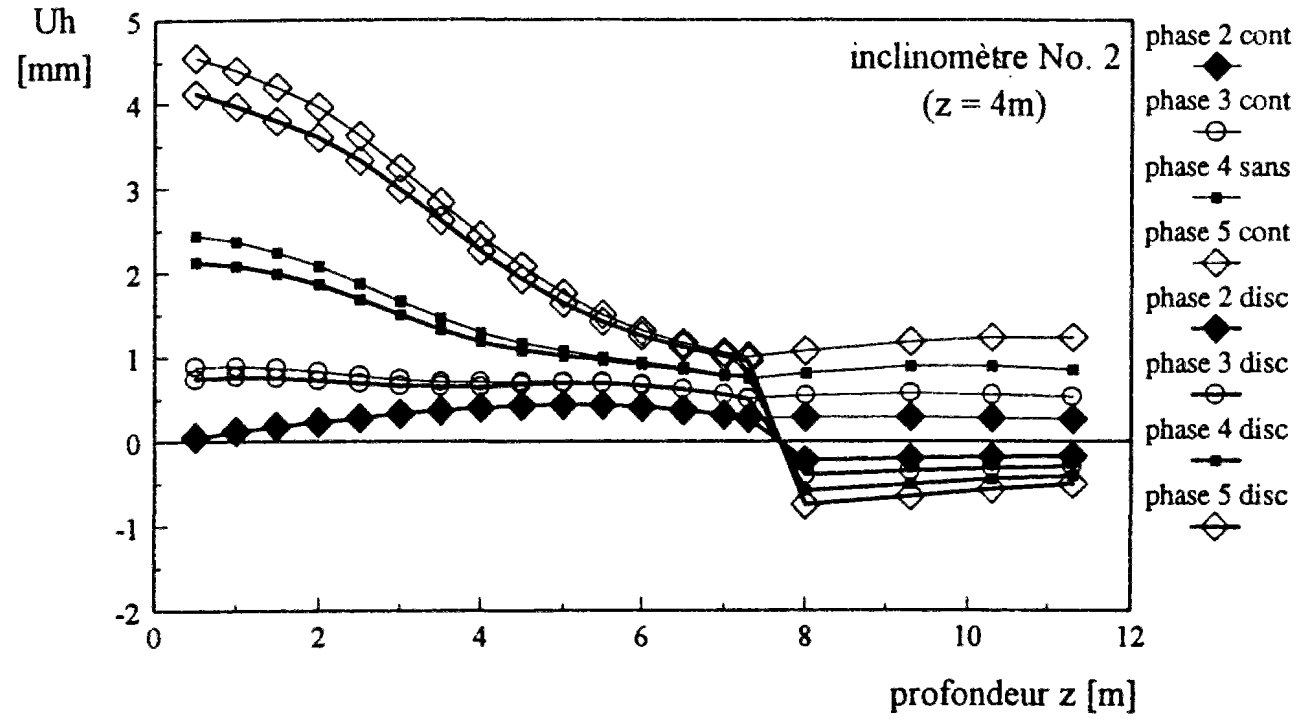


Figure C.6-77a : Déformées du parement et du sol à la fin de la phase 5 (H = 5 m)
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calculs avec des maillages continu et discontinu (FLAC)



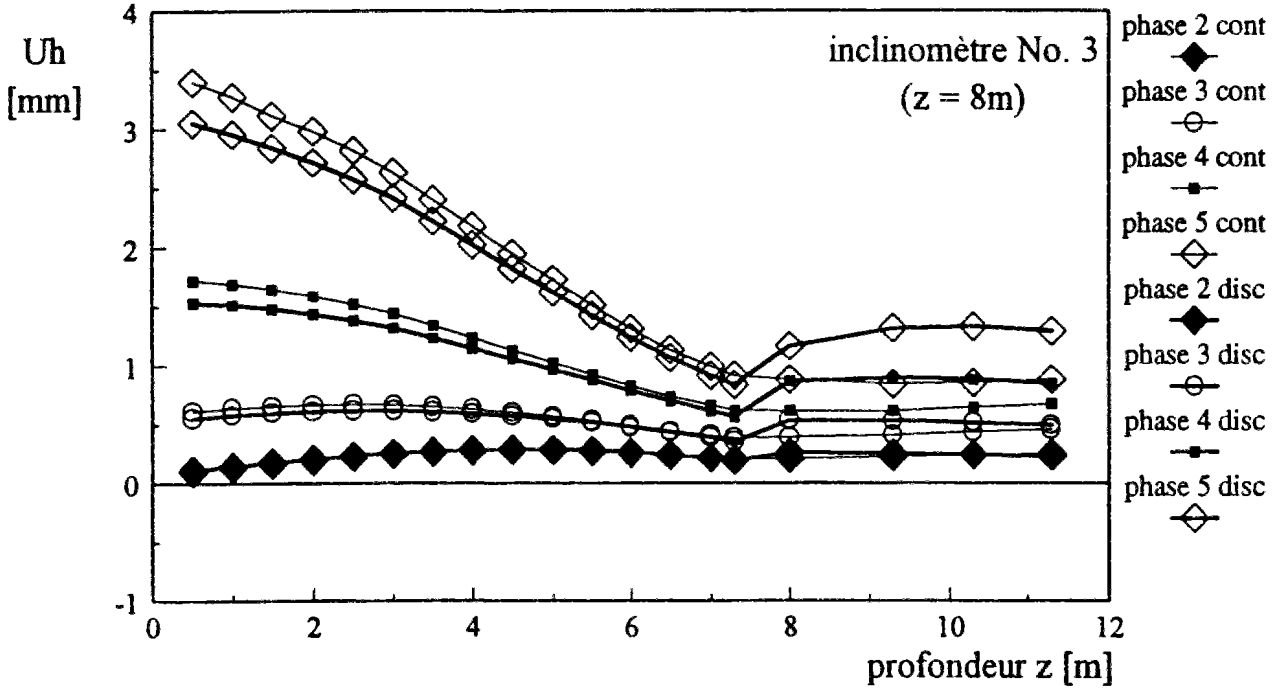


Figure C.6-77b : Déformées du parement et du sol à la fin de la phase 5 (H = 5 m)
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calculs avec des maillages continu et discontinu (FLAC)

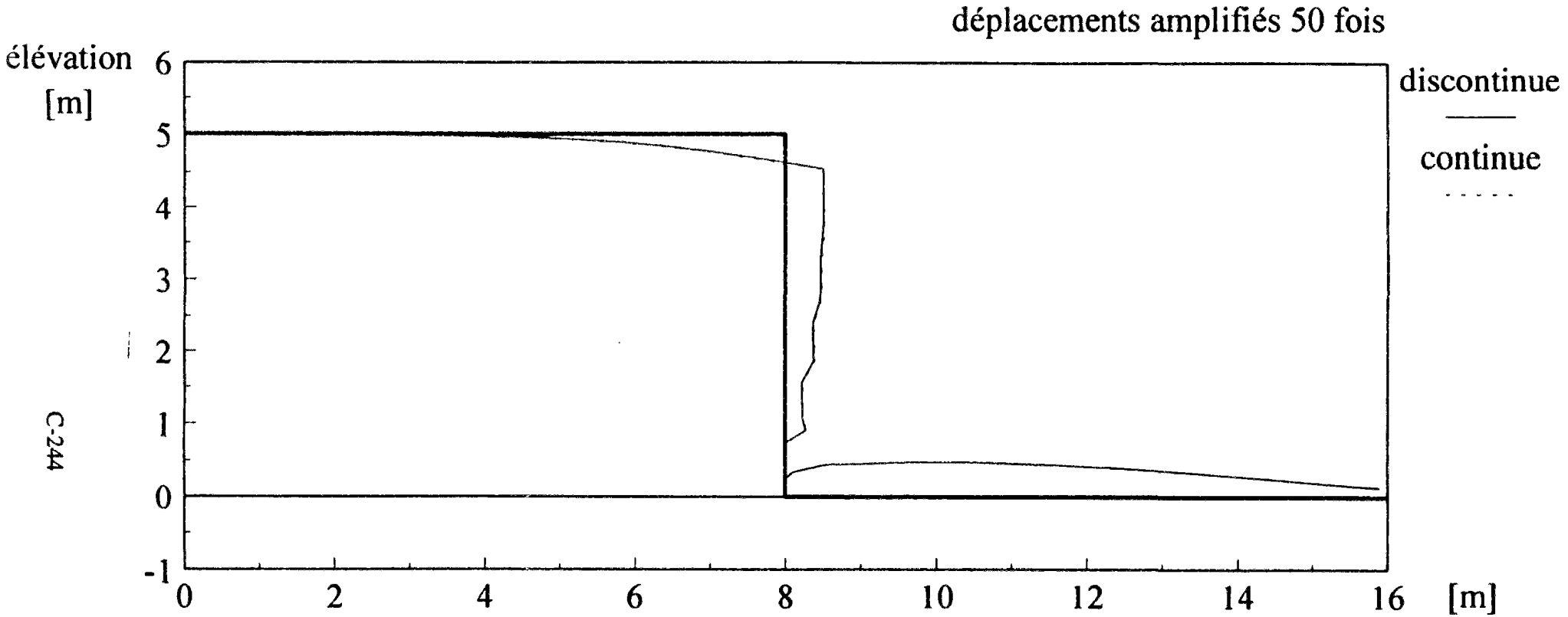


Figure C.6-78 : Comparaison des déformées du sol en surface à la phase 5 (H = 5 m)
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calculs avec des maillages continu et discontinu (FLAC)

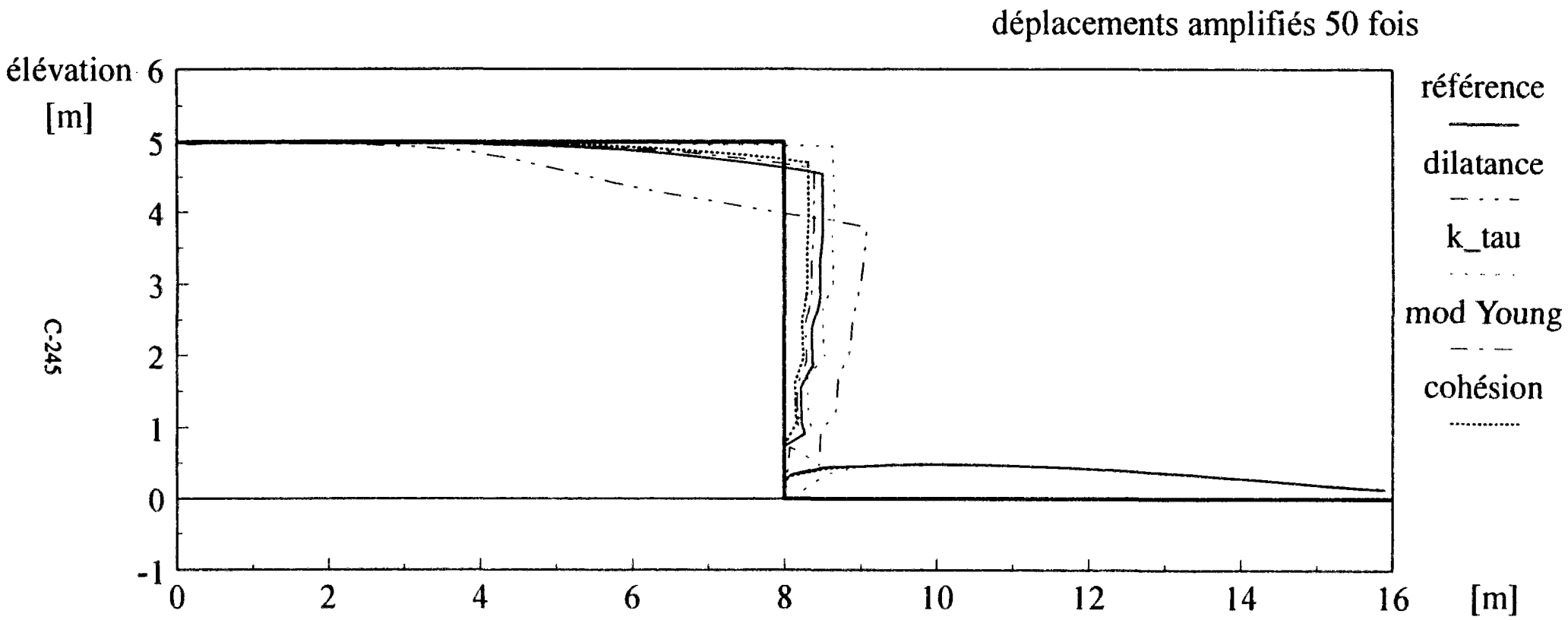


Figure C.6-79a : Comparaison des déformées du sol en surface à la phase 5 (H = 5 m)
pour tous les calculs avec FLAC
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1

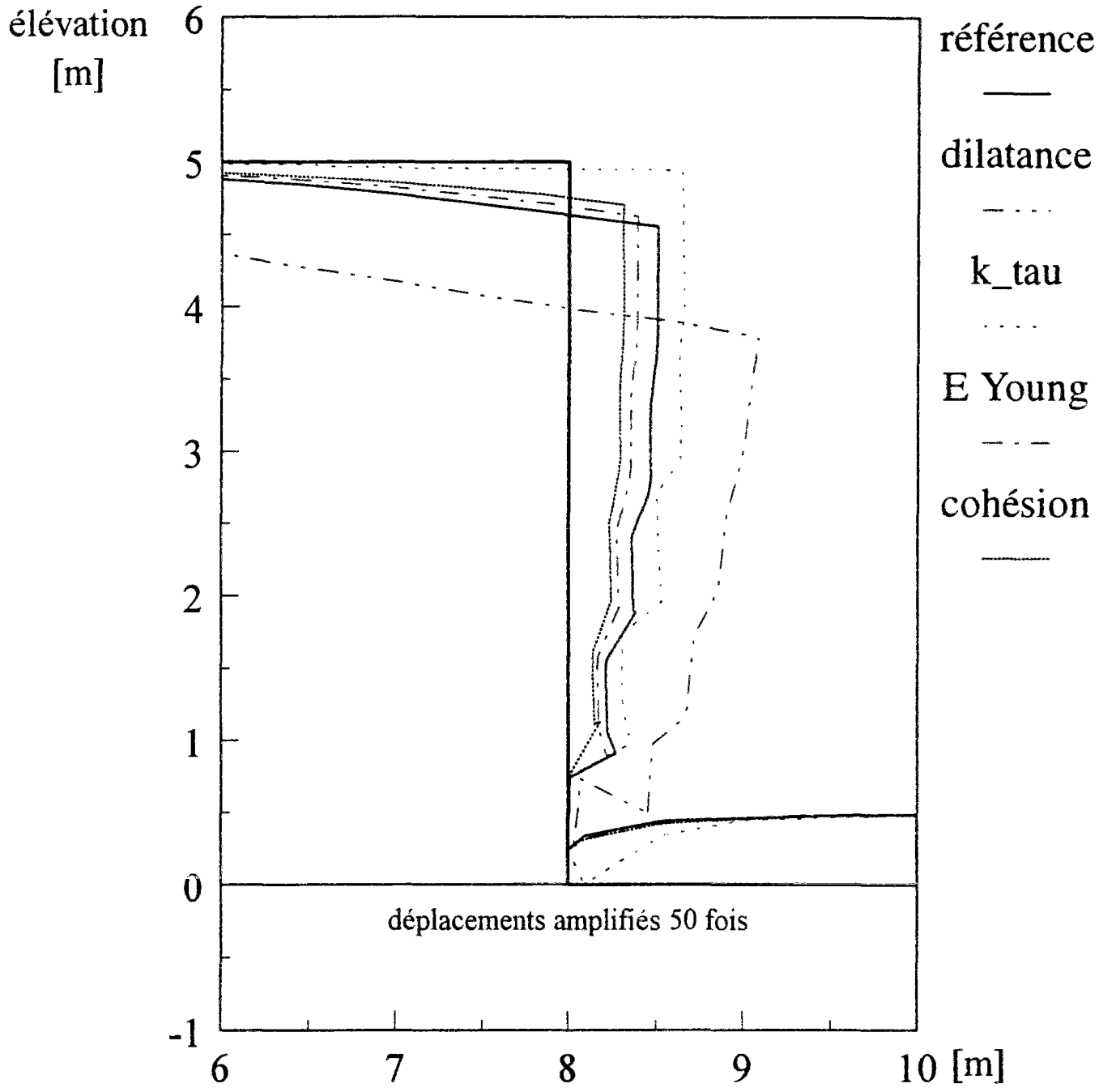


Figure C.6-79b : Comparaison des déformées du sol en surface à la phase 5 (H = 5 m)
pour tous les calculs avec FLAC
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1

Tableau C.6-24 : Récapitulatif des paramètres étudiés dans l'étude de sensibilité

Calcul de référence avec des paramètres constants en fonction de la profondeur		
paramètre étudié	valeur dans le calcul de référence	valeur prise pour l'étude de sensibilité
angle dilatance ψ	$\psi = 25°$	$\psi = 0°$
contrainte limite des clous σ_e (comparaison avec CESAR)	$\sigma_e = 110\ 10^3$ kPa	σ_e infinie (clous élastiques)
module d'Young des clous	E = 70 MPa	E = 140 MPa (2 E référence)
module de mobilisation du frottement latéral	$k_\tau = 69\ 10^{+3}$ kPa	$k_\tau = 6.9\ 10^{+3}$ kPa (k_τ référence / 10)
critère de Mohr-Coulomb	non tronqué $\sigma_t = c / \tan \psi$	tronqué à : $\sigma_t = 2\ c \tan (\pi/4 - \phi/2)$
cohésion apparente du sol	c = 3 kPa	c = 4 kPa
maillage entre le remblai et le sol de fondation	discontinu	continu
paramètres fonctions de la profondeur (clous élastique $\sigma_e = \infty$)	paramètres constants	paramètres variables

La multiplication du module d'Young E des clous par un coefficient 2 a pour effet de réduire les déplacements latéraux et verticaux du mur, d'environ 20%. Ces déplacements sont dus à la déformation du sol et à l'allongement des clous. Le sol est relativement déformable avec un module d'Young moyen d'environ 20 MPa. Les clous sont eux-mêmes relativement déformables par rapport à ce qui se fait dans la pratique, puisqu'ils sont en aluminium. Cependant, vu l'influence relativement faible du module des clous sur les déplacements, on peut conclure que les déplacements du parement sont dus essentiellement à la déformation du sol.

La réduction du coefficient de mobilisation k_τ du frottement latéral par un coefficient 10 a pour effet d'augmenter d'environ 20% les déplacements horizontal et vertical.

Une réduction, même de 1 kPa, de la résistance en traction du sol, qui est d'environ 4 kPa pour le critère non tronqué, a pour effet de provoquer une instabilité locale en pied de mur, dans la zone excavée non protégée.

Une augmentation de 1 kPa de la cohésion, c'est à dire de 30% en relatif, a pour effet de réduire les déplacements en tête d'environ 40%.

Le choix d'un angle de dilatance nul, alors que dans le calcul de référence un angle de 25° est choisi, a une influence très importante sur les déplacements en tête, qui sont augmentés de 40 à 50%. Ce paramètre est rarement mesuré, même en laboratoire, alors qu'il varie de manière significative pour des faibles contraintes, entre 0 et 100 kPa.

Le choix d'un maillage continu ou discontinu se traduit par une variation inférieure au pour-cent des résultats pour les déplacements en tête. Alors qu'en profondeur, à la limite entre les deux zones de maillage, la différence est beaucoup plus sensible.

Le soulèvement du sol s_f en fond de fouille est maximal à environ 2 m du parement. Il est quasiment indépendant du choix des paramètres, du moins pour la fourchette considérée. Il est inférieur, dans cette étude paramétrique, à un centimètre.

Les déplacements horizontaux en surface, à 8 m à l'arrière du parement, sont rassemblés dans la colonne 5 du tableau C.6-25. On peut remarquer, que pour le calcul de référence, ce déplacement est d'environ 3 mm. Dans le cas d'un angle de dilatance nul, les déplacements en tête sont nettement plus importants que pour le calcul de référence, tandis que le déplacement à 8 m à l'arrière est plus faible. Les autres résultats sont tout à fait consistants.

Tableau C.6-25 : Comparaison des déplacements obtenus pour les différents calculs

calcul	U_h en tête [mm] à la 5ème phase (H = 5m)	U_v en tête [mm] à la 5ème phase (H = 5m)	déplacement s_f en fond de fouille (à environ 2m du parement)	déplacement U_h [mm] à 8 m du parement
référence	10,13	-9,001	9,682	3,130
angle dilatance $\psi = 0°$	21,72	-24,18	9,722	2,713
σ_e infini (clous élastiques)	9,91	-8,798	9,681	3,136
module d'Young des clous * 2	7,87	-7,567	9,682	3,112
module de mobilisation du frottement latéral k_τ / 10	12,83	-11,66	9,685	3,146
cohésion apparente du sol c = 4 kPa	6,26	-5,947	9,613	2,874
maillage entre le remblai et la fondation continu	10,24	-9,099	9,666	3,516

6.6.2 Deuxième étude de sensibilité

Une deuxième étude de sensibilité a été réalisée avec CESAR, en complément de la première étude sur FLAC. L'influence sur les résultats des paramètres suivants a été étudiée : module de déformation du sol, module de déformation du béton du parement, état des contraintes initiales, installation des clous avec une pré-tension.

6.6.1.1 Module d'Young du sol

Les corrélations avec le module pressiométrique Ménard donnent pour les sables un module d'Young de 4,1 E_M . Cette valeur est un peu forte et nous avons choisi de prendre une valeur de 2 E_M . Dans le cas présent, nous regardons l'influence que pourrait avoir le choix d'un module d'Young 2 fois plus fort sur la réponse de l'ouvrage.

Les tractions dans les clous, à la fin de la 5ème phase, sont légèrement réduites, surtout à l'arrière de la ligne des tractions maximales (figure C.6-80).

Les différences avec le calcul de référence sont surtout sensibles sur les déformées du parement et du sol (figures C.6-81 et C.6-82). Avec un module du sol 2 fois plus fort, les déplacements du parement à la phase 5 coïncident quasiment avec les mesures. A 2 m, à l'arrière du mur, les déplacements sont sous-estimés de 3 mm, à 4 m, ils sont surestimés de 2 mm, et, à 8 m, ils coïncident presque parfaitement avec les mesures. Les calculs avec un module du sol, égal à 2 et 4 E_M , sont donc complémentaires. Ils permettent d'encadrer les déplacement du parement et du sol, tout en donnant quasiment les mêmes valeurs pour les tractions. Dans le cas du module le plus le faible, les déformées au parement et à 2 m sont les mieux calculées. Dans le cas du module le plus fort, ce sont les déplacement, à l'arrière du massif, à 4 et 8 m, qui sont les mieux calculés. Un module intermédiaire permettrait de trouver un compromis au niveau des résultats.

6.6.1.2 Module de déformation du béton

Si l'on multiplie par 10 le module d'Young du béton, les tractions dans les clous augmentent dans les lits les plus hauts de manière sensible, tandis que la ligne des tractions maximales recule légèrement (figure C.6-83).

Les déplacements du parement et du sol à la phase 3 ne sont pas modifiés (figure C.6-84). Seuls les déplacements du parement et dans le sol à 2 m du parement sont très légèrement réduits à la phase 5, de maximum 1% (figure C.6-85). Le choix du module d'Young du béton, pourvu que l'on reste dans une fourchette raisonnable, n'a pas une influence très importante.

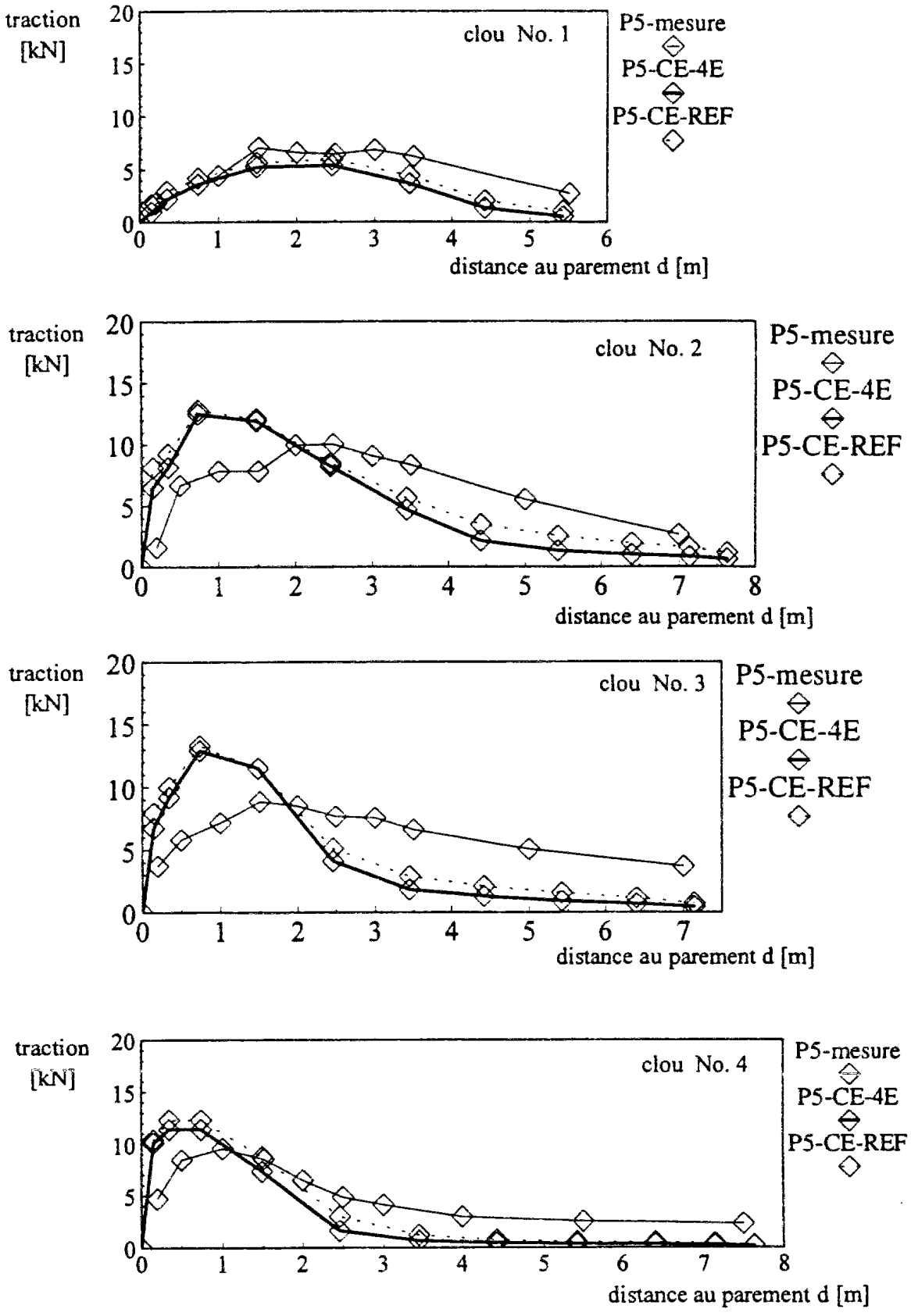


Figure C.6-80 : Déformées du parement et du sol à la fin de la phase 5 (H = 5 m)
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calculs avec un module du sol égal à 2 et 4 E_M (CESAR)

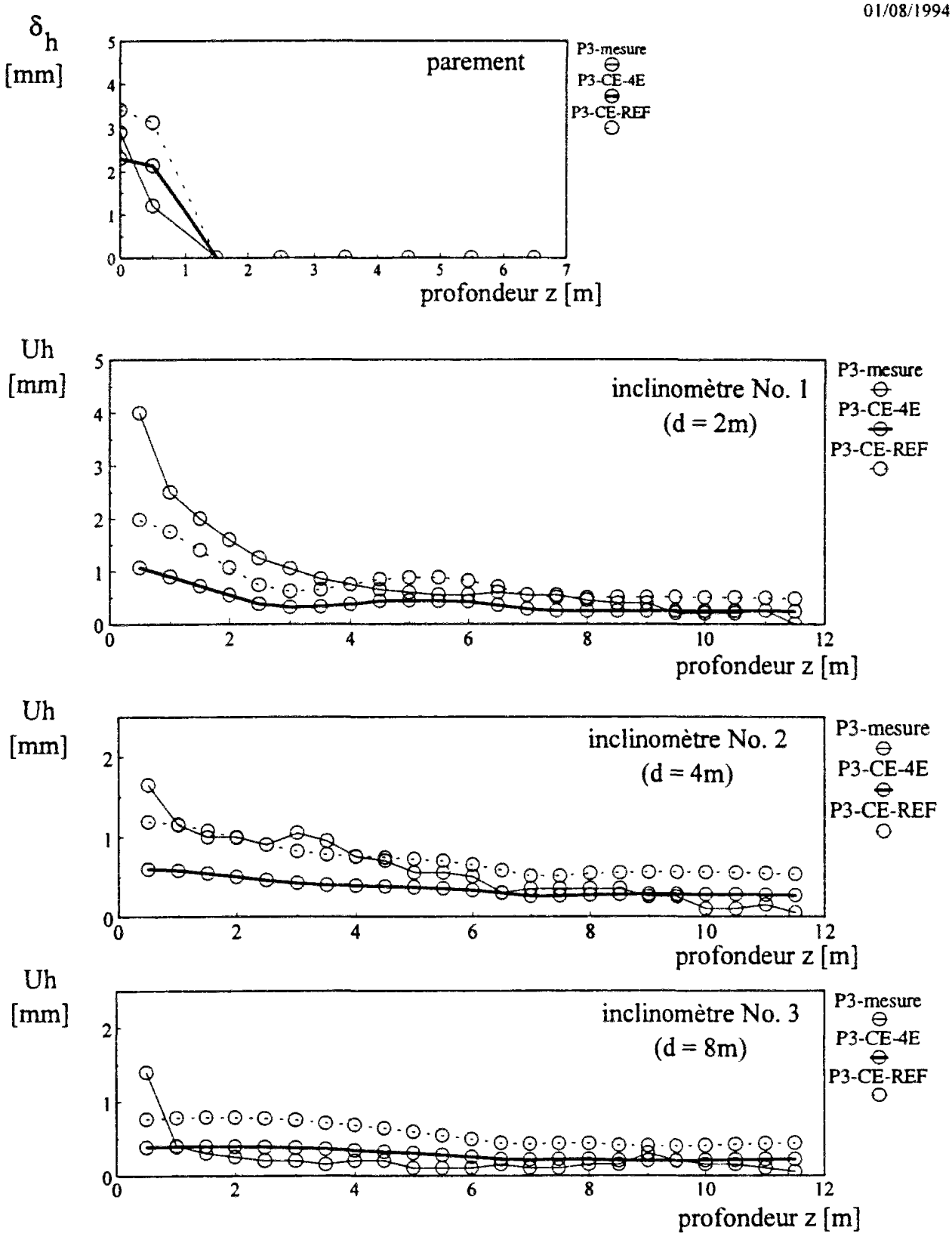


Figure C.6-81 : Déformées du parement et du sol à la fin de la phase 5 (H = 5 m)
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calculs avec un module du sol égal à 2 et 4 E_M (CESAR)

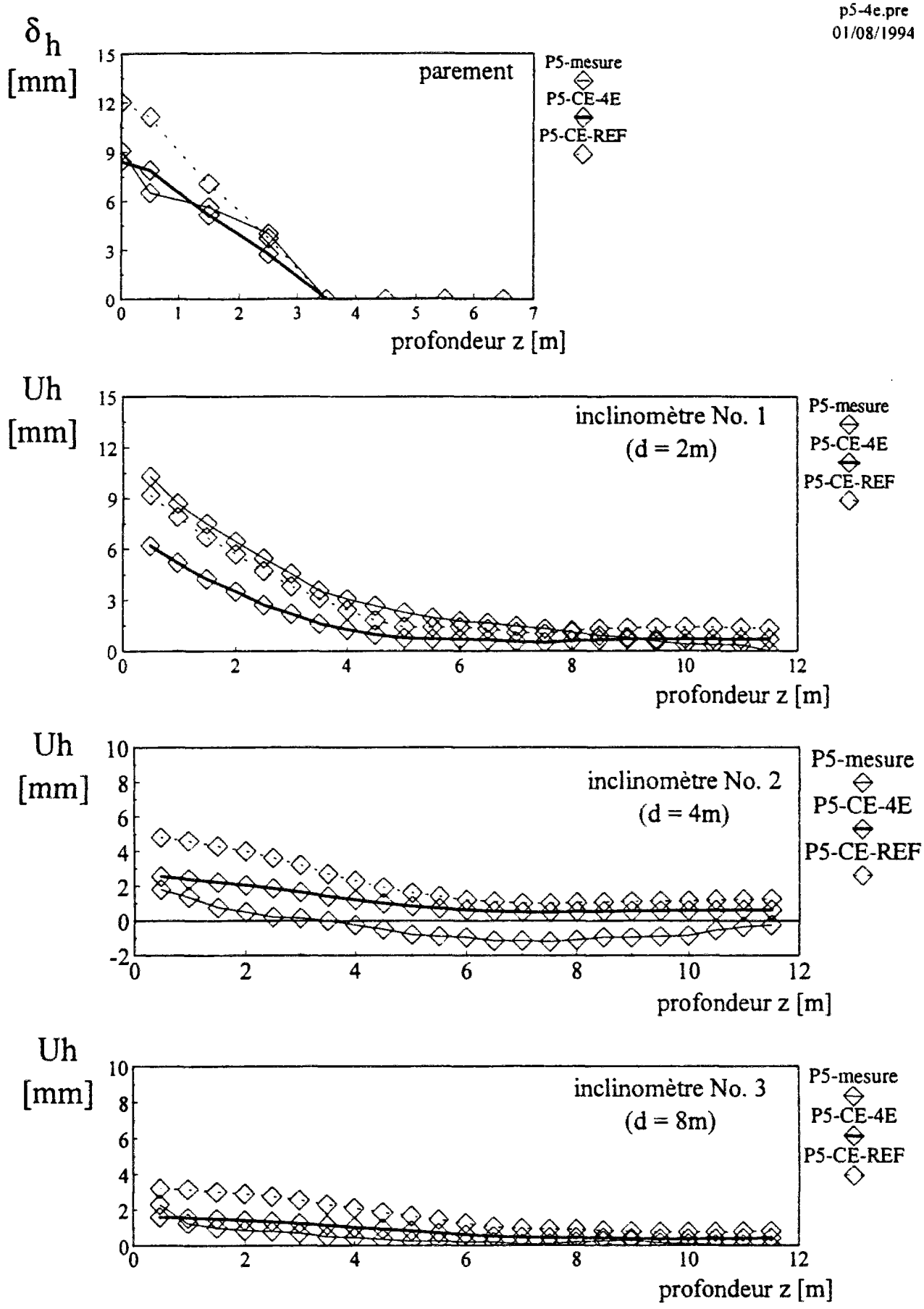


Figure C.6-82 : Comparaison des déformées du sol en surface à la phase 5 (H = 5 m)
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calculs avec un module du sol égal à 2 et 4 E_M (CESAR)

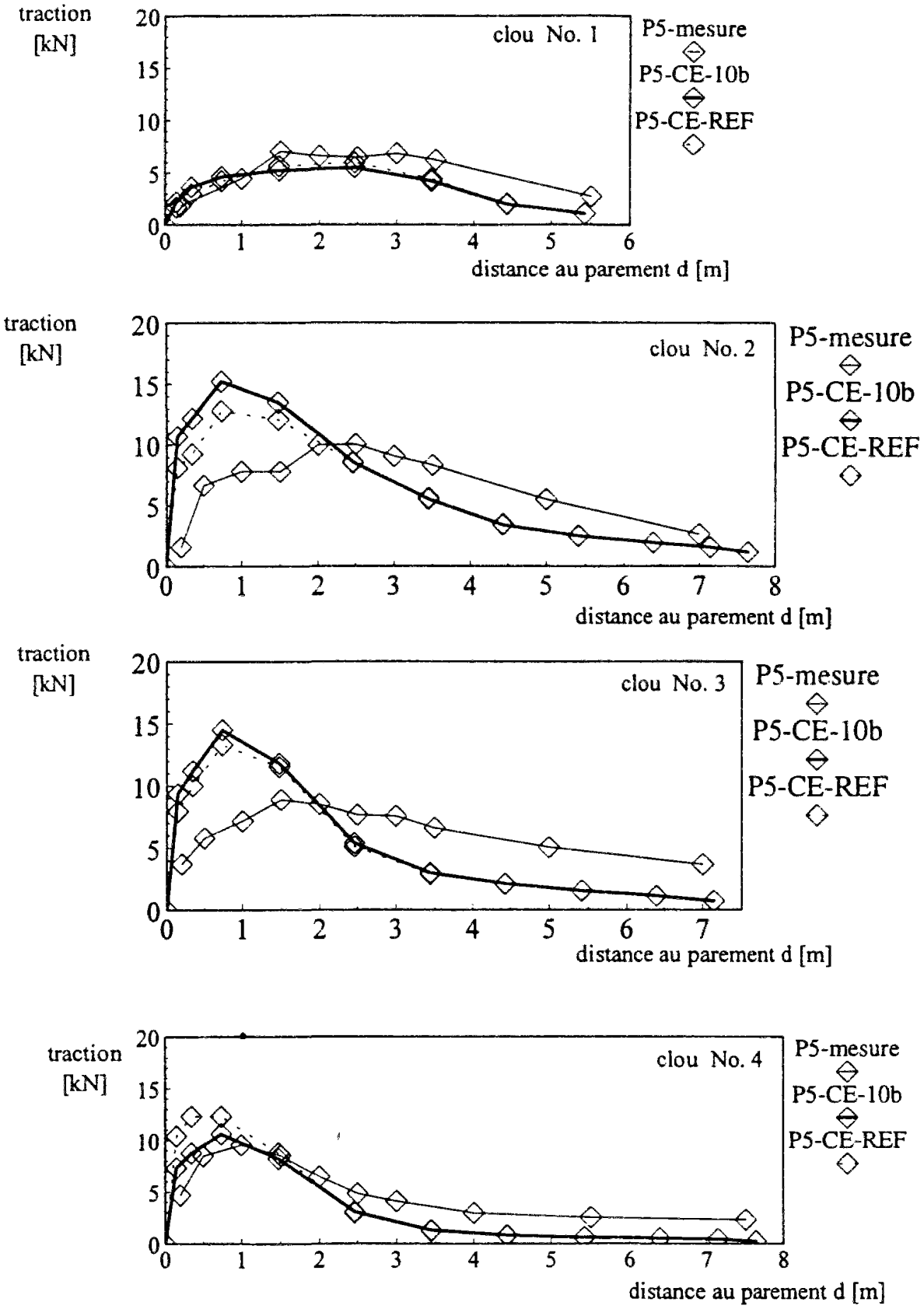


Figure C.6-83 : Distribution des tractions à la fin de la phase 5 (H = 5 m)
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calcul avec un module du béton 10 fois plus fort (CESAR)

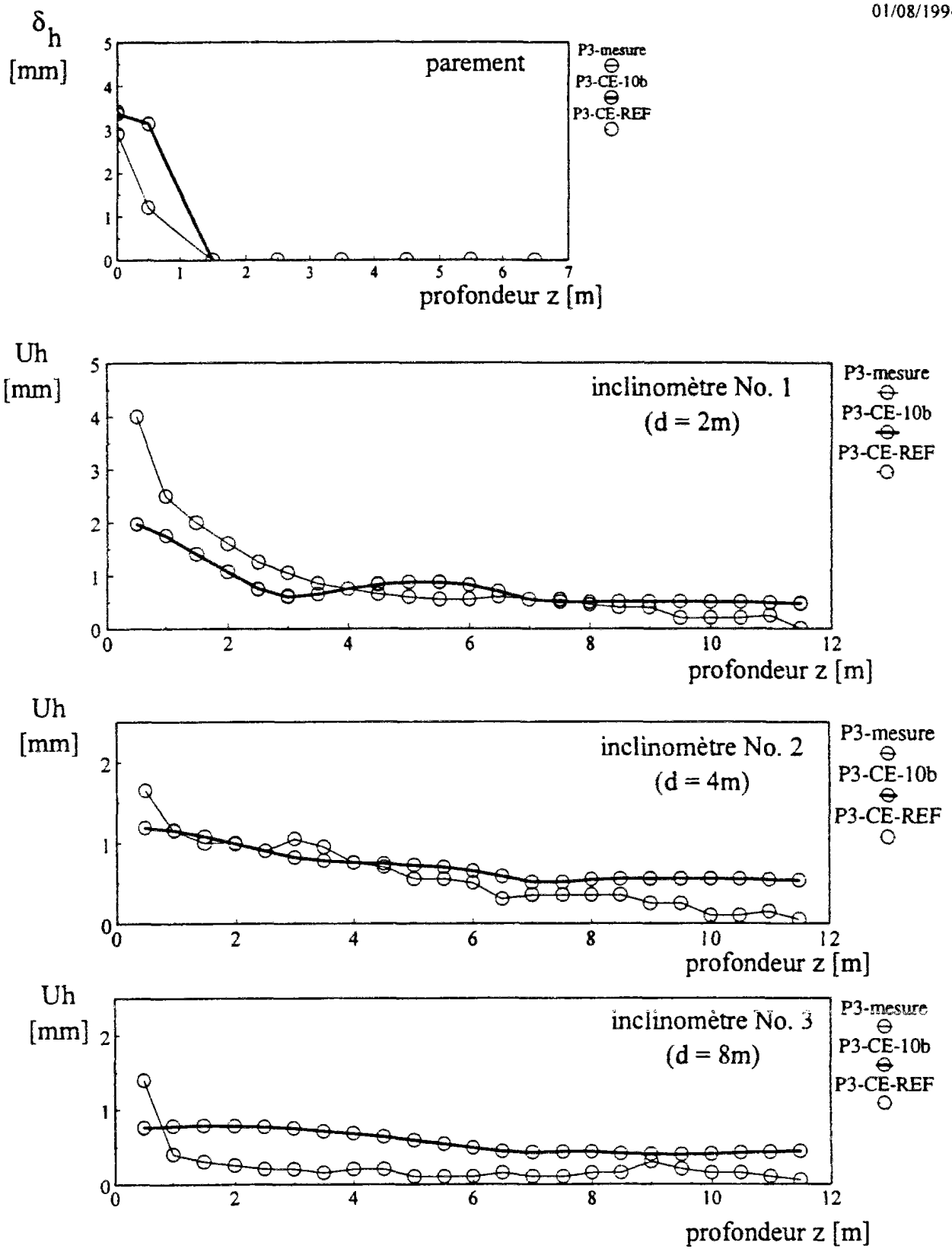


Figure C.6-84 : Déformées du parement et du sol à la fin de la phase 5 (H = 5 m)
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calcul avec un module du béton 10 fois plus fort (CESAR)

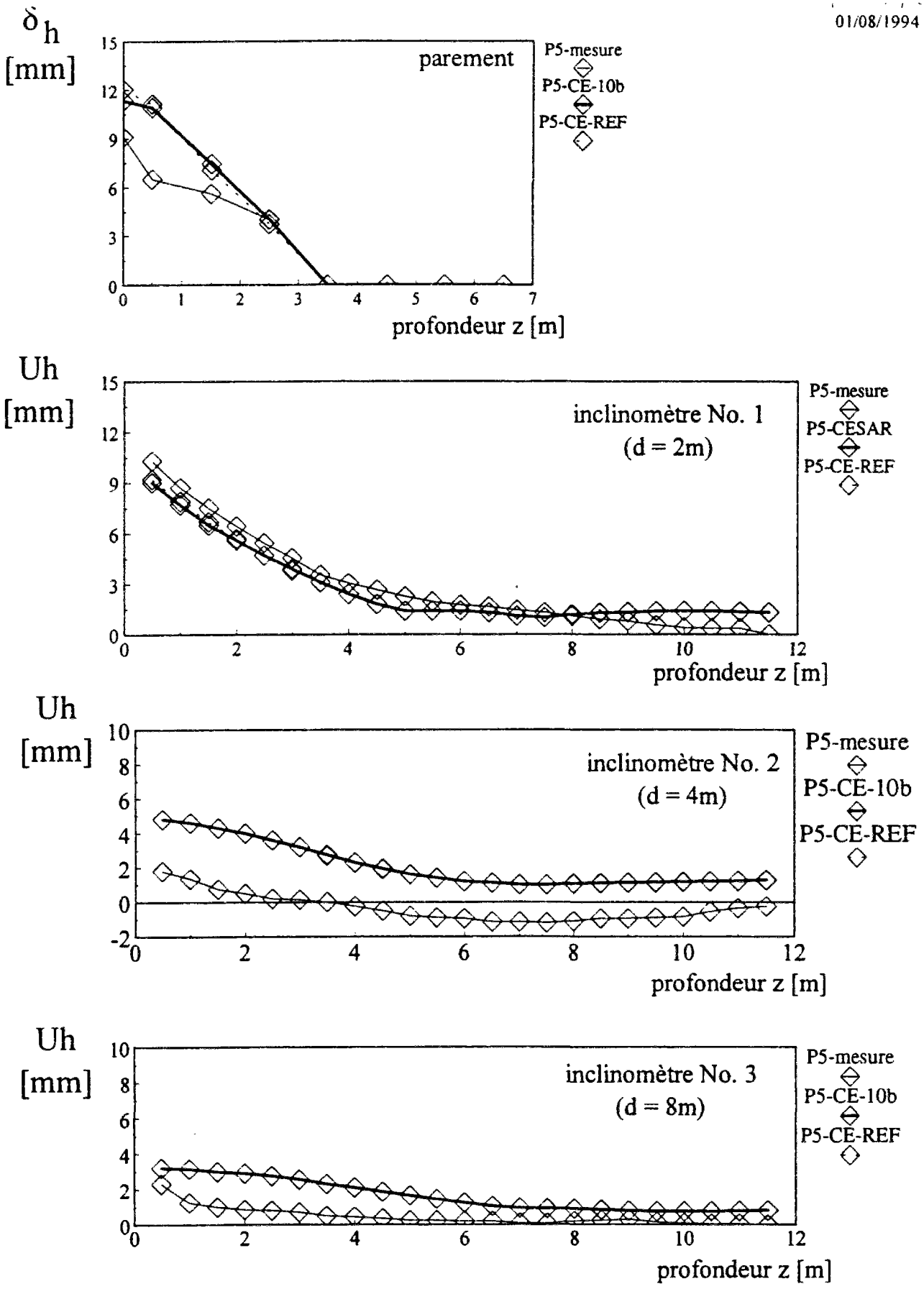


Figure C.6-85 : Comparaison des déformées du sol en surface à la phase 5 (H = 5 m)
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calcul avec un module du béton 10 fois plus fort (CESAR)

6.6.1.3 Etat des contraintes initiales

Il existe trois méthodes pour initialiser les contraintes dans un massif de sol avant le clouage. La première, qui consiste à modéliser la construction du remblai, couche par couche, est la plus longue mais la plus réaliste et précise. La seconde consiste à augmenter progressivement les poids volumiques des matériaux jusqu'à atteindre leurs poids réels. C'est une méthode simple et relativement réaliste. La troisième consiste à prendre pour la contrainte verticale σ_v le poids des terres, puis à calculer la contrainte horizontale σ_h correspondant avec un coefficient de poussée des terres au repos K_0 à choisir. Les contraintes de cisaillement quant à elles sont prises nulles. Cette dernière méthode est très simple mais peu réaliste dans le cas présent, du fait de la pente du remblai, qui n'est pas négligeable. La deuxième méthode a été choisie pour le calcul de référence.

Dans cette étude de sensibilité, nous avons étudié, dans quelle mesure, la premières méthode, qui est la plus réaliste, influencerait les résultats des calculs. En termes d'isovaleurs des contraintes verticales, nous n'avons pas trouvé de différences majeures (figures C.6-86a et C.6-87a). Tout au plus, pouvons nous noter que la zone cisaillée sous le mur de soutènement est réduite et que celle sous le pied du remblai est augmentée (figures C.6-86b et C.6-87b). En ce qui concerne les points plastiques, ceux-ci sont plus nombreux, dans le calcul avec phasage de construction du remblai, devant le mur de soutènement en béton armé (figures C.6-86c et C.6-87c).

Ces quelques différences en terme de contraintes initiales ont une influence très faible sur la réponse du mur en sol cloué. Les tractions sont quasiment identiques pour les deux calculs, du moins pour les trois lits les plus hauts (figure C.6-88). Les déformées du parement et du sol, pour les deux calculs, sont confondues sur les figures C.6-89 et C.6-90, aussi bien à la phase 3 qu'à la phase 5.

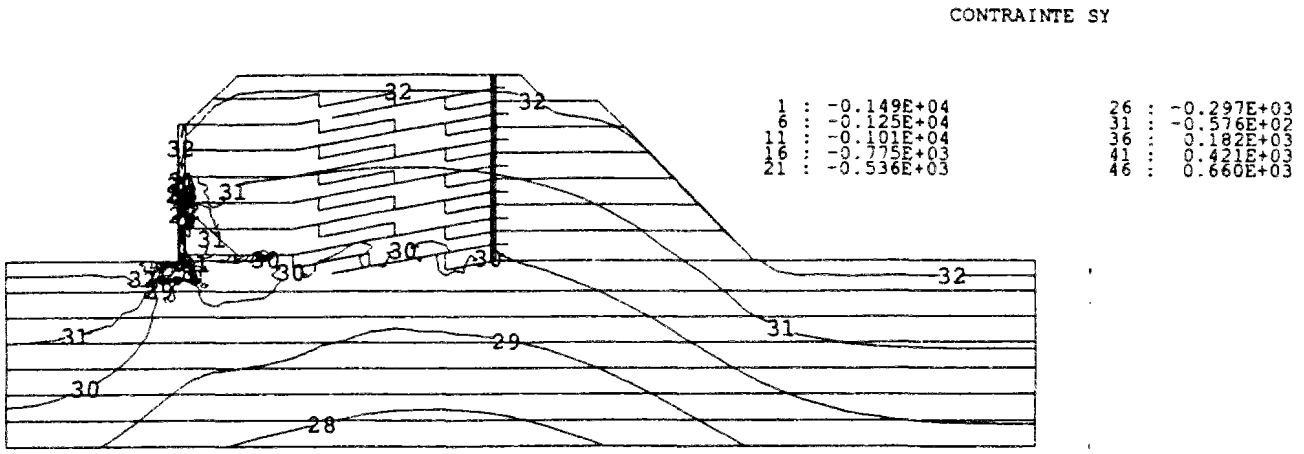


Figure C.6-86a : Isovaleurs des contraintes verticales σ_y [kPa]
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calcul de référence : initialisation avec le poids volumique (CESAR)

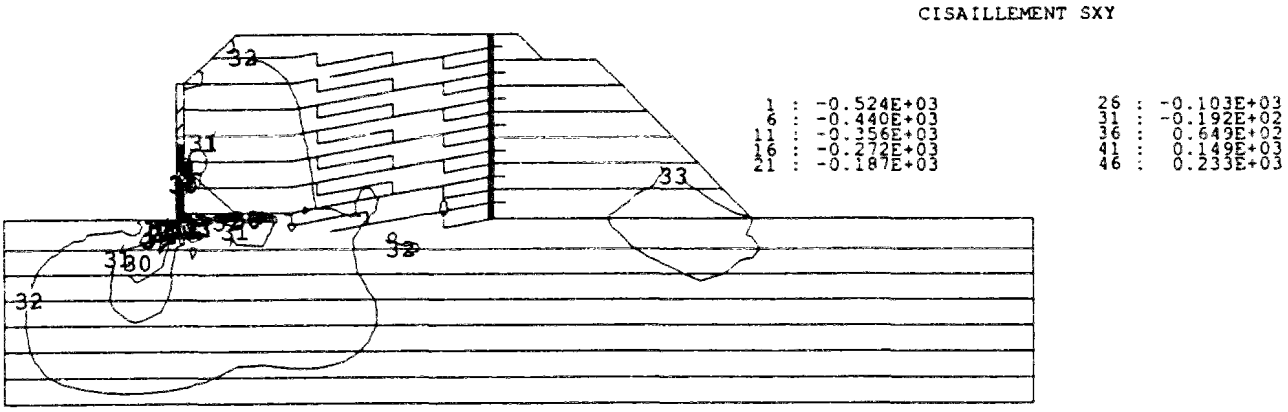


Figure C.6-86b : Isovaleurs des contraintes verticales σ_{xy} [kPa]
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calcul de référence : initialisation avec le poids volumique (CESAR)

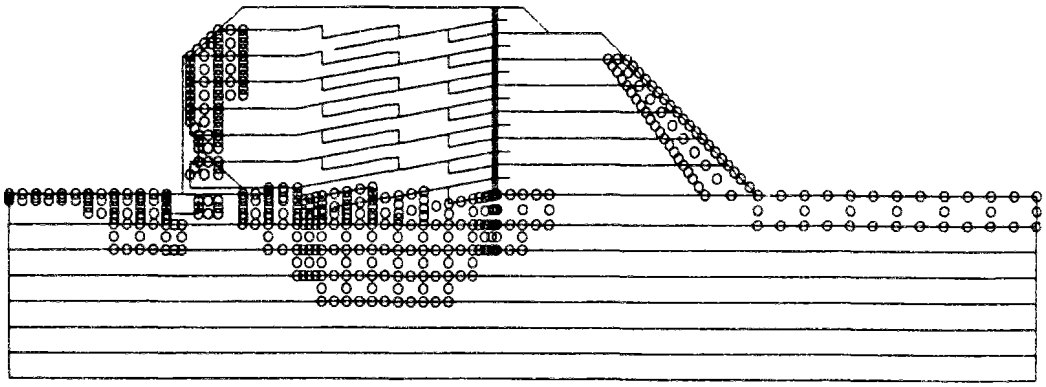


Figure C.6-86c : Points plastifiés dans le sol
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calcul de référence : initialisation avec le poids volumique (CESAR)

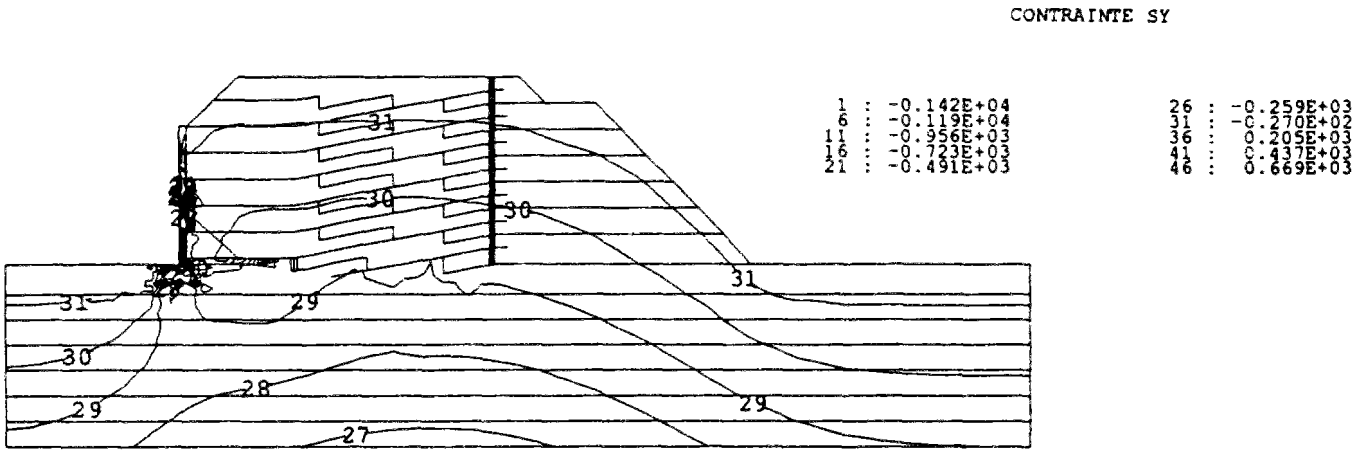


Figure C.6-87a : Isovaleurs des contraintes verticales σ_y [kPa]
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Initialisation des contraintes avec le phasage de construction du remblai (CESAR)

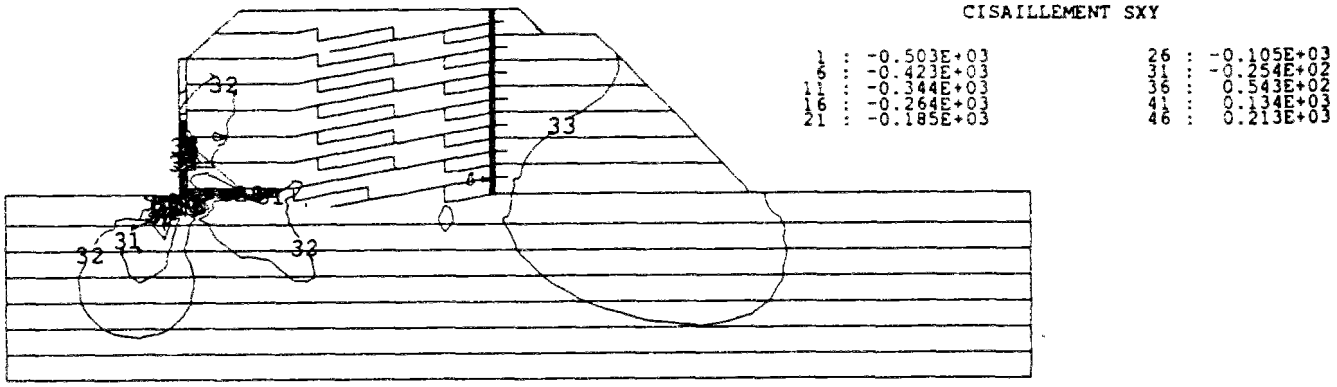


Figure C.6-87b : Isovaleurs des contraintes verticales σ_{xy} [kPa]
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Initialisation des contraintes avec le phasage de construction du remblai (CESAR)

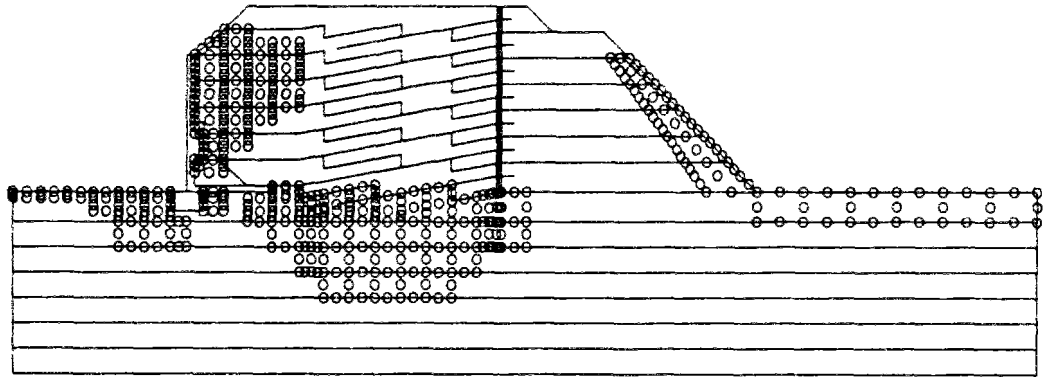


Figure C.6-87c : Points plastifiés dans le sol
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Initialisation des contraintes avec le phasage de construction du remblai (CESAR)

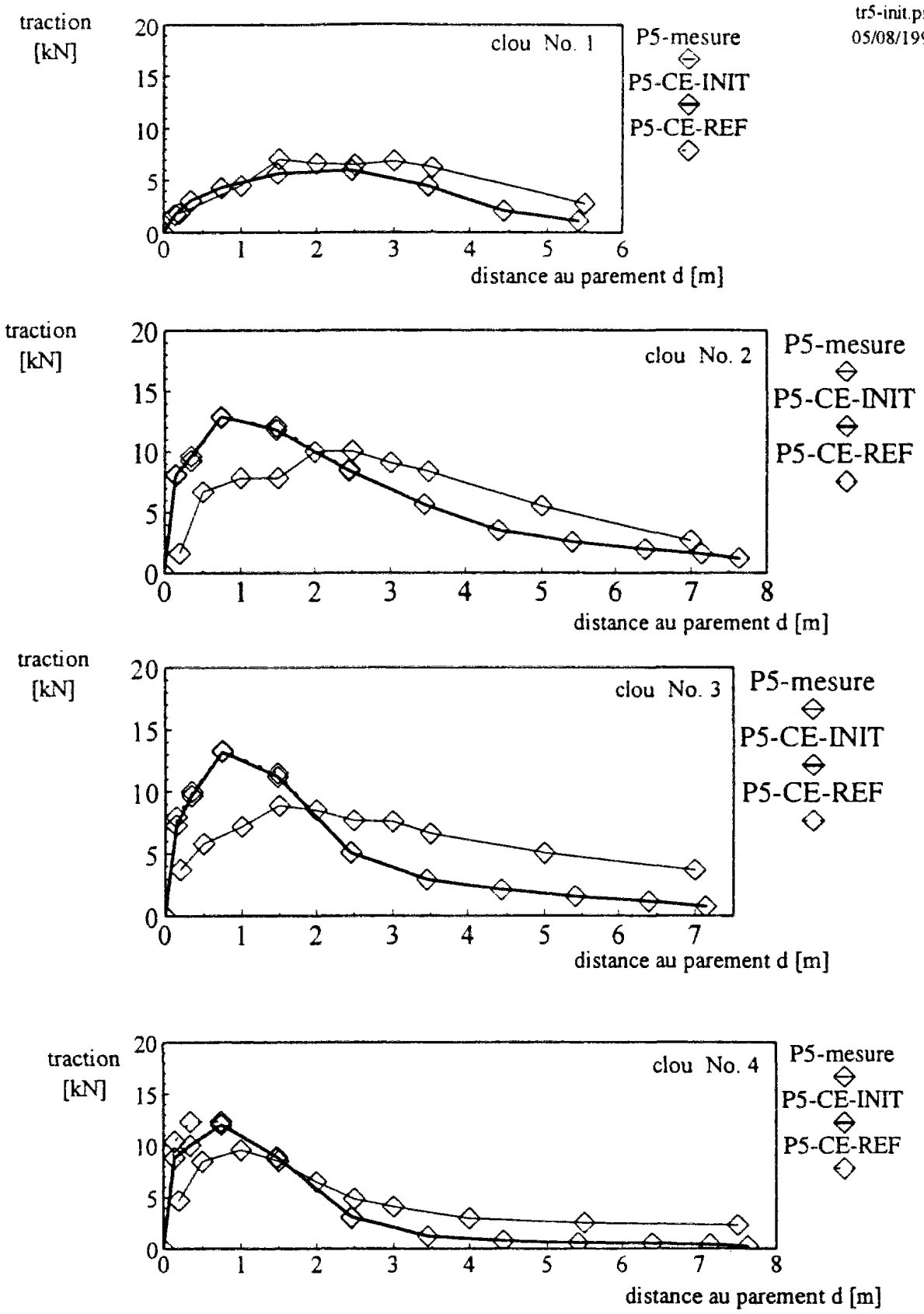


Figure C.6-88 : Distribution des tractions à la fin de la phase 5 (H = 5 m)
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calculs avec deux types d'initialisation des contraintes dans le sol (CESAR)

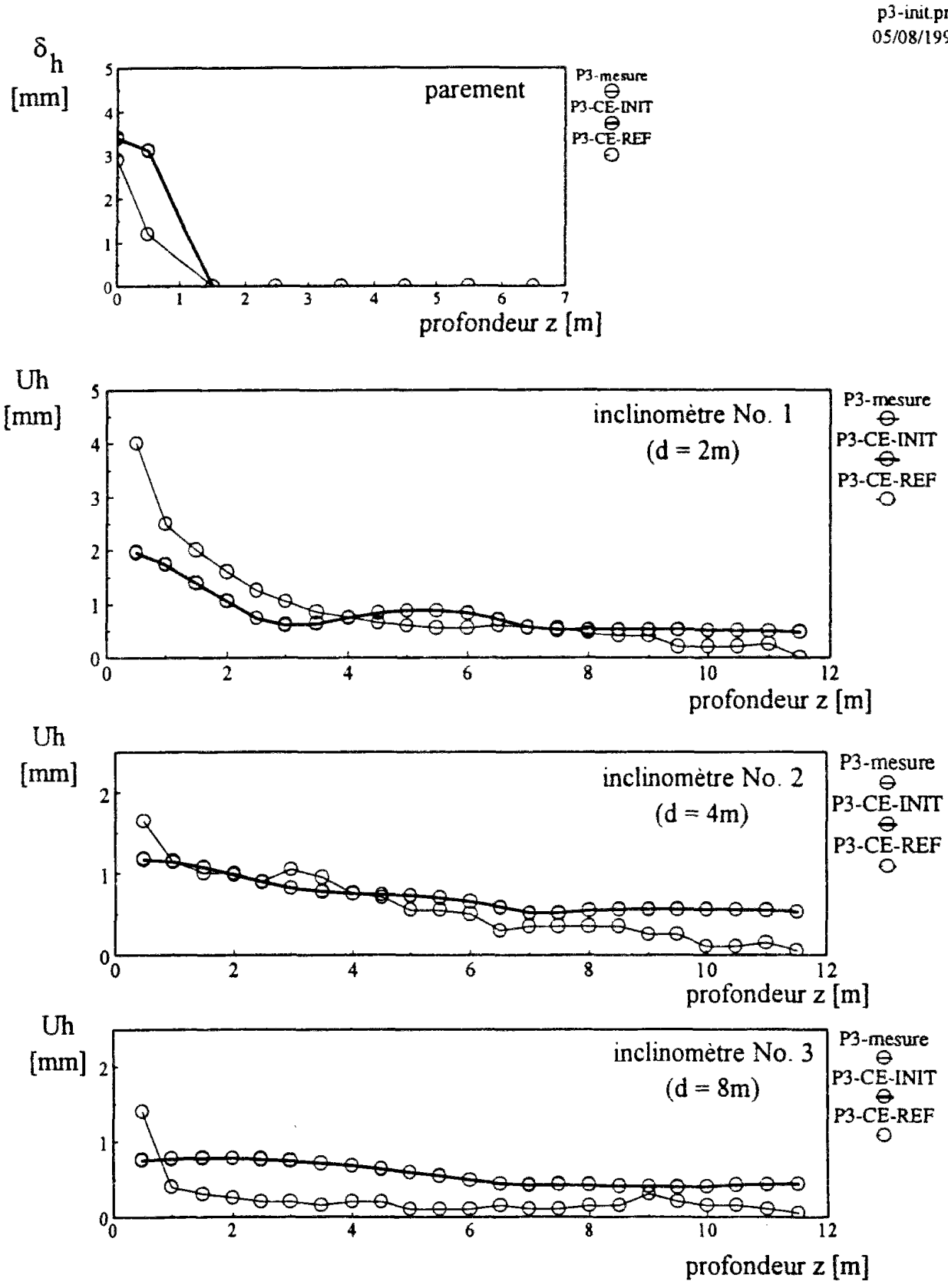


Figure C.6-89 : Déformées du parement et du sol à la fin de la phase 5 (H = 5 m)
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calculs avec deux types d'initialisation des contraintes dans le sol (CESAR)

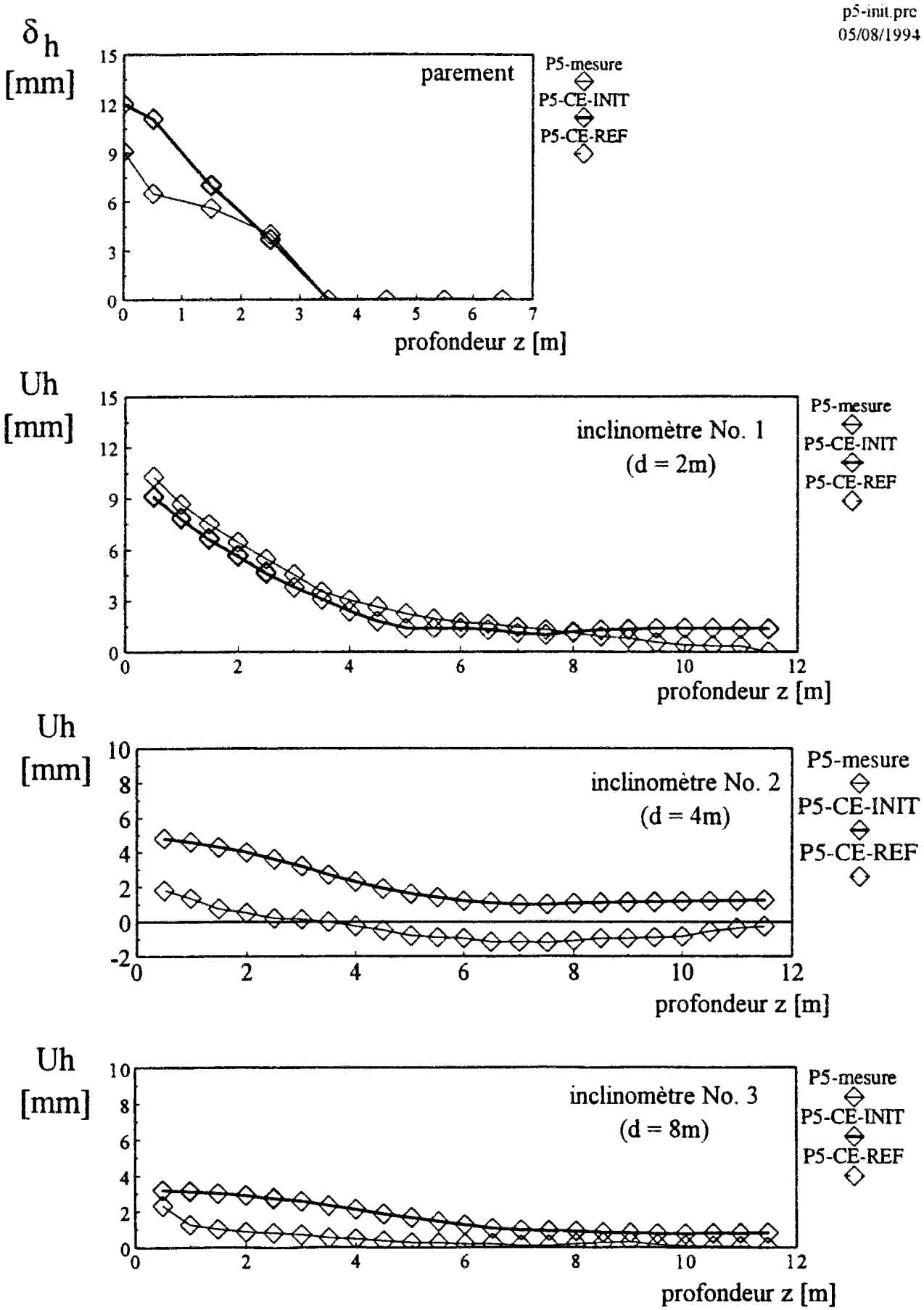


Figure C.6-90 : Déformées du parement et du sol à la fin de la phase 5 (H = 5 m)
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calculs avec deux types d'initialisation des contraintes dans le sol (CESAR)

6.6.1.4 Pré-tension des clous

Il est habituel, sur un chantier, de mettre légèrement en pré-tension les clous lors de leur installation. Le but de cette pré-tension est de coller le parement au sol et de limiter les déplacements. Nous avons modélisé la pré-tension qui a été appliquée à chaque lit de clous, lors de la construction du mur en sol cloué CLOUTERRE-CEBTP No. 1. Cette pré-tension varie de 0,8 à 1,8 kN suivant le lit (tableau C.6-26).

Tableau C.6-26 : Pré-tension dans les clous du mur CLOUTERRE-CEBTP No. 1

Lit de clous	Force de pré-tension initiale [kN]
1	1,1
2	1,3
3	0,8
4	1,1
5	1,8

Dans un calcul par éléments finis, la pré-tension est modélisée de la manière suivante. Quand la phase i-1 est finie, les opérations suivantes sont réalisées pour le phase notée i+1a : (1) le sol est excavé au niveau i, (2) le forage est réalisé, les clous sont installés et scellés sur seulement une partie, de manière à laisser en tête une petite longueur libre de 10 à 20 cm, (3) le béton est mis en place, (4) la force de pré-tension est appliquée en tête des clous et (5) une pression, équivalente à la force de traction en terme d'équilibre, est appliquée autour des clous. Pour la phase i+1b, les opérations suivantes sont alors réalisées : (1) le clou est scellé sur toute sa longueur et (2) le sol est excavé au niveau suivant (figure C.6-91).

L'ordre de grandeur de la pré-tension est d'environ 1 kN alors que les efforts maximaux dans les clous sont de l'ordre de 15 kN. Cette pré-tension est donc faible. Elle n'a d'influence, à la phase 5, que sur la traction dans le lit de clous No. 4, qui n'a pas encore mobilisé complètement sa traction (figure C.6-92). En terme de déplacements, ceux-ci sont légèrement réduits dans le sol. Au niveau du parement, les déplacements relatifs sont augmentés (figures C.6-93 et C.6-94). Par contre, les déplacements absolus sont réduits légèrement, de l'ordre de 5% , à la fin de la phase 5 (tableau C.6-27). Le parement déverse un peu moins dans sa partie la plus haute.

Tableau C.6-27 : Déplacements en tête : calcul avec et sans pré-tension des clous. Mur CLOUTERRE-CEBTP No. 1 (CESAR)

Phase	Sans pré-tension	Avec pré-tension	Différence
1	0,373	0,37	-0%
2	1,639	1,08	-34%
3	5,05	4,10	-17%
4	8,89	8,34	-6%
5	13,67	12,99	-5%
6	13,73	13,05	-5%

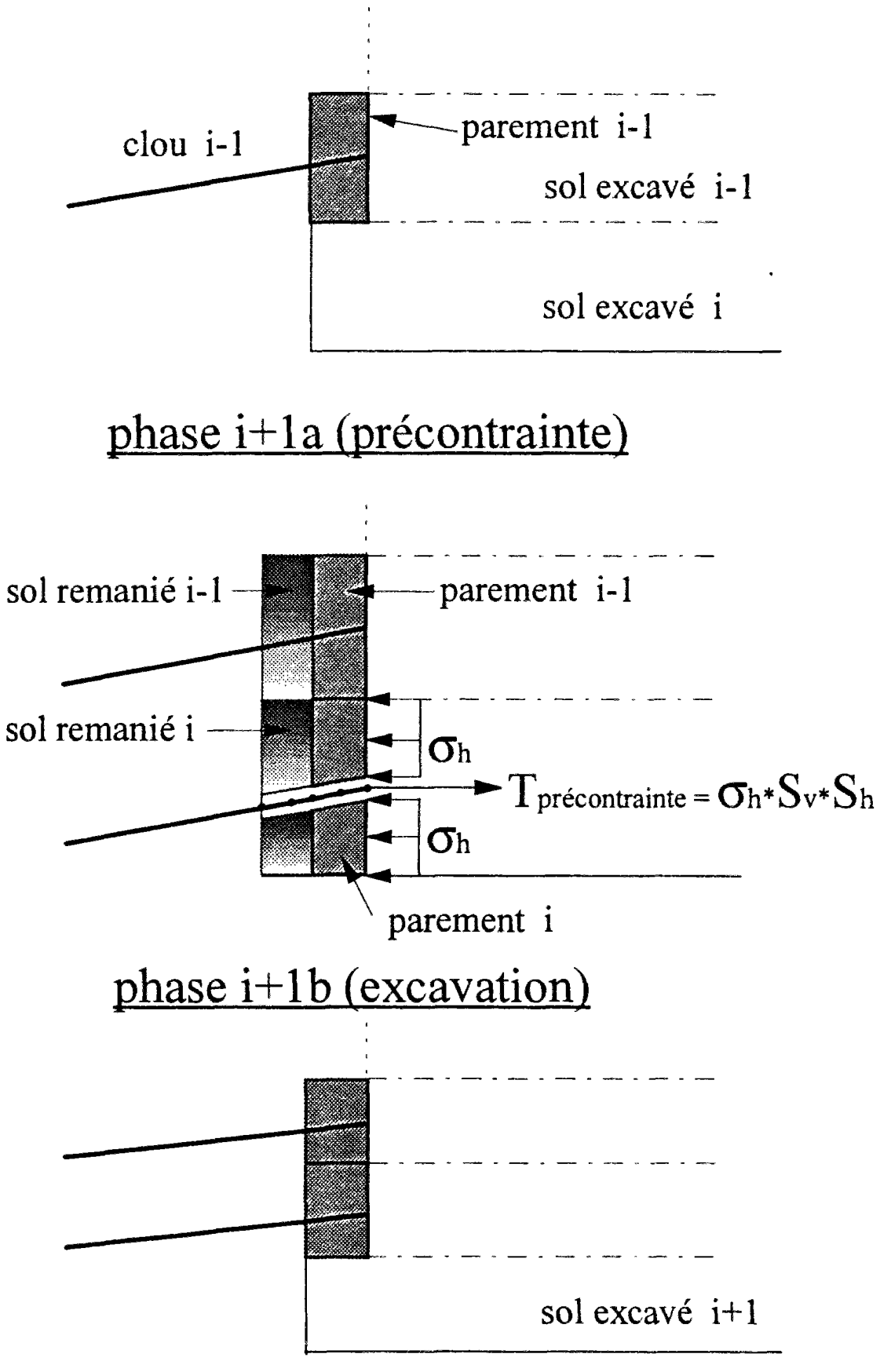


Figure C.6-91 : Modélisation de la pré-tension dans un code d'éléments finis

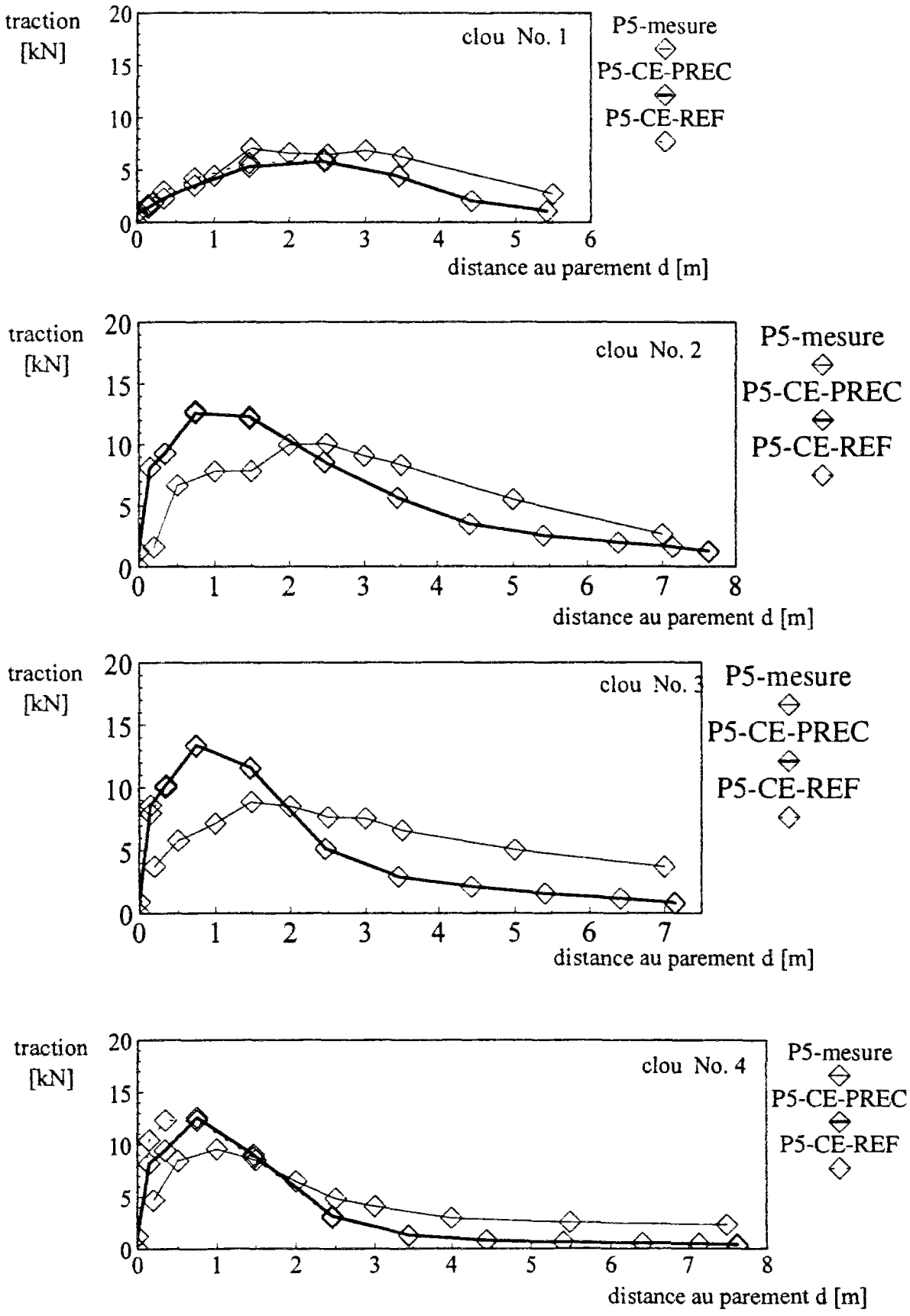


Figure C.6-92 : Distribution des tractions à la fin de la phase 5 (H = 5 m)
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calculs avec et sans pré-tension des clous (CESAR)

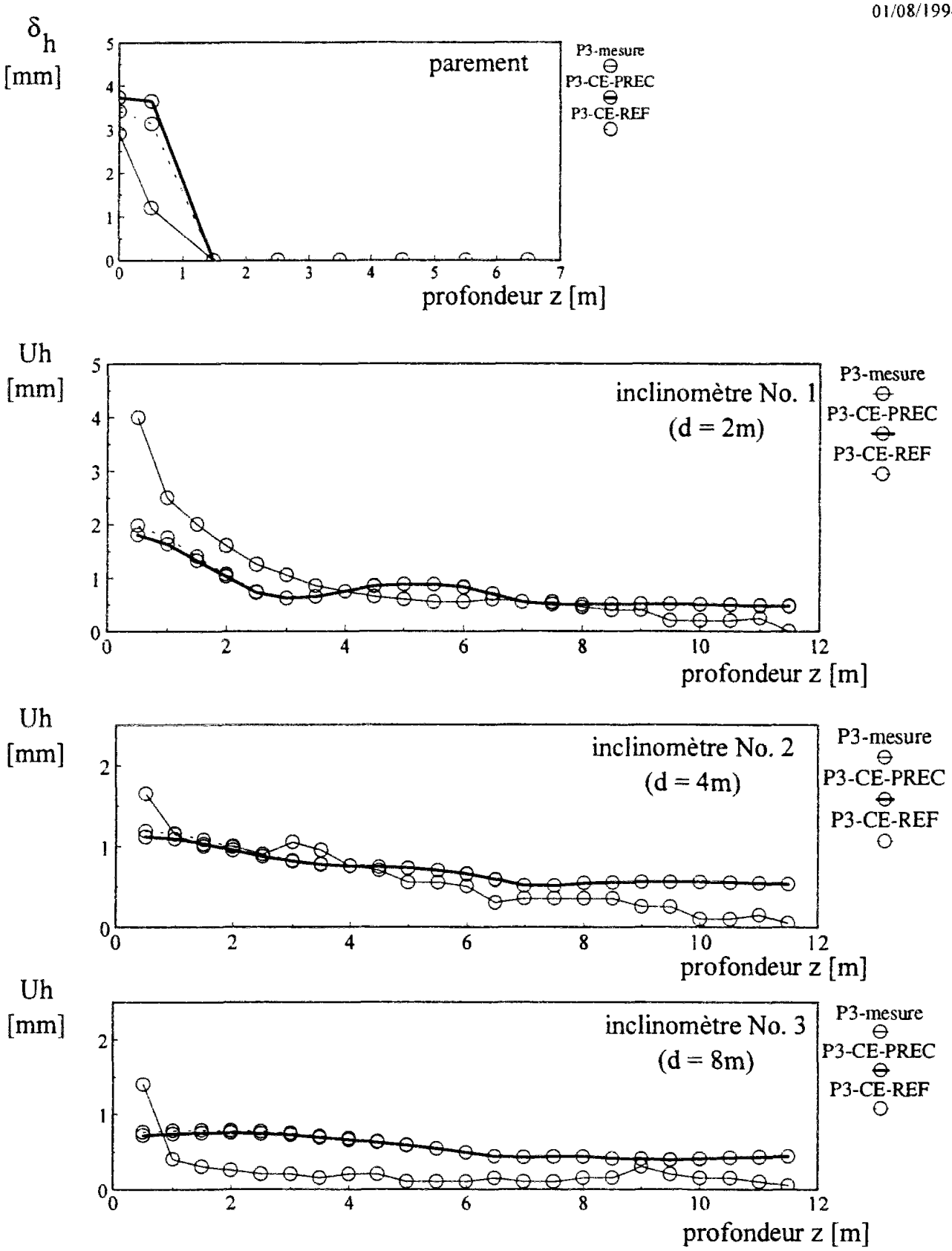


Figure C.6-93 : Déformées du parement et du sol à la fin de la phase 5 (H = 5 m)
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calculs avec et sans pré-tension des clous (CESAR)

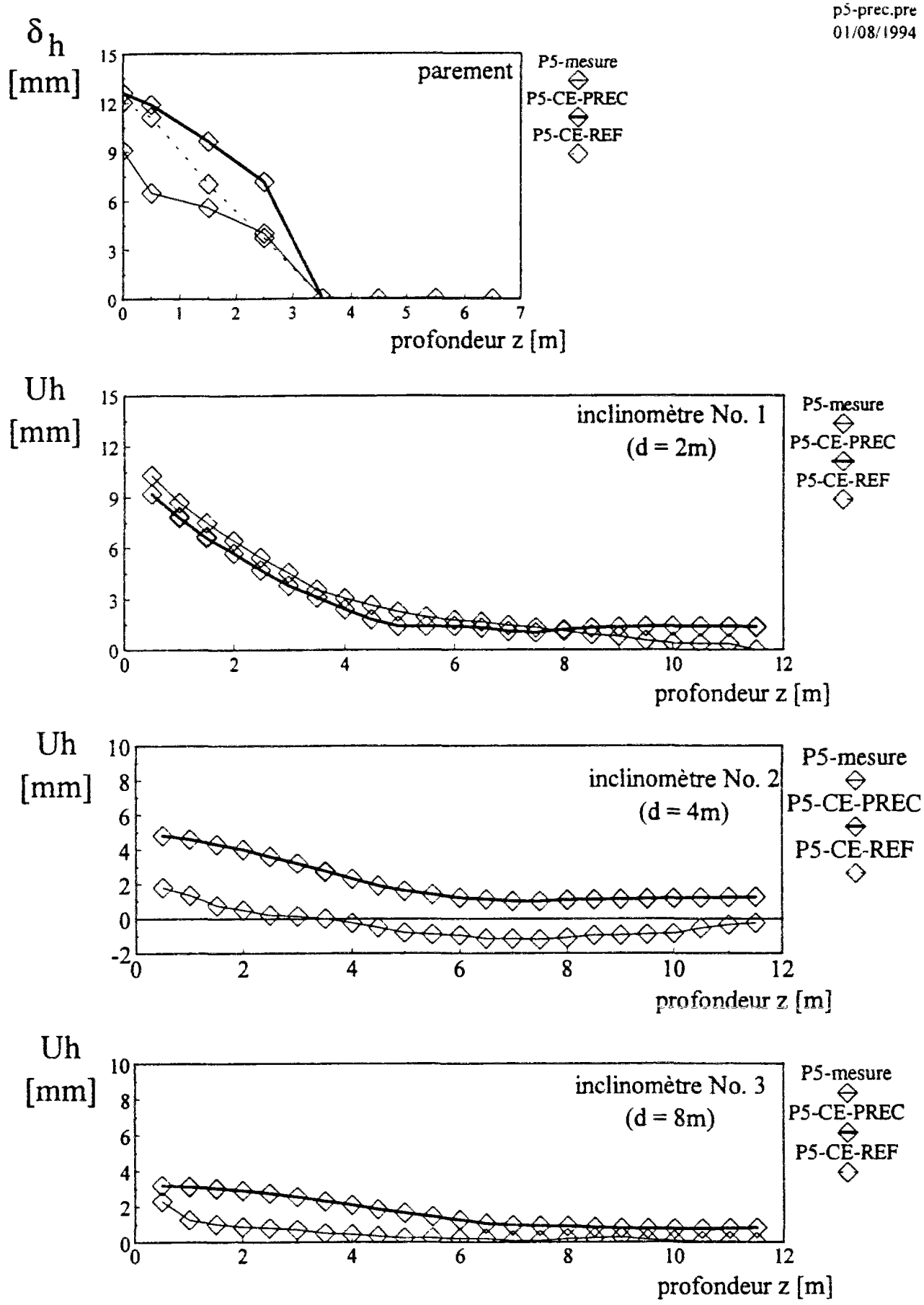


Figure C.6-94 : Déformées du parement et du sol à la fin de la phase 5 (H = 5 m)
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calculs avec et sans pré-tension des clous (CESAR)

6.6.1.5 Paramètres variables avec la profondeur

Un calcul avec des propriétés variables en fonction de la profondeur a été comparé avec le calcul de référence où les propriétés sont supposées constantes sur toute la hauteur du mur. Les tractions à la fin de la phase 5 sont très proches. Elles sont supérieures dans le clou No. 3 d'environ 1 kN alors que dans les autres clous, elles sont constantes (figure C.6-95). Les déplacements aux phases 3 et 5 sont très légèrement réduits près de la surface du sol tandis qu'en profondeur ils sont légèrement augmentés (figure C.6-96).

6.6.1.6 Comparaison des calculs

Les déformées du sol en surface sont rassemblées sur les figures C.6-98a et C.6-98b, pour chacun des calculs.

Le choix d'un module d'Young, 2 fois plus important, a pour effet de réduire très nettement le basculement du mur et le soulèvement en fond de fouille.

Les calculs avec un module de déformation pour le béton 10 fois plus fort ou avec une initialisation des contraintes différents donnent des déformées très proches de celle du calcul de référence et à peine discernables.

La mise en pré-tension des clous a pour effet de réduire légèrement les déplacements du parement en tête mais par contre de les amplifier dans sa partie la plus basse. L'inclinaison des clous de 10° par rapport à l'horizontale y est sans doute pour quelque chose.

Enfin, le calcul avec des paramètres variables avec la profondeur donne une déformée très proche du calcul avec pré-tension, ce qui est assez surprenant.

Tableau C.6-28 : Comparaison des déplacements obtenus pour les différents calculs

Calculs	U_h en tête [mm] à la 5ème phase (H = 5m)	U_v en tête [mm] à la 5ème phase (H = 5m)	Déplacement s_f en fond de fouille (à environ 2m du parement)
référence	13,73	-10,91	9,194
$E_{sol} = 2\ E_{réf} = 4\ E_M$	9,588	-7,155	5,591
$E_{béton} = 10\ E_{réf}$	13,02	-11,00	9,194
initialisation des contraintes	13,65	-10,84	9,196
pré-tension ≈ 1 kN	13,05	-10,26	9,214
modules variable avec z	13,51	-11,59	9,035

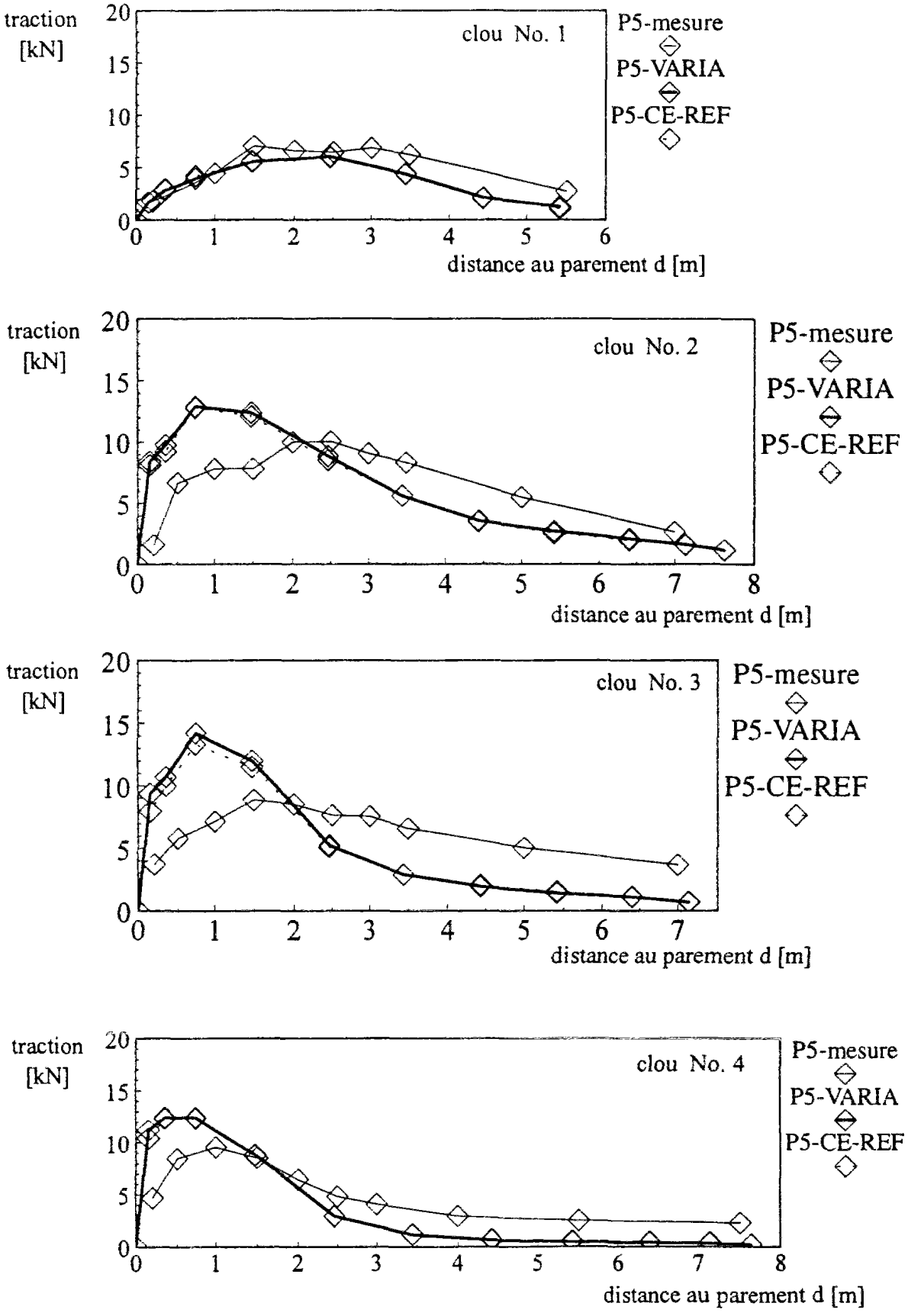


Figure C.6-95 : Distribution des tractions à la fin de la phase 5 (H = 5 m)
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calculs de référence et avec paramètres variables avec la profondeur (CESAR)

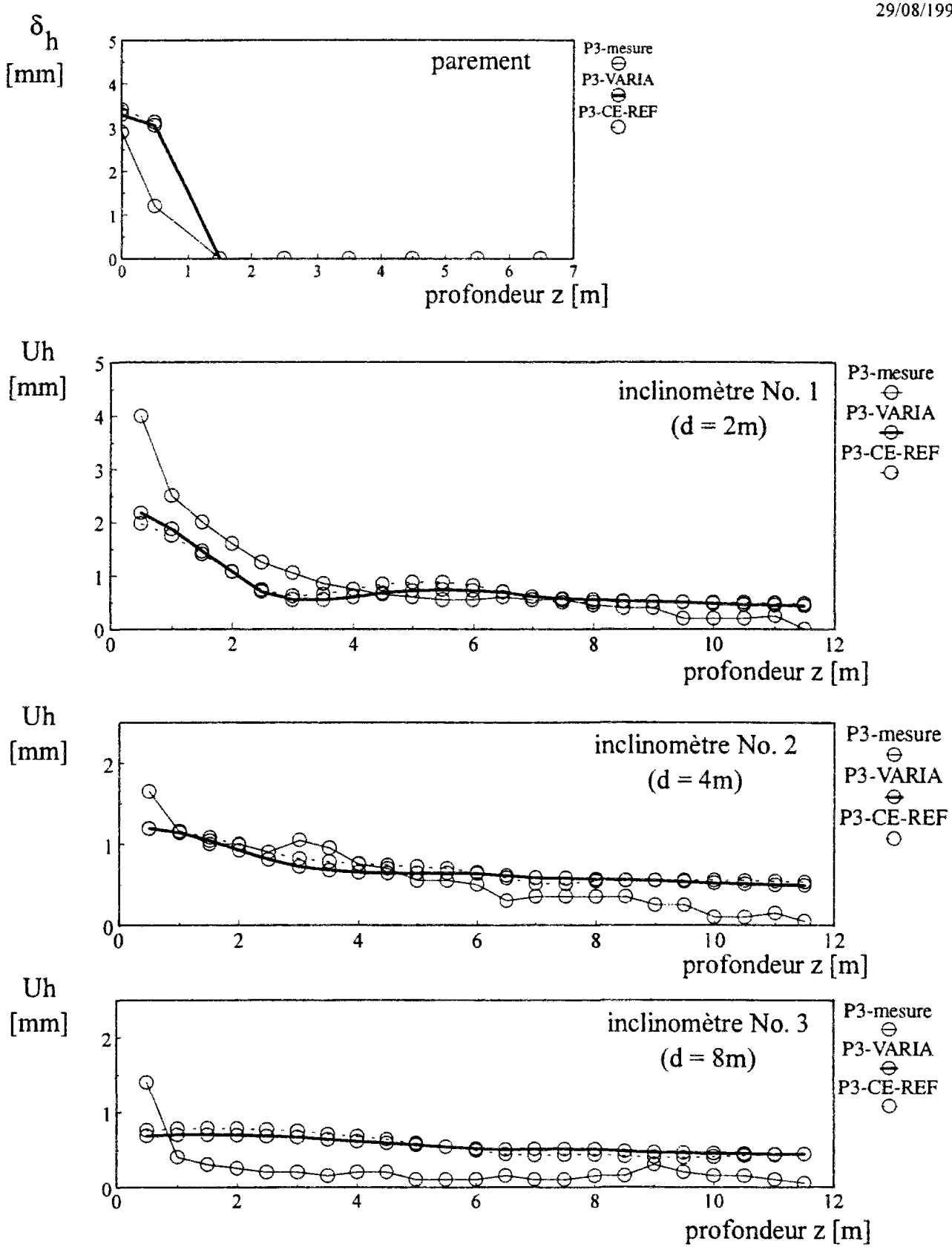


Figure C.6-96 : Déformées du parement et du sol à la fin de la phase 5 (H = 5 m)
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calculs de référence et avec paramètres variables avec la profondeur (CESAR)

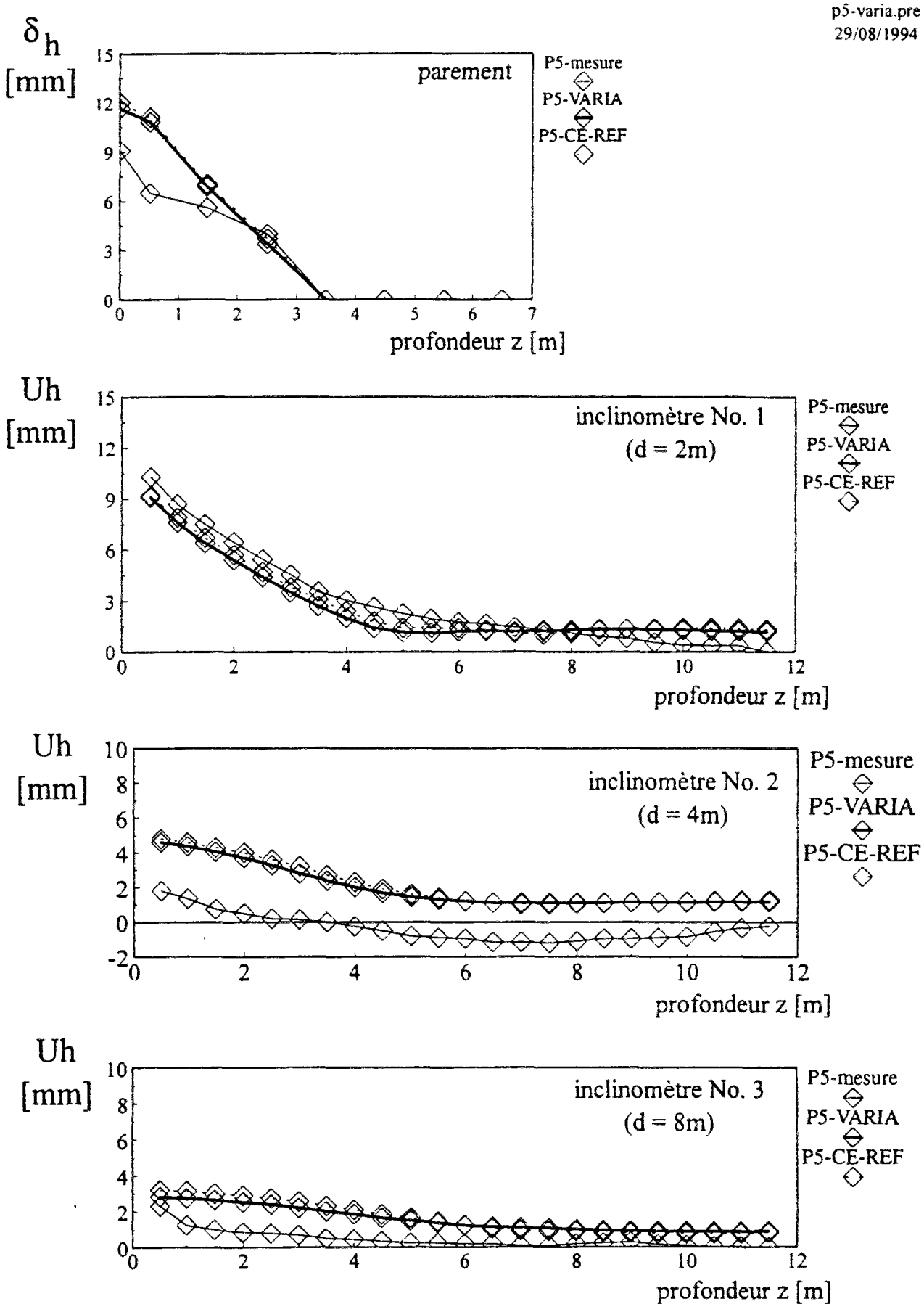


Figure C.6-97 : Déformées du parement et du sol à la fin de la phase 5 (H = 5 m)
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1
Calculs de référence et avec paramètres variables avec la profondeur (CESAR)

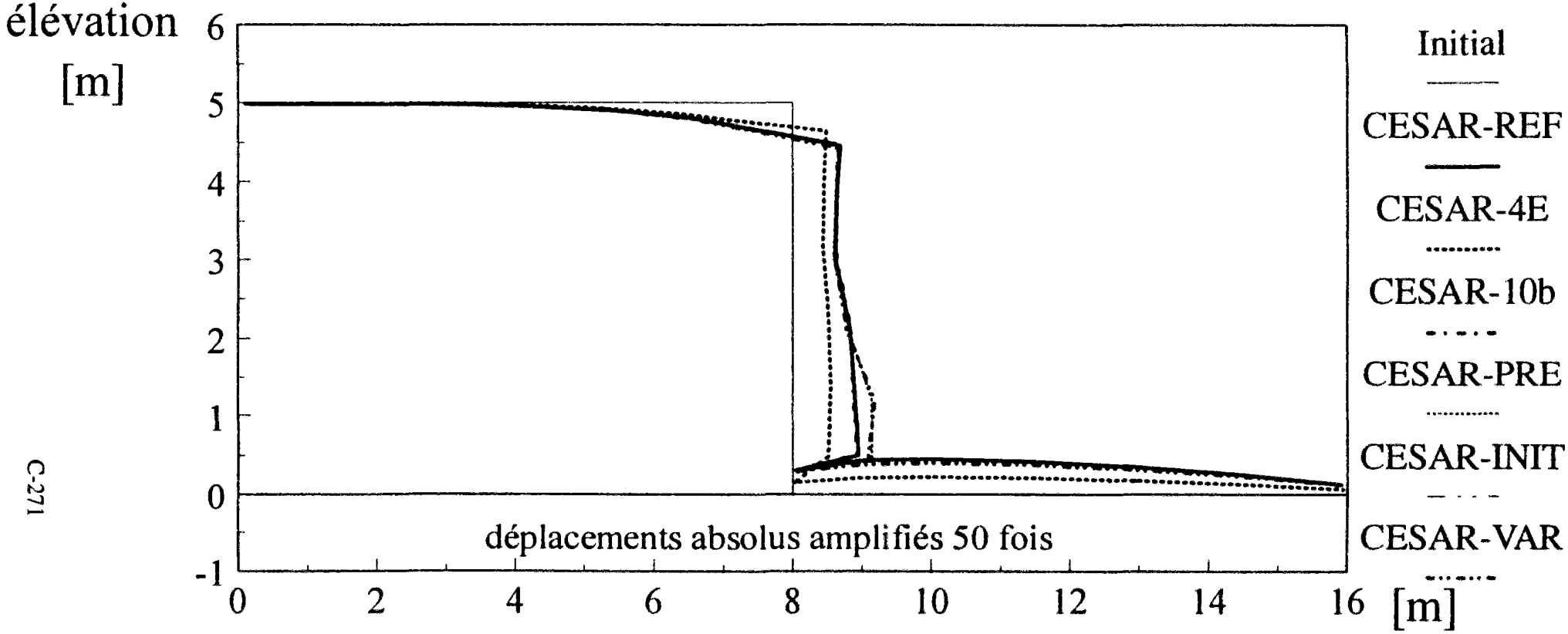


Figure C.6-98a : Comparaison des déformées en surface à la fin de phase 5 (H = 5m)
pour tous les calculs avec CESAR
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1

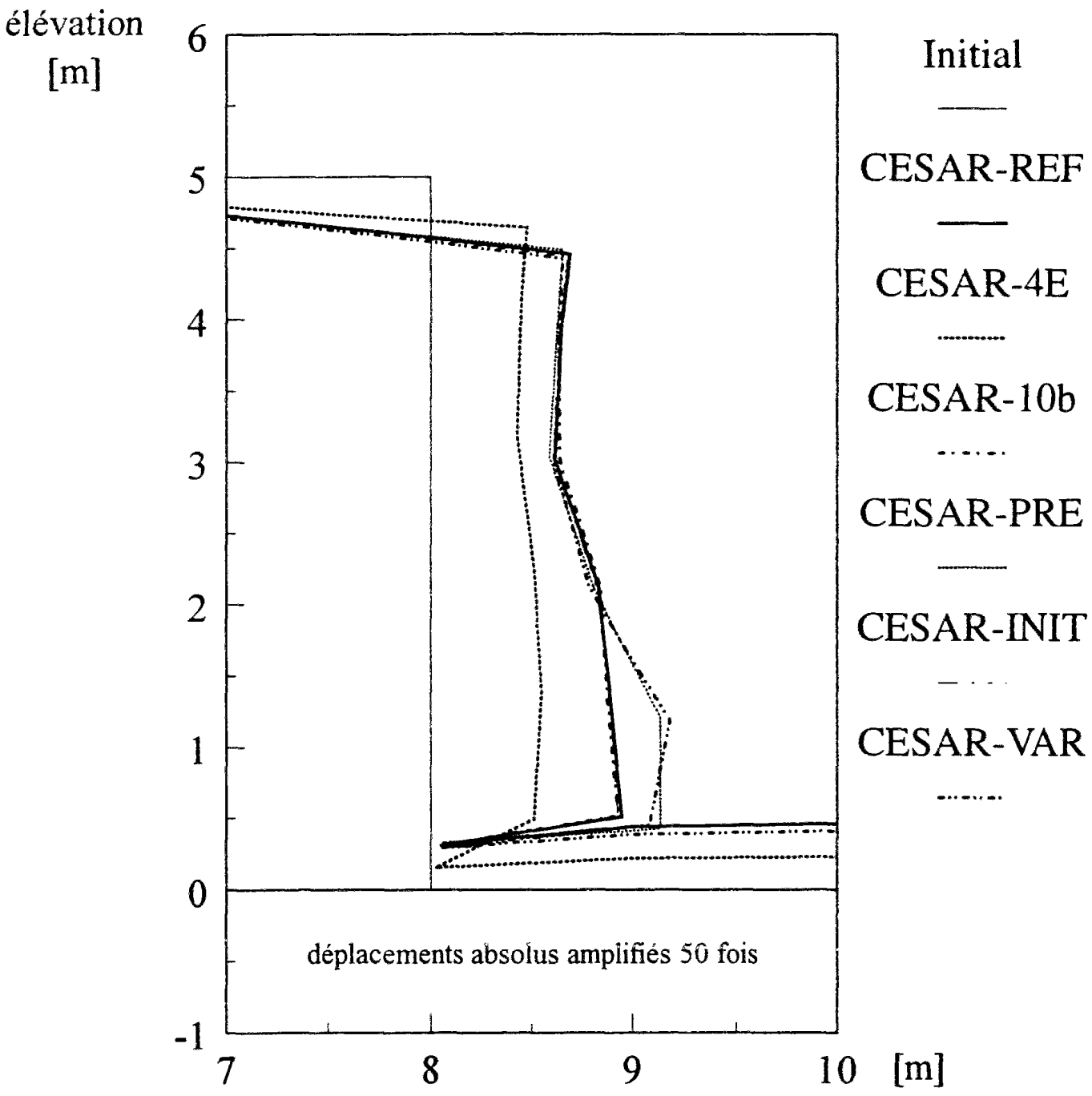


Figure C.6-98b : Comparaison des déformées en surface à la fin de phase 5 (H = 5m)
pour tous les calculs avec CESAR
Mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1

6.7 Conclusion des calculs en déformation

Le mur en sol cloué CLOUTERRE-CEBTP No. 1 est le seul mur, en vraie grandeur, construit dans un sol aux propriétés connues, a avoir été instrumenté et suivi, durant toute sa construction jusqu'à la rupture.

L'analyse des mesures réalisées sur le mur expérimental CLOUTERRE-CEBTP No. 1, durant sa construction, nous a conduit à sélectionner comme base de référence, les cinq premières phases de construction.

Il convient de noter que les données inclinométriques du site avaient été dépouillées en 1986 en faisant l'hypothèse que les déplacements sont nuls en pied de mur. Nous avons repris les données inclinométriques initiales, pour les dépouiller en faisant l'hypothèse que les déplacements sont nuls seulement aux pieds des inclinomètres. Nous avons ainsi obtenu de nouvelles valeurs qui ont servi comme base de référence pour tous les calculs présentés. Pour ce qui concerne les tractions, les données originelles de Plumelle (1986) ont été utilisées.

Les différentes parties de l'ouvrage ont été modélisées en utilisant des lois de comportement de type, soit linéaire élastique (béton du parement et du mur de soutènement en arrière du massif en sol cloué), soit linéaire élastique parfaitement plastique (sol de remblai, sol de fondation, clous, interfaces entre le sol et les clous, interface entre le sol et le béton du mur de soutènement, interfaces entre les clous et le béton du parement).

Pour un comportement élastoplastique, le nombre de paramètres est réduit au minimum indispensable : 2 paramètres pour la partie linéaire élastique (E, module d'Young et ν, coefficient de Poisson) et 3 ou 4 paramètres pour la partie plastique du comportement (c, cohésion, ϕ, angle de frottement interne, σ_t , résistance en traction, si le critère est tronqué et ψ , angle de dilatance). Compte tenu du nombre de type de matériaux, cela donne environ 28 paramètres mécaniques que nous avons déterminé à partir des essais in situ et en laboratoire ainsi que des données disponibles dans la littérature.

Les paramètres ayant été choisis grâce à une analyse détaillée et précise, des calculs en déformations, à l'aide des logiciels d'éléments finis CESAR et PLAXIS et du logiciel de différences finies FLAC, ont été réalisés. Les tractions calculées par ces trois logiciels, à la fin de la phase 5 (H = 5m), sont en assez bon accord avec les mesures, à plus ou moins 3 kN près. Les déplacements calculés au parement sont très légèrement sur-estimés mais restent proches. Dans le sol, à 2 m du parement, les mesures sont parfaitement encadrées par les calculs. Plus loin, en arrière dans le massif de sol cloué, à 4 et 8 m du parement, les déplacements calculés sont légèrement sur-estimés. Dans l'ensemble, les résultats trouvés sont nettement meilleurs que ceux obtenus dans les études antérieures puisque les mesures sont encadrées dans une fourchette dont la largeur est réduite par un coefficient de 2.

Les soulèvements de fond de fouille restent tous dans des valeurs raisonnables, inférieures au centimètre. Les soulèvements excessifs observés dans le passé n'ont pas été rencontrés dans le cas présent.

Il est à noter que, vu la faible hauteur du mur en sol cloué, la prise en compte d'une variation linéaire avec la profondeur des paramètres géotechniques ne modifie pas de manière sensible les résultats obtenus par simulation numérique. Ceci est en faveur de modèles élastoplastiques où le module d'Young ne varie pas avec la profondeur. Dans des ouvrages de plus grande hauteur, ces variations devraient avoir une influence nettement plus grande.

L'étude de sensibilité réalisée a permis de mettre en évidence les paramètres importants vis à vis des déformations du mur en sol cloué durant sa construction. Les modules de déformation du sol, des clous et de l'interaction entre le sol et les clous ont, bien évidemment, une importante influence sur la réponse du mur en sol cloué. Cependant, il ne faut pas négliger les paramètres plastiques, comme l'angle de dilatance, la résistance en traction du sol et la cohésion. En particulier, de faibles variations des ces trois paramètres ont une incidence importante sur les résultats. Par exemple, il n'est pas possible de réduire la résistance en traction du critère de Mohr-Coulomb non tronqué sans induire une rupture en pied de mur. Autre exemple, une augmentation de la cohésion de 1 kPa, a pour effet de réduire les tractions par 20% et les déplacements au parement par un coefficient de 2. Or, il faut remarquer que ces paramètres sont rarement mesurés, si ce n'est jamais.

7 Conclusion de l'étude

Trois exemples, correspondant successivement : (1) aux essais triaxiaux de sol seul et de sol renforcé par disques d'aluminium réalisés par Schlosser et Long (1972), (2) à l'essai d'arrachement du clou préalable No. 5 et (3) au mur exprimental en vraie grandeur CLOUTERRE-CEBTP No. 1 (Plumelle, 1986), ont été modélisés à l'aide de trois logiciels de calcul.

Ces trois exemples ne sont pas des cas d'école théoriques mais correspondent tous à des essais ou des ouvrages, réalisés et instrumentés. Les deux premiers exemples ont été modélisés à l'aide du logiciel d'éléments finis CESAR et du logiciel de différences finies FLAC. Pour le calcul en déformation du mur CLOUTERRE-CEBTP No. 1, nous avons, en outre, utilisé le logiciel d'éléments finis PLAXIS.

Il ressort de cette étude que les résultats obtenus avec les deux méthodes numériques sont très proches. En particulier, sur les exemples où seuls des éléments volumiques sont utilisés, avec adhérence parfaite entre le sol et les renforcements, les résultats sont égaux à moins d'un pour-cent, ce qui correspond aux erreurs numériques inhérentes à ce genre de calcul. Dans les exemples où existent des éléments d'interface, nous avons noté des différences du même ordre de grandeur, en général, sauf dans le cas particulier d'un essai triaxial de sol renforcé par des disques d'aluminium, modélisé avec des interfaces frottantes et une loi d'écoulement associé, où une différence plus importante a été trouvée pour ce qui concerne la contrainte déviatorique limite. Cette différence peut être attribuée à la précision des éléments d'interface, qui sont à 4 noeuds, dans un cas, et à 6 noeuds, dans l'autre cas. En effet, cet exemple précis est très contraignant. Les interfaces étant associées, une très forte dilatance se développe le long des disques. Cependant, comme elle est partiellement empêchée par les disques de renforcement, de forts gradients de contraintes et déformations se développent au sein de l'échantillon. Dans un tel cas extrême avec de forts gradients, des différences apparaissent entre les éléments à 6 noeuds, les plus précis, et les éléments à 4 noeuds, les moins précis.

Les résultats des calculs en déformation réalisés sur le mur en sol cloué CLOUTERRE-CEBTP No. 1 ont été comparés aux mesures réalisées sur le site de Saint-Rémy-Lès-Chevreuse, durant les cinq premières phases de construction, qui se sont déroulées en continu, sur quelques semaines.

Dans l'ensemble, et compte tenu des incertitudes sur les paramètres mécaniques des matériaux utilisés, les trois logiciels utilisés donnent de bons résultats. En particulier, il faut noter une assez bonne concordance entre les simulations et les mesures, aussi bien pour les efforts dans les clous que les déplacements du parement et dans le sol, ce qui constitue un résultat nouveau et intéressant par rapport aux études antérieures. La qualité des résultats obtenus est due à trois facteurs : une formulation claire et précise de l'équivalence entre les lits de clous réels et les renforcements modèles (cf. paragraphe 3, partie C), un choix de paramètres correspondant exactement aux conditions du site, grâce à une analyse précise des données (cf. paragraphe 6.3, partie C) ainsi qu'un schéma élastoplastique de convergence et une modélisation des excavations plus performants (cf. paragraphe 3, partie C).

Dans le paragraphe 3, nous avons analysé en détail les conditions de déformations planes au sein d'un mur en sol cloué afin de clairement formuler l'équivalence, d'un point de vue mécanique, entre les lits de clous réels et les renforcements modèles. En particulier, il convient de faire attention à la section du mur en sol cloué qui est analysée car les deux choix possibles conduisent à deux types de modélisation : le modèle de la plaque équivalente associée à des interfaces et le modèle des clous placés hors du sol et interagissants avec celui-ci par l'intermédiaire de fonctions de transfert de charge.

Le modèle de la plaque équivalente pose des problèmes de cohérence au niveau des hypothèses. De plus, le calcul des propriétés équivalentes varie suivant les auteurs. Nous avons mis en évidence que les différences importantes trouvées par Chaoui (1992), entre le calcul 3D de l'arrachement d'un clou cylindrique et le calcul 2D de l'arrachement de la plaque équivalente, sont dues principalement au choix du même coefficient de mobilisation du cisaillement dans les interfaces. Il en résulte que l'interaction entre le sol et la plaque est 10 fois plus rigide que l'interaction entre le clou cylindrique et le sol, ce qui conduit à obtenir des courbes d'arrachement très différentes.

Le modèle des clous placés hors du sol et interagissants avec le sol par l'intermédiaire de fonctions de transfert de charge n'est pas nouveau (Naylor, 1978), même s'il en existe plusieurs versions. Il est nécessaire, dans ce cas là aussi, de formuler rigoureusement l'équivalence entre les propriétés des matériaux réels et celles des matériaux modèles. Nous avons regardé en détail ce dernier point et avons démontré que la méthode de la plaque équivalente peut, dans un certain cas particulier, conduire aux mêmes résultats que la méthode des "clous placés hors du sol" interagissant avec celui-ci par l'intermédiaire de fonctions de transfert de charge.

Un deuxième point important concerne la détermination des paramètres. Nous avons fait le choix de ne prendre que des lois de comportement relativement simples, de type élastique linéaire ou élastique parfaitement plastique. Malgré ce choix, nous avons obtenu des résultats en bon accord avec les mesures, grâce à une analyse précise des données disponibles sur le sol, les clous et l'interaction entre le sol et les clous. En particulier, dans les études antérieures, les paramètres mécaniques caractérisant l'interaction entre le sol et les clous n'avait fait l'objet d'aucune analyse approfondie.

Le troisième point important concerne l'amélioration des codes de calculs depuis que les études de Shafiee (1986), Nanda (1988, 1989) et Ouelogo (1989) ont été réalisées. Comme source importantes d'amélioration il convient de mentionner les schémas élastoplastiques de convergence numérique qui sont beaucoup plus performants et les méthodes de calcul des forces appliquées sur les bords d'une excavation. Les problèmes de soulèvement systématique en tête du parement, de soulèvement excessif en fond de fouille, de mauvaise redistribution des contraintes autour de l'excavation, ont tous été résolus de manière satisfaisante dans les codes de calcul actuels.

Les méthodes de détermination des paramètres des matériaux constitutifs d'un mur en sol cloué ayant clairement été définies et formalisées, l'équivalence entre les propriétés des lits de clous réels et celles des renforcements modèles ayant été rigoureusement formulée, les trois logiciels de calcul ayant été testés et validés sur un ouvrage en vraie grandeur complètement instrumenté, il ne reste plus qu'à étudier d'autres ouvrages pour confirmer les résultats de cette étude.

Les deux dernières phases de construction du mur CLOUTERRE-CEBTP No. 1 pourraient être simulés, mais il faudra faire attention aux effets du fluage entre la fin de la phase 5 et le début de la phase 6.

Deux autres murs en sol cloué, en vraie grandeur, ont été également instrumentés et suivis durant le Projet National CLOUTERRE. Ce sont les murs CLOUTERRE-CEBTP No. 2 et 3. Ils ont fait, eux aussi, l'objet de nombreuses mesures, durant la construction et jusqu'à la rupture. Ils sont tous deux très différents du mur No. 1 de par leur conception. Ces différences seraient intéressantes à mettre en évidence au niveau d'un calcul en déformation.

Enfin, pour les codes de calculs comme FLAC ou PLAXIS qui sont formulés en grandes déformations, il est possible de modéliser le comportement du mur en construction, aux états de service mais aussi jusqu'à la rupture. La modélisation en déformation de la mise en rupture de chacun de ces murs, suivant un mode de rupture différent, est très importante car elle permettrait de faire un lien avec les méthodes de calcul à la rupture.

Conclusion générale

La modélisation d'un ouvrage en sol cloué dans le but de calculer ses déformations et déplacements, durant sa construction et sa mise en service, ne peut pas être faite globalement sans ignorer les mécanisme mis en jeu aux différents niveaux de la structure. Nous avons ainsi étudié et modélisé l'interaction entre le sol et les clous au niveau de la microstructure des grains, dans la partie A, au niveau d'un lit de clous, dans la partie B, et au niveau de l'ouvrage entier, dans la partie C.

Dans la partie A, nous avons mis en évidence le rôle important jouer par la microstructure des sols granulaires dans le phénomène de formation des couches d'interface au contact avec les clous. Plusieurs phénomènes sont observés classiquement dans les couches d'interface au contact avec des éléments de structure tels que les clous, notamment : la localisation du déplacement tangentiel, des rotations des grains prépondérantes par rapport aux translations, une forte dilatance locale, une cassure des grains très importante et un fort radoucissement. Tous ces phénomènes peuvent être expliqués et modélisés dans le cadre des milieux continus avec microstructure d'ordre un rigide, c'est à dire les milieux continus de Cosserat.

En termes de phénomènes observables, le rôle de la microstructure n'est visible que sur les deux à trois premières rangées de grains où les rotations sont prépondérantes par rapport aux translations des grains. Cependant, la microstructure joue un rôle essentiel dans toute l'épaisseur de la couche d'interface, par l'intermédiaire des couples contraintes qui peuvent être aussi importants que les contraintes classiques symétriques. Les contraintes antisymétriques n'existent de manière significative que sur les deux à trois premières rangées de grains.

Nous avons montré que l'énergie plastique correspondant aux termes classiques peut être négative dans certains cas. Cependant, les termes correspondant à la microstructure la compensent largement, ce qui permet d'avoir une énergie plastique totale toujours positive, conformément au second principe de la thermodynamique. L'énergie plastique totale dissipée dans une couche d'interface est plus grande que celle dissipée dans un essai de cisaillement classique de plusieurs ordres de grandeur. La rotation des grains est donc un phénomène fortement dissipatif qui induit une cassure des grains très importante dans les couches d'interface.

Le formalisme des milieux continus de Cosserat nous a permis de mettre en évidence, pour la première fois, le lien qui existe entre les bandes de cisaillement et les couches d'interface. En particulier, nous avons trouvé une épaisseur maximale de couche d'interface pour le cisaillement simple plan qui est quasiment égale à l'épaisseur de la demi-bande de cisaillement obtenue dans un essai biaxial.

Le formalisme de la localisation des déformations dans les couches d'interface étant posé et la loi de comportement du sol ayant été développée à partir d'une approche micromécanique pour les termes élastiques et plastiques ainsi que d'une approche physique dans le cadre de la théorie des mélanges pour la loi d'écrouissage, il conviendrait de calibrer le modèle par rapport à des essais de cisaillement d'interface mais aussi des essais biaxiaux.

Parmi les applications possibles, il convient de mentionner les effets d'échelle d'inclusions de petites tailles dans des sables fins, la formation de bandes de cisaillement et de couches d'interface autour des structures telles que les fondations superficielles ou profondes, etc.

L'étape suivante consiste à intégrer le comportement du sol dans toute la couche d'interface de façon à obtenir la loi de comportement macroscopique pour cette couche. Un des points importants, par exemple, est la définition de la rigidité de la couche d'interface qui conditionne très largement les déplacements relatifs entre le sol et un clou.

Dans la partie B, nous nous sommes intéressés à l'interaction entre le sol et les clous, à un niveau supérieur par rapport à la partie A. L'interaction entre le sol et un lit de clous a été modélisée par l'intermédiaire de fonctions de transfert de charge.

Nous avons été amenés à développer un nouveau modèle de fonction de transfert de charge afin de modéliser les phénomènes de fluage et de relaxation dans l'interaction entre un clou et un sol gelé. Ce modèle repose sur l'intégration explicite de la loi de comportement du sol gelé et de l'interface entre le clou et le sol gelé pour aboutir à la fonction de transfert de charge.

Une modélisation de l'influence du gel sur un lit de clous ou de tirants soumis au gel est développée en prenant en compte les aspects thermiques, hydrauliques et mécaniques. Malgré la relative simplicité de l'approche, les calculs donnent des résultats en bon accord avec les mesures.

Des solutions analytiques sont développées et permettent de mettre en évidence la différence de comportement entre un clou et un tirant. Grâce à la meilleure compréhension acquise sur les phénomènes d'interaction entre le sol et les clous, une nouvelle disposition constructive, simple et économique, a pu être proposée.

Dans la partie C, nous nous sommes intéressés au comportement en déformation des ouvrages de soutènement en sol cloué. La modélisation des déformations, à ce niveau de l'ouvrage, ne peut pas se faire sans un analyse précise de l'interaction entre le sol et les clous aux niveaux inférieurs. En particulier, pour qu'un calcul en déformations planes, dit calcul 2D, puisse être fait, il convient de définir clairement la section du mur qui est considérée, les hypothèses de continuité requises ainsi que les relations d'équivalence entre les propriétés des éléments modèles et celles de matériaux réels. Sur ce point, l'état des connaissance réalisé nous a permis de clarifier les différences entre les approches proposées.

Une analyse précise de l'essai d'arrachement du clou préalable No. 5, réalisé pour le mur CLOUTERRE-CEBTP No. 1, nous a permis de comparer les différentes corrélations existantes, entre le coefficient de mobilisation du frottement latéral unitaire et le module pressiométrique, avec la valeur exacte, calculée par une solution analytique ainsi que par éléments finis et différences finies. Les autres paramètres mécaniques ont également fait l'objet d'une analyse précise afin de déterminer leurs valeurs de calcul.

Les calculs réalisés à l'aide de plusieurs logiciels de calculs ont donné des résultats en assez bon accord avec les mesures et en progrès par rapport aux études antérieures. Le progrès le plus significatif a été réalisé sur les déplacements, qui sont calculés dans une fourchettes de - 3 mm à + 3 mm par rapport aux mesures faites aussi bien sur le parement que dans le sol, jusqu'à 8 m en arrière du parement. Le choix d'un module d'Young du sol égal à 2 et 4 fois le module pressiométrique permet d'encadrer exactement les déplacements en tête du parement.

L'étude de sensibilité conduite nous a permis d'évaluer très précisément l'influence des paramètres de déformations élastiques : module du sol, module des clous et coefficient de mobilisation du frottement latéral, et de déformations plastiques : angle de dilatance du sol. Cependant, il faut noter l'influence très importantes des paramètres de rupture comme la cohésion et la résistance en traction du sol. Les déplacements et les tractions sont très sensibles à des variations faibles, de l'ordre de 1 kN, de ces paramètres. Or, ceux-ci sont très difficilement mesurables.

Chacune des parties de cette thèse traite de l'interaction entre le sol et les clous, à un niveau différent. Le passage d'un niveau à l'autre se fait par intégration. Il doit reposer sur des hypothèses claires et une analyse mécaniques rigoureuse, si l'on veut pouvoir ensuite réaliser des calculs en déformation.

Le passage du niveau de la microstructure au niveau macroscopique de la couche d'interface se fait en résolvant le problème aux limites du cisaillement simple, comme cela a été fait dans la partie A.

L'intégration du comportement rhéologique macroscopique d'une interface et du sol pour obtenir la fonction de transfert de charge entre le sol et l'inclusion a été faite dans la partie B, dans le cas d'un sol gelé.

Le passage entre la configuration tridimensionnelle d'un mur en sol cloué et le modèle en déformations planes se fait par équivalence vis à vis de critères mécaniques, ce qui a été fait dans la partie C, pour des clous sub-horizontaux travaillant essentiellement en traction.

Les calculs en déformation restent encore un domaine où des progrès devraient être réalisés dans un futur proche. Si le développement des moyens informatiques est une composante essentielle, il ne faut pas pour autant négliger les hypothèses mécaniques sous-jacentes à la résolution numérique d'un problème aux limites ainsi que le choix des paramètres géotechniques à prendre en compte dans les calculs. Ces deux derniers aspects ne peuvent pas être découplés et doivent être développés en parallèle.

Bibliographie

Abriak, N. E. et Gourves, R. (1992). Ecoulement d'un matériau granulaire à travers un orifice : effet de paroi. *Revue Française de Géotechnique*, Vol. 6, No. 1.

Acar, Y. B., Durgunoglu, H. T. et Tumay, M. T. (1982). Interface properties of sand. *ASCE Journal of Geotechnical Engineering*, Vol. 108, GT4.

Acker, P. (1986). Effets thermiques dans les bétons en cours de fabrication et applications aux Ouvrages d'Art. *Annales de l'I.T.B.T.P.* N° 442, Février.

Adomeit, G. (1967). Determination of elastic constants of a structured material. *Mechanics of Generalized Continua,* (Kröner éditeur), IUTAM Symposium, Freudenstadt, Stuttgart, Springer, Berlin.

Aguirre-Puente, J. et Fremond, M. (1976). Frost Propagation in Wet Porous Media. *Lectures Notes in Mathematics, 503. Applications of Methods of Functional Analysis to Problems in Mechanics*, p. 137-147, Springer-Verlag.

Aguirre-Puente, J., Dupas, A., et Philippe, A. (1973). Communications Françaises au Symp. OCDE sur l'action du gel sur les chaussées, Oslo, Octobre 1973. *Bull. Liaison des Labo. des Ponts et Chaussées*, N°68.

Aguirre-Puente, J., Fremond, M., et Menot, J. M. (1977). Coupled Stefan Problem with Variable Permeability et Water Flow in Frozen Zone. *C. R. Symp. Int. sur Frost Action in Soils*, Lulea.

Ai, M. (1985). On mechanics of two-dimensional rigid assemblies. *Soils et Foundations*, Vol. 25, No 4.

Aifantis, E. C. (1978). A proposal for continuum with microstructure. *Mech. Res Com.*, Vol. 5.

Aifantis, E. C. (1984). Application of mixture theory to fluid saturated et other geological media, dans *Compressibility phenomena in subsidence*, Saxena éditeur, New York.

Aifantis, E. C. (1984). Microscopie processes et macroscopic response, dans *Mechanics of engineering materials*, éditeurs : Desai et Gallagher, Chichester, John Wiley.

Aifantis, E. C. (1984). On the microstructural origin of certain inelastic modes *J. Eng. Mat. Tech.*, Vol. 106.

Al-Hussaini, M. M. et Johnson, L. D. (1978). Numerical analysis of a reinforced earth wall. *C. R. Symp. Int. sur Earth reinforcement*, Pittsburgh, Pennsylvania, pp. 98-126.

Al-Nouri, Ilham (1969). Time-dependant Strength Behaviour of two Soil Types at Lowered Temperatures. *PhD Thesis*, Michigan State University, East Lansing.

Aldrich, H. P., et Paynter, H. M .(1972). Derivation of a rational formula for the prediction of frost penetration. *H.R.B. Bulletin,* N° 135, pp. 145-149.

Anagnosti, P. (1982). Les propriétés de déformation et de résistance des matériaux à gros grains. *Revue Française de Géotechnique*, Vol. 18.

Andersland, O. B., et Al-Nouri, I. (1970). Time dependent strength behavior of frozen soils; *ASCE J. of Soil Mech. et Found. Div.*, SM4, pp. 1249-1265.

Andersland, O. B., et Anderson, D. M. (1978). *Geotechnical Engineering for cold regions*, Mc Graw-Hill, New-York, 1978.

Arenicz, R. M. (1990). Transition from maximum tension line to actual failure surface in reinforced soil model walls. *Geotechnical Testing Journal*, Vol. 13, No. 2, pp. 83-87.

Askar, A. (1972). Molecular crystals et the polar theories of the continua. Experimental values of the material coefficient for KNO_3, *Int. J. Engng. Sci.*, Vol. 10.

Bacot, J. (1981). Contribution à l'étude du frottement entre une inclusion souple et un milieu pulvérulent : cas de la Terre Armée. *Thèse de Doctorat*, INSA Lyon.

Baguelin, F., et Frank, R. (1983). Theoretical t-z curves, discussion; *ASCE J. of Geotech. Eng.*, Vol. 109, N°. 10, Oct.

Bardet J. P. (1992). Shear-band analysis in idealized granular material, *ASCE J. Eng. Mech.*, No. 118.

Bardet, J. P. et Proubet, J. (1991). A numerical investigation of the structure of persistent shear bands in granular media. *Géotechnique*, Vol. 41, No. 4.

Bathe, K. J. (1982). *Finite element procedures in engineering analysis*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

Bathurst, R. J., et Rothenburg, L. (1990). Observations on stress-force relationships in idealized granular materials. *Mech. of Materials*, Vol. 9.

Batoz, J. L. et Dhatt, G. (1990). *Modélisation des structures par éléments finis*, Vol. 2 : Poutres et plaques. Hermès, Paris.

Bazant, P. B. et Chang, T. P. (1987). Non local finite element analysis of strain softening solids, *J. Eng. Mech., ASCE*, Vol. 113.

Bazant, P. B. et Lin. F. B. (1988). Nonlocal yield limit degradation, *Int. J. Numer. Methods Eng.*,Vol. 26.

Bazant, Z. P. et Pijaudier-Cabot, G. (1988). Nonlocal continnum damage, localization instatility et convergence. *J. Appl. Mech.*, Vol. 55.

Bazant, Z. P., Belytschko, T. B. et Chang, T. P. (1984). Continuum theory for strain softening. *ASCE J. Eng. Mech.*, Vol. 110.

Berggren, W. S. (1943). Prediction of Temperature Distribution in Frozen Soils, *Trans. Americ. Geophys. Union*, 3, pp. 71-77.

Besdo, D. (1974). Ein Beitrag zur nichtlinearen Theorie des Cosserat-Kontinuums. *Acta Mechanica*, Vol. 20.

Bicanis, N. P. (1989). Exact evaluation of contact stress state in computational elasto-plasticity. *Eng. Comput. J.*, Vol. 6.

Billaux, D. et Cundall, P. (1993). Simulation des géomatériaux par la méthode des éléments Lagrangiens. *Revue Française de Géotechnique*, n° 63, pp. 9-21.

Bishop, A. W., Green, G. E., Garga, V. K., Andresen, A. et Brown, J. D. (1971). A new ring shear apparatus et its application to the measurement of residual strength. *Géotechnique*, Vol. 21, No. 4.

Blondeau, F., Christiansen, M., Guilloux, A., Schlosser, F. (1984). Talren : Méthode de calcul des ouvrages en sols renforcé. *C. R. Colloque International sur le Renforcement en Place des Sols et des Roches*. ENPC, Paris. pp. 219-224.

Bogdaneva-Bontcheva, N., et Lippmann, H. (1975). Rotationssymmetrisches ebenes Fliessen eines granularen Modellmaterials. *Acta Mechanica*, Vol. 21.

Bolton, M. D. 1986. The strength and dilatancy of sands. Géotechnique, Vol. 36, No. 1.

Borja, R. I. (1990). Analysis of incremental excavation based on critical state theory. *Journal of Geotechnical Engineering, ASCE*, Vol. 116, No. 6, pp. 964-985.

Borja, R. J., Lee, S. R. et Seed, R. B. (1989). Numerical simulation of excavation in elastoplastic soils. *International Journal for Numerical et Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 13, pp. 231-249.

Boulon, M. (1986). About the behaviour of piles under cyclic loading: the cyclic pseudo creep. *C. R. 3ème Conf. Int. Numerical Methods in Offshore Piling*, Nantes, France.

Boulon, M. (1987). Développement d'une boîte de cisaillement annulaire. *C.R. du GRECO - Rhéologie des Géomatériaux : sols, bétons et roches.*

Boulon, M. (1988). Numerical et physical modelling of piles behaviour under monotonous et cyclic loading. *C. R. Symp. Int. Modelling Soil-Water-Structure Interactions*, Delft.

Boulon, M. (1989). Basic features of soil-structure interface behaviour. *Comp. et Geo.*, Vol. 7.

Boulon, M. (1991). Le comportement d'interface sol-structure: aspects expérimentaux et numériques. *Revue Française de Géotechnique*, Vol. 54.

Boulon, M. et Alachaher, A. (1994). ABD une loi de comportement des géomatériaux, incrémentalement non linéaire, et adaptée aux éléments finis déplacements. *Revue Française de Géotechnique*, N° 65, pp. 29-45.

Boulon, M. et Nova, R. (1990). Modelling of soil-structure interface behaviour. A comparison between elastoplastic et rate type laws. *Euro-greco Géomateriaux.*

Boulon, M. et Puech, A. (1984). Calcul des pieux sous sollicitations cycliques par la méthode des éléments finis. *Revue Française de Géotechnique*, Vol. 26.

Boulon, M., et Hassan, H. (1993). Development of a visualisation of the movement of the grains within a soil-structure interface. *CEC SCIENCE Program No. 659, Internal Report.*

Boulon, M., et Nova, R. (1990). Modelling of soil-structure interface behaviour. A comparison between elasto-plastic et rate-type laws. *Int. J. Comp. et Geotech.*, Vol. 9.

Boulon, M., Desrues, J. et Foray, P. (1979). Calcul des pieux: tassements sous charge de service, frottement négatif. *Revue Française de Géotechnique*, Vol. 5.

Boulon, M., Desrues, J. et Foray, P. (1979). Méthode de calcul du comportement des pieux à l'arrachement. *Revue Française de Géotechnique*, Vol. 7.

Boulon, M., Garnica, P. (1994). Modélisation du comportement des micropieux par équations intégrales : développement d'un code 3D et validation sur des essais d'arrachement en chambre d'étalonnage. *Rapport interne FOREVER FO/93/02.*

Boulon, M., Plytas, C. et Foray, P. (1986). Comportement d'interface et prévision du frottement latéral le long des pieux et tirants d'ancrage. *Revue Française de Géotechnique*, Vol. 35.

Boulon, M., Plytas, C., Foray, P. (1986). Comportement d'interface et prévision du frottement latéral le long des pieux et tirants d'ancrage. *Revue Française de Géotechnique,* No. 35.

Boutrif, A. (1993). Mesure du comportement d'interface sol-structure à la boîte de cisaillement annulaire et modélisation. *Thèse de Doctorat*, Université Joseph Fourier.

Brandl, H. (1993). In situ measurements on crib walls. *C. R. Symposium International Renforcement des sols : Expérimentations en vraie grandeur des années 80*, ENPC, Paris.

Bransby, P. L. et Milligan, G. W. E. (1975). Soil deformations near cantilever sheet pile walls. *Géotechnique*, Vol. 25, No. 2, pp. 175-195.

Bridgewater, J. (1970). On the width of failure zones. *Géotechnique,* Vol. 30, n° 4.

Brown, P. T. et Booker, J. R. (1985). Finite element analysis of excavation. *Computers and Geotechnics*, Vol. 1 pp. 207-220.

Brumund, W. F. et Leonards, G. A. (1973). Experimental study of static et dynamic friction between sand et typical construction materials. *J. of testing et evaluation*, Vol. 1, No. 2.

Cardoso, A. S. et Carreto, A. P. (1989). Performance and analysis of a nailed excavation. *C. R. Conf. Int. de Mécanique des sols et Travaux de Fondations*, Rio.

Carlson, L. N, et Nixon, J.F. (1988). Subsoil investigation of ice lensing at the Calgary, Canada, frost heave test facility, *Can. Geotech. J.*, Vol. 25, pp. 307-319.

Carslaw, H. S,. et Jaeger, J. C. (1947). *Conduction of Heat in Solids*. Clarendon Press, Oxford.

Cartier, G. (1986). La stabilisation des pentes instables par clouage. *Bulletin de liaison des LPC*, No. 141.

Catalogue des structures types de chaussées neuves. Ministère de l'Equipement et de l'Aménagement du Territoire. Direction des Routes et de la Circulation Routière, Paris, 1977.

CEN - European Committee for Standardisation (1991). Eurocode 1 : Basis of design et actions on structures.

CEN - European Committee for Standardisation (1993). Eurocode 7 : Geotechnical Design (document de travail).

Chang, C. S., et Liao, C.L. (1990). Constitutive relation for a particulate medium with the effect of particule rotation. *Int. J. Solids Structures*, Vol. 26, No. 4.

Chang, C. Y. et Duncan, J. M. (1970). Analysis of soil around a deep excavation. *Journal of the Soil Mechanics et Foundations Division, ASCE*, Vol. 96, No. SM5, pp. 1655-1681.

Chaoui, F. (1992). Etude tridimensionnelle du comportement des pieux dans les pentes instables. *Thèse de Doctorat, ENPC.*

Chen Z; et Schreyer, H. L. (1987). Simulation of soil-contrete interfaces with non local constitutive models. *J. Eng. Mech., ASCE*, Vol. 113.

Chen, C. (1992). Efficient et reliable accelerated constant stiffness algortihms for the solution of non-linear problems. *Int. J. Numerical methods in engineering*, Vol. 35.

Chen, W. F. et Han, D. J. (1988). *Plasticity for structural Engineers*, Springer-Verlag, Berlin.

Chen, Z., et Schreyer, H. L. (1987). Simulation of Soil-Concrete Interfaces with Nonlocal Constitutive Models. *Journal Engineering Mechanics*, Vol. 113, No. 11.

Christian J. T. et Wong, I. H. (1973). Errors in simulating excavation in elastic media by finite elements. *Soils and Foundations*, Jap. Soc. of Soil Mech. Found. Eng., Vol. 13, No. 1.

Christopher, B. R., Gill, S. A., Giroud, J. P., Juran, I. Mitchell, J. K., Schlosser, F., Dunnicliff, J. (1988). Reinforced soil structures Vol. I. Design et Construction Guidelines. *Rapport FHWA-RD-89-043.*

Clichy, W., Boulon, M. et Desrues, J. (1987). Etude expérimentale stéréophotogrammétrique des interfaces sols-fondations à la boîte de cisaillement direct. *C. R. 4ème Colloque Franco-Polonais de mécanique des sols*. Grenoble.

Clough, G. W. et Duncan, J. M. (1971). Finite element analysis of retaining wall behavior. *Journal of Soil Mechanics et Foundation Division, ASCE*, No. SM12, pp.1657-1668.

Clough, W. G. et Mana, A. I. (1976). Lessons learned in finite element analyses of temporary excavations in soft clay. *C. R. 2ème Conf. Int. Num. Meth. in Geomech.*, pp. 496-510.

Cosserat, E., et Cosserat, F. (1907). Sur la mécanique générale. *C.R. A. S.*, Paris, Vol. 145.

Cosserat, E., et Cosserat, F. (1908). Sur la théorie des corps minces. *C. R. A. S.*, Vol. 146.

Cosserat, E et Cosserat, F. (1909). Theorie des Corps Deformables, Herman, Paris.

Cowin, S. (1962). Mechanics of Cosserat media. *Ph.D. Thesis*, Pennsylvania State University.

Cowin, S. C. (1984). The stresses around a hole in a linear elastic material with voids. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, Vol. 37.

Cowin, S. C., et Nunziato, J. W. (1983). Linear elastic materials with voids. *J. Elast.*, Vol. 13.

Crisfield, M. A. (1979). A faster modified Newton-Raphson Iteration. *J. Computer methods in Applied Mechanics et Engineering*, Vol. 20.

Cundall, P. (1989). Numerical experiments on localization in frictional materials, *Ingenieur Archive*, Vol. 59.

Cundall, P. A. et Strack, O. D. L. (1979). A discrete numerical model for granular assemblies. *Géotechnique*, 1.

Davis, A. G. et Plumelle, C. 1980. Comportement des tirants d'ancrage dans un sable fin. *Revue Française de Géotechnique*, Vol. 10.

Davis et Plumelle (1982). Full scale tests on ground anchors in fine sand. *Journal of the geotechnical engineering division, A.S.C.E.*, vol. 108, n°GT3, pp. 335-353.

Davis, Plumelle et Deguillaume (1983). Identification et études des paramètres contrôlant le comportement des tirants d'ancrage dans un sable fin. *Annales de l'I.T.B.T.P.*, n° 401 SF/178, pages 18-38.

De Borst, R. (1988). Bifurcations in finite element models with a non associated flow law, *Int. J. Num anal. Meth Geomech.*, Vol. 12.

De Borst, R. (1989). Numerical methods for bifurcation analysis in goemechnics, *Ing Arch.*, Vol. 59.

De Borst, R. (1991). Simulation of strain localization : a reappraisal of the Cosserat continuum. *Engineering computations*, Vol. 8.

De Borst, R. (1991). Simulation of strain localization : a reappraisal of the Cosserat continuum. *Engineering computations*, Vol. 8.

de Borst, R., et Mühlhaus, H. B. (1991). Finite deformation analysis of inelastic materials with micro-structure. *C. R. IUTAM Symposium Finite Inelastic Deformations : Theory and Applications*. Hannovre. Besdo et Stein Editeurs, Spirnger-Vermag, Berlin.

De Buhan, P. (1986). Approche fondamentale du calcul à la rupture des ouvrages en sols renforcés. *Thèse de Doctorat d'Etat*, Université Pierre et Marie Curie, Pairs VI.

De Buhan, P., Salençon, J. (1987). Analyse de stabilité des ouvrages en sols renforcés par une méthode d'homogénéisation. *Revue Française de Géotechnique*, No. 41.

De Jossel in De Jong, G. et Verruijt, A. (1969). Etude photo-plastique d'un empilement de disques. *Cahier du Groupe Français de Rhéologie*, Vol. 2.

Desai, C. S. et Nagarav, B. K. (1988). Modeling for cyclic normal and shear behavior of interfaces. *ASCE, Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 114, No. 7.

Desai, C. S. et Sargand, S. (1984). Hybrid FE procedure for soil-structure interaction. *Journal of Geotechnical Engineering, ASCE*, Vol. 110, No. 4, pp. 473-486.

Desai, C. S., Drumm, E. C. et Zaman, M. M. (1985). Cyclic testing and modeling of interfaces. *ASCE Journal of Geotechnical Engineering*, Vol. 111, No. 6.

Desai, C. S., Drumm, E. C.,and Zaman, M. M. (1985). Modeling of interfaces. *ASCEE Journal Geotechnical Engineering*, Vol. 111, No. 6.

Desai, C. S., Zaman, M. M., Lightner, J. G. et Siriwardane, H. J. (1984). Thin-layer element for interfaces et joints. *Int. Jour. for Num. and Anal. Meth. in Geomech.*, Vol. 8.

Desrues, J. (1984). Localisation de la déformation dans les milieux granulaires. *Thèse de Docteur d'Etat de l'INP*, Grenoble.

Diepolder, W., Mannl, V., et Lippmann, H. (1991). The cosserat continuum, a model for grain rotations in metals. *International Journal of Plasticity*, Vol. 7.

Dietrich, Th. (1976). Der Psammische Stoff alos mechanisches Modell des Sandes, *Ph. D. Dissertation*, Universitât Karlsruhe.

Digby, P. J. (1981). The effective elastic moduli of porous-granular rocks. J. Appl. Mech., Vol. 48.

Drumm, E. C. et Desai, C. S. (1986). Determination of parameters for a model for the cyclic behavior of interfaces. *Earthquake Engineering et Structural Dynamics*, Vol. 14.

Duncan, J. M. et Chang, C. Y. (1970). Nonlinear analysis of stress et strain in soils. *Journal of the Soil Mechanics et Foundations Division, ASCE*, Vol. 96, No. SM5, pp. 1629-1653.

Duncan, J. M. et Clough, W. G. (1971). Finite element analyses of Port Allen Lock. *J. of the Soil Mechanics et Foundations Division, ASCE*, Vol. 97, No. SM8, pp. 1053-1068.

Dunlop, P. et Duncan, J. M. (1970). Development of failure around excavated slopes. *Journal of the Soil Mechanics et Foundations Division, ASCE*, Vol. 96, No. SM2, pp. 471-493.

Dupas, A., Livet, J., Arnaud, Y. et Brehin, C. (1987). Essai de gonflement au gel des sols, *Projet de méthode d'essai N° 24*, avril; MELATT-LCPC.

Dysli, M. (1990). *Le gel et son action sur les sols et les fondations*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Suisse.

Eigenbrod, K. D., et Burak, J. P., (1992). Field measurement of anchor forces, ground temperatures et pore-water pore pressures behind a retaining structure in northwestern Ontario, *J. Can. Géotech.* N°. 29, pp. 112-116.

Einstein, A. (1906). Eine neue Bestimmung der Molekuldimensionen, *Ann. Physik*, Vol. 19.

Ellis, R. W., et Smith, C. W. (1968). A thin plate analysis et experimental evaluation of couple stress effects. *Experimental Mechanics*, Vol. 7.

Eringen, A. C. (1966). Linear theory of micropolar elasticity. *J. Math. Mech.*, Vol. 15.

Eringen, A. C. (1968). Mechanics of micromorphic continua. *Mechanics of Generallized Continua. C. R. IUTAM Symposium*, E. Kröner ed., Springer-Verlag.

Eringen, A. C. (1968). Theory of micropolar elasticity, dans *Fracture,* Vol. 1, (Liebowitz éditeur), Academic Press.

Eringen, A. C. (1970). Balance laws of micromorphic mechanics. *Int. J. Eng. Sc.*, Vol. 8.

Eringen, A. C. (1972). Linear theory of nonlocal elasticity et dispersion of plane waves. *Int. J. Eng. Sci.,* Vol. 10.

Eringen, A. C., Speziale, C. G., et Kim, B. S. (1977). Crack tip problem in non-local elasticity. *J. Mech. Phys. Solids,* Vol. 25.

Fairhurst, C. et Lorig, L. (1992). Improved design in rock et soil engineering with numerical modelling. *Int. Conf. on Geotechnics et Computers*, Paris.

Frank, R. (1984). Etudes théoriques de fondations profondes et d'essais en place par autoforage dans les LPC et résultats pratiques (1972-1983). *Rapport de recherche LPC,* No. 128.

Frank, R., et Romagny, J.-C. (1990). *Programme de calcul d'un pieu soumis à une sollicitation verticale, logiciel PIVER-LCPC, mode d'emploi.*

Frank, R., et Zhao, S.-R. (1982). Estimation par les paramètres pressiométriques de l'enfoncement sous charge axiale de pieux forés dans des sols fins. *Bul. de Liaison des L. P. C.*, N° 119, pp. 17-24.

Frederking, R. M. W. (1974). Laboratory tests on downdrag loads developed by floating ice covers on vertical piles. *C. R. 5ème Conf. Int. Port et Ocean Eng. under Artic Conditions (POAC 79).* Norwegian Institute of Technology, Trondheim, Vol. II, pp. 1097-1110.

Gässler, G. (1988). Soil nailing. Theoretical basis et practical design. *C. R. Symposium International : Theory et Practice of Earth Reinforcement.* Fukuoka, Japon.

Gässler, G. (1990). In-situ techniques of reinforced soil. State-of-the-Art Lecture. *C. R. Int. Conf. Reinforced Soil*, Glasgow, McGown et al., ed., Th. Telford, London, pp. 185-196.

Gässler, G. et Gudehus, G. (1983). Soil nailing - statistical design. *C. R. 8ème Conf. Eur. Soil Mech. et Found. Eng.*, Helsinki, Vol. 2, pp. 491-494.

Gässler, G., (1987) Vernagelte Geländesprünge - Tragverhalten und Standsicherheit. *Doctoral Thesis*, Veröffentlichung Inst. f. Bodenmech. u. Felsmech., Univ. Karlsruhe.

Gässler, G., (1988). Soil nailing - Theoretical basis et practical design. *C. R. Symp. Geot. on Theory et Practice of Earth Reinforcement*, Fukuoka, Japan, pp. 283-288.

Gässler, G., (1992). Full scale test on a nailed wall in consalidated clay. *C. R. Symp. Int. Earth Reinforcement Practice*, Fukuoka, Japan, Vol. 1, pp. 475-480.

Gässler, G., (1992). Rapport et Discussion de la session 5. *C. R. Symp. Int. Earth Reinforcement Practice*, Fukuoka, Japan, Vol. 2.

Gässler, G., et Gudehus, G. (1981). Soil nailing - some aspects of a new technique. *C. R. 10ème. Conf. Int. Soil Mech. et Found. Eng.*, Stockholm, Vol. 3, pp. 665-670.

Germain, P. (1972). Sur l'application de la méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus. *CRAS*, Paris, Série A, No. 274.

Germain, P. (1973a). La méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus-1ère partie, Théorie du second gradient. *Journal de Mécanique*, Vol. 12.

Germain, P. (1973b). The method of virtual power in continuum mechanics. Part 2 : Microstructure. *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 25, No. 3.

Gerrard, C. M. (1982). Reinforced Soil: An Orthorhombic material. *Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE*, Vol. 108, No. GT11, pp. 1460-1474.

Ghaboussi, J.et Pecknold, D. A. (1984). Incremental finite element analysis of geometrically altered structures. *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, Vol. 20, pp. 2051-2064.

Glen, J. W. (1955). The creep of polycrystalline ice. *C. R. Roy. Soc.*, A228, pp. 519-538.

Gold, L. W. (1970). The failure process in columnar grained ice. *Ph. D. thesis*, McGill Univ., Montréal, Québec.

Goldstein, M. N. (1957). Creep et long term strength of clay soil. *C. R. Conf. Eng. Geol. Prop. Rocks and Methods Study*, Moscow.

Goodman R. E. Taylor, R. L. et Brekke T. L. (1968). A model for the mechanics of jointed rock. *J. of Soil Mech. and Found. Div., ASCE*, vol. 96, No. SM5, pp. 1629-1654.

Goodmann, R. E., Taylor, R. L. et Brekke, T. L. (1968). A model for the mechanics of jointed rock. ASCE, *J. Soil Mech. and Found. Div.*, Vol. 94, No. SM3.

Gudehus, G. et Teichman, J. (1993). Some mechanisms of a granular mass in a silo - model tests et a numerical Cosserat approach, dans *Advances in Continuum Mechanics*, Springer Verlag, Berlin.

Guellec, P. (1976). ROSALIE - Système de calcul des massifs et des structures. *Notice de présentation et d'utilisation en géomécanique et en mécanique des structures.* Publication LCPC.

Guilloux, A. (1980). *Rapport TERRASOL n° 27-02* du 29/09/1980 : Parking de La Clusaz, Variante de soutènement par cloutage.

Guilloux, A. (1980). *Rapport TERRASOL n° 27-03* du 20/10/1980 : Parking de La Clusaz, Solution de soutènement par cloutage, Stabilité des bâtiments.

Guilloux, A. (1993). Slope stabilisation using soil nailing in France : Design methods et case histories. *C. R. 72ème Annual Meeting of Transportation Reserarch Board*, Washington.

Guilloux, A., Notte, G., et Gonin, H., (1983). Experiences on a retaining structure by nailing in moraine soils; *C. R. 8ème Conf. Europ. de Méc. des Sols et Trav. de Fond.*, Helsinki.

Günther, W. (1958). Zur Statik und Kinematik des Cosserat-Kontinuums, *Abh. Braunschweigische Wiss.*, Vol. 10.

Harrison, J. W. et Gerrard, C. M. (1972). Elastic theory applied to reinforced earth. *Journal of the Soil Mechanics et Foundations Division, ASCE*, Vol. 98, No. SM12, pp. 1325-1345.

Hayhoe, H.N., et Balchin, D. (1990). Field frost heave measurement et prediction during periods of seasonal frost , *Can. Geotech. J.*, 27, pp. 393-397.

Heritier et Plumelle (1985). Mobilisation progressive de la butée dans le sable. *C. R. 11ème Cong. Int. de Méc. des Sols et Travaux de Fond.*, San Francisco.

Hermann, G. et Achenbach, J. D. (1967). Applications of theories of generalized continua to the dynamics of composite materials, in *Mechanics of Generalized Continua*, Kröner éditeur, Springer Verlag, Berlin.

Hermann, L. R. et Al-Yassin, Z. (1978). Numerical analysis of reinforced soil systems. *C. R. Symp. Int. Earth Reinforcement*, ASCE Annual Convention, Pittsburgh, pp. 428-457.

Hettler, A. (1981). Verschiebungen starrer und elastischer Gründungskörper in Sand bei monotoner und zyklischer *Belastung. Veröffentl.*, Institut für Bodenmechanik und Felsmechanik der Universität Karlsruhe, Heft 90.

Hettler, A. (1982). Approximation formulae for piles under tension. *C. R. IUTAM Conf. Deformation et Failure of Granular Materials*, Delft.

Heuze, F. E. et Barbour, T. G. (1982). New models for rock joints et interfaces. *ASCE Journal of the Soil Mechanics et Foundations Division*, Vol. 108, No. GT5.

Hill, R. (1958). A general theory of uniqueness et stability in elastic-plastic solids. *J. Mech. Phys. Solids*, No. 6.

Hlavacek, M. (1975). A continuum theory for fibre reinforced composites. *Int. J. Solids et Structures*, Vol. 11.

Hlavacek, M. (1976). On the effective moduli of elastic composite materials. *Int. J. Solids et Structures*, Vol. 12.

Hoteit, N. (1990). Contribution à l'étude du comportement d'interface sable-inclusion et application au frottement apparent. *Thèse de Docteur de l'INP*, Grenoble.

Hult, J. A. H. (1966). *Creep in engineering structures*. Blaisdell Publ., Waltham, 115 pp.

Humbert, P. (1989). CESAR-LCPC, un code général de calcul par éléments finis. *Bull. liaison Labo. P. et Ch.*, No. 160, pp. 112-116.

Hvorslev, J. (1936). A ring shearing apparatus for the determination of the shearing resistance et plastic flow in soils. *C. R. 1ère Conf. Int. Mech. des Sols et Trav. de Fond.*, Cambridge, U.S.A., Vol. 2.

Ishihara, K. (1970). Relations between process of cutting et uniqueness of solutions. *Soils et Foundations*, Jap. Soc. of Soil Mech. and Found. Eng., Vol. 10, No. 3, pp. 50-65.

Johnston, G. H., et Ladanyi, B. (1972). Field tests of Grouted Rod Anchors in Permafrost; *Can. Geotech. J.*, 9, 176.

Juran, I., et Elias. V., (1987). Soil nailed retaining structures : analysis of case histories; *ASCE Geot. Spec. Publication*, N°. 12.

Juran, I., Ider, M. H., Chen, C. L. et Guermazi, A. (1988). Modelling et simulation of load transfer in reinforced soils: Part 1. *Int. J. Num. Ana. Meth. Geomech.*, Vol. 12.

Juran, I., Ider, M. H., Chen, C. L. et Guermazi, A. (1988). Numerical analysis of the response of reinforced soils to direct shearing: Part 2. *Int. J. Num. Ana. Meth. Geomech.*, Vol. 12.

Kanatani, K. I. (1979). A micropolar continuum theory for the flow of granular materials. *International Journal Engineering Science*, Vol. 17.

Kersten, M. S. (1948). Specific Heat Test of Soils. *C. R. 2ème Conf. of the ISSMFE*, Rotterdam.

Kersten, M. S. (1949). Laboratory Research for the determination of Thermal Properties of Soils. *ACFEL Technical report*, No. 23.

Kishida H et Uesugi, M. (1987). Tests of the interface between sand et steel in the simple shear apparatus. *Géotechnique*, No. 37.

Kishida, T., Fukaya, T. et Hanzawa, H. (1986). Development of the friction meter for evaluating the skin friction of a pile. *Soils et Foundations*, Vol. 26, No .1.

Ko, H. K., Azevedo, R. et Sture S. (1982). Numerical et centrifugal modeling of excavations in sand. *C. R. IUTAM Conf. Deformation et Failure of Granular Materials*, Delft.

Koiter, W. T. (1963). Couple-stresses in theory of elasticity. *Proceedings Koninklijke Nederlands Akademie Van Wetenshcaffen*, Series B, Vol. 67.

Koiter, W. T. (1964). Couple-stresses in the theory of elasticity. *C .R. R. Neth Acad Sci.*, B67.

Kondner, R. L. et Krizek, R. J. (1965). Creep compliance response of cohesive soils. *J. Franklin Inst.*, 279, pp. 366-373.

Konrad, J. M. (1992). Analyse numérique des chaussées soumises à l'action du gel, du dégel et du trafic, *C. R. Coll. Int. Géotechnique et Informatique*, Presses de l'ENPC, pp. 253-260.

Konrad, J.-M. (1990). Minimum undrained strength of two sands. *ASCE Journal of Geotechnical Engineering*, Vol. 116, No. 6.

Konrad, J.M., et Morgenstern, N.R. (1980). A mechanistic theory of ice lens formation in fine grained soils. *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 17, pp. 473-486.

Konrad, J.M. et Morgenstern, N.R. (1981). The segregation potential of a freezing soil. *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 18, pp. 482-491.

Konrad, J.M. et Morgenstern, N.R. (1982a). Prediction of frost heave in the laboratory during transient freezing. *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 19, pp. 250-259.

Konrad, J.M. et Morgenstern, N.R. (1982b). Effects of applied pressure on freezing soils. *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 19, pp.494-505.

Konrad, J.M., et Morgenstern, N.R. (1983). Frost suceptibility of soils in terms in terms of their segregation potential, *C. R. 4ème Conf. Int. Permafrost*, pp. 660-665.

Konrad, J.M., et Morgenstern, N.R. (1984). Frost prediction heave of chilled pipelines burried in unfrozen soils. *Can. Geotech. J.*, Vol. 21, N°1, pp. 100-115.

Kröner, E. (1967). Elasticity theory of materials with long range cohesive forces. *Int. J. Solids et Structures*, Vol. 3.

Ladanyi, B. (1972). An Engineering theory of creep of frozen soils, *Can. Geotech. J.*, Vol. 9.

Ladanyi, B. (1975). Bearing capacity of strip footings in frozen soils. *Canad. Geotech. J.*, Vol. 12, pp. 393-407.

Ladevèze, J., Ladevèze, P., Pecastaings, F., et Pelle, J. P. (1980). Sur le fondement de la théorie linéaire des poutres élastiques. II. Théorie linéaire de la flexion des poutres droites homogènes et isotropes. *Journal de mécanique*, Vol. 19, No. 1.

Lakes, R. S. (1983). Size effects et micromechanics of a porous solid. *J. Materials Science*, Vol. 18.

Lakes, R. S. (1985). Demonstration of consequences of the continuum hypothesis. *Mechanics Monograph*, M5, 1-5.

Lakes, R. S. (1986). Experimental microelasticity of two porous solids. *Int. J. Solids, Structures*, Vol. 22.

Lakes, R. S. (1987). Foam structures with a negative Poisson's ratio. *Science*, Vol. 235.

Lakes, R. S. (1987). Negative Poisson's ratio materials, (reply). *Science*, Vol. 238.

Lakes, R. S. (1993). Advances in negative Poisson's ratio materials. *Advanced Materials* (Weinheim, Germany), Vol. 5.

Lakes, R. S. (1993). Strongly Cosserat elastic lattice et foam materials for enhanced toughness. *Cellular Polymers*, Vol. 12.

Lakes, R. S. (1994). Experimental Methods for study of Cosserat solids et other generalized continua. Mühlhaus éditeur.

Lakes, R. S., et Yang, J. F. C. (1983). Concentration of strain in bones. *C. R. 18ème Midwest Mechanics Conference, Developments in Mechanics*, Vol. 12.

Lakes, R. S., et Yang, J. F. C. (1983). Micropolar elasticity in bone : rotation modulus. *C.R. 18ème Midwest Mechanics Conference, Developments in Mechanics*, Vol. 12.

Lakes, R. S., Gorman, D., et Bonfield, W. (1985). Holographic screening method for microelastic solids. *J. Materials Science*, Vol. 20.

Laks, H., Wiseman, C. D., Sherby, O. D., et Dorn, J. E. (1957). Effect of stress on creep at high temperature. *J. Appl. Mech.*, Vol. 24, pp. 207-213.

Lefur, B., Bataille, J., et Aguirre-Puente, J. (1964). Etude de la congélation d'une lame mince dont une face est maintenue à température constante, l'autre face étant soumise à une température variable en fonction du temps (problème de Stefan unidimensionnel). *C.R.A.S.* , t. 259, pp. 1483-1485.

Lippmann, H. (1969). Eine Cosserat Theorie des plastischen Fliessens. *Acta Mechanica* 8.

Löffelmannn, G. (1989). Theorische und experimetelle Untersuchungen zur Schüttgut- Wand - Wechslwirkung von Granulaten. *Dr.-Ing. Dissertation*, Universität Karlsruhe.

Loret, B. (1985). Short Communication on the Choice of Elastic Parameters for Sand. *Int. J. for Numerical et Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 9.

Lutenegger, A. J. (1987). Suggested method for performing the borehole shear test. *Geotechnical Testing Journal*, Vol. 10, No. 1

Mana, A. I. (1976). Finite element analysis of deep excavation behaviour. *Ph. D. Thesis*, Stanford, California.

Mana, A. I. et Clough, G. W. (1981). Prediction of movements for braced cuts in clays. *Journal of Geotechnical Division, ASCE*, Vol. 107, No. GT6, pp. 759-777.

Mandel, J. (1982). Définition d'un repère privilégié pour l'étude des transformations anélastiques du polycristal. *Journal de Mécanique théorique et appliquée*, Vol. 1, No. 1, pp. 7-23.

Marchina, P. (1984). Simulation de l'interaction sol-structure par la méthode des équations intégrales aux frontières et une loi d'interface. *Thèse de l'INPG*, Grenoble.

Marques, J. M. M. C. (1984). Stress computation in elasto-plasticity. *Eng. Computer. J.*, Vol. 1, pp. 42-51.

Matsui, T. et San, K. C. (1988). Finite element stability method for reinforced slope cutting. *C. R. Geotech. Int. Symposium on Theory et Practice of Earth Reinforcement*, Fukuoka, Japan, Balkema, Rotterdam, pp. 317-322.

Matsui, T. et San, K. C. (1989). An Elastoplastic joint element with its application to reinforced slope cutting. *Journal Soils et Foundations*, Japanese Society of Soil Mechanics et Foundation Engineering, Vol. 29, No. 3, pp. 95-104.

Matsui, T. et San, K. C. (1989). Verification of the analysis method for reinforced slopes. *C. R. 12ème Conf. Int. SMFE*, Brazil, Vol. 2, pp. 1277-1279.

Matsui, T. et San, K. C. (1990). A Hybrid slope stability analysis method with its application to reinforced slope cutting. *Journal Soils et Foundations*, Japanese Society of Soil Mechanics et Foundation Engineering, Vol. 30, No. 2, pp. 79-88.

Matsui, T. et San, K. C. (1990). A hybrid stability analysis method with its application to reinforced slope cutting. *Soils et Foundations*, Vol. 30, No. 2, pp. 79-82.

Mc Meeking, R. M. et Rice, J. R. (1975). Finite element formulations for problems of large elastic-plastic deformation. *Int. J. Solids et Structures*, Vol. 11.

Mindlin, R. D. (1951). Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic plates. *JAM*, Vol. 18.

Mindlin, R. D. (1963). Influence of couple-stress on stress concentrations. *Exp. Mech.*, Vol. 3.

Mindlin, R. D. (1964). Micro-structure in linear elasticity. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, Vol. 16.

Mindlin, R. D. (1965). Stress functions for a Cosserat continuum. *Int. J. Sol. Struct.*, Vol. 1.

Mindlin, R. D., et Tiersten, H. F. (1962). Effect of couple stresses in linear elasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, Vol. 11.

Missenard, A. (1983). *Conductivité thermique des solides, liquides, gaz et de leurs mélanges*. Eyrolles, éditeur, Paris.

Morgenstern, N. R., et Sego, D. C., (1981). Performance of temporary tie-backs under winter conditions. *J. Can. Géotech.*, N°. 18,pp. 566-572.

Mothes, J. L., Faure, B., et Boutonnet, M. (1973). Communications Françaises au Symp. OCDE sur l'action du gel sur les chaussées, Oslo, Octobre 1973. *Bull. Liaison des Labo. des Ponts et Chaussées*, N°68.

Mühlhaus, H. B et Vardoulakis, I. (1987). The thickness of shear bands in granular materials, *Géotechnique*, Vol. 37.

Mühlhaus, H. B. (1986). Scherfugenanalyse bei granularem Material im rahmen der Cosserat Theorie. *Ingenieur Archiv*, Vol. 56.

Mühlhaus, H. B. (1989). Application of Cosserat theory in numerical solutions of limit load problems. *Ing. Arch.*, Vol. 59.

Mühlhaus, H. B. (1993). Continuum models for layered et blocky rock. in *Comprehensive Rock Engineering, Vol. 2*, Hudson Editor in Chief, Pergamon Press.

Mühlhaus, H. B. et Aifantis, E. C. (1990). A variational principle for gradient plasticity. *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 28.

Mühlhaus, H. B. et Aifantis, E. C. (1991). The influence of microstructure-induced gradients on the localization of deformation in viscoplastic materials, *Acta Mechanica*, Vol. 89.

Mühlhaus, H. B., de Borst, R. et Aïfantis, E. C. (1991). Constitutive models and numerical analyses for inelastic materials with microstructure. *C. R. Conf. Int. Comp. Meth. and Adv. in Geomech.*, Cairns, Beer, Brooker et Carter Editeurs, Balkema, Rotterdam.

Nayak, G. C. et Zienkiewicz, O. C. (1972). Elastoplastic stress analysis. A generalisation for constitutive relations including strain softening. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 5.

Naylor, D. J.(1978). A Study of reinforced earth walls allowing strip slip. *C. R. du Symp. : Earth Reinforcement*, Pittsburgh, Pennsylvania, pp. 618-643.

Neuber, H. (1966). Über Probleme der Spannungkonzentration im Cosserat-Körper. *Acta Mecanica*, Vol. 2.

Nixon, J. F,. et McRoberts, E. C. (1980). A study of some factors affecting the thawing of frozen soils, *Can. Geotechn. J.*, 10 : 439-452.

Nixon, J. F., et McRoberts, E. C. (1976). A design approach for pile foundations in permafrost. *Can. Geotch. J.*, 13, pp. 40-57.

Nixon, J.F. (1982). Field frost heave predictions using the segregation potential concept. *Can. Geotech. J.*, Vol. 19, pp. 526-529.

Nixon, J.F. (1991). Discrete ice lens theory for frost heave in soils, *Can. Geotech. J.*, Vol. 28, pp. 843-859.

Norme NF P 94 210. Renforcement des sols - Généralités et terminologie (Mai 1992).

Norme NF P 94 240. Soutènement et talus en sols en place renforcés par des clous - Dimensionnement (en cours d'homologation)

Norme NF P 94 241. Soutènement et talus en sols en place renforcés par des clous -Mise en oeuvre (en préparation).

Norme NF P 94 242 1. Essai d'arrachement de clou isolé soumis à un effort normal de traction - extraction à vitesse constante (Avril 1993).

Norme NF P 94 242 2. Essai d'arrachement de clou isolé soumis à un effort normal de traction - extraction par palier de traction (en cours d'homologation).

Ochiai, H. et Yamanouchi, T. (1972). Movements et rotations of particles during shearing of two-dimensionnal model. *C. R. 7ème Congrès Annuel Japanese Society Soil Mech. et Found. Eng.*, Vol. 181.

Oda, M. (1972). The mechanism of fabric changes during compressional deformation of sand. *Soils et Foundations*, Vol. 12.

Oda, M. (1974). A mechanical et statical model of granular material. *Soils et Foundations*, Vol. 14.

Oda, M. (1975). On stress-dilatancy relation of sand in simple shear test. *Soils et Foundations*, Vol. 15.

Oda, M., et Konishi, J. (1974). Microscopic deformation mechanism of granular material in simple shear. *Soils et foundations,* Vol. 14.

Oda, M., Konishi, J. et Nemat-Nasser, S. (1982). Experimental micromechanical evaluation of strength of granular materials: effects of particle rolling. *Mechanics of Materials*, Vol. 1.

Oda, M., Konishi, J., et Nemat-Nasser, S. (1982). Experimental micromechanical evaluation of strength of granular materials : Effects of rolling. *Mechanics of Materials,* Vol. 1.

Odquist, F. K. G. (1966). Mathematical theory of creep et creep rupture. *Oxford Math. Mono.*, Clarendon Press., Clarendon, Texas, 168 pp.

Odquist, F. K. G. et Hult, J. (1966). *Creep in metallic materials* (in German). Springer, Berlin.

Ord, A., Vardoulakis, I., et Kajewski, R. (1991). Shear band formation in Gosford sandstone. *Int. J. Rock Mech. Min. Science et Geomechanics Abstracts*, Vol. 28, N°. 5.

Ouelogo, S. (1989). Simulation numerique d'un soutènement en sol cloué : Etude du comportement en phases de construction et application à un ouvrage expérimental. *Thèse de doctorat de l'Université Paris VI*, p.246.

Palmeira, E. M. et Milligan, G. W. E. (1989). Scale and other factors affecting the results of pull-out tests of grids buried in sand. *Géotechnique*, Vol. 39, No. 3.

Papanastasiou, P. C. (1990). Numerical analysis of localisation phenomena with application in deep boreholes. *Ph. D. Thesis*, University of Minnesota, U.S.A.

Papanastasiou, P. et Vardoulakis, I. (1992). Numerical treatment of progressive localization in relation to borehole stability. *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech*, Vol. 16.

Park, H. C., et Lakes, R. S. (1987). Torsion of a micropolar elastic prism of square cross section. *Int. J. Solids Structures,* Vol. 23.

Penner, E., et Ueada, T. (1977). The dependance of frost heaving on load application. *C. R. 3ème Conf. Int. Permafrost*, Edmonton, Alta, pp. 878-890.

Perkins, R.W., et Thompson, D. (1973). Experimental evidence of a couple stress effects. *AIAA Journal*, Vol. 11.

Petit, G. (1987). Contribution à l'étude expérimentale du comportement des massifs en sol cloué. *Rapport de Stage de Fin d'Etudes*, CERMES.

Philippe A. (1967). Méthode provisoire d'évaluation des profondeurs atteintes par le gel dans les sols et les chaussées. *Bulletin de Liaison des Laboratoires Routiers*, No. 28.

Philippe, A.; Aguirre-Puente, J. ; Bertouille, H.; et Fremond, M. (1973). La propagation du gel dans les chaussées et sa simulation à la station de gel expérimentale de Caen. *Bulletin de Liaison des Laboratoires des Ponts et Chaussées*, Supplément au n°68.

Pijaudier-Cabot, G. et Bazant, Z. P. (1987). Nonlocal damage theory. *ASCE J. Eng. Mech.*, Vol. 113.

Pijaudier-Cabot, G., De Borst R., et Huerta, A. (1992). Numerical modelling of strain softening in geomaterials. *Final Scientific Report. Contrat N° SC1*0073-C (EDB), Euro-Greco Geomaterials (Soils, Concretes, Rocks).*

Plumelle (1979), Etude expérimentale du comportement des tirants d'ancrage. *Thèse de Docteur-Ingénieur*, Université Pierre et Marie Curie - Paris.

Plumelle (1988). Rupture d'une paroi clouée expérimentale en vraie grandeur. *GEO 88. C. R. des journées franco-marocaines de géotechnique*, Marrakech.

Plumelle (1991). Comportement pendant les phases de construction et à la rupture de 3 parois clouées en vraie grandeur. *C. R. Xème congrès européen de mécanique des sols*, Florence.

Plumelle et Bel Hadj Amor (1989). Ruptures provoquées de murs en sol cloué. *C. R. Journées franco-tunisiennes de mécaniques des sols*, Paris.

Plumelle, C., Schlosser, F. (1991). Three full-scale Experiments of French Project on Soil Nailing : CLOUTERRE. *C. R. 70ème réunion annuelle du Transportation Research Board*, Washington.

Portnov, I.G. (1962). Exact solution of freezing problem with arbitrary temperature variation on fixed boundary, *Soviet Physics Doklady*, Vol. 7.

Potyondi, J. G. (1961). Skin friction between various soils et construction materials. *Géotechnique*, Vol. 11, No. 4.

Puech, A., Foray, P., Boulon, M. et Desrues, J. (1979). Calcul des pieux à l'arrachement à partir d'un modèle numérique en contraintes effectives - premiers résultats. *C. R. Congrès Européen de Mécanique des Sols*, Brighton, English.

Puri, P., et Cowin, S. C. (1985). Plane waves in linear elastic materials with voids. *J. Elasticity*, Vol. 15.

Rabejac, S. et Toudic, P. (1974). Construction d'un mur de soutènement entre Versaille-Chantier et Versailles-Matelots. *Revue Générale des Chemins de Fer*, 93 ème année, pp. 232-237.

Recommandations CLOUTERRE 1991 pour la conception, le calcul, l'exécution et le contrôle des soutènements réalisés par clouage des sols. Comité de rédaction : Magnan, Plumelle, Salençon, Schlosser, Unterreiner. Presses de l'ENPC, Paris (version Française) et Presses de la FHWA, Washington (version Anglaise).

Reddy, J. N. (1984). A simple higher order theory for laminated composite plates, *JAM*, Vol. 106.

Reissner, E. (1947). On bending of elastic plates. *Quaterly Applied Mathematics*, Vol. 5.

Richardson, E.G. (1950). *Dynamics of Real Fluids*. Arnold et al. éditeurs, Londres.

Romstad, K. M., Hermann L. R. et Shen, C. K. (1976). Integrated study of reinforced earth - 1. Theoretical formulation. *Journal of Geotechnical Engineering Division, ASCE*, Vol. 102, No. GTS, pp. 457-471.

Roscoe, K. H. (1953). An apparatus for the application of simple shear to soil samples. *C. R. 3ème Conf. Int. Mécanique des Sols et Travaux de Fondation*, Vol. 1.

Roscoe, K. H. (1970). The influence of strains in soil mechanics. *Géotechnique*, Vol. 20, No. 2.

Roscoe, K. H., et Schofield, A. N. (1964). Discussion on P. W. Rowe's paper, "Stress-dilatancy, earth pressures et slopes". (Paper 3507, May 1963)", *J. Soils Mech. Found. Eng. Div. ASCEE*, Vol. 90.

Roscoe, K.H. (1970). The influence of strains in soil mechanics. *Géotechnique*, Vol. 20.

Rothenburg, L., et Bathurst, R. J. (1992). Micromechanical features of granular assemblies with planar elliptical particles. *Géotechnique*, Vol. 42, No. 1.

Rowe, P. W. (1962). The stress dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact. *C. R. Royal Society London*, A269, Vol. 500.

Rowe, P. W. (1969). The relation between the shear strength of sands in triaxial compression, plane strain et direct shear. *Géotechnique*, Vol. 19, No. 1.

Rudnicki, J. W. et Rice, J. R. (1975). Conditions for the localization of the deformation in pressure sensitive materials. *J. Mech. Phys Solids*, Vol. 23.

Salençon, J. (1983). *Calcul à la rupture et analyse limite*. Presses de l'ENPC, Paris.

Salençon, J. (1987). Mécanique des milieux continus, Tome I : Concepts généraux. *Cours de mécanique de l'Ecole Polytechnique*, Presses de l'Ecole Polytechnique.

Satake, M. (1968). Some Considerations on the mechanics of granular materials. *C. R. IUTAM Symposium on the generalized Cosserat continuum et the continuum theory of dislocations with applications*, Freudenstadt et Stuttgart, Editeur Kröner.

Sayles, F. H. (1973). Triaxial et creep tests on frozen Ottawa sand, *C. R. 2ème Conf. Int. Permafrost*, Yakutsk, URSS.

Sayles, F. H., et Epanchin; N. V. (1966). Rate of strain compression tests on frozen Ottawa sand et ice. *Tech. Note, U. S. Army Corps of Engineers, CRREL*, Hanover, N. H., 54 pp.

Sayles, F. H., et Haines, D. (1974). Creep of frozen Silt et Clay. *Tech. Note, U. S. Army Corps of Engineers, CRREL*, Hanover, N. H.

Scarpelli, G., et Wood, D.M. (1982). Experimental observation of shear band pattens in direct shear tests. *C. R. IUTAM Conference on deformation et failure of granular.*

Schaefer, D. G. (1990). Instability et ill-posedness in the deformation of granular materials, *Int. J. Numer. Anal. Method Geomech.*.Vol. 14.

Schaeffer, H. (1962). Versuch einer Elastizitätstheorie des zweidimensionalen ebenen Cosserat-Kontinuums. *Miszellaneen der Angewandten Mechanik*, Schäfer éditeur, Akademie-Verlag, Berlin.

Schaeffer, H. (1967). Das Cosserat-Kontinuum. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Band 47, Heft 8.

Schijve, J. (1966). Note on couple stresses, *J. Mech. et Phys. of Solids*, Vol. 14.

Schlosser, F. et Unterreiner, P. (1990). Soil Nailing in France : Research et Practice. *Compte rendus du 1er Séminaire International, Soil and Foundation Engineering*, Téhéran, Iran.

Schlosser, F. et Unterreiner, P. (1991). Soil nailing in France : research et practice. *C. R. 70ème Congrès annuel TRB*, Washington D.C., pp.72-79.

Schlosser, F. et Unterreiner, P. (1992). Innovations Françaises dans les soutènements. *C. R. 1ères Assises du Génie Civil*, Paris.

Schlosser, F. et Unterreiner, P. (1992). French Design Practice in Soil Nailing. *Proceedings ASCE Continuing Education Program*, New Orleans, Louisiana, USA.

Schlosser F. et Unterreiner P. (1994). Renforcement des sols par inclusion. *Techniques de l'Ingénieur*, C245.

Schlosser, F., Frank, R., Unterreiner, P. et Plumelle, C. (1992). Mémoire de présentation du Projet National FOREVER, Renforcement des sols par micropieux, *Rapport de recherche pour l'Institut pour la Recherche appliquée et l'Expérimentation en Génie Civil (IREX)*, Paris.

Schlosser, F., Plumelle, C., Unterreiner, P. et Benoit, J. (1992). Failure of a full scale experimental soil nailed wall by reducing the nails lengths (French National Project CLOUTERRE). *C. R. Symposium International sur la Pratique en Renforcement des Sols*, Fukuoka, Japon.

Schlosser, F., Unterreiner, P. et Plumelle, C. (1992) French Research Program CLOUTERRE on Soil Nailing. *Proceedings of the ASCE Specialty Conference on Grouting, Soil Improvement et Geosynthetics*, New Orleans, Louisiana, USA, vol. 2, pp. 739-750.

Schlosser, F., Unterreiner, P. et Plumelle, C. (1992). Club Renforcement des Sols : Synthèse sur le renforcement des sols. *Rapport de recherche pour l'Institut pour la Recherche appliquée et l'Expérimentation en Génie Civil (IREX)*, Paris.

Schlosser, F., Unterreiner, P. et Plumelle, C. (1993). Validation des méthodes de calcul de clouage par les expérimentations du Projet National CLOUTERRE, *Revue Française de Géotechnique*, No. 64.

Schlosser F., Unterreiner P., Lerat P., Sulem J. (AENPC-CERMES) ; Vardoulakis I., Dougalis V., Antono Poulos D. (NTU, Athènes) ; Boulon M., Hassan H. (3S/IMG) (1993). *First year progress report*, Project SCIENCE N°SC1*-CT91-0659 (60 p).

Schlosser, F. (1982). Behaviour et design of soil nailing. *C. R. Symposium International Recent Developments in Ground Improvement Techniques*, Bangkok.

Schlosser, F. (1983). Analogies et différences dans le comportement et le calcul des ouvrages de soutènement en Terre Armée et par le clouage des sols. *Annales de l'ITBTP*, No. 418.

Schlosser, F. (1989). Le projet National CLOUTERRE. *Annales de l'ITBTP*, No. 473.

Schlosser, F. et Guilloux, A. (1981). Le frottement dans le renforcement des sols. *Revue Française de Géotechnique*, Vol. 16.

Schlosser, F. et Guilloux, A. (1981). *Rapport interne TERRASOL No. 27-04* du 9 Mars 1981. Parking de La Clusaz, Analyse et interprétation du comportement des soutènements.

Schlosser, F., Elias, V. (1978). Friction in Reinforced Earth. *C. R. Symposium International Earth Reinforcement*, Pittsburgh.

Schlosser, F., Hoteit, N., et Price, D. (1993). Expérimentation en vraie grandeur d'un mur Freyssisol-Websol en sol renforcé. *C. R. Symposium International sur le Renforcement des Sols : Expérimentations des années 1980*, ENPC, Paris.

Schlosser, F., Jacobsen, H. M., Juran, I. (1983). Le renforcement des sols. *C. R. 8ème Conférence Européenne de Mécanique des Sols et Travaux de Fondations*, Helsinki et *Revue Française de Géotechnique*, No. 29.

Schlosser, F. et Long, N. T. (1974). Recent results in French Research on Reinforced Earth. *Journal ASCE*, Vol. 100.

Schlosser, F., Magnan, J.-P., Holtz, R. D. (1985). Constructions géotechniques. Rapport général. *C. R. 11ème Congrès International de Mécanique des Sols et des Travaux de Fondations*, San Francisco.

Schlosser, F. et Unterreiner, P. (1992). Innovations françaises dans les soutènements. *C. R. 1ères Assises du Génie Civil*, Paris.

Schlosser, F., Unterreiner, P. et Delmas, P. (1994). Utilisation des géosynthétiques et fibres naturelles. *C. R. 13ème Congrès International de Mécanique des Sols et Travaux de Fondations*, New Delhi.

Schlosser, F., Unterreiner, P., Plumelle, C. (1991). Synthèse sur le renforcement des sols. *Club IREX-Renforcement des Sols*, Paris.

Schlosser, F., Unterreiner, P., Plumelle, C. (1992). French Research Program CLOUTERRE on Soil Nailing. *C. R. ASCE Speciality Conference on Grouting, Soil Improvement et Geosynthetics*, New Orleans.

Schlosser, F., Unterreiner, P., Plumelle, C. (1993). Validation des méthodes de calcul de clouage par les expérimentations du Projet National CLOUTERRE. *Revue Française de Géotechnique*, No. 64.

Schneebeli, G. (1957). Une analogie mécanique pour l'étude de la stabilité, des ouvrages en terre deux dimensions. *C. R. 4ème Conf. Int. Mech. Sols Trav. Fond.*, Vol. 2.

Schreyer, H. L. et Chen, Z. (1986). One-dimensional softening with localization *J. Appl. Mech.*, Vol. 53.

Selvadurai, A. P. S. et Boulon, M. (1992). Boundary element modelling of the mechanics of a near surface cylindrical rigid behavior. *J. Numerical Models in Geomechanics*, éd. Pande et Pietruszczak, Balkema, Rotterdam, pp. 629-643.

Shafiee S. (1986). Simulation numérique du comportement des sols cloués: interaction sol-renforcement et comportement de l'ouvrage. *Thèse de Docteur-Ingénieur de l'ENPC*, Paris.

Frank, R. (1994). Reflexions sur le tassement des fondations superficielles. *C. R. 13ème Congrès international de Mécanique des Sols et Travaux de Fondations*, New-Delhi.

Shen, C. K. et Herrmann G. R. (1981). Ground movement analysis of earth support system. *ASCE, Journal of the Geotechnical Engineering Division*, Vol. 107, GT12.

Shen, C. K., Bang, A. M., Romstad, M., Kulchin, L. et DeNatale, J. S. (1981). Field measurements of an earth support system. *ASCE Journal of the Geot. Eng. Div.*, Vol. 107, No. GT12, pp. 1625-1642.

Siddique, M. S. A. (1991). FEM analysis of settlement et bearing capacity of footing on sand, *Master of Eng. Thesis*, Univ. of Tokyo.

Siriwardane, H. J. 1989. Numerical analysis of anchors in soils. *Int. Jour. for Numerical et Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 13.

Smith, E. A. L. (1960). Pile-driving analysis by the wave equation, ASCE, *J. Soil Mech. Found. Div.*, Vol. 86.

Smith, I. M. (1992). Some results of computations regarding reinforced soil. *C. R. Col. Int. Geotechnique et Informatique*, ENPC, Paris, pp. 479-488.

Smith, I. M. (1992). Three-dimensional analysis of reinforced et nailed soil. *C. R. 4ème Symp. Int. on Numerical Models in Geomechanics*, Swansea, Balkema, pp. 479-488.

Smith, I. M., Segrestin, P. (1992). Inextensible reinforcements versus extensible ties - FEM comparative analysis of reinforced or stabilised earth structures. *C. R. Symposium International : Earth Reinforcement Practice*, Fukuoka, Japon.

Sobotka, Z., Kamenov, B. et Pruska, L. (1977). Stress-strain relations et shear strength of soils. *C. R. 9ème Conf. Int. Mech. Sols Trav. Fond.*, Tokyo, Japan, Vol. 1.

Sokolnikoff, I. S., (1983). *Mathematical Theory of Elasticity*, Krieger.

Stefan J. (1980). Über die Theorie des Eisbildung, insbesondere über die Eisbildung im Polarmeere, vol. XCVIII, N°. IIa: *Sitzungberichte der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Classe des Kaiserlichen des Wissenschaften*, Wien.

Steinmann, P. et Kaspar, W. (1969). Localization within the framework of micropolar elasto-plasticity.

Stocker, M., Körber, G., Gässler, G. et Gudehus, G. (1979). Soil nailing. *C. R. Conf. Int. Renforcement des Sols*. Paris, Vol. 2, pp. 469-474.

Sulem, J. et Vardoulakis, I. (1990). Bifurcation analysis of the triaxial test on rock specimens. A theoretical model for shape et size effects. *Acta Mechanica*, Vol. 83.

Tabucanon, J. T. et Airey, D. W. (1992). Interface tests to investigate pile skin friction in sands. *Research Report No R662*, University of Sydney.

Tang, P. Y. (1983). Interpretation of bend strength increase of graphite by the couple stress theory. *Computers et Structures*, Vol. 16.

Tatsuoka, F. (1944). Link among design, model tests, theories et sand properties in bearing capacity of footing on sand, Panel Discussion for Plenary Session B. Foundations, *C.R. 13ème Conf. Int. de la SIMSTF*, New Delhi, Vol. 5.

Tatsuoka, F., Tani, K., Morimoto, T., Okahara, M., Tatsuta, M., et Huang, C. C. (1989). Shear band formation related to scale effect in bearing capacity of footing on sand - experimental results. *C. R. Workshop Int. Numerical Methods for Localisation et Bifurcation of Granular Bodies*, Gdansk, Poland.

Teichman, A. et Teichman, J. (1990). Scale effect in pile model test, *Archiwum Hydrotechniki* (Poland), Vol. 3-4.

Teichman, J. (1989). Scherzonenbildung und Verspannungseffekte in Granulaten unter Berücksichtigunug von Kerndrehungen. *Dr.-Ing. Dissertation*, Universität Karlsruhe.

Teichman, J. (1994). Numerical study on Localized deformation in a Cosserat continuum. *C. R. 3ème Workshop International sur la bifurcation et la localisation dans les sols et les roches*, Aussois, France.

Teichman, J., et Wu, W. (1993). Numerical study on shear band patterning in a Cosserat continuum, *Acta Mech.* (accepted for publication).

Tika-Vassilikos, T. (1991). Clay-on-steel ring shear tests et their implications for displacement piles. *Geotechnical Testing Journal*, Vol. 14, No. 4.

Timoshenko, S. (1968). *Résistance des matériaux*. Tomes 1 et 2. Dunod, Paris.

Timoshenko, S. P. (1983). *History of Strength of Materials*, Dover.

Ting, J. M., Khwaja, M., Meachum, L. R. et Rowell, J. D. (1993). Influence of an ellipse-based discrete element model for granular materials. *Int. J. for Numerical et Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 17.

Touratier, M. (1989). Un modèle simple et efficace en mécanqiue des structures composites. *C. R. A.S.*, Tome 309, Série II, Paris.

Triandafilidis, G. E. (1974). Soil-stress gage design et evaluation. *Journal of Testing and Evaluation*, Vol. 2, No. 3.

Triantafyllidis, N. et Aifantis, E. C. (1986). A gradient approach to localization of deformation, I. Hyperelastic materials, *J. Elasticity*, Vol. 16.

Tsytovich, N.A. (1975). *The mechanics of frozen ground*, MacGraw-Hill, New York.

Uesugi, M. (1987). Friction between dry sand et construction. *Ph. D. dissertation*, Tokyo Institute of Technology.

Uesugi, M. et Kishida, H. (1986). Frictional resistance at yield between dry sand et mild steel. *Soils et Foundations*, Vol. 26, No. 4.

Uesugi, M. et Kishida, H. (1986). Influential factors of friction between steel et dry sands. *Soils et Foundations*, Vol. 26, No. 2.

Uesugi, M., Kishida, H. et Tsuba, Y. (1989). Friction between sand et steel under repeated loading. *Soils et Foundations*, Vol. 29, No. 3.

Uesugi, M., Kishida, H. et Tsubakihara, Y. (1988). Behavior of sand particles in sand-steel friction. *Soils et Foundations*, Vol. 28, No. 1.

Unterreiner, P. (1991). French specifications on Soil Nailing : CLOUTERRE 1991. *C. R. Civil Engineering European Courses (COMETT) on Soil Reinforcement*, ENPC, Paris.

Unterreiner, P. et I., Vardoulakis (1994). Interfacial localisation in granular media. *C. R. 8ème Conf. Int. Ass. Comp. Meth. Adv. Geomech.*

Unterreiner, P., Frank, R. et Schlosser, F (1993). Modélisation de l'influence mécanique du gel sur un mur en sol cloué et un mur ancré par tirants. Application aux murs de La Clusaz. *Rapport pour le Projet National CLOUTERRE II*, février.

Unterreiner, P., Frank, R. et Schlosser, F. (1994). Modélisation des effets du gel sur les murs en sol cloué. *C. R. 13ème Congrès International de Mécanique des Sols et Travaux de Fondations*, 5-10 janvier, New Delhi, Inde.

Unterreiner, P., Lerat, P., Schlosser, F., De Laure, E. et Belmont, G. (1991). Développement d'une boîte de cisaillement simple annulaire. Etude de la localisation des déformations aux interfaces. *Rapport Scientifique 1991 du Gréco-Géomatériaux.*

Unterreiner P., Lerat P., Vardoulakis I., Schlosser F., De Laure E. et Belmont G. (1994). *Brevet sur l'Appareil de cisaillement simple annulaire (ACSA)* (procédure de dépôt en cours).

Unterreiner, P., Frank, R., Schlosser, F. (1994). Modélisation des effets du gel sur les murs en sol cloué. *C. R. 13ème Congrès International de Mécanique des Sols et Travaux de Fondations*, New Delhi.

Unterreiner, P., Vardoulakis, I., Boulon, M. et Sulem, J. (1994). Interfacial localisation in Cosserat continua. *C.R 3ème Workshop International sur la théorie de la localisation et de la bifurcation dans les sols et les roches, Aussois, France.*

Vardaloukis I. et Unterreiner P. (1994). Localisation at interfaces in granular media with Cosserat microstructure, dans *Mechanics of Geomaterial Interfaces*, Selvadurai et Boulon éditeurs, Elsevier Science Publishers.

Vardoulakis, I. (1989). Shear-banding et liquefaction in granular material on the basis of a Cosserat continuum theory. *Ing. Arch.*, Vol. 59.

Vardoulakis, I. (1989). Shear-banding et liquefaction in granular materials on the basis of a Cosserat continuum theory. *Ing. Arch.*, Vol. 59.

Vardoulakis, I. et Aifantis, E. A. (1991). Gradient flow theory of plasticity for granular materials. *Acta Mechanica*, Vol. 87.

Vardoulakis, I. et Goldscheider, M. (1981). A biaxial apparatus for testing shear bands in soils. *C. R. 10ème CIMSTF*, Stockholm, Vol. 4.

Vardoulakis, I., et Aifantis, E. C. (1991). A gradient flow theory of plasticity for granular materials, *Acta Mech.*, Vol. 87.

Vardoulakis, I., Goldscheider, M., et Gudehus, G. (1978). Formation of shear bands in sand bodies as a bifurcation problem. *Int. J. for Numerical et Analytical Methods in Geomechanics,* Vol. 2.

Vardoulakis, I., Shah, K. R., et Papanastasiou, P. (1992). Modelling of Tool-Rock Shear Interfaces using Gradient dependent Flow Theory of Plasticity. International. *J. Rock Mech. Min. Science et Geomechanical Abstracts*. Vol. 29, No. 6.

Vengeon J.M. (1989). Murs cloués. Méthodes de calcul et suSceptibilité au gel. *Rapport de Fin d'Etudes*, sous la direction de M. Khizardjian. Ecole Centrale de Lyon, 1989.

Vesic, A. (1977). Design of pile foundations; *NCHRP report N°. 42.*

Vesic, A.S., et Clough, G.W. (1968). Behaviour of granular material under high stresses. *ASCE Journal of the Soil Mechanics et Foundations Division,* Vol. 94.

Voigt, W. (1887). Theoretische Studien uber die Elasticitatsverhaltnisse der Krystalle, *Abh. Ges. Wiss.*, Gottingen, Vol. 34.

Voigt, W. (1894). Uber Medien ohne innere Krafte und eine durch sie gelieferte mechanische Deutung der Maxwell-Hertzchen Gleichungen, *Gott. Abh.*

Vucetic, M. et Lacasse, S. (1982). Specimen size effect in simple shear test. *ASCE Journal of Geotechnical Engineering*, Vol. 108, No. 12.

Vucetic, M., et Lacasse, S. (1982). Specimen size effect in simple shear test. *ASCE. J. Geotech. Eng.*, Vol. 108, No. GT12.

Vyalov S.S. (1959). Rheological Properties et Bearing Capacity of Frozen Soils. *U. S. Army Cold Reg. Res. Eng. Lab. Trans., Vol. 74*, Hanover, N.H..

Vyalov S.S. (ed.). The strength et creep of frozen soils et calculation for ice-soil retaining structures, *U. S. Army Cold Reg. Res. Eng. Lab. Trans.*, Vol. 76, Hanover, N.H., 1962.

Vyalov S.S. Methods of determining creep, long-term strength et compressibility characteristics of frozen soils, *Technical Translation, National Research Council of Canada*, 1969.

Walton, K. (1987). The effective moduli of a random packing of spheres. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 35.

Weaver, J. S., et Morgenstern, N. R. (1981). Pile design in permafrost; *Can. Geotech. J.*, 18, pp. 357-370.

Wernick, E. (1978). Skin friction of cylindrical anchors in non-cohesive soils. *C. R. Symp. Int. Soil reinforcing et stabilising techniques*, Sydney, Australia.

Wernick, E. (1978). Stresses et strains on surface of anchors. *Revue Française de Géotechnique*, Vol. 3.

Wernick, E. (1978). Tragfähigkeit zylindrischer Anker in Sand unter besonderer Berücksichtigung des Dilatanzverbaltens, *Dr.-Ing. Dissertation*, Universität Karlsrube.

Wernick, E. (1979). A true direct shear apparatus to measure soil parameters of shear bands. *C. R. 7ème Conf. Europ. SIMSTF*, Design parameters in geotechnical engineering, BGS London, Vol. 2.

Wolfe, L. H., et Thieme, J. O. (1967). Physical et thermal Properties of frozen soils et ice, *Soc. Pet. Eng. Jour.*, 4(1).

Wu, W. (1990). A unified numerical integration formula for the perfectly pastic von Mises model, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 30.

Yang, J. F. C., et Lakes, R. S. (1981). Transient study of couple stress effects in human compact bone. *J. Biomechanical Engineering*, Vol. 103.

Yang, J. F. C., et Lakes, R.S. (1982). Experimental study of micropolar et couple-stress elasticity in bone in bending. *J. Biomechanics*, Vol. 15.

Yoder E.J. (1983) Principles of pavement design. John Wiley, N.Y.

Yoshimi, Y. et Kishida, T. (1981). A Ring Torsion Apparatus for Evaluating Friction Between Soil et Metal Surfaces. *Geotechnical Testing Journal*, Vol. 4, No. 4.

Yoshimi, Y. et Kishida, T. (1981). Friction between Sand et Metal Surface. *C. R. 10ème Conf. Int. Mech. Sols Trav. Fond.*, Vol. 1.

Yoshimi, Y. et Kishida, T. (1981). A ring torsion apparatus for evaluating friction between soil et metal surfaces. *Geotechnical Testing Journal*, Vol. 4, No. 4.

Zienkiewicz, O. C. (1971). *The finite element method in engineering science*. 2ème edition, McGraw-Hill.

Annexes

Annexe 1

EXEMPLE DE MILIEU DE COSSERAT : LES POUTRES

1 Introduction

Par souci de simplification, on ne s'intéressera qu'aux poutres planes, ce qui ne restreint pas la généralité des conclusions qui seront faites. Une approche similaire pourrait également être développée pour les coques et plaques.

Plusieurs théories de poutres existent. La première, qui est aussi la plus générale, est appelée modèle de poutre de Timoshenko (1968). Elle est basée sur l'hypothèse des sections droites pour définir le champ de déplacements virtuels. Cette théorie est la version unidimensionnelle du modèle de plaques et coques, associé aux noms de Reissner (1947) et de Mindlin (1951). Elle correspond à la théorie des poutres, dite du premier ordre : les déplacements sont au plus linéaires en z suivant l'épaisseur . Dans cette théorie, une poutre est modélisée comme un milieu continu unidimensionnel avec en chaque point la définition d'une microstructure indéformable, en l'occurrence la section, qui est supposée restée droite. En chaque point de la poutre, la cinématique est définie par 2 degrés de libertés en déplacement U_x , U_z et un degré de liberté en rotation ω_y.. L'hypothèse des sections droites est équivalente à supposer des déplacements linéaires en z suivant l'épaisseur. Ce modèle de poutre correspond à un milieu avec une microstructure rigide d'ordre un, c'est-à-dire un milieu de Cosserat.

On peut noter qu'il existe d'autres théories de poutre d'ordre supérieur avec des déplacements quadratiques, cubiques en z, etc. (Ladevèze et al., 1980; Reddy, 1984; Touratier, 1989). Dans de tels modèles, la microstructure est considérée comme déformable. En plus des deux déplacements de translation, il convient de définir en tous point des variables cinématiques de types microscopiques pour pouvoir raffiner les déformations de la section qui ne se réduisent pas à un simple mouvement de rotation.

2 Formulation d'une poutre épaisse

2.1 Caractéristiques de la poutre réelle

Pour développer le modèle de Timoshenko (1968), il convient de faire les hypothèses suivantes :

(1) l'axe de référence x est droit (hypothèse d'une poutre droite),
(2) le plan x z est plan principal d'inertie,
(3) la poutre se déforme dans le plan x z (en membrane, flexion et cisaillement) avec l'hypothèse des contraintes planes $\sigma_{yy} = 0$,
(4) la poutre peut avoir une section variable, pleine ou creuse, être à parois minces ou épaisses, et être constituée de matériaux homogènes ou composites.

2.2 Modèle de poutre

Le milieu continu modèle est unidimensionnel, c'est-à-dire toutes les quantités "macroscopiques" caractérisant la poutre et son comportement ne sont fonction que de la variable x (abscisse curviligne qui se réduit dans le cas présent à l'abscisse de l'axe de référence).

La géométrie est donc décrite par l'abscisse x qui varie entre 0 et L, et la section de la poutre en un point x, notée A(x).

La cinématique de la poutre modèle est décrite au niveau macroscopique par deux degrés de liberté en translation le déplacement normal U(x) et le déplacement transversal W(x) ainsi qu'un degré de liberté supplémentaire en rotation $\omega(x)$ (figure 1).

Au niveau de la microstructure, c'est-à-dire d'une section A(x) de la poutre d'abscisse x, la description de la cinématique est la suivante. Les points situés sur une section seront notés en minuscules tandis que ceux sur la poutre modèle seront notés en majuscules. Les déplacements du point p de la section, de coordonnées (x, z = 0), qui est situé sur l'axe de référence, sont directement reliés aux déplacements macroscopiques de la poutre par la relation :

$$\underline{u}_{p(x,0)} = U(x)\,\underline{e}_x + W(x)\,\underline{e}_z \tag{1}$$

où $\underline{e}_x$ et $\underline{e}_z$ sont les vecteurs unitaires suivants les axes locaux x et z.

Le déplacement d'un point q(x, z) quelconque de la section d'abscisse x , est écrit comme une fonction linéaire de z :

$$\underline{u}_{q(x,z)} = \underline{u}_{p(x,0)} + z\,\omega(x)\,\underline{e}_x \tag{2}$$

Cette formule vectorielle peut être écrite sous forme matricielle suivante :

$$\begin{vmatrix} u(x,z) \\ w(x,z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U(x) + z\,\omega(x) \\ W(x) \end{vmatrix} \tag{3}$$

Le choix d'un déplacement u(x, z) linéaire en z tandis que le déplacement w(x, z) ≡ w(x) est indépendant de z, traduit l'hypothèse des sections planes (microstructure indéformable) et correspond au modèle de poutre de Timoshenko.

Le terme $z\,\omega(x)$ représente le déplacement relatif du point q par rapport au point p dans la direction x, où p et q sont deux points sur la section de coordonnée x.

Le terme $\omega(x)$ est la rotation de la section [p, q] supposée indéformable. Il peut donc se calculer avec l'égalité suivante pour une ordonnée z non nulle quelconque :

$$\omega(x) = \frac{u(x,z) - u(x,z=0)}{z} \tag{4}$$

Notation : En général, toutes les variables de type macroscopique seront notées en majuscules tandis que celles de type microscopique seront notées en minuscules.

2.3 Expression du principe des travaux virtuels

Le travail des efforts intérieurs pour la poutre considérée comme un milieu continu tridimensionnel est de la forme :

$$W_{int} = \int_V (\varepsilon_{xx}\, \sigma_{xx} + 2\, \varepsilon_{xz}\, \sigma_{xz}) dV \tag{5}$$

car on a les hypothèses des contrantes planes ($\sigma_{yy} = 0$) et des sections droites.

Par souci de simplification, on notera les deux contraintes non nulles sous la forme suivante :

$$\sigma = \sigma_{xx} \tag{6}$$

$$\tau = \sigma_{xz} \tag{7}$$

Pour les variables cinématiques, il est intéressant de les réécrire sous la forme :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u(x,z)}{\partial x} = \frac{dU(x)}{dx} + z\frac{dw(x)}{dx} = e + z\,\chi \tag{8}$$

où :

$$e = \frac{dU(x)}{dx} \tag{9}$$

$$\chi = \frac{d\omega(x)}{dx} \tag{10}$$

et

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u(x,z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x,z)}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\left(\omega(x) + \frac{dW(x)}{dx}\right) = \frac{1}{2}\gamma \tag{11}$$

Le terme e est la déformation de membrane (extension/compression uni-axiale) tandis que γ est la déformation de cisaillement transversal. Le produit $z\,\chi$ représente la déformation de flexion avec χ courbure. La rotation par rapport à un repère fixe de la section A(x) est ω tandis que la rotation d'ensemble de la poutre, qui est donnée par la rotation de la surface de référence (z = 0) est égale à $\frac{\partial W(x)}{\partial x}$. La déformation de cisaillement γ représente donc la rotation relative de la section par rapport à la rotation de la fibre moyenne.

Afin de se ramener à un milieu continu unidimensionnel, il est nécessaire d'intégrer les contraintes normales $\sigma = \sigma_{XX}$ et de cisaillement $\tau = \sigma_{ZX}$ sur la section A(x), ce qui introduit les efforts N_x, T_z et M_y :

$$N_x = \int_A \sigma \, dA \tag{12}$$

$$T_z = \int_A \tau \, dA \tag{13}$$

$$M_y = \int_A z \, \sigma \, dA \tag{14}$$

où N_X est l'effort normal selon x et sera noté N, T_Z est l'effort tranchant suivant z et sera noté T, M_Y est le moment de flexion autour de y et sera noté M.

Avec ces notations, le travail des efforts intérieur pour une poutre épaisse s'écrit sous la forme suivante :

$$W_{int} = \int_0^L (e\,N + \gamma\,T + \chi\,M)\,dx \tag{15}$$

Cette expression peut être retrouvée par une approche systématique en partant d'une expression du travail des efforts intérieurs la plus générale possible et fonction linéaire des déplacements U, W de la rotation ω et de leurs dérivées premières : $\frac{dU}{dx}, \frac{dW}{dx}$ et $\frac{d\omega}{dx}$. Le principe d'invariance du travail des efforts virtuels pour tout mouvement de corps rigidifiant, impose de réécrire W_{int} sous la forme suivante :

$$W_{int} = \int_V \left\{ \left(\frac{dU}{dx}\right) N_x + \left(\omega + \frac{dW}{dx}\right) T_z + \left(\frac{d\omega}{dx}\right) M_y \right\} dV \tag{16}$$

où les variables statiques conjuguées aux différentes variables cinématiques ont été identifiées.

Les variables statiques conjuguées à la déformation de membrane e, à la déformation de cisaillement γ et à la courbure χ sont respectivement identifiées comme étant N_x l'effort normal, T_z l'effort tranchant et M_y le couple de flexion selon y.

Pour le calcul du travail des efforts extérieurs W_{ext} on ne considérera pas d'efforts volumiques ni surfaciques, ce qui réduit l'expression du travail W_{ext} à la plus simple expression :

$$W_{ext} = \left[U\,F_x + W\,F_z + \omega\,M_y \right]_{x=0,L} \tag{17}$$

où les forces F_x et F_z sont définies par :

$$F_x(x) = \int_{A(x)} f_x \, dA \tag{18}$$

$$F_z(x) = \int_{A(x)} f_z dA \tag{18}$$

tandis que le moment M_z est égal à :

$$M_y(x) = \int_{A(x)} z\, f_x\, dA \tag{20}$$

avec $f_x(z)$, $f_z(x)$: distributions des efforts normaux et tangentiels appliqués sur la facette A(x).

2.4 Equations d'équilibre

A partir du Principe des Puissances Virtuelles (formulation faible des équations d'équilibre), on déduit les équations d'équilibre (formulation forte) qui s'écrivent dans le cas présent :

$$N_{x,x} = 0 \tag{21}$$

$$T_{z,x} = 0 \tag{22}$$

$$M_{y,x} = 0 \tag{23}$$

avec comme conditions aux limites en x = 0 :

$$- N = F_x \text{ ou } U = \overline{U} \tag{24}$$

$$- T = F_z \text{ ou } W = \overline{W} \tag{25}$$

$$-M = \mathcal{M} \text{ ou } \omega = \overline{\omega} \tag{26}$$

et en x = L :

$$- N = F_x \text{ ou } U = \overline{U} \tag{27}$$

$$- T = F_z \text{ ou } W = \overline{W} \tag{28}$$

$$- M = \mathcal{M} \text{ ou } \omega = \overline{\omega} \tag{29}$$

2.5 Correspondance entre les déplacements macroscopiques et microscopiques

Dans le cas d'une poutre homogène isotrope on cherche la correspondance entre d'une part, les déplacements macroscopiques U(x) et W(x) défini en un point P d'abscisse x du milieu unidimensionnel macroscopiques, et d'autre part les déplacements microscopiques u(x,z) et w(x,z) en un point p de coordonnées (x,z) de la microstructure, c'est à dire de la section.

Dans une poutre isotrope ou composite, de forme quelconque, l'axe x est l'axe neutre si la condition suivante est respectée :

$$M_{mfy} = \int_{A(x)} z\, E(y,z)\, dy\, dz = 0 \tag{30}$$

$$M_{mfz} = \int_{A(x)} y\, E(y,z)\, dy\, dz = 0 \tag{31}$$

Sur une section A(x), le point 0 est centre de gravité si la condition suivante est respectée :

$$\int_{A(x)} z\, \rho\,(y,z)\, dy\, dz = \int_{A(x)} y\, \rho(y,z)\, dy\, dz = 0 \tag{32}$$

Des deux définitions précédentes, il résulte que dans le cas d'un matériau homogène, l'axe neutre passe par le centre de gravité. Si O_x est axe neutre alors un moment M_y (ou M_z) ne produit pas de déformations axiales au point 0 centre de gravité (figure 2). Inversement, un effort normal N_x appliqué en 0 ne produit que des déformations axiales constantes sur la section et donc pas de moment M_y ou M_z.

Dans le cas général, les déplacements "macroscopiques" U(x), W(x) qui permettent de définir la cinématique en un point matériel P d'abscisse x sur la poutre modélisée comme un milieu continu unidimensionnel, sont égaux aux déplacements "microscopiques" u(x, z) et w(x, z) du point matériel p de la section A(x), situé sur l'axe neutre O_x et d'ordonnée z = 0 :

$$U(x) = u(x, z = 0) \tag{33}$$

$$W(x) = w(x, z = 0) \tag{34}$$

Dans le cas général, que la poutre soit homogène ou non, les déplacements moyens d'une section A(x) : $<u(x,z)>_{z\in A(x)}$ et $<w(x,z)>_{z\in A(x)}$ sont égaux aux déplacements du centre de gravité G de la section A(x) :

$$\langle u(x,z)\rangle_{z\in A(x)} = u(x, z_{G}) = U(x) + z_{G}\, W(x) \tag{35}$$

$$\langle w(x,z)\rangle_{z\in A(x)} = w(x, z_{G}) = W(x) \tag{36}$$

Comme dans le cas d'une poutre homogène, l'axe neutre passe par les centres de gravité des sections, les déplacements macroscopiques U(x) et W(x) sont égaux aux déplacements microscopiques du centre de gravité de la section, ils peuvent donc être interprétés comme les déplacements microscopiques moyens de la section A(x) :

$$U(x) = < u(x,z) >_{z\in A(x)} \tag{37}$$

$$W(x) = < w(x,z) >_{z\in A(x)} \tag{38}$$

On peut remarquer que ces déplacements peuvent ne pas correspondre à un point matériel de la poutre si le centre de gravité n'est pas lui-même un point réel.

La rotation $\omega(x)$ est de type microscopique car elle correspond à la rotation de la section (microstructure) par rapport à un repère fixe et se calcule à partir du champ de déplacement propre de la microstructure :

$$w(x) = \frac{u(x,z) - u(x,z=0)}{z} \tag{39}$$

2.6 Cas limite d'une barre

Le cas limite d'une barre peut être retrouvé indépendamment de toutes hypothèses sur le comportement. Par définition, une barre ne transmet que des efforts normaux N_x L'effort transversal T_z est donc nul. Les 3 équations d'équilibre d'une poutre se réduisent à deux équations :

$$N_{x,x} = 0 \tag{40}$$

$$M_{y,x} = 0 \tag{41}$$

Comme d'autre part, une barre est reliée à ses extrémités à d'autres éléments ou au milieu extérieur (appuis) par des articulations ou rotules (moment nul), il en résulte que le moment M_y est constant et nul dans une barre.

Une autre manière de retrouver le cas d'une barre en prenant en compte le comportement, est de supposer que sur toutes les section $A(x)$, $x \in [O, L]$, la contrainte normale est uniforme (σ ne dépend pas de z). Il en résulte que le moment M_y est nul pour tout $x \in [O, L]$:

$$M_y = \int_{A(x)} z\,\sigma(x)\,dz = \sigma(x) \int_{A(x)} z\,dz = 0 \tag{42}$$

car $z = 0$ est centre de gravité. De plus, d'après les équations d'équilibre $T_z = M_{y,x} = 0$. La poutre ne transmet donc que des efforts normaux N_x.

L'existence d'un moment non nul dans une poutre est donc directement relié à la non uniformité de la contrainte normale σ_{xx} sur une section, c'est à dire sur la microstructure. Ce résultat est indépendant de la loi de comportement.

3 Loi de comportement d'une poutre

3.1 Définitions

On considère la loi de comportement élastique :

$$\sigma(x,z) = E(x,z)\,\varepsilon + \sigma_0(x,z) \tag{43}$$

$$\tau(x,z) = G(x,z)\,\gamma + \tau_0(x,z) \tag{44}$$

avec :

$$\sigma = \sigma_{xx} \tag{45}$$

$$\tau = \sigma_{xz} = \sigma_{zx} \tag{46}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u(x,z)}{\partial x} = \frac{dU(x)}{dx} + z\frac{d\beta(x)}{dx} = e + z\chi \tag{47}$$

$$\gamma = \frac{\partial u(x,z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x,z)}{\partial z} = \beta(x) + \frac{dW(x)}{dx} \tag{48}$$

Au niveau d'une section, il convient d'utiliser les dérivées partielles $\partial/\partial x$ et $\partial/\partial z$ (microstructure bidimensionnelle). Par contre, au niveau de la poutre modélisée comme un milieu unidimensionnel, les dérivées droites d/dx doivent être utilisées.

La loi de comportement exprimée en efforts est alors :

$$N = H_m\,e + H_f\,\chi + N_0 \tag{49}$$

$$M = H_{mf}\,e + H_f\,\chi + M_0 \tag{50}$$

$$T = H_c\,\gamma + T_0 \tag{51}$$

avec les définitions suivantes :

$$H_m(x) = \int_{A(x)} E(x,z)\,dA \tag{52}$$

$$H_{mf}(x) = \int_{A(x)} z\,E(x,z)\,dA \tag{53}$$

$$H_f(x) = \int_{A(x)} z^2\,E(x,z)\,dA \tag{54}$$

$$H_c = k\,\overline{H}_c \tag{55}$$

$$\overline{H}_c(x) = \int_{A(x)} G(x,z)dA \tag{56}$$

avec

H_m : rigidité de membrane
H_f : rigidité de flexion
H_{mf} : rigidité due au couplage de membrane et de flexion
H_c : rigidité de cisaillement transversal
k : facteur de correction du cisaillement transversal

L'axe de référence Ox est neutre si $H_{mf} = 0$. Dans ce cas un effort normal N_x ne produit qu'une déformation axiale de membrane e et un moment M_y ne produit qu'une courbure χ.

Les efforts résultants initiaux sont :

$$N_0(x) = \int_{A(x)} \sigma_0(x,z)\, dA \tag{57}$$

$$T_0(x) = \int_{A(x)} \tau_0(x,z)\, dA \tag{58}$$

$$M_0(x) = \int_{A(x)} \sigma_0(x,z)\, z\, dA \tag{59}$$

3.2 Interprétation

La déformation de cisaillement transversal γ est, du fait des hypothèses sur la cinématique de la microstructure supposée indéformable (hypothèse des sections droites), constante à travers l'épaisseur de la poutre A(x) en tout point d'abscisse x.

$$\gamma(x,z) \equiv \gamma(x) = \beta(x) + \frac{dW(x)}{dx} \tag{60}$$

Pour une poutre homogène, G(x, z) est constant sur les sections A(x) le long de la poutre $x \in [0,L]$. Il en résulte que le cisaillement τ, égal à σ_{xz} par définition, est constant dans les sections. Cette distribution de cisaillement ne respecte pas les conditions aux limites de cisaillement nul pour les fibres inférieure et supérieure (figure 3).

Cette limitation peut être compensée au niveau du comportement de la poutre en introduisant le facteur de correction k , qui est alors défini de manière à satisfaire un critère donné. Un premier critère qui peut être considéré est de calculer k pour que le cisaillement τ en z = 0 sur l'axe neutre dans le modèle du 1er ordre (Mindlin, 1951) soit le même que dans le modèle "exact" (Timoshenko, 1968).

Batoz et Dhatt (1990) proposent de choisir k pour que l'énergie interne de cisaillement associée à la distribution théorique exacte soit égale à l'énergie associée au modèle du 1er ordre (modèle de Mindlin). Le choix de ce facteur k, qui permet d'assurer le passage micro/macro d'une certaine manière, est hors de portée du sujet traité.

Il est à remarquer que la distribution théorique du cisaillement τ pour une section rectangulaire homogène isotrope est quadratique en z (figure 3). Pour modéliser une telle distribution, il faut recourir à un milieu continu avec une microstructure déformable (Ladevèze et al., 1980; Reddy, 1984; Touratier, 1989). De telles théories font alors intervenir des variables cinématiques supplémentaires par rapport à U(x), W(x) et β(x). La cinématique de la microstructure, c'est à dire d'une section est enrichie pour tenir compte des déformations de celle-ci.

3.3 Cas d'un matériau isotrope homogène

Le cisaillement $\tau = \sigma_{xz}$ est constant sur une section A(x) puisque la déformation γ l'est aussi.

Pour ce qui concerne la contrainte normale $\sigma = \sigma_{xx}$, comme la déformation ε est linéaire en z, il en résulte que σ est distribuée linéairement sur une section A(x) quelconque :

$$\sigma(x,z) = \sigma_0(x,z) + E\left[\frac{dU(x)}{dx} + z\frac{d\beta(x)}{dx}\right] \tag{61}$$

Dans le cas d'une section rectangulaire, que l'on prendra de largeur unité et de hauteur h, les efforts N_x, T_z et M_y sont directement reliés aux contraintes σ, τ. Comme l'axe neutre Ox passe par les centres d'inertie des sections on obtient :

$$N_x = \int_{A(x)} \sigma(x,z)dz = \int_{A(x)} \left[\frac{dU(x)}{dx} + z\frac{d\beta(x)}{dx}\right]dz = E\left\{\frac{dU(x)}{dx}\int_{A(x)} dA + \frac{d\beta(x)}{dx}\int_{A(x)} z\,dA\right\} = E\,A\,\frac{dU(x)}{dx} = E\,A\,e \tag{62}$$

Si l'on n'introduit pas le facteur de cisaillement, on trouve la relation suivante :

$$T_z = \int_{A(x)} \tau(x,z)dz = \int_{A(x)} G\,\gamma(x,z)\,dz = \int_{A(x)} G\left[\beta(x) + \frac{dW(x)}{dx}\right]dz = G\,A\left[\beta(x) + \frac{dW(x)}{dx}\right] = G\,A\,\gamma \tag{63}$$

Après introduction du facteur de correction k pour le cisaillement transversal, on obtient pour l'effort de cisaillement :

$$T_z = k\,G\,A\,\gamma \tag{64}$$

Pour le couple on obtient :

$$M_y = \int_{A(x)} \sigma(x,z)\, z\, dz = \int_{A(x)} z\, E \left[\frac{dU(x)}{dx} + z \frac{d\beta(x)}{dx} \right] dz = E\, I\, \frac{d\beta(x)}{dx} \tag{65}$$

avec :

$$A(x) = \int_{A(x)} dA \tag{66}$$

$$I(x) = \int_{A(x)} z^2\, dA \tag{67}$$

Les équations de comportement en terme de forces N_x , T_z et moment M_y sont alors :

$$N_x = E\, A\, \frac{dU(x)}{dx} \tag{68}$$

$$T_z = G\, A \left[\beta(x) + \frac{dW(x)}{dx} \right] \tag{69}$$

$$M_y = E\, I\, \frac{d\beta(x)}{dx} \tag{70}$$

On peut remarquer que sur une section A(x), le cisaillement $\tau(x, z)$ est constant et égal à :

$$\tau(x,z) \equiv \tau(x) = \frac{T(x)}{A(x)} \tag{71}$$

tandis que la contrainte normale σ_{xx} varie linéairement en z :

$$\sigma(x,z) = \frac{N_x(x)}{A(x)} + z\, \frac{M_y(x)}{I(x)} \tag{72}$$

Une distribution uniforme de σ_{xx} est équivalente à un moment M(x) nul.

Il est à remarquer, que sur un volume élémentaire (dx * a * b), les contraintes de cisaillement σ_{zy} et σ_{xz} sont constantes sur chaque facette mais différentes. Cependant, ce n'est pas ce point particulier qui engendre des moments de flexion. C'est la distribution non uniforme de σ_{xx} sur les sections qui est à l'origine du moment M_y.

4 Cisaillement d'une poutre de section homogène isotrope et constante

4.1 Solution générale

Les équations d'équilibre sont :

$$N_{x,x} = 0 \tag{73}$$

$$T_{z,x} = 0 \tag{74}$$

$$M_{y,x} - T_z = 0 \tag{75}$$

La loi de comportement est linéaire élastique :

$$N_x = E\,A\,\frac{dU(x)}{dx} \tag{76}$$

$$T_z = G\,A\left[\beta(x) + \frac{dW(x)}{dx}\right] \tag{77}$$

$$M_y = E\,I\,\frac{d\beta(x)}{dx} \tag{78}$$

Il y a découplage entre d'une part, le déplacement normal U, la contrainte normale σ_{xx}, l'effort normal N_x et d'autre part, les autres variables.

L'effort normal N_x est constant dans la poutre :

$$N(x) = \text{constante} \tag{79}$$

et le déplacement U(x) est linéaire :

$$U(x) = U(0) + x\,[U(L)-U(0)]\,/\,L \tag{80}$$

Le cisaillement T_z est constant dans la poutre :

$$T_z(x) \equiv T_z(0) \tag{81}$$

Il en résulte que le moment $M_y(x)$ est linéaire en x :

$$M_y(x) = M_y(0) + T_z(0)\,x \tag{82}$$

La solution en déplacement tangentiel est cubique en x tandis que la rotation β est quadratique en x :

$$\beta(x) = \beta(0) + x\frac{M_y(0)}{EI} + \frac{x^2}{2}\frac{T_z(0)}{EI} \tag{83}$$

$$W(x) = W(0) - x\,\beta(0) + x\frac{T_z(0)}{GA} - \frac{x^2}{2}\frac{M_y(0)}{EI} - \frac{x^3}{6}\frac{T_y(0)}{EI} \tag{84}$$

On peut remarquer que la déformation relative ω + dW(x)/dx est constante le long de la poutre :

$$\beta(x) + \frac{dW(x)}{dx} \equiv \text{constante} \tag{85}$$

4.2 Exemple de jeu de conditions aux limites

On considère le jeu de conditions suivant en "interface" :

$$W(0) > 0 \tag{86}$$

$$M(0) > 0 \tag{87}$$

et sur la face supérieure :

$$W(L) = 0 \tag{88}$$

$$M(L) = 0 \tag{89}$$

4.2.1 Solution

La solution en variables statiques est alors :

$$M(x) = M(0)\,[L - x] / L \tag{90}$$

$$T(x) = T(0) = -\,M(0) / L \tag{91}$$

La solution en variables cinématiques est :

$$\beta(x) = \beta(0) + M_y(0)\left\{\frac{x}{EI} - \frac{x^2}{2\,EIL}\right\} \tag{92}$$

$$W(x) = W(0) - x\,\beta(0) - M_y(0)\left\{\frac{x}{GAL} + \frac{x^2}{2\,EI} - \frac{x^3}{6\,EIL}\right\} \tag{93}$$

avec le moment M(0) égale à :

$$M(0) = \frac{W(0) - \beta(0)\, L}{\frac{1}{G\,A} + \frac{L^2}{3\,E\,I}} \tag{94}$$

Tableau 1 : Conditions aux limites étudiées pour une poutre

conditions aux limites	x = 0 (encastrement en translation et rotation)	x = L (rotule fixe en translation)
selon la direction z	W(0) > 0	W(L) = 0
selon la direction y	M(0) > 0	M(0) = 0

Pour le jeu de conditions aux limites étudié, il suffit de changer la condition aux limites en M(0) > 0 et de la prendre égale à M(0) = 0 pour obtenir la solution d'une barre. La condition en moment M(L) = 0 correspondant déjà au cas d'une barre.

La rotation relative définie par $\omega + dW/dx$ est constante le long de la poutre et égale dans le cas présent à :

$$\beta(x) + \frac{dW(x)}{dx} = \text{constante} = -\frac{M(0)}{G\,A\,L} = \frac{\beta(0) - \frac{W(0)}{L}}{1 + \frac{G\,A\,l^2}{3\,E\,I}} \tag{95}$$

La solution trouvée est égale à celle d'une barre (déplacements linéaires) plus des termes nouveaux proportionnels à la rigidité de la poutre et à l'expression $\beta(0)$ - W(0) / L . Ce terme s'interprète comme une "rotation relative" au point 0 , c'est à dire comme la différence de rotation entre la rotation propre $\beta(0)$ du cas présent et la rotation qu'aurait une barre pour les mêmes conditions aux limites en W(0) > 0 et W(L) = 0.

Si l'on force la poutre à se comporter en 0 comme se comporterait une barre, la poutre se comporte alors comme une barre. Pour ce faire on a le choix entre imposer une rotation relative nulle ou imposer un moment nul en 0. Ces deux conditions aux limites se trouvant être tout à fait équivalentes puisque M(0) est proportionnel à "la rotation relative" en 0 définie précédemment.

4.2.2 Comparaison avec un milieu de Cosserat

Ces différences entre une barre et une poutre sont similaires aux différences qui existent entre un milieu continu classique et un milieu continu de Cosserat. Dans les deux, l'introduction d'une rigidité et donc d'une longueur interne dans la loi de comportement de la poutre ou du milieu de Cosserat, rajoute dans la solution des termes nouveaux par rapport à la solution pour une barre ou un milieu continu classique. Ces nouveaux termes, du moins pour les jeux de conditions aux limites sélectionnés dans la présente annexe et dans l'annexe sur le cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat linéaire élastique , sont proportionnels à :

$$\omega^c(I) - \frac{U_1(I)}{2\,H} = \omega^c(I) - \frac{1}{2}\frac{dU_1}{dx_2} \text{ (en I pour la solution classique)} \qquad (97)$$

dans le cas du milieu de Cosserat, et proportionnels à :

$$\beta(x) + \frac{W(0) - W(L)}{0 - L} = \beta(x) + \frac{dW}{dx} \text{ (en 0 pour la solution d' une barre)} \qquad (98)$$

4.3 Cas limite d'une barre, retrouvé pour un jeu de conditions aux limites

Il existe plusieurs jeux de conditions aux limites qui induisent un comportement de la poutre égal à celui d'une barre.

4.3.1 Moment nul en O

Le cas limite d'une barre peut être atteint si en conditions aux limites on impose un moment nul aux deux extrémités O et L :

$$M_y(0) = M_y(L) = 0 \qquad (99)$$

Il en résulte que M_y et T_z sont nuls pour tout x.

La rotation β est constante et égale à la dérivée de W , qui est par ailleurs linéaire :

$$\beta(x) = \beta(0) \qquad (100)$$

$$W(x) = W(0) - \beta(0)\, x \qquad (101)$$

$$\beta(x) = \frac{dW(x)}{dx} = \frac{dW(0)}{dx} = \beta(0) \qquad (102)$$

4.3.2 Rotation relative nulle en O ou L

Une autre solution est d'imposer en x = 0 et x = L , que la section A(x) tourne avec le mouvement d'ensemble de la poutre, c'est-à-dire que la rotation relative de la section par rapport à la poutre soit nulle :

$$\beta(x) + \frac{dW(x = 0 \text{ ou } L)}{dx} = 0 \qquad (103)$$

Il en résulte, comme cette rotation relative est constante pour un comportement élastique de la barre, qu'elle est nulle partout. De plus, le cisaillement T_z devient nul partout.

Il suffit donc d'imposer en un point x , une rotation relative nulle , pour qu'elle soit nulle partout. Il reste donc une seconde condition aux limites à introduire pour déterminer le moment M_y qui n'est pas fixé pour l'instant.

La solution en rotation β est linéaire en x :

$$\beta(x) = \beta(0) + x\, M_v(0) / E\, I \qquad (104)$$

et le déplacement tangentiel W est quadratique en x :

$$W(x) = W(0) - x\, \beta(0) - x^2 \frac{M(0)}{2\, E\, I} \qquad (105)$$

Ils vérifient en tout point l'égalité suivante :

$$\beta + dW/dx = 0 \qquad (106)$$

qui signifie que la rotation relative est nulle et qui caractérise un milieu de Cosserat avec contrainte interne.

Si l'on compare cette solution en déplacement tangentiel, par rapport à celle d'une barre, il y a un terme quadratique en x supplémentaire qui n'est nul que si l'on introduit des conditions aux limites qui force la poutre à se comporter comme une barre. Plusieurs choix de seconde condition aux limites sont possibles.

4.3.2.1 Rotation β constante dans la poutre

Le comportement d'une barre est caractérisé par une rotation du milieu dW/dx constante c'est à dire aussi un déplacement tangentiel linéaire. Imposer une rotation de milieu nul en O permet de retrouver le comportement d'une barre :

$$\beta(0) = 0 \qquad (107)$$

4.3.2.2 Rotation en 0 égale à la moyenne des déplacements tangentiels entre 0 et L

$$[\, W(L) - W(0) \,] / L = \beta(0) \qquad (108)$$

4.3.2.3 Moment M nul en 0 ou en L

$$M_v(0) = 0 \qquad (109)$$

ou

$$M_v(L) = 0 \qquad (110)$$

5 Poutre avec contrainte interne sur la rotation relative

On peut s'intéresser au cas limite d'une poutre où $\beta(x)$, degré de liberté en rotation de la section A(x), est assujetti à suivre la rotation d'ensemble de la poutre -dW/dx , c'est-à-dire imposer la relation suivante sur la rotation relative, ce qui correspond au modèle de Navier / Bernouilli (figure 4) :

$$\beta + dW / dx = 0 \qquad (111)$$

Comme cette rotation relative est constante le long d'une poutre homogène quelles que soient les conditions aux limites, il suffit de l'imposer nul en x = 0 ou x = L, pour qu'elle soit nulle partout.

Au niveau de la cinématique, la différence essentielle entre une poutre et un milieu de Cosserat (cisaillement simple plan) réside dans le champ de rotation relative autorisé par le comportement. Pour une poutre, la déformation relative $\beta + dW / dx$ est constante alors que pour un milieu de Cosserat, elle varie en exponentielle de $\pm \alpha x_2 / R$.

La solution en variables statiques pour une poutre mince est alors :

$$M_y(x) = M_y(0) \qquad (112)$$

$$T_z(x) = 0 \qquad (113)$$

et en variables cinématiques :

$$\beta(x) = \beta(0) + x M_y(0) / E I \qquad (114)$$

$$W(x) = W(0) - x \beta(0) - x^2 M_y(0) / 2 E I \qquad (115)$$

La solution en déplacement décroît plus vite que la solution pour une barre du fait du terme quadratique en x_2 dont le coefficient est proportionnel à $M_y(0)$.

Si la microstructure est sollicitée en x = 0, c'est-à-dire si on impose un moment M(0) non nul (cas d'une poutre), alors la décroissance en W sera plus rapide que si M(0) était nul (cas d'une barre).

Dans le cas du cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat avec contrainte interne sur la rotation relative $\varepsilon_{12}^a = 0$, on retrouve la solution du milieu classique, car l'hypothèse prise sur la rotation relative est très forte comparée au cas d'une poutre mince. Un milieu de Cosserat avec contrainte interne n'apporte rien dans ce cas là.

Dans le cas d'une poutre mince, c'est à dire d'une poutre épaisse avec contrainte interne, la solution en cisaillement ne se réduit pas à celle d'une barre.

L'explication d'une telle différence s'explique par les champs de déplacement et rotation autorisés. Dans une poutre, la rotation relative $\beta + dW / dx$ est constante.

L'imposer nulle ne fixe qu'une constante. Il reste une constante non fixée, par exemple le moment M(0).

Par contre dans le cas du cisaillement plan d'un milieu de Cosserat élastique, le champ en rotation relative ε_{12}^{a} est plus riche. Il est en exponentielle de $\pm \alpha x_2 / R$. L'imposer nul détermine deux constantes, ce qui est beaucoup plus contraignant que dans le cas d'une poutre et on retombe automatiquement sur la solution classique.

6 Correspondances entre une poutre (milieu de Cosserat unidimensionnel) et un milieu de Cosserat tridimensionnel

Les tableaux ci-dessous résument les correspondances qui peuvent être faites entre les différentes variables cinématiques et statiques ainsi que les équations d'équilibre entre une poutre épaisse et un milieu de Cosserat tridimensionnel.

Ce qui caractérise un milieu de Cosserat ou une poutre épaisse, par rapport à un milieu continu classique ou une barre, c'est l'introduction, en plus du champ de déplacement macroscopique (U_1, U_2, U_3) ou (U, W) , de quantités cinématiques nouvelles, en l'occurrence la rotation de la microstructure, ω_{ij}^{c} ou β, qui permettent de définir le champ de déplacements, u_i ou (u, w) au niveau de la microstructure supposée rigide indéformable.

Tableau 2 : Correspondance entre les déformations et courbures pour une poutre épaisse et un milieu de Cosserat

Déformations et courbures	Poutre épaisse	Milieu de Cosserat
variables macroscopiques	déformation de membrane (extension/compression uni-axiale) $e = \frac{dU(x)}{dx}$	déformations symétriques $\varepsilon_{ij}^{s} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)$
variables relatives	déformation de cisaillement $\gamma = \frac{dW(x)}{dx} + \beta(x)$	déformations antisymétriques $\varepsilon_{ij}^{a} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) - \omega_{ij}^{c}$
variables microscopiques	courbure $\chi = \frac{d\beta(x)}{dx}$ déformation de flexion $z\chi$	courbure $\kappa_{ij} = \frac{\partial \omega_i^{c}}{\partial x_j}$

Tableau 3 : Correspondances entre les efforts dans une poutre épaisse et les contraintes et les couples contraintes dans un milieu de Cosserat

Efforts intérieurs	Poutre épaisse (efforts)	Milieu de Cosserat (tenseurs)
variables macroscopiques	effort normal N_x	contraintes symétriques (tenseur de Cauchy) σ^s_{ij}
variables relatives	effort tranchant T_z	contraintes antisymétriques σ^a_{ij}
variables microscopiques	moment de flexion M_v	couples contraintes μ_{ij}

Tableau 4 : Correspondances entre les équations d'équilibre dans une poutre épaisse et celles dans un milieu de Cosserat

Equations d'équilibre	Poutre épaisse*	Milieu de Cosserat**
Direction normale x ou x_2	$N_{x,x} = 0$	$\sigma^s_{22,2} = 0$
Direction tangentielle z ou x_1	$T_{z,x} = 0$	$\sigma^s_{12,2} + \sigma^a_{12,2} = 0$
Direction perpendiculaire au plan de la page y ou x_3	$M_{v,x} = 0$	$\mu_{32,2} - 2\,\sigma^a_{12} = 0$

Nota : * la poutre est cisaillée sans chargement surfaciques
** le milieu de Cosserat est soumis à un cisaillement simple plan

Tableau 5 : Calcul des champs de déplacements à l'intérieur de la microstructure à partir des variables macroscopiques

	Poutre épaisse	Milieu de Cosserat
Coordonnées dans le milieu macroscopique Déplacements macroscopiques	coordonnée dans le milieu macroscopique x champ de déplacements $U(x)$ et $W(x)$	coordonnées dans le milieu macroscopique x_i champ de déplacements $U_i(x_i)$
Champs des déplacements à l'intérieur de la microstructure : déplacements microscopiques	$u(x,z)$ et $w(x,z)$ $u(x,z) = U(x) + z\,\beta(x)$ $w(x,z) = W(x)$	$u_i(x'_i)$ $u_i(x'_i) = U_i(x_i) + \omega_{ij}^c (x'_i - x_i)$
Gradient des déplacements microscopiques : rotation propre de la microstructure	$\beta(x) = \dfrac{\partial u(x,z)}{\partial z}$	$\underline{\underline{\mathrm{grad}_{\mathrm{local}}}}(\underline{u}) = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} = \omega_{ij}^c$
Rotation d'ensemble du milieu macroscopique	$-\dfrac{dW(x)}{dx}$	$\Omega_{ij} = U^a_{i,j} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial U_i}{\partial x_j} - \dfrac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)$
Rotation relative entre la microstructure et le milieu macroscopique	cisaillement $\gamma(x) = \beta(x) + \dfrac{dW(x)}{dx}$	rotation ou déformation relative $\varepsilon^a_{ij} = \Omega_{ij} - \omega^c_{ij} = U^a_{i,j} - \omega^c_{ij}$

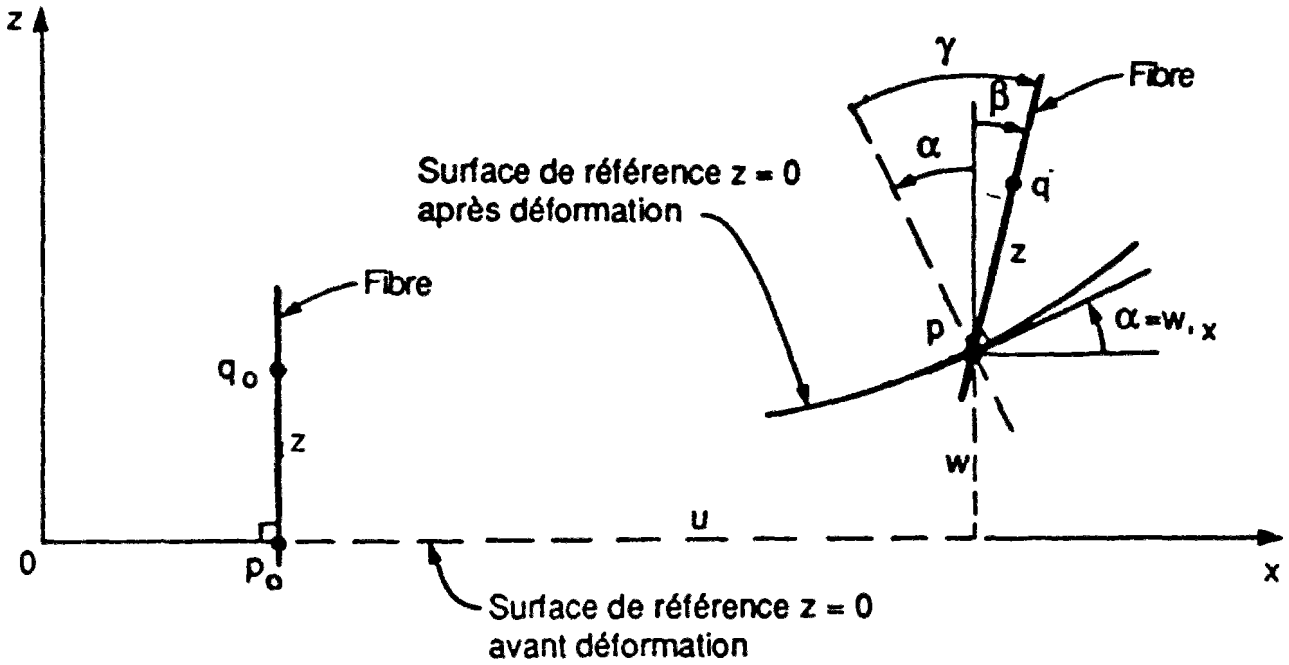
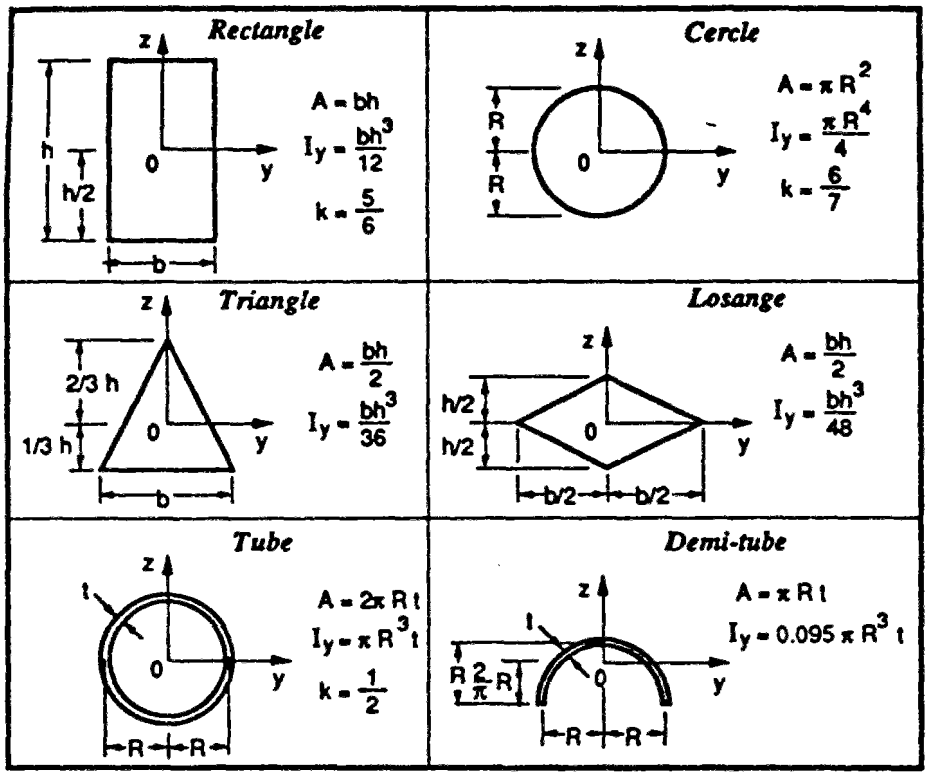


Figure 1 : Rotation d'une fibre dans le modèle de poutre de Timoshenko (1968)



Note: La position de 0, les directions et inerties principales des sections en I, H, U, L et T sont généralement fournies dans les catalogues de produits longs

Figure 2 : Centre de gravité O, directions et inerties principales pour des poutres homogènes de sections diverses

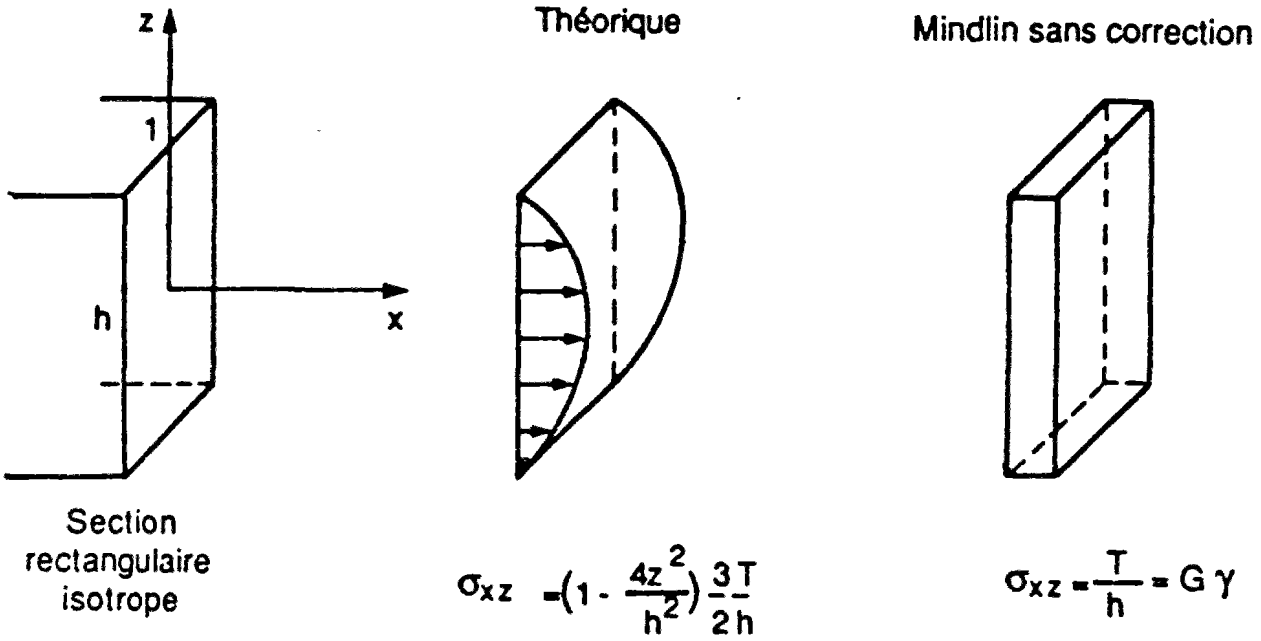


Figure 3 : Distribution des contraintes sur une section de la poutre

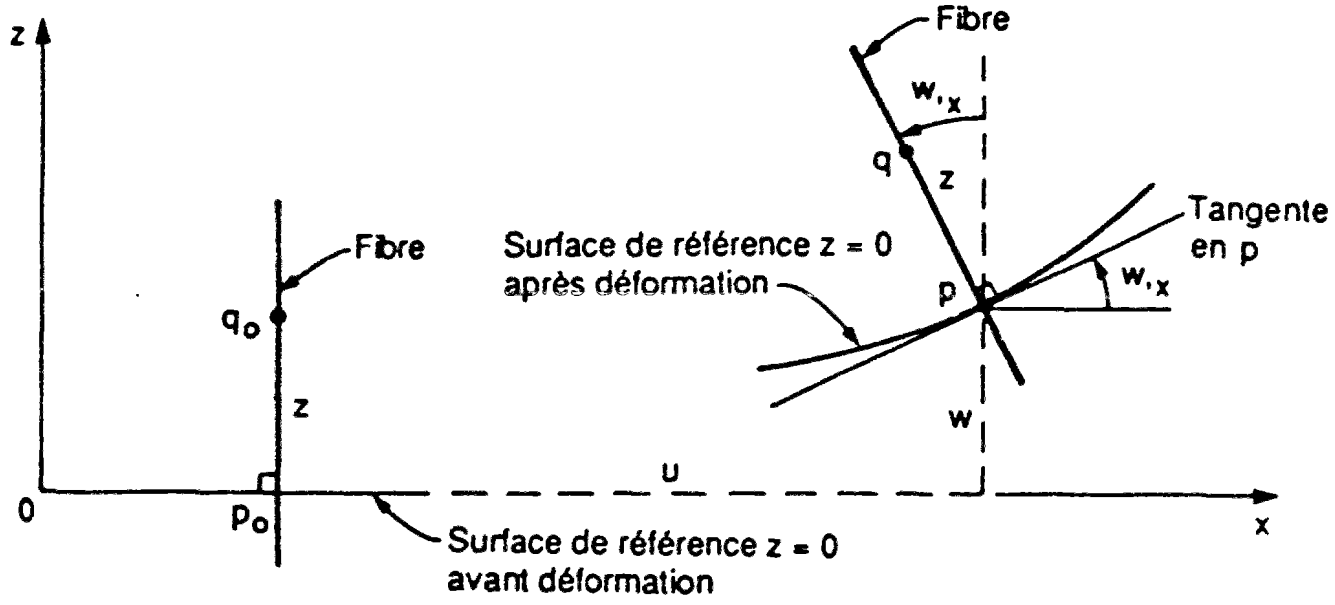


Figure 4 : Rotation d'une fibre dans le modèle de poutre de Navier / Bernouilli

Annexe 2

Dérivations des équations d'équilibre d'un milieu continu de Cosserat à partir de la statique

1 Introduction

Dans les lignes qui suivent, nous dériverons les équations d'équilibre d'un milieu de Cosserat en considérant l'équilibre statique d'un volume élémentaire soumis à des forces et des couples contraintes. Les calculs seront effectués pour un milieu bidimensionnel, mais cela ne restreint pas la généralité du raisonnement, ni des résultats obtenus.

2 Milieu continu où les efforts intérieurs sont réduits à des forces contraintes

Considérons un carré de taille (dx , dy) dans un milieu continu où les seuls efforts intérieurs sont des forces contraintes, plus couramment appelées contraintes (figure 1). Ce volume élémentaire est soumis à un ensemble de forces, qui peuvent se calculer facilement à partir des contraintes, et nous étudierons l'équilibre global de ce volume.

2.1 Conditions d'équilibre en forces

2.1.1 Equations exactes

La condition d'équilibre en forces selon la direction x est donnée par l'équation suivante :

$$\int_{y-\frac{dy}{2}}^{y+\frac{dy}{2}}\left[\sigma_{xx}\left(x+\frac{dx}{2},y\right)-\sigma_{xx}\left(x-\frac{dx}{2},y\right)\right]dy+\int_{x-\frac{dx}{2}}^{x+\frac{dx}{2}}\left[\sigma_{xy}\left(x,y+\frac{dy}{2}\right)-\sigma_{xy}\left(x,y-\frac{dy}{2}\right)\right]dx=0 \qquad (1)$$

De façon similaire, on pourrait écrire la condition d'équilibre en forces selon la direction y, en alternant les x et y.

2.1.2 Développement en série de Taylor à l'ordre 0

A l'ordre 0 , on peut développer les variables de la façon suivante :

$$\sigma_{ij}(x+dx\ ,\ y+dy)=\sigma_{ij}(x,y)\ +o(dx^0,\ dy^0) \qquad (2)$$

A l'ordre 0 , les deux conditions d'équilibre sont satisfaites automatiquement.

2.1.3 Développement en série de Taylor à l'ordre 1

A l'ordre 1 , on peut développer les variables de la façon suivante :

$$\sigma_{ij}(x+dx\ ,\ y+dy)=\sigma_{ij}(x,y)\ +dx\,\frac{\partial\sigma_{jj}(x,y)}{\partial x}\ +dy\,\frac{\partial\sigma_{jj}(x,y)}{\partial y}+o(dx^1,\ dy^1) \tag{3}$$

La condition d'équilibre en forces selon la direction x , développée à l'ordre 1 , donne la relation suivante :

$$\int_{y-\frac{dy}{2}}^{y+\frac{dy}{2}}\left[\left(\frac{dx}{2}\right)\frac{\partial\sigma_{xx}(x,y)}{\partial x}-\left(\frac{-dx}{2}\right)\frac{\partial\sigma_{xx}(x,y)}{\partial x}\right]dy+\int_{x-\frac{dx}{2}}^{x+\frac{dx}{2}}\left[\left(\frac{dy}{2}\right)\frac{\partial\sigma_{xy}(x,y)}{\partial y}-\left(\frac{-dy}{2}\right)\frac{\partial\sigma_{xy}(x,y)}{\partial y}\right]dx+o\left(dx^1,\ dy^1\right)=0 \tag{4}$$

d'où il résulte :

$$dx\,dy\left[\frac{\partial\sigma_{yx}(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}(x,y)}{\partial y}\right]+o(dx^1,\ dy^1)=0 \tag{5}$$

De façon similaire, on obtient la condition d'équilibre en forces selon la direction y , développée à l'ordre 1 .

Les deux conditions s'écrivent sous la forme classique des équations d'équilibres en contraintes :

$$div\left(\sigma_{ij}\right)=\sigma_{ij,j}=0 \tag{6}$$

2.2 Conditions d'équilibre en moments

2.2.1 Equations exactes

La condition d'équilibre en moment autour de l'axe z et calculée au centre (x, y) du carré considéré s'écrit sous la forme suivante :

$$\int_{y-\frac{dy}{2}}^{y+\frac{dy}{2}}\left(\frac{dx}{2}\right)\left[\sigma_{yx}\left(x+\frac{dx}{2},y\right)+\sigma_{yx}\left(x-\frac{dx}{2},y\right)\right]dy-\int_{x-\frac{dx}{2}}^{x+\frac{dx}{2}}\left(\frac{dy}{2}\right)\left[\sigma_{xy}\left(x,y+\frac{dy}{2}\right)+\sigma_{xy}\left(x,y-\frac{dy}{2}\right)\right]dx=0 \tag{7}$$

2.2.2 Développement en série de Taylor à l'ordre 1

A l'ordre 0 , les variables peuvent être développées sous la forme suivante :

$$\sigma_{ij}(x+dx\ ,\ y+dy)=\sigma_{ij}(x,y)\ +o(dx^0,\ dy^0) \tag{8}$$

La condition d'équilibre en moment autour de l'axe z, développée à l'ordre 0 , s'écrit sous la forme suivante :

$$dx\,dy\left[\sigma_{yx}(x,y)-\sigma_{xy}(x,y)\right]+o(dx^0,\ dy^0)=0 \tag{9}$$

Comme les dx et dy sont arbitrairement nuls, on obtient la condition d'un tenseur des contraintes symétriques :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{10}$$

2.2.3 Développement en série de Taylor à l'ordre 1

Le développement limité à l'ordre 1 de la condition d'équilibre en moment autour de l'axe z ne donne pas de conditions particulières sur les contraintes :

$$\int_{y-\frac{dy}{2}}^{y+\frac{dy}{2}} \left(\frac{dx}{2}\right)\left[\left(\frac{dx}{2}\right)\frac{\partial\sigma_{yx}(x,y)}{\partial x}+\left(-\frac{dx}{2}\right)\frac{\partial\sigma_{yx}(x,y)}{\partial x}\right]dy - \int_{x-\frac{dx}{2}}^{x+\frac{dx}{2}} \left(\frac{dy}{2}\right)\left[\left(\frac{dy}{2}\right)\frac{\partial\sigma_{xy}(x,y)}{\partial y}+\left(-\frac{dy}{2}\right)\frac{\partial\sigma_{xy}(x,y)}{\partial x}\right]dx + o(dx^1,\ dy^1) = 0 \tag{11}$$

2.3 Conclusions pour un milieu continu où les efforts intérieurs sont réduits à des forces contraintes

Les conditions d'équilibre en forces sont satisfaites automatiquement à l'ordre 0 , tandis qu'à l'ordre 1 on obtient les équations classiques d'équilibre en contraintes (div $\sigma_{ij} = 0$).

Les conditions d'équilibres en moments donnent à l'ordre 0 la condition que les contraintes doivent être symétriques, tandis qu'à l'ordre 1 elles sont automatiquement satisfaites.

Tableau 1 : Résumé des conditions d'équilibre pour un milieu continu où les efforts intérieurs sont réduits à des forces contraintes

Equilibre d'un volume élémentaire	Conditions en forces	Conditions en moment
ordre 0	pas de conditions	$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ tenseur des contraintes symétriques
ordre 1	$\sigma_{ij,j} = 0$ équations d'équilibre en contraintes	pas de conditions

3 Milieu continu où les efforts intérieurs comportent des forces contraintes et des couples contraintes

Considérons un volume élémentaire de petite taille (dx , dy) dans un milieu continu où les efforts intérieurs comportent des forces contraintes et des couples contraintes.

3.1 Conditions d'équilibre en forces

3.1.1 Conditions d'équilibre en forces

Les conditions d'équilibres en forces ne sont pas changées par rapport au cas précédent puisque les couples contraintes proviennent de couples de forces qui s'auto-équilibrent et ne jouent donc aucun rôle :

$$\int_{y-\frac{dy}{2}}^{y+\frac{dy}{2}}\left[\sigma_{xx}\left(x+\frac{dx}{2},y\right)-\sigma_{xx}\left(x-\frac{dx}{2},y\right)\right]dy+\int_{x-\frac{dx}{2}}^{x+\frac{dx}{2}}\left[\sigma_{xy}\left(x,y+\frac{dy}{2}\right)-\sigma_{xy}\left(x,y-\frac{dy}{2}\right)\right]dx=0 \tag{12}$$

La condition en forces selon la direction y s'obtient à partir de la condition précédente en alternant x et y.

3.1.2 Développement en série de Taylor à l'ordre 0

Comme vu précédemment, le développement à l'ordre 0 des conditions d'équilibre en forces ne donnent aucune condition particulière sur le tenseur des contraintes.

3.1.3 Développement en série de Taylor à l'ordre 1

Toutes les variables sont développées à l'ordre 1 de la façon suivante :

$$\sigma_{ij}(x+dx\ ,\ y+dy)=\sigma_{ij}(x,y)\ +dx\frac{\partial\sigma_{ij}(x,y)}{\partial x}\ +dy\frac{\partial\sigma_{ij}(x,y)}{\partial y}+o(dx^1,\ dy^1) \tag{13}$$

Le développement à l'ordre 1 de la condition d'équilibre en forces donne la relation suivante :

$$\int_{y-\frac{dy}{2}}^{y+\frac{dy}{2}}\left[\left(\frac{dx}{2}\right)\frac{\partial\sigma_{xx}(x,y)}{\partial x}-\left(\frac{-dx}{2}\right)\frac{\partial\sigma_{xx}(x,y)}{\partial x}\right]dy+\int_{x-\frac{dx}{2}}^{x+\frac{dx}{2}}\left[\left(\frac{dy}{2}\right)\frac{\partial\sigma_{xy}(x,y)}{\partial y}-\left(\frac{-dy}{2}\right)\frac{\partial\sigma_{xy}(x,y)}{\partial y}\right]dx+o\left(dx^1,\ dy^1\right)=0 \tag{14}$$

qui se réécrit sous la forme suivante :

$$dx\ dy\left[\frac{\partial\sigma_{yx}(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}(x,y)}{\partial y}\right]+o(dx^1,\ dy^1)=0 \tag{15}$$

De façon similaire on obtient la condition en forces selon la direction y, ce qui permet alors d'en tirer les équations d'équilibre en contraintes "classiques" :

$$div\left(\sigma_{ij}\right)=\sigma_{ij,j}=0 \tag{16}$$

Il faut cependant noter que dans le cas présent, le tenseur des contraintes n'est pas symétrique. Les équations générales d'équilibre ne sont pas changées.

3.2 Conditions d'équilibre en moments

3.2.1 Equations exactes

La condition d'équilibre en moments autour de l'axe z au centre du volume élémentaire s'écrit sous la forme suivante :

$$\int_{y-\frac{dy}{2}}^{y+\frac{dy}{2}} \left(\frac{dx}{2}\right)\left[\sigma_{yx}\left(x+\frac{dx}{2},y\right)+\sigma_{yx}\left(x-\frac{dx}{2},y\right)\right]dy-\int_{x-\frac{dx}{2}}^{x+\frac{dx}{2}} \left(\frac{dy}{2}\right)\left[\sigma_{xy}\left(x,y+\frac{dy}{2}\right)+\sigma_{xy}\left(x,y-\frac{dy}{2}\right)\right]dx$$

$$+\int_{y-\frac{dy}{2}}^{y+\frac{dy}{2}} \left[\mu_{zx}\left(x+\frac{dx}{2},y\right)-\mu_{zx}\left(x-\frac{dx}{2},y\right)\right]dy+\int_{x-\frac{dx}{2}}^{x+\frac{dx}{2}} \left[\mu_{zy}\left(x,y+\frac{dy}{2}\right)-\mu_{zy}\left(x,y-\frac{dy}{2}\right)\right]dx=0 \tag{17}$$

Quand on compare cette relation à la condition en moments pour un milieu continu classique, on trouve deux nouveaux termes qui proviennent des couples contraintes.

3.2.2 Développement en série de Taylor à l'ordre 0 des forces contraintes et couples contraintes

A l'ordre 0 , les variables σ_{ij} and μ_{ij} sont développées sous la forme suivante :

$$\sigma_{ij}(x+dx\ ,\ y+dy)=\sigma_{ij}(x,y)\ +o(dx^0,\ dy^0) \tag{18}$$

$$\mu_{ij}(x+dx\ ,\ y+dy)=\mu_{ij}(x,y)\ +o(dx^0,\ dy^0) \tag{19}$$

Si nous développons simultanément toutes les variables au même ordre 0 , nous obtenons alors l'équation suivante :

$$dx\ dy\left[\sigma_{yx}(x,y)-\sigma_{xy}(x,y)+\mu_{zx}(x,y)-\mu_{zx}(x,y)+\mu_{zy}(x,y)-\mu_{zy}(x,y)\right]+o(dx^0,\ dy^0)=0 \tag{20}$$

qui est équivalente à :

$$dx\ dy\left[\sigma_{yx}(x,y)-\sigma_{xy}(x,y)\right]+o(dx^0,\ dy^0)=0 \tag{21}$$

Puisque les dx et dy sont arbitrairement nuls, on obtient la condition que le tenseur des contraintes est symétrique :

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ji} \tag{22}$$

Il en résulte que les forces contraintes et les couples contraintes doivent être développés à des ordres différents, si l'on ne veut pas retrouver le milieu continu classique.

3.2.3 Développement à l'ordre 0 des contraintes et à l'ordre 1 des couples contraintes

Les forces contraintes σ_{ij} sont développées à l'ordre 0 :

$$\sigma_{ij}(x+dx\ ,\ y+dy) = \sigma_{ij}(x,y)\ + o(dx^0,\ dy^0) \tag{23}$$

tandis que les couples contraintes sont développés à l'ordre 1 :

$$\mu_{ij}(x+dx\ ,\ y+dy) = \mu_{ij}(x,y)\ + dx\,\frac{\partial \mu_{ij}(x,y)}{\partial x} + dy\,\frac{\partial \mu_{ij}(x,y)}{\partial y} + o(dx^1,\ dy^1) \tag{24}$$

Avec une telle approche, la condition d'équilibre en forces selon la direction x , développée en série donne la relation suivante :

$$dx\,dy\left[\sigma_{yx}(x,y) - \sigma_{xy}(x,y) + \frac{\partial \mu_{zx}(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \mu_{zy}(x,y)}{\partial y}\right] + o_{\sigma_{ij}}(dx^0,\ dy^0) + o_{\mu_{ij}}(dx^1,\ dy^1) = 0 \tag{25}$$

qui permet d'obtenir les équations d'équilibre en forces contraintes et couples contraintes d'un milieu de Cosserat :

$$\frac{\partial \mu_{ij}}{\partial x_j} - 2\ \sigma_i^a = 0 \tag{26}$$

Le fait que l'on ait besoin de développer les couples contraintes μ_{ij} à un ordre supérieur aux forces contraintes σ_{ij} , signifie d'un point de vue mécanique que localement le gradient des forces contraintes peut être négligé devant le gradient des couples contraintes.

3.2.4 Développement en série de Taylor des forces contraintes à l'ordre 1 et des couples contraintes à l'ordre 2

Le développement en série de la condition en forces à un ordre supérieur, tout en gardant un ordre de différence pour les développements limités des forces contraintes et des couples contraintes, ne donne pas de condition supplémentaire.

3.3 Conclusions pour un milieu continu où les efforts intérieurs comportent des forces contraintes et des couples contraintes

La nécessité de développer les couples contraintes un ordre de plus que les forces contraintes pour ne pas retomber sur un milieu classique, implique que localement, à l'échelle d'un volume élémentaire, le gradient des couples contraintes (contraintes microscopiques) est plus fort que le gradient des forces contraintes (contraintes macroscopiques) qui peut être négligé.

Table 2 : Résumé des résultats obtenus pour un milieu continu
où les efforts intérieurs comportent des forces contraintes et des couples contraintes

Equilibre d'un volume élémentaire	Conditions en forces (elles ne font pas intervenir μ_{ij})	Conditions en moments (elles font intervenir σ_{ij} et μ_{ij})
ordre 0 pour σ_{ij} et μ_{ij}	pas de conditions	$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ le tenseur des contraintes est symétrique (inacceptable)
ordre 1 pourσ_{ij} et μ_{ij}	$\sigma_{ij,j} = 0$ équations d'équilibre d'un milieu classique et d'un milieu de Cosserat	
0 pourσ_{ij} et ordre 1 pour μ_{ij}		$\frac{\partial \mu_{ij}}{\partial x_j} - 2\,\sigma_i^a = 0$ équations d'équilibre supplémentaires pour un milieu de Cosserat
ordre 1 pour σ_{ij} et ordre 2 pour μ_{ij}		satisfait automatiquement

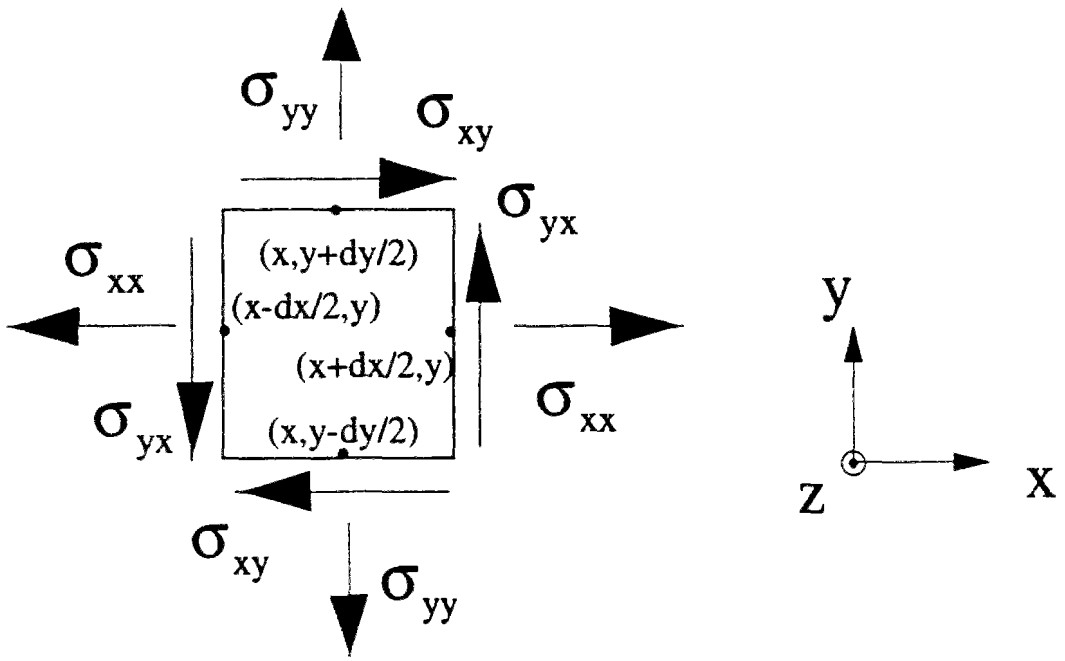


Figure 1 : Forces contraintes agissant sur un volume élémentaire

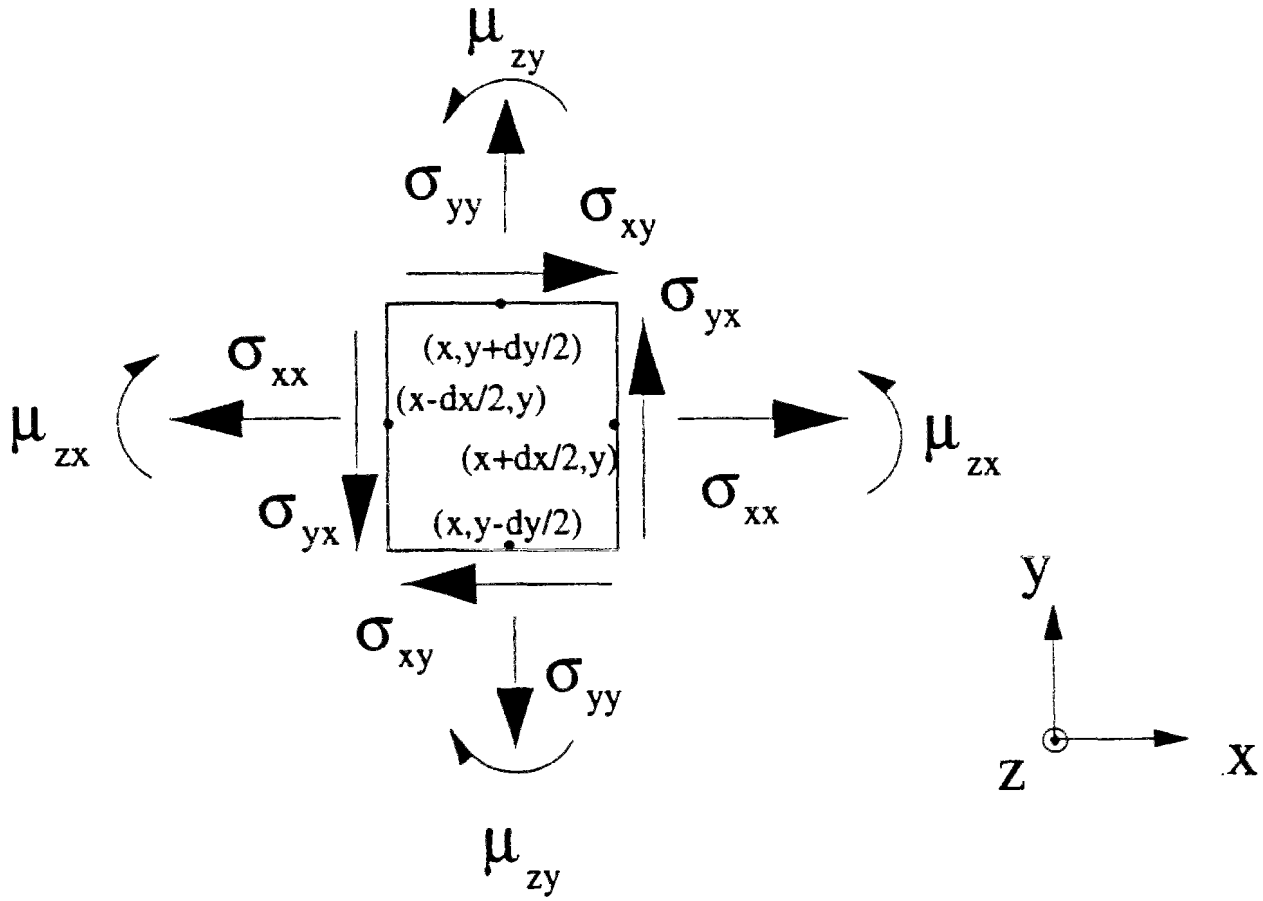


Figure 2 : Forces contraintes et couples contraintes agissant sur un volume élémentaire

Annexe 3

Construction des "cercles" de Mohr dans un milieu continu de Cosserat

1 Introduction

Dans un milieu continu classique, le vecteur contrainte agissant sur un plan d'orientation α , décrit un cercle dans le plan de Mohr, quand α varie entre 0 et π . Cependant une telle représentation n'est possible que par ce que le tenseur des contraintes est symétrique dans un tel milieu.

Dans un milieu de Cosserat, le tenseur des contraintes comporte une partie symétrique, et une partie antisymétrique. La représentation par un cercle de Mohr du vecteur contrainte correspondant à la partie symétrique des contraintes est encore possible mais n'apporte pas de renseignement utile. En effet, c'est le vecteur contrainte totale $\{f\}$ qui est intéressant: il est composé du vecteur contrainte $\{f^s\}$, dit symétrique puisque correspondant au tenseur symétrique, et du vecteur contrainte $\{f^a\}$, dit antisymétrique puisque correspondant au tenseur antisymétrique des contraintes :

$$\{f\} = [\sigma]\{n\} \tag{1}$$

$$\{f\} = \{f^s\} + \{f^a\} \tag{2}$$

$$\{f^s\} = [\sigma^s]\{n\} \tag{3}$$

$$\{f^a\} = [\sigma^a]\{n\} \tag{4}$$

Dans cette annexe, nous étudierons dans quelle mesure la représentation par un cercle de Mohr est encore possible pour un milieu continu de Cosserat et en particulier nous rechercherons les cas particuliers où le lieu des points décrit par le vecteur contrainte est encore un cercle.

2 Construction du vecteur contrainte dans un milieu de Cosserat 3D

2.1 Définitions des vecteurs contrainte : totale, symétrique, antisymétrique, tangentielle et normale

Travaillons dans les axes (X_i , i=1,3) des contraintes principales σ_i , avec i=1 à 3 , du tenseur des contraintes symétriques σ^s_{ij} . Dans ce repère, la partie symétrique du tenseur des contraintes peut être écrite sous la forme suivante :

$$[\sigma^s] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \tag{5}$$

En ce qui concerne la partie antisymétrique du tenseur des contraintes σ_{ij}^a , dans le cas le plus général, elle est de la forme suivante :

$$\left[\sigma^a\right]=\begin{bmatrix} 0 & -\sigma_3^a & \sigma_2^a \\ \sigma_3^a & 0 & -\sigma_1^a \\ -\sigma_2^a & \sigma_1^a & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Nous introduisons alors le vecteur des contraintes antisymétriques σ_i^a défini de la manière suivante :

$$\sigma_{ij}^a = -e_{ijk}\ \sigma_k^a \tag{7}$$

où e_{ijk} est le tenseur alterné défini par les relations suivantes :

$$e_{ijk} = e_{jki} = e_{kij}\ ,\ e_{ijj} = 0\ .\ e_{123} = 1 \text{ and } e_{213} = -1 \tag{8}$$

Un autre moyen de définir le vecteur des contraintes antisymétriques σ_i^a associé au tenseur des contraintes antisymétriques σ_{ij}^a est d'introduire le produit vectoriel noté avec le signe $\wedge$:

$$\left[\sigma_{ij}^a\right]\{V\} = \left\{\sigma_i^a\right\} \wedge \{V\} \tag{9}$$

Pour tout vecteur $\{\sigma^a\}$ et $\{V\}$, le produit vectoriel des deux vecteurs est défini de la façon suivante :

$$\left\{\sigma_i^a\right\} \wedge \left\{V_j\right\} = \begin{Bmatrix} -V_2\ \sigma_3^a + V_3\ \sigma_2^a \\ +V_1\ \sigma_3^a - V_3\ \sigma_1^a \\ -V_1\ \sigma_2^a + V_2\ \sigma_1^a \end{Bmatrix} \tag{10}$$

Il en résulte que le tenseur des contraintes totales $[\sigma]$ s'écrit sous la forme suivante, dans le repère des directions principales du tenseur des contraintes symétriques :

$$[\sigma]=\left[\sigma^s\right]+\left[\sigma^a\right]=\begin{bmatrix} \sigma_1 & -\sigma_3^a & \sigma_2^a \\ \sigma_3^a & \sigma_2 & -\sigma_1^a \\ -\sigma_2^a & \sigma_1^a & \sigma_3 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Pour un plan donné, défini par le vecteur normal $\{n\}$ et les deux vecteurs tangentiels $\{t_1\}$ et $\{t_2\}$ tels que le trièdre $(t_1\ ,\ t_2\ ,\ n)$ soit direct, le vecteur contrainte totale $\{f\}$ agissant sur ce plan est donné par :

$$\{f\} = [\sigma]\{n\} \tag{12}$$

Nous séparons le vecteur $\{f\}$ en deux composantes $\{f^s\}$ et $\{f^a\}$:

$$\{f\} = \{f^s\} + \{f^a\} \tag{13}$$

La composante $\{f^s\}$ correspond à la partie symétrique des contraintes σ_{ij}^s tandis que la composante $\{f^a\}$ correspond à la partie antisymétrique du tenseur des contraintes σ_{ij}^a . Ces deux composantes seront appelées respectivement vecteur contrainte symétrique et vecteur contrainte antisymétrique :

$$\{f^s\} = [\sigma^s]\{n\} \tag{14}$$

$$\{f^a\} = [\sigma^a]\{n\} \tag{15}$$

Le vecteur contrainte symétrique $\{f^s\}$ est calculé de manière similaire au vecteur contrainte dans un milieu classique.

Le vecteur contrainte antisymétrique est calculé en utilisant le produit vectoriel suivant :

$$\{f^a\} = [\sigma^a]\{n\} = \{\sigma^a\} \wedge \{n\} \tag{16}$$

Le vecteur contrainte totale est de plus décomposé en une composante normale au plan considéré $\{\sigma\}$ et une composante tangentielle $\{\tau\}$.

2.2 Contrainte normale agissant sur un plan

Par définition la contrainte normale est égale à :

$$\sigma = {}^t\{f\}\{n\} = {}^t\{f^s\}\{n\} + {}^t\{f^a\}\{n\} \tag{17}$$

Le nouveau terme qui correspond au tenseur antisymétrique, est en fait nul :

$${}^t\{f^a\}\{n\} = {}^t([\sigma^a]\{n\})\{n\} = {}^t(\{\sigma^a\} \wedge \{n\})\{n\} = [\{\sigma^a\},\{n\},\{n\}] = [\{n\},\{n\},\{\sigma^a\}] = {}^t(\{n\} \wedge \{n\})\{\sigma^a\} = 0 \tag{18}$$

Il en résulte que la contrainte normale σ agissant sur un plan est indépendante du tenseur des contraintes antisymétriques $[\sigma^a]$.

2.3 Contrainte tangentielle agissant sur un plan

Le théorème de Pythagore permet d'écrire la contrainte tangentielle sous la forme suivante :

$$\tau = \sqrt{{}^t\{f\}\{f\} - \sigma^2} \tag{19}$$

Il est utile de décomposer le vecteur contrainte tangentielle $\{\tau\}$ sur les deux vecteur unitaires tangentiels $\{t_1\}$ and $\{t_2\}$:

$$\{\tau\} = \left({}^t\{f\}\{t_1\}\right)\{t_1\} + \left({}^t\{f\}\{t_2\}\right)\{t_2\} \tag{20}$$

alors que le vecteur contrainte normale est égale à :

$$\{\sigma\} = \left({}^t\{f\}\{n\}\right)\{n\} \tag{21}$$

Le triplet de vecteur $(t_1 , t_2 , n) = (n , t_1 , t_2)$ étant un trièdre direct.

Le vecteur contrainte totale est alors égale à :

$$\{f\} = \{\sigma\} + \{\tau\} = \left({}^t\{f\}\{n\}\right)\{n\} + \left({}^t\{f\}\{t_1\}\right)\{t_1\} + \left({}^t\{f\}\{t_2\}\right)\{t_2\} \tag{22}$$

Considérons séparément la contribution $\{\tau^s\}$ du tenseur symétrique $[\sigma^s]$ et la contribution $\{\tau^a\}$ du tenseur antisymétrique $[\sigma^a]$ des contraintes, dans le calcul du vecteur contrainte tangentielle $\{\tau\}$:

$$\{\tau\} = \{\tau^s\} + \{\tau^a\} \tag{23}$$

Il se trouve (cf. § 2.2) que :

$$\{f^a\} = \{\tau^a\} \tag{24}$$

2.3.1 Vecteur contrainte symétrique tangentiel

Le premier terme $\{\tau^s\}$ est calculé à partir du tenseur symétrique des contraintes de la même façon que dans un milieu continu classique :

$$\{\tau^s\} = \left({}^t\{f^s\}\{t_1\}\right)\{t_1\} + \left({}^t\{f^s\}\{t_2\}\right)\{t_2\} \tag{25}$$

2.3.2 Vecteur contrainte antisymétrique tangentiel

Le second terme $\{\tau^a\}$ est calculé à partir du tenseur antisymétrique des contraintes :

$$\{\tau^a\} = \left({}^t\{f^a\}\{t_1\} \right)\{t_1\} + \left({}^t\{f^a\}\{t_2\} \right)\{t_2\} \tag{26}$$

Par définition de $\{f^a\}$, qui est égale à $\{\tau^a\}$, nous pouvons écrire :

$${}^t\{f^a\}\{t_1\} = {}^t\left([\sigma^a]\{n\} \right)\{t_1\} = {}^t\left(\{\sigma^a\} \wedge \{n\} \right)\{t_1\} = \left[\{\sigma^a\}, \{n\}, \{t_1\} \right] = \left[\{n\}, \{t_1\}, \{\sigma^a\} \right] = {}^t\left(\{n\} \wedge \{t_1\} \right)\{\sigma^a\} = {}^t\{t_2\}\{\sigma^a\} \tag{27}$$

$${}^t\{f^a\}\{t_2\} = {}^t\left([\sigma^a]\{n\} \right)\{t_2\} = {}^t\left(\{\sigma^a\} \wedge \{n\} \right)\{t_2\} = \left[\{\sigma^a\}, \{n\}, \{t_2\} \right] = \left[\{n\}, \{t_2\}, \{\sigma^a\} \right] = {}^t\left(\{n\} \wedge \{t_2\} \right)\{\sigma^a\} = -{}^t\{t_1\}\{\sigma^a\} \tag{28}$$

puisque le triplet de vecteurs (t_1 , t_2 , n) forme un trièdre direct.

Nous obtenons alors la décomposition suivante du vecteur contrainte antisymétrique tangentiel :

$$\{\tau^a\} = \left({}^t\{f^a\}\{t_1\} \right)\{t_1\} + \left({}^t\{f^a\}\{t_2\} \right)\{t_2\} = \left({}^t\{\sigma^a\}\{t_2\} \right)\{t_1\} + \left(-{}^t\{\sigma^a\}\{t_1\} \right)\{t_2\} \tag{29}$$

La norme de $\{\tau^a\}$ est alors égale à :

$$\tau^a = \left\| \{\tau^a\} \right\| = \sqrt{\left({}^t\{\sigma^a\}\{t_2\} \right)^2 + \left(-{}^t\{\sigma^a\}\{t_1\} \right)^2} = \sqrt{\left({}^t\{\sigma^a\}\{t_1\} \right)^2 + \left({}^t\{\sigma^a\}\{t_2\} \right)^2} = \sqrt{\left({}^t\{\sigma^a\}\{\sigma^a\} \right)^2 - \left({}^t\{\sigma^a\}\{n\} \right)^2} \tag{30}$$

ce qui est équivalent à :

$$\tau^a = \left\| \{\tau^a\} \right\| = \left\| \{\sigma^a\}_{\text{projected}} \right\| \tag{31}$$

2.3.3 Construction du vecteur contrainte tangentiel totale

La composante nouvelle $\{f^a\}$ du vecteur des contraintes $\{f\} = [\sigma]\{n\}$ possède les propriétés suivantes (figure 1) :

(1) $\{f^a\}$ est purement tangentielle :

$$ {}^t\{f^a\}\{n\} = 0 \tag{32}$$

(2) la composante $\{f^a\} = \{\tau^a\}$ est orthogonale à la projection $\{\sigma^a\}_{projeté}$ de $\{\sigma^a\}$ sur le plan considéré :

$$ {}^t\{\tau^a\}\{\sigma^a\}_{projeté} = 0 \tag{33}$$

puisque :

$$\{\tau^a\} = \left({}^t\{\sigma^a\}\{t_2\}\right)\{t_1\} + \left(-{}^t\{\sigma^a\}\{t_1\}\right)\{t_2\} \tag{34}$$

et

$$\{\sigma^a\}_{projected} = \left({}^t\{\sigma^a\}\{t_1\}\right)\{t_1\} + \left({}^t\{\sigma^a\}\{t_2\}\right)\{t_2\} \tag{35}$$

(3) le vecteur antisymétrique tangentiel $\{f^a\} = \{\tau^a\}$ a la même norme que la projection $\{\sigma^a\}_{projeté}$ de $\{\sigma^a\}$ sur le plan :

$$\tau^a = \left\|\{\tau^a\}\right\| = \left\|\{\sigma^a\}_{projected}\right\| \tag{36}$$

(4) le triplet de vecteurs ($\{f^a\} = \{\tau^a\}$, $\{\sigma^a\}_{projeté}$, $\{n\}$) forme un trièdre direct.

2.3.4 Contrainte tangentielle totale τ

En ce qui concerne la norme, notée τ , du vecteur contrainte tangentielle totale $\{\tau\}$, et appelée contrainte tangentielle totale , il n'y a pas de moyen de la calculer simplement puisque les deux composantes $\{\tau^s\}$ et $\{\tau^a\}$ sont a priori orientées dans n'importe quelle direction dans le plan considéré. Elles ont toutes deux des composantes sur les deux vecteurs tangentiels $\{t_1\}$ et $\{t_2\}$:

$$\tau = \|\{\tau\}\| = \sqrt{\left[\left({}^t\{n\}{}^t[\sigma^s]\{t_1\}\right) - \left({}^t\{\sigma^a\}\{t_2\}\right)\right]^2 + \left[\left({}^t\{n\}{}^t[\sigma^s]\{t_2\}\right) - \left({}^t\{\sigma^a\}\{t_1\}\right)\right]^2} \tag{37}$$

3 Courbes correspondant aux cercles de Mohr classiques

3.1 Définitions du plan et des vecteurs

Nous travaillerons dans le repère des axes : (X_i , i=1,3) correspondant aux directions principales σ_i , avec i=1 à 3 , du tenseur symétrique des contraintes σ_{ij}^s . Dans un tel repère, le tenseur des contraintes totales s'écrit sous la forme suivante :

$$[\sigma]=[\sigma^s]+[\sigma^a]=\begin{bmatrix}\sigma_1 & -\sigma_3^a & \sigma_2^a\\ \sigma_3^a & \sigma_2 & -\sigma_1^a\\ -\sigma_2^a & \sigma_1^a & \sigma_3\end{bmatrix} \tag{38}$$

3.2 Notations

Les contraintes principales sont ordonnées de la façon suivante : $\sigma_3 \le \sigma_2 \le \sigma_1$. Les contraintes σ_{ii} sont positives en traction et négatives en compression.

3.4 Vecteur contrainte agissant sur un plan de normale {n} = (n_1 , n_2 , n_3=0)

Nous considérons un plan P_α dont la normale $\{n_\alpha\}$ est contenue par le plan (X_1 , X_2) , c'est à dire $\{n_\alpha\}$ est orthogonal à X_3 . Quand α varie, les plans P_α tournent autour de l'axe X_3 . Ils contiennent donc tous le vecteur $\{X_3\}$:

$$^t\{n_\alpha\} = \{\cos\alpha\ ,\ \sin\alpha\ ,\ 0\} \tag{39}$$

Comme base de vecteurs tangentiels dans le plan P_α , nous choisissons les vecteurs suivant :

$$\{t_1\} = \{t_\alpha\} = \{-\sin\alpha\ ,\ \cos\alpha\ ,\ 0\} \tag{40}$$

$$\{t_2\} = \{X_3\} = \{0\ ,\ 0\ ,\ 1\} \tag{41}$$

Le triplet de vecteurs noté (t_1 , t_2 , n) dans le cas , est égale dans le cas présent à (t_α , X_3 , n_α) qui forme un trièdre direct.

Le vecteur contrainte {f} est égale par définition à :

$$\{f\}=[\sigma]\{n_\alpha\}=\begin{bmatrix}\sigma_1 & -\sigma_3^a & \sigma_2^a\\ \sigma_3^a & \sigma_2 & -\sigma_1^a\\ -\sigma_2^a & \sigma_1^a & \sigma_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sigma_1\cos\alpha-\sigma_3^a\sin\alpha\\ \sigma_3^a\cos\alpha+\sigma_2\sin\alpha\\ -\sigma_2^a\cos\alpha+\sigma_1^a\sin\alpha\end{Bmatrix} \tag{42}$$

3.4 Contrainte normale

La composante normale $\{\sigma\}$ du vecteur contrainte $\{f\}$ est égale par définition à :

$$\{\sigma\} = \left({}^{t}\{f\}\{n_\alpha\}\right)\{n_\alpha\} \tag{43}$$

Sa norme est égale à :

$$\sigma = {}^{t}\{f\}\{n_\alpha\} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \cos\alpha - \sigma_3^a \sin\alpha \\ \sigma_3^a \cos\alpha + \sigma_2 \sin\alpha \\ -\sigma_2^a \cos\alpha + \sigma_1^a \sin\alpha \end{Bmatrix}^{t} \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{Bmatrix} = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \sin^2\alpha = \sigma_1 \left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right) + \sigma_2 \left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right) \tag{44}$$

ce qui est aussi égale à :

$$\sigma = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right) + \cos 2\alpha \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right) \tag{45}$$

3.4 Contrainte tangentielle

La composante tangentielle $\{\tau\}$ du vecteur contrainte $\{f\}$ est égale par définition à :

$$\{\tau\} = \left({}^{t}\{f\}\{t_\alpha\}\right)\{t_\alpha\} + \left({}^{t}\{f\}\{X_3\}\right)\{X_3\} \tag{46}$$

et sa norme τ est égale à :

$$\tau = \|\{\tau\}\| = \sqrt{\left({}^{t}\{f\}\{t_\alpha\}\right)^2 + \left({}^{t}\{f\}\{X_3\}\right)^2} \tag{47}$$

avec :

$${}^{t}\{f\}\{t_\alpha\} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \cos\alpha - \sigma_3^a \sin\alpha \\ \sigma_3^a \cos\alpha + \sigma_2 \sin\alpha \\ -\sigma_2^a \cos\alpha + \sigma_1^a \sin\alpha \end{Bmatrix}^{t} \begin{Bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{Bmatrix} = \sigma_3^a - \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)\sin 2\alpha \tag{48}$$

$${}^{t}\{f\}\{X_3\} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \cos\alpha - \sigma_3^a \sin\alpha \\ \sigma_3^a \cos\alpha + \sigma_2 \sin\alpha \\ -\sigma_2^a \cos\alpha + \sigma_1^a \sin\alpha \end{Bmatrix}^{t} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = -\sigma_2^a \cos\alpha + \sigma_1^a \sin\alpha \tag{49}$$

La contrainte tangentielle τ est donc égale à :

$$\tau = \sqrt{\left(\sigma_3^a - \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)\sin 2\alpha\right)^2 + \left(-\sigma_2^a \cos\alpha + \sigma_1^a \sin\alpha\right)^2} \tag{50}$$

$$\tau = \sqrt{\left(\sigma_3^a - \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)\sin 2\alpha\right)^2 + \left(\frac{(\sigma_1^a)^2 + (\sigma_2^a)^2}{2} + \left(\frac{\sigma_2^a - \sigma_1^a}{2}\right)\cos 2\alpha - \sigma_1^a\ \sigma_2^a \sin 2\alpha\right)} \tag{51}$$

Dans la suite et en particulier pour les figures, nous prendrons pour le signe τ , le signe de ${}^t\{f\}\ \{t_\alpha\}$, de manière à retomber sur le Cercle de Mohr classique quand $\{\sigma^a\} = \{0\}$:

$$\text{signe}(\tau) = \text{signe}\left(\sigma_3^a - \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)\sin 2\alpha\right) \tag{52}$$

Nous appellerons τ^s la valeur algébrique de la contrainte tangentielle symétrique :

$$\tau^s = \{\tau^s\}\{t_\alpha\} = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)\sin 2\alpha \tag{53}$$

La contrainte tangentielle symétrique τ^s coïncide avec la contrainte tangentielle totale τ quand $\{\sigma^a\} = \{0\}$.

Nous appellerons contrainte tangentielle antisymétrique τ^a , la norme du vecteur $\{\tau^a\}$ avec pour signe, le signe de la composante de $\{\tau^a\}$ sur X_3 :

$$\tau^a = \text{signe}\left(-\sigma_2^a \cos\alpha + \sigma_1^a \sin\alpha\right)\sqrt{(\sigma_3^a)^2 + \left(-\sigma_2^a \cos\alpha + \sigma_1^a \sin\alpha\right)^2} \tag{54}$$

L'existence de contraintes antisymétriques vient modifier la contrainte tangentielle classique dans le plan (X_1 , X_2) d'un terme égale à σ_3^a . Il faut noter de plus qu'il existe une composante tangentielle hors du plan (X_1 , X_2) , c'est à dire parallèle à X_3 ,et qui est fonction uniquement de σ_1^a et σ_2^a .

3.5 Représentation du vecteur contrainte totale {f} dans le plan (τ , σ)

3.5.1 Cas particulier où l'on retrouve un cercle de Mohr

Quand l'angle d'orientation α du plan P_α varie, le vecteur contrainte totale $\{f_\alpha\}$ de coordonnées (τ_α , σ_α) dans le plan de Mohr (τ , σ) , ne décrit plus un cercle dans le cas général. Le seul cas, où l'on retrouve un cercle correspond à un vecteur contrainte antisymétrique σ_1^a parallèle à la direction X_3 :

$$\sigma_1^a = \sigma_2^a = 0 \tag{55}$$

Dans ce cas là, la contrainte normale (symétrique), qui peut être positive (extension) ou négative (compression) est égale à :

$$\sigma = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right) + \cos 2\alpha \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right) \tag{56}$$

La contrainte tangentielle totale est égale à :

$$\tau = \sigma_3^a - \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right) \sin 2\alpha \tag{57}$$

Le cercle de Mohr classique de centre $(\sigma_1 + \sigma_2)/2$ et de rayon $(\sigma_1 - \sigma_2)/2$ est translaté de σ_3^a parallèlement à l'axe τ (figure 2).

3.5.2 Cas général

Dans le cas général le lieu décrit par le vecteur contrainte (σ , τ), où τ est la contrainte totale tangentielle, n'est pas un cercle. Les figures 2 à 8 présentent une série de "cercles" de Mohr calculés pour 7 jeux de contraintes résumés dans le Tableau 1.

Tableau 1 : Jeux de contraintes utilisées pour l'étude paramétrique

No. figure	σ_1 [kPa]	σ_2 [kPa]	σ_1^a [kPa]	σ_2^a [kPa]	σ_3^a [kPa]
2	50	100	0	0	100
3	50	100	100	0	0
4	50	100	0	100	0
5	50	100	100	100	0
6	50	100	100	0	100
7	50	100	0	100	100
8	50	100	10	10	10

On peut remarquer que la composante σ_3^a , hors du plan (X_1 , X_2) a tendance à translater le cercle de Mohr classique parallèlement à τ , tandis que les composantes σ_1^a et σ_2^a ont plutôt tendance à déformer le cercle de Mohr classique.

3.5.3 Importance de la microstructure

On peut remarquer que les contraintes symétriques sont de type macroscopique tandis que les contraintes antisymétriques sont qualifiées de relatives. Cependant, les équations d'équilibre permettent de calculer directement les contraintes antisymétriques à partir des dérivées des couples contraintes :

$$\sigma_i^a = \frac{\mu_{ij,j}}{2} \tag{58}$$

Les contraints antisymétriques sont donc une mesure du gradient des couples contraintes, qui sont eux mêmes de type microscopiques. L'existence de la microstructure a donc pour effet de translater le cercle de Mohr tout en le déformant, et ce d'autant plus que la microstructure joue un rôle important. Si l'on garde le critère de rupture classique sans le modifier, suivant le signe des contraintes antisymétriques, la rupture sera atteinte plus ou moins rapidement. L'existence de la microstructure peut donc jouer un rôle sur le radoucissement (Satake, 1968).

3.6 Représentation du vecteur {f} dans l'espace (τ^a , τ^s , σ)

Puisque $[\sigma^s]$ et $[\sigma^s]$ sont réellement indépendants, il est raisonnable de travailler dans l'espace (τ^a , τ^s , σ) plutôt que dans le plan (τ , σ) afin de trouver une signification physique. Le terme τ est la contrainte tangentielle totale tandis que τ^a et τ^s sont respectivement les contraintes tangentielles symétrique et antisymétrique.

Le vecteur contrainte {f} est décomposé en trois composantes : une composante normale {σ} qui provient uniquement du tenseur symétrique des contraintes $[\sigma^s]$ et deux composantes tangentielles {τ^s} et {τ^a} qui proviennent respectivement du tenseur symétrique $[\sigma^s]$ et du tenseur antisymétrique $[\sigma^a]$ des contraintes.

$$\{f\} = [\sigma]\{n\} = \left(\left[\sigma^s\right]\{n\}\right) + \left[\sigma^a\right]\{n\} = \left(\{\sigma\} + \left\{\tau^s\right\}\right) + \left\{\tau^a\right\} \tag{59}$$

Pour un plan P_α donné de normale $\{n_\alpha\}$, les trois composantes ont respectivement les normes suivantes :

contrainte normale (symétrique)

$$\sigma = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right) + \cos 2\alpha \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right) \tag{60}$$

contrainte tangentielle symétrique

$$\tau^s = -\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right) \sin 2\alpha \tag{61}$$

contrainte tangentielle antisymétrique

$$\tau^a = \sqrt{\left(\sigma_3^a\right)^2 + \left(-\sigma_2^a \cos\alpha + \sigma_1^a \sin\alpha\right)^2} \tag{62}$$

ce qui peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$\tau^a = \sqrt{\left[\left(\sigma_1^a\right)^2 + \left(\sigma_2^a\right)^2 + \left(\sigma_3^a\right)^2\right] - \left(\sigma_1^a \cos\alpha + \sigma_2^a \sin\alpha\right)^2} = \sqrt{\left\|\{\sigma^a\}\right\|^2 - \left({}^t\{\sigma^a\}\{n_\alpha\}\right)^2} = \left\|\{\sigma^a\}_{\text{projected}}\right\|^2 \tag{63}$$

$$\tau^a = \sqrt{\left[\left(\sigma_1^a\right)^2 + \left(\sigma_2^a\right)^2 + \left(\sigma_3^a\right)^2\right] - \left[\frac{\left(\sigma_1^a\right)^2 + \left(\sigma_2^a\right)^2}{2} + \frac{\left(\sigma_1^a\right)^2 - \left(\sigma_2^a\right)^2}{2}\cos 2\alpha + \sigma_1^a\, \sigma_2^a \sin 2\alpha\right]^2} \tag{64}$$

Dans le cas où le vecteur antisymétrique des contraintes σ_i^a est parallèle à la direction X_3 :

$$\sigma_1^a = \sigma_2^a = 0 \tag{65}$$

la courbe décrite dan l'espace (τ^a , τ , σ) est un cylindre d'axe l'axe τ^a et de section le cercle de Mohr classique. Dans le cas général, il convient de regarder plus précisément.

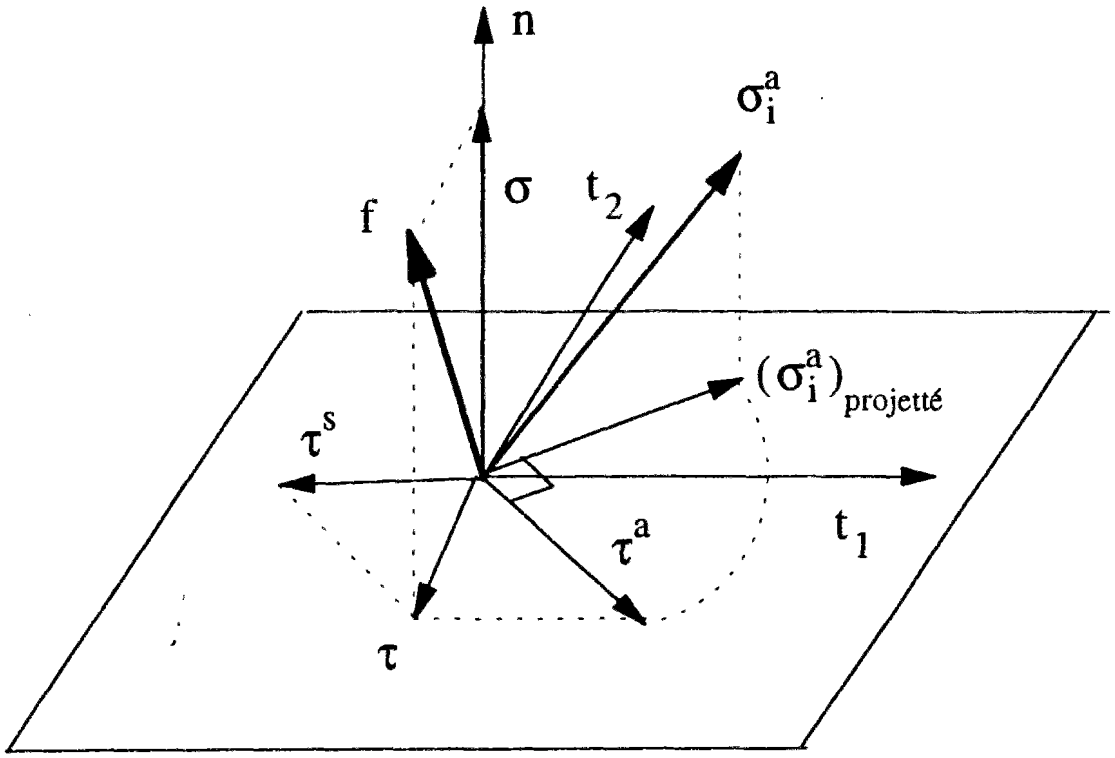


Figure A3-1 : Construction graphique du vecteur contrainte

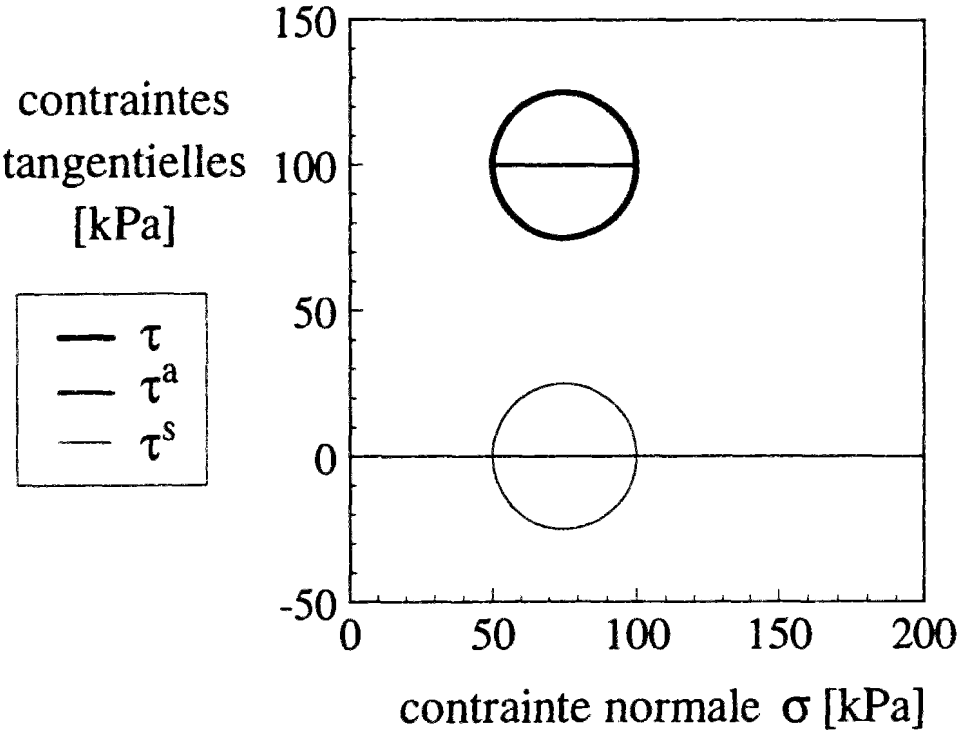


Figure A3-2 : Courbe décrite par le vecteur (τ , σ) dans le plan de Mohr
(σ_1 = 50 kPa, σ_2 = 100 kPa, σ_1^* = 0 kPa , σ_2^* = 0 kPa , σ_3^* = 100 kPa)

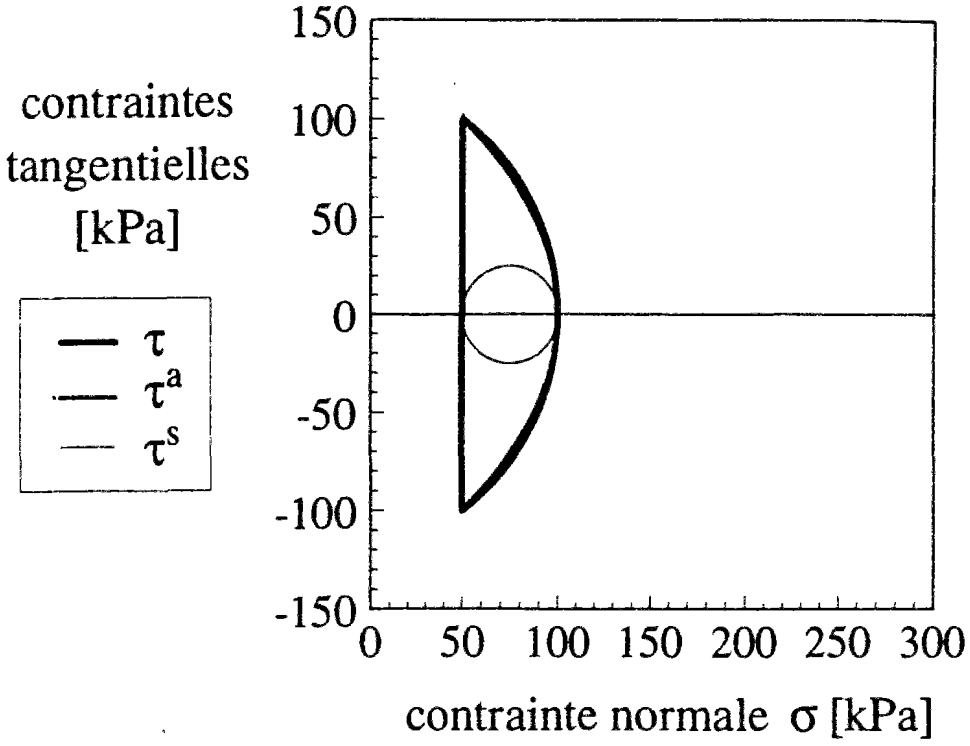


Figure A3-3 : Courbe décrite par le vecteur (τ , σ) dans le plan de Mohr (σ_1 = 50 kPa, σ_2 = 100 kPa, σ_1^* = 100 kPa , σ_2^* = 0 kPa , σ_3^* = 0 kPa)

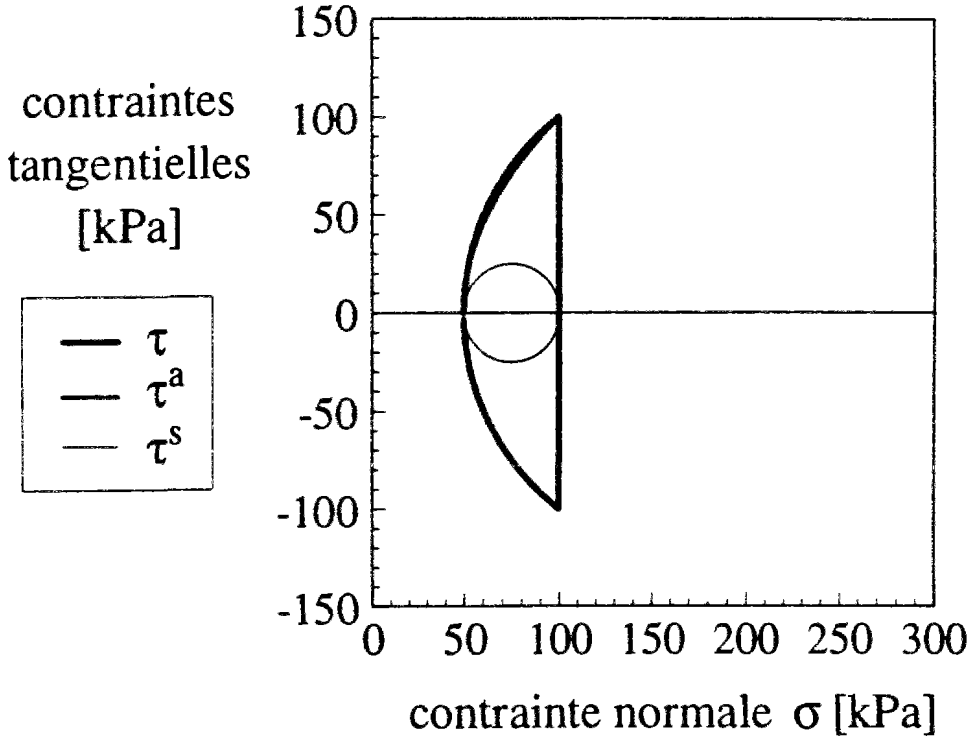


Figure A3-4 : Courbe décrite par le vecteur (τ , σ) dans le plan de Mohr (σ_1 = 50 kPa, σ_2 = 100 kPa, σ_1^* = 0 kPa , σ_2^* = 100 kPa , σ_3^* = 0 kPa)

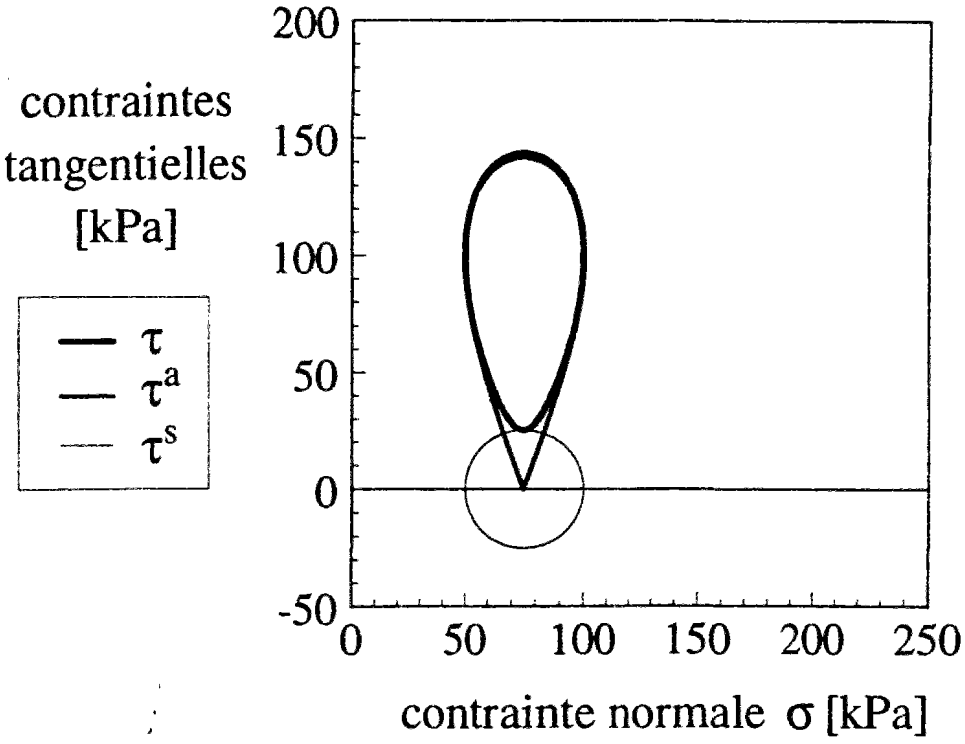


Figure A3-5 : Courbe décrite par le vecteur (τ , σ) dans le plan de Mohr
(σ_1 = 50 kPa, σ_2 = 100 kPa, σ_1^* = 100 kPa , σ_2^* = 100 kPa , σ_3^* = 0 kPa)

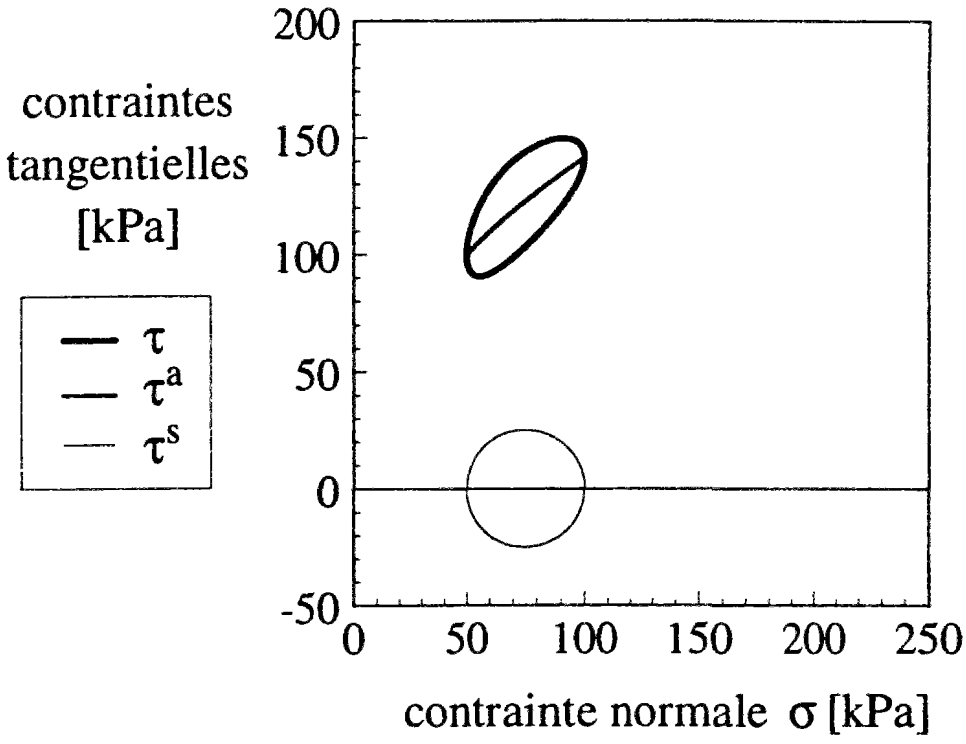


Figure A3-6 : Courbe décrite par le vecteur (τ , σ) dans le plan de Mohr
(σ_1 = 50 kPa, σ_2 = 100 kPa, σ_1^* = 100 kPa , σ_2^* = 0 kPa , σ_3^* = 100 kPa)

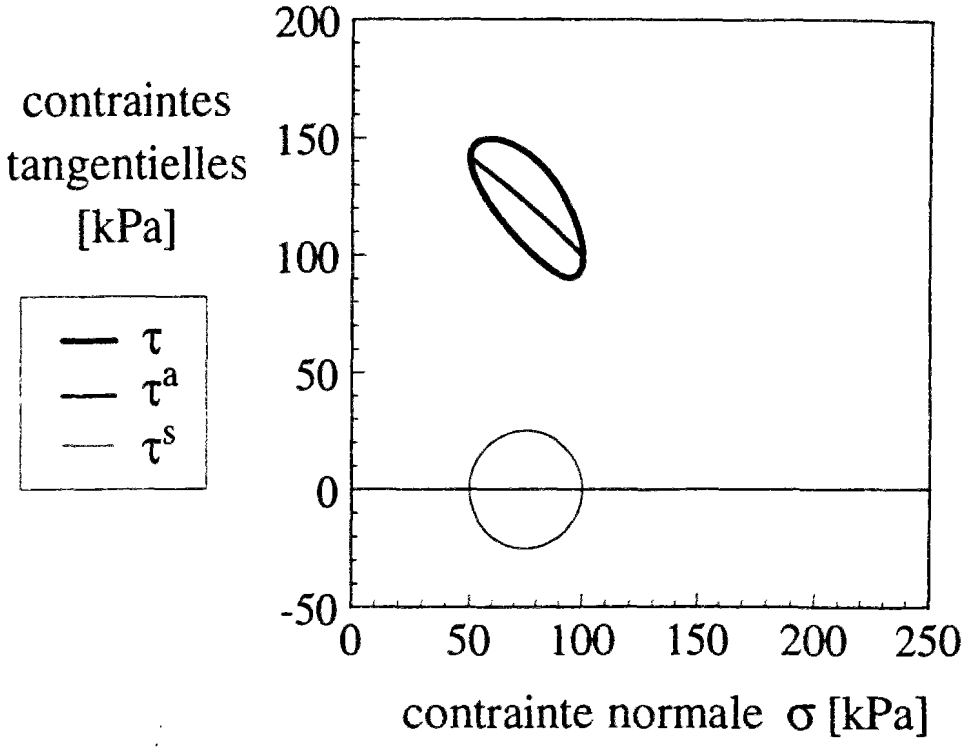


Figure A3-7 : Courbe décrite par le vecteur (τ , σ) dans le plan de Mohr (σ_1 = 50 kPa, σ_2 = 100 kPa, σ_1^* = 0 kPa , σ_2^* = 100 kPa , σ_3^* = 100 kPa)

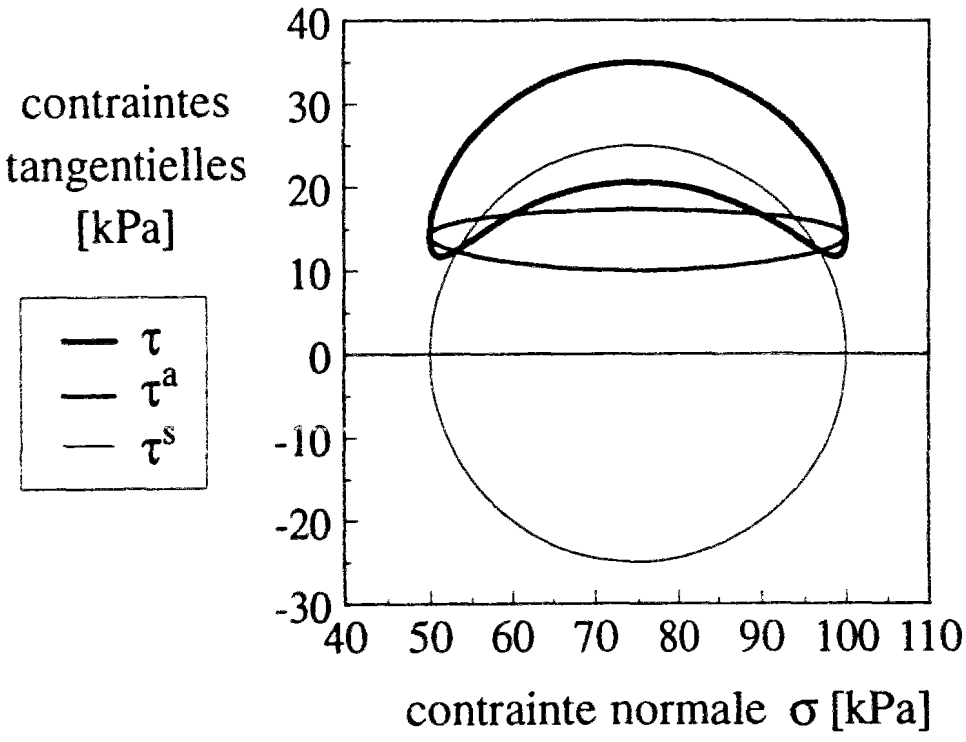


Figure A3-8 : Courbe décrite par le vecteur (τ , σ) dans le plan de Mohr (σ_1 = 50 kPa, σ_2 = 100 kPa, σ_1^* = 10 kPa , σ_2^* = 10 kPa , σ_3^* = 10 kPa)

Annexe 4

Analyse du cisaillement simple plan d'un milieu continu classique hétérogène avec une loi de comportement linéaire élastique

1 Problème étudié

Dans cette annexe, nous étudions le cisaillement simple plan d'un milieu continu classique hétérogène pour déterminer dans quelle mesure une hétérogénéité des propriétés mécaniques peut expliquer la formation d'une couche d'interface dans un milieu classique.

2 Equations d'équilibre

La première équation d'équilibre d'un milieu continu classique hétérogène isotrope, permet d'écrire pour le déplacement tangentiel, dans le cas d'un comportement linéaire élastique :

$$G(x_2)\frac{\partial U_1}{\partial x_2}(x_2) = \sigma_{12}(I) = \text{constante} \qquad (1)$$

Il en résulte la variation suivante pour la déformation de cisaillement ε_{12} :

$$\varepsilon_{12}(x_2) = \frac{\sigma_{12}(I)}{2\,G(x_2)} \qquad (2)$$

La déformation de cisaillement ε_{12} varie comme l'inverse de $G(x_2)$ alors que le déplacement tangentiel U_1 varie comme la primitive de l'inverse de $G(x_2)$

La deuxième équation d'équilibre pour un milieu continu classique, permet d'écrire pour le déplacement normal U_2 :

$$\left[K(x_2)+G(x_2)\right]\frac{\partial U_2}{\partial x_2}(x_2) = \sigma_{22}(H) = \text{constante} \qquad (3)$$

Le déplacement normal U_2 est toujours découplé du déplacement tangentiel U_1 mais dans le cas présent, il peut varier suivant les variations des modules K et G. Dans la suite on ne s'intéressera qu'au déplacement tangentiel.

3 Hypothèse d'une variation linéaire du module de cisaillement

On supposera l'existence d'une zone moins rigide près de l'interface K(I)<G(H) avec une variation linéaire entre les deux limites $x_2 = 0$ à l'interface I et la face supérieure de la couche $x_2 = H$:

$$G(x_2) = G(0) + \frac{G(H) - G(I)}{H} x_2 \tag{4}$$

Après intégration, on trouve pour le déplacement tangentiel dans le cas général :

$$U_1(x_2) = U_1(I) - \frac{\sigma_{12}(I)}{G(H) - G(I)} H \ln\left(1 - \frac{x_2}{H} \frac{G(H) - G(I)}{G(I)}\right) \tag{5}$$

Pour un jeu de conditions aux limites où le déplacement tangentiel en H est nul, on trouve comme solution particulière :

$$U_1(x_2) = U_1(I)\left(1 - \frac{\ln\left(1 - \frac{x_2}{H} \frac{G(H) - G(I)}{G(I)}\right)}{\ln\left(1 - \frac{G(H) - G(I)}{G(I)}\right)}\right) \tag{6}$$

La déformation de cisaillement ε_{12} varie comme l'inverse de $G(x_2)$:

$$\varepsilon_{12}(x_2) = \frac{\sigma_{12}}{2\,G(I)} \frac{H}{H - x_2} \tag{7}$$

4 Hypothèse d'une variation exponentielle du module de cisaillement

4.1 Variations du module de cisaillement G

On supposera l'existence d'une zone moins rigide près de l'interface K(I)<G(H) avec une variation exponentielle entre les deux limites $x_2 = 0$ à l'interface I et la face supérieure de la couche $x_2 = H$:

$$G(x_2) = G(I)\exp\left(\lambda \frac{x_2}{H}\right) \tag{8}$$

où le coefficient λ est donné par :

$$\lambda = \ln\left(\frac{G(H)}{G(I)}\right) \tag{9}$$

Il caractérise la décroissance de G près de l'interface avec une pente en I égale à :

$$\frac{\partial G}{\partial x_2}(I) = \lambda \frac{G(I)}{H} \tag{10}$$

4.2 Solution en déplacement, déformations et contraintes

La variation du cisaillement ε_{12} est en exponentielle :

$$\varepsilon_{12}(x_2) = \frac{\sigma_{12}(I)}{2\,G(I)} \exp\left(-\lambda \frac{x_2}{H}\right) \tag{11}$$

La solution en déplacement tangentiel U_1 est alors :

$$U_1(x_2) = A - \frac{H}{\lambda} \frac{\sigma_{12}(I)}{G(I)} \exp\left(-\lambda \frac{x_2}{H}\right) \tag{12}$$

Pour un jeu de conditions aux limites où le déplacement tangentiel en H est nul, on trouve comme solution particulière :

$$U_1(x_2) = U_1(I)\left(1 - \frac{1 - \exp\left(-\lambda \frac{x_2}{H}\right)}{1 - \exp(-\lambda)}\right) \tag{13}$$

$$U_1(x_2) = U_1(I)\left(\frac{\exp\left(-\lambda \frac{x_2}{H}\right) - \exp(-\lambda)}{1 - \exp(-\lambda)}\right) \tag{14}$$

$$U_1(x_2) = U_1(I)\left(\frac{G(H)}{G(H) - G(I)}\right)\left(-\frac{G(I)}{G(H)} + \exp\left[-\frac{x_2}{H} \ln\left(\frac{G(H)}{G(I)}\right)\right]\right) \tag{15}$$

La contrainte de cisaillement σ_{12} est constante dans tout l'échantillon. Elle est donnée par :

$$\frac{\sigma_{12}(I)}{G(H)} = -\frac{U_1(I)}{H} \frac{\lambda}{-1 + \exp(\lambda)} = -\ln\left(\frac{G(H)}{G(I)}\right) \frac{U_1(I)}{H} \frac{G(H)\,G(I)}{G(H) - G(I)} \tag{16}$$

4.3 Epaisseur définie à partir de la décroissance du déplacement tangentiel

On définit l'épaisseur $e(U_1)$ comme la distance à l'interface pour laquelle ne subsiste plus que p% du déplacement tangentiel U_1 existant en interface $U_1(I)$:

$$e(U_1) = -\frac{H}{\lambda} \ln\left[1-(1-p)(1-\exp(-\lambda))\right] \tag{17}$$

L'application numérique avec p = 1% , H = 10 cm et e = 5 grains de diamètre 1 mm donne un coefficient λ de l'ordre de 92, ce qui implique un rapport des modules G(H)/G(I) de l'ordre de 10^{40}. Si l'on prend une fraction p = 10%, les autres paramètres étant égaux par ailleurs, on trouve un coefficient λ de l'ordre de 46 et un rapport G(H)/G(I) de 10^{20}.

4.4 Epaisseur définie à partir de la décroissance du cisaillement

On définit l'épaisseur $e(\varepsilon_{12})$ comme la distance à l'interface pour laquelle la déformation de cisaillement ε_{12} atteint une valeur p donnée :

$$\varepsilon_{12}(e) = p \tag{18}$$

Cette épaisseur est donnée par :

$$e(\varepsilon_{12}) = -H\frac{1}{\lambda} \ln\left[-2\, p\, \frac{G(I)}{\sigma_{12}(I)}\right] \tag{19}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$e(\varepsilon_{12}) = -H\frac{1}{\lambda} \ln\left(2\, p\, \frac{H}{U_1(I)}\, \frac{1-\exp(-\lambda)}{\lambda}\right) \tag{20}$$

Contrairement à l'épaisseur $e(U_1)$, cette épaisseur dépend de la valeur du déplacement imposé à l'interface et donc de l'intensité du cisaillement. Au plus le sol est cisaillé, au plus l'épaisseur est grande. Elle tend vers l'infini quand $U_1(I)$ tend vers l'infini.

L'application numérique avec p = 1% , H = 10 cm , $U_1(I)$ = 2 mm et λ = 100 donne une épaisseur d'environ 5 mm. Une telle valeur de coefficient λ donne un rapport des modules G(H)/G(I) de l'ordre de 10^{40}. Ce qui n'est pas physiquement possible.

5 Conclusions

De l'étude précédente, on peut conclure que seule une très forte hétérogénéité pourrait expliquer la formation d'une couche d'interface pour un milieu continu classique linéaire élastique. Le rapport maximal que l'on peut avoir dans un sol pour le module de cisaillement G est de l'ordre de 100 pour des indices des vides extrêmes.

Annexe 5

Analyse du cisaillement simple plan d'un milieu continu classique homogène avec une loi de comportement rigide plastique parfaite

1 Problème étudié

On s'intéresse au cisaillement simple plan d'un milieu classique obéissant à une loi de comportement rigide plastique parfaite. Les calculs sont faits dans le cadre de la théorie incrémentale de la plasticité mais le raisonnement et donc les conclusions sont également valable dans le cadre de la théorie J_2 , encore appelée théorie des déformations totales.

2 Solution avant plastification

2.1 Solution élastique linéaire

La première équation d'équilibre permet d'écrire pour le déplacement tangentiel dans le cas général d'un comportement linéaire élastique isotrope :

$$G\frac{dU_1}{dx_2}(x_2) = \sigma_{12}(I) = \text{constante} \qquad (1)$$

La déformation de cisaillement ε_{12} est alors constante sur toute la hauteur de la couche:

$$\varepsilon_{12}(x_2) \equiv \frac{\sigma_{12}(I)}{2G} \qquad (2)$$

Le déplacement tangentiel U_1 varie linéairement sur la hauteur de la couche.

La deuxième équation d'équilibre permet d'écrire pour le déplacement normal U_2 :

$$[K+G]\frac{dU_2}{dx_2}(x_2) = \sigma_{22}(H) = \text{constante} \qquad (3)$$

Le déplacement normal U_2 est découplé du déplacement tangentiel U_1 . Il varie linéairement entre l'interface et le haut de la couche.

2.2 Solution rigide

La solution rigide est caractérisée par un état de déformations ε_{ij} nul . Il en résulte un champ de déplacements constant sur tout l'échantillon :

$$U_2(x_2) = \text{constante} = U_2(I) = 0 \quad (4)$$

$$U_1(x_2) = \text{constante} = U_1(H) = 0 \quad (5)$$

Il n'est pas possible de piloter en déplacement en I et H, car ces deux déplacements sont égaux du fait de la loi de comportement. On ne peut donc pas avoir simultanément deux conditions aux limites indépendantes en déplacement tangentiel.

Si l'on choisit d'imposer une contrainte tangentielle en I et en H, du fait de la géométrie simple de l'essai, celles-ci devront être égales. On ne peut donc pas imposer deux conditions aux limites indépendantes en contrainte tangentielle.

Il faut donc piloter en contrainte en I ou en H et piloter en déplacement sur l'autre limite. C'est la seule solution pour avoir deux conditions aux limites indépendantes, ce qui correspond au cas le plus général.

Le même raisonnement peut être fait pour les conditions aux limites selon la direction x_2 . On en conclut que pour avoir deux conditions aux limites indépendantes selon la direction x_2 , il faut imposer une contrainte normale en I ou H et prendre sur l'autre limite une déplacement normal U_2 imposé.

On choisira donc le jeu de conditions aux limites suivant qui est résumé dans le tableau 1.

Tableau 1 : Jeu de conditions aux limites étudiées

conditions aux limites	interface $x_1 = 0$	haut de l'échantillon H
selon la direction x_1	$\sigma_{12}(I) > 0$ contrainte tangentielle imposée	$U_1(H) = 0$ déplacement tangentiel bloqué
selon la direction x_2	$U_2(I) = 0$ déplacement normal imposé nul (interface rigide)	$\sigma_{22}(I) < 0$ contrainte normale imposée

3 Point de plastification

Pendant tout la phase initiale de chargement où le comportement est élastique, le sol se déforme de manière uniforme et l'état de contrainte est constant dans l'échantillon. Le point de plastification est atteint quand l'état de contraintes vérifie le critère de rupture choisi, en l'occurrence le critère de Mohr-Coulomb. Au point de plastification, l'échantillon plastifie sur toute sa hauteur et l'état de contraintes reste constant dans tout le matériau.

Pour un incrément de chargement, c'est à dire une augmentation de la contrainte tangentielle σ_{12} (I) à partir du point de plastification, les incréments de variables cinématiques sont obtenus avec la loi de comportement que l'on supposera non associée en toute généralité.

A tout instant, on écrit le tenseur des contraintes en fonction des trois variables que sont les deux invariants p et q et l'angle α :

$$\sigma_{11} = p + q \cos 2\,\alpha \tag{6}$$

$$\sigma_{22} = p - q \cos 2\,\alpha \tag{7}$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = q \sin 2\,\alpha \tag{8}$$

Le critère de rupture est le critère de Mohr-Coulomb :

$$F(\sigma_{ij}) = q + p \sin\phi - c \cos\phi \tag{9}$$

tandis que le potentiel plastique est choisi de la forme :

$$G(\sigma_{ij}) = q + p \sin\beta \tag{10}$$

Les relations de comportement sont alors :

$$d\varepsilon_{11} = 0 = d\lambda \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_{11}} \right) = d\lambda \left(\frac{\sin\beta}{2} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{4\,q} \right) = \frac{d\lambda}{2} (\sin\beta + \cos 2\alpha) \tag{11}$$

$$d\varepsilon_{22} = \frac{dU_2}{dx_2} = d\lambda \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_{22}} \right) = d\lambda \left(\frac{\sin\beta}{2} - \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{4\,q} \right) = \frac{d\lambda}{2} (\sin\beta - \cos 2\alpha) \tag{12}$$

$$2\,d\varepsilon_{12} = \frac{dU_1}{dx_2} = d\lambda \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_{12}} \right) = d\lambda \left(\frac{\sigma_{12}}{q} \right) = d\lambda \sin 2\alpha \tag{13}$$

Du fait de la géométrie, la déformation ε_{11} est nulle, ce qui impose, puisque le multiplicateur plastique $d\lambda$ est non nul, que le terme $\sin\beta + \cos 2\alpha$ soit nul. Il en résulte que dans la zone plastique l'angle α est constant et égale à $\pm(\pi/4+\beta/2)$.

D'autre part, le problème statique est complètement déterminé par les trois équations suivantes :

première équation d'équilibre

$$d\sigma_{22}(x_2) = dp - dq\,[\cos 2(\alpha+d\alpha) - \cos 2\alpha] = \text{constante} = 0 \qquad (14)$$

deuxième équation d'équilibre

$$d\sigma_{12}(x_2) = dq\,[\sin 2(\alpha+d\alpha) - \sin 2\alpha] = \text{constante} \qquad (15)$$

critère de rupture

$$dF = dq + dp \sin\phi = 0 \qquad (16)$$

Les trois incréments dp, dq et $d\alpha$ sont complètement déterminés par ces trois équations et indépendamment de la conditions sur $\alpha + d\alpha = \pm(\pi/4+\beta/2)$.

4 Conclusion

Il n'existe donc pas de solution pour un comportement rigide parfaitement plastique. Pour trouver une solution, il faut prendre en compte les déformations élastiques ou introduire un écrouissage des angles ϕ et β en fonction de la déformation plastique, tout en gardant un comportement rigide.

La relation la plus contraignante est la condition :

$$\varepsilon_{11}(x_2) \equiv 0 \qquad (17)$$

Dans le cisaillement simple annulaire, elle n'existe plus du fait des termes provenant des coordonnées polaires. La solution du cisaillement simple plan sera donc dérivée de celle du cisaillement simple annulaire en faisant tendre r vers l'infini tout en gardant une épaisseur d'échantillon constante :

$$H = r_{ext} - r_{int} = \text{constante quand } r \longrightarrow \infty \qquad (18)$$

Annexe 6

Analyse du cisaillement simple plan d'un milieu continu de Cosserat homogène isotrope avec une loi de comportement linéaire élastique : dérivation des équations et solution générale

1 Problème étudié

On s'intéresse au cisaillement simple plan d'un milieu de Cosserat homogène isotrope avec une loi de comportement linéaire élastique.

2 Cinématique

Dans l'hypothèse des déformations planes, le déplacement U_3 est supposé nul et les dérivées par rapport à x_3 aussi :

$$U_3 \equiv 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \equiv 0 \tag{2}$$

Dans le cas d'un milieu de Cosserat, nous ferons l'hypothèse que seul le degré de rotation ω_3^c selon x_3 est sollicité :

$$\omega_i^c = \{0\ ,\ 0\ ,\ \omega_3^c\ \} \tag{3}$$

Dans la suite, la rotation ω_3^c selon l'axe x_3 sera notée simplement ω^c.

On supposera de plus que la couche est très longue, ce qui permet de conclure à l'invariance par translation selon x_1 des variables :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \equiv 0 \tag{4}$$

Le tenseur linéarisé des déformations est égal par définition à :

$$\varepsilon_{ij} = U_{i,j} - \omega_{ij}^c \tag{5}$$

$$\varepsilon_{ij} = U_{i,j} + e_{ijk}\,\omega_k^c \tag{6}$$

Le tenseur des déformations généralisées est égal à :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & \omega^c + U_{1,2} & 0 \\ -\omega^c & U_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (7)$$

Le tenseur des courbures est égal à :

$$\kappa_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^c_{,2} & 0 \end{vmatrix} \quad (8)$$

3 Loi de comportement linéaire élastique

Dans le cas d'une loi de comportement élastique linéaire isotrope, il est possible de déduire à partir de la forme des tenseurs des déformations ε_{ij} et des courbures κ_{ij} que seules les contraintes σ_{11}, σ_{22}, σ_{33}, σ_{12}, σ_{21} et couple contrainte μ_{32} sont non nuls.

Le tenseur des contraintes est alors de la forme :

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{vmatrix} \quad (9)$$

Le tenseur des couples contraintes est de la forme :

$$\mu_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{32} & 0 \end{vmatrix} \quad (10)$$

En utilisant une écriture vectorielle pour les contraintes et déformations, on peut écrire la matrice de comportement d'un matériau linéaire élastique isotrope sous la forme suivante :

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{21} \\ \mu_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K+G & K-G & K-G & & & & & \\ K-G & K+G & K-G & & & & & \\ K-G & K-G & K+G & & & & & \\ & & & G+G_c & G-G_c & & & \\ & & & G-G_c & G+G_c & & & \\ & & & & & & M & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} \\ \kappa_{32} \end{vmatrix} \quad (11)$$

La loi de comportement peut s'écrire aussi sous la forme suivante où l'on a séparé d'un côté : les contraintes et déformations symétriques σ^s_{ij} et ε^s_{ij}, qui sont les termes macroscopiques, d'un deuxième côté : les contraintes et déformations antisymétriques σ^a_{ij} et ε^a_{ij} qui sont les termes dits relatifs et d'un troisième côté : les couples contraintes μ_{ij} et courbures κ_{ij} qui sont les termes microscopiques.

$$\sigma^S_{12} = 2\,G\,\varepsilon^S_{12} \tag{12}$$

$$\sigma^a_{12} = 2\,G_c\,\varepsilon^a_{12} \tag{13}$$

$$\mu_{32} = M\,\kappa_{32} \tag{14}$$

$$\varepsilon^s_{12} = \frac{U_{1,2}}{2} \tag{15}$$

$$\varepsilon^a_{12} = \left(\frac{U_{1,2}}{2} + \omega^c\right) \tag{16}$$

$$\kappa_{32} = \omega^c_{,2} \tag{17}$$

La loi de comportement élastique linéaire n'introduit pas de couplage entre les variables microscopique, relatives et macroscopiques.

De plus, il y a un découplage complet entre d'une part, les contraintes diagonales σ_{ii} , le déplacement normal U_2 et d'autre part, les contraintes non diagonales σ_{ij}, le déplacement tangentiel U_1. L'essai de cisaillement d'un milieu de Cosserat élastique linéaire isotrope se fait donc à volume constant, si la contrainte normale σ_{12} est maintenue constante.

4 Equations d'équilibre

Les équations d'équilibre sont

$$\frac{\partial(\sigma_{12})}{\partial x_2} = 0 \tag{18}$$

$$\frac{\partial(\sigma_{22})}{\partial x_2} = 0 \tag{19}$$

$$\frac{\partial(\mu_{32})}{\partial x_2} + (\sigma_{21} - \sigma_{12}) = 0 \tag{20}$$

Les deux premières équations s'intègrent directement et indépendamment de la dernière :

$$\sigma_{12} \equiv \text{constante} = \sigma_{12}(x_2 = I) = \sigma_{12}^{I} \tag{21}$$

$$\sigma_{22} \equiv \text{constante} = \sigma_{22}(x_2 = H) = \sigma_{22}^{H} \tag{22}$$

Il est intéressant de réécrire la première et troisième équations d'équilibre en terme des contraintes de cisaillement symétrique et antisymétrique, sous la forme suivante :

$$\frac{\partial(\sigma_{12}^{S} + \sigma_{12}^{a})}{\partial x_2} = 0 \tag{23}$$

$$\frac{\partial(\mu_{32})}{\partial x_2} - 2\,\sigma_{12}^{a} = 0 \tag{24}$$

5 Equation différentielle en partie antisymétrique des déformations

La combinaison de la loi de comportement linéaire élastique avec les définitions des déformations permet de réécrire les deux dernières équations (23) et (24) en terme des ε_{12}^{S} et ε_{12}^{a} :

$$G\frac{\partial \varepsilon_{12}^{a}}{\partial x_2} + G_c \frac{\partial \varepsilon_{12}^{S}}{\partial x_2} = 0 \tag{25}$$

$$M\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}(\varepsilon_{12}^{a} - \varepsilon_{12}^{S}) - 4\,G_c\,\varepsilon_{12}^{a} = 0 \tag{26}$$

Le terme ε_{12}^{a} représente la différence entre la rotation du milieu, donnée par la partie antisymétrique du gradient des déformations et notée Ω, et la rotation propre des points, notée ω^c :

$$\varepsilon_{12}^{a} = \Omega_{12} - \omega_{12}^{c} \tag{27}$$

$$\Omega_{12} = \frac{1}{2}(U_{1,2} + U_{2,1}) = \frac{U_{1,2}}{2} \tag{28}$$

$$\omega_{12}^{c} = -e_{123}\omega_3^{c} = -\omega_3^{c} \tag{29}$$

C'est le bon indicateur pour différencier les zones à comportement "classique", c'est à dire où $\Omega = \omega^c$ et les points matériels suivent la rotation du milieu, et les zones où les points matériels tournent librement et indépendamment du milieu, c'est à dire : $\Omega \neq \omega^c$.

Après élimination du terme ε_{12}^{S} entre les deux équations, on obtient l'équation différentielle suivante en ε_{12}^{a} :

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\varepsilon_{12}^{a}\right) - \frac{\alpha^2}{R^2}\varepsilon_{12}^{a} = 0 \tag{30}$$

où la constante adimensionnelle α est définie par :

$$\frac{\alpha^2}{R^2} = \frac{4\,G_c\,G}{M(G+G_c)} = \frac{h_3}{h_1}\frac{1}{R^2} \tag{31}$$

avec les coefficients h_1, h_2 et h_3 définis par :

$$G = \frac{G}{2\,(h_1 + h_2)} \tag{32}$$

c'est à dire :

$$h_1 + h_2 = \frac{1}{2} \tag{33}$$

$$G_c = \frac{G}{2\,(h_1 - h_2)} \tag{34}$$

$$M = \frac{G\,R^2}{h_3} \tag{35}$$

ou encore :

$$h_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{G+G_c}{G_c}\right) \tag{36}$$

$$h_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{G_c - G}{G_c}\right) \tag{37}$$

Pour le modèle statique, le triplet (h_1, h_2, h_3) vaut (3/4, -1/4, 1) alors que pour le modèle cinématique, il vaut (3/8, 1/8, 1/4). La constante α vaut ainsi respectivement $\frac{2}{\sqrt{3}}$ et $\sqrt{\frac{2}{3}}$ pour les modèles statique et cinématique

6 Signe des coefficients h_i

Les conditions nécessaires de stabilité du modèle élastique linéaire, au sens d'Hadamard, sont :

$$G/G_c > 0 \tag{38}$$

$$2N > 0 \tag{39}$$

Ces conditions se réécrivent en fonction des coefficients h_i sous la forme suivante :

$$h_1 - h_2 > 0 \tag{40}$$

Ces relations (38) à (40) sont équivalentes aux relations (41) et (42) puisque $h_1 + h_2 = 1/2$:

$$h_1 > 1/4 \tag{41}$$

$$h_3 > 0 \tag{42}$$

Le terme en α^2 est donc positif et la solution en ε_{12}^a est toujours de type exponentiel.

7 Equation différentielle en rotation propre

La contrainte antisymétrique ε_{12}^a est fonction de U_1 et ω^c :

$$\sigma_{12}^a = 2\,G_c\;\varepsilon_{12}^a = 2\,G_c\left(\frac{U_{1,2}}{2} + \omega^c\right) \tag{43}$$

La dérivée de U_1 peut être obtenue à partir de la première équation d'équilibre qui est déjà intégrée :

$$\sigma_{12}(x_2) = \text{constante} = \sigma_{12}^1 \tag{44}$$

En combinant avec la loi de comportement, on obtient :

$$U_{1,2} = \frac{\sigma_{12}}{G + G_c} - \frac{2\,G_c}{G + G_c}\,\omega^c \tag{45}$$

La troisième équation d'équilibre se réécrit alors en fonction de ω^c :

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\omega + \frac{\sigma_{12}^1}{2\,G}\right) - \frac{\alpha^2}{R^2}\left(\omega + \frac{\sigma_{12}^1}{2\,G}\right) = 0 \tag{46}$$

On peut remarquer que dans la solution classique, la rotation du milieu Ω_{12} est égale par définition à :

$$\Omega_{12} = \frac{U_{1,2}}{2} = \frac{\sigma^{I}_{12}}{2\,G} \tag{47}$$

et que d'autre part, comme $\varepsilon^{a}_{ij} = 0$, on a :

$$\Omega_{12} = \omega^{c}_{12} = -\omega^{c}_{3} \tag{48}$$

Cette équation différentielle en ω^c qui est très similaire à celle en ε^{a}_{12}, peut s'interpréter de la façon suivante. A la solution classique constante en rotation $\omega^c = -\,\Omega_{12}$, s'ajoutent, pour la solution de Cosserat, des termes en $\exp\left(\pm\frac{\alpha}{R}x_2\right)$. Le champ de déformations qui est constant sur la hauteur de l'échantillon dans le cas classique devient non homogène dans la solution de Cosserat.

8 Solution en déformations et courbures

La solution en déformation antisymétrique ou relative ε^{a}_{12} est :

$$\varepsilon^{a}_{12} = A\exp\left(\alpha\frac{x_2}{R}\right) + B\exp\left(-\alpha\frac{x_2}{R}\right) \tag{49}$$

Dans le cas classique, ce terme est nul et les deux constantes d'intégrations A et B sont nulles.

La solution en déformation symétrique ou macroscopique est :

$$\varepsilon^{s}_{12} = \frac{\sigma^{I}_{12}}{2\,G} - \frac{G_c}{G}\left\{A\exp\left(\alpha\frac{x_2}{R}\right) + B\exp\left(-\alpha\frac{x_2}{R}\right)\right\} \tag{50}$$

Les solutions en déformations totales ε_{12} et ε_{21} sont :

$$\varepsilon_{12} = \frac{\sigma^{I}_{12}}{2\,G} + \left(1 - \frac{G_c}{G}\right)\left\{A\exp\left(\alpha\frac{x_2}{R}\right) + B\exp\left(-\alpha\frac{x_2}{R}\right)\right\} \tag{51}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\sigma^{I}_{12}}{2\,G} - \left(1 + \frac{G_c}{G}\right)\left\{A\exp\left(\alpha\frac{x_2}{R}\right) + B\exp\left(-\alpha\frac{x_2}{R}\right)\right\} \tag{52}$$

A la solution classique où la déformation ε_{12} est constante sur tout l'échantillon, vient se superposer dans le cas de la solution de Cosserat, des termes à croissance ou décroissance très rapide en exponentielle.

La solution en courbure κ_{32} est :

$$\kappa_{32} = \left(\frac{G+G_c}{G}\right)\frac{\alpha}{R}\left\{A\exp\left(\alpha\frac{x_2}{R}\right) - B\exp\left(-\alpha\frac{x_2}{R}\right)\right\} \tag{53}$$

9 Solution en déplacement tangentiel et rotation propre

La solution générale en rotation propre de Cosserat ω^c est du type :

$$\omega^c = \omega^c(I) + \left(\frac{G+G_c}{G}\right)\left\{A\left(-1+\exp\left(\alpha\frac{x_2}{R}\right)\right) + B\left(-1+\exp\left(-\alpha\frac{x_2}{R}\right)\right)\right\} \tag{54}$$

où $\omega^c(I)$ est une constante d'intégration qui représente la rotation de Cosserat imposée à l'interface.

La solution générale en déplacement tangentiel U_1 est :

$$U_1 = U_1(I) + \frac{\sigma_{12}(I)}{G}x_2 - 2\frac{G_c}{G}\frac{R}{\alpha}\left\{A\left(-1+\exp\left(\alpha\frac{x_2}{R}\right)\right) - B\left(-1+\exp\left(-\alpha\frac{x_2}{R}\right)\right)\right\} \tag{55}$$

où $U_1(I)$ et $\sigma_{12}(I)$sont deux constantes d'intégration correspondant respectivement au déplacement du sol au contact avec l'interface $U_1(I)$ et à la contrainte de cisaillement à l'interface σ_{12}^I , qui est par ailleurs constante dans tout l'échantillon.

A la solution classique où le déplacement tangentiel U_1 varie linéairement dans l'échantillon, se superpose une solution en exponentielle, croissant ou décroissant très rapidement dans le cas de la solution de Cosserat. La rapidité de la décroissance est contrôlée par la longueur interne R ainsi que les coefficients adimensionnels h_1, h_2 et h_3.

10 Solution en contraintes tangentielles et couple contrainte

La contrainte tangentielle σ_{12} est constante dans toute la couche du fait des équations d'équilibre et indépendamment de toute loi de comportement :

$$\sigma_{12}(x_2) = \text{constante} = \sigma_{12}(I) \tag{56}$$

L'autre contrainte de cisaillement σ_{21} , par contre, varie dans l'échantillon et notamment près de l'interface où les termes antisymétriques de contraintes et déformations sont importants :

$$\sigma_{21}(x_2) = \sigma_{21}(x_2) - 4\,G_c\left\{A\exp\left(\alpha\frac{x_2}{R}\right) + B\exp\left(-\alpha\frac{x_2}{R}\right)\right\} \tag{57}$$

Le couple contrainte μ_{32} est directement proportionnel à la courbure κ_{32} :

$$\mu_{32}(x_2) = M\frac{G+G_c}{G}\frac{\alpha}{R}\left\{A\exp\left(\alpha\frac{x_2}{R}\right) - B\exp\left(-\alpha\frac{x_2}{R}\right)\right\} \tag{58}$$

11 Solution en contrainte normale et déplacement normal

Comme pour un milieu classique linéaire élastique, le cisaillement d'un milieu de Cosserat linéaire élastique se fait à volume constant si la contrainte normal σ_{22} est maintenue constante. Il y a découplage complet entre d'une part, le déplacement normal U_2, les contraintes σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} et d'autre part, le déplacement tangentiel U_1 , la rotation propre ω^c, les contraintes σ_{12} , σ_{21} , le couple contrainte m_{32} .

Les phénomènes de dilatance dans la couche d'interface ne peuvent donc venir que du comportement plastique et non pas du comportement élastique. Pour avoir de la dilatance en plasticité, il faudra prendre un critère de plasticité F fonction de la pression p .

La solution en contraintes σ_{ij} est :

$$\sigma_{22} \equiv \sigma_{22}(x_2 = H) = \sigma_{22}(H) \tag{59}$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{33} = \frac{K-G}{K+G}\sigma_{22}(H) \tag{60}$$

où $\sigma_{22}(H)$ est une constante d'intégration fixée par les conditions aux limites.

La solution en déformations ε_{ij} et déplacement normal U_2 est alors :

$$\varepsilon_{22} = U_{2,2} = \frac{\sigma_{22}(H)}{K+G} \tag{61}$$

$$U_2 = U_2(I) + \frac{\sigma_{22}(H)}{K+G}x_2 \tag{62}$$

12 Conditions aux limites

12.1 Constantes d'intégration

La solution en variables : U_2 , σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} , dépend de deux constantes d'intégration : U_2 (I) et σ_{22} (H), qui sont fixées par les deux conditions aux limites : une à l'interface en I qui peut être en déplacement normal U_2 ou en contrainte normale σ_{22} et une sur la face supérieure de l'échantillon en H qui peut être en déplacement normal U_2 ou en contrainte normale σ_{22} .

La solution en : U_1 , σ^s_{12} , σ^a_{12} , ω^c et μ_{32} , dépend de quatre variables d'intégration :

- les deux constantes A et B qui permettent de définir la rotation relative ε^a_{12} ,
- la contrainte tangentielle à l'interface : $\sigma_{12}(I)$,
- la rotation propre dans le sol au contact avec l'interface : $\omega^c(I)$.

Ces quatre constantes sont à déterminées à partir des quatre conditions aux limites suivantes :

CL 1 : en déplacement U_1 ou contrainte σ_{12} à l'interface,
CL 2 : en rotation propre ω^c ou couple contrainte μ_{32} à l'interface,
CL 3 : en déplacement U_1 ou contrainte σ_{12} sur la face supérieure de l'échantillon,
CL 4 : en rotation propre ω^c ou couple contrainte μ_{32} sur la face supérieure de l'échantillon.

12.2 Retour vers le cas classique

Plusieurs jeux de conditions aux limites peuvent induire dans la couche de matériau de Cosserat un comportement classique, c'est à dire un comportement où le degré de liberté en rotation n'est pas sollicitée plus que la rotation imposée par le milieu lui-même, c'est à dire :

$$\Omega_{12} = \omega^c_{12} = -\omega^c_3 \tag{63}$$

12.2.1 Conditions aux limites en déplacements et rotation (conditions de type Dirichlet)

Il est possible de retrouver la solution classique à déplacement tangentiel linéaire U_1 et rotation ω^c constante à condition d'imposer au moins deux conditions aux limites en déplacement et rotation.

Par exemple, imposer un déplacement U_1 (H) extrapolé linéairement à partir de celui imposé à l'interface, ne suffit pas bien que cela corresponde à la solution classique :

$$U_1(H) = U_1(I) + \frac{\sigma_{12}(I)}{G} H \tag{64}$$

Il faut compléter en imposant une rotation propre en H , extrapolée linéairement à partir de celle en interface :

$$\omega^c(H) = \omega^c(I) \tag{65}$$

12.2.2 Conditions aux limites en contraintes (conditions de type Neumann)

La contrainte σ_{12} est constante du fait des équations d'équilibre. Dans la solution classique, la contrainte σ_{21} est égale à σ_{12} . Elle est donc constante. Dans la solution de Cosserat, elle varie très fortement dans la couche près de l'interface. Si l'on impose à σ_{21} d'être égale à σ_{12} aux deux limites :

$$\sigma_{21}(I) = \sigma_{12}(I) \tag{66}$$

$$\sigma_{21}(H) = \sigma_{12}(H) \tag{67}$$

alors les deux contraintes sont égales sur toute la couche et l'on retrouve la solution classique.

Un deuxième jeu de conditions aux limites qui permet de retrouver la solution classique, consiste à imposer un couple contrainte μ_{32} nul aux deux limites :

$$\mu_{32}(I) = 0 \tag{68}$$

$$\mu_{32}(H) = 0 \tag{69}$$

12.2.3 Conditions aux limites en déformations ou courbure

Un premier jeu de conditions aux limites en déformationss qui permet de retrouver la solution classique, est :

$$\varepsilon^{a}_{12}(I) = 0 \tag{70}$$

$$\varepsilon^{a}_{12}(H) = 0 \tag{71}$$

Il induit un tenseur des déformations antisymétriques nul et donc un tenseur des contraintes antisymétrique nul. Il en résulte alors un tenseur des couples contraintes nul.

Un deuxième jeu de conditions aux limites en courbures peut être considéré :

$$\kappa_{32}(I) = 0 \tag{72}$$

$$\kappa_{32}(H) = 0 \tag{73}$$

Il induit un tenseur des couples contraintes nul et donc un tenseur antisymétrique des contraintes nul du fait de la troisième équation d'équilibre.

Annexe 7

Analyse du cisaillement simple plan d'un milieu continu de Cosserat homogène isotrope avec une loi de comportement linéaire élastique : exemples de conditions aux limites

1 Introduction

Dans l'annexe 6 nous avons développé la solution générale de Cosserat pour le cisaillement simple plan indépendamment des conditions aux limites. Dans la présente annexe, nous calculerons les 6 constantes d'intégration de la solution générale en fonction des deux de conditions aux limites considérées.

2 Premier jeu de conditions aux limites considéré

2.1 CL 1 et 2 (sol entraîné partiellement en translation et en rotation par l'interface)

En interface, nous privilégions les conditions aux limites de type cinématique en déplacement tangentiel et rotation propre des grains car elles sont plus "faciles" à concevoir d'un point de vue physique.

$$U_1(x_2 = 0) = U_1(I) \tag{1}$$

$$\omega^c(x_2 = 0) = \omega^c(I) \tag{2}$$

Physiquement, celles-ci peuvent s'interpréter de la façon suivante : pour un déplacement de l'interface donné W_I , une fraction f_1 de celui-ci est transmise aux grains en translation pure U_1 (I), une fraction f_2 est transmise au sol sous la forme d'une rotation propre des grains ω^c(I) et une dernière fraction f_3 est perdue par glissement des grains relativement à la surface d'interface. Cette dernière partie est accompagnée d'une dissipation d'énergie plastique à l'interface et sera donc prise égale à 0 dans le cas présent :

$$U_1(I) = f_1\ W_I \tag{3}$$

$$\omega^c(I) = f_2\ W_I \tag{4}$$

On peut montrer à partir de considérations micromécaniques, que la somme des coefficients $f_1 + f_2$, qui est sans dimension, doit être inférieure ou égale à 1 dans le cas d'un milieu formé de billes ou rouleaux de même diamètre.

2.2 CL 3 (déplacement tangentiel bloqué en H)

La troisième condition aux limites sur la face supérieure correspond à un déplacement tangentiel U_1 bloqué :

$$U_1(x_2 = H) = 0 \tag{5}$$

2.3 CL 4 (zone tampon près de la face supérieure)

Classiquement, dans un essai de cisaillement simple, on observe la formation d'une **zone tampon** où les grains tournent très peu (ω^c petit) et semblent suivre la rotation du milieu Ω. Nous prendrons donc en condition sur la face supérieure :

$$\varepsilon^a_{12}(x_2 = H) = 0 \tag{6}$$

Celle-ci correspond à :

$$\omega^c_{12} = \Omega_{12} \tag{7}$$

avec :

$$\omega^c_{12} = -e_{123}\omega^c_3 = \omega^c_3 \tag{8}$$

2.4 CL 5 et 6 (contrainte normale et déplacement vertical imposés)

Pour ce qui concerne les deux autres conditions aux limites suivant l'axe x_2 , on prendra un déplacement normal nul à l'interface, car celui-ci est rigide et une contrainte normale σ_{22} constante :

$$U_2(x_2 = 0) = 0 \tag{9}$$

$$\sigma_{22}(x_2 = H) = \text{constante} = \sigma_{22}(H) \tag{10}$$

3 Solution pour le premier jeu de conditions aux limites

3.1 Solution en contraintes normales et déplacement normal

La solution en σ_{ij} et U_2 est découplée des autres variables :

$$\sigma_{22}(x_2) \equiv \sigma_{22}(H) \tag{11}$$

$$\sigma_{11}(x_2) = \sigma_{22}(x_2) \equiv \frac{K - G}{K + G}\sigma_{22}(H) \tag{12}$$

$$U_2(x_2) \equiv 0 \tag{13}$$

3.2 Solutions analytiques en déplacements, rotation et déformations

On introduit les trois constantes α, β et X qui sont sans dimension :

$$\frac{\alpha^2}{R^2} = \frac{4\,G\,G_c}{M\,(G+G_c)} \tag{14}$$

c'est à dire :

$$\alpha = \sqrt{\frac{h_3}{h_1}} = \sqrt{\frac{2\,G\,G_c}{N\,(G+G_c)}} \tag{15}$$

et d'autre part :

$$4\,\beta^2\,R^2 = \frac{M\,G_c}{G\,(G+G_c)} \tag{16}$$

c'est à dire :

$$\beta = \frac{1}{4\sqrt{h_1\,h_3}} = \sqrt{\frac{N\,G_c}{2\,G\,(G+G_c)}} \tag{17}$$

ce qui donne comme relation entre α et β :

$$\alpha\beta = \frac{1}{4\,h_1} = \frac{G_c}{G+G_c} \tag{18}$$

enfin :

$$X = -sh\left(\alpha\frac{H}{R}\right) + \frac{R}{H}\beta\left(ch\left(\alpha\frac{H}{R}\right) - 1\right) \tag{19}$$

Les deux constantes α et β ne dépendent que de la loi de comportement alors que la constante X dépend aussi de l'épaisseur H de la couche normalisée par la longueur interne R du modèle de comportement.

La solution en déformation de cisaillement antisymétrique est alors :

$$\varepsilon_{12}^{a}(x_2) = \frac{(h_1 - h_2)}{2\,h_1\,X}\left[\omega^{*}(1) - \frac{U_1(1)}{2\,H}\right]sh\left(\alpha\frac{x_2 - H}{R}\right) \tag{20}$$

Celle-ci s'écrit aussi sous la forme suivante :

$$\varepsilon_{12}^{a}(x_2) = \frac{G}{G+G_c}\left[\omega^c(I) - \frac{U_1(I)}{2H}\right] sh\left(\alpha\frac{x_2 - H}{R}\right) \tag{21}$$

où on a factorisé le terme $\left[\omega^c(I) - \frac{U_1(I)}{2H}\right]$ qui est nul pour un matériau classique. Ce terme caractérise l'importance relative de la rotation propre $\omega^c(I)$ imposée en condition à la limite en interface dans le cas d'un matériau de Cosserat, par rapport à celle qui existerait dans un milieu classique et qui est donnée par $\frac{U_1(I)}{2H}$.

De la première équation d'équilibre, on peut tirer la relation :

$$\varepsilon_{12}^{S}(x_2) = \frac{\sigma_{12}(I)}{2G} - \frac{G_c}{G}\varepsilon_{12}^{a}(x_2) \tag{22}$$

ce qui donne :

$$\varepsilon_{12}^{s}(x_2) = \frac{\sigma_{12}(I)}{2G} - \frac{1}{4h_1 X}\left[\omega^c(I) - \frac{U_1(I)}{2H}\right] sh\left(\alpha\frac{x_2 - H}{R}\right) \tag{23}$$

La relation entre les variables cinématiques suivante :

$$\omega^c = \varepsilon_{12}^{a} - \varepsilon_{12}^{s} \tag{24}$$

permet d'obtenir la relation :

$$\omega^c(x_2) = -\frac{\sigma_{12}(I)}{2G} + \frac{1}{X}\left[\omega^c(I) - \frac{U_1(I)}{2H}\right] sh\left(\alpha\frac{x_2 - H}{R}\right) \tag{25}$$

qui s'écrit aussi :

$$\omega^c(x_2) = \omega^c(I) + \frac{1}{X}\left[\omega^c(I) - \frac{U_1(I)}{2H}\right]\left(sh\left(\alpha\frac{H}{R}\right) + sh\left(\alpha\frac{x_2 - H}{R}\right)\right) \tag{26}$$

D'autre part on a :

$$U_{1,2} = 2\,\varepsilon_{12}^{s}(x_2) = \frac{\sigma_{12}(I)}{G} - \frac{2G_c}{G}\varepsilon_{12}^{a}(x_2) \tag{27}$$

qui après intégration donne :

$$U_1(x_2) = U_1(I) + \frac{\sigma_{12}(I)}{G}x_2 - \frac{2\beta}{X}R\left[\omega^c(I) - \frac{U_1(I)}{2H}\right]\left(ch\left(\alpha\frac{x_2 - H}{R}\right) - ch\left(-\alpha\frac{H}{R}\right)\right) \tag{28}$$

On peut enfin remarquer que $\sigma_{12}(I)$ s'écrit en fonction des conditions aux limites en déplacement et rotation en interface de la façon suivante :

$$-\frac{\sigma_{12}(I)}{G}=\frac{U_1(I)}{H}+\frac{2\beta}{X}\frac{R}{H}\left[\omega^c(I)-\frac{U_1(I)}{2H}\right]\left(ch\left(\alpha\frac{H}{R}\right)-1\right) \tag{29}$$

Chaque variables a été écrite sous la forme de la solution classique complétée par les nouveaux termes de Cosserat qui sont tous en exponentielle de $\pm\alpha\frac{x_2}{R}$.

3.3 Développement asymptotique dans le cas d'une couche H très épaisse par rapport à la longueur interne R

On supposera dans ce paragraphe que la longueur interne R est très petite devant H, épaisseur finie de la couche de sol cisaillé, et que d'autre part, les coefficients h_1 et h_3 sont finis et strictement positifs :

$$H(\text{finie}) >> R \tag{30}$$

$$h_1 \text{ et } h_3(\text{finis}) > 0 \tag{31}$$

Il est alors possible de faire des développements limités en H/R .

3.3.1 Déplacement tangentiel

3.3.1.1 Développement asymptotique près de l'interface

Développement asymptotique de U_1 pour x_2 peu différent de zéro :

$$U_1(x_2)=U_1(I)+\frac{\sigma_{12}(I)}{G}x_2-\frac{1}{2h_1}\left[\omega^c(I)-\frac{U_1(I)}{2H}\right]x_2 \tag{32}$$

Valeur de U_1 à l'interface pour $x_2 = 0$:

$$U_1(I)=U_1(I) \tag{33}$$

Pente de la courbe $U_1(x_2)$ près de l'interface :

$$\frac{\partial U_1(I)}{\partial x_2}=\frac{\sigma_{12}(I)}{G}-\frac{1}{2h_1}\left[\omega^c(I)-\frac{U_1(I)}{2H}\right] \tag{34}$$

3.3.1.2 Développement asymptotique près de la face supérieure

Développement asymptotique de U_1 pour x_2 peu différent de H :

$$U_1(x_2)=U_1(H)+\frac{\sigma_{12}(I)}{G}x_2 \tag{35}$$

Valeur de U_1 près de la face supérieure en $x_2 = H$:

$$U_1(H) = U_1(H) \tag{36}$$

Pente de la courbe $U_1(x_2)$ près de la face supérieure en $x_2 = H$:

$$\frac{\partial U_1(H)}{\partial x_2} = \frac{\sigma_{12}(I)}{G} = -\frac{U_1(I)}{H} \tag{37}$$

3.3.2 Rotation propre

3.3.2.1 Développement asymptotique près de l'interface

Développement asymptotique de ω^c pour x_2 peu différent de zéro :

$$\omega^c(x_2) = \omega^c(I) - \left[\omega^c(I) - \frac{U_1(I)}{2H}\right]\alpha\frac{x_2}{R} \tag{38}$$

Valeur de ω^c à l'interface pour $x_2 = 0$:

$$\omega^c(I) = \omega^c(I) \tag{39}$$

Pente de la courbe $\omega^c(x_2)$ près de l'interface :

$$\frac{\partial \omega^c(I)}{\partial x_2} = -\frac{\alpha}{R}\left[\omega^c(I) - \frac{U_1(I)}{2H}\right] \tag{40}$$

3.3.2.2 Développement asymptotique près de la face supérieure

Développement asymptotique de ω^c pour x_2 peu différent de H :

$$\omega^c(x_2) = \frac{U_1(I)}{2H} - \left[\omega^c(I) - \frac{U_1(I)}{2H}\right]2\exp\left(-\alpha\frac{H}{R}\right)\left[\alpha\frac{x_2 - H}{R}\right]^2 \tag{41}$$

Valeur de ω^c près de la face supérieure en $x_2 = H$:

$$\omega^c(H) = U_1(I)/2H \tag{42}$$

Pente de la courbe $\omega^c(x_2)$ près de la face supérieure en $x_2 = H$:

$$\frac{\partial \omega^c(H)}{\partial x_2} = 0 \tag{43}$$

3.3.3 Déformation antisymétrique

3.3.3.1 Développement asymptotique près de l'interface

Développement asymptotique de ε_{12}^{a} pour x_2 peu différent de zéro :

$$\varepsilon_{12}^{a}(x_2) = \frac{h_1 - h_2}{2\,h_1}\left[\omega^{c}(I) - \frac{U_1(I)}{2\,H}\right]\exp\left(-\alpha\,\frac{x_2}{R}\right) \tag{44}$$

Valeur de ε_{12}^{a} à l'interface en $x_2 = 0$:

$$\varepsilon_{12}^{a}(I) = \frac{h_1 - h_2}{2\,h_1}\left[\omega^{c}(I) - \frac{U_1(I)}{2\,H}\right] \tag{45}$$

Pente de la courbe $\varepsilon_{12}^{a}(x_2)$ près de l'interface :

$$\frac{\partial \varepsilon_{12}^{a}(I)}{\partial x_2} = -\frac{\alpha}{R}\,\varepsilon_{12}^{a}(I) \tag{46}$$

3.3.3.2 Développement asymptotique près de la face supérieure

Développement asymptotique ε_{12}^{a} pour x_2 peu différent de H :

$$\varepsilon_{12}^{a}(x_2) = -\frac{h_1 - h_2}{h_1}\left[\omega^{c}(I) - \frac{U_1(I)}{2\,H}\right]\exp\left(-\alpha\,\frac{H}{R}\right)\left[\alpha\,\frac{x_2 - H}{R}\right] \tag{47}$$

Valeur de ε_{12}^{a} près de la face supérieure en $x_2 = H$:

$$\varepsilon_{12}^{a}(H) = 0 \tag{48}$$

Pente de la courbe $\varepsilon_{12}^{a}(x_2)$ près de la face supérieure en $x_2 = H$:

$$\frac{\partial \varepsilon_{12}^{a}(H)}{\partial x_2} = 0 \tag{49}$$

3.4 Travail des efforts intérieurs

3.4.1 Solution classique

Pour la solution classique, le travail des efforts intérieurs durant un cisaillement simple à contrainte normale constante est égale à :

$$W^{(i)} = \sigma_{12}\,\varepsilon_{12} + \sigma_{21}\,\varepsilon_{21} = 2\,\sigma_{12}\,\varepsilon_{12} = G\left(\frac{U_1(I)}{H}\right)^2 \tag{50}$$

3.4.2 Travail des efforts intérieurs pour la solution de Cosserat

Le travail des efforts intérieurs peut être décomposé en trois termes. les deux premiers correspondent respectivement aux termes symétriques et antisymétriques des contraintes et déformations. Le dernier correspond aux couples contraintes et courbures :

$$W^{(i)} = W_s^{(i)} + W_a^{(i)} + W_c^{(i)} \tag{51}$$

$$W_s^{(i)} = 2\,\sigma_{12}^s\,\varepsilon_{12}^s \tag{52}$$

$$W_a^{(i)} = 2\,\sigma_{12}^a\,\varepsilon_{12}^a \tag{53}$$

$$W_a^{(i)} = \mu_{32}\,\kappa_{32} \tag{54}$$

En utilisant les solutions asymptotiques pour H >> R et en faisant les calculs à l'interface, on obtient :

$$W_s^{(i)} = G\left(\frac{U_1(I)}{H} + \frac{1}{h_1}\left[\omega^c(I) - \frac{U_1(I)}{2\,H}\right]\right)^2 \tag{55}$$

$$W_a^{(i)} = G\,\frac{(h_1 - h_2)}{2\,h_1^2}\left[\omega^c(I) - \frac{U_1(I)}{2\,H}\right]^2 \tag{56}$$

$$W_a^{(i)} = G\,\frac{1}{2\,h_1}\left[\omega^c(I) - \frac{U_1(I)}{2\,H}\right]^2 \tag{57}$$

La hauteur de l'échantillon H est très grande devant la longueur interne R . Si de plus, le déplacement à l'interface $U_1(I)$ est de l'ordre de grandeur de R, on peut alors approximer le travail des termes symétriques de la façon suivante :

$$W_s^{(i)} = G\,\frac{1}{h_1^2}\left[\omega^c(I) - \frac{U_1(I)}{2\,H}\right]^2 \tag{58}$$

Les trois termes sont donc du même ordre de grandeur. Ils sont directement porportionnels au terme $\left[\omega^c(I)-\frac{U_1(I)}{2H}\right]$ qui caractérise les effets de Cosserat imposés par l'interface.

4 Calculs d'épaisseurs d'interface

4.1 Epaisseur correspondant à une décroissance de p% de la rotation propre

On définit l'épaisseur $e(\omega^c)$ comme la distance à l'interface pour laquelle ne subsiste plus que p% de la rotation propre existant en interface $\omega^c(I)$:

$$\omega^c(e) = p\,\omega^c(I) \tag{59}$$

La solution exacte en e (ω^c) est donnée par l'équation suivante :

$$\varepsilon(\omega^c) = H + \frac{R}{\alpha}\,\mathrm{arc\,sh}\left[-\mathrm{sh}\left(\alpha\frac{H}{R}\right)+\frac{(p-1)\,\omega^c(I)\,X}{\left[\omega^c(I)-\frac{U_1(I)}{2H}\right]}\right] \tag{60}$$

En supposant H>>R, $h_1>0$ et $h_3>0$, on peut faire un développement asymptotique en exponentielle de la rotation propre près de l'interface et obtenir une expression plus simple :

$$e(\omega^c) = -\frac{R}{\alpha}\ln\left[1-\frac{(p-1)\,\omega^c(I)}{\left[\omega^c(I)-\frac{U_1(I)}{2H}\right]}\right] \tag{61}$$

Dans l'hypothèse où le terme $\left[\omega^c(I)-\frac{U_1(I)}{2H}\right]$ est non nul et que la rotation propre à l'interface $\omega^c(I)$ est différente de zéro et du même ordre de grandeur que $\frac{U_1(I)}{R}$, on peut développer cette solution en :

$$e(\omega^c) = -\frac{R}{\alpha}\ln p \tag{62}$$

4.2 Epaisseur correspondant à une décroissance de p% du déplacement tangentiel

On définit l'épaisseur $e(U_1)$ comme la distance à l'interface pour laquelle ne subsiste plus que p% du déplacement tangentiel existant en interface $U_1(I)$:

$$U_1(e) = p\, U_1(I) \tag{63}$$

En supposant $H \gg R$ $h_1 > 0$ et $h_3 > 0$, on peut faire un développement asymptotique en exponentielle du déplacement tangentiel près de l'interface et obtenir l'équation implicite suivante en e :

$$(p-1)U_1(I) = \frac{\sigma_{12}(I)}{G} e + 2\beta R \left[\omega^c(I) - \frac{U_1(I)}{2H}\right]\left(\exp\left(-\alpha\frac{H}{R}\right) - 1\right) \tag{64}$$

4.2.1 Solution au premier ordre

La solution au premier ordre en e est explicite et donne la formule suivante :

$$e(U_1) = \frac{(1-p)\,U_1(I)}{\dfrac{U_1(I)}{H} - \dfrac{1}{2h_1}\left[\omega^c(I) - \dfrac{U_1(I)}{2H}\right]} \tag{65}$$

Dans l'hypothèse où le terme $\left[\omega^c(I) - \dfrac{U_1(I)}{2H}\right]$ est non nul et que la rotation propre à l'interface $\omega^c(I)$ est différente de zéro et du même ordre de grandeur que $\dfrac{U_1(I)}{R}$, on peut développer cette solution en :

$$e(U_1) = R\,(1-p)\,4\,h_1\,\frac{U_1(I)}{R\,\omega^c(I)} \tag{66}$$

4.2.2 Solution en exponentielle

En négligeant le terme en x_2 par rapport aux autres, on obtient la solution suivante en épaisseur :

$$e(U_1) = -\frac{R}{\alpha}\ln\left(1 - 2\,(1-p)\sqrt{h_1\,h_3}\,\frac{U_1(I)}{R\,\omega^c(I)}\right) \tag{67}$$

Le terme dans le logarithme est peu différent de 1, ce qui permet de développer et d'obtenir :

$$e(U_1) = R\,(1-p)\,2\,h_1\,\frac{U_1(I)}{R\,\omega^c(I)} \tag{68}$$

4.3 Epaisseur correspondant à une décroissance de p% de la rotation relative

On définit l'épaisseur $e(\varepsilon^a_{12})$ comme la distance à l'interface pour laquelle ne subsiste plus que p% de la rotation relative, c'est à dire de la partie antisymétrique, existant en interface $\varepsilon^a_{12}(I)$:

$$\varepsilon^a_{12}(e) = p\,\varepsilon^a_{12}(I) \tag{69}$$

La solution exacte en e est donnée par l'équation suivante :

$$\varepsilon(\varepsilon^a_{12}) = H + \frac{R}{\alpha}\,\mathrm{arc\,sh}\left[p\,\mathrm{sh}\left(-\alpha\frac{H}{R}\right)\right] \tag{70}$$

En supposant H>>R , $h_1>0$ et $h_3>0$, on peut faire un développement asymptotique en exponentielle de la rotation propre près de l'interface et obtenir l'expression plus simple suivante :

$$e(\varepsilon^a_{12}) = -\frac{R}{\alpha}\ln p \tag{71}$$

4.4 Conclusions sur les épaisseurs d'interface

Les deux épaisseurs définies à partir de la rotation propre ou de la rotation relative sont égales à :

$$e(\omega^c) = -\frac{R}{\alpha}\ln p \tag{72}$$

Cette épaisseur est proportionnelle à R. Le coefficient de proportionnalité dépend des coefficients élastiques h_1 et h_3 ainsi que du pourcentage p % de décroissance des variables sur l'épaisseur e.

Pour ce qui concerne l'épaisseur correspondante à U_1, celle-ci dépend des mêmes paramètres mais est en plus fonction du rapport $\frac{U_1(I)}{R\,\omega^c(I)}$ qui mesure l'importance du déplacement tangentiel imposé en condition à l'interface par rapport à la rotation propre normalisée imposée en interface. En utilisant les fraction f_1 et f_2 introduites précédemment, ce rapport est égal au rapport de f_1 sur f_2.

Il est à noter que les deux formules approchées explicites sont similaires avec comme seule différence un coefficient 2. La formule obtenue par développement au premier ordre est valable que ce soit pour la solution Cosserat ou classique, et quelles que soient les valeurs de conditions aux limites.

Le premier cas extrême est le cas classique :

$$\frac{U_1(I)}{2H} = \omega^c(I) \tag{73}$$

Ceci donne :

$$e(U_1) = (1-p)H \tag{74}$$

$$e(\omega^c) = \infty \tag{75}$$

Cela correspond à la solution classique avec une décroissance linéaire en U_1 et un rotation propre constante et égale à la rotation d'ensemble. Dans ce cas là, l'épaisseur $e(U_1)$ de l'interface est directement proportionnelle à H tandis que l'épaisseur définie à partir de la rotation est infinie.

Le deuxième cas extrême est le cas où tout le déplacement d'interface W_I est transféré au sol sous la forme d'une rotation propre. Le déplacement tangentiel est alors nul :

$$U_1(I) = 0 \tag{76}$$

Ceci donne :

$$e(U_1) = 0 \tag{77}$$

$$e(\omega^c) = -R\sqrt{\frac{h_1}{h_2}}\ln p \tag{78}$$

Le cas intermédiaire qui correspond à la solution de Cosserat donne, dans l'hypothèse où le terme $\left[\omega^c(I) - \frac{U_1(I)}{2H}\right]$ est non nul et que la rotation propre à l'interface $\omega^c(I)$ est différente de zéro et du même ordre de grandeur que $\frac{U_1(I)}{R}$:

$$e(U_1) = R(1-p)\,4\,h_1\,\frac{U_1(I)}{R\,\omega^c(I)} \tag{79}$$

$$e(\omega^c) = -R\sqrt{\frac{h_1}{h_2}}\ln p \tag{80}$$

Cette épaisseur est indépendante de l'épaisseur de la couche, elle dépend des constantes élastiques, de la longueur interne et en plus du rapport des conditions aux limites cinématiques en interface.

Pour les applications numériques, on considère deux jeux de valeurs des coefficients h_i correspondant respectivement aux modèles cinématique et statique.

Tableau A7-1 : Applications numériques

	modèle statique (3/4, -1/4, 1)	modèle cinématique (3/8, 1/8, 1/4)
coefficient $\alpha = \sqrt{\frac{h_3}{h_1}}$	$\sqrt{\frac{4}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$
épaisseurs $e(\omega^c)$ et $e(\varepsilon_{12}^a)$	$-\sqrt{\frac{3}{4}}\, R \ln p$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}\, R \ln p$
épaisseurs pour p=10%	$e \approx 2\,R$	$e \approx 2{,}8\,R$
épaisseurs pour p=1%	$e \approx 4\,R$	$e \approx 5{,}6\,R$
épaisseur $e(U_1)$	$\frac{3}{2}(1-p)\,R\,\frac{U_1(I)}{R\,\omega^c(I)}$	$\frac{3}{4}(1-p)\,R\,\frac{U_1(I)}{R\,\omega^c(I)}$
épaisseurs pour p=10% $f_1/f_2 = 2$	$e \approx 2{,}7\,R$	$e \approx 1{,}4\,R$
épaisseurs pour p=1% $f_1/f_2 = 2$	$e \approx 3\,R$	$e \approx 1{,}5\,R$

5 Deuxième jeu de conditions aux limites

On s'intéresse au jeu de conditions aux limites résumé dans le tableau A7-2.

Tableau A7-2 : Conditions aux limites

	Interface I	Haut de l'échantillon H
Condition selon l'axe X_1	$U_1(I) > 0$ déplacement imposé non nul	$U_1(H) = 0$ déplacement bloqué
Condition en rotation autour de l'axe X_3	$\frac{\partial R\omega^c(I)}{\partial x_2} = 0$ "rotule"	$R\,\omega^c(H) = 0$ "encastrement"

La solution en rotation est écrite sous la forme :

$$R\omega^c(x_2) = R\left(-\frac{E}{2} + \frac{G+G_c}{2\,G}X\right) \tag{81}$$

$$X = C\exp\left(\alpha\frac{x_2}{R}\right) + D\exp\left(-\alpha\frac{x_2}{R}\right) \tag{82}$$

La condition $\frac{\partial R\omega^c(I)}{\partial x_2} = 0$ impose que les deux constantes d'intégration C et D soient égales :

$$C = D \tag{83}$$

La condition $R\,\omega^c(H) = 0$ impose la relation suivante entre les deux constantes d'intégration C et E :

$$C = E\,\frac{G}{G+G_c}\,\frac{1}{2\,ch\left(\alpha\frac{H}{R}\right)} \tag{84}$$

La solution en déplacement tangentiel est mise sous la forme :

$$U_1(x_2) = F + x_2\,H - \frac{G_c}{G}\frac{R}{\alpha}\,2\,C\,sh\left(\alpha\frac{x_2}{H}\right) \tag{85}$$

La condition à la limite en interface impose que :

$$F = U_1(I) \tag{86}$$

tandis que la condition à la limite en H impose que :

$$E = \frac{U_1(H) - U_1(I)}{H}\,\frac{1}{1 - \frac{G_c}{G+G_c}\frac{R}{\alpha H}\frac{sh\left(\alpha\frac{H}{R}\right)}{ch\left(\alpha\frac{H}{R}\right)}} \tag{87}$$

On en déduit la solution en rotation propre :

$$R\omega^c(x_2) = \frac{R\,E}{2}\left(-1 + \frac{ch\left(\alpha\frac{x_2}{R}\right)}{ch\left(\alpha\frac{H}{R}\right)}\right) \tag{88}$$

La solution en déformation antisymétrique est donnée par :

$$\varepsilon_{12}^{a} = \frac{E}{2}\frac{G}{G+G_c}\frac{ch\left(\alpha\frac{x_2}{R}\right)}{ch\left(\alpha\frac{H}{R}\right)} \tag{89}$$

Ce jeu de conditions aux limites correspond aux conditions aux limites au milieu d'une bande de cisaillement. Il servira à valider le code d'éléments finis en élasticité avant la plastification et la formation d'une bande de cisaillement.

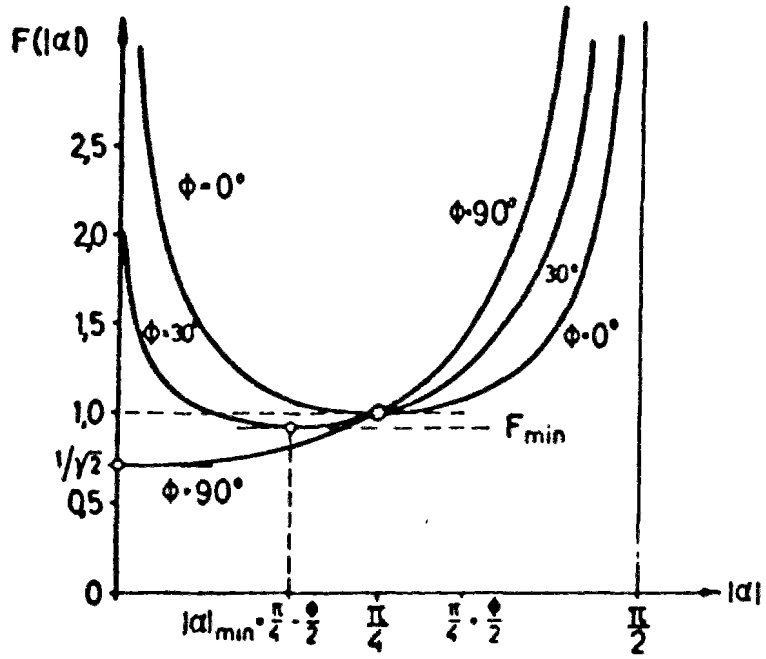


Figure A8-1a : Fonction F(α)

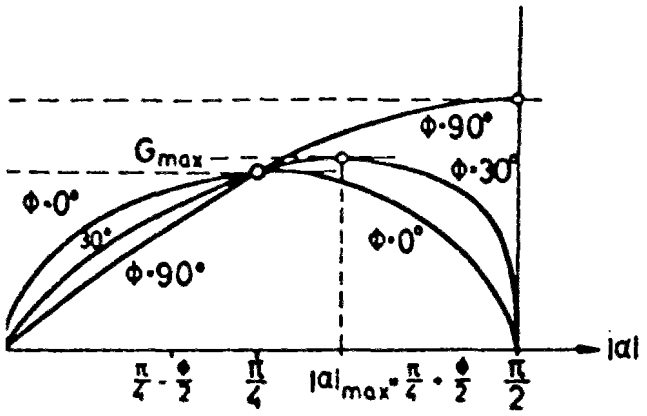


Figure A8-1b : Fonction G(α)

Figure A8-1 : Solutions pour le cas associé
(Bogdaneva-Bontecheva et Lippmann, 1972)

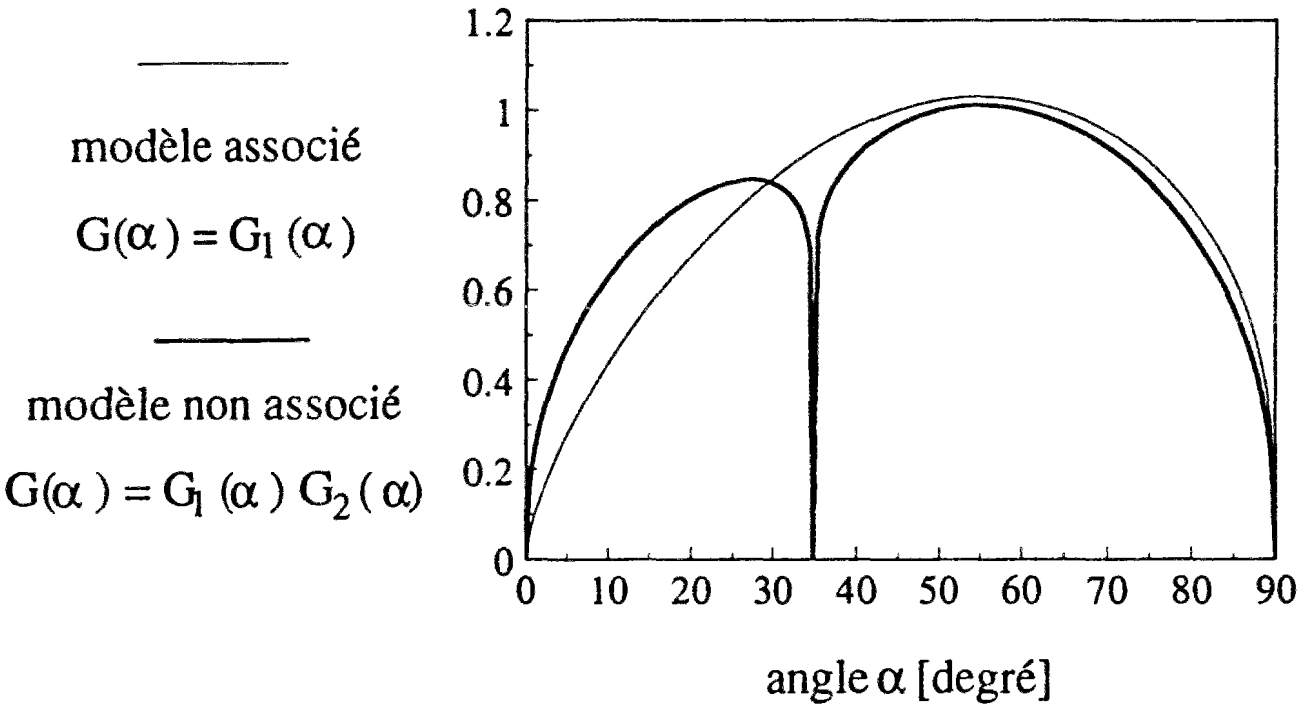


Figure A8-2 : Solutions pour les cas associé et non associé

Annexe 8

Analyse du cisaillement simple annulaire d'un milieu continu classique avec une loi de comportement : élastique, rigide ou rigide parfaitement plastique - solutions générales par zone de comportement

1 Problème étudié

Dans cette annexe, nous développons les solutions générales pour le cisaillement simple annulaire par zones de comportement : élastique, rigide et rigide parfaitement plastique. Le matériau continu est classique homogène isotrope et le critère utilisé est le critère de Mohr-Coulomb.

2 Solution dans une zone élastique

Dans les zones de comportement élastique linéaire, on a les solutions suivantes :

2.1 Contraintes

$$\sigma_{rr} = \frac{K}{K+G} A - 2G \frac{B}{r^2} \tag{8-1}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{K}{K+G} A + 2G \frac{B}{r^2} \tag{8-2}$$

$$\sigma_{\theta r} = \sigma_{r\theta} = \frac{C}{r^2} \tag{8-3}$$

2.2 Déformations

$$\varepsilon_{rr} = \frac{A}{2(K+G)} - \frac{B}{r^2} \tag{8-4}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{A}{2(K+G)} + 2\frac{B}{r^2} \tag{8-5}$$

$$\varepsilon_{\theta r} = \varepsilon_{r\theta} = \frac{C}{2Gr^2} \tag{8-6}$$

2.3 Déplacements

$$U_r = \frac{A}{2(K+G)} r + \frac{B}{r} \tag{8-7}$$

$$U_\theta = -\frac{C}{2Gr} + D\,r \tag{8-8}$$

2.4 Constantes d'intégration

Les constantes d'intégration sont au nombre de 4 : A est en kPa, B en m^2 , C en kN et D sans unité.

La déformation se fait à volume constant puisque :

$$\varepsilon_v = \frac{A}{K+G} \tag{8-9}$$

On observe le découplage complet entre, d'une part, les variables normales : U_r , σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ et d'autre part, les variables tangentielles : U_θ , $\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r}$.

3 Solution dans une zone rigide

Le cas d'un matériau rigide est obtenu à la limite quand le module d'Young E tend vers l'infini et en choisissant des constantes d'intégration pour que les déformations ε_{ij} soient toutes nulles :

$$\varepsilon_{rr}(r) = \frac{A}{2(K+G)} - \frac{B}{r^2} = 0 \tag{8-10}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}(r) = \frac{A}{2(K+G)} + 2\frac{B}{r^2} = 0 \tag{8-11}$$

$$\varepsilon_{\theta r}(r) = \varepsilon_{r\theta}(r) = \frac{C}{2Gr^2} = 0 \tag{8-12}$$

Des quatre constantes d'intégration, B est nulle tandis que les trois autres : A, C et D sont déterminées par les conditions aux limites.

La solution en contraintes est alors :

$$\sigma_{rr}(r) = \sigma_{\theta\theta}(r) = \text{constante} = \sigma_{rr}(r_{ext}) \tag{8-13}$$

$$\sigma_{r\theta}(r) = s_{\theta r}(r) = \frac{C}{r^2} \tag{8-14}$$

La solution en déformations est identiquement nulle et la solution en déplacements correspond à un mouvement de corps rigide avec une rotation d'ensemble notée Ω :

$$U_r(r) \equiv 0 \tag{8-15}$$

$$U_\theta(r) = \Omega\, r \tag{8-16}$$

4 Solution dans une zone plastique

4.1 Inconnues statiques

Les trois inconnues statiques sont σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ et $\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r}$. Il est préférable dans le cas présent d'utiliser plutôt les deux invariants p et q et l'angle α comme inconnues statiques dans la mesure où le critère de rupture dans le cas d'un matériau isotrope est défini en fonction des invariants :

pression :

$$p = \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \tag{8-17}$$

déviateur :

$$q = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{2}\right)^2 + (\sigma_{r\theta})^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \tag{8-18}$$

avec $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

L'angle α est l'angle que font les directions principales avec les axes (r , θ). Si $\alpha = 0$, l'axe r est direction principale majeure :

$$\sigma_{rr} = p + q = \sigma_1 \tag{8-19}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = p - q = \sigma_3 \tag{8-20}$$

Si $\alpha = \pi/2$, l'axe θ est direction principale majeure :

$$\sigma_{rr} = p - q = \sigma_3 \tag{8-21}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = p + q = \sigma_1 \tag{8-22}$$

La représentation par le cercle de Mohr permet de relier les trois contraintes $(\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r})$ aux trois variables statiques choisies comme inconnues (p, q, α) :

$$\sigma_{rr} = p + q\cos(2\alpha) \tag{8-23}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = p - q\cos(2\alpha) \tag{8-24}$$

$$\sigma_{\theta r} = \sigma_{r\theta} = q\sin(2\alpha) \tag{8-25}$$

$$\text{signe}(\alpha) = \text{signe}(\sigma_{\theta r}) \tag{8-26}$$

Il y a trois inconnues statiques et seule la continuité de la contrainte σ_{rr} qui est normale à l'interface est à assurer dans le cas présent.

4.2 Inconnues cinématiques

Dans un milieu continu classique, il n'y a que deux inconnues en déplacements : U_r déplacement radial et U_θ déplacement orthoradial, qui dans le cas présent sont respectivement les déplacements normal et tangentiel.

Les trois inconnues en déformation sont :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial U_r}{\partial r} \tag{8-27}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{U_r}{r} \tag{8-28}$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta r} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{U_\theta}{r}\right) = \frac{r}{2}\frac{d}{dr}\left(\frac{U_\theta}{r}\right) \tag{8-29}$$

Il y a donc cinq inconnues cinématiques et seule la continuité du déplacement normal U_r est à assurer.

4.3 Equations d'équilibre

Les équations d'équilibre écrites en fonctions des σ_{ij} sont :

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})}{r} = 0 \tag{8-30}$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{(\sigma_{r\theta} + \sigma_{\theta r})}{r} = \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{2\,\sigma_{\theta r}}{r} = 0 \tag{8-31}$$

La deuxième équation d'équilibre peut s'intégrer directement en $\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r}$, ce qui donne :

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} = \frac{A}{r^2} \tag{8-32}$$

où la constante A , qui a la dimension d'une force, est égale au couple par unité de longueur le long de l'interface selon z, divisé par 2π.

En terme d'invariantes p et q et d'angle α , cette équation s'écrit sous la forme :

$$q \sin(2\alpha) = \frac{A}{r^2} \tag{8-33}$$

La première équation d'équilibre sera intégrée après combinaison avec le critère de rupture. On dispose donc au niveau des équations d'équilibre de deux équations.

4.4 Loi de comportement

Le matériau est supposé homogène isotrope avec une loi de comportement rigide parfaitement plastique. La loi d'écoulement est non associée. Le critère de rupture est de type Mohr-Coulomb :

$$F = q + p \sin\phi - c \cos\phi \tag{8-34}$$

Le potentiel plastique est pris égal à :

$$G = q + p \sin\beta \tag{8-35}$$

En théorie des déformations totales plastiques, la règle d'écoulement permet de relier les déformations plastiques totales à l'état de contraintes, par le multiplicateur plastique λ :

$$\varepsilon_{rr} = \lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma_{rr}} = \frac{\lambda}{2}\left(\sin\beta + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{2q}\right) = \frac{\lambda}{2}(\sin\beta + \cos(2\alpha)) \tag{8-36}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma_{\theta\theta}} = \frac{\lambda}{2}\left(\sin\beta - \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{2q}\right) = \frac{\lambda}{2}(\sin\beta - \cos(2\alpha)) \tag{8-37}$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta r} = \lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma_{r\theta}} = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{2\sigma_{r\theta}}{2q}\right) = \frac{\lambda}{2}\sin(2\alpha) \tag{8-38}$$

Dans les zones plastiques, on dispose donc de quatre relations de comportement mais aussi d'une inconnue supplémentaire, le multiplicateur plastique λ .

4.5 Solution du problème statiques (en contraintes)

Les équations d'équilibre combinées avec le critère de rupture, permettent d'obtenir une équation uniquement en α :

$$\frac{\partial(p + q\cos(2\alpha))}{\partial r} + \frac{2q\cos(2\alpha)}{r} = 0 \tag{8-39}$$

$$q \sin(2\alpha) = \frac{A}{r^2} \tag{8-40}$$

$$F = q + p \sin\phi - c\cos\phi = 0 \tag{8-41}$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial r} = \left(\frac{1}{r}\right)\frac{\sin(2\alpha)}{\sin\phi - \cos(2\alpha)} \tag{8-42}$$

La solution explicite en $r(\alpha)$ est de la forme :

$$r = M\,F(|\alpha|) \tag{8-43}$$

avec :

$$F(|\alpha|) = \left[\frac{\tan|\alpha|^{\sin\phi}}{\sin 2|\alpha|}\right]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin|\alpha|^{\frac{\sin\phi-1}{2}}\cos|\alpha|^{\frac{-\sin\phi-1}{2}} \tag{8-44}$$

Le tableau A8-1 donne les variations de $F(\alpha)$ dans les cas associé et non associé.

Tableau A8-1 : Variations de α

α	0	$(\pi/4-\phi/2)$	$(\pi/2)$
$r(\alpha)=M\,F(\lvert\alpha\rvert)$	infini	minimum	infini
$\frac{dr}{d\alpha}$		0	

Connaissant la solution en $\alpha(r)$, on obtient $q(r)$ par la deuxième équation d'équilibre intégrée :

$$q(r) = \frac{A}{r^2}\frac{1}{\sin(2\alpha(r))} \tag{8-45}$$

puis la pression $p(r)$ par le critère de rupture :

$$p(r) = \frac{c\cos\phi - \frac{A}{r^2}\frac{1}{\sin(2\alpha(r))}}{\sin\phi} \tag{8-46}$$

4.6 Solution du problème cinématique (en déplacements)

4.6.1 Co-axialité des tenseurs des contraintes et déformations

Le problème statique étant résolu, nous connaissons les variables p, q et α en fonction du rayon r. On peut vérifier facilement que pour les critère de rupture et d'écoulement considérés qu'il y a co-axialité des tenseurs σ et ε . Ce qui permet d'écrire les déformations sous la forme suivante :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\varepsilon_v}{2} + \varepsilon_d \cos(2\alpha) \tag{8-47}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\varepsilon_v}{2} - \varepsilon_d \cos(2\alpha) \tag{8-48}$$

$$\varepsilon_{\theta r} = \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_d \sin(2\alpha) \tag{8-49}$$

avec ε_V déformation volumique et ε_d déformation déviatorique données par :

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_1 + \varepsilon_3 \tag{8-50}$$

$$\varepsilon_d = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\theta\theta}}{2}\right)^2 + (\varepsilon_{r\theta})^2} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2} \tag{8-51}$$

L'angle α , qui est un variable statique et cinématique, est l'angle entre les axes (r , θ) et les directions principales des tenseurs des contraintes et des déformations.

Dans le cas d'un comportement plastique, la déformation volumique ε_V est égale au multiplicateur plastique λ multiplié par sin β , où β est l'angle de dilatance du matériau :

$$\varepsilon_v = \lambda \sin\phi \tag{8-52}$$

tandis que le déviateur du tenseur des déformations ε_d est égale à la moitié du multiplicateur plastique λ :

$$\varepsilon_d = \frac{\lambda}{2} \tag{8-53}$$

4.6.2 Solution en déplacement radial

Connaissant la fonction $\alpha(r)$, on obtient une équation différentielle en U_r et r puis en U_r et α en éliminant λ entre les deux première équations de comportement :

$$\frac{\varepsilon_{rr}}{\varepsilon_{\theta\theta}} = \frac{dU_r}{dr}\frac{r}{U_r} = \frac{\sin\beta + \cos(2\alpha)}{\sin\beta - \cos(2\alpha)} \tag{8-54}$$

$$\frac{dU_r}{U_r} = \frac{\sin\beta + \cos(2\alpha)}{\sin\beta - \cos(2\alpha)}\frac{\sin\phi - \cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}d\alpha \tag{8-55}$$

Cette équation différentielle se résout en $U_r(\alpha)$ sous la forme suivante :

$$U_r(\alpha) = K\, G_1(|\alpha|)\, G_2(|\alpha|) \tag{8-56}$$

où les deux fonctions G_1 et G_2 sont égales à :

$$G_1(\alpha) = \left[2 \sin|\alpha|^{1+\sin\beta} \cos|\alpha|^{1-\sin\beta} \right]^{1/2} \tag{8-57}$$

$$G_2(\alpha) = \left[|\sin\beta - \cos 2\alpha|^{\frac{2\sin\beta}{\cos^2\beta}} \sin|\alpha|^{\frac{1+\sin\beta}{1-\sin\beta}} \cos|\alpha|^{\frac{1-\sin\beta}{1+\sin\beta}} \right]^{\frac{\sin\phi-\sin\beta}{2}} \tag{8-58}$$

Il est à remarquer que pour une loi de comportement associée, la deuxième fonction G_2 est constante et égale à 1. La première fonction a été déjà développée par Bogdaneva-Bontcheva et Lippmann (1975) qui s'intéressaient uniquement au cas associé.

La fonction $U_r(\alpha)$ est paire et toujours positive :

$$U_r(-\alpha) = U_r(\alpha) \tag{8-59}$$

Les variations de U_r sont résumées dans les tableaux A8-2 et A8-3 pour les cas associé et non associé (figures A8-1 et A8-2).

Tableau A8-2 : Variation de U_r avec α (cas associé)

α	0	$(\pi/4-\phi/2)$	$(\pi/4-\beta/2)$	$(\pi/4+\beta/2)$	$(\pi/2)$
$U_r(\alpha)$	0	maximum	0	maximum	0
$\frac{dU_r}{d\alpha} = K\frac{dG}{d\alpha}$	infini	0	infini	0	infini

Tableau A8-3 : Variation de U_r avec α (cas non associé)

	α	0	$(\pi/4+\phi/2)$	$(\pi/2)$
	$U_r(\alpha)$	0	maximum	0
	$\frac{dU_r}{d\alpha}$	infini	0	infini

La fonction $\alpha(r)$ dépend de l'angle de frottement ϕ mais est indépendante de l'angle de dilatance β . Par contre, la fonction $U_r(\alpha)$ est fonction de β puisque la déformation volumique est contrôlée par β .

4.6.3 Solution en déplacement tangentiel

Connaissant la fonction $\alpha(r)$, on obtient facilement une équation différentielle en U_θ et r puis en U_θ et α en éliminant λ entre les deux dernières équations de comportement :

$$\frac{d\left(\frac{U_q}{r}\right)}{d\alpha} = \frac{2\,U_r(\alpha)}{r(\alpha)}\,\frac{\sin\phi - \cos 2\alpha}{\sin\beta - \cos 2\alpha} \tag{8-60}$$

$$\frac{d\left(\frac{U_q}{r}\right)}{d\alpha} = 4\,\frac{K}{M}\,\sin|\alpha|^{\frac{1-\sin\phi}{1-\sin\beta}}\cos|\alpha|^{\frac{1+\sin\phi}{1+\sin\beta}}\,\frac{\sin\phi - \cos 2\alpha}{\sin\beta - \cos 2\alpha}\,|\sin\beta - \cos 2\alpha|^{\frac{\sin\beta}{\cos^2\beta}(\sin\phi - \sin\beta)} \tag{8-61}$$

Dans le cas associé, cette dernière équation se réduit à l'expression suivante :

$$\frac{d\left(\frac{U_q}{r}\right)}{d\alpha} = 2\,\frac{K}{M}\,\sin|2\,\alpha| \tag{8-62}$$

On écrira la solution en U_θ sous la forme :

$$\frac{U_\theta}{r} = P + \frac{K}{M}\,H(|\alpha|) \tag{8-63}$$

où dans le cas associé $H(\alpha)$ est égale à :

$$H(\alpha) = -\text{signe}(\alpha)\cos(2\,\alpha) \tag{8-64}$$

tandis que dans le cas non associé, l'équation différentielle précédente doit être intégrée numériquement.

Tableau A8-4 : Variations de $dH/d\alpha$ dans le cas non associé

α	0		$(\pi/4-\phi/2)$		$(\pi/4-\beta/2)$		$(\pi/2)$
$\frac{dH}{d\alpha}$	0	+	0	-	infini	+	0

Tableau A8-5 : Variations de U_θ et $H(\alpha)$ dans le cas non associé

α	0	$(\pi/4)$	$(\pi/2)$
$H(\alpha)$=-signeα cos 2α	-1	0	1
$\frac{dH}{d\alpha} = \sin 2\lvert\alpha\rvert$	0	1	0

Annexe 9

Analyse du cisaillement simple annulaire d'un milieu continu classique avec une loi de comportement : élastique, rigide ou rigide parfaitement plastique : solution du problème aux limites

1 Problème étudié

On développe la solution de l'essai de cisaillement simple annulaire en choisissant un jeu de conditions aux limites appropriées pour le développement de solutions analytiques.

On considère ici un milieu continu classique homogène isotrope avec une loi de comportement rigide plastique (critère de Mohr-Coulomb) et une loi d'écoulement associée ou non associée.

Les solutions analytiques en contraintes, déplacements et déformations, pour chacune des zones, peuvent être trouvées dans l'annexe 8.

2 Conditions aux limites étudiées

Afin de pouvoir résoudre le problème statique, c'est à dire en contraintes, on cherchera dans la mesure du possible à prendre des conditions aux limites de type statique, c'est à dire en contraintes.

2.1 CL 1 : Interface rigide (CL cinématique)

On supposera que l'interface est rigide, c'est à dire que le déplacement normal à l'interface, qui est aussi le déplacement radial U_r est nul dans le matériau au contact avec l'interface. Ceci suppose qu'il n'y a pas perte de contact ou décollement.

CL 1 : $U_r(r_i) = 0$

2.1.1 Conséquence pour le sol plastifié en contact avec l'interface

Dans le cas d'un sol plastifié en contact avec l'interface rigide, cette condition aux limites est de type cinématique mais est aussi statique dans la mesure où les deux tenseurs des contraintes symétriques et déformations symétriques sont co-axiaux. Il est alors possible d'écrire cette condition à la limite sous la forme d'une condition sur l'angle α.

La déformation $\varepsilon_{\theta\theta}$ est directement proportionnelle à U_r :

$$\varepsilon_{\theta\theta}(r) = \frac{U_r}{r} \tag{9-1}$$

Si l'on suppose de plus qu'en interface, le sol est plastifié, on déduit de la loi de comportement la relation suivante :

$$\varepsilon_{\theta\theta}(r) = \frac{\lambda}{2}(\sin\beta - \cos 2\alpha) = 0 \tag{9-2}$$

Comme le multiplicateur plastique λ est non nul, on en déduit que α vaut en r_i :

$$\alpha(r_i) = \alpha_i = \pm\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) \tag{9-3}$$

$$\pm = \text{signe}(\sigma_{\theta r}) \tag{9-4}$$

2.1.2 Conséquence pour le sol rigide en contact avec l'interface

Dans le cas d'un sol rigide en contact avec l'interface, cette condition à la limite cinématique est automatiquement vérifiée puisque la solution rigide en déplacement normal est identiquement nulle (mouvement de corps rigide en rotation).

2.2 CL 2 : Contrainte de cisaillement à l'interface (CL statique)

$$\sigma_{\theta r}(r_i) = \sigma^i_{\theta r} \leq 0 \tag{9-5}$$

2.3 CL 3 : Contrainte de confinement sur le rayon extérieur (CL statique)

$$\sigma_{rr}(r_{ext}) = \sigma^{ext}_{rr} \leq 0 \tag{9-6}$$

2.4 CL 4 : Déplacement tangentiel bloqué sur le rayon extérieur (CL cinématique)

La deuxième équation d'équilibre, qui est en contrainte tangentielle $\sigma_{\theta r}$, impose une variation de celle-ci en 1 sur r^2 , ce qui est très contraignant pour les conditions aux limites. En effet, l'on ne peut pas prendre deux conditions aux limites en contrainte indépendantes. On préférera pour la condition CL 4 une condition de type cinématique :

$$U_\theta(r_{ext}) = 0 \tag{9-7}$$

3 Solution dans le cas d'un matériau associé

3.1 Epaisseur de la zone plastique en contact avec l'interface

Dans le cas d'une loi d'écoulement associée, les angles de forttement et de dilatance sont égaux. La solution en $U_r(\alpha)$ est alors donnée par :

$$U_r(\alpha) = K\, G_1(|\alpha|) \tag{9-8}$$

où la fonction G_1 est égale à :

$$G_1(\alpha) = \left[2 \sin|\alpha|^{1+\sin\beta} \cos|\alpha|^{1-\sin\beta}\right]^{1/2} \tag{9-9}$$

Les seules valeurs de α pour lesquelles la fonction G_1 est nulle sont /

$$\alpha = 0 \text{ et } \alpha = \pm \pi/2 \tag{9-10}$$

D'autre part, la première condition aux limites notée CL 1 , impose un déplacement normal U_r nul à l'interface r_i , ce qui impose que α en r_{int} soit égal à :

$$\alpha(r_i) = \alpha_i = \pm\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) \tag{9-11}$$

On en déduit, dans le cas d'un matériau associé, que la constante d'intégration K est nulle et que le déplacement U_r est identiquement nul dans toute la zone plastique :

$$U_r(r) = K\, G_1(r) \equiv 0 \tag{9-12}$$

Ceci implique alors que α est constant en fonction de r dans la zone plastique puisqu'on a la relation suivante dans toute la zone plastique :

$$\frac{U_r(r)}{r} = \varepsilon_{\theta\theta}(r) = \frac{\lambda}{2}(\sin\beta - \cos 2\alpha) = 0 \tag{9-13}$$

avec λ strictement positif.

Or, dans la zone plastique, l'angle α est fonction du rayon r par la relation suivante :

$$r = M\, F(|\alpha|) \tag{9-14}$$

$$F(|\alpha|) = \left[\frac{\tan|\alpha|^{\sin\phi}}{\sin 2|\alpha|}\right]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin|\alpha|^{\frac{\sin\phi-1}{2}} \cos|\alpha|^{\frac{-\sin\phi-1}{2}} \tag{9-15}$$

Comme α à l'interface, en r_i , est fixé par la condition aux limites en U_r , on en déduit la valeur de la constante M non nulle qui vaut :

$$M = \frac{r_i}{F(|\alpha_i|)} \tag{9-16}$$

Cette variation de l'angle α avec le rayon r suivant la relation précédente, est incompatible avec une solution en α constant. On en déduit que la zone plastique en contact avec l'interface est d'épaisseur nulle, et qu'il existe un discontinuité entre r_{int}^- et r_{int}^+ , c'est à dire juste à l'interface.

3.2 Conditions de continuité et solution en contraintes

Les conditions de continuité en contraintes à respecter en r_{int} correspondent à la continuité du vecteur contrainte sur toute surface parallèle à l'interface et sont les suivantes :

$$\Delta\sigma_{rr}(r_{int}) = \sigma_{rr}(r_{int}^+) - \sigma_{rr}(r_{int}^-) = 0 \tag{9-17}$$

$$\Delta\sigma_{\theta r}(r_{int}) = \sigma_{\theta r}(r_{int}^+) - \sigma_{\theta r}(r_{int}^-) = 0 \tag{9-18}$$

Il n'y a pas besoin par contre d'assurer la continuité de $\sigma_{\theta\theta}$:

$$\Delta\sigma_{\theta\theta}(r_{int}) = \sigma_{\theta\theta}(r_{int}^+) - \sigma_{\theta\theta}(r_{int}^-) \neq 0 \tag{9-19}$$

D'autre part, il faut respecter la continuité du déplacement normal U_r mais pas du déplacement tangentiel U_θ.

3.2.1 Hypothèse d'une discontinuité du tenseur des contraintes entre deux zones plastiques avec continuité du déplacement radial

Supposons que le sol en contact avec l'interface en r_i^- est plastifié et le reste en r_i^+ . On peut essayer d'introduire immédiatement en r_i une discontinuité en α tout en conservant la continuité de U_r , σ_{rr} , et $\sigma_{\theta r}$. Le choix des discontinuités en p et q étant fait de manière à assurer ces trois conditions de continuité.

En r_{int}^- , l'angle α vaut $\pm(\pi/4-\beta/2)$, ce qui permet d'assurer :

$$U_r(r_{int}^-) = 0 \tag{9-20}$$

En r_{int}^+ , on prend α égal à 0 ou $\pm\pi/2$ puisque ce sont les seules valeurs à annuler $G_1(r)$ et donc à assurer la condition $U_r(r_{int}^-) = U_r(r_{int}^+) = 0$ tout en permettant une solution en $U_r(r)$ qui ne soit pas nulle partout (constante $K \neq 0$).

On choisit ensuite les discontinuités en p et q :

$$\Delta p(r_i) = p(r_i^+) - p(r_i^-) \tag{9-21}$$

$$\Delta q(r_i) = q(r_i^+) - q(r_i^-) \tag{9-22}$$

de manière à assurer la continuité de σ_{rr} et $\sigma_{\theta r}$:

$$\Delta\sigma_{rr}(r_i) = \sigma_{rr}(r_i^+) - \sigma_{rr}(r_i^-) = 0 \tag{9-23}$$

$$\Delta\sigma_{\theta r}(r_i) = \sigma_{\theta r}(r_i^+) - \sigma_{\theta r}(r_i^-) = 0 \tag{9-24}$$

La dernière condition écrite entre r_{int}^- et r_{int}^+ avec les valeurs appropriées de α, donne la relation suivante :

$$\Delta\sigma_{\theta r}(r_i) = 0 = (q + \Delta q)\sin(2\,\alpha_i^+) - q\sin(2\,\alpha_i^-) = \pm q(r_i^-)\cos\beta \tag{9-25}$$

qui, comme cos β est non nul, implique que q en r_{int}^- est nul. Il en résulte que le cisaillement d'interface $\sigma_{\theta r}$ est nul, ce qui n'est pas approprié.

Il n'est donc pas possible de construire une solution avec une discontinuité du tenseur des contraintes en r_{int} entre deux zones plastiques. On peut par contre, essayer de construire une solution plastique en r_{int}^- mais rigide en r_{int}^+.

3.2.2 Hypothèse d'une discontinuité du tenseur des contraintes entre une zone plastique et une zone rigide

Il est possible de construire une solution avec une discontinuité en r_{int} du tenseur des contraintes entre une zone plastique et une zone rigide, tout en conservant la continuité des contraintes et déplacements.

Dans la zone rigide, la solution en contraintes est du type :

$$\sigma_{rr}(r) = \sigma_{\theta\theta}(r) \equiv \text{constante} \tag{9-26}$$

$$\sigma_{\theta r}(r) = \sigma_{\theta r}(r_i^+)\left(\frac{r_i}{r}\right)^2 \tag{9-27}$$

Ceci implique que cos(2 α) est nul et que α vaut $\pm\pi/4$ en r_{int}^+ avec $\pm$ = signe($\sigma_{\theta r}$).

Dans la zone rigide, la solution en déplacement est :

$$U_r(r) \equiv 0 \tag{9-28}$$

$$U_\theta(r) = \Omega\, r \tag{9-29}$$

Il est alors possible d'assurer la continuité du déplacement normal U_r en r_{int}.

On peut remarquer que la loi de comportement rigide plastique impose que sur toute ligne de discontinuité entre une zone plastique et une zone rigide, on ai la relation suivante entre les discontinuités de déplacements :

$$\Delta U_r = \sin\beta \sqrt{(\Delta U_r)^2 + (\Delta U_\theta)^2} \tag{9-30}$$

$$\Delta U_r(r_i) = U_r(r_i^+) - U_r(r_i^-) \tag{9-31}$$

$$\Delta U_\theta(r_i) = U_\theta(r_i^+) - U_\theta(r_i^-) \tag{9-32}$$

Du fait de la condition à la limite CL 1 on a :

$$U_r(r_i^-) = 0 \tag{9-33}$$

Le choix $U_r(r_{int}^+) = 0$ est possible et il permet d'assurer la continuité de U_r . Par la relation de comportement, comme $\beta>0$, il en résulte que ΔU_θ est nulle et que U_θ est continu.

On choisit ensuite les discontinuités en p et q :

$$\Delta p(r_i) = p(r_i^+) - p(r_i^-) \tag{9-34}$$

$$\Delta q(r_i) = q(r_i^+) - q(r_i^-) \tag{9-35}$$

de manière à assurer la continuité de σ_{rr} et $\sigma_{\theta r}$:

$$\Delta\sigma_{rr}(r_i) = \sigma_{rr}(r_i^+) - \sigma_{rr}(r_i^-) = 0 \tag{9-36}$$

$$\Delta\sigma_{\theta r}(r_i) = \sigma_{\theta r}(r_i^+) - \sigma_{\theta r}(r_i^-) = 0 \tag{9-37}$$

La première condition écrite entre r_i^- et r_i^+ avec les valeurs appropriées de α, donne les relations suivantes :

$$\Delta\sigma_{rr}(r_i) = 0 = \left(p(r_i^-) + \Delta p\right) + \left(q(r_i^-) + \Delta q\right)\cos\left(2\,\alpha_i^+\right) - p(r_i^-) - q(r_i^-)\cos\left(2\,\alpha_i^-\right) \tag{9-38}$$

$$\Delta\sigma_{rr}(r_i) = 0 = \left(p(r_i^-) + \Delta p\right) - p(r_i^-) - q(r_i^-)\sin\beta \tag{9-39}$$

$$\Delta p = q(r_i^-)\sin\beta \tag{9-40}$$

La dernière condition écrite entre r_i^- et r_i^+ avec les valeurs appropriées de α, donne les relations suivantes :

$$\Delta\sigma_{\theta r}(r_i) = 0 = \left(q(r_i^-) + \Delta q\right)\sin\left(2\,\alpha_i^+\right) - q(r_i^-)\sin\left(2\,\alpha_i^-\right) = \pm\left(q(r_i^-) + \Delta q\right) \pm q(r_i^-)\cos\beta \tag{9-41}$$

$$\text{signe}\left(\alpha_i^+\right)\left(q(r_i^-) + \Delta q\right) + \text{signe}\left(\alpha_i^-\right)q(r_i^-)\cos\beta = 0 \tag{9-42}$$

Comme α et $\sigma_{\theta r}$ sont de même signe, et que cette dernière est continue, on en déduit que le signe de α est continu, d'où l'équation en Δq :

$$\Delta q = -q(r_i^-)\,(1+\cos\beta) \tag{9-43}$$

Il est donc possible de choisir Δp et Δq de manière à satisfaire la continuité des contraintes sur toute facette parallèle à l'interface.

Pour le jeu de conditions aux limites considérées, il est ainsi possible de construire une solution avec une zone plastique d'épaisseur nulle au contact avec l'interface et le reste de l'échantillon rigide.

Si l'on avait choisi en condition CL 2 d'imposer le déplacement tangentiel $U_\theta\,(r_i) > 0$ plutôt que la contrainte tangentielle $\sigma_{\theta r}(r_i)$, tout en gardant pour CL 4 un déplacement tangentiel $U_\theta\,(r_{ext}) = 0$, alors on n'aurait pas pu construire la solution car en remontant de r_{ext} vers r_i , on a U_θ nul en r_{ext} donc en r_i^+ puis par continuité nulle en r_i^-. Il faudrait alors supposer une discontinuité de U_θ en r_i qui impliquerait une discontinuité en U_r .

4 Solution dans le cas d'une loi d'écoulement non associée

Dans le cas d'une loi de comportement non associée, l'angle de dilatance β est différent de ϕ et inférieur.

4.1 Solution du problème statique

4.1.1 Prise en compte de la condition CL 1

La solution en $U_r(\alpha)$ est donnée par :

$$U_r(\alpha) = K\,G_1(|\alpha|)\,G_2(|\alpha|) \tag{9-44}$$

où les deux fonctions G_1 et G_2 sont égales à :

$$G_1(\alpha) = \left[2\sin|\alpha|^{1+\sin\beta}\cos|\alpha|^{1-\sin\beta}\right]^{1/2} \tag{9-45}$$

$$G_2(\alpha) = \left[|\sin\beta - \cos 2\alpha|^{\frac{2\sin\beta}{\cos^2\beta}}\,\sin|\alpha|^{\frac{1+\sin\beta}{1-\sin\beta}}\cos|\alpha|^{\frac{1-\sin\beta}{1+\sin\beta}}\right]^{\frac{\sin\phi-\sin\beta}{2}} \tag{9-46}$$

La première condition aux limites, notée CL 1, impose un déplacement radial U_r nul à l'interface r_i . On cherche une solution en déplacement radial U_r qui ne soit pas nulle. Il en résulte que α doit être égale à l'une des solutions des deux équations :

$$G_1(\alpha) = 0 \tag{9-47}$$

$$G_2(\alpha) = 0 \tag{9-48}$$

c'est à dire pour la première équation :

$$\alpha = 0,\ \pi \text{ ou } \pm\pi/2 \tag{9-49}$$

et pour la deuxième équation :

$$\alpha = 0,\ \pi,\ \pm\pi/2 \text{ ou } \pm\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) \tag{9-50}$$

Il est remarquable que la condition aux limites CL 1 soit automatiquement satisfaite par la solution plastique en $U_r(\alpha)$ dans le cas non associé et n'impose donc pas le choix d'une constante K nulle comme cela se produit dans le cas associé.

On prendra donc α égal à $\pm\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)$ avec $\pm$ égale au signe de $\sigma_{\theta r}(r_i)$ à l'interface.

4.1.2 Schéma de résolution du problème statique (loi de comportement non associée)

4.1.2.1 Solution dans la zone plastique au contact de l'interface

Tableau A9-1 : Schéma de résolution dans la zone plastique au contact avec l'interface

Condition à la limite CL 2 $\sigma_{\theta r}(r_i) \leq 0$ + solution explicite en $\sigma_{\theta r}(r)$	constante $A_P = (r_{int})^2\ \sigma_{\theta r}(r_{int})$ solution $\sigma_{\theta r}(r) = \frac{A_P}{r^2}$
Condition à la limite CL 1 $U_r(r_i)=0$ + solution explicite en $r(\alpha)$	angle $\alpha_i = \pm\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)$ avec $\pm = \text{signe}\left(\sigma_{\theta r}(r_i)\right) = -$ solution $r = M\ F(\lvert\alpha\rvert)$ avec constante $M = \frac{r_i}{F(\lvert\alpha_i\rvert)}$
cercle de Mohr	solution $q(r) = \frac{\sigma_{\theta r}(r)}{\sin(2\,\alpha(r))}$
Critère de Mohr-Coulomb	solution $p(r) = \frac{-q(r) + c\cos\phi}{\sin\phi}$

On en déduit directement les solutions en σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ et $\sigma_{\theta r} = \sigma_{r\theta}$

4.1.2.2 Transition entre la zone plastique et la zone rigide

Tableau A9-2 : Schéma de résolution pour la transition entre les zones plastique et rigide

La transition entre les zones plastique et rigide se produit en r_p tel que $\sigma_{rr}(r_p) = \sigma_{rr}(r_{ext})$ avec les conditions de continuité de σ_{rr} , $\sigma_{\theta r}$ et U_r à respecter	
Solution en contraintes dans la zone rigide	solution générale $\sigma_{rr}(r) = \sigma_{\theta\theta}(r) \equiv \sigma_{rr}(r_{ext})$ $\alpha(r) \equiv \pm\frac{\pi}{4}$ $\pm = \text{signe}\left(\sigma_{\theta r}(r_p)\right)$ $\sigma_{\theta r}(r) = \pm q(r) = \frac{A_R}{r^2}$
Solution en $\sigma_{\theta r}$	solution $\sigma_{\theta r}(r) = \pm q(r) = \frac{A_R}{r^2}$ avec $A_R = A_P$ pour assurer la continuité en r_p
Solution en $\alpha(r)$	$\alpha(r) \equiv \pm\frac{\pi}{4}$ $\pm = \text{signe}\left(\sigma_{\theta r}(r_p)\right) = -$ avec discontinuité de α en r_p
Solution en q(r)	$q(r) = \lvert\sigma_{\theta r}(r)\rvert$ avec continuité en r_p
Solution en p(r)	$p(r) = \sigma_{rr}(r) = \sigma_{\theta\theta}(r) \equiv \sigma_{rr}(r_{ext})$ avec discontinuité de p en r_p car $\sigma_{\theta\theta}$ est continue et σ_{rr} ne l'est pas

4.1.2.3 Calcul de l'épaisseur de la zone plastique

La valeur de l'angle α_p à la limite entre la zone plastique et la zone rigide en r_p est solution de l'équation suivante qui assure la continuité de la contrainte normale σ_{rr} en r_p :

$$\sigma_{rr}(\alpha_P) = \sigma_{rr}(r_{ext}) \tag{9-51}$$

L'expression de σ_{rr} en fonction de α est donnée par :

$$\sigma_{rr}(\alpha) = q(\alpha) + p(\alpha)\cos(2\alpha) \tag{9-52}$$

où p et q sont fonctions de α :

$$q(\alpha) = \frac{F^2(|\alpha_i|)|\sigma_{\theta r}(r_i)|}{(\tan|\alpha|)^{\sin\phi}} \tag{9-53}$$

$$p(\alpha) = \frac{-q(\alpha) + c\cos\phi}{\sin\phi} \tag{9-54}$$

On en déduit l'équation en α_P :

$$\frac{F^2(|\alpha_i|)}{(\tan|\alpha_P|)^{\sin\phi}} \frac{\sin\phi - \cos(2\alpha_P)}{\sin\phi} \frac{|\sigma_{\theta r}(r_i)|}{\sigma_{rr}(r_{ext})} + \frac{\cos(2\alpha_P)}{\tan\phi} \frac{c}{\sigma_{rr}(r_{ext})} = 1 \tag{9-55}$$

La solution en $r(\alpha)$ est de la forme :

$$r = M\,F(|\alpha|) \tag{9-56}$$

et peut se réécrire sous la forme :

$$r_P = r_i \frac{F(|\alpha_P|)}{F(|\alpha_i|)} \tag{9-57}$$

avec

$$\alpha_i = signe(\sigma_{\theta r}(r_i))\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) \tag{9-58}$$

4.1.3 Conclusion sur la solution au problème statique

L'épaisseur de la zone plastique au contact avec l'interface est donc directement proportionnelle au rayon intérieur de l'échantillon.

4.2 Solution du problème cinématique

La variable α est une variable statique mais aussi cinématique puisque les deux tenseurs σ et ε sont co-axiaux. On connaît déjà la valeur de $\alpha(r)$ sur toute l'épaisseur de l'échantillon puisque le problème cinématique a été résolu indépendamment du problème cinématique. Ne reste plus qu'à construire une solution en déplacement.

4.2.1 Solution en angle et rayon

L'angle α_i en interface vaut :

$$\alpha_i = \text{signe}\left(\sigma_{\theta r}(r_i)\right)\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) \tag{9-59}$$

On en déduit la solution en $r(\alpha)$

$$r = M\, F(|\alpha|) \tag{9-60}$$

$$M = \frac{r_i}{F(|\alpha_i|)} \tag{9-61}$$

4.2.2 Solution en déplacement radial dans la zone plastique

La solution explicite en déplacement radial $U_r(\alpha)$ dans la zone plastique est donnée par :

$$U_r(\alpha) = K\, G_1(|\alpha|)\, G_2(|\alpha|) \tag{9-62}$$

$$U_r(\alpha_i) = 0. \tag{9-63}$$

On peut remarquer que dans la formule donnant U_r en fonction de α , l'exposant de $(\sin\beta - \cos 2\,\alpha)$ est égal à $\frac{\sin\beta}{\cos^2\beta}(\sin\phi - \sin\beta)$ et est toujours strictement positif dans le cas d'une loi de comportement non associée puisque $0 \le \beta < \phi \le \pi/2$. Le déplacement U_r est donc nul en interface quelle que soit la valeur de la constante d'intégration K.

D'autre part, on peut remarquer que dans la formule donnant $\frac{dU_r(\alpha)}{dr}$ en fonction de α , l'exposant de $(\sin\beta - \cos 2\,\alpha)$ est égal à $\frac{\sin\beta\,\sin\phi - 1}{\cos^2\beta}$ et est toujours strictement négatif dans le cas d'une loi de comportement non associée.

Comme à l'interface le multiplicateur plastique λ est proportionnel à $\frac{dU_r(\alpha)}{dr}$ par la relation :

$$\varepsilon_v^p(r_i) = \lambda(r_i)\sin\beta = \frac{dU_r}{dr}(r_i) + \frac{U_r}{r}(r_i) = \frac{dU_r}{dr}(r_i) \tag{9-64}$$

qui s'écrit aussi sous la forme :

$$\lambda(r_i) = \frac{1}{\sin\beta}\,\frac{dU_r}{dr}(r_i) \tag{9-65}$$

on en déduit que λ est infini à l'interface.

La constante d'intégration K est donc fixée par la valeur de U_r en r_P :

$$K = \frac{U_r(\alpha_P)}{G_1(|\alpha_P|)G_2(|\alpha_P|)} \tag{9-66}$$

4.2.3 Solution en déplacements dans la zone rigide

La solution générale en déplacements dans la zone rigide est :

$$U_r(r) \equiv 0 \tag{9-67}$$

$$U_\theta(r) = \Omega\, r \tag{9-68}$$

Comme la condition sur la limite extérieure r_{ext} est de type cinématique :

$$U_\theta(r_{ext}) = 0 \tag{9-69}$$

on en déduit :

$$\Omega = 0 \text{ et } U_\theta(r_p) = 0 \tag{9-70}$$

4.2.4 Transition entre la zone plastique et la zone rigide

L'une des conditions de continuité imposée par le comportement en r_p , entre les deux zones plastique et rigide est :

$$\Delta U_r = \sin\beta \sqrt{(\Delta U_r)^2 + (\Delta U_\theta)^2} \tag{9-71}$$

$$\Delta U_r(r_p) = U_r(r_p^+) - U_r(r_p^-) = -U_r(r_p^-) < 0 \tag{9-72}$$

avec :

$$\sin\beta > 0 \tag{9-73}$$

Il ne peut y avoir une solution au problème en déplacement que si le déplacement radial en r_P est nul, ce qui implique par ailleurs que le déplacement tangentiel U_θ est continu en r_P : $U_r(r_P^-) = 0$ et $\Delta U_\theta(r_P) = 0$

Comme par ailleurs U_θ est nul dans la zone rigide, on en déduit que le déplacement U_θ est nul en r_P : $U_\theta(r_P) = 0$

4.2.5 Détermination de la constante K

Connaissant U_r en r_P avec α_P connu, on en déduit la valeur de la constante K :

$$K = \frac{U_r(\alpha_P)}{G_1(|\alpha_P|)G_2(|\alpha_P|)} = 0 \qquad (9\text{-}74)$$

car la valeur de α en r_P , a priori, n'annule pas les deux fonctions G_1 et G_2.

De la loi de comportement on a la relation :

$$\varepsilon_{\theta\theta}(r) = \frac{U_r(r)}{r} = \frac{\lambda}{2}(\sin\beta - \cos 2\alpha) \qquad (9\text{-}75)$$

Si U_r est identiquement nul sur toute l'épaisseur de la zone plastique, on en déduit, puisque λ est non nul, que α est égal à α_i sur toute l'épaisseur. L'angle α est donc constant dans toute la zone plastique. Comme r et α sont reliée par la fonction :

$$r = M\,F(|\alpha|) \qquad (9\text{-}76)$$

on en déduit que la zone plastique est d'épaisseur nulle.

4.2.6 Conclusion

Il n'existe pas de solution cinématique associée à la solution statique précédemment développée avec une épaisseur de zone plastique non nulle. La seule solution cinématique que l'on puisse développer dans le cas d'une loi de comportement non associée, est en fait la même solution que pour le cas d'une loi de comportement associée avec une épaisseur nulle de la zone plastique.

4.3 Développement d'une solution au problème cinématique

L'impossibilité de développer une solution au problème cinématique vient de la simplicité de la loi de comportement rigide qui, dans le cas du cisaillement simple annulaire, impose un champ de déplacement radial identiquement nul :

$$U_r \equiv 0 \qquad (9\text{-}77)$$

4.3.1 Solution approchée

Pour y remédier on supposera que dans la zone extérieure le matériau est élastique avec des modules K et G très grands mais pas infinis, de manière à avoir des déformations ε_{ij} quasiment nulles.

Cette hypothèse d'une zone quasi-rigide, peut se justifier en parlant d'un comportement élastique plastique parfait, avec des modules élastiques très grands autorisant à négliger les déformations élastiques dans les zones plastiques.

On résout le problème cinématique entre r_p et r_{ext} avec la solution élastique en déplacement et les conditions aux limites suivantes :

CL 1 : continuité du déplacement normal en r_p

$$U_r(r_p^+)=U_r(r_p^-) \tag{9-78}$$

CL 2 : continuité du déplacement tangentiel en r_p

$$U_\theta(r_p^+)=U_\theta(r_p^-) \tag{9-79}$$

CL 3 : contrainte de confinement en r_{ext}

$$\sigma_{rr}(r_{ext}) < 0 \tag{9-80}$$

CL 4 : déplacement tangentiel imposé en r_{ext}

$$U_\theta(r_{ext}) = 0 \tag{9-81}$$

La solution en déplacement est définie par quatre constantes A , B , C et D :

$$U_r = \frac{A}{2(K+G)} r + \frac{B}{r} \tag{9-82}$$

$$U_\theta = -\frac{C}{2Gr} + D\,r \tag{9-83}$$

La solution en contrainte normale est donnée par :

$$\sigma_{rr}(r) = \frac{K}{K+G} A - 2G\frac{B}{r^2} \tag{9-84}$$

Les deux conditions $U_\theta(r_p^+)=U_\theta(r_p^-)$ et $U_\theta(r_{ext}) = 0$ permettent de calculer les deux constantes C et D.

Les deux conditions $U_r(r_p^+)=U_r(r_p^-)$ et $\sigma_{rr}(r_{ext})$ donnée, permettent de calculer les deux constantes A et B.

On peut remarquer que la condition sur les discontinuités des déplacements entre la zone plastique et la zone quasi-rigide est automatiquement vérifiée si l'on impose la continuité de U_r et de U_θ . C'est la condition de nullité du déplacement normal U_r qui est trop contraignant dans la solution rigide. En effet, si $U_r(r_p^+) = 0$, comme $U_r(r_p^-) > 0$ du fait de la dilatance, la condition sur les discontinuités entre la zone plastique et la zone rigide ne peut pas être vérifiée. En laissant la possibilité à U_r d'être non nul dans la zone quasi-rigide, on peut trouver une solution au problème cinématique.

4.3.2 Solution exacte

Il est à remarquer, que en résolvant séparément les deux problèmes cinématiques et statiques, on n'assure pas la compatibilité du champ de déplacements et des déformations avec le champ des contraintes dans la zone élastique. En effet, le champ de contraintes dans la zone quasi-rigide est donnée par :

$$\sigma_{rr} = \frac{K}{K+G} A - 2G \frac{B}{r^2} \tag{9-85}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{K}{K+G} A + 2G \frac{B}{r^2} \tag{9-86}$$

$$\sigma_{\theta r} = \sigma_{r\theta} = \frac{C}{r^2} G \frac{B}{r^2} \tag{9-87}$$

où le choix des constantes A et B a été fait précédemment pour assurer la continuité de U_r en r_P et la condition CL 4. La contrainte σ_{rr} n'est donc pas a priori continue en r_P.

Le problème d'une zone plastique à l'intérieur et d'une zone élastique à l'extérieur peut être résolu complètement. La détermination du rayon r_P se fait toujours en assurant la continuité de U_r et σ_{rr} en r_P. La CL 4 en r_{ext} donne une relation entre les deux constante A et B:

$$A = \frac{K+G}{K}\left(\sigma_{rr}(r_{ext}) + 2G\frac{B}{r_{ext}^2}\right) \tag{9-88}$$

On peut alors réécrire les variables U_r et σ_{rr} en fonction uniquement de B :

$$\sigma_{rr}(r) = \sigma_{rr}(r_{ext}) - 2GB\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_{ext}^2}\right) \tag{9-89}$$

$$U_r(r) = \frac{r}{2}\frac{\sigma_{rr}(r_{ext})}{K} + B\left(\frac{1}{r_P} + \frac{G}{K}\frac{r_P}{r_{ext}^2}\right) \tag{9-90}$$

En éliminant B entre U_r et σ_{rr} en r_P on obtient l'équation suivante en r_P et en les deux constantes d'intégration des fonctions $U_r(\alpha)$ et $\sigma_{rr}(\alpha)$:

$$-\frac{\sigma_{rr}(r_P) - \sigma_{rr}(r_{ext})}{2G\left(\frac{1}{r_P^2} - \frac{1}{r_{ext}^2}\right)} = B = \frac{U_r(r_P) - \frac{r_P}{2}\frac{\sigma_{rr}(r_{ext})}{K}}{\frac{1}{r_P} + \frac{G}{K}\frac{r_P}{r_{ext}^2}} \tag{9-91}$$

La continuité de σ_{rr} et U_r en r_P donne deux relations supplémentaires. Ce système de trois équations pour trois inconnues peut se résoudre numériquement. La solution trouvée pour r_P est plus faible. Dans tous les cas, le rayon r_p reste fonction de r_i.

Annexe 10

Co-axialité des tenseurs symétriques des contraintes et déformations pour un matériau de Cosserat avec deux critères de rupture

1 Problème étudié

Dans cette annexe, nous étudions si les tenseurs symétriques des contraintes et déformations restent co-axiaux pour le choix de potentiels plastiques qui est fait dans les annexes 11 et 12.

Sans restreindre la généralité des résultats obtenus, on considérera uniquement les contraintes σ_{11} , σ_{22} , σ^{s}_{12} , σ^{a}_{12} et le couple contrainte μ_{32} .

2 Invariants

Les invariants à considérer sont :

pression p (premier invariant du tenseur des contraintes σ_{ij})

$$p = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \tag{10-1}$$

déviateur du tenseur symétrique des contraintes (deuxième invariant du tenseur σ^{s}_{ij})

$$q = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \left(\sigma^{s}_{12}\right)^2} \tag{10-2}$$

déviateur du tenseur antisymétrique des contraintes (deuxième invariant du tenseur σ^{a}_{ij})

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i \neq j}\left|\sigma^{a}_{ij}\right|} = \left|\sigma^{a}_{12}\right| = \left|\sigma^{a}_{21}\right| = \left|\sigma^{a}_{3}\right| \tag{10-3}$$

déviateur du tenseur des couples contraintes (deuxième invariant du tenseur μ_{ij})

$$\mu = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i \neq j}\left|m_{ij}\right|} = \frac{1}{2}\left|m_{32}\right| = \frac{1}{2}\left|\mu_{32}\right| \tag{10-4}$$

où le tenseur m_{ij} est le déviateur du tenseur des couples contraintes μ_{ij} , qui coïncident dans le cas présent puisque les termes diagonaux sont nuls.

3 Forme la plus générale des critères d'écoulement G_1 et G_2

On cherche à démontrer que les tenseurs symétriques des contraintes σ_{ij}^s et des déformations ε_{ij}^s restent co-axiaux pour un comportement rigide plastique dans le cadre de la théorie des déformations plastiques totales (théorie J2).

La forme la plus générale pour les deux potentiels d'écoulement G_1 et G_2 est :

$$G_1(p,q,\sigma_a,\mu)=0 \tag{10-5}$$

$$G_2(p,q,\sigma_a,\mu)=0 \tag{10-6}$$

Les lois d'écoulement, quand les deux critères de plasticité sont atteints, donnent les relations suivantes :

$$\varepsilon_{11}^p=\lambda_1\frac{\partial G_1}{\partial\sigma_{11}}+\lambda_2\frac{\partial G_2}{\partial\sigma_{11}} \tag{10-7}$$

$$\varepsilon_{22}^p=\lambda_1\frac{\partial G_1}{\partial\sigma_{22}}+\lambda_2\frac{\partial G_2}{\partial\sigma_{22}} \tag{10-8}$$

$$(\varepsilon_{12}^s)^p=\lambda_1\frac{\partial G_1}{\partial\sigma_{12}^s}+\lambda_2\frac{\partial G_2}{\partial\sigma_{12}^s} \tag{10-9}$$

Les critères de rupture sont définis en fonction des invariants p et q avec les relations suivantes entre les dérivées :

$$\frac{\partial p}{\partial\sigma_{11}}=\frac{\partial p}{\partial\sigma_{22}}=\frac{1}{2} \tag{10-10}$$

$$\frac{\partial q}{\partial\sigma_{11}}=-\frac{\partial q}{\partial\sigma_{22}}=\frac{1}{2q}\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2} \tag{10-11}$$

$$\frac{\partial q}{\partial\sigma_{12}^s}=\frac{\sigma_{12}^s}{q} \tag{10-12}$$

On en déduit les expressions suivantes pour les déformations plastiques totales :

$$\varepsilon_{11}^p=\frac{\partial p}{\partial\sigma_{11}}\left(\lambda_1\frac{\partial G_1}{\partial p}+\lambda_2\frac{\partial G_2}{\partial p}\right)+\frac{\partial q}{\partial\sigma_{11}}\left(\lambda_1\frac{\partial G_1}{\partial q}+\lambda_2\frac{\partial G_2}{\partial q}\right) \tag{10-13}$$

$$\varepsilon_{22}^p=\frac{\partial p}{\partial\sigma_{22}}\left(\lambda_1\frac{\partial G_1}{\partial p}+\lambda_2\frac{\partial G_2}{\partial p}\right)+\frac{\partial q}{\partial\sigma_{22}}\left(\lambda_1\frac{\partial G_1}{\partial q}+\lambda_2\frac{\partial G_2}{\partial q}\right) \tag{10-14}$$

$$\left(\varepsilon_{12}^{s}\right)^{p} = \frac{\partial q}{\partial \sigma_{12}^{s}}\left(\lambda_1 \frac{\partial G_1}{\partial q} + \lambda_2 \frac{\partial G_2}{\partial q}\right) \tag{10-15}$$

En utilisant la représentation du cercle de Mohr pour les contraintes symétriques, ces relations s'écrivent sous la forme suivante :

$$\varepsilon_{11}^{p} = \frac{1}{2}\left(\lambda_1 \frac{\partial G_1}{\partial p} + \lambda_2 \frac{\partial G_2}{\partial p}\right) + \frac{\cos 2\alpha}{2}\left(\lambda_1 \frac{\partial G_1}{\partial q} + \lambda_2 \frac{\partial G_2}{\partial q}\right) \tag{10-16}$$

$$\varepsilon_{22}^{p} = \frac{1}{2}\left(\lambda_1 \frac{\partial G_1}{\partial p} + \lambda_2 \frac{\partial G_2}{\partial p}\right) - \frac{\cos 2\alpha}{2}\left(\lambda_1 \frac{\partial G_1}{\partial q} + \lambda_2 \frac{\partial G_2}{\partial q}\right) \tag{10-17}$$

$$\left(\varepsilon_{12}^{s}\right)^{p} = \frac{\sin 2\alpha}{2}\left(\lambda_1 \frac{\partial G_1}{\partial q} + \lambda_2 \frac{\partial G_2}{\partial q}\right) \tag{10-18}$$

On introduit les déformations volumique $2\,\varepsilon_v$ et déviatorique $2\varepsilon_d$ conjuguées en énergie avec la pression p et le déviateur q respectivement :

$$\varepsilon_{v}^{p} = \frac{1}{2}\left(\lambda_1 \frac{\partial G_1}{\partial p} + \lambda_2 \frac{\partial G_2}{\partial p}\right) \tag{10-19}$$

$$\varepsilon_{d}^{p} = \frac{1}{2}\left(\lambda_1 \frac{\partial G_1}{\partial q} + \lambda_2 \frac{\partial G_2}{\partial q}\right) \tag{10-20}$$

Après substitution, nous obtenons les relation suivantes :

$$\varepsilon_{11}^{p} = \varepsilon_{v}^{p} + \varepsilon_{d}^{p} \cos 2\alpha \tag{10-21}$$

$$\varepsilon_{22}^{p} = \varepsilon_{v}^{p} - \varepsilon_{d}^{p} \cos 2\alpha \tag{10-22}$$

$$\left(\varepsilon_{12}^{s}\right)^{p} = \varepsilon_{d}^{p} \sin 2\alpha \tag{10-23}$$

Les deux tenseurs symétriques des contraintes σ_{ij}^{s} et des déformations ε_{ij}^{s} restent donc co-axiaux. Cependant, en ce qui concerne les tenseurs des contraintes et déformations totales, qui ne sont pas symétriques dans le cas d'un milieu continu de Cosserat et donc ne sont diagonalisables avec des valeurs propres réelles, le problème de la co-axialité reste ouvert.

Annexe 11

Analyse du cisaillement simple annulaire d'un milieu continu de Cosserat avec une loi de comportement rigide parfaitement plastique : équations générales

1 Problème étudié

Dans cette annexe, sont développées les équations générales pour le cisaillement simple annulaire d'un matériau continu de Cosserat, homogène et isotrope, avec une loi de comportement rigide plastique (critère de Mohr-Coulomb), dans le cadre de la théorie J_2 de l'élastoplasticité (théorie des déformations totales). Les calculs sont développés en coordonnées polaires (r, θ, z).

2 Introduction

Dans l'essai de cisaillement simple annulaire d'un milieu continu de Cosserat "bidimensionnel", le nombre d'inconnues statiques, c'est à dire de contraintes et couples contraintes, est de 5 tandis que les équations d'équilibre sont au nombre de 3. Dans les zones plastiques, si l'on veut pouvoir résoudre le problème statique, c'est à dire en contraintes, indépendamment du problème cinématique, il faut alors avoir deux fonctions de charges ou critères de rupture. De plus, les conditions aux limites doivent être formulées en variables statiques (contraintes ou couples contraintes). C'est le choix qui a été fait dans ce paragraphe.

3 Inconnues statiques

3.1 Définitions des variables de travail

Les inconnues statiques sont au nombre de 5 dans le cas du cisaillement simple annulaire d'un milieu continu de Cosserat "bidimensionnel", puisque l'essai possède une symétrie de révolution. Les variables statiques sont : les contraintes "totales" σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$, $\sigma_{\theta r}$ et le couple contrainte μ_{zr} , encore appelé contrainte microscopique d'après Mindlin (1964). Les contraintes totales σ_{ij} peuvent être décomposées en contraintes symétriques, encore appelées contraintes de Cauchy : $\sigma_{rr} = \sigma^s_{rr}$, $\sigma_{\theta\theta} = \sigma^s_{\theta\theta}$, $\sigma^s_{\theta r} = \frac{1}{2}(\sigma_{r\theta} + \sigma_{\theta r})$ et une contrainte antisymétrique, encore appelée contrainte relative : $\sigma^a_{\theta r} = \frac{1}{2}(\sigma_{\theta r} - \sigma_{r\theta})$.

Plutôt que d'utiliser les trois contraintes symétriques comme inconnues statiques, il est intéressant d'introduire les deux invariants p et q ainsi que l'angle α du tenseur symétrique des contraintes σ^s_{ij} , comme inconnues statiques, dans la mesure où le critère de rupture est défini en fonction des invariants p et q pour un matériau isotrope.

$J_1(\sigma^s_{ij})$: premier invariant du tenseur symétrique des contraintes σ^s_{ij}

$$J_1(\sigma^s_{ij}) = tr(\sigma^s_{ij}) = 2\ p \tag{11-1}$$

p : pression (négative en compression et positive en extension)

$$p = \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \tag{11-2}$$

$J_2(\sigma^s_{ij})$: deuxième invariant du tenseur symétrique des contraintes σ^s_{ij}

$$J_2(\sigma^s_{ij}) = J_2(s^s_{ij}) = \frac{1}{2} s^s_{ij}\ s^s_{ij} \tag{11-3}$$

q : déviateur

$$q = \sqrt{J_2(s^s_{ij})} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{2}\right)^2 + (\sigma^s_{\theta r})^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \geq 0 \tag{11-4}$$

L'angle α est l'angle que font les directions principales du tenseur symétrique des contraintes σ^s_{ij} avec les axes (r , θ). Si $\alpha = 0$, on a $\sigma_{rr} = \sigma_1 = p+q$ et $\sigma_{\theta r} = \sigma_3 = p-q$. L'axe r est alors direction principale majeure et l'axe θ est direction principale mineure. Si $\alpha = \pi/2$, l'axe θ est direction principale majeure et l'axe r est direction principale mineure.

La représentation par le cercle de Mohr permet de relier les deux jeux d'inconnues $(\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma^s_{\theta r})$ et (p, q, α) :

$$\sigma_{rr} = p + q\cos(2\alpha) \tag{11-5}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = p - q\cos(2\alpha) \tag{11-6}$$

$$\sigma^s_{\theta r} = \sigma^s_{r\theta} = q\sin(2\alpha) \tag{11-7}$$

Dans le cas du cisaillement simple annulaire, les deux nouvelles variables statiques $\sigma^a_{\theta r}$ et μ_{zz} qui existent dans un milieu continu de Cosserat sont directement proportionnelles aux invariants des deux nouveaux tenseurs des contraintes antisymétriques σ^a_{ij} et des couples contraintes μ_{ij} .

La contrainte antisymétrique $\sigma^a_{\theta r}$ est directement proportionnelle à la racine carrée du deuxième invariant du tenseur des contraintes antisymétriques σ^a_{ij} , que l'on calcule en prenant le module du vecteur σ^a_i associé au tenseur σ^a_{ij} par la relation :

$$\sigma^a_{ij} = -e_{ijk}\ \sigma^a_k \tag{11-8}$$

avec e_{ijk} égal à 1 si (i, j, k) est trièdre direct, - 1 s'il est trièdre indirect et zéro dans les autres cas. On a alors la relation :

$$\sigma^{s}_{\theta r} = \text{signe}\left(\sigma^{s}_{\theta r}\right)\sqrt{\sum_{i=1,3}\left|\sigma^{a}_{i}\right|^{2}} = \text{signe}\left(\sigma^{s}_{\theta r}\right)\sqrt{J_2\left(\sigma^{a}_{ij}\right)} \qquad (11\text{-}9)$$

Le couple contrainte μ_{zr} , qui est le seul couple contrainte nul dans le cas présent, est proportionnel à la racine carrée du deuxième invariant du tenseur μ_{ij} :

$$\mu_{zr} = \text{signe}\left(\mu_{zr}\right)\sqrt{J_2\left(\mu_{ij}\right)} = \text{signe}\left(\mu_{zr}\right)\left|\mu_{zr}\right| \qquad (11\text{-}10)$$

3.2 Conventions de signe

La pression p est positive en extension et négative en compression. L'invariant q est positif ou nul. Le signe de α est égale au signe de $\sigma^{s}_{\theta r}$.

Les contraintes principales du tenseur des contraintes symétriques sont ordonnées de la manière suivante : $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

3.3 Conditions nécessaires de continuité des variables statiques

Comme dans un milieu classique, le tenseur des contraintes, qui comporte une partie symétrique et une partie antisymétrique, peut être discontinu. Il faut par contre assurer la continuité du vecteur contrainte $\sigma_i = \sigma_{ij}\, n_j$ et du vecteur couple contrainte $\mu_i = \mu_{ij}\, n_j$ sur toute surface. En l'occurrence, pour le cisaillement simple annulaire, il convient que les deux vecteur σ_i et μ_i soient continus sur toute surface parallèle à l'interface, de normale $\underline{e}_r$. Ceci se traduit par les trois conditions suivantes :

σ_{rr} (r) est continue par rapport à r

$\sigma_{\theta r}$ (r) est continue par rapport à r

μ_{zr} (r) est continue par rapport à r

4 Inconnues cinématiques (déplacements, rotation, déformations et courbure)

4.1 Déplacements et rotation

Dans le cas d'un milieu continu classique, il n'y a que deux inconnues en déplacement : U_r déplacement radial et U_θ déplacement orthoradial. Dans le cas présent, ce sont respectivement les déplacements normal et tangentiel. Dans le cas d'un milieu de Cosserat, il convient d'ajouter la rotation de Cosserat autour de l'axe z : $\omega^{c}_{z} = -\omega^{c}_{r\theta} = \omega^{c}_{\theta r}$. Cette rotation correspond à la rotation de la microstructure autour de l'axe z qui est aussi l'axe de rotation de l'interface.

4.2 Déformations

Le tenseur des déformations généralisées, dans le cas d'un milieu continu de Cosserat, comporte une partie symétrique ε^s_{ij} , qui correspond aux déformations d'un milieu classique, et une partie antisymétrique ε^a_{ij} , qui correspond à la différence entre la rotation d'ensemble du milieu macroscopique $\Omega_{ij} = U^a_{i,j}$ et la rotation de la microstructure ω^c_{ij} . Cette déformation est la rotation relative.

tenseur des déformations totales

$$\varepsilon_{ij} = U_{i,j} - \omega^c_{ij} \tag{11-11}$$

décomposition du tenseur des déformations totales en déformations symétriques et antisymétriques

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon^s_{ij} + \varepsilon^a_{ij} \tag{11-12}$$

tenseur symétrique des déformations (macroscopiques)

$$\varepsilon^s_{ij} = \frac{1}{2}\left(U_{i,j} + U_{j,i}\right) \tag{11-13}$$

tenseur antisymétrique des déformations (tenseur des rotations relatives)

$$\varepsilon^a_{ij} = \frac{1}{2}\left(U_{i,j} - U_{j,i}\right) - \omega^c_{ij} = \Omega_{ij} - \omega^c_{ij} \tag{11-14}$$

Dans le cas présent, la symétrie de révolution permet d'écrire ∂ / $\partial\theta$ = 0 et les conditions de déformations planes permettent d'écrire $U_z \equiv 0$ et ∂ / $\partial z = 0$. Les variables du problème ne dépendent plus que d'une seule coordonnée spatiale, le rayon r qui correspond aussi à la distance à l'interface.

Les déformations totales non nulles sont réduites à quatre termes :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{dU_r}{dr} \tag{11-15}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{U_r}{r} \tag{11-16}$$

$$\varepsilon_{\theta r} = \frac{dU_\theta}{dr} - \omega^c_{\theta r} = \frac{dU_\theta}{dr} - \omega^c_z \tag{11-17}$$

$$\varepsilon_{r\theta} = -\frac{U_\theta}{r} - \omega^c_{r\theta} = -\frac{U_\theta}{r} + \omega^c_z \tag{11-18}$$

Les déformations symétriques sont ε_{rr} , $\varepsilon_{\theta\theta}$ et $\varepsilon^{s}_{\theta r}$ avec :

$$\varepsilon^{s}_{\theta r} = \frac{1}{2}\left(\frac{dU_\theta}{dr} - \frac{U_\theta}{r}\right) \tag{11-19}$$

La seule déformation antisymétrique non nulle, qui mesure la rotation relative d'un point matériel par rapport au milieu, est $\varepsilon^{a}_{\theta r}$:

$$\varepsilon^{a}_{\theta r} = \frac{1}{2}\left(\frac{dU_\theta}{dr} + \frac{U_\theta}{r}\right) - \omega^{3}_{z} \tag{11-20}$$

4.3 Courbure

Outre les quatre déformations précédentes, il convient de prendre en compte la courbure définie comme le gradient du vecteur rotation de Cosserat :

$$\kappa_{ij} = \omega^{c}_{i,j} \tag{11-21}$$

Dans le cas présent, seule la courbure κ_{zr} est non nulle :

$$\kappa_{zr} = \frac{d\omega^{c}_{z}}{dr} \tag{11-22}$$

4.4 Bilan des inconnues cinématiques

Les inconnues cinématiques sont donc au nombre de 8 : deux déplacements, une rotation de Cosserat, quatre déformations et une courbure.

5 Equations d'équilibre

Les équations d'équilibre, écrites en fonctions des σ_{ij} et μ_{ij} , sont dans le cas général au nombre de 6 :

$$\mathrm{div}(\sigma_{ij}) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \tag{11-23}$$

$$\mathrm{div}(\mu_{ij}) - 2\,\sigma^{a}_{i} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - 2\,\sigma^{a}_{i} = 0 \tag{11-24}$$

Dans le cas présent, elles se réduisent aux trois équations suivantes écrites en coordonnées polaires :

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})}{r} = 0 \tag{11-25}$$

$$\frac{d\sigma_{\theta r}}{dr}+\frac{(\sigma_{r\theta}+\sigma_{\theta r})}{r}=0 \tag{11-26}$$

$$\frac{d\mu_{zr}}{dr}+\frac{\mu_{zr}}{r}+(\sigma_{\theta r}-\sigma_{r\theta})=0 \tag{11-27}$$

En termes de contraintes symétriques et antisymétriques et couples contraintes, celles-ci peuvent se réécrire sous la forme suivante :

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr}+\frac{(\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta})}{r}=0 \tag{11-28}$$

$$\frac{d\left(\sigma^{s}_{\theta r}+\sigma^{a}_{\theta r}\right)}{dr}+2\frac{\sigma^{s}_{\theta r}}{r}=0 \tag{11-29}$$

$$\frac{d\mu_{zr}}{dr}+\frac{\mu_{zr}}{r}+2\,\sigma^{a}_{\theta r}=0 \tag{11-30}$$

Les deux dernières équations d'équilibre peuvent être intégrées partiellement et indépendamment de toutes hypothèses, ce qui donne :

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr}+\frac{(\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta})}{r}=0 \tag{11-31}$$

$$\sigma^{s}_{\theta r}=\frac{A}{r^{2}}-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_{zr}}{r}-\frac{d\mu_{zr}}{dr}\right) \tag{11-32}$$

$$\sigma^{a}_{\theta r}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_{zr}}{r}+\frac{d\mu_{zr}}{dr}\right) \tag{11-33}$$

où la constante A, qui a la dimension d'une force, est égale au couple par unité de longueur le long de l'interface, divisé par 2 π.

Il a remarquer que tous les nouveaux termes dans les équations d'équilibre peuvent être réécrits, dans le cas présent qui est relativement simple, en fonction du couple contrainte μ_{zr} et de sa dérivée première. Dans le cas d'un milieu continu classique, le couple contrainte μ_{zr} est identiquement nul, et l'on retombe automatiquement sur la solution classique avec un tenseur symétrique des contraintes :

$$\sigma_{r\theta}=\sigma_{\theta r}=\frac{A}{r^{2}} \tag{11-34}$$

Dans le plan de Mohr, le cercle de Mohr est translaté d'une quantité qui est directement proportionnelle au terme antisymétrique $\sigma^{a}_{\theta r}$ des contraintes $\sigma_{\theta r}$ et $\sigma_{r\theta}$. Ce terme est lui même fonction du couple contrainte μ_{zr} et de sa dérivée $\frac{d\mu_{zr}}{dr}$.

6 Conditions aux limites

On considère le jeu de conditions aux limites résumé dans le tableau A11-1. Outre les quatre conditions aux limites classiques et que l'on a déjà considérées dans le milieu continu classique (Annexe 9), il convient d'introduire deux nouvelles conditions aux limites, correspondant aux deux nouveaux degrés de liberté . Les conditions aux limites de type statique ont été privilégiées afin de pouvoir résoudre le problème statique indépendamment du problème cinématique.

Un milieu continu de Cosserat se comporte comme un milieu continu classique dans le cas où les conditions aux limites engendrent un état de contraintes antisymétriques et un état de couples contraintes nuls :

$$\sigma_{ij}^{a} = 0 \quad \text{et} \quad \mu_{ij} = 0 \tag{11-35}$$

Dans le cas présent, il suffit d'annuler le couple contrainte à l'interface : $\mu_{zr}(r_{int}) = 0$, pour que la solution trouvée soit égale à la solution classique.

Par rapport à la solution classique, la seule nouvelle variable introduite est donc le couple contrainte à l'interface : $\mu_{zr}(r_{int})$. C'est une variable de type microscopique, qui peut être interprétée comme une mesure de la rugosité de l'interface. Pour une rugosité nulle, le couple contrainte $\mu_{zr}(r_{int})$ est nul et la solution trouvée est la solution classique avec une épaisseur nulle d'interface. Pour une rugosité non nulle, le couple contrainte $\mu_{zr}(r_{int})$ est non nul et l'on trouve une couche d'interface d'épaisseur non nulle, qui est fonction de la longueur interne R et est indépendante des dimensions de l'échantillon. Sur le rayon extérieur, le couple contrainte est supposé nul car une membrane ne transmet pas a priori de cisaillement ou couple contrainte.

Pour le type de critère considéré F_2 , la valeur du couple contrainte en un point du matériau est limitée par la valeur μ_{max} que l'on calcule en résolvant l'équation suivante :

$$F_2\left(\sigma_{\theta}^{a} = 0, \mu_{z}^{max}\right) = 0 \tag{11-36}$$

Ce couple contrainte μ_{max} est la valeur maximale que peut prendre le couple contrainte dans l'échantillon et à l'interface $\mu_{zr}(r_{int})$:

$$0 \le \mu_{zr}(r_{int}) \le \mu_{z}^{max} \tag{11-37}$$

Les valeurs du couple contrainte maximum μ_{max} pour les critères linéaires et quadratiques sont données ci-dessous.

critère linéaire

$$|\mu_z| \le \mu_z^{max} = \frac{R\,N}{h_3} \tag{11-38}$$

critère quadratique

$$|\mu_{zr}| \leq \mu_{zr}^{max} = \frac{R\,N}{\sqrt{h_3}} \qquad (11\text{-}40)$$

Cette limitation du modèle est due au choix d'un critère indépendant de la pression p. Si F_2 dépend de la pression, le couple contrainte à l'interface n'est plus limité car localement la pression peut augmenter très fortement. C'est d'ailleurs ce qui est observé localement dans la couche d'interface.

Tableau A11-1 : Jeu de conditions aux limites étudié

		Rayon intérieur r_{int}	Rayon extérieur r_{ext}
Milieu continu de Cosserat	Milieu continu classique	$U_r(r_{int}) = 0$ interface rigide	$\sigma_{rr}(r_{ext}) < 0$ pression de confinement
		$\sigma_{\theta r}(r_{int}) < 0$ contrainte de cisaillement à l'interface	$U_\theta(r_{ext}) = 0$ déplacement tangentiel bloqué
	Nouvelles conditions aux limites	$\mu_{zr}(r_{int}) > 0$ mesure de la rugosité de l'interface	$\mu_{zr}(r_{ext}) = 0$ "solution classique"

7 Loi de comportement

Le matériau est supposé homogène isotrope avec une loi de comportement rigide parfaitement plastique dans le cadre de la théorie J_2 de la plasticité, encore appelée théorie des déformations totales (Bogdaneva-Bontcheva et Lippmann, 1972).

7.1 Critères de rupture et potentiels plastiques

Deux critères de rupture sont considérés afin de pouvoir résoudre le problème avec autant d'inconnues que d'équations.

7.1.1 Critère macroscopique

Le premier critère choisi, qui peut être qualifié de critère macroscopique, est fonction uniquement du tenseur symétrique des contraintes σ_{ij}^s . Par souci de simplification, on prend le critère de Mohr-Coulomb qui est une forme linéaire des invariants p et q du tenseur des contraintes symétriques :

$$F(\sigma^s_{ij}) = \eta_1 \sqrt{J_2(\sigma^s_{ij})} + \eta_2 J_1(\sigma^s_{ij}) \sin\phi - c\cos\phi \tag{11-41}$$

$$J_2(\sigma^s_{ij}) = \frac{1}{2} s^s_{ij}\, s^s_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1,3} \left(\frac{\sigma_i - \sigma_j}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 = q^2 \tag{11-42}$$

$$J_1(\sigma^s_{ij}) = tr(\sigma^s_{ij}) = 2\ p \tag{11-43}$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{p}{2}\delta_{ij} \tag{11-44}$$

Dans le cas du critère de Mohr-Coulomb, les deux coefficients η_1 et η_2 sont respectivement égaux à 1 et 1/2 , ce qui donne :

$$F(\sigma^s_{ij}) = q + p \sin\phi - c\cos\phi \tag{11-45}$$

La règle d'écoulement est définie à l'aide du potentiel plastique suivant :

$$G(\sigma^s_{ij}) = q + p \sin\beta \tag{11-46}$$

L'angle ϕ , avec $0 < \phi < \pi / 2$, est l'angle de frottement interne tandis que β , avec $0 \le \beta \le \phi$, est l'angle de dilatance. Dans le cas d'une loi d'écoulement associée, les deux angles ϕ et β sont égaux, $\phi = \beta$. Dans le cas d'une loi d'écoulement non associée, ils sont différents, $\beta < \phi$.

7.1.2 Critère microscopique

Le deuxième critère, qui peut être qualifié de critère microscopique, est fonction du tenseur antisymétrique des contraintes σ^a_{ij} et du tenseur des couples contraintes μ_{ij} .

Dans le cas présent, on peut noter que la contrainte antisymétrique σ^a_{α} est directement proportionnelle à la racine carrée du deuxième invariant du tenseur des contraintes antisymétriques σ^a_{ij} .

Le deuxième invariant du tenseur antisymétrique des contraintes σ^a_{ij} est par définition égal à :

$$J_2(\sigma^a_{ij}) = \frac{1}{2} s^a_{ij}\, s^a_{ij} = \frac{1}{2} \sigma^a_{ij}\, \sigma^a_{ij} = \frac{1}{2}(\sigma^a_{ij})^2 = \sum_{i=1,3} (\sigma^a_i)^2 = \|\sigma^a_i\|^2 \tag{11-47}$$

Dans le cas présent, le tenseur σ^a_{ij} se réduit à un seul terme et l'on a :

$$\sigma^a_{\alpha} = signe(\sigma^a_{\alpha})\,|\sigma^a_{\alpha}| = signe(\sigma^a_{\alpha}) \sqrt{\sum_{i=1,3} |\sigma^a_i|^2} = signe(\sigma^a_{\alpha}) \sqrt{J_2(\sigma^a_{ij})} \tag{11-48}$$

Le deuxième invariant du tenseur des couples contraintes μ_{ij} est dans le cas présent réduit à un seul terme non diagonal μ_{zr} . Son deuxième invariant est égal à :

$$J_2(\mu_{ij}) = \frac{1}{2} m_{ij} m_{ij} = \frac{1}{2} \mu_{ij} \mu_{ij} = \frac{1}{2} (\mu_{zr})^2 \tag{11-49}$$

Dans le cas présent, le terme non nul μ_{zr} est directement proportionnel au deuxième invariant de μ_{ij} :

$$\mu_{zr} = \text{signe}(\mu_{zr}) |\mu_{zr}| = \text{signe}(\mu_{zr}) \sqrt{2\, J_2(\mu_{ij})} \tag{11-50}$$

Le deuxième critère de rupture F_2 sera pris fonction des contraintes antisymétriques et du couple contrainte. De plus, on supposera une loi d'écoulement associée pour les termes de Cosserat afin de réduire au minimum les nouveaux paramètres.:

$$F_2(\sigma^a_{ij} \,.\, \mu_{ij}) = G_2(\sigma^a_{ij} \,.\, \mu_{ij}) \tag{11-51}$$

Deux critères seront considérés.

7.1.2.1 Critère linéaire

On considère un premier "critère linéaire" , qui est une fonction linéaire des invariants de σ^a_{ij} et de μ_{ij} :

$$F_2(\sigma^a_{ij} \,.\, \mu_{ij}) = h_2 \sqrt{J_2(\sigma^a_{ij})} + \frac{h_3}{R} \sqrt{2\, J_2(\mu_{ij})} - N \tag{11-52}$$

Dans le cas présent, ce critère s'écrit sous la forme suivante :

$$F_2(\sigma^a_{ij} \,.\, \mu_{ij}) = h_2 \left|\sigma^a_{\theta r}\right| + \frac{h_3}{R} |\mu_{zr}| - N \tag{11-53}$$

Par souci de simplification, le coefficient h_3 est défini en multipliant le deuxième invariant de μ_{ij} par 2 afin de ne pas avoir un coefficient 2 qui apparaisse en facteur de μ_{zr} dans (11-53).

De même, par souci de symétrie entre la contrainte antisymétrique et le couple contrainte, on introduit deux coefficients h_2 et h_3 , une longueur interne R et un terme de cohésion N, ce qui fait quatre coefficients.

En normalisant, on peut réécrire le critère sous la forme suivante :

$$F_2(\sigma^a_{ij} \,.\, \mu_{ij}) = \frac{h_2}{N} \sqrt{J_2(\sigma^a_{ij})} + \frac{h_3}{N\,R} \sqrt{2\, J_2(\mu_{ij})} - 1 \tag{11-54}$$

On introduit le couple contrainte maximal admissible μ_{zr}^{max} dans le sol par rapport au critère de rupture microscopique F_2 . Ce couple contrainte est défini par l'équation :

$$F_2\left(\sigma_{\theta r}^{a}=0,\mu_{zr}^{max}\right)=0 \tag{11-55}$$

Dans le cas du critère linéaire, il est donné par :

$$\mu_{zr}^{max}=\frac{N\,R}{h_3} \tag{11-56}$$

De même, on peut définir la contrainte antisymétrique maximale admissible σ_{max}^{a} par rapport au critère microscopique F_2 . Cette contrainte est donnée par l'équation :

$$F_2\left(\sigma_{max}^{a},\mu_{zr}=0\right)=0 \tag{11-57}$$

Dans le cas du critère linéaire, elle est égale à :

$$\sigma_{max}^{a}=\frac{N}{h_2} \tag{11-58}$$

Le critère microscopique peut être mis sous la forme suivante :

$$F_2\left(\sigma_{ij}^{a},\,\mu_{ij}\right)=\frac{\left|\sigma_{\theta r}^{a}\right|}{\sigma_{max}^{a}}+\frac{\left|\mu_{zr}\right|}{\mu_{zr}^{max}}-1 \tag{11-69}$$

Sous cette forme, seuls deux coefficients sont introduits : μ_{zr}^{max} et $\sigma_{\theta r}^{max}$. Leur rapport permet de définir la longueur interne plastique notée R. Cette longueur bien que notée comme la longueur interne élastique est différente.

7.1.2.2 Critère quadratique

On considère un deuxième "critère quadratique", qui est une fonction quadratique des invariants de σ_{ij}^{a} et de μ_{ij} :

$$F_2\left(\sigma_{ij}^{a}\,,\,\mu_{ij}\right)=\sqrt{h_2\,J_2\left(\sigma_{ij}^{a}\right)+\frac{h_3}{R^2}\,2\,J_2\left(\mu_{ij}\right)}-N \tag{11-60}$$

Dans le cas présent, ce critère s'écrit sous la forme :

$$F_2\left(\sigma_{ij}^{a}\,,\,\mu_{ij}\right)=\sqrt{h_2\left|\sigma_{\theta r}^{a}\right|^2+\frac{h_3}{R^2}\left|\mu_{zr}\right|^2}-N \tag{11-61}$$

Par souci de simplification, le coefficient h_3 est défini en multipliant le deuxième invariant de μ_{ij} par 2 afin de ne pas avoir de coefficient 2 qui apparaisse en facteur de μ_{zr} .

De même, par souci de symétrie entre la contrainte et le couple contrainte, on introduit deux coefficients h_2 et h_3 , une longueur interne R et un terme de cohésion N, ce qui fait quatre coefficients.

En normalisant, on peut écrire le critère sous la forme suivante :

$$F_2\left(\sigma_{ij}^a\ ,\ \mu_{ij}\right)=\sqrt{\frac{h_2}{N^2}\,J_2\left(\sigma_{ij}^a\right)+\frac{h_3}{N^2\,R^2}\,2\,J_2\left(\mu_{ij}\right)}-1 \qquad (11\text{-}62)$$

On introduit le couple contrainte maximal admissible μ_{zr}^{max} dans le sol par rapport au critère de rupture microscopique F_2 . Ce couple contrainte est défini par l'équation :

$$F_2\left(\sigma_{\theta r}^a=0,\mu_{zr}^{max}\right)=0 \qquad (11\text{-}63)$$

Dans le cas du critère quadratique, il est donné par :

$$\mu_{zr}^{max}=\frac{N\,R}{\sqrt{h_3}} \qquad (11\text{-}64)$$

De même, on peut définir la contrainte antisymétrique maximale admissible σ_{max}^a par rapport au critère microscopique F_2 . Cette contrainte est donnée par l'équation :

$$F_2\left(\sigma_{max}^a,\mu_{zr}=0\right)=0 \qquad (11\text{-}65)$$

Dans le cas du critère quadratique, elle est égale à :

$$\sigma_{max}^a=\frac{N}{\sqrt{h_2}} \qquad (11\text{-}66)$$

On peut alors réécrire le critère microscopique sous la forme suivante :

$$F_2\left(\sigma_{ij}^a,\ \mu_{ij}\right)=\sqrt{\left(\frac{\sigma_{\theta r}^a}{\sigma_{max}^a}\right)^2+\left(\frac{\mu_{zr}}{\mu_{zr}^{max}}\right)^2}-1 \qquad (11\text{-}67)$$

Sous cette forme, seuls deux coefficients sont introduits : μ_{zr}^{max} et $\sigma_{\theta r}^{max}$. Leur rapport permet de définir la longueur interne plastique notée R. Cette longueur bien que notée comme la longueur interne élastique est différente.

7.2 Règle d'écoulement et relations de comportement

En théorie des déformations totales plastiques, la règle d'écoulement permet de relier les déformations plastiques, qui sont aussi les déformations totales dans le cas présent, à l'état de contrainte actuel, par l'intermédiaire des multiplicateurs plastiques λ_1 et λ_2 . Comme les deux critères G_1 et G_2 sont définis en fonction de deux jeux indépendants de variables statiques, d'une part σ_{ij}^s et d'autre part σ_{ij}^a , μ_{ij} , les deux multiplicateurs plastiques sont déterminés indépendamment l'un de l'autre.

7.2.1 Zone plastique P1-P2

Dans une zone plastique P1-P2, les deux critères $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$ sont atteints. Les déformations totales qui sont purement plastiques, s'obtiennent à partir des deux potentiels plastiques qui sont indépendants.

7.2.1.1 Variables de type macroscopique (déformations symétriques)

La première règle d'écoulement définie à partir du potentiel plastique G_1 permet d'écrire les trois relations de comportement suivantes qui portent sur les déformations symétriques et sont fonctions uniquement du premier multiplicateur plastique λ_1 :

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon^s_{rr} = \lambda_1 \frac{\partial G_1(\sigma^s_{ij})}{\partial \sigma_{rr}} = \frac{\lambda_1}{2}\left(\sin\beta + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{2\,q}\right) = \frac{\lambda_1}{2}\left(\sin\beta + \cos(2\,\alpha)\right) \tag{11-68}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon^s_{\theta\theta} = \lambda_1 \frac{\partial G_1(\sigma^s_{ij})}{\partial \sigma_{\theta\theta}} = \frac{\lambda_1}{2}\left(\sin\beta - \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{2\,q}\right) = \frac{\lambda_1}{2}\left(\sin\beta - \cos(2\,\alpha)\right) \tag{11-69}$$

$$\varepsilon^s_{\theta r} = \varepsilon^s_{r\theta} = \frac{\lambda_1}{2}\frac{\partial G_1(\sigma^s_{ij})}{\partial \sigma^s_{\theta r}} = \frac{\lambda_1}{2}\left(\frac{2\,\sigma^s_{\theta r}}{2\,q}\right) = \frac{\lambda_1}{2}\sin(2\,\alpha) \tag{11-70}$$

Le coefficient 2 dans le calcul de la déformation $\varepsilon^s_{\theta r}$ provient de ce que 2 $\varepsilon^s_{\theta r}$ est conjuguée en énergie avec $\sigma^s_{\theta r}$.

Ces trois équations de comportement macroscopique sont valables quel que soit le choix du deuxième critère macroscopique, pourvu qu'il y ait découplage des deux critères.

7.2.1.2 Variables de type microscopique (déformation antisymétrique et courbure)

La deuxième règle d'écoulement définie à partir du potentiel plastique G_2 , permet d'écrire les relations de comportement suivantes, qui portent sur la déformation antisymétrique et sur la courbure, et sont fonction uniquement du deuxième multiplicateur plastique λ_2 .

7.2.1.2.1 Critère linéaire

Pour le critère linéaire, on obtient les deux relations de comportement ci-dessous :

$$\varepsilon^a_{\theta r} = -\varepsilon^a_{r\theta} = \frac{\lambda_2}{2}\frac{\partial G_2(\sigma^a_{ij}, \mu_{ij})}{\partial \sigma^a_{\theta r}} = \frac{\lambda_2}{2}\, h_2\, \text{signe}(\sigma^a_{\theta r}) \tag{11-71}$$

$$\kappa_{zr} = \lambda_2 \frac{\partial G_2(\sigma^a_{ij}, \mu_{ij})}{\partial \mu_{zr}} = \lambda_2 \frac{h_3}{R}\, \text{signe}(\mu_{zr}) \tag{11-72}$$

Le coefficient 2 intervenant dans la définition de $\varepsilon^a_{\theta r}$ provient de ce que la variable cinématique conjuguée en énergie avec $\sigma^a_{\theta r}$ est 2 $\varepsilon^a_{\theta r}$.

7.2.1.2.2 Critère quadratique

Les dérivées du critère quadratique sont :

$$\frac{\partial F_2\left(\sigma^a_{\theta r}\,,\,\mu_{zr}\right)}{\partial \sigma^a_{\theta r}} = \frac{2\,h_2\,\sigma^a_{\theta r}}{2\sqrt{h_2\left|\sigma^a_{\theta r}\right|^2 + \frac{h_3}{R^2}\left|\mu_{zr}\right|^2}} \tag{11-73}$$

$$\frac{\partial F_2\left(\sigma^a_{\theta r}\,,\,\mu_{zr}\right)}{\partial \mu_{zr}} = \frac{2\,h_3\,\mu_{zr}}{2\,R^2\sqrt{h_2\left|\sigma^a_{\theta r}\right|^2 + \frac{h_3}{R^2}\left|\mu_{zr}\right|^2}} \tag{11-74}$$

Dans la zone plastique P2, le deuxième critère F_2 est atteint, ce qui permet de réécrire les deux dérivées sous la forme suivante :

$$\frac{\partial F_2\left(\sigma^a_{\theta r}\,,\,\mu_{zr}\right)}{\partial \sigma^a_{\theta r}} = \frac{h_2\,\sigma^a_{\theta r}}{N} \tag{11-75}$$

$$\frac{\partial F_2\left(\sigma^a_{\theta r}\,,\,\mu_{zr}\right)}{\partial \mu_{zr}} = \frac{h_3\,\mu_{zr}}{R^2\,N} \tag{11-76}$$

Pour le critère quadratique, on obtient les deux relations de comportement ci-dessous :

$$\varepsilon^a_{\theta r} = -\varepsilon^a_{r\theta} = \frac{\lambda_2}{2}\frac{\partial G_2\left(\sigma^a_{ij},\mu_{ij}\right)}{\partial \sigma^a_{\theta r}} = \frac{\lambda_2}{2}\,h_2\,\frac{\sigma^a_{\theta r}}{N} \tag{11-77}$$

$$\kappa_{zr} = \frac{d\omega^c_z}{dr} = \lambda_2\frac{\partial G_2\left(\sigma^a_{ij},\mu_{ij}\right)}{\partial \mu_{zr}} = \lambda_2\,\frac{h_3}{R^2}\,\frac{\mu_{zr}}{N} \tag{11-78}$$

7.2.1.3 Bilan des variables cinématiques dans la zone P1-P2

Dans la zone plastique P1-P2 où les deux critères sont atteints, $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$, les inconnues sont : 2 déplacements, 1 rotation, 4 déformations, 1 courbure et 2 multiplicateurs plastiques. Au total, il y a 10 inconnues. D'autre part, il y a 3 équations d'équilibre, 2 critères de rupture qui sont atteints et 5 relations entre d'une part les déplacements et la rotation et d'autre part, les déformations et la courbure. Au total, il y a donc 10 équations pour 10 inconnues. Le problème est bien posé.

Il faut noter que les 3 équations d'équilibre et les deux critères de rupture sont uniquement en variables statiques, alors que ces dernières sont au nombre de 5. Il est donc possible de résoudre le problème statique séparément à conditions que les conditions aux limites soient choisies de manière à fixer les variables statiques aux conditions aux limites.

7.2.2 Zones plastique P1-R2

Dans une zone plastique par rapport au premier critère $F_1 = 0$, et rigide par rapport au deuxième $F_2 < 0$, les déformations symétriques totales ε^s_{ij} sont purement plastiques tandis que la rotation relative $\varepsilon^a_{\theta r}$ et la courbure κ_{zr} sont rigides, c'est à dire nulles. Il en résulte que les trois équations de comportement plastique pour les trois déformations symétriques, déduites de la loi d'écoulement définie à partir du potentiel plastique G_1 , sont vérifiées :

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon^s_{rr} = \frac{dU_r}{dr} = \frac{\lambda_1}{2}(\sin\beta + \cos(2\alpha)) \tag{11-79}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon^s_{\theta\theta} = \frac{U_r}{r} = \frac{\lambda_1}{2}(\sin\beta - \cos(2\alpha)) \tag{11-80}$$

$$\varepsilon^s_{\theta r} = \varepsilon^s_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{dU_\theta}{dr} - \frac{U_\theta}{r}\right) = \frac{\lambda_1}{2}\sin(2\alpha) \tag{11-81}$$

D'autre part, la déformation antisymétrique $\varepsilon^a_{\theta r}$, qui est la rotation relative de la microstructure par rapport au milieu continu, est nulle :

$$\varepsilon^a_{\theta r} = -\varepsilon^a_{r\theta} = \Omega_{\theta r} - \omega^c_z = \frac{1}{2}\left(\frac{dU_\theta}{dr} + \frac{U_\theta}{r}\right) - \omega^c_z = 0 \tag{11-82}$$

La microstructure suit donc la rotation du milieu macroscopique définie par :

$$\omega^c_z = \Omega_{\theta r} = \Omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{dU_\theta}{dr} + \frac{U_\theta}{r}\right) \tag{11-83}$$

Il en résulte que la courbure κ_{zr} est une fonction du déplacement tangentiel et de ses dérivées première et seconde :

$$\kappa_{zr} = \frac{d\omega^c_z}{dr} = \frac{1}{2}\frac{d}{dr}\left(\frac{dU_\theta}{dr} + \frac{U_\theta}{r}\right) \tag{11-84}$$

Un tel milieu de Cosserat, où la rotation propre de la microstructure suit la rotation d'ensemble du milieu, s'inscrit dans le cadre de la théorie du second gradient.

Dans la zone P1-R2 où on a $F_1 = 0$ et $F_2 < 0$, il ne subsiste plus que deux degrés de liberté indépendants : les deux déplacements en translation.

Les variables cinématiques indépendantes sont : 2 déplacements, 3 déformations symétriques et un multiplicateur plastique. Il y a 3 relations de comportement et 3 relations déplacements-déformations. Les variables statiques indépendantes sont au nombre de trois pour deux équations d'équilibre et un critère de rupture. Il y a donc 3 variables statiques pour 3 équations statiques. Le problème statique peut être, là encore, résolu indépendamment du problème cinématique. Au total, il y a 9 inconnues et 9 équations.

7.2.3 Zones rigides R1-R2

Les zones rigides R1-R2 sont définies comme étant les zones où aucun des deux critères n'est vérifié : $F_1 < 0$ et $F_2 < 0$. La solution en déplacement et rotation est des plus simples :

$$U_r(r) \equiv 0 \tag{11-85}$$

$$U_\theta(r) = \Omega_z r \tag{11-86}$$

$$\omega^c_z = \Omega_z \tag{11-87}$$

C'est le champ de déplacements d'un corps rigide tournant autour de l'axe z avec une vitesse de rotation Ω_z .

7.2.4 Zone rigide R1-P2

Pour un matériau rigide plastique avec 2 critères, il peut exister, formellement, 4 types de zones avec un comportement différent et notamment des zones rigides pour le premier critère $F_1 < 0$ et plastique pour le deuxième $F_2 = 0$. Dans de telles zones, les équations de comportement pour les déformations symétriques rigides sont :

$$\varepsilon_{rr}(\text{rigide} : F_1 < 0) = \frac{dU_r}{dr} = 0 \tag{11-88}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}(\text{rigide} : F_1 < 0) = \frac{U_r}{r} = 0 \tag{11-89}$$

$$\varepsilon^s_{\theta r}(\text{rigide} : F_1 < 0) = \frac{1}{2}\left(\frac{dU_\theta}{dr} - \frac{U_\theta}{r}\right) = 0 \tag{11-90}$$

et pour la rotation relative et la courbure plastique :

$$\varepsilon^a_{\theta r}(\text{plastique} : F_2 = 0) = \frac{1}{2}\left(\frac{dU_\theta}{dr} + \frac{U_\theta}{r}\right) - \omega^c_z = \frac{\lambda_2}{2}\frac{\partial G_2}{\partial \sigma^a_{\theta r}} \tag{11-91}$$

$$\kappa_{zr}(\text{plastique} : F_2 = 0) = \frac{d\omega^c_z}{dr} = \lambda_2 \frac{\partial G_2}{\partial \mu_{zr}} \tag{11-92}$$

Des deux premières équations de comportement rigide, on en déduit que le champ de déplacements macroscopiques est celui d'un corps rigide en rotation :

$$U_r(r) \equiv 0 \tag{11-93}$$

$$U_\theta(r) = \Omega_z r \tag{11-94}$$

La rotation de la microstructure ω_z^c est déterminée par le choix du potentiel plastique G_2 :

$$\frac{\dfrac{d\omega_z^c}{dr}}{\Omega_z - \omega_z^c} = 2\frac{\dfrac{\partial G_2(\sigma^a_{\theta r}, \mu_{zr})}{\partial \mu_{zr}}}{\dfrac{\partial G_2(\sigma^a_{\theta r}, \mu_{zr})}{\partial \sigma^a_{\theta r}}} \tag{11-95}$$

Le terme $\Omega_z - \omega_z^c$ mesure la différence entre la rotation d'ensemble Ω_z du corps rigide, qui est constante, et la rotation des points matériels en lesquels se trouvent attachée une microstructure libre de tourner de ω_z^c . C'est la rotation relative dont on a directement l'équation différentielle à partir du deuxième potentiel plastique G_2 .

Le cas d'une zone R1-P2 , rigide par rapport à $F_1 < 0$ et plastique par rapport à $F_2 = 0$, est donc un cas extrême puisque la rotation d'ensemble est constante tandis que la rotation de Cosserat varie et est fixée indépendamment par le critère microscopique. L'équation en rotation relative, dans ce cas là, est :

$$\frac{\dfrac{d\varepsilon^a_{\theta r}}{dr}}{\varepsilon^a_{\theta r}} = \frac{d\ln\left|\varepsilon^a_{\theta r}\right|}{\varepsilon^a_{\theta r}} = -2\frac{\dfrac{\partial G_2(\sigma^a_{\theta r}, \mu_{zr})}{\partial \mu_{zr}}}{\dfrac{\partial G_2(\sigma^a_{\theta r}, \mu_{zr})}{\partial \sigma^a_{\theta r}}} \tag{11-96}$$

Le choix du potentiel plastique microscopique détermine la décroissance de la rotation relative.

7.2.4.1 Critère linéaire

Dans le cas d'un critère linéaire, on a l'équation différentielle suivante en rotation relative :

$$\frac{\dfrac{d\varepsilon^a_{\theta r}}{dr}}{\varepsilon^a_{\theta r}} = \frac{d\ln\left|\varepsilon^a_{\theta r}\right|}{dr} = -2\frac{h_3}{h_2}\frac{\text{signe}(\mu_{zr})}{\text{signe}(\sigma^a_{\theta r})}\frac{1}{R} \tag{11-97}$$

et

$$\varepsilon^a_{\theta r}(r) = \varepsilon^a_{\theta r}(r_{int})\exp\left[-2\frac{h_3}{h_2}\frac{\text{signe}(\mu_{zr})}{\text{signe}(\sigma^a_{\theta r})}\frac{r - r_{int}}{R}\right] \tag{11-98}$$

La rotation relative s'amortit et tend vers zéro (solution classique) seulement si le couple contrainte μ_{zr} et la contrainte antisymétrique $\varepsilon^a_{\theta r}$ sont de même signe.

Le couple contrainte μ_{zr} est positif près de l'interface :

$$\mu_{zr}(r_{int}) > 0 \tag{11-99}$$

La contrainte antisymétrique $\sigma^a_{\theta r}$ est fonction du couple contrainte μ_{zr} et de sa dérivée. La condition $\sigma^a_{\theta r}$ et μ_{zr} de même signe équivaut à avoir $\frac{d\mu_{zr}}{dr} + \frac{\mu_{zr}}{r} = \frac{d}{dr}(r\,\mu_{zr})$ négatif. Le couple contrainte μ_{zr} doit décroître plus vite que 1 sur r , ce qui est vérifié puisque μ_{zr} décroît en exponentiel dans le cas du critère linéaire. On peut remarquer que la déformation relative $\varepsilon^a_{\theta r}$ ne sera pas nulle en r_{ext} , sauf si on l'impose nulle en r_{int} . Auquel cas, elle est nulle de partout.

7.2.4.2 Critère quadratique

Dans le cas d'un critère quadratique, on a l'équation différentielle suivante en rotation relative :

$$\frac{\frac{d\varepsilon^a_{\theta r}}{dr}}{\varepsilon^a_{\theta r}} = \frac{d\,\ln\left|\varepsilon^a_{\theta r}\right|}{dr} = -2\,\frac{h_3}{h_2}\,\frac{\mu_{zr}}{\sigma^a_{\theta r}}\,\frac{1}{R} \tag{11-100}$$

Après réécriture de $\varepsilon^a_{\theta r}$ en fonction de μ_{zr} et de sa dérivée première, on obtient :

$$\frac{\frac{d\varepsilon^a_{\theta r}}{dr}}{\varepsilon^a_{\theta r}} = \frac{d\,\ln\left|\varepsilon^a_{\theta r}\right|}{dr} = -4\,\frac{h_3}{h_2}\,\frac{\frac{\mu_{zr}}{R}}{\frac{\mu_{zr}}{r} + \frac{d\mu_{zr}}{dr}} \tag{11-101}$$

L'évolution du couple contrainte μ_{zr} est fixée par le deuxième critère de rupture et la troisième équation d'équilibre. Connaissant cette évolution, on en déduit l'évolution de la rotation relative $\varepsilon^a_{\theta r}$.

8 Définitions des zones plastiques et rigides

Dans l'annexe 12, on a choisi de développer une solution avec trois comportements différents, de la forme proposée dans le tableau A11-2.

Tableau A11-2 : Première décomposition possible de la solution par zones

Zone	Comportement	Caractéristiques
r_{int} à $r_{int} + e$	zone P1-P2 $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$	zone "Cosserat" plastique plastique en translation et plastique en rotation
$r_{int} + e$ à r_p	zone P1-R2 $F_1 = 0$ et $F_2 < 0$	zone "classique" plastique plastique en translation rigide en rotation
r_p à r_{ext}	zone R1-R2 $F_1 < 0$ et $F_2 < 0$	zone "classique" rigide rigide en translation rigide en rotation

On pourrait, suivant les valeurs des conditions aux limites de $\sigma^a_{\theta r}$ et μ_{zr} , développer une solution du type proposé dans le tableau A11-3.

Tableau A11-3 : Deuxième décomposition possible de la solution par zones

Zone	Comportement	Caractéristiques
r_{int} à $r_{int} + e$	zone R1-P2 $F_1 < 0$ et $F_2 = 0$	zone "Cosserat" rigide rigide en translation plastique en rotation
$r_{int} + e$ à r_{ext}	zone R1-R2 $F_1 < 0$ et $F_2 < 0$	zone "classique" rigide rigide en translation rigide en rotation

C'est une idée qui mériterait d'être étudiée en début de chargement.

Par contre, les solutions du type décrit dans le tableau A11-4, sont à exclure car les conditions de continuité sur les limites de zones où les deux critères cessent d'être vérifiés simultanément sont trop contraignantes.

Tableau A11-4 : Troisième décomposition possible de la solution par zones

Zone	Comportement	Caractéristiques
r_{int} à $r_{int} + e$	zone P1-P2 $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$	zone "Cosserat" plastique plastique en translation plastique en rotation
$r_{int} + e$ à r_{ext}	zone R1-R2 $F_1 < 0$ et $F_2 < 0$	zone "classique" rigide rigide en translation rigide en rotation

Les solutions du type proposé dans le tableau A11-5, sont de même à exclure car les variables de type microscopiques s'amortissent très rapidement par rapport aux variables de type macroscopique.

Tableau A11-5 : Quatrième décomposition possible de la solution par zones

Zone	Comportement	Caractéristiques
r_{int} à $r_{int} + e$	zone P1-P2 $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$	zone "Cosserat" plastique plastique en translation plastique en rotation
$r_{int} + e$ à r_P	zone R1-P2 $F_1 < 0$ et $F_2 = 0$	zone "Cosserat" rigide rigide en translation plastique en rotation
r_P à r_{ext}	zone R1-R2 $F_1 < 0$ et $F_2 < 0$	zone "classique" rigide rigide en translation rigide en rotation

Les couple contraintes s'amortissent très vite sur quelques longueurs internes R tandis que les contraintes totales ne s'amortissent que plus lentement, en 1 sur r^2 par exemple, pour la contrainte tangentielle totale $\sigma_{\theta r}$. La variation des contraintes macroscopiques et notamment de $\sigma_{\theta r}$ et σ_{rr} sur quelques longueurs internes n'est pas suffisamment forte pour accommoder les conditions aux limites en r_{int} et r_{ext} .

Le fait que les variables de type microscopique, notamment les couples contraintes, décroissent beaucoup plus vite que les variables de type macroscopique, notamment les termes diagonaux σ_{ii} du tenseur des contraintes, se comprend très facilement quand on écrit les équations d'équilibre d'un volume élémentaire du milieu continu. Au niveau de ce volume, il faut tenir compte du gradient des couple contraintes et supposer que les contraintes sont constantes sur la cellule pour pouvoir trouver les équations d'un milieu de Cosserat. Si l'on suppose que les couple contraintes et contraintes varient aussi rapidement les uns que les autres, on retombe immédiatement sur un milieu classique avec un tenseur symétrique des contraintes (Annexe 2).

Annexe 12

Analyse du cisaillement simple annulaire d'un milieu continu de Cosserat avec une loi de comportement rigide plastique : solution du problème statique

1 Introduction

L'annexe 11 présente les équations générales par zones de comportement pour le cisaillement simple annulaire d'un milieu continu de Cosserat rigide parfaitement plastique.

Dans cette annexe 12, la solution statique, en contraintes et couple contrainte, est développée indépendamment de la solution cinématique, en déplacements et rotation, qui est développée dans l'annexe 13. Ceci est possible car les problèmes statique et cinématique sont couplés uniquement par la condition à la limite en déplacement radial nul (U_r (r_{int}) = 0). Celle-ci est équivalente à une condition sur l'angle α des directions principales des tenseurs symétriques des contraintes et déformations qui sont coaxiaux (Annexe 10). Il est alors possible de résoudre le problème statique, dans un premier temps, puis de résoudre le problème cinématique, dans un deuxième temps.

Une solution avec trois zones de comportement différents a été sélectionnée dans l'annexe 11, après étude systématique des diverses possibilités :

(1) près de l'interface, entre r_{int} et $r_{int} + e$, une "zone de Cosserat plastique" P1-P2
($F_1 = 0$ et $F_2 = 0$)

(2) entre $r_{int} + e$ et r_P , une "zone classique plastique" P1-R2
($F_1 = 0$ et $F_2 < 0$)

(3) entre r_P et r_{ext} , une "zone classique rigide" R1-R2
($F_1 < 0$ et $F_2 < 0$)

D'autres combinaisons de zones sont possibles, mais celle-ci est la seule possible si l'on suppose une plastification des deux critères près de l'interface. La zone 1, qui est d'épaisseur très faible, quelques longueurs internes, est caractérisée par une forte décroissance des variables microscopiques et une décroissance plus lente des variables macroscopiques. La zone 2 a une épaisseur plus grande qui est directement reliée aux dimensions de l'échantillon. Elle permet aux variables macroscopiques de décroître sur une distance suffisante pour atteindre les valeurs des conditions aux limites extérieures.

2 Solution dans la zone plastique P1-P2

2.1 Inconnues statiques

Les cinq inconnues statiques sont la pression p , l'angle α de rotation des contraintes principales des tenseurs des contraintes et déformations symétriques par rapport aux axes (r, θ), la contrainte antisymétrique de cisaillement $\sigma^a_{\theta r}$ et le couple contrainte μ_{zr} :

$$p = \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}}{2} \tag{12-1}$$

$$\sigma^s_{\theta r} = \frac{(\sigma_{\theta r} + \sigma_{r\theta})}{2} \tag{12-2}$$

$$\sigma^a_{\theta r} = \frac{(\sigma_{\theta r} - \sigma_{r\theta})}{2} \tag{12-3}$$

2.2 Equations en inconnues statiques

Il y a trois équations d'équilibre :

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})}{r} = 0 \tag{12-4}$$

$$\frac{d\sigma_{\theta r}}{dr} + \frac{(\sigma_{r\theta} + \sigma_{\theta r})}{r} = 0 \tag{12-5}$$

$$\frac{d\mu_{zr}}{dr} + \frac{\mu_{zr}}{r} + (\sigma_{\theta r} - \sigma_{r\theta}) = 0 \tag{12-6}$$

De plus, les deux critères de rupture sont vérifiés, ce qui donne deux équations en variables statiques :

1er critère de rupture macroscopique (Mohr-Coulomb classique)

$$F(\sigma^s_{ij}) = q + p \sin\phi - c\cos\phi \tag{12-7}$$

2ème critère de rupture microscopique (critère linéaire)

$$F_2(\sigma^a_{ij}\ ,\ \mu_{ij}) = h_2 \left|\sigma^a_{\theta r}\right| + \frac{h_3}{R}\left|\mu_{zr}\right| - N \tag{12-8}$$

2ème critère de rupture microscopique (critère quadratique)

$$F_2(\sigma^a_{ij}\ ,\ \mu_{ij}) = \sqrt{h_2 \left|\sigma^a_{\theta r}\right|^2 + \frac{h_3}{R^2}\left|\mu_{zr}\right|^2} - N \tag{12-9}$$

La première équation d'équilibre, combinée avec les équations du cercle de Mohr, donne :

$$\frac{d(p+q\cos(2\alpha))}{dr}+\frac{2q\cos(2\alpha)}{r}=0 \qquad (12\text{-}10)$$

On peut remplacer la pression p en fonction de q et α à l'aide du premier critère de rupture, ce qui donne une première équation en q et α :

$$\frac{d\left(\frac{-q+c\cos\phi}{\sin\phi}+q\cos(2\alpha)\right)}{dr}+\frac{2q\cos(2\alpha)}{r}=0 \qquad (12\text{-}11)$$

On obtient une deuxième équation en q et α à partir de la deuxième équation d'équilibre et des équations du cercle de Mohr :

$$\frac{d\left(\sigma^a_{\theta r}+q\sin(2\alpha)\right)}{dr}+\frac{2q\sin(2\alpha)}{r}=0 \qquad (12\text{-}12)$$

Après élimination de q et de sa dérivée entre les deux équations précédentes, on obtient l'équation différentielle suivante en α :

$$\frac{d\alpha}{dr}=\frac{\sin 2\alpha}{\sin\phi-\cos 2\alpha}\left[\frac{1}{r}+\frac{\left(\frac{d\sigma^a_{\theta r}}{dr}\right)}{2\sigma^s_{\theta r}}(1-\cos 2\alpha\sin\phi)\right] \qquad (12\text{-}13)$$

Par rapport à la même équation en α dans le cas d'un milieu continu classique, on trouve un nouveau terme qui fait varier plus rapidement l'angle α . Ce nouveau terme peut être écrit en fonction du couple contrainte μ_{zr} et de ses dérivées première et seconde :

$$\frac{d\alpha}{dr}=\frac{\sin 2\alpha}{\sin\phi-\cos 2\alpha}\left[\frac{1}{r}+\left\{\frac{-\frac{1}{2}\left[-\frac{\mu_{zr}}{r^2}+\frac{\left(\frac{d\mu_{zr}}{dr}\right)}{r}+\frac{d^2\mu_{zr}}{dr^2}\right]}{\frac{2A}{r^2}-\frac{\mu_{zr}}{r}+\frac{d\mu_{zr}}{dr}}\right\}(1-\cos 2\alpha\sin\phi)\right] \qquad (12\text{-}14)$$

2.3 Solution dans la couche d'interface (zone P1-P2)

Le deuxième critère de rupture qui est défini uniquement en variables microscopiques $\sigma^a_{\theta r}$ et μ_{zr} , et la troisième équation d'équilibre qui permet de calculer la contrainte antisymétrique $\sigma^a_{\theta r}$ en fonction du couple contrainte μ_{zr} et de sa dérivée, permettent d'obtenir une équation différentielle en couple contrainte μ_{zr} :

$$F_2\left(\sigma^a_{\theta r} = -\frac{1}{2}\left(\frac{d\mu_{zr}}{dr} + \frac{\mu_{zr}}{r}\right) , \mu_{zr}\right) = 0 \qquad (12\text{-}15)$$

On a donc une équation différentielle du premier ordre, le plus souvent non linéaire, en couple contrainte μ_{zr} . Connaissant la valeur du couple contrainte en interface $\mu_{zr}(r_{int}) > 0$ et sachant qu'à la limite entre la couche d'interface (zone P1-P2) où on a $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$ et la zone suivante classique plastique (zone P1-R2) où on a $F_1 = 0$ et $F_2 < 0$, le couple contrainte est nulle, la solution en couple contrainte est définie de manière unique sur l'épaisseur de l'interface e.

Tableau A12-1 : Schéma de résolution du couple contrainte

équation différentielle non linéaire du premier ordre en μ_{zr} $F_2\left(\sigma^a_{\theta r} = -\frac{1}{2}\left(\frac{d\mu_{zr}}{dr} + \frac{\mu_{zr}}{r}\right) , \mu_{zr}\right) = 0$
condition à la limite en r_{int} $\mu_{zr}(r_{int}) > 0$
"condition à la limite" en $r_{int} + e$: à la limite entre une zone avec un comportement de Cosserat (zone P1-P2) et une zone avec un comportement classique (zone P1-R2), le couple contrainte disparaît et est égale à 0 $\mu_{zr}(r_{int} + e) = 0$

2.3.1 Equation différentielle en couple contrainte (critère linéaire)

2.3.1.1 Cisaillement simple annulaire

On combine le critère de rupture microscopique linéaire :

$$F_2\left(\sigma^a_{ij} , \mu_{ij}\right) = h_2 \left|\sigma^a_{\theta r}\right| + \frac{h_3}{R}\left|\mu_{zr}\right| - N \qquad (12\text{-}16)$$

avec la troisième équation d'équilibre :

$$\sigma^a_{\theta r} = -\frac{1}{2}\left(\frac{d\mu_{zr}}{dr} + \frac{\mu_{zr}}{r}\right) \qquad (12\text{-}17)$$

pour obtenir l'équation différentielle non linéaire du premier ordre suivante :

$$\frac{d\mu_{zr}(r)}{dr} = -\frac{\mu_{zr}(r)}{r} - \frac{2\,N}{h_2}\,\text{signe}(\sigma^a_{\theta r})\left[1 - \frac{|\mu_{zr}|}{\mu_{zr}^{max}}\right] \tag{12-18}$$

Dans le cas du cisaillement simple annulaire, cette équation est non linéaire et doit être résolue numériquement pour un jeu de conditions aux limites donné.

2.3.1.2 Cisaillement simple plan

Quand r tend vers l'infini, l'épaisseur de l'échantillon restant constante $H = r_{int} - r_{ext}$, on retrouve le cisaillement simple plan. Dans ce cas là, l'équation précédente devient linéaire et peut être intégrée analytiquement. L'équation différentielle à résoudre est :

$$\frac{d\mu_{zr}(r)}{dr} = -\frac{2\,N}{h_2}\,\text{signe}(\sigma^a_{\theta r})\left[1 - \frac{|\mu_{zr}|}{\mu_{zr}^{max}}\right] \tag{12-19}$$

Cette équation s'intègre en :

$$\frac{\mu_{zr}(r)}{\mu_{zr}^{max}} = 1 - \left(1 - \frac{\mu_{zr}(r_{int})}{\mu_{zr}^{max}}\right)\exp\left(2\;\text{signe}\left(\sigma^a_{\theta r}\right)\frac{h_3}{h_2}\,\frac{r - r_{int}}{R}\right) \tag{12-20}$$

où le couple contrainte maximal est défini par :

$$\mu_{zr}^{max} = \frac{N\,R}{h_3} \tag{12-21}$$

Si le couple contrainte à l'interface en r_{int} est positif, il faudra que la contrainte antisymétrique soit positive pour que le couple contrainte soit décroissant en valeur absolue. De même, si le couple contrainte à l'interface en r_{int} est négatif, il faudra que la contrainte antisymétrique soit négative pour que le couple contrainte soit décroissant en valeur absolue. La condition pour que le couple contrainte soit décroissant en valeur absolue, c'est à dire que les effets Cosserat s'atténuent rapidement, est que le couple contrainte et la contrainte antisymétrique soient de même signe :

$$\text{signe}\left(\sigma^a_{\theta r}\right)\,\text{signe}\left(\mu_{zr}\right) > 0 \tag{12-22}$$

Or on a la relation suivante :

$$\sigma^a_{\theta r} = -\frac{1}{2}\left(\frac{d\mu_{zr}}{dr} + \frac{\mu_{zr}}{r}\right) \tag{12-23}$$

On en déduit que si le couple contrainte μ_{zr} et la contrainte antisymétrique $\sigma^a_{\theta r}$ sont positifs, la dérivée du couple contrainte est négative et qu'il décroît. De même s'ils sont négatifs, on en déduit que la dérivée de μ_{zr} est positive. Le couple contrainte croît mais sa valeur absolue décroît.

L'épaisseur d'interface e se calcule alors en recherchant le premier point de coordonnée $r_{int} + e$ où le couple contrainte s'annule :

$$\mu_{zr}(r_{int}+e)=0 \tag{12-24}$$

Ceci donne la valeur suivante pour l'épaisseur e / R :

$$\frac{e}{R}=\frac{1}{2}\frac{h_2}{h_3}\ln\left(\frac{1}{1-\frac{\mu_{zr}(r_{int})}{\mu_{zr}^{max}}}\right) \tag{12-25}$$

2.3.2 Equation différentielle en couple contrainte (critère quadratique)

2.3.2.1 Cisaillement simple annulaire

On combine le critère de rupture microscopique quadratique :

$$F_2\left(\sigma_{ij}^a\ ,\ \mu_{ij}\right)=\sqrt{h_2\left|\sigma_{\theta r}^a\right|^2+\frac{h_3}{R^2}\left|\mu_{zr}\right|^2}-N \tag{12-26}$$

avec la troisième équation d'équilibre :

$$\sigma_{\theta r}^a=-\frac{1}{2}\left(\frac{d\mu_{zr}}{dr}+\frac{\mu_{zr}}{r}\right) \tag{12-27}$$

pour obtenir l'équation différentielle non linéaire du premier ordre suivante :

$$-\text{signe}(\sigma_{\theta r}^a)\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_{zr}(r)}{r}+\frac{d\mu_{zr}(r)}{dr}\right)=\sqrt{\frac{h_3}{h_2}}\frac{\mu_{zr}^{max}}{R}\sqrt{1-h_2\left(\frac{\mu_{zr}(r)}{\mu_{zr}^{max}}\right)^2} \tag{12-28}$$

où le couple contrainte maximal est défini par :

$$\mu_{zr}^{max}=\frac{N\,R}{\sqrt{h_3}} \tag{12-29}$$

Cette équation, dans le cas du cisaillement simple annulaire est non linéaire et doit être résolue numériquement pour un jeu de conditions aux limites donné.

2.3.2.2 Cisaillement simple plan

Quand r tend vers l'infini, l'épaisseur de l'échantillon restant constante $H = r_{int} - r_{ext}$, on retrouve le cisaillement simple plan. Dans ce cas, là l'équation précédente devient linéaire et peut être intégrée analytiquement. L'équation différentielle à résoudre est :

$$\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sigma_{max}^a}\frac{d\mu_{zr}(r)}{dr}\right)^2+\left(\frac{\mu_{zr}}{\mu_{zr}^{max}}\right)^2=1 \tag{12-30}$$

On pose :

$$\cos\chi = \text{signe}\left(\frac{d\mu_{zr}(r)}{dr}\right)\sqrt{\frac{h_2}{h_3}}\,\frac{1}{2}\,\frac{R}{\mu_{zr}^{max}}\,\frac{d\mu_{zr}(r)}{dr} \tag{12-31}$$

$$\sin\chi = \frac{\mu_{zr}(r)}{\mu_{zr}^{max}} \tag{12-32}$$

avec :

$$\text{signe}(\chi) = \text{signe}\left(\frac{d\mu_{zr}}{dr}\right) \tag{12-33}$$

On obtient l'équation suivante en χ :

$$\frac{d\chi}{dr} = \text{signe}\left(\frac{d\mu_{zr}(r)}{dr}\right)\sqrt{\frac{h_3}{h_2}}\,\frac{2}{R} \tag{12-34}$$

qui s'intègre en :

$$\chi = \chi_{int} + 2\ \text{signe}\left(\frac{d\mu_{zr}(r)}{dr}\right)\sqrt{\frac{h_3}{h_2}}\,\frac{r - r_{int}}{R} \tag{12-35}$$

d'où la solution en couple contrainte :

$$\frac{\mu_{zr}(r)}{\mu_{zr}^{max}} = \sin\chi(r) \tag{12-36}$$

qui s'écrit aussi sous la forme :

$$\frac{\mu_{zr}(r)}{\mu_{zr}^{max}} = \sin\left(\chi_{int} + 2\ \text{signe}\left(\frac{d\mu_{zr}(r)}{dr}\right)\sqrt{\frac{h_3}{h_2}}\,\frac{r - r_{int}}{R}\right) \tag{12-37}$$

avec :

$$\chi_{int} = \text{asin}\left(\frac{\mu_{zr}(r_{int})}{\mu_{zr}^{max}}\right) \tag{12-38}$$

L'épaisseur d'interface e se calcule alors en recherchant le premier point de coordonnée $r_{int} + e$, où le couple contrainte s'annule :

$$\mu_{zr}(r_{int} + e) = 0 \tag{12-39}$$

On obtient la valeur suivante pour l'épaisseur e , normalisée par la longueur interne plastique R :

$$\frac{e}{R} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{h_2}{h_3}}\left(-\text{signe}\left(\frac{d\mu_{zr}}{dr}\right)\right)\text{asin}\left(\frac{\mu_{zr}(r_{int})}{\mu_{zr}^{max}}\right) \qquad (12\text{-}40)$$

Si le couple contrainte est positif, pour qu'il tende vers zéro, il faut qu'il soit décroissant. Sa dérivée est alors négative. Si le couple contrainte est négatif, pour qu'il tende vers zéro, il faut qu'il soit croissant. Sa dérivée est alors positive. Dans les deux cas, le terme $-d\mu_{zr}/dr$ sera positif ce qui donne une épaisseur positive :

$$\frac{e}{R} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{h_2}{h_3}}\,\text{asin}\left(\frac{\mu_{zr}(r_{int})}{\mu_{zr}^{max}}\right) \qquad (12\text{-}41)$$

2.3.3 Conclusions sur les épaisseurs d'interface

Dans les deux cas, que le critère microscopique soit linéaire ou quadratique, on obtient une épaisseur d'interface qui est directement proportionnelle à la longueur interne plastique R et qui dépend du couple contrainte $\mu_{zr}(r_{int})$ imposé par l'interface. Ce terme normalisé par le couple contrainte maximal μ_{zr}^{max} admissible dans le sol vis à vis du deuxième critère, est une mesure de la rugosité de l'interface. Au plus la rugosité est grande, au plus l'épaisseur d'interface sera grande avec une valeur maximale de cette épaisseur e_{max} , obtenue quand $\mu_{zr}(r_{int}) = \mu_{zr}^{max}$:

critère linéaire

$$\frac{e_{max}}{R} = \infty \qquad (12\text{-}42)$$

critère quadratique

$$\frac{e_{max}}{R} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{h_2}{h_3}}\,\frac{\pi}{2} \qquad (12\text{-}43)$$

Pour ce qui concerne le cisaillement simple plan, le critère linéaire donne une épaisseur qui tend vers l'infini quand le couple contrainte imposé par l'interface tend vers le couple contrainte maximal alors que la même épaisseur tend vers une valeur finie dans le cas du critère quadratique. Ce dernier critère est donc préférable de ce point de vue là.

Connaissant l'épaisseur maximal d'une interface dans un sol donné, on peut déterminer le rapport des deux coefficients h_2 et h_3 .

2.3.4 Schéma de résolution en variables microscopiques

L'évolution du couple contrainte dans la couche d'interface est fixée indépendamment des variables macroscopiques.

Connaissant μ_{zr} (r) entre r_{int} et $r_{int} + e$, on en déduit la contrainte antisymétrique :

$$\sigma^{a}_{\theta r} = -\frac{1}{2}\left(\frac{d\mu_{zr}}{dr} + \frac{\mu_{zr}}{r}\right) \tag{12-44}$$

On peut remarquer que la condition à la limite en contrainte tangentielle $\sigma_{\theta r}$ en r_{int} spécifie la valeur totale de cette contrainte. La séparation entre la partie antisymétrique et la partie symétrique est faite par l'autre condition à la limite en couple contrainte μ_{zr} en r_{int} ainsi que le critère microscopique.

Tableau A12-2 : Schéma de résolution en variables microscopiques

Solution en couple contrainte μ_{zr} (r) entre r_{int} et $r_{int} + e$
critère de rupture F_2 + condition à la limite en couple contrainte μ_{zr} (r_{int}) en r_{int} μ_{zr} (r_{int}) > 0 + condition de continuité du couple contrainte en $r_{int} + e$ μ_{zr} ($r_{int} + e$) = 0
solution en contrainte antisymétrique $\sigma^{a}_{\theta r}$
troisième équation d'équilibre $\sigma^{a}_{\theta r} = -\frac{1}{2}\left(\frac{d\mu_{zr}}{dr} + \frac{\mu_{zr}}{r}\right)$

2.3.5 Schéma de résolution en variables macroscopiques

Connaissant la solution en couple contrainte et en contrainte antisymétrique, la solution en contraintes symétriques est immédiate avec la deuxième équation d'équilibre intégrée :

$$\sigma^{s}_{\theta r} = \frac{A}{r^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\mu_{zr}}{dr} - \frac{\mu_{zr}}{r}\right) \tag{12-45}$$

Les deux conditions à la limite en interface permettent de calculer la valeur de la constante A :

$$A = r_{int}\left[r_{int}\sigma_{\theta r}(r_{int}) + \mu_{zr}(r_{int})\right] \tag{12-46}$$

$$\sigma_{\theta r}(r_{int}) = \frac{A}{r_{int}^2} - \frac{\mu_{zr}(r_{int})}{r_{int}} \tag{12-47}$$

L'angle α s'obtient en intégrant l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d\alpha}{dr} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin\phi - \cos 2\alpha}\left[\frac{1}{r} + \frac{\left(\frac{d\sigma^a_{\theta r}}{dr}\right)}{2\sigma^s_{\theta r}}(1 - \cos 2\alpha \sin\phi)\right] \qquad (12\text{-}48)$$

Dans le cas classique, cette équation peut être intégrée analytiquement. Dans le cas présent, la complexité des nouveaux termes ne le permet pas. Il faut l'intégrer numériquement.

La valeur de α en interface est connue par la condition à la limite en r_{int} : déplacement U_r nul, qui est équivalente à la condition sur α :

$$\alpha(r_{int}) = \text{signe}\left(\sigma_{\theta r}(r_{int})\right)\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) \qquad (12\text{-}49)$$

Tableau A12-3 : Schéma de résolution globale

solution en couple contrainte μ_{zr} (r) entre r_{int} et $r_{int} + e$ solution en contrainte antisymétrique $\sigma^a_{\theta r}$
solution en contraintes tangentielles : totale $\sigma_{\theta r}$ et symétrique $\sigma^s_{\theta r}$ $\sigma_{\theta r} = \frac{A}{r^2} - \frac{\mu_{zr}}{r}$ $\sigma^s_{\theta r} = \frac{A}{r^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\mu_{zr}}{dr} - \frac{\mu_{zr}}{r}\right)$ $A = r_{int}\left[r_{int}\sigma_{\theta r}(r_{int}) + \mu_{zr}(r_{int})\right]$
solution en α $\frac{d\alpha}{dr} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin\phi - \cos 2\alpha}\left[\frac{1}{r} + \frac{\left(\frac{d\sigma^a_{\theta r}}{dr}\right)}{2\sigma^s_{\theta r}}(1 - \cos 2\alpha \sin\phi)\right]$ $\alpha(r_{int}) = \text{signe}\left(\sigma_{\theta r}(r_{int})\right)\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)$
solution en déviateur q $q = \frac{\sigma^s_{\theta r}}{\sin 2\alpha}$
solution en pression p $p = \frac{-q + c\cos\phi}{\sin\phi}$
solutions en σ^s_{ii} $\sigma_{rr} = p + q \cos 2\alpha$ $\sigma_{\theta\theta} = p - q \cos 2\alpha$ $\sigma^s_{\theta r} = q \sin 2\alpha$

3 Zone classique plastique P1-R2

3.1 Transition avec la couche d'interface

A la limite entre la couche d'interface (zone P1-P2) et la zone plastique classique (zone P1-R2), en $r_{int}+e^-$, le couple contrainte μ_{zr} est nul :

$$\mu_{zr}(r_{int}+e^-) = 0 \tag{12-50}$$

De plus il doit être continu $r_{int}+e^+$ d'où :

$$\mu_{zr}(r_{int}+e^-) = \mu_{zr}(r_{int}+e^+) \tag{12-51}$$

La contrainte antisymétrique en $r_{int}+e^-$ est non nulle puisque le second critère de rupture est vérifié et que le couple contrainte y est nul :

$$F_2(\sigma^a_{\theta r}\ , \mu_{zr}(r_{int}) = 0) \tag{12-52}$$

Au delà de $r_{int}+e^+$ on recherche une solution de type classique avec un tenseur symétrique des contraintes. On prendra donc une contrainte tangentielle antisymétrique nulle en $r_{int}+e^+$. Ceci est autorisé car c'est la contrainte tangentielle totale qui doit être continue. Les parties symétriques et antisymétriques peuvent ne pas être continues

$$\sigma_{\theta r}(r_{int}+e^-) = \sigma_{\theta r}(r_{int}+e^+) \tag{12-53}$$

mais :

$$\Delta\sigma^a_{\theta r}(r_{int}+e) = \sigma^a_{\theta r}(r_{int}+e^+) - \sigma^a_{\theta r}(r_{int}+e^-) = 0 - \sigma^a_{\theta r}(r_{int}+e^-) \neq 0 \tag{12-54}$$

Dans la couche d'interface, la solution en contrainte tangentielle totale entre r_{int} et $r_{int}+e^-$ est du type :

$$\sigma_{\theta r}(r) = \frac{A_I}{r^2} - \frac{\mu_{zr}(r)}{r} \tag{12-55}$$

tandis que dans la zone P1-R2, entre $r_{int}+e^+$ et r_{ext} , elle est du type :

$$\sigma_{\theta r}(r) = \frac{A_p}{r^2} \tag{12-56}$$

La continuité de $\sigma_{\theta r}$ en $r_{int}+e$, où le couple contrainte μ_{zr} est par ailleurs nul, impose que les deux constantes d'intégration soient égales :

$$A_I = A_P \tag{12-57}$$

La troisième et dernière condition de continuité est en σ_{rr} . Par contre $\sigma_{\theta\theta}$ peut être discontinue.

Tableau A12-4: Résumé des conditions de continuité sur les variables statiques

Variables statiques	Conditions de continuité
μ_{zr} , σ_{rr} , $\sigma_{\theta r}$	continues
$\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$	peuvent être discontinues
μ_{zr}	continues
$\sigma^s_{\theta r}$, $\sigma^a_{\theta r}$, p , q et α	peuvent être discontinues mais : $\Delta\sigma_{rr} = \Delta(p + q \cos 2\alpha) = 0$ $\Delta\sigma_{\theta r} = \Delta(q \sin 2\alpha + \sigma^a_{\theta r}) = 0$

Si l'on travaille en variables μ_{zr} , $\sigma^s_{\theta r}$, $\sigma^a_{\theta r}$, p , q et α , seul le couple contrainte doit être continu mais par contre, les discontinuités des variables p , q et α doivent être choisies de manière à assurer la continuité de σ_{rr} et $\sigma_{\theta r}$:

$$\Delta\sigma_{rr} = \Delta(p + q \cos 2\alpha) = 0 \qquad (12\text{-}58)$$

$$\Delta\sigma_{\theta r} = \Delta(q \sin 2\alpha + \sigma^a_{\theta r}) = 0 \qquad (12\text{-}59)$$

La deuxième condition implique que les deux constantes d'intégration A_I et A_p soient égales et donne une première condition sur les discontinuités en $r_{int} + e$ des variables Δp , Δq et $\Delta\alpha$:

$$[(p+\Delta p)+(q+\Delta q) \cos 2(\alpha+\Delta\alpha)]-[p+q \cos 2\alpha] = 0 \qquad (12\text{-}60)$$

La continuité de la contrainte tangentielle totale $\sigma_{\theta r}$ donne une deuxième condition sur les discontinuités Δp , Δq et $\Delta\alpha$:

$$\sigma_{\theta r}(r_{int}+e^+) = \sigma^s_{\theta r} + \left(\sigma^a_{\theta r} = 0\right) = (q+\Delta q) \sin 2\,(\alpha+\Delta\alpha) = \sigma_{\theta r}(r_{int}+e^-) = \sigma^s_{\theta r} + \sigma^a_{\theta r} = q \sin 2\alpha + \sigma^a_{\theta r}(r_{int}+e^-) \qquad (12\text{-}61)$$

Il manque une troisème équation en Δp , Δq et $\Delta\alpha$ pour résoudre le problème. Cette équation provient de l'hypothèse qui est faite sur le comportement dans la zone en contact avec la couche d'interface.

3.2 Discussion sur les zones de comportement

On pourrait regarder une solution avec un comportement tel que $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$ entre r_{int} et $r_{int} + e^-$, passerait directement à un comportement tel que $F_1 < 0$ et $F_2 < 0$ en $r_{int} + e^+$. Cependant une telle transition est trop contraignante. En effet, l'angle α dans la zone rigide classique est constant et égale à $\pm \pi/4$. L'angle α serait donc égale à $\pm \pi/4$ en $r_{int} + e^+$ et il serait fixé indépendamment de toutes les conditions précitées ci-dessus en $r_{int} + e^-$. La discontinuité $\Delta\alpha$ serait donc fixée.

La continuité de $\sigma_{\theta r}$ imposerait alors :

$$\sigma_{\theta r}\,(r_{int} + e) = (q+\Delta q)\,\sin 2\,(\pm\pi/4) \qquad (12\text{-}62)$$

d'où la valeur de Δq.

La continuité de σ_{rr} imposerait alors :

$$\sigma_{rr}\,(r_{int}+e) = p+q\,\cos 2\alpha = (p+\Delta p) + (q+\Delta q)\,\cos 2(\pm\pi/4) \qquad (12\text{-}63)$$

d'où la valeur de Δp.

Cependant, la solution en contrainte σ_{rr} est imposée dans la zone rigide par la condition à la limite extérieure en $\sigma_{rr}\,(r_{ext})$, indépendamment de toute autre condition :

$$\sigma_{rr}\left(r \geq r_{int} + e^{+}\right) \equiv \sigma_{rr}\left(r_{ext}\right) \qquad (12\text{-}64)$$

Il n'y a donc aucune possibilité pour que la valeur de σ_{rr} trouvée en $r_{int} + e^{-}$ soit égale à σ_{rr} (r_{ext}) , sauf à choisir les dimensions de l'appareillage ou le jeu de conditions aux limites en conséquence. Le passage d'une zone P1-P2 à une zone R1-R2 est donc impossible.

De même, le passage d'une zone P1-P2 à une zone R1-P2 n'est pas à considérer car on cherche à développer une solution de type classique hors de la couche d'interface. Ne reste plus alors qu'une solution avec passage d'une zone P1-P2 à une zone P1-R2 en $r^{int} + e$.

3.3 Transition entre une zone P1-P2 et une zone P1-R2

Le matériau est supposé resté plastique par rapport au premier critère F_1 pour $r \geq r_{int} + e^{-}$, ce qui donne une première équation en Δp et $\Delta\alpha$:

$$\Delta F_1 = \Delta p\,\sin\phi + \frac{\sigma^{s}_{\theta r}\left(r_{int}+e^{+}\right)}{\sin 2(\alpha+\Delta\alpha)} - \frac{\sigma^{s}_{\theta r}\left(r_{int}+e^{-}\right)}{\sin 2\alpha} = 0 \qquad (12\text{-}65)$$

La condition de continuité de σ_{rr} permet d'écrire une deuxième équation en Δp et $\Delta\alpha$:

$$\Delta\sigma_{rr} = \Delta p + \sigma^{s}_{\theta r}\left(r_{int}+e^{+}\right)\,\text{cotan}\,2(\alpha+\Delta\alpha) - \sigma^{s}_{\theta r}\left(r_{int}+e^{-}\right)\,\text{cotan}\,2\alpha = 0 \qquad (12\text{-}66)$$

Après élimination de Δp entre les deux équations précédentes, on obtient l'équation suivante en $\Delta\alpha$:

$$\frac{1-\sin\phi\,\cos 2(\alpha+\Delta\alpha)}{\sin 2(\alpha+\Delta\alpha)} = \frac{\sigma^{s}_{\theta r}\left(r_{int}+e^{-}\right)}{\sigma^{s}_{\theta r}\left(r_{int}+e^{+}\right)}\,\frac{1-\sin\phi\,\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \qquad (12\text{-}67)$$

que l'on réécrit en fonction de l'inconnue $X = \sin 2(\alpha+\Delta\alpha)$:

$$X^2\left(w^2+\sin^2\phi\right) - 2\,w\,X + \cos^2\phi = 0 \qquad (12\text{-}68)$$

avec :

$$w = \frac{\sigma^s_{\theta r}\left(r_{int} + e^-\right)}{\sigma^s_{\theta r}\left(r_{int} + e^+\right)} \frac{1 - \sin\phi \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \tag{12-69}$$

Cette équation du deuxième degré en X, donne deux solutions en X_1 et X_2 ou $\Delta\alpha_1$ et $\Delta\alpha_2$ qui se situent de part et d'autre de la valeur de α en interface :

$$-\frac{\pi}{2} \le \alpha + \Delta\alpha_1 \le \alpha_I = -\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \le \alpha + \Delta\alpha_2 \le 0 \tag{12-70}$$

Dans la zone de sol cisaillé près de l'interface, l'angle α décroît et tend vers $-\pi/2$. Dans les zones R1, rigides par rapport au premier critère de rupture F_1 , l'angle α est constant et égale à $-\pi/2$.

Quand r croit, α décroît jusqu'à la valeur en $r_{int} + e^-$. Si en $r_{int} + e^+$, on choisit la solution en $\alpha + \Delta\alpha_2$ qui est supérieure à α_I , on s'éloigne de la solution en $\alpha(r_p)$ qui est en $-\pi/2$. Pour converger de nouveau vers cette valeur, il faudrait, soit intercaler entre les zones P1-P2 et P1-R2 une nouvelle zone, soit supposer une variation du couple contrainte μ_{zr} autour de la valeur zéro, dans le cas d'un critère quadratique, pour laisser à α la distance suffisante pour atteindre la valeur $-\pi/2$. De telles solutions conduiraient à avoir une couche d'interface qui serait constituée en fait de plusieurs zones, ce qui n'est pas observé expérimentalement.

3.4 Solution dans la zone P1-R2

On recherche une solution avec une zone classique plastique P1-R2 où $F_1 = 0$ et $F_2 < 0$ entre $r_{int} + e$ et r_p et une zone classique rigide R1-R2 où $F_1 < 0$ et $F_2 < 0$ entre r_p et r_{ext} .

La solution en contrainte tangentielle $\sigma_{\theta r}$ est donnée par :

$$\sigma_{\theta r}(r) = \sigma^s_{\theta r}(r) = \frac{A_p}{r^2} \tag{12-71}$$

avec $A_p = A_I$ pour assurer la continuité de celle-ci entre les zones.

L'évolution de α est donnée par la relation :

$$r = M\, F(|\alpha|) \tag{12-72}$$

$$F(|\alpha|) = \left[\frac{\tan|\alpha|^{\sin\phi}}{\sin 2|\alpha|}\right]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin|\alpha|^{\frac{\sin\phi - 1}{2}} \cos|\alpha|^{\frac{-\sin\phi - 1}{2}} \tag{12-73}$$

La valeur de α est connue en $r_{int} + e^+$ après résolution de l'équation en $\Delta\alpha$, ce qui fixe la valeur de la constante M à :

$$M = \frac{r_{int} + e}{F\left(\left|\alpha\left(r_{int} + e^+\right)\right|\right)} \tag{12-74}$$

Tableau A12-5 : Résumé des conditions de transition entre les zones P1-P2 et P1-R2

Variables	Valeur en $r_{int} + e^-$	Valeur en $r_{int} + e^+$	Solution dans la zone P1-R2
μ_{zr} continue	0	0	$\mu_{zr} \equiv 0$
$\sigma^a_{\theta r}$ discontinue	$\sigma^a_{\theta r} \neq 0$ $F_2(\sigma^a_{\theta r}, \mu_{zr}(r_{int}) = 0)$	0	solution classique avec un tenseur des contraintes symétrique
$\sigma^s_{\theta r}$ discontinue	$\sigma^s_{\theta r} \neq 0$	$\sigma_{\theta r}(r_{int}+e^+)$ $= \sigma^s_{\theta r} + (\sigma^a_{\theta r} = 0)$ $= \sigma_{\theta r}(r_{int}+e^-)$ $= \sigma^s_{\theta r}(r_{int}+e^-) + \sigma^s_{\theta r}(r_{int}+e^-)$	$\sigma^s_{\theta r}$ est discontinue mais $\Delta\sigma^s_{\theta r}$ est choisie pour que $\sigma_{\theta r}$ soit continue
$\sigma_{\theta r}$ continue	$\sigma_{\theta r}(r) = \frac{A_1}{r^2} - \frac{\mu_{zr}(r)}{r}$	$\sigma_{\theta r}(r) = \frac{A_p}{r^2}$	$A_1 = A_p$ assure la continuité en $r_{int} + e$ car μ_{zr} y est nul
$\sigma_{r\theta}$ discontinue	$\sigma_{r\theta} \neq 0$	$\sigma_{r\theta} \neq 0$	$\Delta\sigma_{r\theta} \neq 0$
σ_{rr} continue	$\sigma_{rr} = p + q\cos 2\alpha$	$\sigma_{rr} = (p+\Delta p) + (q+\Delta q)\cos 2(\alpha+\Delta\alpha)$	équation en Δp, Δq et $\Delta\alpha$
F_1	$F_1 = 0$	$F_1 = 0$	équation en Δp, Δq et $\Delta\alpha$
$\sigma_{r\theta}$ discontinue	$\sigma_{r\theta} \neq 0$	$\sigma_{r\theta} \neq 0$	$\Delta\sigma_{r\theta} \neq 0$
α angle	α	$\alpha+\Delta\alpha = \alpha+\Delta\alpha_1$	deux solutions en $\alpha+\Delta\alpha$ $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha + \Delta\alpha_1$ $\leq \alpha_1 = -\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}$ $\leq \alpha + \Delta\alpha_2 \leq 0$

Tableau A12-6 : Conditions de continuité des variables

Variables	r_p^-	r_p^+
σ_{rr} continue	$\sigma_{rr}(r_{ext})$	$\sigma_{rr}(r_{ext})$
$\sigma_{\theta r}$ continue	$\sigma_{\theta r} = \frac{A_p}{r^2}$	$\sigma_{\theta r} = \frac{A_p}{r^2}$
$\sigma_{\theta\theta}$ discontinue	$\sigma_{\theta\theta}(r_p^-)$	$\sigma_{\theta\theta}(r_p^+)$
angle α	$\alpha(r_p^-)$	$\alpha(r_p^+) = \pm\pi/2$
pression p	$p(r_p^-)$	$p(r_p^+) = \sigma_{rr}(r_{ext})$

Connaissant $\sigma_{\theta r}$ (r)= q sin 2α et α(r) , on en déduit p(r) par le critère de rupture :

$$\sigma_{\theta r}(r) = q \sin(2\alpha) = \frac{A}{r^2} \tag{12-75}$$

$$F_i = q + p \sin\phi - c \cos\phi = 0 \tag{12-76}$$

La limite entre les zones P1-R2 et R1-R2 se trouve au point r_p où la contrainte radiale atteint la valeur de la contrainte de confinement σ_{rr} (r_{ext}) , donne l'équation suivante en r_p :

$$\sigma_{rr}(r_{ext}) = \sigma_{rr}(r_p) = c \operatorname{cotan}\phi + \frac{A_p}{r_p^2}\left(\frac{\cos 2\alpha(r_p)\sin\phi - 1}{\sin 2\alpha(r_p)\sin\phi}\right) \tag{12-77}$$

4 Zone classique rigide R1-R2

4.1 Transition de la zone P1-R2 à la zone R1-R2

La limite en r_p est choisie pour que σ_{rr} (r_p) = σ_{rr} (r_{ext}) et sachant que dans la zone rigide la contrainte radiale est constante et égale à la pression. La continuité de la contrainte radiale est donc assurée. La continuité de la contrainte tangentielle $\sigma_{\theta r}$ est assurée en gardant la même constante d'intégration A dans la zone P1-R2 que dans la zone R1-R2. L'angle α est constant et égal à -π/4 dans la zone classique rigide R1-R2. On en déduit la solution en déviateur p(r) à partir de la représentation du cercle de Mohr :

$$q(r) = \frac{\sigma_{\theta r}(r)}{\sin 2\alpha(r)} = \frac{A_p}{r^2}\frac{1}{\sin 2\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{A_p}{r^2} \tag{12-78}$$

Il en résulte que le déviateur q est discontinu en r_p de même que α . Ces deux discontinuités sont compatibles avec les conditions de continuités sur les contraintes radiale σ_{rr} et tangentielle $\sigma_{\theta r}$:

$$\Delta\sigma_{rr}(r_p) = (p + \Delta p) + (q + \Delta q)\cos 2\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \sigma_{rr}(r_p^-) = (p + \Delta p) - \sigma_{rr}(r_p^-) = \sigma_{rr}(r_p^+) - \sigma_{rr}(r_p^-) \tag{12-79}$$

$$\Delta\sigma_{\theta r}(r_p) = \left(-\frac{A_p}{r^2}\right)\sin 2\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \left(\frac{A_p}{r^2}\right) = 0 \tag{12-80}$$

4.2 Solution dans la zone classique rigide R1-R2

La solution en contraintes est :

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = p = \sigma_{rr}(r_{ext}) \tag{12-81}$$

$$\sigma_{\theta r} = \sigma_{r\theta} = \frac{A_p}{r^2} = -q \tag{12-82}$$

Annexe 13

Analyse du cisaillement simple annulaire d'un milieu de Cosserat avec une loi de comportement rigide plastique : solution du problème cinématique

1 Introduction

L'annexe 12 présente la solution du problème statique du cisaillement simple annulaire. Dans cette annexe, nous développons une solution cinématique.

2 Limites du comportement rigide

La solution en déplacements et rotation dans la zone classique rigide R1-R2 est donnée par :

$$U_r(r) \equiv 0 \tag{13-1}$$

$$U_\theta(r) = \Omega_z\, r \tag{13-2}$$

$$\omega_z^c(r) = \Omega_z(r) \equiv \Omega_z \tag{13-3}$$

Le déplacement radial est donc identiquement nul, quelques soient les conditions aux limites, du fait de la simplicité de la loi de comportement et de la géométrie de l'essai qui peut être qualifié d'essai unidimensionnel.

Cette condition est trop forte dans le cas présent, car en remontant du rayon extérieur r_{ext} vers le rayon intérieur r_{int} , on peut démontrer que U_r est nul de partout.

Dans la zone R1-R2 on a pour $r_p \le r \le r_{ext}$:

$$U_r(r) \equiv 0 \tag{13-4}$$

A la limite entre les deux zones P1-R2 et R1-R2, on a en r_p^- :

$$\alpha\left(r_p^-\right) \neq 0\ ,\ \pm\frac{\pi}{2}\ ,\ \pm\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right) \tag{13-5}$$

La solution dans la zone P1-P2 est donnée par :

$$U_r(\alpha) = K\, G_1(|\alpha|)\, G_2(|\alpha|) \tag{13-6}$$

où les deux fonctions G_1 et G_2 sont égales à :

$$G_1(\alpha) = \left[2 \sin|\alpha|^{1+\sin\beta} \cos|\alpha|^{1-\sin\beta}\right]^{1/2} \tag{13-7}$$

$$G_2(\alpha) = \left[\left|\sin\beta - \cos 2\alpha\right|^{\frac{2\sin\beta}{\cos^2\beta}} \sin|\alpha|^{\frac{1+\sin\beta}{1-\sin\beta}} \cos|\alpha|^{\frac{1-\sin\beta}{1+\sin\beta}}\right]^{\frac{\sin\phi-\sin\beta}{2}} \tag{13-8}$$

Comme G est nulle seulement si $\alpha = 0$, $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)$ et que α_p est différent de ces valeurs, la constante d'intégration K est nulle. Le déplacement normal est donc nul dans la zone P1-R2. Un raisonnement identique pour la zone P1-P2 donne aussi un déplacement nul dans cette zone. En conclusion, le déplacement normal U_r est nul dans les trois zones, ce qui n'est pas acceptable car le multiplicateur plastique λ_1 est proportionnel à U_r et doit être non nul.

La présence de la zone R1-R2 est trop contraignante. Plusieurs solutions existent pour contourner ces limitations : prendre en compte l'élasticité du matériau, ce qui rend impossible le développement de solutions analytiques, ou garder un comportement rigide plastique et introduire un écrouissage isotrope pour la plasticité.

Le but de cette étude est de comprendre ce que peut apporter un milieu continu de Cosserat par rapport à un milieu classique, tout en gardant des lois de comportement très simples : linéaire élastique ou rigide parfaitement plastique, même si l'on ne peut pas développer une solution complète. Afin de développer une solution cinématique même partielle, on fera abstraction de la zone rigide classique extérieure, où le déplacement radial est identiquement nul et donc de la condition d'un déplacement radial nul en r_p .

3 Problème étudié

On résout le problème suivant avec les conditions aux limites résumées dans le tableau A13-1 ci-dessous.

Tableau A13-1 : Problème cinématique étudié

conditions à la limite en r_{int}	zone P1-P2 $r_{int} \le r \le r_{int} + e^-$	zone P1-R2 $r_{int} + e^+ \le r \le r_p$	Condition à la limite en r_p
$U_r = 0$ équivalent à $\alpha_I = \pm\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)$ condition sur la dérivée de U_r ou sur $\lambda_1 > 0$	$F_1 = 0$ $F_2 = 0$	$F_1 = 0$ $F_2 < 0$	$U_\theta = 0$ $\omega_z^c = \Omega_z = 0$

Il est nécessaire de compléter la condition à la limite en r_{int} , par une condition à la limite portant sur le multiplicateur plastique λ_1 , ce qui est équivalent à spécifier le gradient de U_r en r_{int} .

$$\lambda_1 (r_{int}) > 0 \tag{13-9}$$

La condition en $U_r (r_{int}) = 0$, si elle permet de fixer la valeur de l'angle α en r_{int} , ne permet pas par contre de fixer la constante d'intégration K de la fonction $U_r(r)$.

4 Solution du problème cinématique

La solution en U_r dans la zone P1-P2 est donnée par l'équation différentielle en U_r et r suivante :

$$\frac{dU_r}{dr} = \frac{U_r}{r} \frac{\sin\beta + \cos 2\alpha(r)}{\sin\beta - \cos 2\alpha(r)} \tag{13-10}$$

Cette équation différentielle peut s'écrire en U_r et α :

$$\frac{dU_r}{U_r} = d\ln U_r = \left(\frac{\sin\beta + \cos 2\alpha(r)}{\sin\beta - \cos 2\alpha(r)}\right)\left(\frac{\sin\phi - \cos 2\alpha(r)}{\sin 2\alpha(r)}\right)\left(\frac{d\alpha}{1 + M\,F(|a|)\dfrac{\left(\dfrac{d\sigma^a_{\theta r}}{dr}\right)}{2\sigma^s_{\theta r}}(1 - \cos 2\alpha \sin\phi)}\right) \tag{13-11}$$

Cette solution, qui ne peut être calculée que numériquement, est écrite sous la forme suivante :

$$U_r(r) = K\,G(|\alpha|) = \frac{U_r(r_{int})}{G(|\alpha(r_{int})|)} G(|\alpha|) \tag{13-12}$$

On peut remarquer que si la contrainte antisymétrique $\sigma^a_{\theta r}$ est nulle , ce qui est le cas pour la solution classique, l'équation précédente se réduit à l'équation suivante :

$$\frac{dU_r}{U_r} = d\ln U_r = \left(\frac{\sin\beta + \cos 2\alpha(r)}{\sin\beta - \cos 2\alpha(r)}\right)\left(\frac{\sin\phi - \cos 2\alpha(r)}{\sin 2\alpha(r)}\right) d\alpha \tag{13-13}$$

Si de plus, la loi d'écoulement est associée, on a $F_1 = G_1$ et $\phi = \beta$. Cette équation se réduit alors à :

$$\frac{dU_r}{U_r} = d\ln U_r = \frac{\sin\beta + \cos 2\alpha(r)}{\sin 2\alpha(r)} d\alpha \tag{13-14}$$

Dans le cas d'un milieu continu classique avec une loi d'écoulement non associée, la solution explicite est :

$$U_r(\alpha) = K\, G_1(|\alpha|)\, G_2(|\alpha|) \tag{13-15}$$

où les deux fonctions G_1 et G_2 sont égales à :

$$G_1(\alpha) = \left[2 \sin|\alpha|^{1+\sin\beta} \cos|\alpha|^{1-\sin\beta}\right]^{1/2} \tag{13-16}$$

$$G_2(\alpha) = \left[|\sin\beta - \cos 2\,\alpha|^{\frac{2\sin\beta}{\cos^2\beta}} \sin|\alpha|^{\frac{1+\sin\beta}{1-\sin\beta}} \cos|\alpha|^{\frac{1-\sin\beta}{1+\sin\beta}}\right]^{\frac{\sin\phi-\sin\beta}{2}}$$

Dans le cas d'une loi d'écoulement associée, la solution explicite est :

$$U_r(\alpha) = K\, G_1(|\alpha|) \tag{13-17}$$

On a pour $\alpha = \alpha_l$:

$$G_1\left(\left|\alpha_1 = \pm\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)\right|\right) \neq 0 \tag{13-18}$$

et

$$G_2\left(\left|\alpha_1 = \pm\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)\right|\right) = 0 \tag{13-19}$$

Il est important que la loi d'écoulement soit non associée pour le premier critère afin d'assurer une solution en U_r qui ne soit pas identiquement nulle dans la couche d'interface.

Le multiplicateur plastique peut être écrit en fonction de U_r et sa dérivée première :

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sin\beta}\left(\frac{dU_r}{dr} + \frac{U_r}{r}\right) = \frac{2}{r}\frac{U_r}{\sin\beta - \cos 2\alpha} = \frac{2}{\sin\beta + \cos 2\alpha}\frac{dU_r}{dr} \tag{13-20}$$

En interface, on a U_r et $\sin\beta - \cos 2\alpha$ qui sont égaux à zéro. Leur rapport est donc indéterminé. Par contre, λ_1 est directement relié à la dérivée première de U_r :

$$\lambda_1(r_{int}) = \frac{1}{\sin\beta}\frac{dU_r}{dr} \tag{13-21}$$

La solution en U_r dans la zone P1-P2 est intégrée numériquement avec un schéma de type prédicteur-correcteur.

Le multiplicateur plastique λ_1 est calculé en tout point avec les relations précédemment développées.

En $r_{int} + e$, on prend U_r continu :

$$U_r (r_{int} + e^-) = U_r (r_{int} + e^+) \tag{13-22}$$

La solution en U_r dans la zone P1-R2 est développée en intégrant la même équation différentielle que dans la zone P1-P2 à la différence près que α fait un saut en $r_{int} + e$:

$$\alpha (r_{int} + e^-) \neq \alpha (r_{int} + e^+) \tag{13-23}$$

Le multiplicateur plastique λ_1 est calculé en tout point avec les relations précédemment développées pour la zone P1-P2 et qui restent valables dans la zone P1-R2 car les deux critères sont découplées.

La solution en U_r n'est pas développée au delà de r_p .

En r_p , le déplacement tangentiel est nul et la solution sur la zone P1-R2 est développée à partir de ce point en allant vers $r_{int} + e$ et en intégrant l'équation en U_θ suivante :

$$\frac{d\left(\frac{U_\theta}{r}\right)}{d\alpha} = \frac{2\,U_r(\alpha)}{r^2(\alpha)} \frac{\sin\phi - \cos 2\alpha}{\sin\beta - \cos 2\alpha} \tag{13-24}$$

qui se réécrit aussi :

$$\frac{d\left(\frac{U_\theta}{r}\right)}{d\alpha} = 4\frac{K}{M} \sin|\alpha|^{\frac{1-\sin\phi}{1-\sin\beta}} \cos|\alpha|^{\frac{1+\sin\phi}{1+\sin\beta}} \frac{\sin\phi - \cos 2\alpha}{\sin\beta - \cos 2\alpha} |\sin\beta - \cos 2\alpha|^{\frac{\sin\beta}{\cos^2\beta}(\sin\phi - \sin\beta)} \tag{13-25}$$

En $r_{int} + e$, U_θ est pris continu et la solution dans la zone P1-P2 est développée avec la même équation que dans la zone P1-R2. Comme U_r et r sont continus mais que l'angle α est discontinu, le gradient du déplacement tangentiel U_θ est discontinu.

La solution en rotation propre ω_z^c dans la zone P1-R2 est une solution de type classique :

$$\omega_z^c = \Omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{dU_\theta}{dr} + \frac{U_\theta}{r}\right) = \frac{1}{2\,r}\frac{d}{dr}(r\,U_\theta) \tag{13-26}$$

et le multiplicateur plastique λ_2 est nul puisque le deuxième critère n'est pas atteint.

Dans la zone P1-P2, les équations régissant l'évolution de la rotation propre ω_z^c sont :

$$\varepsilon^a_{\theta r} = \Omega_z - \omega_z^c = \frac{1}{2r}\frac{d}{dr}(r\,U_q) - \omega_z^c = \frac{\lambda_2}{2}\frac{\partial G_2}{\partial \sigma^a_{\theta r}} \tag{13-27}$$

$$\kappa_{zr} = \frac{d\omega_z^c}{dr} = \lambda_2 \frac{\partial G_2}{\partial \mu_{zr}} \tag{13-28}$$

Après élimination de λ_2 entre les deux équations on obtient l'équation d'évolution de la rotation propre :

$$\frac{\frac{1}{2\,r}\frac{d}{dr}\left(r\,U_q\right)-\omega_z^c}{\frac{d\omega_z^c}{dr}}=\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial G_2}{\partial \sigma_{\theta r}^a}}{\frac{\partial G_2}{\partial \mu_{zr}}} \tag{13-29}$$

Pour le critère quadratique, cette équation s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\frac{1}{2\,r}\frac{d}{dr}\left(r\,U_q\right)-\omega_z^c}{\frac{d\omega_z^c}{dr}}=\frac{R^2}{2}\frac{h_2}{h_3}\frac{\sigma_{\theta r}^a}{\mu_{zr}} \tag{13-30}$$

Pour le critère linéaire, cette équations s'écrit sous la forme :

$$\frac{\frac{1}{2\,r}\frac{d}{dr}\left(r\,U_q\right)-\omega_z^c}{\frac{d\omega_z^c}{dr}}=\frac{R^2}{2}\frac{h_2}{h_3}\frac{\text{signe}\left(\sigma_{\theta r}^a\right)}{\text{signe}\left(\mu_{zr}\right)} \tag{13-31}$$

L'équation en rotation propre comporte des termes en U_θ , $\sigma_{\theta r}^a$ et μ_{zr} dont les solutions ont été développées précédemment. L'équation différentielle en rotation propre est intégrée entre r_p et r_{int} en supposant la continuité en r_p .

Le multiplicateur plastique λ_2 est calculé à partir de la courbure, connaissant la solution en rotation propre :

$$\lambda_2=\frac{\frac{d\omega_z^c(r)}{dr}}{\frac{\partial G_2\left(\sigma_{\theta r}^a,\mu_{zr}\right)}{\partial \mu_{zr}}} \tag{13-32}$$

Annexe 14

Analyse du cisaillement simple annulaire d'un milieu continu de Cosserat avec une loi de comportement rigide plastique : solution numérique et étude paramétrique

1 Introduction

Les annexes 11, 12 et 13 présentent respectivement les équations générales, la solution du problème statique et la solution du problème cinématique pour le cisaillement simple annulaire d'un milieu continu de Cosserat avec une loi de comportement rigide parfaitement plastique dans le cadre de la théorie des déformations totales.

2 Résolution numérique

2.1 Méthodes numériques

Les équations différentielles des différentes variables statiques et cinématiques sont intégrables analytiquement dans le cas d'un milieu continu classique mais pas dans le cas d'un milieu continu de Cosserat.

La solution du problème statique pour un milieu de Cosserat peut être écrite sous la forme de la solution classique, complétée par des termes qui s'écrivent tous comme des fonctions du couple contrainte et de ses dérivées première et seconde. Or, celui-ci est solution d'une équation différentielle non linéaire et le plus souvent non intégrable analytiquement. Il faut donc d'intégrer numériquement le couple contrainte puis les autres variables.

Les critères choisis permettent d'intégrer les variables les unes après les autres. L'introduction de couplage, par exemple, un couplage en pression entre les deux critères F_1 et F_2 , nécessiterait de résoudre simultanément toutes les variables.

Chaque équation différentielle régissant l'évolution d'une variable est intégrée numériquement en utilisant la méthode de Runge-Kutta au $4^{ème}$ ordre pour les deux points (j=0,1), situés sur ou près de la condition à la limite initiale. Une méthode de type prédicteur-correcteur est utilisé pour les points suivants (j=2, n+1).

La dérivée d'une fonction f en un point intérieur est calculée au $4^{ème}$ ordre avec les différences centrées et un maillage uniforme pour $2 \leq j \leq n-1$:

$$\frac{df}{dr}(j) = \frac{1}{12\,h}(f(j-2) - 8\,f(j-1) + 8\,f(j+1) - f(j+2)) \qquad (14\text{-}1)$$

Les dérivées premières d'une fonction f, aux deux points situés près ou sur la condition à la limite extérieure, sont calculés au 2ème ordre à partir des différences finies à gauche pour $n \leq j \leq n+1$:

$$\frac{df}{dr}(j) = \frac{1}{2\,h}(3\,f(j) - 4\,f(j-1) + f(j-2)) \qquad (14\text{-}2)$$

Les dérivées premières d'une fonction f, aux deux points situés près ou sur la condition à la limite intérieure, sont calculées au 2ème ordre à partir des différences finies à droite pour $0 \leq j \leq 1$:

$$\frac{df}{dr}(j) = \frac{1}{2\,h}(-3\,f(j) + 4\,f(j+1) - f(j+2)) \qquad (14\text{-}3)$$

2.2 Comparaison de l'intégration numérique avec la solution analytique

La solution numérique en $\alpha(r)$ obtenue par intégration numérique (méthode de type prédicteur correcteur avec démarrage de l'intégration par Runge Kutta) a été comparée à la solution analytique disponible pour le cisaillement simple annulaire dans le cas d'un milieu classique. L'erreur trouvée est inférieure à 0,003 % pour une suite logarithmique et 100 points d'intégration (r_{int} = 20 cm et r_{ext} = 30 cm).

3 Simulations numériques

3.1 Calculs d'épaisseurs de couche d'interface

3.1.1 Comparaisons des critères linéaire et quadratique

Si l'on utilise les même coefficients h_1 , R et N pour les critères linéaire et quadratique, on obtient pour le premier critère, une épaisseur d'interface e beaucoup plus grande que pour le deuxième critère. Par exemple, pour les valeurs suivantes des paramètres :

$h_2 = 1$ (14-4)

$h_3 = 1/16$ (14-5)

$N = 5\,000$ kPa (14-6)

$R = 1.0^{-3}$ m (14-7)

on obtient les couples contraintes maximaux admissibles suivant : μ_{zr}^{max} = 80 et 20 kN/m, pour respectivement les critères linéaire et quadratique, tandis que les épaisseurs maximales e_{max} qui se développent durant le cisaillement simple annulaire sont de 25,05 R et 3,05 respectivement (figure A14-1).

De même, pour les valeurs suivantes des paramètres :

$h_2 = 1$ (14-8)

$h_3 = 1/2$ (14-9)

$N = 5\,000$ kPa (14-9)

$R = 1.0^{-3}$ m (14-10)

on obtient les couples maximaux suivants : $\mu_{zr}^{max} = 10$ et 7 kN/m, pour les critères linéaire et quadratique respectivement tandis que les épaisseurs maximales e qui se développent durant le cisaillement simple annulaire sont de 5,05 R et 1,15 R respectivement (figure A14-2).

Il faut cependant remarquer, que pour des coefficient h_i , R et N identiques, le couple contrainte maximal μ_{zr}^{max} admissible dans le matériau est plus grand pour le critère linéaire que pour le critère quadratique. Il vaut $R\,N/h_3$ pour le critère linéaire et $R\,N/\sqrt{h_3}$ pour le critère quadratique. Le rapport des deux étant égal à $1/\sqrt{3}$.

Pour un jeu de coefficients égaux pour les deux critères, on a considéré une même valeur du couple contrainte $\mu_{zr}(r_{int})$. Par exemple, en prenant :

$$\mu_{zr}(r_{int}) = \mu_{zr}^{max}(\text{critère quadratique}) \langle\langle\, \mu_{zr}^{max}(\text{critère linéaire}) \quad (14\text{-}11)$$

on obtient sensiblement la même épaisseur d'interface. Pour le jeu de paramètres : $h_2 = 1$, $h_3 = 1/16$, $N = 5\,000$ kPa , $R = 1.0^{-3}$ m et $\mu_{zr}(r_{int}) = 20$ kN/m, on obtient les épaisseurs 2,25 R et 3,05 R pour les critères linéaire et quadratique respectivement (figure A14-3). Pour le jeu de paramètres : $h_2 = 1$, $h_3 = 1/2$, $N = 5\,000$ kPa , $R = 1.0^{-3}$ m et $\mu_{zr}(r_{int}) = 7$ kN/m, on obtient les épaisseurs 1,25 R et 1,15 R pour les critères linéaire et quadratique respectivement (figure A14-4). Les épaisseurs sont donc tout à fait comparables.

3.1.2 Comparaisons entre les cisaillements annulaire et plan

L'épaisseur e donnée par le critère linéaire, dans le cas du cisaillement simple plan, tend vers l'infini quand la rugosité mesurée par le rapport $\mu_{zr}(r_{int})/\mu_{zr}^{max}$ tend vers 1. Cette épaisseur n'est donc pas bornée. Cependant, dans le cas du cisaillement simple annulaire, on trouve une épaisseur finie même pour une rugosité maximale et égale à 1. On obtient ainsi, une épaisseur de 25,05 R pour le jeu de paramètres $h_2 = 1$, $h_3 = 1/16$, $N = 5\,000$ kPa , $\mu_{zr}(r_{int}) = \mu_{zr}^{max} = 80$ kN/m . Ceci est une limitation du critère linéaire, puisque expérimentalement on observe toujours une épaisseur d'interface finie, quelque soit l'essai de cisaillement.

3.1.3 Evolution de l'épaisseur en fonction de la rugosité

3.1.3.1 Critère linéaire et cisaillement annulaire

L'épaisseur de l'interface augmente avec la rugosité pour tendre vers une limite finie (figure A14-5). Parallèlement, on constate une diminution de l'épaisseur de la zone de sol classique plastique, ce qui peut s'expliquer par une forte dissipation de l'énergie plastique dans la couche d'interface.

3.1.3.2 Comparaison, pour le critère quadratique, entre les épaisseurs maximales données par les cisaillements plan et annulaire

Dans le cas du critère quadratique, l'épaisseur maximale pour le cisaillement simple annulaire doit être calculée numériquement. Pour le cisaillement plan, elle peut être calculée analytiquement :

$$\frac{e}{R} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_{zr}^{max}}{\sigma_{max}^{a}}\right) \operatorname{asin}\left(\frac{\mu_{zr}(r_{int})}{\mu_{zr}^{max}}\right) \qquad (14\text{-}12)$$

La figure A14-6 compare l'évolution de e pour un cisaillement simple annulaire où le rayon intérieur r_{int} est 2 000 fois plus grand que la longueur interne R, et pour le cisaillement simple plan. Les deux courbes sont très proches.

Classiquement, il a été observé que la couche d'interface dans un matériau granulaire est quasiment indépendante de la taille de l'échantillon et du rayon de courbure de l'interface r_{int} . Cependant, ces essais étaient faits avec des rayons de courbure de l'interface r_{int} très grands par rapport à la taille des grains, c'est à dire par rapport à la longueur interne R.

Les simulations numériques donnent des résultats tout à fait comparables quand le rayon de courbure de l'interface r_{int} est au moins 100 fois plus grand que la longueur interne R, qui est elle-même de l'ordre de grandeur du rayon des grains D_{50} / 2 (figures A14-7 et A14-8). La différence entre l'épaisseur maximale pour le cisaillement annulaire e(CSA) et le cisaillement plan e(CSP) étant au maximum de 5 % pour $r_{int} > 100$ R . Cette différence est trop faible pour être mis en évidence expérimentalement, compte tenu de l'imprécision avec laquelle une épaisseur d'interface est mesurée.

Il est à noter cependant, que, quand le rayon de courbure r_{int} devient comparable à la longueur interne R, de l'ordre de 10 R, la différence entre e(CSA) et e(CSP) commence à être significative, de l'ordre de 20 %. Pour des valeurs de r_{int} plus faible que 10 R, les effets de taille sont beaucoup plus prononcés. L'épaisseur e(CSA) tend vers une valeur d'environ 0,42 e(CSP) pour r_{int} égale à R. Cependant, l'approche par milieu continu de Cosserat n'a de sens que si les grains "voient" l'interface comme un plan, et si le nombre de grains en contact avec l'interface est suffisamment grand. En particulier, le long d'un cylindre de même taille que les grains, le nombre de points de contact est très réduit et l'approche n'est plus appropriée.

3.2 Simulation numérique d'un essai de cisaillement simple annulaire

Une série de simulations numériques a été faite pour le jeu de paramètres et de conditions aux limites résumés dans le tableau A14-1. Un critère linéaire a été considéré car il amplifie les phénomènes de localisation. Cependant, un critère quadratique donnerait des résultats similaires.

Tableau A14-1 : Données du cisaillement simple annulaire étudié

Géométrie	$r_{int} = 0{,}15$ m $r_{ext} = 0{,}30$ m
Discrétisation spatiale	zone P1-P2 : dr ∈ [R/40 , R/10] zone P1-R2 dr = R/3
Premier critère de rupture macroscopique (critère de Mohr-Coulomb classique) $F_1 = q + p \sin\phi - c\cos\phi$	$\phi = 35°$ c = 0 kPa
Premier potentiel plastique macroscopique $G_1 = q + p \sin\beta$ (loi non associée)	$\beta = 30°$
Deuxième critère de rupture microscopique $F_2 = h_2\lvert\sigma^a_{\theta r}\rvert + h_3\left\lvert\frac{\mu_{zr}}{R}\right\rvert - N$	$h_2 = 1{,}0$ $h_2 = 1/16$ R = 0,001 m N = 8 000 kPa
Deuxième potentiel plastique microscopique $G_2 = F_2$ (loi associée)	$\beta = 30°$
Conditions à la limite à l'interface en r_{int}	$\alpha(r_{int}) = -\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) = -30°$ équivalent à $(U_r(r_{int}) = 0)$ $\sigma_{\theta r}(r_{int}) = -50$ kPa $\mu_{zr}(r_{int}) \in [0,\ 64,\ 128]$ kPa
Conditions à la limite extérieure en r_{ext}	$\sigma_{rr}(r_{ext}) = -60$ kPa $U_\theta(r_{int}) = 0$ $\mu_{zr}(r_{ext}) = 0$

3.2.1 Couple contrainte

Le couple contrainte, qui est une variable de type microscopique, décroît très rapidement près de l'interface, sur une épaisseur e qui est fonction du rapport h_2/h_3 des coefficients constitutifs h_i et de la valeur du couple contrainte imposé à l'interface $\mu_{zr}(r_{int})$. Celui-ci, normalisé par le couple contrainte maximum admissible dans le sol μ_{zr}^{max} , mesure la rugosité de l'interface (figure A14-9). Il est à remarquer que l'épaisseur décroît très vite quand le couple contrainte $\mu_{zr}(r_{int})$ décroît. Quand celui-ci est divisé par 2, l'épaisseur est divisée par 5.

3.2.2 Contraintes tangentielles totales

La contrainte tangentielle $\sigma_{\theta r}$, qui doit être continue, ne varie pas entre le cas classique $\mu_{zr}(r_{int}) = 0$, et le cas Cosserat $\mu_{zr}(r_{int}) > 0$. Par contre, la contrainte $\sigma_{r\theta}$ est très différente (figure A14-10). Elle est discontinue entre la couche d'interface et la zone classique plastique. De plus, les deux contraintes $\sigma_{\theta r}$ et $\sigma_{r\theta}$ sont différentes dans la couche d'interface, ce qui traduit l'existence de contraintes antisymétriques non nulles.

3.2.3 Contraintes tangentielles symétrique et antisymétrique

La contrainte tangentielle symétrique $\sigma^s_{\theta r}$ est la contrainte de Cauchy. Elle est très différente dans la couche d'interface, entre le cas classique et le cas Cosserat (figure A14-11). La contrainte tangentielle antisymétrique $\sigma^a_{\theta r}$ est nulle dans le cas d'un milieu continu classique (figure A14-12). Dans la couche d'interface, elle prend des valeurs très élevées. La présence de contraintes antisymétriques est un indicateur de la localisation des déformations.

3.2.4 Contrainte radiale et pression

Dans le cas Cosserat, la contrainte radiale σ_{rr} à l'interface est plus importante que dans le cas classique, ce qui peut expliquer les fortes contraintes normales qui sont observées localement à l'interface, dans les essais d'arrachement d'inclusions (figure A14-13). Cependant, dans le modèle considéré, où l'on n'introduit pas de dilatance supplémentaire par rapport au cas classique (le deuxième critère ne dépend pas de la pression p), cette augmentation est peu importante et ne se traduit pour la pression p que par une légère augmentation à l'interface.

3.2.5 Déviateur des contraintes symétriques

Le déviateur q des contraintes symétriques σ^s_{ij} mesure d'un point de vue macroscopique l'intensité du cisaillement dans le milieu continu (figure 14-15). On observe que dans la couche d'interface, le milieu est très fortement cisaillé, ce qui se comprend puisque que les déformations sont localisées dans cette couche.

3.2.6 Angle α

L'angle α est l'angle que font les contraintes principales du tenseur symétrique des contraintes avec les axes (r, θ) . Cet angle n'a, à proprement parler, de signification que dans le cas d'un milieu classique où le tenseur des contraintes est symétrique (figure A14-16).

3.2.7 Déplacement tangentiel

Dans le cas d'un milieu continu classique, les variations du déplacement tangentiel U_θ avec le rayon r sont très progressives. Il n'existe pas de zone avec de forts gradients. Dans le cas d'un milieu de Cosserat, on observe dans la couche d'interface, une forte variation du déplacement tangentiel (figure A14-17). Le gradient du déplacement tangentiel U_θ est très fort par rapport à celui qui existe dans les zones extérieures classiques. Il existe une discontinuité du gradient du déplacement tangentiel U_θ à la limite entre la couche d'interface (zone P1-P2) et la zone classique plastique (zone P1-R2).

3.2.8 Déplacement radial

Le déplacement radial U_r augmente plus rapidement dans la couche d'interface que dans les zones adjacentes, ce qui traduit une forte dilatance locale (figure A14-18). Cette dilatance correspond au cisaillement très fort qui existe dans cet zone plastique par rapport au premier critère (cf. valeurs de q plus importantes que dans le cas classique). Il faut noter entre les deux classiques plastique (zone P1-R2) et rigide (zone R1-R2), la discontinuité classique du déplacement radial. Comme dans ces zones, le comportement est de type classique, cette discontinuité est inévitable.

3.2.9 Rotation de Cosserat et rotation relative

Dans la couche d'interface, on observe un écoulement plastique en rotation propre par rapport au deuxième critère. Les valeurs de la rotation de Cosserat sont de l'ordre de plusieurs centaines de degrés (figure A14-19). Dans un milieu continu classique, la rotation des points matériels est égale à la rotation d'ensemble du milieu, qui est de l'ordre de quelques degrés (figure A14-20). Il en résulte que la rotation relative des points matériels avec le milieu continu est très importante et caractérise la couche d'interface (figure A14-21).

3.2.10 Multiplicateurs plastiques

Dans la couche d'interface, on observe une forte variation du multiplicateur plastique λ_1 correspondant au premier critère de rupture macroscopique (figure A14-22). Cette variation dans le cas d'un milieu de Cosserat est nettement plus rapide que dans le cas classique, ce qui correspond au phénomène de localisation des déformations de cisaillement.

Le deuxième multiplicateur plastique λ_2 est non nul uniquement dans la couche d'interface où le deuxième critère est atteint (figure A14-23).

3.3 Conclusions sur les simulations numériques

Les variations des contraintes totales σ_{ij} hors de la couche d'interface ne sont pas très différentes entre les cas classique et Cosserat.

Le couple contrainte imposé à l'interface a une influence directe sur l'épaisseur de la couche d'interface. Quand il est divisé par deux, l'épaisseur est divisée par 5.

La localisation des déformations de cisaillement dans la couche d'interface est accompagnée par l'existence de couples contraintes, de contraintes antisymétriques et de rotations relatives très importantes dans cette couche.

Dans la couche d'interface, on observe une concentration du cisaillement macroscopique, mesuré par le déviateur q et le multiplicateur plastique λ_1 .

Pour des valeurs du rayon du cylindre d'interface r_{int} plus grandes que 100 fois la longueur interne R, l'épaisseur e de l'interface est quasiment indépendante de la géométrie de l'échantillon et de l'interface. Elle dépend de la longueur interne R et du couple contrainte imposé à l'interface, qui mesure la rugosité de celle-ci.

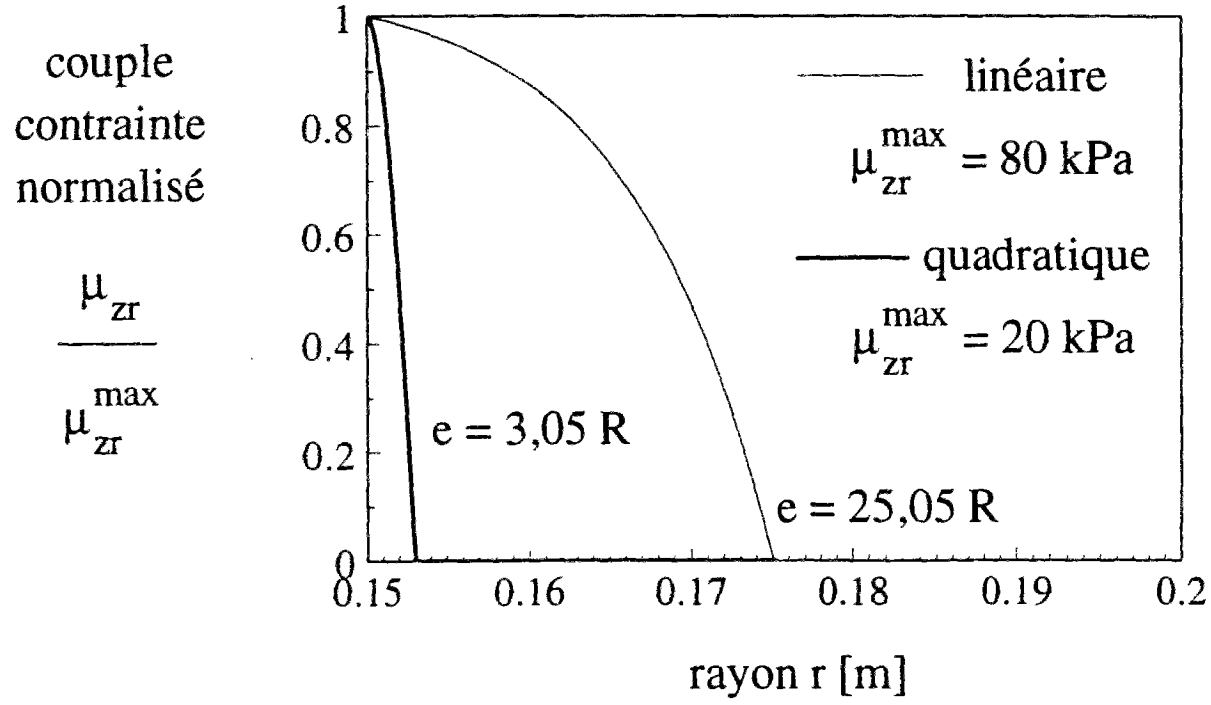


Figure A14-1 : Evolution du couple contrainte μ_{zr} suivant le rayon r
pour les deux critères linéaire et quadratique
$h_2 = 1$, $h_3 = 1/16$, N = 5 000 kPa
$\mu_{zr}(r_{int})$ = 80 kN/m pour le critère linéaire
$\mu_{zr}(r_{int})$ = 20 kN/m pour le critère quadratique

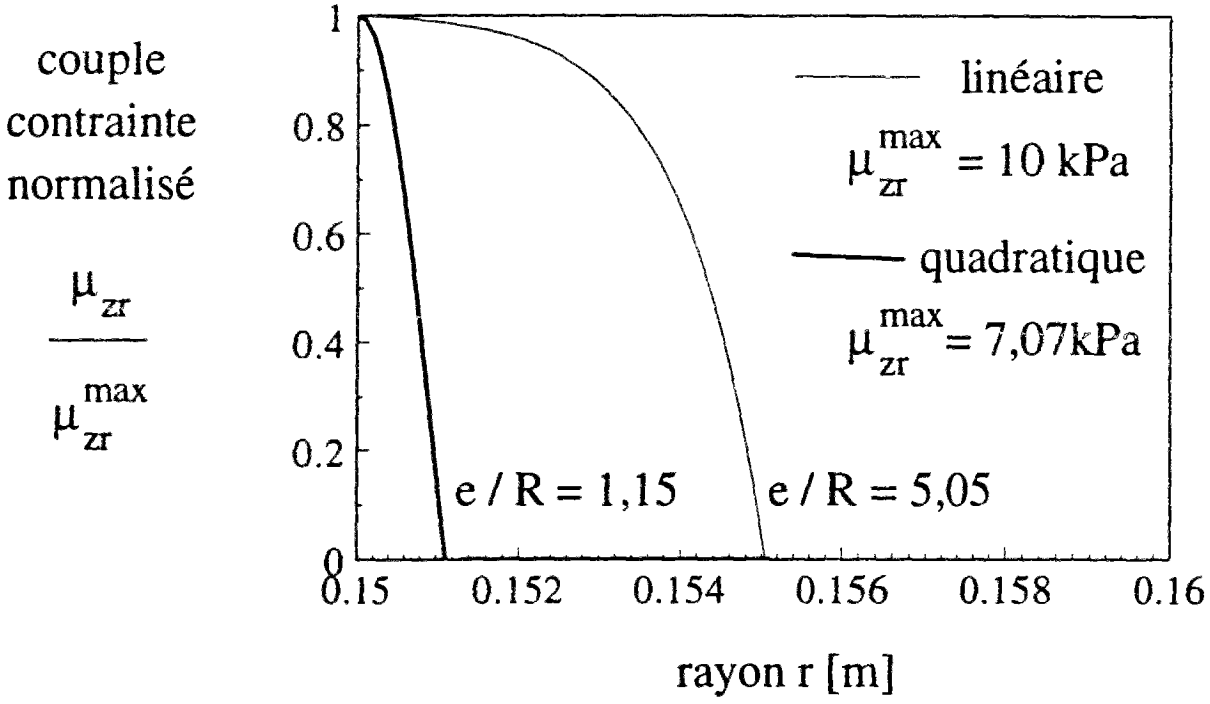


Figure A14-2 : Evolution du couple contrainte μ_{zr} suivant le rayon r
pour les deux critères linéaire et quadratique
$h_2 = 1$, $h_3 = 1/16$, N = 5 000 kPa
$\mu_{zr}(r_{int})$ = 10 kN/m pour le critère linéaire
$\mu_{zr}(r_{int})$ = 7 kN/m pour le critère quadratique

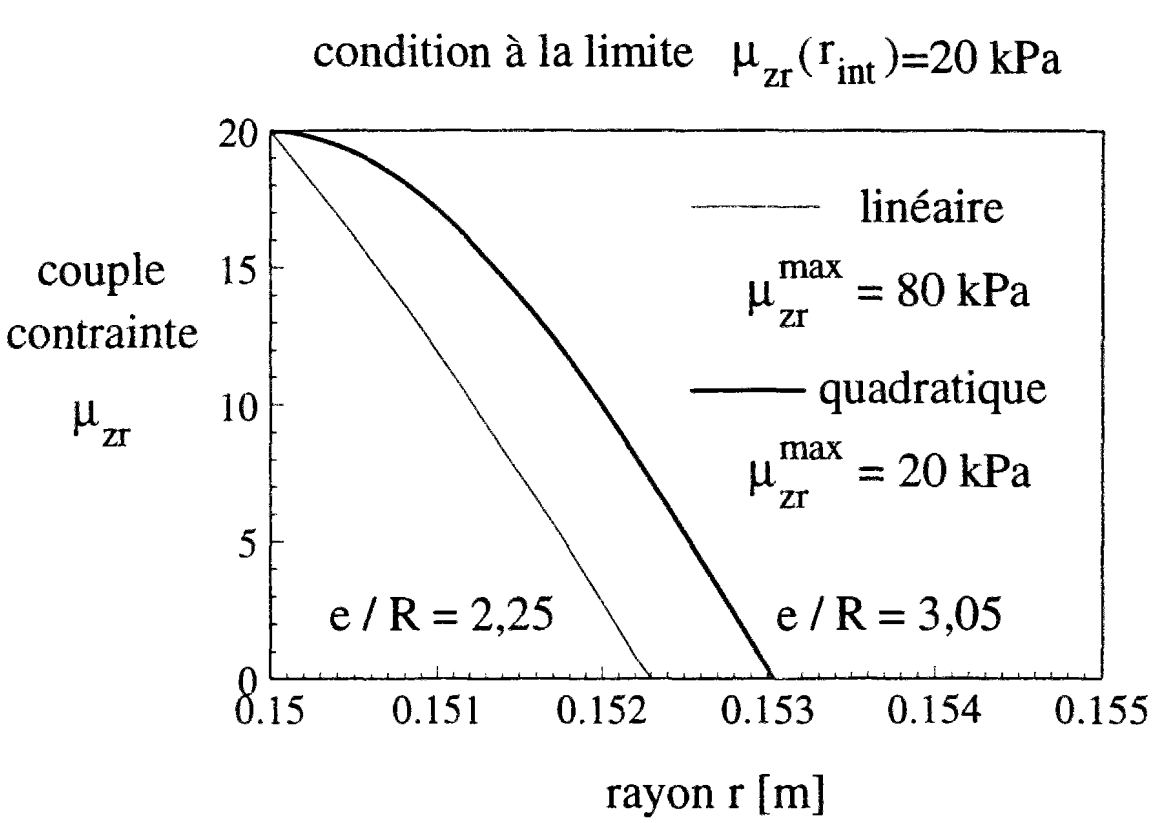


Figure A14-3 : Evolution du couple contrainte μ_{zr} suivant le rayon r
pour les deux critères linéaire et quadratique
$h_2 = 1$, $h_3 = 1/16$, N = 5 000 kPa
$\mu_{zr}(r_{int})$ = 20 kN/m pour les critères linéaire et quadratique

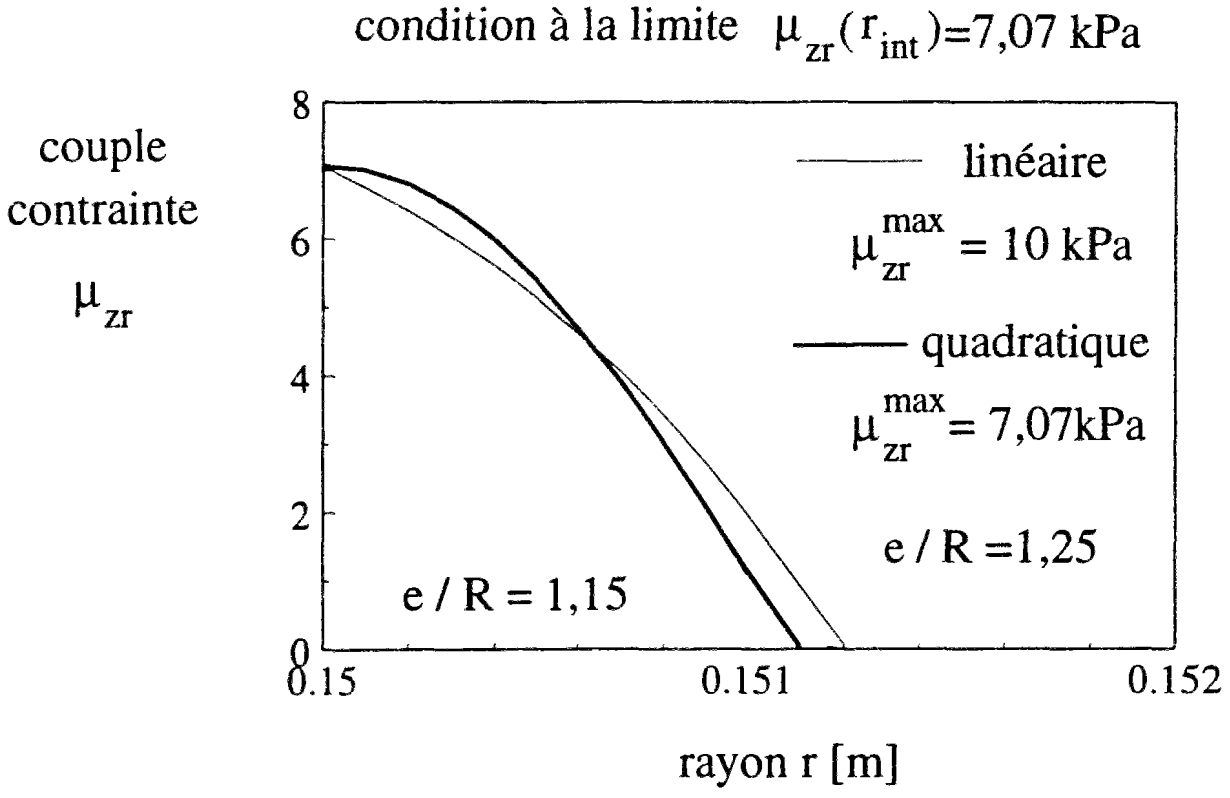


Figure A14-4 : Evolution du couple contrainte μ_{zr} suivant le rayon r
pour les deux critères linéaire et quadratique
$h_2 = 1$, $h_3 = 1/2$, N = 5 000 kPa
$\mu_{zr}(r_{int})$ = 7 kN/m pour les critères linéaire et quadratique

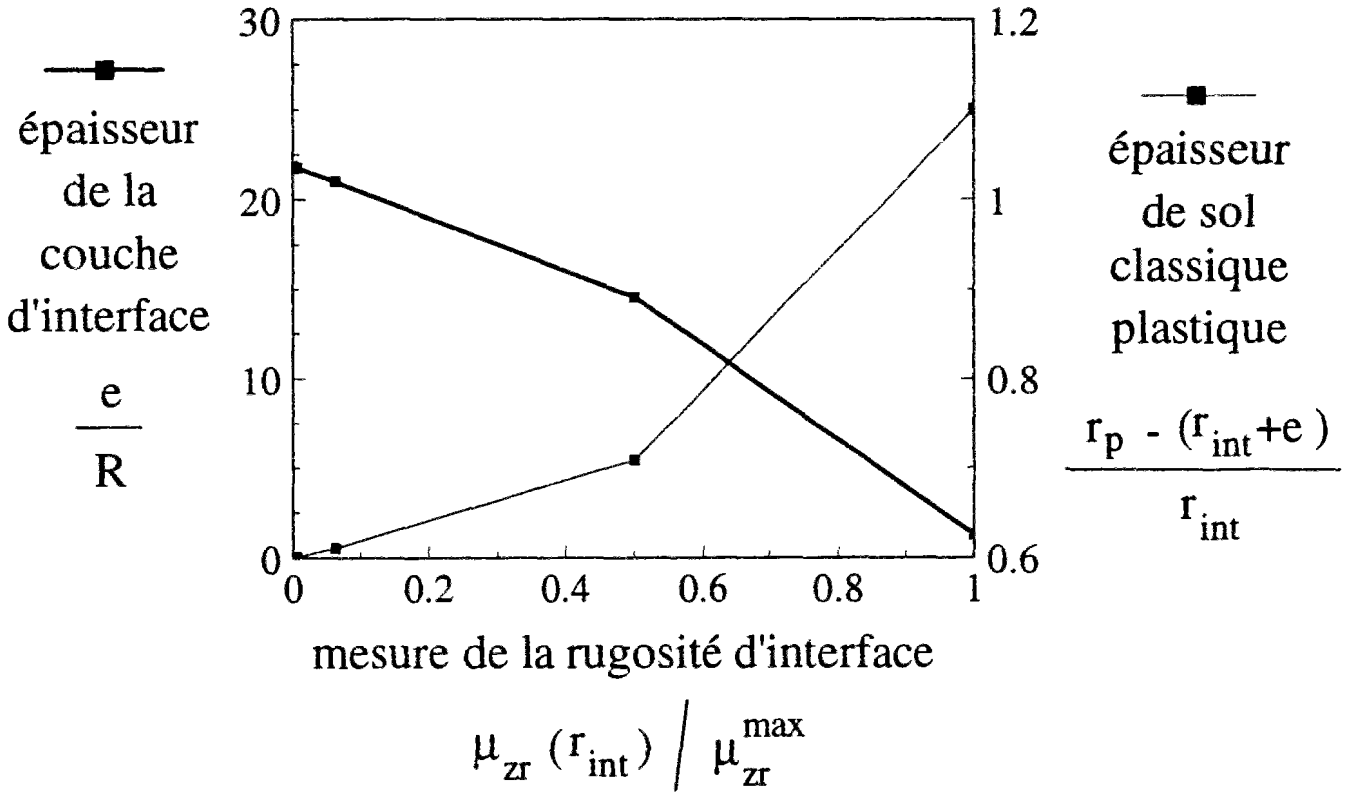


Figure A14-5 : Evolution de l'épaisseur e d'interface et de l'épaisseur de sol classique plastique en fonction de la rugosité (critère linéaire)

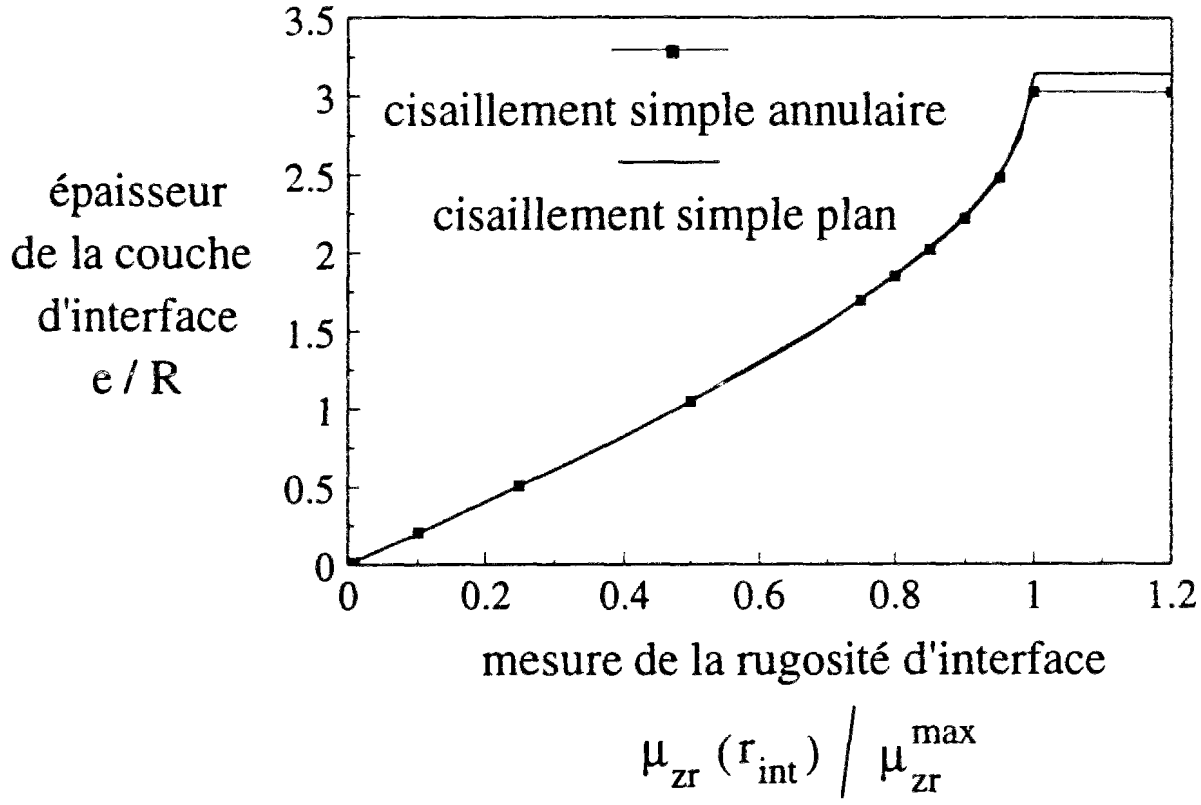


Figure A14-6 : Evolution de l'épaisseur e de l'interface en fonction de la rugosité et pour les cisaillements annulaire et plan
(critère linéaire)

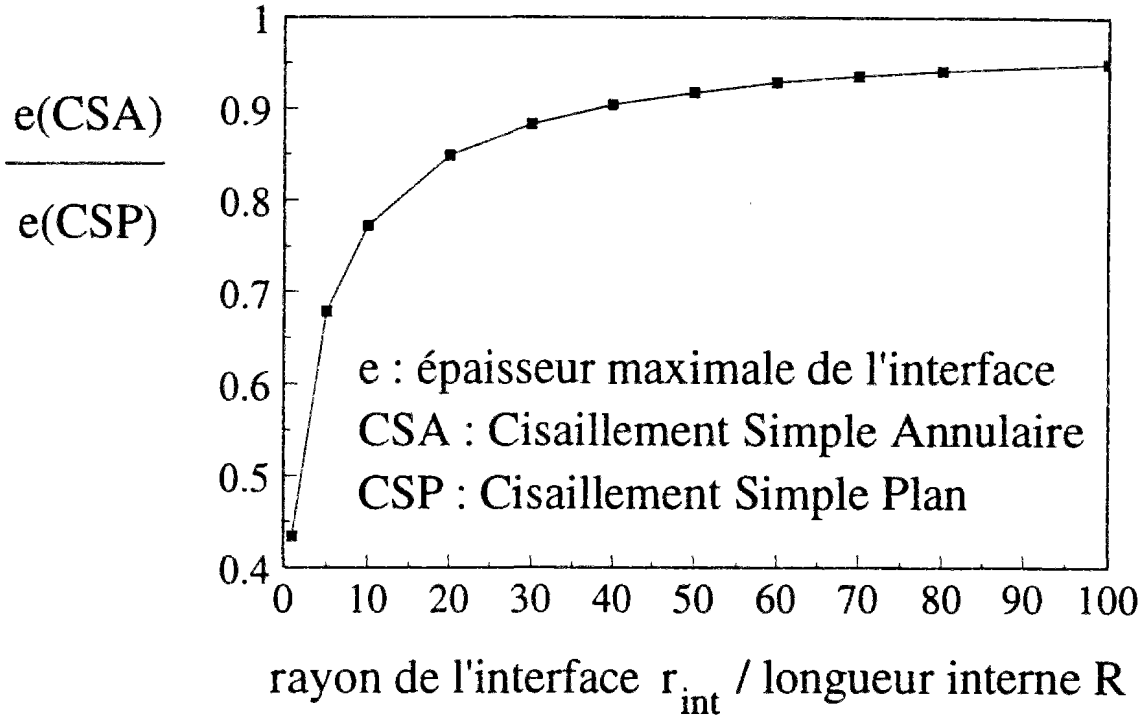


Figure A14-7 : Evolution du rapport entre les épaisseurs d'interface maximales, mesurées dans les essais de cisaillement simple plan et annulaire, en fonction de la taille relative du cylindre d'interface r_{int} par rapport à la longueur interne R (critère quadratique)

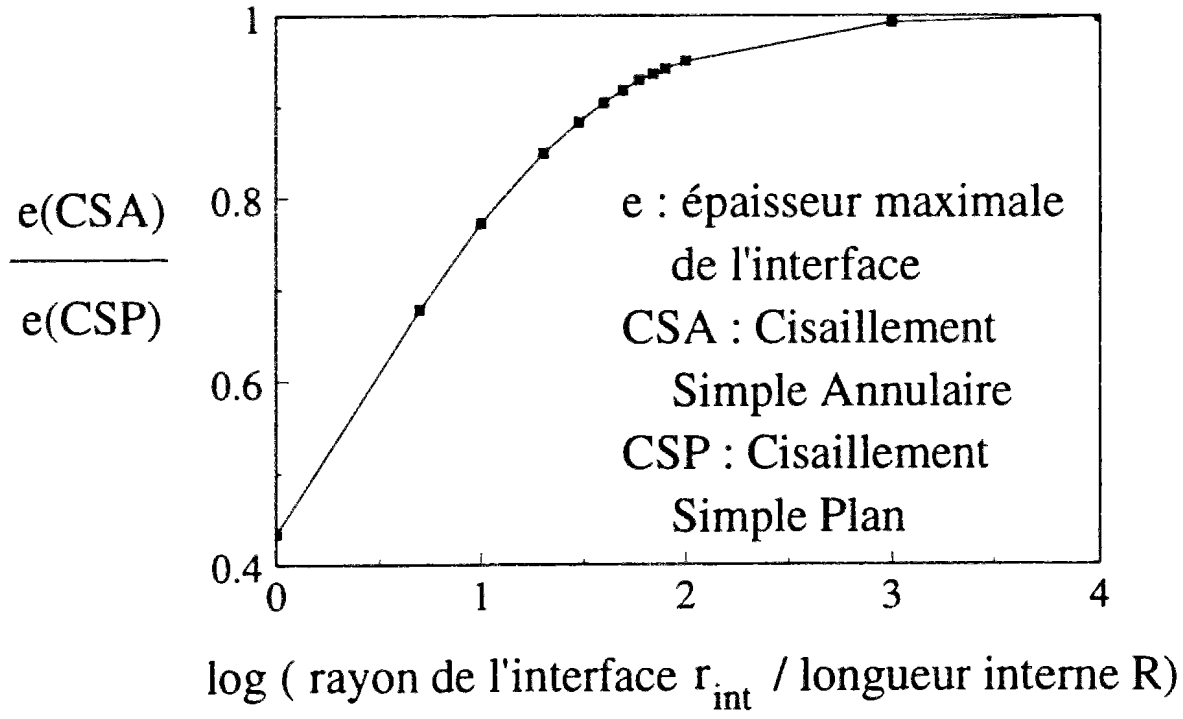


Figure A14-8 : Evolution du rapport entre les épaisseurs maximales d'interface mesurées dans les essais de cisaillement simple plan et annulaire, en fonction du logarithme du rapport du rayon de l'interface r_{int} et la longueur interne R (critère quadratique)

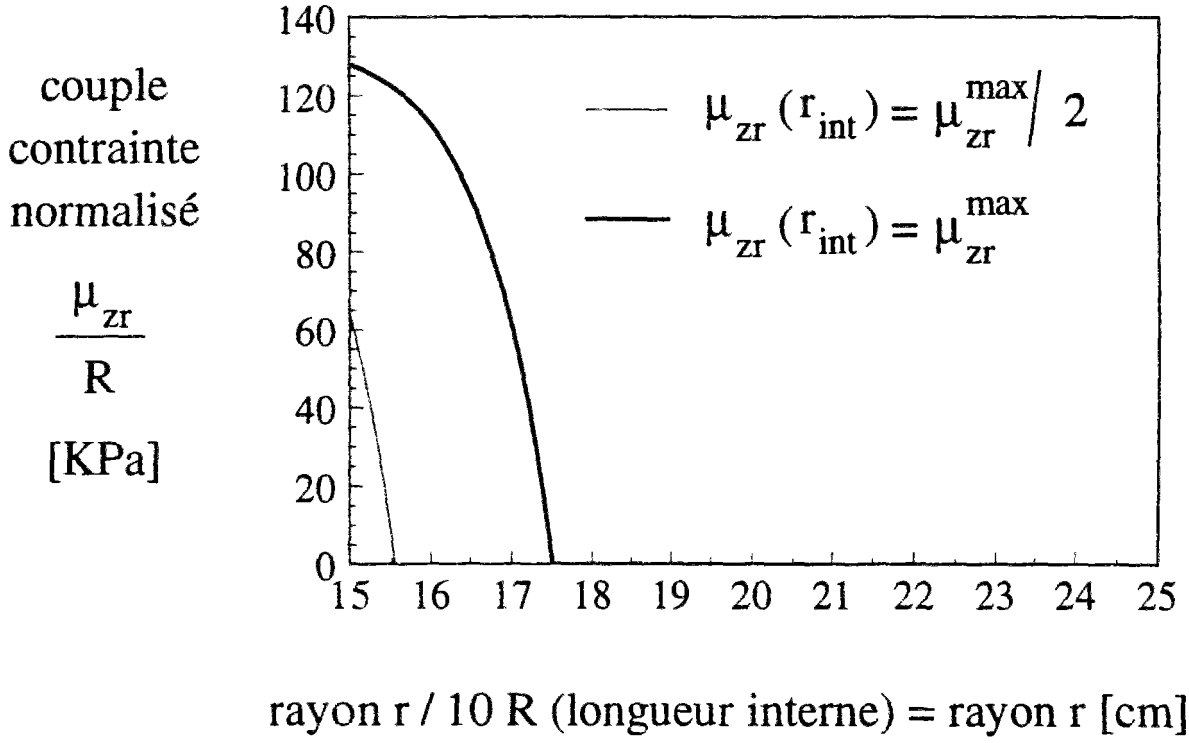


Figure A14-9 : Evolution du couple contrainte μ_{zr} avec la distance à l'interface (cisaillement simple annulaire - critère linéaire)

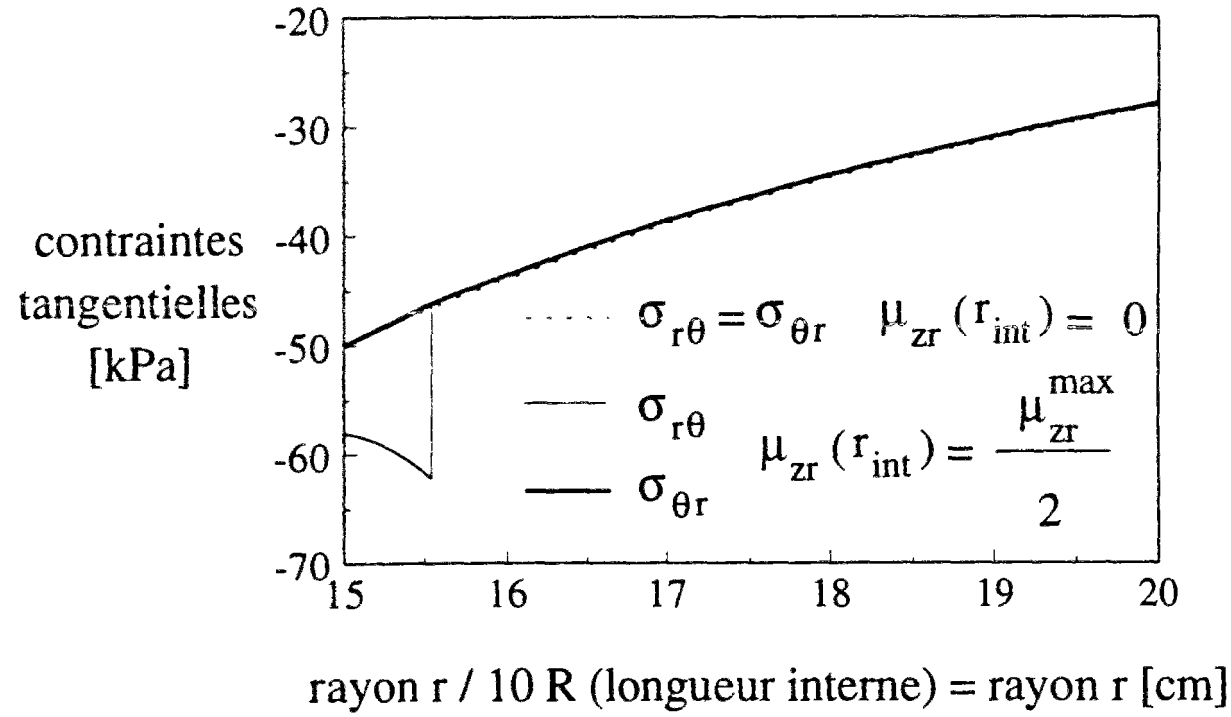


Figure A14-10 : Evolution des contraintes tangentielles totales σ_{ij} avec la distance à l'interface (cisaillement simple annulaire - critère linéaire)

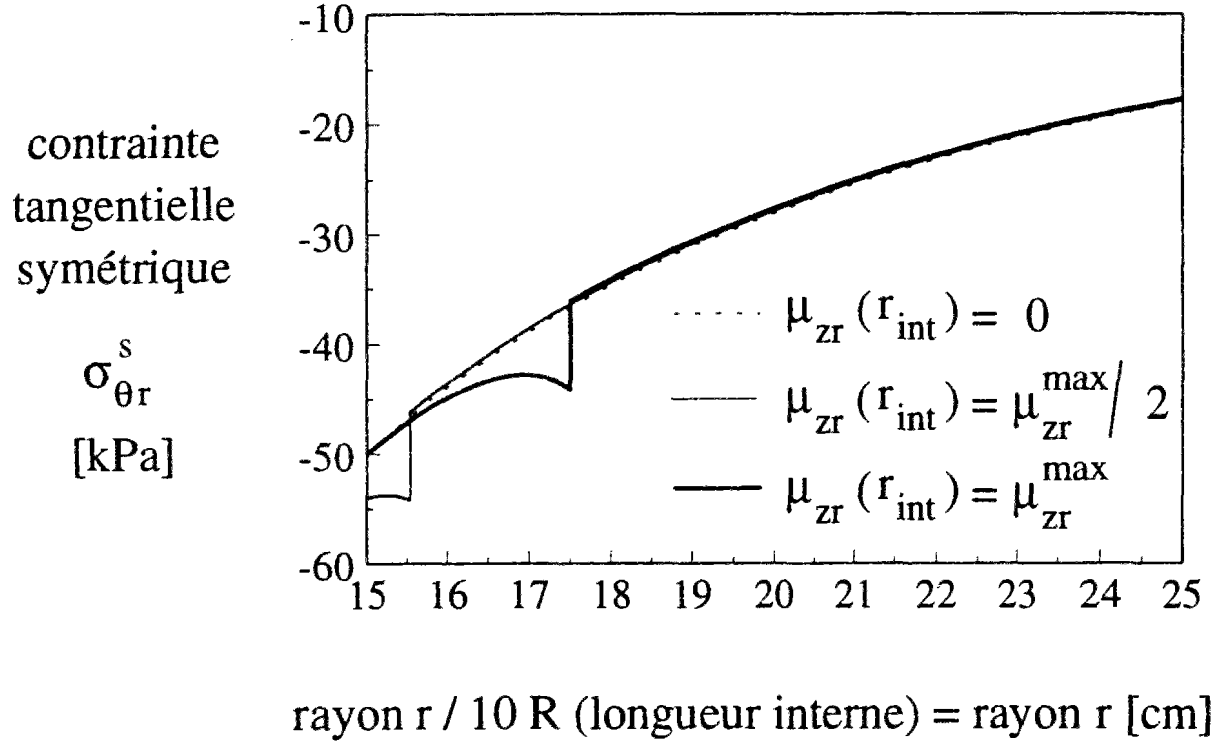


Figure A14-11 : Evolution de la contrainte tangentielle symétrique $\sigma^{s}_{\theta r}$ avec la distance à l'interface (cisaillement simple annulaire - critère linéaire)

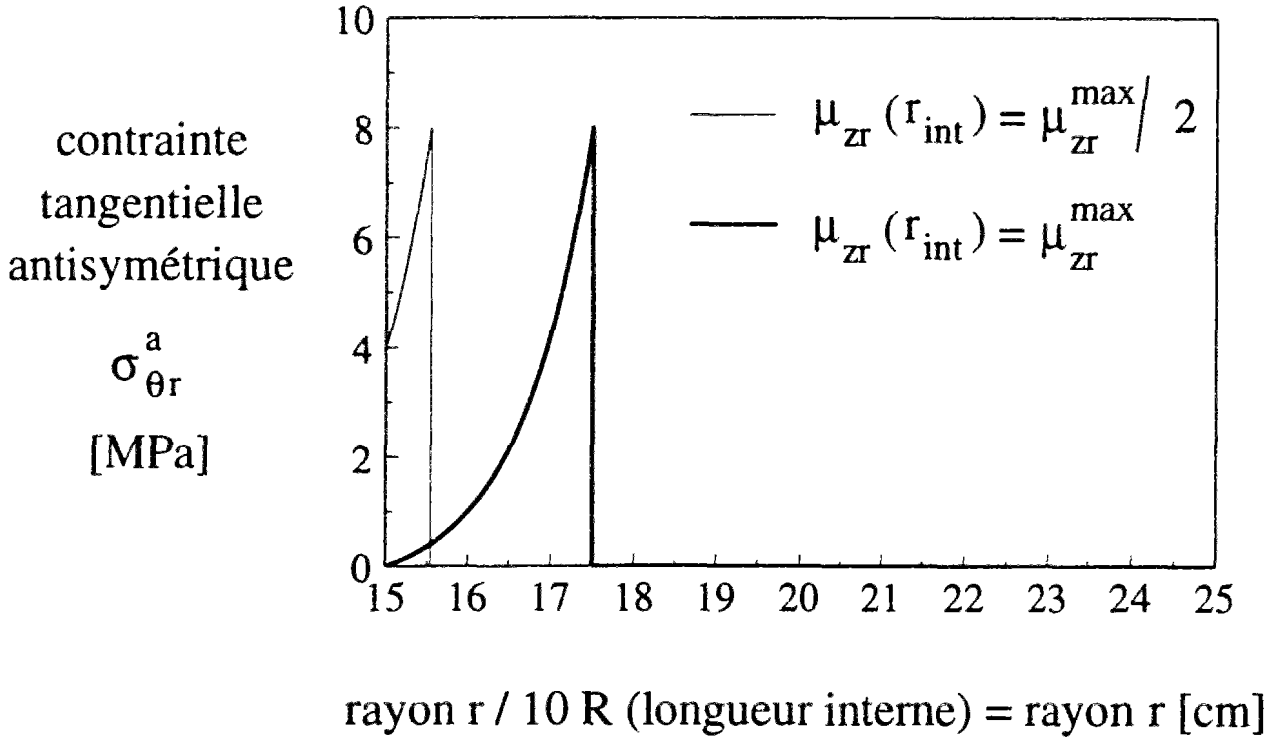


Figure A14-12 : Evolution de la contrainte tangentielle antisymétrique $\sigma^{a}_{\theta r}$ avec la distance à l'interface (cisaillement simple annulaire - critère linéaire)

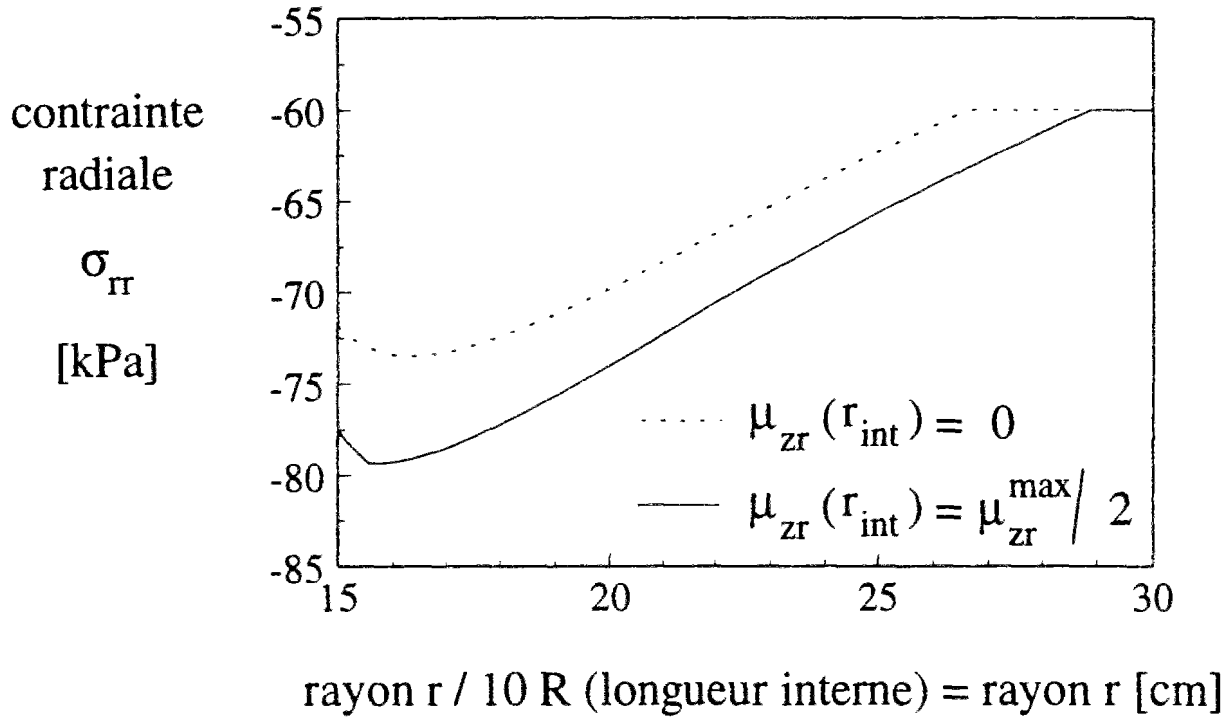


Figure A14-13 : Evolution de la contrainte radiale σ_{rr}
avec la distance à l'interface (cisaillement simple annulaire - critère linéaire)

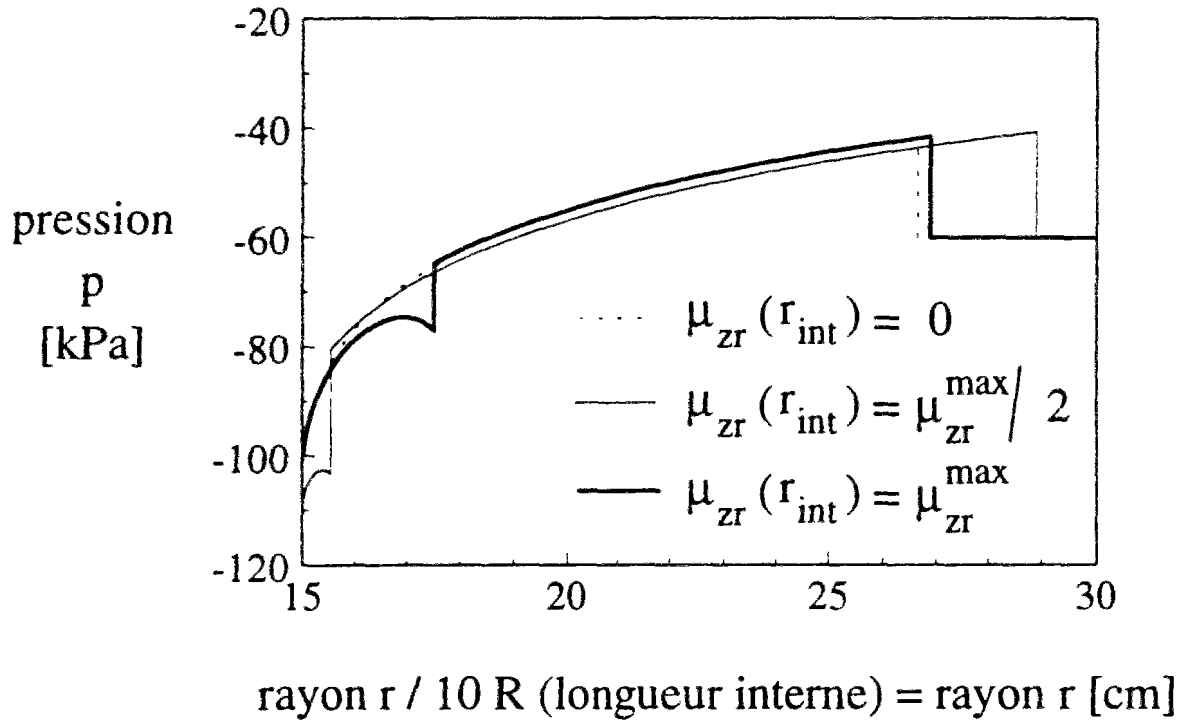


Figure A14-14 : Evolution de la pression p
avec la distance à l'interface (cisaillement simple annulaire - critère linéaire)

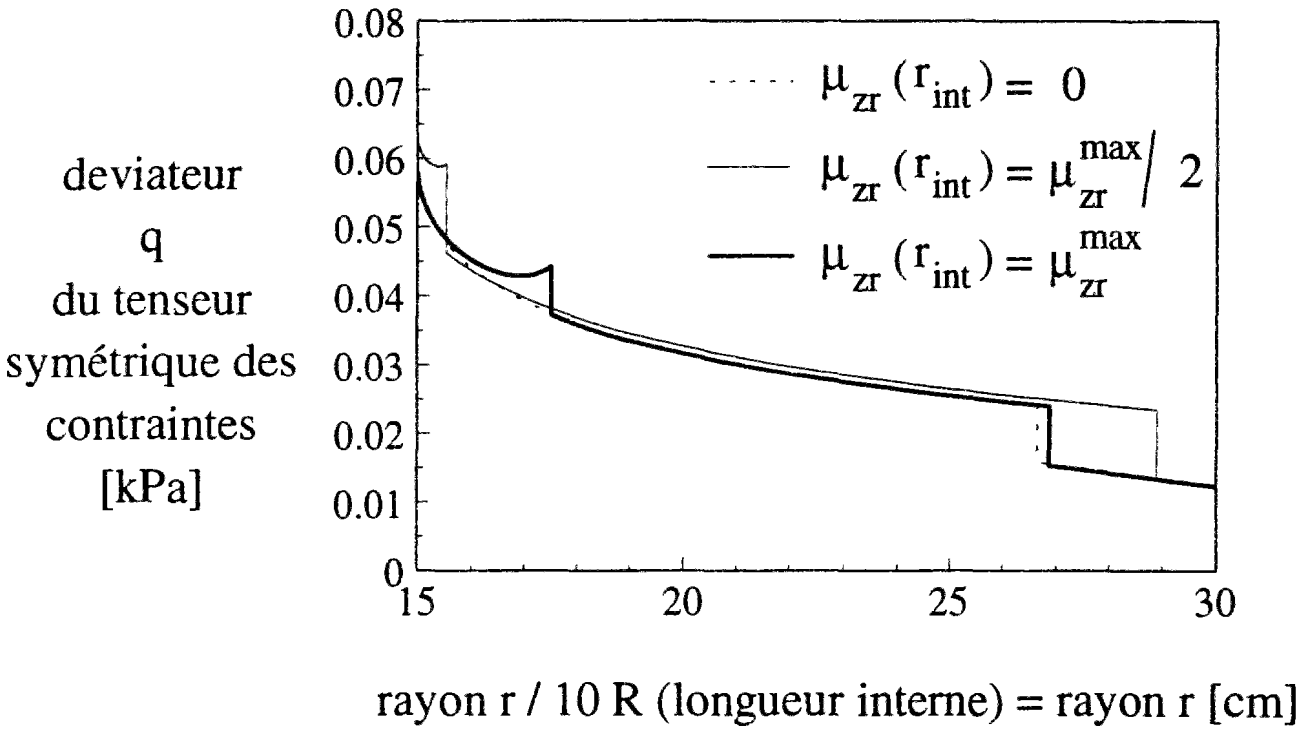


Figure A14-15 : Evolution du déviateur q des contraintes symétriques avec la distance à l'interface (cisaillement simple annulaire - critère linéaire)

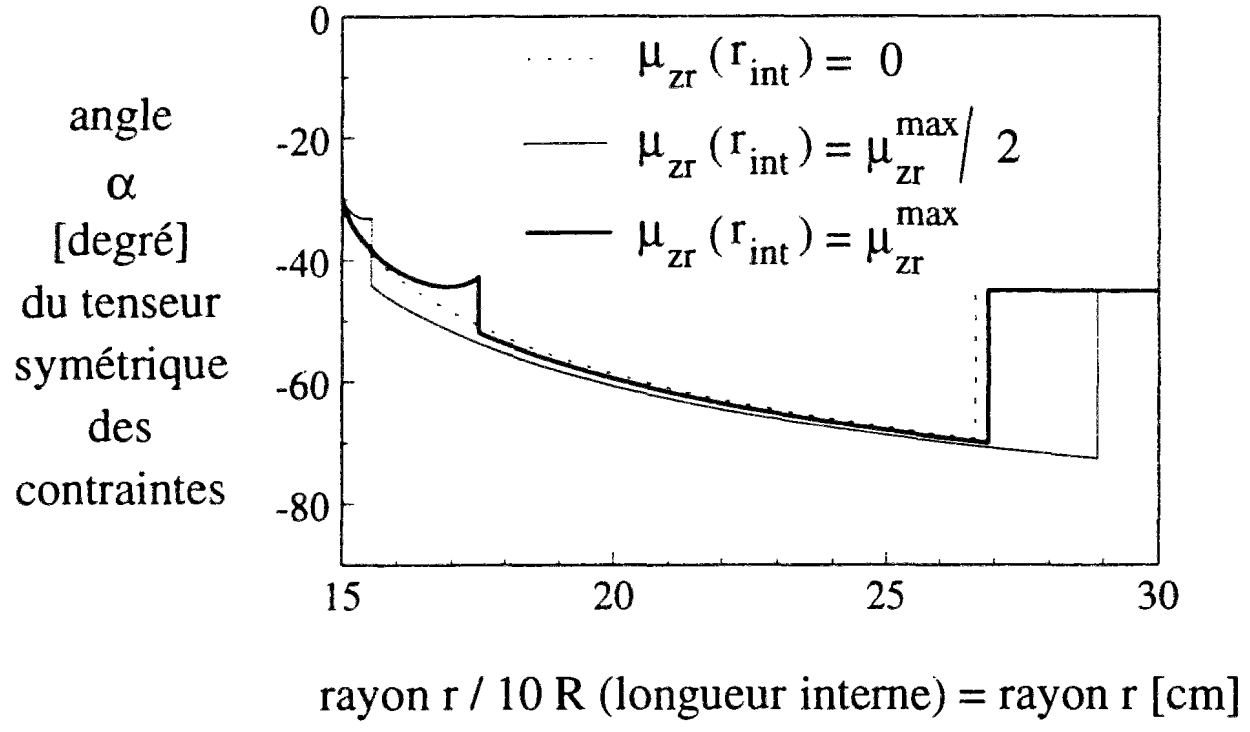


Figure A14-16 : Evolution de l'angle α avec la distance à l'interface (cisaillement simple annulaire - critère linéaire)

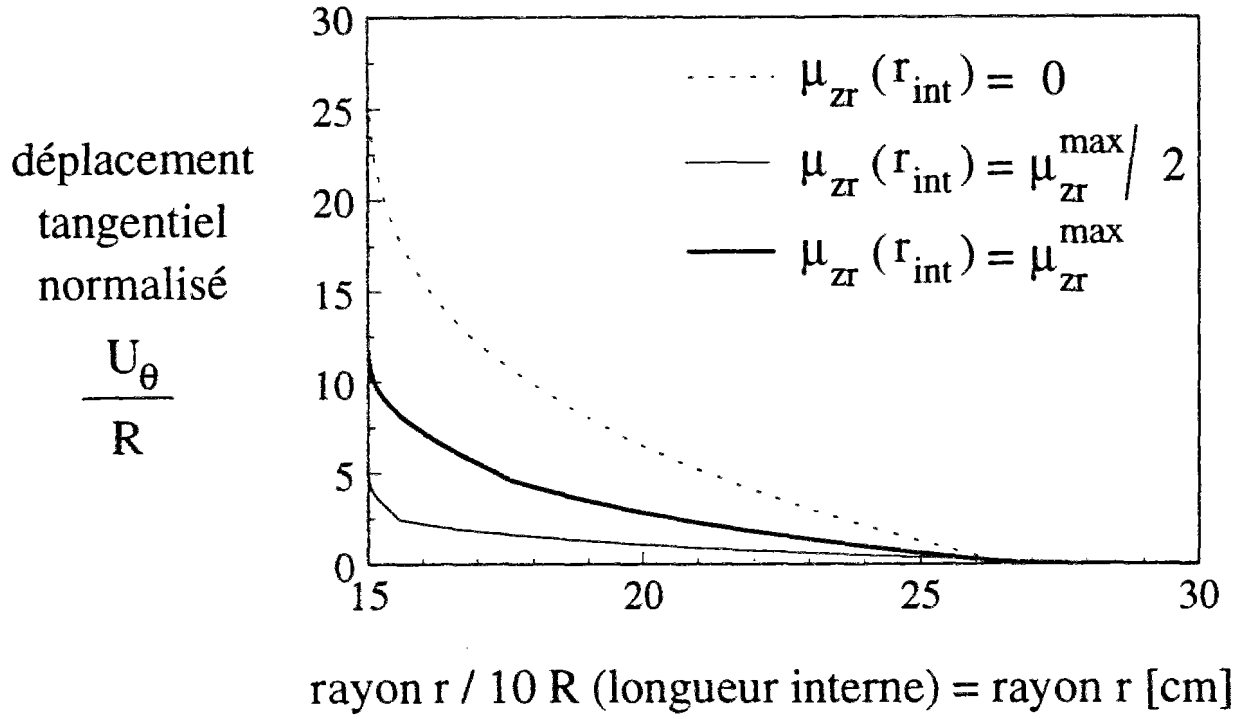


Figure A14-17 : Evolution du déplacement tangentiel U_θ avec la distance à l'interface (cisaillement simple annulaire - critère linéaire)

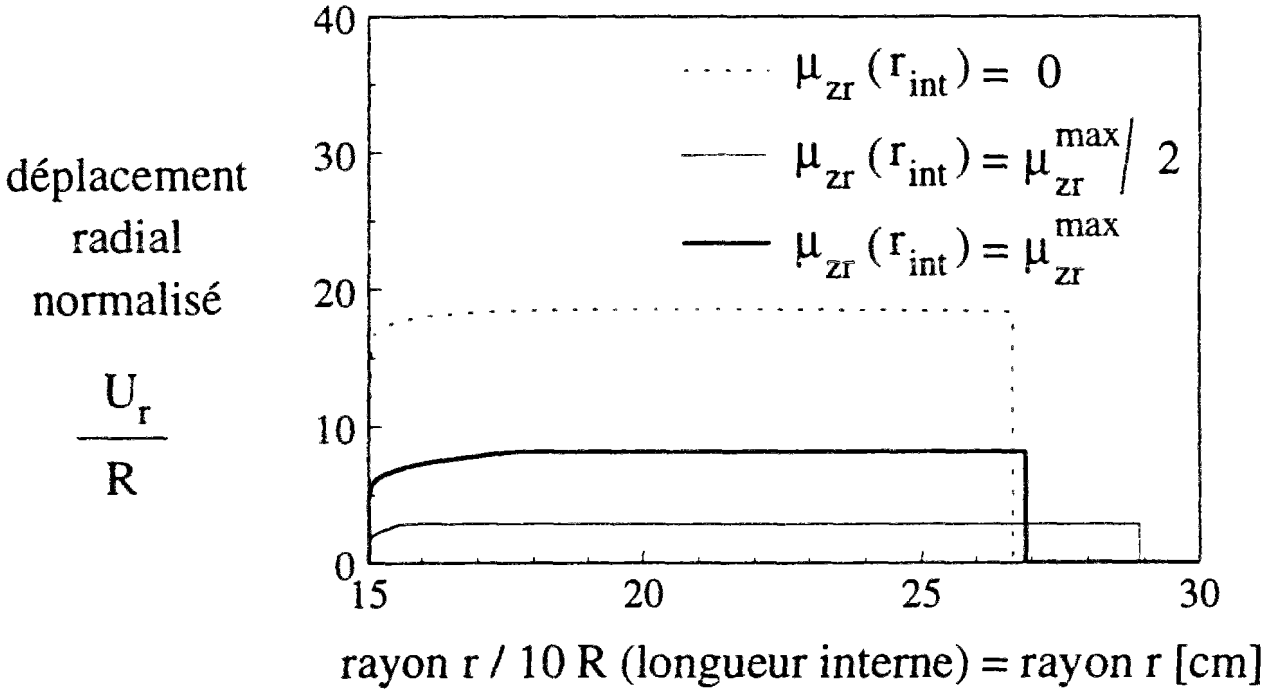


Figure A14-18 : Evolution du déplacement radial U_r avec la distance à l'interface (cisaillement simple annulaire - critère linéaire)

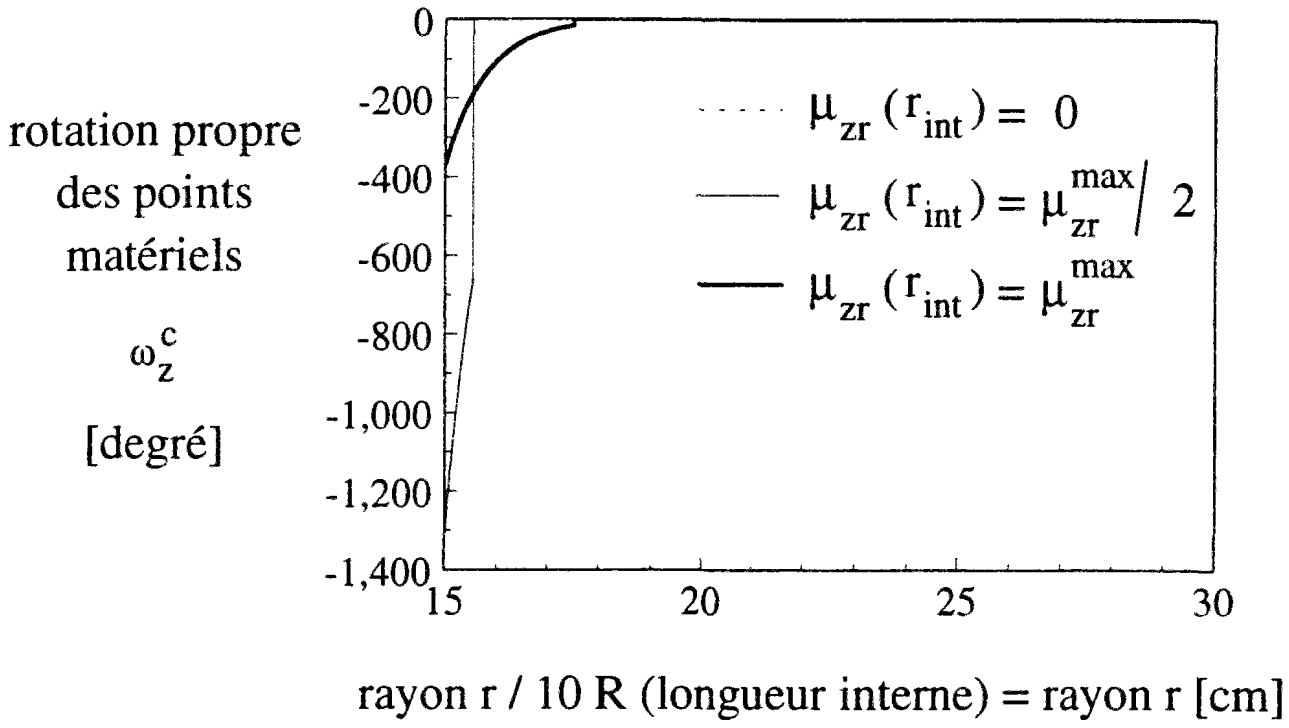


Figure A14-19 : Evolution de la rotation de Cosserat ω_3^c avec la distance à l'interface (cisaillement simple annulaire - critère linéaire)

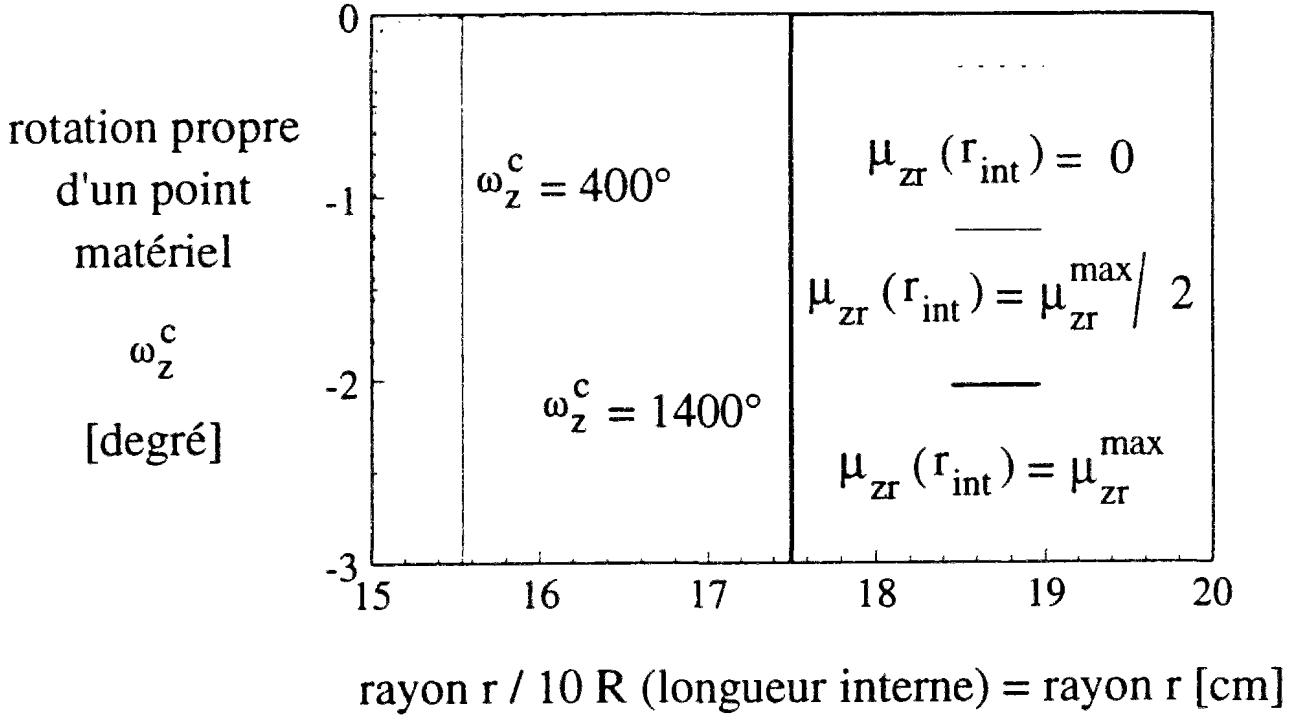


Figure A14-20 : Evolution de la rotation de Cosserat ω_3^c avec la distance à l'interface (cisaillement simple annulaire - critère linéaire)

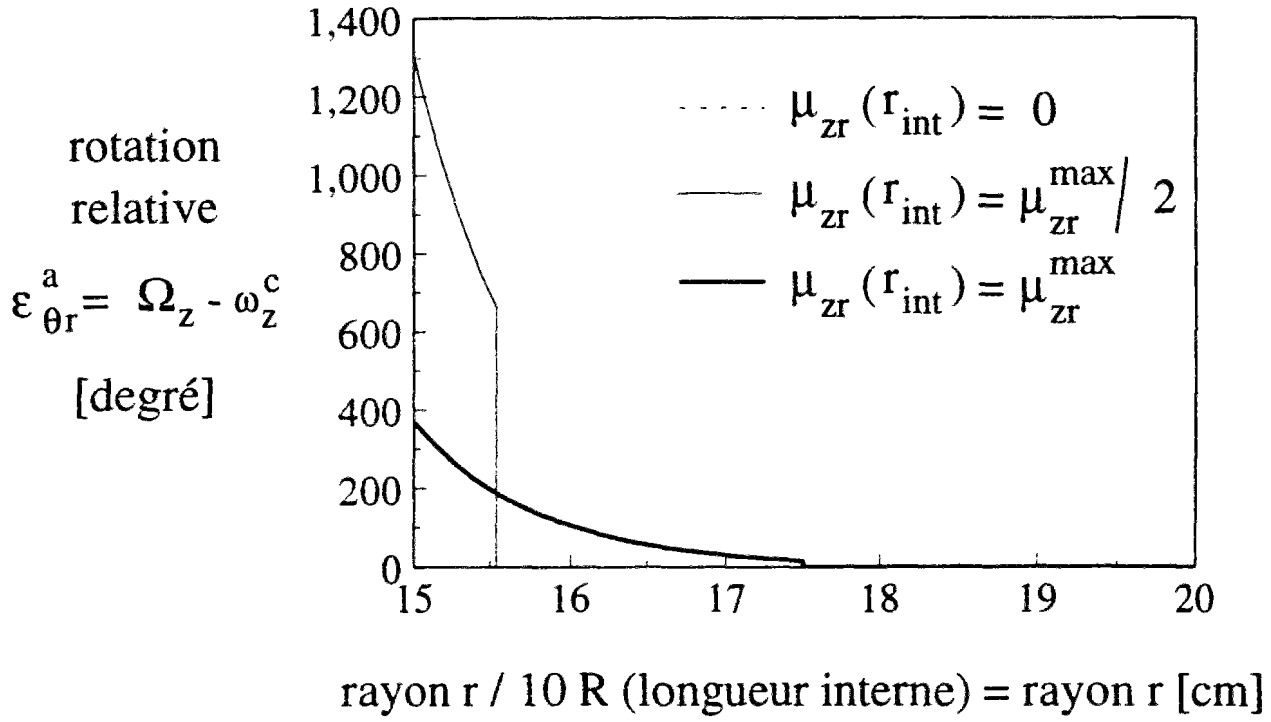


Figure A14-21 : Evolution de la rotation relative ε^{a}_{12} avec la distance à l'interface (cisaillement simple annulaire - critère linéaire)

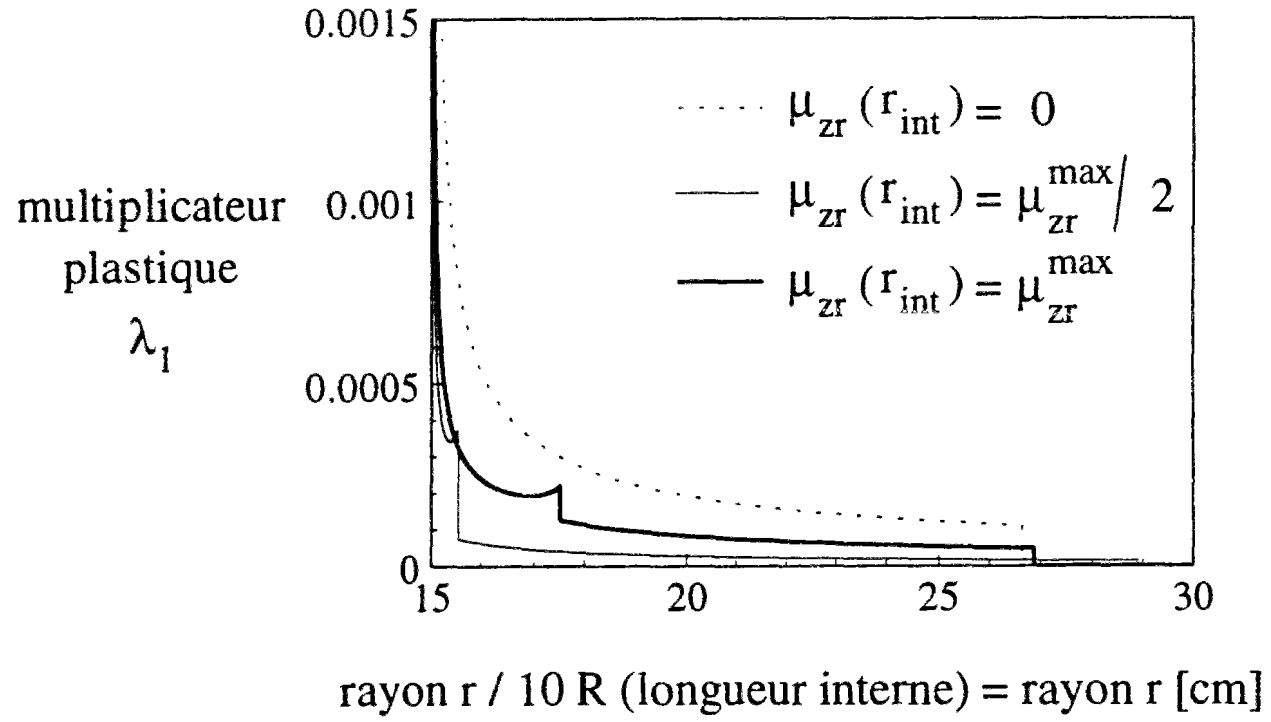


Figure A14-22 : Evolution du multiplicateur plastique λ_1 avec la distance à l'interface (cisaillement simple annulaire - critère linéaire)

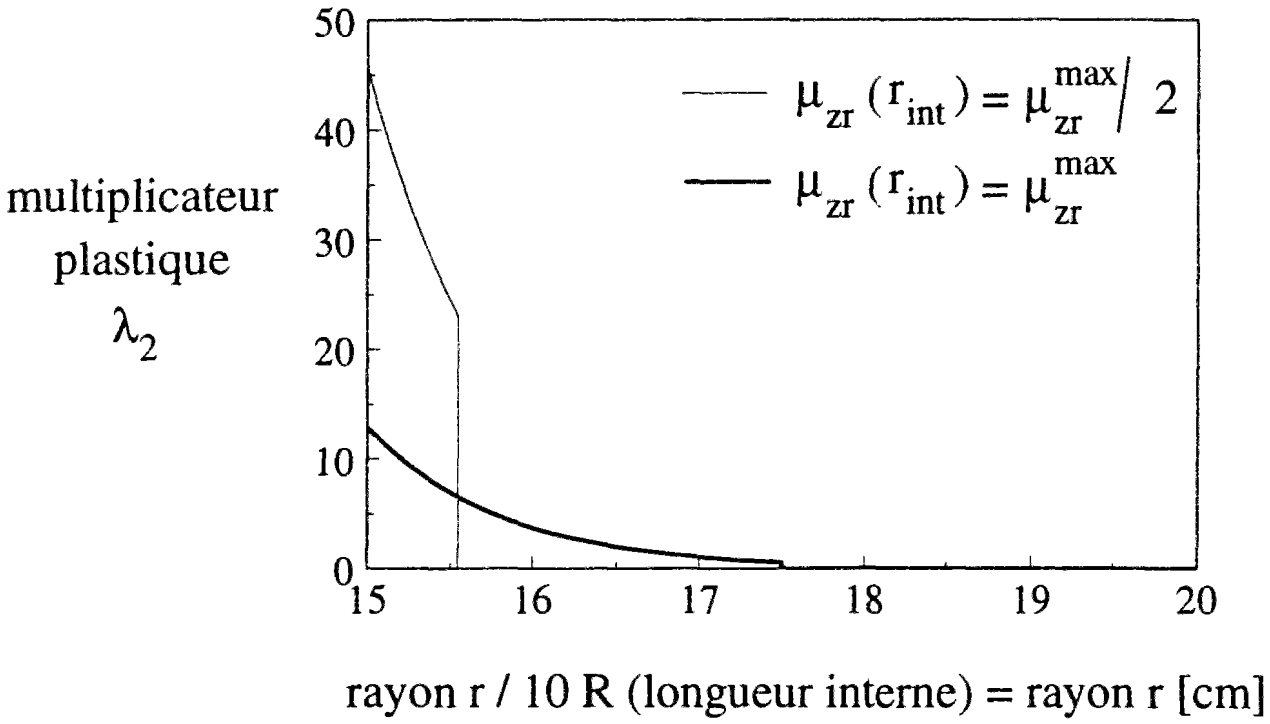


Figure A14-23 : Evolution du multiplicateur plastique λ_2 avec la distance à l'interface (cisaillement simple annulaire - critère linéaire)

Annexe 15

Solution analytique d'un tirant soumis au gel

1. PROBLEME ETUDIE

On considère une tranche de sol en partie médiane d'un mur de soutènement, ancrée par un lit de tirants actifs et soumise à des températures négatives à la surface du parement en béton.

2. VITESSE DE PENETRATION DU GEL

Pendant l'intervalle de temps dt, le front de gel pénètre de dX dans le sol :

$$dX = \left(\frac{dX}{dt}\right)dt \qquad \text{(A15-1)}$$

Si le parement était absent, on aurait $\theta_i = \theta_S$ et la pénétration du gel dans le massif de sol, considéré comme un demi-espace infini, suivrait une loi de type Stefan :

$$X = \alpha\sqrt{t} \qquad \text{(A15-2)}$$

à partir de l'instant t = 0 où la température θ_i au contact avec le sol est négative et maintenue constante.

La présence du parement en béton a pour effet de réduire la température θ_i à l'interface béton-sol et donc la profondeur de gel X(t). Si la température est variable, la progression du gel ne suit plus une loi de type Stefan. Elle peut être approchée par une loi de type Portnov :

$$X(t) = \alpha * \sqrt{I_1} \qquad \text{(A15-3)}$$

où I_1 est l'indice de gel à l'interface parement en béton-sol.

3 GONFLEMENTS

Le gonflement total dh du sol se décompose en deux termes, dh_i , qui correspond à l'augmentation de volume (9%) en gelant, de l'eau interstitielle présente initialement dans le sol et dh_S , qui correspond à l'apport (100%) et l'augmentation de volume (9%) de l'eau aspirée vers le front de gel :

$$dh = dh_i + dh_s \tag{A15-4}$$

Le premier terme dh_s vaut, dans le cas d'un sol saturé :

$$dh_i = \frac{9}{100}\frac{w}{w + 100\dfrac{\gamma_w}{\gamma_s}}dX \tag{A15-5}$$

Pour un sol partiellement saturé, l'eau gelée occupe seulement une partie des vides initiaux. Le gonflement dh_i ne représente donc qu'une fraction f du gonflement qui se produirait si le sol était complètement saturé :

$$dh_i = f\frac{9}{100}\frac{w}{w + 100\dfrac{\gamma_w}{\gamma_s}}\left(\frac{dX}{dt}\right)dt \tag{A15-6}$$

Le deuxième terme de gonflement dh_i , dû à la formation de lentilles de glace, se calcule avec la formule suivante :

$$dh_s = \frac{109}{100}v(t)dt \tag{A15-7}$$

où v(t) est la vitesse d'arrivée d'eau dans la frange de sol gelé. Utilisant la théorie du potentiel de ségrégation, la vitesse d'arrivée d'eau dans la frange de sol gelé se calcule :

$$v(t) = SP\ \mathrm{grad}_f\ \theta \tag{A15-8}$$

où SP est le potentiel de ségrégation qui est fonction de la pression P_{ext} appliquée par le lit de tirants sur le front de gel :

$$SP = SP_0\ \exp(-b\ P_{ext}) \tag{A15-9}$$

Le gradient de température $\mathrm{grad}_f\ \theta$ dans la zone gelée est égale à :

$$\mathrm{grad}_f\theta = -\frac{\theta_i}{X(t) + h(t)} \tag{A15-10}$$

La profondeur du gel X(t) est beaucoup plus grande que le gonflement h(t) du sol. La formule (A15-10) devient :

$$\text{grad}_f\theta = -\frac{\theta_i}{X(t)} \qquad \text{(A15-11)}$$

La pression P_{ext} est par convention positive. Elle se calcule à partir de l'effort normal N(t) dans le tirant. Par convention, l'effort normal dans le tirant est négatif en traction. la pression P_{ext} dépend du maillage S_v , S_h des tirants :

$$P_{exp} = -\frac{N(t)}{S_v\, S_h} \qquad \text{(A15-12)}$$

On en déduit la relation suivante pour les gonflements de ségrégation dh_s :

$$dh_s = \frac{109}{100} SP_0 \exp\left(\frac{bN(t)}{S_v S_h}\right) \frac{-\theta_i(t)}{X(t)} dt \qquad \text{(A15-13)}$$

L'augmentation de gonflement total dh vaut donc :

$$dh = \left[f\frac{9}{100}\frac{w}{w + 100\frac{\gamma_w}{\gamma_s}}\left(\frac{dX}{dt}\right) + \frac{109}{100} SP_0 \exp\left(\frac{bN(t)}{S_v S_h}\right)\left(-\theta_i(t)\right)\frac{1}{X(t)} \right] dt \qquad \text{(A15-14)}$$

Une première simplification de cette formule consiste à supposer que la température $\theta_i(t)$ à l'interface parement en béton-sol est constante :

$$\theta_i(t) \equiv \theta_i \qquad \text{(A15-15)}$$

Cette température est prise égale à la température moyenne réelle à l'interface béton-sol :

$$\theta_i = \frac{I_i}{n_{gel}} \qquad \text{(A15-16)}$$

où I_i est l'indice de gel à l'interface parement en béton-sol et n_{gel} le nombre de jours de gel dans le sol à l'interface parement en béton-sol.

Il est possible de sortir le temps t de l'expression entre crochets dans (A15-14) si X(t) et dX/dt sont inversement proportionnels, c'est à dire si X(t) est en $\sqrt{t}$. Ce cas correspond exactement à la solution de Stefan :

$$X(t) = \alpha\sqrt{t} \qquad \text{(A15-17)}$$

Nous considérerons dans la suite que la loi de propagation du gel est régie par la loi de Stefan. Le gonflement sous l'effet du gel peut être alors réécrit sous la forme suivante :

$$dh = \left[A + B \exp\left(\frac{bN(t)}{S_v S_h} \right) \right] \frac{dt}{\sqrt{t}} \qquad \text{(A15-18)}$$

où les deux constantes A et B, qui sont toujours positives, sont égales à :

$$A = f \frac{9}{100} \frac{w}{w + 100 \frac{\gamma_w}{\gamma_s}} \frac{\alpha}{2} \qquad \text{(A15-19)}$$

$$B = \frac{109}{100} SP_0(-\theta_i) \frac{1}{\alpha} \qquad \text{(A15-20)}$$

La constante A, qui est en mètre / $\sqrt{\text{jour}}$, représente la vitesse "initiale" de gonflement de l'eau interstitielle à t = 1 jour. La constante B est la vitesse "initiale" des gonflements dus à la formation des lentilles de glace, pour une pression extérieure nulle (N = 0) et à t = 1 jour.

Tableau A15-1 : Applications numériques pour le mur de La Clusaz

définition des variables	symboles	valeurs numériques	unités
fraction de gonflement qui se produit pour un sol non saturé	f	1.0	-
teneur en eau	w	8.0	%
poids volumique de l'eau	γ_w	10.0	KN/m^3
poids volumique spécifique	γ_s	27.2	KN/m^3
coefficient de pénétration du gel	α	0.0264	$m/\sqrt{jour}$
coefficient A	A	0.000176	$m/\sqrt{jour}$
température extérieure	θ_i	-7.0	°C
potentiel de ségrégation pour une pression nulle	SP_0	0.000018	$m^2/sec\ °C$
coefficient B	B	0.0054	$m\sqrt{jour}/sec$
coefficient d'influence de la pression extérieure	b	0.013	kPa^{-1}
espacement vertical	S_v	5.70	m
espacement horizontal	S_h	4.10	m
traction d'arrêt des gonflements	$b/S_v S_h$	0.000231	kN

Si la température a la surface du béton varie assez lentement, la température à l'interface parement en béton-sol suit une variation encore plus lente et l'hypothèse θ_i (t) constante peut être relâchée en réintroduisant dans la solution analytique trouvée pour une température θ_i (t) constante, une température θ_i (t) variable :

$$\theta_i(t) = \frac{\theta_s(t)}{1 + \frac{k_{sf} X_b}{k_b X(t)}} \qquad \text{(A15-21)}$$

4 LOI DE COMPORTEMENT DU TIRANT

Le tirant est supposé avoir un comportement élastique caractérisé par une raideur "globale" k_t pour une longueur totale L_t. Cette raideur globale se calcule à partir de la raideur k_b du bulbe scellé interagissant avec le sol sur une longueur de bulbe L_b , de la raideur k_l de la partie libre du tirant de longueur L_l et de la raideur de la connexion du tirant au parement, caractérisée par deux coefficients L_p et k_p dont seul le rapport aura une signification pour la suite des calculs.

La raideur de la longueur libre L_l est donnée simplement par la relation :

$$k_l = E_{acier} A \qquad \text{(A15-22)}$$

où A est la section du tirant et E_{acier} de module d'Young de l'acier.

L'interaction élastique, caractérisée par une module de mobilisation k_B et une surface de contact de périmètre $2 \pi R_c$, entre une inclusion élastique, de module d'Young E_i et de section A_i , et un sol est caractérisée par la longueur de transfert, notée a, des efforts normaux dans le sol :

$$a = \sqrt{\frac{2 \pi R_c k_B}{E_i A_i}} \qquad \text{(A15-23)}$$

De plus la rigidité apparente en tête, notée L / k , de cette inclusion se calcule à partir de la relation :

$$\frac{L}{k} = \frac{a}{E_i A_i} \qquad \text{(A15-24)}$$

Dans le cas du bulbe de scellement sur une longueur L_b avec un rayon du trou de forage R_b et une armature en acier de section A_a , la rigidité apparente du bulbe L_b / k_b à l'intersection avec la partie libre est égale à :

$$\frac{L_b}{k_b} = \frac{a_b}{E_a A_a} \qquad \text{(A15-25)}$$

où a_b est la longueur de transfert le long du bulbe de scellement :

$$a_b = \sqrt{\frac{2\,\pi\,R_b\,k_B}{E_a\,A_a}} \qquad \text{(A15-26)}$$

Un calcul similaire donnerait pour une inclusion noyée dans un béton une longueur de transfert égale à :

$$a_p = \sqrt{\frac{2\,\pi\,R_a\,k_{ba}}{E_a\,A_a}} \qquad \text{(A15-27)}$$

où k_{ba} est le module de mobilisation du frottement dans le béton. En fait la traction dans le triant varie de N_0 à 0 entre l'interface parement en béton-sol et l'extrémité du tirant où le blocage se fait. Cette distance est au plus de 10 à 20 cm et correspond environ à deux fois la longueur de transfert réelle a_p . On prendra donc a_p de l'ordre de 10 cm.

La raideur globale du tirant peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\frac{L_t}{k_t} = \frac{a_p + L_l + a_b}{E_a A_a} \qquad \text{(A15-28)}$$

ce qui correspond à 3 ressorts en série.

Pour des ouvrages courants, la longueur de transfert a_p dans le parement (béton plus liaison) est de l'ordre de quelques dizaines de centimètres (0,1 m), la longueur de transfert dans le sol le long du bulbe de scellement, qui dépend de la méthode d'installation du tirant : injection sous basse ou haute pression, est de l'ordre de quelques mètres tandis que la longueur libre est de l'ordre de 10 à 15 mètres.

Tableau A15-2 : Calcul de la longueur de transfert pour les tirants de La Clusaz

définition des variables	symboles	valeurs numériques	unité
module d'Young de l'acier	E_a	210.000.000,0	kPa
section d'acier des tirants	A_a	0,000465	m^2
rayon du bulbe de scellement	R_c	0,12	m
coefficient de mobilisation du frottement latéral dans le sol	k_B	2.072.148,54	kPa m^3
longueur de transfert le long du bulbe	a_b	4,00	m
longueur libre	L_l	11,80	m

Dans le cas des murs de La Clusaz, les sols étant très raides (moraine très dense et compacte, fortement dilatante), la longueur de transfert est très grande. Plus généralement, la longueur de transfert est de l'ordre du mètre.

La compressibilité du sol non gelé, qui n'interagit avec pas avec le tirant sur toute la longueur dite libre, est équivalente à un quatrième ressort de raideur $E_{oedo}\ S_V\ S_h$ et de longueur L_{sol} , monté en série avec les trois ressorts précédemment cités. Il en résulte que l'augmentation de traction dans le tirant dN(t) est relié au gonflement total dh(t) par la relation suivante :

$$-dN(t)\cos\beta = \frac{k_{eq}}{L_{eq}} dh(t) \qquad \text{(A15-29)}$$

où on a introduit un ressort équivalent caractérisé par

$$\frac{L_{eq}}{k_{eq}} = \frac{L_t}{k_t} + \frac{L_s}{E_{oedo} S_v S_h} \qquad \text{(A15-30)}$$

5 EQUATION DIFFERENTIELLE EN TRACTION ET TEMPS

En combinant les relations précédentes, on obtient l'équation différentielle linéaire du 1er degré suivante :

$$-\frac{L_{eq}\cos\beta}{k_{eq}} dN(t) = \left\{ f \frac{9}{100} \frac{w}{w + 100\frac{\gamma_w}{\gamma_s}} \left(\frac{dX}{dt} \right) + \frac{109}{100} SP_0 \exp\left(\frac{bN(t)}{S_v S_h} \right) \frac{-\theta_I(t)}{X(t)} \right\} dt \qquad \text{(A15-31)}$$

6 SOLUTION ANALYTIQUE

6.1 HYPOTHESES SIMPLIFICATRICES

L'équation différentielle précédente ne peut être intégrée que si la variable N(t) peut être séparée des autres variables à savoir X(t) et $\theta_i(t)$. Pour intégrer cette équation quelques hypothèses simplificatrices seront prises en compte.

On supposera une température θ_i (t) à l'interface parement en béton-sol constante dans le temps.

L'équation à intégrer, avec $\theta_i(t)$ = constante, est alors à variables séparables si et seulement si $\frac{dX(t)}{dt}$ est inversement proportionnelle à X(t) , c'est à dire X(t) est en racine carrée du temps t, ce qui correspond à la solution de Stefan. On résoudra donc l'équation en supposant :

$$\theta_i(t) \equiv \text{constante} \qquad \text{(A15-32)}$$

$$X(t) = \alpha\sqrt{t}\,. \qquad \text{(A15-33)}$$

L'équation à variables séparables obtenue est alors :

$$-\frac{L_{eq}\cos\beta}{k_{eq}}dN(t)=\left[A+B\exp\left(\frac{bN(t)}{S_vS_h}\right)\right]\frac{dt}{\sqrt{t}} \qquad \text{(A15-34)}$$

On introduit la variable Y définie par :

$$Y=\exp\left(\frac{b}{S_vS_h}N(t)\right) \qquad \text{(A15-35)}$$

ce qui conduit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dY}{Y(A+BY)}=-\frac{k_{eq}}{L_{eq}\cos\beta}\frac{b}{S_vS_h}\frac{dt}{\sqrt{t}} \qquad \text{(A15-36)}$$

6.2 LOI DE COMPORTEMENT ELASTIQUE

La solution de l'équation différentielle précédente dépend du comportement de l'acier des tirants. Si on considère un comportement élastique pour les tirants, le rapport k_{eq} / L_{eq} est constant et l'on obtient et l'on peut intégrer.

6.2.1 SOLUTION ANALYTIQUE EN TRACTION

L'équation différentielle en Y(t) s'intègre en :

$$\ln\frac{Y}{A+BY}=-2A\frac{k_{eq}}{L_{eq}\cos\beta}\frac{b}{S_vS_h}\sqrt{t}+\text{constante} \qquad \text{(A15-37)}$$

ce qui s'écrit aussi sous la forme suivante :

$$\frac{Y}{A+BY}=C\exp\left(-D\sqrt{t}\right) \qquad \text{(A15-38)}$$

avec :

$$Y(t)=\exp\left(\frac{N(t)}{N_g}\right) \qquad \text{(A15-39)}$$

$$D=2\ A\ \frac{k_{eq}}{L_{eq}\cos\beta}\frac{b}{S_vS_h} \qquad \text{(A15-40)}$$

$$N_g = \frac{S_v S_h}{b} \tag{A15-41}$$

$$C = \frac{\exp\left(\frac{N_0}{N_g}\right)}{A + B\exp\left(\frac{N_0}{N_g}\right)} \tag{A15-42}$$

où N_0 est la traction initiale à t = jours.

Pour un temps t quelconque, on obtient la solution en Y(t) suivante :

$$Y(t) = \frac{A\,C\exp\left(-D\sqrt{t}\right)}{1 - B\,C\exp\left(-D\sqrt{t}\right)} \tag{A15-43}$$

d'où la solution en N(t) :

$$N(t) = N_g \ln\left(\frac{A}{-B + \frac{1}{C}\exp\left(D\sqrt{t}\right)}\right) \tag{A15-44}$$

$$N(t) = N_0 + N_g \ln\left(\frac{A}{-B\exp\left(N_0/N_g\right) + \left(A + B\exp\left(N_0/N_g\right)\right)\exp\left(D\sqrt{t}\right)}\right) \tag{A15-45}$$

6.2.2 SOLUTION ANALYTIQUE EN GONFLEMENT

Une fois la traction N(t) calculée, on en déduit l'équation différentielle en h(t) :

$$\frac{dh}{dt} = (A + BY)\frac{1}{\sqrt{t}} \tag{A15-46}$$

Avec le changement de variable :

$$Y = \exp\left(\frac{bN(t)}{S_v S_h}\right) \qquad \text{(A15-40)} \tag{A15-47}$$

on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{A}{1 - BC\exp\left(-D\sqrt{t}\right)} \frac{1}{\sqrt{t}} \qquad \text{(A15-48)}$$

où la constante D, qui est positive, vaut :

$$D = 2A \frac{k_{eq}}{L_{eq} \cos\beta} \frac{b}{S_v S_h} \qquad \text{(A15-49)}$$

On pose Z(t) égal à :

$$Z(t) = \exp\left(D\sqrt{t}\right) \qquad \text{(A15-50)}$$

d'où :

$$dh = \frac{2A}{D\,(-B\,C + Z(t))} dZ \qquad \text{(A15-51)}$$

puisque :

$$\frac{dZ}{Z} = \frac{D}{2}\left(\frac{dt}{\sqrt{t}}\right) \qquad \text{(A15-52)}$$

Après intégration, on obtient :

$$h(t) - h(t=0) = 2\frac{A}{D} \ln\left(\frac{Z(t) - BC}{Z(t=0) - BC}\right) \qquad \text{(A15-53)}$$

Comme h(t=0) =0 et Z(t=0) = 1 , on obtient l'évolution de h(t) suivante :

$$h(t) = 2\frac{A}{D} \ln\left(\frac{\exp(D\sqrt{t}) - BC}{1 - BC}\right) \qquad \text{(A15-54)}$$

$$h(t) = 2\frac{A}{D} \ln\left(1 + \frac{A + B\exp\left(N_0/N_g\right)}{A}\left(\exp(D\sqrt{t}) - 1\right)\right) \qquad \text{(A15-55)}$$

Des applications numériques pour le tirant N de la paroi ancrée par tirants de La Clusaz donnent des résultats excellents comparés aux mesures (cf. partie B).

6.2.3 SOLUTION ANALYTIQUE AVEC UNE TEMPERATURE A L'INTERFACE VARIABLE

Les solutions précédemment obtenues avec une température à l'interface θ_i constante peuvent être étendues au cas d'une température θ_i (t) variable pourvu que celle-ci varie plus lentement que les autres variables. Seule la constante B qui dépend de θ_i est alors à modifier pour prendre en compte cette variation :

$$B = \frac{109}{100} SP_0(-\theta_i)\frac{1}{\alpha} \qquad \text{(A15-56)}$$

6.2.4 SOLUTIONS ASYMPTOTIQUES EN TRACTION ET DEPLACEMENT

Quand t tend vers l'infini, la traction N(t) est asymptote à la courbe d'équation :

$$N(t) = N_g\left(\ln A\, C - D\sqrt{t}\right) \qquad \text{(A15-57)}$$

$$N(t) = N_g\left(\ln\left(\frac{A\exp(N_0/N_g)}{A + B\exp(N_0/N_g)}\right) - D\sqrt{t}\right) \qquad \text{(A15-58)}$$

La solution en gonflement est asymptotique à la courbe d'équation :

$$h(t) = 2\,\frac{A}{D}\left(\ln\left(\frac{A + B\exp(N_0/N_g)}{A}\right) + D\sqrt{t}\right) \qquad \text{(A15-59)}$$

La traction N(t) et le gonflement h(t) sont donc asymptotiquement linéaires en racine carrée du temps.

Il est à noter que les ordonnés à l'origine des deux asymptotes dépendent du coefficient B qui contrôle les gonflements de ségrégation et de A qui contrôle le gonflement de l'eau en place. Par contre, les pentes asymptotiques dépendent de A mais pas de B. Au bout d'un certain temps t, la traction N et la pression P_{ext} appliquée sur le front de gel deviennent très grandes, ce qui a pour effet de rendre nuls les gonflements de ségrégation. C'est alors le gonflement de l'eau en place qui devient prépondérant.

Pour les valeurs de D correspondant au site de La Clusaz, la solution asymptotique est très différente de la solution analytique puisque le terme $\exp(D\sqrt{t})$ n'est pas prépondérant. Par exemple, pour t=70 jours, la traction asymptotique est 5,5 fois plus grande que la solution analytique et les gonflements asymptotiques sont négatifs.

Avec une coefficient D 10 fois plus grand la différence pour la traction N n'est plus que de 30% à t=70 jours. Avec un coefficient D, 100 fois plus grand que la valeur de la Clusaz, la solution analytique est égale à la solution asymptotique quelque soit le temps t.

Tableau A15-3 : Valeurs asymptotiques

définition des variables	symboles	valeurs numériques	unités
espacement vertical	S_v	5,70	m
espacement horizontal	S_h	4,10	m
coefficient d'influence de la pression extérieure	b	0,013	1/kPa
constante A	A	0,000176	-
constante C	C	180,723	-
ordonnée à l'origine de l'asymptote de $N(\sqrt{t})$	$N_e \ln(AC)$	-6198,58	-
longueur/rigidité équivalente	L_{eq}/k_{eq}	0,0001685	1/m kPa
inclinaison	β	30	-
constante D	D	0,00134	-
pente asymptotique de $N(\sqrt{t})$	$-N_g D$	-2,4089	-
ordonnée à l'origine de l'asymptote de $h(\sqrt{t})$	$2\frac{A}{D}\ln\left(\frac{AC}{\exp\left(N_0/N_g\right)}\right)$	-0,4893	-
pente asymptotique de $h(\sqrt{t})$	2A	0,000352	-

6.3 LOI DE COMPORTEMENT ELASTIQUE PARFAITEMENT PLASTIQUE

On supposera que l'acier composant les tirants a un comportement élastique parfaitement plastique avec un palier à T_l. La traction est donc plafonnée à T_l . Dès que celle-ci est atteinte à l'instant t_p , les gonflements se font à pression P_{ext} sur le front de gel constante et égale à :

$$P_{ext} = T_l / S_v S_h \qquad \text{(A15-60)}$$

L'équation en h(t) devient :

$$\frac{dh}{dt} = \left[A + B\exp\left(\frac{bT_l}{S_v S_h} \right) \right] \frac{1}{\sqrt{t}} \qquad \text{(A15-61)}$$

et s'intègre en :

$$h(t) - h(t_p) = 2\left[A + B\exp\left(\frac{bT_l}{S_v S_h} \right) \right] \left(\sqrt{t} - \sqrt{t_p} \right) \qquad \text{(A15-62)}$$

où le gonflement au point de plastification est donné par :

$$h(t_p) = \frac{2A}{D} \ln \frac{\exp\left(D\sqrt{t_p}\right) - BC}{1 - BC} \qquad \text{(A15-63)}$$

A partir du moment où le tirant a plastifié, le gonflement augmente en racine carrée du temps t.

6.4 INTERPRETATION PHYSIQUE DES PARAMETRES

Toutes les variables peuvent être exprimées en fonction de 5 coefficients A, B, D , N_g et N_0 :

$$A = f \frac{9}{100} \frac{w}{w + 100 \frac{\gamma_w}{\gamma_s}} \frac{\alpha}{2} \qquad \text{(A15-64)}$$

$$B = \frac{109}{100} SP_0(-\theta_i) \frac{1}{\alpha} \qquad \text{(A15-65)}$$

$$D = 2\ A\ \frac{k_{eq}}{L_{eq} \cos\beta} \frac{b}{S_v\ S_h} \qquad \text{(A15-66)}$$

$$N_g = \frac{S_v S_h}{b} \qquad \text{(A15-67)}$$

A mesure la vitesse initiale de gonflement de l'eau en place à 1 jours :

$$\frac{dh_i}{dt}(1\,\text{jour}) = A \qquad \text{(A15-68)}$$

B mesure la vitesse de gonflement des lentilles de glace à 1 jours et pour une pression appliquée sur le front de gel nulle :

$$\frac{dh_s}{dt}(1\,\text{jour}.\ N_0 = 0\,\text{kPa}) = B \qquad \text{(A15-69)}$$

La vitesse initiale de gonflement, à 1 jour et pour une pression N_0 appliquée sur le front de gel est :

$$\frac{dh}{dt}(1\,\text{jour}, N_0) = A + B\exp\left(N_0/N_g\right) \qquad \text{(A15-70)}$$

La constante N_g est la traction d'arrêt de gonflement des lentilles de glace.

La constante D mesure la rigidité relative du tirant par rapport à la traction d'arrêt de gonflement des lentilles de glace.

ANNEXE 16

Solution analytique d'un clou soumis au gel

1 Introduction

La solution analytique en traction et gonflement pour un tirant soumis au gel a été développée dans l'annexe 15. La solution analytique d'un clou soumis au gel fait appel aux mêmes hypothèses de départ et conduit à des équations similaires.

2 Equations mécaniques à résoudre par zone de matériau

L'équation différentielle à résoudre par zone de matériau est la suivante :

$$\frac{d^2}{dz^2}\Delta S_c - \left(\frac{\pi D_c}{E_a A_a}\right)\Delta\tau(\Delta S_r) = 0 \qquad \text{(A16-1)}$$

où :

E_a : module d'Young de l'armature d'acier du clou,
D_c : diamètre du clou,
A_a : section d'acier de l'armature du clou,
S_c : déplacement absolu du clou,
S_s : déplacement absolu du sol,
S_r : déplacement relatif du clou par rapport au sol, égal à S_C - S_S.

La loi de comportement du clou est supposée linéaire élastique :

$$\Delta N = -E_a A_a \frac{d}{dz}(S_c) \qquad \text{(A16-2)}$$

On supposera que dans chacune des 4 zones de matériaux : sol non gelé, sol en train de geler, sol gelé ou parement en béton armé, la courbe de mobilisation du frottement latéral τ est linéaire élastique et caractérisée par un module B de mobilisation du frottement latéral :

$$\Delta\tau = k_\tau \Delta S_r = k_\tau(\Delta S_c - \Delta S_s) \qquad \text{(A16-3)}$$

Dans la partie B, il a été montré que la non prise en compte des effets différés dans l'interaction sol - clou conduisait à une solution proche de la solution avec prise en compte et plus pénalisante pour le clou en terme de tractions. D'autre part, dans le cas des murs de La Clusaz, la moraine glacière était très dense et nos simulations ont montré que les fonctions de transfert de charge plastifient peu. Il est donc acceptable pour des solutions analytiques de considérer une interaction élastique.

On introduit la longueur de transfert, notée a, et définie par :

$$a = \sqrt{\frac{E_a A_a}{\pi D_c k_\tau}} \qquad \text{(A16-4)}$$

Cette longueur a mesure la distance sur laquelle un effort de traction N, appliqué en tête du clou, est transféré dans le sol par l'intermédiaire du frottement latéral τ .

Si l'on suppose que le déplacement absolu du sol S_s est linéaire en z, l'équation différentielle A16-1 se résout analytiquement en :

$$\Delta S_r = \Delta S_c - \Delta S_s = C\,\mathrm{ch}\left(\frac{z}{a}\right) + D\,\mathrm{sh}\left(\frac{z}{a}\right) \qquad \text{(A16-5)}$$

$$\Delta N = -\frac{E_a\ A_a}{a}\left(C\,\mathrm{sh}\left(\frac{z}{a}\right) + D\,\mathrm{ch}\left(\frac{z}{a}\right)\right) \qquad \text{(A16-6)}$$

où les constantes d'intégration C et D sont à déterminer pour chacune des zones en fonction des conditions aux limites.

Un cas particulier intéressant concerne un clou soumis à un effort de traction en tête (z = 0), noté N_0 , et avec une extrémité (z = L) libre. La distribution de la traction et du cisaillement le long de ce clou est alors donnée par :

$$N(z) = N_0 \frac{\mathrm{sh}(L - z/a)}{\mathrm{sh}(L/a)} \qquad \text{(A16-7)}$$

$$\tau(z) = \frac{N_0}{\pi D_c a} \frac{\mathrm{ch}(L - z/a)}{\mathrm{sh}(L/a)} \qquad \text{(A16-8)}$$

Pour une longueur de clou L très grande devant la longueur de transfert a (L >> a), le cisaillement τ varie lentement près de la tête du clou et peut être considéré comme constant près de la tête (z << L). La longueur d'ancrage L_a est définie comme la longueur du clou telle que l'effort en tête N_0 est transmis intégralement au sol sur la longueur de transfert a. Elle vérifie l'équation suivante :

$$\mathrm{th}(L_a/a) = \frac{\pi D_c\, a\, \tau}{N_0} \qquad \text{(A16-9)}$$

Comme th(2) est égal à 0,964 , on obtient approximativement une longueur d'ancrage L_a égale à 2 fois la longueur de transfert a. Pour des géotextiles très déformables, la longueur de transfert est de quelques dizaines de centimètres, ce qui donne une longueur d'ancrage de moins d'un mètre. Pour des inclusions moins déformables, les longueurs de transfert sont plus importantes, ce qui explique pourquoi les clous, par exemple, sont sollicités sur quasiment toute leurs longueurs.

Comme il y a 4 zones, 8 constantes d'intégration sont à déterminer. Cependant, le problème peut être résolu simplement en calculant la rigidité équivalante du clou pour la zone de sol non gelé, au point $z = X_b + X + \Delta X$, et la rigidité équivalente du clou pour la zone de sol gelé et de parement, au point $z = X + X_b$.

On supposera dans la suite que le tassement oedométrique du sol non gelé est négligeable. Dans le cas contraire, déplacement du sol S_s dépend de la traction N et le problème ne peut plus se résoudre analytiquement.

3 Rigidité équivalente du clou dans la zone de sol non gelé

Considérons l'équilibre du clou dans la zone de sol non gelé. Les conditions aux limites appliquées sur le clou dans cette zone sont :

en tête du clou

$$\Delta N(z = X_b + X + DX) = \Delta N_t \qquad \text{(A16-10)}$$

en pieds du clou

$$\Delta N(z = X_b + L_c) = 0 \qquad \text{(A16-11)}$$

Si l'on note a_u la longueur de transfert dans la zone de sol non gelée, les constantes C et D sont respectivement égales à :

$$D = 0 \qquad \text{(A16-12)}$$

$$C = \frac{\Delta S_s(X_b + X + \Delta X)}{ch\left(\frac{X + \Delta X - L_c}{a_u}\right)} \qquad \text{(A1-13)}$$

On obtient alors la solution en traction N(z) et $\Delta S_S(z)$:

$$\Delta N(z) = -\frac{E_a A_a}{a_u} \frac{sh\left(\frac{z - L_c - X_b}{a_u}\right)}{ch\left(\frac{X + \Delta X - L_c}{a_u}\right)} \Delta S_s(X_b + X + \Delta X) \qquad \text{(A16-14)}$$

$$\Delta S_s(z) = \frac{ch\left(\frac{z - L_c - X_b}{a_u}\right)}{ch\left(\frac{X + \Delta X - L_c}{a_u}\right)} \Delta S_s(X_b + X + \Delta X) \qquad \text{(A16-15)}$$

La rigidité apparente en $z = X_b + X + \Delta X$, du clou interagissant avec le sol non gelé est définie par le rapport de la traction N et du déplacement au même point :

$$\frac{k_u}{L_u} = \frac{\Delta N}{\Delta S_c}(z = X_b + X + \Delta X) \qquad \text{(A16-16)}$$

Elle est égale à :

$$\frac{k_u}{L_u} = \frac{E_a\, A_a}{a_u}\, th\left(\frac{X + \Delta X - L_c}{a_u}\right) \qquad \text{(A16-17)}$$

Pour une profondeur de gel X petite devant la longueur du clou L_C , et donc un incrément de profondeur de gel ΔX encore plus petit, la rigidité apparente est égale à :

$$\frac{k_u}{L_u} \cong \frac{E_a\, A_a}{a_u} \qquad \text{(A16-18)}$$

Le clou a donc une rigidité comparable à un tirant de longueur libre a_u, où a_u est typiquement de l'ordre du mètre. Comparé à un tirant ayant une longueur libre de plusieurs mètres, un clou a une rigidité beaucoup plus faible.

4 Rigidité équivalente du clou dans la zone de sol gelé et du parement

La solution analytique en traction et déplacement dans le parement est :

$$\Delta S_c(z) - \Delta h_t = F\, ch\left(\frac{z}{a_p}\right) + G\, sh\left(\frac{z}{a_p}\right) \qquad \text{(A16-19)}$$

$$\Delta N(z) = -\frac{E_a\, A_a}{a_p}\left(F\, sh\left(\frac{z}{a_p}\right) + G ch\left(\frac{z}{a_p}\right)\right) \qquad \text{(A16-20)}$$

où $a_p$est la longueur de transfert dans le béton du parement et Δh_t le gonflement total du sol, qui correspond dans le cas présent au déplacement du sol.

A la tête du clou qui affleure du parement (z=0),la traction est nulle:

$$\Delta N(z = 0) = 0 \qquad \text{(A16-21)}$$

A l'interface parement en béton - sol la traction ΔN et le déplacement du clou ΔS sont continus:

$$\Delta N\left(z = X_b^-\right) = \Delta N\left(z = X_b^+\right) \qquad \text{(A16-22)}$$

$$\Delta S_C\left(z = X_b^-\right) = \Delta S_C\left(z = X_b^+\right) \qquad \text{(A16-23)}$$

La première condition $\Delta N(z = 0) = 0$ permet d'éliminer G qui est nul, ne reste plus alors que la constante F pour la zone du parement. La solution en traction et déplacement dans le sol gelé est écrite avec les deux constantes H et I:

$$\Delta S_c - \Delta h_t = H\,ch\left(\frac{z}{a_f}\right) + I\,sh\left(\frac{z}{a_f}\right) \qquad \text{(A16-24)}$$

$$\Delta N = -\frac{E_a A_a}{a_f}\left[H\,sh\left(\frac{z}{a_f}\right) + I\,ch\left(\frac{z}{a_f}\right)\right] \qquad \text{(A16-25)}$$

où a_f est la longueur de transfert dans la zone de sol gelé. A la limite avec la zone en train de geler ($z = X_b + X$), la continuité de la traction ΔN et du déplacement du sol ΔS_s est à assurer:

$$\Delta N\left(X_b + X^-\right) = \Delta N\left(X_b + X^+\right) \qquad \text{(A16-26)}$$

$$\Delta S_c\left(X_b + X^-\right) = \Delta S_c(X_b + X^+) \qquad \text{(A16-27)}$$

La double continuité de ΔN et ΔS_c en z=Xb permet d'obtenir une équation en H et I après élimination de F. La condition $\Delta N(X_b^-) = \Delta N(X_b^+)$ donne la relation:

$$-\frac{E_a A_a}{a_p} F \Delta h_t\left(\frac{X_b}{a_p}\right) = -\frac{E_a A_a}{a_f}\left(H\,sh\left(\frac{X_b}{a_f}\right) + I\,ch\left(\frac{z}{a_f}\right)\right) \qquad \text{(A16-28)}$$

La condition $\Delta S_c\left(X_b^-\right) = \Delta S_c\left(X_b^+\right)$ donne la relation:

$$F\,ch\left(\frac{X_b}{a_p}\right) = H\,ch\left(\frac{X_b}{a_f}\right) + I\,sh\left(\frac{X_b}{a_f}\right) \qquad \text{(A16-29)}$$

Après l'élimination de F, on obtient la relation suivante entre H et I:

$$H = KI \qquad \text{(A16-30)}$$

Le coefficient K est égal à :

$$K = \frac{sh\left(\frac{X_b}{a_p}\right)sh\left(\frac{X_b}{a_f}\right) - \left(\frac{a_p}{a_f}\right)ch\left(\frac{X_b}{a_p}\right)ch\left(\frac{X_b}{a_f}\right)}{-sh\left(\frac{X_b}{a_p}\right)ch\left(\frac{X_b}{a_f}\right) + \left(\frac{a_p}{a_f}\right)ch\left(\frac{X_b}{a_p}\right)sh\left(\frac{X_b}{a_f}\right)} \qquad \text{(A16-31)}$$

La rigidité apparente au point $z = X_b + X$ du clou interagissant avec le parement et le sol gelé est définie par:

$$\frac{k_{fp}}{L_{fp}} = \frac{\Delta N}{\Delta S_c - \Delta S_s}(X_b + X) \qquad \text{(A16-32)}$$

Elle est égale par définition à:

$$\frac{k_{fp}}{L_{fp}} = \frac{-E_a A_a}{a_f}\left[\frac{Hsh\left(\frac{X_b + X}{a_f}\right) + Ich\left(\frac{X_b + X}{a_f}\right)}{Hch\left(\frac{X_b + X}{a_f}\right) + Ish\left(\frac{X_b + X}{a_f}\right)}\right] \qquad \text{(A16-33)}$$

Après l'introduction de la relation H=K I, on peut la réécrire sous la forme:

$$\frac{k_{fp}}{L_{fp}} = \frac{-E_a A_a}{a_f}\left[\frac{Ksh\left(\frac{X_b + X}{a_f}\right) + ch\left(\frac{X_b + X}{a_f}\right)}{Kch\left(\frac{X_b + X}{a_f}\right) + sh\left(\frac{X_b + X}{a_f}\right)}\right] \qquad \text{(A16-34)}$$

6 Equation différentielle en traction maximale et déplacement

Dans la zone en train de geler, on supposera que la traction ΔN est constante, ce qui revient à supposer un coefficient de mobilisation du frottement latéral nul et donc une longueur de transfert infinie. En l'absence de connaissances plus précises, ceci est une hypothèse raisonnable. La traction y est donc constante et maximale $\Delta N(z) = \Delta N_{max}$. Le déplacement du clou est linéaire et déterminé par les conditions aux limites en $z = X_b + X^+$ et en $z = X_b + X + \Delta X$ d'où on déduit la relation:

$$\Delta S_c\left(X_b + X^+\right) = \Delta S_c\left(X_b + X + \Delta X^-\right) + \Delta X\left(\frac{\Delta N_{max}}{E_a A_a}\right) \qquad \text{(A16-35)}$$

A la limite entre la zone déjà gelée et celle en train de geler, en $z = X_b + X$, la définition de la rigidité apparente k_{fp}/L_{fp} permet d'écrire:

$$\frac{\Delta N(X_b + X^-)}{\Delta S_c(X_b + X^-) - \Delta S_s(X_b + X^-)} = \frac{k_{fp}}{L_{fp}} \qquad \text{(A16-36)}$$

où :

$$\Delta S_s(X_b + X^-) = -\Delta h_t \qquad \text{(A16-37)}$$

La continuité de ΔN et ΔS_c en $X_b + X$ permet alors de réécrire cette relation sous la forme:

$$\frac{\Delta N(X_b + X)}{\Delta S_c(X_b + X) + \Delta h_t} = \frac{k_{fp}}{L_{fp}} \qquad \text{(A16-38)}$$

A la limite entre la zone en train de geler et le sol non gelé, en $z = X_b + X + \Delta X$ on peut écrire de même la définition de la rigidité apparente k_u/L_u :

$$\frac{\Delta N(X_b + X + \Delta X^+)}{\Delta S_c(X_b + X + \Delta X^+) - \Delta S_s(X_b + X + \Delta X^+)} = \frac{k_u}{L_u} \qquad \text{(A16-39)}$$

avec :

$$\Delta S_s(X_b + X + \Delta X^+) = 0 \qquad \text{(A16-40)}$$

d'où puisque ΔN et ΔSc sont continus :

$$\frac{\Delta N(X_b + X + \Delta X)}{\Delta S_c(X_b + X + \Delta X)} = \frac{k_u}{L_u} \qquad \text{(A16-41)}$$

Dans la zone en train de geler, la traction ΔN est constante et maximale :

$$\Delta N(X_b + X) = \Delta N(X_b + X + \Delta X) = \Delta N_{max} \qquad \text{(A16-42)}$$

Le déplacement du clou est linéaire ce qui permet d'écrire:

$$\Delta S_c(X_b + X) = \Delta S_c(X_b + X + \Delta X) + \Delta X \frac{\Delta N_{max}}{E_a A_a} \qquad \text{(A16-43)}$$

Après substitution et élimination des constantes d'intégration, on obtient la traction maximale, qui est constante dans la zone en train de geler :

$$\Delta N_{max} = \frac{-\Delta h_t}{\frac{L_u}{k_u} + \frac{L_{fp}}{k_{fp}} + \frac{\Delta X}{E_a A_a}} \qquad \text{(A16-44)}$$

Le déplacement du clou en $z = X_b + X + \Delta X$,c'est à dire correspondant à l'arrachement hors de la zone de sol non gelé, est donné par :

$$\Delta S_c(X_b + X + \Delta X) = \frac{L_u}{k_u} \Delta N_{max} \qquad \text{(A16-45)}$$

Le déplacement du clou en $z = X_b + X$,qui est égal à celui en $z = X_b + X + \Delta X$ plus un terme correspondant à la déformation du clou dans la zone qui est en train de geler, de longueur ΔX, est donné par :

$$\Delta S_c(X_b + X) = \Delta S_c(X_b + X + \Delta X) + \Delta X \frac{\Delta N_{max}}{E_a A_a} \qquad \text{(A16-46)}$$

En remontant vers la tête du clou, on peut de même calculer le déplacement de la tête du clou et du parement.

7 Solution analytique en traction maximale

Pendant l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$, les incréments de traction dans le clou sont maximaux entre X(t) et X(t)+ΔX . L'abscisse z du maximum des tractions varie avec le temps. L'intégration explicite de la solution n'est donc pas possible. Cependant, comme les maxima des incréments $\Delta N_{max}(t)$ restent tous localisés autour de la tête du clou dans la zone où le sol est gelé sur quelques dizaines de centimètres tandis que le clou a une longueur de plusieurs mètres. En intégrant en fonction du temps l'incrément maximal de la traction $\Delta N_{max}(t)$ et l'incrément de gonflement $\Delta h_t(t)$, on obtient un majorant de l'incrément final de traction ΔN_{max} et un minorant des gonflements h_t , qui ne sont pas très différents de la solution exacte. Les équations à intégrer sont:

$$dN_{max}(t) = \frac{-k_{eq}}{L_{eq}} dh(t) \qquad \text{(A16-47)}$$

où la rigidité équivalente est donnée par :

$$\frac{k_{eq}}{L_{eq}} = \frac{1}{\frac{L_u}{k_u} + \frac{L_{fp}}{k_{fp}} + \frac{\Delta X}{EA}} \qquad \text{(A16-48)}$$

L'évolution des gonflements est donnée par :

$$dh(t) = \left[A + B \exp \frac{N_{max}(t)}{N_g} \right] \frac{dt}{\sqrt{t}} \qquad \text{(A16-49)}$$

Les équations sont identiques à celles obtenues précédemment pour un tirant. La seule différence réside dans le calcul de la rigidité équivalente du clou h_{eq}/L_{eq} qui varie en fonction du temps.

Le terme $\Delta X/E_a A_a$ peut être négligé devant le terme L_u/k_u qui est donné par:

$$\frac{L_u}{k_u} = \frac{a_u}{E_a A_a} \frac{1}{th\left(\frac{X + \Delta X + L_c}{a_u} \right)} \qquad \text{(A16-50)}$$

puisque la longueur de transfert a_u est de l'ordre du mètre tandis que ΔX est de l'ordre du centimètre ou décimètre.

La rigidité k_u/L_u dépend de la profondeur de gel X, cependant on ne considéra que des clous dont la longueur L_c est beaucoup plus grande que l'épaisseur de sol gelé X ($L_c \geq 10\, X_{fin\ d'hiver}$), on peut alors écrire :

$$\frac{L_u}{k_u} \equiv \frac{a_u}{E_a A_a} \rangle\rangle \frac{\Delta X}{E_a A_a} \qquad \text{(A16-51)}$$

La rigidité k_{fp}/L_{fp} varie elle aussi avec le temps puisque le coefficient K est constant mais elle dépend de X(t) :

$$\frac{k_{fp}}{L_{fp}} = \frac{E_a A_a}{a_f} \frac{K\, sh\left(\frac{X_b + X}{a_f} \right) + ch\left(\frac{X_b + X}{a_f} \right)}{K\, ch\left(\frac{X_b + X}{a_f} \right) + sh\left(\frac{X_b + X}{a_f} \right)} \qquad \text{(A16-52)}$$

Hypothèse (1) $a_f >> X_b$ et X

On peut suppose, dans un premier temps, que dans la zone de sol gelé la longueur de transfert a_f est très grande devant X_b et X. Cette hypothèse est équivalent à supposer que la traction est constante et maximale dans la frange de sol en train de geler. Cela permet d'écrire :

$$\frac{k_{fp}}{L_{fp}} \equiv \frac{E_a A_a}{a_f} \frac{1}{K} \qquad \text{(A16-53)}$$

$$\frac{1}{K\, a_f} \equiv \frac{th\left(\frac{X_b}{a_p} \right)}{a_p} \qquad \text{(A16-54)}$$

On obtient finalement, une rigidité équivalente du clou constante et égale à:

$$\frac{k_{eq}}{L_{eq}} \cong \frac{E_a A_a}{a_u + a_p \coth\left(X_b / a_p\right)} \qquad \text{(A16-55)}$$

La longueur de transfert a_p du parement est égale à environ $X_b/2$. Comme coth(2) est peu différent de 0,964, on en déduit :

$$\frac{k_{eq}}{L_{eq}} \cong \frac{E_a A_a}{a_u + a_p} \qquad \text{(A16-56)}$$

Hypothèse (2) $a_f \approx X_b$ et X

Si l'on suppose que le sol gelé à une longueur de transfert a_f égale à celle du sol non gelé a_u , la rigidité $\frac{k_{fp}}{L_{fp}}$ dépendra de la profondeur de gel X. Pour une profondeur de gel nulle, on aura :

$$\frac{k_{fp}}{L_{fp}}(X) = \frac{k_f}{L_f} = \frac{E_a A_a}{a_f} \text{th}\left(\frac{X_b}{a_f}\right) \qquad \text{(A16-57)}$$

et la rigidité équivalente devient :

$$\frac{k_{eq}}{L_{eq}} = \frac{E_a A_a}{a_u + a_f \coth\left(\frac{X_b}{a_f}\right)} \qquad \text{(A16-58)}$$

Pour une profondeur de gel très grande devant X_b ,on aura:

$$\frac{k_{fp}}{L_{fp}}(X) = \frac{k_f}{L_f} = \frac{E_a A_a}{a_f} \text{th}\left(\frac{X_b + X}{a_f}\right) \qquad \text{(A16-59)}$$

et une rigidité équivalente :

$$\frac{k_{eq}}{L_{eq}} = \frac{E_a A_a}{a_u + a_f \coth\left(\frac{X_b + X}{a_f}\right)} \qquad \text{(A16-60)}$$

La, rigidité équivalent du clou étant maintenant constante, nous somme ramenés aux mêmes équations que la solution analytique d'un tirant qui est détaillée dans l'annexe A15.